1. Bei vierfacher Durchführung eines Zufallsexperiments nahm eine Zufallsvariable X die Werte 5; 8; 7; 4 an. Bestimmen Sie einen Schätzwert für den Mittelwert und die Varianz.

2. Ein Medikament wirkt erfahrungsgemäß in 70% aller Fälle. Die Zufallsvariable X sei definiert durch
$$X = \begin{cases} 1, & \text{falls das Medikament wirkt} \\ 0, & \text{falls das Medikament nicht wirkt} \end{cases}.$$
   a. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X
   b. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz des Stichprobemittels für Stichproben vom Umfang 6.

3. Die Körpergröße X von Männern in Deutschland im Jahr 2009 war normalverteilt mit $\mu_X = 178\,\text{cm}$ und $\sigma_X = 10\,\text{cm}$.
   a. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass für einen zufällig ausgewählten Mann $175 \le X \le 180$ gilt?
   b. Es wird eine Stichprobe von $n = 100$ Männern genommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass $175 \le \overline{X} \le 180$ für den Mittelwert $\overline{X}$ gilt?

4. In einer Urne befindet sich eine unbekannte Anzahl N von Zetteln, die von 1 bis N durchnumeriert sind. Es werden n Zettel zufällig ausgewählt.
   $\overline{X}$ sei das arithmetische Mittel der n gezogenen Zahlen. Berechnen Sie den Erwartungswert von $\overline{X}$. Bestimmen Sie damit eine Schätzgröße für N, die ebenfalls den Erwartungswert N hat.
   Hinweis: $1 + 2 + 3 + \ldots + N = \dfrac{N \cdot (N+1)}{2}$.

5. Zur Schätzung des Fischbestandes N in einem See benutzt man häufig folgendes Verfahren. Man fängt m Fische, kennzeichnet sie und setzt sie wieder aus. Nach hinreichend langer Zeit fängt man n Fische und bestimmt die Anzahl Z der gekennzeichneten darunter. Dann bietet sich folgende Gleichung an:
   $\dfrac{Z}{n} = \dfrac{m}{N}$, so dass $N = \dfrac{n \cdot m}{Z}$ wird. Untersuchen Sie, ob für den Erwartungswert $E\left(\dfrac{n \cdot m}{Z}\right) = N$ gilt.
   Hinweis: $E\left(\dfrac{1}{Z}\right) \neq \dfrac{1}{E(Z)}$.

6. In einer Klinik wird anhand der Krankheitsgeschichten von 120 Patienten die Dauer eines bestimmten Heilungsprozesses untersucht.

Heilungsdauer a_j in Tagen	18	21	22	23	27	28	30	34
absolute Häufigkeit h_j	12	18	29	22	15	10	10	4

   Bestimmen Sie mit Hilfe der Normalverteilung ein Vertrauensintervall für die mittlere Dauer des Heilungsprozesses bei der statistischen Sicherheit 0,99.

7. Eine Bäckerei behauptet, dass ihre Brötchen eine Masse von $50\,\text{g}$ haben. Zur Überprüfung wurden 9 Brötchen zufällig entnommen. Ihre Massen in Gramm betrugen 49, 48, 51, 50, 47, 48, 50, 46, 52. Untersuchen Sie, ob sich die Messwerte signifikant von $50\,\text{g}$ unterscheiden, d.h. ob die $50\,\text{g}$ im 95-Prozent-Vertrauensintervall liegen.
   a. Mit Hilfe der Normalverteilung.
   b. Mit Hilfe der Student-t-Verteilung.

8. Zweiseitiger Test: Es soll überprüft werden, ob ein bestimmtes Medikament die Schlafdauer beeinflusst. Bei 100 Testpersonen werden nach Verabreichung des Medikaments folgende zusätzlichen Schlafzeiten in Stunden festgestellt. Kann man danach mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 1% behaupten, dass das Medikament die Schlafdauer signifikant beeinflusst?

-1,4	-1,3	-1,2	-1,1	-1,0	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3
1	1	3	0	2	0	3	0	4	4	5	0
-0,2	-0,1	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
2	3	15	5	8	0	3	5	3	3	5	0
1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1
8	2	3	1	2	6	0	0	0	0	2	1

9. Linksseitiger Test: Ein Kunde behauptet, dass sein neues Auto im Mittel 9 Liter je $100\,\text{km}$ benötigt, obwohl der Autohändler versprach, dass der Verbrauch unter 9 Liter liege. Bei 35 Testfahrten wurde ein Mittelwert von 8,83 Liter bei einer Standardabweichung von 0,7 Liter ermittelt. Prüfen Sie, ob sich die Behauptung des Kunden bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% aufrechterhalten lässt.

10. Linksseitiger Test: Der Hersteller einer Sorte von Überraschungseiern behauptet, dass in mindestens 20% der Eier Fußballfiguren befinden. Bei einem Test werden 1000 Eier geöffnet, 185 Fußballfiguren wurden gefunden. Lässt sich die Behauptung des Herstellers mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit α von höchstens 5% widerlegen?

11. Rechtsseitiger Test: Eine politische Partei muss bei einer Wahl mehr als 5% der Stimmen auf sich vereinigen. Vor Beginn des Wahlkampfs steht die Partei vor der Frage, ob sie in einem bestimmten Wahlkreis einen Stimmenanteil von weniger als 5% hat und daher einen intensiveren Wahlkampf führen soll, oder ihr Stimmenanteil schon mehr als 5% ausmacht und somit ein allzu aufwändiger Wahlkampf überflüssig wäre.
Es gibt jetzt zwei Hypothesen: $p < 0{,}05$ und $p \geq 0{,}05$. Welche ist die Nullhypothese?
Da man sich bei einem Test die Irrtumswahrscheinlichkeit vorgibt, nimmt man diejenige Hypothese als Nullhypothese, deren irrtümliche Ablehnung, wenn sie richtig ist, schwerwiegender ist als ihre irrtümliche Nicht-Ablehnung, wenn sie falsch ist.
Wäre $p < 0{,}05$ wahr und würde dies irrtümlich abgelehnt, so würde der Wahlkampf wohl nicht intensiviert. Die Partei würde riskieren, die Wahl zu verlieren.
Wäre dagegen $p \geq 0{,}05$ und würde dies irrtümlich abgelehnt, so ergäbe sich die weniger folgenschwere Entscheidung, dass ein intensiver Wahlkamp nötig ist. Die Partei würde nur riskieren, unnötig viel Geld für einen Wahlkampf aufzuwenden, der an sich gar nicht so aufwändig sein müsste.
Also: Nullhypothese $H_0: \ p < 0{,}05$, Gegenhypothese $H_1: \ p \geq 0{,}05$.
Es sollen 400 Wahlberechtigte befragt werden und die Irrtumswahrscheinlichkeit soll $\alpha = 1\%$ betragen.

12. Rechtsseitiger Test: In einer Urne sollen sich angeblich ein Fünftel weiße und vier Fünftel schwarze Kugeln befinden. Um die Behauptung zu prüfen, wird folgender Test durchgeführt: Es werden 10 Kugeln mit Zurücklegen gezogen; falls sich unter diesen mehr als 4 weiße befinden, wird die Behauptung zurückgewiesen, andernfalls wird sie akzeptiert. Mit welcher Irrtumswahrscheinlichkeit arbeitet der Test?
Hinweis: Verwenden Sie die Binomialverteilung.

13. Die durchschnittliche Lebensdauer X von Glühbirnen, die nach einem herkömmlichen Verfahren hergestellt 3werden, beträgt $\overline{X} = 1000$ Stunden bei einer Standardabweichung $\sigma_X = 100$ Stunden. Bei Glühbirnen, die nach einem neuen Verfahren hergestellt wurden, wurde eine Stichprobe vom Umfang 100 entnommen. Es ergab sich eine durchschnittliche Lebensdauer von 1020 Stunden. Es soll mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% entschieden werden, ob die mittlere Brenndauer auf 1030 erhöht wurde. Berechnen Sie auch die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art.

14. Eine Firma stellt zwei Arten von Seilen her, die sich durch ihre Bruchlast unterscheiden: Die eine Bruchlast beträgt $\mu = 3600\,\text{kg}$, die andere Bruchlast 3800 kg und gleicher Standardabweichung $\sigma = 80\,\text{kg}$. Ein Kunde bestellt ein Seil mit 3600 kg. Die Seile liegen in verschiedenen Kisten, die versehentlich nicht beschriftet sind. Ein Mitarbeiter der Firma greift ein beliebiges Seil heraus und misst seine Bruchlast.
Wie groß darf seine Bruchlast höchsten sein bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 10%?
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art?