Permutationen

Definition: Jede Anordnung von n Elementen in einer bestimmten Reihenfolge heißt eine **Permutation** dieser n Elemente. Die **Reihenfolge** der n Elemente wird dabei **berücksichtigt**.
Die Anzahl der möglichen Permutationen wird mit **P(n)** bezeichnet.

1. Permutationen ohne Wiederholung

Beispiel: Wie viele Wörter aus sechs verschiedenen Buchstaben lassen sich unter Verwendung der sechs Buchstaben A,B,C,D,E,F bilden?

Allgemein: Auf wie viele Weisen lassen sich n Elemente in einer Reihe anordnen?

Für den 1. Platz gibt es n Möglichkeiten.
Für den 2. Platz gibt es zu jeder der n Möglichkeiten für den 1. Platz noch $n-1$ Möglichkeiten.
Somit gibt es für den 1. und 2. Platz insgesamt $n\cdot(n-1)$ Möglichkeiten.
Für den 3. Platz gibt es zu jeder der obigen $n\cdot(n-1)$ Möglichkeiten noch $n-2$ Möglichkeiten.
Somit gibt es für die ersten 3 Plätze insgesamt $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)$ Möglichkeiten.
Für alle n Plätze gibt es folglich $P(n)=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\dots\cdot 2\cdot 1=n!$ Möglichkeiten.

Für $n=1$ gibt es nur eine Permutation: $P(1)=1$.
Für $n=2$ gibt es zwei Permutationen: AB und BA, also $P(2)=2!=2$.
Für $n=3$ gibt es 6 Permutationen: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA, also $P(3)=3!=6$.
Für $n=4$ gibt es $P(4)=4!=24$ Permutationen: ABCD, ABDC, ... , DCBA.

Beispiel: $P(6)=6!=720$.
Allgemein: $P(n)=n!$

2. Permutationen mit Wiederholung

Beispiel: Wie viele Wörter aus 11 Buchstaben lassen sich aus den 11 Buchstaben A, A, B, B, B, C, C, C, D, E, E bilden?

Allgemein: Unter den n Elementen befinden sich $n_1,\ n_2,\ \dots,n_k$ gleiche Elemente, wobei $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Auf wie viele Weisen lassen sich diese n Elemente in einer Reihe anordnen?

Wenn diese 11 Elemente verschieden wären, dann gäbe es $P(11)=11!=39\,916\,800$ Permutationen.

Die ersten beiden Elemente A, A sind gleich. Wären sie verschieden, so gäbe es $2!=2$ Permutationen A_1A_2 und A_2A_1. Somit halbiert sich die Gesamtzahl $P(11)$ der Permutationen.
Die folgenden drei Elemente B, B, B sind gleich. Wären sie verschieden, so gäbe es $3!=6$ Permutationen. Somit wird die Gesamtzahl der Permutationen zusätzlich durch 3! dividiert.
Insgesamt sinkt die Anzahl der Permutationen auf $\frac{11!}{2!\cdot 3!\cdot 3!\cdot 1!\cdot 2!}=277\,200$.

Satz:
1. Für n verschiedene Elemente gibt es $\boxed{P(n)=n!}$ Permutationen.
2. Wenn sich unter den n Elementen $n_1,\ n_2,\ \dots,n_k$ gleiche befinden, wobei $\boxed{\sum_{i=1}^{k} n_i = n}$ gilt, dann gibt es $\boxed{P_w(n)=\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\dots\cdot n_k!}}$ Permutationen.

Variationen

Definition: Jede Anordnung von k Elementen, $k \le n$, aus einer Menge von n verschiedenen Elementen heißt eine **Variation** dieser n Elemente. Die **Reihenfolge** der k Elemente wird dabei **berücksichtigt**. Die Anzahl dieser Anordnungen wird mit $\mathbf{V(n;k)}$ bezeichnet.

1. Variation ohne Wiederholung

Beispiel: Wie viele Wörter aus $k = 4$ verschiedenen Buchstaben lassen sich aus den $n = 6$ verschiedenen Buchstaben A,B,C,D,E,F darstellen?

Die Anzahl der möglichen Variationen wird mit $V(n;k)$ bezeichnet. Wie groß ist $V(n;k)$?

Für den 1. Platz gibt es n Möglichkeiten.
Für den 2. Platz gibt es zu jeder der n Möglichkeiten für den 1. Platz noch $n-1$ Möglichkeiten.
Somit gibt es für den 1. und 2. Platz insgesamt $n\cdot(n-1)$ Möglichkeiten.
Für den 3. Platz gibt es zu jeder der obigen $n\cdot(n-1)$ Möglichkeiten noch $n-2$ Möglichkeiten.
Somit gibt es für die ersten 3 Plätze insgesamt $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)$ Möglichkeiten.
Für den Platz Nr. k gibt es insgesamt

$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\dots\cdot(n-(k-1)) = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\dots\cdot(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten, d.h.

$V(n;k) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ für $k \le n$.

Im Beispiel ist $V(6;4) = \dfrac{6!}{(6-4)!} = \dfrac{720}{2} = 360$.

Oder man rechnet $6\cdot5\cdot4\cdot3 = 360$.

2. Variation mit Wiederholung

Beispiel: Wie viele Wörter aus $k = 4$ nicht notwendig verschiedenen Buchstaben lassen sich aus den $n = 6$ verschiedenen Buchstaben A,B,C,D,E,F darstellen?

Die Anzahl der möglichen Variationen mit Wiederholung wird mit $V_w(n;k)$ bezeichnet. Wie groß ist $V_w(n;k)$?

Für jeden der k Plätze gibt es n Möglichkeiten, so dass $V_w(n;k) = n^k$ für $k \in \mathbb{N}$.

Satz:
1. Die Anzahl der Variationen k-ter Ordnung ohne Wiederholung beträgt $\boxed{V(n;k) = \dfrac{n!}{(n-k)!}}$ für $k \le n$.
2. Die Anzahl der Variationen k-ter Ordnung mit Wiederholung beträgt $\boxed{V_w(n;k) = n^k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Beispiel: Aus den Ziffern 1 bis 6 sollen vierstellige Zahlen gebildet werden. Wie viele Zahlen gibt es

a. wenn jede Ziffer nur einmal vorkommen darf? $V(6;4) = \dfrac{6!}{(6-4)!} = \dfrac{6!}{2!} = 6\cdot5\cdot4\cdot3 = 360$

b. wenn jeder Ziffer beliebig oft vorkommen darf? $V_w(6;4) = 6^4 = 1296$.

c. Wie viele 10-stellige Zahlen können aus den Ziffern 1 bis 6 gebildet werden?
$V_w(6;10) = 6^{10} = 60\,466\,176$.

Kombinationen

Definition: Eine Auswahl von k Elementen aus einer Menge von n verschiedenen Elementen mit $k \le n$ heißt eine **Kombination**. Dabei wird die **Reihenfolge**, in der die k Elemente ausgewählt wurden, **nicht berücksichtigt**.

Die Kombinationen unterscheiden sich von den Variationen dadurch, dass bei den Variationen die Reihenfolge der Anordnung berücksichtigt wird, bei den Kombinationen nicht.

1. Kombinationen ohne Wiederholung

In diesem Fall steht das gezogene Element nicht mehr weiter zur Auswahl zur Verfügung.

Beispiel: Beim **Zahlenlotto** $k = 6$ aus $n = 49$ kann eine Zahl nicht mehrfach gezogen werden.

Die Anzahl der möglichen Kombinationen ohne Wiederholung wird mit $C(n;k)$ bezeichnet. Wie groß ist $C(n;k)$?

Für **k = 1** gibt es n Kombinationen: $C(n;1) = n$.

Für **k = 2** gibt es $n \cdot (n-1)$ Möglichkeiten, 2 Elemente aus den n auszuwählen. Diese Anzahl berücksichtigt aber die Reihenfolge, in der die beiden Elemente ausgewählt wurden. Für 2 Elemente gibt es $2! = 2$ Permutationen.

Damit gilt $C(n;2) = \dfrac{n \cdot (n-1)}{2!} = \dfrac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = \dbinom{n}{2}$, gelesen „n über 2“.

Für **k = 3** gibt es $n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$ Möglichkeiten, 3 Elemente aus den n auszuwählen. Diese Anzahl berücksichtig aber die Reihenfolge, in der die drei Elemente ausgewählt wurden. Für 3 Elemente gibt es $3! = 6$ Permutationen.

Damit gilt $C(n;3) = \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!} = \dfrac{n!}{3! \cdot (n-3)!} = \dbinom{n}{3}$.

Für beliebiges k, $k \le n$, beträgt die Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholung $C(n;k) = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \dbinom{n}{k}$.

$\dbinom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}$ heißt auch **Binomialkoeffizient**.

Im Beispiel ist $\dbinom{49}{6} = \dfrac{49!}{6! \cdot (49-6)!} = \dfrac{49!}{6! \cdot 43!} = \dfrac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13983816$. So viele verschieden ausgefüllte Lottoscheine sind möglich.

Beispiel: Der binomische Lehrsatz:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k .$$

Begründung: $(a+b)^n = (a+b) \cdot (a+b) \cdot (a+b) \cdot \ldots \cdot (a+b)$ ist das Produkt von n gleichen Klammern $(a+b)$.

Den Summanden mit $a^n b^0$ erhält man, indem man von jeder Klammer die 1. Summanden a miteinander multipliziert. Das ist nur $\dbinom{n}{0} = 1$ Möglichkeit.

Die Summanden mit $a^{n-1} b^1$ erhält man, indem man für b eine der n Klammern auswählt. Dafür gibt es $\dbinom{n}{1} = n$ Möglichkeiten.

Die Summanden mit $a^{n-2} b^2$ erhält man, indem man für b zwei der n Klammern auswählt. Dafür gibt es $\dbinom{n}{2} = \dfrac{n \cdot (n-1)}{2}$ Möglichkeiten.

Zusatz: Wir hatten auf Seite 1 die Aufgabe: Wie viele Wörter aus 11 Buchstaben lassen sich aus den 11 Buchstaben A, A, B, B, B, C, C, C, D, E, E bilden? Das Ergebnis lässt sich auch mit Hilfe der Binomialkoeffizienten erhalten:

Zuerst wählt man 2 der 11Stellen für die beiden Buchstaben A aus. Dafür gibt es $\binom{11}{2}$ Möglichkeiten.

Dann wählt man 3 der restlichen 9 Stellen für die 3 Buchstaben B aus. Dafür gibt es $\binom{9}{3}$ Möglichkeiten.

Dann wählt man 3 der restlichen 6 Stellen für die 3 Buchstaben C aus. Dafür gibt es $\binom{6}{3}$ Möglichkeiten, usw.

Insgesamt sind das $\binom{11}{2}\cdot\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{2}=\frac{11!}{2!\cdot 9!}\cdot\frac{9!}{3!\cdot 6!}\cdot\frac{6!}{3!\cdot 3!}\cdot\frac{3!}{1!\cdot 2!}\cdot\frac{2!}{2!\cdot 0!}=\frac{11!}{2!\cdot 3!\cdot 3!\cdot 1!\cdot 2!}$

2. Kombinationen mit Wiederholung

In diesem Fall steht das gezogene Element weiterhin zur Auswahl.

Beispiel: In einer Urne befinden sich n verschiedene Kugeln. Es werden k Kugeln gezogen. Dabei wird aber jeweils die gezogene Kugel vor dem nächsten Zug in die Urne zurückgelegt.

Die Anzahl der möglichen Kombinationen mit Wiederholung wird mit $C_w(n;k)$ bezeichnet.

Beispiel: Ein Getränkeautomat bietet n verschiedene Getränke an. k Getränke werden gewünscht, die auch gleich sein dürfen. Wie viele Kombinationen $C_w(n;k)$ gibt es?

Speziell: Ein Getränkeautomat bietet vier verschiedene Getränke A, B, C, D an. Zwei Getränke werden gewünscht, die auch gleich sein dürfen. Wie viele Kombinationen $C_w(4;2)$ gibt es?

Lösung: Alle Kombinationen sind $\{A,A\}$, $\{A,B\}$, $\{A,C\}$, $\{A,D\}$, $\{B,B\}$, $\{B,C\}$, $\{B,D\}$, $\{C,C\}$, $\{C,D\}$, $\{D,D\}$.
Wir stellen diese 10 Möglichkeiten in einer Tabelle, bzw. durch Symbole dar. **|** bedeutet den Trennstrich zwischen zwei Spalten und x bedeutet die Auswahl dieses Getränks. Durch 5 Symbole (zweimal x und dreimal **|)** kann die Auswahl eindeutig beschrieben werden.

A	B	C	D	Symbol
xx				x x | | |
x	x			x | x | |
x		x		x | | x |
x			x	x | | | x
	xx			| x x | |
	x	x		| x | x |
	x		x	| x | | x
		xx		| | x x |
		x	x	| | x | x
			xx	| | | x x

Falls n Getränke angeboten werden und davon k ausgewählt werden sollen, die auch gleich sein können, benötigen wir zur eindeutigen Beschreibung $n-1$ senkrechte Striche **|** und k mal das x, d.h. insgesamt $n-1+k$ Symbole. Und die x, die k-mal vorkommen, sind nun auf die $n-1+k$ Stellen zu verteilen. Die Reihenfolge dieser Auswahl spielt keine Rolle. Also gibt es $C_w(n;k)=\binom{n+k-1}{k}$ Möglichkeiten.

Im Beispiel $n=4$ und $k=2$ sind dies $\binom{n+k-1}{k}=\binom{5}{2}=\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}=10$ Möglichkeiten.

Beispiel: Ein Getränkeautomat bietet 10 verschiedenen Getränke an. Vier Getränke werden benötigt. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn

a. alle vier Getränke verschieden sein sollen? $C(10;4)=\binom{10}{4}=\frac{10!}{4!\cdot 6!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=210$

b. auch gleiche Getränke erlaubt sind? $C_w(10;4)=\binom{10+4-1}{4}=\binom{13}{4}=\frac{13!}{4!\cdot 9!}=\frac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=715$

Satz: 1. Die Anzahl der Kombinationen k-ter Ordnung ohne Wiederholung beträgt $\boxed{C(n;k)=\binom{n}{k}}$ für $k \le n$.

2. Die Anzahl der Kombinationen k-ter Ordnung mit Wiederholung beträgt $\boxed{C_w(n;k)=\binom{n+k-1}{k}}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Beachte: **n** ist die Anzahl der zur Verfügung stehenden Dinge,
k ist die Anzahl der auszuwählenden Dinge.

<u>Zusammenstellung</u>

	Permutation n aus n mit Berücksichtigung der Reihenfolge	**Variation** k aus n mit Berücksichtigung der Reihenfolge	**Kombination** k aus n ohne Berücksichtigung der Reihenfolge
ohne Wiederholung	$P(n)=n!$	$V(n;k)=\frac{n!}{(n-k)!}$ mit $k \le n$	$C(n;k)=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ mit $k \le n$
mit Wiederholung	$P_w(n)=\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}$ mit $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$	$V_w(n;k)=n^k$	$C_w(n;k)=\binom{n+k-1}{k}$