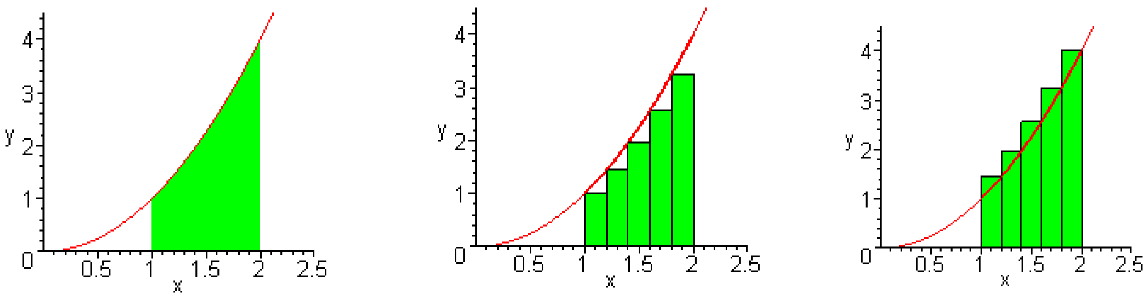
1. Einführung

Aufgabe: Es soll der Flächeninhalt zwischen einer Kurve und der x-Achse bestimmt werden.

Beispiel: Flächeninhalt zwischen der Normalparabel $y = x^2$ und der x-Achse im Intervall $a \le x \le b$.



Das Intervall $[a/b]$ wird in n gleich breite Intervalle der Breite $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ zerlegt.
Dann beträgt die **Summe** der **einbeschriebenen** Rechteckflächen, die sog. **Untersumme**:

$$U_n = f(a)\cdot\Delta x + f(a+\Delta x)\cdot\Delta x + f(a+2\cdot\Delta x)\cdot\Delta x + f(a+3\cdot\Delta x)\cdot\Delta x + \ldots + f(a+(n-1)\cdot\Delta x)\cdot\Delta x$$

$$= \left[a^2 + (a+\Delta x)^2 + (a+2\cdot\Delta x)^2 + (a+3\cdot\Delta x)^2 + \ldots + (a+(n-1)\cdot\Delta x)^2\right]\cdot\Delta x$$

$$= \left[n\cdot a^2 + 2\cdot\left(1+2+3+\ldots+(n-1)\right)\cdot a\cdot\Delta x + \left(1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2\right)\cdot(\Delta x)^2\right]\cdot\Delta x$$

$$= \left[n\cdot a^2 + 2\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2}\cdot a\cdot\Delta x + \frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6}\cdot(\Delta x)^2\right]\cdot\Delta x, \quad \text{da} \quad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2} \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

$$= \left[n\cdot a^2 + 2\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2}\cdot a\cdot\frac{b-a}{n} + \frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6}\cdot\left(\frac{b-a}{n}\right)^2\right]\cdot\frac{b-a}{n}$$

$$= \left[a^2 + \frac{n-1}{n}\cdot a\cdot(b-a) + \frac{2n^2-3n+1}{6n^2}\cdot(b-a)^2\right]\cdot(b-a).$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+1}{6n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right) = \frac{1}{3}$ folgt der Flächeninhalt zu

$$A = \lim_{n\to\infty} U_n = \left[a^2 + a\cdot(b-a) + \frac{1}{3}\cdot(b-a)^2\right]\cdot(b-a) = \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}a^3.$$

Für die Summe der **umbeschriebenen** Rechteckflächen, die sog. **Obersumme** gilt:

$$O_n = f(a+\Delta x)\cdot\Delta x + f(a+2\cdot\Delta x)\cdot\Delta x + f(a+3\cdot\Delta x)\cdot\Delta x + \ldots + f(a+n\cdot\Delta x)\cdot\Delta x = U_n + \left[f(a+n\cdot\Delta x) - f(a)\right]\cdot\Delta x.$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty}\Delta x = 0$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} O_n = \lim\limits_{n\to\infty} U_n = \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}a^3$.

Symbolisch schreibt man für den Flächeninhalt, also die Summe $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x$ der unendlich vielen Rechteckflächeninhalte $f(x_i)\cdot\Delta x$, einfach $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Definition: Eine Funktion F heißt eine Stammfunktion einer Funktion f, wenn $F'(x) = f(x)$.

Beispiel 1: Es sei $f(x) = a\cdot x^n$. Dann ist $F(x) = \begin{cases} \frac{a}{n+1}x^{n+1} & \text{für } n \ne -1 \\ a\cdot\ln|x| & \text{für } n = -1 \end{cases}$ eine Stammfunktion von f.

Beispiel 2: Es sei $f(x) = \frac{3}{2x^3} + \frac{2}{3x} - \frac{1}{2} + 2x$. Jede Stammfunktion F von f lässt sich darstellen in der Form

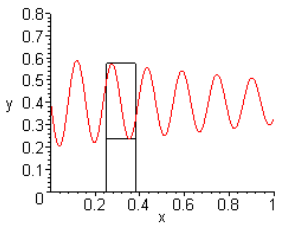
$F(x) = -\frac{3}{4x^2} + \frac{2}{3}\ln|x| - \frac{x}{2} + x^2 + c$ mit einer beliebigen Konstanten c.

Beispiel 3: Jede Stammfunktion F von $f(x) = 2\cdot\sin x + 3\cdot\cos x$ hat die Gestalt $F(x) = -2\cdot\cos x + 3\cdot\sin x + c$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

Wichtig ist der **Fundamentalsatz der Differenzial- und Integralrechnung:**

Die Integralfunktion $\int_a^x f(t)\,dt$ ist eine Stammfunktion von f., d.h. $\boxed{\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)}$.

Beweis: Wir setzen $I(x)=\int_a^x f(t)\,dt$. Dann ist $I(x+\Delta x)-I(x)$ die Fläche zwischen dem Schaubild von f und der x-Achse im Intervall $[x/x+\Delta x]$. Setzt man $m=\min\limits_{[x/x+\Delta x]} f(x)$ das Minimum und $M=\max\limits_{[x/x+\Delta x]} f(x)$ das Maximum von f im Intervall $[x/x+\Delta x]$, dann gilt $m\cdot\Delta x \le I(x+\Delta x)-I(x) \le M\cdot\Delta x$, folglich $m \le \frac{I(x+\Delta x)-I(x)}{\Delta x} \le M$. Führt man hierin den Grenzwert $\Delta x \to 0$ aus, so streben m und M gegen $f(x)$, so dass $f(x) \le I'(x) \le f(x)$, also $I'(x)=f(x)$.



Folgerung: Es sei F eine beliebige Stammfunktion von f. Da sich zwei Stammfunktionen von f nur um eine additive Konstante c unterscheiden, gilt $\int_a^x f(t)\,dt = F(x)+c$ für alle $x \in D_f$. Zur Bestimmung von c setzt man in dieser Gleichung für x den Wert a ein. Dann gilt $0=\int_a^a f(t)\,dt = F(a)+c$, d.h. $c=-F(a)$. Und damit wird

$\int_a^x f(t)\,dt = F(x)-F(a)$ bzw. $\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a)}$ für eine beliebige Stammfunktion F von f.

Beispiel 1: $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{2\pi} = -\cos(2\pi)+\cos 0 = -1+1=0$. Ergebnis ist Null, da die Flächen über und unter der x-Achse den gleichen Inhalt haben.

Beispiel 2: $\int_1^2 \left(6x^2-x+1\right)dx = \left[2x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_1^2 = 16-2+2-(2-\frac{1}{2}+1) = 13{,}5$

Beispiel 3: $\int_{-1}^1 2\cdot(3x+1)^3\,dx = \left[\frac{1}{6}(3x+1)^4\right]_{-1}^1 = 40$

Beispiel 4: $\int_0^1 \left(\pi\cdot\sin(\frac{\pi}{2}x)+4\cdot\sinh(2x)\right)dx = \left[-2\cos(\frac{\pi}{2}x)+2\cosh(2x)\right]_0^1 = e^{-2}+e^2$

Vereinbarung: Unter $\int f(x)\,dx$ versteht man eine Stammfunktion.

Beispiele 5: $\int (a\cdot x+b)^n\,dx = \begin{cases} \frac{1}{a\cdot(n+1)}(a\cdot x+b)^{n+1} & \text{für } n\neq -1 \\ \frac{1}{a}\ln|a\cdot x+b| & \text{für } n=-1 \end{cases}$,

$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$, $\int e^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax+b}$, $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}$, $\int a^{b\cdot x+c}\,dx = \frac{1}{b\cdot\ln a}\cdot a^{b\cdot x+c}$.

Einige Eigenschaften: Für $a,b,c \in \mathbb{R}$ gilt:

$\int_a^b c\cdot f(x)\,dx = c\cdot\int_a^b f(x)\,dx$ für eine Konstante c, $\int_a^b\left(\sum_{i=1}^n f_i(x)\right)dx = \sum_{i=1}^n\left(\int_a^b f_i(x)\,dx\right)$

$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$, $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

Weitere Beispiele:

① $\int\limits_{-2}^{-1}\left(-3x^2-4x+1-\frac{2}{3x}+\frac{2}{5x^2}-\frac{8}{(2-3x)^2}\right)dx=\left[-x^3-2x^2+x-\frac{2}{3}\ln(|x|)-\frac{2}{5x}-\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{2-3x}\right]_{-2}^{-1}=$

$=1-2-1-\frac{2}{3}\underbrace{\ln(1)}_{=0}+\frac{2}{5}-\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{5}-\left(8-8-2-\frac{2}{3}\ln(2)+\frac{1}{5}-\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{8}\right)=-\frac{32}{15}-\left(-\frac{32}{15}-\frac{2}{3}\ln(2)\right)=\frac{2}{3}\ln(2)$.

② $\int\limits_{0}^{1}\left(2x-2+\frac{2}{2x+1}+\frac{3}{(2x+1)^2}\right)dx=\left[x^2-2x+\ln(|2x+1|)-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2x+1}\right]_{0}^{1}=$

$=1-2+\ln(3)-\frac{1}{2}-\left(0-0+\ln(1)-\frac{3}{2}\right)=\ln(3)$.

③ $\int\limits_{-4}^{-1}\left(\frac{1}{2-x}+\frac{6}{(2-x)^2}-2\sqrt{\frac{3}{2-x}}+\sqrt{6-3x}\right)dx=\left[-\ln|2-x|+\frac{6}{2-x}+4\sqrt{3}\cdot\sqrt{2-x}-\frac{2}{9}(6-3x)^{3/2}\right]_{-4}^{-1}=$

$=-\ln(3)+\frac{6}{3}+4\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}-\frac{2}{9}\cdot 9^{3/2}-\left(-\ln(6)+\frac{6}{6}+4\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}-\frac{2}{9}\cdot 18^{3/2}\right)=-\ln(3)+2+12-6+\ln(6)-1-4\sqrt{18}+\frac{2}{9}\cdot 18\sqrt{18}=$

$=-\ln(3)+7+\ln(6)-4\sqrt{18}+4\sqrt{18}=7+\ln\left(\frac{6}{3}\right)=7+\ln(2)$.

2. Integration durch Substitution

Beispiel 1: $\int\frac{x}{5-2x^2}\,dx$. Substitution: $u=5-2x^2$. Wegen $\frac{du}{dx}=-4x$, also $x\,dx=-\frac{1}{4}du$, folgt für das Integral $\int\frac{x}{5-2x^2}\,dx=-\frac{1}{4}\int\frac{1}{u}\,du=-\frac{1}{4}\ln|u|=-\frac{1}{4}\ln\left|5-2x^2\right|$. Der letzte Schritt bedeutet die Resubstitution $u=5-2x^2$.

$\int\limits_0^1\frac{x}{5-2x^2}\,dx$ lässt sich auf zwei Weisen lösen, ohne und mit Substitution der Integrationsgrenzen:

1. Weg: Zuerst Bestimmung einer Stammfunktion und dann Einsetzen der ursprünglichen Integrationsgrenzen: $\int\limits_0^1\frac{x}{5-2x^2}\,dx=\ldots=\left[-\frac{1}{4}\ln\left|5-2x^2\right|\right]_0^1=-\frac{1}{4}(\ln 3-\ln 5)=-\frac{1}{4}\ln\frac{3}{5}=\frac{1}{4}\ln\frac{5}{3}$.

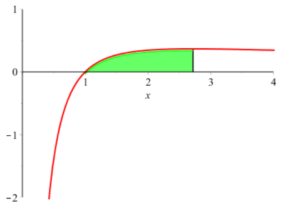
2. Weg: Transformation der Integrationsgrenzen über $u=5-2x^2$:

$\int\limits_{x=0}^{x=1}\frac{x}{5-2x^2}\,dx=-\frac{1}{4}\int\limits_{u=5}^{u=3}\frac{1}{u}\,du=-\frac{1}{4}\Big[\ln|u|\Big]_5^3=-\frac{1}{4}\ln\frac{3}{5}=\frac{1}{4}\ln\frac{5}{3}$.

Beispiel 2: $\int\frac{\ln x}{x}\,dx$. Mit der Substitution $u=\ln x$ folgt $\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}$ also $\frac{1}{x}dx=du$.

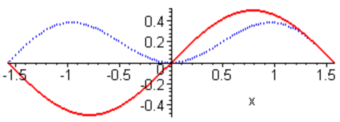
Und damit wird $\int\frac{\ln x}{x}\,dx=\int u\,du=\frac{1}{2}u^2=\frac{1}{2}\ln^2 x$.

Und $\int\limits_1^e\frac{\ln x}{x}\,dx=\int\limits_0^1 u\,du=\left[\frac{1}{2}u^2\right]_0^1=\frac{1}{2}$.



Beispiel 3: $\int\sin^n x\cdot\cos x\,dx$ für $n\neq-1$. Mit der Substitution $u=\sin x$ folgt $\frac{du}{dx}=\cos x$, also $du=\cos x\,dx$. Und damit wird

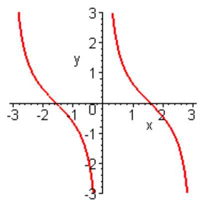
$\int\sin^n x\cdot\cos x\,dx=\int u^n\,du=\frac{1}{n+1}u^{n+1}=\frac{1}{n+1}\sin^{n+1}x$.



Durchgezogenes Schaubild für $n=1$, punktiertes für $n=2$.

$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^n x\cdot\cos x\,dx=\int\limits_{-1}^{1}u^n\,du=\left[\frac{1}{n+1}u^{n+1}\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{n+1}\left(1-(-1)^{n+1}\right)=\begin{cases}0 & n\text{ ungerade}\\ \frac{2}{n+1} & n\text{ gerade}\end{cases}$

Beispiel 4: $\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int \frac{1}{\tan x}\,dx$.



Mit der Substitution $u = \sin x$ von Beispiel 3 folgt

$\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| = \ln|\sin x|$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \left[\ln|\sin x|\right]_{\pi/4}^{\pi/2} = \ln 1 - \ln\frac{1}{\sqrt{2}} = -\ln 2^{-1/2} = \tfrac{1}{2}\cdot\ln 2\ .$$

Beispiel 5: $\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$. Mit der Substitution $u = 1 + x^2$ folgt $du = 2x\,dx$, d.h. $x\,dx = \frac{1}{2}du$, also

$x^3\,dx = x^2\cdot x\,dx = (u-1)\cdot\frac{1}{2}du$. $\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{u-1}{u}\,du = \frac{1}{2}\int_1^2 \left(1-\frac{1}{u}\right)du = \frac{1}{2}\cdot\left[u - \ln|u|\right]_1^2 = \frac{1}{2}(1-\ln 2)$.

Und eine Stammfunktion: $\int \frac{x^3}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(1 + x^2 - \ln(1+x^2)\right)$ bzw. $\int \frac{x^3}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x^2 - \ln(1+x^2)\right)$.

Zusatz: Der Integrand $\dfrac{x^3}{1+x^2}$ lässt sich durch Polynomdivision vereinfachen zu

$x^3 : (x^2+1) = x - \dfrac{x}{x^2+1}$. Und nun weiter mit der Substitution $u = 1 + x^2$

$$\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \left(x - \frac{x}{x^2+1}\right)dx = \int_{x=0}^{1} x\,dx - \frac{1}{2}\int_{u=1}^{2} \frac{1}{u}\,du = \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_{x=0}^{x=1} - \tfrac{1}{2}\left[\ln|u|\right]_{u=1}^{u=2} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\ln(2)\ .$$

Beispiel 6: $\int \frac{1-2x}{3x+2}\,dx$ für $x \neq -\frac{2}{3}$. Mit der Substitution $u = 3x + 2$ folgt $du = 3dx$ und $x = \dfrac{1}{3}u - \dfrac{2}{3}$, also

$\int \frac{1-2x}{3x+2}\,dx = \int \frac{1-2\cdot(\frac{1}{3}u-\frac{2}{3})}{u}\,\frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\int \frac{\frac{7}{3}-\frac{2}{3}u}{u}\,du = \frac{1}{9}\int \frac{7-2u}{u}\,du = \frac{1}{9}\int\left(\frac{7}{u}-2\right)du = \frac{7}{9}\ln|u| - \frac{2}{9}u =$

$\frac{7}{9}\ln|3x+2| - \frac{2}{9}(3x+2) = \frac{7}{9}\ln|3x+2| - \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$. Die $-\frac{4}{3}$ kann man auch weglassen, a nur „eine“ Stammfunktion gesucht ist.

Zusatz: Der Integrand $\dfrac{1-2x}{3x+2}$ lässt sich durch Polynomdivision vereinfachen zu

$(-2x+1) : (3x+2) = -\frac{2}{3} + \frac{7}{3}\cdot\frac{1}{3x+2}$. Und nun weiter mit der Substitution $u = 3x + 2$.

Beispiel 7: $\int \frac{3-4e^x}{1+2e^{-x}}\,dx$. Durch Erweitern des Integranden folgt $\int \frac{3-4e^x}{1+2e^{-x}}\,dx = \int \frac{(3-4e^x)\cdot e^x}{e^x+2}\,dx$. Mit der Substitution

$u = e^x + 2$ folgt $du = e^x\,dx$ und damit $\int \frac{3-4e^x}{1+2e^{-x}}\,dx = \int \frac{(3-4e^x)\cdot e^x}{e^x+2}\,dx = \int \frac{3-4(u-2)}{u}\,du = \int\left(\frac{11}{u}-4\right)du =$

$= 11\cdot\ln|u| - 4u = 11\cdot\ln\left(e^x+2\right) - 4\left(e^x+2\right)$ bzw. $\int \frac{3-4e^x}{1+2e^{-x}}\,dx = 11\cdot\ln\left(e^x+2\right) - 4e^x$.

3. Partielle Integration oder Produktintegration

Aus der Produktregel $\left(u(x)\cdot v(x)\right)' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$ folgt durch Umformung

$u'(x)\cdot v(x) = \left(u(x)\cdot v(x)\right)' - u(x)\cdot v'(x)$ und damit $\boxed{\int u'(x)\cdot v(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u(x)\cdot v'(x)\,dx}$ bzw.

$$\boxed{\int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,dx = \left[u(x)\cdot v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx}\ .$$

Eine andere Formulierung, die ich verwende, ist

$\boxed{\boxed{\int f(x)\cdot g(x)\,dx = F(x)\cdot g(x) - \int F(x)\cdot g'(x)\,dx}}$ bzw. $\boxed{\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx = \left[F(x)\cdot g(x)\right]_a^b - \int_a^b F(x)\cdot g'(x)\,dx}$.

Beispiel 1: $\int x \cdot \sin x \, dx$

1. Möglichkeit: Mit $f(x) = x$ und $g(x) = \sin x$ folgt $\int x \cdot \sin x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \cdot \sin x - \int \frac{1}{2} x^2 \cdot \cos x \, dx$.

Dies ist zwar richtig, aber nicht sinnvoll, da das gegebene Integral durch ein komplizierteres ersetzt wird.

2. Möglichkeit: Mit $f(x) = \sin x$ und $g(x) = x$ folgt.

$\int x \cdot \sin x \, dx = \int \sin x \cdot x \, dx = -\cos x \cdot x - \int (-\cos x) \, dx = -x \cdot \cos x + \sin x$ **.**

Zusatz: $\int_0^\pi x \cdot \sin x \, dx = \left[-\cos x \cdot x\right]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos x \, dx = \left[-\cos x \cdot x + \sin x\right]_0^\pi = \pi$ **.**

Beispiel 2: $\int \underset{g}{x^2} \cdot \underset{f}{\sin x} \, dx = x^2 \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) \cdot 2x \, dx = -x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \sin x - 2\int \sin x \, dx =$

$= -x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \sin x + 2\cos x$ nach zweifacher partieller Integration.

Beispiel 3: $\int \ln x \, dx = \int \underset{f}{1} \cdot \underset{g}{\ln x} \, dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \ln x - x = x \cdot (\ln x - 1)$.

Beispiel 4: $\int \cos^2 x \, dx = \int \cos x \cdot \cos x \, dx = \sin x \cdot \cos x - \int \sin x \cdot (-\sin x) \, dx = \sin x \cdot \cos x + \int \sin^2 x \, dx =$

$= \sin x \cdot \cos x + \int \left(1 - \cos^2 x\right) dx = \sin x \cdot \cos x + x - \int \cos^2 x \, dx$ **.**

Addiert man auf beiden Seiten $\int \cos^2 x \, dx$ **,** so folgt $2 \cdot \int \cos^2 x \, dx = \sin x \cdot \cos x + x$ und damit das Ergebnis $\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \cdot (x + \sin x \cdot \cos x)$.

Beispiel 5: $\int \underset{f}{e^x} \cdot \underset{g}{\sin x} \, dx = e^x \cdot \sin x - \int \underset{f}{e^x} \cdot \underset{g}{\cos x} \, dx = e^x \cdot \sin x - \left(e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot (-\sin x)\right) dx$, also

$\int e^x \cdot \sin x \, dx = e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot \sin x \, dx$, sodass $\int e^x \cdot \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^x \cdot (\sin x - \cos x)$.

Beispiel 6: $\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$ für $a > 0$. Da hier $-a \le x \le a$ vorausgesetzt wird, lässt sich $x = a \cdot \sin u$ für $-\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2}$ substituieren: Wegen $\frac{dx}{du} = a \cdot \cos u$, also $dx = a \cdot \cos u \, du$, folgt das Integral zu

$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = a \cdot \int \cos u \cdot \sqrt{a^2 - a^2 \cdot \sin^2 u} \, du = a^2 \cdot \int \cos u \cdot \sqrt{1 - \sin^2 u} \, du = a^2 \cdot \int \cos^2 u \, du$.

Wegen $-\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2}$ ist $\sqrt{1 - \sin^2 u} = |\cos u| = \cos u$ positiv.

Dieses Integral haben wir in Beispiel 4 gelöst. Und mit $x = a \cdot \sin u$, also $u = \arcsin \frac{x}{a}$, folgt

$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = a^2 \cdot \int \cos^2 u \, du = \frac{a^2}{2} \cdot (u + \sin u \cdot \cos u) = \frac{a^2}{2} \cdot \left(\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{a} \cdot \cos \arcsin \frac{x}{a}\right) =$

$\frac{a^2}{2} \cdot \left(\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{a} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\right) = \frac{a^2}{2} \cdot \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$.

<u>Übung 1:</u> Die Ableitung von $\frac{a^2}{2} \cdot \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$ ist $\sqrt{a^2 - x^2}$.

Hinweis: $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

<u>Übung 2:</u> Die Ableitung von $\frac{1}{2} x \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \cdot \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)$ ist ebenfalls $\sqrt{a^2 - x^2}$.

Hinweis: $(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}$.

Beispiel 7: $\int \sqrt{x^2 + a^2}\,dx$ für $a > 0$. Hier wird $x = a \cdot \sinh(u)$ substituiert, sodass $dx = a \cdot \cosh(u)\,du$. Nach längerer Rechnung erhält man $\int \sqrt{x^2 + a^2}\,dx = \frac{1}{2}x \cdot \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{1}{2}a^2 \cdot \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)$.

Beispiel 8: $\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx$ für $a > 0$. Hier wird $x = a \cdot \cosh(u)$ substituiert, sodass $dx = a \cdot \sinh(u)\,du$. Nach längerer Rechnung erhält man $\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx = \frac{1}{2}x \cdot \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{1}{2}a^2 \cdot \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)$.

4. Integration einer gebrochenrationalen Funktion durch Partialbruchzerlegung

Def.: Unter einer gebrochenrationalen Funktion versteht man eine Funktion der Gestalt

$$\boxed{f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}}$$

Wenn $a_n \neq 0$ und $b_m \neq 0$, dann heißt n der **Zählergrad** und m der **Nennergrad**.
Wenn $n \geq m$, dann führt man zuerst eine Polynomdivision durch, so dass der Zählergrad kleiner als der Nennergrad wird.

Beispiel 1: $f(x) = \frac{2x^3 - 3x + 2}{x^2 + x - 2}$

Polynomdivision führt auf $f(x) = \frac{2x^3-3x+2}{x^2+x-2} = 2x - 2 + \frac{3x-2}{x^2+x-2}$ d.h. wir haben $f(x)$ umgeschrieben als Summe aus einer ganzrationalen Funktion und einer echt gebrochen (Zählergrad < Nennergrad) rationalen Funktion.

Wir suchen nun die Nullstellen des Nenners und zerlegen ihn in **Linearfaktoren**:
In unserem Beispiel folgen aus dem Ansatz $x^2 + x - 2 = 0$ die beiden Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = -2$, so dass $x^2 + x - 2 = (x - x_1) \cdot (x - x_2) = (x-1) \cdot (x+2)$ in Linearfaktoren $x - x_i$ zerlegt werden kann.
Nach dem Satz von der Partialbruchzerlegung lässt sich der echt gebrochene Anteil von $f(x)$ schreiben in der Form: $\frac{3x-2}{x^2+x-2} = \frac{3x-2}{(x-1)\cdot(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$.
Man bringt die Summe der Partialbrüche auf den Hauptnenner: $\frac{3x-2}{x^2+x-2} = \frac{3x-2}{(x-1)\cdot(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A\cdot(x+2)+B\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x+2)}$.
Dann muss $3x - 2 = A \cdot (x+2) + B \cdot (x-1)$ **für alle** $x \in \mathbb{R}$ gelten.
Zur Bestimmung von A und B werden zwei Wege vorgeschlagen:

1. Weg: Koeffizientenvergleich: $3x - 2 = A \cdot (x+2) + B \cdot (x-1) = (A+B) \cdot x + (2A - B)$, so dass $A + B = 3$ und $2A - B = -2$. Durch Addition beider Gleichungen folgt $A = \frac{1}{3}$. Und durch Einsetzen $B = \frac{8}{3}$.

2. Weg: Man setzt in $3x - 2 = A \cdot (x+2) + B \cdot (x-1)$ einmal $x = 1$ und einmal $x = -2$, dann folgt ebenfalls $A = \frac{1}{3}$ und $B = \frac{8}{3}$.

Dann wird $f(x) = \frac{2x^3-3x+2}{x^2+x-2} = 2x - 2 + \frac{3x-2}{x^2+x-2} = 2x - 2 + \frac{1}{3(x-1)} + \frac{8}{3(x+2)}$ und somit das Integral $\int \frac{3x-2}{x^2+x-2}\,dx = x^2 - 2x + \frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{8}{3}\ln|x+2|$.

Beispiel 2: $f(x) = \frac{x^4 - 8x^2 - 4x + 13}{x^3 + x^2 - 8x - 12}$

Polynomdivision führt auf $f(x) = x - 1 + \frac{x^2+1}{x^3+x^2-8x-12}$.

Zu den Nullstellen des Nenners: $x^3 + x^2 - 8x - 12 = 0$ hat eine Lösung $x_1 = 3$, durch Probieren gefunden.
Durch Polynomdivision folgt $x^3 + x^2 - 8x - 12 = (x-3) \cdot (x^2 + 4x + 4)$.

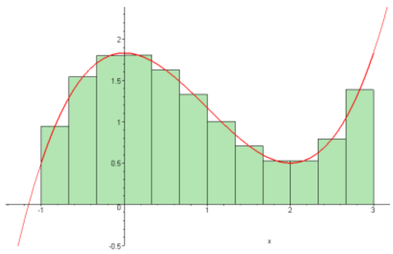
$x^2+4x+4=0$ hat die doppelte Lösung $x_2=x_3=-2$.
Die Linearfaktorzerlegung des Nenners lautet dann $x^3+x^2-8x-12=(x-3)\cdot(x+2)^2$.
Nach dem Satz von der Partialbruchzerlegung lässt sich der echt gebrochene Anteil von $f(x)$ schreiben in der Form: $\frac{x^2+1}{x^3+x^2-8x-12}=\frac{x^2+1}{(x-3)\cdot(x+2)^2}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}$.

Man bringt nun die Partialbrüche auf den Hauptnenner:
$\frac{x^2+1}{(x-3)\cdot(x+2)^2}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}=\frac{A\cdot(x+2)^2+B\cdot(x-3)\cdot(x+2)+C\cdot(x-3)}{(x-3)\cdot(x+2)^2}$.
Dann muss $x^2+1=A\cdot(x+2)^2+B\cdot(x-3)\cdot(x+2)+C\cdot(x-3)$ für alle $x\in\mathbb{R}$ gelten.
Mit $x=-2$ folgt $C=-1$. Mit $x=3$ folgt $A=\frac{2}{5}=0,4$. Mit z.B. $x=0$ folgt $B=\frac{3}{5}=0,6$.
Und damit folgt $f(x)=x-1+\frac{x^2+1}{x^3+x^2-8x-12}=x-1+\frac{2}{5(x-3)}+\frac{3}{5(x+2)}-\frac{1}{(x+2)^2}$, so dass
$\int f(x)\,dx=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{2}{5}\ln|x-3|+\frac{3}{5}\ln|x+2|+\frac{1}{x+2}$.

Beispiel 3: $f(x)=\frac{3x-1}{x^2+2x+10}$. Die Nullstellen des Nenners sind $x_{1/2}=-1\pm\sqrt{-9}$, also komplex.
Zuerst muss $f(x)$ so umgeformt werden, dass ein Bruch entsteht, bei dem der Zähler die Ableitung des gegebenen Nenners ist. Denn dann kann substituiert werden. $f(x)=\frac{3x-1}{x^2+2x+10}=\frac{3}{2}\cdot\frac{2x-\frac{2}{3}}{x^2+2x+10}=\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{2x+2}{x^2+2x+10}-\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{x^2+2x+10}\right)$.
Zum 1. Integral: Mit der Substitution $u=x^2+2x+10$ folgt $\int\frac{2x+2}{x^2+2x+10}dx=\int\frac{1}{u}du=\ln(|u|)=\ln\left(|x^2+2x+10|\right)$
Zum 2. Integral: Durch quadratische Ergänzung folgt $\int\frac{1}{x^2+2x+10}dx=\int\frac{1}{(x+1)^2+9}dx$. Die Substitution $x+1=3v$ führt auf $\int\frac{1}{x^2+2x+10}dx=\int\frac{1}{(x+1)^2+9}dx=3\int\frac{1}{9v^2+9}dv=\frac{1}{3}\int\frac{1}{v^2+1}dv=\frac{1}{3}\cdot\arctan(v)=\frac{1}{3}\arctan(\frac{x+1}{3})$.
Insgesamt folgt $\int\frac{3x-1}{x^2+2x+10}dx=\frac{3}{2}\cdot\int\frac{2x+2}{x^2+2x+10}dx-4\cdot\int\frac{1}{x^2+2x+10}dx=\frac{3}{2}\cdot\ln\left(|x^2+2x+10|\right)-\frac{4}{3}\cdot\arctan(\frac{x+1}{3})$.

5. Näherungsweise Berechnung von Integralen

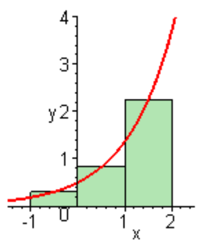
a. Berechnung mit Hilfe von Rechtecksummen



Um das Integral $I=\int_a^b f(x)\,dx$ näherungsweise zu bestimmen, wir das Intervall $[a,b]$ in n, $n\in\mathbb{N}$, gleiche Teilintervalle der Breite $h=\frac{b-a}{n}$ aufgeteilt. Auf ihnen werden Rechtecke gebildet, deren Höhe gleich $f(\text{Intervallmitte})$ ist. Dann wird

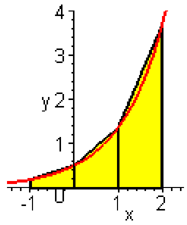
$$I\approx f(a+\tfrac{h}{2})\cdot h+f(a+h+\tfrac{h}{2})\cdot h+f(a+2\cdot h+\tfrac{h}{2})\cdot h+f(a+3\cdot h+\tfrac{h}{2})\cdot h+\ldots+f(a+(n-1)\cdot h+\tfrac{h}{2})\cdot h=h\cdot\sum_{i=0}^{n-1}f(a+i\cdot h+\tfrac{h}{2})$$

also $\boxed{I\approx h\cdot\sum_{i=0}^{n-1}f(a+\frac{2i+1}{2}\cdot h)\quad\text{mit}\quad h=\frac{b-a}{n}}$.



Beispiel: $\int_{-1}^{2}\frac{1}{2}e^x\,dx$. Der exakte Wert ist $\left[\frac{1}{2}e^x\right]_{-1}^{2}\approx 3,5105883288$.
Für n = 3 ist $h=1$, also $I\approx\frac{1}{2}\left(e^{-0,5}+e^{0,5}+e^{1,5}\right)\approx 3,36847$.
Für n = 30 ist $h=0,1$, also $I\approx 0,1\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(e^{-0,95}+e^{-0,85}+e^{-0,75}+\ldots+e^{1,95}\right)\approx 3,509126$.
Für n = 300 ist $h=0,01$, also $I\approx 0,01\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(e^{-0,995}+e^{-0,985}+e^{-0,975}+\ldots+e^{-1,995}\right)\approx 3,5105737$.
Je größer die Anzahl der Teilintervalle gewählt wird, desto genauer ist der erhaltene Wert.

b. Berechnung mit Hilfe von Trapezsummen



Das Integrationsintervall $[a,b]$ wird wieder in n gleiche Teile der Breite $h=\frac{b-a}{n}$ aufgeteilt. Verbindet man die Kurvenpunkte benachbarter Intervallgrenzen, so entstehen Trapeze. Die Summe ihrer Flächeninhalte ist ein Näherungswert für das gesuchte Integral $I=\int_a^b f(x)\,dx$.

Beispiel: $\int_{-1}^{2}\frac{1}{2}e^x\,dx$. Der exakte Wert ist $\left[\frac{1}{2}e^x\right]_{-1}^{2}\approx 3{,}5105883288$.

Für n = 3 ist $h=1$, also $I\approx 1\cdot\left(\frac{f(-1)+f(0)}{2}+\frac{f(0)+f(1)}{2}+\frac{f(1)+f(2)}{2}\right)=1\cdot\left(\frac{f(-1)}{2}+f(0)+f(1)+\frac{f(2)}{2}\right)\approx 3{,}798$.

Für beliebiges n gilt: $I\approx h\cdot\left(\frac{f(a)+f(a+h)}{2}+\frac{f(a+h)+f(a+2h)}{2}+\frac{f(a+2h)+f(a+3h)}{2}+\ldots+\frac{f(a+(n-1)\cdot h)+f(a+n\cdot h)}{2}\right)$.

Wegen $a+n\cdot h=b$ gilt: $I\approx h\cdot\left(\frac{f(a)}{2}+f(a+h)+f(a+2h)+\ldots+f(a+(n-1)\cdot h)+\frac{f(b)}{2}\right)$, also

$$\boxed{I\approx h\cdot\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}f(a+i\cdot h)\right)\quad\text{mit}\quad h=\frac{b-a}{n}}.$$

Für n = 30 ist $I\approx\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{f(-1)+f(2)}{2}+f(-0{,}9)+f(-0{,}8)+\ldots+f(1{,}9)\right)\approx 3{,}5135133$

Für n = 300 ist $I\approx\frac{1}{100}\cdot\left(\frac{f(-1)+f(2)}{2}+f(-0{,}99)+f(-0{,}98)+\ldots+f(1{,}99)\right)\approx 3{,}51061758$.

Trotz der großen Zahl von Intervallen ist die Genauigkeit nicht zufriedenstellend.

c. Berechnung mit Hilfe der Simpsonschen Regel

Das Integrationsintervall $[a,b]$ wird wieder in gleich breite Teilintervalle aufgeteilt.

Bei der Trapezsumme werden die Kurvenpunkte benachbarter Intervallgrenzen durch Strecken verbunden und die Trapezinhalte addiert.

Bei der Simpsonschen Regel (Thomas Simpson, engl, Mathematiker, 1710 – 1761) werden dagegen diese Kurvenpunkte benachbarter Intervallgrenzen jeweils durch einen Parabelbogen $p(x)=r\cdot x^2+s\cdot x+t$ ersetzt, der durch die drei Kurvenpunkte $(x_i/f(x_i))$, $\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}/f(\frac{x_i+x_{i+1}}{2})\right)$ und $(x_{i+1}/f(x_{i+1}))$ geht.

Zur Abkürzung nennen wir die drei Kurvenpunkte (u/F), $\left(\frac{u+v}{2}/G\right)$ und (v/H). Dann folgt für die gesuchte Parabel $p(x)=\frac{2(F-2G+H)}{(u-v)^2}x^2-\frac{(F-4G+3H)\cdot u+(3F-4G+H)\cdot v}{(u-v)^2}x+\frac{(F-4G+H)\cdot uv+v^2\cdot F+u^2\cdot H}{(u-v)^2}$. Und das Integral folgt nach einiger Rechnung zu $\int_u^v p(x)\,dx=(F+4\cdot G+H)\cdot\frac{v-u}{6}=\left(f(u)+4\cdot f(\frac{u+v}{2})+f(v)\right)\cdot\frac{v-u}{6}$.

Man zerlegt nun das Integrationsintervall $[a,b]$ in eine gerade Anzahl von Teilintervallen. Es ist günstig, diese Anzahl $2n$ mit $n\in\mathbb{N}$ zu nennen. Die Breite eines Teilintervalls beträgt dann $h=\frac{b-a}{2n}$. Obige Formel wird nun auf das 1. und 2., das 3. und 4., ... , das (2n-1)-te und das (2n)-te Teilintervall angewandt. Dann folgt:

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\left(f(a)+4\cdot f(a+h)+f(a+2h)\right)\cdot\frac{2h}{6}+\left(f(a+2h)+4\cdot f(a+3h)+f(a+4h)\right)\cdot\frac{2h}{6}+$$

$$+\left(f(a+4h)+4\cdot f(a+5h)+f(a+6h)\right)\cdot\frac{2h}{6}+\ldots+\left(f(a+(2n-2)h)+4\cdot f(a+(2n-1)h)+f(b)\right)\cdot\frac{2h}{6}.$$ Also

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\left[\begin{array}{l}f(a)+f(b)+4\cdot\left(f(a+h)+f(a+3h)+f(a+5h)+\ldots+f(a+(2n-1)h)\right)+\\ \qquad+2\cdot\left(f(a+2h)+f(a+4h)+f(a+6h)+\ldots+f(a+(2n-2)h)\right)\end{array}\right]\cdot\frac{h}{3}.$$ Zusammengefasst:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{h}{3}\cdot\left[f(a)+f(b)+4\cdot\sum_{i=1}^{n}f(a+(2i-1)\cdot h)+2\cdot\sum_{i=1}^{n-1}f(a+2i\cdot h)\right]\quad\text{mit}\quad h=\frac{b-a}{2n}}.$$

Beispiel: $\int_{-1}^{2} \frac{1}{2} e^x \, dx$. Der exakte Wert ist $\left[\frac{1}{2} e^x\right]_{-1}^{2} \approx 3{,}51058832887960395281745184521$.

Für n = 4 ist $h = \frac{3}{8}$. Man erhält ein schon recht gutes Ergebnis

$$I \approx \frac{1}{8} \cdot \left[\begin{array}{l} f(-1) + f(2) + 4 \cdot \left(f(-1+\frac{3}{8}) + f(-1+3\cdot\frac{3}{8}) + f(-1+5\cdot\frac{3}{8}) + f(-1+7\cdot\frac{3}{8}) \right) + \\ + 2 \cdot \left(f(-1+2\cdot\frac{3}{8}) + f(-1+4\cdot\frac{3}{8}) + f(-1+6\cdot\frac{3}{8}) \right) \end{array} \right] \approx 3{,}510967 .$$

Für n = 40 erhält man $I \approx 3{,}51058836744$
Für n = 400 erhält man $I \approx 3{,}510588328883460$
Für n = 4000 erhält man $I \approx 3{,}5105883288796043385$.

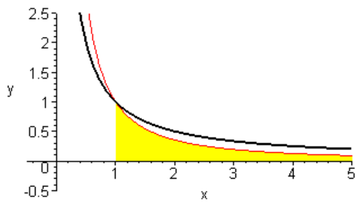
6. Uneigentliche Integrale

Ein Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ heißt uneigentliches Integral, falls a oder b = $\pm\infty$ oder f an der Stelle a oder b eine Polstelle (Unendlichkeitsstelle) besitzt.

Beispiel 1: Was ist $\int_1^{\infty} x^r \, dx$, $r \in \mathbb{R}$? Wir betrachten $\int_1^u x^r \, dx = \begin{cases} \frac{1}{r+1}\left[x^{r+1}\right]_1^u = \frac{1}{r+1}\left(u^{r+1} - 1\right) & \text{für } r \neq -1 \\ \left[\ln|x|\right]_1^u = \ln|u| & \text{für } r = -1 \end{cases}$

für $u > 0$. Der Grenzwert für $u \to \infty$ existiert nur dann, wenn $r+1 < 0$, d.h. $r < -1$ ist. Denn dann strebt $u^{r+1} \to 0$ und es gilt $\int_1^{\infty} x^r \, dx = -\frac{1}{r+1}$ für $r < -1$.

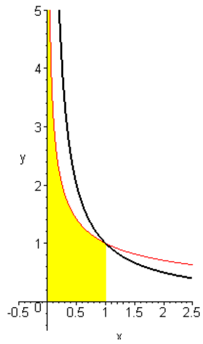
Das Diagramm zeigt die Schaubilder $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ und $y = x^{-1{,}5} = \frac{1}{x^{1{,}5}}$.
Die ins Unendliche reichende Fläche unter $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ existiert nicht, während sich für $y = x^{-1{,}5} = \frac{1}{x^{1{,}5}}$ der Grenzwert 2 ergibt.



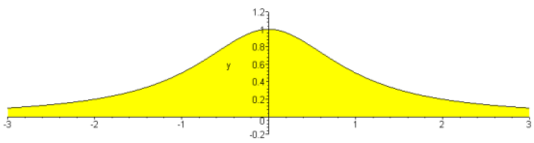
Beispiel 2: Was ist $\int_0^1 x^r \, dx$, $r \in \mathbb{R}$? Wir betrachten

$\int_u^1 x^r \, dx = \begin{cases} \frac{1}{r+1}\left[x^{r+1}\right]_u^1 = \frac{1}{r+1}\left(1 - u^{r+1}\right) & \text{für } r \neq -1 \\ \left[\ln|x|\right]_u^1 = -\ln|u| & \text{für } r = -1 \end{cases}$ für $u > 0$. Der Grenzwert für $u \to 0$ existiert nur dann, wenn $r+1 > 0$, d.h. $r > -1$ ist. Denn dann strebt $u^{r+1} \to 0$ und es gilt $\int_0^1 x^r \, dx = \frac{1}{r+1}$ für $r > -1$.

Das Diagramm zeigt die Schaubilder $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ und $y = x^{-0{,}5} = \frac{1}{\sqrt{x}}$.
Die ins Unendliche reichende Fläche unter der ersten Kurve existiert nicht, während sich für die zweite Kurve ($r = -0{,}5$) der Grenzwert 2 ergibt.



Beispiel 3: Was ist $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \, dx$?



Wegen der Achsensymmetrie des Schaubildes genügt es, $A(u) = \int_0^u \frac{1}{1+x^2} \, dx$ zu bestimmen.

Es ist $A(u)=\int\limits_0^u \frac{1}{1+x^2}\,dx=\left[\arctan x\right]_0^u=\arctan u$. Wegen $\lim\limits_{u\to\infty}\arctan u=\frac{\pi}{2}$ folgt $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx=\pi$.

Beispiel 4: Die Gammafunktion in der Form nach Euler ist definiert durch $\boxed{\Gamma(x)=\int\limits_0^{\infty}e^{-t}\cdot t^{x-1}\,dt}$.

Zum Beispiel

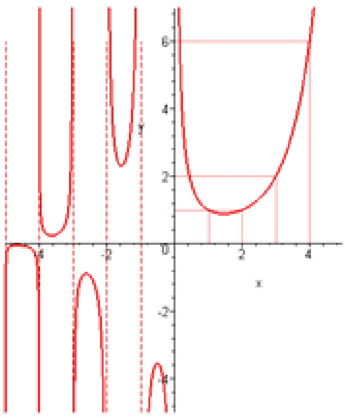
$\Gamma(1)=\int\limits_0^{\infty}e^{-t}\cdot t^0\,dt=\left[-e^{-t}\right]_0^{\infty}=0-(-1)=1$. $\boxed{\Gamma(1)=1}$

Interessant ist die Funktionalgleichung der Gammafunktion: Durch partielle Integration folgt

$$\Gamma(x+1)=\int\limits_0^{\infty}e^{-t}\cdot t^x\,dt=\left[-e^{-t}\cdot t^x\right]_{t=0}^{t=\infty}-\int\limits_0^{\infty}-e^{-t}\cdot x\cdot t^{x-1}\,dt$$

Für $x>0$ folgt für die eckige Klammer $\left[-e^{-t}\cdot t^x\right]_{t=0}^{t=\infty}=\lim\limits_{t\to\infty}\left(-e^{-t}\cdot t^x\right)-\left(-e^0\cdot 0^x\right)=0-0=0$. Damit wird

$\Gamma(x+1)=x\cdot\int\limits_0^{\infty}e^{-t}\cdot t^{x-1}\,dt=x\cdot\Gamma(x)$. $\boxed{\Gamma(x+1)=x\cdot\Gamma(x)}$



Damit folgt $\Gamma(2)=1\cdot\Gamma(1)=1$, $\Gamma(3)=2\cdot\Gamma(2)=2$, $\Gamma(4)=3\cdot\Gamma(3)=3\cdot 2=3!$, $\Gamma(5)=4\cdot\Gamma(4)=4\cdot 3!=4!$, usw,

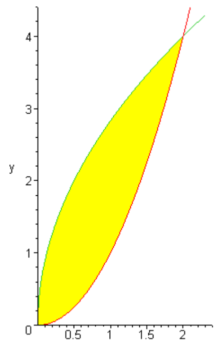
Durch vollständige Induktion folgt $\boxed{\Gamma(n+1)=n!\ \text{ für } n=0,1,2,\ldots}$

Man sieht, dass die Funktion $\Gamma(x+1)$ die Fakultäten interpoliert.
Im Jahre 1812 veröffentlichte CAROLO FRIDERICO GAVSS (Carl Friedrich Gauß 1777-1855) die Produktdarstellung

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot n^x}{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+n)}.$$

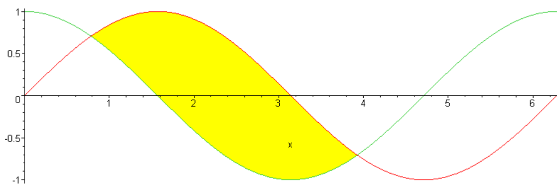
Die Gammafunktion ist auch für negative reelle Zahlen außer für $x=0,-1,-2,\ldots$ definiert, wo sie Polstellen besitzt; siehe Schaubild.

7. Flächeninhalt zwischen zwei Kurven



Beispiel 1: Gesucht ist die von $y=x^2$ und $y=\sqrt{8x}$ eingeschlossene Fläche; siehe Skizze.
Die beiden Schnittstellen folgen aus dem Ansatz $x^2=\sqrt{8x}$ und sind $x_1=0$ und $x_2=2$.

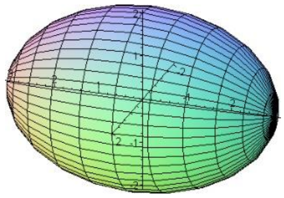
$$A=\int\limits_0^2\left(\sqrt{8x}-x^2\right)dx=\left[\tfrac{1}{12}(8x)^{3/2}-\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^2=\tfrac{1}{12}\cdot 64-\tfrac{1}{3}\cdot 8=\tfrac{8}{3}.$$



Beispiel 2: Gesucht ist die von $y=\sin x$ und $y=\cos x$ eingeschlossene Fläche; siehe Skizze.
Die Schnittstellen folgen aus der Gleichung $\sin x=\cos x$.
Nach Division durch $\cos x$ folgt $\tan x=1$ mit den beiden Lösungen $x_1=\pi/4$ und $x_2=5\pi/4$.

$$A=\int\limits_{\pi/4}^{5\pi/4}(\sin x-\cos x)\,dx=\left[-\cos x-\sin x\right]_{\pi/4}^{5\pi/4}=\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)-\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}.$$

8. Rotationsvolumen eines Drehkörpers bei Rotation um die x-Achse



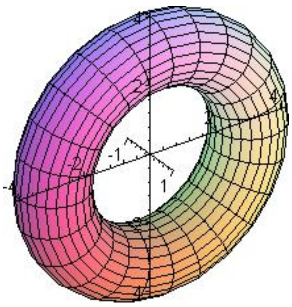
Beispiel 1: Die Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ mit der großen Halbachse a und der kleinen Halbachse b rotiert um die x-Achse.
Die Formel zur Berechnung des Rotationsvolumens lautet

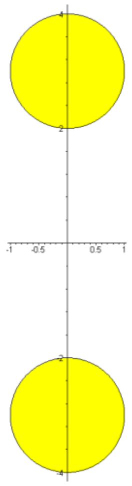
$$\boxed{V_x=\pi\cdot\int_{x_1}^{x_2}(f(x))^2\,dx=\pi\cdot\int_{x_1}^{x_2}f^2(x)\,dx \quad \text{mit } x_1<x_2}\ .$$

Diese Formel entsteht aus der Summe der kleinen Volumina $\pi\cdot r^2\cdot\Delta x=\pi\cdot f^2(x)\cdot\Delta x$ der ‚Salami-Rädchen'.
In unserem Beispiel ist $f^2(x)=y^2=b^2\cdot\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$. Dann folgt

$$V_x=\pi\cdot b^2\cdot\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi\cdot b^2\cdot\left[x-\frac{x^3}{3a^2}\right]_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

Im Spezialfall der Kugel ist $a=b=r$, so dass $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ folgt.





Beispiel 2: Der Torus: Er hat die Form eines Autoreifens. In den beiden Skizzen beträgt der große Radius $R=3$ und der kleine Radius $r=1$.
Um das Volumen zu berechnen, lässt man den Kreis mit Mittelpunkt $[0/R]$ und Radius r um die x-Achse rotieren. Die Kreisgleichung lautet $x^2+(y-R)^2=r^2$.

Oberer Halbkreis: $y_o=R+\sqrt{r^2-x^2}$,

Unterer Halbkreis: $y_u=R-\sqrt{r^2-x^2}$.

$$V=\pi\int_{-r}^{r}\left(y_o^2-y_u^2\right)dx=\pi\int_{-r}^{r}\left(4R\cdot\sqrt{r^2-x^2}\right)dx=4\pi R\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx\ .$$

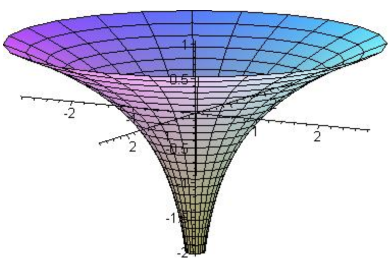
Das Integral stellt die Halbkreisfläche dar und beträgt $\frac{1}{2}\pi\cdot r^2$. Damit wird das Torusvolumen $V=2\pi^2Rr^2$.

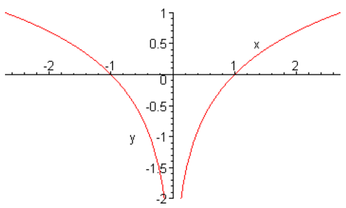
In Beispiel 5 der partiellen Integration haben wir das Integral gelöst:

$$\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\left[\frac{r^2}{2}\cdot\arcsin\frac{x}{r}+\frac{x}{2}\cdot\sqrt{r^2-x^2}\right]_{-r}^{r}=\frac{r^2}{2}\arcsin 1-\frac{r^2}{2}\arcsin(-1)=\frac{r^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{r^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}\pi\cdot r^2.$$

9. Rotationsvolumen eines Drehkörpers bei Rotation um die y-Achse

Beispiel 1: Das Schaubild $y=\ln x$ rotiert um die y-Achse.





Die Formeln zur Berechnung des Rotationsvolumens lauten

$$\boxed{V_y=\pi\cdot\int_{y_1}^{y_2}x^2\,dy=\pi\cdot\int_{x_1}^{x_2}x^2\cdot f'(x)\,dx \quad \text{mit } y_1<y_2,\ f(x_1)=y_1,\ f(x_2)=y_2}$$

Diese Formeln entstehen aus der Summe der kleinen Volumina $\pi\cdot x^2\cdot\Delta y=\pi\cdot x^2\cdot f'(x)\cdot\Delta x$ der horizontalen ‚Salami-Rädchen'.
Im Beispiel sei $y=\ln x$, $y_1=-2$ und $y_2=1$, also $x=e^y$.

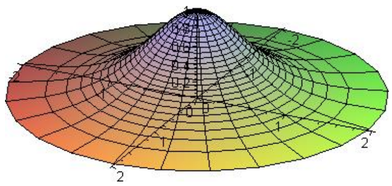
1. Weg: $V_y = \pi \int_{-2}^{1} \left(e^y\right)^2 dy = \pi \int_{-2}^{1} e^{2y} \, dy = \frac{\pi}{2}\left[e^{2y}\right]_{-2}^{1} = \frac{\pi}{2}\left(e^2 - e^{-4}\right).$

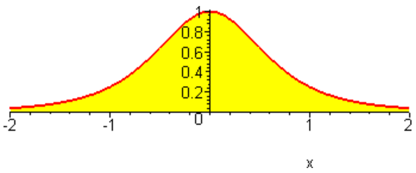
2. Weg: Es ist $y_1 = -2 = \ln x_1$ und $y_2 = 1 = \ln x_2$, also $x_1 = e^{-2}$ und $x_2 = e$. Außerdem ist $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Dann folgt $V_y = \pi \int_{e^{-2}}^{e} x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = \pi \int_{e^{-2}}^{e} x \, dx = \frac{\pi}{2}\left[x^2\right]_{e^{-2}}^{e} = \frac{\pi}{2}\left(e^2 - e^{-4}\right).$

Beispiel 2: Das Schaubild $y = \frac{1}{(1+x^2)^2}$ rotiert um die y-Achse.

Dann gilt $x^2 = \frac{1}{\sqrt{y}} - 1$.





1. Weg: $V_y = \pi \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{y}} - 1\right) dy = \pi\left[2\sqrt{y} - y\right]_0^1 = \pi$.

2. Weg: Es ist $x_1 = \infty$, $x_2 = 0$ und $f'(x) = -\frac{4x}{(1+x^2)^3}$. Dann gilt $V_y = -4\pi \int_{\infty}^{0} \frac{x^3}{(1+x^2)^3} dx$. Mit der Substitution $u = 1 + x^2$ folgt $du = 2x\,dx$, also $\frac{x^3}{(1+x^2)^3} dx = \frac{x^2}{(1+x^2)^3} x\,dx = \frac{u-1}{u^3} \frac{1}{2} du$. Und damit folgt

$$V_y = -4\pi \int_{\infty}^{1} \frac{u-1}{u^3} \frac{1}{2} du = 2\pi \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^3}\right) du = 2\pi\left[-\frac{1}{u} + \frac{1}{2u^2}\right]_1^{\infty} = 2\pi\left(0 - (-1 + \tfrac{1}{2})\right) = \pi.$$

10. Die Bogenlänge s einer ebenen Kurve

Die Bogenlänge (Länge) s einer ebenen Kurve wird durch die Summe $\sum_i \Delta s_i$ kleiner Strecken Δs_i approximiert. Nach Pythagoras lässt sich Δs_i berechnen zu $\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$, wobei Δx_i und Δy_i die Komponenten von Δs_i parallel zu den Koordinatenachsen sind.

Durch Umformung erhält man $\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 \cdot \left(1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2\right)} = \Delta x_i \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}$.

Und damit folgt die Bogenlänge s zu $\boxed{s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} \, dx}$.

Zusatz: Falls die Kurve in Parameterform $\left(x(t) / y(t)\right)$ gegeben ist, folgt

$$\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{(\Delta t)^2 \cdot \left(\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta t}\right)^2\right)} = \Delta t \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta t}\right)^2},$$

und damit $\boxed{s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\dot{x}(t)\right)^2 + \left(\dot{y}(t)\right)^2} \, dt}$.

Beispiel 1: Umfang des Kreises vom Radius r.

1. Weg: Die Kreisgleichung lautet $x^2 + y^2 = r^2$. Der obere Kreisbogen hat dann die Gleichung $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Mit $y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ folgt $s = \int_{-r}^{r} \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} \, dx = \int_{-r}^{r} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} \, dx = \int_{-r}^{r} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx$.

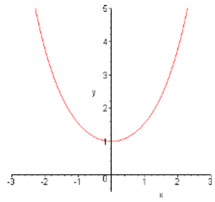
Da $-r \le x \le r$, kann man $x = r \cdot \sin u$ mit $-\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2}$ substituieren. Es folgt $dx = r \cdot \cos u \, du$ und $\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2 - r^2 \cdot \sin^2 u} = r \cdot \sqrt{1 - \sin^2 u} = r \cdot \cos u$, da $\cos u \ge 0$ im Bereich $-\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2}$. Dann wird

$$s=\int_{-r}^{r}\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{r^2\cdot\cos u}{r\cdot\cos u}\,du=r\cdot[u]_{-\pi/2}^{\pi/2}=r\cdot\pi,$$ und damit der Kreisumfang $U=2\pi r$.

2. Weg: Die Parameterform des Kreises lautet $x=r\cdot\cos t$, $y=r\cdot\sin t$ mit $0\le t\le 2\pi$.

Wegen $\dot{x}(t)=-r\cdot\sin t$ und $\dot{y}(t)=r\cdot\cos t$ ist $\sqrt{\left(\dot{x}(t)\right)^2+\left(\dot{y}(t)\right)^2}=\sqrt{r^2\cdot\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)}=r$ und damit

$$U=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\dot{x}(t)\right)^2+\left(\dot{y}(t)\right)^2}\,dt=\int_0^{2\pi}r\,dt=r\cdot[t]_0^{2\pi}=2\pi r.$$



Beispiel 2: Es ist $\cosh x=\frac{1}{2}\cdot\left(e^x+e^{-x}\right)$. Gesucht ist die Bogenlänge im Bereich $0\le x\le a$.

Es ist $\cosh' x=\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)=\sinh x$ und damit

$$\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}=\sqrt{1+\tfrac{1}{4}\left(e^x-e^{-x}\right)^2}=\sqrt{\tfrac{1}{4}\left(e^x+e^{-x}\right)^2}=\cosh x.$$

Es folgt $s=\int_0^a\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx=\int_0^a\cosh x\,dx=[\sinh x]_0^a=\sinh a-\sinh 0=\sinh a$.

11. Die Mantelfläche M eines Rotationskörpers

Der Rotationskörper wird in kleine Scheiben (Kegelstümpfe) senkrecht zur Rotationsachse zerlegt. Die Mantelfläche M des Rotationskörpers wird dann durch die Summe $\sum_i \Delta M_i$ approximiert, wobei ΔM_i der Mantel der kleinen Kegelstümpfe bedeutet. In der Schule wird die Formel für den Mantel des Kegelstumpfs hergeleitet: $M=\pi\cdot(r_1+r_2)\cdot s$, wobei r_1 und r_2 die Radien der beiden Begrenzungskreise sind und s die seitliche Mantellinie bedeutet. Somit gilt $\sum_i \Delta M_i=\sum_i \pi\cdot\Delta s_i\cdot(r_{1i}+r_{2i})$.

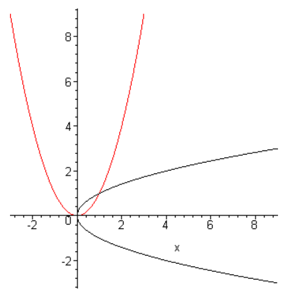
Herleitung der Formel für die Rotation um die x-Achse:

Wie bei der Bogenlänge gilt $\Delta s_i=\sqrt{(\Delta x_i)^2+(\Delta y_i)^2}=\sqrt{(\Delta x_i)^2\cdot\left(1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2\right)}=\Delta x_i\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}$. Beim Grenzübergang $\Delta s_i\to 0$ strebt die Summe $r_{1i}+r_{2i}\to 2f(x_i)$, so dass man erhält $\boxed{M_x=2\pi\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx}$.

Die Formel für die Mantelfläche bei Rotation um die y-Achse erhält man durch Vertauschen von x und y: $\boxed{M_y=2\pi\int_c^d x\cdot\sqrt{1+\left(x'(y)\right)^2}\,dy}$. Dabei muss die Funktionsgleichung $y=f(x)$ nach $\boxed{x=g(y)}$ aufgelöst werden und es gilt $\boxed{f(a)=c,\ f(b)=d\quad\text{mit}\quad a<b}$.

Beispiel 1: Das Schaubild von $f(x)=\sqrt{x}$ rotiert für $0\le x\le 9$ um die x-Achse. Die Mantelfläche wird dann

$$M_x=2\pi\int_0^9 f(x)\cdot\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx=2\pi\int_0^9\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\left(\tfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,dx=2\pi\int_0^9\sqrt{x+\tfrac{1}{4}}\,dx=2\pi\left[\tfrac{2}{3}\left(x+\tfrac{1}{4}\right)^{3/2}\right]_0^9=\pi\frac{37\cdot\sqrt{37}-1}{6}\approx$$
$\approx 117{,}3187007$.



Beispiel 2: Das Schaubild von $y=f(x)=x^2$ rotiert für $0\le x\le 3$ um die y-Achse. Dann gilt in diesem Bereich $x=\sqrt{y}$. Die Mantelfläche wird dann

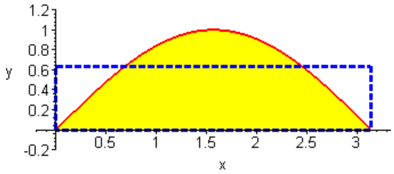
$$M_y=2\pi\int_0^3 x\cdot\sqrt{1+\left(x'(y)\right)^2}\,dy=2\pi\int_0^9\sqrt{y}\cdot\sqrt{1+\left(\tfrac{1}{2\sqrt{y}}\right)^2}\,dy$$ wie oben.

12. Der Mittelwert einer Funktion

Unter dem Mittelwert $\bar{f}$ einer Funktion f im Intervall [a/b] versteht man den Wert $\boxed{\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}$.

Beispiel 1 und Interpretation: Gesucht ist der Mittelwert von $\sin x$ im Intervall $[0/\pi]$.

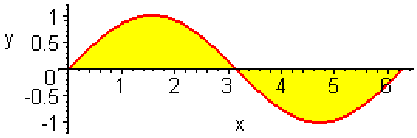
Die Definitionsgleichung besagt, dass $\bar{f}\cdot(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$, d.h. dass das Rechteck mit den Seitenlängen $\bar{f}$ und $b-a$ den gleichen Flächeninhalt besitzt wie die durch $\int_a^b f(x)\,dx$ beschriebene Fläche.



Im Beispiel ist $\bar{f} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-\cos x\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi} \approx 0,6366197722$.

Beispiel 2: : Gesucht ist der Mittelwert von $\sin x$ im Intervall $[0/2\pi]$.

$\bar{f} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[-\cos x\right]_0^{2\pi} = 0$.



13. Der Schwerpunkt einer Fläche zwischen einer Kurve und der x-Achse

Die Herleitung der folgenden Formeln findet sich z.B. in Lothar Papula, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 1.

Für den Schwerpunkt $S(x_S / y_S)$ der Fläche zwischen dem Schaubild von f im Intervall $[a/b]$ und der x-Achse gilt:

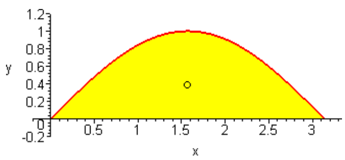
$$\boxed{x_S = \frac{1}{A}\int_a^b x\cdot f(x)\,dx,\quad y_S = \frac{1}{2A}\int_a^b f^2(x)\,dx \quad \text{mit } A = \int_a^b f(x)\,dx} .$$

Beispiel 1: Gesucht ist der Schwerpunkt S zu $\sin x$ im Intervall $[0/\pi]$.

Es ist $A = \int_0^\pi \sin x\,dx = 2$. Durch partielle Integration erhält man jeweils:

$x_S = \frac{1}{2}\int_0^\pi x\cdot\sin x\,dx = \frac{1}{2}\left[-x\cdot\cos x + \sin x\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$ und

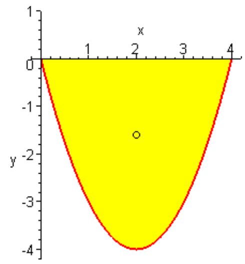
$y_S = \frac{1}{4}\int_0^\pi (\sin x)^2\,dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\left[x - \sin x\cdot\cos x\right]_0^\pi = \frac{\pi}{8}$.



Beispiel 2: Gesucht ist der Schwerpunkt S der Parabel $y = x^2 - 4x$ im Intervall $[0/4]$.

Es ist $A = \int_0^\pi (x^2-4x)\,dx = -\frac{32}{3}$, $x_S = \frac{1}{A}\int_0^\pi x\cdot(x^2-4x)\,dx = 2$ und

$y_S = \frac{1}{2A}\int_0^\pi (x^2-4x)^2\,dx = -1,6$.



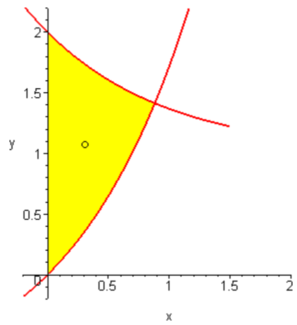
14. Der Schwerpunkt einer Fläche zwischen zwei Kurven

Die Formeln zur Bestimmung des Schwerpunktes $S(x_S / y_S)$ folgen durch Differenzbildung aus den obigen Formeln. f_o bezeichne die obere Funktion, f_u die untere Funktion, so dass $f_u(x) \le f_o(x)$ für alle $x \in [a/b]$ gilt.

$$\boxed{\begin{array}{l} x_S = \dfrac{1}{A}\displaystyle\int_a^b x\cdot\big(f_o(x)-f_u(x)\big)\,dx, \quad y_S = \dfrac{1}{2A}\displaystyle\int_a^b \big(f_o{}^2(x)-f_u{}^2(x)\big)\,dx \\ \text{mit } A = \displaystyle\int_a^b \big(f_o(x)-f_u(x)\big)\,dx \text{ und } f_u(x) \le f_o(x) \text{ für alle } x \in [a/b] \end{array}}\ .$$

Beispiel: Die Schaubilder der beiden Funktionen $f_u(x) = e^x - 1$ und $f_o(x) = e^{-x} + 1$ begrenzen zusammen mit der y-Achse eine Fläche. Gesucht ist der Schwerpunkt $S[x_S / y_S]$ dieser Fläche.

Die Gleichung $f_u(x) = f_o(x)$ führt auf $e^{2x} - 2e^x - 1 = 0$ mit der einzigen Lösung $x = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$, so dass $a = 0$ und $b = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) \approx 0{,}8813735869$ ..



$$x_S = \frac{1}{A}\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} x\cdot\big(f_o(x)-f_u(x)\big)\,dx = \frac{1}{A}\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} x\cdot\left(e^{-x}+2-e^x\right)dx = \frac{1}{A}\Big[(1-x)\cdot e^x + x^2 - (1+x)\cdot e^{-x}\Big]_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \approx$$
$\approx 0{,}3038770700$.

$$y_S = \frac{1}{2A}\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \left(f_o{}^2(x)-f_u{}^2(x)\right)dx = \frac{1}{2A}\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \left(e^{-2x}+2e^{-x}-e^{2x}+2e^x\right)dx = \frac{1}{2A}\Big[\tfrac{1}{2}e^{-2x} - 2e^{-x} - \tfrac{1}{2}e^{2x} + 2e^x\Big]_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \approx$$
$\approx 1{,}070297058$.

15. Der Schwerpunkt eines Rotationskörpers bei Rotation um die x-Achse

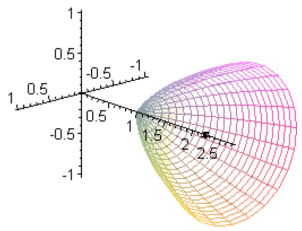
Die Herleitung der folgenden Formeln findet sich z.B. in Lothar Papula, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 1.

Für den Schwerpunkt $S(x_S / 0)$ des Rotationskörpers um die x-Achse von f im Intervall $[a/b]$ gilt:

$$\boxed{x_S = \frac{\pi}{V_x}\int_a^b x\cdot f^2(x)\,dx \quad \text{mit } V_x = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx \text{ und } a < b}\ .$$

Beispiel: Das Schaubild von $f(x) = \ln x$ rotiert im Bereich $1 \le x \le e$ um die x-Achse.

$V_x = \pi\int_1^e (\ln x)^2\,dx = \pi\Big[x\cdot(\ln x)^2 - 2x\cdot\ln x + 2x\Big]_1^e = \pi(e-2)$ durch zweifache partielle Integration.

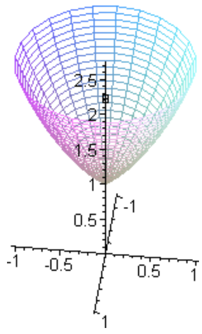


$$x_S = \frac{\pi}{V_x}\int_1^e x\cdot(\ln x)^2\,dx = \frac{\pi}{V_x}\Big[\tfrac{1}{2}x^2\cdot(\ln x)^2 - \tfrac{1}{2}x^2\cdot\ln x + \tfrac{1}{4}x^2\Big]_1^e = \frac{\pi}{V_x}\left(\tfrac{1}{4}e^2 - \tfrac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{e^2-1}{e-2} \approx 2{,}223728852\ .$$

16. Der Schwerpunkt eines Rotationskörpers bei Rotation um die y-Achse

Die Formel für den Schwerpunkt $S(0/y_S)$ bei Rotation um die y-Achse erhält man durch Vertauschen von x und y: $\boxed{y_S = \dfrac{\pi}{V_y}\displaystyle\int_c^d y\cdot x^2\,dy \quad \text{mit } V_y = \pi\int_c^d x^2\,dy}$. Dabei muss die Funktionsgleichung $y = f(x)$ nach $\boxed{x = g(y)}$ aufgelöst werden und es gilt $\boxed{f(a) = c,\ f(b) = d \quad \text{mit } a < b}$.

Beispiel: Das Schaubild von $y = f(x) = e^x$ rotiert im Bereich $0 \le x \le 1$ um die y-Achse.



Es ist $V_y = \pi \int_1^e x^2\,dy = \pi \int_1^e (\ln y)^2\,dy$ wie oben.

$y_S = \frac{\pi}{V_y} \int_1^e y \cdot (\ln y)^2\,dy$ wie oben.