Übungsblatt zu "Mengen, Abbildungen, Gruppen"

Sommersemester 2022

Übung 1 (Aussagenlogik)
Ein Unternehmen steht vor der Entscheidung, für einen bestimmten neuen Aufgabenbereich ein System zu mieten, zu kaufen oder die Tätigkeiten des Aufgabenbereichs über *Software-as-a-Service* abzubilden. Aus Kostengründen steht fest: Wenn das Unternehmen kein System mietet *oder* kein System kauft, dann nutzt es *Software-as-a-Service*. Welche Entscheidung trifft das Unternehmen? Diskutieren Sie!

Übung 2 (Aussagenlogik)
Das beliebte und unterhaltsame Kartenspiel *Aristotle* wird mit einem Deck gespielt, das aus nur vier Karten besteht. Jede Karte trägt auf ihrer Vorderseite einen der 26 Buchstaben des Alphabets und auf der Rückseite eine natürliche Zahl zwischen 1 und 10. Ein *Aristotle*-Deck ist *korrekt* dann und nur dann, wenn seine Karten die folgende Bedingung erfüllen: *wenn* die Vorderseite der Karte einen Vokal zeigt (also "A", "E", "I", "O" oder "U"), *dann* muss die Zahl auf ihrer Rückseite zwingend gerade sein. Vor Ihnen liegt ein *Aristotle*-Deck, welches die Kartenbilder "A", "K", "4" und "7" zeigt. Welche Karten müssen Sie *mindestens* umdrehen, damit Sie ganz sicher sein können, dass das Deck korrekt ist?

Übung 3 (Mengen und Mengenverknüpfungen)
Gegeben seien die Mengen $M_1 = \{1,2,3,5,4\}$, $M_2 = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant 4\}$, $M_3 = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sowie $M_4 = \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Man bestimme $M_1 \cap M_2$, $M_1 \cup M_2$, $M_3 \cap M_4$, die Differenz $M_1 \backslash M_3$ sowie die Menge $(M_4 \backslash M_2) \cap M_3$.
Aus wieviel Elementen besteht die Potenzmenge $\mathcal{P}(M_1)$? Denken Sie daran, dass auch $M_1 \subseteq M_1$ gilt und dass die Leere Menge Teilmenge jeder Menge ist.

Übung 4 (Mengen und Mengenverknüpfungen)
Es seien $N_2 = \{1,2\}$ und $N_3 = \{1,2,3\}$ gegeben. Bestimmen Sie $(\mathbb{N} \times N_2) \cap (N_2 \times N_3)$.

Übung 5 (Abbildungen und Gruppen)
Betrachten Sie Abbildungen von $\mathbb{R}$ (oder einer Teilmenge davon) nach $\mathbb{R}$ (oder einer Teilmenge davon) – das heißt, denken Sie sich einfach welche aus, indem Sie einfach *grand hand* Graphen zeichnen. Eine Berechnungsvorschrift brauchen Sie nicht unbedingt dazu. Und zwar sollen Sie

Graphen zeichnen für

- eine surjektive, aber nicht injektive Funktion,
- eine injektive, aber nicht surjektive Funktion,
- eine bijektive Funktion,
- eine konstante Funktion,
- eine weder surjektive noch injektive Funktion
- und eine Funktion, bei der das Bild der Definitionsmenge aus nur zwei Elementen besteht.

Übung 6 (Abbildungen und Gruppen)
In dieser Übung handhaben wir den Begriff des *Inversen* eines Gruppenelements ganz formal und axiomatisch. Damit richtet sich diese Übung an alle diejenigen, die – dem Geist dieses Skripts eigentlich zuwider – auch einmal ganz abstrakt und formal Beweise führen wollen. Was das bringt? Vor allem übt es den Umgang mit abstrakten Begriffsbildungen, der zum Beispiel in der Informatik immer wieder vorteilhaft eingesetzt werden kann. Darüberhinaus führt es zu einem vertieften Verständnis der Begriffe und erleichtert damit später die begriffliche Arbeit in schwierigeren Kontexten. Wir führen diesen Beweis Schritt für Schritt, und der Leser ist aufgefordert, jeden Schritt zu ergänzen und die axiomatische Begründung zu nennen. Für ein beliebiges Gruppenelement a bedeute a' sein Inverses.

> Zunächst ist also a' invers zu a, es gilt also $a \circ a' = n$, wenn n das Neutrale Element der Gruppe ist.
>
> Zudem ist aber auch $(a')'$ invers zu a', so dass $(a')' \circ a' = n$ ist.
>
> Setzen Sie nun die beiden linken Seiten dieser beiden Beziehungen gleich. Das ist möglich, weil sie beide $= n$ sind.
>
> Wenn die linken Seiten, b und c abgekürzt, gleich sind, dann auch $b \circ (a')'$ und $c \circ (a')'$. Beklammern Sie richtig!
>
> Setzen Sie jetzt die Klammern um! Warum dürfen Sie das tun?

Nutzen Sie in der neuen Beklammerung aus, dass $a' \circ (a')' = n$ ist.

Schließen Sie aus der definierenden Eigenschaft des Neutralen Elements, dass $a = (a')'$.

Was Sie hier bewiesen haben, ist beim "normalen" Rechnen nichts anderes als eine so wohlbekannte Beziehung wie $-(-4) = 4$. Der entscheidende Punkt hier ist eben, dass dies in *jeder* Gruppe gilt, ganz gleich, wie sie formal definiert ist: das Inverse des Inversen eines Gruppenelements ist dieses Gruppenelement selbst.

Übung 7 (Abbildungen und Gruppen)
Hier kommt ein ganz einfaches Beispiel für eine nichtassoziative Verknüpfung auf den Reellen Zahlen. Es sei λ irgendeine reelle Zahl. Wir setzen nun die folgende Verknüpfungsregel fest: $V_\lambda : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}; (x, y) \mapsto V_\lambda(x, y) := x + \lambda y$. Das ist also so eine Art Addition, bei der aber der zweite Summand (und nur dieser) vorher mit der Zahl λ multipliziert wird. Rechnen Sie nach, dass V_λ *nicht* assoziativ ist, außer für einen ganz bestimmten Wert von λ – nämlich welchen? Und was ist mit $\lambda = -1$ (man nennt es "Subtraktion")?

Übung 8 (Abbildungen und Gruppen)
Wir betrachten ein Beispiel für eine nichtkommutative Verknüpfung, das auf den Stoff der folgenden Kapitel vorausweist. Dazu betrachten wir zwei-mal-zwei-Schemata von Zahlen mit Klammern drum, etwa in der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Ein solches Arrangement wollen wir "Matrix" nennen, hier speziell 2×2-Matrix oder genauer "reelle 2×2-Matrix", wenn eben die Einträge a, b, c und d – auch *Komponenten* genannt – reelle Zahlen sind. Haben wir zwei von diesen rellen 2×2-Matrizen, etwa $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$, dann können wir ihr *Matrixprodukt* erklären durch $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix}$. Warum so und nicht anders und was das Ganze soll? Das kriegen wir später. Hier lassen wir es uns erst einmal nicht verdrießen, die Definition unverstanden hinzunehmen und auf zwei Beispiel-Matrizen anzuwenden, etwa auf $K = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ und $L = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ oder auf irgend etwas anderes Ausgedachtes. Man berechne explizit $K \cdot L$ und $L \cdot K$ und vergleiche! Thema "multiplikativ Neutrales Element": man berechne außerdem $K \cdot E$ und $E \cdot K$ mit $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Übung 9 (Reelle Zahlen)
Machen Sie sich die folgenden Tatbestände deutlich:
Wenn die reellen Zahlen b und d beide echt größer als 0 sind, dann gilt $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc$ für alle

$a, c \in \mathbb{R}$.
Gilt $0 \leqslant a \leqslant \epsilon$ für jede positive reelle Zahl ϵ, so ist $a = 0$.

Übung 10 (Komplexe Zahlen)
Berechnen Sie die komplex Konjugierten zu $1 + 2\mathrm{i}$, $1 - 2\mathrm{i}$, $1 + 2$, $\frac{1}{1+2\mathrm{i}}$. *Anleitung* zur letzteren: multiplizieren Sie $\frac{1}{1+2\mathrm{i}}$ zunächst mit $1 \equiv \frac{1-2\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$ und sehen Sie, dass i nunmehr nur noch im Zähler erscheint, so dass Sie leicht nach Real- und Imaginärteil aufspalten können. Im Ergebnis erhalten Sie $\overline{\frac{1}{1+2\mathrm{i}}} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}\mathrm{i}$.

Was ist $\overline{\overline{z}}$?

Zeigen Sie für eine beliebige Zahl $z \in \mathbb{C}$, dass $z \cdot \overline{z}$ stets reell ist. Drücken Sie $z \cdot \overline{z}$ durch $\mathfrak{Re}\, z$ und $\mathfrak{Im}\, z$ aus. Welche Beziehung zum Betrag $\sqrt{x^2 + y^2}$ eines Vektors $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ können Sie erkennen? Hier zeigt sich der Sinn der komplexen Konjugation: die Multiplikation einer komplexen Zahl mit ihrer komplex Konjugierten bildet das reelle Betragsquadrat dieser Zahl. Durch entsprechendes Erweitern eines Bruches aus komplexen Zahlen kann man also den Nenner reell machen und so diesem Bruch seinen Real- und seinen Imaginärteil entnehmen. So wie im ersten Teil dieser Übungsaufgabe geschehen.

Stellen Sie sich $z \in \mathbb{C}$ als Punkt in der komplexen Ebene vor. Wo liegt dann $\overline{z}$?

Übung 11 (Komplexe Zahlen)
Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der Zahl $\frac{1}{z}$, wenn z selbst Realteil x und Imaginärteil y hat. *Hinweis*: lesen Sie die Erklärungen zur vorangehenden Übung.

Übung 12 (Komplexe Zahlen)
Wenn wir, wie im Skript, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} := \cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi$ setzen, dann gilt natürlich $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)} := \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\,\sin(\varphi_1 + \varphi_2)$. Zeigen Sie, dass daraus $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}$ folgt, indem Sie die *Additionstheoreme* für Sinus und Cosinus benutzen. Diese lauten[1] $\cos(\varphi_1+\varphi_2) = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2$ und $\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2$.

Übung 13 (Komplexe Zahlen)
Gegeben seien zwei komplexe Zahlen in Polarkoordinaten-Darstellung, also etwa $z_1 = r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}$ und

[1] was man sich letztlich gar nicht zu merken braucht, eben *weil* dieser Zusammenhang mit der Funktionalgleichung der e-Funktion besteht.

$z_1 = r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}$. Berechnen Sie explizit ihr Produkt $z_1 z_2$ und drücken Sie dieses wiederum in Polarkoordinaten aus. *Anleitung*: Wie wir zwei komplexe Zahlen, die in cartesischer Form $\Re z + \mathrm{i}\Im z$ gegeben sind, miteinander multiplizieren, wissen wir – das war ja der Einstieg in die Komplexen Zahlen. Ebenso wissen wir, wie $\Re z$ und $\Im z$ ermittelt werden, wenn $|z|$ und $\arg(z)$ gegeben sind. Also brauchen wir nur letzteres in ersteres einzusetzen und die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus $\cos(\varphi_1+\varphi_2) = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2$ und $\sin(\varphi_1+\varphi_2) = \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2$ anzuwenden. Im Prinzip ist diese Aufgabe also mit der vorangehenden identisch...

Interpretieren Sie die anschauliche Wirkung der Multiplikation zweier komplexer Zahlen, in der Ebene $\mathbb{R}+\mathrm{i}\mathbb{R}$ gesehen, auf Basis der Multiplikationsregel für komplexe Zahlen in Polarkoordinaten-Darstellung. Verwenden Sie dabei das Wort "Drehstreckung".

Welche Wirkung hat das Bilden der konjugiert Komplexen $\overline{z}$ zu z, in polarer Darstellung gesehen?

Weiterführende Übung

Wir betrachten in dieser Übung *Tupel* reeller oder komplexer Zahlen. Ein n-Tupel ist eine geordnete Liste von Zahlen der Form $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, wobei n eine natürliche Zahl ist. Die 1-Tupel sind einfach identisch mit den Rellen oder Komplexen Zahlen, für $n = 2$ spricht man auch von *Paaren* reller oder komplexer Zahlen und für $n = 3$ von *Tripeln*. Wer die Begriffe Quadrupel, Quintupel und so weiter für 4-Tupel, 5-Tupel etc verwendet, ist ein Lateiner. In der Linearen Algebra ist es übrigens durchaus üblich, die Einträge oder *Komponenten* eines n-Tupels *untereinander* zu schreiben statt nebeneinander, also zum Beispiel $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ statt $(2, 0, -\frac{1}{2})$. Das werden wir in den folgenden Kapiteln meistens auch so handhaben (und man wird sehen, warum); das Problem damit ist nur, dass die Spaltenschreibweise einigermaßen platzfressend ist und die Lesbarkeit des Zeilenlaufs stört. In dieser Übung schreiben wir die Komponenten eines Tupels deshalb nebeneinander, aber jeder ist eingeladen, das in seinem eingenen Aufschrieb anders zu machen.

Wir kürzen die Reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und die Komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ im Folgenden summarisch mit $\mathbb{K}$ ab; $\mathbb{K}$ bedeutet also hier nicht irgendeinen Körper, sondern nur entweder $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Die Menge aller n-Tupel von Zahlen aus $\mathbb{K}$ nennen wir entsprechend $\mathbb{K}^n$, weil es sich ja um ein n-faches cartesisches Produkt $\mathbb{K}^n \equiv \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}$ handelt (siehe "Mengen und Mengenverknüpfungen" Seite 7). In $\mathbb{K}$ ist die *Addition* erklärt. Mit ihrer Hilfe definieren wir nun die Addition zweier n-Tupel $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ und $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ als $\mathbf{a} + \mathbf{b} := (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$

in naheliegender Weise, nämlich Komponente für Komponente[2]. Die Addition zweier Tupel ist also nur erklärt für Tupel gleicher Länge! Man argumentiere nun zunächst, dass für festes n die Menge aller n-Tupel mit dieser Addition als Verknüpfung eine Gruppe bildet. Welches ist das Neutrale Element dieser Gruppe? Wie bildet man das additiv Inverse zu einem Tupel?

Jetzt erweitern wie diese Struktur – bislang bietet sie ja nichts wirklich Neues; wir haben lediglich das wohlbekannte $\mathbb{K}$ quasi n-mal nebeneinander gestellt. Das folgende Manöver geht aber über die “parallelisierte Gruppe $(\mathbb{K}, +)$” hinaus und erschafft das, was eigentlich den Kern der Linearen Algebra ausmacht: wir können ein Tupel strecken, stauchen oder ganz allgemein *skalieren* mit irgendeiner Zahl λ aus $\mathbb{K}$. Das ist sehr einfach: für $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ist $\lambda \cdot \mathbf{a}$ definiert als $\lambda \cdot (a_1, a_2, \ldots, a_n) := (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n)$.

Diese “skalare Multiplikation” ist also *keine* Abbildung nur innerhalb der Gruppe der n-Tupel. Sie weist jedem *Paar* $(\lambda, \mathbf{a}) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n$ ein neues Tupel aus $\mathbb{K}^n$ zu. Der “Skalar” λ kommt von außen und erzeugt aber durch Dranmultiplizieren wieder ein Gruppenelement.

Zeigen Sie nun, dass für ein beliebiges n-Tupel $\mathbf{a}$ und die Zahl $\lambda = 0$ gilt, dass $0 \cdot \mathbf{a}$ das Neutrale Element $\mathbf{0}$ der Gruppe der Tupel ergibt und ferner, dass $(-1) \cdot \mathbf{a}$ zu $\mathbf{a}$ invers ist im Sinne der Tupeladdition dieser Gruppe.

Um mit diesen Konzepten Geometrie betreiben zu können – und historisch gesehen ist die Analytische Geometrie Anlass, Ausgangspunkt und Ziel der Linearen Algebra, auch wenn die Analytische Geometrie heutzutage im Lehrbetrieb etwas aus dem Fokus geraten ist[3] –, bedarf es noch einer weiteren Zusatzstruktur. Zwar gestatten es die 3-Tupel des “dreidimensionalen Anschauungsraums”, physikalischen oder technischen Größen neben ihrem Betrag auch noch eine Richtung aufzumodellieren[4], einen “Betrag”, also eine Länge, braucht ein solcher “Vektor” aber gleichwohl. Die entsprechende Zusatzstruktur heißt “*Euklidisch*” und verdient ein eigenes Kapitel. Allerdings erst gegen Ende dieses kleinen Kurses, was wiederum spiegelt, dass sich die Lineare Algebra von der anschaulichen Geometrie der Physiker, die sie erfunden haben, sehr weitgehend emanzipiert hat. Die Anwendungen der Linearen Algebra in allen möglichen Zusammenhängen sind mittlerweile so zahlreich, dass man sie eher als eine Art Basiskonzept betrachten sollte denn als Geometrie-Werkzeug.

---

[2] Hier und im Folgenden durchweg sind Variable, die Tupel sind, fett gedruckt und gewöhnliche reelle oder komplexe Zahlen normal.

[3] ... außer bei Spieleentwicklern, VR-Spezialisten und Ingenieuren mit komplexen geometrischen Fragestellungen.

[4] Man denke an die *Kraft* als gerichtete Größe im Gegensatz zur *Temperatur*.

Aufgabe: Recherchieren Sie in diversen Medien Beispiele für Anwendungen der Linearen Algebra in der Mathematik selbst, in den Naturwissenschaften, der Technik, der Ökonomie, in Data Science und so weiter. Natürlich nicht erschöpfend, das wäre beinahe unmöglich, aber mit ein paar prägnanten Beispielen.

Zusatzübung (Aussagenlogik)
Sie sind Officer der Polizei in den USA und betreten in dieser Funktion die Bar eines Restaurants an einem Highway. Dort sitzen 4 Personen und trinken. Sie wissen, dass der Genuß alkoholischer Getränke in der USA nur Personen gestattet ist, die 21 Jahre alt sind oder älter, und Ihre Aufgabe besteht nun darin, die Einhaltung dieses Gesetzes in den vorliegenden Fällen zu prüfen. Zwei der Gäste sind junge Leute, denen Sie ihr Alter nicht verlässlich ansehen können - vielleicht jünger als 21, vielleicht aber auch älter. Einer der beiden trinkt ein Bier, der andere ersichtlich eine alkoholfreie braune Zuckerbrause. Von den beiden anderen Gästen ist der eine ein langbärtiger erfahrener Trucker, der andere ein Teenager, offenbar sein Sohn, ganz sicher bei weitem keine 21 Jahre alt. Was die beiden aber trinken, ist nicht zu erkennen - irgend etwas Undefinierbares, möglicherweise alkoholischer Natur, vielleicht aber auch nicht.
Mindestens welche der Gäste resp. Getränke müssen Sie näher kontrollieren, um hundertprozentig sicher sein zu können, dass dem Gesetz Genüge getan wurde?