Theoretische Informatik I

Duale Hochschule Baden-Württemberg – Lörrach
Studiengang Informatik – TIF21

Januar 2022–März 2022

Teil II

Logik

Übersicht

Übersicht

Signatur

Um komplexe aussagenlogische Formeln konstruieren zu können, müssen wir zunächst sagen, was die kleinsten Einheiten sein sollen.

Definition

- Ein **Atom** (oder **atomare Aussage** oder auch **atomare Formel**) ist ein Symbol.
- Eine endliche Menge von Atomen bezeichnen wir mit Σ.
- Σ heißt **Signatur**.

Wir verwenden für Atome meist Großbuchstaben.

Beispiel

Es sei $\Sigma := \{A, B, C\}$.

Formeln

Definition

Sei Σ eine Signatur.
Die **Menge der aussagenlogischen Formeln** $For0_\Sigma$ ist induktiv definiert:

- $1, 0 \in For0_\Sigma$.
- $\Sigma \subseteq For0_\Sigma$.
- Mit $\mathscr{F}, \mathscr{G} \in For0_\Sigma$ sind auch folgende Ausdrücke Elemente von $For0_\Sigma$:
  - $\neg\mathscr{F}$ (**Negation**)
  - $(\mathscr{F} \wedge \mathscr{G})$ (**Konjunktion**)
  - $(\mathscr{F} \vee \mathscr{G})$ (**Disjunktion**)
  - $(\mathscr{F} \rightarrow \mathscr{G})$ (**Implikation**)
  - $(\mathscr{F} \leftrightarrow \mathscr{G})$ (**Äquivalenz**).

Formeln

Beispiel (fortgesetzt)

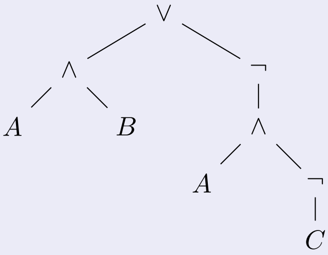
$$
\begin{aligned}
For0_\Sigma = \{&1, 0,\\
&A, B, C,\\
&\neg 1, \neg 0, \neg A, \neg B, \neg C,\\
&(1 \wedge 1), (1 \wedge 0), (1 \wedge A), \dots, (A \wedge B), \dots, (C \wedge C),\\
&(1 \vee 1), (1 \vee 0), (1 \vee A), \dots, (A \vee B), \dots, (C \vee C),\\
&(1 \rightarrow 1), (1 \rightarrow 0), (1 \rightarrow A), \dots, (A \rightarrow B), \dots, (C \rightarrow C),\\
&(1 \leftrightarrow 1), (1 \leftrightarrow 0), (1 \leftrightarrow A), \dots, (A \leftrightarrow B), \dots, (C \leftrightarrow C),\\
&\neg\neg 1, \neg\neg 0, \neg\neg A, \neg\neg B, \neg\neg C,\\
&\neg(1 \wedge 1), \neg(1 \wedge 0), \neg(1 \wedge A), \dots, \neg(C \wedge C),\\
&\neg(1 \vee 1), \neg(1 \vee 0), \neg(1 \vee A), \dots, \neg(C \vee C),\\
&\neg(1 \rightarrow 1), \neg(1 \rightarrow 0), \neg(1 \rightarrow A), \dots, \neg(C \rightarrow C),\\
&\neg(1 \leftrightarrow 1), \neg(1 \leftrightarrow 0), \neg(1 \leftrightarrow A), \dots, \neg(C \leftrightarrow C),\\
&(1 \wedge \neg 1), \dots, (1 \wedge (1 \wedge 1)), \dots, (1 \wedge (C \leftrightarrow C)),\\
&(0 \wedge \neg 1), \dots, (\neg 1 \wedge 1), \dots, ((C \leftrightarrow C) \wedge (C \leftrightarrow C)),\\
&(1 \vee \neg 1), \dots, (1 \vee (1 \wedge 1)), \dots, ((C \leftrightarrow C) \vee (C \leftrightarrow C)),\\
&(1 \rightarrow \neg 1), \dots, (1 \leftrightarrow \neg 1), \dots ((C \leftrightarrow C) \leftrightarrow (C \leftrightarrow C))\\
&\neg\neg\neg 1, \dots, ((A \wedge B) \vee \neg(A \wedge \neg C)), \dots\}
\end{aligned}
$$

Syntaxbäume

Wir können für Formeln Syntaxbäume aufstellen. Hierbei sind die Blattknoten mit Atomen besetzt; die übrigen Knoten bilden den Aufbau der Formeln ab.

Beispiel (fortgesetzt)

Für die Formel $((A \wedge B) \vee \neg(A \wedge \neg C))$ erhalten wir etwa:



Formeln

Beispiel (fortgesetzt)

Die folgenden Zeichenketten sind keine Elemente aus $For0_\Sigma$:

- $\neg(A) \notin For0_\Sigma$ (falsche Klammerung)
- $(A \wedge B \wedge C) \notin For0_\Sigma$ (falsche Klammerung)
- $A \vee B \notin For0_\Sigma$ (falsche Klammerung)
- $(A \wedge D) \notin For0_\Sigma$ (weil $D \notin \Sigma$)
- $AB \notin For0_\Sigma$
- $(AB) \notin For0_\Sigma$
- $A\neg B \notin For0_\Sigma$

Die folgenden Formeln sind syntaktisch verschieden:

- $(A \wedge (B \wedge C)) \neq ((A \wedge B) \wedge C)$
- $(1 \vee A) \neq (A \vee 1)$
- $A \neq \neg\neg A$

Teilformeln

Definition

Eine **Teilformel** einer Formel ist ein Teilwort, das selbst eine Formel ist.
Für eine Formel $\mathscr{F} \in For0_{\Sigma}$ bezeichnen wir die Menge der Teilformeln von $\mathscr{F}$ mit $Teilf(\mathscr{F})$.

Teilformeln

Beispiel (fortgesetzt)

$$
\begin{aligned}
Teilf(((A \wedge B) \vee \neg(A \wedge \neg C))) = \{&((A \wedge B) \vee \neg(A \wedge \neg C)),\\
&(A \wedge B), \neg(A \wedge \neg C),\\
&A, B, (A \wedge \neg C),\\
&\neg C,\\
&C\}
\end{aligned}
$$

$$A \wedge B) \notin Teilf(((A \wedge B) \vee \neg(A \wedge \neg C)))$$

$$(A \wedge C) \notin Teilf(((A \wedge B) \vee \neg(A \wedge \neg C)))$$

Teilformeln

Beispiel (fortgesetzt)

$$(B \wedge A) \notin Teilf(((A \wedge B) \wedge C))$$
$$(A \wedge C) \notin Teilf(((A \wedge B) \wedge C))$$
$$(B \wedge C) \notin Teilf(((A \wedge B) \wedge C))$$

Übersicht

Semantik

Wir wollen uns nun der Frage widmen, ob eine Formel wahr oder falsch ist. Wir betrachten hierzu die Formel

$$((A \wedge B) \vee \neg(A \wedge \neg C)).$$

Wir können ohne zusätzliche Informationen nicht sagen, ob diese Formel wahr ist oder nicht. Wir müssen zunächst wissen, ob die einzelnen Atome (A, B und C) wahr oder falsch sind (dies werden wir Interpretation nennen). Sobald wir dies jedoch wissen, sollte der Wahrheitswert der Formel bitteschön eindeutig bestimmt sein.

Wir können uns jedoch auch dafür interessieren, ob eine Formel überhaupt wahr sein kann oder vielleicht sogar immer wahr ist. Das können und müssen wir unabhängig von konkreten Interpretationen tun.

Wahrheitswerte und Interpretation

Definition

- Ab nun seien $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{F}$ beliebige aber feste Objekte. Sie heißen **Wahrheitswerte** und stehen für wahr und falsch.
- Sei Σ eine Signatur.
  Eine Abbildung $\mathcal{I} : \Sigma \to \{\mathfrak{W}, \mathfrak{F}\}$ heißt **Interpretation**.

Beispiel (fortgesetzt)

$$I_1(A) := \mathfrak{W}$$
$$I_1(B) := \mathfrak{W}$$
$$I_1(C) := \mathfrak{W}$$

$$I_2(A) := \mathfrak{W}$$
$$I_2(B) := \mathfrak{F}$$
$$I_2(C) := \mathfrak{F}$$

Auswertung

Definition

Zu einer Interpretation $\mathcal{I}$ definieren wir eine (eindeutig bestimmte) **Auswertung** $val_{\mathcal{I}} : For0_{\Sigma} \to \{\mathfrak{W}, \mathfrak{F}\}$ wie folgt:

- $val_{\mathcal{I}}(1) := \mathfrak{W}$
- $val_{\mathcal{I}}(0) := \mathfrak{F}$
- $val_{\mathcal{I}}(\mathscr{A}) := \mathcal{I}(\mathscr{A})$ für $\mathscr{A} \in \Sigma$

Auswertung

Definition (fortgesetzt)

- Für eine Formel $\mathscr{F}$:
$$val_{\mathcal{I}}(\neg\mathscr{F}) := \begin{cases} \mathfrak{F} & \text{falls } val_{\mathcal{I}}(\mathscr{F}) = \mathfrak{W} \\ \mathfrak{W} & \text{falls } val_{\mathcal{I}}(\mathscr{F}) = \mathfrak{F} \end{cases}$$
- Für Formeln $\mathscr{F}$ und $\mathscr{G}$:
$$val_{\mathcal{I}}((\mathscr{F} \wedge \mathscr{G})) := \begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls } val_{\mathcal{I}}(\mathscr{F}) = val_{\mathcal{I}}(\mathscr{G}) = \mathfrak{W} \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases}$$
- Für Formeln $\mathscr{F}$ und $\mathscr{G}$:
$$val_{\mathcal{I}}((\mathscr{F} \vee \mathscr{G})) := \begin{cases} \mathfrak{F} & \text{falls } val_{\mathcal{I}}(\mathscr{F}) = val_{\mathcal{I}}(\mathscr{G}) = \mathfrak{F} \\ \mathfrak{W} & \text{sonst} \end{cases}$$
- Für Formeln $\mathscr{F}$ und $\mathscr{G}$:
$$val_{\mathcal{I}}((\mathscr{F} \rightarrow \mathscr{G})) := \begin{cases} \mathfrak{F} & \text{falls } val_{\mathcal{I}}(\mathscr{F}) = \mathfrak{W} \text{ und } val_{\mathcal{I}}(\mathscr{G}) = \mathfrak{F} \\ \mathfrak{W} & \text{sonst} \end{cases}$$
- Für Formeln $\mathscr{F}$ und $\mathscr{G}$:
$$val_{\mathcal{I}}((\mathscr{F} \leftrightarrow \mathscr{G})) := \begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls } val_{\mathcal{I}}(\mathscr{F}) = val_{\mathcal{I}}(\mathscr{G}) \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases}$$

Auswertung

Beispiel (fortgesetzt)

$$val_{I_1}(A) = I_1(A) = \mathfrak{W}$$
$$val_{I_1}(B) = I_1(B) = \mathfrak{W}$$
$$val_{I_1}(C) = I_1(C) = \mathfrak{W}$$
$$val_{I_1}(\neg C) = \begin{cases} \mathfrak{F} & \text{falls } val_{I_1}(C) = \mathfrak{W} \\ \mathfrak{W} & \text{falls } val_{I_1}(C) = \mathfrak{F} \end{cases}$$
$$= \mathfrak{F}$$
$$val_{I_1}((A \wedge B)) = \begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls } val_{I_1}(A) = val_{I_1}(B) = \mathfrak{W} \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases}$$
$$= \mathfrak{W}$$
$$val_{I_1}((A \wedge \neg C)) = \begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls } val_{I_1}(A) = val_{I_1}(\neg C) = \mathfrak{W} \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases}$$
$$= \mathfrak{F}$$

Auswertung

Beispiel (fortgesetzt)

$$val_{I_1}(\neg(A \wedge \neg C))$$
$$= \begin{cases} \mathfrak{F} & \text{falls } val_{I_1}((A \wedge \neg C)) = \mathfrak{W} \\ \mathfrak{W} & \text{falls } val_{I_1}((A \wedge \neg C)) = \mathfrak{F} \end{cases}$$
$$= \mathfrak{W}$$

$$val_{I_1}(((A \wedge B) \vee \neg(A \wedge \neg C)))$$
$$= \begin{cases} \mathfrak{F} & \text{falls } val_{I_1}((A \wedge B)) = val_{I_1}(\neg(A \wedge \neg C)) = \mathfrak{F} \\ \mathfrak{W} & \text{sonst} \end{cases}$$
$$= \mathfrak{W}$$

Auswertung

Beispiel (fortgesetzt)

$$
\begin{aligned}
val_{I_2}(A) &= I_2(A) = \mathfrak{W} \\
val_{I_2}(B) &= I_2(B) = \mathfrak{F} \\
val_{I_2}(C) &= I_2(C) = \mathfrak{F} \\
val_{I_2}(\neg C) &= \begin{cases} \mathfrak{F} & \text{falls } val_{I_2}(C) = \mathfrak{W} \\ \mathfrak{W} & \text{falls } val_{I_2}(C) = \mathfrak{F} \end{cases} \\
&= \mathfrak{W} \\
val_{I_2}((A \wedge B)) &= \begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls } val_{I_2}(A) = val_{I_2}(B) = \mathfrak{W} \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \mathfrak{F} \\
val_{I_2}((A \wedge \neg C)) &= \begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls } val_{I_2}(A) = val_{I_2}(\neg C) = \mathfrak{W} \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \mathfrak{W}
\end{aligned}
$$

Auswertung

Beispiel (fortgesetzt)

$$
\begin{aligned}
& val_{I_2}(\neg(A \wedge \neg C)) \\
& = \begin{cases} \mathfrak{F} & \text{falls } val_{I_2}((A \wedge \neg C)) = \mathfrak{W} \\ \mathfrak{W} & \text{falls } val_{I_2}((A \wedge \neg C)) = \mathfrak{F} \end{cases} \\
& = \mathfrak{F} \\
& val_{I_2}(((A \wedge B) \vee \neg(A \wedge \neg C))) \\
& = \begin{cases} \mathfrak{F} & \text{falls } val_{I_2}((A \wedge B)) = val_{I_2}(\neg(A \wedge \neg C)) = \mathfrak{F} \\ \mathfrak{W} & \text{sonst} \end{cases} \\
& = \mathfrak{F}
\end{aligned}
$$

Auswertung

Aufgaben

Berechnen Sie

1. $val_{I_1}((A \vee \neg B))$
2. $val_{I_2}((A \vee \neg B))$
3. $val_{I_1}(\neg(B \wedge \neg C))$
4. $val_{I_2}(\neg(B \wedge \neg C))$
5. $val_{I_1}(((A \wedge \neg\neg B) \vee \neg(\neg C \vee A)))$
6. $val_{I_2}(((A \wedge \neg\neg B) \vee \neg(\neg C \vee A)))$

Wahrheitstafel

Falls $|\Sigma|$ klein ist (also nur wenige verschiedene Atome in Formeln vorkommen) und $\mathscr{F} \in For0_\Sigma$ eine Formel ist, dann können wir für alle Interpretationen $\mathscr{I}$ (davon gibt es $2^{|\Sigma|}$ verschiedene) den Wert von $val_\mathscr{I}(\mathscr{F})$ tabellieren. Die resultierende Tabelle heißt **Wahrheitstafel** (oder **Wahrheitstabelle**).

Definitionen

Definition

Es sei $\mathscr{F} \in For0_{\Sigma}$ eine Formel.

- Eine Interpretation $\mathscr{I}$ mit $val_{\mathscr{I}}(\mathscr{F}) = \mathfrak{W}$ heißt **Modell** für $\mathscr{F}$.
- $\mathscr{F}$ heißt **erfüllbar**, falls es eine Interpretation gibt, die Modell für $\mathscr{F}$ ist.
- $\mathscr{F}$ heißt **allgemeingültig**, falls jede Interpretation ein Modell für $\mathscr{F}$ ist.

Bezeichnung

- Eine nicht erfüllbare Formel heißt auch **Kontradiktion**.
- Eine allgemeingültige Formel heißt auch **Tautologie**.

Erfüllbarkeit
Allgemeingültigkeit

Beispiel

Wir betrachten die Formel

$$F := ((A \wedge B) \vee \neg(A \wedge \neg C)).$$

Es gilt

$$val_{I_1}(F) = \mathfrak{W},$$

also ist I_1 ein Modell für F, also ist F erfüllbar.
Weiter gilt

$$val_{I_2}(F) = \mathfrak{F},$$

also ist I_2 kein Modell für F, also ist F nicht allgemeingültig.

Erfüllbarkeit
Allgemeingültigkeit

Satz

Es sei $\mathscr{F} \in For0_\Sigma$ eine Formel. Dann gilt:

- $\mathscr{F}$ erfüllbar gdw. $\neg\mathscr{F}$ nicht allgemeingültig
- $\mathscr{F}$ nicht erfüllbar gdw. $\neg\mathscr{F}$ allgemeingültig
- $\mathscr{F}$ allgemeingültig gdw. $\neg\mathscr{F}$ nicht erfüllbar
- $\mathscr{F}$ nicht allgemeingültig gdw. $\neg\mathscr{F}$ erfüllbar

Semantische Folgerbarkeit

Definition

Es seien $\mathscr{F}_1, \dots, \mathscr{F}_n, \mathscr{G} \in For0_\Sigma$ Formeln.

- Aus $\mathscr{F}_1, \dots, \mathscr{F}_n$ **folgt** $\mathscr{G}$, in Zeichen $\mathscr{F}_1, \dots, \mathscr{F}_n \models \mathscr{G}$, falls für jede Interpretation $\mathscr{I}$ gilt:
  Falls $\mathscr{I}$ ein Modell für $\mathscr{F}_1, \dots, \mathscr{F}_n$ ist, dann ist $\mathscr{I}$ auch ein Modell für $\mathscr{G}$.

Semantische Folgerbarkeit

Beispiel (fortgesetzt)

Es gilt beispielsweise

$$
\begin{aligned}
(A \wedge B) &\models A \\
(A \wedge B) &\models B \\
A &\not\models (A \wedge B) \\
B &\not\models (A \wedge B) \\
A &\models (A \vee B) \\
B &\models (A \vee B) \\
(A \vee B) &\not\models A \\
(A \vee B) &\not\models B \\
A &\not\models B \\
B &\not\models A \\
(A \wedge B) &\not\models C.
\end{aligned}
$$

Semantische Folgerbarkeit

Beispiel (fortgesetzt)

Außerdem gilt

$$A, B \vDash (A \wedge B)$$
$$A, (A \rightarrow B) \vDash B.$$

Semantische Folgerbarkeit

Definition

Wir definieren

$$R_{\models} := \{(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \in For0_{\Sigma} \times For0_{\Sigma} \mid \mathscr{F} \models \mathscr{G}\}.$$

Bemerkung

$R_{\models}$ ist eine Relation auf $For0_{\Sigma}$.

Semantische Folgerbarkeit

Aufgabe

Zeigen oder widerlegen Sie:

$R_{\models}$ ist eine Halbordnung auf $For0_{\Sigma}$.

Logische Äquivalenz

Definition

Es seien $\mathscr{F}, \mathscr{G} \in For0_\Sigma$ Formeln.

- $\mathscr{F}$ und $\mathscr{G}$ heißen **logisch äquivalent**, in Zeichen $\mathscr{F} \equiv \mathscr{G}$, falls $\mathscr{F} \models \mathscr{G}$ und $\mathscr{G} \models \mathscr{F}$.

Logische Äquivalenz

Bemerkung

Es seien $\mathscr{F}, \mathscr{G} \in For0_{\Sigma}$ Formeln. Dann gilt:

- $\mathscr{F} \equiv \mathscr{G}$ gdw. für jede Interpretation $\mathscr{I}$ gilt: $val_{\mathscr{I}}(\mathscr{F}) = val_{\mathscr{I}}(\mathscr{G})$.

Logische Äquivalenz

Beispiel (fortgesetzt)

Für jede Interpretation $\mathcal{I}$ gilt: $val_{\mathcal{I}}((A \vee B)) = val_{\mathcal{I}}((B \vee A))$.

Also gilt $(A \vee B) \equiv (B \vee A)$.

Obacht: Es ist $(A \vee B) \neq (B \vee A)$.

Logische Äquivalenz

Satz

Es seien $\mathscr{F}, \mathscr{G} \in For0_\Sigma$ Formeln. Dann gilt:

- $(\mathscr{F} \to \mathscr{G}) \equiv (\neg\mathscr{F} \vee \mathscr{G})$
- $(\mathscr{F} \leftrightarrow \mathscr{G}) \equiv ((\mathscr{F} \wedge \mathscr{G}) \vee (\neg\mathscr{F} \wedge \neg\mathscr{G}))$

Logische Äquivalenz

Satz

Es seien $\mathscr{F}, \mathscr{F}', \mathscr{G}, \mathscr{G}' \in For0_\Sigma$ Formeln mit $\mathscr{F} \equiv \mathscr{F}'$ und $\mathscr{G} \equiv \mathscr{G}'$.

Dann gilt:

- $\neg\mathscr{F} \equiv \neg\mathscr{F}'$
- $(\mathscr{F} \wedge \mathscr{G}) \equiv (\mathscr{F}' \wedge \mathscr{G}')$
- $(\mathscr{F} \vee \mathscr{G}) \equiv (\mathscr{F}' \vee \mathscr{G}')$
- $(\mathscr{F} \rightarrow \mathscr{G}) \equiv (\mathscr{F}' \rightarrow \mathscr{G}')$
- $(\mathscr{F} \leftrightarrow \mathscr{G}) \equiv (\mathscr{F}' \leftrightarrow \mathscr{G}')$

Logische Äquivalenz

Definition

Wir definieren

$$R_{\equiv} := \{(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \in For0_{\Sigma} \times For0_{\Sigma} \mid \mathscr{F} \equiv \mathscr{G}\}.$$

Bemerkung

$R_{\equiv}$ ist eine Relation auf $For0_{\Sigma}$.

Logische Äquivalenz

Aufgabe

Zeigen oder widerlegen Sie:

$R_{\equiv}$ ist eine Äquivalenzrelation auf $For0_{\Sigma}$.

Symbolik

Wir müssen achtgeben, dass wir die Symbole $\rightarrow$, $\models$ und $\Rightarrow$ nicht durcheinanderbringen (bei den folgenden Beispielen sind A und B aussagenlogische Atome):

- $(A \rightarrow B)$ ist eine aussagenlogische Formel,
- $A \models B$ ist keine aussagenlogische Formel, sondern eine mathematische Aussage,
- $A \Rightarrow B$ hingegen ist Unsinn.

Ebenso verhält es sich mit $\leftrightarrow$, $\equiv$ und $\Leftrightarrow$:

- $(A \leftrightarrow B)$ ist eine aussagenlogische Formel,
- $A \equiv B$ ist eine mathematische Aussage und
- $A \Leftrightarrow B$ hat keine Bedeutung.

Semantische Folgerbarkeit Logische Äquivalenz

Satz

Es seien $\mathscr{F}, \mathscr{G} \in For0_\Sigma$ Formeln. Dann gilt:

- $[\mathscr{F} \models \mathscr{G}]$ gdw. $[(\mathscr{F} \rightarrow \mathscr{G})$ ist allgemeingültig$]$
- $[\mathscr{F} \equiv \mathscr{G}]$ gdw. $[(\mathscr{F} \leftrightarrow \mathscr{G})$ ist allgemeingültig$]$
- $[\mathscr{F}$ ist allgemeingültig$]$ gdw. $[\mathscr{F} \equiv 1]$
- $[\mathscr{F}$ ist nicht erfüllbar$]$ gdw. $[\mathscr{F} \equiv 0]$

Wir wollen nun auf den nächsten beiden Folien den ersten Punkt beweisen.

Beispiel (fortgesetzt)

Drei Instanziierungen des ersten Punktes sind

- $[A \models B]$ gdw. $[(A \rightarrow B)$ ist allgemeingültig$]$
- $[(A \wedge B) \models A]$ gdw. $[((A \wedge B) \rightarrow A)$ ist allgemeingültig$]$
- $[A \models (A \wedge B)]$ gdw. $[(A \rightarrow (A \wedge B))$ ist allgemeingültig$]$

Semantische Folgerbarkeit Logische Äquivalenz

Beweis.

$\Rightarrow$: Es gelte $\mathscr{F} \models \mathscr{G}$, also gilt für jede Interpretation $\mathscr{I}$ mit $val_{\mathscr{I}}(\mathscr{F}) = \mathfrak{W}$ auch $val_{\mathscr{I}}(\mathscr{G}) = \mathfrak{W}$. (1)

Wir müssen zeigen, dass $(\mathscr{F} \to \mathscr{G})$ allgemeingültig ist, also dass für jede Interpretation $\mathscr{I}$ gilt: $val_{\mathscr{I}}((\mathscr{F} \to \mathscr{G})) = \mathfrak{W}$.

Sei also $\mathscr{J}$ eine Interpretation.

1. Fall: $val_{\mathscr{J}}(\mathscr{F}) = \mathfrak{F}$. Dann gilt $val_{\mathscr{J}}((\mathscr{F} \to \mathscr{G})) = \mathfrak{W}$.

2. Fall: $val_{\mathscr{J}}(\mathscr{F}) = \mathfrak{W}$. Dann gilt nach Voraussetzung (1) $val_{\mathscr{J}}(\mathscr{G}) = \mathfrak{W}$ und damit auch $val_{\mathscr{J}}((\mathscr{F} \to \mathscr{G})) = \mathfrak{W}$.

In jedem Falle gilt also $val_{\mathscr{J}}((\mathscr{F} \to \mathscr{G})) = \mathfrak{W}$. Dies wollten wir zeigen.

Beweis.

$\Leftarrow$: Es sei $(\mathscr{F} \rightarrow \mathscr{G})$ allgemeingültig, also gilt für jede Interpretation $\mathscr{I}$: $val_{\mathscr{I}}((\mathscr{F} \rightarrow \mathscr{G})) = \mathfrak{W}$. (2)

Wir müssen zeigen, dass $\mathscr{F} \vDash \mathscr{G}$ gilt, also dass für jede Interpretation $\mathscr{I}$ mit $val_{\mathscr{I}}(\mathscr{F}) = \mathfrak{W}$ auch $val_{\mathscr{I}}(\mathscr{G}) = \mathfrak{W}$ gilt.

Sei also $\mathscr{J}$ eine Interpretation mit $val_{\mathscr{J}}(\mathscr{F}) = \mathfrak{W}$ (andere interessieren uns nicht). Wir müssen zeigen, dass auch $val_{\mathscr{J}}(\mathscr{G}) = \mathfrak{W}$ gilt.

Annahme: $val_{\mathscr{J}}(\mathscr{G}) = \mathfrak{F}$. Wegen $val_{\mathscr{J}}(\mathscr{F}) = \mathfrak{W}$ gilt dann aber $val_{\mathscr{J}}((\mathscr{F} \rightarrow \mathscr{G})) = \mathfrak{F}$. Widerspruch zu Voraussetzung (2).

Also gilt $val_{\mathscr{J}}(\mathscr{G}) = \mathfrak{W}$. Dies wollten wir zeigen. $\square$

Ersetzbarkeit

Satz

Es seien $\mathscr{F}, \mathscr{F}', \mathscr{G}, \mathscr{G}' \in For0_\Sigma$ Formeln, $\mathscr{G}$ eine Teilformel von $\mathscr{F}$ und es gelte $\mathscr{G} \equiv \mathscr{G}'$. $\mathscr{F}'$ entstehe aus $\mathscr{F}$, indem an beliebigen Stellen, an denen $\mathscr{G}$ in $\mathscr{F}$ auftritt, $\mathscr{G}$ durch $\mathscr{G}'$ ersetzt wird. Dann gilt $\mathscr{F} \equiv \mathscr{F}'$.

Erläuterung

Wir haben also etwa

$$\mathscr{F} = \ldots \mathscr{G} \ldots$$
$$\mathscr{F}' = \ldots \mathscr{G}' \ldots$$

Ersetzbarkeit

Beispiel (fortgesetzt)

$$
\begin{aligned}
G &:= (A \wedge B) \\
G' &:= (B \wedge A) \\
G &\equiv G'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F &:= ((A \wedge B) \vee C) = (G \vee C) \\
F' &:= ((B \wedge A) \vee C) = (G' \vee C) \\
F &\equiv F'
\end{aligned}
$$

Äquivalenzregeln

Es seien $\mathscr{F}, \mathscr{G}, \mathscr{H} \in For0_\Sigma$ Formeln.

Idempotenzgesetze

$(\mathscr{F} \vee \mathscr{F}) \equiv \mathscr{F}$
$(\mathscr{F} \wedge \mathscr{F}) \equiv \mathscr{F}$

Kommutativgesetze

$(\mathscr{F} \vee \mathscr{G}) \equiv (\mathscr{G} \vee \mathscr{F})$
$(\mathscr{F} \wedge \mathscr{G}) \equiv (\mathscr{G} \wedge \mathscr{F})$

Assoziativgesetze

$((\mathscr{F} \vee \mathscr{G}) \vee \mathscr{H}) \equiv (\mathscr{F} \vee (\mathscr{G} \vee \mathscr{H}))$
$((\mathscr{F} \wedge \mathscr{G}) \wedge \mathscr{H}) \equiv (\mathscr{F} \wedge (\mathscr{G} \wedge \mathscr{H}))$

Distributivgesetze

$(\mathscr{F} \vee (\mathscr{G} \wedge \mathscr{H})) \equiv ((\mathscr{F} \vee \mathscr{G}) \wedge (\mathscr{F} \vee \mathscr{H}))$
$(\mathscr{F} \wedge (\mathscr{G} \vee \mathscr{H})) \equiv ((\mathscr{F} \wedge \mathscr{G}) \vee (\mathscr{F} \wedge \mathscr{H}))$

Komplementgesetze

$(\mathscr{F} \vee \neg\mathscr{F}) \equiv 1$
$(\mathscr{F} \wedge \neg\mathscr{F}) \equiv 0$

DeMorgansche Gesetze

$\neg(\mathscr{F} \vee \mathscr{G}) \equiv (\neg\mathscr{F} \wedge \neg\mathscr{G})$
$\neg(\mathscr{F} \wedge \mathscr{G}) \equiv (\neg\mathscr{F} \vee \neg\mathscr{G})$

Äquivalenzregeln

Doppelnegationsgesetz

$\neg\neg\mathscr{F} \equiv \mathscr{F}$

Absorptionsgesetze

$(\mathscr{F} \wedge (\mathscr{F} \vee \mathscr{G})) \equiv \mathscr{F}$
$(\mathscr{F} \vee (\mathscr{F} \wedge \mathscr{G})) \equiv \mathscr{F}$

Tautologiegesetze

$(1 \vee \mathscr{F}) \equiv 1$
$(1 \wedge \mathscr{F}) \equiv \mathscr{F}$

Kontradiktionsgesetze

$(0 \vee \mathscr{F}) \equiv \mathscr{F}$
$(0 \wedge \mathscr{F}) \equiv 0$

Exkurs – Boolsche Algebra

Definition

Eine Menge V mit zwei Abbildungen $\oplus : V \times V \to V$ und $\otimes : V \times V \to V$ heißt **Boolsche Algebra**, falls für alle $a, b, c \in V$ gilt:

1. Kommutativgesetze:
   - $a \oplus b = b \oplus a$
   - $a \otimes b = b \otimes a$
2. Distributivgesetze:
   - $a \oplus (b \otimes c) = (a \oplus b) \otimes (a \oplus c)$
   - $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$
3. Neutralelemente: Es existieren zwei Elemente $n, e \in V$ mit:
   - $a \oplus n = a$
   - $a \otimes e = a$
4. Inverse Elemente: Für jedes $d \in V$ existiert ein $\bar{d} \in V$ mit:
   - $d \oplus \bar{d} = e$
   - $d \otimes \bar{d} = n$

Übersicht

Literale

Definition

Ein **Literal** ist eine atomare Formel oder eine negierte atomare Formel.

Im Folgenden liberalisieren wir aus ästhetischen Gründen unsere Forderung nach einer strikten Klammerung.

Konjunktive Normalform

Definition

- Eine Formel $\mathscr{F}$ ist in **konjunktiver Normalform (KNF)**, wenn sie eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen ist, etwa

$$\begin{aligned}\mathscr{F} &= ((A_{1,1} \vee A_{1,2} \vee \ldots \vee A_{1,m_1}) \wedge \ldots \wedge (A_{n,1} \vee \ldots \vee A_{n,m_n}))\\ &= \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{m_i} A_{i,j}\right)\right)\end{aligned}$$

Disjunktive Normalform

Definition

- Eine Formel $\mathscr{F}$ ist in **disjunktiver Normalform (DNF)**, wenn sie eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen ist, etwa

$$\mathscr{F} = ((A_{1,1} \wedge A_{1,2} \wedge \ldots \wedge A_{1,m_1}) \vee \ldots \vee (A_{n,1} \wedge \ldots \wedge A_{n,m_n}))$$
$$= \left(\bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{m_i} A_{i,j} \right) \right)$$

Konjunktive und disjunktive Normalformen

Zu jeder Formel existiert eine konjunktive und eine disjunktive Normalform. Diese ist im Allgemeinen nicht eindeutig.

Beachte, dass einige Autoren die Begriffe KNF und DNF etwas anders definieren: Unsere KNF/DNF ist dort eine konjunktive/disjunktive Form (KF/DF), um eine *Normal*form zu erreichen, muss in der innersten Klammerungsebene in jedem Block jedes Symbol genau einmal vorkommen, etwa

$$((A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C))$$

anstelle von

$$((A \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C)).$$

Übersicht

Einführung

In der Aussagenlogik können wir aus
»Alle Menschen sind sterblich.«
und »Sokrates ist ein Mensch.« nicht
»Also ist Sokrates sterblich.« folgern.

In der Prädikatenlogik können wir aus
»$\forall x$ (Mensch(x) $\to$ sterblich(x))«
und »Mensch(Sokrates)« tatsächlich
»sterblich(Sokrates)« folgern.

Wir behandeln hier nur Prädikatenlogik 1. Stufe, die noch etwas weiter eingeschränkt wird: Wir behandeln keine Gleichheit und die Symbolmengen sind endlich.

Übersicht

Signatur

Definition

Eine **Signatur** Σ ist ein Quadrupel $\Sigma = (F_\Sigma, P_\Sigma, \alpha_\Sigma, Var_\Sigma)$, wobei

- $F_\Sigma, P_\Sigma, Var_\Sigma$ endliche Mengen sind,
- F_Σ, P_Σ, Var_Σ und die Menge der Sonderzeichen disjunkt sind und
- $\alpha_\Sigma : F_\Sigma \cup P_\Sigma \to \mathbb{N}_0$.

Bezeichnungen

Definition und Bemerkung

- $p \in P_\Sigma$ heißt **Prädikatssymbol**.
- $f \in F_\Sigma$ heißt **Funktionssymbol**.
- α_Σ ordnet jedem Prädikats- und Funktionssymbol eine **Stelligkeit** zu.
- $x \in Var_\Sigma$ heißt **Variable**.
- Wenn $\alpha_\Sigma(p) = n$, dann heißt p n**-stelliges Prädikatssymbol**.
- Nullstellige Prädikatssymbole sind gerade die aussagenlogischen Atome.
- Wenn $\alpha_\Sigma(f) = n$, dann heißt f n**-stelliges Funktionssymbol**.
- Nullstellige Funktionssymbole heißen auch **Konstantensymbole**.

Signatur

Beispiel

Es sei $\Sigma = (F_\Sigma, P_\Sigma, \alpha_\Sigma, Var_\Sigma)$ mit

$$\begin{aligned}
F_\Sigma &:= \{c, d, f, g\} \\
P_\Sigma &:= \{P, Q, p, q\} \\
\alpha_\Sigma(c) &:= 0 \\
\alpha_\Sigma(d) &:= 0 \\
\alpha_\Sigma(f) &:= 1 \\
\alpha_\Sigma(g) &:= 2 \\
\alpha_\Sigma(P) &:= 0 \\
\alpha_\Sigma(Q) &:= 0 \\
\alpha_\Sigma(p) &:= 1 \\
\alpha_\Sigma(q) &:= 2 \\
Var_\Sigma &:= \{x, y\}
\end{aligned}$$

Signatur

Konventionen

Wir verwenden üblicherweise folgende Buchstaben für die Symbole (aber das ist nur Konvention; die verbindliche Zuordnung erfolgt immer über die Angabe der Signatur):

- <u>F</u>unktionssymbole: $\underline{f}, g, h$
- K(<u>C</u>)onstantensymbole: $\underline{c}, d, e$
- <u>P</u>rädikatssymbole: $\underline{p}, q, r$
- 0-stellige <u>P</u>rädikatssymbole: $\underline{P}, Q, R$.

Terme

Definition

Sei Σ eine Signatur.
Die Menge der **Terme über** Σ, bezeichnet mit $Term_\Sigma$, definieren wir induktiv wie folgt:

- $Var_\Sigma \subseteq Term_\Sigma$
- Mit $f \in F_\Sigma, \alpha_\Sigma(f) = n, t_1, \ldots, t_n \in Term_\Sigma$ ist auch $f(t_1, \ldots, t_n) \in Term_\Sigma$.

Beachte, dass jedes Konstantensymbol ein Term ist. Wir vereinbaren, dass wir bei Konstantensymbolen die Klammern fortlassen.

Terme

Beispiel (fortgesetzt)

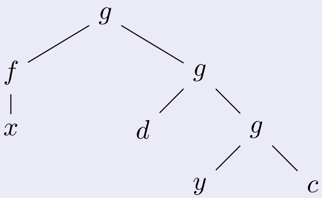
$$
\begin{aligned}
Term_\Sigma = \{&x, y, c, d,\\[1em]
&f(x), f(y), f(c), f(d),\\
&g(x,x), g(x,y), g(x,c), g(x,d), g(y,x), \dots, g(d,d),\\[1em]
&f(f(x)), \dots, f(f(d)), f(g(x,x)), \dots, f(g(d,d)),\\
&g(x, f(x)), \dots, g(x, g(d,d)), g(y, f(x)), \dots, g(d, g(d,d)),\\
&g(f(x), x), \dots, g(f(x), f(x)), \dots, g(f(x), g(d,d)),\\
&g(f(y), x), \dots, g(g(d,d), g(d,d)),\\[1em]
&f(f(f(x))), \dots, f(g(g(d,d), g(d,d))), \dots,\\
&g(x, f(f(x))), \dots, g(x, g(g(d,d), g(d,d))), \dots,\\
&g(f(x), f(f(x))), \dots, g(f(x), g(d, g(y,c))), \dots,\\
&g(f(f(x)), x), \dots, g(f(f(x)), f(x)), \dots,\\
&g(g(g(d,d), g(d,d)), g(g(d,d), g(d,d))), \dots\}
\end{aligned}
$$

Syntaxbäume

Wir können für Terme Syntaxbäume aufstellen. Hierbei sind die Blattknoten mit Konstantensymbolen und Variablen besetzt; die übrigen Knoten bilden den Aufbau der Terme durch die mindestens 1-stelligen Funktionssymbole ab.

Beispiel (fortgesetzt)

Für den Term $g(f(x), g(d, g(y, c)))$ erhalten wir etwa:



Terme

Beispiel (fortgesetzt)

Die folgenden Zeichenketten sind keine Elemente aus $Term_\Sigma$:

- f (f hat Stelligkeit 1)
- $f()$ (Term fehlt)
- g (g hat Stelligkeit 2)
- $f(c, d)$ (f hat Stelligkeit 1)
- $c(d)$ (c hat Stelligkeit 0)
- $x(d)$ (x ist Variable)
- $g(c, g(c))$ (g hat Stelligkeit 2)
- $g(c, f(d)$ (Klammerung falsch)
- $p(c)$ (p ist kein Funktionssymbol)

Die folgenden Terme sind syntaktisch verschieden:

- $g(c, d) \neq g(d, c)$
- $g(g(c, d), d) \neq g(c, g(d, d))$

Atomare Formeln

Definition

Sei Σ eine Signatur.
Die Menge der **atomaren Formeln** (oder **Atome**) ist definiert als

$$AF_\Sigma := \{p(t_1, \dots, t_n) \mid p \in P_\Sigma, \alpha_\Sigma(p) = n, t_1, \dots, t_n \in Term_\Sigma\}.$$

Wir vereinbaren, dass wir bei 0-stelligen Prädikatssymbolen die Klammern fortlassen.

Atomare Formeln

Beispiel (fortgesetzt)

$$AF_\Sigma = \{P, Q,$$

$$\begin{aligned}
&p(x), p(y), p(c), p(d),\\
&p(f(x)), \dots, p(g(d,d)),\\
&p(f(f(x)), \dots, p(g(g(d,d), g(d,d))),\\
&p(f(f(f(x)))), \dots, p(g(f(x), g(d, g(y,c)))), \dots,\\[1ex]
&q(x,x), \dots, q(x,d), q(x, f(x)), q(x, g(d,d)), \dots,\\
&q(y,x), \dots, q(y,d), q(y, f(x)), q(y, g(d,d)), \dots,\\
&q(f(x), x), \dots, q(g(d,d), g(d,d)), q(g(d,d), f(f(x))), \dots,\\
&q(f(f(x)), x), \dots, q(g(f(x), c), f(x)), \dots\}
\end{aligned}$$

Atomare Formeln

Beispiel (fortgesetzt)

Die folgenden Zeichenketten sind keine Elemente aus AF_Σ:

- $P(c)$ (P hat Stelligkeit 0)
- $p(c, d)$ (p hat Stelligkeit 1)
- $q(c)$ (q hat Stelligkeit 2)
- $p(g(c))$ (g hat Stelligkeit 2)
- $q(c, g(c))$ (g hat Stelligkeit 2)
- $p(p(x))$ ($p(x)$ ist kein Term)
- $f(x)$ (f ist kein Prädikatssymbol)

Die folgenden atomaren Formeln sind syntaktisch verschieden:

- $q(c, d) \neq q(d, c)$
- $q(g(c, d), d) \neq q(c, g(d, d))$

Formeln

Definition

Sei Σ eine Signatur.
Die **Menge der prädikatenlogischen Formeln** For_Σ ist induktiv definiert:

- $1, 0 \in For_\Sigma$.
- $AF_\Sigma \subseteq For_\Sigma$.
- Mit $x \in Var_\Sigma$ und $\mathscr{F}, \mathscr{G} \in For_\Sigma$ sind auch folgende Ausdrücke Elemente von For_Σ:
  - $\neg\mathscr{F}$ (**Negation**)
  - $(\mathscr{F} \wedge \mathscr{G})$ (**Konjunktion**)
  - $(\mathscr{F} \vee \mathscr{G})$ (**Disjunktion**)
  - $(\mathscr{F} \rightarrow \mathscr{G})$ (**Implikation**)
  - $(\mathscr{F} \leftrightarrow \mathscr{G})$ (**Äquivalenz**)
  - $\forall x\mathscr{F}$ (**Allquantor**)
  - $\exists x\mathscr{F}$ (**Existenzquantor**).

Formeln

Beispiel (fortgesetzt)

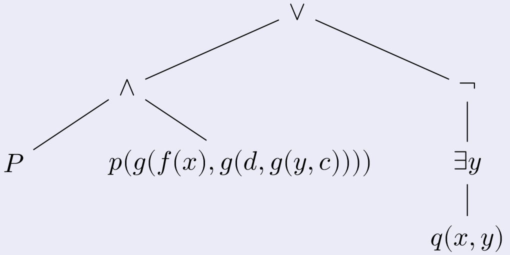
$$
\begin{aligned}
For_\Sigma = \{&1, 0,\\
&P, Q,\\
&p(x), \dots, p(g(f(x), g(d, g(y, c)))), \dots,\\
&q(x, x), \dots, q(g(f(x), c), f(x)), \dots,\\
&\neg 1, \neg 0, \neg P, \neg Q, \neg p(x), \dots, \neg q(g(f(x), c), f(x)), \dots,\\
&(1 \wedge 1), \dots, (p(x) \wedge q(g(f(x), c), f(x))), \dots,\\
&(1 \vee 1), \dots, (p(x) \vee q(g(f(x), c), f(x))), \dots,\\
&(1 \rightarrow 1), \dots, (p(x) \rightarrow q(g(f(x), c), f(x))), \dots,\\
&(1 \leftrightarrow 1), \dots, (p(x) \leftrightarrow q(g(f(x), c), f(x))), \dots,\\
&\forall x 1, \dots, \forall x q(g(f(x), c), f(x)), \dots, \forall y 1, \dots, \forall y p(x), \dots,\\
&\exists x 1, \dots, \exists x q(g(f(x), c), f(x)), \dots, \exists y 1, \dots, \exists y p(x), \dots,\\
&\neg\neg 1, \dots, \neg(1 \wedge 1), \dots, \neg \exists x q(g(f(x), c), f(x)), \dots,\\
&((P \wedge p(g(f(x), g(d, g(y, c))))) \vee \neg \exists y q(x, y)), \dots,\\
&\forall x \exists y p(x), \dots, \exists x \exists x p(x), \dots\}
\end{aligned}
$$

Syntaxbäume

Wir können für Formeln Syntaxbäume aufstellen. Hierbei sind die Blattknoten mit atomaren Formeln besetzt; die übrigen Knoten bilden den Aufbau der Formeln ab.

Beispiel (fortgesetzt)

Für die Formel $((P \wedge p(g(f(x), g(d, g(y, c))))) \vee \neg\exists y q(x, y))$ erhalten wir etwa:



Formeln

Beispiel (fortgesetzt)

Die folgenden Zeichenketten sind keine Elemente aus For_{Σ}:

- $P \wedge q(c, d)$ (Klammerung falsch)
- $(P \wedge g(c, d))$ (g ist kein Prädikatssymbol)
- $p(\neg x)$ ($\neg x$ ist kein Term)
- $p(x \wedge y)$ ($x \wedge y$ ist kein Term)
- $f(\neg x)$ ($\neg x$ ist kein Term, f ist kein Prädikatssymbol)
- $\exists y p(x) \forall x$ (Quantoren müssen vor einer Formel stehen)
- $\exists y p(x) \forall x p(x)$ (Quantoren verbinden keine Formeln)
- $\forall c p(c)$ (c ist keine Variable)
- $\forall x$ (Quantoren dürfen nicht alleine stehen)

Die folgenden Formeln sind syntaktisch verschieden:

- $(1 \wedge q(c, f(d))) \neq (q(c, f(d)) \wedge 1)$
- $(P \wedge q(c, d)) \neq (P \wedge q(d, c))$

Teilterme und Teilformeln

Definition

- Ein **Teilterm** einer Formel ist ein Teilwort, das selbst ein Term ist.
- Für eine Formel $\mathscr{F} \in For_\Sigma$ bezeichnen wir die Menge der Teilterme von $\mathscr{F}$ mit $Teilt(\mathscr{F})$.
- Eine **Teilformel** einer Formel ist ein Teilwort, das selbst eine Formel ist.
- Für eine Formel $\mathscr{F} \in For_\Sigma$ bezeichnen wir die Menge der Teilformeln von $\mathscr{F}$ mit $Teilf(\mathscr{F})$.

Teilterme und Teilformeln

Beispiel (fortgesetzt)

$$\begin{aligned}
&Teilt((Q \wedge \exists y p(f(x))))\\
= &\{y, f(x),\\
&x\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&Teilf((Q \wedge \exists y p(f(x))))\\
= &\{(Q \wedge \exists y p(f(x))),\\
&Q, \exists y p(f(x)),\\
&p(f(x))\}
\end{aligned}$$

Teilterme und Teilformeln

Beispiel (fortgesetzt)

$$\begin{aligned} & Teilt(((P \wedge p(g(f(x), g(d, g(y, c))))) \vee \neg \exists y q(x, y))) \\ = & \{g(f(x), g(d, g(y, c))), y, x, \\ & f(x), g(d, g(y, c)), \\ & d, g(y, c), \\ & c\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & Teilf(((P \wedge p(g(f(x), g(d, g(y, c))))) \vee \neg \exists y q(x, y))) \\ = & \{((P \wedge p(g(f(x), g(d, g(y, c))))) \vee \neg \exists y q(x, y)), \\ & (P \wedge p(g(f(x), g(d, g(y, c))))), \neg \exists y q(x, y), \\ & P, p(g(f(x), g(d, g(y, c)))), \exists y q(x, y), \\ & q(x, y)\} \end{aligned}$$

Syntaxbäume

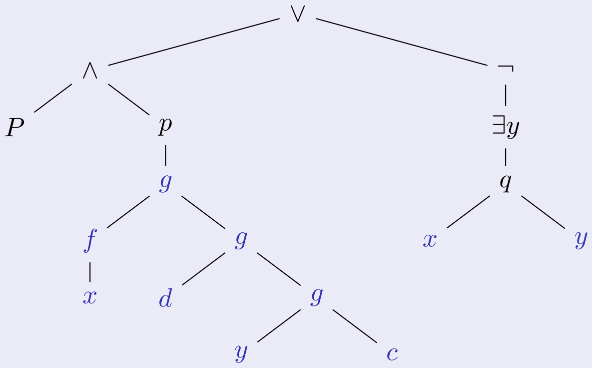
Wir können für Formeln und Terme gemeinsame Syntaxbäume aufstellen.

Um nicht durcheinander zu kommen, müssen wir Knoten, die zum Formelaufbau gehören, und Knoten, die zum Termaufbau gehören, unterscheiden.

Syntaxbäume

Beispiel (fortgesetzt)

Für die Formel $((P \wedge p(g(f(x), g(d, g(y, c))))) \vee \neg \exists y q(x, y))$ erhalten wir etwa (die Knoten der Term-Teilbäume sind blau gefärbt):



Wirkungsbereich eines Quantors

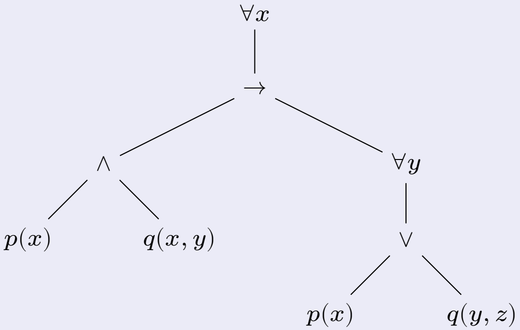
Definition

- In den Formeln $\forall x \mathscr{F}$ und $\exists x \mathscr{F}$ heißt $\mathscr{F}$ der **Wirkungsbereich** des **Quantors** $\forall x$ oder $\exists x$.
- Ein Auftreten einer Variable heißt **frei**, wenn diese außerhalb des Wirkungsbereiches eines Quantors für diese Variable steht; andernfalls heißt das Auftreten **gebunden**. Bei dieser Betrachtung ignorieren wir die Vorkommen, die unmittelbar hinter den Zeichen $\forall$ und $\exists$ stehen.

Wirkungsbereich eines Quantors

Beispiel (fortgesetzt)

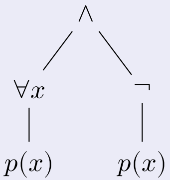
- In der Formel $\forall x((p(x) \wedge q(x,y)) \rightarrow \forall y(p(x) \vee q(y,z)))$ treten x und y gebunden und y und z frei auf. Insbesondere kann also eine Variable frei *und* gebunden auftreten.
(Wir verwenden hier z als Variable, obwohl es gar nicht als solche definiert ist, und hoffen, dass es niemand merkt.)



Wirkungsbereich eines Quantors

Beispiel (fortgesetzt)

- In der Formel $\forall x 1$ tritt nach unserer Definition x weder gebunden noch frei auf.
- In der Formel $(\forall x p(x) \wedge \neg p(x))$ ist das hintere x frei.



Geschlossene Formel

Definition

Eine Formel, in der keine Variablen frei auftreten, heißt **geschlossene Formel**.

Beispiel (fortgesetzt)

Die Formeln

- $((P \land Q) \lor \neg 0)$
- $(q(c, d) \land P)$
- $\forall x(q(c, x) \lor \exists y q(x, y))$

sind geschlossene Formeln.

Substitution

Definition

Es sei $\mathscr{F} \in For_\Sigma$ eine Formel, $x \in Var_\Sigma$ eine Variable und $t \in Term_\Sigma$ ein Term.
Dann ist $[x/t]\mathscr{F}$ die Formel, die entsteht, indem gleichzeitig jedes freie Auftreten von x in $\mathscr{F}$ durch t ersetzt wird.

Beispiel (fortgesetzt)

Es sei $F := (p(x) \wedge \forall x q(x,y))$. Dann ist

$$[x/f(c)]F = (p(f(c)) \wedge \forall x q(x,y)).$$

Substitution

Bemerkung

Die Gleichzeitigkeit bewirkt, dass ein Vorkommen von x in t nicht wieder ersetzt wird. So ist etwa

$$[x/g(x,y)]p(x) = p(g(x,y))$$

und nicht

$$[x/g(x,y)]p(x) = p(g(g(\ldots g(g(x,y),y),y)\ldots,y),y)).$$

Übersicht

Semantik

Wir wollen uns nun wieder der Frage widmen, ob eine Formel wahr oder falsch ist. Wir betrachten zunächst die Formel

$$((P \wedge p(g(f(x), g(d, g(y, c))))) \vee \neg \exists y q(x, y)).$$

Jetzt müssen wir jedoch nicht nur wissen, was der Wahrheitsgehalt des auftretenden aussagenlogischen Atomes (P) ist, vielmehr müssen wir auch wissen, wie wir die übrigen Prädikatssymbole (p und q) und die Funktionssymbole (c, d, f und g) verstehen wollen. Außerdem müssen wir uns entscheiden, über welcher Menge von Elementen (dem Universum) wir uns bewegen wollen.

Unsere Interpretation muss also nun deutlich mehr leisten als bisher. Sobald wir jedoch eine Interpretation gewählt haben, sollte der Wahrheitswert der Formel wieder eindeutig bestimmt sein.

Die Frage nach erfüllbaren und allgemeingültigen Formeln möchten wir auch wieder stellen können.

Struktur

Definition

Sei Σ eine Signatur.
Eine **Struktur** (oder **Interpretation**) von Σ ist ein Paar $\mathscr{S} = (\mathscr{U}, \mathscr{I})$, wobei

- $\mathscr{U}$ eine beliebige, nichtleere Menge ist.
- $\mathscr{I}$ eine Abbildung der Prädikats- und Funktionssymbole ist, die
  - jedem nullstelligen Prädikatssymbol $\mathscr{P}$ einen Wahrheitswert $\mathscr{I}(\mathscr{P}) \in \{\mathfrak{W}, \mathfrak{F}\}$ zuordnet,
  - jedem n-stelligen Prädikatssymbol $(n \geq 1)$ $\mathscr{p}$ eine n-stellige Relation $\mathscr{I}(\mathscr{p}) \subseteq \mathscr{U}^n$ zuordnet,
  - jedem nullstelligen Funktionssymbol $\mathscr{c}$ ein $\mathscr{I}(\mathscr{c}) \in \mathscr{U}$ zuordnet und
  - jedem n-stelligen Funktionssymbol $(n \geq 1)$ $\mathscr{f}$ eine Abbildung $\mathscr{I}(\mathscr{f}) : \mathscr{U}^n \to \mathscr{U}$ zuordnet.

$\mathscr{U}$ heißt **Universum**, $\mathscr{I}$ heißt **Interpretationsfunktion**.

Variablenbelegung
Erweiterte Struktur

Definition

Eine **Variablenbelegung** zu einer Struktur $\mathscr{S} = (\mathscr{U}, \mathscr{I})$ ist eine Abbildung $\upsilon : Var_\Sigma \to \mathscr{U}$.

Definition

Ein Paar $(\mathscr{S}, \upsilon)$ aus einer Struktur $\mathscr{S}$ und einer Variablenbelegung υ heißt **erweiterte Struktur**.

Struktur

Beispiel (fortgesetzt)

Es sei $S_1 := (U_1, I_1)$ mit

$$
\begin{aligned}
U_1 &:= \{\square, \triangledown, \sharp, *\} \\
I_1(P) &:= \mathfrak{W} \\
I_1(Q) &:= \mathfrak{W} \\
I_1(p) &:= \{\square, \triangledown, *\} \\
I_1(q) &:= \{(\square,\square), (\square,*), (\square,\sharp), (*,\sharp), (\triangledown,\triangledown), (\triangledown,*)\} \\
I_1(c) &:= \triangledown \\
I_1(d) &:= \triangledown \\
I_1(f) &:= \{\square, \triangledown, \sharp, *\} \to \{\square, \triangledown, \sharp, *\} \\
&\qquad\qquad \square \mapsto \square \\
&\qquad\qquad \triangledown \mapsto \sharp \\
&\qquad\qquad \sharp \mapsto \square \\
&\qquad\qquad * \mapsto \triangledown \\
I_1(g) &:= \{\square, \triangledown, \sharp, *\} \times \{\square, \triangledown, \sharp, *\} \to \{\square, \triangledown, \sharp, *\} \\
&\qquad\qquad (u_1, u_2) \mapsto \begin{cases} \square, & \text{falls } (u_1, u_2) = (\triangledown, \sharp) \\ *, & \text{falls } u_1 = \sharp \\ \sharp, & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Variablenbelegung
Erweiterte Struktur

Beispiel (fortgesetzt)

Die Abbildung β mit

$$\beta(x) := \triangledown$$
$$\beta(y) := \square$$

ist eine Variablenbelegung zu S_1.
(S_1, β) ist eine erweiterte Struktur.

Struktur

Beispiel (fortgesetzt)

Es sei $S_2 := (U_2, I_2)$ mit

$$
\begin{aligned}
U_2 &:= \mathbb{N} \\
I_2(P) &:= \mathfrak{W} \\
I_2(Q) &:= \mathfrak{F} \\
I_2(p) &:= \{a \in \mathbb{N} \mid a \text{ gerade}\} \\
I_2(q) &:= \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \leq b\} \\
I_2(c) &:= 5 \\
I_2(d) &:= 4 \\
I_2(f) &:= \begin{array}{c} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ a \mapsto a \cdot 2 \end{array} \\
I_2(g) &:= \begin{array}{c} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ (a,b) \mapsto a + b \end{array}
\end{aligned}
$$

Variablenbelegung Erweiterte Struktur

Beispiel (fortgesetzt)

Die Abbildung γ mit

$$\gamma(x) := 7$$
$$\gamma(y) := 2$$

ist eine Variablenbelegung zu S_2.
Die Abbildung δ mit

$$\delta(x) := 7$$
$$\delta(y) := 5$$

ist auch eine Variablenbelegung zu S_2.
(S_2, γ) und (S_2, δ) sind erweiterte Strukturen.

Termauswertung

Definition

Zu einer Struktur $\mathscr{S} = (\mathscr{U}, \mathscr{I})$ und einer Variablenbelegung v definieren wir eine (eindeutig bestimmte) Abbildung $valt_{\mathscr{S},v} : Term_\Sigma \to \mathscr{U}$, die **Termauswertung**, wie folgt:

- Für eine Variable x:
  $valt_{\mathscr{S},v}(x) := v(x)$
- Für ein nullstelliges Funktionssymbol c:
  $valt_{\mathscr{S},v}(c) := \mathscr{I}(c)$
- Für ein n-stelliges Funktionssymbol f mit $n \geq 1$:
  $valt_{\mathscr{S},v}(f(t_1, \ldots, t_n)) :=$
  $(\mathscr{I}(f))(valt_{\mathscr{S},v}(t_1), \ldots, valt_{\mathscr{S},v}(t_n))$

Termauswertung

Beispiel (fortgesetzt)

$$
\begin{aligned}
valt_{S_1,\beta}(x) &= \beta(x) = \nabla \\
valt_{S_1,\beta}(y) &= \beta(y) = \square \\
valt_{S_1,\beta}(c) &= I_1(c) = \nabla \\
valt_{S_1,\beta}(d) &= I_1(d) = \nabla \\
valt_{S_1,\beta}(f(x)) &= (I_1(f))(valt_{S_1,\beta}(x)) = (I_1(f))(\nabla) = \sharp \\
valt_{S_1,\beta}(g(y,c)) &= (I_1(g))(valt_{S_1,\beta}(y), valt_{S_1,\beta}(c)) \\
&= (I_1(g))(\square, \nabla) = \sharp
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& valt_{S_1,\beta}(g(d, g(y,c))) \\
&= (I_1(g))(valt_{S_1,\beta}(d), valt_{S_1,\beta}(g(y,c))) \\
&= (I_1(g))(\nabla, \sharp) = \square
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& valt_{S_1,\beta}(g(f(x), g(d, g(y,c)))) \\
&= (I_1(g))(valt_{S_1,\beta}(f(x)), valt_{S_1,\beta}(g(d, g(y,c)))) \\
&= (I_1(g))(\sharp, \square) = *
\end{aligned}
$$

Termauswertung

Beispiel (fortgesetzt)

$$
\begin{aligned}
valt_{S_2,\gamma}(x) &= \gamma(x) = 7\\
valt_{S_2,\gamma}(y) &= \gamma(y) = 2\\
valt_{S_2,\gamma}(c) &= I_2(c) = 5\\
valt_{S_2,\gamma}(d) &= I_2(d) = 4\\
valt_{S_2,\gamma}(f(x)) &= (I_2(f))(valt_{S_2,\gamma}(x)) = (I_2(f))(7) = 14\\
valt_{S_2,\gamma}(g(y,c)) &= (I_2(g))(valt_{S_2,\gamma}(y), valt_{S_2,\gamma}(c))\\
&= (I_2(g))(2,5) = 7
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&valt_{S_2,\gamma}(g(d, g(y,c)))\\
&= (I_2(g))(valt_{S_2,\gamma}(d), valt_{S_2,\gamma}(g(y,c)))\\
&= (I_2(g))(4,7) = 11
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&valt_{S_2,\gamma}(g(f(x), g(d, g(y,c))))\\
&= (I_2(g))(valt_{S_2,\gamma}(f(x)), valt_{S_2,\gamma}(g(d, g(y,c))))\\
&= (I_2(g))(14,11) = 25
\end{aligned}
$$

Termauswertung

Beispiel (fortgesetzt)

$$\begin{aligned}
valt_{S_2,\delta}(x) &= \delta(x) = 7\\
valt_{S_2,\delta}(y) &= \delta(y) = 5\\
valt_{S_2,\delta}(c) &= I_2(c) = 5\\
valt_{S_2,\delta}(d) &= I_2(d) = 4\\
valt_{S_2,\delta}(f(x)) &= (I_2(f))(valt_{S_2,\delta}(x)) = (I_2(f))(7) = 14\\
valt_{S_2,\delta}(g(y,c)) &= (I_2(g))(valt_{S_2,\delta}(y), valt_{S_2,\delta}(c))\\
&= (I_2(g))(5,5) = 10
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&valt_{S_2,\delta}(g(d,g(y,c)))\\
&= (I_2(g))(valt_{S_2,\delta}(d), valt_{S_2,\delta}(g(y,c)))\\
&= (I_2(g))(4,10) = 14
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&valt_{S_2,\delta}(g(f(x),g(d,g(y,c))))\\
&= (I_2(g))(valt_{S_2,\delta}(f(x)), valt_{S_2,\delta}(g(d,g(y,c))))\\
&= (I_2(g))(14,14) = 28
\end{aligned}$$

Termauswertung

Aufgaben

Berechnen Sie

1. $valt_{S_1,\beta}(f(y))$
2. $valt_{S_2,\gamma}(f(y))$
3. $valt_{S_2,\delta}(f(y))$
4. $valt_{S_1,\beta}(g(x, f(d)))$
5. $valt_{S_2,\gamma}(g(x, f(d)))$
6. $valt_{S_2,\delta}(g(x, f(d)))$
7. $valt_{S_1,\beta}(g(f(f(x)), g(c, f(d))))$

Formelauswertung

Definition

Zu einer Struktur $\mathscr{S} = (\mathscr{U}, \mathscr{I})$ und einer Variablenbelegung v definieren wir eine (eindeutig bestimmte) Abbildung $valf_{\mathscr{S},v} : For_\Sigma \to \{\mathfrak{W}, \mathfrak{F}\}$, die **Formelauswertung**, wie folgt:

- $valf_{\mathscr{S},v}(1) := \mathfrak{W}$
- $valf_{\mathscr{S},v}(0) := \mathfrak{F}$
- Für ein nullstelliges Prädikatssymbol $\mathscr{P}$:
  $valf_{\mathscr{S},v}(\mathscr{P}) := \mathscr{I}(\mathscr{P})$
- Für ein n-stelliges Prädikatssymbol p mit $n \geq 1$:
  $valf_{\mathscr{S},v}(p(t_1, \ldots, t_n)) :=$
  $$\begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls } (valt_{\mathscr{S},v}(t_1), \ldots, valt_{\mathscr{S},v}(t_n)) \in \mathscr{I}(p) \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases}$$

Formelauswertung

Beispiel (fortgesetzt)

$$
\begin{aligned}
&valf_{S_1,\beta}(P)\\
&= I_1(P)\\
&= \mathfrak{W}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&valf_{S_1,\beta}(p(g(f(x), g(d, g(y, c)))))\\
&= \begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls } valt_{S_1,\beta}(g(f(x), g(d, g(y, c)))) \in I_1(p) \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases}\\
&= \begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls } * \in I_1(p) \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases}\\
&= \mathfrak{W}
\end{aligned}
$$

Formelauswertung

Beispiel (fortgesetzt)

$$
\begin{aligned}
& valf_{S_2,\gamma}(P) \\
&= I_2(P) \\
&= \mathfrak{W}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& valf_{S_2,\gamma}(p(g(f(x), g(d, g(y, c))))) \\
&= \begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls } valt_{S_2,\gamma}(g(f(x), g(d, g(y, c)))) \in I_2(p) \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls } 25 \in I_2(p) \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls 25 gerade} \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \mathfrak{F}
\end{aligned}
$$

Formelauswertung

Beispiel (fortgesetzt)

$$
\begin{aligned}
& valf_{S_2,\delta}(P) \\
& = I_2(P) \\
& = \mathfrak{W}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& valf_{S_2,\delta}(p(g(f(x), g(d, g(y, c))))) \\
& = \begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls } valt_{S_2,\delta}(g(f(x), g(d, g(y, c)))) \in I_2(p) \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases} \\
& = \begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls } 28 \in I_2(p) \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases} \\
& = \begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls } 28 \text{ gerade} \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases} \\
& = \mathfrak{W}
\end{aligned}
$$

Formelauswertung

Aufgaben

Berechnen Sie

1. $valf_{S_1,\beta}(p(f(x)))$
2. $valf_{S_2,\gamma}(p(f(x)))$
3. $valf_{S_2,\delta}(p(f(x)))$
4. $valf_{S_1,\beta}(q(c,f(y)))$
5. $valf_{S_2,\gamma}(q(c,f(y)))$
6. $valf_{S_2,\delta}(q(c,f(y)))$
7. $valf_{S_1,\beta}(q(f(f(x)),g(d,f(d))))$

Formelauswertung

Definition (fortgesetzt)

- Für eine Formel $\mathscr{F}$:
$$valf_{\mathscr{S},v}(\neg\mathscr{F}) := \begin{cases} \mathfrak{F} & \text{falls } valf_{\mathscr{S},v}(\mathscr{F}) = \mathfrak{W} \\ \mathfrak{W} & \text{falls } valf_{\mathscr{S},v}(\mathscr{F}) = \mathfrak{F} \end{cases}$$
- Für Formeln $\mathscr{F}$ und $\mathscr{G}$:
$$valf_{\mathscr{S},v}((\mathscr{F} \wedge \mathscr{G})) := \begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls } valf_{\mathscr{S},v}(\mathscr{F}) = valf_{\mathscr{S},v}(\mathscr{G}) = \mathfrak{W} \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases}$$
- Für Formeln $\mathscr{F}$ und $\mathscr{G}$:
$$valf_{\mathscr{S},v}((\mathscr{F} \vee \mathscr{G})) := \begin{cases} \mathfrak{F} & \text{falls } valf_{\mathscr{S},v}(\mathscr{F}) = valf_{\mathscr{S},v}(\mathscr{G}) = \mathfrak{F} \\ \mathfrak{W} & \text{sonst} \end{cases}$$
- Für Formeln $\mathscr{F}$ und $\mathscr{G}$:
$$valf_{\mathscr{S},v}((\mathscr{F} \to \mathscr{G})) := \begin{cases} \mathfrak{F} & \text{falls } valf_{\mathscr{S},v}(\mathscr{F}) = \mathfrak{W} \text{ und } valf_{\mathscr{S},v}(\mathscr{G}) = \mathfrak{F} \\ \mathfrak{W} & \text{sonst} \end{cases}$$
- Für Formeln $\mathscr{F}$ und $\mathscr{G}$:
$$valf_{\mathscr{S},v}((\mathscr{F} \leftrightarrow \mathscr{G})) := \begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls } valf_{\mathscr{S},v}(\mathscr{F}) = valf_{\mathscr{S},v}(\mathscr{G}) \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases}$$

Formelauswertung

Definition (fortgesetzt)

- Für eine Variable x und eine Formel $\mathscr{F}$:
  $valf_{\mathscr{S},\upsilon}(\forall x \mathscr{F}) :=$
  $$\begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls für alle } u \in \mathscr{U} \text{ gilt: } valf_{\mathscr{S},\upsilon_x^u}(\mathscr{F}) = \mathfrak{W} \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases}$$
- Für eine Variable x und eine Formel $\mathscr{F}$:
  $valf_{\mathscr{S},\upsilon}(\exists x \mathscr{F}) :=$
  $$\begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls für ein } u \in \mathscr{U} \text{ gilt: } valf_{\mathscr{S},\upsilon_x^u}(\mathscr{F}) = \mathfrak{W} \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases}$$

Formelauswertung

Beispiel (fortgesetzt)

Wir möchten die Formel $\forall x p(x)$ in der erweiterten Struktur (S_1, β) auswerten.
Nach Definition ist

$$valf_{S_1,\beta}(\forall x p(x)) =$$
$$\begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls für alle } u \in U_1 \text{ gilt: } valf_{S_1,\beta_x^u}(p(x)) = \mathfrak{W} \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases}$$

Daher betrachten wir zunächst $valf_{S_1,\beta_x^u}(p(x))$.

Formelauswertung

Beispiel (fortgesetzt)

Für beliebiges $u \in U_1$ gilt:

$$
\begin{aligned}
& valf_{S_1, \beta_x^u}(p(x)) \\
&= \begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls } valt_{S_1, \beta_x^u}(x) \in I_1(p) \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls } \beta_x^u(x) \in I_1(p) \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls } u \in I_1(p) \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls } u = \square \text{ oder } u = \nabla \text{ oder } u = * \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Formelauswertung

Beispiel (fortgesetzt)

Damit wissen wir nun

$$
\begin{aligned}
& valf_{S_1,\beta}(\forall x p(x)) \\
&= \begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls für alle } u \in U_1 \text{ gilt: } valf_{S_1,\beta_x^u}(p(x)) = \mathfrak{W} \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls für alle } u \in U_1 \text{ gilt: } u = \square \text{ oder } u = \nabla \text{ oder } u = * \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \mathfrak{F}
\end{aligned}
$$

Formelauswertung

Beispiel (fortgesetzt)

Wir möchten jetzt die Formeln $\forall y q(x,y)$ und $\exists y q(x,y)$ in der erweiterten Struktur (S_1, β) auswerten.
Nach Definition ist

$$valf_{S_1,\beta}(\forall y q(x,y)) =$$

$$\begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls für alle } u \in U_1 \text{ gilt: } valf_{S_1,\beta_y^u}(q(x,y)) = \mathfrak{W} \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$valf_{S_1,\beta}(\exists y q(x,y)) =$$

$$\begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls für ein } u \in U_1 \text{ gilt: } valf_{S_1,\beta_y^u}(q(x,y)) = \mathfrak{W} \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases}$$

Daher betrachten wir zunächst $valf_{S_1,\beta_y^u}(q(x,y))$.

Formelauswertung

Beispiel (fortgesetzt)

Für beliebiges $u \in U_1$ gilt:

$$
\begin{aligned}
& valf_{S_1, \beta_y^u}(q(x,y)) \\
&= \begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls } (valt_{S_1,\beta_y^u}(x), valt_{S_1,\beta_y^u}(y)) \in I_1(q) \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls } (\beta_y^u(x), \beta_y^u(y)) \in I_1(q) \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls } (\nabla, u) \in I_1(q) \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls } u = \nabla \text{ oder } u = * \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Formelauswertung

Beispiel (fortgesetzt)

Damit wissen wir nun

$$
\begin{aligned}
& valf_{S_1,\beta}(\forall y q(x,y)) \\
&= \begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls für alle } u \in U_1 \text{ gilt: } valf_{S_1,\beta_y^u}(q(x,y)) = \mathfrak{W} \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls für alle } u \in U_1 \text{ gilt: } u = \nabla \text{ oder } u = * \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \mathfrak{F}
\end{aligned}
$$

Formelauswertung

Beispiel (fortgesetzt)

Und wir wissen

$$
\begin{aligned}
& valf_{S_1,\beta}(\exists y q(x,y)) \\
&= \begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls für ein } u \in U_1 \text{ gilt: } valf_{S_1,\beta_y^u}(q(x,y)) = \mathfrak{W} \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls für ein } u \in U_1 \text{ gilt: } u = \nabla \text{ oder } u = * \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \mathfrak{W}
\end{aligned}
$$

Formelauswertung

Beispiel (fortgesetzt)

Wir möchten jetzt die Formeln $\forall y q(x,y)$ und $\exists y q(x,y)$ in der erweiterten Struktur (S_2, γ) auswerten.
Nach Definition ist

$$valf_{S_2,\gamma}(\forall y q(x,y)) =$$
$$\begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls für alle } u \in U_2 \text{ gilt: } valf_{S_2,\gamma_y^u}(q(x,y)) = \mathfrak{W} \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$valf_{S_2,\gamma}(\exists y q(x,y)) =$$
$$\begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls für ein } u \in U_2 \text{ gilt: } valf_{S_2,\gamma_y^u}(q(x,y)) = \mathfrak{W} \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases}$$

Daher betrachten wir zunächst $valf_{S_2,\gamma_y^u}(q(x,y))$.

Formelauswertung

Beispiel (fortgesetzt)

Für beliebiges $u \in U_2$ gilt:

$$
\begin{aligned}
& valf_{S_2,\gamma_y^u}(q(x,y)) \\
&= \begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls } (valt_{S_2,\gamma_y^u}(x), valt_{S_2,\gamma_y^u}(y)) \in I_2(q) \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls } (\gamma_y^u(x), \gamma_y^u(y)) \in I_2(q) \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls } (7, u) \in I_2(q) \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls } 7 \le u \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Formelauswertung

Beispiel (fortgesetzt)

Damit wissen wir nun

$$
\begin{aligned}
& valf_{S_2,\gamma}(\forall y q(x,y)) \\
&= \begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls für alle } u \in U_2 \text{ gilt: } valf_{S_2,\gamma_y^u}(q(x,y)) = \mathfrak{W} \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls für alle } u \in U_2 \text{ gilt: } 7 \leq u \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \mathfrak{F}
\end{aligned}
$$

Formelauswertung

Beispiel (fortgesetzt)

Und wir wissen

$$
\begin{aligned}
&valf_{S_2,\gamma}(\exists y q(x,y)) \\
&= \begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls für ein } u \in U_2 \text{ gilt: } valf_{S_2,\gamma_y^u}(q(x,y)) = \mathfrak{W} \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls für ein } u \in U_2 \text{ gilt: } 7 \leq u \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \mathfrak{W}
\end{aligned}
$$

Formelauswertung

Aufgaben

Bestimmen Sie

1. $valf_{S_2,\gamma}(\forall x p(x))$
2. $valf_{S_1,\beta}(\forall x q(x,y))$
3. $valf_{S_2,\gamma}(\forall x q(x,y))$
4. $valf_{S_2,\delta}(\forall x q(x,y))$
5. $valf_{S_1,\beta}(\exists x q(x,y))$
6. $valf_{S_2,\gamma}(\exists x q(x,y))$
7. $valf_{S_1,\beta}(\forall x \exists y q(x,y))$
8. $valf_{S_1,\beta}(\forall x \exists y q(y,x))$
9. $valf_{S_2,\gamma}(\forall x \exists y q(x,y))$
10. $valf_{S_2,\delta}(\forall x \exists y q(x,y))$
11. $valf_{S_2,\delta}(\exists y \forall x q(x,y))$

Substitutionslemma

Substitutionslemma

Es sei $\mathscr{S}$ eine Struktur, υ eine Variablenbelegung, $x \in Var_\Sigma$ eine Variable, $t \in Term_\Sigma$ ein Term und $\mathscr{F} \in For_\Sigma$ eine Formel. Weiter trete in t keine Variable auf, die in $\mathscr{F}$ gebunden wird. Dann gilt:

$$valf_{\mathscr{S},\upsilon}([x/t]\mathscr{F}) = valf_{\mathscr{S},\upsilon_x^{valt_{\mathscr{S},\upsilon}(t)}}(\mathscr{F}).$$

Es ist also egal, ob wir in $\mathscr{F}$ x durch den Term t ersetzen und dann die modifizierte Formel mit der ursprünglichen Variablenbelegung υ auswerten, oder ob wir die Variablenbelegung modifizieren, indem wir x auf das Element aus $\mathscr{U}$ abbilden, auf das auch t abgebildet wird, und damit die ursprüngliche Formel auswerten.

Substitutionslemma

Beispiel (fortgesetzt)

Es ist $valt_{S_2,\gamma}(f(f(c))) = 20$. Damit ist

$$
\begin{aligned}
& valf_{S_2,\gamma}([x/f(f(c))]p(x)) \\
&= valf_{S_2,\gamma}(p(f(f(c)))) \\
&= \begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls } valt_{S_2,\gamma}(f(f(c))) \in I_2(p) \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls } 20 \in I_2(p) \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \mathfrak{W} & \text{falls } valt_{S_2,\gamma_x^{20}}(x) \in I_2(p) \\ \mathfrak{F} & \text{sonst} \end{cases} \\
&= valf_{S_2,\gamma_x^{20}}(p(x)) \\
&= valf_{S_2,\gamma_x^{valt_{S_2,\gamma}(f(f(c)))}}(p(x))
\end{aligned}
$$

Substitutionslemma

Bemerkung

Die Voraussetzung, dass in t keine Variable auftrete, die in $\mathscr{F}$ gebunden wird, ist wesentlich:
So ist

$$valf_{S_1,\beta}([x/f(y)]\forall y p(x)) = valf_{S_1,\beta}(\forall y p(f(y))) = \mathfrak{F},$$

aber

$$valf_{S_1,\beta_x^{valt_{S_1,\beta}(f(y))}}(\forall y p(x)) = valf_{S_1,\beta_x^{\square}}(\forall y p(x)) = \mathfrak{W}.$$

Definitionen

Definition

Es sei $\mathscr{F} \in For_\Sigma$ eine Formel.

- Eine erweiterte Struktur $(\mathscr{S}, v)$ mit $valf_{\mathscr{S},v}(\mathscr{F}) = \mathfrak{W}$ heißt **Modell** für $\mathscr{F}$.
- $\mathscr{F}$ heißt **erfüllbar**, falls es eine erweiterte Struktur gibt, die Modell für $\mathscr{F}$ ist.
- $\mathscr{F}$ heißt **allgemeingültig**, falls jede erweiterte Struktur ein Modell für $\mathscr{F}$ ist.

Obacht

Für die Allgemeingültigkeit genügt es nicht, *eine* Struktur zu fixieren und nur die Variablenbelegung zu variieren. Es genügt ebenfalls nicht, sich auf die Untersuchung aller Strukturen mit *einem* festen Universum zu beschränken.

Erfüllbarkeit
Allgemeingültigkeit

Beispiel

Wir betrachten die Formel

$$F := p(g(f(x), g(d, g(y, c)))).$$

Es gilt

$$valf_{S_1,\beta}(F) = \mathfrak{W},$$

also ist (S_1, β) ein Modell für F, also ist F erfüllbar.
Weiter gilt

$$valf_{S_2,\gamma}(F) = \mathfrak{F},$$

also ist (S_2, γ) kein Modell für F, also ist F nicht allgemeingültig.

Aufgaben

Geben Sie mit Begründung an, ob folgende Formeln erfüllbar sind und ob sie allgemeingültig sind.

1. $p(x)$
2. $p(f(x))$
3. $q(x, y)$
4. $\forall x p(f(f(x)))$
5. $\exists x \forall y q(x, y)$
6. $\exists x \forall y q(d, g(x, y))$

Semantische Folgerbarkeit

Definition

Es seien $\mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}_n, \mathscr{G} \in For_\Sigma$ Formeln.

- Aus $\mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}_n$ **folgt** $\mathscr{G}$, in Zeichen $\mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}_n \vDash \mathscr{G}$, falls für jede erweiterte Struktur $(\mathscr{S}, v)$ gilt:
  Falls $(\mathscr{S}, v)$ ein Modell für $\mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}_n$ ist, dann ist $(\mathscr{S}, v)$ auch ein Modell für $\mathscr{G}$.

Beispiel (fortgesetzt)

Es gilt beispielsweise

$$\forall x q(x, y) \vDash \exists x q(x, y)$$
$$p(c) \vDash \exists x p(x).$$

Logische Äquivalenz

Definition

Es seien $\mathscr{F}, \mathscr{G} \in For_\Sigma$ Formeln.

- Zwei Formeln $\mathscr{F}$ und $\mathscr{G}$ heißen **logisch äquivalent**, in Zeichen $\mathscr{F} \equiv \mathscr{G}$, falls $\mathscr{F} \models \mathscr{G}$ und $\mathscr{G} \models \mathscr{F}$.

Satz

Logische Äquivalenz ist eine Äquivalenzrelation.

Logische Äquivalenz

Satz

Es seien $\mathscr{F}, \mathscr{G} \in For_\Sigma$ Formeln. Dann gilt:

- $(\mathscr{F} \to \mathscr{G}) \equiv (\neg\mathscr{F} \vee \mathscr{G})$
- $(\mathscr{F} \leftrightarrow \mathscr{G}) \equiv ((\mathscr{F} \wedge \mathscr{G}) \vee (\neg\mathscr{F} \wedge \neg\mathscr{G}))$

Logische Äquivalenz

Satz

Es seien $\mathscr{F}, \mathscr{F}', \mathscr{G}, \mathscr{G}' \in For_\Sigma$ Formeln mit $\mathscr{F} \equiv \mathscr{F}'$ und $\mathscr{G} \equiv \mathscr{G}'$ und $x \in Var_\Sigma$ eine Variable.
Dann gilt:

- $\neg\mathscr{F} \equiv \neg\mathscr{F}'$
- $(\mathscr{F} \wedge \mathscr{G}) \equiv (\mathscr{F}' \wedge \mathscr{G}')$
- $(\mathscr{F} \vee \mathscr{G}) \equiv (\mathscr{F}' \vee \mathscr{G}')$
- $(\mathscr{F} \rightarrow \mathscr{G}) \equiv (\mathscr{F}' \rightarrow \mathscr{G}')$
- $(\mathscr{F} \leftrightarrow \mathscr{G}) \equiv (\mathscr{F}' \leftrightarrow \mathscr{G}')$
- $\forall x \mathscr{F} \equiv \forall x \mathscr{F}'$
- $\exists x \mathscr{F} \equiv \exists x \mathscr{F}'$

Satz

Es seien $\mathscr{F}, \mathscr{G} \in For_\Sigma$ Formeln. Dann gilt:

- $[\mathscr{F} \models \mathscr{G}]$ gdw. $[(\mathscr{F} \rightarrow \mathscr{G})$ ist allgemeingültig$]$
- $[\mathscr{F} \equiv \mathscr{G}]$ gdw. $[(\mathscr{F} \leftrightarrow \mathscr{G})$ ist allgemeingültig$]$
- $[\mathscr{F}$ ist allgemeingültig$]$ gdw. $[\mathscr{F} \equiv 1]$
- $[\mathscr{F}$ ist nicht erfüllbar$]$ gdw. $[\mathscr{F} \equiv 0]$

Ersetzbarkeit

Satz

Es seien $\mathscr{F}, \mathscr{F}', \mathscr{G}, \mathscr{G}' \in For_\Sigma$ Formeln, $\mathscr{G}$ eine Teilformel von $\mathscr{F}$ und es gelte $\mathscr{G} \equiv \mathscr{G}'$. $\mathscr{F}'$ entstehe aus $\mathscr{F}$, indem an beliebigen Stellen, an denen $\mathscr{G}$ in $\mathscr{F}$ auftritt, $\mathscr{G}$ durch $\mathscr{G}'$ ersetzt wird. Dann gilt $\mathscr{F} \equiv \mathscr{F}'$.

Erläuterung

Wir haben also etwa

$$\mathscr{F} = \dots \mathscr{G} \dots$$
$$\mathscr{F}' = \dots \mathscr{G}' \dots$$

Gebundene Umbenennung

Satz

- Es seien $x, y \in Var_\Sigma$ Variablen und es sei $\mathscr{F} = \forall x \mathscr{G}$ eine Formel, wobei y nicht in $\mathscr{F}$ auftrete.
  Dann gilt $\mathscr{F} \equiv \forall y [x/y] \mathscr{G}$.
- Es seien $x, y \in Var_\Sigma$ Variablen und es sei $\mathscr{F} = \exists x \mathscr{G}$ eine Formel, wobei y nicht in $\mathscr{F}$ auftrete.
  Dann gilt $\mathscr{F} \equiv \exists y [x/y] \mathscr{G}$.

Dieser Satz ermöglicht es uns, Namenskonflikte aufzulösen. So darf beim Substitutionslemma in t keine Variable vorkommen, die in $\mathscr{F}$ gebunden auftritt. Diese Situation können wir nun immer erreichen, indem wir die entsprechenden Variablen umbenennen.

Beispiel (fortgesetzt)

$$\forall x q(x, c) \equiv \forall y q(y, c)$$
$$\exists x q(x, c) \equiv \exists y q(y, c)$$

Logische Äquivalenz

Bemerkung

Die Äquivalenzregeln aus der Aussagenlogik (Folien 45 und 46) gelten entsprechend.

Logische Äquivalenz

Bemerkung

Es seien $\mathscr{F}, \mathscr{G} \in For_\Sigma$ Formeln und $x, y \in Var_\Sigma$ Variablen. Dann gilt:

- $\neg \forall x \mathscr{F} \equiv \exists x \neg \mathscr{F}$
- $\neg \exists x \mathscr{F} \equiv \forall x \neg \mathscr{F}$
- $\forall x \forall y \mathscr{F} \equiv \forall y \forall x \mathscr{F}$
- $\exists x \exists y \mathscr{F} \equiv \exists y \exists x \mathscr{F}$

Logische Äquivalenz

Bemerkung (fortgesetzt)

- $(\forall x \mathscr{F} \land \forall x \mathscr{G}) \equiv \forall x(\mathscr{F} \land \mathscr{G})$
- $(\exists x \mathscr{F} \lor \exists x \mathscr{G}) \equiv \exists x(\mathscr{F} \lor \mathscr{G})$
- Falls x nicht frei in $\mathscr{G}$ vorkommt:
  - $(\forall x \mathscr{F} \land \mathscr{G}) \equiv \forall x(\mathscr{F} \land \mathscr{G})$
  - $(\forall x \mathscr{F} \lor \mathscr{G}) \equiv \forall x(\mathscr{F} \lor \mathscr{G})$
  - $(\exists x \mathscr{F} \land \mathscr{G}) \equiv \exists x(\mathscr{F} \land \mathscr{G})$
  - $(\exists x \mathscr{F} \lor \mathscr{G}) \equiv \exists x(\mathscr{F} \lor \mathscr{G})$
- Falls x nicht frei in $\mathscr{F}$ vorkommt:
  - $(\mathscr{F} \land \forall x \mathscr{G}) \equiv \forall x(\mathscr{F} \land \mathscr{G})$
  - $(\mathscr{F} \lor \forall x \mathscr{G}) \equiv \forall x(\mathscr{F} \lor \mathscr{G})$
  - $(\mathscr{F} \land \exists x \mathscr{G}) \equiv \exists x(\mathscr{F} \land \mathscr{G})$
  - $(\mathscr{F} \lor \exists x \mathscr{G}) \equiv \exists x(\mathscr{F} \lor \mathscr{G})$

Logische Äquivalenz

Warnung

Ein Konstrukt wie »$\neg\exists x$« ist keine Einheit. Es ist nicht wie das Vorzeichen bei einer Zahl, etwa »-5«.
Ein Beispiel soll dies verdeutlichen:

$$
\begin{aligned}
& \forall x(\neg q(x,y) \vee p(y)) \\
\equiv\ & (\forall x \neg q(x,y) \vee p(y)) \\
\equiv\ & (\neg\exists x q(x,y) \vee p(y)) \\
\not\equiv\ & \neg\exists x(q(x,y) \vee p(y)) \\
\equiv\ & \forall x \neg(q(x,y) \vee p(y)) \\
\equiv\ & \forall x(\neg q(x,y) \wedge \neg p(y)).
\end{aligned}
$$

Logische Äquivalenz

Bemerkung

Folgende Ausdrücke sehen ähnlich aus wie Äquivalenzen, sind aber trotzdem keine:

- $(\forall x \mathscr{F} \vee \forall x \mathscr{G}) \not\equiv \forall x(\mathscr{F} \vee \mathscr{G})$
- $(\exists x \mathscr{F} \wedge \exists x \mathscr{G}) \not\equiv \exists x(\mathscr{F} \wedge \mathscr{G})$
- $\forall x \exists y \mathscr{F} \not\equiv \exists y \forall x \mathscr{F}$

Das bedeutet, dass es einige Formeln $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ und erweiterte Strukturen $(\mathscr{S}, \upsilon)$ gibt, sodass die Auswertung der linken Seite verschieden von der Auswertung der rechten Seite ist.
Es gibt zwar auch Formeln und erweiterte Strukturen, für die die Auswertungen gleich sind. Da diese Gleichheit aber nicht für beliebige Formeln und erweiterte Strukturen gilt, sind diese Schemata keine Äquivalenzen.