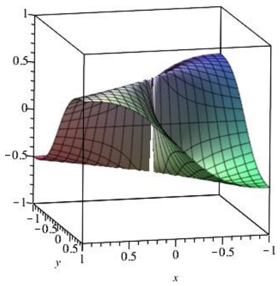
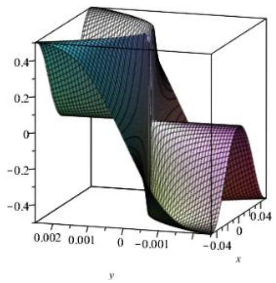
1. Es sei $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x \cdot y}{x^2 + y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.



   Wie verhält sich $f(x,y)$ für $(x,y) \to (0,0)$?
   Man kann sich auf verschiedenen Wegen in der x-y-Ebene der Stelle $(0,0)$ nähern.
   a. Wir nähern uns der Stelle $(0,0)$ auf der y-Achse, d.h. es ist $x = 0$.
   b. Wir nähern uns der Stelle $(0,0)$ auf Geraden der Gleichung $y = m \cdot x$ für beliebige Steigungen $m \in \mathbb{R}$.

2. Es sei $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \cdot y}{x^4 + y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.



   Wie verhält sich $f(x,y)$ für $(x,y) \to (0,0)$?
   Man kann sich auf verschiedenen Wegen in der x-y-Ebene der Stelle $(0,0)$ nähern.
   a. Wir nähern uns der Stelle $(0,0)$ auf der y-Achse, d.h. es ist $x = 0$.
   b. Wir nähern uns der Stelle $(0,0)$ auf Geraden der Gleichung $y = m \cdot x$ für beliebige Steigungen $m \in \mathbb{R}$.
   c. Wir nähern uns der Stelle $(0,0)$ auf Parabeln der Gleichung $y = a \cdot x^2$ mit $a \neq 0$.

3. Es sei $f(x,y) = \ln(x \cdot e^y - y \cdot e^x)$, $g(x,y) = \dfrac{x \cdot y}{x^2 - y^2}$, $h(x,y,z) = (x \cdot y + z)^{y \cdot z}$.

   Bestimmen Sie die ersten partiellen Ableitungen $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}$, $g_x = \dfrac{\partial g}{\partial x}$, $g_y = \dfrac{\partial g}{\partial y}$, $h_x = \dfrac{\partial h}{\partial x}$, $h_y = \dfrac{\partial h}{\partial y}$, $h_z = \dfrac{\partial h}{\partial z}$.

4. a. Es sei $f(x,y) = x + x \cdot e^y$. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene T im Kurvenpunkt $P(1/0/2)$. Nennen Sie einen Normalenvektor $\vec{n}$ von T.

   b. Es sei $f(x,y) = \dfrac{xy}{1-y}$. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene T im Kurvenpunkt $P(1/2/-2)$. Nennen Sie einen Normalenvektor $\vec{n}$ von T.

5. a. Es sei $f(x,y) = x^2 \cdot y$ und $P(2/1/4)$ ein Punkt des Schaubilds.
   Bestimmen Sie in P die beiden partiellen Ableitungen, die Gleichung der Tangentialebene T und einen ihrer Normalenvektoren $\vec{n}$.
   Bestimmen Sie in P für die Richtung $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ die Gleichung der Tangente t, die Richtungsableitung und den Steigungswinkel α.
   Es geht nun um den größten Anstieg im Punkt P. Bestimmen Sie den zwei- und den dreidimensionalen Richtungsvektor und den maximalen Steigungswinkel α_{max}.
   Bestimmen Sie jeweils für allgemeines x, y mit Hilfe von $\lim\limits_{h \to 0}$ die ersten Ableitungen in den drei Richtungen $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

   b. Es sei $f(x,y) = x \cdot \sqrt{y}$ und $P(1/2/\sqrt{2})$ ein Punkt des Schaubilds.
   Bestimmen Sie in P die beiden partiellen Ableitungen, die Gleichung der Tangentialebene T, einen ihrer Normalenvektoren $\vec{n}$, die Gleichung der Tangente t und die Ableitung in Richtung $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ samt Steigungswinkel α.

Bestimmen Sie für den größten Anstieg in P den zwei- und den dreidimensionalen Richtungsvektor und den maximalen Steigungswinkel α_{max}.

Bestimmen Sie für allgemeines x, y mit Hilfe von $\lim\limits_{h\to 0}$ die erste Ableitung in Richtung $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

c. Es sei $f(x,y) = x \cdot \ln(x \cdot y^2)$ und $P(1/-1/0)$ ein Punkt des Schaubilds.
Bestimmen Sie in P die beiden partiellen Ableitungen, die Gleichung der Tangentialebene T, einen ihrer Normalenvektoren $\vec{n}$, die Gleichung der Tangente t und die Ableitung in Richtung $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ samt Steigungswinkel α.
Bestimmen Sie für den größten Anstieg in P den zwei- und den dreidimensionalen Richtungsvektor und den maximalen Steigungswinkel α_{max}.

d. Es sei $f(x,y,z) = 2x^2yz + 3xyz^3$ und $P(-1/2/1/-2)$ ein Punkt des Schaubilds. Bestimmen Sie in P die partiellen Ableitungen und die Ableitung in Richtung $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

6. Es sei x die nachgefragte Menge eines Gutes, das zum Preis p angeboten wird. $x = x(p)$ ist eine Funktion von p. $\varepsilon_{x,p}(p) = x'(p) \cdot \dfrac{p}{x(p)}$ gibt näherungsweise an, um wieviel % sich die nachgefragte Menge x ändert, wenn der Preis p um 1% steigt. $\varepsilon_{x,p}(p)$ heißt **Preiselastizität der Nachfrage**.

Gegeben ist die Funktion $p(x) = \dfrac{400}{x+5} - 8$.

a, Bestimmen Sie die Funktion $x = x(p)$ und die Preiselastizität $\varepsilon_{x,p}(p)$ der Nachfrage.

b. Es sei $x_1 = 5$ und $x_2 = 35$. Bestimmen Sie jeweils $\varepsilon_{x,p}(p)$.

c. Für welchen Preis p und welche Menge x gilt $\varepsilon_{x,p}(p) = -1$?

7. Es sei x die nachgefragte Menge eines Gutes, das zum Preis p angeboten wird. $x = x(p)$ ist eine Funktion von p. Es gelte $p(x) = 24 - 2x$. Die Kostenfunktion für die Gesamtmenge x sei $K(x) = 0{,}2x^2 + 2x + 5$.

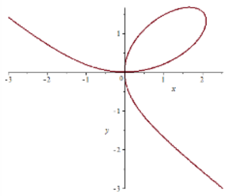
a. Bestimmen Sie x so, dass der Gewinn G maximal wird.

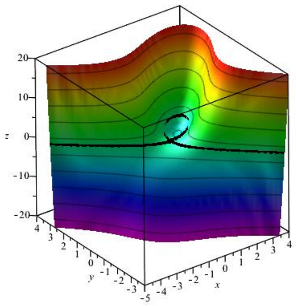
b. Wie groß ist die Preiselastizität $\varepsilon_{x,p}(p)$ im Gewinnmaximum?

8. a. Es sei $f(x,y) = 2x \cdot y^2$.
Bestimmen Sie allgemein das totale Differenzial $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy$ und die relative Änderung $\dfrac{df}{f}$.
Es gilt $f(3|2) = 24$. Bestimmen Sie df, $\dfrac{df}{f}$ und $\Delta f = f(x_{neu}|y_{neu}) - f(x_{alt}|y_{alt})$, wenn x um 1% vergrößert und zugleich y um 2% verkleinert wird.
Bestimmen Sie die partiellen Elastizitäten $\varepsilon_{f,x}(x,y) = f_x(x,y) \cdot \dfrac{x}{f(x,y)}$ und $\varepsilon_{f,y}(x,y) = f_y(x,y) \cdot \dfrac{y}{f(x,y)}$ an der Stelle (3/2).

b. Es sei $f(x,y) = 2x^2 + y^3$.
Bestimmen Sie allgemein das totale Differenzial $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy$ und die relative Änderung $\dfrac{df}{f}$.
Es gilt $f(1|2) = 10$. Bestimmen Sie df und Δf, wenn x um 2% und zugleich y um 1% vergrößert wird.
Bestimmen Sie die partiellen Elastizitäten $\varepsilon_{f,x}(x,y) = f_x(x,y) \cdot \dfrac{x}{f(x,y)}$ und $\varepsilon_{f,y}(x,y) = f_y(x,y) \cdot \dfrac{y}{f(x,y)}$ an der Stelle $(1|2)$.

9. Es sei $f(x,y) = x^3 + 2y^3 - 5xy$.
$f(x,y) = 0$ kann als implizit gegebene Kurve interpretiert werden; siehe linkes Schaubild.
Andererseits kann $f(x,y) = 0$ als Höhenlinie $z = 0$ von $z = f(x,y)$ interpretiert werden; siehe rechtes Schaubild.
Der Punkt $P(2|1|0)$ liegt auf dieser Höhenlinie.





Bestimmen Sie die Ableitung y' der Kurve $f(x,y) = 0$ im Punkt $(2|1)$ durch implizite Differenziation.
Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t im Punkt $(2|1)$.
Bestimmen Sie den Gradienten von $z = f(x,y)$ im Punkt P.
Zeigen Sie, dass der Gradient senkrecht auf der Tangente t steht.
Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene T an das Schaubild im Punkt P.

10. Gegeben ist die Produktionsfunktion $f(x,y)$. Untersuchen Sie auf Homogenität und bestimmen Sie gegebenenfalls den Homogenitätsgrad.

a. $f(x,y) = \left(a \cdot x^{\alpha} + b \cdot y^{\alpha}\right)^{1/\alpha}$ für $x > 0$, $a, b > 0$ und $\alpha \neq 0$.

b. $f(x,y) = 2x^2 \cdot y^3 + 3x^3 \cdot y$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

c. $f(x,y) = x \cdot y \cdot \ln\left(\dfrac{x^2 + 2x \cdot y + 3y^2}{5x \cdot y}\right)$ für $x, y > 0$.

d. $f(x,y) = \dfrac{y}{x}$ für $x, y \in \mathbb{R}$ und $x \neq 0$.

11. Es sei f eine homogene Funktion vom Grad λ. Zeigen Sie allgemein, dass die beiden partiellen Ableitungen $f_x(x,y)$ und $f_y(x,y)$ homogen vom Grad $\lambda - 1$ sind.

Prüfen Sie dies für die Funktion $f(x,y) = \left(a \cdot x^{\alpha} + b \cdot y^{\alpha}\right)^{1/\alpha}$ für $x, y > 0$, $a, b > 0$ und $\alpha \neq 0$ von Aufgabe 8a. und für $g(x,y) = 2x^2 \cdot y^3 + 3x^4 \cdot y$, $x, y \in \mathbb{R}$.

12. Bestimmen Sie jeweils allgemein $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}$, $f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $f_{yy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $f_{yx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

a. $f(x,y) = \sqrt{2x^2 - xy^2}$

b. $f(x,y) = \ln(1 + x^2 y)$

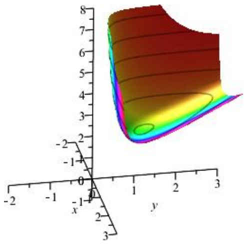
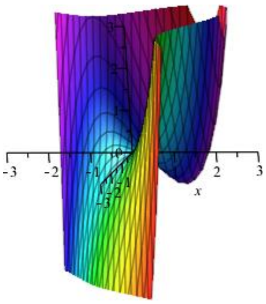
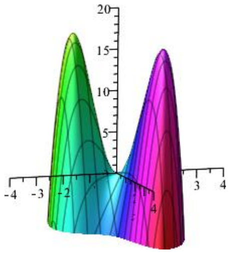
13. Es sei $f(x,y) = \begin{cases} x \cdot y \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Zeigen Sie, dass $f(x,y)$ in ganz $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

14. Untersuchen Sie jeweils auf relative Extremwerte. Untersuchen Sie dabei die Definitheit der Hesse-Matrix H einmal über die Determinanten der Hauptuntermatrizen und einmal mit Hilfe der Eigenwerte von H.

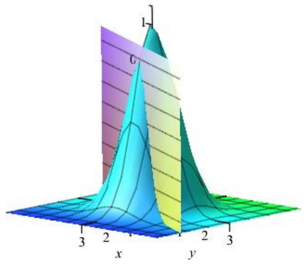
a. $f(x,y) = x + y + \dfrac{1}{x \cdot y}$

b. $f(x,y) = x^3 - 3x \cdot y + y^3$

c. $f(x,y) = 16xy - \left(\dfrac{1}{2}x + y\right)^4$

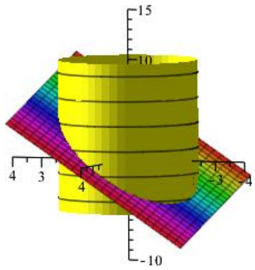




15. a. Es sei $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$. Untersuchen Sie das Schaubild von f auf Extrempunkte unter der Bedingung $2x - y - 1 = 0$.

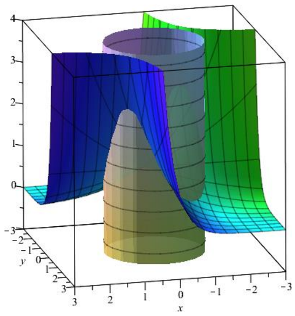


α. Lösen Sie die Bedingung nach y auf und setzen Sie das Ergebnis in $f(x,y)$ ein, so dass f nur noch eine Variable enthält.

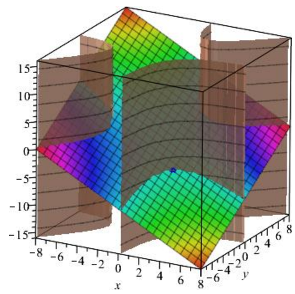
β. Verwenden Sie die Lagrangesche Multiplikatorregel.



b. Es sei $f(x,y) = 2x - y + 1$. Untersuchen Sie das Schaubild von f auf Extrempunkte unter der Bedingung $x^2 + y^2 = 5$ mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatorregel.

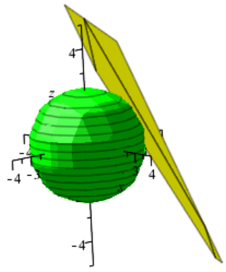


c. Es sei $f(x,y) = e^{x \cdot y}$. Untersuchen Sie das Schaubild von f auf Extrempunkte unter der Bedingung $x^2 + y^2 = 2$ mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatorregel.



d. Es sei $f(x,y) = y - x$. Untersuchen Sie das Schaubild von f auf Extrempunkte unter der Bedingung $x^2 \cdot y - x \cdot y^2 + 16 = 0$ mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatorregel.

e. Es sei $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$. Untersuchen Sie das Schaubild von f auf Extrempunkte unter der Bedingung $x+2y+z=6$ mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatorregel. Anschaulich bedeutet die Nebenbedingung gerade die Tangentialebene an die Kugel f.



f. Es sei $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2+1$. Untersuchen Sie das Schaubild von f auf Extrempunkte unter der Bedingung $x+2y+z=4$ mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatorregel.

g. Für die Fertigung eines Produktes X (Menge x) werden zwei Produktionsfaktoren A (Menge a) und B (Menge b) eingesetzt. Die zugehörige Produktionsfunktion ist $x=f(a,b)=10-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$. Der Gewinn des Unternehmens ergibt sich aus der Funktion $G(x,a,b)=9x-a-4b$. Bestimmen Sie a und b so, dass der Gewinn am größten wird. Verwenden Sie die Lagrangesche Multiplikatorregel.

16. Bestimmen Sie das Minimum von $u=f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ unter den beiden Bedingungen $\varphi_1(x,y,z)=x+y-1=0$ und $\varphi_2(x,y,z)=y+z-2=0$ einmal nach Lagrange und einmal mit der Substitution $x=1-y$ und $z=2-y$.

17. Die Taylorreihe für eine Funktion $f(x,y)$ mit zwei Variablen um die Stelle (a/b) lautet

$$f(x,y)=f(a,b)+$$
$$+f_x(a,b)\cdot(x-a)+f_y(a,b)\cdot(y-b)+$$
$$+\frac{1}{2!}f_{xx}(a,b)\cdot(x-a)^2+f_{xy}(a,b)\cdot(x-a)\cdot(y-b)+\frac{1}{2!}f_{yy}(a,b)\cdot(y-b)^2+$$
$$+\frac{1}{3!\cdot 0!}f_{xxx}(a,b)\cdot(x-a)^3+\frac{1}{2!\cdot 1!}f_{xxy}(a,b)\cdot(x-a)^2\cdot(y-b)+\frac{1}{1!\cdot 2!}f_{xyy}(a,b)\cdot(x-a)\cdot(y-b)^2+\frac{1}{0!\cdot 3!}f_{yyy}(a,b)\cdot(y-b)^3+$$
$$+\ldots$$

Entwickeln Sie $f(x,y)=\sqrt{2x+y}$ um den Punkt $(1/2)$ bis zur 3. Ordnung.

18. Wie lautet die Taylorreihe für eine Funktion $f(x,y,z)$ mit drei Variablen um die Stelle $(a/b/c)$?