Folgen

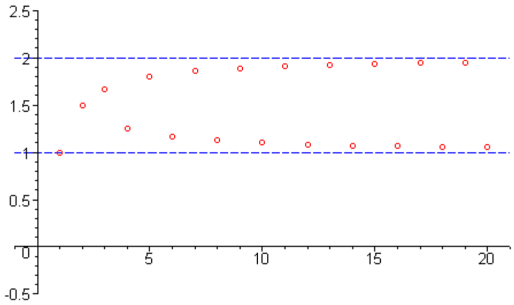
1. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n = \frac{3n+1}{2n-1}$, $b_n = \frac{3n-1}{2n+1}$, $c_n = \frac{3n^2+2n+1}{4n^2+2n+1}$.

   Bestimmen Sie jeweils einige Folgenglieder.

   Untersuchen Sie die drei Folgen auf Monotonie.

   Bestimmen Sie die Grenzwerte a und b von a_n und b_n und zeigen Sie dies auch mit Hilfe von ε und n_0.
   Bestimmen Sie den Grenzwert von c_n auch durch Polynomdivision.
   Bestimmen Sie jeweils die größte untere Schranke (Infimum) und die kleinste obere Schranke (Supremum).

2. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n = \begin{cases} 1+\frac{1}{n} & \text{für gerades n} \\ 2-\frac{1}{n} & \text{für ungerades n} \end{cases}$.

   Bestimmen Sie einige Folgenglieder.
   Ist die Folge monoton?
   Besitzt die Folge zwei Grenzwerte 1 und 2?

3. Die Folge a_n sei rekursiv definiert durch $a_0 = a \in \mathbb{R}$ beliebig und $a_{n+1} = 10 + 0{,}8 \cdot a_n$ für $n = 0,1,2,\dots$.
   Berechnen Sie einige Folgenglieder.
   Zeigen Sie durch Nachprüfen der beiden Definitionsbedingungen, dass $a_n = 50 + (a-50) \cdot 0{,}8^n$ gilt.
   Für welche Werte von a ist die Folge a_n streng monoton steigend bzw. fallend?
   Zeigen Sie mit Hilfe von ε und n_0, dass a_n den Grenzwert 50 hat.

4. Die Folge a_n sei rekursiv definiert durch $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ und $a_{n+2} = a_{n+1} + 2 \cdot a_n$ für $n = 0,1,2,\dots$.
   Berechnen Sie einige Folgenglieder.
   Zeigen, Sie durch Nachprüfen der gegebenen drei Definitionsbedingungen, dass $a_n = 2^n$ gilt.

5. Der berühmte Mathematiker *Leonardo da Pisa* (auch *Fibonacci = Filius des Bonacci* genannt) veröffentlichte im Jahre 1202 n. Chr. sein Buch *Liber abaci* , in dem die berühmte Kaninchenaufgabe zu finden war:

   Ein Kaninchenpaar wirft vom zweiten Monat an im Verlauf des Monats ein junges Paar und in jedem weiteren Monat ein weiteres Paar. Die Nachkommen verhalten sich ebenso. Die Kaninchen leben beliebig lange und bleiben alle unter sich.
   F(n) gebe die Anzahl der Kaninchenpaare zu Beginn des n-ten Monats an.

   Zu Beginn des 1. Monats gibt es 1 junges Kaninchenpaar: $F(1) = 1$

   Zu Beginn des 2. Monats ist das Kaninchenpaar immer noch alleine, d.h. F(2) = 1. Es wirft aber im Verlauf dieses Monats ein junges Paar, so dass zu Beginn des 3. Monats $F(3) = 2$ Kaninchenpaare leben.

   Wenn nun zu Beginn den n-ten Monats F(n) Paare und zu Beginn des (n+1)-ten Monats F(n+1) Paare leben. dann kommen im Verlauf des (n+1)-ten Monats genau F(n) Paare zur Welt. Denn die F(n+1) – F(n) Neugeborenen bekommen erst einen Monat später Nachwuchs. Somit leben zu Beginn des (n+2)-ten Monats F(n+2) = F(n+1) bisherige Paare + F(n) neugeborene Paare, d.h. F(n+2) = F(n+1) + F(n).

   Definition: Die durch $\boxed{F_0 = 0,\ F_1 = 1 \ \text{ und } \ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots}$ definierte Folge heißt **Fibonacci-Folge**.

   Im Jahr 1843 fand der französische Mathematiker *Jacques Binet* eine explizite Darstellung der Fibonacci-Folge, die aber zuvor bereits *Leonhard Euler*, *Daniel Bernoulli* und *Abraham de Moivre* bekannt war:

$$\boxed{F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots}$$

Beweis Nr.1

1. Zeigen Sie, dass $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$ gilt.
2. Rechnen Sie die Beziehung $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ nach:

   Hinweis: $F_{n+1}+F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right) =$

   $= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2.$

Beweis Nr. 2

Dieser Beweis verwendet die Theorie der Eigenwerte und Eigenvektoren. Bitte arbeiten Sie den Beweis durch: Die Definitionsgleichung $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ lässt sich auch schreiben in der Form $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Und in der Schreibweise der Linearen Algebra: $\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$. Setzt man dies fort, so folgt

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3 \cdot \begin{pmatrix} F_{n-2} \\ F_{n-3} \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bitte rechnen Sie nach:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_3 \\ F_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_4 \\ F_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_5 \\ F_4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_6 \\ F_5 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte λ von $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ erhält man über die charakteristische Gleichung $\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$.

Sie hat die beiden Lösungen $\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$ und $\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)$.

Die dazugehörigen Eigenvektoren $\vec{u}_1$ und $\vec{u}_2$ sind nur bis auf reelle Vielfache bestimmt. Sie folgen aus den Gleichungen $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$. Wenn man $u_2 = 1$ wählt, dann folgt $u_1 = \lambda$.

Zum Eigenwert $\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$ gehört dann der Eigenvektor $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und

zum Eigenwert $\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)$ gehört dann der Eigenvektor $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ lässt sich als Linearkombination der beiden Eigenvektoren schreiben:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann folgt das Ergebnis für F_{n+1} und für F_n:

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \left[\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \lambda_1^n \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} - \lambda_2^n \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \lambda_1^{n+1} \\ \lambda_1^n \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \lambda_2^{n+1} \\ \lambda_2^n \end{pmatrix}$$

Q.e.d.

Eine weitere interessante Darstellung mit Hilfe der Binomialkoeffizienten ist

$$\boxed{F_{n+1} = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n-k}{k} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}},$$

wobei die Gauß-Klammer $[x]$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x bedeutet. Z.B. $[1{,}7]=1$ und $[-1{,}7]=-2$.

Diese Binomialkoeffizienten sind nur dann ungleich Null, wenn $k \le n-k$. d.h. $k \le n/2$, so dass man auch schreiben kann: $F_{n+1} = \sum_{0 \le k \le n/2} \binom{n-k}{k}$.

6. Die Folge a_n ist für $n \in \mathbb{N}$ definiert durch $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n} = \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i}$.

   Prüfen Sie, ob $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{7}{12}$, $a_3 = \frac{37}{60}$, $a_4 = \frac{533}{840}$, $a_5 = \frac{1627}{2520}$, ...

   Zeigen Sie, dass die Folge a_n streng monoton steigt, indem Sie $a_{n+1} - a_n > 0$ nachweisen.

   Ergebnis: $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2(2n+1)(n+1)} > 0$.

   Folgerung: Da a_n streng monoton steigt, ist a_1 die größte untere Schranke.

   Zeigen Sie, dass die Folge a_n beschränkt ist mit $\frac{1}{2} \le a_n < 1$.

   Ergebnis: a_n ist nach oben beschränkt durch (Anzahl n der Summanden) • (größter Summand) < 1.

   Insgesamt folgt, dass die Folge a_n konvergent ist. Ohne Nachweis: Der Grenzwert ist $\ln 2$.

7. Die Folge a_n ist definiert durch $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ für $n \in \mathbb{N}$.

   Berechnen Sie einige Folgenglieder.

   Zeigen Sie durch **vollständige Induktion**, dass $a_n < 2$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

   ① Zeigen Sie: $a_1 < 2$

   ② Zeigen Sie: Wenn $a_n < 2$, dann $a_{n+1} < 2$.

   Zeigen Sie durch **vollständige Induktion**, dass a_n streng monoton steigt, d.h. $a_{n+1} > a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$:

   ① Zeigen Sie: $a_2 > a_1$

   ② Zeigen Sie: Wenn $a_{n+1} > a_n$, dann $a_{n+2} > a_{n+1}$.

   Folgerung: Die Folge a_n ist konvergent.

   Wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, dann folgt aus $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ für $n \to \infty$ die Beziehung $a = \sqrt{2+a}$. Bestimmen Sie daraus den Grenzwert a der Folge a_n.

8. Es sei $a_n = \sqrt[n]{n}$.

   Berechnen Sie einige Folgenglieder.

   Zeigen Sie: $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

   Hinweis: $\ln a_n = \frac{\ln n}{n}$. Bestimmen Sie $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$ mit Hilfe der Regeln von Marquis de L'Hôpital.

9. Bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2 - n + 1} - n\right)$ und $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2+2n+4}\right)$.

   Hinweis: Erweitern Sie den Bruch $\frac{\sqrt{n^2-n+1}-n}{1}$ mit Hilfe der 3. binomischen Formel, so dass der Zähler rational wird. Der erste Grenzwert ist $-1/2$, der zweite ist 1/2.

10. Für die Eulersche Zahl e gilt $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Begründen Sie jeweils:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+2} = e$. Hinweis: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$ abspalten.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = e^2$ Hinweis: Potenzgesetze

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n} = \sqrt{e}$. Hinweis: Substituieren Sie $m = 2n$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} = e^x$ für $x \ge 0$. Hinweis: Substituieren Sie $m = \frac{n}{x}$ für $x > 0$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{e}$. Hinweis: $1-\frac{1}{n} = \frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} = e^x$ für $x < 0$. Hinweis: $x = -|x|$, Substituieren Sie Sie $m = \frac{n}{|x|}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n} = 1$. Hinweis: 3. binomische Formel

$\lim\limits_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$. Hinweis: Substitution $m = -n$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+n\right)^{1/n} = 1$. Hinweis: Regel von Marquis de L'Hôpital

11. Beweisen Sie durch vollständige Induktion

a. $\sum\limits_{i=1}^{n} i\cdot(i+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

b. $\sum\limits_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$

c. $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{(i+3)(i+4)} = \frac{n}{4(n+4)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

d. $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{i^2}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

e. $\sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^i i^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

f. Zeigen Sie, dass der Induktionsschluss gelingt, obwohl die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ falsch ist:
$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+ \ ... \ +\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{5}{2}-\frac{1}{2^{n-1}}$. Richtig wäre $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+ \ ... \ +\frac{1}{2^{n-1}} = 2-\frac{1}{2^{n-1}}$

g. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $M(n)$ eine beliebige Menge mit n Menschen. Hier der Beweis, dass alle Menschen von $M(n)$ gleich alt sind.
Schritt 1: $P(1)$ enthält nur eine Person und alle Personen von $P(1)$ sind gleich alt.
Schritt 2: Zeige: Wenn in jeder Menge $P(n)$ von n Personen alle gleich alt sind, dann gilt dies auch für jede Menge $P(n+1)$ von $n+1$ Personen.
Zerlege die Menge $P(n+1)$ in zwei Teilmengen $\{1,2,...,n\}$ und $\{2,3,...,n+1\}$. Nach Voraussetzung sind die Menschen in beiden Teilmengen jeweils gleich alt. Durch die Überschneidung z.B. der Person „2“ folgt, alle $n+1$ Personen gleich alt sind. Q.e.d.
Wo liegt der Fehler?

h. n^3+5n ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 6 teilbar

i. $5^{2n}-3^{2n}$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 16 teilbar

j. $a^{2n+1} - a$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 6 teilbar. Dabei ist a eine beliebige natürliche Zahl.

k. $n^2 < 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 5$. Hinweis: Verwenden Sie $2n+1 < 2^n$ für $n \geq 3$; siehe Vorlesung

ℓ. $\prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i}\right) = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, d.h. für $n = 2,3,4,...$

m. $\prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

n. $\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n+i}\right) = 2 - \frac{1}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Reihen

0. a. Vereinfachen Sie die Summe $\sum_{i=2}^{n-1}\left(a_{i+1} - a_{i-1}\right)$ mit $a_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1... n$.

   b. Vereinfachen Sie $\sum_{i=1}^{n}(i+1)^2 - \sum_{i=1}^{n} i^2$.

   c. Bestimmen Sie $\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=0}^{j}(i+j)\cdot j$

   d. Bestimmen Sie $\sum_{j=0}^{2}\sum_{i=2}^{4}\frac{1}{i+j}$.

1. Bestimmen Sie die Summe aller ungeraden dreistelligen Zahlen.

2. Es sei $s_n = 11+13+15+\ldots$. Wie viele Zahlen muss man addieren, um mindestens 1.000.000 zu erhalten?

3. Verwandeln Sie die periodischen Zahlen $1,\overline{3}$, $0,2\overline{45}$, $0,\overline{1}_3$ und $1,\overline{3}_8$ in Brüche im Zehnersystem.

4. Bestimmen Sie $\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^i$, $\sum_{i=2}^{\infty}\left(\sqrt{a}\right)^i$ für $0 \leq a < 1$, $\sum_{i=1}^{\infty}\left(a^i + b^i\right)$ für $-1 < a, b < 1$.

5. Ein Unternehmen möchte bei Jahresbeginn einmalig über eine Stiftung den Betrag K zur Verfügung stellen. Dabei soll sofort und danach zu Beginn jeden weiteren Jahres der gleiche Betrag B zur Verfügung stehen. Das Geld werde auf einer Bank mit konstant p Prozent jährlich verzinst. Bestimmen Sie den Stiftungsbetrag K so, dass der Betrag B über eine sehr lange Zeit jährlich zur Verfügung steht.
   Bestimmen Sie K, wenn $B = 1000€$ und $p\% = 2\%$ bzw. $p\% = 5\%$ beträgt.
   Wie verhält sich K für $p \to 0$ bzw. für $p \to \infty$?

6. Ein Darlehen über $b = 60.000€$ wird jährlich mit $p = 8$ Prozent verzinst. Am Ende jedes Jahres werden $r = 7.000€$ zurückbezahlt.
   a. Bestimmen Sie die Formel zur Berechnung der Restschuld am Ende des n-ten Jahres unmittelbar nach Bezahlung von r. Wie groß ist die Restschuld nach 12 Jahren?
   Hinweis: Wenn S_n die Restschuld am Ende des n-ten Jahres ist, dann folgt mit $q = 1 + p/100$:
   $S_1 = b\cdot q - r$, $S_2 = S_1\cdot q - r = b\cdot q^2 - r\cdot q - r$, $S_3 = S_2\cdot q - r = b\cdot q^3 - r\cdot q^2 - r\cdot q - r$,
   $S_n = b\cdot q^n - r\cdot q^{n-1} - \ldots - r\cdot q^2 - r\cdot q - r = b\cdot q^n - r\cdot\frac{q^n - 1}{q-1}$.
   Speziell: $S_{12} = 18.250,32€$
   b. Nach wie vielen Jahren ist die Schuld vollständig getilgt? ($n = \frac{\ln\frac{r}{r+b-b\cdot q}}{\ln q} \approx 15,0395$)

c. Bei welcher Rate r wäre die Schuld nach 10 Jahren getilgt? ($r=\frac{b\cdot q^n\cdot(q-1)}{q^n-1}\approx 8941{,}77€$)

7. Zwei Kinder erhalten ein Vermögen von $V=60.000€$, das zu $p=4\%$ verzinst wird. Das Geld liegt insgesamt 6 Jahre auf der Bank.
   a. Welcher Betrag bleibt für jedes Kind am Ende des 6. Jahres noch übrig, wenn zu Beginn jedes Jahres 10.000€ abgehoben werden? (Ergebnis: 3.468.10€)
   b. Welcher Betrag bleibt für jedes Kind am Ende des 6. Jahres noch übrig, wenn am Ende jedes Jahres 10.000€ abgehoben werden? (Ergebnis: 4.794,69€)

8. Jemand spart 20 Jahre lang zu Beginn jedes Jahres 600€. Der Zinssatz beträgt 4%. Wie oft kann er nach Ablauf der 20 Jahre zu Beginn jedes Jahres eine Rente von R=2.400€ bekommen? Welcher Restbetrag bleibt noch übrig? (Lösung: Angesparte Summe nach 20 Jahren 18.581,52€, 9 Auszahlungen)

9. Bestimmen Sie $\left(2a^3b^2+3a^2b\right)^4$ und $\left(3a^2b-2a^3b^5\right)^3$ nach dem binomischen Lehrsatz.

10. Bestimmen Sie die ersten drei Summanden der Maclaurin-Reihe von $f(x)=\tan x$.

    Hinweis: $f'(x)=1+\tan^2 x$, $f''(x)=2\cdot\tan x+2\cdot\tan^3 x$, $f'''(x)=2+8\cdot\tan^2 x+6\cdot\tan^4 x$,

    $f^{(4)}(x)=16\cdot\tan x+40\cdot\tan^3 x+24\cdot\tan^5 x$, $f^{(5)}(x)=16+136\cdot\tan^2 x+240\cdot\tan^4 x+120\cdot\tan^6 x$.

    Ergebnis: $f(x)=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\ldots$.

11. Bestimmen Sie einige Summanden der Taylor-Reihe von $f(x)=\sqrt{x}$ um die Stelle $x=1$.

    Ergebnis: $f(x)=1+\frac{1}{2}\cdot(x-1)-\frac{1}{8}\cdot(x-1)^2+\frac{1}{16}\cdot(x-1)^3-\frac{5}{128}\cdot(x-1)^4+\frac{7}{256}\cdot(x-1)^5-\frac{21}{1024}\cdot(x-1)^6+-\ldots$

    Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit der früher gefundenen Reihe $\sqrt{1+x}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/2}{k}\cdot x^k$ für $|x|\le 1$.

    Wie kann man folglich die Koeffizienten der Taylor-Reihe allgemein angeben? Was folgt für den Konvergenzradius der Reihe?

12. Bestimmen Sie einige Summanden und den Konvergenzradius r
    a. der Maclaurin-Reihe von $f(x)=\frac{1}{(x+1)^{1/3}}$

       Ergebnis: $f(x)=1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2-\frac{14}{81}x^3+\frac{35}{243}x^4-\frac{91}{729}x^5+\frac{728}{6561}x^6-+\ldots$.
    b. der Taylor-Reihe von $f(x)=\frac{1}{x^{1/3}}$ um die Stelle $x=1$.

       Ergebnis: $f(x)=1-\frac{1}{3}(x-1)+\frac{2}{9}(x-1)^2-\frac{14}{81}(x-1)^3+\frac{35}{243}(x-1)^4-\frac{91}{729}(x-1)^5+\frac{728}{6561}(x-1)^6-+\ldots$

13. Bestimmen Sie die Maclaurin-Reihe von $f(x)=\ln(1+x)$.

    Ergebnis: $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot x^n$ mit dem Konvergenzradius $r=1$.

14. Bestimmen Sie die Maclaurin-Reihe von $f(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

    Hinweis: $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$. Ergebnis: $2\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\cdot x^{2n+1}$ mit $r=1$.

15. Es gilt $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ und $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ und $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ für alle $x\in\mathbb{R}$.

    Leiten Sie daraus die Reihen für $\sinh x$ und $\cosh x$ her.

Ergebnis: $\sinh x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cosh x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

16. Bestimmen Sie die Taylor-Reihe von $f(x) = (x \cdot \ln x)^2$ um die Stelle $x = 1$ bis zum Grad 2.
    Bestimmen Sie den Unterschied von $f(x)$ und dieser Näherung an der Stelle $x = 1{,}1$.

17. Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist die Ableitung von $f(x) = \arctan x$ gleich $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Umgekehrt gilt dann $\arctan x = \int\limits_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$, da $\arctan 0 = 0$. Von der geometrischen Reihe ist bekannt, dass für $|q| < 1$ $\dfrac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots$ gilt. Setzt man $q = -t^2$ für $|t| < 1$, wendet die Reihenentwicklung auf $\dfrac{1}{1+t^2}$ an, so erhält man eine Reihe für $\arctan x$ im Bereich $|x| < 1$.

    Ergebnis: Für $|x| < 1$ gilt $\arctan x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + - \ldots$.

    Ohne Herleitung: Die Reihenentwicklung gilt sogar für $|x| \le 1$:

    $\arctan 1 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \ldots = \frac{\pi}{4}$.

18. Für welche Werte von x konvergieren die beiden Reihen?

    a. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^n}{n!}(2x-1)^n$ b. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(3n)!}{(n!)^3} x^{3n}$

19. Stellen Sie die gegebenen komplexen Zahlen in Polarform (trigonometrische Form und Exponentialform) dar.
    $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -1$, $z_4 = -i$, $z_5 = 2+3i$, $z_6 = -2+3i$, $z_7 = -2-3i$, $z_8 = 2-3i$

20. Stellen Sie die gegebenen komplexen Zahlen in Normalform dar.
    $z_1 = 2 \cdot e^i$, $z_2 = 5 \cdot e^{-2i}$, $z_3 = 3 \cdot (\cos 5 + i \cdot \sin 5)$, $z_4 = 2 \cdot (\cos 100° + i \cdot \sin 100°)$, $z_5 = 2 \cdot e^{-8\pi i}$

21. Es sei $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 4 + 2i$ und $z_3 = -4i$. Berechnen Sie $w_1 = z_1 + z_2$, $w_2 = z_1 - z_2$, $w_3 = z_1 \cdot z_2$.
    $w_4 = \frac{z_1}{z_2}$, $w_5 = \frac{z_1}{z_3}$, $w_6 = \frac{z_1}{z_2 \cdot z_3}$, $w_7 = \frac{z_1 - \overline{z_1}}{z_1 + \overline{z_1}}$, wobei $\overline{z}$ konjugiert komplex zu z ist.

22. Bestimmen Sie i^i. Verwenden Sie $i = e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}$.

23. Bestimmen Sie alle drei Lösungen der Gleichung $z^3 = i$.
    a. Verwenden Sie den Ansatz $z = a + b\,i$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.
    b. Verwenden Sie den Ansatz $z^3 = i = e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} = e^{i \cdot (\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi)}$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Fundamentalsatz der Algebra: Es sei $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cdot z^k = a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot z + a_0$ mit $a_k \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$ ein Polynom vom Grad n mit $n \ge 1$. Dann lässt sich $P(z)$ als **Produkt von n Linearfaktoren** darstellen: $\boxed{P(z) = a_n \cdot \prod\limits_{i=1}^{n} (z - z_i)}$. Folglich hat jedes Polynom vom Grad n mit $n \ge 1$ genau n Nullstellen, wobei mehrfache Nullstelen entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt werden. Man sagt auch: Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen sei algebraisch abgeschlossen.
Der erste Beweis des Satzes wurde von Carl Friedrich Gauß im Jahr 1799 in seiner Dissertation geführt.

24. Bestimmen Sie alle acht Lösungen der Gleichung $z^8 = 1$ mit Hilfe des Ansatzes $z^8 = 1 = e^{k \cdot 2\pi i}$ mit $k \in \mathbb{Z}$.