

Základné logaritmické pravidlá a ich dôkazy pre laikov

Adam Labuš

5. decembra 2023

1 Úvod - Definícia logaritmu

Vytvorme hypotetickú funkciu $\log()$, ktorá na vstup bere dve čísla “a” a “x”. Hodnotu tejto funkcie nazveme “y”. Súvis týchto troch premenných sa dá zapísať nasledovne:

$$a^y = x \quad (1)$$

Správanie našej funkcie vieme potom vyjadriť takto:

$$\log_a(x) = y \quad (2)$$

Dôvod prečo takúto funkciu potrebujeme je, lebo nam pomáha vyjadriť “y” z rovnice (1). Bohužiaľ inak ako pri umocňovaní, pravidlá logaritmov niesu na prvý pohľad také intuitívne, preto niektoré “zjednodušenia” alebo “pravidlá” treba podložiť dôkazom.

Pravidlo I.

Z úvodu vyplýva:

$$\log_a(a^y) = y \quad (\text{dosadili sme si } x)$$

Dôkaz pravidla II. - logaritmické pravidlo mocniny

Toto pravidlo vzniklo asi tým, že niekto sa snažil inak vyjadriť hodnotu nasledovného výrazu:

$$\log_a(a^{y_1^{y_2}}) = ? \quad (3)$$

Tak poďme na to!:

$$\begin{aligned} \log_a(a^{y_1^{y_2}}) &= \log_a(a^{y_1 * y_2}) \\ &= y_1 * y_2 \end{aligned} \quad \begin{aligned} (4) \\ (\text{použili sme I.}) \end{aligned}$$

V tomto pravidle ide o to, že pri jeho použití budeme poznať hodnotu “ y_2 ”. Hľadať budeme “ y_1 ”. Preto si vyjadríme “ y_1 ” a “ a^{y_1} ” niečim iným:

$$y_1 = \log_a(a^{y_1}) \quad (5)$$

$$a^{y_1} = x \quad (6)$$

$$= y_2 * \log_a(a^{y_1}) \quad (7)$$

$$= y_2 * \log_a(x) \quad (8)$$

Aby sme dostali oficiálne znenie tohto pravidla, tak zmeníme názov písmenka “ y_2 ” na “ n ” lebo stratilo svoj originálny význam fyzického výpočtu hodnoty funkcie. Celé znenie tohto pravidla potom je:

$$\log_a(x^n) = n * \log_a(x) \quad (9)$$

Dôkaz pravidla III. - logaritmické pravidlo produktu

Už budeme iba nadväzovať na predošlé výpočty. V tomto dôkaze veľmi čudesne použijeme pravidlo I. , nakoľko pomocou neho vieme akékoľvek číslo vyjadriť logaritmom. Toto robíme preto, aby sme spojili dva logaritmy do jedného. Toto pred dobou kalkulačiek, veľmi šetrilo čas, lebo hodnoty logaritmov sa počítali ručne.

$$\log_a(x_1) + \log_a(x_2) = ? \quad (10)$$

$$= \log_a(a^{\log_a(x_1) + \log_a(x_2)}) \quad (\text{spomenutá magická premena})$$

$$= \log_a(a^{\log_a(x_1)} * a^{\log_a(x_2)}) \quad (11)$$

$$= \log_a(x_1 * x_2) \quad (\text{Znovu I.})$$

Dôkaz pravidla IV. - logaritmické pravidlo kvocientu

To isté ako predošlý dôkaz lenže s odčítaním.

$$\log_a(x_1) - \log_a(x_2) = ? \quad (12)$$

$$= \log_a(a^{\log_a(x_1) - \log_a(x_2)}) \quad (13)$$

$$= \log_a(a^{\log_a(x_1)} / a^{\log_a(x_2)}) \quad (14)$$

$$= \log_a(x_1 / x_2) \quad (15)$$

Dôkaz pravidla V. - logaritmické pravidlo zmeny základu logaritmu

Toto posledné pravidlo je super, keď máme kalkulačku iba s jedným základom logaritmu, inak povedané, kalkulačka nemá tlačítka logaritmu, kde sa dá meniť základ. Samotný dôkaz používa podobný trik ako ten predošlý, kde sme vyjadrili výraz logaritmom. Tentokrát vyjadríme “ x_1 ” ako “ $x_2^{\log_{x_2}(x_1)}$ ”

$$\log_a(x_1) = ? \quad (16)$$

$$\log_a(x_1) = \log_a(x_1) \quad (17)$$

$$= \log_a(x_2^{\log_{x_2}(x_1)}) \quad (\text{spomenutá úprava})$$

$$= \log_{x_2}(x_1) * \log_a(x_2) \quad (18)$$

$$\frac{\log_a(x_1)}{\log_a(x_2)} = \log_{x_2}(x_1) \quad (19)$$

$$\log_{x_2}(x_1) = \frac{\log_a(x_1)}{\log_a(x_2)} \quad (\text{len otočíme strany})$$

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} \quad (\text{znovu zmeníme písmenka})$$

2 Záver

Takže spolu v poradí sme potvrdili nasledovné:

$$\log_a(a^y) = y \quad (20)$$

$$\log_a(x^n) = n * \log_a(x) \quad (21)$$

$$\log_a(x_1 * x_2) = \log_a(x_1) + \log_a(x_2) \quad (22)$$

$$\log_a(x_1/x_2) = \log_a(x_1) - \log_a(x_2) \quad (23)$$

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} \quad (24)$$

Týmto som chcel dokázať, že dôkazy sa dajú robiť bez metúcich substitúcií, ktoré najčastejšie sú použité na internete. Predpokladám, že tomu tak je kvôli tomu, lebo napr. zobrazíť na stránke mocninu mocniny, čo sa bežne stáva, keď nenahrádzate všetko za premenné, je ťažké. Takisto som toho názoru, že každý dôkaz by mal začať odzadu, keď jeho účelom je, aby niekto pochopil, čo je vlastne výpovedná hodnota pravidla, ktoré potvrdzuje. Ako dobrý čarodejník, by sme mali začať so situáciou

alebo vyjadrením s ktorým všetci súhlasia a až potom sa dopracovať ku nejakému vzorcu alebo pravidlu. Keď to robíme takto, tak sa ľahšie vidí do hlavy autora týchto pravidiel. Úloha dokazovateľa je sa snažiť sa v “magický operáciach” rozmýšľanie autora znovu nájsť a predstaviť žiakovi. Pri matematike treba mať stále na pamäti, že na konci dňa, keď zaplníme stranu výpočtami, tak na papiery nie je nič iné ako písmenka. Úloha vysvetľujúceho je priradiť ku ním význam a obhájiť ich existenciu, čím sa ku ním priradí myšlienka v našej hlave. Tento moment označujeme vetou: "Tomu chápem" (alebo Daniel C. hovorí: "Pozrem, vidím").