1. Zeigen Sie, dass $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$ gilt.

2. Es sei X eine beliebige Zufallsvariable, die die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ annehmen kann. Dann gilt

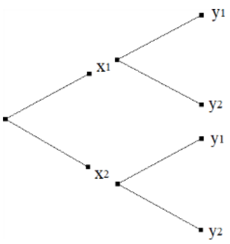
   $\boxed{E(X)=\mu_X=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X=x_i)}$ und $\boxed{V(X)=\sigma_X{}^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)^2 \cdot P(X=x_i)=E(X^2)-E(X)^2}$.

   Zeigen Sie, dass für $a,b \in \mathbb{R}$ gilt: $E(a \cdot X+b)=a \cdot E(X)+b$ und $V(a \cdot X+b)=a^2 \cdot V(X)$.

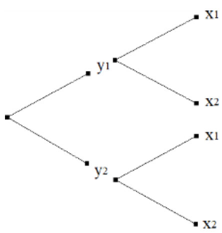
3. Untersuchen Sie anhand der Vierfeldertafel, ob die beiden Zufallsvariablen X, Y unabhängig sind.

	y_1	y_2	
x_1			0,2
x_2		0,3	
		0,4	1

   Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten in den beiden Baumdiagrammen.



und



4. Bei einer bestimmten Krankheit treten drei Symptome A, B oder C unabhängig voneinander auf.
   a. Die Symptome A, B und C treten mit den Wahrscheinlichkeiten $p_A = 0,7$, $p_B = 0,8$ und $p_C = 0,9$ auf.
      Mit welcher Wahrscheinlichkeit p treten bei einem solchen Patienten alle drei Symptome auf?
   b. Wir betrachten eine Gruppe von Patienten, die an dieser Krankheit leiden. 70% von ihnen zeigen das Symptom A, 80% das Symptom B und 90% das Symptom C.
      Wir betrachten nun diejenigen Patienten, die alle drei Symptome zeigen. Wieviel Prozent sind es höchstens, wie viel Prozent sind es mindestens?

5. Es ist bekannt, dass 4% aller produzierten Bauteile defekt sind. Bei einer Kontrolle werden 5% aller Bauteile aussortiert. Trotz dieser Kontrolle werden nicht alle defekten Teile aussortiert, so dass 0,2% der nicht aussortierten Bauteile defekt sind. Außerdem werden auch Bauteile aussortiert, die nicht defekt sind.
   Es bedeute d: Bauteil defekt und a: Bauteil wird aussortiert.

   Stellen Sie eine Vierfeldertafel auf.
   Interpretieren Sie die Zahlen der Vierfeldertafel.
   Wie viel Prozent der aussortierten Teile sind nicht defekt?
   Wie viel Prozent der aussortierten Teile sind defekt?
   Wie viel Prozent der nicht aussortierten Teile sind nicht defekt?
   Wie viel Prozent der defekten Teile sind aussortiert?
   Wie viel Prozent der nicht defekten Teile sind aussortiert?

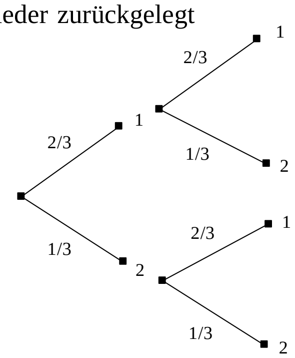
	d	$\overline{d}$	
a			0,05
$\overline{a}$			
	0,04		1

Außerdem gilt $P(d \mid \overline{a}) = 0,002$.

6. Ein deutscher Mann von 70 Jahren bekommt im Laufe seines Lebens zu 60% einen Herzinfarkt. Bei den Rauchern liegt diese Zahl sogar bei 80%. Es werde angenommen, dass jeder vierte Mann raucht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit p, dass ein Nichtraucher von 70 Jahren im Laufe seines Lebens einen Herzinfarkt bekommt.

7. a. Zeigen Sie, dass für zwei beliebige Zufallsvariablen X und Y die Beziehung
$\mathrm{Var}(X+Y)=V(X)+2\cdot \mathrm{Kov}(X,Y)+V(Y)$ gilt.
Folgerung: Wenn X und Y unabhängig sind, dann gilt $\mathrm{Kov}(X,Y)=0$
b. Es seien X, Y unabhängige Zufallsvariablen und $a,b\in\mathbb{R}$. Dann gilt
$V(a\cdot X+b\cdot Y)=a^2\cdot V(X)+b^2\cdot V(Y)$; speziell $V(X-Y)=V(X)+V(Y)$.
c. Sind X und X unabhängig?

8. In einer Urne befinden sich drei Kugeln, welche sich nur in der Aufschrift 1, 1 und 2 unterscheiden; siehe Vorlesung.
Man zieht nun nacheinander zwei Kugeln, wobei die zuerst gezogene Kugel wieder zurückgelegt wird.
Das Baumdiagramm veranschaulicht die möglichen Ergebnisse.
Es sei X die Zahl beim 1. Zug und Y die Zahl beim 2. Zug.
Laut Vorlesung ist $E(X)=E(Y)=\frac{4}{3}$, $E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\frac{8}{3}$.
Wegen der Unabhängigkeit von X und Y gilt $E(X\cdot Y)=E(X)\cdot E(Y)=\frac{16}{9}$.
a. Prüfen Sie, ob $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$ gilt.
b. Prüfen Sie, ob $V(X\cdot Y)=V(X)\cdot V(Y)$ gilt.



9. Die Wahrscheinlichkeit für eine Knabengeburt sei 0,515. Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der Binomialverteilung (X = Anzahl der Knaben), dass die Familie mit 4 Kindern
a. genau zwei Knaben (X ist $B_{4;0,515}$-verteilt)
b. wenigstens einen Knaben
c. eines oder zwei Mädchen
d. kein Mädchen hat.

10. Ein idealer Würfel wird 100 mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der Binomialverteilung, dass die ‚Sechs' 15 oder 16 oder 17 mal vorkommt?
Es sei X die Anzahl der Sechsen mit $p=1/6$.

11. Ein Autofahrer muss bei seiner Fahrt zum Arbeitsplatz drei Ampeln passieren, die unabhängig voneinander mit der Wahrscheinlichkeit 0,4 auf ‚Rot' stehen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann der Fahrer mindestens zwei Ampeln bei ‚Grün' passieren? X = Anzahl der grünen Ampeln.

12. Ein Kleinflugzeug kann 20 Passagiere aufnehmen. Aus Erfahrung ist bekannt, dass im Mittel 10% der Fluggäste nicht erscheinen. Deshalb werden 22 Tickets verkauft. Mit welcher Wahrscheinlichkeit reichen die Plätze im Flugzeug nicht? (X = Anzahl der Fluggäste, die mitfliegen wollen.)

13. Wenn ich durch die Stadt gehe, dann treffe ich innerhalb von 20 Minuten mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_{20}=0,7$ mindestens einen Bekannten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p_5 treffe ich dann innerhalb von 5 Minuten mindestens einen Bekannten?

14.

	$x_1=1$	$x_2=2$	
$y_1=3$	0,12	0,18	0,3
$y_2=4$	0,20	0,30	0,5
$y_3=5$	0,08	0,12	0,2
	0,4	0,6	1

a. Berechnen Sie $E(X)$, $E(Y)$ und $E(X\cdot Y)$.
b. Berechnen Sie die Kovarianz nach $\mathrm{Cov}(X,Y)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}\left(x_i-E(X)\right)\cdot\left(y_j-E(Y)\right)\cdot P(X=x_i\wedge Y=y_j)$ und nach $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(X\cdot Y)-E(X)\cdot E(Y)$.

c. Berechnen Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(X=1\mid Y=4)$ und $P(X=2\mid Y=4)$ und den bedingten Erwartungswert $E(X\mid Y=4)$.

d. Berechnen Sie den bedingten Erwartungswert $E(Y\mid X=1)$.

15. Gegeben sind zwei Zufallsvariablen X und Y durch die Tabelle. Es soll gezeigt werden, dass die Umkehrung des folgenden Satzes nicht gilt.
Wenn X, Y unabhängig sind, dann gilt
$E(X\cdot Y)=E(X)\cdot E(Y)$, $V(X\pm Y)=V(X)+V(Y)$
und $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$.

	$x_1=0$	$x_2=1$	$x_3=2$	
$y_1=0$	$1/4$	0	$1/4$	$1/2$
$y_2=1$	0	$1/2$	0	$1/2$
	$1/4$	$1/2$	$1/4$	1

a. Zeigen Sie, dass X und Y nicht unabhängig sind.
b. Bestimmen Sie $E(X)$, $E(Y)$, $E(X\cdot Y)$, $V(X)$, $V(Y)$, $V(X+Y)$, $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

16. Ein System kann die drei Zustände A, B und C annehmen. Die zugehörige Übergangsmatrix ist

$$P=\begin{pmatrix} P(AA) & P(BA) & P(CA)\\ P(AB) & P(BB) & P(CB)\\ P(AC) & P(BC) & P(CC)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}3\\ 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}2\\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5\end{pmatrix}.$$

a. Zeichnen Sie ein Prozessdiagramm.
b. Das System befinde sich in Zustand A. Mit welchen Wahrscheinlichkeiten befindet sich das System in Zustand A, B oder C
α. nach einem Schritt,
β. nach zwei Schritten,
γ. Nach drei Schritten?
δ. Bestimmen Sie auch M^2 und M^3.
c. Ist die Markov-Kette irreduzibel und aperiodisch?
Bestimmen Sie die stationäre Verteilung $\begin{pmatrix}p_A\\ p_B\\ p_C\end{pmatrix}$, für die $P\bullet\begin{pmatrix}p_A\\ p_B\\ p_C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_A\\ p_B\\ p_C\end{pmatrix}$ gilt.
Interpretieren Sie das Ergebnis.
Geben Sie die Gleichgewichtsmatrix $\overline{P}$ an.

17. Ein System kann die vier Zustände A, B, C und D annehmen. Die zugehörige Übergangsmatrix ist

$$P=\begin{pmatrix} P(AA) & P(BA) & P(CA) & P(DA)\\ P(AB) & P(BB) & P(CB) & P(DB)\\ P(AC) & P(BC) & P(CC) & P(DC)\\ P(AD) & P(BD) & P(CD) & P(DD)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac12 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac12 & 0\\ 0 & \frac12 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac12 & 1\end{pmatrix}$$

a. Zeichnen Sie ein Prozessdiagramm.
b. Bestimmen Sie auch M^2 und M^3.
c. Ist die Markov-Kette irreduzibel? Versuchen Sie, den stationären Zustand zu bestimmen.
d. Es gilt $\overline{P}=\lim\limits_{n\to\infty}P^n=\begin{pmatrix}1 & \frac23 & \frac13 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac13 & \frac23 & 1\end{pmatrix}$. Was bedeutet das für verschiedene Ausgangszustände?

18. Bestimmen Sie für die Dichtefunktion $f(x)=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}e^{-\frac12\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ die Koordinaten des Hochpunktes und der beiden Wendepunkte.

19. Die Wahrscheinlichkeit für eine Knabengeburt sei 0,515.
a. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind dann unter 1000 Neugeborenen genau 510 Knaben? (X = Anzahl der Knaben). Verwenden Sie

α. die Binomialverteilung $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$,

β. die Näherung $P(X = x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$.

γ. die Näherung $P(X = x) = \Phi\left(\frac{x+0,5-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x-0,5-\mu}{\sigma}\right)$.

b. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind dann unter 1000 Neugeborenen mindestens 520 Knaben? (X = Anzahl der Knaben). Verwenden Sie die 0,5-Näherung.

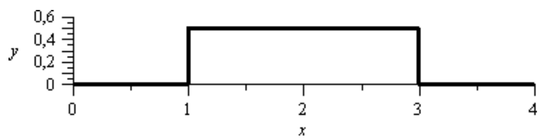
20. Zwei ideale Würfel werden 300-mal zusammengeworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten mehr als 110 Sechsen auf? Verwenden Sie die 0,5-Näherung. Es sei X die Anzahl der Sechsen.

21. In Deutschland haben etwa 12% aller Personen die Blutgruppe B. Es werden nun 500 Personen auf ihre Blutgruppe untersucht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt die Anzahl der Personen mit Blutgruppe B zwischen 55 und 65, je einschließlich? Verwenden Sie die 0,5-Näherung.

22. In einer Brauerei werden die Flaschen vor dem Wiederauffüllen gewaschen. Die Arbeitszeit X in Sekunden für das Waschen sei normalverteilt mit $\mu_X = 120$ und $\sigma_X = 15$. Die Arbeitszeit Y für das Füllen sei normalverteilt mit $\mu_Y = 54$ und $\sigma_Y = 5$. X und Y seien unabhängig. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Waschen und Füllen einer Flasche zusammen nicht länger als 3 Minuten dauert?
Hinweis: Verwenden Sie den folgenden Satz:
Satz: Wenn zwei Zufallsvariablen X und Y unabhängig und jeweils normalverteilt mit μ_X und σ_X bzw. μ_Y und σ_Y sind, dann ist auch die Zufallsvariable $Z = X + Y$ normalverteilt mit $\mu_{X+Y} = \mu_X + \mu_Y$ und $\sigma^2_{X+Y} = \sigma^2_X + \sigma^2_Y$.

23. Die Körpergröße X in cm bei Männern und Y in cm bei Frauen einer Bevölkerung sei normalverteilt mit $\mu_X = 172$ und $\sigma_X = 6,5$ bzw. $\mu_Y = 165$ und $\sigma_Y = 3,5$. Aus dieser Bevölkerung werden unabhängig voneinander ein Mann und eine Frau ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der Mann kleiner als die Frau, d.h. bestimmen Sie $P(X - Y < 0)$.
Hinweis: Es gilt $\mu_{X-Y} = \mu_X + \mu_{-Y} = \mu_X - \mu_Y$ und $\sigma^2_{X-Y} = \sigma^2_X + \sigma^2_{-Y} = \sigma^2_X + \sigma^2_Y$.

24. Die Zufallsvariable X sei zwischen 1 und 3 gleichverteilt. Das Schaubild der Dichtefunktion $f(x)$ ist dargestellt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(1,5 \le X \le 2)$?



Berechnen Sie den Erwartungswert $\mu = \int_1^3 x \cdot f(x)\,dx$ und die Varianz $\sigma^2 = \int_1^3 (x-\mu)^2 \cdot f(x)\,dx$.
Zeichnen Sie die zugehörige Verteilungsfunktion $F(x)$.

25. Ein Ehepaar besitzt ein Handy, das beide gemeinsam unabhängig voneinander verwenden. Für die monatlichen Anrufzeiten in Minuten und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten gilt:
Für den Mann: $P(60\text{ Minuten}) = 0,25$, $P(30\text{ Minuten}) = 0,75$
Für die Frau: $P(80\text{ Minuten}) = 0,6$, $P(65\text{ Minuten}) = 0,4$.
Der Tarif beträgt 1€/Min bei einer Grundgebühr von monatlich 10€. Wird in einem Monat mehr als 2 Stunden telefoniert, dann gibt es 10% Rabatt auf die Gesamtrechnung.

a. Berechnen Sie die durchschnittliche Höhe der Telefonrechnung.
b. Berechnen Sie die Standardabweichung σ .
Hinweis: Es gibt 4 mögliche Kombinationen. Verwenden Sie die Tabelle

	Mann		Frau		gesamt		
Nr.	Zeit in min	P_i	Zeit in min	P_j	Zeit in min	$P_i \cdot P_j$	Kosten
1	60	0,25	80	0,6	140	0,15	135
2	60	0,25	65	0,4			
3	30	0,75	80				
4	30	0,75	65				

a. $E(X) = \mu = \sum_{k=1}^{4} x_k \cdot P(X = x_k) = \ldots$

b. $\sigma^2 = E(X^2) - E(X)^2 = \ldots$ oder $\sigma^2 = \sum_{k=1}^{4} (x_k - \mu)^2 \cdot P(X = x_k) = \ldots$

26. Ein Unternehmen steht vor der Entscheidung, ein benötigtes Zwischenprodukt selbst herzustellen oder zu kaufen. Für die pro Monat benötigte Stückzahl geht man von folgenden Wahrscheinlichkeiten aus:

x_i	1000	1500	2000
$P(x_i)$	30%	50%	20%

Für den monatlichen Kauf gilt: Der Stückpreis beträgt 10 €, bei Abnahme von mehr als 1500 Stück/Monat nur noch 9€.

Für Eigenfertigung gilt: Die Fixkosten betragen 4700 €/Monat, die variablen Kosten betragen 6,50 €/Stück. Bei einer Fertigung von mehr als 1500 Stück/Monat steigt der Stückpreis aufgrund von Überstundenzuschlägen für die darüber liegende Stückzahl auf 7,50 €/Stück.

Wie soll das Unternehmen entscheiden?

		Kauf		Eigenfertigung	
x_i	$P(x_i)$	Kosten $K(x_i)$	$P(x_i) \cdot K(x_i)$	Kosten $K(x_i)$	$P(x_i) \cdot K(x_i)$
1000	0,3	10000			
1500	0,5	15000			
2000	0,2	18000			
E(X)	–	–		–	

27. Es werde angenommen, dass $p = 80\%$ Einwohner einer Stadt Kaffee trinken. Bestimmen Sie die Anzahl n der Personen dieser Stadt, die mindestens befragt werden müssen, damit die relative Häufigkeit für die Kaffeetrinker bei dieser Umfrage mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% im Intervall $[0,7/0,9]$ liegt?

I. Es sei X die Anzahl der Kaffeetrinker unter den n Befragten und $\overline{X} = \frac{X}{n}$ die mittlere Trefferquote.

a. Rechnen Sie mit $P(0,7 \le \overline{X} \le 0,9) = P(0,7 \cdot n \le X \le 0,9 \cdot n) = \cdots$ mit der 0,5-Korrektur.

b. Rechnen Sie mit $P(0,7 \le \overline{X} \le 0,9) = P(0,7 \cdot n \le X \le 0,9 \cdot n) = \cdots$ ohne die 0,5-Korrektur.

II. Es sei $X = \begin{cases} 1 & \text{bei einem Kaffeetrinker} \\ 0 & \text{bei einem Nicht-Kaffeetrinker} \end{cases}$.

Rechnen Sie mit $P(0,7 \le \overline{X} \le 0,9) = \Phi\left(\frac{0,9 - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}}\right) - \Phi\left(\frac{0,7 - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}}\right) = \cdots$ mit der Normalverteilung, also ohne die 0,5-Korrektur.

III. a. Mit Hilfe der in der Vorlesung hergeleiteten Formel $n \ge \frac{4z^2 \cdot p \cdot q}{\ell^2}$, wobei $\Phi(z) = \frac{1+\alpha}{2}$.

b. In der Statistik wird auch die Formel $n \ge \dfrac{\frac{4z^2 \cdot p \cdot q}{\ell^2}}{1 + \frac{4z^2 \cdot p \cdot q}{\ell^2 \cdot N}}$ mit $\Phi(z) = \frac{1+\alpha}{2}$ verwendet.

Dabei ist N die Anzahl der Leute, für die die Statistik aufgestellt werden soll, die man also theoretisch befragen könnte. Für $n \to \infty$ strebt der Nenner gegen 1, so dass man die Formel von Teil a erhält. Wählen Sie $N = 1000$.

28. In einer Gruppe von $N = 5000$ Leuten soll erfragt werden, wieviel Prozent gerne Musik hören. Das dabei erhaltene Intervall für die relative Häufigkeit soll die Breite 0,1 haben und mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% gelten.
Die Wahrscheinlichkeit p ist unbekannt! Wieso rechnet man dann mit $p = 0,5$?

Rechnen Sie mit $n \geq \dfrac{4z^2 \cdot p \cdot q}{\ell^2}$ und mit $n \geq \dfrac{\dfrac{4z^2 \cdot p \cdot q}{\ell^2}}{1 + \dfrac{4z^2 \cdot p \cdot q}{\ell^2 \cdot N}}$.

29. Eine Zufallsvariable X hat den Erwartungswert 5 und die Standardabweichung 1,5. Bestimmen Sie
 a. $P(|X-5| \geq 3)$ einmal nach Tschebyscheff und einmal mit Hilfe der Normalversteilung.
 b. $P(|X-5| \leq 2)$ einmal nach Tschebyscheff und einmal mit Hilfe der Normalversteilung.

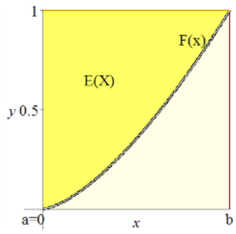
30. Es sei X eine Zufallsvariable mit dem Erwartungswert μ, die nur nicht-negative Werte annehmen kann.

 a. Beweisen Sie, dass dann die **Markoff'sche Ungleichung** $\boxed{P(X \geq c) \leq \dfrac{\mu}{c}}$ gilt.

 Andrei Andrejewitsch Markow (Андрей Андреевич Марков), russischer Mathematiker, 1856 – 1922.

 b. Welche Ungleichung folgt, wenn man $X = (Y - \mu_Y)^2$ mit $\mu_Y = E(Y)$ in die Markoff'sche Unleichung $P(X \geq c^2) \leq \dfrac{\mu}{c^2}$ einsetzt? Es sei $c > 0$ vorausgesetzt.

31. Es sei $f : [0, b] \to \mathbb{R}_0^+$ mit $b > 0$ eine Dichtefunktion und $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ die zugehörige Verteilungsfunktion. Zeigen Sie, dass der Inhalt der Fläche zwischen $y = 1$ und $y = F(x)$ genau $E(X)$ ist.



 Hinweis: Formen Sie $E(X) = \int_0^b x \cdot f(x)\,dx$ durch partielle Integration um.

32. An einem Schalter kommen pro 10 Minuten durchschnittlich 2,8 Kunden an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in den nächsten 10 Minuten
 a. kein Kunde kommt?
 b. 10 Kunden kommen?
 c. höchstens 5 Kunden kommen?
 d. mindestens 5 Kunden kommen?

 Hinweis: Verwenden Sie die Poisson-Verteilung mit $\lambda = 2,8$ und $P(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$.

33. An einer Mess-Stelle fährt pro Minute mit der Wahrscheinlichkeit $0,9$ mindestens ein Fahrrad vorbei. Die Anzahl X der Fahrräder sei Poisson-verteilt mit $P(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$.
 a. Bestimmen Sie den Parameter λ. Hinweis: Verwenden Sie $P(X = 0)$.
 b. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fahren in einer Minute mindestens zwei Fahrräder vorbei?
 c. In einer Stadt gibt es vier voneinander unabhängige Mess-Stellen. Für jede gilt, dass pro Minute mit der Wahrscheinlichkeit $0,9$ mindestens ein Fahrrad vorbeifährt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fährt in einer Minute an genau zwei Mess-Stellen kein Fahrrad vorbei?

34. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 1000 Leuten genau 3 am 1. Januar Geburtstag haben, und zwar a. exakt mit der Binomialverteilung

    b. mit der Näherung $B_{n,p}(k) \approx \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)^2}$ von Moivre-Laplace

    c. mit der Näherung $B_{n,p}(k) \approx \Phi\left(\frac{k+0,5-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{k-0,5-\mu}{\sigma}\right)$

    d. nach Poisson.

    X = Anzahl der Leute, die am 01.01. Geburtstag haben und $p = 1/365$.

35. Der Intelligenzquotient IQ wird nach der Formel $IQ = 100 + 15 \cdot \frac{x-\mu}{\sigma}$ berechnet. Dabei ist x der ermittelte Skalenwert beim verwendeten Test, μ der Mittelwert und σ die Standardabweichung der verwendeten Skala. Bestimmen Sie $P(IQ > 130)$ mit Hilfe der Normalverteilung.

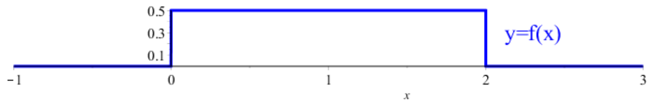
36. Es sei X eine Zufallsvariable mit der Dichtefunktion $f(x) = e^{-2|x|}$ für $x \in \mathbb{R}$.

    a. Überprüfen Sie, ob $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$. Begründen Sie ohne Rechnung, dass $E(X) = 0$.

    b. Bestimmen Sie allgemein die Verteilungsfunkton $P(X \le x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ für $x \in \mathbb{R}$ und speziell die Wahrscheinlichkeiten $P(X \le -1)$, $P(X \le 1)$ und $P(X \ge 1)$.

37. Ein Zufallsgenerator erzeugt Zufallszahlen x mit $0 \le x \le 2$. Die Dichtefunktion lautet

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{für } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{für } x > 2 \end{cases}.$$



Die Zufallsvariable X ist somit gleichverteilt im Intervall $[0/2]$.

    a. Bestimmen Sie $P(0 \le X \le 0,2)$, $P(X \ge 0,4)$, $P(X = 1)$ und allgemein die Verteilungsfunktion $P(X \le x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ für $x \in \mathbb{R}$.

    b. Die Zufallszahlen werden nun quadriert. Die Zufallsvariable Y sei definiert durch $Y = X^2$.
    Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $G(x) = P(Y \le x)$ und die Dichtefunktion $g(x) = G'(x)$.
    Bestimmen Sie $P(0 \le Y \le 0,2)$, $P(0,9 \le Y \le 1,1)$ und $P(1,8 \le Y \le 2)$.

38. Wie oft muss man einen Würfel mindestens werfen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% mindestens einmal die 6 erscheint? (Geometrische Verteilung)

39. Es ist bekannt, dass 80% der TIF-ler das Fach Statistik lieben. Zu Beginn einer Vorlesung kommen die TIF-ler zur Türe herein.
    a. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass erst der zehnte eintretende Student Statistik nicht liebt?
    b. Wie viele Studenten müssen im Mittel eintreten, bis ein der Statistik kritisch eingestellter Student eintritt? (Geometrische Verteilung)

40. Ein unerfahrener Schütze trifft auf dem Jahrmarkt mit einer Wahrscheinlichkeit von nur 0,1.7
    a. Der Schütze schießt fünfmal. Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er mehr als einmal das Ziel?
    b. Nun schießt der Schütze so lange, bis er einen Treffer erzielt.
    Wie oft muss er im Mittel schießen, um einen Treffer zu erzielen?
    Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mehr als drei Versuche benötigt, bis er einen Treffer erzielt hat? (Geometrische Verteilung)

41. In einer Urne liegen 7 rote, 5 blaue und 4 grüne Kugeln. Man zieht nun mit einem Griff 6 Kugeln. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass 3 rote, 2 blaue und eine grüne Kugel gezogen werden.

42. Zwei Spieler A und B wollen eine Schachpartie durchführen. Die Bedenkzeit in Stunden für alle Züge von A sei verteilt nach $f_A(t) = e^{-t}$, während für B nach $f_B(t) = 2 \cdot e^{-2t}$ verteilt ist. Dabei ist $t \geq 0$ in Stunden gezählt.

   a. Zeigen Sie, dass $\int_0^\infty f_A(x)\,dx = 1$ und $\int_0^\infty f_B(x)\,dx = 1$.

   b. Berechnen Sie die Erwartungswerte $\mu_A = \int_0^\infty x \cdot f_A(x)\,dx$ und $\mu_B = \int_0^\infty x \cdot f_B(x)\,dx$.

   c. Es sei $t = t_1 + t_2$ die Summe der beiden Bedenkzeiten.

   Bestimmen Sie die Verteilung $f(t) = \int_0^\infty f_A(x) \cdot f_B(t-x)\,dx$ und den Erwartungswert μ von $f(t)$.

43. Die Zufallsvariablen X und Y haben die gemeinsame Dichtefunktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{3}(x+y) & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \text{ und } 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

   a. Zeigen Sie, dass durch $f(x,y)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte gegeben ist.

   b. Bestimmen Sie die beiden Randdichten $f_X(x)$ und $f_Y(y)$.

      α. Untersuchen Sie X, Y auf Unabhängigkeit mit Hilfe von $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

      β. Bestimmen Sie die drei Verteilungsfunktionen $F_X(x) = P(X \leq x)$, $F_Y(y) = P(Y \leq y)$ und $F(x,y) = P(X \leq x \wedge Y \leq y)$ für $0 \leq x \leq 1$ und $0 \leq y \leq 2$.

      γ. Bestimmen Sie $E(X)$, $E(Y)$, $E(X \cdot Y)$ und $Cov(X,Y)$.

      δ. Bestimmen Sie die bedingten Erwartungswerte $E(X \mid 0 \leq Y \leq 1)$ und $E(X \mid 1 \leq Y \leq 2)$.

44. Die Zufallsvariablen X und Y haben die gemeinsame Dichtefunktion $f(x,y) = \begin{cases} c \cdot x \cdot e^{-x-y} & \text{für } x, y \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

   für $c \in \mathbb{R}$.

   a. Zeigen Sie, dass $c = 1$ sein muss.

   b. Bestimmen Sie die beiden Randdichten $f_X(x)$ und $f_Y(y)$.

      α. Untersuchen Sie X, Y auf Unabhängigkeit durch $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

      β. Bestimmen Sie die drei Verteilungfunktionen $F_X(x) = P(X \leq x)$, $F_Y(y) = P(Y \leq y)$ und $F(x,y) = P(X \leq x \wedge Y \leq y)$.

      γ. Bestimmen Sie $E(X)$, $E(Y)$, $E(X \cdot Y)$ und $Cov(X,Y)$.

45. Es werden 1000 Teile nach zwei Eigenschaften A und B untersucht. Es ergab sich die angegebene Kontingenztabelle.

   a. Bestimmen Sie den korrigierten Koeffizienten C* nach Pearson.

   b. Führen Sie den χ^2 – Unabhängigkeitstest mit dem Testniveau $p = 10\%$ durch.

	b_1	b_2	b_3	b_4	$\sum$
a_1	38	21	80	61	200
a_2	105	50	195	150	500
a_3	57	29	125	89	300
$\sum$	200	100	400	300	$n = 1000$

46. Eine Krankenkasse hatte ein Programm gegen das Rauchen durchgeführt. Es nahmen 300 Personen teil, davon 890 Raucher. Von denen rauchten danach nur noch 80 Personen. Dagegen wurden 5 Nichtraucher zu Rauchern. Untersuchen Sie mit dem McNemar-Test auf einem $10\%-$ und einem $20\%-$ Signifikanzniveau, ob das Programm das Rauchverhalten verändert hat.
47. Eine Partei veranstaltet einen Werbeabend, um mehr Wählerstimmen zu bekommen. Um den Erfolg zu testen, wählt die Partei 100 Personen aus und befragt sie vor und nach der Veranstaltung, ob sie die Partei wählen würden oder nicht. 40 Personen hätten die Partei vorher nicht gewählt, 65 hätten sie nachher gewählt und 35 hätten die Partei vorher und nachher gewählt.
    a. Untersuchen Sie mit dem McNemar-Test zum $5\%-$Signifikanzniveau, ob die Veranstaltung das Wahlverhalten signifikant verändert hat.
    b. Nach einer erneuten Zählung stellt sich heraus, dass nur 15 der 60 Personen, die die Partei vorher gewählt hätten, sie nachher nicht mehr wählen würden. Ändert sich dadurch die Signifikanz auf dem $5\%-$Niveau?

48. Ein neues Medikament soll getestet werden, ob es erkrankten Personen hilft bzw. gesunde Personen vielleicht sogar krank macht. Das Ergebnis war, dass 8 gesunde Personen erkrankten und 19 kranke Personen geheilt wurden. Untersuchen Sie mit dem McNemar-Test zum $5\%-$Signifikanzniveau, ob das Medikament guten Gewissens verwendet werden kann. Verwenden Sie die Yates-Formel und auch die Mediziner-Formel. Interpretieren Sie beide Ergebnisse.

49. Die Wartezeit x in Minuten an einer geschlossenen Bahnschranke sei exponentialverteilt mit der Verteilungsfunktion $F(x) = 1 - e^{-0,5\cdot x}$ für $x \ge 0$.
    a. Berechnen Sie die mittlere Wartezeit $E(X)$.
    b. Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht die Wartezeit um höchstens 10% von $E(X)$ ab?
    c. Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss man genau eine Minute warten?
    d. Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss man mindestens eine Minute warten?

50. a. Eine Firma stellt Adapter her, von denen unabhängig von ihrem Alter täglich im Mittel 2‰ ausfallen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der Exponentialverteilung, dass mein Adapter mindestens noch ein Jahr funktioniert.
    b. Eine andere Firma stellt ebenfalls Adapter her, die im Mittel nach 4 Jahren ausfallen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mein Adapter bereits während der ersten beiden Jahre ausfällt?

51. Nach Angabe einer Firma lässt sich der von ihr produzierte Akku im Mittel 800-mal laden. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich der Akku höchstens 700-mal laden lässt. Verwenden Sie die
    a. Exponentialverteilung,
    b. Weibull-Verteilung mit $k = 3$. Verwenden Sie $\Gamma(4/3) = 0,892979$.

52. Es sei bekannt, dass die Zufallsvariable X geometrisch verteilt ist mit $P(X = k) = p\cdot(1-p)^{k-1} = p\cdot q^{k-1}$ mit $k \in \mathbb{N}$. p ist aber unbekannt und soll mit Hilfe mehrerer Messungen k_i, $i = 1,\ldots,n$ geschätzt werden. Dabei gibt k_i an, dass man erst beim k_i-ten Versuch Erfolg hat. Leiten Sie mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode eine Formel zur Bestimmung des plausibelsten Wertes von p her.

53. Es sei bekannt, dass die Zufallsvariable X exponentiell verteilt ist mit $f(x) = \begin{cases} \lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x} & \text{für } x \ge 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$ für ein $\lambda > 0$. λ ist aber unbekannt und soll mit Hilfe mehrerer Messungen x_i, $i = 1,\ldots,n$ geschätzt werden. Leiten Sie mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode eine Formel zur Bestimmung des plausibelsten Wertes von λ her.

54. Die Pareto-Verteilung (italienischer Ökonom Vilfredo Pareto (1848–1923)) ist ein Modell für den Lohn X der Beschäftigten eines Unternehmens. Für die Dichtefunktion gilt $f(x) = \begin{cases} \dfrac{a\cdot k^a}{x^{a+1}} & \text{für } x \ge k \\ 0 & \text{für } x < k \end{cases}$. Dabei ist k der Mindestlohn und $a > 1$ eine Konstante.

a. Zeigen Sie, dass $f(x)$ eine Dichtefunktion ist, d.h. dass $\int_k^\infty f(x) = 1$ ist.

b. Der Mindestlohn k sei bekannt, aber nicht die positive Konstante a. Diese soll mit Hilfe mehrerer Löhne x_i, $i = 1, \dots, n$ geschätzt werden. Leiten Sie mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode eine Formel zur Bestimmung des plausibelsten Wertes von a her.

Zahlenbeispiel: Der Mindestlohn sei $k = 1000$. Zehn Löhne wurden erfasst:
1300, 1400, 1800, 1800, 2000, 2000, 2100, 2200, 2400, 2500 .

α. Bestimmen Sie aus dieser Stichprobe den Wert von a.

β. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebig ausgewählte Person zwischen 1000 und 2000 verdient.

γ. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebig ausgewählte Person mehr als 2500 verdient.

55. Lösen Sie Aufgabe 52 mit der Momenten-Methode.

56. Lösen Sie Aufgabe 53 mit der Momenten-Methode.

57. Lösen Sie Aufgabe 54 für die Pareto-Verteilung $f(x) = \begin{cases} \frac{a \cdot k^a}{x^{a+1}} & \text{für } x \geq k \\ 0 & \text{für } x < k \end{cases}$ für $a > 1$ mit der Momenten-Methode.