1. Zeigen Sie, dass $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$ gilt.

$$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\frac{n!}{(k-1)!\cdot(n-k+1)!}+\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=\frac{n!\cdot k+n!\cdot(n-k+1)}{k!\cdot(n-k+1)!}=\frac{n!\cdot(n+1)}{k!\cdot(n-k+1)!}=\frac{(n+1)!}{k!\cdot(n-k+1)!}=\binom{n+1}{k}$$

2. Es sei X eine beliebige Zufallsvariable, die die Werte $x_1,\ x_2,\ldots,x_n$ annehmen kann. Dann gilt

$$\boxed{E(X)=\mu_X=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot P(X=x_i)}\quad\text{und}\quad\boxed{V(X)=\sigma_X{}^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)^2\cdot P(X=x_i)=E(X^2)-E(X)^2}\ .$$

Zeigen Sie, dass für $a,b\in\mathbb{R}$ gilt: $E(a\cdot X+b)=a\cdot E(X)+b$ und $V(a\cdot X+b)=a^2\cdot V(X)$.

$$E(a\cdot X+b)=\sum_{i=1}^{n}(a\cdot x_i+b)\cdot P(X=x_i)=a\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot P(X=x_i)+b\cdot\sum_{i=1}^{n}P(X=x_i)=a\cdot E(X)+b\ .$$

$$V(a\cdot X+b)=\sum_{i=1}^{n}\left(a\cdot x_i+b-(a\cdot\mu_X-b)\right)^2\cdot P(X=x_i)=a^2\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu_X\right)^2\cdot P(X=x_i)=a^2\cdot V(X)$$

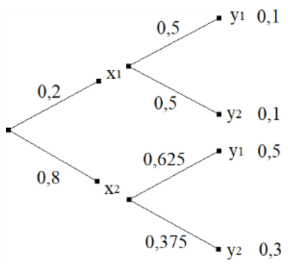
Oder $V(a\cdot X+b)=E\left((a\cdot X+b)^2\right)-E(a\cdot X+b)^2=E(a^2X^2+2abX+b^2)-\left(a\cdot E(X)+b\right)^2=$

$=a^2E(X^2)+2ab\cdot E(X)+b^2-a^2\cdot E(X)^2-2ab\cdot E(X)-b^2=a^2\cdot\left(E(X^2)-E(X)^2\right)=a^2\cdot V(X)$.

3. Untersuchen Sie anhand der Vierfeldertafel, ob die beiden Zufallsvariablen X, Y unabhängig sind.

	y_1	y_2	
x_1	**0,1**	**0,1**	0,2
x_2	**0,5**	0,3	**0,8**
	0,6	0,4	1

$P(x_1\wedge y_1)=0{,}1$, während $P(x_1)\cdot P(y_1)=0.2\cdot 0{,}6=0{,}12$. Damit sind X, Y abhängig.

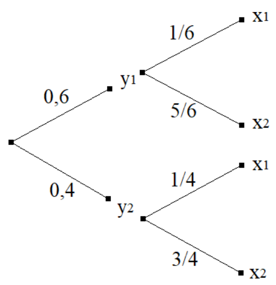


$P(x_1)=0{,}2\ ,\ P(x_1\wedge y_1)=0{,}1\Rightarrow P(y_1\mid x_1)=\dfrac{P(x_1\wedge y_1)}{P(x_1)}=\dfrac{0{,}1}{0{,}2}=0{,}5$

$P(y_2\mid x_1)=\dfrac{P(x_1\wedge y_2)}{P(x_1)}=\dfrac{0{,}1}{0{,}2}=0{,}5$

$P(y_1\mid x_2)=\dfrac{P(x_2\wedge y_1)}{P(x_2)}=\dfrac{0{,}5}{0{,}8}=0{,}625$

$P(y_2\mid x_2)=\dfrac{P(x_2\wedge y_2)}{P(x_2)}=\dfrac{0{,}3}{0{,}8}=0{,}375$



$P(y_1)=0{,}6\ ,\ P(x_1\wedge y_1)=0{,}1\Rightarrow P(x_1\mid y_1)=\dfrac{P(x_1\wedge y_1)}{P(y_1)}=\dfrac{0{,}1}{0{,}6}=\dfrac{1}{6}$

$P(x_2\mid y_1)=\dfrac{P(x_2\wedge y_1)}{P(y_1)}=\dfrac{0{,}5}{0{,}6}=\dfrac{5}{6}$,

$P(x_1\mid y_2)=\dfrac{P(x_1\wedge y_2)}{P(y_2)}=\dfrac{0{,}1}{0{,}4}=\dfrac{1}{4}$

$P(x_2\mid y_2)=\dfrac{P(x_2\wedge y_2)}{P(y_2)}=\dfrac{0{,}3}{0{,}4}=\dfrac{3}{4}$

4. a. Infolge der Unabhängigkeit der drei Symptome gilt $p = p_A \cdot p_B \cdot p_C = 0,7 \cdot 0,8 \cdot 0,9 = 0,504$
   b. Wegen $70\% < 80\% < 90\%$ können höchstens 70% der Patienten unter allen drei Symptomen leiden.
   70% der Patienten zeigen Symptom A, 80% zeigen Symptom B, so dass es mindestens eine Überschneidung von $70\% + 80\% - 100\% = 50\%$ geben muss. Die Überschneidung von A und B mit C folgt aus $50\% + 90\% - 100\% = 40\%$, so dass mindestens 40% der Patienten alle drei Symptome zeigen.

5. Es ist bekannt, dass 4% aller produzierten Bauteile defekt sind. Bei einer Kontrolle werden 5% aller Bauteile aussortiert. Trotz dieser Kontrolle werden nicht alle defekten Teile aussortiert, so dass 0,2% der nicht aussortierten Bauteile defekt sind. Außerdem werden auch Bauteile aussortiert, die nicht defekt sind.
   Es bedeute d: Bauteil defekt und a: Bauteil wird aussortiert.

   Stellen Sie eine Vierfeldertafel auf.
   Interpretieren Sie die Zahlen der Vierfeldertafel.
   Wie viel Prozent der aussortierten Teile sind nicht defekt?
   Wie viel Prozent der aussortierten Teile sind defekt?
   Wie viel Prozent der nicht aussortierten Teile sind nicht defekt?
   Wie viel Prozent der defekten Teile sind aussortiert?
   Wie viel Prozent der nicht defekten Teile sind aussortiert?

	d	$\overline{d}$	
a	**0,0381**	**0,0119**	0,05
$\overline{a}$	***0,0019***	**0,9481**	**0,95**
	0,04	**0,96**	1

Außerdem gilt $P(d \mid \overline{a}) = 0,002$.

Es gilt $0,002 = P(d \mid \overline{a}) = \frac{P(d \wedge \overline{a})}{P(\overline{a})} = \frac{P(d \wedge \overline{a})}{1 - P(a)} = \frac{P(d \wedge \overline{a})}{0,95}$, so dass $P(d \wedge \overline{a}) = 0,002 \cdot 0,95 = \boldsymbol{0,0019}$

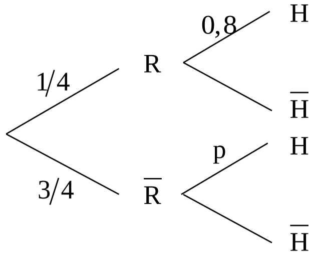
3,81% aller Teile sind aussortiert und defekt.
1,19% aller Teile sind aussortiert und nicht defekt.
0,19% aller Teile sind nicht aussortiert und defekt.
94,81% aller Teile sind nicht aussortiert und nicht defekt.

$P(\overline{d} \mid a) = \frac{P(\overline{d} \wedge a)}{P(a)} = \frac{0,0119}{0,05} = 0,238 = 23,8\%$, $P(d \mid a) = \frac{P(d \wedge a)}{P(a)} = \frac{0,0381}{0,05} = 0,762 = 76,2\%$,

$P(\overline{d} \mid \overline{a}) = \frac{P(\overline{d} \wedge \overline{a})}{P(\overline{a})} = \frac{0,9481}{0,95} = 0,998 = 99,8\%$, $P(a \mid d) = \frac{P(a \wedge d)}{P(d)} = \frac{0,0381}{0,04} = 0,9525 = 95,25\%$,

$P(a \mid \overline{d}) = \frac{P(a \wedge \overline{d})}{P(\overline{d})} = \frac{0,0119}{0,96} \approx 0,0124 = 1,24\%$.

6.



Aus $\frac{1}{4} \cdot 0,8 + \frac{3}{4} \cdot p = 0,6$ folgt $p = 0,5\overline{3} \approx 53\%$.

7. a. Für zwei beliebige Zufallsvariablen X und Y gilt $V(X+Y) = E\left((X + Y - \mu_X - \mu_Y)^2\right) =$

$$= E\left(((X - \mu_X) + (Y - \mu_Y))^2\right) = E\left((X - \mu_X)^2 + 2(X - \mu_X) \cdot (Y - \mu_Y) + (Y - \mu_Y)^2\right) =$$

$$= E\left((X - \mu_X)^2\right) + E\left(2(X - \mu_X) \cdot (Y - \mu_Y)\right) + E\left((Y - \mu_Y)^2\right) =$$

$$= E\left((X - \mu_X)^2\right) + 2 \cdot E\left((X - \mu_X) \cdot (Y - \mu_Y)\right) + E\left((Y - \mu_Y)^2\right) = V(X) + 2 \cdot \mathrm{Kov}(X,Y) + V(Y).$$

Oder: $V(X+Y) = E\left((X+Y)^2\right) - \left(E(X+Y)\right)^2 = E\left(X^2 + 2 \cdot X \cdot Y + Y^2\right) - \left(E(X) + E(Y)\right)^2 =$

$$E(X^2)+2\cdot E(X\cdot Y)+E(Y^2)-E(X)^2-2\cdot E(X)\cdot E(Y)-E(Y)^2=$$
$$=\left[E(X)^2-E(X)^2\right]-2\cdot\left[E(X\cdot Y)-E(X)\cdot E(Y)\right]+\left[E(Y)^2-E(Y)^2\right]=V(X)+2\cdot Kov(X,Y)+V(Y).$$

Analogie zu den binomischen Formeln: Mit Hilfe von $Kov(X,Y)=E(X\cdot Y)-E(X)\cdot E(Y)$ folgt
$Kov(X,X)=E(X\cdot X)-E(X)\cdot E(X)=E(X^2)-E(X)^2=V(X)$
und $Kov(X,-Y)=E(X\cdot(-Y))-E(X)\cdot E(-Y)=-E(X\cdot Y)+E(X)\cdot E(Y)=-Kov(X,Y)$. Somit gilt
$Kov(X+Y,X+Y)=Kov(X,X)+2\cdot Kov(X,Y)+Kov(Y,Y)$ und
$Kov(X-Y,X-Y)=Kov(X,X)-2\cdot Kov(X,Y)+Kov(Y,Y)$ in Analogie zu den binomischen Formeln.
Außerdem gilt $Kov\left(X+Y,X-Y\right)=V(X)-V(Y)$.

Folgerung: In der Vorlesung wurde gezeigt: Wenn zwei Zufallsvariablen X und Y unabhängig sind, dann gilt $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$, also gilt in diesem Fall $Kov(X,Y)=0$ sein.

Zusatz: Die Umkehrung gilt nicht: Wenn $Kov(X,Y)=0$, dann müssen X und Y nicht unabhängig sein.

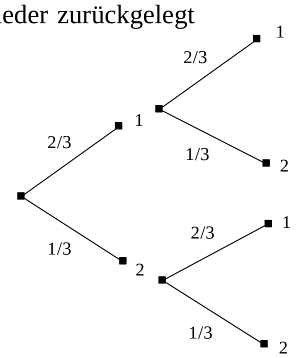
Beispiel: Die Zufallsvariable X sei definiert durch $f(x)=\begin{cases}0 & \text{für } x<-1\\ \frac{1}{2} & \text{für } -1\le x\le 1\\ 0 & \text{für } x>1\end{cases}$ und außerdem sei $Y=X^2$.

X und Y sind sicher abhängig, denn wenn z.B. $X=0$, dann muss auch $Y=X^2=0$ sein.
Wegen $E(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x)\,dx=\left[\frac{1}{4}x^2\right]_{-1}^{1}=0$ und $E(X^3)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^3\cdot f(x)\,dx=\left[\frac{1}{8}x^4\right]_{-1}^{1}=0$ folgt
$Kov(X,Y)=E(X\cdot Y)-E(X)\cdot E(Y)=E(X^3)-E(X)\cdot E(X^2)=0-0\cdot E(X^2)=0$ trotz Abhängigkeit von X und Y.

b. Es seien X, Y unabhängige Zufallsvariablen und $a,b\in\mathbb{R}$.
Wegen der Unabhängigkeit von X und Y sind auch $a\cdot X$ und $b\cdot Y$ unabhängig. Somit gilt
$V(a\cdot X+b\cdot Y)=V(a\cdot X)+V(b\cdot Y)=a^2\cdot V(X)+b^2\cdot V(Y)$.
Speziell für $a=1$ und $b=-1$ folgt $V(X-Y)=V(X)+V(Y)$.
Oder: Wegen der Unabhängigkeit von X und Y gilt $E(X\cdot Y)=E(X)\cdot E(Y)$, also
$V(a\cdot X+b\cdot Y)=E\left((a\cdot X+b\cdot Y)^2\right)-\left(E(a\cdot X+b\cdot Y)\right)^2=E(a^2\cdot X^2+2ab\cdot X\cdot Y+b^2\cdot Y^2)-\left(a\cdot E(X)+b\cdot E(Y)\right)^2=$
$a^2\cdot E(X^2)+2ab\cdot E(X\cdot Y)+b^2\cdot E(Y^2)-a^2\cdot E(X)^2-2ab\cdot E(X)\cdot E(Y)-b^2\cdot E(Y)^2=$
$a^2\cdot\left(E(X^2)-E(X)^2\right)+b^2\cdot\left(E(Y^2)-E(Y)^2\right)=a^2\cdot V(X)+b^2\cdot V(Y)$.

c. Natürlich abhängig: Für $x_i\ne x_j$ ist $P(X=x_i\wedge X=x_j)=0$, während $P(X=x_i)\cdot P(X=x_j)$ nicht 0 sein muss. Außerdem wäre bei Unabhängigkeit $V(X)=E(X^2)-E(X)^2=E(X)\cdot E(X)-E(X)^2$ immer gleich 0.

8. In einer Urne befinden sich drei Kugeln, welche sich nur in der Aufschrift 1, 1 und 2 unterscheiden; siehe Vorlesung.
Man zieht nun nacheinander zwei Kugeln, wobei die zuerst gezogene Kugel wieder zurückgelegt wird.
Das Baumdiagramm veranschaulicht die möglichen Ergebnisse.
Es sei X die Zahl beim 1. Zug und Y die Zahl beim 2. Zug.



Laut Vorlesung ist $E(X)=E(Y)=\frac{4}{3}$, $E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\frac{8}{3}$.

Wegen der Unabhängigkeit von X und Y gilt $E(X\cdot Y)=E(X)\cdot E(Y)=\frac{16}{9}$.

a. Prüfen Sie, ob $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$ gilt.
b. Prüfen Sie, ob $V(X\cdot Y)=V(X)\cdot V(Y)$ gilt.

a. $V(X)=\left(1-\frac{4}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}+\left(2-\frac{4}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$ oder $V(X)=E(X^2)-E(X)^2=\left(1^2\cdot\frac{2}{3}+2^2\cdot\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$

Analog folgt $V(Y)=\frac{2}{9}$.

$V(X+Y)=\left(2-\frac{8}{3}\right)^2\cdot\frac{4}{9}+\left(3-\frac{8}{3}\right)^2\cdot\frac{4}{9}+\left(4-\frac{8}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{9}=\frac{4}{9}$ und das ist gleich $V(X)+V(Y)$.

Oder: $V(X+Y)=E\left((X+Y)^2\right)-\left(E(X+Y)\right)^2=\left(2^2\cdot\frac{4}{9}+3^2\cdot\frac{4}{9}+4^2\cdot\frac{1}{9}\right)-\left(\frac{8}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$.

Die Gleichheit $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$ war zu erwarten, da X und Y unabhängig sind.

$V(X\cdot Y)=\left(1-\frac{16}{9}\right)^2\cdot\frac{4}{9}+\left(2-\frac{16}{9}\right)^2\cdot\frac{4}{9}+\left(4-\frac{16}{9}\right)^2\cdot\frac{1}{9}=\frac{68}{81}$ oder

$V(X\cdot Y)=E\left((X\cdot Y)^2\right)-E(X\cdot Y)^2=\left(1^2\cdot\frac{4}{9}+2^2\cdot\frac{4}{9}+4^2\cdot\frac{1}{9}\right)-\left(\frac{16}{9}\right)^2=\frac{68}{81}$.

Man sieht, dass $V(X\cdot Y)\neq V(X)\cdot V(Y)$, obwohl X und Y unabhängig sind.

9. Die Wahrscheinlichkeit für eine Knabengeburt sei 0,515. Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der Binomialverteilung (X = Anzahl der Knaben), dass die Familie mit 4 Kindern:

a. genau zwei Knaben: X ist $B_{4;0,515}$-verteilt. $P(X=2)=\binom{4}{2}\cdot 0{,}515^2\cdot 0{,}485^2=0{,}3743$

b. wenigstens einen Knaben hat: $1-P(X=0)=1-0{,}485^4=0{,}9447$

c. eines oder zwei Mädchen hat: d.h. 3 oder 2 Knaben hat

$P(X=3)+P(X=2)=\binom{4}{3}\cdot 0{,}515^3\cdot 0{,}485+\binom{4}{2}\cdot 0{,}515^2\cdot 0{,}485^2=0{,}6393$

d. kein Mädchen hat: $P(X=4)=\binom{4}{4}\cdot 0{,}515^4=0{,}0703$.

10. Ein idealer Würfel wird 100 mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der Binomialverteilung, dass die ‚Sechs' 15 oder 16 oder 17 mal vorkommt?
Es sei X die Anzahl der Sechsen mit $p=1/6$.

$$P(X=15,16,17)=\binom{100}{15}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{15}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{85}+\binom{100}{16}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{16}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{84}+\binom{100}{17}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{17}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{83}=0{,}3120.$$

11. Ein Autofahrer muss bei seiner Fahrt zum Arbeitsplatz drei Ampeln passieren, die unabhängig voneinander mit der Wahrscheinlichkeit 0,4 auf ‚Rot' stehen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann der Fahrer mindestens zwei Ampeln bei ‚Grün' passieren?
Es sei X = Anzahl der grünen Ampeln, p = 0,6, n = 3. Dann gilt

$P(X=2)+P(X=3)=\binom{3}{2}\cdot 0{,}6^2\cdot 0{,}4+\binom{3}{3}\cdot 0{,}6^3=0{,}648$.

12. Ein Kleinflugzeug kann 20 Passagiere aufnehmen. Aus Erfahrung ist bekannt, dass im Mittel 10% der Fluggäste nicht erscheinen. Deshalb werden 22 Tickets verkauft. Mit welcher Wahrscheinlichkeit reichen die Plätze im Flugzeug nicht? (X = Anzahl der Fluggäste, die mitfliegen wollen.)
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fluggast erscheint, ist $p=0{,}9$. X ist $B_{22;0,9}$-verteilt.

$P(X=21)+P(X=22)=\binom{22}{21}\cdot 0{,}9^{21}\cdot 0{,}1+\binom{22}{22}\cdot 0{,}9^{22}=0{,}3392$.

13. Wenn ich durch die Stadt gehe, dann treffe ich innerhalb von 20 Minuten mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_{20}=0{,}7$ mindestens einen Bekannten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p_5 treffe ich dann innerhalb von 5 Minuten mindestens einen Bekannten?
Die Wahrscheinlichkeit, innerhalb von 20 Minuten keinen Bekannten zu treffen, beträgt $1-0{,}7=0{,}3$. In diesem Fall trifft man in den ersten und den zweiten und den dritten und auch in den vierten fünf Minuten keinen

Bekannten. Wenn p_0 die jeweilige Wahrscheinlichkeit dafür bezeichnet, dann gilt $p_0^4 = 0,3$, so dass $p_0 = \sqrt[4]{0,3} \approx 0,7401$, d.h. $p_5 = 1 - \sqrt[4]{0,3} \approx 0,2599$.

14.

	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	
$y_1 = 3$	0,12	0,18	0,3
$y_2 = 4$	0,20	0,30	0,5
$y_3 = 5$	0,08	0,12	0,2
	0,4	0,6	1

a. Berechnen Sie $E(X)$, $E(Y)$ und $E(X \cdot Y)$.

b. Berechnen Sie die Kovarianz nach $\mathrm{Cov}(X,Y) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}\left(x_i - E(X)\right)\cdot\left(y_j - E(Y)\right)\cdot P(X = x_i \wedge Y = y_j)$ und nach $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X)\cdot E(Y)$.

c. Berechnen Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(X=1 \mid Y=4)$ und $P(X=2 \mid Y=4)$ und den bedingten Erwartungswert $E(X \mid Y=4)$.

d. Berechnen Sie den bedingten Erwartungswert $E(Y \mid X=1)$.

a. $E(X) = 1\cdot 0,4 + 2\cdot 0,6 = 1,6$, $E(Y) = 3\cdot 0,3 + 4\cdot 0,5 + 5\cdot 0,2 = 3,9$,

$$E(X\cdot Y) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} x_i \cdot y_j \cdot P(X = x_i \wedge Y = y_j) =$$

$$= \{1\cdot 3\cdot 0,12 + 1\cdot 4\cdot 0,2 + 1\cdot 5\cdot 0,08\} + \{2\cdot 3\cdot 0,18 + 2\cdot 4\cdot 0,3 + 2\cdot 5\cdot 0,12\} = 1,56 + 4,68 = 6,24.$$

b. $$\mathrm{Cov}(X,Y) = \{(1-1,6)\cdot(3-3,9)\cdot 0,12 + (1-1,6)\cdot(4-3,9)\cdot 0,2 + (1-1,6)\cdot(5-3,9)\cdot 0,08\} +$$

$$+\{(2-1,6)\cdot(3-3,9)\cdot 0,18 + (2-1,6)\cdot(4-3,9)\cdot 0,3 + (2-1,6)\cdot(5-3,9)\cdot 0,12\} = 0 + 0 = 0.$$

Andererseits gilt $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y) = 6,24 - 1,6\cdot 3,9 = 0$.

c. $P(X=1 \mid Y=4) = \dfrac{P(X=1 \wedge Y=4)}{P(Y=4)} = \dfrac{0,2}{0,5} = 0,4$, $P(X=2 \mid Y=4) = \dfrac{P(X=2 \wedge Y=4)}{P(Y=4)} = \dfrac{0,3}{0,5} = 0,6$ und

folglich $E(X \mid Y=4) = 1\cdot P(X=1 \mid Y=4) + 2\cdot P(X=2 \mid Y=4) = 1\cdot 0,4 + 2\cdot 0,6 = 1,6$.

d. $$E(Y \mid X=1) = 3\cdot\frac{P(Y=3 \wedge X=1)}{P(X=1)} + 4\cdot\frac{P(Y=4 \wedge X=1)}{P(X=1)} + 5\cdot\frac{P(Y=5 \wedge X=1)}{P(X=1)} = 3\cdot\frac{0,12}{0,4} + 4\cdot\frac{0,2}{0,4} + 5\cdot\frac{0,08}{0,4} = 3,9.$$

15. Gegeben sind zwei Zufallsvariablen X und Y durch die Tabelle. Es soll gezeigt werden, dass die Umkehrung des folgenden Satzes nicht gilt.
Wenn X, Y unabhängig sind, dann gilt
$E(X\cdot Y) = E(X)\cdot E(Y)$, $V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$
und $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$	$x_3 = 2$	
$y_1 = 0$	$1/4$	0	$1/4$	$1/2$
$y_2 = 1$	0	$1/2$	0	$1/2$
	$1/4$	$1/2$	$1/4$	1

a. Zeigen Sie, dass X und Y nicht unabhängig sind.

b. Bestimmen Sie $E(X)$, $E(Y)$, $E(X\cdot Y)$, $V(X)$, $V(Y)$, $V(X+Y)$, $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

a. $P(X=0 \wedge Y=0) = 1/4$, während $P(X=0)\cdot P(Y=0) = 1/4\cdot 1/2 = 1/8 \neq 1/4\cdot$

b. $E(X) = 0\cdot 1/4 + 1\cdot 1/2 + 2\cdot 1/4 = 1$, $E(Y) = 0\cdot 1/2 + 1\cdot 1/2 = 1/2$,

$E(X\cdot Y) = 0\cdot 0\cdot 1/4 + 1\cdot 0\cdot 0 + 2\cdot 0\cdot 1/4 + 0\cdot 1\cdot 0 + 1\cdot 1\cdot 1/2 + 2\cdot 1\cdot 0 = 1/2$.

Es gilt $E(X\cdot Y) = E(X)\cdot E(Y)$, obwohl X und Y nicht unabhängig sind.

Zur Varianz:

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \left(0^2\cdot 1/4 + 1^2\cdot 1/2 + 2^2\cdot 1/4\right) - (1)^2 = 1/2$$

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \left(0^2\cdot 1/2 + 1^2\cdot 1/2\right) - (1/2)^2 = 1/4$$

Wegen der Abhängigkeit von X und Y ist nicht zu erwarten, dass $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ ist.

1. Möglichkeit: $V(X+Y)=E\left((X+Y)^2\right)-\left(E(X+Y)\right)^2$

$E\left((X+Y)^2\right)=(0+0)^2\cdot 1/4+(1+0)^2\cdot 0+(2+0)^2\cdot 1/4+(0+1)^2\cdot 0+(1+1)^2\cdot 1/2+(2+1)^2\cdot 0=3$.

$\left(E(X+Y)\right)^2=\left(E(X)+E(Y)\right)^2=(1+1/2)^2=9/4$, sodass $V(X+Y)=3-9/4=3/4$,

Und das ist gerade $V(X)+V(Y)$, obwohl X und Y abhängig sind,

2. Möglichkeit: $V(X+Y)=\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{3}\left(x_i+y_j-\underbrace{E(X+Y)}_{=E(X)+E(Y)=3/2}\right)\cdot P(X=x_i\wedge Y=y_j)=$

$(0+0-3/2)^2\cdot 1/4+(1+0-3/2)^2\cdot 0+(2+0-3/2)^2\cdot 1/4+(0+1-3/2)^2\cdot 0+(1+1-3/2)^2\cdot 1/2+(2+1-3/2)^2\cdot 0=3/4$.

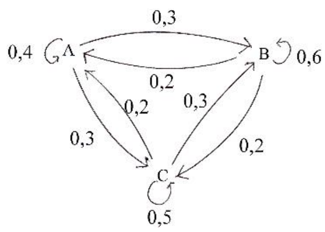
Zur Kovarianz:

1. Möglichkeit: $Cov(X,Y)=E(X\cdot Y)-E(X)\cdot E(Y)=1/2-1\cdot 1/2=0$, obwohl X und Y abhängig sind.

2. Möglichkeit: $Cov(X,Y)=\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{3}\left(\left(x_i-E(X)\right)\cdot\left(y_j-E(Y)\right)\right)\cdot P(X=x_i\wedge Y=y_j)=$

$(0-1)\cdot(0-1/2)\cdot 1/4+(1-1)\cdot(0-1/2)\cdot 0+(2-1)\cdot(0-1/2)\cdot 1/4+(0-1)\cdot(1-1/2)\cdot 0+(1-1)\cdot(1-1/2)\cdot 1/2+(2-1)\cdot(1-1/2)\cdot 0=0$.

16. a. $P=\begin{pmatrix} P(AA) & P(BA) & P(CA)\\ P(AB) & P(BB) & P(CB)\\ P(AC) & P(BC) & P(CC)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,4 & 0,2 & 0,3\\ 0,3 & 0,6 & 0,2\\ 0,3 & 0,2 & 0,5\end{pmatrix}$ führt zu



b. α. nach einem Schritt $\begin{pmatrix}p'_A\\ p'_B\\ p'_C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,4 & 0,2 & 0,3\\ 0,3 & 0,6 & 0,2\\ 0,3 & 0,2 & 0,5\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,4\\ 0,3\\ 0,3\end{pmatrix}$

β. nach zwei Schritten

$\begin{pmatrix}p''_A\\ p''_B\\ p''_C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,4 & 0,2 & 0,3\\ 0,3 & 0,6 & 0,2\\ 0,3 & 0,2 & 0,5\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}0,4\\ 0,3\\ 0,3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,31\\ 0,36\\ 0,33\end{pmatrix}$

γ. nach drei Schritten $\begin{pmatrix}p'''_A\\ p'''_B\\ p'''_C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,4 & 0,2 & 0,3\\ 0,3 & 0,6 & 0,2\\ 0,3 & 0,2 & 0,5\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}0,31\\ 0,36\\ 0,33\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,295\\ 0,375\\ 0,330\end{pmatrix}$

δ. $P^2=\begin{pmatrix}0,31 & 0,26 & 0,31\\ 0,36 & 0,46 & 0,31\\ 0,33 & 0,28 & 0,38\end{pmatrix}$, $P^3=\begin{pmatrix}0,295 & 0,280 & 0,300\\ 0,375 & 0,410 & 0,355\\ 0,330 & 0,310 & 0,345\end{pmatrix}$.

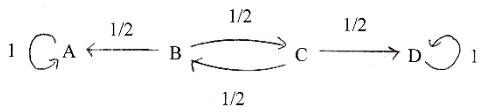
c. Die Markov-Kette ist irreduzibel, da man von jedem Zustand in jeden kommen kann.
Sie ist auch aperiodisch, da man mit 1 oder 2 oder 3, .. Schritten in jeden Zustand zurückkehren kann.

Aus $\begin{pmatrix}0,4 & 0,2 & 0,3\\ 0,3 & 0,6 & 0,2\\ 0,3 & 0,2 & 0,5\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}p_A\\ p_B\\ p_C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_A\\ p_B\\ p_C\end{pmatrix}$ folgt $p_A=\frac{16}{55}=0,2\overline{90}$, $p_B=\frac{21}{55}=0,3\overline{81}$, $p_C=\frac{18}{55}=0,3\overline{27}$.

Die Gleichgewichtsmatrix lautet dann $\overline{P}=\lim_{n\to\infty}P^n=\begin{pmatrix}\frac{16}{55} & \frac{16}{55} & \frac{16}{55}\\ \frac{21}{55} & \frac{21}{55} & \frac{21}{55}\\ \frac{18}{55} & \frac{18}{55} & \frac{18}{55}\end{pmatrix}$.

Auf lange Sicht befindet sich das System mit der Wahrscheinlichkeit $p_A=\frac{16}{55}=0,2\overline{90}$ im Zustand A, mit $p_B=\frac{21}{55}=0,3\overline{81}$ im Zustand B und mit $p_C=\frac{18}{55}=0,3\overline{27}$ im Zustand C.

17. $P = \begin{pmatrix} P(AA) & P(BA) & P(CA) & P(DA) \\ P(AB) & P(BB) & P(CB) & P(DB) \\ P(AC) & P(BC) & P(CC) & P(DC) \\ P(AD) & P(BD) & P(CD) & P(DD) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$



a. $P^2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, $P^3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} & 1 \end{pmatrix}$, $P^4 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{8} & \frac{5}{16} & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{16} & 0 \\ 0 & \frac{5}{16} & \frac{5}{8} & 1 \end{pmatrix}$, $P^5 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{21}{32} & \frac{5}{16} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{32} & 0 \\ 0 & \frac{1}{32} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{16} & \frac{21}{32} & 1 \end{pmatrix}$

b. Diese Markov-Kette ist nicht irreduzibel. Trotzdem hier mal der Ansatz für den stationären Zustand:

$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} p_A \\ p_B \\ p_C \\ p_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_A \\ p_B \\ p_C \\ p_D \end{pmatrix}$ führt auf $\begin{aligned} p_A + \tfrac{1}{2} p_B &= p_A \\ \tfrac{1}{2} p_C &= p_B \\ \tfrac{1}{2} p_B &= p_C \\ \tfrac{1}{2} p_C + p_D &= p_D \end{aligned}$, d.h. $p_B = p_C = 0$. Keine Bedingung für p_A und p_D.

Da die Summe aller Wahrscheinlichkeiten gleich 1 sein muss, folgt $\begin{pmatrix} p_A \\ p_B \\ p_C \\ p_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ 0 \\ 1-p \end{pmatrix}$ mit $0 \le p \le 1$.

Somit gibt es beliebig viele stationäre Verteilungen.

Mit einem Rechenprogramm folgt die Gleichgewichtsmatrix $\overline{P} = \lim\limits_{n \to \infty} P^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$.

Wenn sich das System in Zustand A befindet, dann befindet es sich wegen $\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

sicher wieder in A.

Wenn sich das System in Zustand B befindet, dann befindet es sich wegen $\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

auf lange Sicht der Wahrscheinlichkeit $\dfrac{2}{3}$ in A und mit der Wahrscheinlichkeit $\dfrac{1}{3}$ in D.

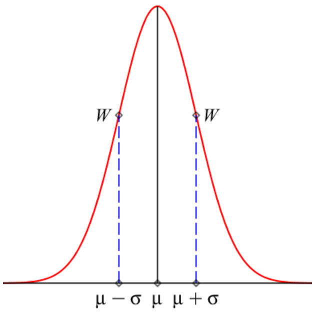
Wenn sich das System in Zustand C befindet, dann befindet es sich wegen $\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

auf lange Sicht der Wahrscheinlichkeit $\dfrac{1}{3}$ in A und mit der Wahrscheinlichkeit $\dfrac{2}{3}$ in D.

Wenn sich das System in Zustand D befindet, dann bleibt es in D.

Wenn sich das System irgendwo befindet, dann gilt $\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, d.h. auf lange Sicht befindet sich das System jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ im Zustand A oder D.

18. Bestimmen Sie für die Dichtefunktion $f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ die Koordinaten des Hochpunktes und der beiden Wendepunkte.



Es ist $f'(x) = -\frac{1}{\sigma^3 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot (x-\mu) \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ und

$$f''(x) = -\frac{1}{\sigma^3 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \left(1 - \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

Es folgt $H\left(\mu \middle| \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}}\right)$ und $W_{1/2}\left(\mu \pm \sigma \middle| \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}}\right)$.

19. Die Wahrscheinlichkeit für eine Knabengeburt sei 0,515.
   a. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind dann unter 1000 Neugeborenen genau 510 Knaben? (X = Anzahl der Knaben). Verwenden Sie
      α. die Binomialverteilung $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$,
      β. die Näherung $P(X = x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$.
      γ. die Näherung $P(X = x) = \Phi\left(\frac{x+0,5-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x-0,5-\mu}{\sigma}\right)$.
   b. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind dann unter 1000 Neugeborenen mindestens 520 Knaben? (X = Anzahl der Knaben). Verwenden Sie die 0,5-Näherung.

a. α. $P(X = 510) = \binom{1000}{510} 0,5150^{510} \cdot 0,485^{490} \approx 0,0240$.

β. Mit $\mu = 1000 \cdot 0,515 = 515$ und $\sigma = \sqrt{1000 \cdot 0,515 \cdot 0,485} \approx 15,804$ folgt

$$P(X = 510) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{510-\mu}{\sigma}\right)^2} = 0,0279.$$

γ. $P(X = 510) = \Phi\left(\frac{510+0,5-515}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{510-0,5-515}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{-4,5}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-5,5}{\sigma}\right) =$

$$1 - \Phi\left(\frac{4,5}{\sigma}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{-5,5}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{5,5}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{4,5}{\sigma}\right) \approx \Phi(0,35) - \Phi(0,28) \approx 0,6368 - 0,6103 = 0,0265$$

mit Hilfe unserer Tafel. Mit einer genaueren Rechnung folgt

$\Phi\left(\frac{5,5}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{4,5}{\sigma}\right) \approx \Phi(0,348007) - \Phi(0,278406) \approx 0,636083 - 0,612076 \approx 0,0240$; hervorragend.

b. Computer: $\sum_{k=520}^{1000} B_{1000;0,515}(k) = \sum_{k=520}^{1000} \binom{1000}{k} \cdot 0,515^k \cdot 0,485^{1000-k} = 0,3880$.

Nun mit der Näherung: $n = 1000$, $\mu = n \cdot p = 515$, $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{249,775} \approx 15,804$.

Dann gilt $P(X \geq 520) = 1 - P(X \leq 519) \approx 1 - \Phi\left(\frac{519+0,5-515}{\sqrt{249,775}}\right) \approx 1 - \Phi(0,2847) \approx 1 - 0,6121 = 0,3879$.

20. Zwei ideale Würfel werden 300-mal zusammengeworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten mehr als 110 Sechsen auf? Verwenden Sie die 0,5-Näherung.

Es sei X die Anzahl der Sechsen, $n = 600$, also $\mu = np = 600 \cdot 1/6 = 100$ und $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{250/3} \approx 9{,}129$.

$$P(X > 110) = 1 - P(X \le 110) \approx 1 - \Phi\left(\frac{110 + 0{,}5 - 100}{\sqrt{250/3}}\right) \approx 1 - \Phi(1{,}150) \approx 0{,}1250.$$

Computer: $\sum_{k=111}^{600} B_{600;1/6}(k) = \sum_{k=110}^{600} \binom{600}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{600-k} = 0{,}1257$.

21. In Deutschland haben etwa 12% aller Personen die Blutgruppe B. Es werden nun 500 Personen auf ihre Blutgruppe untersucht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt die Anzahl der Personen mit Blutgruppe B zwischen 55 und 65, je einschließlich? Verwenden Sie die 0,5-Näherung.

Es sei X die Anzahl der Personen mit Blutgruppe B. Dann ist $p = 0{,}12$, $\mu = np = 60$ und $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{52{,}8} \approx 7{,}266$.

Dann gilt $P(55 \le X \le 65) = P(X \le 65) - P(X \le 54) = \Phi\left(\frac{65 + 0{,}5 - 60}{\sqrt{52{,}8}}\right) - \Phi\left(\frac{54 + 0{,}5 - 60}{\sqrt{52{,}8}}\right) =$

$$= \Phi\left(\frac{5{,}5}{\sqrt{52{,}8}}\right) - \Phi\left(-\frac{5{,}5}{\sqrt{52{,}8}}\right) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{5{,}5}{\sqrt{52{,}8}}\right) - 1 \approx 0{,}5509.$$

Exakt: $\sum_{k=55}^{65} \binom{500}{k} \cdot 0{,}12^k \cdot 0{,}88^{500-k} \approx 0{,}5509$, das gleiche Ergebnis.

22. In einer Brauerei werden die Flaschen vor dem Wiederauffüllen gewaschen. Die Arbeitszeit X in Sekunden für das Waschen sei normalverteilt mit $\mu_X = 120$ und $\sigma_X = 15$. Die Arbeitszeit Y für das Füllen sei normalverteilt mit $\mu_Y = 54$ und $\sigma_Y = 5$. X und Y seien unabhängig. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Waschen und Füllen einer Flasche zusammen nicht länger als 3 Minuten dauert?
Hinweis: Verwenden Sie den folgenden Satz:

Satz: Wenn zwei Zufallsvariablen X und Y unabhängig und jeweils normalverteilt mit μ_X und σ_X bzw. μ_Y und σ_Y sind, dann ist auch die Zufallsvariable $Z = X + Y$ normalverteilt mit $\mu_{X+Y} = \mu_X + \mu_Y$ und $\sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$.

Es ist $\mu_{X+Y} = \mu_X + \mu_Y = 120 + 54 = 174$ und $\sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 = 15^2 + 5^2 = 250$. Dann gilt

$$P(X + Y \le 180) = \Phi\left(\frac{180 - 174}{\sqrt{250}}\right) \approx \Phi(0{,}3795) \approx 0{,}6478.$$

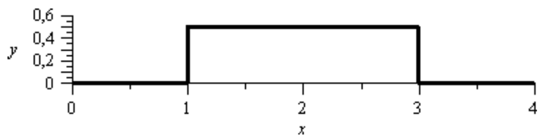
23. Die Körpergröße X in cm bei Männern und Y in cm bei Frauen einer Bevölkerung sei normalverteilt mit $\mu_X = 172$ und $\sigma_X = 6{,}5$ bzw. $\mu_Y = 165$ und $\sigma_Y = 3{,}5$. Aus dieser Bevölkerung werden unabhängig voneinander ein Mann und eine Frau ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der Mann kleiner als die Frau, d.h. bestimmen Sie $P(X - Y < 0)$.

Es gilt $\mu_{X-Y} = \mu_X + \mu_{-Y} = \mu_X - \mu_Y$ und $\sigma_{X-Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_{-Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$.

Also $\mu_{X-Y} = \mu_X - \mu_Y = 172 - 165 = 7$ und $\sigma_{X-Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 = 6{,}5^2 + 3{,}5^2 = 54{,}5$.

Und damit $P(X - Y < 0) = \Phi\left(\frac{0 - 7}{\sqrt{54{,}5}}\right) = \Phi\left(-\frac{7}{\sqrt{54{,}5}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{7}{\sqrt{54{,}5}}\right) \approx 1 - 0{,}8285 = 0{,}1715$.

24. Die Zufallsvariable X sei zwischen 1 und 3 gleichverteilt. Das Schaubild der Dichtefunktion $f(x)$ ist dargestellt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(1{,}5 \le X \le 2)$?



Berechnen Sie den Erwartungswert $\mu = \int_1^3 x \cdot f(x)\,dx$ und die Varianz $\sigma^2 = \int_1^3 (x-\mu)^2 \cdot f(x)\,dx$.

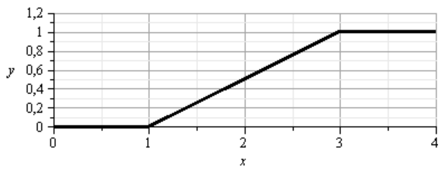
Zeichnen Sie die zugehörige Verteilungsfunktion $F(x)$.

Es gilt $f(x) = \begin{cases} 0{,}5 \text{ für } 1 \le x \le 3 \\ 0 \text{ für } x < 1 \text{ oder } x > 3 \end{cases}$

$P(1{,}5 \le X \le 2) =$ Rechteckfläche $= (2-1{,}5) \cdot 0{,}5 = 0{,}25$

$$\mu = \int_1^3 x \cdot f(x)\,dx = \int_1^3 x \cdot 0{,}5\,dx = \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^3 = 2$$

$$\sigma^2 = \int_1^3 (x-\mu)^2 \cdot f(x)\,dx = \int_1^3 (x-2)^2 \cdot 0{,}5\,dx = \left[\frac{1}{6}(x-2)^3\right]_1^3 = \frac{1}{3}.$$



25. Ein Ehepaar besitzt ein Handy, das beide gemeinsam unabhängig voneinander verwenden. Für die monatlichen Anrufzeiten in Minuten und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten gilt:
Für den Mann: $P(60 \text{ Minuten}) = 0{,}25$, $P(30 \text{ Minuten}) = 0{,}75$
Für die Frau: $P(80 \text{ Minuten}) = 0{,}6$, $P(65 \text{ Minuten}) = 0{,}4$.
Der Tarif beträgt 1€/Min bei einer Grundgebühr von monatlich 10€. Wird in einem Monat mehr als 2 Stunden telefoniert, dann gibt es 10% Rabatt auf die Gesamtrechnung.
a. Berechnen Sie die durchschnittliche Höhe der Telefonrechnung.
b. Berechnen Sie die Standardabweichung σ.
Hinweis: Es gibt 4 mögliche Kombinationen. Verwenden Sie die Tabelle

	Mann		Frau		gesamt		
Nr.	Zeit in min	P_i	Zeit in min	P_j	Zeit in min	$P_i \cdot P_j$	Kosten
1	60	0,25	80	0,6	140	0,15	135
2	60	0,25	65	0,4	125	0,1	121,50
3	30	0,75	80	0,6	110	0,45	120
4	30	0,75	65	0,4	95	0,3	105

a. $E(X) = \mu = 135 \cdot 0{,}15 + 121{,}5 \cdot 0{,}1 + 120 \cdot 0{,}45 + 105 \cdot 0{,}3 = 117{,}90$ EURO.

b. $\sigma^2 = E(X^2) - E(X)^2 = 135^2 \cdot 0{,}15 + 121{,}5^2 \cdot 0{,}1 + 120^2 \cdot 0{,}45 + 105^2 \cdot 0{,}3 - 117{,}9^2 = 97{,}065$, d.h.

$\sigma = \sqrt{97{,}065} \approx 9{,}85$ EURO.

oder $\sigma^2 = \sum_{k=1}^{4} (x_k - \mu)^2 \cdot P(X = x_k) =$

$= (135-117{,}9)^2 \cdot 0{,}15 + (121{,}5-117{,}9)^2 \cdot 0{,}1 + (120-117{,}9)^2 \cdot 0{,}45 + (105-117{,}9)^2 \cdot 0{,}3 = 97{,}065$ wie oben.

26. Ein Unternehmen steht vor der Entscheidung, ein benötigtes Zwischenprodukt selbst herzustellen oder zu kaufen. Für die pro Monat benötigte Stückzahl geht man von folgenden Wahrscheinlichkeiten aus:

x_i	1000	1500	2000
$P(x_i)$	30%	50%	20%

Für den monatlichen Kauf gilt: Der Stückpreis beträgt 10 €, bei Abnahme von mehr als 1500 Stück/Monat nur noch 9€.

Für Eigenfertigung gilt: Die Fixkosten betragen 4700 €/Monat, die variablen Kosten betragen 6,50 €/Stück. Bei einer Fertigung von mehr als 1500 Stück/Monat steigt der Stückpreis aufgrund von Überstundenzuschlägen für die darüber liegende Stückzahl auf 7,50 €/Stück.

Wie soll das Unternehmen entscheiden?

		Kauf		Eigenfertigung	
x_i	$P(x_i)$	Kosten $K(x_i)$	$P(x_i)\cdot K(x_i)$	Kosten $K(x_i)$	$P(x_i)\cdot K(x_i)$
1000	0,3	10000	3000	11200	3360
1500	0,5	15000	7500	14450	7225
2000	0,2	18000	3600	18200	3640
E(X)	–	–	14100	–	14225

Es ist also günstiger, die Teile einzukaufen.

27. Es werde angenommen, dass $p = 80\%$ Einwohner einer Stadt Kaffee trinken. Bestimmen Sie die Anzahl n der Personen dieser Stadt, die befragt werden müssen, damit die relative Häufigkeit für die Kaffeetrinker bei dieser Umfrage mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% im Intervall $[0,7/0,9]$ liegt?

I. Es sei X die Anzahl der Kaffeetrinker unter den n Befragten und $\overline{X} = \frac{X}{n}$ die mittlere Trefferquote.

a. Rechnen Sie mit $P(0,7 \le \overline{X} \le 0,9) = P(0,7\cdot n \le X \le 0,9\cdot n) = \cdots$ mit der 0,5-Korrektur.

b. Rechnen Sie mit $P(0,7 \le \overline{X} \le 0,9) = P(0,7\cdot n \le X \le 0,9\cdot n) = \cdots$ ohne die 0,5-Korrektur.

II. Es sei $X = \begin{cases} 1 & \text{bei einem Kaffeetrinker} \\ 0 & \text{bei einem Nicht-Kaffeetrinker} \end{cases}$.

Rechnen Sie mit $P(0,7 \le \overline{X} \le 0,9) = \Phi\left(\frac{0,9-\mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}}\right) - \Phi\left(\frac{0,7-\mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}}\right) = \cdots$ mit der Normalverteilung, also ohne die 0,5-Korrektur.

III. a. Mit Hilfe der in der Vorlesung hergeleiteten Formel $n \ge \frac{4z^2\cdot p\cdot q}{\ell^2}$, wobei $\Phi(z) = \frac{1+\alpha}{2}$.

b. In der Statistik wird auch die Formel $n \ge \dfrac{\frac{4z^2\cdot p\cdot q}{\ell^2}}{1+\frac{4z^2\cdot p\cdot q}{\ell^2\cdot N}}$ mit $\Phi(z) = \frac{1+\alpha}{2}$ verwendet.

Dabei ist N die Anzahl der Leute, für die die Statistik aufgestellt werden soll, die man also theoretisch befragen könnte. Für $N \to \infty$ strebt der Nenner gegen 1, so dass man die Formel von Teil a erhält. Wählen Sie $N = 1000$.

I a. Mit $\mu_X = 0,8n$ und $\sigma_X^2 = n\cdot p\cdot q = n\cdot 0,8\cdot 0,2 = 0,16n$, also $\sigma_X = 0,4\cdot\sqrt{n}$ folgt

$$P(0,7 \le \overline{X} \le 0,9) = P(0,7\cdot n \le X \le 0,9\cdot n) = \Phi\left(\frac{0,9n+0,5-0,8n}{0,4\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{0,7n-0,5-0,8n}{0,4\sqrt{n}}\right) =$$

$$\Phi\left(\frac{0,25n+1,25}{\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(-\frac{0,25n+1,25}{\sqrt{n}}\right) = 2\cdot\Phi\left(\frac{0,25n+1,25}{\sqrt{n}}\right) - 1 \ge 0,95.$$ Daraus folgt

$\Phi\left(\frac{0,25n+1,25}{\sqrt{n}}\right) \ge 0,975$ und mit Hilfe der Tabelle $\frac{0,25n+1,25}{\sqrt{n}} \ge 1,96$ bzw.

$0,25n - 1,96\sqrt{n} + 1,25 \ge 0$. Die dazugehörige quadratische Gleichung $z^2 - 7,84z + 5 = 0$ mit der Substitution $z = \sqrt{n}$ hat die Lösungen $z_{1/2} = \frac{98}{25} \pm \frac{1}{25}\sqrt{6479}$, d.h. $n_1 = z_1^2 \approx 50,975$ und $n_2 = z_2^2 \approx 0,490$, so dass man mindestens 51 Leute nach ihrem Kaffeeverhalten befragen müsste.

b. $P(0,7 \le \overline{X} \le 0,9) = P(0,7\cdot n \le X \le 0,9\cdot n) = \Phi\left(\frac{0,9n-0,8n}{0,4\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{0,7n-0,8n}{0,4\sqrt{n}}\right) =$

$\Phi\left(0,25\sqrt{n}\right)-\Phi\left(-0,25\sqrt{n}\right)=2\Phi\left(0,25\sqrt{n}\right)-1\geq 0,95$, also $\Phi\left(0,25\sqrt{n}\right)\geq 0,975$, so dass $0,25\sqrt{n}\geq 1,96$, also $n\geq 61,5$. Somit sind mindestens 62 Befragungen erforderlich.

II. Mit $\mu_{\overline{X}}=\mu_X=p=0,8$ und $\sigma_{\overline{X}}=\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{p\cdot q}}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{0,8\cdot 0,2}}{\sqrt{n}}=\frac{0,4}{\sqrt{n}}$ folgt

$$P(0,7\leq \overline{X}\leq 0,9)=\Phi\left(\frac{0,9-\mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}}\right)-\Phi\left(\frac{0,7-\mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}}\right)=\Phi\left(\frac{0,9-0,8}{0,4/\sqrt{n}}\right)-\Phi\left(\frac{0,7-0,8}{0,4/\sqrt{n}}\right)=$$

$\Phi\left(0,25\sqrt{n}\right)-\Phi\left(-0,25\sqrt{n}\right)=2\cdot\Phi\left(0,25\sqrt{n}\right)-1$ wie bei Teil Ib.

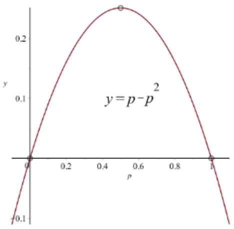
III. a. Mit $\Phi(z)=\frac{1+\alpha}{2}=\frac{1+0,95}{2}=0,975$, also $z=1,96$, folgt

$n\geq\frac{4z^2\cdot p\cdot q}{\ell^2}=\frac{4\cdot 1,96^2\cdot 0,8\cdot 0,2}{0,2^2}=61,4656$. Also müsste man 62 Leute befragen, um ein Vertrauensintervall der Länge $\ell=0,2$ für die relative Häufigkeit der Kaffeetrinker zu erhalten.

b. $$n\geq\frac{\frac{4z^2\cdot p\cdot q}{\ell^2}}{1+\frac{4z^2\cdot p\cdot q}{\ell^2\cdot N}}=\frac{\frac{4\cdot 1,96^2\cdot 0,8\cdot 0,2}{0,2^2}}{1+\frac{4\cdot 1,96^2\cdot 0,8\cdot 0,2}{0,2^2\cdot 1000}}=\frac{61,4656}{1+61,4656/1000}=57,91.$$

28. In einer Gruppe von $N=5000$ Leuten soll erfragt werden, wieviel Prozent gerne Musik hören. Das dabei erhaltene Intervall für die relative Häufigkeit soll die Breite 0,1 haben und mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% gelten.

Die Wahrscheinlichkeit p ist unbekannt! Wieso rechnet man dann mit $p=0,5$?



Rechnen Sie mit $n\geq\frac{4z^2\cdot p\cdot q}{\ell^2}$ und mit $n\geq\frac{\frac{4z^2\cdot p\cdot q}{\ell^2}}{1+\frac{4z^2\cdot p\cdot q}{\ell^2\cdot N}}$.

Zu $p=0,5$: Der Term $\frac{4z^2\cdot p\cdot q}{\ell^2}=\frac{4z^2}{\ell^2}\cdot p\cdot(1-p)=\frac{4z^2}{\ell^2}\cdot(p-p^2)$ hat sein Maximum für $p=0,5$. Das ergibt die größtmögliche Anzahl von Befragungen, so dass die Ungleichung $n\geq\frac{4z^2\cdot p\cdot q}{\ell^2}$ für jeden Wert von p erfüllt ist.
Ebenso hat der zweite Term sein Maximum für $p=0,5$.

Wegen $\Phi(z)=\frac{1+\alpha}{2}=0,975$ ist $z=1,96$, so dass $n\geq\frac{4z^2\cdot p\cdot q}{\ell^2}=\frac{4\cdot 1,96^2\cdot 0,5\cdot 0,5}{0,1^2}=384,16$ bzw.

$n\geq\frac{\frac{4z^2\cdot p\cdot q}{\ell^2}}{1+\frac{4z^2\cdot p\cdot q}{\ell^2\cdot N}}=\frac{384,16}{1+\frac{384,16}{5000}}=356,75$ gilt. Also müssen 385 bzw. 357 Personen befragt werden.

29. Eine Zufallsvariable X hat den Erwartungswert 5 und die Standardabweichung 1,5. Bestimmen Sie
a. $P(|X-5|\geq 3)$ einmal nach Tschebyscheff und einmal mit Hilfe der Normalversteilung.
b. $P(|X-5|\leq 2)$ einmal nach Tschebyscheff und einmal mit Hilfe der Normalversteilung.

a. Nach $P(|X-\mu|\geq c) \leq \frac{\sigma^2}{c^2}$ folgt $P(|X-5|\geq 3) \leq \frac{1{,}5^2}{3^2}=0{,}25$.

$P(|X-\mu|\geq c)=1-P(|X-\mu|\leq c)=1-P(\mu-c\leq X\leq \mu+c)=1-\left(\Phi\left(\frac{\mu+c-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\mu-c-\mu}{\sigma}\right)\right)=$

$1-\Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right)+\Phi\left(\frac{-c}{\sigma}\right)=1-2\cdot\Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right)+1=2-2\cdot\Phi\left(\frac{3}{1{,}5}\right)=2-2\cdot\Phi(2)=2-2\cdot 0{,}9772=0{,}0456$, also besser als nach Tschebyscheff. Aber dafür gilt Tschebyscheff für beliebige Verteilungen von X.

b. Nach $P(|X-\mu|\leq c) \geq 1-\frac{\sigma^2}{c^2}$ folgt $P(|X-5|\leq 2) \geq 1-\frac{1{,}5^2}{2^2}=0{,}4375$.

$P(|X-\mu|\leq c)=\Phi\left(\frac{\mu+c-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\mu-c-\mu}{\sigma}\right)=2\cdot\Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right)-1=2\cdot\Phi\left(\frac{2}{1{,}5}\right)-1=2\cdot 0{,}9082-1=0{,}8164$.

30. Es sei X eine Zufallsvariable mit dem Erwartungswert μ, die nur nicht-negative Werte annehmen kann.

a. Beweisen Sie, dass dann die **Markoff'sche Ungleichung** $\boxed{P(X\geq c)\leq \frac{\mu}{c}}$ gilt. Andrei Andrejewitsch Markow (Андрей Андреевич Марков), russischer Mathematiker, 1856 – 1922.

b. Welche Ungleichung folgt, wenn man $X=(Y-\mu_Y)^2$ mit $\mu_Y=E(Y)$ in die Markoff'sche Unleichung $P(X\geq c^2)\leq\frac{\mu}{c^2}$ einsetzt? Es sei $c>0$ vorausgesetzt.

a. $\mu=\sum_{j=1}^{m}x_j\cdot P(X=x_j)\geq\sum_{X\geq c}x_j\cdot P(X=x_j)\geq\sum_{X\geq c}c\cdot P(X=x_j)=c\cdot\sum_{X\geq c}P(X=x_j)=c\cdot P(X\geq c)$.

Und daraus folgt sie Behauptung.

b. $P(X\geq c^2)\leq\frac{E(X)}{c^2}$, d.h. $P\left((Y-\mu_Y)^2\geq c^2\right)\leq\frac{E\left((Y-\mu_Y)^2\right)}{c^2}$, also $P\left(|Y-\mu_Y|\geq c\right)\leq\frac{\sigma_Y^2}{c^2}$, da $E\left((Y-\mu_Y)^2\right)=\mathrm{Var}(Y)=\sigma_Y^2$. Und das ist die Tschebyscheff'sche Ungleichung.

31. Es sei $f:[0,b]\to\mathbb{R}_0^+$ mit $b>0$ eine Dichtefunktion und $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ die zugehörige Verteilungsfunktion. Zeigen Sie, dass der Inhalt der Fläche zwischen $y=1$ und $y=F(x)$ genau $E(X)$ ist.

Hinweis: Formen Sie $E(X)=\int_0^b x\cdot f(x)\,dx$ durch partielle Integration um.

Es ist $E(X)=\int_0^b x\cdot f(x)\,dx=\left[F(x)\cdot x\right]_0^b-\int_0^b F(x)\,dx=F(b)\cdot b-F(0)\cdot 0-\int_0^b F(x)\,dx=1\cdot b-\int_0^b F(x)\,dx$, da $F(b)=1$.

32. An einem Schalter kommen pro 10 Minuten durchschnittlich 2,8 Kunden an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in den nächsten 10 Minuten

a. kein Kunde kommt?
b. 10 Kunden kommen?
c. höchstens 5 Kunden kommen?
d. mindestens 5 Kunden kommen?

Hinweis: Verwenden Sie die Poisson-Verteilung mit $\lambda=2{,}8$ und $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}$.

Es sei X die Anzahl der Kunden.

a. $P(X=0)=\frac{2{,}8^0}{0!}\cdot e^{-2{,}8}\approx 0{,}0608$.

b. $P(X=10)=\frac{2{,}8^{10}}{10!}\cdot e^{-2{,}8}\approx 0{,}0005$

c. $\sum_{k=0}^{5} P(X=k) = e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{5} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-2,8} \cdot \sum_{k=0}^{5} \frac{2,8^k}{k!} = 0,9349$

d. $\sum_{k=5}^{\infty} P(X=k) = 1 - \sum_{k=0}^{4} P(X=k) = 1 - e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{4} \frac{\lambda^k}{k!} = 1 - e^{-2,8} \cdot \sum_{k=0}^{4} \frac{2,8^k}{k!} = 0,1523$

33. An einer Mess-Stelle fährt pro Minute mit der Wahrscheinlichkeit $0,9$ mindestens ein Fahrrad vorbei. Die Anzahl X der Fahrräder sei Poisson-verteilt mit $P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$.

a. Bestimmen Sie den Parameter λ. Hinweis: Verwenden Sie $P(X=0)$.

b. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fahren in einer Minute mindestens zwei Fahrräder vorbei?

c. In einer Stadt gibt es vier voneinander unabhängige Mess-Stellen. Für jede gilt, dass pro Minute mit der Wahrscheinlichkeit $0,9$ mindestens ein Fahrrad vorbeifährt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fährt in einer Minute an genau zwei Mess-Stellen kein Fahrrad vorbei?

a. $P(X=0) = \frac{\lambda^0}{0!} \cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda} = 0,1$, also $\lambda = -\ln(0,1) \approx 2,3026$.

b. $P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - 0,1 + \ln(0,1) \cdot 0,1 \approx 0,6697$.

c. Die Wahrscheinlichkeit beträgt $\binom{4}{2} \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^2 = 0,0486$.

34. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 1000 Leuten genau 3 am 1. Januar Geburtstag haben, und zwar a. exakt mit der Binomialverteilung

b. mit der Näherung $B_{n,p}(k) \approx \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)^2}$ von Moivre-Laplace

c. mit der Näherung $B_{n,p}(k) \approx \Phi\left(\frac{k+0,5-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{k-0,5-\mu}{\sigma}\right)$

d. nach Poisson.

X = Anzahl der Leute, die am 01.01. Geburtstag haben und $p = 1/365$.

a. $P(X=3) = \binom{1000}{3} \cdot \left(\frac{1}{365}\right)^3 \cdot \left(\frac{364}{365}\right)^{997} \approx 0,2217$

b. Mit $\mu = \frac{1000}{365} = \frac{200}{73}$ und $\sigma = \sqrt{1000 \cdot \frac{1}{365} \cdot \frac{364}{365}} = \sqrt{\frac{14560}{5329}}$ folgt $P(X=3) \approx \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{3-\mu}{\sigma}\right)^2} \approx 0,2384$

c. Mit den μ- und σ-Werten von b. folgt

$$B_{n,p}(3) \approx \Phi\left(\frac{3+0,5-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{3-0,5-\mu}{\sigma}\right) \approx \Phi(0,4600) - \Phi(-0,1450) = \Phi(0,4600) + \Phi(0,1450) - 1 \approx 0,2349$$

d. Es ist $E(X) = \lambda = \frac{1000}{365} = \frac{200}{73}$. Dann gilt nach Poisson $P(X=3) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\frac{200}{73}} \cdot \frac{\left(\frac{200}{73}\right)^3}{3!} \approx 0,2214$.

35. X hat den Erwartungswert μ, also $\frac{X-\mu}{\sigma}$ den Erwartungswert 0. Somit hat $IQ = 100 + 15 \cdot \frac{x-\mu}{\sigma}$ den Erwartungswert 100. X hat die Standardabweichung σ, also $X-\mu$ ebenfalls. $\frac{X-\mu}{\sigma}$ besitzt die Standardabweichung 1, so dass $15 \cdot \frac{x-\mu}{\sigma}$, also auch $IQ = 100 + 15 \cdot \frac{x-\mu}{\sigma}$ die Standardabweichung 15 besitzen.

$P(IQ > 130) = 1 - P(IQ \leq 130) = 1 - \Phi\left(\frac{130-100}{15}\right) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$.

36. Es sei X eine Zufallsvariable mit der Dichtefunktion $f(x) = e^{-2|x|}$ für $x \in \mathbb{R}$.

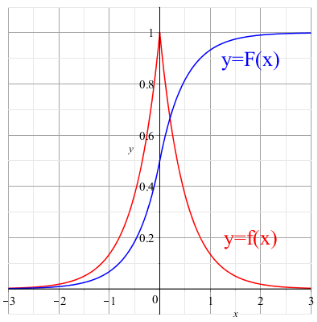
a. Überprüfen Sie, ob $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$. Begründen Sie ohne Rechnung, dass $E(X) = 0$.

b. Bestimmen Sie allgemein die Verteilungsfunkton $P(X \le x) = F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ für $x \in \mathbb{R}$ und speziell die Wahrscheinlichkeiten $P(X \le -1)$, $P(X \le 1)$ und $P(X \ge 1)$.

a. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx + \int\limits_{0}^{\infty} e^{-2x}\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{-\infty}^{0} + \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_{0}^{\infty} = \frac{1}{2} - 0 + \left(0 + \frac{1}{2}\right) = 1.$

Das Schaubild von $f(x) = e^{-2|x|}$ ist symmetrisch zur y-Achse. Das Schaubild von $x \cdot e^{-2|x|}$ ist symmetrisch zum Ursprung, so dass das Integral $E(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-2|x|}\,dx = 0$ folgt.

b. $$F(x) = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{2t}\,dt = \frac{1}{2}e^{2x} & \text{für } x \le 0 \\ \int\limits_{-\infty}^{0} e^{2t}\,dt + \int\limits_{0}^{x} e^{-2t}\,dt = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2}e^{-2x} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$



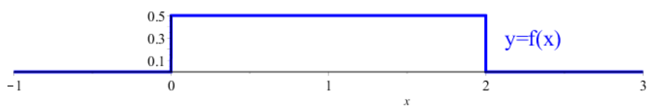
$P(X \le -1) = F(-1) = \frac{1}{2}e^{-2} \approx 0{,}0677$,

$P(X \le 1) = 1 - \frac{1}{2}e^{-2} \approx 0{,}9323$,

$P(X \ge 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - \left(1 - \frac{1}{2}e^{-2}\right) = \frac{1}{2}e^{-2} \approx 0{,}0677$.

37. Ein Zufallsgenerator erzeugt Zufallszahlen x mit $0 \le x \le 2$. Die Dichtefunktion lautet

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{für } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{für } x > 2 \end{cases}.$$



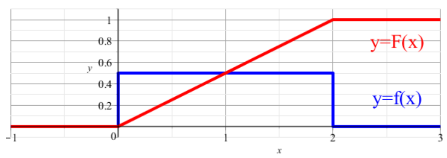
Die Zufallsvariable X ist somit gleichverteilt im Intervall $[0/2]$.

a. Bestimmen Sie $P(0 \le X \le 0{,}2)$, $P(X \ge 0{,}4)$, $P(X = 1)$ und allgemein die Verteilungsfunktion $P(X \le x) = F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ für $x \in \mathbb{R}$.

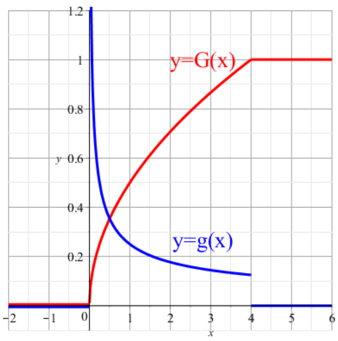
b. Die Zufallszahlen werden nun quadriert. Die Zufallsvariable Y sei definiert durch $Y = X^2$.
Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $G(x) = P(Y \le x)$ und die Dichtefunktion $g(x) = G'(x)$.
Bestimmen Sie $P(0 \le Y \le 0{,}2)$, $P(0{,}9 \le Y \le 1{,}1)$ und $P(1{,}8 \le Y \le 2)$.

a. $P(0 \le X \le 0{,}2) = 0{,}2 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}1$, $P(X \ge 0{,}4) = 1{,}6 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}8$, $P(X = 1) = 0$ jeweils als Flächeninhalte von Rechtecken berechnet.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{für } 0 \le x \le 2 \\ 1 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$



b. $G(x) = P(Y \le x) = P(X^2 \le x) = P(0 \le X \le \sqrt{x}) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \le 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{x} & \text{für } 0 < x < 4 \\ 1 & \text{für } x \ge 4 \end{cases}$



$P(0 \le Y \le 0,2) = G(0,2) - G(0) = \frac{1}{2}\sqrt{0,2} \approx 0,2236$

$P(0,9 \le Y \le 1,1) = G(1,1) - G(0,9) = \frac{1}{2}\sqrt{1,1} - \frac{1}{2}\sqrt{0,9} \approx 0,0501$

$P(3,8 \le Y \le 4) = G(4) - G(3,8) = \frac{1}{2}\sqrt{4} - \frac{1}{2}\sqrt{3,8} \approx 0,0253$.

Obwohl die drei Intervalle die gleiche Länge 0,2 haben, besitzen sie unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten. Das liegt daran, dass sich die Zahlen zwischen 0 und 2 beim Quadrieren von der Zahl 1 entfernen und sich in Richtung 0 oder 4 bewegen: $0,9^2 = 0,81 < 0,9$ oder $1,1^2 = 1,21 > 1,1$.

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \le 0 \\ \frac{1}{4\sqrt{x}} & \text{für } 0 < x < 4 \\ 1 & \text{für } x \ge 4 \end{cases}$$

38. Wie oft muss man einen Würfel mindestens werfen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% mindestens einmal die 6 erscheint? (Geometrische Verteilung)

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei n Würfen keine 6 erscheint, ist $\left(\frac{5}{6}\right)^n$. Folglich ist $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$ die Wahrscheinlichkeit, dass bei n Würfen mindestens eine 6 erscheint. Aus dem Ansatz $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n \ge 0,9$ folgt $n \ge \frac{\ln(1/10)}{\ln(5/6)} \approx 12,63$. Somit muss man mindestens 13 Mal würfeln.

39. Es ist bekannt, dass 80% der TIF-ler das Fach Statistik lieben. Zu Beginn einer Vorlesung kommen die TIF-ler zur Türe herein.
 a. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass erst der zehnte eintretende Student Statistik nicht liebt?
 b. Wie viele Studenten müssen im Mittel eintreten, bis ein der Statistik kritisch eingestellter Student eintritt? (Geometrische Verteilung)

 a. $P = 0,8^9 \cdot 0,2 \approx 0,0268$.

 b. Erwartungswert $E = \frac{1}{0,2} = 5$. Im Mittel ist erst der fünfte eintretende Student kein Freund der Statistik.

40. Ein unerfahrener Schütze trifft auf dem Jahrmarkt mit einer Wahrscheinlichkeit von nur 0,1.
 a. Der Schütze schießt fünfmal. Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er mehr als einmal das Ziel?
 b. Nun schießt der Schütze so lange, bis er einen Treffer erzielt.
 Wie oft muss er im Mittel schießen, um einen Treffer zu erzielen?
 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mehr als drei Versuche benötigt, bis er einen Treffer erzielt hat? (Geometrische Verteilung)

 a. Es sei X die Anzahl der Treffer. Dann gilt

$$P(X > 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \binom{5}{0} \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^5 - \binom{5}{1} \cdot 0,1^1 \cdot 0,9^4 = 0,08146 .$$

 b. Erwartungswert $E = \frac{1}{0,1} = 10$ Schüsse.

 Es sei X die Anzahl der Schüsse, bevor er den ersten Treffer erzielt hat. Dann gilt

$$P(X > 3) = 1 - P(X \le 3) = 1 - 0,9 - 0,1 \cdot 0,9 - 0,1^2 \cdot 0,9 - 0,1^3 \cdot 0,9 = 0,8901 .$$

41. In einer Urne liegen 7 rote, 5 blaue und 4 grüne Kugeln. Man zieht nun mit einem Griff 6 Kugeln. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass 3 rote, 2 blaue und eine grüne Kugel gezogen werden.

$$P=\frac{\binom{7}{3}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{16}{6}}=\frac{35\cdot 10\cdot 4}{8008}=\frac{25}{143}\approx 0{,}1748\,.$$

42. Zwei Spieler A und B wollen eine Schachpartie durchführen. Die Bedenkzeit in Stunden für alle Züge von A sei verteilt nach $f_A(t)=e^{-t}$, während für B nach $f_B(t)=2\cdot e^{-2t}$ verteilt ist. Dabei ist $t\geq 0$ in Stunden gezählt.

   a. Zeigen Sie, dass $\int_0^\infty f_A(x)\,dx=1$ und $\int_0^\infty f_B(x)\,dx=1$.

   b. Berechnen Sie die Erwartungswerte $\mu_A=\int_0^\infty x\cdot f_A(x)\,dx$ und $\mu_B=\int_0^\infty x\cdot f_B(x)\,dx$.

   c. Es sei $t=t_1+t_2$ die Summe der beiden Bedenkzeiten.

   Bestimmen Sie die Verteilung $f(t)=\int_0^\infty f_A(x)\cdot f_B(t-x)\,dx$ und den Erwartungswert μ von $f(t)$.

a. $\int_0^\infty f_A(x)\,dx=\int_0^\infty e^{-x}\,dx=\left[-e^{-x}\right]_0^\infty=0-(-1)=1$, $\int_0^\infty f_B(x)\,dx=2\int_0^\infty e^{-2x}\,dx=\left[-e^{-2x}\right]_0^\infty=0-(-1)=1$

b. $\mu_A=\int_0^\infty x\cdot f_A(x)\,dx=\int_0^\infty x\cdot e^{-x}\,dx=\left[(-x-1)\cdot e^{-x}\right]_0^\infty=0-(-1)=1$ durch partielle Integration.

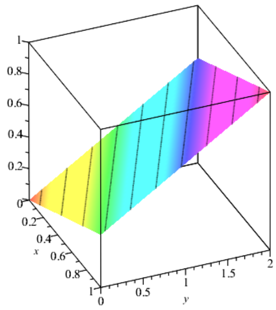
$\mu_B=\int_0^\infty x\cdot f_B(x)\,dx=\int_0^\infty 2x\cdot e^{-2x}\,dx=\left[(x-1/2)\cdot e^{-2x}\right]_0^\infty=0-(-1/2)=1/2$ durch partielle Integration.

c. $f(t)=\int_0^t f_A(x)\cdot f_B(t-x)\,dx=\int_0^t e^{-x}\cdot 2\cdot e^{-2\cdot(t-x)}\,dx=2\cdot\int_0^t e^{x-2t}\,dx=2\cdot\left[e^{x-2t}\right]_0^t=2\cdot\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)$.

Es gilt $\int_0^\infty f(t)\,dt=\left[e^{-2t}-e^{-t}\right]_0^\infty=1$ und $\int_0^\infty t\cdot f(t)\,dt=\left[(t+1/2)\cdot e^{-2t}-2(t+1)\cdot e^{-t}\right]_0^\infty=3/2$, wie erwartet.

43. Die Zufallsvariablen X und Y haben die gemeinsame Dichtefunktion

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{3}(x+y) & \text{für } 0\leq x\leq 1 \text{ und } 0\leq y\leq 2\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}.$$



   a. Zeigen Sie, dass durch $f(x,y)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte gegeben ist.

   b. Bestimmen Sie die beiden Randdichten $f_X(x)$ und $f_Y(y)$.

   α. Untersuchen Sie X, Y auf Unabhängigkeit durch $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$

   β. Bestimmen Sie die drei Verteilungsfunktionen $F_X(x)=P(X\leq x)$, $F_Y(y)=P(Y\leq y)$ und $F(x,y)=P(X\leq x\wedge Y\leq y)$ für $0\leq x\leq 1$ und $0\leq y\leq 2$.

   γ. Bestimmen Sie $E(X)$, $E(Y)$, $E(X\cdot Y)$ und $Cov(X,Y)$.

   δ. Bestimmen Sie die bedingten Erwartungswerte $E(X\,|\,0\leq Y\leq 1)$ und $E(X\,|\,1\leq Y\leq 2)$.

a. $\int_0^2\int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy=\frac{1}{3}\int_0^2\left[\frac{1}{2}x^2+x\,y\right]_{x=0}^1 dy=\frac{1}{3}\int_0^2\left(\frac{1}{2}+y\right)dy=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}y^2\right]_0^2=1$.

b. $f_X(x)=\int_{y=0}^2 f(x,y)\,dy=\frac{1}{3}\int_{y=0}^2(x+y)\,dy=\frac{1}{3}\left[x\,y+\frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^2=\frac{2}{3}(x+1)$ für $0\leq x\leq 1$.

$f_Y(y)=\int_{x=0}^1 f(x,y)\,dx=\frac{1}{3}\int_{x=0}^1(x+y)\,dx=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{2}x^2+x\,y\right)\right]_{x=0}^1=\frac{1}{6}(2y+1)$ für $0\leq y\leq 2$.

α. $f_X(x)\cdot f_Y(y)=\frac{2}{9}(x+1)(2y+1)\neq f(x,y)$, so dass X, Y abhängig sind.

β. $F_X(x)=P(0\le X\le x)=\frac{2}{3}\int_0^x (x+1)\,dx=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_{x=0}^{x}=\frac{1}{3}(x^2+2x)$ für $0\le x\le 1$.

$F_Y(y)=P(0\le Y\le y)=\frac{1}{6}\int_0^y (2y+1)\,dx=\frac{1}{6}\left[y^2+y\right]_{y=0}^{y}=\frac{1}{6}(y^2+y)$ für $0\le y\le 2$.

$F(x,y)=\int_0^y\int_0^x f(x,y)\,dx\,dy=\frac{1}{3}\int_0^y\int_0^x (x+y)\,dx\,dy=\frac{1}{6}\int_0^y (x^2+2x\,y)\,dy=\frac{1}{6}(x^2y+x\,y^2)$.

γ. $E(X)=\int_0^1 x\cdot f_X(x)\,dx=\frac{2}{3}\int_0^1 x\cdot(x+1)\,dx=\left[\frac{2}{9}x^3+\frac{1}{3}x^2\right]_0^1=\frac{5}{9}$.

$E(Y)=\int_0^2 y\cdot f_Y(y)\,dy=\frac{1}{6}\int_0^2 (2y^2+y)\,dy=\left[\frac{1}{9}y^3+\frac{1}{12}y^2\right]_0^2=\frac{11}{9}$.

$E(X\cdot Y)=\int_0^2\int_0^1 x\cdot y\cdot f(x,y)\,dx\,dy=\frac{1}{3}\int_0^2\int_0^1 (x^2y+x\,y^2)\,dx\,dy=\int_0^2\left(\frac{1}{9}y+\frac{1}{6}y^2\right)dy=\frac{2}{3}$

Und somit $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(X\cdot Y)-E(X)\cdot E(Y)=\frac{2}{3}-\frac{5}{9}\cdot\frac{11}{9}=-\frac{1}{81}\neq 0$.

δ. $$E(X\,|\,0\le Y\le 1)=\sum_x x\cdot\frac{P(X=x\wedge 0\le Y\le 1)}{P(0\le Y\le 1)}=\frac{\sum_x x\cdot P(X=x\wedge 0\le Y\le 1)}{P(0\le Y\le 1)}=\frac{\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} x\cdot f(x,y)\,dy\,dx}{\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} f(x,y)\,dy\,dx}=$$

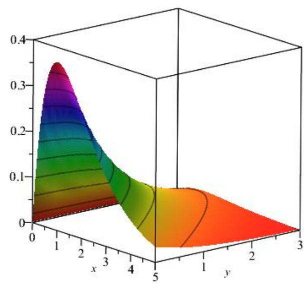
$$=\frac{\cancel{1/3}\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} x\cdot(x+y)\,dy\,dx}{\cancel{1/3}\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}(x+y)\,dy\,dx}=\frac{\int_{x=0}^{1}\left(x^2+\frac{1}{2}x\right)dx}{\int_{x=0}^{1}\left(x+\frac{1}{2}\right)dx}=\frac{7/12}{1}=\frac{7}{12}.$$

$$E(X\,|\,1\le Y\le 2)=\sum_x x\cdot\frac{P(X=x\wedge 1\le Y\le 2)}{P(1\le Y\le 2)}=\frac{\sum_x x\cdot P(X=x\wedge 1\le Y\le 2)}{P(1\le Y\le 2)}=\frac{\int_{x=0}^{1}\int_{y=1}^{2} x\cdot f(x,y)\,dy\,dx}{\int_{x=0}^{1}\int_{y=1}^{2} f(x,y)\,dy\,dx}=$$

$$=\frac{\cancel{1/3}\int_{x=0}^{1}\int_{y=1}^{2} x\cdot(x+y)\,dy\,dx}{\cancel{1/3}\int_{x=0}^{1}\int_{y=1}^{2}(x+y)\,dy\,dx}=\frac{\int_{x=0}^{1}\left(x^2+\frac{3}{2}x\right)dx}{\int_{x=0}^{1}\left(x+\frac{3}{2}\right)dx}=\frac{13/12}{2}=\frac{13}{24}.$$

44. Die Zufallsvariablen X und Y haben die gemeinsame Dichtefunktion

$$f(x,y)=\begin{cases}c\cdot x\cdot e^{-x-y} & \text{für } x,y\ge 0\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}\quad \text{für } c\in\mathbb{R}.$$



a. Zeigen Sie, dass $c=1$ sein muss.

b. Bestimmen Sie die beiden Randdichten $f_X(x)$ und $f_Y(y)$.

α. Untersuchen Sie X, Y auf Unabhängigkeit durch $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$

β. Bestimmen Sie die drei Verteilungsfunktionen $F_X(x)=P(X\le x)$, $F_Y(y)=P(Y\le y)$ und $F(x,y)=P(X\le x\wedge Y\le y)$.

γ. Bestimmen Sie $E(X)$, $E(Y)$, $E(X\cdot Y)$ und $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

a. $\int_0^\infty\int_0^\infty f(x,y)\,dx\,dy=c\cdot\int_0^\infty x\cdot\underbrace{\int_0^\infty e^{-x-y}\,dy}_{=e^{-x}}\,dx=c\cdot\left[(x-1)\cdot e^{-x}\right]_0^\infty=c$ muss 1 sein, also $c=1$.

b. $f_X(x) = \int\limits_{y=0}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int\limits_{y=0}^{\infty} x\cdot e^{-x-y}\,dy = \left[-x\cdot e^{-x-y}\right]_{y=0}^{\infty} = x\cdot e^{-x}$ für $x \ge 0$.

$f_Y(y) = \int\limits_{x=0}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int\limits_{x=0}^{\infty} x\cdot e^{-x-y}\,dx = \left[(-x-1)\cdot e^{-x-y}\right]_{x=0}^{\infty} = e^{-y}$ für $y \ge 0$.

α. Für $x, y \ge 0$ ist $f_X(x)\cdot f_Y(y) = x\cdot e^{-x}\cdot e^{-y} = x\cdot e^{-x-y} = f(x,y)$, so dass X, Y unabhängig sind.

β. $F_X(x) = P(0 \le X \le x) = \int\limits_0^x x\cdot e^{-x}\,dx = \left[(-x-1)\cdot e^{-x}\right]_{x=0}^{x} = 1-(x+1)\cdot e^{-x}$.

$F_Y(y) = P(0 \le Y \le y) = \int\limits_0^y e^{-y}\,dx = \left[-e^{-y}\right]_{y=0}^{y} = 1-e^{-y}$.

$F(x,y) = \int\limits_0^y\int\limits_0^x f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^x x\cdot\int\limits_0^y e^{-x-y}\,dy\,dx = \int\limits_0^x x\cdot(e^{-x}-e^{-x-y})\,dx = \left[(x+1)\cdot(e^{-x-y}-e^{-x}\right]_{x=0}^{x} =$
$= 1+(x+1)\cdot\left(e^{-x-y}-e^{-x}\right)-e^{-y}$.

γ. $E(X) = \int\limits_0^{\infty} x\cdot f_X(x)\,dx = \int\limits_0^{\infty} x^2\cdot e^{-x}\,dx = -\left[(x^2+2x+2)\cdot e^{-x}\right]_0^{\infty} = 2$.

$E(Y) = \int\limits_0^{\infty} y\cdot f_Y(y)\,dy = \int\limits_0^{\infty} y\cdot e^{-y}\,dy = -\left[(y-1)\cdot e^{-y}\right]_0^{\infty} = 1$.

$E(X\cdot Y) = \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} x\cdot y\cdot f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^{\infty} x^2\cdot\int\limits_0^{\infty} y\cdot e^{-x-y}\,dy\,dx = -\int\limits_0^{\infty}\left[x^2\cdot(y+1)\cdot e^{-x-y}\right]_{y=0}^{\infty} = \int\limits_0^{\infty} x^2\cdot e^{-x}dx =$

$= -\left[(x^2+2x+2)\cdot e^{-x}\right]_0^{\infty} = 2$. Und somit $Cov(X,Y) = E(X\cdot Y)-E(X)\cdot E(Y) = 2-2\cdot 1 = 0$.

Die Null war zu erwarten, da X, Y unabhängig sind.

45. Es werden 1000 Teile nach zwei Eigenschaften A und B untersucht. Es ergab sich die angegebene Kontingenztabelle.
a. Bestimmen Sie den korrigierten Koeffizienten C* nach Pearson.
b. Führen Sie den χ^2 – Unabhängigkeitstest mit dem Testniveau $p = 10\%$ durch.

	b_1	b_2	b_3	b_4	$\sum$
a_1	38	21	80	61	200
a_2	105	50	195	150	500
a_3	57	29	125	89	300
$\sum$	200	100	400	300	$n = 1000$

$$\chi^2 = \frac{(38-40)^2}{40}+\frac{(21-20)^2}{20}+\frac{(80-80)^2}{80}+\frac{(61-60)^2}{60}+$$
$$\frac{(105-100)^2}{100}+\frac{(50-50)^2}{50}+\frac{(195-200)^2}{200}+\frac{(150-150)^2}{1500}+$$
$$\frac{(57-60)^2}{60}+\frac{(28-30)^2}{30}+\frac{(125-120)^2}{120}+\frac{(89-90)^2}{90} = \frac{47}{45} \approx 1{,}04.$$

$C^* = \sqrt{\frac{M}{M-1}\cdot\frac{\chi^2}{\chi^2+n}} = \sqrt{\frac{3}{2}\cdot\frac{47/45}{47/45+1000}} \approx 0{,}040$. Also deutliche Unabhängigkeit.

Für $2\cdot 3 = 6$ Freiheitsgrade und $p = 10\%$ folgt der kritische Wert zu $c = 10{,}645$. $\chi^2 \approx 1{,}04$ liegt deutlich links davon. Somit folgt auch hier die Unabhängigkeit.

46. Eine Krankenkasse hatte ein Programm gegen das Rauchen durchgeführt. Es nahmen 300 Personen teil, davon 90 Raucher. Von denen rauchten danach nur noch 80 Personen. Dagegen wurden 4 Nichtraucher zu Rauchern. Untersuchen Sie mit dem McNemar-Test auf einem 10% – und einem 20% – Signifikanzniveau, ob das Programm das Rauchverhalten verändert hat.

		Raucher nachher		
		Nein	Ja	
Raucher vorher	Nein	206	4	210
	Ja	10	80	90
		216	84	300

Yates ergibt: $\chi^2 = \frac{(|b-c|-0,5)^2}{b+c} = \frac{(|4-10|-0,5)^2}{14} = \frac{5,5^2}{14} = 2,1607$.

Die Nullhypothese H_0 lautet immer: Das Programm ist erfolglos.

Nach der Tabelle beträgt der kritische Wert bei 10% gleich $g = 2,706$. Wegen $2,1607 < 2,706$ wird H_0 nicht widerlegt und der Erfolg des Programms bezweifelt.

Bei 20% ist $g = 1,642$. Wegen $2,1607 > 1,642$ wird H_0 widerlegt. Aber dafür ist die Irrtumswahrscheinlichkeit bei 20% viel zu hoch.

47. Eine Partei veranstaltet einen Werbeabend, um mehr Wählerstimmen zu bekommen. Um den Erfolg zu testen, wählt die Partei 100 Personen aus und befragt sie vor und nach der Veranstaltung, ob sie die Partei wählen würden oder nicht. 40 Personen hätten die Partei vorher nicht gewählt, 65 hätten sie nachher gewählt und 35 hätten die Partei vorher und nachher gewählt.
   a. Untersuchen Sie mit dem McNemar-Test zum $5\% -$ Signifikanzniveau, ob die Veranstaltung das Wahlverhalten signifikant verändert hat.
   b. Nach einer erneuten Zählung stellt sich heraus, dass nur 15 der 60 Personen, die die Partei vorher gewählt hätten, sie nachher nicht mehr wählen würden. Ändert sich dadurch die Signifikanz auf dem $5\% -$ Niveau?
   Nullhypothese H_0: Der Wahlabend bringt nichts.

a.

		Wahl nachher		
		Nein	Ja	
Wahl vorher	Nein	10	30	40
	Ja	25	35	60
		35	65	100

$\chi^2 = \frac{(|b-c|-0,5)^2}{b+c} = \frac{(|30-25|-0,5)^2}{55} = \frac{4,5^2}{55} = 0,3682$. Dieser Wert ist deutlich kleiner als der Tabellenwert 3,841 für $n = df = (r-1)\cdot(c-1) = (2-1)\cdot(2-1) = 1$. Damit wird die Nullhypothese nicht widerlegt und die Veranstaltung scheint erfolglos gewesen zu sein.

b.

		Wahl nachher		
		Nein	Ja	
Wahl vorher	Nein	10	30	40
	Ja	15	45	60
		25	75	100

$\chi^2 = \frac{(|b-c|-0,5)^2}{b+c} = \frac{(|30-15|-0,5)^2}{45} = \frac{14,5^2}{45} = 4,6722$. Dieser Wert ist größer als 3,841, so dass die Nullhypothese nicht bestätigt wird und man von einem erfolgreichen Abend ausgehen kann.

48. Ein neues Medikament soll getestet werden, ob es erkrankten Personen hilft bzw. gesunde Personen vielleicht sogar krank macht. Das Ergebnis war, dass 8 gesunde Personen erkrankten und 19 kranke Personen geheilt wurden. Untersuchen Sie mit dem McNemar-Test zum $5\% -$ Signifikanzniveau, ob das Medikament guten Gewissens verwendet werden kann. Verwenden Sie die Yates-Formel und auch die Mediziner-Formel. Interpretieren Sie beide Ergebnisse.
Nullhypothese H_0: Das Medikament bewirkt keine Änderung in der Anzahl der Erkrankten.

Yates: $\chi^2 = \frac{(|b-c|-0,5)^2}{b+c} = \frac{(|19-8|-0,5)^2}{27} = \frac{10,5^2}{27} = 4,0833 > 3,841$, also Ablehnung von H_0.

Mediziner: $\chi^2 = \frac{(|b-c|-1)^2}{b+c+1} = \frac{(|19-8|-1)^2}{28} = \frac{10^2}{28} = 3{,}5714 < 3{,}841$, also ist H_0 nicht widerlegt, und lieber Hände weg von diesem Medikament.

49. Die Wartezeit x in Minuten an einer geschlossenen Bahnschranke sei exponentialverteilt mit der Verteilungsfunktion $F(x) = 1 - e^{-0,5\cdot x}$ für $x \geq 0$.

a. Berechnen Sie die mittlere Wartezeit $E(X)$.

b. Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht die Wartezeit um höchstens 10% von $E(X)$ ab?

c. Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss man genau eine Minute warten?

d. Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss man mindestens eine Minute warten?

a. Mit der Dichtefunktion $f(x) = F'(x) = 0{,}5 \cdot e^{-0,5\cdot x}$ folgt

$$E(X) = \int_0^\infty x \cdot f(x)\,dx = \int_0^\infty 0{,}5x \cdot e^{-0,5\cdot x}\,dx = \left[-x \cdot e^{-0,5\cdot x}\right]_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-0,5\cdot x}\,dx = \int_0^\infty e^{-0,5\cdot x}\,dx = 2 \text{ Minuten.}$$

Oder man weiß, dass $E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0{,}5} = 2$.

b. $\int_{1,8}^{2,2} f(x)\,dx = F(2{,}2) - F(1{,}8) \approx 0{,}0737 = 7{,}37\%$.

c. $P(X = 1) = \int_1^1 f(x)\,dx = 0$.

d. $P(X \geq 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F(1) = 1 - \left(1 - e^{-0,5}\right) = e^{-0,5} \approx 0{,}6065$.

50. a. Eine Firma stellt Adapter her, von denen unabhängig von ihrem Alter täglich im Mittel 2‰ ausfallen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der Exponentialverteilung, dass mein Adapter mindestens noch ein Jahr funktioniert.

b. Eine andere Firma stellt ebenfalls Adapter her, die im Mittel nach 4 Jahren ausfallen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mein Adapter bereits während der ersten beiden Jahre ausfällt?

a. Mit $\lambda = 0{,}002$/Tag folgt $P(X \geq 365) = 1 - P(X \leq 365) = 1 - (1 - e^{-0,002\cdot 365}) = e^{-0,002\cdot 365} = 0{,}482$.

b. Mit $4 \text{ Jahre} = E(X) = \frac{1}{\lambda}$, also $\lambda = 0{,}25/\text{Jahr}$ folgt $P(Y \leq 2) = 1 - e^{-0,25\cdot 2} = 0{,}393$.

51. Nach Angabe einer Firma lässt sich der von ihr produzierte Akku im Mittel 800-mal laden. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich der Akku höchstens 700-mal laden lässt. Verwenden Sie die

a. Exponentialverteilung,

b. Weibull-Verteilung mit $k = 3$. Verwenden Sie $\Gamma(4/3) = 0{,}892979$.

a. Mit $\lambda = \frac{1}{800}$ folgt $P(X \leq 700) = 1 - e^{-\frac{700}{800}} = 0{,}5831$.

b. Mit $k = 3$ und $\lambda = \Gamma(1 + 1/k)/E(X) = \Gamma(4/3)/800 = 0{,}001116$ folgt

$P(X \leq x) = 1 - e^{-(\lambda\cdot x)^k} = 1 - e^{-(0,001116\cdot 700)^3} = 0{,}3794$.

Wie erwartet, ist dieses Ergebnis kleiner als das Ergebnis aus Teilaufgabe a., da der Akku bei 700 Ladungen noch relativ unbenutzt ist.

52. Es sei bekannt, dass die Zufallsvariable X geometrisch verteilt ist mit $P(X = k) = p \cdot (1-p)^{k-1} = p \cdot q^{k-1}$ mit $k \in \mathbb{N}$. p ist aber unbekannt und soll mit Hilfe mehrerer Messungen k_i, $i = 1, \ldots, n$ geschätzt werden. Dabei gibt k_i an, dass man erst beim k_i – ten Versuch Erfolg hat. Leiten Sie mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode eine Formel zur Bestimmung des plausibelsten Wertes von p her.

Es ist $L(p) = \prod_{i=1}^n p \cdot (1-p)^{k_i - 1} = p^n \cdot (1-p)^{\sum_{i=1}^n (k_i - 1)}$. Durch Ableiten nach p folgt

$$L'(p) = n\cdot p^{n-1}\cdot(1-p)^{\sum\limits_{i=1}^{n}(k_i-1)} - p^n\cdot\sum_{i=1}^{n}(k_i-1)\cdot(1-p)^{\sum\limits_{i=1}^{n}(k_i-1)-1} = p^{n-1}\cdot(1-p)^{\sum\limits_{i=1}^{n}(k_i-1)-1}\cdot\left(n\cdot(1-p)-p\cdot\sum_{i=1}^{n}(k_i-1)\right)=0\,.$$

Da p weder 0 noch 1 ist, muss die Klammer 0 sein: $n\cdot(1-p)-p\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}(k_i-1)=0$, d.h.

$n\cdot(1-p)-p\cdot\left(\sum\limits_{i=1}^{n}k_i-n\right)=0$, also $n-n\cdot p-p\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}k_i+n\cdot p=0$, so dass $p=\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}k_i}=\dfrac{1}{\frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}k_i}$.

Dieses Ergebnis ist vernünftig, denn bei der geometrischen Verteilung ist $E(X)=\dfrac{1}{p}$, also $p=\dfrac{1}{E(X)}=\dfrac{1}{\mu}$.

Zweiter Lösungsweg durch Logarithmieren von $L(p)=\prod\limits_{i=1}^{n}p\cdot(1-p)^{k_i-1}$.

$\ln\big(L(p)\big)=\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(p\cdot(1-p)^{k_i-1}\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}\big(\ln(p)+(k_i-1)\ln(1-p)\big)=n\cdot\ln(p)+\ln(1-p)\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}(k_i-1)$. Ableiten nach p ergibt $n\cdot\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{1-p}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}(k_i-1)=0$. Nach Multiplikation mit $p\cdot(1-p)$ folgt $n\cdot(1-p)-p\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}(k_i-1)=0$ wie oben.

53. Es sei bekannt, dass die Zufallsvariable X exponentiell verteilt ist mit $f(x)=\begin{cases}\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x} & \text{für } x\ge 0\\ 0 & \text{für } x<0\end{cases}$ für ein $\lambda>0$. λ ist aber unbekannt und soll mit Hilfe mehrerer Messungen x_i, $i=1,\dots,n$ geschätzt werden. Leiten Sie mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode eine Formel zur Bestimmung des plausibelsten Wertes von λ her.

Es ist $L(\lambda)=\prod\limits_{i=1}^{n}\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x_i}=\lambda^n\cdot e^{-\lambda\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}$. Durch Ableiten nach λ folgt

$L'(\lambda)=n\cdot\lambda^{n-1}\cdot e^{-\lambda\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}-\lambda^n\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\cdot e^{-\lambda\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}=0$, also $\lambda^{n-1}\cdot e^{-\lambda\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}\cdot\left(n-\lambda\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)=0$, folglich

$$\lambda=\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}=\frac{1}{\frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}\,.$$

Dieses Ergebnis ist vernünftig, denn bei der Exponentialverteilung ist $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$, also $\lambda=\dfrac{1}{E(X)}=\dfrac{1}{\mu}$.

Zweiter Lösungsweg durch Logarithmieren von $L(\lambda)=\prod\limits_{i=1}^{n}\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x_i}$.

$\ln\big(L(\lambda)\big)=\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x_i}\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}\big(\ln(\lambda)-\lambda\cdot x_i\big)=n\cdot\ln(\lambda)-\lambda\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$. Durch Ableiten nach λ folgt

$\dfrac{n}{\lambda}-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0$, folglich $\lambda=\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}=\dfrac{1}{\frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}$ wie oben.

54. Die Pareto-Verteilung (italienischer Ökonom Vilfredo Pareto (1848–1923)) ist ein Modell für den Lohn X der Beschäftigten eines Unternehmens. Für die Dichtefunktion gilt $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a\cdot k^a}{x^{a+1}} & \text{für } x\ge k\\ 0 & \text{für } x<k\end{cases}$. Dabei ist k der Mindestlohn und $a>1$ eine Konstante.

a. Zeigen Sie, dass $f(x)$ eine Dichtefunktion ist, d.h. dass $\int\limits_k^\infty f(x)=1$ ist.

b. Der Mindestlohn k sei bekannt, aber nicht die positive Konstante a. Diese soll mit Hilfe mehrerer Löhne x_i, $i=1,\dots,n$ geschätzt werden. Leiten Sie mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode eine Formel zur Bestimmung des plausibelsten Wertes von a her.

Zahlenbeispiel: Der Mindestlohn sei $k=1000$. Zehn Löhne wurden erfasst:
1300, 1400, 1800, 1800, 2000, 2000, 2100, 2200, 2400, 2500 .

α. Bestimmen Sie aus dieser Stichprobe den Wert von a.
β. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebig ausgewählte Person zwischen 1000 und 2000 verdient.
γ. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebig ausgewählte Person mehr als 2500 verdient.

a. $\int\limits_k^\infty \frac{a\cdot k^a}{x^{a+1}}\,dx=\left[-\frac{k^a}{x^a}\right]_k^\infty=0+\frac{k^a}{k^a}=1$.

b. $L(a)=\prod\limits_{i=1}^n \frac{a\cdot k^a}{x_i^{a+1}}=a^n\cdot k^{a\cdot n}\cdot\left(\prod\limits_{i=1}^n x_i\right)^{-(a+1)}$. Da die Variable a auch im Exponenten vorkommt, empfiehlt sich der Logarithmus: $\ln\big(L(a)\big)=n\cdot\ln(a)+a\cdot n\cdot\ln(k)-(a+1)\cdot\ln\left(\prod\limits_{i=1}^n x_i\right)$. Durch Ableiten nach a folgt

$\frac{n}{a}+n\cdot\ln(k)-\ln\left(\prod\limits_{i=1}^n x_i\right)=0$, so dass $a=\dfrac{n}{\ln\left(\prod\limits_{i=1}^n x_i\right)-n\cdot\ln(k)}$.

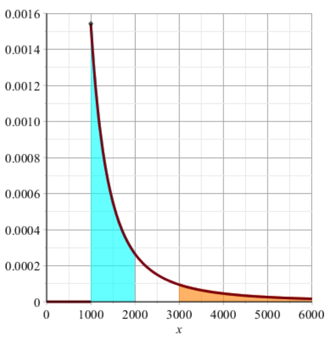
Zum Zahlenbeispiel:

α. $a=\dfrac{10}{\ln(6.538371840\cdot 10^{32})-10\cdot\ln(1000)}=1{,}5425$, so dass $f(x)=\dfrac{a\cdot k^a}{x^{a+1}}\approx\dfrac{1{,}5425\cdot 1000^{1{,}5425}}{x^{2{,}5425}}\approx\dfrac{65437}{x^{2{,}5425}}$ für $x\ge 1000$.

β. Mit der Stammfunktion $F(x)=-\dfrac{k^a}{x^a}$ und $x\ge 1000$ folgt

$\int\limits_{1000}^{2000} f(x)\,dx=F(2000)-F(1000)=0{,}6567$.

γ. $\int\limits_{3000}^{\infty} f(x)\,dx=0-F(3000)=0{,}1837$.



55. Lösen Sie Aufgabe 52 mit der Momenten-Methode.

Der Erwartungswert der geometrischen Verteilung $P(X=k)=p\cdot(1-p)^{k-1}$ ist $E(X)=\dfrac{1}{p}$.

$E(X)$ schätzen wir durch das arithmetische Mittel $\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}k_i$. Somit folgt $p \approx \frac{1}{\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}k_i}$.

56. Lösen Sie Aufgabe 53 mit der Momenten-Methode.

Der Erwartungswert der Exponentialverteilung $f(x)=\begin{cases}\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x} & \text{für } x\geq 0\\ 0 & \text{für } x<0\end{cases}$ ist $E(X)=\frac{1}{\lambda}$.

Also folgt $\lambda \approx \frac{1}{\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}k_i}$.

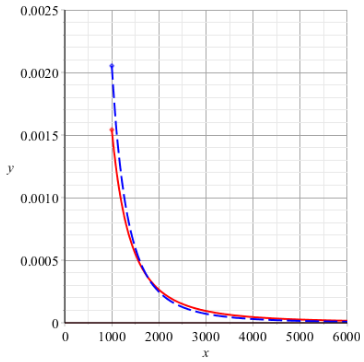
57. Lösen Sie Aufgabe 54 für die Pareto-Verteilung $f(x)=\begin{cases}\frac{a\cdot k^a}{x^{a+1}} & \text{für } x\geq k\\ 0 & \text{für } x<k\end{cases}$ für $a>1$ mit der Momenten-Methode.

Es ist $E(X)=\int_k^\infty x\cdot\frac{a\cdot k^a}{x^{a+1}}\,dx = a\cdot k^a\cdot\int_k^\infty x^{-a}\,dx = \frac{a\cdot k^a}{1-a}\cdot\left[x^{1-a}\right]_k^\infty = \frac{a\cdot k^a}{1-a}\cdot\left[\frac{1}{x^{a-1}}\right]_k^\infty = \frac{a\cdot k^a}{1-a}\cdot\left(0-\frac{1}{k^{a-1}}\right)=$

$=\frac{a\cdot k^a}{1-a}\cdot\left(-\frac{1}{k^{a-1}}\right)=\frac{a\cdot k}{a-1}$. Aus $\frac{a\cdot k}{a-1}=\mu$ folgt $a=\frac{\mu}{\mu-k}$.

Mit den 10 Werten von Aufgabe 54 ergibt sich $\bar{x}=\frac{1}{10}\cdot\sum_{i=1}^{10}x_i=1950$,

so dass $a\approx\frac{1950}{1950-1000}=2,0526$, ein etwas anderer Wert als bei Aufgabe 41.



Im Schaubild ist die Maximum-Likelihood-Näherung durchgezogen und die Momenten-Näherung gestrichelt gezeichnet.

Zusatz: Bei der Pareto-Verteilung ist $\mu=E(X)=\frac{a\cdot k}{a-1}$ für $a>1$. Für $a\leq 1$ existiert μ nicht.

Ferner ist $\sigma^2=V(X)=\int_k^\infty (x-\mu)^2\cdot f(x)\,dx=\frac{a\cdot k^2}{(a-1)^2\cdot(a-2)}$ für $a>2$. Für $a\leq 2$ existiert σ^2 nicht.

Aus diesen beiden Gleichungen lassen sich die beiden Parameter a und k bestimmen:

$a=1+\sqrt{1+\frac{\mu^2}{\sigma^2}}$ und $k=\frac{\mu\cdot(a-1)}{a}$.

Mit den 10 Messwerten von Aufgabe 52 folgen $\bar{x}=\frac{1}{10}\cdot\sum_{i=1}^{10}x_i=1950$ und $s^2=\frac{1}{10}\cdot\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})^2=136500$,

so dass $a\approx 6,372$ und $k\approx 1644$. Diese Schätzung ist unbrauchbar, allein schon deshalb, weil der Mindestlohn $k=1000$ und nicht 1644 beträgt.