Automatentheorie

Eigenschaften endlicher Automaten

Prof. Dr. Franz-Karl Schmatzer
schmatzf@dhbw-loerrach.de

Literatur

- C.Wagenknecht, M.Hielscher; Formale Sprachen, abstrakte Automaten und Compiler; 2.Aufl. Springer Vieweg 2014;
- Sipser M.; Introduction to the Theory of Computation; 2.Aufl.; Thomson Course Technology 2006
- Hopecroft, T. et al; Introduction to Automata Theory, Language, and Computation; 3. Aufl. Pearson Verlag 2006

Agenda

- Eigenschaften endlicher Automaten
- Produktautomat
- Pumping-Lemma
- Entscheidungsprobleme
- Reguläre Ausdrücke und Sprache
- Äquivalenz der regulären Sprachen mit den regulären Ausdrücken.

Eigenschaften regulärer Sprachen

- Seien L_1 und L_2 reguläre Sprachen über das Alphabet Σ. Dann sind auch die Sprachen L mit folgenden Eigenschaften regulär:
  - $L = L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$, L^c
  - $L = L_1 \bullet L_2$ und
  - $L = L_1^*$

Die Klasse der regulären Sprachen ist abgeschlossen unter den Mengenoperationen Vereinigung, Durchschnitt, Komplement, Konkatenation und Kleene-Stern.

Vereinigung

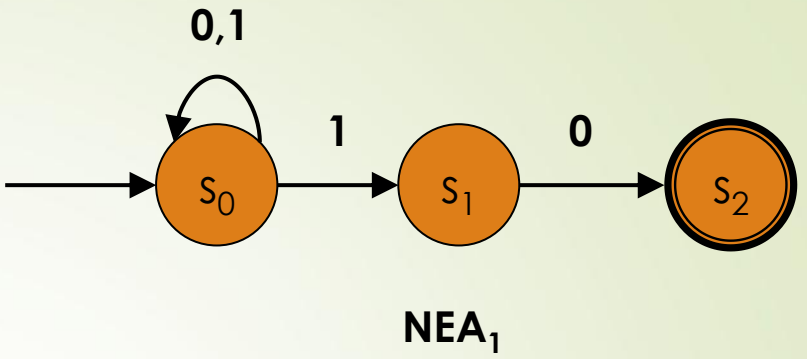
Automaten

- Für die Vereinigung nehmen wir 2 NDA (Nicht deterministische Automaten) mit
  - $NDA_1 = (\Sigma, S_1, \delta_1, s_{01}, F_1)$ und
  - $NDA_2 = (\Sigma, S_2, \delta_2, s_{02}, F_2)$ und
  - $S_1 \cap S_1 = \varnothing$, D.h. die Zustände S sind verschieden.
- Die Idee ist für ein eingegebenes Wort w nicht deterministisch zu entscheiden, mit welchem Automaten man die Worterkennung durchführt.
- Der Automat ist dann:
  - $NDA = (\Sigma, S_1 \cup S_2 \cup S, \delta_1 \cup \delta_2, S, F_1 \cup F_2)$ und die beiden Startzustände s_{01} und s_{02} werden von einem neuen Startzustand S bedient.
  - die zugehörige Überführungsfunktion δ ist dann, die Vereinigung der beiden Überführungsfunktionen δ_1 und δ_2 :
  - δ von neuen Startzustand ergibt sich zu:
  - $\delta(S,a) = \{s_{01}\}$ falls $\delta_1(s_{01},a) = \{s_{01}\}$ und $\delta(S,a) = \{s\}$ für alle $\delta_1(s_{01},a) = \{s\}$
  - $\delta(S,a) = \{s_{02}\}$ falls $\delta_1(s_{02},a) = \{s_{02}\}$ und $\delta(S,a) = \{s\}$ für alle $\delta_1(s_{02},a) = \{s\}$

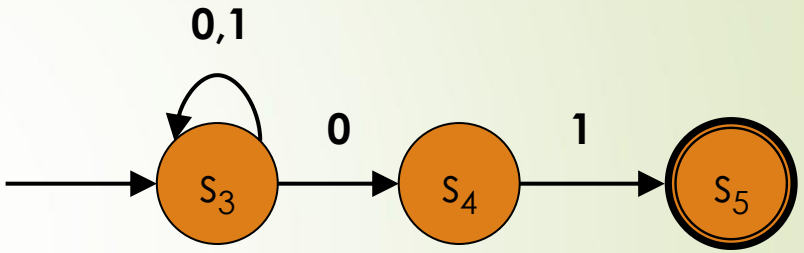
Vereinigung

Automaten: Beispiel

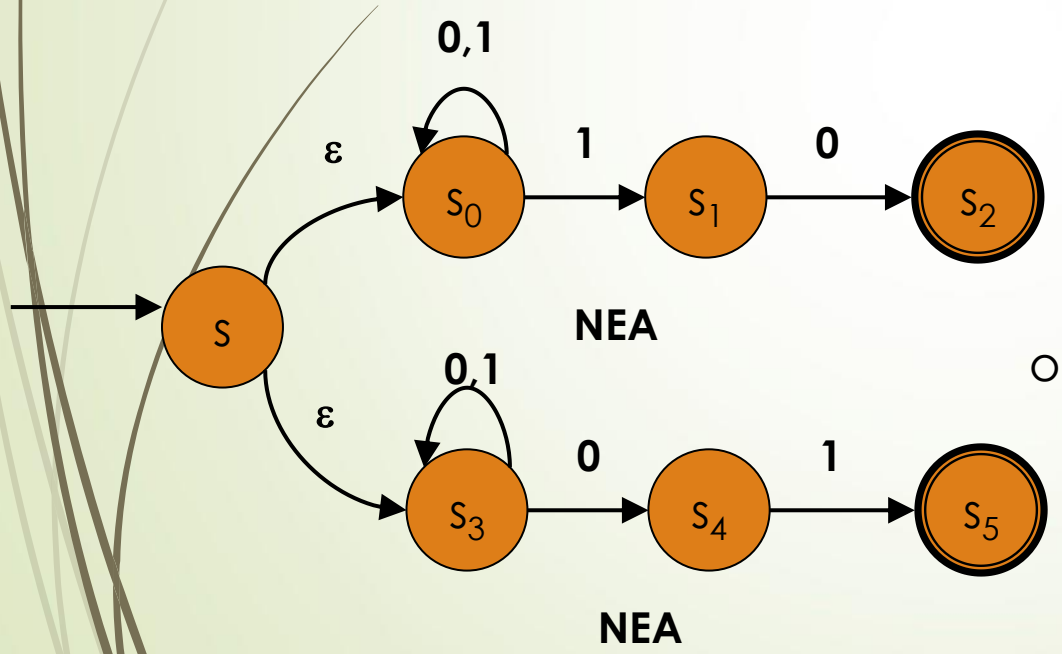
- Automat NEA_1
- Automat NEA_2
- Summenautomat NEA



NEA_1

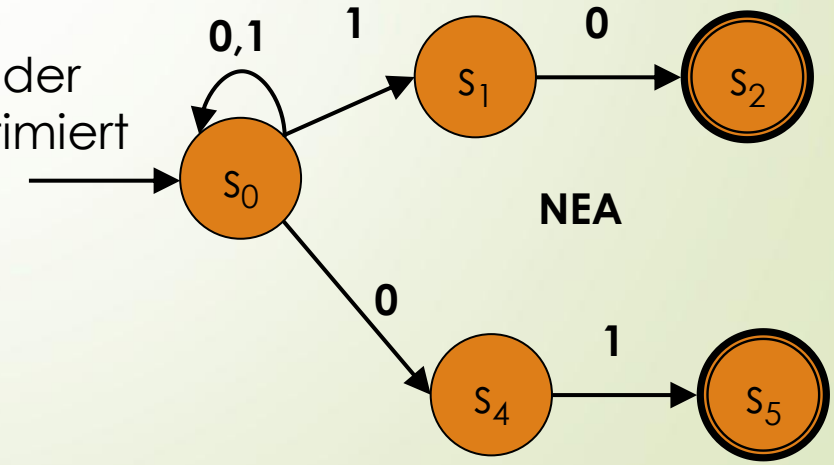


NEA_2



NEA

oder optimiert



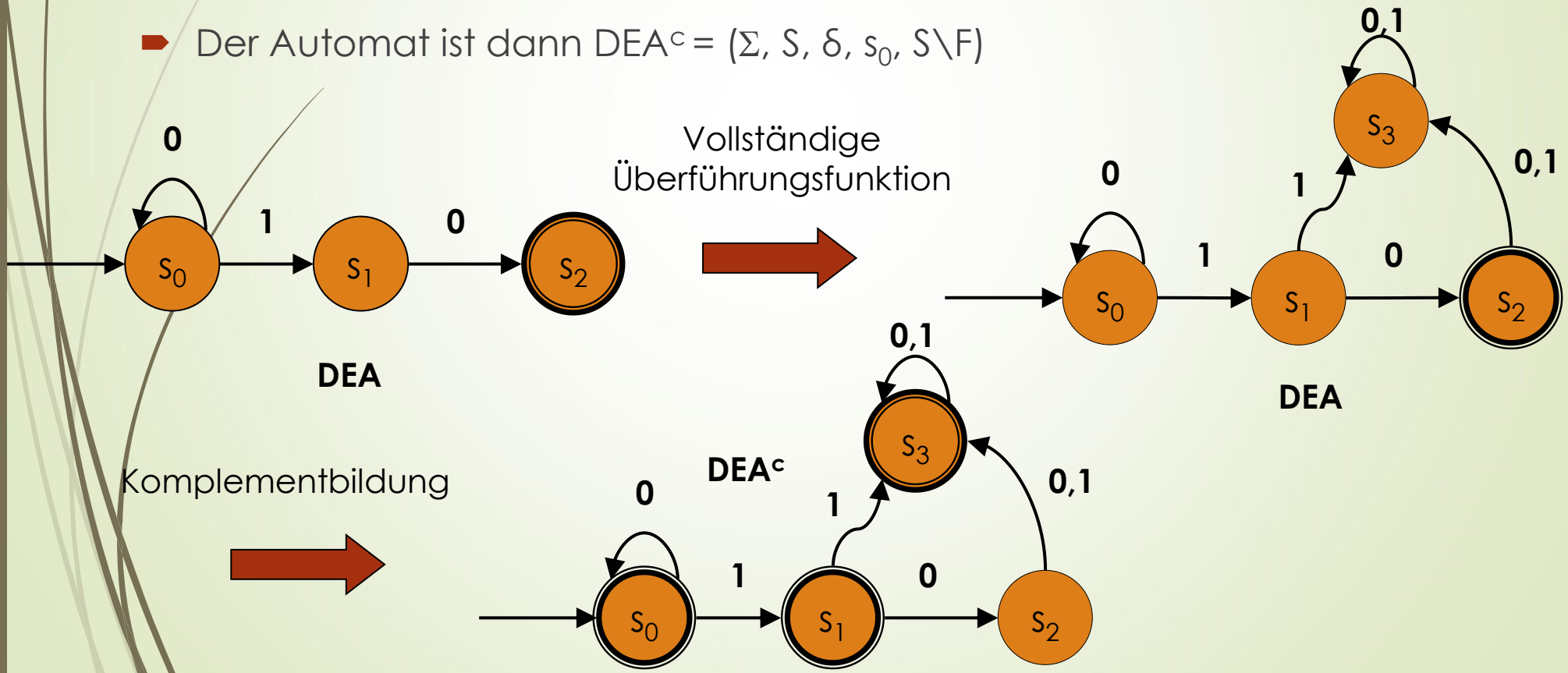
Aufgabe
Vereinigung

- Das Alphabet sein {a,b,c}. Geben Sie den Graphen und die Überführungsfunktion für folgende Automaten an.
  - Erstellen Sie einen optimalen Automaten, der sowohl die Zeichenfolge „ab“ als auch die Zeichenfolge „abb“ am Schluss akzeptiert
  - Erstellen Sie einen optimalen Automaten, der die Zeichenfolge „cc“ im Wort als auch die Zeichenfolge „acb“ am Schluss akzeptiert

Komplement

Automaten

- Für das Komplement nehmen wir einen DEA (deterministischer endlicher Automaten) mit DEA = $(\Sigma, S, \delta, s_0, F)$ und vollständiger Übergangsfunktion.
- Die Idee ist, alle Zustände, die bisher keine Endzustände waren, werden Endzustände, und die Endzustände werden normale Zustände.
- Der Automat ist dann $DEA^c = (\Sigma, S, \delta, s_0, S \setminus F)$



Aufgabe
Komplement

- Das Alphabet sein {a,b,c}. Geben Sie den Graphen und die Überführungsfunktion für folgende Automaten an.
  - Erstellen Sie einen Automaten, der die Zeichenfolge „abb“ am Schluss nicht akzeptiert
  - Erstellen Sie einen Automaten, der die Zeichenfolge „cc“ im Wort nicht akzeptiert

Durchschnitt

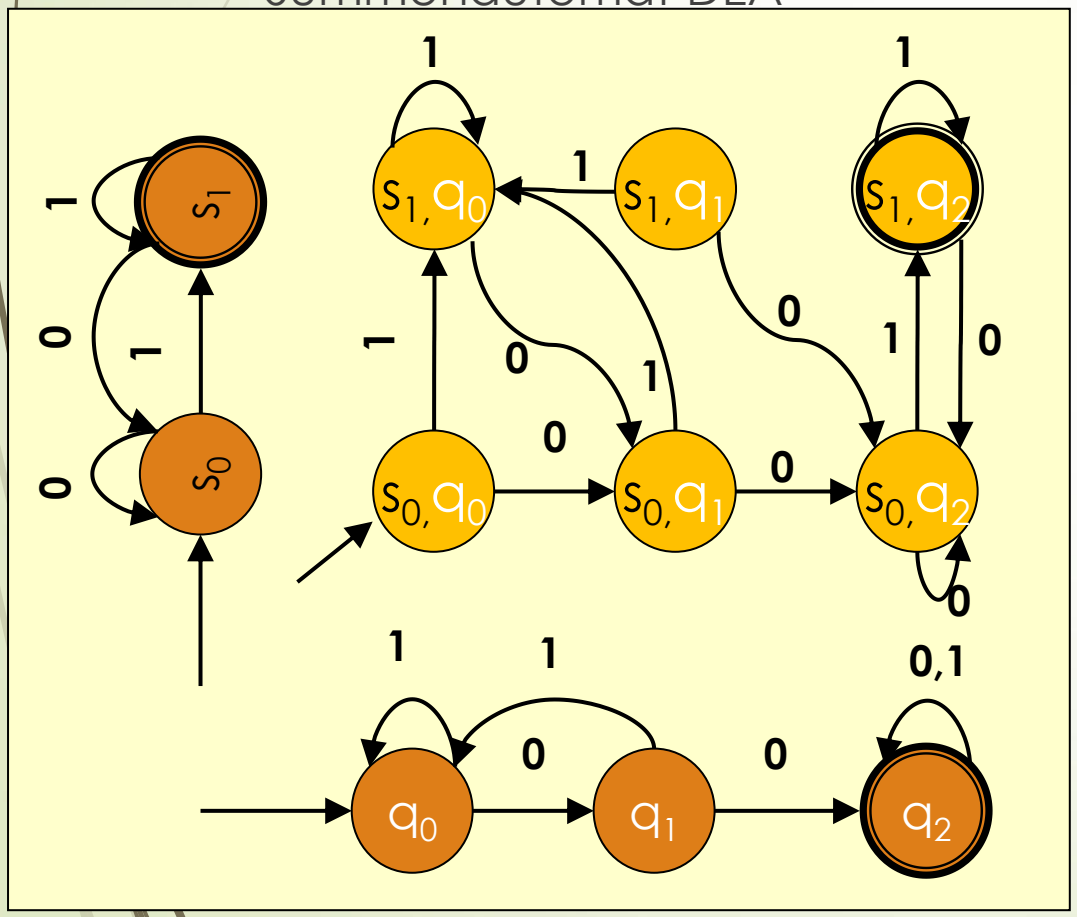
Automaten

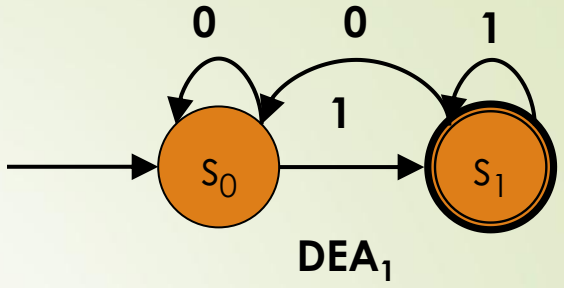
- Der Durchschnitt zweier DEA zu dem gleichen Alphabet Σ mit
  - $DEA_1 = (\Sigma, Q_1, \delta_1, q_{01}, F_1)$ und
  - $DEA_2 = (\Sigma, Q_2, \delta_2, q_{02}, F_2)$
- Die Idee ist, die beiden Automaten parallel laufen lassen. Nur solche Wørte akzeptieren, die in beiden Automaten zu Endzustände führen.
- Mathematisch ist das durch ein Kreuzprodukt zu erreichen: DEA_1 X DEA_2
- Der Automat DEA = DEA_1 X DEA_2 ist dann:
  - DEA= $(\Sigma, q_1 \text{ X } q_2, \delta, s_{01} \text{ X } s_{02}, F_1 \text{X } F_2)$ mit
  - $\delta(<q_1,q_2>,a) = \{<s_1,s_2> \mid \text{falls } s_1 \in \delta_1(q_1,a) \text{ und } s_2 \in \delta_2(q_2,a)\}$

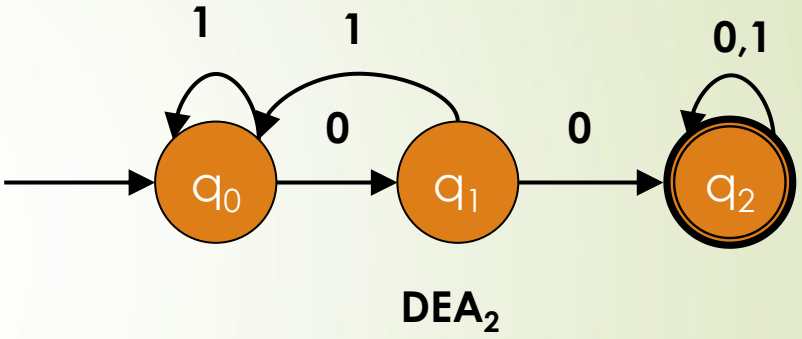
Durchschnitt

Automaten: Beispiel

- Automat DEA_1 (alle Worte enden auf 1)
- Automat DEA_2 (Im Wort kommt 00 vor)
- Summenautomat DEA





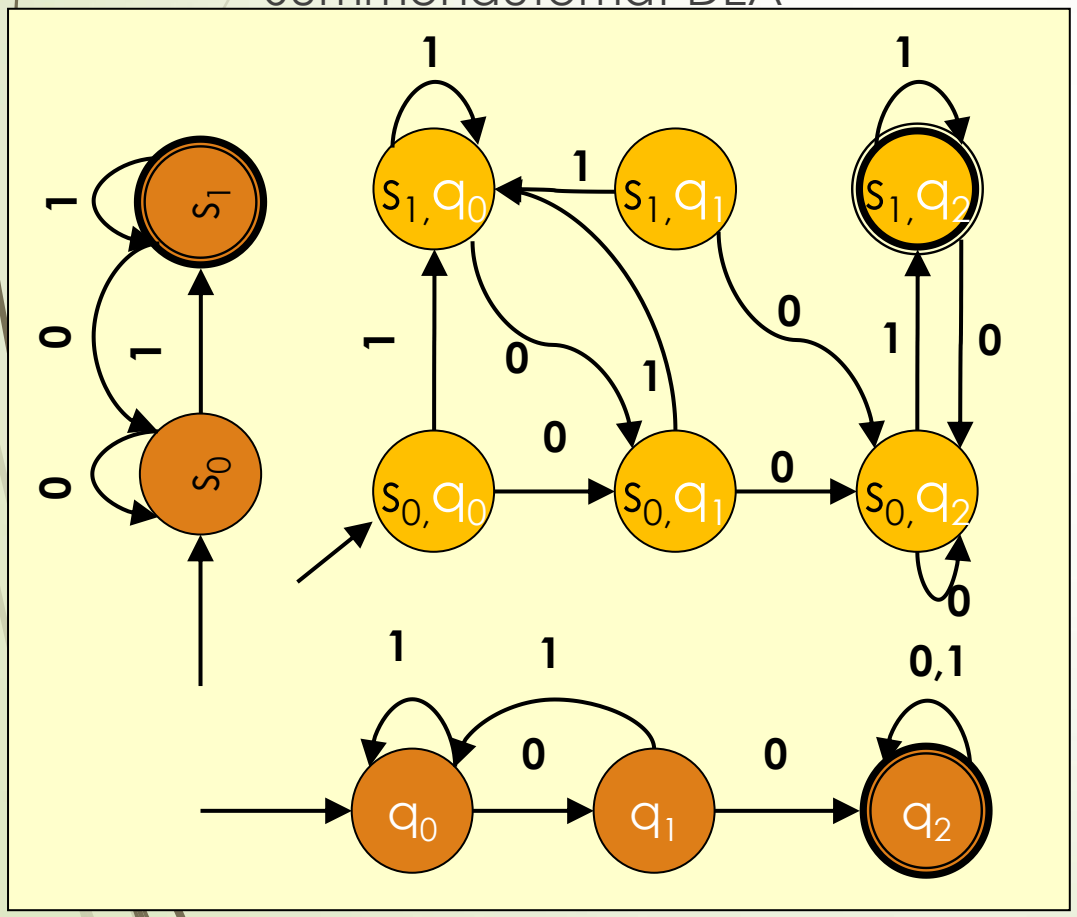


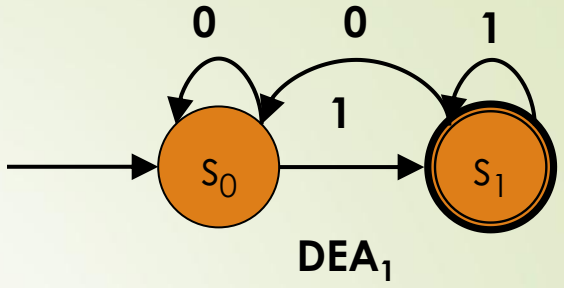
- Summenautomat DEA
- Endzustände sind alle Zustände bei denen beide Automaten zuvor Endzustände hatten.

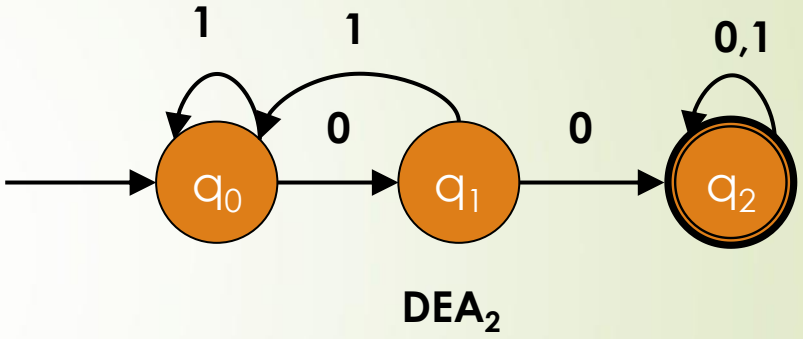
Durchschnitt

Automaten: Beispiel

- Automat DEA_1
- Automat DEA_2
- Summenautomat DEA







- Summenautomat DEA
- Endzustände sind alle Zustände bei denen beide Automaten zuvor Endzustände hatten.

Aufgabe Produktautomat
einzelnen Automaten

Aufgabe:

Ein DEA soll Worte über dem Alphabet $\Sigma = \{a,b,c\}$ Worte erkennen, die sowohl die Teilstrings $s_1 = cc$ als auch die Teilstrings $s_2 = ac$ enthalten.

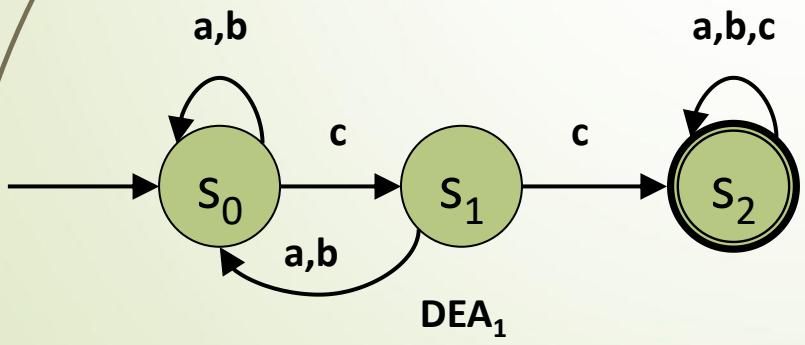
- Zuerst die beiden Teilautomaten erstellen:

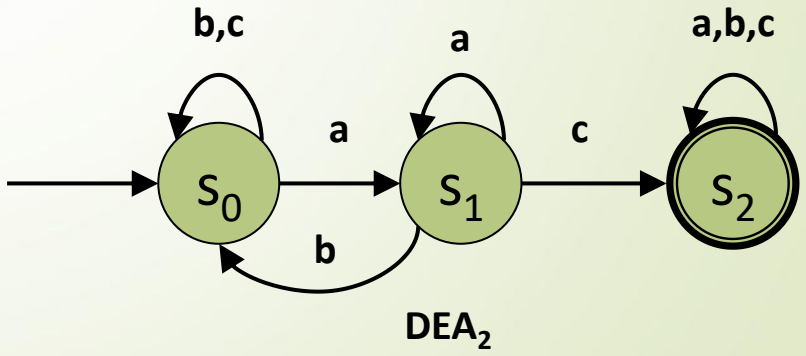
Aufgabe Produktautomat
einzelnen Automaten

Aufgabe:

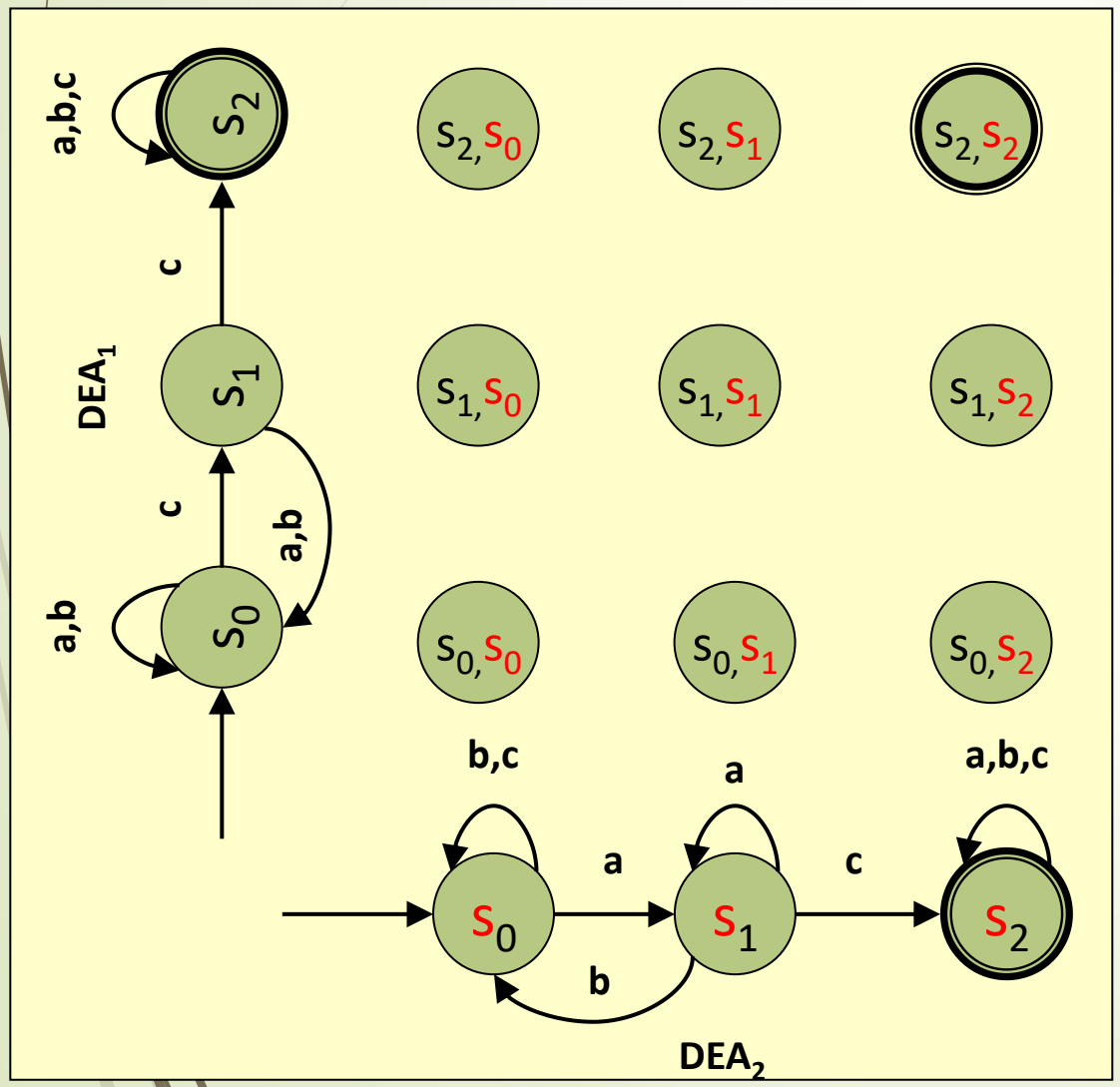
Ein DEA soll Worte über dem Alphabet $\Sigma = \{a,b,c\}$ Worte erkennen, die sowohl die Teilstrings $s_1 = cc$ als auch die Teilstrings $s_2 = ac$ enthalten.

- Zuerst die beiden Teilautomaten erstellen:



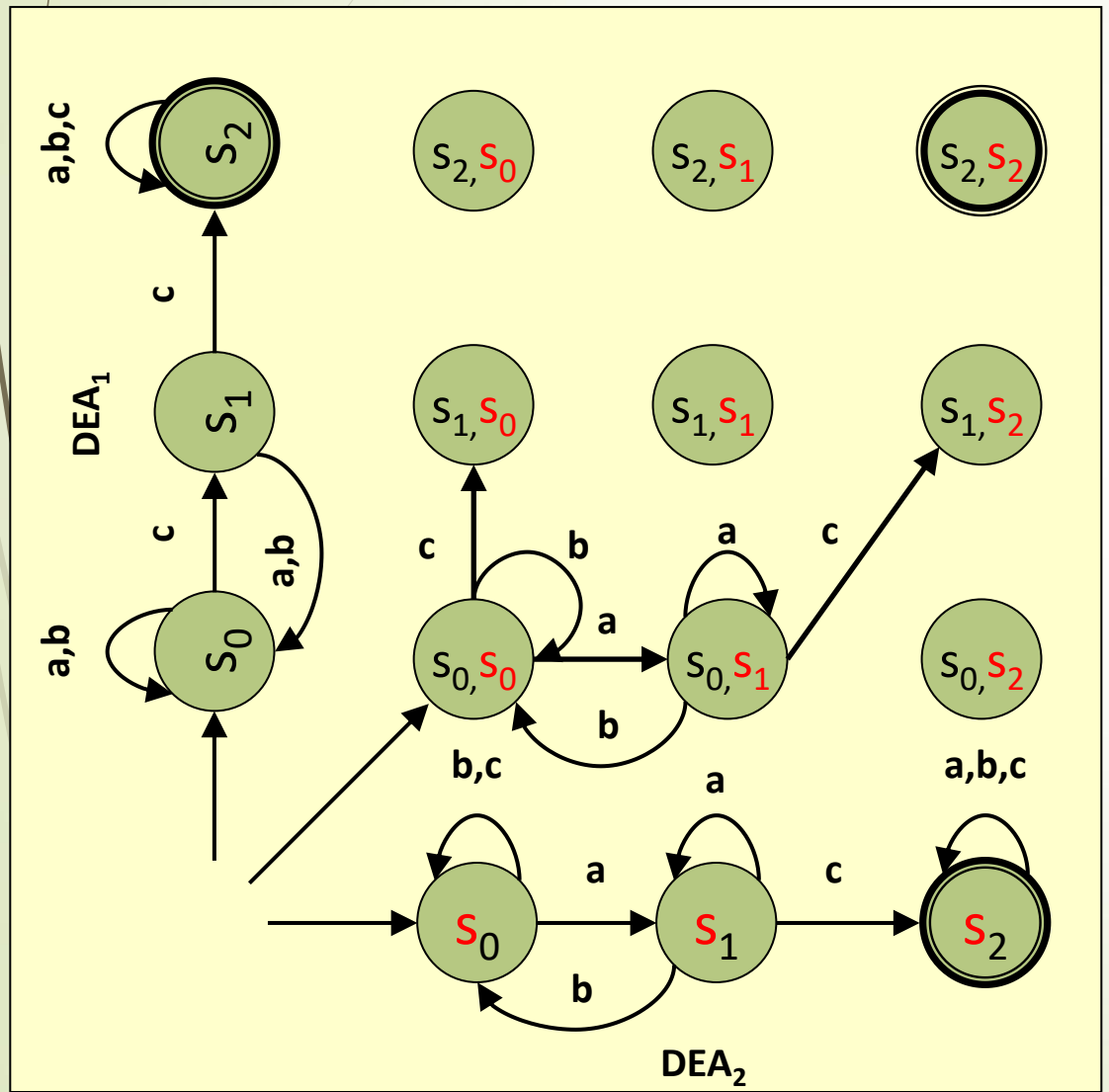


Produktautomaten
Produktzustände



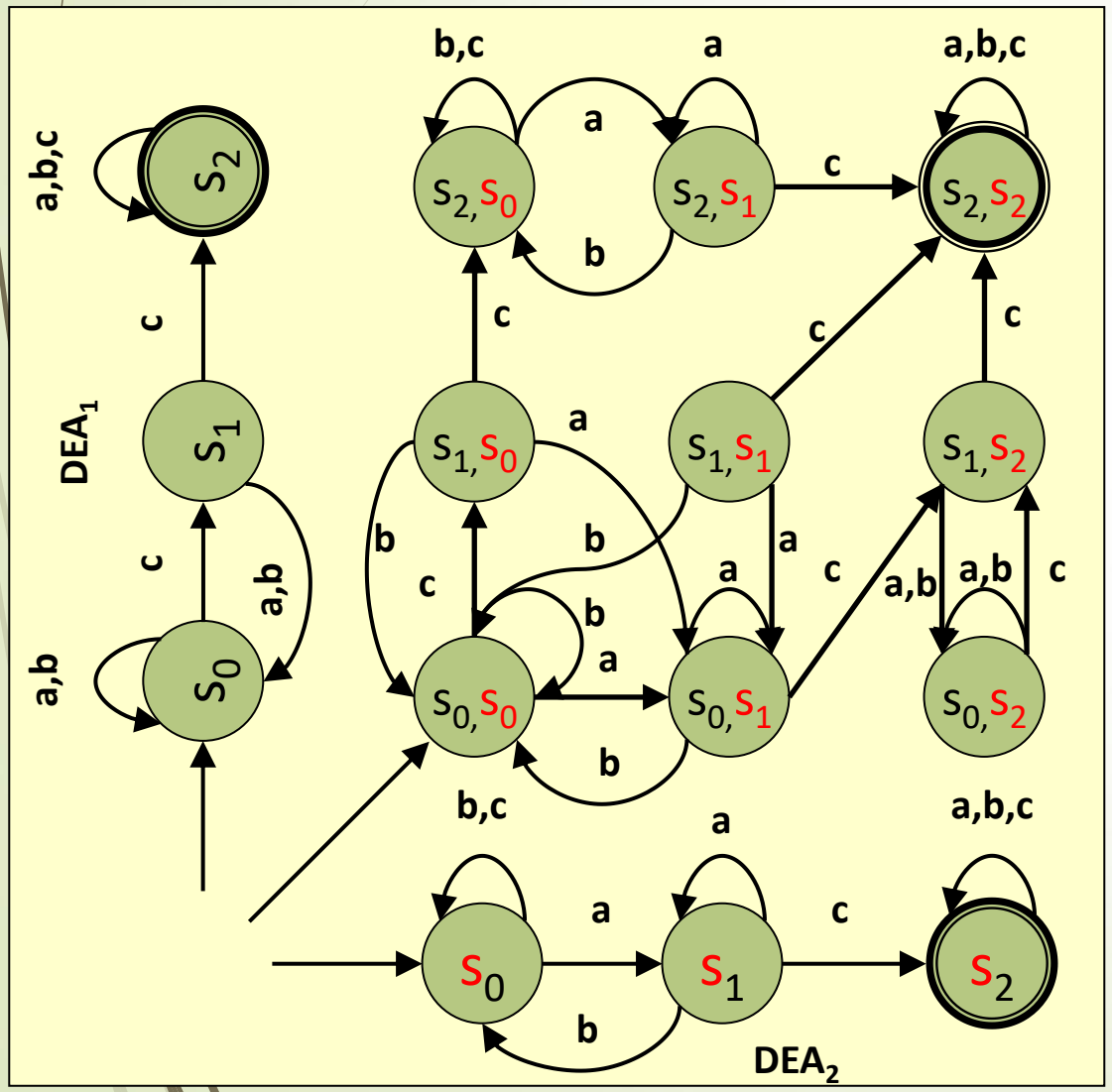
- Aufstellen des Produkt-automaten. Mit den Produkt-zuständen (s_i,s_j) mit s_i von dem Automaten DEA1 und s_j von dem Automaten s_j.
- Nächster Schritt: Eintragen der Übergänge in dem Produkt-Automat.
- Der Endzustand (s_2,s_2) ist schon bestimmt. Denn es sollen ja beiden Teilstrings erkannt werden.

Produktautomat Übergangszustände



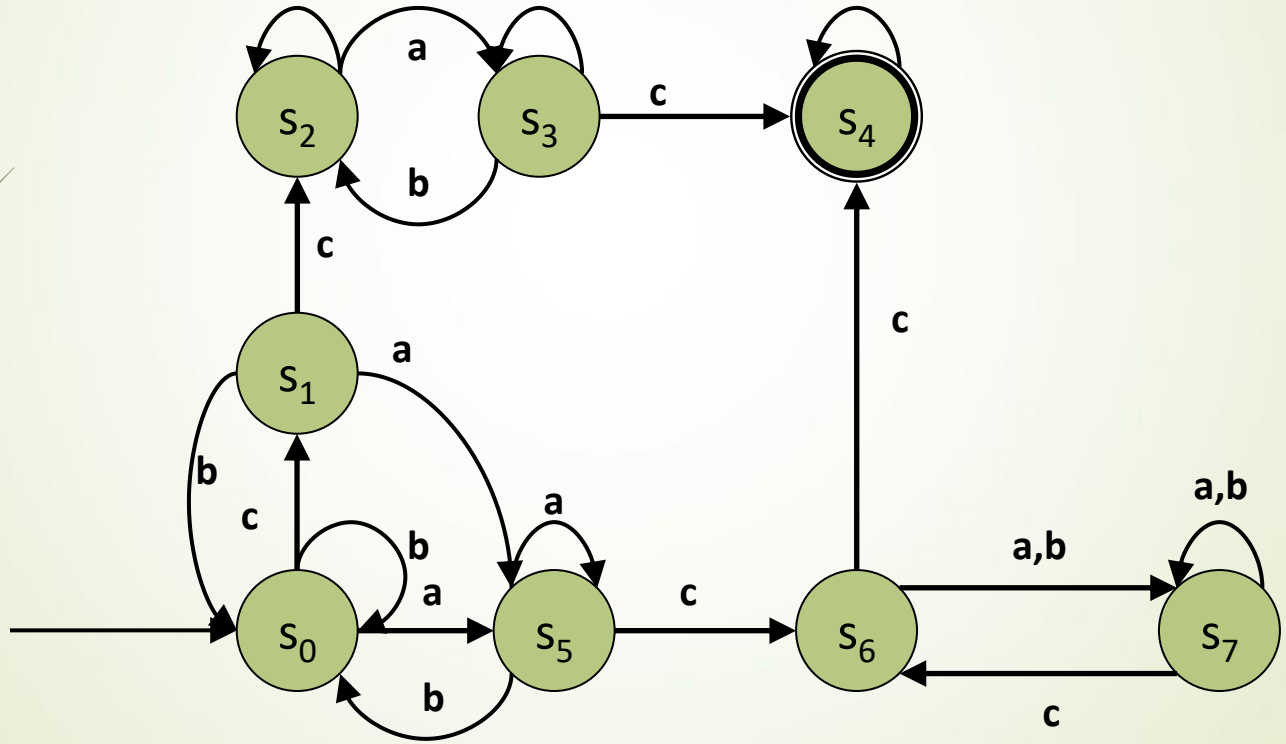
- Eintragen der Übergänge in dem Produktautomaten.
- Starten mit (s_0,s_0).
  - Lesen a: $(s_0,s_0) \rightarrow (s_0,s_1)$
  - Lesen b: $(s_0,s_0) \rightarrow (s_0,s_0)$
  - Lesen c: $(s_0,s_0) \rightarrow (s_1,s_0)$
- Dann (s_0,s_1).
  - Lesen a: $(s_0,s_1) \rightarrow (s_0,s_1)$
  - Lesen b: $(s_0,s_1) \rightarrow (s_0,s_0)$
  - Lesen c: $(s_0,s_1) \rightarrow (s_1,s_2)$
- usw. bis alle Übergänge eingezeichnet sind.

Produktautomat
Übergangszustände



- Eintragen der Übergänge in dem Produktautomaten.
- Starten mit (s_0,s_0).
  - Lesen a: $(s_0,s_0) \rightarrow (s_0,s_1)$
  - Lesen b: $(s_0,s_0) \rightarrow (s_0,s_0)$
  - Lesen c: $(s_0,s_0) \rightarrow (s_1,s_0)$
- Dann (s_0,s_1).
  - Lesen a: $(s_0,s_1) \rightarrow (s_0,s_1)$
  - Lesen b: $(s_0,s_1) \rightarrow (s_0,s_0)$
  - Lesen c: $(s_0,s_1) \rightarrow (s_1,s_2)$
- usw. bis alle Übergänge eingezeichnet sind.
- Von (s_1,s_1) gehen nur Zustände weg, daher kann man diesen Zustand entfernen, denn (s_1,s_1) wird nie vom Startzustand aus erreicht.

Fertiger Produktautomat



Eigenschaften regulärer Sprachen

Pumping-Lemma Einführung

- Es gibt recht einfach gebaute Sprachen, die nicht regulär sind.
  - $L = \{ 1^k \mid \text{mit } k = 2^n \text{ und } n \geq 0 \} = \{ 1, 11, 1111, 1^8, 1^{16}, \ldots. \}$
  - $L = \{0^n1^n \mid n \geq 0 \} = \{\varepsilon, 01, 0011, 000111, \ldots\}$
- Wie erkennt man das?
- Ein endlicher Automat hat nur endliche viele Zustände N
- Ein Wort w mit $|w| > N$ muss mindestens einen Zustand 2 mal erreichen. Sei z_i dieser Zustand.
- Wir zerlegen das Wort in 3 Teile u, v, w mit
  - Das Teilwort u führt vom Startzustand s_0 zu s_i
  - Das Teilwort v führt von s_i zu s_i
  - Das Teilwort w führt von s_i zu Endzustand s_F
  - $(s_0,uvw) \rightarrow^* (s_i,vw) \rightarrow^* (s_i,w) \rightarrow^* (s_F,\varepsilon)$
  - Da das Teilwort v immer von s_i zu s_i führt, müssen in dieser Sprache auch alle Worte mit uv^mw mit $m \geq 0$ vorkommen.

Eigenschaften regulärer Sprachen

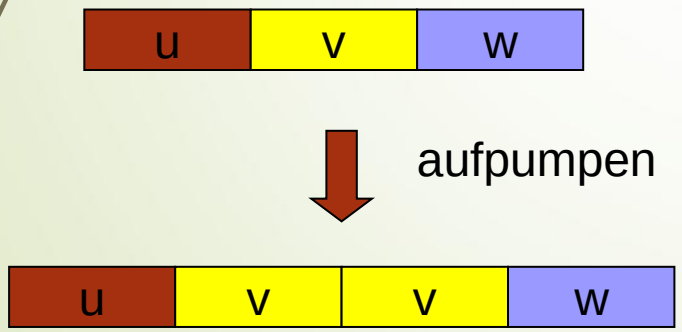
Pumping-Lemma Definition

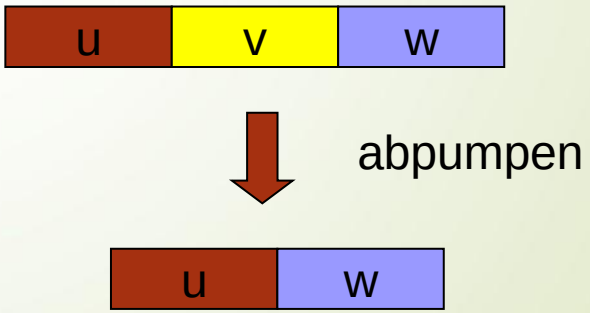
Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

Sei L eine reguläre Sprache. Dann existiert eine Zahl $N \geq 0$, so dass sich jedes Wort $x \in L$ mit $|x| \geq N$ in der folgenden Form schreiben lässt.

$x = uvw$ mit $|v| \geq 1$ und $|uv| \leq N$,

für alle $i \geq 0$ gilt, dass $uv^iw \in L$ ist.





Eigenschaften regulärer Sprachen

Pumping-Lemma Beispiel

- $L = \{ 0^n 1^n \mid n \geq 0 \}$ ist nicht regulär
- Annahme L wäre regulär und $x = 0^n 1^n$ mit $n > N$, dann muss eine Aufspaltung von x in $x = uvw$ geben und xv^kw mit $k \geq 0$ wäre auch ein erlaubtes Wort.
  - Sei v ganz in der ersten Hälfte d.h $v = 0^j$ mit einem $j > 0$ dann müssten auch die Wörter $w = 0^{n-j+kj}1^n \in L$ sein $\Rightarrow$ Widerspruch!
  - Sei v ganz in der zweiten Hälfte d.h $v = 1^j$ mit einem $j > 0$ dann müssten auch die Wörter $w = 0^n 1^{n-j+kj} \in L$ sein $\Rightarrow$ Widerspruch!
  - Sei v dazwischen mit $v=0^l 1^m$ mit $l,m > 0$, dann müssten auch die Wörter mit $w = 0^{n-l}(0^l 1^m)^k 1^{n-m} \in L$ mit $k \geq 0$ sein. $\Rightarrow$ Widerspruch!
- $\Rightarrow$ L ist nicht regulär.

Entscheidungsprobleme für reguläre Sprachen

- Der Zweck eines endlichen Automaten ist die Prüfung, ob ein gegebenes Wort zu seiner Sprache gehört. (Wortproblem)
- Auch andere Entscheidungsprobleme sind hier relevant.
- Für reguläre Sprachen können diese alle mit ja beantwortet werden.

Problem	**Gegeben**	**Gefragt**	**Entscheidbar**
Wortproblem	L und $w \in \Sigma^*$	Gilt $w \in L$?	Ja
Leerheitsproblem	L	Gilt $L = \emptyset$?	Ja
Endlichkeitsproblem	L	Gilt $\|L\| < \infty$?	Ja
Äquivalenzproblem	L_1 und L_2	$L_1 = L_2$?	Ja

Grenzen endlicher Automaten

- Endliche Automaten akzeptieren nur reguläre Sprachen
- Sprache wie:
  - $L(P) = \{vv^r \mid$, für alle $v \in E^* \}$ (Palindrome)

    mit v^r gespiegelte Version von v
  - $L(P) = \{a^n b^n \mid n \geq 0 \}$
  - $L(P) = \{a^p \mid$ mit p eine Primzahl $\}$
- sind nicht regulär und können von einem endlichen Automaten nicht erkannt werden.
- Erweitern der reguläre Sprache und endliche Automaten
  - kontextfreie Sprachen Typ-2-Grammatiken
  - Automaten mit einem unendlichen Speicher, der aber nur das oberste Elemente verändern kann (Stack)
  - Diese beiden Konzepte sind äquivalent

Aufgabe
Grenzen der endlichen Automaten

Zeigen Sie, dass folgende Sprachen nicht regulär sind:

1. $L = \{0^n \mid n \text{ ist eine Quadratzahl}\}$
2. $L = \{0^n \mid n \text{ ist eine Potenz von } 2\}$
3. $L = \{ww \mid \text{mit } w \in \Sigma^* \text{ und } \Sigma = \{0,1\}\}$

Reguläre Ausdrücke

- Reguläre Ausdrücke sind beschreibende Konzepte für reguläre Sprachen.
- Die Menge der reguläre Ausdrücke über E ist die Menge der Wörter über $E \cup \{\Lambda, E, \bullet, |, *, [,]\}$, die nach folgender Regeln gebildet werden.
  - Der Nulloperator Λ ist ein regulärer Ausdruck
  - Der Einsoperator E ist ein regulärer Ausdruck
  - Jedes Zeichen $e \in E$ ist ein regulärer Ausdruck
  - Sind v und w reguläre Ausrücke, dann auch
    - $v \bullet w = vw$
    - [v |w] (v oder w)
    - $v^* = vvvvv$ (beliebig viele v verknüpft)
- Reguläre Ausdrücke und endliche Automaten sind äquivalent

Reguläre Ausdrücke

Beispiele

- $\gamma = [0 \bullet [0 \mid 1]^*]$ $w = \{00,01,000,001,010,011,....\}$
- $\gamma = [1^*0 \bullet 0 \bullet [0 \mid 1]^*] = ?$

Reguläre Sprache

- Die von einem regulären Ausdruck erzeugte Sprache ist:
  - $L(\Lambda) = \varnothing$; Λ definiert die leere Sprache
  - $L(E) = \{\varepsilon\}$: L legt die Sprache fest, die nur das leere Wort enthält
  - $L(a) = \{a\}$ für alle $a \in \Sigma$; Sprache die nur die nur das einzige Zeichen a enthält.
  - Sind v und w reguläre Ausrücke, dann auch
    - $L(v \bullet w) = L(v) \bullet L(w)$
    - $L([v \mid w]) = L(v) \cup L(w)$
    - $L(v^{\otimes}) = (L(v))^*$
- Beispiel: regulärer Ausdruck: $\gamma = 0 \bullet (0+1)^*$
  - $L(\gamma) =_1 L(0) \bullet L((0+1)^*) = L(0) \bullet (L(0+1))^* =$
  - $L(0) \bullet (L(0) \cup L(1))^* = \{0\}(\{0\} \cup \{1\})^* = \{0\}(\{0,1\})^* = 0(0+1)^*$ (Notation)
  - $0(0+1)^* = \{0, 00, 01, 000, 010, \ldots.\}$

Reguläre Sprachen
Rechenregeln 1

Algebraische Regeln. Seien L,M,N reguläre Sprachen dann gilt:

1. Kommutativität und Assoziativität
   - L+M = M+L (Kommutativgesetz für die Vereinigung)
   - L•M ≠ M•L (Kommutativgesetz für die Konkatination gilt i.a nicht)
   - (L+M)+N = L+(M+N) (Assoziativgesetz für die Vereinigung)
   - (L•M) •N = L• (M•N) (Assoziativgesetz für die Vereinigung)
2. Identität und Vernichtung
   - ∅ + L= L + ∅ = L (Identität für die Vereinigung)
   - εL = Lε = L (Identität für die Konkatination)
   - ∅L= L∅ = ∅ (Vernichtung für die Konkatination)
3. Distributivgesetze
   - L•(M+N) = L•M + L•N (Links Distributivtät der Konkatination)
   - (M+N)•L = M•L + N•L (rechts Distributivtät der Konkatination)
4. Idempotenz
   - L+L = L (Idempotenz der Vereinigung)

Reguläre Sprachen
Rechenregeln 2

5. Gesetze mit dem Kleeneschen Sternoperator
   - $(L^*)^* = L^*$
   - $\varnothing^* = \varepsilon$
   - $\varepsilon^* = \varepsilon$
   - $L^+ = LL^*$
   - $L^* = L^+ + \varepsilon$
   - $L? = \varepsilon + L$
6. Weitere Folgerungen mit dem Kleeneschen Sternoperator
   - $(L+M)^* = (L^*M^*)^*$
   - $(L^*+M)^* = (L+M)^*$
   - $(L+M)^* = L(L+M)^* + M(L+M)^* + \varepsilon$
   - $(L+M)^* = (L+M)^*LM(L+M)^* + M^*L^*$

Aufgabe
Umformen von regulären Ausdrücken

Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden regulären Ausdrücke:

1. (0*1)*0* = 0*(10*)*
2. (0*111)*0* = 0*(1110*)*
3. (00)*(ε +0) = 0*
4. (0+1)*0(0+1)*1(0+1)* = (0+1)*01(0+1)*
5. (0+1)*01(0+1)* +1*0* = (0+1)*

Lösung Aufgabe
Umformen von regulären Ausdrücken

Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden regulären Ausdrücke:

1. (0*1)*0* = (ε +(0*1)+(0*1)(0*1)+ …)0* = (0* +(0*1) 0* + (0*1)(0*1)0* + …) =

   0* (ε +(10*)+(10*)(10*)+ …)= 0*(10*)*

1. (0*111)*0* = 0*(1110*)* wie oben vorgehen.
2. (00)*(ε +0) = (00)*+0(00)*= 0* (gerade + ungerade Anzahl von 0)
3. (0+1)*0(0+1)*1(0+1)* =(0+1)*01(0+1)* (klar)
4. (0+1)*01(0+1)* +1*0* = (0+1)*

Der erste Term (0+1)*01(0+1)* enthält alle Worte, die den String „01“ enthalten. Der zweite Term 1*0* liefert die Werte, die den Substring „10“ nicht enthalten, d.h. 0 ,1, ε oder eine beliebige Anzahl von 1 gefolgt von einer beliebigen Anzahl von 0. Beide Termen zusammen produzieren, daher alle möglichen Kombinationen.

Äquivalenz

endliche Automaten ⇔ reguläre Ausdrücke

- Die Klasse der Sprachen, welche durch reguläre Ausdrücke erzeugt werden, sind äquivalent zu den Klassen von Sprachen, die durch endliche Automaten erzeugt werden.
- Zu zeigen:
  1. Jede Sprache L(A) eines endlichen Automaten A kann durch die Sprache L(R) eines regulären Ausdruck R erzeugt werden.
  2. Jede Sprache L(R) eines regulären Ausdrucks R kann auch durch die Sprache L(A) einen endlichen Automaten A erzeugt werden.

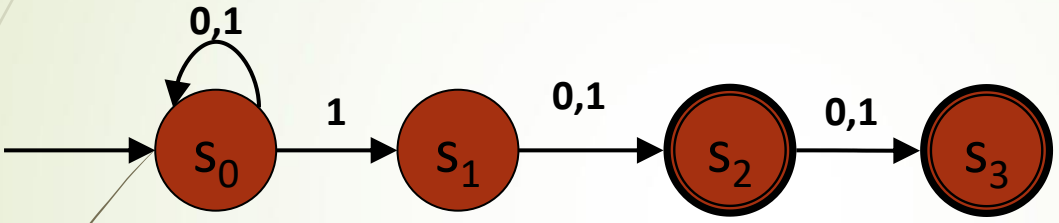
Äquivalenz
endliche Automaten ⇒ reguläre Ausdrücke

Beweisidee :

- Elimination aller Zustände bis nur noch der Start- und ein Endzustand übrig bleiben.
  - Statt einzelne Zeichen aus dem Alphabet ∑ als Übergänge zwischen 2 Zustände werden nun reguläre Ausdrücke als Übergänge zugelassen.
  - Dies erlaubt Schritt für Schritt alle innere Zustände zu entfernen.
  - Endzustände werden am Schluss entfernt.
  - Technisch führt man einen neuen Startzustand S und einen neuen Endzustand S_E ein, welche mit ε-Übergänge mit den entsprechenden Startzustand bzw. mit den entsprechenden Endzuständen verbunden sind.

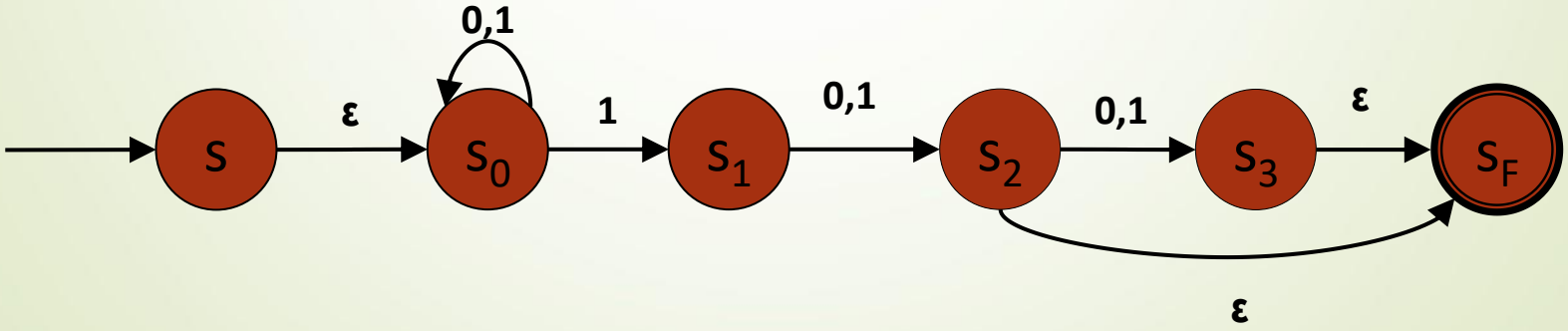
endliche Automaten ⇒ reguläre Ausdrücke
Beispiel

- Beispiel: A = ({s_0, s_1, s_2, s_3},{0,1},δ,{s_0},{s_2,s_3})



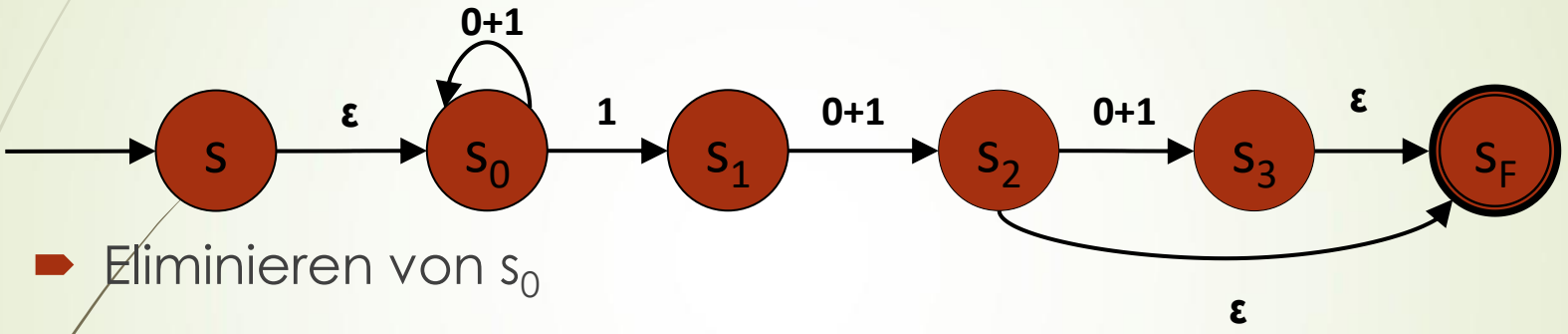
δ	0	1
s_0	{s_0}	{s_0,s_1}
s_1	{s_2}	{s_2}
s_2	{s_3}	{s_3}
s_3	∅	∅

- Einführen eines neuen Startzustands S und eines neuen Endzustands S_F

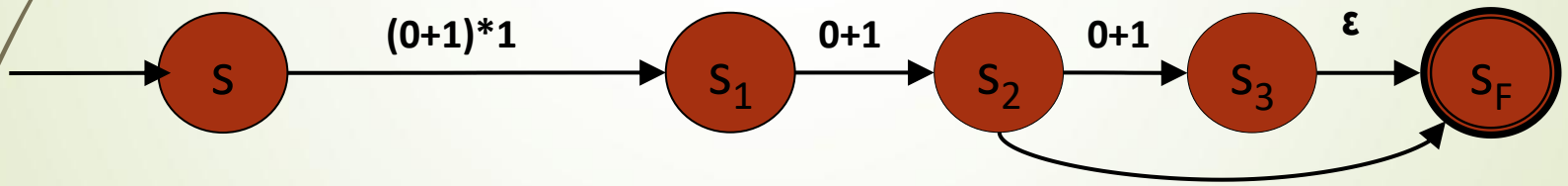


endliche Automaten ⇒ reguläre Ausdrücke
Beispiel

- Übergänge in reguläre Ausdrücke umformulieren



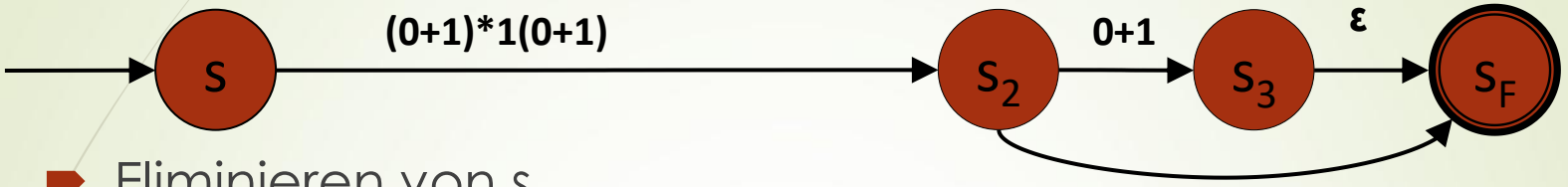
- Eliminieren von s_0



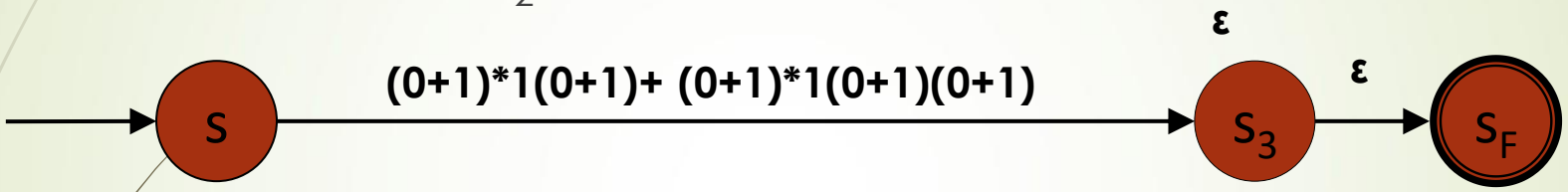
- Eliminieren von s_1

endliche Automaten ⇒ reguläre Ausdrücke

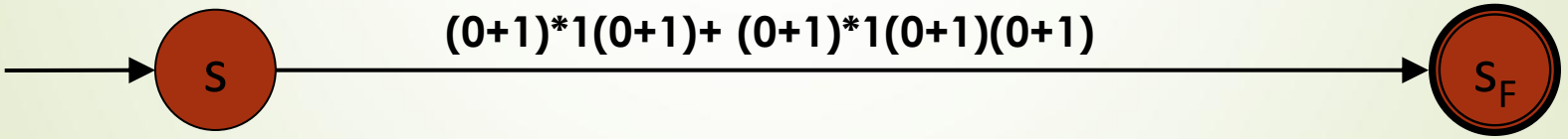
Beispiel



- Eliminieren von s_2



- Eliminieren von s_3

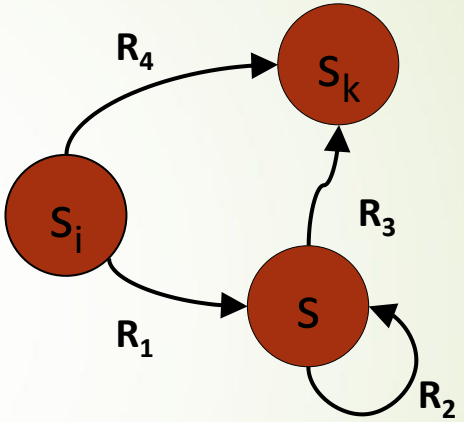


- Der reguläre Ausdruck R = (0+1)*1(0+1)(0+1)+ (0+1)*1(0+1) definiert alle Worte, die die Maschine akzeptiert, d.h L(R) = L(A)
- L= (0+1)*1(0+1)((0+1+ε) (vereinfacht)

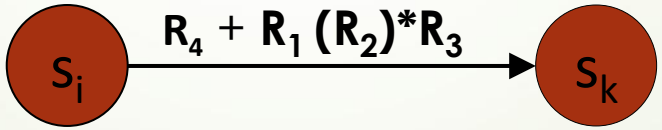
endliche Automaten ⇒ reguläre Ausdrücke

Allgemein: Elimination eines Zustandes

- Eliminieren von *S*

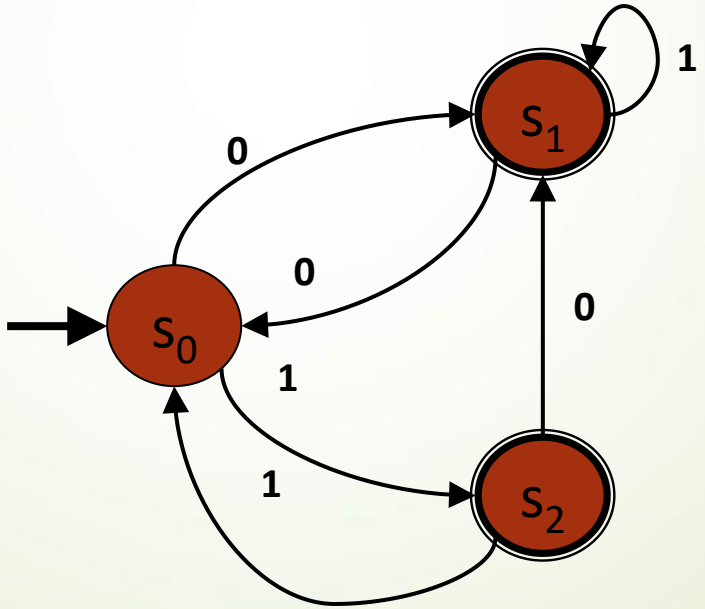


- ergibt:



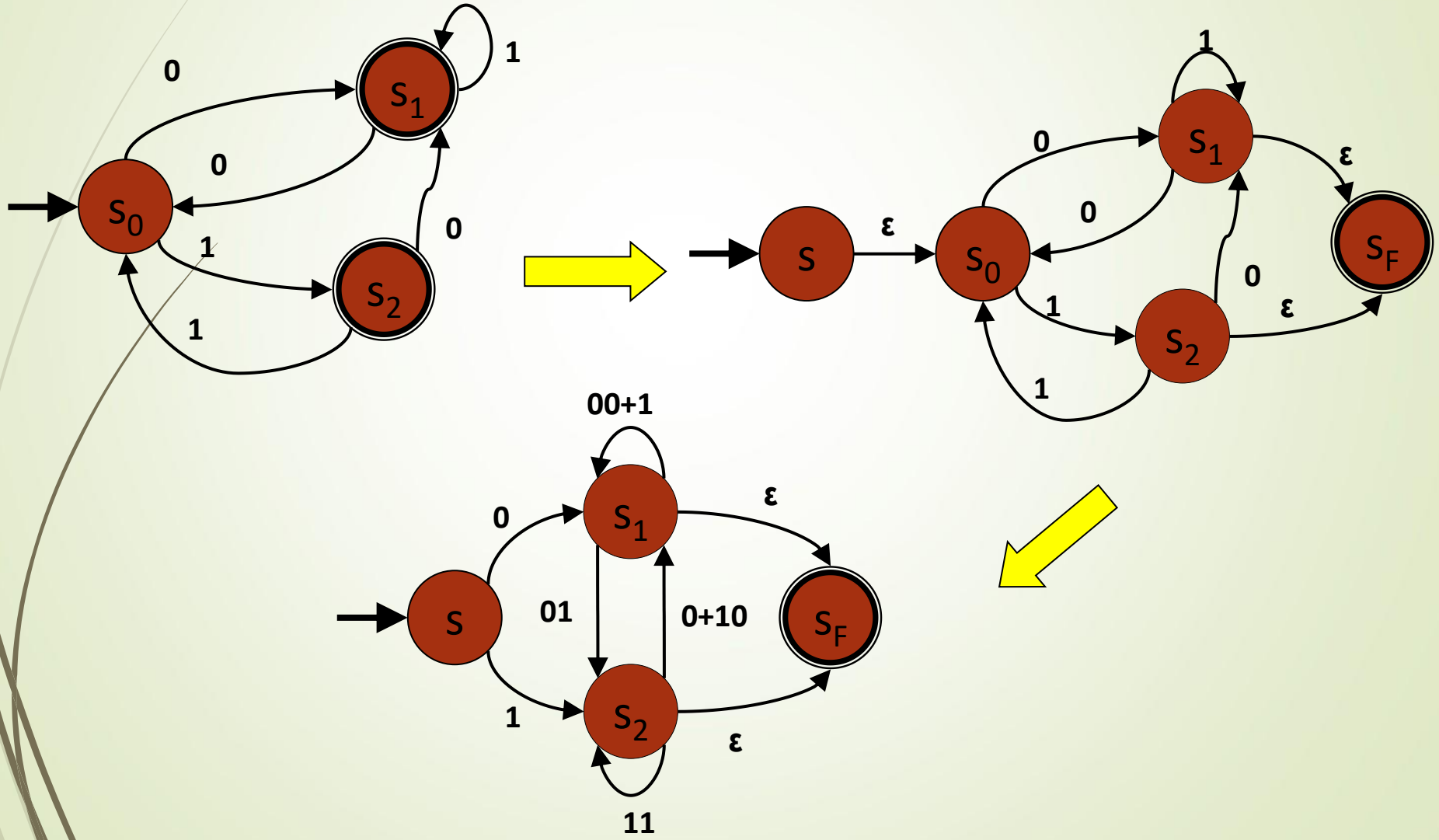
Aufgabe
Umwandeln in einen regulären Ausdruck

- Wandeln Sie die Sprache des folgenden DEA in einen äquivalenten regulären Ausdruck um.

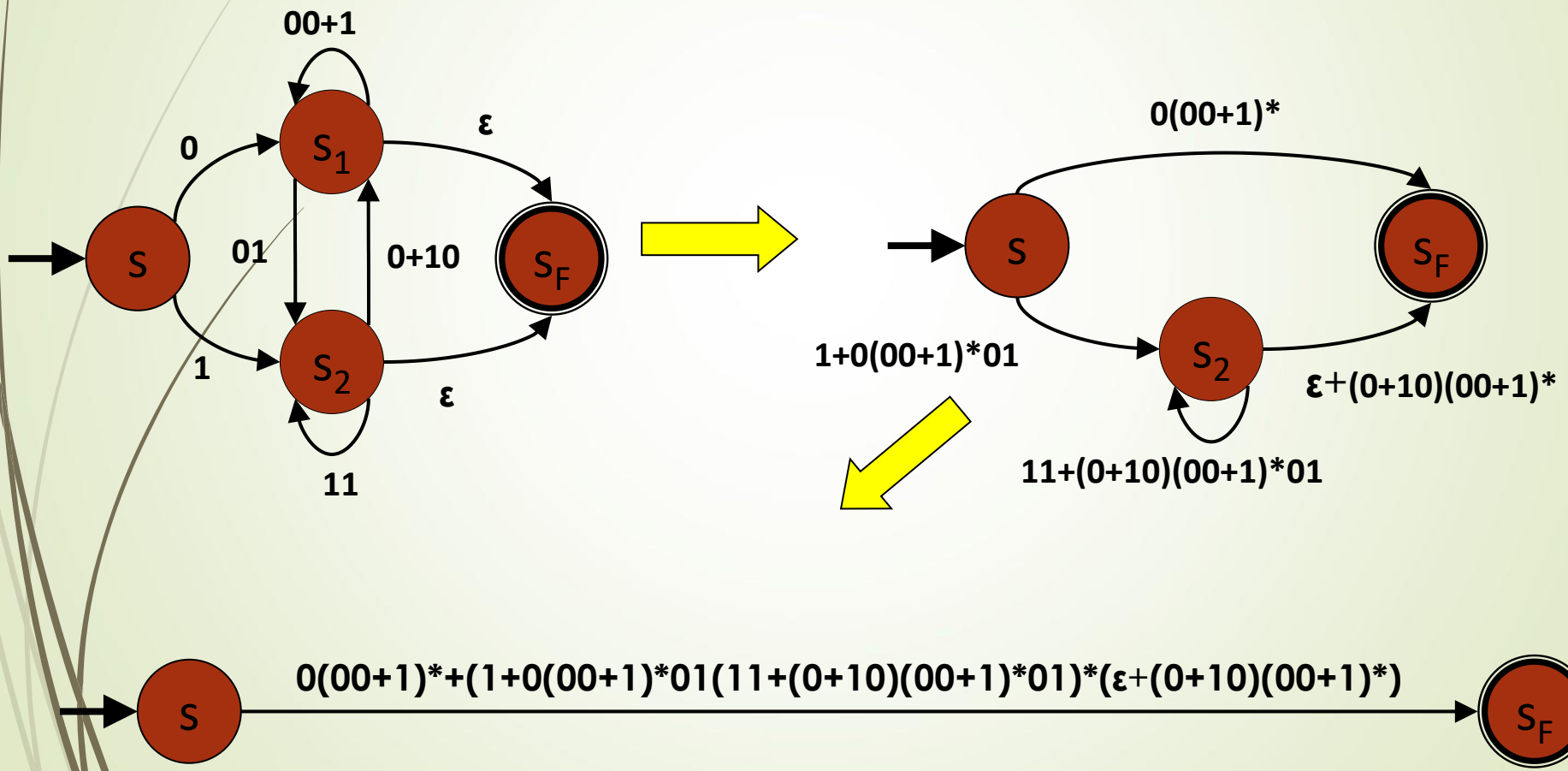


endliche Automaten ⇒ reguläre Ausdrücke

weiteres Beispiel:



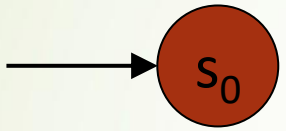
endliche Automaten ⇒ reguläre Ausdrücke
weiteres Beispiel



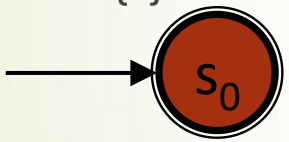
Äquivalenz

reguläre Ausdrücke ⇒ endliche Automaten

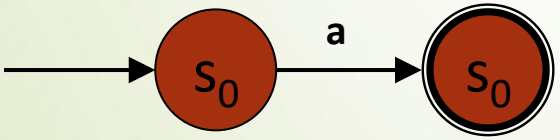
- Automat der
  - die leere Sprache akzeptiert



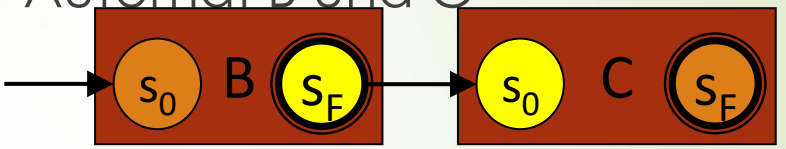
  - die Sprache {ε} akzeptiert



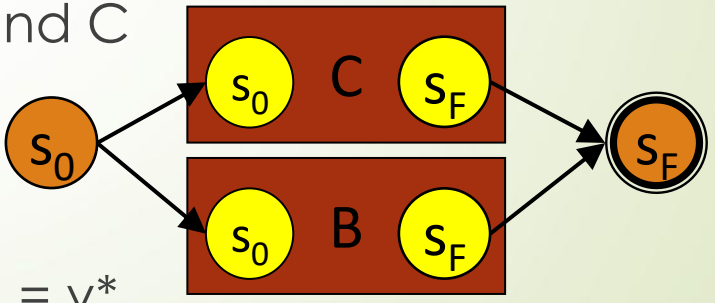
  - die Sprache {a} akzeptiert



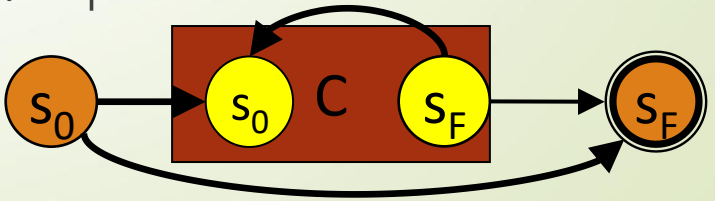
- Sei $\alpha = \beta\ \gamma$
- Hintereinanderschalten von Automat B und C



- Sei $\alpha = \beta \mid \gamma$
- Parallelschalten von Automat B und C



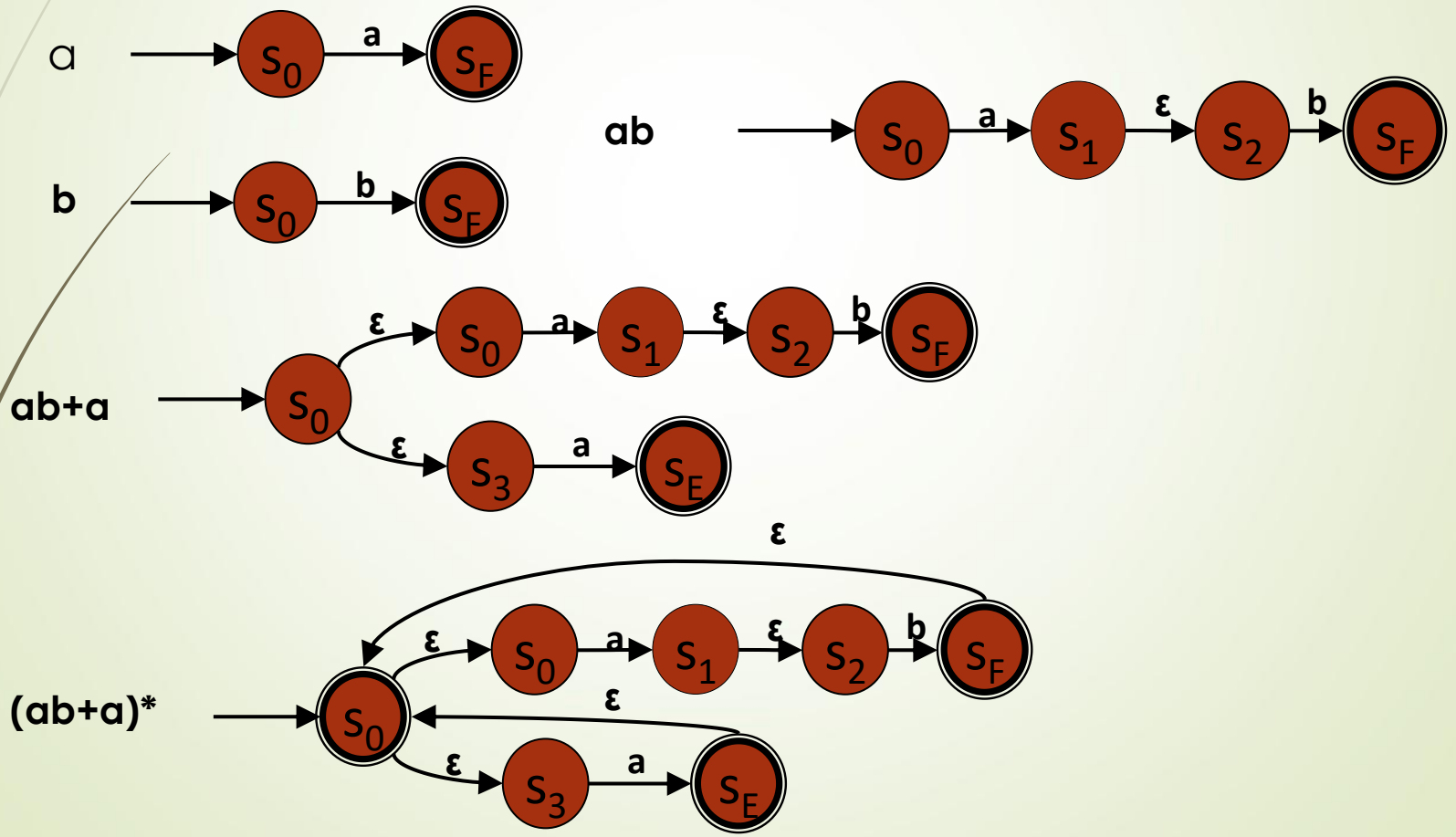
- $\alpha = \gamma^*$



Äquivalenz

Beispiel: reguläre Ausdrücke ⇒ endliche Automaten

- Sei R = (ab+a)*
- Formale Konstruktion

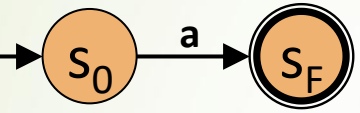


Äquivalenz

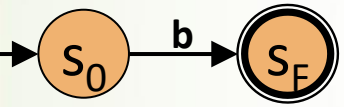
Beispiel: reguläre Ausdrücke ⇒ endliche Automaten

- Sei R = (ab+a)*
- Vereinfachte konstruktion

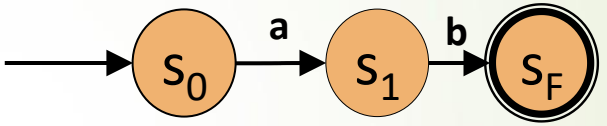
a



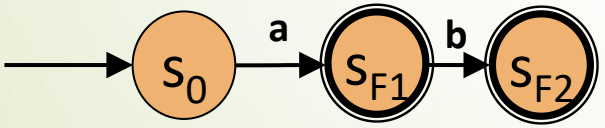
b



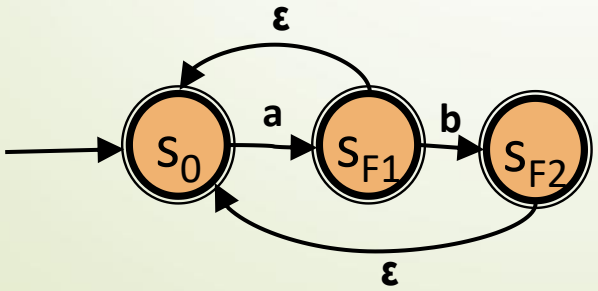
ab



ab+a



(ab+a)*



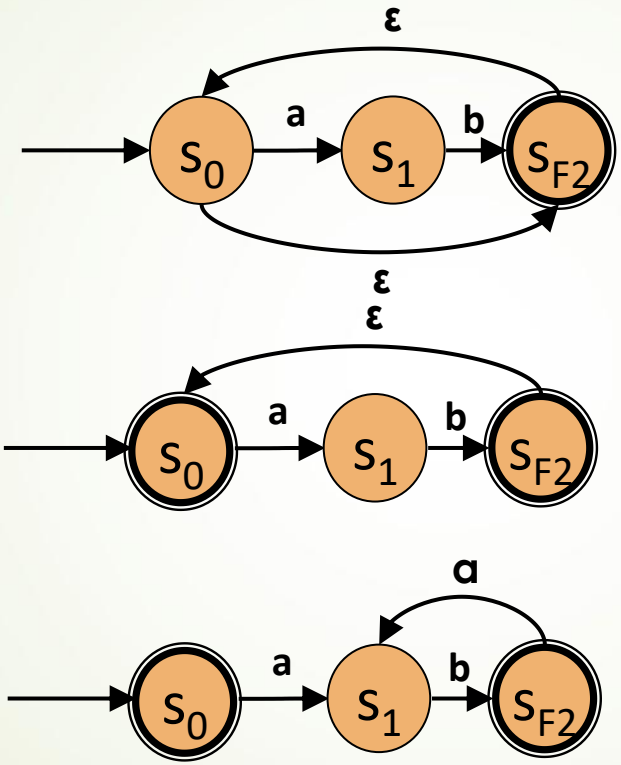
Aufgabe
reguläre Ausdrücke

Konstruieren Sie einen deterministischen endlichen Automat der folgende Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a,b\}$ akzeptiert:

1. L = (ab)*
2. L = (a+b)(aa)*
3. L = b*a(a+b)

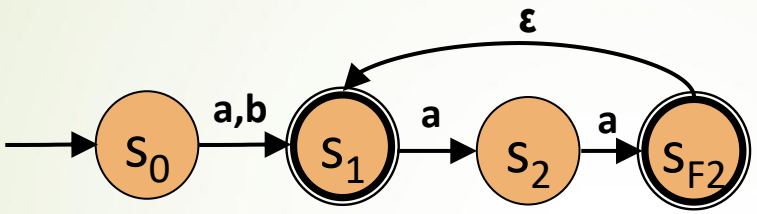
Lösung

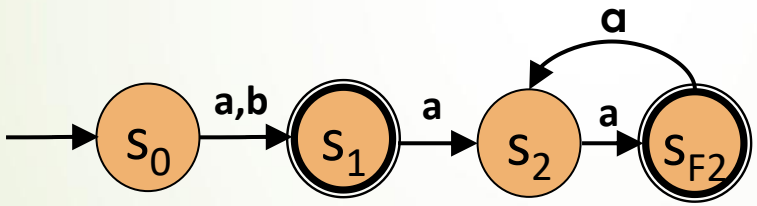
L = (ab)*



Lösung

L =(a+b)(aa)*





Lösung

L = b*a(a+b)