Theoretische Informatik I

Einige Logik-Definitionen und -Beispiele

Duale Hochschule Baden-Württemberg – Lörrach
Studiengang Informatik – TIF21

1 Aussagenlogik

1.1 Einige Definitionen

1.1.1 Syntax

Definition

- Ein **Atom** (oder **atomare Aussage** oder auch **atomare Formel**) ist ein Symbol.
- Eine endliche Menge von Atomen bezeichnen wir mit Σ.
- Σ heißt **Signatur**. ■

Definition
Sei Σ eine Signatur.

Die **Menge der aussagenlogischen Formeln** $For0_\Sigma$ ist induktiv definiert:

- $1, 0 \in For0_\Sigma$.
- $\Sigma \subseteq For0_\Sigma$.
- Mit $\mathscr{F}, \mathscr{G} \in For0_\Sigma$ sind auch folgende Ausdrücke Elemente von $For0_\Sigma$:
  - $\neg\mathscr{F}$ (**Negation**)
  - $(\mathscr{F} \wedge \mathscr{G})$ (**Konjunktion**)
  - $(\mathscr{F} \vee \mathscr{G})$ (**Disjunktion**)
  - $(\mathscr{F} \rightarrow \mathscr{G})$ (**Implikation**)
  - $(\mathscr{F} \leftrightarrow \mathscr{G})$ (**Äquivalenz**). ■

1.1.2 Semantik

Definition

- Ab nun seien $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{F}$ beliebige aber feste Objekte. Sie heißen **Wahrheitswerte** und stehen für wahr und falsch.
- Sei Σ eine Signatur.

  Eine Abbildung $\mathscr{I} : \Sigma \to \{\mathfrak{W}, \mathfrak{F}\}$ heißt **Interpretation**. ■

Definition
Zu einer Interpretation $\mathscr{I}$ definieren wir eine (eindeutig bestimmte) **Auswertung** $val_{\mathscr{I}} : For0_{\Sigma} \to \{\mathfrak{W}, \mathfrak{F}\}$ wie folgt:

- $val_{\mathscr{I}}(1) := \mathfrak{W}$
- $val_{\mathscr{I}}(0) := \mathfrak{F}$
- $val_{\mathscr{I}}(\mathscr{A}) := \mathscr{I}(\mathscr{A})$ für $\mathscr{A} \in \Sigma$
- Für eine Formel $\mathscr{F}$:
  $val_{\mathscr{I}}(\neg\mathscr{F}) := \begin{cases} \mathfrak{F} & \text{falls } val_{\mathscr{I}}(\mathscr{F}) = \mathfrak{W} \\ \mathfrak{W} & \text{falls } val_{\mathscr{I}}(\mathscr{F}) = \mathfrak{F} \end{cases}$
- Für Formeln $\mathscr{F}$ und $\mathscr{G}$:
  $val_{\mathscr{I}}((\mathscr{F} \wedge \mathscr{G})) := \begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls } val_{\mathscr{I}}(\mathscr{F}) = val_{\mathscr{I}}(\mathscr{G}) = \mathfrak{W} \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases}$
- Für Formeln $\mathscr{F}$ und $\mathscr{G}$:
  $val_{\mathscr{I}}((\mathscr{F} \vee \mathscr{G})) := \begin{cases} \mathfrak{F} & \text{falls } val_{\mathscr{I}}(\mathscr{F}) = val_{\mathscr{I}}(\mathscr{G}) = \mathfrak{F} \\ \mathfrak{W} & \text{sonst} \end{cases}$
- Für Formeln $\mathscr{F}$ und $\mathscr{G}$:
  $val_{\mathscr{I}}((\mathscr{F} \to \mathscr{G})) := \begin{cases} \mathfrak{F} & \text{falls } val_{\mathscr{I}}(\mathscr{F}) = \mathfrak{W} \text{ und } val_{\mathscr{I}}(\mathscr{G}) = \mathfrak{F} \\ \mathfrak{W} & \text{sonst} \end{cases}$
- Für Formeln $\mathscr{F}$ und $\mathscr{G}$:
  $val_{\mathscr{I}}((\mathscr{F} \leftrightarrow \mathscr{G})) := \begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls } val_{\mathscr{I}}(\mathscr{F}) = val_{\mathscr{I}}(\mathscr{G}) \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases}$ ■

1.2 Beispiele

Es sei $\Sigma := \{A, B, C\}$.

$$\begin{aligned} I_1(A) &:= \mathfrak{W} \\ I_1(B) &:= \mathfrak{W} \\ I_1(C) &:= \mathfrak{W} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2(A) &:= \mathfrak{W} \\ I_2(B) &:= \mathfrak{F} \\ I_2(C) &:= \mathfrak{F} \end{aligned}$$

2 Prädikatenlogik

2.1 Einige Definitionen

2.1.1 Syntax

Definition
Eine **Signatur** Σ ist ein Quadrupel $\Sigma = (F_\Sigma, P_\Sigma, \alpha_\Sigma, Var_\Sigma)$, wobei

- $F_\Sigma, P_\Sigma, Var_\Sigma$ endliche Mengen sind,
- F_Σ, P_Σ, Var_Σ und die Menge der Sonderzeichen disjunkt sind und
- $\alpha_\Sigma : F_\Sigma \cup P_\Sigma \to \mathbb{N}_0$. ∎

Definition und Bemerkung

- $p \in P_\Sigma$ heißt **Prädikatssymbol**.
- $f \in F_\Sigma$ heißt **Funktionssymbol**.
- α_Σ ordnet jedem Prädikats- und Funktionssymbol eine **Stelligkeit** zu.
- $x \in Var_\Sigma$ heißt **Variable**.
- Wenn $\alpha_\Sigma(p) = n$, dann heißt p **n-stelliges Prädikatssymbol**.
- Nullstellige Prädikatssymbole sind gerade die aussagenlogischen Atome.
- Wenn $\alpha_\Sigma(f) = n$, dann heißt f **n-stelliges Funktionssymbol**.
- Nullstellige Funktionssymbole heißen auch **Konstantensymbole**. ∎

Definition
Sei Σ eine Signatur.

Die Menge der **Terme über** Σ, bezeichnet mit $Term_\Sigma$, definieren wir induktiv wie folgt:

- $Var_\Sigma \subseteq Term_\Sigma$
- Mit $f \in F_\Sigma, \alpha_\Sigma(f) = n, t_1, \ldots, t_n \in Term_\Sigma$ ist auch $f(t_1, \ldots, t_n) \in Term_\Sigma$. ∎

Definition
Sei Σ eine Signatur.

Die Menge der **atomaren Formeln** (oder **Atome**) ist definiert als

$$AF_\Sigma := \{p(t_1, \dots, t_n) \mid p \in P_\Sigma, \alpha_\Sigma(p) = n, t_1, \dots, t_n \in Term_\Sigma\}.$$ ■

Definition
Sei Σ eine Signatur.

Die **Menge der prädikatenlogischen Formeln** For_Σ ist induktiv definiert:

- $1, 0 \in For_\Sigma$.
- $AF_\Sigma \subseteq For_\Sigma$.
- Mit $x \in Var_\Sigma$ und $\mathscr{F}, \mathscr{G} \in For_\Sigma$ sind auch folgende Ausdrücke Elemente von For_Σ:
  - $\neg\mathscr{F}$ (**Negation**)
  - $(\mathscr{F} \wedge \mathscr{G})$ (**Konjunktion**)
  - $(\mathscr{F} \vee \mathscr{G})$ (**Disjunktion**)
  - $(\mathscr{F} \to \mathscr{G})$ (**Implikation**)
  - $(\mathscr{F} \leftrightarrow \mathscr{G})$ (**Äquivalenz**)
  - $\forall x\mathscr{F}$ (**Allquantor**)
  - $\exists x\mathscr{F}$ (**Existenzquantor**). ■

2.1.2 Semantik

Definition
Sei Σ eine Signatur.

Eine **Struktur** (oder **Interpretation**) von Σ ist ein Paar $\mathscr{S} = (\mathscr{U}, \mathscr{I})$, wobei

- $\mathscr{U}$ eine beliebige, nichtleere Menge ist.
- $\mathscr{I}$ eine Abbildung der Prädikats- und Funktionssymbole ist, die
  - jedem nullstelligen Prädikatssymbol $\mathscr{P}$ einen Wahrheitswert $\mathscr{I}(\mathscr{P}) \in \{\mathfrak{W}, \mathfrak{F}\}$ zuordnet,
  - jedem n-stelligen Prädikatssymbol $(n \geq 1)$ p eine n-stellige Relation $\mathscr{I}(p) \subseteq \mathscr{U}^n$ zuordnet,
  - jedem nullstelligen Funktionssymbol c ein $\mathscr{I}(c) \in \mathscr{U}$ zuordnet und
  - jedem n-stelligen Funktionssymbol $(n \geq 1)$ f eine Abbildung $\mathscr{I}(f) : \mathscr{U}^n \to \mathscr{U}$ zuordnet.

$\mathscr{U}$ heißt **Universum**, $\mathscr{I}$ heißt **Interpretationsfunktion**. ■

Definition
Eine **Variablenbelegung** zu einer Struktur $\mathscr{S} = (\mathscr{U}, \mathscr{I})$ ist eine Abbildung $v : Var_\Sigma \to \mathscr{U}$. ■

Definition
Ein Paar $(\mathscr{S}, v)$ aus einer Struktur $\mathscr{S}$ und einer Variablenbelegung v heißt **erweiterte Struktur**. ■

Definition
Zu einer Struktur $\mathscr{S} = (\mathscr{U}, \mathscr{I})$ und einer Variablenbelegung v definieren wir eine (eindeutig bestimmte) Abbildung $valt_{\mathscr{S},v} : Term_\Sigma \to \mathscr{U}$, die **Termauswertung**, wie folgt:

- Für eine Variable x:
  $valt_{\mathscr{S},v}(x) := v(x)$
- Für ein nullstelliges Funktionssymbol c:
  $valt_{\mathscr{S},v}(c) := \mathscr{I}(c)$
- Für ein n-stelliges Funktionssymbol f mit $n \geq 1$:
  $valt_{\mathscr{S},v}(f(t_1, \ldots, t_n)) := (\mathscr{I}(f))(valt_{\mathscr{S},v}(t_1), \ldots, valt_{\mathscr{S},v}(t_n))$ ■

Definition
Zu einer Struktur $\mathscr{S} = (\mathscr{U}, \mathscr{I})$ und einer Variablenbelegung $\mathscr{v}$ definieren wir eine (eindeutig bestimmte) Abbildung $valf_{\mathscr{S},\mathscr{v}} : For_\Sigma \to \{\mathfrak{W}, \mathfrak{F}\}$, die **Formelauswertung**, wie folgt:

- $valf_{\mathscr{S},\mathscr{v}}(1) := \mathfrak{W}$
- $valf_{\mathscr{S},\mathscr{v}}(0) := \mathfrak{F}$
- Für ein nullstelliges Prädikatssymbol $\mathscr{P}$:
  $valf_{\mathscr{S},\mathscr{v}}(\mathscr{P}) := \mathscr{I}(\mathscr{P})$
- Für ein n-stelliges Prädikatssymbol $\mathscr{p}$ mit $n \geq 1$:
  $valf_{\mathscr{S},\mathscr{v}}(\mathscr{p}(t_1, \dots, t_n)) := \begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls } (valt_{\mathscr{S},\mathscr{v}}(t_1), \dots, valt_{\mathscr{S},\mathscr{v}}(t_n)) \in \mathscr{I}(\mathscr{p}) \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases}$
- Für eine Formel $\mathscr{F}$:
  $valf_{\mathscr{S},\mathscr{v}}(\neg\mathscr{F}) := \begin{cases} \mathfrak{F} & \text{falls } valf_{\mathscr{S},\mathscr{v}}(\mathscr{F}) = \mathfrak{W} \\ \mathfrak{W} & \text{falls } valf_{\mathscr{S},\mathscr{v}}(\mathscr{F}) = \mathfrak{F} \end{cases}$
- Für Formeln $\mathscr{F}$ und $\mathscr{G}$:
  $valf_{\mathscr{S},\mathscr{v}}((\mathscr{F} \wedge \mathscr{G})) := \begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls } valf_{\mathscr{S},\mathscr{v}}(\mathscr{F}) = valf_{\mathscr{S},\mathscr{v}}(\mathscr{G}) = \mathfrak{W} \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases}$
- Für Formeln $\mathscr{F}$ und $\mathscr{G}$:
  $valf_{\mathscr{S},\mathscr{v}}((\mathscr{F} \vee \mathscr{G})) := \begin{cases} \mathfrak{F} & \text{falls } valf_{\mathscr{S},\mathscr{v}}(\mathscr{F}) = valf_{\mathscr{S},\mathscr{v}}(\mathscr{G}) = \mathfrak{F} \\ \mathfrak{W} & \text{sonst} \end{cases}$
- Für Formeln $\mathscr{F}$ und $\mathscr{G}$:
  $valf_{\mathscr{S},\mathscr{v}}((\mathscr{F} \to \mathscr{G})) := \begin{cases} \mathfrak{F} & \text{falls } valf_{\mathscr{S},\mathscr{v}}(\mathscr{F}) = \mathfrak{W} \text{ und } valf_{\mathscr{S},\mathscr{v}}(\mathscr{G}) = \mathfrak{F} \\ \mathfrak{W} & \text{sonst} \end{cases}$
- Für Formeln $\mathscr{F}$ und $\mathscr{G}$:
  $valf_{\mathscr{S},\mathscr{v}}((\mathscr{F} \leftrightarrow \mathscr{G})) := \begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls } valf_{\mathscr{S},\mathscr{v}}(\mathscr{F}) = valf_{\mathscr{S},\mathscr{v}}(\mathscr{G}) \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases}$
- Für eine Variable x und eine Formel $\mathscr{F}$:
  $valf_{\mathscr{S},\mathscr{v}}(\forall x\mathscr{F}) := \begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls für alle } \mathscr{u} \in \mathscr{U} \text{ gilt: } valf_{\mathscr{S},\mathscr{v}_x^{\mathscr{u}}}(\mathscr{F}) = \mathfrak{W} \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases}$

- Für eine Variable x und eine Formel $\mathscr{F}$:
  $valf_{\mathscr{S},v}(\exists x \mathscr{F}) := \begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls für ein } u \in \mathscr{U} \text{ gilt: } valf_{\mathscr{S},v_x^u}(\mathscr{F}) = \mathfrak{W} \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases}$ ■

2.2 Beispiele

Es sei $\Sigma = (F_\Sigma, P_\Sigma, \alpha_\Sigma, Var_\Sigma)$ mit

$$\begin{aligned}
F_\Sigma &:= \{c, d, f, g\} \\
P_\Sigma &:= \{P, Q, p, q\} \\
\alpha_\Sigma(c) &:= 0 \\
\alpha_\Sigma(d) &:= 0 \\
\alpha_\Sigma(f) &:= 1 \\
\alpha_\Sigma(g) &:= 2 \\
\alpha_\Sigma(P) &:= 0 \\
\alpha_\Sigma(Q) &:= 0 \\
\alpha_\Sigma(p) &:= 1 \\
\alpha_\Sigma(q) &:= 2 \\
Var_\Sigma &:= \{x, y\}
\end{aligned}$$

Es sei $S_1 := (U_1, I_1)$ mit

$$
\begin{aligned}
U_1 &:= \{\Box, \triangledown, \sharp, *\} \\
I_1(P) &:= \mathfrak{W} \\
I_1(Q) &:= \mathfrak{W} \\
I_1(p) &:= \{\Box, \triangledown, *\} \\
I_1(q) &:= \{(\Box, \Box), (\Box, *), (\Box, \sharp), (*, \sharp), (\triangledown, \triangledown), (\triangledown, *)\} \\
I_1(c) &:= \triangledown \\
I_1(d) &:= \triangledown \\
I_1(f) &:= \; \{\Box, \triangledown, \sharp, *\} \to \{\Box, \triangledown, \sharp, *\} \\
&\qquad\qquad \Box \mapsto \Box \\
&\qquad\qquad \triangledown \mapsto \sharp \\
&\qquad\qquad \sharp \mapsto \Box \\
&\qquad\qquad * \mapsto \triangledown \\
I_1(g) &:= \; \{\Box, \triangledown, \sharp, *\} \times \{\Box, \triangledown, \sharp, *\} \to \{\Box, \triangledown, \sharp, *\} \\
&\qquad\qquad (u_1, u_2) \mapsto \begin{cases} \Box, & \text{falls } (u_1, u_2) = (\triangledown, \sharp) \\ *, & \text{falls } u_1 = \sharp \\ \sharp, & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Die Abbildung β mit

$$
\begin{aligned}
\beta(x) &:= \triangledown \\
\beta(y) &:= \Box
\end{aligned}
$$

ist eine Variablenbelegung zu S_1.

(S_1, β) ist eine erweiterte Struktur.

Es sei $S_2 := (U_2, I_2)$ mit

$$\begin{aligned}
U_2 &:= \mathbb{N} \\
I_2(P) &:= \mathfrak{W} \\
I_2(Q) &:= \mathfrak{F} \\
I_2(p) &:= \{a \in \mathbb{N} \mid a \text{ gerade}\} \\
I_2(q) &:= \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \leq b\} \\
I_2(c) &:= 5 \\
I_2(d) &:= 4 \\
I_2(f) &:= \begin{array}{c} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ a \mapsto a \cdot 2 \end{array} \\
I_2(g) &:= \begin{array}{c} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ (a,b) \mapsto a + b \end{array}
\end{aligned}$$

Die Abbildung γ mit

$$\begin{aligned}
\gamma(x) &:= 7 \\
\gamma(y) &:= 2
\end{aligned}$$

ist eine Variablenbelegung zu S_2.

Die Abbildung δ mit

$$\begin{aligned}
\delta(x) &:= 7 \\
\delta(y) &:= 5
\end{aligned}$$

ist auch eine Variablenbelegung zu S_2.

(S_2, γ) und (S_2, δ) sind erweiterte Strukturen.