Begriff der Funktion

Definition: Eine **Funktion** f einer Menge A in eine Menge B ist eine Vorschrift, die jedem Element $a \in A$ genau ein Element $b \in B$ zuordnet. In Zeichen: $f\colon A \to B$ mit $f\colon a \mapsto b$ oder $f(a) = b$ mit $a \in A$ und $b \in B$.

$A = D_f$ heißt **Definitionsbereich oder Definitionsmenge D_f**, B heißt **Zielbereich oder Zielmenge** der Funktion f.

$f(A) = \{f(a) / a \in A\} = \{b \in B / f(a) = b \text{ mit } a \in A\}$ heißt **Wertebereich oder Wertemenge W_f** der Funktion f. $f(A)$ ist eine Teilmenge der Zielmenge B, in Zeichen $f(A) \subseteq B$.

Die Funktion f heißt **injektiv oder umkehrbar**, wenn es zu jedem $b \in f(A)$ genau ein $a \in A$ gibt mit $f(a) = b$, so dass diese Gleichung eindeutig nach a auflösbar ist.

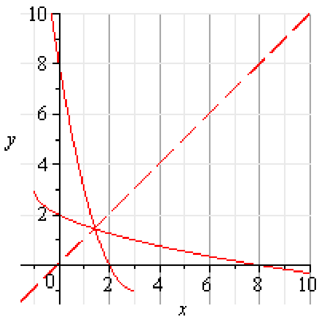
Dazu gleichwertig ist die Eigenschaft: $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$ für alle $a_1, a_2 \in D_f$.

Dazu gleichwertig ist die Eigenschaft: $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$ für alle $a_1, a_2 \in D_f$.

Die Funktion $f\colon A \to B$ heißt **surjektiv**, wenn $f(A) = B$ gilt.

Beispiel 1: $f(x) = 3 - \sqrt{x+1}$ mit der maximalen Definitionsmenge $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -1\}$.

Die Wertemenge ist $W_f = \{y \in \mathbb{R} / y \leq 3\}$.



Die Funktion f ist umkehrbar, da aus $y = 3 - \sqrt{x+1}$ eindeutig $x = y^2 - 6y + 8$ folgt. Nach Vertauschen von x mit y erhält man die **Umkehrfunktion** f^{-1} mit $f^{-1}(x) = x^2 - 6x + 8$ für $x \leq 3$. Im Schaubild bedeutet dieser Variablentausch eine Spiegelung des Schaubildes $y = f(x)$ an der ersten Winkelhalbierenden $y = x$ in das Schaubild $y = f^{-1}(x)$. Daraus folgt $\boxed{D_{f^{-1}} = W_f}$ und $\boxed{W_{f^{-1}} = D_f}$.

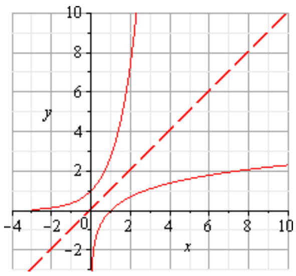
Ebenso folgt aus $f(x_1) = f(x_2)$ unmittelbar die Gleichheit $x_1 = x_2$.

Die **Verkettung** $f^{-1} \circ f$, gelesen „f^{-1} nach f", ist die **Identität**, denn

$$x \overset{f}{\mapsto} 3 - \sqrt{x+1} \overset{f^{-1}}{\mapsto} \left(3 - \sqrt{x+1}\right)^2 - 6\left(3 - \sqrt{x+1}\right) + 8 = x \quad \text{für alle } x \geq -1.$$

Ebenso folgt $x \overset{f^{-1}}{\mapsto} x^2 - 6x + 8 \overset{f}{\mapsto} 3 - \sqrt{x^2 - 6x + 8 + 1} = 3 - |x - 3| = 3 - (3 - x) = x$ für alle $x \leq 3$.

Beispiel 2: $f(x) = e^x$ mit der maximalen Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$ und der Wertemenge $W_f = \mathbb{R}^+$, wobei $\mathbb{R}^+ = \{y \in \mathbb{R} / y > 0\}$. f heißt auch **natürliche Exponentialfunktion** mit der Euler'schen Zahl e.



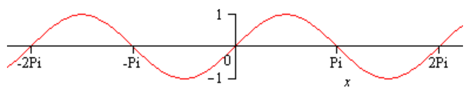
Die Funktion f ist umkehrbar, da aus $y = e^x$ eindeutig $x = \ln y$ folgt, so dass die Umkehrfunktion f^{-1} lautet: $f^{-1}(x) = \ln x$ für $x > 0$.

ln heißt auch **natürlicher Logarithmus** oder Logarithmus zur Basis e. Die Schaubilder der beiden Funktionen sind symmetrisch zur 1. Winkelhalbierenden $y = x$. Man erkennt $D_{\ln} = \mathbb{R}^+$ und $W_{\ln} = \mathbb{R}$.

Außerdem gilt $x \overset{f}{\mapsto} e^x \overset{f^{-1}}{\mapsto} \ln e^x = x$, d.h. $\boxed{\ln e^x = x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$

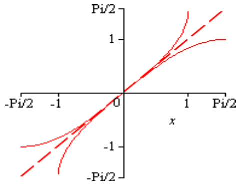
und $x \overset{f^{-1}}{\mapsto} \ln x \overset{f}{\mapsto} e^{\ln x} = x$, d.h. $\boxed{e^{\ln x} = x}$ für alle $x > 0$.

Beispiel 3: $f(x) = \sin x$ mit der Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$ und der Wertemenge $W = \{y \in \mathbb{R} / -1 \leq y \leq 1\} = [-1/1]$.



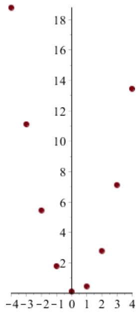
f ist nicht umkehrbar, denn z.B. $f(x) = 0$ hat unendlich viele Lösungen $x = k \cdot \pi$ mit $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, d.h. $k \in \mathbb{Z}$, die Menge der ganzen Zahlen.

Wenn man sich z.B. auf die Definitionsmenge $D = \{x \in \mathbb{R} / -\pi/2 \le x \le \pi/2\} = [-\pi/2 / \pi/2]$ beschränkt, dann ist $f(x) = \sin x$ umkehrbar.



Die Umkehrfunktion lautet $f^{-1}(x) = \arcsin x$ mit der Definitionsmenge $D_{\arcsin} = [-1/1]$ und $W_{\arcsin} = [-\pi/2/\pi/2]$.
Und es gilt $\arcsin(\sin x) = x$ für $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ und $\sin(\arcsin x) = x$ für $-1 \le x \le 1$.

Beispiel 4: a. $f(x) = (x - \frac{1}{3})^2$ mit $D_f = \mathbb{R}$ ist sicher nicht umkehrbar, da z.B. $f(0) = f(\frac{2}{3}) = \frac{1}{9}$ gilt.



b. $f(x) = (x - \frac{1}{3})^2$ mit $D_f = \mathbb{Z}$ ist umkehrbar, denn aus $f(x_1) = f(x_2)$ folgt $(x_1 - \frac{1}{3})^2 = (x_2 - \frac{1}{3})^2$, also $x_1 - \frac{1}{3} = \pm(x_2 - \frac{1}{3})$, d.h. $x_1 = x_2$ oder $x_1 + x_2 = \frac{2}{3}$. Der zweite Fall kann in $\mathbb{Z}$ nicht eintreten, deshalb muss $x_1 = x_2$ sein, so dass f umkehrbar ist; siehe Abbildung.

Definition Ein Ausdruck der Form $a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$ mit $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ heißt **Polynom**. Eine Funktion der Gestalt $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$ heißt **ganzrationale Funktion**.
Wenn $a_n \ne 0$, dann heißt n der **Grad** des Polynoms bzw. der ganzrationalen Funktion.

Definition: Es sei f eine Funktion. $x_0 \in D_f$ heißt eine **Nullstelle** von f, falls $f(x_0) = 0$ gilt.

Beispiel 1: $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ mit $a \ne 0$ hat die Lösungen $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$; a-b-c–Formel

Beispiel 2: $x^2 + p \cdot x + q = 0$ hat die Lösungen $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$; p-q–Formel

Satz: Wenn ein Polynom die Nullstelle x_0 besitzt, dann ist es teilbar durch die Differenz $x - x_0$.

Beispiel 3: $f(x) = -3x^3 - 2x^2 + 19x - 6$. Eine Nullstelle ist $x_1 = 2$. Die Polynomdivision durch $x - 2$ ergibt $(-3x^3 - 2x^2 + 19x - 6) : (x - 2) = -3x^2 - 8x + 3$.

Aus $-3x^2 - 8x + 3 = 0$ folgt nach der a-b-c–Formel oder p-q–Formel $x_2 = -3$ und $x_3 = \frac{1}{3}$.

Somit gilt $f(x) = -3x^3 - 2x^2 + 19x - 6 = -3 \cdot (x - 2) \cdot (x + 3) \cdot (x - 1/3)$. Dies ist die **„Zerlegung in Linearfaktoren"**.

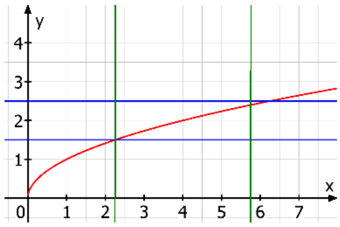
Beispiel 4: $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 - 7x - 5$. Eine Nullstelle ist $x_1 = -1$. Die Polynomdivision durch $x + 1$ ergibt $\left(-\frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 - 7x - 5\right) : (x + 1) = -\frac{1}{4}x^2 - 2x - 5$. Aus $-\frac{1}{4}x^2 - 2x - 5 = 0$ folgt $x_{2/3} = -4 \pm 2i$ mit $i = \sqrt{-1}$, so dass die Linearfaktorzerlegung $f(x) = -\frac{1}{4} \cdot (x + 1) \cdot (x + 4 - 2i) \cdot (x + 4 + 2i)$ lautet.

Grenzwert und Stetigkeit

Definition: Es sei $\delta > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Unter einer **Umgebung** $U(x_0)$ bzw. **delta-Umgebung** $U_\delta(x_0)$ von x_0 versteht man das offene Intervall $U_\delta(x_0) =]\, x_0 - \delta / x_0 + \delta\, [= \{x \in \mathbb{R} / x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\} = \{x \in \mathbb{R} / |x - x_0| < \delta\}$.

Die ε-δ-Definition des Grenzwertes: Die Funktion f sei in einer Umgebung der Stelle x_0 (eventuell mit Ausnahme der Stelle x_0) definiert. Wenn es zu jeder (noch so kleinen) Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ gibt, so dass für alle x mit $|x-x_0|<\delta$ gilt $|f(x)-g|<\varepsilon$, dann heißt g der **Grenzwert** von f an der Stelle x_0. Man schreibt dann $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=g}$. Mit Hilfe von Quantoren: $\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta>0\ \ |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-g|<\varepsilon$.

Beispiel 1: Es sei $f(x)=\sqrt{x}$ und $x_0=4$. Es soll $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=2$ nachgewiesen werden. In der Skizze ist $\varepsilon=0{,}5$ gewählt.

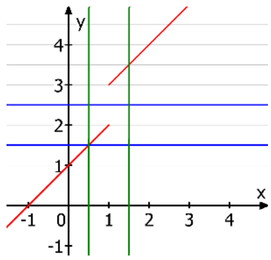


Gesucht ist dann ein $\delta>0$, so dass für alle x aus dem Intervall $|x-4|<\delta$, ausführlich geschrieben $4-\delta<x<4+\delta$, gilt, dass $|f(x)-g|=\left|\sqrt{x}-2\right|<\varepsilon$.

Aus $\sqrt{x}=1{,}5$ folgt $x=2{,}25$, aus $\sqrt{x}=2{,}5$ folgt $x=6{,}25$. Das größtmögliche, zu $x_0=4$ symmetrische, Intervall ist dann $4-1{,}75<x<4+1{,}75$, d.h. $2{,}25<x<5{,}75$ bzw. $|x-4|<\delta$ mit $\delta=1{,}75$.

Allgemein folgt für kleines ε folgt $|f(x)-g|=\left|\sqrt{x}-2\right|<\varepsilon$, also $(2-\varepsilon)^2<x<(2+\varepsilon)^2$, d.h. $-4\varepsilon+\varepsilon^2<x-4<4\varepsilon+\varepsilon^2$. δ ist dann die kleinere der beiden Zahlen $-(-4\varepsilon+\varepsilon^2)$ und $4\varepsilon+\varepsilon^2$.

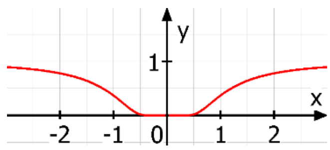
Beispiel 2: $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{für} \quad x\le 1 \\ x+2 & \text{für} \quad x>1 \end{cases}$. Man sieht, dass $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ nicht existiert.



In der Skizze ist $\varepsilon=0{,}5$ gewählt. Und es gibt kein passendes δ-Intervall.
Das skizzierte δ-Intervall würde durch f auf $\{y/1{,}5<y\le 2 \text{ oder } 3<y<3{,}5\}$ abgebildet.
Der linksseitige Grenzwert existiert, nämlich $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=2$, und
Der rechtsseitige Grenzwert existiert, nämlich $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=3$.

Beispiel 3: $f(x)=2x+1$ und $x_0=1$. Der Grenzwert ist sicher $g=f(1)=3$.
Nachweis: Es sei $\varepsilon>0$ gegeben. Dann gilt $|f(x)-g|=|2x+1-3|=|2x-2|=2|x-1|<\varepsilon$, also $|x-1|<\varepsilon/2=\delta$.

Beispiel 4: $f(x)=e^{-1/x^2}$. Was ist $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?

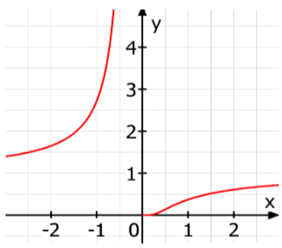


Es ist $\ln\left(f(x)\right)=\ln\left(e^{-1/x^2}\right)=-\dfrac{1}{x^2}\to-\infty$ für $x\to 0$, sowohl für $x>0$ als auch $x<0$. Also folgt $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

Aus $\left|e^{-1/x^2}-0\right|=e^{-1/x^2}<\varepsilon$ folgt $-1/x^2<\ln\varepsilon$, also $-1<x^2\cdot\ln\varepsilon$. Interessant ist nur $0<\varepsilon<1$, so dass $\ln\varepsilon<0$ ist.

Damit ergibt sich $x^2<-1/\ln\varepsilon$, folglich $|x-0|=|x|<\sqrt{-1/\ln\varepsilon}=\delta$.

Beispiel 5: $f(x)=e^{-1/x}$. Was ist $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?



Es ist $\ln\left(f(x)\right)=\ln\left(e^{-1/x}\right)=-\dfrac{1}{x}\to\begin{cases}-\infty \text{ für } x>0\\ \infty \ \text{ für } x<0\end{cases}$. Also existiert nur der rechtsseitige Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=0$, während $f(x)\to\infty$ für mit $x<0$.

Also existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ nicht.

Weisen Sie mit ε und δ nach, dass $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=0$.

Definition 1 der Stetigkeit: Die Funktion f sei in einer Umgebung $U(x_0)$ der Stelle x_0 definiert. Dann heißt f an der Stelle x_0 **stetig**, wenn $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)}$ gilt.

Bemerkung: Für die Stetigkeit an der Stelle x_0 muss also gelten:

1. der linksseitige Grenzwert $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ existiert,

2. der rechtsseitige Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$ existiert,

3. die beiden Grenzwerte sind gleich: $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$,

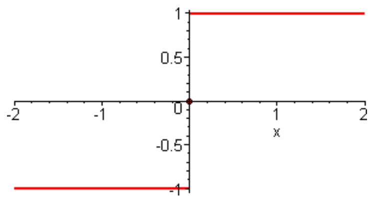
4. der Grenzwert stimmt mit dem Funktionswert überein: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Definition 2: der Stetigkeit: Die Funktion f sei in einer Umgebung der Stelle x_0 definiert. Dann heißt f an der Stelle x_0 stetig, wenn es zu jeder (noch so kleinen) positiven Zahl ε eine positive Zahl δ gibt, so dass für alle x mit $|x - x_0| < \delta$ gilt, dass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Definition 3 der Stetigkeit: Die Funktion f sei in einer Umgebung der Stelle definiert. Dann heißt f an der Stelle x_0 stetig, wenn es zu jeder Umgebung $U(f(x_0))$ von $f(x_0)$ eine Umgebung $U(x_0)$ von x_0 gibt, sodass $U(x_0)$ durch f vollständig in $U(f(x_0))$ abgebildet wird.

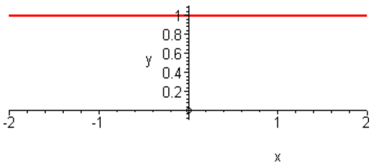
Beispiel 1:

Die Signumfunktion oder Vorzeichenfunktion $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{für} \quad x < 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \\ 1 & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$.



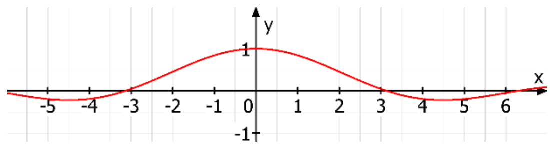
Interessant ist hier die Stelle $x_0 = 0$. Es gilt:
Linksseitiger Grenzwert ist $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \operatorname{sgn}(x) = -1$, rechtsseitiger Grenzwert ist $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \operatorname{sgn}(x) = 1$.
Diese beiden Werte sind verschieden, so dass der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sgn}(x)$ nicht existiert und die sgn-Funktion an der Stelle $x_0 = 0$ nicht stetig ist.
Für alle Werte $x_0 \neq 0$ ist die sgn-Funktion stetig.

Beispiel 2: Wir betrachten den Betrag der Signum-Funktion
$f(x) = |\operatorname{sgn}(x)| = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$.

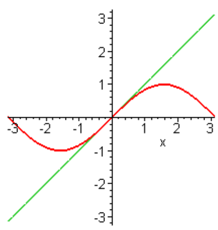


Interessant ist hier wieder nur die Stelle $x_0 = 0$, denn für $x \neq 0$ ist f stetig.
Linksseitiger Grenzwert ist $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = 1$, rechtsseitiger Grenzwert ist $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 1$, so dass der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ existiert. Jedoch ist $f(0) = 0$, so dass die Funktion f an der Stelle $x_0 = 0$ nicht stetig ist.

Beispiel 3: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$, x im Bogenmaß.



Interessant ist hier wieder nur die Stelle $x_0 = 0$, denn für $x \neq 0$ ist f stetig.



Es gilt $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, denn für $x \approx 0$ ist $\sin x \approx x$, wie man am nebenstehenden Schaubild erkennen kann. Oder man verwendet die Regeln von L'Hôpital (siehe Aufgaben).
Somit gilt $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$, so dass f auch an der Stelle $x_0 = 0$ stetig ist.

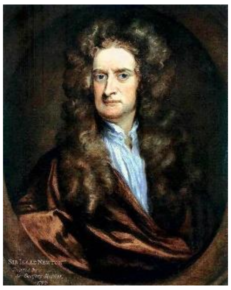
Beispiel 4: $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ist für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig, da $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ für alle $x_0 \neq 0$ gilt.

Beispiel 5: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$, die sog. Dirichlet-Funktion. Sie ist an jeder Stelle unstetig.
Denn in jeder δ-Umgebung von x_0 gibt es rationale und irrationale Zahlen mit den Funktionswerten 1 bzw. 0.

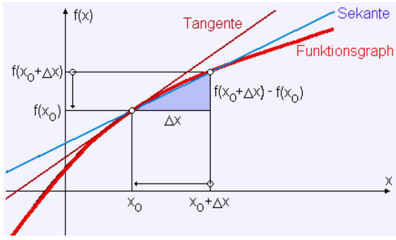
Satz: Es seien f und g stetige Funktionen mit gemeinsamer Definitionsmenge D. Dann sind auch $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ stetige Funktionen. f/g ist nur auf $\{x \in D / g(x) \neq 0\}$ stetig. (Ohne Beweis)

Folgerung: Jede ganzrationale Funktion ist in ganz $\mathbb{R}$ und jede gebrochen-rationale Funktion in ihrer Definitionsmenge stetig.

(a) Die Ableitung einer Funktion

Die Aufgabe der Differenzialrechnung ist es, die *momentane Änderungsrate* zu bestimmen. Ende des 17. Jahrhunderts haben Isaac Newton (rechtes Bild) und Gottfried Wilhelm Leibniz unabhängig voneinander dieses Problem gelöst. Während sich Newton mit der *Momentangeschwindigkeit* beschäftigte, untersuchte Leibniz die *Tangentensteigung*.



Die Sekantensteigung durch die beiden Kurvenpunkte $P_0\left(x_0 / f(x_0)\right)$ und $P\left(x_0+\Delta x / f(x_0+\Delta x)\right)$ ist gegeben durch den Differenzenquotienten $\tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$. Dabei ist α der Steigungswinkel der Sekante.
Wenn der Punkt P gegen den Punkt P_0 wandert, nähert sich die Sekantensteigung der gesuchten Tangentensteigung.

Definition: Eine reellwertige Funktion f heißt an der Stelle x_0 **differenzierbar**, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ existiert.
Diesen Grenzwert bezeichnet man als (erste) Ableitung oder als Differenzialquotient von f an der Stelle x_0 und schreibt: $\boxed{f'(x_0) = \frac{dy}{dx}(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}$.

Beispiel 1: Es sei $f(x) = x^2$. Dann gilt:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0+\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(2x_0 + \Delta x\right) = 2x_0 .$$

Beispiel 2: Es sei $f(x) = x^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0+\Delta x)^n - x_0^n}{\Delta x} .$$ Weiter hilft

*der **binomische Lehrsatz*** $\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k}$

mit den ***Binomialkoeffizienten*** $\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{k!}}$

und den *Fakultäten* $\boxed{n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}$. Speziell wird festgelegt, dass $\boxed{0! = 1}$ gilt.

Beispielsweise ist $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$, $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$. Dann folgt

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0+\Delta x)^n - x_0^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^n + n \cdot x_0^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{2} \cdot x_0^{n-2} \cdot (\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n - x_0^n}{\Delta x} = n \cdot x_0^{n-1} .$$

Damit erhalten wir die Potenzregel für die Ableitung: $\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$.

Beispiel 3: Aus der Schule wissen wir: $\left(e^x\right)' = e^x$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$.

(b) Ableitungsregeln

1. Faktorregel: $f(x) = c \cdot g(x) \;\Rightarrow\; f'(x) = c \cdot g'(x)$ für konstantes $c \in \mathbb{R}$

2. Summenregel: $f(x) = g(x) + h(x) \;\Rightarrow\; f'(x) = g'(x) + h'(x)$

3. Produktregel: $f(x) = u(x) \cdot v(x) \;\Rightarrow\; f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \cdot w(x) \;\Rightarrow\; f'(x) = u'(x) \cdot v(x) \cdot w(x) + u(x) \cdot v'(x) \cdot w(x) + u(x) \cdot v(x) \cdot w'(x)$$

4. Quotientenregel: $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} \;\Rightarrow\; f'(x) = \dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$

Beispiel zur Quotientenregel: $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \;\Rightarrow\; f'(x) = \dfrac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$.

Dieser Bruch lässt sich auf zwei Weisen umformen:

1. Wegen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ gilt dann $\tan' x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

2. $f'(x) = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

5. Kettenregel: $f(x) = h\big(g(x)\big) \;\Rightarrow\; f'(x) = h'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$

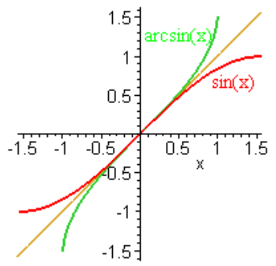
Man verwendet auch die Schreibweise $h\big(g(x)\big) = (h \circ g)(x)$, gelesen: „h nach g von x“.

Beispiel zur Kettenregel: $f(x) = \sqrt[3]{1-6x} = (1-6x)^{1/3}$, d.h. $x \xrightarrow{g} 1-6x \xrightarrow{h} (1-6x)^{1/3}$ mit

$g(x) = 1-6x$ und $h(x) = x^{1/3}$. Wegen $g'(x) = -6$ und $h'(x) = \dfrac{1}{3}x^{-2/3}$ folgt

$$f'(x) = h'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) = \frac{1}{3}g(x)^{-2/3} \cdot (-6) = \frac{1}{3}(1-6x)^{-2/3} \cdot (-6) = \frac{-2}{(1-6x)^{2/3}} .$$

6. Zwei Beispiele zur Ableitung der Umkehrfunktion:



1. Die Funktion $f(x) = \sin x$ ist im Intervall $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ umkehrbar. Die Umkehrfunktion wird mit $f^{-1}(x) = \arcsin x$ bezeichnet.

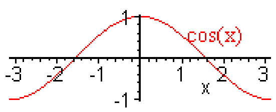
Die Schaubilder $y = \sin x$ und $y = \arcsin x$ sind symmetrisch zur 1. Winkelhalbierenden $y = x$.

Für $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ gilt $\arcsin(\sin x) = x$.

Für $-1 \le x \le 1$ gilt $\sin(\arcsin x) = x$.

Durch Ableiten der letzten Gleichung folgt $\cos(\arcsin x) \cdot \arcsin' x = 1$ und folglich

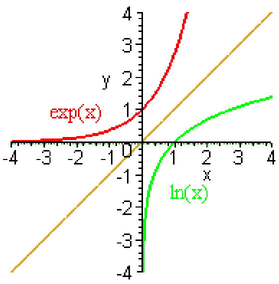
$$\arcsin' x = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{für } -1 < x < 1 .$$



Bemerkung: Aus $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ folgt zwar $\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$.

Da aber $-\pi/2 \le \arcsin x \le \pi/2$ und $\cos u$ für $-\pi/2 \le u \le \pi/2$ positiv ist, trifft in $\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$ nur das Plus-Zeichen zu.

2. Die Ableitung $f'(x)$ der natürlichen Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ stimmt mit $f(x)$ überein. Wegen $f'(x) = e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist f streng monoton steigend, also umkehrbar. Die Umkehrfunktion $\ln x$ wird als natürliche Logarithmusfunktion bezeichnet.



Die Schaubilder $y = e^x$ und $y = \ln x$ sind symmetrisch zur 1. Winkelhalbierenden $y = x$.

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\ln e^x = x$.

Für $x > 0$ gilt $e^{\ln x} = x$.

Durch Ableiten der letzten Gleichung folgt $e^{\ln x} \cdot \ln' x = 1$ und folglich $\ln' x = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$ für $x > 0$.

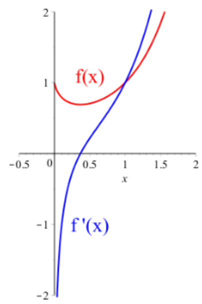
3. Allgemein gilt für die Ableitung einer Umkehrfunktion f^{-1} von f die Beziehung $\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$,

denn durch Ableiten von $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ folgt nach der Kettenregel $f'\left(f^{-1}(x)\right) \cdot \left(f^{-1}\right)'(x) = 1$.

7. Logarithmische Differenziation:

Bei der logarithmischen Differenziation einer Funktion f wird der Funktionsterm zuerst logarithmiert und dann die Ableitung gebildet.

Beispiel 1: Wie lautet die Ableitung von $f(x) = x^x$ für $x > 0$?



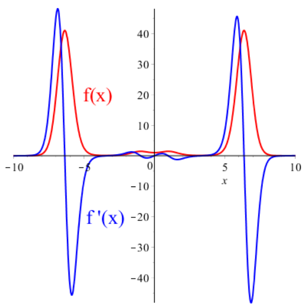
Durch Logarithmieren folgt $\ln f(x) = \ln x^x = x \cdot \ln x$. Bildet man die Ableitung von $\ln f(x) = x \cdot \ln x$, so folgt mit Hilfe der Ketten- und Produktregel:

$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = 1 + \ln x$, also $f'(x) = f(x) \cdot (1 + \ln x) = x^x \cdot (1 + \ln x)$.

Zweite Möglichkeit: $f(x) = x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \cdot \ln(x)}$.

Folglich $f'(x) = e^{x \cdot \ln x} \cdot (x \cdot \ln x)' = e^{x \cdot \ln x} \cdot \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x \cdot (1 + \ln x)$

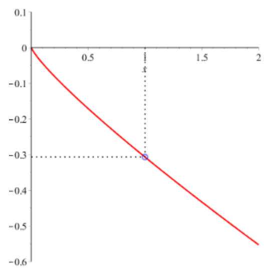
Beispiel 2: Wie Lautet die Ableitung von $f(x) = (x^2+1)^{\cos x}$?



Durch logarithmischen Differenziation von $\ln f(x) = \cos x \cdot \ln(x^2+1)$ folgt

$f'(x) = (x^2+1)^{\cos x} \cdot \left(-\sin x \cdot \ln(x^2+1) + \frac{2x \cdot \cos x}{x^2+1}\right)$.

Beispiel 3: Was ist $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2^{\ln x} - x}{\ln x}$? Die Ableitung von $h(x) = 2^{\ln x}$ folgt durch logarithmische Differenziation: $\ln\left(h(x)\right) = \ln(x) \cdot \ln(2)$, so dass $h'(x) = 2^{\ln x} \cdot \frac{\ln 2}{x}$.



Nach Marquis de l'Hôpital folgt

$$\lim_{x \to 1} \frac{2^{\ln x} - x}{\ln x} = \lim_{x \to 1} \frac{2^{\ln x} \cdot \frac{\ln 2}{x} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 1}\left(2^{\ln x} \cdot \ln 2 - x\right) = 1 \cdot \ln 2 - 1 = \ln 2 - 1 \approx -0{,}30685 .$$

8. Implizite Differenziation:

Bei der impliziten Differenziation ist die Funktion f in der Form $F(x, y) = 0$ gegeben. Diese Gleichung wird nun differenziert.

Beispiel 1: Die Gleichung eines Kreises vom Radius r und Mittelpunkt $(0/0)$ ist $x^2+y^2=r^2$. Die folgt nach dem Satz von Pythagoras für einen Kreispunkt (x/y).

Für den oberen Halbkreis gilt $y=f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$, für den unteren $y=g(x)=-\sqrt{r^2-x^2}$.

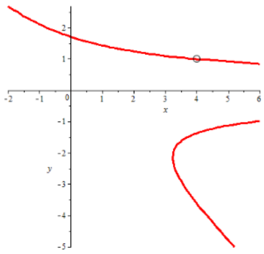
Für die Tangentensteigungen gilt $f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}=-\frac{x}{y}$ und $g'(x)=\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}=-\frac{x}{y}$.

Durch implizite Differenziation der Kreisgleichung $x^2+y^2=r^2$ folgt $2x+2y\cdot y'=0$, also ebenfalls $y'=-\frac{x}{y}$.

Dieses Ergebnis folgt auch aus der Schulmathematik: Der Verbindungstrecke (Radius) von $(0/0)$ zum Kreispunkt (x/y) hat die Steigung $m=\frac{y}{x}$. Die Tangente steht senkrecht auf dieser Strecke, hat also den negativen Kehrwert von m als Steigung, d.h. $-\frac{1}{m}=-\frac{x}{y}$.

Beispiel 2: Gegeben ist eine Kurve der Gleichung $xy^2+y^3=5$. Bestimmen die die Tangentensteigung im Kurvenpunkt $(4/1)$.

Durch Ableiten nach x folgt $y^2+2xy\cdot y'+3y^2\cdot y'=0$. Durch Einsetzen der Koordinaten folgt $1+11y'=0$, d.h. $y'=-\frac{1}{11}$.

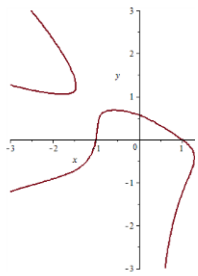


Beispiel 3: Gegeben ist eine Kurve der Gleichung $x^2+y\cdot e^{x+y}+x\cdot\ln(x^2\cdot y^2+1)-1=0$.
Bestimmen die die Tangentensteigung im Kurvenpunkt $(1/0)$ bzw. $(-1/0)$.
Durch Ableiten nach x folgt

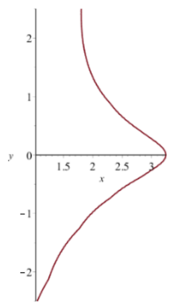
$$2x+y'\cdot e^{x+y}+y\cdot e^{x+y}\cdot(1+y')+\ln(x^2\cdot y^2+1)+\frac{x}{x^2\cdot y^2+1}\cdot(2x\cdot y^2+x^2\cdot 2y\cdot y')=0.$$

Durch Einsetzen von $(1/0)$ folgt $2+y'\cdot e=0$, also $y'=-\frac{2}{e}$.

Durch Einsetzen von $(-1/0)$ folgt $-2+y'\cdot e^{-1}=0$, also $y'=2e$.



Beispiel 4: Gegeben ist eine Kurve der Gleichung $x^2\cdot y^3-2x^3\cdot y^2-16x+52=0$.
Bestimmen die die Tangentensteigung im Kurvenpunkt $(2/-1)$.
Durch Ableiten nach x folgt $2x\cdot y^3+x^2\cdot 3y^2\cdot y'-6x^2\cdot y^2-2x^3\cdot 2y\cdot y'-16=0$.
Einsetzen von $(2/-1)$ ergibt $-4+12y'-24+32y'-16=0$, d.h. $44y'-44=0$, also $y'=1$.



9. Differenzieren einer in Parameterform x(t), y(t) gegebenen Funktion bzw. Kurve

Beispiel 1: Der Kreis.

Die Parameterform eines Kreises vom Radius r und Mittelpunkt $(0/0)$ ist gegeben durch $\boxed{x(t)=r\cdot\cos t,\quad y(t)=r\cdot\sin(t)}$. Für $0\le t<2\pi$ wird der Kreis einmal durchlaufen.

Für die Sekantensteigung gilt $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta t}\cdot\frac{\Delta t}{\Delta x}=\frac{\Delta y/\Delta t}{\Delta x/\Delta t}$. Die Ableitung nach dem Parameter schreibt man üblicherweise mit einem Punkt. Dann folgt für $\Delta t\to 0$ die Beziehung $\boxed{y'(t)=\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}}$.

Dabei ist y' die Steigung der Kurve im x-y-Koordinatensystem.

Zur zweiten Ableitung $y''(t)$: Aus $\frac{\Delta y'}{\Delta x} = \frac{\Delta y'}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{\Delta y'}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}$ folgt für $\Delta t \to 0$ und mit Hilfe der Quotientenregel die Beziehung $y''(t) = \dot{y}'(t) \cdot \frac{1}{\dot{x}(t)} = \frac{\ddot{y}(t)\cdot\dot{x}(t) - \dot{y}(t)\cdot\ddot{x}(t)}{\dot{x}(t)^2} \cdot \frac{1}{\dot{x}(t)} = \frac{\ddot{y}(t)\cdot\dot{x}(t) - \dot{y}(t)\cdot\ddot{x}(t)}{\dot{x}(t)^3}$.

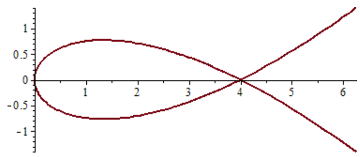
Zurück zum Beispiel: Mit $\dot{x}(t) = -r\cdot\sin t$ und $\dot{y} = r\cdot\cos t$ folgt $y' = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{r\cdot\cos t}{-r\cdot\sin t} = -\frac{1}{\tan t} = -\cot t$ oder $y' = \frac{r\cdot\cos t}{-r\cdot\sin t} = -\frac{x(t)}{y(t)}$. Dieses Ergebnis haben wir oben erhalten.

Setzen wir z.B. $r = 1$ und $t = \pi/3 \mathrel{\hat=} 60^\circ$, so folgt für den Kreispunkt $(x/y) = \left(\cos\frac{\pi}{3}/\sin\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}/\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ die Ableitung $y' = -\frac{1}{\tan\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Und dies ist identisch mit dem Quotienten $-\frac{x(\pi/3)}{y(\pi/3)} = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Oder mit $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ und $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ folgt ebenfalls $f'(\frac{1}{2}) = -\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Beispiel 2: $x(t) = t^2$, $y(t) = \frac{t}{4}\left(4-t^2\right) = t - \frac{1}{4}t^3$ für $t \in \mathbb{R}$,

„parabola nodata“, Parabel mit Knoten



Dann gilt $\dot{x}(t) = 2t$, $\dot{y}(t) = 1 - \frac{3}{4}t^2$, also $y'(t) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{1-\frac{3}{4}t^2}{2t} = \frac{4-3t^2}{8t}$.

Im Ursprung $(0/0)$ ist $t = 0$. Dort verläuft die Tangente vertikal, da $\dot{x}(0) = 0$.

Im Hochpunkt bzw. Tiefpunkt ist $\dot{y}(t) = 1 - \frac{3}{4}t^2 = 0$, d.h. $t = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$. $H\left(\frac{4}{3}\middle|\frac{4}{9}\sqrt{3}\right)$, $T\left(\frac{4}{3}\middle|-\frac{4}{9}\sqrt{3}\right)$.

Es gilt:
Vertikale Tangente im Punkt $(x(t_0)/y(t_0)) \Rightarrow \dot{x}(t_0) = 0$
Horizontale Tangente im Punkt $(x(t_0)/y(t_0)) \Rightarrow \dot{y}(t_0) = 0$.

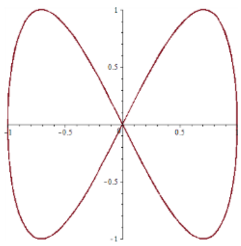
Die Umkehrung ist i. Allg. falsch. Zum Beispiel ist durch $x(t) = t^3$, $y(t) = t^3$ für $t \in \mathbb{R}$ die Gerade $y = x$ gegeben, die weder eine horizontale noch eine vertikale Tangente besitzt, obwohl $\dot{x}(0) = 0$ und $\dot{y}(0) = 0$

Im Knoten ist $y(t) = \frac{t}{4}\left(4-t^2\right) = 0$, aber $t \neq 0$, also $t = \pm 2$, d.h. $K(4|0)$ mit $y' = \pm\frac{1}{2}$.

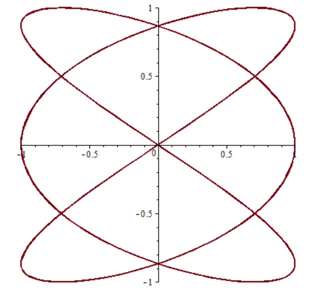
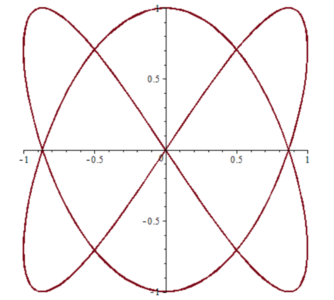
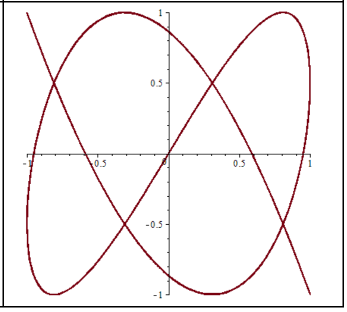
Beispiel 3: $x(t) = \sin(t)$, $y(t) = \sin(2t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

Dann gilt $y'(t) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{2\cos(2t)}{\cos(t)}$.

t	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
$x(t)$	0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0
$y(t)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0
$y'(t)$	2	0	$\pm\infty$	0	-2	0	$\pm\infty$	0	2

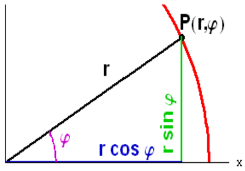


Beispiel 4:

$x(t) = \sin(3t)$ $y(t) = \sin(2t)$ $0 \le t \le 2\pi$	$x(t) = \sin(2t)$ $y(t) = \sin(3t)$ $0 \le t \le 2\pi$	$x(t) = \sin(3t)$ $y(t) = \sin(5t)$ $0 \le t \le 2\pi$
		

Diese Schaubilder (Figuren) sind benannt nach dem franz. Physiker Jules Antoine Lissajous (1822 – 1880)

10. Steigung einer Kurve in Polarkoordinaten

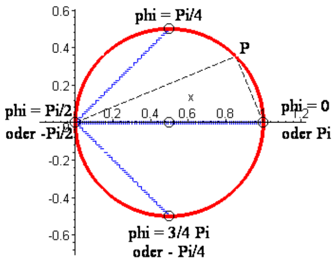


Zur Festlegung eines Punktes im Koordinatensystem kann man die kartesischen Koordinaten (x / y) oder die Polarkoordinaten (r / φ) verwenden.

Dabei ist $\boxed{x = r \cdot \cos\varphi \ \text{ und } \ y = r \cdot \sin\varphi}$.

Beispiel 1: Ein Kreis vom Radius R um den Ursprung hat die Polarform $\boxed{r(\varphi) = R}$.

In kartesischen Koordinaten folgt dann $\boxed{x = R \cdot \cos\varphi}$ und $\boxed{y = R \cdot \sin\varphi}$.



Beispiel 2: Ein Kreis vom Radius R um den Mittelpunkt $M(R / 0)$ durch den Ursprung hat die Polarform $\boxed{r(\varphi) = 2 \cdot R \cdot \cos\varphi}$. Denn nach Thales beträgt der Winkel im Punkt P (siehe Zeichnung) 90°, so dass $\cos\varphi = {}^{r(\varphi)}\!/_{2 \cdot R}$ folgt.

Für $0 \le \varphi \le {}^{\pi}\!/_{2}$ erhält man den oberen und für $-{}^{\pi}\!/_{2} \le \varphi \le 0$ den unteren Halbkreis.

Auch für ${}^{\pi}\!/_{2} < \varphi < \pi$ erhält man den unteren Halbkreis, da für diese Werte von φ der Radius $r(\varphi)$ negativ wird, so dass der Kurvenpunkt in Richtung $-\varphi$ liegt.

Für die kartesischen Koordinaten folgt dann:

$$\boxed{x(\varphi) = r(\varphi) \cdot \cos\varphi = 2 \cdot R \cdot \cos^2\varphi \ \text{ und } \ y(\varphi) = r(\varphi) \cdot \sin\varphi = 2 \cdot R \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi}.$$

Interpretationen: Es gelte $-{}^{\pi}\!/_{2} \le \varphi \le {}^{\pi}\!/_{2}$, bzw. $-{}^{\pi}\!/_{2} < \varphi \le {}^{\pi}\!/_{2}$, damit der Nullpunkt nicht zweimal vorkommt.

Aus $r(\varphi) = 2 \cdot R \cdot \cos\varphi$ folgt $\dot{r}(\varphi) = -2 \cdot R \cdot \sin\varphi$. Es ist $\dot{r}(\varphi) = 0$ für $\varphi = 0$, d.h. ganz rechts im Punkt $(2R / 0)$ ändert sich r nur wenig mit veränderlichen Winkel φ.

Aus $x(\varphi) = 2 \cdot R \cdot \cos^2\varphi$ folgt $\dot{x}(\varphi) = -2 \cdot R \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi$. Es ist $\dot{x}(\varphi) = 0$ für $\varphi = 0$ im Punkt $(2R / 0)$ und im Punkt $(0 / 0)$.

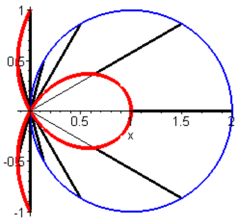
Aus $y(\varphi) = 2 \cdot R \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi$ folgt $\dot{y}(\varphi) = 2 \cdot R \cdot \left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) = 2 \cdot R \cdot \cos(2\varphi)$. Es ist $\dot{y}(\varphi) = 0$ für $\sin^2\varphi = \cos^2\varphi$, d.h. $\tan\varphi = \pm 1$, also $\varphi = \pm\pi / 4$. Die gleichen Werte folgen aus $\cos(2\varphi) = 0$. Dies sind der Hochpunkt (R / R) und der Tiefpunkt $(R / -R)$.

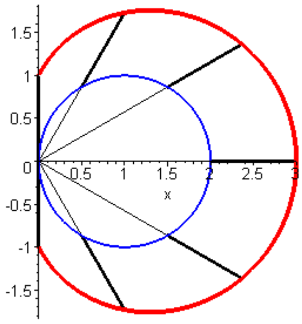
Zur Kontrolle wird die Koordinatengleichung $(x-x_M)^2+(y-y_M)^2=R^2$ mit $x_M=R$ und $y_M=0$ bestimmt:
$(x-R)^2+y^2=(2\cdot R\cdot\cos^2\varphi-R)^2+(2\cdot R\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi)^2=R^2\cdot\left[(2\cdot\cos^2\varphi-1)^2+(2\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi)^2\right]$.

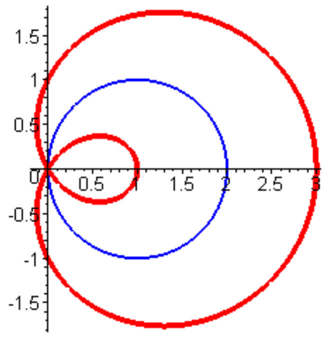
Ersetzt man in $(2\cdot\cos^2\varphi-1)^2+(2\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi)^2=4\cdot\cos^4\varphi-4\cdot\cos^2\varphi+1+4\cdot\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi$ den $\sin^2\varphi$ durch $1-\cos^2\varphi$, so wird die Klammer wie erwartet gleich 1.

Beispiel 3: Im Ursprung eines Koordinatensystems steht ein Baum. Herrchen läuft auf einem Kreis vom Radius R, der durch den Ursprung geht, genau so wie in Beispiel 2. An zwei Leinen der gleichen Länge k führt er zwei Hunde, von denen der eine immer in Richtung Baum und der andere gerade entgegengesetzt strebt.
Für den zum Baum strebenden Hund gilt $\boxed{r(\varphi)=2\cdot R\cdot\cos(\varphi)-k}$ für $-\pi/2\le\varphi\le\pi/2$.
Für den äußeren Hund gilt die Beziehung $\boxed{r(\varphi)=2\cdot R\cdot\cos(\varphi)+k}$ für $-\pi/2\le\varphi\le\pi/2$.
In der Skizze ist R=1 und k=1 gewählt.

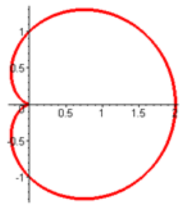
Das linke Bild zeigt den Kreis des Herrchens und die Schleife des zum Baum hin strebendenden Hundes. Im mittleren Bild erkennt man Schleife des äußeren Hundes.
Beide Kurven zusammen ergeben das rechte Schaubild. Es besitzt die Gleichung $r(\varphi)=2\cdot R\cdot\cos(\varphi)-k$ oder ebenso auch $r(\varphi)=2\cdot R\cdot\cos(\varphi)+k$ für $-\pi\le\varphi\le\pi$ oder auch für $0\le\varphi\le 2\pi$. Es wird **Pascalsche Schnecke** genannt.







Speziell für $R=1/2$ und $k=1$ ergibt sich $r(\varphi)=\cos\varphi+1$ mit $0\le\varphi<2\pi$ die sog. **Kardioide** oder Herzkurve.



Steigung einer in Polarform gegebenen Kurve:

Die Kurve sei gegeben durch $r=r(\varphi)$. Die kartesischen Koordinaten sind dann
$x=r(\varphi)\cdot\cos\varphi$ und $y=r(\varphi)\cdot\sin\varphi$. Die Steigung der Kurventangente im xy-Koordinatensystem ist dann

$$\boxed{y'=\frac{\dot y}{\dot x}=\frac{\dot r(\varphi)\cdot\sin\varphi+r(\varphi)\cdot\cos\varphi}{\dot r(\varphi)\cdot\cos\varphi-r(\varphi)\cdot\sin\varphi}}.$$

Im **Beispiel 1** ist polar $r=R$ konstant und kartesisch $x=R\cdot\cos\varphi$, $y=R\cdot\sin\varphi$.

Dann folgt polar $y'=\dfrac{\dot r(\varphi)\cdot\sin\varphi+r(\varphi)\cdot\cos\varphi}{\dot r(\varphi)\cdot\cos\varphi-r(\varphi)\cdot\sin\varphi}=\dfrac{0\cdot\sin\varphi+R\cdot\cos\varphi}{0\cdot\cos\varphi-R\cdot\sin\varphi}=-\dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi}=-\dfrac{1}{\tan\varphi}$

und kartesisch ebenfalls $y'=\dfrac{\dot y}{\dot x}=\dfrac{R\cdot\cos\varphi}{-R\cdot\sin\varphi}=-\dfrac{1}{\tan\varphi}$.

Im **Beispiel 2** ist polar $r(\varphi) = 2 \cdot R \cdot \cos\varphi$ und kartesisch $x(\varphi) = 2 \cdot R \cdot \cos^2\varphi$ und $y(\varphi) = 2 \cdot R \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi$.
Dann folgt polar

$$y' = \frac{\dot r(\varphi)\cdot\sin\varphi + r(\varphi)\cdot\cos\varphi}{\dot r(\varphi)\cdot\cos\varphi - r(\varphi)\cdot\sin\varphi} = \frac{-2R\cdot\sin^2\varphi + 2R\cdot\cos^2\varphi}{-2R\sin\varphi\cdot\cos\varphi - 2R\cos\varphi\cdot\sin\varphi} = \frac{\sin^2 - \cos^2\varphi}{2\sin\varphi\cdot\sin\varphi} = \frac{-\cos(2\varphi)}{\sin(2\varphi)} = -\frac{1}{\tan(2\varphi)} \text{ und}$$

kartesisch $y' = \dfrac{\dot y}{\dot x} = \dfrac{2R\cos^2 x - 2R\sin^2 x}{-4R\sin\varphi\cdot\cos\varphi} = \dfrac{\sin^2 - \cos^2\varphi}{2\sin\varphi\cdot\sin\varphi} = \dfrac{-\cos(2\varphi)}{\sin(2\varphi)} = -\dfrac{1}{\tan(2\varphi)}$.

Zum Beispiel 3:
Die Gleichung für die obigen drei Kurven (R=1 und k=1) ist $r(\varphi) = 2\cos\varphi + 1$. Dann folgt
für die Koordinaten $x = r(\varphi)\cdot\cos\varphi = (2\cdot\cos\varphi+1)\cdot\cos\varphi$ und $y = r(\varphi)\cdot\sin\varphi = (2\cdot\cos\varphi+1)\cdot\sin\varphi$

und die Ableitungen $\dot x = \dfrac{dx}{d\varphi} = -2\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi + (2\cdot\cos\varphi+1)\cdot\sin\varphi = -\sin\varphi\cdot(1+4\cdot\cos\varphi)$ und

$$\dot y = \frac{dy}{d\varphi} = -2\cdot\sin\varphi\cdot\sin\varphi + (2\cdot\cos\varphi+1)\cdot\cos\varphi = -2\cdot\sin^2\varphi + 2\cdot\cos^2\varphi + \cos\varphi = 4\cdot\cos^2\varphi + \cos\varphi - 2$$

unter Verwendung von $\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$.

Damit ergibt sich $y' = \dfrac{\dot y}{\dot x} = -\dfrac{4\cdot\cos^2\varphi + \cos\varphi - 2}{\sin\varphi\cdot(1+4\cdot\cos\varphi)}$.

φ	0	$\pi/6$	$2\pi/6$	$3\pi/6$	$4\pi/6$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$8\pi/6$	$9\pi/6$	$10\pi/6$	$11\pi/6$	2π
r	3	2,732	2	1	0	-0,732	-1	-0,732	0	1	2	2,732	3
x	3	2,366	1	0	0	0,634	1	0,634	0	0	1	2,366	3
y	0	1,366	1,732	1	0	-0,366	0	0,366	0	-1	-1,732	-1,366	0
y'	∞	–0,836	0,192	2	–1,732	0,109	∞	-0,189	1,732	-2	-0,192	0,836	∞

Wenn man sich für die Punkte mit <u>waagerechter Tangente</u> interessiert, muss man die Gleichung $\dot y(\varphi) = 0$ lösen.
Im Intervall $[0/2\cdot\pi[$ hat sie die Lösungen

$$\varphi_1 = \arccos\frac{-1+\sqrt{33}}{8} \approx 0{,}9359294557 \approx 53{,}6°, \quad \varphi_2 = \pi - \arccos\frac{1+\sqrt{33}}{8} \approx 2.573763281 \approx 147{,}5°,$$

$$\varphi_3 = \pi + \arccos\frac{1+\sqrt{33}}{8} \approx 3{,}709422027 \approx 212{,}5°, \quad \varphi_4 = 2\pi - \arccos\frac{-1+\sqrt{33}}{8} \approx 5{,}347255852 \approx 306{,}4°.$$

Die Punkte mit <u>senkrechter Tangente</u> folgen aus der Gleichung $\dot x(\varphi) = 0$.

$$\varphi_1 = 0 = 0°, \quad \varphi_2 = \arccos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{4} \approx 1.823476582 \approx 104{,}5°,$$

$$\varphi_3 = \pi = 180°, \quad \varphi_4 = 2\cdot\mathrm{Pi} - \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) = \pi + \arccos\frac{1}{4} \approx 4{,}459708726 \approx 255{,}5°.$$

<u>(c) Die Krümmung eines Schaubilds</u>

Die erste Ableitung $f'(x_0)$ einer Funktion f gibt die Steigung der Tangente im Kurvenpunkt $\left(x_0 / f(x_0)\right)$ an.
Wenn $f'(x_0) > 0$, dann wächst das Schaubild beim Durchgang durch die Stelle $x = x_0$ streng monoton.
Wenn $f'(x_0) < 0$, dann fällt das Schaubild beim Durchgang durch die Stelle $x = x_0$ streng monoton.
Die zweite Ableitung $f''(x_0)$ einer Funktion f gibt das Monotonieverhalten von $f'(x)$ an der Stelle $x = x_0$ an.

Wenn $f''(x_0) > 0$, dann wächst die Steigung der Tangente beim Durchgang durch die Stelle $x = x_0$ streng monoton, d.h. das Schaubild ist (für zunehmende Werte von x) nach links gekrümmt.

Beispiel: Die zweite Ableitung von $f(x) = e^x$ ist $f''(x) = e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Das Schaubild ist für alle $x \in \mathbb{R}$ nach links gekrümmt.
Wenn $f''(x_0) < 0$, dann nimmt die Steigung der Tangente beim Durchgang durch die Stelle $x = x_0$ streng monoton ab, d.h. das Schaubild ist (für zunehmende Werte von x) nach rechts gekrümmt.

Beispiel: Die zweite Ableitung von $f(x) = \ln x$ ist $f''(x) = -1/x^2 < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$. Das Schaubild ist für alle $x \in \mathbb{R}^+$ nach rechts gekrümmt.

Eine interessante Aufgabe ist es, einen Kreis, den sog. **Krümmungskreis**, zu finden, der das Schaubild $y = f(x)$ im Kurvenpunkt $(x_0 / f(x_0))$ berührt und dort die gleiche Krümmung besitzt.

Mit dem Mittelpunkt $M(x_M / y_M)$ lautet die Kreisgleichung $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$. Nun differenziert man die Kreisgleichung wegen $y = y(x) = f(x)$ zweimal implizit nach x: $2 \cdot (x - x_M) + 2 \cdot (y - y_M) \cdot y' = 0$, bzw. $(x - x_M) + (y - y_M) \cdot y' = 0$. Mit Hilfe der Produktregel folgt daraus $1 + y' \cdot y' + (y - y_M) \cdot y'' = 0$.

Somit ergibt sich $y - y_M = -\dfrac{1 + y'^2}{y''}$, also $y_M = y + \dfrac{1 + y'^2}{y''}$.

Aus $(x - x_M) + (y - y_M) \cdot y' = 0$ folgt $x - x_M = -(y - y_M) \cdot y' = \dfrac{1 + y'^2}{y''} \cdot y'$, so dass $x_M = x - y' \cdot \dfrac{1 + y'^2}{y''}$.

Außerdem $r^2 = (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = \left(\dfrac{1 + y'^2}{y''} \cdot y'\right)^2 + \left(-\dfrac{1 + y'^2}{y''}\right)^2 = \left(\dfrac{1 + y'^2}{y''}\right)^2 \cdot (y'^2 + 1) = \dfrac{(1 + y'^2)^3}{y''^2}$.

Im Berührpunt $(x_0 / f(x_0))$ von Krümmungskreis und Schaubild gilt $y = f(x_0)$, $y' = f'(x_0)$ und $y'' = f''(x_0)$, so dass folgt:

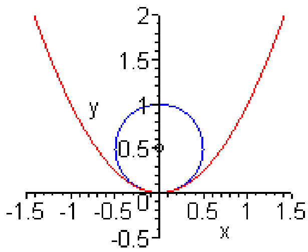
$$\boxed{x_M = x_0 - f'(x_0) \cdot \frac{1 + f'(x_0)^2}{f''(x_0)}}, \quad \boxed{y_M = f(x_0) + \frac{1 + f'(x_0)^2}{f''(x_0)}} \quad \text{und} \quad \boxed{r = \frac{\left(1 + f'(x_0)^2\right)^{3/2}}{|f''(x_0)|}}.$$

Der Kehrwert 1/r des Krümmungsradius r ist ein Maß für die Krümmung κ einer Kurve:

Definition: Unter der **Krümmung κ** einer Kurve im Kurvenpunkt $[x_0 / f(x_0)]$ versteht man den Quotienten
$\boxed{\kappa = \dfrac{f''(x_0)}{\left(1 + f'(x_0)^2\right)^{3/2}}}$. Für den Betrag der Krümmung gilt $|\kappa| = \dfrac{1}{r}$.

$\kappa > 0$ bedeutet **Linkskrümmung**, $\kappa < 0$ bedeutet **Rechtskrümmung** des Schaubilds $y = f(x)$ an der Stelle x_0.

Beispiel: Gesucht ist der Krümmungskreis zu $f(x) = x^2$ durch den Ursprung $(0/0)$. Mit $f'(x) = 2 \cdot x$ und $f''(x) = 2$ folgt $M(0/\tfrac{1}{2})$ und $r = \tfrac{1}{2}$.



(d) Linearisierung

In der Nähe eines Kurvenpunktes $P(x_0 / y_0)$ kann ein Schaubild $y = f(x)$ näherungsweise durch seine Tangente t ersetzt werden. $\boxed{t: \; y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0}$ mit $y_0 = f(x_0)$.

Die Abweichung $\Delta y = y - y_0$ wird dann $\boxed{\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x}$ mit $\Delta x = x - x_0$.

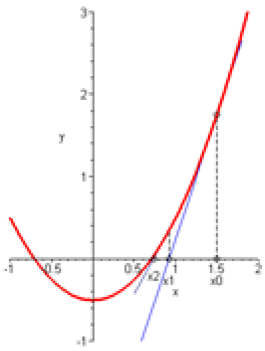
Oft schreibt man auch $\boxed{dy = f'(x_0) \cdot dx}$ mit den Differenzialen dx und dy.

Beispiel: $f(x)=\sqrt{x}$. Bekannt ist $\sqrt{16}=4$. Berechne $\sqrt{18}$ bzw. $\sqrt{15}$: Mit $\sqrt{x}'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ folgt

$\Delta y=\frac{1}{2\sqrt{16}}\cdot\Delta x=\frac{1}{8}\cdot\Delta x$. Und damit $\sqrt{18}\approx 4+\Delta y=4+\frac{1}{8}\cdot 2=4{,}25$ bzw. $\sqrt{15}\approx 4+\Delta y=4+\frac{1}{8}\cdot(-1)=3{,}875$.

Der Taschenrechner liefert gerundet $\sqrt{18}\approx 4{,}243$ bzw. $\sqrt{15}\approx 3{,}873$.

(e) Das Newtonsche Iterationsverfahren



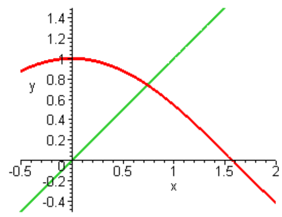
Es geht um die näherungsweise Lösung der Gleichung $f(x)=0$, wenn keine Lösungsformel zur Verfügung steht.
Vorgehen:
Man wählt einen möglichst guten Näherungswert x_0.
1. Schritt:
Die Tangente t_0 im Kurvenpunkt $(x_0/f(x_0))$ schneidet die x-Achse an der Stelle x_1. Dieser Wert liegt bei nicht zu ungünstigem x_0 näher bei der gesuchten Lösung als x_0.

Die Tangente $t_0: y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$ schneidet die x-Achse an der Stelle $x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

2. Schritt:
Die Tangente im Kurvenpunkt $(x_1/f(x_1))$ schneidet die x-Achse an der Stelle x_2. Dieser Wert liegt bei nicht zu ungünstigem x_0 näher bei der gesuchten Lösung als x_1. Es folgt $x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$.⋮

n. Schritt:
Die Tangente im Kurvenpunkt $(x_{n-1}/f(x_{n-1}))$ schneidet die x-Achse an der Stelle x_n. Dieser Wert liegt bei nicht zu ungünstigem x_0 näher bei der gesuchten Lösung als x_{n-1}. Es folgt $\boxed{x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}}$.

Beispiel: Lösen der Gleichung $\cos x=x$.
Es ist die Nullstelle von $f(x)=\cos(x)-x$ zu bestimmen.



Die Iterationsformel lautet $x_n=x_{n-1}-\frac{\cos x_{n-1}-x_{n-1}}{-\sin x_{n-1}-1}=x_{n-1}+\frac{\cos x_{n-1}-x_{n-1}}{\sin x_{n-1}+1}$

Mit dem Anfangswert $x_0=0{,}5$ folgt:
$x_1=0{,}7552224170$
$x_2=0{,}7391416661$
$x_3=0.7390851339$
$x_4=0{,}7390851332$. Alle weiteren Werte von x_n stimmen mit x_4 auf 10 Stellen genau überein.

(f) Die Elastizität einer Funktion

Es sei $f(x)$ eine beliebige Funktion. Wenn sich das Argument von x zu $x+\Delta x$ mit $\Delta x>0$ ändert, so ändert sich $f(x)$ zu $f(x+\Delta x)$. Δx und $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$ sind die **absoluten** Änderungen. $\frac{\Delta x}{x}$ und $\frac{\Delta f}{f}$ sind die dazugehörigen **relativen** Änderungen. Der Quotient $\frac{\frac{\Delta f}{f}}{\frac{\Delta x}{x}}=\frac{\Delta f}{\Delta x}\cdot\frac{x}{f}$ heißt die **durchschnittliche Elastizität** im Intervall $[x/x+\Delta x]$. Sie gibt z.B. an, um wie viel Prozent sich $f(x)$ ändert, wenn sich x um 1% ändert.
Diese Elastizität ist nur sinnvoll für $x\neq 0$ und $f(x)\neq 0$, da sonst durch 0 dividiert würde.

Beispiel 1: Es sei $\frac{\Delta x}{x} = 2\%$ und $\frac{\Delta f}{f} = 8\%$. Dann beträgt die durchschnittliche Elastizität $\frac{\frac{\Delta f}{f}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{8\%}{2\%} = \frac{4\%}{1\%} = 4$.

Wenn also x um 1% zunimmt, dann nimmt f um 4% zu.

Beispiel 2: Es sei $\frac{\Delta x}{x} = 6\%$ und $\frac{\Delta f}{f} = -3\%$. Dann beträgt die durchschnittliche Elastizität $\frac{\frac{\Delta f}{f}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{-3\%}{6\%} = \frac{-0,5\%}{1\%} = -0,5$. Wenn also x um 1% zunimmt, dann nimmt f um 0,5% ab.

Meist verwendet man den Grenzwert für $\Delta x \to 0$. Dann wird $\varepsilon = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \frac{x}{f} = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)}$.

Definition: Die Funktion $f(x)$ sei differenzierbar, und es sei $x \neq 0$ und $f(x) \neq 0$.

Dann heißt $\boxed{\varepsilon_f(x) = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)}}$ die **Elastizität** bzw. **Punktelastizität** von $f(x)$ bezüglich x.

Interpretation: $\varepsilon = 1,5$ bedeutet: Für kleine Werte von Δx beträgt die relative Änderung $\frac{\Delta f(x)}{f(x)} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{f(x)}$ von $f(x)$ das 1,5-fache der relativen Änderung $\frac{\Delta x}{x}$ von x.

Beispiel 1: Es sei $f(x) = \ln x$. Dann folgt $\varepsilon_f(x) = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\ln x} = \frac{1}{\ln x}$.

a. Es sei $x = 2$. Dann ist $\varepsilon_f(2) = \frac{1}{\ln 2} \approx 1,44$. Andererseits folgt mit $\Delta x = 0,1$ die Elastizität zu

$$\frac{\frac{\Delta f}{f}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\frac{\ln(2,1) - \ln(2)}{\ln(2)}}{\frac{0,1}{2}} \approx \frac{0,070389}{0,05} = 1,41.$$

b. Es sei $x = 5$. Dann ist $\varepsilon_f(5) = \frac{1}{\ln 5} \approx 0,62$. Andererseits folgt mit $\Delta x = 0,1$ die Elastizität zu

$$\frac{\frac{\Delta f}{f}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\frac{\ln(5,1) - \ln(5)}{\ln(5)}}{\frac{0,1}{5}} \approx \frac{0,01230}{0,02} = 0,62.$$

c. Es sei $x = 0,5$. Dann ist $\varepsilon_f(0,5) = \frac{1}{\ln 0,5} \approx -1,44$. Andererseits folgt mit $\Delta x = 0,1$ die Elastizität zu

$$\frac{\frac{\Delta f}{f}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\frac{\ln(0,6) - \ln(0,5)}{\ln(0,5)}}{\frac{0,1}{0,5}} \approx \frac{-0,263230}{0,2} = -1,32.$$ Die Abweichung von ε rührt daher, dass $\frac{\Delta x}{x} = 0,2$ relativ groß ist.

Wert der Elastizität	Eigenschaft der Funktion
$\varepsilon = 0$	vollkommen unelastisch: Wegen $f'(x) = 0$ ist $f(x)$ konstant
$\lvert\varepsilon\rvert < 1$	unelastisch: $f(x)$ ändert sich nur wenig mit x
$\lvert\varepsilon\rvert = 1$	Grenzbereich
$\lvert\varepsilon\rvert > 1$	elastisch: $f(x)$ ändert sich stark mit x

Beispiel 2: Es sei $f(x) = a \cdot x^n$ mit $a, n, x \neq 0$. Dann wird $\varepsilon = a \cdot n \cdot x^{n-1} \cdot \frac{x}{a \cdot x^n} = n$, also konstant.

Beispielsweise sei $f(x) = 0{,}3 \cdot x^2$ und $x = 5$. Dann ist $\varepsilon = 2$ konstant.

Andererseits sind 1% von 5 gleich $\Delta x = 0{,}05$, so dass

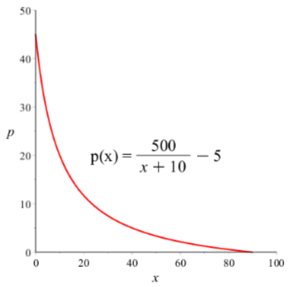
$$\frac{\frac{\Delta f}{f}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \frac{x}{f} = \frac{f(5{,}05) - f(5)}{0{,}05} \cdot \frac{5}{f(5)} = \frac{0{,}3 \cdot 5{,}05^2 - 0{,}3 \cdot 5^2}{0{,}05} \cdot \frac{5}{0{,}3 \cdot 5^2} = 2{,}01 \approx 2 .$$

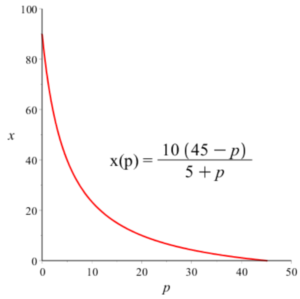
D.h. Wenn z.B. $\Delta x / x = 1\%$, dann $\Delta f / f \approx 2\%$.

Beispiel 3: Gegeben ist die Funktion $p(x) = \frac{500}{x+10} - 5$

bzw. $x(p) = \frac{10 \cdot (45 - p)}{5 + p}$. Dabei bedeutet

p = Preis mit $0 \leq x \leq 90$ und x = Nachfrage mit $0 \leq p \leq 45$.





a. Bestimmen Sie die Elastizität $\varepsilon_x(p)$ der Nachfrage x in Abhängigkeit des Preises p.

Es ist $\varepsilon_x(p) = \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta p}{p}} = x'(p) \cdot \frac{p}{x(p)} = -\frac{500}{(p+5)^2} \cdot \frac{p \cdot (p+5)}{10 \cdot (45-p)} = \frac{50p}{(p+5) \cdot (p-45)}$, d.h. wenn z.B. der Preis um $\frac{\Delta p}{p} = 1\%$ zunimmt, dann ändert sich die Nachfrage x um $\frac{\Delta x}{x} = \frac{50p}{(p+5) \cdot (p-45)}$ %.

Dieser Wert ist negativ, da $p < 45$.

Wie groß ist die Preiselastizität $\varepsilon_x(p)$ der Nachfrage x bei $x_1 = 10$ und bei $x_2 = 40$?

Zur Nachfrage $x_1 = 10$ gehört der Preis $p_1 = p(x_1) = 20$. Bei diesem Preis beträgt die Elastizität $\varepsilon_x(20) = \frac{50 \cdot 20}{(20+5) \cdot (20-45)} = -1{,}6$, d.h. bei einer Preiserhöhung um 1% sinkt die Nachfrage x um 1,6%.

<u>Exakter Weg</u>: Wenn bei der Nachfrage $x_1 = 10$ der Preis um 1% von $p_1 = 20$ auf $20{,}2$ erhöht wird, dann beträgt die Änderung Δx_1 der Nachfrage $\Delta x_1 = x(20{,}2) - x(20) = -0{,}158730159$, so dass $\varepsilon_x(20) = \frac{\Delta x_1 / x_1}{\Delta p_1 / p_1} = \frac{-0{,}158730159/10}{0{,}2/20} \approx -1{,}59$ in guter Übereinstimmung mit dem Näherungswert $-1{,}6$ eben.

Zur Nachfrage $x_2 = 40$ gehört der Preis $p_2 = p(x_2) = 5$. Bei diesem Preis beträgt die Elastizität $\varepsilon_x(5) = \frac{50 \cdot 5}{(5+5) \cdot (5-45)} = -0{,}625$, d.h. bei einer Preiserhöhung um 1% sinkt die Nachfrage x um $0{,}625$%.

<u>Exakter Weg</u>: Wenn bei der Nachfrage $x_1 = 40$ der Preis um 1% von $p_2 = 5$ auf 5,05 erhöht wird, dann beträgt die Änderung Δx_2 der der Nachfrage $\Delta x_2 = x(5{,}05) - x(5) = -0{,}24875622$, so dass $\varepsilon_x(40) = \frac{\Delta x_2 / x_2}{\Delta p_2 / p_2} = \frac{-0{,}24875622/40}{0{,}05/5} \approx -0{,}622$ in guter Übereinstimmung mit dem Wert $-0{,}625$ eben.

b. Bei welcher Nachfrage x beträgt die Preiselastizität der Nachfrage $\varepsilon_x(p) = -1,25$?

Aus $\varepsilon_x(p) = \dfrac{50p}{(p+5)\cdot(p-45)} = -1,25$ folgt $p = \pm 15$, also $p = 15$. Mit Hilfe von

$x(p) = \dfrac{10\cdot(45-p)}{5+p}$ folgt daraus $x(15) = 15$.

c. Wie lautet die Formel für die Nachfrage-Elastizität $\varepsilon_p(x) =$ des Preises? Mit $p(x) = \dfrac{500}{x+10} - 5$

folgt $\varepsilon_p(x) = \dfrac{\frac{\Delta p}{p}}{\frac{\Delta x}{x}} = p'(x)\cdot\dfrac{x}{p(x)} = -\dfrac{500}{(x+10)^2}\cdot\dfrac{x}{\frac{500}{x+10}-5} = \dfrac{100x}{(x+10)\cdot(x-90)}$.

Beispiel: Wenn die Nachfrage $x = 10$ um 1% erhöht wird, dann kann nach diesem Modell der Preis wegen $\varepsilon_p(10) = \dfrac{100\cdot 10}{(10+10)\cdot(10-90)} = -0,625$ um $0,625\%$ gesenkt werden.