Theoretische Informatik I

Übungsblatt 6: Aussagenlogik

Duale Hochschule Baden-Württemberg – Lörrach
Studiengang Informatik – TIF21

Π, π – Pi   Ρ, ρ – Rho   Σ, σ, ς – Sigma

1. Es sei $\Sigma := \{A, B, C\}$. Wir betrachten die Formel

$$F := ((A \vee (A \wedge C)) \wedge (B \vee \neg C)).$$

(a) Geben Sie $Teilf(F)$ an.

Lösung:
Es ist

$$\begin{aligned} Teilf(F) = \{&((A \vee (A \wedge C)) \wedge (B \vee \neg C)) \\ &(A \vee (A \wedge C)), (B \vee \neg C) \\ &A, (A \wedge C), B, \neg C \\ &C\} \end{aligned}$$

(b) Es sei

$$I_1(A) := \mathfrak{W} \qquad I_1(B) := \mathfrak{W} \qquad I_1(C) := \mathfrak{F}$$

Geben Sie $val_{I_1}(\mathscr{F})$ an für jedes $\mathscr{F} \in Teilf(F)$.

Lösung:
Es ist

$$\begin{aligned} val_{I_1}(A) &= \mathfrak{W} \\ val_{I_1}(B) &= \mathfrak{W} \\ val_{I_1}(C) &= \mathfrak{F} \\ val_{I_1}(\neg C) &= \mathfrak{W} \\ val_{I_1}((A \wedge C)) &= \mathfrak{F} \\ val_{I_1}((B \vee \neg C)) &= \mathfrak{W} \\ val_{I_1}((A \vee (A \wedge C))) &= \mathfrak{W} \\ val_{I_1}(((A \vee (A \wedge C)) \wedge (B \vee \neg C))) &= \mathfrak{W} \end{aligned}$$

(c) Es sei

$$I_2(A) := \mathfrak{F} \qquad I_2(B) := \mathfrak{W} \qquad I_2(C) := \mathfrak{F}$$

Geben Sie $val_{I_2}(\mathscr{F})$ an für jedes $\mathscr{F} \in Teilf(F)$.

Lösung:
Es ist

$$\begin{aligned}
val_{I_2}(A) &= \mathfrak{F} \\
val_{I_2}(B) &= \mathfrak{W} \\
val_{I_2}(C) &= \mathfrak{F} \\
val_{I_2}(\neg C) &= \mathfrak{W} \\
val_{I_2}((A \wedge C)) &= \mathfrak{F} \\
val_{I_2}((B \vee \neg C)) &= \mathfrak{W} \\
val_{I_2}((A \vee (A \wedge C))) &= \mathfrak{F} \\
val_{I_2}(((A \vee (A \wedge C)) \wedge (B \vee \neg C))) &= \mathfrak{F}
\end{aligned}$$

(d) Geben Sie mit Begründung an, ob F erfüllbar ist.

Lösung:
Es gilt

$$val_{I_1}(((A \vee (A \wedge C)) \wedge (B \vee \neg C))) = \mathfrak{W}$$

damit ist I_1 ein Modell für F, also ist F erfüllbar.

(e) Geben Sie mit Begründung an, ob F allgemeingültig ist.

Lösung:
Es gilt

$$val_{I_2}(((A \vee (A \wedge C)) \wedge (B \vee \neg C))) = \mathfrak{F}$$

damit ist I_2 kein Modell für F, also ist F nicht allgemeingültig.

2. Es sei $\Sigma := \{A, B, C\}$. Wir betrachten die Formel

$$F := ((A \wedge B) \wedge (C \vee \neg B)).$$

(a) Geben Sie eine Interpretation an, die ein Modell für F ist.

Lösung:
Die Interpretation $I_1(A) := \mathfrak{W}, I_1(B) := \mathfrak{W}, I_1(C) := \mathfrak{W}$ liefert

$$val_{I_1}(F) = \mathfrak{W},$$

damit ist I_1 ein Modell für F.

(b) Geben Sie eine Interpretation an, die kein Modell für F ist.

Lösung:
Die Interpretation $I_2(A) := \mathfrak{W}, I_2(B) := \mathfrak{F}, I_2(C) := \mathfrak{F}$ liefert

$$val_{I_2}(F) = \mathfrak{F},$$

damit ist I_2 kein Modell für F.

3. Es sei $\Sigma := \{A, B\}$. Geben Sie mit Begründung an, ob folgende Formeln erfüllbar sind und ob sie allgemeingültig sind.

   (a) $F_1 := (A \vee B)$

   Lösung:
   Die Interpretation $I_1(A) := \mathfrak{W}, I_1(B) := \mathfrak{W}$ liefert

   $$val_{I_1}(F_1) = \mathfrak{W},$$

   damit ist I_1 ein Modell für F_1, also ist F_1 erfüllbar.
   Die Interpretation $I_2(A) := \mathfrak{F}, I_2(B) := \mathfrak{F}$ liefert

   $$val_{I_2}(F_1) = \mathfrak{F},$$

   damit ist I_2 kein Modell für F_1, also ist F_1 nicht allgemeingültig.

   (b) $F_2 := ((A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow B))$

   Lösung:
   Die Interpretation $I_1(A) := \mathfrak{W}, I_1(B) := \mathfrak{W}$ liefert

   $$val_{I_1}(F_2) = \mathfrak{W},$$

   damit ist I_1 ein Modell für F_2, also ist F_2 erfüllbar.
   Die Interpretation $I_2(A) := \mathfrak{W}, I_2(B) := \mathfrak{F}$ liefert

   $$val_{I_2}(F_2) = \mathfrak{F},$$

   damit ist I_2 kein Modell für F_2, also ist F_2 nicht allgemeingültig.

   (c) $F_3 := ((A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B)$

   Lösung:
   Es ist

   $$\begin{aligned}
   F_3 &\equiv (\neg(A \wedge (\neg A \vee B)) \vee B) \\
   &\equiv ((\neg A \vee \neg(\neg A \vee B)) \vee B) \\
   &\equiv ((\neg A \vee (\neg\neg A \wedge \neg B)) \vee B) \\
   &\equiv ((\neg A \vee (A \wedge \neg B)) \vee B) \\
   &\equiv (((\neg A \vee A) \wedge (\neg A \vee \neg B)) \vee B) \\
   &\equiv ((1 \wedge (\neg A \vee \neg B)) \vee B) \\
   &\equiv ((\neg A \vee \neg B) \vee B) \\
   &\equiv (\neg A \vee (\neg B \vee B)) \\
   &\equiv (\neg A \vee 1) \\
   &\equiv 1
   \end{aligned}$$

   also ist F_3 allgemeingültig und damit auch erfüllbar.