4 Lineare Abbildungen

4.1 Vorbemerkung.

Wir folgen nun einer Strategie, die immer wieder und in den unterschiedlichsten Teilgebieten der Mathematik zur Anwendung kommt: nachdem wir Mengen mit einer gewissen *Struktur* ausgestattet haben – in unserem Fall Gruppenverknüpfung und skalare Multiplikation, so dass die betrachteten Mengen zu *Vektorräumen* werden –, untersuchen wir jetzt Abbildungen *zwischen* den so strukturierten Mengen. Und zwar nicht irgendwelche Abbildungen, sondern solche, die die auf den beiden jeweils beteiligten Mengen eingeführten Strukturen sozusagen "*respektieren*". Was soll das heißen in unserem Fall? Nun, wir nehmen uns zwei Vektorräume V und W vor und eine Abbildung $L : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ zwischen ihnen. Dieses L soll Rücksicht nehmen zum einen auf die *Gruppenstrukturen*, die in V und in W erklärt sind, und das soll erstens bedeuten, dass Summen von Vektoren aus V in die entsprechenden Summen von Vektoren in W überführt werden, wenn wir L anwenden: $L(\mathbf{u} +_{\mathrm{V}} \mathbf{v}) = L(\mathbf{u}) +_{\mathrm{W}} L(\mathbf{v})$ für alle Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{V}$. Die kleinen Subskripte "V" und "W" an den Verknüpfungszeichen "+" der beiden Gruppenstrukturen deuten dabei an, dass es sich im Prinzip um zwei verschiedene Verknüpfungen handelt, die eine in V erklärt, die andere in W. Wir werden diese Subskripte nicht generell mitschleppen, an dieser Stelle hier aber sind sie zur Verdeutlichung der Verhältnisse sinnvoll.– Zweitens soll eine Lineare Abbildung auch die Multiplikation mit den Elementen des zu Grunde liegenden Körpers respektieren, also $L(\lambda \cdot_{\mathrm{V}} \mathbf{v}) = \lambda \cdot_{\mathrm{W}} L(\mathbf{v})$ erfüllen für alle beteiligten Skalare und Vektoren. Man sieht anschaulich, was mit "Respektieren der linearen Struktur" gemeint ist: Addieren von Vektoren und Multiplizieren mit einem Skalar ist ja vorderhand alles, was man in einem Vektorraum machen kann (sofern man nicht zusätzliche Strukturen dazubaut, wie etwa ein Inneres Produkt oder eine Norm)

4.2 Lineare Abbildungen.

Die Elemente der Vorbemerkung fassen wir zur folgenden **Definition** zusammen: seien $(\mathrm{V}, \mathbb{K})$ und $(\mathrm{W}, \mathbb{K})$ zwei Vektorräume über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Eine Abbildung $L : \mathrm{V} \to \mathrm{W}; \mathbf{v} \mapsto L\mathbf{v}$ heißt **linear**, sofern sie für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{V}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:

$L(\mathbf{u} +_{\mathrm{V}} \mathbf{v}) = L(\mathbf{u}) +_{\mathrm{W}} L(\mathbf{v})$ für alle Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{V}$, wobei $+_{\mathrm{V}}$ und $+_{\mathrm{W}}$ die beiden

Gruppenverknüpfungen aus V beziehungsweise W sind;

$L(\lambda \cdot_{\mathrm{V}} \mathbf{v}) = \lambda \cdot_{\mathrm{W}} L(\mathbf{v})$ für jedes $\mathbf{v} \in \mathrm{V}$ und jedes $\lambda \in \mathbb{K}$, wobei $\cdot_{\mathrm{V}}$ und $\cdot_{\mathrm{W}}$ die äußere (skalare) Multiplikation auf V beziehungsweise W bezeichnen.

Es sei bemerkt, dass es bei Linearen Abbildungen durchaus üblich ist, das Argument $\mathbf{v}$ der Linearen Abbildung L ohne Beklammerung hinter das L zu schreiben, also $L\mathbf{v}$ statt des uns vertrauten $L(\mathbf{v})$. Allerdings nur, wenn keine Missverständnisse drohen. So haben wir oben $L(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ mit Klammern geschrieben, um keine Zweifel daran aufkommen zu lassen, dass L auf die ganze Summe $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ anzuwenden ist (auch wenn man in diesem Fall natürlich fragen könnte: "auf was denn sonst?"). Man lasse sich bei allem Folgenden nicht dadurch verwirren, dass wir mal Klammern benutzen und mal nicht...

Die beiden beteiligten Vektorräume brauchen dabei durchaus nicht die selbe Dimension zu haben. Wir nehmen im Folgenden aber meistens an, dass sie endlichdimensional sind. Die in unseren Betrachtungen wichtigsten **Beispiele** für Lineare Abbildungen sind dementsprechend die von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ für $n, m \in \mathbb{N}$ (oder auch die von $\mathbb{C}^n$ nach $\mathbb{C}^m$). Mit diesen werden wir uns näher befassen, weil sie uns zum Begriff der *Matrix* führen werden, der in der Linearen Algebra und ihren Anwendungen eine so zentrale Rolle spielt. Vorderhand bringen wir aber noch ein paar andere Beispiele für Lineare Abbildungen, die nicht auf endlichdimensionalen Vektorräumen definiert sind, um zu verdeutlichen, wie weit gespannt dieser Begriff ist.

Beispiel: Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $C^\infty(\mathbb{R})$ der beliebig oft differenzierbaren reellwertigen Funktionen. Die Gruppenverknüpfung dieses Vektorraums sei punktweise durch $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ erklärt für $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$ und beliebiges $x \in \mathbb{R}$ und die Multiplikation mit einem Skalar via $(\lambda \cdot f)(x) := \lambda f(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Das hatten wir schon im Kapitel "Lineare Räume". Nun nehmen wir eine Funktion $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ her, die lediglich stetig zu sein braucht, sowie ein kompaktes Intervall I und bilden mit ihrer Hilfe die Abbildung

$$\Omega : C^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}; f \mapsto \int_I f(x) \cdot \omega(x) \,\mathrm{d}x$$

Man mache sich klar, was diese Definition bedeutet! Jeder *Funktion* f als Element des Vektorraums $C^\infty(\mathbb{R})$ wird eine *Zahl* – nämlich das Integral ihres Produkts mit ω über ein festes Intervall I – als Element des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}$ zugeordnet. Diese Abbildung Ω ist also eine Abbildung, die auf einem Vektorraum operiert, der selbst Abbildungen enthält! In die Übungen verschieben wir den Nachweis, dass Ω tatsächlich *linear* ist; er ist mit elementaren Mitteln der Schulmathematik zu erbringen. Übrigens haben solche Abbildungen auf Funktionenräumen ihrer enormen praktischen Bedeutung wegen einen eigenen Namen (den man sich an dieser Stelle aber nicht unbedingt zu merken braucht): man nennt sie *Funktionale*. Die stetige Funktion ω, die unter dem Integral auftaucht, heißt *Integralkern* des Funktionals.

Das zweite **Beispiel** ist ebenfalls ein Funktional auf $C^\infty(\mathbb{R})$ und ist durch

$$\Delta_{x_0} : C^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}; f \mapsto \Delta_{x_0}(f) := f(x_0)$$

erklärt mit festem $x_0 \in \mathbb{R}$. Auch hier wird also einer *Funktion* f eine *Zahl* zugeordnet – einfach, indem die Funktion f, die im Argument der Abbildung Δ_{x_0} steht, an der Stelle x_0 ausgewertet wird. Auch dieses Δ_{x_0} ist eine Lineare Abbildung; siehe Übungen. Man kann sich übrigens fragen, ob Δ_{x_0} nicht auch "vom Typ" des Ω aus dem vorangehenden Beispiel ist, ob es also vielleicht einen Integralkern ω und ein kompaktes Intervall I gibt, so dass für jedes $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ gilt: $\Delta_{x_0} f = \int_I f(x) \cdot \omega(x)\,\mathrm{d}x$ gilt. Man wird sich jedoch anschaulich leicht verdeutlichen, dass dem nicht so ist. Ein solcher Integralkern, wenn es ihn gäbe, müsste widersprüchliche Eigenschaften haben: einerseits müsste er außerhalb des Punktes x_0 verschwinden. Andererseits müsste $\int_I \omega(x)\,\mathrm{d}x = 1$ sein. Dass es solch ein ω nicht gibt, hat die Physiker nicht daran gehindert, so zu tun, als gäbe es eines. Man nennt es "DIRACsche Delta-Funktion" und rechnet damit wie mit einem "normalen" Integralkern ω. Das geht so lange gut und ist ausnehmend praktisch, solange man nicht Rechenoperationen durchführt, die aus der eigentlichen Definition von Δ_{x_0} heraus unmöglich sind.

Auch im drittes **Beispiel** betrachten wir den Vektorraum $C^\infty(\mathbb{R})$, diesmal aber mit einer Linearen Abbildung D, die wiederum nach $C^\infty(\mathbb{R})$ abbildet. D nimmt also als Argument eine beliebig oft differenzierbare Funktion entgegen und macht daraus wieder eine solche, und zwar durch

$$D : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}); f \mapsto Df \text{ mit } (Df)(x) := \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) \; .$$

Die Abbildung D macht also nichts anderes, als einer Funktion f ihre Ableitung zuzuordnen. Abbildungen, die auf Funktionenräumen definiert sind und aus einer Funktion eine neue machen, heißen übrigens *Operatoren*. Es handelt sich hier demnach um den *Ableitungs-* oder *Differential-operator*.

Damit verlassen wir diese Art von Beispielen und wenden uns Linearen Abbildungen auf endlichdimensionalen Vektorräumen zu, im wesentlichen also $\mathbb{R}^n$ beziehungsweise $\mathbb{C}^n$. So werden wir zum Begriff der *Matrix* kommen, der uns dann für den Rest der Linearen Algebra beschäftigen wird. Das wir uns "im wesentlichen" auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ beschränken dürfen, lässt sich übrigens als Aussage ziemlich weitgehend konkretisieren. Davon handelt der nächste Abschnitt.

4.3 Isomorphismen.

Die folgende besondere Bezeichnung ist erwähnenswert, weil weitverbreitet: im Falle, dass die Lineare Abbildung L *bijektiv* ist, nennt man sie auch **Isomorphismus**. Die beiden Vektorräume, zwischen denen ein solcher Isomorphismus besteht, heißen dementsprechend **isomorph**. Es sind ja genau die Isomorphismen, die umkehrbar sind, so dass zwei isomorphe Vektorräume im wesentlichen – also was ihre Gruppenverknüpfungen und ihre skalare Multiplikation anbelangt – *strukturgleich* sind. Was in der Praxis bedeutet, dass sich alle Manöver, die wir in dem einen der beiden Räume durchführen, über den Isomorphismus eins zu eins in den anderen Raum übertragen lassen, und vice versa. Aus Sicht der linearen Strukturen dieser beiden Räume sind diese im Grunde gar nicht verschieden. Dies wollen wir etwas genauer beleuchten.

Dabei verwenden wir die folgende einfache Tatsachen für Lineare Abbildungen, die direkt aus der Linearität folgen: ist L *injektiv*, so bildet es definitionsgemäß zwei verschiedene Vektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ in zwei verschiedene Bilder $L\mathbf{v}_1$ und $L\mathbf{v}_2$ ab. Was umgekehrt bedeutet, dass bei injektivem L aus $L\mathbf{v} = \mathbf{0}$ stets $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ folgt. Es gilt nämlich die folgende Kette äquivalenter Aussagen: L ist injektiv $\Leftrightarrow$ $L\mathbf{v}_1 \neq L\mathbf{v}_2$ für alle $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2$ $\Leftrightarrow$ $L\mathbf{v}_1 - L\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$ für alle $\mathbf{v_1} - \mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$ $\Leftrightarrow$ $L(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \neq \mathbf{0}$ für alle $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v_2} \neq \mathbf{0}$ $\Leftrightarrow$ $L\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ für alle $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ $\Leftrightarrow$ aus $L\mathbf{v} = \mathbf{0}$ folgt $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

> **Bemerkung.** Die Lineare Abbildung L ist genau dann injektiv, wenn aus $L\mathbf{v} = \mathbf{0}$ stets folgt, dass $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ist.

Es seien nun $(\mathrm{V}, \mathbb{K})$ und $(\mathrm{W}, \mathbb{K})$ zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume ($\mathbb{K}$ wie immer $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) mit den Dimensionen $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}$. Für V sei $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ eine Basis. Wir betrachten eine Lineare Abbildung $L : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ und schauen uns an, was wir über das n-Tupel von Vektoren $(L\mathbf{v}_1, \ldots, L\mathbf{v}_n)$ sagen können. Dabei handelt es sich ja um n Vektoren im m-dimensionalen Vektorraum W. Wann sind sie dort linear unabhängig, wann nicht? Bilden sie gegebenenfalls ein Erzeugendensystem?

Setzen wir zunächst einmal voraus, L sei ein Isomorphismus – ein anderes Wort für "Bijektion" bei Linearen Abbildungen, wie wir gerade gelernt haben. Wir setzen aus $L\mathbf{v}_1, \ldots, L\mathbf{v}_n$ die Linearkombination $\lambda_1 \cdot L\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_n \cdot L\mathbf{v}_n$ mit irgendwelchen n Skalaren $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ zusammen. Die Bedingung $\lambda_1 \cdot L\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_n \cdot L\mathbf{v}_n = 0$ schreibt sich, weil ja L linear ist, als $L(\lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_n \cdot \mathbf{v}_n) = 0$. Nach Voraussetzung ist L bijektiv, insbesondere injektiv, also muss für das Argument von L gelten $\lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_n \cdot \mathbf{v}_n = 0$, wie wir in der obigen Bemerkung gerade gesehen haben. Weil nach Voraussetzung jedoch $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ eine Basis von V ist, diese Vektoren also linear unabhängig sind, muss $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ sein. Folglich sind die Vektoren $L\mathbf{v}_1, \ldots, L\mathbf{v}_n$ in W linear unabhängig.

Wir können aber noch mehr sagen. L ist zudem ja auch surjektiv. Zu jedem $\mathbf{w} \in$ W gibt es daher ein $\mathbf{v} \in$ V mit $L\mathbf{v} = \mathbf{w}$. Wir schreiben dieses $\mathbf{v}$ als Linearkombination aus den Basisvektoren $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ in der Form $\mathbf{v} = \lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_n \cdot \mathbf{v}_n$ und erkennen dann, dass $\mathbf{w} = L\mathbf{v} = L(\lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_n \cdot \mathbf{v}_n) = \lambda_1 \cdot L\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_n \cdot L\mathbf{v}_n$. Mit anderen Worten: *jedes* $\mathbf{w} \in$ W kann als Linearkombination der Vektoren $(L\mathbf{v}_1, \ldots, L\mathbf{v}_n)$ geschrieben werden – diese Vektoren bilden ein *Erzeugendensystem*. Insgesamt haben wir es mit einem Erzeugendensystem linear unabhängiger Vektoren in W zu tun: $(L\mathbf{v}_1, \ldots L\mathbf{v}_n)$ ist eine *Basis* von W.

Umgekehrt wollen wir nun voraussetzen, dass $(L\mathbf{v}_1, \ldots, L\mathbf{v}_n)$ eine Basis von W ist. Sei zunächst $L\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Wir setzen $\mathbf{v}$ aus der Basis $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ zusammen: $\mathbf{v} = \lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_n \cdot \mathbf{v}_n$. Die Linearität von L ausnutzend, erhalten wir damit $\mathbf{0} = L\mathbf{v} = \lambda_1 \cdot L\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_n \cdot L\mathbf{v}_n$. Wegen der Basiseigenschaft der $\{L\mathbf{v}_i\}$, genauer gesagt ihrer linearen Unabhängigkeit, schließen wir daraus $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$, ergo $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Die Implikation $L\mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$ bedeutet gemäß der obigen Bemerkung aber nichts anderes als die Injektivität von L.

Jedes $\mathbf{w} \in$ W können wir aus $(L\mathbf{v}_1, \ldots, L\mathbf{v}_n)$ linearkombinieren als $\mathbf{w} = \lambda_1 \cdot L\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_n \cdot L\mathbf{v}_n$, wenn dies eine Basis ist. Jedes solche $\mathbf{w}$ ist damit aber auch ein Bild von irgendeinem $\mathbf{v} \in$ V – nämlich gerade von $\mathbf{v} = \lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_n \cdot \mathbf{v}_n$, wie man durch Anwenden von L und Ausnutzen seiner Linearität sofort sieht. L ist damit als *surjektiv* erkannt, und zusammen mit der im vorangehenden Schritt erwiesenen Injektivität von L gibt es sich als *Isomorphismus* zu erkennen. Alles das zusammenfassend haben wir die Richtigkeit der folgenden Bemerkung nachgewiesen:

Bemerkung. Sei $L : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ eine Lineare Abbildung zwischen den Vektorräumen V und W und $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ eine Basis von V. Genau dann, wenn $(L\mathbf{v}_1, \ldots, L\mathbf{v}_n)$ eine Basis von W ist, ist L ein Isomorphismus.

Sind uns nun zwei Vektorräume V und W von *gleicher Dimension n* vorgelegt und wählen wir in ihnen Basen $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ sowie $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n)$, dann können wir, diese Basen nutzend, eine Lineare Abbildung $L : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ definieren, indem wir für jedes $\mathbf{v} \in \mathrm{V}$ seine eindeutige Zerlegung $\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_n\mathbf{v}_n$ in Basisvektoren hernehmen, die eindeutigen Vorfaktoren $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ herauslesen und mit ihnen $L\mathbf{v} := \lambda_1\mathbf{w}_1 + \cdots + \lambda_n\mathbf{w}_n$ definieren. Mit anderen Worten: L ist bereits dadurch definiert, dass wir erklären, wie es auf die Basisvektoren von V wirkt – und zwar so: $L\mathbf{v}_1 := \mathbf{w}_1$, ..., $L\mathbf{v}_n := \mathbf{w}_n$. Das so festgelegte L ist wohldefiniert, ganz offensichtlich linear, und es ist eindeutig (der Eindeutigkeit von Basiszerlegungen wegen). Konstruktionsgemäß ist die Bedingung aus der vorangegangenen Bemerkung erfüllt, dass nämlich $(L\mathbf{v}_1, \ldots, L\mathbf{v}_n)$ (identisch mit $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n)$) eine Basis ist von W. So können wir die hervorhebenswerte Schlussfolgerung ziehen, dass *zwei endlichdimensionale Vektorräume gleicher Dimension stets isomorph* sind. Pointiert ausgedrückt: bis auf Isomorphie ist jeder n-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorraum gleich $\mathbb{K}^n$.

Dem einen oder anderen mag sich da die Frage aufdrängen, warum man dann nicht gleich immer die Vektorräume der $\mathbb{K}$-Tupel $\mathbb{K}^n$ untersucht, statt im Abstrakten zu bleiben. Mit Zahlentupeln lässt es sich doch bequemer rechnen als mit abstrakten Vektorraum-Elementen, oder nicht? Naja – einerseits tut man das in der Tat auch, wenn man Matrizenrechnung treibt, so wie wir im nächsten Kapitel. Andererseits vermeidet man aber die Konkretheit von $\mathbb{K}^n$ zuweilen ganz bewusst, nämlich dann, wenn man an allgemeinen Eigenschaften und Strukturen interessiert ist. In diesen Zusammenhängen ist Konkretheit tatsächlich eher hinderlich, weil man ja gar nicht "konkret rechnen" will. Der nächste und abschließende Abschnitt dieses Kapitels ist ein Beispiel dafür.

4.4 Die Dimensionsformel.

Die sogenannte Dimensionsformel ist im Grunde sehr anschaulich. Locker formuliert besagt sie folgendes: wenn eine Lineare Abbildung L vom n-dimensionalen Vektorraum V in den Vektorraum W abbildet, dann liegen die Bildpunkte $L(\mathrm{V}) \subset \mathrm{W}$ – also alle Vektoren in W, die wir erhalten, wenn wir nacheinander alle Vektoren aus V in L einsetzen – nicht einfach so in W herum. Schließlich tragen V und W lineare Strukturen, und L respektiert diese. Tatsächlich stellen, wie wir in den Übungen sehen wollen, die Bildpunkte einen *Untervektorraum* von W dar. Dieser kann dimensionsmäßig natürlich durchaus kleiner sein als W, selbst wenn W eine Dimension kleiner oder gleich n hat. Es ist nämlich durchaus möglich, dass etliche Vektoren aus V von L in den *Nullvektor* $\mathbf{0}$ von W geworfen werden. Diese "Richtungen" innerhalb von V "fehlen" dann beim Aufbau des Unterraums $L(\mathrm{V}) \subset \mathrm{W}$, so dass dessen Dimension um die Anzahl linear unabhängiger Richtungen dieser Art kleiner wird als das maximal mögliche n. Die Dimensionsformel besagt nun einfach, dass die Anzahl der linear unabhängigen "Nullrichtungen" plus die verbleibende Dimension des Bildes von L immer gerade n ist. Wir wollen das noch etwas genauer formulieren. Die Bedeutung der Dimensionsformel liegt unter anderem in der Rolle, die sie bei der Analyse der *Bijektivität*, also der Invertierbarkeit einer Linearen Abbildung spielt. Das ist ein zentrales Themenfeld der Linearen Algebra: die Zusammenhänge zwischen der Invertierbarkeit von Linearen Abbildungen respektive von deren Matrizen, der Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme und der Determinante.

Den Begriff des Bildes von L, den wir nun brauchen, kennen wir schon, er ist für Lineare Abbildungen genau so definiert wie bei Abbildungen allgemeiner Art. Die "Nullrichtungen" beschreiben wir, indem wir diejenigen Vektoren, die unter L in den Nullvektor $\mathbf{0}$ von W abgebildet werden, zu einer "Kern von L" genannten Menge zusammenfassen[1]. Auch diese Menge wird sich, wie zuvor das Bild von L, als Untervektorraum erweisen (allerdings natürlich von V, nicht von W). Wir setzen also die

> **Definition.** Seien V und W zwei Vektorräume mit den beziehentlichen Dimensionen n und m sowie $L : \mathrm{V} \to \mathrm{W}; \mathbf{v} \mapsto L\mathbf{v}$ eine lineare Abbildung. Dann heißen
>
> $\mathrm{Bild}(L) := L(\mathrm{V}) = \{\mathbf{w} \in \mathrm{W} : \text{ es gibt ein } \mathbf{v} \in \mathrm{V} \text{ mit } L\mathbf{v} = \mathbf{w}\}$ das **Bild** von L [2] und
>
> $\mathrm{Kern}(L) := \{\mathbf{v} \in \mathrm{V} : L\mathbf{v} = \mathbf{0}\}$ der **Kern** von L.
>
> $\mathrm{Bild}(L)$ ist ein Untervektorraum von W, während $\mathrm{Kern}(L)$ ein Untervektorraum von V ist.

Statt der Schreibweise $\mathrm{Bild}(L)$ findet man in der fremdsprachlichen Literatur oft $\mathrm{Im}(L)$ (letztere Abkürzung aus dem lateinischen "*imago*", Bild, oder auch dem französischen beziehungsweise englischen "image").

[1] Im Gegensatz zum Begriff des Bildes lässt sich der des Kerns nicht schon für allgemeine Abbildungen zwischen allgemeinen Mengen erklären – denn seine Definition hebt auf den Nullvektor der Zielmenge ab, den es ja in irgendeiner allgemeinen Menge zunächst einmal gar nicht gibt.

[2] müsste aber eigentlich genauer "Bild von V unter L" heißen.

Mit $L : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ kommen also automatisch zwei Unterräume der beiden beteiligten Vektorräume V und W, nämlich $\mathrm{Kern} L \subseteq \mathrm{V}$ und $\mathrm{Bild} L \subseteq \mathrm{W}$. Warum spielen diese eine Rolle bei der Invertierbarkeit von linearen Abbildungen (will sagen Matrizen)? Eine erste Idee davon, dass es einen Zusammenhang geben muss, bekommt man, wenn man sich vor Augen hält, was $\mathrm{Bild}\, L = \mathrm{W}$ bedeutet: das ist offenbar gleichbedeutend mit Surjektivität. Und andererseits ist klar, dass L nicht injektiv sein *kann*, wenn $\mathrm{Kern}\, L$ tatsächlich größer ist als $\mathbf{0}_\mathrm{V}$, denn dann gäbe es ja mehrere Vektoren in V, die auf dasselbe Bild, nämlich $\mathbf{0}_\mathrm{V}$, abgebildet werden. Wie sieht das alles aber genau aus?

Wir brauchen, um das zu verstehen, eine konkrete Beziehung zwischen $\mathrm{Kern}\, L$ und $\mathrm{Bild}\, L$. Weil es sich bei V und W um *lineare* Räume handelt und bei L um eine *lineare* Abbildung zwischen ihnen, ist nachvollziehbar, dass wir auf eine Aussage zu Unterräumen und ihren Dimensionen zusteuern und es nicht einfach mit strukturlosen Punktmengen zu tun haben. Es gilt in der Tat:

Bemerkung. Sei $L : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ eine Lineare Abbildung zwischen den endlichdimensionalen Vektorräumen[3] V und W. Dann gilt für L die folgende **Dimensionsformel**:

$$\dim(\mathrm{Kern}\, L) + \dim(\mathrm{Bild}\, L) = \dim(\mathrm{V}) \ .$$

Der Beweis dieser sogenannten *Dimensionsformel für lineare Abbildungen* ist nicht wirklich schwierig. Trotzdem verzichten wir hier darauf und bemühen uns lieber, ein intuitives und anschauliches Verständnis für diesen Zusammenhang zu gewinnen.

Betrachten wir zunächst die Extremfälle: wenn L ganz einfach *alle* Vektoren aus V in die $\mathbf{0}_\mathrm{W}$ wirft, ist offenbar $\dim \mathrm{Kern}\, L = \dim(\mathrm{V})$. Die Dimensionsformel behauptet dann $\dim(\mathrm{Bild}\, L) = 0$ – das ist aber klar in diesem Fall, denn das Bild von L besteht dann ja nur aus dem Nullvektor, und ein Unterraum, der nur aus dem Nullvektor besteht, ist trivial und hat die Dimension 0.

Im anderen Extremfall bildet L lediglich $\mathbf{0}_\mathrm{V}$ nach $\mathbf{0}_\mathrm{W}$ ab und sonst keinen einzigen anderen Vektor. Der Kern von L ist dann der triviale Unterraum von V, der nur $\mathbf{0}_\mathrm{V}$ enthält und also die Dimension 0 hat. Wenn $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ eine Basis des n-dimensionalen Vektorraums V ist, dann sind in diesem Fall $\{L\mathbf{v}_1, \ldots, L\mathbf{v}_n\}$ linear unabhängig in W. Warum? Nun, gäbe es Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ mit $\lambda_1 \cdot L\mathbf{v}_1 + \cdots \lambda_n \cdot L\mathbf{v}_n = 0$, die nicht alle 0 sind, dann wäre wegen der Linearität von L ja auch $L(\lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots \lambda_n \cdot \mathbf{v}_n) = 0$. Aber das würde unter der Voraussetzung dieses Extremfalls heißen, dass

[3] Genaugenommen ist die Bedingung, dass W ebenfalls endliche Dimension hat, verzichtbar. Für unsere Zwecke ist das aber nicht von Interesse.

$\lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots \lambda_n \cdot \mathbf{v}_n = 0$ ist, *ohne dass* alle $\lambda_i = 0$ sind, im Widerspruch zur Voraussetzung der linearen Unabhängigkeit der $\{\mathbf{v}_i\}$. Mit anderen Worten: die aus der Basis der $\{\mathbf{v}_i\}$ gewonnenen Bildvektoren $\{L\mathbf{v}_i\}$ *erzeugen* Bild L. Damit ist Bild L n-dimensional, und die Dimensionsformel ist auch in diesem Fall zutreffend.

Der Beweis der Dimensionsformel im Allgemeinen besteht jetzt lediglich noch in der Ausarbeitung der Fälle zwischen diesen beiden Extremzuständen. Wenn L zum Beispiel nicht nur $\mathbf{0}_\mathrm{V}$ nach $\mathbf{0}_\mathrm{W}$ abbildet, sondern noch einen einzelnen weiteren Vektor, dann natürlich auch alle Vielfache von diesem. Der Kern von L wird damit eindimensional, und zum Erzeugen des Bildes von L als Unterraum von W "fehlt" diese eine Dimension. dim(Bild L) hat entsprechend die Dimension $n-1$. Diese Betrachtung nutzt eine Überlegung aus, die wir im Kapitel "Basen und Dimensionen" für allgemeine Unterräume angestellt haben: dort hatten wir gesehen, dass $\dim(\mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_2) + \dim(\mathrm{U}_1 + \mathrm{U}_2) = \dim \mathrm{U}_1 + \dim \mathrm{U}_2$ ist für zwei Unterräume U_1 und U_2 eines Vektorraums. Im vorliegenden speziellen Fall wählen wir U_2 als Kern L und U_1 als $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r)$, wobei die Vektoren $\mathbf{v}_i$ festgelegt sind durch $L\mathbf{v}_i := \mathbf{w}_i$, wenn die $\mathbf{w}_i$ eine Basis sind von Bild L. Jeder Vektor aus V ist zerlegbar in einen Teil im Kern von L (also in U_2) und in einen Teil in $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r)$ (also in U_1), der durch L in einen nichttrivialen Vektor des Bilds transportiert wird – wir haben demnach $\mathrm{U}_2 + \mathrm{U}_1 = \mathrm{V}$. Außerdem ist aber $\mathrm{U}_2 \cap \mathrm{U}_1 = \{\mathbf{0}_\mathrm{V}\}$, und jetzt brauchen wir nur noch die Dimensionsformel für Unterräume anzuwenden.

Im nächsten Kapitel "Matrizen" werden Kern, Bild und die Dimensionsformel gemeinsam zur Anwendung kommen.