Theoretische Informatik I

Übungsblatt 7: Prädikatenlogik

Duale Hochschule Baden-Württemberg – Lörrach
Studiengang Informatik – TIF21

T, τ – Tau | Y, υ – Ypsilon | Φ, φ – Phi

1. Wir betrachten in dieser Aufgabe die Formel

$$F := ((P \land p(x)) \land (\neg q(g(x, g(c, d)), y) \lor \forall x p(f(x)))).$$

Hierbei sind x und y Variablen, c und d sind nullstellige Funktionssymbole, f ist ein einstelliges Funktionssymbol, g ist ein zweistelliges Funktionssymbol, P ist ein nullstelliges Prädikatssymbol, p ist ein einstelliges Prädikatssymbol und q ein zweistelliges Prädikatssymbol. Formal:

$$\begin{aligned} \Sigma &:= (F_\Sigma, P_\Sigma, \alpha_\Sigma, Var_\Sigma) & \alpha_\Sigma(c) &:= 0 & \alpha_\Sigma(P) &:= 0 \\ F_\Sigma &:= \{c, d, f, g\} & \alpha_\Sigma(d) &:= 0 & \alpha_\Sigma(p) &:= 1 \\ P_\Sigma &:= \{P, p, q\} & \alpha_\Sigma(f) &:= 1 & \alpha_\Sigma(q) &:= 2 \\ Var_\Sigma &:= \{x, y\} & \alpha_\Sigma(g) &:= 2 & & \end{aligned}$$

(a) Geben Sie $Teilt(F)$ an.

Lösung:
Es ist

$$\begin{aligned} Teilt(F) = \{&x, g(x, g(c, d)), y, f(x), \\ &g(c, d), \\ &c, d\} \end{aligned}$$

(b) Geben Sie $Teilf(F)$ an.

Lösung:
Es ist

$$\begin{aligned} Teilf(F) = \{&((P \land p(x)) \land (\neg q(g(x, g(c, d)), y) \lor \forall x p(f(x)))), \\ &(P \land p(x)), (\neg q(g(x, g(c, d)), y) \lor \forall x p(f(x))), \\ &P, p(x), \neg q(g(x, g(c, d)), y), \forall x p(f(x)), \\ &q(g(x, g(c, d)), y), p(f(x))\} \end{aligned}$$

Es sei $S_1 := (U_1, I_1)$ mit

$$
\begin{aligned}
&U_1 := \mathbb{N} \qquad && I_1(c) := 5 && I_1(P) := \mathfrak{W} \\
& && I_1(d) := 4 && I_1(p) := \{a \in \mathbb{N} \mid a \text{ ungerade}\} \\
& && I_1(f) := \mathbb{N} \to \mathbb{N} && I_1(q) := \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a > b\} \\
& && \qquad a \mapsto a \cdot 3 && \\
& && I_1(g) := \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} && \\
& && \qquad (a,b) \mapsto a + b &&
\end{aligned}
$$

Weiter sei

$$\beta(x) := 5 \qquad \beta(y) := 3$$

(c) Geben Sie $valt_{S_1,\beta}(t)$ an für jedes $t \in Teilt(F)$.

Lösung:
Es ist

$$
\begin{aligned}
valt_{S_1,\beta}(x) &= 5 \\
valt_{S_1,\beta}(y) &= 3 \\
valt_{S_1,\beta}(c) &= 5 \\
valt_{S_1,\beta}(d) &= 4 \\
valt_{S_1,\beta}(f(x)) &= 15 \\
valt_{S_1,\beta}(g(c,d)) &= 9 \\
valt_{S_1,\beta}(g(x, g(c,d))) &= 14
\end{aligned}
$$

(d) Geben Sie $valf_{S_1,\beta}(\mathscr{F})$ an für jedes $\mathscr{F} \in Teilf(F)$.

Lösung:
Es ist

$$
\begin{aligned}
valf_{S_1,\beta}(P) &= \mathfrak{W} \\
valf_{S_1,\beta}(p(x)) &= \mathfrak{W}, \text{ da 5 ungerade} \\
valf_{S_1,\beta}(q(g(x, g(c,d)), y)) &= \mathfrak{W}, \text{ da } 14 > 3 \\
valf_{S_1,\beta}(p(f(x))) &= \mathfrak{W}, \text{ da 15 ungerade} \\
valf_{S_1,\beta}(\neg q(g(x, g(c,d)), y)) &= \mathfrak{F} \\
valf_{S_1,\beta}(\forall x p(f(x))) &= \mathfrak{F}, \text{ da } 2 \cdot 3 \text{ nicht ungerade} \\
valf_{S_1,\beta}((P \wedge p(x))) &= \mathfrak{W} \\
valf_{S_1,\beta}((\neg q(g(x, g(c,d)), y) \vee \forall x p(f(x)))) &= \mathfrak{F} \\
valf_{S_1,\beta}(((P \wedge p(x)) \wedge (\neg q(g(x, g(c,d)), y) \vee \forall x p(f(x))))) &= \mathfrak{F}
\end{aligned}
$$

Es sei $S_2 := (U_2, I_2)$ mit

$$
\begin{aligned}
U_2 &:= \{\Box, \nabla, \sharp, *\} \\
I_2(P) &:= \mathfrak{W} \\
I_2(p) &:= \{\Box, \nabla, \sharp\} \\
I_2(q) &:= \{(\Box, \Box), (\Box, *), (\Box, \sharp), (*, \sharp), (\nabla, \sharp), (\nabla, *)\} \\
I_2(c) &:= \nabla \\
I_2(d) &:= * \\
I_2(f) &:= \ \{\Box, \nabla, \sharp, *\} \to \{\Box, \nabla, \sharp, *\} \\
&\qquad\qquad \Box \mapsto \sharp \\
&\qquad\qquad \nabla \mapsto \sharp \\
&\qquad\qquad \sharp \mapsto \nabla \\
&\qquad\qquad * \mapsto \nabla \\
I_2(g) &:= \ \{\Box, \nabla, \sharp, *\} \times \{\Box, \nabla, \sharp, *\} \to \{\Box, \nabla, \sharp, *\} \\
&\qquad\qquad (u_1, u_2) \mapsto \begin{cases} \sharp, & \text{falls } (u_1, u_2) = (*, \Box) \\ *, & \text{falls } (u_1, u_2) = (\Box, *) \\ \Box, & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Weiter sei

$$\gamma(x) := * \qquad\qquad \gamma(y) := \Box$$

(e) Geben Sie $valt_{S_2,\gamma}(t)$ an für jedes $t \in Teilt(F)$.

Lösung:
Es ist

$$
\begin{aligned}
valt_{S_2,\gamma}(x) &= * \\
valt_{S_2,\gamma}(y) &= \Box \\
valt_{S_2,\gamma}(c) &= \nabla \\
valt_{S_2,\gamma}(d) &= * \\
valt_{S_2,\gamma}(f(x)) &= \nabla \\
valt_{S_2,\gamma}(g(c,d)) &= \Box \\
valt_{S_2,\gamma}(g(x, g(c,d))) &= \sharp
\end{aligned}
$$

(f) Geben Sie $valf_{S_2,\gamma}(\mathscr{F})$ an für jedes $\mathscr{F} \in Teilf(F)$.

Lösung:
Es ist

$$\begin{aligned}
valf_{S_2,\gamma}(P) &= \mathfrak{W} \\
valf_{S_2,\gamma}(p(x)) &= \mathfrak{F}, \text{ da } * \notin \{\square, \triangledown, \sharp\} \\
valf_{S_2,\gamma}(q(g(x, g(c, d)), y)) &= \mathfrak{F}, \text{ da } (\sharp, \square) \notin I_2(q) \\
valf_{S_2,\gamma}(p(f(x))) &= \mathfrak{W}, \text{ da } \triangledown \in \{\square, \triangledown, \sharp\} \\
valf_{S_2,\gamma}(\neg q(g(x, g(c, d)), y)) &= \mathfrak{W} \\
valf_{S_2,\gamma}(\forall x p(f(x))) &= \mathfrak{W}, \text{ da } \{\sharp, \triangledown\} \subseteq \{\square, \triangledown, \sharp\} \\
valf_{S_2,\gamma}((P \wedge p(x))) &= \mathfrak{F} \\
valf_{S_2,\gamma}((\neg q(g(x, g(c, d)), y) \vee \forall x p(f(x)))) &= \mathfrak{W} \\
valf_{S_2,\gamma}(((P \wedge p(x)) \wedge (\neg q(g(x, g(c, d)), y) \vee \forall x p(f(x))))) &= \mathfrak{F}
\end{aligned}$$

(g) Geben Sie mit Begründung an, ob F allgemeingültig ist.

Lösung:
Es gilt

$$valf_{S_1,\beta}(((P \wedge p(x)) \wedge (\neg q(g(x, g(c, d)), y) \vee \forall x p(f(x))))) = \mathfrak{F}$$

damit ist (S_1, β) kein Modell für F, also ist F nicht allgemeingültig.

2. In dieser Aufgabe sei

$$F := (p(f(x)) \wedge P)$$

Hierbei ist x eine Variable, f ist ein einstelliges Funktionssymbol P ist ein nullstelliges Prädikatssymbol und p ist ein einstelliges Prädikatssymbol. Formal:

$$\begin{aligned} \Sigma &:= (F_\Sigma, P_\Sigma, \alpha_\Sigma, Var_\Sigma) & \alpha_\Sigma(f) &:= 1 & \alpha_\Sigma(P) &:= 0 \\ F_\Sigma &:= \{f\} & & & \alpha_\Sigma(p) &:= 1 \\ P_\Sigma &:= \{P, p\} \\ Var_\Sigma &:= \{x\} \end{aligned}$$

(a) Geben Sie eine erweiterte Struktur an, die ein Modell für F ist.

Lösung:
Sei $S_1 := (U_1, I_1)$ mit

$$U_1 := \{1,2\} \qquad I_1(f) := \begin{aligned} \{1,2\} &\to \{1,2\} \\ 1 &\mapsto 2 \\ 2 &\mapsto 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} I_1(P) &:= \mathfrak{W} \\ \\ \\ I_1(p) &:= \{2\} \end{aligned}$$

Weiter sei

$$\beta(x) := 1$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} valt_{S_1,\beta}(x) &= 1 \\ valt_{S_1,\beta}(f(x)) &= 2 \\ valf_{S_1,\beta}(p(f(x))) &= \mathfrak{W} \\ valf_{S_1,\beta}(P) &= \mathfrak{W} \\ valf_{S_1,\beta}((p(f(x)) \wedge P)) &= \mathfrak{W}, \end{aligned}$$

damit ist (S_1, β) ein Modell für F.

(b) Geben Sie eine erweiterte Struktur an, die kein Modell für F ist.

Lösung:
Sei $S_2 := (U_2, I_2)$ mit

$$U_2 := \{1,2\} \qquad I_2(f) := \{1,2\} \to \{1,2\} \qquad I_2(P) := \mathfrak{W}$$
$$1 \mapsto 2$$
$$2 \mapsto 1$$
$$I_2(p) := \{2\}$$

Weiter sei

$$\gamma(x) := 2$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} valt_{S_2,\gamma}(x) &= 2 \\ valt_{S_2,\gamma}(f(x)) &= 1 \\ valf_{S_2,\gamma}(p(f(x))) &= \mathfrak{F} \\ valf_{S_2,\gamma}(P) &= \mathfrak{W} \\ valf_{S_2,\gamma}((p(f(x)) \wedge P)) &= \mathfrak{F}, \end{aligned}$$

damit ist (S_2, γ) kein Modell für F.