2 Lineare Räume

2.1 Vorbemerkung.

In diesem Kapitel wird es jetzt um das zentrale Objekt der Linearen Algebra gehen, dem *Vektorraum*, auch *Linearer Raum* genannt. Er ist eine Gruppe im Sinne des vorigen Kapitels, aber er ist auch noch ein bisschen mehr, er trägt eine *lineare Struktur*. Wir beginnen gleich den ersten Abschnitt mit einer Erklärung, was genau das ist. Die "weiterführende Aufgabe" aus den Übungen zum Kapitel "Mengen – Abbildungen – Gruppen" hat uns ein Beispiel an die Hand gegeben, das die Richtung weist: die allgemeine Definition des Vektorraums ist nichts anderes als die etwas abstrakter formulierte Liste der wesentlichen Eigenschaften dieses Beispiels. Der Abschnitt "Isomorphien" im Kapitel über Lineare Abbildungen wird uns sogar darüber belehren, dass das genannte Übungsbeispiel in diesem Sinne quasi mehr ist als nur ein Beispiel, es einbegreift – "bis auf Isomorphie" – die Essenz des Begriffs des endlichdimensionalen Vektorraums. Warum belassen wir es dann nicht einfach dabei, den Vektorraum der n-Tupel von Elementen aus $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ zu betrachten? Weil es einerseits umständlich ist, Strukturaussagen auf der Basis konkreter Realisierungen zu machen; man sieht dann den Wald vor lauter Bäumen nicht. Weil es zweitens leichter möglich ist, die allgemein und abstrakt formulierten Eigenschaften eines Vektorraums in allen möglichen Situationen immer wieder zu erkennen und dann auszunutzen. Auch die Fourieranalyse der höheren Analysis ist als Vektorraum-Problem formulierbar. Das sieht man aber nicht, wenn man bei dem Wort "Vektorraum" immer gleich an $\mathbb{R}^n$ denkt und an nichts anderes. Drittens gestattet die konkrete Realisierung eines formalen Systems Operationen, die mit der allgemeinen Struktur nichts zu tun haben und deshalb Verwirrung stiften können: bei einem Tupel aus $\mathbb{R}^n$ kann man den Mittelwert aller n Einträge berechnen. Mit der Vektorraumstruktur des $\mathbb{R}^n$ hängt diese Größe aber nicht zusammen.

Mit der Definition des Vektorraums gleich im ersten Abschnitt ist dann auch die Frage geklärt, was ein Vektor ist: ein Vektor ist ein Element eines Vektorraums. Punkt. Wenn man aber etwa von der "Länge" eines Vektors sprechen will, muss man sich im Klaren sein, dass man dafür eine Zusatzstruktur braucht, die der abstrakte Vektorraum zunächst einmal nicht mitbringt. Auch solche Zusatzstrukturen werden wir untersuchen; für den Begriff der Länge führt das zum Euklidischen Vektorraum.

2.2 Vektorräume.

Eine *Gruppe* hatten wir als ein Paar $(G, \circ)$ definiert aus einer Menge G und einer Verknüpfung $\circ$, das gewisse Eigenschaften hat: die Verknüpfung ist assoziativ, es gibt ein eindeutiges Neutrales Element in der Gruppe und zu jedem Element ein Inverses. Für die Konstruktion eines Vektorraums nehmen wir uns eine Gruppe her und setzen noch eine Struktur drauf: wir legen fest, dass es möglich sein soll, die Elemente von G sozusagen "von außen" mit einer Zahl aus $\mathbb{K}$ (will in unserem Fall sagen aus $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) zu "multiplizieren", so dass wieder ein Element von G dabei herauskommt. Diese "äußere Multiplikation" genannte Verknüpfung notieren wir mit "$\cdot$" und halten fest, dass sie mit dem landläufigen Multiplizieren nicht unbedingt etwas zu tun zu haben braucht. Die Elemente von $\mathbb{K}$, die "von außen" an die Gruppenelemente heranmultipliziert werden, nennen wir zur Unterscheidung von letzteren "Skalare". Die Äußere Multiplikation nennen wir deshalb gelegentlich auch Skalare Multiplikation[1]. Natürlich, wie immer, stellen wir die Skalare Multiplikation nicht einfach neben die schon bekannte Gruppenstruktur, sondern wir verbinden beide, indem wir eine Art von Verträglichkeit beider fordern. Wie? Nun, nach dem Vorbild aus dem in der Vorbemerkung zitierten Beispiel aus dem Übungsblatt zu "Mengen – Abbildungen – Gruppen". Wir erkennen in der Skalaren Multiplikation diejenige Operation, mit der wir Vektoren "skalieren", also länger machen oder verkürzen. Die Summe zweier Vektoren von der Länge her zu verdoppeln, heißt soviel wie: die Summe der in der Länge verdoppelten Vektoren zu bilden. Und so weiter.

Jetzt also die Definition des Begriffs des Vektorraums. $\mathbb{K}$ steht wie immer für wahlweise $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Wir erinnern daran, dass in einer ABELschen Gruppe die Gruppenverknüpfung kommutativ ist.

> Ein $\mathbb{K}$-**Vektorraum** ist ein Tripel $(\mathrm{V}, +, \cdot)$, umfassend eine Menge V, eine Verknüpfung $\mathrm{V} \times \mathrm{V} \to \mathrm{V}; (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \mathbf{v} + \mathbf{w}$, die wir *Vektoraddition* nennen, und eine Abbildung $\mathbb{K} \times \mathrm{V} \to \mathrm{V}; (\lambda, \mathbf{v}) \mapsto \lambda \cdot \mathbf{v}$, die wir *Skalare Multiplikation* oder *Äußere Multiplikation* nennen – sofern die folgenden Axiome gelten:
>
> (V+) ist eine ABELsche Gruppe.
>
> Für je zwei $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und jedes $\mathbf{v} \in \mathrm{V}$ gilt $\lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{v}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \mathbf{v}$, wobei $\lambda \cdot \mu$ einfach das

[1] Nicht zu verwechseln mit dem "Skalarprodukt", die später drankommt, und die *zwei* Gruppenelemente so miteinander verknüpft, dass ein Skalar aus $\mathbb{K}$ dabei *herauskommt*.

gewöhnliche Produkt zweier Zahlen in $\mathbb{K}$ meint.

Für die Zahl $1 \in \mathbb{K}$ gilt $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$ für alle $\mathbf{v} \in \mathrm{V}$.

Es ist $\lambda \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\lambda \cdot \mathbf{v}) + (\lambda \cdot \mathbf{w})$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathrm{V}$.

Es ist $(\lambda + \mu) \cdot \mathbf{v} = (\lambda \cdot \mathbf{v}) + (\mu \cdot \mathbf{v})$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\mathbf{v} \in \mathrm{V}$.

Noch ein paar übliche Schreibweisen. Sie haben (leider, aber natürlicherweise) den Effekt, den axiomatischen Charakter obiger Festlegungen zu verschleiern, weil sie sich "normal" anfühlen. Im Zweifelsfall muss man sich zum Beispiel in Erinnerung rufen, dass in "$\lambda \cdot \mathbf{v}$" das Verknüpfungszeichen "$\cdot$" eigentlich etwas komplett anderes heißt als in $\lambda \cdot \mu$ ... Also: das Neutrale Element der Gruppe $(\mathrm{V}.+)$ wird üblicherweise **Nullvektor** genannt und mit $\mathbf{0}$ bezeichnet. Das Inverse Element zu $\mathbf{v} \in (\mathrm{V}.+)$ notieren wir als $-\mathbf{v}$ und schreiben dann $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ anstelle des eigentlich axiomatisch korrekten $\mathbf{v} + (-\mathbf{w})$. Ferner vereinbaren wir eine "Punktrechnung-vor-Strichrechnung"-Regel, auch wenn das "+" der Gruppe und das "$\cdot$" der Äußeren Multiplikation quasi nur zufällig mit Strichen und Punkten eingeführt wurden: wir setzen $\lambda \cdot \mathbf{v} + \mathbf{w} := (\lambda \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{w}$. Ein wenig sollte man sich darum bemühen, den Neuheits- oder Festlegungscharakter der hier eingeführten Verknüpfungen nicht völlig zu vergessen. Es ist *überhaupt nicht* von vornherein klar, dass die in $\mathbb{K}$ existierende Zahl -1, von außen an den Vektor $\mathbf{v} \in \mathrm{V}$ heranmultipliziert, irgendetwas zu tun haben sollte mit dem Inversen $-\mathbf{v}$ von $\mathbf{v}$. Hat es, zugegebenermaßen. Aber das ist *zu beweisen* und nicht etwa von sich aus klar! Wir führen das an dieser Stelle einmal aus und fordern den Leser auf, jeden einzelnen Schritt auf eines der obigen Axiome explizit zurückzuführen und sich stets zu überlegen, was jedes einzelne "$\cdot$" und jedes "+" und "−" zu bedeuten haben:

$$\begin{aligned} (-1) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} &= (-1) \cdot \mathbf{v} + 1 \cdot \mathbf{v} \\ &= (-1 + 1) \cdot \mathbf{v} \\ &= 0 \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

Was ist nun $0 \cdot \mathbf{v}$? Ist das gleich dem Nullvektor $\mathbf{0} \in \mathrm{V}$? Ja, in der Tat, aber auch das muss erst noch bewiesen werden! Das ist glücklicherweise nicht schwierig, denn $(0 \cdot \mathbf{v}) + (0 \cdot \mathbf{v}) = (0 + 0) \cdot \mathbf{v}$ (nach welchem Axiom?) $= 0 \cdot \mathbf{v}$, und die Kette $(0 \cdot \mathbf{v}) + (0 \cdot \mathbf{v}) = (0 \cdot \mathbf{v})$ zeigt uns dann, dass $0 \cdot \mathbf{v}$ wirklich das eindeutig bestimmte Neutrale Element aus V sein muss, also $0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ für jedes $\mathbf{v} \in \mathrm{V}$. Gehen wir damit zurück in die eben hergleitete Gleichung $(-1) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} = 0 \cdot \mathbf{v}$, dann erhalten wir $(-1) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$, mit anderen Worten: $(-1) \cdot \mathbf{v}$ ist das Inverse zu $\mathbf{v}$ in V. Letzteres haben wir aber, siehe oben, mit $-\mathbf{v}$ zu bezeichnen vereinbart. So haben wir $(-1) \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{v}$ bewiesen. Uff!

Man mag diese Arten des “Rechnens” als herausfordernde Knobelaufgaben empfinden oder als lästige Umständlichkeiten. Tatsache ist, dass Mathematik *genau so* funktioniert – das haben wir in der Vorbemerkung zum ersten Kapitel bereits skizziert. Dort haben wir aber auch versprochen, unsere Lineare Algebra *gerade nicht* auf diese axiomatisch-formale Weise betreiben zu wollen. Und dazu stehen wir. Die gerade gemachten sehr formal ausgestalteten Definitionen und Beweise sollen im Folgenden sozusagen “naiv” angewendet werden. Und das geht meistens gut! denn letztendlich sind sie so gemacht, *dass* es gut geht. Das einzige, was wir aus dieser axiomatischen Einführung des Vektorraumbegriffs wirklich mitnehmen sollten, sind die *Rechenregeln*, die die Axiome letztlich ja darstellen. Wenn es dann jenseits dieses Kurses irgendwann komplexer zugehen sollte, bei Vektorräumen etwa, die bestimmte Funktionenklassen sind und die in irgendwelchen Algorithmen die zentrale Rolle spielen, kann man dann noch mal ein bisschen zurückblättern...

2.3 Lineare Unabhängigkeit.

Mit dem Begriff der *Linearen Unabhängigkeit* kommen wir zu dem Punkt, für den ganze Konstruktion von Vektorräumen eigentlich überhaupt gedacht ist. Historisch gesehen ist es ja keineswegs so, dass man abstrakte Mengen mit zusätzlichen Strukturen, so wie Vektorräume oder auch Gruppen, “ins Blaue hinein” definiert hätte, um dann anschließend lapidar zu erklären: Vektoren seien Elemente eines Vektorraums. Vielmehr waren die Vektoren zuerst da! und dann, viel später erst, wurden die Abstrakta geschaffen, die wir oben kennengelernt haben. Inwiefern “zuerst da”? Im naiven Sinne. In der Physik wurden unverzichtbar Begriffe gebraucht, die Messgrößen beschreiben können, die nicht nur einen absoluten Betrag haben (wie etwa die Temperatur oder die Energie), sondern auch eine Richtung (wie Kraft, Geschwindigkeit oder Magnetfeldstärke). So entwickelten die Physiker ihren Begriff des Vektors, den sie als eine Art “gerichteter Größe” betrachteten. Der Kraftpfeil zum Beispiel weist zu jedem Augenblick in diejenige Richtung, in die die Kraft auf einen Massepunkt wirkt, und seine Länge beschreibt den Betrag der Kraft. Wirken mehrere Kräfte gleichzeitig, die nach Betrag und Richtung durchaus verschieden sein können, dann setzt der Physiker sie nach dem aus der Schule bekannten “Kräfteparallelogramm” zu einer resultierenden Kraft zusammen. Im physikalischen Sinne ist die Betrachtung der Resultierenden völlig ununterscheidbar von der Betrachtung der Einzelkräfte, die sie hervorrufen. Umgekehrt kann man jede wirkende Kraft zusammengesetzt aus belibig vielen Teilkräften denken – das dürfen beliebig viele sein, die mit beliebigen Beträgen in beliebige Richtungen wirken, solange sich die Pfeile dieser Teilkräfte geeignet parallelverschoben und hintereinandergehängt, man sagt: “vektoriell” zur Ausgangskraft addieren. Diesen Umstand geschickt anzuwenden ist oft der Schlüssel zur Lösung komplexerer Probleme der Dynamik.

Für die “Länge” eines Vektors werden wir, wie oben bereits erwähnt, später in diesem Kurs die zusätzliche Struktur des Euklidischen Vektorraums einführen. Das Zusammensetzen eines Kräfte- oder Geschwindigkeitsparallelogramms hingegen ist durch die Addition zweier Vektoren, wie im Abschnitt “Vektorräume” definiert, vollkommen beschrieben.[2] Die darauf basierende Synthese von Vektoren zu einem resultierenden Vektor und die Analyse eines Vektors als zusammengesetzt aus geeignet gewählten Beiträgern liegen im Herz der gesamten Vektorrechnung aus Sicht der Physiker, die sie letztlich zu diesem Zweck erfunden haben. Uns führt sie jetzt zum Begriff der Linearen Unabhängigkeit: ein Vektor $\mathbf{w}$, der aus, sagen wir, vier Vektoren $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ und $\mathbf{v}_4$ im vektoriellen Sinne zusammengesetzt ist – so dass also $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$ gilt –, ist eben “linear abhängig” von diesen. Wir nennen den ganzen Satz von Vektoren $\{\mathbf{w}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ linear abhängig in diesem Fall und meinen damit, dass jeder einzelne dieser Vektoren sich zusammensetzen lässt aus den andern[3]. Etwas allgemeiner gesprochen sind die gegebenen Vektoren linear unabhängig, wenn sich keiner von ihnen aus den anderen zusammensetzen lässt, *auch dann nicht*, wenn man die Läge und die Pfeilrichtung aller Vektoren frei verändern, also jeden mit irgendeinem positiven oder negativen Faktor skalieren darf[4]. In diesem Sinne sind *drei* Vektoren in der *Ebene* immer linear *abhängig*; wenn drei Vektoren im Anschauungsraum der Physiker linear *un*abhängig sein sollen, müssen sie “den ganzen Raum aufspannen” – es muss in jeder Koordinatenrichtung Komponenten geben.

Für die folgende Definition des Begriffs der Linearen Unabhängigkeit stellen wir diese Aussage ein wenig um: wenn keiner der Vektoren aus den anderen zusammengebaut werden kann, auch bei beliebiger Skalierung aller Vektoren nicht, heißt das – und man mache sich dies mittels einer Zeichnung anschaulich deutlich –, dass es unmöglich ist, die Vektoren (irgendwie skaliert) aneinanderzuhängen unter Bildung eines geschlossenen Vektorzugs, bei dem der letzte Vektor mit seiner Spitze wieder an den Anfang des ersten anschließt. Wir können also nicht $\lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_k \cdot \mathbf{v}_k$

[2] Rechnerisch würde der Physiker eine im dreidimensionalen Anschauungsraum wirkende Kraft einfach als 3-Tupel schreiben mit den drei “Komponenten” des Kraftvektors bezüglich der von ihm gewählten Koordinatenachsen des Raumes.

[3] Man mache sich mit einer Zeichnung klar, dass, wenn sich $\mathbf{w}$ zusammensetzen lässt aus $\mathbf{v}_1$ bis $\mathbf{v}_4$, dann zum Beispiel auch $\mathbf{v}_2$ aus $\mathbf{w}$ und $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_3$ und $\mathbf{v}_4$, sofern man die Vorfaktoren frei wählen darf (Richtungsumkehr durch Multiplikation mit dem Skalar -1).

[4] Hier wird wieder deutlich, welche Bedeutung die Äußere, die “Skalar”-Multiplikation hat.

bilden, so dass der Nullvektor $\mathbf{0}$ resultiert. Gibt es umgekehrt keine passenden Skalierungen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, so dass $\lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_k \cdot \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ ist, lässt sich keiner der Vektoren aus den skalierten anderen zusammensetzen – sonst wären wir in der Lage, den geschlossenen "Vektoren-Ring" zu bauen. Insgesamt rechtfertigen diese Überlegungen die folgende

> **Definition.** Sei $(\mathrm{V}, +, \cdot)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, seien $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ Vektoren daraus und λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ gleich viele Skalare. Dann heißt der Vektor $\lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_k \cdot \mathbf{v}_k \in \mathrm{V}$ **Linearkombination** der Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$.
>
> Das k-Tupel $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$ von Vektoren aus V heißt **linear unabhängig** genau dann, wenn aus $\lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_k \cdot \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ stets folgt, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$ ist, es also keine nichttriviale Linearkombination dieser Vektoren gibt, die $\mathbf{0}$ ist.

Die folgende praktische Notationsweise werden wir hier und da verwenden: für ein Tupel $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$ von Vektoren aus V nennen wir die *Menge aller Linearkombinationen* der Vektoren dieses Tupels – das ist also eine Teilmenge von V – die **Lineare Hülle** dieser Vektoren, geschrieben $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$. Die Lineare Hülle eines einzelnen Vektors sind demnach gerade alle seine Skalierungen. Die Lineare Hülle zweier Vektoren im dreidimensionalen Anschauungsraum, die nicht kollinear[5] sind, ist die Ebene, die von diesen beiden Vektoren aufgespannt wird. Praktischerweise setzen wir noch $\mathcal{L}(\varnothing) := \mathbf{0}$, der Nullvektor ist also die Lineare Hülle eines Tupels von Vektoren, in dem gar keine drin sind. Die Summe zweier Linearkombinationen von $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$ ist natürlich wieder eine Linearkombination, das λ-fache ebenfalls für $\lambda \in \mathbb{K}$. Warum wir das notieren? Wegen des nächsten Abschnitts.

2.4 Untervektorräume.

Gegeben ein $\mathbb{K}$-Vektorraum $(\mathrm{V}, +, \cdot)$ – was mag wohl ein "Untervektorraum" sein? Richtig: eine Teilmenge U von V, die mit den Verknüpfungen, die sie als Teilmenge von V übernimmt, selbst wieder ein Vektorraum ist. Für eine gegebene Teilmenge $\mathrm{U} \subseteq \mathrm{V}$ braucht man nun nicht alle Vektorraum-Axiome einzeln zu überprüfen, um festzustellen, ob es sich bei U tatsächlich um einen Untervektorraum handelt. Weil U zum Beispiel die Skalare Multiplikation von V erbt, gelten natürlich weiterhin deren Rechenregeln. Es ist nur die Frage, ob die Addition zweier Vektoren,

[5] das heißt, es ist nicht einer Vielfaches des andern.

die in U liegen, oder die Skalierung eines Vektors in U nicht ungewollt aus U herausführen. Wenn wir aber nun dies als Bedingung stellen, also sagen,

> Die Teilmenge U des $\mathbb{K}$-Vektorraums $(V, +, \cdot)$ sei nichtleer und bezüglich Vektoraddition und Skalarer Multiplikation abgeschlossen, das heißt für $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in U$ gilt auch $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in U$ und für $\lambda \in \mathbb{K}, \mathbf{v} \in U$ gilt $\lambda \cdot \mathbf{v} \in U$,

oder anders formuliert: U ist *abgeschlossen gegen die Bildung von Linearkombinationen*,

> dann ist U bereits ein Untervektorraum.

Übrigens findet man häufig auch die Bezeichnung "Unterraum".– Der Nachweis dieser Aussage ist nicht schwierig. Wir wissen von Seite 3, dass $0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mathbf{v} \in V$, der Nullvektor ist also ein Element von U, weil wir – U ist nichtleer – irgendein $\mathbf{u}$ aus U nehmen können, um dieses mit 0 zu skalieren und so $\mathbf{0} \in U$ zu erhalten, denn nach Voraussetzung ist $\lambda \cdot \mathbf{u} \in U$ für *alle* $\lambda \in \mathbb{K}$, auch für 0. Und genauso für $\lambda = -1$, und diesbezüglich wissen wir (siehe Seite 3), dass $(-1) \cdot \mathbf{u}$ das zu $\mathbf{u} \in U$ vektoradditiv Inverse $-\mathbf{u}$ ist. Mit $\mathbf{u}$ liegt also auch sein Inverses in U. Die Rechenregel-artigen Axiome kann man sich sehr leicht durch die Tatsache verdeutlichen, dass sie bereits in V gelten.

Sind U_1 und U_1 zwei Unterräume von V, dann ist auch $U_1 \cap U_2$ ein solcher. $V \backslash U$ hingegen ist niemals ein Unterraum, wenn U einer ist, denn da notwendig $\mathbf{0} \in U$ ist, gilt $\mathbf{0} \notin V \backslash U$, und das darf nicht sein.

Die im vorigen Abschnitt eingeführte *Lineare Hülle* $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ der Vektoren $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ ist ebenfalls ein Unterraum: Summenbildung und Skalierung führen nicht aus $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ heraus, wie wir zu Ende des vorigen Abschnitts gesehen haben, und nichtleer ist die Lineare Hülle auch, denn es ist stets $\mathbf{0} \in \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$. Diesen günstigen Umstand werden wir in der Diskussion um Basen und Dimensionen häufig benutzen können. Später kommen noch zwei andere Unterräume ins Spiel und werden wichtig, nämlich Bild und Kern Linearer Abbildungen. Zunächst aber befassen wir uns mit dem Begriff der "Basis" eines Vektorraums.