Übungsblatt zu "Determinanten"

Sommersemester 2022

Übung 1 (Berechnen von Determinanten)
Seien A und B zwei $n \times n$-dimensionale quadratische Matrizen. Argumentieren Sie, dass die Spalten des Matrixprodukts $A \cdot B$ linear abhängig sind, wenn die Spalten von B linear abhängig sind. *Anleitung*: Wir bezeichnen mit $A : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ und $B : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ auch die linearen Abbildungen, die zu den beiden Matrizen gehören. Dann ist $A \circ B : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ die lineare Abbildung zum Matrixprodukt $A \cdot B$. Machen Sie sich zunächst folgendes klar: wenn das Bild von B echt kleiner ist als V, dann ist auch $\mathrm{Bild}(A \circ B)$ echt kleiner als V (man erinnere sich, dass bei der Anwendung von $A \circ B$ auf einen Vektor $\mathbf{v}$ aus V zunächst B auf $\mathbf{v}$ und dann A auf $B\mathbf{v}$ angewendet wird). Schließen Sie dann daraus $\dim \mathrm{Bild}(A \circ B) < n$, sofern $\dim \mathrm{Bild}\, B < n$ ist. Nutzen Sie die Dimensionsformel, um dies zu übersetzen in eine entsprechende Implikation für $\dim \mathrm{Kern}(A \circ B)$ und $\dim \mathrm{Kern}\, B$. Interpretieren Sie die so gewonnene Aussage schließlich mittels der Eigenschaft (f) aus dem Kapitel zu diesem Übungsblatt.

Übung 2 (Berechnen von Determinanten)
Berechnen Sie durch Argumentation oder anhand der Entwicklung $\det M = \sum_{\pi \in \mathcal{S}(2)} \mathrm{sign}(\pi) \cdot M_{1\pi(1)} \cdot M_{2\pi(2)}$ (oder, am besten, mit beidem) explizit die Determinante der folgenden 2×2-Matrizen: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ sowie gegebenenfalls weiterer selbst ausgeheckter Matrizen.

Übung 3 (Berechnen von Determinanten)
Nehmen Sie sich eine 3×3-Matrix her, zum Beispiel $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Determinante dieser Matrix durch Entwicklung nach einer Zeile bzw. Entwicklung nach einer Spalte gemäß der Formel

$$\det : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}; M \mapsto \det(M) := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} M_{ij} \, \det(M_{s(ij)})$$

Den Faktor $(-1)^{i+j}$ berücksichtigen Sie, bildlich gesprochen, in der Form des Schemas $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$.
Probieren Sie mehrere Zeilen bzw. Spalten zu diesem Zweck aus.

b) Berechnen Sie das Inverse von M durch vorherige Berechnung ihrer Adjunkten. *Hinweis* zur Eigenkontrolle: $\operatorname{adj} M = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Übung 4 (Berechnen von Determinanten)
Berechnen Sie die Determinanten von Matrizen, die Sie sich selbst ausgedacht haben, mit Hilfe der Entwicklungsformel. Beachten Sie insbesondere die korrekte Berücksichtigung des in dieser Formel auftretenden Vorzeichenfaktors $(-1)^{i+j}$ (siehe vorherige Aufgabe). Trauen Sie sich auch mal an eine 4×4-Matrix heran; machen Sie sich die Sache aber vielleicht nicht so schwer und bauen Sie eine Zeile oder Spalte ein, die genügend Nullen enthält. Zur Kontrolle, ob Sie richtig gerechnet haben, gibt es mehrere Möglichkeiten: selber mehrfach rechnen (am besten aber nicht sofort im Anschluss, weil man dann dann Gefahr läuft, einen Denk- oder Rechenfehler zu wiederholen); in der Gruppe rechnen (beste Möglichkeit) oder durch ein CAS checken lassen. Wer letzteres mit Hilfe von SymPy tun will, gibt die entsprechende Matrix so ein wie in der Übung 3 auf dem vorigen Übungsblatt beschrieben und wendet dann auf die eingegebene Matrix einfach die Methode `det()` an:

```
M = Matrix([[2, 0, -1, -1], [1, Rational(1, 2), 1, 0], [4, 0, 0, 1], \
                 [-1, Rational(1, 4), 2, 2]])
M.det()
```

liefert die Antwort $\frac{1}{4}$, die zur Überprüfung der eigenen Rechnung benutzt werden kann. Übrigens kann SymPy als CAS natürlich auch Determinanten berechnen von Matrizen, die nicht oder nicht nur Zahlen enthalten. Nach dem Deklarieren der zu benutzenden Symbole, etwa `mu` (μ, gesprochen “mü”; λ beziehungsweise `lambda` ist, wie Programmierer wissen, schon anderweitig besetzt), können wir beispielsweise

```
mu = symbols('mu')

M = Matrix([[2-mu, 0, -1, -1], [1, Rational(1, 2)-mu, 1, 0], [4, 0, -mu, 1], \
                   [-1, Rational(1, 4), 2, 2-mu]])
```

eingeben (was dasselbe ist, wie

```
mu = symbols('mu')

K = Matrix([[2, 0, -1, -1], [1, Rational(1, 2), 1, 0], [4, 0, 0, 1], \
```

```
                    [-1, Rational(1, 4), 2, 2]]) - mu * eye(4)
```

einzugeben, denn `eye(4)` bezeichnet die 4-dimensionale Einheitsmatrix). Die Determinantenberechnung von SymPy liefert dann den symbolischen Ausdruck $\mu^4 - \frac{9\mu^3}{2} + 7\mu^2 + \frac{\mu}{2} + \frac{1}{4}$, ein Polynom vierter Ordnung im Parameter μ.

Übung 5 (Berechnen von Determinanten)
Schreiben Sie eine Matrix auf, bei der entweder oberhalb oder unterhalb der Hauptdiagonalen nur Nullen stehen. Gerne allgemein für allgemeine Dimension n, gerne aber auch für ein konkretes Beispiel. Im letzteren Fall sollte die Dimension jedoch mindestens 4 sein, sonst wird diese Aufgabe trivial. Berechnen Sie nun die Determinante der Matrix durch Entwickeln nach Zeilen oder nach Spalten, je nachdem wo Sie die Nullen hinverlegt haben. Zeigen Sie so, dass die Aussage im Skript zutrifft: die Determinante einer solchen Matrix ist einfach das Produkt der Hauptdiagonalelemente.

Übung 6
Berechnen Sie für die folgenden 2×2-Matrizen: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ihr Inverses, soweit es existiert, durch Verwendung der Adjunkten mittels $M^{-1} = \frac{1}{\det M} \operatorname{adj} M$. Wie sieht die allgemeine Formel für die Inverse einer invertierbaren 2×2-Matrix aus? – Statt die *Lösung* für diese letztere Aufgabe explizit anzugeben, liefern wir den SymPy-Code:

```
a, b, c, d = symbols('a b c d')

K = Matrix([[a, b], [c, d]])
K.inv()
```

Weiterführende Übung
Wir fokussieren uns nun wieder sozusagen auf die Herkunft des Begriffs der Matrix aus der Welt der linearen Abbildungen, das heißt wir wenden eine Matrix auf einen Vektor an. Wir fragen, ob es – gegeben eine quadratische Matrix $K \in M(n \times n, \mathbb{R})$ – Vektoren $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ gibt, die durch Anwenden von K in einen *festen vorgegebenen* Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ abgebildet werden, für die also $K\mathbf{a} = \mathbf{b}$ gilt. Wir wollen mit anderen Worten die *Menge*

$$\text{lös}\,(K, \mathbf{b}) = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \mid K\mathbf{a} = \mathbf{b}\} \; .$$

bestimmen für festes K und festes $\mathbf{b}$ (warum die ausgerechnet "lös" heißt, wird im nächsten

Kapitel deutlich).

Mit dem ganzen bisher entwickelten Instrumentarium stehen wir diesem Problem keineswegs hilflos gegenüber. Wir können vielmehr bereits eine Anzahl von Aussagen dazu treffen. Argumentieren Sie,

(a) dass $\text{lös}\,(K, \mathbf{b})$ leer ist, wenn $\mathbf{b} \notin \text{Bild}\,K$ ist;

(b) dass $\text{lös}\,(K, \mathbf{b})$ in jedem Fall nichtleer ist, wenn $\text{Kern}\,K = \{\mathbf{0}\}$ ist (Dimensionsformel!);

(c) genauer: dass $\text{lös}\,(K, \mathbf{b})$ stets *genau ein* Element enthält, wenn $\text{Kern}\,K = \{\mathbf{0}\}$ ist, und zwar gerade $K^{-1}\mathbf{b}$;

(d) dass es sicher Vektoren $\mathbf{b}$ gibt, für die $\text{lös}\,(K, \mathbf{b}) = \varnothing$, falls $\det K = 0$ ist; und

(e) dass es in diesem Fall (also bei $\det K = 0$) zu jedem Vektor $\mathbf{b}$, zu dem *nicht* $\text{lös}\,(K, \mathbf{b}) = \varnothing$ ist, wenigstens zwei *verschiedene* Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{a}'$ gibt, für die beide $K\mathbf{a} = \mathbf{b}$ beziehungsweise $K\mathbf{a}' = \mathbf{b}$ gilt, die also für ein solches $\mathbf{b}$ beide in $\text{lös}\,(K, \mathbf{b})$ liegen.

Die letztere dieser Aussagen präzisieren wir zum Schluss noch ein wenig. Sei also $\text{lös}\,(K, \mathbf{b}) \neq \varnothing$ für ein gegebenes $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ und es sei $\mathbf{a} \in \text{lös}\,(K, \mathbf{b})$. Wenn $\det K = 0$ ist, gibt es mindestens einen Vektor $\mathbf{x}$ mit $K\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (warum?). Sehen Sie, dass dann mit $\mathbf{a}$ auch $\mathbf{a} + \mathbf{x}$ in $\text{lös}\,(K, \mathbf{b})$ liegt? Können Sie übrigens erkennen, dass $\text{lös}\,(K, \mathbf{b})$ keineswegs ein Unterraum des Definitionsraums $\mathbb{R}^n$ von K ist? *Hinweis*: betrachten Sie $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.