

Automatentheorie

endliche nicht deterministische Automaten

Prof. Dr. Franz-Karl Schmatzer
schmatzf@dhbw-loerrach.de

- C.Wagenknecht, M.Hielscher; Formale Sprachen, abstrakte Automaten und Compiler; 3.Aufl. Springer Vieweg 2022;
- A.V.Aho, M.S.Lam,R.Savi,J.D.Ullman, *Compiler – Prinzipien,Techniken und Werkzeuge*. 2. Aufl., Pearson Studium, 2008.
- Güting, Erwin; *Übersetzerbau –Techniken, Werkzeuge, Anwendungen*, Springer Verlag 1999
- Sipser M.; Introduction to the Theory of Computation; 2.Aufl.; Thomson Course Technology 2006
- Hopcroft, T. et al; Introduction to Automata Theory, Language, and Computation; 3. Aufl. Pearson Verlag 2006

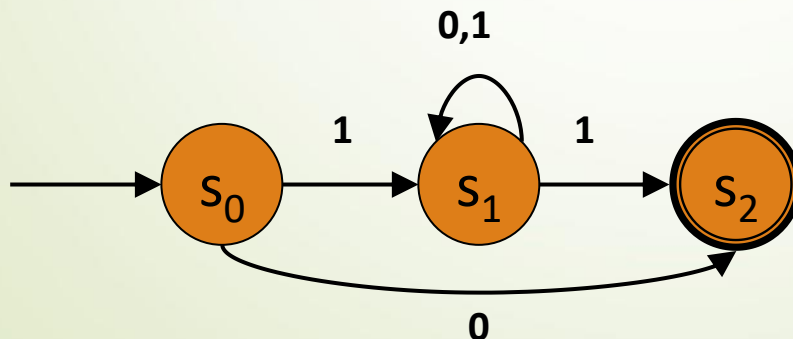
Agenda

- Aufbau und Definition von NEA
- Modellierung
- Umwandlung NEA in DEA

Nicht deterministische endliche Automaten (NEA)

Einführung

- Für bestimmte Anwendungen lässt sich die Konstruktion eines Automaten sehr vereinfachen, wenn man statt genau einen Übergang pro Zeichen gleich mehrere Übergänge für ein Zeichen erlaubt.
- Jedoch erhält man einen anderen Automaten und die Definition des Automaten muss angepasst werden.



Überföhrungsfunktion

δ	0	1
s_0	$\{s_2\}$	$\{s_1\}$
s_1	$\{s_1\}$	$\{s_1, s_2\}$
s_2	\emptyset	\emptyset

NEA

Formale Definition

- Ein NEA wird genauso beschrieben wie ein DEA durch

$A = (Q, \Sigma, \delta, s_0, F)$ mit

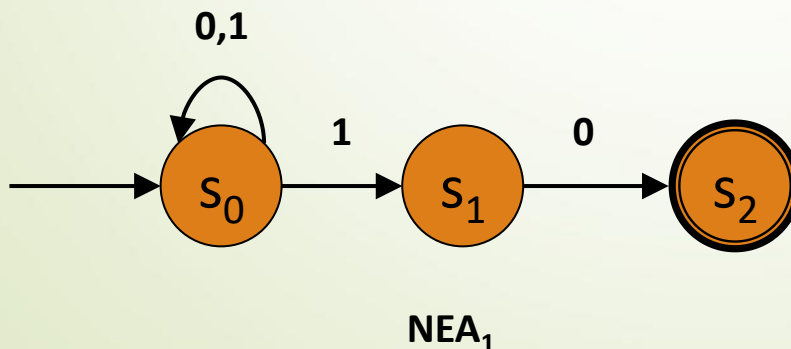
$Q = \{s_1, \dots, s_n\}$ eine nicht leere Menge von Zuständen.

$\Sigma = \{e_1, \dots, e_n\}$ eine nicht leere Menge von Zeichen

$\delta : Q \times \Sigma \rightarrow \wp(Q)$ eine Funktion, die Überföhrungsfunktion, welche anders als im DEA eine Menge von Zuständen zuröckgibt.

$s_0 \in Q \setminus F$ der Anfangszustand.

$F \subseteq Q$ die nicht leere Menge von Endzustände.



Überföhrungsfunktion

δ	0	1
s_0	$\{s_0\}$	$\{s_0, s_1\}$
s_1	$\{s_2\}$	\emptyset
s_2	\emptyset	\emptyset

- ▶ NEA hat fast die gleiche Struktur wie ein DEA nur die Überföhrungsfunktion δ muss entsprechend angepasst werden
- ▶ Sei $w = xa$ ein Wort , wobei a finales Symbols ist und sei $\delta(s,x) = \{q_1, \dots, q_k\}$ die Menge von Zuständen nach dem Lesen des Wortes x , dann ist
$$\delta(s,xa) = \delta(q_1,a) \cup \delta(q_2,a) \cup \dots \cup \delta(q_k,a) = \{q_1, \dots, q_m\}$$
- ▶ Formal: Ein NEA akzeptiert ein Wort w , wenn mindestens irgendeiner der Endzustände F erreicht wird, d.h.
$$L(\text{NEA}) = \{w \mid \delta(s_0,w) \cap F \neq \emptyset\}$$

NEA II

Wortverarbeitung

- Sehen wir uns dazu die Verarbeitung des Wortes $w = 0011$ mit dem NEA_1 an

i. $\delta(s_0, 0) = \{s_0\}$

ii. $\delta(s_0, 00) = \{s_0\}$

iii. $\delta(s_0, 001) = \{s_0\} \cup \{s_1\} = \{s_0, s_1\}$

iv. $\delta(s_0, 0011) = \{s_0, s_1\} \cup \{\emptyset\} = \{s_0, s_1\}$

oder $\delta(s_0, 0011) \Rightarrow \delta(\{s_0\}, 011) \Rightarrow \delta(\{s_0\}, 11) \Rightarrow \delta(\{s_0, s_1\}, 1) \Rightarrow \delta(\{s_0, s_1\}, \epsilon)$

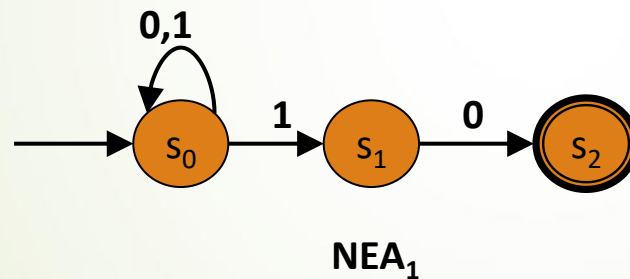
\Rightarrow das Wort wird nicht akzeptiert, da s_2 , der Endzustand nicht in der Endmenge $M = \{s_0, s_1\}$ (siehe IV.) vorkommt.

δ	0	1
s_0	$\{s_0\}$	$\{s_0, s_1\}$
s_1	$\{s_2\}$	\emptyset
s_2	\emptyset	\emptyset

NEA

Arbeitsweise

- Beispiele zur Arbeitsweise des NEA₁
 - Leiten Sie die Worte 01010, 01011, 10110, 10101 ab.



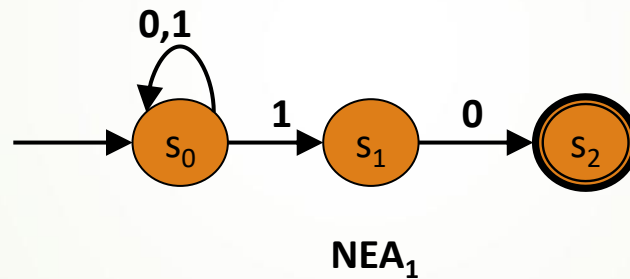
Überföhrungsfunktion

δ	0	1
s_0	$\{s_0\}$	$\{s_0, s_1\}$
s_1	$\{s_2\}$	\emptyset
s_2	\emptyset	\emptyset

Aufgabe 1 NEA

- Erstellen Sie mit AutoEdit den Automaten NEA_1
- Und sehen Sie sich die Bearbeitung der Wort an:

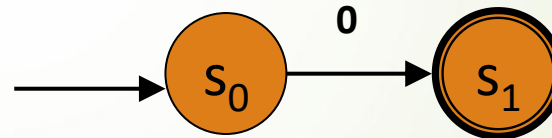
w	01010	01011	10110	10101
---	-------	-------	-------	-------



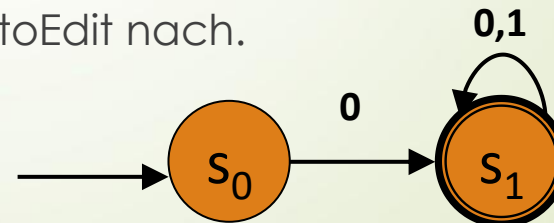
Einfache Automatenkonstruktion

- Wie konstruiert man endliche nicht deterministische Automaten?
- Man geht wie beim DEA vom kleinsten Wort aus, was der Automat akzeptieren soll (Rumpf-Automat)
- Man erweitert den Automaten entsprechend. Es muss nicht jeder Übergang durch ein Zeichen realisiert sein (unvollständiger Automat)
- Beispiel:

- Alle Wort aus dem Alphabet $\{0,1\}$ die am Anfang eine 0 haben sollen.
- Kleinstes Wort ist $w=„0“$



- Nun wird der Endzustand noch durch alle Zeichen des Alphabets erweitert.
- Bauen Sie den Automaten in AutoEdit nach.



Beispiel NEA- Konstruktion

- Das Alphabet sei $\Sigma = \{0,1\}$
 - Konstruieren Sie einen deterministischen Automaten, der die Zeichenkette „00“ im Wort erkennt.
 - Entwickeln Sie den Automaten.
 - Bauen Sie den Automaten mit FLACI nach.

Aufgabe 3 NEA-Konstruktion

- Das Alphabet sei $\Sigma = \{0,1\}$
 - Konstruieren Sie einen nicht deterministischen Automaten, der alle Worte erkennt, die am Schluss die Zeichenfolge „00“ haben.
 - Konstruieren Sie einen nicht deterministischen Automaten, der alle Worte erkennt, die an der zweitletzten Stelle eine „0“ haben.
 - Konstruieren Sie einen nicht deterministischen Automaten, der alle Worte erkennt, die an der drittletzten Stelle eine „1“ und an der letzten Stelle eine 0 haben.
 - Entwickeln Sie den Automaten.
 - Bauen Sie dann den Automaten mit FLACI nach.

NEA

Äquivalenz mit DEA

- Es zeigt sich, dass zu jeder Sprachen L , die von einem NEA akzeptiert wird, es auch einem entsprechenden DEA gibt und umgekehrt, d.h. zu jeder Sprache L die von einem DEA akzeptiert wird gibt es einen entsprechenden NEA.
- Die Klasse der Sprachen eines NEAs und DEAs sind äquivalent
 $L(\text{NEA}) = L(\text{DEA})$
- Die Sprachen L , die von einem DEA akzeptiert wird heißt regulär.

NEA

Äquivalenz mit DEA

- Vorteil einer NEA Modellierung
 - Sie ist kompakter und meistens einfacher zu erstellen.
 - Die Sprache ist leichter an dem Automaten zu sehen.
- Zu jedem NEA kann man einen äquivalenten DEA angeben.
 - Die Anzahl der Zustände wird dabei wachsen.
 - maximal beträgt die Anzahl der Zustände des DEAs 2^n , wenn der NEA n Zustände hat.
 - In der Praxis sind die Anzahl der Zustände aber vergleichbar. Nur die Anzahl der Übergänge erhöht sich.

Umwandeln eines NEA in ein DEA

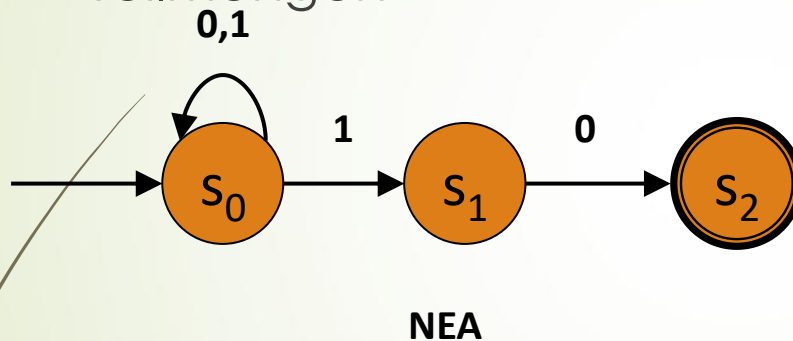
Basisprinzip

- Die einfachste Variante einen NEA in ein DEA umzuwandeln ist jeder möglichen Teilmenge aus S einen eigenen Zustand zuzuordnen und dann die entsprechende Übergangsfunktionen aufzustellen.
 - Da man dabei meistens mehr Zustände erstellt, als vom Startzustand aus überhaupt erreicht werden können, muss man am Schluss noch alle Zustände entfernen, die nicht vom Startzustand aus erreicht werden können.
 - Endzustände sind alle Mengen in denen Zustände von F vorkommen

Umwandeln eines NEA in ein DEA

Beispiel

- Gegeben ein NEA mit Überföhrungsfunktionen δ
- Aufstellen der Überföhrungsfunktion für alle möglichen Teilmengen



δ	0	1
s_0	$\{s_0\}$	$\{s_0, s_1\}$
s_1	$\{s_2\}$	\emptyset
s_2	\emptyset	\emptyset

NEA



DEA

δ	0	1
s_0		
s_1		
s_2		
$\{s_0, s_1\}$		
$\{s_0, s_2\}$		
$\{s_1, s_2\}$		
$\{s_1, s_2, s_3\}$		

Umwandeln eines NEA in ein DEA

Intelligenteres Verfahren

- Statt für alle Teilmengen die Übergangsfunktion aufzustellen, werden nur die Teilmengen mitgenommen, die beginnend vom Startzustand neu auftauchen (Transitive Hülle).

δ	0	1
s_0	$\{s_0\}$	$\{s_0, s_1\}$
s_1	$\{s_2\}$	\emptyset
s_2	\emptyset	\emptyset

original NEA

Aufgabe NEA in DEA Umwandeln

- Konstruieren Sie einen NEA, der alle Worte erkennt, die am Schluss die Zeichenfolge „00“ haben. Wandeln Sie den Automaten in einen DEA um.
- Konstruieren Sie einen NEA, der alle Worte erkennt, die an der zweitletzten Stelle eine „0“ haben. Wandeln Sie den Automaten in einen DEA um.
- Konstruieren Sie einen NEA, der alle Worte erkennt, die an der drittletzten Stelle eine „1“ und an der letzten Stelle eine 0 haben. Wandeln Sie den Automaten in einen DEA um.
- Bauen Sie die obigen NEAs mithilfe des FLACI Tools „Abstrakte Automaten“ auf und führen sie die Umwandlung mit diesem Tool durch und vergleichen Sie ihre eigene Lösung mit der des Tools.