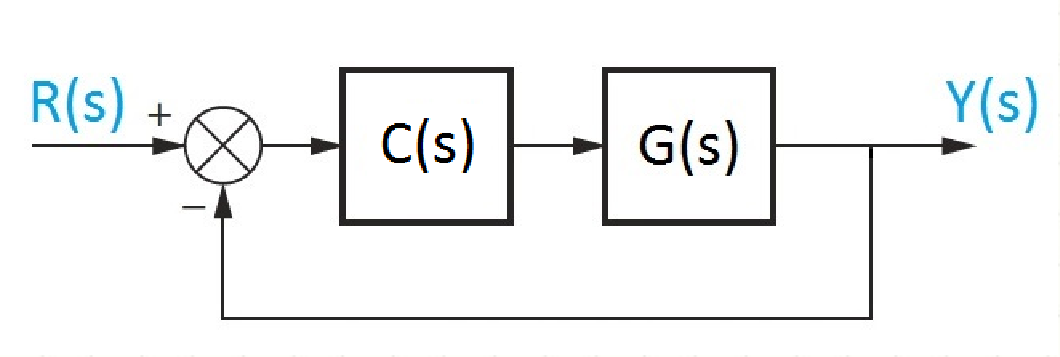
Projeto de Controladores Usando Lugar das raízes

PI, Atraso e Avanço-Atraso

Profa. Cristiane Paim

Controladores em Atraso

Seja a configuração de controle em série;



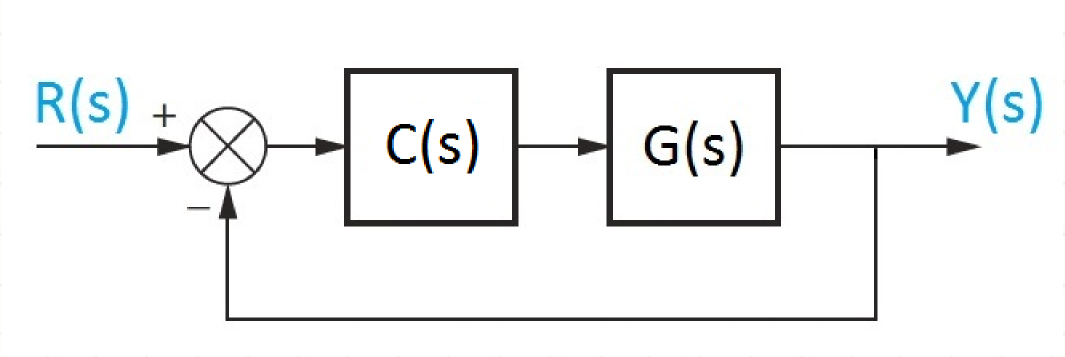
A estrutura do controlador é mesma do controlador em avanço:

$$C(s) = K\frac{s+b}{s+\alpha b} \qquad b>0 \quad 0 \le \alpha < 1$$

Em geral, os controladores em atraso são utilizados com o objetivo de melhorar o regime permanente.

Controladores em Atraso

Seja a configuração de controle em série, sendo G(s) um sistema do tipo 1.



Considere inicialmente um controle proporcional, ou seja, C(s)=K. Neste caso, o erro de regime permanente à entrada rampa será definido por

$$e_{\infty} = \frac{1}{K_V} \qquad K_V = \lim_{s \to 0} sKG(s) = KG(0)$$

Controladores em Atraso

Seja agora C(s) um controlador em atraso, ou seja,

$$C(s) = K\,\frac{s+b}{s+\alpha\,b}$$

neste caso, o coeficiente de velocidade torna-se

$$\overline{K}_V = \lim_{s\to 0} s\,K\,\frac{s+b}{s+\alpha\,b}G(s) = \frac{K}{\alpha}G(0)$$

ou seja

$$\overline{K}_V = \frac{K_V}{\alpha}$$

Portanto, o controlador em atraso gera um aumento de $1/\alpha$ vezes o valor de K_V, reduzindo na mesma proporção o erro de regime permanente.

Controladores em Atraso

Em geral, a redução do erro de regime permanente é obtida alocando-se o **polo do controlador próximo à origem**.

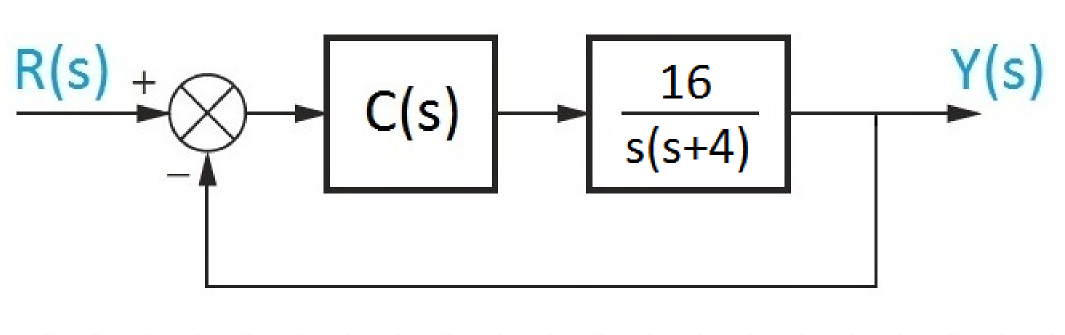
Para que este polo não desloque excessivamente o LR para a direita aloca-se o **zero do controlador próximo ao polo**.

O **valor de α**, que define a posição relativa entre polo e zero, **é escolhido de modo a garantir a melhoria necessária no erro de regime permanente**.

Esta escolha particular de parâmetros garante que o polo adicional gerado em malha fechada esteja próximo ao zero do controlador, não afetando significativamente a resposta transitória.

Exemplo 1

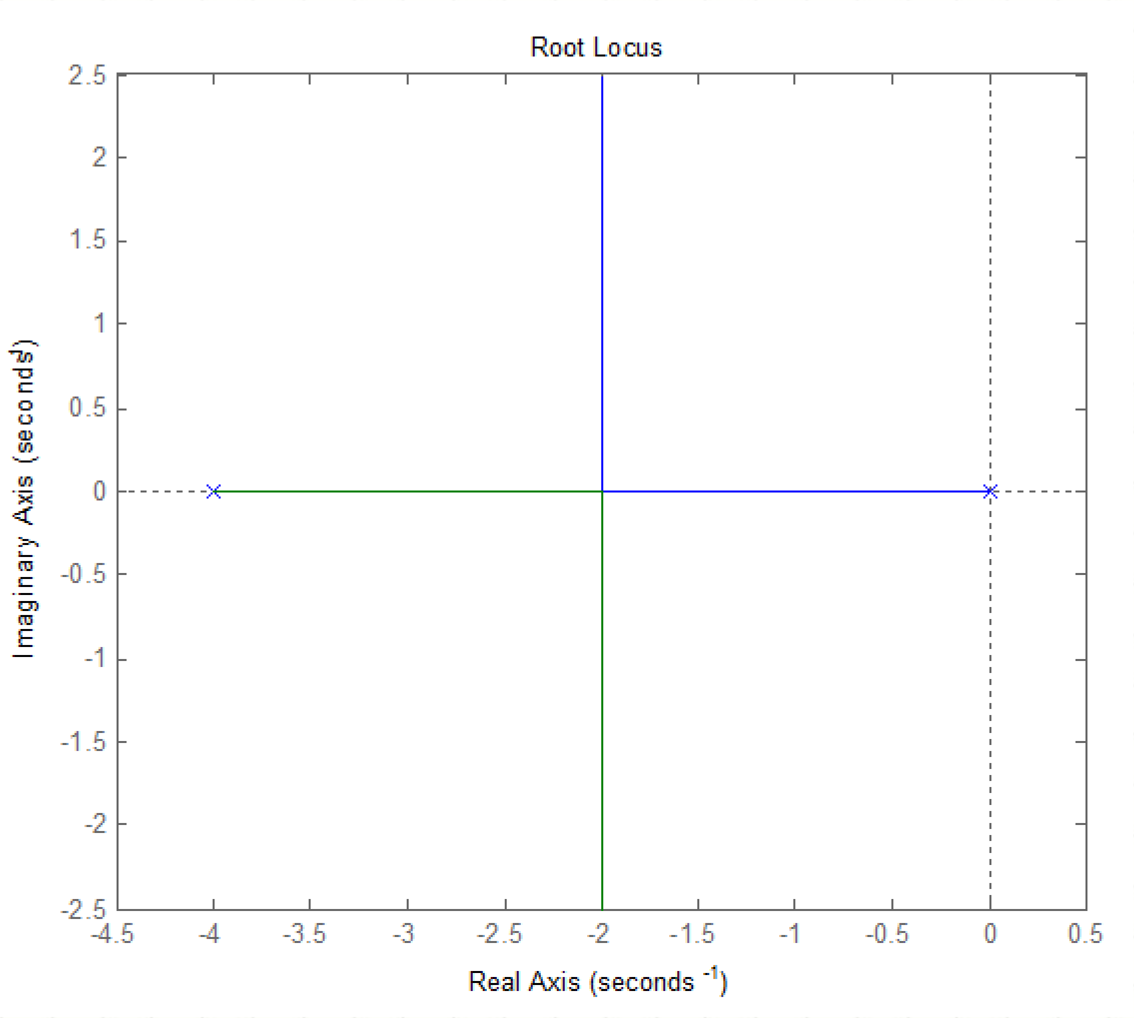
Seja o sistema de controle a seguir.



Projetar um controlador de modo a atender as seguintes especificações:

- Erro à rampa menor do que 5%
- Não ocorra alteração significativa na resposta transitória de malha fechada, com C(s)=1.

Lugar das Raízes



Resposta com C(s)=1

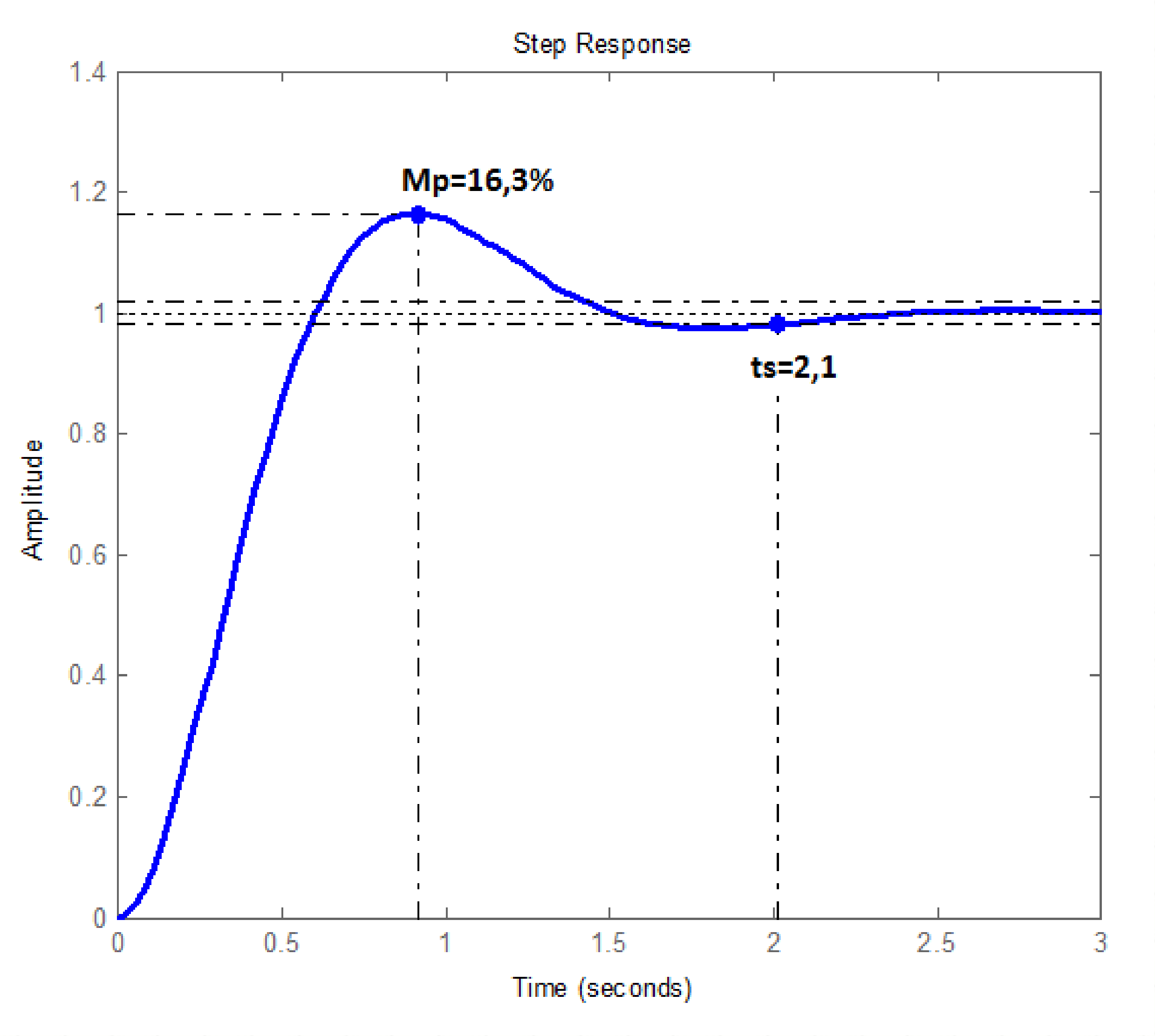
A função de transferência de malha fechada será:

$$T(s) = \frac{16}{s^2 + 4s + 16} \quad \Rightarrow \quad p_{1,2} = -2 \pm j2\sqrt{3}$$

Obtém-se

$$\begin{matrix} \omega_n = 4 \\ \xi = 0{,}5 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} M_P = 16\% \\ t_S = 2seg \end{matrix}$$

Resposta ao Degrau (C(s)=1)

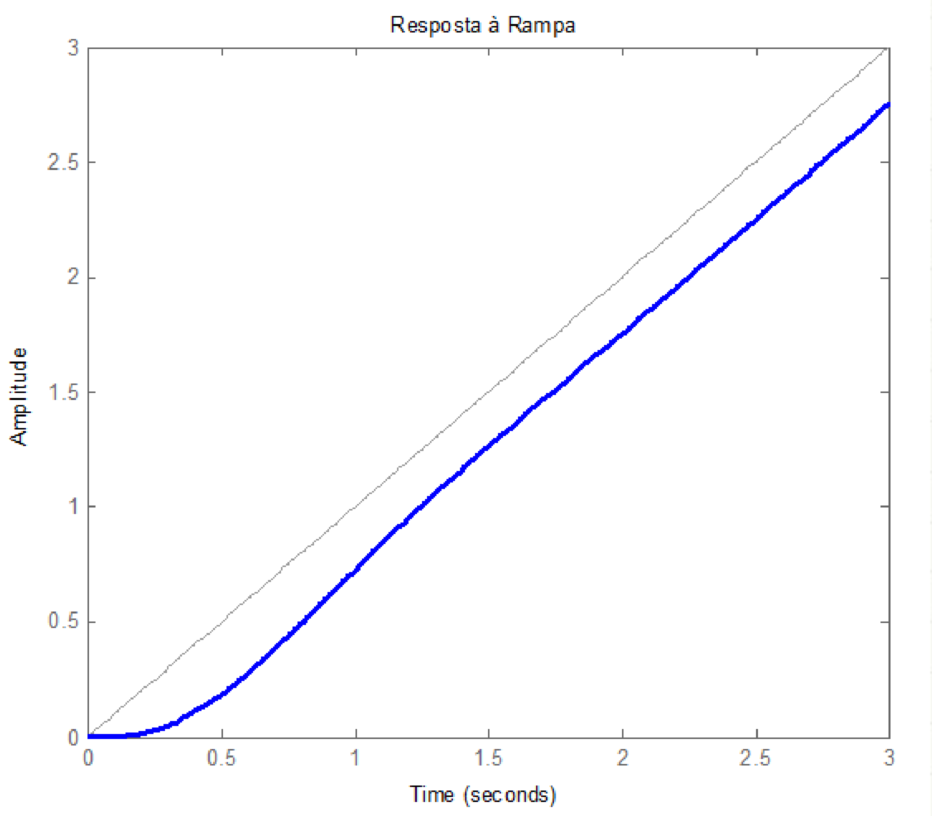


Resposta à Rampa (C(s)=1)

Para uma entrada em rampa unitária, o erro de regime permanente será:

$$Kv = \lim_{s\to 0} sG(s) = 4$$

$$e_{\infty} = \frac{1}{Kv} = 25\%$$



Controlador em Atraso

O ganho K_V precisa ser aumentado ao menos 5 vezes para atender a especificação de erro de regime permanente.

O polo do controlador será alocado próximo à origem

$$p = \alpha b = 0{,}01$$

e o zero será colocado 5 vezes distante (α=1/5)

$$z = b = 0{,}05$$

Assim, o controlador em atraso fica

$$C(s) = K \frac{s + 0{,}05}{s + 0{,}01}$$

Controlador em Atraso

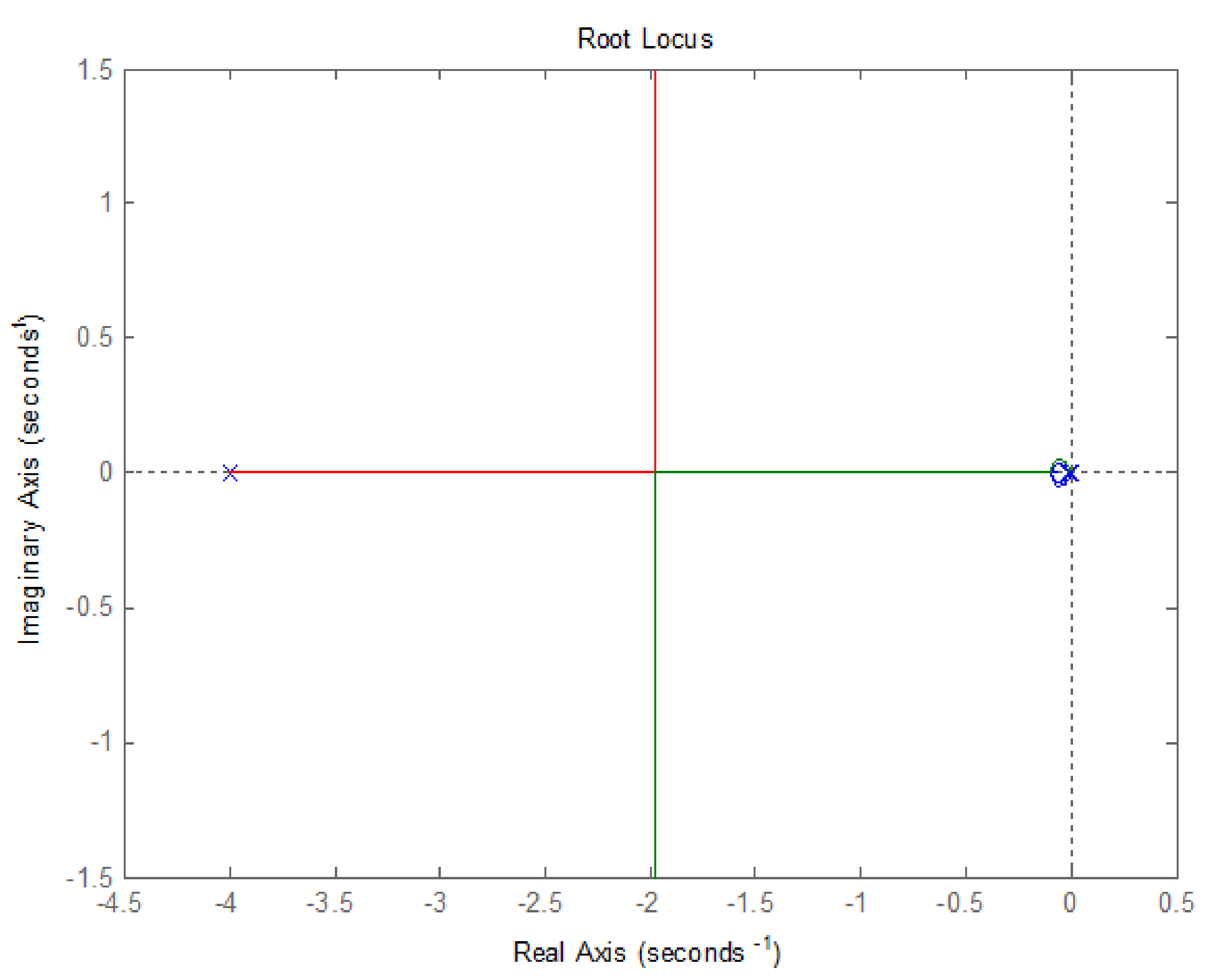
O ganho K será determinado pela condição de módulo considerando os polos desejados para malha fechada.

Os polos desejados para a malha fechada serão definidos para atender a 2ª especificação: não haver alteração significativa na resposta transitória.

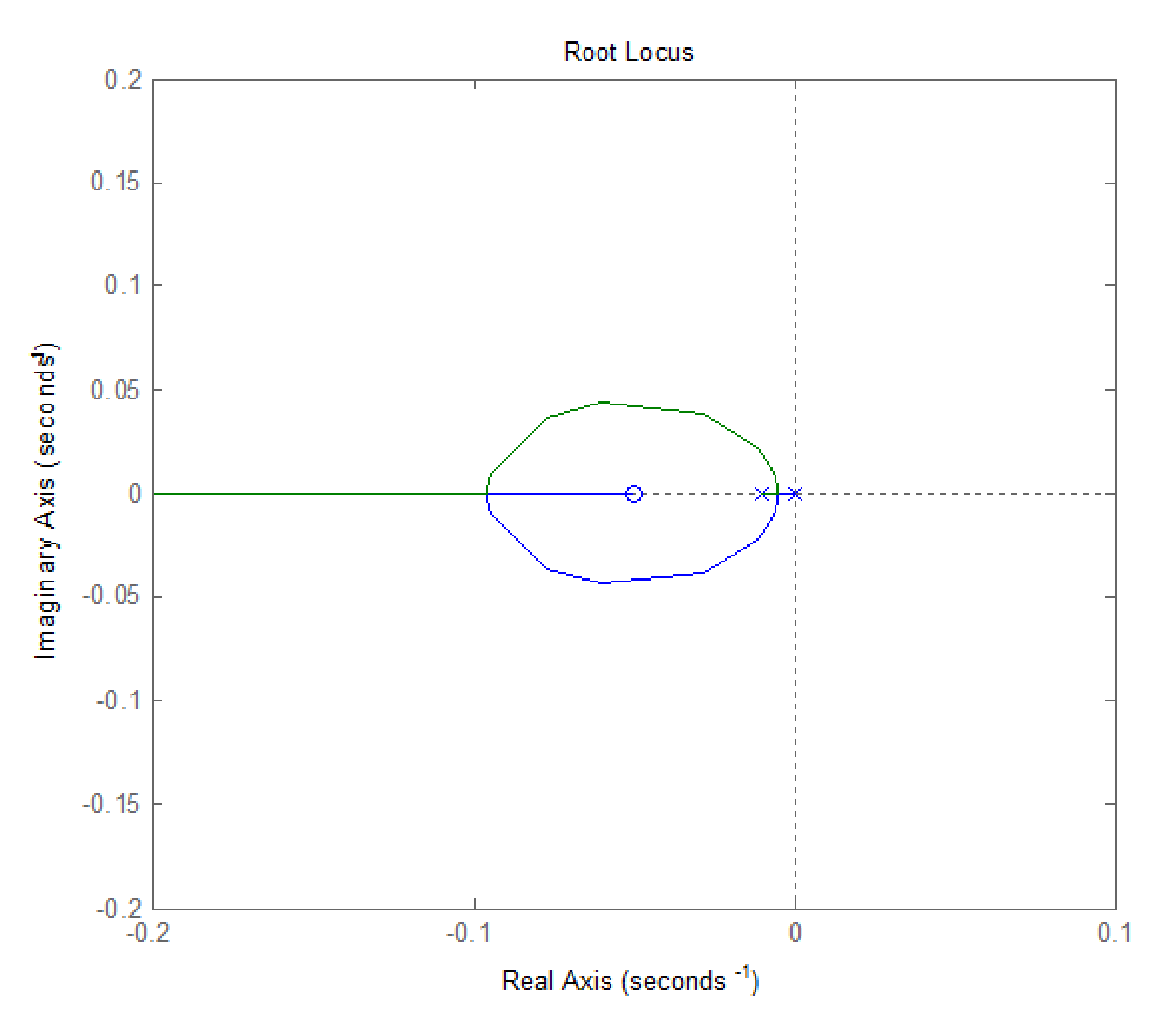
O LR para o sistema compensado será traçado para a função

$$C(s)G(s) = K\frac{s+0{,}05}{s+0{,}01}\frac{16}{s(s+4)}$$

Controlador em Atraso



Controlador em Atraso



Controlador em Atraso

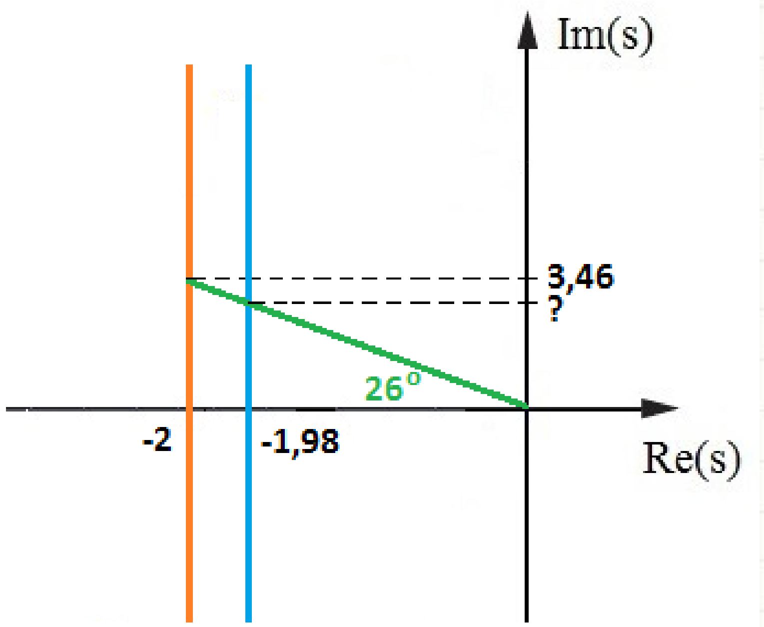
Para que não exista considerável alteração na resposta transitória os polos dominantes de malha fechada devem manter a mesma relação de amortecimento.

Os polos de malha fechada, com C(s)=1, são

$$s_{1,2} = -2 \pm j2\sqrt{3}$$
$$= -2 \pm j3{,}46$$

Portanto, para o sistema compensado tem-se

$$s_{1,2} = -1{,}98 \pm j1{,}98\sqrt{3}$$
$$= -1{,}98 \pm j3{,}43$$



Controlador em Atraso

O ganho K será determinado por

$$K = \frac{1}{\left|C(s_d)G(s_d)\right|} = \left|\frac{s(s+0{,}01)(s+4)}{16(s+0{,}05)}\right| = 1{,}0098 \cong 1$$

assim, tem-se o controlador em atraso:

$$C(s) = \frac{s+0{,}05}{s+0{,}01}$$

Obs.: Nesta metodologia de projeto (usando o atraso para melhorar apenas o erro sem alterar o transitório) o ganho K sempre será um valor muito próximo de 1.

Controlador em Atraso

Verificação

F.T.M.A.

$$C(s)G(s) = \frac{16(s+0{,}05)}{s(s+4)(s+0{,}01)}$$

F.T.M.F.

$$T(s) = \frac{16(s+0{,}05)}{s^3 + 4{,}01s^2 + 16{,}04s + 0{,}8} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} z &= -0{,}05 \\ p_1 &= -0{,}0505 \\ p_{2,3} &= -1{,}98 \pm j3{,}35 \end{aligned}$$

Observe que, o polo adicional (p_1) está praticamente sobre o zero do controlador e, portanto, o efeito deste zero na resposta transitória será muito pequeno.

Controlador em Atraso

Aproximando pelo polos dominantes:

$$p_{2,3} = -1{,}98 \pm j3{,}35 \quad \Rightarrow \quad s^2 + 3{,}96s + 15{,}84$$

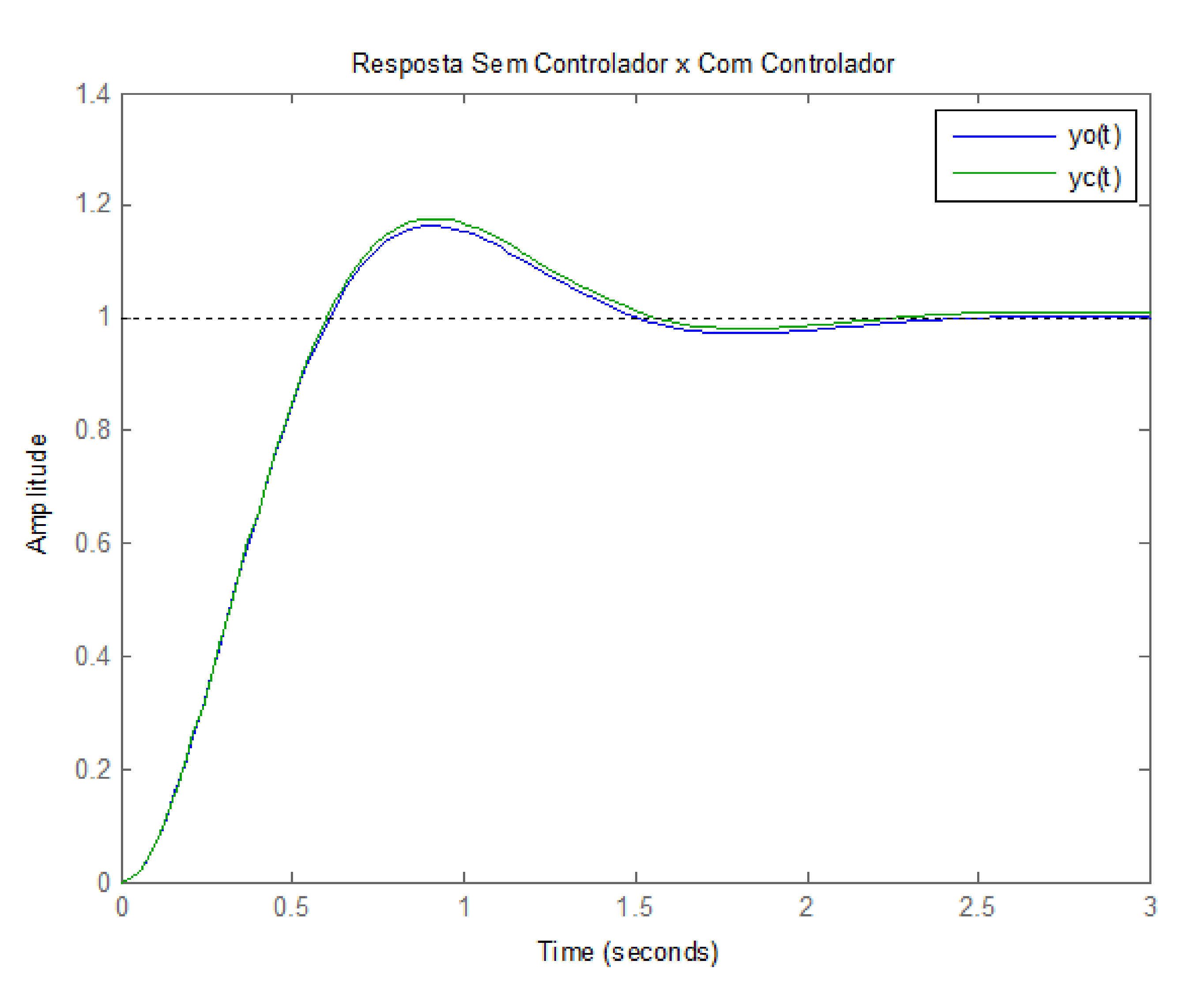
que representa

$$\omega_n = 3{,}98 \approx 4$$

$$\xi = 0{,}498 \approx 0{,}5$$

ou seja, praticamente os valores originais, com C(s)=1.

Controlador em Atraso



Sendo o controlador PI um caso particular do controlador em atraso, este poderia ser utilizado para resolver o problema anterior?

Controlador PI

Uma vez que o controlador PI introduz um polo na origem o erro de regime permanente seria nulo, garantindo assim a especificação de $e_\infty < 5\%$.

Entretanto, é necessário avaliar se seria possível manter o desempenho da resposta transitória.

O controlador PI pode ser escrito da forma

$$C(s) = K\frac{s+z}{s}$$

Controlador PI

Inicialmente será avaliada a estabilidade em função dos parâmetros do controlador.

Neste caso,

$$C(s)G(s) = \frac{16K(s+z)}{s^2(s+4)}$$

Em malha fechada

$$\Delta(s) = s^3 + 4s^2 + 16Ks + 16Kz = 0$$

Controlador PI

Aplicando Routh-Hurwitz

$$\begin{array}{lcc}
s^3 & 1 & 16K \\
s^2 & 4 & 16Kz \\
s^1 & (64K-16Kz)/4 & \\
s^0 & 16Kz &
\end{array}$$

$$K > 0, Kz > 0 \Rightarrow z > 0$$

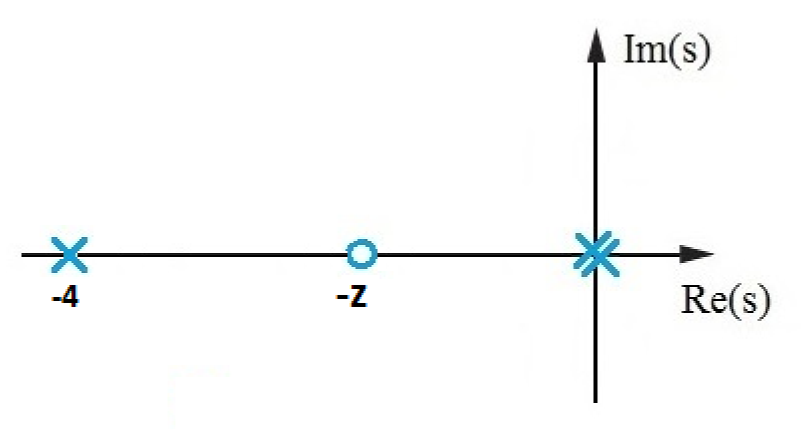
$$64K-16Kz > 0 \Rightarrow z < 4$$

Portanto, para garantir a estabilidade:

$$0 < z < 4$$

Controlador PI

O mapa polo/zero do sistema compensado será

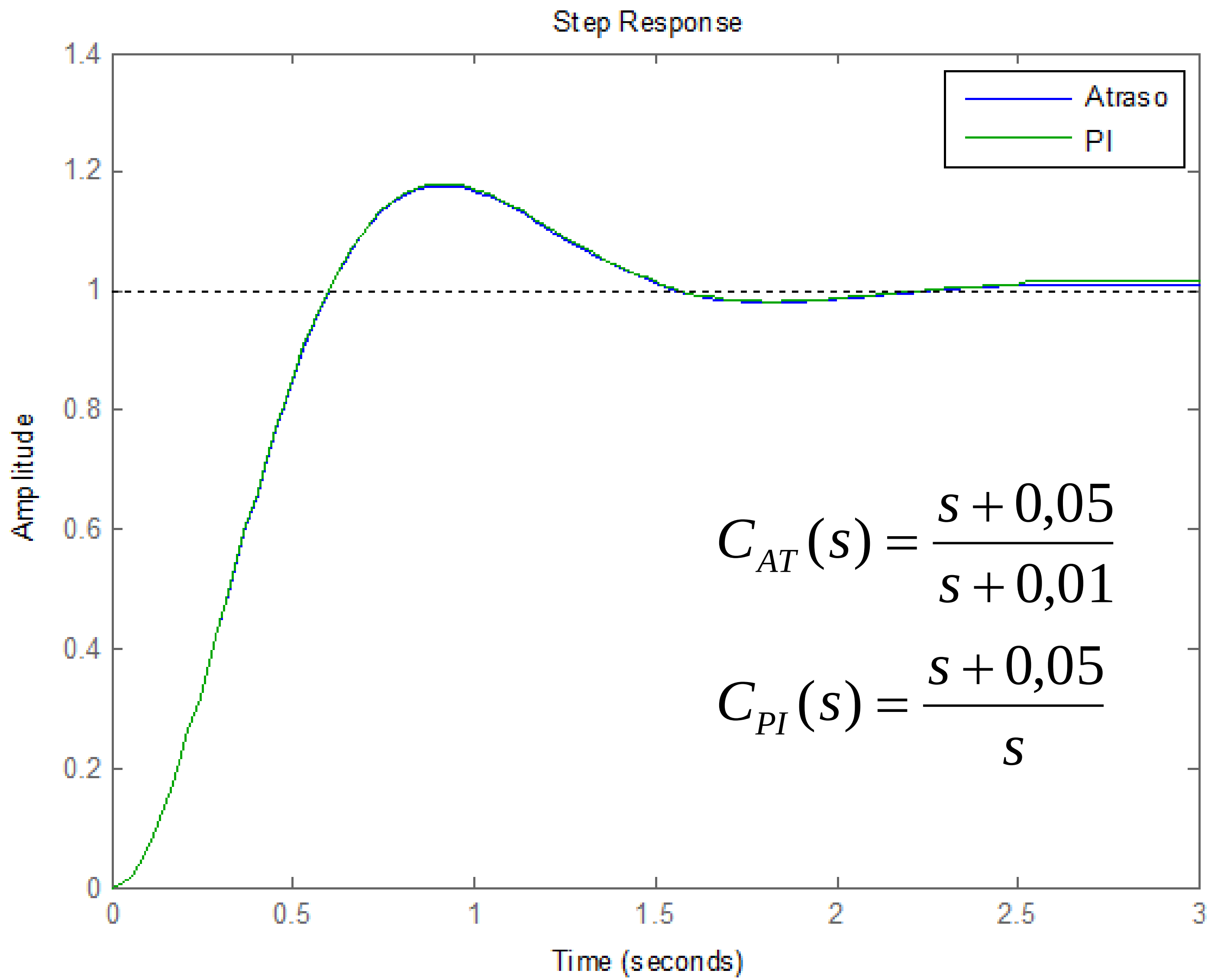


O LR terá 2 assíntotas de ±90°, a partir do centroide, definido por

$$\sigma_a = \frac{z-4}{2}$$

Portanto, para conseguir manter a assíntota em torno de -2 (para garantir polos de MF próximos dos originais) o valor do zero precisaria ser muito pequeno (semelhante ao controlador em atraso).

Atraso x PI

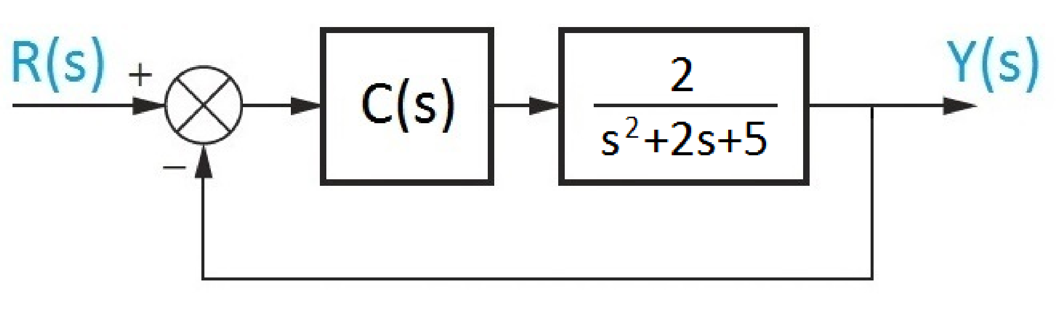


$$C_{AT}(s) = \frac{s+0,05}{s+0,01}$$

$$C_{PI}(s) = \frac{s+0,05}{s}$$

Exemplo 2

Seja o sistema de controle a seguir



Projetar um controlador de modo a atender as seguintes especificações:

- Sobressinal máximo inferior a 20%
- Tempo de acomodação inferior a 8 segundos (critério 2%)
- Erro nulo à entrada degrau

Resposta para C(s)=1

A função de transferência de malha fechada será:

$$T(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 7} \quad \Rightarrow \quad p_{1,2} = -1 \pm j2{,}45$$

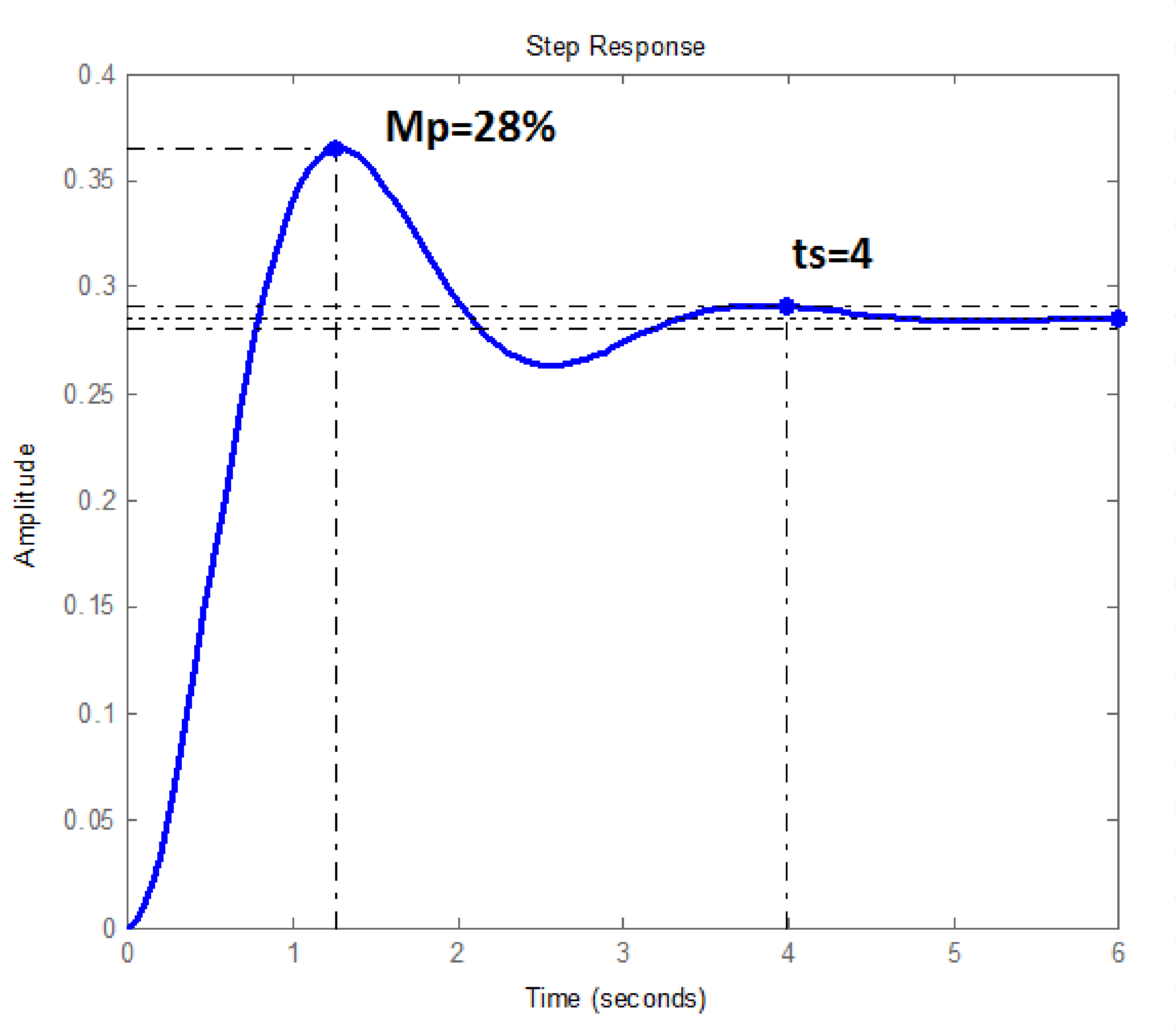
Obtém-se

$$\begin{matrix} \omega_n = 2{,}65 \\ \xi = 0{,}38 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} M_P = 28\% \\ t_S = 4seg \end{matrix}$$

O erro de regime permanente será:

$$K_P = \lim_{s \to 0} G(s) = 2/5 \qquad e_\infty = \frac{1}{1 + K_P} = 71\%$$

Resposta ao Degrau



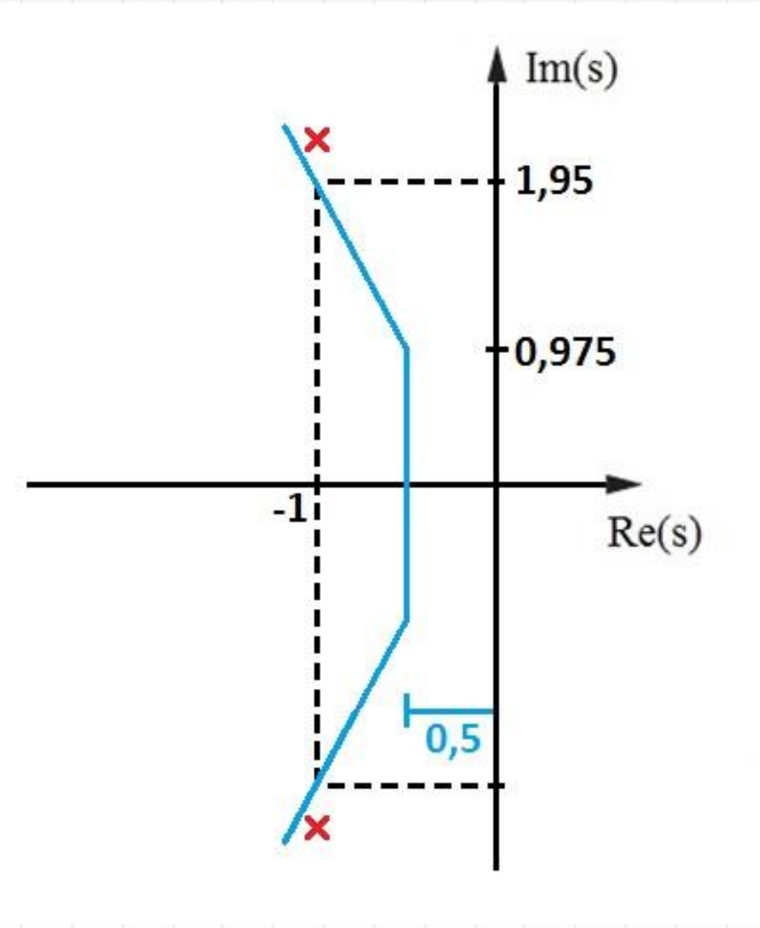
Região Desejada para Malha Fechada

$$M_P < 20\% \quad \Rightarrow \quad \xi > 0,46\left(\theta < 63^\circ\right)$$

$$t_s < 8seg \quad \Rightarrow \quad \sigma > 0,5$$

Observe que os polos de malha aberta (-1±j2) estão fora da região desejada.

Portanto, estes não poderão ser cancelados.



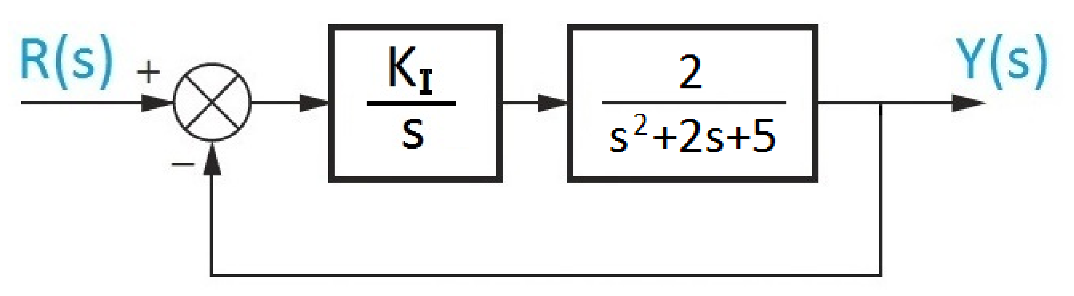
Escolha do Controlador

Tendo em vista que deseja-se um erro nulo à entrada degrau faz-se necessário a introdução de um integrador na malha direta. Assim, é possível pensar o projeto considerando 4 estruturas de controle:

- Controle Integral
- Controlador PI
- Controlador PID ideal (zeros reais ou complexos)
- Controlador PID real (PI + Avanço)

Controle Integral

Seja C(s) um controle integral, com K_I>0:



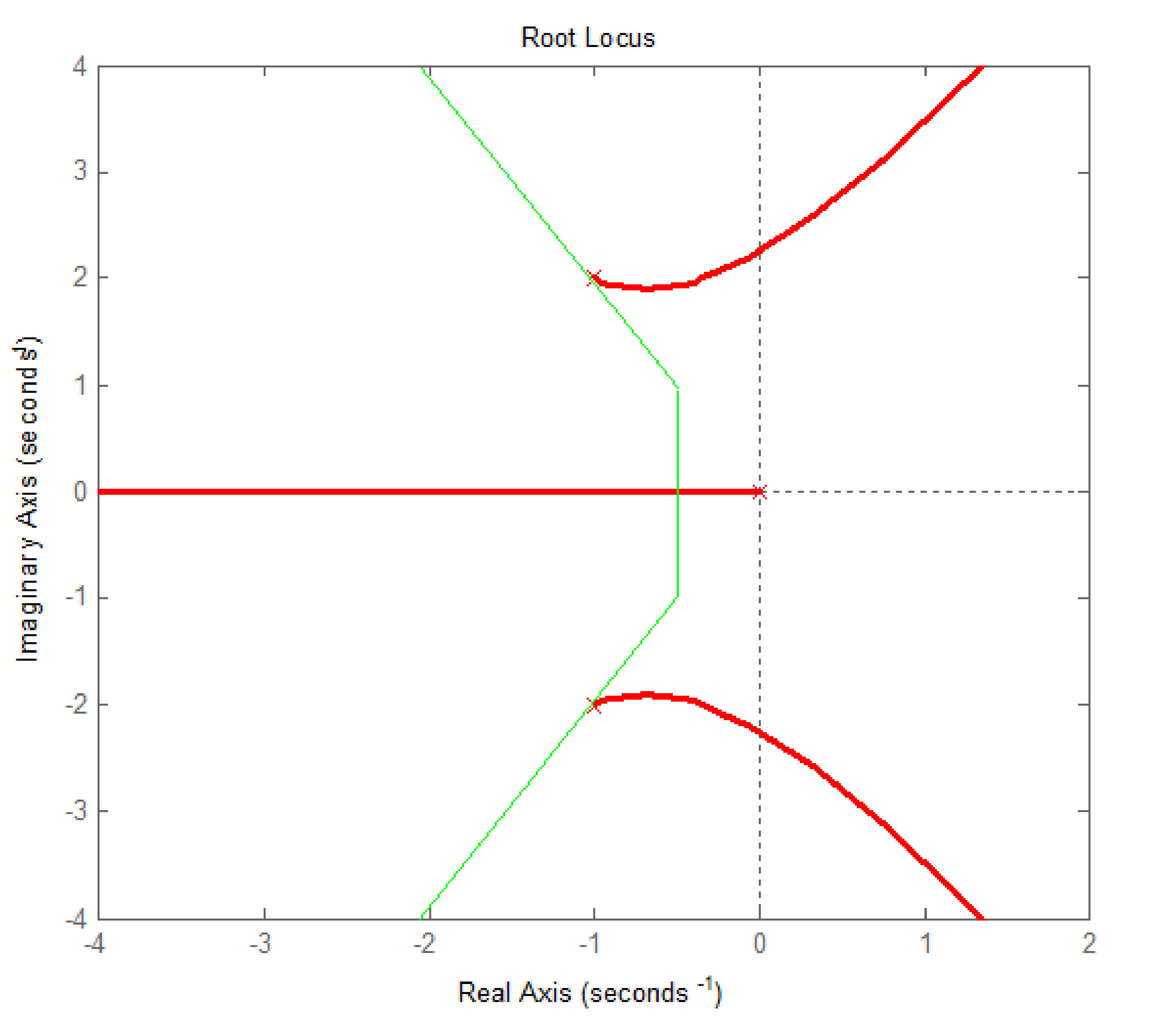
Em malha fechada

$$T(s) = \frac{2K_I}{s(s^2+2s+5)+2K_I}$$

O polinômio característico é dado por

$$1 + K_I \frac{2}{s(s^2+2s+5)} = 0$$

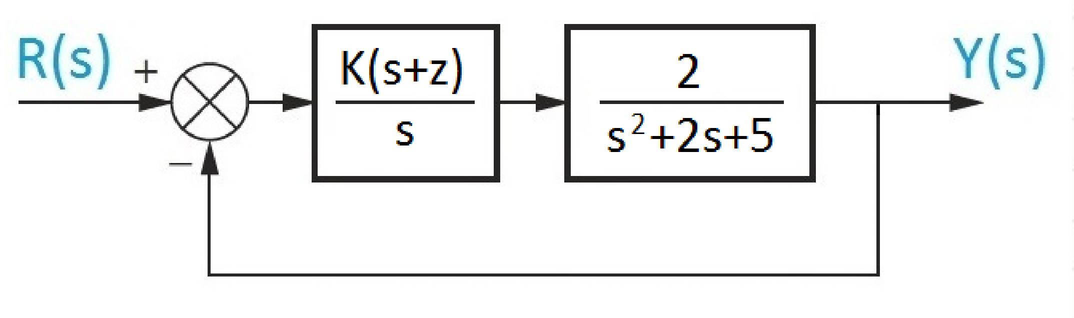
Controle Integral



Portanto, sempre existirão polos fora da região desejada.

Controlador PI

Seja C(s) um controlador proporcional-integral (PI), sendo o zero de fase mínima (z > 0) e K>0.



Em malha fechada

$$T(s) = \frac{2K(s+z)}{s(s^2+2s+5)+2K(s+z)}$$

O polinômio característico pode ser escrito como

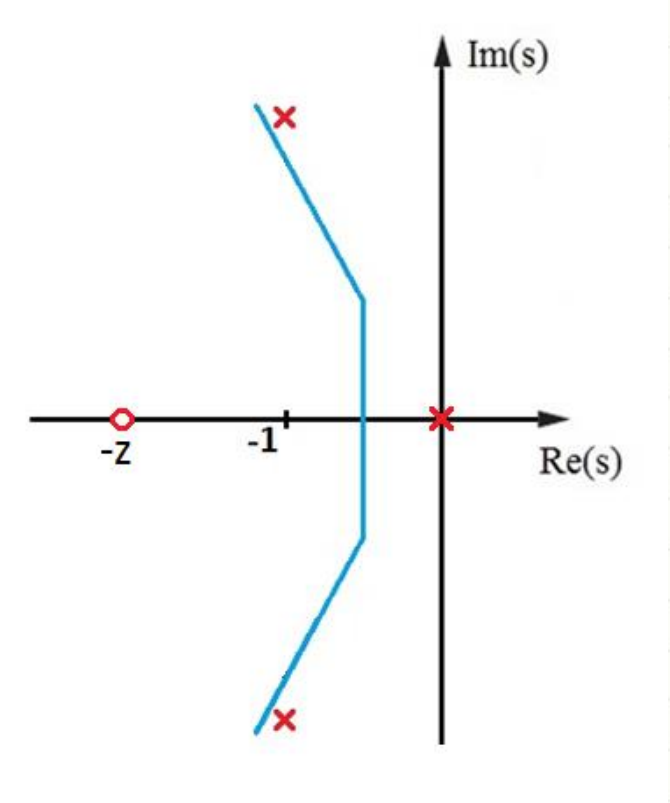
$$1 + K\frac{2(s+z)}{s(s^2+2s+5)} = 0$$

Controlador PI

O sistema compensado tem 3 polos e 1 zero.

Assim, o LR terá 2 assíntotas de ±90°, a partir do centroide, definido por:

$$\sigma_a = \frac{z-2}{2}$$



Quanto menor o valor do zero mais à esquerda estarão as assíntotas. No limite,

$$z \to 0 \qquad \sigma_a \to -1$$

Os polos complexos tenderiam diretamente à assíntota e, portanto, as especificações nunca seriam atendidas.

Controlador PID

Seja C(s) um controlador PID ideal:

$$C(s) = K_P\left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right) = T_D K_P\left(\frac{s^2 + (1/T_D)s + (1/T_I)}{s}\right)$$

Os valores dos parâmetros do controlador podem ser selecionados de modo a produzir zeros reais ou complexos conjugados.

Controlador PID - zeros complexos

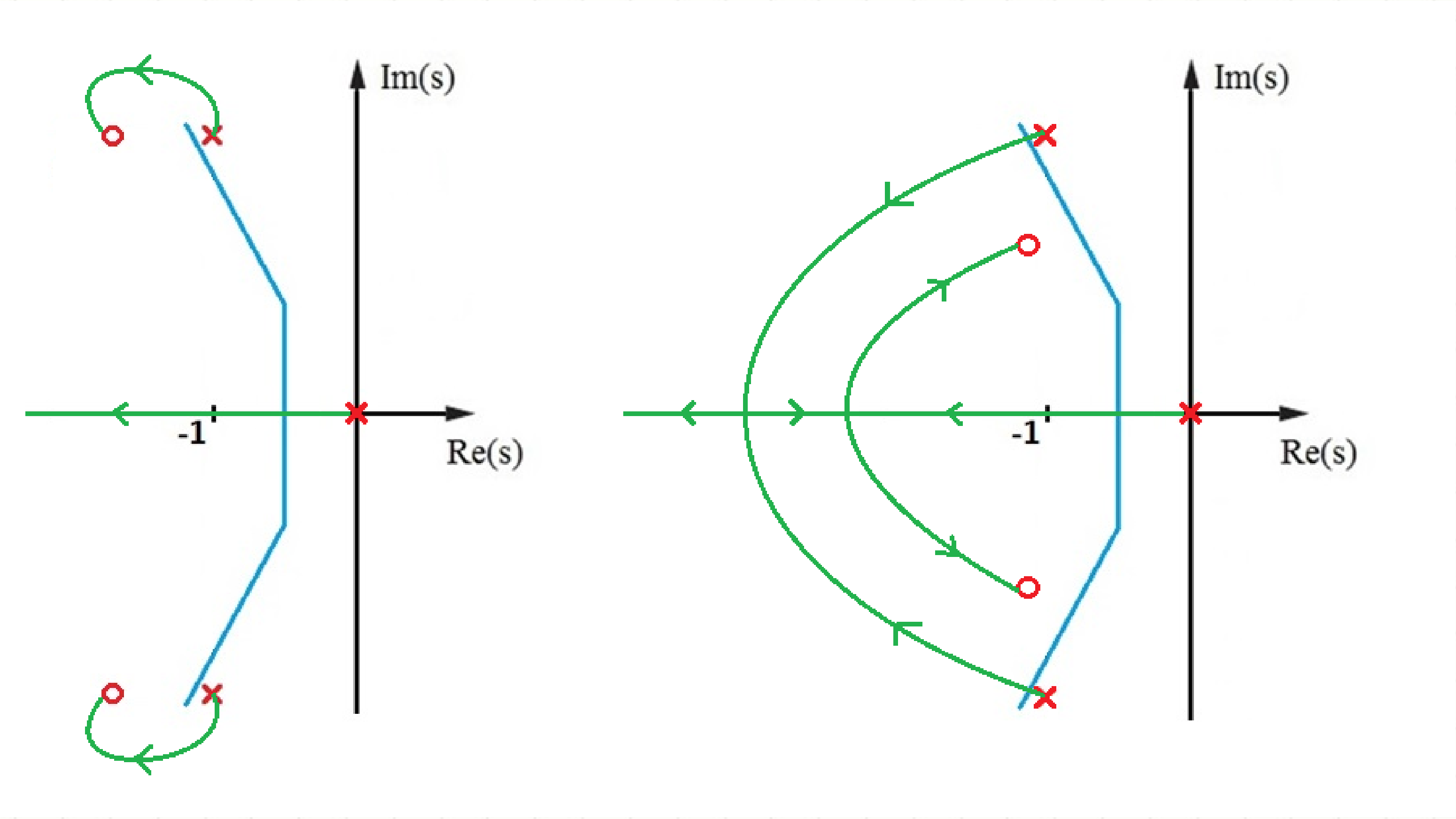
Neste caso C(s) pode ser escrito como

$$C(s) = K_C \frac{(s+z_1)(s+z_2)}{s} \qquad z_{1,2} = a \pm jb$$

O LR terá 3 polos e 2 zeros e, portanto, uma única assíntota com ângulo de 180° (eixo real negativo).
Dois ramos irão partir dos polos indo para os zeros e o terceiro polo irá para a assíntota.

Neste caso, existirão duas configurações de LR possíveis.

Controlador PID - zeros complexos



Controlador PID - zeros complexos

Escolhido z=-2 $\pm$ j (2ª configuração) tem-se:

$$C(s) = K\,\frac{s^2+4s+5}{s}$$

Em malha aberta,

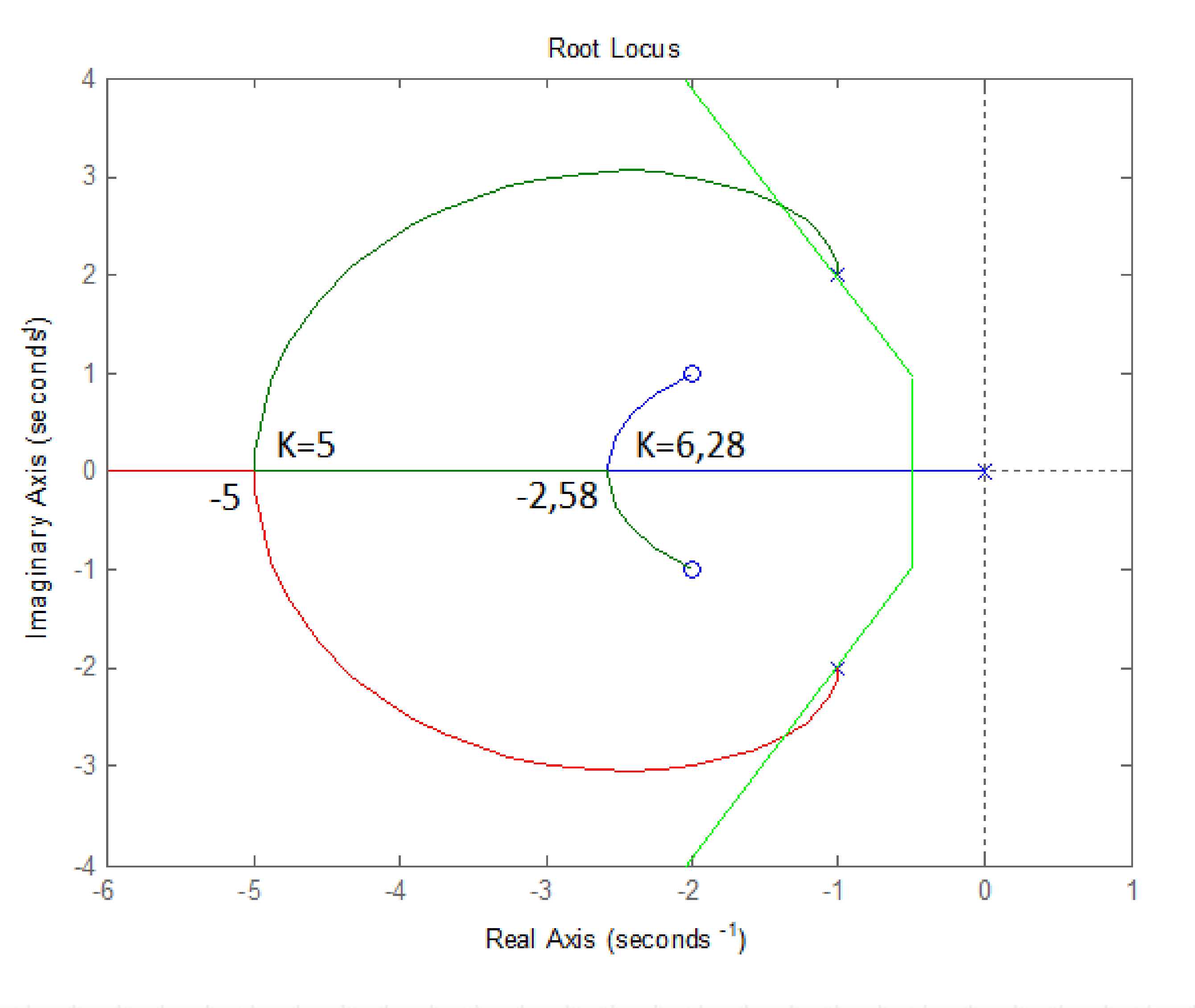
$$C(s)G(s) = 2K\,\frac{s^2+4s+5}{s(s^2+2s+5)}$$

o LR será traçado para

$$1 + K\,\frac{2(s^2+4s+5)}{s(s^2+2s+5)} = 0$$

e a variação de K será definida pela intersecção do LR com as retas que definem a região desejada para os polos de malha fechada.

Controlador PID - zeros complexos



Controlador PID - zeros complexos

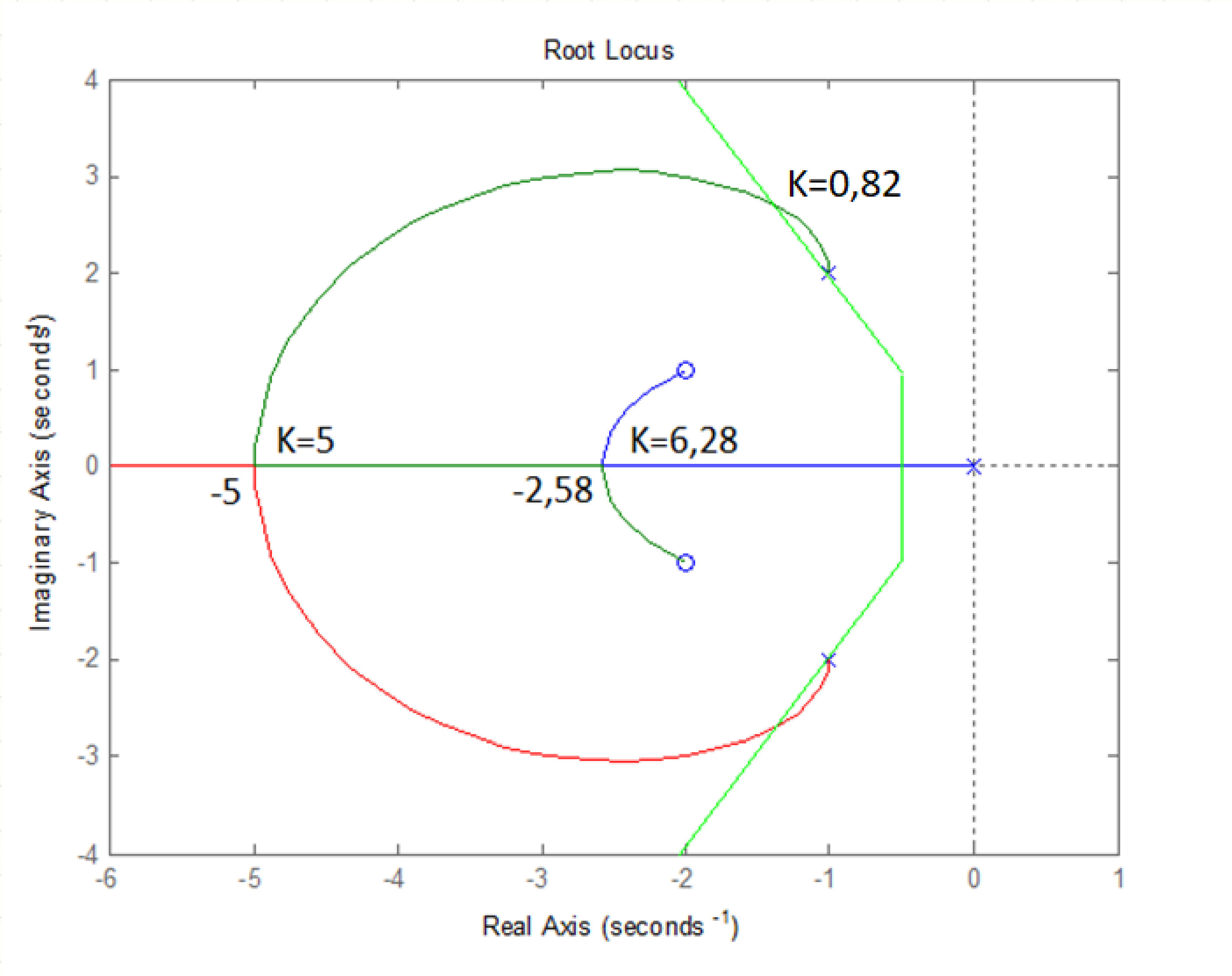
Da intersecção do LR com a região obtém-se

$$M_P < 20\% \quad \Rightarrow \quad K > 0{,}82$$
$$t_s < 8seg \quad \Rightarrow \quad K > 0{,}33$$

Assim, para atender ambas as especificações

$$K > 0{,}82$$

Controlador PID - zeros complexos



Controlador PID - zeros complexos

Observa-se que:

$$
\begin{array}{ll}
0{,}82 < K < 5 & 1\,\text{polo real (dominante)} + 2\,\text{polos cc} \\
5 \le K \le 6{,}28 & 3\,\text{polos reais} \\
K > 6{,}28 & 2\,\text{polos cc (dominantes)} + 1\,\text{polo real}
\end{array}
$$

Controlador PID - zeros complexos

Resposta para diferentes valores de ganho:

$$K = 3 \quad \Rightarrow \quad p_1 = -1{,}6 \quad p_{2,3} = -3{,}2 \pm j2{,}9$$

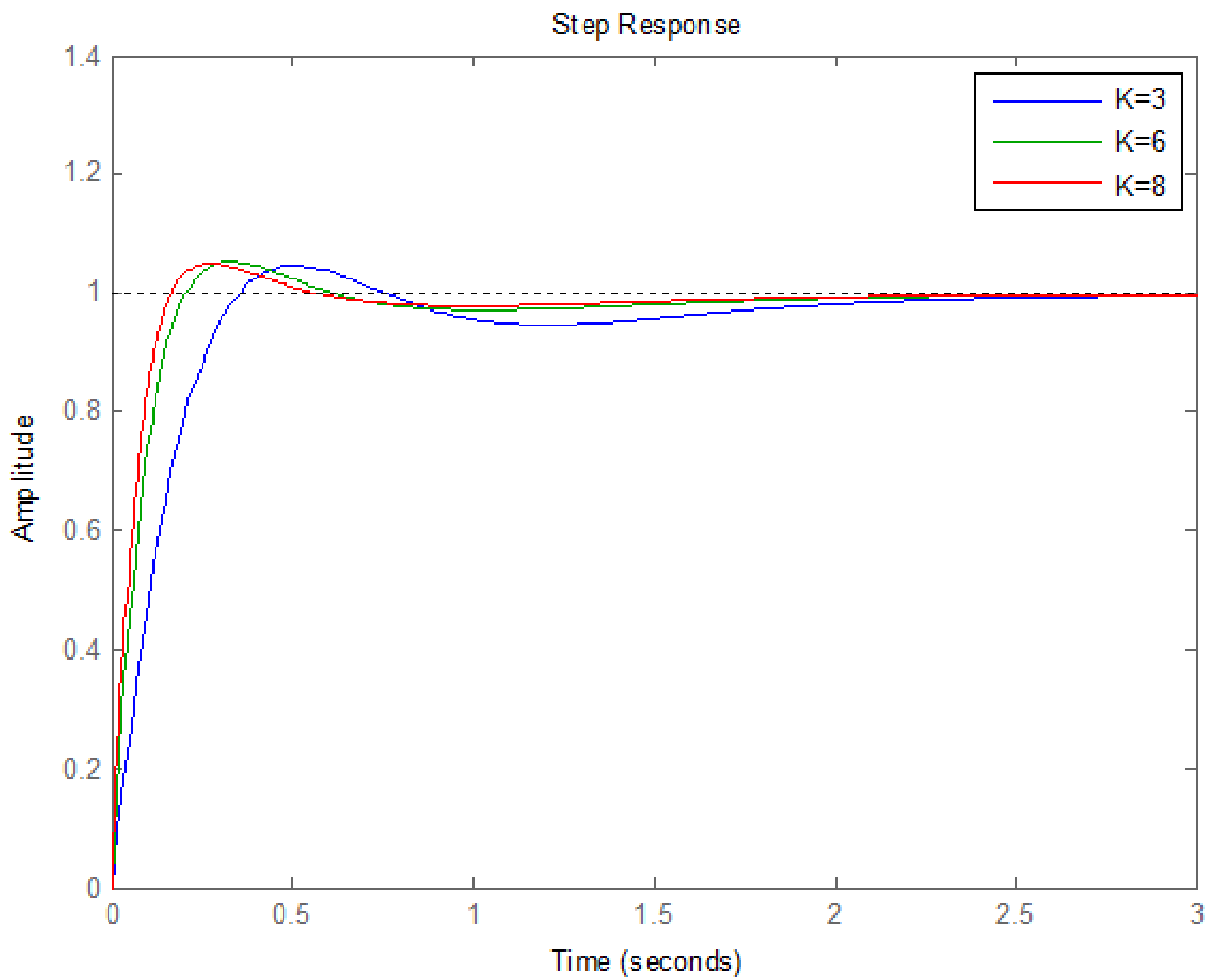
$$K = 6 \quad \Rightarrow \quad p_1 = -2{,}3 \quad p_2 = -3 \quad p_3 = -8{,}7$$

$$K = 8 \quad \Rightarrow \quad p_{1,2} = -2{,}38 \pm j0{,}13 \quad p_3 = -13{,}25$$

Lembre que existe um par de zeros em $z_{1,2}$=-2±j e estes irão influenciar na resposta.

K	M_P	t_S
3	4,5%	1,9
6	5,2%	1,4
8	4,9%	1,1

Controlador PID - zeros complexos



Controlador PID - zeros complexos

Exercício sugerido:

Projetar um controlador PID, escolhendo os zeros complexos na para gerar a 1a configuração do LR mostrada no slide 37.

Controlador PID - zeros reais

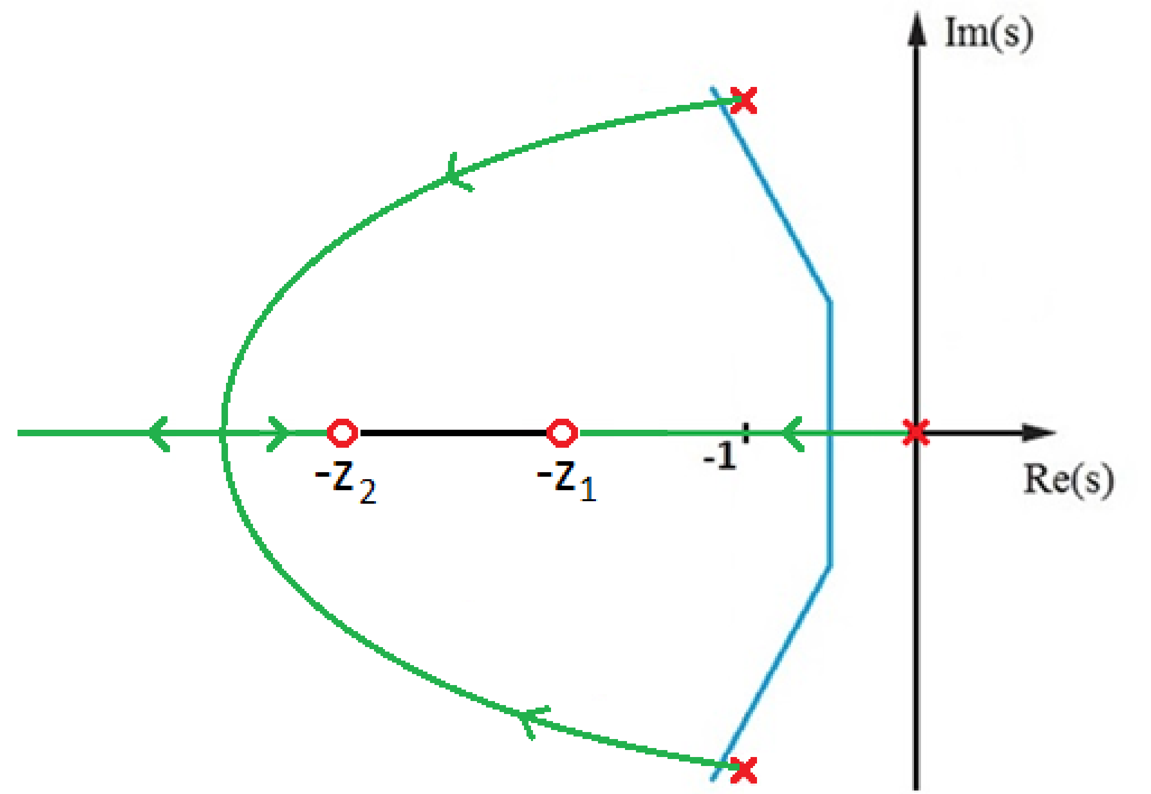
Neste caso C(s) pode ser escrito como

$$C(s) = K_C \frac{(s+z_1)(s+z_2)}{s} \qquad z_{1,2} \in \Re$$

De forma similar ao caso anterior, o LR terá 3 polos e 2 zeros e, portanto, uma única assíntota com ângulo de 180° (eixo real negativo).

Dois ramos irão partir dos polos indo para os zeros e o terceiro polo irá para a assíntota.

Controlador PID - zeros reais



Controlador PID - zeros reais

Escolhidos z_1=-1 e z_2=-2 tem-se:

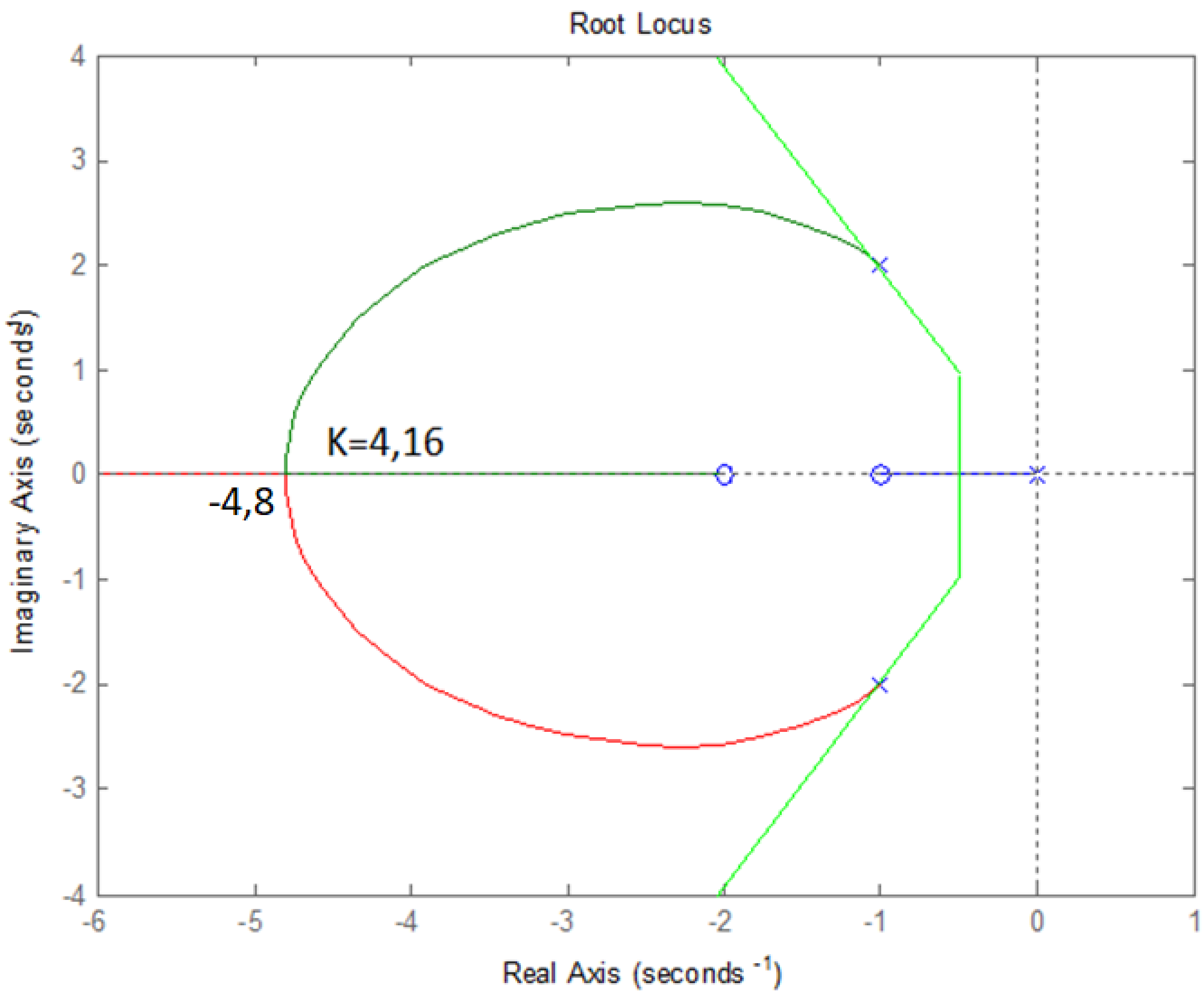
$$C(s) = K\frac{s^2 + 3s + 2}{s}$$

e o LR será traçado para

$$1 + K\frac{2(s^2 + 3s + 2)}{s(s^2 + 2s + 5)} = 0$$

Assim, a variação de K será definida pela intersecção do LR com as retas que definem a região desejada para os polos de malha fechada.

Controlador PID - zeros reais



Controlador PID - zeros reais

Da intersecção do LR com a região obtém-se:

$$M_P < 20\% \quad \Rightarrow \quad K > 0{,}02$$

$$t_s < 8seg \quad \Rightarrow \quad K > 1{,}4$$

Assim, para atender ambas as especificações

$$K > 1{,}4$$

Observa-se que

$$1{,}4 < K < 4{,}16 \quad 2\,\text{polos cc} + 1\,\text{polo real (dominante)}$$

$$K \geq 4{,}16 \quad 3\,\text{polos reais}$$

Controlador PID - zeros reais

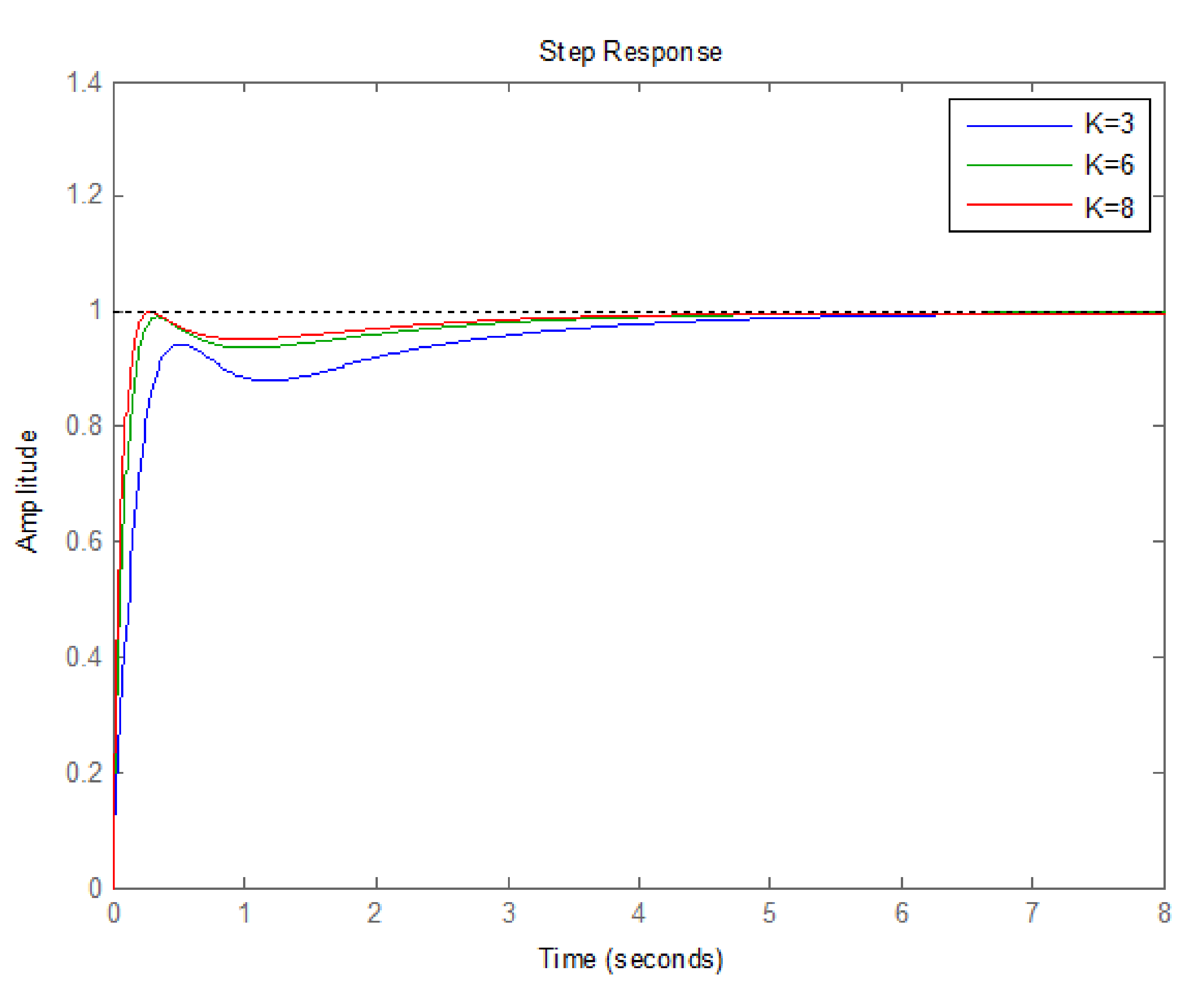
Resposta para diferentes valore de ganho:

$$K = 3 \quad \Rightarrow \quad p_1 = -0{,}56 \quad p_{2,3} = -3{,}67 \pm j2{,}17$$
$$K = 6 \quad \Rightarrow \quad p_1 = -0{,}78 \quad p_2 = -3 \quad p_3 = -10{,}22$$
$$K = 8 \quad \Rightarrow \quad p_1 = -0{,}82 \quad p_2 = -2{,}68 \quad p_3 = -14{,}5$$

Lembre que existe um par de zeros em $z_{1,2}$=-2±j e estes irão influenciar na resposta.

K	M_P	t_S
3	0%	4,1
6	0%	2,9
8	0%	2,5

Controlador PID - reais



Controlador PID Real (PI + Avanço)

Pode ser projetado como um Controlador Avanço-Atraso, sendo a parte do atraso reduzida a um PI.

Controlador Avanço-Atraso

A ideia básica é combinar as ações dos dois controladores. A parte do avanço é usada para ajustar a resposta transitória enquanto a parte do atraso acerta o regime permanente (sem modificar o transitório, já assegurado).

A estrutura do controlador é definida como:

$$C(s) = K\underbrace{\left(\frac{s+b}{s+\alpha b}\right)}_{\mathrm{C_{AV}}}\underbrace{\left(\frac{s+a}{s+\beta a}\right)}_{\mathrm{C_{AT}}} \qquad K, a, b > 0 \qquad \alpha > 1 \qquad 0 \leq \beta < 1$$

Existem duas possibilidades:

$$\alpha \neq \beta$$

$$\alpha = 1/\beta$$

Controlador Avanço-Atraso ($\alpha \neq \beta$)

A estrutura do controlador é definida como:

$$C(s) = K\underbrace{\left(\frac{s+b}{s+\alpha b}\right)}_{C_{AV}}\underbrace{\left(\frac{s+a}{s+\beta a}\right)}_{C_{AT}} \qquad \begin{array}{ll} K,a,b>0 & \alpha>1 \\ \alpha\neq\beta & 0\leq\beta<1 \end{array}$$

O procedimento de projeto é a combinação direta dos projetos vistos anteriormente para Avanço e Atraso. Primeiro projeta-se o avanço e depois o atraso.

Controlador Avanço-Atraso ($\alpha \neq \beta$)

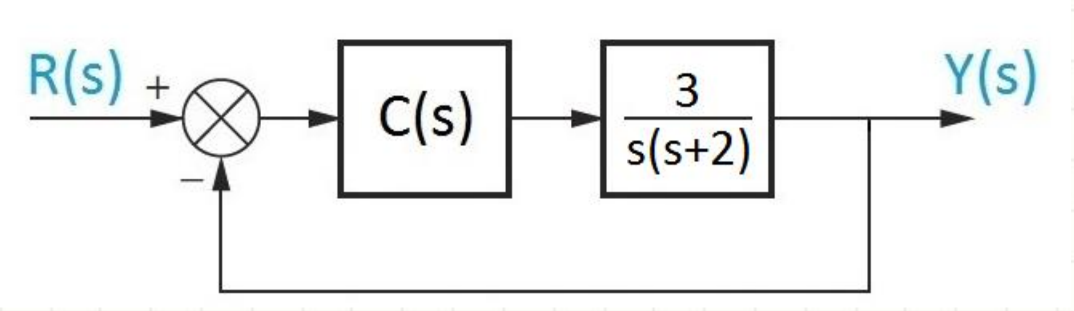
Procedimento de projeto

1. Definir, a partir das especificações da resposta transitória, a posição desejada para os polos dominantes de malha fechada.
2. Projetar o controlador em avanço de modo a posicionar os polos desejados para a malha fechada.
3. Projetar o controlador em atraso de modo a atender a especificação de regime permanente, garantido:

$$\left| C_{AT}(s) \right| \approx 1 \quad \text{e} \quad -5^{\circ} < \angle C_{AT}(s) < 0^{\circ}$$

Exemplo 3

Seja o sistema de controle a seguir.



Projetar um controlador avanço-atraso de modo a atender as seguintes especificações:

- Erro à rampa inferior a 5%
- Sobressinal máximo inferior a 5%
- Frequência natural não amortecida maior ou igual a 2 segundos

Resposta para C(s)=1

A função de transferência de malha fechada será:

$$T(s) = \frac{3}{s^2 + 2s + 3} \quad \Rightarrow \quad p_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{2}$$

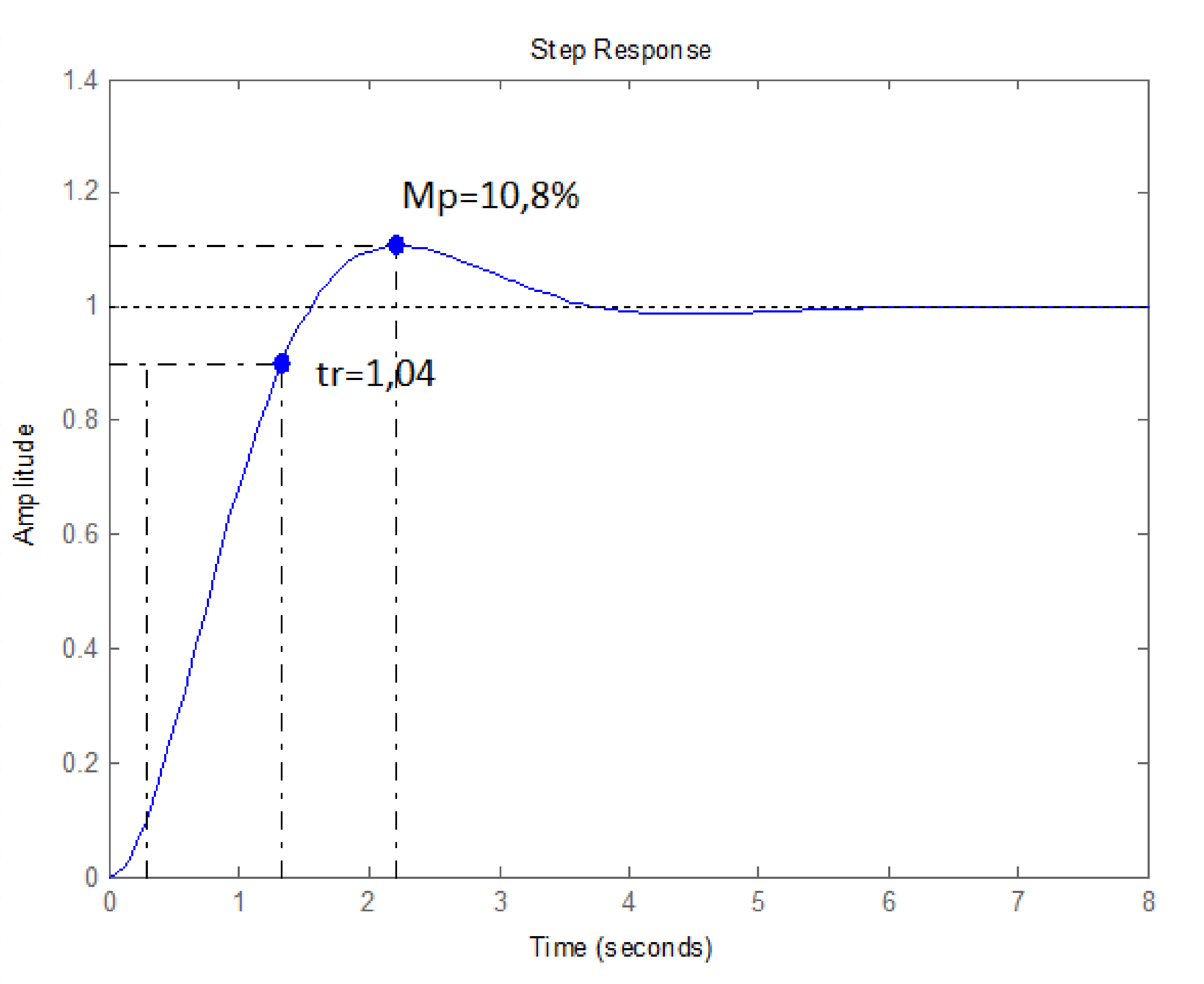
Obtém-se

$$\begin{matrix} \omega_n = 1{,}73 \\ \xi = 0{,}58 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} M_P = 10{,}8\% \\ t_r = 1.8/\omega_n = 1{,}04 seg \end{matrix}$$

O erro de regime permanente será

$$K_V = \lim_{s \to 0} sG(s) = 3/2 \qquad e_\infty = \frac{1}{K_V} = 66{,}7\%$$

Resposta ao Degrau

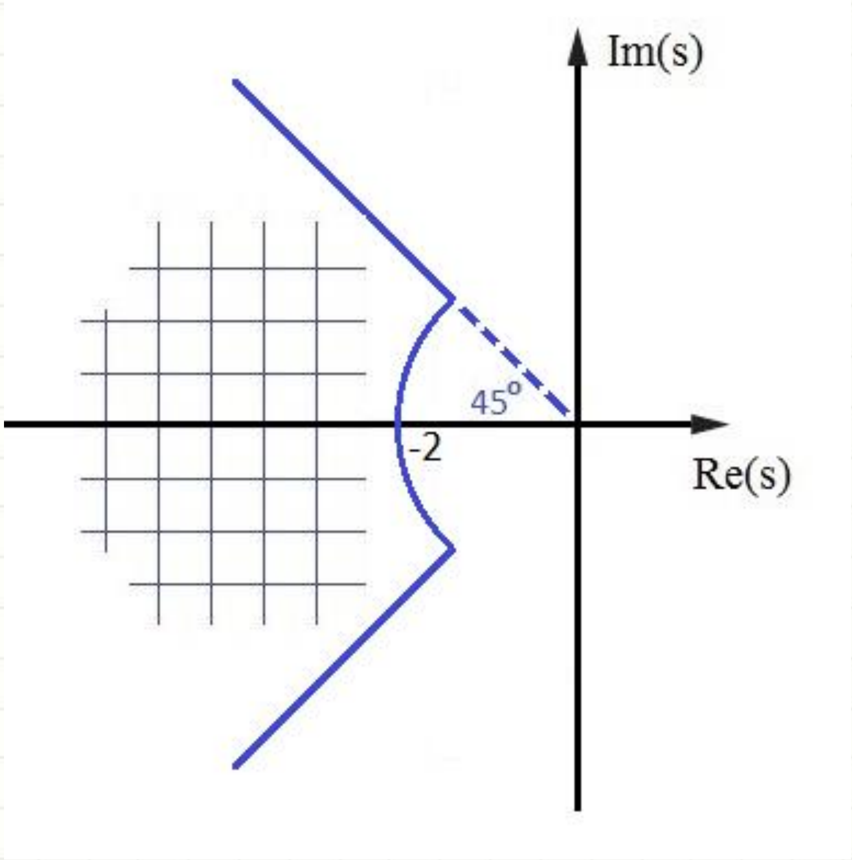


Região Desejada para Malha Fechada

$$M_P < 5\% \quad \Rightarrow \quad \xi > 0{,}69\left(\theta < 46^\circ\right)$$

$$\omega_n \geq 2rd/s \quad \Rightarrow \quad t_r < 0{,}9seg$$

$$e_\infty < 5\% \quad \Rightarrow \quad K_V > 20$$



Projeto do Controlador

1. **Definir, a partir das especificações de resposta transitória, a posição desejada para os polos dominantes de malha fechada.**

$$\xi > 0{,}69 \quad \Rightarrow \quad \xi \equiv 0{,}8\,(M_P = 1{,}5\%)$$

$$\omega_n \geq 2 \quad \Rightarrow \quad \omega_n \equiv 4\,(t_r = 0{,}45)$$

Portanto, os polos desejados para a malha fechada serão:

$$sd = -\xi\omega_n \pm j\omega_d = -3{,}2 \pm j2{,}4$$

Projeto do Controlador

2. Projetar o controlador em avanço de modo a posicionar os polos desejados para a malha fechada.

Para satisfazer a condição de fase

$$\angle C(s_d)G(s_d) = 180^\circ(2q+1)$$

Assim,

$$\angle C(s_d) = 180^\circ - G(s_d) = 80^\circ$$

Portanto, a contribuição de fase do controlador em avanço deverá ser de 80°.

Será escolhido b=2 para o **cancelamento polo/zero.**

Observe que o polo que será cancelado está no limite da região desejada.

Projeto do Controlador

Para b=2, tem-se

$$\angle C(s_d) = \angle(s_d + 2) + \angle(s_d + 2\alpha) = 80^\circ$$

$$= 117^\circ - \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{2{,}4}{2\alpha - 3{,}2}\right) = 80^\circ$$

Resolvendo a equação

$$\alpha = 3{,}2$$

e o controlador fica

$$C(s) = K\frac{s+2}{s+6{,}4}$$

Projeto do Controlador

O ganho K é determinado pela condição de módulo

$$K = \frac{1}{\left| C(s_d)G(s_d) \right|}$$

sendo

$$C(s)G(s) = \frac{3(s+2)}{s(s+2)(s+6,4)}$$

Resolvendo a equação

$$K = 5,33$$

Portanto,

$$C_{AV}(s) = 5,33\frac{s+2}{s+6,4}$$

Projeto do Controlador

O erro de regime permanente será

$$K_V = \frac{16}{6,4} = 2,5 \quad \Rightarrow \quad e_\infty = 40\%$$

Verificação do projeto

$$C(s)G(s) = \frac{16}{s(s+6,4)}$$

$$T(s) = \frac{16}{s^2 + 6,4s + 16}$$

$$p_{1,2} = -3,2 \pm j2,4 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \xi = 0,8 \\ \omega_n = 4 \end{matrix}$$

Projeto do Controlador

3. Projetar o controlador em atraso para a tender as especificações de regime permanente garantindo:

$$\left|C_{AT}(sd)\right| \approx 1 \quad \text{e} \quad -5^{\circ} \angle C_{AT}(sd) < 0^{\circ}$$

O coeficiente de erro precisa ser aumentado em 20/2,5 = 8 vezes para atender a especificação.

Assumindo um aumento de 10 vezes em Kv e escolhendo o polo do controlador em atraso em -0,001 tem-se

$$C_{AT}(s) = \frac{s+0{,}01}{s+0{,}001}$$

Projeto do Controlador

Verificando módulo e fase do controlador em atraso, obtém-se

$$\left| C_{AT}(sd) \right| = 0{,}9982 \approx 1$$

$$C_{AT}(sd) = -0{,}1^{\circ}$$

atendendo os requisitos de módulo e fase.

Assim, o controlador avanço-atraso fica:

$$C(s) = 5{,}33 \left(\frac{s+2}{s+6{,}4} \right) \left(\frac{s+0{,}01}{s+0{,}001} \right)$$

Projeto do Controlador

Verificação de projeto

$$C(s)G(s) = \frac{16(s+0{,}01)}{s(s+0{,}001)(s+6{,}4)}$$

De onde obtém-se

$$K_V = \frac{16 \times 0{,}01}{6{,}4 \times 0{,}001} = 25 \quad \Rightarrow \quad e_\infty = 4\%$$

Em malha fechada

$$T(s) = \frac{16(s+0{,}01)}{s^3 + 6{,}401s^2 + 16{,}01s + 0{,}16}$$

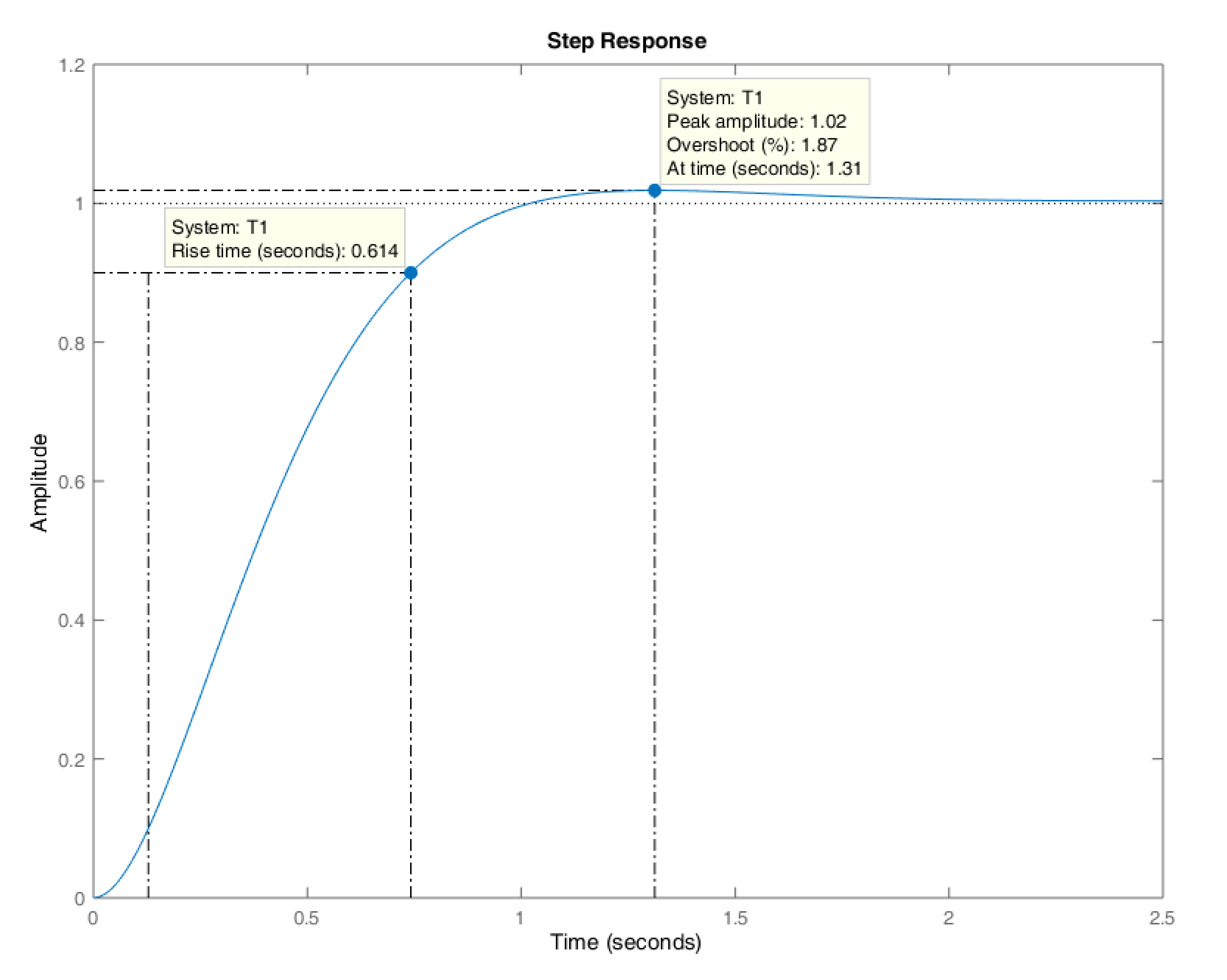
Projeto do Controlador

Resultando em

$$p_{1,2} = -3{,}2 \pm j2{,}4$$

$$p_3 = -0{,}01 \qquad\qquad z = -0{,}01$$

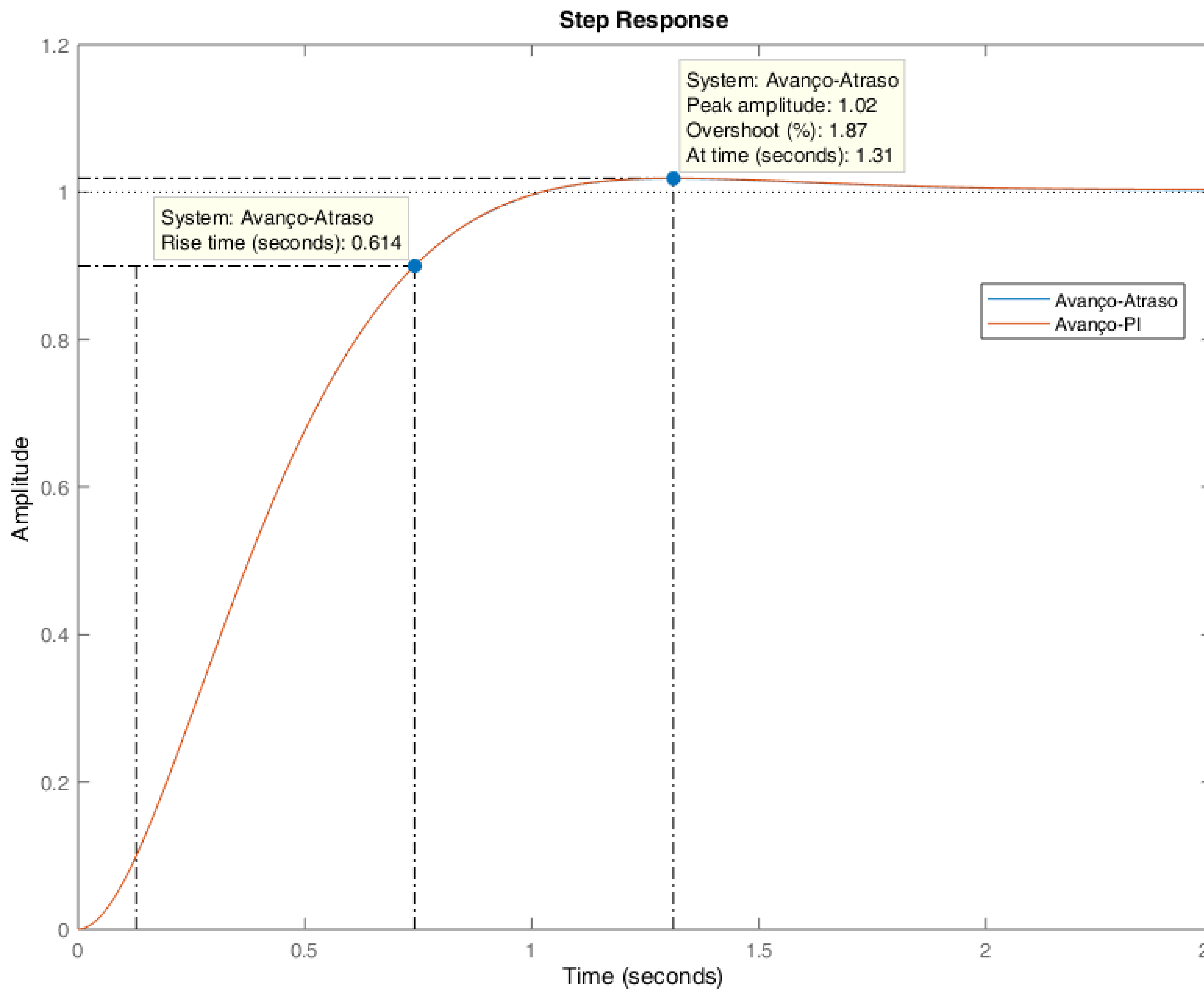
Garantindo que a resposta atende as especificações.


Step Response
System: T1
Peak amplitude: 1.02
Overshoot (%): 1.87
At time (seconds): 1.31
System: T1
Rise time (seconds): 0.614
Amplitude
Time (seconds)
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5

Controlador PID Real (PI + Avanço)

Neste caso, basta transformar o atraso em um PI.

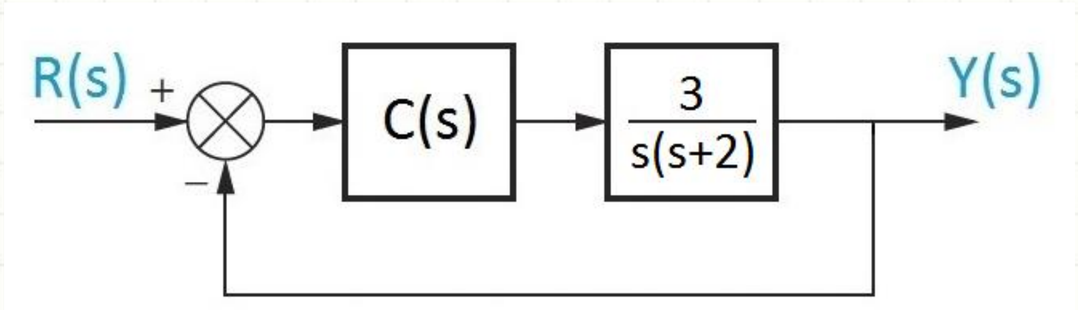
$$C(s) = 5{,}33\left(\frac{s+2}{s+6{,}4}\right)\left(\frac{s+0{,}01}{s}\right)$$



Step Response
System: Avanço-Atraso
Peak amplitude: 1.02
Overshoot (%): 1.87
At time (seconds): 1.31
System: Avanço-Atraso
Rise time (seconds): 0.614
Avanço-Atraso
Avanço-PI
Amplitude
Time (seconds)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
0.5
1.5
2
2.5

Exemplo 4

Seja o sistema de controle do exercício anterior:



Projetar um controlador avanço-atraso de modo a atender as seguintes especificações:

- Erro à rampa inferior a 5%
- Sobressinal máximo inferior a 5%
- Frequência natural não amortecida maior ~~ou igual~~ a 2 segundos

Exemplo 4

Neste caso, não é possível fazer o cancelamento polo/zero.

Como escolher o valor do zero do controlador em avanço ?

Exemplo 4

Uma vez que não será usado cancelamento, o valor do zero pode ser escolhido livremente, dentro ou fora da região desejada para os polos de malha fechada. Sejam as duas possibilidades:

$$-2 < z < 0$$

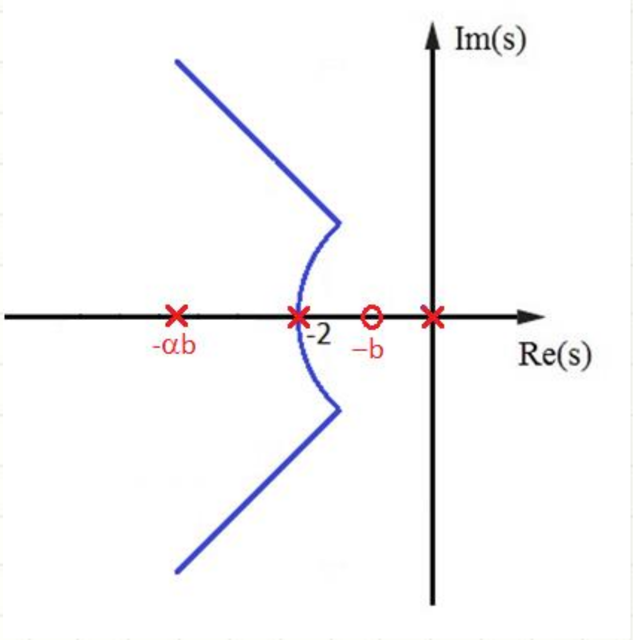
$$-\infty < z < -2$$

Exemplo 4

Para -2 < z < 0, tem-se a configuração polo/zero abaixo.

Quanto menor o valor de b, maior será o correspondente valor de α (para alocar os polos desejados).

O ramo que parte do polo da origem se move diretamente para o zero do controlador. Assim, sempre existirá um polo de malha fechada fora da região desejada e as especificações nunca serão atendidas.

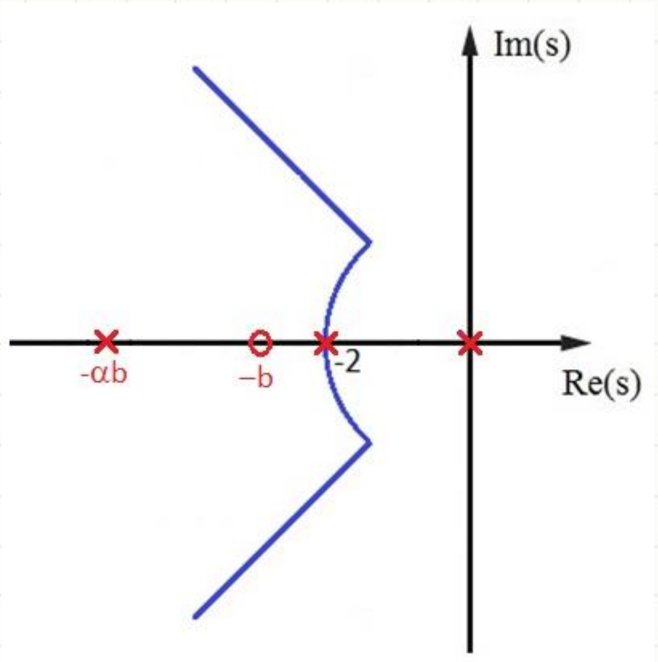


Exemplo 4

Para $-\infty < z < -2$ será possível atender as especificações.

Quanto maior o valor de b, menor será o correspondente valor de α, ou seja, mais próximos estarão polo e zero do controlador.

Convém lembrar ainda que o valor de α precisa ser maior do que 1 para caracterizar um controle em avanço.

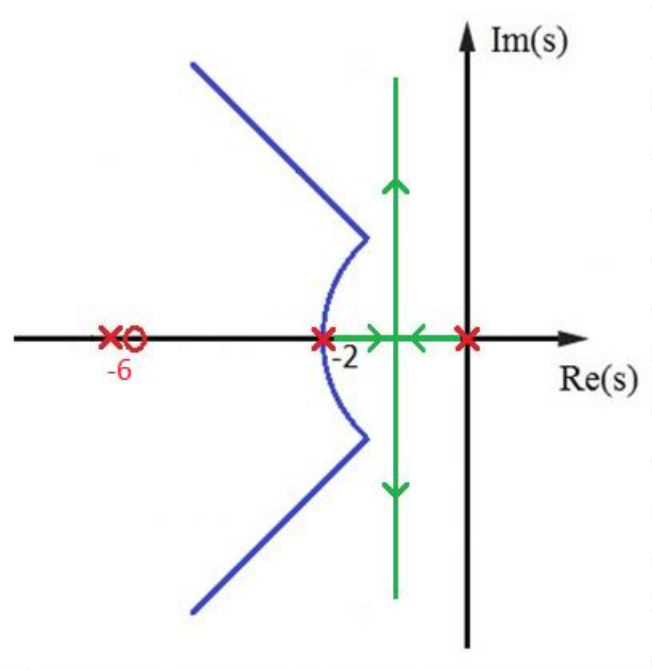


Exemplo 4

No exemplo, considerando a mesma posição desejada para os polos de malha fechada (s_d = -3,2 ± j2,4), o limite para a posição do zero será b < 6.

Para b=6 obtém–se α=1,02 (αb=6,13). Ou seja, polo e zero estão praticamente sobrepostos, o que anularia o efeito do controlador.

O LR estaria sempre fora da região desejada.



Exemplo 4

Escolhendo b=3, tem-se:

$$\alpha = 4{,}1 \quad \Rightarrow \quad C(s) = 14\frac{s+3}{s+12{,}3}$$

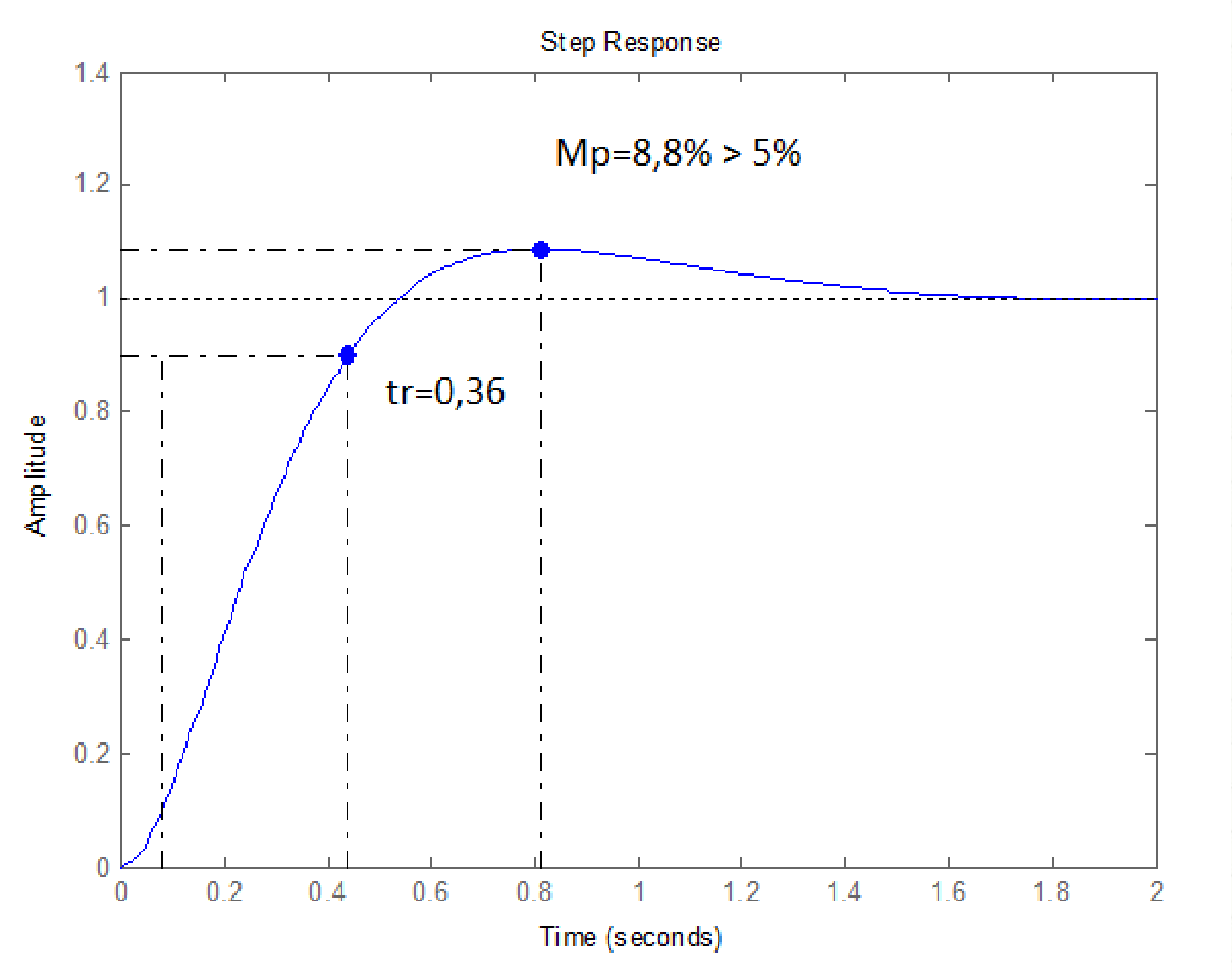
$$K = 14$$

Em malha fechada

$$T(s) = \frac{42(s+3)}{s^3 + 14{,}3s^2 + 66{,}6s + 126} \qquad \begin{array}{l} p_{1,2} = -3{,}2 \pm j2{,}4 \\ p_3 = -7{,}9 \end{array} \qquad z = -3$$

Neste caso, a posição do zero terá muita influência na resposta, elevando o sobressinal, não respeitando assim a especificação do problema.

Exemplo 4



Step Response
Mp=8,8% > 5%
tr=0,36
Amplitude
Time (seconds)
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2

Exemplo 4

Uma boa opção para escolha do zero é um valor próximo ao polo que não pode ser cancelado.

Para b=2,1

$$\alpha = 3{,}18 \quad \Rightarrow \quad C(s) = 5{,}73\frac{s+2{,}1}{s+6{,}7}$$

$$K = 5{,}73$$

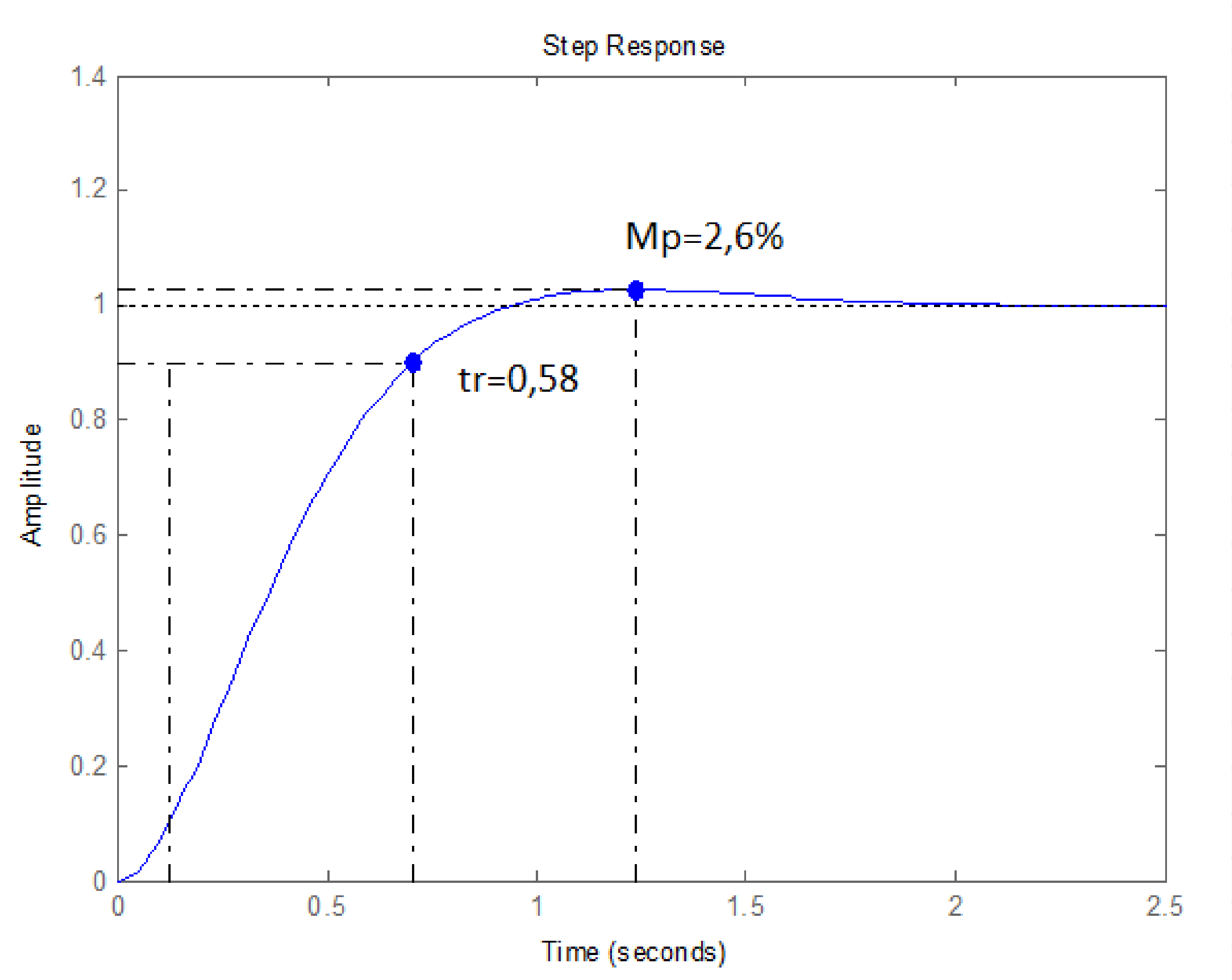
Em malha fechada

$$T(s) = \frac{17{,}19(s+2{,}1)}{s^3 + 8{,}7s^2 + 30{,}6s + 36{,}1} \qquad p_{2,2} = -3{,}2 \pm j2{,}4$$

$$p_1 = -2{,}24 \qquad z = -2{,}1$$

Neste caso, o polo adicional do sistema estará mais próximo do zero do controlador, atenuando seu efeito na resposta.

Exemplo 4


Step Response
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
Amplitude
0
0.5
1
1.5
2
2.5
Time (seconds)
Mp=2,6%
tr=0,58

Exemplo 4

O erro de regime permanente será

$$K_V = \frac{5{,}73 \times 3 \times 3{,}18}{2} = 2{,}7 \quad \Rightarrow \quad e_\infty = 37\%$$

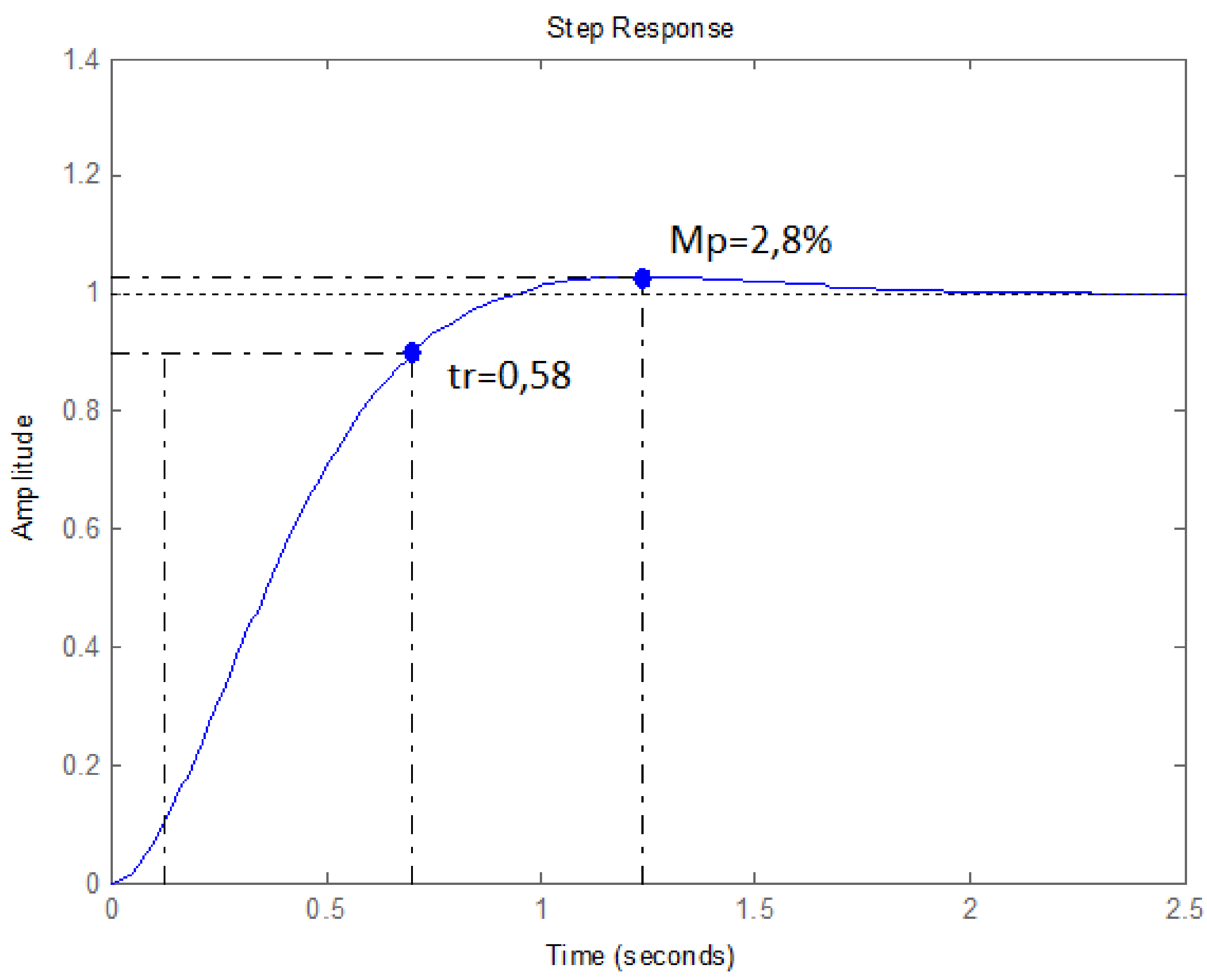
Portanto, Kv precisa ser aumentado em 20/2,7=2,4 vezes.

Escolhendo um aumento de 5 vezes e o polo do controlador em -0,001 tem-se

$$C_{AT}(s) = \frac{s + 0{,}005}{s + 0{,}001}$$

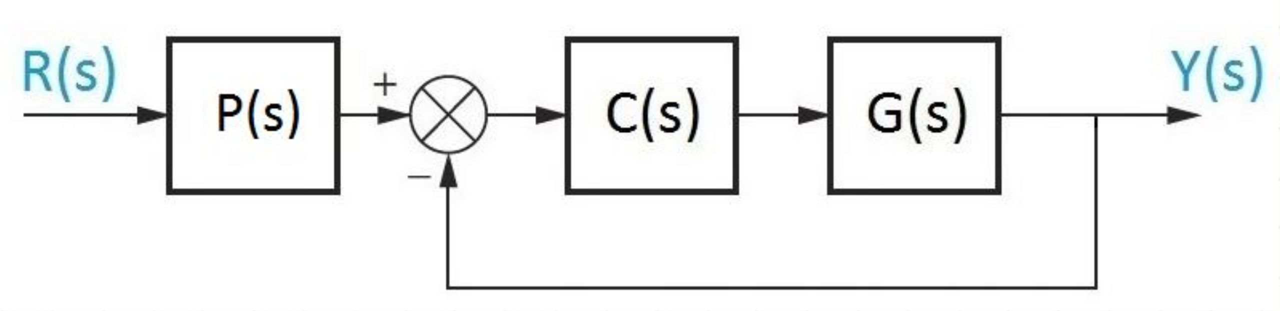
Assim, $$C(s) = 5{,}73\left(\frac{s + 2{,}1}{s + 6{,}7}\right)\left(\frac{s + 0{,}005}{s + 0{,}001}\right)$$

Exemplo 4


Step Response
Amplitude
Time (seconds)
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
Mp=2,8%
tr=0,58

Pré-Filtro (Filtro de Referência)

O pré-filtro P(s) é geralmente utilizado para eliminar o efeito indesejado de um zero na resposta transitória.



sendo

$$P(s) = \frac{K}{s + p}$$

O valor de p é escolhido para cancelar o zero indesejado e o ganho K para manter o valor de regime permanente do sistema controlado, ou seja, P(0)=1 (no caso de resposta ao degrau unitário).

Exemplo

Para o exemplo 4, com b=3, foi obtido o controlador em avanço

$$C(s) = 14\frac{s+3}{s+12{,}3}$$

Para este controlador

$$K_V = \frac{14\times 3\times 3}{2\times 12{,}3} = 5{,}12 \quad \Rightarrow \quad e_\infty = 20\%$$

Portanto, o controlador em atraso precisa aumentar Kv em 20/5,12 = 3,9 vezes.

Escolhendo um aumento de 5 vezes e o polo do controlador em -0,001 tem-se

$$C_{AT}(s) = \frac{s+0{,}005}{s+0{,}001}$$

Exemplo

Em malha fechada

$$T(s) = \frac{42(s+0{,}005)(s+3)}{s^4 + 14{,}3s^3 + 66{,}61s^2 + 126{,}2s + 0{,}63}$$

gerando

$$p_1 = -0{,}005 \qquad z_1 = -0{,}005$$

$$p_{2,3} = -3{,}2 \pm j2{,}4 \qquad z_2 = -3$$

$$p_4 = -7{,}9$$

Como observado anteriormente, a especificação de sobressinal não será atendida. Um pré-filtro pode ser usado para atenuar o efeito do zero indesejado.

Exemplo

Neste caso, o pré-filtro é escolhido como

$$P(s) = \frac{3}{s+3}$$

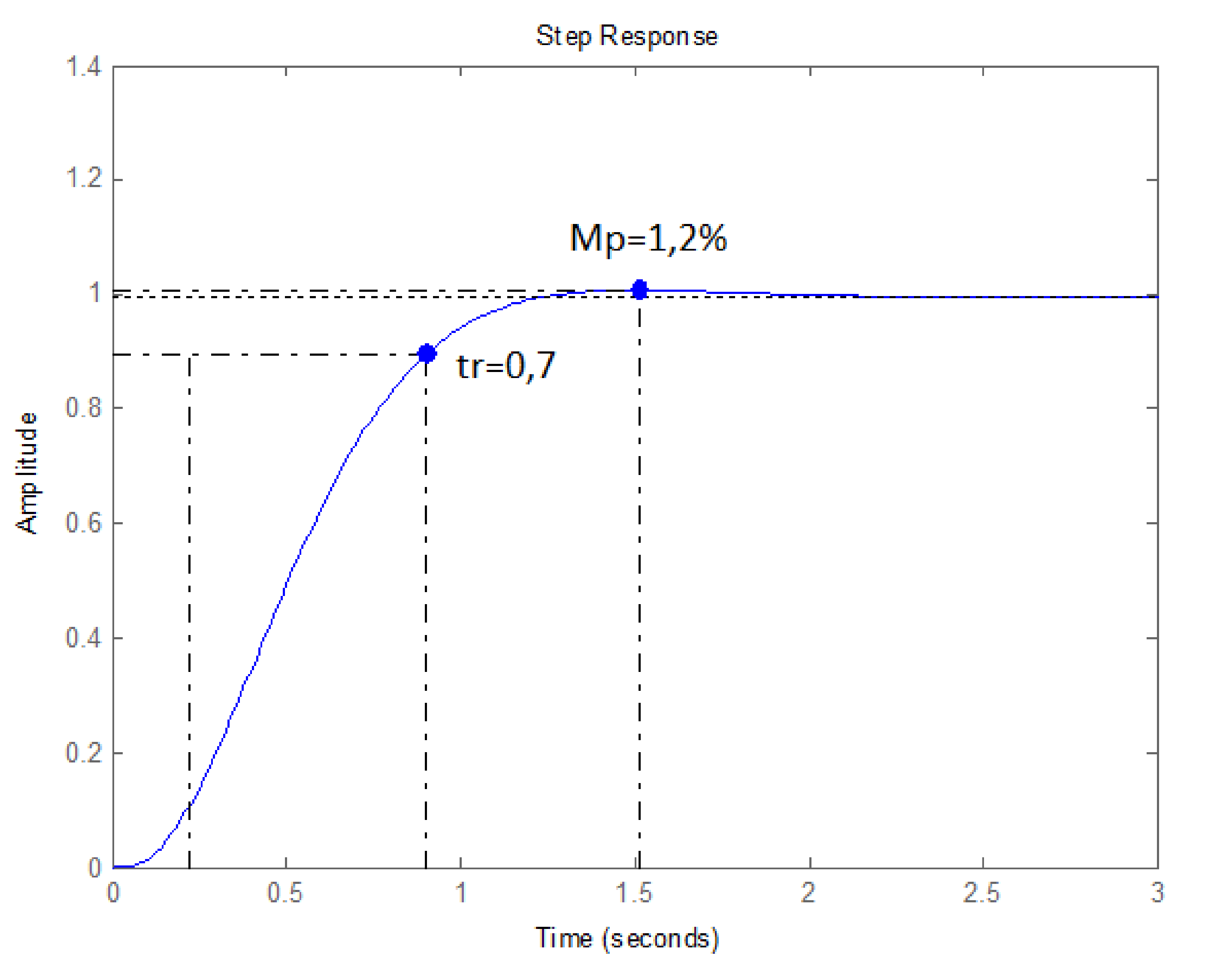
Assim,

$$\begin{aligned} Y(s) &= R(s)P(s)T(s) \\ &= \frac{42(s+0{,}005)(s+3)}{(s+0{,}005)(s+7{,}9)(s^2+6{,}4s+16)} \frac{3}{s+3} R(s) \end{aligned}$$

ou

$$Y(s) = \frac{126}{(s+7{,}9)(s^2+6{,}4s+16)} R(s)$$

Exemplo



Step Response
Mp=1,2%
tr=0,7
Amplitude
Time (seconds)
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.5
1.5
2
2.5
3

Controlador Avanço-Atraso ($\beta=1/\alpha$)

A estrutura do controlador é a seguinte:

$$C(s) = K \underbrace{\left(\frac{s+b}{s+\alpha b}\right)}_{C_{AV}} \underbrace{\left(\frac{s+a}{s+a/\alpha}\right)}_{C_{AT}} \qquad K, a, b > 0 \quad \alpha > 1$$

Neste caso, a relação polo/zero é a mesma para ambos os controladores (avanço e atraso). E, portanto, o procedimento de projeto precisa ser modificado.

Porque?

Controlador Avanço-Atraso (β=1/α)

Procedimento de Projeto

1. Definir, a partir das especificações de resposta transitória, a posição desejada para os polos dominantes de malha fechada.

2. Ajustar o ganho K de modo a atender a especificação de erro de regime permanente.

3. Projetar o controlador em avanço de modo a posicionar os polos de malha fechada no local desejado.

4. Projetar o controlador em atraso para a tender as especificações de regime permanente garantindo

$$\left|C_{AT}(sd)\right| \approx 1 \quad \text{e} \quad -5^\circ \angle C_{AT}(sd) < 0^\circ$$

Exercício

Projetar um controlador avanço-atraso com $\beta=1/\alpha$, para o exemplo anterior.