Automatentheorie

endliche deterministische Automaten

Prof. Dr. Franz-Karl Schmatzer
schmatzf@dhbw-loerrach.de

Literatur

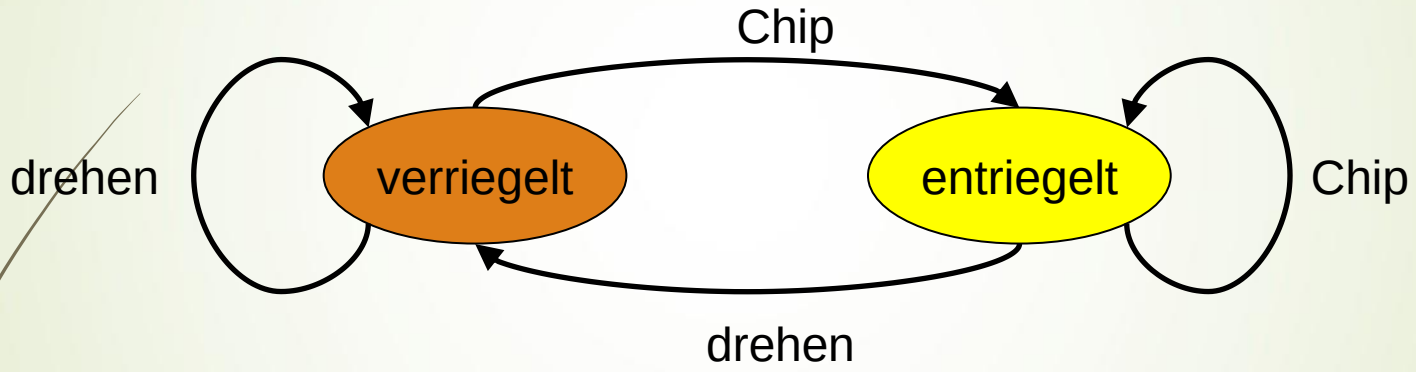
- C.Wagenknecht, M.Hielscher; Formale Sprachen, abstrakte Automaten und Compiler; 3.Aufl. Springer Vieweg 2022;
- A.V.Aho, M.S.Lam,R.Savi,J.D.Ullman, *Compiler – Prinzipien,Techniken und Werkzeuge*. 2. Aufl., Pearson Studium, 2008.
- Güting, Erwin; *Übersetzerbau –Techniken, Werkzeuge, Anwendungen*, Springer Verlag 1999
- Sipser M.; Introduction to the Theory of Computation; 2.Aufl.; Thomson Course Technology 2006
- Hopecroft, T. et al; Introduction to Automata Theory, Language, and Computation; 3. Aufl. Pearson Verlag 2006

Agenda

- Allgemeine Einführung
- Definition eines Automaten
- Typen von deterministischen Automaten
- Aufbau von Automaten
- Modellierung von Automaten
- Sprachen eines Automaten

Einführung

- Viele Systeme des täglichen Lebens lassen sich als Automaten auffassen.
- Betrachte dazu eine Schwimmbaddrehkreuz als Zugangskontrolle

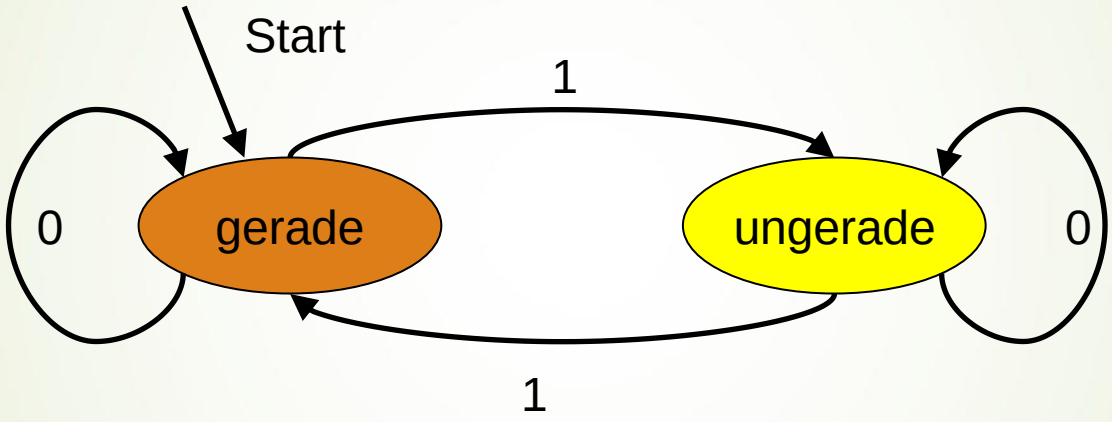


- Das Verhalten des System hängt offenbar von der Aktion und von dem Zustand des Systems ab.
- Andere Beispiele sind z.B.
  - Getränke- und Zigarettenautomaten
  - Scanner-Systeme, Paritätsprüfung

Einführung

Paritätsprüfung

- Beispiel für eine Paritätsprüfung



- Man kann endliche Automaten auch als die Abstraktion eines einfachen Computer auffassen, der endliche viele Zustände einnehmen kann und von einem Eingabeband liest.

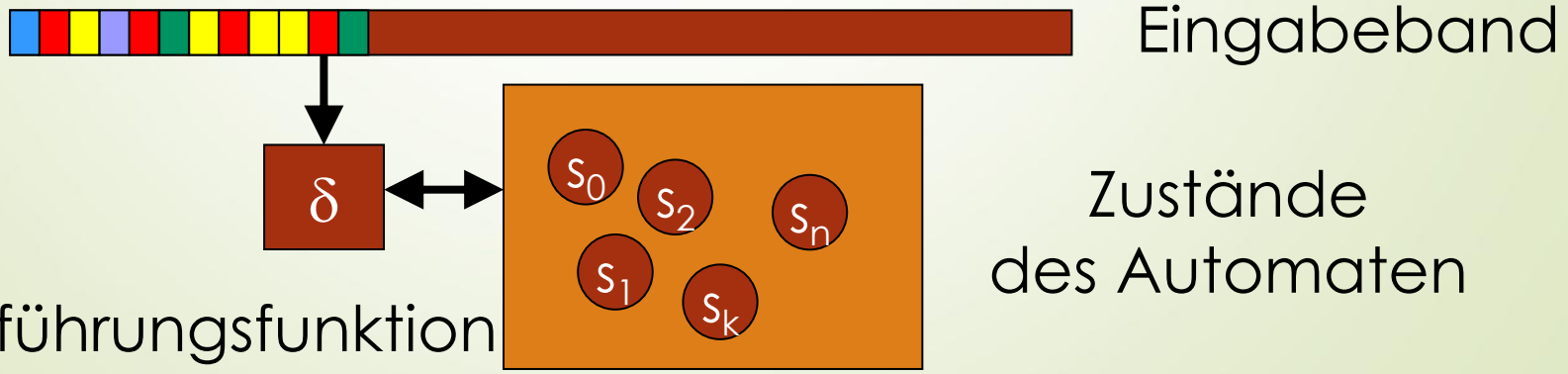
Aufgaben

- Wo sind Ihnen endliche Automaten noch begegnet?

Deterministischer endlicher Automat (DEA)

Abstraktion

- Allgemeines Modell einer Maschine
  - Ein Einleseband mit Eingabezeichen,
  - eine Maschine, die endliche viele interne Zustände haben kann
  - eine Funktion, die abhängig von dem gelesenen Eingabezeichen und des momentanen Zustandes der Maschine, die Zustände der Maschine ändern kann.
- Weiter muss man noch festlegen:
  - die Startkonfiguration der Maschine
  - und die Endkonfigurationen der Maschine



Deterministischer endlicher Automat (DEA)

Formale Definition

- Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DEA

  $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$ eine nicht leere Menge von Zuständen

  $\Sigma = \{e_1, \ldots, e_n\}$ eine nicht leere Menge von Zeichen, das Eingabealphabet

  $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ eine Funktion, die Überführungsfunktion

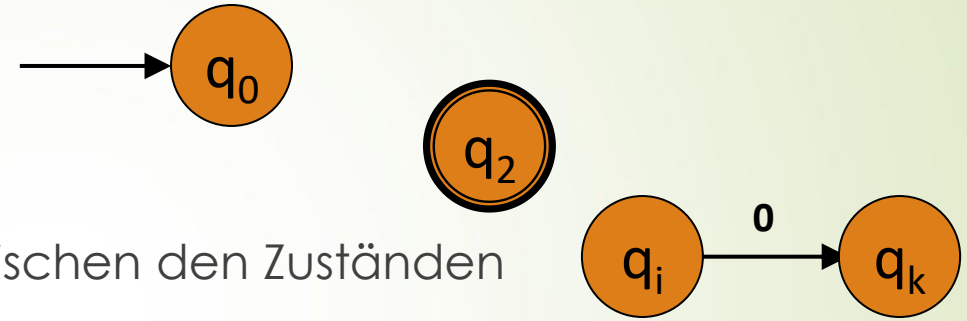
  $q_0 \in Q$ der Anfangszustand

  $F \subseteq Q$ die nicht leere Menge von Endzustände

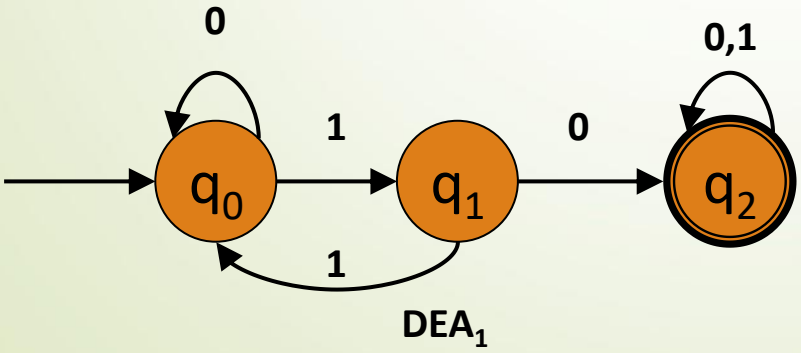
DEA

Überführungsfunktion und Zustandsdiagramm

- Zustandsdiagramm
  - Startzustand
  - Endzustände
  - Übergänge, als Pfeile zwischen den Zuständen



- Überführungsfunktion
  - Tabelle, die für jedes Eingabezeichen den Folgezustand spezifiziert
- Beispiel: DEA = $(\{q_0, q_1, q_2\}, \{0,1\}, \delta, q_0, \{q_2\})$



Überführungsfunktion δ für DEA_1

δ	0	1
q_0	q_0	q_1
q_1	q_2	q_0
q_2	q_2	q_2

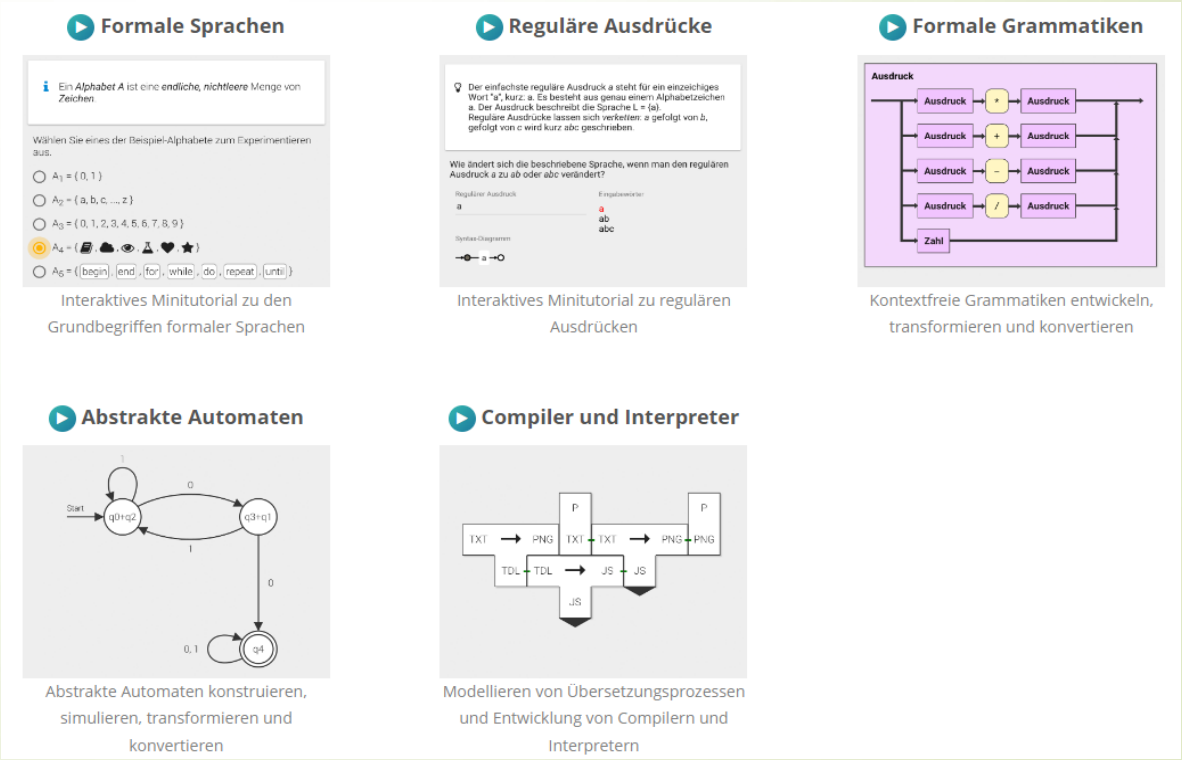
Tools zu den Automaten

- Nutzen Sie die Tools der Webseite AtoCC
  - Es erlaubt Automaten und Grammatiken aufzubauen und zu simulieren
  - Zugang https://atocc.de/cgi-bin/atocc/site.cgi?lang=de&site=main

Toolbox FLACI I

(Formale Sprachen, abstrakte Automaten, Compiler und Interpreter)

- Zugang https://flaci.com/home/
- Das Tool „Abstrakte Automaten“ erlaubt die Automaten aufzubauen und zu simulieren.
- Rufen Sie das Tool „Abstrakte Automaten“ auf und melden Sie sich an dem System an.



Toolbox FLACI II

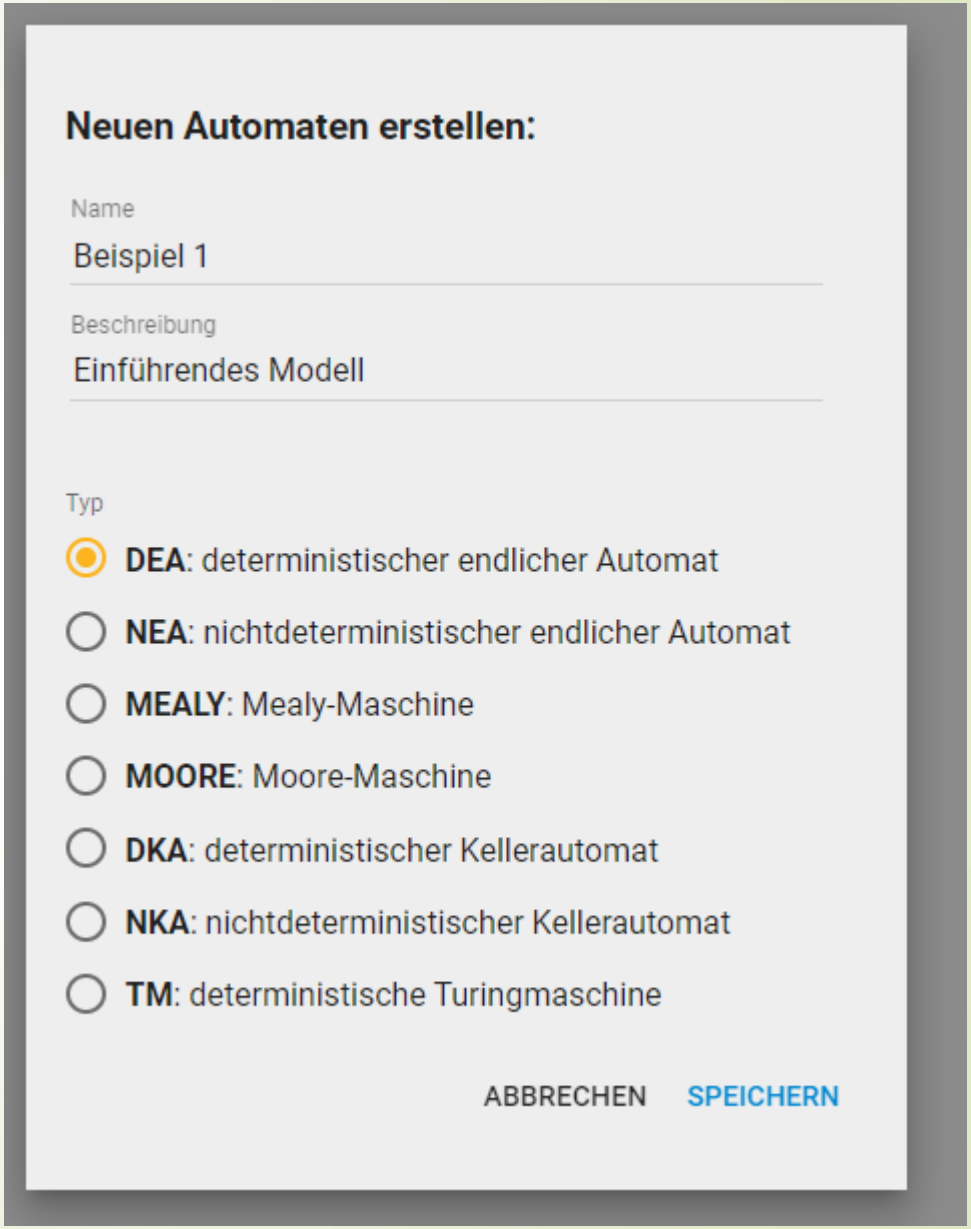
Einführendes Modell

- Drücken Sie den + Buttom unten rechts.
- Füllen Sie das Popup-Window wie folgt aus.

Name: Beispiel 1

Beschreibung: Einführendes Modell

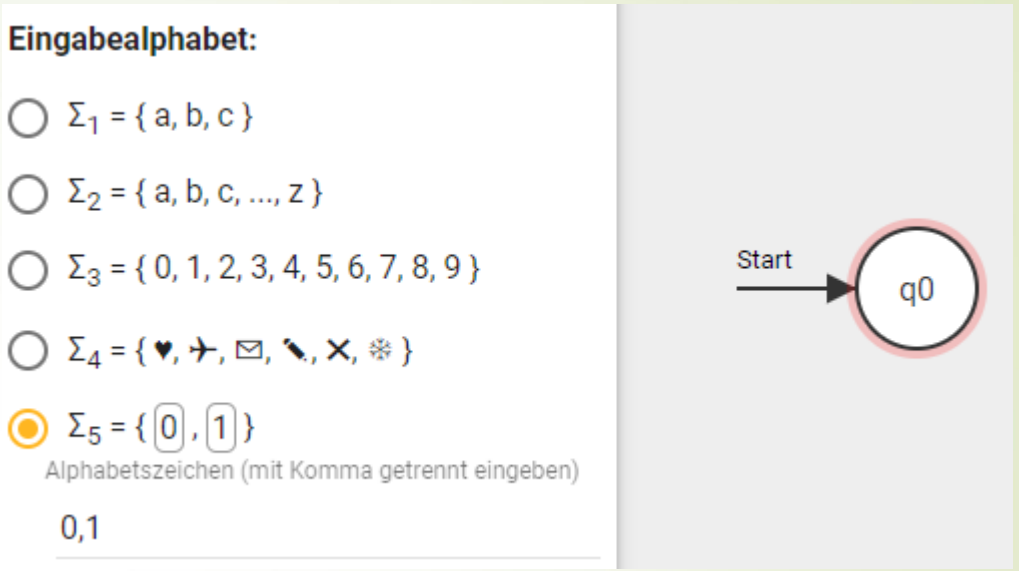
Typ: DEA

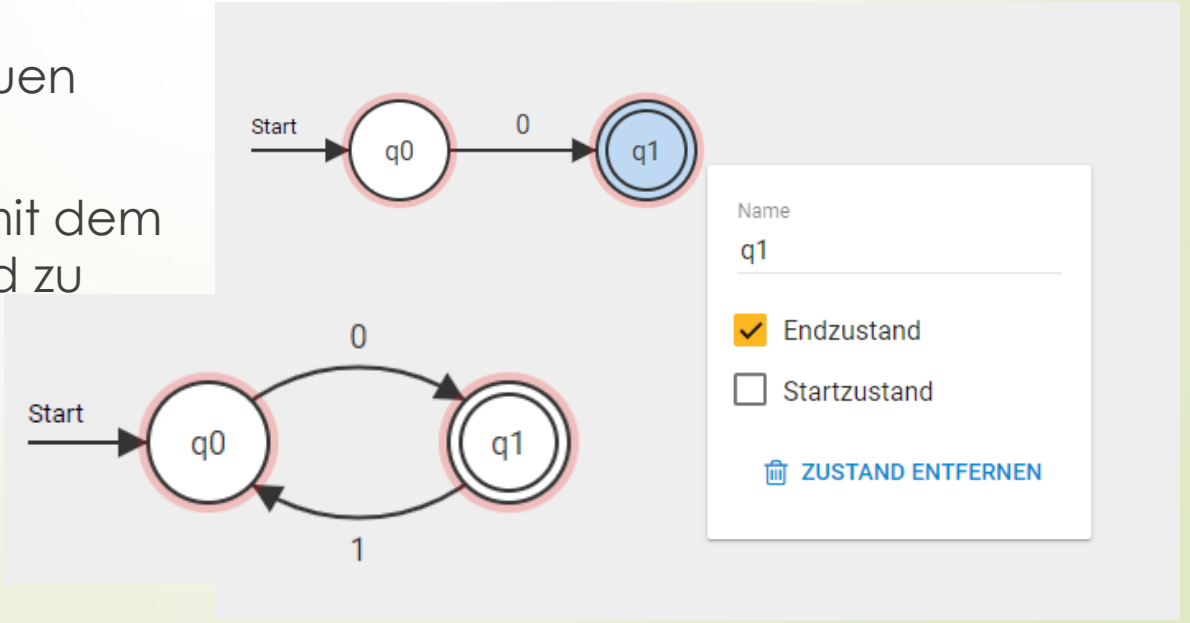


Toolbox FLACI III

Einführendes Modell

- Nach der Bestätigung erscheint der Startzustand q0
- Wählen Sie das 5 Alphabet und geben Sie die Zustände 0 und 1 ein.
- Nun erstellen Sie einen weiteren Zustand und einen Übergang mit dem Zeichen 0.
- Kennzeichnen Sie den neuen Zustand als Endzustand.
- Fügen Sie ein Übergang mit dem Zeichen 1 vom Endzustand zu dem Startzustand ein.
- Drücken Sie den Reiter „überprüfen“.

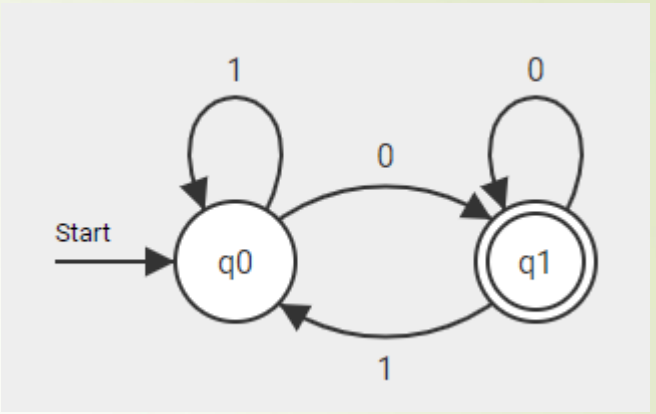


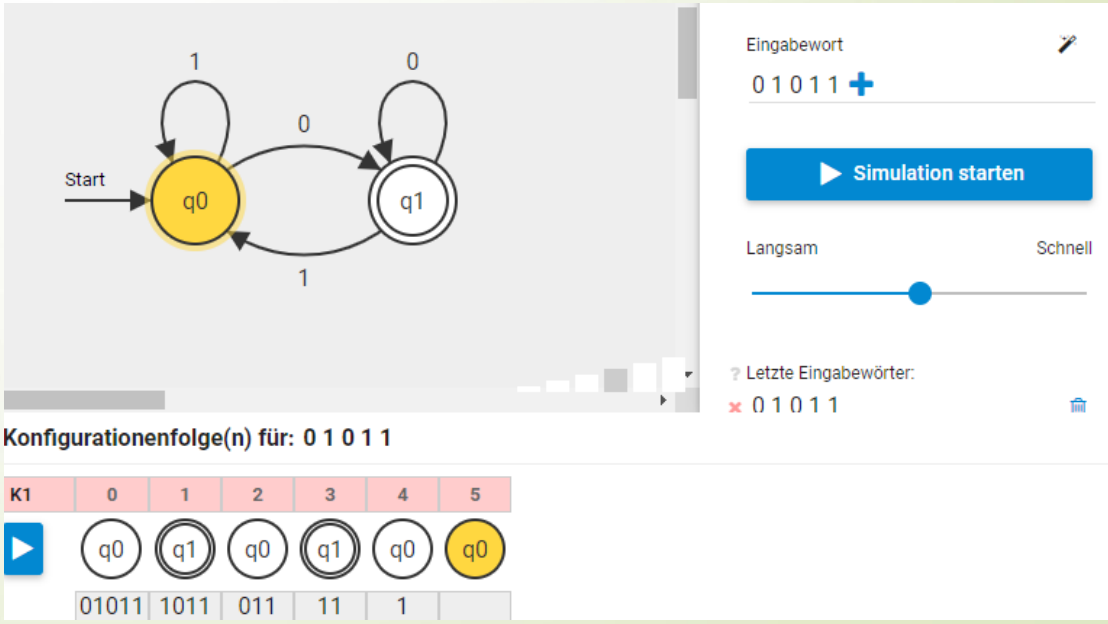


Toolbox FLACI IV

Einführendes Modell

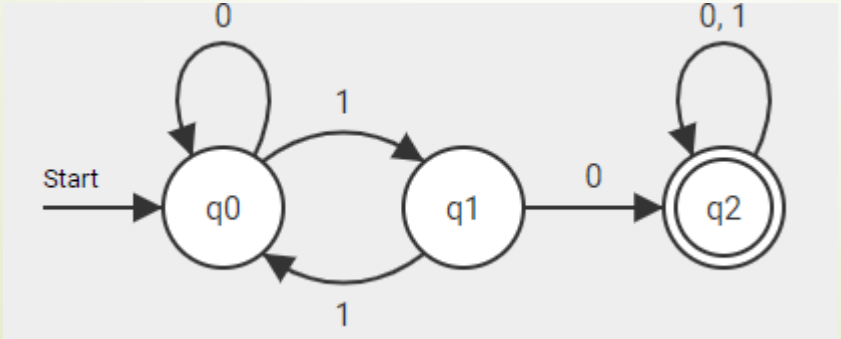
- Der Automat ist nicht vollständig.
- Fügen Sie noch die fehlenden Übergänge bei q0 und q1 ein.
- Drücken Sie „überprüfen“
- Nun Drücken Sie auf „Simulation“ und geben das Wort „01011“
- Und drücken Sie auf „Simulation starten“.
- Exportieren Sie die Datei.





Aufgabe1 FLACI

- Erstellen Sie den unten angegebenen Automaten
  - In FLACI drücken sie auf den „+“-Button unten rechts.
  - Geben Sie einen Namen „Beispiel 2“ und kurze Beschreibung an.
  - Definieren Sie den Automatentyp (DEA)
  - Drücken Sie okay.
  - Geben Sie das Alphabet ein {0,1} und Erstellen Sie den Automaten
    - Legen Sie zunächst die 3 Zustände wie unten angegeben an.
    - Dann fügen Sie die Übergänge hinzu. Wenn Sie auf die Übergänge klicken können Sie die Zeichen auch nachträglich eingeben.
    - Checken Sie den Automaten. Er sollte korrekt sein.



Aufgabe 1 FLACI
Übergangstabelle

- Lassen Sie sich die Übergangstabelle anzeigen

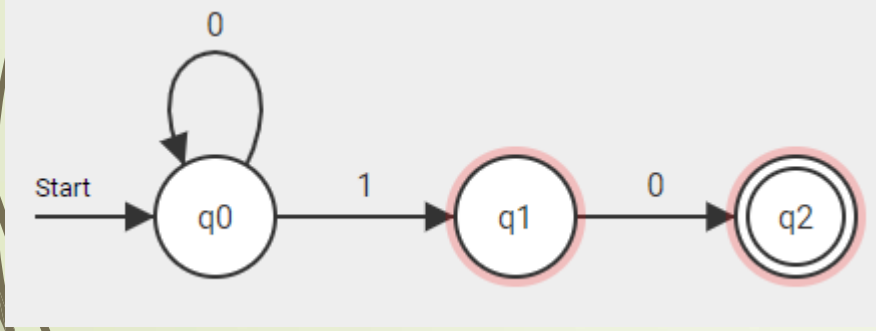
δ	**0**	**1**
q0	q0	q1
q1	q2	q0
q2	q2	q2

- Führen Sie ein Simulation mit verschiedene Worten durch.
  - Welche Worte landen am Schluss im Endzustand?

DEA

vollständiger/nicht vollständiger Automat

- Man nennt einen Automaten
  - vollständig, wenn die Überführungsfunktion δ für jedes Eingabezeichen einen Folgezustand spezifiziert (totale Funktion).
  - nicht vollständig, wenn die Überführungsfunktion δ nur für die erlaubten Übergänge einen Folgezustand spezifiziert (partielle Funktion).
- Beispiel: $DEA_2 = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0,1\}, \delta, q_0, \{q_2\})$ (Nicht vollständiger Automat)



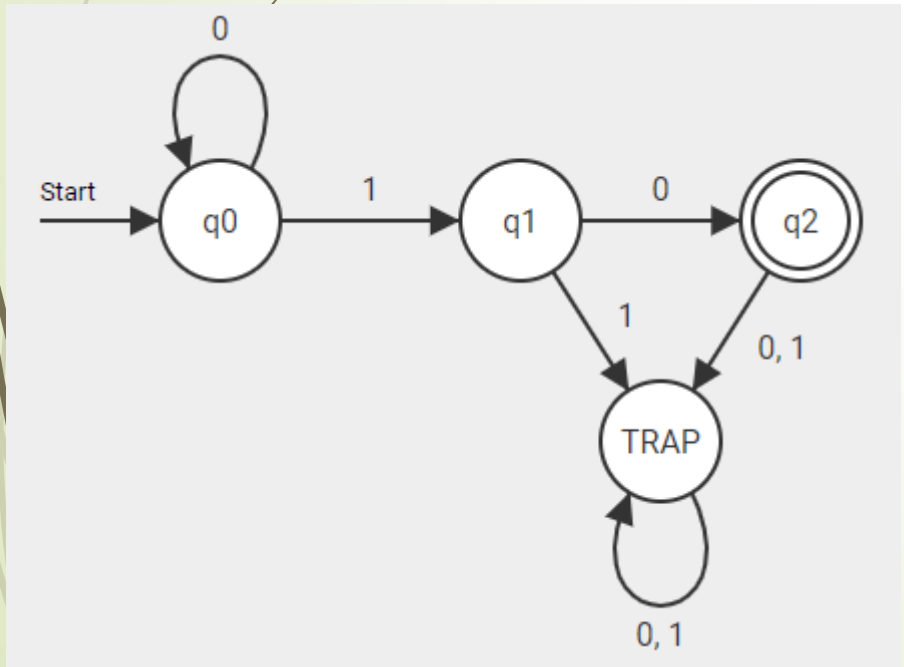
Überführungsfunktion δ für DEA_2

δ	0	1
q_0	q_0	q_1
q_1	q_2	-
q_2	-	-

DEA

Äquivalenz vollständiger und nicht vollständiger Automat

- Jeder nicht vollständiger Automat lässt sich in einen vollständigen Automaten umwandeln, durch Einfügen eines neuen Zustandes „TRAP“.
- Beispiel umwandeln von DEA_2 in einen vollständigen Automaten DEA_3
- $DEA_3 = (\{q_0, q_1, q_2, TRAP\}, \{0,1\}, \delta, q_0, \{q_2\})$



Überführungsfunktion δ für DEA_3

δ	0	1
q_0	q_0	q_1
q_1	q_2	TRAP
q_2	TRAP	TRAP
TRAP	TRAP	TRAP

Sprache eines DEAs
Konfigurationsübergänge

- Eine Maschine liest Schritt für Schritt die Zeichen $e_i \in \Sigma$ vom Band und ändert abhängig von der Überführungsfunktion seinen internen Zustand.
- Man charakterisiert Zustände k der Maschine durch das Tupel k = (q ,v) mit $q \in Q$ und $v \in \Sigma^*$. Dabei ist v das noch zu verarbeitende Wort aus Σ^*.
- Ein Zustandsübergang von k nach k‘ findet beim Einlesen eines Zeichens $e \in \Sigma$ statt, wenn es dazu einen Übergang gibt:

  d.h k = (q, ew) geht in k‘ = (q‘, w), wenn

  die Überführungsfunktion $\delta(q, e) = q‘$ existiert.
- Man schreibt formal: $(q,ew) \rightarrow (q‘,w)$

Sprache eines DEAs
Konfigurationsübergänge

- Die Abarbeitung eines Wortes $w = e_1 e_2 \ldots e_r$ durch einen endlichen Automaten kann man daher als eine Folge von Konfigurationsübergänge ansehen.

$$(q_0, e_1 e_2 \ldots e_r) \rightarrow (q_1, e_2 \ldots e_r) \rightarrow \ldots \rightarrow (q_r, \varepsilon)$$

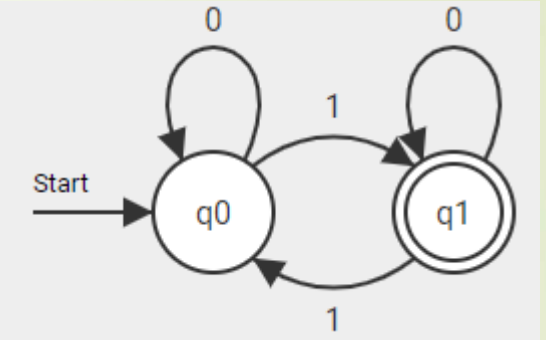
mit $\delta(q_i, e_i) = q_{i+1}$

Kurze Notation dafür:

$$(q_0, e_1 e_2 \ldots e_r) \rightarrow^* (q_r, \varepsilon)$$

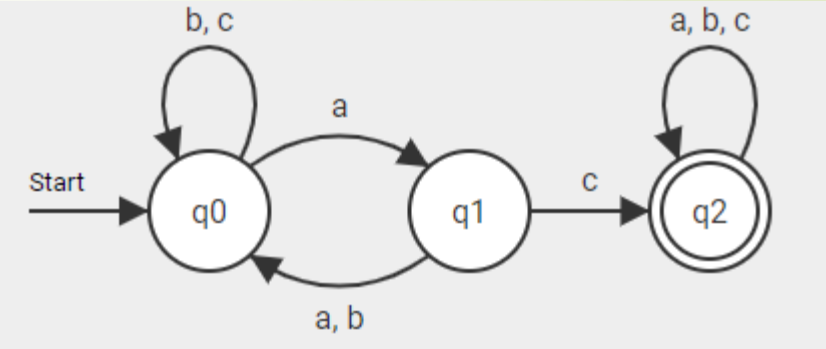
(endliche Folge von Zustandsübergänge, die von q_0 nach q_r führt)

Aufgabe 2
Sprache eines Automaten I



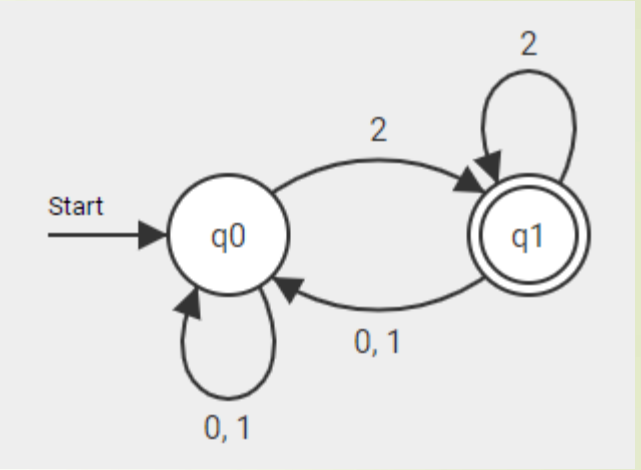
- Ein Automat über dem Alphabet {0,1} ist gegeben.
- In Input geben Sie das Worte: 0110100 ein und drücken „Start Simulation“.
- Geben Sie verschiedene Worte ein. Auch Worte die der Automat nicht akzeptiert.
- Beobachte Sie das Verhalten
- Was ist das kleinste Wort, was der Automat akzeptiert?
- Was für eine Struktur haben die Worte der Sprache?

Aufgabe 2
Sprache eines Automaten II



- Ein Automat über dem Alphabet {a,b,c} ist gegeben
- Als Input geben Sie das Worte: bccacb ein und drücken „Start Simulation“.
- Geben Sie verschiedene Worte ein. Auch Worte die der Automat nicht akzeptiert.
- Beobachte Sie das Verhalten
- Was ist das kleinste Wort, was der Automat akzeptiert?
- Was für eine Struktur haben die Worte der Sprache?

Aufgabe 2
Sprache eines Automaten III



- Ein Automat über dem Alphabet {0,1,2} ist gegeben
- Als Input geben Sie das Worte: 0101221022 ein und drücken „Start Simulation“.
- Geben Sie verschiedene Worte ein. Auch Worte die der Automat nicht akzeptiert.
- Beobachte Sie das Verhalten.
- Was ist das kleinste Wort, was der Automat akzeptiert?
- Was für eine Struktur haben die Worte der Sprache?

Sprache eines DEAs
Die Sprache L(A)

- Wörter w werden akzeptiert, wenn ausgehend vom Startzustand q_0 die Maschine nach der Bearbeitung aller Zeichen sich in einem der Endzustände q_F befindet.

$$\mathbf{(q_0, w) \rightarrow^* (q_F, \varepsilon)}$$

- Die Menge aller Wörter w, die eine Maschine $A = (Q, \Sigma, \delta, s_0, F)$ akzeptiert, bezeichnet man als die Sprache L(A) der Maschine:

$$L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid (q_0, w) \rightarrow^* (q_F, \varepsilon), q_F \in F\}$$

- Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt regulär, falls es einen endlichen Automaten gibt, der L akzeptiert, d.h. für den L = L(A) gilt.

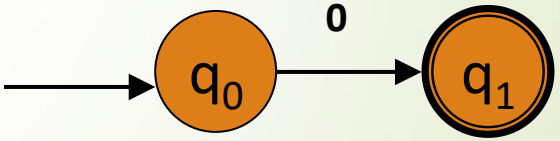
Sprache eines DEAs

Beispiel Arbeitsweise und L(A)

- Der Automat DEA_2 akzeptiert alle Wörter w die, entweder
  - 10 oder
  - 0..010 lauten.
- $L(DEA_2) = \{10, 010, 0010, 0…10\} = 0^*10$
- Notation $0^* = \{\varepsilon,0,00,000,…,000000…\}$
- Konstruieren Sie zuerst einen unvollständigen Automaten
- Überführen Sie ihn in einen vollständigen Automaten
- Geben Sie die Überführungsfunktion an.
- Leiten Sie die 4 Worte 010, 0101,10110, 10 ab.

Einfache Automatenkonstruktion

- Wie konstruiert man endliche deterministische Automaten
- Man geht vom kleinsten Wort aus, was der Automat akzeptieren soll (Rumpf-Automat)
- Man erweitert den Automat durch geschickte Wahl der Übergänge, dass er alle Worte der der Sprache versteht.
- Beispiel:
  - Alle Wort aus dem Alphabet {0,1} die am Anfang eine 0 haben sollen.
  - Kleinstes Wort ist w=„0“



  - Nun betrachtet man jeden Zustand und versucht die fehlenden Übergänge zu ergänzen, so dass nur Worte der Sprache erkannt werden.

Aufgabe 3 DEA-Konstruktionen

- Das Alphabet sei $\Sigma = \{0,1\}$

1) Konstruieren Sie einen deterministischen Automaten, der alle Worte erkennt, die am Schluss eine „0“ haben.
2) Konstruieren Sie einen deterministischen Automaten, der die Zeichenkette „00“ im Wort erkennt.
3) Konstruieren Sie einen deterministischen Automaten, der alle Worte erkennt, die am Schluss die Zeichenfolge „00“ haben.
4) Konstruieren Sie einen deterministischen Automaten, der alle Worte erkennt, die an der zweitletzten Stelle eine „0“ haben.