1. Es sei $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\cdot y}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{für } (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

   Wie verhält sich $f(x,y)$ für $(x,y)\to(0,0)$?

   Man kamm sich auf verschiedenen Wegen der Stelle $(0,0)$ nähern.

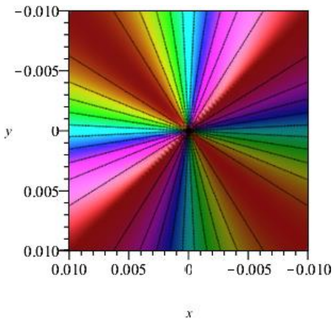
   a. Wir nähern uns der Stelle $(0,0)$ auf der y-Achse, d.h. es ist $x=0$.

   $f(0,y)=\dfrac{0\cdot y}{0^2+y^2}=\dfrac{0}{y^2}=0$ für $y\neq 0$, also konstant 0, so dass auch $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y)=0$ gilt.

   b. Wir nähern uns der Stelle $(0,0)$ auf Geraden der Gleichung $y=m\cdot x$ für beliebige Steigungen $m\in\mathbb{R}$, siehe Schaubild. Dann ist

   $f(x,m\cdot x)=\dfrac{x\cdot m\cdot x}{x^2+m^2\cdot x^2}=\dfrac{m\cdot x^2}{(1+m^2)\cdot x^2}=\dfrac{m}{1+m^2}$ für $x\neq 0$, so dass

   $\lim\limits_{x\to 0} f(x,m\cdot x)=\dfrac{m}{1+m^2}$ für jede dieser Geraden konstant ist.



   Folgerungen:
   Alle Ursprungsgeraden sind Höhenlinien, siehe Schaubild. Die beiden Koordinatenachsen sind die Höhenlinien Null.
   Die Funktion f ist an der Stelle $(0,0)$ nicht stetig, denn dazu müsste sich bei jeder Annäherung an die Stelle $(0,0)$ der gleiche Wert ergeben.

2. Es sei $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2\cdot y}{x^4+y^2} & \text{für } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{für } (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

   Wie verhält sich $f(x,y)$ für $(x,y)\to(0,0)$?

   Man kamm sich auf verschiedenen Wegen der Stelle $(0,0)$ nähern.

   a. Wir nähern uns der Stelle $(0,0)$ auf der y-Achse, d.h. es ist $x=0$.

   $f(0,y)=\dfrac{0^2\cdot y}{0^4+y^2}=\dfrac{0}{y^2}=0$ für $y\neq 0$, also konstant 0, so dass auch $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y)=0$ gilt.

   b. Wir nähern uns der Stelle $(0,0)$ auf Geraden der Gleichung $y=m\cdot x$ für beliebige Steigungen $m\in\mathbb{R}$.

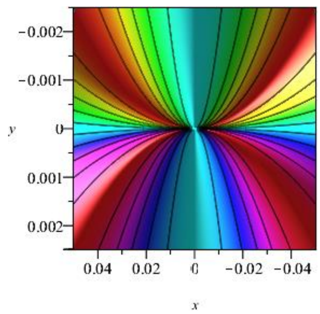
   Es ist $f(x,m\cdot x)=\dfrac{x^2\cdot m\cdot x}{x^4+m^2\cdot x^2}=\dfrac{m\cdot x^3}{(x^2+m^2)\cdot x^2}=\dfrac{m\cdot x}{x^2+m^2}$ für $x\neq 0$.

   Nur für $m=0$ ergibt sich ein von x unabhängiger Wert, nämlich 0, so dass $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0)=0$ gilt.

   c. Wir nähern uns der Stelle $(0,0)$ auf Parabeln der Gleichung $y=a\cdot x^2$ mit $a\neq 0$, siehe Schaubild. Dann ist

   $f(x,a\cdot x^2)=\dfrac{x^2\cdot a\cdot x^2}{x^4+a^2\cdot x^4}=\dfrac{a\cdot x^4}{(1+a^2)\cdot x^4}=\dfrac{a}{1+a^2}$, so dass

   $\lim\limits_{x\to 0} f(x,a\cdot x^2)=\dfrac{a}{1+a^2}$ für jede dieser Parabeln konstant ist.



   Folgerungen:
   Auf den beiden Koordinatenachsen haben wir die Höhenlinien Null.

   Die Parabeln $y=a\cdot x^2$ für $a\neq 0$ sind ebenfalls Höhenlinien. Für ihre Höhe gilt $z=\dfrac{a}{1+a^2}$.

   Somit ist die Funktion f an der Stelle $(0,0)$ nicht stetig, denn dazu müsste sich bei jeder Annäherung an die Stelle $(0,0)$ der gleiche Wert ergeben.

3. Es sei $f(x,y)=\ln(x\cdot e^y-y\cdot e^x)$, $g(x,y)=\dfrac{x\cdot y}{x^2-y^2}$, $h(x,y,z)=(x\cdot y+z)^{y\cdot z}$.

   Bestimmen Sie jeweils die ersten partiellen Ableitungen $f_x=\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $f_y=\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $g_x=\dfrac{\partial g}{\partial x}$, $g_y=\dfrac{\partial g}{\partial y}$, $h_x=\dfrac{\partial h}{\partial x}$. $h_y=\dfrac{\partial h}{\partial y}$ und $h_z=\dfrac{\partial h}{\partial z}$.

   $f_x(x,y)=\dfrac{e^y-y\cdot e^x}{x\cdot e^y-y\cdot e^x}$, $f_y(x,y)=\dfrac{x\cdot e^y-e^x}{x\cdot e^y-y\cdot e^x}$, $g_x(x,y)=-\dfrac{y\cdot(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2}$, $g_y(x,y)=\dfrac{x\cdot(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2}$,

   Es ist $h_x(x.y.z)=y^2\cdot z\cdot(x\cdot y+z)^{y\cdot z-1}$. Aus $h(x,y,z)=(x\cdot y+z)^{y\cdot z}$ folgt $\ln\big((h(x,y,z)\big)=y\cdot z\cdot\ln(x\cdot y+z)$,

   sodass, $h_y(x.y.z)=(x\cdot y+z)^{y\cdot z}\cdot\left(z\cdot\ln(x\cdot y+z)+\dfrac{x\cdot y\cdot z}{x\cdot y+z}\right)$ und $h_z(x.y.z)=(x\cdot y+z)^{y\cdot z}\cdot\left(y\cdot\ln(x\cdot y+z)+\dfrac{y\cdot z}{x\cdot y+z}\right)$.

4. a. Es sei $f(x,y)=x+x\cdot e^y$. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene T im Kurvenpunkt $P(1/0/2)$. Nennen Sie einen Normalenvektor $\vec{n}$ von T.

   T: $z=f(1,0)+f_x(1,0)\cdot(x-1)+f_y(1,0)\cdot(y-0)$, also T: $z=2x+y$. $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

   b. Es sei $f(x,y)=\dfrac{xy}{1-y}$. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene T im Kurvenpunkt $P(1/2/-2)$. Nennen Sie einen Normalenvektor $\vec{n}$ von T.

   T: $z=f(1,2)+f_x(1,2)\cdot(x-1)+f_y(1,2)\cdot(y-2)$, also T: $z=-2-2x+y$,

   da $f_x(x,y)=\dfrac{y}{1-y}$ und $f_y(x,y)=\dfrac{x}{(1-y)^2}$. $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ oder auch $\vec{n}=\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

5. a. Es sei $f(x,y)=x^2\cdot y$ und $P(2/1/4)$ ein Punkt des Schaubilds.
   Bestimmen Sie in P die beiden partiellen Ableitungen, die Gleichung der Tangentialebene T und einen ihrer Normalenvektoren $\vec{n}$.
   Bestimmen Sie in P für die Richtung $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ die Gleichung der Tangente t, die Richtungsableitung und den Steigungswinkel α.
   Es geht nun um den größten Anstieg im Punkt P. Bestimmen Sie den zwei- und den dreidimensionalen Richtungsvektor und den maximalen Steigungswinkel α_{max}.
   Bestimmen Sie jeweils für allgemeines x, y mit Hilfe von $\lim\limits_{h\to 0}$ die ersten Ableitungen in den drei Richtungen $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{c}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.

   $f_x(2|1)=4$, $f_y(2|1)=4$, T: $z=4x+4y-8$, $\vec{n}=\begin{pmatrix}4\\4\\-1\end{pmatrix}$. Aus $\vec{n}\bullet\vec{u}=\begin{pmatrix}4\\4\\-1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}3\\4\\u_z\end{pmatrix}=0$ folgt $u_z=28$,

   sodass t: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\28\end{pmatrix}$, $r\in\mathbb{R}$.

   Mit dem Einheitsvektor $\begin{pmatrix}3/5\\4/5\end{pmatrix}$ folgt die Richtungsableitung zu $\dfrac{\partial f}{\partial\vec{a}}=f_x(2|1)\cdot\dfrac{3}{5}+f_y(2|1)\cdot\dfrac{4}{5}=\dfrac{28}{5}$, oder auch $\dfrac{\partial f}{\partial\vec{a}}=\dfrac{u_z}{\sqrt{u_x{}^2+u_y{}^2}}=\dfrac{28}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{28}{5}$. Aus $\tan\alpha=\dfrac{28}{5}$ folgt $\alpha=79{,}88°$.

Der maximale Anstieg in P erfolgt in der zweidimensionalen Richtung $\operatorname{grad}(f)(x_0,y_0)=\begin{pmatrix} f_x(x_0,y_0)\\ f_y(x_0,y_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_x(2,1)\\ f_y(2,1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$. Ein Normalenvektor $\vec{n}$ der Tangentialebene in P ist $\vec{n}=\begin{pmatrix} f_x(2,1)\\ f_y(2,1)\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\-1\end{pmatrix}$. Der dreidimensionale Richtungsvektor $\vec{u}=\begin{pmatrix} f_x(2,1)\\ f_y(2,1)\\ u_z\end{pmatrix}$ in Richtung des größten Anstiegs folgt aus $0=\vec{n}\bullet\vec{u}=\begin{pmatrix}4\\4\\-1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}4\\4\\u_z\end{pmatrix}=16+16-u_z$, also $u_z=32$, so dass $\vec{u}=\begin{pmatrix}4\\4\\32\end{pmatrix}$, bzw. $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\1\\8\end{pmatrix}$.

Für den maximalen Steigungswinkel α_{max} gilt $\tan\alpha=|\operatorname{grad}(f)(x_0,y_0)|=\left|\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}\right|=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}$, so dass $\alpha_{max}=79{,}98°$.

α_{max} folgt auch aus $\vec{u}=\begin{pmatrix}4\\4\\32\end{pmatrix}$ mit $\tan\alpha_{max}=\dfrac{u_z}{\sqrt{u_x{}^2+u_y{}^2}}=\dfrac{32}{\sqrt{4^2+4^2}}=\dfrac{32}{\sqrt{32}}=\sqrt{32}$ wie eben.

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x,y)=f_x(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2y-x^2y}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}\cdot y=2xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{b}}(x,y)=f_y(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2(y+h)-x^2y}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2y+x^2h-x^2y}{h}=x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{c}}(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+3/5h,y+4/5h)-f(x,y)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+3/5h)^2(y+4/5h)-x^2y}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^2y+\left(\frac{4}{5}x^2+\frac{6}{5}xy\right)\cdot h+\left(\frac{24}{25}x+\frac{9}{25}y\right)\cdot h^2+\frac{36}{125}h^3-x^2y}{h}=\frac{4}{5}x^2+\frac{6}{5}xy\,.$$

Probe: $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{c}}(x,y)=f_x(x,y)\cdot\dfrac{3}{5}+f_y(x,y)\cdot\dfrac{4}{5}=2xy\cdot\dfrac{3}{5}+x^2\cdot\dfrac{4}{5}=\dfrac{4}{5}x^2+\dfrac{6}{5}xy$.

b. Es sei $f(x,y)=x\cdot\sqrt{y}$ und $P(1/2/\sqrt{2})$ ein Punkt des Schaubilds.
Bestimmen Sie in P die beiden partiellen Ableitungen, die Gleichung der Tangentialebene T, einen ihrer Normalenvektoren $\vec{n}$, die Gleichung der Tangente t und die Ableitung in Richtung $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ samt Steigungswinkel α.
Bestimmen Sie für den größten Anstieg in P den zwei- und den dreidimensionalen Richtungsvektor und den maximalen Steigungswinkel α_{max}.

Bestimmen Sie für allgemeines x, y mit Hilfe von $\lim\limits_{h\to 0}$ die erste Ableitung in Richtung $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

$f_x(1|2)=\sqrt{2}$, $f_y(1|2)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$, T: $z=\sqrt{2}\,x+\dfrac{\sqrt{2}}{4}y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\vec{n}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ \sqrt{2}/4\\ -1\end{pmatrix}$ bzw. nach Erweitern mit $2\sqrt{2}$, $\vec{n}=\begin{pmatrix}4\\1\\-2\sqrt{2}\end{pmatrix}$. Aus $\vec{n}\bullet\vec{u}=\begin{pmatrix}4\\1\\-2\sqrt{2}\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}1\\-1\\u_z\end{pmatrix}=0$ folgt $u_z=\dfrac{3}{2\sqrt{2}}=\dfrac{3}{4}\sqrt{2}$, so dass

$$t:\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\ 3/4\cdot\sqrt{2}\end{pmatrix},\ r\in\mathbb{R}\,.$$

Mit dem Einheitsvektor $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ folgt die Richtungsableitung zu $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = f_x(1|2)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - f_y(1|2)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{4}$, so dass der Steigungswinkel $\alpha = \arctan(3/4) = 36{,}87°$ wird.

Oder auch $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \frac{u_z}{\sqrt{{u_x}^2 + {u_y}^2}} = \frac{3/4\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{3}{4}$.

Der maximale Anstieg in P erfolgt in der zweidimensionalen Richtung
$\operatorname{grad}(f)(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_x(x_0,y_0)\\ f_y(x_0,y_0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(1,2)\\ f_y(1,2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ \sqrt{2}/4\end{pmatrix}$.
Ein Normalenvektor $\vec{n}$ der Tangentialebene in P ist

$\vec{n} = \begin{pmatrix} f_x(1,2)\\ f_y(1)\\ -,21\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ \sqrt{2}/4\\ -1\end{pmatrix}$. Der dreidimensionale Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} f_x(1,2)\\ f_y(1,2)\\ u_z\end{pmatrix}$ in Richtung des größten Anstiegs folgt aus $0 = \vec{n}\bullet\vec{u} = \begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ \sqrt{2}/4\\ -1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ \sqrt{2}/4\\ u_z\end{pmatrix} = 2 + 1/8 - u_z$, also $u_z = \frac{17}{8}$, so dass $\vec{u} = \begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ \sqrt{2}/4\\ 17/8\end{pmatrix}$.

Für den maximalen Steigungswinkel α_{max} gilt $\tan\alpha = |\operatorname{grad}(f)(x_0, y_0)| = \left|\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ \sqrt{2}/4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{2+1/8} = \sqrt{17/8}$,

so dass $\alpha_{max} = 55{,}55°$.

α_{max} folgt auch aus $\vec{u} = \begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ \sqrt{2}/4\\ 17/8\end{pmatrix}$ mit $\tan\alpha_{max} = \frac{u_z}{\sqrt{{u_x}^2+{u_y}^2}} = \frac{17/8}{\sqrt{2+1/8}} = \frac{17/8}{\sqrt{17/8}} = \sqrt{17/8}$ wie eben.

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+1/\sqrt{2}\,h, y-1/\sqrt{2}\,h) - f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+1/\sqrt{2}\,h)\cdot\sqrt{y-1/\sqrt{2}\,h} - x\cdot\sqrt{y}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x\cdot\sqrt{y-1/\sqrt{2}\,h} + 1/\sqrt{2}\,h\cdot\sqrt{y-1/\sqrt{2}\,h} - x\cdot\sqrt{y}}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{x\cdot\sqrt{y-1/\sqrt{2}\,h} - x\cdot\sqrt{y}}{h} + \frac{1/\sqrt{2}\,h\cdot\sqrt{y-1/\sqrt{2}\,h}}{h}\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\left(x\cdot\sqrt{y-1/\sqrt{2}\,h} - x\cdot\sqrt{y}\right)\cdot\left(x\cdot\sqrt{y-1/\sqrt{2}\,h} + x\cdot\sqrt{y}\right)}{h\cdot\left(x\cdot\sqrt{y-1/\sqrt{2}\,h} + x\cdot\sqrt{y}\right)} + \frac{1/\sqrt{2}\,\cdot\sqrt{y-1/\sqrt{2}\,h}}{1}\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{x^2\cdot(y-1/\sqrt{2}\,h) - x^2\cdot y}{h\cdot\left(x\cdot\sqrt{y-1/\sqrt{2}\,h} + x\cdot\sqrt{y}\right)} + \frac{1/\sqrt{2}\,\cdot\sqrt{y-1/\sqrt{2}\,h}}{1}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{-x^2/\sqrt{2}}{x\cdot\sqrt{y-1/\sqrt{2}\,h} + x\cdot\sqrt{y}} + \frac{1/\sqrt{2}\,\cdot\sqrt{y-1/\sqrt{2}\,h}}{1}\right) =$$

$$= \frac{-x^2/\sqrt{2}}{x\cdot\sqrt{y} + x\cdot\sqrt{y}} + \frac{1/\sqrt{2}\,\cdot\sqrt{y}}{1} = -\frac{x}{2\sqrt{2y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2}} = \frac{2y-x}{2\sqrt{2y}}.$$

Probe: $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x,y) = f_x(x,y)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + f_y(x,y)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{y}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - x\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2}} - \frac{x}{2\sqrt{2y}} = \frac{2y-x}{2\sqrt{2y}}$.

c. Es sei $f(x,y) = x \cdot \ln(x \cdot y^2)$ und $P(1/-1/0)$ ein Punkt des Schaubilds.
Bestimmen Sie in P die beiden partiellen Ableitungen, die Gleichung der Tangentialebene T, einen ihrer Normalenvektoren $\vec{n}$, die Gleichung der Tangente t und die Ableitung in Richtung $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ samt Steigungswinkel α.
Bestimmen Sie für den größten Anstieg in P den zwei- und den dreidimensionalen Richtungsvektor und den maximalen Steigungswinkel α_{max}.

Es ist $f_x(x,y) = \ln(x \cdot y^2) + 1$ und $f_y(x,y) = \frac{2x}{y}$, also $f_x(1,-1) = 1$ und $f_y(1,-1) = -2$.

Tangentialebene $T: z = x - 2y - 3$ mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Aus $\vec{n} \bullet \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ u_z \end{pmatrix} = 0$ folgt $u_z = 5$, so dass

$$t: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Richtungsanleitung $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x_0, y_0) = \frac{1}{|\vec{a}|} \text{grad}(f)(x_0, y_0) \bullet \vec{a} = f_x(1,-1) \cdot \frac{-3}{5} + f_y(1|-1) \cdot \frac{-4}{5} = 1$.

Oder auch $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \frac{u_z}{\sqrt{u_x{}^2 + u_y{}^2}} = \frac{5}{\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}} = 1$. Aus $\tan(\alpha) = 1$ folgt $\alpha = 45°$.

Der zweidimensionale Richtungsvektor in Richtung des größten Anstiegs ist $\text{grad}(f) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Der dreidimensionale Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} f_x(1,-1) \\ f_y(1,-1) \\ u_z \end{pmatrix}$ in Richtung des größten Anstiegs folgt aus

$0 = \vec{n} \bullet \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ u_z \end{pmatrix} = 1 + 4 - u_z$, also $u_z = 5$, so dass $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Für den maximalen Steigungswinkel

α_{max} gilt $\tan\alpha = |\text{grad}(f)(x_0, y_0)| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{5}$, so dass $\alpha_{max} = 65{,}91°$.

Oder auch $\tan\alpha_{max} = \frac{u_z}{\sqrt{u_x{}^2 + u_y{}^2}} = \frac{5}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ wie eben.

d. Es sei $f(x,y,z) = 2x^2yz + 3xyz^3$ und $P(-1/2/1/-2)$ ein Punkt des Schaubilds. Bestimmen Sie in P die partiellen Ableitungen und die Ableitung in Richtung $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Mit $\text{grad}(f) = \begin{pmatrix} 4xyz + 3yz^3 \\ 2x^2z + 3xz^3 \\ 2x^2y + 9xyz^2 \end{pmatrix}$ folgt $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -14 \end{pmatrix} \bullet \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{25}{3}$.

6. Es sei x die nachgefragte Menge eines Gutes, das zum Preis p angeboten wird. $x = x(p)$ ist eine Funktion von p. $\varepsilon_{x,p}(p) = x'(p) \cdot \frac{p}{x(p)}$ gibt näherungsweise an, um wieviel % sich die nachgefragte Menge x ändert, wenn der Preis p um 1% steigt. $\varepsilon_{x,p}(p)$ heißt **Preiselastizität der Nachfrage**.

Gegeben ist die Funktion $p(x) = \frac{400}{x+5} - 8$.

a, Bestimmen Sie die Funktion $x = x(p)$ und die Preiselastizität $\varepsilon_{x,p}(p)$ der Nachfrage.

Es ist $x(p) = 5\frac{72-p}{p+8}$ und $\varepsilon_{x,p}(p) = x'(p)\cdot\frac{p}{x(p)} = \frac{80p}{(p-72)(p+8)}$.

b. Es sei $x_1 = 5$ und $x_2 = 35$. Bestimmen Sie jeweils $\varepsilon_{x,p}(p)$.

Aus $x_1 = 5$ folgt $p_1 = 32$ und somit $\varepsilon_{x,p}(32) = -1{,}6$.

Aus $x_1 = 35$ folgt $p_1 = 2$ und somit $\varepsilon_{x,p}(2) \approx -0{,}229$.

c. Für welchen Preis p und welche Menge x gilt $\varepsilon_{x,p}(p) = -1$?

Es folgt $p = -8 \pm 8\sqrt{10}$, also $p \approx 17{,}298$ und $x \approx 10{,}81$.

7. Es sei x die nachgefragte Menge eines Gutes, das zum Preis p angeboten wird. $x = x(p)$ ist eine Funktion von p. Es gelte $p(x) = 24 - 2x$. Die Kostenfunktion für die Gesamtmenge x sei $K(x) = 0{,}2x^2 + 2x + 5$.

a. Bestimmen Sie x so, dass der Gewinn G maximal wird.

$G(x) = x\cdot p(x) - K(x) = -2{,}2x^2 + 22x - 5$ ist maximal für $x = 5$.

b. Wie groß ist die Preiselastizität $\varepsilon_{x,p}(p)$ im Gewinnmaximum?

Für $x = 5$ ist $p = 14$ und folglich $\varepsilon_{x,p}(p) = \dot{x}(p)\cdot\frac{p}{x(p)} = -0{,}5\cdot\frac{p}{12-0{,}5p} = -1{,}4$, d.h. die Funktion $x(p)$ ist elastisch.

8. a. Es sei $f(x,y) = 2x\cdot y^2$.

Bestimmen Sie allgemein das totale Differenzial $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ und die relative Änderung $\frac{df}{f}$.

Es gilt $f(3|2) = 24$. Bestimmen Sie df, $\frac{df}{f}$ und $\Delta f = f(x_{neu}|y_{neu}) - f(x_{alt}|y_{alt})$, wenn x um 1% vergrößert und zugleich y um 2% verkleinert wird.

Bestimmen Sie die partiellen Elastizitäten $\varepsilon_{f,x}(x,y) = f_x(x,y)\cdot\frac{x}{f(x,y)}$ und $\varepsilon_{f,y}(x,y) = f_y(x,y)\cdot\frac{y}{f(x,y)}$ an der Stelle (3/2).

$df = 2y^2\,dx + 4xy\,dy$, $\frac{df}{f} = \frac{1}{x}dx + \frac{2}{y}dy$. $df = 2y^2\,dx + 4xy\,dy = 2\cdot 2^2\cdot 0{,}03 + 4\cdot 3\cdot 2\cdot(-0{,}04) = -0{,}72$,

$\frac{df}{f} = -0{,}03 = -3\%$ und $\Delta f = f(3{,}03|1{,}96) - f(3|2) = -0{,}719904$, was gut mit $-0{,}72$ übereinstimmt.

$\varepsilon_{f,x}(3,2) = f_x(3,2)\cdot\frac{3}{f(3,2)} = 8\cdot\frac{3}{24} = 1$ (Grenzbereich)

$\varepsilon_{f,y}(3,2) = f_y(3,2)\cdot\frac{2}{f(3,2)} = 24\cdot\frac{2}{24} = 2$ (elastisch)

b. Es sei $f(x,y) = 2x^2 + y^3$.

Bestimmen Sie allgemein das totale Differenzial $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ und die relative Änderung $\frac{df}{f}$.

Es gilt $f(1|2) = 10$. Bestimmen Sie df und Δf, wenn x um 2% und zugleich y um 1% vergrößert wird.

Bestimmen Sie die partiellen Elastizitäten $\varepsilon_{f,x}(x,y) = f_x(x,y)\cdot\frac{x}{f(x,y)}$ und $\varepsilon_{f,y}(x,y) = f_y(x,y)\cdot\frac{y}{f(x,y)}$ an der Stelle $(1|2)$.

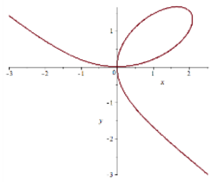
$df = 4x\,dx + 3y^2\,dy$, $\frac{df}{f} = \frac{4x\,dx + 3y^2\,dy}{2x^2 + y^3}$.

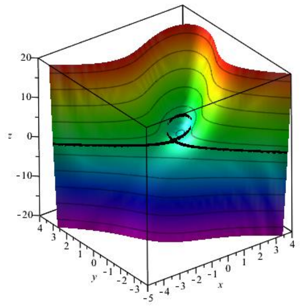
$df = 4x\,dx + 3y^2\,dy = 4\cdot 1\cdot 0{,}02 + 3\cdot 4\cdot 0{,}02 = 0{,}32$, $\Delta f = f(1{,}02|2{,}02) - f(1|2) = 0{,}323208$.

$\varepsilon_{f,x}(1|2) = f_x(1|2)\cdot\frac{1}{f(1|2)} = 4\cdot\frac{1}{10} = 0{,}4$ (unelastisch)

$$\varepsilon_{f,y}(1|2) = f_y(1|2)\cdot\frac{2}{f(1|2)} = 12\cdot\frac{2}{10} = 2{,}4 \quad \text{(elastisch)}$$

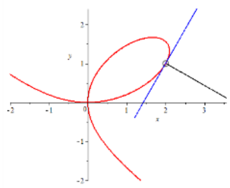
9. Es sei $f(x,y) = x^3 + 2y^3 - 5xy$.
   $f(x,y) = 0$ kann als implizit gegebene Kurve interpretiert werden; siehe linkes Schaubild.
   Andererseits kann $f(x,y) = 0$ als Höhenlinie $z = 0$ von $z = f(x,y)$ interpretiert werden; siehe rechtes Schaubild.
   Der Punkt $P(2|1|0)$ liegt auf dieser Höhenlinie.





   Bestimmen Sie die Ableitung y' der Kurve $f(x,y) = 0$ im Punkt $(2|1)$ durch implizite Differenziation.
   Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t im Punkt $(2|1)$.
   Bestimmen Sie den Gradienten von $z = f(x,y)$ im Punkt P.
   Zeigen Sie, dass der Gradient senkrecht auf der Tangente t steht.
   Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene T an das Schaubild im Punkt P.

   Aus $3x^2 + 6y^2\cdot y' - 5y - 5x\cdot y' = 0$ folgt mit $x = 2$ und $y = 1$ die Steigung $y' = \frac{7}{4}$ und



   $t: y = \frac{7}{4}x - \frac{5}{2}$. Ein Richtungsvektor von t ist also $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$.

   $\text{grad}(f) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 5y \\ 6y^2 - 5x \end{pmatrix}$ liefert mit $x = 2$ und $y = 1$ den Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$.

   Und in der Tat: $\vec{n}\bullet\vec{u} = 28 - 28 = 0$.

   $T: z = 7(x-2) - 4(y-1) + 0$. bzw. $T: z = 7x - 4y - 10$ mit dem Normalenvektor $\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

10. Gegeben ist die Produktionsfunktion $f(x,y)$. Untersuchen Sie auf Homogenität und bestimmen Sie gegebenenfalls den Homogenitätsgrad.

   a. $f(x,y) = \left(a\cdot x^\alpha + b\cdot y^\alpha\right)^{1/\alpha}$ für $x, y > 0$, $a, b > 0$ und $\alpha \neq 0$.

   b. $f(x,y) = 2x^2\cdot y^3 + 3x^3\cdot y$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

   c. $f(x,y) = x\cdot y\cdot \ln\left(\frac{x^2 + 2x\cdot y + 3y^2}{5x\cdot y}\right)$ für $x, y > 0$.

   d. $f(x,y) = \frac{y}{x}$ für $x, y > 0$.

   a. $f(k\cdot x,\ k\cdot y) = \left(a\cdot(k\cdot x)^\alpha + b\cdot(k\cdot y)^\alpha\right)^{1/\alpha} = \left(k^\alpha\cdot\left[a\cdot x^\alpha + b\cdot y^\alpha\right]\right)^{1/\alpha} = k\cdot\left(a\cdot x^\alpha + b\cdot y^\alpha\right)^{1/\alpha} = k\cdot f(x,y)$.
   Homogen vom Grad 1.

   b. $f(k\cdot x,\ k\cdot y) = 2(k\cdot x)^2\cdot(k\cdot y)^3 + 3(k\cdot x)^3\cdot(k\cdot y) = k^5\cdot 2x^2\cdot y^3 + k^4\cdot 3x^3\cdot y$. Nicht homogen.

   c. $f(k\cdot x, k\cdot y) = k\cdot x\cdot k\cdot y\cdot\ln\left(\frac{(k\cdot x)^2 + 2\cdot k\cdot x\cdot k\cdot y + 3(k\cdot y)^2}{5\cdot k\cdot x\cdot k\cdot y}\right) = k^2\cdot x\cdot y\cdot\ln\left(\frac{x^2 + 2x\cdot y + 3y^2}{5x\cdot y}\right) = k^2\cdot f(x,y)$.
   Homogen vom Grad 2.

   d. $f(k\cdot x, k\cdot y) = \frac{k\cdot y}{k\cdot x} = k^0\cdot f(x,y)$. Homogen vom Grad 0.

11. Es sei f eine homogene Funktion vom Grad λ. Zeigen Sie allgemein, dass die beiden partiellen Ableitungen $f_x(x,y)$ und $f_y(x,y)$ homogen vom Grad $\lambda-1$ sind.

Prüfen Sie dies für die Funktion $f(x,y)=\left(a\cdot x^{\alpha}+b\cdot y^{\alpha}\right)^{1/\alpha}$ für $x,y>0$, $a,b>0$ und $\alpha\neq 0$ von Aufgabe 8a. und für $g(x,y)=2x^2\cdot y^3+3x^4\cdot y$, $x,y\in\mathbb{R}$.

Es gelte $f(k\cdot x,\, k\cdot y)=k^{\lambda}\cdot f(x,y)$. Nach der Kettenregel folgt daraus durch partielles Ableiten
nach x: $f_x(k\cdot x,\, k\cdot y)\cdot k=k^{\lambda}\cdot f_x(x,y)$, folglich $f_x(k\cdot x,\, k\cdot y)=k^{\lambda-1}\cdot f_x(x,y)$,
nach y: $f_y(k\cdot x,\, k\cdot y)\cdot k=k^{\lambda}\cdot f_y(x,y)$, folglich $f_y(k\cdot x,\, k\cdot y)=k^{\lambda-1}\cdot f_y(x,y)$.

Zu Aufgabe 8a: Mit $f_x(x,y)=\frac{1}{\alpha}\cdot\left(a\cdot x^{\alpha}+b\cdot y^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}\cdot a\cdot\alpha\cdot x^{\alpha-1}=a\cdot\left(a\cdot x^{\alpha}+b\cdot y^{\alpha}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\cdot x^{\alpha-1}$ folgt

$$f_x(k\cdot x,\, k\cdot y)=a\cdot\left(a\cdot(k\cdot x)^{\alpha}+b\cdot(k\cdot y)^{\alpha}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\cdot(k\cdot x)^{\alpha-1}=\left(k^{\alpha}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\cdot k^{\alpha-1}\cdot f_x(x,y)=k^0\cdot f_x(x,y)=f_x(x,y).$$

Zu $g(x,y)$: g hat den Grad 5.
Mit $g_x(x,y)=4x\cdot y^3+12x^3\cdot y$ und $g_y(x,y)=6x^2\cdot y^2+3x^4$ folgt
$g_x(k\cdot x,k\cdot y)=4(k\cdot x)\cdot(k\cdot y)^3+12(k\cdot x)^3\cdot(k\cdot y)=k^4\cdot g_x(x,y)$ und
$g_y(k\cdot x,k\cdot y)=6(k\cdot x)^2\cdot(k\cdot y)^2+3(k\cdot x)^4)=k^4\cdot g_y(x,y)$.

12. Bestimmen Sie jeweils allgemein $f_x=\frac{\partial f}{\partial x}$, $f_y=\frac{\partial f}{\partial y}$, $f_{xx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $f_{yy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $f_{xy}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, $f_{yx}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$.

a. $f(x,y)=\sqrt{2x^2-xy^2}$

$$f_x(x,y)=\frac{4x-y^2}{2\sqrt{2x^2-xy^2}}\,,\quad f_y(x,y)=-\frac{xy}{\sqrt{2x^2-xy^2}}\,,$$

$$f_{xx}(x,y)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4\cdot\sqrt{2x^2-xy^2}-(4x-y^2)\cdot\frac{4x-y^2}{2\cdot\sqrt{2x^2-xy^2}}}{2x^2-xy^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{8\cdot(2x^2-xy^2)-(4x-y^2)^2}{2\cdot(2x^2-xy^2)^{3/2}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{16x^2-8xy^2-16x^2+8xy^2-y^4}{(2x^2-xy^2)^{3/2}}=-\frac{y^4}{4\cdot(2x^2-xy^2)^{3/2}}\,,$$

$$f_{xy}(x,y)=\frac{1}{2}\cdot\frac{-2y\cdot\sqrt{2x^2-xy^2}-(4x-y^2)\cdot\frac{-\cancel{2}xy}{\cancel{2}\sqrt{2x^2-xy^2}}}{2x^2-xy^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{-2y\cdot(2x^2-xy^2)+(4x-y^2)\cdot xy}{(2x^2-xy^2)^{3/2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{-4x^2y+2xy^3+4x^2y-xy^3}{(2x^2-xy^2)^{3/2}}=$$

$$=\frac{xy^3}{2\cdot x^{3/2}\cdot(2x-y^2)^{3/2}}=\frac{y^3}{2\cdot x^{1/2}\cdot(2x-y^2)^{3/2}}\,,$$

$$f_{yy}(x,y)=-\frac{x\cdot\sqrt{2x^2-xy^2}-xy\cdot\frac{-\cancel{2}xy}{\cancel{2}\sqrt{2x^2-xy^2}}}{2x^2-xy^2}=\frac{x\cdot(2x^2-xy^2)+x^2y^2}{(2x^2-xy^2)^{3/2}}=\frac{2x^3}{(2x^2-xy^2)^{3/2}}=\frac{2x^3}{x^{3/2}(2x-y^2)^{3/2}}=\frac{2x^{3/2}}{(2x-y^2)^{3/2}}\,.$$

b. $f(x,y)=\ln(1+x^2y)$

$$f_x(x,y)=\frac{2xy}{1+x^2y}\,,\quad f_y(x,y)=\frac{x^2}{1+x^2y}\,,\quad f_{xx}(x,y)=-\frac{2y(-1+x^2y)}{(1+x^2y)^2}\,,\quad f_{yy}(x,y)=-\frac{x^4}{(1+x^2y)^2}\,,$$

$$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=\frac{2x}{(1+x^2y)^2}$$

13. Es sei $f(x,y)=\begin{cases} x\cdot y\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{für } (x,y)=(0,0)\end{cases}$. Zeigen Sie, dass $f(x,y)$ in ganz $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

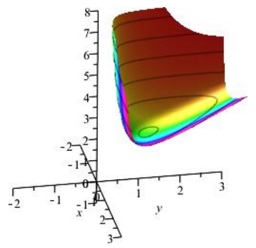
Zur Stelle $(0,0)$: Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt

$\left|f(x,y)-f(0,0)\right| = \left|x \cdot y \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right| = |x| \cdot |y| \cdot \frac{\left|x^2-y^2\right|}{x^2+y^2} \leq |x| \cdot |y| \cdot \frac{\left|x^2+y^2\right|}{x^2+y^2} = |x| \cdot |y|$. Da auf jedem Weg von $(x,y) \neq (0,0)$ nach $(0,0)$ sowohl $|x|$ als auch $|y|$ gegen 0 streben, muss auch $f(x,y)-f(0,0)$ gegen 0 streben.

Für alle übrigen Stellen ist $f(x,y)$ Produkt und Quotient stetiger Funktionen, wobei der Nenner nicht Null ist.

14. Untersuchen Sie jeweils auf relative Extremwerte. Untersuchen Sie dabei die Definitheit der Hesse-Matrix H einmal über die Determinanten der Hauptuntermatrizen und einmal mit Hilfe der Eigenwerte von H.

a. $f(x,y) = x + y + \frac{1}{x \cdot y}$



$f_x(x,y) = 1 - \frac{1}{x^2 y}$, $f_y(x,y) = 1 - \frac{1}{xy^2}$. Aus $\operatorname{grad} f = 0$ folgt $x_0 = 1$, $y_0 = 1$.

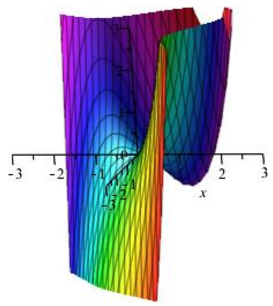
$H(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3 y} & \frac{1}{x^2 y^2} \\ \frac{1}{x^2 y^2} & \frac{2}{xy^3} \end{pmatrix}$, also $H(1|1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$\det H_1(1|1) = 2 > 0$ und $\det H_2(1|1) = \det H(1|1) = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3 > 0$, also ist $H(1|1)$ positiv definit. Somit hat f an der Stelle $(1|1)$ ein Minimum. Der Tiefpunkt ist somit $T(1|1|3)$.

Die charakteristische Gleichung lautet $(2-\lambda)^2 - 1 = 0$ mit den beiden Eigenwerten $\lambda_1 = 3 > 0$ und $\lambda_2 = 1 > 0$. Also ist $H(1|1)$ wiederum positiv definit.

b. $f(x,y) = x^3 - 3x \cdot y + y^3$

Aus $\operatorname{grad} f = 0$ folgen die beiden Punkte $(0|0)$ und $(1|1)$.



$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$.

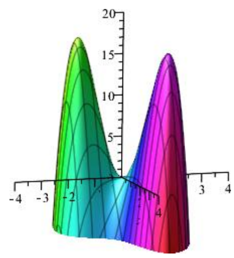
Zu $(0|0)$: $\det H_1(0|0) = 0$, also kein Extremum

Zu $(1|1)$: $\det H_1(1|1) = 6 > 0$ und $\det H_2(1|1) = \det H(1|1) = 36 - 9 = 27 > 0$. Somit hat f an der Stelle $(1|1)$ ein Minimum. Der Tiefpunkt ist somit $T(1|1|-1)$.

Zu $(0|0)$: Die charakteristische Gleichung lautet $(-\lambda)^2 - 9 = 0$ mit den beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 3 > 0$ und $\lambda_2 = -3 < 0$, d.h. $H_1(0|0)$ ist indefinit. Also ist $S(0/0/0)$ ein Sattelpunkt.

Zu $(1|1)$: Die charakteristische Gleichung lautet $(6-\lambda)^2 - 9 = 0$ mit den beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 3 > 0$ und $\lambda_2 = 9 > 0$, so dass $H(1|1)$ wiederum positiv definit ist. Also ist $T(1|1|-1)$ ein relativer (lokaler) Tiefpunkt. T ist kein absolutes Minimum, den z.B. liegt $P(-2|-1|-15)$ tiefer als T.

c. $f(x,y) = 16xy - \left(\frac{1}{2}x + y\right)^4$



Aus $\operatorname{grad} f = 0$ folgen die drei Punkte $(0|0)$, $(2|1)$ und $(-2|-1)$.

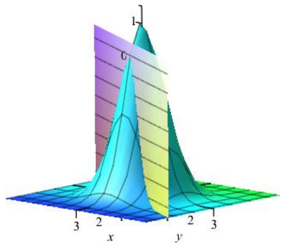
$$H(x,y) = \begin{pmatrix} -3\left(\frac{1}{2}x+y\right)^2 & 16-6\left(\frac{1}{2}x+y\right)^2 \\ 16-6\left(\frac{1}{2}x+y\right)^2 & -12\left(\frac{1}{2}x+y\right)^2 \end{pmatrix}$$

$H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 16 & 0 \end{pmatrix}$ ist indefinit, $H(2,1) = H(-2,-1) = \begin{pmatrix} -12 & -8 \\ -8 & -48 \end{pmatrix}$ sind negativ definit.

Die Eigenwerte zu $(0|0)$ sind $\lambda_{1,2} = \pm 16$, und zu $(2|1)$ und $(-2|-1)$ $\lambda_{1,2} = -30 + 2\sqrt{97}$, beide negativ.

Die Hochpunkte sind somit $H_1(2|1|16)$ und $H_2(-2|-1|16)$. $S(0/0/0)$ ist ein Sattelpunkt.

15. a. Es sei $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$. Untersuchen Sie das Schaubild von f auf Extrempunkte unter der Bedingung $2x-y-1=0$.



α. Lösen Sie die Bedingung nach y auf und setzen Sie das Ergebnis in $f(x,y)$ ein, so dass f nur noch eine Variable enthält.

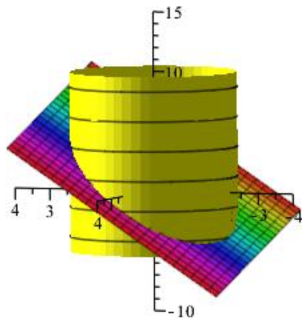
Für $g(x)=f(x,y)=e^{-x^2-y^2}=e^{-x^2-(2x-1)^2}=e^{-5x^2+4x-1}$ ist

$g'(x)=(-10x+4)\cdot e^{-5x^2+4x-1}$ und $g''(x)=(100x^2-80x+6)\cdot e^{-5x^2+4x-1}$. Es folgt der Hochpunkt $H\left(\frac{2}{5}\middle|-\frac{1}{5}\middle|e^{-\frac{1}{5}}\right)$.

β. Verwenden Sie die Lagrangesche Multiplikatorregel.

$F(x,y,\lambda)=e^{-x^2-y^2}+\lambda\cdot(y-2x+1)$. Aus $F_x(x,y,\lambda)=-2x\cdot e^{-x^2-y^2}-2\lambda=0$, $F_y(x,y,\lambda)=-2y\cdot e^{-x^2-y^2}+\lambda=0$ und $F_\lambda(x,y,\lambda)=y-2x+1=0$ folgt $x=\frac{2}{5}$, $y=-\frac{1}{5}$ und $\lambda=-\frac{2}{5}e^{-\frac{1}{5}}$.

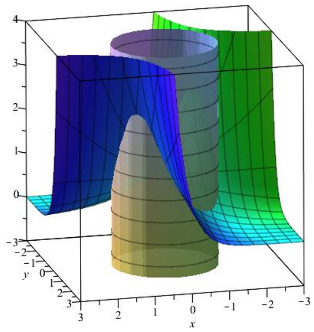
b. Es sei $f(x,y)=2x-y+1$. Untersuchen Sie das Schaubild von f auf Extrempunkte unter der Bedingung $x^2+y^2=5$ mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatorregel.



$F(x,y,\lambda)=2x-y+1+\lambda\cdot(x^2+y^2-5)$.

Aus $F_x(x,y,\lambda)=2+2\lambda x=0$, $F_y(x,y,\lambda)=-1+2\lambda y=0$ und $F_\lambda(x,y,\lambda)=x^2+y^2-5=0$ folgt $x_1=-2$, $y_1=1$, $\lambda_1=1/2$ und $x_2=2$, $y_2=-1$, $\lambda_2=-1/2$. Man erkennt den Tiefpunkt $T(-2|1|-4)$ und den Hochpunkt $H(2|-1|6)$.

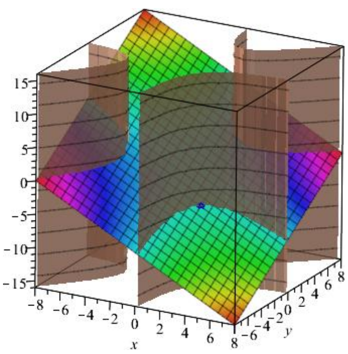
c. Es sei $f(x,y)=e^{x\cdot y}$. Untersuchen Sie das Schaubild von f auf Extrempunkte unter der Bedingung $x^2+y^2=2$ mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatorregel.



$F(x,y,\lambda)=e^{x\cdot y}+\lambda\cdot(x^2+y^2-2)$.

$F_x(x,y,\lambda)=y\cdot e^{x\cdot y}+2\lambda x=0$, $F_y(x,y,\lambda)=x\cdot e^{x\cdot y}+2\lambda y=0$ und $F_\lambda(x,y,\lambda)=x^2+y^2-2=0$. Aus $y\cdot e^{x\cdot y}=-2\lambda x$ und $x\cdot e^{x\cdot y}=-2\lambda y$ folgt durch Division die Beziehung $x^2=y^2$. Die Nebenbedingung liefert daraus $x^2=y^2=1$. Somit erhalten wir vier Punkte $H(1/1/e)$, $T(-1/1/e^{-1})$, $T(1/-1/e^{-1})$, $H(-1/-1/e)$.

d. Es sei $f(x,y)=y-x$. Untersuchen Sie das Schaubild von f auf Extrempunkte unter der Bedingung $x^2\cdot y-x\cdot y^2+16=0$ mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatorregel.



$F(x,y,\lambda)=y-x+\lambda\cdot(x^2\cdot y-x\cdot y^2+16)$.

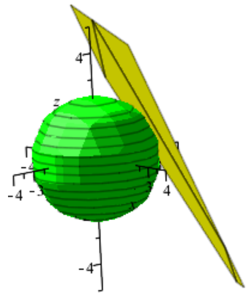
$F_x(x,y,\lambda)=-1+\lambda(2x\cdot y-y^2)=0$, $F_y(x,y,\lambda)=1+\lambda(x^2-2x\cdot y)=0$ und $F_\lambda(x,y,\lambda)=x^2\cdot y-x\cdot y^2+16=0$. Aus den ersten beiden Gleichungen folgt $x^2=y^2$, d.h. $y=\pm x$.

Einsetzen in die Nebenbedingung zeigt, dass $y=x$ nicht möglich ist.

Mit $y=-x$ folgt mit Hilfe der Nebenbedingung $x=2$ und $y=-2$.

Im Schaubild erkennt man, dass $H(2/-2/-4)$ ein Hochpunkt ist.

e. Es sei $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$. Untersuchen Sie das Schaubild von f auf Extrempunkte unter der Bedingung $x+2y+z=6$ mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatorregel. Anschaulich bedeutet die Nebenbedingung gerade die Tangentialebene an die Kugel f.



$F(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2+\lambda\cdot(x+2y+z-6)$. Die 4 Gleichungen führen auf $x=1$, $y=2$, $z=1$, $\lambda=-2$. Also $B(1|2|1|6)$.

f. Es sei $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2+1$. Untersuchen Sie das Schaubild von f auf Extrempunkte unter der Bedingung $x+2y+z=4$ mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatorregel.

$F(x,y,\lambda)=x^2+y^2-z^2+1+\lambda\cdot(x+2y+z-4)$. Die 4 Gleichungen führen auf $x=1$, $y=2$, $z=-1$, $\lambda=-2$.

g. Für die Fertigung eines Produktes X (Menge x) werden zwei Produktionsfaktoren A (Menge a) und B (Menge b) eingesetzt. Die zugehörige Produktionsfunktion ist $x=f(a,b)=10-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$. Der Gewinn des Unternehmens ergibt sich aus der Funktion $G(x,a,b)=9x-a-4b$. Bestimmen Sie a und b so, dass der Gewinn am größten wird. Verwenden Sie die Lagrangesche Multiplikatorregel.

$F(x,a,b,\lambda)=9x-a-4b+\lambda\cdot\left(x-10+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$. Es folgt $F_x=9+\lambda=0$, $F_a=-1-\frac{\lambda}{a^2}=0$,

$F_b=-4-\frac{\lambda}{b^2}=0$ und $F_\lambda=x-10+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=0$. Lösung: $a=3$, $b=\frac{3}{2}$, $x=9$ und $\lambda=-9$

16. Bestimmen Sie das Minimum von $u=f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ unter den beiden Bedingungen $\varphi_1(x,y,z)=x+y-1=0$ und $\varphi_2(x,y,z)=y+z-2=0$ einmal nach Lagrange und einmal mit der Substitution $x=1-y$ und $z=2-y$.

Die Lagrangesche Hilfsfunktion lautet $F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=x^2+y^2+z^2+\lambda_1\cdot(x+y-1)+\lambda_2\cdot(y+z-2)$.

$$\begin{cases} F_x(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &= 2x+\lambda_1=0\\ F_y(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &= 2y+\lambda_1+\lambda_2=0\\ F_z(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &= 2z+\lambda_2=0\\ F_{\lambda_1}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &= x+y-1=0\\ F_{\lambda_2}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &= y+z-2=0 \end{cases}$$

Dieses LGS hat die Lösung $x=0,\ y=1,\ z=1,\ \lambda_1=0,\ \lambda_2=-2$.

$u=f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=(1-y)^2+y^2+(2-y)^2=3y^2-6y+5$ minimal für $y=1$, folglich $x=0$ und $z=1$.

17. Die Taylorreihe für eine Funktion $f(x,y)$ mit zwei Variablen um die Stelle (a/b) lautet

$$\begin{aligned} f(x,y)&=f(a,b)+\\ &+f_x(a,b)\cdot(x-a)+f_y(a,b)\cdot(y-b)+\\ &+\frac{1}{2!}f_{xx}(a,b)\cdot(x-a)^2+f_{xy}(a,b)\cdot(x-a)\cdot(y-b)+\frac{1}{2!}f_{yy}(a,b)\cdot(y-b)^2+\\ &+\frac{1}{3!\cdot0!}f_{xxx}(a,b)\cdot(x-a)^3+\frac{1}{2!\cdot1!}f_{xxy}(a,b)\cdot(x-a)^2\cdot(y-b)+\frac{1}{1!\cdot2!}f_{xyy}(a,b)\cdot(x-a)\cdot(y-b)^2+\frac{1}{0!\cdot3!}f_{yyy}(a,b)\cdot(y-b)^3+\\ &+\ldots \end{aligned}$$

Entwickeln Sie $f(x,y)=\sqrt{2x+y}$ um den Punkt $(1/2)$ bis zur 3. Ordnung.

Mit $f_x(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2x+y}}$, $f_y(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{2x+y}}$, $f_{xx}(x,y)=-\frac{1}{(2x+y)^{3/2}}$, $f_{xy}(x,y)=-\frac{1}{2(2x+y)^{3/2}}$,

$f_{yy}(x,y)=-\frac{1}{4(2x+y)^{3/2}}$, $f_{xxx}(x,y)=\frac{3}{(2x+y)^{5/2}}$, $f_{xxy}(x,y)=\frac{3}{2(2x+y)^{5/2}}$,

$f_{xyy}(x,y)=\frac{3}{4(2x+y)^{5/2}}$ und $f_{yyy}(x,y)=\frac{3}{8(2x+y)^{5/2}}$. Dann folgt

$$f(x,y)\approx 2+\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{4}(y-2)-\frac{1}{16}\cdot(x-1)^2-\frac{1}{16}\cdot(x-1)(y-2)-\frac{1}{64}\cdot(y-2)^2+$$
$$+\frac{1}{64}(x-1)^3+\frac{3}{128}(y-2)(x-1)^2+\frac{3}{256}(x-1)(y-2)^2+\frac{1}{512}(y-2)^3 .$$

17. Wie lautet die Taylorreihe für eine Funktion $f(x,y,z)$ mit der Variablen um die Stelle $(a/b/c)$?

$$f(x,y,z)=f(a,b,c)+$$

$$+\frac{1}{1!\cdot 0!\cdot 0!}f_x(a,b,c)\cdot(x-a)+\frac{1}{0!\cdot 1!\cdot 0!}f_y(a,b,c)\cdot(y-b)+\frac{1}{0!\cdot 0!\cdot 1!}f_z(a,b,c)\cdot(z-b)+$$

$$+\frac{1}{2!\cdot 0!\cdot 0!}f_{xx}(a,b.c)\cdot(x-a)^2+\frac{1}{0!\cdot 2!\cdot 0!}f_{yy}(a,b,c)\cdot(y-b)^2+\frac{1}{0!\cdot 0!\cdot 2!}f_{zz}(a,b,c)\cdot(z-c)^2+$$
$$+\frac{1}{1!\cdot 1!\cdot 0!}f_{xy}(a,b.c)\cdot(x-a)\cdot(y-b)+\frac{1}{1!\cdot 0!\cdot 1!}f_{xz}(a,b,c)\cdot(x-a)\cdot(z-c)+\frac{1}{0!\cdot 1!\cdot 1!}f_{yz}(a,b,c)\cdot(y-b)\cdot(z-c)+$$

$$+\frac{1}{3!\cdot 0!\cdot 0!}f_{xxx}(a,b,c)\cdot(x-a)^3+\frac{1}{1!\cdot 2!\cdot 0!}f_{xyy}(a,b,c)\cdot(x-a)\cdot(y-b)^2+\frac{1}{1!\cdot 0!\cdot 2!}f_{xzz}(a,b,c)\cdot(x-a)\cdot(z-c)^2$$
$$+\frac{1}{2!\cdot 1!\cdot 0!}f_{xxy}(a,b,c)\cdot(x-a)^2\cdot(y-b)+\frac{1}{2!\cdot 0!\cdot 1!}f_{xxz}(a,b,c)\cdot(x-a)^2\cdot(z-c)+\frac{1}{1!\cdot 1!\cdot 1!}f_{xyz}(a,b,c)\cdot(x-a)\cdot(y-b)\cdot(z-c)+$$
$$+\frac{1}{0!\cdot 3!\cdot 0!}f_{yyy}(a,b,c)\cdot(y-b)^3+\frac{1}{0!\cdot 1!\cdot 2!}f_{yzz}(a,b,c)\cdot(y-b)\cdot(z-c)^2+\frac{1}{0!\cdot 2!\cdot 1!}f_{yyz}(a,b,c)\cdot(y-b)^2\cdot(z-c)+$$
$$\frac{1}{0!\cdot 0!\cdot 3!}f_{zzz}(a,b,c)\cdot(z-c)^3+$$
$$+\cdots$$

Man kann die Anzahl der jeweiligen Summanden bestimmen:
Wenn aus n verschiedenen Gegenständen k ausgewählt werden sollen, die auch gleich sein können, und deren Reihenfolge nicht berücksichtigt wird, dann gibt es $\binom{n+k-1}{k}$ Möglichkeiten. Man spricht von „Kombinationen mit Wiederholung“.

In dieser Aufgabe ist $n=3$ die Anzahl der Variablen.

Für $k=1$ wird eine Variable ausgewählt und es gibt $\binom{n+k-1}{k}=\binom{3+1-1}{1}=\binom{3}{1}=3$ Summanden.

Für $k=2$ werden zwei Variablen ausgewählt und es gibt $\binom{n+k-1}{k}=\binom{3+2-1}{2}=\binom{4}{2}=6$ Summanden.

Für $k=3$ werden drei Variablen ausgewählt und es gibt $\binom{n+k-1}{k}=\binom{3+3-1}{3}=\binom{5}{3}=10$ Summanden.

Für $k=4$ wären es schon $\binom{n+k-1}{k}=\binom{3+4-1}{4}=\binom{6}{4}=15$ Summanden.