Übungsblatt zu "Lineare Räume"

Sommersemester 2022

Übung 1 (Lineare Unabhängigkeit)
Ist der Vektor $\mathbf{v} = (1,1,1)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^3$ eine Linearkombination der Vektoren $\mathbf{w_1} = (2,-1,3)^\mathsf{T}$ und $\mathbf{w}_2 = (-2,0,1)^\mathsf{T}$?

Sind die Vektoren $\mathbf{a}_1 = (1,-2,2,3)^\mathsf{T}$, $\mathbf{a}_2 = (-1,-4,4,3)^\mathsf{T}$ und $\mathbf{a}_3 = (2,-1,-1,3)^\mathsf{T}$ linear unabhängig?

In $\mathbb{R}^3$ seien die folgenden drei Vektoren gegeben: $\mathbf{v}_1 = (8,0,-1)^\mathsf{T}$, $\mathbf{v}_2 = (-2,2,-1)^\mathsf{T}$ und $\mathbf{v}_3 = (1,3,-2)^\mathsf{T}$. Weisen Sie die lineare Abhängigkeit dieser Vektoren nach. Greifen Sie einen beliebigen Vektor aus diesen dreien heraus, argumentieren Sie, warum es möglich ist, ihn als Linearkombination der übrigen beiden darzustellen und berechnen Sie die entsprechenden Vorfaktoren dieser Linearkombination explizit.

Übung 2 (Lineare Unabhängigkeit)
Seien $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ und $\mathbf{v}_4$ vier *linear unabhängige* Vektoren und $\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_4\mathbf{v}_4$ eine Linearkombination dieser vier Vektoren mit rellen Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$. Argumentieren Sie, dass es dann keine *andere* Linearkombination der $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4$ für $\mathbf{x}$ gibt. Oder anders formuliert: die Art und Weise, wie $\mathbf{x}$ aus $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4$ zusammengesetzt ist, ist *eindeutig*. *Anleitung*: nehmen Sie an, es gäbe *doch* eine andere Kombination, zum Beispiel $\mathbf{x} = \mu_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \mu_4\mathbf{v}_4$ mit irgendwelchen *anderen* Zahlen $\mu_1, \ldots, \mu_4$, und führen Sie das zum Widerspruch, indem Sie die Lineare Unabhängigkeit der $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4$ benutzen, um zu zeigen, dass entgegen Ihrer Annahme doch $\lambda_1 = \mu_1$, $\lambda_2 = \mu_2$, $\lambda_3 = \mu_3$ und $\lambda_4 = \mu_4$ sind. *Bemerkung*: nur um der Konkretheit willen sind in dieser Aufgabe gerade *vier* Vektoren gewählt worden. Eigentlich ist ihre Anzahl für die Aufgabe aber gleichgültig.

Argumentieren Sie jetzt umgekehrt: wenn für alle Vektoren $\mathbf{x}$ der Linearen Hülle $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4)$ gilt, dass die jeweilige Linearkombination $\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_4\mathbf{v}_4$ *eindeutig* ist, dann ist das Tupel $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4)$ linear unabhängig.

Übung 3 (Lineare Unabhängigkeit)
Es seien die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^3$ gegeben: $\mathbf{v}_1 = (-1,1,-3)^\mathsf{T}$, $\mathbf{v}_2 = (-1,3,5)^\mathsf{T}$ und $\mathbf{v}_3 = (1,1,\lambda)^\mathsf{T}$; letzterer mit einem freien reellen Parameter λ. Die Aufgabe ist, λ so zu bestimmen,

dass $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ und $\mathbf{v}_3$ linear abhängig sind, um anschließend $\mathbf{v}_3$ als Linearkombination der anderen beiden Vektoren darzustellen.

Übung 4 (Unterräume)
Betrachten Sie diejenige Teilmenge U des $\mathbb{R}^3$, die durch die Bedingung $v_1 + v_2 + v_3 = 0$ für einen Vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^3$ erzeugt wird. U enthält also alle diejenigen Vektoren aus $\mathbb{R}^3$, deren Komponenten aufaddiert 0 ergeben. Weisen Sie nach, dass U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ ist.

Übung 5 (Unterräume)
Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ und die Unterräume $U_1 = \mathcal{L}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, $U_2 = \mathcal{L}(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ sowie $U_3 = \mathcal{L}(\mathbf{e}_1)$, wobei die $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$, die sogenannten *Einheitsvektoren* des $\mathbb{R}^3$ sein sollen, nämlich $\mathbf{e}_1 := (1, 0, 0)^\mathsf{T}$, $\mathbf{e}_2 := (0, 1, 0)^\mathsf{T}$ und $\mathbf{e}_3 := (0, 0, 1)^\mathsf{T}$. Welches sind dann die Unterräume $U_1 \cap U_2$, $U_1 \cap U_3$ und $U_2 \cap U_3$? *Hinweis*: Es genügt, wenn Sie sich dies anschaulich mit Hilfe einer Zeichnung klarmachen.

Weiterführende Übung
Wir betrachten in dieser Übung den Vektorraum $\mathbb{R}^3$ und zwei Tupel von Vektoren: einmal $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ – also die in der Übung 5 eingeführten *Einheitsvektoren* des $\mathbb{R}^3$ – und zweitens $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Welches sind die Zahlen λ_1, λ_2 und λ_3 , mit denen die Linearkombination $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_1 + \lambda_3 \mathbf{e}_3$ gilt? (Vorsicht, Aufgabenteil ist trivial.) Sind diese drei Werte eindeutig durch $(-2, 5, 3)^\mathsf{T}$ bestimmt?

Welches sind die Zahlen μ_1, μ_2 und μ_3 , mit denen die Linearkombination $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \mu_1 \mathbf{b}_1 + \mu_2 \mathbf{b}_1 + \mu_3 \mathbf{b}_3$ gilt? *Lösung*: $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = (-7, 2, 3)$.— Sind auch diese drei Werte eindeutig durch $(-2, 5, 3)^\mathsf{T}$ bestimmt?

Was ist die Lineare Hülle $\mathcal{L}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$? Welches ist die Lineare Hülle $\mathcal{L}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$? Wenn die beiden Linearen Hüllen gleich sind, sollten wir jedes $\mathbf{e}_i$ als Linearkombination der $\{\mathbf{b}_j\}$ darstellen können und umgekehrt. Führen Sie dies durch für jedes der drei $\mathbf{e}_i$. *Lösung*: $\mathbf{e}_1 = \mathbf{b}_1$, $\mathbf{e}_2 =$

$-\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$ und $\mathbf{e}_3 = -\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$. — Nutzen Sie diese drei Darstellungen, um erneut für $(-2,5,3)^\mathsf{T}$ die Vorfaktoren der Linearkombination $(-2,5,3)^\mathsf{T} = \mu_1\mathbf{b}_1 + \mu_2\mathbf{b}_2 + \mu_3\mathbf{b}_3$ zu bestimmen; diesmal, indem Sie zunächst $(-2,5,3)^\mathsf{T}$ als (triviale) Linearkombination der $\{\mathbf{e}_i\}$ schreiben und dann die einzelnen $\mathbf{e}_i$ durch ihre jeweiligen Linearkombinationen der $\{\mathbf{b}_j\}$ ersetzen.

Der Vektor $(-2,5,3)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^3$ kann also identifiziert werden mit seinen Vorfaktoren λ_i bezüglich der $\mathbf{e}_i$. Auf Grund der speziellen Wahl der $\mathbf{e}_i$ sind diese Vorfaktoren natürlich gerade seine Komponenten. In diesem Sinne schreiben wir $(-2,5,3)^\mathsf{T} \cong (-2,5,3)^\mathsf{T}_\mathbf{e}$ und meinen damit, dass wir den Vektor und den Vektor seiner Vorfaktoren identifizieren. Andererseits können wir aber auch $(-2,5,3)^\mathsf{T} \cong (-7,2,3)^\mathsf{T}_\mathbf{b}$ miteinander identifizieren, denn eine Entwicklung von $(-2,5,3)^\mathsf{T}$ nach den $\mathbf{b}_i$ ist letztlich genauso gut (wenn auch nicht ganz so praktisch) wie nach den $\mathbf{e}_i$. Vergleichen Sie diese Gegenüberstellung mit der Darstellung zum Beispiel der Zahl 523. Einerseits wird diese Zahl ohne weitere Zusätze zu verstehen sein als $523 = 5\cdot 10^2 + 2\cdot 10^1 + 3\cdot 10^0$. Andererseits könnte auch $523 = 5\cdot 7^2 + 2\cdot 7^1 + 3\cdot 7^0$ gemeint sein[1], wobei wir in diesem Fall – äquivalent zu unserem Subskript "**b**" – einen Hinweis erwarten würden. Analog zu $(-2,5,3)^\mathsf{T}_\mathbf{e} = (-7,2,3)^\mathsf{T}_\mathbf{b}$ würden wir hier $523_{10} = 1345_7$ schreiben wollen, während $523_7 = 292_{10}$ wäre.

Fassen Sie zusammen und diskutieren Sie! Welche Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ lassen sich durch die drei $\mathbf{e}_i$ linearkombinieren? ... durch die drei $\mathbf{b}_i$ linearkombinieren? Lassen sich die entsprechenden Darstellungen stets ineinander umrechnen, und ist das eindeutig? Sind die $\mathbf{e}_i$ linear unabhängig? Sind die $\mathbf{b}_i$ linear unabhängig? Wenn Sie das Tupel $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$ durch einen vierten Vektor anreichern würden, ginge die Eigenschaft, jeden Vektor aus $\mathbb{R}^3$ linearkombinieren zu können, damit verloren? Ginge die Eigenschaft der Linearen Unabhängigkeit des Tupels verloren? Wie verhält sich das bei den $(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3)$?

[1] Es gibt 10 Arten von Leuten: diejenigen, die mit der Binärdarstellung von Zahlen zurecht kommen, und die anderen.