1 Lineare Gleichungssysteme

1.1 Vorbemerkung.

Was ist eine *Gleichung*? Zunächst einmal eine wahre Aussage über die Gleichheit zweier Terme, einen links des Gleichheitszeichens und einen rechts davon. $2^2 = 4$ ist also eine Gleichung. Interessant wird das erst, wenn eine der beiden Seiten oder beide *Variablen* enthalten, auch *Unbekannte* genannt. Dann wird eine Gleichung implizit zu einer Aufgabenstellung, die da lautet: finde alle Werte für die auftretenden Unbekannten, die eingesetzt zu einer wahren Gleichheitsaussage führen. Die Menge aller Werte, die dies leisten, heißt *Lösungsmenge* der Gleichung.

Wenn mehrere Gleichungen angegeben sind, besteht die Aufgabe darin, alle Werte für die auftretenden Variablen so zu finden, dass *gleichzeitig alle* angegebenen Gleichungen erfüllt sind, das heißt bei Einsetzen der Werte zu wahren Gleichheitsaussagen führen. In diesem Fall spricht man von einem *Gleichungssystem.* Wir befassen uns in diesem Kapitel mit Gleichungssystemen, aber nicht mir irgendwelchen, sondern entsprechend unserem Generalthema der Linearität ausschließlich mit *Linearen Gleichungssystemen.* Diese haben die folgende Gestalt: gegeben eine nicht notwendig quadratische Matrix $K \in M(m \times n, \mathbb{R})$ und ein Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Eine Beziehung $K\mathbf{x} = \mathbf{b}$ heißt "Lineares Gleichungssystem" für die n Unbekannten $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\mathsf{T}$. Die hierin eingebaute Aufgabe lautet dementsprechend: finde alle $\mathbf{x}$, die, wenn sie in $K\mathbf{x} = \mathbf{b}$ eingesetzt werden, zu einer wahren Gleichheitsaussage führen. Die Menge aller dieser $\mathbf{x}$ bildet, wie gesagt, die Lösungsmenge des Systems, abgekürzt als $\text{lös}\,(K, \mathbf{b})$ oder ähnlich[1].

Interessanterweise wird dieser Gegenstand insbesondere aus Sicht der Numerik nach wie vor beforscht. Wir werden das Problem aber nicht auf breitester Front in aller Allgemeinheit angehen – das wäre auch relativ unergiebig für die Lineare Algebra als solcher –, sondern uns auf die in der Praxis und für das Grundverständnis wichtigsten Konzepte fokussieren.

[1] Weil es sich ja um eine Urbildmenge handelt, nämlich um diejenigen $\mathbf{x}$, die durch K in den Vektor $\mathbf{b}$ abgebildet werden, könnte man durchaus auch $K^{-1}(\{\mathbf{b}\})$ dafür schreiben. Wir hatten irgendwo aber schon einmal bemerkt, dass dies eine gefährliche Notationsweise sein kann zumindest für den Unaufmerksamen, insbesondere wenn man nicht pedantisch $K^{-1}(\{\mathbf{b}\})$ schreibt, sondern leichtfertig $K^{-1}(\mathbf{b})$. Denn es ist ja definitiv *nicht* damit gemeint, die Inverse K^{-1} auf $\mathbf{b}$ anzuwenden – im Allgemeinen wird K^{-1} gar nicht existieren, ja K nicht einmal quadratisch sein.

1.2 Rang, Zeilenrang und Spaltenrang.

Wir beginnen mit dem Begriffen, die eigentlich schon die ganze Zeit im Hintergrund eine Rolle gespielt haben und denen nur noch eine ausdrückliche Bezeichnung fehlte. Die sollen sie jetzt bekommen:

> Für eine Matrix $K \in M(m \times n, \mathbb{R})$ mit zugehöriger linearer Abbildung $K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt $\operatorname{rg} K := \dim \operatorname{Bild} K$ **Rang** der Matrix. Die maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten von K heißt **Spaltenrang** von K , die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen von K **Zeilenrang** von K.

Wir können uns rasch überlegen, dass der Spaltenrang von K gleich dem Rang von K ist. Denn "Die Spalten / Sind Bilder / Der Einheits / Vektoren", alle Vektoren im *Definitionsraum* sind Linearkombinationen der Einheitsvektoren, alle Vektoren im *Bild* von K werden also erreicht, indem alle Linearkombinationen der Matrixspalten gebildet werden. Mit anderen Worten, die Maximalzahl der linear unabhängigen Spalten von K bildet ein Erzeugendensystem von $\operatorname{Bild} K$ und damit eine Basis dieses Unterraums.

Darüberhinaus gilt aber auch noch, dass der Zeilenrang von K gleich dem Rang von K ist, die Rangbegriffe also alle drei ein und dasselbe bedeuten[2]. Den Nachweis, dass auch der Zeilenrang gleich dem Rang ist, kann man auf verschiedene Weise führen, wobei das genaue Aufschreiben meistens umständlicher ist als die eigentliche Idee dahinter; wir verzichten hier darauf und verweisen auf die Form, die eine Matrix durch Anwenden der noch zu besprechenden *Elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen* erhält und der man das in Frage stehende Faktum dann direkt ansehen kann. Womit wir beim Thema wären:

[2] Manchmal findet man noch den Begriff des *Defekts*, der zum Rangbegriff quasi komplementär ist: der Defekt einer Matrix bezeichnet die maximale Anzahl von Spalten, die man aus der Matrix sozusagen *wegstreichen* kann, ohne das Bild der zugehörigen linearen Abbildung zu verkleinern. Spaltenrang plus Defekt zusammen ergeben mithin die Spaltenzahl der Matrix. Die Dimensionsformel lehrt uns, dass der Defekt nichts anderes ist als die Dimension des Kerns der linearen Abbildung.

1.3 Elementare Zeilenumformungen.

Elementare Zeilenumformungen, kurz EZU genannt, haben wir im Kapitel über Determinanten bereits vorweggenommen. Hier kommt dieses Thema noch einmal ausführlicher und als Bestandteil einer Rechenstrategie, die als "GAUSSsches Eliminationsverfahren" bekannt ist und die wir besprechen werden als Methode der Wahl zum expliziten Lösen Linearer Gleichungssysteme. Die Idee der EZU ist, aus einer gegebenen Matrix K durch Anwenden bestimmter Umformungen, nämlich durch

(a) *Vertauschen* zweier Zeilen

(b) *Multiplizieren* einer Zeile mit einem von 0 verschiedenen Skalar

(c) *Addieren* eines beliebigen *Vielfachen* einer Zeile zu einer anderen

eine *andere* Matrix K' zu machen; der entscheidende Punkt ist, welche Eigenschaften in K' gegenüber K erhalten bleiben: EZU ändern den Rang einer Matrix nicht! Das ergibt sich einfach aus folgender Argumentation: EZU ändern offensichtlich nicht die Lineare Hülle, die von den Zeilen der Matrix gebildet wird – der Zeilenrang der Matrix ist aber definitionsgemäß nichts anderes als die Dimension dieser Linearen Hülle. Weil Zeilenrang, Spaltenrang und Rang untereinander gleich sind, folgt die Behauptung.

Die Anwendung einer Sequenz von s Elementaren Zeilenumformungen auf eine Matrix K erzeugt somit eine zugehörige Sequenz $K \to K^{(1)} \to K^{(2)} \to \cdots \to K^{(s)}$, wobei die einzelnen $K^{(i)}$ möglicherweise sehr deutlich verschieden aussehen können, aber jedenfalls alle den gleichen Rang haben wie K. Nun ist es so, dass man Matrizen, die eine Form haben wie

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * & \dots & \\ 0 & a_{21} & * & * & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & \vdots \\ & & \dots & \mathbf{0} & \dots & \end{pmatrix}$$

(worin der Stern $*$ einfach nur andeuten soll, dass in diesen Einträgen der r ersten Zeilen *irgendetwas* steht) ihren Zeilenrang unmittelbar ablesen kann, er ist nämlich gleich r. Wir können also die Rangbestimmung einer Matrix durchführen, indem wir Elementare Zeilenumformungen und gegebenenfalls Elementare Spaltenumformungen (die genau analog definiert sind) auf sie anwenden, um sie in die gezeigte Form zu bringen. Wie das in der Praxis aussieht, schauen wir uns im nächsten Abschnitt an – man ist besser beraten, das an einem Beispiel auszuprobieren, als die allgemeine Vorgehensweise an Matrizen voller K^*_{2,k_2+1}, Sternchen und Nullen verstehen zu wollen.

1.4 Lineare Gleichungssysteme.

Was ein Lineares Gleichungssystem ist, haben wir in der Vorbemerkung bereits erläutert. Wir beschränken uns hier auf den Fall, dass es weder *unter*- noch *überbestimmt* ist, dass es also genau so viele Bestimmungsgleichungen gibt wie zu bestimmende Variable[3]:

$$\begin{array}{cccc} a_{11}x_1+ & \cdots & +a_{1n}x_n & =b_1 \\ a_{21}x_1+ & \cdots & +a_{2n}x_n & =b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1+ & \cdots & +a_{nn}x_n & =b_n \end{array}$$

Aufgabe ist, wie gesagt, die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ so zu bestimmen, dass bei gegebenen a_{ij} und b_i alle diese Gleichungen simultan erfüllt sind. Diese Aufgabe können wir äquivalent auch so formulieren, dass

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

sein soll, wobei die $n \times n$-Matrix A natürlich gerade die n^2 Einträge a_{ij} hat, der Vektor $\mathbf{x}$ die Komponenten $x_1, \ldots, x_n$ und der Vektor $\mathbf{b}$ die Komponenten $b_1, \ldots, b_n$. Die *Lösungsmenge* dieses Gleichungssystems ist

$$\text{lös}\,(A, \mathbf{b}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}\ ,$$

was also eine *Menge* n-Dimensionaler Vektoren ist.— Übrigens darf gerne auch $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ sein, das Gleichungssystem heißt dann **homogen**.

Das Gleichungssystem heißt *lösbar*, wenn $\text{lös}\,(A, \mathbf{b}) \neq \emptyset$ ist (naja, keine wirklich überra-

[3] Der im Folgenden erläuterte GAUSSsche Eliminationsalgorithmus lässt sich ohne Änderung auf die anderen Fälle übertragen.

schende Aussage...). Es könnte zu gegebenen A und $\mathbf{b}$ aber durchaus mehrere Lösungen geben, das heißt eine Lösung – wenn es sie gibt – müsste nicht notwendig eindeutig sein. Die Situation ist aber relativ unkompliziert: sind $\mathbf{x_1}$ und $\mathbf{x_2}$ zwei *verschiedene* Lösungen von $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dann gilt $A(\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}) = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$, oder anders formuliert, $\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2} \in \operatorname{Kern} A$ – der Kern von A ist in diesem Falle nichttrivial, denn $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ sollten ja verschieden sein. Für eine gegebene Lösung $\mathbf{x}$ ist umgekehrt $\mathbf{x} + \mathbf{v}$ eine davon *verschiedene* Lösung für jedes *nichttriviale*, also von $\mathbf{0}$ verschiedene Element $\mathbf{v} \in \operatorname{Kern} A$, denn $A(\mathbf{x} + \mathbf{v}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{v} = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}$. Die Fragen nach der Existenz und nach der Eindeutigkeit unseres Gleichungssystems führt damit auf die uns bekannte Dimensionsformel $\dim(\operatorname{Kern} A) + \dim(\operatorname{Bild} A) = n$; die Dimensionsformel ist wieder einmal der Schlüssel zum Problem.

Denn genau dann, wenn $\operatorname{Kern} A = \mathbf{0}$ ist, ist nach dem gerade Gesagten eine Lösung $\mathbf{x}$ eindeutig, wenn sie denn überhaupt existiert. Aber $\operatorname{Kern} A = \mathbf{0}$ bedeutet nach der Dimensionsformel eben auch $\operatorname{Bild} A = \mathbb{R}^n$, das heißt *jeder* Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ ist das Bild unter A von irgendeinem $\mathbf{x}$. So haben wir die einfache und schöne Aussage:

> Genau dann ist $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ eindeutig lösbar, wenn $\operatorname{Kern} A = \mathbf{0}$ ist, oder gleichbedeutend, wenn $\operatorname{rg} A = n$ ist beziehungsweise $\det A \neq 0$.

Im Fall $\det A \neq 0$ hängt die Lösbarkeit daher gar nicht ab von $\mathbf{b}$: für tatsächlich *jedes* $\mathbf{b}$ gibt es dann eine Lösung, und zwar genau eine. Hat A hingegen nicht vollen Rang, kann aber $\mathbf{b}$ sehr wohl außerhalb von $\operatorname{Bild} A$ liegen, und es gibt überhaupt keine Lösung. Gibt es bei $\operatorname{rg} A < n$ doch eine, so existiert gleich ein ganzer Satz von Lösungen, denn zu einer beliebig herausgegriffenen Lösung $\mathbf{b}$ können wir ja beliebige Elemente aus $\operatorname{Kern} A \neq \{\mathbf{0}\}$ hinzuaddieren und bekommen so immer neue Lösungen[4].

Wenn man zu *irgend*einer Lösung $\mathbf{x_0}$ des *inhomogenen* Systems $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, eine Lösung $\mathbf{v}$ des zugehörigen *homogenen* Systems $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ hinzuaddiert, erhält man *wieder* eine Lösung des inhomogenen Systems, und diese ist verschieden von der ersten, sobald $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ist; und letztere $\mathbf{v}$ existieren genau dann, wenn $\operatorname{Kern} A \neq \{\mathbf{0}\}$ ist. So können wir das auch ausdrücken. Umgekehrt ist die Differenz zweier Lösungen des *inhomogenen* Systems stets eine Lösung des *homogenen*, und zwar genau dann eine nichttriviale, wenn die beiden Lösungen verschieden sind. Was wiederum

[4]... was im Allgemeinen jedoch nicht zu einem Unterraum von Lösungen führt, sondern zu einer *Nebenklasse*. Es wird ja der Nullvektor $\mathbf{0}$ nicht zu den Lösungen zu gehören, wenn $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.

genau dann möglich ist, wenn der Kern von A trivial ist. In formaler Schreibweise liest sich das als $\text{lös}\,(A,\mathbf{b}) = \mathbf{x}_0 + \text{Kern}\,A$, wenn $\mathbf{x_0}$ *irgendeine* Lösung aus $\text{lös}\,(A,\mathbf{b})$ ist.

Und wie löst man nun ein konkret gegebenes lineares Gleichungssystem jetzt konkret? Wir erinnern uns an die EZU genannten Elementaren Zeilenumformungen. Wenn wir A durch $\mathbf{b}$ in der Weise

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

zu einer Matrix mit $n+1$ Spalten erweitern, sehen wir: das Vertauschen zweier Zeilen ändert die Lösungsmenge des zugehörigen Gleichungssystems natürlich nicht, das Multiplizieren mit einem von Null verschiedenen Skalar oder das Hinzuaddieren des Vielfachen einer anderen Zeile auch nicht. Die Lösungen des alten Gleichungssystems sind auch Lösungen des neuen, und diese Operationen lassen sich alle rückgängig machen, also sind die Lösungen des neuen Gleichungssystems auch Lösungen des alten. Formal ausgedrückt: $\text{lös}\,(A,\mathbf{b}) = \text{lös}\,(A',\mathbf{b}')$, wenn A' und $\mathbf{b}'$ aus A und $\mathbf{b}$ durch Anwenden von EZU auf die in der beschriebenen Weise mit $\mathbf{b}$ erweiterten Matrix A hervorgegangen sind[5].

Das nutzen wir jetzt aus und zeigen das Vorgehen, wie gesagt, an einem konkreten Beispiel (und bringen in den Übungen noch ein wenig Material dazu). Wir denken uns eine konkrete 3×3-Matrix A aus. Für $\mathbf{b}$ soll $(2,0,4)^\mathsf{T}$ herhalten. Dann ist die erweiterte Matrix $A \mid \mathbf{b}$ der Ausgangslage, die Erweiterung wie üblich mit einem senkrechten Strich geschrieben, der $\mathbf{b}$ abtrennt:

$$\begin{array}{rrr|r} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \end{array}$$

Als erstes möchten wir in die linke obere Ecke eine 1 schaffen. Da derzeit noch eine 0 dort steht, geht das nicht mit EZU (b). Wir vertauschen gemäß EZU (a) zunächst die Zeilen 1 und 3 – und zwar *auf beiden Seiten* des senkrechten Striches –, weil so das Matrixelement a_{11} einen von 0 verschiedenen Wert bekommt. *Wenn das nicht gehen würde*, hieße das, die erste Spalte von A wäre der Nullvektor. $\dim \text{Bild}\,A$ wäre dann kleiner als 3, und es wäre nicht klar, ob überhaupt

[5] Obacht: bei Elementaren *Spalten*umformungen muss man darauf achten, dass man damit implizit die Numerierung der Komponenten von $\mathbf{x}$ verändern kann, wenn man nämlich zum Beispiel Spalten vertauscht.

eine Lösung existiert. Das Produkt $A\mathbf{x}$ hinge von x_1 dann gar nicht ab, so dass wir x_1 frei wählen könnten, in Übereinstimmung damit, dass der Kern von A mindestens eindimensional sein müsste nach der Dimensionsformel.— Hier jedoch können wir EZU (a) anwenden und erhalten $A^{(1)} \mid \mathbf{b}^{(1)}$:

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}$$

Jetzt können wir nach EZU (b) die erste Zeile durch 2 dividieren:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}$$

Als nächstes soll die zweite Spalte zur Form $(*, 1, 0)^\mathsf{T}$ kommen. Wir multiplizieren die zweite Zeile mit -1:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}$$

... und subtrahieren gemäß EZU (c) das Doppelte der 2. Zeile von der 3. Zeile:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}$$

Nun zur dritten Spalte. Wir wenden EZU (c) an und addieren die 3. Zeile zur 1. Zeile:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}$$

Durch Anwenden von EZU (c) bilden wir eine neue 2. Zeile aus der alten durch Addieren der dritten:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}$$

Schließlich wird die 3. Zeile noch gemäß EZU (b) mit -1 multipliziert:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}$$

Das war's. Weil die Seite links vom senkrechten Strich die Form der Einheitsmatrix hat, können wir die x_i Stück für Stück einfach entnehmen[6] und lesen ohne Mühe ab: $\mathbf{x} = (4, 2, -2)^\mathsf{T}$ ist Lösung – und einzige Lösung – des vorgelegten Gleichungssystems.

Es versteht sich von selbst, dass wir durch Multiplizieren von A auf $\mathbf{x}$ verifizieren, dass auch wirklich $\mathbf{b} = (2, 0, 4)^\mathsf{T}$ herauskommt; das ist einfach guter Stil. Wenn es übrigens während des Algorithmus nicht möglich ist, das jeweilige Hauptdiagonalelement zu 1 zu machen, oder wenn sich das letzte Hauptdiagonalelement zu Null ergibt, dann erkennen wir daran, dass die Matrix A eine verschwindende Determinante hat und nicht invertierbar ist. In den Übungen gibt's Abwandlungen des obigen Beispiels, die so eingerichtet sind, dass man den Fall sehen kann, in dem das Gleichungssystem überhaupt keine Lösung besitzt, sowie den Fall, dass es Lösungen zwar hat, diese aber nicht eindeutig sind. Jedesmal scheitert der Gaussssche Algorithmus in einer anderen Weise, und man kann sehr schön beobachten, wie die Dimensionsformel $\dim(\text{Kern}\, A) + \dim(\text{Bild}\, A) = n$ am Werk ist.

Nur der Vollständigkeit halber erwähnen wir: immer, wenn wir von der Frage gesprochen haben, ob ein Tupel vorgegebener Vektoren linear unabhängig ist oder nicht, sind wir ein Verfahren schuldig geblieben, mit dem man dies im konkreten Fall abklären kann; in dem einen oder anderen Übungsproblem haben wir uns mit *ad hoc*-Betrachtungen beholfen. Jetzt kennen wir ein solches Verfahren: die in Frage stehenden Vektoren zu einer Matrix zusammenstellen und für diese eine Rangbestimmung durchführen. Gleichbedeutend: das dieser zusammengestellten Matrix zugeordnete homogene Gleichungssystem lösen. Ein nichtverschwindender Lösungsvektor enthält dann genau die nichtverschwindenden Linearfaktoren, mit denen die Spalten nichttrivi-

[6] Im Grunde wäre es ausreichend gewesen, die Seite links vom Strich auf die Form einer *oberen Dreiecksmatrix* zu bringen, das heißt auf der Diagonalen stehen a'_{ii}, oberhalb irgendwelche a'_{ij} und darunter Nullen. Dann kann man die Sache von unten her aufrollen: $a'_{nn}x_n = b'_n$ oder $x'_n = \frac{b'_n}{a'_{nn}}$, denn links von a'_{nn} stehen ja nur Nullen. Die Zeile obendrüber liefert $a'_{n-1,n-1}x_{n-1} + a'_{n-1,n}x_n = b'_{n-1}$, aber x_n kennen wir jetzt und können das daher nach x_{n-1} auflösen. Damit gehen wir wieder in die Zeile darüber und so weiter. Der Rechenaufwand ist der gleiche, wie wenn wir nicht nur Diagonalgestalt anstreben, sondern die Form der Einheitsmatrix. Letzteres funktioniert nämlich nicht immer – nämlich genau dann nicht, wenn $\det A = 0$ ist.

al zum Nullvektor linearkombiniert werden können und damit linear *ab*hängig sind – *wenn* es einen nichtverschwindenden Lösungsvektor denn gibt; ansonsten sind die Spaltenvektoren linear *un*abhängig.

1.5 Praktisches Invertieren von Matrizen.

Wir haben den theoretischen Hintergrund erarbeitet, den wir zum Verständnis des Konzepts einer inversen Matrix brauchen. Zur Erinnerung: der Hintereinanderausführung von linearen Abbildungen entspricht das Matrixprodukt, der Identitätsabbildung als linearer Abbildung entspricht die Einheitsmatrix E. Nur Isomorphismen sind invertierbar, also kennen nur deren Matrizen ein Inverses. Ist A die Matrix eines Isomorphismus, so gilt $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$. Mit der Dimensionsformel gelang es uns, eine Anzahl genauer Bedingungen für Invertierbarkeit zusammenzutragen (siehe Abschnitt **??**), darunter die schöne Aussage, dass A genau dann invertierbar ist, wenn $\det A \neq 0$ ist. Was wir immer mehr oder weniger stillschweigend übergangen haben, ist die Thematik, wie man denn nun konkret das Inverse einer Matrix berechnet, wenn diese denn eines hat. Und die Antwort lautet: mit eben dem GAUSSschen Eliminationsverfahren, das wir gerade eben kennenlernten als Verfahren zur Lösung Linearer Gleichungssysteme[7]. Zum Invertieren benutzen wir ebendieses Verfahren in der beschriebenen Weise *gleichzeitig* für alle n Gleichungssysteme $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_1$, $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_2$ und so weiter; $\mathbf{e}_i$ ist wie immer der i-te Standardeinheitsvektor. Wie soll das funktionieren, "gleichzeitig"?

Hier brauchen wir eine Zusatzüberlegung, um das Verfahrensrezept verstehen zu können. Wenn wir uns in Erinnerung rufen, wie das Produkt $M \cdot N$ zweier Matrizen gebildet wird – gehen wir ruhig mal davon aus, dass beide quadratisch sind, an anderen sind wir für das Invertierungsthema eh nicht interessiert –, sehen wir, im Zweifelsfall durch Probieren an einem Beispiel, folgendes ein: gilt für drei quadratische Matrizen $M \cdot N = K$ und überführen wir M und K gleichzeitig durch *dieselben* elementaren Zeilenumformungen in Matrizen M' respektive K', so gilt auch $M' \cdot N = K'$. Was bringt uns dieser Umstand? Sei M^{-1} die zu M inverse Matrix, dann gilt definitionsgemäß $M \cdot M^{-1} = E$, wenn E die zur Identität Id gehörende Einheitsmatrix

[7] Diese Aussage bezieht sich aber ausdrücklich *nicht* auf die Art und Weise, wie man in gut konditionierter Weise mit möglichst wenig Speicherplatzverbrauch und möglichst wenig Rechenoperationen eine Matrix *numerisch* invertiert, sofern man dies gar nicht vermeiden kann. In diesem Zusammenhang ist die Anwendung des GAUSS-Algorithmus in der hier dargestellten Form ganz klar kontraindiziert. Vielmehr stellt die Numerische Mathematik spezielle Algorithmen zur Verfügung, etwa das Invertieren über NEUMANN-Reihen oder die Lösung Linearer Gleichungssysteme per LR-Zerlegung

repräsentiert. Nun betrachten wir $M \cdot M^{-1} = E$ und wenden elementare Zeilenumformungen auf M an, so dass $M' \equiv E$ entsteht; wenn das nicht geht, ist, wie wir sehen werden, M eben nicht invertierbar. Dann haben wir $E \cdot M^{-1} = E'$. Weil aber $E \cdot M^{-1} = M^{-1}$ ist, folgt daraus $M^{-1} = E'$, oder anders gesagt, auf der rechten Seite haben wir unser gesuchtes M^{-1} herbeikonstruiert. Wir schreiben also links M hin, machen einen senkrechten Strich, schreiben rechts davon E hin und wenden auf beide dieselben elementaren Zeilentransformationen an, mit dem Ziel und so lange, bis links E steht, wo vorher M stand – das ist gemeint, wenn wir schreiben, den GAUSSschen Algorithmus "simultan" auf alle Gleichungen $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$ anzuwenden.[8] Die Matrix rechts vom senkrechten Strich ist dann automatisch M^{-1}.

Das beste ist wieder, dies an einem konkreten Beispiel zu studieren. Jeder sollte sich im übrigen ein paar davon basteln und durchrechnen; kontrollieren kann man das Ergebnis ja einfach dadurch, dass die selbst errechnete Inverse auf die ursprüngliche Marix draufmultipliziert wird. Wenn dann nicht E herauskommt, war's falsch.— Aus Übersichtsgründen lassen wir die Matrixbeklammerungen im Schema weg, wenn wir beispielsweise $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ invertieren. Außerdem kürzen wir "elementare Zeilenumformung" wieder als EZU ab. Die sukzessive entstehenden umgeformten Matrizen können wir nicht mit einem hochgestellten Apostroph kennzeichnen wie bei "M'", weil wir ja eine ganze Reihe davon erzeugen werden. Statt dessen schreiben wir, wie weiter oben schon eingeführt, $M^{(1)}$, $M^{(2)}$ und so weiter für die nach dem (1)ten, (2)ten ... Schritt erhaltene Matrix.– Zu Anfang des GAUSS-Algorithmus schreiben wir uns folgendes Ausgangsschema auf:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Als erstes möchten wir in die linke obere Ecke eine 1 schaffen. Da derzeit noch eine 0 dort steht, geht das nicht mit EZU (b). Wir vertauschen gemäß EZU (a) zunächst die Zeilen 1 und 3 – und zwar *auf beiden Seiten* des senkrechten Striches –, weil so das Matrixelement M_{11} einen von 0

[8] Das Verfahren heißt, wie bereits mehrfach erwähnt, GAUSS*scher Algorithmus*. Wenn in der Mathematik ein Satz oder ein Verfahren nach irgendwem benannt ist, verhält es sich, zumindest bei den historisch etwas älteren Aussagen, meistens so, dass der Genannte gerade *nicht* Urheber des betreffenden Theorems oder der betreffenden Methode ist. Bei GAUSS jedoch liegt die Sache etwas anders: auf ihn geht ein umfassbar großer Anteil der klassischen Mathematik zurück, und sehr viel von dem ungeheuren Material, was in seinem Nachlass gefunden wurde und was er selbst des Veröffentlichens nicht für würdig erachtet hatte, wurde erst sehr viel später "wieder"entdeckt und in den Korpus der Mathematik integriert.

verschiedenen Wert bekommt. *Wenn das nicht gehen würde*, hieße das, die erste Spalte von M wäre der Nullvektor. Damit wäre aber rg$M < 3$, mithin die zugehörige lineare Abbildung nicht surjektiv und M deswegen gar nicht invertierbar – Ende des Algorithmus. Wir aber haben nun

$$\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Jetzt können wir nach EZU (b) die erste Zeile durch 2 dividieren:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Als nächstes soll wieder die zweite Spalte zur Form $(*, 1, 0)^\mathsf{T}$ kommen. Hier ist $M_{22}^{(2)} \neq 0$; wäre das nicht der Fall, müssten wir wieder Zeilen tauschen, *aber ohne die erste Zeile miteinzubeziehen.* Wenn letzteres nicht gehen würde, wäre die zweite Spalte ein Vielfaches der ersten (oder insgesamt 0) und M nicht invertierbar – wieder: Ende des Algorithmus. Wir brauchen hier jedoch nur die zweite Zeile mit -1 zu multiplizieren:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Um $M_{32}^{(3)}$ zu 0 zu machen, nutzen wir EZU (c) und subtrahieren das Doppelte der 2. Zeile von $M^{(3)}$ von der 3. Zeile:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

Nun zur dritten Spalte von $M^{(4)}$. Wir wenden EZU (c) an und addieren die 3. Zeile von $M^{(4)}$ zur 1. Zeile, was $M^{(5)}$ auf der linken Seite erzeugt:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

$M^{(6)}$ bilden wir durch Anwenden von EZU (c): ihre neue 2. Zeile ergibt sich aus der alten von $M^{(5)}$ plus der dritten von $M^{(5)}$:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

Schließlich wird die 3. Zeile von $M^{(6)}$ noch gemäß EZU (b) mit -1 multipliziert:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

Damit ist der GAUSSsche Algorithmus abgeschlossen. Er war so weit durchführbar, dass sich am Ende nach sieben Schritten $M^{(7)} \equiv E$ ergeben hat; hätten wir vorher abbrechen müssen, wäre M als nicht invertierbar erkannt gewesen. In unserem Falle steht aber jetzt rechts des senkrechten Striches M^{-1}, was wir durch direkte Matrixmultiplikation leicht verifizieren können.