1. Bei vierfacher Durchführung eines Zufallsexperiments nahm eine Zufallsvariable X die Werte 5; 8; 7; 4 an. Bestimmen Sie einen Schätzwert für den Mittelwert und die Varianz.

   $\overline{x} = 6$, $s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{4} \left(x_i - \overline{x}\right)^2 = \frac{1}{3} \cdot (1^2 + 2^2 + 1^2 + 2^2) = \frac{10}{3}$.

2. Ein Medikament wirkt erfahrungsgemäß in 70% aller Fälle. Die Zufallsvariable X sei definiert durch

   $$X = \begin{cases} 1, & \text{falls das Medikament wirkt} \\ 0, & \text{falls das Medikament nicht wirkt} \end{cases}.$$

   a. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X
   b. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz des Stichprobemittels für Stichproben vom Umfang 6.

   a. $E(X) = 1 \cdot 0{,}7 + 0 \cdot 0{,}3 = 0{,}7 = p$

   $Var(X) = (1-0{,}7)^2 \cdot 0{,}7 + (0-0{,}7)^2 \cdot 0{,}3 = 0{,}21$ oder $Var(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = 0{,}7 - 0{,}7^2 = 0{,}21$.

   d.h. $Var(X) = p \cdot q = 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}21$.

   b. $E\left(\overline{X}\right) = E(X) = 0{,}7$, $Var\left(\overline{X}\right) = \frac{1}{6} \cdot Var(X) = \frac{0{,}21}{6} = 0{,}035$.

3. Die Körpergröße X von Männern in Deutschland im Jahr 2009 war normalverteilt mit $\mu_X = 178\,\text{cm}$ und $\sigma_X = 10\,\text{cm}$.

   a. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass für einen zufällig ausgewählten Mann $175 \le X \le 180$ gilt?
   b. Es wird eine Stichprobe von $n = 100$ Männern genommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass $175 \le \overline{X} \le 180$ für den Mittelwert $\overline{X}$ gilt?

   a. $P(175 \le X \le 180) = P(X \le 180) - P(X \le 175) = \Phi\left(\frac{180-178}{10}\right) - \Phi\left(\frac{175-178}{10}\right) = \Phi(0{,}2) - \Phi(-0{,}3) =$

   $0{,}5793 - 1 + 0{,}6179 = 0{,}1972$.

   b. $P(175 \le \overline{X} \le 180) = P(\overline{X} \le 180) - P(\overline{X} \le 175) = \Phi\left(\frac{180-178}{10/\sqrt{100}}\right) - \Phi\left(\frac{175-178}{10/\sqrt{100}}\right) = \Phi(2) - \Phi(-3) =$

   $0{,}9772 - 1 + 0{,}9987 = 0{,}9759$, deutlich größer als das Ergebnis von Teil a, da die Mittelwerte nicht so sehr streuen.

4. In einer Urne befindet sich eine unbekannte Anzahl N von Zetteln, die von 1 bis N durchnumeriert sind. Es werden n Zettel zufällig ausgewählt.
   $\overline{X}$ sei das arithmetische Mittel der n gezogenen Zahlen. Berechnen Sie den Erwartungswert von $\overline{X}$. Bestimmen Sie damit eine Schätzgröße für N, die ebenfalls den Erwartungswert N hat.

   Hinweis: $1 + 2 + 3 + \ldots + N = \frac{N \cdot (N+1)}{2}$.

   Es sei X_i die Nummer auf dem Zettel bei der i-ten Auswahl, i = 1, 2,... n.

   Dann gilt $E(X_i) = \sum_{k=1}^{N} k \cdot P(X_i = k) = \sum_{k=1}^{N} k \cdot \frac{1}{N} = \frac{N \cdot (N+1)}{2} \cdot \frac{1}{N} = \frac{N+1}{2}$.

   Dann ist $E(\overline{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{N+1}{2} = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \frac{N+1}{2} = \frac{N+1}{2}$.

   Die Zufallsvariable Y wird definiert durch $\overline{X} = \frac{Y+1}{2}$, d.h. $Y = 2 \cdot \overline{X} - 1$ ist eine Schätzgröße für N, denn

   $E(Y) = 2 \cdot E\left(\overline{X}\right) - 1 = 2 \cdot \frac{N+1}{2} - 1 = N$.

5. Zur Schätzung des Fischbestandes N in einem See benutzt man häufig folgendes Verfahren. Man fängt m Fische, kennzeichnet sie und setzt sie wieder aus. Nach hinreichend langer Zeit fängt man n Fische und bestimmt die Anzahl Z der gekennzeichneten darunter. Dann bietet sich folgende Gleichung an:

$\dfrac{\text{Anzahl der markierten Fische}}{\text{Anzahl aller Fische}} = \dfrac{Z}{n} = \dfrac{m}{N}$, so dass $N = \dfrac{n \cdot m}{Z}$ wird. Untersuchen Sie, ob für den Erwartungswert $E\left(\dfrac{n \cdot m}{Z}\right) = N$ gilt. Hinweis: $E\left(\dfrac{1}{Z}\right) \neq \dfrac{1}{E(Z)}$.

$$E\left(\frac{n \cdot m}{Z}\right) = n \cdot m \cdot E\left(\frac{1}{Z}\right) \neq n \cdot m \cdot \frac{1}{E(Z)} = n \cdot m \cdot \frac{1}{\frac{n \cdot m}{N}} = N, \text{ also } E\left(\frac{n \cdot m}{Z}\right) \neq N.$$

6. In einer Klinik wird anhand der Krankheitsgeschichten von 120 Patienten die Dauer eines bestimmten Heilungsprozesses untersucht.

Heilungsdauer a_j in Tagen	18	21	22	23	27	28	30	34
absolute Häufigkeit h_j	12	18	29	22	15	10	10	4

Bestimmen Sie mit Hilfe der Normalverteilung ein Vertrauensintervall für die mittlere Dauer des Heilungsprozesses bei der statistischen Sicherheit 0,99.

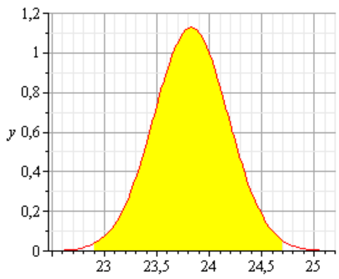
Es ist $\bar{x} = \dfrac{1}{120} \cdot \sum_{j=1}^{8} h_j \cdot a_j = \dfrac{2859}{120} = 23{,}825$ und $s^2 = \dfrac{1}{119} \cdot \sum_{j=1}^{8} h_j \cdot \left(a_j - \bar{x}\right)^2 = \dfrac{1}{119} \cdot 1783{,}325 \approx 14{,}9859$,

oder $s^2 = \dfrac{n}{n-1} \cdot \left(\dfrac{1}{n} \sum_{j=1}^{8} h_j \cdot a_j^2 - \bar{x}^2\right) = 14{,}9859$.

Aus $P\left(\bar{X} - c \cdot \dfrac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \leq \mu_X \leq \bar{X} + c \cdot \dfrac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\right) = 2 \cdot \Phi(c) - 1 = 0{,}99$ folgt $\Phi(c) = 0{,}995$ und nach der Tabelle ist $c = 2{,}58$. Das Vertrauensintervall ist somit

$$23{,}825 - 2{,}58 \cdot \frac{\sqrt{14{,}9859}}{\sqrt{120}} \leq \mu_X \leq 23{,}825 + 2{,}58 \cdot \frac{\sqrt{14{,}9859}}{\sqrt{120}},$$

also $22{,}9 \leq \mu_X \leq 24{,}7$.



Die Dichtefunktion für $\bar{x}$ lautet $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{14{,}9859}{120}} \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x - 23{,}825}{\sqrt{\frac{14{,}9859}{120}}}\right)^2}$.

7. Eine Bäckerei behauptet, dass ihre Brötchen eine Masse von $50\,g$ haben. Zur Überprüfung wurden 9 Brötchen zufällig entnommen. Ihre Massen in Gramm betrugen 49, 48, 51, 50, 47, 48, 50, 46, 52. Untersuchen Sie, ob sich die Messwerte signifikant von $50\,g$ unterscheiden, d.h. ob die $50\,g$ im 95-Prozent-Vertrauensintervall liegen.
   a. Mit Hilfe der Normalverteilung.
   b. Mit Hilfe der Student-t-Verteilung.

Der Mittelwert beträgt genau $49\,g$. Mit der Stichprobenvarianz $s^2 = \dfrac{1}{8} \cdot 30 = 3{,}75$ wird die Standardabweichung σ_X zu $\sigma_X = \sqrt{3{,}75} \approx 1{,}94$ geschätzt.

a. Für das Vertrauensintervall gilt $P\left(\bar{X} - c \cdot \dfrac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \leq \mu_X \leq \bar{X} + c \cdot \dfrac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\right) = 2 \cdot \Phi(c) - 1 = 0{,}95$. Mit $\Phi(c) = 0{,}975$ folgt aus der Tabelle der Normalverteilung der Wert $c = 1{,}96$. Dies ergibt das Vertrauensintervall $49 - 1{,}96 \cdot \dfrac{1{,}94}{\sqrt{9}} \leq \mu_X \leq 49 + 1{,}96 \cdot \dfrac{1{,}94}{\sqrt{9}}$, d.h. $47{,}7 \leq \mu_X \leq 50{,}3$. Da 50 im Vertrauensintervall liegt, unterscheiden sich die Messwerte nicht signifikant von den genannten $50\,g$.

b. Wie bei a, folgt $F(c) = 0{,}975$. Mit $df = n = 8$ folgt aus der t-Tabelle der Wert $c = 2{,}306$. Wegen der kleinen Stichprobe ergibt dies eine Vergrößerung des Vertrauensintervalls zu $47{,}5 \leq \mu_X \leq 50{,}5$.

8. Zweiseitiger Test: Es soll überprüft werden, ob ein bestimmtes Medikament die Schlafdauer beeinflusst. Bei 100 Testpersonen werden nach Verabreichung des Medikaments folgende zusätzlichen Schlafzeiten in Stunden festgestellt. Kann man danach mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 1% behaupten, dass das Medikament die Schlafdauer signifikant beeinflusst?

-1,4	-1,3	-1,2	-1,1	-1,0	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3
1	1	3	0	2	0	3	0	4	4	5	0
-0,2	-0,1	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
2	3	15	5	8	0	3	5	3	3	5	0
1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1
8	2	3	1	2	6	0	0	0	0	2	1

① $H_0:\ E(X)=0$, $H_1:\ E(X)\neq 0$.

② Ablehnungsbereich: $\left|\bar{x}-\mu_0\right|\geq c$, d.h. $\left|\bar{x}\right|\geq c$, bzw. $\bar{x}\leq -c$ oder $\bar{x}\geq c$.

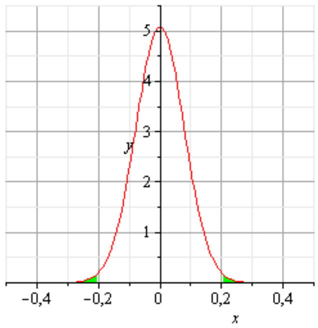
③ Es ist $\bar{x}=E(X)=\frac{1}{100}\cdot\sum h_j a_j=\frac{1}{100}\cdot 28{,}9=0{,}289$.

Außerdem ist $E\left(X^2\right)=\frac{1}{100}\cdot\sum h_j a_j^2=\frac{1}{100}\cdot 69{,}35=0{,}6935$, d.h.

$$s_X^2=\frac{n}{n-1}\sigma_X^2=\frac{n}{n-1}\cdot\left(E\left(X^2\right)-E(X)^2\right)=\frac{100}{99}\cdot\left(0{,}6935-0{,}289^2\right)=\frac{609979}{990000}\approx 0{,}61614.$$

④ Aus $P\left(\left|\bar{x}-\mu_0\right|\geq c\right)=\alpha$ folgt $1-P\left(\left|\bar{x}-\mu_0\right|<c\right)=\alpha$, also $P\left(\left|\bar{x}-\mu_0\right|<c\right)=1-\alpha$, d.h.

$2\cdot\Phi\left(\frac{c}{s}\cdot\sqrt{n}\right)-1=1-\alpha$. Es folgt $\Phi\left(\frac{c}{s}\cdot\sqrt{n}\right)=1-\frac{\alpha}{2}=1-\frac{0{,}01}{2}=0{,}995$.



Die Tabelle liefert $\frac{c}{s}\cdot\sqrt{n}=2{,}58$, also

$$c=\frac{2{,}58\cdot s}{\sqrt{n}}\approx\frac{2{,}58\cdot\sqrt{0{,}61614}}{10}\approx 0{,}203.$$

Der Annahmebereich von $H_0:\ E(X)=0$ ist also $\left[\mu_0-c/\mu_0+c\right]=\left[-0{,}203/0{,}203\right]$. Da $\bar{x}=0{,}289$ außerhalb dieses Bereichs liegt, ist H_0 zu verwerfen. Das Medikament erhöht die Schlafdauer!

Die Gleichung der dargestellten Dichtefunktion lautet

$$f(x)=\frac{1}{\sigma_{\bar{x}}\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-0}{\sigma_{\bar{x}}}\right)^2}$$ mit der Standardabweichung

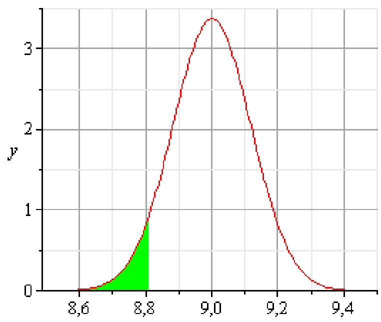
$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\approx\frac{s}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{0{,}61614}}{\sqrt{100}}\approx 0{,}0785$. Der Ablehnungsbereich ist markiert.

9. Linksseitiger Test: Ein Kunde behauptet, dass sein neues Auto im Mittel 9 Liter je 100 km benötigt, obwohl der Autohändler versprach, dass der Verbrauch unter 9 Liter liege. Bei 35 Testfahrten wurde ein Mittelwert von 8,85 Liter bei einer Standardabweichung von 0,7 Liter ermittelt. Prüfen Sie, ob sich die Behauptung des Kunden bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% aufrechterhalten lässt.

① $H_0:\ E(X)=9=\mu_0$ behauptet der Kunde. Gegenhypothese $H_1:\ E(X)<9$.

② Ablehnungsbereich von H_0: $\bar{x}\leq\mu_0-c$ (oder Version 2: $\bar{x}\leq c$)

③ Es ist $\overline{x} = 8{,}83$, $\sigma_X = 0{,}7$ und $\sigma_{\overline{X}} = \sigma_X / \sqrt{n} = 0{,}7/\sqrt{35}$.



④ Aus $P\left(\overline{x} \le \mu_0 - c\right) = \alpha$ folgt

$\Phi\left(\frac{\mu_0 - c - \mu_0}{\sigma_X / \sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\frac{-c\cdot\sqrt{n}}{\sigma_X}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{c\cdot\sqrt{35}}{0{,}7}\right) = 0{,}05$, d.h.

$\Phi\left(\frac{c\cdot\sqrt{35}}{0{,}7}\right) = 0{,}95$. Die Tabelle liefert $\frac{c\cdot\sqrt{35}}{0{,}7} = 1{,}64$,

und somit $c = 0{,}19$.

Folglich ist der Ablehnungsbereich gegeben durch

$\overline{x} \le \mu_0 - c = 9{,}0 - 0{,}19 = 8{,}81$. Die Nullhypothese, dass der Benzinverbrauch 9 Liter beträgt, ist durch den Test nicht widerlegt.

Die Gleichung der dargestellten Dichtefunktion lautet $f(x) = \frac{1}{\sigma_{\overline{x}}\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-9}{\sigma_{\overline{x}}}\right)^2}$ mit der Standardabweichung $\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}7}{\sqrt{35}} \approx 0{,}118$. Der Ablehnungsbereich ist markiert.

Zusatz: Falls man eine Irrtumswahrscheinlichkeit von 10% in Kauf nimmt, dann ist $\Phi\left(\frac{c\cdot\sqrt{35}}{0{,}7}\right) = 0{,}9$,

d.h. $\frac{c\cdot\sqrt{35}}{0{,}7} = 1{,}28$, und somit $c = 0{,}15$.

Folglich ist der Ablehnungsbereich gegeben durch $\overline{x} \le \mu_0 - c = 9{,}0 - 0{,}15 = 8{,}85$. Der Test spricht in diesem Fall für die Behauptung des Händlers.

10. Linksseitiger Test: Der Hersteller einer Sorte von Überraschungseiern behauptet, dass in mindestens 20% der Eier Fußballfiguren befinden. Bei einem Test werden 1000 Eier geöffnet, 185 Fußballfiguren wurden gefunden. Lässt sich die Behauptung des Herstellers mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit α von höchstens 5% widerlegen?

① $H_0: \ p \ge 0{,}2$ behauptet der Hersteller. Gegenhypothese $H_1: \ p < 0{,}2$.

② Die Anzahl X der Fußballfiguren ist binomialverteilt.

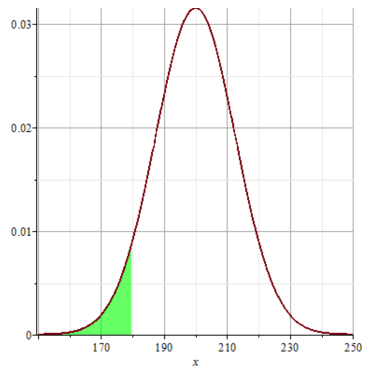
③ Ablehnungsbereich von H_0: $X \le \mu_0 - c$ (oder Version 2: $X \le c$)

④ Aus $P\left(X \le \mu_0 - c\right) \le \alpha$ folgt $P(X \le \mu_0 - c) = \sum_{k=0}^{\mu_0 - c} B_{1000,0,2}(k) = \sum_{k=0}^{\mu_0 - c} \binom{1000}{k} \cdot 0{,}2^k \cdot 0{,}8^{1000-k} \le 0{,}05$.

Diese Summe lässt sich annähern durch $\Phi\left(\frac{\mu_0 - c - \mu_0 + 0{,}5}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{-c - 0{,}5}{\sqrt{1000\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}\right) = \Phi\left(\frac{-c-0{,}5}{\sqrt{160}}\right) \le 0{,}05$

d.h. $1 - \Phi\left(\frac{c+0{,}5}{\sqrt{160}}\right) \le 0{,}05$, also $\Phi\left(\frac{c+0{,}5}{\sqrt{160}}\right) \ge 0{,}95$.

Mit Hilfe der Tabelle folgt $\frac{c+0{,}5}{\sqrt{160}} \approx 1{,}65$, so dass $c \approx 20{,}4$.



Der Ablehnungsbereich von H_0 ist damit gegeben durch

$X \le \mu_0 - c = 200 - 20{,}4 = 179{,}6$.

Da 185 nicht in den Ablehnungsbereich fällt, kann die Behauptung des Herstellers nicht widerlegt werden.

Die Gleichung der dargestellten Dichtefunktion lautet

$f(x) = \frac{1}{\sigma_X\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-200}{\sigma_X}\right)^2}$ mit der Standardabweichung

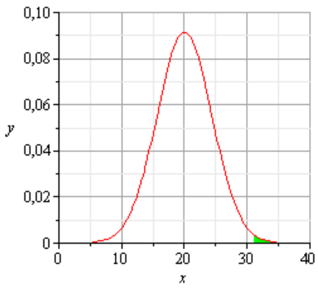
$\sigma_X = \sqrt{1000\cdot 0.2\cdot 0{,}8} = \sqrt{160}$. Der Ablehnungsbereich ist markiert.

11. Rechtsseitiger Test: Eine politische Partei muss bei einer Wahl mehr als 5% der Stimmen auf sich vereinigen. Vor Beginn des Wahlkampfs steht die Partei vor der Frage, ob sie in einem bestimmten Wahlkreis einen Stimmenanteil von weniger als 5% hat und daher einen intensiveren Wahlkampf führen soll, oder ihr Stimmenanteil schon mehr als 5% ausmacht und somit ein allzu aufwändiger Wahlkampf überflüssig wäre.
Es gibt jetzt zwei Hypothesen: $p < 0,05$ und $p \geq 0,05$. Welche ist die Nullhypothese?

Da man sich bei einem Test die Irrtumswahrscheinlichkeit vorgibt, nimmt man diejenige Hypothese als Nullhypothese, deren irrtümliche Ablehnung, wenn sie richtig ist, schwerwiegender ist als ihre irrtümliche Nicht-Ablehnung, wenn sie falsch ist.
Wäre $p < 0,05$ wahr und würde dies irrtümlich abgelehnt, so würde der Wahlkampf wohl nicht intensiviert. Die Partei würde riskieren, die Wahl zu verlieren.
Wäre dagegen $p \geq 0,05$ und würde dies irrtümlich abgelehnt, so ergäbe sich die weniger folgenschwere Entscheidung, dass ein intensiver Wahlkamp nötig ist. Die Partei würde nur riskieren, unnötig viel Geld für einen Wahlkampf aufzuwenden, der an sich gar nicht so aufwändig sein müsste.
Also: Nullhypothese $H_0: \ p < 0,05$, Gegenhypothese $H_1: \ p \geq 0,05$.
Es sollen 400 Wahlberechtigte befragt werden und die Irrtumswahrscheinlichkeit soll $\alpha = 1\%$ betragen.
Ablehnungsbereich: $X \geq \mu_0 + c$, mit $\mu_0 = 0,05 \cdot 400 = 20$ und

$\sigma_X = \sqrt{npq} = \sqrt{400 \cdot 0,05 \cdot 0,95} = \sqrt{19} \approx 4,36$.

$$P(X \geq \mu_0 + c) = 1 - P(X < \mu_0 + c) = 1 - \Phi\left(\frac{\mu_0 + c - \mu_0}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{c}{\sqrt{19}}\right) = \alpha,$$



d.h. $\Phi\left(\frac{c}{\sqrt{19}}\right) = 1 - \alpha = 0,99$.

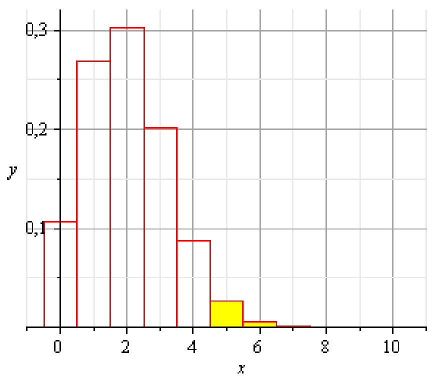
Die Tabelle liefert $\frac{c}{\sqrt{19}} = 2,33$, d.h. $c = 10,2$.

Der Ablehnungsbereich von H_0 lautet folglich

$X \geq \mu_0 + c = 20 + 10,2 = 30,2$, d.h. bei der Stichprobe müssen sich mindestens 31 Wähler von 400 zufällig ausgewählten für diese Partei entscheiden, damit mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 99% der Stimmenanteil der Partei mindestens 5% beträgt.

Die Gleichung der dargestellten Dichtefunktion lautet $f(x) = \frac{1}{\sigma_X \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-20}{\sigma_X}\right)^2}$ mit der Standardabweichung $\sigma_X = \sqrt{19}$. Der Ablehnungsbereich ist markiert.

12. Rechtsseitiger Test: In einer Urne sollen sich angeblich ein Fünftel weiße und vier Fünftel schwarze Kugeln befinden. Um die Behauptung zu prüfen, wird folgender Test durchgeführt: Es werden 10 Kugeln mit Zurücklegen gezogen; falls sich unter diesen mehr als 4 weiße befinden, wird die Behauptung zurückgewiesen, andernfalls wird sie akzeptiert. Mit welcher Irrtumswahrscheinlichkeit arbeitet der Test?
Hinweis: Verwenden Sie die Binomialverteilung.



Es sei X die Anzahl der gezogenen weißen Kugeln. X ist $B_{10;0,2}$-verteilt.

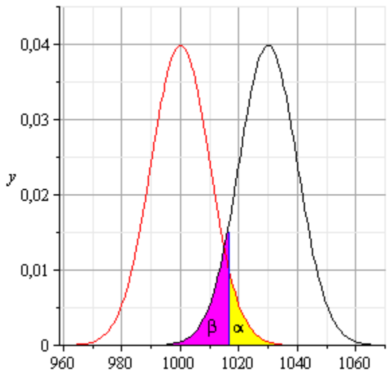
$$\alpha = P(X \geq 5) = \sum_{k=5}^{10} B_{10;0,2}(k) = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \cdot 0,2^k \cdot 0,8^{10-k} \approx 0,03279$$

13. Die durchschnittliche Lebensdauer X von Glühbirnen, die nach einem herkömmlichen Verfahren hergestellt werden, beträgt $\overline{X} = 1000$ Stunden bei einer Standardabweichung $\sigma_X = 100$ Stunden. Bei Glühbirnen, die nach einem neuen Verfahren hergestellt wurden, wurde eine Stichprobe vom Umfang 100 entnommen. Es ergab sich eine durchschnittliche Lebensdauer von 1020 Stunden. Es soll mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% entschieden werden, ob die mittlere Brenndauer auf 1030 erhöht wurde. Berechnen Sie auch die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art.

Die Nullhypothese lautet $H_0: \mu = \mu_0 = 1000$. Mit dem Ablehnungsbereich $\overline{X} > \mu_0 + c$ folgt

$$\alpha = P(\overline{X} > \mu_0 + c) = 1 - P(\overline{X} \le \mu_0 + c) = 1 - \Phi\left(\frac{\mu_0 + c - \mu_0}{\sigma_{\overline{X}}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{c}{\sigma_X / \sqrt{n}}\right) = 0{,}05 \text{, d.h.}$$

$$\Phi\left(\frac{c}{100/\sqrt{100}}\right) = 0{,}95 \text{, also } \frac{c}{10} = 1{,}64 \text{ und damit } c = 16{,}4.$$



Damit lautet der Ablehnungsbereich der Nullhypothese $H_0: \mu = 1000$ nun $\overline{X} > 1016{,}4$, d.h. die Nullhypothese gilt als widerlegt.

Für den Fehler 2. Art folgt bei $\mu_0 = 1030$:

$$\beta = P(\overline{X} \le 1016{,}4) = \Phi\left(\frac{1016{,}4 - 1030}{100/\sqrt{100}}\right) = \Phi(-1{,}36) =$$

$= 1 - \Phi(1{,}36) = 0{,}0869$, d.h. die Wahrscheinlichkeit, die falsche Hypothese $H_0: \mu = \mu_0 = 1000$ trotz $\mu_0 = 1030$ anzunehmen, beträgt 8,69%.

Die Gleichungen der dargestellten Funktionen sind

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_{\overline{X}} \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-1000}{\sigma_{\overline{X}}}\right)^2} \text{ und } g(x) = \frac{1}{\sigma_{\overline{X}} \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-1030}{\sigma_{\overline{X}}}\right)^2} \text{ mit } \sigma_{\overline{X}} = \frac{100}{\sqrt{100}} = 10.$$

14. Eine Firma stellt zwei Arten von Seilen her, die sich durch ihre Bruchlast unterscheiden: Die eine Bruchlast beträgt $\mu = 3600\,\text{kg}$, die andere Bruchlast 3800 kg und gleicher Standardabweichung $\sigma_X = 80\,\text{kg}$. Ein Kunde bestellt ein Seil mit einer Bruchlast von 3600 kg. Die Seile liegen in verschiedenen Kisten, die versehentlich nicht beschriftet sind. Ein Mitarbeiter der Firma greift ein beliebiges Seil heraus und misst seine Bruchlast. Wie groß darf seine Bruchlast höchstens sein bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 10%? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art?

Der Ablehnungsbereich lautet $X > \mu_0 + c = 3600 + c$. Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt

$$P(X > 3600 + c) = 1 - P(X \le 3600 + c) = 1 - \Phi\left(\frac{3600 + c - 3600}{80}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{c}{80}\right) = 0{,}1 \text{, also } \Phi\left(\frac{c}{80}\right) = 0{,}9 \text{, d.h.}$$

$\frac{c}{80} = 1{,}28$ und damit $c = 102{,}4$. Falls die gemessene Bruchlast mehr als 3702,4 kg beträgt, dann entscheidet sich der Mitarbeiter für die stärkere Seilklasse.

Das Risiko 2. Art beträgt $\beta = P(X \le 3702{,}4)$ bei $\mu = 3800$.

$$\beta = P(X \le 3702{,}4) = \Phi\left(\frac{3702{,}4 - 3800}{80}\right) = \Phi(-1{,}22) = 1 - \Phi(1{,}22) = 0{,}1112 \text{, d.h. die Wahrscheinlichkeit,}$$

dass ein als schwach eingestuftes Seil zur stärkeren Klasse gehört, beträgt nur 11,12 %.

Die beiden Dichtefunktionen sind

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_X \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-3600}{\sigma_X}\right)^2} \text{ und } g(x) = \frac{1}{\sigma_X \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-3800}{\sigma_X}\right)^2}$$

mit $\sigma_X = \sqrt{80}$. Ihr Schnittpunkt liegt bei $x = 3700$.