Folgen

Definition: Unter einer **reellen Zahlenfolge** versteht man eine Funktion, die jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine reelle Zahl zuordnet. Statt $f(n)$ schreibt man meist a_n mit $n \in \{1,2,3,\ldots\} = \mathbb{N}$ oder $n \in \{0,1,2,3,\ldots\} = \mathbb{N}_0$.

Beispiele:

1. Explizite Definition einer Zahlenfolge

a. $a_n = \dfrac{6n+7}{3n+4}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $a_1 = \frac{13}{7} \approx 1{,}8571$, $a_2 = \frac{19}{10} = 1{,}9$, $a_3 = \frac{25}{13} \approx 1{,}9231$,
$a_4 = \frac{31}{16} = 1{,}9375$, $a_5 = \frac{37}{19} \approx 1{,}9474$, $a_6 = \frac{43}{22} \approx 1{,}9545$, …

b. $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $b_1 = 2$, $b_2 = \frac{9}{4} = 2{,}25$, $b_3 = \frac{64}{27} \approx 2{,}3704$, $b_4 = \frac{625}{256} \approx 2{,}4414$,
$b_5 = \frac{7776}{3125} \approx 2{,}4883$, $b_6 = \frac{117649}{46656} \approx 2{,}5216$, …

c. $c_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $c_1 = 4$, $c_2 = \frac{27}{8} = 3{,}375$, $c_3 = \frac{256}{81} \approx 3{,}1605$,
$c_4 = \frac{3125}{1024} \approx 3{,}0518$, $c_5 = \frac{46656}{15625} \approx 2{,}9860$, $c_6 = \frac{823543}{279936} \approx 2{,}9419$, …

d. $d_n = c_n - b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}-1\right) = \frac{1}{n} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $d_1 = 2$,
$d_2 = \frac{9}{8} = 1{,}125$, $d_3 = \frac{64}{81} \approx 0{,}7901$, $d_4 = \frac{625}{1024} \approx 0{,}6104$, …, $d_{10} = \frac{25937424601}{100000000000} \approx 0{,}2594$, $d_{1000} \approx 0{,}0027$

2. Rekursive Definition einer Zahlenfolge

a. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + \dfrac{1}{a_n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $a_2 = \frac{3}{2} = 1{,}5$, $a_3 = \frac{17}{12} \approx 1{,}416667$, $a_4 = \frac{577}{408} = 1{,}414216$,
$a_5 = \frac{665857}{470832} \approx 1{,}41421356237$, …. Die 12 angegebenen Ziffern von a_5 stimmen mit $\sqrt{2}$ überein.

b. $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + 3$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $a_2 = 5$, $a_3 = 8$, $a_4 = 11$, …

c. $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n \cdot 1{,}1$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $a_2 = 2{,}2$, $a_3 = 2{,}42$, $a_4 = 2{,}662$, …

Definition: Eine reelle Zahlenfolge a_n, $n \in \mathbb{N}$, heißt **arithmetische Folge**, wenn es eine reelle Zahl d gibt mit $\boxed{a_{n+1} - a_n = d}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. d ist *die konstante Differenz*.

Folgerung: Für eine arithmetische Folge gilt $\boxed{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel: $a_n = -3 + 2n$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $a_{n+1} - a_n = -3 + 2(n+1) - (-3+2n) = 2$ konstant.
Wegen $a_1 = -1$ folgt umgekehrt $a_n = a_1 + (n-1)d = -1 + (n-1) \cdot 2 = -3 + 2n$.

Definition: Eine reelle Zahlenfolge a_n, $n \in \mathbb{N}$, heißt **geometrische Folge**, wenn es ein $q \in \mathbb{R}$ gibt mit $\boxed{\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. q ist *der konstante Quotient*.

Folgerung: Für eine geometrische Folge gilt $\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel: Ein Kapital $K_0 = 1000€$ wird 5 Jahre lang zu 4% verzinst. Auf welchen Betrag ist das Kapital dann einschließlich Zinseszins angewachsen?
$K_5 = 1000€ \cdot 1{,}04^5 = 1\,216{,}65€$. $K_n = 1000 \cdot 1{,}04^n$ ist eine geometrische Folge mit dem Quotienten $q = \dfrac{K_{n+1}}{K_n} = 1{,}04$.

3. Nullfolgen

Definition: Eine reelle Zahlenfolge a_n, $n \in \mathbb{N}$, heißt **Nullfolge**, wenn es zu jedem (noch so kleinen) $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon)$ gibt mit $|a_n| < \varepsilon$ für alle $n \ge n_0$.

Beispiel 1: $a_n = \frac{2}{3n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Aus $|a_n| = \left|\frac{2}{3n-1}\right| = \frac{2}{3n-1} < \varepsilon$ folgt $n > \frac{2+\varepsilon}{3\varepsilon}$. n_0 ist dann die auf $\frac{2+\varepsilon}{3\varepsilon}$ folgende natürliche Zahl.

ε	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$(2+\varepsilon)/(3\varepsilon)$	1	7	67	667	6667
n_0	2	8	68	668	6668

Man erkennt, dass n_0 immer größer wird, je kleiner ε gewählt wird.

Beispiel 2: $a_n = (-0{,}9)^n$. Aus $|a_n| = |(-0{,}9)^n| = 0{,}9^n < \varepsilon$ folgt $n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln 0{,}9}$. n_0 ist dann die auf $\frac{\ln \varepsilon}{\ln 0{,}9}$ folgende natürliche Zahl.

ε	1	0,1		0,01	0,001	0,0001
$\ln \varepsilon / \ln 0{,}9$	0	$\approx 21{,}9$		$\approx 43{,}7$	$\approx 65{,}6$	$\approx 87{,}4$
n_0	1	22		44	66	88

Satz: Summe, Differenz und Produkt von Nullfolgen sind wieder Nullfolgen.

Über den Quotienten zweier Nullfolgen lässt sich keine allgemeine Aussage machen:

Beispiel: $a_n = \frac{1}{n}$ und $b_n = \frac{1}{n^2}$ sind beide Nullfolgen. $\frac{a_n}{b_n} = n$ ist divergent, also keine Nullfolge, $\frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{n}$ ist eine Nullfolge, $\frac{a_n}{a_n} = 1$ ist keine Nullfolge.

4. Konvergente Folgen

Definition: Eine reelle Zahlenfolge a_n, $n \in \mathbb{N}$, heißt **konvergent** mit dem **Grenzwert a**, wenn die Folge $a_n - a$ eine Nullfolge ist, d.h. wenn es zu jedem (noch so kleinen) $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon)$ gibt mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Eine nicht konvergente Folge heißt **divergent**.

Man schreibt: $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = a}$. Das heißt: Diejenige Zahl, gegen die a_n strebt, ist a.

Beispiel 1: $a_n = \frac{6n+7}{3n+4}$, $n \in \mathbb{N}$. Die Umformungen

$$a_n = \frac{6n+7}{3n+4} = \frac{6+\frac{7}{n}}{3+\frac{4}{n}} \to \frac{6}{3} = 2 \text{ für } n \to \infty \quad \text{oder} \quad a_n = \frac{6n+7}{3n+4} = 2 - \frac{1}{3n+4} \to 2 \text{ für } n \to \infty$$

zeigen, dass der Grenzwert $a = 2$ ist.
Die zweite Darstellung erhält man durch **Polynomdivision**.
Und nach der Definition: Aus $|a_n - a| = \left|\frac{6n+7}{3n+4} - 2\right| = \left|-\frac{1}{3n+4}\right| = \frac{1}{3n+4} < \varepsilon$ folgt $n > \frac{1-4\varepsilon}{3\varepsilon}$.

n_0 ist dann die auf $\frac{1-4\varepsilon}{3\varepsilon}$ folgende natürliche Zahl.

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001
n_0	3	33	333	3333

Man erkennt, dass n_0 immer größer wird, je kleiner ε gewählt wird.

Beispiel 2: $a_n = \frac{2n^2-3n+1}{3n^2+6n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Für $n \to \infty$ folgt (Zweite Darstellung durch **Polynomdivision**).

$$a_n = \frac{2n^2-3n+1}{3n^2+6n-1} = \frac{2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{6}{n}-\frac{1}{n^2}} \to \frac{2}{3} \quad \text{oder} \quad a_n = \frac{2n^2-3n+1}{3n^2+6n-1} = \frac{2}{3} + \frac{-7n+\frac{5}{3}}{3n^2+6n-1} \to \frac{2}{3}.$$

Satz: Eine Folge besitzt höchstens einen Grenzwert.

Beweis: Es seien a und b zwei Grenzwerte der Folge a_n und ε eine beliebig kleine positive Zahl. Dann gibt es ein n_0 mit $|a_n - a| < \varepsilon$ und $|a_n - b| < \varepsilon$ für alle $n \ge n_0$, so dass nach der Dreiecksungleichung $|a \pm b| \le |a| + |b|$ gilt:

$|a-b| = |(a_n - b) - (a_n - a)| \le |a_n - b| + |a_n - a| \le \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$. Und damit ist auch $|a-b|$ beliebig klein, also muss $a = b$ sein. q.e.d.

Nachweis der Dreiecksungleichung: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$|a+b|^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = |a|^2 + 2ab + |b|^2 \le |a|^2 + 2|a|\cdot|b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2$, also $|a+b| \le |a| + |b|$.

Das Gleichheitszeichen gilt, falls $a \cdot b \ge 0$ gilt.

Satz: Summe, Differenz und Produkt von konvergenten Folgen sind wieder konvergente Folgen und es gilt:
Wenn $\lim\limits_{a\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{a\to\infty} b_n = b$, dann $\lim\limits_{a\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$, usw.

Falls alle $b_n \ne 0$ und $b \ne 0$ ist, dann gilt auch $\lim\limits_{a\to\infty}(a_n / b_n) = a / b$.

5. Monotone Folgen

Definition: Ein reelle Zahlenfolge a_n heißt **monoton steigend (zunehmend)** bzw. **fallend (abnehmend)**, wenn $a_n \le a_{n+1}$ bzw. $a_n \ge a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Diese beiden Bedingungen lassen sich auch umformen in $\boxed{a_{n+1} - a_n \ge 0}$ bzw.

$\boxed{a_{n+1} - a_n \le 0}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wenn die Zeichen $\le$ bzw. $\ge$ durch die Zeichen $<$ bzw. $>$ ersetzt werden können, spricht man von **strenger Monotonie**.

Beispiel 1: Es sei $a_n = \dfrac{6n+7}{3n+4}$. Dann folgt

$$a_{n+1} - a_n = \frac{6(n+1)+7}{3(n+1)+4} - \frac{6n+7}{3n+4} = \frac{6n+13}{3n+7} - \frac{6n+7}{3n+4} = \frac{3}{(3n+7)(3n+4)} > 0$$

, d.h. die Folge a_n ist streng monoton steigend.

Beispiel 2: Es sei $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Dann folgt

$$a_{n+1} - a_n = \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right) - \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \frac{\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right)\cdot\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}\right)}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < 0$$

, da der erste Nenner größer als der zweite ist.

Somit ist a_n streng monoton fallend.

Oder auch einfacher: $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$. Und je größer n ist, desto kleiner ist a_n und a_n ist eine Nullfolge.

6. Beschränkte Folgen

Definition: Eine reelle Zahlenfolge a_n heißt
nach **unten beschränkt**, wenn es eine reelle Zahl s gibt mit $s \le a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
nach **oben beschränkt**, wenn es eine reelle Zahl S gibt mit $a_n \le S$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
beschränkt, wenn sie nach unten und nach oben beschränk ist.

Beispiel: Es sei $a_n = \dfrac{6n+7}{3n+4}$.

Wegen $0 < a_n$ ist $s = 0$ eine untere Schranke. Da a_n streng monoton steigend ist, gibt es eine größte untere Schranke (auch Infimum genannt) $s = a_1 = \frac{13}{7}$.

Wegen $a_n = \frac{6n+7}{3n+4} = 2 - \frac{1}{3n+4}$ ist $S = 2$ die kleinste obere Schranke (auch Supremum genannt. Insgesamt folgt $\frac{13}{7} \le \frac{6n+7}{3n+4} < 2$.

Satz: Das Produkt aus einer Nullfolge und einer beschränkten Folge ist wieder eine Nullfolge.

Beweis: Es sei a_n eine Nullfolge und b_n eine beschränkte Folge mit $|b_n| \le S$. Dann gilt $|a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \le \varepsilon \cdot S$ für alle $n \ge n_0$.

Satz: Jede konvergente Folge ist beschränkt.
Dazu äquivalent: Eine nicht beschränkte Folge ist nicht konvergent.

Beweis: Es sei a_n die konvergente Folge mit dem Grenzwert a.
Dann gilt $|a_n| = |(a_n - a) + a| \le |a_n - a| + |a|$. Und $a_n - a$ ist als Nullfolge beschränkt.

7. **Zwei wichtige Sätze** (ohne Beweis)
   1. Eine monoton steigende und nach oben beschränkte Folge ist konvergent.
   2. Eine monoton fallende und nach unten beschränkte Folge ist konvergent.

Das Beweisverfahren der vollständigen Induktion

Gegeben ist eine unendliche Folge von Aussagen A_1, A_2, A_3, ..., die alle bewiesen werden sollen.

Verfahren: Schritt 1 (Induktionsanfang): Man beweist die Aussage A_1
Schritt 2 (Induktionsschritt): Man zeigt die Implikation $A_n \Rightarrow A_{n+1}$ für allgemeines $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung: Bei Schritt 2 wird nicht gezeigt, dass A_n gilt, sondern, dass A_{n+1} gilt, wenn man A_n annimmt. Beispielsweise gilt: Die Implikation „Es regnet $\Rightarrow$ Die Straße ist nass" gilt unabhängig davon, ob es gerade regnet oder nicht. Es wird nicht behauptet, dass es regnet. Nur eben, wenn es regnet, dann ist die Straße nass.

Beispiel 1: $1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, bzw. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Schritt 1: $n = 1$: $1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$, und das stimmt.

Schritt 2: Zeige für allgemeines $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \text{Q.e.d.}$$

Beispiel 2: $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + ... + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, bzw. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(3i-2)(3i+1)} = \frac{n}{3n+1}$

Schritt 1: $n = 1$: $\frac{1}{1\cdot 4} = \frac{1}{3\cdot 1+1}$, und das stimmt.

Schritt 2: Zeige für allgemeines $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(3i-2)(3i+1)} = \frac{n}{3n+1} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(3i-2)(3i+1)} = \frac{n+1}{3n+4}$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(3i-2)(3i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(3i-2)(3i+1)} + \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{n}{3n+1} + \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} =$$

$$\frac{n(3n+4)+1}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{3n^2+4n+1}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{(3n+1)(n+1)}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{n+1}{3n+4} \quad \text{Q.e.d.}$$

Beispiel 3: 9 ist ein Teiler von $10^n - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Schritt 1: $n = 0$: 9 ist wirklich ein Teiler von $10^0 - 1 = 1 - 1 = 0$.

Schritt 2: Zeige für allgemeines $n \in \mathbb{N}_0$: 9 ist ein Teiler von $10^n - 1 \Rightarrow$ 9 ist ein Teiler von $10^{n+1} - 1$

$10^{n+1} - 1 = 10 \cdot 10^n - 1 = 10 \cdot (10^n - 1) + 9$. Wenn nun 9 ein Teiler von $10^n - 1$ ist, dann auch von der Summe $10 \cdot (10^n - 1) + 9$, da beide Summanden durch 9 teilbar sind. Q.e.d.

Beispiel 4: Für alle natürliche Zahlen n mit $n \geq 3$ gilt $2n + 1 < 2^n$.

Schritt 1: $n = 3$: $6 + 1 < 2^3$ stimmt.

Schritt 2: Zeige für allgemeines $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$: $2n + 1 < 2^n \Rightarrow 2(n+1) + 1 < 2^{n+1}$.

$$2(n+1) + 1 = (2n+1) + 2 < 2^n + 2 < 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} \quad \text{Q.e.d.}$$

Beispiel 5: Die Folge a_n ist definiert durch $a_1 = \frac{1}{2}$ und $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2}{3}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass $\frac{1}{2} \leq a_n < 1$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie, dass a_n streng monoton steigend ist. Somit ist a_n konvergent.

Bestimmen Sie den Grenzwert a von a_n.

Schritt 1: $\frac{1}{2} \leq a_n$. ① $\frac{1}{2} \leq a_1$ gilt nach Voraussetzung.

② Wenn $\frac{1}{2} \leq a_n$, dann gilt $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2}{3} \geq \frac{\frac{1}{4} + 2}{3} = \frac{3}{4} > \frac{1}{2}$

Schritt 1: $a_n < 1$. ① $a_1 = \frac{1}{2} < 1$ gilt nach Voraussetzung.

② Wenn $a_n < 1$, dann gilt $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2}{3} < \frac{1+2}{3} = 1$.

Es gilt $a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2 + 2}{3} - a_n = \frac{a_n^2 - 3a_n + 2}{3} = \frac{\left(a_n - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}{3} > \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}}{3} = 0$, da $\frac{1}{2} \leq a_n < 1$ gilt.

Es sei a der Grenzwert der Folge a_n. Dann folgt aus $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2}{3}$ die Beziehung $\lim\limits_{n \to \infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n^2 + 2}{3}$,

d.h. $a = \frac{a^2 + 2}{3}$ mit $a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$. Dies ergibt die Gleichung $a^2 - 3a + 2 = 0$ mit den Lösungen 1 und 2. Wegen $a_n < 1$ scheidet $a = 2$ aus. Somit ist $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1$.

Folglich ist $a_1 = \frac{1}{2}$ die größte untere Schranke (Infimum) und $a = 1$ die kleinste obere Schranke (Supremum).

Reihen

Definition: Zu jeder reellen Zahlenfolge a_n mit $n \in \mathbb{N}$ kann die Folge der **Partial-** oder **Teilsummen** $\boxed{s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i}$ gebildet werden. Wenn die Folge s_n für $n \to \infty$ gegen einen Grenzwert s konvergiert, so sagt man, dass die **unendliche Reihe** $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ **konvergiert** und den **Wert** oder die **Summe** s hat: $\boxed{\sum_{i=1}^{\infty} a_i = s}$.

Andernfalls heißt die unendliche Reihe **divergent**.

Beispiel 1: Es sei $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$, $n \in \mathbb{N}$, eine arithmetische Folge. Dann gilt für die **arithmetische Reihe** $\boxed{s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}\cdot(a_1 + a_n)}$. Denn es gilt

$$\begin{array}{lcccccccc}
s_n = & a_1 & + & (a_1+d) & + \ldots + & a_1+(n-2)\cdot d & + & a_1+(n-1)\cdot d & \\
s_n = & a_1+(n-1)\cdot d & + & a_1+(n-2)\cdot d & + \ldots + & (a_1+d) & + & a_1 & \\
\hline
2s_n = & (a_1+a_n) & + & (a_1+a_n) & + \ldots + & (a_1+a_n) & + & (a_1+a_n) & = n\cdot(a_1+a_n)
\end{array}$$

und daraus folgt die Behauptung.
Beispiele:

1. $1+2+3+\ldots+n = \frac{n}{2}\cdot(1+n) = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$. Z.B. $1+2+3+\ldots+100 = \frac{100}{2}\cdot(1+100) = 5050$.
2. Bilden Sie die Summe aller durch 7 teilbaren dreistelligen Zahlen:
   Es ist $a_1 = 105$. Aus $a_n = 994 = a_1 + (n-1)\cdot d = 105 + (n-1)\cdot 7$ folgt $n = 128$.
   Also gilt $s_{128} = \frac{128}{2}\cdot(105+994) = 70336$.

Satz: Die unendliche arithmetische Reihe ist nur für $a_1 = 0$ und $d = 0$ konvergent.

Beispiel 2: Es sei $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, eine geometrische Folge. Dann gilt für die **geometrische Reihe** $\boxed{s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_1\cdot q^{n-1} = a_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q} = a_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}}$, sofern $q \neq 1$ ist. Denn es gilt

$$\begin{array}{lccccccc}
s_n = & a_1 + & a_1\cdot q + & a_1\cdot q^2 + & \ldots + & a_1\cdot q^{n-2} + & a_1\cdot q^{n-1} & \\
q\cdot s_n = & & a_1\cdot q + & a_1\cdot q^2 + & \ldots + & a_1\cdot q^{n-2} + & a_1\cdot q^{n-1} & + a_1\cdot q^n \\
\hline
\end{array}$$

$(1-q)\cdot s_n = a_1 - a_1 q^n$, und daraus folgt die Behauptung.

Speziell für $a_1 = 1$: $\boxed{s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{q^n-1}{q-1}}$ sofern $q \neq 1$.

Für $q = 1$ ist $s_n = n\cdot a_1$.

Beispiele zur geometrischen Reihe:

1. Zinsen

a. Jemand bezahlt jährlich einen bestimmten Betrag r (Rate) auf ein Konto ein. Welcher Betrag hat sich nach n Jahren bei einem konstanten Jahreszins von p% angesammelt?
Wenn ein Betrag r mit p% verzinst wird, so ist er am Ende des Jahres angewachsen auf
$r + r\cdot\frac{p}{100} = r\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right) = r\cdot q$ mit $q = 1+\frac{p}{100}$.

a1. <u>Vorschüssige Zahlung:</u> Zahlung am Jahresbeginn.
Die 1. Zahlung wächst in n Jahren auf $r\cdot q^n$
Die 2. Zahlung wächst in $n-1$ Jahren auf $r\cdot q^{n-1}$ ...
Die letzte Zahlung (n-te Zahlung) wächst im letzten Jahr auf $r\cdot q$.
Nach n Jahren ist dann das Vermögen angewachsen auf
$\boxed{K_n = r\cdot q + r\cdot q^2 + \ldots + r\cdot q^n = r\cdot q\cdot\left(1+q+\ldots+q^{n-1}\right) = r\cdot q\cdot\frac{q^n-1}{q-1}}$.

a2. <u>Nachschüssige Zahlung:</u> Zahlung am Jahresende.
Die 1. Zahlung wächst in $n-1$ Jahren auf $r\cdot q^{n-1}$
Die 2. Zahlung wächst in $n-2$ Jahren auf $r\cdot q^{n-2}$

...
Die letzte Zahlung (n-te Zahlung) wird gar nicht mehr verzinst.
Nach n Jahren ist dann das Vermögen angewachsen auf

$$\boxed{K_n = r + r\cdot q + r\cdot q^2 + \ldots + r\cdot q^{n-1} = r\cdot\left(1+q+\ldots+q^{n-1}\right) = r\cdot\frac{q^n-1}{q-1}}.$$

Zahlenbeispiel: Jemand zahlt zu Beginn eines Jahres 4000€ ein und 10 Jahre lang am Jahresende jeweils 500€. Der Zinssatz beträgt 4%. Dann hat er am Ende der 10 Jahre angespart:

$$K_{10} = 4000€\cdot 1{,}04^{10} + 500€\cdot\frac{1{,}04^{10}-1}{1{,}04-1} = 11.924{,}03€\,.$$

2. Rente

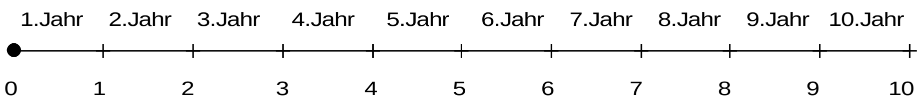
Jemand bekommt über n Jahre regelmäßig am Anfang oder Ende eines Jahres eine Rente r ausbezahlt. Er kann sich statt dessen auch mit einer einmaligen Auszahlung des Betrages b (Ablösungssumme, Tilgungssumme) abfinden lassen. Wie hoch muss b sein, wenn man einen Zinssatz von p% annimmt?

Der einmalig bezahlte Betrag ist durch Zinseszins in n Jahren auf $b\cdot q^n$ angewachsen.

Die Rentenzahlungen sind in n Jahren auf $r\cdot q\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$ (vorschüssig) bzw. $r\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$ (nachschüssig) angewachsen. Also gilt

$\boxed{b\cdot q^n = r\cdot q\cdot\frac{q^n-1}{q-1}}$ vorschüssig bzw. $\boxed{b\cdot q^n = r\cdot\frac{q^n-1}{q-1}}$ nachschüssig.

Zahlenbeispiel 1: Jemand hat einen Kredit von 10.000€ mit einer Laufzeit von 10 Jahren bei 10% Jahreszins aufgenommen. Welche Rate r ist am Ende jedes Jahres zurückzuzahlen?



In den 10 Jahren wächst der Kredit $b = 10.000€$ durch Zinseszins auf $b\cdot q^{10}$ an.

Die 10 nachschüssigen Raten r ergeben in 10 Jahren $r\cdot q^9 + r\cdot q^8 + \ldots + r = r\cdot\frac{q^{10}-1}{q-1}$.

Diese beiden Beträge müssen gleich sein: $b\cdot q^{10} = r\cdot\frac{q^{10}-1}{q-1}$.

Es folgt $r = b\cdot q^{10}\cdot\frac{q-1}{q^{10}-1} = 10000€\cdot 1{,}1^{10}\cdot\frac{1{,}1-1}{1{,}1^{10}-1} = 1.627{,}45€$.

Zahlenbeispiel 2: Mit welcher Barzahlung b kann eine Jahresrente von r = 20.000€, die für 10 Jahre gewährt wird, bei 4% abgelöst werden?

2a. Die Rente werde jeweils zu Beginn eines Jahres ausbezahlt, die letzte zu Beginn des 10. Jahres. Dann summieren sich die 10 Raten bis zum Zeitpunkt der letzten Rate zu $r\cdot q^9 + r\cdot q^8 + \ldots + r = r\cdot\frac{q^{10}-1}{q-1}$. Und dies muss gleich $b\cdot q^9$ sein.

Es folgt $b = \frac{r}{q^9}\cdot\frac{q^{10}-1}{q-1} = 168.706{,}63€$.

2b. Die Rente werde jeweils am Ende eines Jahres ausbezahlt, die letzte am Ende des 10. Jahres. Dann summieren sich die 10 Raten bis zum Zeitpunkt der letzten Rate auf $r\cdot q^9 + r\cdot q^8 + \ldots + r = r\cdot\frac{q^{10}-1}{q-1}$. Und dies muss gleich $b\cdot q^{10}$ sein, da b 10 Jahre lang verzinst wird.

Es folgt $b = \frac{r}{q^{10}} \cdot \frac{q^{10}-1}{q-1} = 162.217{,}92€$.

Zahlenbeispiel 3a: Jemand hat ein Vermögen von b = 20.000€, das zu p% = 4% verzinst wird. ***Zu Beginn*** jedes Jahres werden r = 1.000€ abgehoben. Nach wie viel (n) Jahren ist das Vermögen aufgebraucht?

Vermögen zu Beginn des 1. Jahres: $b - r$

Vermögen zu Beginn des 2. Jahres: $(b-r)\cdot q - r = b\cdot q - r\cdot q - r$

Vermögen zu Beginn des 3. Jahres: $(b\cdot q - r\cdot q - r)\cdot q - r = b\cdot q^2 - r\cdot q^2 - r\cdot q - r$

Vermögen zu Beginn d. 4. Jahres: $(b\cdot q^2 - r\cdot q^2 - r\cdot q - r)\cdot q - r = b\cdot q^3 - r\cdot q^3 - r\cdot q^2 - r\cdot q - r$

Vermögen zu Beginn des n. Jahres: $b\cdot q^{n-1} - r\cdot q^{n-1} - r\cdot q^{n-2} - \ldots - r = b\cdot q^{n-1} - r\cdot \frac{q^n-1}{q-1}$.

Mit den gegebenen Zahlen folgt: Zu Beginn des 37. Jahres ist $b\cdot q^{36} - r\cdot \frac{q^{37}-1}{q-1} = 376{,}40€$.

Zahlenbeispiel 3b: Jemand hat ein Vermögen von b = 20.000€, das zu p% = 4% verzinst wird. ***Am Ende*** jedes Jahres werden r = 1.000€ abgehoben. Nach wie viel (n) Jahren ist das Vermögen aufgebraucht?

Vermögen zu Beginn des 1. Jahres: b

Vermögen zu Beginn des 2. Jahres: $b\cdot q - r$

Vermögen zu Beginn des 3. Jahres: $(b\cdot q - r)\cdot q - r = b\cdot q^2 - r\cdot q - r$

Vermögen zu Beginn des 4. Jahres: $(b\cdot q^2 - r\cdot q - r)\cdot q - r = b\cdot q^3 - r\cdot q^2 - r\cdot q - r$

Vermögen zu Beginn des n. Jahres: $b\cdot q^{n-1} - r\cdot q^{n-2} - r\cdot q^{n-3} - \ldots - r = b\cdot q^{n-1} - r\cdot \frac{q^{n-1}-1}{q-1}$.

Mit den gegebenen Zahlen folgt: Zu Beginn des 42. Jahres ist $b\cdot q^{41} - r\cdot \frac{q^{41}-1}{q-1} = 34{,}69€$.

Satz: Die **unendliche geometrische Reihe** $\sum_{i=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1}$ mit $a_1 \neq 0$ ist genau dann konvergent, wenn $|q| < 1$, andernfalls divergent. Für $|q| < 1$ gilt $\sum_{i=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1} = \lim_{n\to\infty} = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \cdot \frac{1}{1-q}$.

Beispiele:

1. $\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2}\cdot\left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$,

also $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i = \lim_{n\to\infty} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$. Dabei ist $a_1 = \frac{1}{2}$ und $q = \frac{1}{2}$.

2. Stellen Sie die Periode $0{,}\bar{1}$ als Bruch dar: $0{,}\bar{1} = 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + \ldots = 0{,}1\cdot\frac{1}{1-0{,}1} = \frac{1}{9}$.

mit $a_1 = q = 0{,}1$.

Oder so: $x = 0{,}11111\ldots$, $10\cdot x = 1{,}11111\ldots$ und durch Differenzbildung: $9\cdot x = 1$.

3. Bestimmen Sie $0{,}\bar{1}_2$ im Zweiersystem:

$x = 0{,}11111\ldots_2$, $10_2 \cdot x = 1{,}11111\ldots_2$ und durch Differenzbildung $x = 1_2 = 1$.

Oder wie in Beispiel 1: $\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1 = 1_2$.

Beispiel 4: Die **harmonische Reihe** $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ ist divergent! Dies sieht man so ein:

$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}\right) + \ldots > 1 + \frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{8} + 8\cdot\frac{1}{16} + \ldots$ ist divergent, also auch die harmonische Reihe.

Zusatz: Für die allgemeine harmonische Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^s}$ ist konvergent für $s>1$ und divergent für $s\le 1$. Z.B gilt $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}=\frac{\pi^2}{6}$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^4}=\frac{\pi^4}{90}$. Euler konnte sogar zeigen, dass $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{p_i}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\ldots$ divergiert, wobei p_i alle Primzahlen sind. Dagegen konvergiert die Summe der Kehrwerte aller Primzahlzwillinge

$$\sum_{p,p+2\,\text{prim}}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2}\right)=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{17}+\frac{1}{19}\right)+\left(\frac{1}{29}+\frac{1}{31}\right)+\left(\frac{1}{41}+\frac{1}{43}\right)+\left(\frac{1}{59}+\frac{1}{61}\right)+\ldots$$

Die Potenzreihenentwicklung einer Funktion

Definition: Eine Reihe der Gestalt $f(x)=a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+a_3\cdot x^3+a_4\cdot x^4+a_5\cdot x^5+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\cdot x^n$ heißt **Potenzreihe**.

Satz: Zu jeder Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\cdot x^n$ gibt es eine positive Zahl $r\in\mathbb{R}$, genannt **Konvergenzradius**, mit

1. Die Potenzreihe **konvergiert** für alle x mit $|x|<r$ und **divergiert** für alle x mit $|x|>r$.
2. Die beiden Fälle $x=\pm r$ müssen gesondert untersucht werden.
3. Es gilt $\boxed{r=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}$, sofern alle Koeffizienten $a_n\neq 0$ sind. Ohne Beweis!

Bemerkung: $|x|<r\Leftrightarrow -r<x<r$ bzw. $|x|>r\Leftrightarrow(x<-r$ oder $x>r)$

Beispiel: Für $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}\cdot x^n$ gilt $r=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!\cdot(n+1)^{n+1}}{n^n\cdot(n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!\cdot(n+1)\cdot(n+1)^n}{n^n\cdot(n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}=$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$, d.h. die Reihe konvergiert für alle x mit $-e<x<e$.

Beispiele: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}\cdot 0^n=0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}\cdot 1^n=1{,}879853862\ldots$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}\cdot(-1)^n=-0{,}6558316008\ldots$.

Für die Ableitungen einer Potenzreihe $f(x)=a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+a_3\cdot x^3+a_4\cdot x^4+a_5\cdot x^5+\ldots$ gilt:

$f'(x)=a_1+2\cdot a_2\cdot x+3\cdot a_3\cdot x^2+4\cdot a_4\cdot x^3+5\cdot a_5\cdot x^4+\ldots,$

$f''(x)=2\cdot a_2+2\cdot 3\cdot a_3\cdot x+3\cdot 4\cdot a_4\cdot x^2+4\cdot 5\cdot a_5\cdot x^3+\ldots,$

$f'''(x)=2\cdot 3\cdot a_3+2\cdot 3\cdot 4\cdot a_4\cdot x+3\cdot 4\cdot 5\cdot a_5\cdot x^2+\ldots,$

$f^{(4)}(x)=2\cdot 3\cdot 4\cdot a_4+2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot a_5\cdot x+\ldots$ usw.

Daraus folgt:

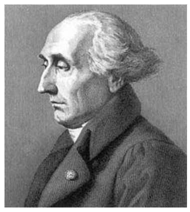
$$a_0=f(0)=\frac{f(0)}{0!},\quad a_1=f'(0)=\frac{f'(0)}{1!},\quad a_2=\frac{f''(0)}{2}=\frac{f''(0)}{2!},\quad a_3=\frac{f'''(0)}{6}=\frac{f'''(0)}{3!},\quad a_4=\frac{f^{(4)}(0)}{12}=\frac{f^{(4)}(0)}{4!},\ \ldots,$$

so dass man schreiben kann: $f(x)=\frac{f(0)}{0!}+\frac{f'(0)}{1!}\cdot x+\frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2+\frac{f'''(0)}{3!}\cdot x^3+\ldots$

Satz von Maclaurin: Die Funktion f sei (n+1)-mal differenzierbar. Dann gibt es ϑ mit $0\le\vartheta\le 1$ mit

$$\boxed{f(x)=\frac{f(0)}{0!}+\frac{f'(0)}{1!}\cdot x+\frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2+\frac{f'''(0)}{3!}\cdot x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n+\frac{f^{(n+1)}(\vartheta\cdot x)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}}$$

Maclaurinsche Reihe (Colin Maclaurin 1742, schottischer Mathematiker)



$$\boxed{R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\vartheta \cdot x)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}}$$ heißt auch ***Restglied nach Lagrange .***

(Joseph-Louis Lagrange = Giuseppe Lodovico Lagrangia, 1736 Turin – 1813 Paris)
Wenn f beliebig oft differenzierbar ist und das Restglied gegen Null strebt für n gegen Unendlich, dann gilt

$$\boxed{f(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n}\,.$$

Beispiel 1: $f(x) = e^x$ ist beliebig oft differenzierbar und es gilt $f^{(n)}(x) = e^x$, so dass $f^{(n)}(0) = 1$ für alle n gilt.

Damit ist $\boxed{e^x = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$ und zwar für alle $x \in \mathbb{R}$, denn für den Konvergenzradius r gilt

$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$, so dass diese Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.

Speziell: Für $x = 1$ folgt $e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2{,}71828182845904523536028747135\ldots$

Und zum Vergleich: $\sum_{n=0}^{10} \frac{1}{n!} = 2{,}71828180114\ldots$, $\sum_{n=0}^{27} \frac{1}{n!} = 2{,}71828182845904523536028747135\ldots$.

Abschätzung des Fehlers nach Lagrange:

Für $n = 10$ beträgt das **Restglied** $R_{11} = \frac{f^{11}(\vartheta \cdot 1)}{11!} \cdot 1^{n+1} = \frac{e^{\vartheta}}{11!} \le \frac{e^1}{11!} = \frac{e}{39916800} < 6{,}81 \cdot 10^{-8} = 0{,}0000000681$,
so dass mindestens sechs Nachkommastellen richtig sind. Es sind sogar sieben Nachkommastellen korrekt, wie ein Ziffernvergleich oben zeigt.

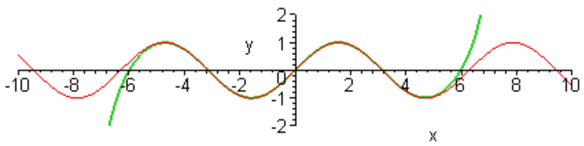
Für $n = 27$ beträgt das **Restglied**
$R_{28} = \frac{f^{28}(\vartheta \cdot 1)}{28!} \cdot 1^{n+1} = \frac{e^{\vartheta}}{28!} \le \frac{e^1}{28!} = \frac{e}{304888344611713860501504000000} < 8{,}92 \cdot 10^{-30}$, so dass mindestens 28 Nachkommastellen richtig sind. Dies bestätigt ein Ziffernvergleich oben.

Beispiel 2: Die trigonometrischen Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ sind beliebig oft differenzierbar, denn $\sin'(x) = \cos(x)$ und $\cos'(x) = -\sin(x)$. Nach Maclaurin gilt dann für alle $x \in \mathbb{R}$:

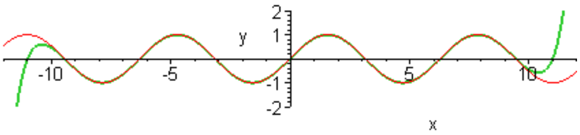
$$\boxed{\sin(x) = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}} \quad \text{und} \quad \boxed{\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}}\,.$$

Für den Konvergenzradius r der Sinus-Reihe gilt $r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(2n+3)!}{(2n+1)!} \right| = \lim_{n\to\infty} (2n+2) \cdot (2n+3) = \infty$.

Für den Konvergenzradius r der Cosinus-Reihe gilt $r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \right| = \lim_{n\to\infty} (2n+1) \cdot (2n+2) = \infty$.



Dargestellt sind $\sin x$ und $\sum_{n=0}^{6} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.



Dargestellt sind $\sin x$ und $\sum_{n=0}^{12} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Beispiel 3: Die binomische Reihe $(1+x)^n$

Es sei $f(x) = (1+x)^n$.

Dann folgt $f'(x) = n\cdot(1+x)^{n-1}$, $f''(x) = n\cdot(n-1)\cdot(1+x)^{n-2}$, $f'''(x) = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(1+x)^{n-3}$, ...
Und nach Maclaurin

$$\boxed{(1+x)^n = 1+\frac{n}{1!}\cdot x+\frac{n\cdot(n-1)}{2!}\cdot x^2+\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3!}\cdot x^3+\ldots=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\cdot x+\binom{n}{2}\cdot x^2+\binom{n}{3}\cdot x^3+\ldots}$$

Die Zahlen $\binom{n}{k}$ für $n,k\in\mathbb{N}_0$ und $n\ge k$ heißen **Binomialkoeffizienten**.

Für diese Koeffizienten gilt $\boxed{\binom{n}{k}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}}$ für $n,k\in\mathbb{N}$ und $0<k\le n$.

Speziell definiert man $\boxed{0!=1}$.

Zum Beispiel ist $\binom{n}{0}=\frac{n!}{0!\cdot(n-0)!}$, $\binom{n}{1}=n=\frac{n!}{1!\cdot(n-1)!}$, $\binom{n}{2}=\frac{n\cdot(n-1)}{2\cdot 1}=\frac{n!}{2!\cdot(n-2)!}$,
$\binom{n}{3}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}=\frac{n!}{3!\cdot(n-3)!}$, … .

Fall 1: $n\in\mathbb{N}_0$. Dann bricht diese Maclaurin-Reihe ab, denn für $f(x)=(1+x)^n$ ist die n-te Ableitung

$f^{(n)}(x)=n!$ konstant. Folglich sind alle höheren Ableitungen gleich Null, so dass $(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot x^k$.

Speziell für $x=\frac{b}{a}$ folgt $\left(1+\frac{b}{a}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^k$. Multipliziert man diese Gleichung mit a^n, so folgt

$a^n\cdot\left(1+\frac{b}{a}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^n\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^k$, also der **binomische Lehrsatz** $\boxed{(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^{n-k}\cdot b^k}$.

Pascalsches Dreieck: Anordnung der Binomialkoeffizienten in Form eines Dreiecks.

(Blaise Pascal, 1623 – 1662, französischer Mathematiker, Physiker und Philosoph)

n = 0	$\binom{0}{0}$	1
n = 1	$\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$	1 1
n = 2	$\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$	1 2 1
n = 3	$\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$	1 3 3 1
n = 4	$\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$	1 4 6 4 1

$n = 5 \qquad \binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5} \qquad 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$

Beispiel: $(a+b)^4 = 1a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1a^0b^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Eigenschaften des Pascalschen Dreiecks:

1. An den Rändern steht immer eine 1, denn $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\cdot n!} = 1$ und $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\cdot 0!} = 1$.
2. Das Pascalsche Dreieck ist symmetrisch zur senkrechten Mittelachse: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$.
3. Die Summe von zwei benachbarten Binomialkoeffizienten ist der darunter stehende Binomialkoeffizient:

$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, denn

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k-1)!} = \frac{n!\cdot(k+1) + n!\cdot(n-k)}{(k+1)!\cdot(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!\cdot(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}.$$

4. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$, denn $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\cdot 1^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$.

5. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\binom{n}{k} = 0$, denn $0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\cdot(-1)^k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$.

Fall 2: $n \notin \mathbb{N}_0$ Dann entsteht eine unendliche Reihe. $\boxed{(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}\cdot x^k}$.

Dann gilt z.B. $\binom{1,3}{4} = \frac{1,3\cdot 0,3\cdot(-0,7)\cdot(-1,7)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 0,0193375$.

Der Konvergenzradius r obiger Potenzreihe folgt aus

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{(k+1)\cdot k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot(n-k)}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k+1}{n-k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{1+\frac{1}{k}}{\frac{n}{k}-1}\right| = 1 .$$

Rein formal könnte man auch rechnen: $r = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}}{\frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k-1)!}}\right| =$

$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{n!\ \cdot\ (k+1)!\cdot(n-k-1)!}{k!\cdot(n-k)!\ \cdot\ n!}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)}{(n-k)}\right| = 1$, obwohl es $n!$, $(n-k-1)!$, $(n-k)!$ gar nicht gibt.

Man kann zeigen, dass die Reihe für den Fall $n > 0$ sogar für $|x| \le 1$ konvergiert.

Beispiel: $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/2}{k}\cdot x^k$ für $|x| \le 1$.

Zahlenbeispiel 1: $\sqrt{1,1} = \sqrt{1+0,1} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/2}{k}\cdot 0,1^k = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!}\cdot 0,1 + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}\cdot 0,1^2 + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}\cdot 0,1^3 + \ldots =$

$= 1 + 0,05 - 0,00125 + 0,0000625 - + \ldots$. Diese vier Summanden ergeben 1.0488125, während $\sqrt{1,1} \approx 1,0488088$.

Zahlenbeispiel 2:

$\sqrt[3]{0,8}=(1-0,2)^{1/3}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/3}{k}\cdot(-0,2)^k=1+\frac{\frac{1}{3}}{1!}\cdot(-0,2)+\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}{2!}\cdot(-0,2)^2+\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)}{3!}\cdot(-0,2)^3+...=$

$1-\frac{1}{15}-\frac{1}{225}-\frac{1}{2025}-...$. Diese vier Summanden ergeben $\frac{376}{405}\approx 0,928395$, während $\sqrt[3]{0,8}\approx 0,928318$.

Beispiel 4: Es sei $f(x)=\frac{x}{e^x-1}$ für $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Lässt sich $f(x)$ in eine Maclaurinsche Reihe entwickeln?
Nach der Regel von Guillaume François Antoine, Marquis de L'Hôpital (1661–1704) (siehe Aufgaben zur Differenzialrechnung) folgt $\beta_0=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x'}{\left(e^x-1\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x}=1$.

Mit $f'(x)=\frac{e^x-1-x\cdot e^x}{\left(e^x-1\right)^2}$ folgt nach Marquis de L'Hôpital

$\beta_1=\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x\cdot e^x}{\left(e^x-1\right)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\cdot e^x}{2\left(e^x-1\right)\cdot e^x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{2\left(e^x-1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{2e^x}=-\frac{1}{2}$.

Mit $f''(x)=\frac{e^x\cdot\left(2+x-2e^x+xe^x\right)}{\left(e^x-1\right)^3}$ folgt nach Marquis de L'Hôpital $\beta_2=\lim_{x\to 0}f''(x)=\frac{1}{6}$.

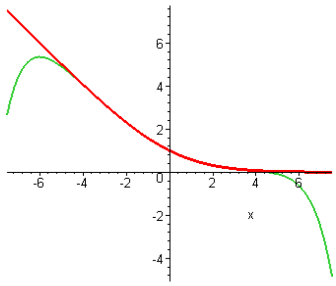
Mit $f'''(x)=\frac{e^x\cdot\left(-3-x-4xe^x+3e^{2x}-xe^{2x}\right)}{\left(e^x-1\right)^4}$ folgt nach Marquis de L'Hôpital $\beta_3=\lim_{x\to 0}f'''(x)=0$.

$\beta_4=\lim_{x\to 0}f^{(4)}(x)=-\frac{1}{30}$, $\beta_5=\lim_{x\to 0}f^{(5)}(x)=0$, $\beta_6=\lim_{x\to 0}f^{(6)}(x)=\frac{1}{42}$, ...

Die Zahlen $\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\ldots$ heißen **Bernoulli-Zahlen**.

Dann gilt

$$f(x)=\frac{x}{e^x-1}=\beta_0\cdot\frac{x^0}{0!}+\beta_1\cdot\frac{x^1}{1!}+\beta_2\cdot\frac{x^2}{2!}+\ldots$$
$$=1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{720}x^4+\frac{1}{30240}x^6-\frac{1}{1209600}x^8+\ldots$$



Für $x\to-\infty$ nähert sich das Schaubild von f der Geraden $y=-x$.
Für $x\to\infty$ nähert sich das Schaubild von f der x-Ache.
Man kann zeigen, dass die Reihe für $|x|<2\pi$ konvergiert.
Im Schaubild ist $f(x)$ in Rot und die Reihe bis x^8 in Grün abgebildet.

Satz von Taylor: Die Funktion f sei (n+1)-mal differenzierbar. Dann gibt es ϑ mit $0\le\vartheta\le 1$ mit

$$\boxed{f(x)=\frac{f(x_0)}{0!}+\frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(x_0+\vartheta\cdot(x-x_0))}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}}$$

(Brook Taylor, 1685-1731, britischer Mathematiker)

Diese Reihe **konvergiert** für alle x mit $|x-x_0|<r$ und **divergiert** für alle x mit $|x-x_0|>r$ und dem Konvergenzradius $\boxed{r=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}$.

$\boxed{R_{n+1}=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\vartheta\cdot(x-x_0))}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}}$ ist das Restglied von Lagrange.

Die Maclaurinsche Reihe ist ein Spezialfall der Taylor-Reihe für den Fall $x_0=0$.

Die Herleitung der Reihe erfolgt wie bei der Reihe von Maclaurin, aber mit dem Ansatz

$$f(x)=a_0+a_1\cdot(x-x_0)+a_2\cdot(x-x_0)^2+a_3\cdot(x-x_0)^3+a_4\cdot(x-x_0)^4+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot(x-x_0)^n$$

Bemerkung: Die beiden ersten Summanden der Taylor-Reihe sind $y=\frac{f(x_0)}{0!}+\frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0)$, d.h. $y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$. Dies ist die Gleichung der Tangente im Punkt $\left(x_0/f(x_0)\right)$.

Beispiel: $f(x)=\ln x$. Es folgt

$$f'(x)=\frac{1}{x},\; f''(x)=-\frac{1}{x^2},\; f'''(x)=\frac{2}{x^3},\; f^{(4)}(x)=-\frac{2\cdot3}{x^4},\; f^{(5)}(x)=\frac{2\cdot3\cdot4}{x^5},\;\ldots,\text{ also } f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{x^n}$$

Eine Maclaurin-Reihe ist nicht möglich, da die Ableitungen an der Stelle $x=0$ nicht existieren. Wir entwickeln $f(x)=\ln x$ um die Stelle $x_0=1$. Mit $f^{(n)}(1)=(-1)^{n+1}(n-1)!$ ergibt sich:

$$\ln x=\frac{f(1)}{0!}+\frac{f'(1)}{1!}\cdot(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}\cdot(x-1)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(1)}{n!}\cdot(x-1)^n+\frac{f^{(n+1)}(1+\vartheta\cdot(x-1))}{(n+1)!}\cdot(x-1)^{n+1}\text{, also}$$

$$\ln x=0+\frac{x-1}{1}-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-+\ldots+(-1)^{n+2}\frac{1}{(n+1)\cdot\left(1+\vartheta\cdot(x-1)\right)^{n+1}}\cdot(x-1)^{n+1}.$$

Die Reihe $\boxed{\ln x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}}$ konvergiert für $\boxed{0<x\le 2}$, denn

der Konvergenzradius beträgt $r=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{1/n}{1/(n+1)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$, d.h. die Reihe konvergiert für $|x-1|<1$, d.h. $-1<x-1<1$ und somit $0<x<2$.

Für $x=0$ entsteht die negative harmonische Reihe, die divergiert.

Für $x=2$ bilden die Teilsummen von $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+-\ldots$ eine Intervallschachtelung, die sicher konvergiert.

$\ln 2=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+-\ldots$ ist die **alternierende harmonische Reihe**. Sie konvergiert sehr schlecht: $\ln 2\approx 0{,}6931471$: man benötigt 100000 Summanden $\sum_{n=1}^{100\,000}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\approx 0{,}6931421$.

In diesem Fall gilt für das Restglied $|R_{n+1}|=\left|(-1)^{n+2}\frac{1}{(n+1)\cdot\left(1+\vartheta\cdot(x-1)\right)^{n+1}}\cdot(x-1)^{n+1}\right|$.

Speziell für $1\le x\le 2$ ist $0\le x-1\le 1$, so dass $R_{n+1}=\frac{1}{(n+1)}\cdot\left(\frac{x-1}{1+\vartheta\cdot(x-1)}\right)^{n+1}\le\frac{1}{n+1}$. Z.B. für $n=100000$ gilt: $|R_{n+1}|=|R_{100001}|<1/100001\approx 0{,}00001$, was relativ groß ist.

Die Partialsummen (Teilsummen) $s_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{1}{i}$ zeigen die langsame Konvergenz:

$s_1 = 1$, $s_2 = 1 - \frac{1}{2} = 0,5$, $s_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} = 0,8\overline{3}$, $s_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12} = 0,58\overline{3}$,

$s_5 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60} = 0,78\overline{3}$, $s_6 = \frac{37}{60} = 0,61\overline{6}$, $s_7 = \frac{319}{420} = 0,75\overline{952380}$, $s_8 = \frac{533}{840} = 0,634\overline{523809}$,

$s_8 = \frac{1879}{2520} = 0,645\overline{634920}$. Die Werte nähern sich dem Zahlenwert $\ln(2)$ abwechselnd von rechts und links.

Lustig 1: Durch Umordnen der alternierenden harmonischen Reihe folgt

$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \ldots =$

$$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2(2n-1)}}_{=\frac{1}{2(2n-1)}} - \frac{1}{4n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{4n}\right) =$$

$\frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots\right) = \frac{1}{2}S$. Oh, dann müsste $S = 0$ sein!!!

Für unendlich viele Summanden gilt also das Kommutativgesetz nicht immer!

Lustig 2: Eine weitere Umordnung der alternierenden harmonischen Reihe führt auf $S = 1$:

$$S = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\left(1 + \frac{1}{3}\right)}_{1,\overline{3}} - \frac{1}{2}}_{0,8\overline{3}} + \left(\frac{1}{5}\right)}_{1,0\overline{3}} - \frac{1}{4}}_{0,78\overline{3}} + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9}\right)}_{\approx 1,0373} - \frac{1}{6}}_{\approx 0,8706} + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{13}\right)}_{\approx 1,038467} - \frac{1}{8}}_{\approx 0,913467} + \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{17}\right)}_{\approx 1,038957} - \ldots$$

Zusatz: Dieses Verfahren geht für jede positive Zahl S. Man addiert der Reihe nach so lange die positiven Brüche, bis ihre Summe zum ersten Mal S überschreitet. Dann addiert man die negativen Brüche der Reihe nach, bis man zum ersten Mal S unterschreitet; usw.

Einführung in die komplexen Zahlen

Gegeben sei die quadratische Gleichung $x^2 - 4x + 13 = 0$.

Mit der p-q-Formel folgt $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3 \cdot \sqrt{-1} = 2 \pm 3i$.

Mit der a-b-c-Formel folgt Für $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6 \cdot \sqrt{-1}}{2} = 2 \pm 3i$

Probe für die obigen Lösungen:

Für $x_1 = 2 + 3i$: $(2+3i)^2 - 4 \cdot (2+3i) + 13 = 4 + 12i + 9i^2 - 8 - 12i + 13 = 9 + 9i^2 = 9 - 9 = 0$.

Für $x_1 = 2 - 3i$: $(2-3i)^2 - 4 \cdot (2-3i) + 13 = 4 - 12i + 9i^2 - 8 + 12i + 13 = 9i^2 + 9 = -9 + 9 = 0$.

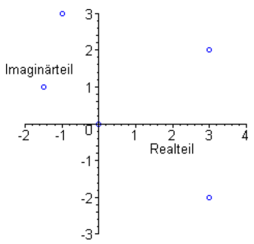
Dabei gilt $\boxed{i^2 = -1}$. Man findet auch die Definition $\boxed{i = \sqrt{-1}}$.

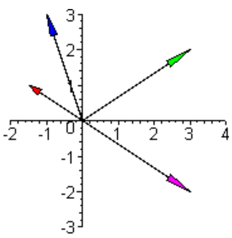
Die zweite Definition führt aber zu einem Widerspruch: $-1 = i^2 = \sqrt{-1}^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{-1 \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1$.
Lösung: Das Wurzelgesetz $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ gilt nur für reelle Zahlen $a, b \geq 0$.

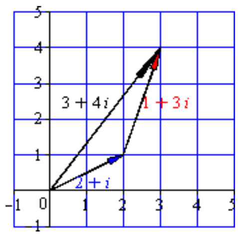
Es gilt $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot (-1) = 1$, $i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$, $i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$, … .
Außerdem ist $i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$, $i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1$, $i^{-3} = \frac{1}{i^3} = \frac{i}{i^4} = \frac{i}{-1} = -i$, $i^{-4} = \frac{1}{i^4} = \frac{1}{1} = 1$, … .
Somit gilt für alle ganzen Zahlen $n \in \mathbb{Z}$: $i^{4n} = \left(i^4\right)^n = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$ und $i^{4n+3} = -i$.

Definition: Unter einer **imaginären Zahl** versteht man das Produkt $b \cdot i$ mit $b \in \mathbb{R}$.
Unter einer **komplexen Zahl** versteht man die Summe $z = a + b \cdot i$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Dabei heißt $a = \text{Re}(z)$ der **Realteil** und $b = \text{Im}(z)$ der **Imaginärteil** von $z = a + b \cdot i$. $\mathbb{C} = \{a + b \cdot i \,/\, a, b \in \mathbb{R}\}$ heißt die Menge der komplexen Zahlen.

Johann Carl Friedrich Gauß (latinisiert Carolus Fridericus Gauss, deutscher Mathematiker, 1777 – 1855) hatte die komplexen Zahlen in der sog. **Gaußschen Zahlenebene** dargestellt.
Jeder komplexen Zahl $z = x + i \cdot y$ wird das Punktepaar (x, y) oder der Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ zugeordnet. In der Grafik sind jeweils dargestellt $3 + 2i$, $3 - 2i$, $-1 + 3i$ und $-1{,}5 + i$.







Die Addition von komplexen Zahlen lässt sich in der Gaußschen Zahlenebene wie die Vektoraddition erklären. Im Beispiel: $(2 + i) + (1 + 3i) = 3 + 4i$.

Definition: Es sei $z = x + i \cdot y$ eine komplexe Zahl. Dann heißt $\bar{z} = x - i \cdot y$ die zu z **konjugiert komplexe Zahl**.
Es ist $z \cdot \bar{z} = (x + i \cdot y) \cdot (x - i \cdot y) = x^2 - (i \cdot y)^2 = x^2 + y^2$.

Definition: Unter dem Betrag einer komplexen Zahl $z = x + i \cdot y$ versteht man die Länge des zugehörigen Vektors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Diese Länge ist nach Pythagoras $\boxed{|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}}$.

Beispiel: $z = 3 + 4i \;\Rightarrow\; \bar{z} = 3 - 4i$ und $|z| = |\bar{z}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.
Folgerung: Dritte binomische Formel:
$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$ und $a^2 + b^2 = (a + b \cdot i) \cdot (a - b \cdot i)$.

Die Eulersche Formel $\boxed{\mathbf{e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)}}$
(Leonhard Euler, 1707 Basel – 1783 St. Petersburg)

Sein Vater Paul Euler war Pfarrer an der Kirche in Riehen (Haltestelle Riehen Dorf)

In der unendlichen Reihe $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ wird x durch $i \cdot x$ ersetzt.

Wegen $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, ... folgt dann

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \cdot x^n}{n!} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \ldots\right) + i \cdot \left(\frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \ldots\right) = \cos x + i \cdot \sin x\,.$$

Analog folgt $e^{-ix} = \cos x - i \cdot \sin x$. Durch Addition bzw. Subtraktion beider Gleichungen $e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$ und $e^{-ix} = \cos x - i \cdot \sin x$ ergibt sich:

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin(x), \quad \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}}$$

Diese Eulersche Formel lässt sich auch mit Hilfe der Ableitung nachweisen:

Es sei $f(x) = \frac{\cos x + i \cdot \sin x}{e^{ix}}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, da der Nenner $e^{ix} \neq 0$ ist. Nach der Quotientenregel folgt

$$f'(x) = \frac{(-\sin x + i \cdot \cos x) \cdot e^{ix} - (\cos x + i \cdot \sin x) \cdot e^{ix} \cdot i}{e^{2ix}} = \frac{-\sin x + i \cdot \cos x - (\cos x + i \cdot \sin x) \cdot i}{e^{ix}} = \frac{-\sin x + i \cdot \cos x - i \cdot \cos x + \sin x}{e^{ix}} = 0\,.$$

Folglich ist $f(x) = c$ konstant für alle $x \in \mathbb{R}$. Mit $x = 0$ folgt $f(x) = f(0) = \frac{\cos 0 + i \cdot \sin 0}{e^0} = 1$. Folglich ist

$f(x) = \frac{\cos x + i \cdot \sin x}{e^{ix}} = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Q.e.d.

Folgerung: Es gilt

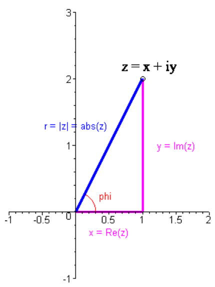
$$\sin(ix) = \frac{e^{i^2 x} - e^{-i^2 x}}{2i} = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2i} = i \cdot \frac{e^{-x} - e^{x}}{2i^2} = i \cdot \frac{e^{-x} - e^{x}}{-2} = i \cdot \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = i \cdot \sinh(x)\,.$$

$$\cos(ix) = \frac{e^{i^2 x} + e^{-i^2 x}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \cosh(x)\,.$$

Dabei heißt $\sinh(x)$ Sinus hyperbolicus und $\cosh(x)$ Kosinus hyperbolicus.

Die Darstellungsformen einer komplexen Zahl z.

1. **Die Normalform, algebraische Form oder kartesische Form:**
   $\mathbf{z = x + i \cdot y}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dabei ist $x = \mathrm{Re}(z)$ und $y = \mathrm{Im}(z)$.

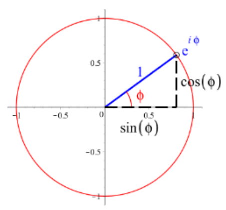


2. **Die Polarform:** Es sei $z = x + i \cdot y$. Mit $x = r \cdot \cos\varphi$ und $y = r \cdot \sin\varphi$ folgt

   $$\boxed{\mathbf{z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) = r \cdot e^{i \cdot \varphi}}}$$

   Dabei ist $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ der Betrag und φ mit $0 \le \varphi < 2\pi$ oder $-\pi < \varphi \le \pi$ das Argument der komplexen Zahl $z = x + i \cdot y$.
   Die beiden Zahlen r und φ heißen auch die **Polarkoordinaten** von z. Pol ist der Ursprung $(0/0)$.

   Speziell gilt $\boxed{\left|\mathbf{e^{i\varphi}}\right| = \left|\mathbf{\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)}\right| = \sqrt{(\mathbf{\cos(\varphi)})^2 + (\mathbf{\sin(\varphi)})^2} = 1}$.



   Speziell gilt:
   $$\boxed{\begin{array}{ll} \mathbf{e^{i \cdot 0} = \cos(0) + i \cdot \sin(0) = 1,} & \mathbf{e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} = \cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = i} \\ \mathbf{e^{i \cdot \pi} = \cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi) = -1,} & \mathbf{e^{i \cdot \frac{3\pi}{2}} = \cos\left(\tfrac{3\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\tfrac{3\pi}{2}\right) = -i} \end{array}}.$$

Beispiel 1: $z = 1 + 2i$. Dann ist $r = \sqrt{5}$ und φ folgt aus $\cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\tan\varphi = \frac{y}{x} = 2$ zu $\varphi \approx 1{,}107148718$, so dass $z = 1 + 2i = \sqrt{5} \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) = \sqrt{5} \cdot e^{i \cdot \varphi}$ mit $\varphi = \arctan(2)$.

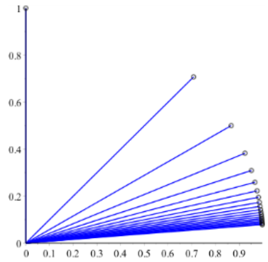
Beispiel 2: $z=-1+2i$. Dann ist $r=\sqrt{5}$ und φ folgt aus $\cos\varphi=\frac{x}{r}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\varphi=\frac{y}{r}=\frac{2}{\sqrt{5}}$,

$\tan\varphi=\frac{y}{x}=-2$ zu $\varphi\approx 2{,}034443936$ im 2. Quadranten.

Beispiel 3: $z=-1-2i$. Dann ist $r=\sqrt{5}$ und φ folgt aus $\cos\varphi=\frac{x}{r}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\varphi=\frac{y}{r}=-\frac{2}{\sqrt{5}}$,

$\tan\varphi=\frac{y}{x}=2$ zu $\varphi\approx 4{,}248741372$ oder $\varphi\approx -2{,}034443936$.

Beispiel 4: $z=1-2i$. Dann ist $r=\sqrt{5}$ und φ folgt aus $\cos\varphi=\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\varphi=\frac{y}{r}=-\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\tan\varphi=\frac{y}{x}=-2$ zu $\varphi\approx 5{,}176036590$ oder $\varphi\approx -1{,}107148718$.



Beispiel 5a: $i^{\frac{1}{2}}=\left(e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{2}+i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}=\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot(1+i)$.

Probe: $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot(1+i)\right)^2=\frac{1}{4}\cdot 2\cdot(1+2i-1)=\frac{1}{4}\cdot 4i=i$.

Beispiel 5b: $i^{\frac{1}{3}}=\left(e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}=e^{i\cdot\frac{\pi}{6}}=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{3}+i\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{3}+i\right)$.

Probe:

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{3}+i\right)\right)^3=\frac{1}{8}\cdot\left(\sqrt{3}^3+3\cdot\sqrt{3}^2\cdot i+3\cdot\sqrt{3}\cdot i^2+i^3\right)=\frac{1}{8}\cdot\left(3\cdot\sqrt{3}+9i-3\cdot\sqrt{3}-i\right)=i.$$

Im Schaubild sind die Werte $i^{\frac{1}{n}}$ für $n=1,2,3,\dots,20$ dargestellt.

Allgemein: Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} i^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty} e^{i\cdot\frac{\pi}{2n}}=e^0=1$ wie man auch dem Schaubild entnehmen kann.

Multiplikation und Division komplexer Zahlen

Es seien $z_1=x_1+i\cdot y_1$ und $z_2=x_2+i\cdot y_2$ zwei komplexe Zahlen. Dann ist

$$z_1\cdot z_2=(x_1+i\cdot y_1)\cdot(x_2+i\cdot y_2)=x_1\cdot x_2+i\cdot x_1\cdot y_2+i\cdot x_2\cdot y_1+i^2\cdot y_1\cdot y_2=x_1\cdot x_2-y_1\cdot y_2+i\cdot(x_1\cdot y_2+x_2\cdot y_1)$$

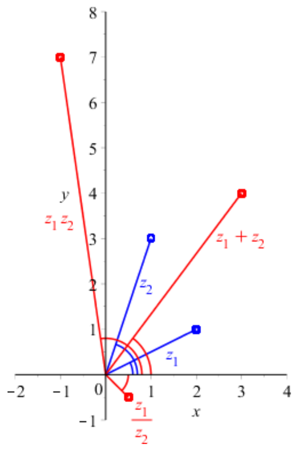
und $\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+i\cdot y_1}{x_2+i\cdot y_2}=\frac{(x_1+i\cdot y_1)\cdot(x_2-i\cdot y_2)}{(x_2+i\cdot y_2)\cdot(x_2-i\cdot y_2)}=\frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\cdot\frac{x_2\cdot y_1-x_1\cdot y_2}{x_2^2+y_2^2}$, sofern $z_2\neq 0$.

Beispiel: Es sei $z_1=2+i$ und $z_2=1+3i$. Dann gilt

$z_1\cdot z_2=(2+i)\cdot(1+3i)=2-3+(6+1)i=-1+7i$.

$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2+i}{1+3i}=\frac{(2+i)\cdot(1-3i)}{(1+3i)\cdot(1-3i)}=\frac{2+3}{1+9}+i\cdot\frac{-6+1}{1+9}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$.

$z_1+z_2=(2+i)+(1+3i)=3+4i$.



Frage: Wie lassen sich die Multiplikation und die Division in der Gaußschen Zahlenebene geometrisch deuten?
Mit der Exponentialform lässt sich diese Frage leicht beantworten:

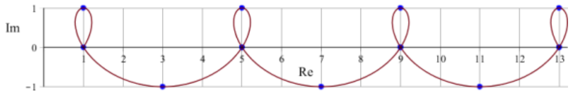
Es sei $z_1=r_1\cdot e^{i\cdot\varphi_1}$ und $z_2=r_2\cdot e^{i\cdot\varphi_2}$. Dann gilt

$\boxed{z_1\cdot z_2=r_1\cdot e^{i\cdot\varphi_1}\cdot r_2\cdot e^{i\cdot\varphi_2}=r_1\cdot r_2\cdot e^{i\cdot(\varphi_1+\varphi_2)}}$ und $\boxed{\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1\cdot e^{i\cdot\varphi_1}}{r_2\cdot e^{i\cdot\varphi_2}}=\frac{r_1}{r_2}\cdot e^{i\cdot(\varphi_1-\varphi_2)}}$.

Zwei komplexe Zahlen werden multipliziert, indem man ihre Beträge multipliziert und ihre Winkel (Argumente) addiert.
Zwei komplexe Zahlen werden dividiert, indem man ihre Beträge dividiert und ihre Winkel (Argumente) subtrahiert.

Komplexe Zahlenfolgen

Beispiel 1: $z_n = n + i^n$, $n \in \mathbb{N}$.



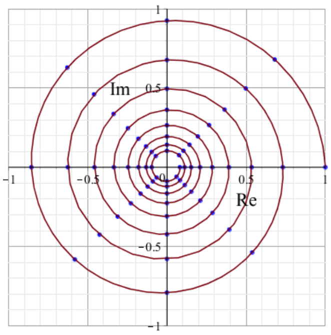
Es ist $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 + i^2 = 2 - 1 = 1$, $z_3 = 3 + i^3 = 3 - i$, $z_4 = 4 + i^4 = 4 - 1 = 3$, $z_5 = 5 + i^5 = 5 + i$, ...

Zusätzlich ist das Schaubild der Funktion $f(x) = x + i^x$ für $x \geq 0$ eingezeichnet. Dadurch werden die Punkte (n, z_n), $n \in \mathbb{N}$, miteinander verbunden.

Dabei ist $i^x = \left(e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}\right)^x = e^{i\cdot\frac{\pi x}{2}} = \cos(\frac{\pi}{2}x) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{2}x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

Z.B. $f(1{,}5) = 1{,}5 + i^{1{,}5} = 1{,}5 + \cos(\frac{\pi}{2}\cdot 1{,}5) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{2}\cdot 1{,}5) = 1{,}5 + \cos(\frac{3\pi}{4}) + i \cdot \sin(\frac{3\pi}{4}) = 1{,}5 - \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} + i \cdot \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} \approx 0{,}793 + 0{,}707i$.

Beispiel 2: $z_n = (0{,}68 + 0{,}68i)^{n-1} = q^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, eine geometrische Folge mit $z_1 = 1$ und $q = 0{,}68 + 0{,}68i = r \cdot e^{i\cdot\varphi}$.



Dabei ist $r = \sqrt{(\mathrm{Re}(q))^2 + \mathrm{Im}(q)^2} = \sqrt{0{,}68^2 + 0{,}68^2} = \sqrt{\frac{576}{625}} = \left(\frac{576}{625}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 0{,}9617$

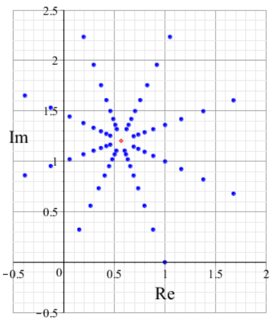
und $\varphi = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(q)}{\mathrm{Re}(q)}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

Somit ist $z_n = r^{n-1} \cdot e^{i\cdot(n-1)\cdot\varphi} = \left(\frac{576}{625}\right)^{\frac{n-1}{2}} \cdot e^{i\cdot(n-1)\cdot\frac{\pi}{4}} \approx 0{,}9617^{n-1} \cdot e^{i\cdot(n-1)\cdot\frac{\pi}{4}}$.

Wird also n um 1 erhöht, so vergrößert sich durch die Multiplikation mit q das Argument φ um $\frac{\pi}{4}$ und der Radius r verkleinert sich auf das $\sqrt{\frac{576}{625}} \approx 0{,}9617$ - fache. Auf diese Weise ergibt sich die gezeichnete Spirale.

Im Schaubild sind die ersten 65 Folgenglieder z_n eingezeichnet zusammen mit dem Schaubild der Funktion $f(x) = (0{,}68 + 0{,}68i)^{x-1} = r^{x-1} \cdot e^{i\cdot(x-1)\cdot\varphi} = r^{x-1} \cdot \left(\cos\left((x-1)\cdot\varphi\right) + i \cdot \sin\left((x-1)\cdot\varphi\right)\right)$.

Für die geometrische Reihe ergibt sich $S_n = \sum_{i=1}^{n} z_i = \frac{1-q^n}{1-q}$ mit dem Grenzwert



$$S = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-(0{,}68+0{,}68i)} = \frac{1}{0{,}32-0{,}68i} = \frac{0{,}32+0{,}68i}{(0{,}32-0{,}68i)\cdot(0{,}32+0{,}68i)} =$$

$$= \frac{0{,}32+0{,}68i}{0{,}5648} = \frac{200}{353} + \frac{425}{353}i \approx 0{,}57 + 1{,}20i.$$

Im Schaubild sind die ersten 65 Folgenglieder S_n eingezeichnet und in Rot der Grenzwert S.