1 Elemente der Eigenwerttheorie

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $L : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ eine lineare Abbildung. Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt *Eigenwert* von L, wenn es einen Vektor $\mathbf{v} \in \mathrm{V}$ gibt mit $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, für den $L\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ ist. Der Vektor $\mathbf{v}$ heißt in diesem Falle *Eigenvektor* von L zum Eigenwert λ.

Mit $L : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ ist auch $L - \lambda\,\mathrm{Id} : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ linear (nachrechnen!) und folglich $\mathrm{Kern}\,(L - \lambda\,\mathrm{Id})$ ein *Unterraum* von V, wie jeder Kern einer linearen Abbildung. Natürlich ist $\mathbf{0} \in \mathrm{Kern}\,(L - \lambda\,\mathrm{Id})$. Wenn aber dieser Kern nichttrivial ist, gibt es $\mathbf{v} \in \mathrm{Kern}\,(L - \lambda\,\mathrm{Id})$ mit $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, und diese erfüllen definitionsgemäß $(L - \lambda\,\mathrm{Id})\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$ oder, anders geschrieben, $L\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$: die nichttrivialen Elemente von $\mathrm{Kern}\,(L - \lambda\,\mathrm{Id})$ sind demnach gerade die Eigenvektoren von L zum Eigenwert λ. Daher die Bezeichnung $E_\lambda := \mathrm{Kern}(L - \lambda\,\mathrm{Id})$ als *Eigenraum* von L zum Eigenwert λ. Die Dimension $\dim E_\lambda$ heißt *geometrische Vielfachheit* des Eigenwerts λ. Die geometrische Vielfachheit von λ gibt also an, wieviele linear unabhängige Eigenvektoren L zu diesem Eigenwert hat.

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind stets linear unabhängig. Daher kann $L : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ höchstens $\dim\mathrm{V}$ verschiedene Eigenwerte haben. Wenn $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ alle Eigenwerte von L sind und nun gilt, dass $\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} + \cdots + \dim E_{\lambda_k} = \dim\mathrm{V}$ ist, dann heißt L *diagonalisierbar*. Warum?

Wir wählen zu jedem der Eigenwerte λ_i, $i = 1 \ldots k$, eine Basis $(\mathbf{v}_1^{(i)}, \mathbf{v}_2^{(i)}, \ldots, \mathbf{v}_{n_i}^{(i)})$. Wenn jetzt L diagonalisierbar ist, bildet die Gesamtheit dieser Basen eine Basis von V, denn ein Tupel aus Vektoren aus verschiedenen E_{λ_i} ist ja stets linear unabhängig. Bezüglich jedes der Vektoren $\mathbf{v}_j^{(i)}$ (j-ter Basisvektor des i-ten Eigenraums) gilt nach Konstruktion $L\mathbf{v}_j^{(i)} = \lambda_i\mathbf{v}_j^{(i)}$, die Matrix zu L weist also die folgende Gestalt auf: $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & \mathbf{0} & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & \mathbf{0} & & \lambda_k & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_k \end{pmatrix}$. Wenn umgekehrt eine Matrix diese Gestalt hat, ist jeder ihrer nichtverschwindenden Einträge offenbar ein Eigenwert (zum entsprechenden Einheitsvektor in dieser Basis - "*Die Spalten / ...*"), so dass sich die Dimensionen der Eigenräume zu dimV summieren.

In einem Satz ausgedrückt: $L : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn V eine Basis aus Eigenvektoren von L besitzt. Wie wechselt man auf diese Basis? So wie in der Übung über Basisisomorphismen und im Kapitel über Matrizen, letzter Abschnitt, erklärt. Die Spalten der Matrizen des gesuchten Basisisomorphismus sind gerade die Eigenvektoren von L.

Wie findet man die Eigenvektoren und Eigenwerte? Bedingung ist, siehe oben, dass Kern $(L-\lambda\,\mathrm{Id}) \neq \{\mathbf{0}\}$ ist. Diejenigen λ, für die das der Fall, der Kern also nichttrivial ist, finden wir dementsprechend durch die Determinantenbildung: $\det(L-\lambda\,\mathrm{Id}) \overset{!}{=} 0$. Die Abbildung $p_L : \lambda \mapsto \det(L-\lambda\,\mathrm{Id})$ ist, wie man leicht sieht, ein Polynom vom Grade dimV, genannt *Charakteristisches Polynom* von L. Die (komplexen) Lösungen der Nullstellengleichung $p_L(x) = 0$ sind die Eigenwerte von L. Hier stellt daher der "*Fundamentalsatz der Algebra*" die entscheidende Aussage bereit: *jedes komplexe Polynom positiven Grades besitzt mindestens eine komplexe Nullstelle*. Daher hat jedes $L : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ für einen $\mathbb{C}$-Vektorraum V mindestens einen Eigenwert. Allerdings hat nicht jede lineare Abbildung $M : \mathrm{W} \to \mathrm{W}$ für einen *reellen* Vektorraum einen reellen Eigenwert. Man betrachte zum Beispiel $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ mit dem Charakteristischen Polynom $p_M(x) = x^2 + 1$, das im Reellen keine Nullstelle hat. Aber auch im Komplexen, wo jede lineare Abbildung $L : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ mindestens einen Eigenwert hat, ist nicht jede solche Abbildung diagonalisierbar. Es kann durchaus sein, dass sich die Dimensionen der Eigenräume nicht zur Dimension von V summieren.

Deshalb sind die sogenannten *selbstadjungierten Endomorphismen* Euklidischer Vektorräume interessant. Das sind diejenigen linearen Abbildungen K, die den *Euklidischen* (mit einem

Skalarprodukt ausgestatteten) Vektorraum V in sich selbst abbilden ("Endo-") und zusätzlich die Eigenschaft haben, dass $\langle K\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}, K\mathbf{w}\rangle$ ist. Erinnerung an das Kapitel über Euklidische Vektorräume: die zugehörigen Matrizen sind die, für die $K^{\mathsf{T}} = K$ ist. Eigenvektoren selbstadjungierter Endomorphismen zu verschiedenen Eigenwerten sind dann orthogonal, was man direkt einsehen kann: $\langle \lambda_1\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle = \langle K\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle = \langle \mathbf{v}_1, K\mathbf{v_2}\rangle = \langle \mathbf{v}_1, \lambda_2\mathbf{v}_2\rangle$, woraus folgt $(\lambda_1 - \lambda_2)\cdot\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle = 0$, und weil λ_1 und λ_2 verschieden waren: $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle = 0$, die beiden Eigenvektoren stehen senkrecht aufeinander.

Damit lässt sich (mit vertretbarem Aufwand) zeigen: jeder selbstadjungierte Endomorphismus Euklidischer Vektorräume ist diagonalisierbar. Es gibt dann sogar eine *Orthonormalbasis* des Euklidischen Vektorraums, bezüglich derer der Endomorphismus Diagonalgestalt hat.