Objetivos de Controle

Profa. Cristiane Paim

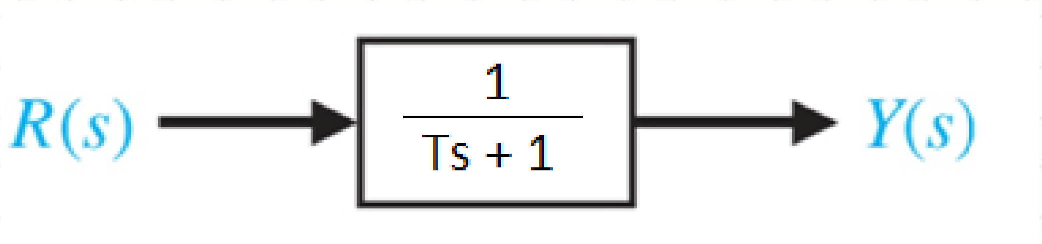
Semestre 2018-1

Objetivos de Controle

O objetivo de um sistema de controle é fazer com que o sistema apresente um comportamento preestabelecido em regime transitório e/ou permanente.

As especificações da resposta transitória e em regime permanente são definidas para sistemas de 1ª e 2ª ordem.

Resposta ao Degrau para Sistemas de 1ª Ordem



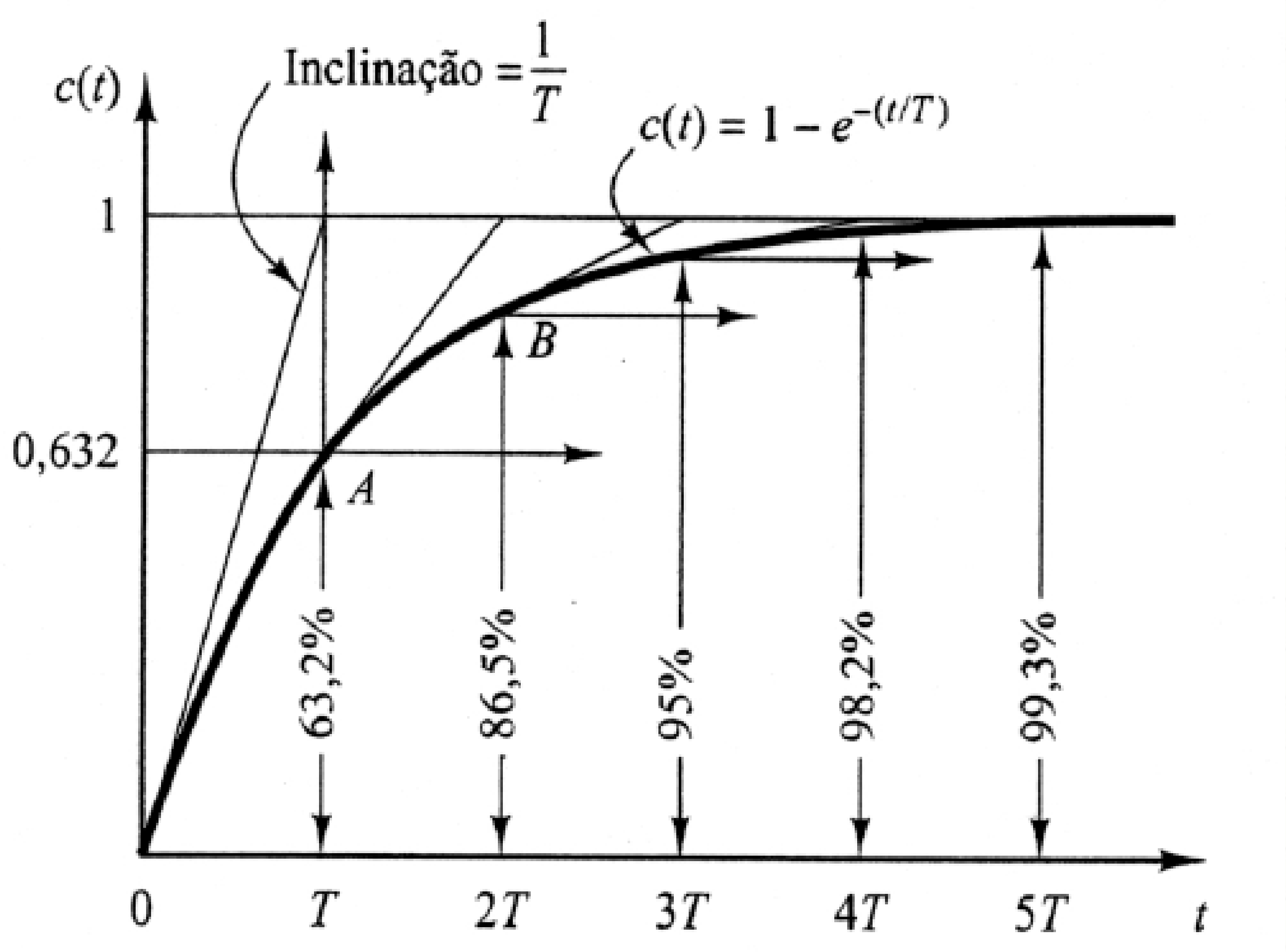
$$R(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{Ts^2 + s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/T}$$

Aplicando Laplace:

$$y(t) = 1 - e^{-t/T}$$

Resposta ao Degrau para Sistemas de 1ª Ordem



Especificações para a resposta transitória de sistemas de 1ª ordem

- Tempo de subida:

$$(10\,\text{a}\ 90\%) \qquad t_r = 2{,}20\tau$$

$$(5\,\text{a}\ 95\%) \qquad t_r = 2{,}94\tau$$

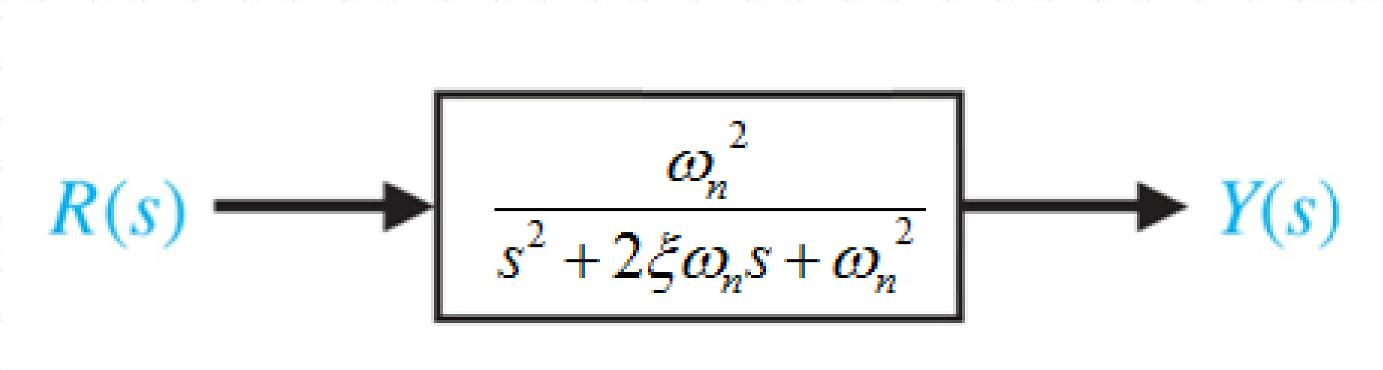
- Tempo de acomodação:

$t_s = 3\tau$ Critério 5%

$t_s = 4\tau$ Critério 2%

$t_s = 5\tau$ Critério 1%

Resposta ao Degrau para Sistemas de 2ª Ordem



Os polos do sistema serão dados por:

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

ou

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_d$$

Sendo $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ a frequência natural amortecida.

Resposta ao Degrau para Sistemas de 2ª Ordem

A resposta no tempo é dada por:

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\left[\cos(\omega_d t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\,\mathrm{sen}(\omega_d t)\right]$$

ou

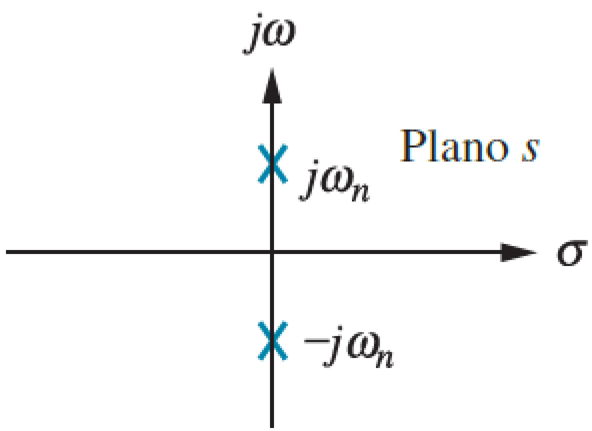
$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\,\mathrm{sen}\left[\omega_d t + tg^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right]$$

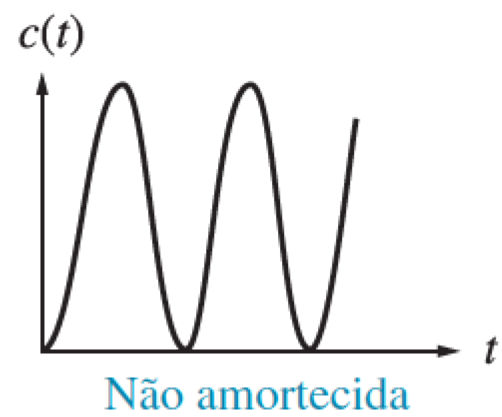
Resposta ao Degrau para Sistemas de 2ª Ordem

$$\xi = 0 \quad \rightarrow \quad s_{1,2} = \pm j\,\omega_n$$

A resposta torna-se não amortecida, com oscilações de frequência ω_n mantidas indefinidamente.

$$y(t) = 1 - \cos(\omega_n t)$$



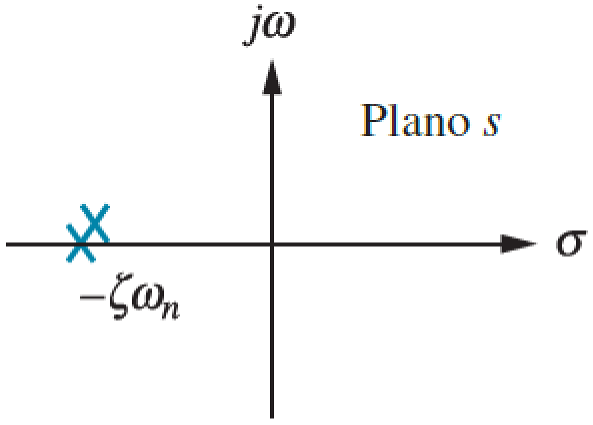


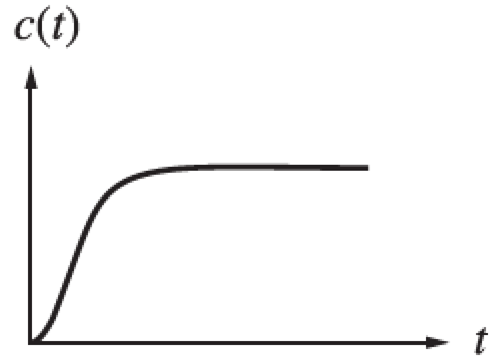
Resposta ao Degrau para Sistemas de 2ª Ordem

$$\xi = 1 \quad \rightarrow \quad s_{1,2} = -\xi\omega_n$$

A resposta será criticamente amortecida.

$$y(t) = 1 - e^{-\omega_n t}\left(\omega_d t + 1\right)$$





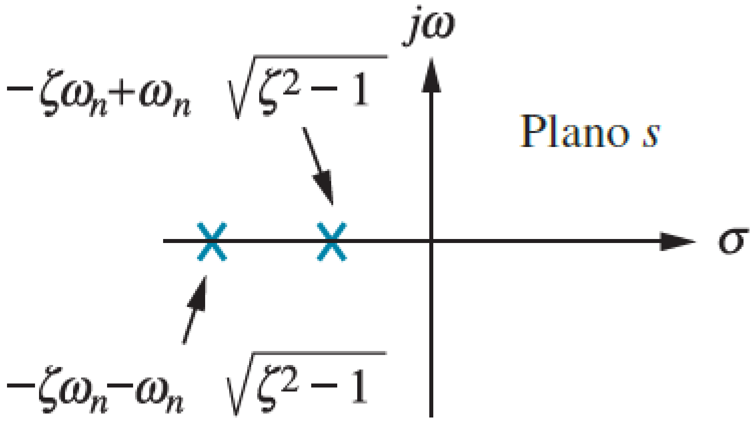
Criticamente amortecida

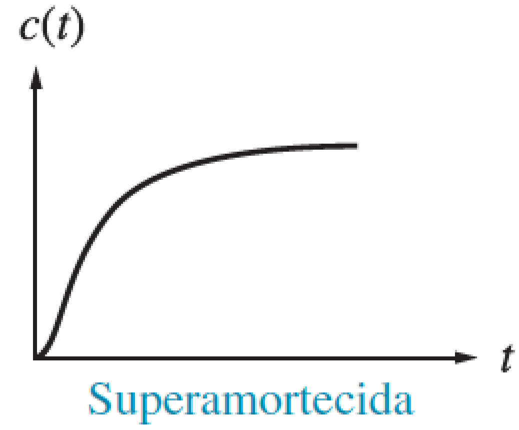
Resposta ao Degrau para Sistemas de 2ª Ordem

$$\xi > 1 \quad \rightarrow \quad s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

Neste caso, a resposta é dita sobreamortecida.

$$y(t) = 1 - \frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2 - 1}}\left[\frac{1}{s_1}e^{s_1 t} - \frac{1}{s_2}e^{s_2 t}\right]$$



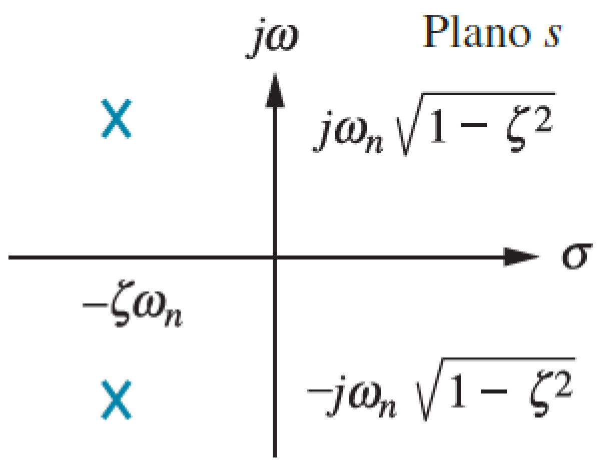


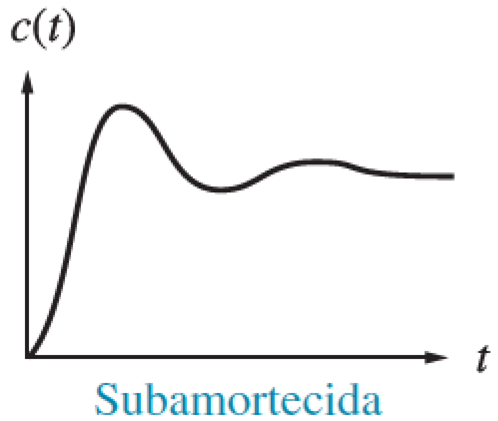
Resposta ao Degrau para Sistemas de 2ª Ordem

$$0 < \xi < 1 \quad \rightarrow \quad s_{1,2} = -\xi\,\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

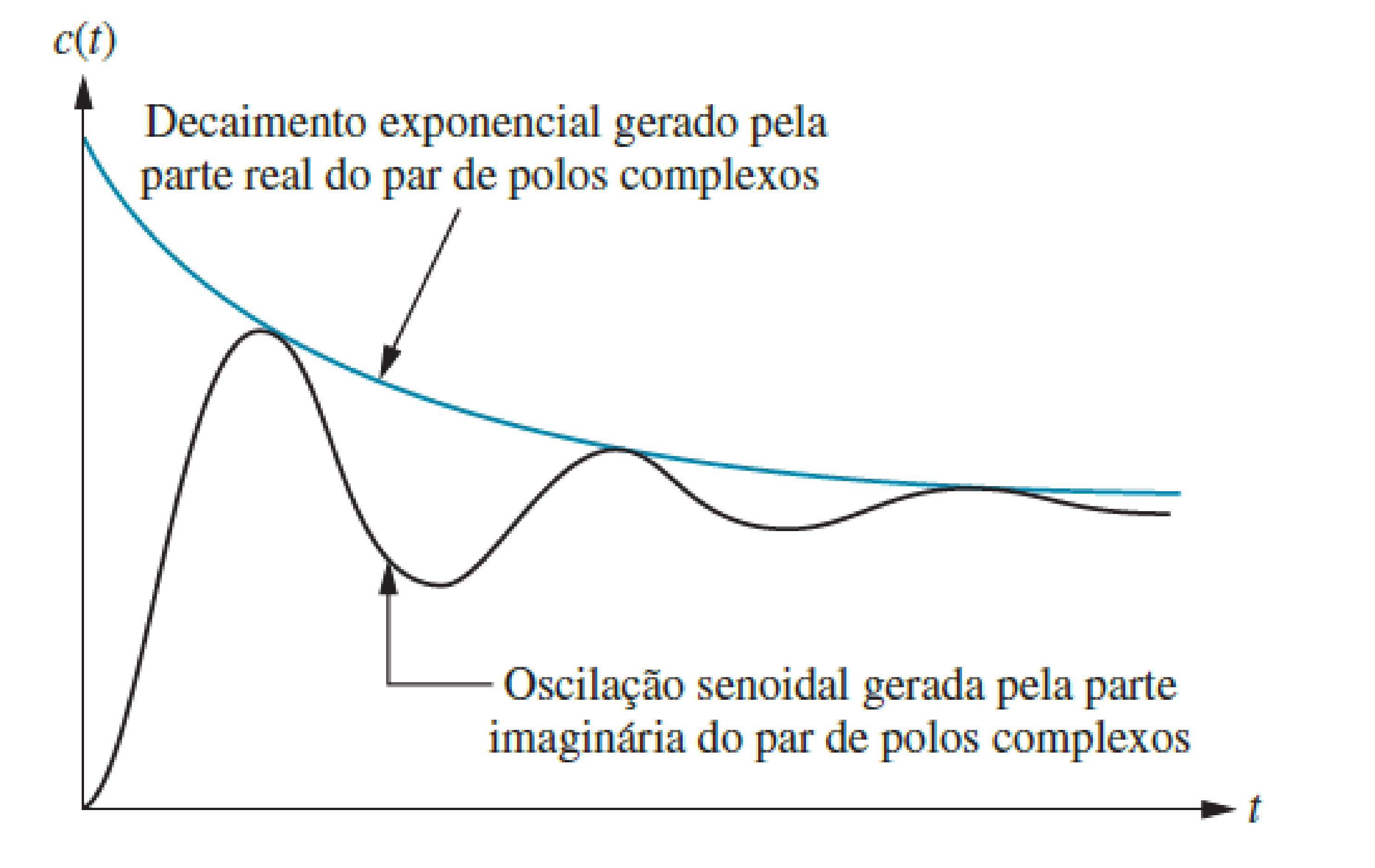
Sistema Subamortecido

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\,\mathrm{sen}\left[\omega_d t + tg^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right]$$

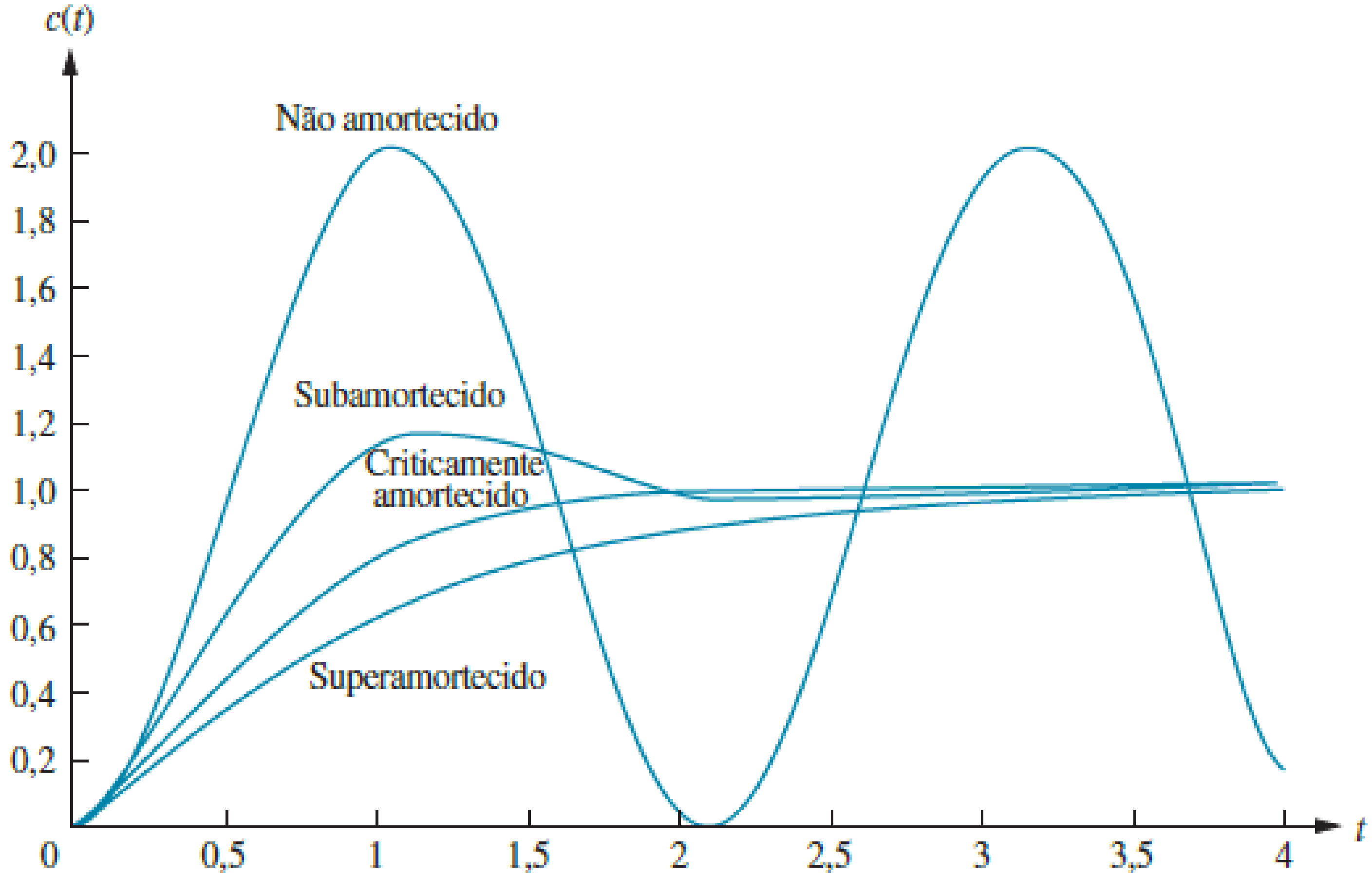




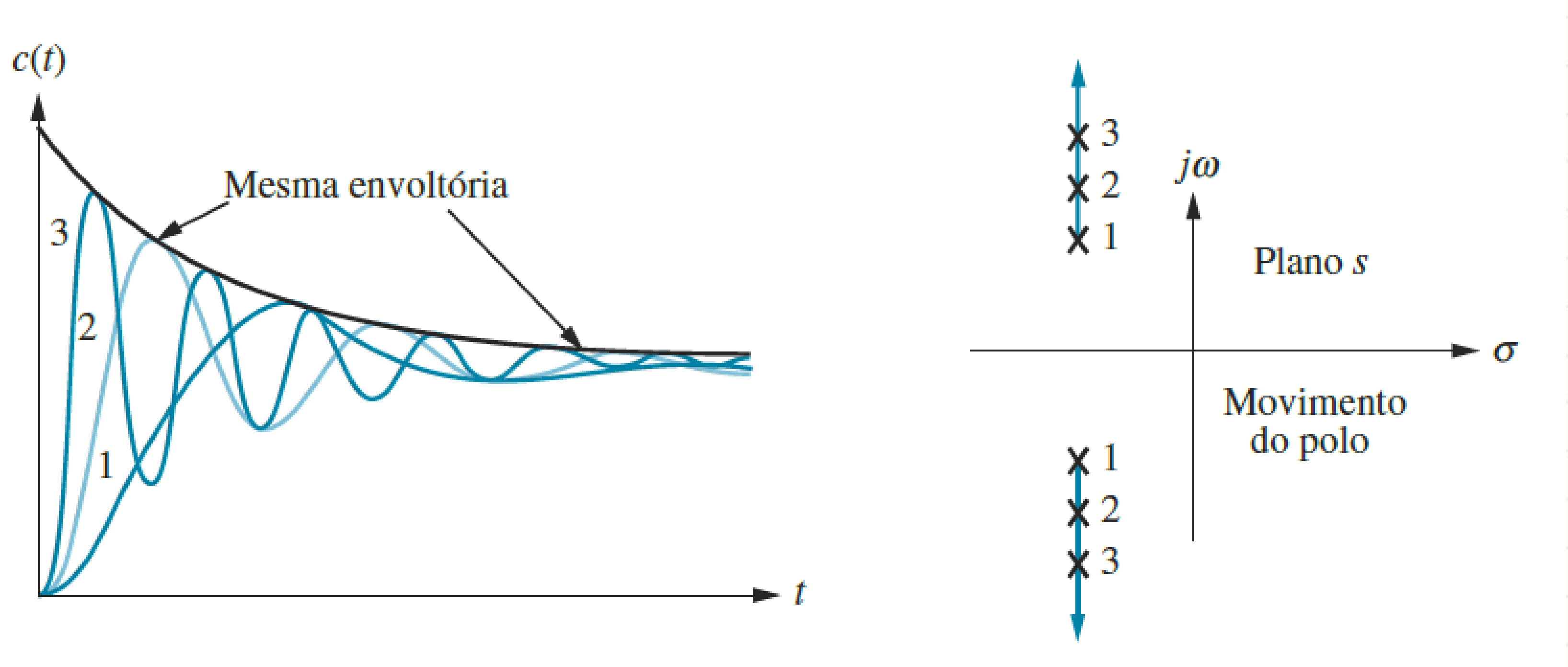
Resposta ao Degrau para Sistemas de 2ª Ordem



Resposta ao Degrau para Sistemas de 2ª Ordem



Resposta ao degrau para sistemas de 2ª ordem subamortecidos

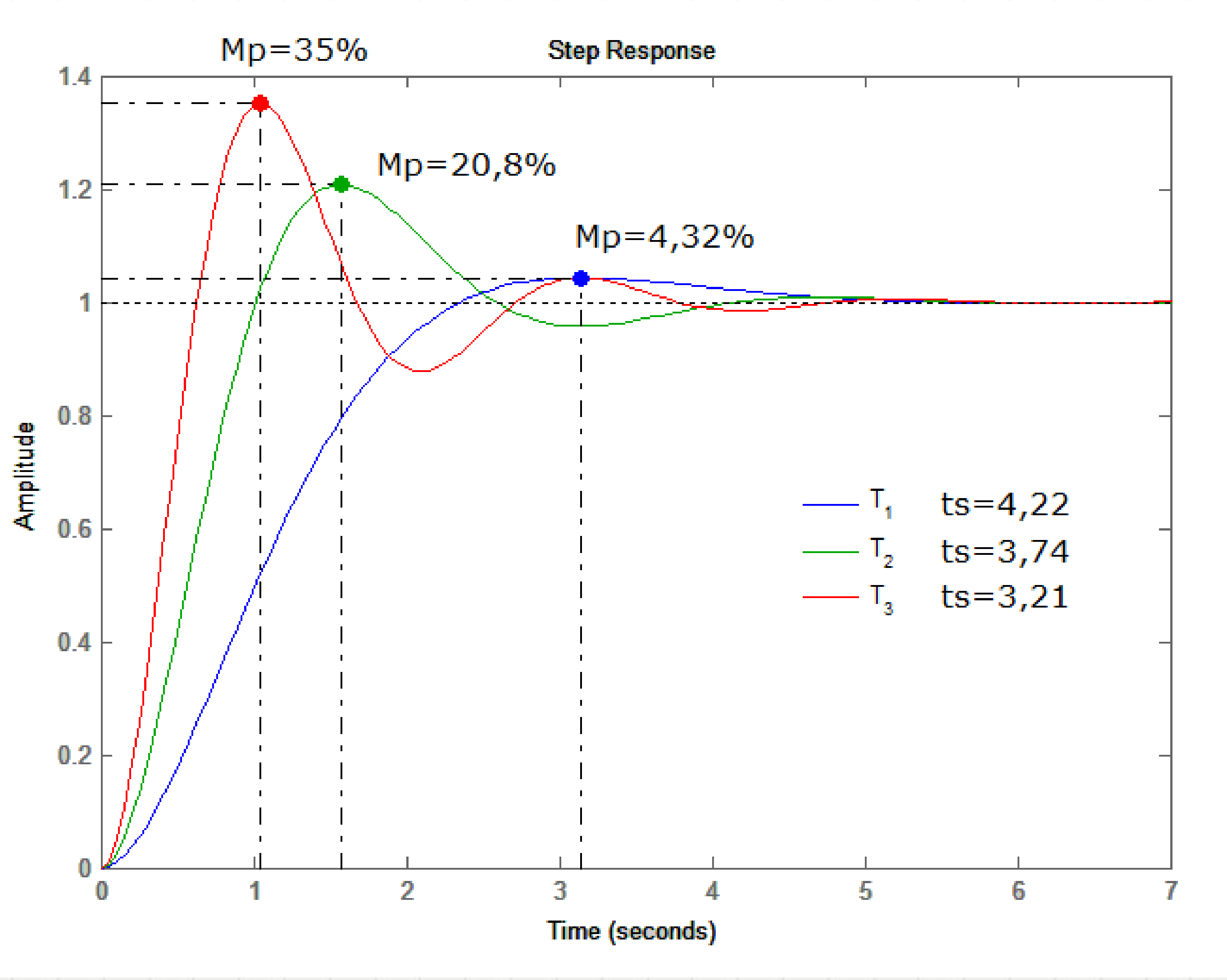


$$T_1 \quad \rightarrow \quad p_{1,2} = -1 \pm j$$

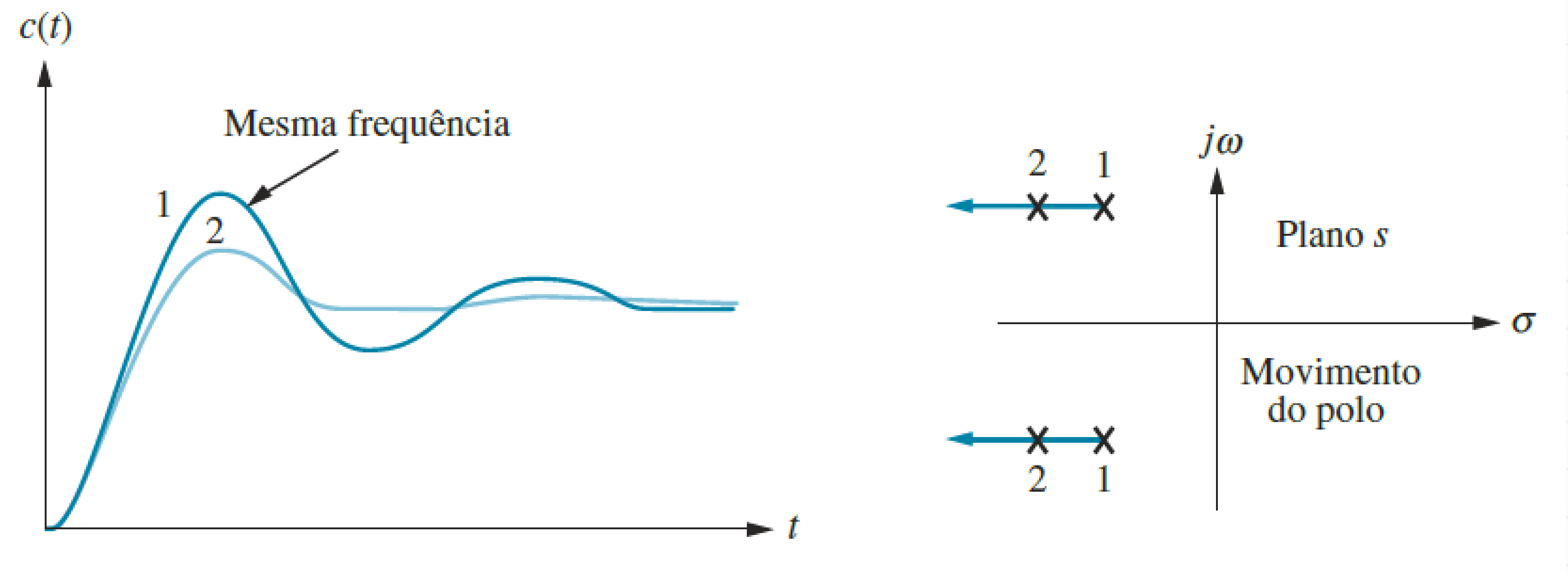
$$T_2 \quad \rightarrow \quad p_{1,2} = -1 \pm j2$$

$$T_3 \quad \rightarrow \quad p_{1,2} = -1 \pm j3$$

Resposta ao degrau para sistemas de 2ª ordem subamortecidos



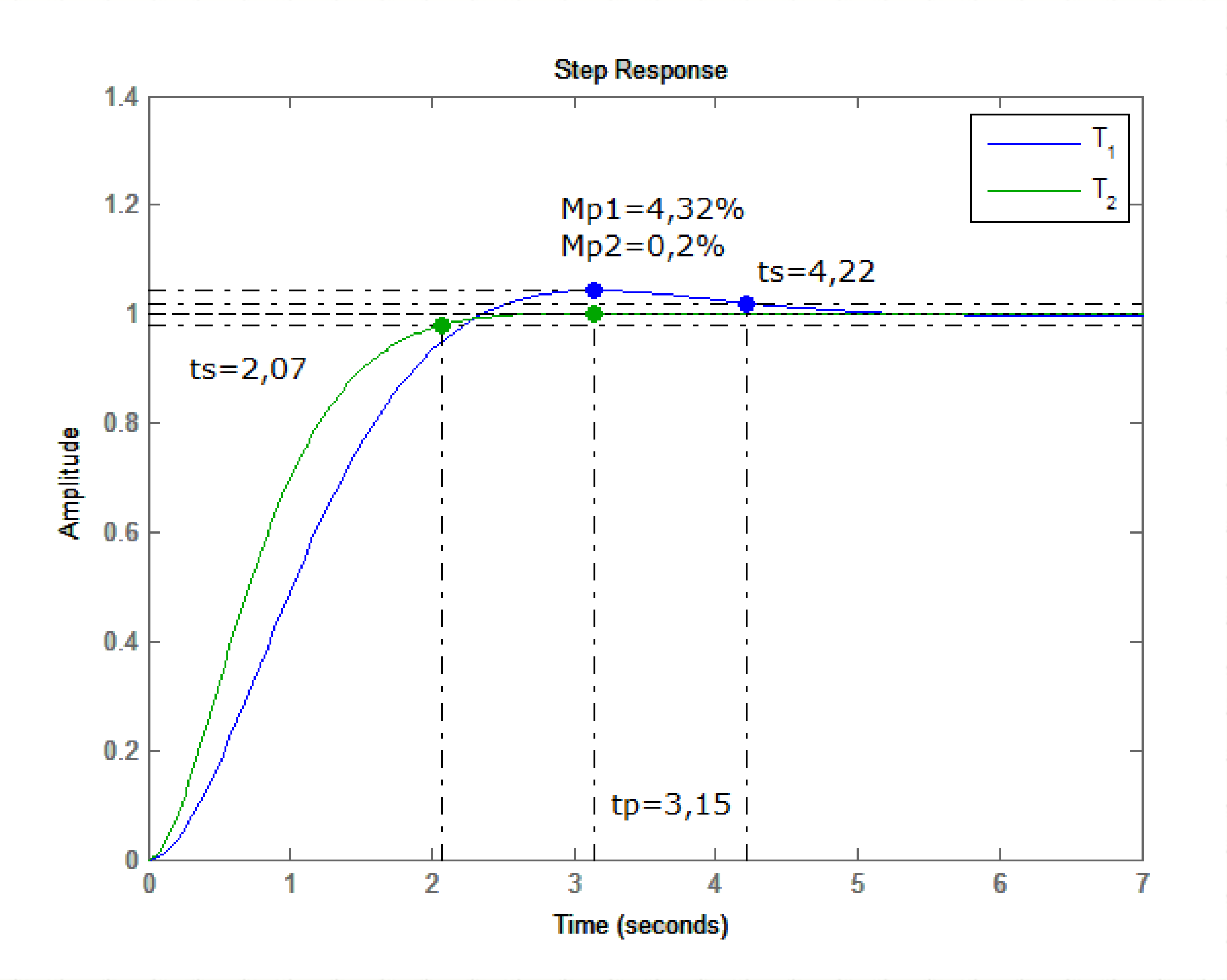
Resposta ao degrau para sistemas de 2ª ordem subamortecidos



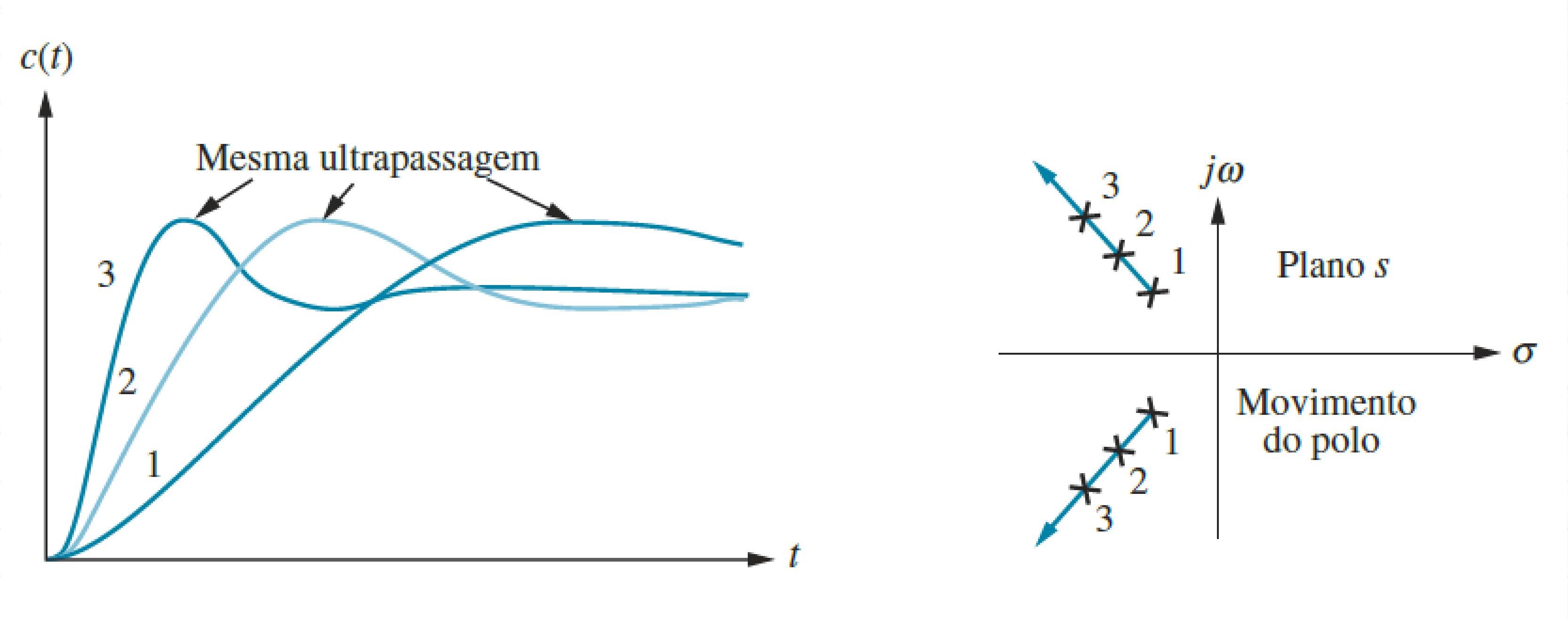
$$T_1 \quad \rightarrow \quad p_{1,2} = -1 \pm j$$

$$T_2 \quad \rightarrow \quad p_{1,2} = -2 \pm j$$

Resposta ao degrau para sistemas de 2ª ordem subamortecidos

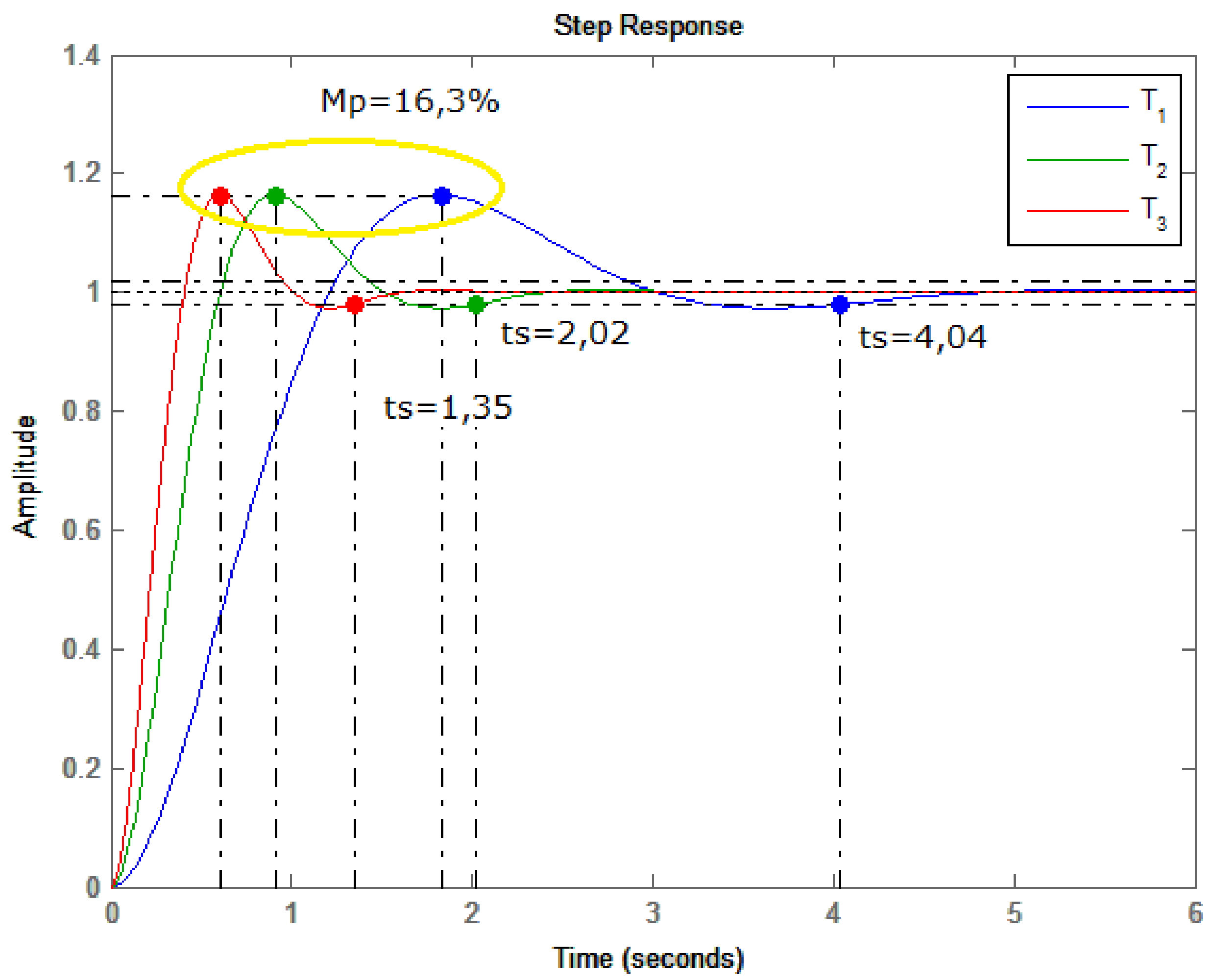


Resposta ao degrau para sistemas de 2ª ordem subamortecidos

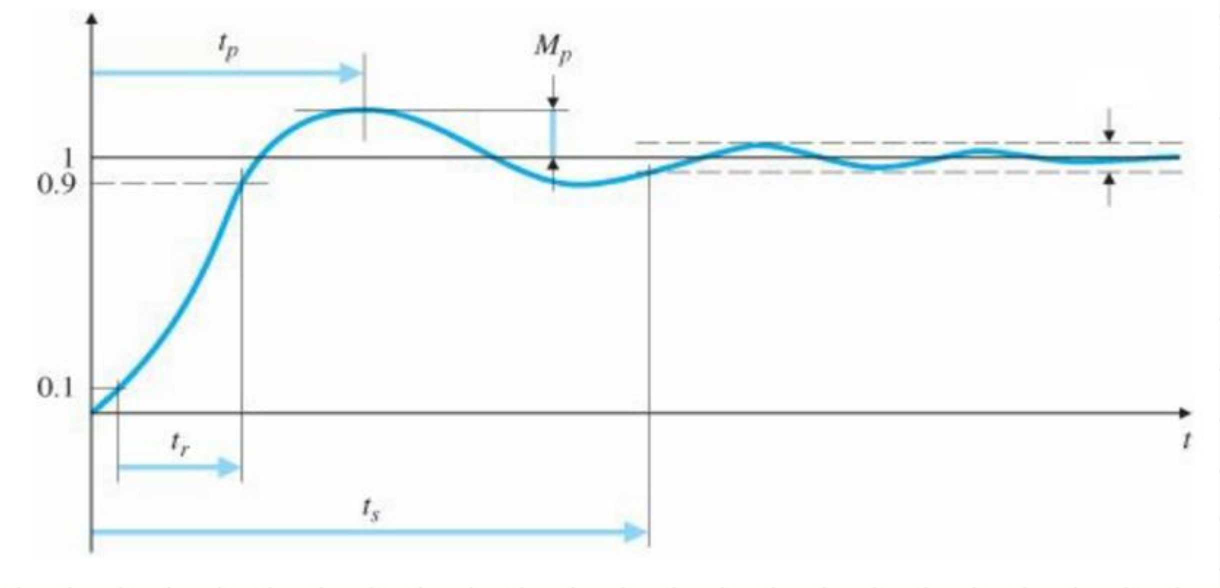


$$\xi = 0{,}5 \quad \begin{cases} T_1 & \rightarrow & \omega_n = 2 & p_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{3} \\ T_2 & \rightarrow & \omega_n = 4 & p_{1,2} = -2 \pm j2\sqrt{3} \\ T_3 & \rightarrow & \omega_n = 6 & p_{1,2} = -3 \pm j3\sqrt{3} \end{cases}$$

Resposta ao degrau para sistemas de 2ª ordem subamortecidos



Especificações para a resposta transitória de sistemas de 2ª ordem subamortecidos



Especificações para a resposta transitória de sistemas de 2ª ordem Subamortecidos

Tempo de Subida (0 – 100%):

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d}$$

sendo

$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right) \quad \text{e} \quad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

Para fins de projeto geralmente utilizam-se as seguintes aproximações:

$$(10 \text{ a } 90\%) \quad t_r = 1{,}8/\omega_n$$

$$(0 \text{ a } 100\%) \quad t_r = 2{,}4/\omega_n$$

Especificações para a resposta transitória de sistemas de 2ª ordem Subamortecidos

Tempo de pico:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

Sobressinal máximo:

$$M_p = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Tempo de acomodação:

$$\text{critério } 5\% \qquad t_s = 3/\xi\omega_n$$

$$\text{critério } 2\% \qquad t_s = 4/\xi\omega_n$$

$$\text{critério } 1\% \qquad t_s = 5/\xi\omega_n$$

Especificações para a resposta transitória de sistemas de 2ª ordem Criticamente ou Sobreamortecidos

Tempo de subida:

$$\begin{aligned} &(10 \text{ a } 90\%) \quad t_r = 1{,}8/|p_m| \\ &(0 \text{ a } 100\%) \quad t_r = 2{,}4/|p_m| \end{aligned}$$

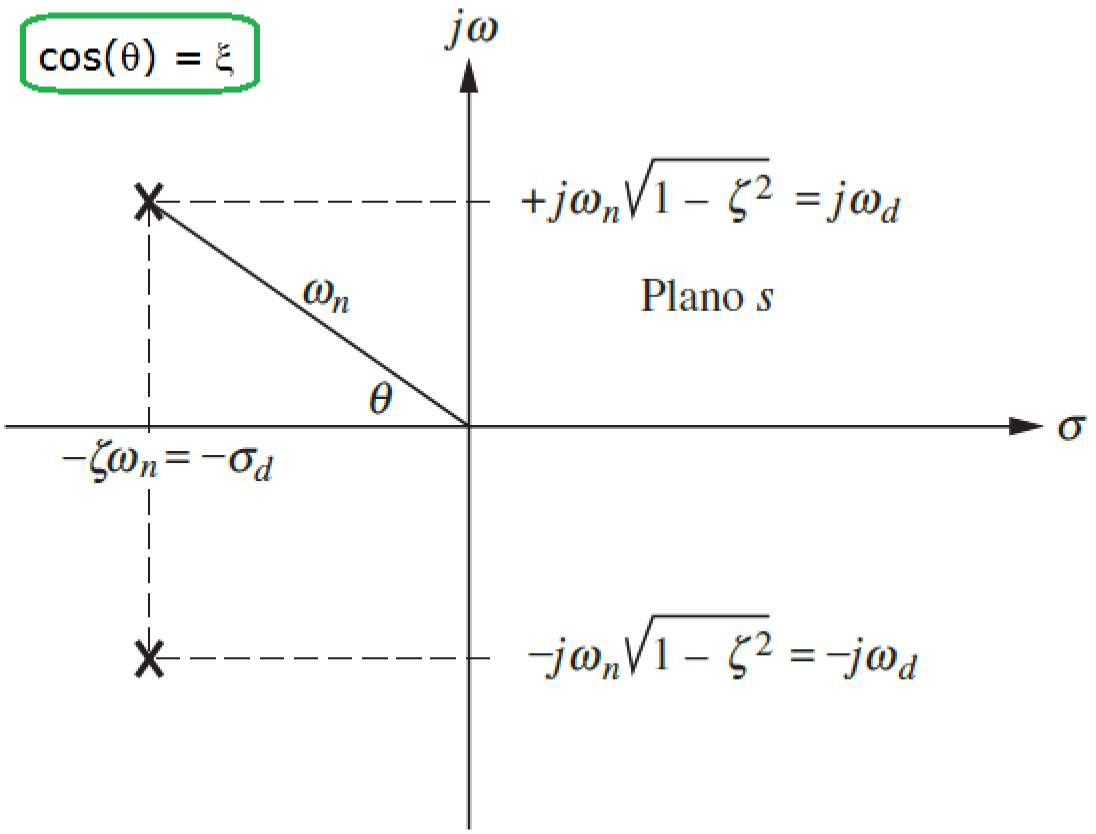
sendo p_m o polo mais próximo da origem.

Tempo de acomodação:

$$\begin{aligned} &\text{critério } 5\% \qquad t_s = 3/|p_m| \\ &\text{critério } 2\% \qquad t_s = 4/|p_m| \\ &\text{critério } 1\% \qquad t_s = 5/|p_m| \end{aligned}$$

Região desejada para os polos de malha fechada

Sistema subamortecido: polos complexos conjugados.



Região desejadas para os polos de malha fechada

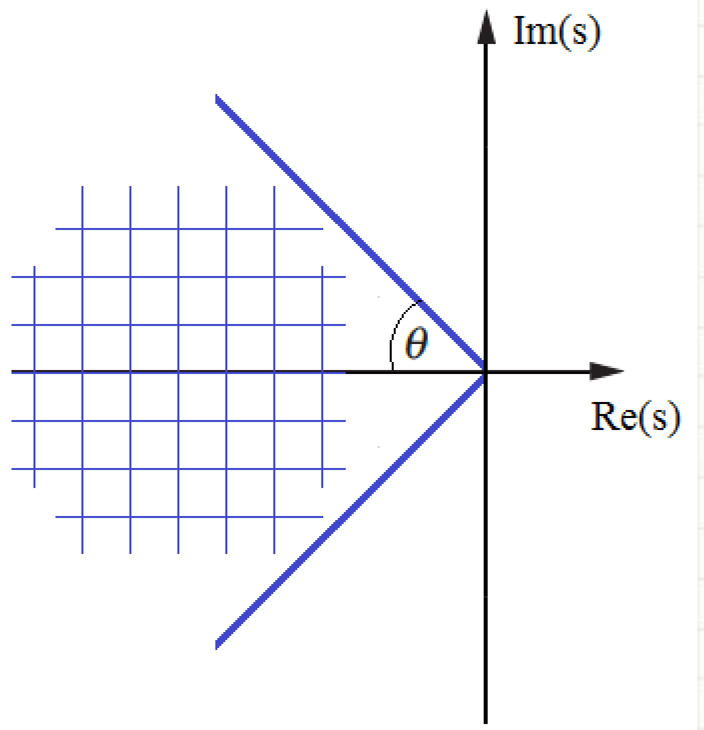
- Sobressinal máximo

$$M_p = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \leq M_{p_{\max}}$$

Portanto,

$$\xi \geq \frac{\left|\ln\left(M_{p_{\max}}\right)\right|}{\sqrt{\pi^2 + \left[\ln(M_{p_{\max}})\right]^2}}$$

$$\xi \geq \xi_{\min} \quad \Rightarrow \quad \theta < \theta_{\max}$$

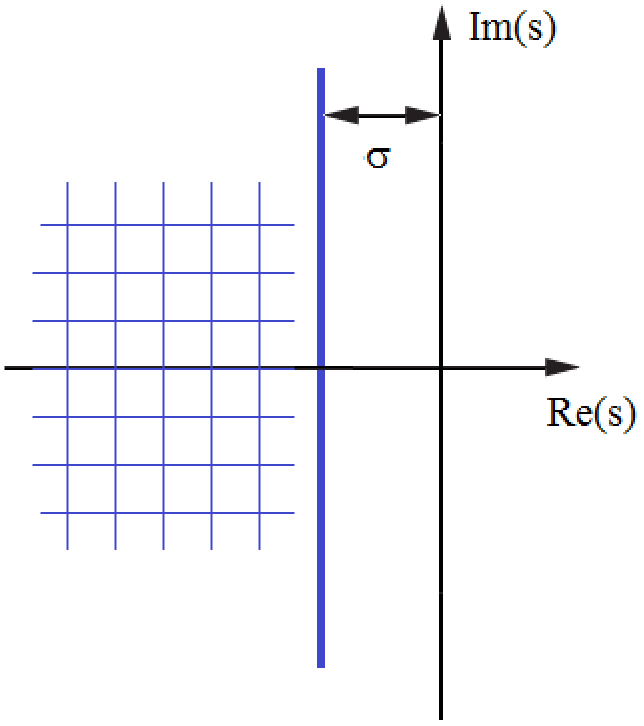


Região desejadas para os polos de malha fechada

- Tempo de acomodação

$$t_s = \frac{4}{\xi \omega_n} \leq t_{s_{Máx}}$$

$$\xi \omega_n \geq \sigma_{\min}$$



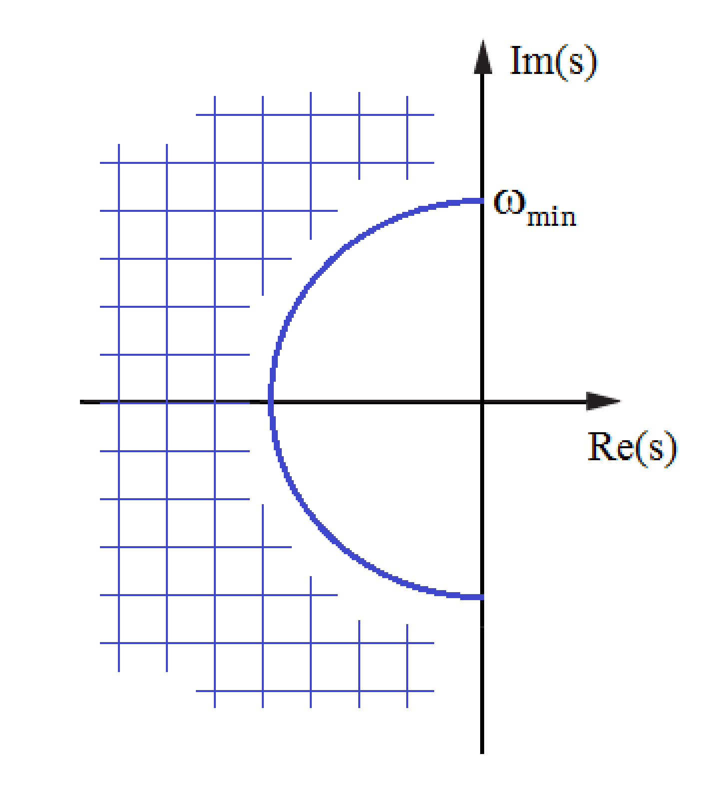
σ: parte real dos polos complexos conjugados

Região desejadas para os polos de malha fechada

- Tempo de subida

$$t_r = \frac{2,4}{\omega_n} \leq t_{r_{\max}}$$

$$\omega_n \geq \omega_{\min}$$

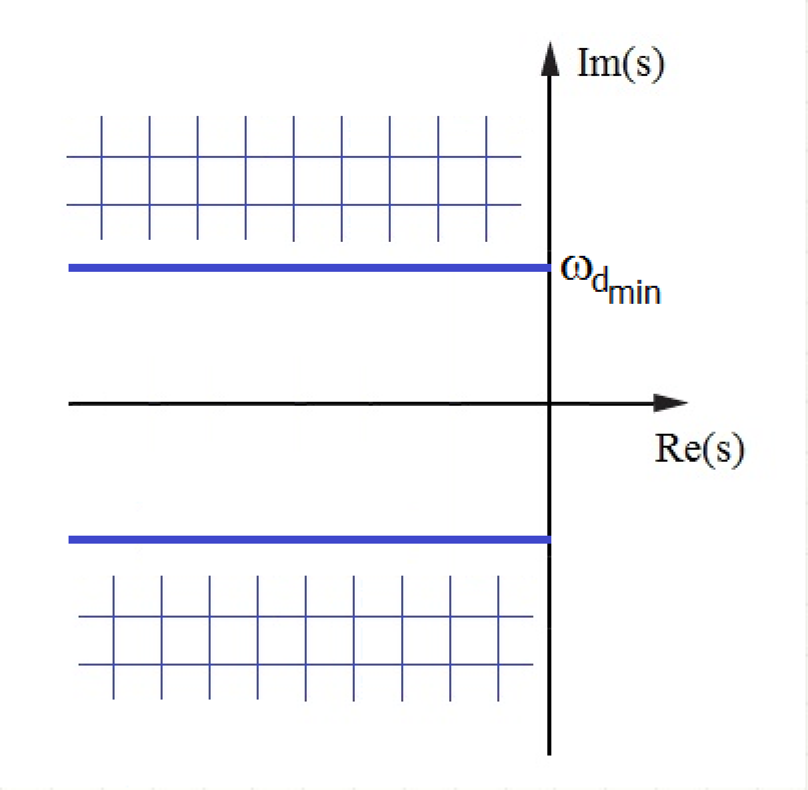


Região desejadas para os polos de malha fechada

Tempo de pico

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \le t_{p_{\max}}$$

$$\omega_d \ge \omega_{d_{\min}}$$



Efeito dos zeros na resposta transitória

Os zeros da função de transferência exercem influência na resposta transitória modificando os coeficientes (resíduos) dos termos exponenciais resposta.

Ex: Seja o sistema de 2ª ordem:

$$T(s) = \frac{s+z}{(s+p_1)(s+p_2)} = \frac{z-p_1}{p_2-p_1}\left(\frac{1}{s+p_1}\right) + \frac{z-p_2}{p_1-p_2}\left(\frac{1}{s+p_2}\right)$$

Portanto, se o zero é muito próximo do polo a constante associada a este polo será pequena reduzindo a influência deste modo na resposta. Por outro lado, se o zero for muito grande sua influência torna-se insignificante na resposta do sistema.

Efeito dos zeros na resposta transitória

Ex: Efeito da introdução de um zero na resposta do sistema.

$$T_1(s) = \frac{6}{(s+1)(s+6)} \quad \Rightarrow \quad T_1(0) = 1 \rightarrow y_1(t)$$

$$T_2(s) = \frac{6(s+1{,}1)}{1{,}1(s+1)(s+6)} \quad \Rightarrow \quad T_2(0) = 1 \rightarrow y_2(t)$$

$$T_3(s) = \frac{(s+18)}{3(s+1)(s+6)} \quad \Rightarrow \quad T_3(0) = 1 \rightarrow y_3(t)$$

Efeito dos zeros na resposta transitória

Resposta ao degrau

$$R(s)=\frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad Y_1(s)=\frac{1}{s}T_1(s)$$

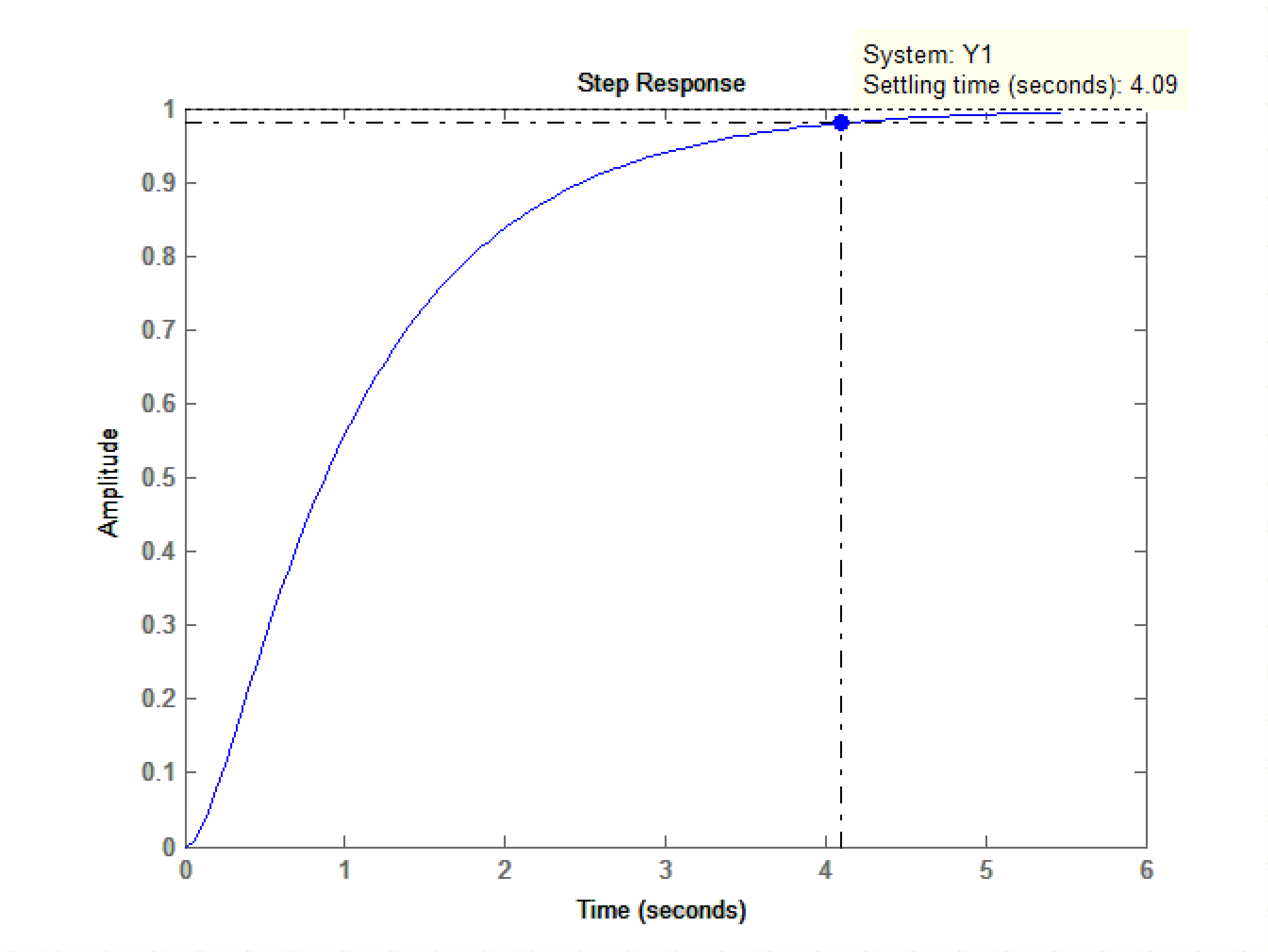
$$Y_1(s)=\frac{6}{s(s+1)(s+6)}=\frac{1}{s}-1{,}2\frac{1}{s+1}+0{,}2\frac{1}{s+6}$$

$$\Downarrow$$

$$y_1(t)=1-1{,}2e^{-t}+0{,}2e^{-6t}$$

O polo dominante será p_1=-1 e comportamento da resposta será similar a um de 1ª ordem, com resposta lenta.

Efeito dos zeros na resposta transitória



Efeito dos zeros na resposta transitória

Considerando a introdução de um zero próximo do polo p_1 (sistema 2), a saída será definida por:

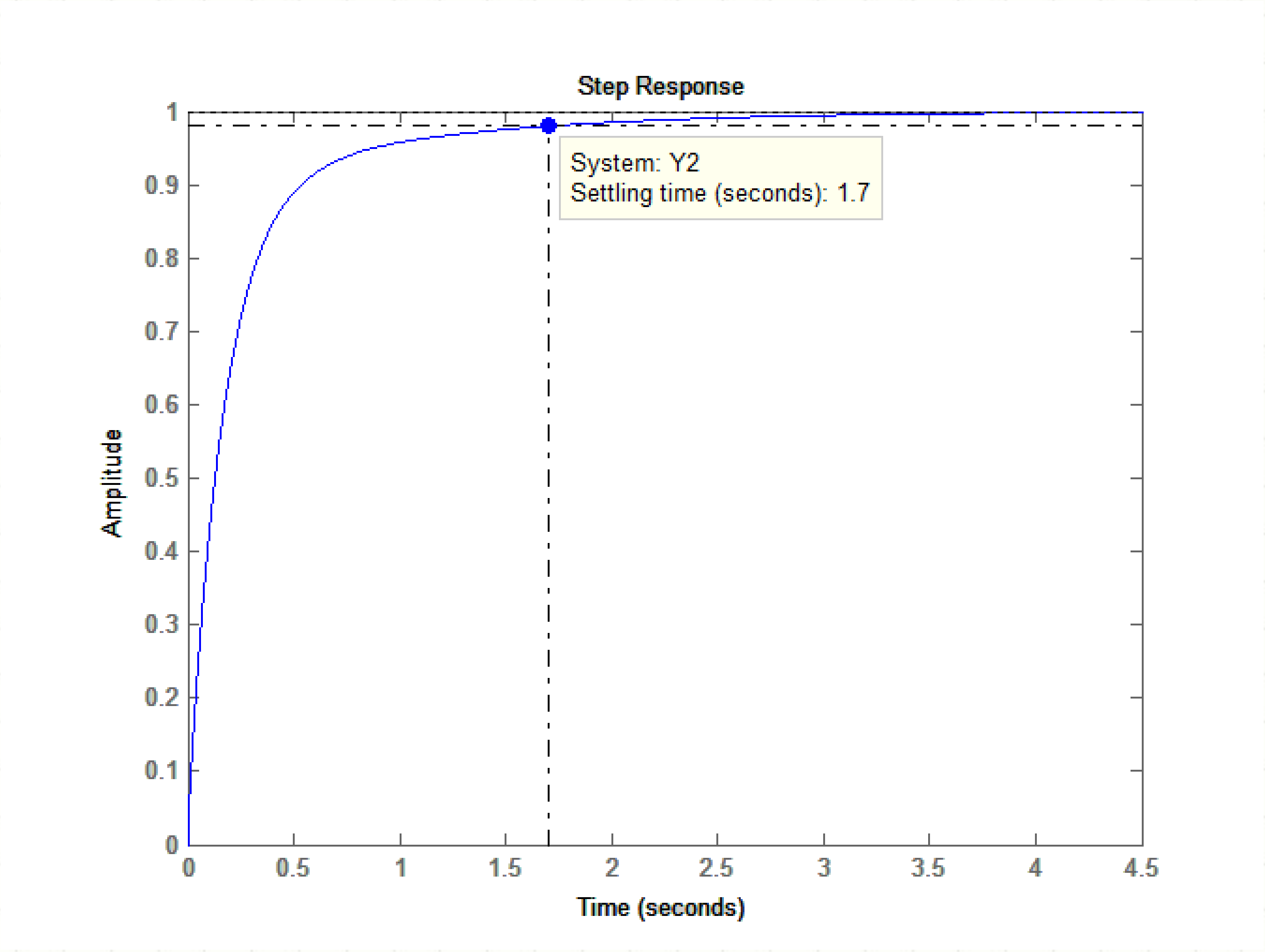
$$Y_2(s) = \frac{6(s+1{,}1)}{1{,}1s(s+1)(s+6)} = \frac{1}{s} - 0{,}11\frac{1}{s+1} - 0{,}89\frac{1}{s+6}$$

$$\Downarrow$$

$$y_2(t) = 1 - 0{,}11e^{-t} - 0{,}89e^{-6t}$$

Em relação ao sistema sem zero, observa-se uma redução no coeficiente associado ao termo e^{-t} e o polo dominante passou a ser p_2=-6.

Efeito dos zeros na resposta transitória



Efeito dos zeros na resposta transitória

Seja agora um zero próximo introduzido distante dos polos do sistema (sistema 3), a saída será definida por:

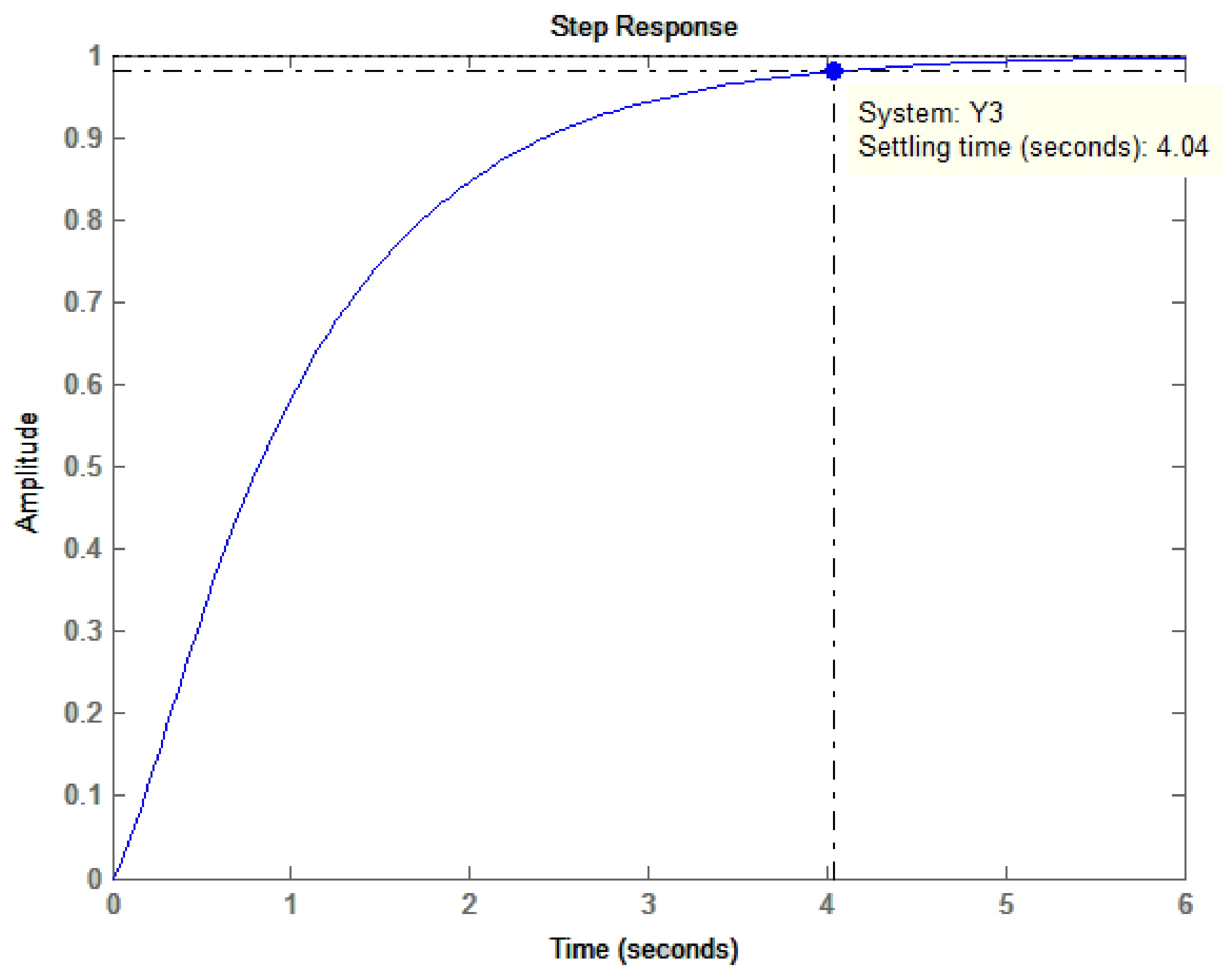
$$Y_3(s) = \frac{s+18}{3s(s+1)(s+6)} = \frac{1}{s} - 1{,}13\frac{1}{s+1} + 0{,}13\frac{1}{s+6}$$

$$\Downarrow$$

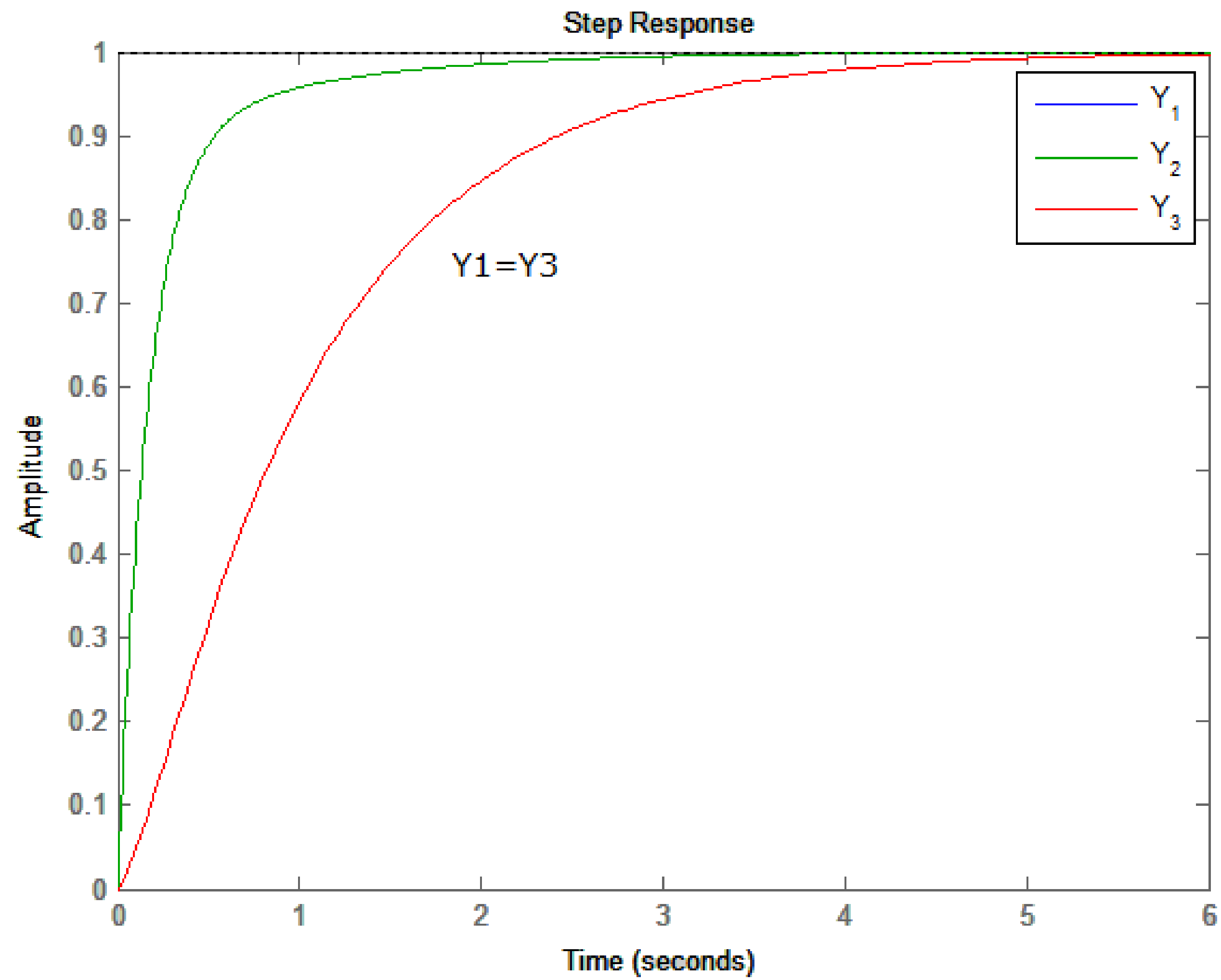
$$y_3(t) = 1 - 1{,}13e^{-t} + 0{,}13e^{-6t}$$

Neste caso, a resposta se assemelha ao sistema sem zeros.

Efeito dos zeros na resposta transitória



Efeito dos zeros na resposta transitória



Efeito dos zeros na resposta transitória

Seja o sistema de 2ª ordem subamortecido ($0 < \xi < 1$) com um único zero real e, por simplicidade, ω_n=1.

$$T(s) = \frac{s + \alpha\xi}{\alpha\xi(s^2 + 2\xi s + 1)} \quad \Rightarrow \quad T(0) = 1$$

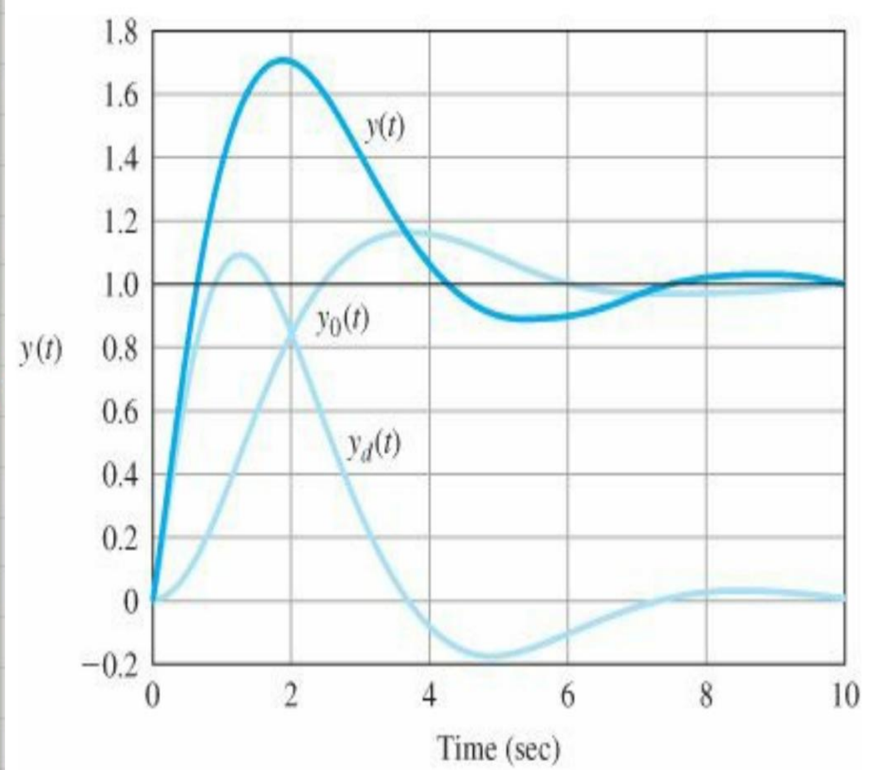
ou

$$T(s) = \frac{1}{s^2 + 2\xi s + 1} + \frac{1}{\alpha\xi}\,\frac{s}{s^2 + 2\xi s + 1} = T_o(s) + T_d(s)$$

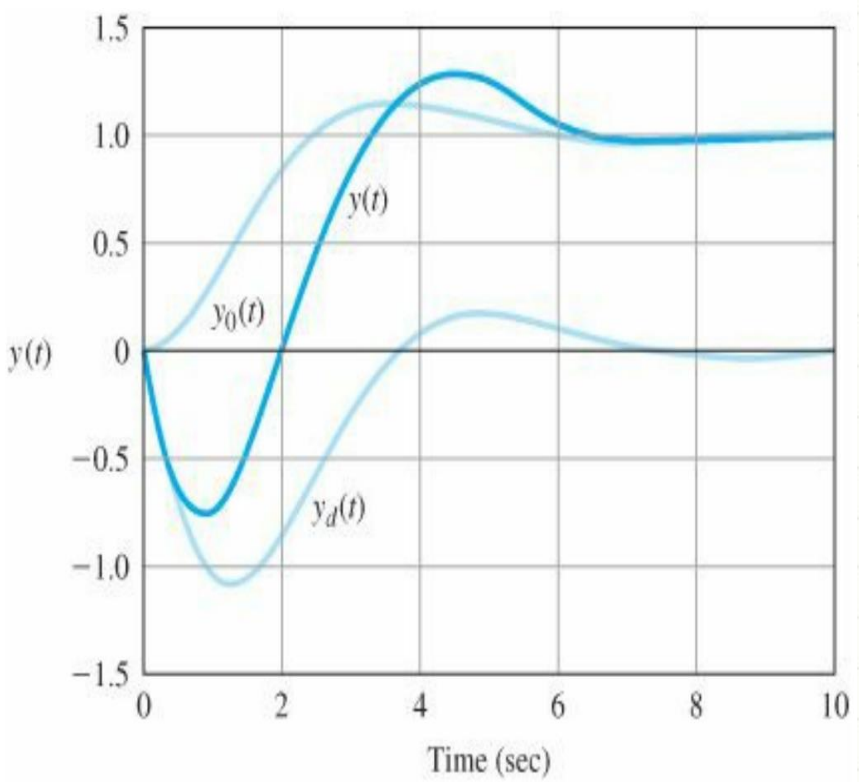
Logo, a resposta total do sistema é a soma da resposta do sistema sem zero, $T_o(s)$, mais sua derivada, $T_d(s)$, multiplicada por uma constante ($1/\alpha\xi$).

Efeito dos zeros na resposta transitória

$\alpha > 0$



$\alpha < 0$



Efeito dos zeros na resposta transitória

O efeito da adição de um **zero estável** ($\alpha > 0$, semiplano esquerdo) é o aumento do sobressinal, consequentemente gerando a aceleração da resposta (menores valores de tr).

Para $\alpha < 0$ (**zero instável**, de fase não mínima) a resposta evolui inicialmente negativamente antes de estabilizar no valor de regime permanente.

Ainda existe um aumento do sobressinal porém este é menor em relação a um zero estável.

Efeito dos zeros na resposta transitória

$$T_1(s) = \frac{5}{s^2 + 2s + 5}$$

$$p_{1,2} = -1 \pm j2$$

$$T_2(s) = \frac{5(s+1)}{s^2 + 2s + 5}$$

$$p_{1,2} = -1 \pm j2$$

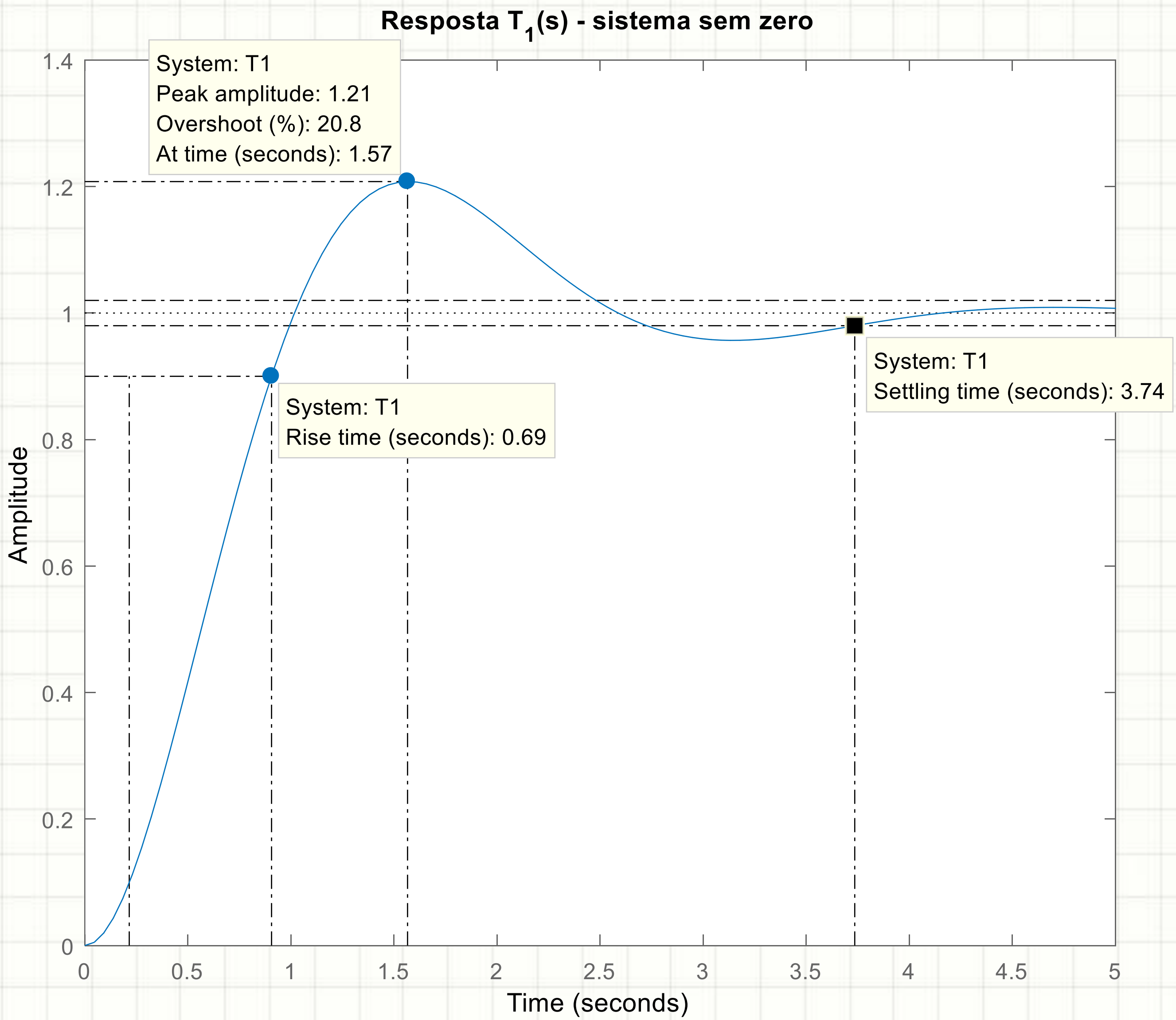
$$z = -1$$

$$T_3(s) = \frac{-5(s-1)}{s^2 + 2s + 5}$$

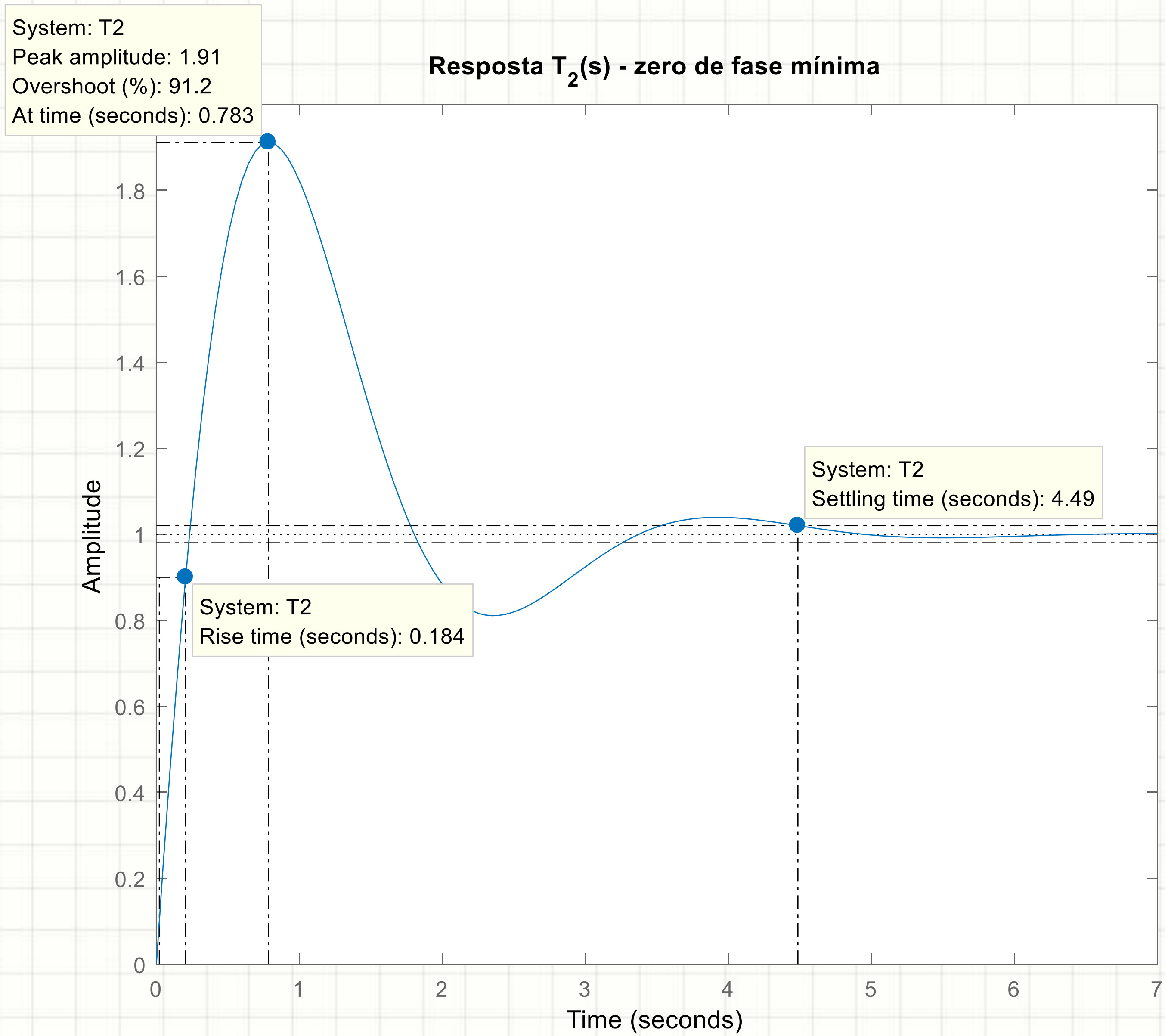
$$p_{1,2} = -1 \pm j2$$

$$z = 1$$

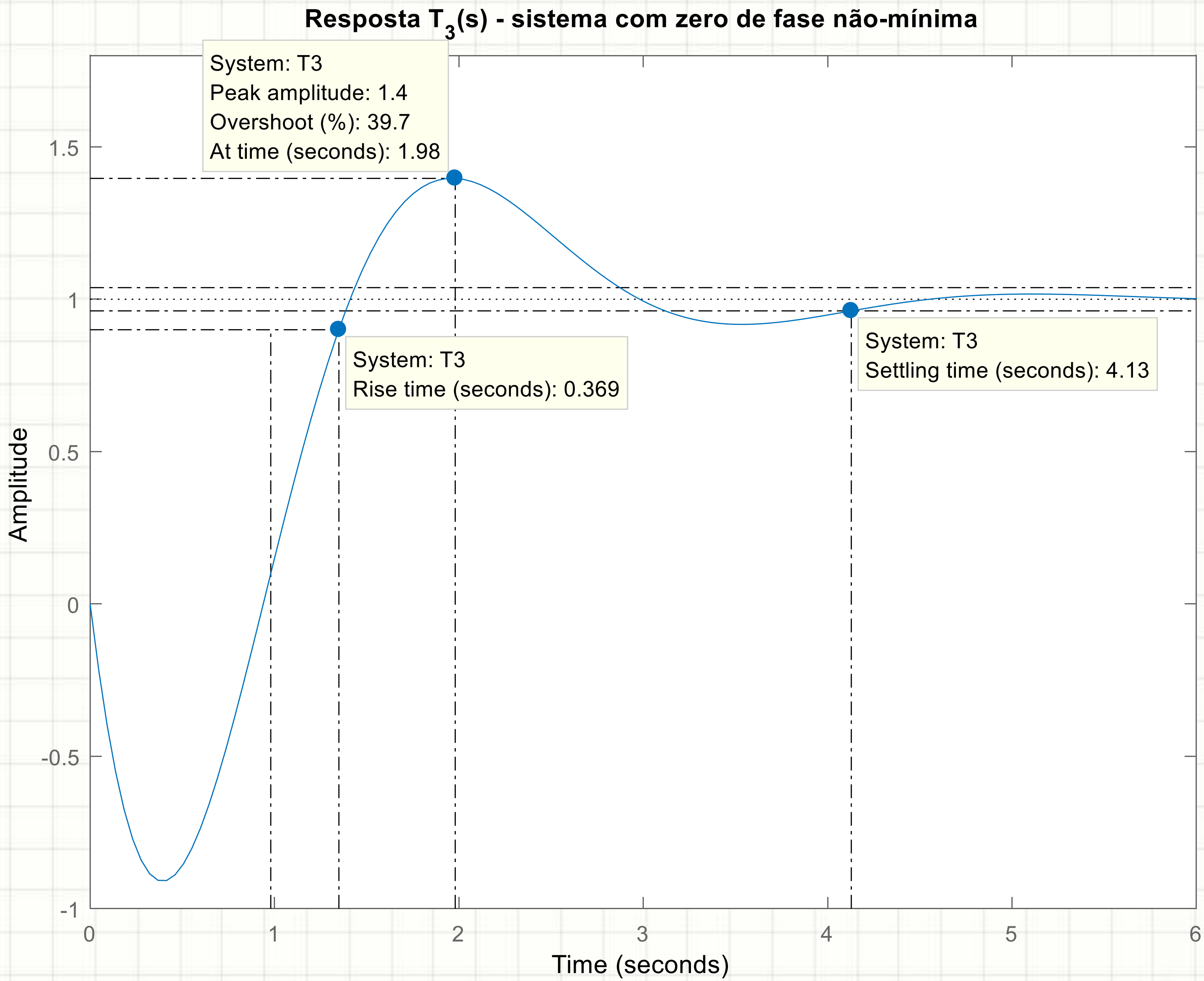
Efeito dos zeros na resposta transitória



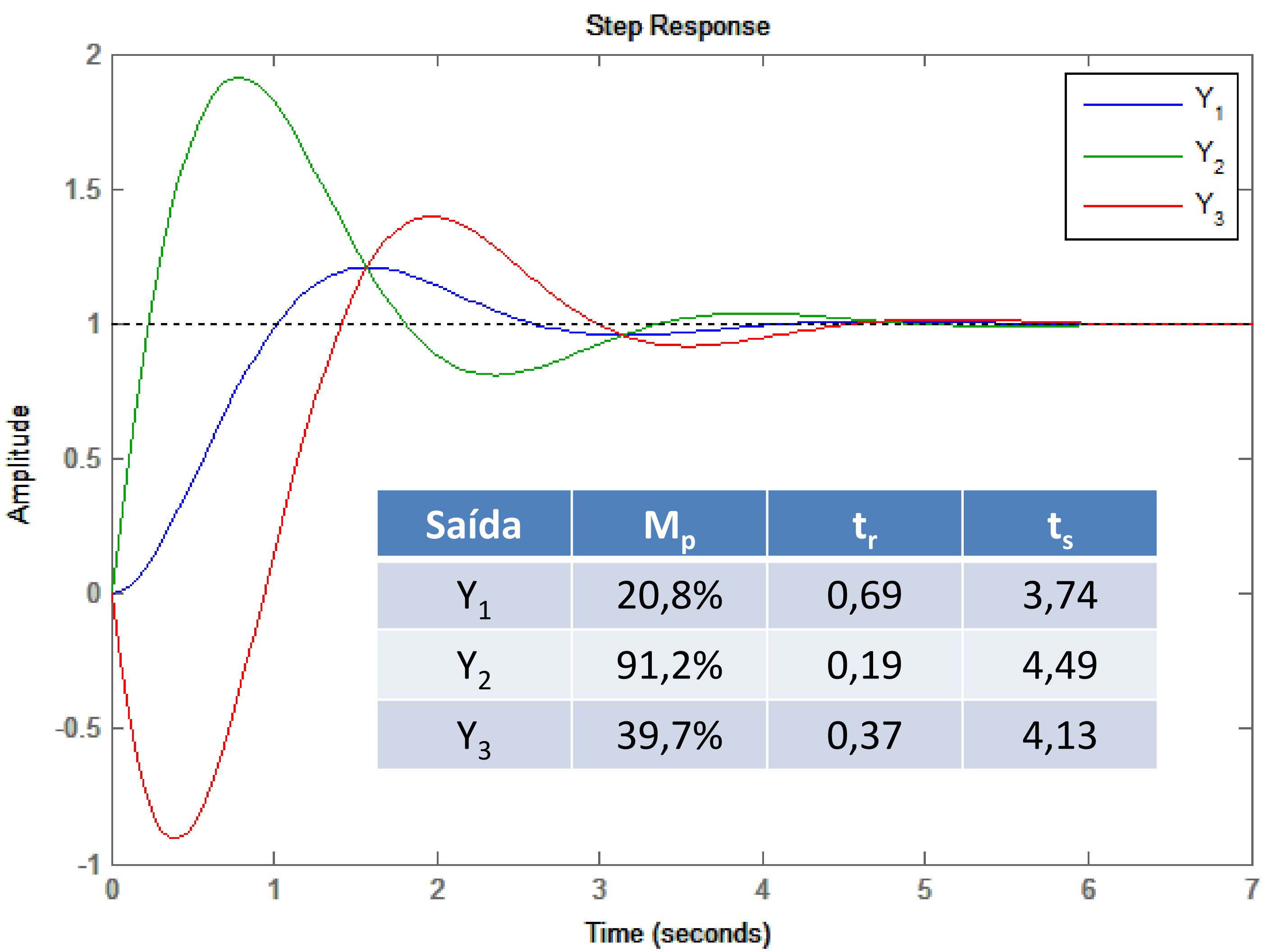
Efeito dos zeros na resposta transitória



Efeito dos zeros na resposta transitória



Efeito dos zeros na resposta transitória



Saída	M_p	t_r	t_s
Y_1	20,8%	0,69	3,74
Y_2	91,2%	0,19	4,49
Y_3	39,7%	0,37	4,13

Efeito dos zeros na resposta transitória

$$T_2(s) = \frac{5(s+1)}{s^2+2s+5}$$

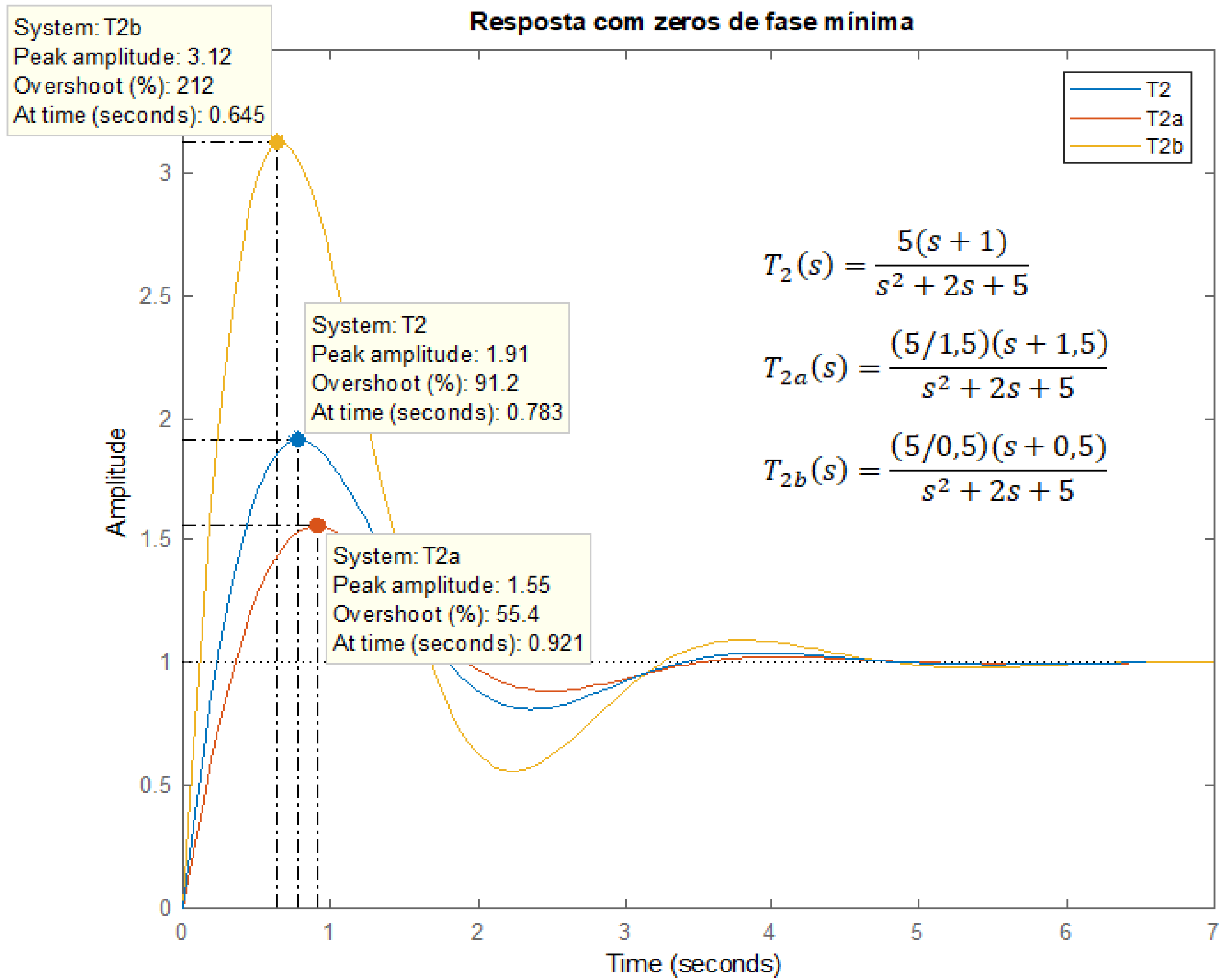
$$p_{1,2} = -1 \pm j2$$
$$z = -1$$

$$T_{2a}(s) = \frac{(5/1{,}5)(s+1{,}5)}{s^2+2s+5}$$

$$p_{1,2} = -1 \pm j2$$
$$z = -1{,}5$$

$$T_{2b}(s) = \frac{(5/0{,}5)(s+0{,}5)}{s^2+2s+5}$$

$$p_{1,2} = -1 \pm j2$$
$$z = -0{,}5$$



Resposta com zeros de fase mínima
System: T2b
Peak amplitude: 3.12
Overshoot (%): 212
At time (seconds): 0.645
System: T2
Peak amplitude: 1.91
Overshoot (%): 91.2
At time (seconds): 0.783
System: T2a
Peak amplitude: 1.55
Overshoot (%): 55.4
At time (seconds): 0.921
T2
T2a
T2b
$T_2(s) = \frac{5(s+1)}{s^2+2s+5}$
$T_{2a}(s) = \frac{(5/1{,}5)(s+1{,}5)}{s^2+2s+5}$
$T_{2b}(s) = \frac{(5/0{,}5)(s+0{,}5)}{s^2+2s+5}$
Amplitude
Time (seconds)
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
0
1
2
3
4
5
6
7

Efeito dos zeros na resposta transitória

$$T_3(s) = \frac{-5(s-1)}{s^2+2s+5}$$

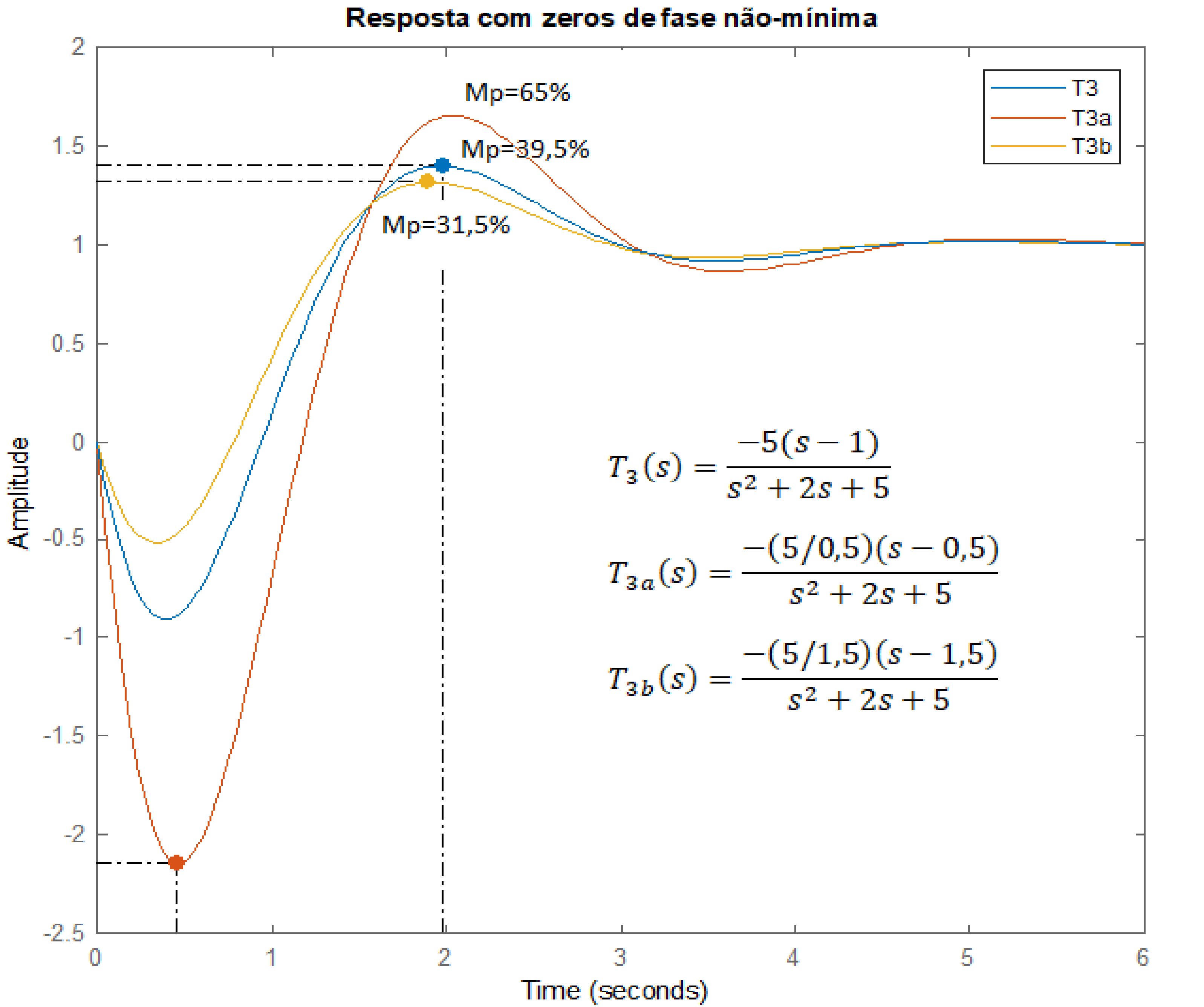
$$p_{1,2} = -1 \pm j2$$
$$z = 1$$

$$T_{3a}(s) = \frac{-(5/0{,}5)(s-0{,}5)}{s^2+2s+5}$$

$$p_{1,2} = -1 \pm j2$$
$$z = 0{,}5$$

$$T_{3b}(s) = \frac{-(5/1{,}5)(s-1{,}5)}{s^2+2s+5}$$

$$p_{1,2} = -1 \pm j2$$
$$z = 1{,}5$$


Resposta com zeros de fase não-mínima
Amplitude
Time (seconds)
T3
T3a
T3b
Mp=65%
Mp=39,5%
Mp=31,5%
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
0
1
2
3
4
5
6
$T_3(s) = \frac{-5(s-1)}{s^2+2s+5}$
$T_{3a}(s) = \frac{-(5/0,5)(s-0,5)}{s^2+2s+5}$
$T_{3b}(s) = \frac{-(5/1,5)(s-1,5)}{s^2+2s+5}$

Dominância de Polos

$$T_1(s) = \frac{50}{(s+10)(s^2+2s+5)}$$

$$T_2(s) = \frac{15}{(s+3)(s^2+2s+5)}$$

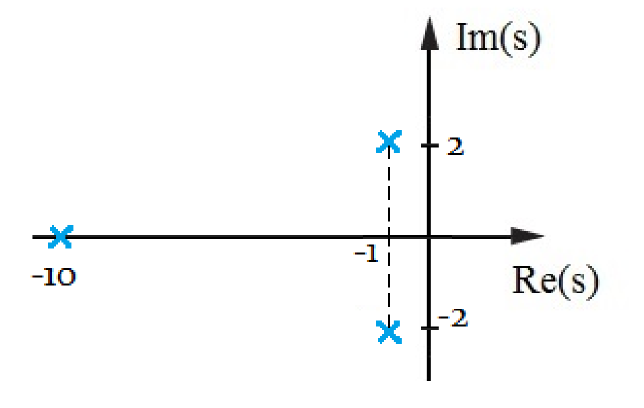
$$T_3(s) = \frac{5}{(s+1)(s^2+2s+5)}$$

$$T_4(s) = \frac{2{,}5}{(s+0{,}5)(s^2+2s+5)}$$

Dominância de Polos

$$T_1(s) = \frac{50}{(s+10)(s^2+2s+5)}$$

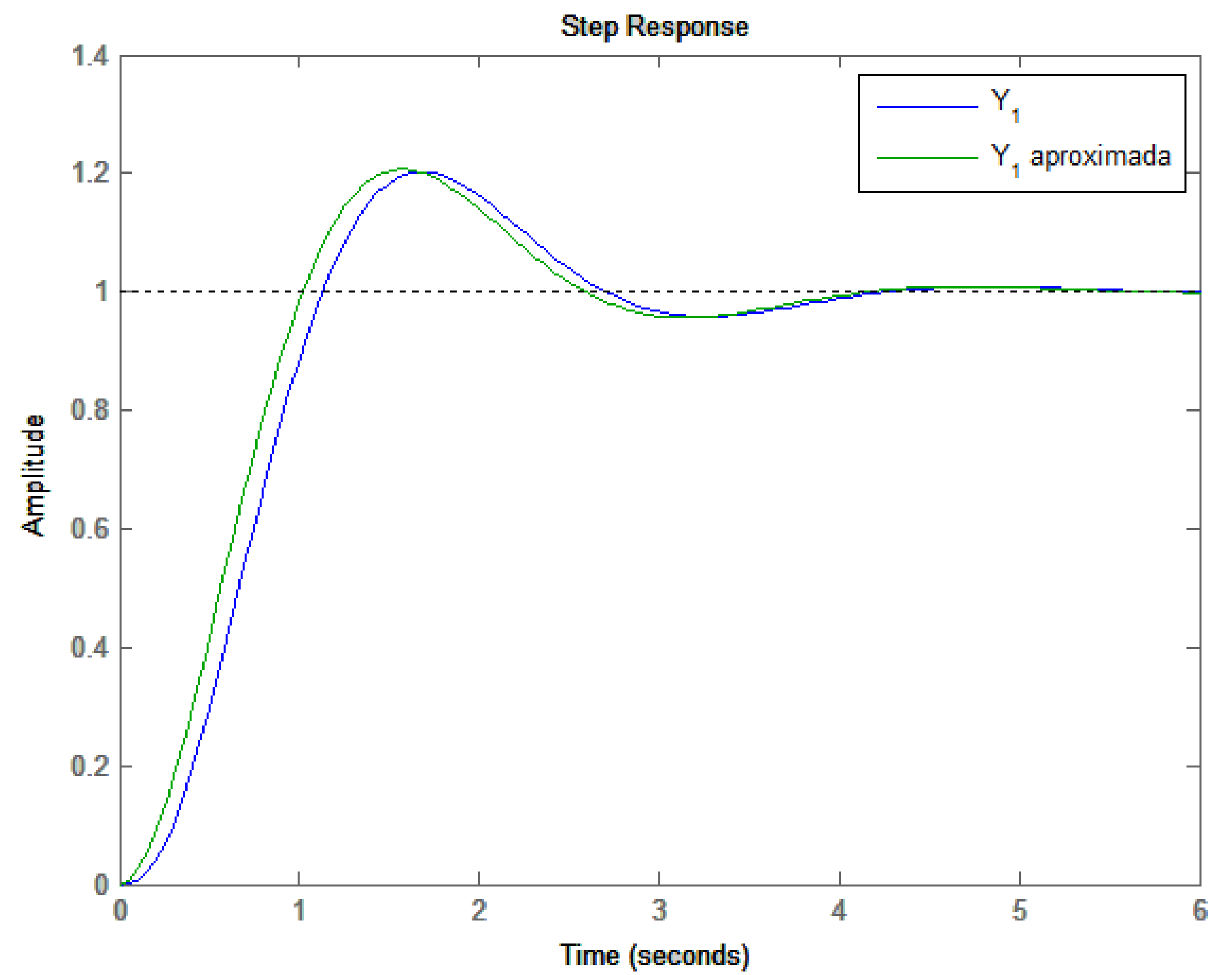
Polos dominantes (PD): $p_{1,2}$=-1±j2



$$\omega_n^2 = 5 \quad \rightarrow \quad \omega_n = 2{,}23$$
$$2\xi\omega_n = 2 \quad \rightarrow \quad \xi = 0{,}45$$

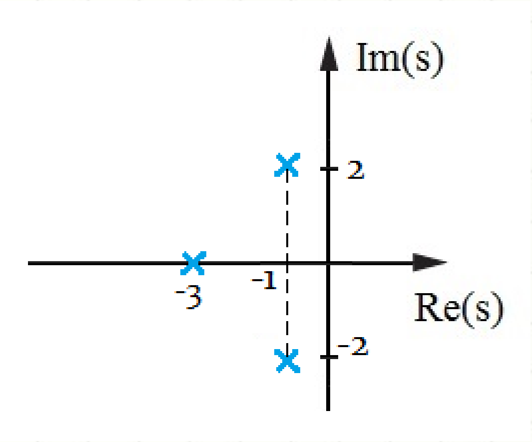
Valores	M_p	t_s
Calculados (aprox. PD)	20,5%	3,98
Exatos (aprox. PD)	20,8%	3,74
Função Completa (Y_1)	20,2%	3,83

Dominância de Polos



Dominância de Polos

$$T_2(s) = \frac{15}{(s+3)(s^2+2s+5)}$$

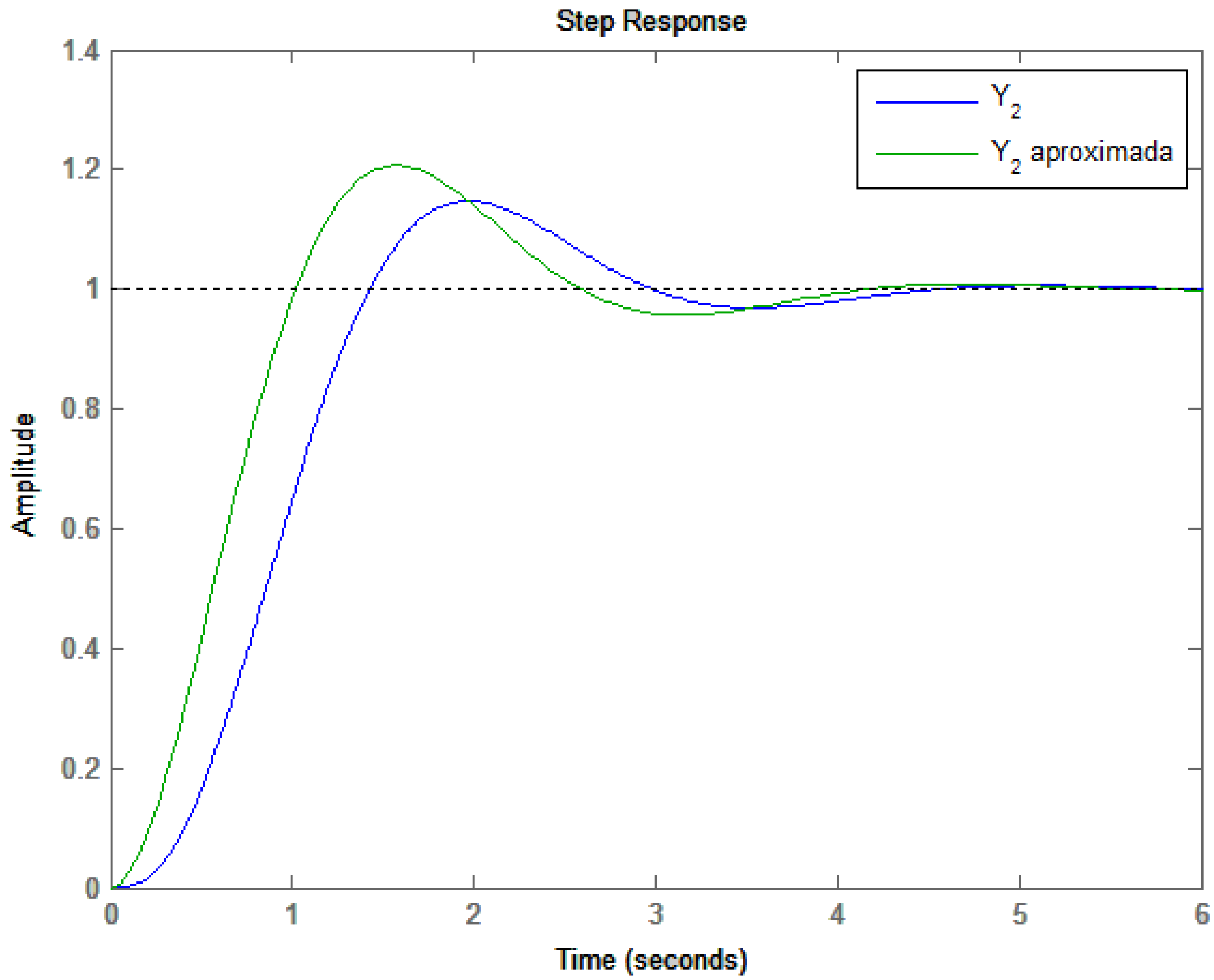


Polos dominantes (PD): $p_{1,2}$=-1±j2

$$\omega_n^2 = 5 \quad \rightarrow \quad \omega_n = 2{,}23$$
$$2\xi\omega_n = 2 \quad \rightarrow \quad \xi = 0{,}45$$

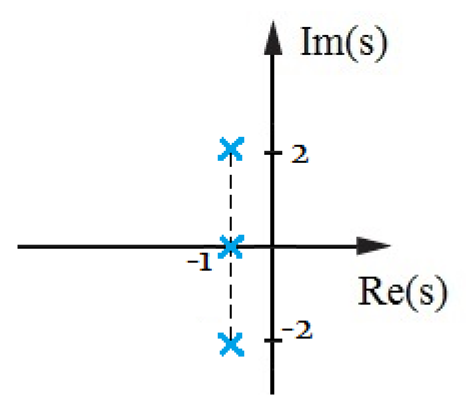
Valores	M_p	t_s
Calculados (aprox. PD)	20,5%	3,98
Exatos (aprox. PD)	20,8%	3,74
Função Completa (Y_2)	14,7%	3,98

Dominância de Polos



Dominância de Polos

$$T_3(s) = \frac{5}{(s+1)(s^2+2s+5)}$$

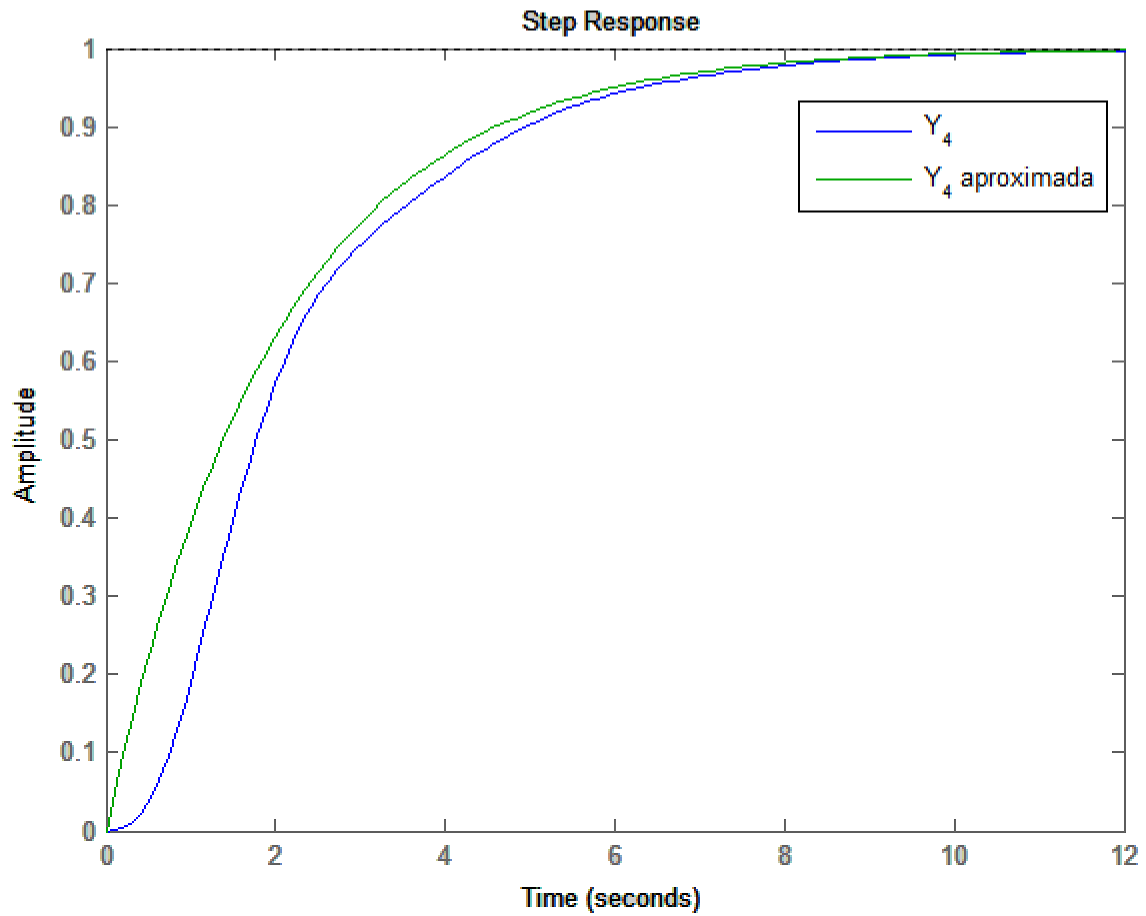


Polos dominante (PD): p_1=-1

$$t_r = 1{,}8/|p_1| \quad \rightarrow \quad t_r = 1{,}8$$
$$t_s = 4/|p_1| \quad \rightarrow \quad t_s = 4{,}0$$

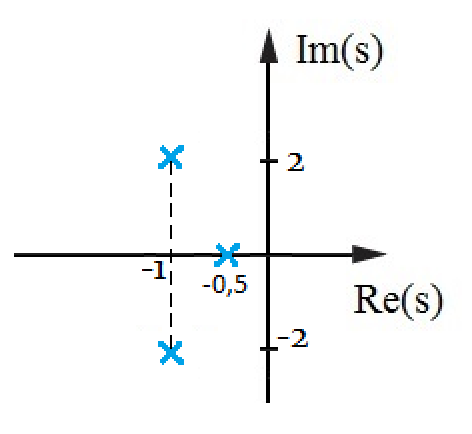
Valores	M_p	t_s
Calculados (aprox. PD)	-	4,00
Exatos (aprox. PD)	-	3,91
Função Completa (Y_3)	-	4,45

Dominância de Polos



Dominância de Polos

$$T_4(s) = \frac{2{,}5}{(s+0{,}5)(s^2+2s+5)}$$



Polos dominante (PD): p_1=-1

$$t_r = 1{,}8/|p_1| \quad \rightarrow \quad t_r = 3{,}6$$
$$t_s = 4/|p_1| \quad \rightarrow \quad t_s = 8{,}0$$

Valores	M_p	t_s
Calculados (aprox. PD)	-	8,00
Exatos (aprox. PD)	-	7,82
Função Completa (Y_4)	-	8,15

Dominância de Polos