

Universidad Pontificia de Comillas  
I.C.A.I

## Resistencia de Materiales 3º I.E.M Exámenes Resueltos

---

Ignacio Sanz

Repositorio para la versión online  
[github.com/ignaciosanzsorio/Resistencia-de-Materiales](https://github.com/ignaciosanzsorio/Resistencia-de-Materiales)



# Índice de Exámenes:

Junio 2016

Diciembre 2015

Junio 2015

Diciembre 2014

Junio 2014

Diciembre 2013

Mayo 2013



Todos los errores presentes en este documento son de mi entera  
responsabilidad. Pido disculpas de antemano por ellos  
IGNACIO SANZ



*A B. Prieto por su ayuda, su entusiasmo y su constancia.*

*‘Aquí reposa un hombre que hizo fortuna por haber tenido la habilidad de  
rodearse de hombres más inteligentes que él’*  
EPITAFIO DE ANDREW CARNEGIE, ‘EL REY DEL ACERO’





# Criterio de Signos en la Rebanada Elemental

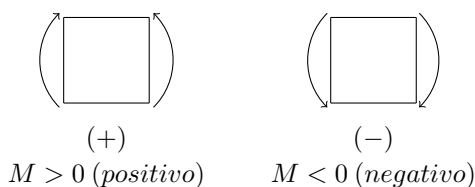
Resistencia de Materiales

3°C, I.E.M

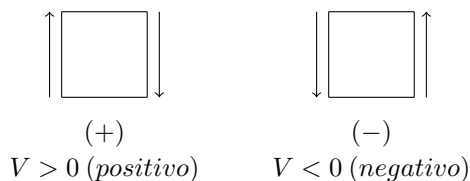
A B. Prieto por su ayuda, su entusiasmo y su constancia

## Momento flector

- Momento flector **positivo** en las gráficas → Se **comprimen** las fibras superiores de la viga y se **traccionan** las inferiores.
- Momento flector **negativo** en las gráficas → Se **traccionan** las fibras superiores de la viga y se **comprimen** las inferiores.

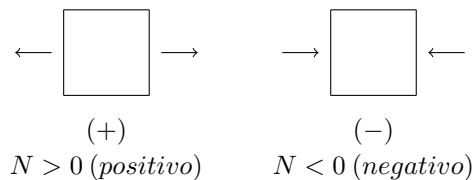


## Esfuerzos Cortantes



## Esfuerzos Axiales

- Esfuerzo axial **positivo** en las gráficas → La rebanada se tracciona.
- Esfuerzo axial **negativo** en las gráficas → La rebanada se comprime.



## Criterio en Flexión Compuesta

En todos los ejercicios resueltos en los que existe flexión compuesta **NO** se hace uso de este criterio.



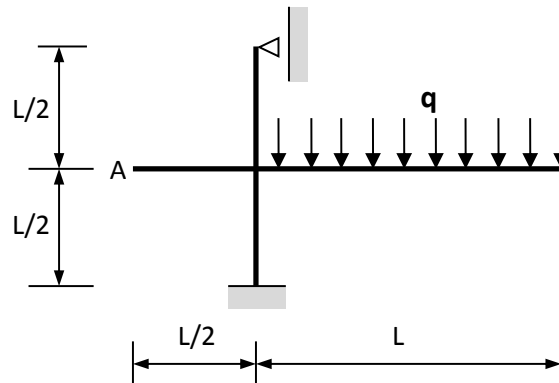
Departamento de Ingeniería Mecánica  
Resistencia de Materiales

3 IEM - Examen Extraordinario - Junio 2016

Apellidos, Nombre: \_\_\_\_\_ Grupo: \_\_\_\_\_

**EJERCICIO 1**

La figura muestra una viga de acero formada con perfiles HEB y sometida a una carga distribuida  $q$



1. Valor máximo de la carga  $q$  que se puede aplicar, indicando las unidades de todos los términos que intervienen en la expresión obtenida
2. Si cuando  $L=4.0$  m se utiliza un HEB 200 ( $A=78.1 \text{ cm}^2$ ,  $I=5700 \text{ cm}^4$ ) de un acero con una tensión admisible de  $180.0 \text{ MPa}$ , indicar el valor de la  $q$  máxima
3. Desplazamiento vertical de la sección A

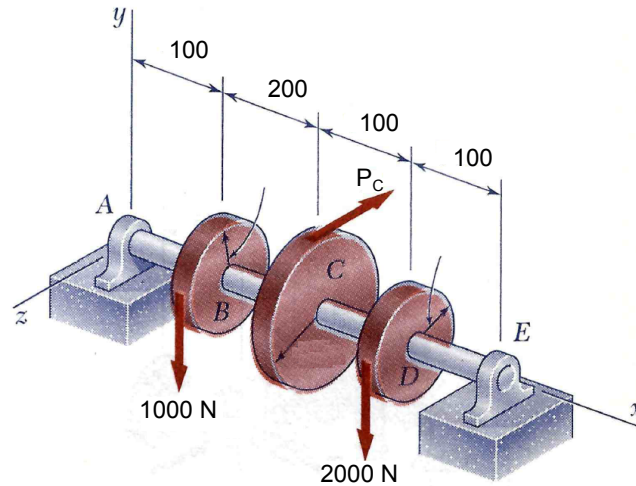
Nota: Si consideras necesario el cálculo de giros o desplazamientos para la resolución del ejercicio, estos se deben justificar convenientemente

Departamento de Ingeniería Mecánica  
Resistencia de Materiales

3 IEM - Examen Extraordinario - Junio 2016

Apellidos, Nombre: \_\_\_\_\_ Grupo: \_\_\_\_\_

EJERCICIO 2



Sobre el eje A-E de la figura (dimensiones en mm) se montan tres poleas B, C y D de radios  $R_B = 100\text{mm}$ ,  $R_C = 200\text{mm}$  y  $R_D = 150\text{mm}$  respectivamente. Los rodamientos de barriletes A y E impiden los desplazamientos en las tres direcciones pero no las rotaciones. Las fuerzas en las poleas B y D son, como se indica en la figura, verticales descendentes mientras que la fuerza en la polea C es horizontal y el sistema se encuentra en equilibrio. El eje está fabricado en acero ( $E=210\text{ GPa}$ ,  $\mu = 0.3$ ) y tiene un diámetro de 24 mm.

1. Dibujar todos los diagramas de esfuerzos acotando los puntos significativos y dibujando la rebanada elemental en cada uno de los tramos
2. Dibujar el cubo elemental de tensiones y los círculos de Mohr del punto más cargado, identificando claramente sobre él los ejes de referencia del sistema de coordenadas empleado así como el valor de la tensión en los puntos de corte con el eje de abscisas. Si hubiese más de un punto en las mismas condiciones, comentarlo y elegir uno de ellos para dibujar los círculos de Mohr.
3. Si el acero empleado tiene una tensión admisible de 315 MPa. Determinar el coeficiente de seguridad con el que trabaja el sistema
4. Calcular el giro relativo entre las poleas B y D
5. Lectura que daría una banda extensométrica si fuera posible colocarla en el punto más cargado en dirección tangencial

Examen Junio de 2016  
Resistencia de Materiales  
3°C, I.E.M



## 1. Ejercicio 1:

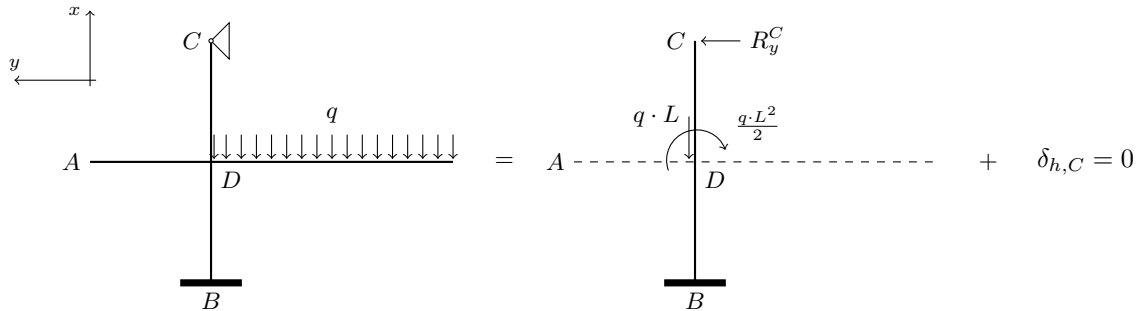
1. Valor máximo de la carga  $q$  que se puede aplicar, indicando las unidades de todos los términos que intervienen en la expresión obtenida.

Sistema hiperestático, tres ecuaciones y cuatro incógnitas supuestas en el sentido positivo de los ejes coordenados:  $R_x^B$ ,  $R_y^B$ ,  $M_z^B$ ,  $R_y^C$ .

Para resolver el sistema hiperestático se seguirá el siguiente proceso:

1. Se trasladan todas las cargas a D.
2. Se quita la articulación en C, convirtiendo el sistema en isostático y se coloca la incógnita hiperestática  $R_y^C$ .
3. Se calcula el giro y la flecha en D.
4. Una vez conocidos los ángulos y desplazamientos en D, 'se empotra' en D y se calculan los giros y desplazamientos en C.
5. Se impone la condición de compatibilidad en C:  $\delta_{h,C} = 0$ .

### 1. Conversión de sistema hiperestático a isostático:



2. Giros y desplazamientos en D. Una vez trasladadas las cargas a D y los respectivos momentos en dicho punto, se calculan los giros y desplazamientos en D.

1. Ángulo girado en D debido a  $\frac{q \cdot L^2}{2}$  ( $\delta_B^{\frac{q \cdot L^2}{2}}$ ):

$$\theta_D^{\frac{q \cdot L^2}{2}} = \frac{1}{EI_z} \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{q \cdot L^2}{2} dx$$

$$= \frac{\frac{q \cdot L^2}{2} \cdot (\frac{L}{2})}{EI_z} = \frac{q \cdot L^3}{4EI_z} (\curvearrowright)$$

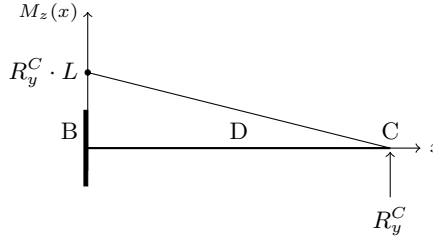
2. Flecha en D debido a  $\frac{q \cdot L^2}{2}$  ( $\delta_B^{\frac{q \cdot L^2}{2}}$ ):

$$\delta_D^{\frac{q \cdot L^2}{2}} = \frac{1}{EI_z} \int_0^{\frac{L}{2}} (\frac{L}{2} - x) \cdot \frac{q \cdot L^2}{2} dx$$

$$= \frac{L}{4} \cdot \frac{\frac{q \cdot L^2}{2} \cdot (\frac{L}{2})}{EI_z} = \frac{q \cdot L^4}{16EI_z} (\downarrow)$$

**3. Desplazamientos en C.** Una vez conocidos los desplazamientos y los giros en D, ‘se empotra’ en D y se procede a calcular las flechas que producen el resto de cargas en C.

1. Flecha en C debida a  $R_y^C$  ( $\delta_B^{R_y^C}$ ):

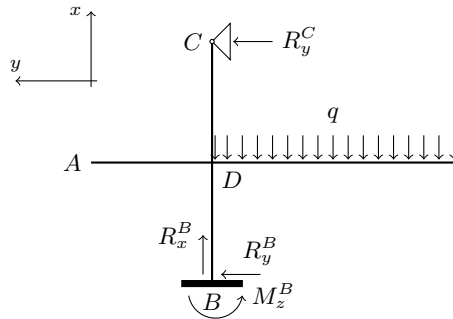


$$\delta_C^{R_y^C} = \frac{1}{EI_z} \int_0^L (L-x) \cdot (R_y^C \cdot x) dx = \frac{2L}{3} \cdot \frac{R_y^C \cdot L^2}{2EI_z} = \frac{R_y^C \cdot L^3}{3EI_z} (\uparrow)$$

Imponiendo la condición de compatibilidad de flecha nula en C ( $\delta_{h,C} = 0$ ), se resuelve la incógnita hiperestática  $R_y^C$ . Se definirán como positivas las flechas con sentido descendente, que apunten hacia abajo:

$$\begin{aligned} \delta_C &= \theta_D^{\frac{q \cdot L^2}{2}} \cdot \frac{L}{2} + \delta_D^{\frac{q \cdot L^2}{2}} + \delta_C^{R_y^C} = 0 \\ + \frac{q \cdot L^3}{4EI_z} \cdot \frac{L}{2} (\downarrow) + \frac{q \cdot L^4}{16EI_z} (\downarrow) - \frac{R_y^C \cdot L^3}{3EI_z} (\uparrow) &= 0 \\ \frac{R_y^C \cdot L^3}{3} &= \frac{q \cdot L^4}{8} + \frac{q \cdot L^4}{16} \\ R_y^C &= 3 \cdot \left[ \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \right] \cdot qL = \frac{9}{16} \cdot qL \end{aligned}$$

A continuación, se plantean las ecuaciones de la estática para el sistema isostático, cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas supuestas en el sentido positivo de los ejes:  $R_x^B$ ,  $R_y^B$ ,  $M_z^B$ ,  $R_y^C$ .



Reacciones:

$$\begin{aligned} x : R_x^B - q \cdot L &= 0 \\ y : R_y^B + R_y^C &= 0 \end{aligned}$$

Momentos:

$$z : M_z^B + R_y^C \cdot L - q \cdot \frac{L^2}{2} = 0$$

$$R_x^B = q \cdot L; \quad R_y^B = -\frac{9}{16} \cdot qL; \quad M_z^B = -\frac{q \cdot L^2}{16}; \quad R_y^C = \frac{9}{16} \cdot qL;$$

Discretización del tramo AC desde A:

**Momento Flector  $M_z(x)$ :**

$$M_z(x) = \begin{cases} \frac{q \cdot L^2}{16} - \frac{9}{16} \cdot qL \cdot x & \text{si } 0 < x < \frac{L}{2} \\ \frac{q \cdot L^2}{16} - \frac{9}{16} \cdot qL \cdot x + \frac{q \cdot L^2}{2} & \text{si } \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$



**Esfuerzo Cortante  $V_y(x)$ :**

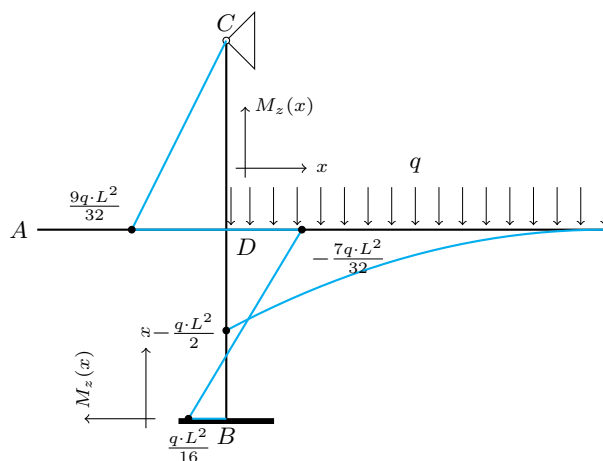
$$V_y(x) = \begin{cases} -\frac{9}{16} \cdot qL & \text{si } 0 < x < L \end{cases}$$

**Esfuerzo Axil  $N(x)$ :**

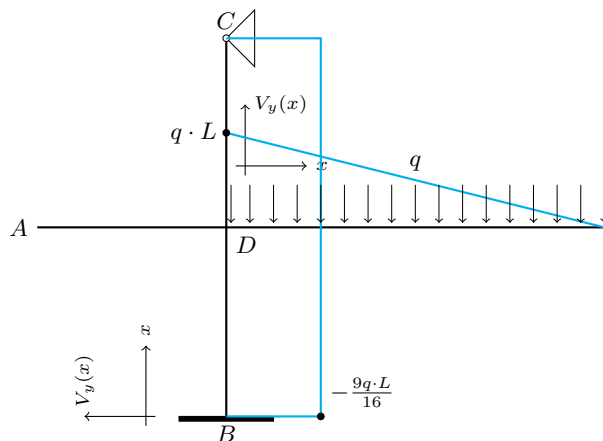
$$N(x) = \begin{cases} -q \cdot L & \text{si } 0 < x < \frac{L}{2} \end{cases}$$

**Diagramas de Esfuerzo Axiles, Esfuerzo Cortantes y Momentos Flectores:**

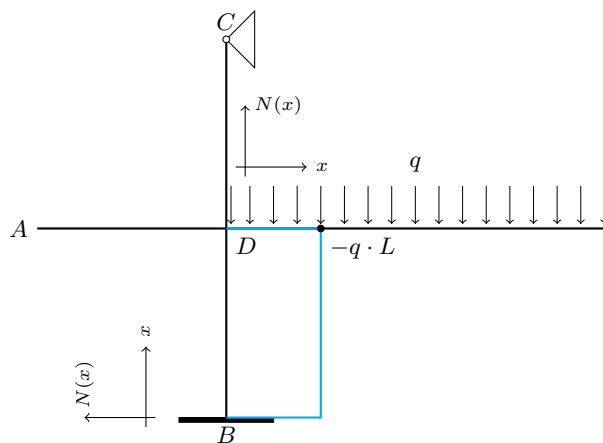
**Momento Flector  $M_z(x)$ :**



**Esfuerzo Cortante  $V_y(x)$ :**



**Esfuerzo Axil  $N(x)$ :**



Para hallar el valor máximo de la carga  $q$  que puede soportar la estructura, se hace uso de la ley de Navier aplicada a los puntos más críticos. Estos puntos se encuentran en las coordenadas  $x = \frac{L}{2}^-$  y  $x = \frac{L}{2}^+$  del tramo BC.

**Punto 1**  $\left(x = \frac{L}{2}^-\right)$ . En este punto el posible fallo se producirá a compresión en las fibras inferiores de la viga, en las que se suman el axil a compresión junto con el flector que comprime las fibras inferiores. Aplicando la ley de Navier, se tiene:

$$\begin{aligned}\sigma_x(x, y, z) &= \frac{N(x)}{\Omega} - \frac{M_z(x)}{I_z} \cdot y + \frac{M_y(x)}{I_y} \cdot z \leq \sigma_{adm} \\ \sigma_x &= -\frac{q \cdot L}{\Omega} - \frac{-\frac{7q \cdot L^2}{32}}{I_z} \cdot \left(-\frac{h}{2}\right) \leq \sigma_{adm} \\ q \cdot \left(\frac{L}{\Omega} + \frac{7h \cdot L^2}{64 \cdot I_z}\right) &\leq \sigma_{adm} \\ q_{máx} &\leq \frac{\sigma_{adm}}{\left(\frac{L}{\Omega} + \frac{7h \cdot L^2}{64 \cdot I_z}\right)} \\ q_{máx} &\leq \frac{\sigma_{adm}}{\left(\frac{L}{\Omega} + \frac{7 \cdot L^2}{32 \cdot W_z}\right)}\end{aligned}$$

siendo las unidades de los términos que intervienen en la expresión de  $Pa$  para  $\sigma_{adm}$ ,  $m$  para  $L$ ,  $m^2$  para  $\Omega$ ,  $m^4$  para  $I_z$  y  $m^3$  para  $W_z$ .

**Punto 2**  $\left(x = \frac{L}{2}^+\right)$ . En este punto el posible fallo se producirá tanto en las fibras inferiores a tracción como en las superiores a compresión. Aplicando la ley de Navier, se tiene:

$$\begin{aligned}\sigma_x(x, y, z) &= \frac{N(x)}{\Omega} - \frac{M_z(x)}{I_z} \cdot y + \frac{M_y(x)}{I_y} \cdot z \leq \sigma_{adm} \\ \sigma_x &= -\frac{\frac{9q \cdot L^2}{32}}{I_z} \cdot \left(-\frac{h}{2}\right) \leq \sigma_{adm} \\ q \cdot \left(\frac{9h \cdot L^2}{64 \cdot I_z}\right) &\leq \sigma_{adm} \\ q_{máx} &\leq \frac{\sigma_{adm}}{\left(\frac{9h \cdot L^2}{64 \cdot I_z}\right)} \\ q_{máx} &\leq \frac{\sigma_{adm}}{\left(\frac{9 \cdot L^2}{32 \cdot W_z}\right)}\end{aligned}$$

siendo las unidades de los términos que intervienen en la expresión de  $Pa$  para  $\sigma_{adm}$ ,  $m$  para  $L$ ,  $m^2$  para  $\Omega$ ,  $m^4$  para  $I_z$  y  $m^3$  para  $W_z$ .

Por lo tanto, el punto con mayor probabilidad de fallo, comprobando con los valores numéricos del siguiente apartado es el **Punto 1**. La expresión definitiva de la carga máxima admisible para la estructura será:

$$q_{máx} \leq \frac{\sigma_{adm}}{\left(\frac{L}{\Omega} + \frac{7h \cdot L^2}{64 \cdot I_z}\right)}$$

**2. Si cuando  $L = 4.00$  m se utiliza un HEB 200 ( $A = 78.1$  cm<sup>2</sup>,  $I = 5700$  cm<sup>4</sup>) de un acero con una tensión admisible de 180.0 MPa, indicar el valor de la  $q$  máxima.**

Sustituyendo los valores de los parámetros que intervienen en la expresión anterior se obtienen las cargas máximas admisibles  $q_{máx}$ .

**Punto 1**  $\left(x = \frac{L}{2}^{-}\right)$ . El valor en este punto de la carga máxima admisible  $q_{máx}$  es:

$$q_{máx} \leq \frac{\sigma_{adm}}{\left(\frac{L}{\Omega} + \frac{7h \cdot L^2}{64 \cdot I_z}\right)}$$

$$q_{máx} \leq \frac{180 \cdot 10^6}{\left(\frac{4}{78.1 \cdot 10^{-4}} + \frac{7 \cdot 200 \cdot 10^{-3} \cdot 4^2}{64 \cdot 5700 \cdot 10^{-8}}\right)}$$

$$q_{máx} \leq 29289.85 \frac{N}{m}$$

**Punto 2**  $\left(x = \frac{L}{2}^{+}\right)$ . El valor en este punto de la carga máxima admisible  $q_{máx}$  es:

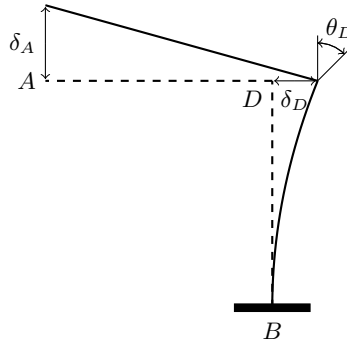
$$q_{máx} \leq \frac{\sigma_{adm}}{\left(\frac{L}{\Omega} + \frac{7h \cdot L^2}{64 \cdot I_z}\right)}$$

$$q_{máx} \leq \frac{180 \cdot 10^6}{\left(\frac{9 \cdot 200 \cdot 10^{-3} \cdot 4^2}{64 \cdot 5700 \cdot 10^{-8}}\right)}$$

$$q_{máx} \leq 22800 \frac{N}{m}$$

### 3. Desplazamiento vertical de la sección A.

Para calcular el desplazamiento de la sección A, se ha de tener en cuenta tanto la distancia como el ángulo en D. Una vez calculados, es posible calcular el desplazamiento de A.



Aplicando superposición en el diagrama de momentos flectores en el tramo BD:

1. Ángulo en D ( $\theta_D$ ):

$$\theta_D = \theta_D + \theta_D^{R_x} = \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{M_z(x)}{EI_z} dx = \frac{q \cdot L^3}{32EI_z} (\curvearrowright) - \frac{\frac{9qL^2}{32} \cdot \frac{L}{2}}{2EI_z} (\curvearrowright) = \frac{5qL^3}{128EI_z} (\curvearrowright)$$

2. Flecha en D ( $\delta_D$ ):

$$\delta_D = \delta_D^{M_B} + \delta_D^{R_x} = \int_0^{\frac{L}{2}} \left(\frac{L}{2} - x\right) \cdot \frac{M_z(x)}{EI_z} dx = \frac{L}{4} \cdot \frac{\frac{q \cdot L^2}{16} \cdot \frac{L}{2}}{EI_z} - \frac{L}{6} \cdot \frac{\frac{9qL^2}{32} \cdot \frac{L}{2}}{2EI_z} =$$

$$= -\frac{qL^4}{128EI_z} (\leftarrow) + \frac{3qL^4}{256EI_z} (\rightarrow) = \frac{qL^4}{256EI_z} (\rightarrow)$$

Finalmente el desplazamiento en A ( $\delta_A$ ) es:

$$\delta_A = \theta_D \cdot \frac{L}{2} + \delta_D = \frac{5qL^3}{128EI_z} \cdot \frac{L}{2} (\uparrow) + \frac{qL^4}{256EI_z} (\uparrow) = \frac{3qL^4}{128EI_z} (\uparrow)$$



## 2. Ejercicio 2:

1. Dibujar todos los diagramas de esfuerzos acotando los puntos significativos y dibujando la rebanada elemental en cada uno de los tramos.

Sistema isostático, cinco ecuaciones y cinco incógnitas supuestas en el sentido positivo de los ejes coordenados:  $R_y^A$ ,  $R_z^A$ ,  $R_y^E$ ,  $R_z^E$ .

Reacciones:

$$y : R_y^A - 1000 - 2000 + R_y^E = 0$$

$$z : R_z^A - P_c + R_z^E = 0$$

Momentos:

$$x : 1000 \cdot R_B - P_c \cdot R_C + 2000 \cdot R_C = 0$$

$$y : 0.3 \cdot P_c - 0.5 \cdot R_z^E = 0$$

$$z : -0.1 \cdot 1000 - 0.4 \cdot 2000 + 0.5 \cdot R_y^E = 0$$

$$R_y^A = 1200 \text{ N}; \quad R_y^E = 1800 \text{ N}; \quad R_z^A = 800 \text{ N}; \quad R_z^E = 1200 \text{ N};$$

Discretizaciones de los esfuerzos de la viga:

**Momento Flector**  $M_y(x)$  (N·m):

$$M_y(x) = \begin{cases} 800 \cdot x & si \quad x \leq 0.3 \text{ m} \\ 800 \cdot x - 2000 \cdot (x - 0.3) & si \quad 0.3 < x \leq 0.5 \text{ m} \end{cases}$$

**Esfuerzo Cortante**  $V_z(x)$  (N·m):

$$V_z(x) = \begin{cases} 800 & si \quad x \leq 0.3 \text{ m} \\ -1200 & si \quad 0.3 < x \leq 0.5 \text{ m} \end{cases}$$

**Momento Flector**  $M_z(x)$  (N·m):

$$M_z(x) = \begin{cases} 1200 \cdot x & si \quad x \leq 0.1 \text{ m} \\ 1200 \cdot x - 1000 \cdot (x - 0.1) & si \quad 0.1 < x \leq 0.4 \text{ m} \\ 1200 \cdot x - 1000 \cdot (x - 0.1) - 2000 \cdot (x - 0.4) & si \quad 0.4 < x \leq 0.5 \text{ m} \end{cases}$$

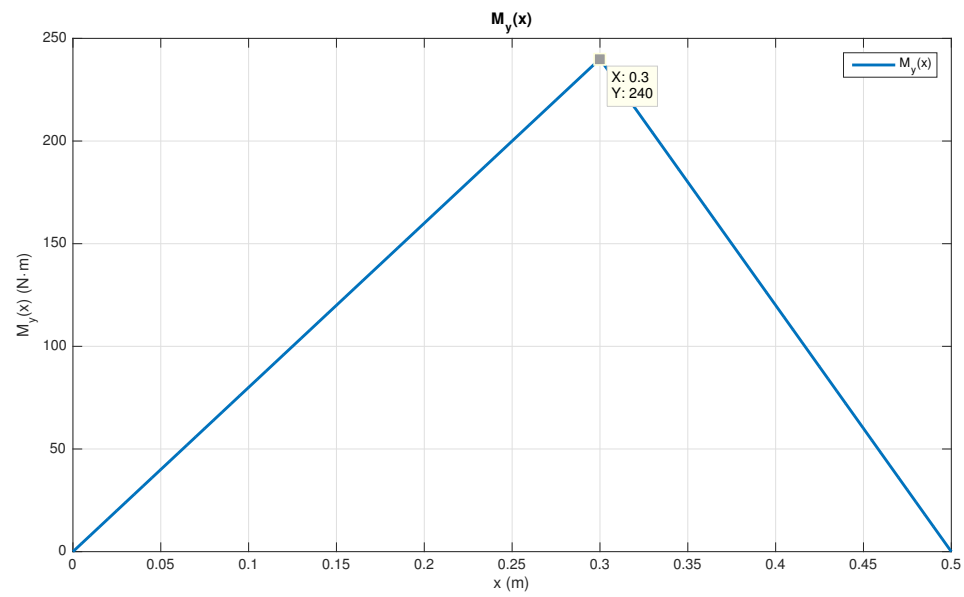
**Esfuerzo Cortante**  $V_y(x)$  (N·m):

$$V_y(x) = \begin{cases} 1200 & si \quad x \leq 0.1 \text{ m} \\ 200 & si \quad 0.1 < x \leq 0.4 \text{ m} \\ -1800 & si \quad 0.4 < x \leq 0.5 \text{ m} \end{cases}$$

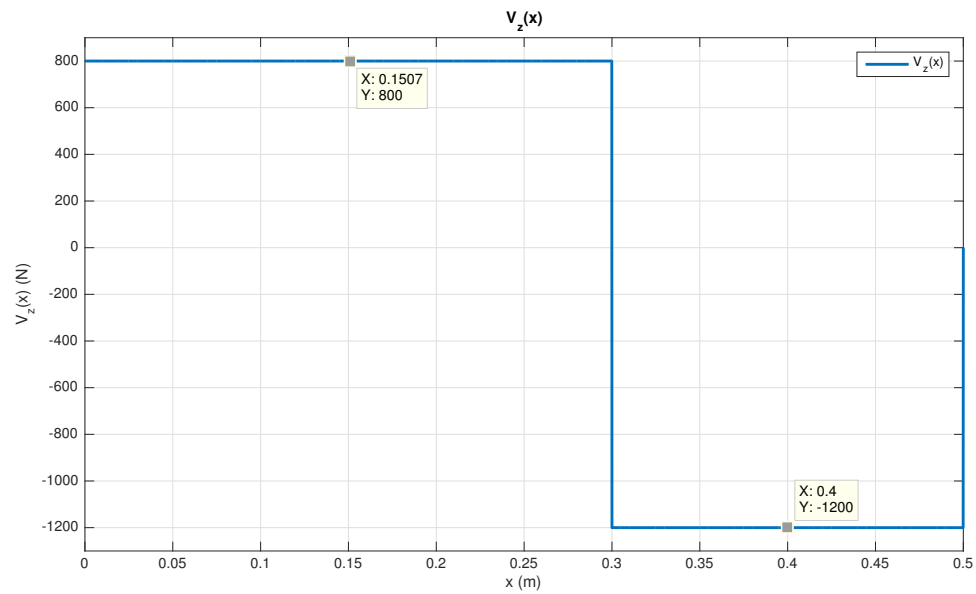
**Momento Torsor**  $M_t(x)$  (N·m):

$$M_t(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0.1 \text{ m} \\ 100 & si \quad 0.1 < x \leq 0.3 \text{ m} \\ -300 & si \quad 0.3 < x \leq 0.4 \text{ m} \\ 0 & si \quad 0.4 < x \leq 0.5 \text{ m} \end{cases}$$

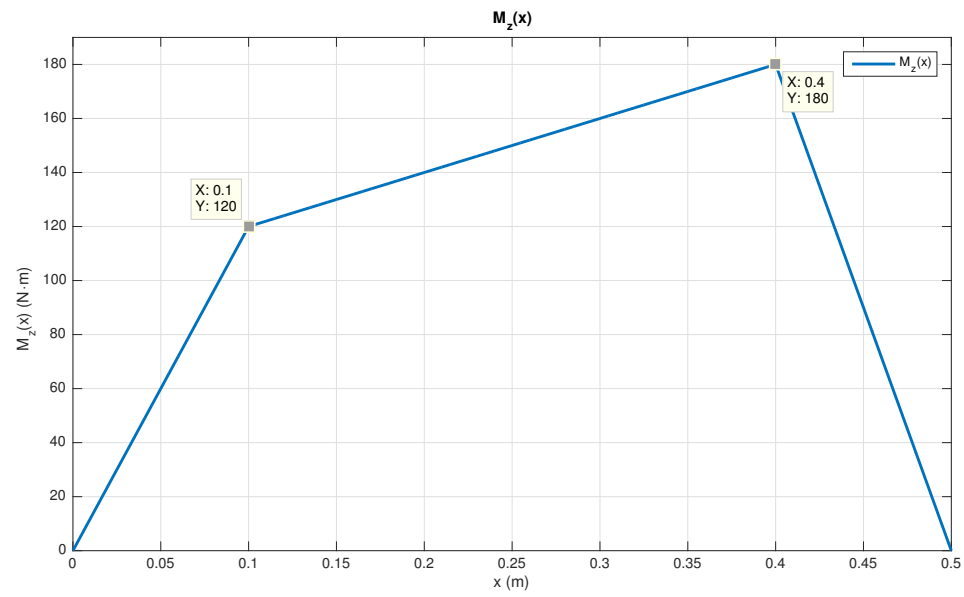
**Momento Flector  $M_y(x)$  (N·m):**



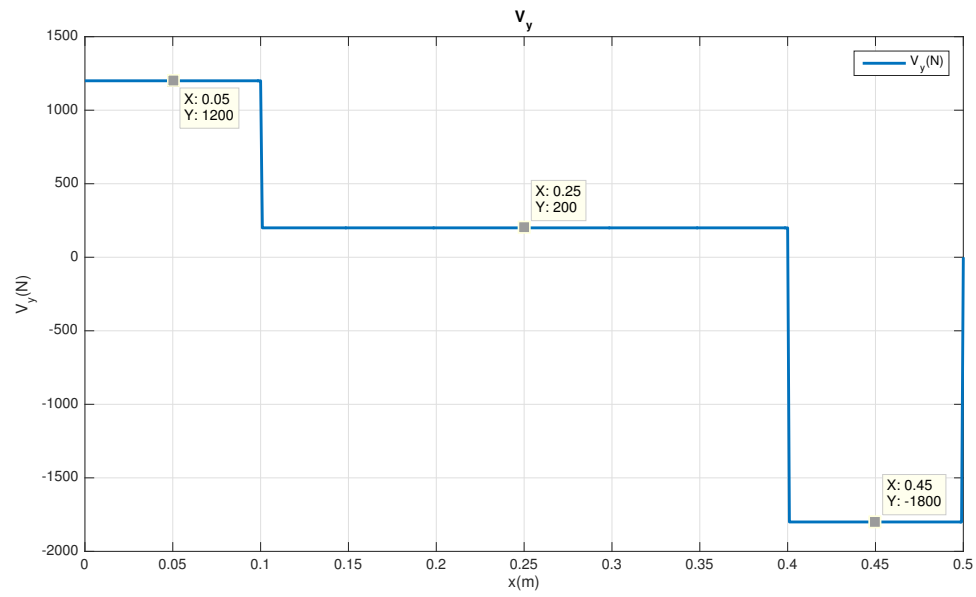
**Esfuerzo Cortante  $V_z(x)$  (N):**



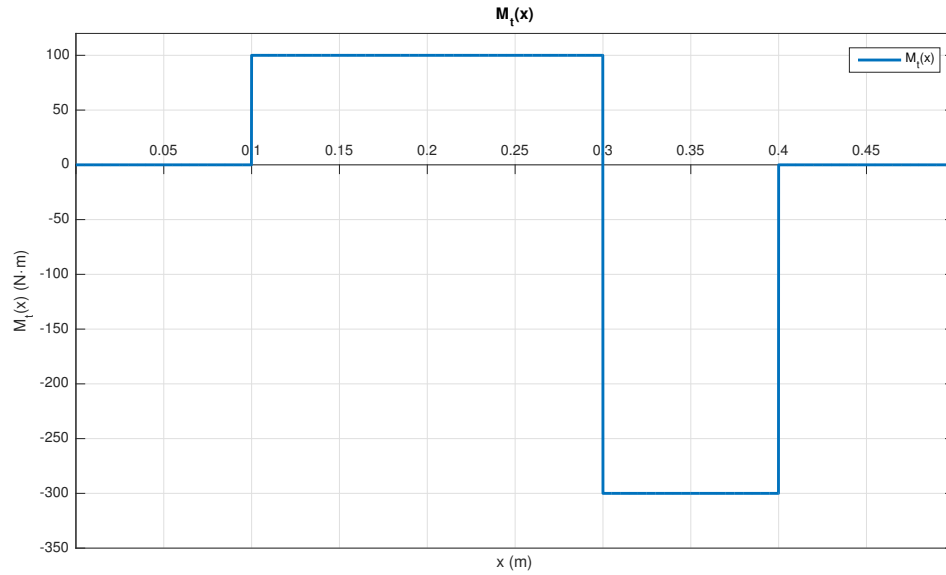
**Momento Flector  $M_z(x)$  (N·m):**



**Esfuerzo Cortante  $V_y(x)$  (N):**



**Momento Torsor  $M_t(x)$  (N·m):**



**2. Dibujar el cubo elemental de tensiones y los círculos de Mohr del punto más cargado, identificando sobre el claramente los ejes de referencia del sistema de coordenadas así como el valor de la tensión en los puntos de corte con el eje de abscisas. Si hubiese más de un punto en las mismas condiciones, comentarlo y elegir uno de ellos para dibujar los círculos de Mohr.**

Los puntos más cargados serán aquellos que presenten mayores momentos flectores, tanto  $M_y$  como  $M_z$  y a su vez, momento torsor  $M_t$ . Aplicando la ley de Navier a dichos puntos junto con la ley del torsor, y haciendo uso de uno de los criterios (*Tresca* o *von Mises*), se calcula el coeficiente con el que trabajan, siendo el punto más cargado el que presente un coeficiente menor.

Ley de Navier:

$$\sigma_x(x, y, z) = \frac{N(x)}{\Omega} - \frac{M_z(x)}{I_z} \cdot y + \frac{M_y(x)}{I_y} \cdot z$$

Torsor:

$$\tau(r) = \frac{M_t}{I_o} \cdot r$$

En los diagramas de momentos flectores y torsores, se identifican dos puntos críticos en  $x = 0.3^+$  m y en  $x = 0.4^-$  m. En cada punto se dan los siguientes esfuerzos:

1. En  $x = 0.3^+$  m,  $M_z(x = 0.3^+ \text{ m}) = 160 \text{ N·m}$ ,  $M_y(x = 0.3^+ \text{ m}) = 240 \text{ N·m}$  y  $M_t(x = 0.3^+ \text{ m}) = -300 \text{ N·m}$ .
2. En  $x = 0.4^-$  m,  $M_z(x = 0.4^- \text{ m}) = 180 \text{ N·m}$ ,  $M_y(x = 0.4^- \text{ m}) = 120 \text{ N·m}$  y  $M_t(x = 0.4^- \text{ m}) = -300 \text{ N·m}$ .

**Punto 1.** Aplicando la ley de Navier de la siguiente forma la tensión en el punto 1 vale:

$$\sigma_x(r = R) = \frac{\sqrt{M_z^2 + M_y^2}}{W_z} = \frac{\sqrt{(160 \cdot 10^3)^2 + (240 \cdot 10^3)^2}}{\frac{\pi \cdot 12^3}{4}} = \frac{5000\sqrt{13}}{27\pi} = 212.5 \text{ MPa}$$

$$\tau(r = R) = \frac{M_t}{I_o} \cdot R = \frac{-300 \cdot 10^3}{\frac{\pi \cdot 12^3}{2}} = \frac{-3125}{9\pi} = -110.5 \text{ MPa}$$



**Punto 2.** Aplicando la ley de Navier de la siguiente forma la tensión en el punto 1 vale:

$$\sigma_x(r = R) = \frac{\sqrt{M_z^2 + M_y^2}}{W_z} = \frac{\sqrt{(180 \cdot 10^3)^2 + (120 \cdot 10^3)^2}}{\frac{\pi \cdot 12^3}{4}} = \frac{1250\sqrt{13}}{9\pi} = 159.5 \text{ MPa}$$

$$\tau(r = R) = \frac{M_t}{I_o} \cdot R = \frac{-300 \cdot 10^3}{\frac{\pi \cdot 12^3}{2}} = \frac{-3125}{9\pi} = -110.5 \text{ MPa}$$

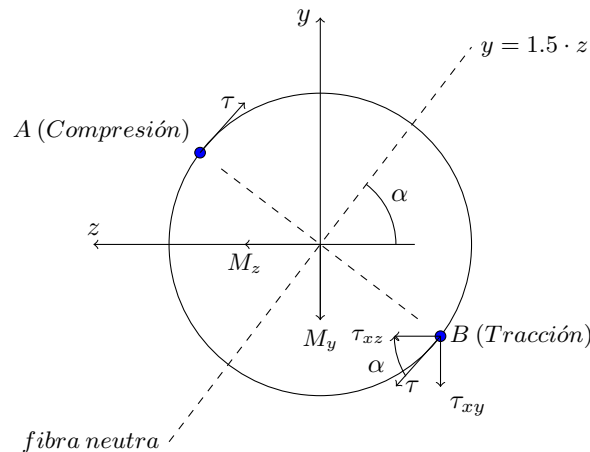
Por lo tanto el punto más cargado se encuentra en la sección correspondiente a la coordenada  $x = 0.3^-$  m. En este punto, el momento flector  $M_y$  (en el sentido positivo del eje  $y$ ) comprime las fibras con coordenada  $z$  positiva y tracciona las fibras con coordenada  $z$  negativa, y el momento flector  $M_z$  comprime las fibras superiores y tracciona las inferiores. Se calcula la ecuación de la fibra neutra que ayudará a encontrar los puntos más solicitados en la sección:

$$\sigma_x(y, z) = -\frac{M_z(x)}{I_z} \cdot y + \frac{M_y(x)}{I_y} \cdot z = 0$$

$$y = \frac{I_z \cdot M_y(x = 0.3)}{I_y \cdot M_z(x = 0.3)} \cdot z = \frac{M_y(x = 0.3)}{M_z(x = 0.3)} \cdot z = 1.5 \cdot z$$

$$y = 1.5 \cdot z$$

Identificación de los puntos más cargados en la sección  $x = 0.3$  m. Se han dibujado los momentos flectores resultantes ejercidos sobre la sección más cargada que aparecen cuando se elimina la otra parte de la viga para que la resultante de momentos siga siendo nula en la sección, ya que el criterio de signos adoptado previamente aplicado al caso de flexión compuesta carece de sentido:



La tensión tangencial debida al torsor se descompone en ejes  $yz$  de la siguiente forma, siendo  $\alpha$  el ángulo que forma la fibra neutra con la horizontal  $\alpha = \tan^{-1}(1.5) = 56.31^\circ$ :

$$\tau_{xy} = -\tau \cdot \sin(\alpha) = -110.5 \cdot \sin(56.31) = -91.94 \text{ MPa}$$

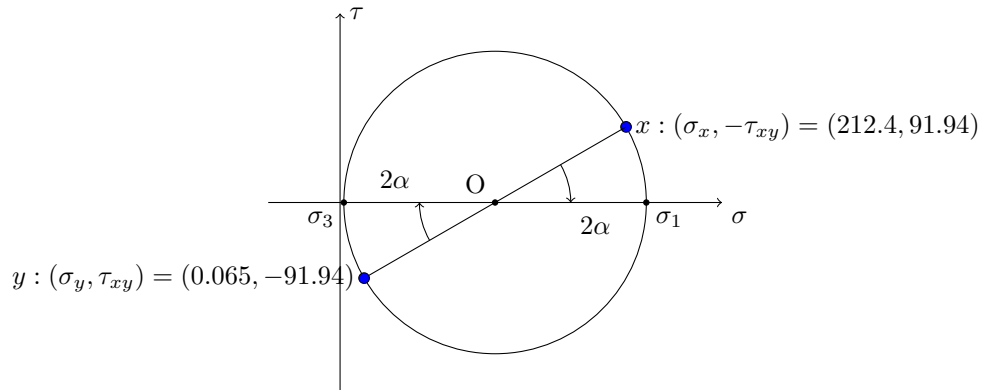
$$\tau_{xz} = \tau \cdot \cos(\alpha) = 110.5 \cdot \cos(56.31) = 61.29 \text{ MPa}$$

**Círculos de Mohr y Estado Tensional de B.** A continuación se calcula el estado tensional del punto B en el que el posible fallo es a tracción.

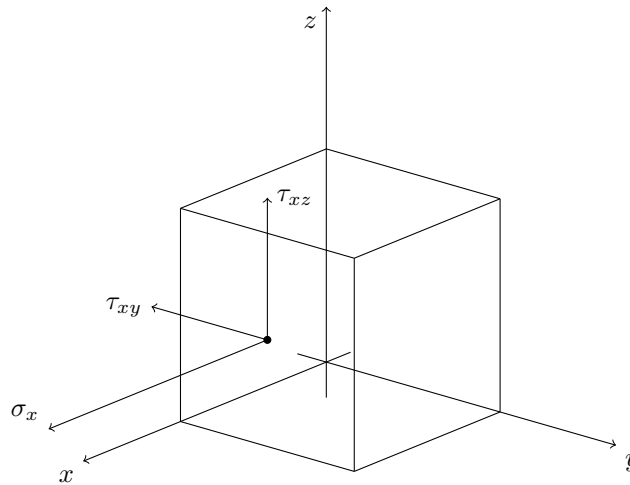
$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} = \frac{212.5}{2} + \sqrt{\left(\frac{212.4}{2}\right)^2 + (-91.94)^2} = 212.4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} = \frac{212.4}{2} - \sqrt{\left(\frac{212.4}{2}\right)^2 + (-91.94)^2} = 0.065 \text{ MPa}$$

Una vez identificados en la sección los puntos más solicitados se procede a dibujar los círculos de Mohr de uno de los puntos, en este caso del punto A que trabaja a tracción:



**Cubo elemental de tensiones del punto B.**



**3. Si el acero empleado tiene una tensión admisible de 315 MPa. Determinar el coeficiente de seguridad con el que trabaja el sistema.**

Empleando el criterio de Tresca se calcula la tensión equivalente con la que trabaja el sistema y sustituyendo los valores numéricos se compara con el límite del material:

$$\sigma_{eq}^{tresca} = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} \leq \frac{\sigma_{adm}}{n}$$

$$2 \cdot \sqrt{\left(\frac{212.5 - 0}{2}\right)^2 + (-91.94)^2} \leq \frac{315}{n}$$

$$n = \frac{315}{281}$$

$$n = 1.12$$

**4. Calcular el giro relativo entre las poleas B y D.**

El giro relativo entre ambas secciones debido al momento torsor se calcula como:

$$\phi(x) = \int_{x_B}^{x_D} \frac{M_t(x)}{GI_o} dx$$

y sustituyendo los valores numéricos para el momento torsor y los intervalos de la integral se tiene:

$$\phi_B^D = \int_{0.1}^{0.3} \frac{100}{GI_o} dx + \int_{0.3}^{0.4} \frac{-300}{GI_o} dx = \frac{100}{GI_o} \cdot [0.3 - 0.1] + \frac{-300}{GI_o} \cdot [0.4 - 0.3] = -\frac{10}{GI_o}$$

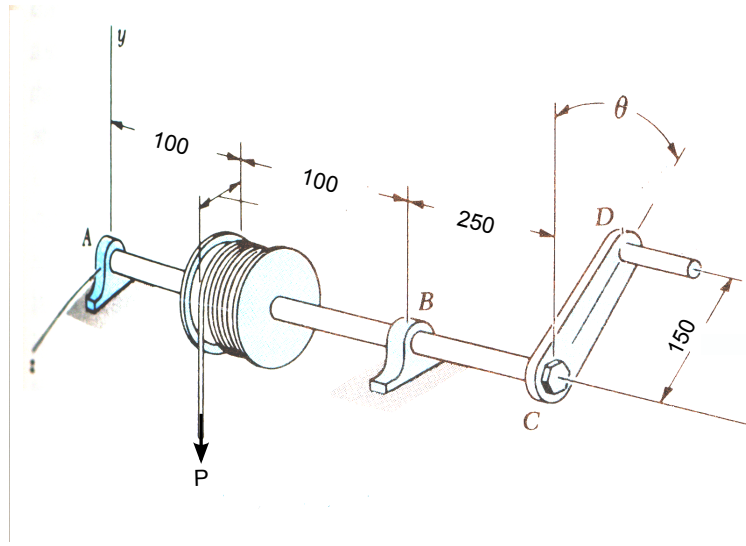
**5. Lectura que daría una banda extensiométrica si fuera posible colocarla en la sección más cargada en dirección tangencial.**

Departamento de Ingeniería Mecánica  
Resistencia de Materiales

3 IEM - Examen Final - Diciembre 2015

Apellidos, Nombre: \_\_\_\_\_ Grupo: \_\_\_\_\_

EJERCICIO 1



El sistema de polea-manivela de la figura se emplea para elevar una carga de valor  $P$  que actúa en el extremo de una polea de **radio** 25 mm. Para ello se aplica una fuerza perpendicular al ángulo  $\theta$  en la manivela DE. El conjunto se ha fabricado en acero con una tensión admisible de 215 MPa.

- 1.- Dibujar los diagramas de esfuerzos en el tramo ABC en función del ángulo de giro  $\theta$ . Calcular los valores de dichos esfuerzos para el dimensionamiento de la sección
- 2.- Si el tramo ABC tiene un **diámetro** de 20 mm determinar el valor máximo de la carga que es posible elevar
- 3.- Calcular todos los desplazamientos y giros en el extremo C para la situación anterior.

Suponiendo que se modifican las cargas que se aplican de forma que la sección mas cargada tuviera los siguientes esfuerzos  $M_x = 75 Nm$ ,  $M_z = -95 Nm$  y  $M_y = 124 Nm$ , identificar el/los punto/s mas cargado/s y :

- 4.- Dibujar el cubo elemental de tensiones
- 5.- Dibujar los círculos de Mohr de tensiones identificando los ejes coordenados en él e indicando el valor de corte de los círculos con el eje de tensiones normales. En caso de existir mas de un punto elegir uno de ellos
- 6.- Lectura que daría una banda extensométrica si fuera posible situarla en dicho punto a 45 grados con el eje longitudinal

**Nota:** Dado que no se permite el uso de formulario, se deben justificar todos los cálculos.

**Departamento de Ingeniería Mecánica  
Resistencia de Materiales**

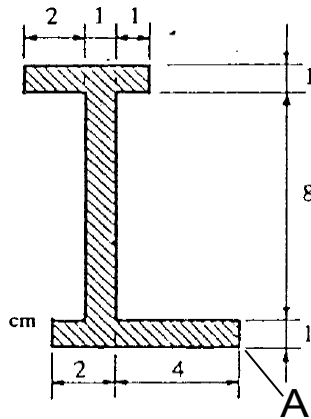
**3 IEM - Examen Final - Diciembre 2015**

Apellidos, Nombre: \_\_\_\_\_ Grupo: \_\_\_\_\_

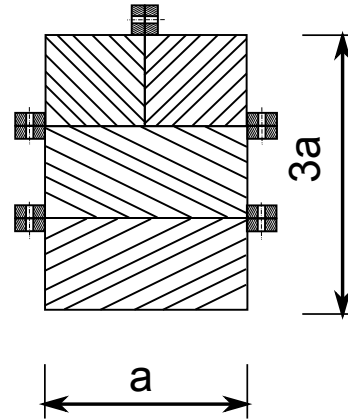
**EJERCICIO 2**

Se quiere utilizar una viga para salvar un vano  $2L = 3$  m con una sección como la de figura como soporte de una carga uniformemente repartida de  $3.5$  kN/m contenida en el plano vertical.

Sección apartados 1 a 3

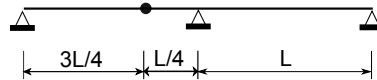


Sección apartado 4



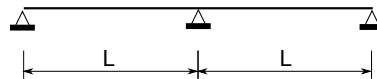
La solución planteada pasa por dos escenarios:

1. Cortar la viga en dos tramos (de longitudes  $1.125$  m y  $2.625$  m) unidos mediante una articulación



- Dibujar el diagrama de cortantes y flectores, acontando los máximos e indicando donde se encuentran
- Hallar la ecuación de las distribuciones de tensiones normales, en las secciones del vano donde se produzca el máximo momento flector. Obtener la ecuación de la fibra neutra

2. Utilizar la viga completa con dos tramos de  $1.5$  m, añadiendo un apoyo intermedio, de forma que se tenga una viga continua de dos tramos



- Dibujar el diagrama de cortantes y flectores, acontando los máximos e indicando donde se encuentran
- Calcular la tensión en el punto A de la sección mas cargada

3. Si existe una limitación de flecha vertical para el montaje de la viga: ¿Cuál de las dos sería la óptima?
4. Para la situación mas desfavorable, si la viga fuera de un acero que tiene una tensión admisible de  $210$  MPa y tuviera la sección rectangular como de la figura superior derecha; determinar el diámetro de los tornillos a emplear en las uniones que aparecen en la figura si el paso es de  $300$  mm y su material tiene una tensión admisible de  $315$  MPa.

Examen Diciembre 2015  
Resistencia de Materiales  
3°C, I.E.M



## 1. Ejercicio 1:

1. Dibujar los diagramas de esfuerzos en el tramo ABC en función del ángulo girado  $\theta$ . Calcular los valores de dichos esfuerzos para el dimensionamiento de la sección.

Sistema isostático, cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas supuestas en el sentido positivo de los ejes:  $R_y^A$ ,  $R_z^A$ ,  $R_y^B$ ,  $R_z^B$ .

Reacciones:

$$y : R_y^A + R_y^B = P + F \cos(\theta)$$

$$z : R_z^A + R_z^B = F \cos(\theta)$$

Momentos flectores (B):

$$x : F \cdot 150 = P \cdot 25$$

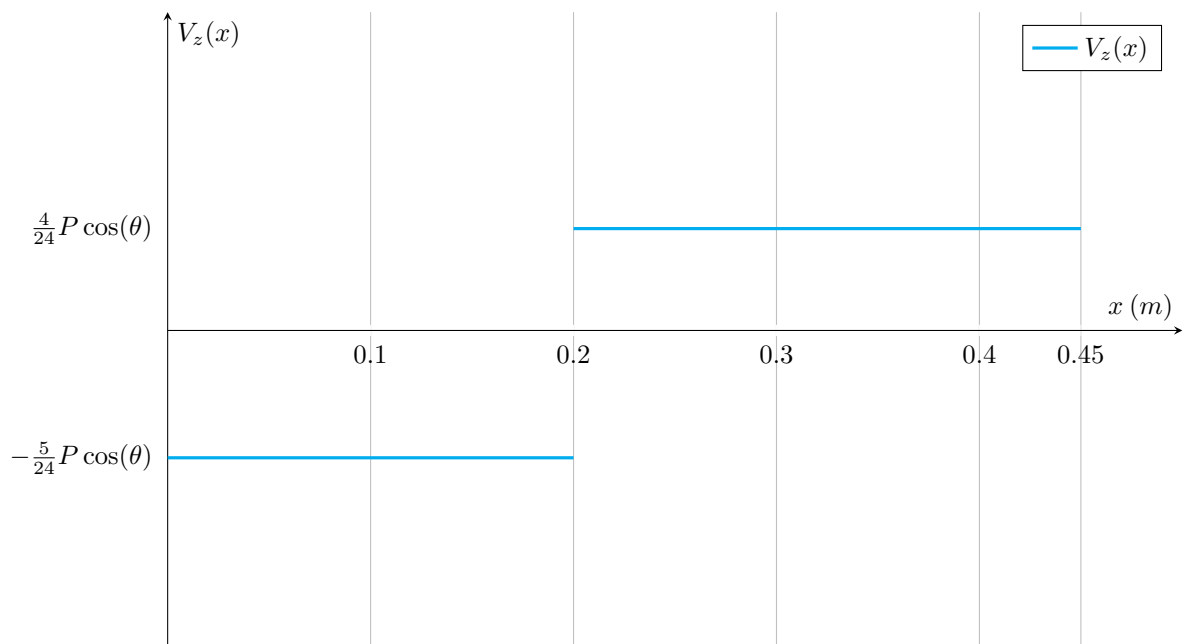
$$y : R_z^A \cdot 200 + F \cos(\theta) \cdot 350 = 0$$

$$z : -R_y^A \cdot 200 + P \cdot 100 - F \sin(\theta) \cdot 250 = 0$$

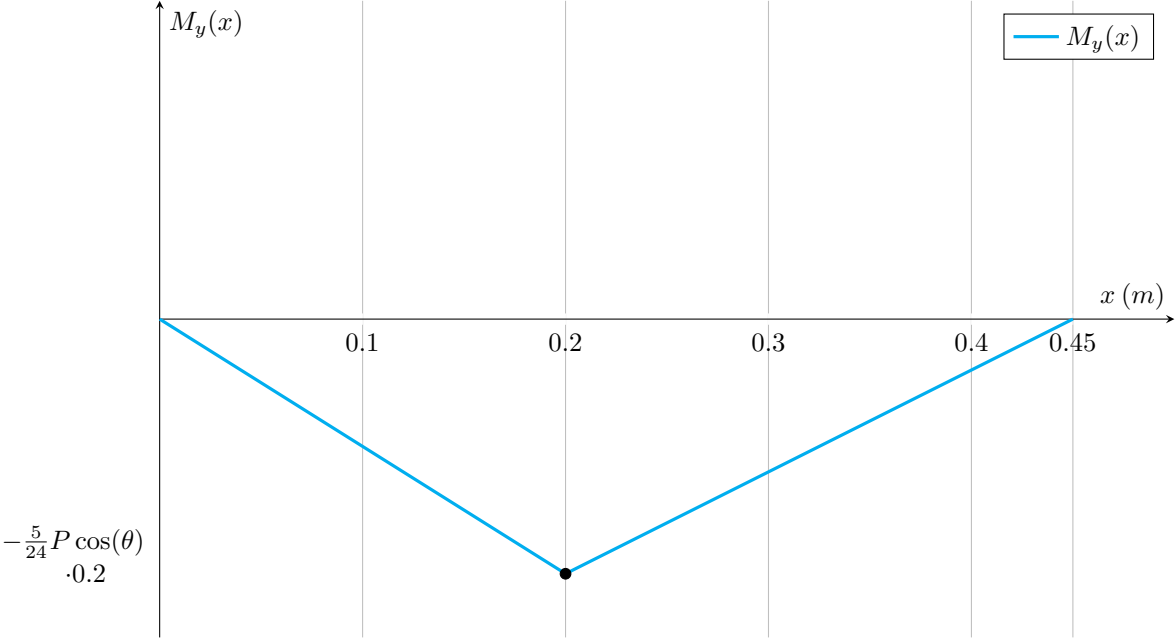
$$R_y^A = \frac{P}{2} - \frac{5}{24}P \sin(\theta); \quad R_z^A = -\frac{5}{24}P \cos(\theta); \quad R_y^B = \frac{P}{2} + \frac{9}{24}P \sin(\theta); \quad R_z^B = \frac{9}{24}P \cos(\theta);$$

Diagramas de esfuerzos en función del ángulo  $\theta$  en el tramo ABC:

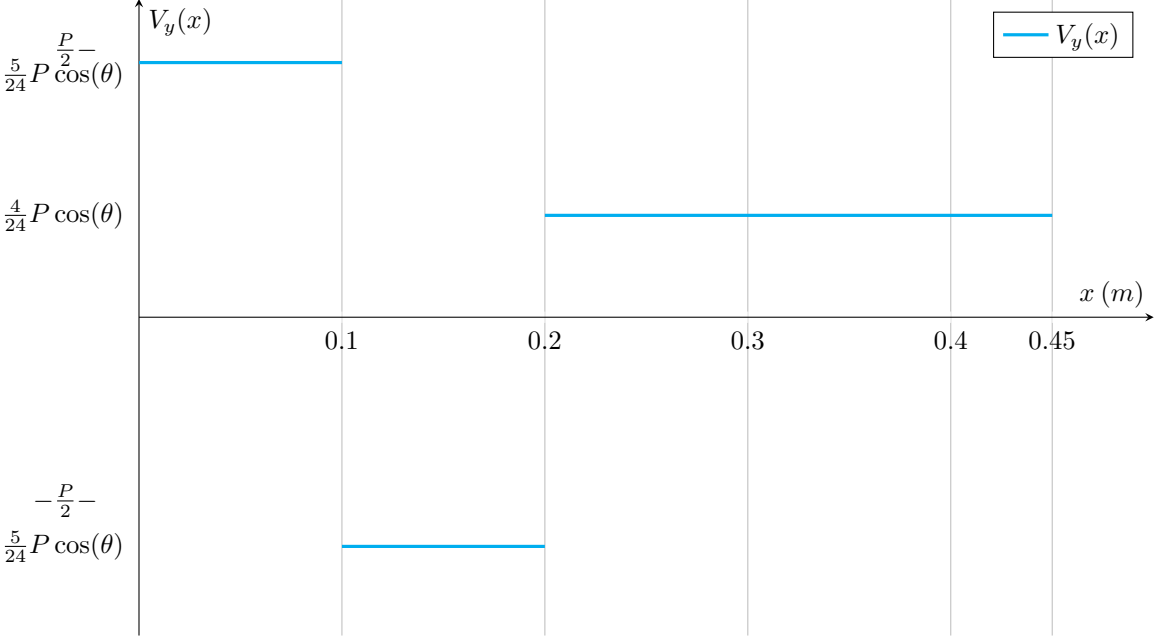
Esfuerzo Cortante  $V_z(x)$ :



Momento Flector  $M_y(x)$ :

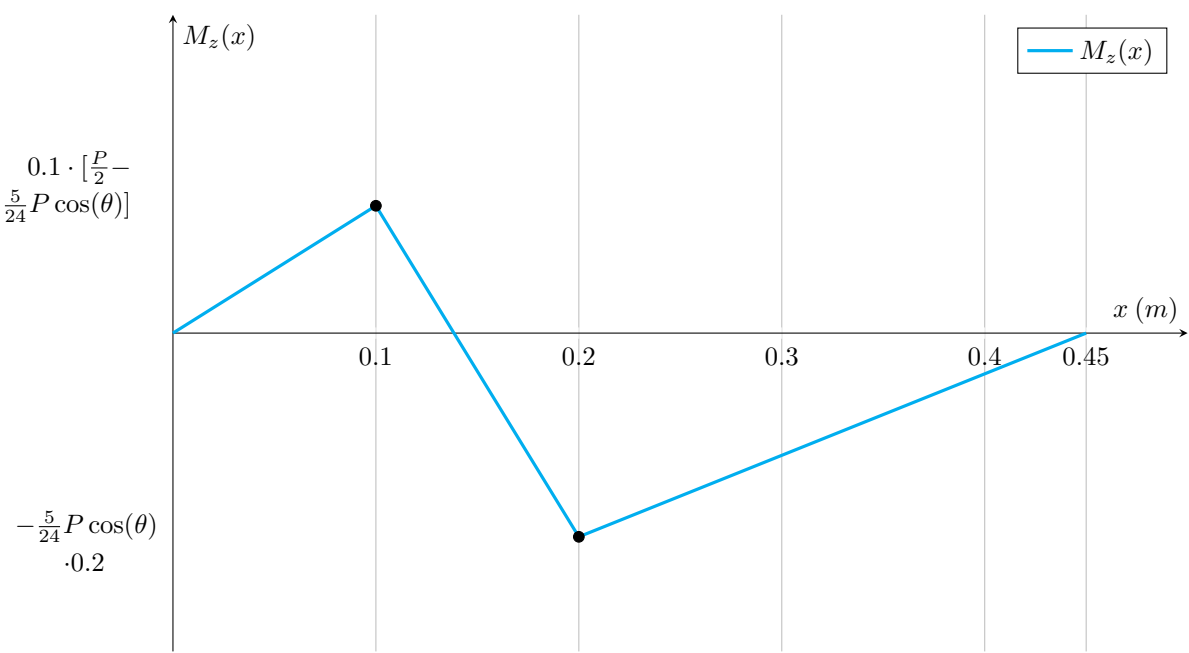


Esfuerzo Cortante  $V_y(x)$ :

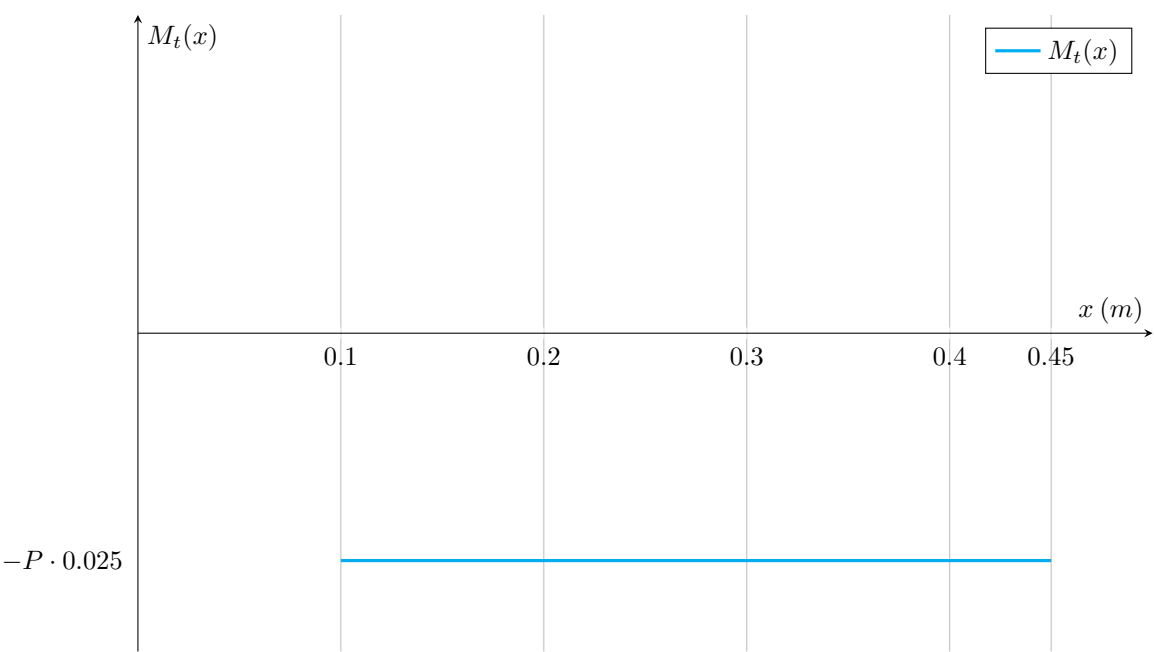




Momento Flector  $M_z(x)$ :



Momento Torsor  $M_t(x)$ :



2. Si el tramo ABC tiene un diámetro de 20 mm determinar el valor máximo de la carga que es posible elevar.

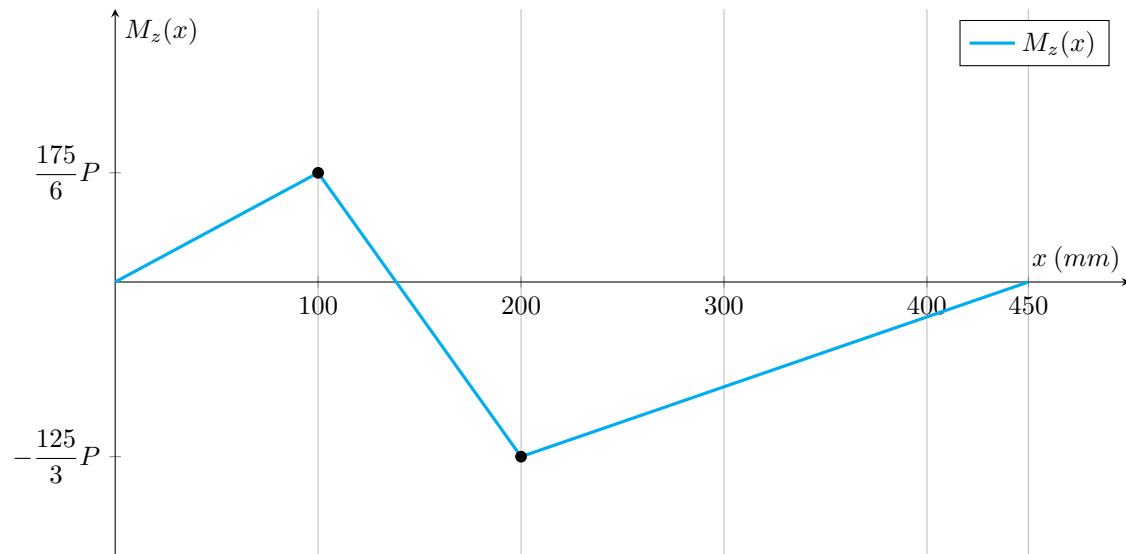
Para resolver este apartado se han de analizar las situaciones más desfavorables. Se tomarán como tales situaciones más críticas aquellas en las cuales el ángulo de giro  $\theta$  toma los valores de  $90^\circ$  y  $270^\circ$ .

a) **Ángulo  $\theta = 90^\circ$ :**

Reacciones:

$$R_y^A = \frac{P}{2} - \frac{5}{24}P; \quad R_z^A = 0; \quad R_y^B = \frac{P}{2} + \frac{9}{24}P; \quad R_z^B = 0;$$

**Momento Flector  $M_z^{\theta=90^\circ}(x)$  (N·mm):**

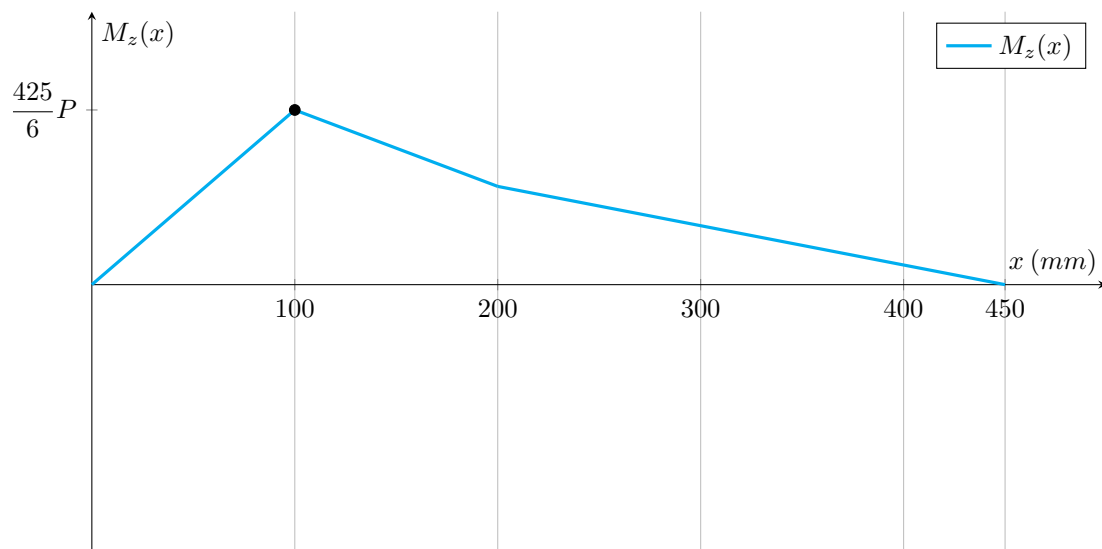


b) **Ángulo  $\theta = 270^\circ$ :**

Reacciones:

$$R_y^A = \frac{P}{2} + \frac{5}{24}P; \quad R_z^A = 0; \quad R_y^B = \frac{P}{2} - \frac{9}{24}P; \quad R_z^B = 0;$$

**Momento Flector  $M_z^{\theta=270^\circ}(x)$  (N·mm):**



Por lo que el máximo momento flector se dará en la situación en la que  $\theta = 270^\circ$  y se ha de calcular la P máxima en esta situación. Al tratarse de un material dúctil (acero) se usará el criterio de Tresca o de Von-Mises. (En este caso, por sencillez, el criterio de Tresca).

Ley de Navier:

$$\sigma_x(x, y, z) = \frac{N(x)}{\Omega} - \frac{M_z(x)}{I_z} \cdot y + \frac{M_y(x)}{I_y} \cdot z$$

Torsor:

$$\tau(r) = \frac{M_t}{I_o} \cdot r$$

Particularizando para el momento flector y torsor en la coordenada  $x = 0.1$  m, y con  $r = R = 10$  mm, se obtiene que:

$$\begin{aligned}\sigma_x(r = R) &= -\frac{M_z(x = 0.1 \text{ m})}{W_z} = -\frac{\frac{425}{6} \cdot P}{\frac{\pi R^3}{4}} \text{ (N/mm}^2\text{)} \\ \tau(r = R) &= \frac{M_t(x = 0.1 \text{ m})}{W_o} = \frac{-P \cdot 25}{\frac{\pi R^4}{2}} \cdot R \text{ (N/mm}^2\text{)}\end{aligned}$$

Usando la fórmula del círculo de Mohr para el cálculo de las tensiones principales:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + (\tau_{xz})^2} \\ \sigma_3 &= \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + (\tau_{xz})^2}\end{aligned}$$

y sustituyendo los valores de  $\sigma_x$ ,  $\sigma_z$  y  $\tau_{xz}$ :

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{-\frac{425}{6} \cdot P}{2 \cdot \frac{\pi R^3}{4}} + \sqrt{\left(\frac{-\frac{425}{6} \cdot P}{2 \cdot \frac{\pi R^3}{4}}\right)^2 + \left(\frac{-P \cdot 25}{\frac{\pi R^3}{2}}\right)^2} \\ \sigma_3 &= \frac{-\frac{425}{6} \cdot P}{2 \cdot \frac{\pi R^3}{4}} - \sqrt{\left(\frac{-\frac{425}{6} \cdot P}{2 \cdot \frac{\pi R^3}{4}}\right)^2 + \left(\frac{-P \cdot 25}{\frac{\pi R^3}{2}}\right)^2}\end{aligned}$$

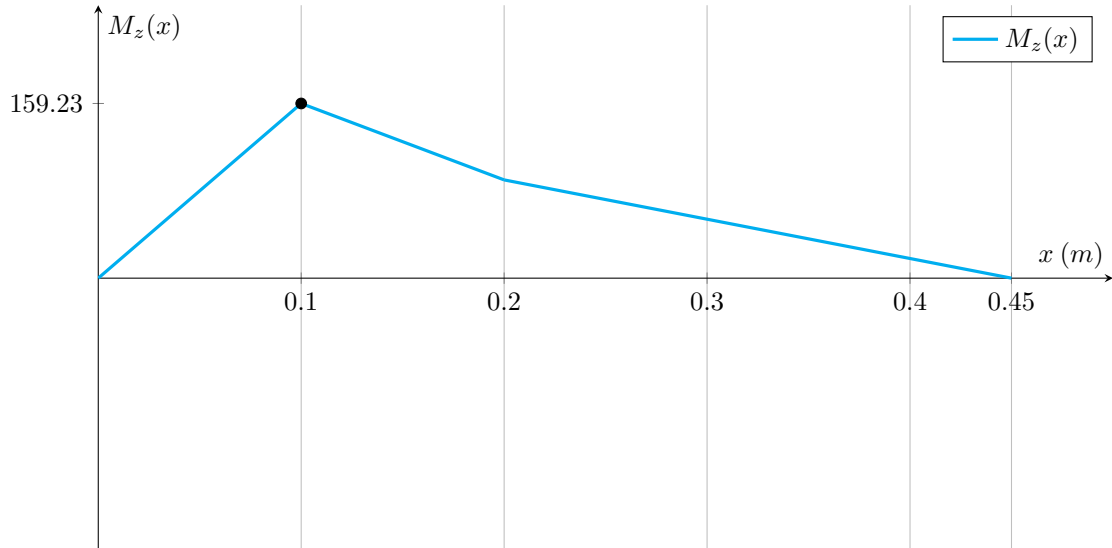
Aplicando el criterio de Tresca:

$$\begin{aligned}\sigma_{tresca}^{equi.} = \sigma_1 - \sigma_3 &= 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{-\frac{425}{6} \cdot P}{2 \cdot \frac{\pi R^3}{4}}\right)^2 + \left(\frac{-P \cdot 25}{\frac{\pi R^3}{2}}\right)^2} \leq \sigma_{adm} \\ 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{-\frac{425}{6} \cdot P}{2 \cdot \frac{\pi R^3}{4}}\right)^2 + \left(\frac{-P \cdot 25}{\frac{\pi R^3}{2}}\right)^2} &\leq 215 \text{ MPa} \\ P &\leq 2248.01 \text{ N}\end{aligned}$$

La carga máxima que se puede elevar con este redondo es de  $P = 2248$  N, es decir, una masa de aproximadamente 230 kg.

3. Calcular todos los desplazamientos y giros en el extremo C para la situación anterior.

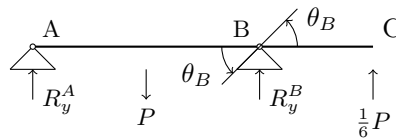
Momento Flector  $M_z^{\theta=270^\circ}(x)$  ( $N \cdot m$ ):



$$M_z^{\theta=270^\circ}(x) \Big|_{P=2248 \text{ N}} = \begin{cases} \frac{17}{24} P \cdot x & \text{si } x \leq 0.1 \text{ m} \\ \frac{17}{24} P \cdot x - P \cdot (x - 0.1) & \text{si } 0.1 < x < 0.2 \text{ m} \\ \frac{17}{24} P \cdot x - P \cdot (x - 0.1) + \frac{1}{8} P \cdot (x - 0.2) & \text{si } 0.2 \leq x \leq 0.45 \text{ m} \end{cases}$$

a) **Giro en C** ( $\theta_C$ ). Para calcular el giro en C se llevará a cabo el siguiente proceso:

1. Cálculo del giro en B (se desplaza la carga en C a B y se añade el momento que produce en B) y por **superposición**, se calcula la contribución al giro de cada una de las cargas y los momentos.
2. Al giro total en B calculado, se le suma el giro en C debido a la carga en el extremo para obtener el giro total en C.

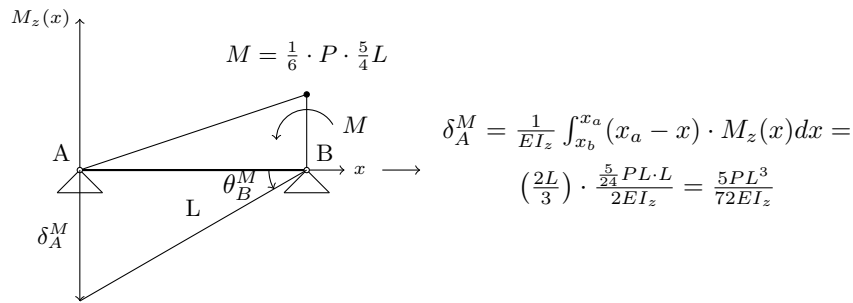


- La distancia de A a B, tomará como valor  $L = 0.2 \text{ m}$ .
- La distancia de B a C, tomará como valor  $\frac{5}{4}L = 0.25 \text{ m}$ .

1. **Cálculo del giro en B** ( $\theta_B$ ). El giro total en B será debido a la contribución del momento en B de la carga en C y de la carga P que se está elevando:

$$\theta_B = \theta_B^M + \theta_B^P$$

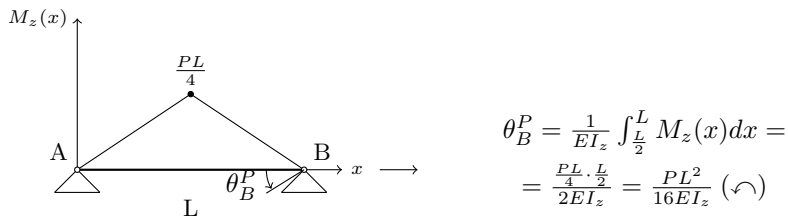
**1.1. Ángulo de giro en B debido al momento en B** ( $\theta_B^{M=\frac{1}{6}P \cdot 0.25}$ ). Al trasladar la carga del extremo C a B, éste produce un giro en dicho punto. Para el cálculo de este ángulo de giro primero se calcula la flecha en A debida a  $M_B$  (positivo) ( $\delta_A^M$ ) con el segundo Teorema de Mohr:



Ahora, por trigonometría y debido a la pequeñez de los desplazamientos, es posible hacer la siguiente aproximación:

$$\begin{aligned} \text{tg}(\theta_B^M) &\approx \theta_B^M = \frac{\delta_A^M}{L} \\ \theta_B^M &= \frac{5PL^2}{72EI_z} (\curvearrow) \end{aligned}$$

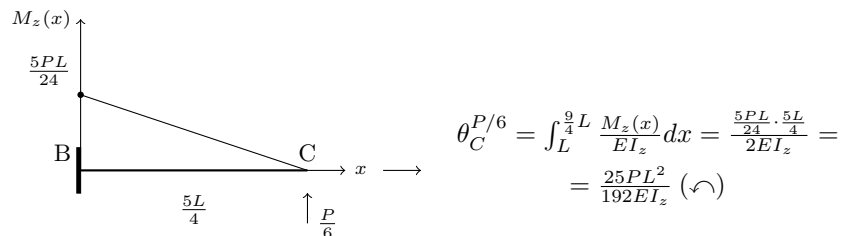
**1.2. Ángulo de giro en B debido a la carga P** ( $\theta_B^P$ ), en  $x = \frac{L}{2}$ . Para el cálculo de este ángulo, sabiendo que existe simetría y que el máximo del momento flector se alcanza en la mitad de la viga, se puede afirmar que en ese punto el ángulo girado es nulo. Con respecto a ese punto, calculamos el giro en B integrando el momento flector entre ese punto medio (del que se conoce el ángulo, que es nulo) y B, con el primer Teorema de Mohr:



El ángulo total girado en B ( $\theta_B$ ) será:

$$\theta_B = \theta_B^M + \theta_B^P = \frac{5PL^2}{72EI_z} (\curvearrow) + \frac{PL^2}{16EI_z} (\curvearrow) = \frac{19PL^2}{144EI_z} (\curvearrow)$$

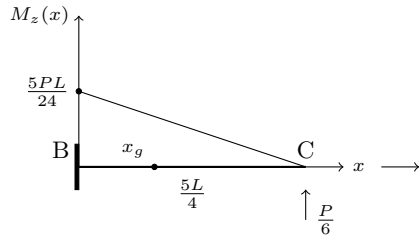
**2. Cálculo del giro en C.** Una vez conocido el ángulo girado en B, ‘se empotra’ en B y se calcula el ángulo que gira el extremo C debido a la carga  $\frac{P}{6}$  en el extremo, integrando entre B y C, con el primer Teorema de Mohr:



Finalmente, el ángulo total girado en C es:

$$\theta_C = \theta_C^{P/6} + \theta_B = \frac{25PL^2}{192EI_z} (\curvearrow) + \frac{19PL^2}{144EI_z} (\curvearrow) = \frac{151PL^2}{576EI_z} (\curvearrow) = 0.014 \text{ rad} (\curvearrow) = 0.802^\circ (\curvearrow)$$

**b) Desplazamiento vertical en C ( $\delta_C$ ).** Para calcular el desplazamiento vertical en C, como ya es conocido el ángulo total girado en B ( $\theta_B$ ) y que su desplazamiento vertical es 0, porque es una articulación, se empotra en B y se calcula la flecha en C debida a  $\frac{P}{6}$ , ( $\delta_C^{\frac{P}{6}}$ ):



$$\delta_C^{P/6} = \int_L^{\frac{5}{4}L} \left( \frac{5L}{4} - x \right) \frac{M_z(x)}{EI_z} dx =$$

$$= \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{5L}{4} \right) \frac{\frac{5PL}{24} \cdot \frac{5L}{4}}{2EI_z} = \frac{125PL^3}{1152EI_z} (\uparrow)$$

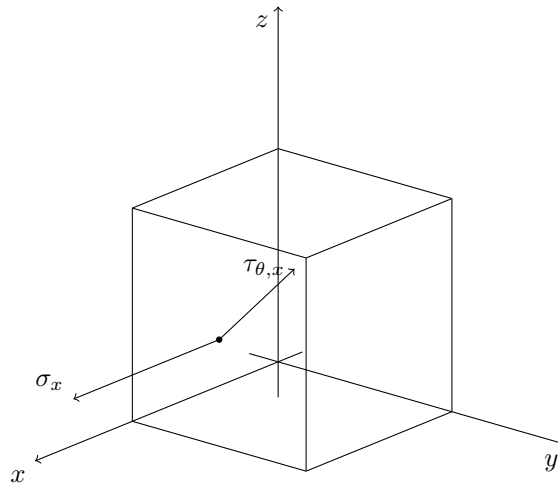
Además de esta flecha, en el desplazamiento vertical de C también influye el ángulo girado en B ( $\theta_B$ ), por lo que la flecha total en C (definiendo como positivas la flechas hacia abajo):

$$\delta_C = \delta_C^{P/6} + \theta_B \cdot \left( \frac{5L}{4} \right) = \frac{125PL^3}{1152EI_z} (\uparrow) + \frac{19PL^2}{144EI_z} \cdot \left( \frac{5L}{4} \right) (\uparrow) = \frac{35PL^3}{128EI_z} (\uparrow) = 2.98 \text{ mm} (\uparrow)$$

Suponiendo que se modifican las cargas que se aplican de forma que la sección más cargada tuviera los siguientes esfuerzos:  $M_x = 75 \text{ Nm}$ ,  $M_z = -95 \text{ Nm}$ ,  $M_y = 124 \text{ Nm}$ , identificar el/los punto/s más cargados y:

#### 4. Dibujar el cubo elemental de tensiones.

Punto B:



**5. Dibujar los círculos de Mohr de tensiones identificando los ejes coordenados en él e indicando el valor de corte de los círculos con el eje de tensiones normales. En caso de existir más de un punto elegir uno de ellos.**

Primero se calcula las tensiones normales y tangenciales que aparecen en el redondo con la ley de Navier y del torsor:

$$\sigma_x(r = R) = \frac{\sqrt{M_z^2 + M_y^2}}{W_z} = \frac{\sqrt{(-95)^2 + (124)^2}}{\frac{\pi R^3}{4}} = \frac{4\sqrt{24401}}{\pi} = 198.89 \text{ MPa}$$

$$\tau(r = R) = \frac{M_t}{I_o} \cdot R = \frac{75}{\frac{\pi R^3}{2}} = \frac{150}{\pi} = 47.75 \text{ MPa}$$

También se calcula la ecuación de la fibra neutra que ayudará a encontrar los puntos más solicitados

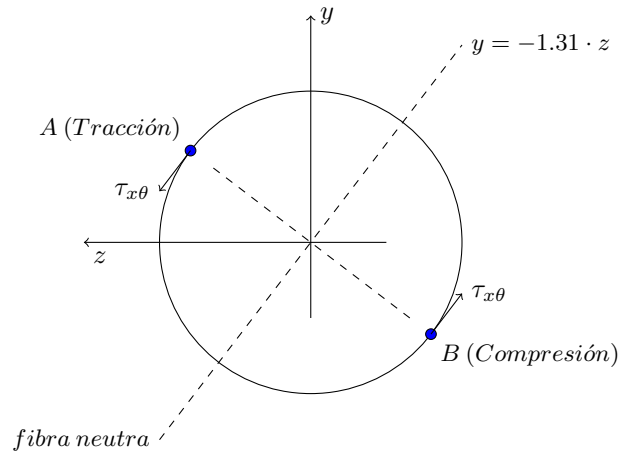
en la sección:

$$\sigma_x(y, z) = -\frac{M_z(x)}{I_z} \cdot y + \frac{M_y(x)}{I_y} \cdot z = 0$$

$$y = \frac{I_z \cdot M_y(x_o)}{I_y \cdot M_z(x_o)} \cdot z = \frac{M_y(x_o)}{M_z(x_o)} \cdot z = -1.31 \cdot z$$

$$y = -1.31 \cdot z$$

Identificación de los puntos más cargados en la sección  $x_o$ :



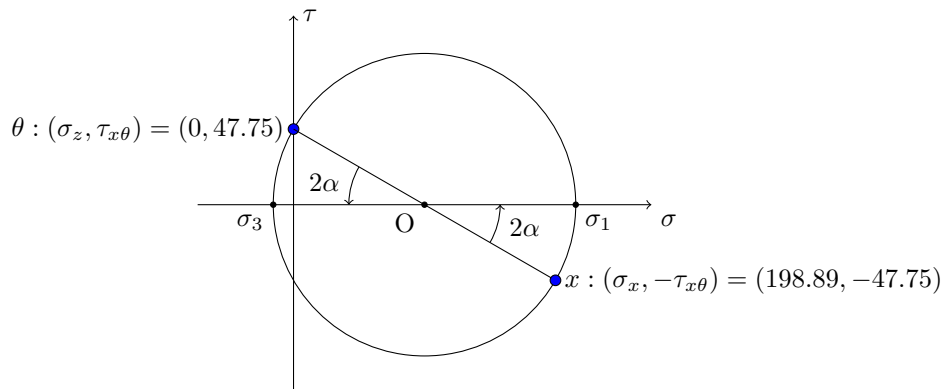
#### Círculos de Mohr y Estado Tensional de A:

Cálculo de las tensiones principales de uno de los puntos (A, tracción):

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + (\tau_{x\theta})^2} = \frac{198.89}{2} + \sqrt{\left(\frac{198.89}{2}\right)^2 + (47.75)^2} = 209.76 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + (\tau_{x\theta})^2} = \frac{198.89}{2} - \sqrt{\left(\frac{198.89}{2}\right)^2 + (47.75)^2} = -10.87 \text{ MPa}$$

Una vez identificados en la sección los puntos más solicitados se procede a dibujar los círculos de Mohr de uno de los puntos, en este caso del punto A que trabaja a tracción:



6. Lectura que daría una banda extensiométrica si fuera posible situarla en dicho punto a 45 grados con el eje longitudinal.





## 2. Ejercicio 2:

1. Cortar la viga en dos tramos ( de longitudes 1.125 m y 2.625 m) unidos mediante una articulación.

- Dibujar el diagrama de cortantes y flectores, acotando los máximos e indicando donde se encuentran .
- Hallar la ecuación de la distribución de tensiones normales, en las secciones del vano donde se produzca el máximo momento flector. Obtener la ecuación de la fibra neutra.

Sistema isostático, tres ecuaciones y tres incógnitas supuestas en el sentido positivo de los ejes:  $R_y^A$ ,  $R_y^B$ ,  $R_y^C$ .

Reacciones:

$$y : R_y^A + R_y^B + R_y^C = q \cdot 2L$$

Momentos (B):

$$z : R_y^A \cdot \frac{3L}{4} - q \cdot \frac{\left(\frac{3L}{4}\right)^2}{2} = 0$$

$$z : R_y^B \cdot \frac{L}{4} + R_y^C \cdot \frac{5L}{4} - q \cdot \frac{\left(\frac{5L}{4}\right)^2}{2} = 0$$

$$R_y^A = \frac{3}{8}qL ; \quad R_y^B = \frac{5}{4}qL ; \quad R_y^C = \frac{3}{8}qL ;$$

Sustituyendo los valores de  $q = 3500 \text{ N/m}$  y  $L = 1.5 \text{ m}$ , los valores numéricos son:

$$R_y^A = 1968.75 \text{ N} ; \quad R_y^B = 6562.5 \text{ N} ; \quad R_y^C = 1968.75 \text{ N} ;$$

Discretizaciones de los esfuerzos de la viga:

**Momento Flector**  $M_z(x)$  (N·m):

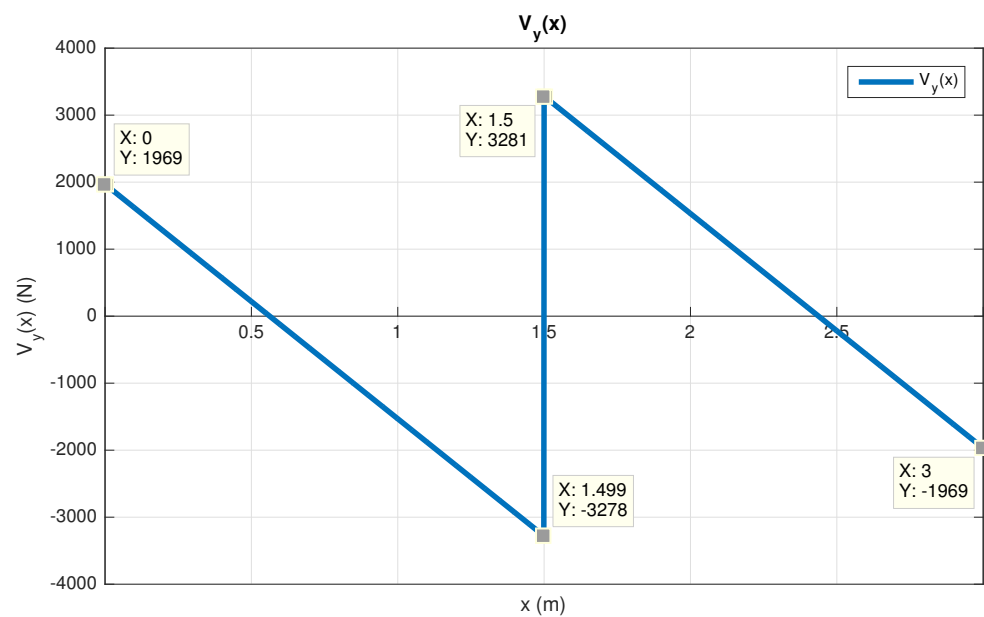
$$M_z(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}qL \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} & si \quad x \leq L \text{ m} \\ \frac{3}{8}qL \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{5}{4}qL \cdot (x - L) & si \quad L < x < 2L \text{ m} \end{cases}$$

**Esfuerzo Cortante**  $V_y(x)$  (N):

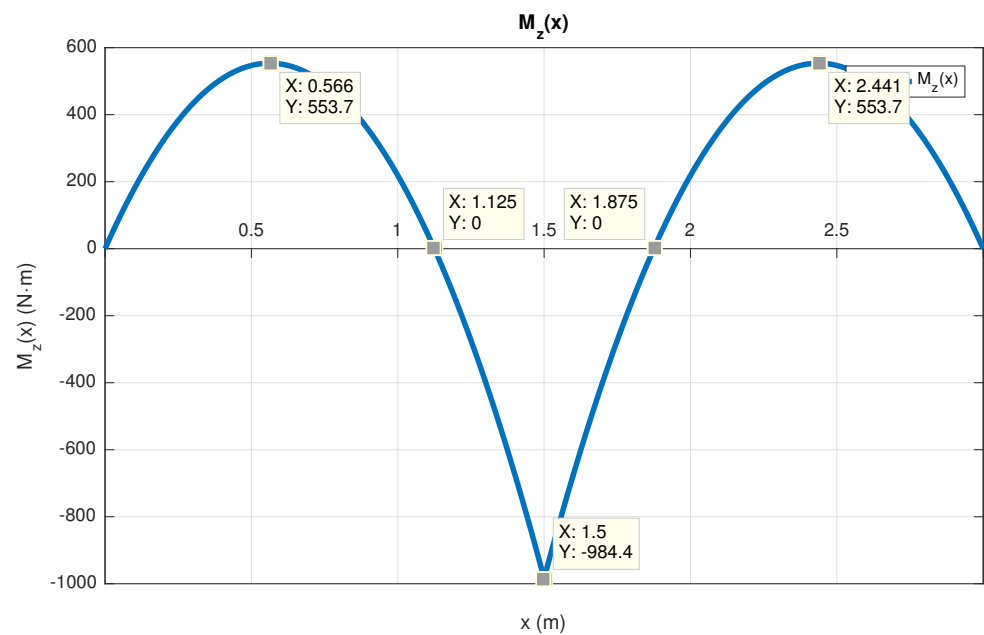
$$V_y(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}qL - q \cdot x & si \quad x \leq L \text{ m} \\ \frac{3}{8}qL - q \cdot x + \frac{5}{4}qL & si \quad L < x < 2L \text{ m} \end{cases}$$

Diagramas de Esfuerzo Cortantes y Momentos Flectores:

Esfuerzo Cortante  $V_y(x)$  (N):



Momento Flector  $M_z(x)$  (N·m):



Ahora para el punto más solicitado se escriben las ecuaciones de las distribución de tensiones normales y la ecuación de la fibra neutra. Ley de Navier:

$$\sigma_x(x, y, z) = \frac{N(x)}{\Omega} - \frac{M_z(x)}{I_z} \cdot y + \frac{M_y(x)}{I_y} \cdot z$$

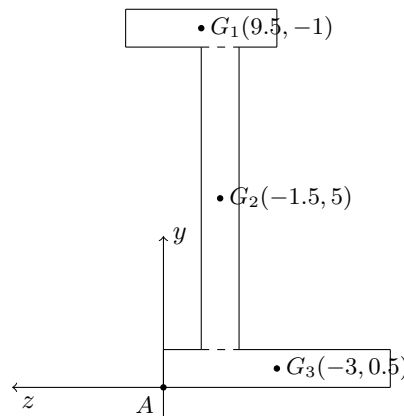
Para abordar el ejercicio se puede utilizar la ley de Navier en ejes principales de inercia o la ley de Navier generalizada, que es como sigue:

$$\sigma_x(x, y, z) = \frac{N(x)}{\Omega} - \frac{yI_y - zI_{yz}}{I_zI_y - I_{yz}^2} \cdot M_z(x) + \frac{zI_z - yI_{yz}}{I_zI_y - I_{yz}^2} \cdot M_y(x)$$

Para la resolución de este ejercicio se hace uso de la primera opción planteada, lo que supone calcular los ejes principales de la sección, para posteriormente poder aplicar Navier en ejes principales.

### Análisis de la Sección

1. Primero se posicionan unos ejes  $yz$  en la esquina inferior izquierda de la sección desde la que se calcularán el centro de gravedad, los momentos de inercia y los productos de inercia de la sección. La notación de las coordenadas será  $(z_o, y_o)$ , es decir, el eje  $z$  sustituirá al eje  $x$  en la notación habitual.



#### a) Centro de gravedad:

$$z_G = \frac{\sum_i z_i \cdot A_i}{A_{total}} = \frac{(-1) \cdot 4 + (-1.5) \cdot 8 + (-3) \cdot 6}{4 + 8 + 6} = -\frac{17}{9} = -1.888 \text{ cm}$$

$$y_G = \frac{\sum_i y_i \cdot A_i}{A_{total}} = \frac{9.5 \cdot 4 + 5 \cdot 8 + 0.5 \cdot 6}{4 + 8 + 6} = 4.5 \text{ cm}$$

#### b) Momentos de Inercia:

b.1) Momento de Inercia respecto al eje  $z$ :

$$I_z^A = I_z^{A,1} + I_z^{A,2} + I_z^{A,3} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 1^3 + \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 8^3 + 8 \cdot 5^2 + \frac{1}{12} \cdot 4 \cdot 1^3 + 4 \cdot 9.5^2 = 406 \text{ cm}^4$$

b.2) Momento de Inercia respecto al eje  $y$ :

$$I_y^A = I_y^{A,1} + I_y^{A,2} + I_y^{A,3} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 6^3 + \frac{1}{3} [8 \cdot 2^3 - 8 \cdot 1^3] + \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 4^3 + 4 \cdot 1^2 = 100 \text{ cm}^4$$

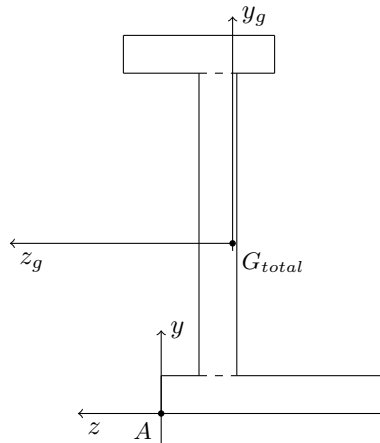
c) **Productos de Inercia.** Se define el producto de inercia como:

$$I_{yz} = \int_{\Omega} yz \cdot d\Omega = z \cdot y \cdot Area$$

De toda la sección será:

$$\begin{aligned} I_{yz}^A &= I_{yz}^{A,1} + I_{yz}^{A,2} + I_{yz}^{A,3} = \\ &= \left[ \int_9^{10} y dy \int_{-3}^1 z dz \right] + \left[ \int_1^9 y dy \int_{-2}^{-1} z dz \right] + \left[ \int_0^1 y dy \int_{-6}^0 z dz \right] = \\ &= (-38) + (-60) + (-9) = -107 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

Ahora se sitúa el centro de gravedad de la sección y se trasladan, usando el teorema de Steiner, todos los momentos y productos de inercia a G:



**Momentos de Inercia en G:**

Momento de Inercia en G respecto al eje z:

$$I_z^G = I_z^A - (y_G)^2 \cdot A_{total} = 406 \text{ cm}^4 - (4.5)^2 \cdot 18 = 241.5 \text{ cm}^4$$

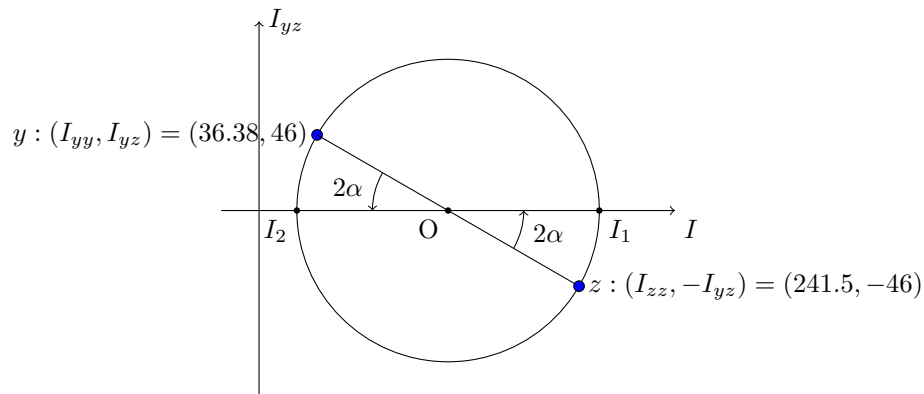
Momento de Inercia en G respecto al eje y:

$$I_y^G = I_y^A - (z_G)^2 \cdot A_{total} = 100 \text{ cm}^4 - \left(-\frac{17}{9}\right)^2 \cdot 18 = 36.38 \text{ cm}^4$$

**Producto de Inercia en G:**

$$I_{yz}^G = I_{yz}^A - z \cdot y \cdot A_{total} = -107 \text{ cm}^4 - \left(-\frac{17}{9}\right) \cdot (4.5) \cdot 18 = 46 \text{ cm}^4$$

2. Se construye el círculo de Mohr de los momentos de inercia para conocer los momentos de inercia principales y la dirección de los ejes principales asociados:



Se calcula el ángulo para hallar las direcciones exactas de los ejes principales en la sección:

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2 \cdot I_{yz}}{I_{zz} - I_{yy}} = \frac{2 \cdot 46}{241.5 - 36.38} \rightarrow \alpha = 12.08^\circ \text{ (antihorario } \curvearrowleft)$$

3. A continuación, se construye la matriz o tensor de Inercia  $[I]$ . Para una correcta construcción se ha de tener en cuenta el siguiente detalle para manejar correctamente la matriz de giro  $[P]$ :

- Si  $I_z > I_y$ , entonces  $I_z$  irá colocado en la posición I(1,1) y se cambian de signo los productos de inercia.
- Si  $I_y > I_z$ , entonces  $I_y$  irá colocado en la posición I(1,1) y se cambian de signo los productos de inercia.

En este caso, la matriz  $[I]$  tomará la forma:

$$[I] = \begin{pmatrix} I_{zz} & -I_{yz} \\ -I_{yz} & I_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 241.5 & -46 \\ -46 & 36.38 \end{pmatrix} \text{ cm}^4$$

4. Diagonalizando la matriz de Inercia, también se obtiene la matriz de Paso  $[P]$ . Atención: la **matriz de autovectores** que devuelve la calculadora en la diagonalización cambia de base, de coordenadas en ejes principales 123 a coordenadas en ejes cartesianos  $z_g y_g$ . Como se requiere justo lo contrario, es decir, un cambio de base de ejes cartesianos a ejes principales se ha de utilizar como matriz de giro  $[P]^{-1}$ .

**Matriz de Inercia Diagonalizada  $[I]$ :**

$$[I] = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 \\ 0 & I_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 251.34 & 0 \\ 0 & 26.54 \end{pmatrix} \text{ cm}^4$$

**Matriz de Paso  $[P]_{12 \rightarrow zy}$ :**

$$[P] = \begin{pmatrix} 0.977862 & 0.209252 \\ -0.209252 & 0.977862 \end{pmatrix}$$

**Matriz de Paso  $[P]_{zy \rightarrow 12}$ .** Al realizar la inversa de  $[P]$ , por tratarse ésta de una matriz ortonormal, la inversa coincide con la transpuesta:

$$[P]^{-1} = [P]^t = \begin{pmatrix} 0.977862 & -0.209252 \\ 0.209252 & 0.977862 \end{pmatrix}$$

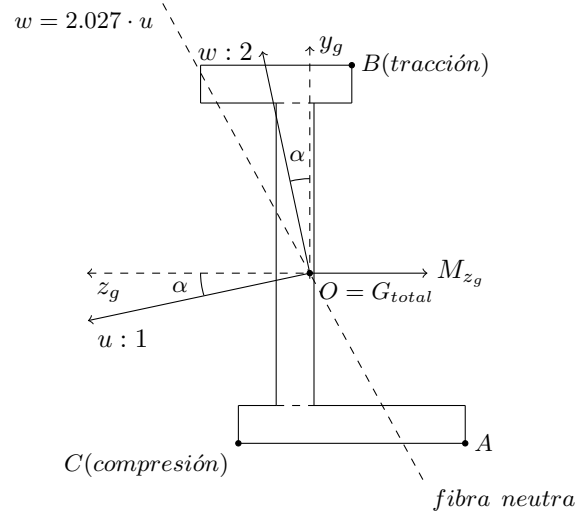
5. Una vez analizada la sección, se identifica el punto más crítico de la viga, que en este caso se corresponde con la coordenada  $x = L = 1.5$  m. Se gira el momento flector de dicha sección más solicitada con la matriz de Paso  $[P]^t$ , para poder utilizarlo en el nuevo sistema de referencia  $uw$ :

$$\begin{pmatrix} M_u \\ M_w \end{pmatrix} = [P]^t \cdot \begin{pmatrix} M_z^{Oyz} \\ 0 \end{pmatrix} = [P]^t \cdot \begin{pmatrix} -984.4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -962.607 \\ -205.988 \end{pmatrix}$$

6. El cálculo de la ecuación de la fibra neutra que ayudará a situar en la sección los puntos más solicitados en ejes principales con las coordenadas en cm (**al eje principal 1 se le notará como u y al eje principal 2 se le notará como w**):

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, w, u) &= -\frac{M_u(x)}{I_u} \cdot w_{eje(2)} + \frac{M_w(x)}{I_w} \cdot u_{eje(1)} = 0 \\ w &= \frac{I_u \cdot M_w(x=L)}{I_w \cdot M_u(x=L)} \cdot u = \frac{251.34 \cdot (-205.988)}{26.54 \cdot (-962.607)} \cdot u = 2.027 \cdot u \\ w &= 2.027 \cdot u \end{aligned}$$

En la figura, los puntos más solicitados serán aquellos que se encuentren a mayor distancia en perpendicular a la fibra neutra, y son los que se muestran en la figura ( $B$  y  $C$ ). Se han dibujado los momentos flectores resultantes ejercidos sobre la sección más cargada que aparecen cuando se elimina la otra parte de la viga para que la resultante de momentos siga siendo nula en la sección, ya que el criterio de signos adoptado previamente aplicado al caso de flexión compuesta carece de sentido:



La ecuación de la distribución de tensiones normales en la sección más cargada ( $x = 1.5 \text{ m}$ ) será, en ejes principales  $uw$ :

$$\sigma_x(w, u) = -\frac{M_u(x = 1.5 \text{ m})}{I_u} \cdot w + \frac{M_w(x = 1.5 \text{ m})}{I_w} \cdot u$$

Particularizando los valores de todos los parámetros, se obtiene, con las coordenadas  $u$  y  $w$  en mm, la ley de Navier en los nuevos ejes principales  $uw$ :

$$\sigma_x(w, u) = -\frac{-962.607 \cdot 10^3 \text{ (N} \cdot \text{mm)}}{251.34 \cdot 10^4 \text{ (mm}^4\text{)}} \cdot w + \frac{-205.988 \cdot 10^3 \text{ (N} \cdot \text{mm)}}{26.54 \cdot 10^4 \text{ (mm}^4\text{)}} \cdot u$$

$$\sigma_x(w, u) = 0.383 \cdot w - 0.776 \cdot u \quad (\text{N/mm}^2, \text{ MPa})$$

Se introducen las coordenadas de los puntos  $B(u_B, w_B)$  y  $C(u_C, w_C)$  para obtener la tensión de ambos puntos. Es imprescindible girar los puntos en coordenadas  $(z, y)$  a coordenadas  $(u, w)$  con  $[P]^t$  antes de introducirlos en la ley de Navier en los nuevos ejes  $uw$ .

**B**  $(-1.11, 5.5) \text{ cm}$ :

$$\begin{pmatrix} u_B \\ w_B \end{pmatrix} = [P]^t \cdot \begin{pmatrix} -1.11 \\ 5.50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.24 \\ 5.15 \end{pmatrix}$$

Ley de Navier, con coordenadas en mm, en el punto B:

$$\sigma_x^B(u = -22.4, w = 51.5) = 0.383 \cdot (51.5) - 0.77614 \cdot (-22.4) = 37.0894 \text{ MPa}$$

**C**  $(1.88, -4.5) \text{ cm}$ :

$$\begin{pmatrix} u_C \\ w_C \end{pmatrix} = [P]^t \cdot \begin{pmatrix} 1.88 \\ -4.50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.79 \\ -4.01 \end{pmatrix}$$

Ley de Navier, con coordenadas en mm, en el punto C:

$$\sigma_x^C(u = 27.9, w = -40.1) = 0.383 \cdot (-40.1) - 0.77614 \cdot (27.0) = -36.31 \text{ MPa}$$

2. Utilizar la viga completa con dos tramos de 1.5 m, añadiendo un apoyo intermedio, de forma que se tenga la viga de la figura.

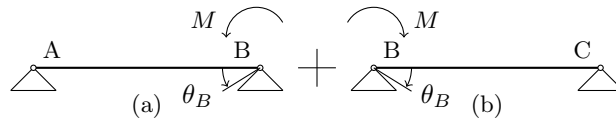
- Dibujar el diagrama de cortantes y flectores, acotando los máximos e indicando donde se encuentran.
- Calcular la tensión en el punto A de la sección más cargada.

Sistema hiperestático, dos ecuaciones y tres incógnitas supuestas en el sentido positivo de los ejes coordenados:  $R_y^A$ ,  $R_y^B$ ,  $R_y^C$ .

Para resolver el sistema hiperestático se seguirá el siguiente proceso:

1. Se descompone la viga en dos subtramos de longitud  $L=1.5$  m y se introduce un momento en cada subtramo (sentidos opuestos) que conserve el giro.
2. Se calcula el giro en B por la izquierda ( $\theta_B^-$ ).
3. Se calcula el giro en B por la derecha ( $\theta_B^+$ ).
4. Por último, se imponen las condiciones de compatibilidad en B para resolver ambas incógnitas:  $\delta_{v,B} = 0$  y  $\delta_{v,C} = 0$ .

#### 1. Conversión de sistema hiperestático a isostático:



#### 2. Giro en B por la izquierda ( $\theta_B^-$ ):

Tramo (a):

1. Ángulo girado en B debido a  $q(x) = 3.5$  kN/m ( $\theta_B^q$ ), por el 1<sup>er</sup> teorema de Mohr:

$$\theta_B^q = \frac{1}{EI_z} \int_{\frac{L}{2}}^L \left( \frac{q \cdot L}{2} \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{q \cdot L^3}{24EI_z} (\curvearrowright)$$

2. Ángulo girado en B debido a  $M$  ( $\theta_B^M$ ), por el 2<sup>o</sup> teorema de Mohr sacamos  $\delta_A^M$ :

$$\delta_A^M = \frac{1}{EI_z} \int_{x_b}^{x_a} (x_a - x) \cdot M_z(x) dx = \frac{2L}{3} \cdot \frac{M \cdot L}{2EI} = \frac{M \cdot L^2}{3EI_z}$$

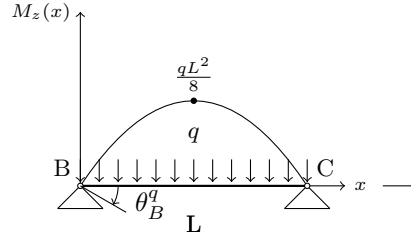
Por trigonometría y debido a la pequeñez de los desplazamientos, es posible hacer la siguiente aproximación:

$$\begin{aligned} \text{tg}(\theta_B^M) &\approx \theta_B^M = \frac{\delta_A^M}{L} \\ \theta_B^M &= \frac{ML}{3EI_z} (\curvearrowright) \end{aligned}$$

### 3. Giro en B por la derecha ( $\theta_B^+$ ):

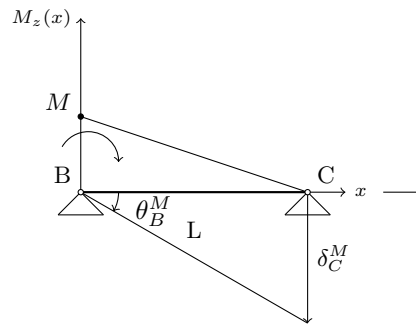
Tramo (b):

1. Ángulo girado en B debido a  $q(x) = 3.5 \text{ kN/m}$  ( $\theta_B^q$ ):



$$\theta_B^q = \frac{1}{EI_z} \int_{\frac{L}{2}}^L \left( \frac{qL}{2} \cdot x - \frac{q}{2} \cdot x^2 \right) dx = \frac{q \cdot L^3}{24EI_z} (\curvearrowright)$$

2. Ángulo girado en B debido a  $M$  ( $\theta_B^M$ ):



$$\delta_C^M = \frac{1}{EI_z} \int_{x_b}^{x_c} (x_c - x) \cdot M_z(x) dx = \frac{2L}{3} \cdot \frac{M \cdot L}{2EI} = \frac{ML^2}{3EI_z}$$

Por trigonometría y debido a la pequeñez de los desplazamientos, es posible hacer la siguiente aproximación:

$$\text{tg}(\theta_B^M) \approx \theta_B^M = \frac{\delta_C^M}{L}$$

$$\theta_B^M = \frac{ML}{3EI_z} (\curvearrowright)$$

**4. Condición de compatibilidad.** Se impone la condición de compatibilidad consistente en la conservación del ángulo girado por la izquierda y por la derecha  $\theta_B^- = \theta_B^+$ . Se considerarán los ángulos girados en sentido antihorario como positivos y los ángulos girados en sentido horario como negativos.

$$\theta_B^- = \theta_B^+$$

$$(+)\frac{q \cdot L^3}{24EI_z} (\curvearrowright) + (+)\frac{M \cdot L}{3EI} (\curvearrowright) = (-)\frac{q \cdot L^3}{24EI_z} (\curvearrowright) + (-)\frac{M \cdot L}{3EI} (\curvearrowright)$$

$$M \cdot \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = -q \cdot L^2 \cdot \left( \frac{1}{24} + \frac{1}{24} \right)$$

$$M = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{12} q \cdot L^2$$

$$M = -\frac{1}{8} q \cdot L^2 = -984.375 \text{ N} \cdot \text{m}$$



Una vez conocido el momento se resuelven las ecuaciones de la estática para cada subtramo, que en este caso al ser iguales, tendrán idénticas reacciones. Así, para el tramo (a), suponiendo las reacciones en el sentido positivo de los ejes, se tiene que:

**Tramo (a):**

Reacciones:

$$y : R_y^A + R_{y1}^B = q \cdot L$$

Momentos flectores (B):

$$z : R_y^A \cdot L - q \cdot \frac{L^2}{2} - M = 0$$

$$R_y^A = 1968.75 \text{ N} ; \quad R_{y1}^B = 3281.25 \text{ N} ;$$

**Tramo (b):**

Reacciones:

$$y : R_y^C + R_{y2}^B = q \cdot L$$

Momentos flectores (B):

$$z : R_y^C \cdot L - q \cdot \frac{L^2}{2} - M = 0$$

$$R_y^C = 1968.75 \text{ N} ; \quad R_{y2}^B = 3281.25 \text{ N} ;$$

Se suman las reacciones aplicando **superposición**:

$$R_y^A = 1968.75 \text{ N} ; \quad R_{y(1+2)}^B = 6562.5 \text{ N} ; \quad R_y^C = 1968.75 \text{ N} ;$$

Si las reacciones son iguales que en el apartado anterior, los diagramas de momentos flectores y cortantes también lo serán.

**Tensión en el punto A**(-4.11, -5.00) cm :

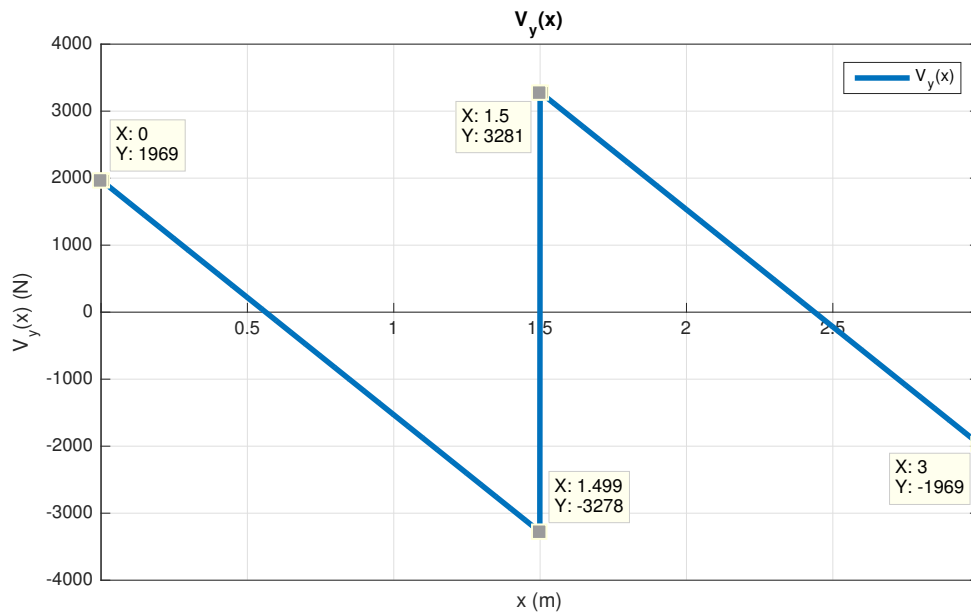
$$\begin{pmatrix} u_A \\ w_A \end{pmatrix} = [P]^t \cdot \begin{pmatrix} -4.11 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.97 \\ -5.75 \end{pmatrix}$$

Ley de Navier, con coordenadas en mm, en el punto A:

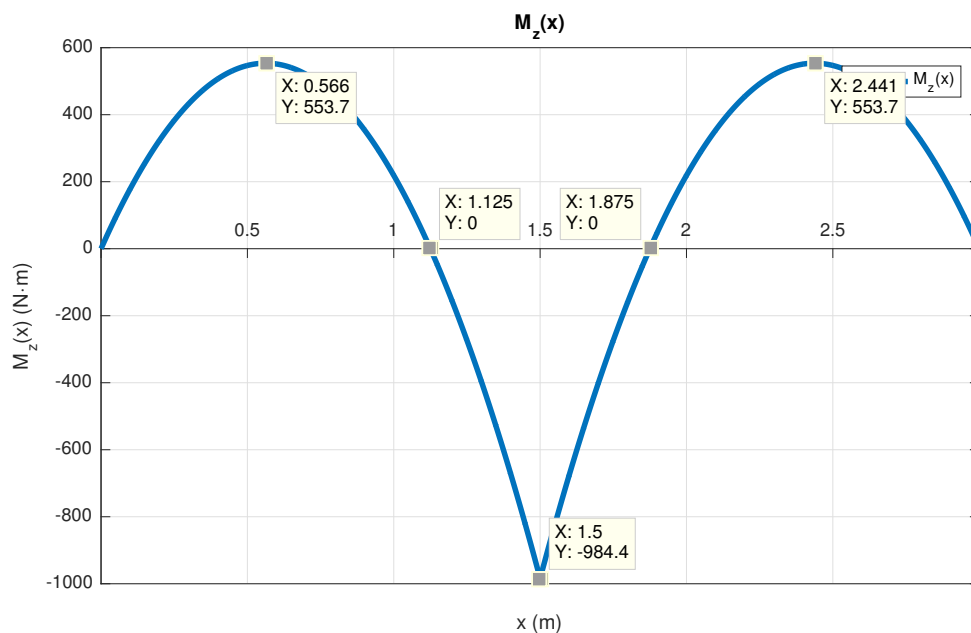
$$\sigma_x^A(u = -29.7, w = -57.5) = 0.383 \cdot (-29.7) - 0.77614 \cdot (-57.5) = 24.84 \text{ MPa}$$

### Diagramas de Esfuerzo Cortantes y Momentos Flectores:

Esfuerzo Cortante  $V_y(x)$  (N):



Momento Flector  $M_z(x)$  (N·m):



**3. Si existe una limitación de flecha vertical para el montaje de la viga: ¿Cuál de las dos sería la óptima?**

Ambas vigas presentan los mismos diagramas de momentos flectores, por lo que ambas presentarán idénticas flechas verticales a lo largo de toda la viga, así que resulta indiferente cual de las dos configuraciones se utilice para el montaje de la misma.

4. Para la situación más desfavorable, si la viga fuera de un acero que tiene una tensión admisible de 210 MPa y tuviera la sección rectangular como la de la figura superior derecha; determinar el diámetro de los tornillos a emplear en las uniones que aparecen en la figura si el paso es de 300 mm y su material tiene una tensión admisible de 315 MPa.

La situación con esfuerzo cortante más desfavorable se da en la coordenada  $x = 1.5$  m, donde  $V_y(x = 1.5) = 3278$  N. Se calcula la tensión cortante con la que trabajarán los tornillos usando la fórmula de Collignon y se impone que esta tensión sea menor que la admisible del material de los tornillos:

$$\frac{\tau_{xy}}{A_{union}} \cdot \text{paso} \cdot a \leq \tau_{adm}$$

La tensión cortante con la que trabaja el tornillo vertical tiene la forma:

$$\tau_{xy} \left( y = \frac{9a}{4} \right) = \frac{3278 (N) \cdot \left[ \frac{9a}{4} \cdot (a^2) \right]}{a \cdot \frac{1}{12} \cdot a \cdot (3a)^3} = \frac{3278}{a}$$

Imponiendo la condición anterior, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{3278}{a}}{\frac{\pi \cdot \phi^2}{4}} \cdot 300 \cdot a &\leq \tau_{adm} \\ \frac{3278 \cdot 300 \cdot 4}{\pi \cdot \tau_{adm}} &\leq \phi^2 \\ 63.05 \text{ mm} &\leq \phi \end{aligned}$$



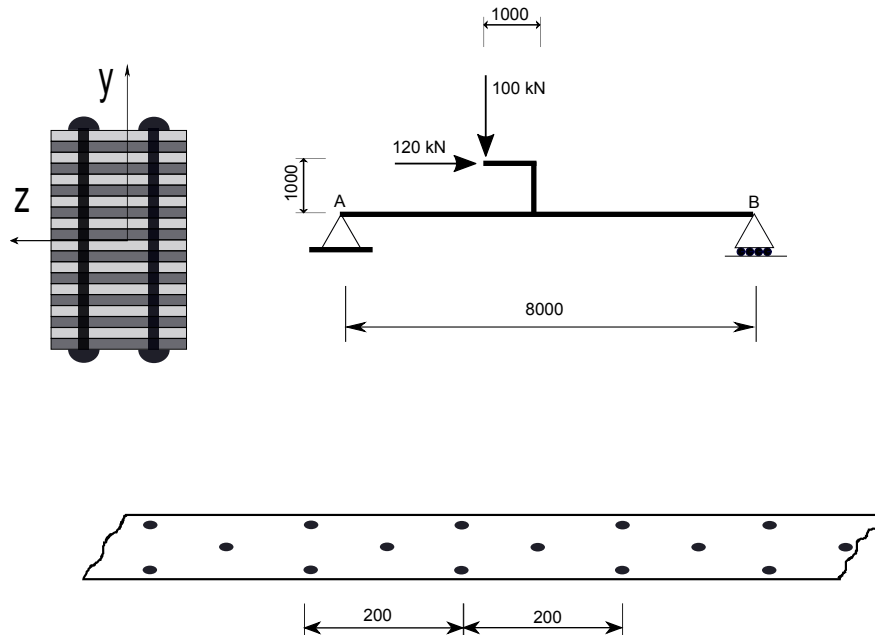
Departamento de Ingeniería Mecánica  
Resistencia de Materiales

3 IEM - Examen Extraordinario Junio 2015

Apellidos, Nombre: \_\_\_\_\_ Grupo: \_\_\_\_\_

**EJERCICIO 1**

La viga AB de 8 metros de longitud que aparece en la figura (cotas en mm) está formada por 20 chapas de acero de 10 mm de espesor y 120 mm de anchura. Las chapas están apiladas y unidas por pasadores de 16 mm de diámetro dispuestos tal y como aparece en la figura. El material de las chapas es un acero estructural con un límite elástico de 275 MPa mientras que los pasadores son de un acero con límite elástico 425 MPa.



1. Dibujar los diagramas de esfuerzos en la viga AB
2. Comprobar los fallos posibles de la viga indicando el coeficiente de seguridad con el que estaría trabajando ésta
3. ¿Se justifica la forma de disponer los pasadores?
4. Para el caso mas crítico de fallo de la sección determinado en el primer apartado, calcular la tensión máxima si la viga estuviera formada sólo por las chapas sin los pasadores. Dibujar la distribución de tensiones normales en este caso.

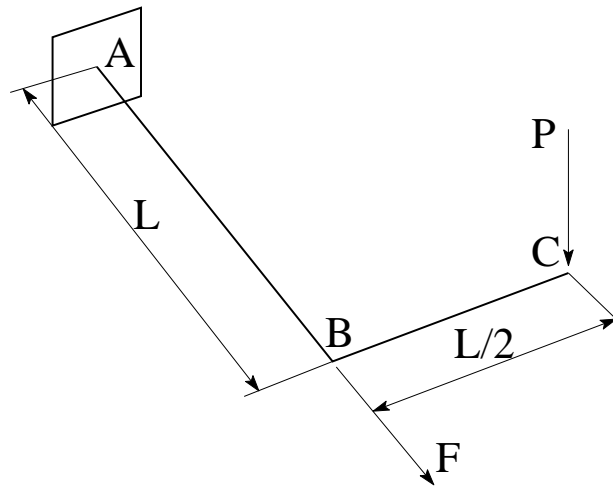
**Departamento de Ingeniería Mecánica  
Resistencia de Materiales**

**3 IEM - Examen Extraordinario Junio 2015**

**Apellidos, Nombre:** \_\_\_\_\_ **Grupo:** \_\_\_\_\_

**EJERCICIO 2**

El elemento de una máquina rotativa está compuesto por dos redondos unidos en ángulo recto, con  $L=1$  m y radio  $R$ , tal como se representa en la Figura 1. El elemento se ha fabricado con un material frágil del que sólo se conocen las tensiones límite a tracción y compresión  $\sigma_T = 100 \frac{3+\sqrt{10}}{2\pi}$  MPa y  $\sigma_C = 200 \frac{2+\sqrt{5}}{2\pi}$  MPa respectivamente.



Sabiendo que las cargas que actúan son  $P=50R$  kN y que  $F$  puede variar entre 0 y 100 kN, determinar:

1. El radio mínimo de los redondos tomando un coeficiente de seguridad  $n=1.5$
2. Supuesto un valor del radio  $R=4$  cm, que  $P=50R$  kN y  $F=100$  kN y que se dispone de 2 galgas extensométricas que permiten medir una única deformación cada una, determinar: la sección, los puntos exactos y la dirección en grados en las que habría que pegar las galgas extensométricas a los redondos para monitorizar los puntos críticos en todo instante
3. Supuestas unas medidas de deformación para las galgas pegadas anteriormente  $\varepsilon_1 = 616.2 \mu\text{deformaciones}$  y  $\varepsilon_2 = -248.4 \mu\text{deformaciones}$ , determina el módulo de elasticidad y el coeficiente de Poisson del material de los redondos
4. Supuesto un módulo de elasticidad  $E=100$  GPa y un coeficiente de Poisson  $\mu = 0.2$ , determinar: deformación longitudinal máxima, distorsión angular máxima y ángulo de giro máximo

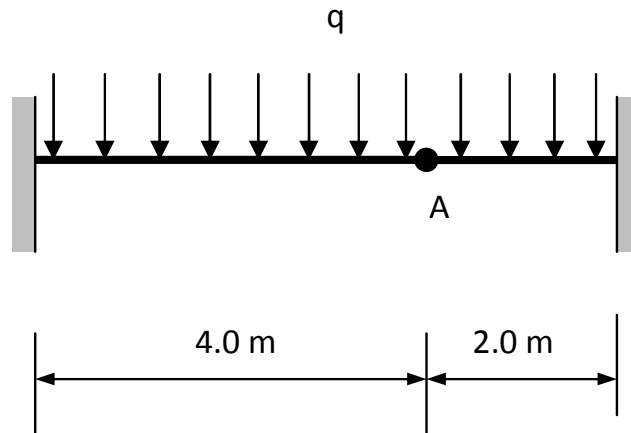
Departamento de Ingeniería Mecánica  
Resistencia de Materiales

3 IEM - Examen Extraordinario Junio 2015

Apellidos, Nombre: \_\_\_\_\_ Grupo: \_\_\_\_\_

**EJERCICIO 3**

La figura muestra una viga de acero formada con perfiles HEB y sometida a una carga distribuida  $q = 50.0$  kN/m.



Dimensionar con las siguientes restricciones:

1.  $\sigma_{m\acute{x}ima} \leq \sigma_{admisible} = 180.0 MPa$
2. Desplazamiento vertical máximo del punto A (articulacion)  $\leq 15.0$  mm

Nota: Si necesitas calcular algún giro o desplazamiento puedes emplear cualquier método, siempre y cuando lo justifiques convenientemente.





Examen Junio de 2015  
Resistencia de Materiales  
3°C, I.E.M



## 1. Ejercicio 1:

### 1. Dibujar los diagramas de esfuerzos en la viga AB.

Sistema isostático, tres ecuaciones y tres incógnitas supuestas en el sentido positivo de los ejes:  $R_y^A$ ,  $R_x^A$ ,  $R_y^B$  (kN).

Reacciones:

$$x : R_x^A + 120 = 0$$

$$y : R_y^A + R_y^B = 100$$

Momentos:

$$z : R_y^B \cdot 8 - 20 + 100 \cdot 4 = 0$$

$$R_x^A = -120 \text{ kN} ; \quad R_y^A = 47.5 \text{ kN} ; \quad R_y^B = 52.5 \text{ kN} ;$$

Discretización de la viga desde A:

**Momento Flector**  $M_z(x)$  (kN·m):

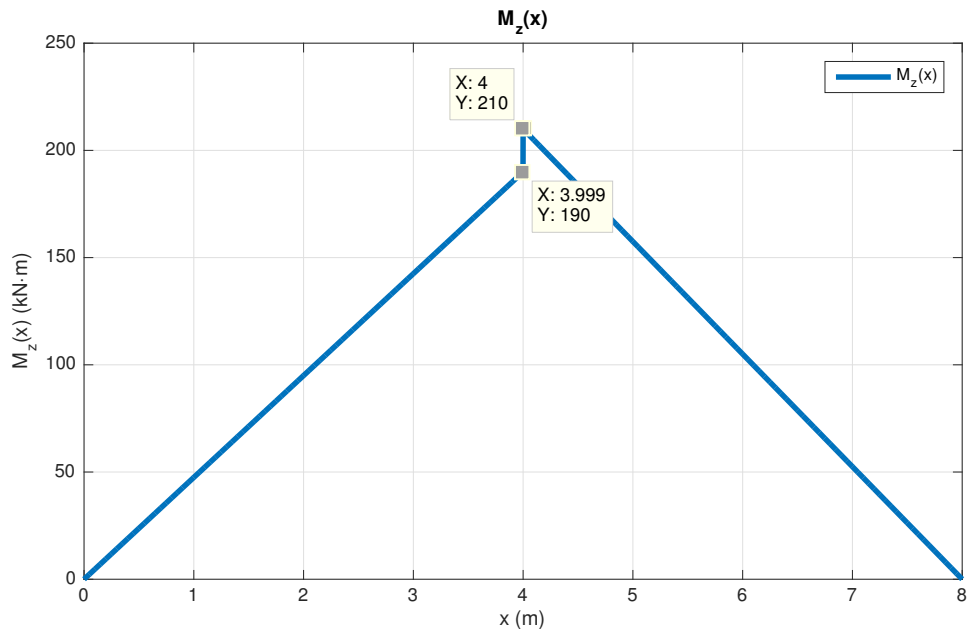
$$M_z(x) = \begin{cases} 47.5 \cdot x & \text{si } 0 < x < 4 \text{ m} \\ 47.5 \cdot x + 20 - 52.5 \cdot (x - 4) & \text{si } 4 \leq x < 8 \text{ m} \end{cases}$$

**Esfuerzo Cortante**  $V_y(x)$  (kN):

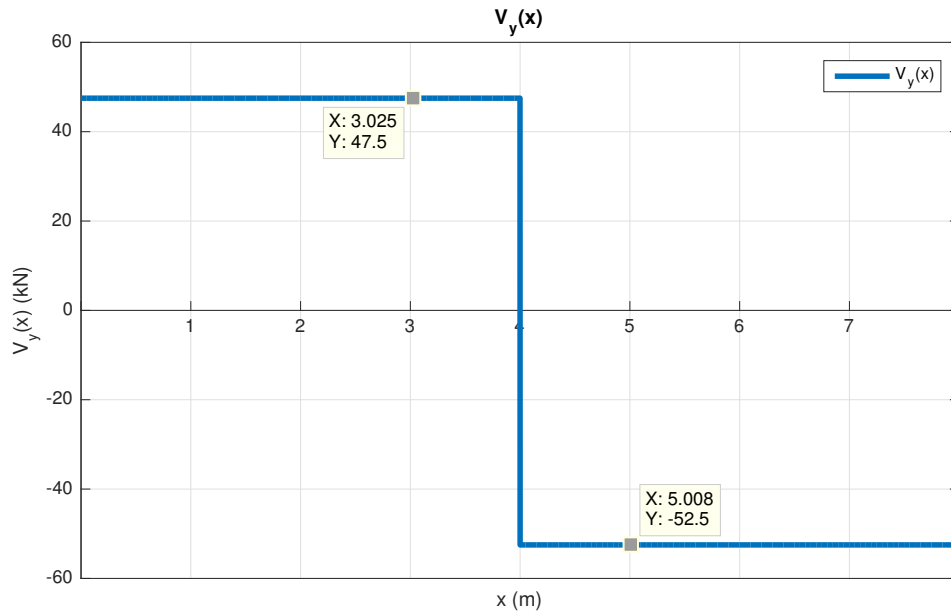
$$V_y(x) = \begin{cases} 47.5 & \text{si } 0 < x < 4 \text{ m} \\ -52.5 & \text{si } 4 \leq x < 8 \text{ m} \end{cases}$$

**Diagramas de Momentos Flectores, Esfuerzo Cortantes y Axiles:**

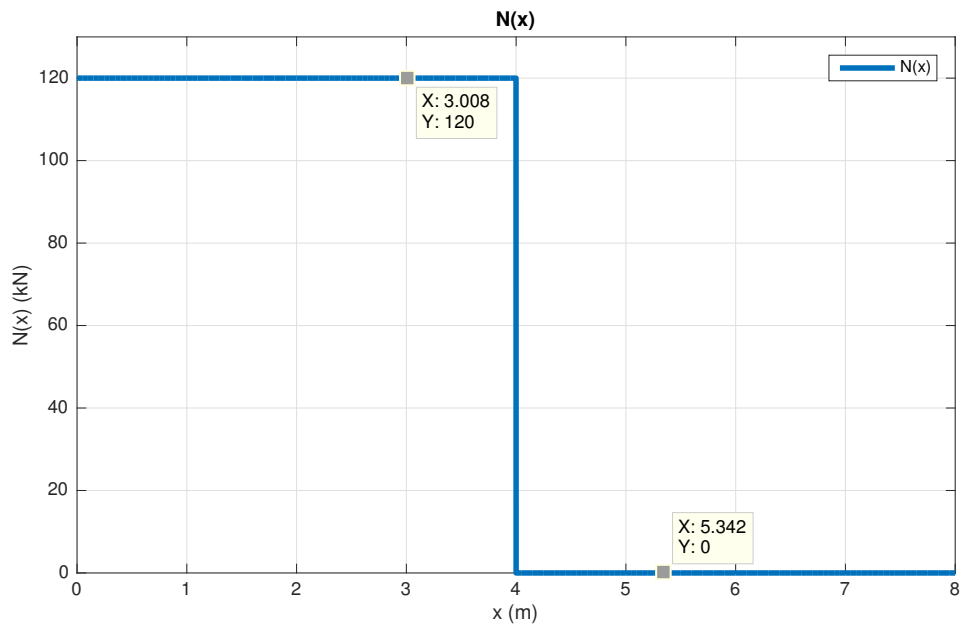
**Momento Flector**  $M_z(x)$  (kN·m):



**Esfuerzo Cortante  $V_y(x)$  (kN):**



**Esfuerzo Axil  $N(x)$  (kN):**



## 2. Comprobar posibles fallos indicando el coeficiente de seguridad.

Conocido el límite elástico del material,  $\sigma_{adm} = 275$  MPa, los puntos críticos con mayor posibilidad de fallo serán los siguientes:

- $M_z(x = 4^- \text{ m}) = 190 \text{ kN} \cdot \text{m}$  y  $N = 120 \text{ kN}$ .
- $M_z(x = 4^+ \text{ m}) = 210 \text{ kN} \cdot \text{m}$  y  $N = 0 \text{ kN}$ .

En la coordenada  $x = 4^- \text{ m}$ , se da un esfuerzo axil a tracción (positivo) y un momento flector positivo que tracciona las fibras inferiores, por lo que el punto más crítico de la sección será para

toda la coordenada  $y = -100$  mm y el posible fallo de la sección será a **tracción**. De las propiedades geométricas de la sección se sabe que:

$$I_z = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 = \frac{1}{12} \cdot 12 \cdot 20^3 = 8000 \text{ cm}^4$$

$$y_{\sigma_{m\acute{a}x}} = -100 \text{ mm}$$

Ley de Navier:

$$\sigma_x(x, y, z) = \frac{N(x)}{\Omega} - \frac{M_z(x)}{I_z} \cdot y + \frac{M_y(x)}{I_y} \cdot z$$

Aplicada a los puntos críticos 1 y 2:

$$\sigma_x^1 = \frac{120 \cdot 10^3 \text{ N}}{240 \cdot 10^2 \text{ (mm}^2\text{)}} - \frac{190 \cdot 10^6 \text{ (N} \cdot \text{mm)}}{8000 \cdot 10^4 \text{ (mm}^4\text{)}} \cdot (-100) \text{ (mm)} = 237.5 \text{ MPa} \rightarrow n_1 = \frac{\sigma_{adm}}{\sigma_{x,1}} = 1.158$$

$$\sigma_x^2 = \frac{0 \cdot 10^3 \text{ N}}{240 \cdot 10^2 \text{ (mm}^2\text{)}} - \frac{210 \cdot 10^6 \text{ (N} \cdot \text{mm)}}{8000 \cdot 10^4 \text{ (mm}^4\text{)}} \cdot (-100) \text{ (mm)} = 262.5 \text{ MPa} \rightarrow n_2 = \frac{\sigma_{adm}}{\sigma_{x,2}} = 1.048$$

### 3. ¿ Se justifica la forma de disponer los pasadores ?.

No. En unos tramos existe un pasador absorbiendo todo el esfuerzo y en otros dos, con lo que si uno absorbe todo el esfuerzo, no tiene sentido acto seguido colocar dos en vez de uno.

**4. Para el caso más crítico de fallo de la sección determinado en el primer apartado, calcular la tensión máxima si la viga estuviera formada solo por las chapas sin los pasadores. Dibujar la distribución de tensiones normales en este caso.**

Al retirarse los pasadores, en cada una de las chapas aparece una tensión propia proporcional al número de chapas que componen la pieza, con su propia distribución de tensiones según la ley de Navier, que varía según la posición que ocupe la chapa  $n$ . Al ser la pieza simétrica y tener 20 chapas,  $n$  valdrá como máximo 10, tanto en la chapa superior como en la inferior, donde además, aparecerán la mayores tensiones. De esta forma se tiene que:

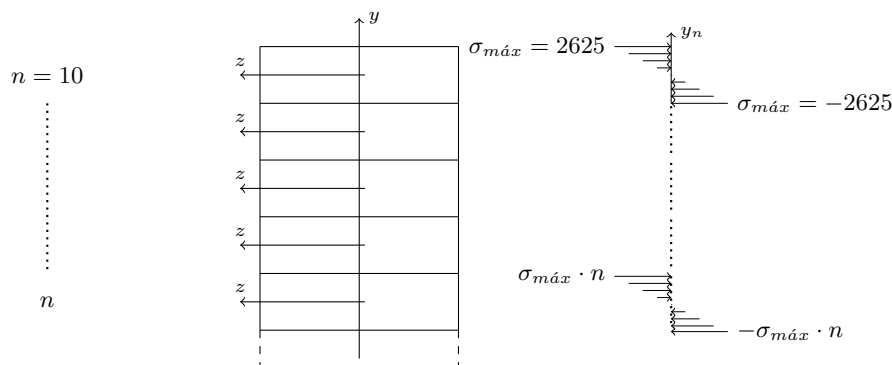
$$\sigma_{m\acute{a}x} \left( y = \frac{h}{2}, n \right) = -\frac{M_z}{I_z} \cdot y_{m\acute{a}x} = -\frac{\frac{210 \cdot 10^6}{n} \text{ (N} \cdot \text{mm)}}{\frac{1}{12} \cdot b \cdot \left(\frac{h}{n}\right)^3} \cdot \left(\frac{h}{2n}\right) =$$

$$= -\frac{210 \cdot 10^6 \text{ (N} \cdot \text{mm)}}{8000 \cdot 10^4 \text{ (mm}^4\text{)}} \cdot (-100) \cdot n = \sigma_{m\acute{a}x} \cdot n = 262.5 \cdot n$$

Para la chapa superior se tiene una tensión de:

$$\sigma_{m\acute{a}x} \left( y = \frac{h}{2}, n = 10 \right) = \sigma_{m\acute{a}x} \cdot 10 = 2625 \text{ MPa}$$

Perfil de tensiones en cada una de las chapas:



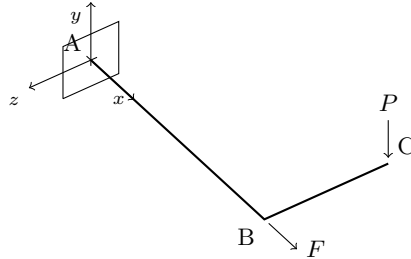


## 2. Ejercicio 2:

### 1. El radio mínimo de los redondos tomando un coeficiente de seguridad de $n=1.5$

Sistema isostático, cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas supuestas en el sentido positivo de los ejes:  $R_y^A, R_x^A, M_z^A, M_t^A$ .

(Consejo: llevarse todas las cargas a B y resolver).



Reacciones:

$$x : R_x^A = -F$$

$$y : R_y^A = P$$

Momentos flector y torsor:

$$z : M_z^A = P \cdot L$$

$$x : M_t^A = P \cdot \frac{L}{2}$$

### Dimensionado de los redondos

Al tratarse de un **Material Frágil**, se hará uso del **Criterio de Rankine**, seleccionando como límite elástico  $\sigma_e = \max\{|\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3|\}$ . Se calculan las tensiones debidas al axil y flector (Navier) y al torsor en la sección más desfavorable que es el empotramiento en A ( $x=0$ ).

Ley de Navier:

$$\sigma_x(x, y, z) = \frac{N(x)}{\Omega} - \frac{M_z(x)}{I_z} \cdot y + \frac{M_y(x)}{I_y} \cdot z$$

Torsor:

$$\tau(r) = \frac{M_t}{I_o} \cdot r$$

### a) Tracción

Primero se dimensiona el material para el caso más desfavorable de **tracción**, para el que F y P tomarán los valores  $F = 100 \text{ kN}$  y  $P = 50R \text{ kN}$ , y la tracción máxima se dará en las fibras superiores debido a la suma del flector y del axil. Particularizando la ley de Navier y del torsor en el punto más solicitado, en la sección correspondiente a  $x = 0$  m:

$$\sigma_x(y = R) = \frac{F}{\Omega} - \frac{P \cdot L}{I_z} \cdot y = \frac{100 \cdot 10^3 (N)}{\pi R^2} - \frac{-50R \cdot 10^3}{\frac{\pi R^4}{4}} \cdot R = \frac{100 \cdot 10^3 (N)}{\pi R^2} + \frac{(50 \cdot 10^3)}{\frac{\pi R^2}{4}}$$

$$\tau(r = R) = \frac{P \cdot L/2}{I_o} \cdot R = \frac{-50R \cdot 10^3 \cdot 1/2}{\frac{\pi R^4}{2}} \cdot R = \frac{-25 \cdot 10^3}{\frac{\pi R^2}{2}}$$

Usando la fórmula de Mohr para el cálculo de las tensiones principales:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + (\tau_{xz})^2} \leq \frac{\sigma_{trac}}{n}$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + (\tau_{xz})^2} \leq \frac{\sigma_{trac}}{n}$$

se selecciona la que arroje un mayor resultado en valor absoluto y sustituyendo los valores de las tensiones se obtiene la siguiente expresión para el dimensionamiento a tracción:

$$\begin{aligned} \left( \frac{300000}{2\pi R^2} \right) + \sqrt{\left( \frac{300000}{2\pi R^2} \right)^2 + \left( \frac{-50000}{\pi R^2} \right)^2} &\leq 100 \frac{3 + \sqrt{10}}{2\pi \cdot 1.5} \\ \frac{150000}{\pi R^2} + \frac{50000\sqrt{10}}{\pi R^2} &\leq 100 \frac{3 + \sqrt{10}}{2\pi \cdot 1.5} \\ \frac{50000}{R^2} (3 + \sqrt{10}) &\leq 100 \frac{3 + \sqrt{10}}{2 \cdot 1.5} \\ R^2 &\geq 3 \cdot \frac{50000}{100} \text{ mm} \\ R &\geq 10\sqrt{15} = 38.73 \text{ mm} \end{aligned}$$

## b) Compresión

A continuación, se dimensiona el material para el caso más desfavorable de **compresión**, para el que F y P tomarán los valores  $F = 0$  kN y  $P = 50R$  kN, y la compresión máxima se dará en las fibras inferiores debido únicamente al flector. Particularizando la ley de Navier y del torsor en el punto más solicitado, en la sección correspondiente a  $x = 0$  m:

$$\begin{aligned} \sigma_x(y = -R) &= \frac{F}{\Omega} - \frac{P \cdot L}{I_z} \cdot y_{max} = \frac{0 \cdot 10^3 \text{ (N)}}{\pi R^2} - \frac{-50R \cdot 10^3}{\frac{\pi R^4}{4}} \cdot (-R) = + \frac{50 \cdot 10^3}{\frac{\pi R^2}{4}} \\ \tau(r = R) &= \frac{P \cdot \frac{L}{2}}{I_o} \cdot R = \frac{-50R \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\pi R^4}{2}} \cdot R = \frac{-25 \cdot 10^3}{\frac{\pi R^2}{2}} \end{aligned}$$

Usando la fórmula de Mohr para el cálculo de las tensiones principales:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \right)^2 + (\tau_{xz})^2} \leq \frac{\sigma_{comp}}{n} \\ \sigma_3 &= \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} - \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \right)^2 + (\tau_{xz})^2} \leq \frac{\sigma_{comp}}{n} \end{aligned}$$

se selecciona la que arroje un mayor resultado en valor absoluto y sustituyendo los valores de las tensiones se obtiene la siguiente expresión para el dimensionamiento a compresión:

$$\begin{aligned} \left( \frac{200000}{2\pi R^2} \right) + \sqrt{\left( \frac{200000}{2\pi R^2} \right)^2 + \left( \frac{-50000}{\pi R^2} \right)^2} &\leq 200 \frac{2 + \sqrt{5}}{2\pi \cdot 1.5} \\ \frac{100000}{\pi R^2} + \frac{50000\sqrt{5}}{\pi R^2} &\leq 200 \frac{2 + \sqrt{5}}{2\pi \cdot 1.5} \\ \frac{50000}{R^2} (2 + \sqrt{5}) &\leq 200 \frac{2 + \sqrt{5}}{2 \cdot 1.5} \\ R^2 &\geq 3 \cdot \frac{50000}{200} \text{ mm} \\ R &\geq 5\sqrt{30} = 27.39 \text{ mm} \end{aligned}$$

Seleccionamos aquel con mayor radio por ser más restrictivo, por lo que el **Radio Mínimo** que ha de tener el redondo será:

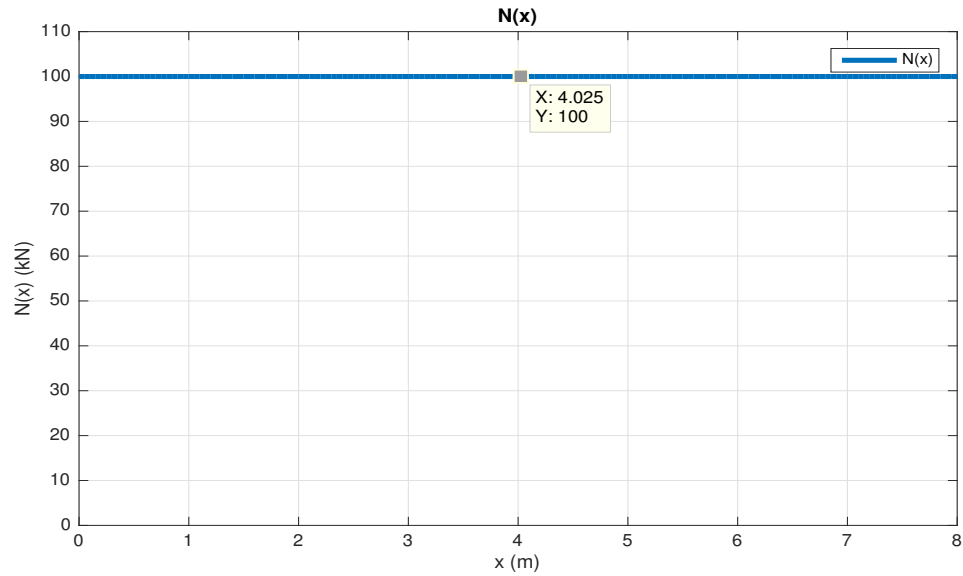
$$R \geq 38.73 \text{ mm}$$



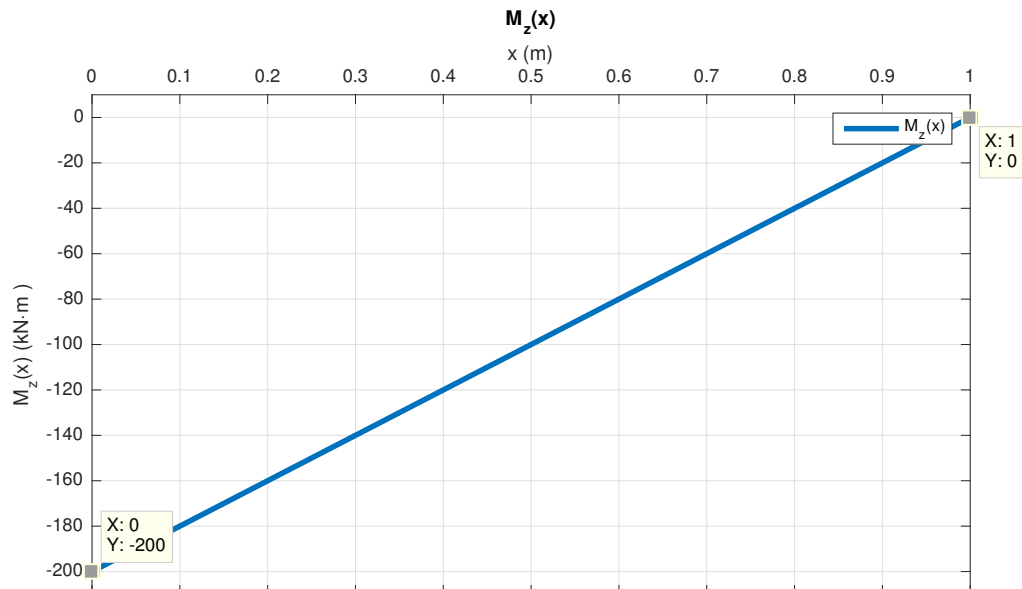
2. Supuesto un valor de  $R=4$  cm, que  $P=50R$  y  $F=100$  kN y que se dispone de 2 galgas extensiométricas que permiten medir una única deformación cada una, determinar: la sección, los puntos exactos y la dirección en grados en las que habría que pegar las galgas extensiométricas a los redondos para monitorizar los puntos críticos en todo instante.

$P = 200 \cdot 10^3$  N y  $F = 100 \cdot 10^3$  N. El punto más desfavorable en este caso se dará a tracción en las fibras superiores del redondo en la sección del punto correspondiente al empotramiento A( $x=0$ ).

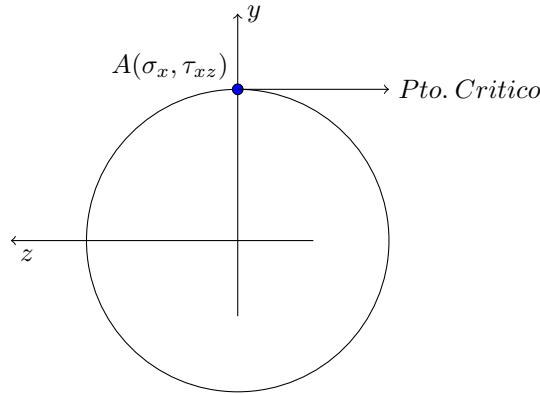
**Esfuerzo Axil  $N(x)$  (kN):**



**Momento Flector  $M_z(x)$  (kN·m):**



Puntos exactos de posible fallo en la sección A:



Cálculo de la tensión normal debida al axil y al flector con Navier y la tensión cortante debida al torsor:

$$\sigma_x(y = R) = \frac{F}{\Omega} - \frac{P \cdot L}{I_z} \cdot y = \frac{100 \cdot 10^3 \text{ (N)}}{\pi R^2} - \frac{-50 \cdot 40 \cdot 10^3 \text{ (N} \cdot \text{mm)}}{\frac{\pi 40^4}{4} \text{ (mm}^4\text{)}} \cdot 40 \text{ (mm)} = 59.68 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xz}(r = R) = \frac{P \cdot \frac{L}{2}}{I_o} \cdot R = \frac{-50 \cdot 40 \cdot 10^3 \cdot 1/2 \text{ (N} \cdot \text{mm)}}{\frac{\pi 40^4}{2} \text{ (mm}^4\text{)}} \cdot 40 \text{ (mm)} = -9.947 \text{ MPa}$$

El tensor de tensiones en el punto A es:

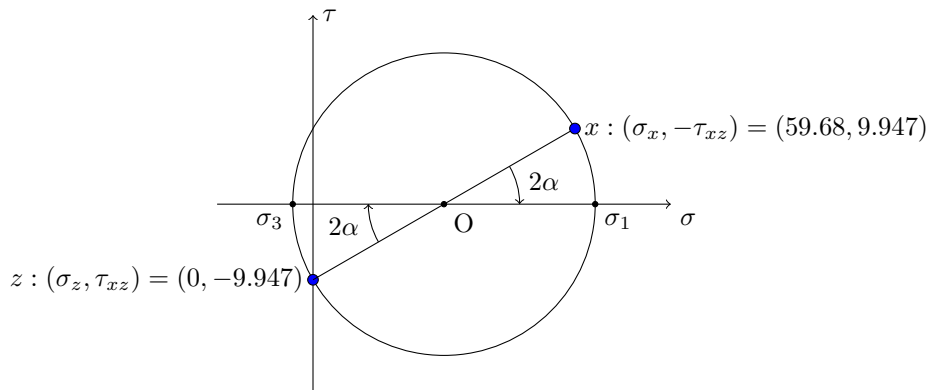
$$[T] = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59.68 & 0 & -9.947 \\ 0 & 0 & 0 \\ -9.947 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que las tensiones principales serán:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + (\tau_{xz})^2} = \frac{23.873}{2} + \sqrt{\left(\frac{23.873}{2}\right)^2 + (-9.947)^2} = 61.29 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + (\tau_{xz})^2} = \frac{23.873}{2} - \sqrt{\left(\frac{23.873}{2}\right)^2 + (-9.947)^2} = -1.614 \text{ MPa}$$

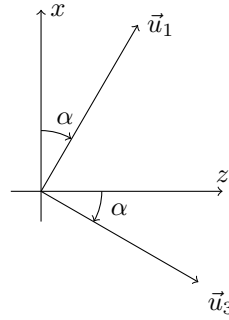
En el círculo de Mohr:



En cuanto al ángulo para hallar las direcciones exactas en la que se dan las mayores tensiones en toda la pieza para colocar las galgas será:

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2 \cdot \tau_{xz}}{\sigma_x - \sigma_z} = \frac{2 \cdot 9.947}{23.873 - 0} \rightarrow \alpha = 9.217^\circ \text{ (horario } \curvearrowright)$$

Los ejes principales  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  son los siguientes (el eje  $\vec{u}_2$  coincide con el eje  $y$ ) :



**3. Supuestas unas medidas de deformación para las galgas pegadas anteriormente  $\varepsilon_1 = 616.2 \mu$  deformaciones y  $\varepsilon_2 = -248.4 \mu$  deformaciones, determina el módulo de elasticidad de Young y el coeficiente de Poisson del material de los redondos.**

Para resolver este apartado, se utilizan las ecuaciones de Hooke generalizadas:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\mu}{E} \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) = \frac{61,29}{E} - \frac{\mu}{E} \cdot (0 - 1,614) \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\mu}{E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_3) = \frac{0}{E} - \frac{\mu}{E} \cdot (61,29 - 1,614) \\ \varepsilon_3 &= \frac{\sigma_3}{E} - \frac{\mu}{E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{-1,614}{E} - \frac{\mu}{E} \cdot (61,29 + 0)\end{aligned}$$

siendo  $\sigma_1 = 61,29$  MPa,  $\sigma_2 = 0$  MPa y  $\sigma_3 = -1.614$  MPa, se obtienen los siguientes valores para el módulo de Young y el coeficiente de Poisson:

$$E = 100.47 \text{ GPa}; \quad \mu = 0.381;$$

**4. Supuesto un módulo de elasticidad de 100 GPa y un coeficiente de Poisson de  $\mu = 0.2$ , determinar: deformación longitudinal máxima, distorsión angular máxima y ángulo de giro máximo.**

**a) Distorsión angular máxima ( $\phi_{max}$ ).** Conocidos que  $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$  e  $I_o = \frac{\pi R^4}{2}$ , con los límites de la integral en milímetros:

$$\phi = \int_0^L \frac{M_t}{GI_o} dx = \int_0^{1000} \frac{-100 \cdot 10^3}{GI_o} dx = \frac{-100000}{1.67552 \cdot 10^{11}} \cdot x \Big|_0^{1000} = 0.596831 \text{ mrad}$$

**b) Deformación longitudinal máxima ( $\varepsilon_{max}$ ).** Conocidos E y  $\mu$ , es posible calcular las variaciones longitudinales en ejes principales para el punto más solicitado, del que se conocen las tensiones principales:

$$\sigma_1 = 61.29 \text{ MPa}; \quad \sigma_2 = 0 \text{ MPa}; \quad \sigma_3 = -1.614 \text{ MPa};$$

con las ecuaciones de Hooke generalizadas:

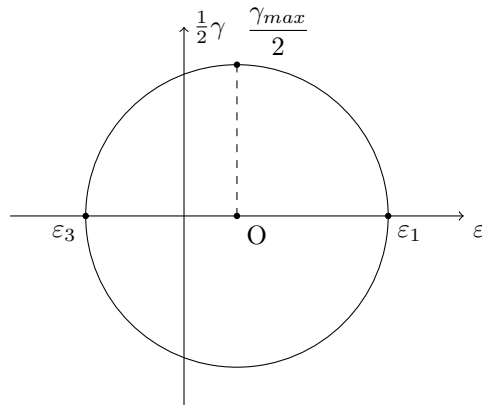
$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\mu}{E} \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\mu}{E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_3) \\ \varepsilon_3 &= \frac{\sigma_3}{E} - \frac{\mu}{E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)\end{aligned}$$

de las que se obtiene que:

$$\varepsilon_1 = 616.20 \mu def; \quad \varepsilon_2 = -119.36 \mu def; \quad \varepsilon_3 = -138.734 \mu def;$$

por lo que la deformación longitudinal máxima es  $\varepsilon_{max} = 616.2 \mu def$ .

c) **Ángulo de giro máximo ( $\gamma_{max}$ ).** Por el Círculo de Mohr sabemos que:



$$\frac{\gamma_{max}}{2} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2} \rightarrow \gamma_{max} = 754.934 \mu rad$$

### 3. Ejercicio 3:

Viga de acero formada con perfiles HEB y sometida a una carga distribuida de carga distribuida de  $q=50.0$  kN/m. Se pide:

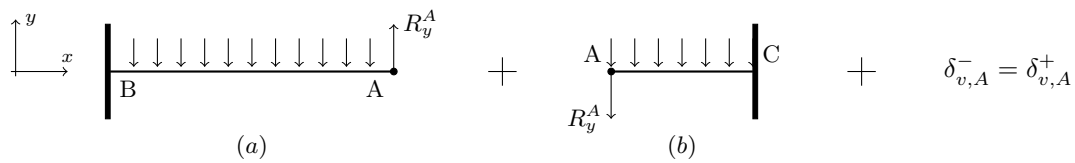
1. Dimensionar con las siguientes restricciones:

- $\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{adm}} = 180$  MPa.
- $\delta_{\max}^v \leq 15.0$  mm.

Sistema hiperestático de grado 2, que al estar sometido únicamente a cargas verticales queda reducido a 1. Para resolver el sistema hiperestático se seguirá el siguiente proceso:

1. Separación de la viga por la articulación en A, en 2 vigas (a) y (b) y se supone una incógnita hiperestática  $R_y^A$  para hacer el sistema equivalente al original.
2. Se calcula el desplazamiento de A por la izquierda ( $\delta_A^-$ ).
3. Se calcula el desplazamiento de A por la derecha ( $\delta_A^+$ ).
4. Se impone la condición de compatibilidad en A, en la que las flechas por la izquierda y por la derecha son iguales.

1. Conversión de sistema hiperestático a isostático:



2. Desplazamiento en A por la izquierda ( $\delta_A^-$ ).

Tramo (a):

1. Flecha en A debida a  $R_y^A$  ( $\delta_A^{R_y^A}$ ):

$$\delta_A^{R_y^A} = \frac{1}{EI_z} \int_0^L (L-x) \cdot M_z(x) dx = \left(\frac{2L}{3}\right) \cdot \frac{R_y^A \cdot L^2}{2EI_z} = \frac{R_y^A \cdot L^3}{3EI_z} \quad (\uparrow)$$

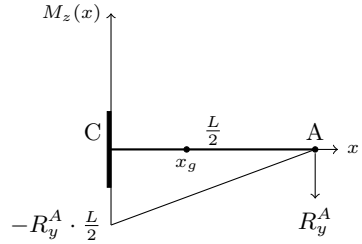
2. Flecha en A debida a  $q(x) = 50$  kN/m ( $\delta_A^q$ ):

$$\delta_A^q = \frac{1}{EI_z} \int_0^L (L-x) \cdot M_z(x) dx = \frac{q \cdot L^4}{8EI_z} \quad (\downarrow)$$

### 3. Desplazamiento en A por la derecha ( $\delta_A^+$ ).

Tramo (b):

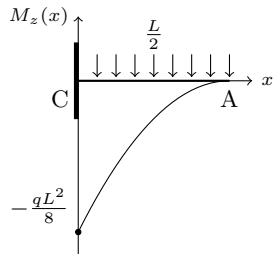
1. Flecha en A debida a  $R_y^A$  ( $\delta_A^{R_y^A}$ ):



$$\delta_A^{R_y^A} = \frac{1}{EI_z} \int_0^{\frac{L}{2}} \left(\frac{L}{2} - x\right) \cdot M_z(x) dx =$$

$$= \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{L}{2}\right) \cdot \frac{R_y^A \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2}{2EI_z} = \frac{R_y^A \cdot L^3}{24EI_z} \quad (\downarrow)$$

2. Flecha en A debida a  $q(x) = 50 \text{ kN/m}$  ( $\delta_A^q$ ):



$$\delta_A^q = \frac{1}{EI_z} \int_0^{\frac{L}{2}} \left(\frac{L}{2} - x\right) \cdot M_z(x) dx =$$

$$= \frac{q \cdot L^4}{128EI_z} \quad (\downarrow)$$

**4. Condiciones de compatibilidad.** Se impone la condición de compatibilidad de las deformaciones ( $\delta_{v,A}^- = \delta_{v,A}^+$ ) y se resuelve la incógnita hiperestática  $R_y^A$ . Se definirán como positivas las flechas con sentido descendente, que apunten hacia abajo:

$$-\left(\frac{2L}{3}\right) \cdot \frac{R_y^A \cdot L^2}{2EI_z} \quad (\uparrow) + \frac{q \cdot L^4}{8EI_z} \quad (\downarrow) = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{L}{2}\right) \cdot \frac{R_y^A \cdot \frac{L^2}{4}}{2EI_z} \quad (\downarrow) + \frac{q \cdot L^4}{128EI_z} \quad (\downarrow)$$

$$-\frac{R_y^A \cdot L^3}{3EI_z} + \frac{q \cdot L^4}{8EI_z} = \frac{R_y^A \cdot L^3}{24EI_z} + \frac{q \cdot L^4}{128EI_z}$$

$$-R_y^A \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{24}\right) = q \cdot L \left(\frac{1}{128} - \frac{1}{8}\right)$$

$$R_y^A = -\frac{\frac{1}{128} - \frac{1}{8}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{24}} \cdot q \cdot L = \frac{5}{16} \cdot q \cdot L = 62.5 \text{ kN}$$

Tramo (a):

Reacciones

$$y : R_y^B - q \cdot L + R_y^A = 0$$

Momentos:

$$z : M_z^B - q \cdot \frac{L^2}{2} + R_y^A \cdot L = 0$$

$$R_y^B = \frac{11}{16} q \cdot L = 137.5 \text{ kN}; \quad M_z^B = \frac{3}{16} q \cdot L^2 = 150.0 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (\curvearrowright);$$

Discretización de la viga desde el empotramiento de la derecha:

**Momento Flector**  $M_z(x)$  (kN·m):

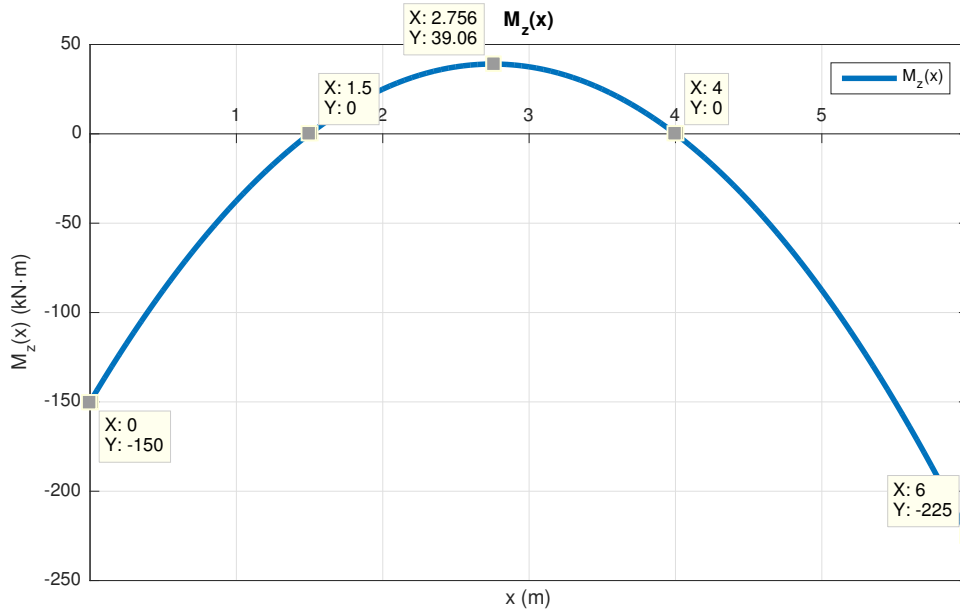
$$M_z(x) = \begin{cases} -\frac{3}{16} q \cdot L^2 + \frac{11}{16} q \cdot L \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 < x < 6 \text{ m} \end{cases}$$

**Esfuerzo Cortante**  $V_y(x)$  (kN):

$$V_y(x) = \begin{cases} \frac{11}{16}q \cdot L - q \cdot x & \text{si } 0 < x < 6 \text{ m} \end{cases}$$

**Diagrama de Momentos Flectores:**

**Momento Flector**  $M_z(x)$  (kN·m):



Ahora para el dimensionado, se imponen las dos restricciones y se escoge el perfil más restrictivo que garantiza que se cumplen ambas.

a) Sección más crítica: empotramiento de la derecha (C).

$$W_z \geq \frac{M_z(x=6 \text{ m})}{\sigma_{adm}} = \frac{225 \cdot 10^6 \text{ (N} \cdot \text{mm)}}{180 \text{ MPa}} = 1250000 \text{ mm}^3 = 1250 \text{ cm}^3$$

b) Flecha en A,  $\delta_{max}^A \leq 15.0 \text{ mm}$  (Acero, 210 GPa):

$$\delta^A = \int_0^L (L-x) \cdot \frac{M_z(x)}{EI_z} dx = \int_0^L (L-x) \cdot \frac{-qL^2/2 + \frac{11}{16}qL^2 + \frac{11}{16}qL \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2}}{EI_z} dx = \frac{q \cdot L^4}{48EI_z} (\downarrow)$$

Sustituyendo valores numéricos:

$$\begin{aligned} \frac{q \cdot L^4}{48EI_z} &\leq \delta_A \\ \frac{50000 \cdot 4^4}{48EI_z} &\leq 0.015 \text{ (m)} \\ \frac{800000 \text{ (N} \cdot \text{m}^3)}{48 \cdot 210 \cdot 10^9 \cdot 0.015} &\leq I_z \text{ m}^4 \\ 8465.61 \text{ cm}^4 &\leq I_z \end{aligned}$$

Entrando en el prontuario de perfiles laminados, el perfil **HEB 280**, con  $I_z = 19270 \text{ cm}^4$  y  $W_z = 1380 \text{ cm}^3$  cumple con ambas condiciones.





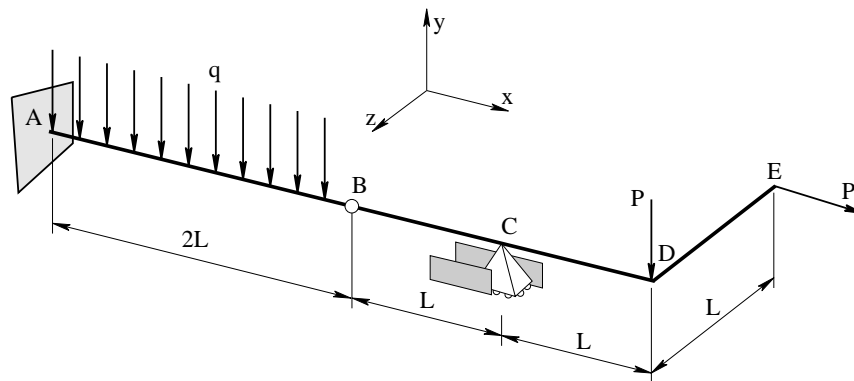
Departamento de Ingeniería Mecánica  
Resistencia de Materiales

3 IEM - Examen Final - Diciembre 2014

Apellidos, Nombre: \_\_\_\_\_ Grupo: \_\_\_\_\_

**EJERCICIO 1**

La estructura de la figura está constituida por un perfil HEB de acero de límite elástico 235 MPa, cuyo eje del alma está alineada en dirección 'y', dividida en tramos de distinta longitud según  $L = 2$  m y sustentada por un empotramiento en la sección A y un apoyo articulado móvil según la dirección 'x' en la sección C. Se aplican sobre la misma una carga distribuida  $q = 5$  kN/m y dos cargas puntuales  $P = 2$  kN.



1. Determinar las secciones críticas para el diseño, justificando los motivos en cada una de ellas.  $Ra_y = 18$  kN,  $Ra_x = 2$  kN,  $Ra_z = 2$  kN,  $Ma_y = 8$  kNm,  $Ma_z = 32$  kNm
2. Suponiendo que se hubiera elegido un HEB 180, croquizar dicho perfil, determinar la ecuación de la recta que define la fibra neutra y trazarla sobre el croquis para la sección A. Identificar los puntos críticos para el diseño
3. Dimensionar el perfil HEB a emplear en toda la estructura según lo discutido en el apartado 1. **HEB160**
4. Suponiendo que se hubiera elegido un HEB 180, representar el estado tensional del punto correspondiente al centro de gravedad del perfil en la sección A. Dibujar sus círculos de Mohr y calcular las tensiones equivalentes de Von Mises y Tresca. Discutir los valores obtenidos.  $\sigma_x = 0.306$  MPa y  $\tau_{xy} = -13.3$  MPa.  $\sigma_{VM} = 23.07$  MPa y  $\sigma_{tresca} = 26.64$  MPa

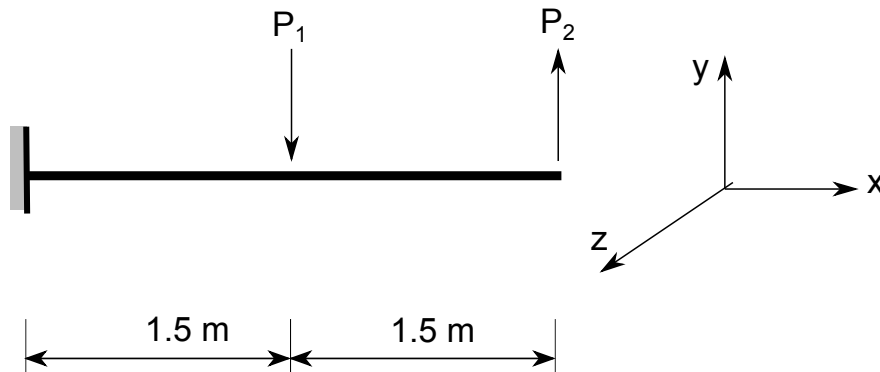
Departamento de Ingeniería Mecánica  
Resistencia de Materiales

3 IEM - Examen Final - Diciembre 2014

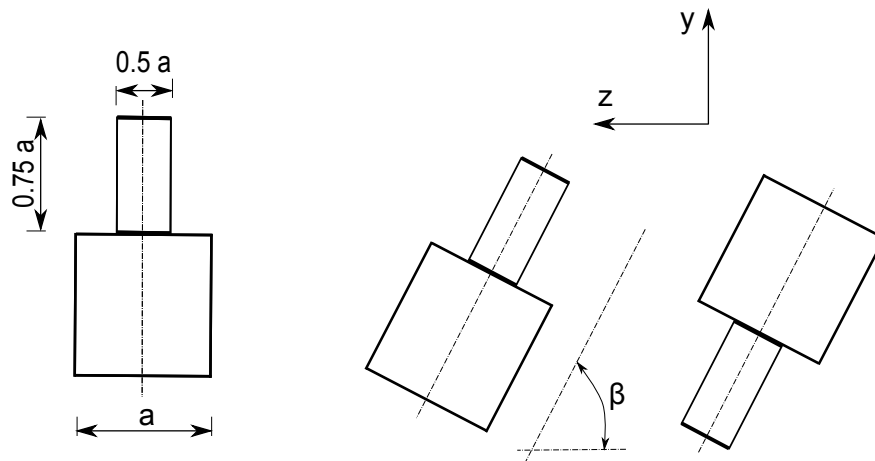
Apellidos, Nombre: \_\_\_\_\_ Grupo: \_\_\_\_\_

**EJERCICIO 2**

La ménsula de la figura está realizada en un material con un límite elástico de 350 MPa y se monta con un ángulo  $\beta$  de 75 grados



1. Si el lado del cuadrado 'a' es 100 mm; determinar el coeficiente de seguridad con el que se ha diseñado la pieza cuando  $P_1 = 120$  kN y  $P_2 = 60$  kN. **Los momentos de inercia son 3097 y 911.4 cm<sup>2</sup>. Las tensiones máximas son 347 y 355.1 MPa por lo que el coeficiente de seguridad es 1.006**



2. Determinar, manteniendo el ángulo  $\beta$ , el diámetro que tendría que tener la barra si fuera de sección circular y trabajara con el mismo coeficiente de seguridad. **138.1 mm**
3. Si esta barra se fabricara con un acero de límite elástico 415 MPa. ¿Cuál sería el momento  $M_x$  adicional que se le podría aplicar a la barra en el extremo libre manteniendo el mismo coeficiente de seguridad?. **66 kNm**

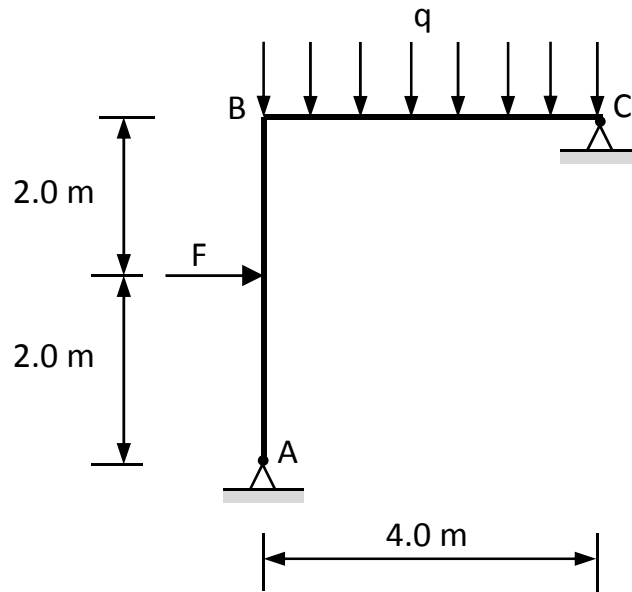
Departamento de Ingeniería Mecánica  
Resistencia de Materiales

3 IEM - Examen Final - Diciembre 2014

Apellidos, Nombre: \_\_\_\_\_ Grupo: \_\_\_\_\_

**EJERCICIO 3**

Para la siguiente estructura, formada con perfiles HEB y cargada según indica la figura



1. Relación  $F/q$  para que el giro en B sea nulo.  $\frac{F}{q} = \frac{2L}{3}$
2. Empleando los resultados del apartado anterior, para  $q = 40.0 \text{ kN/m}$ . Representar los diagramas de esfuerzos ( Normales, cortantes y flectores), acotando los puntos más característicos. **Algunos valores:** Axil en pilar 100 kN, en dintel 73.3 kN. Flector en extremo del pilar 79.5 kNm, maximo en centro del pilar 66.6 kNm, maximo en dintel 45.2 kNm. Reacción vertical en apoyo derecho 60 KN
3. Dibujar la deformada, a estima pero cuidando los detalles

Nota: se deben justificar todos los cálculos realizados



Examen Diciembre 2014  
Resistencia de Materiales  
3°C, I.E.M



## 1. Ejercicio 1:

**1. Determinar las secciones críticas para el diseño, justificando los motivos en cada una de ellas.**

Sistema isostático, siete ecuaciones y siete incógnitas supuestas en el sentido positivo de los ejes coordenados:  $R_y^A, R_z^A, R_x^A, R_y^C, R_z^C, M_y^A, M_z^A$ .

Reacciones:

$$\begin{aligned}x : R_x^A + P &= 0 \\y : R_y^A + R_y^C &= P + q \cdot 2L \\z : R_z^A + R_z^C &= 0\end{aligned}$$

Momentos:

$$\begin{aligned}z : \begin{cases} M_z^A - R_y^A \cdot 2L + q \cdot \frac{(2L)^2}{2} = 0 \\ R_y^C \cdot L - P \cdot 2L = 0 \end{cases} \\y : \begin{cases} M_y^A + R_z^A \cdot 2L = 0 \\ -R_z^C \cdot L - P \cdot L = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Reacciones y Momentos en A:

$$\begin{aligned}R_x^A &= -P = -2 \text{ kN}; & R_y^A &= 2qL - P = 18 \text{ kN}; & R_z^A &= P = 2 \text{ kN}; \\M_z^A &= 2qL^2 + 2PL = 32 \text{ kN} \cdot \text{m}; & M_y^A &= -2PL = -8 \text{ kN} \cdot \text{m};\end{aligned}$$

Reacciones en C:

$$R_y^C = 2P = 4 \text{ kN}; \quad R_z^C = -P = -2 \text{ kN};$$

La sección más solicitada se dará en el empotramiento A, en la coordenada  $x = 0$  m.

**2. Suponiendo que se hubiera elegido un perfil HEB 180, croquizar dicho perfil, determinar la ecuación de la recta que define la línea neutra y trazarla sobre el croquis para la sección A. Identificar los puntos críticos para el diseño.**

Entrando en el prontuario de perfiles laminados, para un perfil **HEB 180**, se tienen las siguientes características geométricas de la sección:

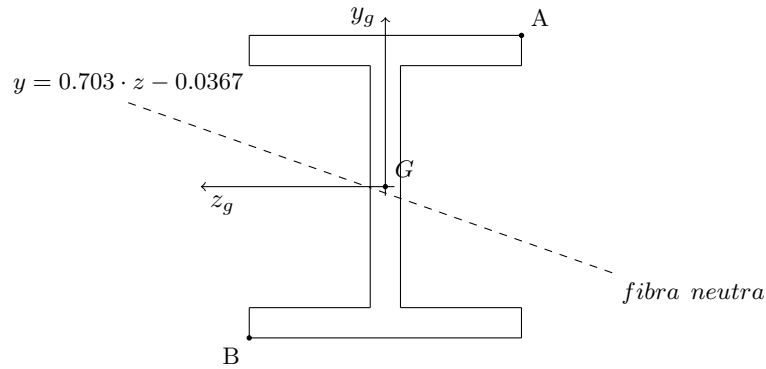
$$\begin{aligned}A &= 65.3 \text{ cm}^2; \\I_z &= 3831 \text{ cm}^4; & W_z &= 426 \text{ cm}^3; \\I_y &= 1363 \text{ cm}^4; & W_y &= 151 \text{ cm}^3;\end{aligned}$$

Ecuación de la fibra neutra en A:

- Axil:  $N = 2 \text{ kN}$ , tracción.
- Flector en  $z$ :  $M_z(x = 0) = -32 \text{ kN} \cdot \text{m}$ , tracciona las fibras superiores y comprime las inferiores.
- Flector en  $y$ :  $M_y(x = 0) = -8 \text{ kN} \cdot \text{m}$ , tracciona las fibras superiores o cercanas al eje  $z$  positivo y comprime las inferiores o cercanas al eje  $z$  negativo.

$$\begin{aligned}\sigma_x(y, z) &= \frac{N(x)}{\Omega} - \frac{M_z(x)}{I_z} \cdot y + \frac{M_y(x)}{I_y} \cdot z = 0 \\y &= \frac{I_z \cdot M_y(x = 0)}{I_y \cdot M_z(x = 0)} \cdot z + \frac{N(x = 0) \cdot I_z}{\Omega \cdot M_z(x = 0)} = \frac{3831 \cdot (-8)}{1363 \cdot (-32)} \cdot z + \frac{2000 \cdot 3831}{65.3 \cdot (-32 \cdot 10^5)} = 0.703 \cdot z - 0.0367 \\y &= 0.703 \cdot z - 0.0367\end{aligned}$$

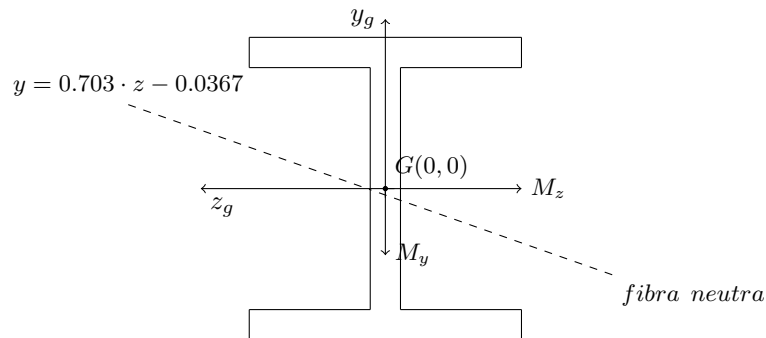
Se esboza sobre el perfil, y se identifican los puntos más cargados y críticos para el diseño, que serán aquellos más alejados, en perpendicular, a la fibra neutra.



Los puntos más solicitados de la sección serán A(-90, 90) mm a **tracción** y B(90, -90) mm a **compresión**.

### 3. Dimensionar el perfil HEB a emplear en toda la estructura según lo discutido en el apartado 1.

Se han dibujado los momentos flectores resultantes ejercidos sobre la sección más cargada que aparecen cuando se elimina la otra parte de la viga para que la resultante de momentos siga siendo nula en la sección, ya que el criterio de signos adoptado previamente aplicado al caso de flexión compuesta carece de sentido:



Para el dimensionado de la sección, se identifica la sección más crítica de toda la estructura, en este caso en  $x = 0$  m, y dentro de la misma, se selecciona el punto más crítico de toda la sección que se encuentra en el punto A(-90, 90) mm., que tendrá distintas coordenadas en función del perfil seleccionado. Entrando con estas coordenadas en la ley de Navier:

$$\sigma_x(y, z) = \frac{N(x = 0 \text{ m})}{\Omega} - \frac{M_z(x = 0 \text{ m})}{I_z} \cdot y + \frac{M_y(x = 0 \text{ m})}{I_y} \cdot z \leq \sigma_{adm}$$

Sustituyendo los valores numéricos:

$$\sigma_x(y, z) = \frac{2 \cdot 10^3 \text{ (N)}}{\Omega \text{ (mm}^2\text{)}} - \frac{-32 \cdot 10^6 \text{ (N} \cdot \text{mm)}}{I_z \text{ (mm}^4\text{)}} \cdot y \text{ (mm)} + \frac{-8 \cdot 10^6 \text{ (N} \cdot \text{mm)}}{I_y \text{ (mm}^4\text{)}} \cdot z \text{ (mm)} \leq 235 \text{ MPa}$$

Ahora se introducen los valores de los momentos de inercia y el área de los distintos perfiles, y se elige el más adecuado que cumpla con la restricción  $\sigma_{adm} \leq 235$  MPa:

Perfil HEB	Área (cm <sup>2</sup> )	I <sub>z</sub> (cm <sup>4</sup> )	I <sub>y</sub> (cm <sup>4</sup> )	(z <sub>o</sub> , y <sub>o</sub> ) (mm)	σ <sub>x</sub> (MPa)
<b>HEB 200</b>	78.1	5696	2003	(-100, 100)	96.37
<b>HEB 180</b>	65.3	3831	1363	(-90, 90)	128.31
<b>HEB 160</b>	54.3	2492	889	(-80, 80)	175.09
<b>HEB 140</b>	43.0	1509	550	(-70, 70)	250.73

El perfil **HEB 160** ha de ser el que se ha de seleccionar para dimensionar la estructura.



4. Suponiendo que se hubiera elegido un perfil HEB 180, representar el estado tensional del punto correspondiente al centro de gravedad del perfil 1, en la sección A. Dibujar sus círculos de Mohr y calcular las tensiones de Von Mises y Tresca. Discutir los valores obtenidos.

Aplicando la ley de Navier en la sección A, en la coordenada  $x = 0$  m, para el punto G(0, 0):

$$\sigma_x(y = 0, z = 0) = \frac{2 \cdot 10^3 (N)}{\Omega (mm^2)} - \frac{-32 \cdot 10^6 (N \cdot mm)}{I_z (mm^4)} \cdot 0 (mm) + \frac{-8 \cdot 10^6 (N \cdot mm)}{I_y (mm^4)} \cdot 0 (mm)$$

$$\sigma_x(y = 0, z = 0) = \frac{2 \cdot 10^3 (N)}{65.3 \cdot 10^2 (mm^2)} = 0.306 MPa$$

Para el cálculo de la tensión cortante en el alma del perfil, se utiliza la fórmula de Collignon:

$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{V_y(x) \cdot m_z(y)}{I_z \cdot e}$$

donde  $m_z$  es el momento estático del perfil respecto al eje  $z$  y  $e$  es el ancho del alma del perfil. Del prontuario de perfiles laminados sabemos que:

- Momento estático respecto al eje  $z$ :  $S_x = m_z(y = 0) = 241 cm^3$ .
- Espesor del alma del perfil:  $e = 8.5 mm$ .

Sustituyendo valores numéricos, se obtiene:

$$\tau_{xy}(x = 0, y = 0) = \frac{V_y(x = 0) \cdot m_z(y = 0)}{I_z \cdot e} = \frac{18000 (N) \cdot 241 \cdot 10^3 (mm^3)}{3831 \cdot 10^4 (mm^4) \cdot 8.5 (mm)} = -13.322 MPa$$

La rebanada en este punto tiene signo positivo para el cortante. Como ha de estar en equilibrio, si por la izquierda de la rebanada el esfuerzo es hacia arriba, la parte derecha de la rebanada ejercerá una fuerza de sentido contrario para garantizar el equilibrio y por eso la tensión cortante  $\tau_{xy}$  es negativa, en el sentido negativo del eje  $y$ .

#### Círculos de Mohr y Estado Tensional de G:

El tensor de tensiones del punto G es:

$$[T] = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.306 & -13.332 & 0 \\ -13.332 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

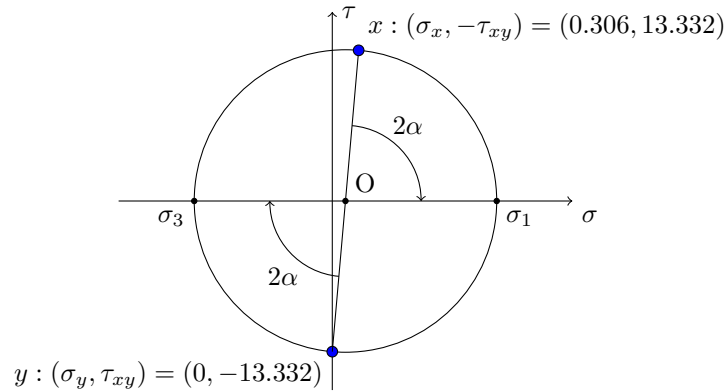
Para dibujar los círculos de Mohr, primero hay que calcular las tensiones principales en la sección A en el centro de gravedad del perfil con las fórmulas del Círculo de Mohr:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} = \frac{0.306}{2} + \sqrt{\left(\frac{0.306}{2}\right)^2 + (-13.332)^2} = 13.474 MPa$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} = \frac{0.306}{2} - \sqrt{\left(\frac{0.306}{2}\right)^2 + (-13.332)^2} = -13.168 MPa$$

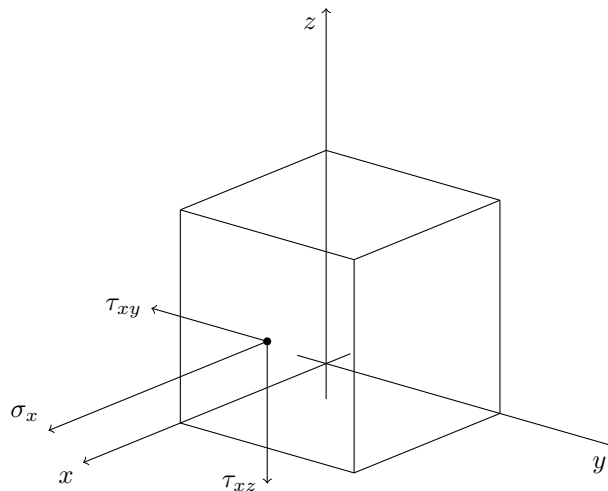
Círculo de Mohr:



El ángulo  $\alpha$  que forman los ejes principales respecto a los ejes coordenados se calcula como:

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 13.332}{0.306 - 0} \rightarrow \alpha = 44.67^\circ \text{ (horario } \curvearrowright \text{)}$$

Ahora se dibuja el estado tensional del punto  $G$ .



Una vez calculadas las tensiones principales calculamos las tensiones equivalentes de tresca y de von Mises.

**Tensión de von Mises.** La fórmula de la tensión de von Mises tiene la forma:

$$\sigma_{vM}^{equi.} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]} = 23.0729 \text{ MPa}$$

**Tensión de Tresca.** La fórmula de la tensión de Tresca tiene la forma:

$$\sigma_{Tresca}^{equi.} = \sigma_1 - \sigma_3 = 26.6418 \text{ MPa}$$

Efectivamente se comprueba que:

$$\sigma_{von \text{ Mises}} < \sigma_{tresca}$$

por lo que la tensión de Tresca es más conservadora a la hora de dimensionar que la de von Mises.

## 2. Ejercicio 2:

1. Si el lado del cuadrado es 'a' es 100 mm; determinar el coeficiente de seguridad con el que se ha diseñado la pieza cuando  $P_1 = 120 \text{ kN}$  y  $P_2 = 60 \text{ kN}$ .

Sistema isostático, dos ecuaciones y dos incógnitas supuestas en el sentido positivo de los ejes coordenados:  $R_y^A$ ,  $M_z^A$ . Se tomará  $L = 1.5 \text{ m}$ .

Reacciones:

$$y : R_y^A = P_1 - P_2$$

Momentos:

$$z : M_z^A - P_1 \cdot L + P_2 \cdot 2L = 0$$

$$R_y^A = 60 \text{ kN} ; \quad M_z^A = 0 \text{ kN} \cdot \text{m} ;$$

Discretización de la viga desde el empotramiento de la izquierda:

**Momento Flector**  $M_z(x)$  (kN·m):

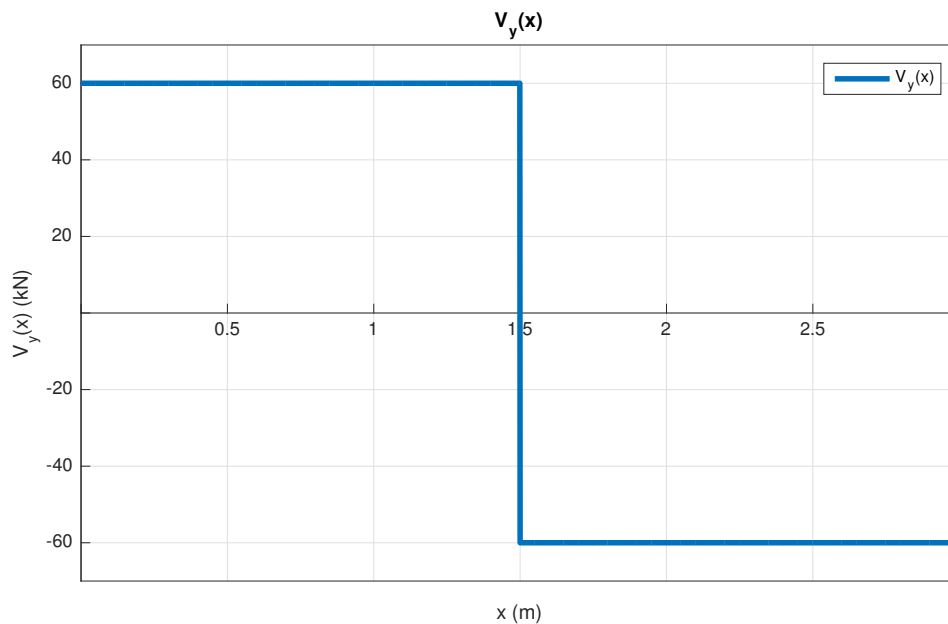
$$M_z(x) = \begin{cases} 60 \cdot x & \text{si } 0 < x < 1.5 \text{ m} \\ 60 \cdot x - 120 \cdot (x - 1.5) & \text{si } 1.5 < x < 3 \text{ m} \end{cases}$$

**Esfuerzo Cortante**  $V_y(x)$  (kN):

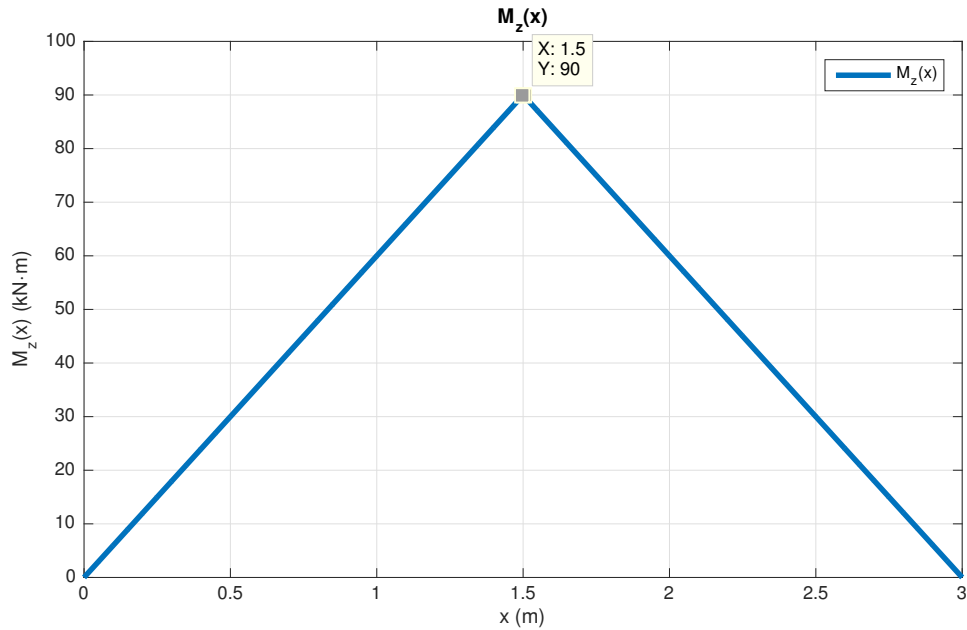
$$V_y(x) = \begin{cases} 60 & \text{si } 0 < x < 1.5 \text{ m} \\ -60 & \text{si } 1.5 < x < 3 \text{ m} \end{cases}$$

**Diagramas de Esfuerzo Cortantes y Momentos Flectores:**

**Esfuerzo Cortante**  $V_y(x)$  (kN):

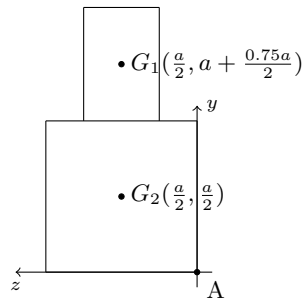


**Momento Flector  $M_z(x)$  (kN·m):**



### Análisis de la Sección

Para la sección más solicitada, en  $x = 1.5$  m, se colocan unos ejes  $yz$  arbitrarios en una esquina de la sección, desde la que se calcula el centro de gravedad de la pieza y sus momentos de inercia en dicha esquina. Posteriormente se traslada todo a G para poder aplicar Navier en ejes principales.



**a) Centro de gravedad:**

$$z_G = \frac{\sum_i z_i \cdot A_i}{A_{total}} = \frac{\frac{a}{2} \cdot a^2 + 0.5 \cdot 0.75 \cdot a^2 \cdot \frac{a}{2}}{a^2 + 0.5 \cdot 0.75 \cdot a^2} = \frac{a}{2} = 5 \text{ cm}$$

$$y_G = \frac{\sum_i y_i \cdot A_i}{A_{total}} = \frac{\frac{a}{2} \cdot a^2 + 0.5 \cdot 0.75 \cdot a^2 \cdot (a + \frac{0.75a}{2})}{a^2 + 0.5 \cdot 0.75 \cdot a^2} = \frac{65 \cdot a}{88} = 7.39 \text{ cm}$$

**b) Momentos de Inercia:**

b.1) Momento de Inercia respecto al eje  $z$ :

$$I_z^A = I_z^{A,1} + I_z^{A,2} =$$

$$= \left[ \frac{1}{12} \cdot \left( \frac{a}{2} \right) \cdot (0.75 \cdot a)^3 + \left( a + \frac{0.75 \cdot a}{2} \right)^2 \cdot (0.75a) \cdot \frac{a}{2} \right]_1 + \left[ \frac{1}{3} \cdot a^4 \right]_2 = \frac{93}{128} \cdot a^4$$

b.2) Momento de Inercia respecto al eje  $y$ :

$$I_y^A = I_y^{A,1} + I_y^{A,2} = \left[ \frac{1}{12} \cdot (0.75 \cdot a) \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot (0.75 \cdot a) \cdot \frac{a}{2} \right]_1 + \left[ \frac{1}{3} \cdot a^4 \right]_2 = \frac{167}{384} \cdot a^4$$

c) Momentos de Inercia en G ( $a = 10 \text{ cm}$ ):

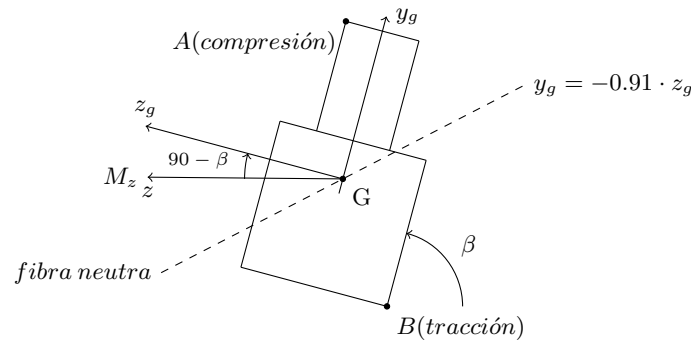
Momento de Inercia en G respecto al eje  $z$ :

$$I_z^G = I_z^A - (y_G)^2 \cdot A_{total} = \frac{5233}{16896} \cdot a^4 = 3097.18 \text{ cm}^4$$

Momento de Inercia en G respecto al eje  $y$ :

$$I_y^G = I_y^A - (z_G)^2 \cdot A_{total} = \frac{35}{384} \cdot a^4 = 911.458 \text{ cm}^4$$

**Posición 1:**



1. Se colocan los ejes coordenados principales  $y_g z_g$  en G y se giran solidariamente con la pieza el ángulo  $\beta = 75^\circ$  para garantizar que son principales de inercia, pues así se mantiene la simetría respecto al eje  $y_g$ , que garantiza que los productos de inercia son nulos.
2. Descomposición del momento flector  $M_z(x = 1.5 \text{ m}) = 90 \text{ kN}\cdot\text{m}$  en los ejes principales  $y_g z_g$ .

El momento flector en ejes principales  $y_g z_g$  tiene la forma:

$$M_{z_g}(x = 1.5 \text{ m}) = M_z \cdot \cos(90 - \beta) = 86933.3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{y_g}(x = 1.5 \text{ m}) = -M_z \cdot \sin(90 - \beta) = -23293.7 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Para hallar los puntos críticos, se hace uso de la ecuación de la fibra neutra:

$$\sigma_x(x, y, z) = -\frac{M_{z_g}(x)}{I_{z_g}} \cdot y_g + \frac{M_{y_g}(x)}{I_{y_g}} \cdot z_g = 0$$

Particularizando para la sección más crítica, en la coordenada  $x = 1.5 \text{ m}$ :

$$y_g = \frac{I_{z_g} \cdot M_{y_g}(x = 1.5)}{I_{y_g} \cdot M_{z_g}(x = 1.5)} \cdot z_g = \frac{3097.18 \cdot (-23293.7)}{911.458 \cdot (86933.3)} \cdot z_g = -0.91 \cdot z_g$$

$$y_g = -0.91 \cdot z_g$$

Los puntos más solicitados de la sección serán aquellos más alejados, en perpendicular, de la fibra neutra, A y B. Ahora se analizan los puntos críticos y los coeficientes de seguridad con los que están trabajando ( $\sigma_{adm} = 350 \text{ MPa}$ ) con Navier en ejes principales para la sección más crítica:

$$\sigma_x(x, y_g, z_g) = -\frac{M_{z_g}(x)}{I_{z_g}} \cdot y_g + \frac{M_{y_g}(x)}{I_{y_g}} \cdot z_g$$

**A** (25, 101.14) mm:

$$\sigma_x^A(y = 101.14, z = 25) = -\frac{86933.3 \cdot 10^3 (N \cdot mm)}{3097.18 \cdot 10^4 (mm^4)} \cdot 101.14 (mm) + \frac{-23293.7 \cdot 10^3 (N \cdot mm)}{911.45 \cdot 10^4 (mm^4)} \cdot 25 (mm)$$

$$\sigma_x^A(y = 101.14, z = 50) = -347.787 MPa$$

$$n_A = \frac{\sigma_{adm}}{\sigma_x^A} = 1.0063$$

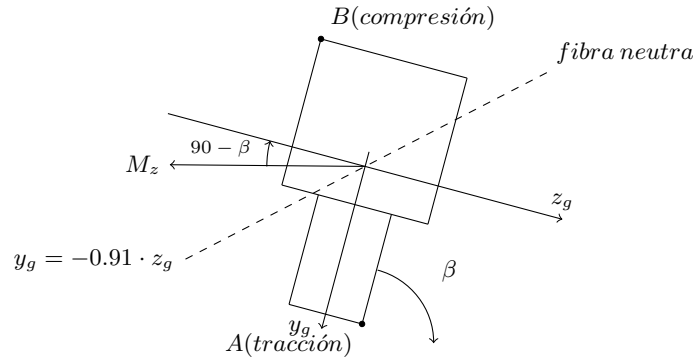
**B** (-50, -73.9) mm:

$$\sigma_x^B(y = -73.9, z = -50) = -\frac{86933.3 \cdot 10^3 (N \cdot mm)}{3097.18 \cdot 10^4 (mm^4)} \cdot -73.9 (mm) + \frac{-23293.7 \cdot 10^3 (N \cdot mm)}{911.45 \cdot 10^4 (mm^4)} \cdot -50 (mm)$$

$$\sigma_x^B(y = -73.9, z = -50) = 335.282 MPa$$

$$n_B = \frac{\sigma_{adm}}{\sigma_x^B} = 1.0439$$

**Posición 2:**



1. Se colocan los ejes coordenados principales  $y_g z_g$  en G y se giran solidariamente con la pieza el ángulo  $\beta = 75^\circ$  para garantizar que son principales de inercia, pues así se mantiene la simetría respecto al eje  $y_g$ , que garantiza que los productos de inercia son nulos.
2. Descomposición del momento flector  $M_z(x = 1.5 m) = 90 \text{ kN}\cdot\text{m}$  en los ejes principales  $y_g z_g$ .

El momento flector en ejes principales  $y_g z_g$  tiene la forma:

$$M_{z_g}(x = 1.5 m) = -M_z \cdot \cos(90 - \beta) = -86933.3 N \cdot m$$

$$M_{y_g}(x = 1.5 m) = M_z \cdot \sin(90 - \beta) = 23293.7 N \cdot m$$

Para hallar los puntos críticos, se hace uso de la ecuación de la fibra neutra:

$$\sigma_x(x, y, z) = -\frac{M_{z_g}(x)}{I_{z_g}} \cdot y_g + \frac{M_{y_g}(x)}{I_{y_g}} \cdot z_g = 0$$

Particularizando para la sección más crítica, en la coordenada  $x = 1.5 m$ :

$$y_g = \frac{I_{z_g} \cdot M_{y_g}(x = 1.5)}{I_{y_g} \cdot M_{z_g}(x = 1.5)} \cdot z_g = \frac{3097.18 \cdot (23293.7)}{911.458 \cdot (-86933.3)} \cdot z_g = -0.91 \cdot z_g$$

$$y_g = -0.91 \cdot z_g$$

Los puntos más solicitados de la sección serán aquellos más alejados, en perpendicular, de la fibra neutra, A y B. Ahora se analizan los puntos críticos y los coeficientes de seguridad con los que están trabajando ( $\sigma_{adm} = 350 MPa$ ) con Navier en ejes principales para la sección más crítica:

$$\sigma_x(x, y_g, z_g) = -\frac{M_{z_g}(x)}{I_{z_g}} \cdot y_g + \frac{M_{y_g}(x)}{I_{y_g}} \cdot z_g$$

**A** (25, 101.14) mm:

$$\sigma_x^A(y = 101.14, z = 25) = -\frac{-86933.3 \cdot 10^3 (N \cdot mm)}{3097.18 \cdot 10^4 (mm^4)} \cdot 101.14 (mm) + \frac{23293.7 \cdot 10^3 (N \cdot mm)}{911.45 \cdot 10^4 (mm^4)} \cdot 25 (mm)$$

$$\sigma_x^A(y = 101.14, z = 50) = 347.787 MPa$$

$$n_A = \frac{\sigma_{adm}}{\sigma_x^A} = 1.0063$$

**B** (-50, -73.9) mm:

$$\sigma_x^B(y = -73.9, z = -50) = -\frac{-86933.3 \cdot 10^3 (N \cdot mm)}{3097.18 \cdot 10^4 (mm^4)} \cdot -73.9 (mm) + \frac{23293.7 \cdot 10^3 (N \cdot mm)}{911.45 \cdot 10^4 (mm^4)} \cdot -50 (mm)$$

$$\sigma_x^B(y = -73.9, z = -50) = -335.282 MPa$$

$$n_B = \frac{\sigma_{adm}}{\sigma_x^B} = 1.0439$$

**2. Determinar, manteniendo el ángulo  $\beta$ , el diámetro que tendría que tener la barra si fuera de sección circular y trabajara con el mismo coeficiente de seguridad.**

Al tratarse de un redondo, es posible aplicar Navier de la siguiente forma, ya que todas las direcciones son direcciones principales de inercia por la simetría respecto a cada uno de unos ejes coordenados cualesquiera que se desee utilizar:

$$\sigma_x^A(r = R) = \frac{\sqrt{M_{z_g}^2 + M_{y_g}^2}}{W_z} = \frac{M_z(x = 1.5 m)}{W_z} = \frac{90 \cdot 10^6 (N \cdot mm)}{\frac{\pi R^3}{4}} = \frac{\sigma_{adm}}{n_A}$$

$$R = 69.07 mm$$

$$\phi = 138.14 mm$$

**3. Si esta barra se fabricará con un acero de límite elástico 415 MPa. ¿Cuál sería el momento  $M_x$  adicional que se le podría aplicar a la barra en el extremo libre manteniendo el mismo coeficiente de seguridad?**

Ley de Navier en  $x = 3$  m:

$$\sigma_x(r = R) = \frac{\sqrt{M_{z_g}^2 + M_{y_g}^2}}{W_z} = \frac{M_z(x = 3 m)}{W_z} = \frac{0 \cdot 10^6 (N \cdot mm)}{\frac{\pi R^3}{4}}$$

Torsor en  $x = 3$  m:

$$\tau(r = R) = \frac{M_t(x = 3 m)}{W_o} = \frac{M_t (N \cdot mm)}{\frac{\pi R^3}{2}}$$

Se utilizan los criterios de Tresca y von Mises para hallar el torsor adicional.

**Criterio de von Mises:**

$$\sigma_{vM}^{equi.} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]} \leq \frac{\sigma_{adm}}{n_A}$$

$$\sigma_{vM}^{equi.} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left[ \left( \left( \frac{M_t}{\frac{\pi R^3}{2}} \right) - 0 \right)^2 + \left( \left( \frac{M_t}{\frac{\pi R^3}{2}} \right) - \left( \frac{-M_t}{\frac{\pi R^3}{2}} \right) \right)^2 + \left( - \left( \frac{-M_t}{\frac{\pi R^3}{2}} \right) \right)^2 \right]} \leq \frac{\sigma_{adm}}{n_A}$$

$$M_t \in [-66110 N \cdot m, 66110 N \cdot m]$$

**Criterio de Tresca:**

$$\sigma_{Tresca}^{equi.} = \sigma_1 - \sigma_3 = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{M_t}{\frac{\pi R^3}{2}}\right)^2} \leq \frac{\sigma_{adm}}{n_A}$$
$$M_t \in [-57252.9 \text{ N} \cdot \text{m}, 57252.9 \text{ N} \cdot \text{m}]$$



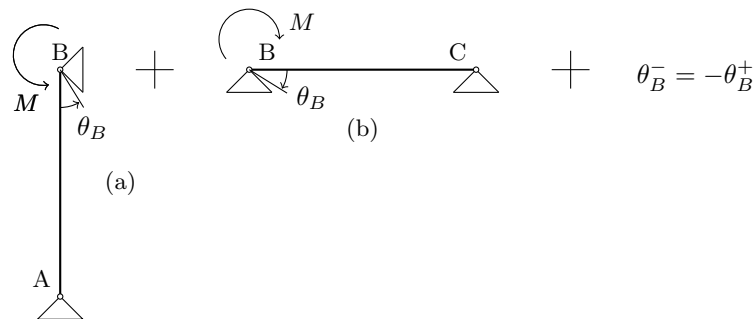
### 3. Ejercicio 3:

#### 1. Relación F/q para que el giro en B sea nulo.

Sistema hiperestático, tres ecuaciones y cuatro incógnitas. Se tomará  $L = 4.0$  m. Para resolver el problema se lleva a cabo el siguiente procedimiento:

1. Se separa el pórtico por B, en dos subvigas biapoyadas, añadiendo un momento que conserve el empujamiento y el giro en B.
2. Se calcula el giro en B por la izquierda ( $\theta_B^-$ ).
3. Se calcula el giro en B por la derecha ( $\theta_B^+$ ).
4. Imposición la condición de compatibilidad  $\theta_B^- = -\theta_B^+$ , ya que se busca que ambos sean en el mismo sentido para que se conserven los  $90^\circ$ .

#### 1. Conversión de sistema hiperestático a isostático:



#### 2. Giro en B por la izquierda ( $\theta_B^-$ ).

Tramo (a):

1. Ángulo girado en B debido a  $F$  ( $\theta_B^F$ ):

$$\theta_B^F = \frac{1}{EI_z} \int_0^L \left( \frac{F}{2} \cdot x - F \cdot x \right) dx = \frac{\frac{FL}{4} \cdot \frac{L}{2}}{2EI_z} = \frac{F \cdot L^2}{16EI_z} (\checkmark)$$

2. Ángulo girado en B debido a  $M$  ( $\theta_B^M$ ):

$$\delta_A^M = \frac{1}{EI_z} \int_0^L (0 - x) \cdot \left( \frac{M}{L} \cdot x \right) dx = \frac{2L}{3} \cdot \frac{M \cdot L}{2EI_z} = \frac{M \cdot L^2}{3EI_z}$$

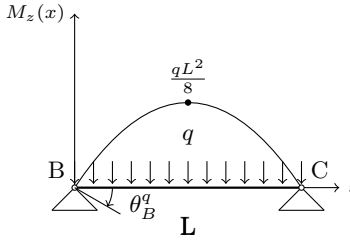
Por trigonometría y debido a la pequeñez de los desplazamientos, es posible hacer la siguiente aproximación:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(\theta_B^M) &\approx \theta_B^M = \frac{\delta_A^M}{L} \\ \theta_B^M &= \frac{ML}{3EI_z} (\curvearrowright)\end{aligned}$$

### 3. Giro en B por la izquierda ( $\theta_B^+$ ).

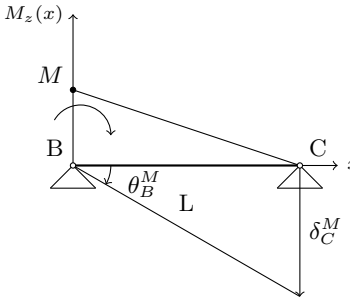
Tramo (b):

1. Ángulo girado en B debido a  $q(x)$  kN/m ( $\theta_B^q$ ):



$$\begin{aligned}\theta_B^q &= \frac{1}{EI_z} \int_0^L \left( \frac{qL}{2} \cdot x - \frac{q}{2} \cdot x^2 \right) dx = \\ &= \frac{q \cdot L^3}{24EI_z} (\curvearrowright)\end{aligned}$$

2. Ángulo girado en B debido a  $M$  ( $\theta_B^M$ ):



$$\begin{aligned}\delta_C^M &= \frac{1}{EI_z} \int_0^L (L-x) \cdot \left( M - \frac{M}{L} \cdot x \right) dx = \\ &= \frac{2L}{3} \cdot \frac{M \cdot L}{2EI_z} = \frac{M \cdot L^2}{3EI_z}\end{aligned}$$

Por trigonometría y debido a la pequeñez de los desplazamientos, es posible hacer la siguiente aproximación:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(\theta_B^M) &\approx \theta_B^M = \frac{\delta_C^M}{L} \\ \theta_B^M &= \frac{ML}{3EI_z} (\curvearrowright)\end{aligned}$$

**4. Condiciones de compatibilidad.** Se impone la condición de compatibilidad consistente en la conservación del ángulo girado por la izquierda y por la derecha  $\theta_B^- = -\theta_B^+$ . El signo menos quiere decir que se cambia el sentido del ángulo girado en B por la derecha  $\theta_B^+$  para que ambos tengan el mismo sentido, porque sin el menos llevarían sentidos contrarios y no se conservarían los 90° grados.

$$\begin{aligned}\theta_{B(a)}^- &= -\theta_{B(b)}^+ \\ (+) \frac{F \cdot L^2}{16EI_z} (\curvearrowright) + (+) \frac{M \cdot L}{3EI} (\curvearrowright) &= - \left[ (-) \frac{q \cdot L^3}{24EI_z} (\curvearrowright) + (-) \frac{M \cdot L}{3EI} (\curvearrowright) \right] \\ \frac{FL^2}{16} &= \frac{q \cdot L^3}{24} \\ \frac{F}{16} &= \frac{q \cdot L}{24} \\ \frac{F}{q} &= \frac{2L}{3}\end{aligned}$$

**2. Empleando los resultados del apartado anterior, para  $q = 40.0 \text{ kN/m}$ . Representar los diagramas de esfuerzos (Normales, cortantes y flectores), acotando los puntos más característicos.**

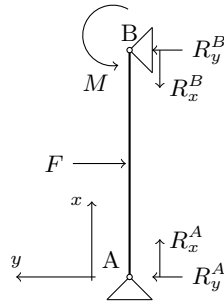
Para resolver el hiperestatismo, el valor del momento  $M$  será tal que:

$$\theta_{B(a)}^- = 0$$

$$(+)\frac{F \cdot L^2}{16EI_z} (\curvearrowright) + (+)\frac{M \cdot L}{3EI} (\curvearrowright) = 0$$

$$M_B^- = M_B^+ = -\frac{3}{16} F \cdot L \Big|_{F=\frac{2}{3}q \cdot L} = -\frac{2}{16} q \cdot L^2 = -80 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

**Tramo (a).** Cálculo de las reacciones en la articulaciones de la viga AB (se recomienda aplicar superposición de cargas  $F$  y momento  $M$ ) planteando las ecuaciones de la estática:



Reacciones:

$$x : R_x^A - R_x^B = 0$$

$$y : R_y^A + R_y^B = F$$

Momentos:

$$z : F \cdot \frac{L}{2} - R_y^A \cdot L + M = 0$$

$$R_y^A = -\frac{F}{2} - \frac{M}{L} = \frac{q \cdot L}{3} + \frac{M}{L} = \frac{40 \cdot 4}{3} + \frac{(-80)}{4} = \frac{100}{3} \text{ kN} \approx 33.33 \text{ kN};$$

$$R_y^B = \frac{F}{2} - \frac{M}{L} = \frac{q \cdot L}{3} - \frac{M}{L} = \frac{40 \cdot 4}{3} - \frac{(-80)}{4} = \frac{220}{3} \text{ kN} \approx 73.33 \text{ kN};$$

Discretización de la viga AB desde A:

**Momento Flector  $M_z(x)$  (kN·m):**

$$M_z(x) = \begin{cases} 33.33 \cdot x & \text{si } 0 < x < 2 \text{ m} \\ 33.33 \cdot x - 53.33 \cdot (x - 2) & \text{si } 2 < x < 4 \text{ m} \end{cases}$$

**Esfuerzo Cortante  $V_y(x)$  (kN):**

$$V_y(x) = \begin{cases} 33.33 & \text{si } 0 < x < 2 \text{ m} \\ -73.33 & \text{si } 2 < x < 4 \text{ m} \end{cases}$$

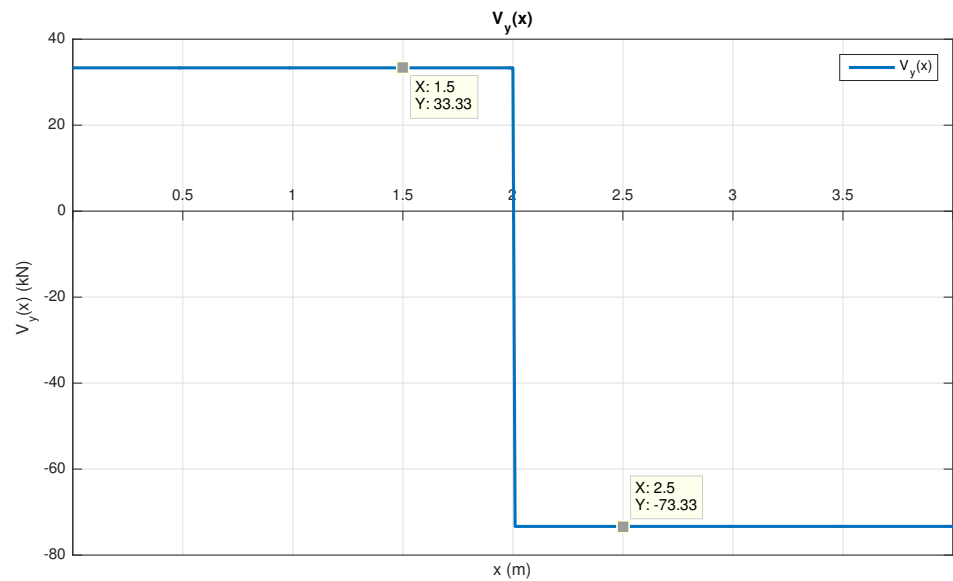
**Esfuerzo Axil  $N(x)$  (kN):**

$$N(x) = \begin{cases} -100 & \text{si } 0 < x < 4 \text{ m} \end{cases}$$

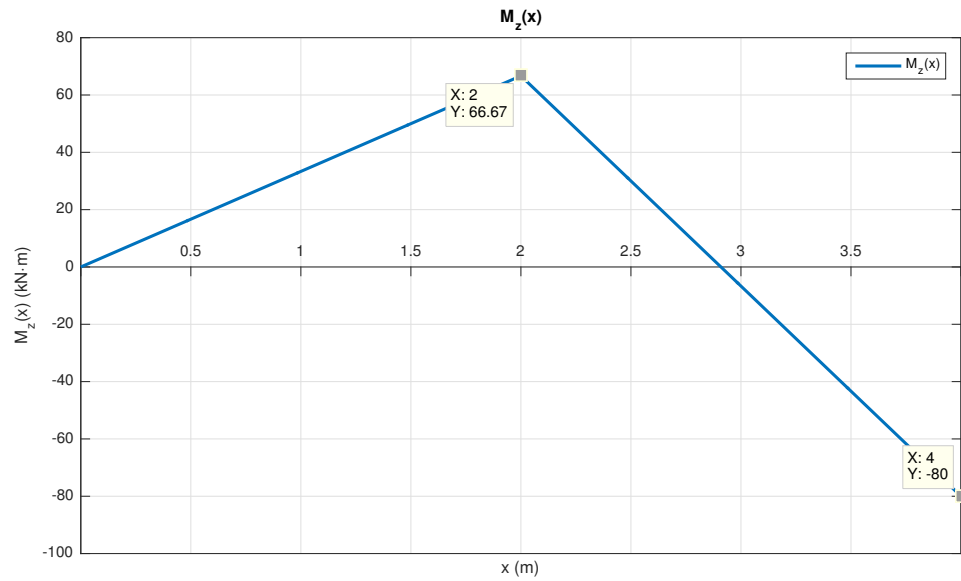
Para el axil, se conoce que el cortante en B del tramo (b) es el axil del tramo (a), y viceversa. Se puede comprobar en el cortante del tramo (b).

Diagramas de Esfuerzo Cortantes y Momentos Flectores en el Pilar:

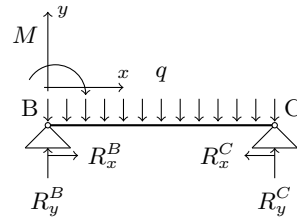
Esfuerzo Cortante  $V_y(x)$  (kN):



Momento Flector  $M_z(x)$  (kN·m):



**Tramo (b).** Cálculo de las reacciones en la articulaciones de la viga BC planteando las ecuaciones de la estática:



Reacciones:

$$\begin{aligned} x : R_x^B - R_x^C &= 0 \\ y : R_y^B + R_y^C &= q \cdot L \end{aligned}$$

Momentos:

$$z : R_y^C \cdot L - M - \frac{q \cdot L^2}{2} = 0$$

Reacciones:

$$\begin{aligned} R_y^B &= \frac{q \cdot L}{2} + \frac{M}{L} = \frac{40 \cdot 4}{2} + \frac{(-80)}{4} = 100 \text{ kN}; \\ R_y^C &= \frac{q \cdot L}{2} - \frac{M}{L} = \frac{40 \cdot 4}{2} - \frac{(-80)}{4} = 60 \text{ kN}; \end{aligned}$$

Discretización de la viga BC desde B:

**Momento Flector**  $M_z(x)$  (kN·m):

$$M_z(x) = \begin{cases} -80 + 100 \cdot x - 40 \cdot \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 < x < 4 \text{ m} \end{cases}$$

**Esfuerzo Cortante**  $V_y(x)$  (kN):

$$V_y(x) = \begin{cases} 100 - 40 \cdot x & \text{si } 0 < x < 4 \text{ m} \end{cases}$$

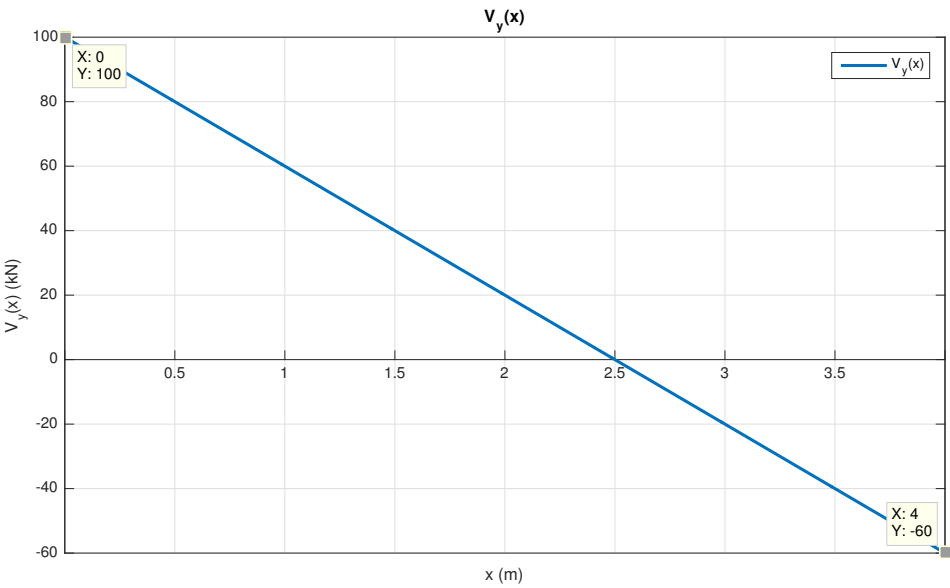
**Esfuerzo Axil**  $N(x)$  (kN):

$$N(x) = \begin{cases} -73.33 & \text{si } 0 < x < 4 \text{ m} \end{cases}$$

Para el axil, se conoce que el cortante en B del tramo (a) es el axil del tramo (b), y viceversa. Se puede comprobar en el cortante del tramo (a).

Diagramas de Esfuerzo Cortantes y Momentos Flectores en el Dintel:

Esfuerzo Cortante  $V_y(x)$  (kN):



Momento Flector  $M_z(x)$  (kN·m):

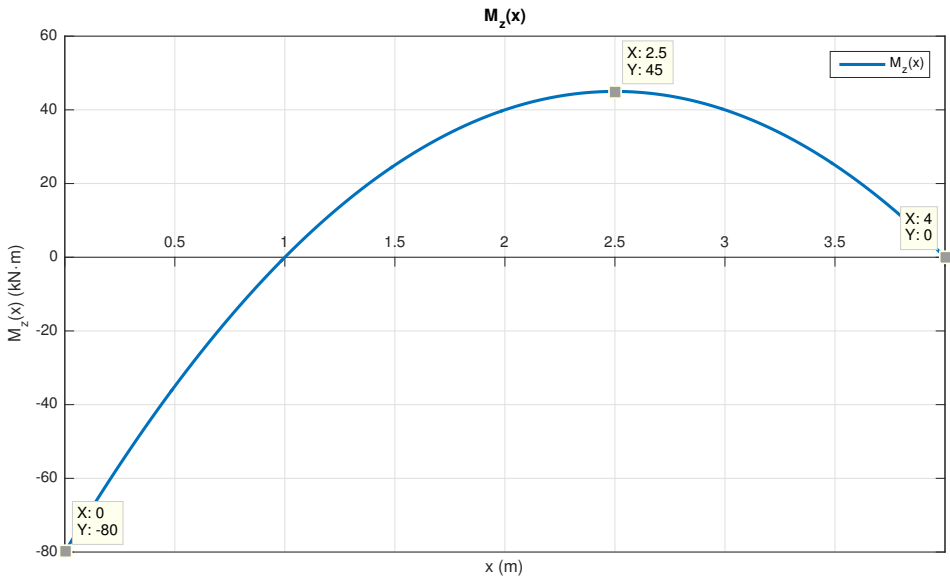
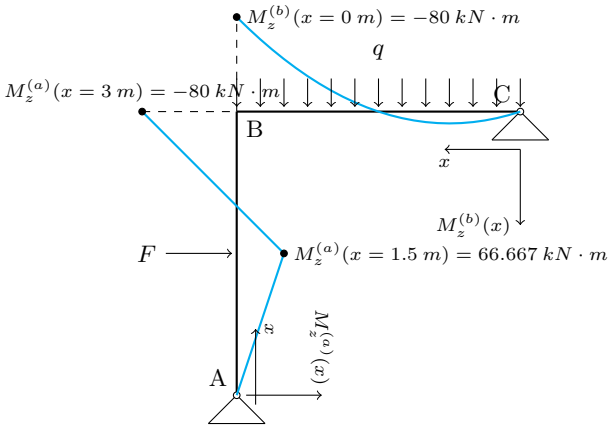


Diagrama de Momentos Flectores sobre el pórtico:







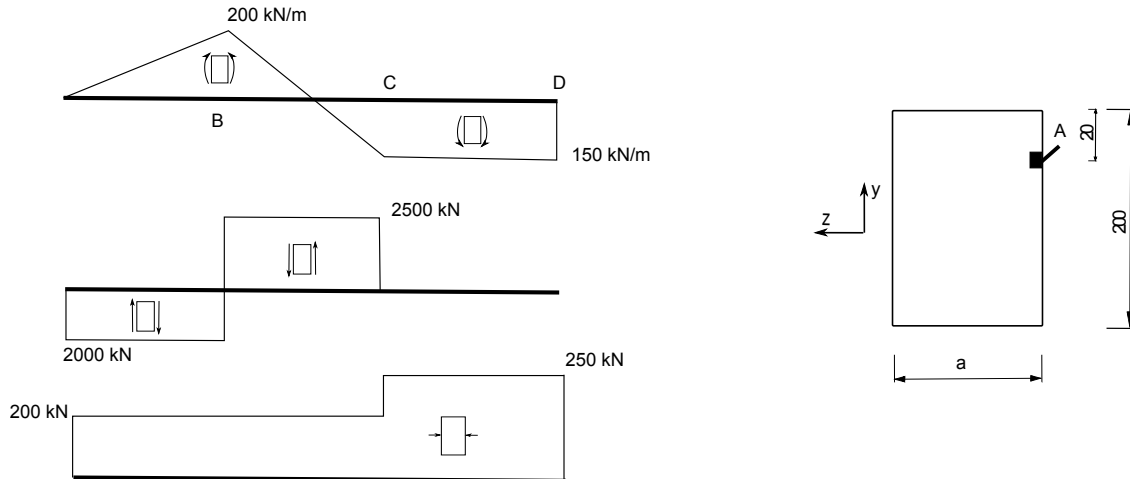
**Departamento de Ingeniería Mecánica**  
**Resistencia de Materiales**  
**3 IEM**

**Examen Junio 2014**

**EJERCICIO 1; 2 PUNTOS**

Apellidos y Nombre: \_\_\_\_\_

Una viga con la sección de la figura soporta los esfuerzos que aparecen representados.



1. Si la viga está fabricada con un material que tiene una tensión admisible de 180 MPa, determinar el ancho 'a' de la sección (ajustar al mm entero superior)
2. Dibujar los círculos de Mohr asociados al estado tensional del punto 'A' de la sección 'B' de la viga, indicando la localización de los ejes coordenados. Si existieran varias opciones elegir aquella que de tensiones principales mayores
3. Sobre los círculos de Mohr calcular la tensión principal máxima: Módulo y plano (indicar el plano por su vector director)

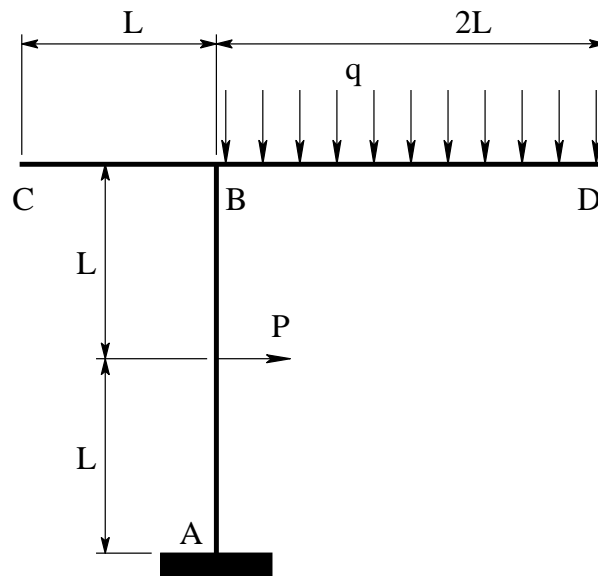
Departamento de Ingeniería Mecánica  
Resistencia de Materiales  
3 IEM

Examen Junio 2014

**EJERCICIO 2; 2 PUNTOS**

Apellidos y Nombre: \_\_\_\_\_

El pórtico de la figura soporta las cargas que aparecen representadas. Si  $L=1$  m,  $q=1$  kN/m,  $P=0.5$  kN y  $E=210$  GPa, determinar ...



1. Los diagramas de flectores, cortantes y axiles, acotando los valores característicos
2. Si el material tiene una tensión admisible de 235 MPa, dimensionar el diámetro mínimo de la sección del redondo a emplear
3. La deformada aproximada del pórtico cuidando los detalles

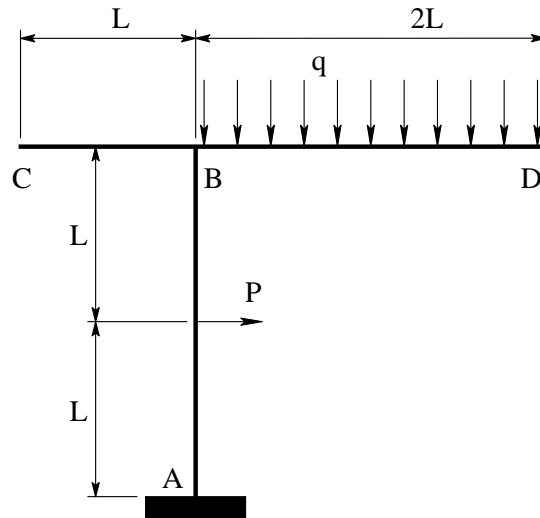
Departamento de Ingeniería Mecánica  
Resistencia de Materiales  
3 IEM

Examen Junio 2014

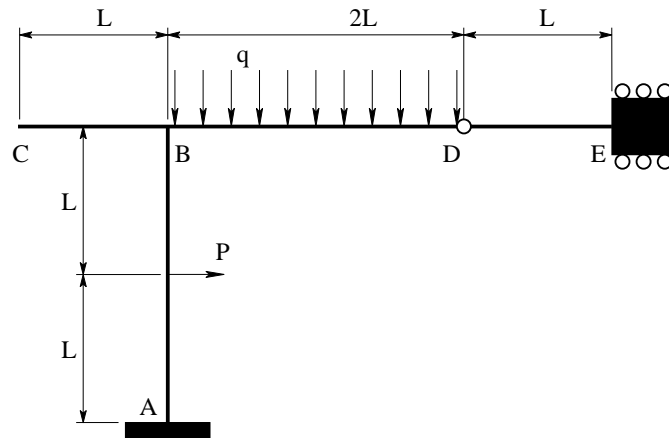
**EJERCICIO 3; 2 PUNTOS**

Apellidos y Nombre: \_\_\_\_\_

El pórtico de la figura soporta las cargas que aparecen representadas. Suponiendo que se emplea un redondo de acero de diámetro 50 mm,  $L=1$  m,  $q=1$  kN/m y  $P=0.5$  kN, determinar el desplazamiento vertical en el extremo libre D



Si se refuerza el pórtico como se indica en la figura inferior, suponiendo que el desplazamiento vertical resultante del apartado anterior son 16 cm y que el desplazamiento vertical máximo admisible del punto 'D' es de 10 cm, determinar el diámetro del redondo empleado en el tramo DE



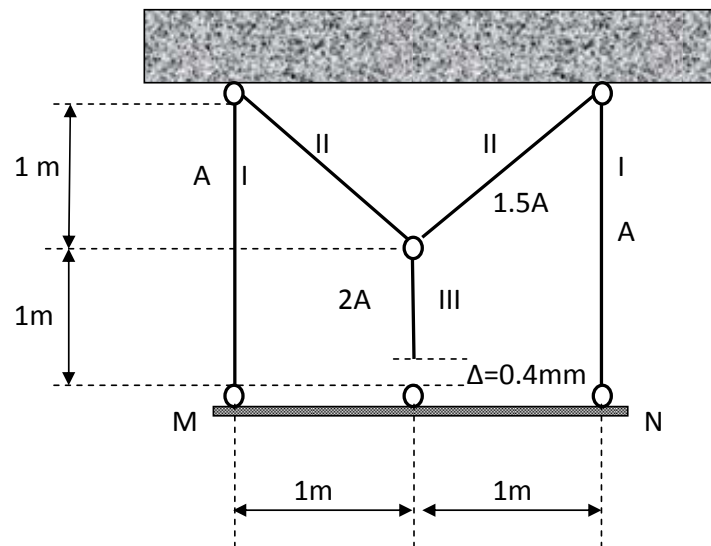
Departamento de Ingeniería Mecánica  
Resistencia de Materiales  
3 IEM

Examen Junio 2014

Apellidos y Nombre: \_\_\_\_\_

**EJERCICIO 4; 2 PUNTOS**

Determinar la tensión de montaje que se establece en las barras I, II y III cuando se une la barra III con la articulación central de la barra MN debido a un error de fabricación en la barra III de  $\delta = 0.4 \text{ mm}$ .  $E=200 \text{ GPa}$ . ...



Examen Junio 2014  
Resistencia de Materiales  
3°C, I.E.M



## 1. Ejercicio 1:

1. Si la viga está fabricada con un material que tiene una tensión admisible de 180 MPa, determinar el ancho 'a' de la sección (ajustar al mm entero superior).

Primero se calculan los momentos de inercia de la sección para poder aplicar posteriormente la ley de Navier:

$$I_z^G = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 = \frac{1}{12} \cdot a \cdot (200)^3 \text{ mm}^4$$
$$I_y^G = \frac{1}{12} \cdot h \cdot b^3 = \frac{1}{12} \cdot 200 \cdot (a)^3 \text{ mm}^4$$

A continuación se analizan las secciones más solicitadas, que se han identificado en los diagramas de momentos flectores, esfuerzos cortantes y axiles.

### a) Sección en B:

$$M_z^B = 200 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$V_y^B = 2500 \text{ kN}$$

$$N^B = -200 \text{ kN}$$

Analizando el signo de la rebanada en los diagramas de momentos flectores y axiles, se observa que la zona más solicitada y de posible fallo en la sección B será toda aquella correspondiente a la coordenada  $y = 100 \text{ mm}$ , y el posible fallo será a **compresión**, ya que se suman en las fibras superiores la compresión del flector y del axil.

Ley de Navier:

$$\sigma_x(x, y, z) = \frac{N(x)}{\Omega} - \frac{M_z(x)}{I_z} \cdot y + \frac{M_y(x)}{I_y} \cdot z \leq \sigma_{adm}$$

Sustituyendo los valores numéricos, para la sección en B, con las coordenadas en mm:

$$\sigma_x^B(y = 100) = \frac{-200 \cdot 10^3 \text{ (N)}}{200 \cdot a \text{ (mm}^2\text{)}} - \frac{200 \cdot 10^6 \text{ (N} \cdot \text{mm)}}{\frac{1}{12} \cdot a \cdot (200)^3 \text{ (mm}^4\text{)}} \cdot 100 \text{ (mm)} \leq 180 \text{ MPa}$$
$$a = 172.22 \text{ mm}$$
$$a = 173 \text{ mm}$$

### b) Sección en C:

$$M_z^C = -150 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$V_y^C = 2500 \text{ kN}$$

$$N^C = -250 \text{ kN}$$

Analizando el signo de la rebanada en los diagramas de momentos flectores y axiles, se observa que la zona más solicitada y de posible fallo en la sección B será toda aquella correspondiente a la coordenada  $y = -100 \text{ mm}$ , y el posible fallo será a **compresión**, ya que se suman en las fibras inferiores la compresión del flector y del axil.

Ley de Navier:

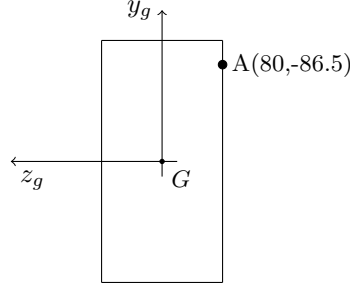
$$\sigma_x(x, y, z) = \frac{N(x)}{\Omega} - \frac{M_z(x)}{I_z} \cdot y + \frac{M_y(x)}{I_y} \cdot z \leq \sigma_{adm}$$

Sustituyendo los valores numéricos, para la sección en C, con las coordenadas en mm:

$$\sigma_x^C(y = 100) = \frac{-250 \cdot 10^3 \text{ (N)}}{200 \cdot a \text{ (mm}^2\text{)}} - \frac{-150 \cdot 10^6 \text{ (N} \cdot \text{mm)}}{\frac{1}{12} \cdot a \cdot (200)^3 \text{ (mm}^4\text{)}} \cdot 100 \text{ (mm)} \leq 180 \text{ MPa}$$
$$a = 131.94 \text{ mm}$$
$$a = 132 \text{ mm}$$

**2. Dibujar los Círculos de Mohr asociados al estado tensional del punto ‘A’ de la sección ‘B’ de la viga, indicando la localización de los ejes coordenados. Si existieran varias opciones elegir aquella que de tensiones principales mayores.**

Tomando del apartado anterior un valor de ‘a’ = 173 mm, se aplica la ley de Navier en la sección B y se tiene la siguiente tensión en el punto A(80,-86.5) mm:



Ley de Navier en A(80,-86.5) mm:

$$\sigma_{x,B}^A(y = 80) = \frac{-200 \cdot 10^3 \text{ (N)}}{34600 \text{ (mm}^2\text{)}} - \frac{200 \cdot 10^6 \text{ (N} \cdot \text{mm)}}{\frac{34600}{3} \cdot 10^4 \text{ (mm}^4\text{)}} \cdot 80 \text{ (mm)} = -144.51 \text{ MPa}$$

Ahora se calcula la tensión cortante en la sección B con la fórmula de Collignon:

$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{V_y(x) \cdot m_z(y)}{a \cdot I_z}$$

En la sección B existe una carga hacia abajo que cambia el esfuerzo cortante en signo y valor. Como el enunciado puntualiza que sea seleccionado aquel que dé lugar a unas mayores tensiones principales, se selecciona el esfuerzo cortante por la derecha,  $V_y = 2500 \text{ N}$ . Antes de aplicar Collignon, se calcula el momento estático de la sección respecto al eje  $z$  para una coordenada  $y$  genérica:

$$m_z(y) = \int_A y \cdot dA = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_y^{\frac{h}{2}} y \cdot dy dx = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_y^{\frac{h}{2}} y \cdot dy = a \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_{y=y}^{y=\frac{h}{2}} = \frac{a}{2} \cdot \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

Otra forma puede ser:

$$m_z(y) = \int_A y \cdot dA = y_g \cdot A = \frac{\left(\frac{h}{2} + y\right)}{2} \cdot \left( a \cdot \left( \frac{h}{2} - y \right) \right) = \frac{a}{2} \cdot \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

Particularizamos el momento estático para la coordenada  $y = 80 \text{ mm}$ , y teniendo en cuenta el sentido de la rebanada, se aplica la fórmula de Collignon:

$$\tau_{xy}^A(y = 80) = \frac{2500 \cdot m_z(y = 80)}{a \cdot I_z} = \frac{2500 \text{ (N)} \cdot \frac{a}{2} \cdot \left( \frac{(200)^2}{4} - (80)^2 \right) \text{ (mm}^3\text{)}}{a \text{ (mm)} \cdot \left( \frac{1}{12} \cdot a \cdot (200)^3 \right) \text{ (mm}^4\text{)}} = 39.02 \text{ MPa}$$

A continuación, se construye el tensor de tensiones del punto A:

$$[T] = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -144.51 & 39.02 & 0 \\ 39.02 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

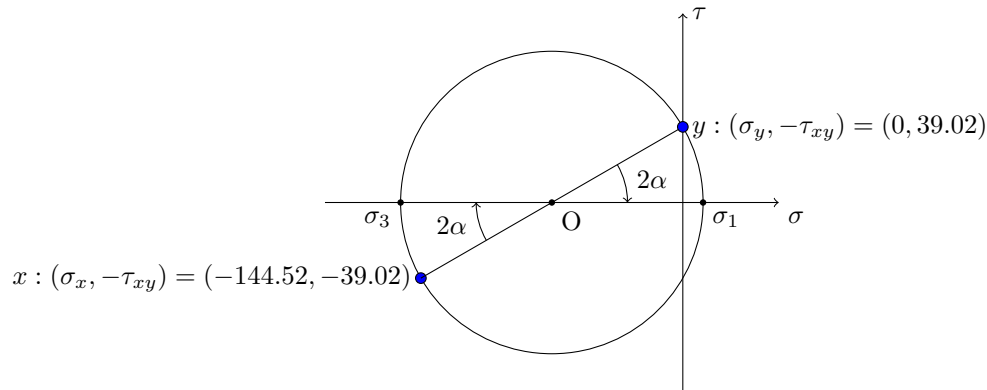
y se calculan las tensiones principales con las fórmulas del Círculo de Mohr:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + (\tau_{xy})^2} = \frac{(-144.51)}{2} + \sqrt{\left( \frac{-144.51}{2} \right)^2 + (39.02)^2} = 9.86 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + (\tau_{xy})^2} = \frac{(-144.51)}{2} - \sqrt{\left( \frac{-144.51}{2} \right)^2 + (39.02)^2} = -154.37 \text{ MPa}$$





El ángulo  $\alpha$  que forman los ejes principales respecto a los ejes coordenados se calcula como:

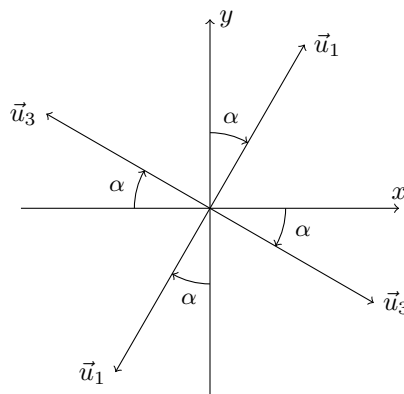
$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 39.02}{-144.52 - 0} \rightarrow \alpha = 14.18^\circ \text{ (horario } \curvearrowright \text{)}$$

### 3. Sobre los Círculos de Mohr calcular la tensión principal máxima: Módulo y plano (indicar el plano por su vector director).

Cuando se construye el tensor de tensiones del estado tensional del punto A, al diagonalizar la matriz para hallar las tensiones principales también es posible hallar la matriz de Paso  $[P]$ , cuyas columnas son los autovectores, y a su vez, los vectores directores de los planos donde se producen las tensiones principales. Así, la matriz  $[P]$  es:

$$[P] = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.9695 & -0.2450 \\ 0.2450 & -0.9695 \end{pmatrix} = ( \vec{u}_3 \mid \vec{u}_1 )$$

Por lo tanto, la primera columna de la matriz  $[P]$  será el vector director que se requiere, es decir, aquel que define el plano en el que se da la mayor de las tensiones principales ( $\sigma_3$ ).



Por lo tanto el vector director del plano donde se produce la mayor tension principal es:

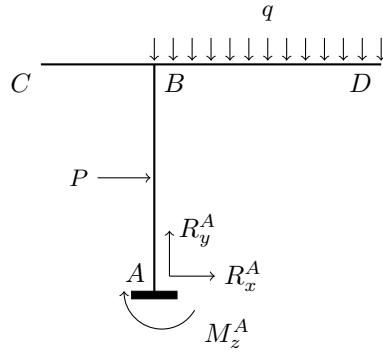
$$\vec{u}_3 = (-0.9695, 0.2450, 0)$$



## 2. Ejercicio 2:

1. los diagramas de momentos flectores, cortantes y axiles, acotando los valores más característicos.

Sistema isostático, tres ecuaciones y tres incógnitas supuestas en el sentido positivo de los ejes coordenados:  $R_x^A$ ,  $R_y^A$ ,  $M_z^A$ .



Reacciones:

$$\begin{aligned} x : R_x^A &= -P \\ y : R_y^A &= q \cdot 2L \end{aligned}$$

Momentos:

$$M_z^A + P \cdot L + q \cdot \frac{(2L)^2}{2} = 0$$

$$R_x^A = -500 \text{ N} ; \quad R_y^A = 2000 \text{ N} ; \quad M_z^A = -2500 \text{ N} \cdot \text{m} ;$$

Discretización del tramo AB desde A:

**Momento Flector**  $M_z(x)$  (N·m):

$$M_z(x) = \begin{cases} -2500 + 500 \cdot x & \text{si } 0 < x < 1 \text{ m} \\ -2500 + 500 \cdot x - 500 \cdot (x - 1) & \text{si } 1 < x < 2 \text{ m} \end{cases}$$

**Esfuerzo Cortante**  $V_y(x)$  (N):

$$V_y(x) = \begin{cases} 500 & \text{si } 0 < x < 1 \text{ m} \\ 0 & \text{si } 1 < x < 2 \text{ m} \end{cases}$$

**Esfuerzo Axil**  $N(x)$  (N):

$$V_y(x) = \begin{cases} -2000 & \text{si } 0 < x < 1 \text{ m} \end{cases}$$

Discretización del tramo BC desde B:

**Momento Flector**  $M_z(x)$  (N·m):

$$M_z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < 1 \text{ m} \end{cases}$$

**Esfuerzo Cortante**  $V_y(x)$  (N):

$$V_y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < 1 \text{ m} \end{cases}$$

Discretización del tramo BD desde B:

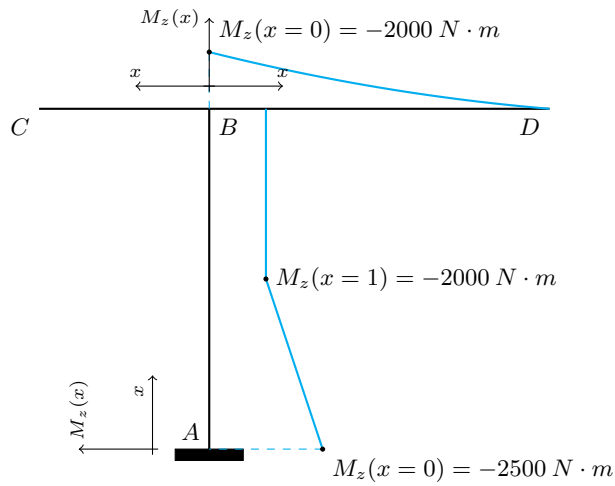
**Momento Flector  $M_z(x)$  (N·m):**

$$M_z(x) = \begin{cases} -2000 + 2000 \cdot -500 \cdot \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 < x < 2 \text{ m} \end{cases}$$

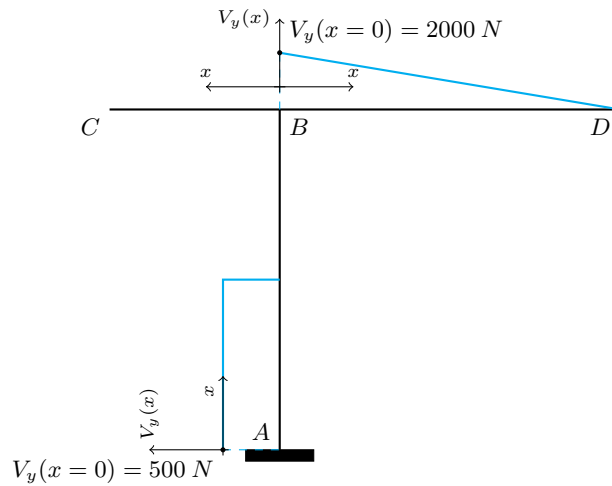
**Esfuerzo Cortante  $V_y(x)$  (N):**

$$V_y(x) = \begin{cases} 2000 - 500 \cdot x & \text{si } 0 < x < 1 \text{ m} \end{cases}$$

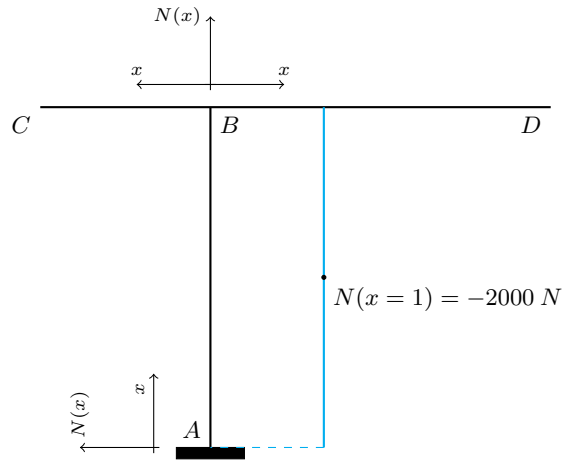
**Diagramas de Momentos Flectores:**



**Diagramas de Esfuerzos Cortantes:**



## Diagramas de Esfuerzos Axiles:



**2. Si el material tiene una tensión admisible de 235 MPa, dimensionar el diámetro mínimo de la sección del redondo a emplear.**

Para dimensionar el redondo se selecciona la sección más solicitada que es el empotramiento en A, en la coordenada  $x = 0$  m. En ella se suman:

- Axil a compresión en fibras inferiores.
- Flector negativo que comprime las fibras inferiores y junto con el axil a compresión, convierte este punto en el más crítico (coordenada  $y = -R$ ).

A continuación, aplicando la ley de Navier:

$$\sigma_x(x, y, z) = \frac{N(x)}{\Omega} - \frac{M_z(x)}{I_z} \cdot y + \frac{M_y(x)}{I_y} \cdot z \leq \sigma_{adm}$$

Particularizando los valores para la sección más crítica en el empotramiento en la coordenada  $x = 0$  m:

$$\sigma_x^A(y = -R) = \frac{-2000 \text{ (N)}}{\pi R^2 \text{ (mm}^2\text{)}} - \frac{-2500 \cdot 10^3 \cdot 10^6 \text{ (N} \cdot \text{mm)}}{\frac{\pi R^3}{4} \text{ (mm}^3\text{)}} \cdot (-R) \leq 235 \text{ MPa}$$

$$R \leq 23.88 \text{ mm}$$

$$\phi \leq 47.76 \text{ mm}$$

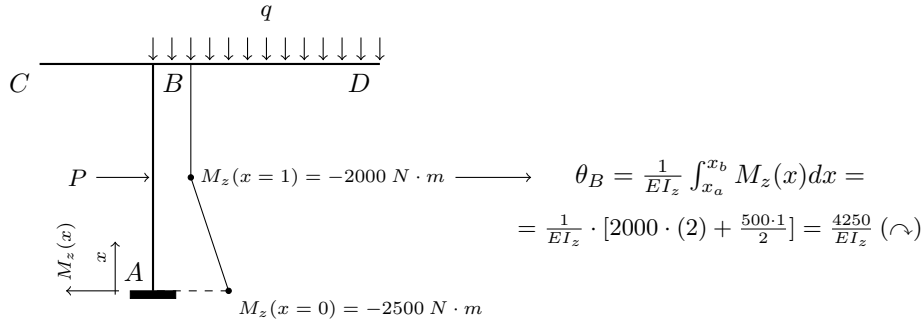


### 3. Ejercicio 3:

#### 1. Determinar el desplazamiento vertical en el extremo libre D.

Para calcular el desplazamiento vertical del extremo D, se llevará a cabo el siguiente proceso:

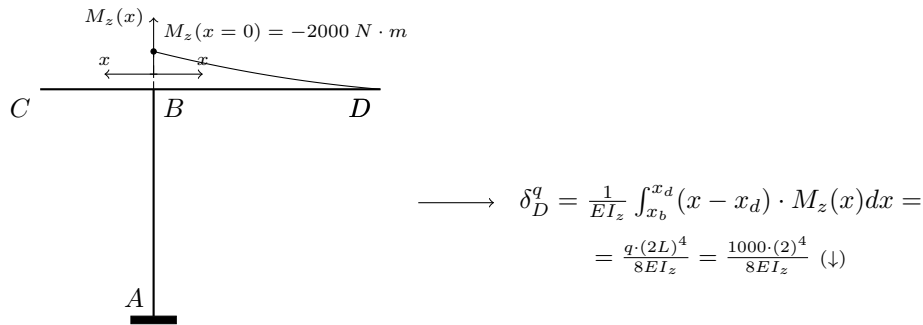
1. Cálculo del giro del extremo B ( $\theta_B$ ).
  2. Cálculo del desplazamiento del extremo D, debido a dicho giro ( $\delta_D^{\theta_B}$ ).
  3. Cálculo del desplazamiento del extremo D, debido a la carga  $q$ , ( $\delta_D^q$ ).
1. Cálculo del giro del extremo B ( $\theta_B$ ).



2. Cálculo del desplazamiento del extremo D, debido a dicho giro ( $\delta_D^{\theta_B}$ ). Será el ángulo girado en B por la distancia  $BD = 2L = 2$  m.

$$\delta_D^{\theta_B} = \theta_B \cdot 2L = \frac{4250}{EI_z} \cdot 2 = \frac{8500}{EI_z} (\downarrow)$$

3. Cálculo del desplazamiento del extremo D, debido a la carga  $q$ , ( $\delta_D^q$ ). Una vez conocido el desplazamiento de B (en este caso se puede despreciar debido a su reducida influencia en el desplazamiento de D en comparación con la del ángulo girado en B ( $\theta_B$ )) y el giro en B, ‘se empotra’ dicho extremo y se calcula la contribución a la flecha de la carga distribuida  $q$ .



Aplicando superposición, se suman todas las contribuciones de cada una de las cargas y se obtiene:

$$\delta_D = \delta_D^{\theta_B} + \delta_D^q = \frac{8500}{EI_z} (\downarrow) + \frac{1000 \cdot (2)^4}{8EI_z} (\downarrow) = \frac{10500}{EI_z} (\downarrow)$$

Particularizando los valores numéricos de los parámetros (Acero, 210 GPa):

$$\delta_D = \frac{10500 (N \cdot m^3)}{210 \cdot 10^3 (MPa) \cdot \frac{\pi \cdot a^4}{4}} = 191.88 \text{ mm} \approx 0.2 \text{ m}$$





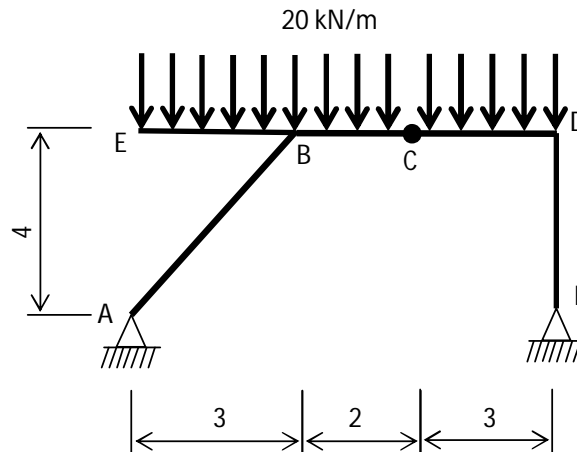
**Departamento de Ingeniería Mecánica**  
**Resistencia de Materiales**  
**3 IEM**

**Examen Diciembre 2013**

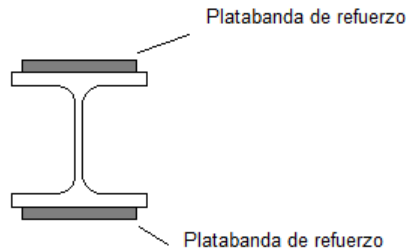
Apellidos y Nombre: \_\_\_\_\_

**EJERCICIO 1; 3/10 PUNTOS**

Sobre la estructura de la figura, que está realizada en acero con un límite elástico de 235 MPa, y tiene una articulación en C ...



1. Dibujar los diagramas de esfuerzos acotando los valores significativos
2. Dimensionar el perfil HEB a emplear en el tramo DE con un coeficiente de seguridad de 1.1. Dibujar el cubo elemental de tensiones en el punto central del alma del perfil. Determinar las tensiones principales
3. Si el tramo EB está realizado con un perfil HEB160, y en caso de que sea necesario, identificar la longitud de la zona a reforzar de dicho perfil (acotarla claramente con un dibujo) y determinar la sección de las platabandas de refuerzo a emplear si se usara chapa 10 mm de espesor para realizarlas



4. Si la platabanda anterior se uniera mediante soldadura discontinua como se indica en el croquis inferior. Calcular la garganta mínima del cordón con un coeficiente de seguridad de 1.1 (usar el mismo límite elástico que el material base)



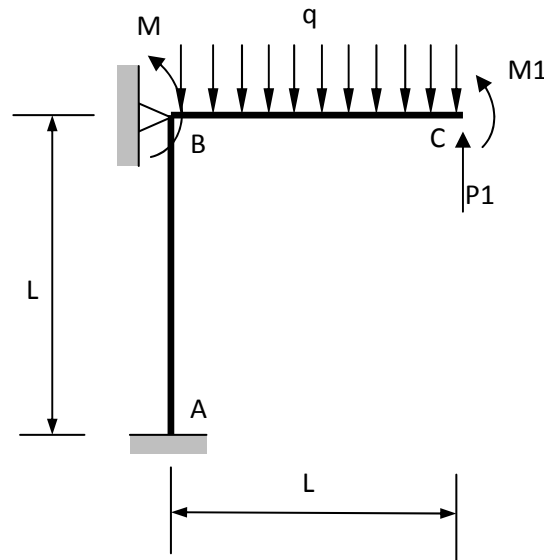
Departamento de Ingeniería Mecánica  
Resistencia de Materiales  
3 IEM

Examen Diciembre 2013

EJERCICIO 2; 3/10 PUNTOS

Apellidos y Nombre: \_\_\_\_\_

Dada la estructura de la figura, de acero y formada con perfiles HEB



1. Calcular  $P1$  y  $M1$  de modo que en el punto de aplicación de dichas cargas (punto C) el desplazamiento vertical y el giro sean nulos
2. Si  $M = 22.0 \text{ kNm}$ ,  $q = 14.0 \text{ kN/m}$ ,  $L = 4.0 \text{ m}$ ,  $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ ,  $\mu = 0.3$  y los valores de  $P1$  y  $M1$  calculados en el apartado anterior ...
  - a) Representar los diagramas de esfuerzos normales, cortantes y flectores; acotando los puntos más característicos
  - b) Dimensionar tomando  $\sigma_{adm} = 160 \text{ MPa}$
  - c) Dibujar a estima, pero cuidando los detalles, la deformada
3. Manteniendo  $q$ ,  $M$  y el apoyo fijo, se quita la barra vertical y se pone un empotramiento en el punto C. ¿Seguirá siendo válido el perfil elegido?
4. Con la barra vertical eliminada,  $M = 0.0 \text{ kNm}$  y sustituyendo el empotramiento C por un apoyo articulado fijo, calcular, **empleando los teoremas de Mohr**
  - a) Giro en los extremos
  - b) Desplazamiento máximo

Notas:

- Si los resultados del apartado 1 no te inspiran confianza toma para resolver el apartado b  $P1 = 27.5 \text{ kN}$  y  $M1 = -18.0 \text{ kNm}$

Examen Diciembre 2013  
Resistencia de Materiales  
3°C, I.E.M



## 1. Ejercicio 1:

### 1. Dibujar los diagramas de esfuerzos acotando los valores significativos.

Sistema isostático, cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas supuestas en el sentido positivo de los ejes coordenados:  $R_x^A$ ,  $R_y^A$ ,  $R_x^E$ ,  $R_y^E$ .

Reacciones:

$$\begin{aligned}x : R_x^A + R_x^E &= 0 \\y : R_y^A + R_y^E &= q \cdot 8\end{aligned}$$

Momentos:

$$z : \begin{cases} -R_y^A \cdot 5 + q \cdot \frac{(5)^2}{2} + R_x^A \cdot 4 = 0 \\ R_y^E \cdot 3 + R_x^E \cdot 4 - q \cdot \frac{(3)^2}{2} = 0 \end{cases}$$

$$R_x^A = 37.5 \text{ kN}; \quad R_y^A = 80 \text{ kN}; \quad R_x^E = -37.5 \text{ kN}; \quad R_y^E = 80 \text{ kN};$$

Discretización del tramo AB desde A:

**Momento Flector**  $M_z(x)$  (kN·m):

$$M_z(x) = \begin{cases} 18 \cdot x & \text{si } 0 < x < 5 \text{ m} \end{cases}$$

**Esfuerzo Cortante**  $V_y(x)$  (kN):

$$V_y(x) = \begin{cases} 18 & \text{si } 0 < x < 5 \text{ m} \end{cases}$$

**Esfuerzo Axil**  $N(x)$  (kN):

$$N(x) = \begin{cases} -86.5 & \text{si } 0 < x < 5 \text{ m} \end{cases}$$

Discretización del tramo DCBE desde D:

**Momento Flector**  $M_z(x)$  (kN·m):

$$M_z(x) = \begin{cases} -150 + 80 \cdot x - 20 \cdot \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 < x < 5 \text{ m} \\ -150 + 80 \cdot x - 20 \cdot \frac{x^2}{2} - 90 + 80 \cdot (x - 5) & \text{si } 5 < x < 8 \text{ m} \end{cases}$$

**Esfuerzo Cortante**  $V_y(x)$  (kN):

$$V_y(x) = \begin{cases} 80 - 20 \cdot x & \text{si } 0 < x < 5 \text{ m} \\ 80 - 20 \cdot x + 80 & \text{si } 5 < x < 8 \text{ m} \end{cases}$$

**Esfuerzo Axil**  $N(x)$  (kN):

$$N(x) = \begin{cases} -37.5 & \text{si } 0 < x < 5 \text{ m} \\ 0 & \text{si } 5 < x < 8 \text{ m} \end{cases}$$

Discretización del tramo DE desde E:

**Momento Flector**  $M_z(x)$  (kN·m):

$$M_z(x) = \begin{cases} 37.5 \cdot x & \text{si } 0 < x < 4 \text{ m} \end{cases}$$

**Esfuerzo Cortante**  $V_y(x)$  (kN):

$$V_y(x) = \begin{cases} 37.5 & \text{si } 0 < x < 4 \text{ m} \end{cases}$$

**Esfuerzo Axil**  $N(x)$  (kN):

$$N(x) = \begin{cases} -80 & \text{si } 0 < x < 4 \text{ m} \end{cases}$$

Diagrama de Momentos Flectores

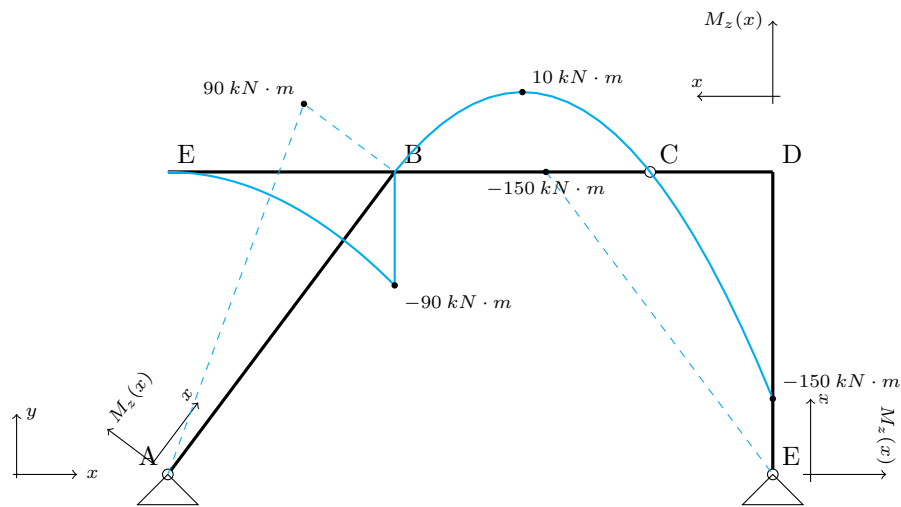


Diagrama de Esfuerzos Cortantes

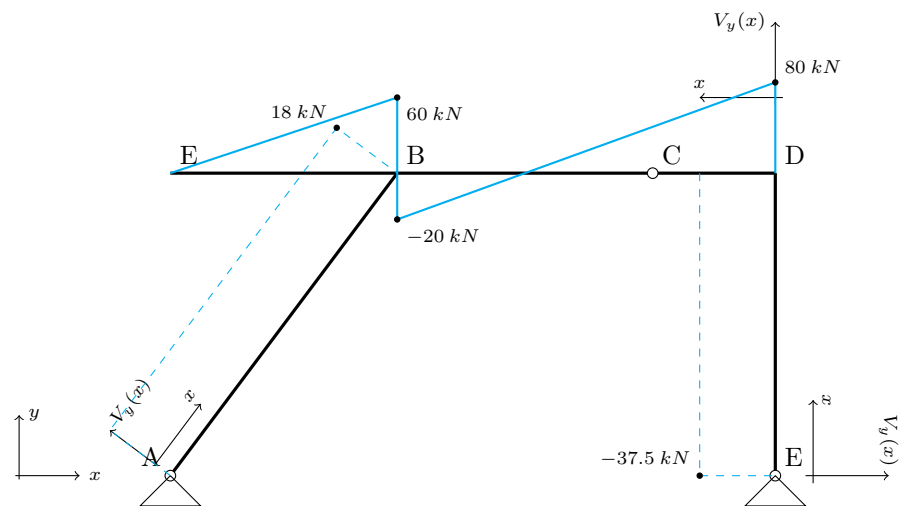
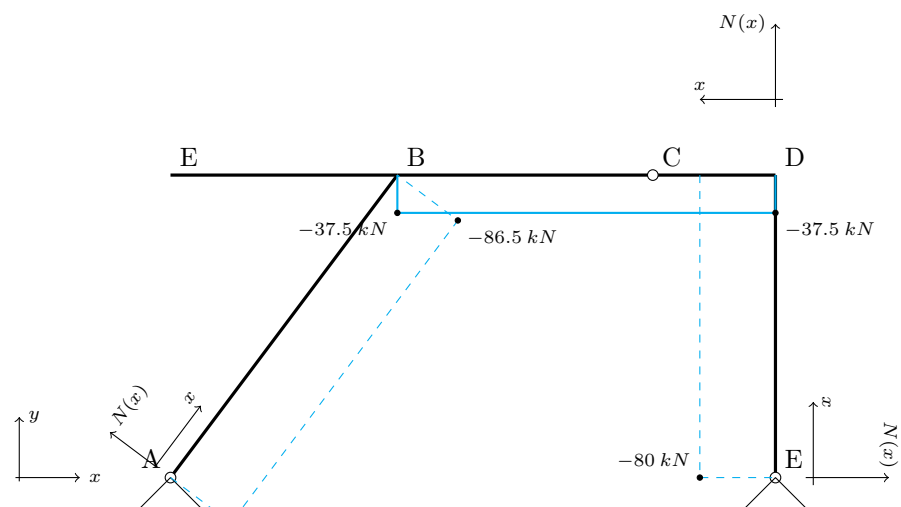


Diagrama de Esfuerzos Axiales



**2. Dimensionar el perfil HEB a emplear en el tramo DE con un coeficiente de seguridad 1.1. Dibujar el cubo elemental de tensiones en el punto central del alma del perfil. Determinar las tensiones principales.**

Para dimensionar el perfil, se hará uso de la ley de Navier:

$$\sigma_x(x, y, z) = \frac{N(x)}{\Omega} - \frac{M_z(x)}{I_z} \cdot y + \frac{M_y(x)}{I_y} \cdot z \leq \frac{\sigma_{adm}}{n}$$

La sección más solicitada se corresponde con el vértice D. El punto más crítico de la sección se dará en toda la coordenada  $y$  negativa, donde se suman la compresión de las fibras inferiores debido al flector y el axil a compresión. Particularizando los valores numéricos para la coordenada  $x = 4$  m de la discretización del tramo DE:

$$\sigma_x(y) = \frac{-80 \cdot 10^3 (N)}{\Omega} - \frac{-150 \cdot 10^6 (N \cdot mm)}{I_z} \cdot y \leq \frac{235}{1.1} MPa$$

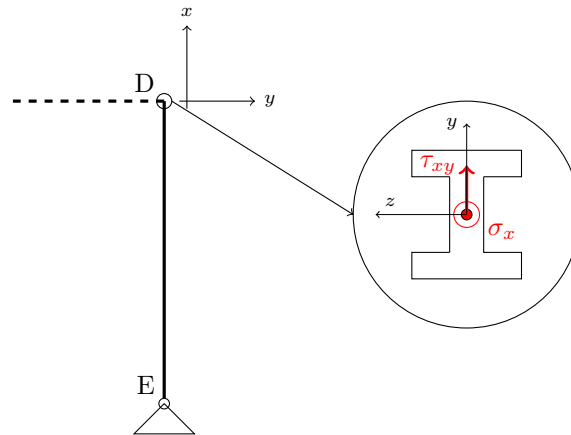
Entrando en el prontuario de perfiles laminados, se prueba con distintos perfiles HEB:

Perfil HEB	Área ( $cm^2$ )	$I_z$ ( $cm^4$ )	$I_y$ ( $cm^4$ )	( $y_o$ ) (mm)	$\sigma_x$ (MPa)
<b>HEB 200</b>	78.1	5696	2003	(-100)	273.40
<b>HEB 220</b>	91	8091	2843	(-110)	212.60

El perfil **HEB 220** es el adecuado para dimensionar la estructura.

#### Cubo elemental de tensiones en el alma del perfil.

El cubo elemental de tensiones en el alma del perfil de la sección D po la derecha tendrá las siguientes componentes:



Con la ley de Navier, se calcula la tensión en el alma del perfil:

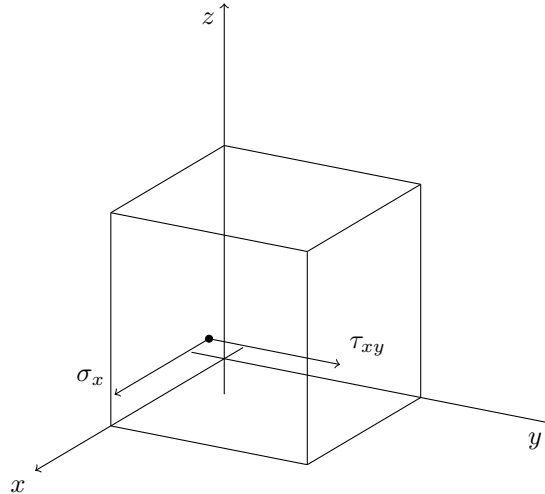
$$\sigma_x(y = 0) = \frac{-80 \cdot 10^3 (N)}{91 \cdot 10^2 (mm^2)} - \frac{-150 \cdot 10^6 (N \cdot mm)}{8091 \cdot 10^4 (mm^4)} \cdot 0 = 8.79 MPa$$

A continuación, con la fórmula de Collignon, se calcula la tensión cortante en el alma del perfil:

$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{V_y(x) \cdot m_z(y)}{I_z \cdot e}$$

Particularizando los valores de todos los parámetros:

$$\tau_{xy}(y = 0) = \frac{V_y(x = 4) \cdot m_z(y = 0)}{I_z \cdot e} = \frac{37.5 \cdot 10^3 (N) \cdot 414 \cdot 10^3 (mm^3)}{8091 \cdot 10^4 (mm^4) \cdot 9.5 (mm)} = 20.19 MPa$$



Esta representación puede depender de como se hallan colocado previamente los ejes coordenados.

Las tensiones principales se calculan con las fórmulas del Círculo de Mohr:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} = \frac{8.79}{2} + \sqrt{\left(\frac{8.79}{2}\right)^2 + (20.19)^2} = 25.06 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} = \frac{8.79}{2} - \sqrt{\left(\frac{8.79}{2}\right)^2 + (20.19)^2} = -16.27 \text{ MPa}$$

**3. Si el tramo EB está realizado con un perfil HEB160, y en caso de que sea necesario, identificar la longitud de la zona a reforzar de dicho perfil (acotarla claramente con un dibujo) y determinar la sección de las platabandas de refuerzo a emplear si se usara chapa 10 mm de espesor para realizarlas.**

Del prontuario de perfiles laminados, se conocen las características geométricas del perfil HEB:

$$A = 54.3 \text{ cm}^2; \quad W_z = 311 \text{ cm}^3; \quad I_z = 2492 \text{ cm}^4;$$

por lo que el momento flector máximo admisible en dicho tramo será (despejando de la ley de Navier):

$$\sigma_x = \frac{M_z(x)}{W_z} \leq \sigma_{adm}$$

$$M_z(x) = W_z \cdot \sigma_{adm}$$

$$M_z(x) = (-)73.085 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Así, para todos los momentos flectores por debajo de dicho valor será necesario reforzar el tramo donde tengan lugar. Se puede calcular el tramo a reforzar igualando la discretización al máximo momento flector admisible:

$$M_z(x) = -150 + 80 \cdot x - 20 \cdot \frac{x^2}{2} - 90 + 80 \cdot (x - 5) = -73.085$$

$$x = 5.29 \text{ m}$$

por lo que en el intervalo  $5 < x < 5.29 \text{ m}$  el momento flector provoca una tensión mayor de la admisible y por tanto ese es el tramo a reforzar con platabandas. A continuación, se dimensiona el ancho de las platabandas, que tienen un espesor de 10 mm:

$$\sigma_x \left( y = \frac{h}{2} + 10 \right) = \frac{M_z(x=5)}{I_z^{HEB} + I_z^{Pb}} \cdot \left( \frac{h}{2} + 10 \right)$$

$$\sigma_x \left( y = \frac{h}{2} + 10 \right) = \frac{90 \cdot 10^6 \text{ (N} \cdot \text{mm)}}{2492 \cdot 10^4 + 2 \cdot \left[ \frac{1}{12} \cdot b \cdot 10^3 + 10 \cdot b \cdot \left( 80 + \frac{10}{2} \right)^2 \right] \text{ (mm}^4\text{)}} \cdot (80 + 10) \text{ (mm)} \leq 235 \text{ MPa}$$

$$b \geq 66.00 \text{ mm}$$



El ancho ( $b$ ) de las platabandas será como mínimo de **66.00** mm.

**4. Si la platabanda anterior se uniera mediante soldadura discontinua como se indica en el croquis inferior. Calcular la garganta mínima del cordón con un coeficiente de seguridad de 1.1 (usar el mismo límite elástico que el material base).**

Para calcular la garganta mínima de soldadura, se puede despejar el valor de la misma de la siguiente ecuación:

$$\tau_{sold} \cdot g \cdot n \cdot l = \tau \cdot b \cdot L$$

donde  $g$  es la longitud de la garganta,  $n$  el número de soldaduras,  $l$  la longitud del cordón,  $b$  la base y  $L$  el paso. Del enunciado se asumirá que la longitud y el paso tienen la misma dimensión, y que se utilizan dos soldaduras ( $n = 2$ ) por lo que se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\tau \cdot b}{g \cdot n} &\leq \frac{\tau_{sold}}{n_{coef. seg.}} \\ \frac{V_y(x=5) \cdot m_z \left(y = \frac{h}{2} + 10\right) \cdot n_{coef. seg.}}{I_z \cdot n \cdot \tau_{sold}} &\leq g \\ \frac{60000 (N) \cdot (66 \cdot 10 \cdot (80 + 5)) (mm^3) \cdot 1.1}{2492 \cdot 10^4 (mm^4) \cdot 2 \cdot 235} &\leq g \\ 0.31 mm &\leq g \end{aligned}$$



## 2. Ejercicio 2:

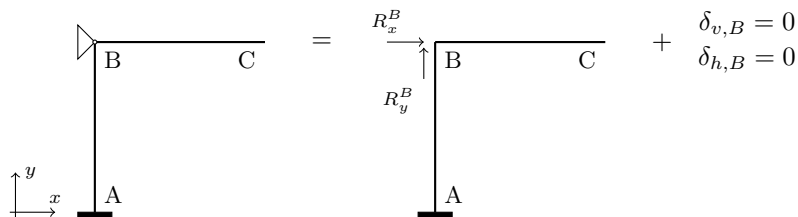
1. Calcular  $P_1$  y  $M_1$  de modo que en el punto de aplicación de dichas cargas (punto C) el desplazamiento vertical y el giro sean nulos.

Sistema hiperestático, tres ecuaciones y cinco incógnitas supuestas en el sentido positivo de los ejes coordenados:  $R_x^A$ ,  $R_y^A$ ,  $M_z^A$ ,  $R_x^B$ ,  $R_y^B$ .

Para resolver el sistema hiperestático se seguirá el siguiente proceso:

1. Se quita la articulación en B, convirtiendo el sistema en isostático, se colocan las dos incógnitas hiperestáticas  $R_x^B$ ,  $R_y^B$  y se trasladan todas las cargas a dicha articulación.
2. Se resuelve ambas incógnitas en función de  $P_1$  y  $M_1$ .
3. Se imponen las condiciones de compatibilidad en B para resolver ambas incógnitas:  $\theta_B = 0$  y  $\delta_{v,B} = 0$ .

1. Conversión de sistema hiperestático a isostático:



2.1. Resolución de la incógnita hiperestática  $R_y^B$ .

1. Deformación en B debido a  $q \cdot L$  ( $\delta_B^{q \cdot L}$ ):

$$\delta_B^{q \cdot L} = \int_0^L \frac{-q \cdot L}{AE} dx = -\frac{q \cdot L^2}{AE} \text{ (compresión } \downarrow)$$

2. Deformación en B debido a  $P_1$  ( $\delta_B^{P_1}$ ):

$$\delta_B^{P_1} = \int_0^L \frac{P_1}{AE} dx = \frac{P_1 \cdot L}{AE} \text{ (tracción } \uparrow)$$

3. Deformación en B debido a  $R_y^B$  ( $\delta_B^{R_y^B}$ ):

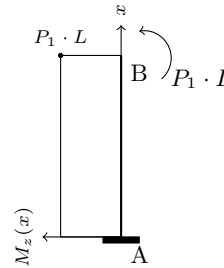
$$\delta_B^{R_y^B} = \int_0^L \frac{R_y^B}{AE} dx = \frac{R_y^B \cdot L}{AE} \text{ (tracción } \uparrow)$$

Imponiendo la condición de compatibilidad de desplazamiento vertical nulo en B ( $\delta_{v,B} = 0$ ), se despeja la incógnita hiperestática  $R_y^B$ :

$$\begin{aligned}\delta_{v,B} &= \delta_B^{q \cdot L} + \delta_B^{P_1} + \delta_B^{R_y^B} = 0 \\ \frac{-q \cdot L^2}{AE} + \frac{P_1 \cdot L}{AE} + \frac{R_y^B \cdot L}{AE} &= 0 \\ R_y^B &= \frac{q \cdot L^2 - P_1 \cdot L}{L} = q \cdot L - P_1\end{aligned}$$

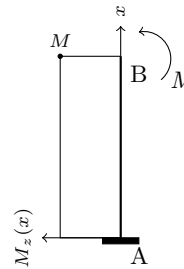
## 2.2. Resolución de la incógnita hiperestática $R_x^B$ .

1. Deformación en B debido a  $P_1 \cdot L$  ( $\delta_B^{P_1 \cdot L}$ ):



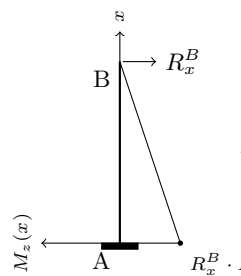
$$\begin{aligned}\delta_B^{P_1 \cdot L} &= \int_0^L (L - x) \cdot \frac{P_1 \cdot L}{EI_z} dx = \\ &= \frac{L}{2} \cdot \frac{P_1 \cdot L^2}{EI_z} = \frac{P_1 \cdot L^3}{2EI_z} (\leftarrow)\end{aligned}$$

2. Deformación en B debido a  $M$  ( $\delta_B^M$ ):



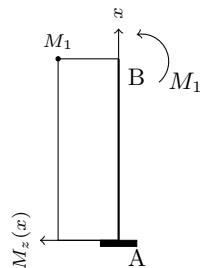
$$\begin{aligned}\delta_B^M &= \int_0^L (L - x) \cdot \frac{M}{EI_z} dx = \\ &= \frac{L}{2} \cdot \frac{M \cdot L}{EI_z} = \frac{M \cdot L^2}{2EI_z} (\leftarrow)\end{aligned}$$

3. Deformación en B debido a  $R_x^B$  ( $\delta_B^{R_x^B}$ ):



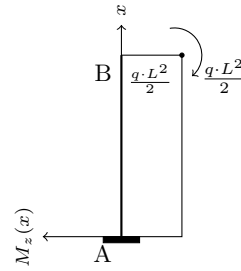
$$\begin{aligned}\delta_B^{R_x^B} &= \int_0^L (L - x) \cdot \frac{-R_x^B \cdot x}{EI_z} dx = \\ &= \frac{2L}{3} \cdot \frac{R_x^B \cdot L^2}{2EI_z} = \frac{R_x^B \cdot L^3}{3EI_z} (\rightarrow)\end{aligned}$$

4. Deformación en B debido a  $M_1$  ( $\delta_B^{M_1}$ ):



$$\begin{aligned}\delta_B^{M_1} &= \int_0^L (L - x) \cdot \frac{M_1}{EI_z} dx = \\ &= \frac{L}{2} \cdot \frac{M_1 \cdot L}{EI_z} = \frac{M_1 \cdot L^2}{2EI_z} (\leftarrow)\end{aligned}$$

5. Deformación en B debido a  $\frac{q \cdot L^2}{2}$  ( $\delta_B^{\frac{q \cdot L^2}{2}}$ ):



$$\delta_B^{\frac{q \cdot L^2}{2}} = \int_0^L (L - x) \cdot \frac{q \cdot L^2}{2EI_z} dx = \frac{L}{2} \cdot \frac{(q \cdot L^2) \cdot L}{2EI_z} = \frac{q \cdot L^4}{4EI_z} (\rightarrow)$$

Imponiendo la condición de compatibilidad de desplazamiento horizontal nulo en B ( $\delta_{h,B} = 0$ ), se despeja la incógnita hiperestática  $R_x^B$ . Se definirán como positivas las flechas que apuntan hacia la derecha:

$$\delta_h = \delta_B^{P_1 \cdot L} + \delta_B^M + \delta_B^{R_x^B} + \delta_B^{M_1} + \delta_B^{\frac{q \cdot L^2}{2}} = 0$$

$$-\frac{P_1 \cdot L^3}{2EI_z} (\leftarrow) - \frac{M \cdot L^2}{2EI_z} (\leftarrow) + \frac{R_x^B \cdot L^3}{3EI_z} (\rightarrow) - \frac{M_1 \cdot L^2}{2EI_z} (\leftarrow) + \frac{q \cdot L^4}{4EI_z} (\rightarrow) = 0$$

$$R_x^B = 3 \cdot \left[ \frac{P_1}{2} + \frac{M + M_1}{2L} - \frac{qL}{4} \right]$$

Una vez resuelto el problema hiperestático, con todas las reacciones hiperestáticas en función de las variables del problema, se procede a imponer las condiciones de compatibilidad especificadas en el enunciado para hallar el valor de  $M_1$  y  $P_1$  que hacen posible dichas condiciones.

**3.1. Giro en C nulo** ( $\theta_C = 0$ ). Para calcular el giro en C, se llevará a cabo el siguiente proceso:

1. Se calcula el giro en B ( $\theta_B$ ).
  2. Una vez conocido este giro, ‘se empotra’ en B, y se calcula el giro en C ( $\theta_C$ ).
  3. Se suman ambos giro para conocer el giro total en C y se impone la condición de compatibilidad en C ( $\theta_C = 0$ ).
1. Giro en B ( $\theta_B$ ). Para calcular este giro se integran los diagramas de momentos flectores de todas las cargas entre A y B, que son los del apartado anterior. Por superposición, se suma la contribución al giro en B de cada una de las cargas. (Definimos como positivo todo ángulo cuyo sentido de giro sea antihorario). Así:

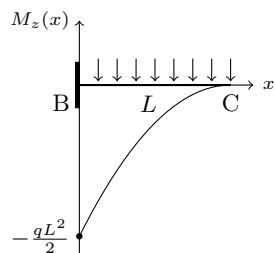
$$\theta_B = \int_{x_a=0}^{x_b=L} \frac{M_z(x)}{EI_z} dx = \theta_B^{P_1 \cdot L} + \theta_B^M + \theta_B^{R_x^B} + \theta_B^{M_1} + \theta_B^{\frac{q \cdot L^2}{2}} =$$

$$= \frac{\left( P_1 \cdot L + M + M_1 - \frac{q \cdot L^2}{2} \right) \cdot L}{EI_z} (\curvearrowright) - \frac{R_x^B \cdot L^2}{EI_z} (\curvearrowright) =$$

$$= \left( \frac{P_1 \cdot L + M + M_1}{4EI_z} - \frac{q \cdot L^2}{8EI_z} \right) \cdot L (\curvearrowright)$$

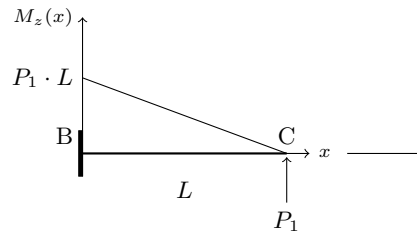
2. ‘Se empotra’ en B, una vez conocido dicho ángulo ( $\theta_B$ ) y se calcula el ángulo en C.

1. Ángulo en C debido a  $q(x)$  ( $\theta_C^q$ ):



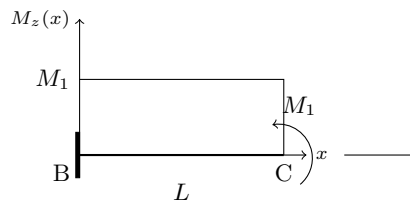
$$\theta_C^q = \frac{1}{EI_z} \int_0^L (-q \cdot \frac{x^2}{2}) dx = \frac{q \cdot L^3}{6EI_z} (\curvearrowright)$$

2. Ángulo en C debido a  $P_1$  ( $\theta_C^{P_1}$ ):



$$\theta_C^{P_1} = \frac{1}{EI_z} \int_0^L (P_1 \cdot x) dx = \frac{P_1 \cdot L^2}{2EI_z} (\curvearrowright)$$

3. Ángulo en C debido a  $M_1$  ( $\theta_C^{M_1}$ ):



$$\theta_C^{M_1} = \frac{1}{EI_z} \int_0^L (M_1) dx = \frac{M_1 \cdot L}{EI_z} (\curvearrowright)$$

3. Imponiendo la condición de compatibilidad de giro nulo en C ( $\theta_C = 0$ ), se obtiene la primera ecuación para hallar  $P_1$  y  $M_1$ . Se definirá como positivo el ángulo girado en sentido antihorario:

$$\theta_C = \theta_B + \theta_C^q + \theta_C^{P_1} + \theta_C^{M_1} = \int_{x_b=0}^{x_c=L} \frac{M_z(x)}{EI_z} dx = \left( \frac{P_1 \cdot L + M + M_1}{4EI_z} - \frac{q \cdot L^2}{8EI_z} \right) \cdot L (\curvearrowright) - \frac{q \cdot L^3}{6EI_z} (\curvearrowleft) + \frac{P_1 \cdot L^2}{2EI_z} (\curvearrowright) + \frac{M_1 \cdot L}{EI_z} (\curvearrowright) = 0$$

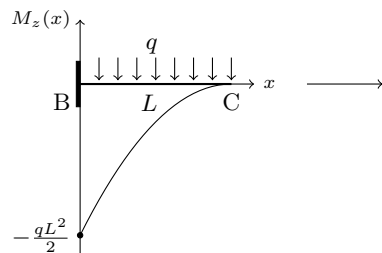
**3.2. Flecha en C nula** ( $\delta_C = 0$ ). Para calcular la flecha en C, se llevará a cabo el siguiente proceso:

1. Se calcula el giro en B ( $\theta_B$ ).
  2. Una vez conocido este giro ( $\theta_B$ ) y su desplazamiento ( $\delta_B = 0$ ), ‘se empotra’ en B, y se calcula la flecha en C ( $\delta_C$ ).
  3. Se calcula la flecha total en C y se impone la condición de compatibilidad en C ( $\delta_C = 0$ ).
1. Giro en B ( $\theta_B$ ). Este giro ya ha sido calculado en el apartado anterior:

$$\theta_B = \left( \frac{P_1 \cdot L + M + M_1}{4EI_z} - \frac{q \cdot L^2}{8EI_z} \right) \cdot L (\curvearrowright)$$

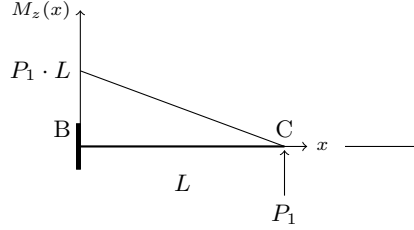
2. ‘Se empotra’ en B, una vez conocido dicho ángulo ( $\theta_B$ ) y se calcula el ángulo en C.

1. Flecha en C debida a  $q$  ( $\delta_C^q$ ):



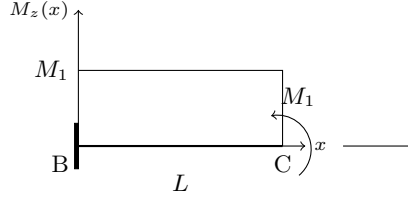
$$\delta_C^q = \frac{1}{EI_z} \int_0^L (L-x) \cdot \left(-q \cdot \frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{q \cdot L^4}{8EI_z} (\downarrow)$$

2. Flecha en C debida a  $P_1$  ( $\delta_C^{P_1}$ ):



$$\delta_C^{P_1} = \frac{1}{EI_z} \int_0^L (L-x) \cdot (P_1 \cdot x) dx = \frac{2L}{3} \cdot \frac{P_1 \cdot L^2}{2EI_z} = \frac{P_1 \cdot L^3}{3EI_z} (\uparrow)$$

3. Flecha en C debida a  $M_1$  ( $\delta_C^{M_1}$ ):



$$\delta_C^{M_1} = \frac{1}{EI_z} \int_0^L (L-x) \cdot (M_1) dx = \frac{M_1 \cdot L^2}{2EI_z} (\uparrow)$$

3. Imponiendo la condición de compatibilidad de flecha nula en C ( $\delta_C = 0$ ), se obtiene la segunda ecuación para hallar  $P_1$  y  $M_1$ . Se definirán como positivas las flechas con sentido descendente, que apunten hacia abajo:

$$\delta_C = \theta_B \cdot L + \delta_C^q + \delta_C^{P_1} + \delta_C^{M_1} = \int_{x_b=0}^{x_c=L} (L-x) \cdot \frac{M_z(x)}{EI_z} dx = - \left( \frac{P_1 \cdot L + M + M_1}{4EI_z} - \frac{q \cdot L^2}{8EI_z} \right) \cdot L^2 (\uparrow) + \frac{q \cdot L^4}{8EI_z} (\downarrow) - \frac{P_1 \cdot L^3}{3EI_z} (\uparrow) - \frac{M_1 \cdot L^2}{2EI_z} (\uparrow) = 0$$

El sistema de ecuaciones resultante tiene la forma:

$$\theta_C = \left( \frac{P_1 \cdot L + M + M_1}{4EI_z} - \frac{q \cdot L^2}{8EI_z} \right) \cdot L (\curvearrowright) - \frac{q \cdot L^3}{6EI_z} (\curvearrowright) + \frac{P_1 \cdot L^2}{2EI_z} (\curvearrowright) + \frac{M_1 \cdot L^2}{EI_z} (\curvearrowright) = 0 \quad (1)$$

$$\delta_C = - \left( \frac{P_1 \cdot L + M + M_1}{4EI_z} - \frac{q \cdot L^2}{8EI_z} \right) \cdot L^2 (\uparrow) + \frac{q \cdot L^4}{8EI_z} (\downarrow) - \frac{P_1 \cdot L^3}{3EI_z} (\uparrow) - \frac{M_1 \cdot L^2}{2EI_z} (\uparrow) = 0 \quad (2)$$

Reordenando los términos y reagrupando se queda un sistema como el que sigue:

$$\begin{pmatrix} \frac{3L}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{-7L}{12} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ M_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7q \cdot L^2}{24} - \frac{M}{4} \\ \frac{-q \cdot L^2}{4} + \frac{M}{4} \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ M_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3L}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{-7L}{12} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{7q \cdot L^2}{24} - \frac{M}{4} \\ \frac{-q \cdot L^2}{4} + \frac{M}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3 \cdot (3q \cdot L^2 - 4M)}{16L} \\ \frac{M}{4} - \frac{5 \cdot q \cdot L^2}{48} \end{pmatrix}$$

Particularizando los valores numéricos de todos los parámetros:

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ M_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3 \cdot (3q \cdot L^2 - 4M)}{16L} \\ \frac{M}{4} - \frac{5 \cdot q \cdot L^2}{48} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{219}{8} \text{ kN} \\ -\frac{107}{6} \text{ kN} \cdot \text{m} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 27.375 \text{ kN} \\ -17.833 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{pmatrix}$$

2. Si  $M = 22.0 \text{ kNm}$ ,  $q = 14.0 \text{ kN/m}$ ,  $L = 4.0 \text{ m}$ ,  $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ ,  $\mu = 0.3$  y los valores de  $P_1$  y  $M_1$  calculados en el apartado anterior...

1. Representar los diagramas de esfuerzos normales, cortantes y flectores; acotando los puntos más característicos.

2. Dimensionar tomando  $\sigma_{adm} = 160 \text{ MPa}$ .

3. Dibujar a estima, pero cuidando los detalles, la deformada.

1. Para dibujar los diagramas de esfuerzos, previamente se particulaizan los valores numéricos de los parámetros que intervienen en las incógnitas hiperestáticas:

$$R_x^B = 3 \cdot \left[ \frac{P_1}{2} + \frac{M + M_1}{2L} - \frac{qL}{4} \right] = 0.625 \text{ kN}$$

$$R_y^B = \frac{q \cdot L^2 - P_1 \cdot L}{L} = q \cdot L - P_1 = 28.625 \text{ kN}$$

Ahora se plantean las ecuaciones de la estática para el sistema isostático, tres ecuaciones y tres incógnitas:

Reacciones:

$$x : R_x^A + R_x^B = 0$$

$$y : R_y^A + R_y^B + P_1 - q \cdot L = 0$$

Momentos:

$$z : M_z^A - M + R_x^B \cdot L + \frac{q \cdot L^2}{2} - M_1 - P_1 \cdot L = 0$$

$$R_x^A = -0.625 \text{ kN}; \quad R_y^A = 0 \text{ kN}; \quad M_z^A = -0.8333 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Discretización del tramo AB desde A:

**Momento Flector**  $M_z(x)$  (kN·m):

$$M_z(x) = \begin{cases} -0.8333 + 0.625 \cdot x & \text{si } 0 < x < 4 \text{ m} \end{cases}$$

**Esfuerzo Cortante**  $V_y(x)$  (kN):

$$V_y(x) = \begin{cases} 0.625 & \text{si } 0 < x < 4 \text{ m} \end{cases}$$

**Esfuerzo Axil**  $N(x)$  (kN):

$$N(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < 4 \text{ m} \end{cases}$$

Discretización del tramo BC desde B:

**Momento Flector**  $M_z(x)$  (kN·m):

$$M_z(x) = \begin{cases} -20.333 + 28.625 \cdot x - 14 \cdot \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 < x < 4 \text{ m} \end{cases}$$

**Esfuerzo Cortante**  $V_y(x)$  (kN):

$$V_y(x) = \begin{cases} 28.625 - 14 \cdot x & \text{si } 0 < x < 4 \text{ m} \end{cases}$$

**Esfuerzo Axil**  $N(x)$  (kN):

$$N(x) = \begin{cases} -0.625 & \text{si } 0 < x < 4 \text{ m} \end{cases}$$



Diagrama de Momentos Flectores

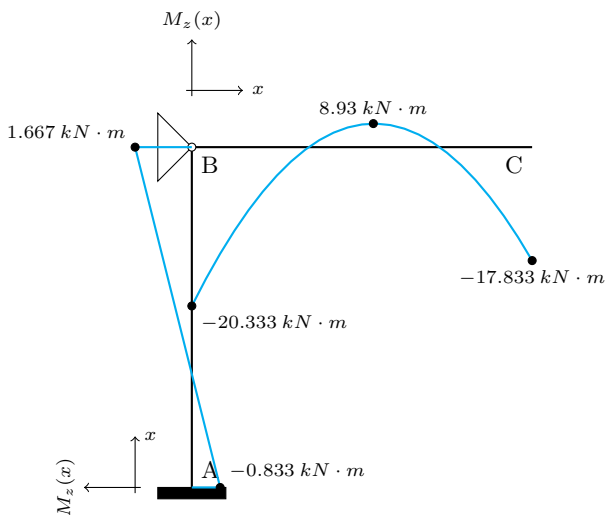


Diagrama de Esfuerzos Cortantes

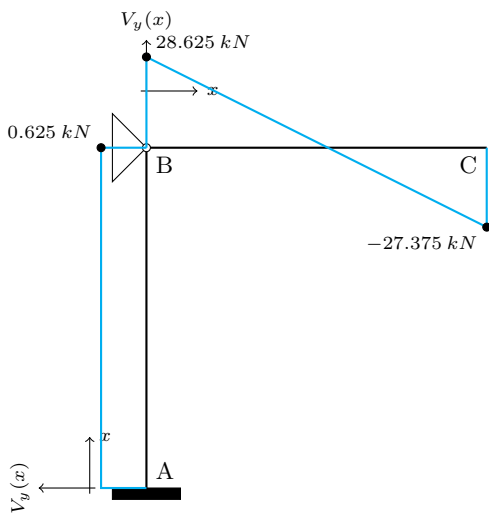
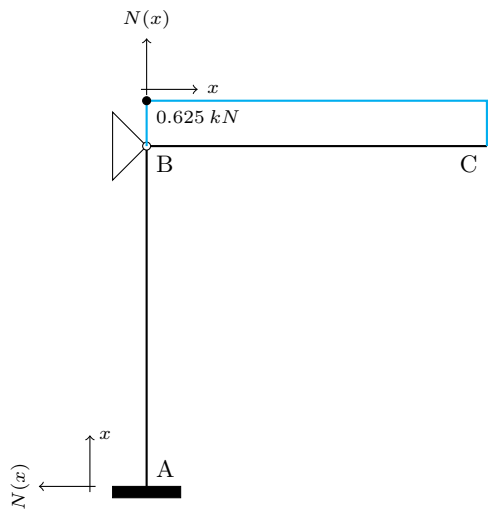


Diagrama de Esfuerzos Axiles



2. Para dimensionar la estructura, se hará uso de la ley de Navier:

$$\sigma_x(x, y, z) = \frac{N(x)}{\Omega} - \frac{M_z(x)}{I_z} \cdot y + \frac{M_y(x)}{I_y} \cdot z \leq \sigma_{adm}$$

Identificando la sección más solicitada de la estructura como aquella que se encuentra en la coordenada  $x = 0$  m, por la derecha, en la discretización del tramo BC, se dimensiona el perfil sabiendo que la coordenada más solicitada del perfil será toda la coordenada  $y = \frac{h}{2}$  positiva donde se suman los efectos del flector que tracciona las fibras superiores y el axil a tracción:

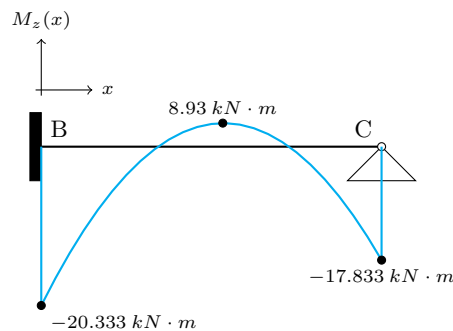
$$\sigma_x \left( y = \frac{h}{2} \right) = \frac{0.625 \cdot 10^3 (N)}{\Omega} - \frac{-20.833 \cdot 10^6 (N \cdot mm)}{W_z} \leq 160 MPa$$

Entrando en el prontuario de perfiles laminados, se prueba con distintos perfiles HEB:

Perfil HEB	Área (cm <sup>2</sup> )	W <sub>z</sub> (cm <sup>3</sup> )	σ <sub>x</sub> (MPa)
<b>HEB 200</b>	78.1	570	36.63
<b>HEB 100</b>	26	90	231.72
<b>HEB 120</b>	34	144	144.68

3. Manteniendo q, M y el apoyo fijo, se quita la barra vertical y se pone un empotramiento en el punto C. ¿Seguirá siendo válido el perfil elegido?

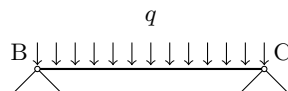
Sí. Con el empotramiento se conservan tanto el momento como la reacción en B, que han sido las reacciones que dan lugar al momento flector utilizado para el dimensionado de la estructura.



4. Con la barra vertical eliminada, M = 0.0 kNm y sustituyendo el empotramiento C por un apoyo articulado fijo, calcular, empleando los teoremas de Mohr:

1. Giro en los extremos
2. Desplazamiento máximo

La estructura resultante será:



1. **Giro en los extremos** ( $\theta_B$ ,  $\theta_C$ ). Con el primer teorema de Mohr, se calcula el giro en los extremos. Haciendo uso de la simetría de la estructura, en el punto medio de la misma el ángulo girado es nulo, por lo que al integrar el diagrama de momentos flectores, este tomará la forma:

$$\theta_B^q = \frac{1}{EI_z} \int_{\frac{L}{2}}^L \left( \frac{q \cdot L}{2} \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{q \cdot L^3}{24EI_z} (\curvearrowright)$$

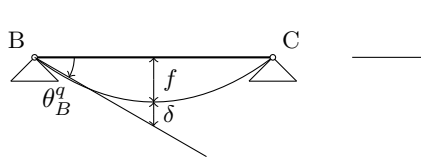
Giro en el extremo B ( $\theta_B$ ):

$$\theta_B^q = \frac{1}{EI_z} \int_0^{\frac{L}{2}} \left( \frac{q \cdot L}{2} \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{q \cdot L^3}{24EI_z} (\curvearrowright)$$

Giro en el extremo C ( $\theta_C$ ):

$$\theta_C^q = \frac{1}{EI_z} \int_{\frac{L}{2}}^L \left( \frac{q \cdot L}{2} \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{q \cdot L^3}{24EI_z} (\curvearrowright)$$

**2. Desplazamiento máximo** ( $f_{x=\frac{L}{2}}^{m\acute{a}x}$ ). En primer lugar, se dibuja la elástica de la viga. Del segundo teorema de Mohr se sabe que la flecha calculada es la distancia entre el punto de corte de la tangente en un punto con la vertical por el punto donde se desea calcular la flecha, y la elástica. Gráficamente:



$$\delta = \frac{1}{EI_z} \int_0^{\frac{L}{2}} \left( \frac{L}{2} - x \right) \cdot \left( \frac{q \cdot L}{2} \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} \right) dx =$$

$$= \frac{q \cdot L^4}{128EI_z} (\curvearrowright)$$

En virtud de la pequeñez de las deformaciones, es posible hacer la siguiente aproximación:

$$\text{tg}(\theta_B) \approx \theta_B = \frac{f + \delta}{\frac{L}{2}} \rightarrow \frac{q \cdot L^3}{24EI_z} = \frac{f + \frac{q \cdot L^4}{128EI_z}}{\frac{L}{2}}$$

$$f = \frac{q \cdot L^4}{48EI_z} - \frac{q \cdot L^4}{128EI_z} = \frac{5 \cdot q \cdot L^4}{384EI_z}$$

Particularizando los valores de todos los parámetros, el desplazamiento máximo es de:

$$f = \frac{5 \cdot 14000 \cdot 4^4 (N \cdot m^3)}{2.1 \cdot 10^{11} (N/m^2) \cdot 864 \cdot 10^{-8} (m^4)} = 0.02572 \text{ m} = 25.72 \text{ mm}$$



**UNIVERSIDAD PONTIFICIA COMILLAS**  
**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA - ICAI**  
**ELASTICIDAD Y RESISTENCIA DE MATERIALES**  
**3º IIND. MAYO 2013**

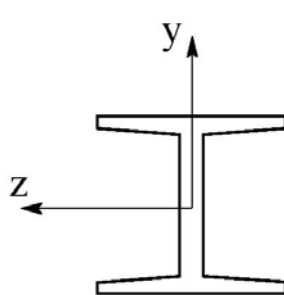
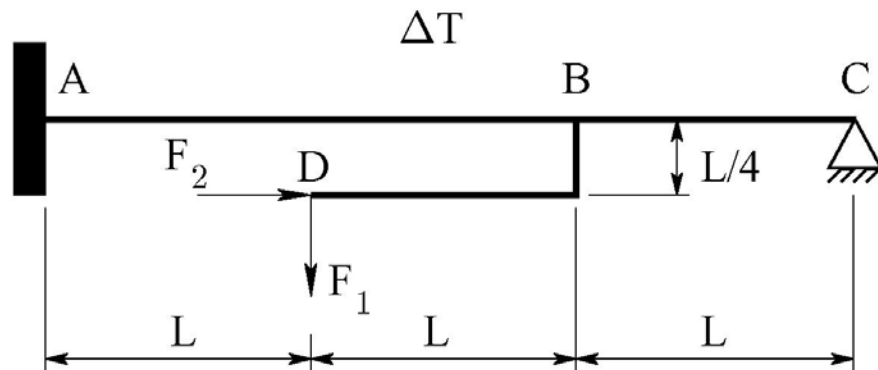
**NOMBRE:** \_\_\_\_\_

**GRUPO:** \_\_\_\_\_

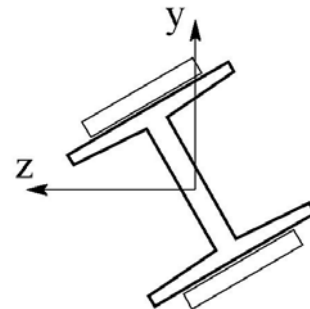
**Ejercicio 1** 60 min (3.5 puntos). Se permite prontuario de resistencia.

Dada la estructura de vigas de acero S235 de la figura, compuesta por tramos de longitud  $L=4$  m, empotrada en el extremo A y apoyada en el otro extremo C, con cargas puntuales  $F_1=40$  kN y  $F_2=20$  kN, además de un incremento de temperatura global  $\Delta T=35^\circ$  siendo  $\alpha=1.2 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ , se pide:

1. Determinar las reacciones en apoyos A y C
2. Dibujar los diagramas de momentos flectores y esfuerzos cortantes y axiales, señalando los valores significativos
3. Dibuja el perfil de tensiones normales en la sección A indicando claramente la posición de la fibra neutra y calcula la deformación principal máxima en el punto más crítico de dicha sección.



a) Diseño inicial del IPE



b) Diseño final del IPE con platabandas

4. Dimensionar el perfil IPE a emplear en el diseño de la viga horizontal indicado en la figura a) justificando claramente cuáles son las secciones susceptibles de análisis.
5. Suponiendo que por motivos estéticos la viga ha de estar girada  $30^\circ$  respecto a su eje longitudinal y que se quieren añadir unas platabandas de sección  $100 \times 10$  mm tal como se aprecia en la figura b), dimensionar la unión atornillada (tensión admisible  $\sigma_{adm}=235$  MPa), indicando el número de tornillos, disposición y paso de los mismos a lo largo de la viga.

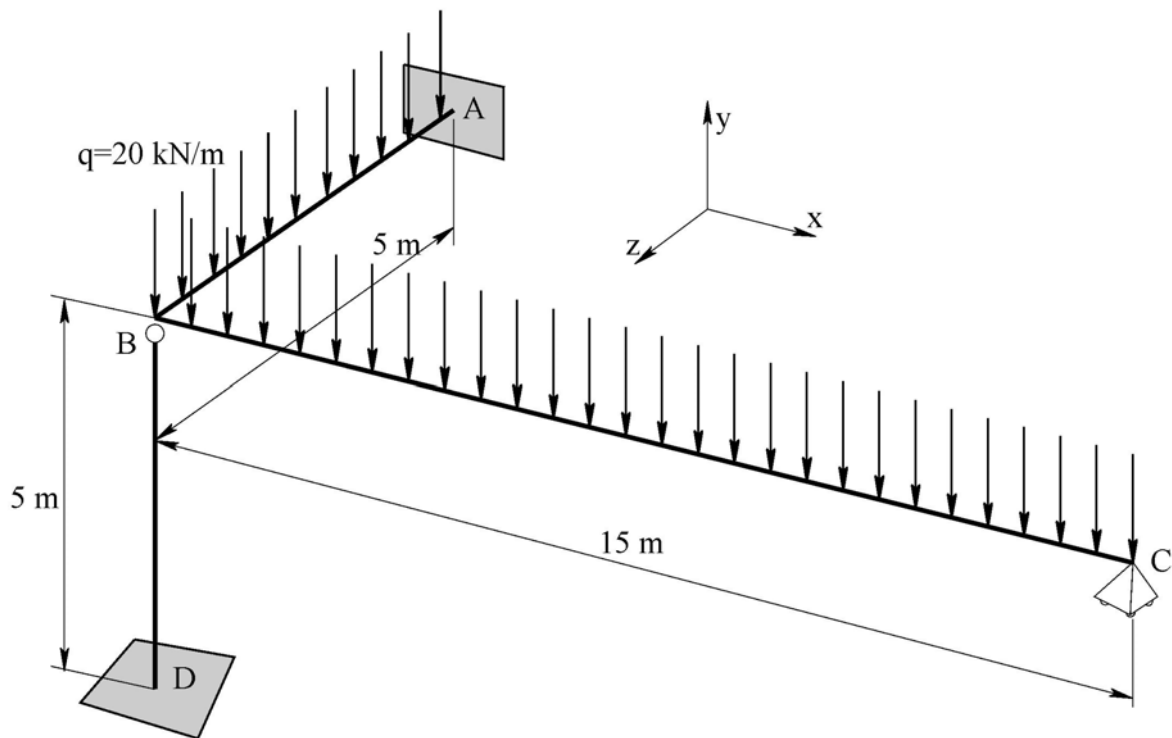
**UNIVERSIDAD PONTIFICIA COMILLAS**  
**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA - ICAI**  
**ELASTICIDAD Y RESISTENCIA DE MATERIALES**  
**3º IIND. MAYO 2013**

**NOMBRE:** \_\_\_\_\_

**GRUPO:** \_\_\_\_\_

**Ejercicio 2** 45 min (3 puntos). Se permite prontuario de resistencia.

La estructura de redondos de acero S235 ( $\sigma_{adm}=235$  MPa) de la figura, empotrada en el extremo A y apoyada en el punto B sobre un pilar articulado y en el extremo C por un apoyo articulado móvil, soporta una carga distribuida  $q = 20$  kN/m, se pide:



1. Determinar las reacciones en apoyos A y C
2. Dibujar los diagramas de momentos flectores, torsores y esfuerzos cortantes y axiales, señalando los valores significativos
3. Determinar el radio del redondo de acero del tramo AB justificando claramente cuáles son las secciones susceptibles de análisis
4. Determinar el radio del pilar DB explicando las hipótesis planteadas

Las simplificaciones que se hagan para resolver el problema hay que justificarlas.

Examen Mayo 2013  
Resistencia de Materiales  
3°C, I.E.M





# 1. Ejercicio 1:

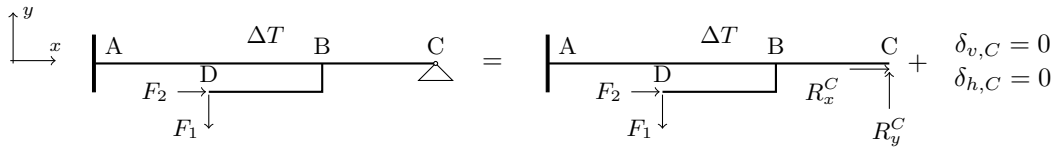
## 1. Determinar las reacciones en apoyos A y C.

Sistema hiperestático, tres ecuaciones y cinco incógnitas supuestas en el sentido positivo de los ejes coordenados:  $R_x^A$ ,  $R_y^A$ ,  $M_z^A$ ,  $R_x^B$ ,  $R_y^B$ .

Para resolver el sistema hiperestático se seguirá el siguiente proceso:

1. Se trasladan todas las cargas a B.
2. Se quita la articulación en C, convirtiendo el sistema en isostático y se colocan las dos incógnitas hiperestáticas  $R_x^B$ ,  $R_y^B$ .
3. Se imponen las condiciones de compatibilidad en B para resolver ambas incógnitas:  $\delta_{h,C} = 0$  y  $\delta_{v,C} = 0$ .

## 1. Conversión de sistema hiperestático a isostático:



## 2.1. Resolución de la incógnita hiperestática $R_x^C$ .

1. Deformación en C debido a  $R_x^C$  ( $\delta_C^{R_x^C}$ ):

$$\delta_C^{R_x^C} = \int_0^{3L} \frac{R_x^C}{AE} dx = \frac{R_x^C \cdot 3L}{AE} \text{ (tracción } \rightarrow \text{)}$$

2. Deformación en C debido a  $F_2$  ( $\delta_C^{F_2}$ ):

$$\delta_C^{F_2} = \int_0^{2L} \frac{F_2}{AE} dx = \frac{F_2 \cdot 2L}{AE} \text{ (tracción } \rightarrow \text{)}$$

3. Deformación en C debido a  $\Delta T$  ( $\delta_C^{\Delta T}$ ):

$$\delta_C^{\Delta T} = \int_0^{3L} \varepsilon_x dx = \int_0^{3L} \alpha \Delta T dx = \alpha \cdot \Delta T \cdot 3L \text{ (tracción } \rightarrow \text{)}$$

Imponiendo la condición de compatibilidad de desplazamiento horizontal nulo en C ( $\delta_{h,C} = 0$ ), se despeja la incógnita hiperestática  $R_x^C$ :

$$\delta_{h,C} = \delta_C^{R_x^C} + \delta_C^{F_2} + \delta_C^{\Delta T} = 0$$

$$\frac{R_x^C \cdot 3L}{AE} + \frac{F_2 \cdot 2L}{AE} + \alpha \cdot \Delta T \cdot 3L = 0$$

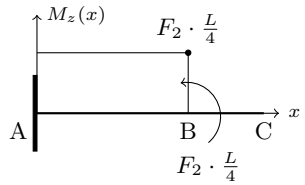
$$R_x^C = - \left[ \frac{\alpha \cdot \Delta T \cdot AE \cdot 3L + F_2 \cdot 2L}{3L} \right] = -\alpha \cdot \Delta T \cdot AE - \frac{2F_2}{3}$$

## 2.2. Resolución de la incógnita hiperestática $R_y^C$ .

Para la resolución de esta incógnita, se habrá de tener en cuenta tanto las flechas verticales como los ángulos girados en B que causen las cargas, que multiplicados por la distancia BC afectarán a la flecha en C ( $\delta_{v,C}$ ) que es la que se requiere para imponer la condición de compatibilidad.

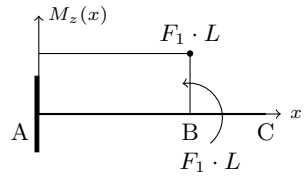
### Ángulos girados en B

1. Ángulo en B debido a  $F_2 \cdot \frac{L}{4}$  ( $\theta_B^{F_2 \cdot \frac{L}{4}}$ ):



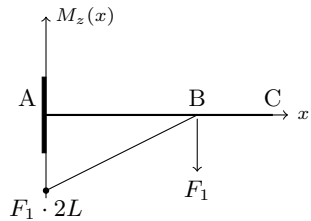
$$\begin{aligned} \theta_B^{F_2 \cdot \frac{L}{4}} &= \frac{1}{EI_z} \int_0^{2L} F_2 \cdot \frac{L}{4} dx \\ &= \frac{F_2 \cdot \frac{L}{4} \cdot (2L)}{EI_z} = \frac{F_2 \cdot L^2}{2EI_z} \quad (\curvearrowright) \end{aligned}$$

2. Ángulo en B debido a  $F_1 \cdot L$  ( $\theta_B^{F_1 \cdot L}$ ):



$$\begin{aligned} \theta_B^{F_1 \cdot L} &= \frac{1}{EI_z} \int_0^{2L} F_1 \cdot L dx \\ &= \frac{F_1 \cdot L \cdot (2L)}{EI_z} = \frac{F_1 \cdot 2L^2}{EI_z} \quad (\curvearrowright) \end{aligned}$$

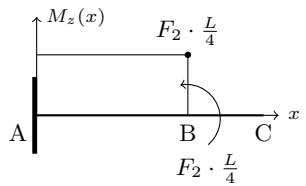
3. Ángulo en B debido a  $F_1$  ( $\theta_B^{F_1}$ ):



$$\begin{aligned} \theta_B^{F_1} &= \frac{1}{EI_z} \int_0^{2L} (-F_1 \cdot x) dx \\ &= \frac{F_1 \cdot (2L)^2}{2EI_z} = \frac{F_1 \cdot 2L^2}{EI_z} \quad (\curvearrowright) \end{aligned}$$

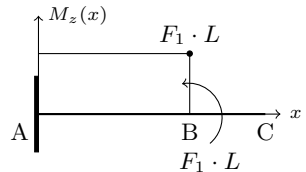
### Flechas en B

1. Flecha en B debido a  $F_2 \cdot \frac{L}{4}$  ( $\delta_B^{F_2 \cdot \frac{L}{4}}$ ):



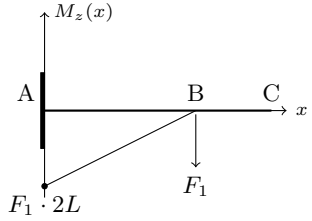
$$\begin{aligned} \delta_B^{F_2 \cdot \frac{L}{4}} &= \frac{1}{EI_z} \int_0^{2L} (2L - x) \cdot F_2 \cdot \frac{L}{4} dx \\ &= \frac{2L}{2} \cdot \frac{F_2 \cdot \frac{L}{4} \cdot (2L)}{EI_z} = \frac{F_2 \cdot L^3}{2EI_z} \quad (\uparrow) \end{aligned}$$

2. Flecha en B debido a  $F_1 \cdot L$  ( $\delta_B^{F_1 \cdot L}$ ):



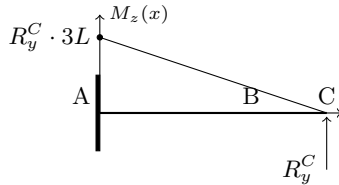
$$\begin{aligned} \delta_B^{F_1 \cdot L} &= \frac{1}{EI_z} \int_0^{2L} (2L - x) \cdot F_1 \cdot L dx \\ &= \frac{2L}{2} \cdot \frac{F_1 \cdot L \cdot (2L)}{EI_z} = \frac{F_1 \cdot 2L^3}{EI_z} \quad (\uparrow) \end{aligned}$$

3. Flecha en B debido a  $F_1$  ( $\delta_B^{F_1}$ ):



$$\begin{aligned}\delta_B^{F_1} &= \frac{1}{EI_z} \int_0^{2L} (2L - x) \cdot (-F_1 \cdot x) dx \\ &= \frac{2 \cdot 2L}{3} \cdot \frac{F_1 \cdot (2L)^2}{2EI_z} = \frac{8F_1 \cdot L^3}{3EI_z} \quad (\downarrow)\end{aligned}$$

4. Flecha en B debido a  $R_y^C$  ( $\delta_B^{R_y^C}$ ):



$$\begin{aligned}\delta_B^{R_y^C} &= \frac{1}{EI_z} \int_0^{3L} (2L - x) \cdot (R_y^C \cdot x) dx \\ &= \frac{2 \cdot 3L}{3} \cdot \frac{R_y^C \cdot (3L)^2}{2EI_z} = \frac{9R_y^C \cdot L^3}{EI_z} \quad (\uparrow)\end{aligned}$$

Las flechas totales en C, donde se ha de imponer la condición de compatibilidad ( $\delta_{v,C}$ ) son:

$$\begin{aligned}\delta_C^{F_2 \cdot \frac{L}{4}} &= \theta_B^{F_2 \cdot \frac{L}{4}} \cdot (L) + \delta_B^{F_2 \cdot \frac{L}{4}} = \frac{F_2 \cdot L^2}{2EI_z} \cdot (L) + \frac{F_2 \cdot L^3}{2EI_z} \quad (\uparrow) \\ \delta_C^{F_1 \cdot L} &= \theta_B^{F_1 \cdot L} \cdot (L) + \delta_B^{F_1 \cdot L} = \frac{F_1 \cdot 2L^2}{EI_z} \cdot (L) + \frac{F_1 \cdot 2L^3}{EI_z} \quad (\uparrow) \\ \delta_C^{F_1} &= \theta_B^{F_1} \cdot (L) + \delta_B^{F_1} = \frac{F_1 \cdot 2L^2}{EI_z} \cdot (L) + \frac{8F_1 \cdot L^3}{3EI_z} \quad (\downarrow) \\ \delta_C^{R_y^C} &= \frac{9R_y^C \cdot L^3}{EI_z} \quad (\uparrow)\end{aligned}$$

Imponiendo la condición de compatibilidad de las deformaciones ( $\delta_{v,C}$ ), se despeja la incógnita hiperestática  $R_y^C$ :

$$\begin{aligned}\delta_{v,C} &= \delta_C^{F_2 \cdot \frac{L}{4}} + \delta_C^{F_1 \cdot L} + \delta_C^{F_1} + \delta_C^{R_y^C} = 0 \\ -\frac{F_2 \cdot L^3}{EI_z} \cdot \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right] \quad (\uparrow) - \frac{F_1 \cdot L^3}{EI_z} \cdot [2 + 2] \quad (\uparrow) + \frac{F_1 \cdot L^3}{EI_z} \left[ 2 + \frac{8}{3} \right] \quad (\downarrow) - \frac{9R_y^C \cdot L^3}{EI_z} \quad (\uparrow) &= 0 \\ 9R_y^C &= \left[ \frac{14}{3} - 4 \right] \cdot F_1 - F_2 \\ R_y^C &= \frac{1}{9} \cdot \left[ \frac{2}{3} \cdot F_1 - F_2 \right]_{F_1=2F_2} \\ R_y^C &= \frac{F_2}{27} = \frac{20}{27} \text{ kN} \approx 0.740 \text{ kN}\end{aligned}$$

**2. Dibujar los diagramas de momentos flectores y esfuerzos cortantes y axiales, señalando los valores significativos.**

Para dibujar los diagramas requeridos, primero es necesario conocer el valor de todas las incógnitas, una vez resuelto el hiperestatismo. Así, planteando las ecuaciones de la estática del sistema isostático con tres ecuaciones y tres incógnitas supuestas en el sentido positivo de los ejes:  $R_x^A$ ,  $R_y^A$ ,  $M_z^A$ .

Reacciones:

$$\begin{aligned}x : R_x^A + R_x^C + F_2 &= 0 \\ y : R_y^A + R_y^C - F_1 &= 0\end{aligned}$$

Momentos:

$$z : M_z^A - (F_1 + \frac{F_2}{4}) \cdot L + F_1 \cdot 2L - R_y^C \cdot 3L = 0$$

$$R_x^A = \alpha \cdot \Delta T \cdot AE - \frac{F_2}{3};$$

$$R_y^A = \frac{53}{27} \cdot F_2 = \frac{1060}{27} \text{ kN} \approx 39.26 \text{ kN};$$

$$R_x^C = -\alpha \cdot \Delta T \cdot AE - \frac{2F_2}{3}$$

$$R_y^C = \frac{F_2}{27} = \frac{20}{27} \text{ kN} \approx 0.740 \text{ kN};$$

$$M_z^A = -\frac{59}{36} \cdot F_2 \cdot L = -\frac{1180}{9} \text{ kN} \cdot \text{m} \approx -131.11 \text{ kN} \cdot \text{m};$$

Discretización del tramo AB desde A:

**Momento Flector**  $M_z(x)$  (kN·m):

$$M_z(x) = \begin{cases} -\frac{1180}{9} + \frac{1060}{27} \cdot x & si \quad 0 < x < 8 \text{ m} \\ -\frac{1180}{9} + \frac{1060}{27} \cdot x - 180 - 40 \cdot (x - 8) & si \quad 8 < x < 12 \text{ m} \end{cases}$$

**Esfuerzo Cortante**  $V_y(x)$  (kN):

$$V_y(x) = \begin{cases} \frac{1060}{27} & si \quad 0 < x < 8 \text{ m} \\ -\frac{20}{27} & si \quad 8 < x < 12 \text{ m} \end{cases}$$

**Esfuerzo Axil**  $N(x)$  (kN):

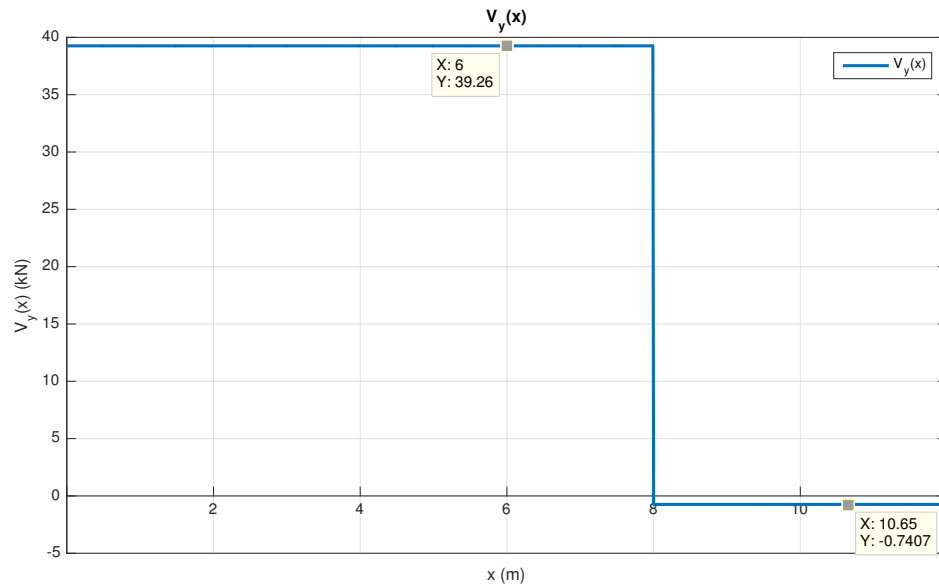
$$N(x) = \begin{cases} -\alpha \cdot \Delta T \cdot AE + \frac{F_2}{3} & si \quad 0 < x < 8 \text{ m} \\ -\alpha \cdot \Delta T \cdot AE - \frac{2F_2}{3} & si \quad 8 < x < 12 \text{ m} \end{cases}$$

**Diagramas Esfuerzos Axiles, Esfuerzos Cortantes y Momentos Flectores:**

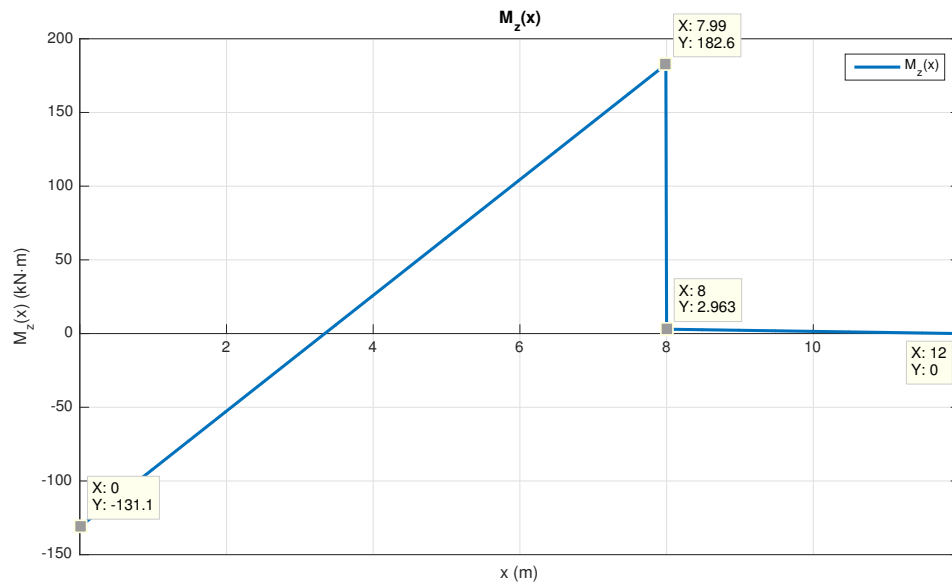
**Esfuerzo Axil**  $N(x)$ :



**Esfuerzo Cortante  $V_y(x)$  (kN):**



**Momento Flector  $M_z(x)$  (kN·m):**



**3. Dibuja el perfil de tensiones normales en la sección A indicando claramente la posición de la fibra neutra y calcula la deformación principal máxima en el punto más crítico de dicha sección.**

Para dibujar el perfil de tensiones normales en la sección A, es necesario conocer primero el área y el momento de inercia del perfil IPE. Como en el enunciado no se dan dichos datos, se procede a resolver el apartado 4 y con los datos del mismo, se resolverá posteriormente este apartado.

**4. Dimensionar el perfil IPE a emplear en el diseño de la viga horizontal indicado en la figura a) justificando claramente cuáles son las secciones susceptibles de análisis.**

El punto más crítico de toda la estructura se encuentra en la coordenada  $x = 8^-$  m por la izquierda. En él se suman el esfuerzo axial a compresión y el momento flector positivo que comprime

las fibras superiores, por lo que el posible fallo será a **compresión**. Aplicando la ley de Navier:

$$\sigma_x(x, y, z) = \frac{N(x)}{\Omega} - \frac{M_z(x)}{I_z} \cdot y + \frac{M_y(x)}{I_y} \cdot z \leq \sigma_{adm}$$

Particularizando los valores correspondientes a la coordenada  $x = 8^-$  m:

$$\sigma_x \left( y = \frac{h}{2} \right) = -\frac{\alpha \cdot \Delta T \cdot AE - \frac{F_2}{3}}{\Omega} - \frac{182.6 \cdot 10^6 \text{ (N} \cdot \text{mm)}}{I_z} \cdot \left( \frac{h}{2} \right) \leq 235 \text{ MPa}$$

Ahora se introducen en la ley de Navier los distintos valores de los parámetros para cada uno de los perfiles IPE:

Perfil HEB	Área ( $\text{cm}^2$ )	$W_z$ ( $\text{cm}^3$ )	$\sigma_x$ (MPa)
<b>HEB 180</b>	23.90	146	1336.10
<b>HEB 330</b>	62.60	713	343.24
<b>HEB 360</b>	72.70	904	289.27
<b>HEB 400</b>	84.50	1160	244.82
<b>HEB 450</b>	98.80	1500	209.26

El perfil seleccionado es un **IPE 450**.

**3. Dibuja el perfil de tensiones normales en la sección A indicando claramente la posición de la fibra neutra y calcula la deformación principal máxima en el punto más crítico de dicha sección.**

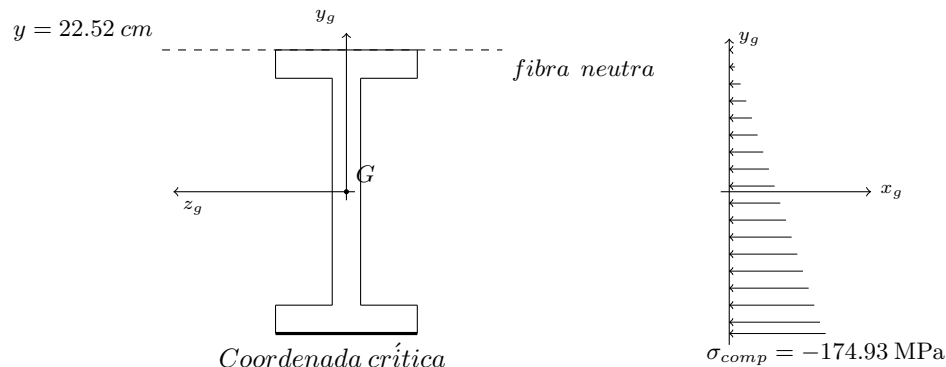
Del prontuario de perfiles laminados se sabe que el perfil IPE 450 presenta las siguientes características geométricas:

$$A = 98.80 \text{ cm}^2; \quad I_z = 33740 \text{ cm}^4; \quad W_z = 1500 \text{ cm}^3;$$

La ecuación de la fibra neutra en  $x = 0$  m será:

$$\begin{aligned} \sigma_x(y) &= \frac{N(x)}{\Omega} - \frac{M_z(x)}{I_z} \cdot y = 0 \\ y &= \frac{N(x=0) \cdot I_z}{\Omega \cdot M_z(x=0)} = \\ &= \frac{\left( -1.2 \cdot 10^{-5} \text{ (}^\circ\text{C}^{-1}) \cdot 35 \text{ (}^\circ\text{C}) \cdot 72.70 \cdot 10^2 \text{ (mm}^2) \cdot 210 \cdot 10^3 \text{ (MPa)} + \frac{20 \cdot 10^3}{3} \text{ (N)} \right) \cdot 33740 \cdot 10^4 \text{ (mm}^4)}{98.80 \cdot 10^2 \text{ (mm}^2) \cdot -131.11 \cdot 10^6 \text{ (N} \cdot \text{mm)}} = \\ &= 225.24 \text{ mm} \\ y &= 22.52 \text{ cm} \end{aligned}$$

Se posiciona sobre el perfil la fibra neutra y se identifican los puntos más cargados:



Para calcular la deformación principal máxima primero se calcula la tensión cortante existente en la sección A con la fórmula de Collignon:

$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{V_y(x) \cdot m_z(y)}{I_z \cdot e}$$

donde  $m_z$  es el momento estático del perfil respecto al eje  $z$  y  $e$  es el ancho del alma del perfil. Sustituyendo valores numéricos, se obtiene:

$$\tau_{xy} \left( y = -\frac{h}{2} \right) = \frac{V_y(x=0) \cdot m_z \left( y = -\frac{h}{2} \right)}{I_z \cdot e} = \frac{18000 \text{ (N)} \cdot 0 \text{ (mm}^3\text{)}}{3831 \cdot 10^4 \text{ (mm}^4\text{)} \cdot 8.5 \text{ (mm)}} = 0 \text{ MPa}$$

A continuación, con la ley de Navier se calcula la tensión en la coordenada más crítica:

$$\sigma_x \left( y = -\frac{h}{2} \right) = -\frac{\alpha \cdot \Delta T \cdot AE - \frac{F_2}{3}}{\Omega} - \frac{131.11 \cdot 10^6 \text{ (N} \cdot \text{mm)}}{W_z} = -174.93 \text{ MPa}$$

El tensor de tensiones del punto G es:

$$[T] = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -174.93 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dado este tensor de tensiones, el Círculo de Mohr de este estado tensional se reducirá a un punto ( $\sigma_1$ ), por lo que la deformación longitudinal máxima resultará aplicando la ley de Hooke:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} + \alpha \Delta T = -\frac{174.93}{210 \cdot 10^3} + 1.2 \cdot 10^{-5} \cdot 35 = -413.01 \mu def$$

**5. Suponiendo que por motivos estéticos la viga ha de estar girada 30° respecto a su eje longitudinal y que se quieren añadir unas platabandas de sección 100x10 mm tal como se aprecia en la figura b), dimensionar la unión atornillada (tensión admisible  $\sigma_{adm}=235$  MPa), indicando el número de tornillos, disposición y paso de los mismos a lo largo de la viga.**





## 2. Ejercicio 2:

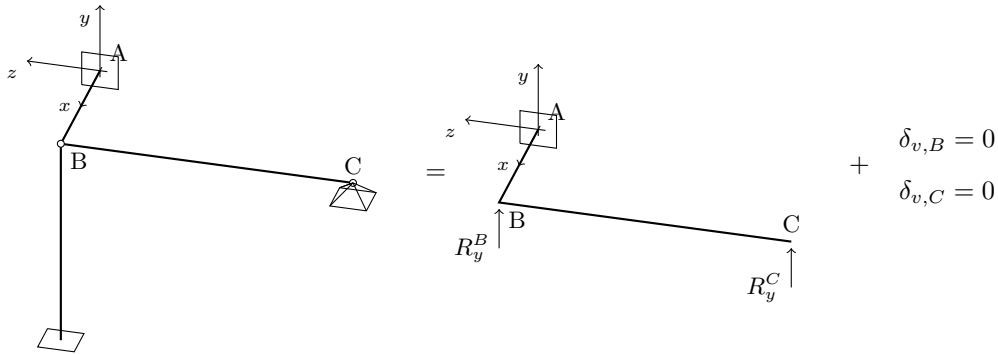
### 1. Determinar las reacciones en apoyos A y C.

Sistema hiperestático, tres ecuaciones y cinco incógnitas supuestas en el sentido positivo de los ejes coordenados:  $R_y^A$ ,  $M_z^A$ ,  $M_x^A$ ,  $R_y^B$ ,  $R_y^C$ .

Para resolver el sistema hiperestático se seguirá el siguiente proceso:

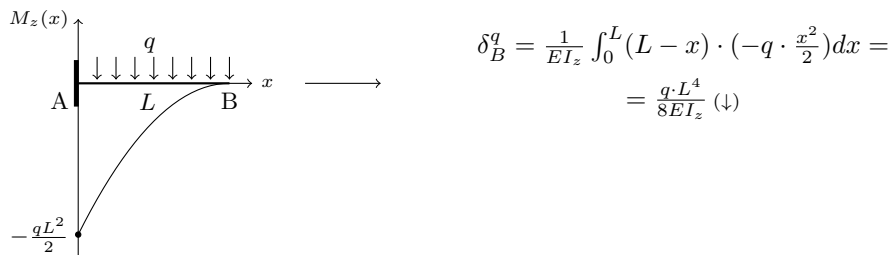
1. Se quita el pilar (que se supondrá que solo trabaja a tracción y compresión) y se sustituye por una articulación en B. Se quitan las dos articulaciones y se colocan las dos incógnitas hiperestáticas  $R_y^B$ ,  $R_y^C$ .
2. A continuación se trasladan todas las cargas a B, para calcular giros y desplazamientos en B.
3. Una vez conocidos los ángulos y desplazamientos en B, 'se empotra' en B y se calculan los giros y desplazamientos en C.
4. Por último, se imponen las condiciones de compatibilidad en B para resolver ambas incógnitas:  $\delta_{v,B} = 0$  y  $\delta_{v,C} = 0$ .

### 1. Conversión de sistema hiperestático a isostático:

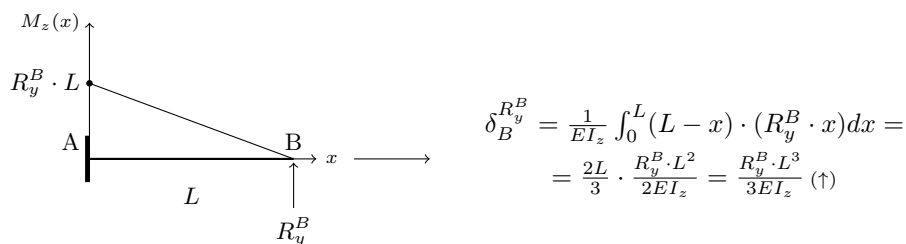


**2. Giros y desplazamientos en B.** Una vez trasladadas las cargas a B y sus respectivos momentos en dicho punto, se calculan los giros y desplazamientos en B.

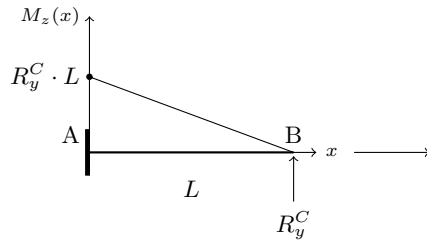
1. Flecha en B debida a  $q$  ( $\delta_B^q$ ):



2. Flecha en B debida a  $R_y^B$  ( $\delta_B^{R_y^B}$ ):

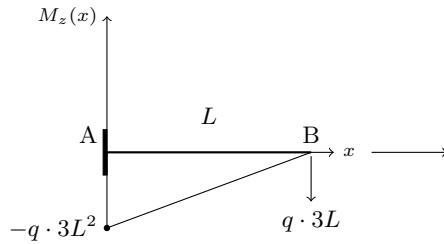


3. Flecha en B debida a  $R_y^C$  ( $\delta_B^{R_y^C}$ ):



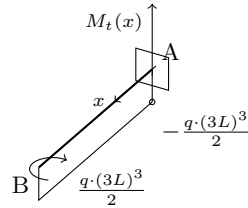
$$\begin{aligned}\delta_B^{R_y^C} &= \frac{1}{EI_z} \int_0^L (L-x) \cdot (R_y^C \cdot x) dx = \\ &= \frac{2L}{3} \cdot \frac{R_y^C \cdot L^2}{2EI_z} = \frac{R_y^C \cdot L^3}{3EI_z} \quad (\uparrow)\end{aligned}$$

4. Flecha en B debida a  $q \cdot 3L$  ( $\delta_B^{q \cdot 3L}$ ):



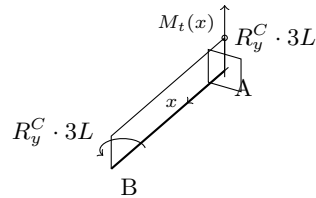
$$\begin{aligned}\delta_B^{q \cdot 3L} &= \frac{1}{EI_z} \int_0^L (L-x) \cdot (-q \cdot 3L \cdot x) dx = \\ &= \frac{2L}{3} \cdot \frac{(q \cdot 3L^2) \cdot L}{2EI_z} = \frac{q \cdot L^4}{EI_z} \quad (\downarrow)\end{aligned}$$

5. Ángulo de torsión en B debido a  $\frac{q \cdot (3L)^2}{2}$  ( $\phi_B^{\frac{q \cdot (3L)^2}{2}}$ ):



$$\begin{aligned}\phi_B^{\frac{q \cdot (3L)^2}{2}} &= \int_0^L \frac{M_t(x)}{GI_o} dx = \\ &= \frac{\frac{q \cdot (3L)^3}{2} \cdot L}{GI_o} = \frac{q \cdot (3L)^2 \cdot L}{2GI_o} \quad (\curvearrowright)\end{aligned}$$

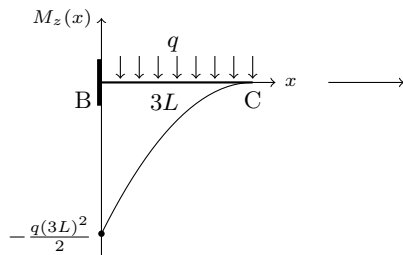
6. Ángulo de torsión en B debido a  $R_y^C \cdot 3L$  ( $\phi_B^{R_y^C \cdot 3L}$ ):



$$\begin{aligned}\phi_B^{R_y^C \cdot 3L} &= \int_0^L \frac{M_t(x)}{GI_o} dx = \\ &= \frac{R_y^C \cdot 3L \cdot L}{GI_o} = \frac{R_y^C \cdot 3L^2}{GI_o} \quad (\curvearrowright)\end{aligned}$$

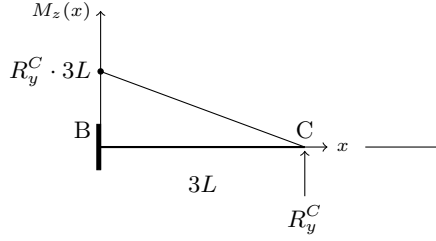
**3. Giros y desplazamientos en C.** Una vez conocidos los desplazamientos y los giros en B, ‘se empotra’ en B y se procede a calcular las flechas que producen el resto de cargas en C.

1. Flecha en C debida a  $q$  ( $\delta_C^q$ ):



$$\begin{aligned}\delta_C^q &= \frac{1}{EI_z} \int_0^{3L} (3L-x) \cdot (-q \cdot \frac{x^2}{2}) dx = \\ &= \frac{q \cdot (3L)^4}{8EI_z} \quad (\downarrow)\end{aligned}$$

2. Flecha en C debida a  $R_y^C$  ( $\delta_C^{R_y^C}$ ):



$$\delta_C^{R_y^C} = \frac{1}{EI_z} \int_0^{3L} (3L - x) \cdot (R_y^C \cdot x) dx = \frac{2 \cdot (3L)}{3} \cdot \frac{R_y^C \cdot (3L)^2}{2EI_z} = \frac{R_y^C \cdot (3L)^3}{3EI_z} (\uparrow)$$

**4. Condiciones de compatibilidad.** Imponiendo la condición de compatibilidad de flecha nula en B ( $\delta_B = 0$ ), se obtiene la primera ecuación para hallar  $R_y^B$  y  $R_y^C$ . Se definirán como positivas las flechas con sentido descendente, que apunten hacia abajo:

$$\delta_B = \delta_B^q + \delta_B^{R_y^B} + \delta_B^{R_y^C} + \delta_B^{q \cdot 3L} = 0$$

$$\frac{q \cdot L^4}{8EI_z} (\downarrow) - \frac{R_y^B \cdot L^3}{3EI_z} (\uparrow) - \frac{R_y^C \cdot L^3}{3EI_z} (\uparrow) + \frac{q \cdot L^4}{8EI_z} (\downarrow) = 0$$

Imponiendo la condición de compatibilidad de flecha nula en C ( $\delta_C = 0$ ), se obtiene la segunda ecuación para hallar  $R_y^B$  y  $R_y^C$ . Se definirán como positivas las flechas con sentido descendente, que apunten hacia abajo:

$$\delta_C = (\phi_B^{\frac{q \cdot (3L)^3}{2}} + \phi_B^{R_y^C \cdot 3L}) \cdot 3L + \delta_C^q + \delta_C^{R_y^C} = 0$$

$$\delta_C = \frac{q \cdot (3L)^2 \cdot L}{2GI_o} \cdot (3L) (\downarrow) - \frac{R_y^C \cdot 3L^2}{GI_o} \cdot (3L) (\uparrow) + \frac{q \cdot (3L)^4}{8EI_z} (\downarrow) - \frac{R_y^C \cdot (3L)^3}{3EI_z} (\uparrow) = 0$$

Primero se resuelve la segunda ecuación para hallar  $R_y^C$ :

$$\delta_C = \frac{q \cdot (3L)^2 \cdot L}{2 \cdot \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot 2I_z} \cdot (3L) (\downarrow) - \frac{R_y^C \cdot 3L^2}{\frac{E}{2(1+\mu)} \cdot 2I_z} \cdot (3L) (\uparrow) + \frac{q \cdot (3L)^4}{8EI_z} (\downarrow) - \frac{R_y^C \cdot (3L)^3}{3EI_z} (\uparrow) = 0$$

$$\frac{q \cdot (3L)^3 \cdot L}{\frac{2}{(1+\mu)}} - \frac{R_y^C \cdot 3^2 L^3}{\frac{1}{(1+\mu)}} + \frac{q \cdot (3L)^4}{8} - \frac{R_y^C \cdot (3L)^3}{3} = 0$$

$$-R_y^C \cdot (1 + \mu + 1) + \frac{3qL}{2} \cdot (1 + \mu) + \frac{9q \cdot L}{8} = 0$$

$$R_y^C = \frac{\left[\frac{3}{2} \cdot (1 + \mu) + \frac{9}{8}\right] \cdot q \cdot L}{2 + \mu}$$

A continuación, se resuelve la primera ecuación para hallar  $R_y^B$ :

$$\delta_B = \frac{q \cdot L^4}{8EI_z} (\downarrow) - \frac{R_y^B \cdot L^3}{3EI_z} (\uparrow) - \frac{R_y^C \cdot L^3}{3EI_z} (\uparrow) + \frac{q \cdot L^4}{8EI_z} (\downarrow) = 0$$

$$\frac{q \cdot L^4}{8} - \frac{R_y^B \cdot L^3}{3} - \frac{R_y^C \cdot L^3}{3} + \frac{q \cdot L^4}{8} = 0$$

$$R_y^B = 3 \cdot q \cdot L \left[ \frac{1}{8} + 1 \right] - R_y^C$$

Sustituyendo los valores numéricos de todos los parámetros en ambas reacciones, se tiene:

$$R_y^C = \frac{\left[\frac{3}{2} \cdot (1 + \mu) + \frac{9}{8}\right] \cdot q \cdot L}{2 + \mu} = \frac{\left[\frac{3}{2} \cdot (1 + 0.3) + \frac{9}{8}\right] \cdot 20000 \cdot 5}{2 + 0.3} = 133696 \text{ N}$$

$$R_y^B = 3 \cdot q \cdot L \left[ \frac{1}{8} + 1 \right] - R_y^C = 3 \cdot 20000 \cdot 5 \left[ \frac{1}{8} + 1 \right] - 133696 = 203804 \text{ N}$$

**2. Dibujar los diagramas de momentos flectores, torsores y esfuerzos cortantes y axiles, señalando los valores significativos.**

Se plantean las ecuaciones de la estática para el sistema isostático, tres ecuaciones y tres incógnitas supuestas en el sentido positivo de los ejes:  $R_y^A$ ,  $M_z^A$ ,  $M_x^A$

Reacciones:

$$y : R_y^A + R_y^B + R_y^C = q \cdot (4L)$$

Momentos:

$$z : M_z^A + R_y^B \cdot L + R_y^C \cdot L - q \cdot \frac{L^2}{2} - q \cdot (3L^2) = 0$$

$$x : M_t^A + R_y^C \cdot 3L - q \cdot \frac{(3L)^2}{2} = 0$$

$$R_y^A = 62500 \text{ N}; \quad M_t^A = -244565 \text{ N} \cdot \text{m}; \quad M_z^A = 62500 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Discretización del tramo AB desde A:

**Momento Flector  $M_z(x)$  (kN·m):**

$$M_z(x) = \begin{cases} -62.5 - 20 \cdot \frac{x^2}{2} + 62.5 \cdot x & \text{si } 0 < x < 5 \text{ m} \end{cases}$$

**Esfuerzo Cortante  $V_y(x)$  (kN):**

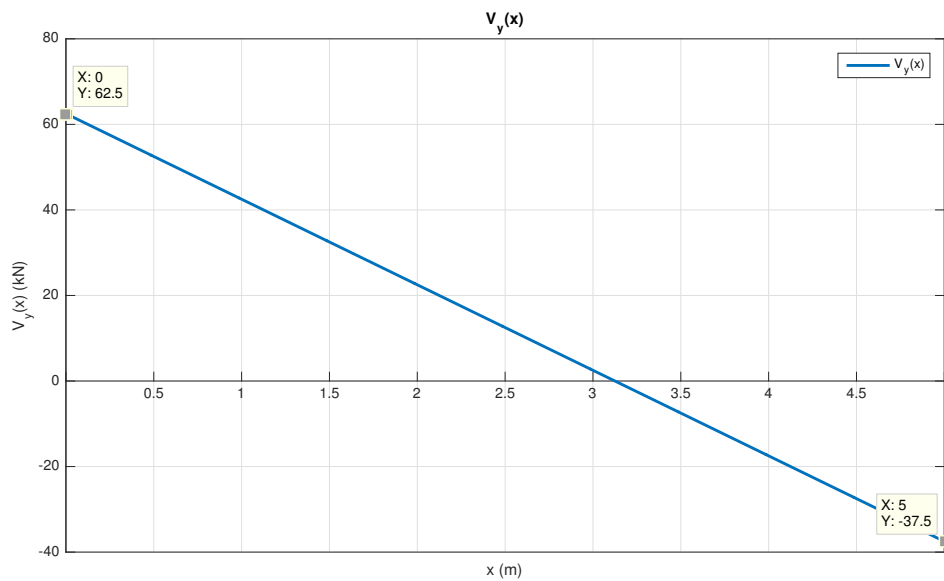
$$V_y(x) = \begin{cases} 62.5 - 20 \cdot x & \text{si } 0 < x < 5 \text{ m} \end{cases}$$

**Momento Torsor  $M_t(x)$  (kN·m):**

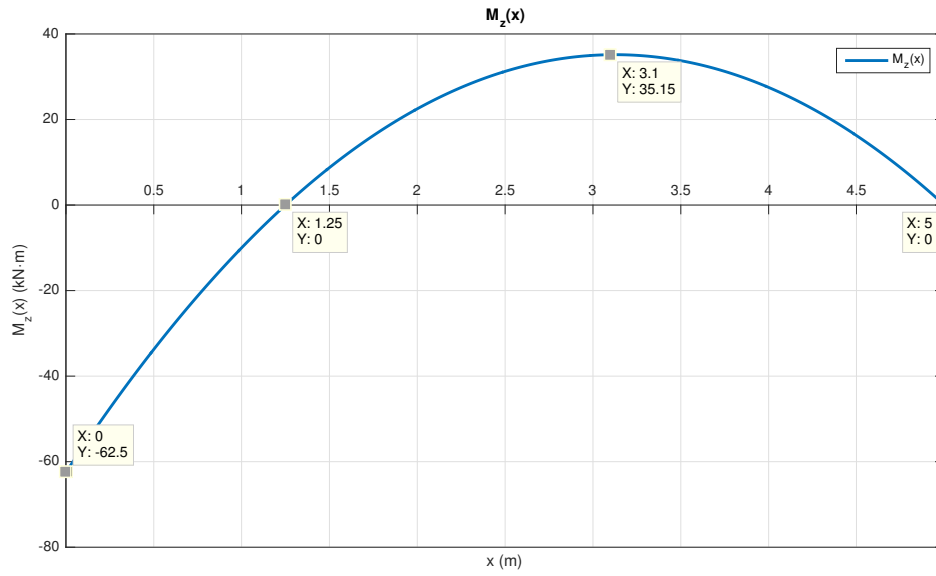
$$M_t(x) = \begin{cases} 244.565 & \text{si } 0 < x < 4 \text{ m} \end{cases}$$

**Diagramas de Esfuerzo Cortantes, Momentos Flectores y Momentos Torsores:**

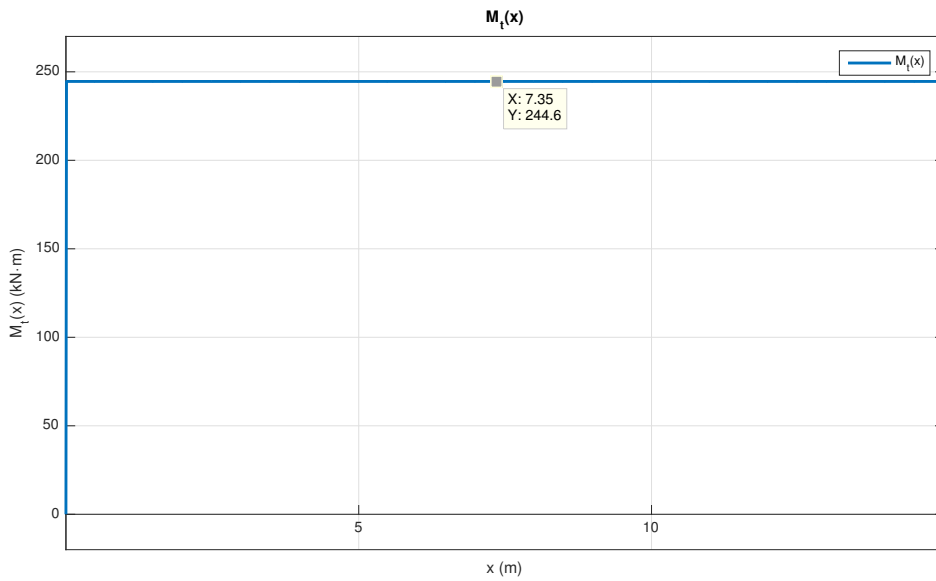
**Esfuerzo Cortante  $V_y(x)$  (kN):**



**Momento Flector  $M_z(x)$  (kN·m):**



**Momento Torsor  $M_t(x)$  (kN·m):**



Discretización del tramo BC desde B:

**Momento Flector  $M_z(x)$  (kN·m):**

$$M_z(x) = \begin{cases} -244.565 - 20 \cdot \frac{x^2}{2} + 166.204 \cdot x & \text{si } 0 < x < 5 \text{ m} \end{cases}$$

**Esfuerzo Cortante  $V_y(x)$  (kN):**

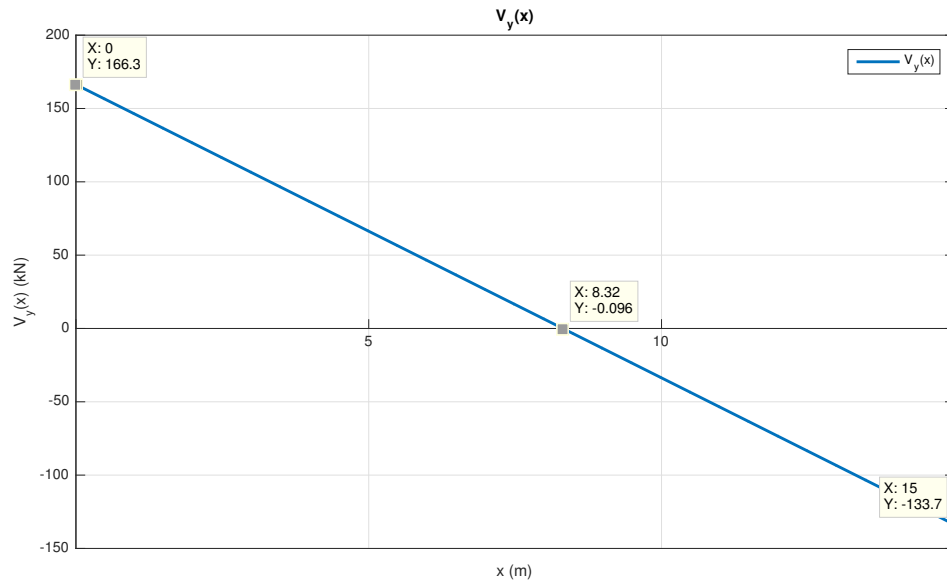
$$V_y(x) = \begin{cases} 166.204 - 20 \cdot x & \text{si } 0 < x < 5 \text{ m} \end{cases}$$

**Momento Torsor  $M_t(x)$  (kN·m):**

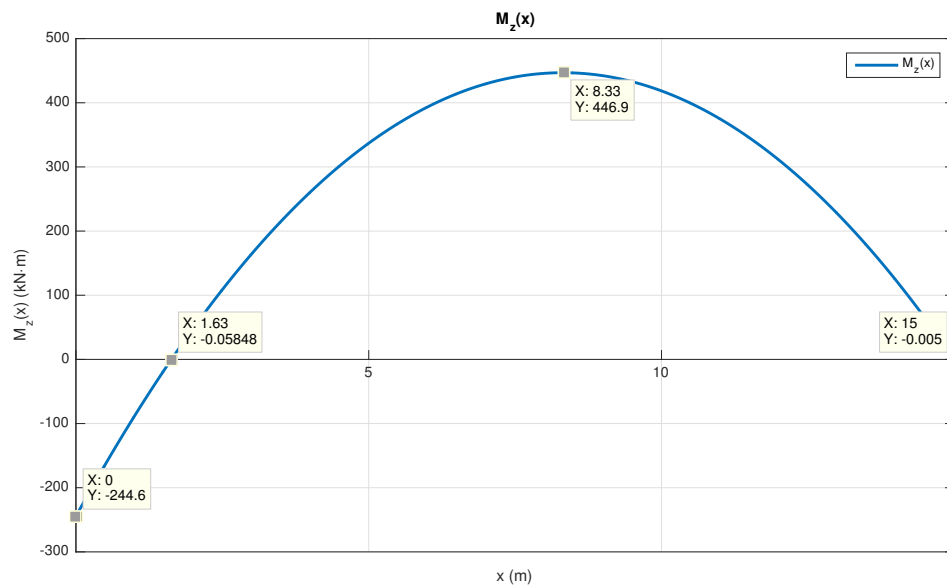
$$M_t(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < 15 \text{ m} \end{cases}$$

### Diagramas de Esfuerzo Cortantes y Momentos Flectores:

Esfuerzo Cortante  $V_y(x)$  (kN):

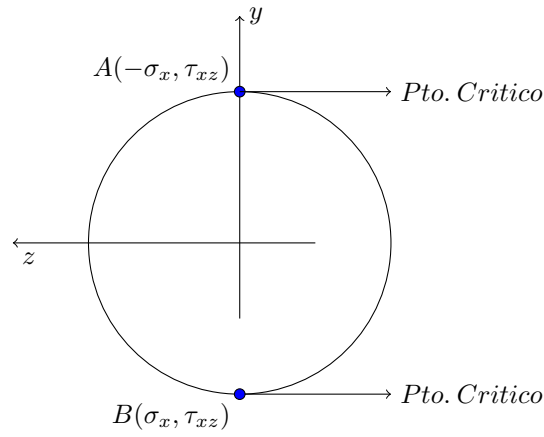


Momento Flector  $M_z(x)$  (kN·m):



### 3. Determinar el radio del redondo de acero del tramo AB justificando claramente cuáles son las secciones susceptibles de análisis.

Para dimensionar dicho tramo, se utiliza la sección situada en la coordenada  $x = 0$  m, por ser la más solicitada. Con la ley de Navier y del torsor, se obtiene la tensión en el punto más crítico de la sección. En este caso existen dos, en  $y = R$  y en  $y = -R$ , por lo que se elige arbitrariamente la primera:



$$\sigma_x(y=R) = \frac{M_z(x=0\text{ m})}{\frac{\pi R^4}{4}} \cdot R = -\frac{62500 \cdot 10^3 (N \cdot mm)}{\frac{\pi R^4}{4}} \cdot R$$

$$\tau_{xz}(r=R) = \frac{M_t(x=0)}{I_o} \cdot R = \frac{244565 \cdot 10^3 (N \cdot mm)}{\frac{\pi R^4}{2}} \cdot R$$

Haciendo uso del criterio de Tresca se tiene:

$$\sigma_{adm}^{Tresca} = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + (\tau_{xz})^2}$$

$$\sigma_{adm}^{Tresca} = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{-62500 \cdot 10^3 (N \cdot mm)}{2 \cdot \frac{\pi R^4}{4}} \cdot R\right)^2 + \left(\frac{244565 \cdot 10^3 (N \cdot mm)}{\frac{\pi R^4}{2}} \cdot R\right)^2} \leq 235 \text{ MPa}$$

$$R \geq 114.17 \text{ mm}$$

$$\phi \geq 228.34 \text{ mm}$$

