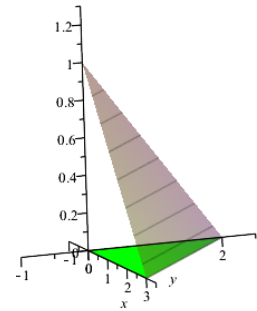


1. Doppelintegrale

Bei Funktionen mit einer Variablen gibt $\int_a^b f(x) dx$ den Flächeninhalt (mit Vorzeichen) zwischen dem Schaubild von f und dem Intervall $[a,b]$ auf der x -Achse an. $[a,b]$ ist dabei das Integrationsintervall.

Nun sei durch $z = f(x, y)$ eine Funktion mit zwei Variablen gegeben und A sei ein Bereich innerhalb der Definitionsmenge von f . Dann ist durch das Doppel-Integral $\iint_A f(x, y) dA$ das Volumen (mit Vorzeichen) des Körpers zwischen der Grundfläche A und dem Schaubild von f bestimmt.

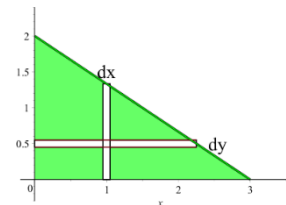
Beispiel 1: $f(x, y) = 1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{2}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Das Schaubild von f ist eine Ebene mit den Spurpunkten $(3,0,0)$, $(0,2,0)$ und $(0,0,1)$. Zusammen mit dem Ursprung bestimmen diese vier Punkte eine Pyramide. (Siehe Bild) Ihre Grundfläche mit den drei Eckpunkten $(0|0)$, $(3|0)$ und $(0|2)$ der xy -Ebene hat den Flächeninhalt $A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$ und die Höhe $h = 1$. Dann folgt für das Pyramiden-



volumen $V = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 1 = 1$.

Dieses Volumen lässt sich auch mit Hilfe des Integrals $V = \int_V dV = \iint_A f(x, y) dA$

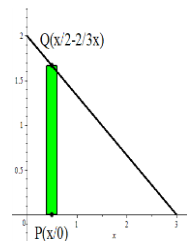
berechnen. Dabei stellt $dV = f(x, y) \cdot dA = \left(1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{2}\right) \cdot dx \cdot dy$ das Volumen einer Säule mit der kleinen rechteckigen Grundfläche $dA = dx \cdot dy$ und der jeweiligen Höhe



$f(x, y) = 1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{2}$ dar. Die Frage ist nun, wie man geschickt alle diese kleinen Volumina dV addiert, so dass schließlich alle Flächenelemente dA der gesamten Dreiecksfläche miteingefasst sind.

Die Gerade durch die beiden Punkte $(3|0)$ und $(0|2)$ der Grundfläche A hat die Gleichung $y = 2 - \frac{2}{3}x$.

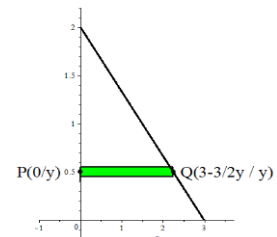
1. Möglichkeit: Man zerlegt die Dreiecksfläche A in Streifen parallel zur y -Achse mit dem unteren Ende $y = 0$ und dem oberen Ende $y = 2 - \frac{2}{3}x$. Dann gibt $\int_{y=0}^{2-\frac{2}{3}x} f(x, y) dy dx$ das Volumen über dem Streifen der Breite dx an der Stelle x an. Durch eine weitere Integration (Summation) von $x = 0$ bis $x = 3$ erhält man das gesamte Pyramiden-volumen:



$$\begin{aligned} V &= \iint_A f(x, y) dA = \int_{x=0}^3 \int_{y=0}^{2-\frac{2}{3}x} f(x, y) dy dx = \int_{x=0}^3 \int_{y=0}^{2-\frac{2}{3}x} \left(1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{2}\right) dy dx = \int_{x=0}^3 \left[y - \frac{x \cdot y}{3} - \frac{y^2}{4} \right]_{y=0}^{2-\frac{2}{3}x} dx = \\ &= \int_{x=0}^3 \left(2 - \frac{2}{3}x - \frac{x \cdot (2 - \frac{2}{3}x)}{3} - \frac{(2 - \frac{2}{3}x)^2}{4} \right) dx = \int_{x=0}^3 \left(1 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}x^2 \right) dx = \left[x - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{27}x^3 \right]_0^3 = 3 - 3 + 1 = 1. \end{aligned}$$

2. Möglichkeit: Löst man $y = 2 - \frac{2}{3}x$ nach x auf, so folgt $x = 3 - \frac{3}{2}y$. Man zerlegt A in Streifen parallel zur x -Achse (von $x = 0$ bis $x = 3 - \frac{3}{2}y$). Dann ergibt sich

$$V = \iint_A f(x, y) dA = \int_{y=0}^2 \int_{x=0}^{3-\frac{3}{2}y} \left(1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{2}\right) dx dy = \int_{y=0}^2 \left[x - \frac{x^2}{6} - \frac{x \cdot y}{2} \right]_{x=0}^{3-\frac{3}{2}y} dy =$$



$$= \int_{y=0}^2 \left(3 - \frac{3}{2}y - \frac{(3-\frac{3}{2}y)^2}{6} - \frac{(3-\frac{3}{2}y) \cdot y}{2} \right) dy = \int_{y=0}^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}y + \frac{3}{8}y^2 \right) dy = \left[\frac{3}{2}y - \frac{3}{4}y^2 + \frac{1}{8}y^3 \right]_0^2 = 3 - 3 + 1 = 1.$$

Beispiel 2: Das Parallelogramm A sei begrenzt durch die Geraden $x = -1$, $x = 2$, $y = x - 2$ und $y = x + 1$, siehe Skizze. Gesucht ist das Integral $\iint_A f(x, y) dA = \iint_A f(x, y) dy dx$.

a. Wir zerlegen A in senkrechte Streifen der Breite dx , die unten bei $y = x - 2$ beginnen

$$\text{und oben bei } y = x + 1 \text{ enden. Dann folgt } \iint_A f(x, y) dy dx = \int_{x=-1}^2 \int_{y=x-2}^{x+1} f(x, y) dy dx.$$

Als Beispiel wählen wir $f(x, y) = 1$. Dann wird durch $\iint_A f(x, y) dy dx$ das Volumen des

Parallelepipedes über dem Parallelogramm A und der Höhe $h = 1$ bestimmt. Dieser Zahlenwert stimmt dann wegen $h = 1$ mit dem Inhalt der Parallelogrammfläche überein:

$$A = \int_{x=-1}^2 \int_{y=x-2}^{x+1} 1 dy dx = \int_{x=-1}^2 [y]_{y=x-2}^{x+1} dx = \int_{x=-1}^2 3 dx = [3x]_{-1}^2 = 9. \text{ Das gleiche Ergebnis erhält man mit Hilfe}$$

der Formel für den Inhalt der Parallelogrammfläche $A = g \cdot h = 3 \cdot 3 = 9$; g = Grundseite, h = Höhe.

b. Zerlegt man ungeschickterweise die Parallelogrammfläche A in waagerechte Streifen der Breite dy , so reichen die Streifen im unteren Dreieck von $x = -1$ bis $x = y + 2$, während die oberen Streifen von $x = y - 1$ bis $x = 2$ gehen. Somit benötigen wir zwei getrennte Integrale, eines für das untere und eines für das obere Dreieck.

Teil unter der x-Achse:

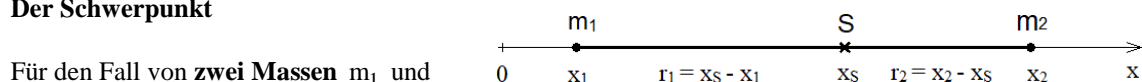
$$A_1 = \int_{y=-3}^0 \int_{x=-1}^{y+2} 1 dx dy = \int_{y=-3}^0 [x]_{x=-1}^{y+2} dy = \int_{y=-3}^0 (y+3) dy = \left[\frac{1}{2}y^2 + 3y \right]_{y=-3}^0 = 0 - \left(\frac{9}{2} - 9 \right) = \frac{9}{2}$$

Teil über der x-Achse:

$$A_2 = \int_{y=0}^3 \int_{x=y-1}^2 1 dx dy = \int_{y=0}^3 [x]_{x=y-1}^2 dy = \int_{y=0}^3 (3-y) dy = \left[3y - \frac{1}{2}y^2 \right]_{y=0}^3 = \left(9 - \frac{9}{2} \right) - 0 = \frac{9}{2}$$

Somit folgt insgesamt wieder $A=9$.

c. Der Schwerpunkt



Für den Fall von **zwei Massen** m_1 und m_2 liegt ihr Schwerpunkt S auf ihrer Verbindungsstrecke, und es gilt das Hebelgesetz $m_1 \cdot r_1 = m_2 \cdot r_2$.

Wenn die beiden Massen auf der x-Achse die Koordinaten x_1 und x_2 besitzen, dann liefert das Hebelgesetz $m_1 \cdot (x_S - x_1) = m_2 \cdot (x_2 - x_S)$. Ausmultipliziert $m_1 \cdot x_S - m_1 \cdot x_1 = m_2 \cdot x_2 - m_2 \cdot x_S$, dann

$$(m_1 + m_2) \cdot x_S = m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2, \text{ d.h. } x_S = \frac{1}{m} \cdot (m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2) \text{ mit } m = m_1 + m_2.$$

Auf der x-Achse liege nun ein **Stab** der Länge ℓ und der Masse m . Um seinen Schwerpunkt S zu bestimmen, wird er in n kleine Stücke der gleichen Masse Δm unterteilt. Ihre x-Koordinaten seien x_1, x_2, \dots, x_n . Der

Schwerpunkt hat dann die x-Koordinate $x_S = \frac{1}{m} \cdot (x_1 \cdot \Delta m + x_2 \cdot \Delta m + \dots + x_n \cdot \Delta m)$.

$$\text{Für } n \rightarrow \infty \text{ folgt daraus } x_S = \frac{1}{m} \cdot \int_m x dm.$$

Spezialfall: Der Stab sei homogen mit der konstanten Liniendichte $\rho = \frac{m}{\ell}$ der Einheit kg/m . Dann gilt

$$x_S = \frac{1}{m} \cdot \int_m x dm = \frac{1}{\rho \cdot \ell} \cdot \int_{x_1}^{x_2} x \cdot \rho dx = \frac{1}{\ell} \cdot \int_{x_1}^{x_2} x dx = \frac{1}{\ell} \cdot \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{2\ell} \cdot (x_2^2 - x_1^2) = \frac{1}{2\ell} \cdot (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

denn $\ell = x_2 - x_1$. Der Schwerpunkt liegt wie erwartet in der Mitte des Stabes.

Wir betrachten nun ein **Flächenstück** vom Inhalt A , das in der xy -Ebene liegt. Dann gilt für die y -Koordinate

$$\text{des Schwerpunkts } S \text{ die analoge Formel } y_S = \frac{1}{m} \cdot \int_m y \, dm.$$

Spezialfall: Das Flächenstück sei **homogen** mit der konstanten Flächendichte $\rho = \frac{m}{A}$ der Einheit kg/m^2 .

$$\text{Dann gilt } x_S = \frac{1}{m} \cdot \int_m x \, dm = \frac{1}{\rho \cdot A} \cdot \int_A x \cdot \rho \, dA = \frac{1}{A} \cdot \int_A x \, dA. \text{ Analog mit } y_S.$$

$$\text{Allgemein gelten die Formeln } \boxed{x_S = \frac{1}{A} \iint_A x \, dA \text{ und } y_S = \frac{1}{A} \iint_A y \, dA}.$$

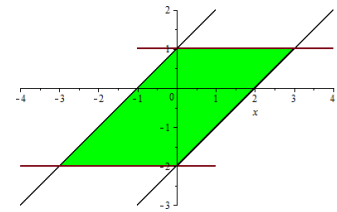
Für obige Parallelogrammfläche folgt dann

$$x_S \cdot A = \iint_A x \, dA = \int_{x=-1}^2 \int_{y=x-2}^{x+1} x \, dy \, dx = \int_{x=-1}^2 [xy]_{y=x-2}^{x+1} dx = \int_{x=-1}^2 3x \, dx = \left[\frac{3}{2} x^2 \right]_{-1}^2 = \frac{9}{2}, \text{ so dass } x_S = \frac{1}{2}.$$

$$y_S \cdot A = \iint_A y \, dA = \int_{x=-1}^2 \int_{y=x-2}^{x+1} y \, dy \, dx = \int_{x=-1}^2 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=x-2}^{x+1} dx = \int_{x=-1}^2 (3x - 1,5) dx = \left[1,5x^2 - 1,5x \right]_{-1}^2 = 0, \text{ so dass}$$

$$y_S = 0, \text{ also } S\left(\frac{1}{2} \middle| 0\right).$$

Beispiel 3: Das Parallelogramm A wird begrenzt durch die vier Geraden $y = -2$, $y = 1$, $y = x + 1$ und $y = x - 2$. Über dieser Fläche A soll nun ein Dach der Form $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ errichtet und das Volumen V der Konstruktion bestimmt werden. Zur Berechnung von $V = \iint_A f(x, y) \, dA$ empfiehlt sich die Zerlegung in



waagerechte Streifen, die von der linken Geraden $x = y - 1$ bis zur rechten Geraden $x = y + 2$ reichen.

Somit ergibt sich $\iint_A f(x, y) \, dy \, dx = \int_{y=-2}^1 \int_{x=y-1}^{y+2} f(x, y) \, dx \, dy$. Dann folgt

$$\int_{y=-2}^1 \int_{x=y-1}^{y+2} (x^2 + y^2 + 1) \, dx \, dy = \int_{y=-2}^1 \left[\frac{1}{3} x^3 + xy^2 + x \right]_{x=y-1}^{y+2} dy = \int_{y=-2}^1 (6y^2 + 3y + 6) \, dy = \left[2y^3 + \frac{3}{2} y^2 + 6y \right]_{-2}^1 = \frac{63}{2}.$$

Wählt man dagegen die andere Integrationsreihenfolge mit senkrechten Streifen, so muss die Parallelogrammfläche in einen Teil links und einen Teil rechts der y -Achse zerlegt werden.

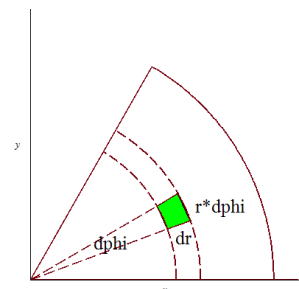
Für das linke Dreieck gilt

$$\int_{x=-3}^0 \int_{y=-2}^{x+1} (x^2 + y^2 + 1) \, dy \, dx = \int_{x=-3}^0 \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 + y \right]_{y=-2}^{y=x+1} dx = \int_{x=-3}^0 \left(\frac{4}{3} x^3 + 4x^2 + 2x + 6 \right) dx = 18.$$

Für das rechte Dreieck gilt $\int_{x=0}^3 \int_{y=x-2}^1 (x^2 + y^2 + 1) \, dy \, dx = \int_{x=0}^3 \left(-\frac{4}{3} x^3 + 5x^2 - 5x + 6 \right) dx = \frac{27}{2}$. Zusammen

$$18 + \frac{27}{2} = \frac{63}{2}.$$

Beispiel 4: Der Bereich A sei ein Kreis oder ein Kreisausschnitt um den Ursprung $(0|0)$. Dann verwendet man vorteilhaft die **Polarkoordinaten** r und φ . Für diese gilt $\boxed{x = r \cdot \cos \varphi \text{ und } y = r \cdot \sin \varphi}$. Die Fläche A wird dann zerlegt in kleine Flächenstücke dA , wie in der Skizze farblich dargestellt. Sie werden als kleine Rechtecke vom Inhalt $\boxed{dA = dr \cdot r \, d\varphi = r \, dr \, d\varphi}$ interpretiert. Dabei ist dr die radiale Strecke und $r \, d\varphi$ der kleine Kreisbogen. φ wird dabei im Bogenmaß gemessen.



- a. Um beispielsweise die Fläche eines Kreises vom Radius R zu berechnen, wählt man $f(r, \varphi) = 1$, denn dann stimmt der Zahlenwert des Zylindervolumens mit dem Zahlenwert der Grundfläche überein.

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R 1r dr d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_{r=0}^R d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{2} R^2 d\varphi = \left[\frac{1}{2} R^2 \varphi \right]_{\varphi=0}^{2\pi} = \frac{1}{2} R^2 \cdot 2\pi = \pi R^2 \text{ oder}$$

$$\int_{r=0}^R \int_{\varphi=0}^{2\pi} 1r d\varphi dr = \int_{r=0}^R [r \cdot \varphi]_{\varphi=0}^{2\pi} dr = 2\pi \int_{r=0}^R r dr = 2\pi \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_{r=0}^R = 2\pi \cdot \frac{1}{2} R^2 = \pi R^2.$$

Mit rechtwinkligen Koordinaten ist die Berechnung schwieriger. Mit der Kreisgleichung $x^2 + y^2 = R^2$ folgt

$$\int_{x=-R}^R \int_{y=-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} 1 dy dx = \int_{x=-R}^R [y]_{y=-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dx = \int_{x=-R}^R 2\sqrt{R^2-x^2} dx = \left[x\sqrt{R^2-x^2} + R^2 \cdot \arctan \frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}} \right]_{-R}^R =$$

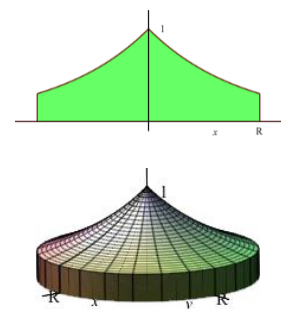
$$= R^2 \cdot \arctan(\infty) - R^2 \cdot \arctan(-\infty) = R^2 \cdot \frac{\pi}{2} - R^2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \pi R^2. \text{ Zur Erinnerung: } \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

- b. In der xy -Ebene sei A die Kreisfläche um den Ursprung $(0|0)$ und dem Radius R . Auf A ist die Funktion f mit $f(r, \varphi) = e^{-r}$ definiert. Dann wird das Volumen $V(R)$ zwischen dem Schaubild von f und dem Kreis A gleich

$$V(R) = \iint_A f(r, \varphi) dA = \int_{r=0}^R \int_{\varphi=0}^{2\pi} e^{-r} r d\varphi dr = 2\pi \int_{r=0}^R e^{-r} r dr = 2\pi \left[(-1-r)e^{-r} \right]_{r=0}^R =$$

$$= 2\pi (1 - (1+R)e^{-R}). \text{ Das zweite Integral erhält man durch partielle Integration.}$$

Außerdem ist $\lim_{R \rightarrow \infty} V(R) = 2\pi$.



2. Dreifachintegrale

Durch $w = f(x, y, z)$ ist eine Funktion mit drei Variablen gegeben. Wir betrachten nun das Integral

$\iiint_V f(x, y, z) dV$, wobei V das Volumen eines dreidimensionalen Körpers darstellt.

Beispiel 1: Gegeben ist ein Quader der Kantenlängen a, b, c .

- a. Das Volumen dieses Quaders lässt sich als Summe der kleinen Volumenelemente $dV = dx dy dz$ bestimmen:

$$V = \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \int_{z=0}^c dV = \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \int_{z=0}^c dz dy dx = \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b [z]_{z=0}^c dy dx = \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b c dy dx = \int_{x=0}^a [cy]_{y=0}^b dx = \int_{x=0}^a bc dx = abc.$$

Zusatz: Dieses Volumen ließe sich auch mit nur zwei Integralen berechnen: $c dy dx$ ist der kleine Quader.

$$V = \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b c dy dx = \int_{x=0}^a [cy]_{y=0}^b dx = \int_{x=0}^a bc dx = abc.$$

- b. Auf dem Quader sei zum Beispiel die Funktion f durch $f(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$ definiert. Dann gilt

$$\int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \int_{z=0}^c xyz dz dy dx = \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \left[\frac{1}{2} xyz^2 \right]_{z=0}^c dy dx = \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \frac{1}{2} xyc^2 dy dx = \dots = \frac{1}{8} a^2 b^2 c^2.$$

- c. Zur Berechnung des Schwerpunktes eines Quaders bildet man.

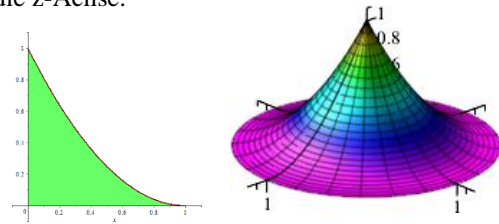
$$x_S \cdot V = \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \int_{z=0}^c x dz dy dx = \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b [xz]_{z=0}^c dy dx = \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b xc dy dx = \int_{x=0}^a xbc dx = \left[\frac{1}{2} x^2 bc \right]_{x=0}^a = \frac{1}{2} a^2 bc.$$

$$\text{Analog folgt } y_S \cdot V = \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \int_{z=0}^c y dz dy dx = \frac{1}{2} ab^2 c \text{ und } z_S \cdot V = \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \int_{z=0}^c z dz dy dx = \frac{1}{2} abc^2.$$

Wie erwartet wird der Schwerpunkt $S\left(\frac{a}{2} / \frac{b}{2} / \frac{c}{2}\right)$.

Beispiel 2: Wir betrachten jetzt Rotationskörper bei Rotation um die z-Achse.

Zum Beispiel rotiert die Fläche zwischen dem Schaubild der Funktion $z = f(x) = (x-1)^2$ für $0 \leq x \leq 1$ und der x-Achse um die z-Achse. Um über dieses Volumen zu integrieren, verwendet man die sogenannten **Zylinderkoordinaten** r , φ und z , für die $x = r \cdot \cos(\varphi)$, $y = r \cdot \sin(\varphi)$ und $z = z$ gilt. Das kleine Volumenelement dV hat dann die Form $dV = r \, d\varphi \, dr \, dz$. Allgemein gilt



für Rotationskörper dieser Art:

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=r_{\min}}^{r=r_{\max}} \int_{z=z_{\min}(y,x)}^{z_{\max}(y,x)} dV = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=r_{\min}}^{r=r_{\max}} \int_{z=z_{\min}(y,x)}^{z_{\max}(y,x)} dz \, r \, dr \, d\varphi \\
 x_S &= \frac{1}{V} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=r_{\min}}^{r=r_{\max}} \int_{z=z_{\min}(y,x)}^{z_{\max}(y,x)} x \, dz \, r \, dr \, d\varphi = \frac{1}{V} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=r_{\min}}^{r=r_{\max}} \int_{z=z_{\min}(y,x)}^{z_{\max}(y,x)} r \cos(\varphi) \, dz \, r \, dr \, d\varphi = 0 \\
 y_S &= \frac{1}{V} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=r_{\min}}^{r=r_{\max}} \int_{z=z_{\min}(y,x)}^{z_{\max}(y,x)} y \, dz \, r \, dr \, d\varphi = \frac{1}{V} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=r_{\min}}^{r=r_{\max}} \int_{z=z_{\min}(y,x)}^{z_{\max}(y,x)} r \sin(\varphi) \, dz \, r \, dr \, d\varphi = 0 \\
 z_S &= \frac{1}{V} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=r_{\min}}^{r=r_{\max}} \int_{z=z_{\min}(y,x)}^{z_{\max}(y,x)} z \, dz \, r \, dr \, d\varphi
 \end{aligned}$$

a. Wir bestimmen das Volumen V . Dabei läuft r von 0 bis 1 und z von 0 bis $f(r) = (r-1)^2$.

$$V = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 \int_{z=0}^{(r-1)^2} r \, dz \, dr \, d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 [z]_{z=0}^{(r-1)^2} r \, dr \, d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 (r-1)^2 r \, dr \, d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[\frac{1}{4} r^4 - \frac{2}{3} r^3 + \frac{1}{2} r^2 \right]_{r=0}^1 d\varphi = \frac{1}{12} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6}$$

oder: Aus $z = (r-1)^2$ folgt $r = 1 \pm \sqrt{z}$. Da $r < 1$ sein muss, gilt $r = 1 - \sqrt{z}$. Und damit

$$V = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^1 \int_{r=0}^{1-\sqrt{z}} r \, dr \, dz \, d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^1 \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_{r=0}^{1-\sqrt{z}} dz \, d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^1 \frac{1}{2} (1-\sqrt{z})^2 dz \, d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[\frac{1}{2} z - \frac{2}{3} z^{3/2} + \frac{1}{4} z^2 \right]_{z=0}^1 d\varphi = \frac{1}{12} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6}$$

oder: Mit nur zwei Integralen: $\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 (r-1)^2 r \, dr \, d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[\frac{1}{4} r^4 - \frac{2}{3} r^3 + \frac{1}{2} r^2 \right]_{r=0}^1 d\varphi = \frac{1}{12} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6}$. Dabei ist

$(r-1)^2 r \, dr$ der kleine Quader.

b. Zur Berechnung des Schwerpunkts $S(x_S / y_S / z_S)$ bildet man

$$\begin{aligned}
 x_S \cdot V &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 \int_{z=0}^{(r-1)^2} x \, r \, dz \, dr \, d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 \int_{z=0}^{(r-1)^2} r \cos(\varphi) \, r \, dz \, dr \, d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 r^2 \cos(\varphi) (r-1)^2 dr \, d\varphi = \\
 &= \int_{r=0}^1 \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2 \cos(\varphi) (r-1)^2 dr \, d\varphi = \int_{r=0}^1 r^2 (r-1)^2 \cdot [\sin(\varphi)]_{\varphi=0}^{2\pi} dr = \int_{r=0}^1 0 \, dr = 0, \text{ also } x_S = 0.
 \end{aligned}$$

Wegen der Rotationssymmetrie zur y-Achse war das Ergebnis $x_S = 0$ zu erwarten.

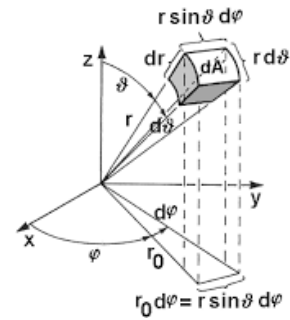
Aus dem gleichen Grund gilt

$$y_S \cdot V = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 \int_{z=0}^{(r-1)^2} y \, r \, dz \, dr \, d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 \int_{z=0}^{(r-1)^2} r \sin(\varphi) \, r \, dz \, dr \, d\varphi = 0, \text{ also } y_S = 0.$$

$$\begin{aligned}
 z_S \cdot V &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 \int_{z=0}^{(r-1)^2} z \, r \, dz \, dr \, d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_{z=0}^{(r-1)^2} r \, dr \, d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 (r-1)^4 r \, dr \, d\varphi = \\
 &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[\frac{1}{12} r^6 - \frac{2}{5} r^5 + \frac{3}{4} r^4 - \frac{2}{3} r^3 + \frac{1}{4} r^2 \right]_{r=0}^1 d\varphi = 2\pi \frac{1}{60} = \frac{\pi}{30}.
 \end{aligned}$$

Und damit $z_S = \frac{\pi/30}{\pi/6} = \frac{1}{5} = 0,2$. Der Schwerpunkt ist folglich $S(0|0|0,2)$.

Beispiel 3: Der Bereich sei nun eine Kugel vom Radius R . Dazu benötigen wir die **Kugelpolarkoordinaten** r , ϑ und φ . Dabei sind r und φ die bekannten Polarkoordinaten mit $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ und ϑ ist der Winkel, gemessen zur z -Achse mit $0 \leq \vartheta \leq \pi$. Wir zerlegen die Kugel in kleine Volumenelemente, siehe Skizze der Uni Karlsruhe. Radial besitzt dieses Volumenelement die Länge dr , senkrecht zur xy -Ebene die Länge $r d\vartheta$. Die dritte Seite parallel zur xy -Ebene besitzt die gleiche Länge wie ihre senkrechte Projektion in die xy -Ebene. Diese hat den Abstand $r \cdot \sin \vartheta$ vom Ursprung und besitzt den Mittelpunktswinkel $d\varphi$, so dass die Länge $r \cdot \sin \vartheta d\varphi$ resultiert. Insgesamt folgt das Volumenelement zu $dV = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$.



Als Beispiel berechnen wir das Volumen V einer Kugel vom Radius R :

$$V = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{r=0}^R 1 r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_{r=0}^R \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[-\frac{1}{3} R^3 \cos \vartheta \right]_{\vartheta=0}^{\pi} d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{2}{3} R^3 d\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Zusatz: Umrechnung von Kugelkoordinaten in rechtwinklige Koordinaten.

Es sei r_ϑ die Projektion von r auf die xy -Ebene. (Abbildung Wikipedia)

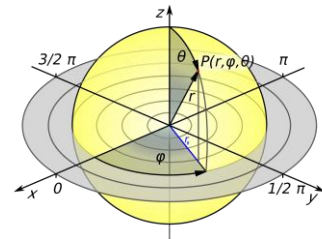
$$x = r_\vartheta \cdot \cos \varphi = r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi, \quad y = r_\vartheta \cdot \sin \varphi = r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi, \quad z = r \cdot \cos \vartheta.$$

$$\text{Umgekehrt: } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \cos \vartheta = \frac{z}{r}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{r \cdot \sin \vartheta}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{r \cdot \sin \vartheta}.$$

Durch diese vier Gleichungen sind die drei Kugelkoordinaten eindeutig bestimmt.

Beispiel: Schwerpunkt S einer Kugel vom Radius R um den Ursprung

$$x_S \cdot V = \int_{\text{Kugel}} x dV = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{r=0}^R x r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{r=0}^R r^3 \sin^2 \vartheta \cos \varphi dr d\vartheta d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \frac{1}{4} R^4 \sin^2 \vartheta \cos \varphi d\vartheta d\varphi = \frac{1}{4} R^4 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[\frac{1}{2} \vartheta - \frac{1}{2} \sin \vartheta \cos \vartheta \right]_{\vartheta=0}^{\pi} \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{4} R^4 \cdot \frac{1}{2} \pi \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0. \text{ Analog: } y_S = z_S = 0.$$



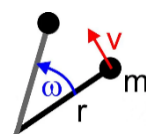
Anwendung: Das Trägheitsmoment J eines starren Körpers

Die kinetische Energie (Bewegungsenergie) einer punktförmigen Masse m , die sich mit der Geschwindigkeit v bewegt, beträgt $E = \frac{1}{2} m v^2$.

Speziell, wenn die Masse m mit der Geschwindigkeit v auf einem Kreis vom Radius r umläuft,

dann lässt sich v umformen in $v = \frac{2\pi r}{T} = r \frac{2\pi}{T} = r \omega$ mit der Umlaufdauer T und der Winkel-

geschwindigkeit $\omega = \frac{2\pi}{T}$, so dass $E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2$.



Falls ein starrer Körper aus mehreren Punktmassen m_i , $i = 1..n$, besteht, dann haben alle diese Punktmassen

die gleiche Umlaufzeit T und folglich die gleiche Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Wenn r_i den Abstand von m_i zur Drehachse bezeichnet, dann beträgt die gesamte kinetische Energie des Körpers

$$E = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} J \omega^2 \text{ mit dem Trägheitsmoment } J = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2.$$

Um das Trägheitsmoment eines zusammenhängenden Körpers zu bestimmen, wird seine Masse m in kleine Massen dm zerlegt und deren Trägheitsmomente aufsummiert: $J = \int_V r^2 dm$.

Wenn man annimmt, dass der Körper eine einheitliche Dichte ρ besitzt, dann gilt wegen $m = \rho \cdot V$ auch

$$dm = \rho dV, \text{ so dass } J = \int_V r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV = \rho \int_V r^2 dV.$$

Und mit diesem Integral $\int_V r^2 dV$ wollen wir uns nun beschäftigen.

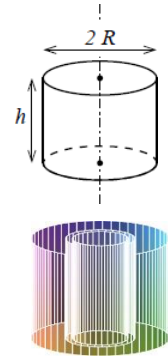
Beispiel 1: Ein homogener Zylinder vom Radius R und der Höhe h rotiert um seine Achse.

Wir zerlegen den Zylinder in kleine achsenparallele Hohlzylinder der Dicke dr und der Höhe h . Ihre Querschnittsfläche beträgt $dA = \pi(r + dr/2)^2 - \pi(r - dr/2)^2 = 2\pi r dr$, sodass sich

$$dV = 2\pi r dr h \text{ ergibt. Und somit } \int_V r^2 dV = \int_{r=0}^R r^2 2\pi r h dr = 2\pi h \int_{r=0}^R r^3 dr = \frac{1}{2} \pi R^4 h.$$

Mit der Dichte ρ folgt dass das Trägheitsmoment zu

$$J = \rho \int_V r^2 dV = \rho \cdot \frac{1}{2} \pi R^4 h = \frac{1}{2} \rho \cdot \pi R^2 h \cdot R^2 = \frac{1}{2} \rho \cdot V \cdot R^2 = \frac{1}{2} m \cdot R^2.$$

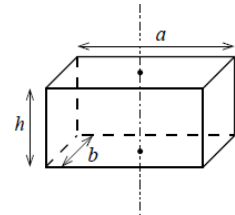


Beispiel 2a: Ein Quader rotiert um seine Mittelpunktsachse parallel zu h ; siehe Bild.

Wir legen den Ursprung in den Mittelpunkt des Quaders und die Koordinatenachsen parallel zu den Quaderkanten. Mit $dV = dx dy dz$ wird

$$\begin{aligned} \int_V r^2 dV &= \int_{z=-h/2}^{h/2} \int_{y=-b/2}^{b/2} \int_{x=-a/2}^{a/2} (x^2 + y^2) dx dy dz = h \int_{y=-b/2}^{b/2} \int_{x=-a/2}^{a/2} (x^2 + y^2) dx dy = \\ &= h \int_{y=-b/2}^{b/2} \left[\frac{1}{3} x^3 + y^2 x \right]_{x=-a/2}^{a/2} dy = h \int_{y=-b/2}^{b/2} \left(\frac{1}{3} a^3 + y^2 a \right) dy = \\ &= h \left[\frac{1}{3} a^3 y + \frac{1}{3} a y^3 \right]_{y=-b/2}^{b/2} = h \left(\frac{2}{3} a^3 \frac{b}{2} + \frac{2}{3} a \frac{b^3}{8} \right) = \frac{1}{12} a b h (a^2 + b^2). \end{aligned}$$

Und somit $J = \frac{1}{12} \rho V \cdot (a^2 + b^2) = \frac{1}{12} m \cdot (a^2 + b^2)$.

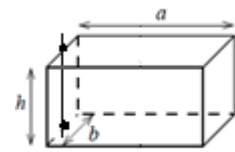


Beispiel 2b: Ein Quader rotiert um seine Seitenachse parallel zu h ; siehe Bild.

Wir legen den Ursprung in den Mittelpunkt der linken Seitenfläche. $dV = dx dy dz$ wird

$$\begin{aligned} \int_V r^2 dV &= \int_{z=-h/2}^{h/2} \int_{y=-b/2}^{b/2} \int_{x=0}^a (x^2 + y^2) dx dy dz = h \int_{y=-b/2}^{b/2} \int_{x=0}^a (x^2 + y^2) dx dy = \\ &= h \left[\frac{1}{3} x^3 + y^2 x \right]_{x=0}^a = h \int_{y=-b/2}^{b/2} \left(\frac{1}{3} a^3 + y^2 a \right) dy = \frac{1}{3} a^3 b h + \frac{1}{12} a b^3 h. \end{aligned}$$

Dies lässt sich umformen in $\frac{1}{3} a^3 b h + \frac{1}{12} a b^3 h = \frac{1}{12} a b h (a^2 + b^2) + a b h \cdot \left(\frac{a}{2} \right)^2$, so dass $J = \frac{1}{12} m \cdot (a^2 + b^2) + m \cdot \left(\frac{a}{2} \right)^2$.



Dies stimmt mit dem Satz von Steiner überein: Es sei J_S das Trägheitsmoment eines Körpers der Masse m bezüglich einer Rotationsachse durch den Schwerpunkt S und J sei das Trägheitsmoment bezüglich einer dazu parallelen Rotationsachse im Abstand d , dann gilt $J = J_S + m d^2$.

Im Beispiel 2b ist $d = a/2$.

Beispiel 3: Eine Kugel vom Radius R rotiert um eine Achse, die durch den Mittelpunkt geht.

Mit Hilfe der Kugelkoordinaten gilt $dV = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$ mit $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$ und $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Dabei bezeichnet r den Abstand des Volumenelements dV vom Ursprung. Dagegen bedeutet r im Integral $\int_V r^2 dV$ den

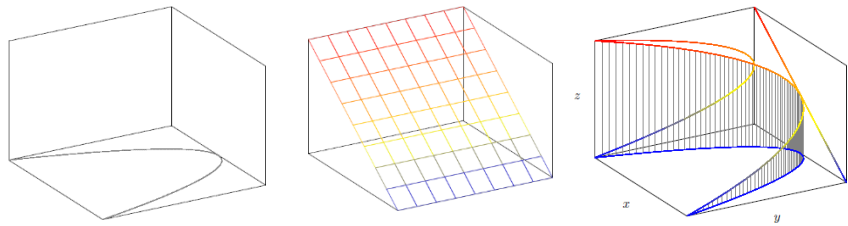
Abstand von dV zur Drehachse. Aus der Skizze im Abschnitt „Kugelkoordinaten“ erkennt man, dass der Abstand des Volumenelements dV gerade $r \sin \vartheta$ beträgt. Somit lautet unser Integral

$$\begin{aligned} \int_V (r \sin \vartheta)^2 dV &= \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R (r \sin \vartheta)^2 r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi = \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R r^4 (\sin \vartheta)^3 dr d\vartheta d\varphi = \\ &= \frac{1}{5} R^5 \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (\sin \vartheta)^3 d\vartheta d\varphi = \frac{2\pi}{5} R^5 \int_{\vartheta=0}^{\pi} (\sin \vartheta)^3 d\vartheta = \frac{2\pi}{5} R^5 \left[-\frac{1}{3} (\sin \vartheta)^2 \cos \vartheta - \frac{2}{3} \cos \vartheta \right]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} = \frac{2\pi}{5} R^5 \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{5} R^2 \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = \\ &= \frac{2}{5} R^2 \cdot V. \end{aligned}$$

Und somit beträgt das Trägheitsmoment $J = \rho \cdot \frac{2}{5} R^2 \cdot V = \frac{2}{5} m R^2$.

3.a.1. Das Kurvenintegral 1. Art im Reellen

Gegeben sei eine stetige Funktion $z = f(x, y)$ der Definitionsmenge D in der xy -Ebene. In D sei eine **Kurve C** gegeben. Siehe nebenstehende Grafiken der TU Dresden.



Im ersten Schaubild ist die Parabel $C: y = 4x \cdot (1 - x)$ dargestellt. Das zweite Schaubild zeigt die Ebene, die zur Funktion $f(x, y) = 1 - x$ gehört. Im dritten Schaubild ist jeder Punkt (x / y) der Kurve C mit dem darüber liegenden Punkt $(x / y / f(x, y))$ des Schaubilds von f verbunden, so dass insgesamt eine (gekrümmte) Fläche im Raum entsteht. Und den Inhalt A dieser Fläche wollen wir bestimmen.

Nun wird die Kurve C in n gleich lange kleine Stücke Δs zerlegt und dadurch die Fläche A in senkrechte Streifen vom jeweiligen Flächeninhalt $\Delta A_i = f(x_i, y_i) \cdot \Delta s$ unterteilt. Dann stellt $\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \cdot \Delta s$ die Summe dieser Flächeninhalte dar.

Führt man den Grenzwert $n \rightarrow \infty$ aus, so erhält man als Flächeninhalt das **Kurvenintegral 1. Art** $\int_C f(x, y) ds$.

Dazu muss die **Kurve C in Parameterform** $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ mit $a \leq t \leq b$ gegeben sein.

Nach Pythagoras ist $\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \cdot \Delta t$. Für $\Delta t \rightarrow 0$ folgt daraus

$$ds = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} \cdot dt, \text{ so dass } \boxed{\int_C f(x, y) ds = \int_{t=a}^{t=b} f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt} \text{ gilt.}$$

Beispiel 1: Für die obige Skizze gibt die TU Dresden an: $f(x, y) = 1 - x$ und $C: \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 4t \cdot (1 - t) = 4t - 4t^2 \end{cases}$

für $0 \leq t \leq 1$. Somit beträgt der Flächeninhalt A des abgebildeten „Vorhangs“

$$A = \int_0^1 f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt = \int_0^1 (1 - t) \cdot \sqrt{1^2 + (4 - 8t)^2} dt. \text{ Dieses Integral löst mein PC zu}$$

$$\left[\frac{1}{32} \ln \left(8t - 4 + \sqrt{1 + (8t - 4)^2} \right) - \frac{1}{192} (64t^2 - 112t + 41) \cdot \sqrt{64t^2 - 64t + 17} \right]_0^1 \approx 1,16170$$

Beispiel 2: Berechnung der Länge einer Kurve (Bogenlänge) in der xy -Ebene. Wenn „die Höhe“ $f(x, y) = 1$ gewählt wird, dann stimmen die Zahlenwerte des Flächeninhalts und der Bogenlänge überein.

a. Der Umfang U eines Kreises vom Radius r .

Die Parameterform eines Kreises um den Ursprung vom Radius r lautet $\begin{cases} x(t) = r \cdot \cos(t) \\ y(t) = r \cdot \sin(t) \end{cases}$ für $0 \leq t \leq 2\pi$. Es

folgt

$$U = \int_0^{2\pi} 1 \cdot \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r \cdot \sin(t))^2 + (r \cdot \cos(t))^2} dt = \int_0^{2\pi} r \cdot \sqrt{(\sin(t))^2 + (\cos(t))^2} dt = r \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi r.$$

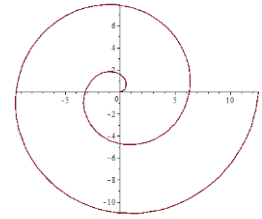
- b. Die Länge L einer Spirale, die gegeben ist durch $\begin{cases} x(t) = t \cdot \cos(t) \\ y(t) = t \cdot \sin(t) \end{cases}$.

Für zwei Windungen ist $0 \leq t \leq 4\pi$, siehe Schaubild. Dann gilt

$$L = \int_0^{4\pi} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt = \int_0^{4\pi} \sqrt{(\cos(t) - t \cdot \sin(t))^2 + (\sin(t) + t \cdot \cos(t))^2} dt =$$

$$= \int_0^{4\pi} \sqrt{\cos^2(t) - 2t \cdot \sin(t) \cos(t) + t^2 \sin^2(t) + \sin^2(t) + 2t \cdot \sin(t) \cos(t) + t^2 \cos^2(t)} dt = \int_0^{4\pi} \sqrt{1 + t^2} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \left[t \sqrt{1+t^2} + \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \right]_0^{4\pi} = 2\pi \sqrt{1+16\pi^2} + \frac{1}{2} \ln(4\pi + \sqrt{1+16\pi^2}) \approx 80,819.$$

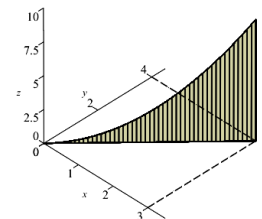


Beispiel 3: In der Ebene \mathbb{R}^2 ist die Funktion $f(x, y) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x \cdot y$ definiert.

- a. Die Punkte $(0/0)$ und $(3/4)$ sind auf der Geraden $y = \frac{4}{3}x$ durch den Weg C :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t \\ 4t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1, \text{ verbunden. Dann ist}$$

$$\int_C f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt = \int_0^1 (3t^2 + 6t^2) \cdot 5 dt = 5 \cdot [3t^3]_{t=0}^1 = 15.$$



- b. Die Punkte $(0/0)$ und $(3/4)$ sind wieder auf der Geraden $y = \frac{4}{3}x$ durch den gleichen Weg

$$C: \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 4t^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1, \text{ verbunden, nur ist die Parametrisierung geändert.}$$

$$\text{Dann ist } \int_C f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt = \int_0^1 (3t^4 + 6t^4) \cdot 10t dt = 10 \int_0^1 9t^5 dt = 15 [t^6]_{t=0}^1 = 15, \text{ das gleiche Ergebnis wie a., da es sich um die gleiche Strecke handelt.}$$

- c. Die Punkte $(0/0)$ und $(3/4)$ sind wieder auf der Geraden $y = \frac{4}{3}x$ durch den gleichen Weg

$$C: \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot \sin(\frac{\pi}{2}t) \\ 4 \cdot \sin(\frac{\pi}{2}t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1, \text{ verbunden, nur ist die Parametrisierung erneut geändert. Dann folgt}$$

$$\int_C f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt = \int_0^1 (3 \sin^2(\frac{\pi}{2}t) + 6 \sin^2(\frac{\pi}{2}t) \cdot 5 \cdot \frac{\pi}{2} \cos(\frac{\pi}{2}t)) dt = \frac{45\pi}{2} \int_0^1 \sin^2(\frac{\pi}{2}t) \cdot \cos(\frac{\pi}{2}t) dt =$$

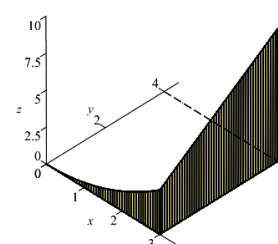
$$= \frac{45\pi}{2} \cdot \left[\frac{2}{3\pi} \sin^3(\frac{\pi}{2}t) \right]_{t=0}^1 = 15 \cdot (1-0) = 15.$$

Satz: Das Kurvenintegral 1. Art ist unabhängig von der Parametrisierung des Weges C .

Dabei muss es sich um den gleichen Weg handeln. Andere Wege können ein anderes Ergebnis liefern.

- d. Die Punkte $(0/0)$ und $(3/4)$ werden durch zwei Wege $C_1: \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t \\ 0 \end{pmatrix}$ und

$$C_2: \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4t \end{pmatrix}, \text{ jeweils für } 0 \leq t \leq 1, \text{ verbunden. Dann ist}$$

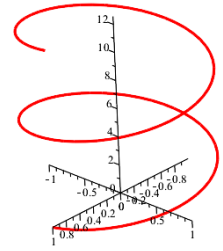


$$\int_C f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt = \int_0^1 3t^2 \cdot 3 dt + \int_0^1 (3+6t) \cdot 4 dt = 3 \cdot [t^3]_{t=0}^1 + 4 \cdot [3t + 3t^2]_{t=0}^1 = 3 + 24 = 27,$$

ein anderes Ergebnis.

Beispiel 4a: Die Länge L einer Schraubenlinie vom Radius r und der Ganghöhe h .

$$C: \begin{cases} x(t) = r \cdot \cos(t) \\ y(t) = r \cdot \sin(t) \\ z(t) = a \cdot t \end{cases} \quad \text{für } 0 \leq t \leq 4\pi \text{ erhält man zwei Windungen; siehe Bild.}$$



Dabei ist $h = 2\pi \cdot a$. Dann gilt

$$L = \int_C 1 ds = \int_0^{4\pi} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt = \int_0^{4\pi} \sqrt{r^2 \cdot \sin^2(t) + r^2 \cdot \cos^2(t) + a^2} dt = \int_0^{4\pi} \sqrt{r^2 + a^2} dt = 4\pi \cdot \sqrt{r^2 + a^2}.$$

Speziell für $h = 0$ folgt $a = 0$, also $L = 4\pi r$, der doppelte Kreisumfang.

Zusatz: Eine Windung dieser Schraubenlinie werde auf den Mantel eines Zylinders vom Radius r gezeichnet. Danach wird der Mantel parallel zur Zylinderachse aufgeschnitten und zu einem Rechteck der Länge $2\pi r$ und Höhe h ausgebreitet. Die Schraubenlinie ist dann genau eine Diagonale dieses Rechtecks, deren Länge sich nach Pythagoras $\sqrt{(2\pi r)^2 + h^2} = \sqrt{(2\pi r)^2 + (2\pi a)^2} = 2\pi \cdot \sqrt{r^2 + a^2}$ berechnen lässt.

Beispiel 4b: Es sein nun $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ und C eine Schraubenlinie mit 2 Windungen, die gegeben ist

$$\text{durch } \begin{cases} x(t) = r \cdot \cos(t) \\ y(t) = r \cdot \sin(t) \\ z(t) = a \cdot t \end{cases} \quad \text{mit } r, a > 0. \text{ Ihre Ganghöhe beträgt dann } 2\pi a. \text{ In der Zeichnung ist } r = a = 1 \text{ gewählt.}$$

$$\begin{aligned} \text{Dann folgt } \int_C f(x, y, z) ds &= \int_0^{4\pi} f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt = \int_0^{4\pi} (r^2 + a^2 \cdot t^2) \sqrt{r^2 + a^2} dt = \\ &= \sqrt{r^2 + a^2} \cdot \left[r^2 \cdot t + \frac{1}{3} a^2 \cdot t^3 \right]_0^{4\pi} = 4\pi \sqrt{a^2 + r^2} \cdot \left(r^2 + \frac{16}{3} a^2 \pi^2 \right). \end{aligned}$$

Beispiel 5: Die Kurve C sei gegeben durch $\begin{cases} x(t) = t \cdot \cosh(2t) - \frac{1}{2} \sinh(2t) \\ y(t) = t^2 \end{cases}$ für

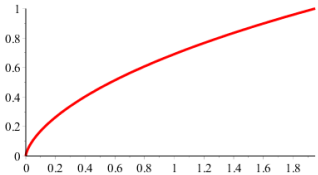
$0 \leq t \leq 1$. Welche Länge L besitzt diese Kurve?

Mit $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ und $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ folgt $\sinh'(x) = \cosh(x)$ und

$\cosh'(x) = \sinh(x)$. Außerdem folgt $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1$, vergleichbar mit $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

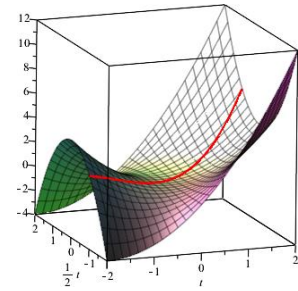
Mit $\dot{x}(t) = \cosh(2t) + t \sinh(2t) \cdot 2 - \frac{1}{2} \cosh(2t) \cdot 2 = 2t \cdot \sinh(2t)$ und $\dot{y}(t) = 2t$ folgt

$$\begin{aligned} L &= \int_C 1 ds = \int_0^1 \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt = \int_0^1 \sqrt{4t^2 \cdot \sinh^2(2t) + 4t^2} dt = \int_0^1 2t \sqrt{\sinh^2(2t) + 1} dt = \int_0^1 2t \cdot \cosh(2t) dt = \\ &= \left[\underbrace{\frac{1}{2} \sinh(2t)}_F \cdot \underbrace{2t}_g \right]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{2} \sinh(2t)}_F \cdot \underbrace{2}_{g'} dt = \left[t \cdot \sinh(2t) - \frac{1}{2} \cosh(2t) \right]_0^1 = \sinh(2) - \frac{1}{2} \cosh(2) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^2 - \frac{3}{4} e^{-2} \approx 2,246. \end{aligned}$$



Beispiel 6: Es sei $f(x, y) = x^2 + x \cdot y^2$ mit $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$. Auf dem Schaubild $z = f(x, y)$ ist eine Kurve gegeben durch

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t/2 \\ z(t) = f(x, y) = t^2 + t \cdot (t/2)^2 = t^2 + t^3/4 \end{cases} \quad \text{mit } -2 \leq t \leq 2.$$



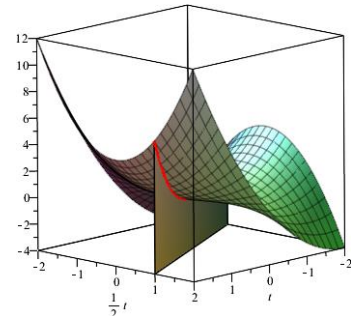
a. Die Länge der Kurve ist $\int_{-2}^2 1 \cdot \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt =$

$$\frac{1}{4} \int_{-2}^2 \sqrt{9t^4 + 48t^3 + 64t^2 + 20} dt, \text{ was sich mit einem CAS berechnen lässt.}$$

b. Durch $\int_{-2}^2 f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt =$

$$\frac{1}{16} \int_{-2}^2 (t^3 + 4t^2) \cdot \sqrt{9t^4 + 48t^3 + 64t^2 + 20} dt \text{ ist der Flächeninhalt ge-}$$

geben, der durch die Kurve und ihre senkrechte Projektion auf die xy -Ebene bestimmt ist.



3.a.2. Das Kurvenintegral 1. Art im Komplexen

Beim Kurvenintegral 1. Art gilt $\int_C f(x, y) ds = \int_{t=a}^{t=b} f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt$. Dabei ist $C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ mit

$a \leq t \leq b$ eine in Parameterform gegebene Kurve des \mathbb{R}^2 und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}^2$ eine stetige Funktion.

Beim komplexen Kurvenintegral $\int_C f(z) dz$ liegt die Kurve $C: z = z(t)$ mit $a \leq t \leq b$ in der komplexen Zahlenebene \mathbb{C} und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ mit $D \subset \mathbb{C}$ ist eine stetige Funktion.

Zur Herleitung der Formel für $\int_C f(z) dz$ denkt man sich die Kurve C in n kleine Abschnitte Δz_i zerlegt. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^n f(z_i) \cdot \Delta z_i = \sum_{i=1}^n f(z_i) \cdot \frac{\Delta z_i}{\Delta t} \cdot dt. \text{ Und für } n \rightarrow \infty \text{ erhält man } \boxed{\int_C f(z) dz = \int_{t=a}^{t=b} f(z) \cdot \dot{z}(t) dt}. \text{ Dabei ist } \dot{z}(t) \text{ die Ab-}$$

leitung der Kurve $z = z(t)$ nach dem Parameter t .

Beispiel 1:

Zunächst reell: Der Weg führe von $A(1/2)$ nach $B(4/6)$ auf der Geraden $C: \begin{cases} x(t) = 1 + 3t \\ y(t) = 2 + 4t \end{cases}$ mit $0 \leq t \leq 1$. Au-

ßerdem sei $f(x, y) = 1$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dann folgt

$$\int_C f(x, y) ds = \int_{t=a}^{t=b} f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt = \int_{t=0}^{t=1} 1 \cdot \sqrt{3^2 + 4^2} dt = \int_{t=0}^{t=1} 5 dt = 5.$$

Nun komplex: Der Weg führt von $z_a = 1 + 2i$ nach $z_b = 4 + 6i$ auf der Geraden $z(t) = 1 + 2i + t(3 + 4i)$ mit $0 \leq t \leq 1$. Außerdem sei wieder $f(z) = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Dann folgt

$$\int_C f(z) dz = \int_{t=a}^{t=b} f(z) \cdot \dot{z}(t) dt = \int_{t=0}^{t=1} 1 \cdot \dot{z}(t) dt = \int_{t=0}^{t=1} (3 + 4i) dt = 3 + 4i.$$

Interpretation der beiden Ergebnisse:

Beim reellen Kurvenintegral wird der Integrationsweg durch $n+1$ Punkte $A = P_0, P_1, P_2, \dots, P_n = B$ in n Stücke zerlegt, so dass $\int_C f(x, y) ds = \int_C 1 ds = \int_C ds \hat{=} |P_0 P_1| + |P_1 P_2| + \dots + |P_{n-1} P_n| = |P_0 P_n| = 5$ gerade die Länge der Strecke von A nach B ergibt.

Beim komplexen Kurvenintegral wird der Integrationsweg in der Gaußschen Zahlenebene ebenfalls durch $n+1$ Punkte $z_a = z_0, z_1, z_2, \dots, z_n = z_b$ in n Stücke zerlegt, so dass

$$\int_C f(z) dz = \int_C dz \hat{=} (z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + (z_3 - z_2) + \dots + (z_n - z_{n-1}) = z_n - z_0 = 4 + 6i - (1 + 2i) = 3 + 4i.$$

Und für den Betrag gilt $|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ wie beim reellen Kurvenintegral.

Beispiel 2: Die Funktion $f(z) = z^n$ für $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{Z}$, werde auf dem Kreis vom Radius r mit $r > 0$ um den Ursprung integriert. Die einfachste Parameterdarstellung dieses Kreises ist $z(t) = r \cdot (\cos(t) + i \sin(t)) = r \cdot e^{it}$ für $0 \leq t \leq 2\pi$.

Im Schaubild ist $z_n = r \cdot e^{i \cdot n \cdot \pi / 4} = r \cdot (\cos(n \cdot \pi / 4) + i \sin(n \cdot \pi / 4))$ für $n = 0, 1, \dots, 7$.

$$z_0 = r \cdot e^{i \cdot 0} = r \cdot (\cos(0) + i \sin(0)) = 1,$$

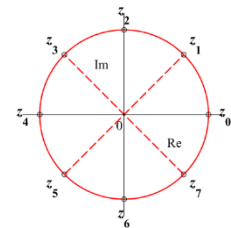
$$z_1 = r \cdot e^{i \cdot \pi / 4} = r \cdot (\cos(\pi / 4) + i \sin(\pi / 4)) = r \cdot \left(\frac{1}{2} \sqrt{2} + i \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} \right), \quad z_2 = r \cdot e^{i \cdot \pi / 2} = r \cdot (\cos(\pi / 2) + i \sin(\pi / 2)) = ri,$$

usw.

$$\text{Es folgt } \int_C f(z) dz = \int_{t=0}^{2\pi} (r \cdot e^{it})^n \cdot r \cdot i \cdot e^{it} dt = r^{n+1} \cdot i \int_{t=0}^{2\pi} e^{(n+1)it} dt.$$

$$\text{Für } n = -1 \text{ folgt } \int_C f(z) dz = r^0 \cdot i \int_{t=0}^{2\pi} e^0 dt = i \int_{t=0}^{2\pi} 1 dt = 2\pi i.$$

$$\text{Für } n \neq -1 \text{ folgt } \int_C f(z) dz = r^{n+1} \cdot i \int_{t=0}^{2\pi} e^{(n+1)it} dt = \frac{r^{n+1}}{n+1} \cdot [e^{(n+1)it}]_{t=0}^{t=2\pi} = \frac{r^{n+1}}{n+1} \cdot (e^{(n+1)2\pi i} - e^0) = \frac{r^{n+1}}{n+1} \cdot (1 - 1) = 0.$$



Beispiel 3: Die Funktion $f(z) = \sin(z)$ für $z \in \mathbb{C}$ werde auf der Geraden $C: z = t \cdot i$ für $0 \leq t \leq 1$ integriert.

Aus der Eulerschen Formel $e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z)$ für $z \in \mathbb{C}$ und entsprechend $e^{-iz} = \cos(z) - i \sin(z)$

$$\text{folgt } \sin(z) = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) \text{ und } \cos(z) = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}).$$

Beispiel α : $\sin(\pi/2) = \frac{1}{2i} (e^{i\pi/2} - e^{-i\pi/2}) = \frac{1}{2i} (\cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2) - \cos(-\pi/2) - i \sin(-\pi/2)) = \sin(\pi/2)$ wie erwartet.

$$\begin{aligned} \text{Beispiel } \beta: \sin(2 + 3i) &= \frac{1}{2i} (e^{i(2+3i)} - e^{-i(2+3i)}) = \frac{1}{2i} (e^{-3+2i} - e^{3-2i}) = \frac{1}{2i} (e^{-3} e^{2i} - e^3 e^{-2i}) = \\ &= \frac{1}{2i} (e^{-3} (\cos(2) + i \sin(2)) + e^3 (\cos(-2) + i \sin(-2))) = \frac{1}{2} (e^{-3} + e^3) \sin(2) - \frac{1}{2} i (e^{-3} - e^3) \cos(2) \approx 9,1545 - 4,1689i. \end{aligned}$$

Lustige Folgerung: $\sin(x + iy) = \sin(x) \cdot \cosh(y) + i \cos(x) \cdot \sinh(y)$.

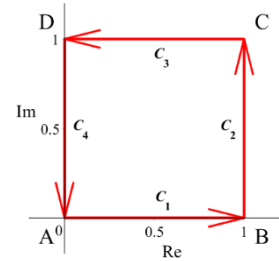
Im Reellen: $\sin(x + y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)$

Analog folgt $\cos(x + iy) = \cos(x) \cdot \cosh(y) + i \sin(x) \cdot \sinh(y)$.

Im Reellen: $\cos(x + y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$

$$\int_C f(z) dz = \int_{t=a}^{t=b} f(z) \cdot \dot{z}(t) dt = \int_{t=0}^{t=1} \frac{1}{2i} (e^{-t} - e^t) \cdot i dt = \frac{1}{2} [-e^{-t} - e^t]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{2} (-e^{-1} - e + 2) = 1 - \left(e + \frac{1}{e} \right) \approx -0,543.$$

Beispiel 4 a: Die Funktion $f(z) = \operatorname{Im}(z) + i \cdot \operatorname{Re}(z)$ für $z \in \mathbb{C}$ werde auf dem gezeichneten Quadrat von A, B, C, D zurück nach A integriert. Die Wege sind $C_1: z = t$, $C_2: 1 + i \cdot t$, $C_3: z = 1 - t + i$, $C_4: i \cdot (1 - t)$ jeweils für $0 \leq t \leq 1$.



$$I_1 = \int_{C_1} f(z) dz = \int_{t=0}^1 f(z) \dot{z}(t) dt = \int_{t=0}^1 f(t) \cdot 1 dt = \int_{t=0}^1 i \cdot t dt = \frac{1}{2} i.$$

$$I_2 = \int_{C_2} f(z) dz = \int_{t=0}^1 f(z) \dot{z}(t) dt = \int_{t=0}^1 f(1 + i \cdot t) \cdot i dt = \int_{t=0}^1 (t + i) \cdot i dt = -1 + \frac{1}{2} i.$$

$$I_3 = \int_{C_3} f(z) dz = \int_{t=0}^1 f(z) \dot{z}(t) dt = \int_{t=0}^1 f(1 - t + i) \cdot (-1) dt = \int_{t=0}^1 (1 + (1 - t) \cdot i) \cdot (-1) dt = -1 - \frac{1}{2} i.$$

$$I_4 = \int_{C_4} f(z) dz = \int_{t=0}^1 f(z) \dot{z}(t) dt = \int_{t=0}^1 f(i \cdot (1 - t)) \cdot (-i) dt = \int_{t=0}^1 (1 - t) \cdot (-i) dt = -\frac{1}{2} i.$$

Und die Summe $\oint_C f(z) dz = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = -2$ ist ungleich Null.

Daraus folgt z.B. die Wegabhängigkeit dieses komplexen Integrals:

Aus $I_1 + I_2 + I_3 = -I_4 - 2 \neq -I_4$ folgt, dass das Integral $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ einen anderen Wert ergibt als das Integral $A \rightarrow D$.

Oder aus $I_1 + I_2 = -I_3 - I_4 - 2 \neq -I_3 - I_4$ folgt, dass das Integral $A \rightarrow B \rightarrow C$ einen anderen Wert ergibt als das Integral $A \rightarrow D \rightarrow C$.

Beispiel 4 b: Die Funktion $f(z) = z^2$ für $z \in \mathbb{C}$ werde auf dem gleichen Quadrat von A über B, C, D zurück nach A integriert. Die Wege sind $C_1: z = t$, $C_2: 1 + i \cdot t$, $C_3: z = 1 - t + i$, $C_4: i \cdot (1 - t)$ jeweils für $0 \leq t \leq 1$.

$$I_1 = \int_{C_1} f(z) dz = \int_{t=0}^1 z^2 \dot{z}(t) dt = \int_{t=0}^1 t^2 \cdot 1 dt = \frac{1}{3}.$$

$$I_2 = \int_{C_2} f(z) dz = \int_{t=0}^1 f(z) \dot{z}(t) dt = \int_{t=0}^1 f(1 + i \cdot t) \cdot i dt = \int_{t=0}^1 (1 + i \cdot t)^2 \cdot i dt = \left[\frac{1}{3} (1 + i \cdot t)^3 \right]_{t=0}^{t=1} = -1 + \frac{2}{3} i.$$

$$I_3 = \int_{C_3} f(z) dz = \int_{t=0}^1 f(z) \dot{z}(t) dt = \int_{t=0}^1 f(1 - t + i) \cdot (-1) dt = \int_{t=0}^1 (1 - t - i)^2 \cdot (-1) dt = \frac{1}{3} \left[(1 - t - i)^3 \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{2}{3} - i.$$

$$I_4 = \int_{C_4} f(z) dz = \int_{t=0}^1 f(z) \dot{z}(t) dt = \int_{t=0}^1 f(i \cdot (1 - t)) \cdot (-i) dt = \int_{t=0}^1 -(1 - t)^2 \cdot (-i) dt = \frac{1}{3} i.$$

Und jetzt ist die Summe $\oint_C f(z) dz = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$, d.h. das Integral ist wegunabhängig.

Satz: Es sei $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ mit $D \subseteq \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion mit $f(x + i y) = u(x, y) + i v(x, y)$. Die Definitionsmenge D sei einfach zusammenhängend, d.h. mit jeder geschlossenen Kurve C in D gehört auch ihr Inneres

zu D . Dann gilt: $\oint_C f(z) dz = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \end{cases}$, die sog. Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen; abgekürzt $\boxed{u_x = v_y \text{ und } u_y = -v_x}$. (Ohne Beweis)

Zu Beispiel 4a: $f(z) = \operatorname{Im}(z) + i \cdot \operatorname{Re}(z)$, d.h. $f(x + i y) = y + i \cdot x$, so dass $u(x, y) = y$ und $v(x, y) = x$. Es gilt zwar $u_x = v_y = 0$, aber $u_y = v_x = 1$, statt $u_y = -v_x$. Die Wegabhängigkeit des Integrals war zu erwarten.

Zu Beispiel 4b: $f(z) = z^2$, d.h. $f(x + i y) = (x + i y)^2 = x^2 + 2i x y - y^2$, so dass $u(x, y) = x^2 - y^2$ und $v(x, y) = 2x y$. Und es gilt $u_x = v_y = 2x$ und $u_y = 2y = -v_x$, also die Wegunabhängigkeit des Integrals.

3.b. Das Kurvenintegral 2. Art

Beim Kurvenintegral 1. Art ist der Integrand $f(x, y)$ ein Skalar, beim Kurvenintegral 2. Art ist er ein Vektor

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} F_x(x, y) \\ F_y(x, y) \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} F_x(x, y, z) \\ F_y(x, y, z) \\ F_z(x, y, z) \end{pmatrix}.$$

Definition: Es sei B eine Teilmenge des \mathbb{R}^n . Eine Abbildung $F: B \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt ein **Vektorfeld**.

Beispiel 1: Im Gravitationsfeld bilden die Kraftvektoren \vec{F} auf eine Masse m ein Vektorfeld. Die vom Gravitationsfeld verrichtete Arbeit W längs eines Weges C beträgt dann $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$. Dabei ist $\vec{F} \cdot d\vec{s}$ das Skalarprodukt des Kraftvektors \vec{F} und dem kleinen Wegstück $d\vec{s}$.

Beispiel 2: Im elektrischen Feld bilden die Feldvektoren \vec{E} ein Vektorfeld. $U = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{s}$ stellt die elektrische Spannung zwischen den Endpunkten des Weges C dar.

Wegen $U = \frac{W}{q}$ und $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ mit der Ladung q ist das Beispiel 2 eigentlich mit Beispiel 1 identisch.

Allgemein gilt für $n = 2$ mit der Kurve $\begin{pmatrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{pmatrix}$ und $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} F_x(x, y) \\ F_y(x, y) \end{pmatrix}$

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_C F_x(x, y) dx + F_y(x, y) dy = \int_C (F_x(x(t), y(t)) \cdot \dot{x}(t) + F_y(x(t), y(t)) \cdot \dot{y}(t)) dt$$

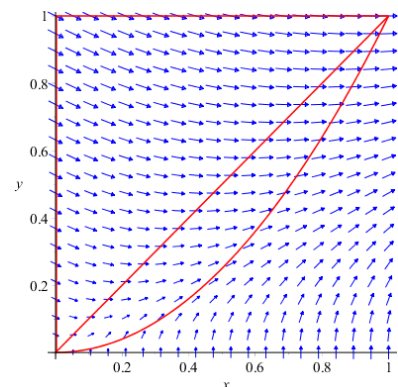
Beispiel 1: Im \mathbb{R}^2 sei $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} F_x(x, y) \\ F_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ x - y \end{pmatrix}$ und C ein Weg, der die beiden Punkte $(0/0)$ und $(1/1)$ verbindet.

a. $C: \begin{pmatrix} x = t \\ y = t \end{pmatrix}$ mit $0 \leq t \leq 1$. C ist ein Geradenstück ($y = x$) zwischen $(0/0)$ und $(1/1)$. Dann beträgt die von der Kraft \vec{F} verrichtete Arbeit W :

$$\begin{aligned} W &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_C F_x dx + F_y dy = \int_C (F_x \cdot \dot{x} + F_y \cdot \dot{y}) dt = \\ &= \int_0^1 (2t \cdot 1 + (t - t) \cdot 1) dt = \int_0^1 2t dt = 1. \end{aligned}$$

b. $C: \begin{pmatrix} x = t \\ y = t^2 \end{pmatrix}$ mit $0 \leq t \leq 1$. C ist ein Parabelstück ($y = x^2$) zwischen $(0/0)$ und $(1/1)$. Dann beträgt die von der Kraft \vec{F} verrichtete Arbeit W :

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_C F_x dx + F_y dy = \int_C (F_x \cdot \dot{x} + F_y \cdot \dot{y}) dt = \int_0^1 (2t^2 \cdot 1 + (t - t^2) \cdot 2t) dt = \int_0^1 (4t^2 - 2t^3) dt = \frac{5}{6}.$$



Folgerung: Das Kurvenintegral 2. Art kann vom gewählten Weg abhängen.

c. Wir wählen den Weg $(0/0) \xrightarrow{C_1} (0/1) \xrightarrow{C_2} (1/1)$ mit $C_1: \begin{pmatrix} x=0 \\ y=t \end{pmatrix}$ und $C_2: \begin{pmatrix} x=t \\ y=1 \end{pmatrix}$, wobei jeweils $0 \leq t \leq 1$ gilt.

$$W_1 = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_C F_x dx + F_y dy = \int_C (F_x \cdot \dot{x} + F_y \cdot \dot{y}) dt = \int_0^1 (2t \cdot 0 + (0-t) \cdot 1) dt = \int_0^1 (-t) dt = -\frac{1}{2}.$$

Positive Arbeit W bedeutet, dass die Kraft \vec{F} den Körper befördert. Dies ist z.B. der Fall, wenn \vec{F} und $d\vec{s}$ in die gleiche Richtung zeigen. Bei **negativer Arbeit** muss gegen das Kraftfeld \vec{F} Arbeit verrichtet werden.

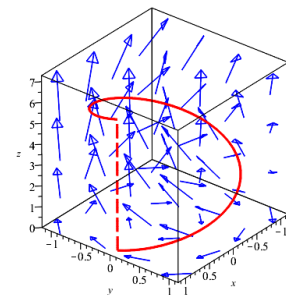
$$W_2 = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_C F_x dx + F_y dy = \int_C (F_x \cdot \dot{x} + F_y \cdot \dot{y}) dt = \int_0^1 (2 \cdot 1 + (t-1) \cdot 0) dt = \int_0^1 2 dt = 2.$$

Insgesamt folgt für die Gesamtarbeit $W = W_1 + W_2 = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$.

Beispiel 2: Im \mathbb{R}^3 sei $\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ z \end{pmatrix}$ und C ein Weg, der die beiden Punkte

$(1/0/0)$ und $(1/0/2\pi a)$ verbindet.

In der Zeichnung ist $a=1$ gewählt. Die durchgezogene Linie ist die Schraubenlinie, die gestrichelte Linie ist der direkte Weg.



$C_1: \begin{pmatrix} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \\ z = a \cdot t \end{pmatrix}$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$ verbindet die beiden Punkte über eine Schrau-

benlinie, $C_2: \begin{pmatrix} x=1 \\ y=0 \\ z=2\pi \cdot a \cdot t \end{pmatrix}$ mit $0 \leq t \leq 1$ direkt auf einer Strecke. Dann ist

$$W_1 = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_C y dx - x dy + z dz = \int_C (y \cdot \dot{x}(t) - x \cdot \dot{y}(t) + z \cdot \dot{z}(t)) dt = \int_0^{2\pi} (\sin(t) \cdot (-\sin(t)) - \cos(t) \cdot \cos(t) + a \cdot t \cdot a) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (a^2 t - 1) dt = 2\pi^2 \cdot a^2 - 2\pi.$$

$$W_2 = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_C y dx - x dy + z dz = \int_C (y \cdot \dot{x}(t) - x \cdot \dot{y}(t) + z \cdot \dot{z}(t)) dt = \int_0^1 (0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 2\pi \cdot a \cdot t \cdot 2\pi \cdot a) dt =$$

$$= 4\pi^2 \cdot a^2 \int_0^1 t dt = 2\pi^2 \cdot a^2.$$

Satz: Wenn sich das Vektorfeld $\vec{F}(x, y, z)$ als Gradient eines skalaren Feldes $V(x, y, z)$ darstellen lässt, dann ist das Kurvenintegral 2. Art **unabhängig vom Weg**. $V(x, y, z)$ heißt auch das **Potential**.

Beweis: Es sei $\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} F_x(x, y, z) \\ F_y(x, y, z) \\ F_z(x, y, z) \end{pmatrix} = \text{grad}(V(x, y, z)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} V(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial y} V(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial z} V(x, y, z) \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_C F_x(x, y, z) dx + F_y(x, y, z) dy + F_z(x, y, z) dz = \int_C \frac{\partial}{\partial x} V(x, y, z) dx + \frac{\partial}{\partial y} V(x, y, z) dy + \frac{\partial}{\partial z} V(x, y, z) dz =$$

$$= \int_{t=a}^{t=b} dV(x(t), y(t), z(t)) = V(x(b), y(b), z(b)) - V(x(a), y(a), z(a)).$$

Definition: Kraftfelder $\vec{F}(x, y, z)$, die sich als Gradient eines Skalarfeldes $V(x, y, z)$ darstellen lassen, d.h.

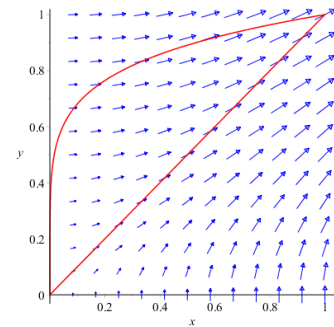
$\vec{F}(x, y, z) = \text{grad}(V(x, y, z))$, nennt man auch **wirbelfrei** bzw. **konservativ**.

Beispiel 3: Mit $V(x, y) = x^2 y$ folgt $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \end{pmatrix} = \text{grad}(x^2 y)$. Die Kurve verlaufe von $(0/0)$ nach $(1/1)$.

Kurve $C_1: \begin{pmatrix} x = t \\ y = t \end{pmatrix}$ für $0 \leq t \leq 1$, auf der Geraden $y = x$,

Kurve $C_2: \begin{pmatrix} x = t^3 \\ y = \sqrt{t} \end{pmatrix}$ für $0 \leq t \leq 1$, auf der Kurve $y = x^{1/6}$,

siehe Schaubild.



$$W_1 = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{C_1} 2xy dx + x^2 dy = \int_{t=0}^1 (2xy \cdot \dot{x} + x^2 \cdot \dot{y}) dt = \int_0^1 (2t^2 \cdot 1 + t^2 \cdot 1) dt = \int_0^1 (3t^2) dt = 1.$$

$$W_2 = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{C_2} 2xy dx + x^2 dy = \int_{t=0}^1 \left(2t^3 \sqrt{t} \cdot 3t^2 + t^6 \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} \right) dt = \int_0^1 \left(\frac{13}{2} t^{11/2} \right) dt = 1, \text{ das gleiche Ergebnis.}$$

Zusatz 1: Wählt man den entgegengesetzten Weg von $(1/1)$ nach $(0/0)$, so sind in den Integralen die Grenzen 0 und 1 zu vertauschen, so dass man jeweils $W = -1$ erhält.

Zusatz 2: Wählt man einen geschlossenen Weg z.B. von $(0/0)$ über $(1/1)$ wieder zurück nach $(0/0)$, so ergibt sich die Gesamtarbeit $W = 0$.

Satz: Ein Kraftfeld $\vec{F}(x, y, z)$ ist wirbelfrei, wenn für jede geschlossene Kurve C das Integral $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$ ist.

Der Kreis beim Integral soll anzeigen, dass die Kurve C geschlossen ist.

Die Frage, unter welcher Bedingung sich ein zwei- oder dreidimensionales Vektorfeld $\vec{F}(x, y, z)$ als Gradient eines skalaren Potentialfeldes $V(x, y, z)$ darstellen lässt, beantwortet der folgende Satz.

Satz: Auf einem zwei- oder dreidimensionalen einfach zusammenhängendem Gebiet G (d.h. mit jeder geschlossenen Kurve C in G gehört auch ihr Inneres zu G) besitzt ein Vektorfeld genau dann ein skalares Potentialfeld, wenn die **Rotation** des Vektorfeldes der **Nullvektor** ist. (Ohne Beweis)

Def.: Die **Rotation** eines Vektorfeldes \vec{F} ist das Vektorprodukt $\text{rot}(\vec{F}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$.

Im zweidimensionalen Fall $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x(x, y) \\ F_y(x, y) \\ 0 \end{pmatrix}$ schreibt man $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x(x, y) \\ F_y(x, y) \\ 0 \end{pmatrix}$, so dass

$$\text{rot}(\vec{F}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x(x, y) \\ F_y(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial F_y(x, y)}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x(x, y)}{\partial z} - \frac{\partial 0}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial F_x(x, y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial F_y(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial F_x(x, y)}{\partial y} \end{pmatrix}. \text{ Und das soll der Nullvektor } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sein,}$$

damit ein skalares Potentialfeld existiert, d.h. es muss gelten: $\frac{\partial F_y(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial F_x(x, y)}{\partial y}$.

Zu Beispiel 1: $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} F_x(x, y) \\ F_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ x - y \end{pmatrix}.$

Die beiden partiellen Ableitungen $\frac{\partial F_y(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial(x - y)}{\partial x} = 1$ und $\frac{\partial F_x(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial 2y}{\partial y} = 2$ sind verschieden. Somit gibt es kein skalares Vektorfeld und die Integrale können wegabhängig sein.

Zu Beispiel 2: $\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ z \end{pmatrix}.$ Dann ist $\text{rot}(\vec{F}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ -1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$ Somit

gibt es kein skalares Vektorfeld und die Integrale können wegabhängig sein.

Zu Beispiel 3: $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \end{pmatrix}.$ Die beiden Ergebnisse $\frac{\partial F_y(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial x^2}{\partial x} = 2x$ und $\frac{\partial F_x(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial 2xy}{\partial y} = 2x$ sind identisch, so dass die Integrale wegunabhängig sind.

Problem: Gegeben sei ein wirbelfreies Kraftfeld $\vec{F}(x, y, z).$ Wie findet man ein zugehöriges Potential $V(x, y, z)$?

Beispiel 1: Das Kraftfeld $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} 3y^2 - 4 \\ 6xy + 8 \end{pmatrix}$ ist wegen $\frac{\partial F_y(x, y)}{\partial x} = 6y = \frac{\partial F_x(x, y)}{\partial y}$ wirbelfrei.

Erste Möglichkeit:

Aus $\frac{\partial V(x, y)}{\partial x} = F_x(x, y) = 3y^2 - 4$ folgt $V(x, y) = 3xy^2 - 4x + f(y)$ mit einer Funktion f , die nicht von x abhängt.

Aus $\frac{\partial V(x, y)}{\partial y} = F_y(x, y) = 6xy + 8$ folgt $V(x, y) = 3xy^2 + 8y + g(x)$ mit einer von y unabhängigen Funktion g .

Daraus folgt $V(x, y) = 3xy^2 - 4x + 8y + c$ mit einer beliebigen Konstanten $c \in \mathbb{R}.$

Zweite Möglichkeit: Man wählt einen (möglichst einfachen) Weg C z.B. von $(0/0)$ nach (x_0/y_0) und erhält

$$V(x_0, y_0) = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}.$$

Mit $C: \begin{pmatrix} x = t \cdot x_0 \\ y = t \cdot y_0 \end{pmatrix}$ für $0 \leq t \leq 1$ folgt

$$\begin{aligned} V(x_0, y_0) &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_C F_x dx + F_y dy = \int_C (F_x \cdot \dot{x} + F_y \cdot \dot{y}) dt = \int_{t=0}^1 ((3y^2 - 4) \cdot \dot{x} + (6xy + 8) \cdot \dot{y}) dt = \\ &= \int_{t=0}^1 ((3t^2 y_0^2 - 4) \cdot x_0 + (6t^2 x_0 y_0 + 8) \cdot y_0) dt = [x_0 y_0^2 t^3 - 4x_0 t + 2x_0 y_0^2 t^3 + 8y_0 t]_{t=0}^1 = 3x_0 y_0^2 - 4x_0 + 8y_0 \text{ wie oben.} \end{aligned}$$

Beispiel 2: Das Kraftfeld $\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4xy \\ 2x^2 - 6yz \\ -3y^2 \end{pmatrix}$ ist wegen

$$\text{rot}(\vec{F}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6y - (-6y) \\ 0 - 0 \\ 4x - 4x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ wirbelfrei.}$$

Erste Möglichkeit:

$$\text{Aus } \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x} = 4xy \text{ folgt } V(x, y, z) = 2x^2y + f(y, z).$$

$$\text{Aus } \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y} = 2x^2 - 6yz \text{ folgt } V(x, y, z) = 2x^2y - 3y^2z + g(x, z).$$

$$\text{Aus } \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z} = -3y^2 \text{ folgt } V(x, y, z) = -3y^2z + h(x, y).$$

Der Vergleich liefert $V(x, y, z) = 2x^2y - 3y^2z + c$.

Zweite Möglichkeit: Mit dem Weg C vom „schönen“ Punkt $(0/0/0)$ zum allgemeinen Punkt $(x_0/y_0/z_0)$.

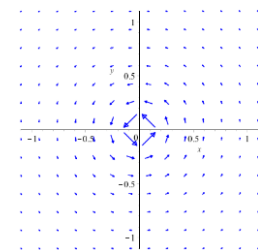
$$\text{Mit } C: \begin{pmatrix} x = t \cdot x_0 \\ y = t \cdot y_0 \\ z = t \cdot z_0 \end{pmatrix} \text{ mit } 0 \leq t \leq 1 \text{ folgt}$$

$$V(x_0, y_0) = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_C F_x dx + F_y dy + F_z dz = \int_C (F_x \cdot \dot{x} + F_y \cdot \dot{y} + F_z \cdot \dot{z}) dt = \int_{t=0}^1 (4xy \cdot \dot{x} + (2x^2 - 6yz) \cdot \dot{y} - 3y^2 \cdot \dot{z}) dt =$$

$$\int_{t=0}^1 (4x_0^2 y_0 t^2 + (2x_0^2 t^2 - 6y_0 z_0 t^2) \cdot y_0 - 3y_0^2 z_0 t^2) dt = \int_{t=0}^1 (6x_0^2 y_0 t^2 - 9y_0^2 z_0 t^2) dt = 2x_0^2 y_0 - 3y_0^2 z_0.$$

Beispiel 3: Das zweidimensionale Kraftfeld sei $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2 + y^2} \\ \frac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$

für $(x/y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0/0)\}$.



$$\frac{\partial F_x(x, y)}{\partial y} = -\frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \text{ und}$$

$$\frac{\partial F_y(x, y)}{\partial x} = \frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \text{ sind gleich.}$$

Sollten dann nicht die Kurvenintegrale wegunabhängig sein, bzw. sollte dann ein geschlossenes Integral nicht den Wert 0 haben?

Wir wählen einen Kreis vom Radius 1 um den Ursprung: $C: \begin{pmatrix} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{pmatrix}$ für $0 \leq t \leq 2\pi$. Dann gilt

$$W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\sin(t)}{\cos^2(t) + \sin^2(t)} \cdot (-\sin(t)) + \frac{\cos(t)}{\cos^2(t) + \sin^2(t)} \cdot \cos(t) \right) dt = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(t) + \cos^2(t)}{\cos^2(t) + \sin^2(t)} dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$$

und nicht Null. Die Ursache ist, dass die Definitionsmenge $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0/0)\}$ nicht einfach zusammenhängend ist. Denn eine Schleife, die den Ursprung enthält, wird ihn auch beim Zusammenziehen innerhalb D weiterhin enthalten, so dass die Schleife nicht zu einem einzigen Punkt von D zusammengezogen werden kann.

Man erkennt auch am Schaubild, dass das Feld nicht wirbelfrei ist und einen Körper um den Ursprung treibt.

Da obiges Integral $W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$ ungleich Null ist, kann unser Kraftfeld kein Potential $V(x, y)$ besitzen.

Da $\frac{\partial F_x(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial F_y(x, y)}{\partial x}$ gilt, ist es verlockend, nach einem Potential $V(x, y)$ von $\vec{F}(x, y)$ zu suchen.

Aus $\frac{\partial V(x, y)}{\partial x} = F_x(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$ folgt $V_1(x, y) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + f_1(y)$. Hinweis: $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Aus $\frac{\partial V(x, y)}{\partial y} = F_y(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ folgt $V_2(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + f_2(x)$.

Es gilt $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \pi/2 & \text{für } x > 0 \\ -\pi/2 & \text{für } x < 0 \end{cases}$, d.h. $-\arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \begin{cases} \pi/2 & \text{für } x > 0 \\ -\pi/2 & \text{für } x < 0 \end{cases}$.

Somit lässt sich das erste Ergebnis $V_1(x, y)$ umformen zu

$$V_1(x, y) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + f_1(y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + f_1(y) - \begin{cases} \pi/2 & \text{für } x/y > 0 \\ -\pi/2 & \text{für } x/y < 0 \end{cases}.$$

Man kann $f_1(y) = f_2(x) = 0$ setzen und erhält $V_1(x, y) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \begin{cases} \pi/2 & \text{für } x/y > 0 \\ -\pi/2 & \text{für } x/y < 0 \end{cases}$

und $V_2(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$. Somit besitzt $\vec{F}(x, y)$ wirklich kein Potential $V(x, y)$.

4.a. Das Oberflächenintegral 1. Art

Es sei D eine messbare Teilmenge des \mathbb{R}^2 und $f: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Funktion. Durch f ist über D eine Fläche $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = f(x, y)\}$ definiert.

Beispiel: $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ mit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 4\}$. Die Fläche A ist Teil eines Rotationsparaboloids, das auf der xy -Ebene steht.

Wie lässt sich der Flächeninhalt eines Flächenstücks berechnen?

Dazu wird die Definitionsmenge D in kleine Rechtecke der Seitenlängen dx und dy zerlegt, siehe Schaubild mit 20 solcher Rechtecke. Diese Zerlegung wird auf die Fläche A übertragen, so dass auf A kleine gekrümmte Parallelogramme entstehen. Bei infinitesimal kleinen dx und dy können diese Parallelogramme als eben betrachtet werden, so dass sie jeweils in ihrer Tangentialebene

$T: z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + f(x_0, y_0)$ liegen. Daraus ergibt

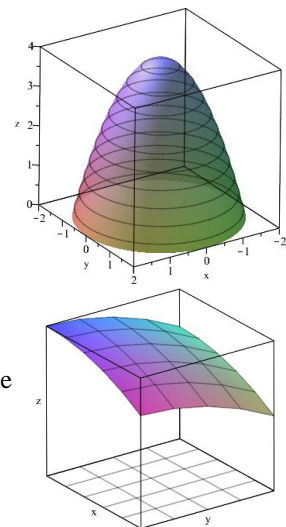
sich $dz = z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot dy$. Die Seite parallel zur x -Achse, also mit $dy = 0$, ist

dann durch den Vektor $\begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx \end{pmatrix}$, die Seite parallel zur y -Achse mit $dx = 0$ durch den Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ dy \\ \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy \end{pmatrix}$ gegeben.

Daraus ergibt sich der Flächeninhalt dO dieses kleinen Parallelogramms zu

$$dO = \left| \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ dy \\ \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \\ -\frac{\partial f}{\partial y} \cdot dx \cdot dy \\ dx \cdot dy \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x} \\ -\frac{\partial f}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix} \right| dx \cdot dy = \left| \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ -1 \end{pmatrix} \right| dx \cdot dy = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx \cdot dy.$$

Der ganz rechts auftretende Vektor ist gerade ein Normalenvektor der Tangentialebene T .



Und somit ergibt sich das Oberflächenelement zu $dO = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy$ und der gesamte Oberflächeninhalt O der durch $z = f(x, y)$ mit $(x, y) \in D$ gegebenen Fläche zu $O = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy$.

Beispiel 1: Wir berechnen den Oberflächeninhalt des obigen Rotationsparaboloids $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ mit

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 4\}$. Wegen $\frac{\partial f}{\partial x} f(x, y) = -2x$ und $\frac{\partial f}{\partial y} f(x, y) = -2y$ folgt

$O = \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \sqrt{1+4x^2+4y^2} dx dy$. Den Kreis $x^2 + y^2 \leq 4$ vom Radius $R = 2$ zerlegen wir in senkrechte Streifen, so dass $O = \int_{x=-2}^2 \int_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{1+4x^2+4y^2} dy dx$, oh je!

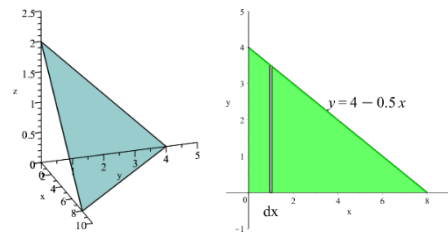
Wir führen Polarkoordinaten ein: $x = r \cdot \cos(\varphi)$, $y = r \cdot \sin(\varphi)$ und $dA = r dr d\varphi$. Dann wird

$O = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^2 \sqrt{1+4r^2 \cdot \sin^2(\varphi) + 4r^2 \cdot \cos^2(\varphi)} r dr d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^2 \sqrt{1+4r^2} r dr d\varphi$. Mit der Substitution $u = 1+4r^2$,

und $\frac{du}{dr} = 8r$, also folgt $O = \frac{1}{8} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{u=1}^{17} \sqrt{u} du d\varphi = \frac{1}{8} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_{u=1}^{17} d\varphi = \frac{1}{12} \cdot (\sqrt{17} - 1) \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{6} \pi \cdot (\sqrt{17} - 1)$.

Beispiel 2: Die Ebene $E: x + 2y + 4z = 8$ bildet mit den drei Koordinatenachsen ein Dreieck. Dieses Dreieck bestehe aus einem Blech der Flächendichte $\rho(x, y, z) = x + 2x + z$ in g/cm^2 , x, y, z in cm. Welche Masse m besitzt dieses Blech?

Die Fläche ist gegeben durch $z = f(x, y) = 2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y$.



$$m = \iint_D \rho(x, y, z) \cdot dO = \iint_D \rho(x, y, z) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy = \int_{x=0}^8 \int_{y=0}^{4-\frac{1}{2}x} (x + 2y + z) \cdot \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} dy dx =$$

$$\int_{x=0}^8 \int_{y=0}^{4-\frac{1}{2}x} \left(2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}y\right) \cdot \frac{\sqrt{21}}{4} dy dx = \frac{\sqrt{21}}{4} \int_{x=0}^8 \left[2y + \frac{3}{4}xy + \frac{3}{4}y^2\right]_{y=0}^{4-\frac{x}{2}} dx = \frac{\sqrt{21}}{64} \int_{x=0}^8 (320 - 16x - 3x^2) dx = 24\sqrt{21},$$

so dass m etwa 110 g beträgt.

4.b. Das Oberflächenintegral 2. Art (Das Flussintegral)

Beim Oberflächenintegral 1. Art ist der Integrand $f(x, y)$ ein Skalar, beim Oberflächenintegral 2. Art ist der Integrand ein Vektor $\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} v_x(x, y, z) \\ v_y(x, y, z) \\ v_z(x, y, z) \end{pmatrix}$. Das Vektorfeld \vec{v} gibt z.B. an, welche Geschwindigkeit \vec{v} eine Flüssigkeit oder ein Gas am Ort (x, y, z) besitzt.

Beim Flussintegral wird nun berechnet, welches Volumen der betreffenden Flüssigkeit (des Gases) pro Zeiteinheit durch eine gegebene Oberfläche O fließt. Die Einheit dieses Flusses Φ ist m^3/s .

Zur Bestimmung des Flusses Φ durch die Fläche O wird diese in infinitesimal kleine Oberflächenelemente dO zerlegt und jeweils der Fluss $d\Phi$ durch dO bestimmt.

Spezialfall 1: \vec{v} steht senkrecht auf $d\vec{O}$. In der Zeit Δt legt die Flüssigkeit den Weg $\vec{v} \cdot \Delta t$ zurück, so dass in dieser Zeit das Flüssigkeitsvolumen $\vec{v} \cdot \Delta t \cdot d\vec{O}$ durch die Fläche $d\vec{O}$ fließt. Der Fluss $d\Phi$ durch $d\vec{O}$ beträgt somit

$$d\Phi = \frac{\vec{v} \cdot \Delta t \cdot d\vec{O}}{\Delta t} = \vec{v} \cdot d\vec{O} \quad \text{in der Einheit} \quad \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \text{m}^2 = \text{m}^3/\text{s}.$$

Spezialfall 2: \vec{v} ist parallel zu $d\vec{O}$. In diesem Fall fließt keine Flüssigkeit durch das Flächenelement $d\vec{O}$, so dass der Fluss durch $d\vec{O}$ gleich Null ist.

Dieser Fluss hängt also von der Richtung ab, mit der die Flüssigkeit auf das Oberflächenelement $d\vec{O}$ trifft. Um diesen betreffenden Winkel festzulegen, versieht man $d\vec{O}$ mit einer Richtung: $d\vec{O}$ soll senkrecht stehen auf $d\vec{O}$.

In Spezialfall 1 sind \vec{v} und $d\vec{O}$ parallel, in Spezialfall 2 schließen \vec{v} und $d\vec{O}$ den Winkel $\alpha = 90^\circ$ ein.

Allgemeiner Fall (siehe Skizze): Der Geschwindigkeitsvektor \vec{v} wird in zwei Komponenten zerlegt: Eine Komponente parallel zu $d\vec{O}$ und eine senkrecht zu $d\vec{O}$. Die Komponente senkrecht zu $d\vec{O}$ liefert keinen Beitrag zum Fluss durch $d\vec{O}$.

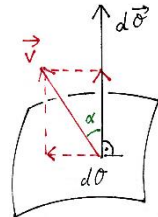
Die Komponente parallel zu $d\vec{O}$, liefert den gesamten Fluss durch $d\vec{O}$ und er beträgt

$$d\Phi = (\vec{v} \cdot \cos(\alpha)) \cdot d\vec{O} = \vec{v} \cdot d\vec{O} \cdot \cos(\alpha) = \vec{v} \cdot d\vec{O}, \quad \text{gerade das Skalarprodukt von } \vec{v} \text{ und } d\vec{O}; \text{ da-}$$

bei ist α der Winkel zwischen den beiden Vektoren \vec{v} und $d\vec{O}$.

Für $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ist $d\Phi > 0$, für $\alpha = 90^\circ$ ist $d\Phi = 0$, für $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ist $d\Phi < 0$.

Wenn \vec{n} einen Normalenvektor von $d\vec{O}$ bezeichnet, der in Richtung von $d\vec{O}$ zeigt, dann gilt $d\vec{O} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} d\vec{O}$.



Vom Oberflächenintegral 1. Art wissen wir, dass $d\vec{O} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy$ gilt, wenn $z = f(x, y)$ die Oberfläche beschreibt.

Von der Tangentialebene $T: z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + f(x_0, y_0)$ des Schaubilds

$$z = f(x, y) \text{ kennen wir einen Normalenvektor } \vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Daraus folgt } d\vec{O} = \frac{1}{|\vec{n}|} \vec{n} d\vec{O} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ -1 \end{pmatrix} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ -1 \end{pmatrix} dx dy.$$

$$\text{Insgesamt ergibt sich der Fluss durch O zu } \Phi = \iint_O \vec{v} \cdot d\vec{O} = \iint_O \vec{v} \cdot \vec{n} dx dy \quad \text{mit } \vec{n} = \pm \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ -1 \end{pmatrix}. \text{ Dabei ist}$$

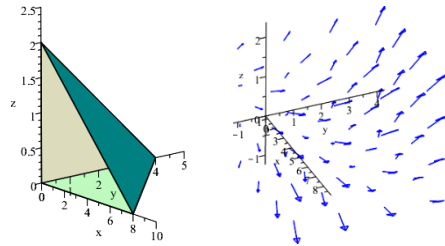
die Oberfläche O durch die Gleichung $z = f(x, y)$ gegeben.

Vereinbarung: Bei geschlossenen Flächen O soll $d\vec{O}$ und damit auch \vec{n} stets nach außen zeigen. Danach richtet sich das Vorzeichen beim Normalenvektor \vec{n} .

Falls die Oberfläche durch $y = g(x, z)$ gegeben ist, gilt entsprechend $\vec{n} = \pm \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \\ -1 \\ \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$.

Falls die Oberfläche durch $x = h(y, z)$ gegeben ist, gilt entsprechend $\vec{n} = \pm \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial h}{\partial z}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$.

Beispiel 1: Gegeben ist die dreiseitige Pyramide mit den Eckpunkten $(0/0/0)$, $(8/0/0)$, $(0/4/0)$ und $(0/0/2)$. Diese Pyramide sei durchflossen von einer Flüssigkeit mit der Geschwindigkeitsverteilung $\vec{v} = \begin{pmatrix} x+y \\ z \\ y+z \end{pmatrix}$. Dabei sind die Koordinaten in m und die Geschwindigkeitskomponenten in m/s zu verstehen. Wie groß ist der Fluss Φ durch diese Pyramide?



schwindigkeitskomponenten in m/s zu verstehen. Wie groß ist der Fluss Φ durch diese Pyramide?

1. Die Bodenfläche durch die drei Punkte $(0/0/0)$, $(8/0/0)$, $(0/4/0)$ hat die Gleichung $z = f(x, y) = 0$.

Folglich lautet der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und er zeigt schon nach außen. Somit beträgt der Fluss

$\Phi_1 = \iint_O \vec{v} \cdot \vec{n} \, dx \, dy = \int_{x=0}^8 \int_{y=0}^{4-x/2} -y \, dy \, dx = \int_{x=0}^8 -\frac{1}{2} \left(4 - \frac{x}{2}\right)^2 \, dx = -\frac{64}{3}$. Das negative Vorzeichen zeigt, dass der Fluss entgegen dem Normalenvektor, also durch die Ebene in die Pyramide hinein geht.

2. Die Vorderfläche durch die drei Punkte $(0/0/0)$, $(8/0/0)$, $(0/0/2)$ hat die Gleichung $y = g(x, z) = 0$. Es

folgt $\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \\ -1 \\ \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und er zeigt sogar aus der Pyramide heraus. Der Fluss beträgt

$\Phi_2 = \iint_O \vec{v} \cdot \vec{n} \, dx \, dy = \int_{x=0}^8 \int_{z=0}^{2-x/4} -z \, dz \, dx = \int_{x=0}^8 -\frac{1}{2} \left(2 - \frac{x}{4}\right)^2 \, dx = -\frac{16}{3}$.

3. Die Rückfläche durch die drei Punkte $(0/0/0)$, $(0/4/0)$, $(0/0/2)$ hat die Gleichung $x = h(y, z) = 0$. Es

folgt $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial h}{\partial z}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und er zeigt sogar aus der Pyramide heraus. Der Fluss beträgt

$\Phi_3 = \iint_O \vec{v} \cdot \vec{n} \, dx \, dy = \int_{y=0}^4 \int_{z=0}^{2-y/2} -y \, dz \, dy = \int_{y=0}^4 -y \left(2 - \frac{y}{2}\right) \, dy = -\frac{16}{3}$.

4. Die schiefe Fläche durch die drei Punkte $(8/0/0)$, $(0/4/0)$, $(0/0/2)$ hat die Gleichung

$$z = f(x, y) = 2 - \frac{x}{4} - \frac{y}{2}. \text{ Es folgt } \vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}. \text{ Dieser Vektor zeigt nach innen, also müssen wir}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ verwenden. Es folgt } \vec{v} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} x+y \\ z \\ y+z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2-\frac{x}{4}-\frac{y}{2} \\ y+2-\frac{x}{4}-\frac{y}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2-\frac{x}{4}-\frac{y}{2} \\ 2-\frac{x}{4}+\frac{y}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = 3 - \frac{x}{8} + \frac{y}{2}.$$

$$\Phi_4 = \iint_O \vec{v} \cdot \vec{n} \, dx \, dy = \int_{x=0}^8 \int_{y=0}^{4-x/2} \left(3 - \frac{x}{8} + \frac{y}{2} \right) dy \, dx = \int_{x=0}^8 \left(\frac{1}{8}x^2 - 3x + 16 \right) dx = \frac{160}{3}.$$

Der Gesamtfluss beträgt $\Phi = \oiint_O \vec{v} \cdot \vec{n} \, dx \, dy = -\frac{64}{3} - \frac{16}{3} - \frac{16}{3} + \frac{160}{3} = \frac{64}{3}$. Das positive Vorzeichen bedeutet, dass

mehr Flüssigkeit austritt als eintritt, nämlich $\frac{64}{3} \text{ m}^3/\text{s}$, so dass wir in der Pyramide eine „Quelle“ haben.

Zusatz: Nach dem **Integralsatz von Gauß** gilt $\oiint_O \vec{v} \cdot \vec{n} \, dO = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{v}) \, dV$. (Ohne Beweis)

In Worten: Der Fluss durch eine geschlossene Oberfläche O ist gleich dem Volumenintegral der Divergenz über das von der Oberfläche O eingeschlossene Volumen V .

Dabei ist für den Vektor $\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} v_x(x, y, z) \\ v_y(x, y, z) \\ v_z(x, y, z) \end{pmatrix}$ die Divergenz ein Skalar und definiert durch das Skalarpro-

$$\text{dukt } \operatorname{div}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x(x, y, z) \\ v_y(x, y, z) \\ v_z(x, y, z) \end{pmatrix} = \frac{\partial v_x}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial v_y}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial v_z}{\partial z}(x, y, z).$$

$\frac{\partial v_x}{\partial x}(x, y, z)$ gibt an, wie sich die Geschwindigkeitskomponente v_x in x -Richtung ändert. Die Einheit ist $\frac{\text{m}}{\text{s}}/\text{m}$.

Entsprechend für y und z . Man sagt: Wenn $\operatorname{div}(\vec{v}) > 0$, dann besteht an der Stelle (x, y, z) eine „Quelle“, bei $\operatorname{div}(\vec{v}) < 0$ eine „Senke“, bei $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$ ist der Vektor \vec{v} an der Stelle (x, y, z) „quellenfrei“.

Zurück zu unserem Beispiel 1: Es gilt $\operatorname{div}(\vec{v}) = \operatorname{div} \begin{pmatrix} x+y \\ z \\ y+z \end{pmatrix} = 1 + 0 + 1 = 2$, also ergibt sich nach Gauß

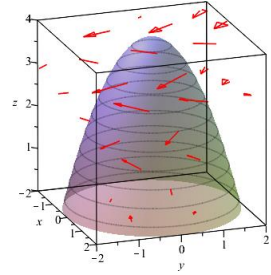
$$\oiint_O \vec{v} \cdot \vec{n} \, dx \, dy = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{v}) \, dV = \iiint_V 2 \, dV = 2 \cdot \iiint_V dV = 2 \cdot V_{\text{Pyramide}} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 \right) \cdot 2 = \frac{64}{3}, \text{ wie oben.}$$

Beispiel 2: Gegeben ist das Paraboloid $z = f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ mit $x^2 + y^2 \leq 4$ samt dem Boden $x^2 + y^2 \leq 4$ in der xy -Ebene. Diese Fläche sei durchflossen von der

Flüssigkeit mit der Geschwindigkeitsverteilung $\vec{v} = \begin{pmatrix} y \\ -z \\ x \end{pmatrix}$. Dabei sind die Koordina-

ten in m und die Geschwindigkeitskomponenten in m/s zu verstehen.

Wie groß ist der Fluss Φ durch diesen Körper?



1. Fluss durch das Paraboloid. Ein Normalenvektor ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ -1 \end{pmatrix}$.

Dieser Vektor zeigt nach innen, also verwenden wir $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix}$, der nach außen zeigt. Damit folgt

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} y \\ -z \\ x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix} = 2xy - 2yz + x = 2xy - 2y(2 - x^2 - y^2) + x. \text{ Für das Integral verwenden wir wegen der Rota-}$$

tionssymmetrie Polarkoordinaten $x = r \cos(\varphi)$, $y = r \sin(\varphi)$ und $dA = r d\varphi dr$: Dann folgt

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 2r^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) - 2r \sin(\varphi) \cdot \underbrace{(2 - r^2 \cos^2(\varphi) - r^2 \sin^2(\varphi))}_{=2-r^2} + r \cos(\varphi) \text{ und}$$

$$\Phi_1 = \int_{r=0}^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} (2r^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) - 2r(2 - r^2) \sin(\varphi) + r \cos(\varphi)) r d\varphi dr =$$

$$\int_{r=0}^2 \left[r^2 \sin^2(\varphi) + 2r(2 - r^2) \cos(\varphi) + r \sin(\varphi) \right]_{\varphi=0}^{2\pi} r dr = \int_{r=0}^2 0 \cdot r dr = 0. \text{ Der Mantel ist quellenfrei: Es fließt genau so viel Flüssigkeit rein wie raus.}$$

2. Fluss durch den Bodenkreis $x^2 + y^2 \leq 4$ und $z = 0$. Mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ folgt $\vec{v} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} y \\ -z \\ x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -x$.

$$\Phi_2 = \iint_O \vec{v} \cdot \vec{n} dx dy = \iint_O (-x) dx dy = \int_{r=0}^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} (-r \cos(\varphi)) r d\varphi dr = \int_{r=0}^2 \left[-r^2 \sin(\varphi) \right]_{\varphi=0}^{2\pi} dr = \int_{r=0}^2 0 dr = 0.$$

Folglich ist auch der Gesamtfluss $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = 0$. d.h. es handelt sich um Quellenfreiheit.

Zusatz: Nach dem Integralsatz von Gauß folgt erfreulicherweise

$$\Phi = \oiint_O \vec{v} \cdot \vec{n} dx dy = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{v}) dV = \iiint_V \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dV = \iiint_V (0 + 0 + 0) dV = 0.$$

Zusatz zum Kurvenintegral 2. Art (Arbeitsintegral):

Der Integralsatz von Stokes (Sir George Gabriel Stokes, Irischer Mathematiker 1819 – 1903).

Das Arbeitsintegral $W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$ über eine einfach geschlossene Kurve C ist gleich dem

Flussintegral $\Phi = \iint_A \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{O}$ der Rotation des Kraftvektors \vec{F} durch eine beliebige Flä-

che A , die von der Kurve C berandet wird:

$$\boxed{\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_A \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{O}} \quad (\text{Ohne Beweis})$$



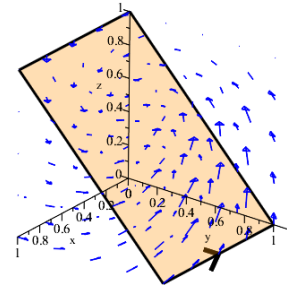
Die Orientierung von $d\vec{O}$ wird durch die Umlaufsrichtung der Kurve C bestimmt:

Rechte-Hand-Regel: Wenn der rechte Zeigefinger in Umlaufsrichtung von C und zugleich der Mittelfinger in die Fläche A hinein zeigt, dann zeigt der Daumen in Richtung von $d\vec{O}$.

Korkenzieher-Regel: Wenn man einen (rechtsgängigen) Korkenzieher in Umlaufsrichtung der Kurve C dreht, so bewegt er sich in Richtung von $d\vec{O}$.

Beispiel 1: Im \mathbb{R}^3 sei $\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}$ und C der geschlossene Weg $(1/1/0) \rightarrow$

$(0/1/0) \rightarrow (0/0/1) \rightarrow (1/0/1) \rightarrow (1/1/0)$, der von oben gesehen im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird. Somit zeigt $d\vec{O}$ immer nach rechts oben.



1. Weg $(1/1/0) \rightarrow (0/1/0)$: $C_1 : \begin{pmatrix} x = 1-t \\ y = 1 \\ z = 0 \end{pmatrix}$ mit $0 \leq t \leq 1$. Dann wird

$$W_1 = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{C_1} (F_x \cdot \dot{x}(t) + F_y \cdot \dot{y}(t) + F_z \cdot \dot{z}(t)) dt = \int_0^1 (0 \cdot (-1) + (1-t) \cdot 0 + 1 \cdot 0) dt = 0.$$

Diese Arbeit ist null, da die Kraftvektoren $\begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \\ 1 \end{pmatrix}$ orthogonal zum Wegvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ stehen.

2. Weg $(0/1/0) \rightarrow (0/0/1)$: $C_2 : \begin{pmatrix} x = 0 \\ y = 1-t \\ z = t \end{pmatrix}$ mit $0 \leq t \leq 1$. Dann wird

$$W_2 = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{C_2} (F_x \cdot \dot{x}(t) + F_y \cdot \dot{y}(t) + F_z \cdot \dot{z}(t)) dt = \int_0^1 (t \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + (1-t) \cdot 1) dt = \int_0^1 (1-t) dt = \frac{1}{2}.$$

3. Weg $(0/0/1) \rightarrow (1/0/1)$: $C_3 : \begin{pmatrix} x = t \\ y = 0 \\ z = 1 \end{pmatrix}$ mit $0 \leq t \leq 1$. Dann wird

$$W_3 = \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{C_3} (F_x \cdot \dot{x}(t) + F_y \cdot \dot{y}(t) + F_z \cdot \dot{z}(t)) dt = \int_0^1 (1 \cdot 1 + t \cdot 0 + 0 \cdot 0) dt = \int_0^1 1 dt = 1.$$

4. Weg $(1/0/1) \rightarrow (1/1/0)$: $C_4 : \begin{pmatrix} x = 1 \\ y = t \\ z = 1-t \end{pmatrix}$ mit $0 \leq t \leq 1$. Dann wird

$$W_4 = \int_{C_4} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{C_4} (F_x \cdot \dot{x}(t) + F_y \cdot \dot{y}(t) + F_z \cdot \dot{z}(t)) dt = \int_0^1 ((1-t) \cdot 0 + 1 \cdot 1 + t \cdot (-1)) dt = \int_0^1 (1-t) dt = \frac{1}{2}.$$

Somit beträgt die gesamte Arbeit $W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = 2$.

Nun zum Flussintegral $\iint_A \text{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{O}$:

Es gilt $\text{rot}(\vec{F}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Unsere Ebene hat die Gleichung $z = f(x, y) = 1 - y$, so dass

$$d\vec{O} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ -1 \end{pmatrix} dx dy = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} dx dy. \text{ Nach den obigen Regeln muss aber } d\vec{O} \text{ nach rechts zeigen, folglich gilt}$$

$$d\vec{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} dx dy. \text{ Somit folgt } \iint_A \text{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{O} = \iint_A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} dx dy = \iint_A 2 dx dy = \int_{x=0}^1 \int_{x=0}^1 2 dx dy = 2 \text{ wie oben.}$$

Dabei ist A das Bodenquadrat mit den Eckpunkten (0,0), (1,0), (1/1) und (0,1).

Beispiel 2: Es sei $C: x^2 + y^2 = R^2$ eine Kreislinie in der xy-Ebene und $\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} z \\ 2x - z \\ 2y \end{pmatrix}$ ein Vektorfeld.

An fünf Oberflächen, welche durch die Kreislinie C berandet werden, wird der Satz von Stokes erläutert.

Zunächst zum Arbeitsintegral $W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$:

Für den Kreisrand C verwenden wir Polarkoordinaten $x = r \cdot \cos(\varphi) = R \cdot \cos(\varphi)$, $y = r \cdot \sin(\varphi) = R \cdot \sin(\varphi)$ und $z = 0$. Dann wird der Kreis im Uhrzeigersinn durchlaufen. Das Arbeitsintegral folgt zu

$$W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_C (F_x \cdot \dot{x}(t) + F_y \cdot \dot{y}(t) + F_z \cdot \dot{z}(t)) dt = \int_0^{2\pi} (0 \cdot (-R \cdot \sin(\varphi)) + 2R \cdot \cos(\varphi) \cdot R \cdot \cos(\varphi) + 2R \cdot \sin(\varphi) \cdot 0) d\varphi =$$

$$2R^2 \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi) d\varphi = 2R^2 \cdot \frac{1}{2} [\varphi + \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi)]_0^{2\pi} = 2\pi R^2.$$

Nun zum Flussintegral $\iint_A \text{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{O}$ für fünf verschiedene Oberflächen O:

$$\text{Es ist } \text{rot}(\vec{F}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z \\ 2x - z \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 \\ 1-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\textcircled{1} \text{ Zur Kreisfläche } x^2 + y^2 \leq R^2 \text{ und } z = 0. \text{ Aus } z = f(x, y) = 0 \text{ folgt } d\vec{O} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ -1 \end{pmatrix} dx dy = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dx dy. \text{ Da}$$

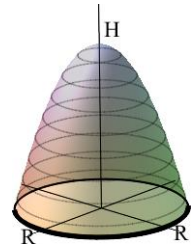
$$C \text{ im Uhrzeigersinn durchlaufen, muss } d\vec{O} \text{ nach oben zeigen, so dass } d\vec{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dx dy.$$

$$\text{Mit Polarkoordinaten folgt } \iint_A \text{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{O} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} r dr d\varphi = \int_{r=0}^R \int_{\varphi=0}^{2\pi} 2r d\varphi dr = \int_{r=0}^R 4\pi r dr = 2\pi R^2, \text{ wie oben}$$

beim Arbeitsintegral.

② **Zum Rotationsparaboloid** $z = f(x, y) = R^2 - x^2 - y^2$ mit $z \geq 0$, ohne Bodenkreis. Es

$$\text{folgt } d\vec{O} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ -1 \end{pmatrix} dx dy = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ -1 \end{pmatrix} dx dy. \text{ Da } d\vec{O} \text{ nach außen zeigen muss, verwenden wir}$$



$$d\vec{O} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix} dx dy. \text{ Mit den Polarkoordinaten } x = r \cdot \cos(\varphi) \text{ und } y = r \cdot \sin(\varphi) \text{ folgt } d\vec{O} = \begin{pmatrix} 2r \cdot \cos(\varphi) \\ 2r \cdot \sin(\varphi) \\ 1 \end{pmatrix} r dr d\varphi.$$

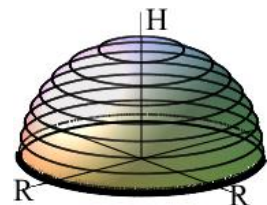
$$\text{Damit folgt } \iint_A \text{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{O} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2r \cdot \cos(\varphi) \\ 2r \cdot \sin(\varphi) \\ 1 \end{pmatrix} r dr d\varphi = \int_{r=0}^R \int_{\varphi=0}^{2\pi} (6r^2 \cos(\varphi) + 2r^2 \sin(\varphi) + 2r) dr d\varphi =$$

$$\int_{r=0}^R \left(\underbrace{6r^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos(\varphi) d\varphi}_{=0} + \underbrace{2r^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin(\varphi) d\varphi}_{=0} + \int_{\varphi=0}^{2\pi} 2r d\varphi \right) dr = \int_{r=0}^R 4\pi r dr = 2\pi R^2, \text{ wie oben.}$$

③ **Zur Halbkugelfläche** $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ mit $z \geq 0$, ohne Boden.

Aus $z = f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ folgt

$$d\vec{O} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ -1 \end{pmatrix} dx dy = \begin{pmatrix} \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \\ \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \\ -1 \end{pmatrix} dx dy. \text{ Mit den Polarkoordinaten}$$



$$x = r \cdot \cos(\varphi) \text{ und } y = r \cdot \sin(\varphi) \text{ folgt } d\vec{O} = \begin{pmatrix} \frac{-r \cdot \cos(\varphi)}{\sqrt{R^2 - r^2}} \\ \frac{-r \cdot \sin(\varphi)}{\sqrt{R^2 - r^2}} \\ -1 \end{pmatrix} r dr d\varphi. \text{ Da } d\vec{O} \text{ nach außen zeigen muss, verwenden}$$

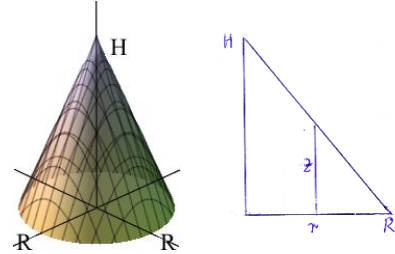
$$\text{wir } d\vec{O} = \begin{pmatrix} \frac{r \cdot \cos(\varphi)}{\sqrt{R^2 - r^2}} \\ \frac{r \cdot \sin(\varphi)}{\sqrt{R^2 - r^2}} \\ 1 \end{pmatrix} r dr d\varphi.$$

$$\text{Damit folgt } \iint_A \text{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{O} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{r \cdot \cos(\varphi)}{\sqrt{R^2 - r^2}} \\ \frac{r \cdot \sin(\varphi)}{\sqrt{R^2 - r^2}} \\ 1 \end{pmatrix} r dr d\varphi = \int_{r=0}^R \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\frac{3r^2 \cdot \cos(\varphi)}{\sqrt{R^2 - r^2}} + \frac{r^2 \cdot \sin(\varphi)}{\sqrt{R^2 - r^2}} + 2r \right) d\varphi dr =$$

$$\int_{r=0}^R \left(\frac{3r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos(\varphi) d\varphi}_{=0} + \frac{r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin(\varphi) d\varphi}_{=0} + \int_{\varphi=0}^{2\pi} 2r d\varphi \right) dr = \int_{r=0}^R 4\pi r dr = 2\pi R^2, \text{ wie oben.}$$

④ **Zum Kegelmantel** vom Radius R und der Höhe H : Nach dem Strahlensatz gilt $\frac{z}{R-r} = \frac{H}{R}$. Daraus folgt $z = f(x, y) = \frac{H}{R} \cdot (R - r)$ mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\text{Somit gilt } d\vec{O} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ -1 \end{pmatrix} dx dy = \begin{pmatrix} -\frac{H}{R} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ -\frac{H}{R} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ -1 \end{pmatrix} dx dy.$$



$$\text{Mit den Polarkoordinaten } x = r \cdot \cos(\varphi) \text{ und } y = r \cdot \sin(\varphi) \text{ folgt } d\vec{O} = \begin{pmatrix} -\frac{H}{R} \frac{r \cos(\varphi)}{r} \\ -\frac{H}{R} \frac{r \sin(\varphi)}{r} \\ -1 \end{pmatrix} r dr d\varphi.$$

Da $d\vec{O}$ nach außen zeigen soll, müssen wir den Gegenvektor verwenden. Es folgt

$$\iint_A \text{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{O} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{H}{R} \cos(\varphi) \\ \frac{H}{R} \sin(\varphi) \\ 1 \end{pmatrix} r dr d\varphi = \int_{r=0}^R \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(3 \frac{H}{R} r \cos(\varphi) + \frac{H}{R} r \sin(\varphi) + 2r \right) d\varphi dr = \int_{r=0}^R 4\pi r dr = 2\pi R^2, \text{ wie oben.}$$

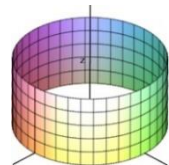
⑤ **Zum Zylindermantel** vom Radius R und der Höhe H **samt Deckfläche**, ohne Grundfläche.

α. Zum Zylindermantel: Man verwendet Zylinderkoordinaten $x = R \cos(\varphi)$, $y = R \sin(\varphi)$, z . Ein Normalenvektor \vec{n} muss in jedem Punkt $P(x/y/z)$ des Mantels radial nach außen zeigen:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos(\varphi) \\ R \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Für } dO \text{ ergibt sich } dO = R d\varphi \cdot dz, \text{ so dass}$$

$$d\vec{O} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} dO = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} R d\varphi dz \text{ gilt. Es folgt}$$

$$\iint_A \text{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{O} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^H \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} R dz d\varphi = \int_{z=0}^H \int_{\varphi=0}^{2\pi} (3 \cos(\varphi) + \sin(\varphi)) R d\varphi dz = \int_{z=0}^H 0 dz = 0.$$



β. Zur Deckfläche $z = H$: Man verwendet Polarkoordinaten $x = R \cos(\varphi)$, $y = R \sin(\varphi)$. Dann folgt mit

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $dO = r dr d\varphi$ der Vektor $d\vec{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} r dr d\varphi$ das Integral

$$\iint_A \text{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{O} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} r dr d\varphi = \int_{r=0}^R \int_{\varphi=0}^{2\pi} 2r d\varphi dz = \int_{r=0}^R 4\pi r dr = 2\pi R^2, \text{ wie oben.}$$

WUNDERSCHÖN !!!