Übungsblatt zu “Matrizen”

Sommersemester 2022

Übung 1 (Anwendung von Matrizen auf Vektoren)
Man denke sich eine Anzahl von Vektoren verschiedener Dimension aus sowie Matrizen, die auf diese Vektoren angewandt werden können. Wie wirken Zeilen- und Spaltenzahl der Matrizen und Dimension der Vektoren beziehungsweise der Ergebnisvektoren zusammen? Man vergesse die Extremfälle nicht: Vektoren mit nur einer Dimension beispielsweise, oder Matrizen, die zu Zeilen- oder Spaltenvektoren ausgeartet sind.

Können Sie eine 3×3-Matrix konstruieren, deren Einträge *nicht* alle Null sind, die aber einen gegebenen 3-dimensionalen Vektor, dessen Einträge ebenfalls nicht alle Null sind, in den Nullvektor $\mathbf{0} = (0, 0, 0)^\mathsf{T}$ abbildet?Wie müsste eine 3×3-Matrix aussehen, die *jeden* 3-dimensionalen Vektor in den Nullvektor wirft? Gibt es auch eine Matrix, die *nie* einen Vektor (außer dem Nullvektor selbst natürlich) in den Nullvektor abbildet?

Betrachten Sie die Matrizen zu den linearen Abbildungen $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Allgemein heißt die Menge der linearen Abbildungen eines Vektorraums $(\mathrm{V}, \mathbb{K})$ in den Körper $\mathbb{K}$, punktweise mit Addition und Äußerer Multiplikation ausgestattet, *Dualraum* von V, bezeichnet mit V^*. Die Matrizen, die Sie gerade gefunden haben, bilden also den Dualraum von $\mathbb{R}^n$. Der Dualraum eines endlichdimensionalen Vektorraums ist *isomorph* (“strukturgleich”) zum Vektorraum selbst – können Sie das im vorliegenden Fall erkennen? Übrigens werden die Elemente des Dualraums auch 1-*Formen* genannt. Mit Formen werden wir in einem späteren Kapitel noch zu tun bekommen[1].

Übung 2 (Rechnen mit Matrizen)
Seien $K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zwei lineare Abbildungen mit den Matrizen (K_{ji}) respektive (L_{ji}). Weisen Sie zunächst nach, dass dann auch $K + L$, punktweise definiert als

[1] In der Physik werden, besonders in der klassischen Literatur, 1-Formen ebenfalls als *Vektoren* angesprochen; Sie haben gerade gesehen, warum. Zur Unterscheidung nennt man dann Vektoren, die eigentlich im Dualraum zu verorten sind, *kovariante* Vektoren, während die “eigentlichen” Vektoren *kontravariante* Vektoren heißen. Im klassischen Tensorkalkül, wo man ausschließlich mit indizierten Komponenten arbeitet, hat man vereinbart, ko- und kontravariante Vektoren durch die Stellung ihrer Komponentenindizes zu unterscheiden: kontravariante Vektoren tragen ihren Index *oben*, kovariante hingegen, so wie wir das gewohnt sind, *unten*. Interessant in diesem Zusammehang ist die “Einsteinsche Summenkonvention”: treffen ko- und kontravariante Tensoren aufeinander, werden gleiche Indizes automatisch als einer Summation unterworfen interpretiert. Ein Ausdruck wie $v^i w_i$ ist mit dieser Konvention als $\sum_{i=1}^n v^i w_i = v^1 w_1 + \cdots v^n w_n$ zu lesen, was nichts anderes ist als die Anwendung der *linearen Abbildung*, die $(v^1, \ldots, v^n)$ (*ohne* hochgestelltes T!) ja eigentlich darstellt, auf den *Vektor* $(w_1, \ldots, w_n)^\mathsf{T}$.

$(K+L)(\mathbf{v}) := K\mathbf{v} + L\mathbf{v}$ für jedes $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, sowie für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ die Funktion $\lambda \cdot K$, punktweise definiert als $(\lambda \cdot K)(\mathbf{v}) := \lambda \cdot K\mathbf{v}$, für jedes $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ jeweils lineare Abbildungen sind. Rechnen Sie dann die Beziehungen $(K+L)_{ji} = K_{ji} + L_{ji}$ und $(\lambda \cdot K)_{ji} = \lambda \cdot K_{ji}$ für die jeweilige Komponente in der j-ten Zeile und der i-ten Spalte nach. *Hinweis*: eine einfache Möglichkeit, das zu tun, besteht in der Anwendung der Komponentendefinition $L_{ji} := (L\mathbf{e}_i)_j$ zusammen mit dem Umstand, dass für die i-te Komponente einer beliebige Summe von Vektoren $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ gilt $(\mathbf{v} + \mathbf{w})_i = v_i + w_i$,.

Übung 3 (Rechnen mit Matrizen)
Denken Sie sich jetzt auch noch eine Tüte voller Matrizen und Vektoren aus, die Sie in allen möglichen (aber nur in den *möglichen*!) Varianten aufeinander multiplizieren. Interpretieren Sie stets das jeweilige Ergebnis als Anwendung einer linearen Abbildung auf einen Vektor, als Hintereinanderausführung zweier linearen Abbildungen und so weiter: betrachten Sie beispielsweise das Prodult einer 1×4-Matrix ("Zeilenvektor") auf eine 4×1-Matrix ("Spaltenvektor"). Auf wieviele Arten können Sie dieses Manöver interpretieren?

Eine einfache Möglichkeit, sich beliebig viele Matrizen und Vektoren zu verschaffen, besteht – neben der Konsultation einschlägiger Aufgabensammlungen und der Gruppenarbeit – in der Verwendung eines CAS (*Computer Algebra System*), also einer Rechneranwendung, die symbolische Kalkulationen durchführen kann. Da fallen einem natürlich zuerst die umfassenden, aber nicht eben billigen Schlachtschiffe dieser Computerprogramm-Kategorie ein wie Maple oder Mathematica. Ebenfalls sehr umfassend und über eine IDE leicht zu bedienen ist aber zum Beispiel SymPy, ein Paket für die beliebte & verbreitete Programmiersprache Python. Zur Nutzung von SymPy und seiner Funktionalitäten hängt man Python unter seine Lieblings-IDE und importiert – hier am Beispiel eines Jupyter Notebook mit der "pretty print"-Option – das SymPy-Paket mittels

```
import sympy
from sympy import *
import sys
sys.displayhook = pprint
```

Eine Matrix kann man dann wie folgt eingeben. Beispielsweise wollen wir mit $M = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 8 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ rechnen. Wir geben dazu hinter dem Konstruktor 'Matrix' eine "Liste" ein, durch eckige Klammern begrenzt, und innerhalb dieser Liste wiederum Listen, deren jede eine Matrix-Zeile repräsentiert:

```
M = Matrix([[4, 3, 5, 1], [0, 2, -1, -1], [8, Rational(1, 2), 0, 0]])
```

Bruchrechnen bewerkstelligt SymPy nämlich über die explizite Angabe Rationaler Zahlen mittels Rational(x, y) für Zähler x und Nenner y. Einfach

```
M
```

aufzurufen zeigt dann sehr schön, nämlich vermittels LaTeX formatiert, die Matrix M an, praktisch so wie hier im Fließtext. Weil Vektoren üblicherweise als Spaltenvektoren aufgefasst werden, versteht SymPy eine Matrix mit einer *Zeile* tatsächlich als Spalten*vektor* - das soll die Eingabe rascher und bequemer machen (und ein bisschen Verwirrung wird dabei in Kauf genommen):

```
v = Matrix([1, Rational(-1, 2), 0, 2])
```

Wir überschlagen im Kopf rasch, dass das Produkt $M\mathbf{v}$ von den Dimensionen her gebildet werden kann und $(\frac{9}{2}, -3, \frac{31}{4})^\mathsf{T}$ ergeben sollte, und in der Tat, das Kommando

```
M * v
```

zeigt uns schön formatiert genau diesen Vektor.— Es bedarf wohl keiner Erwähnung, dass SymPy *alle* Berechnungsfunktionalitäten beherrscht, die uns im Laufe unserer Vorlesung begegnen werden. Wir werden beim Invertieren von Matrizen, der Ermittlung von Bild- und Kern-Unterräumen, dem Berechnen von Determinanten und so weiter und so fort in den Übungen gelegentlich deshalb den einen oder anderen Hinweis auf die entsprechenden SymPy-Codes einstreuen.

Übung 4 (Rechnen mit Matrizen)
Hier führen wir die in Übung 1 betrachteten 1-Formen ein bisschen weiter; warum, wird erst später deutlich werden (siehe die "Weiterführende Übung"). Es gibt zuvörderst ja keinen Grund, sich bei Abbildungen eines n-dimensionalen Vektorrraums $(\mathrm{V}, \mathbb{K})$ (wie immer ist $\mathbb{K}$ als $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ zu lesen) in den Grundkörper $\mathbb{K}$ unbedingt auf *ein* Argument zu beschränken. Warum nicht k Argumente zulassen? Eine Abbildung[2] $\omega : \mathrm{V} \times \mathrm{V} \times \ldots \mathrm{V} \to \mathbb{K}$ (V tritt k mal auf) heißt k-Form, vorausgesetzt, sie ist *multilinear*, will heißen in jedem einzelnen ihrer Argumente linear. In eine k-Form ω stopft man also k *Vektoren* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ als Argumente hinein und erhält als Ergebnis eine *Zahl*. Die Multilinearität heißt explizit und umständlich ausgeschrieben einfach nur $\omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \lambda \cdot \mathbf{v}_i, \ldots \mathbf{v}_k) = \lambda\,\omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots \mathbf{v}_k)$ für jede Zahl λ und jedes $i = 1 \ldots k$, und $\omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i + \mathbf{w}_i, \ldots \mathbf{v}_k) = \omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots \mathbf{v}_k) + \omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{w}_i, \ldots \mathbf{v}_k)$ für alle Vektoren und jedes $i = 1 \ldots k$.

Denken Sie sich erst einmal eine 3×3-Matrix (B_{ij}) aus. Für jedes *Paar* von Spaltenvektoren $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ aus $\mathbb{R}^3$ bilden Sie die folgende Matrixmultiplikation: $\mathbf{v}^\mathsf{T} \cdot B \cdot \mathbf{w}$, und beachten Sie dabei, dass $\mathbf{v}^\mathsf{T}$ ein *Zeilen*vektor ist, also eine 1×3-Matrix, während $\mathbf{w}$ weiterhin als Spaltenvektor in

[2]Das Zeichen ω ist ein kleines Omega.

dieses Produkt eingeht. Machen Sie sich klar, dass in dieser Weise (B_{ij}) eine Abbildung $B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stiftet. Rechnen Sie einige Funktionswerte aus, indem Sie sich eine Handvoll Paare $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ ausdenken. Handelt es sich bei B um eine 2-Form? Ist sie *symmetrisch*, gilt also $B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = B(\mathbf{w}, \mathbf{v})$? Wenn Sie eine symmetrische 2-Form gebastelt haben, probieren Sie herum, um eine nicht symmetrische zu finden, und umgekehrt. Welche Eigenschaft muss die Matrix (B_{ij}) haben, damit die von ihr produzierte 2-Form symmetrisch ist? – Können Sie eine *antisymmetrische* 2-Form finden, für die also $C(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -C(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ ist?

Übung 5 (Eigenschaften der Matrixmultiplikation)
Denken Sie sich *drei* nichtquadratische Matrizen aus, die sie aufeinander multiplizieren können, etwa K, L und M genannt. Führen Sie die beiden Matrixmultiplikationen in zweierlei Weise aus: zuerst die beiden ersten und dann das Ergebnis dieser Multiplikation mit der dritten – also $(K \cdot L) \cdot M$ –, dann zuerst die letzten beiden und anschließend das Ergebnis dieser Multiplikation mit der ersten – also also $K \cdot (L \cdot M)$. Schließen Sie auf die *Assoziativität* der Matrixmultiplikation.

Bilden Sie nun für zwei quadratische Matrizen N und P die Produkte $N \cdot P$ und $P \cdot N$. Vergleichen Sie und schließen Sie auf die *Nichtkommutativität* der Matrixmultiplikation. Sollten Sie *zufällig* zwei Matrizen gefunden haben, bei deren Multiplikation die Reihenfolge gleichgültig ist, versuchen Sie es nochmal mit einem anderen Paar und überlegen Sie sich, was der Grund war, dass bei Ihrem ersten Beispiel beide Produkte tatsächlich doch gleich waren.

Wiederholen Sie den vorherigen Schritt für den Fall, dass eine der beiden beteiligten Matrizen die *Einheitsmatrix* $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ ist.

Übung 6 (Eigenschaften der Matrixmultiplikation)
Erfinden Sie eine symmetrische und eine antisymmetrische Matrix, zum Beispiel in 2×2 Dimensionen.

Gegeben seien zwei quadratische Matrizen K und L. Weisen Sie nach, dass für die Transposition gilt $(K \cdot L)^\mathsf{T} = L^\mathsf{T} \cdot K^\mathsf{T}$ (Reihenfolge beachten!).

Übung 7 (Die Inverse einer Matrix)
Betrachten Sie die Matrix $K = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Weisen Sie nach, dass K kein Inverses besitzt, das

heißt, dass keine 2×2-Matrix L existiert mit $KL = E$. *Anleitung*: nehmen Sie an, es gäbe *doch* so ein $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Führen Sie das Produkt KL aus; Sie erhalten vier Gleichungen. Lösen Sie eine der beiden, bei der rechts eine Null steht, nach einer der Variablen a, b, c oder d auf und setzen Sie das Ergebnis in die passende der beiden Gleichungen, bei denen rechts eine Eins steht, wieder ein, um einen Widerspruch zu erzeugen.

Betrachten Sie nun $M = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ und suchen Sie nach einem L mit $ML = E$. Gehen Sie so vor wie im vorangehenden Aufgabenteil: lösen Sie eine der vier Gleichungen nach einer der Variablen auf und setzen Sie das Ergebnis in eine passende andere Gleichung ein. Verifizieren Sie, dass das Ergebnis (*Spoiler*: $L = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$) tatsächlich das Gewünschte leistet.

Übung 8 (Basiswahlen) *Achtung*: alpines Gelände, Trittsicherheit erforderlich. Nur für Geübte. Wir erinnern uns an die Weiterführende Übung des Übungsblatts zu "Lineare Räume", wo wir den Vektorraum $\mathbb{R}^3$ zusammen mit zwei verschiedenen Basen – dort noch nicht so genannt – untersucht hatten: einmal die Basis der Einheitsvektoren $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ und zweitens eine *Ad Hoc* zusammengebastelte Basis $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Wir konnten zeigen, wie sich diese Basen ineinander umrechnen lassen: $\mathbf{e}_1 = \mathbf{b}_1$, $\mathbf{e}_2 = -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$ und $\mathbf{e}_3 = -\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$. Wir wollen im Folgenden den Abschnitt im Skript über Basenwahlen explizit auf dieses Beispiel anwenden, um zu sehen, wie Basiswechsel in der Praxis vor sich gehen.

> Im vorliegenden Beispielfall haben wir den Vektorraum $\mathrm{V} := \mathbb{R}^3$ gegeben, dessen Elemente Zahlentripel sind. Die im Skript eingeführten *kanonischen Basisisomorphismen* φ sind hier also Abbildungen, die Zahlentripel – interpretiert als Komponententripel bezüglich einer konkreten Basiswahl – in Zahlentripel – interpretiert als Elemente des abstrakten Vektorraums V – überführen. Diese Verwechselbarkeit macht die Sache für den, der zum ersten Mal gründlicher darüber nachdenken will, nicht etwa einfacher, sondern schwieriger. Aus diesem Grund wollen wir hier so genau wie möglich unterscheiden: *Vektoren* aus dem abstrakten Vektorraum $\mathrm{V} = \mathbb{R}^3$ bezeichnen wir mit einzelnen Buchstaben, also etwa $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{b}_3$ oder $\mathbf{v}$. *Komponententripel* schreiben wir explizit aus, also etwa $(-7, 2, 3)^\mathsf{T}$. Wir hatten in der "Weiterführenden Übung" Subskripte verwendet, um anzuzeigen, bezüglich welcher Basis die Komponenten jeweils gelten sollen, und notieren nun präziser $\varphi_\mathbf{b}(-7, 2, 3)^\mathsf{T} = (-7) \cdot \mathbf{b}_1 + 2 \cdot \mathbf{b}_2 + 3 \cdot \mathbf{b}_3$: auf der linken Seite wird auf das Zahlentripel $(-7, 2, 3)^\mathsf{T}$ der Basisisomorphismus $\varphi_\mathbf{b}$ bezüglich der Basis $(\mathbf{b}_i)$ angewandt, so dass ein abstrakter Vektor in V, nämlich $(-7) \cdot \mathbf{b}_1 + 2 \cdot \mathbf{b}_2 + 3 \cdot \mathbf{b}_3$ resultiert.

Schritt 1. So weit, so gut. Bevor wir die eigentliche Übung beginnen, in der es natürlich um Matrizen und ihre Rolle bei Basiswechseln gehen soll, rechnen wir zunächst erst einmal $\mathbf{e}_1 = \mathbf{b}_1$, $\mathbf{e}_2 = -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$ und $\mathbf{e}_3 = -\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$ in die andere Richtung um, will sagen, wir drücken die $\mathbf{b}_i$ durch die $\mathbf{e}_i$ aus, einfach nur, um zu verstehen, dass das gehen muss, da es sich beidesmal um Basen handelt. Nota bene: diese Beziehungen sind im Sinne der hier eingenommenen pedantischen Sichtweise Gleichungen zwischen abstrakten Vektoren aus V.

Hinweis: Beginnen Sie zum Beispiel, indem Sie die beiden Gleichungen $\mathbf{e}_2 = -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$ und $\mathbf{e}_3 = -\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$ addieren und $\mathbf{e}_1 = \mathbf{b}_1$ ausnutzen. Oder schauen Sie einfach mal genau auf die expliziten Komponentendarstellungen (*bezüglich der* $\mathbf{e}_i$ *!*) der drei Vektoren $\mathbf{b}_i$. *Ergebnis*: $\mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ und $\mathbf{b}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

Schritt 2. Wir spezialisieren das allgemeine Diagramm für Basiswechsel aus dem Skript auf den vorliegenden Beispielfall:

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{V} \equiv \mathbb{R}^3 & \\
\mathbb{R}^3 \arrow[ur, "\varphi_{\mathbf{e}}"] \arrow[rr, "T_{\mathbf{be}}"] & & \mathbb{R}^3 \arrow[ul, "\varphi_{\mathbf{b}}"']
\end{tikzcd}$$

Aus dem Diagramm ist ersichtlich, dass wir nach der Matrix für den Basiswechsel $T_{\mathbf{be}} = \varphi_{\mathbf{b}}^{-1} \circ \varphi_{\mathbf{e}}$ suchen.

Dabei stehen uns zu Gebote einmal die (trivialen) Beziehungen $\varphi_{\mathbf{e}}(1,0,0)^{\mathsf{T}} = \mathbf{e}_1$, $\varphi_{\mathbf{e}}(0,1,0)^{\mathsf{T}} = \mathbf{e}_2$ und $\varphi_{\mathbf{e}}(0,0,1)^{\mathsf{T}} = \mathbf{e}_3$ sowie $\varphi_{\mathbf{b}}(1,0,0)^{\mathsf{T}} = \mathbf{b}_1$, $\varphi_{\mathbf{b}}(0,1,0)^{\mathsf{T}} = \mathbf{b}_2$ und $\varphi_{\mathbf{b}}(0,0,1)^{\mathsf{T}} = \mathbf{b}_3$ – das sind die Basisvektoren der beiden Basiswahlen in V. Und zum anderen die drei Gleichungen, die die Basen auseinander hervorgehen lassen: $\mathbf{e}_1 = \mathbf{b}_1$, $\mathbf{e}_2 = -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$ und $\mathbf{e}_3 = -\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$.

Bestimmen Sie daraus die Komponenten der Matrix zu $T_{\mathbf{be}}$!

Anleitung: "Die Spalten / Sind Bilder / ...", also müssen wir die Zahlentripel (!) $T_{\mathbf{be}}(1,0,0)^{\mathsf{T}}$, $T_{\mathbf{be}}(0,1,0)^{\mathsf{T}}$ und $T_{\mathbf{be}}(0,0,1)^{\mathsf{T}}$ berechnen, denn diese drei, nebeneinandergesetzt, ergeben die gesuchte Matrix. Weil nun aber $T_{\mathbf{be}} = \varphi_{\mathbf{b}}^{-1} \circ \varphi_{\mathbf{e}}$ ist und $\varphi_{\mathbf{e}}(1,0,0)^{\mathsf{T}} = \mathbf{e}_1$ gilt (und so weiter), müssen wir $\varphi_{\mathbf{b}}^{-1} \circ \varphi_{\mathbf{e}}(1,0,0)^{\mathsf{T}} = \varphi_{\mathbf{b}}^{-1}(\mathbf{e}_1)$ berechnen und äquivalent $T_{\mathbf{be}}(0,1,0)^{\mathsf{T}} = \varphi_{\mathbf{b}}^{-1}(\mathbf{e}_2)$ und $T_{\mathbf{be}}(0,0,1)^{\mathsf{T}} = \varphi_{\mathbf{b}}^{-1}(\mathbf{e}_3)$. Was ist jetzt aber zum Beispiel $\varphi_{\mathbf{b}}^{-1}(\mathbf{e}_2)$?

Das wissen wir eigentlich längst: $\varphi_{\mathbf{b}}^{-1}(\mathbf{e}_2) = \varphi_{\mathbf{b}}^{-1}(-\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) = -(1,0,0)^{\mathsf{T}} + (0,1,0)^{\mathsf{T}} = (-1,1,0)^{\mathsf{T}}$. Das ist aber, wie gesagt, gleich $= T_{\mathbf{be}}(0,1,0)^{\mathsf{T}}$. So haben wir die *zweite* Spalte der Matrix zu $T_{\mathbf{be}}$ bestimmt. Berechnen Sie die noch fehlenden beiden! *Ergebnis*: $T_{\mathbf{be}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Schritt 3. Überzeugen Sie sich von der Richtigkeit des Gerechneten, etwa indem Sie $T_{\mathbf{be}}(0,1,0)^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ rechnen, und wie erwartet erhalten wir auch unser bekanntes Beispiel $T_{\mathbf{be}} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Schritt 4 der Übung besteht in der Berechnung der Komponenten von $T_{\mathbf{eb}}$, wenn $T_{\mathbf{eb}}$ die lineare Abbildung ist, welche die Sache umkehrt, also $T_{\mathbf{eb}} \circ T_{\mathbf{be}} = E$ erfüllt (E die Einheitsmatrix). Gehen Sie so vor wie in Schritt 2, indem Sie $T_{\mathbf{eb}} = \varphi_{\mathbf{e}}^{-1} \circ \varphi_{\mathbf{b}}$ benutzen und die drei Gleichungen $\mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ und $\mathbf{b}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, die wir zu Anfang hergeleitet haben. *Lösungsbeispiel* für die *zweite* Spalte: $T_{\mathbf{eb}}(0,1,0)^{\mathsf{T}} = \varphi_{\mathbf{e}}^{-1} \circ \varphi_{\mathbf{b}}(0,1,0)^{\mathsf{T}} = \varphi_{\mathbf{e}}^{-1}(\mathbf{b}_2) = \varphi_{\mathbf{e}}^{-1}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = (1,1,0)^{\mathsf{T}}$. *Ergebnis*: $T_{\mathbf{eb}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Schritt 5: Multiplizieren Sie $T_{\mathbf{be}}$ und $T_{\mathbf{eb}}$ aufeinander und überzeugen Sie sich davon, dass sie wirklich invers zueinander sind, das heißt ihre Hintereinanderausführung die Identität Id auf den Zahlentripeln $\mathbb{R}^3$ darstellt – auch Einheitsmatrix genannt; interpretieren Sie das Ergebnis also vor dem Hintergrund des Abschnitts 5.6. Verdeutlichen Sie sich an Hand des obigen Diagramms, warum dies so sein muss. Überzeugen Sie sich zudem davon, dass $T_{\mathbf{eb}}$ tut, was es soll, analog zu Schritt 3.

In **Schritt 4** der Übung transformieren wir eine beliebige gegebene Matrix (L_{ij}), die $\mathbb{R}^3$ in sich selbst abbildet, in eine neue Basis. Zum Beispiel $(L_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (oder was Sie möchten). Wir betrachten also eine lineare Abbildung $L : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ von dem abstrakten 3-dimensionalen Vektorraum V in sich selbst, die uns *in Koordinaten* gegeben ist, das heißt als Komponentenschema $(L_{ij})^{\mathbf{e}}$ nach Wahl einer bestimmten, aber letztlich beliebigen Basis $\varphi_{\mathbf{e}} : \mathbb{R}^3 \to \mathrm{V}$. Nun wollen wir das Zahlenschemar $(L_{ij})^{\mathbf{b}}$ bestimmen, das L annimmt, wenn wir eine *andere* Basis $\varphi_{\mathbf{b}} : \mathbb{R}^3 \to \mathrm{V}$ verwenden. Mit anderen Worten: erst *nach* der Wahl einer Basis für V können wir dessen Vektoren durch Zahlentripel repräsentieren, und erst dann ist des möglich, die Wirkung von L durch ein 3×3-Zahlenschema, genannt Matrix, darzustellen. Wie genau das Schema aber aussieht, hängt von der Basiswahl konkret ab. Die folgende Überlegung gestattet es jedoch, die eine Repräsentation von L als Matrix durch die andere auszudrücken. Schlüssel hierbei ist die Basiswechselmatrix $T_{\mathbf{eb}}$ aus den Schritten oben, denn die Situation stellt sich diagrammatisch wie folgt dar:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 \arrow[r, "(L_{ij})^{\mathbf{e}}"] & \mathbb{R}^3 \\
\mathbb{R}^3 \arrow[u, "T_{\mathbf{eb}}"] \arrow[r, "(L_{ij})^{\mathbf{b}}"] & \mathbb{R}^3 \arrow[u, "T_{\mathbf{eb}}"']
\end{tikzcd}$$

Wir fahren mit dem Finger die Pfeile entlang und sehen: $(L_{ij})^{\mathbf{b}} = T_{\mathbf{eb}}^{-1} \circ (L_{ij})^{\mathbf{e}} \circ T_{\mathbf{eb}}$ oder eben $(L_{ij})^{\mathbf{b}} = T_{\mathbf{be}} \circ (L_{ij})^{\mathbf{e}} \circ T_{\mathbf{eb}}$, und das ist auch schon die Lösung, denn alle drei auf der rechten Seite auftretenden Matrizen sind uns bekannt, und es ist ein Leichtes, diese drei aufeinanderzumultiplizieren. *Ergebnis*: $(L_{ij})^{\mathbf{b}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -6 & -5 & -3 \\ 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$.

Schritt 5: Wir verifizieren das Erreichte. Einmal wenden wir L in der Basis $\varphi_{\mathbf{e}}$, also in der Matrixgestalt $(L_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ auf einen Vektor $\mathbf{v}$ an, der in eben dieser Basis die Zahlentripel-Gestalt $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ hat (oder was Ihnen sonst einfallen mag). *Ergebnis*: $\varphi_{\mathbf{e}}^{-1}(L\mathbf{v}) = (9, 4, 16)^{\mathsf{T}}$.

Zweitens berechnen wir mit Hilfe von $T_{\mathbf{be}}$ die Zahlentripel-Gestalt, die *derselbe* Vektor $\mathbf{v}$ in der Basis $\varphi_{\mathbf{b}}$ hat – zur Erinnerung: $T_{\mathbf{be}}$ ist ja nichts anderes als der Wechsel $\varphi_{\mathbf{b}}^{-1} \circ \varphi_{\mathbf{e}}$. *Ergebnis*: $\varphi_{\mathbf{b}}^{-1}(\mathbf{v}) = (2, 3, -1)^{\mathsf{T}}$.

Drittens wenden wir *in der Basis* $\varphi_{\mathbf{b}}$ die Abbildung L auf $\mathbf{v}$ an, nutzen also $(L_{ij})^{\mathbf{b}}$. Ergebnis: $\varphi_{\mathbf{b}}^{-1}(L\mathbf{v}) = (5, -12, 16)^{\mathsf{T}}$.

Viertens überzeugen wir uns davon, alles richtig gemacht zu haben, indem wir $\varphi_{\mathbf{b}}^{-1}(L\mathbf{v})$ in $\varphi_{\mathbf{e}}^{-1}(L\mathbf{v})$ umrechnen oder umgekehrt und sehen, dass das Gleiche herausgekommen ist.

Wir haben in dieser Übung die in vielen Anwendungsbereichen so genannte *passive* Sichtweise für Koordinatentransformationen respektive Basiswechsel gewählt: ein Vektor $\mathbf{v}$ ist in dieser Sicht der Dinge irgendwie “da”, er ist wie auch immer gegeben auch ohne explizites Zu-Grunde-Legen einer Basis. In der Physik wird man die Dinge häufig so interpretieren – ein Feldstärken- oder Kraftvektor ist im Raum (oder in der Raumzeit) in irgend einer abstrakten Weise *vorhanden*, der messende Physiker erst etabliert ein Koordinatensystem, um dieser Größe Messwerte in Form einheitenbehafteter Zahlentupel zuweisen zu können. Ein Wechsel der Basis bedeutet dann den Wechsel der Zuweisung, ohne dass sich am Vektor selbst deshalb irgend etwas ändern würde. Natürlich kann man einen Vektor im

Allgemeinen nicht “explizit hinschreiben”, wenn man dies nicht in Form von Komponenten bezüglich einer Basis tun kann. Aber diese Komponentendarstellung “ist” nicht der Vektor, sondern nur eine unter unendlich vielen Möglichkeiten, den eigentlichen Vektor zu repräsentieren. In klassischen Texten der Physik über Feldtheorie und dergleichen finden sich dementsprechend Definitionen, die Vektoren (und dann auch Tensoren höherer Stufe) geradezu definieren über das oben dargestellte Verhalten bei Basiswechseln; nicht ganz ernsthaft kolportiert man diese Definitionen in Formulierungen wie “ein Vektor ist ein Vektor, der sich wie ein Vektor transformiert”. Der Vektor besteht quasi aus seinen unendlich vielen Komponentendarstellungen bezüglich der unendlich vielen entsprechenden Basen.

Für den konkreten Umgang mit Basiswechseln stellt die passive Sichtweise einen zwar anschaulichen, aber doch manchmal verwirrenden Zugang dar. Was soll es heißen, der Vektor $\mathbf{v}$ sei “da”, wenn noch keine Komponenten für $\mathbf{v}$ angegeben werden? Ist $(4, 2, -1)^{\mathsf{T}}$ nun ein Vektor oder “nur” seine Komponentendarstellung und was bedeutet diese Unterscheidung? Der *aktive* Standpunkt, den man einnehmen mag, wenn man einen außermathematisch-physikalischen Bezug nicht braucht oder unterdrückt, ist in dieser Hinsicht deutlich eingängiger: $\mathbf{v}$ *ist* gleich $(4, 2, -1)^{\mathsf{T}}$, und die Anwendung einer Basistransformation B überführt $\mathbf{v}$ tatsächlich aktiv in einen *anderen* Vektor $B\mathbf{v}$. Ein Teil der Anschauung geht dabei verloren, ein Teil der möglichen Verwirrungen jedoch vielleicht ebenfalls... Wir haben in dieser Übung den passiven Standpunkt einmal explizit durchexerziert, weil viele Anwendungen, nicht nur in der Physik, die entsprechende Sichtweise nahelegen.

Weiterführende Übung

Wir betrachten nun k-Formen wie in Übung 3, spezialisieren aber auf n, das heißt die n-Form ω soll auf gerade n Stück n-dimensionaler Vektoren angewandt werden. Der Definitionsbereich der hier betrachteten ω ist also $\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n$ (n mal), und $\mathbb{R}^n$ ist selbst auch n-dimensional.

Außerdem sollen unsere ω aber noch zwei *Zusatzbedingungen* erfüllen:
$\omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_n) = -\omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_n)$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$ (ω ist “total antisymmetrisch”), und
$\omega(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \equiv 1$ für die Standardbasis $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ von $\mathbb{R}^n$ (ω ist “normiert”).

Die Frage ist nun: wieviel verschiedene Formen dieser Art gibt es?

Um sich dem Problem zu nähern, betrachten Sie am besten ein Beispiel. Beschränken Sie sich der Übersichtlichkeit halber auf 3 Dimensionen. Dann entsteht die Aufgabe, für drei 3-dimensionale Vektoren $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ (mit Komponenten $\{u_i\}$, $\{v_i\}$ und $\{w_i\}$, $i = 1, 2, 3$) den Ausdruck $\omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ zu berechnen. Nun ist ω ja multilinear. Machen Sie sich deutlich, dass deshalb die Dreifachsumme

$\omega(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 u_i v_j w_k\, \omega(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k)$ herauskommt. Wenn Ihnen die gehäuften Summenzeichen unsympathisch sind, schreiben Sie einfach alle Terme explizit hin, das sind $3\cdot 3\cdot 3 = 27$ Stück, das ist noch überschaubar.

An dieser Stelle kommt die Antisymmetrie ins Spiel. Wenn im Argument von ω zwei oder mehr *gleiche* Vektoren stehen, verschwindet ω. Warum? Wir können die beiden gleichen Vektoren vertauschen, was einerseits nichts ändert, andererseits definitionsgemäß einen Vorzeichenwechsel nach sich ziehen sollte. Von den 27 Summanden aus der Dreifachsumme verbleiben also nur 6 Stück, die nicht Null sind, weil bei ihnen die drei Indizes verschieden sind, nämlich die Indextripel $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$ und $(3,2,1)$. Nun wieder die Antisymmetrie: $\omega(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_2) = (-1)\cdot\omega(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$ durch Vertauschung im 2. und 3. Argument. Auch bei den anderen fünf Termen vertauschen wir – ein- oder zweimal –, bis wir auf $\omega(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$ kommen, wobei das Vorzeichen $+1$ wird, wenn wir eine gerade Anzahl von Vertauschungen durchgeführt haben, und -1 bei einer ungeraden Zahl von Vertauschungen.

Weil aber $\omega(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$ voraussetzungsgemäß 1 ist, bleiben uns am Schluss insgesamt sechs Zahlen, gebildet aus den Vektorkomponenten: $\omega(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = u_1v_2w_3 - u_1v_3w_2 + u_2v_3w_1 - u_2v_1w_3 + u_3v_1w_2 - u_3v_2w_1$. Es gibt also für gegebene Dimension nur *genau eine* Form mit den angeführten Eigenschaften! denn sie *muss* zwangsläufig das hier aufgeschriebene Ergebnis liefern.

Das in der hier durchgeführten Rechnung auftretende Vorzeichen ± 1 ist natürlich nichts anderes als das Signum der Permutation, die wir jeweils durchgeführt haben, um auf $\omega(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$ zu kommen. Dementsprechend können wir die obigen dreidimensionalen Überlegungen direkt auf allgemeine n Dimensionen ausweiten und haben $\omega(\mathbf{e}_{\pi(1)},\ldots,\mathbf{e}_{\pi(n)}) = \mathrm{sign}(\pi)\cdot\omega(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)$. Wiederholen wir unsere dreidimensionale Rechnung für diesen allgemeinen n-dimensionalen Fall, ergibt sich analog, dass $\omega(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$ geschrieben werden kann als Summe aller Produkte der Komponenten von $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$, wobei wieder nur diejenigen Produkte übrigbleiben, bei denen *alle* Indizes verschieden sind, und sich das Vorzeichen des Summanden danach richtet, ob die jeweilige Permutation der Indizes gerade oder ungerade ist.

Damit können wir das Ergebnis hinschreiben. Etwas umständlich ist dabei nur, dass wir – anders als bei u, v und w – sowohl die in ω eingesetzten Vektoren indizieren müssen als auch deren Komponenten. Wir handeln uns also eine Doppel-Indizierung ein. Man sollte sich davon nicht erschrecken lassen, aber am Anfang mag es verwirrend erscheinen. Wir vereinbaren folgendes: die Vektoren $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ indizieren wir wie gehabt und schreiben sie mit fetten Symbolen, ihre

Komponenten notieren wir als $(\mathbf{v}_i)_j$, was heißen soll: die j-te Komponente des i-ten Vektors. In der Physik schreibt man übrigens einige der Indizes gerne auch oben rechts an das Symbol, was einem die Möglichkeit gibt, noch etwas aufgeräumter zu notieren[3]. So ausgerüstet können wir formulieren: $\omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = \sum_{\pi\in\mathcal{S}(n)} \operatorname{sign}(\pi) \cdot (\mathbf{v}_1)_{\pi(1)}(\mathbf{v}_2)_{\pi(2)} \cdots (\mathbf{v}_n)_{\pi(n)}$, wobei wir über $\mathcal{S}(n)$, also alle Permutationen von n summieren.

Am besten machen Sie sich diese Formel klar, indem Sie erneut auf den Fall $\mathbb{R}^3$ spezialisieren mit $\mathbf{v}_1 \equiv \mathbf{u}$, $\mathbf{v}_2 \equiv \mathbf{v}$ und $\mathbf{v}_3 \equiv \mathbf{w}$ und $\mathcal{S}(3) = \{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)\}$ und sehen, dass sich wieder die oben bereits notierten Ergebnisse einstellen. Rechnen Sie unbedingt auch ein, zwei Beispiele mit ganz konkreten Zahlen. Vielleicht auch ein *zwei*dimensionales.

Zum Schluss dieser Übung ein paar Bezeichnungen. Zunächst beobachten Sie bitte, dass die doppelt indizierten $(\mathbf{v}_i)_j$ sehr gut auch gelesen werden könnten als Matrixelemente v_{ij}. Wir lesen in dieser Interpretation also $\omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ als $\mathrm{D}\begin{pmatrix}(\mathbf{v}_1)_1 & (\mathbf{v}_1)_2 & \cdots & (\mathbf{v}_1)_n \\ (\mathbf{v}_2)_1 & (\mathbf{v}_2)_2 & \cdots & (\mathbf{v}_2)_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{v}_n)_1 & (\mathbf{v}_n)_2 & \cdots & (\mathbf{v}_n)_n\end{pmatrix}$ bei zeilenweiser Anordnung n Vektoren untereinander. Dann ist

$$\mathrm{D} : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}; M \mapsto \mathrm{D}(M) := \sum_{\pi\in\mathcal{S}(n)} \operatorname{sign}(\pi) \cdot v_{1\pi(1)} \cdot v_{2\pi(2)} \cdot \cdots \cdot v_{n\pi(n)}$$

eine *multilineare*, *total antisymmetrische* und *normierte* reellwertige Funktion auf den $n \times n$-Matrizen. Oder sogar “die” multilineare... usw., denn wir haben erkannt, dass es nur genau eine solche gibt.

Handlichere Berechnungsverfahren sowie ein paar wichtige Eigenschaften dieser Abbildung werden wir im nächsten Kapitel näher studieren. An dieser Stelle soll diese weiterführende Übung aber erst einmal beendet sein.

[3] Wobei man zugeben muss, dass im klassischen Tensorkalkül die Position eines Index auch eine Bedeutung hat. “Oben” oder “unten” unterscheidet “kontravariante” von “kovarianten” Tensoren, wie weiter oben bereits einmal angemerkt.