Theoretische Informatik I

Übungsblatt 8: Prädikatenlogik

Duale Hochschule Baden-Württemberg – Lörrach
Studiengang Informatik – TIF21

1. Geben Sie mit Begründung an, ob folgende Formeln erfüllbar sind und ob sie allgemeingültig sind.
   (a) $F_1 := p(c)$
   Hierbei ist c ein nullstelliges Funktionssymbol und p ist ein einstelliges Prädikatssymbol. Formal:
   $$\begin{aligned} \Sigma &:= (F_\Sigma, P_\Sigma, \alpha_\Sigma, Var_\Sigma) & \alpha_\Sigma(c) &:= 0 & \alpha_\Sigma(p) &:= 1 \\ F_\Sigma &:= \{c\} \\ P_\Sigma &:= \{p\} \\ Var_\Sigma &:= \{\} \end{aligned}$$
   (b) $F_2 := p(x)$
   Hierbei ist x eine Variable und p ist ein einstelliges Prädikatssymbol. Formal:
   $$\begin{aligned} \Sigma &:= (F_\Sigma, P_\Sigma, \alpha_\Sigma, Var_\Sigma) & \alpha_\Sigma(p) &:= 1 \\ F_\Sigma &:= \{\} \\ P_\Sigma &:= \{p\} \\ Var_\Sigma &:= \{x\} \end{aligned}$$
   (c) $F_3 := p(f(x))$
   Hierbei ist x eine Variable, f ist ein einstelliges Funktionssymbol und p ist ein einstelliges Prädikatssymbol. Formal:
   $$\begin{aligned} \Sigma &:= (F_\Sigma, P_\Sigma, \alpha_\Sigma, Var_\Sigma) & \alpha_\Sigma(f) &:= 1 & \alpha_\Sigma(p) &:= 1 \\ F_\Sigma &:= \{f\} \\ P_\Sigma &:= \{p\} \\ Var_\Sigma &:= \{x\} \end{aligned}$$
   (d) $F_4 := (p(g(d, f(y))) \land \neg q(c, f(x)))$
   Hierbei sind x und y Variablen, c und d sind nullstellige Funktionssymbole, f ist ein einstelliges Funktionssymbol, g ist ein zweistelliges Funktionssymbol, p ist ein einstelliges Prädikatssymbol und q ist ein zweistelliges Prädikatssymbol. Formal:
   $$\begin{aligned} \Sigma &:= (F_\Sigma, P_\Sigma, \alpha_\Sigma, Var_\Sigma) & \alpha_\Sigma(c) &:= 0 & \alpha_\Sigma(p) &:= 1 \\ F_\Sigma &:= \{c, d, f, g\} & \alpha_\Sigma(d) &:= 0 & \alpha_\Sigma(q) &:= 2 \\ P_\Sigma &:= \{p, q\} & \alpha_\Sigma(f) &:= 1 \\ Var_\Sigma &:= \{x, y\} & \alpha_\Sigma(g) &:= 2 \end{aligned}$$

(e) $F_5 := (p(c) \wedge \forall x q(x, d))$
Hierbei ist x eine Variable, c und d sind nullstellige Funktionssymbole, p ist ein einstelliges Prädikatssymbol und q ist ein zweistelliges Prädikatssymbol. Formal:

$$\begin{aligned} \Sigma &:= (F_\Sigma, P_\Sigma, \alpha_\Sigma, Var_\Sigma) & \alpha_\Sigma(c) &:= 0 & \alpha_\Sigma(p) &:= 1 \\ F_\Sigma &:= \{c, d\} & \alpha_\Sigma(d) &:= 0 & \alpha_\Sigma(q) &:= 2 \\ P_\Sigma &:= \{p, q\} \\ Var_\Sigma &:= \{x\} \end{aligned}$$

(f) $F_6 := \forall x(p(x) \vee \neg p(x))$
Hierbei ist x eine Variable und p ist ein einstelliges Prädikatssymbol. Formal:

$$\begin{aligned} \Sigma &:= (F_\Sigma, P_\Sigma, \alpha_\Sigma, Var_\Sigma) & \alpha_\Sigma(p) &:= 1 \\ F_\Sigma &:= \{\} \\ P_\Sigma &:= \{p\} \\ Var_\Sigma &:= \{x\} \end{aligned}$$

(g) $F_7 := \forall x(p(x) \wedge \neg p(x))$
Hierbei ist x eine Variable und p ist ein einstelliges Prädikatssymbol. Formal:

$$\begin{aligned} \Sigma &:= (F_\Sigma, P_\Sigma, \alpha_\Sigma, Var_\Sigma) & \alpha_\Sigma(p) &:= 1 \\ F_\Sigma &:= \{\} \\ P_\Sigma &:= \{p\} \\ Var_\Sigma &:= \{x\} \end{aligned}$$

(h) $F_8 := \forall x \forall y \forall z((x < y) \rightarrow ((x + z) < (y + z)))$
Hierbei sind x, y und z Variablen, »+« ist ein zweistelliges Funktionssymbol in Infixnotation und »<« ein zweistelliges Prädikatssymbol in Infixnotation. Formal:

$$\begin{aligned} \Sigma &:= (F_\Sigma, P_\Sigma, \alpha_\Sigma, Var_\Sigma) & \alpha_\Sigma(+) &:= 2 & \alpha_\Sigma(<) &:= 2 \\ F_\Sigma &:= \{+\} \\ P_\Sigma &:= \{<\} \\ Var_\Sigma &:= \{x, y, z\} \end{aligned}$$