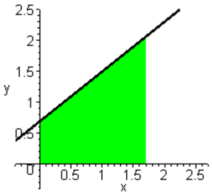
1. Einführung

1. Gegeben ist für $m, b > 0$ die Gerade $g(x) = m \cdot x + c$. Bestimmen Sie $\int_0^b g(x)\,dx$



mit Hilfe von Unter- und Obersumme.

Hinweis: Mit $\Delta x = \frac{b}{n}$ folgt $U_n = \sum_{i=0}^{n-1} g(i \cdot \Delta x) \cdot \Delta x$ und $O_n = \sum_{i=1}^{n} g(i \cdot \Delta x) \cdot \Delta x$.

Führen Sie die Grenzwerte für $n \to \infty$ aus.

2. Bestimmen Sie jeweils alle Stammfunktionen:

$f_1(x) = \frac{2x^2}{3} - \frac{x}{2} + 1 - \frac{3}{2x} + \frac{4}{3x^2}$, $f_2(x) = \sin x - 2\cos(2x) + 3\sin(3x) - 4\cos(4x)$,

$f_3(x) = (1-2x)^2 + (1-2x)^1 + (1-2x)^0 + (1-2x)^{-1} + (1-2x)^{-2}$.

3. Bestimmen Sie die Integrale:

$I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$, $I_2 = \int_0^{\pi} \cos x\,dx$, $I_3 = \int_0^{\pi} \sin(2x)\,dx$, $I_4 = \int_1^2 (1-x)^2\,dx$, $I_5 = \int_1^e \frac{1}{x}\,dx$, $I_6 = \int_{-e^2}^{-1/e} \frac{1}{x}\,dx$,

$I_7 = \int_{-1}^{1} \frac{2}{3x}\,dx$ (!), $I_8 = \int_{b/a}^{2b/a} (ax-b)^2\,dx$, $I_9 = \int_0^{\ln 2} \sinh(3x)\,dx$, wobei $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$,

$$I_{10} = \int_{-1}^{0} \left(3x^2 - 2x - 3 - \frac{2}{2x-1} \right) dx, \qquad I_{11} = \int_{-1}^{1} \left(3\cdot(2x+3)^2 - 9\cdot(2x+3) + \frac{2}{2x+3} + \frac{5}{(2x+3)^2} \right) dx$$

$$I_{12} = \int_{-1}^{2} \left(-9x^2 - 8x + 1 - \frac{4}{2x-5} + \frac{1}{3}(7-2x)^2 \right) dx, \qquad I_{13} = \int_1^2 \left(3\cdot(3-2x)^2 + \frac{1}{3\cdot(3-x)} + \frac{2}{3x} \right) dx$$

$$I_{14} = \int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{9}(2x-1)^3 - \frac{4}{2x-1} + \frac{25}{(2x-1)^3} \right) dx, \quad I_{15} = \int_0^2 \frac{3}{2\sqrt{1+12x}}\,dx, \quad I_{16} = \int_0^4 \frac{1}{2\sqrt{9+4x}}\,dx$$

$$I_{17} = \int_2^3 \left(\frac{6}{3x-5} - \frac{3}{\sqrt{3x-5}} \right) dx.$$

2. Integration durch Substitution

$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx$ mit der Substitution $u = x^2 + 1$ und Transformation der Integrationsgrenzen.

$I_2(x) = \int \frac{x^5}{4+x^2}\,dx$ mit der Substitution $u = 4 + x^2$.

$I_3(x) = \int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$ mit der Substitution $u = e^x$. Ergebnis: $\arctan\left(e^x\right)$, da $\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$

$I_4(x) = \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx$ mit der Substitution $u = e^{2x} + 1$.

$I_5(x) = \int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}\,dx$ mit der Substitution $u = e^x$ und dann Polynomdivision.

$I_6(x) = \int \frac{e^{4x}}{e^{2x}+1}\,dx$ mit der Substitution $u = e^{2x} + 1$ und dann Polynomdivision.

$I_7(x) = \int \frac{e^{5x}}{e^{2x}+1}\,dx$ mit der Substitution $u = e^x$ und dann Polynomdivision.

$I_8(x) = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$ für eine stetige Funktion $f(x) \neq 0$

$I_9(x) = \int \cos^n(x) \cdot \sin(x)\,dx$ für $n \neq -1$

$I_{10}(x) = \int \tan x\,dx$ mit der Substitution $u = \cos x$.

$I_{11}(x) = \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$ mit der Substitution $u = x + \sqrt{x^2-1}$ folgt $\frac{1}{u}\,du = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

$I_{12}(x) = \int \frac{2x-3}{5x-6}\,dx$ mit der Substitution $u = 5x-6$ und auch Polynomdivision.

$I_{13}(x) = \int \frac{2x^2-3x+2}{3-2x}\,dx$ mit der Substitution $u = -2x+3$ und auch Polynomdivision.

3. Partielle Integration

$$\boxed{\int f(x)\cdot g(x)\,dx = F(x)\cdot g(x) - \int F(x)\cdot g'(x)\,dx}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx = \left[F(x)\cdot g(x)\right]_a^b - \int_a^b F(x)\cdot g'(x)\,dx}$$

$I_1(x) = \int (1-2x)\cdot e^{-x}\,dx$

$I_2(x) = \int x^n \cdot \ln x\,dx$ für $n \neq -1$.

$I_3(x) = \int \frac{\ln x}{x}\,dx$. Hinweis: $\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x}\cdot \ln x$.

$I_4(x) = \int (\ln x)^2\,dx$. Hinweis Entweder $1\cdot(\ln x)^2$ oder $\ln x \cdot \ln x$. Verwenden Sie $I_2(x)$.

Ergebnis: $x\cdot\left((\ln x)^2 - 2\ln x + 2\right)$

$I_5(x) = \int x\cdot \sin\frac{2x}{3}\,dx$

$I_6(x) = \int x^2\cdot\cos 2x\,dx$

$I_7 = \int e^{-x}\cdot\cos(2x)\,dx$

$I_8 = \int_0^{\pi/2} x^2\cdot\cos 2x\,dx$

$I_9(x) = \int (\sin x)^2\,dx$

$I_{10}(x) = \int (\sin x)^3\,dx$ Hinweise: Verwenden Sie $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$.

4. Integration durch Partialbruchzerlegung

1. $\int \frac{2a}{x^2-a^2}\,dx$ für $a \neq 0$
2. $\int \frac{a}{x^2-a\cdot x}\,dx$ für $a \neq 0$
3. $\int \frac{x}{(x-a)^2}\,dx$
4. $\int \frac{x^2}{(x-a)^2}\,dx$
5. $\int \frac{6x^3+13x^2-13x-8}{2x^2+5x-3}\,dx$
6. $\int \frac{2x^4+5x^3+3x^2-4}{2x^3+3x^2}\,dx$
7. $\int \frac{18x^4-3x^3+17x^2+16x+3}{18x^4+12x^3+2x^2}\,dx$

5. Die Simpsonsche Regel

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\cdot\left[f(a)+f(b) + 4\cdot\sum_{i=1}^{n} f(a+(2i-1)\cdot h) + 2\cdot\sum_{i=1}^{n-1} f(a+2i\cdot h)\right] \quad \text{mit} \quad h = \frac{b-a}{2n}}$$

1. Es sei $f(x) = \sqrt{x}$. Bestimmen Sie $\int_1^3 f(x)\,dx$ einmal exakt und einmal mit Hilfe der Simpsonschen Regel.

   Wie groß ist die prozentuale Abweichung?

a. Für n=1: Mit $h=1$ folgt $\int_1^3 f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\cdot\left[f(1)+f(3)+4\cdot f(1+h)\right]$

b. Für n=3: Mit $h=\frac{1}{3}$ folgt

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\cdot\left[f(1)+f(3)+4\cdot\left(f(1+1\cdot h)+f(1+3\cdot h)+f(1+5\cdot h)+2\cdot\left(f(1+2\cdot h)\right)+f(1+4\cdot h)\right]$$

c. Es sei $\left|f^{(4)}(x)\right| \le M$ für alle $x\in[a/b]$, E der exakte Wert des Integrals, S der Näherungswert nach Simpson. Dann lässt sich herleiten: $|S-E| \le \frac{(b-a)^5\cdot M}{2880\cdot n^4}$.

In unserem Beispiel ist $f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16\cdot x^{7/2}}$, so dass $\left|f^{(4)}(x)\right| \le \frac{15}{16} = M$ für alle $x\in[1/3]$.

Wie groß muss n gewählt werden, damit sicher $|S-E| < 0{,}001\%$?

2. Es sei $f(x)=\frac{1}{\ln x}$. Bestimmen Sie $\int_e^{3e} f(x)\,dx$ mit Hilfe der Simpsonschen Regel für $n=2$:

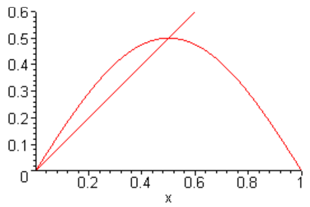
$$\int_e^{3e} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\cdot\left[f(e)+f(3e)+4\cdot\left(f(e+1\cdot h)+f(e+3\cdot h)\right)+2\cdot\left(f(e+2\cdot h)\right)+f(e+4\cdot h)\right].$$

6. Uneigentliche Integrale

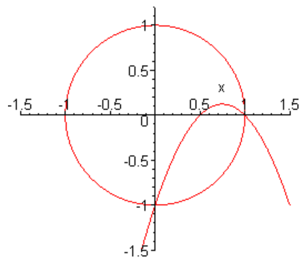
Berechnen Sie

1. $\int_0^\infty x\cdot e^{-x}\,dx$.
2. $\int_0^\infty x\cdot e^{-x^2}\,dx$.
3. $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx$.
4. $\int_{-\infty}^0 x^2\cdot e^{x/2}\,dx$.
5. Beweisen Sie durch vollständige Induktion: $\int_0^\infty x^n\cdot e^{-2x}dx = \frac{n!}{2^{n+1}}$ für alle $n\in\mathbb{N}_0=\{0,1,2,\ \dots\ \}$.

7. Fläche zwischen zwei Kurven



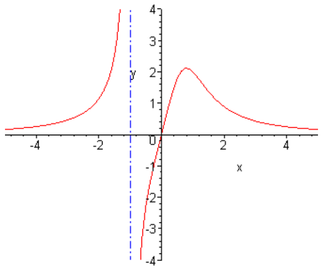
1. Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen den Schaubildern von $y=0{,}5\cdot\sin(\pi\cdot x)$ und der Geraden $y=x$ im 1. Quadranten.



2. Die Parabel $y=-2\cdot x^2+3\cdot x-1$ und der Kreis $x^2+y^2=1$ schließen im 1. und 4. Quadranten zwei Flächen ein. Berechnen Sie den Inhalt A der unteren Fläche.

Hinweis: $\int\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\cdot\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x$.

8. Rotationsvolumen um die x-Achse



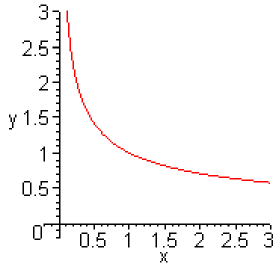
Es sei $f(x)=\dfrac{4x}{1+x^3}$ für $x\neq -1$. Das Schaubild von f rotiert um die x-Achse.

a. Bestimmen Sie das Rotationsvolumen für $x\in[0,\infty[$.

b. Bestimmen Sie das Rotationsvolumen für $x\in]-\infty,-2]$.

c. Untersuchen Sie das Rotationsvolumen für $x\in[-2,-1[$.

9. Rotationsvolumen um die y-Achse



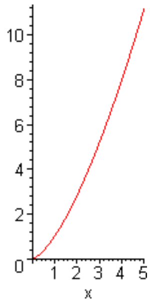
Es sei $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ für $x>0$. Das Schaubild von f rotiert um die y-Achse.

a. Bestimmen Sie das Rotationsvolumen für $y\in[1,\infty[$.

1. Weg: $V_y=\pi\int\limits_{y=1}^{y=\infty} x^2\,dy=\pi\int\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{y^4}\,dy=\ldots$

2. Weg $V_y=\pi\int\limits_{y=1}^{y=\infty} x^2\,dy=\pi\int\limits_{x=1}^{x=0} x^2\cdot y'\,dx=\pi\int\limits_{x=1}^{x=0} x^2\cdot\dfrac{-1}{2\cdot x^{3/2}}\,dx=\ldots$

10. Die Bogenlänge einer Kurve



Es sei $f(x)=x^{3/2}$. Berechnen Sie die Bogenlänge s im Bereich $0\le x\le a$.

Ergebnis: $s=\dfrac{8}{27}\cdot\left(1+\frac{9}{4}a\right)^{3/2}-\dfrac{8}{27}$.

Für welchen Wert von a beträgt die Bogenlänge $s=\dfrac{335}{27}$?

11. Die Mantelfläche M eines Rotationskörpers

1. Die Gerade $y=\dfrac{r}{h}x$ für $0\le x\le h$ erzeugt bei Rotation um die x-Achse den Mantel M eines Kegels vom Radius r und der Höhe h. Leiten Sie die aus der Schule bekannte Formel $M=\pi r s$ her.
2. Der Halbkreis $y=\sqrt{r^2-x^2}$ für $-r\le x\le r$ erzeugt bei Rotation um die x-Achse eine Kugel vom Radius r. Leiten Sie die Formel $O=4\pi r^2$ für die Kugeloberfläche O her.

12. Der Mittelwert einer Funktion

1. Es sei $f(x)=3x^2+4x+1$. Bestimme Sie den Wert für $b>0$ so, dass der Mittelwert $\bar{f}$ von f im Intervall $[0/b]$ gleich 4 ist.
2. Bestimmen Sie den Mittelwert $\bar{f}$ von $f(x)=\ln(x)$ im Intervall $[1/e]$.

13. Der Schwerpunkt einer Fläche zwischen einer Kurve und der x-Achse

1. Das Schaubild der Funktion $f(x)=e^x$ begrenzt mit den beiden Koordinatenachsen und der Geraden $x=1$ ein Flächenstück. Bestimmen Sie die Koordinaten (x_S / y_S) des Schwerpunktes S dieses Flächenstücks.
2. Das Schaubild der Funktion $f(x)=-a\cdot x^2+b\cdot x$ mit $a,b>0$ schließt mit der x-Achse in ersten Quadranten ein Flächenstück ein. Bestimmen Sie a und b so, dass sein Schwerpunkt S die Koordinaten $(1/2)$ besitzt.