I Die Differenzialgleichung 1. Ordnung

1. Die DGL 1. Ordnung mit trennbaren Variablen

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Differenzialgleichungen:

1. $y' = e^{y-x}$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$. Ergebnis: $y = -\ln\left(C + e^{-x}\right)$ mit $C \geq 0$ bzw. $y = x$.

2. $x \cdot y' + (1+x) \cdot y = 0$ mit der Anfangsbedingung $y(1) = e$. Ergebnis: $y = C \cdot \frac{e^{-x}}{x}$ bzw. $y = \frac{e^{2-x}}{x}$.

3. $x \cdot y' + 4 \cdot y = 0$ mit der Anfangsbedingung $y(1) = 2$. Ergebnis: $y = \frac{C}{x^4}$ bzw. $y = \frac{2}{x^4}$.

4. $(2x+1) \cdot y' - 2 \cdot y = 0$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$. Ergebnis: $y = C \cdot (2x+1)$ bzw. $y = 2x+1$.

5. $(2x+1)^2 \cdot y' - 2 \cdot y = 0$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$. Ergebnis: $y = C \cdot e^{-\frac{1}{2x+1}}$ bzw. $y = e^{\frac{2x}{2x+1}}$

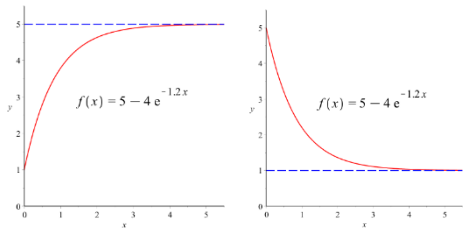
6. $y \cdot y' + x = 0$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = 3$. Ergebnis: $y = \pm\sqrt{C - x^2}$ bzw. $y = \sqrt{9 - x^2}$.

7. Vier Wachstumsmodelle mit $y = y(x)$

   a. Lineares Wachstum (Zerfall) hat die DGL $y' = k$ mit einer Konstanten $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $k > 0$ für Wachstum, $k < 0$ für Zerfall.
   Ergebnis: $y = k \cdot x + c$, $c = y(0) \in \mathbb{R}$.

   b. Exponentielles Wachstum (Zerfall) hat die DGL $y' = k \cdot y$ mit einer Konstanten $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $k > 0$ für Wachstum, $k < 0$ für Zerfall.
   Ergebnis: $y = c \cdot e^{k \cdot x}$, $c = y(0) \in \mathbb{R}$.

   c. Beschränktes Wachstum (Zerfall) mit der Schranke S hat die DGL $y' = k \cdot (S - y)$ mit einer Konstanten $k > 0$.
   Ergebnis: $y = S - c \cdot e^{-k \cdot x}$ mit $c > 0$ für Wachstum, $c < 0$ für Zerfall.

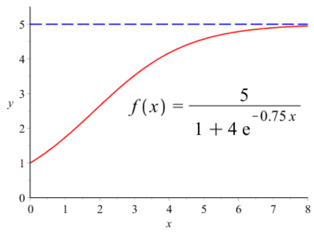


   d. Logistisches Wachstum mit der Schranke S hat die DGL $y' = k \cdot y \cdot (S - y)$ mit einer Konstanten $k > 0$. Dies ist eine Kombination von exponentiellem und beschränktem Wachstum. Ein exponentieller Anstieg geht in ein beschränktes Wachstum über; siehe Schaubild.

   Hinweis: Mit $\frac{1}{y \cdot (S-y)} = \frac{1}{S \cdot y} + \frac{1}{S \cdot (S-y)}$ folgt aus

   $\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{S-y}\right) dy = k \cdot S\,dx$ die Beziehung $\ln(|y|) - \ln(|S-y|) = k \cdot S \cdot x + c$

   und daraus das Ergebnis $y = \frac{S}{1 + C \cdot e^{-k \cdot S \cdot x}}$ mit einer Konstanten C.



2. Die lineare DGL 1. Ordnung $y' + f(x) \cdot y = g(x)$

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Differenzialgleichungen durch Trennung der Variablen zur Bestimung von $y_0(x)$ und anschließender Variation der Konstanten zur Bestimmung von $y_s(x)$.

1. $y' + 2x \cdot y = x$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = -1$. Ergebnis: $y = \frac{1}{2} + C \cdot e^{-x^2}$ bzw. $y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot e^{-x^2}$.

2. $y' \cdot \sin x - y \cdot \cos x = -2 \cdot \sin^3 x$ mit der Anfangsbedingung $y(\pi/2) = 1$. Hinweis: $\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x|$

   Ergebnis: $y = 2\sin x \cdot \cos x + C \cdot \sin x$ bzw. $y = 2\sin x \cdot \cos x + \sin x$.

3. $y' - 2y = e^{2x} \cdot \sin x$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = -1$.

   Ergebnis: $y = (C - \cos x) \cdot e^{2x}$ bzw. $y = -e^{2x} \cdot \cos x$.

4. $y' + (3-4x) \cdot y - e^{2x^2} = 0$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = \frac{13}{3}$.

   Ergebnis: $y = C \cdot e^{2x^2-3x} + \frac{1}{3} e^{2x^2}$ bzw. $y = 4 \cdot e^{2x^2-3x} + \frac{1}{3} e^{2x^2}$.

5. $y' + 3x \cdot y = 6x$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$.

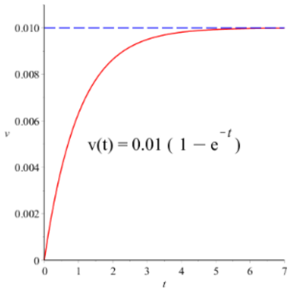
   Ergebnis: $y = C \cdot e^{-\frac{3}{2}x^2} + 2$ bzw. $y = 2 - e^{-\frac{3}{2}x^2}$.

6. Nach Stokes erfährt eine kleinere Kugel vom Radius r beim Sinken mit der Geschwindigkeit $v = v(t)$ in einer zähen Flüssigkeit der Viskosität η die Widerstandskraft $F = 6\pi\eta r v$, d.h. $F = k \cdot v$ mit einer Konstanten $k > 0$. Dann gilt nach dem Newtonschen Grundgesetz $F = m \cdot \dot{v}$, der Punkt bedeutet die Ableitung nach der Zeit t, die DGL

   $m \cdot \dot{v}(t) = m \cdot g - k \cdot v(t)$. Nach Division durch m folgt $\dot{v}(t) = g - \frac{k}{m} \cdot v(t)$.

   Bestimmen Sie $v(t)$ mit der Anfangsbedingung $v(0) = 0$.

   Ergebnis: $v(t) = \frac{m \cdot g}{k} + C \cdot e^{-k \cdot t}$ bzw. $v(t) = \frac{m \cdot g}{k}\left(1 - e^{-k \cdot t}\right)$ mit $v(0) = 0$.



7. Nach Newton erfährt ein größerer Körper der Querschnittsfläche A bei der Geschwindigkeit $v = v(t)$ eine Widerstandskraft $F = k \cdot v^2$ mit einer Konstanten $k > 0$; Diese Kraft F lässt sich ausführlich darstellen durch $F = \frac{1}{2} c_W \rho A v^2$, dabei ist c_W der von der Körperform abhängige Widerstandsbeiwert, eine reine Zahl, ρ die Dichte des bremsenden Mediums. Somit ergibt sich die DGL $m \cdot \dot{v}(t) = m \cdot g - k \cdot v^2(t)$. Dies ist eine nichtlineare inhomogene DGL 1.Ordnung. Bestimmen Sie $v(t)$ mit der Anfangsbedingung $v(0) = 0$.

   Hinweis: Die DGL lässt sich umformen in $\frac{1}{1 - \frac{k}{mg} v^2} dv = g\,dt$. Nach der Substitution $x = \sqrt{\frac{k}{mg}}\, v$ und

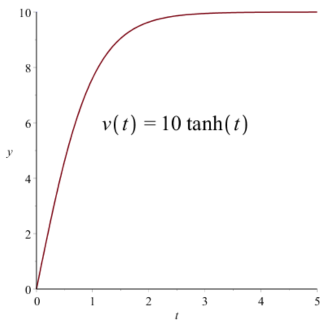
   $\int \frac{1}{1-x^2} dx = \operatorname{arctanh}(x)$ folgt $\sqrt{\frac{mg}{k}} \operatorname{arctanh}\left(\sqrt{\frac{k}{mg}}\, v\right) = g\,t + c$ mit einer Konstanten c. Dabei ist

   $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})}{\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}$.

   Und nach v aufgelöst: $v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \tanh\left(\sqrt{\frac{k}{mg}}\,(g\,t + c)\right)$.

   Mit $v(0) = 0$ ergibt sich $v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \tanh\left(\sqrt{\frac{k}{mg}}\, g\,t\right)$.

   Außerdem gilt $\lim_{t \to \infty} v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}}$.



3. Lösen der DGL 1. Ordnung durch Substitution

Typ I: $y' = y - x$. Hinweis: Die Substitution $u = y - x$ führt auf $\frac{du}{u-1} = dx$. Ergebnis: $y = 1 + x + c \cdot e^x$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Typ 2: $x^2 \cdot y' = 2y \cdot (x - y)$. Hinweis: Nach Division durch x^2 führt die Substitution $u = \frac{y}{x}$ auf $u + x \cdot u' = 2u \cdot (1 - u)$. Die Trennung der Variablen liefert $\frac{du}{u - 2u^2} = \frac{dx}{x}$. Nach der Partialbruchzerlegung $\frac{1}{u - 2u^2} = \frac{1}{u} + \frac{2}{1 - 2u}$ folgt durch Integration $\ln|u| - \ln|1 - 2u| = \ln|x| + c$, also $\ln\left|\frac{u}{1-2u}\right| = \ln|x| + c$ oder $\frac{u}{1-2u} = C \cdot x$ mit $C \in \mathbb{R}$. Und nach Resubstitution folgt $\frac{y}{x - 2y} = C \cdot x$, also $y = \frac{C \cdot x^2}{1 + 2C \cdot x}$ mit $C \in \mathbb{R}$.

Typ 3: $y' + \frac{1}{x} y = -y^2$. Hinweis: Die Substitution $u = y^{-1}$ ergibt $y = u^{-1}$ und $y' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$. Eingesetzt folgt $u' - \frac{1}{x} u = 1$. Die homogene Lösung lautet $u(x) = C \cdot x$ mit $C \in \mathbb{R}$. Nach Variation der Konstanten folgt die Lösung $y = \frac{1}{x \cdot (C + \ln|x|)}$ mit $C \in \mathbb{R}$.

II Die Differenzialgleichung 2. Ordnung

1. Die lineare homogene DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\mathbf{y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0}$$

Man unterscheidet drei Fälle.

Fall 1: $D = a^2 - 4b > 0$

1. $y'' - 4y' + 3y = 0$. Ergebnis: $y(x) = C_1 \cdot e^{3x} + C_2 \cdot e^x$.
2. $y'' + 4y' + 3y = 0$. Ergebnis: $y(x) = C_1 \cdot e^{-3x} + C_2 \cdot e^{-x}$.
3. $y'' - 9y = 0$. Ergebnis: $y(x) = C_1 \cdot e^{3x} + C_2 \cdot e^{-3x}$.

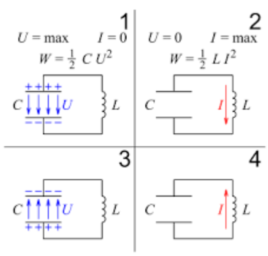
Fall 2: $D = a^2 - 4b = 0$

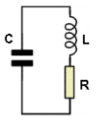
1. $y'' - 6y' + 9y = 0$. Ergebnis: $y(x) = (C_1 \cdot x + C_2) \cdot e^{3x}$.
2. $y'' + y' + \frac{1}{4} y = 0$. Ergebnis: $y(x) = (C_1 \cdot x + C_2) \cdot e^{-x/2}$.
3. $y'' = 0$. Ergebnis: $y(x) = C_1 \cdot x + C_2$.

Fall 3: $D = a^2 - 4b < 0$

1. $y'' + 2y' + 5y = 0$. Ergebnis: $y(x) = (K_1 \cdot \sin(2x) + K_2 \cdot \cos(2x)) \cdot e^{-x}$.
2. $y'' - 8y' + 25y = 0$. Ergebnis: $y(x) = (K_1 \cdot \sin(3x) + K_2 \cdot \cos(3x)) \cdot e^{4x}$.
3. $y'' + 9y = 0$. Ergebnis: $y(x) = K_1 \cdot \sin(3x) + K_2 \cdot \cos(3x)$.
4. Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass $y = e^{-2x} \cdot \sin(x)$ eine Lösung von $y'' + 4y' + a \cdot y = 0$ ist.
   Ergebnis: $\lambda_{1/2} = -2 \pm \sqrt{4 - a}$. Wegen $\sin(x) = \sin(1 \cdot x)$ muss $4 - a = -1$ sein, also $a = 5$.

Eine physikalische Anwendung:





$I = I(t)$

Der gedämpfte elektromagnetische RLC-Schwingkreis.
Die Energie W schwingt zwischen dem Kondensator der Kapazität C und der Spule der Induktivität L periodisch hin- und her; siehe Grafik (Wikipedia). Dabei bezeichnet $U = U(t)$ die Spannung am Kondensator und $I = I(t)$ die Stromstärke durch die Spule.
Nach der „Maschenregel" ist in einem geschlossenen Stromkreis die Summe aller Spannungen gleich Null: $U_L(t) + U_R(t) + U_C(t) = 0$, d.h.

$L \cdot \dot{I}(t) + R \cdot I(t) + \frac{1}{C} \cdot Q(t) = 0$ für alle Zeiten t. Wegen $I(t) = \dot{Q}(t)$ folgt die DGL $\boxed{\ddot{Q}(t) + \frac{R}{L} \dot{Q}(t) + \frac{1}{LC} Q(t) = 0}$

mit der Kondensatorladung $Q(t)$.
Die Größen R, L, C seien so gewählt, dass eine Schwingung entsteht. Anfangsbedingung: Der Kondensator sei zur Zeit $t = 0$ voll mit Q_0 geladen, sodass $\dot{Q}(0) = 0$ gilt. Bestimmen Sie die Lösung $Q(t)$.

Der Ansatz $Q(t) = e^{-\lambda \cdot t}$ führt auf die Gleichung $\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$ mit den Lösungen

$\lambda_{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$. Damit eine Schwingung entsteht muss $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} < 0$ sein.

Somit lautet die allgemeine Lösung $Q(t) = \left(K_1 \cdot \sin(\omega t) + K_2 \cdot \cos(\omega t)\right) \cdot e^{-\delta \cdot t}$ mit

$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, wobei $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ die Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung und

$\delta = \frac{R}{2L}$ ein Maß für die Dämpfung ist. Mit den beiden Anfangsbedingungen folgt $Q(t) = Q_0 \cdot \cos(\omega t) \cdot e^{-\delta t}$.

<u>2. Die lineare inhomogene DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten der Gestalt</u>

$y'' + a \cdot y' + b \cdot y = p_n(x)$ <u>für ein Polynom</u> $p_n(x)$ <u>vom Grad n</u>

1. $b \neq 0$: Bestimmen Sie jeweils alle Lösungen

a. $y'' - 2 \cdot y' - 15 \cdot y = -17 - 15x$. Ansatz $y_s(x) = u \cdot x + v$. Ergebnis $y(x) = C_1 \cdot e^{5x} + C_2 \cdot e^{-3x} + x + 1$

b. $y'' - y' - 12 \cdot y = -12x^2 - 2x + 38$. Ansatz $y_s(x) = u \cdot x^2 + v \cdot x + w$.
Ergebnis $y(x) = C_1 \cdot e^{4x} + C^2 \cdot e^{-3x} + x^2 - 3$.

c. $y'' + 6y' + 9 \cdot y = 18x + 39$. Ansatz $y_s(x) = u \cdot x + v$. Ergebnis $y(x) = C_1 \cdot e^{-3x} + C_2 \cdot x \cdot e^{-3x} + 2x + 3$

d. $y'' - 2y' + y = x^2 - 5x + 6$. Ansatz $y_s(x) = u \cdot x^2 + v \cdot x + w$.
Ergebnis $y(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot x \cdot e^x + x^2 - x + 2$

e. $y'' + 4y' + 13y = 5 - 26x$. Ansatz $y_s(x) = u \cdot x + v$.
Ergebnis $y(x) = C_1 \cdot e^{-2x} \cdot \sin(3x) + C_2 \cdot e^{-2x} \cdot \cos(3x) - 2x + 1$

f. $y'' - 6y' + 25y = 25x^2 + 13x - 4$. Ansatz $y_s(x) = u \cdot x^2 + v \cdot x + w$
Ergebnis $y(x) = C_1 \cdot e^{3x} \cdot \sin(4x) + C_2 \cdot e^{3x} \cdot \cos(4x) + x^2 + x$

g. $y'' + 2 \cdot y' - 3 \cdot y = -3x^3 + 6x^2 + 6x$. Ansatz $y_s(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
Ergebnis: $y(x) = x^3 + C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-3x}$.

2. $a \neq 0$ und $b = 0$: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $y'' - 2 \cdot y' = -6x^2 + 6x + 2$.
Ergebnis: $y(x) = x^3 - x + C_1 + C_2 \cdot e^{2x}$.

3. $a = 0$ und $b = 0$: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $y'' = x^4$.

3. Die lineare inhomogene DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten der Gestalt

$$\mathbf{y'' + a\cdot y' + b\cdot y = p_n(x)\cdot e^{c\cdot x}\cdot \sin(\beta\cdot x) \quad \text{oder} \quad y'' + a\cdot y' + b\cdot y = p_n(x)\cdot e^{c\cdot x}\cdot \cos(\beta\cdot x)}$$

für ein Polynom $\mathbf{p_n(x)}$ vom Grad n

Zu aufwändig, keine Hausaufgabe !!!

Eine spezielle Lösung dieser DGL hat die Gestalt (ohne Herleitung) :

$$y_s(x) = \begin{cases} e^{c\cdot x}\cdot\left[q_n(x)\cdot\sin(\beta\cdot x) + r_n(x)\cdot\cos(\beta\langle x)\right] & \text{falls } c\pm i\beta \text{ keine Lösungen der charakteristischen Gleichung sind} \\ x\cdot e^{c\cdot x}\cdot\left[q_n(x)\cdot\sin(\beta\cdot x) + r_n(x)\cdot\cos(\beta\langle x)\right] & \text{falls } c\pm i\beta \text{ Lösungen der charakteristischen Gleichung sind} \end{cases}$$

Dabei sind $q_n(x)$ und $r_n(x)$ Polynome vom Grad n.

1. a. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $y'' - y' - 2\cdot y = x\cdot e^{2x}\cdot\sin(3x)$.

Ergebnis: $y_s(x) = \frac{1}{54}e^{2x}\cdot\left[(2-3x)\cdot\sin(3x) - (1+3x)\cdot\cos(3x)\right]$ und die allgemeine Lösung

$$y(x) = C_1\cdot e^{-x} + C_2\cdot e^{2x} + \frac{1}{54}e^{2x}\cdot\left[(2-3x)\cdot\sin(3x) - (1+3x)\cdot\cos(3x)\right].$$

1. b. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $y'' - y' - 2\cdot y = x\cdot e^{2x}\cdot\cos(3x)$.

Ergebnis: $y_s(x) = \frac{1}{54}e^{2x}\cdot\left[(1+3x)\cdot\sin(3x) - (2-3x)\cdot\cos(3x)\right]$ und die allgemeine Lösung

$$y(x) = C_1\cdot e^{-x} + C_2\cdot e^{2x} + \frac{1}{54}e^{2x}\cdot\left[(1+3x)\cdot\sin(3x) - (2-3x)\cdot\cos(3x)\right]$$

2. a. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $y'' - 4\cdot y' + 13\cdot y = x\cdot e^{2x}\cdot\sin(3x)$.

Ergebnis: $y_s(x) = \frac{1}{36}x\cdot e^{2x}\cdot\left[\sin(3x) - 3x\cdot\cos(3x)\right]$ und die allgemeine Lösung

$$y_s(x) = C_1\cdot e^{2x}\cdot\sin(3x) + C_2\cdot e^{2x}\cdot\cos(3x) + \frac{1}{36}x\cdot e^{2x}\cdot\left[\sin(3x) - 3x\cdot\cos(3x)\right].$$

2. b. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $y'' - 4\cdot y' + 13\cdot y = x\cdot e^{2x}\cdot\cos(3x)$.

Ergebnis: $y_s(x) = \frac{1}{36}x\cdot e^{2x}\cdot\left[3x\cdot\sin(3x) + \cos(3x)\right]$ und die allgemeine Lösung

$$y_s(x) = C_1\cdot e^{2x}\cdot\sin(3x) + C_2\cdot e^{2x}\cdot\cos(3x) + \frac{1}{36}x\cdot e^{2x}\cdot\left[3x\cdot\sin(3x) + \cos(3x)\right].$$

4. Eine lineare homogene DGL 2. Ordnung mit einem nicht konstanten Koeffizienten

a. Bestimmen Sie die Konstanten $a, b\in\mathbb{R}$ so, dass $y = \frac{1}{x^2+1}$ eine Lösung der DGL

$(x^2+1)\cdot y''(x) + a\cdot x\cdot y'(x) + b\cdot y(x)$ ist.

b. Es sei $a = 4$ und $b = 2$. Bestimmen Sie die zweite Basislösung dieser DGL.

Hinweis: Variation der Konstanten mit dem Ansatz $y = K(x)\cdot\frac{1}{x^2+1}$.

a. $(x^2+1)\cdot\frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3} + a\cdot x\cdot\frac{-2x}{(x^2+1)^2} + b\cdot\frac{1}{x^2+1} = 0$ für alle $x\in\mathbb{R}$. Nach Multiplikation mit $(x^2+1)^2$ folgt

$6x^2 - 2 + -2a\cdot x^2 + b\cdot(x^2+1) = 0$, d.h. $(6-2a+b)\cdot x^2 + (b-2) = 0$ für alle $x\in\mathbb{R}$.

Beide Klammern müssen Null sein, so dass $a = 4$ und $b = 2$ folgt.

b. $\frac{K''(x)\cdot(x^2+1)^2 - 4x\cdot K'(x)\cdot(x^2+1) + (6x^2-2)\cdot K(x)}{(x^2+1)^2} + 4x\cdot\frac{K'(x)\cdot(x^2+1) - 2x\cdot K(x)}{(x^2+1)^2} + 2\cdot\frac{K(x)}{x^2+1} = 0$

wird mit $(x^2+1)^2$ multipliziert:

$$K''(x)\cdot(x^2+1)^2 - 4x\cdot K'(x)\cdot(x^2+1) + (6x^2-2)\cdot K(x) + 4x\cdot K'(x)\cdot(x^2+1) - 8x^2\cdot K(x) + 2K(x)\cdot(x^2+1) = 0$$

und das vereinfacht sich zu $K''(x)\cdot(x^2+1)^2 = 0$. Und wegen $(x^2+1)^2 > 0$ folgt $K''(x) = 0$, also $K(x) = C_1 + C_2\cdot x$ mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Somit lautet sie allgemeine Lösung unserer DGL

$y = \left(C_1 + C_2\cdot x\right)\frac{1}{x^2+1} = \frac{C_1 + C_2\cdot x}{x^2+1}$ mit den beiden Basislösungen $y = \frac{1}{x^2+1}$ und $y = \frac{x}{x^2+1}$.

III Systeme von Differenzialgleichungen

a. Homogene Systeme

1a. $\begin{array}{lcrcr} y_1' & = & -2y_1 & + & 2y_2 \\ y_2' & = & 5y_1 & + & y_2 \end{array}$. Lösung: $y_1 = C_1\cdot e^{3x} + C_2\cdot e^{-4x}$, $y_2 = \frac{5}{2}C_1\cdot e^{3x} - C_2\cdot e^{-4x}$.

1b. $\begin{array}{lcrcr} y_1' & = & y_1 & + & y_2 \\ y_2' & = & & - & y_2 \end{array}$. Lösung: $y_1 = C_1\cdot e^{x} + C_2\cdot e^{-x}$, $y_2 = -2C_2\cdot e^{-x}$.

2a. $\begin{array}{lcrcr} y_1' & = & 4y_1 & + & y_2 \\ y_2' & = & -y_1 & + & 2y_2 \end{array}$. Lösung: $y_1 = (C_1 + C_2x)\cdot e^{3x}$, $y_2 = (C_2 - C_1 - C_2x)\cdot e^{3x}$.

2b. $\begin{array}{lcrcr} y_1' & = & 3y_1 & & \\ y_2' & = & 2y_1 & + & 3y_2 \end{array}$. Lösung: $y_1 = C_2\cdot e^{3x}$, $y_2 = (C_1 + 2C_2\cdot x)\cdot e^{3x}$.

3. $\begin{array}{lcrcr} y_1' & = & y_1 & - & 2y_2 \\ y_2' & = & 5y_1 & + & 3y_2 \end{array}$. Lösung: $\begin{array}{l} y_1 = (C_1\sin 3x + C_2\cos 3x)\cdot e^{2x} \\ y_2 = \frac{1}{2}e^{2x}\cdot(-C_1\sin 3x - 3C_1\cos 3x + 3C_2\sin 3x - C_2\cos 3x) \end{array}$.

4. $\begin{array}{lcrcrcr} y_1' & = & 2y_1 & + & y_2 & - & y_3 \\ y_2' & = & -y_1 & - & 2y_2 & + & y_3 \\ y_3' & = & -y_1 & + & y_2 & + & 2y_3 \end{array}$.

Hinweise: Die charakteristische Gleichung $0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & -2-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6$ hat die Lösungen 1, 3 und -2. Damit ist $\left\{e^{x}, e^{3x}, e^{-2x}\right\}$ eine Fundamentalbasis der Lösungsmenge.

Der Ansatz $\begin{array}{lcrcrcr} y_1 & = & C_1e^{x} & + & C_2e^{3x} & + & C_3e^{-2x} \\ y_2 & = & D_1e^{x} & + & D_2e^{3x} & + & D_3e^{-2x} \\ y_3 & = & E_1e^{x} & + & E_2e^{3x} & + & E_3e^{-2x} \end{array}$ führt auf 9 Gleichungen

$$\begin{array}{rcrcrcr} C_1 &=& 2C_1 &+& D_1 &-& E_1 \\ 3C_2 &=& 2C_2 &+& D_2 &-& E_2 \\ -2C_3 &=& 2C_3 &+& D_3 &-& E_3 \\ D_1 &=& -C_1 &-& 2D_1 &+& E_1 \\ 3D_2 &=& -C_2 &-& 2D_2 &+& E_2 \\ -2D_3 &=& -C_3 &-& 2D_3 &+& E_3 \\ E_1 &=& -C_1 &+& D_1 &+& 2E_1 \\ 3E_2 &=& -C_2 &+& D_2 &+& 2E_2 \\ -2E_3 &=& -C_3 &+& D_3 &+& 2E_3 \end{array}$$

Man bringt nun die drei Parameter C_1, C_2 und C_3 jeweils auf die rechte Seite und löst das System nach $D_1, \ldots, E_3$ auf.

Ergebnis: $D_1 = 0$, $D_2 = -\frac{1}{2}C_2$, $D_3 = -3C_3$, $E_1 = C_1$, $E_2 = -\frac{3}{2}C_2$, $E_3 = C_3$.

b. Inhomogene Systeme

1a. $\begin{array}{rcrcrcr} y_1' &=& -2y_1 &+& 2y_2 &+& 1 \\ y_2' &=& 5y_1 &+& y_2 &+& \sin 2x \end{array}$.

Lösung: $y_1 = C_1 \cdot e^{3x} + C_2 \cdot e^{-4x} + \frac{1}{12} - \frac{8}{65}\sin 2x - \frac{1}{65}\cos 2x$,

$y_2 = \frac{5}{2}C_1 \cdot e^{3x} - C_2 \cdot e^{-4x} - \frac{5}{12} - \frac{7}{65}\sin 2x - \frac{9}{65}\cos 2x$.

1b. $\begin{array}{rcrcrcr} y_1' &=& y_1 &+& y_2 &+& \sin x \\ y_2' &=& && -y_2 &+& e^{2x} \end{array}$.

Lösung: $y_1 = C_1 \cdot e^{x} + C_2 \cdot e^{-x} - \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{3}e^{2x}$, $y_2 = -2C_2 \cdot e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}$.

2. $\begin{array}{rcrcrcr} y_1' &=& 4y_1 &+& y_2 &+& x^2 \\ y_2' &=& -y_1 &+& 2y_2 &-& 1 \end{array}$.

Lösung: $y_1 = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{3x} - \frac{1}{9} - \frac{2}{27}x - \frac{2}{9}x^2$, $y_2 = (C_2 - C_1 - C_2 x) \cdot e^{3x} + \frac{10}{27} - \frac{4}{27}x - \frac{1}{9}x^2$.

3. $\begin{array}{rcrcrcr} y_1' &=& y_1 &-& 2y_2 &+& 2 \\ y_2' &=& 5y_1 &+& 3y_2 &-& 1 \end{array}$. Lösung: $y_1 = (C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x) \cdot e^{2x} - \frac{4}{13}$,

$y_2 = \frac{1}{2}e^{2x} \cdot (-C_1 \sin 3x - 3C_1 \cos 3x + 3C_2 \sin 3x - C_2 \cos 3x) + \frac{11}{13}$.

Bestimmung der Lösung nach dem Einsetzungsverfahren

$$\begin{array}{rcrcrcr} y_1' &=& -2y_1 &+& 2y_2 &+& 1 \\ y_2' &=& 5y_1 &+& y_2 &+& \sin 2x \end{array}.$$

Hinweis: Aus der ersten Gleichung folgt $y_2 = \frac{1}{2}y_1' + y_1 - \frac{1}{2}$.

Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt $\frac{1}{2}y_1'' + y_1' = 5y_1 + \frac{1}{2}y_1' + y_1 - \frac{1}{2} + \sin 2x$, d.h.

$y_1'' + y_1' - 12y_1 = -1 + 2\sin 2x$ mit der Lösung $y_1 = C_1 \cdot e^{3x} + C_2 \cdot e^{-4x} + \frac{1}{12} - \frac{8}{65}\sin 2x - \frac{1}{65}\cos 2x$

und $y_2 = \frac{1}{2}y_1' + y_1 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}C_1 \cdot e^{3x} - C_2 \cdot e^{-4x} - \frac{5}{12} - \frac{7}{65}\sin 2x - \frac{9}{65}\cos 2x$.

Beispiel eines homogenen DGL-Systems mit zwei Gleichungen zweiter Ordnung

Ein Massenpunkt kann sich in der x-y-Ebene so bewegen, dass $\ddot{x}(t) = y(t)$ und $\ddot{y}(t) = x(t)$ gilt. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieses Systems nach dem Einsetzungsverfahren.

Hinweis: Die Lösungen der DGL $\ddddot{x}(t) = x(t)$ findet man mit dem Ansatz $x(t) = C \cdot e^{\lambda \cdot t}$. Die Gleichung $\lambda^4 = 1$ besitzt 4 Lösungen. Und damit folgt $x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \sin t + C_4 \cos t$. $y(t)$ folgt aus $y(t) = \ddot{x}(t)$.

a. Wie lautet die Lösung mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$ und $\dot{y}(0) = 1$?

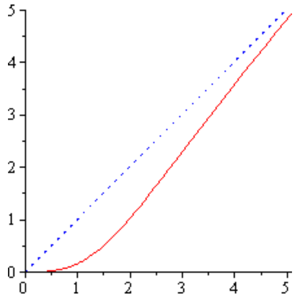
Ergebnis: $x(t) = y(t) = \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$. Im Schaubild ergibt sich die Ursprungsgerade $y = x$.

b. Wie lautet die Lösung mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$ und $\dot{y}(0) = 0$?

Ergebnis: $x(t) = \frac{1}{2}(\sinh(t) + \sin t)$, $y(t) = \frac{1}{2}(\sinh(t) - \sin t)$.

Die Asymptote $y = x$ ist gestrichelt eingezeichnet.

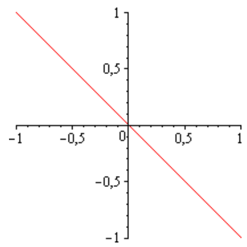
Das Schaubild ist für $0 \le t \le 3$ gezeichnet.



c. Wie lautet die Lösung mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$ und $\dot{y}(0) = -1$?

Ergebnis: $x(t) = \sin t$, $y(t) = -\sin t$.

Der Massenpunkt schwingt zwischen den Orten $(-1/1)$ und $(1/-1)$.



<u>Die Laplace-Transformation</u>

1. Bestimmen Sie die Lösungen der gegebenen Differenzialgleichungen mit Hilfe der Laplace-Transformation.
   a. $y' + y = -6$
   b. $y' + 3y = 3 - 9t + 27t^2$
   c. $y' - 2y = 3e^{-4t}$
   d. $y' - y = \sin(2t)$

a. $\mathscr{L}\{y'\} + \mathscr{L}\{y\} = -6\mathscr{L}\{1\} \Rightarrow s \cdot \mathscr{L}\{y\} - y(0) + \mathscr{L}\{y\} = -\frac{6}{s} \Rightarrow \mathscr{L}\{y\} = \frac{y(0)}{s+1} - \frac{6}{s \cdot (s+1)}$.

Laut Tabelle ergibt die Rücktransformation $y(t) = y(0) \cdot e^{-t} - 6\frac{1 - e^{-t}}{1}$, d.h. $y(t) = -6 + (y(0) + 6)e^{-t}$

bzw. $y(t) = -6 + C \cdot e^{-t}$ mit $C \in \mathbb{R}$.

b. $\mathscr{L}\{y'\} + 3\mathscr{L}\{y\} = 3\mathscr{L}\{1\} - 9\mathscr{L}\{1\} + 27\mathscr{L}\{t^2\} \Rightarrow s \cdot \mathscr{L}\{y\} - y(0) + 3\mathscr{L}\{y\} = \frac{3}{s} - \frac{9}{s^2} + \frac{54}{s^3} \Rightarrow$

$\mathscr{L}\{y\} = \frac{y(0)}{s+3} + \frac{3}{s \cdot (s+3)} - \frac{9}{s^2 \cdot (s+3)} + \frac{54}{s^3 \cdot (s+3)}$. Laut Tabelle ergibt die Rücktransformation

$$y(t) = y(0) \cdot e^{-3t} + 3\frac{1 - e^{-3t}}{3} - 9\frac{e^{-3t} + 3t - 1}{9} + 54\frac{-2e^{-3t} + 9t^2 - 6t + 2}{54} = (y(0) - 4)e^{-3t} + 4 - 9t + 9t^2 .$$

c. $\mathscr{L}\{y'\}-2\mathscr{L}\{y\}=3\mathscr{L}\{e^{-4t}\} \Rightarrow s\cdot\mathscr{L}\{y\}-y(0)-2\mathscr{L}\{y\}=\frac{3}{s+4} \Rightarrow$

$\mathscr{L}\{y\}=\frac{y(0)}{s-2}+\frac{3}{(s+4)\cdot(s-2)}$. Laut Tabelle ergibt die Rücktransformation

$y(t)=y(0)\cdot e^{2t}+3\frac{e^{2t}-e^{-4t}}{6}=\left(y(0)+\frac{1}{2}\right)e^{2t}-\frac{1}{2}e^{-4t}$.

d. $\mathscr{L}\{y'\}-\mathscr{L}\{y\}=\mathscr{L}\{\sin(2t)\} \Rightarrow s\cdot\mathscr{L}\{y\}-y(0)-\mathscr{L}\{y\}=\frac{2}{s^2+4} \Rightarrow$

$\mathscr{L}\{y\}=\frac{y(0)}{s-1}+\frac{2}{(s^2+4)\cdot(s-1)}$. Laut Tabelle ergibt die Rücktransformation

$y(t)=y(0)\cdot e^{t}+2\frac{2e^{t}-2\cos(2t)-\sin(2t)}{10}=\left(y(0)+\frac{2}{5}\right)e^{t}-\frac{2}{5}\cos(2t)-\frac{1}{5}\sin(2t)$.

2. Es sei $\mathscr{L}\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}\cdot f(t)\,dt$. Zeigen Sie, dass $\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{f(t)\}=\mathscr{L}\{-t\cdot f(t)\}$ gilt.

Erläutern Sie diese Beziehung am Beispiel $f(t)=e^{at}$.

$\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{f(t)\}=\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}\cdot f(t)\,dt=\int_0^\infty\frac{d}{ds}\left(e^{-st}\cdot f(t)\right)dt=\int_0^\infty -t\cdot e^{-st}\cdot f(t)\,dt=\mathscr{L}\{-t\cdot f(t)\}$.

Einerseits ist $\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{e^{at}\}=\frac{d}{ds}\frac{1}{s-a}=-\frac{1}{(s-a)^2}$.

Andererseits ist $\mathscr{L}\{-t\cdot f(t)\}=\int_0^\infty -t\cdot e^{-st}\cdot e^{at}\,dt=\int_0^\infty -t\cdot e^{(a-s)t}\,dt=\left[-t\frac{1}{a-s}e^{(a-s)t}\right]_{t=0}^{t=\infty}+\frac{1}{a-s}\int_0^\infty e^{(a-s)t}\,dt=$

$=\left[-t\frac{1}{a-s}e^{(a-s)t}\right]_{t=0}^{t=\infty}+\frac{1}{a-s}\int_0^\infty e^{(a-s)t}\,dt=0+\left[\frac{1}{(a-s)^2}e^{(a-s)t}\right]_{t=0}^{t=\infty}=-\frac{1}{(s-a)^2}$.

Folgerung: $\boxed{\frac{d^n}{ds^n}\mathscr{L}\{f(t)\}=\mathscr{L}\{(-t)^n\cdot f(t)\}}$ für $n=0,1,2,..$.

3. Bestimmen Sie die Lösungen $y=y(t)$ der gegebenen Differenzialgleichungen mit Hilfe der Laplace-Transformation.

a. $y''-y'=-2$

b. $y''+y=-x$

c. $y''-2y'=4t\cdot e^{2t}$ unter der Anfangsbedingung $y(0)=0$ und $y'(0)=-1$

a. $\mathscr{L}\{y''\}-\mathscr{L}\{y'\}=-\mathscr{L}\{2\} \Rightarrow \left(s^2\cdot\mathscr{L}\{y\}-s\cdot y(0)-y'(0)\right)-\left(s\cdot\mathscr{L}\{y\}-y(0)\right)=-\frac{2}{s} \Rightarrow$

$\mathscr{L}\{y\}=\frac{y(0)}{s-1}+\frac{y'(0)-y(0)}{s\cdot(s-1)}-\frac{2}{s^2\cdot(s-1)}$, also $y(t)=y(0)\cdot e^{t}+\left(y'(0)-y(0)\right)\cdot\frac{1-e^{t}}{-1}-2\cdot\left(e^{t}-t-1\right)$ bzw.

$y(t)=(y'(0)-2)\cdot e^{t}+2t+2-y'(0)+y(0)$.

b. $\mathscr{L}\{y''\}+\mathscr{L}\{y\}=-\mathscr{L}\{t\} \Rightarrow s^2\cdot\mathscr{L}\{y\}-s\cdot y(0)-y'(0)+\mathscr{L}\{y\}=-\frac{1}{s^2} \Rightarrow$

$\mathscr{L}\{y\}=\frac{s\cdot y(0)}{s^2+1}+\frac{y'(0)}{s^2+1}-\frac{1}{s^2\cdot(s^2+1)}$, also $y(t)=y(0)\cdot\cos(t)+y'(0)\cdot\sin(t)-\left(t-\sin(t)\right)$ bzw.

$y(t)=y(0)\cdot\cos(t)+\left(y'(0)+1\right)\cdot\sin(t)-t$.

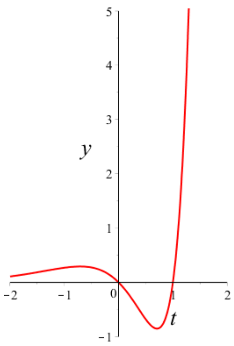
c. $\mathcal{L}\{y''\} - 2\mathcal{L}\{y'\} = 4\mathcal{L}\{t \cdot e^{2t}\} \Rightarrow$

$\left(s^2 \cdot \mathcal{L}\{y\} - s \cdot y(0) - y'(0)\right) - 2\left(s \cdot \mathcal{L}\{y\} - y(0)\right) = \dfrac{4}{(s-2)^2} \Rightarrow$

$\left(s^2 \cdot \mathcal{L}\{y\} - 1\right) - 2\left(s \cdot \mathcal{L}\{y\}\right) = \dfrac{4}{(s-2)^2}$ nach Einsetzen der Anfangsbedingungen.

$\Rightarrow \mathcal{L}\{y\} = \dfrac{4-s}{(s-2)^3} = \dfrac{4}{(s-2)^3} - \dfrac{s}{(s-2)^3} \Rightarrow$

$y(t) = 2t^2 \cdot e^{2t} - \left(t^2 + t\right) \cdot e^{2t} = \left(t^2 - t\right) \cdot e^{2t}$.



4. Bestimmen Sie die Lösungen der gegebenen Differenzialgleichungssyteme mit Hilfe der Laplace-Transformation.

a. $\begin{aligned} 2y_1'(t) + y_2(t) &= \sin(t) \\ 4y_1'(t) + y_2'(t) &= \cos(t) \end{aligned}$ mit den Anfangsbedingungen $y_1(0) = 1$ und $y_2(0) = 0$.

$\begin{aligned} 2s \cdot \mathcal{L}\{y_1\} - 2y_1(0) + \mathcal{L}\{y_2\} &= \frac{1}{s^2+1} \\ 4s \cdot \mathcal{L}\{y_1\} - 4y_1(0) + s \cdot \mathcal{L}\{y_2\} + y_2(0) &= \frac{s}{s^2+1} \end{aligned}$ d.h. $\begin{aligned} 2s \cdot \mathcal{L}\{y_1\} - 2 + \mathcal{L}\{y_2\} &= \frac{1}{s^2+1} \\ 4s \cdot \mathcal{L}\{y_1\} - 4 + s \cdot \mathcal{L}\{y_2\} &= \frac{s}{s^2+1} \end{aligned}$

Die Lösung diese LGS ist $\mathcal{L}\{y_1\} = \dfrac{1}{s}$ und $\mathcal{L}\{y_2\} = \dfrac{1}{s^2+1}$, so dass $y_1(t) = 1$ und $y_2(t) = \sin(t)$.

b. Für zwei gekoppelte Pendel bestehe das gegebene System von Differenzialgleichungen:

$\begin{aligned} y_1''(t) + 10y_1(t) - 6y_2(t) &= 0 \\ y_2''(t) + 10y_2(t) - 6y_1(t) &= 0 \end{aligned}$ mit den Anfangsbedingungen $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = -1$, $y_1'(0) = y_2'(0) = 2$.

Lösen Sie das System mit Hilfe der Laplace-Transformation.

$\begin{aligned} s^2 \cdot \mathcal{L}\{y_1\} - s \cdot y_1(0) - y_1'(0) + 10 \cdot \mathcal{L}\{y_1\} - 6 \cdot \mathcal{L}\{y_2\} &= 0 \\ s^2 \cdot \mathcal{L}\{y_2\} - s \cdot y_2(0) - y_2'(0) + 10 \cdot \mathcal{L}\{y_2\} - 6 \cdot \mathcal{L}\{y_1\} &= 0 \end{aligned}$ bzw.

$\begin{aligned} s^2 \cdot \mathcal{L}\{y_1\} + 10 \cdot \mathcal{L}\{y_1\} - 6 \cdot \mathcal{L}\{y_2\} &= 2 + s \\ s^2 \cdot \mathcal{L}\{y_2\} + 10 \cdot \mathcal{L}\{y_2\} - 6 \cdot \mathcal{L}\{y_1\} &= 2 - s \end{aligned}$. Es folgt

$\mathcal{L}\{y_1\} = \dfrac{s^3 + 2s^2 + 4s + 32}{s^4 + 20s^2 + 64} = \dfrac{2}{s^2+4} + \dfrac{s}{s^2+16}$ und $\mathcal{L}\{y_2\} = \dfrac{-s^3 + 2s^2 - 4s + 32}{s^4 + 20s^2 + 64} = \dfrac{2}{s^2+4} - \dfrac{s}{s^2+16}$.

Die Rücktransformation ergibt $\begin{aligned} y_1(t) &= \sin(2t) + \cos(4t) \\ y_2(t) &= \sin(2t) - \cos(4t) \end{aligned}$.

$y_1(t)$ ist dicker dargestellt, $y_2(t)$ dünner, gestrichelt der Mittelwert $\dfrac{y_1(t) + y_2(t)}{2}$.