Übungsblatt zu "Lineare Abbildungen"

Sommersemester 2022

Übung 1

Seien U, V und W drei $\mathbb{K}$-Vektorräume und $L : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ sowie $M : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ zwei Lineare Abbildungen. Weisen Sie nach, dass die Hintereinanderausführung $M \circ L : \mathrm{U} \to \mathrm{W}$ wiederum eine Lineare Abbildung ist. Diesen Umstand werden wir bei der Einführung der Multiplikation von Matrizen brauchen.

Übung 2

Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $C^\infty(\mathbb{R})$ der beliebig oft differenzierbaren reellwertigen Funktionen wie im Kapitel "Lineare Räume". Ferner sei eine stetige Funktion $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben sowie ein kompaktes Intervall I. Zeigen Sie mit elementaren Mitteln aus der Schulmathematik, dass die Abbildung $\Omega : C^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}; f \mapsto \int_I f(x) \cdot \omega(x)\,\mathrm{d}x$ vom reellen Vektorraum $C^\infty(\mathbb{R})$ in den rellen Vektorraum $\mathbb{R}$ tatsächlich linear ist.

Übung 3

Auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $C^\infty(\mathbb{R})$ ist durch $\Delta_{x_0} : C^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}; f \mapsto f(x_0)$ eine Abbildung in den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}$ gegeben. Weisen Sie diese Abbildung als linear nach.

Übung 4

Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $C^\infty(\mathbb{R})$ mit der Abbildung D, die durch $D : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}); f \mapsto Df$ mit $(Df)(x) := \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$ gegeben ist. Ist diese Abbildung linear?

Übung 5

Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}$ und für jedes $c \in \mathbb{R}$ die Abbildung $L_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto c \cdot x$. Weisen Sie L_c für jedes c (auch für $c = 0$!) als linear nach. Zeigen Sie außerdem, dass die umgangssprachlich häufig so genannten "linearen Abbildungen" $M_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto a \cdot x + b$ eigentlich *nicht* linear sind, auch wenn ihr Graph eine "Linie", also eine Gerade darstellt. Die korrekte Sprechweise benutzt für diese Funktionen den Begriff *affin*.

Übung 6

Zeigen Sie, dass für jede Lineare Abbildung $L : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ gilt $L\mathbf{0}_\mathrm{V} = \mathbf{0}_\mathrm{W}$, wenn $\mathbf{0}_\mathrm{V}$ und $\mathbf{0}_\mathrm{W}$ die beiden Nullvektoren in V beziehungsweise in W sind. *Anleitung*: ein Vektorraum ist ja immer auch eine *Gruppe*, und das zugehörige Neutrale Element ist gerade der jeweilige Nullvektor. Es genügt nun, die Gleichungskette $L(\mathbf{v}) = L(\mathbf{v} +_{\mathrm{V}} \mathbf{0}_{\mathrm{V}}) = L(\mathbf{v}) +_{\mathrm{W}} L(\mathbf{0}_{\mathrm{V}})$ zu betrachten, nämlich in ihr das Neutrale Element der Addition “$+_{\mathrm{W}}$” in W zu identifizieren.

Übung 7

Weisen Sie nach, dass für eine Lineare Abbildung $L : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ die Menge $\operatorname{Bild} L := L(\mathrm{V}) \subset \mathrm{W}$ ein *Untervektorraum* von W ist. *Anleitung*: Zum Nachweis der Unterraumeigenschaft von $\operatorname{Bild} L$ bedarf es, wie wir wissen, dreier Dinge. Erstens muss $\operatorname{Bild} L$ nichtleer sein. Zweitens muss für beliebige $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \operatorname{Bild} L$ gelten $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in \operatorname{Bild} L$. Und schließlich muss für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$ und jedes $\mathbf{w} \in \operatorname{Bild} L$ gelten, dass $\lambda \cdot \mathbf{w} \in \operatorname{Bild} L$ ist. Für den ersten Punkt siehe die vorangegangene Übung. Für den zweiten und den dritten Punkt gehe man von zwei $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ beziehungsweise von einem $\mathbf{w}$ im Bild von L aus. Dann gibt es definitionsgemäß zwei $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ mit $L\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1$ und $L\mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_2$ (beziehungsweise ein $\mathbf{v}$ mit $L\mathbf{v} = \mathbf{w}$). Man nutze jetzt die Linearität von L aus.

Übung 8

Weisen Sie nach, dass für eine Lineare Abbildung $L : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ die Menge $\operatorname{Kern} L := \{\mathbf{v} \in \mathrm{V} : L\mathbf{v} = \mathbf{0}_{\mathrm{W}}\} \subset \mathrm{V}$ ein *Untervektorraum* von V ist. *Anleitung*: das geht analog zur vorangehenden Übung unter Ausnutzung der Linearität von L. Wenn zum Beispiel $\mathbf{v} \in \operatorname{Kern} L$ ist, also $L\mathbf{v} = \mathbf{0}_{\mathrm{W}}$, sowie $\lambda \in \mathbb{K}$, dann gilt $L(\lambda \cdot_{\mathrm{V}} \mathbf{v}) = \lambda \cdot_{\mathrm{W}} L\mathbf{v} =$... und so weiter.

Weiterführende Übung.

Wir haben gelernt, dass Lineare Abbildungen $L : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ bereits dadurch vollständig gegeben sind, dass wir sagen, wie sie auf den Basisvektoren von W wirken. In dieser Übung machen wir damit Ernst und betrachten ein konkretes Beispiel.

Es sei $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ eine Lineare Abbildung. Ihre Wirkung auf die drei kanonischen Einheitsvektoren von $\mathbb{R}^3$, das heißt die drei Bilder dieser Einheitsvektoren unter L, mögen – jetzt denken wir uns irgendwas aus – zum Beispiel durch

$$M((1,0,0)^\mathsf{T}) := (1,2)^\mathsf{T}$$
$$M((0,1,0)^\mathsf{T}) := (0,-1)^\mathsf{T}$$
$$M((0,0,1)^\mathsf{T}) := (2,2)^\mathsf{T}$$

(Wir verwenden einmal mehr die platzsparende Zeilenschreibweise, bei der zum Beispiel $(1,0,0)^\mathsf{T}$

mit dem hochgestellten Transpositionszeichen “T” den entsprechenden Spaltenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bezeichnen soll.) M angewandt auf einen Spaltenvektor aus $\mathbb{R}^3$ soll ja einen Spaltenvektor aus $\mathbb{R}^2$ erzeugen, und wir haben für jeden kanonischen Einheitsvektor angegeben, welchen. Damit sind wir in der Lage, zum Beispiel $M((3,1,2)^\mathsf{T})$ auszurechnen, unter Ausnutzung der Linearität von M. Nämlich wie? Spoiler: es kommt $((7,9)^\mathsf{T})$ heraus.

Bezeichnen wir mit $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$ und mit $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ die des $\mathbf{R}^2$. Eine Beziehung wie $M((1,0,0)^\mathsf{T}) := (1,2)^\mathsf{T}$ heißt mit dieser Notationsweise ja nichts anderes als $M\mathbf{e}_1 = 1 \cdot \mathbf{e}_1 + 2 \cdot \mathbf{e}_2$. Wir wenden also M sukzessive auf die $\mathbf{e}_i$ der Basis von $\mathbb{R}^3$ an und entwickeln die Bilder dieser Anwendungen in die Basis $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ des Zielraums $\mathbb{R}^2$. Unter Nutzung des Summationszeichens $\sum$ liest sich dies als

$$M\mathbf{e}_i = \sum_{k=1}^{2} M_{ki}\mathbf{e}_k \ ,$$

und was wir weiter oben letztendlich getan haben, war, die $2 \times 3 = 6$ Zahlen M_{ki} zu bestimmen. Zum Beispiel liefert $M\mathbf{e}_1 =: M_{11}\mathbf{e}_1 + M_{21}\mathbf{e}_2$ die Zahlen $M_{11} = 1$ und $M_{21} = 2$. Man bestimme alle Zahlen M_{ki} für $i = 1,2,3$ und $k = 1,2$ – das sind insgesamt, wie gesagt, 6 Stück.

Die Art der Indizierung der M_{ki} ist Konvention. Erstens setzt man $M\mathbf{e}_i = \sum_{k=1}^{2} M_{\mathbf{ki}}\mathbf{e}_k$, das heißt der *zweite* Index an M ist derjenige, der sich auf das Argument in $M\mathbf{e}_i$ bezieht. Der *erste* Index ist der, über den bei der Entwicklung von $M\mathbf{e}_i$ in die Basis des Zielraumes summiert wird. Reine Konvention, letztlich – aber irgendwas muss man halt festlegen. Übrigens erweist sich diese Konvention als praktisch und gut zu merken, auch wenn es im Augenblick noch nicht danach aussieht. Zweitens arrangiert man dann die in unserem Fall sechs Zahlen M_{ki} zu einem 2×3-Schema. Üblicherweise setzt man runde (seltener auch eckige) Klammern darum herum und nennt das ganze eine *Matrix*. Und hier braucht man wieder eine Konvention: wie sollen Zeilen und Spalten arrangiert werden? Und man legt fest, dass *Zeilen vor Spalten* gehen; im westlichen Kulturkreis liest man ja auch zeilenweise. “Zeilen vor Spalten” soll heißen, dass der erste Index im Schema der M_{ki}, also das k, die Zeilen des Schemas durchnumeriert, während der zweite Index i die Spalte bezeichnet.

Jetzt geht es darum, die Matrix der Zahlen M_{ki} für die Lineare Abbildung M dieser Aufgabe hinzuschreiben. Wer sich nicht vertan hat, sollte

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

herausbekommen haben. Man bezeichnet die Matrix, die zu einer Linearen Abbildung gehört, im übrigen häufig mit dem gleichen Buchstaben. Manchmal schreibt man auch $M = (M_{ij})$ oder $M = (m_{ij})$. Wir werden im Kapitel "Matrizen" noch genauer auf die 1:1-Bezeihung zwischen Linearen Abbildungen und ihren Matrizen eingehen. Einstweilen merke man sich, dass die drei Spalten unserer Matrix nach Konstruktion gerade durch die drei Bildvektoren $M\mathbf{e}_1$, $M\mathbf{e}_2$ und $M\mathbf{e}_3$ gebildet werden.

Letzter Teil dieser Aufgabe: wie muss man die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ mit dem Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ verrechnen, um zum obigen Ergebnis $\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$ zu kommen? Man mache sich sorgfältig klar, was aus der Festlegung $M\mathbf{e}_i = \sum_{k=1}^{2} M_{ki}\mathbf{e}_k$ resultiert: wie gesagt, die *Spalten* der Matrix sind gerade die *Bilder der Einheitsvektoren* $\mathbf{e}_i$ unter M. Eine genauere und allgemeine Betrachtung, die die Anwendung einer Matrix auf einen Vektor auch als leicht zu merken erscheinen lässt, wird im nächsten Kapitel "Matrizen" vorgenommen.