Übungsblatt zu “Basen und Dimensionen”

Sommersemester 2022

Übung 1 (Vektorraumbasen)
In Übung 1 des Übungsblatts zu “Lineare Räume” waren die folgenden drei Vektoren gegeben: $\mathbf{v}_1 = (8, 0, -1)^\mathsf{T}$, $\mathbf{v}_2 = (-2, 2, -1)^\mathsf{T}$ und $\mathbf{v}_3 = (1, 3, -2)^\mathsf{T}$. Wir hatten die lineare Abhängigkeit dieser Vektoren nachgewiesen. Jetzt betrachten wir $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$. Das ist ein Untervektorraum (siehe den entsprechenden Abschnitt in “Lineare Räume”), also ein Vektorraum aus eigenem Recht, und offensichtlich endlichdimensional. Welches ist seine Dimension? Geben Sie eine Basis von $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ an.

Übung 2 (Dimension; Vektorraumbasen)
Gegeben sei der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ und die Vektoren $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ und $\mathbf{v}_4$. Ist das Tupel $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ linear unabhängig? Welche Dimension hat $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ höchstens? mindestens?

Übung 3 (Vektorraumbasen)
Ergänzen Sie den Vektor $\mathbf{v} = (1, 2, 3)^\mathsf{T}$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie dann explizit, dass die von Ihnen gewählten Vektoren tatsächlich ein Erzeugendensystem für $\mathbb{R}^3$ sind und auch linear unabhängig.

Übung 4 (Vektorraumbasen)
In Übung 4 des Übungsblattes zu “Lineare Räume” haben wir diejenige Teilmenge U des $\mathbb{R}^3$, die durch die Bedingung $v_1 + v_2 + v_3 = 0$ für einen Vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^3$ erzeugt wird, betrachtet und nachgewiesen, dass es sich um einen Unterraum des $\mathbb{R}^3$ handelt. Welche Dimension hat dieser Unterraum? *Anmerkung*: die Differenz zwischen der Dimension von $\mathbb{R}^3$, also 3, und einem solchen durch Einschränkungsbedingungen definierten Unterraum heißt *Kodimension* dieses Unterraums[1]. Geben Sie eine explizite Basis für ihn an.

> *Anleitung*: Eine Möglichkeit, sich der Sache zu nähern, ist die folgende. Zunächst ist klar, dass auch alle Basisvektoren die Bedingung “Komponentensumme ist 0” erfüllen müssen. Die einfachsten Vektoren mit dieser Eigenschaft, die man sich hinschreiben kann, sind vermutlich diejenigen, bei denen eine Komponente von vornherein 0 ist und die anderen beiden sich zu 0 addieren; bis auf Skalierung/Richtungsumkehr wären das $(1, -1, 0)^\mathsf{T}$, $(1, 0, -1)^\mathsf{T}$ und $(0, 1, -1)^\mathsf{T}$. Damit haben wir Kndidaten gefunden. Dass alle diese drei linear unabhängig sind, ist nicht zu erwarten, denn die

[1] In der Differentialgeometrie nennt man Untermannigfaltigkeiten der Kodimension 1 auch “Hyperflächen”.

definierende Bedingung wird ja dafür sorgen, dass die Dimension von U nicht 3 ist, sondern kleiner. Als erstes überzeuge man sich daher davon, dass man einen der drei Kandidaten durch die anderen beiden linearkombinieren kann. Dass die verbleibenden zwei nunmehr linear unabhängig sind, ist durch bloßes Hinschauen überprüfbar. Aber bilden sie auch ein Erzeugendensystem? Dafür stelle man sich die Aufgabe, irgendeinen Vektor $(v_1, v_2, v_3)^\top$ aus U aus beispielsweise $(1, -1, 0)^\top$ und $(1, 0, -1)^\top$ zusammenzusetzen. Weil $(v_1, v_2, v_3)^\top \in U$, kann man einen seiner drei Komponenten durch das Negative der Summe der anderen beiden ersetzen, also etwa $(v_1, -(v_1 + v_3), v_3)^\top$ schreiben. Und egal, wie man das macht: man wird immer Vorfaktoren μ_1 und μ_2 finden, so dass $\mu_1 \cdot (1, -1, 0)^\top + \mu_2 \cdot (1, 0, -1)^\top = (v_1, -(v_1 + v_3), v_3)^\top$ ist; in dieser Realisierung wären das $\mu_2 = -v_3$ und $\mu_1 = v_1 + v_3$. Damit sind die beiden Vektoren $(1, -1, 0)^\top$ und $(1, 0, -1)^\top$ als Basis von U nachgewiesen. U ist zweidimensional, hat also "Kodimension 1".

Weiterführende Übung.

Wir kennen nun endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume und können in ihnen Basen auffinden, also Tupel linear unabhängiger Elemente des betreffenden Vektorraums, mit deren Hilfe jeder beliebige Vektor als Linearkombination zusammengesetzt werden kann. In gewisser Weise "kennen" wir also jeden Vektor, wenn wir eine Basis gegeben haben, indem wir seine *Komponenten* bezüglich dieser Basis hinschreiben. Betrachten wir nun eine Funktion L, die auf einem gegebenen Vektorraum V definiert ist und in einen weiteren Vektorraum W hinein abbildet. Da liegt die Frage nahe: "kennen" wir L bereits vollständig, wenn wir wissen, was L mit den Basisvektoren von V macht?

Zunächst einmal müssen wir konstatieren: im Allgemeinen leider nicht. Betrachten wir dazu als Beispiel ein $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, von dem wir wissen, dass $L((1, 0)^\top) = 5$ ist und $L((0, 1)^\top) = 42$; dabei sei $\{(1, 0)^\top, (0, 1)^\top\}$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$ in der platzsparenden Zeilenschreibweise. Jetzt möchten wir wissen, was herauskommt, wenn wir L auf $(2, -1)^\top$ anwenden. Zwar ist $L((2, -1)^\top) = L(2 \cdot (1, 0)^\top + (-1) \cdot (0, 1)^\top)$, wenn wir $(2, -1)^\top$ in die kanonische Basis entwickeln. Weiter kommen wir aber nicht, denn natürlich können wir L nicht einfach in diese Linearkombination hineinziehen, wir wissen ja nicht, wie es wirkt. Dass das im Allgemeinen nicht geht, ist der erste Schritt dieser Übung: man wähle die Funktion $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $L((x, y)^\top) := x^2 + y^2$ und überzeuge sich, dass mit diesem konkreten L ***nicht*** gilt $L((2, -1)^\top) = 2 \cdot L((1, 0)^\top) + (-1) \cdot L((0, 1)^\top)$.

Andererseits ist es genau diese Struktur, das Linearkombinieren von Vektoren, die einen Vektorraum zu einem Vektorraum macht. Abbildungen, die *doch* stets in Linearkombinationen hineingezogen werden können, diese Struktur also sozusagen "respektieren", spielen deshalb beim

Studium von Abbildungen zwischen Vektorräumen eine herausragende Rolle. Letztendlich wird es im ganzen restlichen Teil der Vorlesung um derartige Funktionen gehen. Man nennt sie naheliegenderweise *linear*. Im zweiten Teil dieser Übung geht es darum, die drei folgenden, konkret gegebenen Funktionen vom $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ in den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}$ daraufhin zu überprüfen, ob es sich um *Lineare Abbildungen* handelt, das heißt ob der Funktionswert einer Linearkombination gleich der Linearkombination der Funktionswerte ist: gilt jeweils $L(\lambda_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{e}_2) \stackrel{?}{=} \lambda_1 \cdot L(\mathbf{e}_1) + \lambda_2 \cdot L(\mathbf{e}_2)$ oder nicht? (Dabei sei abkürzend $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \equiv ((1,0)^\mathsf{T}, (0,1)^\mathsf{T})$.)

Erstes Beispiel: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (x,y)^\mathsf{T} \mapsto 2 \cdot x - y$
Zweites Beispiel: $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (x,y)^\mathsf{T} \mapsto 2 \cdot x^2 - y$
Drittes Beispiel: $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (x,y)^\mathsf{T} \mapsto x$ ("Projektion auf die x-Achse")

Wir betrachten nun wieder $\mathbb{R}^3$ (als typisches Beispiel für $\mathbb{R}^n$ im Allgemeinen, für den das Aufschreiben mit allen diesen Pünktchen $1, \dots, n$ immer sehr umständlich ist) und die vertraute Basis aus Einheitsvektoren $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Außerdem sei $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine *lineare* Abbildung. Wenn wir nun *irgendeinen* Vektor, etwa $\mathbf{v} = (-2,5,3)^\mathsf{T}$, hernehmen und uns fragen, was $L\mathbf{v}$ ist, so können wir diese Frage genau dann beantworten, wenn wir wissen, was $L\mathbf{e}_1$, was $L\mathbf{e}_2$ und was $L\mathbf{e}_3$ ist. Nehmen wir also als Beispiel einfach mal an, wir hätten $L\mathbf{e}_1 = (1,0,0)^\mathsf{T}$ sowie $L\mathbf{e}_2 = (1,1,0)^\mathsf{T}$ und $L\mathbf{e}_3 = (1,1,1)^\mathsf{T}$. Was ist dann $L\mathbf{v}$ für $\mathbf{v} = (-2,5,3)^\mathsf{T}$? Wir sehen: um eine *lineare* Abbildung zwischen zwei Vektorräumen vollständig zu beschreiben, wählen wir eine Basis des Vektorraums, der die Definitionsmenge der linearen Abbildung ist, und geben an, welches die Bilder dieser Basisvektoren unter der linearen Abbildung sind. Damit ist alles gesagt.

In dem gerade gerechneten Beispiel war es so, dass L zwischen zwei Vektorräumen gleicher Dimension, nämlich 3, abbildete und die drei Bilder der drei Einheitsvektoren $\{\mathbf{e}_i\}$ selber wieder eine Basis bildeten (nämlich die aus der "weiterführenden Übung" des Übungsblatts zu "Lineare Räume"). Das muss natürlich nicht so sein, ist aber ein besonders interessanter Fall, der im folgenden Kapitel einen eigenen, natürlich wieder aus dem Lateinischen stammenden Namen verpasst bekommt. Als Beispiel anderer Art soll diese Übung schließen mit der linearen Abbildung $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die wir durch $K\mathbf{e}_1 := 2$ und $K\mathbf{e}_2 := -1$ vorgeben. Man berechne nun allgemein $K\mathbf{v}$ für beliebiges $\mathbf{v} = (x,y)^\mathsf{T}$.