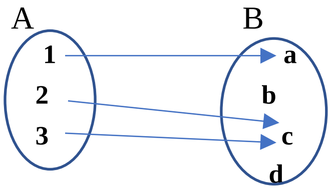
Funktionen

1. Gegeben sind die beiden Mengen $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{a, b, c, d\}$.
Wir betrachten alle Funktionen $f : A \to B$. , d.h. A ist die Definitionsmenge D_f, B die Zielmenge und $W_f = f(A) = \{f(1), f(2), f(3)\}$ die Wertemenge.



Beispiel: $f(1) = a$, $f(2) = c$, $f(3) = c$.
f ist nicht injektiv, da $f(2) = f(3)$.
f ist nicht surjektiv, da es z.B. kein $x \in A$ gibt mit $f(x) = b$.

a. Wie viele Funktionen $f : A \to B$ gibt es?
b. Wie viele injektive Funktionen $f : A \to B$ gibt es?
c. A enthalte n Elemente, B enthalte m Elemente, $n, m \in \mathbb{N}$. Wie viele Funktionen $f : A \to B$ gibt es?
d. A enthalte n Elemente, B enthalte m Elemente, $n, m \in \mathbb{N}$ und $n \le m$. Wie viele injektive Funktionen $f : A \to B$ gibt es?
e. A enthalte n Elemente, B enthalte ebenfalls n Elemente, $n \in \mathbb{N}$. Wie viele bijektive Funktionen $f : A \to B$ gibt es?

a. Für $f(1)$ gibt es vier Möglichkeiten, nämlich a, b, c, d. Zu jeder dieser vier Möglichkeiten gibt es für $f(2)$ ebenfalls vier Möglichkeiten, zusammen schon $4 \cdot 4 = 16$ Möglichkeiten. Für $f(3)$ gibt es wieder vier Möglichkeiten, so dass es insgesamt $4^3 = 64$ Funktionen gibt.
b. Für $f(1)$ gibt es vier Möglichkeiten, nämlich a, b, c, d. Zu jeder dieser vier Möglichkeiten gibt es für $f(2)$ nur noch drei Möglichkeiten, zusammen schon $4 \cdot 3 = 12$ Möglichkeiten. Für $f(3)$ gibt es nur noch zwei Möglichkeiten, so dass es insgesamt $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ injektive Funktionen gibt.
c. Für $f(1)$ gibt es m Möglichkeiten. Zu jeder dieser m Möglichkeiten besitzt $f(2)$ wieder m Möglichkeiten, zusammen m^2 Möglichkeiten. Insgesamt kommt man auf m^n mögliche Funktionen.
d. Für $f(1)$ gibt es m Möglichkeiten. Zu jeder dieser m Möglichkeiten gibt es für $f(2)$ nur noch $m-1$ Möglichkeiten, zusammen schon $m \cdot (m-1)$ Möglichkeiten. Für $f(3)$ gibt es nur noch $m-2$ Möglichkeiten, so dass es bis jetzt $m \cdot (m-1) \cdot (m-2)$ injektive Funktionen gibt. Da A genau n Elemente enthält, besteht die Gesamtzahl der Injektiven Funktionen aus einem Produkt aus n Faktoren, nämlich $m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-(n-1)) = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) = \dfrac{m!}{(m-n)!}$.
e. Es gibt $n!$ Bijektionen zwischen A und B.

2. Bestimmen Sie jeweils die Definitionsmenge D, die Wertemenge W, die Gleichung $y = f^{-1}(x)$ der Umkehrfunktion f^{-1}. Prüfen Sie, ob $f^{-1} \circ f$ die identische Funktion auf D_f und $f \circ f^{-1}$ die identische Funktion auf W_f ist.

a. $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$, b. $f(x) = \dfrac{1-x}{2x+1}$ c. $f(x) = 2 - \sqrt{x+1}$

d. $f(x) = \ln(x+2)$ e. $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$ f. $f(x) = \cos x$

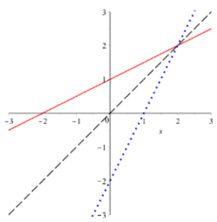
Wie muss man die Definitionsmenge von $f(x) = \cos x$ einschränken, damit f umkehrbar ist?

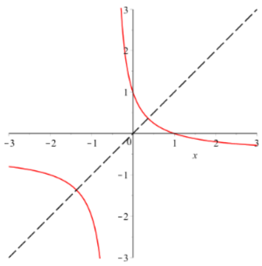
In den folgenden Schaubildern ist das Schaubild von f rot, das Schaubild von f^{-1} blau gepunktet und die Symmetrieachse $y = x$ schwarz gestrichelt.

a. $D_f = W_{f^{-1}} = \mathbb{R}$, $D_{f^{-1}} = W_f = \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = 2x - 2$,

$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{1}{2}x + 1\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}x + 1\right) - 2 = x$ und

$f \circ f^{-1}(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = f(2x - 2) = \frac{1}{2} \cdot (2x - 2) + 1 = x$.



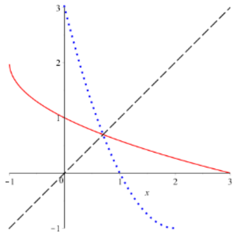


b. $D_f = W_{f^{-1}} = \mathbb{R}\setminus\{-1/2\}$, $D_{f^{-1}} = W_f = \mathbb{R}\setminus\{-1/2\}$, $f^{-1}(x) = \frac{1-x}{2x+1} = f(x)$

$$f^{-1}\circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{1-x}{2x+1}\right) = \frac{1-\frac{1-x}{2x+1}}{2\frac{1-x}{2x+1}+1} = \frac{2x+1-(1-x)}{2(1-x)+2x+1} = \frac{3x}{3} = x\,.$$

$f\circ f^{-1}(x) = x$ ist identisch.

Da $f^{-1}(x) = f(x)$, ist das Schaubild von f symmetrisch zur Symmetrieachse $y = x$ sein.

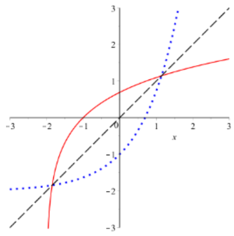


c. $D_f = W_{f^{-1}} = \{x\in\mathbb{R} / x \ge -1\}$, $W_f = D_{f^{-1}} = \{y\in\mathbb{R} / y \le 2\}$, $f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 3$

$$f^{-1}\circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(2-\sqrt{x+1}\right) = \left(2-\sqrt{x+1}\right)^2 - 4\left(2-\sqrt{x+1}\right) + 3 = \ldots = x$$

$$f\circ f^{-1}(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = f\left(x^2-4x+3\right) = 2-\sqrt{x^2-4x+3+1} = 2-\sqrt{(x-2)^2} =|$$

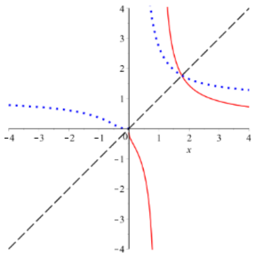
$= 2-|x-2| = 2-(-(x-2)) = x$, da $x \le 2$ in $D_{f^{-1}}$.



d. $D_f = W_{f^{-1}} = \{x\in\mathbb{R} / x > -2\}$, $W_f = D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$. $f^{-1}(x) = e^x - 2$.

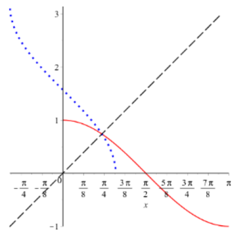
$$f^{-1}\circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(\ln(x+2)) = e^{\ln(x+2)} - 2 = x+2-2 = x\,.$$

$$f\circ f^{-1}(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = f\left(e^x - 2\right) = \ln(e^x - 2 + 2) = x\,.$$



e. $D_f = W_{f^{-1}} = \{x\in\mathbb{R} / x > 0 \text{ und } x \ne 1\}$, $W_f = D_{f^{-1}} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$. $f^{-1}(x) = e^{1/x}$.

f. $D_f = W_{f^{-1}} = \{x\in\mathbb{R} / 0 \le x \le \pi\} = [0/\pi]$,
$W_f = D_{f^{-1}} = \{y\in\mathbb{R} / -1 \le y \le 1\} = [-1/1]$. $f^{-1}(x) = \arccos(x)$.



3. Zerlegen Sie jeweils in Linearfaktoren.

a. $a(x) = 2x^3 + 11x^2 + 20x - 13$. Hinweis: $a\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

$a(x) = 2(x-1/2)(x^2+6x+13) = 2(x-1/2)(x+3-2i)(x+3+2i)$

b. $b(x) = -x^4 - \frac{16}{3}x^3 - 17x^2 - 12x + \frac{52}{3}$. Hinweis: $b(-2) = 0$ und $b\left(\frac{2}{3}\right) = 0$.

$b(x) = -(x+2)(x-2/3)(x^2+4x+13) = -(x+2)(x-2/3)(x+2-3i)(x+2+3i)$

c. $c(x) = 4x^4 - 4x^3 + 17x^2 - 16x + 4$. Hinweis: $x = \frac{1}{2}$ ist doppelte Nullstelle.

$c(x) = 4(x-1/2)^2(x^2+4) = 4(x-1/2)^2(x-2i)(x+2i)$

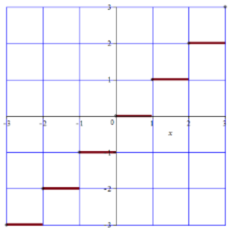
Grenzwert und Stetigkeit

1. Es sei $f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x < 2 \\ x-2 & \text{für } x \ge 2 \end{cases}$. Untersuchen Sie f auf Stetigkeit.

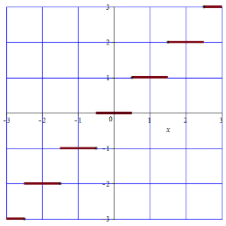
Nur unstetig an der Stelle $x = 2$.

2. Es sei $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{für } x\neq 1\\ 2 & \text{für } x=1\end{cases}$. Untersuchen Sie f auf Stetigkeit.

   $f(x)=x+1$ ist stetig in ganz $\mathbb{R}$.

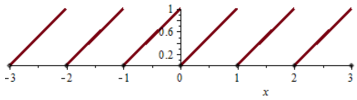


3. Die Gaußklammerfunktion ist definiert durch: Für $x\in\mathbb{R}$ ist die Gaußklammer $[x]$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x.
   Untersuchen Sie $[x]$ auf Stetigkeit.
   Die Gaußklammerfunktion ist stetig in $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.



4. Was bewirkt die Funktion $f(x)=[x+0{,}5]$ für $x\geq 0$? Runden auf ganze Zahlen.
   Vereinbarung: Negative Zahlen werden nach ihrem Betrag gerundet:
   Beispiel: $-0{,}4\approx 0$, während $-0{,}5\approx -1$.

   Was bewirken die Funktionen $g(x)=[10\cdot x+0{,}5]/10$ und $h(x)=[100\cdot x+0{,}5]/100$ für $x\geq 0$? Runden auf Zehntel bzw. Hundertstel.



5. Untersuchen Sie die Sägezahn-Funktion $h(x)=x-[x]$ auf Stetigkeit.
   h ist stetig in $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

Die Ableitung einer Funktion

1. Es sei $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=\sqrt{x}$ und $h(x)=x^4$. Bestimmen Sie $f'(x)$, $g'(x)$ und $h'(x)$ mit Hilfe der Definition $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x}{\Delta x\cdot x\cdot(x+\Delta x)}=-\frac{1}{x^2}$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^4}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^4+4x^3\Delta x+6x^2(\Delta x)^2+4x(\Delta x)^3+(\Delta x)^4-x^4}{\Delta x}=4x^3$$

2. Zeigen Sie mit Hilfe der Definition $\dbinom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$, dass für die Binomialkoeffizienten gilt

   a. $\dbinom{n}{k}=\dbinom{n}{n-k}$ die Symmetriebedingung.

   b. $\dbinom{n}{k}+\dbinom{n}{k+1}=\dbinom{n+1}{k+1}$ die Additionsbedingung für das Pascalsche Dreieck.

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k-1)!}=\frac{n!\cdot(k+1)+n!\cdot(n-k)}{(k+1)!\cdot(n-k)!}=\frac{(n+1)!}{(k+1)!\cdot(n-k)!}=\binom{n+1}{k+1}$$

   c. Zeigen Sie durch Nachrechnen, dass die Binomialkoeffizienten genau die Koeffizienten des Pascalschen Dreiecks sind:

n = 0 $\binom{0}{0}$

n = 1 $\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$

n = 2 $\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$

n = 3 $\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$

n = 4 $\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$

d. Berechnen Sie $(2x-3y)^4$ und $(2x-y)^5$.

$(2x-3y)^4 = 16x^4 - 96x^3y + 216x^2y^2 - 216xy^3 + 81y^4$,

$(2x-y)^5 = 32x^5 - 80x^4y + 80x^3y^2 - 40x^2y^3 + 10xy^4 - y^5$

Ableitungsregeln

1. Produktregel

Bestimmen Sie die Ableitung der Funktionen

$f_1(x) = 2x^2 \cdot \sin x$, $f_2(x) = 3 \cdot \sqrt{x} \cdot \cos x \cdot e^x$, $f_3(x) = e^{5+3x} = e^5 \cdot e^x \cdot e^x \cdot e^x$

$f_1'(x) = 4x\sin(x) + 2x^2\cos(x)$, $f_2'(x) = \dfrac{3\cos(x) \cdot e^x - 6x \cdot \sin(x) \cdot e^x + 6x \cdot \cos(x) \cdot e^x}{2\sqrt{x}}$

$f_3'(x) = e^5 \cdot \left(e^x\right)' \cdot e^x \cdot e^x + e^5 \cdot e^x \cdot \left(e^x\right)' \cdot e^x + e^5 \cdot e^x \cdot e^x \cdot \left(e^x\right)' = 3e^{5+3x}$

2. Quotientenregel

Bestimmen Sie die Ableitung der Funktionen

$f_1(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $f_2(x) = \dfrac{2\cos x - 3\sin x}{5 \cdot \left(1+x^2\right)}$, $f_3(x) = \dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

$f_1'(x) = \dfrac{2-\ln x}{2x^{3/2}}$, $f_2'(x) = \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{\left(-2\sin(x) - 3\cos(x)\right) \cdot \left(1+x^2\right) - \left(2\cos(x) - 3\sin(x)\right) \cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2}$

$f_3'(x) = -\dfrac{1}{2x^{3/2}}$

3. Kettenregel

Bestimmen Sie die Ableitung der Funktionen

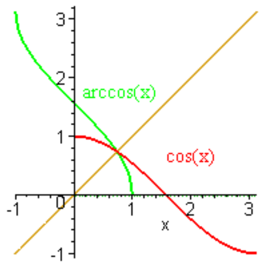
$f_1(x) = (2-3x)^5$, $f_2(x) = \ln\sqrt{x}$, $f_3(x) = \sqrt{\ln x}$, $f_4(x) = a \cdot \sqrt[n]{b - c \cdot x}$, $f_5(x) = \left(f(x)\right)^n$

$f_1'(x) = -15(2-3x)^4$, $f_2'(x) = \dfrac{1}{2x}$, $f_3'(x) = \dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$,

$f_4'(x) = -\dfrac{ac}{n}(b-cx)^{1/n-1}$, $f_5'(x) = n\left(f(x)\right)^{n-1} \cdot f'(x)$

4. Ableitung der Umkehrfunktion

a. $f(x) = \cos x$ ist im Intervall $[0/\pi]$ umkehrbar.



Zeigen Sie, dass für die Ableitung gilt: $\arccos' x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

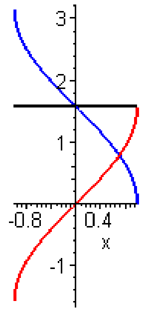
Wegen $\arcsin' x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ folgt $\arcsin' x + \arccos' x = 0$, so dass

$g(x) = \arcsin x + \arccos x$ für $-1 \le x \le 1$ eine Konstante ist.

Bestimmen Sie diese Konstante.
Aus $\cos(\arccos(x)) = x$ für $-1 \le x \le 1$ folgt $-\sin(\arccos(x)) \cdot \arccos'(x) = 1$.
Und damit

$\arccos'(x) = -\dfrac{1}{\sin(\arccos(x))} = -\dfrac{1}{\pm\sqrt{1-(\cos(\arccos(x)))^2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Da

$0 \le \arccos(x) \le \pi$ ist $\sin(\arccos(x)) \ge 0$, so dass bei $\pm$ immer nur + gilt.
Es folgt $g'(x) = \arcsin' x + \arccos' x = 0$, also ist $g(x)$ eine Konstante.
Sie ist $g(0) = \arcsin(0) + \arccos(0) = 0 + \pi/2 = \pi/2$.

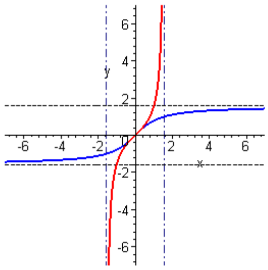


b. $f(x) = \tan x$ ist im Intervall $\left]-\frac{\pi}{2}/\frac{\pi}{2}\right[$ streng monoton steigend, da $\tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$. Und somit besitzt $f(x) = \tan x$ im angegebenen Intervall eine Umkehrfunktion.

Zeigen Sie, dass für die Ableitung gilt: $\arctan' x = \dfrac{1}{1+x^2}$.

$\tan(\arctan x)) = x$, also $\tan'(\arctan(x)) \cdot \arctan'(x) = 1$. Es folgt

$\arctan'(x) = \dfrac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \dfrac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \dfrac{1}{1+x^2}$.



c. Aus $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x$ folgt durch Ableiten nach der Kettenregel

$n \cdot \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1} \cdot \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = 1$, d.h. $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \dfrac{1}{n \cdot \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}} = \dfrac{1}{n \cdot x^{\frac{n-1}{n}}} = \dfrac{1}{n} \cdot x^{-\frac{n-1}{n}} = \dfrac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$.

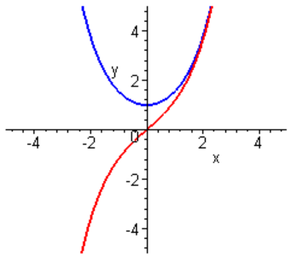
5. Zusammengesetzte Aufgaben

1. Die Hyperbelfunktionen sind definiert durch:

Sinus hyperbolicus $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Kosinus hyperbolicus $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Wegen $\sinh(-x) = -\sinh x$ und $\cosh(-x) = \cosh x$ ist das Schaubild von Sinus hyperbolicus punktsymmetrisch zum Ursprung und das Schaubild von Kosinus hyperbolicus achsensymmetrisch zur y-Achse.



Bestimmen Sie die Ableitungen von $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$.
Wegen $\sinh'(x) > 0$ besitzt $f(x) = \sinh(x)$ eine Umkehrfunktion. Zeigen Sie, dass für diese Umkehrfunktion gilt: $\operatorname{arcsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

1. Weg: Lösen Sie $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ nach x auf und vertauschen anschließend die Variablen x und y. Dieser Variablentausch bewirkt, dass die Schaubilder von Funktion und Umkehrfunktion symmetrisch zur 1. Winkelhalbierenden $y = x$ sind.
2. Weg: Zeigen Sie, dass $\sinh(\operatorname{arcsinh})$ die identische Abbildung ist, d.h. dass $\sinh(\operatorname{arcsinh}(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
3. Weg: Zeigen Sie, dass $\operatorname{arcsinh}(\sinh)$ die identische Abbildung ist, d.h. dass $\operatorname{arcsinh}(\sinh(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

2. a. Bestimmen Sie die Ableitung der Funktionen

$f_1(x) = 5 \cdot (2x-3)^3 \cdot (1-x)^4$, $\quad f_2(x) = \ln|x| = \begin{cases} \ln x & \text{für } x > 0 \\ \ln(-x) & \text{für } x < 0 \end{cases}$, $\quad f_3(x) = 2 - \frac{1}{4} \cdot x^{-2} \cdot \ln(x^4)$,

$f_4(x) = 2 \cdot \cos x \cdot \tan x$ einmal mit und einmal ohne Produktregel,

$f_5(x) = \sin^2 \frac{2}{3x} + \cos^2 \frac{2}{3x}$, $\quad f_6(x) = e^{1-2x} \cdot x^{-3}$, $\quad f_7(x) = \frac{\ln(2x)}{\sqrt{1+4x}}$.

$f_1'(x) = 10(7x-9)(2x-3)^2(x-1)^3$, $\quad f_2'(x) = \dfrac{1}{x}$, $\quad f_3'(x) = \dfrac{\ln(x^4)-2}{2x^3}$, $\quad f_4(x) = 2\cos(x)$, $\quad f_5'(x) = 0$

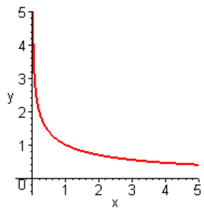
, $f_6'(x) = -\dfrac{e^{1-2x}(2x+3)}{x^4}$, $\quad f_7'(x) = \dfrac{1+4x-2x\ln(2x)}{x(1+4x)^{3/2}}$

b. Es sei $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$. Zeigen Sie, dass f nur im Intervall $]-1/1[$ definiert ist.
Begründen Sie außerdem, dass $f(-x) = -f(x)$ gilt; was bedeutet dies geometrisch?
Bestimmen Sie die Ableitung $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{2}{x^2-1}$$

c. Für $x > 0$ und $x \neq 1$ sei $f(x) = \dfrac{\ln x}{x-1}$. Bestimmen Sie die Ableitung.

Interessant ist der Fall $x = 1$: Es gilt hier $f(1) = "\frac{0}{0}"$.



Hier helfen uns die Regeln von L'Hôpital, einem französischen Mathematiker (Guillaume François Antoine, Marquis de L'Hôpital, 1661-1704). Er hatte diese Regeln aber nicht selbst gefunden, sondern dem Basler Mathematiker Johann Bernoulli (1667-1748) abgekauft und 1696 veröffentlicht.

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1/x}{1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x} = 1$. Somit kann man f auf alle reellen positiven Zahlen $\mathbb{R}^+$ erweitern:

$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1} & \text{für } x > 0 \text{ und } x \neq 1 \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$, $\quad f'(x) = \dfrac{x-1-x\ln(x)}{x(x-1)^2}$ für $x > 0$ und $x \neq 1$.

Was ist $f'(1)$? Nach Hôpital folgt

$$f'(1) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\frac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\ln(1+\Delta x) - \Delta x}{(\Delta x)^2} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\frac{1}{1+\Delta x} - 1}{2\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{-\Delta x}{2\Delta x(1+\Delta x)} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{-1}{2(1+\Delta x)} = -\frac{1}{2}.$$

$f'(x)$ ist sogar stetig an der Stelle $x = 1$, denn $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1-x\ln(x)}{x(x-1)^2} = -\dfrac{1}{2}$ durch Anwenden von Hôpital.

Also $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1-x\ln(x)}{x(x-1)^2} & \text{für } x > 0 \text{ und } x \neq 1 \\ -1/2 & \text{für } x = 1 \end{cases}$.

Die Regeln von L'Hôpital:

1.Der Fall $"\frac{0}{0}"$

Es sei $f(x_0) = 0$ und $g(x_0) = 0$. Wenn $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann gilt

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}.$$

Beweisidee: Ersetze Zähler- und Nennerfunktion näherungsweise durch ihre Tangenten an der Stelle x_0, so folgt $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)}{g'(x_0)\cdot(x-x_0)+g(x_0)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, da $f(x_0) = g(x_0) = 0$ und sich $x - x_0$ wegkürzt.

2. Der Fall $"\frac{\infty}{\infty}"$

Es gelte $f(x) \to \infty$ und $g(x) \to \infty$ für $x \to x_0$. Wenn $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann gilt

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}.$$

3. und 4. Die beiden Regeln gelten auch, wenn man x_0 durch ∞ ersetzt.

Weitere Aufgaben zu L'Hôpital: Bestimmen Sie

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x}{e^x}$, $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^n}{e^x}$ für $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x}$,

$\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x^r}$ für $r \in \mathbb{R}^+$, $\lim\limits_{x\to 1} \frac{a^{2x}-a^2}{2x-2}$ für $a > 0$, $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1-\ln x}{(2x-2)^2}$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(a\cdot x)-a\cdot\sin(x)}{\sin(x)-x}$ für $a \in \mathbb{R}$,

$\lim\limits_{x\to 0} x^x$ für $x > 0$. Hinweis: $\lim\limits_{x\to 0} \ln x^x = \lim\limits_{x\to 0} x\cdot\ln x = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^{-1}}$ und jetzt kann L'Hôpital angewandt werden.

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{\sin(x^2)} = 1$, $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x}{e^x} = 0$,

$\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ für $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0$ für $r \in \mathbb{R}^+$, , $\lim\limits_{x\to 1} \frac{a^{2x}-a^2}{2x-2} = a^2\cdot\ln a$ für $a > 0$,

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1-\ln x}{(1-x)^2} = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(a\cdot x)-a\cdot\sin(x)}{\sin(x)-x} = a^3 - a$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^{-1}} = 0$, also $\lim\limits_{x\to 0} x^x = 1$ für $x > 0$.

$\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x} = 1$.

6. Logarithmische Differenziation

Bestimmen Sie die Ableitung der Funktionen

$f_0(x) = b^x$ für $b > 0$ und $x > 0$, $f_1(x) = x^{\sin x}$ für $x > 0$, $f_2(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ für $x > 0$, $f_3(x) = g(x)^{h(x)}$ mit $g(x) > 0$ und g, h differenzierbar, $f_4(x) = (2x)^{-\frac{3}{2x^2}}$, $f_5(x) = \log_b(x)$ für $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ und $x > 0$ mit Hilfe der Gleichung $b^{\log_b(x)} = x$.

$f_0'(x) = b^x\cdot\ln(b)$, $f_1'(x) = x^{\sin(x)}\cdot\left(\cos(x)\cdot\ln(x)+\frac{\sin(x)}{x}\right)$, $f_2'(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\cdot\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right)$

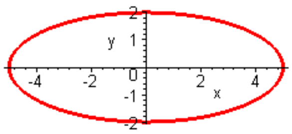
$f_3'(x) = g(x)^{h(x)}\cdot\left(h'(x)\cdot\ln\left(g(x)\right)+h(x)\cdot\frac{g'(x)}{g(x)}\right)$, $f_4'(x) = (2x)^{-\frac{3}{2x^2}}\cdot\frac{6\ln(2x)-3}{2x^3}$.

Aus $b^{\log_b(x)} = x$ folgt durch Ableiten $b^{\log_b(x)}\cdot\ln(b)\cdot\left(\log_b(x)\right)' = 1$ und daraus

$\left(\log_b(x)\right)' = \frac{1}{b^{\log_b(x)}\cdot\ln(b)} = \frac{1}{x\cdot\ln(b)}$. Dieses Ergebnis folgt auch aus der Beziehung $\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$.

$\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot a^x = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{a^{-x}} \underset{\text{Hôpital}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{-a^{-x}\cdot\ln(a)} = -\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a^x}{\ln(a)} = 0$, da $a \in (0;1)$.

7. Implizite Differenziation



1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ ist die Gleichung einer Ellipse mit den Halbachsen a und b.

   Bestimmen Sie die Tangentensteigungen bei der Ellipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4} = 1$ für die beiden Punkte mit $x = 3$ und die beiden Punkte mit $y = 1$.

Es ist $y' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}$.

Für $x = 3$ wird $y = \pm\frac{8}{5}$, d.h. $y' = \mp\frac{3}{10}$

Für $y = 1$ wird $x = \pm\frac{5}{2}\sqrt{3}$, d.h. $y' = \mp\frac{2}{5}\sqrt{3}$

2. Bestimmen Sie jeweils die Tangentensteigung y' von

a. $x^2 + y - 3y^2 + x \cdot y^3 = 1$ im Punkt $P\,(1/0)$.

$(1/0)$ einsetzen in $2x + y' - 6y \cdot y' + y^3 + 3x \cdot y^2 \cdot y' = 0$ ergibt $2 + y' = 0$, also $y'' = -2$.

Allgemein wäre $y' = \frac{2x + y^3}{6y - 1 - 3xy^2}$.

b. $x \cdot e^{2y-2} - 4y \cdot \ln(3-x) = 2$ im Punkt $P\,(2/1)$.

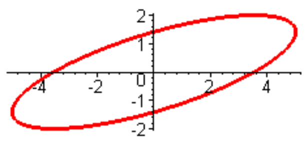
$(2/1)$ einsetzen in $e^{2y-2} + x \cdot 2y' \cdot e^{2y-2} - 4y' \cdot \ln(3-x) - 4y \cdot \frac{-1}{3-x} = 0$ ergibt $1 + 4y' - 0 + 4 = 0$, also $y' = -5/4$.

c. Aus $\ln\left(\frac{y}{x}\right) - x \cdot e^{-y} = 0$ folgt $\frac{1}{y/x} \cdot \frac{y' \cdot x - y \cdot 1}{x^2} - e^{-y} - x \cdot e^{-y} \cdot (-y') = 0$ und durch Multiplikation mit $x \cdot y$ ergibt sich $y' \cdot x - y - x \cdot y \cdot e^{-y} + x^2 \cdot y \cdot e^{-y} \cdot y' = 0$, also $y' = \frac{y \cdot \left(1 + x \cdot e^{-y}\right)}{x \cdot \left(1 + x \cdot y \cdot e^{-y}\right)}$.

d. Aus $(\sin(x \cdot y))^2 = x - y$ folgt $2\sin(x \cdot y) \cdot \cos(x \cdot y) \cdot (y + x \cdot y') = 1 - y'$ und daraus

$y' = \frac{1 - 2y \cdot \sin(x \cdot y) \cdot \cos(x \cdot y)}{1 + 2x \cdot \sin(x \cdot y) \cdot \cos(x \cdot y)}$.

8. Differenziation in Parameterform



1. Durch $x(t) = 5 \cdot \sin t$ und $y(t) = 2 \cdot \sin(t + \frac{\pi}{4})$ mit $0 \le t < 2\pi$ ist eine Ellipse beschrieben.

Markieren Sie die Ellipsenpunkte für $t = 0, \pi/2, \pi, 3/2\,\pi$.

$P_1\left(0/\sqrt{2}\right)$, $P_2\left(5/\sqrt{2}\right)$, $P_3\left(0/-\sqrt{2}\right)$, $P_4\left(-5/-\sqrt{2}\right)$

Welche Steigungen hat die Ellipse in den vier Achsenschnittpunkten?

Schnitt mit der x-Achse: $t_1 = 3/4\,\pi$, $t_2 = 7/4\,\pi$

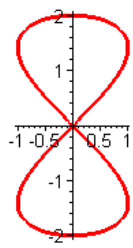
$t_1 = 3/4\,\pi$: $P\left(5/2\sqrt{2}/0\right)$, $\dot{x}(t_1) = -5/2\sqrt{2}$, $\dot{y}(t_1) = -2$, $y'(t_1) = 2/5\sqrt{2}$

$t_2 = 7/4\,\pi$: $P\left(-5/2\sqrt{2}/0\right)$, $\dot{x}(t_2) = 5/2\sqrt{2}$, $\dot{y}(t_2) = 2$, $y'(t_2) = 2/5\sqrt{2}$

Schnitt mit der y-Achse: $t_3 = 0$, $t_4 = \pi$

$t_3 = 0$: $P\left(0/\sqrt{2}\right)$, $\dot{x}(t_3) = 5$, $\dot{y}(t_3) = \sqrt{2}$, $y'(t_3) = 1/5\sqrt{2}$

$t_4 = \pi$: $P\left(0/-\sqrt{2}\right)$, $\dot{x}(t_4) = -5$, $\dot{y}(t_4) = -\sqrt{2}$, $y'(t_4) = 1/5\sqrt{2}$



2. Durch $x(t) = \sin(2 \cdot t)$ und $y(t) = 2 \cdot \sin t$ mit $0 \le t < 2\pi$ ist eine ‚Acht' beschrieben.

Markieren Sie die Kurvenpunkte für $t = 0, \pi/2, \pi, 3/2\,\pi$.

$P_1(0/0)$, $P_2(0/2)$, $P_3(0/0)$, $P_4(0/-2)$

Welche Steigungen hat die Kurve im Ursprung?

$t = 0$: $\dot{x}(0) = 2$, $\dot{y}(0) = 2$, $y'(0) = 1$

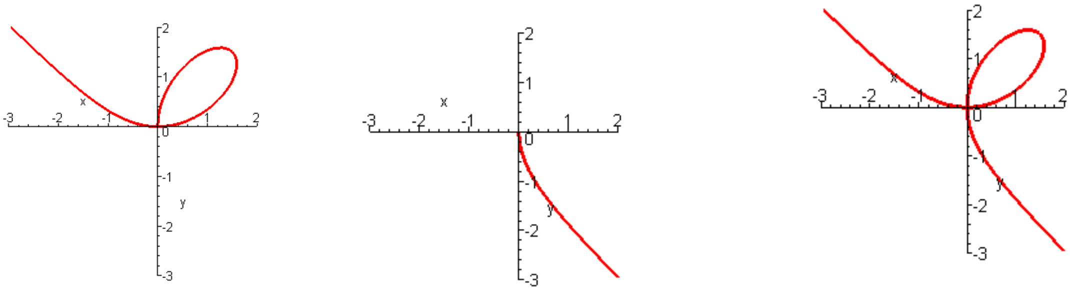
$t=\pi:\;\; \dot{x}(\pi)=2,\; \dot{y}(\pi)=-2,\; y'(\pi)=-1$

Punkte mit horizontaler Tangente: $\dot{y}(t)=2\cdot\cos t=0 \;\Rightarrow\; t=\tfrac{\pi}{2},\,\tfrac{3}{2}\pi \;\Rightarrow\; H_1(0/2),\; H_2(0/-2)$.

Punkte mit vertikaler Tangente: $\dot{x}(t)=2\cdot\cos(2\cdot t)=0 \;\Rightarrow\; t=\tfrac{1}{4}\pi,\,\tfrac{3}{4}\pi,\,\tfrac{5}{4}\pi,\,\tfrac{7}{4}\pi \;\Rightarrow\; V_1\left(1|\sqrt{2}\right)$, $V_2\left(-1|\sqrt{2}\right)$, $V_3\left(1|-\sqrt{2}\right)$, $V_4\left(-1|-\sqrt{2}\right)$.

3. Durch $x=\dfrac{3t}{1+t^3}$ und $y=\dfrac{3t^2}{1+t^3}$ mit $t\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ ist das sog. ‚Kartesische Blatt' beschrieben.

Das linke Bild gilt für $t>-1$, das mittlere für $t<-1$ und das rechte für $t\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.



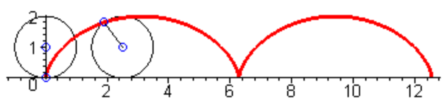
Waagerechte Tangente bedeutet $\dot{y}(t)=0$, d.h. $\dot{y}(t)=\dfrac{3t\cdot(2-t^3)}{(1+t^3)^2}=0$ mit der Lösungen $t_1=0$, $t_2=\sqrt[3]{2}$. Die betreffenden Punkte sind $P_1(0/0)$ und $P_2(\sqrt[3]{2}/\sqrt[3]{4})$.

Senkrechte Tangente bedeutet $\dot{x}(t)=0$, d.h. $\dot{x}(t)=\dfrac{3-6t^3}{(t^3+1)^2}=0$ mit der Lösung $t=\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}$. Der betreffende Punkt ist $P\left(2^{2/3}\,|\,2^{1/3}\right)$.

Für $t=1$ gilt $y'=\dfrac{\dot{y}(1)}{\dot{x}(1)}=\dfrac{3/4}{-3/4}=-1$

4. Ein Kreis vom Radius r rollt auf der x-Achse nach rechts. Die Bahn, die ein Punkt P seines Umfangs beschreibt, heißt **Zykloide**.
Zu Beginn ($t=0$) berühre der Kreis die x-Achse im Ursprung und P befinde sich im Ursprung. Dann gilt für die Koordinaten des nach rechts laufenden Kreismittelpunktes $x_M(t)=r\cdot t$ und $y_M(t)=r$. Dabei bedeutet t der Winkel im Bogenmaß, um den sich der Kreis seit Beginn gedreht hat. Zum Beispiel ist der Kreismittelpunkt für $t=2\pi$ gerade um den Kreisumfang $U=2\pi r$ nach rechts gewandert. Die Bewegung des Punktes P setzt sich dann zusammen aus der Verschiebung nach rechts und einer Kreisbewegung.

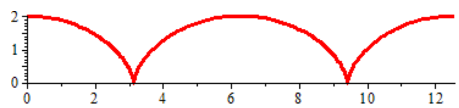
Für die Koordinaten des Punktes P gilt $\begin{cases} x(t)=r\cdot t-r\cdot\sin t \\ y(t)=r-r\cdot\cos t\end{cases}$.



In der Skizze ist der Kreis mit $r=1$ für $t=0$ und $t=2$ gezeichnet.

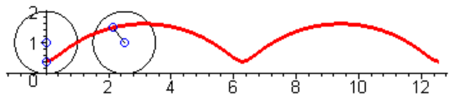
Aufgabe: Bestimmen Sie die Bahngleichung des Punktes Q, der gerade diagonal zu P liegt und skizzieren Sie die Kurve. Hinweis: Es gilt $x(0)=0$ und $y(0)=2r$, bzw. $x(\tfrac{\pi}{2})=r\cdot\tfrac{\pi}{2}+r$ und $y(\tfrac{\pi}{2})=r$.

Für Q gilt $\begin{cases} x(t)=r\cdot t+r\cdot\sin t \\ y(t)=r+r\cdot\cos t\end{cases}$ Schaubild für $0\le t\le 4\pi$

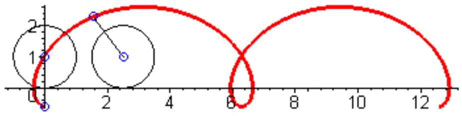


Zusätze:
Der rotierende Punkt P muss nicht notwendig auf dem Kreisumfang liegen. Wenn er vom Kreismittelpunkt den Abstand R hat, dann gilt: $\begin{cases} x(t)=r\cdot t-R\cdot\sin t \\ y(t)=r-R\cdot\cos t\end{cases}$.

1. Für $R < r$ liegt der rotierende Punkt P im Innern des rotierenden Kreises. Dann spricht man von einer *verkürzten Zykloide*.



2. Für $R > r$ liegt der rotierende Punkt P außerhalb des rotierenden Kreises. Dann spricht man von einer *verlängerten Zykloide,* die dann Schleifen enthält.

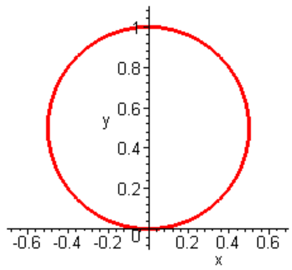


Aufgabe: Im letzten Bild ist $r = 1$ und $R = 1{,}6$. Die gezeichnete Kurve hat mit der y-Achse zwei Punkte gemeinsam. Die Gleichung $x(t) = 1 \cdot t - 1{,}6 \cdot \sin t = 0$ ist erfüllt für $t_1 = 0$ und für $t_2 \approx 1.599347891$. Bestimmen Sie für diese beiden Punkte die Tangentensteigungen. Ergebnis: $y'(t_1) = 0$ bzw. $y'(t_2) \approx 1.529486608$, siehe unten Aufgabe 12.

$$\dot{x}(t) = 1 - 1{,}6\cos(t)\,,\quad \dot{y}(t) = -\sin(t)\,,\quad y'(t) = \frac{-\sin(t)}{1 - 1{,}6\cos(t)}\,.$$

9. Differenziation in Polarform

Durch $r(t) = \sin t$ für $0 \le t < \pi$ wird der abgebildete Kreis beschrieben.



Bestimmen Sie die Tangentensteigung $y' = \dfrac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$.

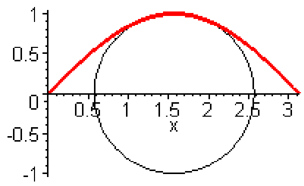
Ergebnis: $y' = \dfrac{2 \cdot \sin t \cdot \cos t}{\cos^2 t - \sin^2 t}$.

Es ist $x(t) = r \cdot \cos t = \sin t \cdot \cos t$, $y(t) = r \cdot \sin t = \sin^2 t$.

Für welche Werte von t verlaufen die Tangenten horizontal oder vertikal?

Horizontale Tangente für $\dot{y}(t) = 0$, d.h. $2 \cdot \sin(t) \cdot \cos(t) = 0$ für $t_1 = 0$ und $t_2 = \pi/2$.
Vertikale Tangente für $\dot{x}(t) = 0$, d.h. $\cos^2(t) - \sin^2(t) = 0$, also $\tan(t) = \pm 1$ mit $t_1 = \pi/4$ und $t_2 = 3\pi/4$.

10. Krümmungsradius und Krümmungsmittelpunkt einer Kurve



Bestimmen Sie den Mittelpunkt M und Radius ρ des Berührkreises an $y = \sin x$ im Kurvenpunkt $\left(\frac{\pi}{2}/1\right)$.

$$x_M = x_0 - f'(x_0) \cdot \frac{1 + f'(x_0)^2}{f''(x_0)} = \frac{\pi}{2}\,,\quad y_M = f(x_0) + \frac{1 + f'(x_0)^2}{f''(x_0)} = 0$$

$$r = \frac{\left(1 + f'(x_0)^2\right)^{3/2}}{\left|f''(x_0)\right|} = 1$$

11. Linearisierung

1. Es sei $f(x) = \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

   Berechnen Sie für $x_0 = 0{,}5$ und $\Delta x = 0{,}1$ die Abweichung $\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x$ und bestimmen Sie damit näherungsweise $f(0{,}4)$ und $f(0{,}6)$. Vergleichen Sie diese Näherungswerte mit den exakten Werten.
   $f(0{,}4) \approx f(0{,}5) + f'(0{,}5) \cdot (-0{,}1) \approx 0{,}408$, $f(0{,}6) \approx f(0{,}5) + f'(0{,}5) \cdot 0{,}1 \approx 0{,}634$.
   Die genaueren Werte sind $f(0{,}4) \approx 0{,}411$, $f(0{,}6) \approx 0{,}637$.

2. Es sei $f(x) = \ln(x)$ und $x_0 = 1$. Bestimmen Sie näherungsweise $\ln(0{,}95)$ und $\ln(1{,}05)$ mit $\Delta x = 0{,}05$.
   $f(0{,}95) \approx f(1) + f'(1) \cdot (-0{,}05) \approx 0 + 1 \cdot (-0{,}05) = -0{,}05$, während $\ln(0{,}95) = -0{,}05129...$.
   $f(1{,}05) \approx f(1) + f'(1) \cdot 0{,}05 \approx 0 + 1 \cdot 0{,}05 = 0{,}05$, während $\ln(1{,}05) = 0{,}04879...$.

12. Newtonsche Iteration

1. Bestimmen Sie die Nullstelle(n) von $f(x) = x^2 - 2x$ mit Hilfe der Newton'schen Iteration. Beginnen Sie einmal mit $x_1 = 1{,}5$, einmal mit $x_1 = 0{,}5$ und einmal mit $x_1 = 1$.

   $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2 - 2x_n}{2x_n - 2}$

   $x_1 = 1{,}5$, $x_2 = 2{,}25$, $x_3 = 2{,}025$, $x_4 = 2{,}000304878$, $x_5 = 2{,}000000046$, …

   $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = -0{,}25$, $x_3 = -0{,}025$, $x_4 = -0{,}00030487805$, $x_5 = -0{,}0000000464611$, …

   $x_1 = 1$ ergibt $x_2 = 1 - \dfrac{1-2}{2-2}$, was nicht möglich ist.

2. Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung $x^3 - x^2 + 1 = 0$. Wählen Sie $x_0 = -1$.
   Bestimmen Sie x_1, x_2, x_3 und x_4.

   $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \dfrac{x_n^3 - x_n^2 + 1}{3x_n^2 - 2x_n} = \dfrac{2x_n^3 - 3x_n^2 - 1}{3x_n^2 - 2x_n}$ ergibt $x_1 = -0{,}8$, $x_2 = -0{,}7568181818$,

   $x_3 = -0{,}7548814745$, $x_4 = -0{,}7548776662$, $x_5 = -0{,}75487766624669276005$ bereits auf 20 Stellen fix!

   $x_8 = -0{,}75487766624669276004950889635852869189460661777279$ bereits auf 50 Stellen fix.

3. Unter der Funktion $\sinh(x)$, gelesen „sinushyperbolicus", versteht man $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, unter $\cosh(x)$, gelesen „cosinushyperbolicus", versteht man $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

   Bestimmen Sie die Lösung von $\sinh(x) = \cos x$, d.h. gesucht ist die Nullstelle von $f(x) = \sinh(x) - \cos x$.
   Wählen Sie $x_1 = 1$.

   $x_{n+1} = x_n - \dfrac{e^{x_n} - e^{-x_n} - 2\cos x_n}{e^{x_n} + e^{-x_n} + 2\sin x_n}$

   $x_1 = 1$, $x_2 = 0{,}7337449599$, $x_3 = 0{,}7036561612$, $x_4 = 0{,}7032907123$, $x_5 = 0.7032906587$ ist fix.

4. In Aufgabe 8.4.2 war die Lösung der Gleichung $x(t) = 1 \cdot t - 1{,}6 \cdot \sin t = 0$ gesucht.
   Verwenden Sie $f(t) = t - 1{,}6 \cdot \sin t$ und wählen Sie einmal $t_0 = 0{,}5$ und einmal $t_0 = 1{,}5$. Berechnen Sie jeweils einige Werte von t_n.

   $t_0 = 0{,}5$, $t_1 = -0{,}1608751506$, $t_2 = -0{,}000\,000\,049664$, $t_3 = 0$ fix

   $t_0 = 1{,}5$, $t_1 = 1{,}608242854$, $t_2 = 1{,}599407574$, $t_3 = 1{,}599347894$. $t_4 = 1.599347891$ fix

5. Die Schaubilder von $f(x) = \sin x$ und $g(x) = \dfrac{1}{x} + c$ für $0 < x < \pi$ sollen sich rechtwinklig schneiden. Bestimmen Sie die Konstante c und den Schnittpunkt S.
   Hinweis: Es sind die beiden Gleichungen zu lösen: (1) $f(x) = g(x)$ und (2) $f'(x) \cdot g'(x) = -1$.

   Die zweite Gleichung $\cos(x) \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -1$ führt auf $h(x) = \cos(x) - x^2 = 0$

   Iteration: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{h(x_n)}{h'(x_n)} = x_n - \dfrac{\cos(x_n) - x_n^2}{-\sin(x_n) - 2x_n} = x_n + \dfrac{\cos(x_n) - x_n^2}{\sin(x_n) + 2x_n}$.

   $x_0 = 1$, $x_1 = 0{,}8382184099$, $x_2 = 0{,}8242418682$, $x_3 = 0{,}8241323190$, $x_4 = 0{,}8241323123$ fix

   Mit Hilfe der ersten Gleichung folgt $c = \sin(x_S) - 1/x_S \approx -0{,}4794386637$.

6. Die Schaubilder der beiden Funktionen $f(x) = 2^x$ und $g(x) = \sqrt{x} + c$ sollen sich berühren. Es sind also die beiden Gleichungen zu lösen: (1) $f(x) = g(x)$ und (2) $f'(x) = g'(x)$.

   Hinweis. Durch logarithmisches Ableiten ergibt sich $f'(x) = 2^x \cdot \ln 2$.

(1) $2^x = \sqrt{x} + c$, (2) $2^x \cdot \ln(2) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Die zweite Gleichung führt auf $h(x) = 2^x \cdot \ln(2) - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 0$.

Iteration: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{h(x_n)}{h'(x_n)} = x_n - \dfrac{2^{x_n} \cdot \ln(2) - \dfrac{1}{2\sqrt{x_n}}}{2^{x_n} \cdot (\ln(2))^2 + \dfrac{1}{4x_n^{3/2}}}$.

$x_0 = 0{,}3$, $x_1 = 0{,}3281627148$, $x_2 = 0{,}3295258717$, $x_3 = 0{,}3295285932$, $x_4 = 0{,}3295285935$ fix

Es folgt $c = 2^{x_S} - \sqrt{x_S} \approx 0{,}6825568957$.

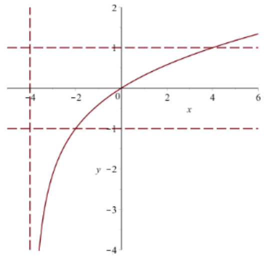
13. Elastizität einer Funktion

1. Es sei $f(x) = x^2 + 1$ und $x = 2$. Dann ist $\varepsilon_f(x) = f'(x) \cdot \dfrac{x}{f(x)} = f'(2) \cdot \dfrac{2}{f(2)} = 4 \cdot \dfrac{2}{5} = 1{,}6$.

   Mit $\Delta x = 0{,}1$ folgt $\dfrac{\frac{\Delta f}{f}}{\frac{\Delta x}{x}} = \dfrac{\frac{f(2{,}1) - f(2)}{f(2)}}{\frac{0{,}1}{2}} = \dfrac{0{,}082}{0{,}05} = 1{,}64$.

   Mit $\Delta x = 0{,}01$ folgt $\dfrac{\frac{\Delta f}{f}}{\frac{\Delta x}{x}} = \dfrac{\frac{f(2{,}01) - f(2)}{f(2)}}{\frac{0{,}01}{2}} = \dfrac{0{,}00802}{0{,}005} = 1{,}604$, was gut mit $\varepsilon = 1{,}6$ übereinstimmt.

2. Mit $f(x) = e^{\sqrt{2x+8}}$ folgt $\varepsilon_f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2x+8}}$ für $x > -4$, siehe Schaubild.

   Aus $\dfrac{|x|}{\sqrt{2x+8}} < 1$ folgt $\dfrac{x^2}{2x+8} < 1$, also $x^2 - 2x - 8 < 0$, d.h. $-2 < x < 4$.

   Aus $\dfrac{|x|}{\sqrt{2x+8}} > 1$ folgt $-4 < x < -2$ oder $x > 4$.

3. Gegeben sind die Preisabsatzfunktion $p(x) = 24 - 2x$ und die Kostenfunktion $K(x) = 0{,}2x^2 + 2x + 11$.
   a. Bei welchem Absatz x und Preis p ist der Gewinn, d.h. der Erlös E, maximal?
   b. Bestimmen Sie die Preiselastizität $\varepsilon_x(p)$ der Nachfrage im Gewinnmaximum.
   c. Bestimmen Sie die Nachfrageelastizität $\varepsilon_E(x)$ des Erlöses im Gewinnmaximum.

   a. Es ist $E(x) = x \cdot p(x) - K(x) = -2{,}2x^2 + 22x - 11$, also $E'(x) = -4{,}4x + 22$ und $E''(x) = -4{,}4 < 0$. Aus $E'(x) = 0$ folgt $x = 5$ und $p(5) = 14$. Der maximale Erlös beträgt $E(5) = 44$.
   b. Aus $p(x) = 24 - 2x$ folgt $x(p) = 12 - 0{,}5p$.

      Und damit $\varepsilon_x(p) = x'(p) \cdot \dfrac{p}{x(p)} = -0{,}5 \cdot \dfrac{14}{5} = -1{,}4$. Somit sinkt bei der Erhöhung des Preises um 1% die Nachfrage um 1,4%.
   c. Für $x = 5$ folgt $\varepsilon_E(x) = E'(x) \cdot \dfrac{x}{Ex)} = (-4{,}4x + 22) \cdot \dfrac{x}{-2{,}2x^2 + 22x - 11} = 0 \cdot \dfrac{5}{44} = 0$. Klar, da wir im Gewinnmaximum sind.

4. Die Nachfragefunktion D eines Gutes in Abhängigkeit des Preises P sei gegeben durch $D(P) = 20 - 0{,}4 \cdot P$, wobei $D > 0$ und $P > 0$ vorausgesetzt wird.
   a. Für welche Preise ist die Nachfrage elastisch bezüglich des Preises? (Hinweis: $|\varepsilon_D(P)| > 1$)
   b. Bei welchem Preis bewirkt eine 2%-ige Preissteigerung einen Umsatzrückgang um 10%?

a. $D > 0$ und $P > 0$ bedeutet, dass $0 < P < 50$ gelten muss.

Aus $\left|\varepsilon_D(P)\right| = \left|D'(P) \cdot \frac{P}{D(P)}\right| = \left|-0,4 \cdot \frac{P}{20 - 0,4P}\right| = 0,4 \cdot \frac{P}{20 - 0,4P} > 1$ folgt $25 < P < 50$.

b. Aus $\varepsilon_D(P) = D'(P) \cdot \frac{P}{D(P)} = -0,4 \cdot \frac{P}{20 - 0,4P} = \frac{-10\%}{+2\%} = -5$ folgt $P = 41,\overline{6}$.

Zweiter Weg: $D(1,02 \cdot P) - D(P) = -0,1 \cdot D(P)$ oder auch $D(1,02 \cdot P) = 0,9 \cdot D(P)$ führt ebenfalls auf $P = 41,\overline{6}$.