Projeto de Controladores Usando Lugar das raízes

Avanço de fase e PD

Profa. Cristiane Paim

Introdução

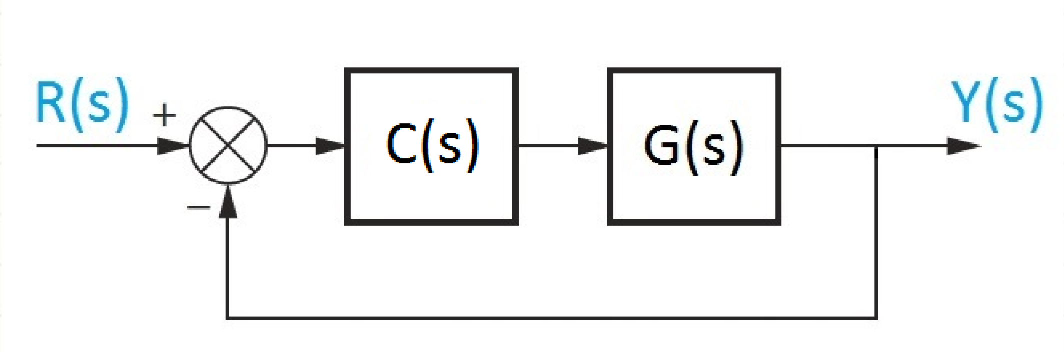
Duas estruturas de controladores muito utilizadas são:

- **Controladores em Avanço de Fase**
- **Controladores em Atraso de Fase**

E ainda, a combinação de ambos gerando os controladores em **avanço-atraso de fase**.

Controladores em Avanço e em Atraso

Seja a configuração de controle em série;



Ambos os controladores tem a mesma estrutura:

$$C(s) = K\frac{s+b}{s+\alpha b} \quad \alpha, b > 0$$

Considerando s=σ+jω, a fase do controlador pode ser escrita como:

$$\angle C(s) = \angle(\sigma + j\omega + b) - \angle(\sigma + j\omega + \alpha b)$$

$$= \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma + b}\right) - \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma + \alpha b}\right)$$

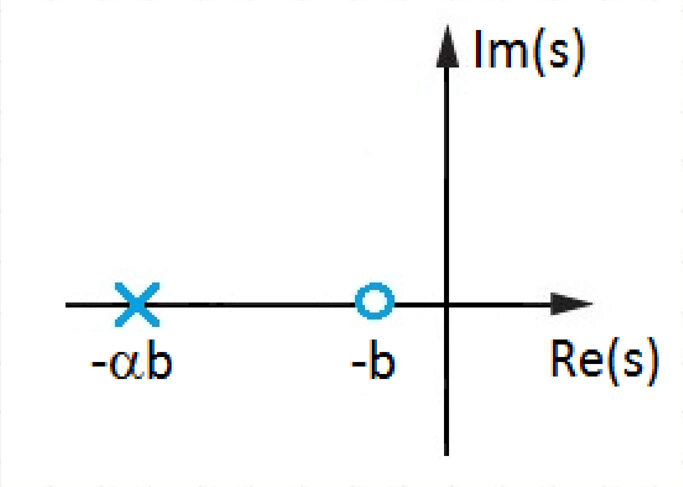
Controladores em Avanço e em Atraso

Observe que, para

$$\alpha > 1 \quad \Rightarrow \quad \angle C(s) > 0$$

Ou seja, a introdução do controlador gera um aumento na fase do ramo direto do sistema.

Este controlador é chamado "em avanço de fase" ou simplesmente **CONTROLADOR EM AVANÇO**.



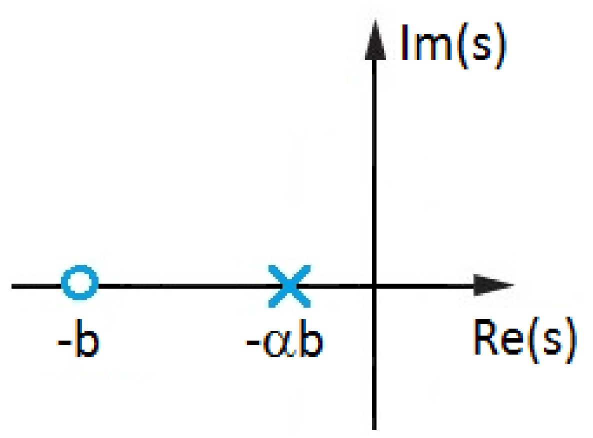
Controladores em Avanço e em Atraso

Para

$$0 \leq \alpha < 1 \quad \Rightarrow \quad \angle C(s) < 0$$

Ou seja, a introdução do controlador gera uma redução na fase do ramo direto do sistema.

Este controlador é chamado "em atraso de fase" ou simplesmente **CONTROLADOR EM ATRASO**.



Uso dos Controladores

Controlador em Avanço

Geralmente utilizado para melhorar a resposta transitória do sistema. Seu comportamento se aproxima de uma ação Proporcional-Derivativa (PD).

Controlador em Atraso

Geralmente utilizado para melhorar a resposta do sistema em regime permanente. Seu comportamento se aproxima de uma ação Proporcional-Integral (PI).

Uso dos Controladores

O controlador PD (forma real)

$$C(s) = K_P\left(1 + \frac{NT_D s}{T_D s + N}\right) \quad 3 \leq N \leq 10$$

pode ser reescrito como

$$C(s) = K\,\frac{s+b}{s+\alpha\, b}$$

sendo $\alpha = N + 1, \quad b = \dfrac{N}{\alpha\, T_D} \quad e \quad K = \alpha\, K_P$

Ou seja, o controlador PD é um caso particular do controlador em avanço.

Uso dos Controladores

Seja um controlador em atraso. Fazendo α=0 tem-se:

$$C(s) = K\frac{s+b}{s}$$

ou seja, um controlador do tipo PI:

$$C(s) = Kp\left(\frac{s+1/T_I}{s}\right)$$

com

$$b = \frac{1}{T_I} \quad \text{e} \quad K = K_P$$

Assim, pode se dizer que controlador PI é um caso particular do controlador em atraso.

Controladores em Avanço

Considerações sobre o controlador:

- A adição do zero desloca o Lugar das Raízes para a esquerda, melhorando a estabilidade do sistema e, potencialmente a velocidade da resposta.
- A adição do polo tenderia a ter um efeito contrário. Entretanto, se o polo for posicionado apropriadamente seu efeito não deve afetar significativamente a melhora obtida pela introdução do zero.
- O polo deve ser alocado relativamente distante do zero (4 a 5 vezes). Porém, não deve ser alocado muito distante para evitar efeito indesejado de ruído.

Problema Proposto

Seja um sistema de controle com realimentação unitária cuja F.T.M.A. é dada por:

$$G(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+5)}$$

Projetar um controlador de modo a atender as seguintes especificações:

- Sobressinal menor do que 5%
- Tempo de acomodação menor do que 5 segundos
- Reduzir o erro de regime permanente à entrada rampa

Resposta do Sistema com C(s)=1

A função de transferência de malha fechada será:

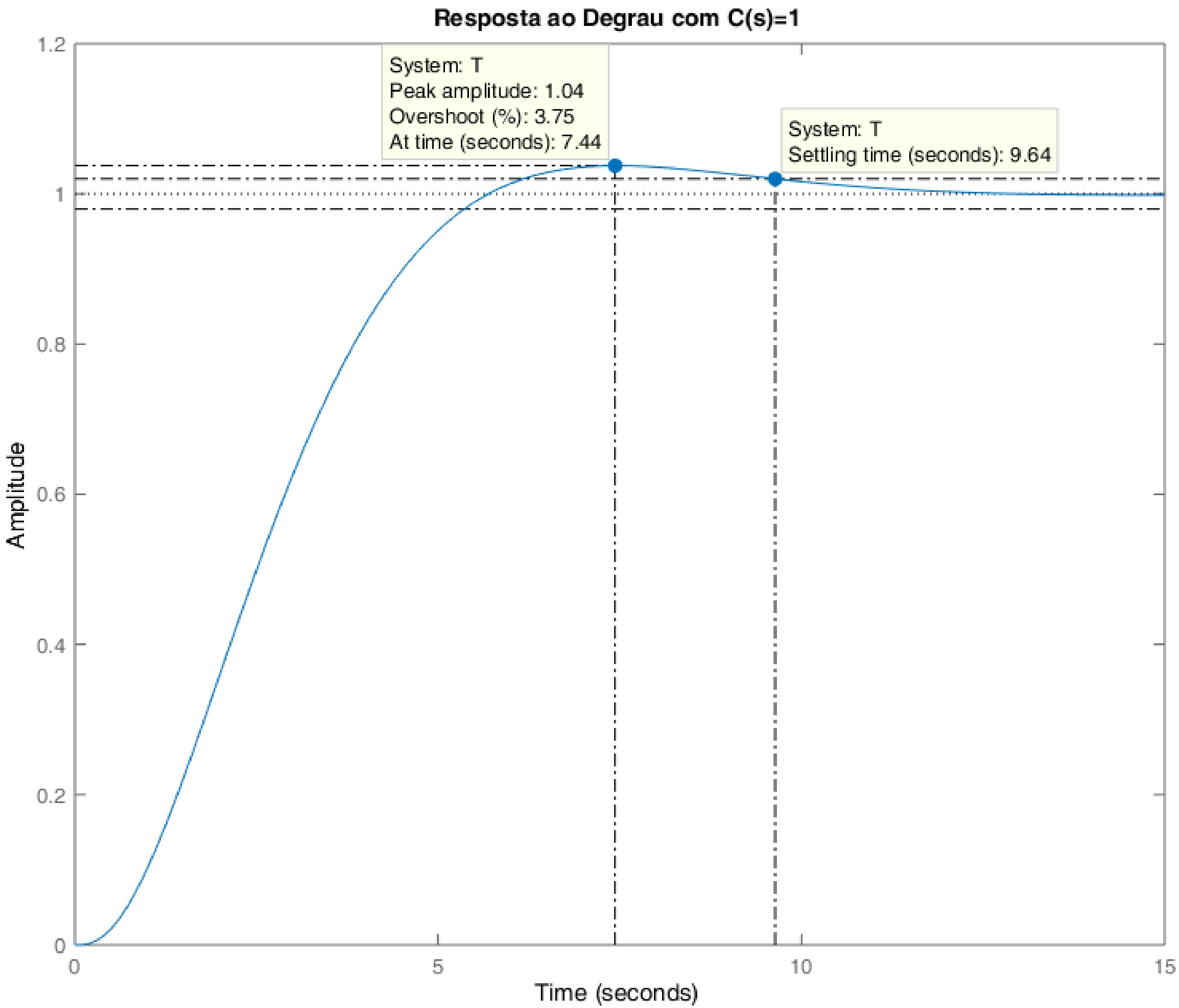
$$T(s) = \frac{2}{s^3 + 6s^2 + 5s + 2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} p_{1,2} = -0{,}452 \pm j0{,}434 \\ p_3 = -5{,}1 \end{cases}$$

Aproximando pelos polos dominantes:

$$\begin{matrix} \omega_n = 0{,}6265 \\ \xi = 0{,}7217 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} M_P = 3{,}8\% \\ t_S = 8{,}9 \end{matrix}$$

Valores de simulação: $M_P = 3{,}8\%$

$$t_S = 9{,}6$$



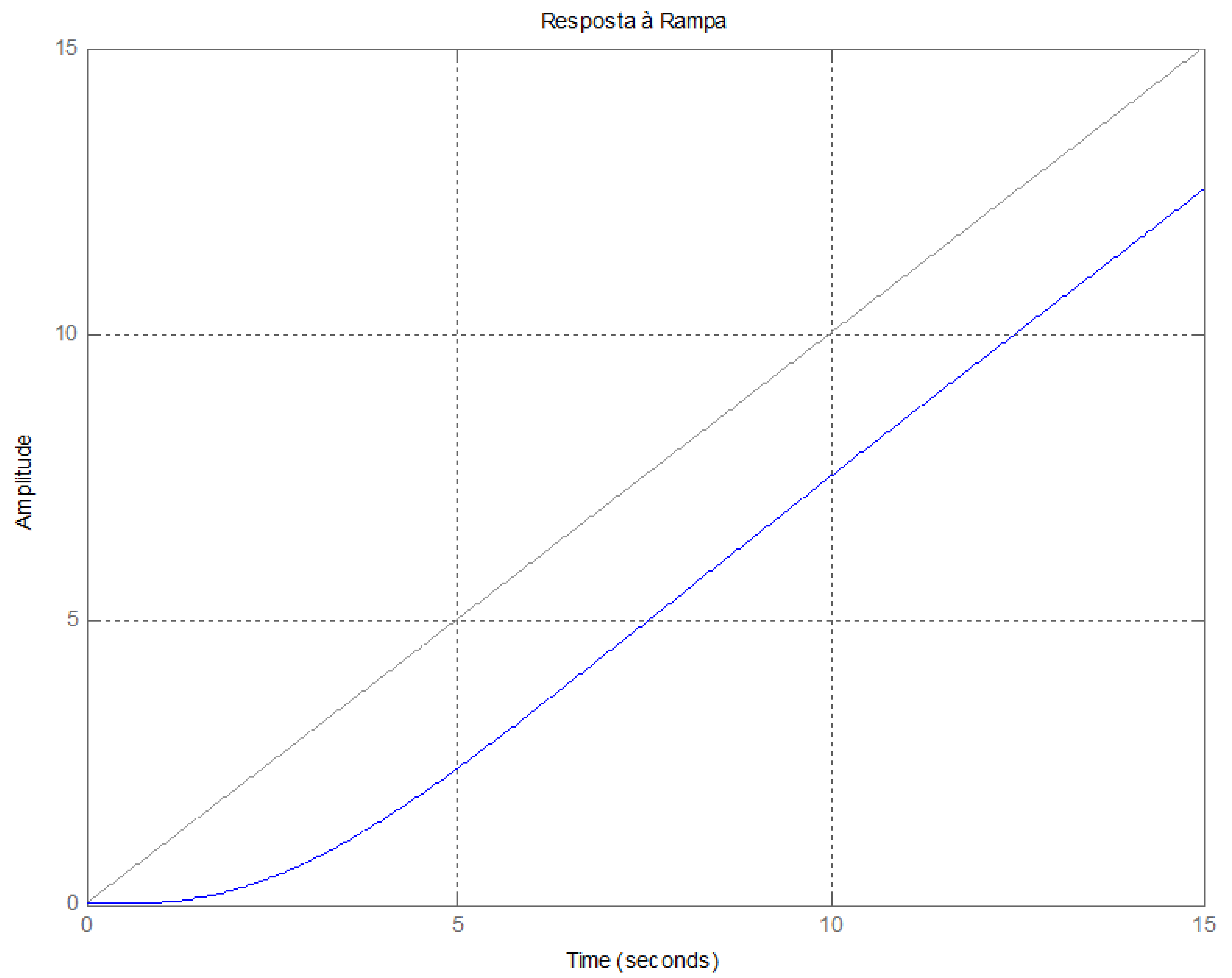
Resposta ao Degrau com C(s)=1
System: T
Peak amplitude: 1.04
Overshoot (%): 3.75
At time (seconds): 7.44
System: T
Settling time (seconds): 9.64
Amplitude
Time (seconds)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
0
5
10
15

Resposta do sistema com C(s)=1

O erro de regime permanente será:

$$Kv = \lim_{s \to 0} sG(s) = \frac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad Kv = 0,4$$

$$e_{\infty} = \frac{1}{Kv} = 2,5$$



Resposta à Rampa
15
10
5
0
Amplitude
0
5
10
15
Time (seconds)

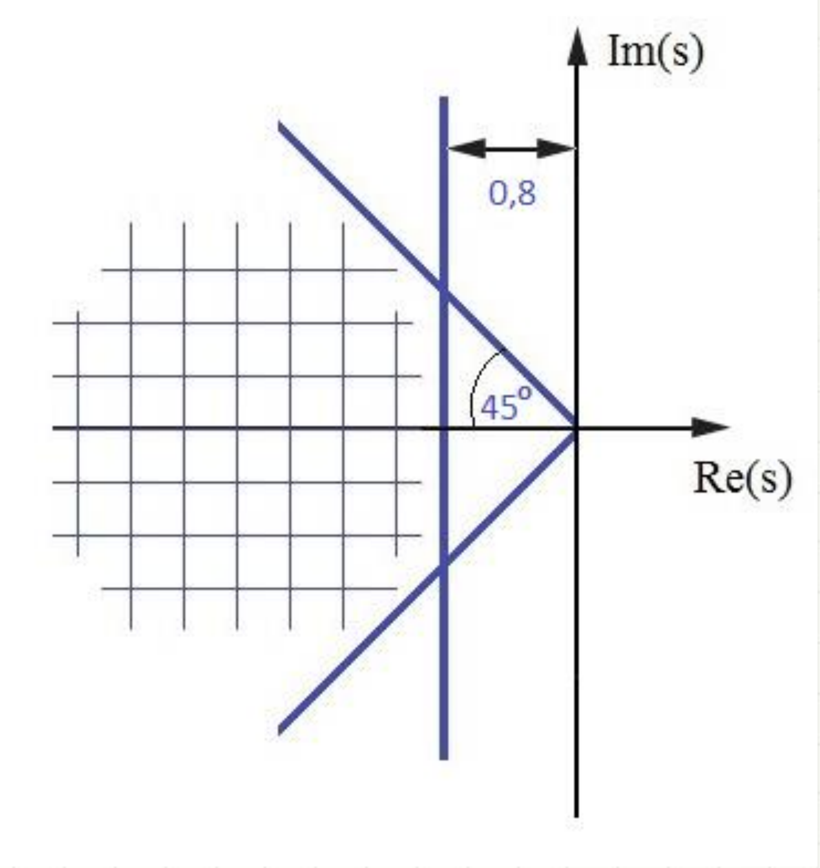
Região Desejada para Malha Fechada

$$M_P < 5\% \quad \Rightarrow \quad \xi > 0{,}69\,(\theta < 46^\circ)$$

$$t_s < 5seg \quad \Rightarrow \quad \sigma > 0{,}8$$

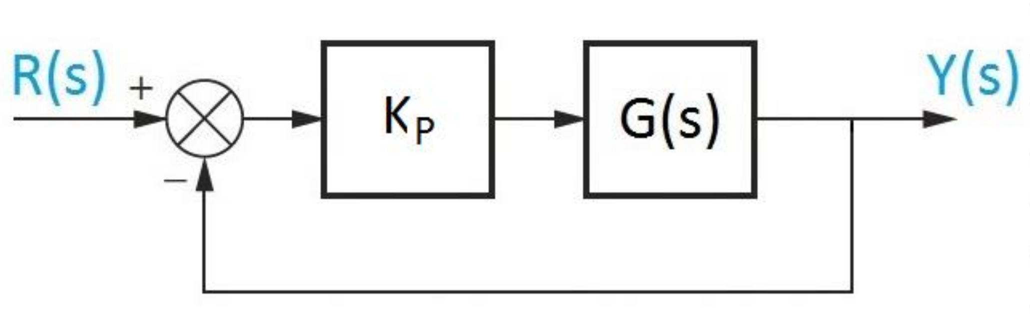
Possíveis Soluções:

- Controlador Proporcional
- Controlador PD
- Controlador em Avanço



Controlador Proporcional

Seja C(s) um controlador proporcional.



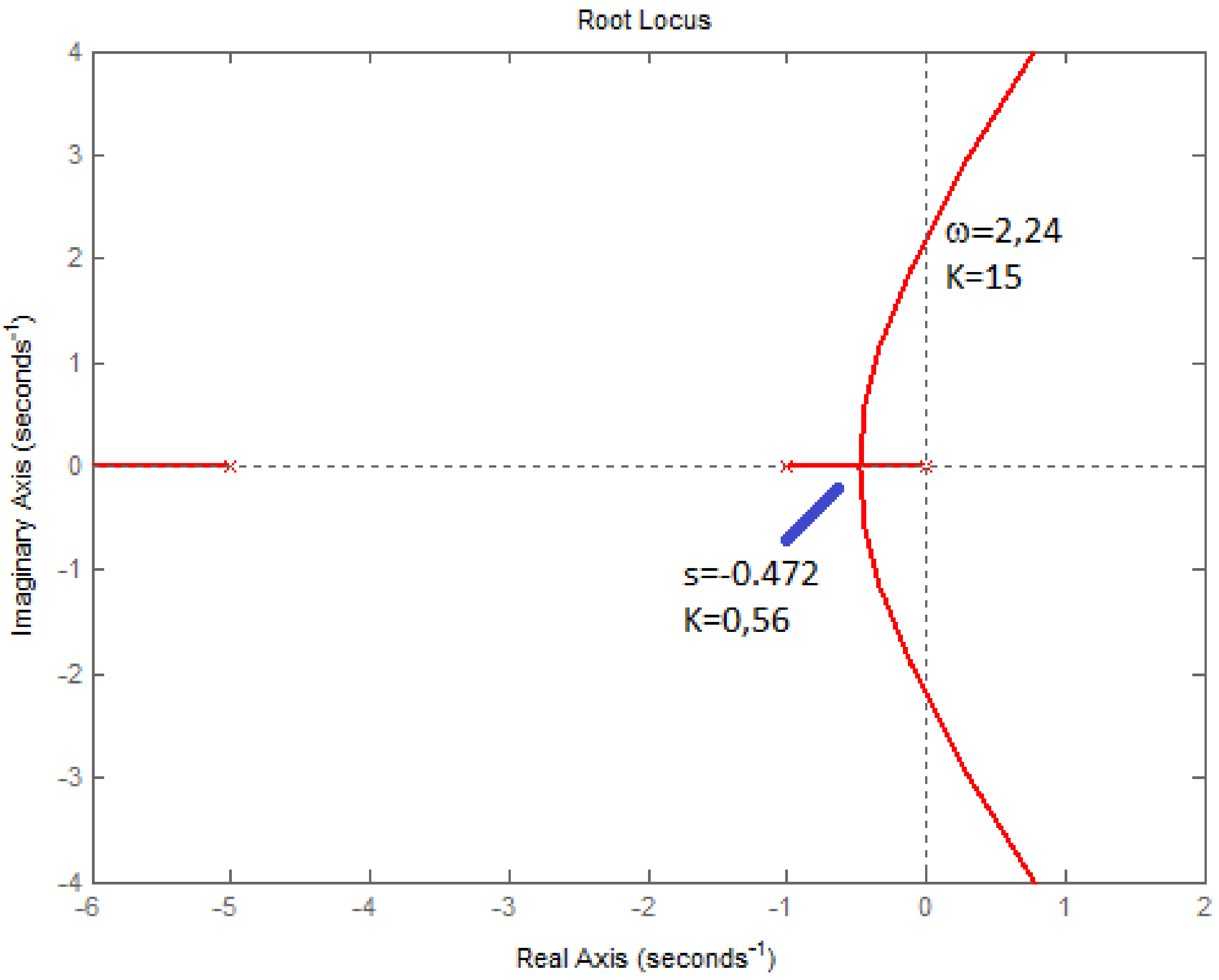
Em malha fechada

$$T(s) = \frac{2K_P}{s(s^2+6s+5)+2K_P}$$

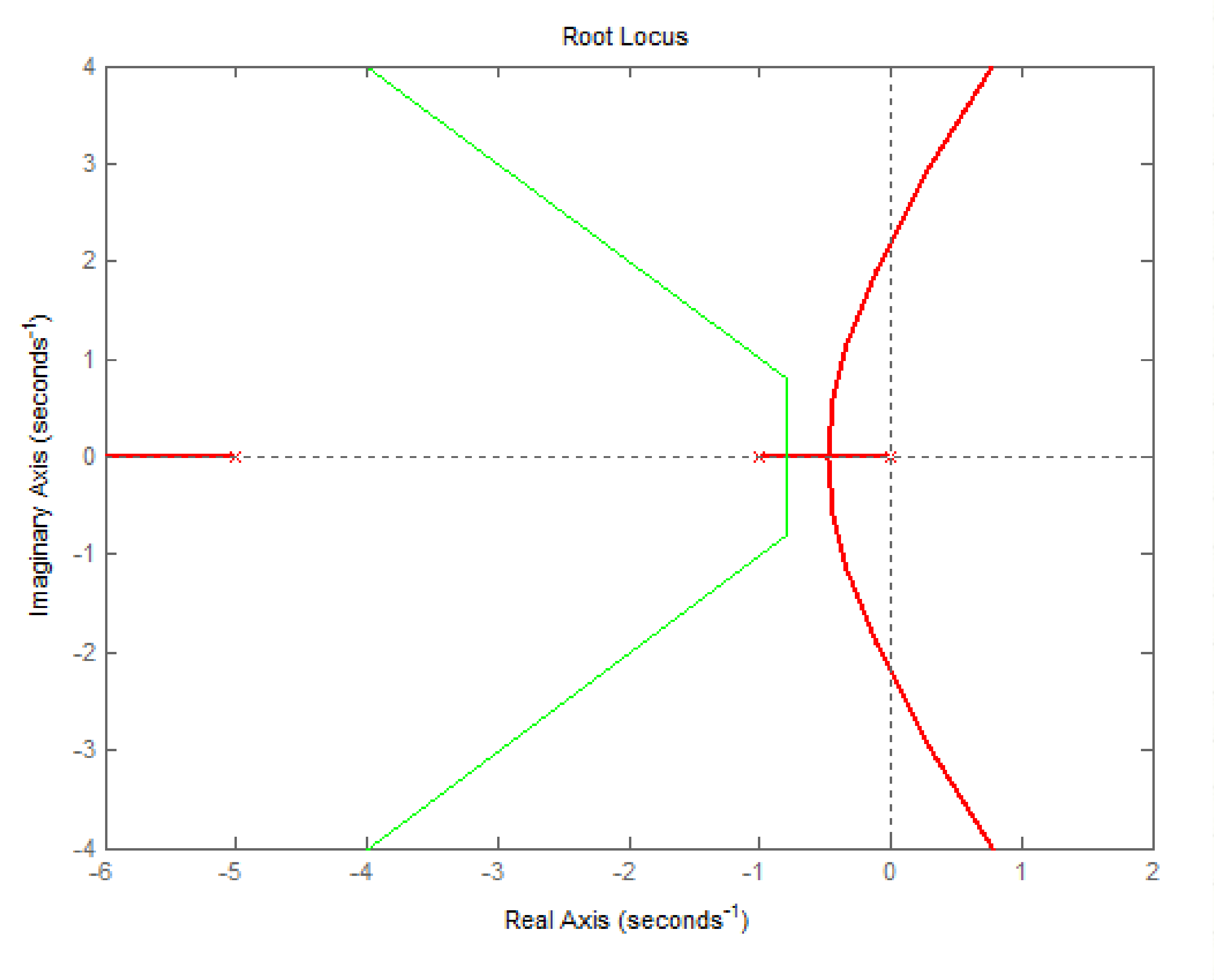
O polinômio característico é dado por

$$1 + K_P \frac{2}{s(s^2+6s+5)} = 0$$

Controlador Proporcional

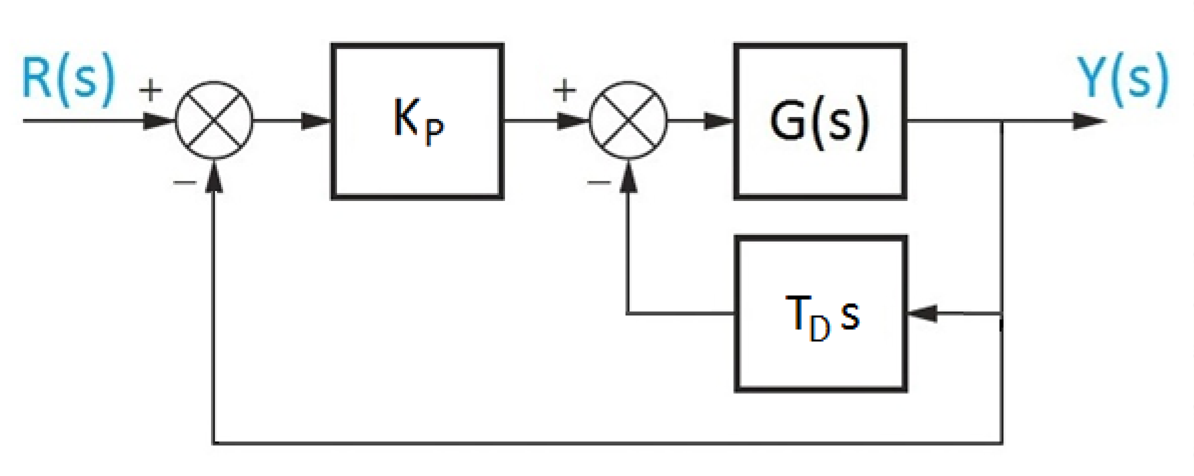


Controlador Proporcional



Como pode ser observado no gráfico é impossível atender às especificações com um controlador proporcional.

Projetos 1, 2 e 3 - PD Misto Ideal



$$T(s) = \frac{2K_P}{s(s+1)(s+5) + 2T_D s + 2K_P}$$

O erro de regime permanente será dado por:

$$Kv = \frac{2K_P}{5+2T_D} \quad \Rightarrow \quad e_\infty = \frac{5+2T_D}{2K_P}$$

Projeto 1 – PD Misto Ideal (contorno)

Metodologia

Usar o gráfico de **contorno das raízes** para definir faixas de valores para K_P e T_D que garantam as especificações de desempenho.

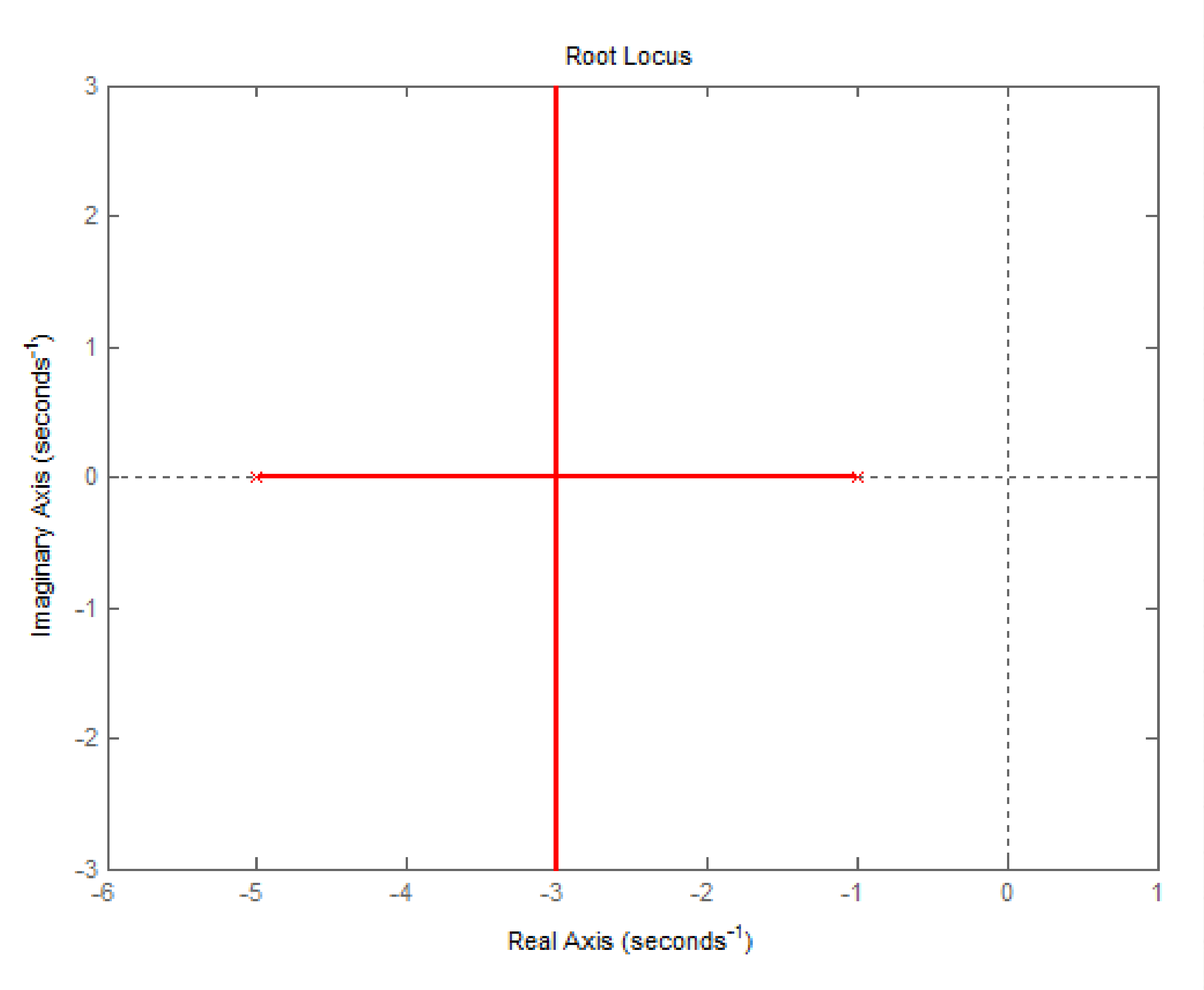
1ª etapa: Para K_P=0,

$$\Delta(s) = s(s+1)(s+5) + 2T_D s$$

e o L.R será traçado para

$$1 + T_D \frac{2s}{s(s+1)(s+5)} = 0$$

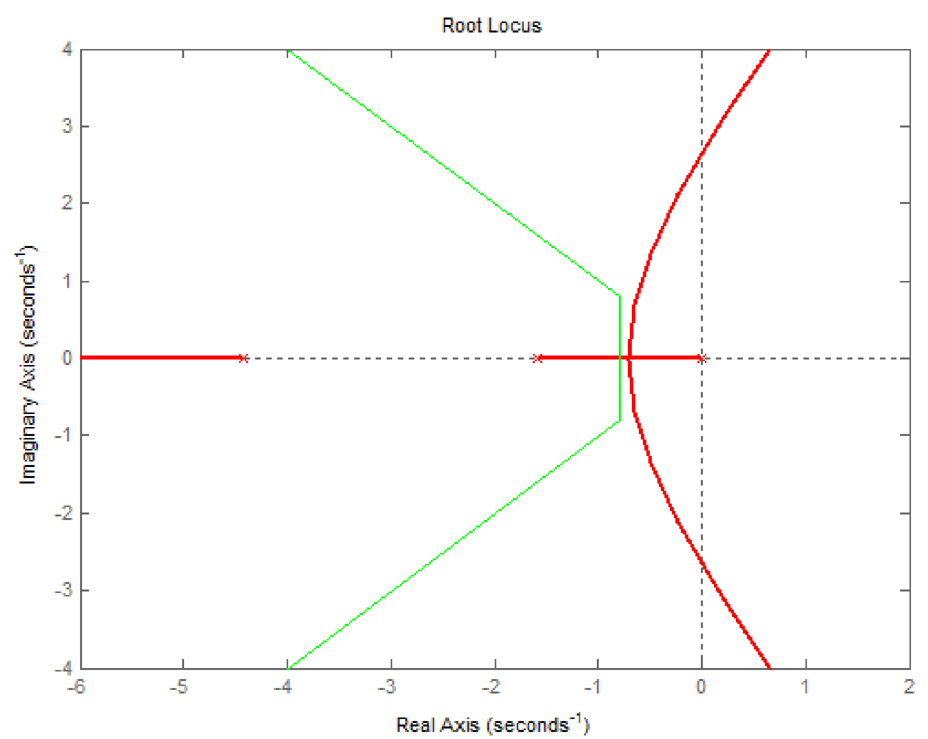
Projeto 1 – PD Misto Ideal (contorno)



Projeto 1 – PD Misto Ideal (contorno)

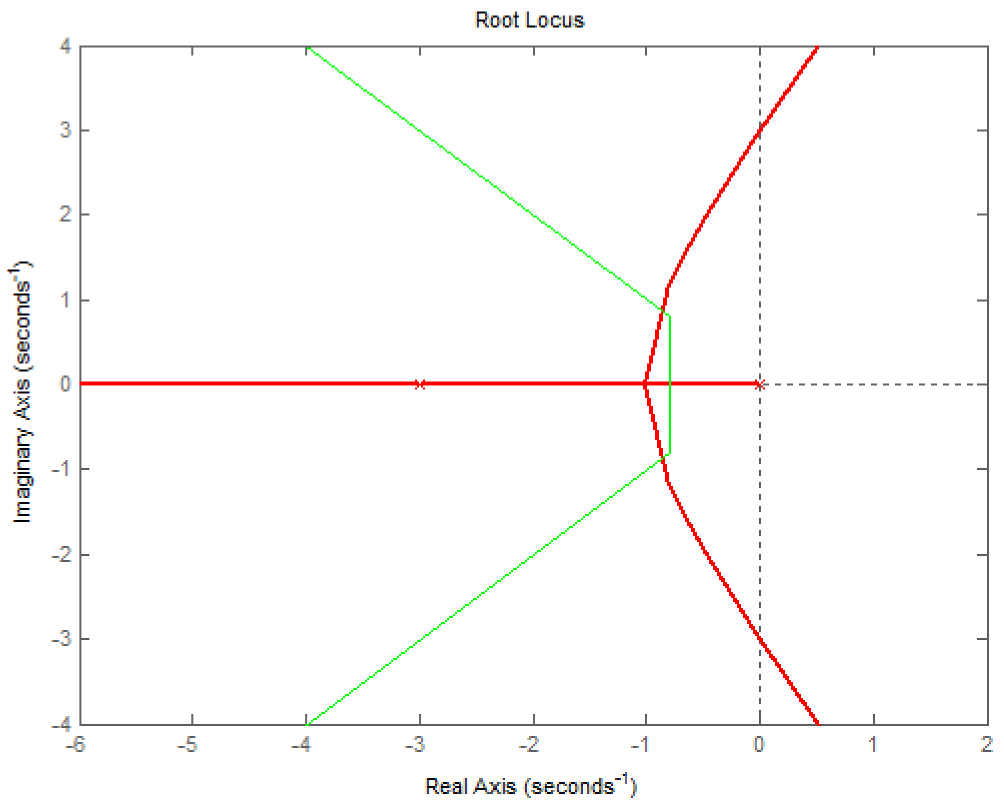
2ª etapa: Variação de K_P para valores fixos de T_D.

$$T_D = 1 \quad \rightarrow \quad 1 + K_P \frac{2}{s^3 + 6s^2 + 7s} = 0$$

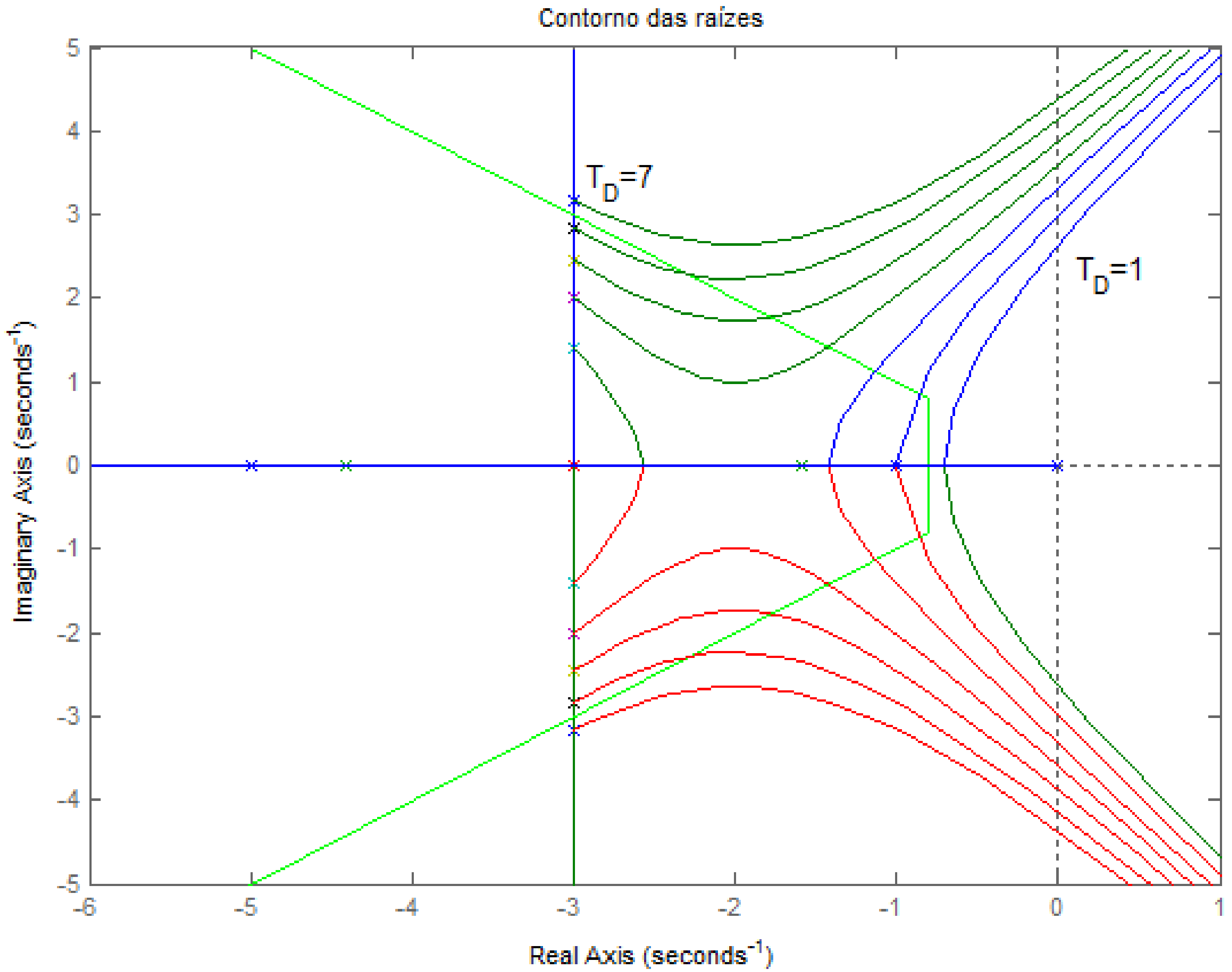


Projeto 1 – PD Misto Ideal (contorno)

$$T_D = 2 \quad \rightarrow \quad 1 + K_P \frac{2}{s^3 + 6s^2 + 9s} = 0$$



Projeto 1 – PD Misto Ideal (contorno)



Projeto 1 – PD Misto Ideal (contorno)

A partir do gráfico de contorno das raízes obtém-se os valores de K_p que permitem alocar os polos de malha fechada na região desejada:

$$T_D = 1 \qquad \textit{fora da região}$$

$$T_D = 2 \qquad 1,9 < K_P < 3,3$$

$$T_D = 3 \qquad 2,7 < K_P < 4,8$$

$$T_D = 4 \qquad 3,5 < K_P < 6,3$$

$$T_D = 5 \qquad 4,3 < K_P < 7,7$$

$$T_D = 6 \qquad 5,1 < K_P < 7,4$$

$$T_D = 7 \qquad \textit{fora da região}$$

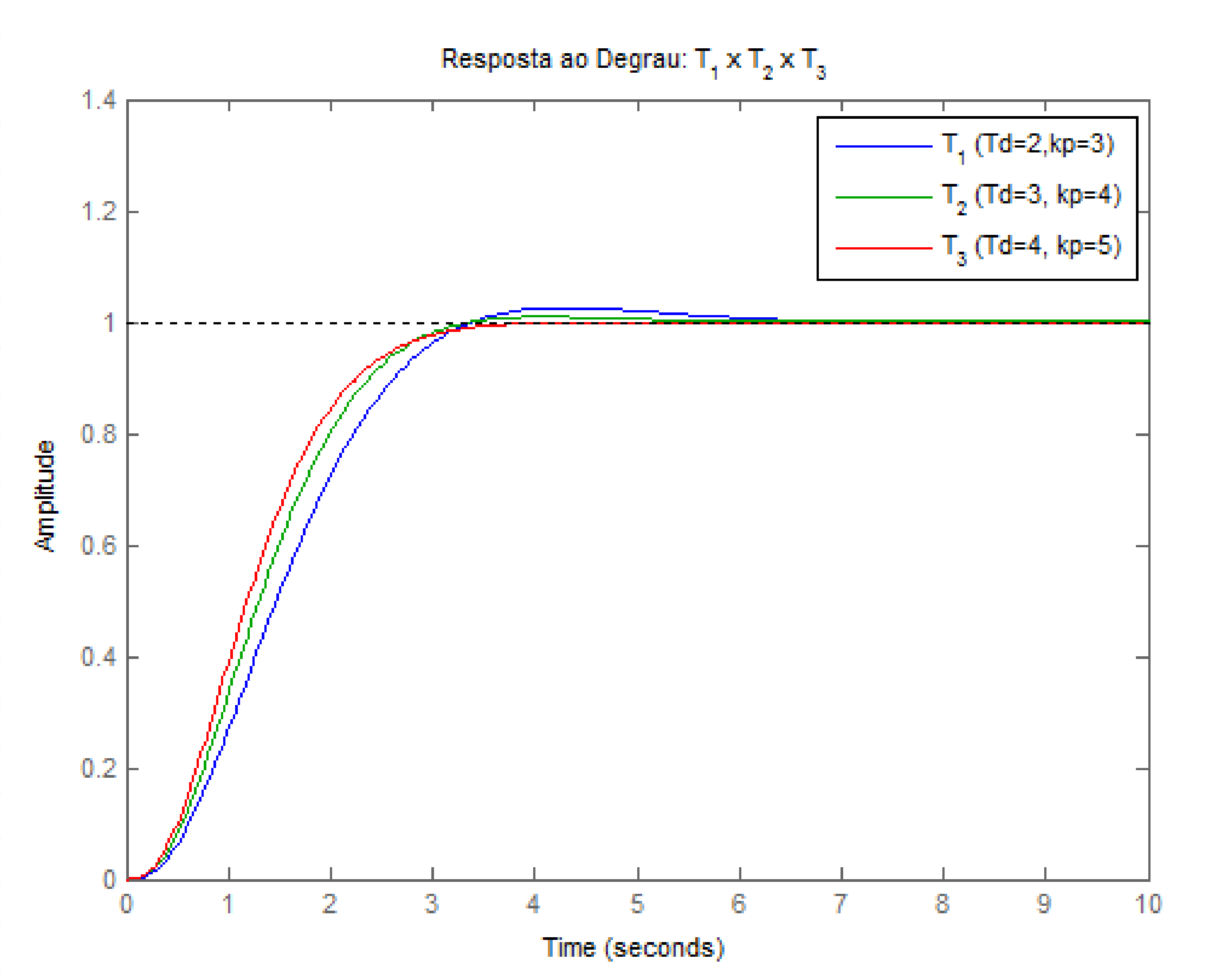
Projeto 1 – PD Misto Ideal (contorno)

$$\mathrm{T}_1: \quad \begin{cases} T_D = 2 \\ K_P = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_P = 2{,}5\% \\ t_S = 4{,}98 \end{cases} \Rightarrow e_\infty = 1{,}5$$

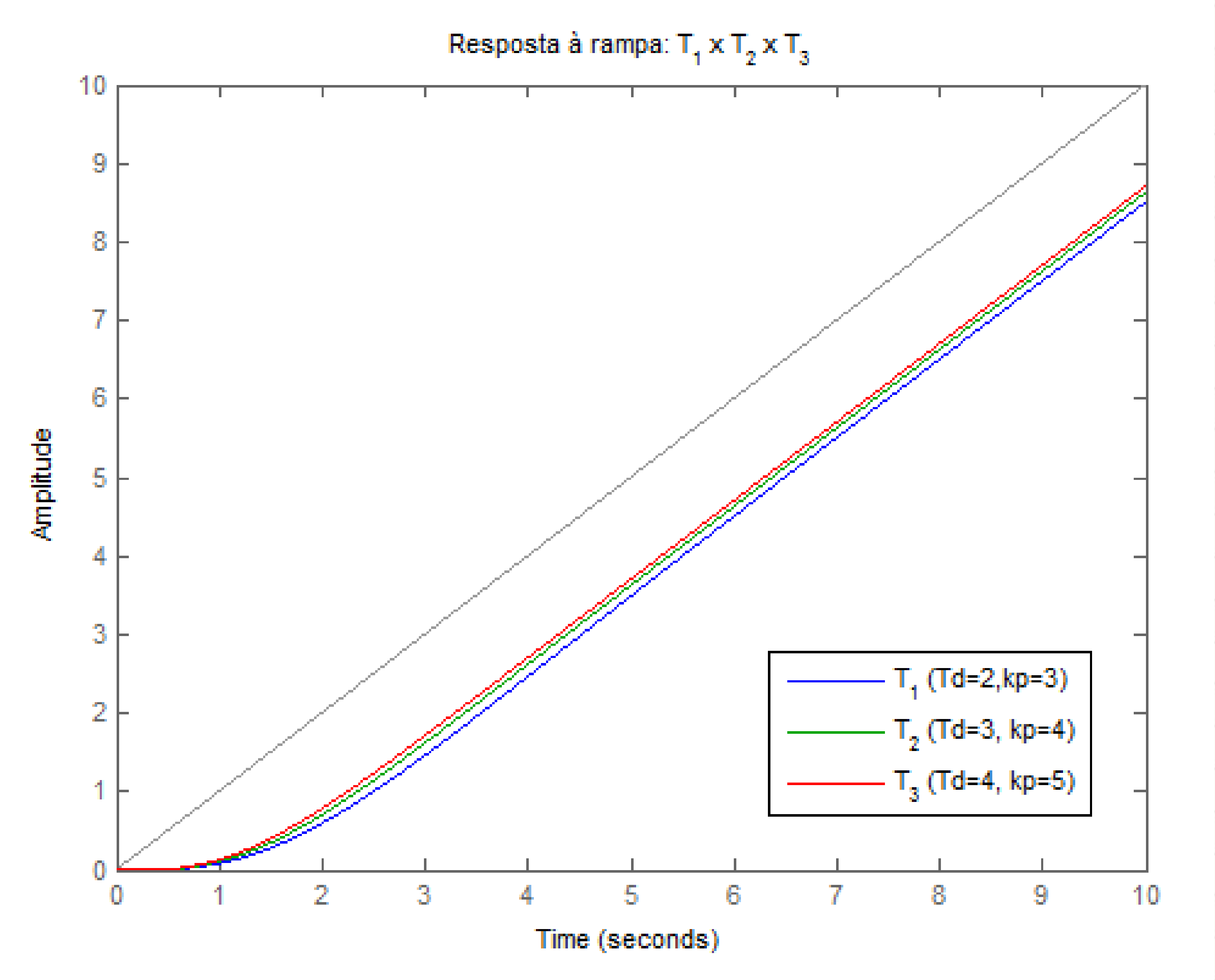
$$\mathrm{T}_2: \quad \begin{cases} T_D = 3 \\ K_P = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_P = 1\% \\ t_S = 2{,}99 \end{cases} \Rightarrow e_\infty = 1{,}375$$

$$\mathrm{T}_3: \quad \begin{cases} T_D = 4 \\ K_P = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_P = 0\% \\ t_S = 3{,}06 \end{cases} \Rightarrow e_\infty = 1{,}3$$

Projeto 1 – PD Misto Ideal (contorno)



Projeto 1 – PD Misto Ideal (contorno)



Projeto 2 – PD Misto Ideal (Varia T_D)

Metodologia: fixar Kp e variar Td

Em malha fechada

$$T(s) = \frac{2K_P}{s(s+1)(s+5) + 2T_D s + 2K_P}$$

O polinômio característico pode ser escrito como:

$$1 + T_D \frac{2s}{s^3 + 6s^2 + 5s + 2K_P} = 0$$

Pergunta:

Como escolher de Kp?

Projeto 2 – PD Misto Ideal (Varia T_D)

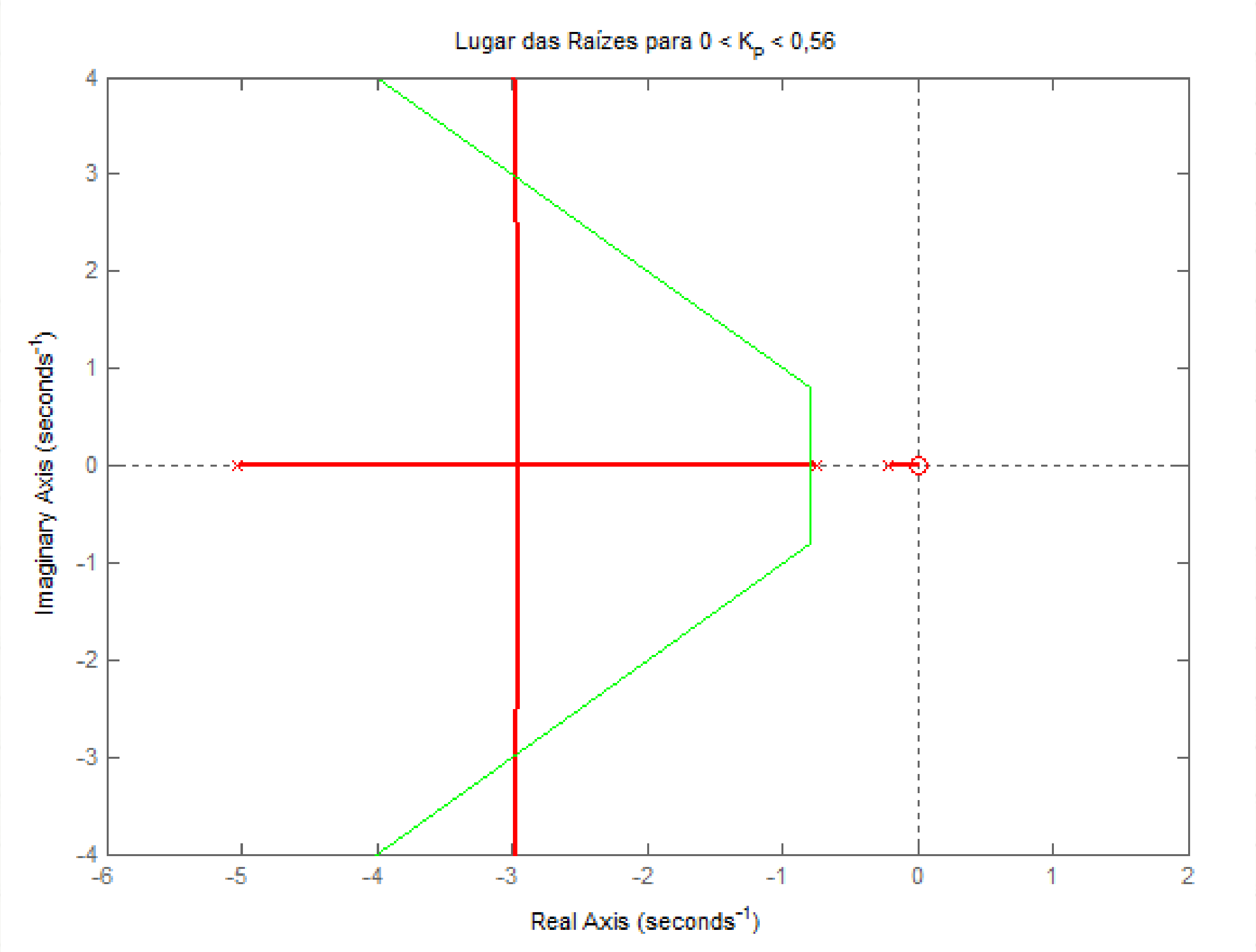
Através do lugar das raízes (usando Matlab) é possível avaliar e definir uma faixa de valores de K_P para atender ambas as especificações de desempenho (Mp<5% e ts<5seg).

Obs.: dependendo da escolha de Kp os polos de malha aberta variam.

$$\begin{array}{lcl} 0 < K_P \le 0{,}56 & : & \text{polos reais} \\ 0{,}56 < K_P < 15 & : & \text{polos complexos no SPE} \\ K_P > 15 & : & \text{polos complexos no SPD} \end{array}$$

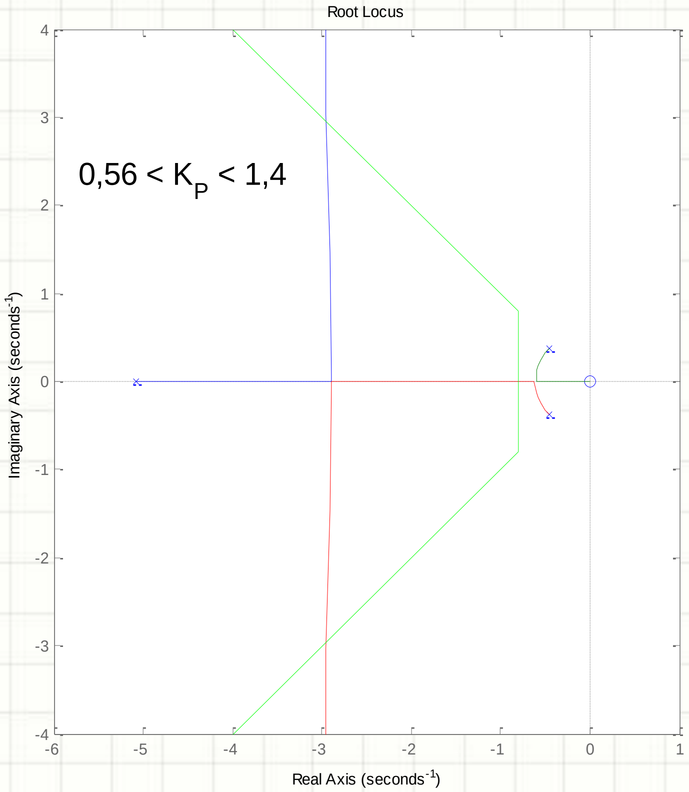
(K_P=15 polos sobre o eixo $j\omega$)

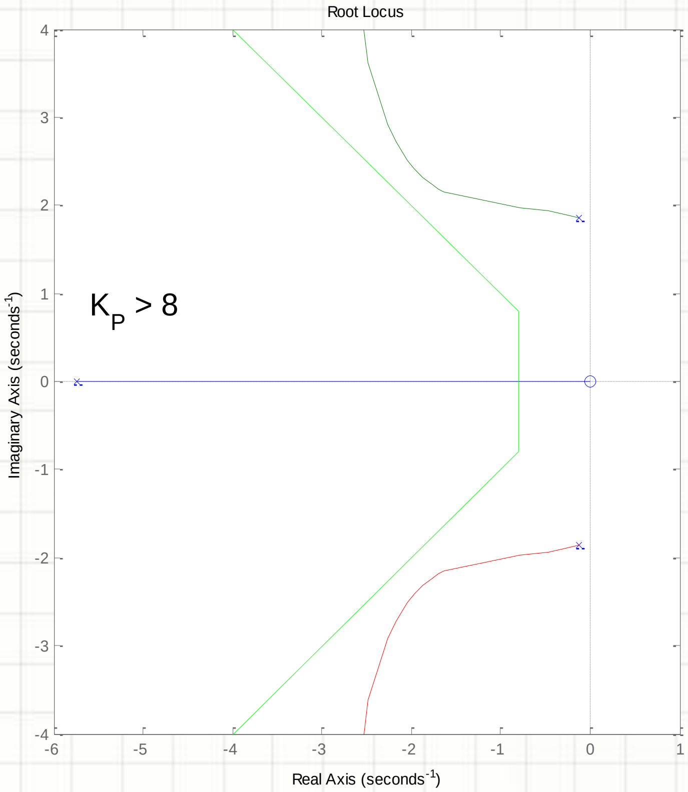
Projeto 2 – PD Misto Ideal (Varia T_D)



Portanto, para $0 < K_P < 0{,}56$ as especificações nunca serão atendidas.

Projeto 2 – PD Misto Ideal (Varia T_D)





Para ambos os casos as especificações nunca serão atendidas.

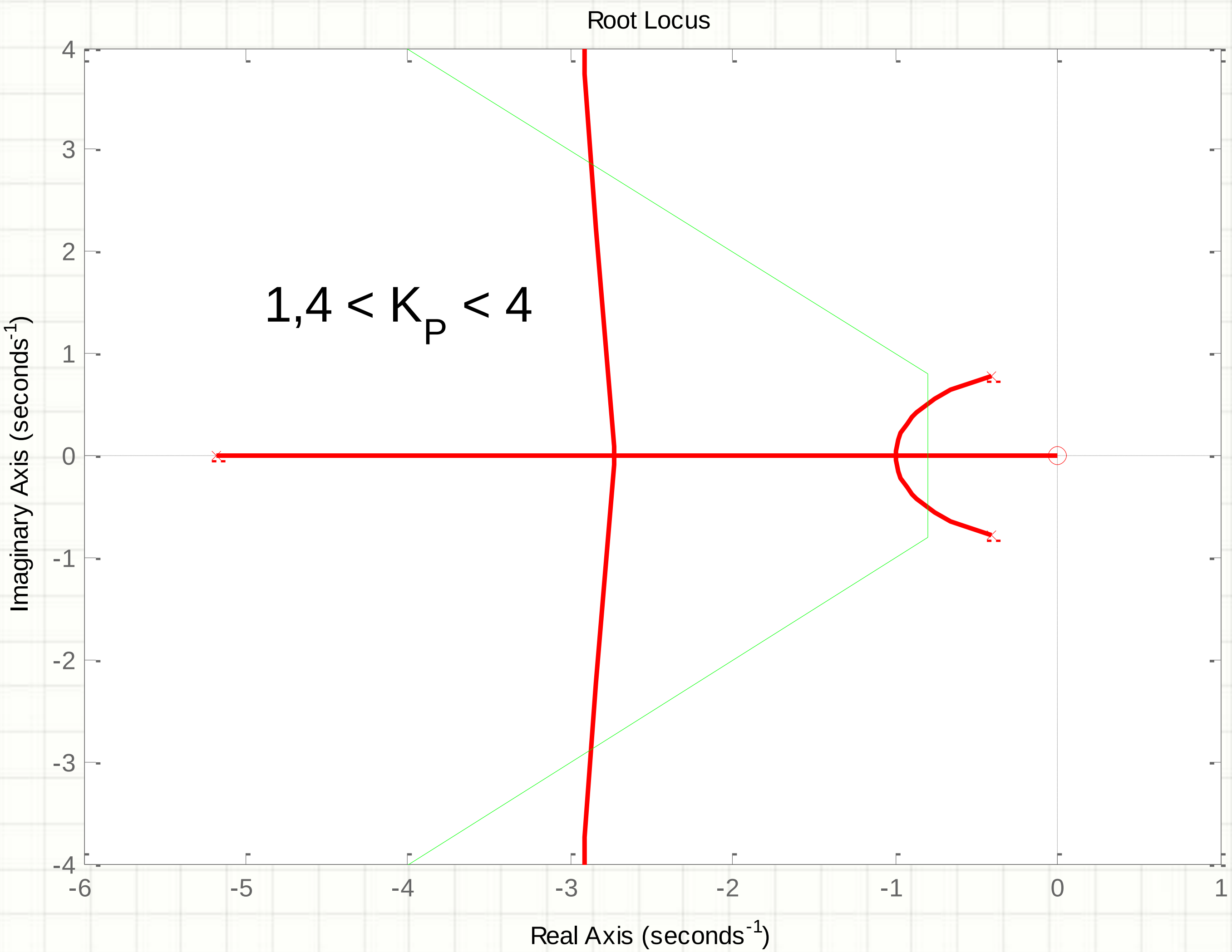
Projeto 2 – PD Misto Ideal (Varia T_D)

Portanto, para atender ambas as especificações o valor de K_P deve ser escolhido na faixa $1{,}4 < K_P < 8$.

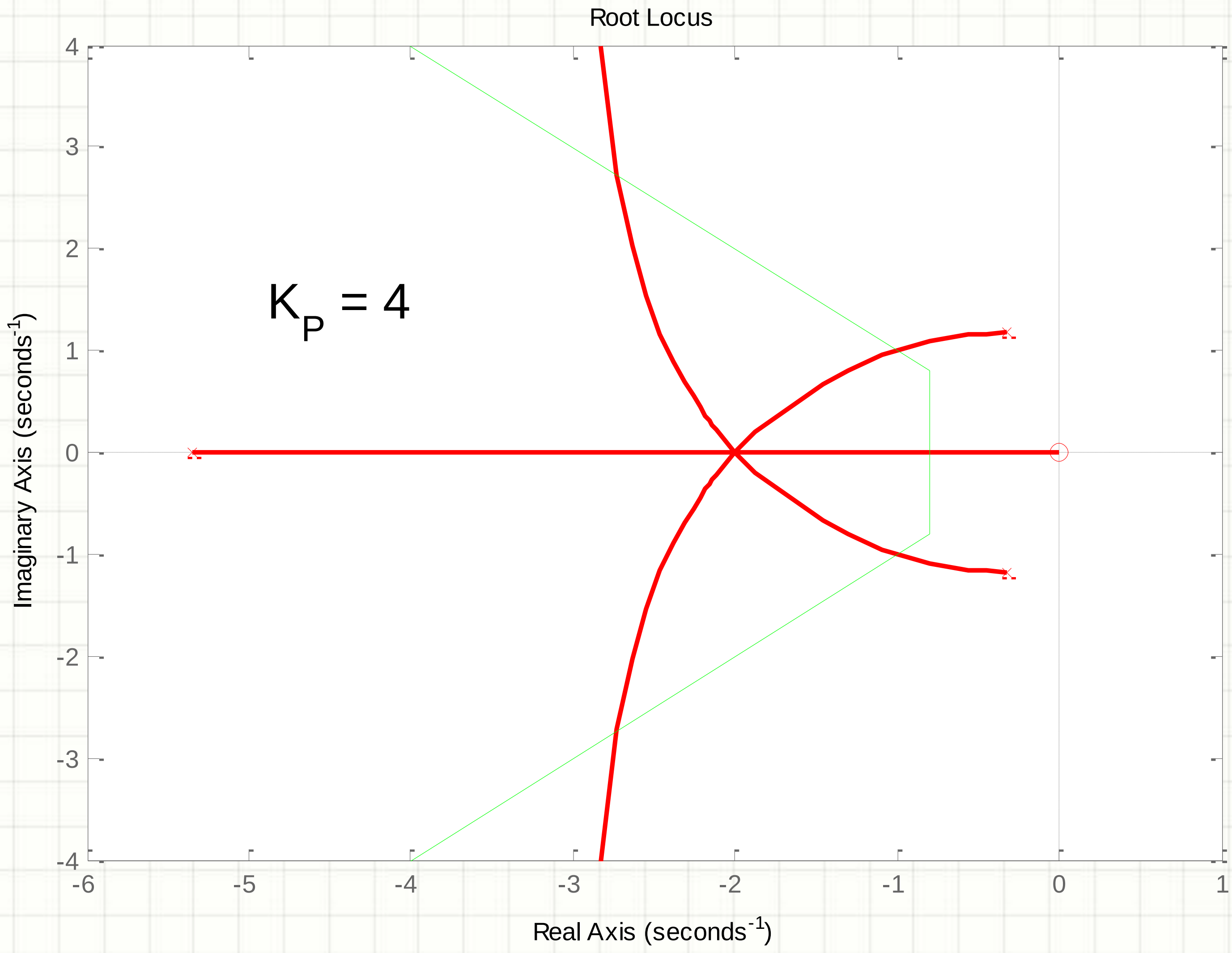
Dentro desta faixa existem três configurações possíveis de Lugar das Raízes:

LR1: $1{,}4 < K_P < 4$ (duas ramificações)
LR2: $K_P = 4$ (uma ramificação, raiz tripla)
LR3: $4 < K_P < 8$ (sem ramificação)

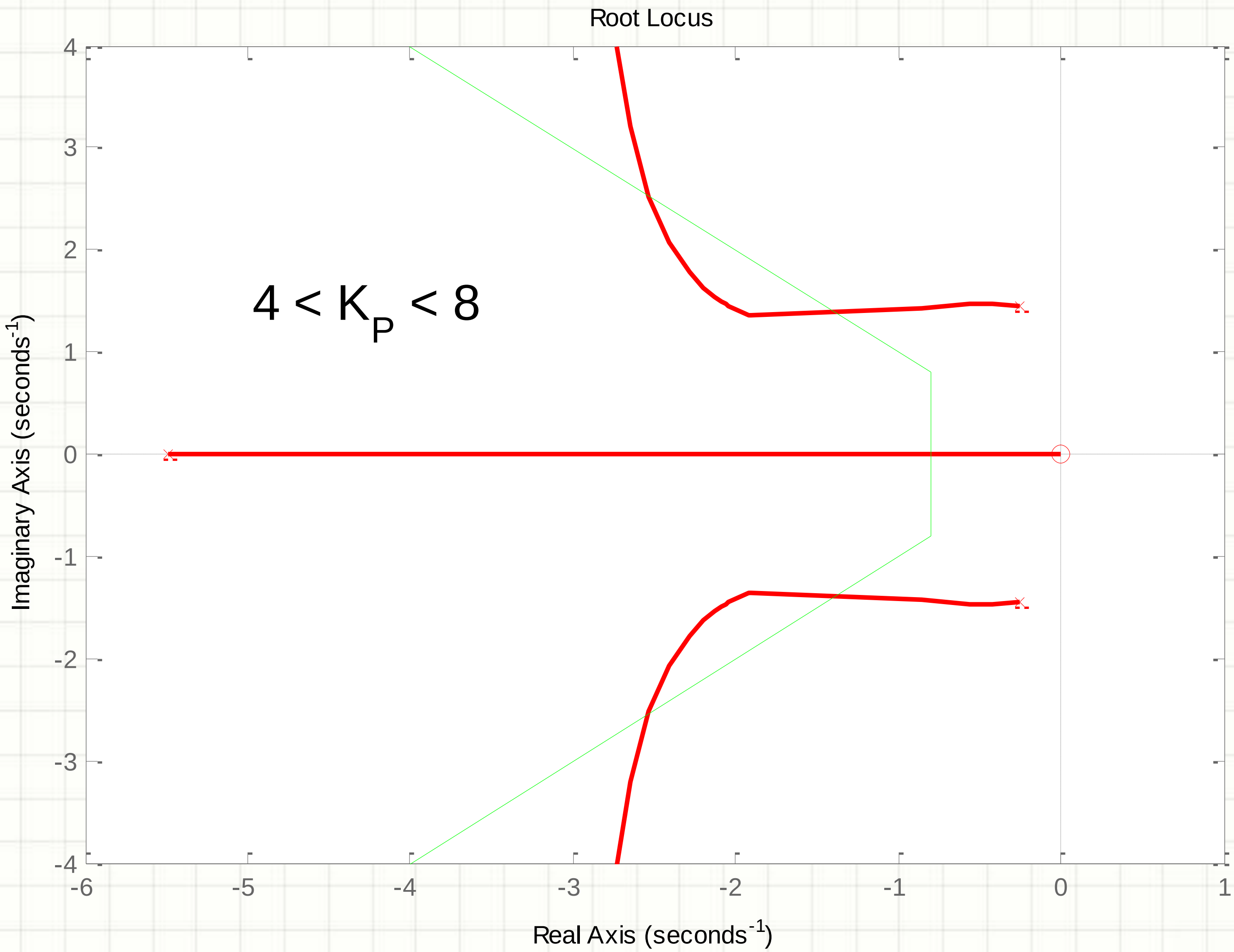
Projeto 2 – PD Misto Ideal (Varia T_D)



Projeto 2 – PD Misto Ideal (Varia T_D)

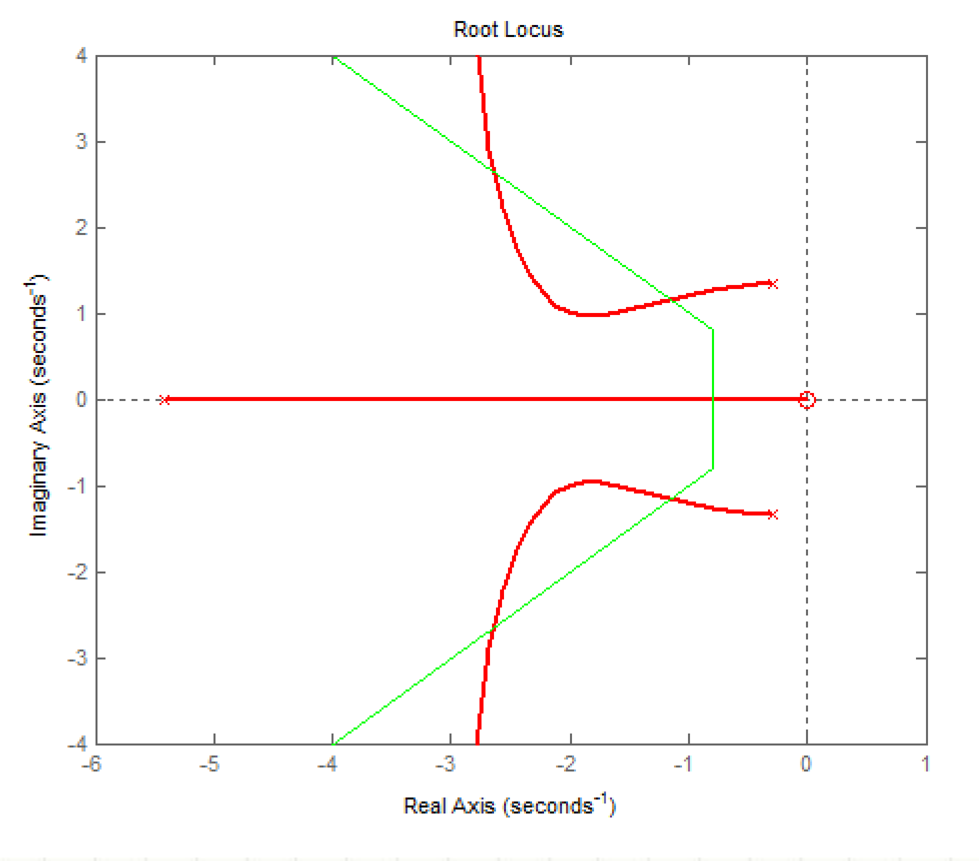


Projeto 2 – PD Misto Ideal (Varia T_D)



Projeto 2 – PD Misto Ideal (Varia T_D)

Escolhido $K_P=5$, os valores de T_D são determinados pela interseção do LR com a região desejada.



Projeto 2 – PD Misto Ideal (Varia T_D)

Os valores de T_D que levam os polos de malha fechada para dentro da região desejada são:

$$Mp < 5\% \quad \rightarrow \quad 3{,}14 < T_D < 6{,}37$$
$$t_s < 5 \quad \rightarrow \quad 2{,}16 < T_D < 5{,}83$$

Assim, para atender a ambas as especificações:

$$3{,}14 < T_D < 5{,}83$$

Projeto 2 – PD Misto Ideal

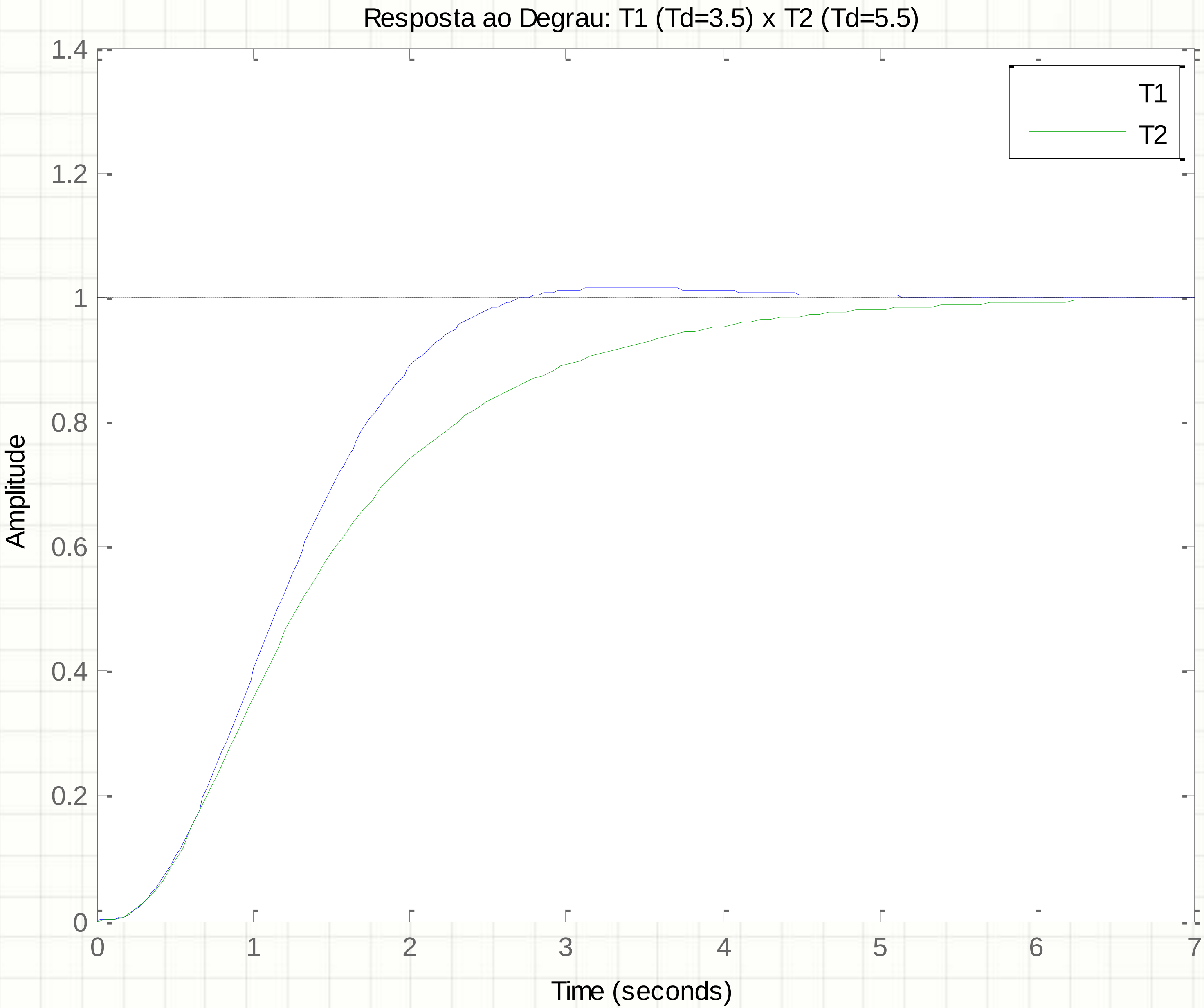
O erro de regime permanente será dado por

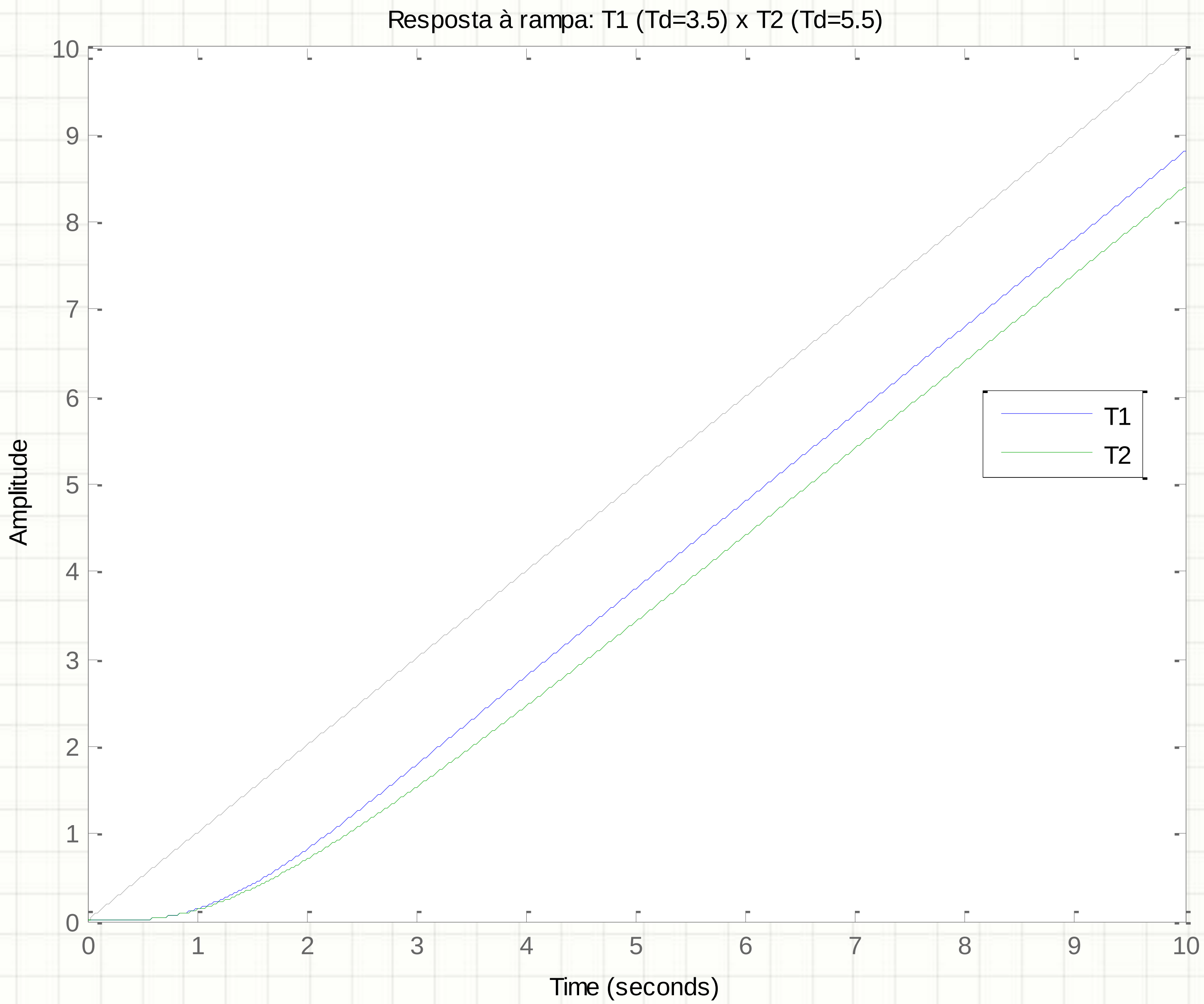
$$e_\infty = \frac{5 + 2T_D}{10} \qquad\qquad 3{,}14 < T_D < 5{,}83$$

Portanto, quanto menor T_D menor será o erro.

$$\mathrm{T_1}: \begin{cases} T_D = 3{,}5 \\ K_P = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_P = 1{,}5\% \\ t_S = 2{,}5 \end{cases} \Rightarrow e_\infty = 1{,}20$$

$$\mathrm{T_2}: \begin{cases} T_D = 5{,}5 \\ K_P = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_P = 0\% \\ t_S = 4{,}97 \end{cases} \Rightarrow e_\infty = 1{,}60$$


Resposta ao Degrau: T1 (Td=3.5) x T2 (Td=5.5)
T1
T2
Amplitude
Time (seconds)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
0
1
2
3
4
5
6
7


Resposta à rampa: T1 (Td=3.5) x T2 (Td=5.5)
Amplitude
Time (seconds)
T1
T2
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

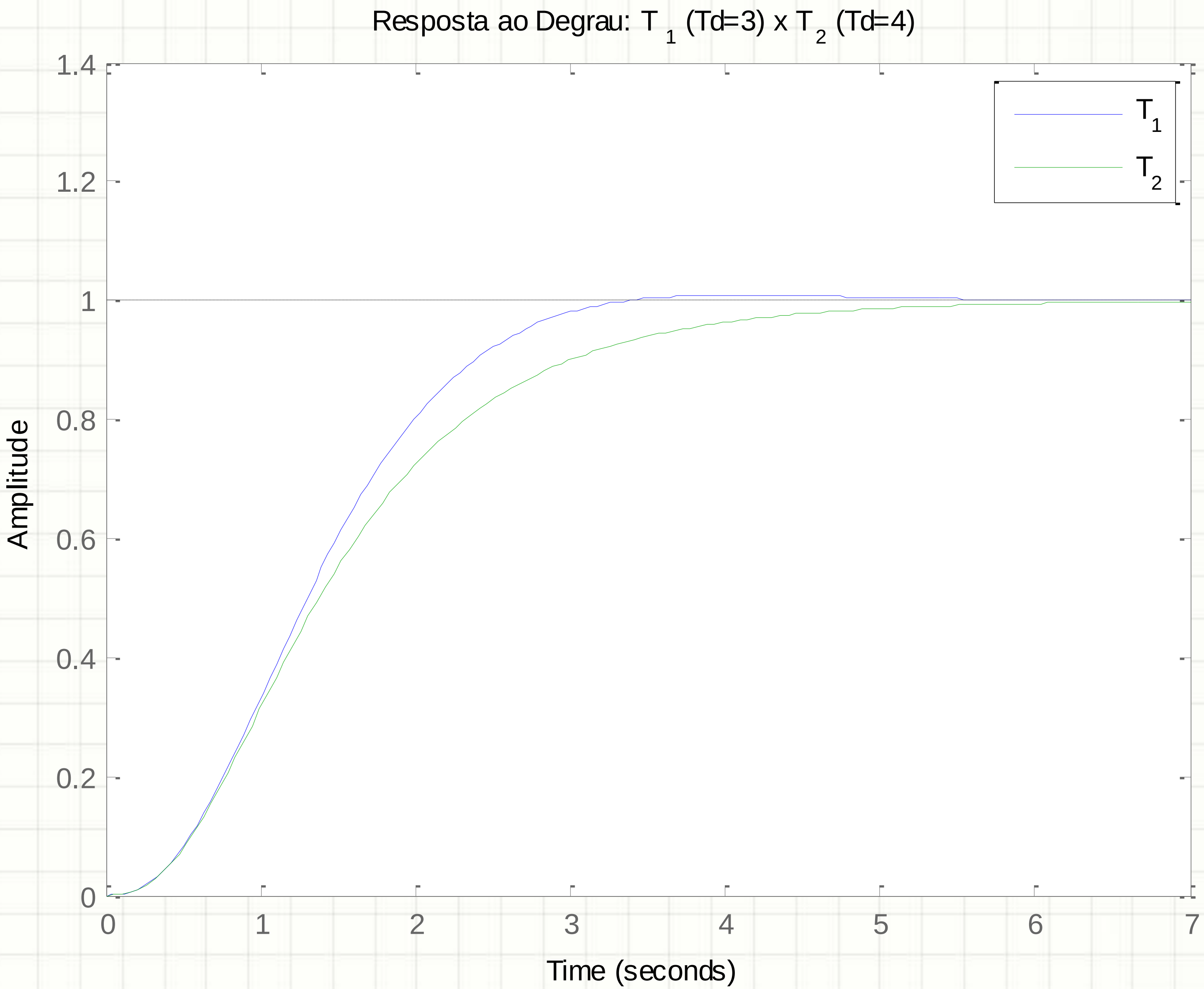
Projeto 3 – PD Misto Ideal

Metodologia: fixar Kp e variar Td (idem anterior)

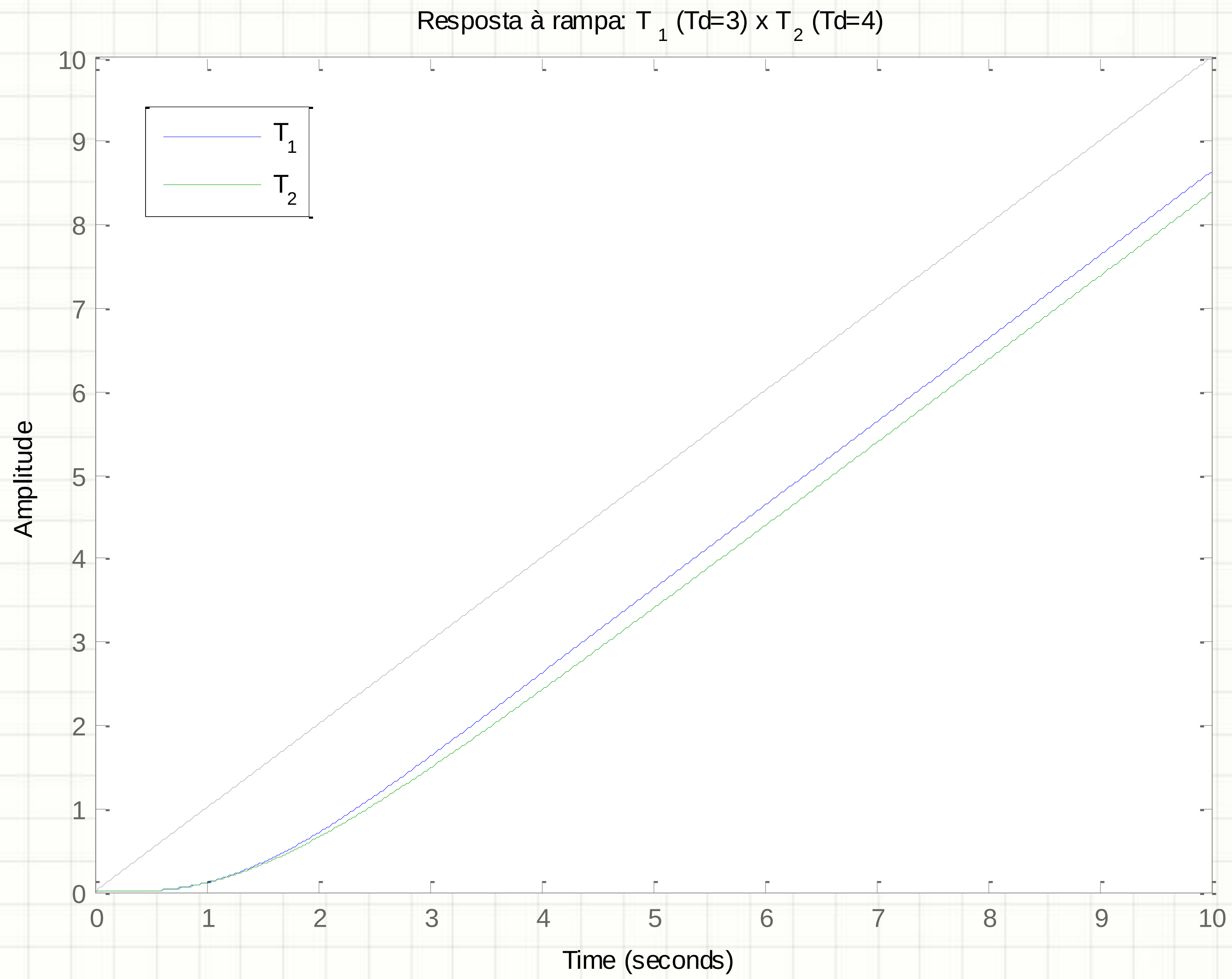
$$K_P = 4 \quad \Rightarrow \quad 2{,}5 < T_D < 4{,}6 \qquad\qquad e_\infty = \frac{5 + 2T_D}{8}$$

$$\mathrm{T}_1 : \quad \begin{cases} T_D = 3 \\ K_P = 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_P = 1\% \\ t_S = 3 \end{cases} \Rightarrow e_\infty = 1{,}25$$

$$\mathrm{T}_2 : \quad \begin{cases} T_D = 4 \\ K_P = 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_P = 0\% \\ t_S = 4{,}6 \end{cases} \Rightarrow e_\infty = 1{,}625$$



Resposta ao Degrau: T_1 (Td=3) x T_2 (Td=4)
T_1
T_2
Amplitude
Time (seconds)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
0
1
2
3
4
5
6
7


Resposta à rampa: T 1 (Td=3) x T 2 (Td=4)
T1
T2
Amplitude
Time (seconds)
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Compara Projetos – PD Misto Ideal

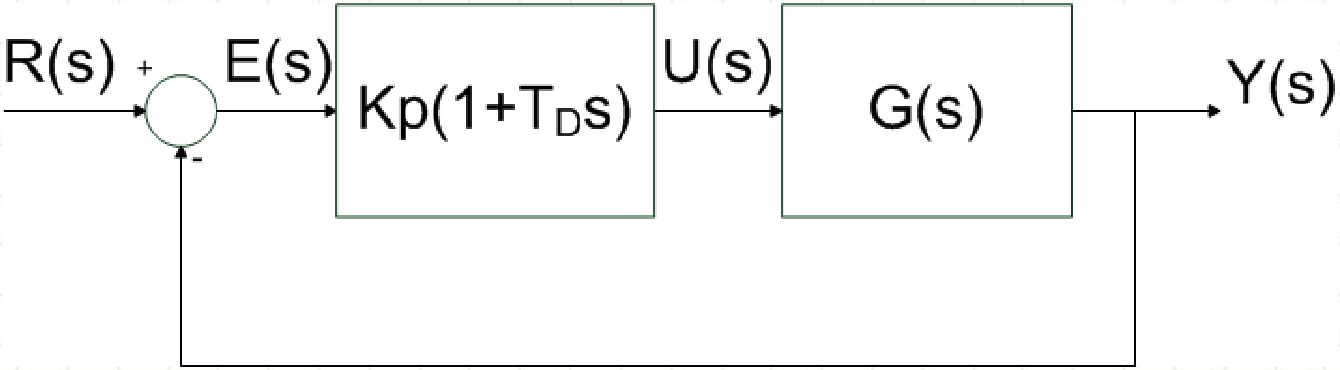
Projeto	Parâmetros	M_P	t_S	e_∞
1	$T_D=2$ e $K_P=3$	2,5%	4,98	1,50
	$T_D=3$ e $K_P=4$	1,0%	2,99	1,38
	$T_D=4$ e $K_P=5$	0,0%	3,06	1,30
2	$T_D=3{,}5$ e $K_P=5$	1,5%	2,50	1,20
	$T_D=5{,}5$ e $K_P=5$	0,0%	4,97	1,60
3	$T_D=3$ e $K_P=4$	1,0%	2,99	1,25
	$T_D=4$ e $K_P=4$	0,0%	4,60	1,63

Projeto 1 – Contorno das Raízes
Projeto 2 - Fixa Kp=5, varia Td
Projeto 3 - Fixa Kp=4, varia Td

Compara Projetos – PD Misto Ideal

Projeto	Parâmetros	M_P	t_S	e_∞
1	T_D=4 e K_P=5	0,0%	3,06	1,30
2	**T_D=3,5 e K_P=5**	**1,5%**	**2,50**	**1,20**
3	T_D=3,0 e K_P=4	1,0%	2,99	1,25

Projeto 4 – PD Série Ideal



Em malha fechada tem-se:

$$T(s) = \frac{2K_P(1+T_D s)}{s(s+1)(s+5) + 2K_P(1+T_D s)}$$

$$\Delta(s) = s^3 + 6s^2 + (5 + 2T_D K_P)s + 2K_P$$

$$\Downarrow$$

$$1 + T_D \frac{2K_P s}{s^3 + 6s^2 + 5s + 10} = 0$$

Projeto 4 – PD Série Ideal (Varia T_D)

Metodologia: fixar K_P e variar T_D

Fixando Kp=5 (do projeto anterior):

$$1 + T_D \frac{10s}{s^3 + 6s^2 + 5s + 10} = 0$$

$$Kp = 5 \quad \Rightarrow \quad 0{,}628 < T_D < 1{,}16$$

Projeto 4 – PD Série Ideal (Varia T_D)

Neste caso, o erro de regime permanente é independente de T_D:

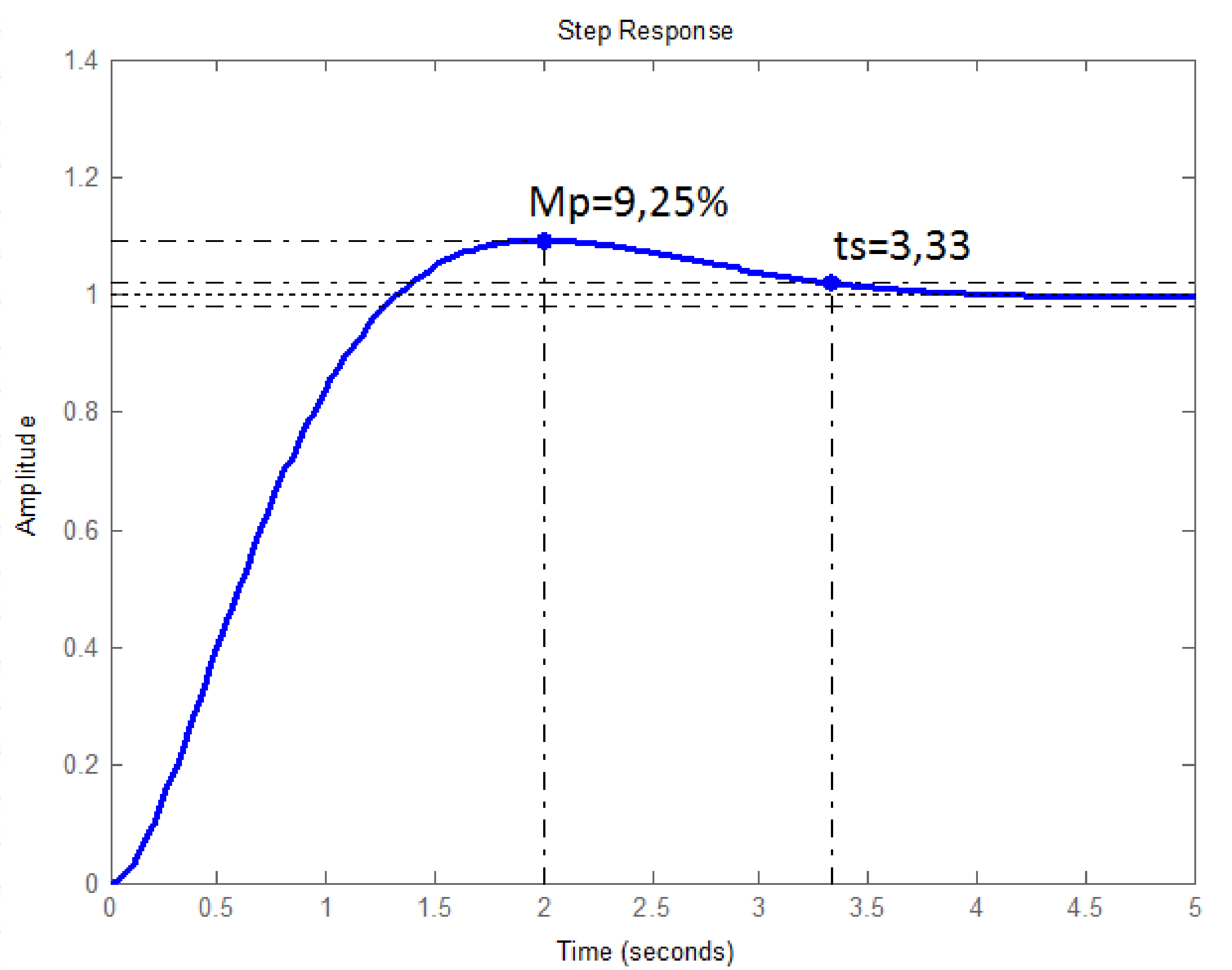
$$e_\infty = \frac{5}{2Kp} = 0,5$$

Observa-se que, para valores pequenos de T_D, a especificação não será atendida:

$$T_D = 0,65 \quad \Rightarrow \quad T_1(s) = \frac{10(1 + 0,65s)}{s^3 + 6s^2 + 11,5s + 10}$$

$$p_{1,2} = -1,22 \pm j1,15 \quad p_3 = -3,56 \quad z = -1,54$$

Projeto 4 – PD Série Ideal (Varia T_D)



Projeto 4 – PD Série Ideal (Varia T_D)

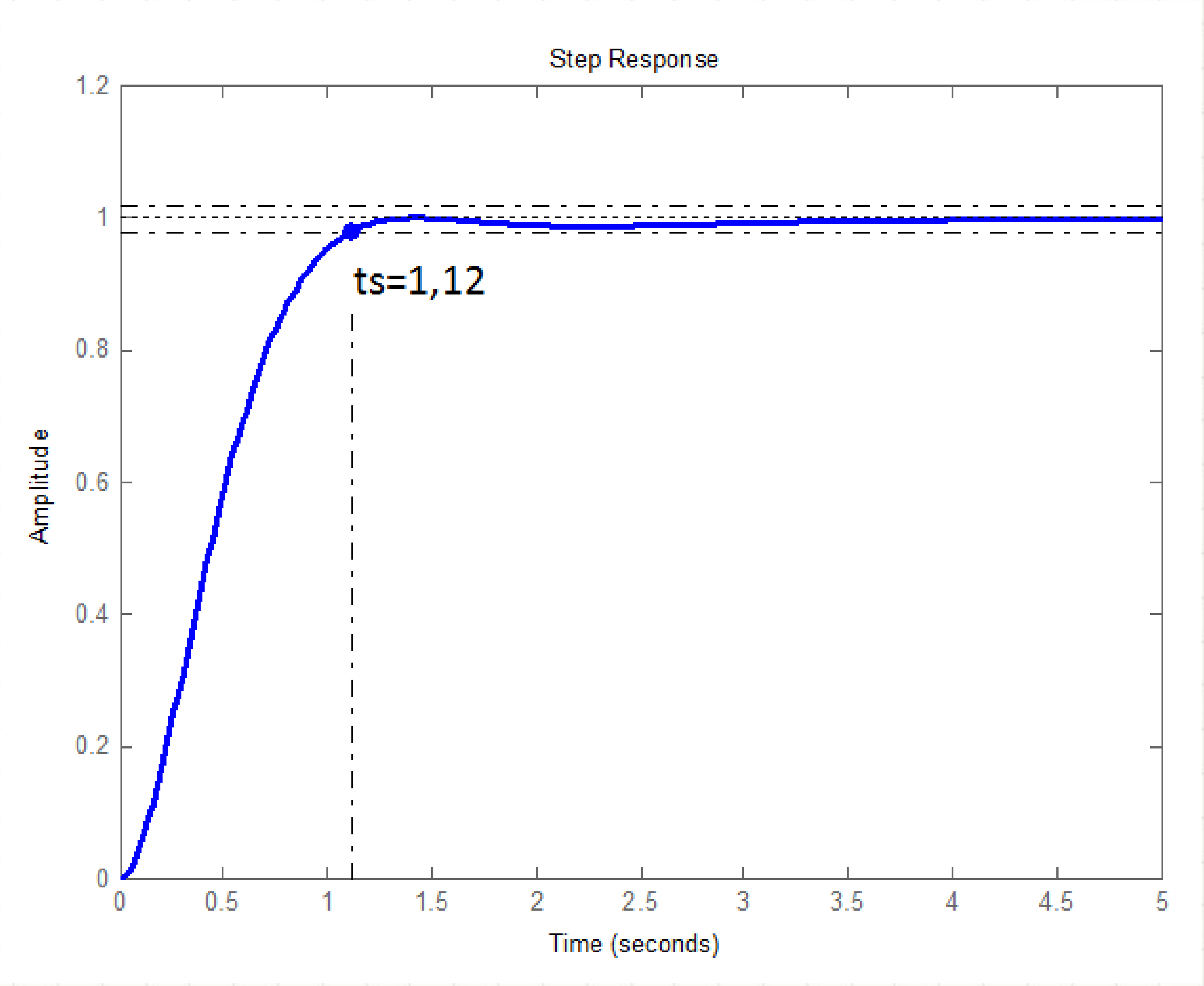
A presença do zero próximo aos polos dominantes gera o aumento excessivo do sobressinal.

Aumentando o valor de T_D, ocorre uma troca na dominância dos polos.

$$T_D = 1{,}15 \quad \Rightarrow \quad T_2(s) = \frac{10(1 + 1{,}15s)}{s^3 + 6s^2 + 16{,}5s + 10}$$

$$p_1 = -0{,}815 \quad p_{2,3} = -2{,}59 \pm j2{,}36 \quad z = -0{,}87$$

Projeto 4 – PD Série Ideal (Varia T_D)



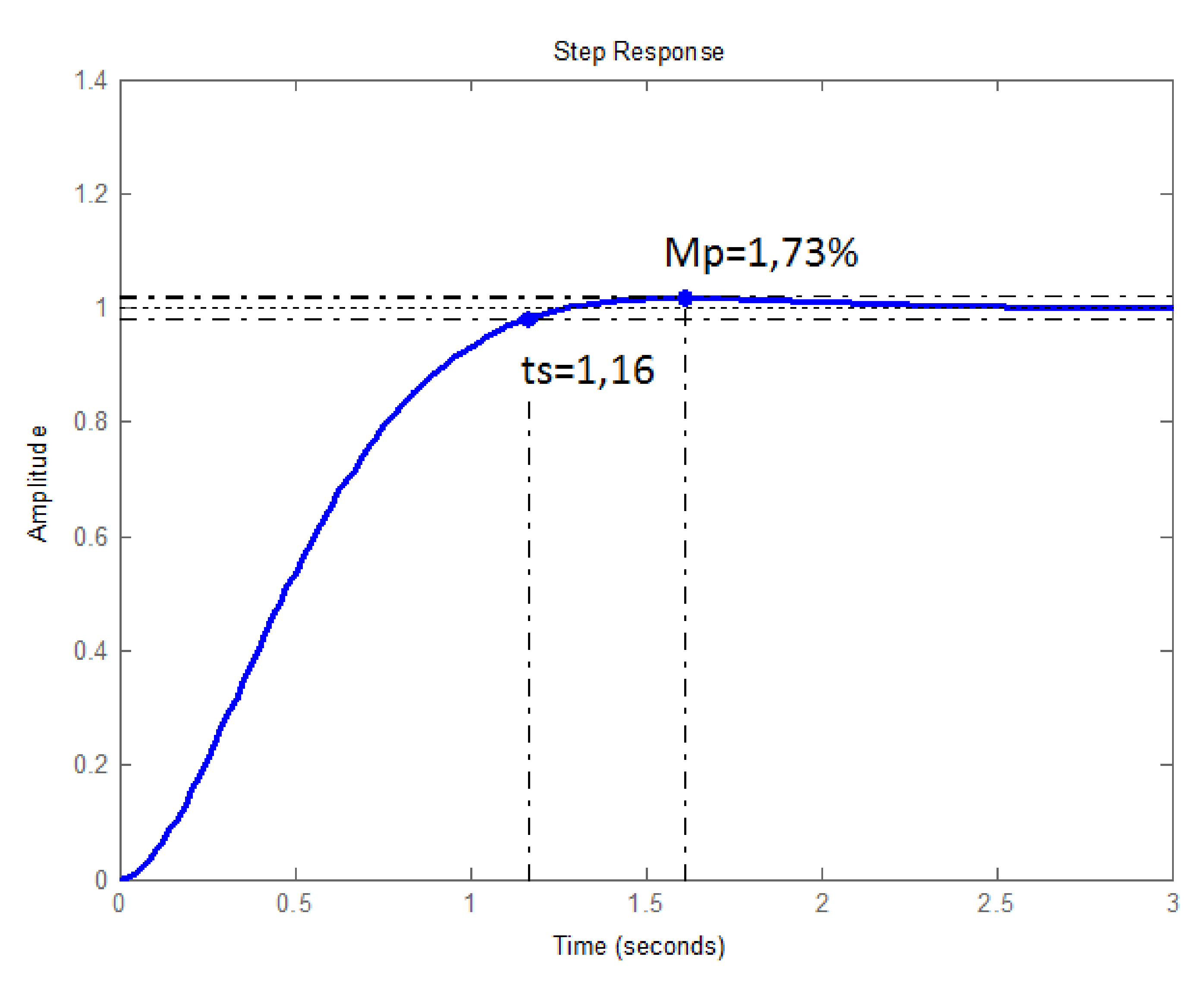
Projeto 4 – PD Série Ideal (Varia T_D)

Em particular, para T_D=1, ocorre um **cancelamento polo/zero**.

$$T_D = 1 \quad \Rightarrow \quad T_3(s) = \frac{10}{s^2 + 5s + 10}$$

$$p_{1,2} = -2{,}5 \pm j1{,}94 \Rightarrow \begin{cases} M_p = 1{,}73\% \\ t_S = 1{,}16 \end{cases}$$

Projeto 4 – PD Série Ideal (Varia T_D)



Compara Projetos – PD Misto x PD Série

Projeto	Parâmetros	M_P	t_S	e_∞
Misto	T_D=3,5 e K_P=5	1,50%	2,51	1,20
Série	T_D=1 e K_P=5	1,73%	1,16	0,50

Cancelamento Polo/Zero

O cancelamento Polo/Zero (planta/controlador) pode ser utilizado para a redução de modelos e, consequentemente, a simplificação de projeto de controladores.

Entretanto, algumas condições devem ser observadas para a realização do cancelamento.

É sempre possível cancelar polos estáveis (malha aberta) que estejam dentro da região desejada para a alocação dos polos dominantes de malha fechada.

Portanto, polos instáveis ou fora da região desejada não devem ser cancelados. Porque?????

Cancelamento Polo/Zero

Porque não cancelar polos instáveis de malha aberta?

a) Se existir uma perturbação entre o controlador e a planta, a saída do sistema poderá ser levada à instabilidade uma vez que o polo instável da planta ainda existirá.

b) Se existir algum erro de modelagem, o cancelamento não ocorrerá e o polo instável continuará existindo, podendo levar o sistema à instabilidade em malha fechada.

Cancelamento Polo/Zero

Porque cancelar apenas polos na região desejada?

Se o cancelamento não for perfeito (por erros de modelagem) o polo não cancelado ainda continuará existindo, porém estará dentro da região desejada.

Controlador em Avanço

Seja o controlador em avanço:

$$C(s) = K\,\frac{s+b}{s+\alpha b} \qquad \begin{array}{l} b > 0 \\ \alpha > 1 \end{array}$$

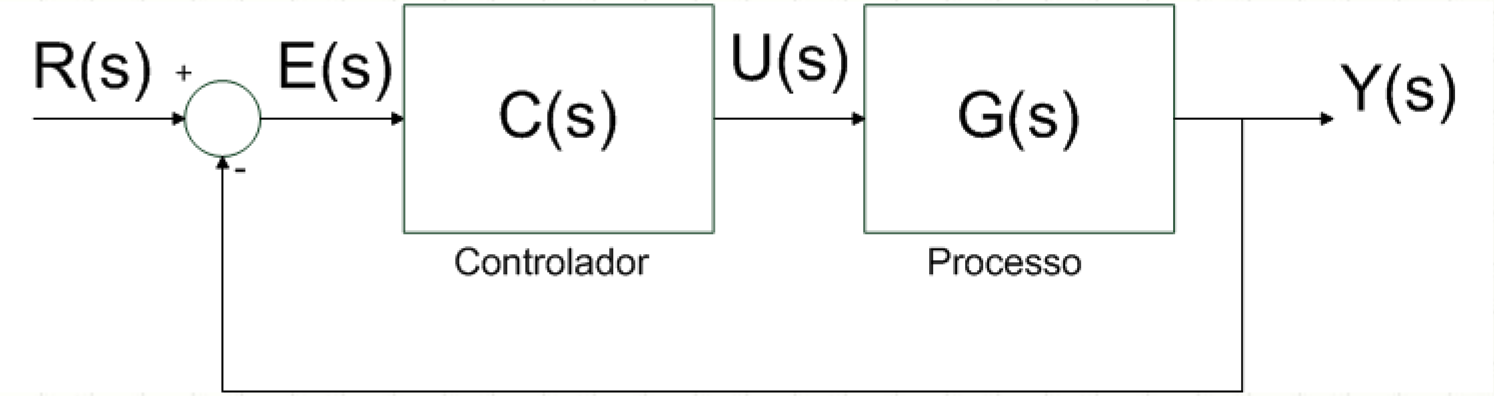
A adição deste controlador aumenta a ordem do sistema aumentando assim a complexidade do projeto.

Além disso, o controlador adiciona um zero à malha direta o que pode gerar um aumento no sobressinal.

Neste caso, o cancelamento polo/zero, se possível, será conveniente.

Controlador em Avanço

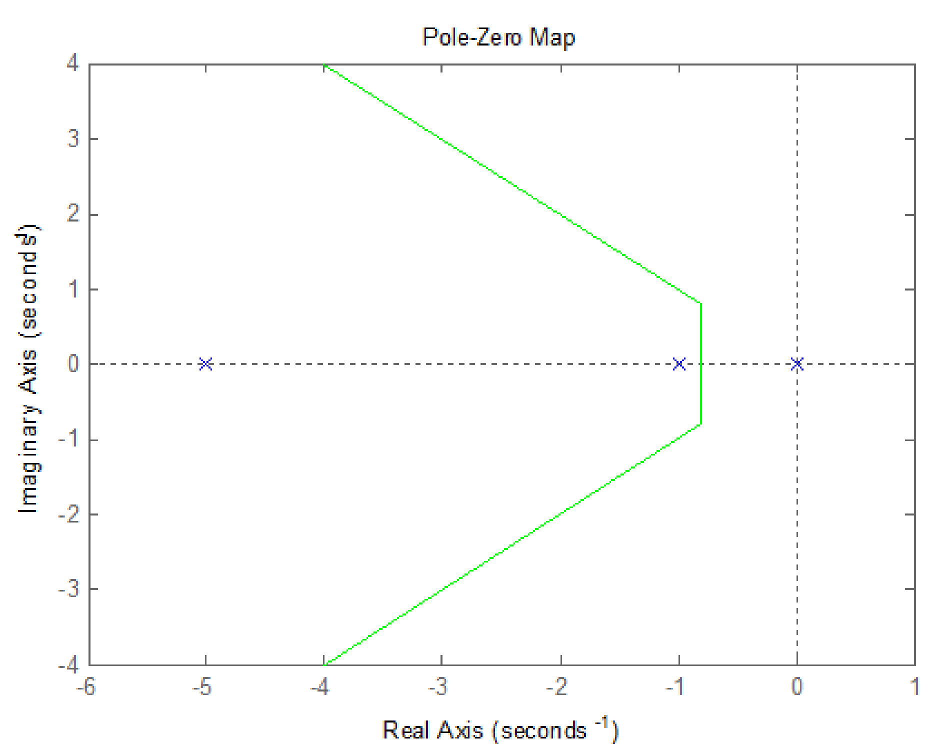
Exemplo em estudo:



$$G(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+5)} \qquad C(s) = K\frac{s+b}{s+\alpha b}$$

O cancelamento polo/ zero pode ser utilizado?
Se sim, qual polo cancelar?

Controlador em Avanço



Dentro da região desejada existem dois polos que poderiam ser cancelados.

A melhor escolha é cancelar o polo em -1, por ser o mais lento.

Considerando o cancelamento polo/zero (b=1):

$$C(s) = K\frac{s+1}{s+\alpha}$$

Projeto 5 – Controlador em Avanço

<u>Metodologia:</u> fixar K e variar α (usando cancelamento)

Neste caso,

$$C(s)G(s)=\frac{K(s+1)}{s+\alpha}\frac{2}{s(s+1)(s+5)}=\frac{2K}{s(s+\alpha)(s+5)}$$

Definindo K = 5 (dos projetos anteriores)

$$T(s)=\frac{10}{s(s+\alpha)(s+5)+10}$$

e

$$\Delta(s)=s^3+(\alpha+5)s^2+5\alpha s+10$$

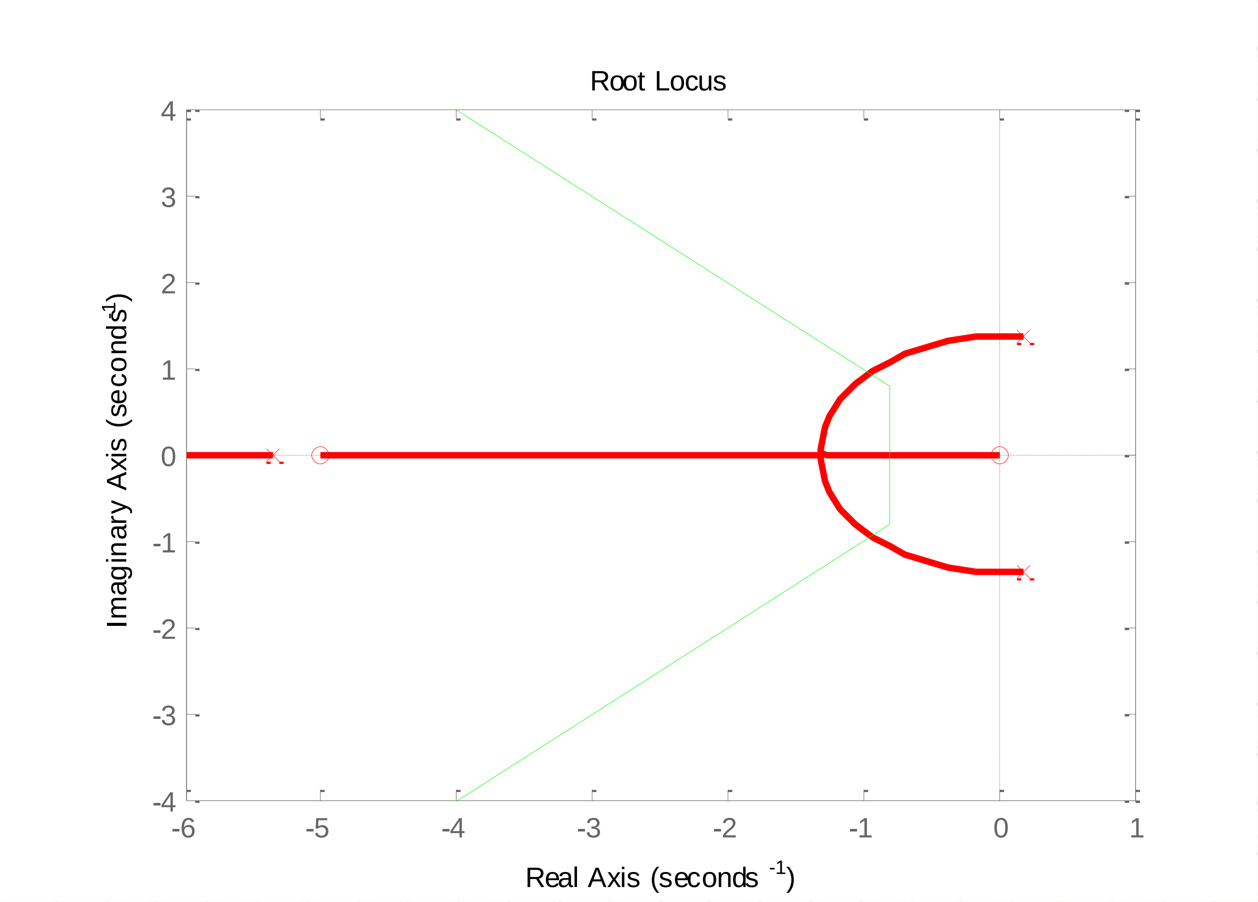
Projeto 5 – Controlador em Avanço

A partir da interseção do LR traçado para

$$1+\alpha\frac{s(s+5)}{s^3+5s^2+10}=0$$

com a região desejada, serão definidos os limites do parâmetro α.

Projeto 5 – Controlador em Avanço



Especificação de sobressinal: $\alpha > 2{,}47$

Especificação de tempo de acomodação: $2{,}13 < \alpha < 3{,}77$

Projeto 5 – Controlador em Avanço

Portanto, para atender ambas as especificações:

$$2{,}47 < \alpha < 3{,}77$$

Para a especificação de erro de regime permanente:

$$Kv = \lim_{s \to 0} s \frac{2K}{s(s+\alpha)(s+5)} = \frac{10}{5\alpha}$$

ou seja,

$$e_\infty = \frac{5\alpha}{2K} = \frac{5\alpha}{10}$$

Assim, quanto menor o valor de α menor será o erro de regime permanente.

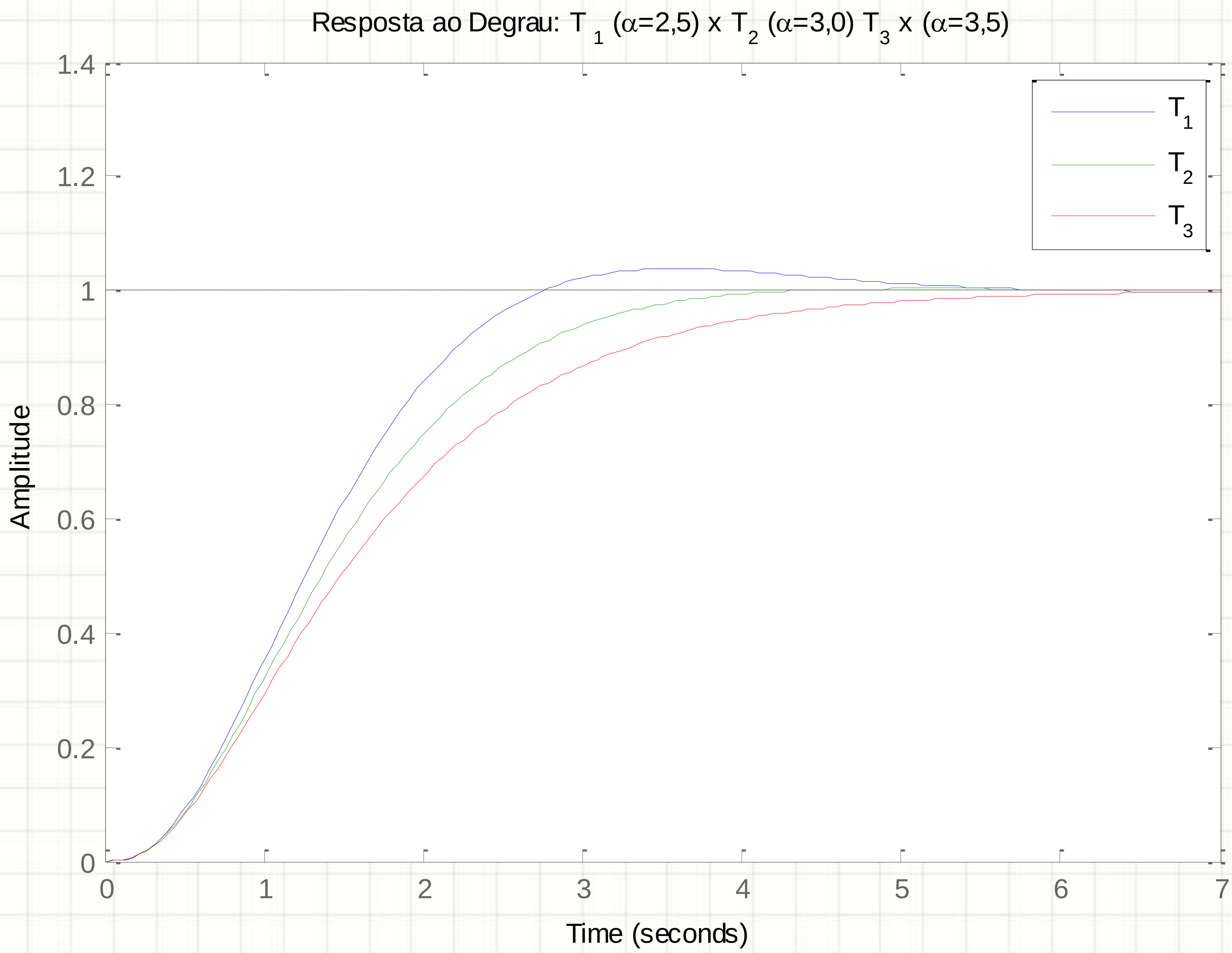
Projeto 5 – Controlador em Avanço

Para diferentes escolhas de α tem-se:

$$\mathrm{T}_1: \quad \alpha = 2{,}5 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_P = 3{,}8\% \\ t_S = 4{,}6 \end{cases} \Rightarrow e_\infty = 1{,}25$$

$$\mathrm{T}_2: \quad \alpha = 3{,}0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_P = 0{,}3\% \\ t_S = 3{,}58 \end{cases} \Rightarrow e_\infty = 1{,}5$$

$$\mathrm{T}_3: \quad \alpha = 3{,}5 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_P = 0\% \\ t_S = 4{,}94 \end{cases} \Rightarrow e_\infty = 1{,}75$$



Resposta ao Degrau: T 1 (α=2,5) x T 2 (α=3,0) T 3 x (α=3,5)
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
Amplitude
0
1
2
3
4
5
6
7
Time (seconds)
T1
T2
T3

Projeto 6 – Controlador em Avanço

Metodologia: fixar α e variar K (usando cancelamento)

Sendo

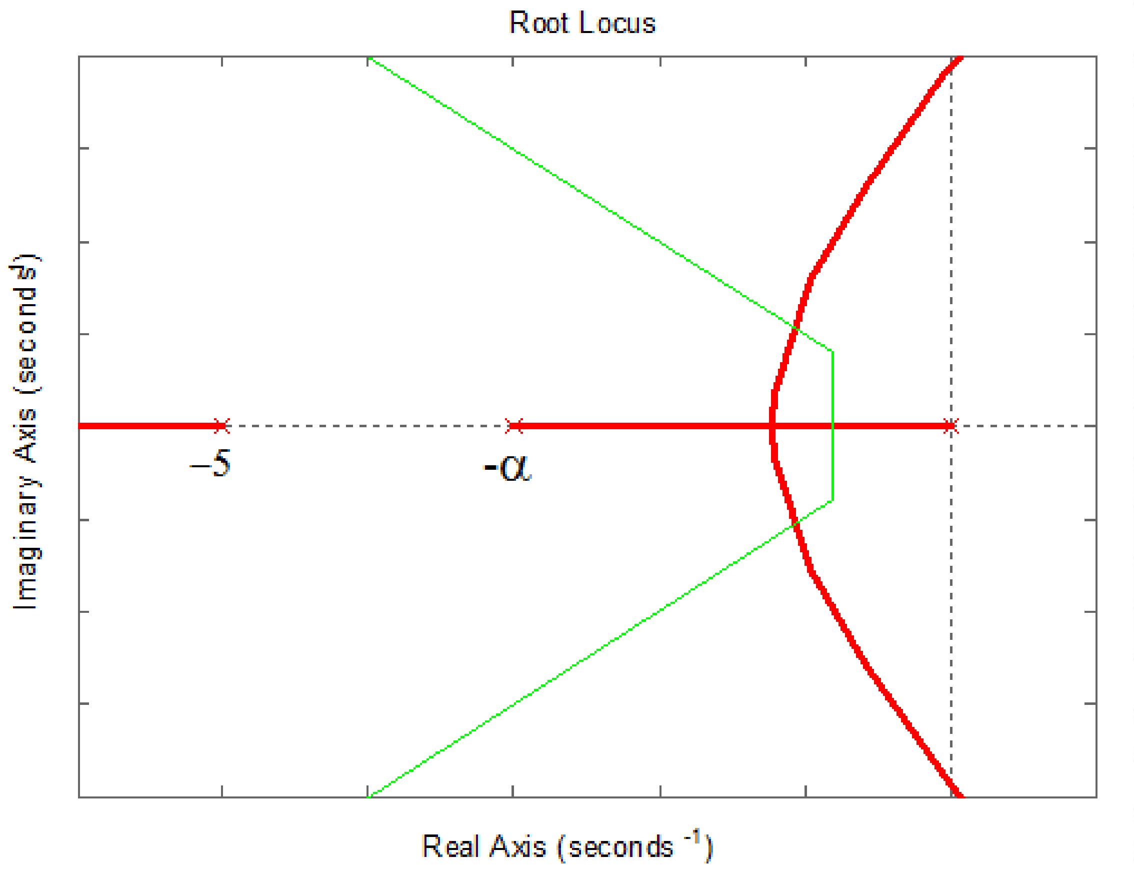
$$\Delta(s) = s^3 + (\alpha + 5)s^2 + 5\alpha s + 2K$$

o LR deverá ser traçado para

$$1 + K\frac{2}{s(s+\alpha)(s+5)} = 0$$

Como definir o valor de α?

Projeto 6 – Controlador em Avanço



1º Para ser um controlador em avanço: $\alpha > 1$

2º Quanto maior o valor de α mais à esquerda (dentro da região, estará o ponto de ramificação).

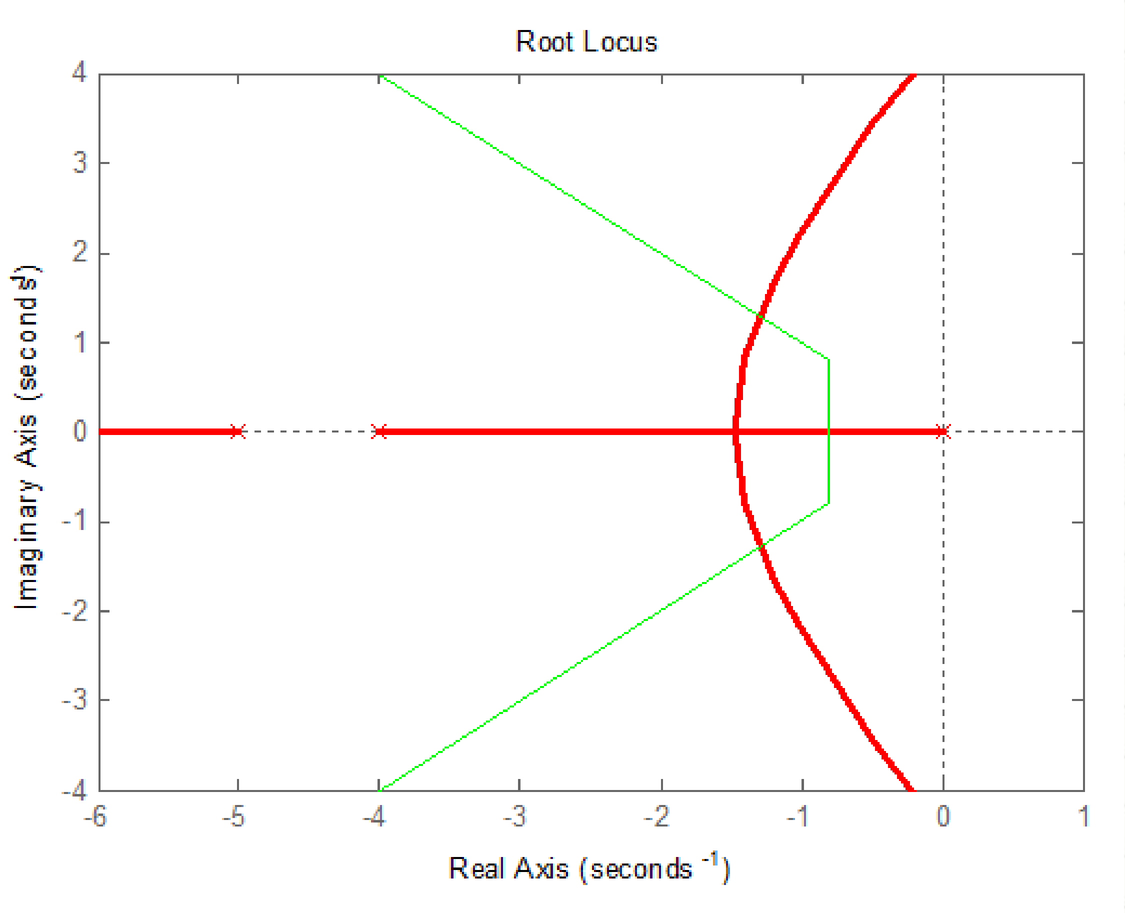
Projeto 6 – Controlador em Avanço

Fixando α=4, o LR será traçado para

$$1+K\frac{2}{s(s+4)(s+5)}=0$$

e interseção deste com a região desejada definirá os limites do parâmetro K.

Projeto 6 – Controlador em Avanço



Especificação de sobressinal: $0 < K < 10,8$

Especificação de tempo de acomodação: $5,4 < \alpha < 30,2$

Projeto 6 – Controlador em Avanço

Portanto, para atender ambas as especificações:

$$5{,}4 < K < 10{,}8$$

Para a especificação de erro de regime permanente:

$$Kv = \lim_{s \to 0} s \frac{2K}{s(s+4)(s+5)} = \frac{K}{10}$$

ou seja,

$$e_\infty = \frac{10}{K}$$

Assim, quanto maior o valor de K menor será o erro de regime permanente.

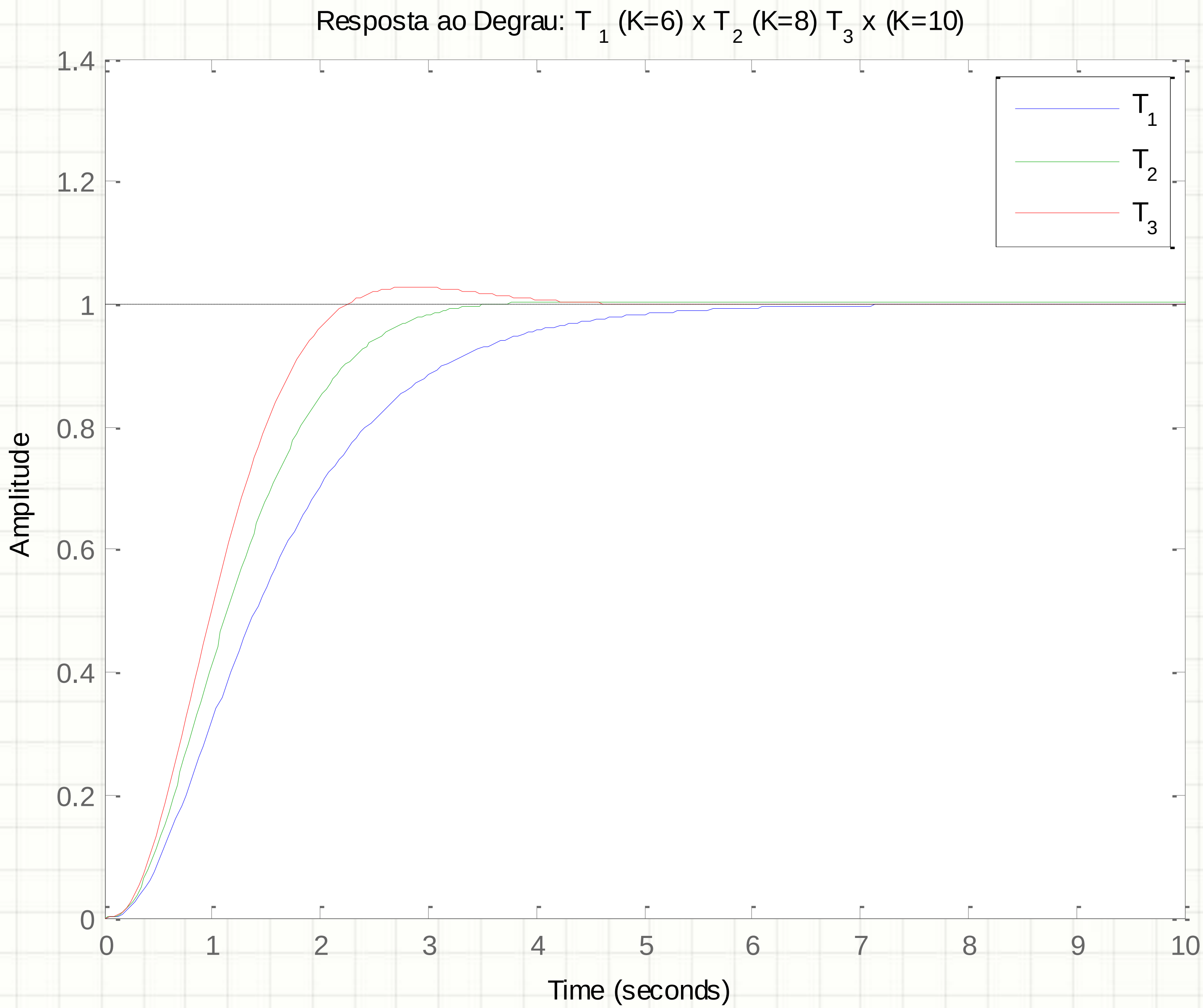
Projeto 6 – Controlador em Avanço

Para diferentes escolhas de K tem-se:

$$\mathrm{T}_1: \quad K = 6 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_P = 0\% \\ t_S = 4{,}78 \end{cases} \Rightarrow e_\infty = 1{,}67$$

$$\mathrm{T}_2: \quad K = 8 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_P = 0{,}3\% \\ t_S = 2{,}95 \end{cases} \Rightarrow e_\infty = 1{,}25$$

$$\mathrm{T}_3: \quad K = 10 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_P = 2{,}76\% \\ t_S = 3{,}4 \end{cases} \Rightarrow e_\infty = 1{,}0$$



Resposta ao Degrau: T 1 (K=6) x T 2 (K=8) T 3 x (K=10)
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
Amplitude
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Time (seconds)
T1
T2
T3

Projeto 7 – Controlador em Avanço

Metodologia: definir uma posição exata para os polos dominantes de MF.

A partir das especificações:

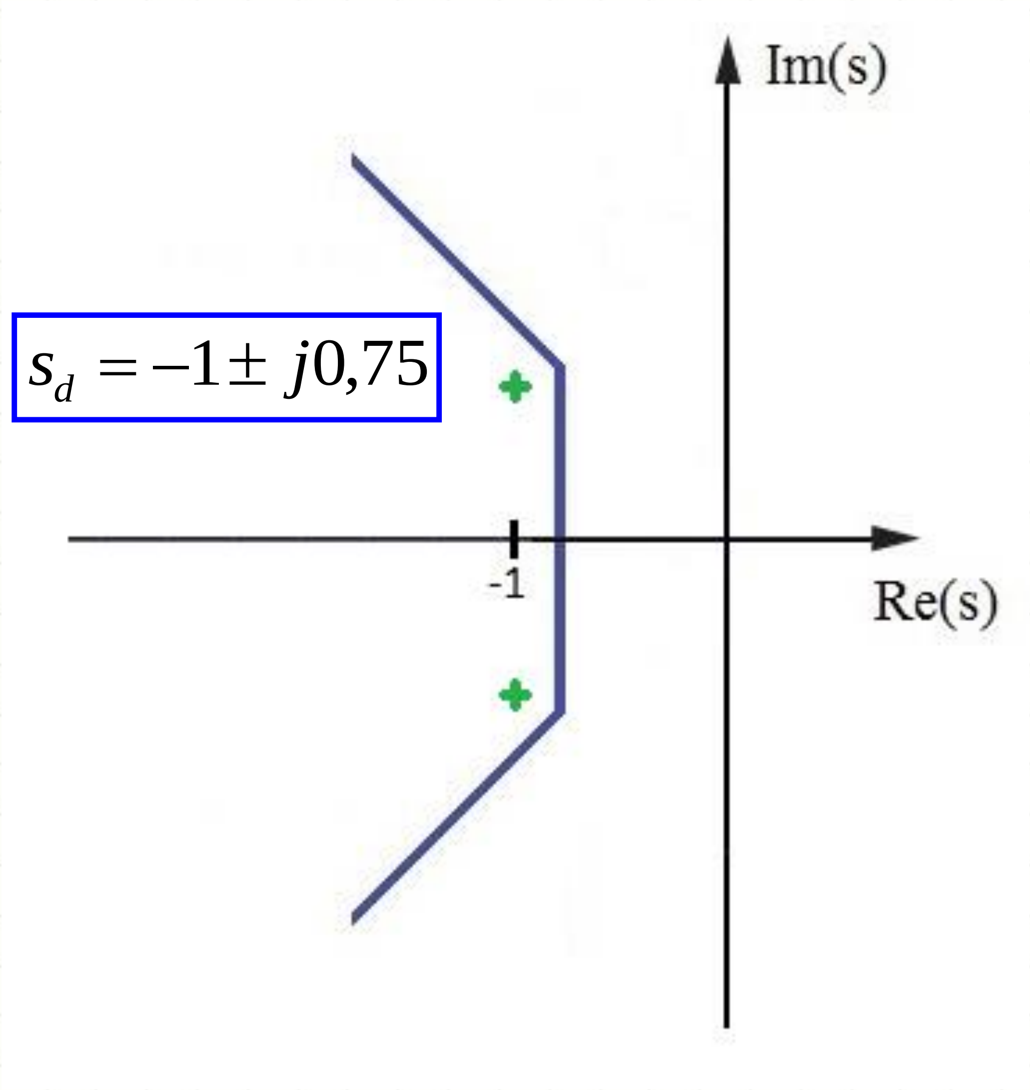
$$M_P < 5\% \quad \Rightarrow \quad \xi > 0{,}69\left(\theta < 46^{\circ}\right)$$
$$t_s < 5seg \quad \Rightarrow \quad \sigma > 0{,}8$$

define-se a posição desejada para os polos dominantes de MF:

$$\xi > 0{,}69 \quad \Rightarrow \quad \xi \equiv 0{,}8$$
$$\sigma > 0{,}8 \quad \Rightarrow \quad \sigma \equiv 1$$

$$\boxed{s_d = \sigma \pm j\omega_d = -1 \pm j0{,}75}$$

Projeto 7 – Controlador em Avanço



Projeto 7 – Controlador em Avanço

Para os polos desejados pertencerem ao LR, ou seja, serem polos de malha fechada do sistema, é necessário satisfazer a condição de fase para s=sd:

$$\angle C(s_d)G(s_d) = 180^{\circ}(2q+1)$$

ou

$$\angle C(s_d) = 180^{\circ}(2q+1) - \angle G(s_d) \approx 64^{\circ}$$

Portanto, a contribuição de fase do controlador em avanço será de 64°.

Projeto 7 – Controlador em Avanço

Usando o mesmo cancelamento polo/zero mostrado anteriormente, ou seja, b=1, tem-se

$$C(s) = K\frac{s+1}{s+\alpha}$$

Da condição de fase

$$\angle C(s_d) = \angle(s_d + 1) - \angle(s_d + \alpha)$$

$$= 90^\circ - \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{0{,}75}{-1+\alpha}\right) = 64^\circ$$

Resolvendo a equação

$$\alpha = 2{,}54$$

Projeto 7 – Controlador em Avanço

O ganho K é determinado pela condição de módulo

$$K = \frac{1}{\left| C(s_d)G(s_d) \right|}$$

sendo

$$C(s)G(s) = \frac{2}{s(s+5)(s+2{,}54)}$$

Resolvendo a equação

$$K = 4{,}36$$

Portanto,

$$C(s) = 4{,}36\frac{s+1}{s+2{,}54}$$

Projeto 7 – Controlador em Avanço

O erro de regime permanente será

$$e_{\infty} = \frac{5\alpha}{2K} = 1{,}45$$

<u>Verificação</u>

$$C(s)G(s) = \frac{4{,}36 \times 2}{s(s+2{,}54)(s+5)}$$

$$T(s) = \frac{8{,}72}{s(s+2{,}54)(s+5)+8{,}72} \quad \Rightarrow \begin{cases} M_P = 1{,}45\% \\ t_S = 3{,}2 \end{cases}$$

$$p_{1,2} = -1 \pm j0{,}752 \qquad p_3 = -5{,}53$$

Projeto 8 – Controlador em Avanço

Metodologia: idem anterior, sem usar cancelamento.

Mantidos os mesmos polos desejados de malha fechada

$$s_d = -1 \pm j0{,}75$$

a contribuição de fase do controlador também será mantida em 64°. Assim,

$$\angle C(s_d) = \angle(s_d + b) - \angle(s_d + \alpha b) = 64^\circ$$

Como obter os parâmetros b e α ?

- Solução gráfica (Ogata) – usando relação de ângulos
- Solução numérica
- Definir o valor de α

Projeto 8 – Controlador em Avanço

Para $\alpha = 5$, tem-se

$$\angle C(s_d) = \angle(s_d + b) - \angle(s_d + 5b) = 64^\circ$$

$$= \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{0{,}75}{b-1}\right) - \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{0{,}75}{5b-1}\right) = 64^\circ$$

Aplicando a relação

$$\mathrm{tg}^{-1}(\mathrm{A}) - \mathrm{tg}^{-1}(\mathrm{B}) = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{1+\mathrm{AB}}\right)$$

com

$$\mathrm{A} = \frac{0{,}75}{\mathrm{b}-1} \quad \mathrm{e} \quad \mathrm{B} = \frac{0{,}75}{5\mathrm{b}-1}$$

chega-se a

$$\mathrm{b} = 1{,}24$$

Projeto 8 – Controlador em Avanço

Portanto

$$C(s) = 12{,}73\frac{s+1{,}24}{s+6{,}12}$$

O erro de regime permanente será $$e_\infty = \frac{5\alpha}{2K} = 0{,}982$$

<u>Verificação</u>

$$C(s)G(s) = \frac{12{,}73\times 2\times(s+1{,}24)}{s(s+1)(s+5)(s+6{,}2)}$$

$$T(s) = \frac{25{,}46(s+1{,}24)}{s^4+12{,}2s^3+42{,}2s^2+56{,}46s+31{,}57} \Rightarrow \begin{cases} M_P = 4{,}15\% \\ t_S = 4{,}5 \end{cases}$$

$$p_{1,2} = -1 \pm j0{,}746 \quad p_3 = -2{,}68 \quad p_4 = -7{,}5$$

Compara Projetos – Avanço

Projetos	Parâmetros	M_P	t_S	e_∞
5	α=3 e K=5	0,3%	3,58	1,50
6	α=4 e K=8	0,3%	2,95	1,25
7	α=2,54 e K=4,36	1,5%	3,20	1,45
8	α=5 e K=12,73	4,2%	4,50	0,98

Projeto por Alocação direta de polos

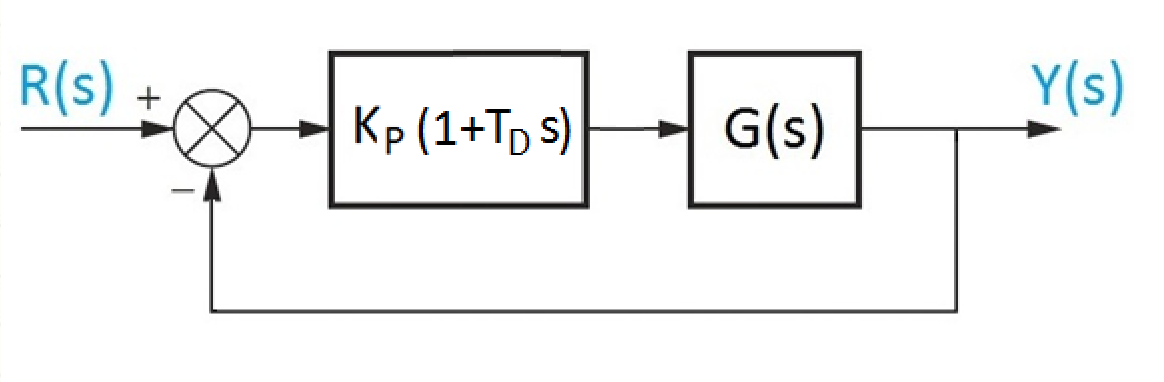
Definida a posição desejada para os polos dominantes de malha fechada compara-se o polinômio característico associado com o polinômio do sistema com controlador.

Observações:

- dependendo da ordem do sistema a solução do problema pode não ser trivial.
- o método define a posição dos polos sem levar em consideração os zeros do sistema.

Projeto por Alocação direta de polos

Projeto 9 - PD série Ideal



Neste caso,

$$C(s)G(s)=\frac{2K_P(1+T_D s)}{s(s+1)(s+5)}$$

e

$$\Delta(s)=s(s+1)(s+5)+2K_P(1+T_D s)$$
$$=s^3+6s^2+(5+2K_P T_D)s+2K_P$$

Alocação Direta – PD Série Ideal

Usando os mesmos polos desejados de malha fechada definidos anteriormente obtém-se o polinômio desejado para malha fechada.

$$s_d = -1 \pm j0{,}75 \quad \rightarrow \quad s^2 + 2s + 1{,}5625$$

Como o sistema é de 3ª ordem, existirá um polo adicional. Assim, o polinômio desejado para malha fechada torna-se:

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= (s^2 + 2s + 1{,}5625)(s + p_3) \\ &= s^3 + (2 + p_3)s^2 + (1{,}5625 + 2p_3)s + 1{,}5625p_3 \end{aligned}$$

Alocação Direta – PD Série Ideal

Igualando os polinômios

$$\begin{aligned} 2K_P &= 1{,}5625 p_3 \\ 5 + 2K_P T_D &= 1{,}5625 + 2p_3 \\ 6 &= 2 + p_3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} K_P &= 3{,}125 \\ T_D &= 0{,}73 \\ p_3 &= 4 \end{aligned}$$

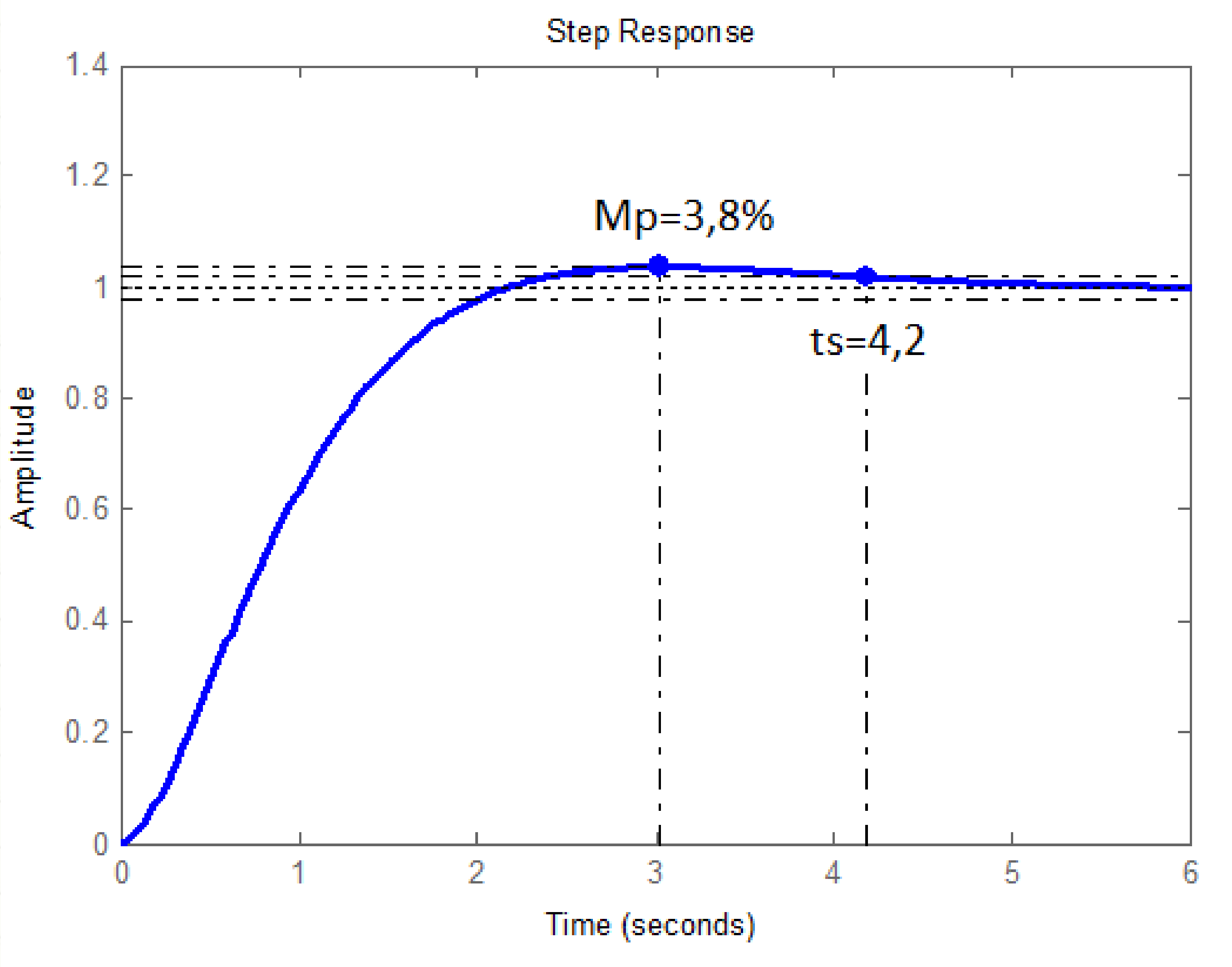
Assim,

$$T(s) = \frac{6{,}25(1 + 0{,}73s)}{s^3 + 6s^2 + 9{,}2625s + 6{,}25}$$

$$\begin{aligned} z &= -1{,}37 \\ p_{1,2} &= -1 \pm j0{,}75 \\ p_3 &= -4 \end{aligned}$$

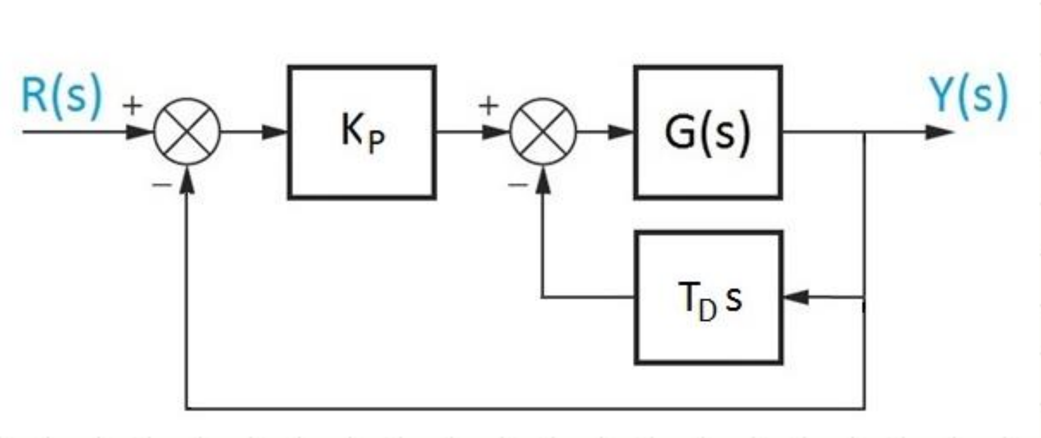
$$e_\infty = \frac{5}{2K} = 0{,}8$$

Alocação Direta – PD Série Ideal



Projeto por Alocação direta de polos

Projeto 10 - PD Misto Ideal



Neste caso,

$$T(s) = \frac{2K_P}{s(s+1)(s+5) + 2T_D s + 2K_P}$$

ou

$$\Delta(s) = s^3 + 6s^2 + (5 + 2T_D)s + 2K_P$$

Alocação Direta – PD Misto Ideal

Igualando os polinômios

$$\begin{aligned} 2K_P &= 1{,}5625 p_3 \\ 5 + 2T_D &= 1{,}5625 + 2p_3 \\ 6 &= 2 + p_3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} K_P &= 3{,}125 \\ T_D &= 2{,}28 \\ p_3 &= 4 \end{aligned}$$

Assim,

$$T(s) = \frac{6{,}25}{s^3 + 6s^2 + 9{,}2625s + 6{,}25}$$

$$e_\infty = \frac{5 + 2T_D}{2K_P} = 1{,}53$$

Alocação Direta – PD Misto Ideal

Igualando os polinômios

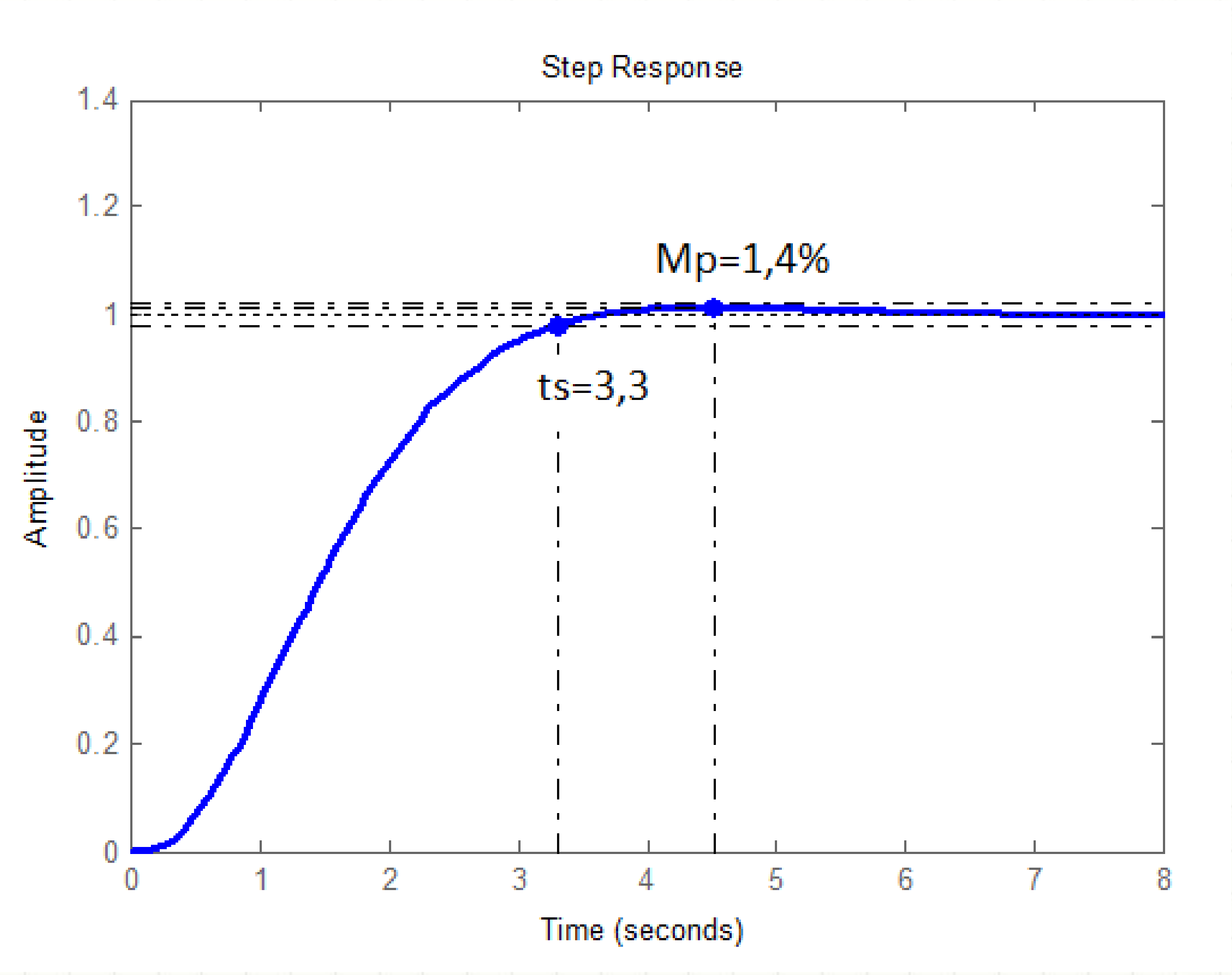
$$\begin{aligned} 2K_P &= 1{,}5625p_3 \\ 5+2T_D &= 1{,}5625+2p_3 \\ 6 &= 2+p_3 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} K_P &= 3{,}125 \\ T_D &= 2{,}28 \\ p_3 &= 4 \end{aligned}$$

Assim,

$$T(s) = \frac{6{,}25}{s^3+6s^2+9{,}2625s+6{,}25}$$

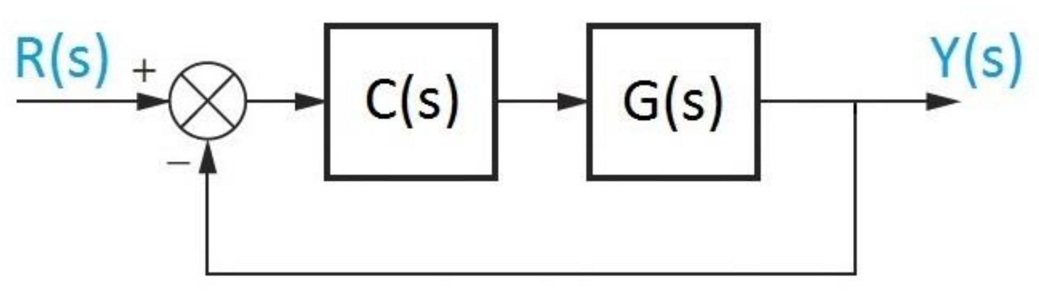
$$e_\infty = \frac{5+2T_D}{2K_P} = 1{,}53$$

Alocação Direta – PD Misto Ideal



Alocação Direta – Avanço (cancelamento)

Projeto 11 - Controlador em Avanço



Usando o cancelamento

$$C(s) = \frac{K(s+1)}{s+\alpha}$$

e

$$C(s)G(s) = \frac{2K}{s(s+5)(s+\alpha)}$$

Alocação Direta – Avanço (cancelamento)

Em malha fechada

$$\Delta(s) = s^3 + (5+\alpha)s^2 + 5\alpha s + 2K$$

Igualando os polinômios

$$\begin{aligned} 2K &= 1{,}5625 p_3 & & & K &= 4{,}3132 \\ 5\alpha &= 1{,}5625 + 2 p_3 & &\Rightarrow & \alpha &= 2{,}5208 \\ 5+\alpha &= 2 + p_3 & & & p_3 &= 5{,}5208 \end{aligned}$$

Alocação Direta – Avanço (cancelamento)

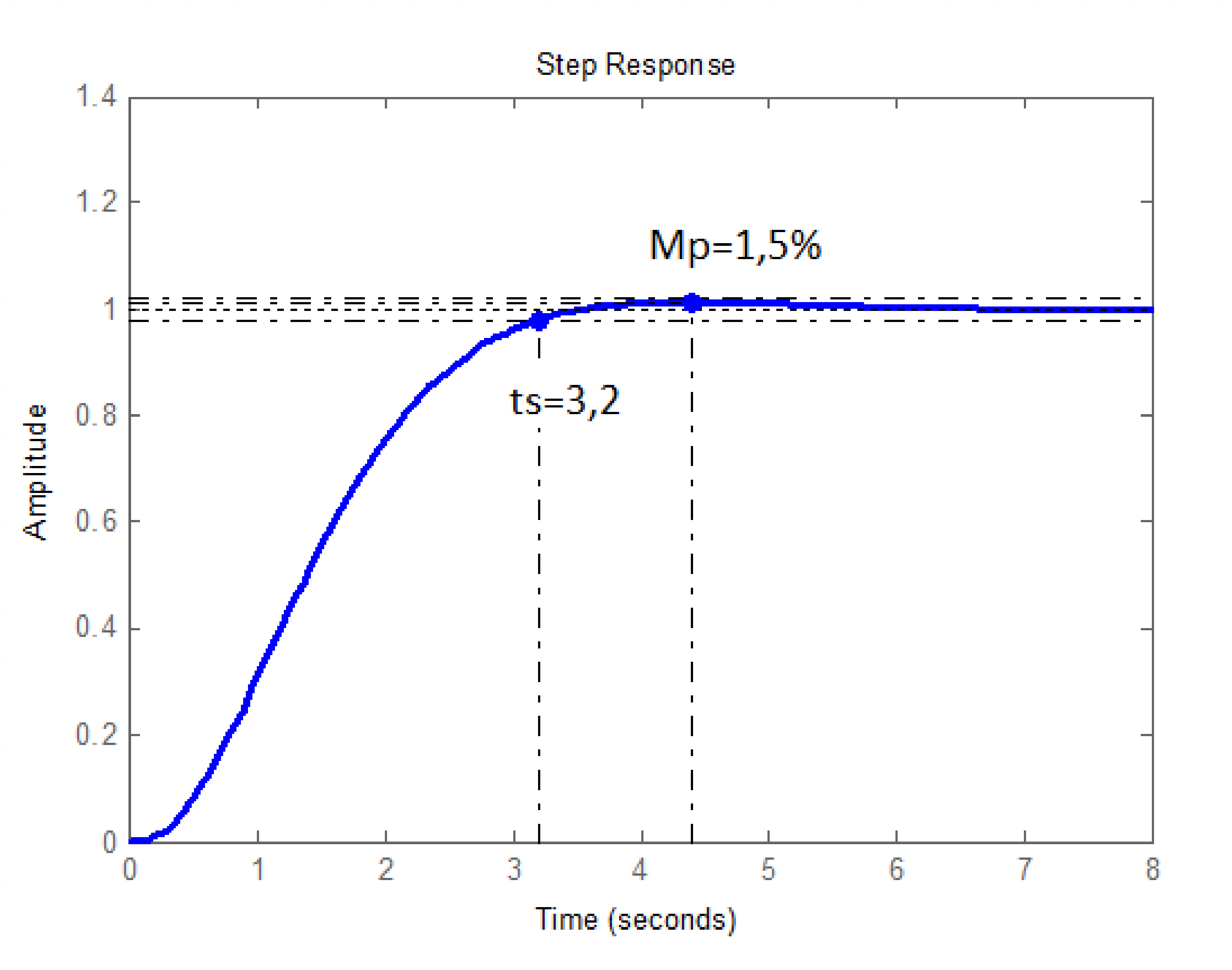
$$T(s) = \frac{8{,}63}{s^3 + 7{,}52s^2 + 12{,}6s + 8{,}63}$$

$$p_{1,2} = -1 \pm j0{,}75$$

$$p_3 = -5{,}55$$

$$e_\infty = \frac{5\alpha}{2K} = 1{,}46$$

Alocação Direta – Avanço (cancelamento)



Problema sugerido – Projeto 12

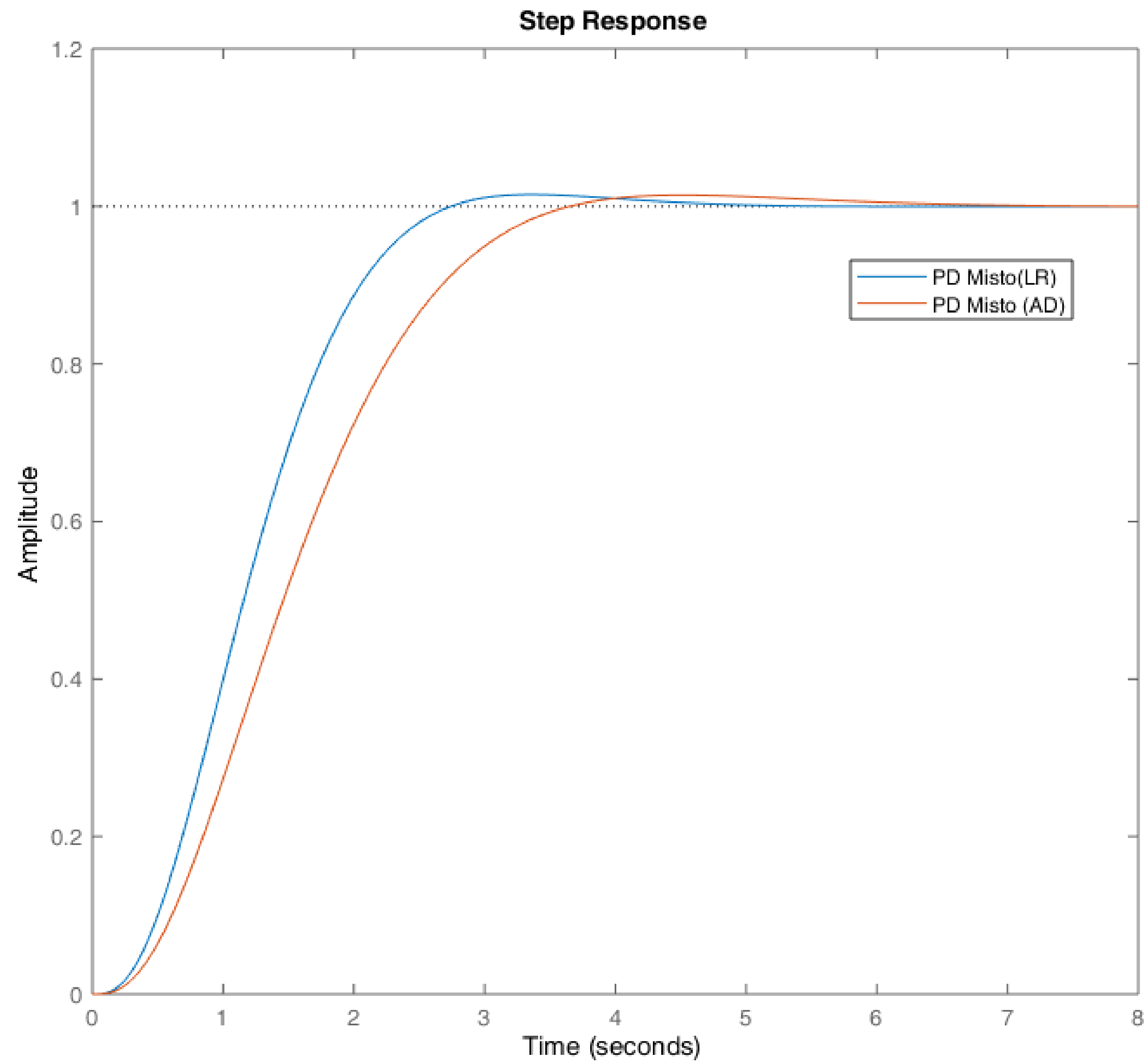
Fazer o projeto por alocação direta, para um controlador em avanço, sem o cancelamento polo/zero.

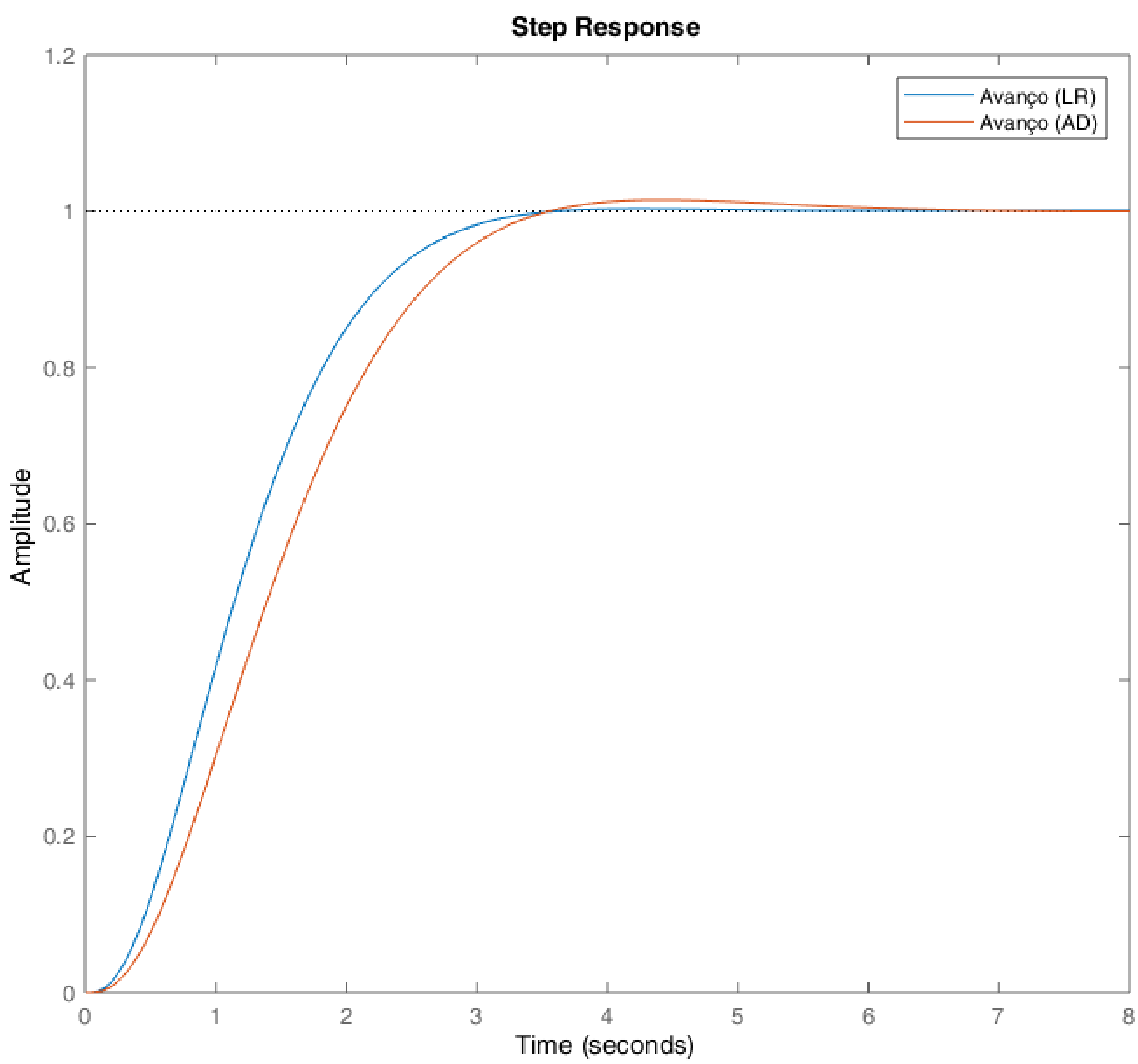
Compara Projetos – Alocação Direta

Projetos	Parâmetros	M_P	t_S	e_∞
Projeto 9 PD Serie	K_P=3,125 e T_D=0,73	3,8%	4,2	0,8
Projeto 10 PD Misto	K_P=3,125 e T_D=2,28	1,4%	3,3	1,53
Projeto 11 Avanço	α=2,52 e K=4,31	1,5%	3,25	1,46

Compara Projetos – Lugar das Raízes x Alocação Dieta

Projeto	Parâmetros	M_P	t_S	e_∞
PD Misto (LR)	T_D=3,5 e K_P=5	1,5%	2,50	1,20
PD Misto (AD)	T_D=2,28 e K_P=3,125	1,4%	3,30	1,53
Avanço (LR)	α=4 e K=8	0,3%	2,95	1,25
Avanço (AD)	α=2,52 e K=4,31	1,5%	3,25	1,46


Step Response
Amplitude
Time (seconds)
PD Misto(LR)
PD Misto (AD)
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8


Step Response
Avanço (LR)
Avanço (AD)
Amplitude
Time (seconds)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1
2
3
4
5
6
7
8