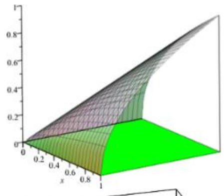
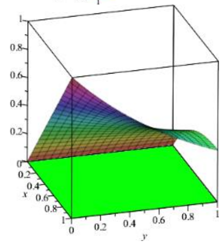
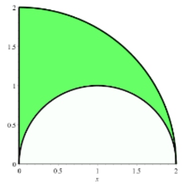
1. Doppelintegrale



1. a. Es sei $f(x,y)=\sqrt{x\cdot y}$ für $0\le x\le 1$ und $0\le y\le 1$. Bestimmen Sie das Volumen V des Körpers zwischen dem Schaubild von f und der xy-Ebene.

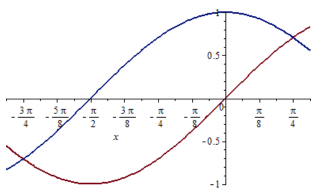


   b. Es sei $f(x,y)=x\cdot e^{-x\cdot y}$ für $0\le x\le 1$ und $0\le y\le 1$. Bestimmen Sie das Volumen V des Körpers zwischen dem Schaubild von f und der xy-Ebene.



2. Es sei $f(x,y)=x\cdot y$ für $x,y\in\mathbb{R}$. Das Flächenstück A sei im ersten Quadranten begrenzt durch die beiden Kreise $x^2+y^2=4$ und $(x-1)^2+y^2=1$ und durch die y-Achse; siehe Skizze. Bestimmen Sie $\iint_A f(x,y)\,dA$.

3. Die beiden Schaubilder von $f(x)=\sin(x)$ und $g(x)=\cos(x)$ begrenzen im Intervall $-\frac{3\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}$ ein Flächenstück A. Denn $\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right)=\cos(-\frac{3}{4}\pi)=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ und

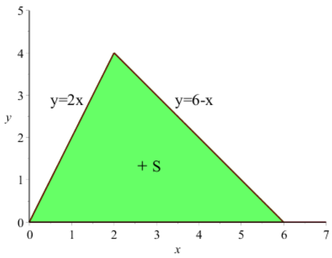


   $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schwerpunktes $S(x_S\,|\,y_S)$ von A mit Hilfe der Formeln $x_S=\frac{1}{A}\iint_A x\,dy\,dx$ und

   $y_S=\frac{1}{A}\iint_A y\,dy\,dx$.

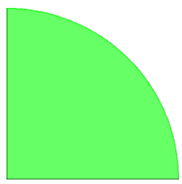
   Hinweis: Bei y_S verwenden Sie vorteilhaft die Beziehung $\cos^2(x)-\sin^2(x)=\cos(2x)$.

4. Die beiden Geraden mit den Gleichungen $y=2x$ und $y=6-x$ begrenzen mit der positiven x-Achse ein Dreieck A. Auf diesem Dreieck ist die Funktion $f(x,y)=x\cdot y^2$ definiert. Berechnen Sie $\iint_A f(x,y)\,dA$.



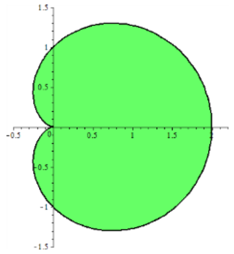
   a. durch Zerlegung von A in waagerechte Streifen: $\int_{y=0}^{4}\int_{x=y/2}^{x=6-y} f(x,y)\,dx\,dy$
   b. durch Zerlegung in senkrechte Streifen. Man benötigt zwei Integrale, einmal über das linke Teildreieck und einmal über das rechte Teildreieck.
   c. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schwerpunktes $S(x_S\,|\,y_S)$ des gezeichneten Dreiecks durch Zerlegung in waagerechte Streifen.

5. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schwerpunktes $S(x_S\,|\,y_S)$ des Viertelkreises vom Radius R.



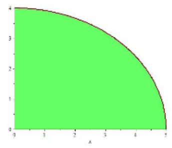
   a. Mit Hilfe der rechtwinkligen Koordinaten x, y. Zerlegen Sie die Fläche in senkrechte Streifen.
   b. Mit Hilfe der rechtwinkligen Koordinaten x, y. Zerlegen Sie die Fläche in waagerechte Streifen.
   c. Mit Hilfe von Polarkoordinaten r, φ.

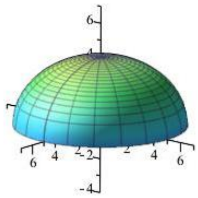
6. Durch $r(\varphi) = 1 + \cos(\varphi)$ mit $0 \le \varphi < 2\pi$ ist die sogenannte Kardiole gegeben.
   a. Es soll der Flächeninhalt A bestimmt werden.
   b. Stellen Sie die Formeln auf zur Bestimmung der Koordinaten des Schwerpunktes $S(x_S \mid y_S)$ von A.



2. Dreifachintegrale

1. Durch die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ ist eine Ellipse mit den Halbachsen a und b gegeben. Nach z aufgelöst: $z = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Der obere Teil hat die Gleichung $z = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.





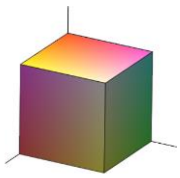
   Im Schaubild ist $a = 5$ und $b = 4$ gewählt.
   Wenn das Schaubild von $z = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ für $0 \le x \le a$ um die z-Achse rotiert, dann entsteht die obere Hälfte eines Rotationsellipsoides.
   Bestimmen Sie das Volumen V und die Koordinaten des Schwerpunktes S dieses Rotationskörpers.

2. Wenn ein punktförmiger Körper der Masse dm mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine Achse rotiert, dann besitzt er die kinetische Rotationsenergie $\Delta W_{kin} = \frac{1}{2} dm\, v^2 = \frac{1}{2} dm\, (r\omega)^2 = \frac{1}{2} \cdot r^2 dm \cdot \omega^2$. Wenn nun ein ganzer Körper mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine Achse rotiert, so gilt $W_{kin} = \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot \int_m r^2\, dm$. Wegen $m = \rho \cdot V$ mit der Dichte ρ gilt $W_{kin} = \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot \rho \cdot \int_m r^2\, dV$.

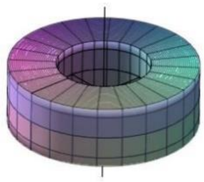
   Definition: Wenn ein homogener Körper (Dichte ρ ist konstant) um die z-Achse rotiert, dann heißt $\boxed{J_z = \rho \iiint_V r^2\, dV}$ das Trägheitsmoment dieses Körpers.

a. Im Koordinatensystem befindet sich ein Würfel der Dichte ρ und der Kantenlänge a in der Lage $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$ und $0 \le z \le a$.

   Bestimmen Sie sein Trägheitsmoment J bezüglich der z-Achse.

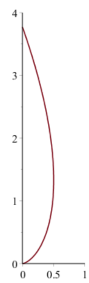


b. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment eines homogenen Hohlzylinders der Radien R_1 und R_2, $R_1 < R_2$, bezüglich seiner Körperachse, der z-Achse. Die Höhe sei h.

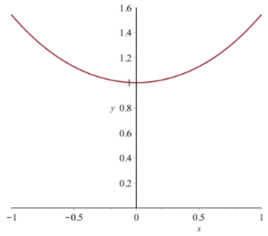


3.a.1. Das Kurvenintegral 1. Art im Reellen

1. Durch $\begin{cases} x(t) = t - \frac{1}{2}t^2 \\ y(t) = \frac{4}{3}t^{3/2} \end{cases}$ für $0 \le t \le 2$ ist eine Kurve gegeben. Bestimmen Sie Ihre Länge L.

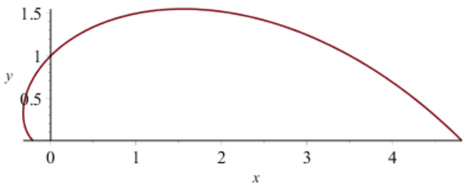


2. Für ein $a \in \mathbb{R}^+$ ist durch $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = a \cdot \cosh\left(\frac{t}{a}\right) \end{cases}$ für $-a \le t \le a$ eine Kurve gegeben. Berechnen Sie ihre Länge. Hinweis: Cosinus hyperbolicus $\cosh(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^x + e^{-x}\right)$. Außerdem ist $\cosh(x) = \cos(i\,x)$.
Sinus hyperbolicus $\sinh(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^x - e^{-x}\right) = -i \cdot \sin(i\,x)$ und $\cosh'(x) = \sinh(x)$.
Abgebildet ist das Schaubild von $f(x) = \cosh(x)$.



3. Es sei $\rho(x, y) = 2xy$ die Liniendichte in der Einheit g/cm eines geraden Drahtes mit den Endpunkten $(0/0)$ und $(6/2)$; die Längeneinheit sei 1cm. Berechnen Sie die Masse M dieses Drahtes.

4. Durch $\begin{cases} x(t) = e^t \cdot \sin(t) \\ y(t) = e^t \cdot \cos(t) \end{cases}$ für $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$ ist ein Draht gegeben.
Die Längeneinheit beträgt 1cm.
$\rho(x, y) = x^2 + y^2$ sei die Liniendichte in der Einheit g/cm.
Berechnen Sie die Länge L und die Masse M des Drahtes.

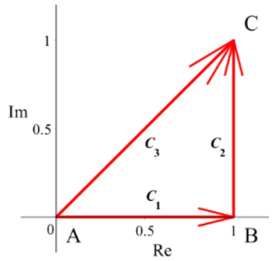


5. In der Ebene $\mathbb{R}^2$ ist die Funktion $f(x, y) = x^2 - 4x \cdot y + 3y^2$ gegeben. Außerdem sei $g(t)$ eine differenzierbare Funktion mit $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ und $g'(t) \ge 0$ Die Punkte $(0/0)$ und $(3/4)$ sind auf der Geraden $y = \frac{4}{3}x$ durch den Weg C: $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot g(t) \\ 4 \cdot g(t) \end{pmatrix}$, $0 \le t \le 1$, verbunden. Bestimmen Sie $\int_C f\left(x(t), y(t)\right) \cdot \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt$
.

6. L sei die Länge einer Schraubenlinie mit 2 Windungen, die gegeben ist durch $\begin{cases} x(t) = r \cdot \cos(t) \\ y(t) = r \cdot \sin(t) \\ z(t) = a \cdot t \end{cases}$ mit $r, a > 0$.
Die Ganghöhe beträgt dann $2\pi a$. Bestimmen Sie L.

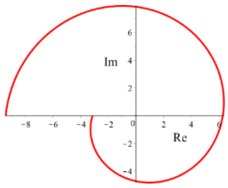
3.a.2. Das Kurvenintegral 1. Art im Komplexen

1. Gegeben ist die Funktion $f(z) = \bar{z}$ für $z \in \mathbb{C}$. Dabei ist $\bar{z} = x - i\,y$ die zu $z = x + i\,y$ konjugiert komplexe Zahl. Z.B $f(2+3i) = 2-3i$.
Die Funktion f soll integriert werden über dem Weg von A nach C, einmal auf dem Weg $A \to B \to C$ und einmal direkt $A \to C$. Dabei stehen die Punkte A, B und C für die komplexen zahlen 0, 1 und $1+i$.
Die drei Wege sind $C_1 : z = t$, $C_2 : z = 1 + t \cdot i$ und $C_3 :\ z = t \cdot (1+i)$, jeweils mit $0 \le t \le 1$.
Überprüfen Sie die Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen.

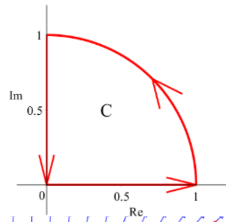


2. Gegeben ist die Funktion $f(z) = \mathrm{Re}(z)$ für $z \in \mathbb{C}$. Dabei ist $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(x + i\,y) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$. Die Funktion f soll integriert werden über den im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenen Einheitskreis $z(t) = e^{it}$ für $0 \le t \le 2\pi$.
Überprüfen Sie die Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen.

3. Gegeben ist die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Die Funktion f soll integriert werden über den Weg $C: z = t \cdot e^{i \cdot t}$ für $\pi \le t \le 3\pi$.
Überprüfen Sie die Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen.

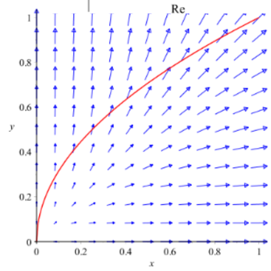


4. Gegeben ist die Betragsfunktion $f(z) = |z|$ für $z \in \mathbb{C}$. Die Funktion f soll integriert werden über dem gezeichneten Weg.
Überprüfen Sie die Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen.

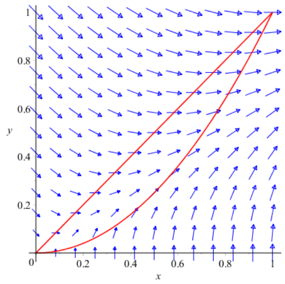


3.b. Das Kurvenintegral 2. Art

1. Im $\mathbb{R}^2$ sei $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$ und $C: \begin{pmatrix} x = t \\ y = \sqrt{t} \end{pmatrix}$ mit $0 \le t \le 1$. Bestimmen Sie $W = \int_C \vec{F} \bullet d\vec{s}$.



2. Im $\mathbb{R}^2$ sei $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x - y \end{pmatrix}$ und C ein Weg, der die beiden Punkte $(0/0)$ und $(1/1)$ verbindet. Bestimmen Sie $W = \int_C \vec{F} \bullet d\vec{s}$.

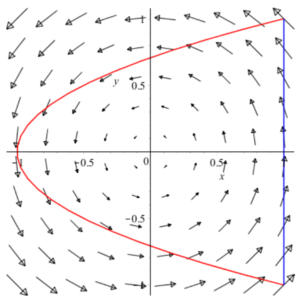


   a. $C: \begin{pmatrix} x = t \\ y = t \end{pmatrix}$ mit $0 \le t \le 1$. C ist ein Geradenstück zwischen $(0/0)$ und $(1/1)$.

   b. $C: \begin{pmatrix} x = t \\ y = t^2 \end{pmatrix}$ mit $0 \le t \le 1$. C ist ein Parabelstück zwischen $(0/0)$ und $(1/1)$.

   Wieso war die Wegunabhängigkeit des Integrals zu erwarten?

3. Im $\mathbb{R}^2$ sei $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ und C ein Weg, der die beiden Punkte $(1/-1)$ und $(1/1)$ verbindet.
Bestimmen Sie $W = \int_C \vec{F} \bullet d\vec{s}$.



   a. $C: \begin{pmatrix} x = 2t^2 - 1 \\ y = t \end{pmatrix}$ mit $-1 \le t \le 1$.

   b. $C: \begin{pmatrix} x = 1 \\ y = t \end{pmatrix}$ mit $-1 \le t \le 1$.

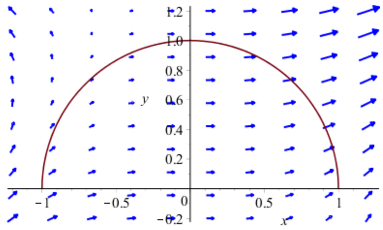
   Wieso war die Wegabhängigkeit von W zu erwarten?

4. Im $\mathbb{R}^3$ sei $\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$ und $C: \begin{pmatrix} x = t \\ y = -t \\ z = 2t \end{pmatrix}$ mit $0 \le t \le 1$. Bestimmen Sie $W = \int_C \vec{F} \bullet d\vec{s}$.

5. Im $\mathbb{R}^3$ sei $\vec{F}(x, y, z) = \operatorname{grad}(V(x, y, z))$ mit $V(x, y, z) = xy + z$. Bestimmen Sie $W = \int_C \vec{F} \bullet d\vec{s}$ auf einem Weg von $A(0/0/0)$ nach $B(1/2/3)$. Wählen Sie einen möglichst einfachen Weg, da das Integral wegunabhängig ist.

Es sei z.B. $C_1: \begin{pmatrix} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{pmatrix}$ oder $C_2: \begin{pmatrix} x = t^2 \\ y = 2t \\ z = 3t \end{pmatrix}$ mit $0 \le t \le 1$.

6. Gegeben ist das Kraftfeld $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 3+4xy \\ 2x^2 \end{pmatrix}$.



   a. Zeigen Sie, dass dieses Kraftfeld wirbelfrei ist.
   b. Welche Arbeit W verrichtet dieses Kraftfeld auf dem Halbkreis
   $C: \begin{pmatrix} x = r\cdot\cos(t) \\ y = r\cdot\sin(t) \end{pmatrix}$ für $0 \le t \le \pi$ und $r > 0$?
   c. Bestimmen Sie ein zugehöriges Potentialfeld $V(x,y)$

   α. mit Hilfe von $\dfrac{\partial V(x,y)}{\partial x} = F_x(x,y)$ und $\dfrac{\partial V(x,y)}{\partial y} = F_y(x,y)$.

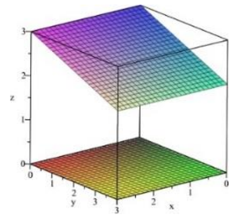
   Berechnen Sie das Integral von Teil b. nochmals mit Hilfe von $V(x,y)$.

   β. mit Hilfe des Weges $C: \begin{pmatrix} x = t\cdot x_0 \\ y = t\cdot y_0 \end{pmatrix}$ für $0 \le t \le 1$ und $V(x_0,y_0) = \int\limits_C \vec{F}\bullet d\vec{s}$.

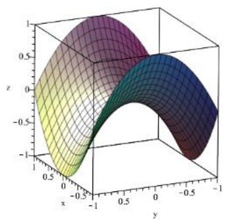
   γ. mit Hilfe der beiden Wege $(0/0) \to (x_0/0)$ mit $C_1: \begin{pmatrix} x = t\cdot x_0 \\ y = 0 \end{pmatrix}$ und $(x_0/0) \to (x_0/y_0)$ mit

   $C_2: \begin{pmatrix} x = x_0 \\ y = t\cdot y_0 \end{pmatrix}$ und jeweils $0 \le t \le 1$ und $V(x_0,y_0) = \int\limits_{C_1} \vec{F}\bullet d\vec{s} + \int\limits_{C_2} \vec{F}\bullet d\vec{s}$.

4.a. Das Oberflächenintegral 1. Art

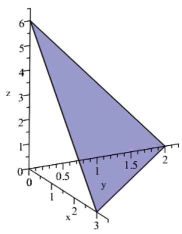


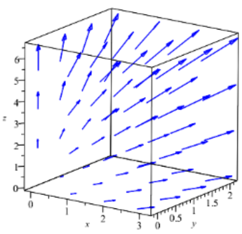
1. Die Fläche $A = \{(x,y)/0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 4\}$, x, y in m, soll mit einer ebenen Abdeckung der Flächendichte $\rho(x,y,z) = \dfrac{1}{2x+1}$ in kg/m^2 überdacht werden. Die Gleichung der Abdeckung lautet $E: z = 3 - \dfrac{1}{4}y$. Bestimmen Sie die Masse m der Abdeckung in kg.



2. Auf der Fläche $O: z = x^2 - y^2$ für $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$ sei die Funktion $f(x,y) = x\cdot y$ definiert. Bestimmen Sie $\iint\limits_O f(x,y)\,dO$.

4.b. Das Oberflächenintegral 2. Art (Das Flussintegral)





1. Durch die Dreiecksfläche mit den Eckpunkten $(3/0/0)$, $(0/2/0)$ und $(0/0/6)$ fließt eine Flüssigkeit mit der Geschwindigkeitsverteilung $\vec{v} = \begin{pmatrix} x+y \\ z \\ y+z \end{pmatrix}$. Dabei sind die Koordinaten in m und die Geschwindigkeitskomponenten in m/s zu verstehen.
   Wie groß ist der Fluss Φ durch diese Dreiecksfläche in Richtung des ersten Oktanden?

2. Gegeben ist ein Zylinder mit Boden und Deckel vom Radius R und der Höhe h. Er liegt auf der xy-Ebene und die z-Achse ist seine Symmetrieachse. Durch diesen Zylinder fließt eine Flüssigkeit mit der Geschwindigkeitsverteilung $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Wie groß ist der Fluss Φ durch die Zylinderoberfläche?