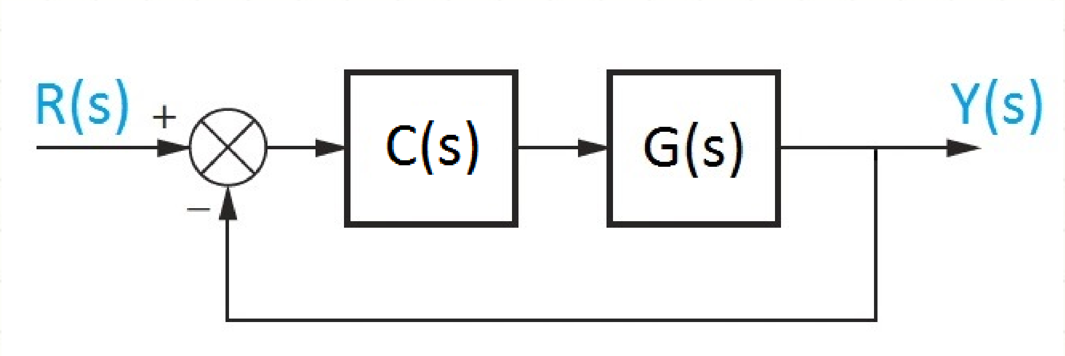
Projeto de Controladores Usando Lugar das raízes

PI, PID, Atraso e Avanço-Atraso

Profa. Cristiane Paim

Controladores em Atraso de Fase

Seja a configuração de controle em série;



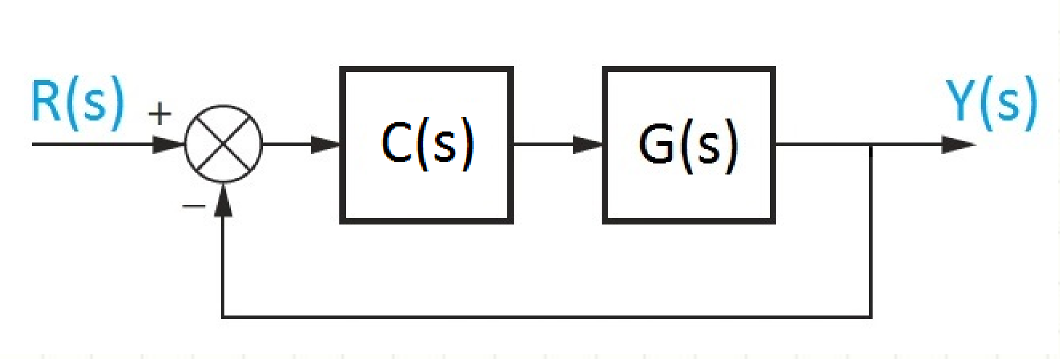
A estrutura do controlador é mesma do controlador em avanço:

$$C(s) = K\frac{s+b}{s+\alpha b} \qquad b>0 \quad 0\le\alpha<1$$

Em geral, os controladores em atraso são utilizados com o objetivo de melhorar o regime permanente.

Controladores em Atraso de Fase

Seja a configuração de controle em série, sendo G(s) um sistema do tipo 1.



Considere inicialmente um controle proporcional, ou seja, C(s)=K. Neste caso, o erro de regime permanente à entrada rampa será definido por

$$e_\infty = \frac{1}{K_V} \qquad K_V = \lim_{s \to 0} sKG(s) = KG(0)$$

Controladores em Atraso de Fase

Seja agora C(s) um controlador em atraso, ou seja,

$$C(s) = K\frac{s+b}{s+\alpha b}$$

neste caso, o coeficiente de erro de velocidade torna-se

$$\overline{K}_V = \lim_{s\to 0} s\,K\frac{s+b}{s+\alpha b}G(s) = \frac{K}{\alpha}G(0)$$

ou seja

$$\overline{K}_V = \frac{K_V}{\alpha}$$

Portanto, o controlador em atraso gera um aumento de $1/\alpha$ vezes no valor de K_V, reduzindo na mesma proporção o erro de regime permanente.

Controladores em Atraso de Fase

Em geral, a redução do erro de regime permanente é obtida alocando-se o **polo do controlador próximo à origem**.

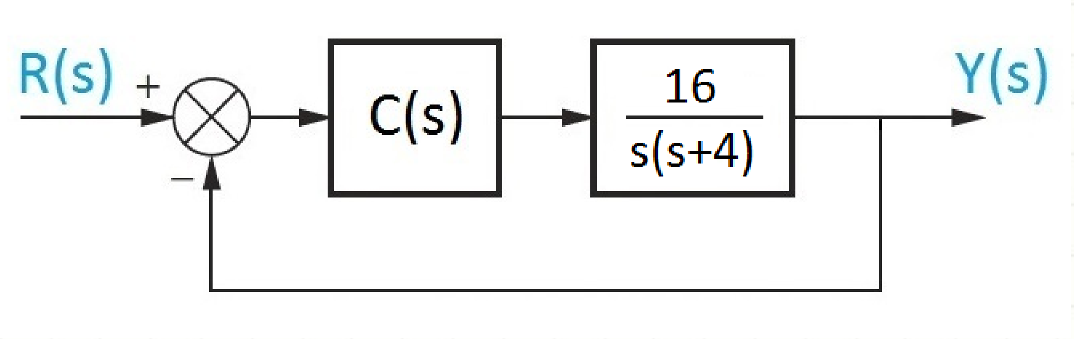
Para que este polo não desloque excessivamente o LR para a direita aloca-se o **zero do controlador próximo ao polo**.

O **valor de α**, que define a posição relativa entre polo e zero, **é escolhido de modo a garantir a melhoria necessária no erro de regime permanente**.

Esta escolha particular de parâmetros garante que o polo adicional (gerado em malha fechada devido à introdução do controlador) esteja próximo ao zero (do controlador), não afetando significativamente a resposta transitória.

Exemplo 1 – Controlador em Atraso

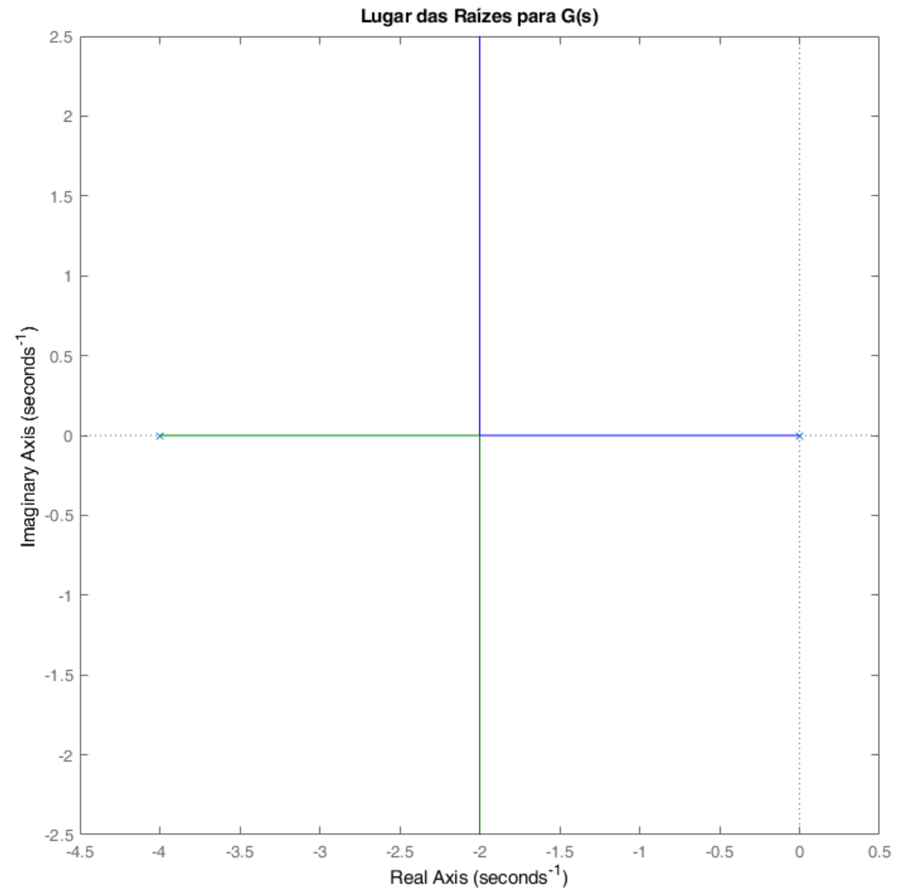
Seja o sistema de controle a seguir.



Projetar um controlador de modo a atender as seguintes especificações:

- Erro à rampa menor do que 5%
- Não ocorra alteração significativa na resposta transitória de malha fechada, com C(s)=1.

Exemplo 1 – Controlador em Atraso



$$G(s) = \frac{16}{s(s+4)}$$

Estável para $\forall K > 0$.

Exemplo 1 – Controlador em Atraso

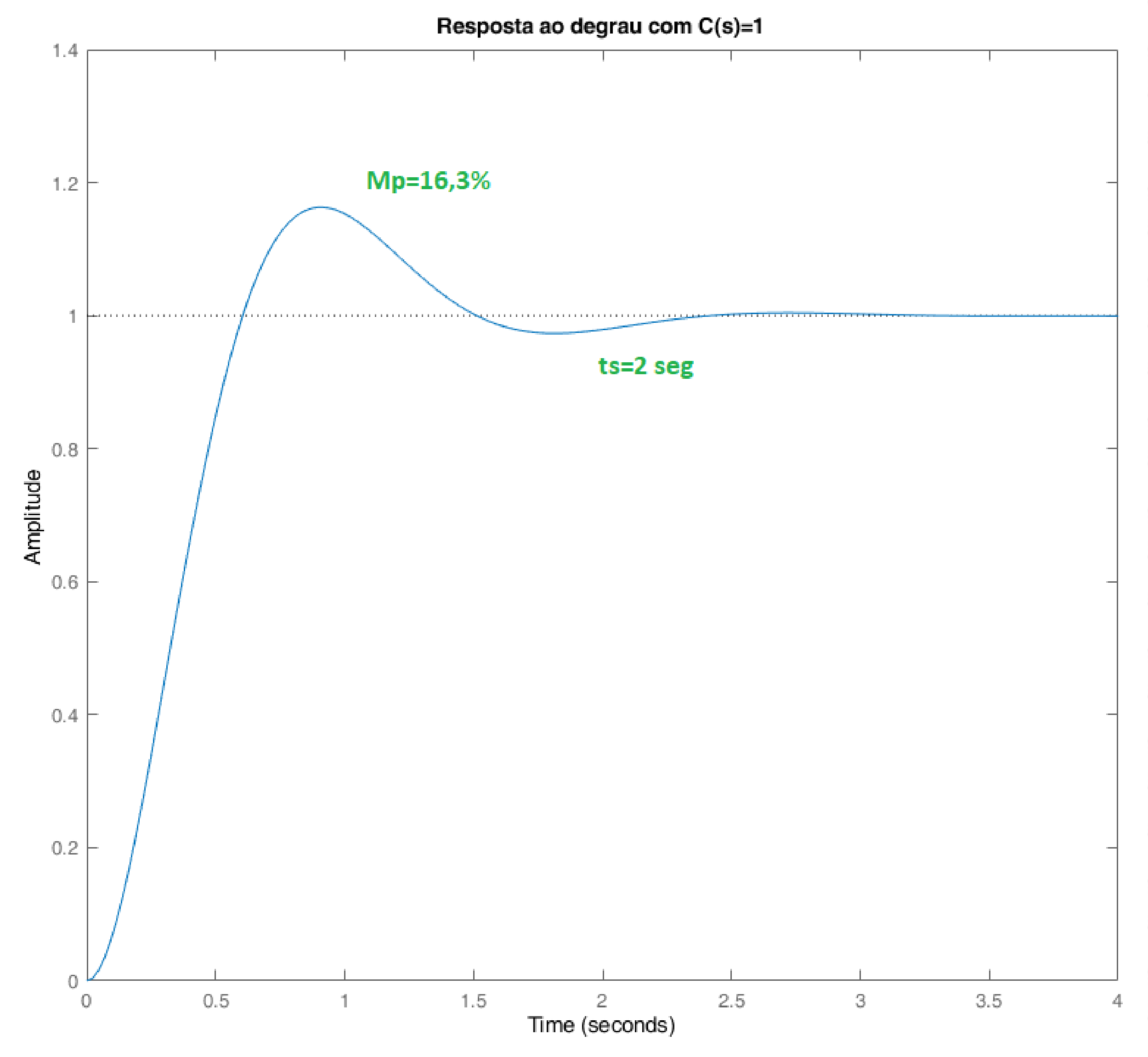
Considerando C(s)=1, a função de transferência de malha fechada fica:

$$T(s)=\frac{16}{s^2+4s+16} \quad \Rightarrow \quad p_{1,2}=-2\pm j2\sqrt{3}$$

de onde obtém-se

$$\begin{matrix} \omega_n = 4 \\ \xi = 0{,}5 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} M_P = 16\% \\ t_S = 2seg \end{matrix}$$

Exemplo 1 – Controlador em Atraso

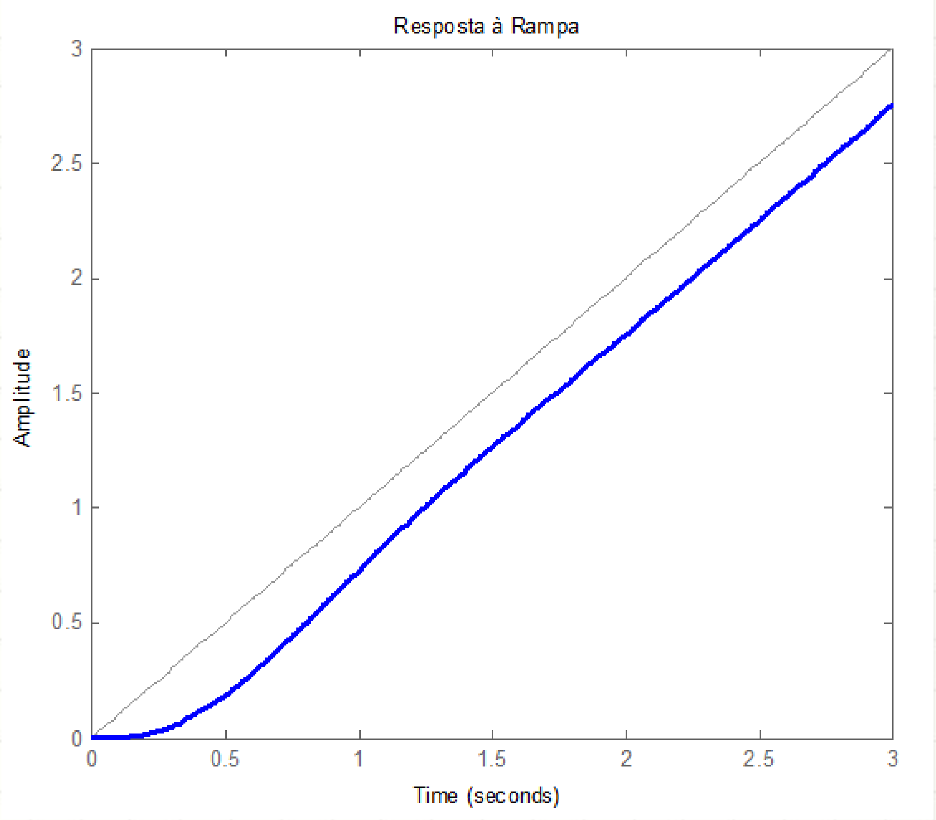


Exemplo 1 – Controlador em Atraso

Para uma entrada em rampa unitária, o erro de regime permanente será:

$$K_V = \lim_{s \to 0} sG(s) = 4$$

$$e_\infty = \frac{1}{K_V} = 25\%$$



Para garantir $e_\infty < 5\%$ seria necessário **$K_V > 20$.**

Exemplo 1 – Controlador em Atraso

O ganho K_V precisa ser aumentado ao menos 5 vezes para atender a especificação de erro de regime permanente.

O polo do controlador será alocado próximo à origem

$$p = \alpha b = 0{,}01$$

e o zero será colocado 5 vezes distante (α=1/5)

$$z = b = 0{,}05$$

Assim, o controlador em atraso fica

$$C(s) = K\frac{s+0{,}05}{s+0{,}01}$$

Exemplo 1 – Controlador em Atraso

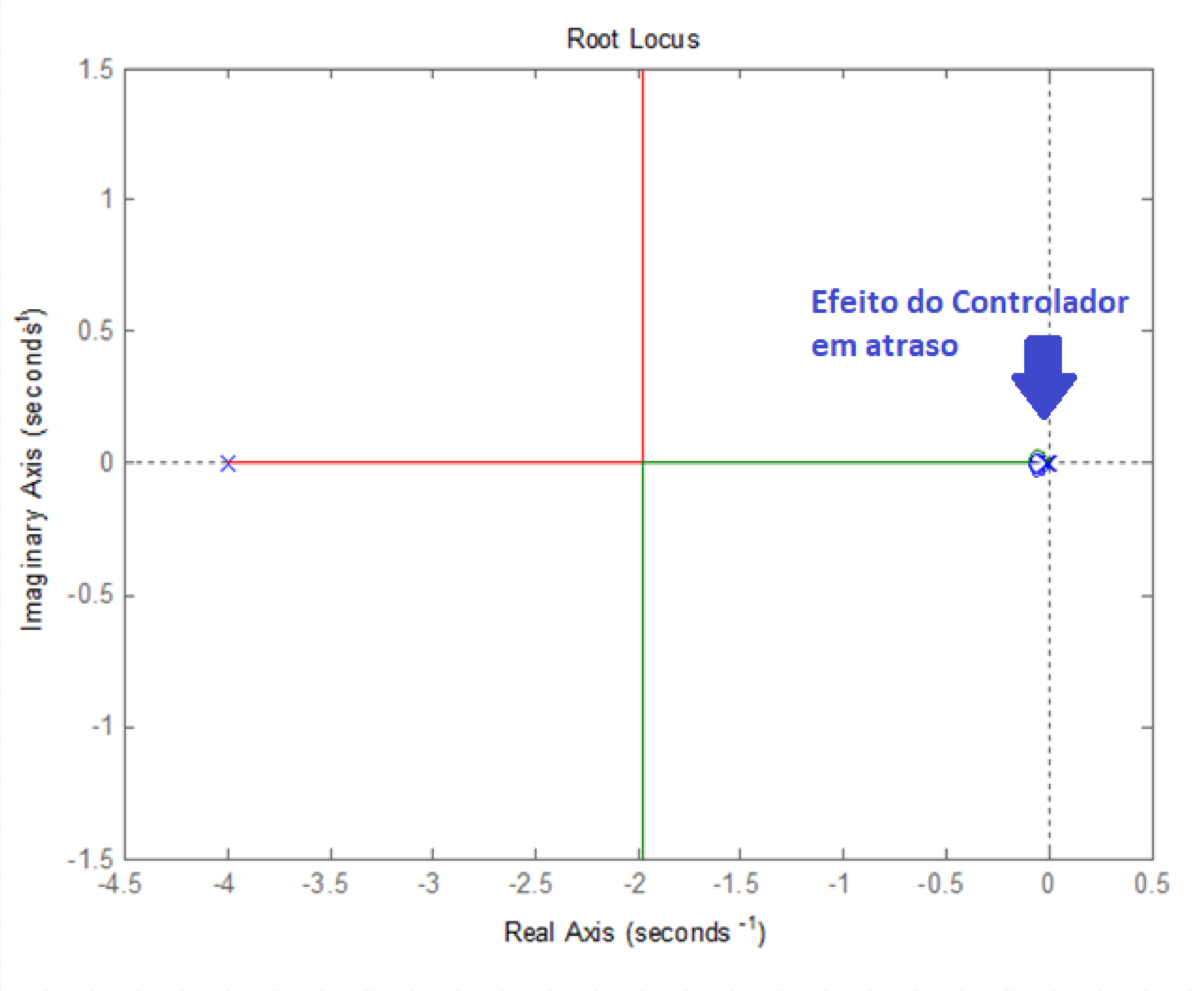
O ganho K será determinado pela **condição de módulo** considerando os polos desejados para malha fechada.

Os polos desejados para a malha fechada serão definidos para atender a 2ª especificação: **não haver alteração significativa na resposta transitória.**

O Lugar das Raízes para o sistema compensado será traçado para a função:

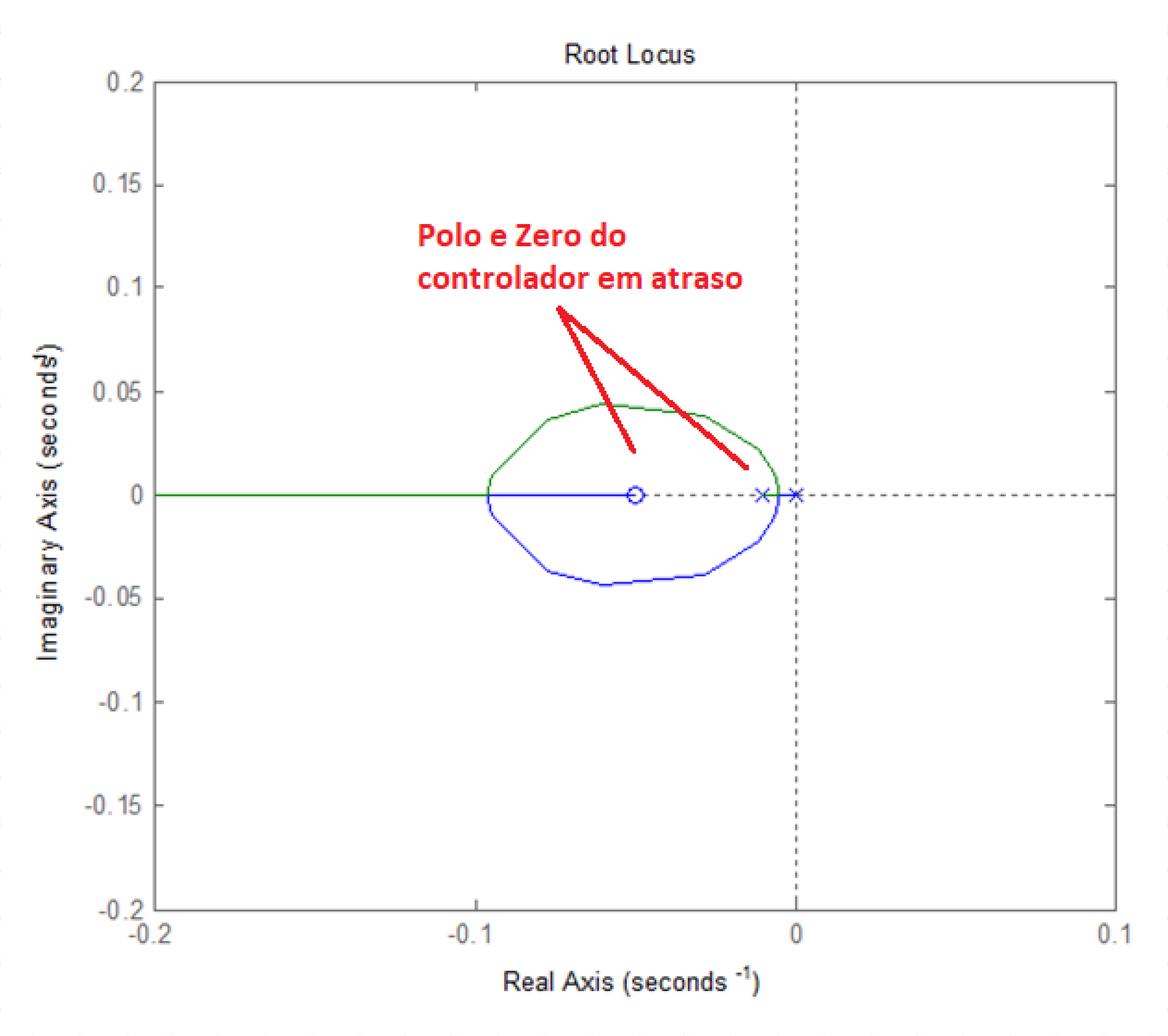
$$C(s)G(s) = K\frac{s+0{,}05}{s+0{,}01}\frac{16}{s(s+4)}$$

Exemplo 1 – Controlador em Atraso



Lugar das Raízes para C(s)G(s)

Exemplo 1 – Controlador em Atraso



Detalhe do Lugar das Raízes para C(s)G(s)

Exemplo 1 – Controlador em Atraso

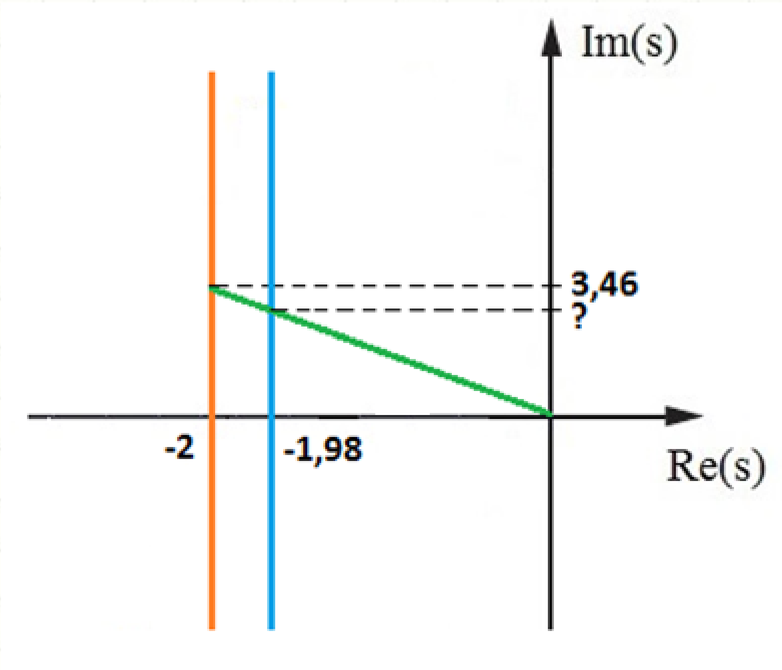
Para que não exista considerável alteração na resposta transitória **os polos dominantes de malha fechada devem manter a mesma relação de amortecimento** (ξ=0,5).

Os polos de malha fechada, com C(s)=1, são

$$s_{1,2} = -2 \pm j2\sqrt{3}$$
$$= -2 \pm j3{,}46$$

Portanto, para o sistema compensado tem-se

$$s_{1,2} = -1{,}98 \pm j1{,}98\sqrt{3}$$
$$= -1{,}98 \pm j3{,}43$$



Exemplo 1 – Controlador em Atraso

O ganho K será determinado pela condição de módulo

$$K = \frac{1}{|C(s_d)G(s_d)|} = \left|\frac{s(s+0{,}01)(s+4)}{16(s+0{,}05)}\right| = 1{,}0098 \cong 1$$

assim, tem-se o controlador em atraso:

$$C(s) = \frac{s+0{,}05}{s+0{,}01}$$

Obs.: Nesta metodologia de projeto (usando o atraso para melhorar apenas o erro sem alterar o transitório) o ganho K sempre será um valor muito próximo de 1.

Exemplo 1 – Controlador em Atraso

Verificação

Malha aberta:

$$C(s)G(s) = \frac{16(s+0{,}05)}{s(s+4)(s+0{,}01)}$$

Malha fechada:

$$T(s) = \frac{16(s+0{,}05)}{s^3 + 4{,}01s^2 + 16{,}04s + 0{,}8} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} z &= -0{,}05 \\ p_1 &= -0{,}0505 \\ p_{2,3} &= -1{,}98 \pm j3{,}35 \end{aligned}$$

Observe que, o polo adicional (p_1) está praticamente sobre o zero do controlador e, portanto, o efeito deste zero na resposta transitória será muito pequeno (praticamente nulo).

Exemplo 1 – Controlador em Atraso

Aproximando por polos dominantes:

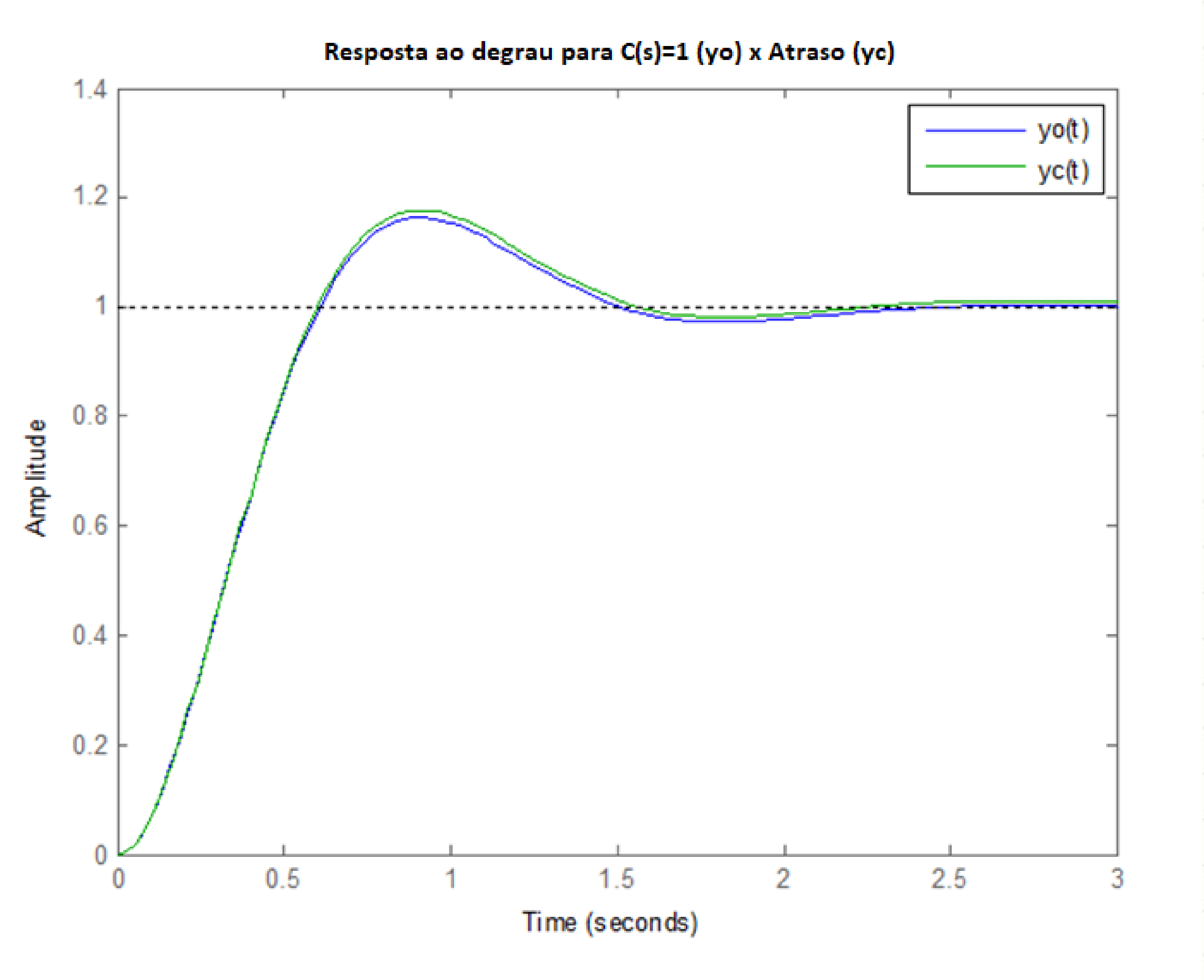
$$p_{2,3} = -1{,}98 \pm j3{,}35 \quad \Rightarrow \quad s^2 + 3{,}96s + 15{,}84$$

tem-se

$$\omega_n = 3{,}98 \approx 4$$
$$\xi = 0{,}498 \approx 0{,}5$$

ou seja, praticamente os valores originais, com C(s)=1.

Exemplo 1 – Controlador em Atraso



Controlador em Atraso x Controlador PI

Sendo o controlador PI um caso particular do controlador em atraso, este poderia ser utilizado para resolver o problema anterior?

Exemplo 2 – Controlador PI

Verificar se é possível atender as especificação do exemplo 1 considerando um Controlador PI.

Uma vez que o controlador PI introduz um polo na origem o **erro de regime permanente será sempre nulo**, garantindo assim a especificação de $e_\infty < 5\%$.

Entretanto, é necessário avaliar se é possível manter o desempenho da resposta transitória ajustando o ganho (K) e a posição do zero do controlador.

O controlador PI pode ser escrito da forma

$$C(s) = K\frac{s+z}{s}$$

Exemplo 2 – Controlador PI

Inicialmente será avaliada a estabilidade do sistema em malha fechada em função dos parâmetros do controlador.

Considerando o controlador PI

$$C(s)G(s) = \frac{16K(s+z)}{s^2(s+4)}$$

Em malha fechada

$$\Delta(s) = s^3 + 4s^2 + 16Ks + 16Kz = 0$$

Exemplo 2 – Controlador PI

Aplicando Routh-Hurwitz:

s^3	1	$16K$
s^2	4	$16Kz$
s^1	$(64K - 16Kz)/4$	
s^0	$16Kz$	

Para estabilidade

$$K > 0, Kz > 0 \Rightarrow z > 0$$

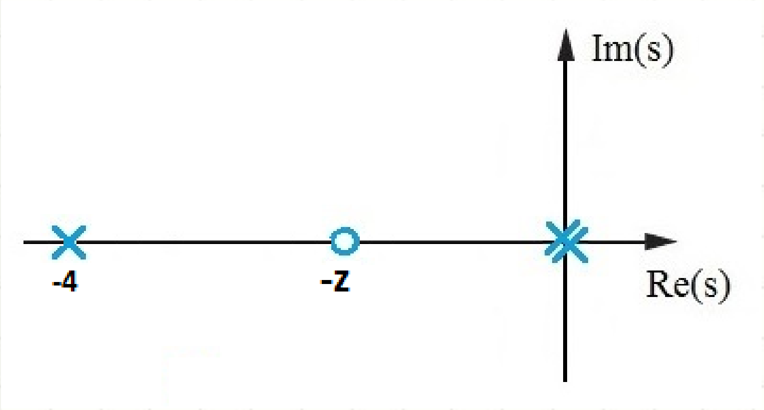
$$64K - 16Kz > 0 \Rightarrow z < 4$$

Portanto, para garantir a estabilidade:

$$0 < z < 4$$

Exemplo 2 – Controlador PI

O mapa polo/zero do sistema compensado será

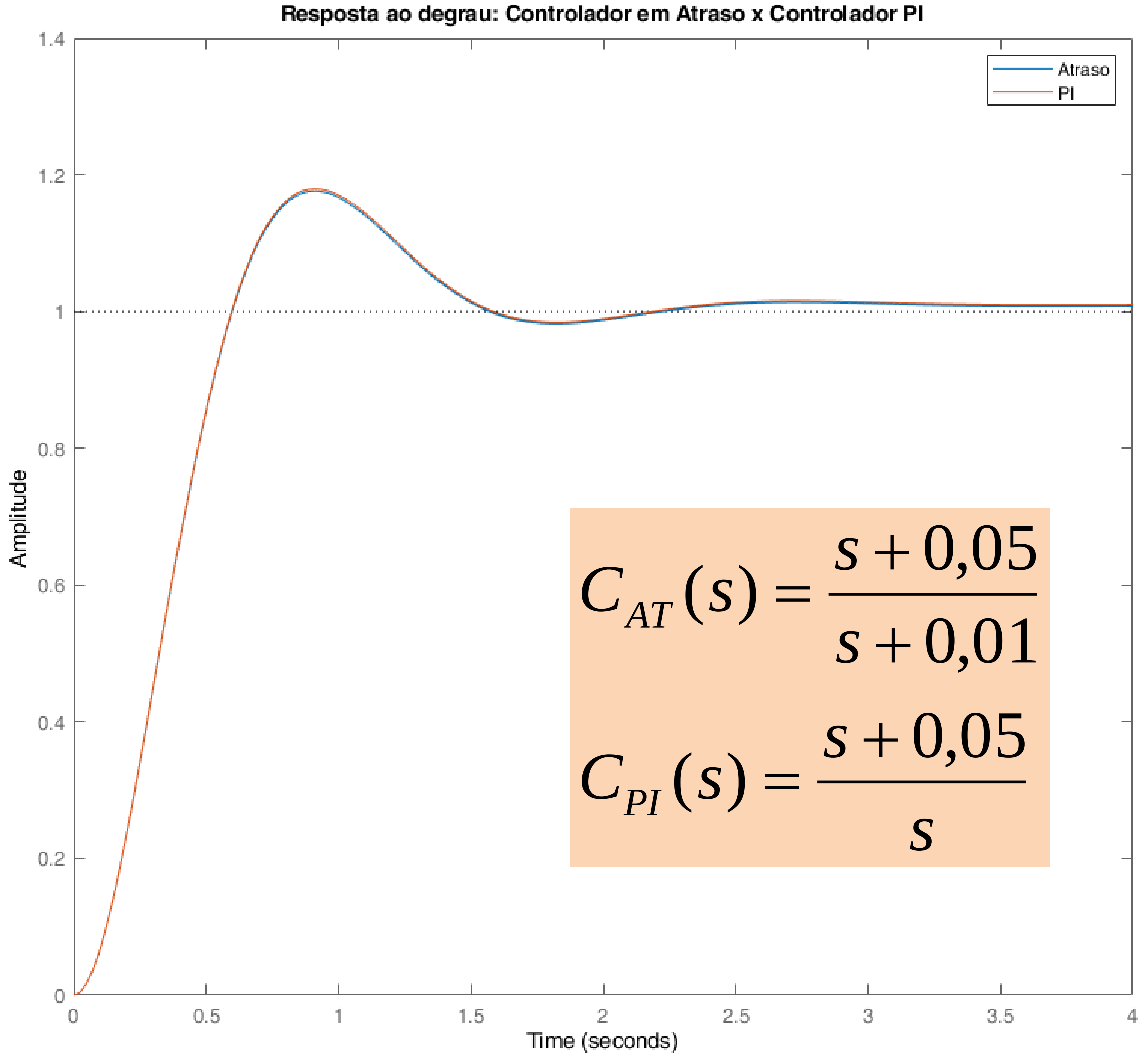


O Lugar das Raízes terá 2 assíntotas de ±90°, a partir do centroide definido por

$$\sigma_a = \frac{z-4}{2}$$

Portanto, para conseguir manter a assíntota em torno de -2 (de modo a garantir polos de MF próximos dos originais) o valor do zero precisa ser muito pequeno (semelhante ao controlador em atraso).

Exemplo 2 – Controlador PI

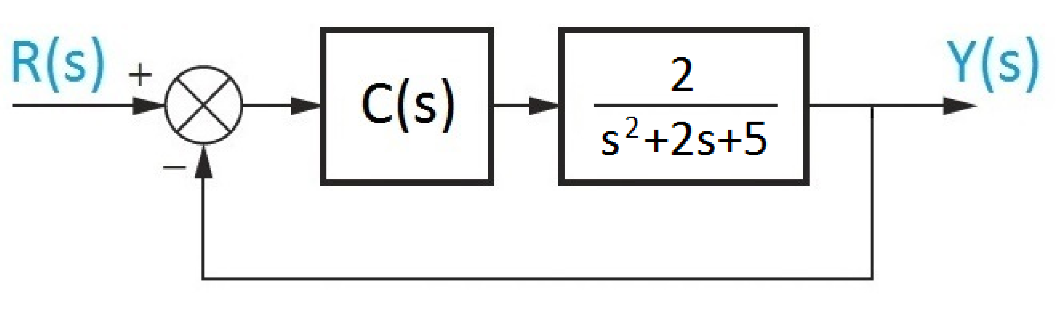


$$C_{AT}(s) = \frac{s + 0{,}05}{s + 0{,}01}$$

$$C_{PI}(s) = \frac{s + 0{,}05}{s}$$

Exemplo 3

Seja o sistema de controle a seguir.



Projetar um controlador de modo a atender as seguintes especificações:

- Sobressinal máximo inferior a 20%
- Tempo de acomodação inferior a 8 segundos (critério 2%)
- Erro nulo à entrada degrau

Exemplo 3

Considerando C(s)=1, a função de transferência do sistema em malha fechada será:

$$T(s)=\frac{2}{s^2+2s+7} \quad \Rightarrow \quad p_{1,2}=-1\pm j2{,}45$$

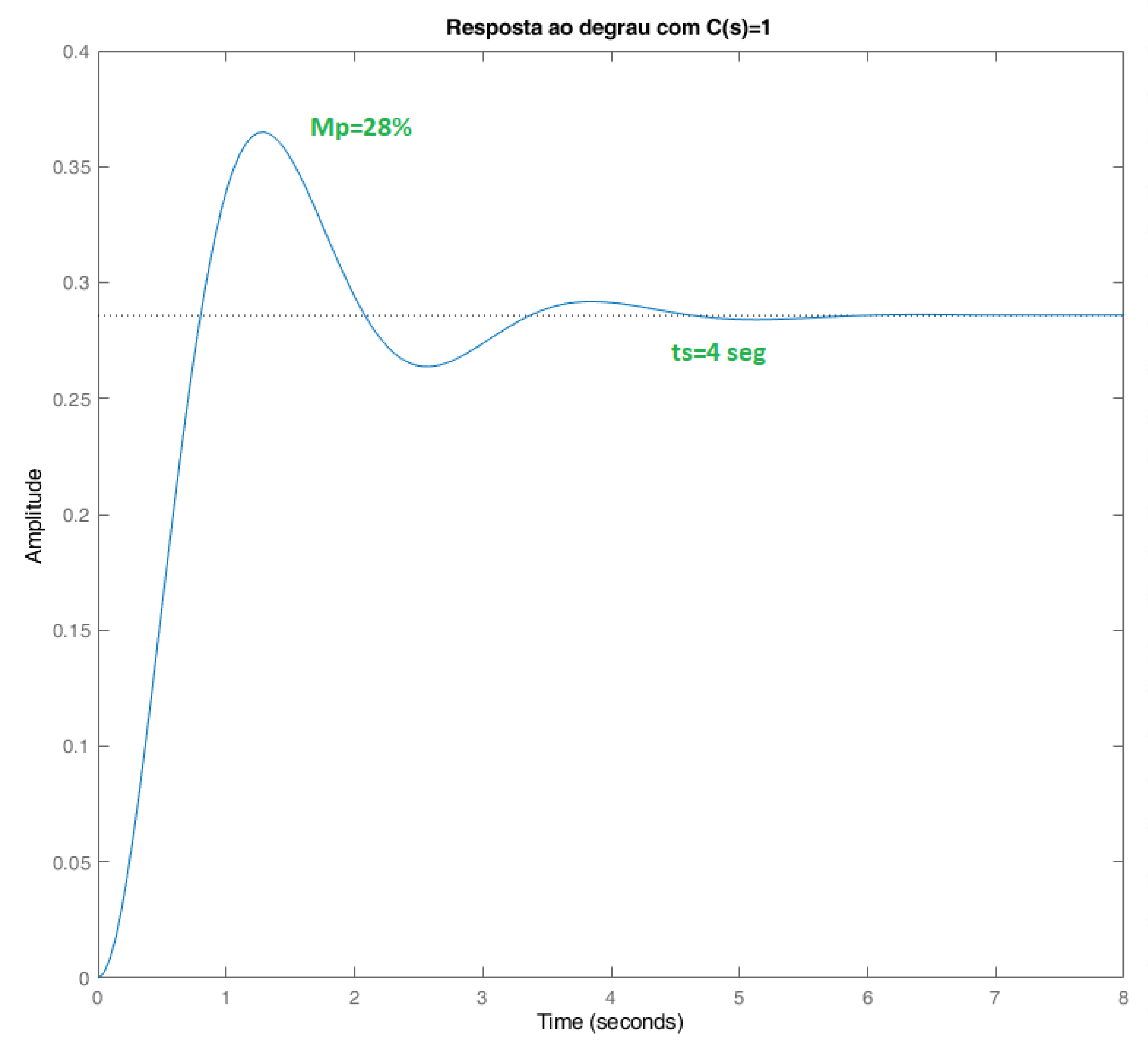
de onde obtém-se

$$\begin{matrix} \omega_n = 2{,}65 & & M_P = 28\% \\ & \rightarrow & \\ \xi = 0{,}38 & & t_S = 4seg \end{matrix}$$

O erro de regime permanente é:

$$K_P=\lim_{s\to 0} G(s)=2/5 \qquad e_\infty=\frac{1}{1+K_P}=71\%$$

Exemplo 3 – Resposta ao degrau para C(s)=1

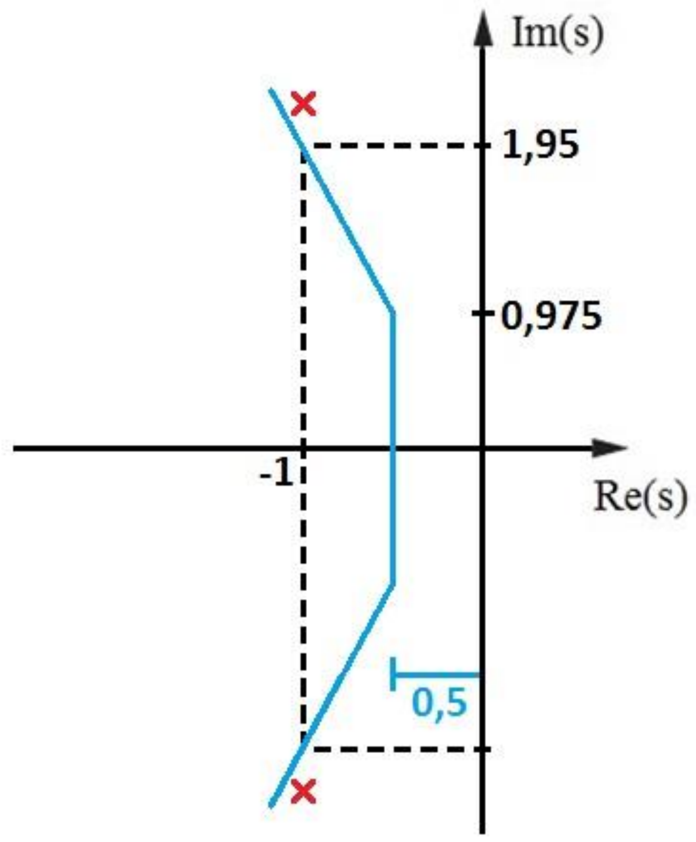


Exemplo 3 – Região desejada para os polos de MF

$$M_P < 20\% \quad \Rightarrow \quad \xi > 0{,}46\left(\theta < 63^\circ\right)$$
$$t_s < 8seg \quad \Rightarrow \quad \sigma > 0{,}5$$

Observe que os polos de malha aberta (-1±j2) estão fora da região desejada.

Portanto, estes não deverão ser cancelados.



Exemplo 3 – Escolha do Controlador

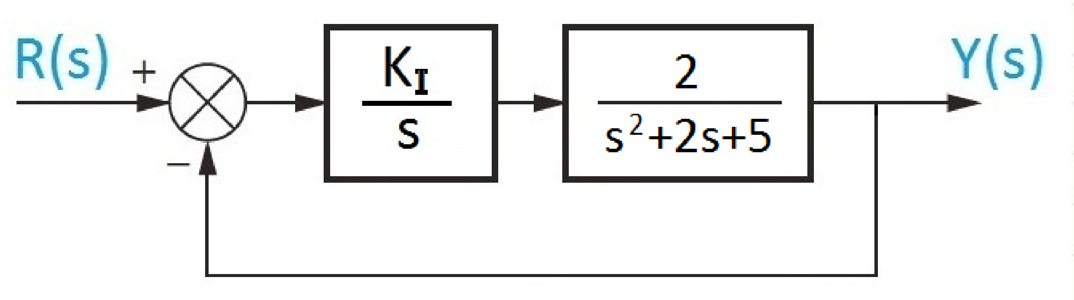
Tendo em vista que deseja-se um **erro nulo à entrada degrau** faz-se necessária a introdução de um **integrador** na malha direta. Assim, é possível pensar o projeto considerando as seguintes estruturas de controle:

- Controle Integral
- Controlador PI
- Controlador PID ideal (zeros reais ou complexos)
- Controlador PID Real *

*O controlador PID Real é na realidade um controlador Avanço-Atraso onde a parte do atraso é ajustada para ser um PI, ou seja, é um PI-Avanço.

Exemplo 3a – Controle Integral

Seja C(s) um controle integral, com K_I>0:



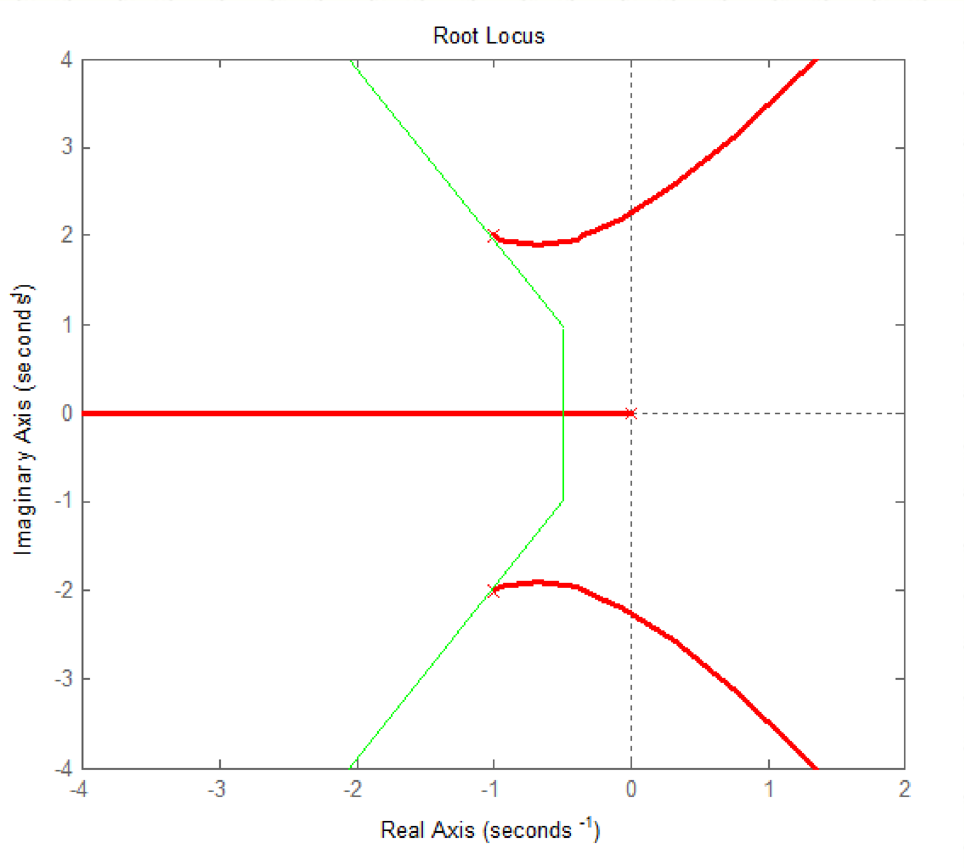
Em malha fechada

$$T(s) = \frac{2K_I}{s(s^2+2s+5)+2K_I}$$

O polinômio característico é dado por

$$1 + K_I \frac{2}{s(s^2+2s+5)} = 0$$

Exemplo 3a – Controle Integral

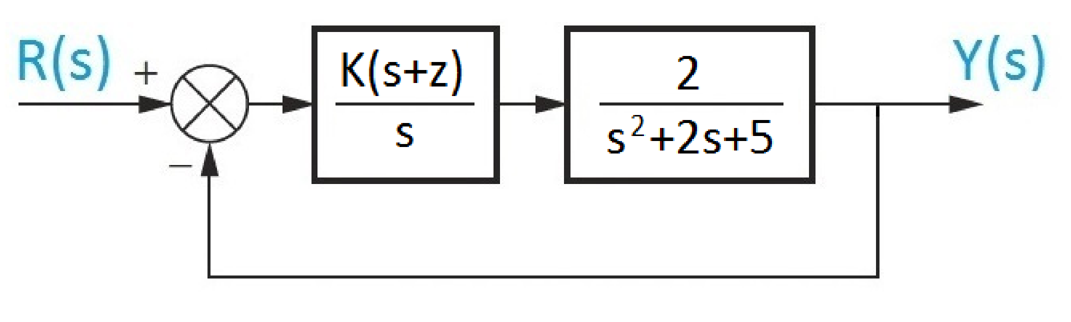


Observa-se que sempre existirão polos fora da região desejada.

Logo, não é possível atender as especificações usando apenas um integrador.

Exemplo 3b – Controlador PI

Seja C(s) um controlador PI, de fase mínima (K>0, z > 0).



Em malha fechada

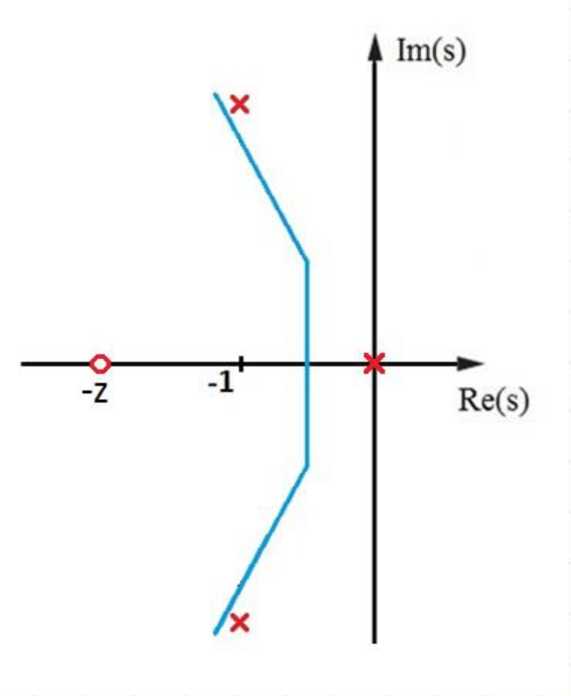
$$T(s)=\frac{2K(s+z)}{s(s^2+2s+5)+2K(s+z)}$$

O polinômio característico pode ser escrito como

$$1+K\frac{2(s+z)}{s(s^2+2s+5)}=0$$

Exemplo 3b – Controlador PI

O sistema controlado tem 3 polos e 1 zero.



Assim, o Lugar das Raízes terá 2 assíntotas de ±90°, a partir do centroide, definido por:

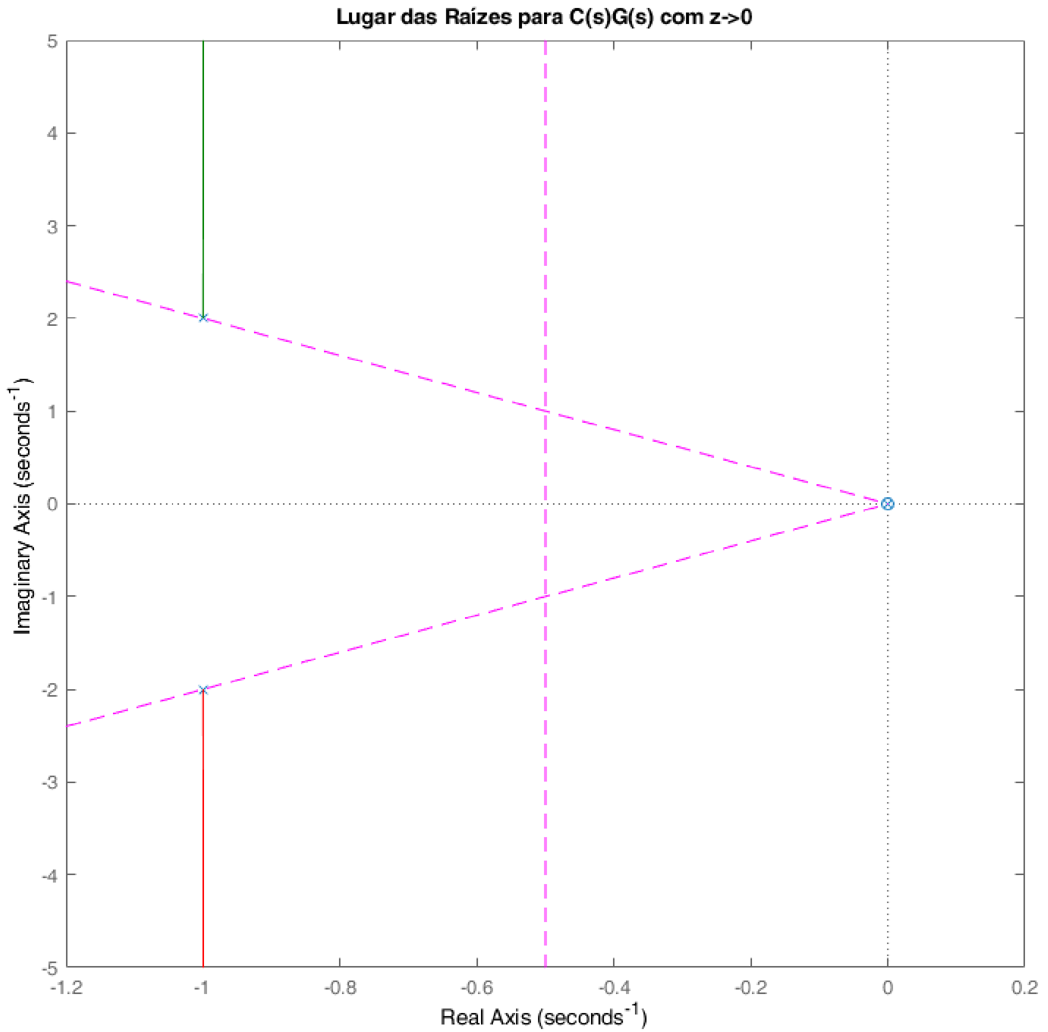
$$\sigma_a = \frac{z-2}{2}$$

Quanto menor o valor do zero mais à esquerda estarão as assíntotas. No limite,

$$z \to 0 \qquad \sigma_a \to -1$$

Neste caso ($z \to 0$), os polos complexos tenderiam diretamente à assíntota (±90°) e, portanto, as especificações nunca seriam atendidas.

Exemplo 3b – Controlador PI



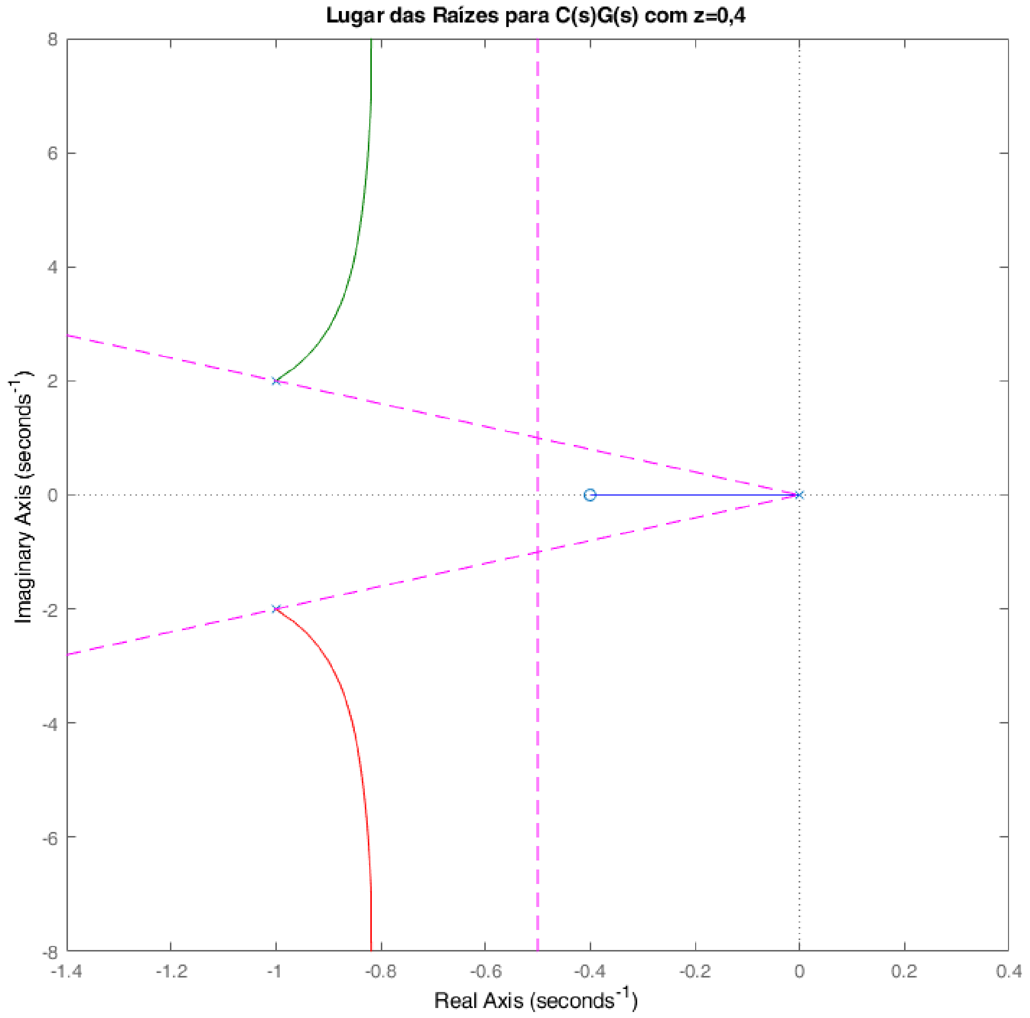
Exemplo 3b – Controlador PI

Se o zero estiver entre 0 e 0,5 o ramo que parte do polo da origem irá diretamente para este zero, ficando fora da região.

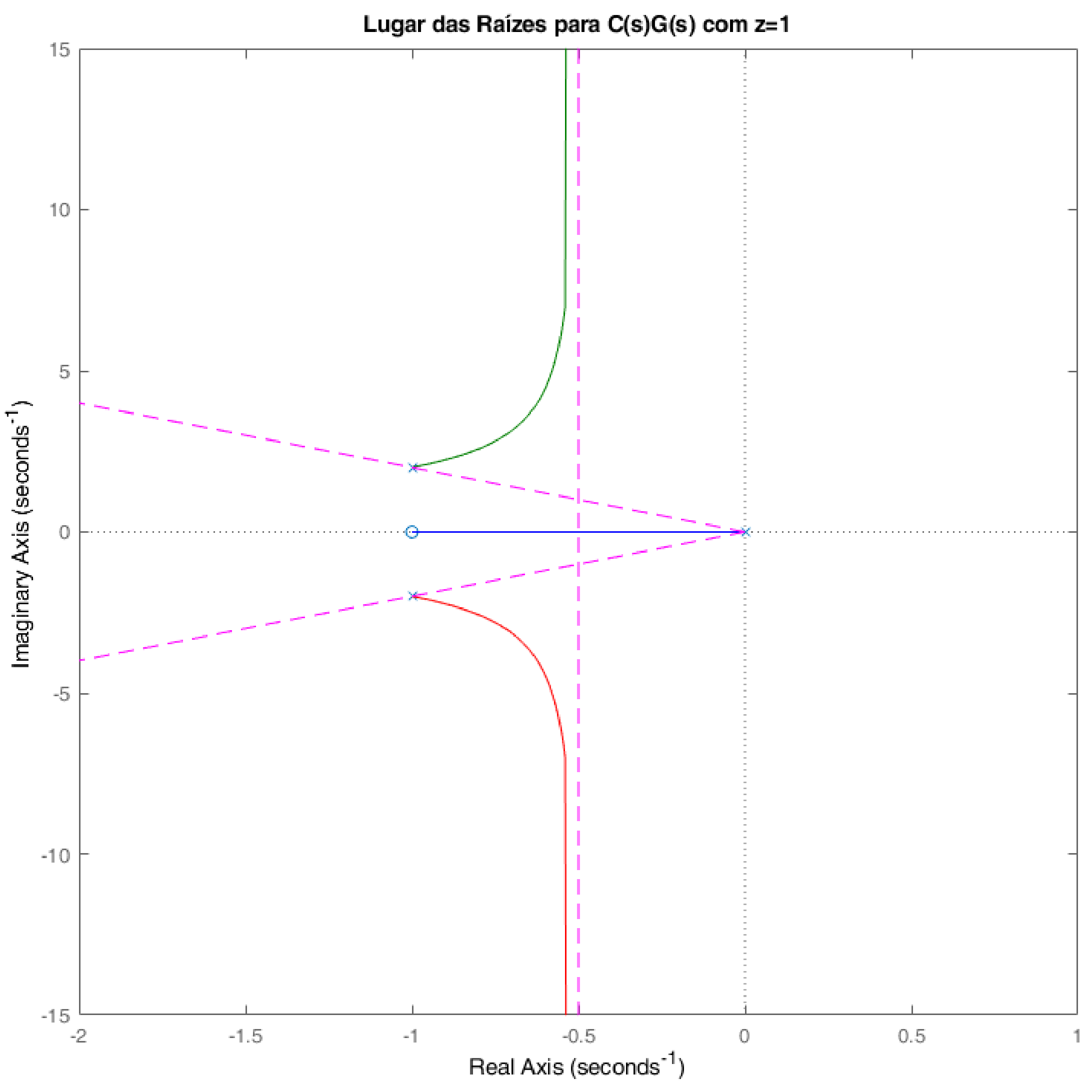
Observa-se ainda que os ramos que partem polos complexos sempre seguirão diretamente em direção à assíntota, saindo da região, independente da posição do zero.

Portanto, não é possível atender todas as especificações com um controlador PI.

Exemplo 3b – Controlador PI



Exemplo 3b – Controlador PI



Controlador PID Ideal

Seja C(s) um controlador PID ideal (acadêmico):

$$C(s) = K_P\left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right)$$

Os valores dos parâmetros do controlador podem ser selecionados de modo a produzir zeros reais ou complexos conjugados.

Exemplo 3c – Controlador PID (zeros complexos)

Neste caso, C(s) pode ser escrito como

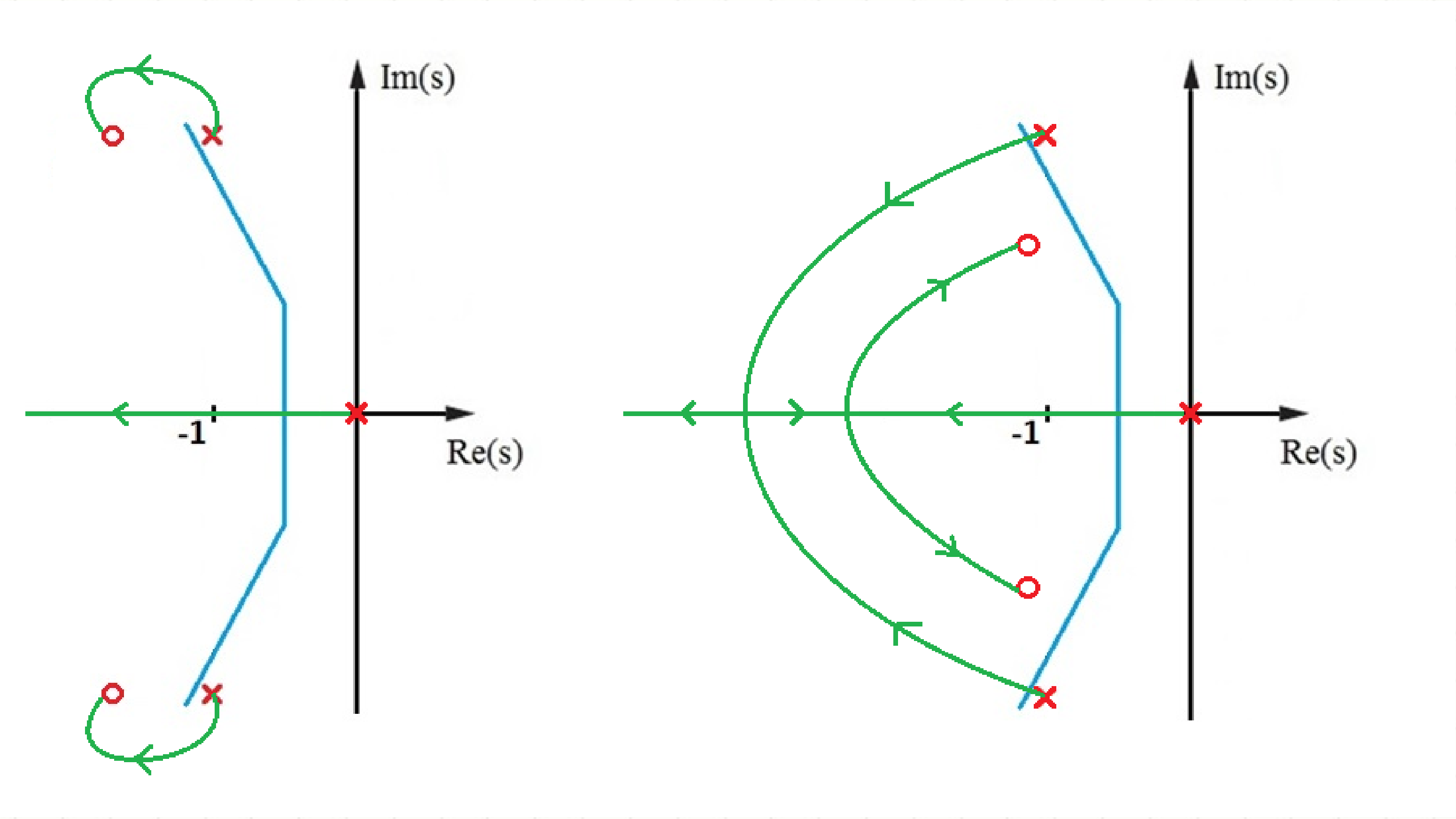
$$C(s) = K_C \frac{(s+z_1)(s+z_2)}{s} \qquad z_{1,2} = a \pm jb$$

O Lugar das Raízes terá 3 polos e 2 zeros e, portanto, existirá uma única assíntota com ângulo de 180° (eixo real negativo).

Dois ramos chegarão aos zeros complexos e o terceiro ramo seguirá para a assíntota.

Neste caso, dependendo da posição escolhida para os zeros, existirão duas configurações de Lugar das Raízes possíveis (com ou sem ramificações).

Exemplo 3c – Controlador PID (zeros complexos)



1ª configuração – sem ramificação

2ª configuração – com 2 ramificações

Exemplo 3c – Controlador PID (zeros complexos)

Escolhido **z=-2 ± j** (2ª configuração) tem-se:

$$C(s) = K\frac{s^2+4s+5}{s}$$

Em malha aberta,

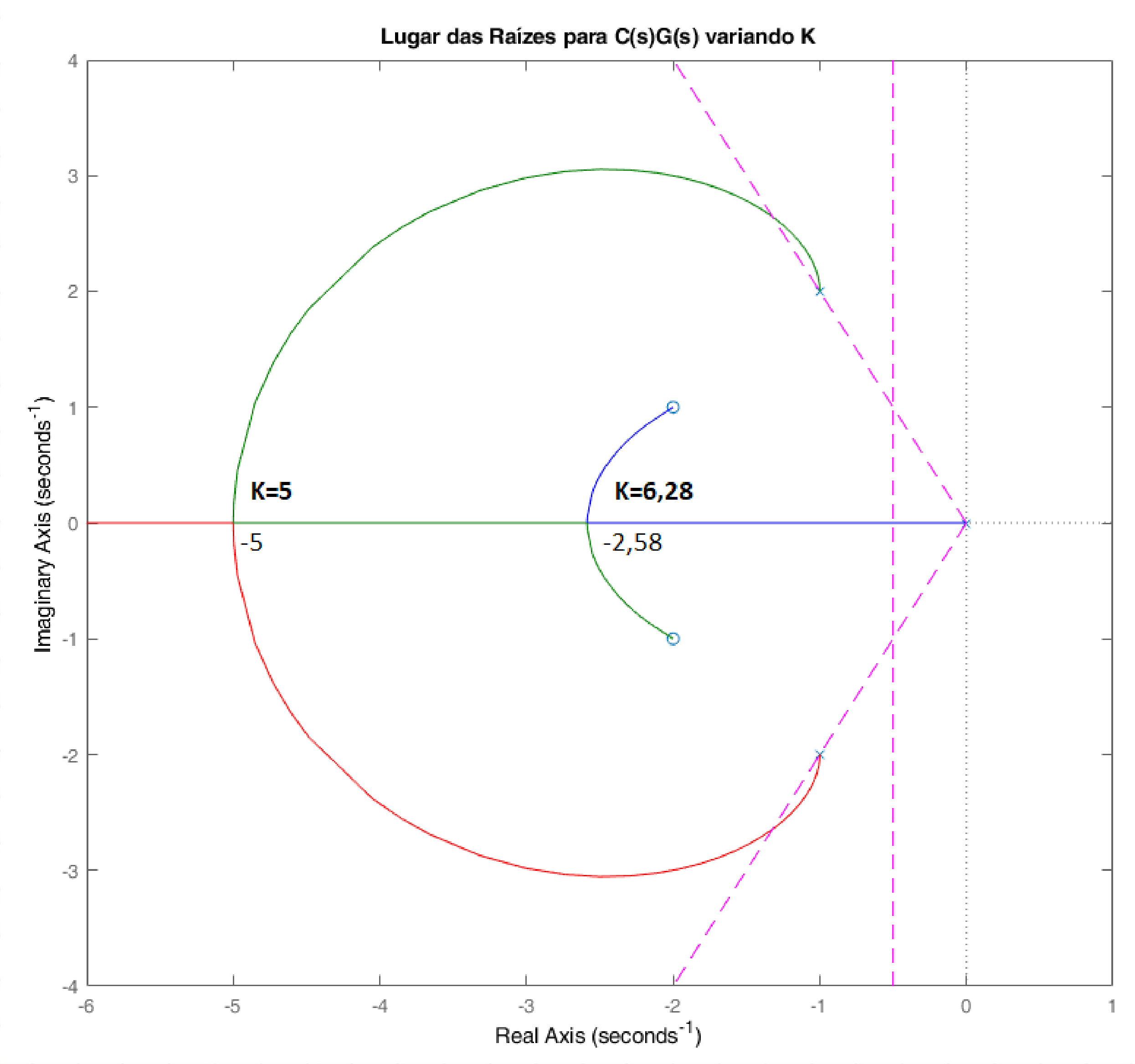
$$C(s)G(s) = 2K\frac{s^2+4s+5}{s(s^2+2s+5)}$$

e o Lugar das Raízes será traçado para

$$1+K\frac{2(s^2+4s+5)}{s(s^2+2s+5)} = 0$$

Os valores limite de K serão definidos pela intersecção do Lugar das Raízes com as retas que definem a região desejada para os polos de malha fechada.

Exemplo 3c – Controlador PID (zeros complexos)



Exemplo 3c – Controlador PID (zeros complexos)

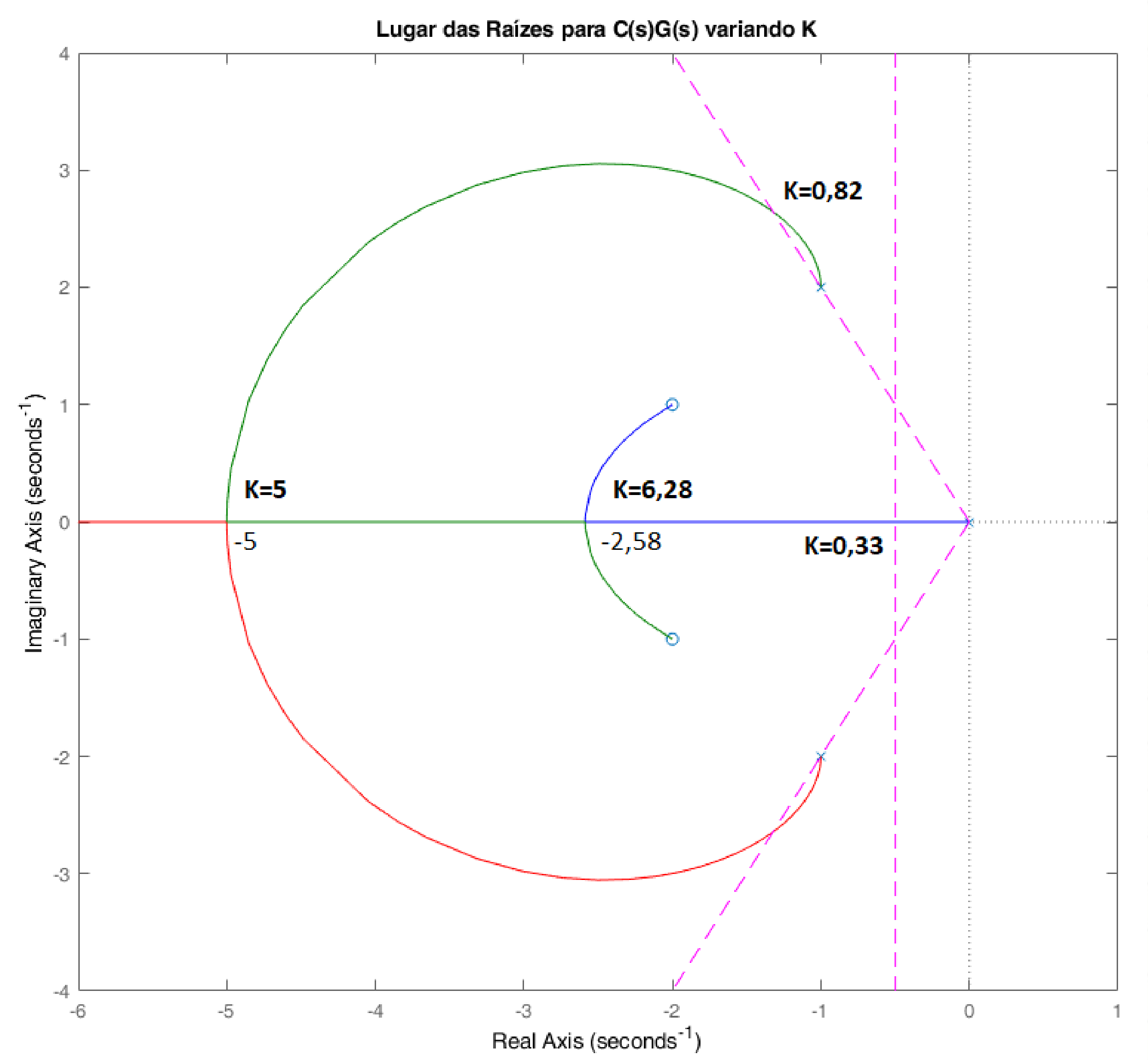
Da intersecção do Lugar das Raízes com a região obtém-se

$$
\begin{aligned}
M_P &< 20\% \quad \Rightarrow \quad K > 0{,}82 \\
t_s &< 8seg \quad \Rightarrow \quad K > 0{,}33
\end{aligned}
$$

Assim, para atender ambas as especificações:

$$K > 0{,}82$$

Exemplo 3c – Controlador PID (zeros complexos)



Exemplo 3c – Controlador PID (zeros complexos)

Observa-se que existe uma variação na dominância dos polos a depender o valor de K:

$0{,}82 < K < 5$: 1 polo real (dominante) + 2 polos complexos

$5 \leq K \leq 6{,}28$: 3 polos reais

$K > 6{,}28$: 2 polos complexos (dominantes) + 1 polo real

Exemplo 3c – Controlador PID (zeros complexos)

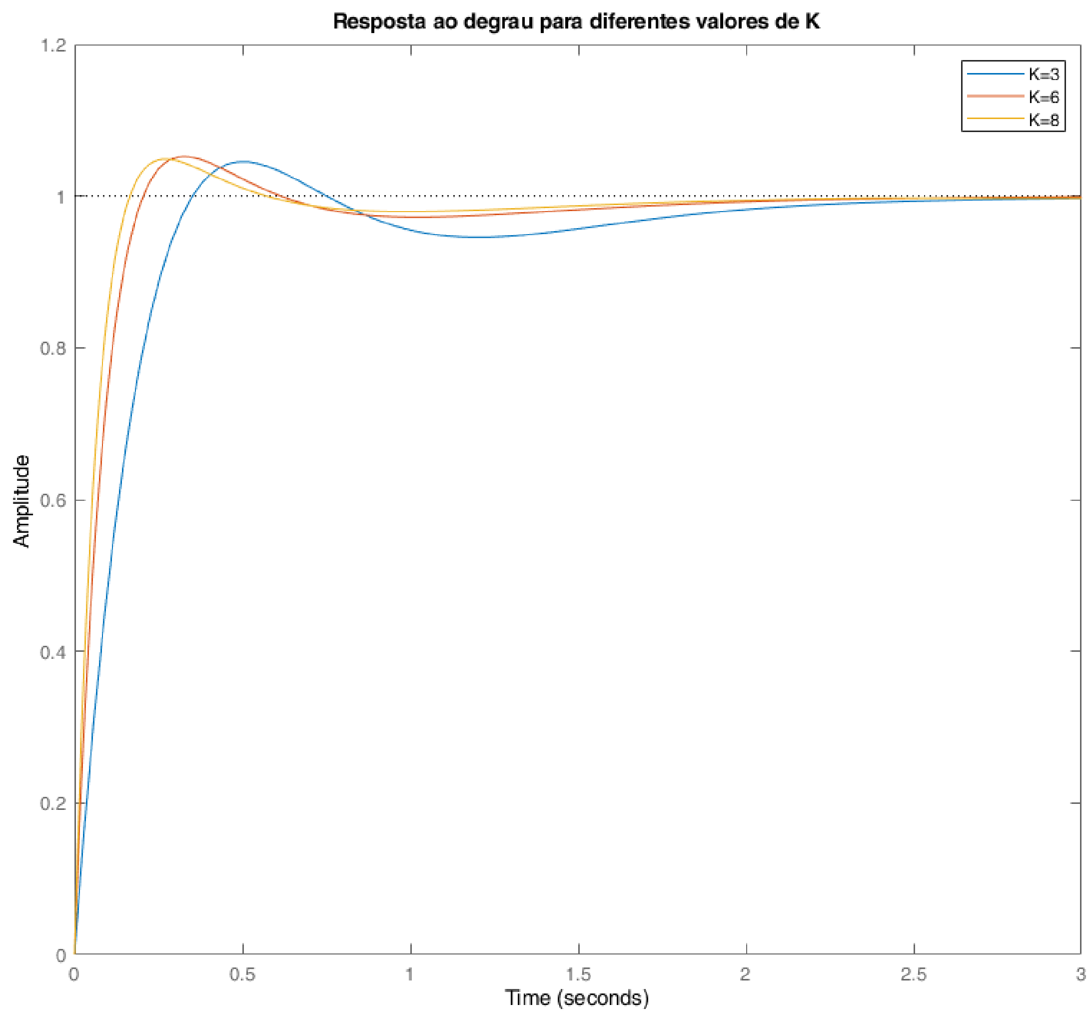
Considerando diferentes valores de ganho tem-se os seguintes polos de malha fechada:

$$K=3 \quad \Rightarrow \quad p_1=-1{,}6 \quad p_{2,3}=-3{,}2\pm j2{,}9$$
$$K=6 \quad \Rightarrow \quad p_1=-2{,}3 \quad p_2=-3 \quad p_3=-8{,}7$$
$$K=8 \quad \Rightarrow \quad p_{1,2}=-2{,}38\pm j0{,}13 \quad p_3=-13{,}25$$

Lembre ainda que existe um par de zeros em $z_{1,2}=-2\pm j$ e estes irão influenciar na resposta.

K	M_P	t_S
3	4,5%	1,9
6	5,2%	1,4
8	4,9%	1,1

Exemplo 3c – Controlador PID (zeros complexos)



Exercícios Sugeridos

a) Refazer o projeto do controlador PID, escolhendo outros zeros complexos mantendo a 2a configuração do Lugar das Raízes (slide 37).

b) Projetar um controlador PID, escolhendo os zeros complexos para gerar a 1a configuração do Lugar das Raízes (slide 37).

c) Projetar um controlador PID usando **outra metodologia** de projeto.

Exemplo 3d – Controlador PID (zeros reais)

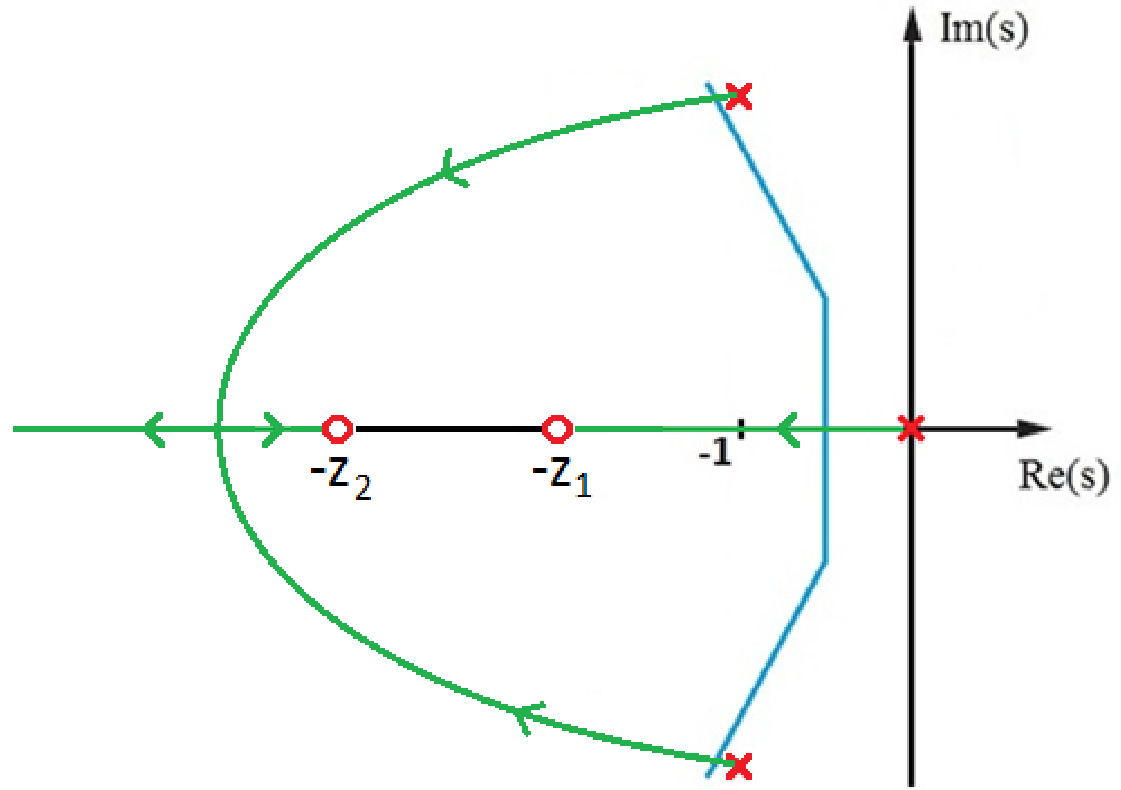
Neste caso, C(s) pode ser escrito como

$$C(s) = K_C \frac{(s+z_1)(s+z_2)}{s} \qquad z_{1,2} \in \Re$$

De forma similar ao caso anterior, o Lugar das Raízes terá 3 polos e 2 zeros e, portanto, uma única assíntota com ângulo de 180° (eixo real negativo). Dois ramos irão para os zeros e o terceiro ramo irá para a assíntota.

Neste caso em particular, os zeros precisam ser escolhidos dentro da região desejada para os polos de malha fechada pois senão sempre existirá um ramo fora desta região.

Exemplo 3d – Controlador PID (zeros reais)



Exemplo 3d – Controlador PID (zeros reais)

Escolhidos $z_1=-1$ e $z_2=-2$ tem-se:

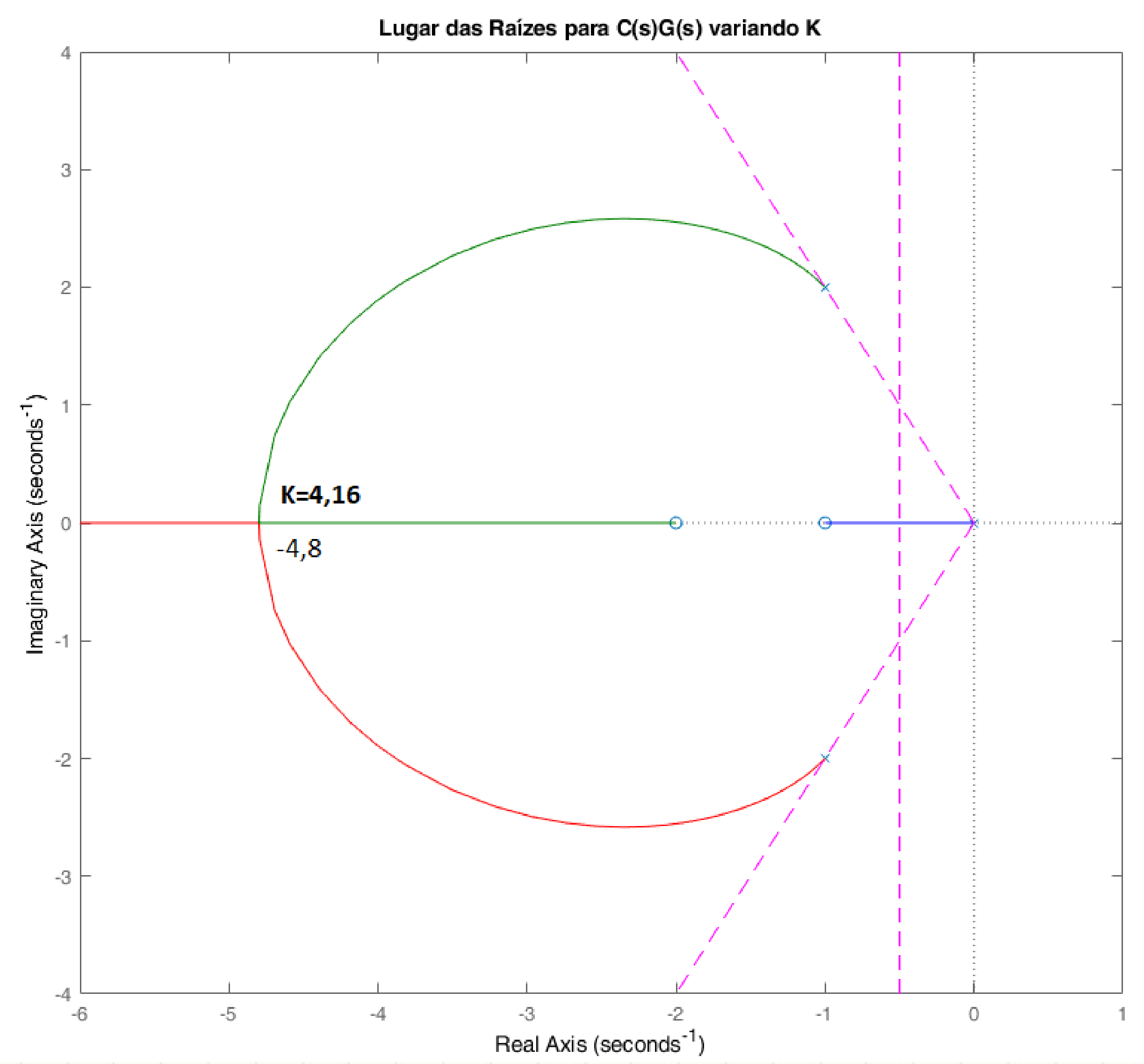
$$C(s) = K\frac{s^2+3s+2}{s}$$

O Lugar das Raízes será traçado para

$$1+K\frac{2(s^2+3s+2)}{s(s^2+2s+5)}=0$$

Assim, os valores limite de K serão definidos pela intersecção do LR com as retas que definem a região desejada para os polos de malha fechada.

Exemplo 3d – Controlador PID (zeros reais)



Exemplo 3d – Controlador PID (zeros reais)

Da intersecção do Lugar das Raízes com a região obtém-se:

$$\begin{array}{lll} M_P < 20\% & \Rightarrow & K > 0{,}02 \\ t_s < 8seg & \Rightarrow & K > 1{,}4 \end{array}$$

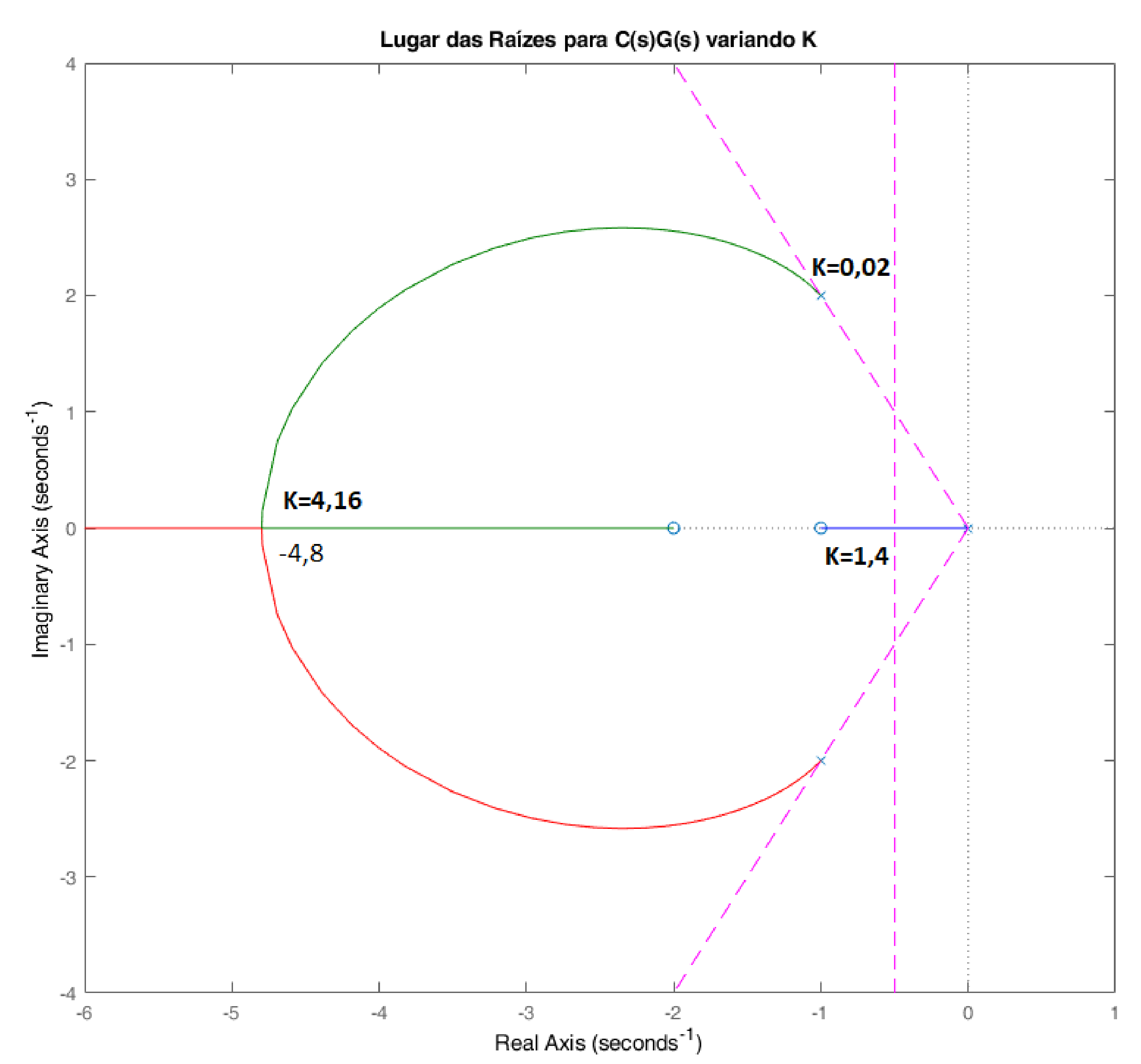
Assim, para atender ambas as especificações

$$K > 1{,}4$$

Observa-se que o polo dominante é sempre real:

$$\begin{array}{ll} 1{,}4 < K < 4{,}16 & 2 \text{ polos cc} + 1 \text{polo real (dominante)} \\ K \geq 4{,}16 & 3 \text{ polos reais} \end{array}$$

Exemplo 3d – Controlador PID (zeros reais)



Exemplo 3d – Controlador PID (zeros reais)

Considerando diferentes valores de ganho tem-se os seguintes polos de malha fechada:

$$K = 3 \quad \Rightarrow \quad p_1 = -0{,}56 \quad p_{2,3} = -3{,}67 \pm j2{,}17$$

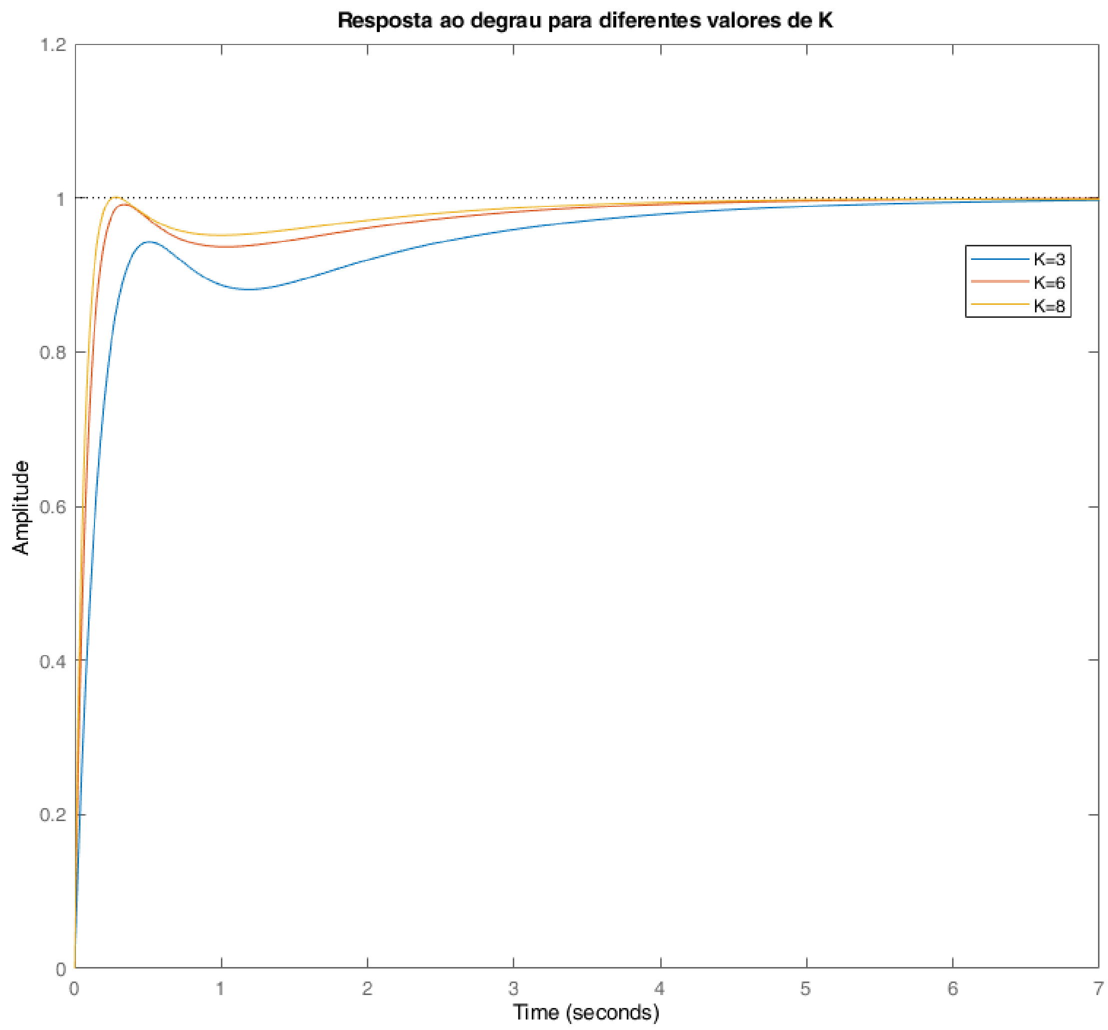
$$K = 6 \quad \Rightarrow \quad p_1 = -0{,}78 \quad p_2 = -3 \quad p_3 = -10{,}22$$

$$K = 8 \quad \Rightarrow \quad p_1 = -0{,}82 \quad p_2 = -2{,}68 \quad p_3 = -14{,}5$$

Lembre ainda que existem zeros em z_1=-1 e z_2 =-2 e estes poderão influenciar na resposta.

K	M_P	t_S
3	0%	4,1
6	0%	2,9
8	0%	2,5

Exemplo 3d – Controlador PID (zeros reais)



Controlador PID Real

O controlador PID Real pode ser projetado como um controlador Avanço-Atraso, sendo a parte do atraso reduzida a um PI.

Controlador Avanço-Atraso

A ideia básica é combinar as ações dos dois controladores.
A parte do avanço é usada para ajustar a resposta transitória enquanto a parte do atraso acerta o regime permanente (sem modificar o transitório, já assegurado).

A estrutura do controlador é definida como:

$$C(s) = K \underbrace{\left(\frac{s+b}{s+\alpha b}\right)}_{C_{AV}} \underbrace{\left(\frac{s+a}{s+\beta a}\right)}_{C_{AT}} \qquad K, a, b > 0 \quad \alpha > 1 \quad 0 \leq \beta < 1$$

Existem duas possibilidades:

$$\alpha \neq \beta$$

$$\beta = 1/\alpha$$

Controlador Avanço-Atraso ($\alpha \neq \beta$)

A estrutura do controlador é definida como:

$$C(s) = K \underbrace{\left(\frac{s+b}{s+\alpha b}\right)}_{C_{AV}} \underbrace{\left(\frac{s+a}{s+\beta a}\right)}_{C_{AT}} \qquad \begin{array}{ll} K, a, b > 0 & \alpha > 1 \\ \alpha \neq \beta & 0 \leq \beta < 1 \end{array}$$

O procedimento de projeto é a combinação direta dos projetos vistos anteriormente para os controladores em avanço e em atraso. Primeiro projeta-se o controlador em avanço e depois o controlador em atraso.

Controlador Avanço-Atraso ($\alpha \neq \beta$)

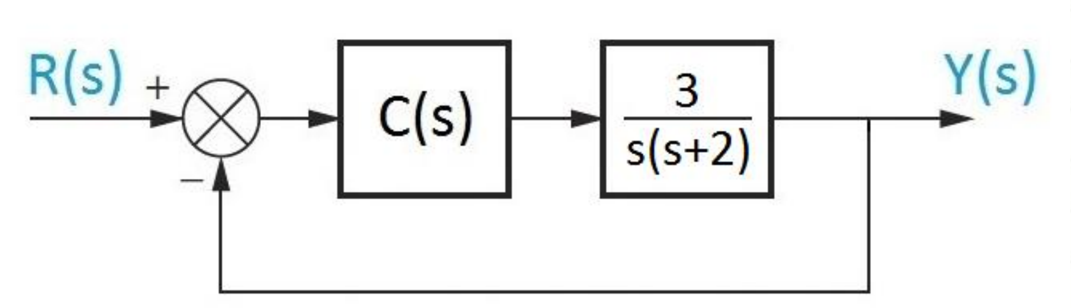
Procedimento de projeto

1. Definir, a partir das especificações da resposta transitória, a posição desejada para os polos dominantes de malha fechada.
2. **Projetar o controlador em avanço** (ou seja, definir K, α e b) de modo a posicionar os polos desejados para a malha fechada. (antes de passar ao próximo passo verificar se as especificações da resposta transitória foram realmente atendidas)
3. **Projetar o controlador em atraso** (ou seja, definir a e β) de modo a atender a especificação de regime permanente, garantido:

$$\left|C_{AT}(s)\right| \approx 1 \quad \text{e} \quad -5^\circ < \angle C_{AT}(s) < 0^\circ$$

Exemplo 4

Seja o sistema de controle a seguir.



Projetar um controlador avanço-atraso de modo a atender as seguintes especificações:

- Erro à rampa inferior a 5%
- Sobressinal máximo inferior a 5%
- Frequência natural não amortecida maior ou igual a 2 segundos

Exemplo 4 – Considerando C(s)=1

Considerando C(s)=1 a função de transferência de malha fechada será:

$$T(s) = \frac{3}{s^2 + 2s + 3} \quad \Rightarrow \quad p_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{2}$$

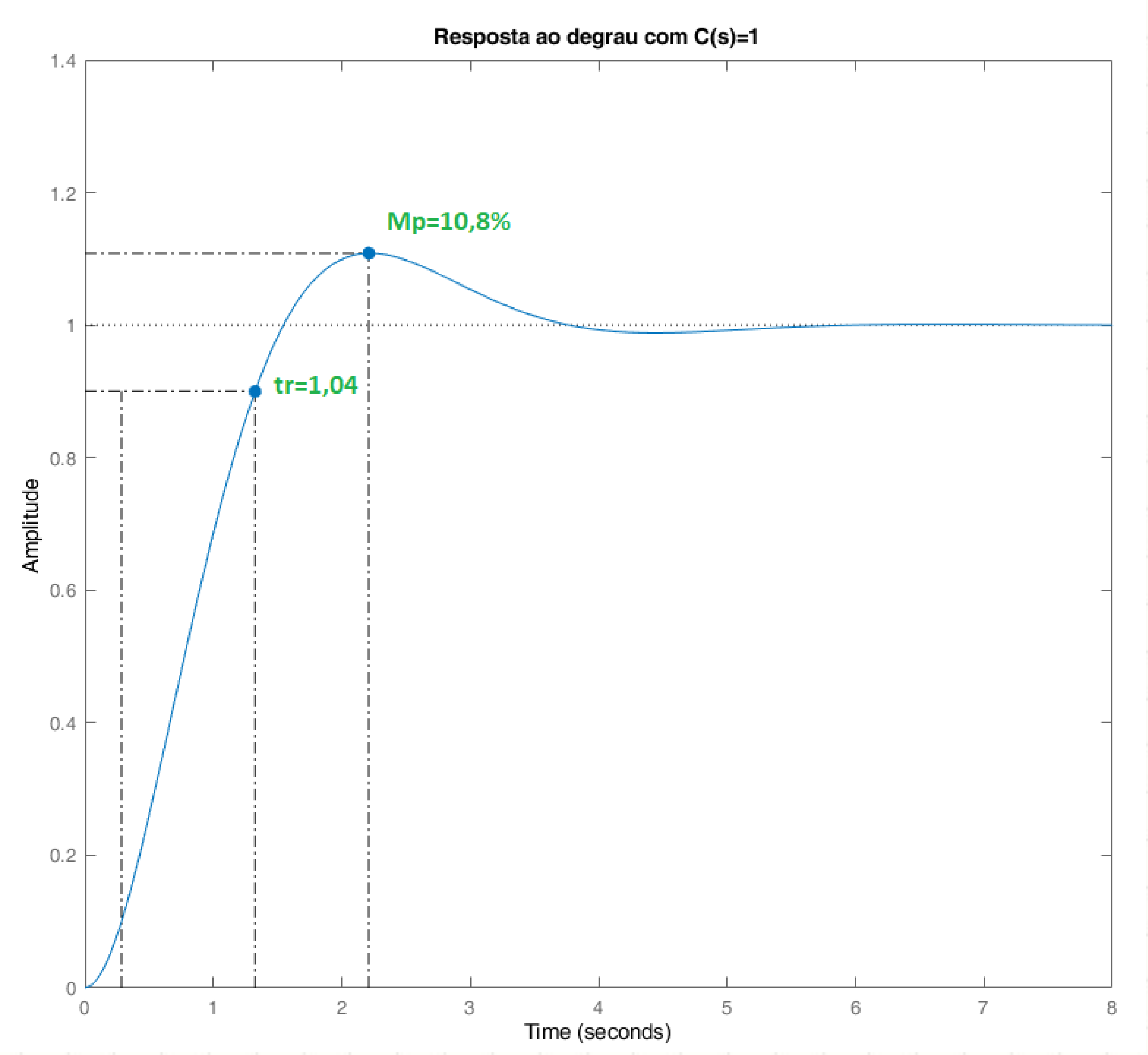
de onde obtém-se

$$\begin{matrix} \omega_n = 1{,}73 & & M_P = 10{,}8\% \\ & \rightarrow & \\ \xi = 0{,}58 & & t_r = 1{,}8/\omega_n = 1{,}04 \text{ seg} \end{matrix}$$

O erro de regime permanente será

$$K_V = \lim_{s \to 0} sG(s) = 3/2 \qquad e_\infty = \frac{1}{K_V} = 66{,}7\%$$

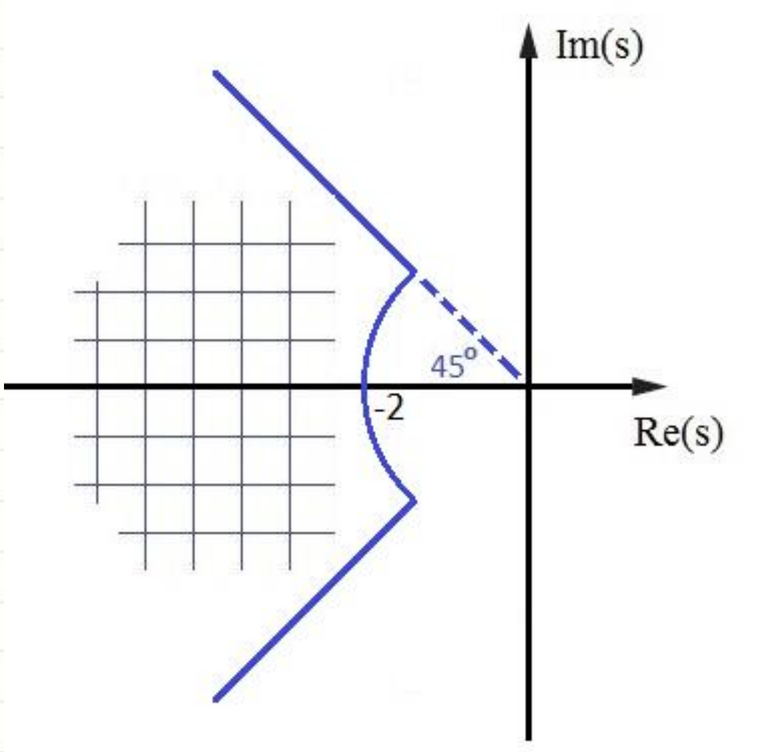
Exemplo 4 - Resposta ao degrau para C(s)=1



Exemplo 4 – Região desejada para os polos de MF

$$M_P < 5\% \quad \Rightarrow \quad \xi > 0,69\left(\theta < 46^\circ\right)$$
$$\omega_n \geq 2\,\text{rd/s} \quad \Rightarrow \quad t_r < 0,9\,\text{seg}$$
$$e_\infty < 5\% \quad \Rightarrow \quad K_V > 20$$

$$t_r = \frac{1,8}{\omega_n} \qquad (10-90\%)$$



Exemplo 4 – Controlador Avanço-Atraso

1. **Definir, a partir das especificações de resposta transitória, a posição desejada para os polos dominantes de malha fechada.**

$$\xi > 0{,}69 \quad \Rightarrow \quad \xi \equiv 0{,}8 \; (M_P = 1{,}5\%)$$

$$\omega_n \geq 2 \quad \Rightarrow \quad \omega_n \equiv 4 \;\; (t_r = 0{,}45)$$

Portanto, os polos desejados para a malha fechada serão:

$$s_d = -\xi\omega_n \pm j\omega_d = -3{,}2 \pm j2{,}4$$

Exemplo 4 – Controlador Avanço-Atraso

2. Projetar o controlador em avanço de modo a posicionar os polos desejados para a malha fechada.

Para satisfazer a condição de fase

$$\angle C(s_d)G(s_d) = 180^\circ(2q+1)$$

assim,

$$\angle C(s_d) = 180^\circ - G(s_d) = 80^\circ$$

Portanto, a contribuição de fase do controlador em avanço deverá ser de 80°.

Será escolhido b=2 para o **cancelamento polo/zero.**

Observe que o polo que será cancelado está no limite da região desejada.

Exemplo 4 – Controlador Avanço-Atraso

Para b=2, tem-se

$$\angle C(s_d) = \angle(s_d + 2) - \angle(s_d + 2\alpha) = 80^\circ$$
$$= 117^\circ - \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{2{,}4}{2\alpha - 3{,}2}\right) = 80^\circ$$

Resolvendo a equação

$$\alpha = 3{,}2$$

e o controlador fica

$$C(s) = K\frac{s+2}{s+6{,}4}$$

Exemplo 4 – Controlador Avanço-Atraso

O ganho K é determinado pela condição de módulo

$$K = \frac{1}{\left| C(s_d)G(s_d) \right|}$$

sendo

$$C(s)G(s) = \frac{3(s+2)}{s(s+2)(s+6{,}4)}$$

Resolvendo esta equação chega-se a

$$K = 5{,}33$$

Portanto,

$$C_{AV}(s) = 5{,}33\frac{s+2}{s+6{,}4}$$

Exemplo 4 – Controlador Avanço-Atraso

O erro de regime permanente será

$$K_V = \frac{16}{6{,}4} = 2{,}5 \quad \Rightarrow \quad e_\infty = 40\%$$

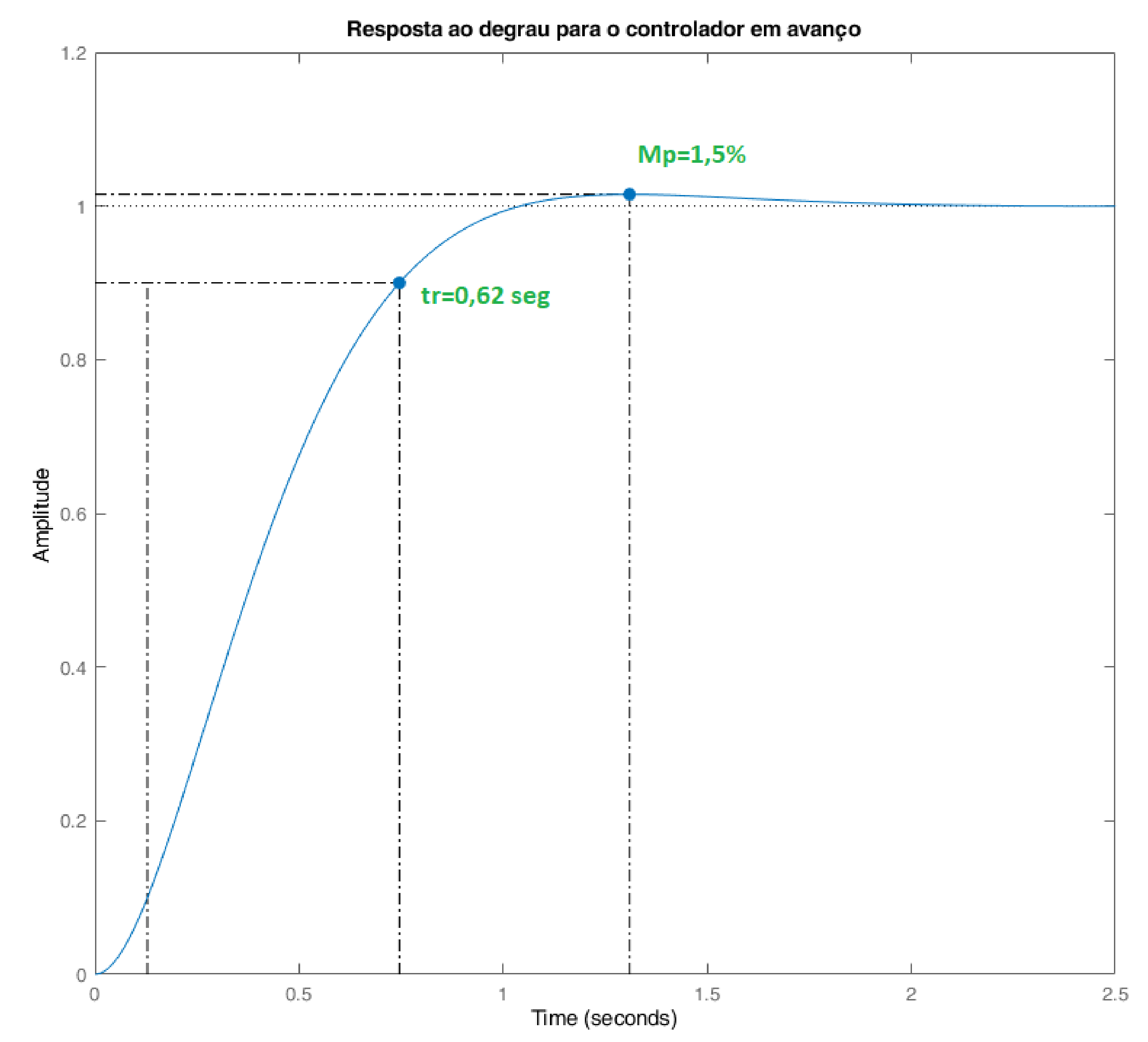
Verificação do projeto

$$C(s)G(s) = \frac{16}{s(s+6{,}4)}$$

$$T(s) = \frac{16}{s^2 + 6{,}4s + 16}$$

$$p_{1,2} = -3{,}2 \pm j2{,}4 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \xi = 0{,}8 \\ \omega_n = 4 \end{matrix}$$

Exemplo 4 – Controlador Avanço-Atraso



Exemplo 4 – Controlador Avanço-Atraso

3. Projetar o controlador em atraso para a tender as especificações de regime permanente garantindo:

$$\left| C_{AT}(s_d) \right| \approx 1 \quad \text{e} \quad -5^\circ \angle C_{AT}(s_d) < 0^\circ$$

O coeficiente de erro precisa ser aumentado ao menos (20/2,5) 8 vezes para atender a especificação.

Assumindo um aumento de 10 vezes em Kv e escolhendo o polo do controlador em atraso em -0,001 tem-se

$$C_{AT}(s) = \frac{s + 0{,}01}{s + 0{,}001}$$

Exemplo 4 – Controlador Avanço-Atraso

Calculando módulo e fase do controlador em atraso, obtém-se

$$\left| C_{AT}(s_d) \right| = 0{,}9982 \approx 1$$
$$C_{AT}(s_d) = -0{,}1^{\circ}$$

atendendo aos requisitos necessários para não modificar a resposta transitória (já assegurada com o avanço).

Assim, o controlador avanço-atraso fica:

$$C(s) = 5{,}33\left(\frac{s+2}{s+6{,}4}\right)\left(\frac{s+0{,}01}{s+0{,}001}\right)$$

Exemplo 4 – Controlador Avanço-Atraso

Verificação final

Sendo

$$C(s)G(s) = \frac{16(s+0,01)}{s(s+0,001)(s+6,4)}$$

obtém-se

$$K_V = \frac{16 \times 0,01}{6,4 \times 0,001} = 25 \quad \Rightarrow \quad e_\infty = 4\%$$

Em malha fechada

$$T(s) = \frac{16(s+0,01)}{s^3 + 6,401s^2 + 16,01s + 0,16}$$

Exemplo 4 – Controlador Avanço-Atraso

Resultando nos seguintes polos e zeros:

$$p_{1,2} = -3{,}2 \pm j2{,}4$$

$$p_3 = -0{,}01 \qquad z = -0{,}01$$

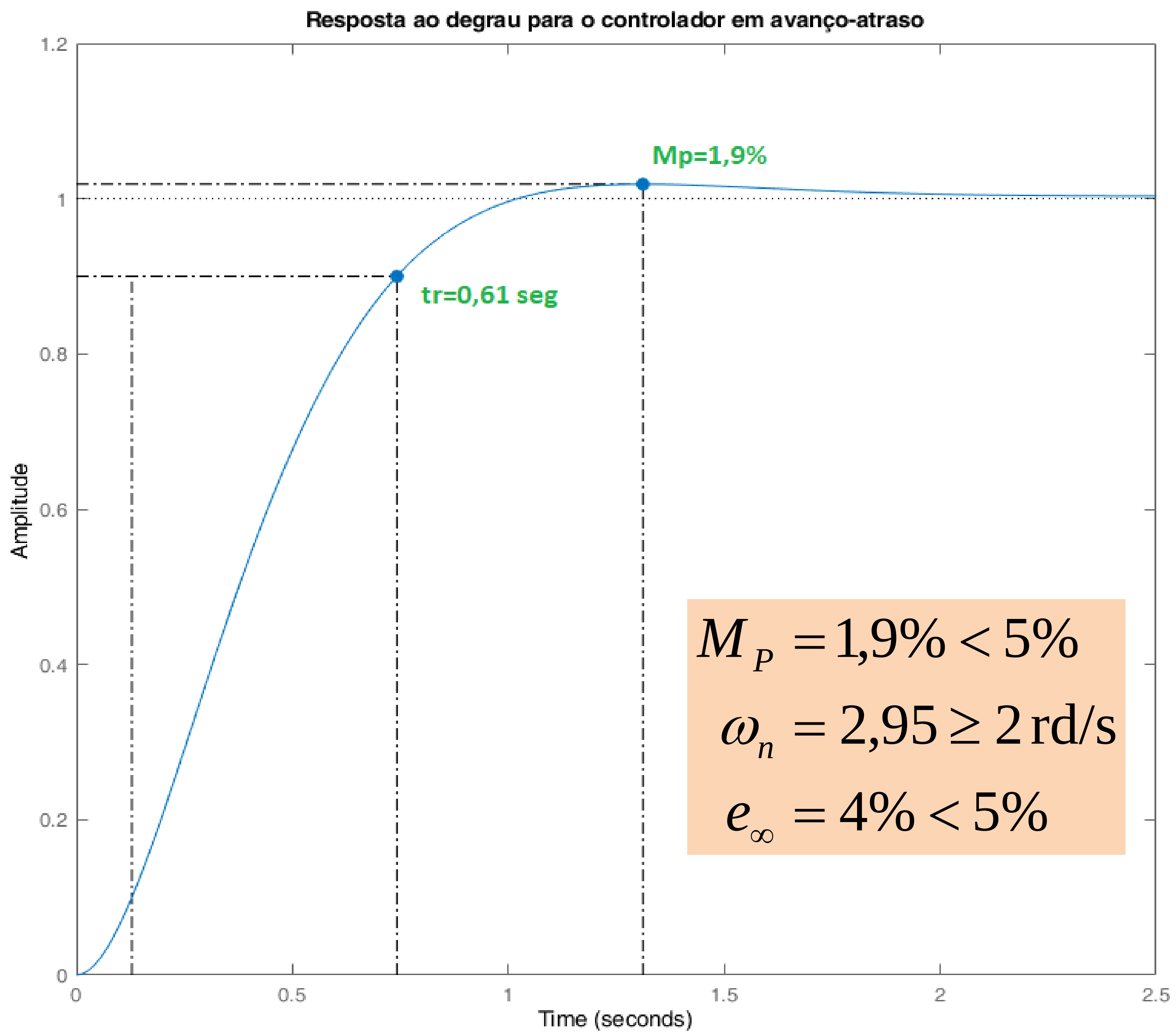
Garantindo que a resposta atende as especificações.

Considerando os polos dominantes:

$$\xi = 0{,}8\ (M_P = 1{,}5\%)$$

$$\omega_n = 4 \quad (t_r = 0{,}45)$$

Exemplo 4 – Controlador Avanço-Atraso



$$M_P = 1{,}9\% < 5\%$$
$$\omega_n = 2{,}95 \geq 2\,\mathrm{rd/s}$$
$$e_\infty = 4\% < 5\%$$

Exemplo 4b – Controlador PID Real

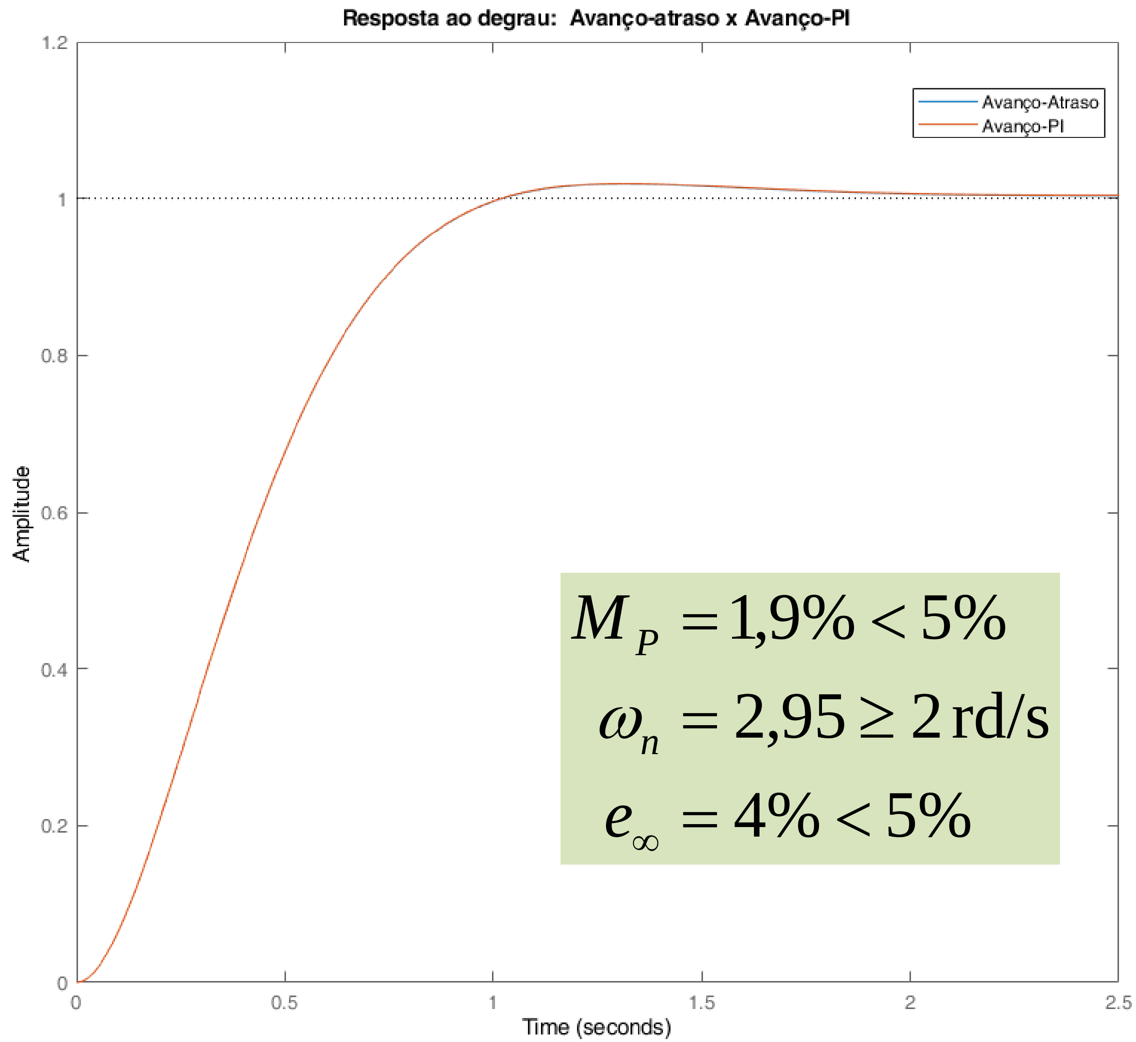
Para obter-se um Controlador PID Real, basta transformar o atraso em um PI.

$$C_{AVT}(s) = 5,33\left(\frac{s+2}{s+6,4}\right)\left(\frac{s+0,01}{s+0,001}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$C_{PI}(s) = 5,33\left(\frac{s+2}{s+6,4}\right)\left(\frac{s+0,01}{s}\right)$$

Exemplo 4b – Controlador PID Real



$$M_P = 1{,}9\% < 5\%$$

$$\omega_n = 2{,}95 \geq 2\,\mathrm{rd/s}$$

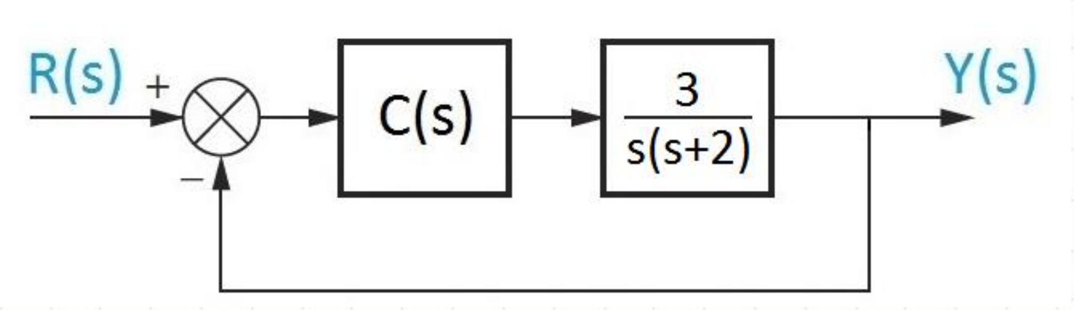
$$e_\infty = 4\% < 5\%$$

Exercício Sugerido

Refazer o projeto do controlador Avanço-Atraso (e PID Real) considerando outra escolha para s_d.

Exemplo 5

Seja o sistema de controle do exemplo anterior (ex. 4), com uma modificação de especificação de desempenho.



Projetar um controlador avanço-atraso de modo a atender as seguintes especificações:

- Erro à rampa inferior a 5%
- Sobressinal máximo inferior a 5%
- Frequência natural não amortecida maior ~~ou igual a~~ do que 2 segundos

Exemplo 5

Neste caso, não é possível fazer o cancelamento polo/zero.

Como escolher o valor do zero do controlador em avanço ?

Exemplo 5

Uma vez que não será usado cancelamento, a posição do zero do controlador (parâmetro b) pode ser escolhida livremente, dentro ou fora da região desejada para os polos de malha fechada.

No exemplo em estudo, existem então duas possibilidades para a escolha de b:

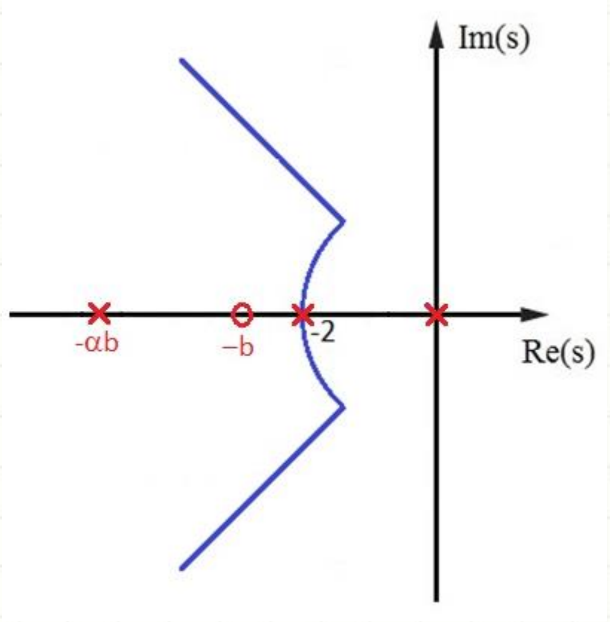
$$-2 < b < 0 \qquad (\textit{fora da região})$$

$$-\infty < b < -2 \qquad (\textit{dentro da região})$$

Exemplo 5

A escolha mais intuitiva é selecionar $-\infty < b < -2$, de modo a “puxar” o Lugar das Raízes para dentro da região desejada para atender as especificações.

Entretanto, alguns aspectos precisam ser observados:



a) Nem todos os valores de b permitirão alocar os polos de malha fechada desejados (s_d).

b) O valor de b define a posição do zero do controlador e poderá impactar muito na resposta do sistema, dependendo de sua localização em relação aos polos desejados.

Exemplo 5a – Avanço-Atraso com b=3

Para b=3, tem-se:

$$\angle C(s_d) = \angle(s_d + 3) - \angle(s_d + 3\alpha) = 80^\circ$$
$$= 95^\circ - \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{2,4}{3\alpha - 3,2}\right) = 80^\circ$$

Resolvendo a equação chega-se a $\alpha = 4,1$

Da condição de módulo obtém-se o ganho $K = 14$

Portanto,

$$C(s) = 14\frac{s+3}{s+12,3}$$

Exemplo 5a – Avanço-Atraso com b=3

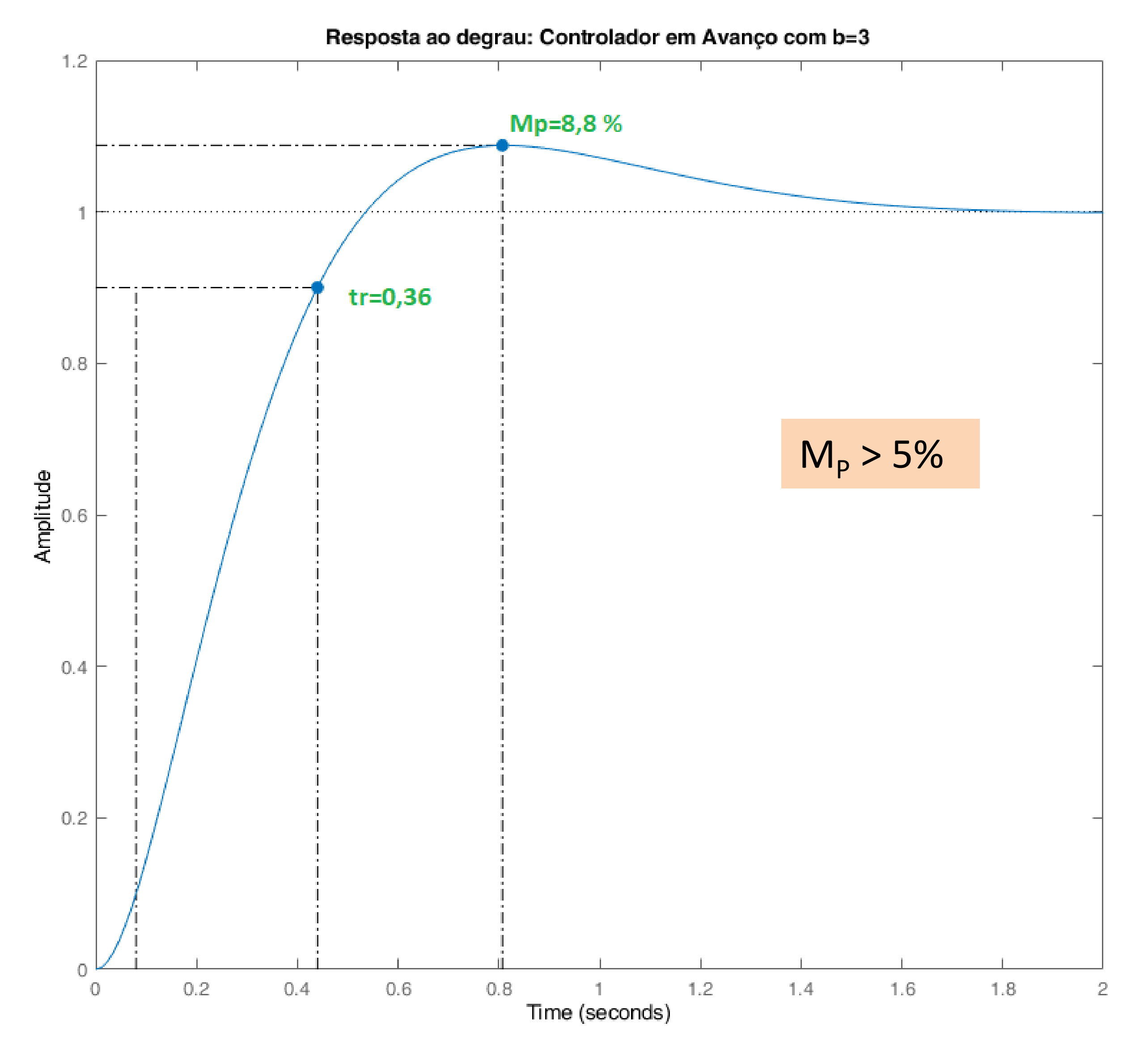
Em malha fechada

$$T(s) = \frac{42(s+3)}{s^3 + 14{,}3s^2 + 66{,}6s + 126} \qquad p_{1,2} = -3{,}2 \pm j2{,}4$$

$$p_3 = -7{,}9 \qquad z = -3$$

Neste caso, **a posição do zero terá muita influência na resposta**, elevando o sobressinal, levando a uma resposta que não atende esta especificação.

Exemplo 5a – Avanço-Atraso com b=3



$M_P > 5\%$

Exemplo 5b – Avanço-Atraso com b=2,1

Uma boa opção para escolha da posição do zero é um valor próximo ao polo que não pode ser cancelado.

Para **b=2,1** obtém-se

$$\alpha = 3{,}18 \quad \Rightarrow \quad C(s) = 5{,}73\frac{s+2{,}1}{s+6{,}7}$$

$$K = 5{,}73$$

Em malha fechada

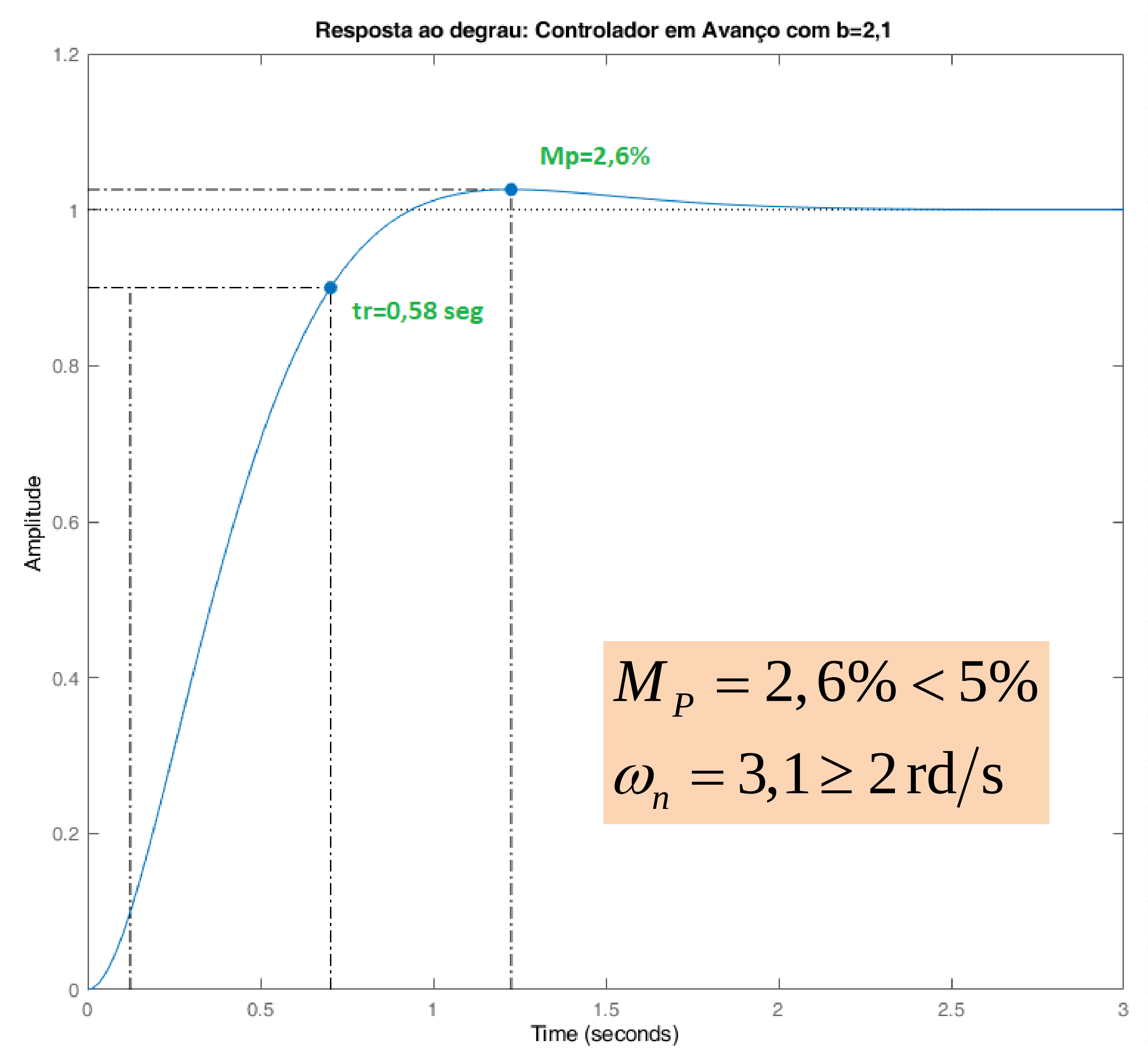
$$T(s) = \frac{17{,}19(s+2{,}1)}{s^3+8{,}7s^2+30{,}6s+36{,}1}$$

$$p_{2,2} = -3{,}2 \pm j2{,}4$$

$$p_1 = -2{,}24 \qquad z = -2{,}1$$

Neste caso, o polo adicional do sistema estará próximo do zero do controlador, atenuando seu efeito na resposta.

Exemplo 5b – Avanço-Atraso com b=2,1



$$M_P = 2,6\% < 5\%$$

$$\omega_n = 3,1 \geq 2\,\mathrm{rd/s}$$

Exemplo 5b – Avanço-Atraso com b=2,1

O erro de regime permanente será

$$K_V = \frac{3\times 5{,}73}{2\times 3{,}18} = 2{,}7 \quad \Rightarrow \quad e_\infty = 37\%$$

Portanto, Kv precisa ser aumentado ao menos (20/2,7) 7,4 vezes.

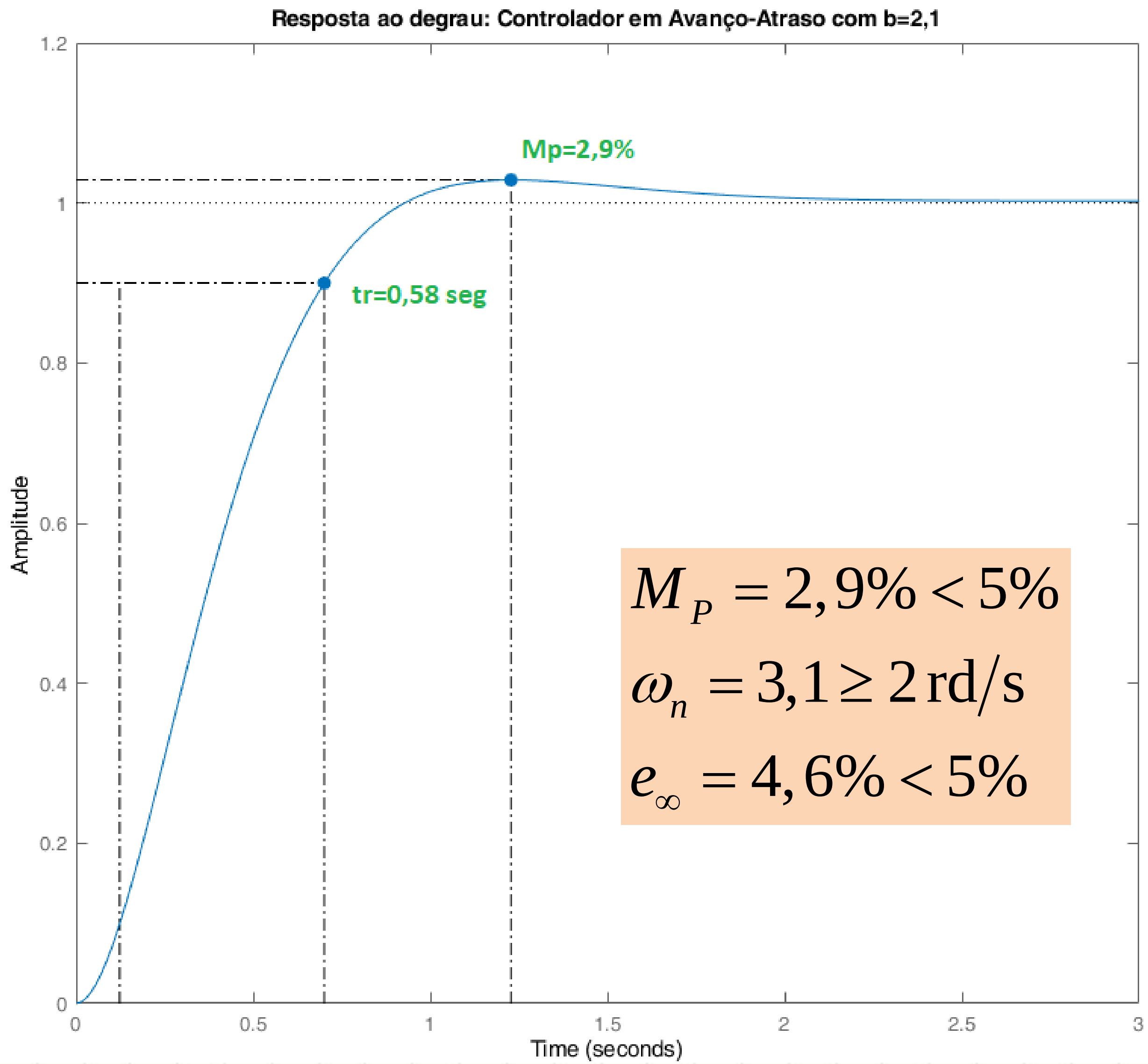
Escolhendo um aumento de 8 vezes e o polo do controlador em -0,001 tem-se

$$C_{AT}(s) = \frac{s+0{,}008}{s+0{,}001}$$

Assim,

$$C(s) = 5{,}73\left(\frac{s+2{,}1}{s+6{,}7}\right)\left(\frac{s+0{,}008}{s+0{,}001}\right)$$

Exemplo 5b – Avanço-Atraso com b=2,1



$$M_P = 2,9\% < 5\%$$
$$\omega_n = 3,1 \geq 2\,\mathrm{rd/s}$$
$$e_\infty = 4,6\% < 5\%$$

Exemplo 5c – Avanço-Atraso com b=1,9

Suponha que o zero do controlador seja escolhido próximo ao polo que não pode ser cancelado mas **fora da região desejada.**

Para **b=1,9** obtém-se

$$\alpha = 3,26 \quad \Rightarrow \quad C(s) = 5,03\frac{s+1,9}{s+6,2}$$

$$K = 5,03$$

Em malha fechada

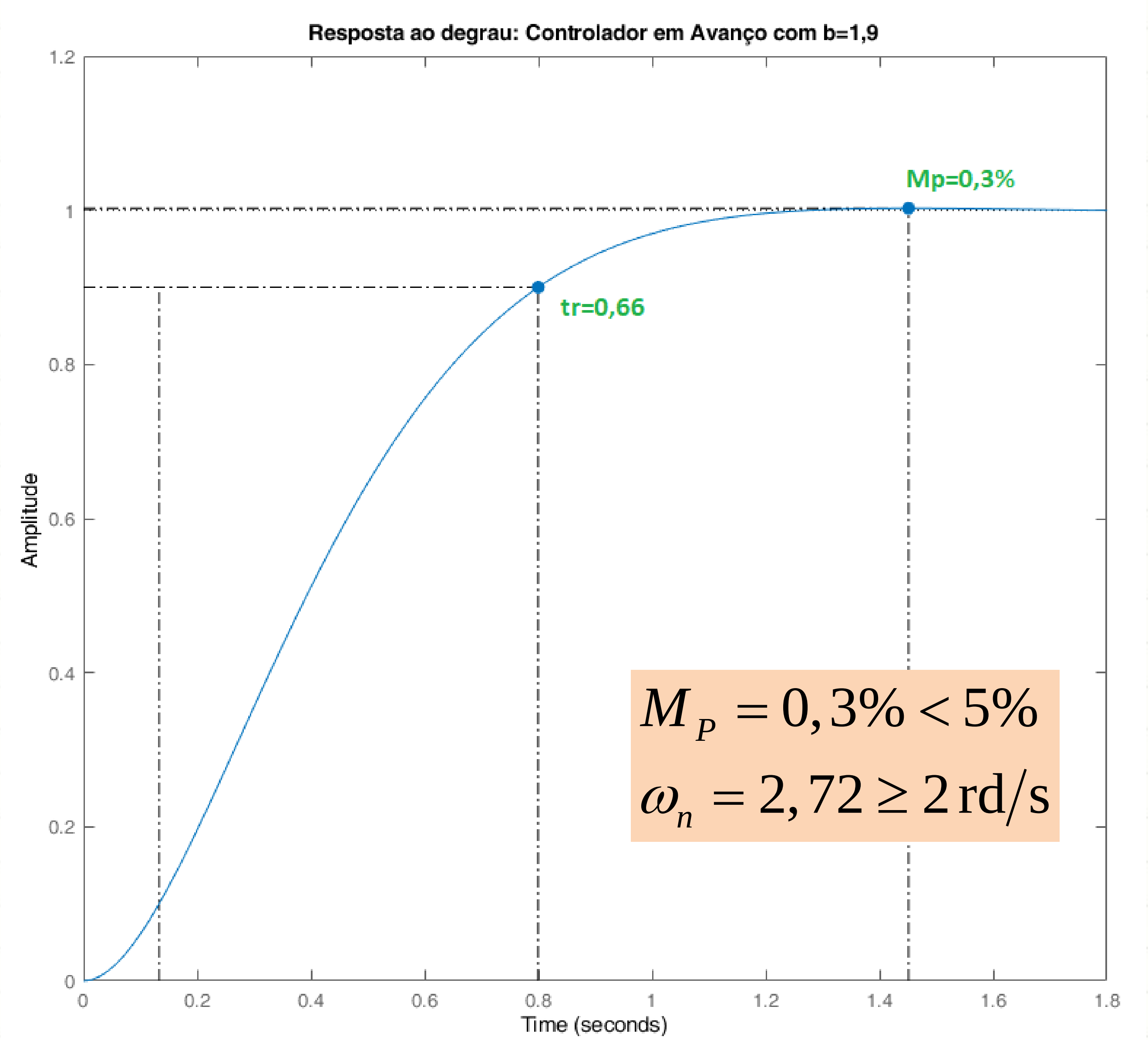
$$T(s) = \frac{15,09(s+1,9)}{s^3 + 8,2s^2 + 27,5s + 28,7}$$

$$p_{2,2} = -3,2 \pm j2,4$$

$$p_1 = -1,8 \qquad z = -1,9$$

Novamente o polo adicional do sistema está muito próximo do zero do controlador, atenuando seu efeito na resposta.

Exemplo 5c – Avanço-Atraso com b=1,9

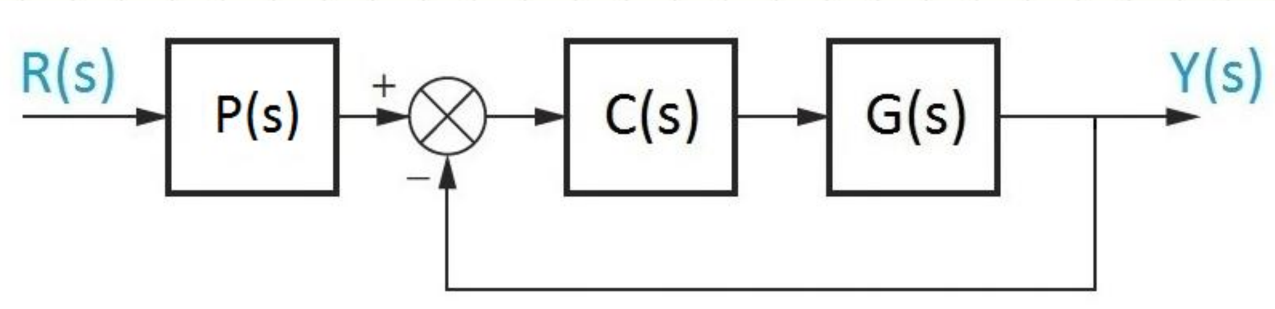


$$M_P = 0,3\% < 5\%$$

$$\omega_n = 2,72 \geq 2\,\mathrm{rd/s}$$

Pré-filtro de referência

O pré-filtro P(s) é geralmente utilizado para atenuar o efeito indesejado de um zero na resposta transitória.



A função de transferência de P(s) tem a forma:

$$P(s) = \frac{K}{s+p}$$

O valor de p é escolhido para cancelar o efeito de um zero indesejado e o ganho K para manter o valor de regime permanente do sistema controlado.

No caso de resposta ao degrau unitário, P(0)=1.

Exemplo 6 – Avanço-Atraso e pré-filtro

Para o exemplo 5a, com b=3, que não atende as especificações de resposta transitória, foi obtido o controlador em avanço :

$$C(s) = 14\frac{s+3}{s+12{,}3}$$

Para este controlador

$$K_V = \frac{14\times 3\times 3}{2\times 12{,}3} = 5{,}12 \quad \Rightarrow \quad e_\infty = 20\%$$

Portanto, o controlador em atraso precisaria aumentar Kv em ao menos (20/5,12) 3,9 vezes.

Escolhendo um aumento de 5 vezes e o polo do controlador em 0,001 tem-se

$$C_{AT}(s) = \frac{s+0{,}005}{s+0{,}001}$$

Exemplo 6 - Avanço-Atraso e pré-filtro

Em malha fechada

$$T(s) = \frac{42(s+0{,}005)(s+3)}{s^4 + 14{,}3s^3 + 66{,}61s^2 + 126{,}2s + 0{,}63}$$

gerando

$$\begin{array}{ll} p_1 = -0{,}005 & z_1 = -0{,}005 \\ p_{2,3} = -3{,}2 \pm j2{,}4 & z_2 = -3 \\ p_4 = -7{,}9 & \end{array}$$

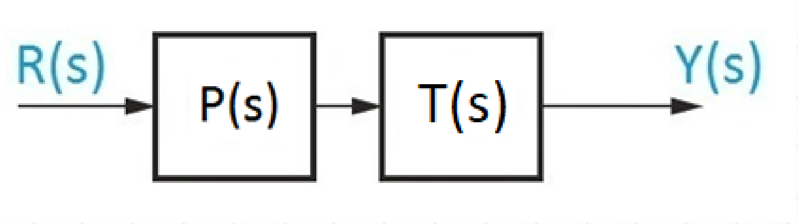
Como observado anteriormente, a especificação de sobressinal não será atendida (M_P=8,8% > 5%).

Um pré-filtro pode ser usado para atenuar o efeito do zero indesejado (z_2 = - 3).

Exemplo 6 - Avanço-Atraso e pré-filtro

Neste caso, o pré-filtro é escolhido como

$$P(s) = \frac{3}{s+3}$$



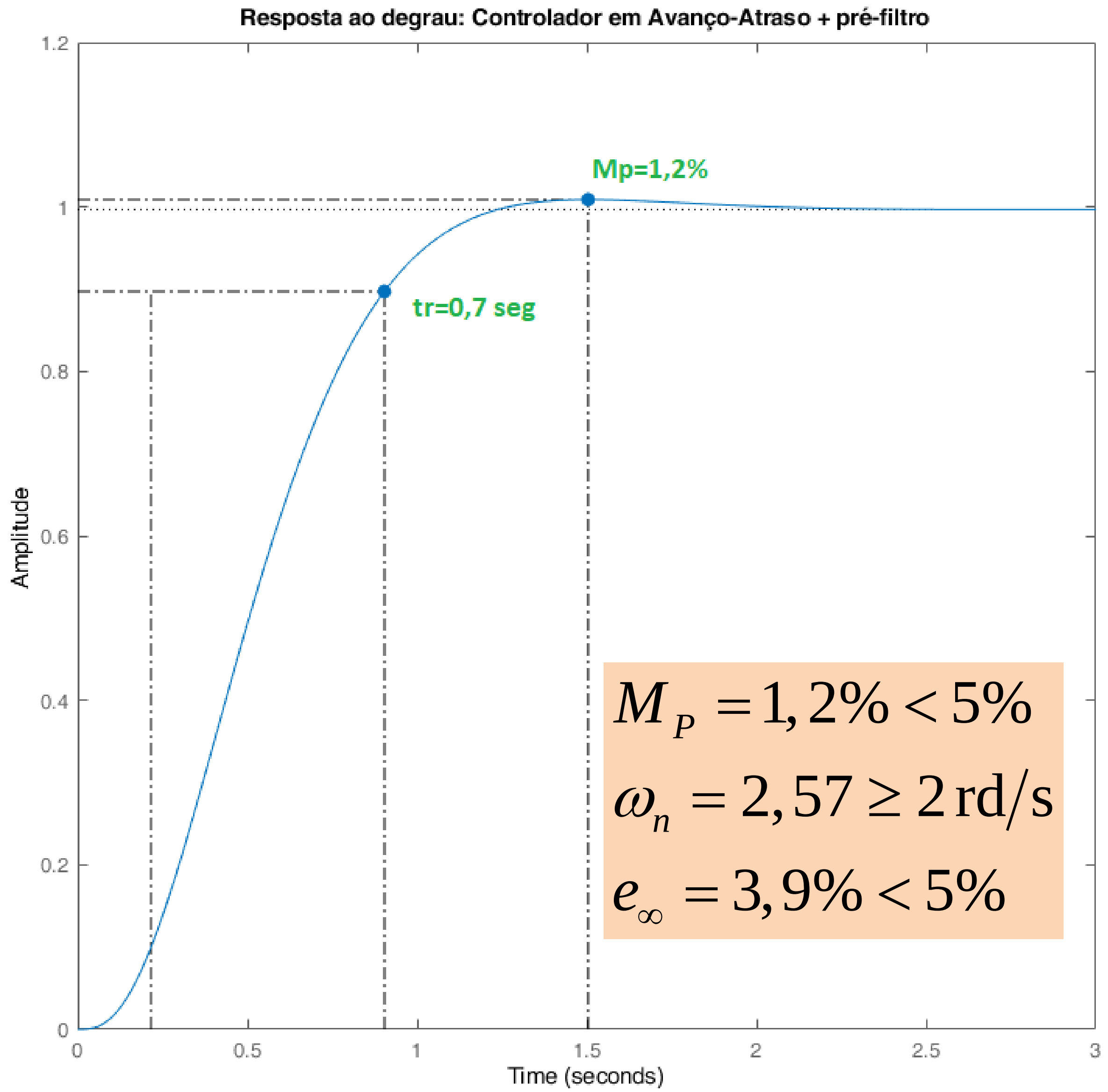
Assim,

$$\begin{aligned} Y(s) &= R(s)P(s)T(s) \\ &= \frac{42(s+0,005)(s+3)}{(s+0,005)(s+7,9)(s^2+6,4s+16)} \frac{3}{s+3} R(s) \end{aligned}$$

ou

$$Y(s) = \frac{126}{(s+7,9)(s^2+6,4s+16)} R(s)$$

Exemplo 6 - Avanço-Atraso e pré-filtro



$$M_P = 1,2\% < 5\%$$

$$\omega_n = 2,57 \geq 2\,\text{rd/s}$$

$$e_\infty = 3,9\% < 5\%$$

Controlador em Avanço-Atraso ($\beta=1/\alpha$)

Sendo $\beta=1/\alpha$, a estrutura do controlador torna-se:

$$C(s) = K\underbrace{\left(\frac{s+b}{s+\alpha b}\right)}_{C_{AV}}\underbrace{\left(\frac{s+a}{s+a/\alpha}\right)}_{C_{AT}} \quad K,a,b>0 \quad \alpha>1$$

Neste caso, a relação polo/zero é a mesma para ambos os controladores (avanço e atraso). E, portanto, o procedimento de projeto precisa ser modificado.

Porque?

Controlador em Avanço-Atraso ($\beta=1/\alpha$)

Procedimento de Projeto

1. Definir, a partir das especificações de resposta transitória, a posição desejada para os polos dominantes de malha fechada.

2. **Ajustar o ganho K** de modo a atender a especificação de erro de regime permanente.

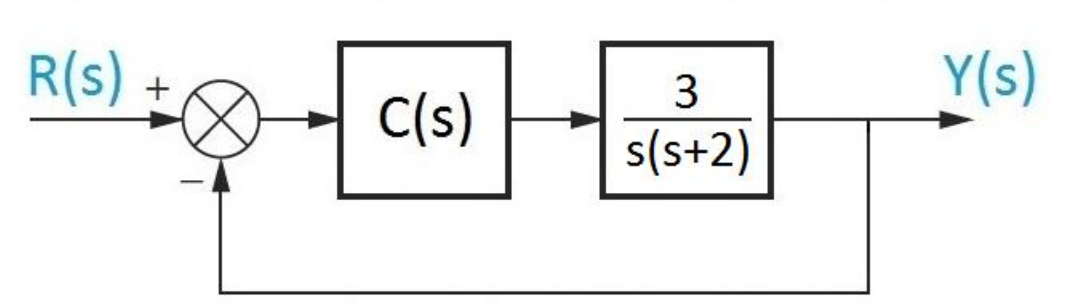
3. **Projetar o controlador em avanço** (ou seja, definir α e b) de modo a posicionar os polos de malha fechada no local desejado.

4. **Projetar o controlador em atraso** (ou seja, definir a) para a tender as especificações de regime permanente garantindo

$$\left|C_{AT}(sd)\right| \approx 1 \quad \text{e} \quad -5^{\circ} \angle C_{AT}(sd) < 0^{\circ}$$

Exemplo 7 - Avanço-Atraso com $\beta=1/\alpha$

Seja o sistema do exemplo 3 (visto anteriormente)



Deseja-se projetar um controlador para atender as seguintes especificações:

- Erro à rampa inferior a 5%
- Sobressinal máximo inferior a 5%
- Frequência natural não amortecida maior ou igual a 2 segundos

Controlador em Avanço-Atraso (β=1/α)

Deseja-se agora projetar um controlador em avanço-atraso considerando $\beta = 1/\alpha$.
Neste caso, considera-se a seguinte forma para o controlador:

$$C(s) = K\underbrace{\left(\frac{s+b}{s+\alpha b}\right)}_{C_{AV}}\underbrace{\left(\frac{s+a}{s+a/\alpha}\right)}_{C_{AT}} \quad K,a,b>0 \quad \alpha>1$$

Controlador em Avanço-Atraso (β=1/α)

1. Definir, a partir das especificações de resposta transitória, a posição desejada para os polos dominantes de malha fechada.
(idem ao projeto anterior)

$$\xi > 0{,}69 \quad \Rightarrow \quad \xi \equiv 0{,}8\,(M_P = 1{,}5\%)$$
$$\omega_n \geq 2 \quad \Rightarrow \quad \omega_n \equiv 4 \quad (t_r = 0{,}45)$$

Serão usados os mesmos polos desejados para a malha fechada:

$$s_d = -\xi\omega_n \pm j\omega_d = -3{,}2 \pm j2{,}4$$

Desta forma, a contribuição de fase do controlador também será a mesma:

$$\angle C(s_d) = 180^\circ - G(s_d) = 80^\circ$$

Controlador em Avanço-Atraso ($\beta=1/\alpha$)

2. Ajustar o ganho K de modo a atender a especificação de erro de regime permanente.

Especificação: $e_\infty < 5\%$, ou seja, Kv > 20

O coeficiente de erro do sistema é dado por

$$K_V = \lim_{s\to 0} s\frac{3}{s(s+2)} = 1{,}5$$

Logo, este coeficiente precisa ser aumentado ao menos (20/1,5) 13,3 vezes.

Define-se o valor de projeto: **$K \equiv 15$**.

Controlador em Avanço-Atraso ($\beta=1/\alpha$)

3. Projetar o controlador em avanço (definir α e b) de modo a posicionar os polos de malha fechada no local desejado.

Para conseguir a contribuição de fase desejada, do controlador em avanço, é necessário garantir:

$$\left.\angle \frac{K(s+b)}{s+\alpha b}\right|_{s=sd} = 80^{\circ} \qquad (1)$$

e, para não alterar o K_V já ajustado,

$$\left|C_{AV}(s)G(s)\right| = \left|\frac{45(s+b)}{s(s+2)(s+\alpha b)}\right|_{s=sd} = 1 \qquad (2)$$

Controlador em Avanço-Atraso ($\beta=1/\alpha$)

Das condições anteriores obtém-se as equações a seguir.

De (1)

$$\alpha^2 b^2 - 6{,}4\alpha b - 17{,}58 b^2 + 112{,}5b - 265{,}3 = 0$$

De (2)

$$2{,}36\alpha b^2 - 6{,}56b - 8{,}56\alpha b + 37{,}8 = 0$$

Resolvendo este sistema de equações chega-se a:

$$\alpha = 4{,}274$$
$$b = 3{,}041$$

$$C_{\mathrm{AV}}(s) = 15\left(\frac{s+3}{s+13}\right)$$

Controlador em Avanço-Atraso ($\beta=1/\alpha$)

4. Projetar o controlador em atraso (definir a) para atender as especificações de regime permanente, garantindo

$$\left|C_{AT}(sd)\right| \approx 1 \quad \text{e} \quad -5^\circ \angle C_{AT}(sd) < 0^\circ$$

Para o controlador em atraso, quanto menor o valor de "a" mais próximo da unidade será o seu respectivo módulo.

$$\left|\frac{s+a}{s+a/4{,}274}\right|_{s=sd} = 1$$

Para alguns valores de "a" tem-se:

$$\begin{aligned} a = 0{,}1 \quad &\rightarrow \quad \left|C_{AT}(s)\right| = 0{,}9847 \\ a = 0{,}01 \quad &\rightarrow \quad \left|C_{AT}(s)\right| = 0{,}9885 \\ a = 0{,}005 \quad &\rightarrow \quad \left|C_{AT}(s)\right| = 0{,}9992 \end{aligned}$$

Controlador em Avanço-Atraso ($\beta=1/\alpha$)

Escolhendo a=0,005 tem-se

$$\left|C_{AT}(s)\right| = 0{,}9992 \quad e \quad \angle C_{AT}(s) = -0{,}03^{\circ}$$

atendo a condição definida para módulo e fase do controlador em atraso.

O controlador em atraso é, então, dado por:

$$C_{AT}(s) = \frac{s + 0{,}005}{s + 0{,}0012}$$

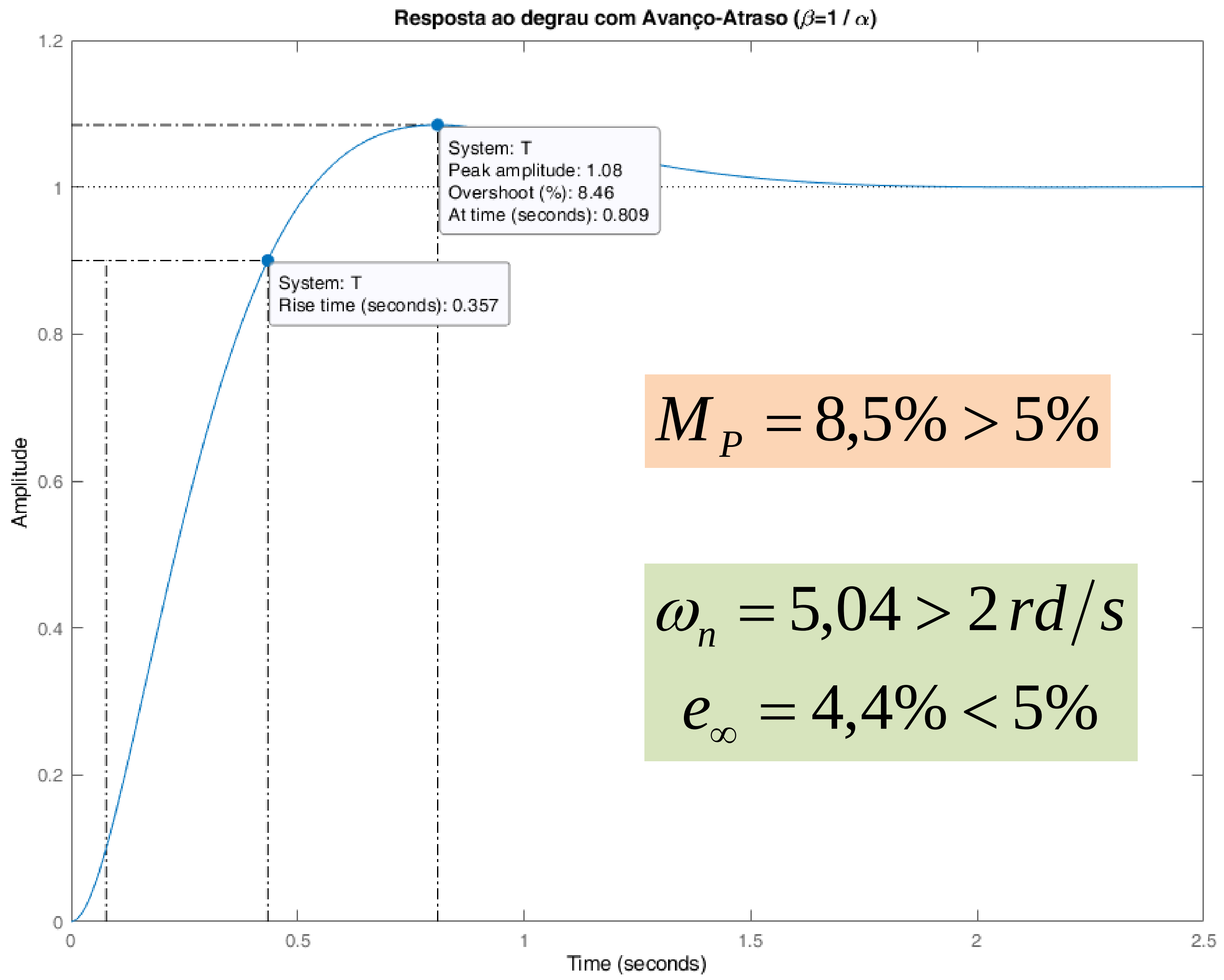
Controlador em Avanço-Atraso ($\beta=1/\alpha$)

Assim, tem-se o controlador final, em avanço-atraso de fase:

$$C(s) = 15\left(\frac{s+3}{s+13}\right)\left(\frac{s+0{,}005}{s+0{,}0012}\right)$$

Observe que polo e zero obtidos para o controlador em avanço são semelhantes àqueles encontrados no projeto considerando $\alpha \neq \beta$. Assim, da mesma forma vista anteriormente, a resposta não atenderá a especificação de sobressinal.

Controlador em Avanço-Atraso (β=1/α)



$$M_P = 8{,}5\% > 5\%$$

$$\omega_n = 5{,}04 > 2\, rd/s$$

$$e_\infty = 4{,}4\% < 5\%$$

Exercícios Sugeridos

Refazer os projetos dos controladores avanço-atraso ($\alpha \neq \beta$ e $\beta = 1/\alpha$) considerando outra escolha para s_d.