3 Basen und Dimensionen

3.1 Vorbemerkung.

Die Begriffe der Linearen Unabhängigkeit und der Linearen Hülle, die beide im letzten Abschnitt eingeführt wurden, lassen sich in anschaulicher Weise miteinander kombinieren. Wir haben gesehen, dass die Lineare Hülle einer Anzahl von Vektoren einen Unterraum des gegebenen Vektorraums bildet. Wenn man diese Vektoren geschickt wählt, nämlich für jede "Richtung", die der gegebene Vektorraum aufweist, einen Vektor ins Spiel nimmt, erreicht man, dass der von ihnen aufgespannte Unterraum mit dem gegebenen Vektorraum identisch ist. Wir haben dann ein Tupel von Vektoren gefunden, die den ganzen Vektorraum aufspannen, wenn wir alle Linearkombinationen der Vektoren dieses Tupels betrachten. Zusätzlich interessant ist es, dieses Tupel dann so klein wie möglich zu wählen, also nicht unnötigerweise Vektoren mit hineinzunehmen, die eigentlich überflüssig sind, weil sie durch andere Vektoren des Tupels bereits als Linearkombination zusammengesetzt werden können. Mit anderen Worten, wir sollten Tupel betrachten, deren Vektoren linear unabhängig sind. Diese beiden Bedingungen für das Tupel: groß genug, um über Linearkombinationen den gesamten Vektorraum als Lineare Hülle aufzuspannen, und klein genug, um keine linear abhängigen und damit überflüssigen Vektoren zu beinhalten – diese beiden Bedingungen machen das aus, was wir als *Basis* bezeichnen wollen.

Die *Dimension* eines Vektorraums ergibt sich dann einfach durch Abzählen der Anzahl der Basisvektoren. Natürlich wird ein Vektorraum unendlich viele mögliche Basen haben, die Anzahl der darin enthaltenen Basisvektoren ist aber stets gleich. Mit den Begriffen "Basis" und "Dimension" beginnen wir dieses Kapitel.

3.2 Vektorraumbasen.

Die in der Vorbemerkung formulierte Anschauung setzen wir in der folgenden Definition direkt um:

Definition. Sei $(\mathrm{V}, +, \cdot)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Ein Tupel $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ von n Vektoren aus V, für dessen Lineare Hülle gilt $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = \mathrm{V}$, heißt **Erzeugendensystem** von V. Ist das Tupel auch noch linear unabhängig, so nenne wir es eine **Basis** von V.

Der Terminus "Erzeugendensystem" ist dabei sehr anschaulich: jeder Vektor aus V lässt sich aus den Vektoren eines Erzeugendensystems von V linearkombinieren, also erzeugen[1]. Von einer Basis haben wir zusätzlich Lineare Unabhängigkeit gefordert, um nicht unnötig viele (und damit auch *undefiniert* viele) Vektoren in der Basis zu haben. Damit erreichen wir auch den Effekt, dass nicht nur, wie bei Linearen Hüllen definitionsgemäß der Fall, jeder beliebige Vektor aus den Basisvektoren linearkombiniert werden kann, sondern diese Linearkombination auch noch *eindeutig* ist. Wenn nämlich ein aus V herausgegriffener Vektor $\mathbf{w}$ durch die Basis $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ von V sowohl als $\mathbf{w} = \lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_n \cdot \mathbf{v}_n$ als auch in der Form $\mathbf{w} = \mu_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + \mu_n \cdot \mathbf{v}_n$ linearkombiniert werden könnte, so wäre – man bilde einfach die Differenz dieser beiden Darstellungen – $\mathbf{0} = (\lambda_1 - \mu_1) \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n) \cdot \mathbf{v}_n$. Wegen der Linearen Unabhängigkeit der $\mathbf{v}_i$ folgt daraus jedoch sofort $\lambda_i = \mu_i$ für alle $i = 1 \ldots n$, die beiden Darstellungen sind tatsächlich also gleich. Das ist uns eine Bemerkung wert:

Bemerkung. Sei $(V, +, \cdot)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basis $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$. Dann hat jeder Vektor $\mathbf{w} \in V$ eine eindeutige Darstellung $\mathbf{w} = \lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_n \cdot \mathbf{v}_n$ mit n Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Diese Zahlen nennt man gelegentlich auch *Komponenten* von $\mathbf{w}$ bezüglich der Basis $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$.

Die diversen Unterräume, denen wir im Laufe dieser Vorlesung begegnen werden – Kerne und Bilder von Linearen Abbildungen beispielsweise – kann man erschöpfend und übersichtlich zugleich dadurch charakterisieren, dass man ihre Basis angibt. Auch die Rechenoperationen beim Umgang mit Matrizen beziehen sich auf eine Basis. Für den $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathbb{K}^n$ wählt man typischerweise die *kanonische Basis*, bestehend aus den Basisvektoren $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$ und so weiter bis $\mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$. Im dreidimensionalen Anschauungsraum mit den drei Basisvektoren $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ und $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ lässt sich zum Beispiel der Vektor $\mathbf{w} = (4, 5, -3)$ in diese Basis entwickeln: $\mathbf{w} = 4 \cdot \mathbf{e}_1 + 5 \cdot \mathbf{e}_2 - 3 \cdot \mathbf{e}_3$. Wir *identifizieren* somit den Vektor $\mathbf{w} = (4, 5, -3)$ mit dem Tupel seiner Komponentendarstellung. Im Folgenden wollen wir Vektoren aus $\mathbb{K}^n$ im übrigen stets in Spaltenform schreiben: $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$. Aus Gründen, die wir beim Matrizenkalkül kennenlernen werden, ist das nicht gleichgültig. Allerdings hat diese Schreibweise den Nachteil, relativ viel Platz zu verbrauchen. Deshalb wenden

[1] Trivialerweise ist jede Lineare Hülle Erzeugendensystem ihrer selbst, denn die Lineare Hülle ist ja, wie wir gesehen haben, ein Vektorraum.

wir gelegentlich einen Kunstgriff an und *transponieren* den Vektor. Transponieren einer Matrix – das kommt später noch – bedeutet, ihre Spalten zu Zeilen zu machen und ihre Zeilen zu Spalten. Auch einen als Spalte geschriebenen n-Tupel können wir nicht nur als Vektor lesen, sondern auch als Matrix; ihn zu transponieren, heißt daher, ihn zur Zeile zu machen. Und umgekehrt bedeutet das Transponieren der Zeilen-“Matrix” $(4, 5, -3)$, sie als spaltenförmige “Matrix” zu schreiben. Diese Operation bezeichnen wir durchgängig mit einem hochgestellten “T”. Wir können also das zeilensparende $(4, 5, -3)^\mathsf{T}$ statt $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ benutzen.

In der oben angesprochenen Situation, wo wir einen Unterraum durch eine seiner Basen gegeben haben, ist es oft sehr praktisch, diese Unterraumbasis weiter zu verwenden auch bei Betrachtung des gesamten Vektorraums, in den der Unterraum eingebettet ist. Man wünscht sich dann eine Basis des Gesamtraumes, bei der ein Teil der Basisvektoren – die ersten k Stück – gleichzeitig die Basis des Unterraums bilden. Man denke an eine irgendwie schief im dreidimensionalen Anschauungsraum liegende zweidimensionale Ebene, die als Unterraum von Interesse für das gegebene Problem ist, zum Beispiel weil sich das physikalische Geschehen auf Grund irgendwelcher Erhaltungssätze auf diese Ebene beschränkt. Nun hat man eine Basis dieser Ebene gewählt, die dem Problem angepasst ist, braucht jetzt aber eine Basis des gesamten dreidimensionalen Raumes. Man sucht also nach einem dritten Vektor, mit dem man die zweidimensionale Basis der Ebene *ergänzen* kann zu einer Basis des dreidimensionalen Anschauungsraumes.

Wir können jedes Tupel linear unabhängiger Vektoren $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$, das selbst noch kein Erzeugendensystem ist, auffüllen mit Vektoren aus einem solchen der Form $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_l)$ zu einer Basis. Formal funktioniert das so, dass wir mit der Bedingung $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) \subset \mathrm{V}$ starten – echte Teilmenge, die Lineare Hülle von $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ ist also wirklich kleiner als V, sonst wären wir ja schon fertig –, um dann eines der $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_l)$ dazuzunehmen, das nicht aus den $\mathbf{v}_i$ linearkombiniert werden kann. Ein solches muss es geben, denn sonst könnten wir ja *jeden* Vektor aus V durch die $\mathbf{v}_i$ linearkombinieren, und $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ wäre *doch* gleich V. Weil aber eben dieses ausgewählte w_{j_1} nicht aus den $\mathbf{v}_i$ linearkombiniert werden kann, ist $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_{j_1})$ linear unabhängig. Entweder ist es nun bereits eine Basis, weil $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_{j_1}) = \mathrm{V}$ ist, oder immer noch nicht. Dann suchen wir mit derselben Argumentation im zweiten Schritt ein w_{j_2} auf und bilden mit ihm das linear unabhängige Tupel $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_{j_1}, \mathbf{w}_{j_2})$. Und so weiter. Bis wir schließlich das (immer noch und weiterhin linear unabhängige) Tupel $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_{j_1}, \mathbf{w}_{j_2}, \ldots, \mathbf{w}_{j_s})$ so groß haben, das es ein Erzeugendensystem darstellt. Und mithin eine Basis.

Haben wir in $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m)$ bereits eine Basis und ist $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n)$ eine andere, können wir folgenden Tausch durchführen: aus $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m)$ nehmen wir irgendeinen Vektor heraus. Die verbleibenden $m-1$ Vektoren sind dann immer noch linear unabhängig, aber natürlich kein Erzeugendensystem mehr. Unter den $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n)$ wählen wir dann eines aus, das aus diesen verbleibenden $m-1$ nicht linearkombiniert werden kann (muss es geben, sonst wären diese $m-1$ Vektoren ein Erzeugendensystem), und setzen es an die Stelle des herausgenommenen $\mathbf{v}_i$. Das so entstandene Tupel, in dem eines der $\mathbf{v}$ durch eines der $\mathbf{w}$ ersetzt ist, ist nach Konstruktion linear unabhängig. Außerdem ist es aber ein Erzeugendensystem! Warum? Nun ja: werfen wir das herausgenommene $\mathbf{v}_i$ an die letzte Position wieder dazu: $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{w}_j, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_i)$, so haben wir auf jeden Fall ein Erzeugendensystem, denn alle $\mathbf{v}$ sind wieder da. Nach der obigen Argumentation ist also das linear unabhängige $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{w}_j, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_m)$ entweder selbst schon eine Basis, oder es wird zu einer solchen ergänzt durch Hinzunahme von $\mathbf{v}_i$ aus dem Erzeugendensystem $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{w}_j, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_i)$. Letzteres kann aber nicht der Fall sein, weil $\mathbf{w}_j$ aus den $\mathbf{v}$ linearkombiniert werden kann und deshalb $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{w}_j, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_i)$ nicht linear unabhängig ist.

Diese beiden Aussagen treten manchmal unter eigenen Namen auf und heißen dann *Basisergänzungssatz* und *Austauschsatz*. Anschaulich sind sie sehr naheliegend: eine Anzahl linear unabhängiger Vektoren können wir solange auffüllen, bis wir eine Basis vor uns haben. Und wenn uns zwei Basen gegeben sind, können wir zu jedem Basisvektor der ersten einen Basisvektor aus der zweiten finden, so dass wir den ersten Vektor durch den zweiten ersetzen können.

3.3 Dimension.

Wir wollen noch einmal auf die beim Austauschsatz oben beschriebene Situation eingehen, dass wir nämlich zwei unterschiedliche Basen $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m)$ und $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n)$ ein und desselben Vektorraums vorliegen haben. Wären n und m tatsächlich verschieden, hätte zum Beispiel die Basis $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m)$ wirklich *weniger* Elemente als $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n)$, könnten wir den Austauschsatz anwenden und sukzesssive alle Elemente aus $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m)$ gegen solche aus $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n)$ auswechseln. Die neue Basis hätte nach Abschluss dieser Operationen natürlich ebenfalls wieder m Elemente, es gäbe in $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n)$ also wenigstens ein $\mathbf{w}_i$, das nicht in die $\mathbf{v}$-Basis hineingetauscht worden wäre. Als ein Element aus V müssten wir dieses $\mathbf{w}_i$ demnach aus der neuen Basis linearkombinieren können, eben weil die neue Basis eine Basis ist. In der neuen Basis sind mittlerweile aber durch die m Austauschvorgänge ausschließlich $\mathbf{w}$'s enthalten. Wir würden also $\mathbf{w}_i$ durch eine Anzahl anderer Elemente der ursprünglichen $\mathbf{w}$-Basis linearkombinieren können. Was unmöglich ist, denn die $\mathbf{w}$ sind ja alle linear unabhängig. So erkennen wir, dass notwendigerweise $m = n$ sein muss:

> **Bemerkung.** Sei $(\mathrm{V}, +, \cdot)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basis $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$. Dann hat jede andere Basis von V die gleiche Anzahl von Elementen. Wir nennen diese Anzahl **Dimension** von V und bezeichnen sie mit $\dim \mathrm{V}$.

Für den $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathbb{K}^n$ hatten wir oben die kanonische Basis $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, ... , $\mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$ betrachtet. Wir sehen daraus, dass $\dim \mathbb{K}^n = n$ ist, der gerade axiomatisch eingeführte Dimensionsbegriff mit der "naiven" Sprechweise, $\mathbb{K}^n$ sei n-dimensional, also übereinstimmt.

Für viele wirklich interessante spätere Anwendungen der Linearen Algebra – "später" hier im Sinne von "außerhalb dieser Vorlesung" gebraucht – ist es wichtig, sich vor Augen zu halten, dass wir den Begriff der Basis durch die beiden Strukturelemente "Erzeugendensystem" und "Lineare Unabhängigkeit" eingeführt haben: *wenn* es in einem Vektorraum V ein (endliches!) Tupel $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ gibt, dessen Vektoren linear unabhängig sind und die Bedingung $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = \mathrm{V}$ erfüllen, *dann* handelt es sich bei $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ um eine Basis von V und V ist n-dimensional. Keineswegs ist damit aber unterstellt, dass es in jedem Vektorraum ein solches Tupel tatsächlich auch gibt! Die im richtigen Leben vorkommenden Funktionenräume zum Beispiel haben gar keine Basis im Sinne unserer Definition. Eine Basis schon, allerdings gebraucht man hier einen erweiterten Begriff der Basis. Die Vektorräume, die in unserem Sinne eine (endliche) Basis haben, nennt man *endlichdimensional*. Nicht alle Linearen Räume sind endlichdimensional.

Wir hatten über den Basisergänzungssatz im Zusammenhang mit Unterräumen gesprochen: wenn wir einen Unterraum durch seine Basis charakterisieren (man denke an eine Ebene in $\mathbb{R}^3$, die irgendwie schief von zwei linear unabhängigen Vektoren aufgespannt wird, die dann ihre Basis abgeben), dann ist es für viele Betrachtungen sinnvoll, diese Unterraum-Basis zu einer Basis des gesamten Vektorraums zu ergänzen. Genau dies kann unser Basisergänzungssatz. Wenden wir nun diesen strategischen Gedanken auf den Fall an, dass wir *zwei* Unterräume von V gegeben haben, genannt U_1 und U_2. Um eine anschauliche Vorstellung zu entwickeln, denke man sich eine zweidimensionale Ebene des $\mathbb{R}^3$ als U_1 und eine eindimensionale Gerade als U_2. Die beiden schneiden sich mindestens im Ursprung, denn als Unterräume sind sie beide Vektorräume und enthalten von daher die $\mathbf{0}$. Es ist aber zu unterscheiden, ob die betrachtete Gerade innerhalb der Ebene liegt oder ob es bei $\mathbf{0}$ als gemeinsamem Punkt bleibt. Im ersteren Fall ist $\dim(\mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_2) = \dim \mathrm{U}_2 = 1$, im zweiten Fall ist $\dim(\mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_2) = \dim\{\mathbf{0}\} = 0$. Bei der Frage nach der Dimension der Schnittmenge zweier Unterräume eines gegebenen Vektorraums V – die stets selbst ein Unterraum ist, so dass wir also stets sinnvoll von einer Dimension sprechen können – spielt es offenbar eine Rolle, wie die Unterräume zueinander liegen in V. Allgemein gilt

$$\dim(\mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_2) + \dim(\mathrm{U}_1 + \mathrm{U}_2) = \dim \mathrm{U}_1 + \dim \mathrm{U}_2 \ ,$$

wie wir wieder einmal mittels des Basisergänzungssatzes sehen können. Der Ausdruck "$\mathrm{U}_1 + \mathrm{U}_2$" in dieser Formel ist quasi punktweise zu verstehen: das sind einfach alle Elemente aus V, die Summen sind der Form $u_1 + u_2$, wo $u_1 \in \mathrm{U}_1$ und $u_2 \in \mathrm{U}_2$. In unserem Anschauungsbeispiel, erster Fall, ist U_1 (die Ebene) $+\mathrm{U}_2$ (die Gerade) $= \mathrm{U}_1$, weil die Gerade in der Ebene enthalten ist und eine Summe aus einem beliebigen Vektor in der Ebene und einem Vektor entlang der Geraden somit wieder irgendwie in der Ebene liegt. Die Dimension dieser Unterraum-Summe ist daher 2. Die Dimension der Schnittmenge ist die Dimension der eingebetteten Geraden, mithin 1 (siehe oben), die Dimensionsformel als $1 + 2 = \dim \mathbb{R}^3 = 3$ insgesamt zutreffend. Im Anschauungsbeispiel, zweiter Fall, haben die beiden Unterräume nur den Unterraum $\{\mathbf{0}\}$ mit seiner Dimension 0 gemeinsam. Wie sieht hier die Summe $\mathrm{U}_1 + \mathrm{U}_2$ von Ebene und Gerade aus? Jeder beliebige Vektor aus V lässt sich offenbar schreiben als Summe zweier Vektoren, von denen der erste in der Ebene liegt und der zweite in der Geraden (wobei einer der beiden natürlich auch der Nullvektor sein darf), denn gemeinsam spannen die Ebene und die schief dazu liegende Gerade ja ganz $\mathbb{R}^3$ auf; die Summe der Unterräume ist ganz $\mathbb{R}^3$. Damit haben wir in diesem Fall, ebenso wieder korrekt, $0 + 3 = \dim \mathbb{R}^3 = 3$.– Die Bedeutung dieser Dimensionsbetrachtung für Unterräume erschließt sich später, wenn wir *die* Dimensionsformel für Matrizen studieren, das heißt den Zusammenhang zwischen dem Kern einer Matrix und ihrem Rang. Lineare Abbildungen sind dann auch Thema des nächsten Kapitels.