Übungsblatt zu "Lineare Gleichungssysteme"

Sommersemester 2022

Übung 1 (Zeilenrang und Spaltenrang)
Sei $K \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine Matrix mit vollem Spaltenrang. Argumentieren Sie (etwa mit Hilfe der Dimensionsformel), dass dann die Inverse K^{-1} existiert und ebenfalls vollen Spaltenrang hat. *Hinweis*: überlegen Sie, wie Definitions- und Zielmenge einer bijektiven Abbildung für die Umkehrabbildung ihre Rollen vertauschen.

Zeigen Sie somit, dass auch K^{-1} invertierbar ist und $(K^{-1})^{-1} = K$ gilt. *Hinweis*: definitionsgemäß gilt für zwei quadratische Matrizen A und B: A ist zu B invers, falls $A \cdot B = B \cdot A = E$.

Übung 2 (Zeilenrang und Spaltenrang)
Bestimmen Sie mit Hilfe des Gaussschen Eliminationsverfahrens jeweils den Rang der folgenden Matrizen: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 \\ 3 & -5 & 1 & -7 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ (*Lösungen*: $\operatorname{rg} A = 2$, $\operatorname{rg} B = 3$, $\operatorname{rg} C = 2$.

Übung 3 (Lineare Gleichungssysteme)
Gegeben seien die folgende Matrix $M \in \mathbb{R}^{4\times4}$: $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ sowie der Spaltenvektor $\mathbf{y} = (2, 0, 2, -2)^\mathsf{T}$.
a) Bestimmen Sie die Vektorräume $\operatorname{Kern} M$ und $\operatorname{Bild} M$. Ziehen Sie Schlussfolgerungen daraus für die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems $(M, \mathbf{y})$
b) Bestimmen Sie die Menge $\operatorname{lös}(M, \mathbf{y})$.

Übung 4 (Lineare Gleichungssysteme)
Gegeben seien die folgende Matrix $N \in \mathbb{R}^{4\times4}$: $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ sowie der Spaltenvektor $\mathbf{y} = (2, 0, 2, -2)^\mathsf{T}$. *Die Matrix N sieht so ähnlich aus wie M aus der Aufgabe davor, ist aber nicht gleich, wie man bei genauem Hingucken sieht. Schauen Sie sich zum Beispiel einmal die beiden ersten Spalten von N an ...*

a) Bestimmen Sie den Vektorraum Kern N. *Anleitung*: Dieser Vektorraum besteht, wie wir wissen, aus allen Vektoren $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_4)^\mathsf{T}$ mit $N\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$. Schreiben Sie sich also einen Gaussschen Algorithmus auf mit N links des senkrechten Strichs und $\mathbf{0}$ rechts davon; obwohl, wenn man drüber nachdenkt: egal, welche EZU man ausführt, rechts vom Strich steht dann ja *immer* $\mathbf{0}$ – dann kann man's auch weglassen. Führen Sie nun die Schritte des Algorithmus durch. Am Schluss landen Sie bei $\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$ oder etwas Äquivalentem. Die letzte Zeile zeigt, dass Sie das Auflösen damit beginnen können, einen der Parameter $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$ frei zu wählen, zum Beispiel λ_4. Dann zwingt Sie die zweite wie auch die dritte Zeile dazu, $\lambda_3 = \frac{1}{2}\lambda_4$ zu wählen und so weiter. Zum Schluss schreiben Sie das Ergebnis auf, indem Sie eine *Basis* des Raums Kern N angeben. Verifizieren Sie ihr Ergebnis, indem Sie N auf die Basisvektoren von Kern N draufmultiplizieren und überzeugen Sie sich, dass jeweils $\mathbf{0}$ herauskommt. Welche Dimension hat Kern N? Welche Dimension hat demnach Bild N?

b) Bestimmen Sie jetzt den Vektorraum Bild N. *Anleitung*: Aus Teil a) kennen Sie die Dimension von Bild N, nämlich (*Spoiler*!) 2. Also brauchen wir, wenn wir nach einer Basis für Bild N suchen, 2 linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^4$, die das Bild von N aufspannen. Welche Vektoren können wir überhaupt erzeugen, wenn wir N anwenden auf *irgendwelche* Vektoren aus $\mathbb{R}^4$? Erinnern Sie sich an den Spruch "*Die Spalten / Sind Bilder / Der Einheits / Vektoren*", und Sie sehen: aus den 4 *Spalten* von N müssen wir zwei aussuchen, die linear unabhängig sind. Das kann man aber durch Hinschauen. Zum Beispiel können wir die zweite und die dritte Spalte nehmen und die dritte der Schönheit wegen noch durch 2 teilen. Dann ist $((1,1,2,1)^\mathsf{T}, (0,1,1,2)^\mathsf{T})$ eine (der unendlich vielen möglichen) Basen von Bild N. Übrigens muss sich die vierte Spalte dann als Linearkombination dieser beiden Basisvektoren schreiben lassen, sonst wär's ja keine Basis: finden Sie α_1, α_2 so, dass $\alpha_1 \cdot (1,1,2,1)^\mathsf{T} + \alpha_2 \cdot (0,1,1,2)^\mathsf{T} = (2,1,3,0)^\mathsf{T}$ (*Lösung*: $\alpha_1 = 2$ und $\alpha_2 = -1$).

c) Wenden wir uns nun dem Lösen des Gleichungssystems $N\mathbf{x} = \mathbf{y}$ zu mit dem angegebenen $\mathbf{y} = (2,0,2,-2)^\mathsf{T}$. *Wenn* das System eine Lösung haben soll, dann muss $\mathbf{y} \in$ Bild N liegen. Aber von Bild N haben wir nach Teil b) eine Basis. Gibt es Zahlen β_1 und β_2, so dass $\beta_1 \cdot (1,1,2,1)^\mathsf{T} + \beta_2 \cdot (0,1,1,2)^\mathsf{T} = (2,0,2,-2)^\mathsf{T}$? Wenn ja, können wir $\mathbf{y}$ als Linearkombination aus Basisvektoren von Bild N darstellen. $\mathbf{y}$ liegt damit dann in Bild N und das System ist lösbar. *Antwort*: ja, solche Zahlen gibt es, nämlich $\beta_1 = 2$ und $\beta_2 = -2$, und das System ist tatsächlich lösbar.

d) Jetzt lösen wir $N\mathbf{x} = \mathbf{y}$ explizit. **Methode 1**: streng nach dem Gaussschen Algorithmus.

Links vom senkrechten Strich steht N, rechts davon $\mathbf{b}$, und wir führen EZU auf beide Seiten aus. Identifizieren Sie lös$(N, \mathbf{y})$. *Anleitung*: nach wenigen algorithmischen Schritten kommen Sie zu $\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$ oder etwas Äquivalentem. Wir können x_4 offenbar frei wählen und nennen es λ_1. Die 2. Zeile liefert dann $3x_3 - \lambda_1 = -2$ beziehungsweise $x_3 = \frac{1}{2}\lambda_1 - 1$. Zeile 1 lautet $x_1 + x_2 + 2\lambda_1 = 2$, weshalb wir wieder einen freien Parameter wählen können; sagen wir $x_2 = \lambda_2$, und dann ist $x_1 = 2 - 2\lambda_1 - \lambda_2$. Wir sehen: für *jedes* Paar (λ_1, λ_2) ist $\mathbf{x}_{(\lambda_1,\lambda_2)} = \begin{pmatrix} 2-2\lambda_1-\lambda_2 \\ \lambda_2 \\ \frac{1}{2}\lambda_1 - 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$ eine Lösung von $N\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Dass es sich um eine *zwei*parametrige Schar handelt, wundert uns nicht, denn mit jeder Lösung $\mathbf{x}_0$ ist auch $\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}$ eine Lösung, wenn $\mathbf{v} \in \operatorname{Kern} N$ ist, und jede Lösung ist von dieser Form. Aus Teil a) wissen wir aber, dass $\operatorname{Kern} N$ *zwei*dimensional ist.

e) Wenn das aber so ist, sollten wir die gerade parametrisierte allgemeine Lösung explizit schreiben können als $\mathbf{x}_{(\lambda_1,\lambda_2)} = \mathbf{x}_0 + \lambda_1 \cdot \mathbf{k}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{k}_2$ mit *irgend*einer partikulären Lösung $\mathbf{x}_0$ und einer Basis $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ von $\operatorname{Kern} N$. Letztere können wir aus Teil a) abschreiben. *Lösung*: beispielsweise $\begin{pmatrix} 2-2\lambda_1-\lambda_2 \\ \lambda_2 \\ \frac{1}{2}\lambda_1 - 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

f) Diese Schreibweise in e) für die allgemeine Lösung von $N\mathbf{x} = \mathbf{y}$ ist sehr elegant, denn die Dimension des Lösungsraumes ist sofort ablesbar, und die Basis des Kerns von N steht auch explizit da. Kommen wir da hin, auch ohne den GAUSS-Algorithmus wie in d) auf die mit $\mathbf{y}$ erweiterte Matrix N loszulassen? Denn wir haben ja in a) bereits den GAUSS-Algorithmus angewandt und aus diesen Ergebnissen heraus nicht nur in b) den Raum $\operatorname{Bild} N$ mittels einer Basis genau charakterisiert, sondern in c) sogar gezeigt, mit welchen Zahlen sich $\mathbf{y}$ aus der Basis von $\operatorname{Bild} N$ linearkombinieren lässt. Kann man das nutzen? *Lösung*: Klar! Das ist **Methode 2**. Die beiden in b) gefundenen Basisvektoren von $\operatorname{Bild} N$ waren $\mathbf{b}_1 = (1,1,2,1)^\mathsf{T}$ und $\mathbf{b}_2 = (0,1,1,2)^\mathsf{T}$, und in Teil c) haben wir erkannt, dass $\mathbf{y}$ im Bild von N liegt mit den Linearfaktoren: $\mathbf{y} = 2 \cdot \mathbf{b}_1 - 2 \cdot \mathbf{b}_2$. Genau diese Vektorgleichung schreiben wir nochmal hin, diesmal explizit mit Hilfe der Spaltenvektoren der Matrix N – das geht! denn aus diesen Spaltenvektoren haben wir die Basis von $\operatorname{Bild} N$ mit Hilfe unseres Lieblingsspruchs ja gerade ausgewählt: $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, was nichts anderes heißt als $\mathbf{y} = N \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Das war's aber auch schon, denn in $(2, 0, -1, 0)^\mathsf{T}$ haben wir damit eine partikuläre Lösung von $N\mathbf{x} = \mathbf{y}$ gefunden, und alle anderen – also ganz lös $(N, \mathbf{y})$ – erhalten wir durch Hinzuaddieren beliebiger Linearkombinationen der Basisvektoren von Kern N. Im Resultat landen wir genau bei dem, was wir in e) schon notiert hatten.

Übung 5 (Lineare Gleichungssysteme)

Gegeben seien die folgende Matrix $N \in \mathbb{R}^{4\times 4}$: $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ sowie der Spaltenvektor $\mathbf{z} = (3, 0, 4, -1)^\mathsf{T}$.

a) Bestimmen Sie die Menge lös $(M, \mathbf{z})$. Gehen Sie dafür zunächst davon aus, dass Sie N noch nie gesehen haben, und wenden Sie den Gaussschen Algorithmus auf die mit $\mathbf{z}$ erweiterte Matrix N an. *Lösung*: nach einer geringen Anzahl von Schritten gelangen Sie zu $\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$ oder etwas Äquivalentem. Die 3. Zeile ist aber offensichtlich nicht erfüllbar. Mit anderen Worten: lös $(M, \mathbf{z}) = \varnothing$.

b) Ziehen Sie jetzt alle Register, über die Sie durch die Analysen aus Aufgabe 4 verfügen. Zum Beispiel können Sie nachweisen, dass es keine Zahlen γ_1 und γ_2 gibt, mit denen gilt $\gamma_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, das heißt dass sich $\mathbf{z}$ nicht aus den Basisvektoren $(1, 1, 2, 1)^\mathsf{T}$ und $(0, 1, 1, 2)^\mathsf{T}$ von Bild N zusammensetzen lässt. Dieser Nachweis ist simpel, denn wegen der 1. Zeile müsste $\gamma_1 = 3$ sein und wegen der 2. Zeile infolgedessen $\gamma_2 = -3$. Aber dann stimmen die 3. und die 4. Zeile beide nicht mehr. Wenn es allerdings nicht möglich ist, $\mathbf{z}$ aus den Basisvektoren von Bild N zusammenzubauen, dann liegt eben $\mathbf{z}$ nicht im Bild von N, und es gibt ganz einfach kein $\mathbf{x}$, das durch N nach $\mathbf{z}$ abgebildet wird.

Übung 6 (Praktisches Invertieren von Matrizen)

Es folgt eine Sammlung von Matrizen, deren Invertierbarkeit Sie prüfen und die Sie, sofern diese Prüfung positiv ausfällt, tatsächlich auch explizit invertieren sollen. Gestalten Sie die Prüfung einmal durch versuchsweises Anwenden des Gaussschen Eliminationsalgorithmus (die betreffende

Matrix ist dann nicht invertierbar, wenn sich der Algorithmus nicht bis zum Schluss durchführen lässt), ein andermal mittels Rangbetrachtungen über die Determinante.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 & -1 \\ 1-\mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & \mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}$ (wobei i, Sie erinnern sich, die Imaginäre Einheit der Komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ darstellt – mehr als $\mathrm{i}^2 = -1$ müssen Sie aber nicht verwenden. Trotzdem gibt es hier zahllose Gelegenheiten, sich zu verrechnen), $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Man bestimme nun, zu welchen reellen Parametern λ (“Lambda”) die Matrix $D \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit $D = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$ überhaupt invertierbar ist. Für diese λ bestimme man anschließend die Inverse.

Sie sollten die jeweils gefundenen Inversen auf ihr Invers-Sein überprüfen durch die entsprechende Matrixmultiplikation. In SymPy, falls Sie das verwenden wollen als Hilfsmittel, können Sie das Inverse zu einer invertierbaren Matrix durch die Methode `inv()` (also `M.det()` für die entsprechende Matrix `M`) aufsuchen lassen. Die auf dem vorangehenden Übungsblatt bereits erwähnte Methode `det()` können Sie (wie?) einsetzen, um Invertierbarkeit vorab sicherzustellen – widrigenfalls fangen Sie sich eine SymPy-Fehlermeldung ein. Lustigerweise funktioniert übrigens auch `M**-1` statt `inv()`, also sozusagen die direkte Eingabe von M^{-1}.