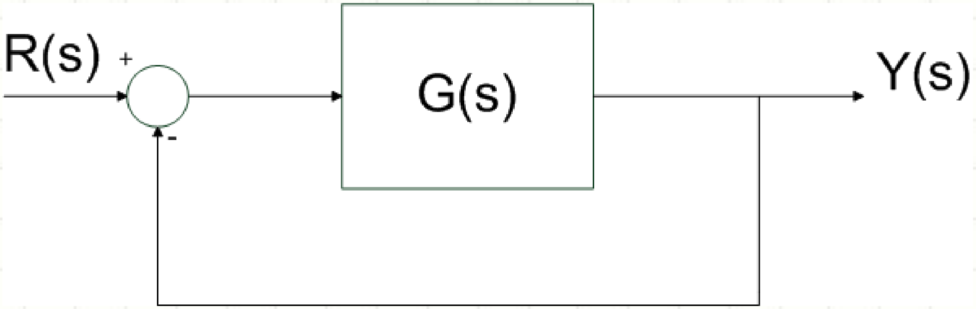
Resposta em Frequência de Malha Fechada

Profa. Cristiane Paim

Seja o sistema de controle com realimentação unitária



As funções de transferência de malha aberta e fechada podem ser relacionadas da seguinte forma:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

No domínio da frequência

$$T(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)}$$

Considerando

$$G(j\omega) = X + jY$$

tem-se

$$T(j\omega) = \frac{X + jY}{1 + X + jY} = M\, e^{j\alpha}$$

sendo

$$M = \frac{\left| X + jY \right|}{\left| 1 + X + jY \right|} = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\sqrt{(1 + X)^2 + Y^2}}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}} \right) - \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Y}}{1 + \mathrm{X}} \right)$$

Considerando M constante

$$M^2 = \frac{X^2 + Y^2}{(1 + X)^2 + Y^2}$$

Desenvolvendo a expressão acima

$$\mathrm{X}^2(1 - \mathrm{M}^2) - 2\mathrm{M}^2\mathrm{X} - \mathrm{M}^2 + \mathrm{Y}^2(1 - \mathrm{M}^2) = 0 \tag{1}$$

Para M=1,

$$\underbrace{X^2\left(1-M^2\right)}_{0}\underbrace{-2M^2X}_{-2X}\underbrace{-M^2}_{-1}+\underbrace{Y^2\left(1-M^2\right)}_{0}=0$$

$$-2\mathrm{X}-1=0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{X}=-\frac{1}{2}$$

que representa a equação de uma reta paralela ao eixo imaginário e que passa pelo ponto (-0.5,0).

Para M≠1, a equação (1)

$$X^2\left(1-M^2\right)-2M^2X-M^2+Y^2\left(1-M^2\right)=0$$

(1)

pode ser reescrita como

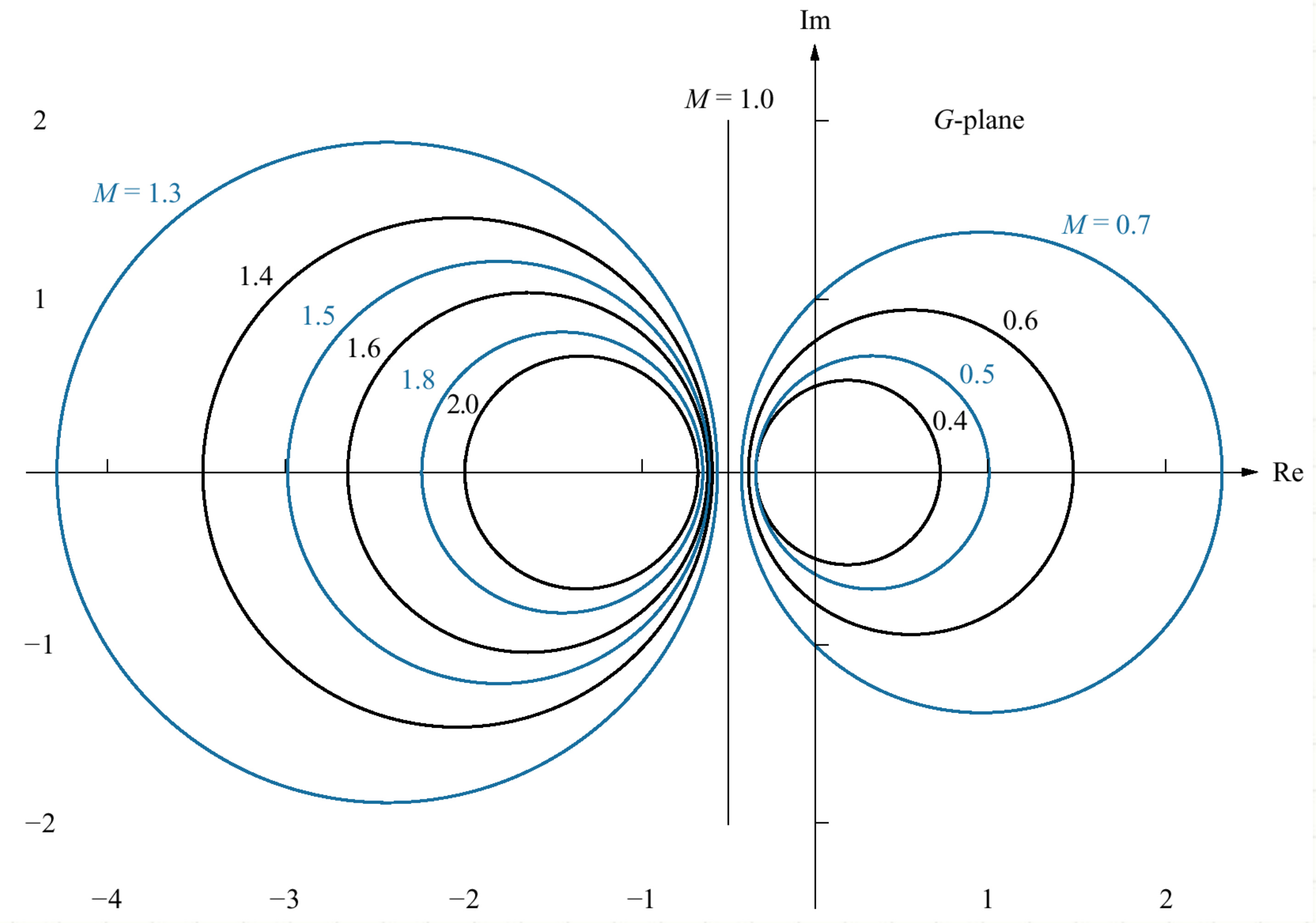
$$\left(X+\frac{M^2}{M^2-1}\right)^2+Y^2=\frac{M^2}{\left(M^2-1\right)^2}$$

que representa a equação de uma circunferência com centro e raio dados por

$$\left(\frac{M^2}{1-M^2},0\right) \quad e \quad \frac{M}{M^2-1}$$

Assim, se $G(j\omega)$ for representado por seu diagrama polar, os lugares geométricos em que o módulo da F.T.M.F. é constante são círculos de raio $|M/(M^2-1)|$ centrados em $(M^2/(1-M^2),0)$.

Círculos M constantes



Um procedimento similar pode ser adotado em relação à fase, dada por

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{Y}{1+X}\right)$$

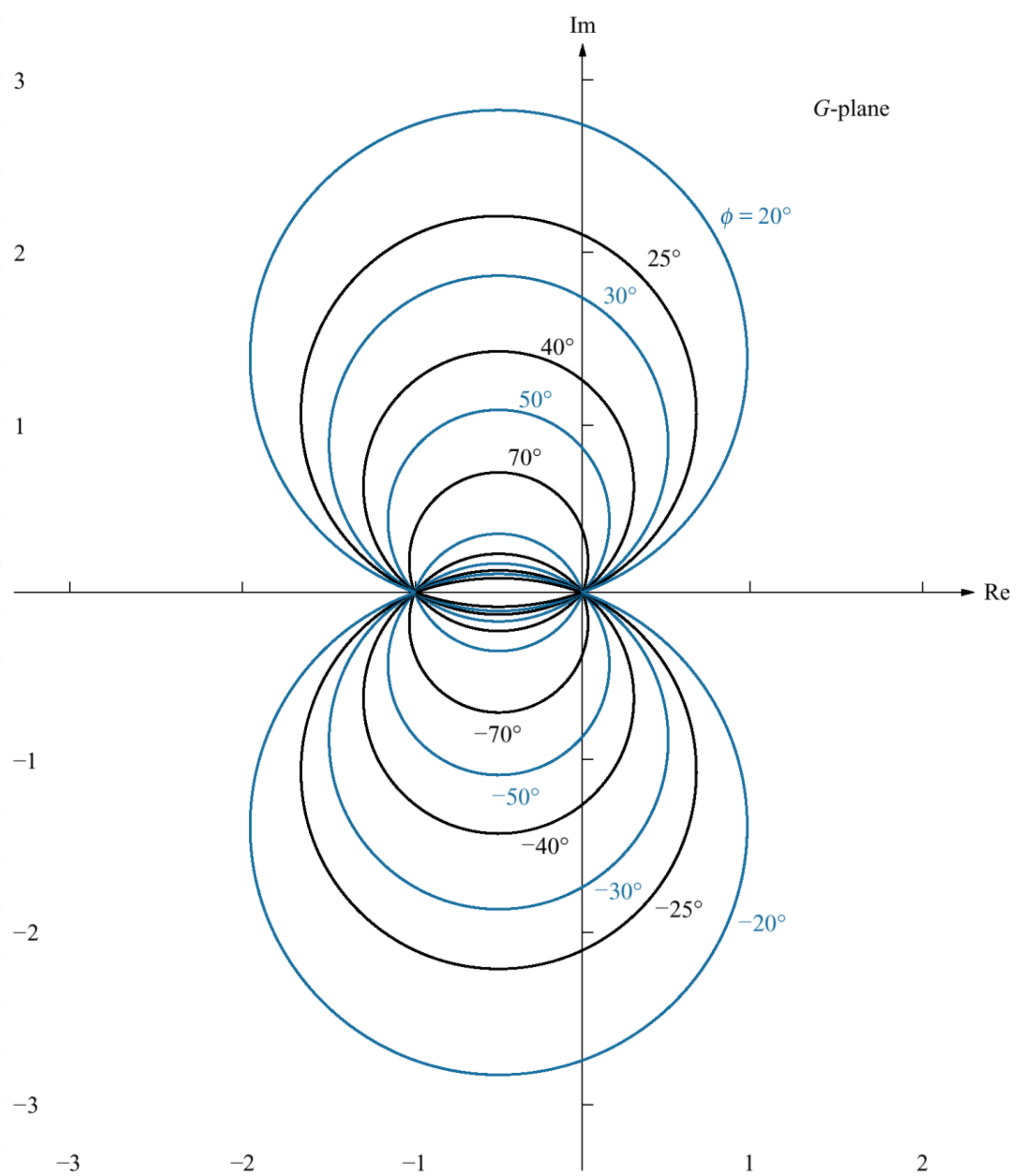
Definindo N = tan (α), após manipulações, chega-se a

$$\left(X + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(Y - \frac{1}{2N}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2N}\right)^2$$

que representa a equação de uma circunferência com centro e raio dados por

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2N}\right) \quad \text{e} \quad \sqrt{\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2N}\right)^2}$$

Círculos N constantes



Observações:

- cada círculo N passa pela origem e pelo ponto crítico -1+j0.

- as curvas N são de múltiplos valores. Para um dado $\alpha = \alpha_1$, as curvas $\alpha = \alpha_1 \pm 180°n$ (n=1,2,3 ...) serão as mesmas.

Ex: Os círculos N definidos para

$$\alpha = 10° , \alpha = 190° \text{ e } \alpha = -170°$$

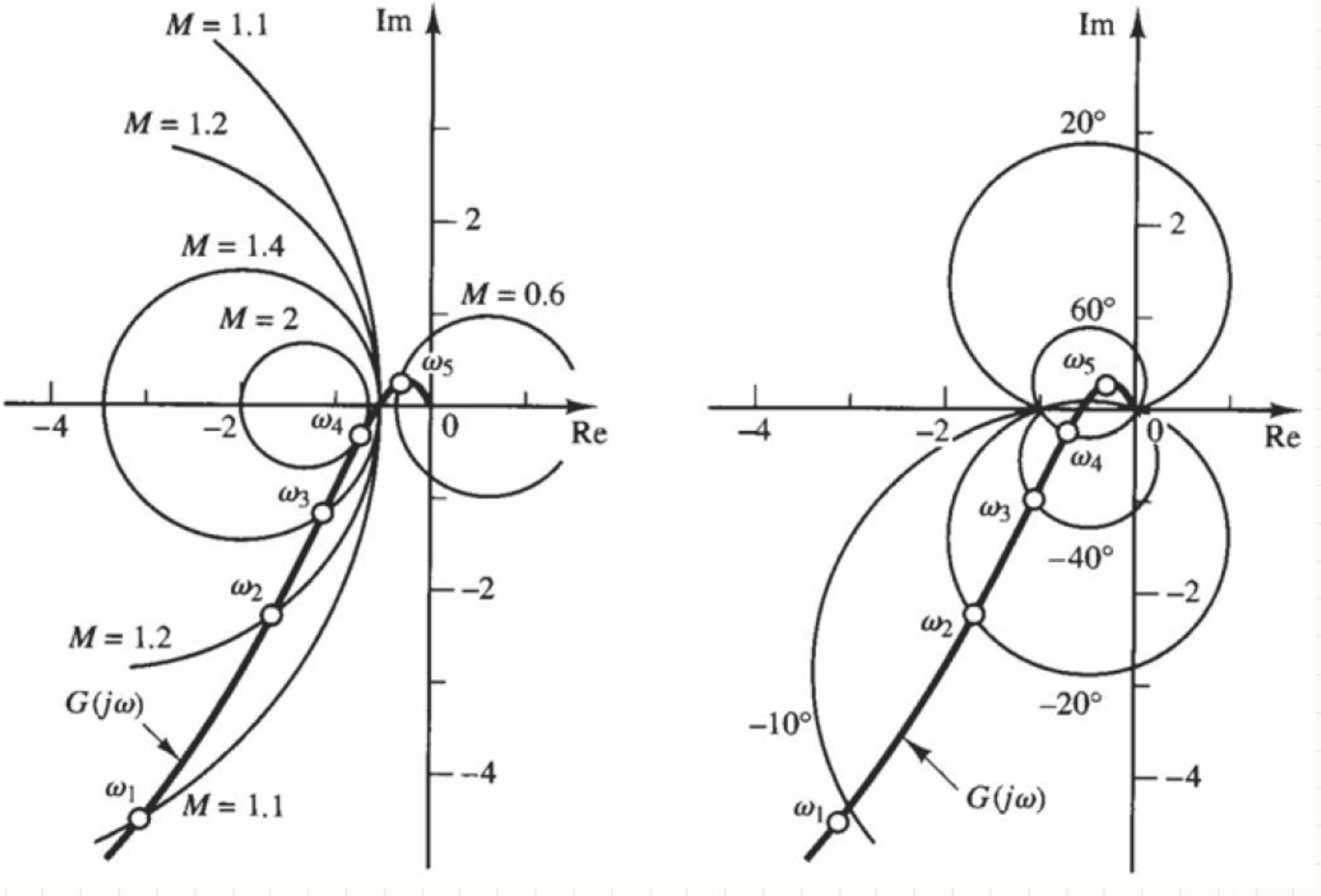
são exatamente os mesmos.

Obtenção da Resposta em Frequência de Malha Fechada

A resposta em frequência de malha fechada é obtida a partir da sobreposição do diagrama polar de $G(j\omega)$ com os círculos M e N.

Para cada valor de ω, os valores de módulo e fase de $T(j\omega)$ são iguais aos valores de M e N, respectivamente, correspondentes ao círculo interceptado pelo diagrama polar de $G(j\omega)$.

Exemplo

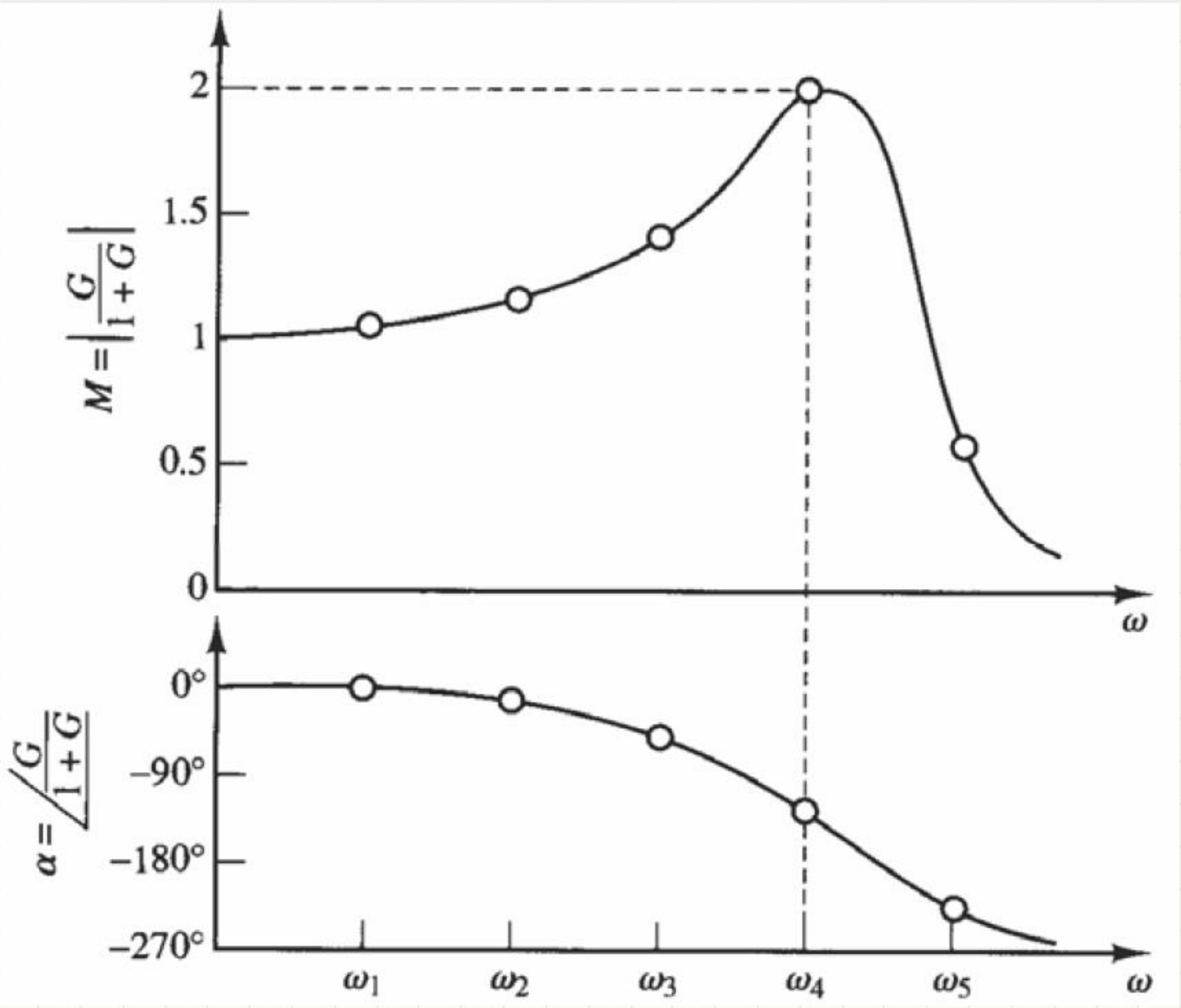


M = 1.1
Im
M = 1.2
2
M = 1.4
M = 0.6
M = 2
ω5
−4
−2
ω4
0
Re
ω3
ω2
−2
M = 1.2
G(jω)
−4
ω1
M = 1.1
Im
20°
2
60°
ω5
−4
−2
0
Re
ω4
ω3
−40°
−2
ω2
−20°
−10°
−4
G(jω)
ω1

Exemplo

Frequência	Círculo M	Círculo N
ω_1	M = 1.1	$\alpha = -10°$
ω_2	M = 1.2	$\alpha = -20°$
ω_3	M = 1.4	$\alpha = -40°$
ω_4	M = 2.0	$\alpha = 60° = -120°$
ω_5	M = 0.6	$\alpha = -40° = -220°$

Resposta em Frequência de malha fechada



A partir dos círculos M e N é possível obter parâmetros da resposta em Frequência de $T(j\omega)$:

- **Pico de Ressonância (M_R):** é o valor de M correspondente à circunferência de menor raio, que tangencia o diagrama de $G(j\omega)$.
- **Frequência de Ressonância (ω_R):** é a frequência para a qual $M=M_R$.
- **Largura de Faixa:** é a frequência na qual o diagrama de $G(j\omega)$ toca o círculo

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} G(0)$$

- **Margem de Ganho (MG):** é o inverso do valor de M na frequência em que o diagrama de $G(j\omega)$ cruza o círculo correspondente à $\alpha = -180°$.

- **Margem de Fase (MF):** é o ângulo de fase na frequência em que o diagrama de $G(j\omega)$ cruza o círculo correspondente a $M = 1$.

Exemplo

Encontre a resposta em frequência de malha fechada, utilizando círculos M e N, para um sistema com realimentação unitária cuja F.T.M.A. é dada por

$$G(s) = \frac{50}{s(s+3)(s+6)}$$

Inicialmente precisa-se determinar a o diagrama polar de G(jω):

$$G(j\omega) = \frac{50}{-9\omega^2 + j(18\omega - \omega^3)}$$

Exemplo

$$G(j\omega)=\frac{50\left[-9\omega^2-j\omega(18-\omega^2)\right]}{81\omega^4+\omega^2(18-\omega^2)^2}$$

$$=\frac{-450}{81\omega^2+(18-\omega^2)^2}-j\frac{50(18-\omega^2)}{81\omega^3+\omega(18-\omega^2)^2}$$

Para $\omega=0$

$$G(0)=-\frac{450}{18^2}-j\frac{900}{0}=-1.39-j\infty\Rightarrow\infty\angle-90^\circ$$

Para $\omega\to\infty$

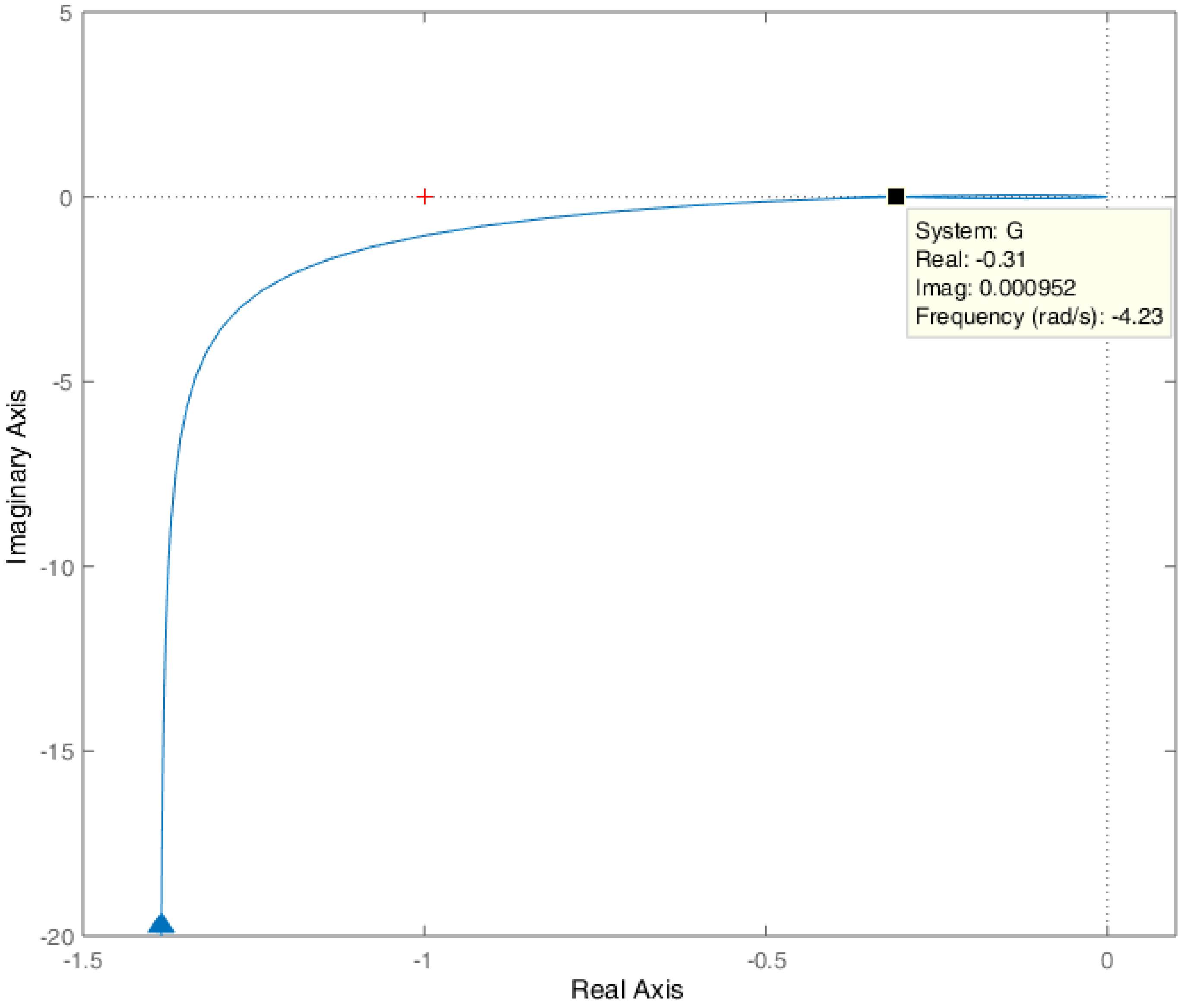
$$G(j\omega)\approx\frac{1}{(j\omega^3)}\approx\frac{j}{\infty}\Rightarrow 0\angle 90^\circ$$

Exemplo

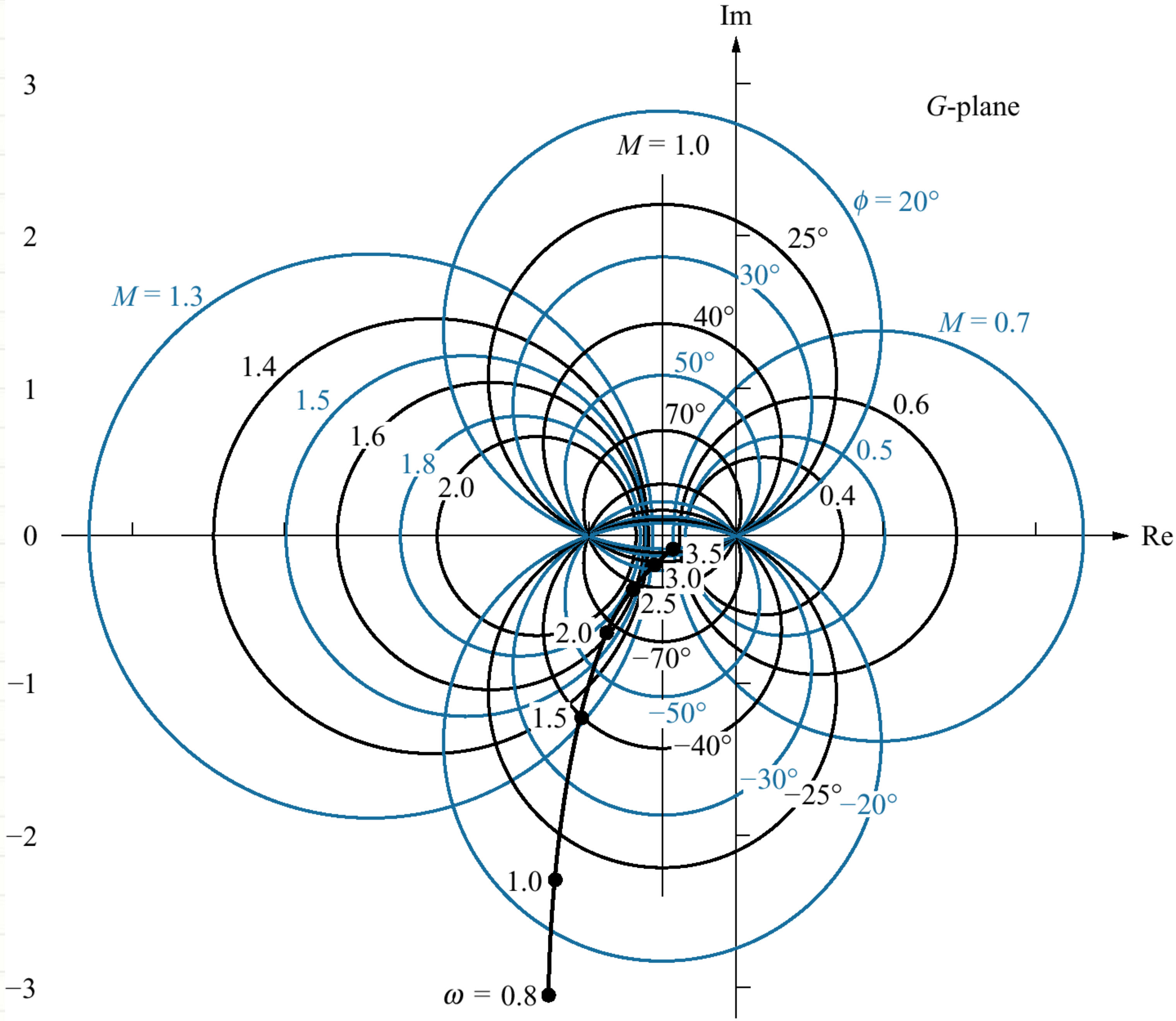
Cruzamento com eixo real:

$$(18 - \omega^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{18} = \pm 2{,}24$$

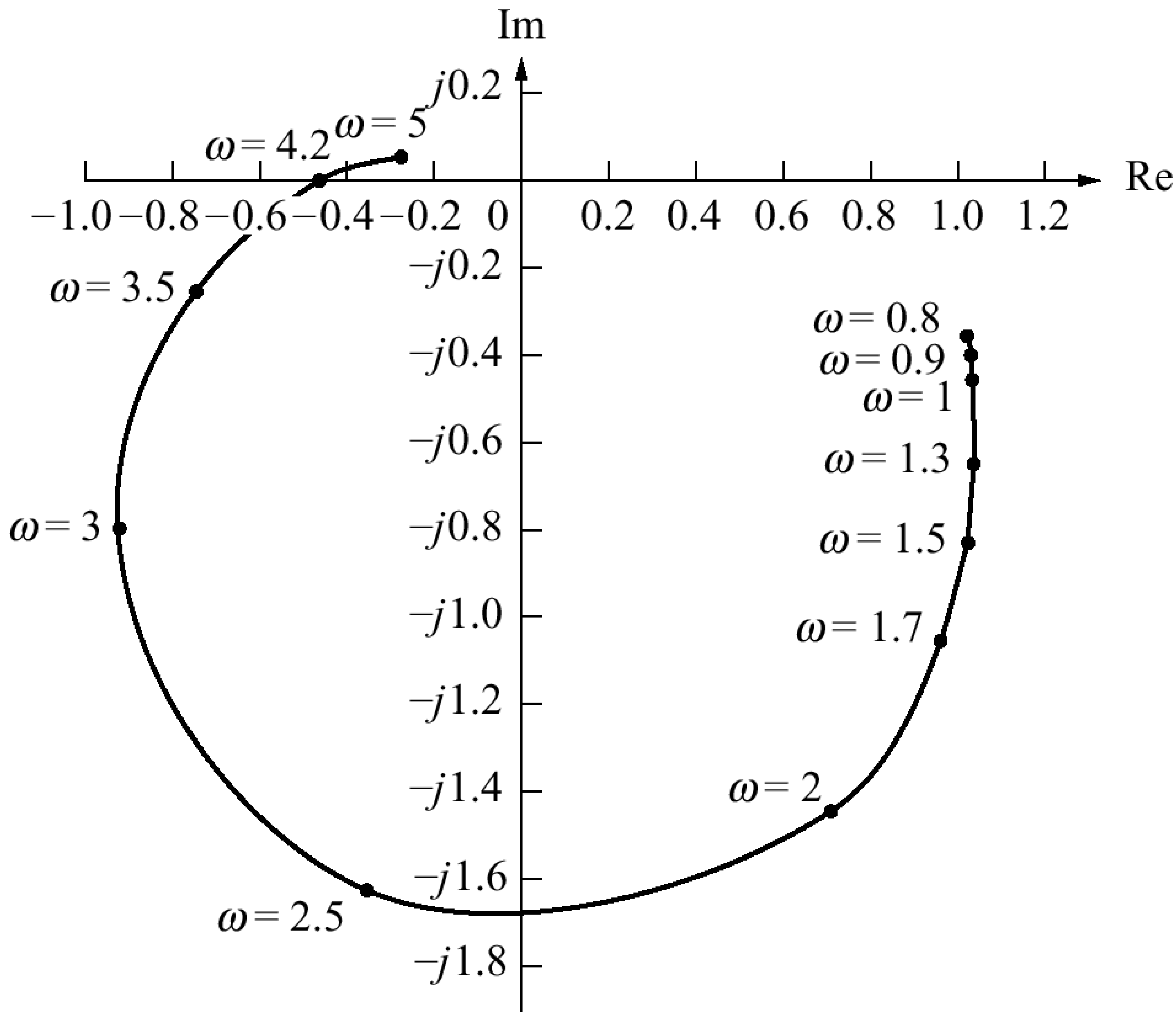
$$\omega = 2{,}24 \quad \Rightarrow \quad G(j2{,}24) = -0{,}31$$



5
0
-5
-10
-15
-20
-1.5
-1
-0.5
0
Imaginary Axis
Real Axis
System: G
Real: -0.31
Imag: 0.000952
Frequency (rad/s): -4.23



Im
Re
G-plane
M = 1.0
ϕ = 20°
25°
30°
40°
50°
70°
M = 1.3
1.4
1.5
1.6
1.8
2.0
M = 0.7
0.6
0.5
0.4
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
ω = 0.8
−70°
−50°
−40°
−30°
−25°
−20°
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−3
−2
−1
0
1
2



Im
Re
j0.2
−j0.2
−j0.4
−j0.6
−j0.8
−j1.0
−j1.2
−j1.4
−j1.6
−j1.8
−1.0
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
ω = 5
ω = 4.2
ω = 3.5
ω = 3
ω = 2.5
ω = 2
ω = 1.7
ω = 1.5
ω = 1.3
ω = 1
ω = 0.9
ω = 0.8