1 Determinanten

1.1 Vorbemerkung.

In der "Weiterführenden Übung" zum Kapitel "Matrizen" haben wir den Begriff der *Form* spezialisiert auf total antisymmetrische multilineare n-Formen $\omega : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, die einem n-Tupel n-dimensionaler Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ eine Zahl zuordnen. Wir haben gesehen, dass es tatsächlich *genau eine* solche n-Form gibt, wenn wir die zusätzliche Forderung stellen, sie möge *normiert* sein, also ausgewertet auf dem Tupel $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ der n Vektoren der kanonischen Einheitsbasis des $\mathbb{R}^n$ den Funktionswert $\omega(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \equiv 1$ annehmen.

Wir können, so zeigt es die Übung, diese Abbildung D auch problemlos als Abbildung auf $n \times n$-Matrizen interpretieren – die Matrix, die wir dafür brauchen, entsteht einfach durch das Untereinanderschreiben der n Argumente von ω. Für diesen Wechsel der Interpretation wechseln wir auch die Bezeichnung, nämlich von ω auf D. Weiters haben wir gesehen, dass diese eindeutige, in den Zeilen total antisymmetrische und multilineare normierte "n-Form D auf Matrixzeilen" die konkrete Gestalt

$$\mathrm{D} : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}; M \mapsto \mathrm{D}(M) := \sum_{\pi \in \mathcal{S}(n)} \mathrm{sign}(\pi) \cdot M_{1\pi(1)} \cdot M_{2\pi(2)} \cdot \cdots \cdot M_{n\pi(n)}$$

hat, wobei M_{ij} das Element der i-ten Zeile und j-ten Spalte der Matrix M bedeuten und die Summation über alle Permutationen π der n Indizes $1, \ldots, n$ läuft; $\mathcal{S}(n)$ bezeichnet gerade die Menge aller solcher Permutationen.

Diese eindeutig bestimmte Abbildung heißt *Determinante* der Matrix M. Wir schreiben im Folgenden meistens $\det M$ dafür. Im vorliegenden Kapitel beschäftigen wir uns mit den wichtigsten Eigenschaften dieser Abbildung.

1.2 Erste Eigenschaften der Determinante.

Für die ersten Eigenschaften von det nutzen wir die Eigenschaften der definierenden Abbildung aus: Multilinearität, totale Antisymmetrie, Normiertheit. Wir wollen zunächst feststellen:

(a) Die Determinante einer Matrix ist linear in jeder ihrer Zeilen,

(b) Die Determinante einer Matrix ist genau dann Null, wenn die Zeilen der Matrix linear abhängig sind,

(c) für die Einheitsmatrix E gilt $\det(E) = 1$.

Die **erste** der drei Eigenschaften folgt aus der Konstruktion der Determinante einer *Matrix* M aus der ursprünglichen Definition als Linearform auf *Vektoren* $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$: wir haben die Matrix gebildet, indem wir die n Vektoren der Argumente der Linearform untereinander als Zeilen geschrieben haben. Die *Multilinearität*, also die Linearität in jedem der n Argumente, übersetzt sich dann in Linearität in jeder der n Zeilen der Matrix.

Die **zweite** Eigenschaft muss offenbar mit der Antisymmetrie von D zusammenhängen. Wie genau? Nun, wenn die Zeilen einer Matrix M nicht linear unabhängig sind, dann lässt sich eine als Linearkombination der anderen darstellen, ohne Beschränkung der Allgemeinheit zum Beispiel die erste: $\mathbf{v}_1 = \lambda_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n \cdot \mathbf{v}_n$ mit irgendwelchen λ_i. Nun ist ja D multilinear, so dass $D(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = \lambda_2 \cdot D(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n) + \lambda_3 \cdot D(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n) + \ldots + \lambda_n D(\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$. Das heißt mit anderen Worten: multiplizieren wir aus, nachdem wir $\mathbf{v}_1$ durch die Linearkombination der anderen ersetzt haben, erhalten wir Terme für D, in denen *immer* zwei Vektoren (zwei Zeilen der Matrix) identisch sind. Die sind aber alle Null! denn nach Vertauschung der identischen Vektoren geht ein solcher Term einerseits in sich selbst über, wechselt wegen der Antisymmetrie aber andererseits auch sein Vorzeichen. Das kann nur funktionieren, indem er Null ist. Damit ist aber $D(\ldots)$ insgesamt Null, wenn seine n vektoriellen Argumente nicht linear unabhängig sind: aus linearer Abhängigkeit ihrer Zeilen folgt $\det M = 0$.

Für die zweite Eigenschaft müssen wir aber noch die umgekehrte Aussage einsehen, denn die zweite Eigenschaft lautet ja "*genau dann* Null, wenn..." Gehen wir also davon aus, dass wir eine Matrix M vorliegen haben, für die $\det M = 0$ ist. Zu zeigen: ihre Zeilen sind in diesem Fall linear *ab*hängig. Wir wollen annehmen, sie seien es aber doch nicht, seien also tatsächlich linear unabhängig, und müssen dies nun zu einem Widerspruch führen. Die einfachste Weise, zu einem Widerspruch zu gelangen, ist die Anwendung sogenannter "Elementarer Zeilenoperationen", unter Liebhabern kurz EZU genannt. Sie werden im Kapitel über Lineare Gleichungssysteme ausführlich besprochen.

Unter Vorwegnahme der erwähnten Darstellung im Kapitel "Lineare Gleichungssysteme" können wir folgendes sagen: eine EZU überführt eine Matrix M in eine *andere* Matrix M', und zwar indem eine der folgenden drei möglichen Umformungen an ihr vorgenommen wird:

(i) *Vertauschen* zweier Zeilen

(ii) *Multiplizieren* einer Zeile mit einem von 0 verschiedenen Skalar

(iii) *Addieren* eines beliebigen *Vielfachen* einer Zeile zu einer anderen

Offensichtlich hat die Durchführung einer EZU keinen Einfluss auf die Dimension der Matrix. Durch k-mal iteriertes Anwenden von EZU erzeugt man also aus $M \in M(m \times n, \mathbb{R})$ eine Kette von Matrizen $M \to M^{(1)} \to M^{(2)} \to \cdots \to M^{(k)}$, alle ebenfalls aus $M(m \times n, \mathbb{R})$ mit dem Ziel, in $M^{(k)}$ eine Matrix mit bestimmten Eigenschaften erzeugt zu haben; um welche Eigenschaften es hier geht, wird, wie gesagt, im Kapitel über Lineare Gleichungssysteme besprochen. Wir machen es uns an dieser Stelle einfach und zitieren das für uns relevante Ergebnis: sind die Zeilen von M *linear unabhängig*, dann finden wir eine Kette von k Elementaren Zeilenoperationen, so dass $M^{(k)}$ gerade die *Einheitsmatrix* E ist. Um diesen Tatbestand verwenden zu können, bemerken wir, dass die Anwendung einer EZU auf eine Matrix mit Determinante 0 eine Matrix ergibt, die wiederum Determinante 0 hat: das Vertauschen zweier Zeilen ändert lediglich das Vorzeichen der Determinante, und $-0 = 0$. Das Multiplizieren einer beliebigen Zeile mit einem von Null verschiedenen Skalar erzeugt ebenfalls wiederum eine Matrix mit Determinante 0 wegen der Multilinearität in den Zeilen. Und das Addieren eines beliebigen Vielfachen einer Zeile zu einer anderen schließlich ändert wegen Multilinearität und Antisymmetrie die Determinante gleich gar nicht, egal welchen Wert sie hat; insgesamt gilt also: keine der möglichen EZU hat die Kraft, $\det M^{(i)}$ ungleich Null werden zu lassen, wenn $\det M^{(i-1)} = 0$ war.

Wären also die Zeilen von M, entgegen der Behauptung, linear *un*abhängig, könnten wir M, wie gerade erwähnt, mittels einer Sequenz von k Elementaren Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix $M^{(k)} = E$ überführen. Dann müsste jedoch, weil ja voraussetzungsgemäß $\det M = 0$ war, auch $\det E = \det M^{(k)} = 0$ sein, im Widerspruch zur Normiertheit der Determinantenform, die $\det E = 1$ fordert. Also können die Zeilen von M *doch* nicht linear unabhängig sein.

Die **dritte** Eigenschaft ist einfach nur die Normiertheit der Determinantenform. Ausgewertet auf dem Tupel $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ der n Vektoren der kanonischen Einheitsbasis des $\mathbb{R}^n$ hat die eindeutige Determinantenform den Funktionswert $\omega(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \equiv 1$, und gelesen als Funktion det auf den Zeilen einer quadratischen Matrix übersetzt sich das direkt in $\det E = 1$.

1.3 Weitere Eigenschaften der Determinante.

Eine weitere wichtige Eigenschaft der Determinante, die wir im Zusammenhang mit der späteren Invertierbarkeitsproblematik brauchen werden, ist die folgende: wenn wir eine Matrix M zu einer Matrix M^T machen, indem wir sie transponieren, also alle Zeilen von M, ihre Reihenfolge belassend, zu Spalten von M^T machen und umgekehrt, dann ändert sich die Determinante nicht.

(d) Sei M eine Matrix mit Matrixelementen M_{ij}. Wir bilden die **transponierte** Matrix M^T zu M durch die Festsetzung, dass $M^\mathsf{T}_{ij} := M_{ji}$ sein soll. Dann gilt $\det(M^\mathsf{T}) = \det(M)$, das heißt die Determinante ändert sich bei Transposition nicht.

Es gibt zahllose Möglichkeiten, das einzusehen. Wir können zum Beispiel einfach die Definition von det als Summe permutierter Produkte von Matrixelementen heranziehen, so wie wir sie in der "weiterführenden Übung" auf dem Übungsblatt zu "Mengen und Abbildungen" aus den Grundeigenschaften abgeleitet und oben noch einmal zitiert haben:

$$\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}; M \mapsto \det(M) := \sum_{\pi\in\mathcal{S}(n)} \operatorname{sign}(\pi)\cdot M_{1\pi(1)}\cdot M_{2\pi(2)}\cdot\cdots\cdot M_{n\pi(n)}$$

Am besten schreiben wir uns das explizit hin für zum Beispiel 3 Dimensionen. $\mathcal{S}(n)$ hat dann sechs Elemente, nämlich $(1,2,3)$, $(2,3,1)$ und $(3,1,2)$ mit positivem Vorzeichen und $(2,1,3)$, $(3,2,1)$ sowie $(1,3,2)$ mit negativem Vorzeichen. Die Determinante einer dreidimensionalen Matrix M schreibt sich damit als $\det M = \sum_{\pi\in\mathcal{S}(3)} \operatorname{sign}(\pi)\cdot M_{1\pi(1)}\cdot M_{2\pi(2)}\cdot M_{3\pi(3)}$, und dies ist explizit gleich $\det M = +M_{11}M_{22}M_{33} + M_{12}M_{23}M_{31} + M_{13}M_{21}M_{32} - M_{12}M_{21}M_{33} - M_{13}M_{22}M_{31} - M_{11}M_{23}M_{32}$. Ein bisschen Umarrangieren dieser Terme liefert $\det M = +M_{11}M_{22}M_{33} + M_{21}M_{32}M_{13} + M_{31}M_{12}M_{23} - M_{21}M_{12}M_{33} - M_{31}M_{22}M_{13} - M_{11}M_{32}M_{23}$, was wiederum nichts anderes ist als $\sum_{\pi\in\mathcal{S}(3)} \operatorname{sign}(\pi)\cdot M_{\pi(1)1}\cdot M_{\pi(2)2}\cdot M_{\pi(3)3}$. Der letztere Ausdruck ergibt sich aus $\det M = \sum_{\pi\in\mathcal{S}(3)} \operatorname{sign}(\pi)\cdot M_{1\pi(1)}\cdot M_{2\pi(2)}\cdot M_{3\pi(3)}$ offenbar einfach durch Vertauschen der Indizes: $M_{\pi(i)i} \equiv M^\mathsf{T}_{i\pi(i)}$. Also $\det M = \det M^\mathsf{T}$.

Bei solchen Betrachtungen ist offensichtlich eine pedantische Buchhalternatur gefordert. Es wird andererseits deutlich, dass diese direkt aus der abstrakten Definition der Determinantenform resultierende Auflösung der Funktion det in eine Summe über Permutationen nicht sehr praktikabel ist, wenn man tatsächlich für eine gegebene Matrix ihre Dterminante von Hand ausrechnen will. Deswegen kommt im nächsten Abschnitt weiter unten die praktischste explizite Formel für das Ausrechnen der Determinante einer Matrix. Worauf wir hier zunächst aber hinauswollen, ist die folgende simple Anwendung der Determinanteneigenschaft (d) auf (a) und (b): wenn sich die Determinante einer Matrix bei Transposition nicht ändert, können wir die obigen Zeilenaussagen in äquivalente Spaltenaussagen umformulieren:

(e) Die Determinante einer Matrix ist linear in jeder ihrer Spalten,

(f) Die Determinante einer Matrix ist genau dann Null, wenn die Spalten der Matrix linear abhängig sind.

Die zweite dieser beiden Aussagen ist besonders interessant, und wir betrachten sie genauer. Wir setzen zunächst voraus, dass die quadratische Matrix M invertierbar ist. Dann ist die zugehörige lineare Abbildung ein Isomorphismus, und im Abschnitt über Isomorphismen des Kapitels "Lineare Abbildungen" haben wir bemerkt, dass dies gerade bedeutet, dass sie Basen in Basen überführt. Weil die Spalten der Matrix aber nichts anderes sind als die Bilder der (eine Basis darstellenden) Einheitsvektoren, müssen sie eine Basis des Bildraums bilden und sind dementsprechend linear unabhängig – die Determinante der Matrix ist nach der gerade ausgesprochenen Bemerkung also *ungleich* Null. Jetzt setzen wir umgekehrt voraus: die quadratische Matrix $M \in M(n \times n, \mathbb{K})$ habe eine Determinante, die ungleich Null ist. Unsere Bemerkung sagt uns in diesem Fall, ihre n Spalten seien linear unabhängig. Weil es aber gerade n Spalten sind, müssen sie eine Basis des n-dimensionalen Zielraumes bilden, so dass wir *jeden* Vektor des Zielraumes aus ihnen linearkombinieren können, mithin *jeder* Vektor des Zielraumes im Bild dieser linearen Abbildung liegt, $\dim \operatorname{Bild} M$ also die Dimension des Zielraums ist und gemäß der Dimensionsformel dann $\dim \operatorname{Kern} M = 0$ – die Abbildung ist bijektiv und damit M invertierbar. Aus beiden Schlussrichtungen setzt sich die schöne und zentral wichtige folgende Aussage zusammen:

(g) Die Determinante einer Matrix ist genau dann von Null verschieden, wenn die Matrix invertierbar ist.

Wir versammeln nun ein paar weitere Eigenschaften der Determinantenfunktion, die sowohl strukturklärend als auch nützlich sind und später gegebenenfalls auch für das explizite Ausrechnen tatsächlich gegebener Determinanten verwendet werden können. Die Beziehung $\det(M^{\mathsf{T}}) = \det(M)$ haben wir schon erwähnt. Was sich als Frage geradezu aufdrängt: was ist mit der Determinante eines Matrixprodukts zweier Matrizen? Hier bekommen wir eine sehr einfache Aussage:

(h) Für $M, N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt $\det(M \cdot N) = \det M \cdot \det N$.

(Man beachte, dass der Punkt im linken Teil der Gleichung die Matrixmultiplikation von M und N bezeichnet, im rechten Teil aber einfach das Produkt zweier reeller Zahlen.)

> Lässt sich das einsehen ohne Rechnen? Ja – mit einem Kunstgriff. Und zwar betrachten wir die subtil konstruierte Hilfs-Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}; A \mapsto \varphi(A) := \frac{1}{\det(N)} \det(A \cdot N)$ für festes N, sofern $\det N$ nicht Null ist. Wir können nacheinander prüfen, dass φ multilinear ist in jeder Zeile (denn wenn wir nur die i-te Zeile von A ändern, ändert sich auch nur die i-te Zeile von $A \cdot N$ bei festem N), antisymmetrisch und auch normiert, denn $\varphi(E \cdot N) = \frac{1}{\det N} \det(E \cdot N) = \frac{1}{\det N} \det(N) = 1$. Weil die Determinantenfunktion eindeutig ist, *muss* es sich bei φ demnach um *die* Determinante von A handeln: $\varphi(A) \equiv \det(A)$, oder eingesetzt in die Definition von φ oben: $\det A = \frac{1}{\det(N)} \det(A \cdot N)$. Beide Seiten dieser Gleichung mit $\det N$ multiplizieren liefert $\det(A) \cdot \det(N) = \det(M \cdot N)$, und damit ist die Aussage für beliebige A, N bewiesen, solange jedenfalls $\det N \neq 0$ ist. Wenn aber *doch* $\det N = 0$ sein sollte, sind, wie wir wissen, die Spalten von N linear *ab*hängig, und das gilt dann auch für die Spalten von $A \cdot N$, ganz egal, wie A aussieht[1], so dass $\det(A \cdot N) = 0$ ist und auch in diesem Fall die behauptete Gleichheit gegeben ist.

Mittels dieser Beziehung sehen wir die Richtigkeit der Gleichungskette $1 = \det E = \det(M \cdot M^{-1}) = \det(M) \cdot \det(M^{-1})$ sofort ein; M^{-1} sei die Inverse zur invertierbaren Matrix M. Es gilt also

(i) Für eine invertierbare Matrix M ist $\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)}$.

Wenn wir das suggestiv als $\det(M^{-1}) = \det(M)^{-1}$ notieren, müssen wir darauf achten, die “-1” richtig aufzufassen: links bedeutet es die Inversenbildung, rechts einfach “eins durch”. Übrigens sehen wir hier das Matrix-Analogon zu der Schulmathe-Weisheit “durch 0 kann man nicht dividieren”. Durch eine Matrix M nämlich kann man auch nur dann dividieren – will sagen: mit M^{-1} multiplizieren –, wenn M “nicht Null” ist, was in diesem Fall $\det M \neq 0$ bedeutet.

[1] Wer diese Aussage genauer betrachten möchte, sei auf das zugehörige Übungsblatt verwiesen.

1.4 Berechnen von Determinanten.

Das tatsächliche Berechnen der Determinante einer numerisch gegebenen Matrix ist sicher *kein* in der Praxis häufig auftretender Ernstfall, und schließlich gibt es Computersysteme, die das – sei es numerisch, sei es symbolisch – übernehmen können. Es ist viel wichtiger, die Strukturen verstanden zu haben, die hinter der Konzeption stehen. Trotzdem sollte man zumindest im Prinzip in der Lage sein, eine Determinante auch mal auszurechnen. Dafür gibt es auf dem Übungsblatt auch ein wenig Material.

Als **erste Möglichkeit** nennen wir die Entwicklung der Determinante in permutierte Produktausdrücke, wie wir sie direkt aus den definierenden Eigenschaften der Determinante abgeleitet haben. Wir erinnern uns: allein die drei Bestimmungen Multilinearität, Antisymmetrie und Normiertheit haben bereits ausgereicht, um zu zeigen, dass es höchstens *eine* Determinantenfunktion auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ gibt und gleichzeitig die Formel geliefert:

$$\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}; M \mapsto \det(M) := \sum_{\pi\in\mathcal{S}(n)} \operatorname{sign}(\pi)\cdot M_{1\pi(1)}\cdot M_{2\pi(2)}\cdot\dots\cdot M_{n\pi(n)}$$

Wenigstens für die eine oder andere 2×2-Matrix sollte man sie mal angewendet haben, um ein Gefühl dafür zu bekommen, was "Multilinearität" und "Antisymmetrie" bedeuten. Wie bereits polemisierend in die Runde geworfen: im Allgemeinen ist das nicht der Weg der Wahl, wenn man wirklich einmal eine Determinante ausrechnen will oder muss. Hingegen kann der Analysis treibende Betrachter auf einen Blick etwa die *Stetigkeit* der Abbildung $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ erkennen oder einen Beweis für Differenzierbarkeit nebst Ableitungsformel für die Determinante herleiten. Gelegentlich wird diese strukturerhellende Beziehung auch als "LEIBNIZsche Formel" bezeichnet[2].

Für die **zweite Möglichkeit**, eine Determinante explizit zu berechnen, brauchen wir den Begriff der **Streichungsmatrix**. Wir bilden sie wie folgt: aus der $n\times n$-Matrix M wird die $(n-1)\times(n-1)$-Matrix $M_{s(ij)}$ gebildet, indem aus M die i-te Zeile und die j-te Spalte herausgestrichen werden. $M_{s(ij)}$ heißt dann die *ij-te Streichungsmatrix* zu M. *Vorsicht*: üblicherweise wird die Streichungsmatrix einfach als M_{ij} geschrieben, es handelt sich dabei aber in jedem Fall – trotz der unglücklichen, aber üblichen – Bezeichnungsweise um eine *Matrix*, nicht um ein Matrix*element*. Sämtliche n^2 aus M gewonnenen Streichungsmatrizen sind natürlich ebenfalls quadratische Ma-

[2] Autor der Formel ist natürlich *nicht* der Schöpfer des Butterkekses mit 52 Zähnchen – das war Herrmann Bahlsen (1859 - 1919) –, sondern vielmehr der Philosoph, Mathematiker und Diplomat Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646 - 1716).

trizen, so dass wir ihre Determinante bilden können, und mit deren Hilfe, sowie mit den Matrixelementen M_{ij} von M selbst, die Summe $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}M_{ij}\ \det(M_{s(ij)})$; j wird dabei festgehalten und ist beliebig. Es ist nicht schwierig, erfoldert aber Sorgfalt und ein sauberes Notieren, zu zeigen, dass die so gebildete Summe in jeder Zeile von M linear ist und dass sie antisymmetrisch ist bezüglich Zeilenvertauschungen von M. Weil ja für die Einheitsmatrix E gilt, dass $E_{ij} \neq 0$ nur für $i = j$, haben wir auch $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}E_{ij}\ \det(E_{s(ij)}) = (-1)^{2j}E_{jj}\det(E_{s(jj)}) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$. Folglich ist diese Summe nichts anderes als *die* Determinante auf $\mathbb{R}^{n\times n}$:

$$\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}; M \mapsto \det(M) := \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}M_{ij}\ \det(M_{s(ij)})$$

Man nennt diese rekursiv wirkende Berechnungsformel aus naheliegenden Gründen “Entwicklung der Determinante nach der j-ten Spalte”. Wegen $\det M^{\mathsf{T}} = \det M$ folgt daraus sofort auch die Entwicklung der Determinante nach der i-ten *Zeile* als

$$\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}; M \mapsto \det(M) := \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}M_{ij}\ \det(M_{s(ij)})$$

Wenn diese Formeln auch zunächst etwas schwer verdaulich wirken, sind solche Entwicklungen doch das in den meisten praktischen Fällen übersichtlichste und einfachste Verfahren zur Determinantenberechnung. Besonders, wenn man sich die Zeile oder Spalte, nach der man entwickeln will, geschickt wählt, nämlich so, dass sie möglichst viele Nullen enthält. Für die meisten vorkommenden geringdimensionalen Fälle ist diese Formel das Vorgehen der Wahl; für numerische Implementierungen ist sie wegen ihrer $\mathcal{O}(n!)$-Skalierung ziemlich ungeeignet. Man sollte wenigstens für zwei oder drei konkrete Beispiele diese Formel einmal angewandt haben; einige Vorschläge dazu bringt das Übungsblatt zu diesem Kapitel. Die Entwicklungsformel wird übrigens gelegentlich auch LAPLACEscher Entwicklungssatz genannt nach dem französischen Mathematiker, Physiker und Astronom Pierre-Simon Marquis de Laplace (1749 - 1827).

Hat die Matrix M oberhalb oder unterhalb ihrer Hauptdiagonalen (das heißt den Elementen M_{ii}) nur Nullen, so ist $\det M$ einfach das Produkt der Hauptdiagonalelemente (siehe Übungsblatt). Dies kann man, falls M nicht schon von vornherein diese Gestalt hat, durch Anwenden der Elementaren Zeilenoperationen EZU (i) und (ii) erreichen (siehe Abschnitt “Erste Eigenschaften der Determinante”), muss dabei aber aufpassen, dass die Determinante einen Vorzeichenwechsel abbekommt, wenn zwei Zeilen vertauscht werden. Diese Vorgehensweise ist **Möglichkeit drei**; hier nicht weiter verfolgt.

Es sgibt noch andere Verfahren wie die im numerischen Umfeld sinnvoll einsetzbare *LR-Zerlegung* oder die sogenannte SARRUSsche Regel. Letztere gilt jedoch *ausschließlich* für 3×3-Matrizen! und hat zudem die übernatürliche Eigenschaft, praktisch jeden Lernenden durch unbewusstes Falschanwenden zu falschen Ergebnissen zu führen. Dieser Problematik wegen kommen wir hier nicht auf diese Regel zu sprechen[3].

Die *geometrische* Interpretation der Determinante wird hier nicht erläutert, einmal aus Platz- und Zeitgründen nicht, und dann auch deshalb nicht, weil wir auch in den vorausgegangenen Erörterungen kaum auf die Analytische Geometrie eingegangen sind, obwohl diese – zumindest in mathematikgeschichtlicher Sicht – die sozusagen "erzeugende Theorie" für die Lineare Algebra gewesen ist. Die Verbindung der Determinantenfunktion zum Flächeninhalt eines Parallelogramms in zwei Dimensionen, zum *Spatprodukt* von drei Vektoren etc. kann in den entsprechenden Lehrtexten nachgelesen werden; es sei hier auch hingewiesen auf die sehr schönen diesbezüglichen Animationen der Lehrvideos von Grant Sanderson ("3Blue1Brown").

Wir schließen mit einer Formel zur Berechnung der Inversen einer Matrix, die sich auf Determinantenberechnungen stützt. Aus vorgegebenem $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bilden wir zunächst die Streichungsmatrizen $M_{s(ij)}$ und daraus eine $\operatorname{adj}(M)$ genannte Matrix[4] mit den Einträgen

$$(\operatorname{adj}(M))_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{s(ji)}) \ .$$

(man beachte die implizite Transposition in $\det(M_{s(ji)})$ – da steht *nicht* $\det(M_{s(ij)})$!) Um zu verstehen, was diese Konstruktion bewirken soll, schauen wir uns das Produkt $M \cdot \operatorname{adj} M$ an, welches die Einträge $(M \cdot \operatorname{adj} M)_{ij} = \sum_k M_{ik}(\operatorname{adj} M)_{kj} = \sum_k M_{ik}(-1)^{k+j} \det(M_{s(jk)})$ hat. Auf der Hauptdiagonalen dieses Produkts, wo $i = j$ ist, haben wir demnach $(M \cdot \operatorname{adj} M)_{ii} = \sum_k M_{ik}(-1)^{i+k} \det(M_{s(ik)})$ – nach der obigen Entwicklungsformel ist das nichts anderes als $\det M$! Für $i \neq j$ ist $(M \cdot \operatorname{adj} M)_{ij}$ die Determinante einer Matrix, die aus M entsteht, wenn wir in M die j-te Zeile entfernen und durch die i-te ersetzen. Diese Matrix hat dann aber zwei gleiche Zeilen und damit eine verschwindende Determinante. Zusammengefasst ist $M \cdot \operatorname{adj} M$ eine $n \times n$-Matrix mit dem Wert $\det M$ für alle n Hauptdiagonalelemente und 0 sonst.

[3] Wer sie dennoch anwenden will, sollte sich eines Lineals bedienen oder wenigstens die Rechenhäuschen-Einteilung des Schreibpapiers, das er benutzt, sorgfältig ernst nehmen.

[4] Zuweilen, besonders in älteren Büchern, wird diese Matrix *Adjunkte* oder *(klassische) Adjungierte* von M genannt. Diese Bezeichnung ist etwas unglücklich gewählt, weil sie verwechselbar ist mit der *Adjungierten* einer Matrix mit komplexwertigen Einträgen, welche dadurch entsteht, dass man sie transponiert und gleichzeitig das Komplexkonjugierte der Einträge bildet.

Aha! Und? Nun, durch Division mit $\det M$ (sofern von 0 verschieden) schreibt sich das als $M \cdot \frac{1}{\det M} \operatorname{adj} M = E$ beziehungsweise

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \operatorname{adj} M \ .$$

Zumindest für 2 oder 3 Dimensionen ist das ein brauchbares Vorgehen, das Inverse einer Matrix zu bestimmen, nur indem Determinanten ausgerechnet werden (siehe Übungen). Aus der Sicht effizienter numerischer Algorithmen ist dieses Verfahren mit seinen ganzen Determinantenberechnungen natürlich unmöglich.

2 Zusammenfassung: Invertierbarkeit linearer Abbildungen.

Wir haben im Laufe dieses Kapitels eine Vielzahl von Eigenschaften linearer Abbildungen kennengelernt, die mit ihrer Bijektivität, also auch mit der Invertierbarkeit der ihnen zugeordneten Matrizen, im Zusammenhang stehen. Die Liste hier fasst sie noch einmal zusammen.

Sei also $L : \mathrm{V} \to \mathrm{W}; \mathbf{v} \mapsto L\mathbf{v}$ eine lineare Abbildung zwischen den reellen Vektorräumen V und W mit $\dim(\mathrm{V}) = \dim(\mathrm{W}) = n$ und $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die zugehörige quadratische Matrix. Dann ist L genau dann ein Isomorphismus, also bijektiv, und daher M invertierbar, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) L ist injektiv.

(ii) L ist surjektiv.

(iii) $\dim(\mathrm{Bild}(L)) = n$.

(iv) $\dim(\mathrm{Kern}(L)) = 0$.

(v) $\mathrm{Kern}(L) = \mathbf{0}_\mathrm{V}$.

(vi) Die Spalten von M bilden eine Basis von W.

(vii) Die Zeilen von M bilden eine Basis von W.

(viii) Die Spalten von M sind linear unabhängig.

(ix) Die Zeilen von M sind linear unabhängig.

(x) $\det(M) \neq 0$.

(xi) Der Gaussche Algorithmus kann für M bis zum Ende durchgeführt werden (siehe nächstes Kapitel).