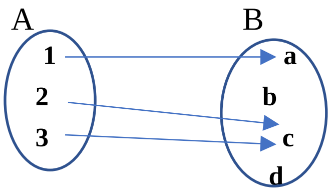
Funktionen

1. Gegeben sind die beiden Mengen $A=\{1, 2, 3\}$ und $B=\{a, b, c, d\}$.
Wir betrachten alle Funktionen $f: A \to B$, d.h. A ist die Definitionsmenge D_f, B die Zielmenge und $W_f = f(A) = \{f(1), f(2), f(3)\}$ die Wertemenge.



Beispiel: $f(1)=a$, $f(2)=c$, $f(3)=c$.
f ist nicht injektiv, da $f(2)=f(3)$.
f ist nicht surjektiv, da es kein $x \in A$ gibt mit $f(x)=b$.

a. Wie viele Funktionen $f: A \to B$ gibt es?
b. Wie viele injektive Funktionen $f: A \to B$ gibt es?
c. A enthalte n Elemente, B enthalte m Elemente, $n, m \in \mathbb{N}$. Wie viele Funktionen $f: A \to B$ gibt es?
d. A enthalte n Elemente, B enthalte m Elemente, $n, m \in \mathbb{N}$ und $n \le m$. Wie viele injektive Funktionen $f: A \to B$ gibt es?
e. A enthalte n Elemente, B enthalte ebenfalls n Elemente, $n \in \mathbb{N}$. Wie viele bijektive (injektiv und surjektiv) Funktionen $f: A \to B$ gibt es?

2. Bestimmen Sie jeweils die Definitionsmengen D_f und $D_{f^{-1}}$, die Wertemengen W_f und $W_{f^{-1}}$, die Gleichung $y = f^{-1}(x)$ der Umkehrfunktion f^{-1}. Prüfen Sie, ob $f^{-1} \circ f = id_{D_f}$ die identische Funktion auf D_f und $f \circ f^{-1} = id_{D_{f^{-1}}}$ die identische Funktion auf $D_{f^{-1}} = W_f$ ist.

a. $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$, b. $f(x) = \frac{1-x}{2x+1}$ c. $f(x) = 2 - \sqrt{x+1}$

d. $f(x) = \ln(x+2)$ e. $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ f. $f(x) = \cos x$

Wie muss man die Definitionsmenge von $f(x) = \cos x$ einschränken, damit f umkehrbar ist?

3. Zerlegen Sie jeweils in Linearfaktoren.

a. $a(x) = 2x^3 + 11x^2 + 20x - 13$. Hinweis: $a\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

b. $b(x) = -x^4 - \frac{16}{3}x^3 - 17x^2 - 12x + \frac{52}{3}$. Hinweis: $b(-2) = 0$ und $b\left(\frac{2}{3}\right) = 0$.

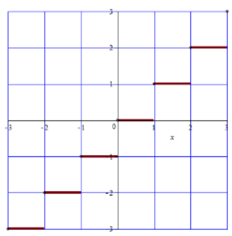
c. $c(x) = 4x^4 - 4x^3 + 17x^2 - 16x + 4$. Hinweis: $x = \frac{1}{2}$ ist doppelte Nullstelle.

Grenzwert und Stetigkeit

1. Es sei $f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x < 2 \\ x-2 & \text{für } x \ge 2 \end{cases}$. Untersuchen Sie f auf Stetigkeit.

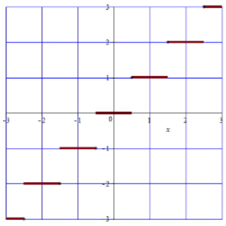
2. Es sei $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{für } x \ne 1 \\ 2 & \text{für } x = 1 \end{cases}$. Untersuchen Sie f auf Stetigkeit.

3. Die Gaußklammerfunktion ist definiert durch: Für $x \in \mathbb{R}$ ist die Gaußklammer $[x]$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x.
Untersuchen Sie $[x]$ auf Stetigkeit.

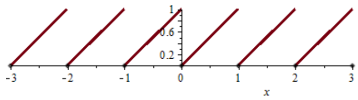


4. Was bewirkt die Funktion $f(x)=[x+0,5]$ für $x \geq 0$?
   Vereinbarung: Negative Zahlen werden nach ihrem Betrag gerundet:
   Beispiel: Runden auf ganze Zahlen: $-0,4 \approx 0$, während $-0,5 \approx -1$.

   Was bewirken die Funktionen $g(x)=[10 \cdot x+0,5]/10$ und $h(x)=[100 \cdot x+0,5]/100$ für $x \geq 0$?



5. Untersuchen Sie die Sägezahn-Funktion $h(x)=x-[x]$ auf Stetigkeit.



Die Ableitung einer Funktion

1. Es sei $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\sqrt{x}$ und $h(x)=x^4$. Bestimmen Sie $f'(x)$, $g'(x)$ und $h'(x)$ mit Hilfe der Definition $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

2. Zeigen Sie mit Hilfe der Definition $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$, dass für die Binomialkoeffizienten gilt

   a. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ die Symmetriebedingung.

   b. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ die Additionsbedingung für das Pascalsche Dreieck.

   c. Zeigen Sie durch Nachrechnen, dass die Binomialkoeffizienten genau die Koeffizienten des Pascalschen Dreiecks sind:

$n = 0$ $\quad \binom{0}{0}$

$n = 1$ $\quad \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$

$n = 2$ $\quad \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$

$n = 3$ $\quad \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$

$n = 4$ $\quad \binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$

   d. Berechnen Sie $(2x-3y)^4$ und $(2x-y)^5$.

Ableitungsregeln

1. **Produktregel**
   Bestimmen Sie die Ableitung der Funktionen
   $f_1(x)=2x^2 \cdot \sin x$, $f_2(x)=3 \cdot \sqrt{x} \cdot \cos x \cdot e^x$, $f_3(x)=e^{5+3x}=e^5 \cdot e^x \cdot e^x \cdot e^x$

2. **Quotientenregel**

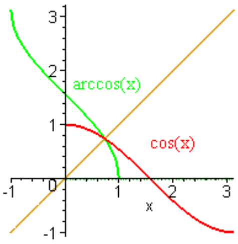
   Bestimmen Sie die Ableitung der Funktionen
   $f_1(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $f_2(x)=\frac{2\cos x-3\sin x}{5 \cdot \left(1+x^2\right)}$, $f_3(x)=\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

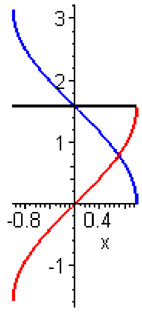
3. Kettenregel

Bestimmen Sie die Ableitung der Funktionen

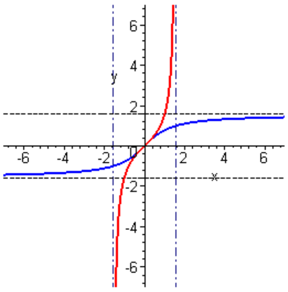
$f_1(x) = (2-3x)^5$, $f_2(x) = \ln\sqrt{x}$, $f_3(x) = \sqrt{\ln x}$, $f_4(x) = a\cdot\sqrt[n]{b-c\cdot x}$, $f_5(x) = \left(f(x)\right)^n$

4. Ableitung der Umkehrfunktion





a. $f(x) = \cos x$ ist im Intervall $[0/\pi]$ umkehrbar.
Zeigen Sie, dass für die Ableitung gilt:
$\arccos' x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
Wegen $\arcsin' x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ folgt
$\arcsin' x + \arccos' x = 0$, so dass
$g(x) = \arcsin x + \arccos x$ für $-1 \le x \le 1$ eine Konstante ist.
Bestimmen Sie diese Konstante.

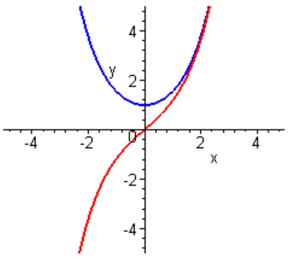


b. $f(x) = \tan x$ ist im Intervall $\left]-\frac{\pi}{2}/\frac{\pi}{2}\right[$ streng monoton steigend, da $\tan' x = 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$. Und somit besitzt $f(x) = \tan x$ im angegebenen Intervall eine Umkehrfunktion.
Zeigen Sie, dass für die Ableitung gilt: $\arctan' x = \dfrac{1}{1+x^2}$.

c. Bestimmen Se die Ableitung der Funktion $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ für $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ und $x > 0$.

5. Zusammengesetzte Aufgaben

1. Die Hyperbelfunktionen sind definiert durch:



Sinus hyperbolicus $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Kosinus hyperbolicus $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Wegen $\sinh(-x) = -\sinh x$ und $\cosh(-x) = \cosh x$ ist das Schaubild von Sinus hyperbolicus punktsymmetrisch zum Ursprung und das Schaubild von Kosinus hyperbolicus achsensymmetrisch zur y-Achse.

Bestimmen Sie die Ableitungen von $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$.
Wegen $\sinh'(x) > 0$ besitzt $f(x) = \sinh(x)$ eine Umkehrfunktion. Zeigen Sie, dass für diese Umkehrfunktion gilt: $\operatorname{arcsinh}(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

1. Weg: Lösen Sie $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ nach x auf und vertauschen anschließend die Variablen x und y. Dieser Variablentausch bewirkt, dass die Schaubilder von Funktion und Umkehrfunktion symmetrisch zur 1. Winkelhalbierenden $y = x$ sind.

2. Weg: Zeigen Sie, dass $\sinh(\operatorname{arcsinh})$ die identische Abbildung ist, d.h. dass $\sinh(\operatorname{arcsinh}(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

3. Weg: Zeigen Sie, dass $\operatorname{arcsinh}(\sinh)$ die identische Abbildung ist, d.h. dass $\operatorname{arcsinh}(\sinh(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

2. a. Bestimmen Sie die Ableitung der Funktionen

$f_1(x) = 5\cdot(2x-3)^3\cdot(1-x)^4$, $\quad f_2(x) = \ln|x| = \begin{cases} \ln x & \text{für } x>0 \\ \ln(-x) & \text{für } x<0 \end{cases}$, $\quad f_3(x) = 2-\frac{1}{4}\cdot x^{-2}\cdot\ln(x^4)$,

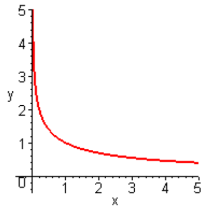
$f_4(x) = 2\cdot\cos x\cdot\tan x$ einmal mit und einmal ohne Produktregel,

$f_5(x) = \sin^2\frac{2}{3x}+\cos^2\frac{2}{3x}$, $\quad f_6(x) = e^{1-2x}\cdot x^{-3}$, $\quad f_7(x) = \frac{\ln(2x)}{\sqrt{1+4x}}$.

b. Es sei $f(x) = \ln\frac{1-x}{1+x}$. Zeigen Sie, dass f nur im Intervall $]-1/1[$ definiert ist.
Begründen Sie außerdem, dass $f(-x) = -f(x)$ gilt; was bedeutet dies geometrisch?
Bestimmen Sie die Ableitung $f'(x)$.

c. Für $x>0$ und $x\neq 1$ sei $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$. Bestimmen Sie die Ableitung.

Interessant ist der Fall $x=1$: Es gilt hier $f(1) = "\frac{0}{0}"$.



Hier helfen uns die Regeln von L'Hôpital, einem französischen Mathematiker (Guillaume François Antoine, Marquis de L'Hôpital, 1661-1704). Er hatte diese Regeln aber nicht selbst gefunden, sondern dem Basler Mathematiker Johann Bernoulli (1667-1748) abgekauft und 1696 veröffentlicht.

$\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}\frac{1/x}{1} = \lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x} = 1$. Somit kann man f auf alle reellen positiven Zahlen $\mathbb{R}^+$ erweitern:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1} & \text{für } x>0 \text{ und } x\neq1 \\ 1 & \text{für } x=1 \end{cases}$$

Die Regeln von Guillaume François Antoine, Marquis de L'Hôpital (1661–1704)

1.Der Fall $"\frac{0}{0}"$

Es sei $f(x_0)=0$ und $g(x_0)=0$. Wenn $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann gilt

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}}.$$

Beweisidee: Ersetze Zähler- und Nennerfunktion näherungsweise durch ihre Tangenten an der Stelle x_0, so folgt $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)}{g'(x_0)\cdot(x-x_0)+g(x_0)} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, da $f(x_0)=g(x_0)=0$ und sich $x-x_0$ wegkürzt.

2. Der Fall $"\frac{\infty}{\infty}"$

Es gelte $f(x)\to\infty$ und $g(x)\to\infty$ für $x\to x_0$. Wenn $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann gilt

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}}.$$

3. und 4. Die beiden Regeln gelten auch, wenn man x_0 durch ∞ ersetzt.

Weitere Aufgaben zu L'Hôpital: Bestimmen Sie

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{\sin(x^2)}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}$ für $n\in\mathbb{N}$,

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^r}$ für $r\in\mathbb{R}^+$, $\lim\limits_{x\to1}\frac{a^{2x}-a^2}{2x-2}$ für $a>0$, $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1-\ln x}{(2x-2)^2}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(a\cdot x)-a\cdot\sin(x)}{\sin(x)-x}$ für $a\in\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to 0} x^x$ für $x>0$. Hinweis: $\lim\limits_{x\to 0}\ln x^x = \lim\limits_{x\to 0} x\cdot \ln x = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{x^{-1}}$ und jetzt Marquis de L'Hôpital.

$\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$ für $x>0$. Hinweis: $\lim\limits_{x\to 0}\ln x^{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\sin x\cdot \ln x = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\sin^{-1}(x)}$ und jetzt Marquis de L'Hôpital.

6. Logarithmische Differenziation

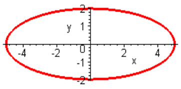
Bestimmen Sie die Ableitung der Funktionen

$f_0(x)=b^x$ für $b>0$, $f_1(x)=x^{\sin x}$ für $x>0$, $f_2(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ für $x>0$, $f_3(x)=g(x)^{h(x)}$ mit $g(x)>0$ und g, h differenzierbar, $f_4(x)=(2x)^{-\frac{3}{2x^2}}$, $f_5(x)=\log_b(x)$ für $b\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$ und $x>0$ durch Ableiten der Gleichung $b^{\log_b(x)}=x$.

Bemerkung: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ ist die Eulersche Zahl $e\approx 2{,}71828182845904523 54$.

Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot a^x$ für $0<a<1$. Hinweis: Hôpital

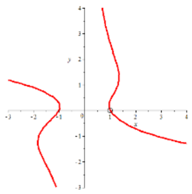
7. Implizite Differenziation

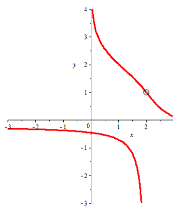


1. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ist die Gleichung einer Ellipse mit den Halbachsen a und b.

   Bestimmen Sie die Tangentensteigungen bei der Ellipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$ für die beiden Punkte mit $x=3$ und die beiden Punkte mit $y=1$.

2. Bestimmen Sie jeweils die Tangentensteigung y' von



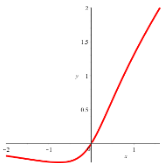


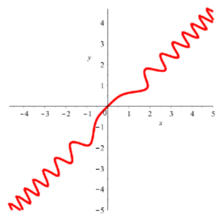
   a. $x^2+y-3y^2+x\cdot y^3=1$ im Punkt $(1/0)$

   b. $x\cdot e^{2y-2}-4y\cdot\ln(3-x)=2$ im Punkt $(2/1)$

   c. $\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)-x\cdot e^{-y}=0$ allgemein

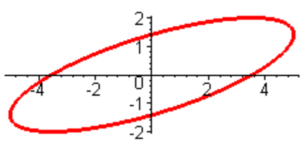
   d. $(\sin(x\cdot y))^2=x-y$ allgemein



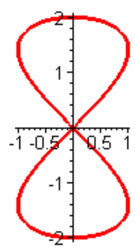


8. Differenziation in Parameterform

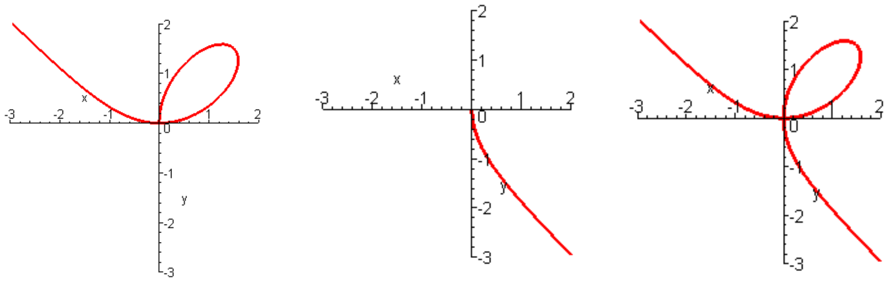
1. Durch $x(t)=5\cdot\sin t$ und $y(t)=2\cdot\sin(t+\frac{\pi}{4})$ mit $0\le t<2\pi$ ist eine Ellipse beschrieben.
   Markieren Sie die Ellipsenpunkte für $t=0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3/2\,\pi$.
   Welche Steigungen hat die Ellipse in den vier Achsenschnittpunkten?



2. Durch $x(t)=\sin(2\cdot t)$ und $y(t)=2\cdot\sin t$ mit $0\le t<2\pi$ ist eine ‚Acht' beschrieben.
   Markieren Sie die Kurvenpunkte für $t=0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3/2\,\pi$.
   Welche Steigungen hat die Kurve im Ursprung?
   Bestimmen Sie die Punkte mit horizontaler und mit vertikaler Tangente.



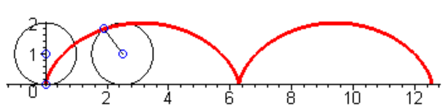
3. Durch $x(t)=\dfrac{3t}{1+t^3}$ und $y(t)=\dfrac{3t^2}{1+t^3}$ mit $t\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ ist das sog. ‚Kartesische Blatt' beschrieben.
Das linke Bild gilt für $t>-1$: Das Schaubild kommt aus dem Unendlichen links oben (für $t\approx -1$), erreicht für $t=0$ den Ursprung und beschreibt für wachsendes t die gezeichnete Schleife; dabei wird aber der Ursprung kein zweites Mal erreicht (nur für $t\to\infty$).
Das mittlere Schaubild gilt für $t<-1$: Der Ursprung gehört nicht dazu: Für $t\to-\infty$ nähert sich das Schaubild dem Ursprung.
Das rechte Schaubild gilt für $t\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.



Bestimmen Sie alle Kurvenpunkte mit waagerechter und senkrechter Tangente und die Steigung y' im Kurvenpunkt $P(\frac{3}{2}|\frac{3}{2})$ für $t=1$.

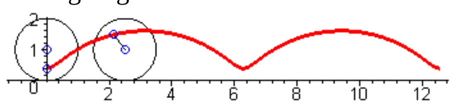
4. Ein Kreis vom Radius r rollt auf der x-Achse nach rechts. Die Bahn, die ein Punkt P seines Umfangs beschreibt, heißt **Zykloide**.
Zu Beginn $(t=0)$ berühre der Kreis die x-Achse im Ursprung und P befinde sich im Ursprung. Dann gilt für die Koordinaten des nach rechts laufenden Kreismittelpunktes $x_M(t)=r\cdot t$ und $y_M(t)=r$. Dabei bedeutet t der Winkel im Bogenmaß, um den sich der Kreis seit Beginn gedreht hat. Zum Beispiel ist der Kreismittelpunkt für $t=2\pi$ gerade um den Kreisumfang $U=2\pi r$ nach rechts gewandert. Die Bewegung des Punktes P setzt sich dann zusammen aus der Verschiebung nach rechts und einer Kreisbewegung.

Für die Koordinaten des Punktes P gilt $\begin{cases} x(t)=r\cdot t-r\cdot\sin t \\ y(t)=r-r\cdot\cos t\end{cases}$.
In der Skizze ist der Kreis mit $r=1$ für $t=0$ und $t=2$ gezeichnet.



Aufgabe: Bestimmen Sie die Bahngleichung des Punktes Q, der gerade diagonal zu P liegt und skizzieren Sie die Kurve. Hinweis: Es gilt $x(0)=0$ und $y(0)=2r$, bzw. $x(\frac{\pi}{2})=r\cdot\frac{\pi}{2}+r$ und $y(\frac{\pi}{2})=r$.

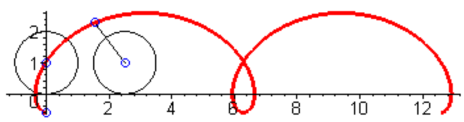
Zusätze:
Der rotierende Punkt P muss nicht notwendig auf dem Kreisumfang liegen. Wenn er vom Kreismittelpunkt den Abstand R hat, dann gilt: $\begin{cases} x(t)=r\cdot t-R\cdot\sin t \\ y(t)=r-R\cdot\cos t\end{cases}$.



.

1. Für $R<r$ liegt der rotierende Punkt P im Innern des rotierenden Kreises. Dann spricht man von einer *verkürzten Zykloide*.

2. Für $R>r$ liegt der rotierende Punkt P außerhalb des rotierenden Kreises. Dann spricht man von einer *verlängerten Zykloide*, die dann Schleifen enthält.

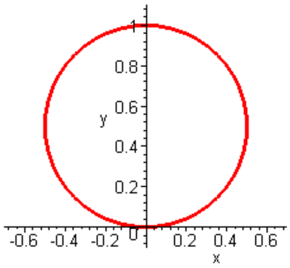


Aufgabe: Im letzten Bild ist $r=1$ und $R=1{,}6$. Die gezeichnete Kurve hat mit der y-Achse zwei Punkte gemeinsam. Die Gleichung $x(t)=1\cdot t-1{,}6\cdot\sin t=0$ ist erfüllt für $t_1=0$ und für $t_2\approx 1.599347891$.

Bestimmen Sie für diese beiden Punkte die Tangentensteigungen. Ergebnis: $y'(t_1) = 0$ bzw. $y'(t_2) \approx 1.529486608$ siehe unten Aufgabe 12.

9. Differenziation in Polarform

Durch $r(t) = \sin t$ für $0 \le t < \pi$ wird der abgebildete Kreis beschrieben.

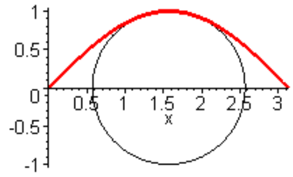


Bestimmen Sie die Tangentensteigung $y' = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$.

Ergebnis: $y' = \frac{2 \cdot \sin t \cdot \cos t}{\cos^2 t - \sin^2 t}$.

Für welche Werte von t verlaufen die Tangenten horizontal oder vertikal?

10. Krümmungsradius und Krümmungsmittelpunkt einer Kurve



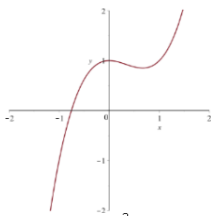
Bestimmen Sie den Mittelpunkt M und Radius ρ des Berührkreises an $y = \sin x$ im Kurvenpunkt $\left(\frac{\pi}{2} / 1\right)$.

11. Linearisierung

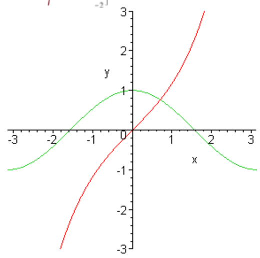
1. Es sei $f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.
   Berechnen Sie für $x_0 = 0,5$ und $\Delta x = 0,1$ die Abweichung $\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x$ und bestimmen Sie damit näherungsweise $f(0,4)$ und $f(0,6)$. Vergleichen Sie diese Näherungswerte mit den exakten Werten.
2. Es sei $f(x) = \ln(x)$ und $x_0 = 1$. Bestimmen Sie näherungsweise $\ln(0,95)$ und $\ln(1,05)$ mit $\Delta x = 0,05$.

12. Newtonsche Iteration

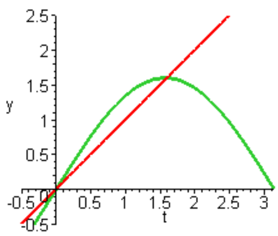
1. Bestimmen Sie die Nullstelle(n) von $f(x) = x^2 - 2x$ mit Hilfe der Newton'schen Iteration. Beginnen Sie einmal mit $x_1 = 1,5$, einmal mit $x_1 = 0,5$ und einmal mit $x_1 = 1$.



2. Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung $x^3 - x^2 + 1 = 0$.
   Das Schaubild von $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ ist dargestellt. Wählen Sie $x_0 = -1$.
   Bestimmen Sie x_1, x_2, x_3 und x_4.

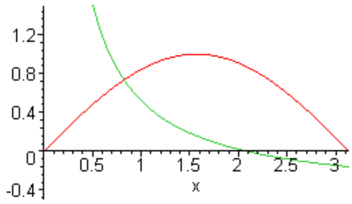


3. Unter der Funktion $\sinh(x)$, gelesen „sinushyperbolicus", versteht man $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, unter $\cosh(x)$, gelesen „cosinushyperbolicus", versteht man $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Bestimmen Sie die Lösung von $\sinh(x) = \cos x$, d.h. gesucht ist die Nullstelle von $f(x) = \sinh(x) - \cos x$. Wählen Sie $x_1 = 1$.



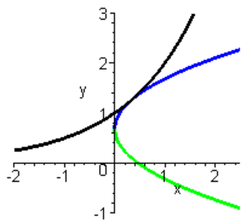
4. In Aufgabe 8.4.2 war die Lösung der Gleichung $x(t) = 1 \cdot t - 1,6 \cdot \sin t = 0$ gesucht.
   Verwenden Sie $f(t) = t - 1,6 \cdot \sin t$ und einmal $t_0 = 0,5$ und einmal $t_0 = 1,5$.
   Berechnen Sie einige Werte von t_n.

5. Die Schaubilder von $f(x)=\sin x$ und $g(x)=\frac{1}{x}+c$ für $0<x<\pi$ sollen sich rechtwinklig schneiden. Bestimmen Sie die Konstante c und den Schnittpunkt S.
Hinweis: Es sind die beiden Gleichungen zu lösen:
(1) $f(x)=g(x)$
(2) $f'(x)\cdot g'(x)=-1$.



6. Die Schaubilder der beiden Funktionen $f(x)=2^x$ und $g(x)=\sqrt{x}+c$ sollen sich berühren. Es sind also die beiden folgenden Gleichungen zu lösen:
(1) $f(x)=g(x)$
(2) $f'(x)=g'(x)$.

Hinweis. Durch logarithmisches Ableiten ergibt sich $f'(x)=2^x\cdot\ln 2$.
Ergebnis: $c\approx 0{,}6825568957$ und $x\approx 0{,}3295285935$.
Bemerkung. Um zu zeigen, dass das Schaubild ein Parabelast ist, ist zusätzlich das Schaubild des unteren Parabelastes $h(x)=2c-g(x)$ eingezeichnet.



13. Elastizität einer Funktion

1. Es sei $f(x)=x^2+1$. Bestimmen Sie die Elastizität $\varepsilon_f(x)=f'(x)\cdot\frac{x}{f(x)}$ an der Stelle $x=2$ und vergleichen Sie diesen Wert mit $\frac{\frac{\Delta f}{f}}{\frac{\Delta x}{x}}$ für $\Delta x=0{,}1$ und für $\Delta x=0{,}01$.

2. Es sei $f(x)=e^{\sqrt{2x+8}}$ für $x\ge -4$. Für welche Werte von x ist f unelastisch, d.h. $|\varepsilon_f(x)|<1$, für welche Werte von x ist f elastisch, d.h. $|\varepsilon_f(x)|>1$?

3. Gegeben sind die Preisabsatzfunktion $p(x)=24-2x$ und die Kostenfunktion $K(x)=0{,}2x^2+2x+11$.
   a. Bei welchem Absatz x und Preis p ist der Gewinn, d.h. der Erlös E, maximal?
   b. Bestimmen Sie die Preiselastizität $\varepsilon_x(p)$ der Nachfrage im Gewinnmaximum.
   c. Bestimmen Sie die Nachfrageelastizität $\varepsilon_E(x)$ des Erlöses im Gewinnmaximum.

4. Die Nachfragefunktion D eines Gutes in Abhängigkeit des Preises P sei gegeben durch $D(P)=20-0{,}4\cdot P$, wobei $D>0$ und $P>0$ vorausgesetzt wird.
   a. Für welche Preise ist die Nachfrage elastisch bezüglich des Preises? (Hinweis: $|\varepsilon_D(P)|>1$)
   b. Bei welchem Preis bewirkt eine 2%-ige Preissteigerung einen Umsatzrückgang um 10%?