Theoretische Informatik I

Übungsblatt 3: Relationen

Duale Hochschule Baden-Württemberg – Lörrach
Studiengang Informatik – TIF21

H, η – Eta | Θ, θ – Theta | I, ι – Jota

1. In dieser Aufgabe sei

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \exists z \in \mathbb{Z} : x - y = z \cdot 15\}.$$

(a) Geben Sie 3 Elemente aus $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ an, die in R enthalten sind.

Lösung:
Es gilt $(54, 54) \in R$, $(-3, -198) \in R$, $(-198, 12) \in R$.

(b) Geben Sie 3 Elemente aus $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ an, die nicht in R enthalten sind.

Lösung:
Es gilt $(53, 54) \notin R$, $(3, -198) \notin R$, $(2, 18) \notin R$.

(c) Zeigen oder widerlegen Sie: R ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$.

Lösung:
Wir wollen zeigen, dass R eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ ist.
Dazu müssen wir die Reflexivität, Symmetrie und Transitivität zeigen.

- Wir wollen zeigen, dass R reflexiv ist.
  Also müssen wir zeigen, dass für alle $\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}$ gilt: $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}) \in R$.

  Sei $a \in \mathbb{Z}$.
  Wir müssen zeigen: $(a, a) \in R$.
  Also zu zeigen: $\exists b \in \mathbb{Z}$ mit $a - a = b \cdot 15$.
  Es gilt $0 \in \mathbb{Z}$ und $a - a = 0 \cdot 15$, also $\exists b \in \mathbb{Z}$ mit $a - a = b \cdot 15$, nämlich $b = 0$.
  Also gilt $(a, a) \in R$.

- Wir wollen zeigen, dass R symmetrisch ist.
  Also müssen wir zeigen, dass für alle $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ gilt:
  aus $(m_1, m_2) \in R$ folgt, dass $(m_2, m_1) \in R$.

  Seien $a, b \in \mathbb{Z}$.
  Wir müssen zeigen: aus $(a, b) \in R$ folgt, dass $(b, a) \in R$.
  Es gelte $(a, b) \in R$.
  Wir müssen zeigen: $(b, a) \in R$.

  Aus $(a, b) \in R$ folgt $\exists c_1 \in \mathbb{Z}$ mit $a - b = c_1 \cdot 15$ (1).
  Wir müssen zeigen: $\exists c_2 \in \mathbb{Z}$ mit $b - a = c_2 \cdot 15$.

  Es gilt $b - a = -(a - b) \overset{(1)}{=} -c_1 \cdot 15$,
  also $b - a = -c_1 \cdot 15$.
  Da $c_1 \in \mathbb{Z}$ gilt, gilt außerdem $-c_1 \in \mathbb{Z}$.
  Also $\exists c_2 \in \mathbb{Z}$ mit $b - a = c_2 \cdot 15$, nämlich $c_2 = -c_1$.
  Also gilt $(b, a) \in R$.

- Wir wollen zeigen, dass R transitiv ist.
  Also müssen wir zeigen, dass für alle $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}$ gilt:
  aus $(m_1, m_2) \in R$ und $(m_2, m_3) \in R$ folgt, dass $(m_1, m_3) \in R$.

  Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$.
  Wir müssen zeigen: aus $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$ folgt, dass $(a, c) \in R$.
  Es gelte $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$.
  Wir müssen zeigen: $(a, c) \in R$.

  Aus $(a, b) \in R$ folgt $\exists d_1 \in \mathbb{Z}$ mit $a - b = d_1 \cdot 15$ (1).
  Aus $(b, c) \in R$ folgt $\exists d_2 \in \mathbb{Z}$ mit $b - c = d_2 \cdot 15$ (2).
  Wir müssen zeigen: $\exists d_3 \in \mathbb{Z}$ mit $a - c = d_3 \cdot 15$.
  Setzen wir ein, so erhalten wir
  $a - c = (a - b) + (b - c) \overset{(1)}{=} d_1 \cdot 15 + (b - c) \overset{(2)}{=} d_1 \cdot 15 + d_2 \cdot 15 = (d_1 + d_2) \cdot 15$,
  also $a - c = (d_1 + d_2) \cdot 15$.
  Da $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}$ gilt, gilt außerdem $d_1 + d_2 \in \mathbb{Z}$.
  Also $\exists d_3 \in \mathbb{Z}$ mit $a - c = d_3 \cdot 15$, nämlich $d_3 = d_1 + d_2$.
  Also gilt $(a, c) \in R$.

(d) Zeigen oder widerlegen Sie: Die Addition auf $\mathbb{Z}/R$ ist vertreterunabhängig.
Das heißt, dass für alle $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ gelten muss:
aus $(m_1, m_2) \in R$ und $(n_1, n_2) \in R$ folgt, dass $(m_1 + n_1, m_2 + n_2) \in R$.

Lösung:
Seien $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$.
Wir müssen zeigen: aus $(a_1, a_2) \in R$ und $(b_1, b_2) \in R$ folgt, dass $(a_1 + b_1, a_2 + b_2) \in R$.
Es gelte $(a_1, a_2) \in R$ und $(b_1, b_2) \in R$.
Wir müssen zeigen: $(a_1 + b_1, a_2 + b_2) \in R$.

Aus $(a_1, a_2) \in R$ folgt $\exists c_1 \in \mathbb{Z}$ mit $a_1 - a_2 = c_1 \cdot 15$ (1).
Aus $(b_1, b_2) \in R$ folgt $\exists c_2 \in \mathbb{Z}$ mit $b_1 - b_2 = c_2 \cdot 15$ (2).
Wir müssen zeigen: $\exists c_3 \in \mathbb{Z}$ mit $(a_1 + b_1) - (a_2 + b_2) = c_3 \cdot 15$.
Setzen wir ein, so erhalten wir
$(a_1 + b_1) - (a_2 + b_2) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) \overset{(1)}{=} c_1 \cdot 15 + (b_1 - b_2) \overset{(2)}{=} c_1 \cdot 15 + c_2 \cdot 15 =$
$(c_1 + c_2) \cdot 15$,
also $(a_1 + b_1) - (a_2 + b_2) = (c_1 + c_2) \cdot 15$.
Da $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$ gilt, gilt außerdem $c_1 + c_2 \in \mathbb{Z}$.
Also $\exists c_3 \in \mathbb{Z}$ mit $(a_1 + b_1) - (a_2 + b_2) = c_3 \cdot 15$, nämlich $c_3 = c_1 + c_2$.
Also gilt $(a_1 + b_1, a_2 + b_2) \in R$.

(e) Zeigen oder widerlegen Sie: Die Subtraktion auf $\mathbb{Z}/R$ ist vertreterunabhängig.
Das heißt, dass für alle $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ gelten muss:
aus $(m_1, m_2) \in R$ und $(n_1, n_2) \in R$ folgt, dass $(m_1 - n_1, m_2 - n_2) \in R$.

Lösung:
Seien $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$.
Wir müssen zeigen: aus $(a_1, a_2) \in R$ und $(b_1, b_2) \in R$ folgt, dass $(a_1 - b_1, a_2 - b_2) \in R$.
Es gelte $(a_1, a_2) \in R$ und $(b_1, b_2) \in R$.
Wir müssen zeigen: $(a_1 - b_1, a_2 - b_2) \in R$.
Aus $(a_1, a_2) \in R$ folgt $\exists c_1 \in \mathbb{Z}$ mit $a_1 - a_2 = c_1 \cdot 15$ (1).
Aus $(b_1, b_2) \in R$ folgt $\exists c_2 \in \mathbb{Z}$ mit $b_1 - b_2 = c_2 \cdot 15$ (2).
Wir müssen zeigen: $\exists c_3 \in \mathbb{Z}$ mit $(a_1 - b_1) - (a_2 - b_2) = c_3 \cdot 15$.
Setzen wir ein, so erhalten wir
$(a_1 - b_1) - (a_2 - b_2) = (a_1 - a_2) - (b_1 - b_2) \overset{(1)}{=} c_1 \cdot 15 - (b_1 - b_2) \overset{(2)}{=} c_1 \cdot 15 - c_2 \cdot 15 = (c_1 - c_2) \cdot 15$,
also $(a_1 - b_1) - (a_2 - b_2) = (c_1 - c_2) \cdot 15$.
Da $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$ gilt, gilt außerdem $c_1 - c_2 \in \mathbb{Z}$.
Also $\exists c_3 \in \mathbb{Z}$ mit $(a_1 - b_1) - (a_2 - b_2) = c_3 \cdot 15$, nämlich $c_3 = c_1 - c_2$.
Also gilt $(a_1 - b_1, a_2 - b_2) \in R$.

(f) Zeigen oder widerlegen Sie: R ist eine Halbordnung auf $\mathbb{Z}$.

Lösung:
Wäre R eine Halbordnung, müsste R reflexiv, antisymmetisch und transitiv sein.
Wir wollen widerlegen, dass R antisymmetrisch ist.
Also müssen wir zeigen, dass nicht für alle $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ gilt:
aus $(m_1, m_2) \in R$ und $(m_2, m_1) \in R$ folgt, dass $m_1 = m_2$.

- Es gilt $1 - 16 = -15 = -1 \cdot 15$, außerdem ist $-1 \in \mathbb{Z}$.
  Also $\exists a_1 \in \mathbb{Z}$ mit $1 - 16 = a_1 \cdot 15$, nämlich $a_1 = -1$.
  Also gilt $(1, 16) \in R$.
- Und es gilt $16 - 1 = 15 = 1 \cdot 15$, außerdem ist $1 \in \mathbb{Z}$.
  Also $\exists a_2 \in \mathbb{Z}$ mit $16 - 1 = a_2 \cdot 15$, nämlich $a_2 = 1$.
  Also gilt $(16, 1) \in R$.
- Aber offenbar gilt $1 \neq 16$.

Also gilt $(1, 16) \in R$ und $(16, 1) \in R$, aber $1 \neq 16$.
Damit haben wir gezeigt, dass nicht für alle $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ gilt:
aus $(m_1, m_2) \in R$ und $(m_2, m_1) \in R$ folgt, dass $m_1 = m_2$.
Damit ist R nicht antisymmetrisch.
Also ist R keine Halbordnung.