Automatentheorie

DEA Optimierung

Prof. Dr. Franz-Karl Schmatzer
schmatzf@dhbw-loerrach.de

Literatur

- C.Wagenknecht, M.Hielscher; Formale Sprachen, abstrakte Automaten und Compiler; 2.Aufl. Springer Vieweg 2014;
- A.V.Aho, M.S.Lam,R.Savi,J.D.Ullman, *Compiler – Prinzipien,Techniken und Werkzeuge*. 2. Aufl., Pearson Studium, 2008.
- Güting, Erwin; *Übersetzerbau –Techniken, Werkzeuge, Anwendungen*, Springer Verlag 1999
- Sipser M.; Introduction to the Theory of Computation; 2.Aufl.; Thomson Course Technology 2006
- Hopecroft, T. et al; Introduction to Automata Theory, Language, and Computation; 3. Aufl. Pearson Verlag 2006

Agenda

- DEA Optimierung
- Markierungsalgorithmus
- Mengenalgorithmus

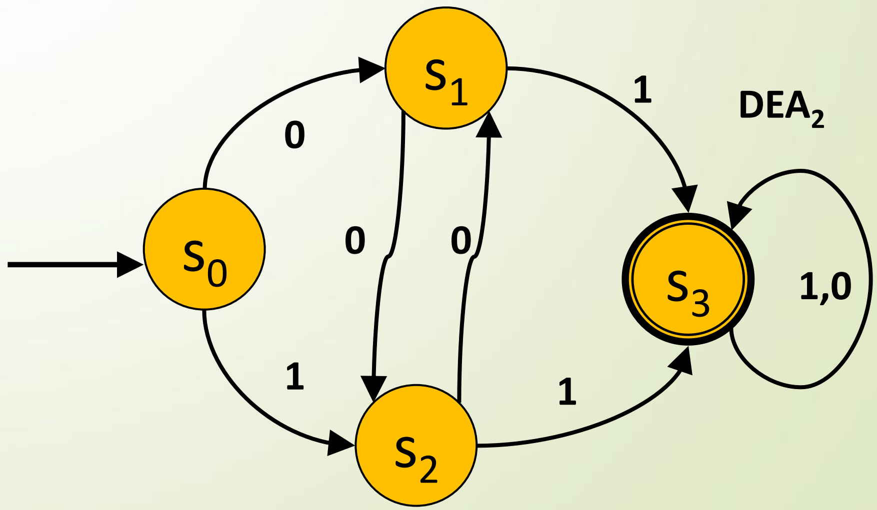
Äquivalente Zustände

- Zwei Zustände s_i und s_k in einem endlichen Automaten A heißen äquivalent $s_i \equiv s_k$, falls die Wörter $w \in \Sigma^*$, die aus dem Zustand s_i gefolgert werden können, genau dieselben sind, die auch aus Zustand s_k gefolgert werden können.
  - $(s_i,w) \rightarrow^* (s_e,\varepsilon) \Leftrightarrow (s_k,w) \rightarrow^* (s_e, \varepsilon)$ mit $s_e \in F$
  - d.h. $L(A,s_i) = L(A,s_k)$
- Aufsuchen von äquivalenter Zustände ist eine Möglichkeit den Automaten zu optimieren.
- Solche Zustände können zusammengefasst werden.

Sprache eines DEAs

Beispiel: Sprache aus Zustände L(A,s)

- Bestimmen der L(A, s) für den DEA_2:
  - von s_0: Wörter wären w: = {01, 11, 001, 101,…} ,allg. $L(A,s_0)=L(A)=\{0^+1(0|1)^*, 1^+0^*1(0|1)^*\} = \{(0|1)^*0^*1(0|1)^*\}$
  - von s_1: Wörter wären w: = {1, 01, 001, 10, 11,…} ,allg. $L(A,s_1)=\{1(0|1)^*, 0^+1(0|1)^*\} = \{0^*1(0|1)^*\}$
  - von s_2: Wörter wären w: = {1, 01, 001, 10, 11,…} ,allg. $L(A,s_2)=\{1(0|1)^*, 0^+1(0|1)^*\} = \{0^*1(0|1)^*\}$
  - von s_3: Wörter wären w: = {ε, 1, 0, 01, 10, 11,…} ,allg. $L(A,s_3)=\{\varepsilon, (0|1)^*\}$
- Man beobachtet, dass $L(A,s_1)= L(A,s_2)$



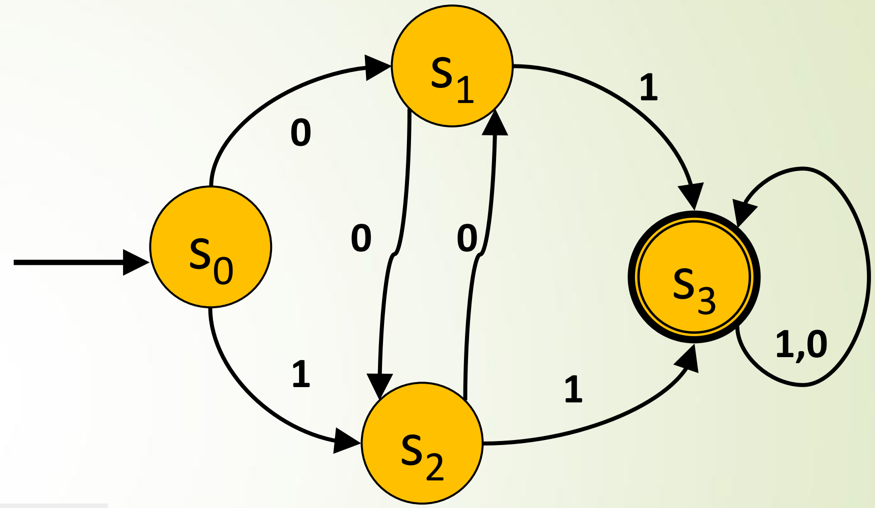
Äquivalente Zustände

Beispiele

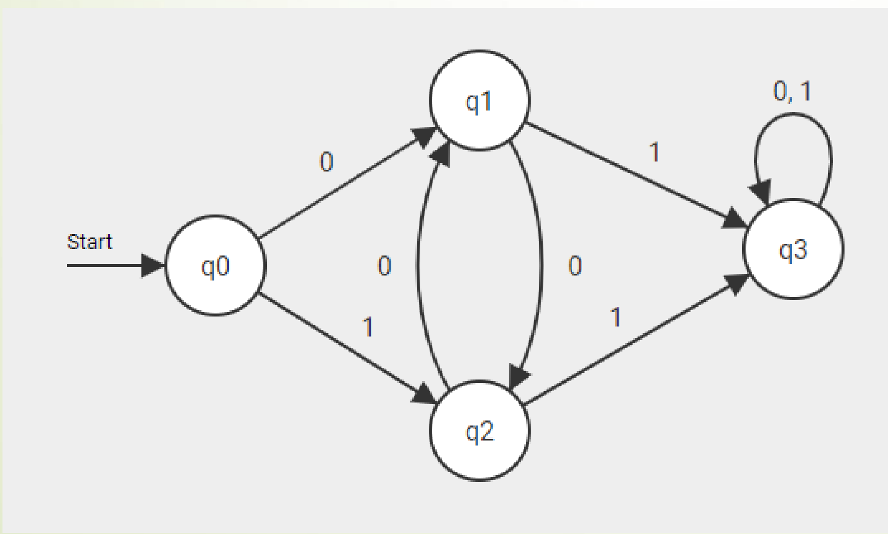
- s_1 und s_2 sind äquivalent

  $L(DEA_2, s_1) = \{0^*1(0+1)^*\}$

  $L(DEA_2, s_2) = \{0^*1(0+1)^*\}$



DEA_2



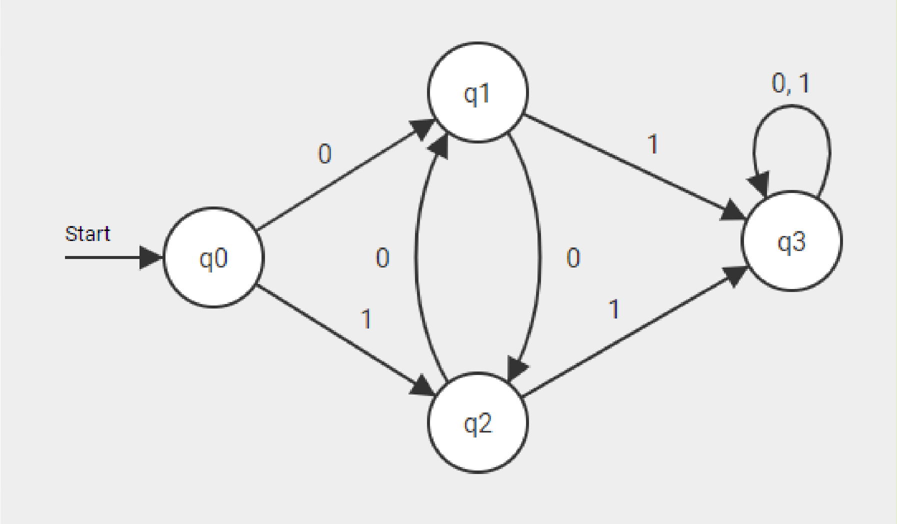
Äquivalente Zustände

Beispiele

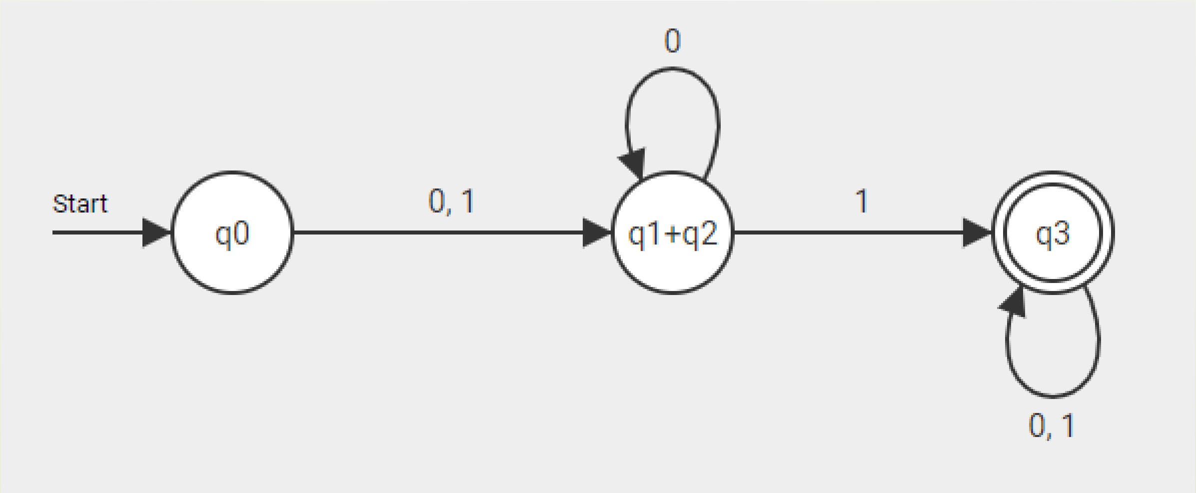
- s_1 und s_2 sind äquivalent

  $L(DEA_2,s_1) = \{0^*1(0+1)^*\}$

  $L(DEA_2,s_2) = \{0^*1(0+1)^*\}$



- Minimierter Automat



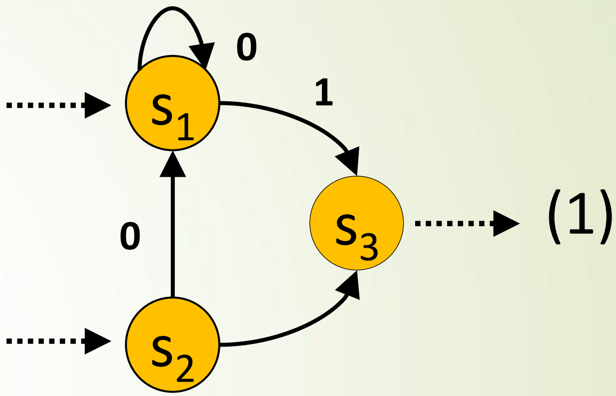
Äquivalente Zustände

Markierungsalgorithmus

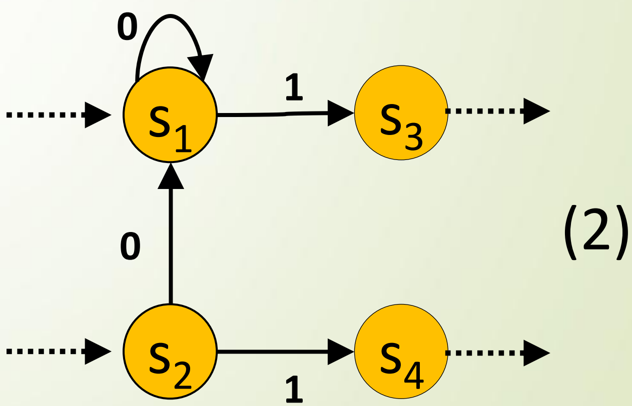
- Die Methode Sprachen, die von den einzelnen Zuständen erzeugt werden, kann man benutzen um äquivalente Zustände zu finden.
- Dazu stellt man eine Äquivalenz-Tabelle auf und markiert zuerst einmal alle nicht äquivalente Zustände.
- Die nicht markierten Zustände untersucht man dann auf ihre mögliche Verschmelzung (Äquivalenz).
- Zustände, die äquivalent sind, können verschmolzen werden

Verschmelzung

- Verschmelzen immer möglich:
  - für alle $w \in \Sigma^*$ gilt $\delta(s_1,w) = \delta(s_2,w)$



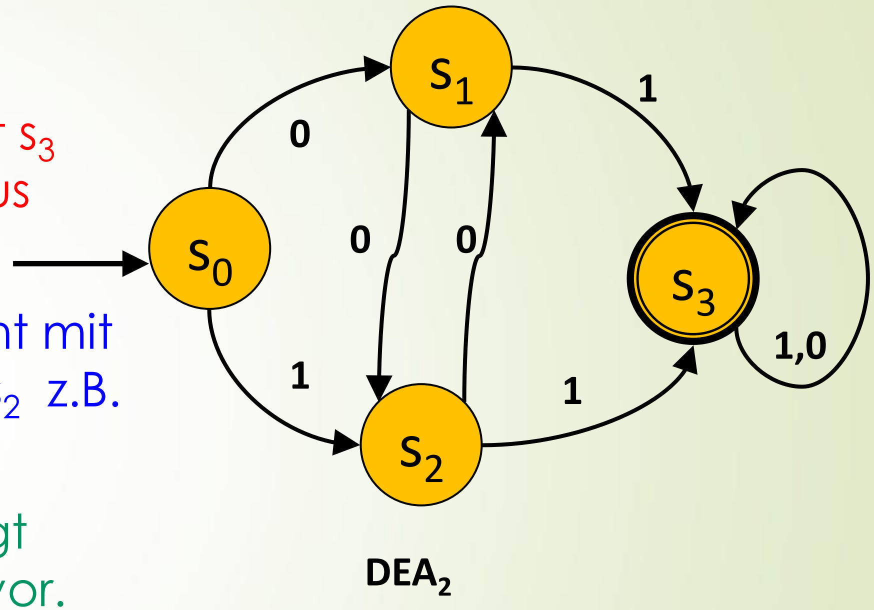
- Verschmelzen bedingt möglich:
  - für alle $w \in \Sigma^*$ gilt $\delta(s_1,w) = \delta(s_2,w)$ genau dann, wenn s_3 und s_4 ebenfalls verschmolzen werden können.
  - Bilden eines Abhängigkeitsgraphen



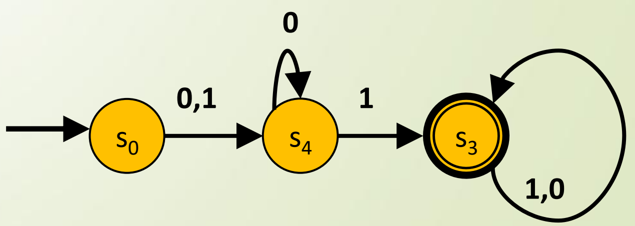
Beispiel Verschmelzung

Beispiel 1

- Aufstellen der Abhängigkeitstabelle
  - X: keiner der Zustände s_0, s_1 und s_2 ist mit s_3 äquivalent, da das leere Wort ε nicht aus diesen Zuständen ableitbar ist.
  - Genau so schnell sieht man, dass s_0 nicht mit s_1 oder s_2 äquivalent sein kann. (s_1 und s_2 z.B. enthalten das Wort w = 1, s_0 aber nicht)
  - Das Paar s_1,s_2 bleibt noch übrig. Hier liegt genau der Fall (1) der vorherigen Folie vor. D.h sie können verschmolzen werden zu s_4.

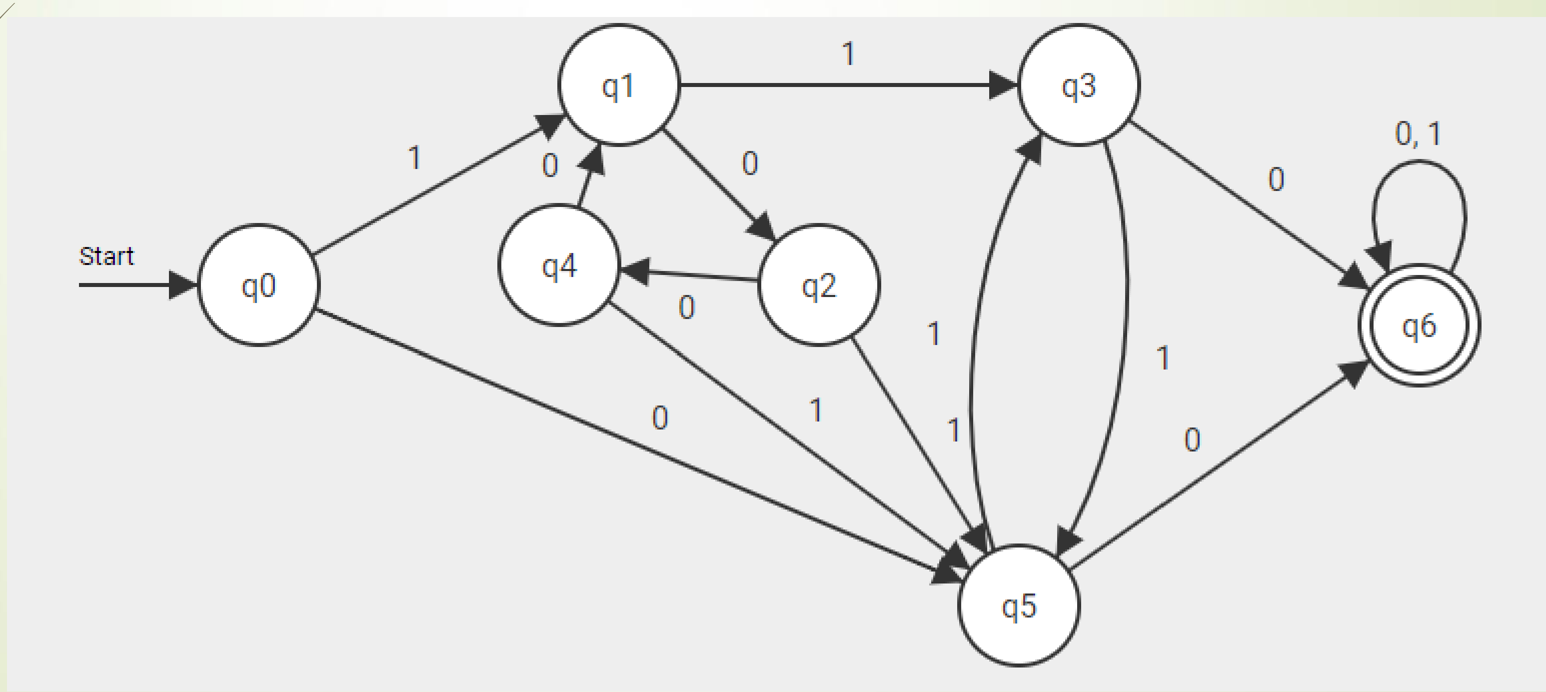


	s_0	s_1	s_2	s_3
s_0	≡			
s_1	X	≡		
s_2	X	X	≡	
s_3	X	X	X	≡



Aufgabe Minimierung
Beispiel 2

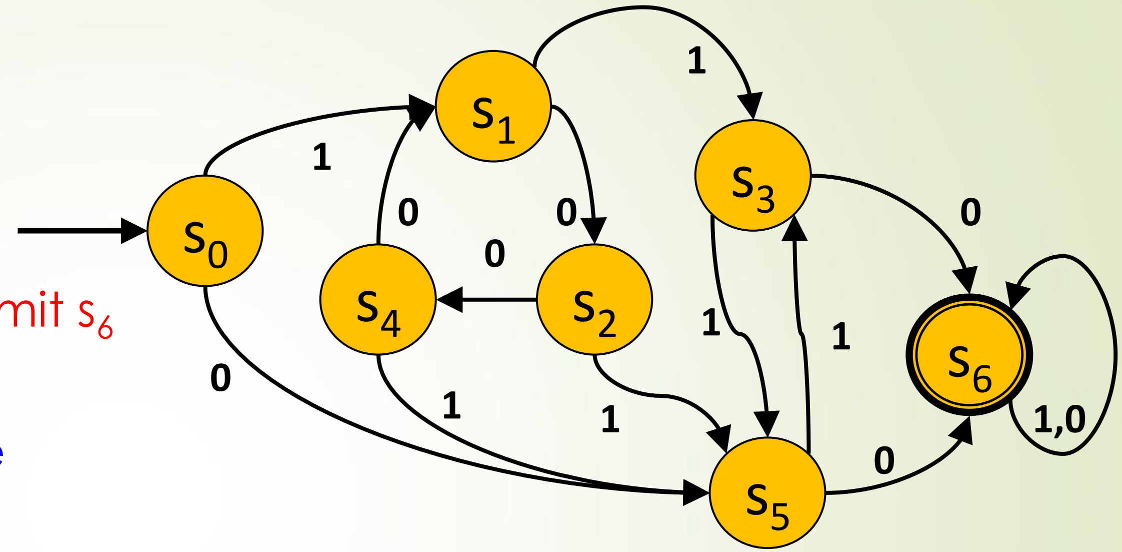
- FLACI Modellierung
- Stellen Sie die Abhängigkeitstabelle auf



Beispiel Verschmelzung

Beispiel 2 Schritt 1

- Aufstellen der Abhängigkeitstabelle
  - X: keiner der Zustände ist mit s_6 äquivalent
  - Andere nicht äquivalente Zustände

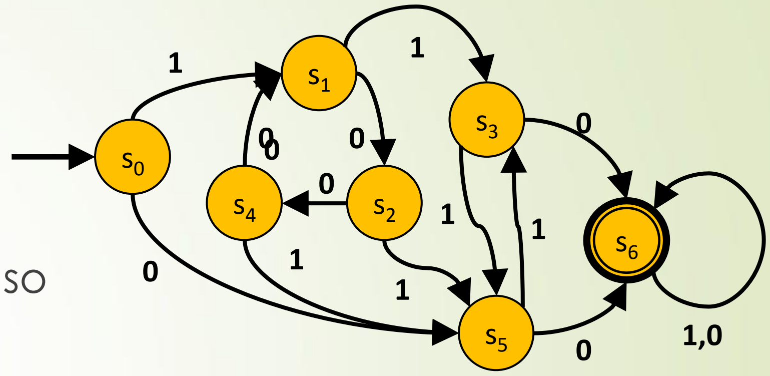


	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
s_0	≡						
s_1	X	≡					
s_2	X		≡				
s_3	X	X	X	≡			
s_4	X			X	≡		
s_5	X	X	X		X	≡	
s_6	X	X	X	X	X	X	≡

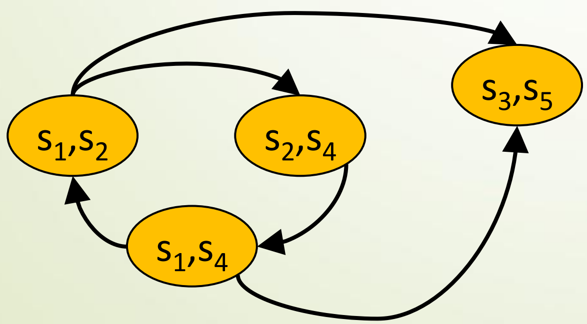
Verschmelzung

Beispiel 2 Schritt 2

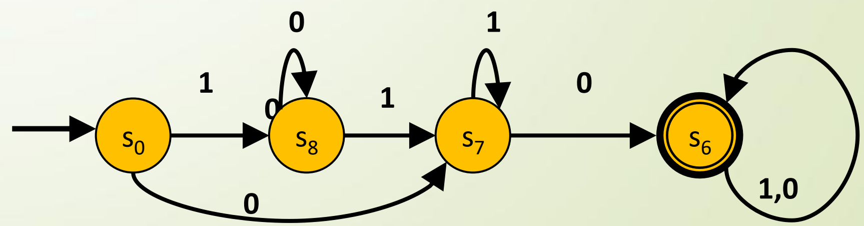
- Mögliche Äquivalente Zustände
  - (s_3,s_5), (s_1,s_2), (s_1,s_4), (s_2,s_4)
- Abhängigkeiten
  - (s_3,s_5) entspricht Fall (1) auf Folie 7 kann also zusammengefasst werden zu s_7.
  - (s_1,s_2) , (s_2,s_4), (s_1,s_4) sind von einander abhängig (Zirkelverbindung) und verweisen auf das Zustandspaar (s_3,s_5), was verschmolzen wird. Daher kann man diese 3 Zustände zu einem Zustand s_8 zusammenfassen.



DEA_3

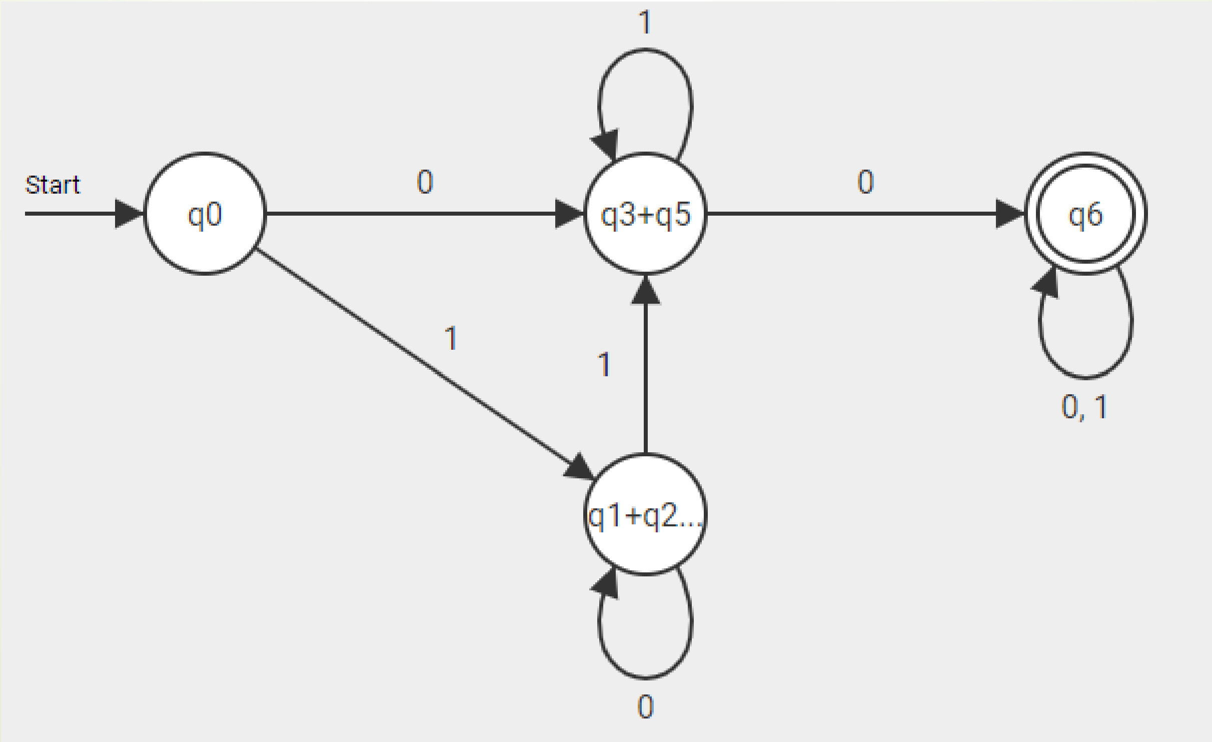


Optimierte Variante



Lösung Aufgabe 2

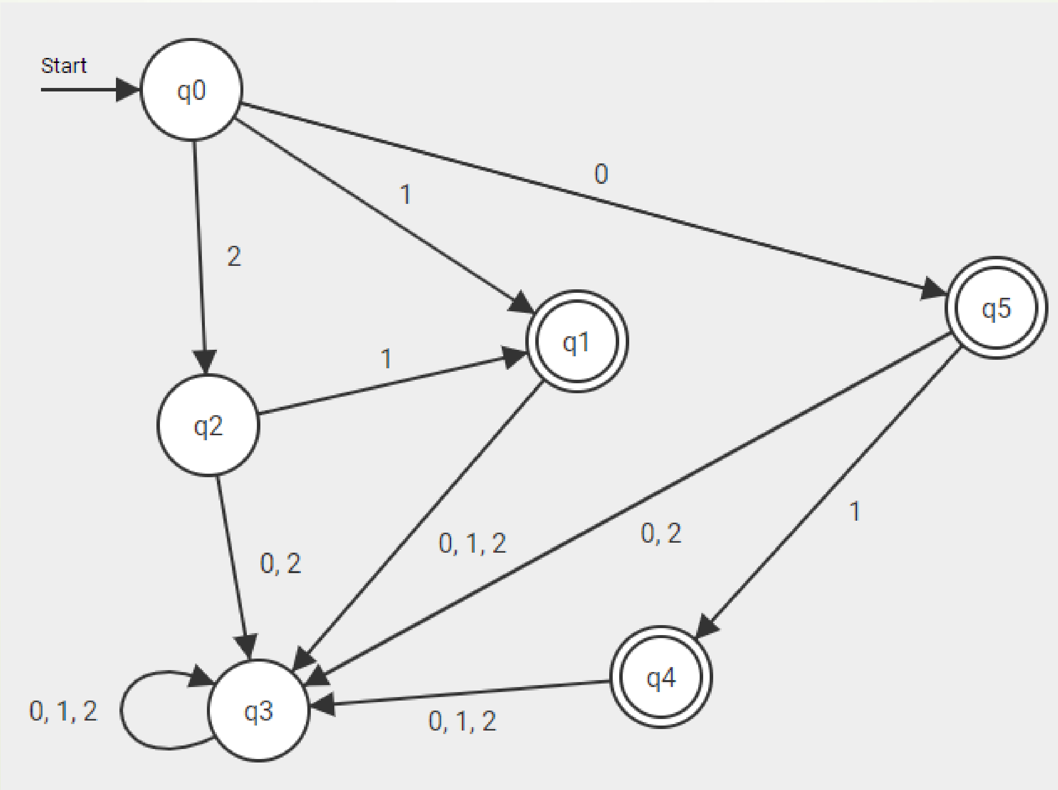
FLACI



Aufgabe Minimierung

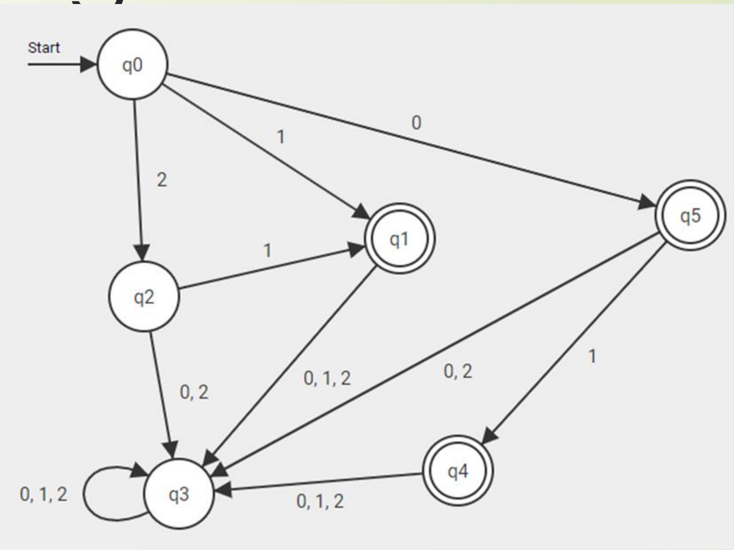
Beispiel 3

- FLACI Modellierung
- Stellen Sie die Abhängigkeitstabelle auf und Minimieren Sie den Automaten



Beispiel Verschmelzung

Beispiel 2 Schritt 1



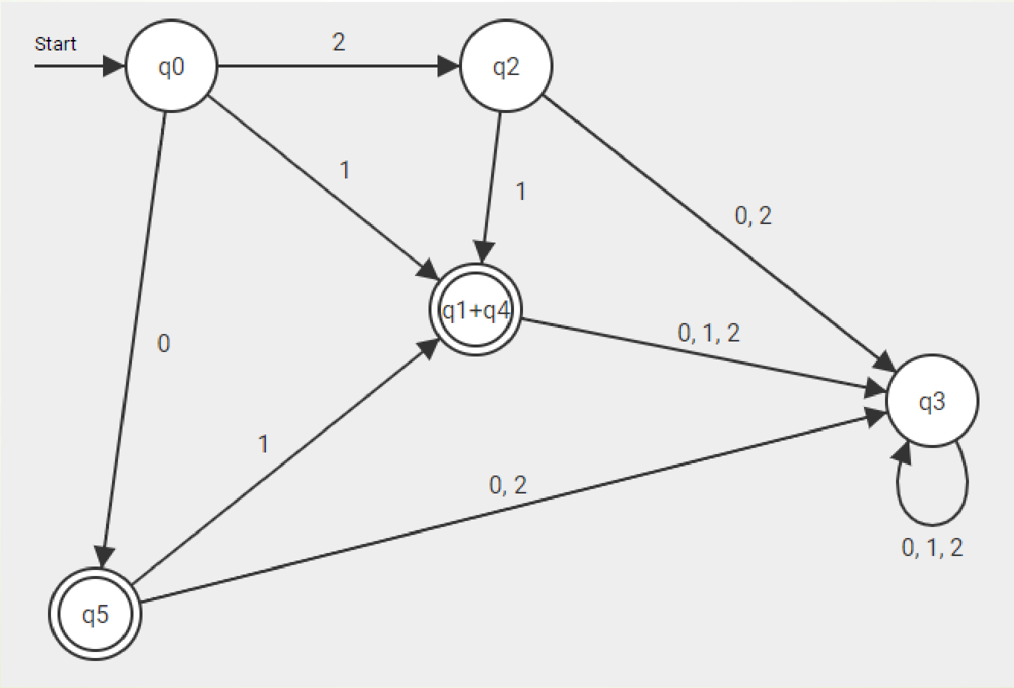
- Aufstellen der Abhängigkeitstabelle
- Nur ((q_1q_4) sind äquivalent

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
q_0	≡					
$*q_1$	X	≡				
q_2	X	X	≡			
q_3	X	X	X	≡		
$*q_4$	X	(q_1q_4)	X	X	≡	
$*q_5$	X	X	X	X	X	≡

Lösung Aufgabe 3

FLACI

- Minimiert



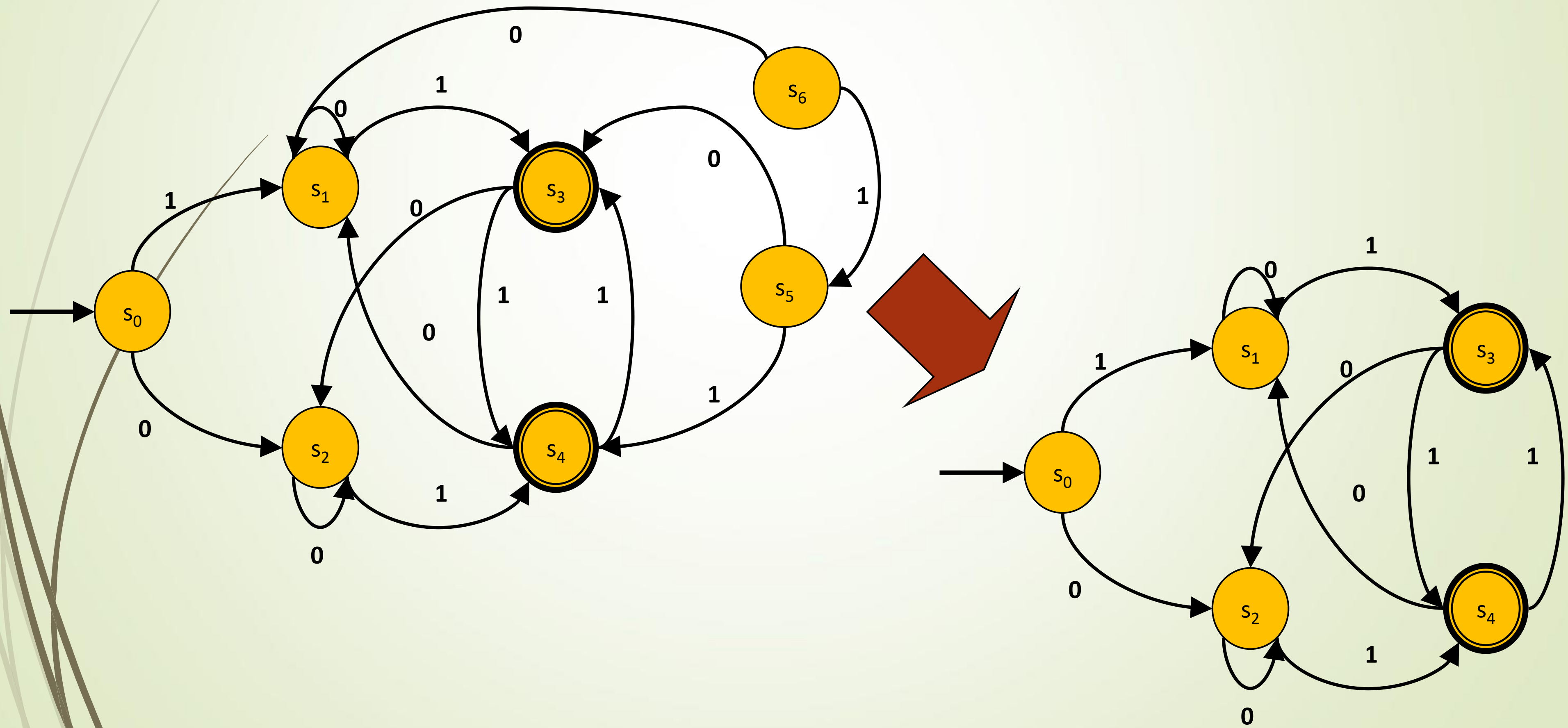
Konstruktion des Minimalautomaten

- Sei $A_1 = (Q, \Sigma, \delta, s_0, F)$ ein DEA, der $L = L(A_1)$ erkennt.
- Zu A wird in mehreren Schritten ein äquivalenter Automat A_{min} konstruiert:
  1. Vereinfache A, so dass alle Zustände von s_0 aus erreichbar sind. (Entfernen aller nicht erreichbaren Zustände)
  2. Zusammenfassen äquivalenter Zustände.

Konstruktion des Minimalautomaten

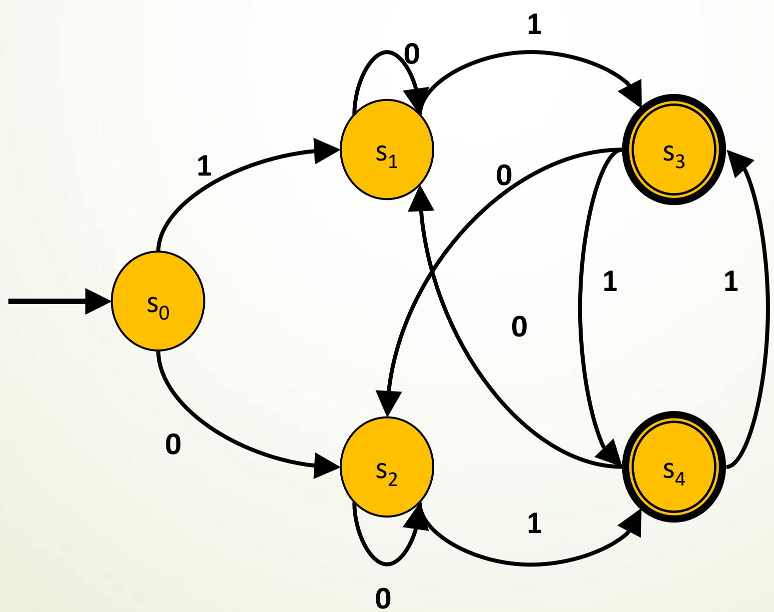
Beispiel Schritt 1

- Elimination nicht erreichbarer Zustände s_5 und s_6



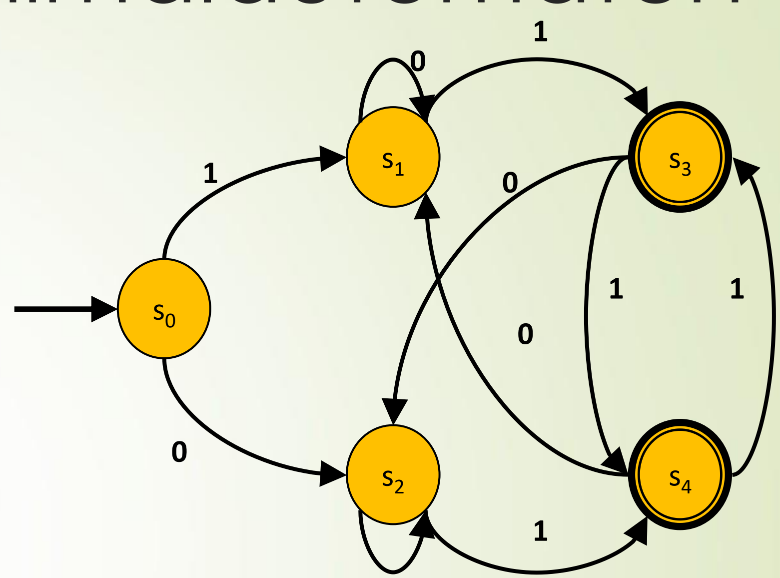
Aufgabe Optimierung

- Optimieren Sie folgenden Automaten



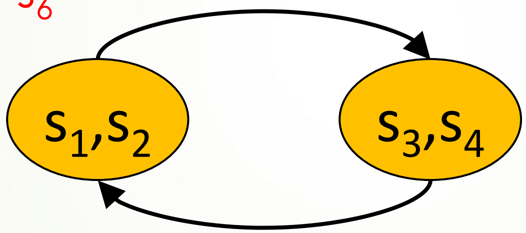
Konstruktion des Minimalautomaten

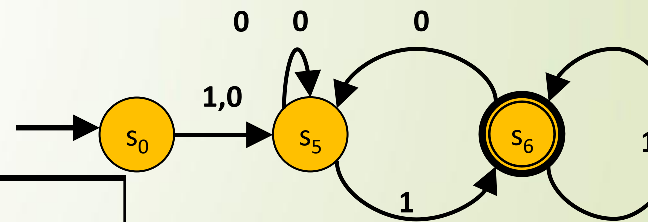
Beispiel Schritt2



- Aufstellen der Abhängigkeitstabelle
  - Nicht äquivalente Zustände
  - Mögliche Verschmelzung (s_1,s_2) zu s_5 und (s_3,s_4) zu einem neuen Endzustand s_6

Abhängigkeiten





Optimierte Variante

	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4
s_0	≡				
s_1	X	≡			
s_2	X	s_3,s_4	≡		
s_3	X	X	X	≡	
s_4	X	X	X	s_1,s_2	≡

Minimalautomaten

Mengenvariante

- Nachfolgend finden Sie eine andere in der Literatur gebräuchliche Variante um DEAs zu minimieren.

Konstruktion des Minimalautomaten

- Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, s_0, F)$ ein DEA, der $L = L(A)$ erkennt.
- Zu A wird in mehreren Schritten ein äquivalenter Automat A_{min} konstruiert:

1. Vereinfache A, so dass alle Zustände von s_0 aus erreichbar sind.
2. Zerlege die Zustandsmenge disjunkt in zwei Teile: $\pi_1 = \{F, E - F\}$
3. Verfeinere die aktuelle Zerlegung $\pi_i = \{s_1, \ldots, s_k\}$: In der neuen Zerlegung π_{i+1} gehören Zustände s, s' genau dann zur gleichen Menge, wenn $s \in S_i$ und $s' \in S_i$ sowie $\delta(s, a) \in S_j$ und $\delta(s', a) \in S_j$ für alle $a \in S$ und $i, j \in \{1, \ldots, k\}$. Aufgeteilt werden muss S_i, wenn für $s, s' \in S_i$ gilt: $\delta(s, a) \neq \delta(s', a)$
4. Ergab die letzte Verfeinerung mehr Mengen, gehe zurück zu 3; sonst sind die Mengen der letzten Zerlegung die Zustände von A_{min}.

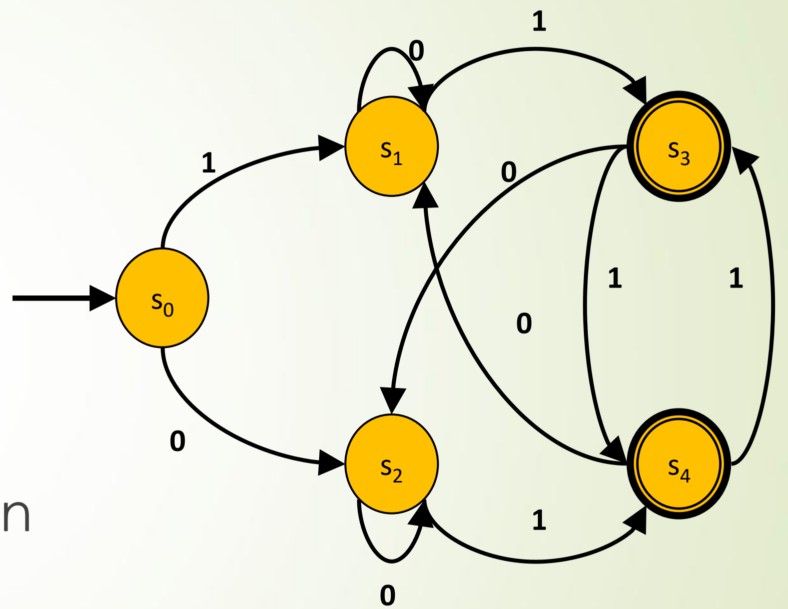
Ein zu minimierender DEA

- Starten mit den Mengen

  $M_1 = \{s_3, s_4\}$ und $M_2 = \{s_0, s_1, s_2\}$

Folgerung:

- M_1 braucht nicht weiter zerlegt werden, denn bei Eingabe von 0 gehen wir immer zu M_2 und bei Eingabe von 1 bleiben wir in M_1
- M_2 muss weiterzerlegt werden, denn bei Eingabe von 1 bleiben wir in M_1 oder gehen nach M_2.
  - Zerlegung die sich anbietet
  - $M_{21} = \{s_0\}$
  - $M_{22} = \{s_1, s_2\}$

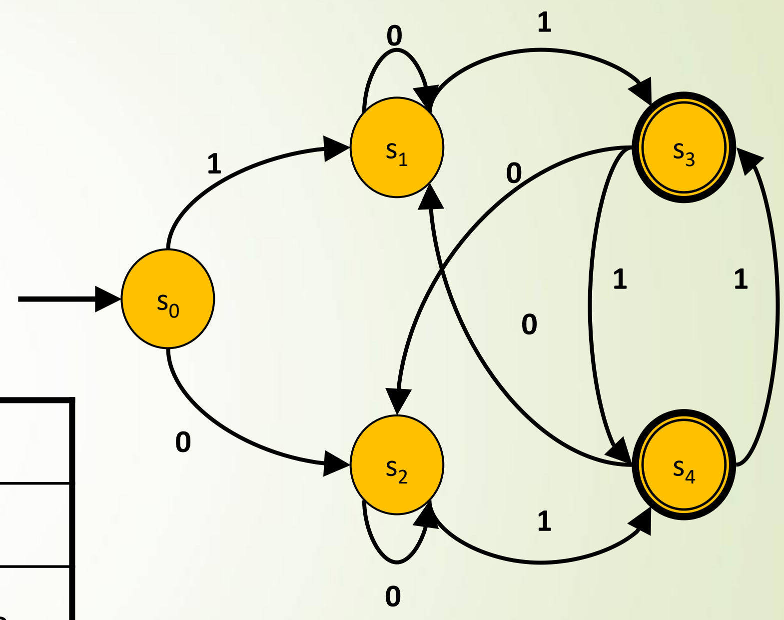


π_1	M_1		M_2		
	S_3	S_4	S_0	S_1	S_2
0	M_2	M_2	M_2	M_2	M_2
1	M_1	M_1	M_2	M_1	M_1

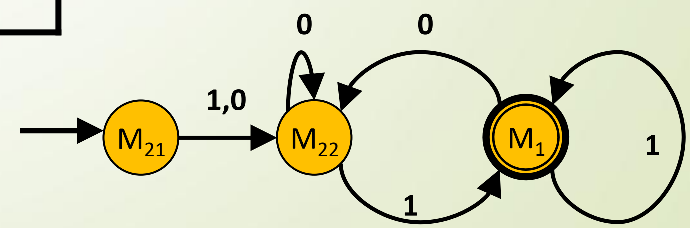
Ein zu minimierender DEA

Beispiel

- Zerlegung von M_2 in M_{21} und M_{22}



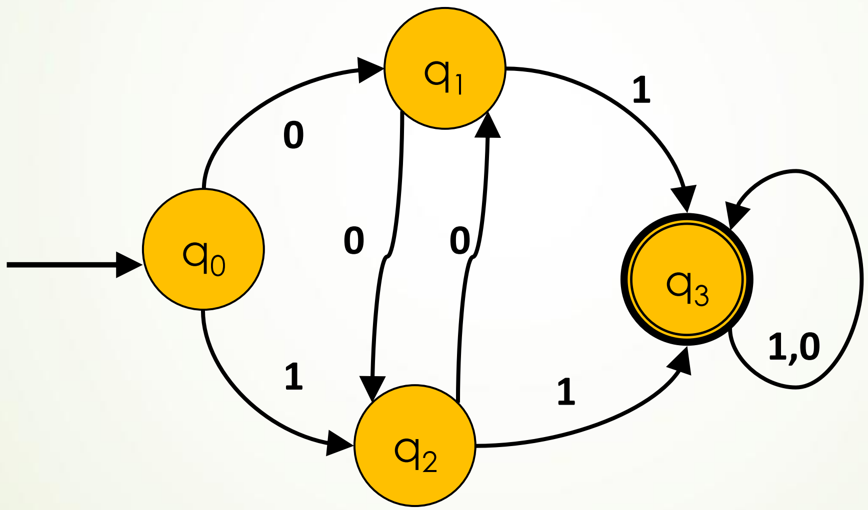
π_2	M_1		M_2		
			M_{21}	M_{22}	
	S_3	S_4	S_0	S_1	S_2
0	M_{22}	M_{22}	M_{22}	M_{22}	M_{22}
1	M_1	M_1	M_{22}	M_1	M_1



Beispiel Verschmelzung

Beispiel 1 Mengenvariante

- Minimieren Sie den Automaten mit der Mengenvariante



DEA₂

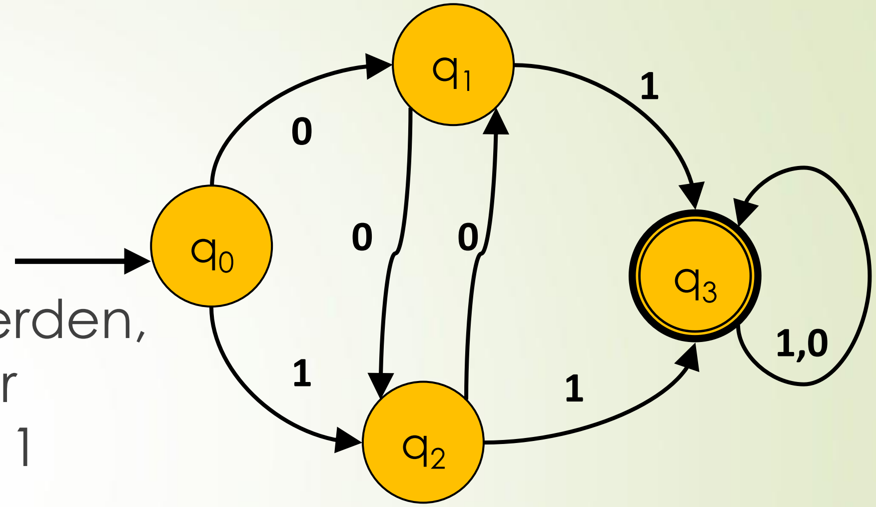
Ein zu minimierender DEA

- Starten mit den Mengen

  $M_1 = \{q_3\}$ und $M_2 = \{q_0, q_1, q_2\}$

Folgerung:

- M_1 braucht nicht weiter zerlegt werden, denn bei Eingabe von 0 gehen wir immer zu M_2 und bei Eingabe von 1 bleiben wir in M_1
- M_2 muss weiterzerlegt werden, denn bei Eingabe von 1 bleiben wir in M_1 oder gehen nach M_2.
  - Zerlegung die sich anbietet
  - $M_{21} = \{q_0\}$
  - $M_{22} = \{q_1, q_2\}$



DEA_2

π_1	M_1	M_2		
	q_3	q_0	q_1	q_2
0	M_1	M_2	M_2	M_2
1	M_1	M_2	M_1	M_1

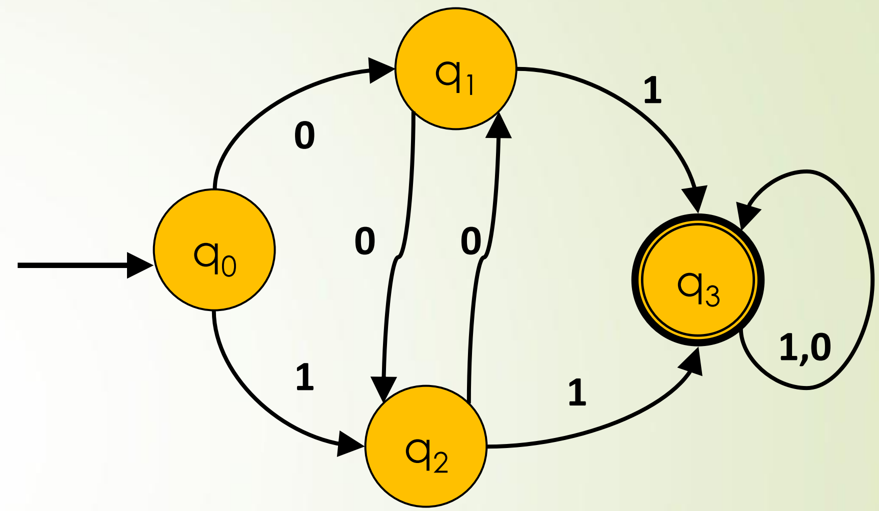
Ein zu minimierender DEA

Beispiel

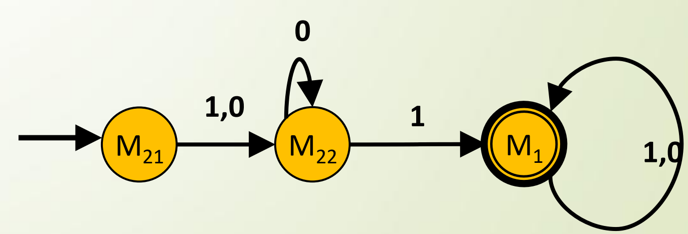
- Zerlegung von M_2 in M_{21} und M_{22}

π_1	M_1	M_2		
	q_3	q_0	q_1	q_2
0	M_1	M_2	M_2	M_2
1	M_1	M_2	M_1	M_1

π_2	M_1	M_2		
		M_{21}	M_{22}	
	q_3	q_0	q_1	q_2
0	M_1	M_{22}	M_{22}	M_{22}
1	M_1	M_{22}	M_1	M_1



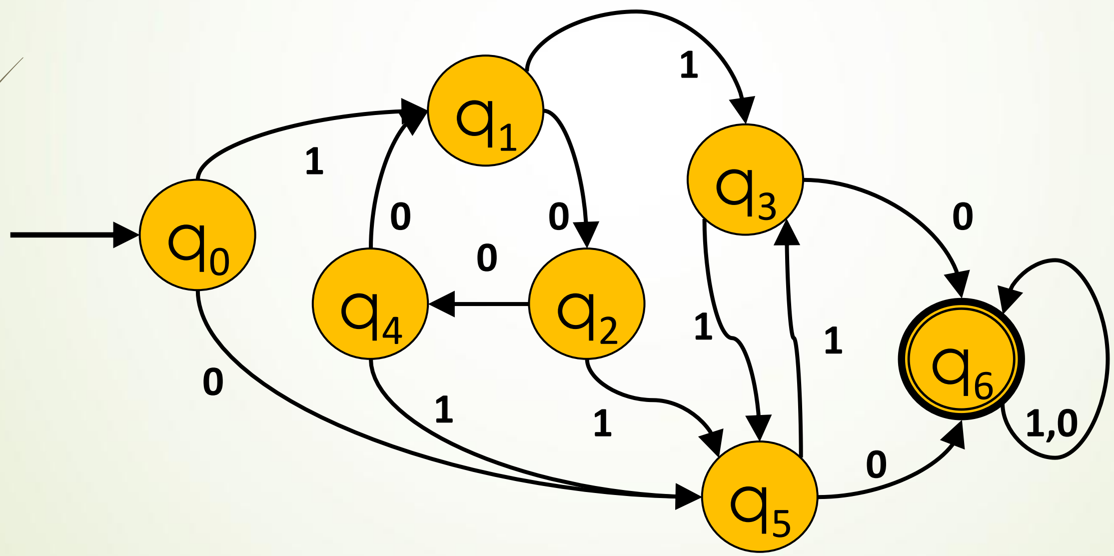
DEA₂



Beispiel Verschmelzung

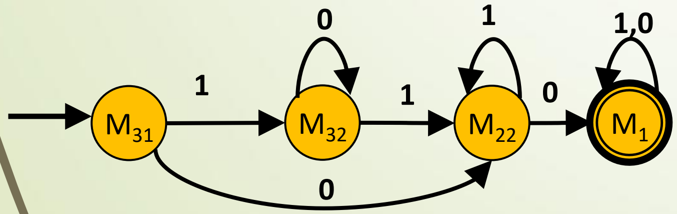
Beispiel 1 Mengenvariante

- Minimieren Sie den Automaten mit der Mengenmethode



Lösung Beispiel 2

- Mengen
- 1. Zerlegung
- $M_1 = \{q_6\}$
- $M_2 = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$
- 2. Zerlegung
- $M_{21} = \{q_0, q_1, q_2, q_4\}$
- $M_{22} = \{q_3, q_5\}$
- 3. Zerlegung
- $M_{31} = \{q_0\}$
- $M_{32} = \{q_1, q_2, q_4\}$



π_1	M_1	M_2					
	$*q_6$	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
0	M_1	M_2	M_2	M_2	M_1	M_2	M_1
1	M_1	M_2	M_2	M_2	M_2	M_2	M_2

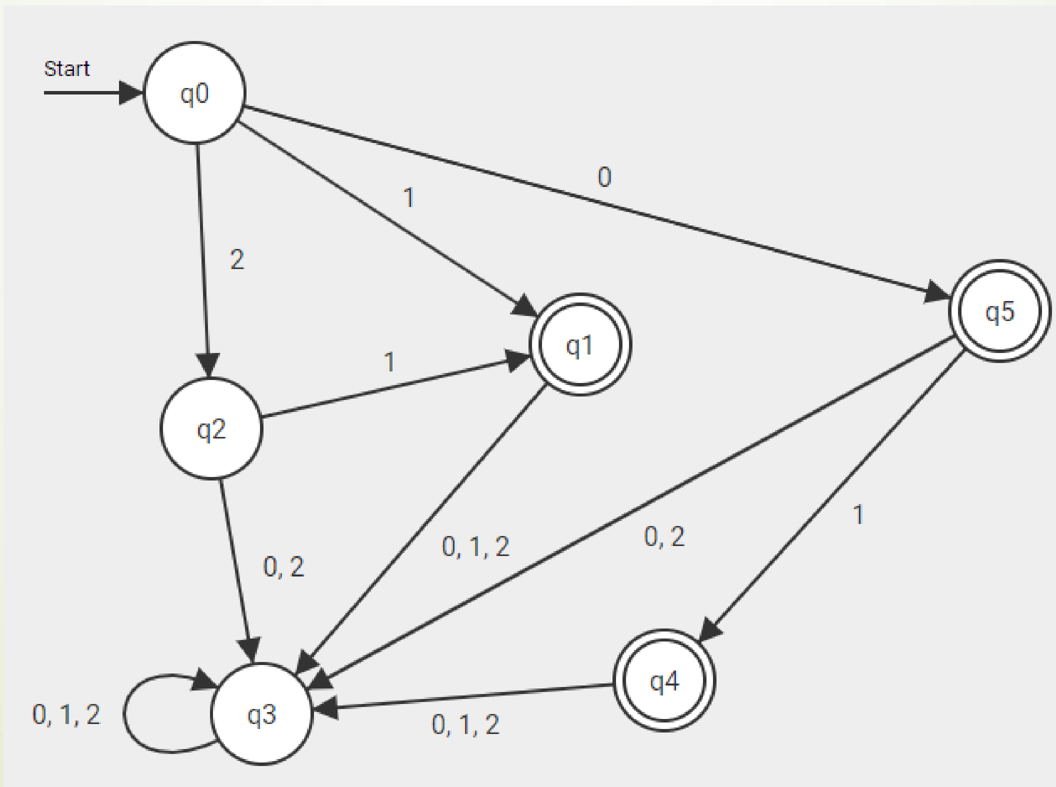
π_2	M_1	M_{21}				M_{22}	
	$*q_6$	q_0	q_1	q_2	q_4	q_3	q_5
0	M_1	M_{21}	M_{21}	M_{21}	M_{21}	M_1	M_1
1	M_1	M_{21}	M_{22}	M_{22}	M_{22}	M_{22}	M_{22}

π_3	M_1	M_{31}	M_{32}			M_{22}	
	$*q_6$	q_0	q_1	q_2	q_4	q_3	q_5
0	M_1	M_{22}	M_{32}	M_{32}	M_{32}	M_1	M_1
1	M_1	M_{32}	M_{22}	M_{22}	M_{22}	M_{22}	M_{22}

Aufgabe Minimierung

Beispiel 3

- Das Alphabet sei {0,1,2}
- Minimieren Sie den Automaten mit der Mengenmethode



Lösung Beispiel 3

- Mengen
- 1. Zerlegung
  - $M_1 = \{q_1, q_4, q_5\}$
  - $M_2 = \{q_0, q_2, q_3\}$
- 2. Zerlegung
  - $M_{11} = \{q_1, q_4\}$
  - $M_{12} = \{q_5\}$
  - $M_{21} = \{q_0\}$
  - $M_{22} = \{q_2\}$
  - $M_{23} = \{q_3\}$

π_1	M_1			M_2		
	$*q_1$	$*q_4$	$*q_5$	q_0	q_2	q_3
0	M_2	M_2	M_2	M_1	M_2	M_2
1	M_2	M_2	M_1	M_1	M_1	M_2
2	M_2	M_2	M_2	M_2	M_2	M_2

π_2	M_{11}		M_{12}	M_{21}	M_{22}	M_{23}
	$*q_1$	$*q_4$	$*q_5$	q_0	q_2	q_3
0	M_{23}	M_{23}	M_{23}	M_{12}	M_{23}	M_{23}
1	M_{23}	M_{23}	M_{11}	M_{11}	M_{11}	M_{23}
2	M_{23}	M_{23}	M_{23}	M_{22}	M_{23}	M_{23}

Lösung Beispiel 3

- Minimalautomat

π_2	M_{11}		M_{12}	M_{21}	M_{22}	M_{23}
	$*q_1$	$*q_4$	$*q_5$	q_0	q_2	q_3
0	M_{23}	M_{23}	M_{23}	M_{12}	M_{23}	M_{23}
1	M_{23}	M_{23}	M_{11}	M_{11}	M_{11}	M_{23}
2	M_{23}	M_{23}	M_{23}	M_{22}	M_{23}	M_{23}