Folgen

1. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n = \dfrac{3n+1}{2n-1}$, $b_n = \dfrac{3n-1}{2n+1}$, $c_n = \dfrac{3n^2+2n+1}{4n^2+2n+1}$.

Bestimmen Sie jeweils einige Folgenglieder.

Untersuchen Sie die drei Folgen auf Monotonie.

Bestimmen Sie die Grenzwerte a und b von a_n und b_n und zeigen Sie dies auch mit Hilfe von ε und n_0.
Bestimmen Sie den Grenzwert von c_n auch durch Polynomdivision.

$a_1 = 4,\ \ a_2 = 7/3,\ \ a_3 = 2,\ \ a_4 = 13/7$
$b_1 = 2/3,\ \ b_1 = 1,\ \ b_3 = 8/7,\ \ b_4 = 11/9$
$c_1 = 6/7\,,\ \ c_2 = 17/21\,,\ \ c_3 = 34/43\,,\ \ c_4 = 57/73$

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{5}{4n^2-1} < 0\,,\ \ b_{n+1} - b_n = \frac{5}{(2n+3)(2n+1)} > 0\,,\ \ c_{n+1} - c_n = -\frac{2n^2+4n+1}{(4n^2+10n+7)(4n^2+2n+1)} < 0$$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3/2\,,\ \ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 3/2$

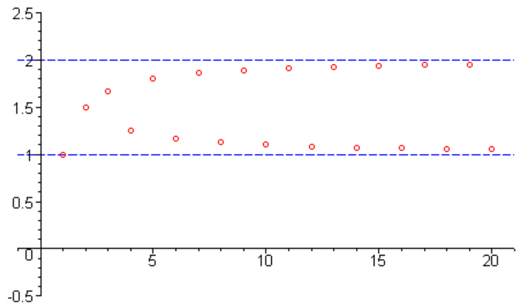
$|a_n - a| = \left|\dfrac{3n+1}{2n-1} - \dfrac{3}{2}\right| = \left|\dfrac{5}{2(2n-1)}\right| = \dfrac{5}{2(2n-1)} < \varepsilon$ für $n > \dfrac{1}{4}\left(2+\dfrac{5}{\varepsilon}\right)$. n_0 ist die auf $\dfrac{1}{4}\left(2+\dfrac{5}{\varepsilon}\right)$ folgende natürliche Zahl.

$|b_n - b| = \left|\dfrac{3n-1}{2n+1} - \dfrac{3}{2}\right| = \left|-\dfrac{5}{2(2n+1)}\right| = \dfrac{5}{2(2n+1)} < \varepsilon$ für $n > \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{5}{\varepsilon}-2\right)$. n_0 ist die auf $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{5}{\varepsilon}-2\right)$ folgende natürliche Zahl.

$c_n = \dfrac{3n^2+2n+1}{4n^2+2n+1} = \dfrac{3}{4} + \dfrac{\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}}{4n^2+2n+1} \to \dfrac{3}{4}$ für $n \to \infty$.

Es gilt $\dfrac{3}{2} < a_n \le 4\,,\ \ \dfrac{2}{3} \le b_n < \dfrac{3}{2}\,,\ \ \dfrac{3}{4} < c_n \le \dfrac{6}{7}$.

2. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n = \begin{cases} 1+\frac{1}{n} & \text{für gerades n} \\ 2-\frac{1}{n} & \text{für ungerades n} \end{cases}$.



Bestimmen Sie einige Folgenglieder.
Ist die Folge monoton?
Besitzt die Folge zwei Grenzwerte 1 und 2 ?
$a_1 = 1,\ \ a_2 = 3/2,\ \ a_3 = 5/3,\ \ a_4 = 5/4$
Nein, nein.
Man sagt: Die Folge besitzt zwei Häufungspunkte, nämlich 1 und 2.

3. Die Folge a_n sei rekursiv definiert durch $a_0 = a \in \mathbb{R}$ beliebig und $a_{n+1} = 10 + 0{,}8 \cdot a_n$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$.
Berechnen Sie einige Folgenglieder.

Zeigen Sie durch Nachprüfen der beiden Definitionsbedingungen, dass $a_n = 50 + (a-50)\cdot 0{,}8^n$ gilt.

Für welche Werte von a ist die Folge a_n streng monoton steigend bzw. fallend?

Zeigen Sie mit Hilfe von ε und n_0, dass a_n den Grenzwert 50 hat.

Es ist $a_0 = 50 + (a-50)\cdot 0{,}8^0 = a$ und

$10 + 0{,}8a_n = 10 + 0{,}8\left(50 + (a-50)\cdot 0{,}8^n\right) = 10 + 40 + (a-50)\cdot 0{,}8^{n+1} = a_{n+1}$.

$a_{n+1} - a_n = 50 + (a-50)\cdot 0{,}8^{n+1} - \left(50 + (a-50)\cdot 0{,}8^n\right) = (a-50)\cdot(0{,}8-1)\cdot 0{,}8^n = 0{,}2\cdot(50-a)\cdot 0{,}8^n$.

$a < 50 \ \Rightarrow a_n$ streng monoton steigend, $a = 50 \ \Rightarrow a_n = 50$ konstant, $a > 50 \ \Rightarrow a_n$ streng monoton fallend.

$|a_n - 50| = \left|(a-50)\cdot 0{,}8^n\right| = \left|a-50\right|\cdot 0{,}8^n < \varepsilon$. Und daraus $n > \ln\frac{\varepsilon}{|a-50|}\Big/\ln 0{,}8$ für $a \neq 50$. n_0 ist dann die auf $\ln\frac{\varepsilon}{|a-50|}\Big/\ln 0{,}8$ folgende natürliche Zahl.

4. Die Folge a_n sei rekursiv definiert durch $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ und $a_{n+2} = a_{n+1} + 2\cdot a_n$ für $n = 0,1,2,\ldots$.
   Berechnen Sie einige Folgenglieder.
   Zeigen, Sie durch Nachprüfen der gegebenen drei Definitionsbedingungen, dass $a_n = 2^n$ gilt.
   $a_0 = 1,\quad a_1 = 2,\quad a_2 = 4,\quad a_3 = 8$
   $a_{n+1} + 2\cdot a_n = 2^{n+1} + 2\cdot 2^n = 2^{n+1} + 2^{n+1} = 2\cdot 2^{n+1} = 2^{n+2} = a_{n+2}$.

5. Der berühmte Mathematiker *Leonardo da Pisa* (auch *Fibonacci = Filius des Bonacci* genannt) veröffentlichte im Jahre 1202 n. Chr. sein Buch *Liber abaci* , in dem die berühmte Kaninchenaufgabe zu finden war:

Ein Kaninchenpaar wirft vom zweiten Monat an im Verlauf des Monats ein junges Paar und in jedem weiteren Monat ein weiteres Paar. Die Nachkommen verhalten sich ebenso. Die Kaninchen leben beliebig lange und bleiben alle unter sich.
F(n) gebe die Anzahl der Kaninchenpaare zu Beginn des n-ten Monats an.

Zu Beginn des 1. Monats gibt es 1 junges Kaninchenpaar: $F(1) = 1$

Zu Beginn des 2. Monats ist das Kaninchenpaar immer noch alleine, d.h. F(2) = 1. Es wirft aber im Verlauf dieses Monats ein junges Paar.

Wenn nun zu Beginn den n-ten Monats F(n) Paare und zu Beginn des (n+1)-ten Monats F(n+1) Paare leben. dann kommen im Verlauf des (n+1)-ten Monats genau F(n) Paare zur Welt. Denn die F(n+1) – F(n) Neugeborenen bekommen erst einen Monat später Nachwuchs. Somit leben zu Beginn des (n+2)-ten Monats F(n+2) = F(n+1) bisherige Paare + F(n) neugeborene Paare, d.h. F(n+2) = F(n+1) + F(n).

Definition: Die durch $\boxed{F_0 = 0,\ F_1 = 1 \text{ und } F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \text{ für } n = 0, 1, 2, \ldots}$ definierte Folge heißt **Fibonacci-Folge**.

Im Jahr 1843 fand der französische Mathematiker *Jacques Binet* eine explizite Darstellung der Fibonacci-Folge, die aber zuvor bereits *Leonhard Euler*, *Daniel Bernoulli* und *Abraham de Moivre* bekannt war:

$$\boxed{F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots}$$

Beweis Nr.1

1. Zeigen Sie, dass $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$ gilt.
2. Rechnen Sie die Beziehung $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ nach:

   Hinweis: $F_{n+1} + F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right) =$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2.$$

Beweis Nr. 2

Dieser Beweis verwendet die Theorie der Eigenwerte und Eigenvektoren. Bitte arbeiten Sie den Beweis durch: Die Definitionsgleichung $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ lässt sich auch schreiben in der Form $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Und in der Schreibweise der Linearen Algebra: $\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$. Setzt man dies fort, so folgt

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3 \cdot \begin{pmatrix} F_{n-2} \\ F_{n-3} \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bitte rechnen Sie nach:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_3 \\ F_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_4 \\ F_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_5 \\ F_4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_6 \\ F_5 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte λ von $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ erhält man über die charakteristische Gleichung $\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$.

Sie hat die beiden Lösungen $\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$ und $\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)$.

Die dazugehörigen Eigenvektoren $\vec{u}_1$ und $\vec{u}_2$ sind nur bis auf reelle Vielfache bestimmt. Sie folgen aus den Gleichungen $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$. Wenn man $u_2 = 1$ wählt, dann folgt $u_1 = \lambda$.

Zum Eigenwert $\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$ gehört dann der Eigenvektor $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und

zum Eigenwert $\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)$ gehört dann der Eigenvektor $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ lässt sich als Linearkombination der beiden Eigenvektoren schreiben:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann folgt das Ergebnis für F_{n+1} und für F_n:

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \left[\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \lambda_1^n \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} - \lambda_2^n \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \lambda_1^{n+1} \\ \lambda_1^n \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \lambda_2^{n+1} \\ \lambda_2^n \end{pmatrix}$$

Q.e.d.

Eine weitere interessante Darstellung mit Hilfe der Binomialkoeffizienten ist

$$\boxed{F_{n+1} = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n-k}{k} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}},$$

wobei die Gauß-Klammer $[x]$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x bedeutet. Z.B. $[1,7] = 1$ und $[-1,7] = -2$.

Diese Binomialkoeffizienten sind nur dann ungleich Null, wenn $k \le n-k$. d.h. $k \le n/2$, so dass man auch schreiben kann: $F_{n+1} = \sum\limits_{0 \le k \le n/2} \binom{n-k}{k}$.

6. Die Folge a_n ist für $n \in \mathbb{N}$ definiert durch $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n} = \sum\limits_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i}$.

Prüfen Sie, ob $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{7}{12}$, $a_3 = \frac{37}{60}$, $a_4 = \frac{533}{840}$, $a_5 = \frac{1627}{2520}$, ...

Zeigen Sie, dass die Folge a_n streng monoton steigt, indem Sie $a_{n+1} - a_n > 0$ nachweisen.

Ergebnis: $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2(2n+1)(n+1)} > 0$.

Folgerung: Da a_n streng monoton steigt, ist a_1 die größte untere Schranke.

Zeigen Sie, dass die Folge a_n beschränkt ist mit $\frac{1}{2} \le a_n < 1$.

Ergebnis: a_n ist nach oben beschränkt durch (Anzahl n der Summanden) • (größter Summand) < 1.
Insgesamt folgt, dass die Folge a_n konvergent ist. Ohne Nachweis: Der Grenzwert ist $\ln 2$.

7. Die Folge a_n ist definiert durch $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ für $n \in \mathbb{N}$.
Berechnen Sie einige Folgenglieder.
Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass $a_n < 2$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

① Zeigen Sie: $a_1 < 2$

② Zeigen Sie: Wenn $a_n < 2$, dann $a_{n+1} < 2$.

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass a_n streng monoton steigt, d.h. $a_{n+1} > a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$:

① Zeigen Sie: $a_2 > a_1$

② Zeigen Sie: Wenn $a_{n+1} > a_n$, dann $a_{n+2} > a_{n+1}$.

Folgerung: Die Folge a_n ist konvergent.
Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, dann folgt aus $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ für $n \to \infty$ die Beziehung $a = \sqrt{2 + a}$. Bestimmen Sie daraus den Grenzwert a der Folge a_n.

$a_1 = \sqrt{2} \approx 1{,}414$, $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} \approx 1{,}848$, $a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \approx 1{,}962$, $a_4 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \approx 1{,}990$.

① Es gilt $a_1 < \sqrt{2} < 2$

② Es sei $a_n < 2$. Dann gilt $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2+2} = 2$. Q.e.d.

① Es gilt $a_2 = \sqrt{2 + a_1} = a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} > \sqrt{2} = a_1$

② Es sei $a_{n+1} > a_n$, Dann gilt $a_{n+2} = \sqrt{2 + a_{n+1}} > \sqrt{2 + a_n} = a_{n+1}$.

Durch Quadrieren der Gleichung $a = \sqrt{2+a}$ folgt $a^2 - a - 2 = 0$ mit den Lösungen $a_1 = 2$ und $a_2 = -1$.
Die Probe in $a = \sqrt{2+a}$ zeigt, dass nur $a_1 = 2$ Lösung dieser Gleichung ist.

8. Es sei $a_n = \sqrt[n]{n}$.
Berechnen Sie einige Folgenglieder.
Zeigen Sie: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.
Hinweis: $\ln a_n = \frac{\ln n}{n}$. Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$ mit Hilfe der Regeln von de L'Hôpital.

9. Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2 - n + 1} - n\right)$ und $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2 + 3n} - \sqrt{n^2 + 2n + 4}\right)$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2 - n + 1} - n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - n + 1 - n^2}{\sqrt{n^2 - n + 1} + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1 + 1/n}{\sqrt{1 - 1/n + 1/n^2} + 1} = -\frac{1}{2}$$

10. Für die Eulersche Zahl e gilt $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Begründen Sie jeweils:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+2} = e$. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2} = e \cdot 1 = e$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = e^2$. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^2 = e^2$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n=\sqrt{e}$. Mit $m=2n$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n=\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m/2}=\left(\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right)^{1/2}=\sqrt{e}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$ für $x\ge 0$. Für $x=0$ klar. Für $x>0$ folgt mit $m=n/x$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{mx}=\left(\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right)^x=e^x$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}$.

Es ist $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\left(\frac{n-1}{n}\right)^n=\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n}=\frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}\to\frac{1}{e\cdot 1}=\frac{1}{e}$ für $n\to\infty$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$ für $x<0$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{|x|}{n}\right)^n=\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{m|x|}=\left(\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{m}\right)^m\right)^{|x|}=\left(\frac{1}{e}\right)^{|x|}=\left(\frac{1}{e}\right)^{-x}=e^x$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n=1$. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=e\cdot\frac{1}{e}=1$

$\lim\limits_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$. $\lim\limits_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m}=\lim\limits_{m\to\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{m}\right)^m}=\frac{1}{\frac{1}{e}}=e$

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+n)^{1/n}=1$. $\ln(1+n)^{1/n}=\frac{\ln(1+n)}{n}$. Und nach Marquis de L'Hôpital $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+x}=0$

11. ---

Reihen

0. a. $\sum\limits_{i=2}^{n-1}(a_{i+1}-a_{i-1})=\sum\limits_{i=3}^{n}a_i-\sum\limits_{i=1}^{n-2}a_i=-a_1-a_2+a_{n-1}+a_n$.

   b. $\sum\limits_{i=1}^{n}(i+1)^2-\sum\limits_{i=1}^{n}i^2=\sum\limits_{i=2}^{n+1}i^2-\sum\limits_{i=1}^{n}i^2=(n+1)^2-1=n\cdot(n+2)$

   oder unter Verwendung der Summenformel $s_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=\frac{n}{2}\cdot(a_1+a_n)$ für die arithmetischen Reihe

   $\sum\limits_{i=1}^{n}(i+1)^2-\sum\limits_{i=1}^{n}i^2=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(i^2+2i+1-i^2\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}(2i+1)=\frac{n}{2}\cdot\left((2\cdot 1+1)+(2\cdot n+1)\right)=\frac{n}{2}\cdot(2n+4)=n\cdot(n+2)$.

   c. $\sum\limits_{j=0}^{2}\sum\limits_{i=2}^{4}\frac{1}{i+j}=\sum\limits_{i=2}^{4}\frac{1}{i}+\sum\limits_{i=2}^{4}\frac{1}{i+1}+\sum\limits_{i=2}^{4}\frac{1}{i+2}=\frac{13}{12}+\frac{47}{60}+\frac{37}{60}=\frac{149}{60}$.

   d. Bestimmen Sie $\sum\limits_{j=1}^{3}\sum\limits_{i=0}^{j}(i+j)\cdot j=\sum\limits_{i=0}^{1}(i+1)\cdot 1+\sum\limits_{i=0}^{2}(i+2)\cdot 2+\sum\limits_{i=0}^{3}(i+3)\cdot 3=3+18+54=75$.

1. Bestimmen Sie die Summe aller ungeraden dreistelligen Zahlen.

   $a_1=101$, $d=2$. Aus $a_n=101+(n-1)\cdot 2=999$ folgt $n=450$, $s_{450}=\frac{450}{2}(101+999)=247500$

2. Es sei $s_n=11+13+15+\ldots$. Wie viele Zahlen muss man addieren, um mindestens 1.000.000 zu erhalten?

   $s_n=\frac{n}{2}\left(11+11+(n-1)\cdot 2\right)=1\,000\,000$ liefert $n_{1/2}=-5\pm\sqrt{1\,000\,025}$. Positive Lösung $n\ge 995{,}0125$, also $n=996$.

3. Verwandeln Sie die periodischen Zahlen $1,\overline{3}$, $0,2\overline{45}$, $0,\overline{1}_3$ und $1,\overline{3}_8$ in Brüche im Zehnersystem.

$1,\overline{3} = 4/3$, $\quad 0,2\overline{45} = 24,3/99 = 27/110$, $\quad 0,\overline{1}_3 = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^i = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$,

$1,\overline{3}_8 = 1 + 3 \cdot \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^i = 1 + 3 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1-1/8} = 10/7$

4. Bestimmen Sie $\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^i$, $\sum_{i=2}^{\infty}\left(\sqrt{a}\right)^i$ für $0 \le a < 1$, $\sum_{i=1}^{\infty}\left(a^i + b^i\right)$ für $-1 < a, b < 1$.

$\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^i = \frac{3}{2}$, $\quad \sum_{i=2}^{\infty}\left(\sqrt{a}\right)^i = \frac{a}{1-\sqrt{a}}$, $\quad \sum_{i=1}^{\infty}\left(a^i + b^i\right) = \frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b}$.

5. Ein Unternehmen möchte bei Jahresbeginn einmalig über eine Stiftung den Betrag K zur Verfügung stellen. Dabei soll sofort und danach zu Beginn jeden weiteren Jahres der gleiche Betrag B zur Verfügung stehen. Das Geld werde auf einer Bank mit konstant p Prozent jährlich verzinst. Bestimmen Sie den Stiftungsbetrag K so, dass der Betrag B über eine sehr lange Zeit jährlich zur Verfügung steht.
Bestimmen Sie K, wenn $B = 1000€$ und $p\% = 2\%$ bzw. $p\% = 5\%$ beträgt.
Wie verhält sich K für $p \to 0$ bzw. für $p \to \infty$?

Zu Beginn muss der Betrag B zur Verfügung stehen.

Damit zu Beginn des 2. Jahres B zur Verfügung steht, müssen zu Beginn $\frac{B}{1+\frac{p}{100}}$ eingezahlt werden.

Damit zu Beginn des 3. Jahres B zur Verfügung steht, müssen zu Beginn $\frac{B}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^2}$ eingezahlt werden.

Damit zu Beginn des 4. Jahres B zur Verfügung stehen, müssen zu Beginn $\frac{B}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^3}$ eingezahlt werden.

Insgesamt sind also $K = B \cdot \left(1 + \frac{1}{1+\frac{p}{100}} + \frac{1}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^2} + \frac{1}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^3} + \cdots\right) = B \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{1+\frac{p}{100}}} = B \cdot \frac{100+p}{p}$ zu stiften.

Zahlenbeispiel: $K = 1000€ \cdot \frac{100+2}{2} = 51000€$ bzw. $K = 1000€ \cdot \frac{100+5}{5} = 21000€$.

Für $p \to 0$ gilt $K \to \infty$. Für $p \to \infty$ gilt $K \to B$.

6. Ein Darlehen über $b = 60.000€$ wird jährlich mit $p = 8$ Prozent verzinst. Am Ende jedes Jahres werden $r = 7.000€$ zurückbezahlt.
   a. Bestimmen Sie die Formel zur Berechnung der Restschuld am Ende des n-ten Jahres unmittelbar nach Bezahlung von r. Wie groß ist die Restschuld nach 12 Jahren?
   Hinweis: Wenn S_n die Restschuld am Ende des n-ten Jahres ist, dann folgt mit $q = 1 + p/100$:

   $S_1 = b \cdot q - r$, $\; S_2 = S_1 \cdot q - r = b \cdot q^2 - r \cdot q - r$, $\; S_3 = S_2 \cdot q - r = b \cdot q^3 - r \cdot q^2 - r \cdot q - r$,

   $S_n = b \cdot q^n - r \cdot q^{n-1} - \ldots - r \cdot q^2 - r \cdot q - r = b \cdot q^n - r \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$.

   Speziell: $S_{12} = 18.250,32€$

   b. Nach wie vielen Jahren ist die Schuld vollständig getilgt? ($n = \frac{\ln \frac{r}{r+b-b\cdot q}}{\ln q} \approx 15,0395$)

   $b \cdot q^n - r \cdot \frac{q^n-1}{q-1} = 0$ liefert $b \cdot (q-1) \cdot q^n - r \cdot (q^n - 1) = 0$, also $q^n \cdot \left(b \cdot (q-1) - r\right) = -r$.

   c. Bei welcher Rate r wäre die Schuld nach 10 Jahren getilgt? ($r = \frac{b \cdot q^n \cdot (q-1)}{q^n - 1} \approx 8941,77€$)

7. Zwei Kinder erhalten ein Vermögen von $V=60.000€$, das zu 4% verzinst wird. Das Geld liegt insgesamt 6 Jahre auf der Bank.
   a. Welcher Betrag bleibt für jedes Kind am Ende des 6. Jahres noch übrig, wenn zu Beginn jedes Jahres 10.000€ abgehoben werden? (Ergebnis: 3.468.10€)
   Es sei V_n das Vermögen am Ende des n-ten Jahres. Mit $B=10.000$ und $q=1+4/100$ folgt
   $V_1=(V-B)\cdot q$,
   $V_2=(V_1-B)\cdot q=\big((V-B)\cdot q-B\big)\cdot q=(V-B)\cdot q^2-B\cdot q$
   $V_3=(V_2-B)\cdot q=\big((V-B)\cdot q^2-B\cdot q-B\big)\cdot q=(V-B)\cdot q^3-B\cdot q^2-B\cdot q$
   $V_6=(V-B)\cdot q^6-B\cdot\sum_{i=1}^{6}q^i=6936,20$.

   b. Welcher Betrag bleibt für jedes Kind am Ende des 6. Jahres noch übrig, wenn am Ende jedes Jahres 10.000€ abgehoben werden? (Ergebnis: 4.794,69€)
   Es sei V_n das Vermögen am Ende des n-ten Jahres. Mit $B=10.000$ und $q=1+4/100$ folgt
   $V_1=V\cdot q-B$,
   $V_2=V_1\cdot q-B=\big(V\cdot q-B\big)\cdot q-B=V\cdot q^2-B\cdot q-B$
   $V_6=V\cdot q^6-B\cdot\sum_{i=0}^{5}q^1=9589,39$.

8. Jemand spart 20 Jahre lang zu Beginn jedes Jahres 600€. Der Zinssatz beträgt 4%. Wie oft kann er nach Ablauf der 20 Jahre zu Beginn jedes Jahres eine Rente von R=2.400€ bekommen? Welcher Restbetrag bleibt noch übrig? (Lösung: Angesparte Summe nach 20 Jahren 18.581,52€, 9 Auszahlungen)

   Am Ende des 20. Jahres ist der Betrag $V=600\cdot\sum_{i=1}^{20}1,04^i=18.681,52$ angespart. Mit $q=1,04$ folgt:

   Nach der 1. Auszahlung zu Beginn des 1. Jahres beträgt die angesparte Summe $V_1=V-R$

   Nach der 2. Auszahlung $V_2=V_1\cdot q-R=(V-R)\cdot q-R$

   Nach der 3. Auszahlung $V_3=V_2\cdot q-R=\big((V-R)\cdot q-R\big)\cdot q-R=(V-R)\cdot q^2-R\cdot q-R$

   Nach der n.ten Auszahlung $V_n=(V-R)\cdot q^{n-1}-R\cdot\sum_{i=0}^{n-2}q^i$

   Es ist $V_9=31,38$ €.

9. $\left(2a^3b^2+3a^2b\right)^4=16a^{12}b^8+96a^{11}b^7+216a^{10}b^6+216a^9b^5+81a^8b^4$

   $\left(3a^2b-2a^3b^5\right)^3=27a^6b^3-54a^7b^7+36a^8b^{11}-8a^9b^{15}$

10. Bestimmen Sie die ersten drei Summanden der Maclaurin-Reihe von $f(x)=\tan x$.

    Hinweis: $f'(x)=1+\tan^2 x$, $f''(x)=2\cdot\tan x+2\cdot\tan^3 x$, $f'''(x)=2+8\cdot\tan^2 x+6\cdot\tan^4 x$,
    $f^{(4)}(x)=16\cdot\tan x+40\cdot\tan^3 x+24\cdot\tan^5 x$, $f^{(5)}(x)=16+136\cdot\tan^2 x+240\cdot\tan^4 x+120\cdot\tan^6 x$.

    Ergebnis: $f(x)=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\ldots$.

11. Bestimmen Sie einige Summanden der Taylor-Reihe von $f(x)=\sqrt{x}$ um die Stelle $x=1$.

    Ergebnis: $f(x)=1+\frac{1}{2}\cdot(x-1)-\frac{1}{8}\cdot(x-1)^2+\frac{1}{16}\cdot(x-1)^3-\frac{5}{128}\cdot(x-1)^4+\frac{7}{256}\cdot(x-1)^5-\frac{21}{1024}\cdot(x-1)^6+-\ldots$

    Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit der früher gefundenen Reihe $\sqrt{1+x}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/2}{k}\cdot x^k$ für $|x|\le 1$.

    Wie kann man folglich die Koeffizienten der Taylor-Reihe allgemein angeben? Was folgt für den Konvergenzradius der Reihe?

Allgemein ist die k. Ableitung $f^{(k)}(x)=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)!}{\left(\frac{1}{2}-k\right)!}x^{\frac{1}{2}-k}$, also $f^{(k)}(1)=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)!}{\left(\frac{1}{2}-k\right)!}$ und nach Definition von $\binom{n}{k}$ folgt $\frac{f^{(k)}(1)}{k!}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)!}{\left(\frac{1}{2}-k\right)!\cdot k!}=\binom{1/2}{k}$. Der Konvergenzradius ist $r=1$, siehe Skriptum. Die Taylor-Reihe konvergiert also sicher für $0<x<2$.

Ersetzt man in $\sqrt{1+x}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\binom{1/2}{k}\cdot x^k$ das x durch $x-1$, dann ergibt sich unsere Taylor-Reihe.

12. Bestimmen Sie einige Summanden und den Konvergenzradius r
    a. der Maclaurin-Reihe von $f(x)=\frac{1}{(x+1)^{1/3}}$

    Für die n-te Ableitung gilt $f^{(n)}(x)=\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)!}{\left(-\frac{1}{3}-n\right)!}(x+1)^{-\frac{1}{3}-n}$.

    Folglich $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)!}{\left(-\frac{1}{3}-k\right)!\cdot k!}x^k=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{3}}{k}x^k$.

    Konvergenzradius $r=\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|=\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{\binom{-\frac{1}{3}}{k}}{\binom{-\frac{1}{3}}{k+1}}\right|=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)!\cdot(k+1)!\cdot\left(-\frac{1}{3}-k-1\right)!}{k!\cdot\left(-\frac{1}{3}-k\right)!\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)!}=\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{k+1}{-\frac{1}{3}-k}\right|=1$.

    b. der Taylor-Reihe von $f(x)=\frac{1}{x^{1/3}}$ um die Stelle $x=1$.

    Für die n-te Ableitung gilt $f^{(n)}(x)=\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)!}{\left(-\frac{1}{3}-n\right)!}x^{-\frac{1}{3}-n}$. Und folglich die gleiche Überlegung wie bei a.

13. Bestimmen Sie die Maclaurin-Reihe von $f(x)=\ln(1+x)$.

    Ergebnis: $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot x^n$ mit dem Konvergenzradius $r=1$.

    Es ist $f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$, also $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{n!}\cdot x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot x^n$

    Konvergenzradius $r=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1/n}{1/(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$.

14. Bestimmen Sie die Maclaurin-Reihe von $f(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

    Hinweis: $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$. Ergebnis: $2\cdot\sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\cdot x^{2n+1}$ mit $r=1$.

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\ln(1+x)-\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot x^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot(-x)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot x^n=2\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\cdot x^{2n+1}$$

Alle Summanden mit geraden Exponenten fallen weg.

15. Es gilt $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ und $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ und $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ für alle $x\in\mathbb{R}$.

Leiten Sie daraus die Reihen für $\sinh x$ und $\cosh x$ her.

Ergebnis: $\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

16. Bestimmen Sie die Taylor-Reihe von $f(x) = (x \cdot \ln x)^2$ um die Stelle $x = 1$ bis zum Grad 2.
Bestimmen Sie den Unterschied von $f(x)$ und dieser Näherung an der Stelle $x = 1{,}1$.
Es ist $f'(x) = 2x \cdot (\ln x)^2 + 2x \cdot \ln x$, $f''(x) = 2(\ln x)^2 + 6\ln x + 2$, so dass $f(x) \approx (x-1)^2$.
$f(1{,}1) \approx 0{,}01099$ und $(1{,}1-1)^2 = 0{,}01$ unterscheiden sich um nur $0{,}00099$.

17. Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist die Ableitung von $f(x) = \arctan x$ gleich $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Umgekehrt gilt dann $\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt$, da $\arctan 0 = 0$. Von der geometrischen Reihe ist bekannt, dass für $|q| < 1$ $\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots$ gilt. . Setzt man $q = -t^2$ für $|t| < 1$, wendet die Reihenentwicklung auf $\frac{1}{1+t^2}$ an, so erhält man eine Reihe für $\arctan x$ im Bereich $|x| < 1$.

Ergebnis: Für $|x| < 1$ gilt $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + - \ldots$.

$$\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1-(-t^2)} = 1 + (-t^2) + (-t^2)^2 + (-t^2)^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-t^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}$$

Also $\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(2n+1)}{1/(2n+3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{2n+1} = 1.$$

Ohne Herleitung: Die Reihenentwicklung gilt sogar für $|x| \le 1$:

$$\arctan 1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \ldots = \frac{\pi}{4}.$$

18. Für welche Werte von x konvergieren die beiden Reihen?

a. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!}(2x-1)^n$ b. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3} x^{3n}$

a. $r = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n \cdot (n+1)!}{n! \cdot (n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n \cdot (n+1)!}{n! \cdot (n+1) \cdot (n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n =$

$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} : \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{e} : 1 = \frac{1}{e}$. Somit konvergiert die Reihe für $|2x-1| < \frac{1}{e}$, d.h.

$-\frac{1}{e} < 2x - 1 < \frac{1}{e}$, also $\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{e}\right) < x < \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{e}\right)$, oder schöner $\frac{e-1}{2e} < x < \frac{e+1}{2e}$.

b. $r = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n)! \cdot \left((n+1)!\right)^3}{(n!)^3 \cdot (3n+3)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot(3n+3)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^3}{(3+\frac{1}{n})\cdot(3+\frac{2}{n})\cdot(3+\frac{3}{n})} = \frac{1}{27}$.

Somit konvergiert die Reihe für $|x^3| < \frac{1}{27}$, d.h. $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$.

19. Stellen Sie die gegebenen komplexen Zahlen in Polarform (trigonometrische Form und Exponentialform) dar.
$z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -1$, $z_4 = -i$, $z_5 = 2+3i$, $z_6 = -2+3i$, $z_7 = -2-3i$, $z_8 = 2-3i$

$z_1 = 1 = \cos 0 + i\cdot\sin 0 = e^{i\cdot 0}$, $z_2 = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\cdot\sin\frac{\pi}{2} = e^{i\cdot\pi/2}$, $z_3 = -1 = \cos\pi + i\cdot\sin\pi = e^{i\cdot\pi}$,

$z_4 = -i = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = e^{-i\cdot\pi/2} = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = e^{i\cdot 3\pi/2}$,

$z_5 = 2+3i = \sqrt{13}\cdot\left(\cos\left(\arctan\frac{3}{2}\right) + i\cdot\sin\left(\arctan\frac{3}{2}\right)\right) = \sqrt{13}\cdot e^{i\cdot\arctan(3/2)} \approx 3{,}605551275\cdot e^{0{,}9827937232i}$

$z_6 = -2+3i = \sqrt{13}\cdot\left(\cos\left(\pi-\arctan\frac{3}{2}\right) + i\cdot\sin\left(\pi-\arctan\frac{3}{2}\right)\right) = \sqrt{13}\cdot e^{i\cdot(\pi-\arctan(3/2))} \approx 3{,}605551275\cdot e^{2{,}158798931i}$

$z_7 = -2-3i = \sqrt{13}\cdot\left(\cos\left(\arctan\frac{3}{2}-\pi\right) + i\cdot\sin\left(\arctan\frac{3}{2}-\pi\right)\right) = \sqrt{13}\cdot e^{i\cdot(\arctan(3/2)-\pi)} \approx 3{,}605551275\cdot e^{-2{,}158798931i}$

$z_8 = 2-3i = \sqrt{13}\cdot\left(\cos\left(-\arctan\frac{3}{2}\right) + i\cdot\sin\left(-\arctan\frac{3}{2}\right)\right) = \sqrt{13}\cdot e^{i\cdot(-\arctan(3/2))} \approx 3{,}605551275\cdot e^{-0{,}9827937232i}$

20. Stellen Sie die gegebenen komplexen Zahlen in Normalform dar.
$z_1 = 2\cdot e^i$, $z_2 = 5\cdot e^{-2i}$, $z_3 = 3\cdot(\cos 5 + i\cdot\sin 5)$, $z_4 = 2\cdot(\cos 100° + i\cdot\sin 100°)$, $z_5 = 2\cdot e^{-8\pi i}$
$z_1 = 2\cdot(\cos 1 + i\cdot\sin 1) \approx 1{,}080604612 + 1{,}682941970i$
$z_2 = 2\cdot\left(\cos(-2) + i\cdot\sin(-2)\right) = 2\cdot(\cos 2 - i\cdot\sin 2) \approx -2{,}080734182 - 4{,}546487134i$
$z_3 \approx 0{,}8509865565 - 2{,}876772824i$
$z_4 = 2\cdot(\cos\frac{5\pi}{9} + i\cdot\sin\frac{5\pi}{9}) \approx -0{,}3472963546 + 1{,}969615506i$
$z_5 = 2$

21. Es sei $z_1 = 2-3i$, $z_2 = 4+2i$ und $z_3 = -4i$. Berechnen Sie $w_1 = z_1 + z_2$, $w_2 = z_1 - z_2$, $w_3 = z_1\cdot z_2$.
$w_4 = \frac{z_1}{z_2}$, $w_5 = \frac{z_1}{z_3}$, $w_6 = \frac{z_1}{z_2\cdot z_3}$, $w_7 = \frac{z_1 - \overline{z_1}}{z_1 + \overline{z_1}}$.
$w_1 = 6-i$, $w_2 = -2-5i$, $w_3 = 14-8i$, $w_4 = \frac{1}{10} - \frac{4}{5}i$, $w_5 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}i$, $w_6 = \frac{1}{5} - \frac{1}{40}i$, $w_7 = -\frac{3}{2}i$.

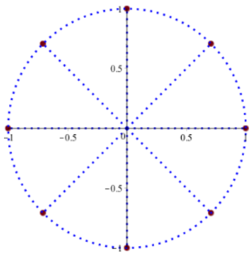
22. $i^i = \left(e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}\right)^i = e^{i\cdot\frac{\pi}{2}\cdot i} = e^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0{,}20788$.

23. a. Aus $(a+bi)^3 = a^3 + 3a^2\cdot bi - 3a\cdot b^2 - b^3 i = i$ folgen die beiden Gleichungen $\begin{cases} a\cdot(a^2-3b^2) = 0 \\ 3a^2b - b^3 = 1 \end{cases}$.

Aus der ersten Gleichung folgt $a = 0$ oder $a^2 - 3b^2 = 0$.
Wenn $a = 0$, dann folgt aus der zweiten Gleichung $b = -1$. Also die erste Lösung $z_1 = -i$.
Wenn $a^2 = 3b^2$, dann folgt aus der zweiten Gleichung $3a^2b - b^3 = 3\cdot 3b^2\cdot b - b^3 = 8b^3 = 1$, so dass $b = \frac{1}{2}$.
Mit $a^2 = 3b^2 = \frac{3}{4}$ ergeben sich $z_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$ und $z_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$.
b. Aus $z^3 = i = e^{i\cdot\frac{\pi}{2}} = e^{i\cdot(\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi)}$ mit $k\in\mathbb{Z}$ folgt $z = e^{i\cdot(\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi)/3}$.
Mit $k = 0$ folgt $z = e^{i\cdot\frac{\pi}{6}} = \cos(\frac{\pi}{6}) + i\cdot\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$. Gleiche Lösung für $k = \pm 3, \pm 6, \pm 9, \ldots$
Mit $k = 1$ folgt $z = e^{i\cdot(\frac{\pi}{2}+2\pi)/3} = e^{i\cdot\frac{5}{6}\pi} = \cos(\frac{5\pi}{6}) + i\cdot\sin(\frac{5\pi}{6}) = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$.
Gleiche Lösung für $k = \ldots -5, -2, 1, 4, 7 \ldots$
Mit $k = 2$ folgt $z = e^{i\cdot(\frac{\pi}{2}+4\pi)/3} = e^{i\cdot\frac{3}{2}\pi} = \cos(\frac{3\pi}{2}) + i\cdot\sin(\frac{3\pi}{2}) = 0 - i = -i$.
Gleiche Lösung für $k = \ldots -4, -1, 2, 5, 8 \ldots$.

24. Bestimmen Sie alle acht Lösungen der Gleichung $z^8 = 1$ mit Hilfe des Ansatzes $z^8 = 1 = e^{k\cdot 2\pi i}$ mit $k\in\mathbb{Z}$.
Ansatz: $z = e^{k\cdot 2\pi i/8}$ für $k = 0, 1, 2, \ldots, 7$.
$z_0 = e^{0\cdot 2\pi i/8} = 1$, $z_1 = e^{1\cdot 2\pi i/8} = \cos(\frac{\pi}{4}) + i\cdot\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}\sqrt{2} + i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $z_2 = e^{2\cdot 2\pi i/8} = \cos(\frac{\pi}{2}) + i\cdot\sin(\frac{\pi}{2}) = i$,

$z_3 = e^{3\cdot 2\pi i/8} = \cos(\frac{3\pi}{4}) + i\cdot\sin(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $z_4 = e^{4\cdot 2\pi i/8} = \cos(\pi) + i\cdot\sin(\pi) = -1$,



$z_5 = e^{5\cdot 2\pi i/8} = \cos(\frac{5\pi}{4}) + i\cdot\sin(\frac{5\pi}{4}) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}$,

$z_6 = e^{6\cdot 2\pi i/8} = \cos(\frac{3\pi}{2}) + i\cdot\sin(\frac{3\pi}{2}) = -i$,

$z_7 = e^{7\cdot 2\pi i/8} = \cos(\frac{7\pi}{4}) + i\cdot\sin(\frac{7\pi}{4}) = \frac{1}{2}\sqrt{2} - i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

$z_8 = z_0$, $z_9 = z_1$, $z_{10} = z_2$, …

Die Gleichung $z^8 = 1$ hat in $\mathbb{C}$ genau acht Lösungen, die in der Gaußschen Zahlenebene gleichmäßig verteilt auf einem Kreis liegen; siehe Schaubild.