Theoretische Informatik I

Vorkurs

Duale Hochschule Baden-Württemberg – Lörrach
Studiengang Informatik – TIF21

1 Objekte, Klassen und Mengen

Unter einem *Objekt* verstehen wir ein abstraktes Etwas aus unserer Vorstellung. Beispielsweise sind Zahlen, Farben, Straßenkreuzungen in Lörrach, Buchstaben und Wörter Objekte, Funktionen sind Objekte und ebenso Mengen. Verschiedene Objekte können voneinander unterschieden werden.

Unter einer *Klasse* verstehen wir eine Ansammlung von Objekten. Wir können beispielsweise von der Klasse aller Buchstaben sprechen, oder von der Klasse aller Farben, der Klasse aller Zahlen. Wir dürfen auch von der Klasse aller Mengen sprechen.

Eine *Menge* ist eine Klasse, die bestimmte Zusatzforderungen erfüllt. Wir werden hier nicht erläutern, welche dies sind; ein gängiges Axiomensystem für die Mengenlehre bilden die Zermelo-Fraenkel-Axiome. Die Objekte einer Menge nennen wir *Elemente* der Menge.

Es muss zu jedem Objekt eindeutig feststehen, ob es zu einer Menge gehört oder nicht. Diese Zugehörigkeit ist nicht zeitabhängig oder zufällig; sie ist auch nicht teilweise. Ein Objekt gehört nicht manchmal zu einer Menge. Ein Objekt gehört nicht mit einer Wahrscheinlichkeit von 17 % zu einer Menge. Ein Objekt gehört nicht ein bisschen zu einer Menge.

Ein Objekt gehört entweder zu einer Menge dazu oder nicht. Andere Fälle gibt es nicht. Es ist eine vollkommen andere Frage, ob wir *entscheiden* können, ob ein Objekt zu einer Menge dazugehört oder nicht. Wir *wissen* jedoch, dass der Status des Objekts hinsichtlich der Menge fest ist: Es ist entweder Element oder nicht. Wir wissen allerdings vielleicht nicht, welcher Status es ist.

Hierzu eine kleine Analogie: Wir stellen uns ein Programm vor, das als Eingabe eine Liste von jeweils verschiedenen Zahlen erhält. Die Ausgabe des Programmes ist ebenfalls eine Liste von Zahlen; genauer der Zahlen der Eingabeliste. Jemand gibt uns nun das Programm und behauptet, dass das Programm die Liste sortiert. Das stimmt entweder oder es stimmt nicht. Wir haben aber eventuell keine Möglichkeit, das zu überprüfen. Selbst wenn wir den Rest unseres Lebens damit verbringen, das Programm zu testen und es immer funktioniert, kann es sein, dass das Programm bei einer ganz bestimmten Eingabe, die wir nicht getestet haben, versagt. Es *ist* also so, dass das Programm entweder das tut, was es soll, oder es tut nicht das, was es soll. Wir können aber womöglich nicht *entscheiden*, ob das Programm das tut, was es soll, oder nicht.

So können wir uns das bei Objekten und Mengen ebenfalls vorstellen. Es *ist* so, dass das Objekt entweder Element der Menge ist oder es ist kein Element der Menge. Wir können es aber womöglich nicht *entscheiden*.

Die erwähnten Zusatzforderungen von Mengen gegenüber Klassen erlauben uns beispielsweise, dass wir zu einer gegebenen Menge Teilmengen bilden können, deren Elemente wir durch eine logische Formel beschreiben können. So können wir die Menge der geraden natürlichen Zahlen bilden, da wir den Sachverhalt »gerade Zahl« durch eine logische Formel beschreiben können. Wir werden in der Vorlesung sehen, dass nicht jede Klasse eine Menge ist.

Die Klassen, die wir in der Schule kennengelernt haben, sind üblicherweise allesamt Mengen. Wir müssen uns sehr anstrengen, um *versehentlich* eine Klasse zu konstruieren, die keine Menge ist.

Wir werden für die Vorlesung jedoch (fast) nicht weiter auf Klassen zu sprechen kommen. Daher reicht uns von nun an die naive Mengenlehre. Wir führen die Vorstellung von Georg Cantor an:

»Unter einer *Menge* M verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die *Elemente* von M genannt werden) zu einem Ganzen.«

2 Variablen

Im mathematischen Sinne wollen wir eine Variable über einer Menge M als Platzhalter für ein beliebiges Element dieser Menge verstehen. Wir können uns hierzu die Menge als Urne und die Elemente der Menge als Kugeln in dieser Urne vorstellen (bei unendlich großen Mengen benötigen wir also eine sehr große Urne). Wenn wir uns nun eine

Variable über dieser Menge konstruieren, so greifen wir einmal in die Urne hinein und ziehen eine Kugel heraus. Wir sehen uns jedoch nicht an, welche Kugel wir gezogen haben – das einzige, was wir etwa in Beweisen verwenden, ist unser Wissen, dass diese Kugel aus der Urne kommt, also das Element aus der Menge stammt. Das Hineingreifen in die Urne erkennen wir im mathematischen Umfeld an den Worten »Sei x aus M beliebig«, oft auch »Sei $x \in M$ beliebig«. Wann immer wir danach von x sprechen, meinen wir den Wert dieser Kugel. Wie in Programmiersprachen haben auch mathematische Variablen eine Sichtbarkeit. Wenn sie innerhalb eines Teilbeweises definiert werden, dürfen wir sie in anderen Teilen nicht verwenden.

Wichtig bei unseren Variablen ist, dass sie ihren Wert nicht mehr verändern, nachdem wir sie einmal gewählt haben. Bei Variablen, die wir eventuell aus Programmiersprachen kennen, ist dies anders. Dort können wir den Wert von Programmvariablen beliebig oft ändern. Bei mathematischen Variablen ist dies nicht erlaubt.

Für die folgende, hoffentlich sehr einfach einzusehende Aussage wollen wir als Menge die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen betrachten. Die natürlichen Zahlen beginnen bei uns bei 1 (und nicht bei 0).

Satz Für jede natürliche Zahl n gilt: $n^2 \geq n$.

Beweis Wir wollen etwas für jede natürliche Zahl zeigen. Wir könnten nun beginnen, indem wir die Aussage für 1 zeigen, dann für 2, dann für 3 und so weiter, aber damit würden wir niemals fertig, da es unendliche viele natürliche Zahlen gibt. Wir wollen stattdessen eine Variable verwenden.

Sei x aus $\mathbb{N}$ beliebig. Hiermit haben wir nun in die Urne »Menge der natürlichen Zahlen« gegriffen und eine Kugel herausgenommen. Wir oben verabredet, sehen wir uns die Kugel nicht an. Wir dürfen aber unser Wissen verwenden, dass die Kugel aus der Urne stammt, dass also die Kugel eine natürliche Zahl ist. Daher wissen wir, dass die Kugel einen Wert größer gleich 1 hat, da jede natürliche Zahl größer gleich 1 ist. Wir wissen also $x \geq 1$. Somit dürfen wir folgern:

$$x^2 = x \cdot x \overset{(1)}{\geq} x \cdot 1 = x,$$

wobei wir an der Stelle (1) verwendet haben, dass $x \geq 1$ gilt.

Wir haben unsere gewünsche Aussage nun gezeigt für unsere gezogene Kugel x. Wir haben aber an keiner Stelle verwendet, welche Kugel wir tatsächlich gezogen haben. Wir haben nur verwendet, dass sie aus der Urne kam, die für die Menge der natürlichen Zahlen steht. Hätten wir eine andere Kugel aus der Urne gezogen, dann hätte unsere Argumentation exakt gleich ausgesehen.

Also wissen wir, dass unsere Aussage für jede natürliche Zahl stimmt. Das wollten wir zeigen. ∎

Nun möchten wir eine Aussage für ganze Zahlen zeigen. Die Menge der ganzen Zahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{Z}$.

Satz Für jede ganze Zahl z gilt: $z^2 \geq 0$.

Beweis Wieder wollen wir mit einer Variablen arbeiten. Sei x aus $\mathbb{Z}$ beliebig.

Wir müssen nun verschiedene Fälle unterscheiden. Dazu fragen wir unsere Kugel x, ob sie größer als, gleich oder kleiner als 0 ist (andere Fälle gibt es nicht). Wir haben vorhin gesagt, dass wir nicht nachsehen, welchen Wert unsere Kugel hat. Das tun wir hier auch nicht. Wir interessieren uns nicht dafür, welchen Wert die Kugel genau hat. Wir interessieren uns nur dafür, ob der Wert größer als, gleich oder kleiner als 0 ist. Und nur das werden wir in den drei Beweisästen verwenden. (Wenn wir von dem Wissen über den tatsächlichen Wert der Kugel Gebrauch machten, müssten wir eine unendlich große Fallunterscheidung machen – eine für jeden möglichen Wert. Und wieder wären wir niemals fertig.)

1. Fall: $x > 0$. Dann gilt:

$$x^2 = x \cdot x \overset{(2)}{>} x \cdot 0 = 0,$$

wobei wir an der Stelle (2) verwendet haben, dass $x > 0$ gilt. Also gilt $x^2 > 0$ und dies können wir abschwächen zu $x^2 \geq 0$.

2. Fall: $x = 0$. Dann gilt:

$$x^2 = x \cdot x \overset{(3)}{=} x \cdot 0 = 0,$$

wobei wir an der Stelle (3) verwendet haben, dass $x = 0$ gilt. Also gilt $x^2 = 0$ und dies können wir abschwächen zu $x^2 \geq 0$.

3. Fall: $x < 0$. Dann ist also $-x > 0$ und es gilt:

$$x^2 = 1 \cdot x^2 = (-1)^2 \cdot x^2 = (-1 \cdot x)^2 = (-x)^2 = (-x) \cdot (-x) \overset{(4)}{>} (-x) \cdot 0 = 0,$$

wobei wir an der Stelle (4) verwendet haben, dass $-x > 0$ gilt. Also gilt $x^2 > 0$ und dies können wir abschwächen zu $x^2 \geq 0$.

Wir haben gesehen, dass in jedem Falle die Aussage $x^2 \geq 0$ gilt.

Wir fassen zusammen: Wir haben in unsere Urne $\mathbb{Z}$ einmal hineingegriffen und eine Kugel x herausgezogen. Dann haben wir die Kugel gefragt, ob sie größer als, gleich oder kleiner als 0 ist. Für jeden der drei Fälle haben wir unsere Aussage $x^2 \geq 0$ gezeigt, ohne weitere Informationen über unsere Kugel zu verwenden. Hätten wir also am Anfang eine andere Kugel gezogen, so hätten wir dieselbe Argumentation verwenden können.

Also wissen wir, dass unsere Aussage für jede ganze Zahl stimmt. Das wollten wir zeigen. ∎

Die Fallunterscheidung, die wir eben kennengelernt haben, dient dazu, dass wir in den einzelnen Beweisästen zusätzliche Informationen zur Verfügung haben. Wenn wir etwa die beiden Fälle $x = 0$ und $x \neq 0$ unterscheiden, kennen wir im ersten Falle das x ganz genau, im zweiten Falle wissen wir, dass wir durch x teilen dürfen.

Zum Schluss bemerken wir noch folgendes: Wenn wir mehrere Variablen gleichzeitig verwenden, dann stammen diese aus mehreren Urnen. Wir haben für jede Variable eine eigene Urne mit Kugeln, auch wenn es Variablen über derselben Menge sind.

3 Quantoren

Es gibt zwei Arten von Quantoren: Allquantoren und Existenzquantoren. Betrachten wir unseren vorhin bewiesenen Satz über die natürlichen Zahlen:

Satz Für jede natürliche Zahl n gilt: $n^2 \geq n$.

Er macht eine Aussage über alle natürlichen Zahlen. Wenn wir genau hinsehen, erkennen wir, dass auch das n für Kugeln steht. Man könnte meinen, das n stehe für alle natürlichen Zahlen, also für alle Kugeln, gleichzeitig. Der Eindruck täuscht. Vielmehr bedeutet es, dass für jeden beliebigen Griff in die Urne die Aussage für die dadurch zutage geförderte Kugel gilt. Wir können die Aussage unseres Satzes auch schreiben als:

$$\forall n \in \mathbb{N} : n^2 \geq n.$$

Das Zeichen $\forall$ nennt man Allquantor. Ihm folgt eine Variable mit der Angabe, woher die Variable stammt (hier also aus den natürlichen Zahlen). Hinter dem Doppelpunkt folgt die Aussage, die abhängt von der Variablen. Die Bedeutung haben wir schon gesehen: Für jeden Griff in die Urne $\mathbb{N}$, deren zutage geförderte Kugel wir n nennen, gilt die Aussage: $n^2 \geq n$.

Der Existenzquantor $\exists$ hingegen sagt, dass es eine Kugel gibt, so dass eine Aussage gilt. Eine sehr banale Aussage ist

$$\exists n \in \mathbb{N} : n = 25.$$

Es gibt also eine Kugel in der Urne $\mathbb{N}$, die den Wert 25 hat. Diese Aussage ist wahr. Hingegen ist die Aussage

$$\exists n \in \mathbb{N} : n = \frac{3}{2}$$

falsch, denn es gibt keine natürliche Zahl mit dem Wert $\frac{3}{2}$. Wir bemerken an dieser Stelle noch, dass die Aussage

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \neq \frac{3}{2}$$

wahr ist.

Ein weiteres Beispiel ist die wahre Aussage

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{Z},$$

das wir anführen, damit niemand auf die Idee kommen möge, es müsse immer irgendwo ein $=$, $\neq$, $<$, $\leq$, $>$ oder $\geq$ vorkommen.

Eine weitere wahre Aussage ist die folgende:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} : m \geq n.$$

Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es eine natürliche Zahl m, die größer als n ist (wir können m etwa als $n + 375$ wählen). Wir bemerken, dass die Aussage

$$\exists m \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : m \geq n$$

falsch ist, da es keine natürliche Zahl m gibt, die größer als alle natürlichen Zahlen n ist (es gibt keine größte natürliche Zahl). Es kommt wohl auf die Reihenfolge der Quantoren an.

Wir betrachten nun zunächst die Aussage

$$\forall z_1 \in \mathbb{N} : \forall z_2 \in \mathbb{N} : \exists z_3 \in \mathbb{N} : z_1 = z_2 + z_3$$

und stellen fest, dass sie nicht wahr ist, denn wählen wir etwa z_1 als 3 und z_2 als 5, so ist

$$\exists z_3 \in \mathbb{N} : z_1 = z_2 + z_3$$

falsch. Wenn wir nun aber die Aussage

$$\forall z_1 \in \mathbb{Z} : \forall z_2 \in \mathbb{Z} : \exists z_3 \in \mathbb{Z} : z_1 = z_2 + z_3$$

betrachten, so erkennen wir, dass diese offenbar wahr ist (wir können z_3 als $z_1 - z_2$ wählen). Bei der leicht modifizierten Aussage

$$\forall z_1 \in \mathbb{Z} : \forall z_2 \in \mathbb{Z} : \exists z_3 \in \mathbb{Z} \backslash \{0\} : z_1 = z_2 + z_3$$

sind wir hingegen eventuell unsicher, ob sie wahr oder falsch ist. Wir könnten versucht sein, anzunehmen, dass z_1 und z_2 ja sicher verschieden seien, da sie unterschiedliche

Variablen sind. Allerdings sagt uns der Allquantor, dass eine Aussage für alle möglichen Werte der Variablen wahr sein soll. Es muss also auch der Fall berücksichtigt werden, dass $z_1 = z_2$ ist. Und in diesem Fall ist

$$\exists z_3 \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} : z_1 = z_2 + z_3$$

sicher falsch. Daher ist für ein festes z_1 die Aussage

$$\forall z_2 \in \mathbb{Z} : \exists z_3 \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} : z_1 = z_2 + z_3$$

ebenfalls falsch. Also war unsere ursprüngliche Gesamtaussage falsch.

Das Beispiel soll uns verdeutlichen, dass wir im Falle mehrerer Variablen über demselben Wertebereich nicht davon ausgehen dürfen, dass die Werte der Variablen verschieden sind. Wir erinnern uns daran, dass wir für jede Variable eine eigene Urne verwenden. Und wenn wir zwei Urnen haben, die jeweils zu der Menge $\mathbb{Z}$ korrespondieren, und wir je eine Kugel ziehen, dann können die Kugeln natürlich denselben Wert haben.

4 Implikation

Wir widmen uns nun der Implikation. Die Implikation verknüpft zwei Aussagen miteinander und liefert uns damit eine neue Aussage (ähnlich wie dies »und« und »oder« tun). Die linke Seite der Implikation ist die Voraussetzung, die rechte die Folgerung.

Im allgemeinen Sprachgebrauch verwendet man für eine Implikation die Wortfolge »Wenn …, dann …«, wobei die ersten Pünktchen die Voraussetzung darstellen und die letzten die Folgerung.

Ein schönes Beispiel ist die offenbar wahre Aussage »Wenn es regnet, dann ist die Straße nass«. Und an diesem Beispiel können wir auch sehr schön die Tücken der Implikation sehen. Denn »Wenn die Straße nass ist, dann regnet es« ist falsch (es kann ja bis vor fünf Minuten geregnet und dann aufgehört haben).

Aber interessanterweise ist die Aussage »Wenn die Straße nicht nass ist, dann regnet es nicht« wahr. Das ist der Umkehrschluss zur Aussage »Wenn es regnet, dann ist die Straße nass«.

Allgemeiner gilt folgender

Satz Es sei »Wenn A gilt, dann gilt B« eine wahre Aussage. Dann ist auch die Aussage »Wenn B nicht gilt, dann gilt A nicht« wahr.

Beweis Wir setzen voraus, dass B nicht gilt und wollen zeigen, dass dann A nicht gelten kann. Angenommen, A gilt, dann muss aber nach der Voraussetzung, dass »Wenn A gilt, dann gilt B« eine wahre Aussage ist, auch B gelten. Das tut es aber nicht. Also kann A nicht gelten. ∎

Der Umkehrschluss eines Umkehrschlusses ist übrigens wieder die ursprüngliche Aussage (darüber sollten wir einen Augenblick nachdenken).

Formal schreiben wir für eine Implikation

$$A \Rightarrow B,$$

wobei A und B zwei Aussage sind. Die Implikation ist wahr

- wenn A und B wahr sind,
- wenn A falsch und B wahr ist,
- wenn A falsch und B falsch ist.

Einzig und allein wenn A wahr ist und B falsch, dann ist die Implikation falsch.

In unserem Beispiel ist die Aussage A »es regnet« und die Aussage B »die Straße ist nass«. Da die Aussage $A \Rightarrow B$ wahr ist, wissen wir, dass es niemals sein kann, dass A gilt und B nicht, also dass es regnet und die Straße nicht nass ist. Allerdings haben wir für den Fall, dass es nicht regnet, keine Information darüber, wie es um die Straße bestellt ist. Das sollte auch schon umgangssprachlich klar sein: »Wenn es regnet, dann ist die Straße nass.« »Und wenn es nicht regnet?« »Dann wissen wir es nicht.«

Implikationen müssen nicht wahr sein; so ist die Aussage »Wenn Hunde Tiere sind, dann sind Katzen Pflanzen« sicher falsch. Hingegen ist die Aussage »Wenn Hunde Häuser sind, dann sind Katzen Pflanzen« wahr, denn die Voraussetzung ist falsch. Die Aussage »Wenn Hunde Häuser sind, dann sind Katzen Tiere« ist ebenfalls wahr.

Wir kennen aus der Schule vielleicht noch die Begriffe »notwendige« und »hinreichende« Bedingung. Bei einer Implikation $A \Rightarrow B$ ist B notwendig für A. Denn wenn B nicht gilt, dann kann A nicht gelten. B ist eine Folgerung aus A und damit notwendig für A. Umgekehrt ist A eine hinreichende Bedingung für B. Denn wir wissen: wenn A gilt, dann gilt auch B. Aber B kann eventuell auch gelten, ohne dass A gilt.

Im Beispiel ist es eine notwendige Bedingung, dass die Straße nass ist, damit die Aussage »es regnet« wahr sein kann. Trotzdem kann die Straße nass sein, ohne dass es momentan regnet. Umgekehrt ist die Aussage »es regnet« eine hinreichende Bedingung dafür, dass die Straße nass ist. Trotzdem kann die Straße nass sein, ohne dass es momentan regnet. Denn die Implikation geht nur in eine Richtung. Anders bei der Äquivalenz. (Wir erfreuen uns einen Moment an dieser phantastischen Überleitung.)

5 Äquivalenz

Die Äquivalenz (lat. aequus – gleich, valor – Geltung, Wert; »äquivalent« bedeutet insgesamt also etwa »gleichwertig«) zweier Aussagen bedeutet, dass sie denselben Wahrheitswert haben. Wenn eine Äquivalenz wahr ist, dann bedeutet es nicht zwangsläufig, dass beide Teilaussagen wahr sind. Es dürfen auch beide Teilaussagen falsch sein. Es müssen nur beide Teilaussagen denselben Wahrheitswert haben.

Sobald wir den Wahrheitswert einer der beiden Teilaussagen kennen, kennen wir auch den der anderen – es ist nämlich derselbe. Notiert wird es als $A \Leftrightarrow B$, gesprochen wird es beispielsweise als »A gilt genau dann, wenn B gilt«.

Ein Beispiel für eine Äquivalenz ist die Aussage »Heute ist Freitag genau dann, wenn morgen Samstag ist.«.

Als interessanteres Beispiel betrachten wir die Aussage

$$\forall x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : (x = y \Leftrightarrow x + 24 = y + 24).$$

Diese Aussage ist offenbar wahr. Denn egal, ob $x = y$ wahr ist oder nicht, die Aussage $x + 24 = y + 24$ hat denselben Wahrheitswert.

Dagegen ist die Aussage

$$\forall x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : (x = y \Leftrightarrow x^2 = y^2)$$

nicht wahr. Denn beispielsweise für $x = 2$ und $y = -2$ ist die linke Seite der Äquivalenz falsch, aber die rechte ist wahr (denn $4 = 4$). Allerdings stimmt die Aussage

$$\forall x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : (x = y \Rightarrow x^2 = y^2).$$

Wir erinnern uns daran, dass uns die Lehrer in der Schule die Äquivalenzpfeilchen in dieser Situation rot durchgestrichen haben.

Eine Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ ist gleichbedeutend mit beiden Implikationen $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$. Wenn beide Implikationen gelten, dann sind A und B äquivalent. Und wenn A und B äquivalent sind, dann gelten auch beide Implikationen.

6 Abbildungen

Unter einer Abbildung von einer Menge M in eine Menge N verstehen wir eine Zuordnung, die jedem Element aus M eindeutig ein Element aus N zuweist. Beispiele hierfür sind

$$\begin{array}{rcl} \{1,2,3\} & \to & \{25,26,27\} \\ 1 & \mapsto & 25 \\ 2 & \mapsto & 26 \\ 3 & \mapsto & 25 \end{array}$$

oder auch

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

Wir können uns auch eine konstante Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 317 \end{array}$$

vorstellen. Hingegen ist

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ 317 & \mapsto & x \end{array}$$

keine Abbildung, denn Variablen, die auf der linken Seite der Zuordnung nicht auftreten, sind auf der rechten Seite nicht erlaubt. Welche reelle Zahl sollte denn hier der Abbildungswert von 317 sein? Außerdem ist nicht klar, wohin 215 abgebildet werden soll. Ebenfalls ist

$$\begin{array}{rcl} \{1,2,3\} & \to & \{34,38,46\} \\ 1 & \mapsto & 34 \\ 3 & \mapsto & 38 \end{array}$$

keine Abbildung, da nicht definiert ist, wohin 2 abgebildet wird. Bei

$$\begin{array}{rcl} \{1,2,3\} & \to & \{57,76,79\} \\ 1 & \mapsto & 57 \\ 2 & \mapsto & 76 \\ 3 & \mapsto & 76 \\ 2 & \mapsto & 57 \end{array}$$

handelt es sich ebenfalls nicht um eine Abbildung, denn es ist nicht eindeutig definiert, auf welchen Wert 2 abgebildet werden soll. Auch

$$\begin{aligned} \{1,2,3\} &\to \{45,86,99\} \\ 1 &\mapsto 45 \\ 2 &\mapsto 86 \\ 3 &\mapsto 98 \end{aligned}$$

ist keine Abbildung, denn 3 soll auf etwas abgebildet werden, das überhaupt nicht zu der Zielmenge gehört. Und auch

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

ist keine Abbildung, denn wir können nicht sagen, wohin 0 abgebildet wird. Hingegen ist

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\backslash\{0\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

eine Abbildung.

7 Zeichen

Wir widmen uns nun noch den Zeichen $\sum$ und $\prod$. Das erste wird in abkürzender Schreibweise für Summen verwendet, wie etwa in

$$\sum_{k=1}^{5} k.$$

Dies ist eine abkürzende Schreibweise für

$$1+2+3+4+5.$$

Hierbei wird die Variable k als Laufvariable bezeichnet, die alle ganzen Zahlen in den vorgegebenen Grenzen durchläuft, im Beispiel von 1 bis 5. Der Ausdruck hinter dem $\sum$ wird für jeden Wert von k wiederholt, wobei das Zeichen k immer durch den aktuellen Wert von k ersetzt wird. Die einzelnen Ausdrücke werden dann additiv verknüpft.

Damit ist also

$$\sum_{k=1}^{5} k^2$$

eine andere Schreibweise für

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

und

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k}$$

ist eine andere Schreibweise für

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}.$$

Mehrere Vorkommen von k werden alle ersetzt:

$$\sum_{k=1}^{5} (-1)^k \cdot k$$

ist also

$$(-1)^1 \cdot 1 + (-1)^2 \cdot 2 + (-1)^3 \cdot 3 + (-1)^4 \cdot 4 + (-1)^5 \cdot 5.$$

Häufig ist die obere Grenze selbst eine Variable, etwa in

$$\sum_{k=1}^{n} k.$$

Das ist eine abkürzende Schreibweise für

$$1 + 2 + 3 + ... + (n-1) + n$$

Das Zeichen $\prod$ verhält sich weitestgehend wir $\sum$, jedoch werden die einzelnen Ausdrücke hierbei multiplikativ verknüpft:

$$\prod_{k=1}^{5} k$$

bedeutet also

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5.$$