Automatentheorie

endliche nicht deterministische ε-Automaten

Prof. Dr. Franz-Karl Schmatzer
schmatzf@dhbw-loerrach.de

Literatur

- C.Wagenknecht, M.Hielscher; Formale Sprachen, abstrakte Automaten und Compiler; 3.Aufl. Springer Vieweg 2022;
- A.V.Aho, M.S.Lam,R.Savi,J.D.Ullman, *Compiler – Prinzipien,Techniken und Werkzeuge*. 2. Aufl., Pearson Studium, 2008.
- Güting, Erwin; *Übersetzerbau –Techniken, Werkzeuge, Anwendungen*, Springer Verlag 1999
- Sipser M.; Introduction to the Theory of Computation; 2.Aufl.; Thomson Course Technology 2006
- Hopecroft, T. et al; Introduction to Automata Theory, Language, and Computation; 3. Aufl. Pearson Verlag 2006

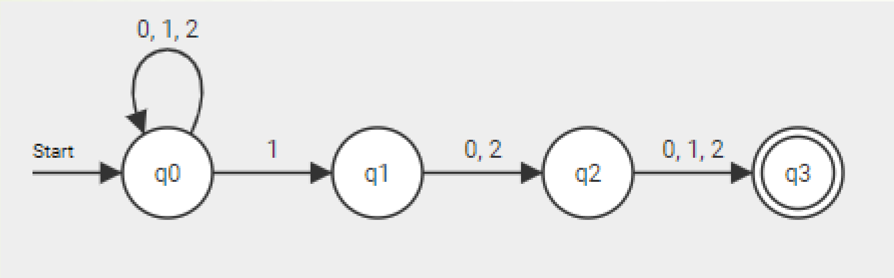
Wiederholung Aufgabe

- Erstellen Sie einen NEA über dem Alphabet {0,1,2}, der an der drittletzten Stelle eine 1, an der zweitletzten Stelle eine 0 oder 2 hat.
- Wandeln Sie diesen Automaten in einen DEA um. Geben Sie den Graphen und die Überführungsfunktion an.

Lösung Aufgabe

NEA Modellierung

- Alphabet {0,1,2}

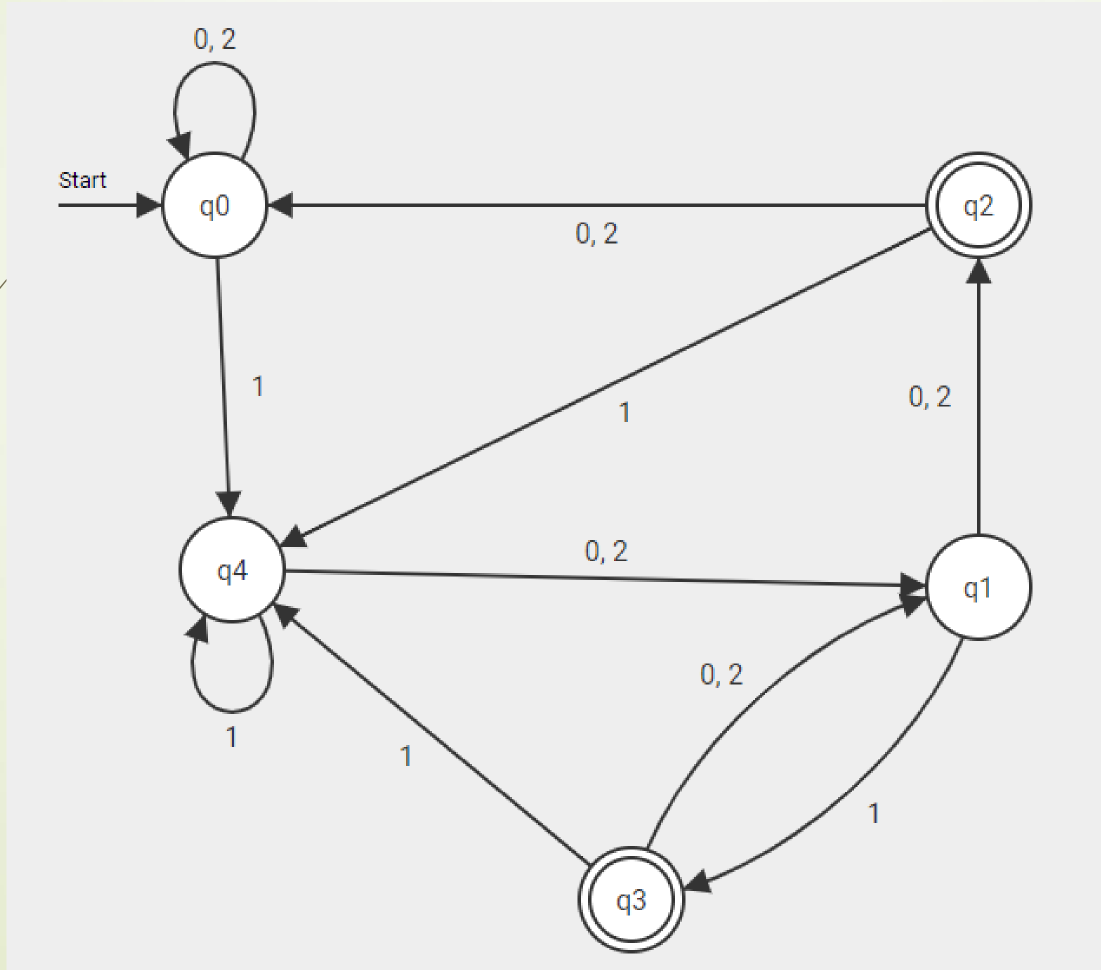


δ	ε	0	1	2
q0	∅	{q0}	{q1, q0}	{q0}
q1	∅	{q2}	∅	{q2}
q2	∅	{q3}	{q3}	{q3}
q3	∅	∅	∅	∅

Lösung Aufgabe

NEA in DEA

- Alphabet {0,1,2}



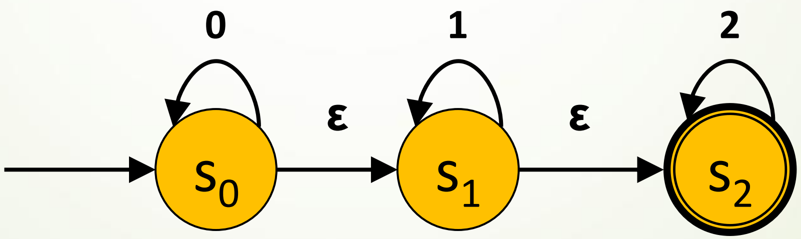
δ	0	1	2
q0	q0	q4	q0
q1	q2	q3	q2
q2	q0	q4	q0
q3	q1	q4	q1
q4	q1	q4	q1

Agenda

- Aufbau und Definition von e-NEA
- Modellierung
- Umwandlung in NEA

Automaten mit ε-Übergängen
(ε – NEA)

- Erweiterung des NEA durch sogenannte ε-Übergänge
- Das sind Zustandsübergänge bei denen kein Zeichen gelesen bzw. verbraucht wird.
- Vorteil:
  - Automaten sind kompakt und
  - noch leichter anzufertigen



ε-NEA

ε-NEA Definition

- Ein ε-NEA wird definiert als:

  $A = (Q, \Sigma, \delta, s_0, F)$ mit

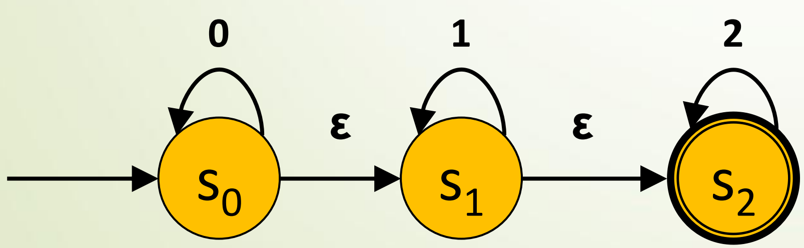
  $Q = \{s_1, \ \ ,s_n\}$ eine nicht leere Menge von Zuständen.

  $\Sigma = \{e_1,\ldots,e_n\}$ eine nicht leere Menge von Zeichen.

  $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow \wp(Q)$ eine Funktion, die Überführungsfunktion, welche anders als im NEA auch spontan ohne Lesen eines Eingabezeichens den Zustand ändern kann.

  $s_0 \in S \setminus F$ der Anfangszustand.

  $F \subseteq S$ die nicht leere Menge von Endzustände.



ε-NEA

Überführungsfunktion

δ	0	1	2	ε
s_0	$\{s_0\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{s_1\}$
s_1	$\varnothing$	$\{s_1\}$	$\varnothing$	$\{s_2\}$
s_2	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{s_2\}$	$\varnothing$

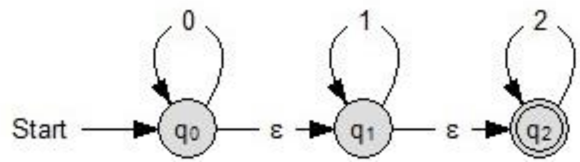
Aufgabe NEA

- Bauen Sie den Automaten mithilfe von FLACI „Abstrakte Automaten“ nach.
- Was ist das Alphabet
- Welche Wort akzeptiert dieser Automat?

Automaton

Type: NEA

Transition Graph:



Definition: $M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0,1,2\}, \delta, q_0, \{q_2\})$

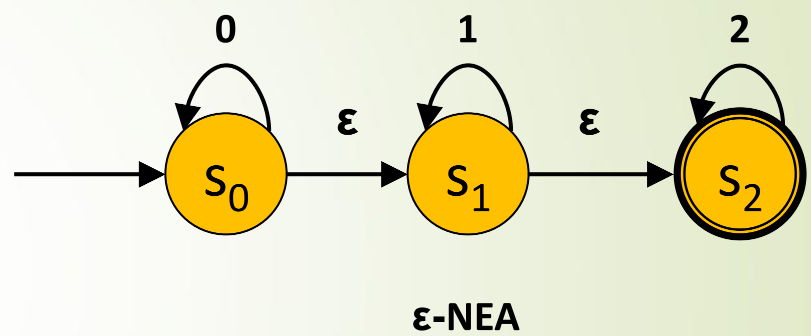
Transition Table:

δ	0	1	2	ε
q_0	$\{q_0\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{q_1\}$
q_1	$\{\}$	$\{q_1\}$	$\{\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\{\}$	$\{\}$	$\{q_2\}$	$\{\}$

ε-NEA

Verarbeiten eines Eingabewortes

- Betrachten Sie dazu die Verarbeitung des Wortes w = 00112 mit dem ε-NEA



i. $\delta(s_0,0) = \{s_0\} \cup \{s_1\} \cup \{s_2\} = \{s_0, s_1, s_2\}$

ii. $\delta(s_0,00) = \{s_0\} \cup \{s_1\} \cup \{s_2\}$

iii. $\delta(s_0,001) = \{s_1\} \cup \{s_2\}$

iv. $\delta(s_0,0011) = \{s_1\} \cup \{s_2\}$

v. $\delta(s_0,00112) = \{s_2\}$

=> das Wort wird akzeptiert, da s_2, ein Endzustand in der Menge der Endzustände $F = \{s_2\}$ ist.

- Formal: Ein ε-NEA akzeptiert ein Wort w, wenn mindestens einer der Endzustände F erreicht wird, d.h.

$L(NEA) = \{w \in \Sigma \mid \delta(s_0,w) \cap F \neq 0\}$

Automaten mit ε-Übergängen

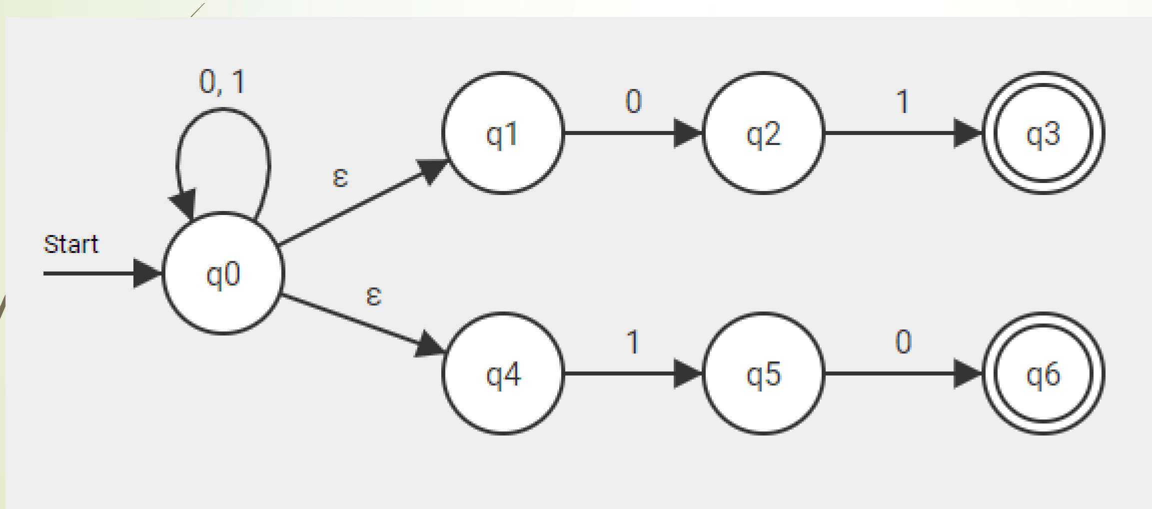
Modellierung

- Modellieren Sie einen ε-NEA mit den Eigenschaften
  - Er soll alle Worte des Alphabets {0,1} akzeptieren, die entweder auf 01 oder 10 enden.
  - Er soll alle Worte des Alphabets {0,1,2} akzeptieren, die auf 0, 01,1 und 21 enden.
  - Erstellen Sie den Graphen und die Überführungsfunktion
  - Prüfen Sie ihren Automaten mit dem Tool FLACI

Automaten mit ε-Übergängen

Lösung der Modellierung

- Modellieren Sie einen ε-NEA mit den Eigenschaften
  - Er soll alle Worte des Alphabets {0,1} akzeptieren, die entweder auf 01 oder 10 enden.

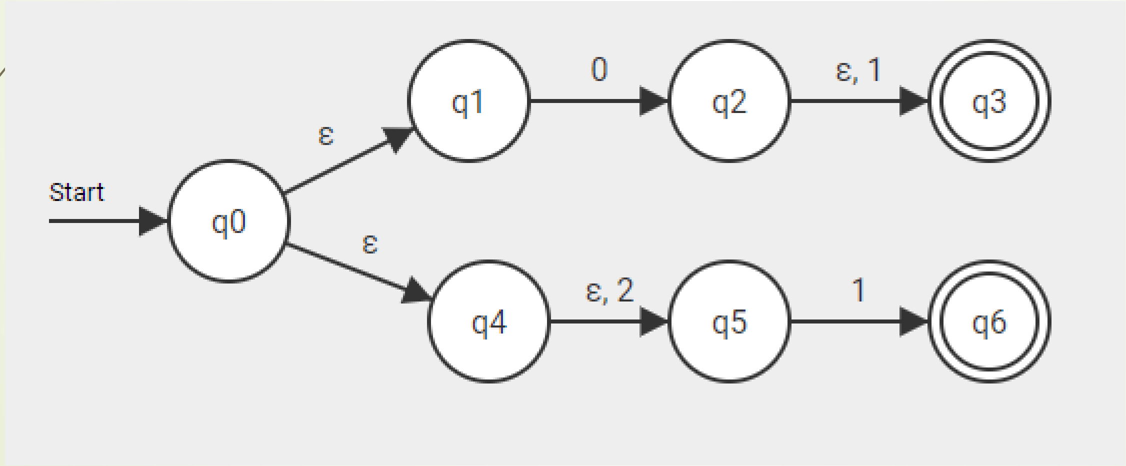


δ	ε	0	1
q0	{q1, q4}	{q0}	{q0}
q1	∅	{q2}	∅
q2	∅	∅	{q3}
q3	∅	∅	∅
q4	∅	∅	{q5}
q5	∅	{q6}	∅
q6	∅	∅	∅

Automaten mit ε-Übergängen

Lösung der Modellierung

- Modellieren Sie einen ε-NEA mit den Eigenschaften
  - Er soll alle Worte des Alphabets {0,1,2} akzeptieren, die auf 0, 01, 1 und 21 enden.



δ	ε	0	1	2
q0	{q1, q4}	∅	∅	∅
q1	∅	{q2}	∅	∅
q2	{q3}	∅	{q3}	∅
q3	∅	∅	∅	∅
q4	{q5}	∅	∅	{q5}
q5	∅	∅	{q6}	∅
q6	∅	∅	∅	∅

ε-NEA

Äquivalenz mit NEA

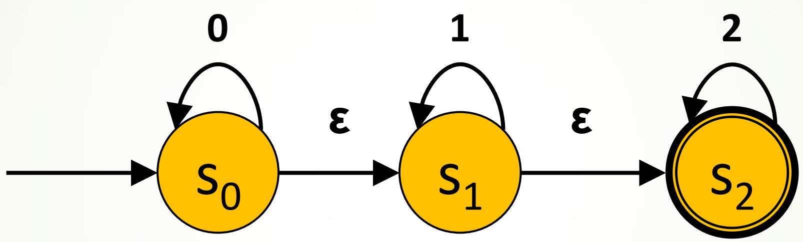
- Es zeigt sich, dass zu jeder Sprachen L, die von einem ε-NEA akzeptiert wird, es auch einem entsprechenden NEA gibt und umgekehrt, d.h. zu jeder Sprache L die von einem NEA akzeptiert wird gibt es einen entsprechenden ε-NEA .
- Die Klasse der Sprachen eines ε-NEAs und NEAs sind äquivalent

  L(ε-NEA) = L(NEA)
- Zu jedem ε-NEA kann man einen äquivalenten NEA angeben.
- Das heißt:
  - Die Automaten DEA, NEA und ε-NEA sind äquivalent und gleichwertig und definieren die gleiche Sprachklasse. Die Sprachklasse der regulären Sprachen.

ε-NEA

Transformation eines ε-NEA in ein NEA

- Der Algorithmus zielt darauf ab alle ε-Übergänge zu eliminieren.
- Wir nehmen dazu den folgenden ε-NEA als Beispiel



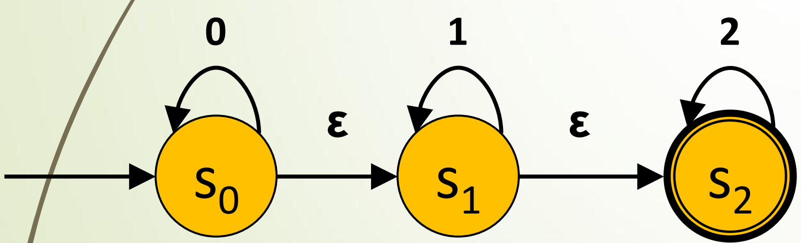
ε-NEA

- Im ersten Schritt wird der ε-Übergang von s_1 nach s_2 und in einem zweiten Schritt den ε-Übergang von s_0 nach s_1 entfernt.

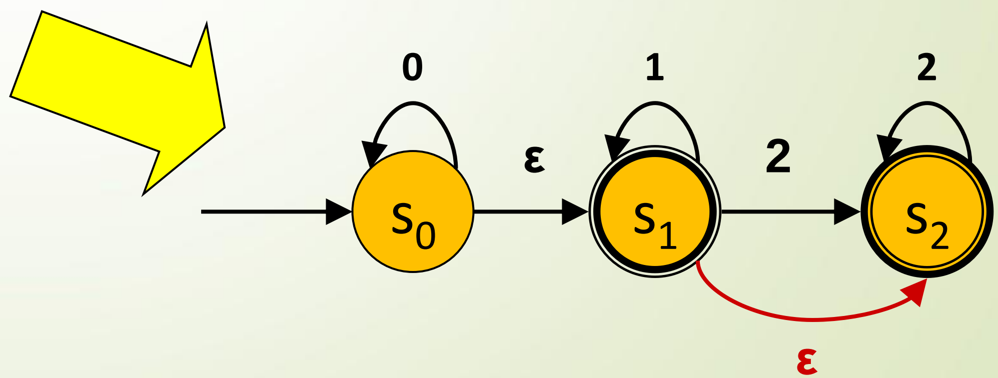
ε-NEA

Transformation eines ε-NEA in ein NEA

- 1. Schritt der ε-Übergangs von s_1 nach s_2
  - Betrachte den Zustand s_1.
    - Ist das Wort gelesen kann mit einem ε-Übergang in den Endzustand gelangt werden. ⇒ s_1 muss Endzustand werden.
    - Ist das Wort nicht gelesen und wird eine 2 gelesen, gelangt man in den Endzustand s_2 ⇒ der ε-Übergang wird zu einem 2-Übergang.



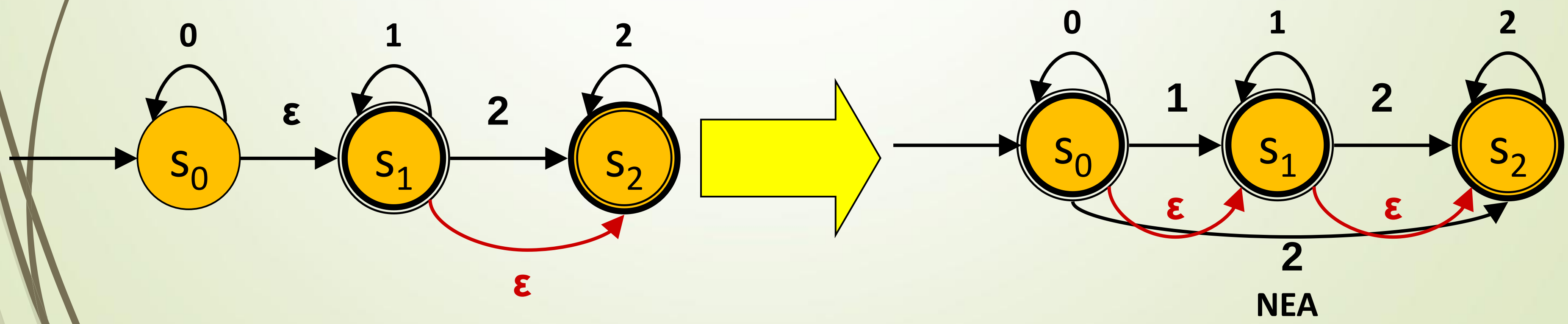
ε-NEA



ε-NEA

Transformation eines ε-NEA in ein NEA

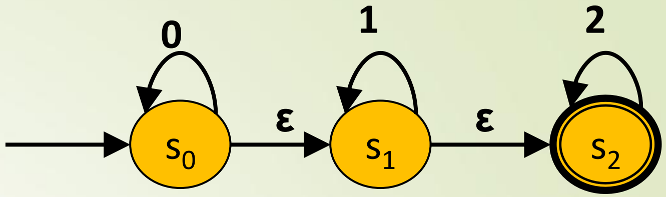
- 2. Schritt der ε-Übergangs von s_0 nach s_1
  - Betrachte den Zustand s_0. Folgendes ist möglich:
    - Ist das Wort gelesen kann man mit zwei ε-Übergänge in den Endzustand gelangen $\Rightarrow$ s_0 muss Endzustand werden.
    - Ist das Wort nicht gelesen und wird eine 1 gelesen, gelangt man in den Endzustand s_1 $\Rightarrow$ der ε-Übergang wird zu einem 1-Übergang.
    - Ist das Wort nicht gelesen und wird eine 2 gelesen, muss man direkt nach s_2 gelangen. $\Rightarrow$ Einfügen eines Links von s_0 nach s_2.
- 3. Schritt entfernen aller ε-Übergänge



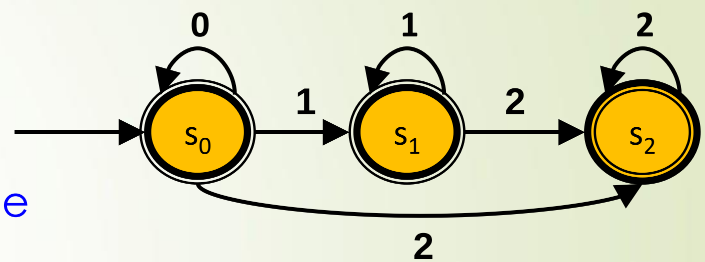
ε-NEA

Transformation eines ε-NEA in ein NEA

- Aufstellen der Überführungsfunktion
  - Von s_0 aus kann man mit ε-Übergänge sowohl s_1 als auch s_2 erreicht werden ⇒ Zusammenfassen der Zustände zu einem Zustand
  - Von s_1 aus kann man mit einem ε-Übergang s_2 erreicht werden ⇒ Zusammenfassen der Zustände zu einem Zustand



ε-NEA



NEA

Überführungsfunktion

δ	0	1	2	$[s]^*_\varepsilon$
s_0	$\{s_0\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{s_0, s_1, s_2\}$
s_1	$\emptyset$	$\{s_1\}$	$\emptyset$	$\{s_1, s_2\}$
s_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{s_2\}$	$\{s_2\}$

δ	0*	1*	2*
s_0	$\{s_0\}$	$\{s_1\}$	$\{s_2\}$
s_1	$\emptyset$	$\{s_1\}$	$\{s_2\}$
s_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{s_2\}$

ε-NEA

Formal: Transformation eines ε-NEA in ein NEA

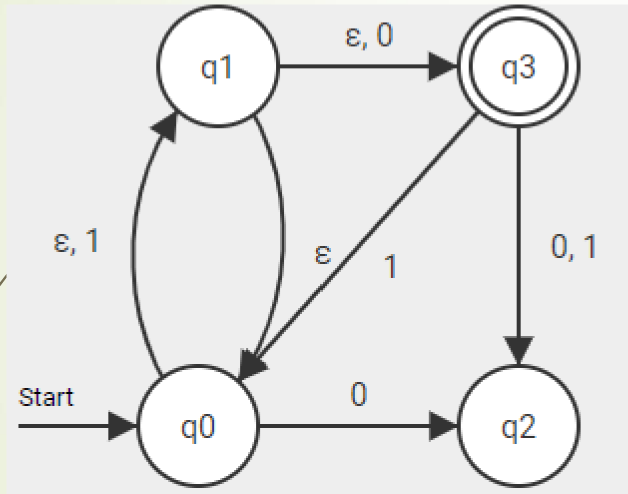
- Formale Definition des Algorithmus
  - $s \in Q$, so sei $[s]^*_\varepsilon$ die Menge aller Zustände, die von s aus mit ε-Übergänge erreicht werden.

    $[s]^*_\varepsilon = \{ s' \in Q \mid s \to_\varepsilon {}^* s')$
  - Die Elimination erfolgt in zwei Schritten:
    - Eliminieren aller ε-Zyklen (ε-Zyklus: $s \to_\varepsilon \ldots\ldots \to_\varepsilon s$.) Alle Zustände s des ε-Zyklus werden durch einen neuen Zustand s_n ersetzt und der ε-Zyklus wird gelöscht. Ist ein $s \in F$ so gehört auch $s_n \in F$.
    - Für jedes $s \in Q$ und jedes $a \in \Sigma$:
      - Für jedes $s' \in [s]^*_\varepsilon$ füge $\delta(s', a)$ zu $\delta(s, a)$ hinzu. Ist $s' \in F$, so ist s auch Endzustand.
    - Lösche alle ε-Übergänge.

Aufgabe I

Umwandeln eines ε-NEA in einen NEA

- Folgender Automat mit dem Alphabet {0,1} ist gegeben.

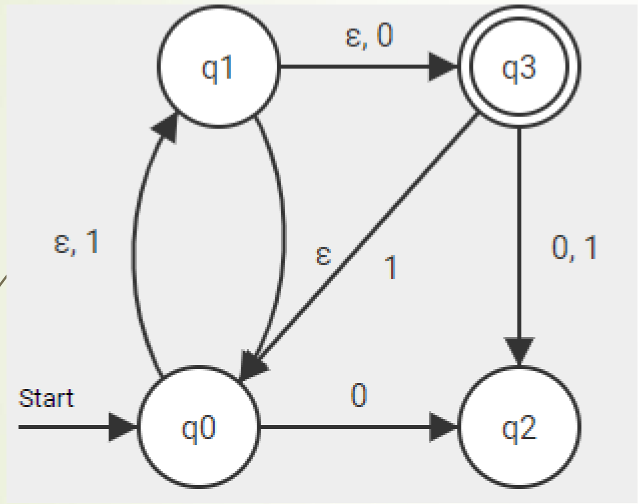


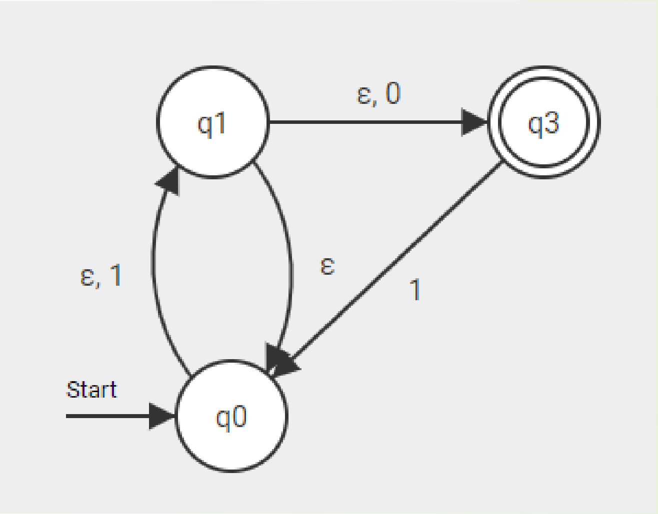
- Erstellen Sie die Überführungsfunktion und dann wandeln Sie den Automaten in ein NEA um.

Aufgabe I

Umwandeln eines ε-NEA in einen NEA

- Vereinfachen des Automaten





- Zustand q_2 ist nicht notwendig.

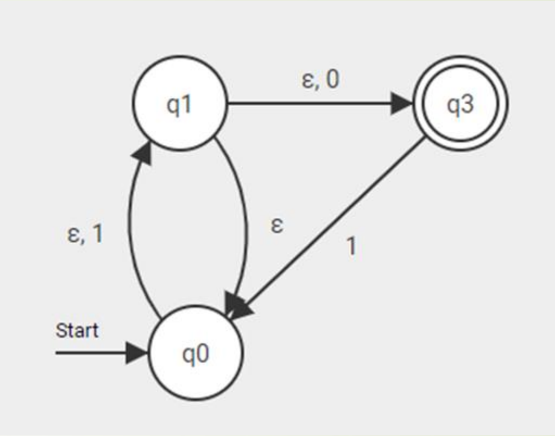
ε-NEA I

Transformation eines ε-NEA in ein NEA

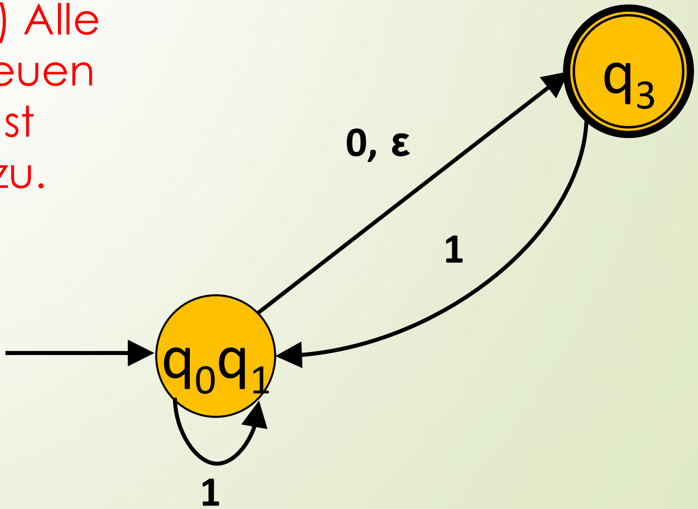
- Aufstellen der Überführungsfunktion

Überführungsfunktion →

δ	ε	0	1
q0	{q1}	∅	{q1}
q1	{q3, q0}	{q3}	∅
q3	∅	∅	{q0}

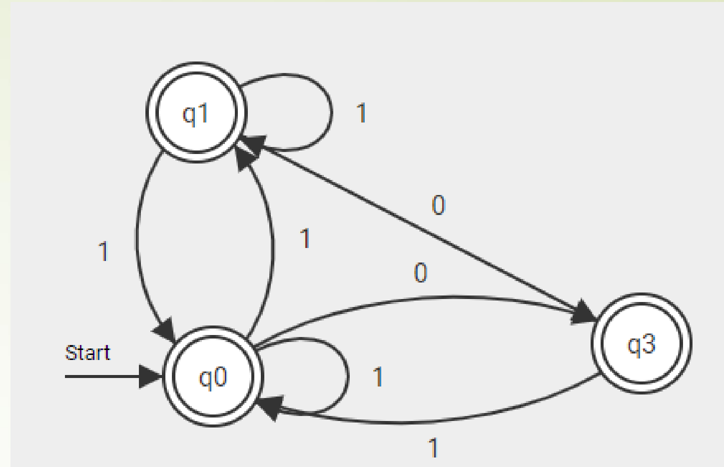


- Eliminieren aller ε-Zyklen (ε-Zyklus: $s \rightarrow_{\varepsilon} \ldots\ldots \rightarrow_{\varepsilon} s$.) Alle Zustände q des ε-Zyklus werden durch einen neuen Zustand ersetzt und der ε-Zyklus wird gelöscht. Ist ein $q \in F$ so gehört auch der neue Zustand dazu.
- Hier werden die beiden Zustände q_1 und q_2 zu dem neuen Zustand q_1q_2 zusammengefasst.



ε-NEA II

Transformation eines ε-NEA in ein NEA

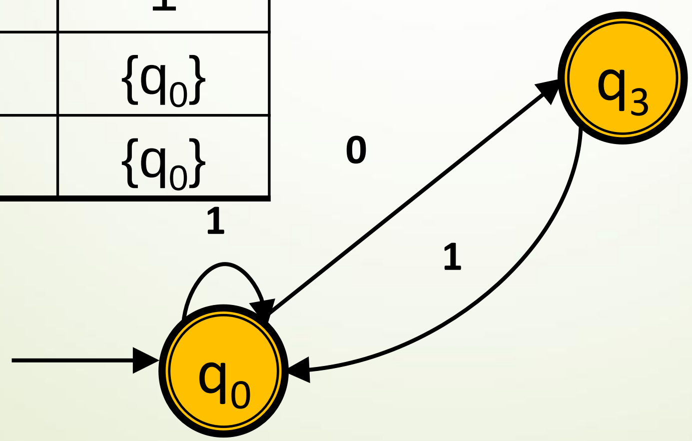


δ	ε	0	1
q0	∅	{q3}	{q1, q0}
q1	∅	{q3}	{q0, q1}
q3	∅	∅	{q0}

- Aufstellen der Überführungsfunktion
  - Für jedes $q \in Q$ und jedes $a \in \Sigma$:
  - Für jedes $s' \in [s]^*_\varepsilon$ füge $\delta(s', a)$ zu $\delta(s, a)$ hinzu.
  - Ist $s' \in F$, so ist s auch Endzustand.

Überführungsfunktion

δ	0	1
$*q_3$	$\{q_2\}$	$\{q_0\}$
$\rightarrow *q_0$	$\{q_3\}$	$\{q_0\}$

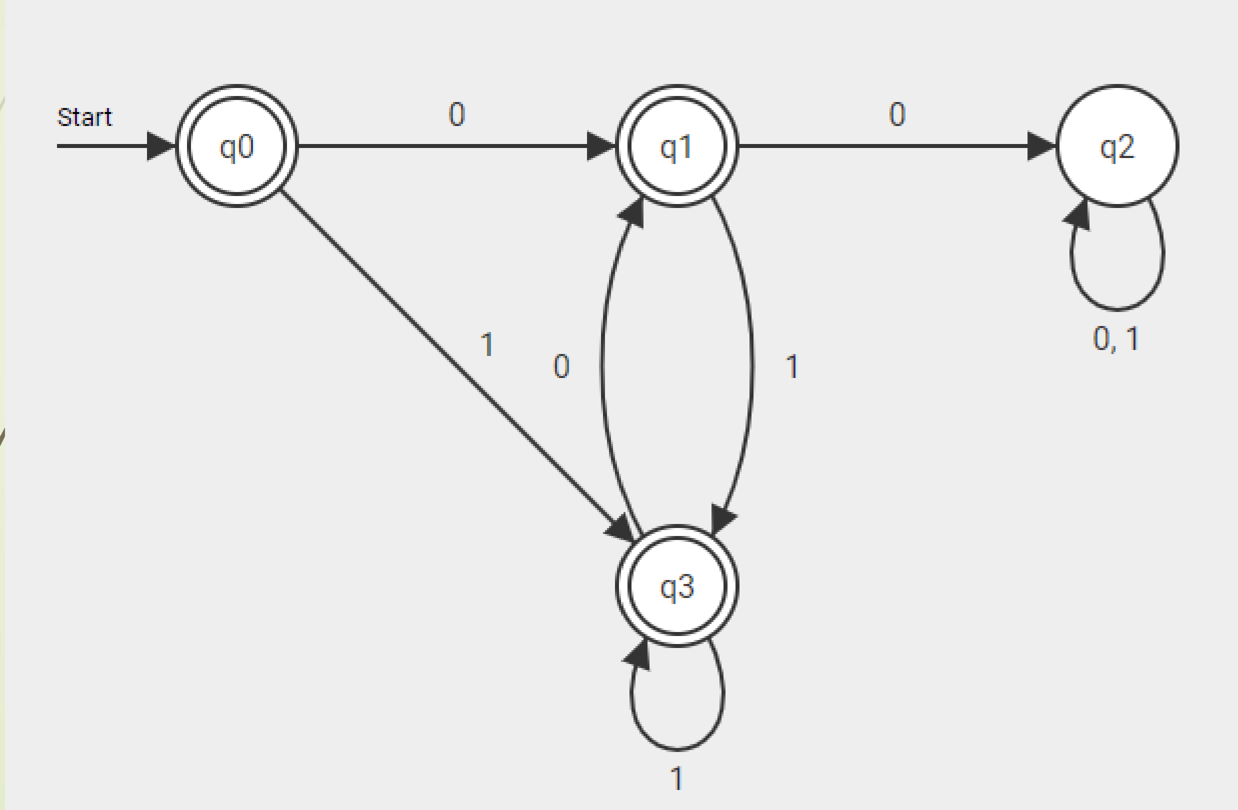


ε-NEA

ε-NEA I

Transformation eines ε-NEA in ein NEA

- Umgewandelter NEA in DEA umwandeln

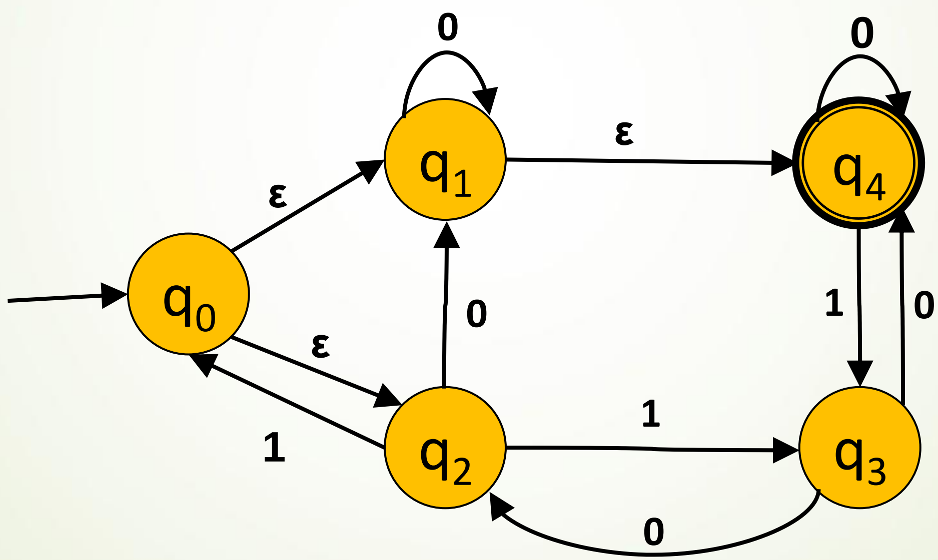


δ	0	1
q0	q1	q3
q1	q2	q3
q2	q2	q2
q3	q1	q3

Aufgabe II

Umwandeln eines ε-NEA in einen NEA

- Erstellen Sie die Überführungsfunktion und dann wandeln Sie den Automaten in ein NEA und anschließend in ein DEA um.

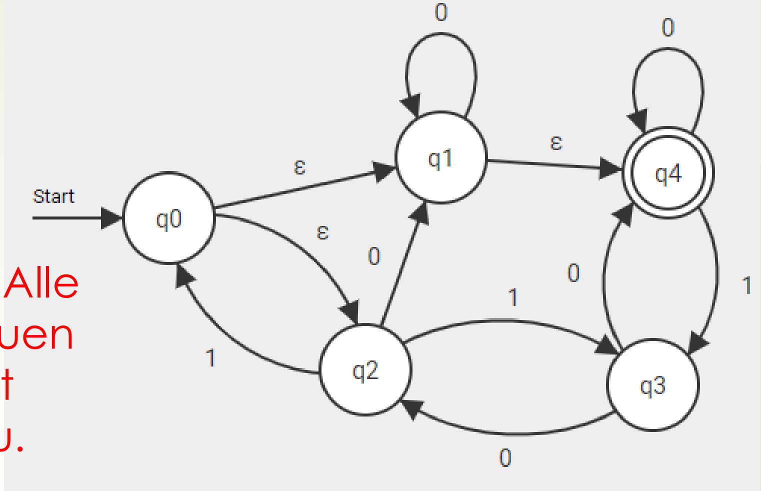


ε-NEA

ε-NEA I

Transformation eines ε-NEA in ein NEA

- Aufstellen der Überführungsfunktion
  - Eliminieren aller ε-Zyklen (ε-Zyklus: s $\rightarrow_\varepsilon$ ….. $\rightarrow_\varepsilon$ s.) Alle Zustände q des ε-Zyklus werden durch einen neuen Zustand ersetzt und der ε-Zyklus wird gelöscht. Ist ein q $\in$ F so gehört auch der neue Zustand dazu.
  - Keine Zyklen



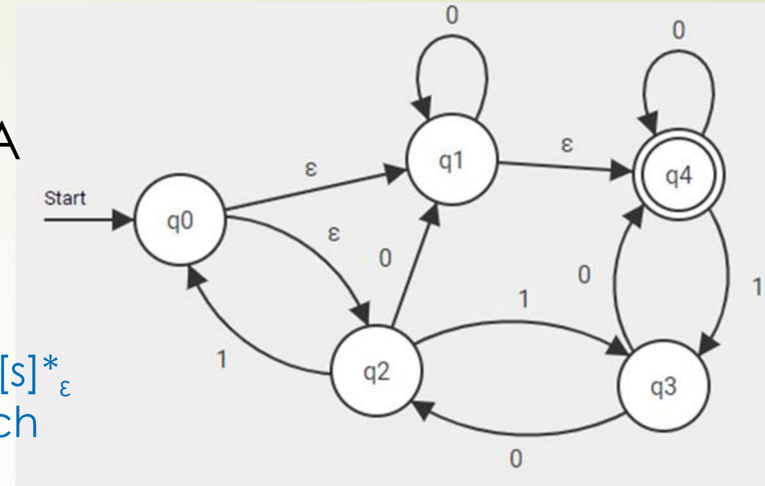
Überführungsfunktion

δ	0	1	ε
$\rightarrow q_0$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{q_1, q_2\}$
q_1	$\{q_1\}$	$\varnothing$	$\{q_4\}$
q_2	$\{q_1\}$	$\{q_0, q_3\}$	$\varnothing$
q_3	$\{q_2, q_4\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
$*q_4$	$\{q_4\}$	$\{q_3\}$	$\varnothing$

δ	ε	0	1
q0	{q1, q2}	∅	∅
q1	{q4}	{q1}	∅
q2	∅	{q1}	{q0, q3}
q3	∅	{q4, q2}	∅
q4	∅	{q4}	{q3}

ε-NEA II

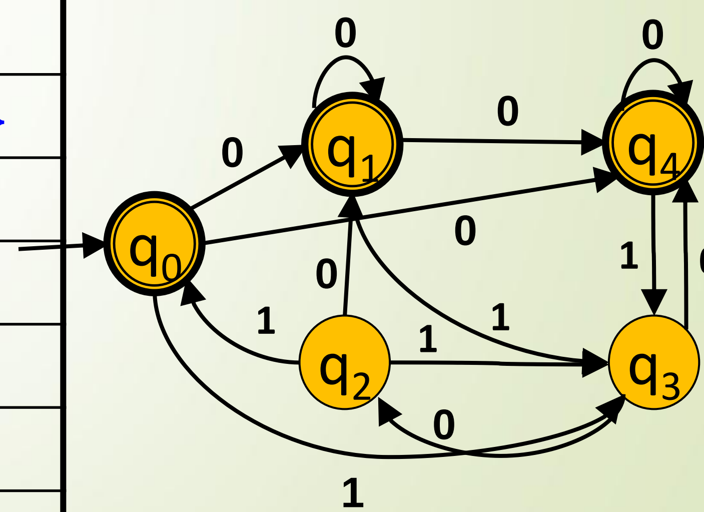
Transformation eines ε-NEA in ein NEA



- Aufstellen der Überführungsfunktion
  - Für jedes $q \in Q$ und jedes $a \in \Sigma$: Für jedes $s' \in [s]^*_\varepsilon$ füge $\delta(s', a)$ zu $\delta(s, a)$ hinzu. Ist $s' \in F$, so ist s auch Endzustand.

Überführungsfunktion

δ	0	1	ε	ε^*
$\rightarrow q_0$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_2, q_4\}$
q_1	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$
q_2	$\{q_1\}$	$\{q_0, q_3\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_3	$\{q_2, q_4\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$*q_4$	$\{q_4\}$	$\{q_3\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow *q_0$	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_0, q_3\}$		
$*q_1$	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_3\}$		



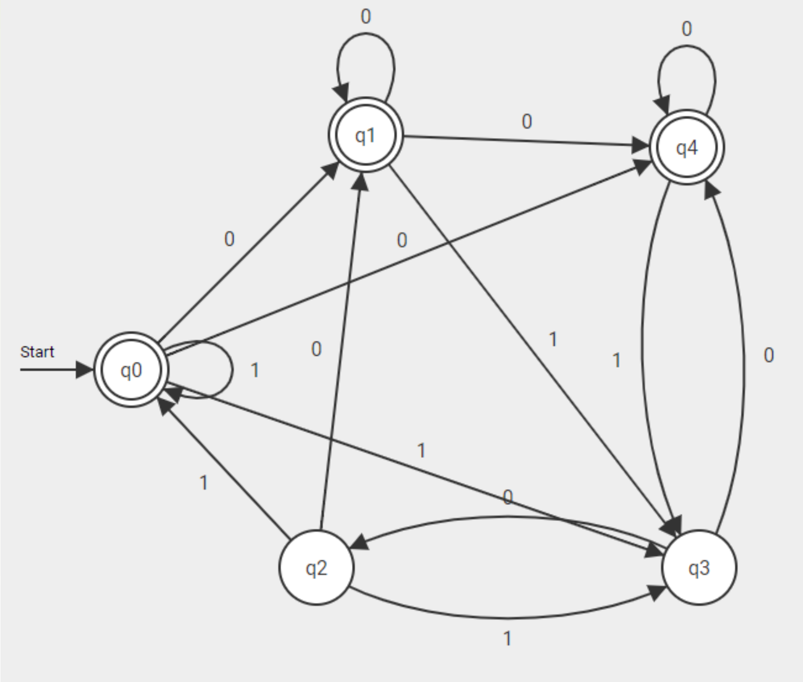
NEA

ε-NEA II

Der NEA und DEA

Überführungsfunktion

δ	ε	0	1
q0	∅	{q1, q4}	{q3, q0}
q1	∅	{q4, q1}	{q3}
q2	∅	{q1}	{q0, q3}
q3	∅	{q4, q2}	∅
q4	∅	{q4}	{q3}



NEA

DEA