1. Aus den 10 Ziffern 0, 1, 2, ... 9 sollen 6-stellige Zahlen gebildet werden, bei denen die erste Ziffer eine 1 und die letzte Ziffer eine 0 ist. Wie viele solcher Zahlen gibt es, wenn
   a. jede Ziffer nur einmal vorkommen darf,
   b. Ziffern mehrfach vorkommen dürfen?

   a. Für die zweite bis fünfte Stelle stehen die acht Ziffern 2 bis 9 zur Auswahl, d.h. es gibt $8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = = \frac{8!}{4!} = 1680$ verschiedene Zahlen.

   b. Es gibt $10^4 = 10\,000$ verschiedenen Ziffern.

2. Aus den sechs Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5 sollen vierstellige Zahlen (ohne führende Null) gebildet werden, bei denen
   a. jede Ziffer nur einmal vorkommen darf,
   b. Ziffern mehrfach vorkommen dürfen?

   a. Die erste Ziffer darf keine 0 sein. Deshalb gibt es $5\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = 300$ verschiedene Ziffern.
   b. Es gibt $5\cdot 6\cdot 6\cdot 6 = 1080$ verschiedene Ziffern.

3. Wie viele Autokennzeichen von Lörrach sind möglich, die aus einem oder zwei der 26 Buchstaben und dann aus 2 Ziffern (ohne führende Null) bestehen?

   Für die Buchstaben gibt es $26 + 26\cdot 26 = 702$ Möglichkeiten, und für die zwei Ziffern $9\cdot 10 = 90$ Möglichkeiten. Dies ergibt insgesamt $702\cdot 90 = 63180$ mögliche Kennzeichen.

4. Wir tragen die Einsen zeilenweise ein.
   Für Zeile 1 gibt es 9 Möglichkeiten für die Eins.
   Für Zeile 2 gibt es nur noch 6 Möglichkeiten, da die Eins in Zeile 1 ihrem Block für weitere Einsen sperrt.
   Für Zeile 3 gibt es nur noch 3 Möglichkeiten, da die beiden Einsen darüber ihre beiden Blöcke für weitere Einsen sperren.
   Die Zeilen 4, 5 und 6 enthalten drei neue Blöcke. In ihnen ist jeweils genau eine Spalte durch die drei Einsen darüber gesperrt.
   Für Zeile 4 gibt es somit $9 - 3 = 6$ Möglichkeiten.
   Diese Eins blockiert ihren eigenen Block für weitere Einsen. Und von den restlichen 6 Plätzen sind zwei durch die Spalten der beiden Einsen darüber blockiert.
   Für Zeile 5 gibt es also nur noch 4 Möglichkeiten.
   Für Zeile 6 bleiben folglich nur noch 2 Möglichkeiten.
   Die Zeilen 7, 8 und 9 enthalten drei neue Blöcke. In ihnen sind jeweils genau zwei Spalten durch die sechs Einsen darüber gesperrt.
   Für Zeile 7 gibt es somit 3 Möglichkeiten. Der betreffende Block ist somit gesperrt.
   Für Zeile 8 bleiben dann nur noch 2 Möglichkeiten und für Zeile 9 nur noch eine einzige.
   Insgesamt gibt es $9\cdot 6\cdot 3\cdot 6\cdot 4\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 46656$ Möglichkeiten, neun Einsen zu verteilen.

5. Eine Schulklasse hat jede Woche (5 Unterrichtstage) 4 Stunden Matheunterricht. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die 4 Stunden unterzubringen, wenn
   a. an einem Tag höchstens eine Mathestunde gegeben wird,
   b. von den vier Mathestunden eine als Doppelstunde gegeben wird und die restlichen beiden Stunden an zwei weiteren Tagen stattfinden sollen?

   a. Es gibt $\binom{5}{4} = 5$ Möglichkeiten: 4 Mathetage aus 5 Wochentagen.

   <u>Oder:</u> $\binom{5}{1} = 5$ Möglichkeiten: 1 mathefreier Tag aus 5 Wochentagen. Es gilt $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

   b. Für die Doppelstunde gibt es $\binom{5}{1} = 5$ Möglichkeiten und für die übrigen 2 Stunden jeweils $\binom{4}{2} = 6$ Möglichkeiten, so dass es insgesamt $5\cdot 6 = 30$ Möglichkeiten gibt.

Oder: Es gibt $\binom{5}{3}=10$ Möglichkeiten, drei Mathe-Tage auszuwählen und 3 Möglichkeiten für die eine Doppelstunde, so dass es insgesamt wieder $10\cdot 3=30$ Möglichkeiten gibt.

Oder: Es gibt $\frac{5!}{2!\cdot 1!\cdot 2!}=30$ Möglichkeiten, die Zahlen 1 1 2 0 0 anzuordnen.

c. Für die beiden Doppelstunden gibt es $\binom{5}{2}=10$ Möglichkeiten.

6. Auf wie viele verschiedene Arten kann man einen Lottoschein (6 aus 49) ausfüllen?

$\binom{49}{6}=13983816$ verschiedene Lottoscheine. Oder auch $\binom{49}{43}=13983816$.

7. Auf wie viele Arten kann man die Buchstaben des Wortes MISSISSIPPI anordnen?
MISSISSIPPI besteht aus 11 Buchstaben: 1 mal M, 4 mal I, 4 mal S und 2 mal P.

Die gesuchte Anzahl ist folglich $\frac{11!}{1!\cdot 4!\cdot 4!\cdot 2!}=34650$.

Oder: Für das eine M gibt es $\binom{11}{1}$ Möglichkeiten, für die vier I bleiben noch $\binom{10}{4}$ Möglichkeiten, für die vier S noch $\binom{6}{4}$ Möglichkeiten und für die restlichen beiden S noch $\binom{2}{2}$ Möglichkeiten.

Insgesamt $\binom{11}{1}\cdot\binom{10}{4}\cdot\binom{6}{4}\cdot\binom{2}{2}=\frac{11!}{1!\cdot 10!}\cdot\frac{10!}{4!\cdot 6!}\cdot\frac{6!}{4!\cdot 2!}\cdot\frac{2!}{2!\cdot 0!}=\frac{11!}{1!\cdot 4!\cdot 4!\cdot 2!}=34650$.

8. 32 verschiedene Spielkarten werden auf 4 Spieler verteilt.
   a. Wie viele verschiedene Kartenkombinationen kann ein Spieler erhalten?
   b. Wie viele verschiedene Kartenkombinationen gibt es für die 4 Spieler?

a. Es gibt $\binom{32}{8}=10518300$ Kombinationen.

b. Es gibt $\binom{32}{8}\cdot\binom{24}{8}\cdot\binom{16}{8}\cdot\binom{8}{8}=99561092450391000\approx 9{,}956\cdot 10^{16}$ Kombinationen: Der erste Spieler wählt von den 32 Karten 8 aus. Dafür hat er $\binom{32}{8}=\frac{32\cdot 31\cdot 30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26\cdot 25}{8!}$ Möglichkeiten, da die Reihenfolge keine Rolle spielt. Der nächste Spieler hat $\binom{24}{8}=\frac{24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17}{8!}$ Möglichkeiten, usw.

Oder: $\frac{32!}{8!\cdot 8!\cdot 8!\cdot 8!}=99561092450391000\approx 9{,}956\cdot 10^{16}$.

9. a. Auf wie viele Arten kann man n Personen auf einer Bank anordnen?
   b. Auf wie viele Arten kann man n Personen auf einem Kreis anordnen? Anordnungen, die durch Drehung auseinander hervorgehen, werden nur einmal gezählt.

a. Die Anzahl ist $n!$.

b. Die n Personen sitzen nun auf der Bank von Teilaufgabe a. Wenn z.B. die Person am Ende der Bank aufsteht, sich auf den ersten Platz setzt und die übrigen Personen einen Platz weiterrücken, dann bleibt das für den Fall b, wenn die Bank zum Kreis ‚gebogen' wird, immer noch die gleiche Anordnung. Für den Fall b ist es also gleichgültig, wer auf der Bank „vorne" sitzt. Somit beträgt die Anzahl $(n-1)!$

10. Auf wie viele Arten können 2 Deutsche, 3 Schweizer, 4 Franzosen und 5 Italiener
    a. auf einer Bank Platz nehmen, so dass die Personen gleicher Nationalität nebeneinander sitzen,
    b. an einem runden Tisch Platz nehmen, so dass die Personen gleicher Nationalität nebeneinander sitzen? Anordnungen, die durch Drehung auseinander hervorgehen, werden nur einmal gezählt.

a. Für die Anordnung der 4 Nationalitäten gibt es $4!$ Möglichkeiten. Für die Anordnung der Deutschen gibt es $2!$, der Schweizer $3!$, der Franzosen $4!$ und der Italiener $5!$ Möglichkeiten. Insgesamt ergibt dies $4!\cdot 2!\cdot 3!\cdot 4!\cdot 5! = 829\,440$ Möglichkeiten.

b. Für die 4 Nationalitäten gibt es hier nur $3!$ Möglichkeiten, da man die erste Nationalität irgendwo auf dem Kreis festlegen kann. Insgesamt gibt es somit $3!\cdot 2!\cdot 3!\cdot 4!\cdot 5! = 207\,360$ Möglichkeiten.

11. Zur Verfügung stehen 10 verschiedene Buchstaben. Wie viele Kunstwörter
   a. zu 6 Buchstaben lassen sich bilden, wenn kein Buchstabe doppelt auftreten darf,
   b. zu 6 Buchstaben lassen sich bilden, wenn Buchstabenwiederholungen erlaubt sind,
   c. zu 10 Buchstaben lassen sich bilden, wenn kein Buchstabe doppelt auftreten darf,
   d. zu 10 Buchstaben lassen sich bilden, wenn Buchstabenwiederholungen erlaubt sind,
   e. zu 16 Buchstaben lassen sich bilden?

a. $10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = \frac{10!}{4!} = 151\,200$ oder $\binom{10}{6}\cdot 6! = 210\cdot 720 = 151\,200$

b. $10^6 = 1\,000\,000$

c. $10! = 3\,628\,800$

d. $10^{10} = 10\,000\,000\,000$

e. 10^{16}

12. Das Alphabet hat 26 Buchstaben, nämlich 5 Vokale (a, e, i, o, u) und 21 Konsonanten.
   a. Wie viele Kunstwörter aus 7 Buchstaben, die 3 verschiedene Vokale und 4 verschiedene Konsonanten enthalten, lassen sich bilden?
   b_1. Wie viele der Wörter aus a. enthalten den Buchstaben a?
   b_2. Wie viele der Wörter aus a. beginnen mit dem Buchstaben a?
   b_3. Wie viele der Wörter aus a. enthalten die Buchstaben a und z?
   b_4. Wie viele der Wörter aus a. beginnen mit dem Buchstaben a und enden mit dem Buchstaben z?

a. Es gibt $\binom{5}{3}\cdot\binom{21}{4}$ Möglichkeiten, die 7 Buchstaben auszuwählen. Diese 7 verschiedenen Buchstaben lassen sich auf $7!$ Möglichkeiten anordnen, so dass es insgesamt $\binom{5}{3}\cdot\binom{21}{4}\cdot 7! = 301\,644\,000$ Möglichkeiten gibt.

b_1. $\binom{4}{2}\cdot\binom{21}{4}\cdot 7! = 180\,986\,400$

b_2. $\binom{4}{2}\cdot\binom{21}{4}\cdot 6! = 25\,855\,200$

b_3. $\binom{4}{2}\cdot\binom{20}{3}\cdot 7! = 34\,473\,600$

b_4. $\binom{4}{2}\cdot\binom{20}{3}\cdot 5! = 820\,800$.

13. a. 10 Studenten sollen auf zwei gleichartige Räume verteilt werden, so dass sich in einem Raum 4 und im anderen Raum 6 Studenten befinden. Wie viele Möglichkeiten für die Aufteilung gibt es?
   b. 10 Studenten sollen auf zwei gleichartige Räume verteilt werden, so dass sich in jedem Raum mindestens ein Student aufhält. Wie viele Möglichkeiten für die Aufteilung gibt es?

a. $\binom{10}{4}\cdot\binom{6}{6} = 210$

b. $\left[\binom{10}{1}+\binom{10}{2}+\cdots+\binom{10}{9}\right] : 2 = 511$. Summe von 1 bis 9, da in jedem Raum mindestens ein Student sein soll. Division durch 2, da die beiden Räume gleichartig sind.

Oder: Die 10 Studenten werden nacheinander auf die beiden Räume verteilt. Für jeden Studenten gibt zwei Möglichkeiten, so dass sich insgesamt $2^{10} = 1024$ Möglichkeiten ergeben. Da aber in jedem Raum mindestens ein Student sein soll, müssen zwei Möglichkeiten subtrahiert werden, so dass $2^{10} - 2 = 1022$ Möglichkeiten resultieren. Wegen der Gleichartigkeit der Räume muss diese Zahl halbiert werden zu $\frac{2^{10}-2}{2} = 2^9 - 1 = 511$.

14. Ein Lieferant beschäftigt fünf Fahrer. Es sollen drei Waren an drei Empfänger zugestellt werden, wobei jeder Fahrer höchstens eine Fahrt übernehmen kann.
    a. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die drei Aufträge auf die fünf Fahrer zu verteilen, wenn es gleichgültig ist, welcher Fahrer welchen Auftrag bekommt.
    b. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die drei Aufträge auf die fünf Fahrer zu verteilen, wenn es nicht gleichgültig ist, welcher Fahrer welchen Auftrag bekommt.
    c. Momentan steht nur ein Fahrer zur Verfügung und es sollen sieben Waren an sieben Empfänger zugestellt werden. Darunter befinden sich zwei Lieferungen an zwei DHBW-Studierende. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden diese beiden Studierenden – unabhängig von der Reihenfolge – zuerst beliefert? Jede Reihenfolge bei der Lieferung sei gleich wahrscheinlich.

    a. Von den 5 Fahrern müssen 3 beliebig ausgewählt werden. Dafür gibt es $\binom{5}{3} = 10$ Möglichkeiten.
    b. Für den ersten Auftrag stehen 5 Fahrer zur Verfügung, für den zweiten 4 und für den dritten nur noch 3. Dies ergibt $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ Möglichkeiten.

       Oder: Für die Auswahl der drei Fahrer gibt es $\binom{5}{3} = 10$ Möglichkeiten. Der erste Fahrer hat drei Aufträge zur Auswahl, der zweite Fahrer hat zwei Aufträge, der dritte Fahrer hat keine Auswahl. Somit gibt es $10 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 60$ Möglichkeiten.
    c. Insgesamt gibt es $7!$ mögliche Reihenfolgen für die 7 Lieferungen. Die beiden Studierenden können in zwei Reihenfolgen $a\,b$ oder $b\,a$ beliefert werden. Für die restlichen 5 Lieferungen gibt es $5!$ Reihenfolgen. Somit beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit $p = \frac{2 \cdot 5!}{7!} = \frac{2}{7 \cdot 6} = \frac{1}{21} \approx 0{,}0476$.

15. In einer Spielkiste liegen viele gleichartige Kugeln in 8 verschiedenen Farben. Es werden Kugeln ohne Berücksichtigung der Reihenfolge gezogen.
    a. Es werden 5 Kugeln ausgewählt. Wie viele Kombinationen mit lauter verschiedenen Farben gibt es?
    b. Es werden 5 Kugeln ausgewählt. Wie viele Kombinationen gibt es, wenn auch Kugeln gleicher Farbe zugelassen sind?
    c. Es werden 20 Kugeln ohne Einschränkung ausgewählt. Wie viele Kombinationen gibt es?

    a. $\binom{8}{5} = 56$ b. $\binom{8+5-1}{5} = 792$ c. $\binom{8+20-1}{20} = 888030$.

16. Ein Würfel wird viermal geworfen und die vier Ergebnisse werden notiert. Wie viele Möglichkeiten gibt es,
    a. wenn die Reihenfolge der Augenzahlen berücksichtigt wird?
    b. wenn die Reihenfolge der Augenzahlen nicht berücksichtigt wird?
    a. Es gibt $6^4 = 1296$ Möglichkeiten.
    b. Es gibt $\binom{n+k-1}{k} = \binom{6+4-1}{4} = 126$ Möglichkeiten.