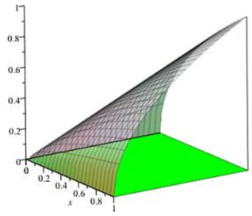
1. Doppelintegrale

1. a. Es sei $f(x,y)=\sqrt{x\cdot y}$ für $0\le x\le 1$ und $0\le y\le 1$. Bestimmen Sie das Volumen V des Körpers zwischen dem Schaubild von f und der xy-Ebene.



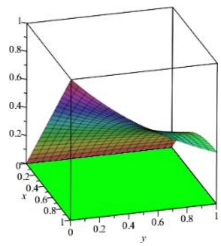
Zerlegung des Quadrats in waagerechte Streifen:

$$V=\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{1}\sqrt{xy}\,dx\,dy=\int_{y=0}^{1}\left[\frac{2}{3}x^{3/2}y^{1/2}\right]_{x=0}^{1}dy=\int_{y=0}^{1}\frac{2}{3}y^{1/2}\,dy=\left[\frac{4}{9}y^{3/2}\right]_{y=0}^{1}=\frac{4}{9}\text{ oder}$$

durch Zerlegung des Quadrats in senkrechte Streifen:

$$V=\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}\sqrt{xy}\,dy\,dx=\int_{x=0}^{1}\left[\frac{2}{3}x^{1/2}y^{3/2}\right]_{y=0}^{1}dx=\int_{x=0}^{1}\frac{2}{3}x^{1/2}\,dx=\left[\frac{4}{9}x^{3/2}\right]_{x=0}^{1}=\frac{4}{9}.$$

b. Es sei $f(x,y)=x\cdot e^{-x\cdot y}$ für $0\le x\le 1$ und $0\le y\le 1$. Bestimmen Sie das Volumen V des Körpers zwischen dem Schaubild von f und der xy-Ebene.



Zerlegung des Quadrats in waagerechte Streifen:

$V=\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{1}x\cdot e^{-x\cdot y}\,dx\,dy$. Partielle Integration: $\int f\cdot g=F\cdot g-\int F\cdot g'$.

$\int \underbrace{x}_{g}\cdot \underbrace{e^{-x\cdot y}}_{f}\,dx=-\frac{1}{y}e^{-x\cdot y}\cdot x+\int\frac{1}{y}e^{-x\cdot y}\,dx=-\frac{1}{y}e^{-x\cdot y}\cdot x-\frac{1}{y^2}e^{-x\cdot y}$. Damit folgt

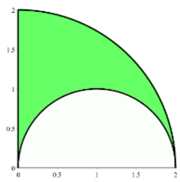
$\int_{x=0}^{1}x\cdot e^{-x\cdot y}dx=\left[-\frac{1}{y}e^{-x\cdot y}\cdot x-\frac{1}{y^2}e^{-x\cdot y}\right]_{x=0}^{x=1}=-\frac{1}{y}e^{-y}-\frac{1}{y^2}e^{-y}+\frac{1}{y^2}=\frac{-e^{-y}\cdot y-e^{-y}}{y^2}+\frac{1}{y^2}$. Und da gehört sehr viel Fantasie dazu, eine Stammfunktion zu erkennen: Laut Quotientenregel ist sie $\frac{e^{-y}}{y}-\frac{1}{y}$ bzw. $\frac{e^{-y}-1}{y}$

Also folgt $V=\left[\frac{e^{-y}-1}{y}\right]_{y=0}^{1}=e^{-1}-1-\lim_{y\to 0}\frac{e^{-y}-1}{y}=e^{-1}-1-\lim_{y\to 0}\frac{-e^{-y}}{1}=e^{-1}$ nach Guillaume François Antoine, Marquis de l'Hôpital; eigentlich nach Johann I Bernoulli, dem jüngeren Bruder des jedem bekannten Jakob I Bernoulli, beide Vollblut-Basler.

Wir versuchen nun die Zerlegung des Quadrats in senkrechte Streifen:

$$V=\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}x\cdot e^{-x\cdot y}\,dy\,dx=\int_{x=0}^{1}\left[-e^{-x\cdot y}\right]_{y=0}^{1}dx=\int_{x=0}^{1}\left(-e^{-x}+1\right)dx=\left[e^{-x}+x\right]_{x=0}^{1}=e^{-1}.$$

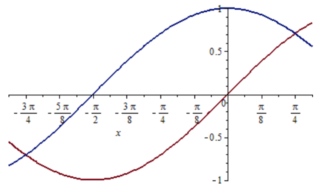
2. Es sei $f(x,y)=x\cdot y$ für $x,y\in\mathbb{R}$. Das Flächenstück A sei im ersten Quadranten begrenzt durch die beiden Kreise $x^2+y^2=4$ und $(x-1)^2+y^2=1$ und durch die y-Achse; siehe Skizze. Bestimmen Sie $\iint_A f(x,y)\,dA$.



Durch Zerlegung in senkrechte Streifen folgt

$$\int_{x=0}^{2}\int_{y=\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}x\,y\,dy\,dx=\int_{x=0}^{2}\left[\frac{1}{2}x\,y^2\right]_{y=\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}dx=\int_{x=0}^{2}(2x-x^2)\,dx=\frac{4}{3}$$

3. Die beiden Schaubilder von $f(x)=\sin(x)$ und $g(x)=\cos(x)$ begrenzen im Intervall $-\frac{3\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}$ ein Flächenstück A. Denn $\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right)=\cos(-\frac{3}{4}\pi)=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ und $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schwerpunktes $S(x_S\,|\,y_S)$ von A mit Hilfe der Formeln $x_S=\frac{1}{A}\iint_A x\,dy\,dx$ und $y_S=\frac{1}{A}\iint_A y\,dy\,dx$. Hinweis: Bei y_S verwenden Sie vorteilhaft $\cos^2(x)-\sin^2(x)=\cos(2x)$.



$$A=\int_{-3\pi/4}^{\pi/4}\left(\cos(x)-\sin(x)\right)dx=\left[\sin(x)+\cos(x)\right]_{-3\pi/4}^{\pi/4}=\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}.$$

oder $A=\iint_A 1\,dy\,dx=\int_{x=-3\pi/4}^{\pi/4}\int_{y=\sin(x)}^{\cos(x)}dy\,dx=\int_{x=-3\pi/4}^{\pi/4}\left[y\right]_{y=\sin(x)}^{y=\cos(x)}dx=\int_{-3\pi/4}^{\pi/4}\left(\cos(x)-\sin(x)\right)dx$ wie oben.

$x_S\cdot A=\iint_A x\,dy\,dx=\int_{x=-3\pi/4}^{\pi/4}\int_{y=\sin(x)}^{\cos(x)}x\,dy\,dx=\int_{x=-3\pi/4}^{\pi/4}\left[xy\right]_{y=\sin(x)}^{\cos(x)}dx=\int_{x=-3\pi/4}^{\pi/4}\left(x\cdot\left(\cos(x)-\sin(x)\right)\right)dx=$ (part. Int.)

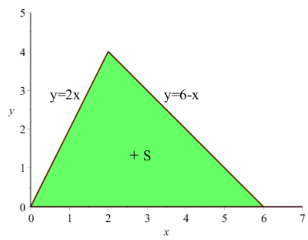
$=\left[x\cdot\left(\sin(x)+\cos(x)\right)\right]_{-3\pi/4}^{\pi/4}-\int_{-3\pi/4}^{\pi/4}\left(\sin(x)+\cos(x)\right)dx=\left[x\cdot\left(\sin(x)+\cos(x)\right)+\cos(x)-\sin(x)\right]_{-3\pi/4}^{\pi/4}=$

$=\frac{\pi}{4}\sqrt{2}-\frac{3\pi}{4}\sqrt{2}=-\frac{\pi}{2}\sqrt{2}$, so dass $x_S=-\frac{\pi}{2}\sqrt{2}\Big/2\sqrt{2}=-\frac{\pi}{4}$. Und das ist genau der Mittelwert der Grenzen $-3\pi/4$ und $\pi/4$.

Analog $y_S\cdot A=\iint_A y\,dy\,dx=\int_{x=-3\pi/4}^{\pi/4}\int_{y=\sin(x)}^{\cos(x)}y\,dy\,dx=\int_{x=-3\pi/4}^{\pi/4}\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=\sin(x)}^{\cos(x)}dx=\int_{x=-3\pi/4}^{\pi/4}\frac{1}{2}\left(\cos^2(x)-\sin^2(x)\right)dx=$

$\int_{-3\pi/4}^{\pi/4}\frac{1}{2}\cos(2x)\,dx=\left[\frac{1}{4}\sin(2x)\right]_{-3\pi/4}^{\pi/4}=\frac{1}{4}\left(\sin(\pi/2)-\sin(-3\pi/2)\right)=\frac{1}{4}(1-1)=0$, so dass $y_S=0$. Und das stimmt, da gleich viel Fläche über wie unter der x-Achse liegt.

4. Die beiden Geraden mit den Gleichungen $y=2x$ und $y=6-x$ begrenzen mit der positiven x-Achse ein Dreieck A. Auf diesem Dreieck ist die Funktion $f(x,y)=x\cdot y^2$ definiert. Berechnen Sie $\iint_A f(x,y)\,dA$.



a. durch Zerlegung von A in waagerechte Streifen: $\int_{y=0}^{4}\int_{x=y/2}^{x=6-y}f(x,y)\,dx\,dy$

$$\int_{y=0}^{4}\int_{x=y/2}^{x=6-y}x\cdot y^2\,dx\,dy=\int_{y=0}^{4}\left[\frac{1}{2}x^2y^2\right]_{x=y/2}^{x=6-y}dy=\int_{y=0}^{4}\left(\frac{3}{8}y^4-6y^3+18y^2\right)dy=\frac{384}{5}$$

b. durch Zerlegung in senkrechte Streifen. Man benötigt zwei Integrale, einmal über das linke Teildreieck und einmal über das rechte Teildreieck.

$$I_{links}=\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{2x}x\cdot y^2\,dy\,dx=\frac{256}{15},\quad I_{rechts}=\int_{x=2}^{6}\int_{y=0}^{6-x}x\cdot y^2\,dy\,dx=\frac{896}{15},\quad I_{links}+I_{rechts}=\frac{384}{5}.$$

c. $A=\int_{y=0}^{4}\int_{x=y/2}^{x=6-y}1\,dx\,dy=\int_{y=0}^{4}\left[x\right]_{x=y/2}^{x=6-y}dy=\int_{y=0}^{4}\left(6-\frac{3}{2}y\right)dy=\left[6y-\frac{3}{4}y^2\right]_0^4=12.$

Oder einfach $A=\frac{1}{2}g\cdot h=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4=12$.

$$x_S \cdot A = \int_{y=0}^{4}\int_{x=y/2}^{x=6-y} x\,dx\,dy = \int_{y=0}^{4}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{x=y/2}^{x=6-y} dy = \int_{y=0}^{4}\left(\frac{3}{8}y^2-6y+18\right)dy = \left[\frac{1}{8}y^3-3y^2+18y\right]_0^4 = 32,$$

so dass $x_S = 8/3$.

$$y_S \cdot A = \int_{y=0}^{4}\int_{x=y/2}^{x=6-y} y\,dx\,dy = \int_{y=0}^{4}[xy]_{x=y/2}^{x=6-y} dy = \int_{y=0}^{4}\left(6y-\frac{3}{2}y^2\right)dy = \left[3y^2-\frac{1}{2}y^3\right]_0^4 = 16,$$ so dass $y_S = 4/3$.

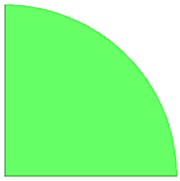
Umständlicher wäre die andere Integrationsreihenfolge:

$$x_S \cdot A = \int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{2x} x\,dy\,dx + \int_{x=2}^{6}\int_{y=0}^{6-x} x\,dy\,dx = \int_{x=0}^{2}[xy]_{y=0}^{2x}dx + \int_{x=2}^{6}[xy]_{y=0}^{6-x}dx = \int_{x=0}^{2}2x^2\,dx + \int_{x=2}^{6}(6x-x^2)\,dx = \frac{16}{3}+\frac{80}{3} = 32$$

$$y_S \cdot A = \int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{2x} y\,dy\,dx + \int_{x=2}^{6}\int_{y=0}^{6-x} y\,dy\,dx = \int_{x=0}^{2}\left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{2x}dx + \int_{x=2}^{6}\left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{6-x}dx = \int_{x=0}^{2}2x^2\,dx + \int_{x=2}^{6}\tfrac{1}{2}(6-x)^2\,dx = \frac{16}{3}+\frac{32}{3} = 16.$$

Wie oben folgt $x_S = 8/3$ und $y_S = 4/3$.

5. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schwerpunktes $S(x_S\,|\,y_S)$ des Viertelkreises vom Radius R.



a. Mit Hilfe der rechtwinkligen Koordinaten x, y. Zerlegen Sie die Fläche in senkrechte Streifen.

$$x_S \cdot A = \iint_A x\,dA = \int_{x=0}^{R}\int_{y=0}^{\sqrt{R^2-x^2}} x\,dy\,dx = \int_{x=0}^{R}[xy]_{y=0}^{\sqrt{R^2-x^2}}dx = \int_{x=0}^{R} x\sqrt{R^2-x^2}\,dx.$$

Mit der Substitution $u = R^2-x^2$ folgt $x_S \cdot A = -\frac{1}{2}\int_{u=R^2}^{0}\sqrt{u}\,du = -\frac{1}{3}\left[u^{3/2}\right]_{u=R^2}^{0} = \frac{1}{3}R^3$, also $x_S = \frac{4}{3\pi}R$.

$$y_S \cdot A = \iint_A y\,dA = \int_{x=0}^{R}\int_{y=0}^{\sqrt{R^2-x^2}} y\,dy\,dx = \int_{x=0}^{R}\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{\sqrt{R^2-x^2}}dx = \frac{1}{2}\int_{x=0}^{R}(R^2-x^2)\,dx = \frac{1}{2}\left[R^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{x=0}^{R} = \frac{1}{3}R^3$$

also $y_S = \frac{4}{3\pi}R$. Folglich lautet der Schwepunkt $S\left(\frac{4}{3\pi}R\Big/\frac{4}{3\pi}R\right) \approx (0{,}4244\,R/0{,}4244\,R)$.

b. Mit Hilfe der rechtwinkligen Koordinaten x, y. Zerlegen Sie die Fläche in waagrechte Streifen.

$$x_S \cdot A = \iint_A x\,dA = \int_{y=0}^{R}\int_{x=0}^{\sqrt{R^2-y^2}} x\,dx\,dy = \int_{y=0}^{R}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{x=0}^{\sqrt{R^2-y^2}}dy = \frac{1}{2}\int_{y=0}^{R}(R^2-y^2)\,dy = \frac{1}{2}\left[R^2y-\frac{1}{3}y^3\right]_{y=0}^{R} = \frac{1}{3}R^3.$$

also $x_S = \frac{4}{3\pi}R$.

$$y_S \cdot A = \iint_A y\,dA = \int_{y=0}^{R}\int_{x=0}^{\sqrt{R^2-y^2}} y\,dx\,dy = \int_{y=0}^{R}[xy]_{x=0}^{\sqrt{R^2-y^2}}dy = \int_{y=0}^{R} y\sqrt{R^2-y^2}\,dx$$

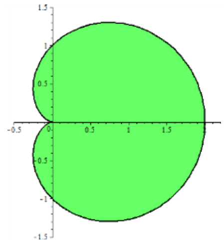
Mit der Substitution $u = R^2-y^2$ folgt $y_S \cdot A = -\frac{1}{2}\int_{u=R^2}^{0}\sqrt{u}\,du = -\frac{1}{3}\left[u^{3/2}\right]_{u=R^2}^{0} = \frac{1}{3}R^3$, also $y_S = \frac{4}{3\pi}R$.

c. Mit Hilfe von Polarkoordinaten r, φ.

$$x_S \cdot A = \iint_A x\,dA = \int_{\varphi=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{R} r\cdot\cos(\varphi)\,r\,dr\,d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\pi/2}\left[\frac{1}{3}r^3\right]_{r=0}^{R}\cos(\varphi)\,d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\pi/2}\frac{1}{3}R^3\cos(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{3}R^3,$$ wie oben.

$$y_S \cdot A = \iint_A y\,dA = \int_{\varphi=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{R} r\cdot\sin(\varphi)\,r\,dr\,d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\pi/2}\left[\frac{1}{3}r^3\right]_{r=0}^{R}\sin(\varphi)\,d\varphi = -\int_{\varphi=0}\frac{1}{3}R^3\cos(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{3}R^3,$$ wie oben.

6. Durch $r(\varphi)=1+\cos(\varphi)$ mit $0\le\varphi<2\pi$ ist die sogenannte Kardiole gegeben.



   a. Es soll der Flächeninhalt A bestimmt werden.

$$A=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1+\cos(\varphi)}1\,r\,dr\,d\varphi=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left[\frac{1}{2}r^2\right]_{r=0}^{1+\cos(\varphi)}d\varphi=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{1}{2}\left(1+\cos(\varphi)\right)^2\,d\varphi=$$

$$\frac{1}{2}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(1+2\cos(\varphi)+\cos^2(\varphi)\right)d\varphi=\frac{1}{2}\left[\varphi+2\sin(\varphi)+\frac{1}{2}\left(\varphi+\sin(\varphi)\cos(\varphi)\right)\right]_{\varphi=0}^{2\pi}=\frac{3}{2}\pi\,.$$

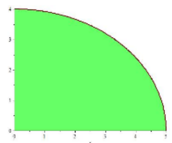
   b. Stellen Sie die Formeln auf zur Bestimmung der Koordinaten des Schwerpunktes $S(x_S\,|\,y_S)$ von A.

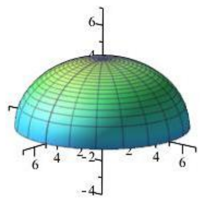
$$x_S\cdot A=\iint_A x\,dA=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1+\cos(\varphi)}r\cdot\cos(\varphi)\,r\,dr\,d\varphi=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left[\frac{1}{3}r^3\right]_{r=0}^{1+\cos(\varphi)}\cos(\varphi)\,d\varphi=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{1}{3}\left(1+\cos(\varphi)\right)^3\cos(\varphi)\,d\varphi=\frac{5}{4}\pi$$

$$y_S\cdot A=\iint_A y\,dA=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1+\cos(\varphi)}r\cdot\sin(\varphi)\,r\,dr\,d\varphi=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left[\frac{1}{3}r^3\right]_{r=0}^{1+\cos(\varphi)}\sin(\varphi)\,d\varphi=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{1}{3}\left(1+\cos(\varphi)\right)^3\sin(\varphi)\,d\varphi=0\,.$$

   Somit ist $S\left(\frac{5}{6}\big/0\right)$. Die beiden Integrale wurden mit Maple berechnet.

2. Dreifachintegrale





1. Durch die Gleichung $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ ist eine Ellipse mit den Halbachsen a und b gegeben. Nach z aufgelöst: $z=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. Der obere Teil hat die Gleichung $z=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$.
   Im Schaubild ist $a=5$ und $b=4$ gewählt.
   Wenn das Schaubild von $z=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ für $0\le x\le a$ um die z-Achse rotiert, dann entsteht die obere Hälfte eines Rotationsellipsoides.
   Bestimmen Sie das Volumen V und die Koordinaten des Schwerpunktes S dieses Rotationskörpers.

$$V=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a}\int_{z=0}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-r^2}}r\,dz\,dr\,d\varphi=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a}[z]_{z=0}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-r^2}}\,r\,dr\,d\varphi=\frac{b}{a}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a}\sqrt{a^2-r^2}\cdot r\,dr\,d\varphi.$$ Mit der Substitution $u=a^2-r^2$

folgt $$V=\frac{b}{a}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{u=a^2}^{0}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{u}\right)du\,d\varphi=\frac{b}{a}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left[-\frac{1}{3}u^{3/2}\right]_{u=a^2}^{0}d\varphi=\frac{b}{a}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{1}{3}a^3\,d\varphi=\frac{2}{3}\pi a^2 b\,.$$

Weiter folgt

$$x_S\cdot V=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a}\int_{z=0}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-r^2}}x\,r\,dz\,dr\,d\varphi=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a}r\cos(\varphi)\,[z]_{z=0}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-r^2}}\,r\,dr\,d\varphi=\frac{b}{a}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a}r\cos(\varphi)\,\sqrt{a^2-r^2}\cdot r\,dr\,d\varphi=$$

$$=\frac{b}{a}\int_{r=0}^{a}\int_{\varphi=0}^{2\pi}r\cos(\varphi)\,\sqrt{a^2-r^2}\cdot r\,dr\,d\varphi=\frac{b}{a}\int_{r=0}^{a}r^2\,\sqrt{a^2-r^2}\,[\sin(\varphi)]_{\varphi=0}^{2\pi}\,dr=0$$, was zu erwarten war.

Analog folgt $$y_S\cdot V=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a}\int_{z=0}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-r^2}}y\,r\,dz\,dr\,d\varphi=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a}\int_{z=0}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-r^2}}r\,\sin(\varphi)\,r\,dz\,dr\,d\varphi=0\,.$$

$$z_S\cdot V=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a}\int_{z=0}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-r^2}}z\,r\,dz\,dr\,d\varphi=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a}\left[\frac{1}{2}z^2\right]_{z=0}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-r^2}}r\,dr\,d\varphi=\frac{b^2}{2a^2}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a}(a^2-r^2)\,r\,dr\,d\varphi=\frac{b^2}{2a^2}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left[\frac{1}{2}a^2r^2-\frac{1}{4}r^4\right]_{r=0}^{a}d\varphi=$$

$$=\frac{b^2}{2a^2}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left[\frac{1}{2}a^2r^2-\frac{1}{4}r^4\right]_{r=0}^{a}d\varphi=\frac{b^2}{2a^2}\cdot\frac{1}{4}a^4\cdot 2\pi=\frac{1}{4}\pi a^2b^2\,.$$ Folglich ist $$z_S=\frac{\frac{1}{4}\pi a^2b^2}{\frac{2}{3}\pi a^2 b}=\frac{3}{8}b\,.$$

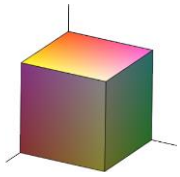
Oder: Wenn man $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ nach x auflöst, so erhält man $r=x=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-z^2}$. Dann folgt analog:

$$z_S \cdot V=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{b}\int_{r=0}^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-z^2}} z\ r\,dz\,dr\,d\varphi=\ldots=\frac{1}{4}\pi a^2 b^2 .$$

2. Wenn ein punktförmiger Körper der Masse dm mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine Achse rotiert, dann besitzt er die kinetische Rotationsenergie $\Delta W_{kin}=\frac{1}{2}dm\,v^2=\frac{1}{2}dm\,(r\omega)^2=\frac{1}{2}\cdot r^2 dm\cdot\omega^2$. Wenn nun ein ganzer Körper mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine Achse rotiert, so gilt $W_{kin}=\frac{1}{2}\cdot\omega^2\cdot\int_m r^2\ dm$. Wegen $m=\rho\cdot V$ mit der Dichte ρ gilt $W_{kin}=\frac{1}{2}\cdot\omega^2\cdot\rho\cdot\int_m r^2\ dV$.

Definition: Wenn ein homogener Körper (Dichte ρ ist konstant) um die z-Achse rotiert, dann heißt $\boxed{J_z=\rho\iiint_V r^2\ dV}$ das Trägheitsmoment dieses Köpers.

a. Im Koordinatensystem befindet sich ein Würfel der Dichte ρ und der Kantenlänge a in der Lage $0\le x\le a$, $0\le y\le a$ und $0\le z\le a$.

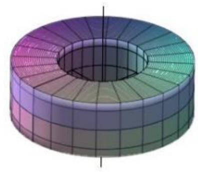


Bestimmen Sie sein Trägheitsmoment J bezüglich der z-Achse.

Wegen $r^2=x^2+y^2$ folgt $J=\rho\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{a}\int_{z=0}^{a}(x^2+y^2)\ dz\,dy\,dx=a\cdot\rho\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{a}(x^2+y^2)\ dy\,dx=$

$$=a\cdot\rho\int_{x=0}^{a}\left[x^2y+\frac{1}{3}y^3\right]_{y=0}^{a}dx=a^2\cdot\rho\int_{x=0}^{a}\left(x^2+\frac{1}{3}a^2\right)dx=a^2\cdot\rho\cdot\frac{2}{3}a^3=\frac{2}{3}\cdot\rho\cdot a^3\cdot a^2=\frac{2}{3}m\,a^2 .$$

b. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment eines homogenen Hohlzylinders der Radien R_1 und R_2, $R_1<R_2$, bezüglich seiner Körperachse, der z-Achs Die Höhe sei h.



$$J_z=\rho\iiint_V r^2\ dV=\rho\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=R_1}^{R_2}\int_{z=0}^{H} r^2\ dz\ r\,dr\,d\varphi=\rho\cdot h\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=R_1}^{R_2} r^3\,dr\,d\varphi=\frac{1}{4}\rho\cdot h\int_{\varphi=0}^{2\pi}(R_2^4-R_1^4)\ d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\pi\rho h(R_2^4-R_1^4)=\frac{1}{2}\rho\cdot\pi(R_2^2-R_1^2)\cdot h\cdot(R_2^2+R_1^2)=\frac{1}{2}\rho\cdot V\cdot(R_2^2+R_1^2)=\frac{1}{2}m(R_1^2+R_2^2).$$

3.a.1. Das Kurvenintegral 1. Art um Reellen

1. Durch $\begin{cases}x(t)=t-\frac{1}{2}t^2\\ y(t)=\frac{4}{3}t^{3/2}\end{cases}$ für $0\le t\le 2$ ist eine Kurve gegeben. Bestimmen Sie Ihre Länge L.

$$L=\int_0^2\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}\ dt=\int_0^2\sqrt{(1-t)^2+(2t^{1/2})^2}\ dt=\int_0^2\sqrt{(1-t)^2+4t}\ dt=\int_0^2\sqrt{(1+t)^2}\ dt=\int_0^2(1+t)\,dt=4 .$$

2. Für ein $a\in\mathbb{R}^+$ ist durch $\begin{cases}x(t)=t\\ y(t)=a\cdot\cosh\left(\frac{t}{a}\right)\end{cases}$ für $-a\le t\le a$ eine Kurve gegeben. Berechnen Sie ihre Länge.

$$L=\int_{-a}^{a}\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}\ dt=\int_{-a}^{a}\sqrt{1^2+\sinh^2\left(\frac{t}{a}\right)}dt=\int_{-a}^{a}\sqrt{1+\frac{e^{\frac{2t}{a}}-2+e^{-\frac{2t}{a}}}{4}}\ dt=\int_{-a}^{a}\sqrt{\frac{e^{\frac{2t}{a}}+2+e^{-\frac{2t}{a}}}{4}}\ dt=\int_{-a}^{a}\frac{1}{2}\left(e^{\frac{t}{a}}+e^{-\frac{t}{a}}\right)dt=$$

$$\frac{a}{2}\cdot\left[e^{\frac{t}{a}}-e^{-\frac{t}{a}}\right]_{-a}^{a}=a\cdot\left(e-e^{-1}\right).$$

3. Es sei $\rho(x,y)=2xy$ die Liniendichte in der Einheit g/cm eines geraden Drahtes mit den Endpunkten $(0/0)$ und $(6/2)$. Berechnen Sie die Masse M dieses Drahtes.

   Parametrisierung der Strecke: $\begin{cases} x(t)=6t \\ y(t)=2t \end{cases}$ für $0\le t\le 1$. Wegen $dM=\rho(x,y)\cdot ds$ folgt

   $$\int_C \rho(x,y)\,ds=\int_0^1 \rho\left(x(t),y(t)\right)\cdot\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}\,dt=\int_0^1 24t^2\sqrt{40}\,dt=8\sqrt{40}\approx 50,60,$$ so dass $M\approx 50,60g$.

4. Durch $\begin{cases} x(t)=e^t\cdot\sin(t) \\ y(t)=e^t\cdot\cos(t) \end{cases}$ für $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$ ist ein Draht gegeben. Die Längeneinheit beträgt 1cm.

   $\rho(x,y)=x^2+y^2$ sei die Liniendichte in der Einheit g/cm.
   Berechnen Sie die Länge L und die Masse M des Drahtes.

   $$L=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}\,dt=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\left(e^t\cdot\sin(t)+e^t\cdot\cos(t)\right)^2+\left(e^t\cdot\cos(t)-e^t\cdot\sin(t)\right)^2}\,dt=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{2e^{2t}}\,dt=$$

   $$=\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}e^t\,dt=\sqrt{2}\left(e^{\pi/2}-e^{-\pi/2}\right)\approx 6,5091\text{ in cm.}$$

   Mit $\rho(x,y)=x^2+y^2=(e^t\cdot\sin(t))^2+(e^t\cdot\cos(t))^2=e^{2t}$ und $\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}=e^t\cdot\sqrt{2}$ folgt

   $$M=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\rho(x,y)\cdot\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}\,dt=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{2t}\cdot e^t\sqrt{2}\,dt=\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\left[e^{3t}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\left(e^{3\pi/2}-e^{-3\pi/2}\right)\approx 52.47\text{ in g.}$$

5. $$\int_C f\left(x(t),y(t)\right)\cdot\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}\,dt=\int_0^1\left(9g^2(t)-48g^2(t)+48g^2(t)\right)\cdot\sqrt{\left(3g'(t)\right)^2+\left(4g'(t)\right)^2}\,dt=$$

   $$45\int_0^1 g^2(t)\cdot g'(t)\,dt=45\left[\frac{1}{3}g^3(t)\right]_{t=0}^{1}=15\left(1-0\right)=15$$ unabhängig von $g(t)$.

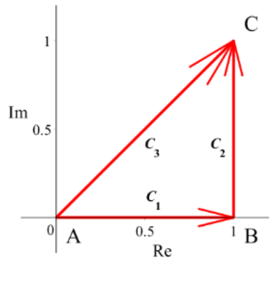
6. L sei die Länge einer Schraubenlinie mit 2 Windungen, die gegeben ist durch $\begin{cases} x(t)=r\cdot\cos(t) \\ y(t)=r\cdot\sin(t) \\ z(t)=a\cdot t \end{cases}$ mit $r,a>0$.

   Die Ganghöhe beträgt dann $h=2\pi a$. Bestimmen Sie L.

   $$L=\int_0^{4\pi}\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2+\dot{z}(t)^2}\,dt=\int_0^{4\pi}\sqrt{r^2+a^2}\,dt=4\pi\sqrt{r^2+a^2}.$$

3.a.2. Das Kurvenintegral 1. Art im Komplexen

1. Gegeben ist die Funktion $f(z)=\overline{z}$ für $z\in\mathbb{C}$. Dabei ist $\overline{z}=x-iy$ die zu $z=x+iy$ konjugiert komplexe Zahl. Z.B $f(2+3i)=2-3i$.
   Die Funktion f soll integriert werden über dem Weg von A nach C, einmal auf dem Weg $A\to B\to C$ und einmal direkt $A\to C$. Dabei stehen die Punkte A, B und C für die komplexen zahlen 0, 1 und $1+i$.
   Die drei Wege sind $C_1: z=t$, $C_2: z=1+t\cdot i$ und $C_3: z=t\cdot(1+i)$, jeweils mit $0\le t\le 1$. Überprüfen Sie die Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen.



$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{t=a}^{t=b} f(z)\cdot\dot z(t)\,dt = \int_{t=0}^{t=1} \overline{t}\cdot 1\,dt = \int_{t=0}^{t=1} t\,dt = \frac{1}{2}.$$

$$\int_{C_2} f(z)\,dz = \int_{t=a}^{t=b} f(z)\cdot\dot z(t)\,dt = \int_{t=0}^{t=1} \overline{(1+t\cdot i)}\cdot i\,dt = \int_{t=0}^{t=1} (1-t\cdot i)\cdot i\,dt = \int_{t=0}^{t=1} (i+t)\,dt = \left[t\cdot i+\tfrac{1}{2}t^2\right]_{t=o}^{t=1} = \frac{1}{2}+i\ \text{-}$$

Zusammen ergibt dies 1+i.

$$\int_{C_2} f(z)\,dz = \int_{t=a}^{t=b} f(z)\cdot\dot z(t)\,dt = \int_{t=0}^{t=1} \overline{t\cdot(1+i)}\cdot(1+i)\,dt = \int_{t=0}^{t=1} t\cdot\underbrace{(1-i)\cdot(1+i)}_{=2}\,dt = 2\int_{t=0}^{t=1} t\,dt = 1.$$

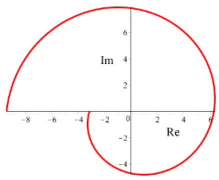
Das Integral ist also wegabhängig!
Nach Cauchy-Riemann war das zu erwarten: $f(z) = x - i\,y$, also $u(x,y) = x$ und $v(x,y) = -y$. Und $u_x = 1$, während $v_y = -1$ ist.

2. Gegeben ist die Funktion $f(z) = \mathrm{Re}(z)$ für $z \in \mathbb{C}$. Dabei ist $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(x+i\,y) = \frac{1}{2}(z+\overline{z})$. Die Funktion f soll integriert werden über den im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenen Einheitskreis $z(t) = e^{it}$ für $0 \le t \le 2\pi$.

$$\oint_C f(z)\,dz = \frac{1}{2}\int_{t=0}^{t=2\pi} (z+\overline{z})\cdot\dot z(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{t=0}^{t=2\pi}\left(e^{it}+e^{-it}\right)\cdot i\cdot e^{it}\,dt = \frac{i}{2}\int_{t=0}^{t=2\pi}\left(e^{2it}+1\right)dt = \frac{i}{2}\cdot\left[\frac{1}{2i}e^{2it}+t\right]_{t=0}^{t=2\pi} = \frac{i}{2}\cdot 2\pi = \pi i.$$

Cauchy-Riemann: Es ist $u(x,y) = x$ und $v(x,y) = 0$, folglich $u_x \ne v_y$. Bei Wegunabhängigkeit müsste das Integral übe den geschlossenen Einheitskreis den Wert Null haben.

3. Gegeben ist die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ für $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Die Funktion f soll integriert werden über den Weg $C: z = t\cdot e^{i\cdot t}$ für $\pi \le t \le 3\pi$.
Überprüfen Sie die Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen.



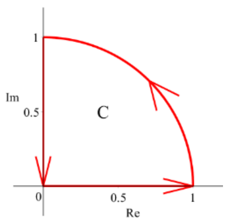
$$\int_C f(z)\,dz = \int_{t=a}^{t=b} f(z)\cdot\dot z(t)\,dt = \int_{t=\pi}^{t=3\pi}\frac{1}{t\cdot e^{it}}\cdot\left(e^{it}+i\,t\,e^{it}\right)dt = \int_{t=\pi}^{t=3\pi}\left(\frac{1}{t}+i\right)dt = \left[\ln(t)+i\,t\right]_{t=\pi}^{3\pi} = \ln(3)+2\pi i.$$

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+i\,y} = \frac{x-i\,y}{(x+i\,y)\cdot(x-i\,y)} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2},\ \text{also}\ u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}\ \text{und}\ v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Es folgt $u_x = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} = v_y$ und $u_y = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = -v_x$. Daraus folgt offensichtlich (!) die Wegunabhängigkeit des Integrals.
Zum Test wähle ich die Integrationsstrecke C von $-\pi$ bis -3π:

$\int_C f(z)\,dz = \int_{x=-\pi}^{x=-3\pi}\frac{1}{x}dx = \ln(|-3\pi|) - \ln(|-\pi|) = \ln(3)$ statt $\ln(3)+2\pi i$. Lösung: Die Definitionsmenge $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ ist nicht einfach zusammenhängend.

4. Gegeben ist die Betragsfunktion $f(z) = |z|$ für $z \in \mathbb{C}$. Die Funktion f soll integriert werden über dem gezeichneten Weg.



Man wählt $C_1:\ z = t$, $C_2: z = e^{i\frac{\pi}{2}t}$, $C_3: z = i(1-t)$, jeweils $0 \le t \le 1$.

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{t=a}^{t=b} f(z)\cdot\dot z(t)\,dt = \int_{t=0}^{t=1} t\cdot 1\,dt = \frac{1}{2}.$$

$$\int_{C_2} f(z)\,dz = \int_{t=a}^{t=b} f(z)\cdot\dot z(t)\,dt = \int_{t=0}^{t=1} 1\cdot i\frac{\pi}{2}e^{i\frac{\pi}{2}t}\,dt = \left[e^{i\frac{\pi}{2}t}\right]_{t=0}^{t=1} = i-1.$$

$$\int_{C_3} f(z)\,dz = \int_{t=a}^{t=b} f(z)\cdot\dot z(t)\,dt = \int_{t=0}^{t=1} (1-t)\cdot(-i)\,dt = -\frac{1}{2}i.\ \text{Folglich}\ \oint_C f(t)\,dt = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i.$$

Cauchy-Riemann: $f(z)=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ mit $u(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ und $v(x,y)=0$. Man sieht $u_x \neq v_y$, also Wegabhängigkeit des Integrals.

3.b. Das Kurvenintegral 2. Art

1. Im $\mathbb{R}^2$ sei $\vec{F}(x,y)=\begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$ und $C:\begin{pmatrix} x=t \\ y=\sqrt{t} \end{pmatrix}$ mit $0\le t\le 1$. Bestimmen Sie $W=\int_C \vec{F}\bullet\vec{ds}$.

   $W=\int_C \vec{F}\bullet\vec{ds}=\int_C x^2\,dx+y^2\,dy=\int_0^1\left(t^2\cdot 1+t\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)dt=\int_0^1\left(t^2+\frac{1}{2}\sqrt{t}\right)dt=\frac{2}{3}$.

2. Im $\mathbb{R}^2$ sei $\vec{F}(x,y)=\begin{pmatrix} y \\ x-y \end{pmatrix}$ und C ein Weg, der die beiden Punkte $(0/0)$ und $(1/1)$ verbindet. Bestimmen Sie $\int_C \vec{F}\bullet\vec{ds}$.

a. $C:\begin{pmatrix} x=t \\ y=t \end{pmatrix}$ mit $0\le t\le 1$. C ist ein Geradenstück zwischen $(0/0)$ und $(1/1)$.

$W=\int_C \vec{F}\bullet\vec{ds}=\int_C y\,dx+(x-y)\,dy=\int_0^1\big(t\cdot 1+(t-t)\cdot 1\big)\,dt=\int_0^1 t\,dt=\frac{1}{2}$.

b. $C:\begin{pmatrix} x=t \\ y=t^2 \end{pmatrix}$ mit $0\le t\le 1$. C ist ein Parabelstück zwischen $(0/0)$ und $(1/1)$.

$W=\int_C \vec{F}\bullet\vec{ds}=\int_C y\,dx+(x-y)\,dy=\int_0^1\big(t^2\cdot 1+(t-t^2)\cdot 2t\big)\,dt=\int_0^1\left(3t^2-2t^3\right)dt=\frac{1}{2}$.

Die Wegunabhängigkeit des Integrals war zu erwarten, da $\vec{F}(x,y)=\begin{pmatrix} y \\ x-y \end{pmatrix}=\operatorname{grad}\left(xy-\frac{1}{2}y^2\right)$ oder auch wegen $\frac{\partial F_x(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial y}{\partial y}=1$ und ebenso $\frac{\partial F_y(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial(x-y)}{\partial x}=1$.

3. Im $\mathbb{R}^2$ sei $\vec{F}(x,y)=\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ und C ein Weg, der die beiden Punkte $(1/-1)$ und $(1/1)$ verbindet. Bestimmen Sie $\int_C \vec{F}\bullet\vec{ds}$.

a. $C:\begin{pmatrix} x=2t^2-1 \\ y=t \end{pmatrix}$ mit $-1\le t\le 1$.

$W=\int_C \vec{F}\bullet\vec{ds}=\int_C -y\,dx+x\,dy=\int_{-1}^1\big(-t\cdot 4t+(2t^2-1)\cdot 1\big)\,dt=\int_{-1}^1(-2t^2-1)\,dt=-\frac{10}{3}$. Das Ergebnis ist negativ, da gegen die Kraft $\vec{F}$ Arbeit verrichtet wird.

b. $C:\begin{pmatrix} x=1 \\ y=t \end{pmatrix}$ mit $-1\le t\le 1$.

$W=\int_C \vec{F}\bullet\vec{ds}=\int_C -y\,dx+x\,dy=\int_{-1}^1\big(-t\cdot 0+1\cdot 1\big)\,dt=\int_{-1}^1 1\,dt=2$.

Die Wegabhängigkeit von W war zu erwarten, da $\frac{\partial F_y(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial x}{\partial x}=1$ und $\frac{\partial F_x(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial(-y)}{\partial y}=-1$ verschieden sind.

4. Im $\mathbb{R}^3$ sei $\vec{F}(x,y,z)=\begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$ und $C:\begin{pmatrix} x=t \\ y=-t \\ z=2t \end{pmatrix}$ mit $0 \le t \le 1$. Bestimmen Sie $W=\int\limits_C \vec{F} \bullet d\vec{s}$.

$$\int\limits_C \vec{F} \bullet d\vec{s} = \int\limits_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = \int\limits_0^1 \left(-t \cdot 1 + 2t \cdot (-1) + t \cdot 2\right)\,dt = \int\limits_0^1 (-t)\,dt = -\frac{1}{2}.$$

5. Im $\mathbb{R}^3$ sei $\vec{F}(x,y,z)=\mathrm{grad}(V(x,y,z)$ mit $V(x,y,z)=xy+z$. Bestimmen Sie $\int\limits_C \vec{F} \bullet d\vec{s}$ auf einem Weg von $A(0/0/0)$ nach $B(1/2/3)$. Wählen Sie einen möglichst einfachen Weg, da das Integral wegunabhängig ist.

Es sei z.B. $C_1:\begin{pmatrix} x=t \\ y=2t \\ z=3t \end{pmatrix}$ oder $C_2:\begin{pmatrix} x=t^2 \\ y=2t \\ z=3t \end{pmatrix}$ mit $0 \le t \le 1$.

Mit $\vec{F}(x,y,z)=\begin{pmatrix} y \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$ folgt $\int\limits_{C_1} \vec{F} \bullet d\vec{s} = \int\limits_{C_1} y\,dx + x\,dy + dz = \int\limits_0^1 \left(2t \cdot 1 + t \cdot 2 + 3\right)\,dt = \int\limits_0^1 (4t+3)\,dt = 5$ bzw.

$$\int\limits_{C_2} \vec{F} \bullet d\vec{s} = \int\limits_{C_2} y\,dx + x\,dy + dz = \int\limits_0^1 \left(2t \cdot 2t + t^2 \cdot 2 + 3\right)\,dt = \int\limits_0^1 \left(6t^2+3\right)\,dt = 5.$$

Oder:

$$\int\limits_{C_1} \vec{F} \bullet d\vec{s} = \int\limits_{C_1} \mathrm{grad}(V) \bullet d\vec{s} = \int\limits_A^B (V_x\,dx + V_y\,dy + V_z\,dz) = [V(x,y,z)]_A^B = V(B)-V(A) = 1 \cdot 2 + 3 - (0 \cdot 0 - 0) = 5.$$

6. Gegeben ist das Kraftfeld $\vec{F}(x,y)=\begin{pmatrix} 3+4xy \\ 2x^2 \end{pmatrix}$.

   a. Zeigen Sie, dass dieses Kraftfeld wirbelfrei ist.

   b. Welche Arbeit W verrichtet dieses Kraftfeld auf dem Halbkreis $C:\begin{pmatrix} x=r \cdot \cos(t) \\ y=r \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$ für $0 \le t \le \pi$?

   c. Bestimmen Sie ein zugehöriges Potentialfeld $V(x,y)$

      α. mit Hilfe von $\frac{\partial V(x,y)}{\partial x} = F_x(x,y)$ und $\frac{\partial V(x,y)}{\partial y} = F_y(x,y)$.

      Berechnen Sie das Integral von Teil b. nochmals mit Hilfe von $V(x,y)$.

      β. mit Hilfe des Weges $C:\begin{pmatrix} x=t \cdot x_0 \\ y=t \cdot y_0 \end{pmatrix}$ für $0 \le t \le 1$ und $V(x_0,y_0)=\int\limits_C \vec{F} \bullet d\vec{s}$.

      γ. mit Hilfe der beiden Wege $(0/0) \to (x_0/0)$ mit $C_1:\begin{pmatrix} x=t \cdot x_0 \\ y=0 \end{pmatrix}$ und $(x_0/0) \to (x_0/y_0)$ mit $C_2:\begin{pmatrix} x=x_0 \\ y=t \cdot y_0 \end{pmatrix}$ und jeweils $0 \le t \le 1$ und $V(x_0,y_0)=\int\limits_{C_1} \vec{F} \bullet d\vec{s} + \int\limits_{C_2} \vec{F} \bullet d\vec{s}$.

a. $\frac{\partial F_y}{\partial x} = 4x = \frac{\partial F_x}{\partial y}$.

b. $W=\int\limits_C \vec{F} \bullet d\vec{s} = \int\limits_C F_x dx + F_y dy = \int\limits_{t=0}^{\pi} \left(F_x \cdot \dot{x} + F_y \cdot \dot{y}\right)dt = \int\limits_{t=0}^{\pi} \left(\left((3+4r^2 \cdot \cos(t) \cdot \sin(t)\right) \cdot \left(-r \cdot \sin(t)\right) + 2r^3 \cdot \cos(t)\right)dt =$

$$\int\limits_{t=0}^{\pi} \left(-3r \cdot \sin(t) - 4r^3 \cdot \cos(t) \cdot \sin^2(t) + 2r^3 \cdot \cos(t)\right)dt = \left[3r \cdot \cos(t) - \frac{4}{3}r^3 \cdot \sin^3(t) + 2r^3 \cdot \sin(t)\right]_{t=0}^{\pi} = -3r - 3r = -6r.$$

$W < 0$ bedeutet, dass die Arbeit W gegen das Kraftfeld verrichtet wird.

c. α. Aus $\frac{\partial V(x,y)}{\partial x} = 3 + 4xy$ folgt $V(x,y) = 3x + 2x^2y + f(y)$.

Aus $\frac{\partial V(x,y)}{\partial y} = 2x^2$ folgt $V(x,y) = 2x^2 y + g(x)$. Insgesamt folgt $V(x,y) = 3x + 2x^2 y + c$.

$W = \int_C \vec{F} \bullet d\vec{s} = V(-r,0) - V(r,0) = 3\cdot(-r) + 0 - (3\cdot r + 0) = -6r$.

β. $V(x_0, y_0) = \int_C \vec{F} \bullet d\vec{s} = \int_C F_x dx + F_y dy = \int_{t=0}^{1} \left(F_x \cdot \dot{x} + F_y \cdot \dot{y}\right) dt = \int_{t=0}^{1} \left((3 + 4x_0 y_0 t^2)\cdot x_0 + 2x_0^2 t^2 \cdot y_0\right) dt =$

$= \int_{t=0}^{1} \left(3x_0 + 6x_0^2 y_0 t^2\right) dt = 3x_0 + 2x_0^2 y_0$.

γ. $V(x_0, y_0) = \int_{C_1} \vec{F} \bullet d\vec{s} + \int_{C_2} \vec{F} \bullet d\vec{s} = \int_{t=0}^{1} \left((3 + 4x_0 y_0 t^2)\cdot x_0 + 0\right) dt + \int_{t=0}^{1} \left(0 + 2x_0^2 t^2 \cdot y_0\right) dt = 3x_0 + 2x_0^2 y_0$.

4.a. Das Oberflächenintegral 1. Art

1. Die Fläche $A = \{(x,y) / 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 4\}$, x, y in m, soll mit einer ebenen Abdeckung der Flächendichte $\rho(x,y,z) = \frac{1}{2x+1}$ in kg/m^2 überdacht werden. Die Gleichung der Abdeckung lautet $E: z = 3 - \frac{1}{4} y$. Bestimmen Sie die Masse m der Abdeckung in kg.

$m = \iint_D \rho(x,y,z) \cdot dO = \iint_D \rho(x,y,z) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy = \int_{x=0}^{3} \int_{y=0}^{4} \frac{1}{2x+1} \cdot \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2}\, dy\, dx =$

$\frac{\sqrt{17}}{4} \int_{x=0}^{3} \int_{y=0}^{4} \frac{1}{2x+1} dy\, dx = \frac{\sqrt{17}}{4} \int_{x=0}^{3} \left[\frac{y}{2x+1}\right]_{y=0}^{y=4} dx = \sqrt{17} \int_{x=0}^{3} \frac{1}{2x+1} dx = \frac{\sqrt{17}}{2} \ln(7)$. Die Abdeckung hat somit die Masse $m \approx 4{,}01\,kg$.

2. Auf der Fläche $O: z = x^2 - y^2$ für $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$ sei die Funktion $f(x,y) = x \cdot y$ definiert. Bestimmen Sie $\iint_O f(x,y)\, dO$.

$\iint_O f(x,y)\, dO = \int_{x=-1}^{1} \int_{y=-1}^{1} x \cdot y \cdot \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dy\, dx = \int_{x=-1}^{1} \left[\frac{x}{12}(1 + 4x^2 + 4y^2)^{3/2}\right]_{y=-1}^{1} dx = \int_{x=-1}^{1} 0\, dx = 0$.

Denn mit der Substitution $u(y) = 1 + 4x^2 + 4y^2$, d.h. $\frac{du}{dy} = 8y$ oder $y\, dy = \frac{1}{8} du$ folgt

$\int x \cdot y \cdot \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dy ? = \int x \cdot \sqrt{u} \cdot \frac{1}{8} du = \frac{1}{12} x \cdot u^{3/2} = \frac{x}{12}(1 + 4x^2 + 4y^2)^{3/2}$.

4.b. Das Oberflächenintegral 2. Art (Das Flussintegral)

1. Durch die Dreiecksfläche mit den Eckpunkten $(3/0/0)$, $(0/2/0)$ und $(0/0/6)$ fließt eine Flüssigkeit mit der Geschwindigkeitsverteilung $\vec{v} = \begin{pmatrix} x+y \\ z \\ y+z \end{pmatrix}$. Dabei sind die Koordinaten in m und die Geschwindigkeitskomponenten in m/s zu verstehen. Wie groß ist der Fluss Φ durch diese Dreiecksfläche in Richtung des ersten Oktanden?

Die Dreiecksebene hat die Gleichung $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{6} = 1$, d.h. $z = f(x,y) = 6 - 2x - 3y$ mit dem Normalenvektor

$\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial y} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Für den Fluss nach rechts verwenden wir $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Damit folgt

$$\vec{v}\bullet\vec{n} = \begin{pmatrix} x+y \\ z \\ y+z \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 2x+3y+4z = 2x+3y+4(6-2x-3y) = 24-6x-9y$$

$$\Phi = \iint_O \vec{v}\bullet\vec{n}\,dx\,dy = \int_{x=0}^{3}\int_{y=0}^{2-\frac{2}{3}x}(24-6x-9y)\,dy\,dx = \int_{x=0}^{3}\left[24y-6xy-\tfrac{9}{2}y^2\right]_{y=0}^{2-\frac{2}{3}x} dx = \int_{x=0}^{3}(2x^2-16x+30)\,dx = 36\,.$$

2. Gegeben ist ein Zylinder mit Boden und Deckel vom Radius R und der Höhe h. Er liegt auf der xy-Ebene und die z-Achse ist seine Symmetrieachse. Durch diesen Zylinder fließt eine Flüssigkeit mit der Geschwindigkeitsverteilung $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Wie groß ist der Fluss Φ durch die Zylinderoberfläche?

1. Fluss Φ_1 durch den Boden in der xy-Ebene mit der Gleichung $z = 0$: Dann zeigt $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ nach außen

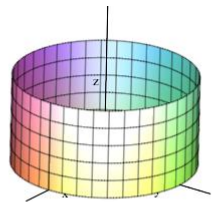
und es ist $\vec{v}\bullet\vec{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -z = 0$, so dass $\Phi_1 = 0$ gilt.

2. Fluss Φ_2 durch den Deckel mit der Gleichung $z = h$. Es ist $\vec{v}\bullet\vec{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = z = h$. Somit folgt

$$\Phi_2 = \iint_O \vec{v}\bullet\vec{n}\,dO = \iint_O h\,dO = h\int_{r=0}^{R}\int_{\varphi=0}^{2\pi} r\,d\varphi\,dr = h\int_{r=0}^{R}\left[r\,\varphi\right]_{\varphi=0}^{2\pi} r\,dr = 2\pi h\int_{r=0}^{R} r\,dr = \pi R^2 h\,.$$

3. Fluss Φ_3 durch den Zylindermantel M. Der Fluss durch das Oberflächenelement $d\vec{O}$ beträgt $d\Phi = \vec{v}\bullet d\vec{O}$ mit $d\vec{O} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}dO$. Jeder Normalenvektor $\vec{n}$ zeigt radial von der z-Achse weg und ist parallel zur xy-Ebene, so dass $\vec{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos(\varphi) \\ R\sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$ wählen können. Wegen $|\vec{n}| = \sqrt{R^2\cos^2(\varphi) + R^2\sin^2(\varphi)} = R$ folgt

$d\vec{O} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} dO$. dO ist dabei der Flächeninhalt eines kleinen Rechtecks der Länge



$R\,d\varphi$ und der Höhe dz: siehe Skizze, so dass $d\vec{O} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} R\,d\varphi\,dz$. Folglich

$$\vec{v}\bullet d\vec{O} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} R\,d\varphi\,dz = \begin{pmatrix} R\cos(\varphi) \\ R\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} R\,d\varphi\,dz = \left(R\cos^2(\varphi) + r\sin^2(\varphi)\right)R\,d\varphi\,dz = R^2\,d\varphi\,dz\,,$$

so dass $\Phi_3 = \iint_M \vec{v}\bullet d\vec{O} = \int_{z=0}^{h}\int_{\varphi=0}^{2\pi} R^2\,d\varphi\,dz = 2\pi R^2\int_{z=0}^{h} dz = 2\pi R^2 h$.

Somit ist der gesamte Fluss $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0 + \pi R^2 h + 2\pi R^2 h = 3\pi R^2 h$.

Zusatz: Nach dem Integralsatz von Gauß gilt

$$\oiint_O \vec{v}\bullet\vec{n}\,dx\,dy = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{v})\,dV = \iiint_V\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)dV = \iiint_V (1+1+1)\,dV = 3\cdot V = 3\cdot\pi R^2\cdot h\text{, wie eben.}$$