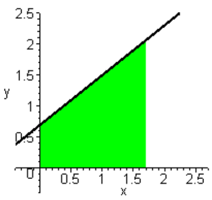
1. Einführung

1. Gegeben ist für $m, b > 0$ die Gerade $g(x) = m \cdot x + c$. Bestimmen Sie $\int_0^b g(x)\,dx$ mit



Hilfe von Unter- und Obersumme.

Hinweis: Mit $\Delta x = \frac{b}{n}$ folgt $U_n = \sum_{i=0}^{n-1} g(i \cdot \Delta x) \cdot \Delta x$ und $O_n = \sum_{i=1}^{n} g(i \cdot \Delta x) \cdot \Delta x$.

Führen Sie die Grenzwerte für $n \to \infty$ aus.

$$U_n = \sum_{i=0}^{n-1} (m \cdot i \cdot \Delta x + c) \cdot \Delta x = m \cdot (\Delta x)^2 \sum_{i=0}^{n-1} i + \sum_{i=0}^{n-1} c \cdot \Delta x = m \cdot \left(\frac{b}{n}\right)^2 \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2} + n \cdot c \cdot \frac{b}{n} =$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot b^2 + c \cdot b \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{2} m \cdot b^2 + c \cdot b \;.$$

$$O_n = \sum_{i=1}^{n} (m \cdot i \cdot \Delta x + c) \cdot \Delta x = m \cdot (\Delta x)^2 \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} c \cdot \Delta x = m \cdot \left(\frac{b}{n}\right)^2 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + n \cdot c \cdot \frac{b}{n} =$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot b^2 + c \cdot b \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{2} m \cdot b^2 + c \cdot b \;.$$

2. Bestimmen Sie jeweils alle Stammfunktionen:

$f_1(x) = \frac{2x^2}{3} - \frac{x}{2} + 1 - \frac{3}{2x} + \frac{4}{3x^2}$, $\quad f_2(x) = \sin x - 2\cos(2x) + 3\sin(3x) - 4\cos(4x)$,

$f_3(x) = (1-2x)^2 + (1-2x)^1 + (1-2x)^0 + (1-2x)^{-1} + (1-2x)^{-2}$.

$F_1(x) = \frac{2x^3}{9} - \frac{x^2}{4} + x - \frac{3}{2}\ln|x| - \frac{4}{3x} + c$, $\quad F_2(x) = -\cos x - \sin(2x) - \cos(3x) - \sin(4x) + c$,

$$F_3(x) = -\frac{1}{6}(1-2x)^3 - \frac{1}{4}(1-2x)^2 + x - \frac{1}{2}\ln(1-2x) + \frac{1}{2(1-2x)} + c$$

3. Bestimmen Sie die Integrale:

$I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = 1$, $\quad I_2 = \int_0^{\pi} \cos x\,dx = 0$, $\quad I_3 = \int_0^{\pi} \sin(2x)\,dx = 0$, $\quad I_4 = \int_1^2 (1-x)^2\,dx = \frac{1}{3}$, $\quad I_5 = \int_1^e \frac{1}{x}\,dx = 1$,

$I_6 = \int_{-e^2}^{-1/e} \frac{1}{x}\,dx = -3$, $\quad I_7 = \int_{-1}^{1} \frac{2}{3x}\,dx$ nicht definiert, $\quad I_8 = \int_{b/a}^{2b/a} (ax-b)^2\,dx = \frac{b^3}{3a}$,

$I_9 = \int_0^{\ln 2} \sinh(3x)\,dx = \frac{1}{3}\left[\cosh(3x)\right]_0^{\ln 2} = \frac{49}{48}$, wobei $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ und $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

$$I_{10} = \int_{-1}^{0} \left(3x^2 - 2x - 3 - \frac{2}{2x-1}\right) dx = \left[x^3 - x^2 - 3x - \ln(|2x-1|)\right]_{-1}^{0} = \underbrace{-\ln(1)}_{=0} - \left(-1 - 1 + 3 - \ln(3)\right) = -1 + \ln(3)\,.$$

$$I_{11} = \int_{-1}^{1} \left(3 \cdot (2x+3)^2 - 9 \cdot (2x+3) + \frac{2}{2x+3} + \frac{5}{(2x+3)^2}\right) dx = \left[\frac{1}{2}(2x+3)^3 - \frac{9}{4} \cdot (2x+3)^2 + \ln(|2x+3|) - \frac{5}{2 \cdot (2x+3)}\right]_{-1}^{1}$$

$= 10 + \ln(5)$.

$$I_{12} = \int_{-1}^{2} \left(-9x^2 - 8x + 1 - \frac{4}{2x-5} + \frac{1}{3}(7-2x)^2\right) dx = \left[-3x^3 - 4x^2 + x - 2\ln\left(|2x-5|\right) - \frac{1}{18}(7-2x)^3\right]_{-1}^{2} = 3 + 2\ln(7)$$

$$I_{13} = \int_1^2 \left(3 \cdot (3-2x)^2 + \frac{1}{3 \cdot (3-x)} + \frac{2}{3x}\right) dx = \left[-\tfrac{1}{2}(3-2x)^3 - \frac{1}{3}\ln\left(|3-x|\right) + \frac{2}{3}\ln\left(|x|\right)\right]_1^2 = 1 + \ln(2)$$

$$I_{14}=\int_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{9}(2x-1)^3-\frac{4}{2x-1}+\frac{25}{(2x-1)^3}\right)dx=\left[\frac{1}{72}(2x-1)^4-2\ln(|2x-1|)-\frac{25}{4\cdot(2x-1)^2}\right]_{-2}^{-1}=2\ln(5)-2\ln(3)-8$$

$$I_{15}=\int_0^2\frac{3}{2\sqrt{1+12x}}dx=\int_0^2\frac{3}{2}(1+12x)^{-\frac{1}{2}}dx=\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{12}(1+12x)^{\frac{1}{2}}\right]_0^2=\frac{1}{4}(5-1)=1$$

$$I_{16}=\int_0^4\frac{1}{2\sqrt{9+4x}}dx=\int_0^4\frac{1}{2}(9+4x)^{-\frac{1}{2}}dx=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{4}(9+4x)^{\frac{1}{2}}\right]_0^4=\frac{1}{4}(5-3)=\frac{1}{2}$$

$$I_{17}=\int_2^3\left(\frac{6}{3x-5}-\frac{3}{\sqrt{3x-5}}\right)dx=\left[2\ln(3x-5)-3\sqrt{3x-5}\right]_2^3=2\ln(4)-2$$

2. Integration durch Substitution

$I_1=\int_0^1\frac{x}{(x^2+1)^3}dx$ mit der Substitution $u=x^2+1$ und Transformation der Integrationsgrenzen. Ergebnis $\frac{3}{16}$.

$I_2(x)=\int\frac{x^5}{4+x^2}dx$ mit der Substitution $u=4+x^2$. Ergebnis: $\frac{1}{4}x^4-2x^2+8\ln\left(4+x^2\right)$.

$I_3(x)=\int\frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$ mit der Substitution $u=e^x$. Ergebnis: $\arctan\left(e^x\right)$, da $\arctan' x=\frac{1}{1+x^2}$

$I_4(x)=\int\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx$ mit der Substitution $u=e^{2x}+1$. Ergebnis: $\frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right)$

$I_5(x)=\int\frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}dx$ mit der Substitution $u=e^x$ und dann Polynomdivision. Ergebnis: $e^x-\arctan\left(e^x\right)$

$I_6(x)=\int\frac{e^{4x}}{e^{2x}+1}dx$ mit der Substitution $u=e^{2x}+1$ und dann Polynomdivision. Ergebnis: $\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right)$

$I_7(x)=\int\frac{e^{5x}}{e^{2x}+1}dx$ mit der Substitution $u=e^x$ und dann Polynomdivision. Ergebnis: $\frac{1}{3}e^{3x}-e^x+\arctan\left(e^x\right)$

$I_8(x)=\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx$ für eine stetige Funktion $f(x)\neq 0$. Ergebnis: $\ln|f(x)|$

$I_9(x)=\int\cos^n(x)\cdot\sin(x)\,dx$ für $n\neq -1$. Ergebnis: $-\frac{\cos^{n+1}x}{n+1}$

$I_{10}(x)=\int\tan x\,dx$ mit der Substitution $u=\cos x$. Ergebnis: $-\ln|\cos x|$

$I_{11}(x)=\int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$ mit der Substitution $u=x+\sqrt{x^2-1}$ folgt $\frac{1}{u}du=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$. Ergebnis: $\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$

$I_{12}(x)=\int\frac{2x-3}{5x-6}dx$ mit der Substitution $u=5x-6$ folgt $du=5\,dx$. Ergebnis $\frac{2}{5}x-\frac{3}{25}\ln|5x-6|$.

Oder zuerst Polynomdivision $\frac{2x-3}{5x-6}=\frac{2}{5}-\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{5x-6}$.

$I_{13}(x)=\int\frac{2x^2-3x+2}{3-2x}dx$ mit der Substitution $u=-2x+3$ folgt $du=-2\,dx$. Mit $x=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}u$ folgt

$\int\frac{2x^2-3x+2}{3-2x}dx=\int\left(-\frac{1}{4}u+\frac{3}{4}-\frac{1}{u}\right)du$. Nach Resubstitution folgt $-\frac{1}{2}x^2-\ln|3-2x|+\frac{9}{8}$.

Die $\frac{9}{8}$ kann man weglassen.

Oder zuerst Polynomdivision $\frac{2x^2-3x+2}{3-2x}=-x+\frac{2}{3-2x}$.

3. Partielle Integration

$$\boxed{\int f(x)\cdot g(x)\,dx = F(x)\cdot g(x) - \int F(x)\cdot g'(x)\,dx} \qquad \boxed{\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx = \left[F(x)\cdot g(x)\right]_a^b - \int_a^b F(x)\cdot g'(x)\,dx}$$

$I_1(x) = \int (1-2x)\cdot e^{-x}\,dx$ Ergebnis: $(1+2x)\cdot e^{-x}$

$I_2(x) = \int x^n \cdot \ln x\,dx$ für $n \neq -1$. Ergebnis: $\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right)$

$I_3(x) = \int \frac{\ln x}{x}\,dx$. Hinweis: $\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x}\cdot \ln x$. Ergebnis: $\frac{1}{2}\left(\ln x\right)^2$

$I_4(x) = \int (\ln x)^2\,dx$. Hinweis Entweder $1\cdot(\ln x)^2$ oder $\ln x \cdot \ln x$. Verwenden Sie $I_2(x)$.

Ergebnis: $x\cdot\left((\ln x)^2 - 2\ln x + 2\right)$

$I_5(x) = \int x\cdot \sin\frac{2x}{3}\,dx$. Ergebnis: $\frac{9}{4}\sin\frac{2x}{3} - \frac{3}{2}x\cdot\cos\frac{2x}{3}$

$I_6(x) = \int x^2\cdot\cos 2x\,dx$ Ergebnis: $\frac{1}{2}x^2\cdot\sin 2x + \frac{1}{2}x\cdot\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x$

$$I_7(x) = \int \underbrace{e^{-x}}_{f}\cdot\underbrace{\cos(2x)}_{g}\,dx = -e^{-x}\cdot\cos(2x) - \int(-e^{-x})\cdot(-2\sin(2x))\,dx = -e^{-x}\cdot\cos(2x) - 2\cdot\int \underbrace{e^{-x}}_{f}\cdot\underbrace{\sin(2x)}_{g}\,dx =$$

$$= -e^{-x}\cdot\cos(2x) - 2\cdot\left(-e^{-x}\cdot\sin(2x) - \int(-e^{-x})\cdot 2\cos(2x)\,dx\right) = -e^{-x}\cdot\cos(2x) + 2e^{-x}\cdot\sin(2x) - 4\cdot\int e^{-x}\cdot\cos(2x)\,dx\,.$$

Folglich $\int e^{-x}\cdot\cos(2x)\,dx = \frac{1}{5}\cdot\left(-e^{-x}\cdot\cos(2x) + 2e^{-x}\cdot\sin(2x)\right) = \frac{1}{5}e^{x}\cdot\left(2\sin(2x) - \cos(2x)\right)$.

$I_8 = \int_0^{\pi/2} x^2\cdot\cos 2x\,dx$ Ergebnis: $-\frac{\pi}{4}$

$I_9(x) = \int (\sin x)^2\,dx$ Ergebnis: $\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x\cdot\cos x$

$I_{10}(x) = \int (\sin x)^3\,dx$ Hinweise: Verwenden Sie $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$. Ergebnis:

$-\frac{1}{3}(\sin x)^2\cdot\cos x - \frac{2}{3}\cos x$

4. Integration durch Partialbruchzerlegung

1. $\int \frac{2a}{x^2-a^2}\,dx = \int\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)dx = \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$ für $a \neq 0$
2. $\int \frac{a}{x^2-a\cdot x}\,dx = \int\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x}\right)dx = \ln\left|\frac{x-a}{x}\right|$ für $a \neq 0$
3. $\int \frac{x}{(x-a)^2}\,dx = \int\left(\frac{1}{x-a} + \frac{a}{(x-a)^2}\right)dx = \ln|x-a| - \frac{a}{x-a}$
4. $\int \frac{x^2}{(x-a)^2}\,dx = \int\left(1 + \frac{2ax-a^2}{(x-a)^2}\right)dx = \int\left(1 + \frac{2a}{x-a} + \frac{a^2}{(x-a)^2}\right)dx = x + 2a\ln|x-a| - \frac{a^2}{x-a}$
5. $\int \frac{6x^3+13x^2-13x-8}{2x^2+5x-3}\,dx = \int\left(3x - 1 + \frac{x-11}{2x^2+5x-3}\right)dx = \int\left(3x - 1 - \frac{3}{2x-1} + \frac{2}{x+3}\right)dx = \frac{3}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}\ln|2x-1| + 2\ln|x+3|$
6. $\int \frac{2x^4+5x^3+3x^2-4}{2x^3+3x^2}\,dx = \int\left(x + 1 - \frac{4}{x^2\cdot(2x+3)}\right)dx = \int\left(x + 1 - \frac{16}{9\cdot(2x+3)} + \frac{8}{9x} - \frac{4}{3x^2}\right)dx =$
   $= \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{8}{9}\ln|2x+3| + \frac{8}{9}\ln|x| + \frac{4}{3x}$
7. $\int \frac{18x^4-3x^3+17x^2+16x+3}{18x^4+12x^3+2x^2}\,dx = \int\left(1 + \frac{-15x^3+15x^2+16x+3}{2x^2\cdot(3x+1)^2}\right)dx = \int\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{2x^2} + \frac{1}{2\cdot(3x+1)} - \frac{1}{2\cdot(3x+1)^2}\right)dx =$
   $= x - \ln|x| - \frac{3}{2x} + \frac{1}{6}\ln|3x+1| + \frac{1}{6(3x+1)}$

5. Die Simpsonsche Regel

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\cdot\left[f(a) + f(b) + 4\cdot\sum_{i=1}^{n} f(a+(2i-1)\cdot h) + 2\cdot\sum_{i=1}^{n-1} f(a+2i\cdot h)\right] \quad \text{mit } h = \frac{b-a}{2n}}$$

1. Es sei $f(x)=\sqrt{x}$. Bestimmen Sie $\int_1^3 f(x)\,dx$ einmal exakt und einmal mit Hilfe der Simpsonschen Regel. Wie groß ist die prozentuale Abweichung?

   a. Für n=1: Mit $h=1$ folgt $\int_1^3 f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\cdot\left[f(1)+f(3)+4\cdot f(1+h)\right]$

   Ergebnis: Exakt: $\approx 2{,}797434$, Simpson: $\approx 2{,}796302$, Abweichung: 0,0405%.

   b. Für n=3: Mit $h=\frac{1}{3}$ folgt

   $\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\cdot\left[f(1)+f(3)+4\cdot\left(f(1+1\cdot h)+f(1+3\cdot h)+f(1+5\cdot h)+2\cdot\left(f(1+2\cdot h)\right)+f(1+4\cdot h)\right]\right.$ Ergebnis: Exakt: $\approx 2{,}797434$, Simpson: $\approx 2{,}797413$, Abweichung: 0,000776%.

   c. Es sei $\left|f^{(4)}(x)\right|\le M$ für alle $x\in[a/b]$, E der exakte Wert des Integrals, S der Näherungswert nach Simpson. Dann lässt sich herleiten: $\left|S-E\right|\le\frac{(b-a)^5\cdot M}{2880\cdot n^4}$.

   In unserem Beispiel ist $f^{(4)}(x)=-\frac{15}{16\cdot x^{7/2}}$, so dass $\left|f^{(4)}(x)\right|\le\frac{15}{16}=M$ für alle $x\in[1/3]$.

   Wie groß muss n gewählt werden, damit sicher $\left|S-E\right|<0{,}001\%$?

   Ergebnis: $n\approx 5{,}68$, also $n=6$.

2. Es sei $f(x)=\frac{1}{\ln x}$. Bestimmen Sie $\int_e^{3e} f(x)\,dx$ mit Hilfe der Simpsonschen Regel für $n=2$:

   $\int_e^{3e} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\cdot\left[f(e)+f(3e)+4\cdot\left(f(e+1\cdot h)+f(e+3\cdot h)\right)+2\cdot\left(f(e+2\cdot h)\right)+f(e+4\cdot h)\right]$.

   Ergebnis: $\approx 3{,}439141$. Der genaue Wert ist $\approx 3{,}432723$. Relativer Fehler $\approx 0{,}187\%$.

6. Uneigentliche Integrale

Berechnen Sie

1. $\int_0^\infty x\cdot e^{-x}\,dx=\lim_{u\to\infty}\int_0^u x\cdot e^{-x}\,dx=\lim_{u\to\infty}\left[(-1-x)\cdot e^{-x}\right]_0^u=\lim_{u\to\infty}\left((-1-u)\cdot e^{-u}-(-1)\right)=1$. Partielle Integration

2. $\int_0^\infty x\cdot e^{-x^2}\,dx=\lim_{u\to\infty}\int_0^u x\cdot e^{-x^2}\,dx=\lim_{u\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^u=\lim_{u\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-u^2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$. Substitution

3. $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx=\lim_{u\to\infty}\int_1^u \frac{\ln x}{x^2}\,dx=\lim_{u\to\infty}\left[-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}\right]_1^u=\lim_{u\to\infty}\left(-\frac{\ln u}{u}-\frac{1}{u}-(0-1)\right)=1$.

   Partielle Integration: $\int\frac{\ln x}{x^2}\,dx=-\frac{1}{x}\cdot\ln x-\int-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx=-\frac{1}{x}\cdot\ln x-\frac{1}{x}$

4. $\int_{-\infty}^0 x^2\cdot e^{x/2}\,dx=\lim_{u\to-\infty}\int_u^0 x^2\cdot e^{x/2}\,dx=\lim_{u\to-\infty}\left[\left(16-8x+2x^2\right)\cdot e^{x/2}\right]_u^0=16-0=16$.

   Partielle Integration: $\int e^{x/2}\cdot x^2\,dx=2e^{x/2}\cdot x^2-\int 2e^{x/2}\cdot 2x\,dx=2e^{x/2}\cdot x^2-4\int e^{x/2}\cdot x\,dx=$

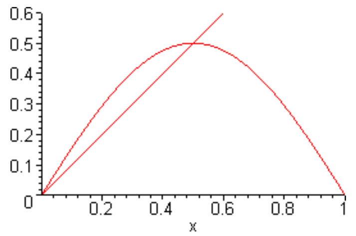
   $=2e^{x/2}\cdot x^2-4\cdot\left(2e^{x/2}\cdot x-\int 2e^{x/2}\,dx\right)=2e^{x/2}\cdot x^2-8e^{x/2}\cdot x+16e^{x/2}$.

5. $n=0$: $\int_0^\infty x^0\cdot e^{-2x}dx=\int_0^\infty e^{-2x}dx=\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^\infty=0-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}=\frac{0!}{2^{0+1}}$.

   $n\to n+1$:

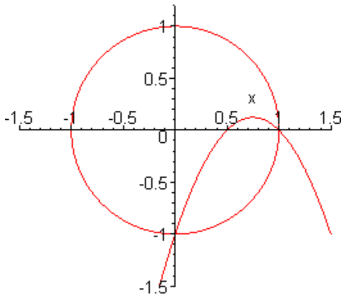
   $\int_0^\infty x^{n+1}\cdot e^{-2x}dx=\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\cdot x^{n+1}\right]_0^\infty-\int_0^\infty-\frac{1}{2}e^{-2x}\cdot(n+1)\cdot x^n dx=0+\frac{n+1}{2}\cdot\int_0^\infty x^n\cdot e^{-2x}dx=\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n!}{2^{n+1}}=\frac{(n+1)!}{2^{n+2}}$.

7. Fläche zwischen zwei Kurven



1. Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen den Schaubildern von $y = 0{,}5 \cdot \sin(\pi \cdot x)$ und der Geraden $y = x$ im 1. Quadranten.

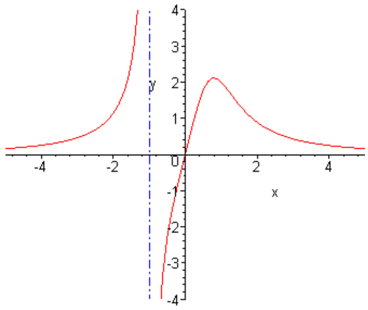
$$\int_0^{1/2} \left(0{,}5\sin(\pi x) - x\right) dx = \left[-\tfrac{\cos(\pi x)}{2\pi} - \tfrac{x^2}{2}\right]_0^{1/2} = 0 - \tfrac{1}{8} - \left(-\tfrac{1}{2\pi} - 0\right) = \tfrac{4-\pi}{8\pi}$$



2. Die Parabel $y = -2 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 1$ und der Kreis $x^2 + y^2 = 1$ schließen im 1. und 4. Quadranten zwei Flächen ein. Berechnen Sie den Inhalt A der unteren Fläche.
   Hinweis: $\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \tfrac{1}{2} x \cdot \sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{2} \arcsin x$.

$$\int_0^1 \left(-2 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 1 + \sqrt{1-x^2}\right) dx = \left[-\tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 - x + \tfrac{1}{2}x \cdot \sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{2}\arcsin x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} \approx 0{,}6187314968$$

8. Rotationsvolumen um die x-Achse



Es sei $f(x) = \dfrac{4x}{1+x^3}$ für $x \neq -1$. Das Schaubild von f rotiert um die x-Achse.

a. Bestimmen Sie das Rotationsvolumen für $x \in [0, \infty[$.

$$\pi \cdot \int_0^{\infty} \left(\tfrac{4x}{1+x^3}\right)^2 dx = \lim_{u\to\infty} 16\pi \cdot \int_0^u \tfrac{x^2}{(1+x^3)^2}\, dx = \lim_{u\to\infty} 16\pi \cdot \left[-\tfrac{1}{3(1+x^3)}\right]_0^u = \lim_{u\to\infty} 16\pi \cdot \left(-\tfrac{1}{3(1+u^3)} + \tfrac{1}{3}\right) = \tfrac{16}{3}\pi$$

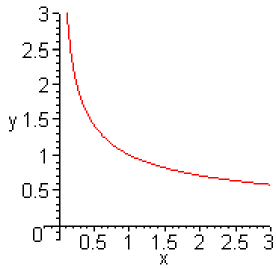
b. Bestimmen Sie das Rotationsvolumen für $x \in]-\infty, -2]$.

$$\pi \cdot \int_{-\infty}^{-2} \left(\tfrac{4x}{1+x^3}\right)^2 dx = \lim_{u\to-\infty} 16\pi \cdot \int_u^{-2} \tfrac{x^2}{(1+x^3)^2}\, dx = \lim_{u\to\infty} 16\pi \cdot \left[-\tfrac{1}{3(1+x^3)}\right]_u^{-2} = \lim_{u\to\infty} 16\pi \cdot \left(\tfrac{1}{21} + \tfrac{1}{3(1+u^3)}\right) = \tfrac{16}{21}\pi$$

c. Untersuchen Sie das Rotationsvolumen für $x \in [-2, -1[$.

$$\pi \cdot \int_{-2}^{u} \left(\tfrac{4x}{1+x^3}\right)^2 dx = \lim_{u\to-1} 16\pi \cdot \int_{-2}^{u} \tfrac{x^2}{(1+x^3)^2}\, dx = \lim_{u\to 1} 16\pi \cdot \left[-\tfrac{1}{3(1+x^3)}\right]_{-2}^{u} \quad \text{existiert nicht.}$$

9. Rotationsvolumen um die y-Achse



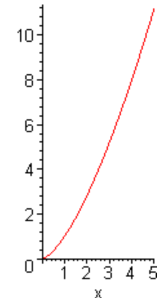
Es sei $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ für $x > 0$. Das Schaubild von f rotiert um die y-Achse.

a. Bestimmen Sie das Rotationsvolumen für $y \in [1, \infty[$. Ergebnis $\pi/3$.

1. Weg: $V_y = \pi \int\limits_{y=1}^{y=\infty} x^2\, dy = \pi \int\limits_1^{\infty} \tfrac{1}{y^4}\, dy = \pi \left[-\tfrac{1}{3y^3}\right]_1^{\infty} = \pi \cdot \left(0 + \tfrac{1}{3}\right) = \tfrac{\pi}{3}$.

2. Weg $V_y = \pi \int\limits_{y=1}^{y=\infty} x^2\, dy = \pi \int\limits_{x=1}^{x=0} x^2 \cdot y'\, dx = \pi \int\limits_{x=1}^{x=0} x^2 \cdot \dfrac{-1}{2 \cdot x^{3/2}}\, dx = -\tfrac{\pi}{2} \int\limits_1^0 x^{1/2}\, dx = -\tfrac{\pi}{3}\left[x^{3/2}\right]_1^0 = \tfrac{\pi}{3}$.

10. Die Bogenlänge einer Kurve



Es sei $f(x)=x^{3/2}$. Berechnen Sie die Bogenlänge s im Bereich $0\le x\le a$.

$$s=\int_0^a\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=\int_0^a\sqrt{1+\tfrac{9}{4}x}\,dx=\left[\tfrac{8}{27}\left(1+\tfrac{9}{4}x\right)^{3/2}\right]_0^a=\tfrac{8}{27}\left(1+\tfrac{9}{4}a\right)^{3/2}-\tfrac{8}{27}.$$

Für welchen Wert von a beträgt die Bogenlänge $s=\dfrac{335}{27}$?

Ergebnis: $a=5$.

11. Die Mantelfläche M eines Rotationskörpers

1. Die Gerade $y=\dfrac{r}{h}x$ für $0\le x\le h$ erzeugt bei Rotation um die x-Achse den Mantel M eines Kegels vom Radius r und der Höhe h. Leiten Sie die aus der Schule bekannte Formel $M=\pi r s$ her.

   Mit der Mantellinie $s=\sqrt{r^2+h^2}$ folgt $M=2\pi\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=$

   $$=2\pi\int_0^h\frac{r}{h}x\cdot\sqrt{1+\left(\frac{r}{h}\right)^2}\,dx=2\pi\int_0^h\frac{r}{h}x\cdot\sqrt{\frac{h^2+r^2}{h^2}}\,dx=2\pi\frac{r\cdot s}{h^2}\int_0^h x\,dx=2\pi\frac{r\cdot s}{h^2}\cdot\frac{1}{2}h^2=\pi r s.$$

2. Der Halbkreis $y=\sqrt{r^2-x^2}$ für $-r\le x\le r$ erzeugt bei Rotation um die x-Achse eine Kugel vom Radius r. Leiten Sie die Formel $O=4\pi r^2$ für die Kugeloberfläche O her.

   $$M=2\pi\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=2\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx=2\pi\int_{-r}^{r}r\,dx=4\pi r^2.$$

12. Der Mittelwert einer Funktion

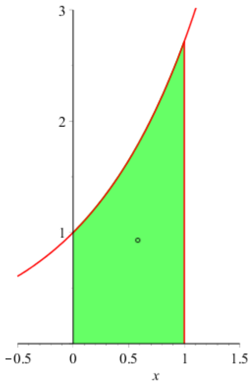
1. Es sei $f(x)=3x^2+4x+1$. Bestimme Sie den Wert für $b>0$ so, dass der Mittelwert $\bar{f}$ von f im Intervall $[0/b]$ gleich 4 ist.

   $\bar{f}=\dfrac{1}{b}\int_0^b f(x)\,dx=\dfrac{1}{b}\left(b^3+2b^2+b\right)=4$ hat die Lösungen $b_1=1$ und $b_2=-3$, so dass $b=1$ folgt.

2. Bestimmen Sie den Mittelwert $\bar{f}$ von $f(x)=\ln(x)$ im Intervall $[1/e]$.

   $$\bar{f}=\frac{1}{e-1}\int_1^e \ln(x)\,dx=\frac{1}{e-1}\left[x\cdot\ln(x)-x\right]_1^e=\frac{1}{e-1}.$$

13. Der Schwerpunkt einer Fläche zwischen einer Kurve und der x-Achse



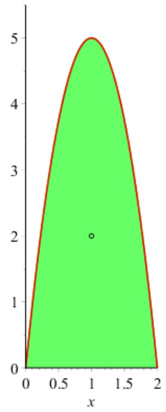
1. Das Schaubild der Funktion $f(x)=e^x$ begrenzt mit den beiden Koordinatenachsen und der Geraden $x=1$ ein Flächenstück. Bestimmen Sie die Koordinaten (x_S/y_S) des Schwerpunktes S dieses Flächenstücks. .

   Für den Inhalt dieses Flächenstücks gilt $A=\int_0^1 e^x\,dx=e-1$. Dann folgt

   $$x_S=\frac{1}{A}\int_a^b x\cdot f(x)\,dx=\frac{1}{e-1}\int_0^1 x\cdot e^x\,dx=\frac{1}{e-1}\left[(x-1)e^x\right]_0^1=\frac{1}{e-1}\approx 0{,}58198.$$

   $$y_S=\frac{1}{2A}\int_a^b f^2(x)\,dx=\frac{1}{2(e-1)}\int_0^1 e^{2x}\,dx=\frac{1}{2(e-1)}\cdot\frac{1}{2}\left(e^2-1\right)=\frac{1}{4}(e+1)\approx 0{,}92957.$$

2. Das Schaubild der Funktion $f(x) = -a \cdot x^2 + b \cdot x$ mit $a, b > 0$ schließt mit der x-Achse in ersten Quadranten ein Flächenstück ein. Bestimmen Sie a und b so, dass sein Schwerpunkt S die Koordinaten $(1/2)$ besitzt.



Die Funktion f besitzt die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{b}{a}$.

Dann beträgt der Flächeninhalt des Flächenstücks $A = \int_0^{b/a} \left(-a \cdot x^2 + b \cdot x\right) dx = \frac{b^3}{6a^2}$. Es folgt

$x_S = \frac{1}{A} \int x \cdot f(x)\, dx = \frac{6a^2}{b^3} \int_0^{b/a} \left(-a \cdot x^3 + b \cdot x^2\right) dx = \frac{b}{2a}$ und $y_S = \frac{1}{2A} \int f^2(x)\, dx =$

$= \frac{3a^2}{b^3} \int_0^{b/a} \left(-a \cdot x^2 + b \cdot x\right)^2 dx = \frac{3a^2}{b^3} \left[\frac{1}{5} a^2 x^5 - \frac{1}{2} a b x^4 + \frac{1}{3} b^2 x^3\right]_0^{b/a} = \frac{b^2}{10a}$.

Die beiden Gleichungen $x_S = 1$ und $y_S = 2$ haben die Lösung $a = 5$, $b = 10$, so dass $f(x) = -5x^2 + 10x$.