Theoretische Informatik I

Übungsblatt 9: Prädikatenlogik

Duale Hochschule Baden-Württemberg – Lörrach
Studiengang Informatik – TIF21

1. Wir betrachten in dieser Aufgabe die Formel

$$F := \neg\forall x(\neg\exists y \neg q(x,y) \lor \forall x \neg p(x))$$

Hierbei sind x, y und z Variablen, p ist ein einstelliges Prädikatssymbol und q ein zweistelliges Prädikatssymbol. Formal:

$$\begin{aligned} \Sigma &:= (F_\Sigma, P_\Sigma, \alpha_\Sigma, Var_\Sigma) \\ F_\Sigma &:= \{\} \\ P_\Sigma &:= \{p, q\} \\ Var_\Sigma &:= \{x, y, z\} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \alpha_\Sigma(p) &:= 1 \\ \alpha_\Sigma(q) &:= 2 \end{aligned}$$

(a) Formen Sie F logisch äquivalent so um, dass Negationszeichen nur unmittelbar vor Prädikatssymbolen stehen.

Lösung:
Wir verwenden einfache Äquivalenzumformungen aus der Vorlesung.

$$\begin{aligned} & \underline{\neg\forall x}(\neg\exists y \neg q(x,y) \lor \forall x \neg p(x)) && \text{Quantor negiert} \\ \equiv\; & \exists x \underline{\neg}(\neg\exists y \neg q(x,y) \lor \forall x \neg p(x)) && \text{DeMorgan} \\ \equiv\; & \exists x(\underline{\neg\neg}\exists y \neg q(x,y) \land \neg\forall x \neg p(x)) && \text{Doppelnegation} \\ \equiv\; & \exists x(\exists y \neg q(x,y) \land \underline{\neg\forall x}\neg p(x)) && \text{Quantor negiert} \\ \equiv\; & \exists x(\exists y \neg q(x,y) \land \exists x \underline{\neg\neg} p(x)) && \text{Doppelnegation} \\ \equiv\; & \exists x(\exists y \neg q(x,y) \land \exists x p(x)) && \end{aligned}$$

Beachten Sie, dass die letzte Umformung (Elimination der zwei Negationen) zwingend notwendig ist, da sonst das äußere Negationszeichen nicht unmittelbar vor einem Prädikatssymbol steht, sondern eben vor einem Negationszeichen.

(b) Formen Sie F logisch äquivalent so um, dass alle Quantoren vorne stehen.

Lösung:
Wir verwenden einfache Äquivalenzumformungen aus der Vorlesung.

$$
\begin{aligned}
& \underline{\neg\forall x}(\neg\exists y\neg q(x,y) \lor \forall x\neg p(x)) && \text{Quantor negiert}\\
\equiv\; & \exists x\neg(\underline{\neg\exists y}\neg q(x,y) \lor \forall x\neg p(x)) && \text{Quantor negiert}\\
\equiv\; & \exists x\neg(\underline{\forall y}\neg\neg q(x,y) \lor \forall x\neg p(x)) && \text{Quantor aus Klammer ziehen}\\
\equiv\; & \exists x\underline{\neg\forall y}(\neg\neg q(x,y) \lor \forall x\neg p(x)) && \text{Quantor negiert}\\
\equiv\; & \exists x\exists y\neg(\neg\neg q(x,y) \lor \underline{\forall x\neg p(x)}) && \text{Gebundene Umbenennung}\\
\equiv\; & \exists x\exists y\neg(\neg\neg q(x,y) \lor \underline{\forall z}\neg p(z)) && \text{Quantor aus Klammer ziehen}\\
\equiv\; & \exists x\exists y\underline{\neg\forall z}(\neg\neg q(x,y) \lor \neg p(z)) && \text{Quantor negiert}\\
\equiv\; & \exists x\exists y\exists z\neg(\neg\neg q(x,y) \lor \neg p(z))
\end{aligned}
$$

2. Für diese Aufgabe wählen wir als Universum (U) einige Tierarten. Wir definieren nun als Interpretation des zweistelligen Relationssymbols R (mit Infixschreibweise)

$$I(R) := \{(a, b) \mid a \text{ frisst } b\}.$$

Erklären Sie umgangssprachlich die Bedeutung der folgenden Formeln mit dieser Interpretation und beantworten Sie jeweils die Frage, ob es in einer Struktur Vegetarier gibt, wenn die entsprechende Formel in der Struktur wahr ist (wenn also die Struktur ein Modell für die entsprechende Formel ist) oder begründen Sie, weshalb Sie diese Frage nicht beantworten können.

(a) $\forall x \exists y (y\ R\ x)$

Lösung:
Die Formel besagt, dass es für jede Tierart x (genauer: für jede Tierart, für die x steht; x durchläuft hierbei alle Tierarten; aus Lesbarkeitsgründen unterscheiden wir *in dieser Aufgabe* nicht dazwischen) eine Tierart y gibt, sodass x von y gefressen wird. Damit ist keine Aussage möglich, ob es Vegetarier gibt. Es kann etwa sein, dass jede Tierart von Löwen gefressen wird (auch Löwen selbst). Wenn es nun sonst nur noch Tiger gibt, die Tiger fressen, dann ist die Formel erfüllt und es gibt keine Vegetarier. Wenn es darüber hinaus auch noch Brontosaurier gibt (auch wenn sie mittlerweile anders heißen), die keine Tiere fressen, dann ist die Formel weiterhin erfüllt (die Löwen fressen ja in unserem Modell die Brontosaurier), und es gibt Vegetarier.

(b) $\forall x \exists y (x\ R\ y)$

Lösung:
Die Formel besagt, dass es für jede Tierart x eine Tierart y gibt, sodass x y frisst. Also kann keine Tierart Vegetarier sein.

(c) $\exists x \forall y (y\ R\ x)$

Lösung:
Die Formel besagt, dass es eine Tierart x gibt, die von allen Tierarten y gefressen wird. Also kann keine Tierart Vegetarier sein.

(d) $\exists x \forall y (x\ R\ y)$

Lösung:
Die Formel besagt, dass es eine Tierart x gibt, die alle anderen Tierarten y frisst. Wie im Teil (a) ist auch hier keine Aussage möglich, ob es Vegetarier gibt. Das Beispiel aus Teil (a) kann auch hier als Erklärung dienen, weshalb die Frage nicht zu beantworten ist.