Theoretische Informatik I

Übungsblatt 2: Relationen

Duale Hochschule Baden-Württemberg – Lörrach
Studiengang Informatik – TIF21

Δ, δ – Delta | Ε, ε – Epsilon | Ζ, ζ – Zeta

1. In dieser Aufgabe sei

$$M := \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Welche Eigenschaften hat

$$R := \{(1,2), (1,4), (2,4), (3,2), (3,4), (3,5), (5,2), (5,3), (5,4)\}$$

als Relation auf M?

Lösung:
R ist

- nicht reflexiv (da $(1,1) \notin R$),
- nicht symmetrisch (da $(1,2) \in R$, aber $(2,1) \notin R$),
- nicht antisymmetrisch (da $(3,5) \in R$ und $(5,3) \in R$, aber $3 \neq 5$),
- nicht transitiv (da $(3,5) \in R$ und $(5,3) \in R$, aber $(3,3) \notin R$),
- nicht total (da $(1,3) \notin R$ und $(3,1) \notin R$),

als Relation auf M.

2. In dieser Aufgabe sei

$$M := \{1, 2, 3, 4\}.$$

(a) Geben Sie eine Relation R_1 über der Menge M an, die genau 5 Elemente enthält.

Lösung:
Wir können

$$R_1 := \{(1,1), (1,3), (3,1), (4,1), (4,4)\}$$

verwenden.

(b) Geben Sie eine Relation R_2 über der Menge M an, die reflexiv ist und die genau 7 Elemente enthält.

Lösung:
Wir können

$$R_2 := \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$$

verwenden.

(c) Geben Sie eine Relation R_3 über der Menge M an, die symmetrisch ist und die genau 7 Elemente enthält.

Lösung:
Wir können

$$R_3 := \{(1,2),(2,1),(1,4),(3,3),(3,4),(4,1),(4,3)\}$$

verwenden.

(d) Geben Sie eine Relation R_4 über der Menge M an, die antisymmetrisch ist und die genau 9 Elemente enthält.

Lösung:
Wir können

$$R_4 := \{(1,1),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,4),(4,4)\}$$

verwenden.

(e) Geben Sie eine Relation R_5 über der Menge M an, die transitiv ist und die genau 10 Elemente enthält.

Lösung:
Wir können

$$R_5 := \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}$$

verwenden.

(f) Geben Sie eine Relation R_6 über der Menge M an, die total ist und die genau 12 Elemente enthält.

Lösung:
Wir können

$$R_6 := \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,1),(3,4),(4,2),(4,4)\}$$

verwenden.

3. In dieser Aufgabe sei

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists z \in \mathbb{N} : y = z \cdot x\}.$$

(a) Geben Sie 3 Elemente aus $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ an, die in R enthalten sind.

Lösung:
Es gilt $(54, 54) \in R$, $(1, 713) \in R$, $(17, 221) \in R$.

(b) Geben Sie 3 Elemente aus $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ an, die nicht in R enthalten sind.

Lösung:
Es gilt $(53, 54) \notin R$, $(8, 4) \notin R$, $(17, 220) \notin R$.

(c) Zeigen oder widerlegen Sie: R ist eine Halbordnung auf $\mathbb{N}$.

Lösung:
Wir wollen zeigen, dass R eine Halbordnung auf $\mathbb{N}$ ist.
Dazu müssen wir die Reflexivität, Antisymmetrie und Transitivität zeigen.

- Wir wollen zeigen, dass R reflexiv ist.
  Also müssen wir zeigen, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt: $(m, m) \in R$.

  Sei $a \in \mathbb{N}$.
  Wir müssen zeigen: $(a, a) \in R$.
  Also zu zeigen: $\exists b \in \mathbb{N}$ mit $a = b \cdot a$.
  Es gilt $1 \in \mathbb{N}$ und $a = 1 \cdot a$, also $\exists b \in \mathbb{N}$ mit $a = b \cdot a$, nämlich $b = 1$.
  Also gilt nach Definition $(a, a) \in R$.

  Damit haben wir gezeigt, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt: $(m, m) \in R$.
  Damit ist R reflexiv.

- Wir wollen zeigen, dass R antisymmetrisch ist.
  Also müssen wir zeigen, dass für alle $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ gilt:
  aus $(m_1, m_2) \in R$ und $(m_2, m_1) \in R$ folgt, dass $m_1 = m_2$.

  Seien $a, b \in \mathbb{N}$.
  Wir müssen zeigen: aus $(a, b) \in R$ und $(b, a) \in R$ folgt, dass $a = b$.

  – 1. Fall: Es gilt nicht $((a, b) \in R$ und $(b, a) \in R)$.
    Dann gilt: aus $(a, b) \in R$ und $(b, a) \in R$ folgt, dass $a = b$.

  – 2. Fall: Es gilt $(a, b) \in R$ und $(b, a) \in R$.
    Dann müssen wir zeigen, dass $a = b$ gilt.
    Aus $(a, b) \in R$ folgt $\exists c_1 \in \mathbb{N}$ mit $b = c_1 \cdot a$ (1).
    Aus $(b, a) \in R$ folgt $\exists c_2 \in \mathbb{N}$ mit $a = c_2 \cdot b$ (2).

    Setzen wir ein, so erhalten wir $a \overset{(2)}{=} c_2 \cdot b \overset{(1)}{=} c_2 \cdot (c_1 \cdot a) = (c_2 \cdot c_1) \cdot a$,
    also $a = (c_2 \cdot c_1) \cdot a$.
    Wenn wir durch a teilen (das dürfen wir, da $a \neq 0$), erhalten wir $1 = c_2 \cdot c_1$.
    Da $c_1, c_2 \in \mathbb{N}$ gilt, muss $c_1 = c_2 = 1$ gelten.

    Damit gilt $a \overset{(2)}{=} c_2 \cdot b = 1 \cdot b = b$.
    Also gilt $a = b$.

  In beiden Fällen gilt also: aus $(a, b) \in R$ und $(b, a) \in R$ folgt, dass $a = b$.

  Damit haben wir gezeigt, dass für alle $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ gilt:
  aus $(m_1, m_2) \in R$ und $(m_2, m_1) \in R$ folgt, dass $m_1 = m_2$.
  Damit ist R antisymmetrisch.

- Wir wollen zeigen, dass R transitiv ist.
  Also müssen wir zeigen, dass für alle $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{N}$ gilt:
  aus $(m_1, m_2) \in R$ und $(m_2, m_3) \in R$ folgt, dass $(m_1, m_3) \in R$.

  Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$.
  Wir müssen zeigen: aus $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$ folgt, dass $(a, c) \in R$.

  - 1. Fall: Es gilt nicht $((a, b) \in R$ und $(b, c) \in R)$.
    Dann gilt: aus $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$ folgt, dass $(a, c) \in R$.
  - 2. Fall: Es gilt $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$.
    Dann müssen wir zeigen, dass $(a, c) \in R$ gilt.
    Aus $(a, b) \in R$ folgt $\exists d_1 \in \mathbb{N}$ mit $b = d_1 \cdot a$ (1).
    Aus $(b, c) \in R$ folgt $\exists d_2 \in \mathbb{N}$ mit $c = d_2 \cdot b$ (2).
    Wir müssen zeigen: $\exists d_3 \in \mathbb{N}$ mit $c = d_3 \cdot a$.

    Setzen wir ein, so erhalten wir $c \overset{(2)}{=} d_2 \cdot b \overset{(1)}{=} d_2 \cdot (d_1 \cdot a) = (d_2 \cdot d_1) \cdot a$,
    also $c = (d_2 \cdot d_1) \cdot a$.
    Da $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$ gilt, gilt außerdem $d_2 \cdot d_1 \in \mathbb{N}$.
    Also $\exists d_3 \in \mathbb{N}$ mit $c = d_3 \cdot a$, nämlich $d_3 = d_2 \cdot d_1$.
    Also gilt $(a, c) \in R$.

  In beiden Fällen gilt also: aus $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$ folgt, dass $(a, c) \in R$.

  Damit haben wir gezeigt, dass für alle $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{N}$ gilt:
  aus $(m_1, m_2) \in R$ und $(m_2, m_3) \in R$ folgt, dass $(m_1, m_3) \in R$.
  Damit ist R transitiv.

(d) Zeigen oder widerlegen Sie: R ist eine Totalordnung auf $\mathbb{N}$.

Lösung:
Nach der Definition einer Totalordnung muss zusätzlich zu den Eigenschaften einer Halbordnung noch Totalität gelten.

Wir wollen widerlegen, dass R total ist.
Also müssen wir zeigen, dass nicht für alle $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ gilt:
$(m_1, m_2) \in R$ oder $(m_2, m_1) \in R$.

- Annahme: $(2, 3) \in R$.
  Dann gilt nach Definition von R: $\exists a_1 \in \mathbb{N}$ mit $3 = a_1 \cdot 2$.
  Dann gilt $a_1 = \frac{3}{2}$, also Widerspruch, da $a_1 \in \mathbb{N}$.
  Damit gilt $(2, 3) \notin R$.

- Annahme: $(3, 2) \in R$.
  Dann gilt nach Definition von R: $\exists a_2 \in \mathbb{N}$ mit $2 = a_2 \cdot 3$.
  Dann gilt $a_2 = \frac{2}{3}$, also Widerspruch, da $a_2 \in \mathbb{N}$.
  Damit gilt $(3, 2) \notin R$.

Also gilt $(2, 3) \notin R$ und $(3, 2) \notin R$.

Damit haben wir gezeigt, dass nicht für alle $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ gilt:
$(m_1, m_2) \in R$ oder $(m_2, m_1) \in R$.
Damit ist R nicht total.

Also ist die Totalität verletzt und damit ist R keine Totalordnung auf $\mathbb{N}$.