

Theoretische Informatik I

Übungsblatt 7: Prädikatenlogik

Duale Hochschule Baden-Württemberg – Lörrach
Studiengang Informatik – TIF21

1. Wir betrachten in dieser Aufgabe die Formel

$$F := ((P \wedge p(x)) \wedge (\neg q(g(x, g(c, d)), y) \vee \forall x p(f(x))).$$

Hierbei sind x und y Variablen, c und d sind nullstellige Funktionssymbole, f ist ein einstelliges Funktionssymbol, g ist ein zweistelliges Funktionssymbol, P ist ein nullstelliges Prädikatssymbol, p ist ein einstelliges Prädikatssymbol und q ein zweistelliges Prädikatssymbol. Formal:

$\Sigma := (F_\Sigma, P_\Sigma, \alpha_\Sigma, Var_\Sigma)$	$\alpha_\Sigma(c) := 0$	$\alpha_\Sigma(P) := 0$
$F_\Sigma := \{c, d, f, g\}$	$\alpha_\Sigma(d) := 0$	$\alpha_\Sigma(p) := 1$
$P_\Sigma := \{P, p, q\}$	$\alpha_\Sigma(f) := 1$	$\alpha_\Sigma(q) := 2$
$Var_\Sigma := \{x, y\}$	$\alpha_\Sigma(g) := 2$	

- (a) Geben Sie $Teilt(F)$ an.
(b) Geben Sie $Teilf(F)$ an.

Es sei $S_1 := (U_1, I_1)$ mit

$U_1 := \mathbb{N}$	$I_1(c) := 5$	$I_1(P) := \mathfrak{B}$
	$I_1(d) := 4$	$I_1(p) := \{a \in \mathbb{N} \mid a \text{ ungerade}\}$
	$I_1(f) := \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$	$I_1(q) := \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a > b\}$
	$a \mapsto a \cdot 3$	
	$I_1(g) := \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$	
	$(a, b) \mapsto a + b$	

Weiter sei

$$\beta(x) := 5 \qquad \beta(y) := 3$$

- (c) Geben Sie $valt_{S_1, \beta}(t)$ an für jedes $t \in Teilt(F)$.
(d) Geben Sie $valf_{S_1, \beta}(\mathcal{F})$ an für jedes $\mathcal{F} \in Teilf(F)$.

Es sei $S_2 := (U_2, I_2)$ mit

$$\begin{aligned}
U_2 &:= \{\square, \nabla, \#, *\} \\
I_2(P) &:= \mathfrak{B} \\
I_2(p) &:= \{\square, \nabla, \#\} \\
I_2(q) &:= \{(\square, \square), (\square, *), (\square, \#), (*, \#), (\nabla, \#), (\nabla, *)\} \\
I_2(c) &:= \nabla \\
I_2(d) &:= * \\
I_2(f) &:= \{\square, \nabla, \#, *\} \rightarrow \{\square, \nabla, \#, *\} \\
&\quad \square \mapsto \# \\
&\quad \nabla \mapsto \# \\
&\quad \# \mapsto \nabla \\
&\quad * \mapsto \nabla \\
I_2(g) &:= \{\square, \nabla, \#, *\} \times \{\square, \nabla, \#, *\} \rightarrow \{\square, \nabla, \#, *\} \\
&\quad (u_1, u_2) \mapsto \begin{cases} \#, & \text{falls } (u_1, u_2) = (*, \square) \\ *, & \text{falls } (u_1, u_2) = (\square, *) \\ \square, & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

Weiter sei

$$\gamma(x) := * \qquad \gamma(y) := \square$$

- (e) Geben Sie $valt_{S_2, \gamma}(t)$ an für jedes $t \in Teilt(F)$.
- (f) Geben Sie $valf_{S_2, \gamma}(\mathcal{F})$ an für jedes $\mathcal{F} \in Teilf(F)$.
- (g) Geben Sie mit Begründung an, ob F allgemeingültig ist.

2. In dieser Aufgabe sei

$$F := (p(f(x)) \wedge P)$$

Hierbei ist x eine Variable, f ist ein einstelliges Funktionssymbol P ist ein nullstelliges Prädikatsymbol und p ist ein einstelliges Prädikatssymbol. Formal:

$$\begin{aligned}
\Sigma &:= (F_\Sigma, P_\Sigma, \alpha_\Sigma, Var_\Sigma) & \alpha_\Sigma(f) &:= 1 & \alpha_\Sigma(P) &:= 0 \\
F_\Sigma &:= \{f\} & \alpha_\Sigma(p) &:= 1 \\
P_\Sigma &:= \{P, p\} \\
Var_\Sigma &:= \{x\}
\end{aligned}$$

- (a) Geben Sie eine erweiterte Struktur an, die ein Modell für F ist.
- (b) Geben Sie eine erweiterte Struktur an, die kein Modell für F ist.