Übungsblatt zu "Euklidische Vektorräume"

Sommersemester 2022

Übung 1

Zum Warmwerden. Welchen Winkel schließen die beiden Vektoren $\mathbf{u} = (1, -1, 1)^\mathsf{T}$ und $\mathbf{v} = (2, 0, -1)^\mathsf{T}$ miteinander ein? Und $\mathbf{u} = (1, -1, 1)^\mathsf{T}$ mit $\mathbf{w} = (-1, 2, 3)^\mathsf{T}$? $\mathbf{v}$ mit $\mathbf{w}$? Berechnen Sie die Längen der drei Vektoren. Normieren Sie sie anschließend.

Übung 2

Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\mathbf{a} = (1, -1, -1, 1)^\mathsf{T}$ und $\mathbf{b} = (-2, 0, 2, 1)^\mathsf{T}$. Orthonormalisieren Sie das System $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ nach dem GRAM-SCHMIDTschen Verfahren, das im Skript dargestellt wurde.

Übung 3

Weisen Sie nach, dass die drei Vektoren $f_1 = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})^\mathsf{T}$, $f_2 = (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})^\mathsf{T}$ und $f_3 = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})^\mathsf{T}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

Übung 4

Welchen Winkel schließen die beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ miteinander ein? *Anleitung*: die hier auftretende Drehmatrix kennen Sie aus dem Skript. Durch kurzes Überlegen können Sie sofort die Antwort auf die Frage geben. Rechnen Sie der Übung halber dennoch einmal nach... und denken Sie dabei an die Identität $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$.

Übung 5

Hier geht es um Skalarprodukte auf $\mathbb{R}^n$, die nicht das Standardskalarprodukt sind. Wir betrachten also ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_B$, das wir durch ein tiefgestelltes "B" als nicht-Standard kennzeichnen; $\langle\cdot,\cdot\rangle$ soll weiterhin das Standardskalarprodukt sein. Ferner sei $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1 \ldots n$ die Standardbasis in $\mathbb{R}^n$, also die Vektoren $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)^\mathsf{T}$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)^\mathsf{T}$ und so weiter. Wir definieren jetzt mit $\langle\cdot,\cdot\rangle_B$ und der Standardbasis die Matrix B durch die folgenden Komponenten: $B_{ij} := \langle\mathbf{e}_i, \mathbf{e_j}\rangle_B$.

Verdeutlichen Sie sich, dass auf Grundlage der Axiome für ein Skalarprodukt $B_{ij} = B_{ji}$ gilt. Die Matrix B hat auch noch eine weitere wichtige Eigenschaft, die aus dem Axiom der Positiven Definitheit des Skalarprodukts folgt, dass nämlich stets $\langle\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle_B > 0$ sein muss für $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Man nennt diese Eigenschaft entsprechend ebenfalls “Positive Definitheit” der Matrix; wir gehen hier aber nicht näher darauf ein. *Aufgabe*: zeigen Sie mit Hilfe der Bilinearität jedes Skalarprodukts, dass gilt $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_B = \langle \mathbf{v}, B\mathbf{w} \rangle$. Man kann das so ausdrücken: ein *irgendwie* definiertes Nicht-Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ lässt sich durch das Standardskalarprodukt ausdrücken, wenn man noch eine entsprechende symmetrische positiv definite Matrix einschiebt in der Form $\langle \cdot, \cdot \rangle_B = \langle \cdot, B(\cdot) \rangle$. Die Umkehrung gilt im übrigen ebenso: gegeben eine symmetrische positiv definite Matrix B, dann kann man sich damit ein Nicht-Standard-Skalarprodukt zusammenbasteln, und *jedes* Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ ist von dieser Art.

Scherzfrage: welches ist das B, das aus $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ wieder $\langle \cdot, \cdot \rangle$ macht? Und zum Schluss noch eine konkrete Übung: berechnen Sie den Cosinus des Winkels zwischen den $\mathbb{R}^3$-Standardbasisvektoren $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$ in dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$, das durch die Matrix $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ generiert wird. Denken Sie daran, dass auch die *Beträge* der Vektoren nach dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ zu berechnen sind!

Übung 6

In dieser Aufgabe geht es um die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung $|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \leqslant \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$, genauer um die Frage, unter welchen Bedingungen diese Ungleichung zur Gleichung wird. Es ist also eine eher theoretisch ausgerichtete Aufgabe, bei der man aber sehr gut den Umgang mit dem Skalarprodukt einüben kann – und zwar nicht mit dem Standardskalarprodukt für Vektoren aus $\mathbb{R}^n$, sondern mit der allgemeinen Definition dieser Begriffsbildung.

Die *Behauptung* ist: in der genannten Cauchy-Schwarzschen Ungleichung gilt das Gleichheitszeichen *genau dann*, wenn die beiden vorkommenden Vektoren $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ *linear abhängig* sind. Letzteres heißt für zwei Vektoren natürlich einfach, dass $\mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{w}$ ist mit irgendeinem $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Behauptung impliziert zwei Schlussrichtungen. Wir nehmen sie uns nacheinander vor. Die Schlussrichtung “Lineare Abhängigkeit zieht Gleichheit in der C.-S.-Ungleichung nach sich” ist die deutlich einfachere – sie stellt im Wesentlichen die vorliegende Übungsaufgabe dar. Ein paar Hinweise sind aber vielleicht doch am Platz: nutzen Sie die Bilinearität des Skalarprodukts aus und denken Sie daran, dass $|\lambda \cdot x| = |\lambda| \cdot |x|$ und dass $|\lambda| \cdot \|\mathbf{v}\| = \|\lambda \mathbf{v}\|$ ist.

Zweitens oder vielmehr andersherum müssen wir beweisen, dass, wenn die C.-S.Ungleichung für zwei Vektoren zur Gleichung wird, diese beiden Vektoren dadurch linear abhängig sein müssen. Das ist nicht ganz so einfach wie der erste Teil. Der hier vorgeschlagene Beweis orientiert sich am Beweis der C.-S.-Ungleichung überhaupt, so wie er im Skript vorkam. Im Rahmen dieser Übungsaufgabe geht es nur darum, die Argumentation sorgfältig nachzuvollziehen. Also: wir gehen aus von $|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| = \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$ für zwei Vektoren $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$. Nun bilden wir – das ist dem Kunstgriff im Beweis der C.-S.-Ungleichung nachgebildet – das Skalarprodukt von $\|\mathbf{w}\|^2 \cdot \mathbf{v} - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \cdot \mathbf{w}$ mit sich selbst und multiplizieren dieses aus. *Aufgabe:* durchführen und das Ergebnis vereinfachen! Wir erhalten $\|\mathbf{w}\|^4 \cdot \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{w}\|^2 \cdot \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle^2 = \|\mathbf{w}\|^2 \cdot (\|\mathbf{w}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle^2)$. Dies ist aber $= 0$! (Warum?) *Aufgabe:* argumentieren Sie nun, warum nach Maßgabe der Skalarprodukt-Axiome daraus folgt, dass $\|\mathbf{w}\|^2 \cdot \mathbf{v} - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \cdot \mathbf{w} = 0$ ist. *Aufgabe:* lösen Sie dies jetzt nach $\mathbf{v}$ auf und weisen Sie so nach, dass $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ in der Tat linear abhängig sind, was zu beweisen war.

Übung 7

Diese Aufgabe beschäftigt sich mit dem Begriff der *Norm.* Eine Norm auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V ist eine Abbildung $\| \cdot \| : \mathrm{V} \to \mathbb{R}_0^+$, die für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathrm{V}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ die folgenden Axiome erfüllt:

$\|\mathbf{v}\| \geqslant 0$ und $\|\mathbf{v}\| = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$ (“Definitheit”)

$\|\lambda \cdot \mathbf{v}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{v}\|$ (“absolute Homogenität”)

$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ (“Dreiecksungleichung”)

Zeigen Sie, dass in einem euklidischen Vektorraum die Abbildung $\|\mathbf{v}\| := \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$ eine Norm ist.

Übung 8

Hier geht es um Orthogonalität und Nicht-Orthogonalität und ihren Zusammenhang mit der Determinante. Betrachten Sie beispielsweise die Matrix $M_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & \lambda \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, die einen freien Parameter λ hat (schauen Sie in die rechte obere Ecke). Berechnen Sie zunächst die Determinante dieser Matrix in Abhängigkeit von λ (indem Sie sich geschickt die geeignetste Zeile/Spalte für die Entwicklung heraussuchen). Bestimmen Sie nun alle Werte von λ, für die $|\det M_\lambda| = 1$ ist. *Lösungshinweis*: es gibt zwei solcher λ, nämlich 6 und 8. Suchen Sie sich einen der beiden Werte aus, etwa $\lambda = 6$. Es ist $\det M_6 = 1$.

Ermitteln Sie dann, ob M_6 orthogonal ist. Welche Möglichkeiten für diese Prüfung kennen Sie? Gibt es ein relles λ, für das M_λ orthogonal ist?

Übung 9
Im Skript haben wir eine einfache Art und Weise kennengelernt, dass Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ als Matrixmultiplikation zu schreiben, nämlich $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{w}$, wenn wir die Vektoren $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ als Spaltenvektoren beziehungsweise als $M(1 \times n, \mathbb{R})$-Matrizen auffassen und dann den Vektor auf der linken Seite als Matrix in die Zeilenform hinein transponieren. Das Ergebnis ist eine *Zahl*, das heißt eine $M(1 \times 1, \mathbb{R})$-Matrix – eben das Skalarprodukt von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$. Nun könnte man ja auf die Idee kommen, das auch umgekehrt zu machen! also statt $\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{w}$ die Bildung $\mathbf{v}\mathbf{w}^\mathsf{T}$ vorzunehmen. Welche Dimension hat die resultierende Matrix?

Machen Sie sich die Verhältnisse klar, indem Sie konkrete Vektoren wählen, zum Beispiel $\mathbf{v} = (0, 2, 4)^\mathsf{T}$ und $\mathbf{w} = (-1, 0, 2)^\mathsf{T}$ (wobei im Grunde genommen die Dimensionen der Vektoren, anders als bei der Skalarproduktbildung, nicht gleich zu sein brauchen). Stellen Sie fest, dass bei der Matrixproduktbildung $M := \mathbf{v}\mathbf{w}^\mathsf{T}$ die Matrix M, die herauskommt, die Komponenten $M_{ij} = v_i w_j$ hat. Warum hat die resultierende Matrix M höchstens den Rang 1?

Berechnen Sie die sogenannte *Spur* der Matrix M, das ist die Summe der Diagonalelemente $\operatorname{sp} M = \sum_i M_{ii}$. Bilden Sie nun das Standardskalarprodukt von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$. Was stellen Sie im Vergleich fest? Formulieren Sie eine Vermutung und führen Sie den Nachweis! *Hinweis*: Dieser Nachweis ist simpel, wenn Sie die Definition der Spur heranziehen und nutzen, dass $M_{ij} = v_i w_j$ ist.– Es ist an dieser Stelle nicht notwendig, sich das zu merken, es sei aber dennoch erwähnt: diese Produktbildung heißt *Dyadisches* oder *Tensorielles* Produkt der Vektoren $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$. Die Betrachtung sogenannter *Tensorräume* über Vektorräumen ist Gegenstand der Multilinearen Algebra. Multilineare Algebra und Tensoren finden Anwendung in der Physik (und da eigentlich überall), oder auch im Zusammenhang mit Dimensionsreduktionsalgorithmen in *data analytics*.

Weiterführende Übung
Wir haben orthogonale Matrizen betrachtet, insbesondere auch Drehmatrizen in zwei Dimensionen (siehe vorheriges Übungsblatt). Es ist anschaulich klar, dass der Winkel zwischen zwei Vektoren, die beide in der gleichen Weise gedreht werden, erhalten bleibt – das ist ja gerade die Definition von Orthogonalität. Weiterhin ist anschaulich deutlich, dass eine Drehmatrix in *zwei* Dimensionen *jeden* Vektor in einen *anderen* Vektor überführt. Betrachten wir die Sache aber einmal in *drei* Dimensionen und bemühen auch hier wieder die Anschauung! Eine Matrix D_φ, die Vektoren um einen gegebenen Winkel φ dreht, wird dies um eine *Drehachse* tun, die irgendwie im Raum liegt. Was, wenn wir einen Vektor betrachten, der genau in dieser Drehachse liegt? Er wird durch die dreidimensionale Drehmatrix in sich selber überführt werden. Umgekehrt können

wir auf diese Weise die Drehachse einer Matrix D_φ *finden*, von der wir lediglich wissen, dass es sich um eine Drehmatrix handelt, aber nicht, um welche Achse sie dreht. Wir müssen nur nach einem "Achsenvektor" suchen, also einem Vektor $\mathbf{a}$, der die Eigenschaft $D_\varphi \mathbf{a} = \mathbf{a}$ hat.

Diese Idee verallgemeinern wir in der vorliegenden Aufgabe ein wenig. Wir gehen von quadratischen Matrizen $M \in M(n \times n, \mathbb{R})$ aus oder noch besser: ganz allgemein von Linearen Abbildungen $L : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ für einen n-dimensionalen Vektorraum V über $\mathbb{R}$. Dann fragen wir nach Vektoren $\mathbf{v} \in \mathrm{V}$ und rellen Zahlen λ, die die Bedingung $L\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ erfüllen. Im Beispiel der dreidimensionalen Drehmatrix wäre ein $\mathbf{v}$ von D_φ mit $\lambda = 1$ ein Vektor in Drehachsenrichtung. Es ist aber zunächst nicht klar, ob für ein gegebenes L solche Paare $(\mathbf{v}, \lambda)$ überhaupt existieren. In zwei Dimensionen ist anschaulich naheliegend, dass eine Drehmatrix D_φ Vektoren nie unverändert lässt, so dass für alle Vektoren $\mathbf{v}$ in der Ebene gilt $D_\varphi \mathbf{v} \neq \mathbf{v}$.

Um mit diesem Thema vertraut zu werden, versammeln wir ein paar erste Aussagen. Geben wir uns eine Lineare Abbildung $L : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ vor und fragen nach Vektoren $\mathbf{v} \in \mathrm{V}$ mit $L\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ für ein gegebenes festes $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir können dies auch so formulieren, dass wir Vektoren $\mathbf{v}$ mit $L\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$ suchen oder $L\mathbf{v} - \lambda \cdot \mathrm{Id}\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (Id bezeichne wie immer die Identitätsabbildung, hier auf V) oder $(L - \lambda\,\mathrm{Id}\,)(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Anders formuliert, wir suchen Vektoren, die im Kern der Abbildung $L - \lambda\,\mathrm{Id}$ liegen. Der Kern einer Linearen Abbildung ist, wie wir wissen, ein Unterraum von V. Der hier durchaus nur aus dem Nullvektor bestehen kann, wie wir bei der Betrachtung *zwei*dimensionaler Drehungen gesehen haben. Wir sind hier natürlich interessiert an L und λ, für die $\mathrm{Kern}\,(L - \lambda\,\mathrm{Id}) \neq \{\mathbf{0}\}$ ist.

Eine Bedingung dafür, dass der Kern einer Linearen Abbildung nichttrivial ist, also aus mehr als nur dem Nullvektor besteht, kennen wir: die Determinante dieser Linearen Abbildung $\mathrm{V} \to \mathrm{V}$ muss Null sein. Dann ist sie nicht bijektiv und also nicht injektiv, und es gibt Vektoren, die selber nicht Nullvektoren sind, aber durch die Lineare Funktion in den Nullvektor abgebildet werden. Wir finden demnach alle diejenigen λ, die in Frage kommen, um die $\mathbf{v}$ zu suchen mit $L\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, indem wir die Lösungen der Gleichung $\det(L - \lambda\,\mathrm{Id}) = 0$ finden. Schaut man sich diese Gleichung genauer an, wird man feststellen, dass es sich um ein Polynom in λ handelt, wobei die höchste vorkommende Potenz von λ gerade $\dim \mathrm{V}$ ist. Diese Aufgabe besteht nun darin, das an einem Beispiel einmal auszuprobieren.

Damit wir uns nicht gleich mit einem Polynom dritten Grades herumschlagen müssen, beschränken wir uns auf die Dimension 2 und betrachten die kleine Matrix $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Finden Sie alle

λ, für die Vektoren $\mathbf{v}$ existieren mit $M\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$! *Anleitung*: schreiben Sie zunächst die Abbildung $M - \lambda\,\mathrm{Id}$ explizit auf – das ist eine Matrix, in der Zahlen drinstehen und Lambdas. Bilden Sie nun die Determinante dieser Matrix und setzen Sie sie $= 0$ als Bedingung an λ. Sie müssten nun die Gleichung $\lambda^2 - 5\lambda + 5 \overset{!}{=} 0$ erhalten haben; diese ist nach λ zu lösen. Sie hat zwei relle Lösungen, nämlich $\lambda_1 = \frac{1}{2}\,(5 - \sqrt{5})$ und $\lambda_2 = \frac{1}{2}\,(5 + \sqrt{5})$.

Für eine der beiden Lösungen, sagen wir λ_1 – wer mag und Zeit hat, kann anschließend auch noch λ_2 in gleicher Weise behandeln – suchen wir jetzt Vektoren, die bis auf Skalierung mit λ_1 unverändert gelassen werden: welche $\mathbf{v} \in \mathrm{V}$ erfüllen $M\mathbf{v} = \lambda_1\,\mathbf{v}$? *Anleitung*: notieren Sie diese Bedingungs-Matrixgleichung zunächst explizit; Sie kennen ja M und λ_1. Das ist ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen für zwei Unbekannte v_1 und v_2, nämlich für die beiden Komponenten des gesuchten Vektors $\mathbf{v} \equiv (v_1, v_2)^\mathsf{T}$. Sie können alles “auf die linke Seite bringen”, wie man sagt, und sollten nun so etwas wie $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,(\sqrt{5}-1) & 1 \\ 1 & \frac{1}{2}\,(\sqrt{5}+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ auf Ihrem Blatt stehen haben. Das müssen Sie lösen. Da die hier auftretende Matrix eine verschwindende Determinante hat, haben Sie einen Parameter frei. *Lösung*: je nach Wahl des Parameters – zum Beispiel $v_2 \equiv 1$ – erhalten Sie so etwas wie $\mathbf{v} = (-\frac{1}{2}\,(1 + \sqrt{5}), 1)^\mathsf{T}$.

Verifizieren Sie schließlich Ihr Ergebnis: multiplizieren Sie die *Matrix* $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ auf den Vektor $(-\frac{1}{2}\,(1 + \sqrt{5}), 1)^\mathsf{T}$ und multiplizieren Sie die *Zahl* $\frac{1}{2}\,(5 - \sqrt{5})$ mit dem Vektor $(-\frac{1}{2}\,(1 + \sqrt{5}), 1)^\mathsf{T}$. Wenn alles stimmt, sollten die Ergebnisse die gleichen sein.

Alternativ oder zusätzlich hier noch eine weitere Matrix $N = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Rechnerisch gesehen ist hier die Prozedur einfacher als im vorangegangenen Beispiel – wer nicht so rasch rechnen kann und mit Termen wie $5 - \sqrt{5}$ ungern herumkämpft, sollte vielleicht mit diesem N anfangen[1]. *Lösung*: es gibt zwei Werte für λ, die $\det(N - \lambda\,\mathrm{Id})$ lösen, nämlich $\lambda_1 = 8$ und $\lambda_2 = 2$. Auf der Suche nach Vektoren, die von N lediglich um einen dieser beiden Werte skaliert und sonst nicht weiter verändert werden, finden Sie $\mathbf{v}_1 = (1, 1)^\mathsf{T}$ für die Skalierung mit 8 und $\mathbf{v}_2 = (-1, 1)^\mathsf{T}$ für die Skalierung mit 2.

Zum Schluss noch ein Beispiel einer 3×3-Matrix: $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Zunächst gibt es hier na-

[1]... aber auf jeden Fall Sorge tragen, mit dem schulischen Rechnen (Brüche, Logarithmen, Wurzeln und so weiter) wenn auch in langsamer, aber gleichwohl in sicherer Weise zurechtzukommen. Auf mittlere Sicht und auch im beruflichen Alltag stellt es eine Gefahr für die eigene Professionalität dar, wenn jede Summation zweier Brüche schiefgehen kann und so die Richtigkeit des Ergebnisses bedroht.

türlich die Schwierigkeit, dass $\det(K - \lambda\,\mathrm{Id})$ ein Polynom *dritten* Grades in λ ist. So einfach wie eine quadratische Gleichung lässt sich das bekanntlich nicht lösen. Auf jeden Fall sollten Sie sich diese Gleichung aber einmal explizit hinschreiben, damit Sie ein Gefühl dafür entwickeln, wie solche – im nächsten Kapitel so genannten – "Charakteristischen Polynome" funktionieren. *Lösung*: Richtig schwierig ist das Lösen dieser Gleichung dann allerdings auch wieder nicht, denn Übungsbeispiele werden ja immer so ausgesucht, dass sie einigermaßen leicht lösbar sind... Das Charakteristische Polynom liest sich als $\chi(\lambda) = (1-\lambda)^3 - (1-\lambda)$, und es ist simpel, die Lösung $\lambda_1 = 1$ einfach zu erraten und den entsprechenden Linearfaktor $1-\lambda$ abzudividieren. Den drei Lösungen $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 0$ der Bedingungsgleichung $\chi(\lambda) \stackrel{!}{=} 0$ entsprechen dann die drei skalierten Vektoren $\mathbf{v}_1 = (1,0,0)^\mathsf{T}$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,1)^\mathsf{T}$ und $\mathbf{v}_3 = (0,-1,1)^\mathsf{T}$. Die letztere Paarung $(0,(0,-1,1)^\mathsf{T})$ sollte man sich noch genauer ansehen: der Vektor $(0,-1,1)^\mathsf{T}$ liegt offenbar im nichttrivialen Kern der Matrix K, und solch ein Vektor wird eben auch interpretiert als "skaliert, aber ansonsten unverändert" – er wird eben mit 0 multipliziert, das heißt zum Nullvektor $\mathbf{0}$ herunterskaliert.

Jetzt aber wirklich zum Schluss! fangen wir die eingangs gemachte Bemerkung ein, wonach es bei Drehungen in der Ebene keine zweidimensionalen Vektoren gibt, die von der Drehmatrix D_φ lediglich skaliert werden; wir hatten das anschaulich begründet. Mit dem an den obigen Beispielen demonstrierten Apparat können wir das aber auch rechnerisch einsehen: das Charakteristische Polynom der Matrix $D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, die um den Winkel φ im mathematisch positiven Sinne dreht, lautet $\chi_\varphi(\lambda) = (\cos\varphi - \lambda)^2 + \sin^2\varphi$. Als Summe zweier Quadrate ist es niemals Null, es sei denn, beide Summanden sind gleichzeitig Null. Das geht für $\sin^2\varphi$ überhaupt nur für $\varphi = k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$, also für Drehungen um 180° oder Vielfache davon und zieht aus $\cos\varphi - \lambda$ dann die beiden Möglichkeiten 1 und -1 für λ. Das entspricht unserer Anschauung: nur Drehungen um 0°, 360° und so weiter, die eigentlich gar nichts machen, oder Drehungen um 180°, 540° und so weiter, die lediglich die Richtung des Vektors, auf den sie angewandt werden, umkehren, stellen reine Skalierungen dieses Vektors dar (nämlich mit dem Faktor 1 im ersten und dem Faktor -1 im zweiten Fall) und verändern ihn ansonsten nicht. Für alle anderen φ *hat* $\chi_\varphi = 0$ keine Lösungen: ein Vektor, auf den wir D_φ mit einem "normalen" Drehwinkel φ anwenden, wird tatsächlich zu einem *anderen* Vektor verdreht.