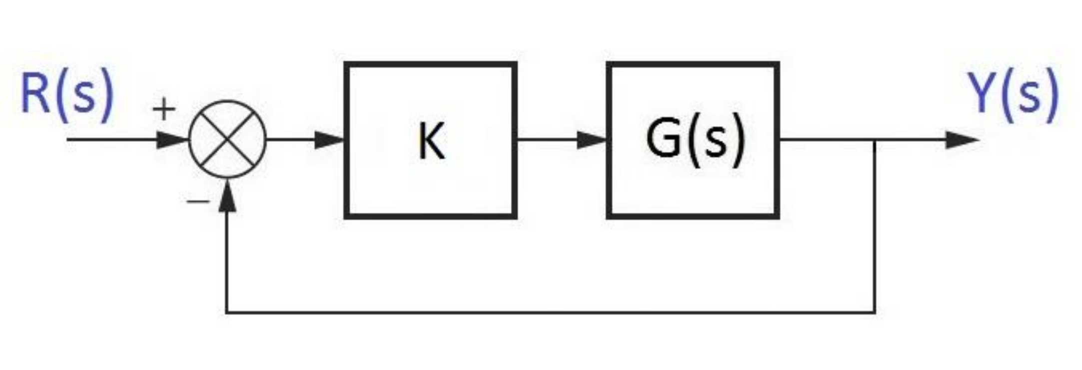
Efeito da adição de polos e zeros no Lugar das Raízes

Profa. Cristiane Paim

Efeito da Adição de Polos e Zeros no LR

Seja o sistema de controle, com K>0:



sendo

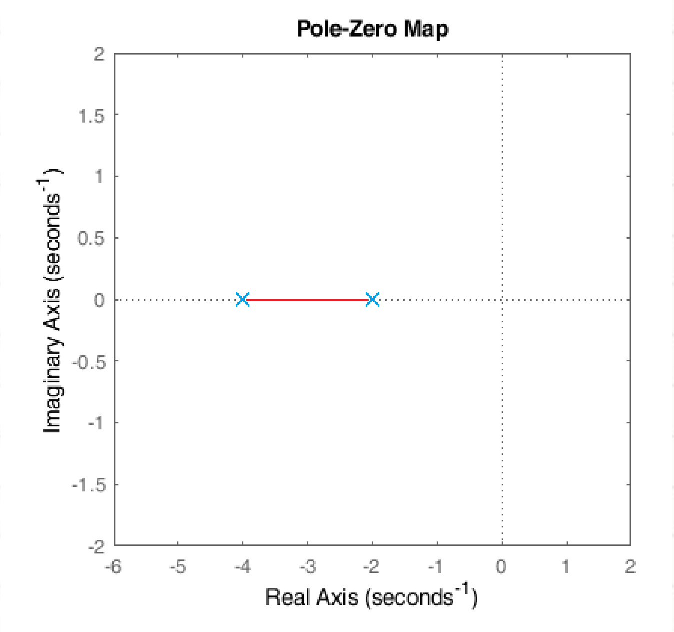
$$G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+4)}$$

Efeito da Adição de Polos e Zeros no LR

Eixo real: [-4 , -2]

Assíntotas: $\theta_a = \pm 90°$ $\sigma_a=-3$

Ângulos de Partida: $\phi_1= 180°$, $\phi_2=0$ °

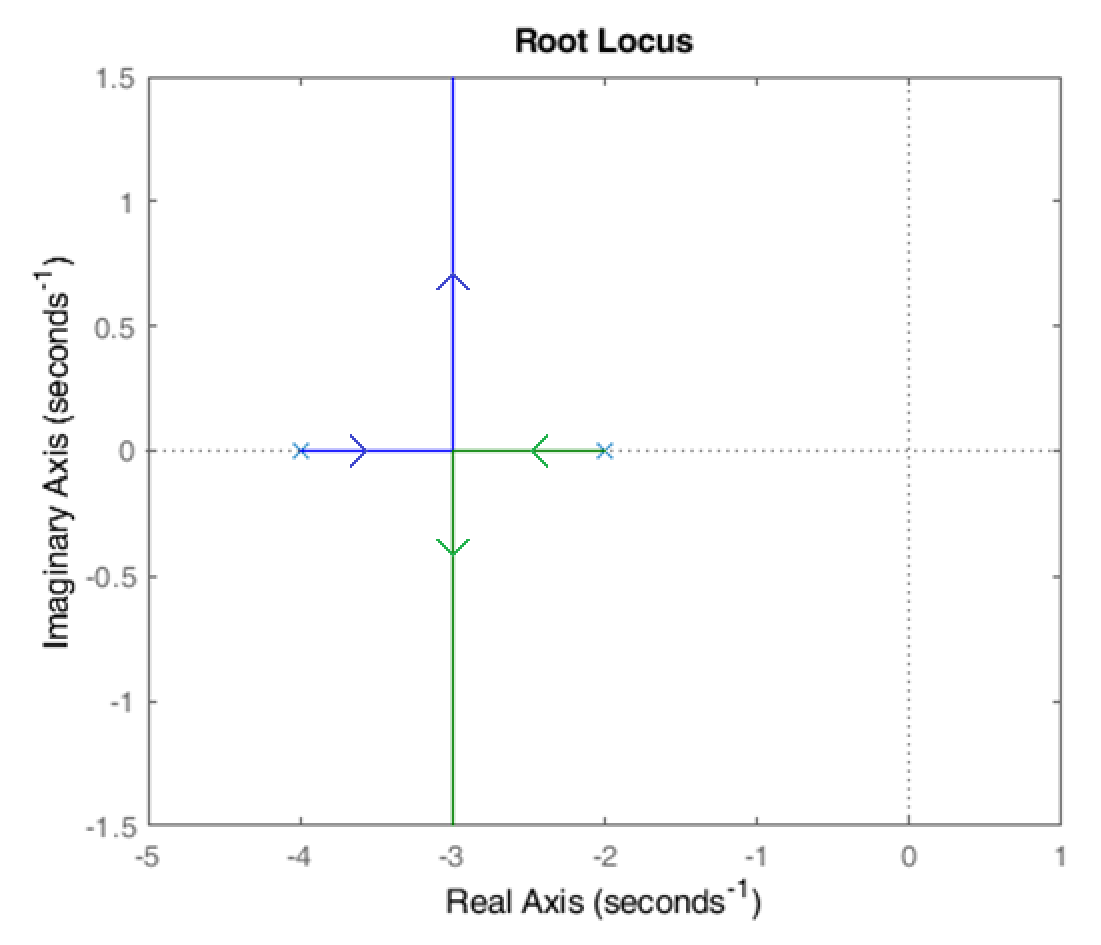


Cruzamento com eixo imaginário: não existe (estável para $\forall$K>0)

Ramificação:

$$s = -3 \in \mathrm{LR} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{K} = 1$$

Efeito da Adição de Polos e Zeros no LR



$$G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+4)}$$

Estabilidade:
$\forall$K>0

Ramificação:
s=-3 (K=1)

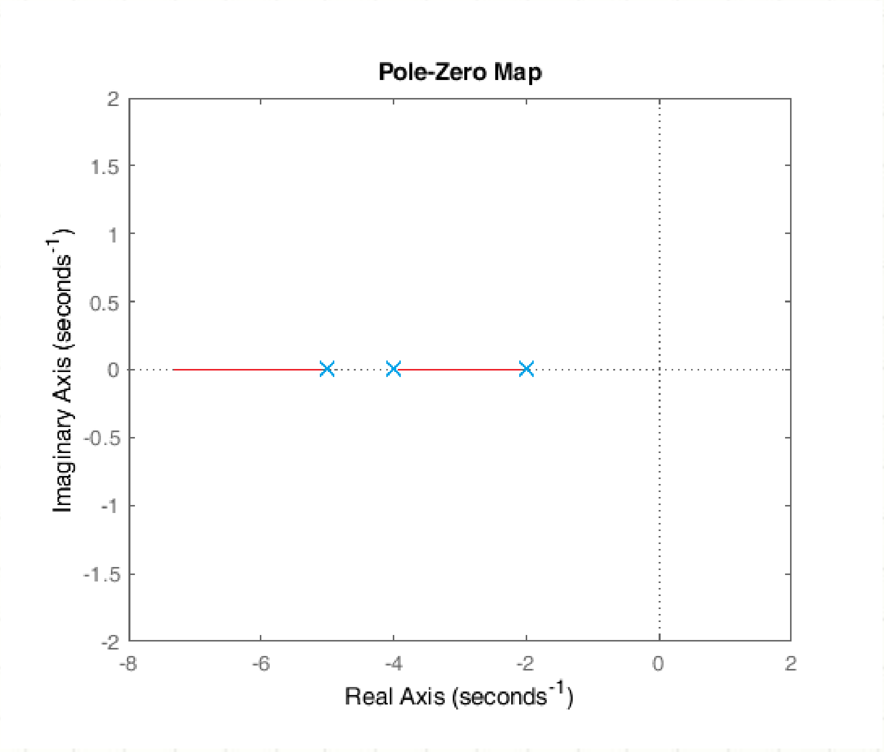
$$0 < K \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta(s) \text{ tem 2 polos reais}$$

$$K > 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta(s) \text{ tem 2 polos complexos conjugados}$$

Efeito da adição de um polo

a1) Adição de um polo em -5

$$G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+4)(s+5)}$$



Eixo real: (-∞,-5] [-4 , -2]

Assíntotas: θ_a = ± 60°, 180°

σ_a=-11/3=-3,67

Ângulos de Partida:

ϕ_1= 180°, ϕ_2=0° e ϕ_3=180°

Efeito da adição de um polo

Cruzamento com eixo imaginário:

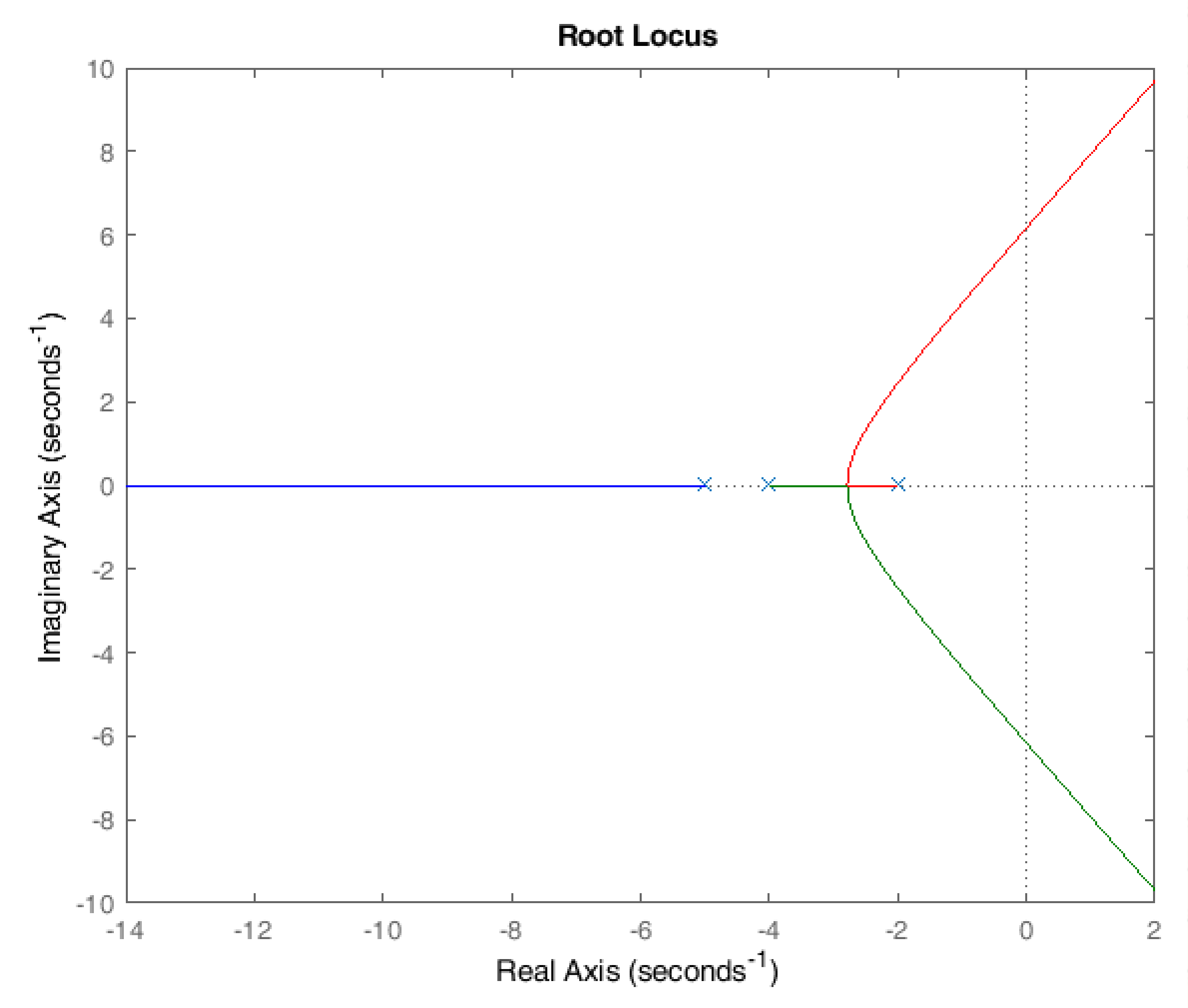
$$\omega = \pm 6{,}16 \quad \Rightarrow \quad K = 378$$

Sistema estável para 0 < K < 378

Ramificação:

$$s_1 = -2{,}78 \in \mathrm{LR} \quad \Rightarrow \quad K = 2{,}12$$
$$s_2 = -4{,}55 \notin \mathrm{LR}$$

Efeito da adição de um polo



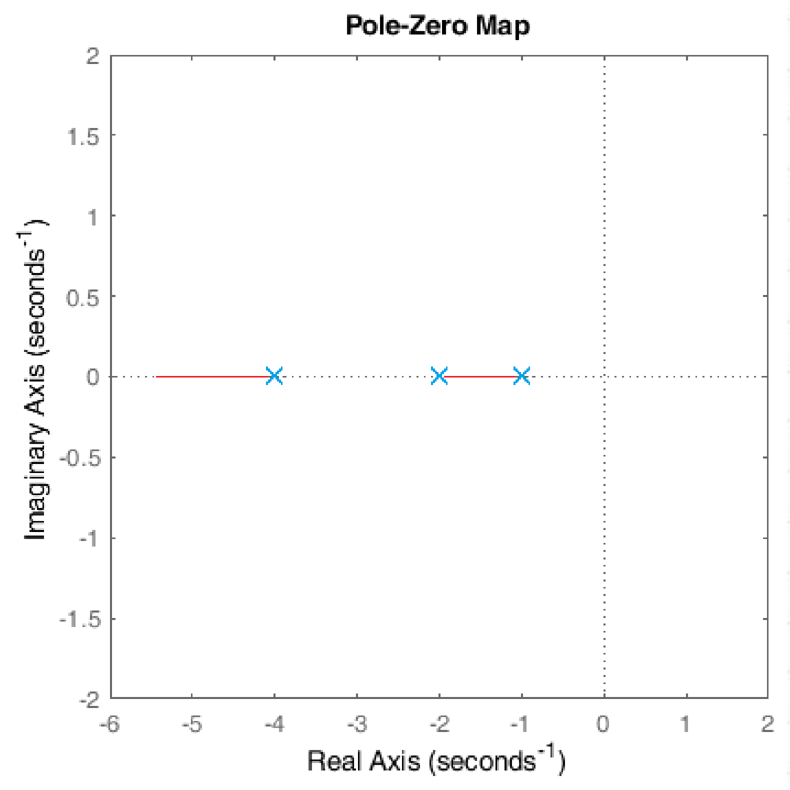
Estabilidade:
$0 < K < 378$

$$G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+4)(s+5)}$$

Efeito da adição de um polo

a2) Adição de um polo em -1

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+4)}$$



Eixo real: $(-\infty,-4]$ $[-2 , -1]$

Assíntotas: $\theta_a = \pm\, 60°, 180°$

$\sigma_a=-7/3=-2{,}33$

Ângulos de Partida:

$\phi_1= 180°$, $\phi_2=0°$ e $\phi_3=180°$

Efeito da adição de um polo

Cruzamento com eixo imaginário:

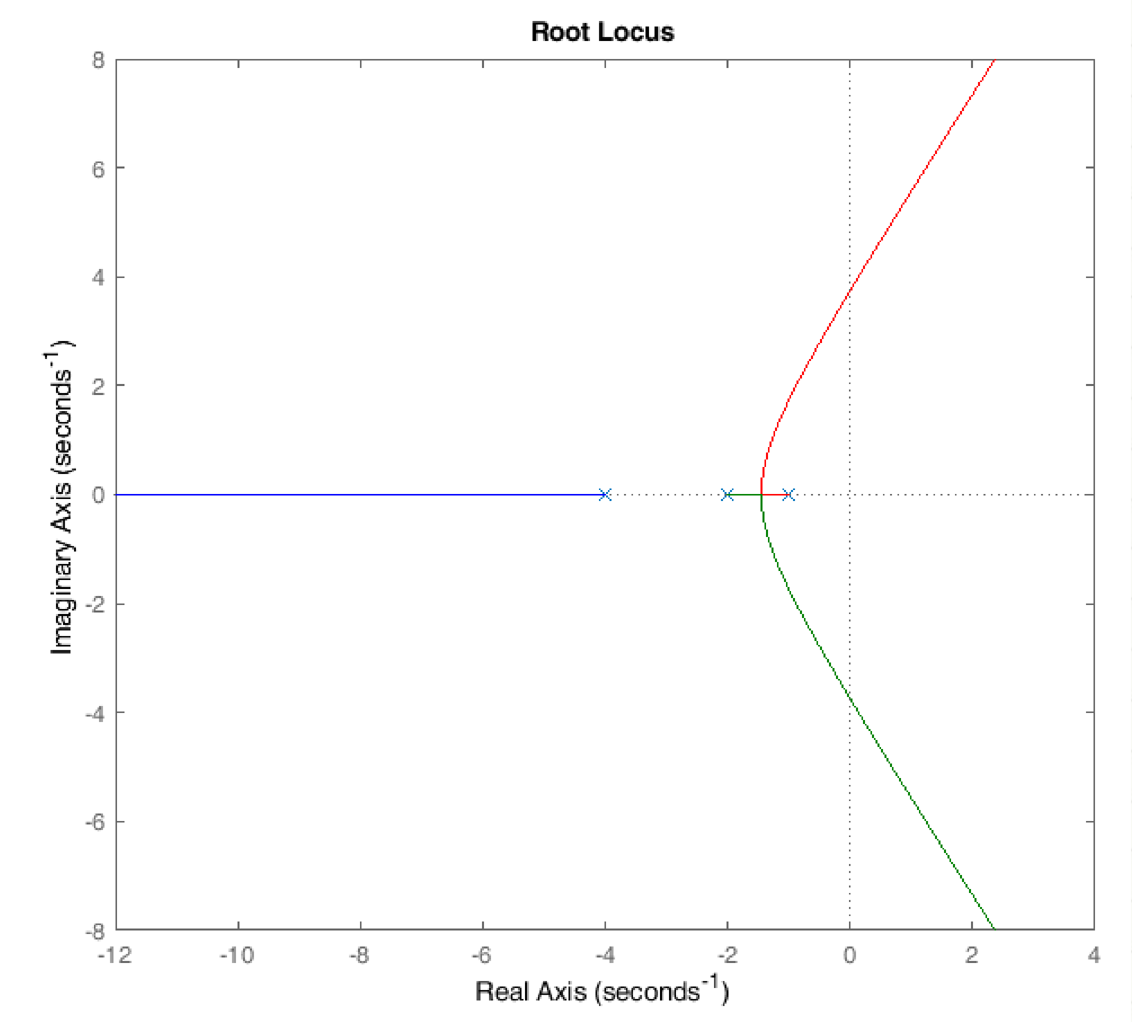
$$\omega = \pm 3{,}74 \quad \Rightarrow \quad K = 90$$

Sistema estável para 0 < K < 90

Ramificação:

$$s_1 = -1{,}45 \in \mathrm{LR} \quad \Rightarrow \quad K = 0{,}63$$
$$s_2 = -3{,}22 \notin \mathrm{LR}$$

Efeito da adição de um polo



Estabilidade:
$0 < K < 90$

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+4)}$$

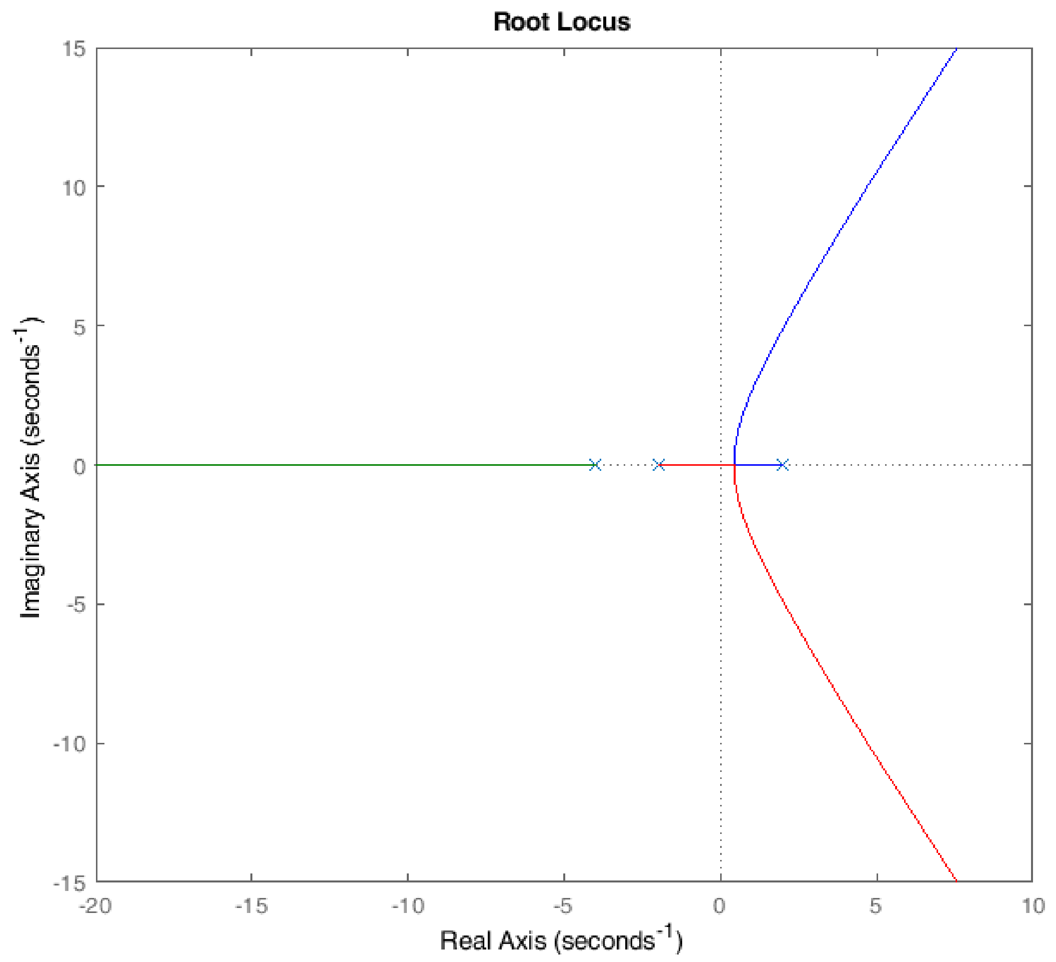
Efeito da adição de um polo

A adição de um polo (de fase mínima) tende a deslocar o LR para a direita diminuindo a estabilidade do sistema. Quanto mais à direita for adicionado o polo maior será a redução na estabilidade do sistema.

A adição de um polo de fase não mínima, também desloca o LR para a direita, podendo deixar o sistema instável. Na prática não se adicionam polos instáveis ao sistema.

No exemplo, se for adicionado um polo em 2 (fase não mínima) o sistema torna-se instável para qualquer valor de K.

Efeito da adição de um polo (fase não mínima)



Sistema Instável para $\forall K > 0$

Sistema instável para qualquer K > 0.

$$G(s) = \frac{1}{(s-2)(s+2)(s+4)}$$

Efeito da adição de um zero

b) Adição de um zero em -6

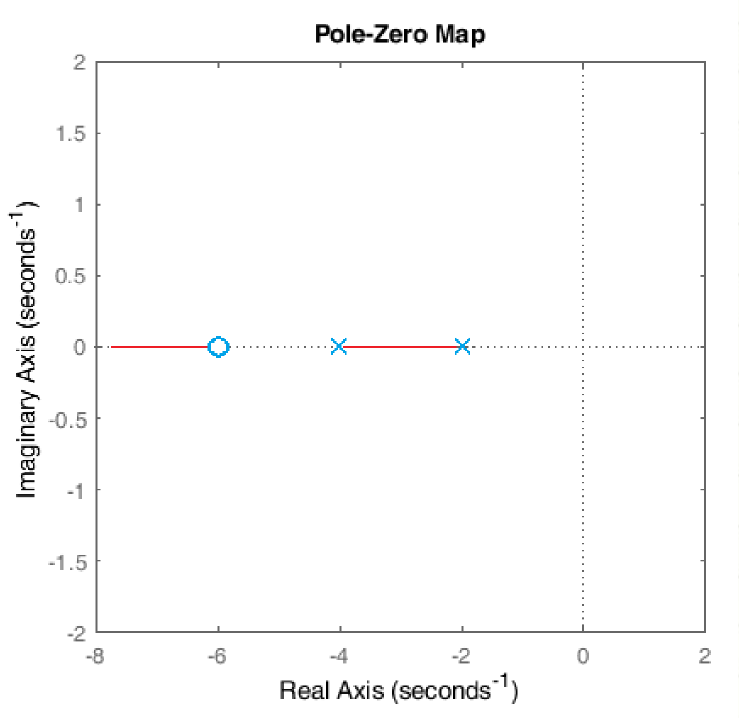
$$G(s) = \frac{s+6}{(s+2)(s+4)}$$

Eixo real: (-∞,-6] [-4 , -2]

Assíntotas: $\theta_a = 180°$

Ângulos de Partida e chegada:

$\phi_1 = 180°$, $\phi_2 = 0°$ e $\psi = 180°$



Efeito da adição de um polo

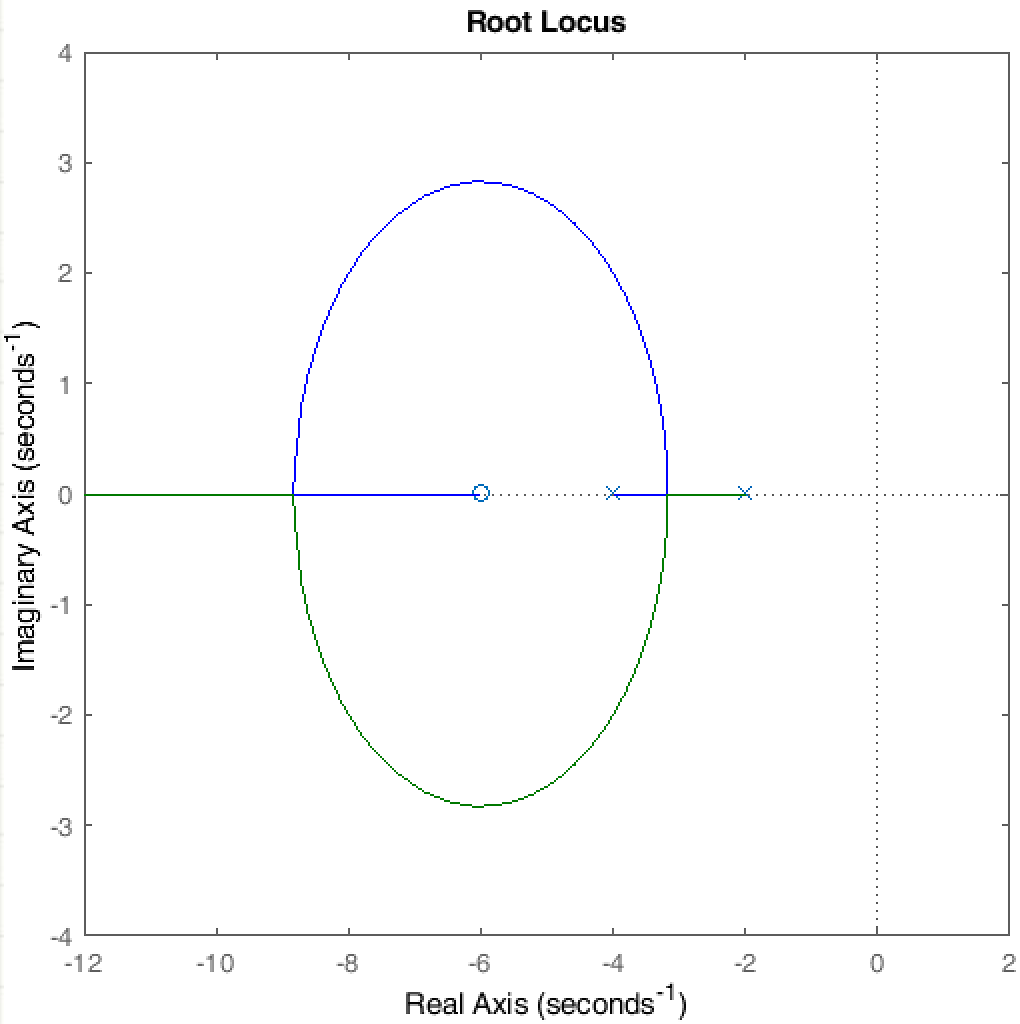
Cruzamento com eixo imaginário: não existe

Sistema estável para qualquer K > 0.

Ramificação:

$$s_1 = -3{,}17 \in \mathrm{LR} \quad \Rightarrow \quad K = 0{,}34$$
$$s_2 = -8{,}83 \in \mathrm{LR} \quad \Rightarrow \quad K = 11{,}66$$

Efeito da adição de um zero



$$G(s) = \frac{s+6}{(s+2)(s+4)}$$

Estabilidade:
$\forall$K > 0

Sistema estável para qualquer K > 0.

Efeito da adição de um zero

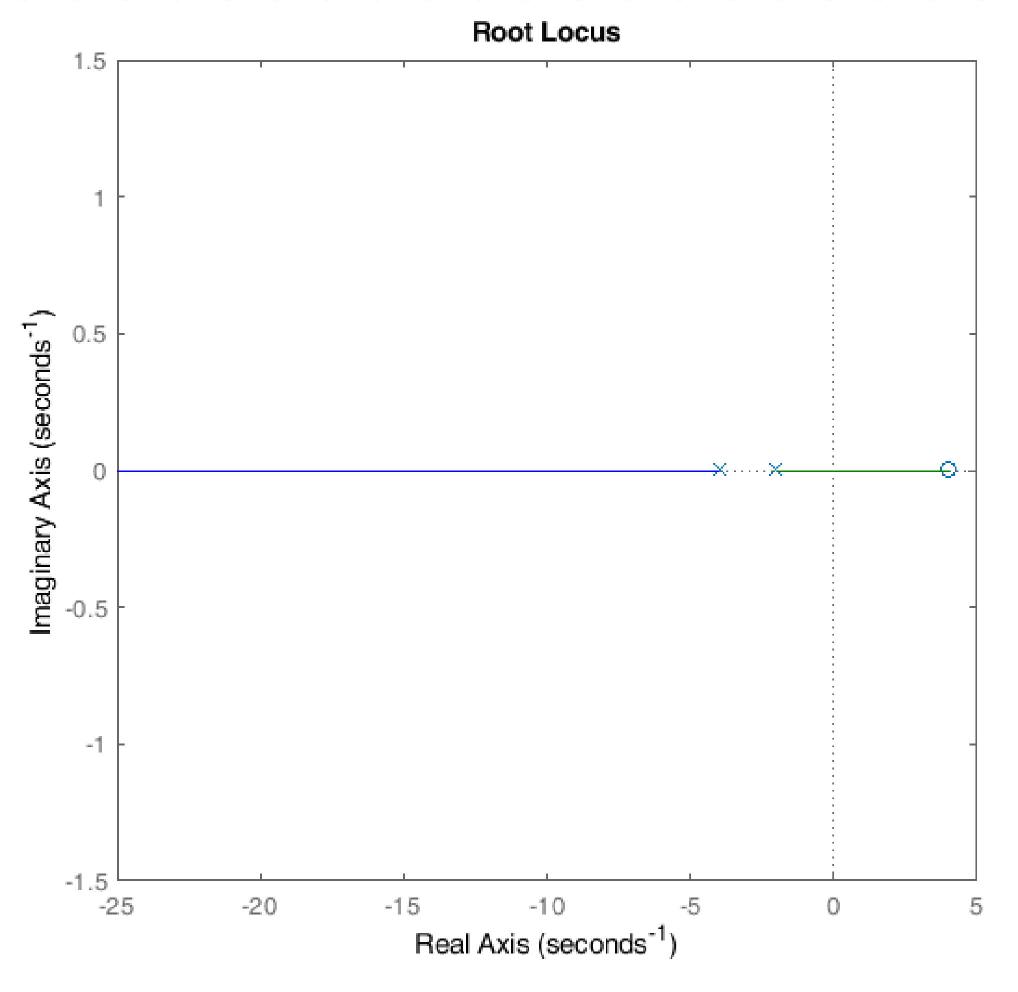
A adição de um zero (de fase mínima) tende a deslocar o LR para a esquerda aumentando a estabilidade do sistema.

A adição de um zero de fase não mínima, desloca o LR para a direita reduzindo a estabilidade. Em alguns casos pode gerar instabilidade.

Entretanto, um zero nunca é adicionado isoladamente no sistema.

No exemplo, a adição de um zero de fase não mínima não gera instabilidade mas pode reduzir muito a faixa de valores para os quais o sistema é estável.

Efeito da adição de um zero (fase não mínima)

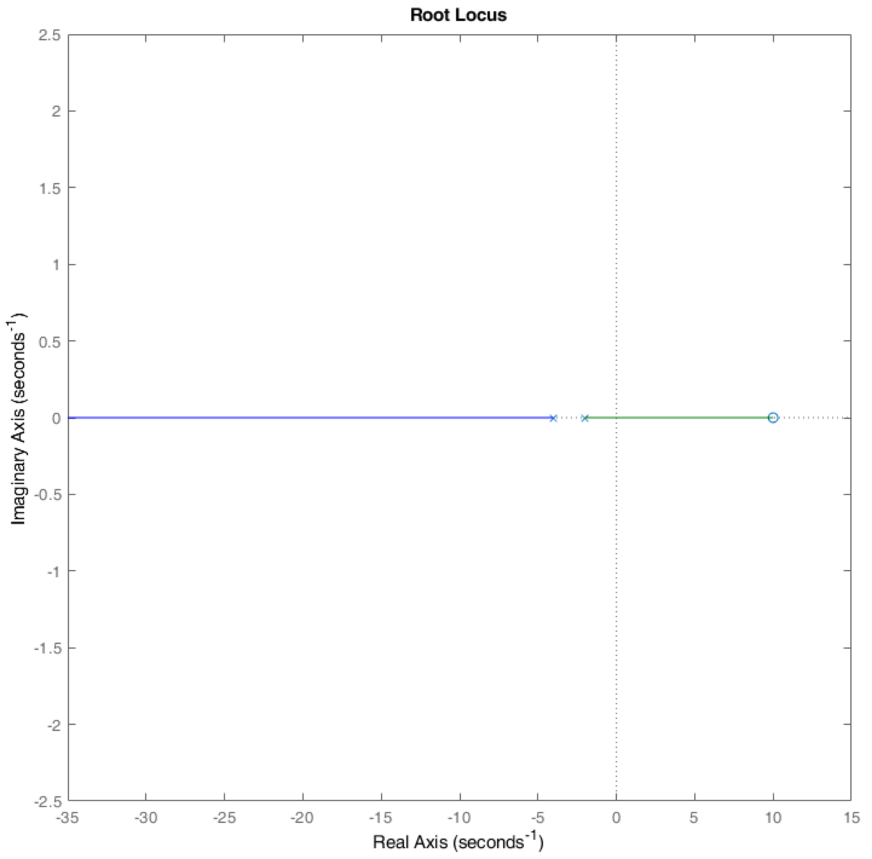


$$G(s) = \frac{s-4}{(s+2)(s+4)}$$

Estabilidade:
0 < K < 2

Para um zero de fase não mínima em 4, o sistema é estável apenas para 0 < K < 2.

Efeito da adição de um zero (fase não mínima)



$$G(s) = \frac{s-10}{(s+2)(s+4)}$$

Estabilidade:
$0 < K < 0,8$

Para um zero de fase não mínima em 10, o sistema é estável apenas para $0 < K < 0,8$.

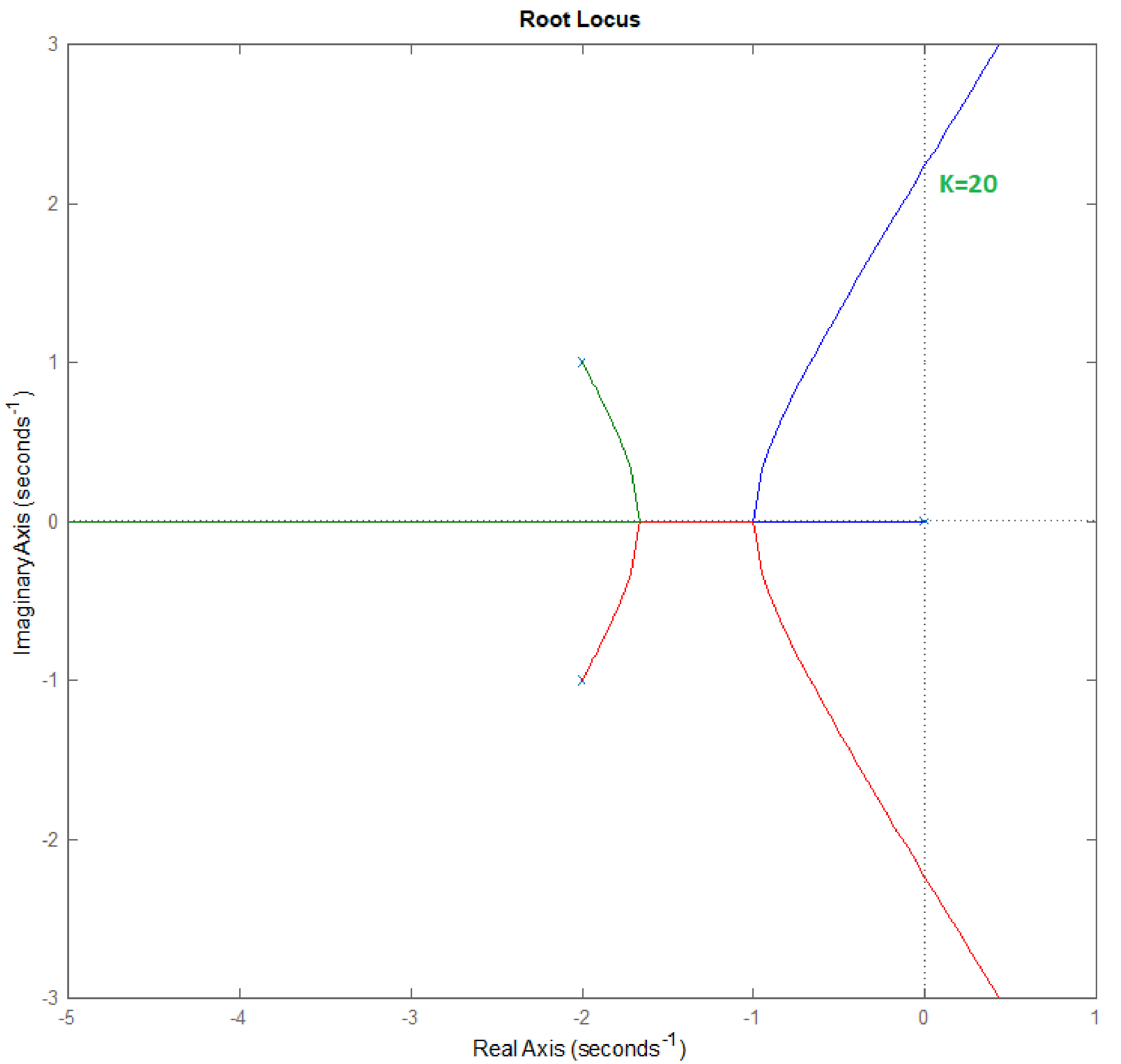
Exemplo 2 - Efeito da adição de um zero

Sejam as funções de transferência abaixo, sendo $G_1(s)$ sem zero e as demais com zero em diferentes posições no plano s $(-4 < z < +\infty)$:

$$G_1(s) = \frac{1}{s(s^2+4s+5)} \qquad G_2(s) = \frac{s+4}{s(s^2+4s+5)}$$

$$G_3(s) = \frac{s+1}{s(s^2+4s+5)} \qquad G_4(s) = \frac{s-1}{s(s^2+4s+5)}$$

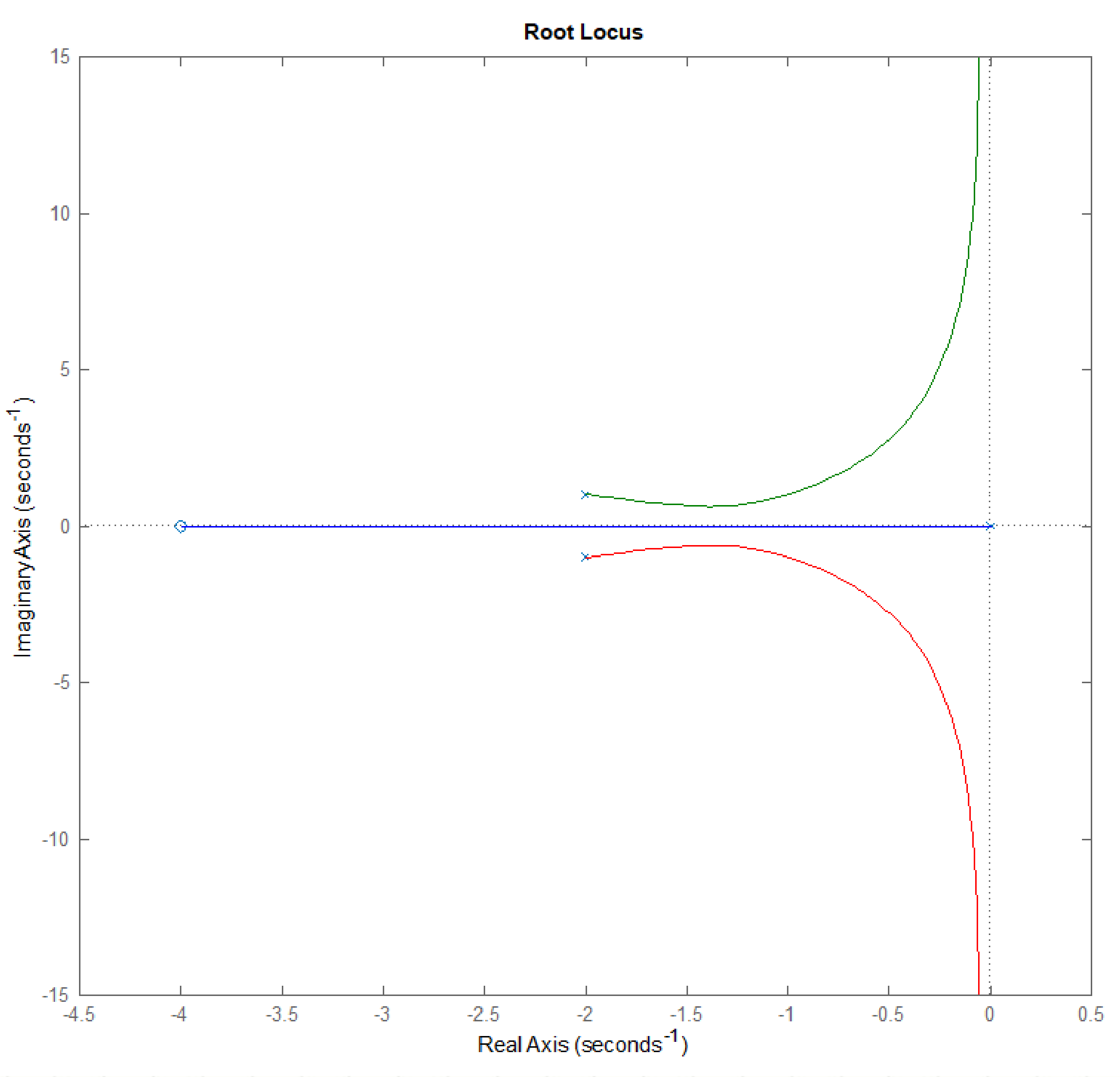
Exemplo 2 – LR para $G_1(s)$



$$G_1(s) = \frac{1}{s(s^2 + 4s + 5)}$$

Estabilidade:
$0 < K < 20$

Exemplo 2 – LR para $G_2(s)$ (z=-4)

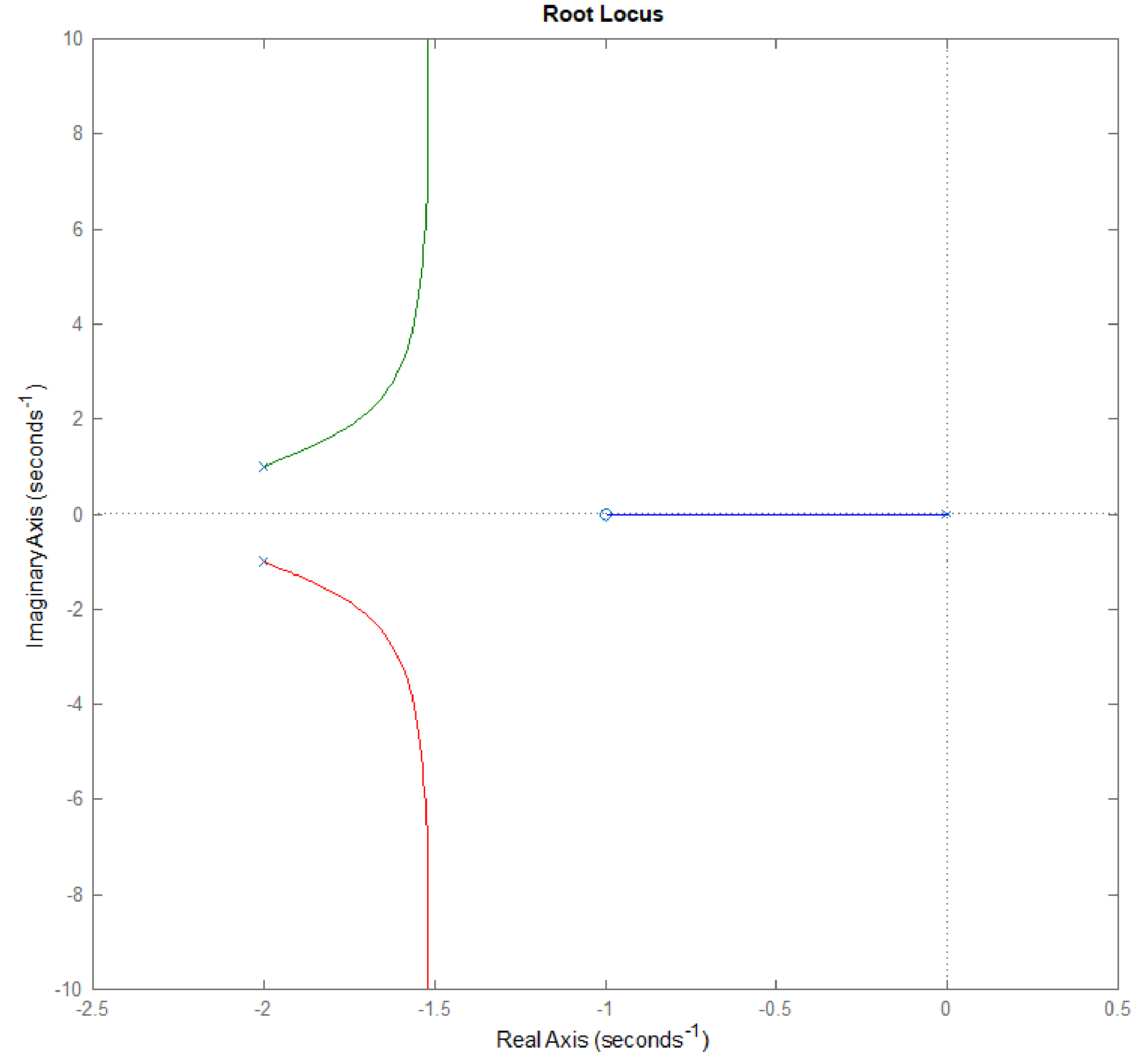


$$G_2(s) = \frac{s+4}{s(s^2+4s+5)}$$

Estabilidade:
$\forall K > 0$

$$\sigma_a = \frac{-4+4}{2} = 0$$

Exemplo 2 – LR para $G_3(s)$ (z=-1)

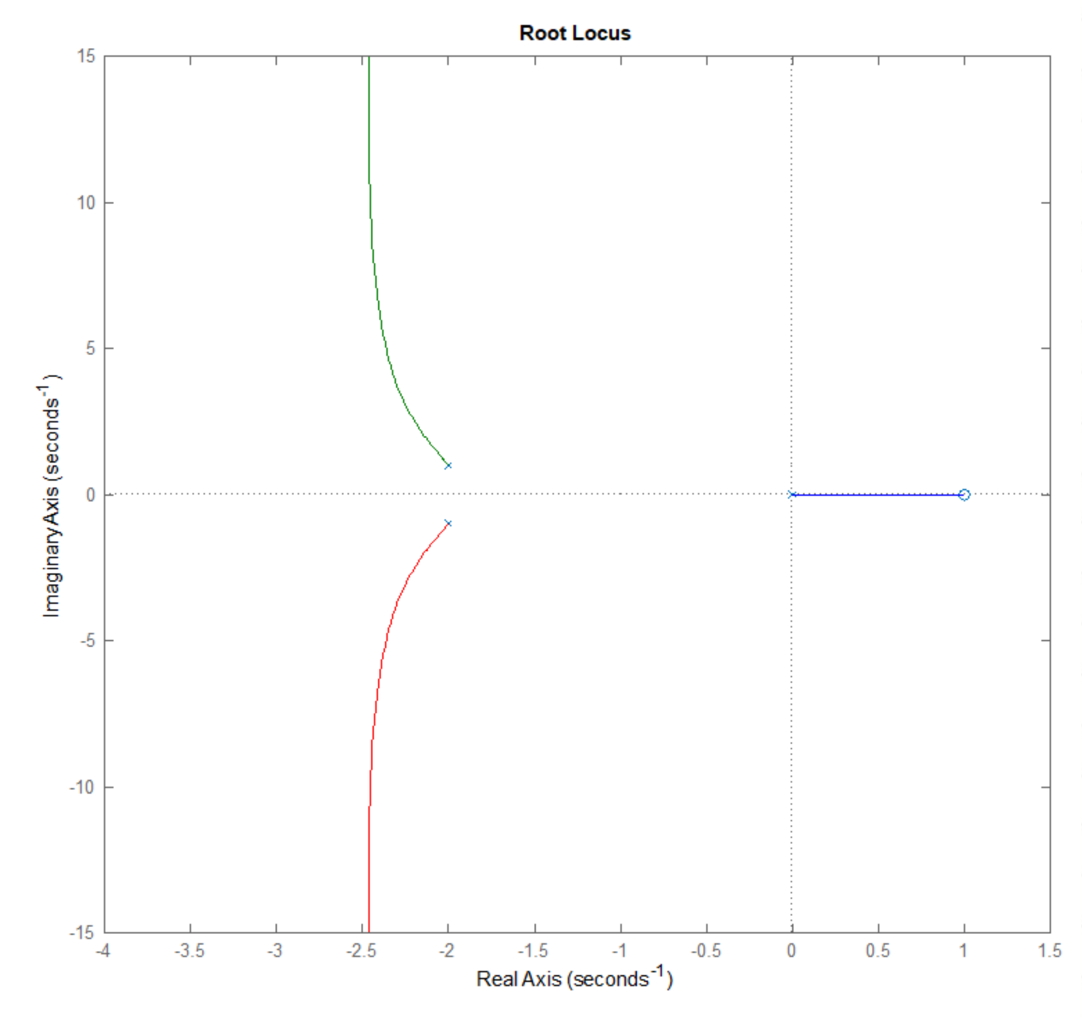


$$G_3(s) = \frac{s+1}{s(s^2+4s+5)}$$

Estabilidade:
$\forall K > 0$

$$\sigma_a = \frac{-4+1}{2} = -1{,}5$$

Exemplo 2 – LR para $G_4(s)$ (z=1)



$$G_4(s) = \frac{s-1}{s(s^2+4s+5)}$$

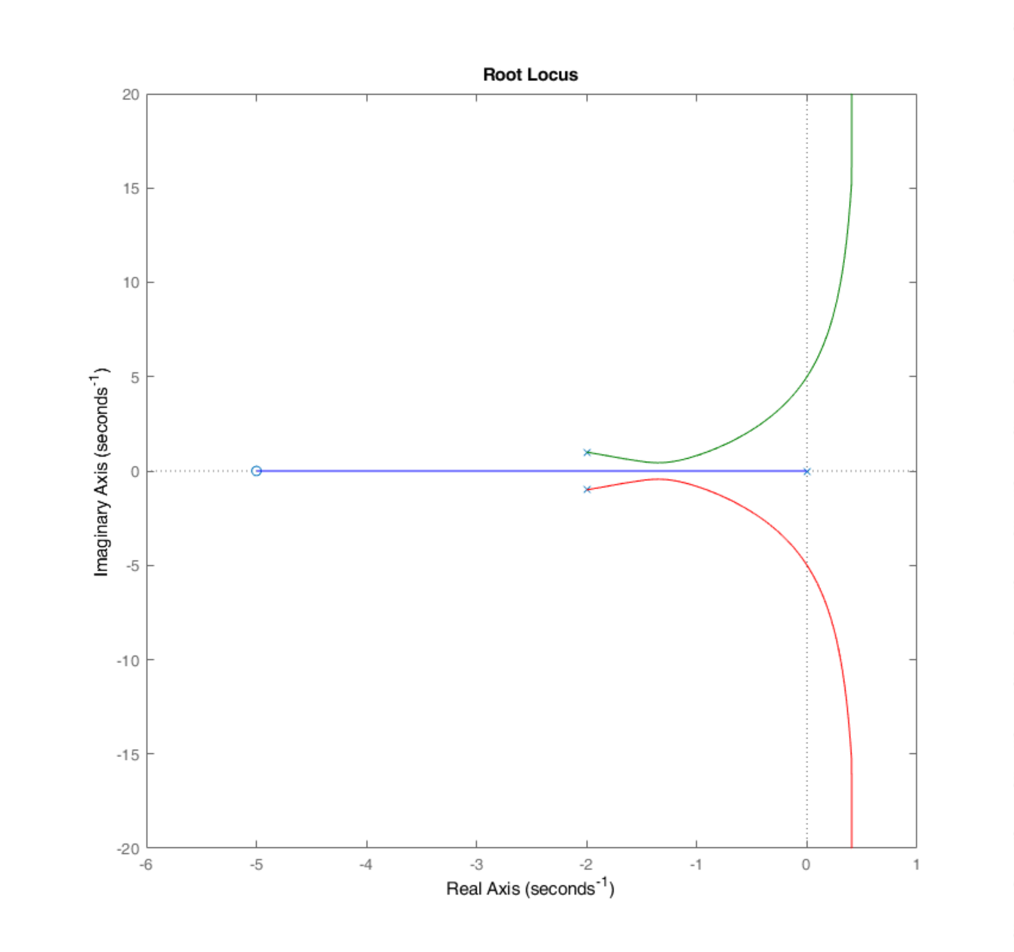
Sistema Instável para $\forall K > 0$

$$\sigma_a = \frac{-4-1}{2} = -2{,}5$$

Neste caso, a introdução de qualquer zero de fase não mínima deixará o sistema instável para qualquer valor de ganho K.

Exemplo 2

A introdução de qualquer zero de fase mínima na região $-\infty < z < -4$ irá resultar em uma assíntota no SPD (σ_a>0), o que indica um limite de estabilidade.



$$G_5(s) = \frac{s+5}{s(s^2+4s+5)}$$

Estabilidade:
0 < K < 20

$$\sigma_a = \frac{-4+5}{2} = 0{,}5$$