Theoretische Informatik I

Übungsblatt n + 1: Allerlei Aufgaben

Duale Hochschule Baden-Württemberg – Lörrach
Studiengang Informatik – TIF21

1. Geben Sie die Elemente und die Kardinalität der folgenden Mengen an.
   (a) $\{3, 5\} \times \{1\}$
   (b) $(\{5, 6\} \cap \{6, 7\}) \times \{2, 3\}$
   (c) $(\mathbb{Z} \cap [-3, 1)) \times \{5\}$
   (d) $(\mathbb{Z} \cap [-3, 1)) \times \{\}$
   (e) $\{1, 2, 3, 4\} \cap \{\{1, 2, 3\}, 4\}$
2. In dieser Aufgabe sei
   $$M := \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$
   (a) Welche Eigenschaften hat
   $$R_1 := \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$$
   als Relation auf M?
   (b) Welche Eigenschaften hat
   $$R_2 := \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5)\}$$
   als Relation auf M?
   (c) Welche Eigenschaften hat
   $$R_3 := \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5)\}$$
   als Relation auf M?
3. In dieser Aufgabe sei
   $$M := \{1, 2, 3, 4\}.$$
   (a) Welche Eigenschaften hat
   $$R := \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 4)\}$$
   als Relation auf M?

4. In dieser Aufgabe sei

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \exists z \in \mathbb{N}_0 : y^2 = x^2 + z\}.$$

   (a) Geben Sie 3 Elemente aus $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ an, die in R enthalten sind.
   (b) Geben Sie 3 Elemente aus $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ an, die nicht in R enthalten sind.
   (c) Welche Eigenschaften hat R als Relation auf $\mathbb{Z}$?

5. In dieser Aufgabe sei

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x = 5 \cdot y\}.$$

   (a) Geben Sie 3 Elemente aus $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ an, die in R enthalten sind.
   (b) Geben Sie 3 Elemente aus $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ an, die nicht in R enthalten sind.
   (c) Zeigen oder widerlegen Sie: R ist eine reflexive Relation auf $\mathbb{Z}$.
   (d) Zeigen oder widerlegen Sie: R ist eine symmetrische Relation auf $\mathbb{Z}$.
   (e) Zeigen oder widerlegen Sie: R ist eine antisymmetrische Relation auf $\mathbb{Z}$.
   (f) Zeigen oder widerlegen Sie: R ist eine transitive Relation auf $\mathbb{Z}$.
   (g) Zeigen oder widerlegen Sie: R ist eine totale Relation auf $\mathbb{Z}$.

6. In dieser Aufgabe sei

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists z \in \mathbb{Z} : x = 27^z \cdot y\}.$$

   (a) Geben Sie 3 Elemente aus $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ an, die in R enthalten sind.
   (b) Geben Sie 3 Elemente aus $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ an, die nicht in R enthalten sind.
   (c) Zeigen oder widerlegen Sie: R ist eine Halbordnung auf $\mathbb{N}$.
   (d) Zeigen oder widerlegen Sie: R ist eine Totalordnung auf $\mathbb{N}$.
   (e) Zeigen oder widerlegen Sie: R ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$.
   (f) Zeigen oder widerlegen Sie: R ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}$.
   (g) Zeigen oder widerlegen Sie: Die Addition auf $\mathbb{N}/R$ ist vertreterunabhängig.
   Das heißt, dass für alle $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ gelten muss:
   aus $(m_1, m_2) \in R$ und $(n_1, n_2) \in R$ folgt, dass $(m_1 + n_1, m_2 + n_2) \in R$.
   (h) Zeigen oder widerlegen Sie: Die Multiplikation auf $\mathbb{N}/R$ ist vertreterunabhängig.
   Das heißt, dass für alle $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ gelten muss:
   aus $(m_1, m_2) \in R$ und $(n_1, n_2) \in R$ folgt, dass $(m_1 \cdot n_1, m_2 \cdot n_2) \in R$.

7. In dieser Aufgabe sei

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists z \in \mathbb{N}_0 : \frac{x}{y} = 27^z\}.$$

   (a) Geben Sie 3 Elemente aus $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ an, die in R enthalten sind.
   (b) Geben Sie 3 Elemente aus $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ an, die nicht in R enthalten sind.
   (c) Zeigen oder widerlegen Sie: R ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}$.
   (d) Zeigen oder widerlegen Sie: R ist eine Halbordnung auf $\mathbb{N}$.
   (e) Zeigen oder widerlegen Sie: R ist eine Totalordnung auf $\mathbb{N}$.

8. In dieser Aufgabe sei

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \exists z \in \mathbb{N}_0 : x - y = 17 \cdot z\}.$$

   (a) Geben Sie 3 Elemente aus $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ an, die in R enthalten sind.
   (b) Geben Sie 3 Elemente aus $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ an, die nicht in R enthalten sind.
   (c) Zeigen oder widerlegen Sie: R ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$.
   (d) Zeigen oder widerlegen Sie: R ist eine Halbordnung auf $\mathbb{Z}$.
   (e) Zeigen oder widerlegen Sie: R ist eine Totalordnung auf $\mathbb{Z}$.

9. In dieser Aufgabe sei

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists z \in \mathbb{N} : y = x^z\}.$$

   (a) Geben Sie 3 Elemente aus $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ an, die in R enthalten sind.
   (b) Geben Sie 3 Elemente aus $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ an, die nicht in R enthalten sind.
   (c) Zeigen oder widerlegen Sie: R ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}$.
   (d) Zeigen oder widerlegen Sie: R ist eine Halbordnung auf $\mathbb{N}$.
   (e) Zeigen oder widerlegen Sie: R ist eine Totalordnung auf $\mathbb{N}$.

10. In dieser Aufgabe sei

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists z \in \mathbb{Z} : y = z \cdot x\}.$$

   (a) Geben Sie 3 Elemente aus $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ an, die in R enthalten sind.
   (b) Geben Sie 3 Elemente aus $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ an, die nicht in R enthalten sind.
   (c) Zeigen oder widerlegen Sie: R ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}$.
   (d) Zeigen oder widerlegen Sie: R ist eine Halbordnung auf $\mathbb{N}$.
   (e) Zeigen oder widerlegen Sie: R ist eine Totalordnung auf $\mathbb{N}$.

11. In dieser Aufgabe sei

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = x^2\}.$$

   (a) Geben Sie 3 Elemente aus $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ an, die in R enthalten sind.
   (b) Geben Sie 3 Elemente aus $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ an, die nicht in R enthalten sind.
   (c) Zeigen oder widerlegen Sie: R ist eine reflexive Relation auf $\mathbb{Z}$.
   (d) Zeigen oder widerlegen Sie: R ist eine symmetrische Relation auf $\mathbb{Z}$.
   (e) Zeigen oder widerlegen Sie: R ist eine antisymmetrische Relation auf $\mathbb{Z}$.
   (f) Zeigen oder widerlegen Sie: R ist eine transitive Relation auf $\mathbb{Z}$.
   (g) Zeigen oder widerlegen Sie: R ist eine totale Relation auf $\mathbb{Z}$.

12. In dieser Aufgabe sei

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^3 - 3 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 1. \end{aligned}$$

   (a) Zeigen oder widerlegen Sie: f ist injektiv.
   (b) Zeigen oder widerlegen Sie: f ist surjektiv.

13. Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgende Mengen gleichmächtig sind.
   (a) $[3, 5)$ und $[7, 9)$
   (b) $[3, 5)$ und $(7, 9]$
   (c) $[38, 726)$ und $(-19, 216]$
   (d) $\mathbb{R}$ und $(-1, 1)$ *(hier werden Sie vermutlich nach einer Idee fragen müssen)*

14. Wir betrachten in dieser Aufgabe die Formel

$$F := ((p(y, f(x)) \wedge p(z, g(x, y))) \to q(x, y, z)).$$

Hierbei sind x, y und z Variablen, f ist ein einstelliges Funktionssymbol, g ist ein zweistelliges Funktionssymbol, p ist ein zweistelliges Prädikatssymbol und q ein dreistelliges Prädikatssymbol. Formal:

$$\begin{aligned} \Sigma &:= (F_\Sigma, P_\Sigma, \alpha_\Sigma, Var_\Sigma) & \alpha_\Sigma(f) &:= 1 & \alpha_\Sigma(p) &:= 2 \\ F_\Sigma &:= \{f, g\} & \alpha_\Sigma(g) &:= 2 & \alpha_\Sigma(q) &:= 3 \\ P_\Sigma &:= \{p, q\} \\ Var_\Sigma &:= \{x, y, z\} \end{aligned}$$

Außerdem sei $S := (U, I)$ mit

$$\begin{aligned} U &:= \mathbb{Z} & I(f) &:= \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} & I(p) &:= \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a = b\} \\ & & & \quad a \mapsto 2 \cdot a \\ & & I(g) &:= \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} & I(q) &:= \{(a,b,c) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid c = 3 \cdot a\} \\ & & & \quad (a,b) \mapsto a + b \end{aligned}$$

Weiter sei

$$\beta(x) := 5 \qquad \beta(y) := 10 \qquad \beta(z) := 20$$

und

$$\gamma(x) := 5 \qquad \gamma(y) := 10 \qquad \gamma(z) := 15$$

(a) Geben Sie $Teilt(F)$ an.

(b) Geben Sie $Teilf(F)$ an.

(c) Geben Sie $valt_{S,\beta}(t)$ an für jedes $t \in Teilt(F)$.

(d) Geben Sie $valf_{S,\beta}(\mathscr{F})$ an für jedes $\mathscr{F} \in Teilf(F)$.

(e) Geben Sie $valt_{S,\gamma}(t)$ an für jedes $t \in Teilt(F)$.

(f) Geben Sie $valf_{S,\gamma}(\mathscr{F})$ an für jedes $\mathscr{F} \in Teilf(F)$.

Es sei

$$G := \forall x \forall y \forall z F,$$

also

$$G = \forall x \forall y \forall z((p(y, f(x)) \wedge p(z, g(x, y))) \to q(x, y, z)).$$

(g) Geben Sie $Teilt(G)$ an.

(h) Geben Sie $Teilf(G)$ an.

(i) Geben Sie $valt_{S,\beta}(t)$ an für jedes $t \in Teilt(G)$.

(j) Geben Sie $valf_{S,\beta}(\mathscr{F})$ an für jedes $\mathscr{F} \in Teilf(G)$.

(k) Geben Sie $valt_{S,\gamma}(t)$ an für jedes $t \in Teilt(G)$.

(l) Geben Sie $valf_{S,\gamma}(\mathscr{F})$ an für jedes $\mathscr{F} \in Teilf(G)$.

15. Geben Sie mit Begründung an, ob folgende Formeln erfüllbar sind und ob sie allgemeingültig sind.
    (a) $F_1 := (p(c, d) \wedge q(x))$
    (b) $F_2 := \forall x q(x)$
    (c) $F_3 := (p(c) \wedge \forall x q(x))$
    (d) $F_4 := (\forall x p(x) \vee \forall x \neg p(x))$
    (e) $F_5 := (\neg p(c) \wedge \forall x q(x))$
    (f) $F_6 := (p(c) \wedge \forall x r(c, x, c))$
    (g) $F_7 := \forall x p(x, f(x))$
    (h) $F_8 := (\neg p(c) \wedge \forall x p(f(x)))$
    (i) $F_9 := \neg(p(c) \wedge \forall x p(f(x)))$
    (j) $F_{10} := (p(c) \wedge \neg\forall x p(f(x)))$
    (k) $F_{11} := (p(c) \wedge \forall x \neg p(f(x)))$
    (l) $F_{12} := (p(f(x)) \wedge \neg\forall x p(f(x)))$
    (m) $F_{13} := (\forall x p(f(x)) \wedge \neg\forall x p(x))$
    (n) $F_{14} := (p(c) \rightarrow \exists x p(x))$
    (o) $F_{15} := (\forall x p(x) \rightarrow p(c))$

16. Geben Sie eine erweiterte Struktur an, die Modell für genau eine der beiden Formeln ist.
    (a) $F := (p(c) \wedge \neg\forall x p(f(x)))$ und $G := (p(c) \wedge \forall x \neg p(f(x)))$
    (Ist »genau für F« möglich? Ist »genau für G« möglich?)

17. Formen Sie die folgende Formel logisch äquivalent so um, dass Negationszeichen nur unmittelbar vor Prädikatssymbolen stehen.

    Formen Sie die folgende Formel logisch äquivalent so um, dass alle Quantoren vorne stehen.
    (a) $\neg\forall z((p(z) \wedge \neg q(z)) \vee (\forall x p(x) \wedge \neg\exists y q(y)))$
    (b) $\exists x \neg(\forall y q(x, y) \wedge \neg\exists z p(z))$
    (c) $\neg\forall x \neg\exists y(p(y) \wedge \forall x p(x))$
    (d) $\neg\exists x((p(x) \wedge \neg\forall y p(y)) \vee (\neg\forall z \neg p(z) \vee p(x)))$
    (e) $\forall z \neg(((\forall x p(x) \wedge \exists y \neg q(y)) \vee (p(c) \wedge \forall x \neg q(x))) \wedge p(z))$