Theoretische Informatik I

Übungsblatt 4: Abbildungen

Duale Hochschule Baden-Württemberg – Lörrach
Studiengang Informatik – TIF21

Κ, κ – Kappa | Λ, λ – Lambda | Μ, μ – My

1. In dieser Aufgabe sei

$$M := \{\square, \triangledown, \sharp\}$$
$$N := \{\square, \triangledown, \sharp, *\}.$$

(a) Geben Sie eine Abbildung mit Definitionsbereich M und Bildbereich N an, die injektiv ist.

Lösung:
Wir können die Abbildung

$$\begin{aligned} f : M &\to N \\ \square &\mapsto * \\ \triangledown &\mapsto \square \\ \sharp &\mapsto \triangledown \end{aligned}$$

verwenden.

(b) Geben Sie eine Abbildung mit Definitionsbereich M und Bildbereich N an, die nicht injektiv ist.

Lösung:
Wir können die Abbildung

$$\begin{aligned} g : M &\to N \\ \square &\mapsto * \\ \triangledown &\mapsto * \\ \sharp &\mapsto \triangledown \end{aligned}$$

verwenden.

2. In dieser Aufgabe sei

$$M := \{\square, \triangledown, \sharp, *\}$$
$$N := \{\square, \triangledown, \sharp\}.$$

(a) Geben Sie eine Abbildung mit Definitionsbereich M und Bildbereich N an, die surjektiv ist.

Lösung:
Wir können die Abbildung

$$\begin{aligned} f : M &\to N \\ \square &\mapsto \sharp \\ \triangledown &\mapsto \square \\ \sharp &\mapsto \triangledown \\ * &\mapsto \square \end{aligned}$$

verwenden.

(b) Geben Sie eine Abbildung mit Definitionsbereich M und Bildbereich N an, die nicht surjektiv ist.

Lösung:
Wir können die Abbildung

$$\begin{aligned} g : M &\to N \\ \square &\mapsto \sharp \\ \triangledown &\mapsto \square \\ \sharp &\mapsto \sharp \\ * &\mapsto \square \end{aligned}$$

verwenden.

3. In dieser Aufgabe sei

$$\begin{aligned} f : [0,1] &\to [4,7] \\ x &\mapsto 3 \cdot x + 4. \end{aligned}$$

(a) Zeigen oder widerlegen Sie: f ist injektiv.

Lösung:
Wir wollen zeigen, dass f injektiv ist.
Also müssen wir zeigen, dass für alle $m_1, m_2 \in [0,1]$ gilt:
aus $f(m_1) = f(m_2)$ folgt, dass $m_1 = m_2$.
Seien $a, b \in [0,1]$.
Wir müssen zeigen: aus $f(a) = f(b)$ folgt, dass $a = b$.

- 1. Fall: Es gilt nicht $f(a) = f(b)$.
  Dann gilt: aus $f(a) = f(b)$ folgt, dass $a = b$.
- 2. Fall: Es gilt $f(a) = f(b)$.
  Dann müssen wir zeigen, dass $a = b$ gilt.
  Es gilt $f(a) = f(b)$,
  also $3 \cdot a + 4 = 3 \cdot b + 4$,
  Subtraktion von 4 liefert $3 \cdot a = 3 \cdot b$,
  Multiplikation mit $\frac{1}{3}$ liefert $a = b$.
  Also gilt $a = b$.

In beiden Fällen gilt also: aus $f(a) = f(b)$ folgt, dass $a = b$.
Damit haben wir gezeigt, dass für alle $m_1, m_2 \in [0,1]$ gilt:
aus $f(m_1) = f(m_2)$ folgt, dass $m_1 = m_2$.
Damit ist f injektiv.

(b) Zeigen oder widerlegen Sie: f ist surjektiv.

Lösung:
Wir wollen zeigen, dass f surjektiv ist.
Also müssen wir zeigen, dass es für alle $n \in [4,7]$ ein $m \in [0,1]$ gibt mit $f(m) = n$.
Sei $b \in [4,7]$.
Wir müssen zeigen: es gibt ein $a \in [0,1]$ mit $f(a) = b$.
Es ist $b \in [4,7]$, also ist $b - 4 \in [0,3]$,
also ist $\frac{1}{3} \cdot (b-4) \in [0,1]$, liegt also im Definitionsbereich von f.
Damit dürfen wir $f\left(\frac{1}{3} \cdot (b-4)\right)$ berechnen und erhalten
$f\left(\frac{1}{3} \cdot (b-4)\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot (b-4)\right) + 4 = (b-4) + 4 = b$.
Also gibt es ein $a \in [0,1]$ mit $f(a) = b$, nämlich $a = \frac{1}{3} \cdot (b-4)$.
Damit haben wir gezeigt, dass es für alle $n \in [4,7]$ ein $m \in [0,1]$ gibt mit $f(m) = n$.
Damit ist f surjektiv.

4. Prüfen Sie, ob folgende Mengen gleichmächtig sind. Geben Sie hierzu, sofern möglich, eine bijektive Abbildung zwischen den Mengen an und beweisen Sie die Bijektivität, indem Sie die Injektivität und Surjektivität zeigen. Falls es keine bijektive Abbildung geben kann, begründen Sie, wieso.

   (a) $\mathbb{Z}$ und $\{z \in \mathbb{Z} \mid z \text{ gerade}\}$

Lösung:
Wir können die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\to \{z \in \mathbb{Z} \mid z \text{ gerade}\} \\ z &\mapsto 2 \cdot z \end{aligned}$$

verwenden.
Wir müssen für die Bijektivität sowohl die Injektivität als auch die Surjektivität zeigen.

- Wir wollen zeigen, dass f injektiv ist.
  Also müssen wir zeigen, dass für alle $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ gilt:
  aus $f(m_1) = f(m_2)$ folgt, dass $m_1 = m_2$.

  Seien $a, b \in \mathbb{Z}$.
  Wir müssen zeigen: aus $f(a) = f(b)$ folgt, dass $a = b$.

  - 1. Fall: Es gilt nicht $f(a) = f(b)$.
    Dann gilt: aus $f(a) = f(b)$ folgt, dass $a = b$.
  - 2. Fall: Es gilt $f(a) = f(b)$.
    Dann müssen wir zeigen, dass $a = b$ gilt.
    Es gilt $f(a) = f(b)$,
    also $2 \cdot a = 2 \cdot b$,
    Multiplikation mit $\frac{1}{2}$ liefert $a = b$.
    Also gilt $a = b$.

  In beiden Fällen gilt also: aus $f(a) = f(b)$ folgt, dass $a = b$.

  Damit haben wir gezeigt, dass für alle $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ gilt:
  aus $f(m_1) = f(m_2)$ folgt, dass $m_1 = m_2$.
  Damit ist f injektiv.

- Wir wollen zeigen, dass f surjektiv ist.
  Also müssen wir zeigen, dass es für alle $n \in \{z \in \mathbb{Z} \mid z \text{ gerade}\}$ ein $m \in \mathbb{Z}$ gibt mit $f(m) = n$.

  Sei $b \in \{z \in \mathbb{Z} \mid z \text{ gerade}\}$.
  Wir müssen zeigen: es gibt ein $a \in \mathbb{Z}$ mit $f(a) = b$.

  Es ist $b \in \{z \in \mathbb{Z} \mid z \text{ gerade}\}$, also ist b eine gerade ganze Zahl. Das bedeutet, dass b in $\mathbb{Z}$ durch 2 teilbar ist, also ist $\frac{b}{2} \in \mathbb{Z}$, liegt also im Definitionsbereich von f.

  Damit dürfen wir $f\left(\frac{b}{2}\right)$ berechnen und erhalten
  $f\left(\frac{b}{2}\right) = 2 \cdot \frac{b}{2} = b$.

  Also gibt es ein $a \in \mathbb{Z}$ mit $f(a) = b$, nämlich $a = \frac{b}{2}$.

  Damit haben wir gezeigt, dass es für alle $n \in \{z \in \mathbb{Z} \mid z \text{ gerade}\}$ ein $m \in \mathbb{Z}$ gibt mit $f(m) = n$.
  Damit ist f surjektiv.

(b) $(0,1)$ und $(2,\infty)$

Lösung:
Wir können die Abbildung

$$\begin{aligned} g : (0,1) &\to (2,\infty) \\ r &\mapsto \frac{1}{r} + 1 \end{aligned}$$

verwenden.
Wir müssen für die Bijektivität sowohl die Injektivität als auch die Surjektivität zeigen.

- Wir wollen zeigen, dass g injektiv ist.
  Also müssen wir zeigen, dass für alle $\boldsymbol{m_1}, \boldsymbol{m_2} \in (0,1)$ gilt:
  aus $g(\boldsymbol{m_1}) = g(\boldsymbol{m_2})$ folgt, dass $\boldsymbol{m_1} = \boldsymbol{m_2}$.

  Seien $a, b \in (0,1)$.
  Wir müssen zeigen: aus $g(a) = g(b)$ folgt, dass $a = b$.

  - 1. Fall: Es gilt nicht $g(a) = g(b)$.
    Dann gilt: aus $g(a) = g(b)$ folgt, dass $a = b$.
  - 2. Fall: Es gilt $g(a) = g(b)$.
    Dann müssen wir zeigen, dass $a = b$ gilt.
    Es gilt $g(a) = g(b)$,
    also $\frac{1}{a} + 1 = \frac{1}{b} + 1$,
    Subtraktion von 1 liefert $\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$,
    Multiplikation mit a liefert $1 = \frac{a}{b}$,
    Multiplikation mit b liefert $b = a$.
    Also gilt $a = b$.

  In beiden Fällen gilt also: aus $g(a) = g(b)$ folgt, dass $a = b$.

  Damit haben wir gezeigt, dass für alle $m_1, m_2 \in (0,1)$ gilt:
  aus $g(m_1) = g(m_2)$ folgt, dass $m_1 = m_2$.
  Damit ist g injektiv.

- Wir wollen zeigen, dass g surjektiv ist.
  Also müssen wir zeigen, dass es für alle $\boldsymbol{n} \in (2,\infty)$ ein $\boldsymbol{m} \in (0,1)$ gibt mit $g(\boldsymbol{m}) = \boldsymbol{n}$.

  Sei $b \in (2,\infty)$.
  Wir müssen zeigen: es gibt ein $a \in (0,1)$ mit $g(a) = b$.

  Es ist $b \in (2,\infty)$, also ist $b - 1 \in (1,\infty)$,
  also ist $\frac{1}{b-1} \in (0,1)$, liegt also im Definitionsbereich von g.

  Damit dürfen wir $g\left(\frac{1}{b-1}\right)$ berechnen und erhalten
  $g\left(\frac{1}{b-1}\right) = \frac{1}{\frac{1}{b-1}} + 1 = b - 1 + 1 = b$.

  Also gibt es ein $a \in (0,1)$ mit $g(a) = b$, nämlich $a = \frac{1}{b-1}$.

  Damit haben wir gezeigt, dass es für alle $n \in (2,\infty)$ ein $m \in (0,1)$ gibt mit $f(m) = n$.
  Damit ist g surjektiv.