Projeto de Controladores Discretos

Projeto Direto usando Lugar das Raízes (continuação) e Resposta em Frequência

Profa. Cristiane Paim

Controlador em Atraso

A estrutura do controlador em atraso é a mesma do controlador em avanço.

$$C(z) = K\frac{z-\alpha}{z-\beta} \qquad |\beta| > |\alpha|$$

Como no caso contínuo, o controlador em atraso é utilizado para melhor a resposta em regime permanente e o procedimento de projeto é análogo.

Controlador em Atraso

O zero do controlador é escolhido próximo da unidade, satisfazendo a relação

$$1 - 0{,}10 \left| z_d \right| < \alpha < 1$$

O valor do polo é escolhido de modo a garantir a melhoria necessária no coeficiente de erro, fazendo

$$C(1) = \frac{1-\alpha}{1-\beta} = N$$

sendo N o número de vezes que o coeficiente de erro precisa ser aumentado.

Exemplo

Considere o exemplo anterior, cujo controlador em avanço foi projetado para atender especificações de resposta transitória: $M_p \leq 16\%$ e $t_s \leq 2$seg.

A função de transferência do processo é dada por

$$G(z) = \frac{0{,}01758(z + 0{,}876)}{(z-1)(z-0{,}6703)}$$

Foram considerados como parâmetros de projeto

$$\xi \equiv 0{,}6 \quad \text{e} \quad \omega_n \equiv 5$$

resultando

$$z_d = 0{,}3824 \pm j0{,}3937$$

Exemplo

O controlador obtido (usando cancelamento polo/zero) foi

$$C(z) = \frac{16,23(z - 0,6703)}{z - 0,0509}$$

Deseja-se garantir <u>também</u> que o erro de regime permanente seja inferior a 10%.

Exemplo

Seja,

$$C(z)G(z) = \frac{0{,}2853(z+0{,}876)}{(z-1)(z-0{,}0509)}$$

então, o erro de regime permanente será dado por

$$Kv = \lim_{z \to 1} \frac{z-1}{T} C(z)G(z) = 2{,}82 \quad \Rightarrow \quad e_{\infty} = 35{,}5\%$$

Para atender a especificação de erro

$$e_{\infty} < 10\% \quad \Rightarrow \quad Kv > 10$$

Assim, o coeficiente Kv precisa ser aumentado em (10/2,82)=3,55 vezes.

Exemplo

Escolha do zero

O zero deve ser escolhido satisfazendo

$$1 - 0{,}1 \left| z_d \right| < \alpha < 1$$

Do exemplo,

$$z_d = 0{,}3824 \pm j0{,}3937$$

assim,

$$0{,}9451 < \alpha < 1$$

Quanto mais próximo da unidade for escolhido o valor de α mais próximo de 1 será o módulo de C(z) e menor sua fase, não afetado assim as características da resposta transitória.

Exemplo

Para α=0,98 e considerando um aumento de 4 vezes no coeficiente de erro (N=4) tem-se

$$\frac{1-\alpha}{1-\beta}=4 \quad \rightarrow \quad \beta=0,995$$

e, assim,

$$C(z)=\frac{z-0,98}{z-0,995}$$

Para este controlador,

$$\left|C(z_d)\right|=0,98 \quad \text{e} \quad \angle C(z_d)=-0,65^{\circ}$$

Exemplo

Adicionando o controlador em atraso em série com o controlador em avanço tem-se, em malha aberta,

$$C_{AV}(z)C_{AT}(z)G(z) = \frac{0,2853(z-0,98)(z+0,876)}{(z-1)(z-0,0509)(z-0,995)}$$

sendo o erro dado por

$$Kv = 2,82 \times 4 = 12,8 \quad \Rightarrow \quad e_{\infty} = 8,87\%$$

Fechando a malha do sistema tem-se,

$$T(z) = \frac{0,2853(z-0,98)(z+0,876)}{z^3 - 1,761z^2 + 1,067z - 0,2956}$$

Exemplo

Resultando os seguintes polos e zeros:

$$p_1 = 0{,}9794 \qquad z_1 = 0{,}98$$

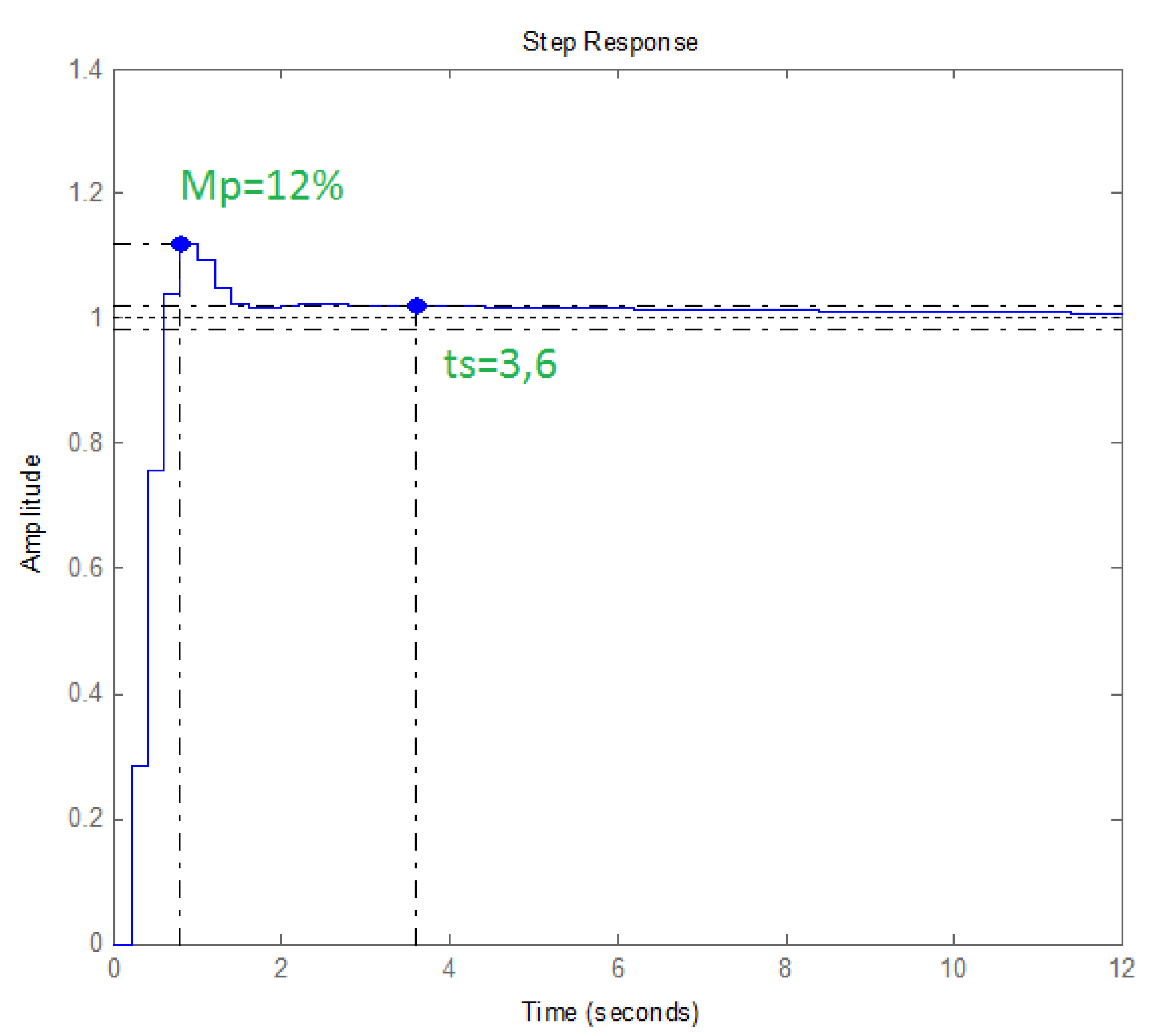
$$p_{2,3} = 0{,}3906 \pm j0{,}3863 \qquad z_2 = -0{,}876$$

Observe que, de forma similar ao caso contínuo, o polo adicional de malha fechada está muito próximo do zero do controlador.

Da resposta ao degrau obtém-se

$$Mp = 12\% \quad \text{e} \quad t_s = 3{,}6\,\text{seg}$$

Exemplo



Step Response
Mp=12%
ts=3,6
Amplitude
Time (seconds)
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
2
4
6
8
10
12

Exemplo

Escolhendo um valor maior para o zero, α=0,99 e mantendo o aumento de 4 vezes no coeficiente de erro tem-se

$$\frac{1-\alpha}{1-\beta} = 4 \quad \rightarrow \quad \beta = 0{,}9975$$

e, assim,

$$C(z) = \frac{z - 0{,}99}{z - 0{,}9975}$$

Para este controlador,

$$\left| C(z_d) \right| = 0{,}99 \quad \text{e} \quad \angle C(z_d) = -0{,}32^\circ$$

Exemplo

Em malha aberta,

$$C_{AV}(z)C_{AT}(z)G(z) = \frac{0{,}2853(z-0{,}99)(z+0{,}876)}{(z-1)(z-0{,}0509)(z-0{,}9975)}$$

O erro não sofre alteração

$$Kv = 2{,}82 \times 4 = 12{,}8 \quad \Rightarrow \quad e_{\infty} = 8{,}87\%$$

Fechando a malha do sistema tem-se agora,

$$T(z) = \frac{0{,}2853(z-0{,}98)(z+0{,}876)}{z^3 - 1{,}763z^2 + 1{,}067z - 0{,}2982}$$

Exemplo

Resultando os seguintes polos e zeros:

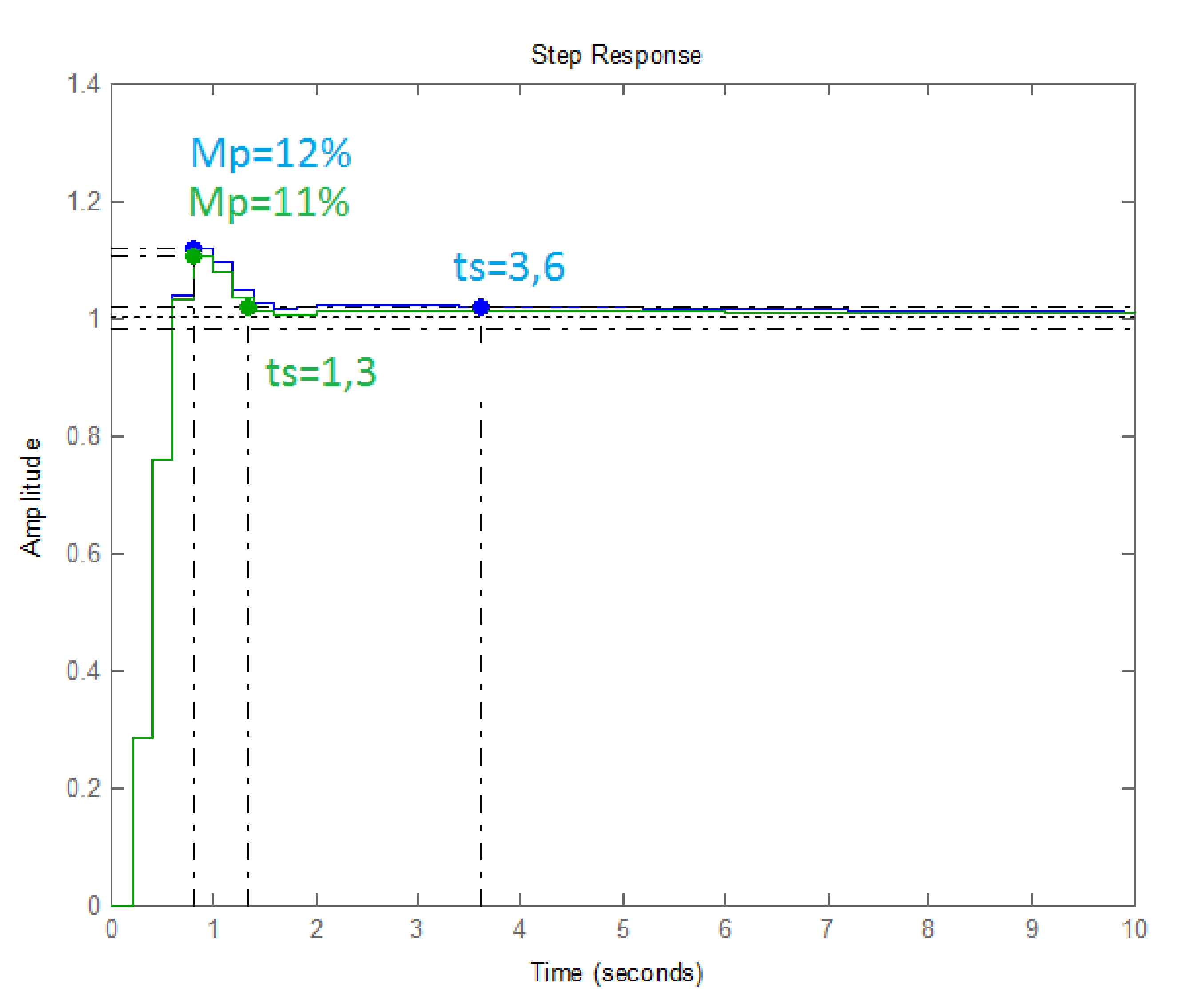
$$p_1 = 0{,}9899 \qquad z_1 = 0{,}99$$

$$p_{2,3} = 0{,}3866 \pm j0{,}3896 \qquad z_2 = -0{,}876$$

Da resposta ao degrau obtém-se

$$Mp = 11\% \quad \text{e} \quad t_s = 1{,}3\text{seg}$$

Exemplo



Step Response
Mp=12%
Mp=11%
ts=3,6
ts=1,3
Amplitude
Time (seconds)
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Projeto Direto usando Resposta em Frequência

Resposta de um sistema discreto a uma entrada senoidal

Considere um sistema linear, discreto, invariante no tempo e estável. Seja a entrada do sistema um sinal senoidal

$$u(t) = sen(\omega t)$$

Considerando um amostrador ideal, tem-se

$$u(k) = sen(k\omega T)$$

Então,

$$U(z) = \mathrm{Z}\left[sen(k\omega T)\right] = \frac{z\,sen(\omega T)}{(z - e^{j\omega T})(z - e^{-j\omega T})}$$

Projeto Direto usando Resposta em Frequência

A resposta do sistema é dada por

$$Y(z) = G(z)U(z) = G(z)\frac{z\,sen(\omega T)}{(z-e^{j\omega T})(z-e^{-j\omega T})}$$

Fazendo-se a expansão em frações parciais, obtém-se

$$Y(z) = \frac{\mathrm{A}z}{(z-e^{j\omega T})} + \frac{\overline{\mathrm{A}}z}{(z-e^{-j\omega T})} + \text{termos devidos aos polos de}\, G(z)$$

sendo

$$\mathrm{A} = \frac{G(e^{j\omega T})}{2j} \quad e \quad \overline{\mathrm{A}} = -\frac{G(e^{-j\omega T})}{2j}$$

Projeto Direto usando Resposta em Frequência

Em regime permanente, a contribuição dos polos de G(z) desaparece uma vez que o sistema é estável. A resposta do sistema será dada por

$$y_\infty = \mathrm{M}\, sen(k\omega T + \theta)$$

sendo

$$M = \left| G(e^{j\omega T}) \right| \quad e \quad \theta = \angle G(e^{j\omega T})$$

Esta resposta é também senoidal, com amplitude multiplicada por M e com um deslocamento de fase θ e, portanto, análogo ao caso contínuo.

Projeto Direto usando Resposta em Frequência

No caso discreto, pode se usar o mapeamento $z=e^{sT}$ que permitiria traçar a resposta em frequência. No entanto, as frequências são idealmente limitadas em função de frequência de amostragem.

Assim, o diagrama de bode seria limitado em frequência e a analogia com o caso contínuo não seria possível.

Para manter as vantagens de trabalhar no domínio da frequência para o caso discreto usa-se uma transformação bilinear, dada por

$$z = \frac{1 + Tw/2}{1 - Tw/2}$$

sendo T o período de amostragem.

Projeto Direto usando Resposta em Frequência

Da equação anterior obtém-se a transformação inversa

$$w = \frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$$

A função de transferência G(z) pode então se escrita como uma função racional de z e os métodos de resposta em frequência usados.

No plano w pode-se definir uma frequência fictícia η, ou seja, w=jη. Esta frequência pode ser relacionada com a frequência ω no plano s, usando-se os mapeamentos

$$w = \frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) \quad e \quad z = e^{sT}$$

Projeto Direto usando Resposta em Frequência

Assim,

$$\mathrm{w} = j\eta = \frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)\Bigg|_{z=e^{sT}} \quad \Rightarrow \quad \eta = \frac{2}{T}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

Considerando a frequência de amostragem

$$\omega_S = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad \eta = \frac{2}{T}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\omega}{\omega_S}\pi\right)$$

Para pequenos valores de frequência pode ser mostrado que

$$\eta \approx \omega$$

e, portanto, as frequências nos planos s e w são aproximadamente iguais. Assim, os diagramas de bode podem ser traçados para G(jη) de forma similar ao caso contínuo.

Projeto Direto usando Resposta em Frequência

Procedimento de Projeto

1. Obter G(w) através da transformação linear

$$z = \frac{1 + Tw/2}{1 - Tw/2}$$

para um período de amostragem escolhido adequadamente.

2. Fazer w=jη em G(w) e traçar o diagrama de Bode para G(jη).

3. Utilizar os diagramas de Bode para projetar o controlador seguindo procedimento semelhante ao caso contínuo.

Projeto Direto usando Resposta em Frequência

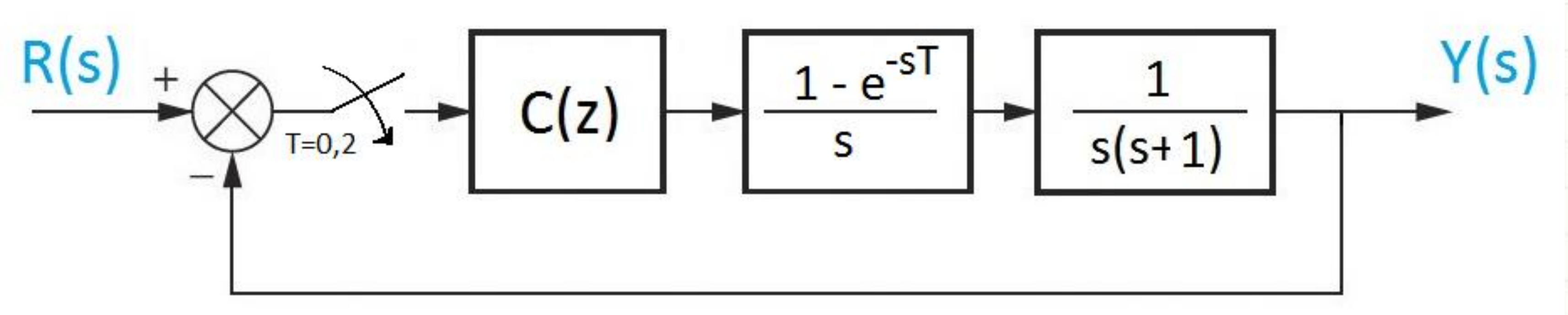
Procedimento de Projeto

4. Transformar o controlador C(w) em C(z) utilizando a transformação inversa

$$C(z) = C(\mathrm{w})\Big|_{w=\frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)}$$

Exemplo

Seja o sistema de controle abaixo.



Projetar um controlador C(z) de modo a satisfazer as seguintes especificações:

- $MF \geq 50°$
- $Kv \geq 2$

Exemplo

O modelo discreto do sistema é dado por

$$G(z) = \mathrm{Z}\left\{ \frac{1\text{-}e^{-sT}}{s} \frac{1}{s(s+1)} \right\} = \frac{0{,}01873(\mathrm{z}+0{,}9356)}{(\mathrm{z}\text{-}1)(\mathrm{z}\text{-}0{,}8187)}$$

Usando a transformação bilinear

$$z = \frac{1+\mathrm{Tw}/2}{1-\mathrm{Tw}/2}$$

tem-se

$$G(\mathrm{w}) = G(z)\Big|_{z=\frac{1+0{,}1\mathrm{w}}{1-0{,}1\mathrm{w}}}$$

Exemplo

Chega-se a

$$G(w) = \frac{(w+300)(10-w)}{3000w(w+1)}$$

Para garantir as especificações de desempenho será projetado um controlador em avanço na forma

$$C(w) = K\frac{1+\alpha Tw}{1-Tw} \qquad \alpha > 1$$

Segue-se uma metodologia de projeto semelhante ao caso contínuo.

Exemplo

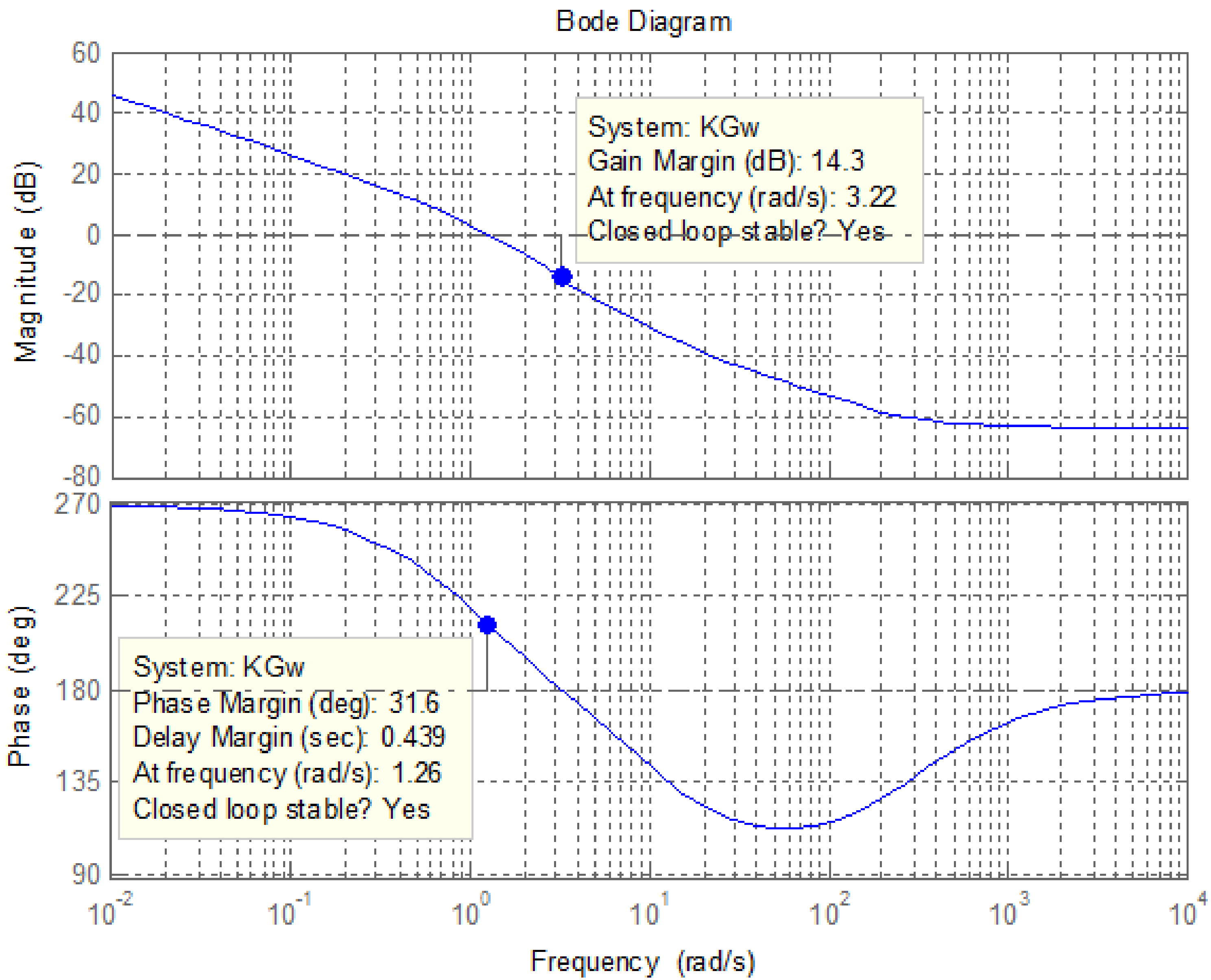
Inicialmente determina-se o ganho necessário para garantir a especificação de erro de regime permanente.

$$Kv = \lim_{\mathrm{w} \to 0} \mathrm{w}\, C(\mathrm{w}) G(\mathrm{w}) = K \quad \Rightarrow \quad K \geq 2$$

Considerando K=2 tem-se:

$$MG = 14{,}3\,\mathrm{dB}$$

$$MF = 31{,}6^{\circ}$$


Bode Diagram
Magnitude (dB)
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
System: KGw
Gain Margin (dB): 14.3
At frequency (rad/s): 3.22
Closed loop stable? Yes
Phase (deg)
270
225
180
135
90
System: KGw
Phase Margin (deg): 31.6
Delay Margin (sec): 0.439
At frequency (rad/s): 1.26
Closed loop stable? Yes
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
10^{4}
Frequency (rad/s)

Exemplo

Definindo a contribuição de fase do controlador como

$$\phi_{\mathrm{m}} = 50^\circ - 31{,}6^\circ + 11{,}6^\circ = 30^\circ$$

Assi, o valor de α pode ser calculado por

$$\alpha = \frac{1 + \operatorname{sen}\phi_{\mathrm{m}}}{1 - \operatorname{sen}\phi_{\mathrm{m}}} \quad \rightarrow \quad \alpha = 3$$

Exemplo

Calcula-se agora a frequência de cruzamento de ganho a partir de

$$\left| K\sqrt{\alpha}\, G(j\omega_C) \right| = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_C = 1{,}747$$

E assim,

$$T = \frac{1}{\omega_C \sqrt{\alpha}} = 0{,}3305 \quad \text{e} \quad \alpha T = 0{,}9914$$

gerando o controlador

$$C(\mathrm{w}) = 2\,\frac{1 + 0{,}3305\mathrm{w}}{1 + 0{,}9914\mathrm{w}}$$

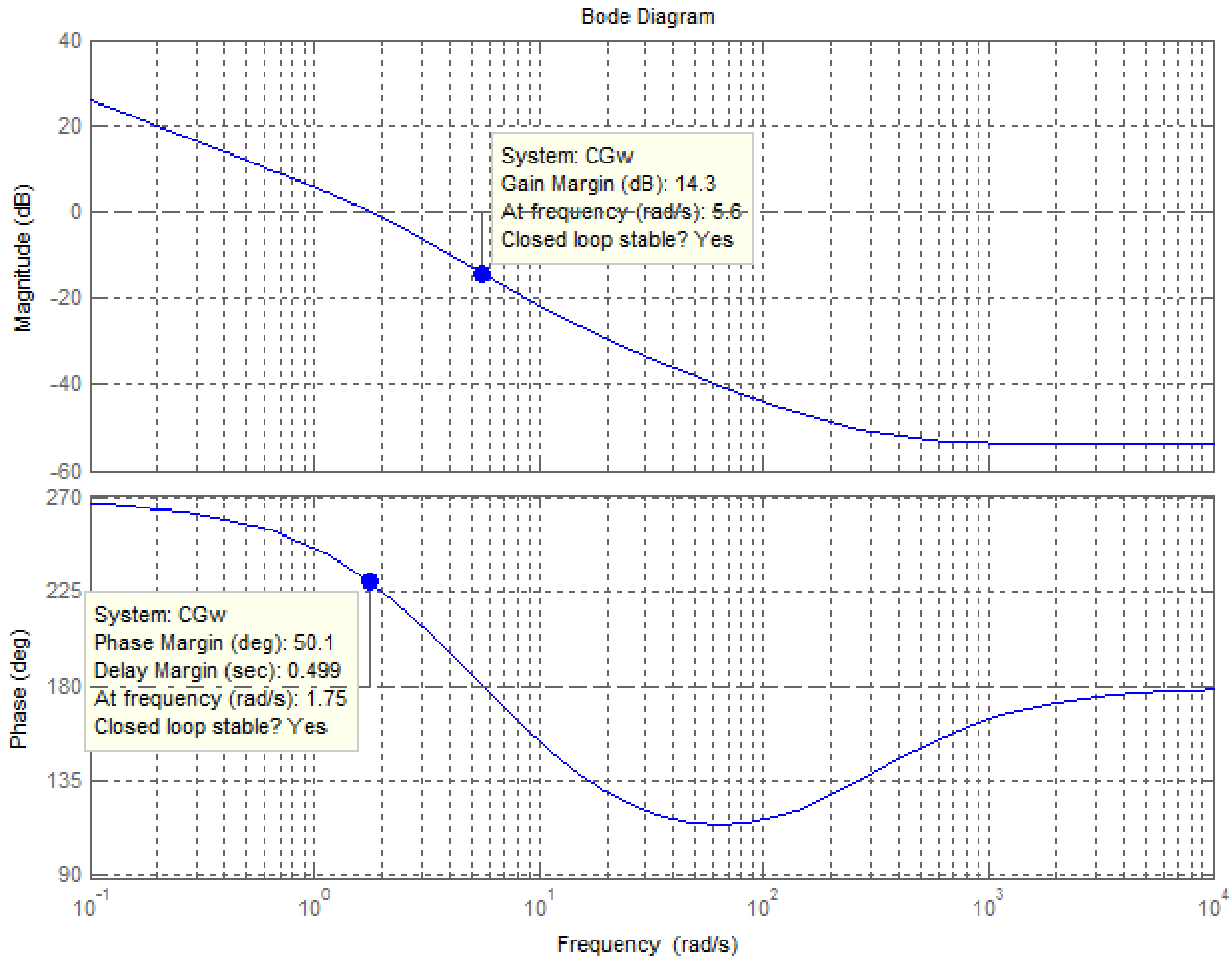
Exemplo

O controlador C(w) pode ser reescrito como:

$$C(\mathrm{w}) = 6\frac{\mathrm{w}+1}{\mathrm{w}+3}$$

Em malha aberta tem-se:

$$C(\mathrm{w})G(\mathrm{w}) = \frac{6(\mathrm{w}+1)(\mathrm{w}+300)(10-\mathrm{w})}{3000\mathrm{w}(\mathrm{w}+1)(w+3)} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} MG &= 14{,}3\mathrm{dB} \\ MF &= 50{,}1^{\circ} \end{aligned}$$



Bode Diagram
System: CGw
Gain Margin (dB): 14.3
At frequency (rad/s): 5.6
Closed loop stable? Yes
System: CGw
Phase Margin (deg): 50.1
Delay Margin (sec): 0.499
At frequency (rad/s): 1.75
Closed loop stable? Yes
Magnitude (dB)
Phase (deg)
Frequency (rad/s)
40
20
0
-20
-40
-60
270
225
180
135
90
10^-1
10^0
10^1
10^2
10^3
10^4

Exemplo

Para obtenção do controlador no plano z, aplica-se a transformada inversa

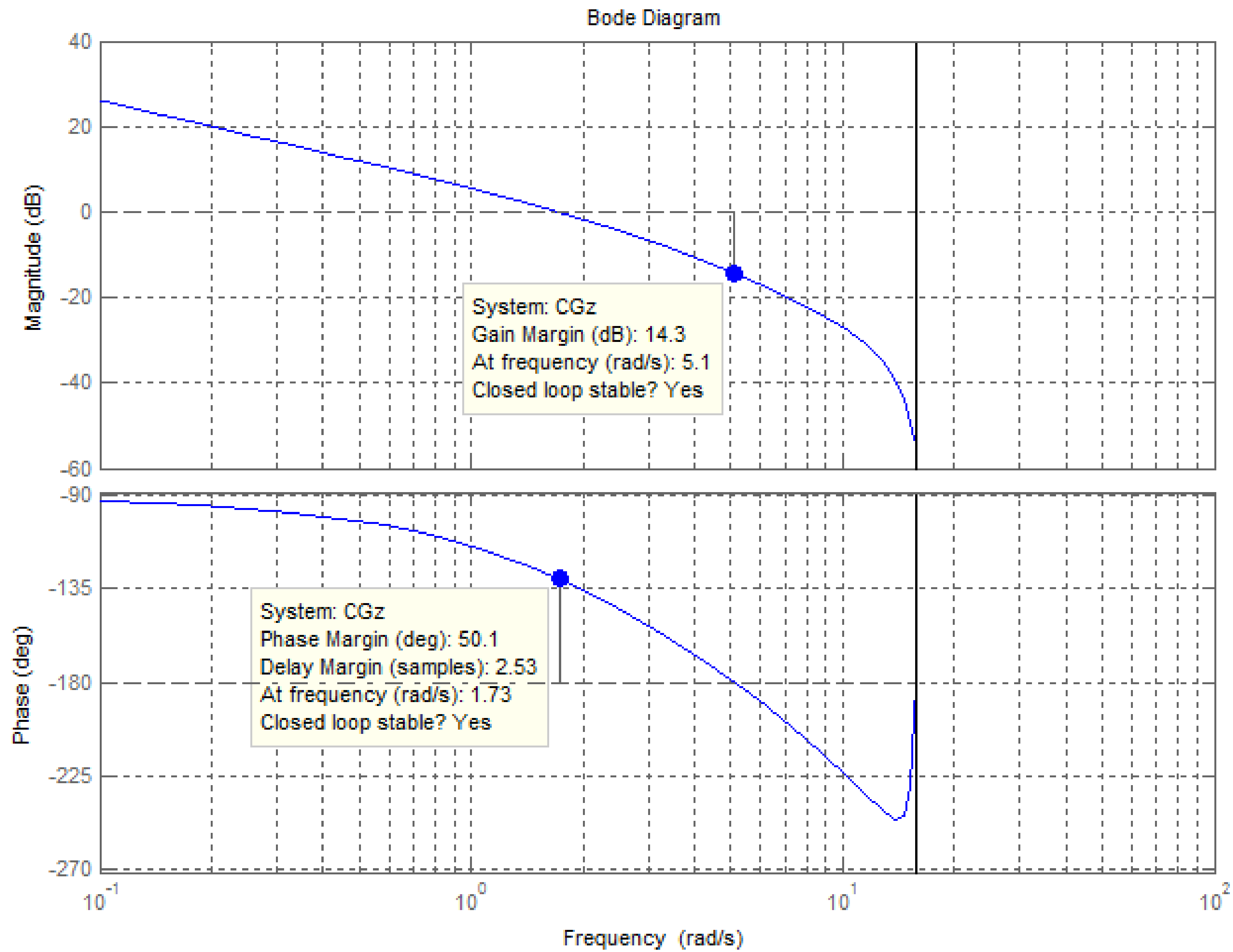
$$C(z) = C(\mathrm{w})\Big|_{w=10\left(\frac{z-1}{z+1}\right)} = 5{,}08\left(\frac{z-0{,}8187}{z-0{,}5385}\right)$$

<u>**Verificação**</u>

$$C(\mathrm{z})G(\mathrm{z}) = \underbrace{\frac{5{,}08(z-0{,}8187)}{z-0{,}5385}}_{C(z)}\;\underbrace{\frac{0{,}01873(\mathrm{z}+0{,}9356)}{(\mathrm{z}-1)(\mathrm{z}-0{,}8187)}}_{G(z)}$$

$$MG = 14{,}3\mathrm{dB}$$

$$MF = 50{,}1^\circ$$



Bode Diagram
Magnitude (dB)
40
20
0
-20
-40
-60
System: CGz
Gain Margin (dB): 14.3
At frequency (rad/s): 5.1
Closed loop stable? Yes
Phase (deg)
-90
-135
-180
-225
-270
System: CGz
Phase Margin (deg): 50.1
Delay Margin (samples): 2.53
At frequency (rad/s): 1.73
Closed loop stable? Yes
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
Frequency (rad/s)