

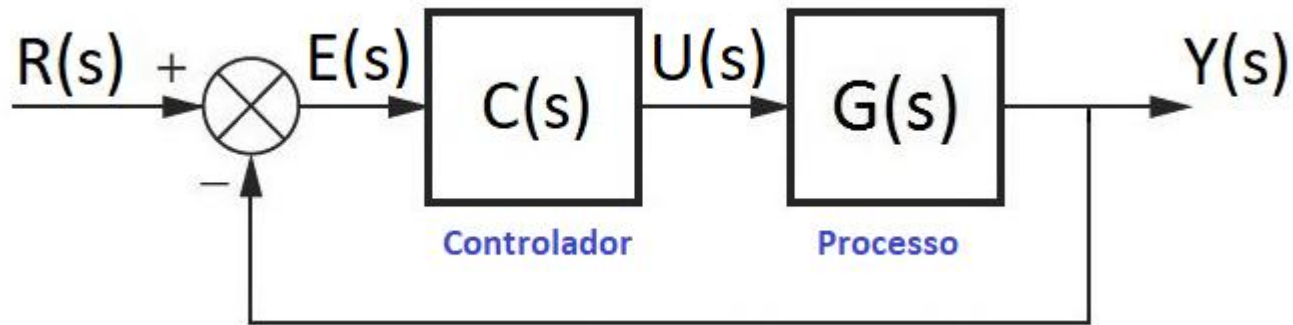


# **CARACTERIZAÇÃO DE PROCESSOS E SINTONIA DE CONTROLADORES POR MÉTODOS EMPÍRICOS**

Profa. Cristiane Paim

# Caracterização de Processos

Considere a configuração série de um sistema de controle:



Dado um conjunto de especificações de desempenho, é necessário projetar-se o controlador  $C(s)$  de modo a atendê-las.

Para sintonizar o controlador é necessário o conhecimento do **modelo matemático** que representa o processo.

# Caracterização de Processos

Se o modelo matemático que representa o processo é conhecido, podemos utilizar **métodos analíticos**, baseados no **Lugar das Raízes** e/ou **Resposta em Frequência**, para determinar os parâmetros do Controlador.

Caso não exista um modelo matemático conhecido para o processo, podemos utilizar métodos de **identificação de sistemas**, relativamente sofisticados, **para obter modelos** precisos para estes.

Não sendo possível fazer uma identificação precisa do processo, seja pelas características do mesmo ou por questões financeiras, é possível obter-se modelos mais simples uma vez que a maioria dos processos industriais têm um comportamento que pode ser aproximado por sistemas de 1ª ou 2ª ordem com atraso.

# Caracterização de Processos

1ª Ordem

$$G(s) = \frac{Ce^{-Ls}}{Ts + 1}$$

2ª Ordem - sobre ou criticamente amortecido

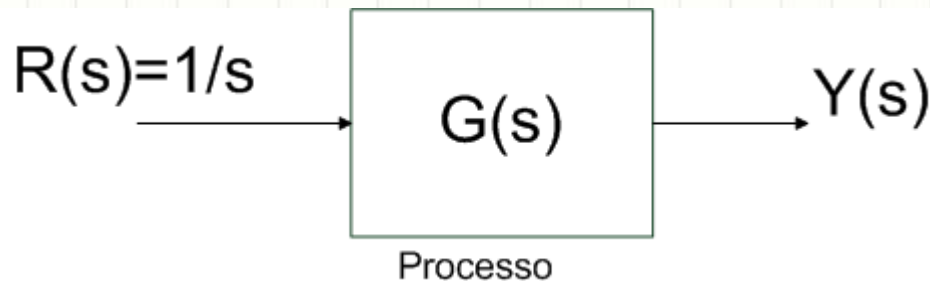
$$G(s) = \frac{Ce^{-Ls}}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

2ª Ordem – subamortecido

$$G(s) = \frac{Ce^{-Ls}}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi \frac{s}{\omega_n} + 1}$$

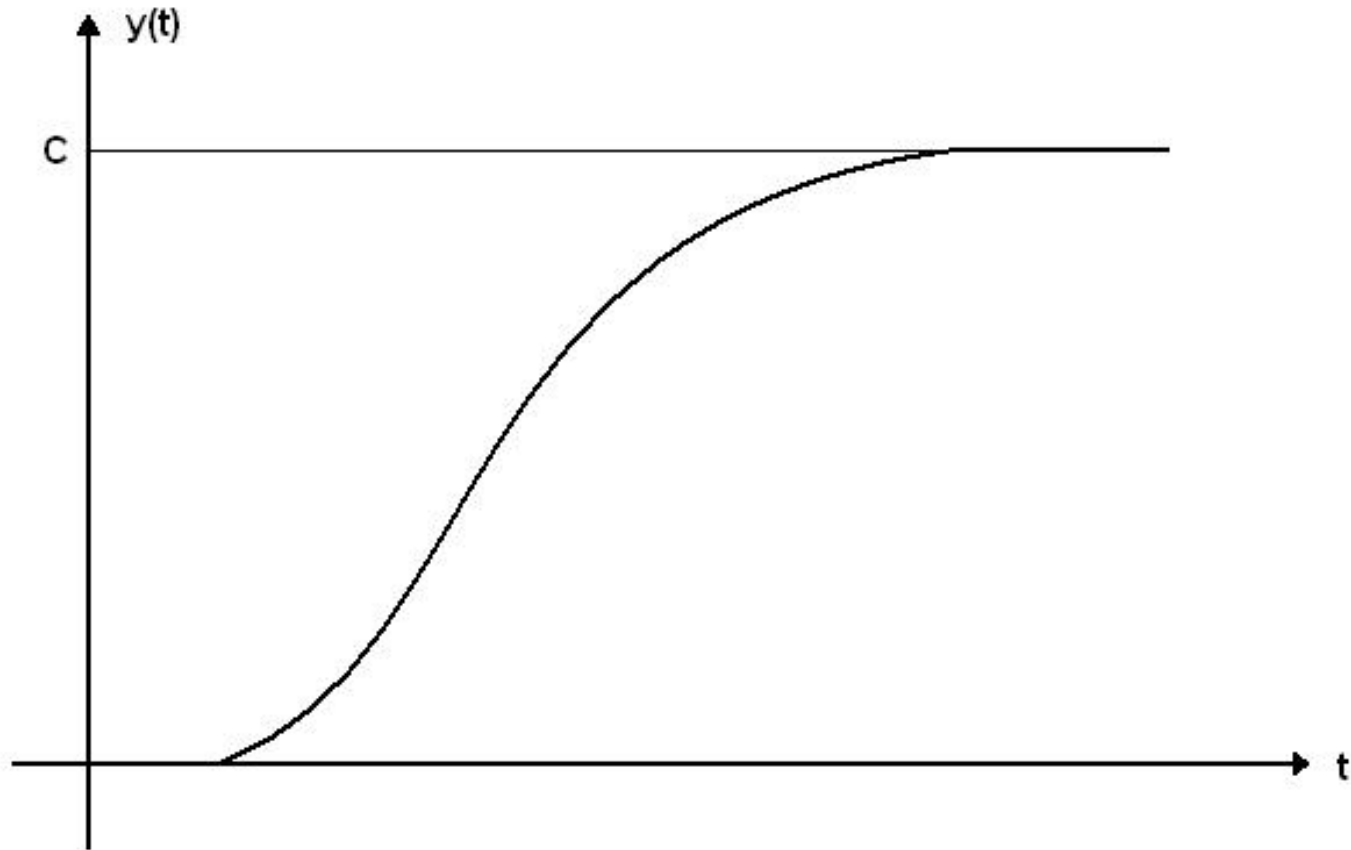
# Caracterização de Processos

Modelos de 1ª ordem com atraso podem ser obtidos a partir da resposta ao degrau considerando o sistema em malha aberta (**ensaio de malha aberta**).



Neste caso, a resposta  $y(t)$  é a chamada **curva de reação** e terá uma forma de "S".

# Caracterização de Processos



Resposta típica de um sistema de 1ª ordem sujeito a uma entrada em degrau.



# Caracterização de Processos

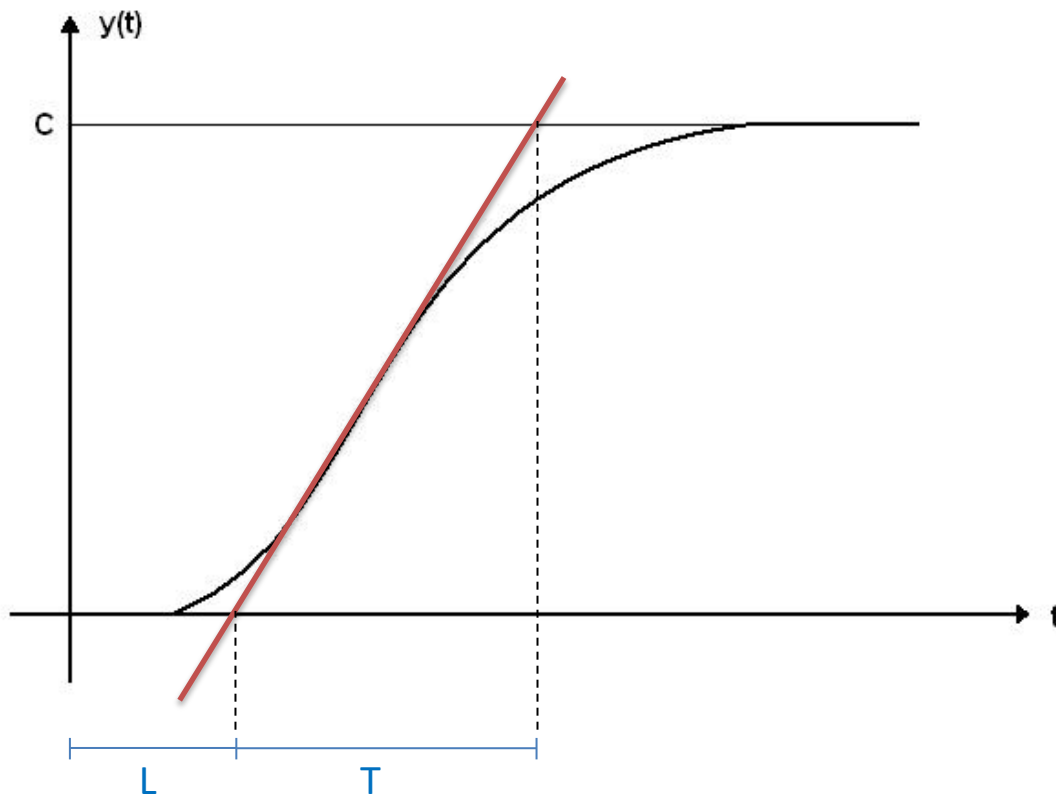
Esta curva pode ser aproximada por um modelo de 1ª ordem com atraso:

$$G_M(s) = \frac{Ce^{-Ls}}{Ts + 1}$$

O parâmetro C é obtido diretamente da curva, corresponde ao valor de regime permanente. Os demais parâmetros, L e T, podem ser determinados através de diversos métodos.

# Caracterização de Processos

**Método 1:** Traça-se uma reta tangente à curva de reação, no ponto de maior inclinação.



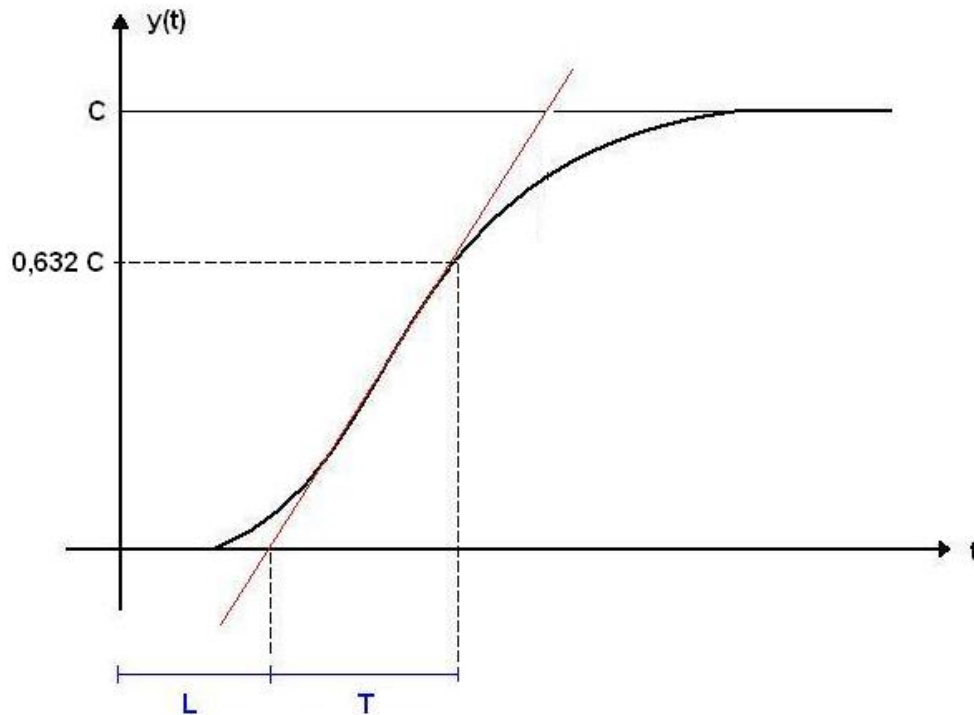
$L$ : é o ponto onde a reta intercepta o eixo do tempo.

$T$ : é o intervalo entre  $L$  e o ponto em que a reta tangente intercepta o valor de regime permanente.



# Caracterização de Processos

**Método 2:** Traça-se uma reta tangente à curva de reação, no ponto de maior inclinação (igual ao método anterior).



$L$ : é o ponto onde a reta intercepta o eixo do tempo.

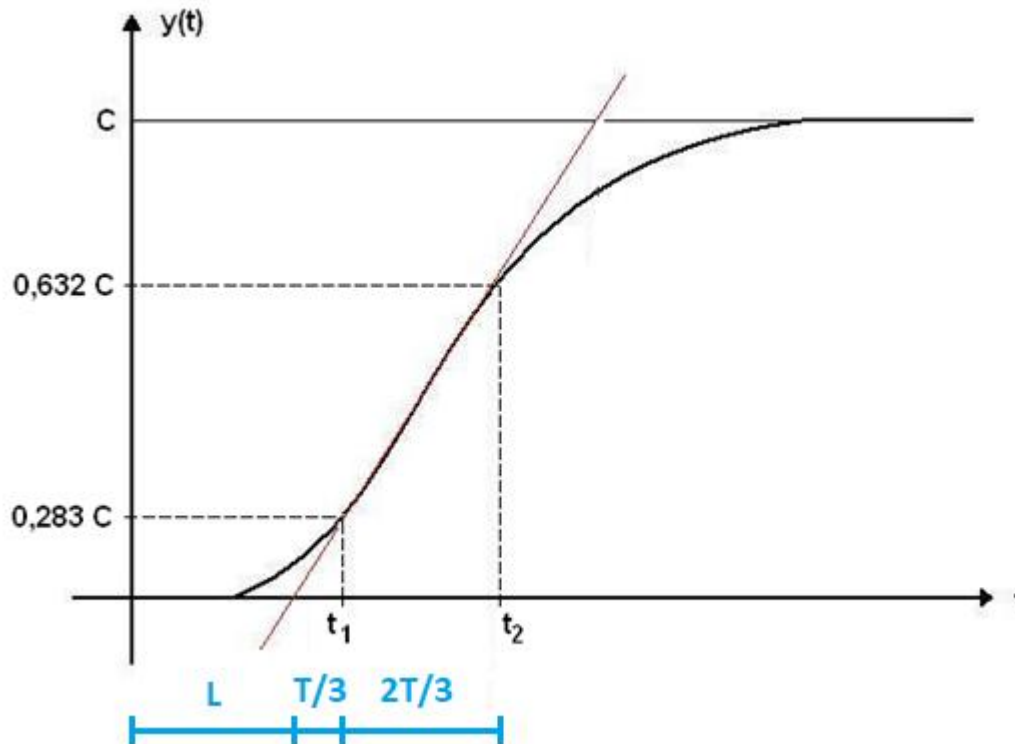
$(L+T)$ : é o instante em que a saída vale 63,2% do valor de regime permanente.

$$y(L+T) = 0,632C$$

# Caracterização de Processos

**Método 3:** os parâmetros  $L$  e  $T$  são obtidos considerando a região que apresenta maior taxa de variação.

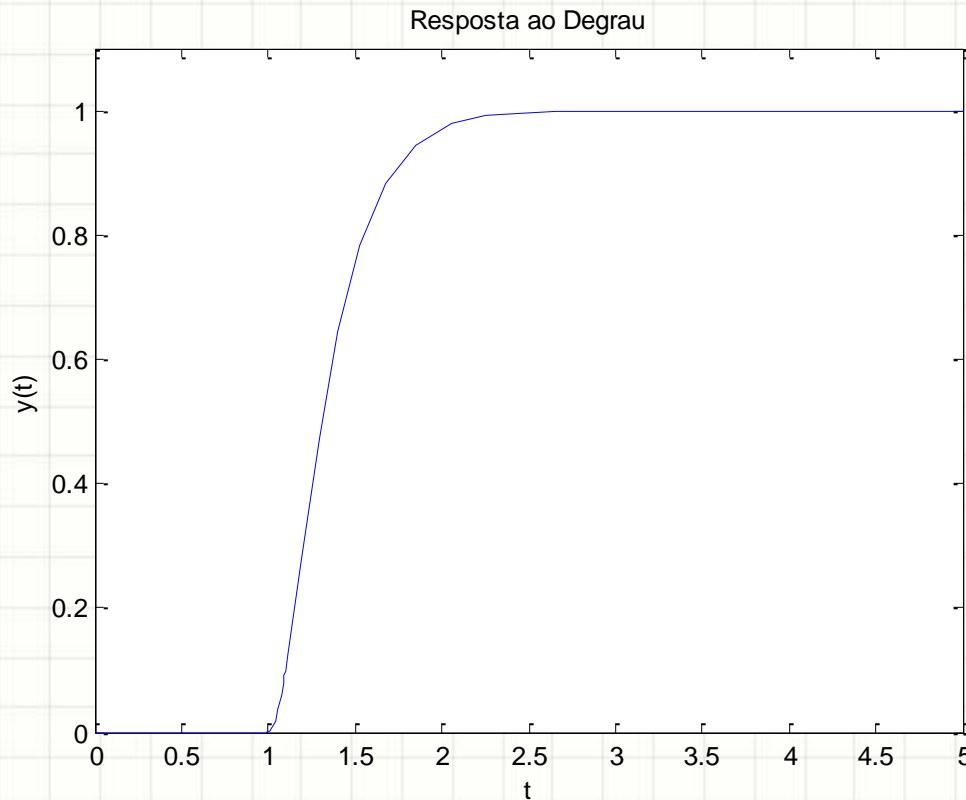
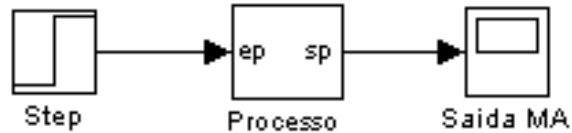
$$\begin{aligned}y(L + T) &= 0,632C \rightarrow L + T = t_2 \\ y(L + T/3) &= 0,283C \rightarrow L + T/3 = t_1\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}T &= \frac{3}{2}(t_2 - t_1) \\ L &= t_2 - T\end{aligned}$$

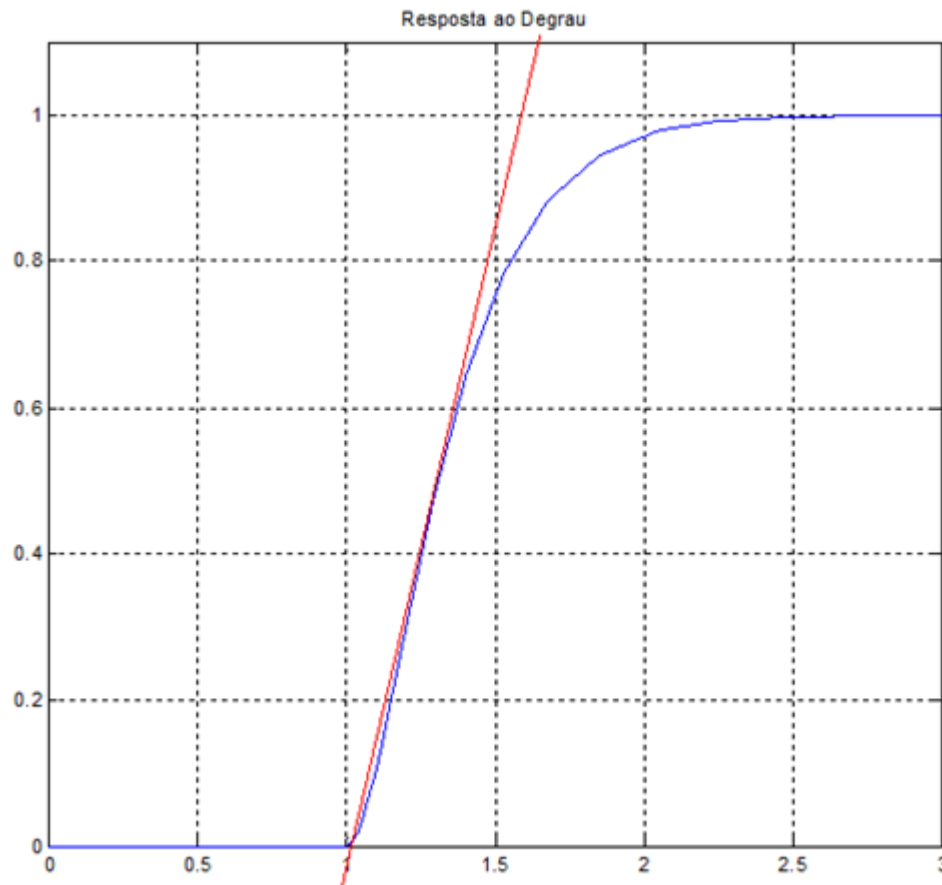
# Caracterização de Processos

Exemplo: aplicação dos métodos



# Caracterização de Processos

## Método 1



Do gráfico:

$$L = 1$$

$$C = 1$$

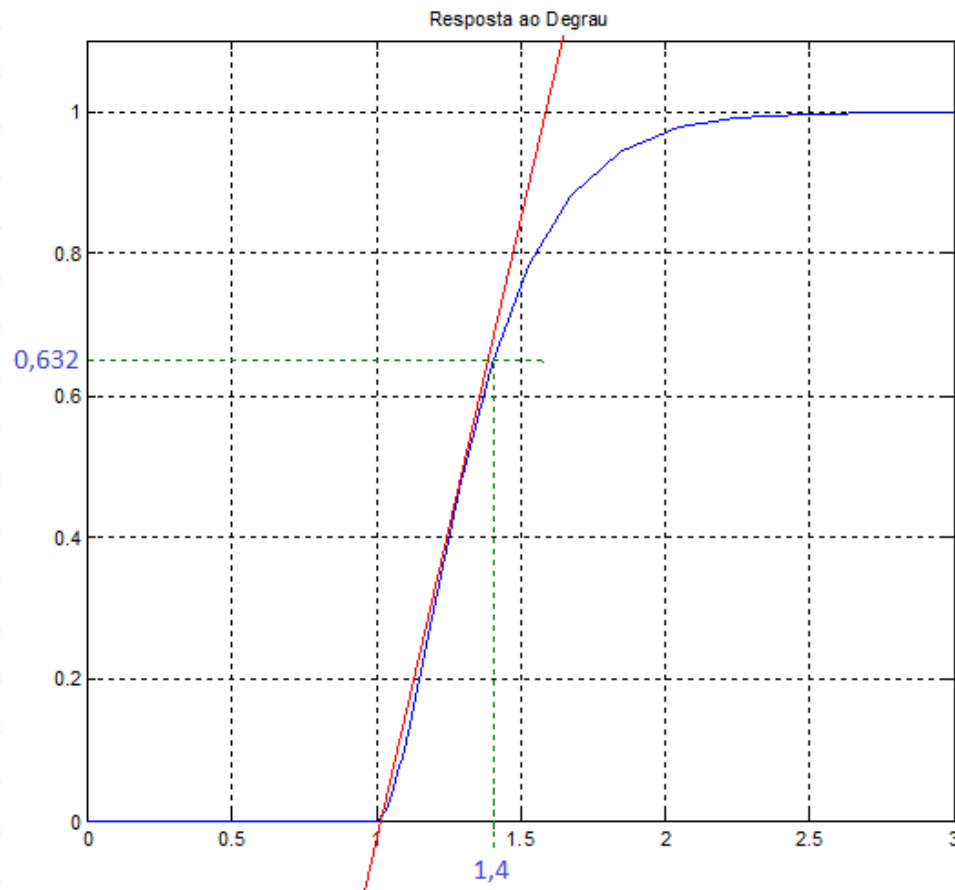
$$T = 1,6 - 1 = 0,6$$

Obtém-se o modelo:

$$G_1(s) = \frac{e^{-s}}{0,6s + 1}$$

# Caracterização de Processos

## Método 2



Do gráfico:

$$L = 1$$

$$C = 1$$

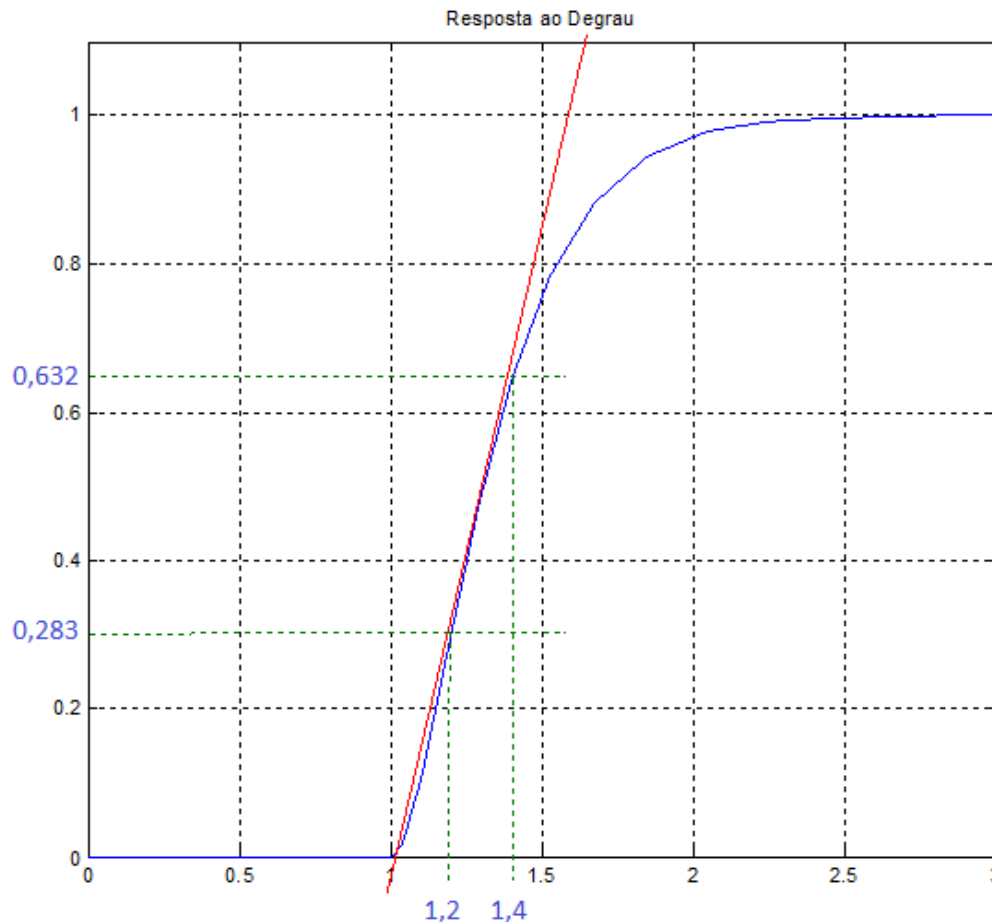
$$L + T = 1,4 \Rightarrow T = 0,4$$

Obtém-se o modelo:

$$G_2(s) = \frac{e^{-s}}{0,4s + 1}$$

# Caracterização de Processos

## Método 3



Do gráfico:

$$t_1 = 1,2$$

$$t_2 = 1,4$$

$$T = 1,5(t_2 - t_1) = 0,3$$

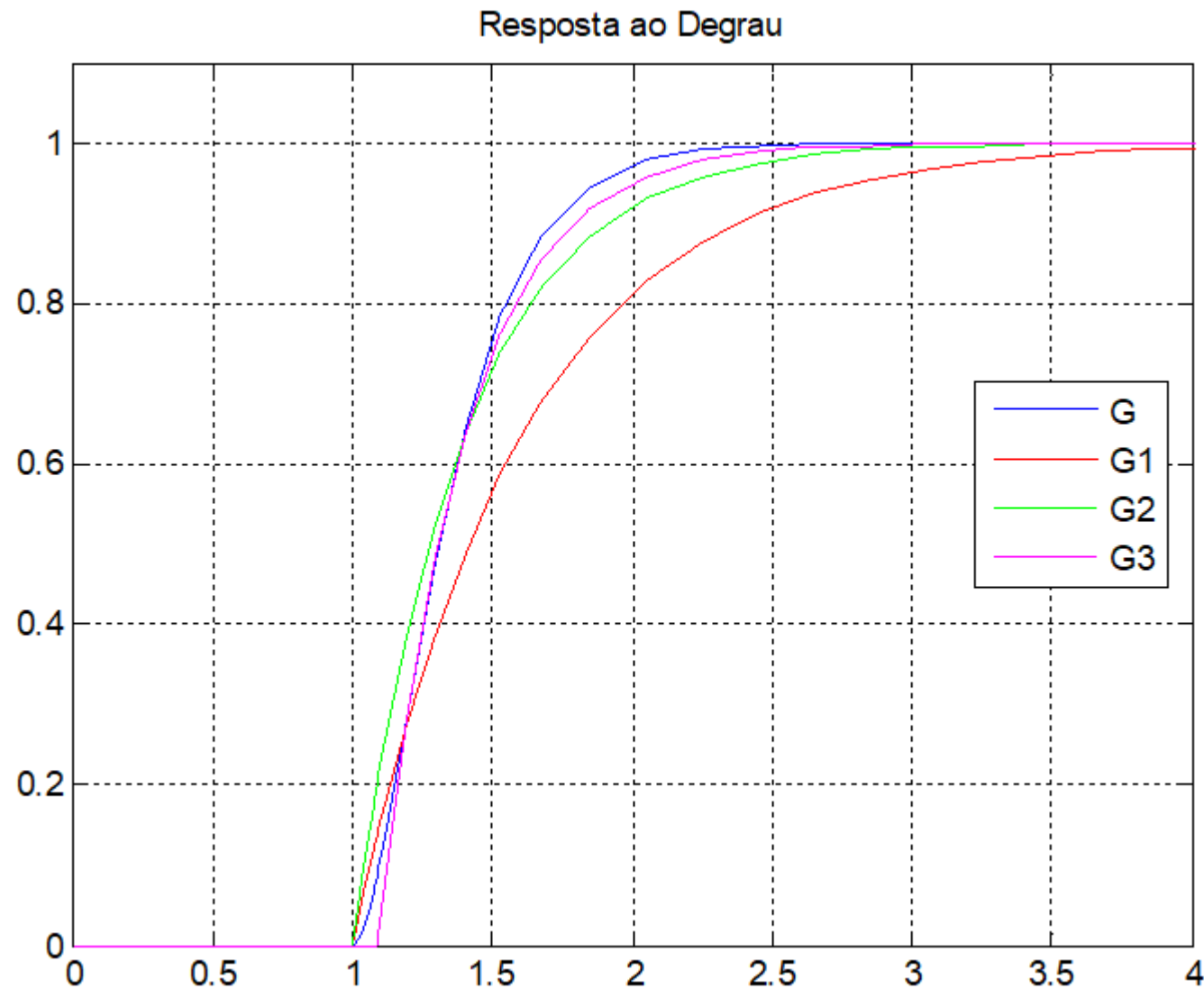
$$L = t_2 - T = 1,1$$

Obtém-se o modelo:

$$G_3(s) = \frac{e^{-1,1s}}{0,3s + 1}$$



# Caracterização de Processos



# Caracterização de Processos

Modelo de 2ª Ordem (sobreamortecido)

$$G(s) = \frac{Ce^{-Ls}}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

Supondo  $T_1 \neq T_2$ , a resposta ao degrau terá a forma:

$$y(t) = C \left\{ 1 + \frac{T_2 e^{\frac{-(t-L)}{T_2}} - T_1 e^{\frac{-(t-L)}{T_1}}}{T_1 - T_2} \right\}$$

Os parâmetros C e L são obtidos de forma similar aos métodos anteriores. Os valores de  $T_1$  e  $T_2$  podem ser obtidos da expressão de  $y(t)$ , usando dois pontos da curva (podendo ser feito numericamente).

# Sintonia de Controladores

A sintonia de controladores pode ser feita utilizando diversos métodos:

- **Métodos Analíticos**

- ✓ A sintonia é feita a partir de ferramentas de análise tais como Lugar das Raízes e Resposta em Frequência.
- ✓ O modelo do sistema normalmente é exato e obtido por análise fenomenológica.

- **Métodos Empíricos**

- ✓ A sintonia é feita através de valores tabelados para os parâmetros do controlador.
- ✓ Os parâmetros de sintonia foram definidos através de testes práticos utilizando modelos aproximados do sistema.

# Métodos Empíricos de Sintonia

Com base nos modelos de 1ª e 2ª ordem com atraso, diversos métodos empíricos de sintonia são propostos na literatura:

- **Métodos da Curva de Reação (Malha Aberta)**
  - ✓ 1º Método de Ziegler-Nichols (1942)
  - ✓ Método CHR (Chien, Hhorne e Reswick, 1952)
  - ✓ Método de Cohen-Coon (1953)
  - ✓ Métodos baseados na minimização de integrais de erro (Lopes, 1967 e Rovira, 1981)
  - ✓ Curva de Reação do Processo de Åström e Hägglund
- **Métodos de Sintonia com Oscilação Constante (Malha Fechada)**
  - ✓ 2º Método de Ziegler-Nichols (Ganho Crítico)
  - ✓ Ziegler-Nichols Modificado
  - ✓ Parâmetros de Tyreus-Luyben
  - ✓ Oscilações contínuas de Åström e Hägglund

# Sintonia de Controladores

- Métodos empíricos para sistemas instáveis (Visioli 2006)  
Necessita função de transferência exata do sistema, que deve ser na forma:

$$G(s) = \frac{Ke^{-Ls}}{Ts - 1}$$

Propõe tabelas de sintonia considerando minimização de critérios de erro

- Métodos numéricos de otimização
- Métodos adaptativos
- Métodos baseados em modelo do Processo
  - ✓ Sintonia Lambda
  - ✓ IMC (Internal Model Control)
  - ✓ SIMC (Simple Internal Model Control)

# Métodos de Ziegler-Nichols

São métodos empíricos definidos de modo a obter uma taxa de decaimento de  $\frac{1}{4}$  (relação entre a amplitude da 1ª e 2ª oscilação da resposta).

São os métodos empíricos mais antigos, desenvolvidos por John G. Ziegler e Nathaniel B. Nichols em 1942.

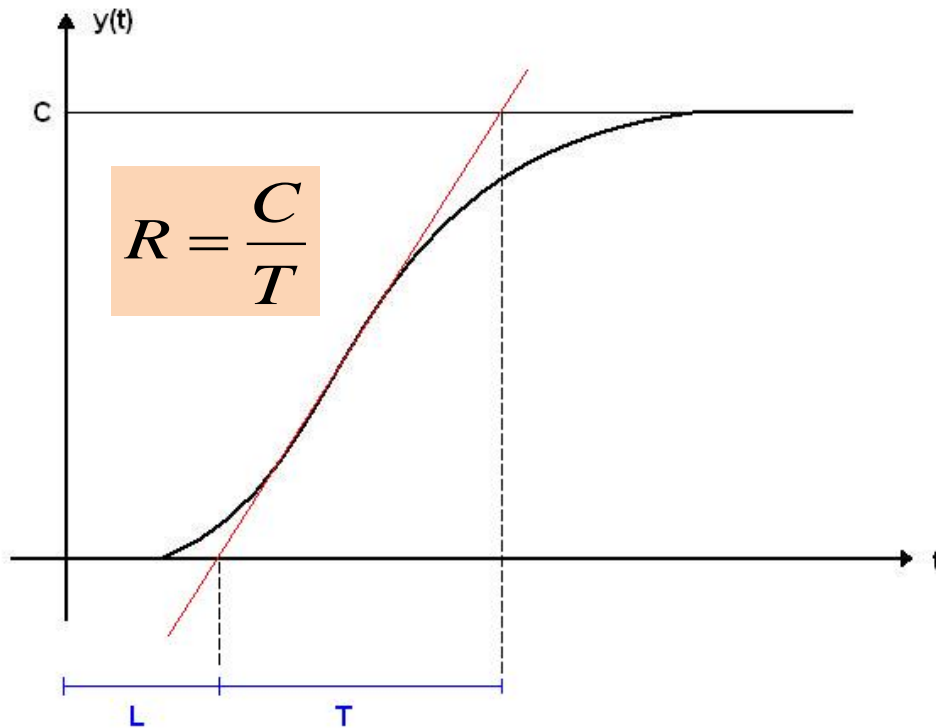
Com base nestes métodos vários outros foram desenvolvidos.

Não há garantia de estabilidade.



# 1º Método de Ziegler-Nichols

Obtém-se experimentalmente a resposta ao degrau unitário para o sistema em malha aberta. A saída  $y(t)$  terá a forma da curva em “s” mostrada anteriormente.



O modelo do controlador PID é dado por:

$$C(s) = K_P \left[ 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right]$$

(PID série ideal )

# 1º Método de Ziegler-Nichols

Os parâmetros de sintonia do controlador serão dados por:

Controlador	$K_p$	$T_i$	$T_D$
P	$1/RL$	-	-
PI	$0,9/RL$	$L/0,3$	-
PID	$1,2/RL$	$2L$	$L/2$

$$R = \frac{C}{T}$$

Aplicando os parâmetros da tabela no controlador

$$C(s) = K_p \left[ 1 + \frac{1}{T_i s} + T_D s \right]$$

obtém-se

$$C(s) = \frac{1,2}{RL} \left[ 1 + \frac{1}{2Ls} + \frac{L}{2} s \right] = \frac{0,6}{R} \frac{(s + 1/L)^2}{s}$$

Portanto, o controlador tem um zero duplo em  $-1/L$  e um polo na origem.

# Método CHR

Semelhante ao 1º Método de Ziegler-Nichols.

Os parâmetros de sintonia são definidos para garantir uma resposta sem sobressinal ou com sobressinal em torno de 20%.

	Mp = 0%			Mp = 20%		
Controlador	$K_p$	$T_I$	$T_D$	$K_p$	$T_I$	$T_D$
P	0,30/RL	-	-	0,70/RL	-	-
PI	0,35/RL	1,2T	-	0,60/RL	T	-
PID	0,60/RL	T	0,50L	0,95/RL	1,4T	0,47L

# Método de Cohen-Coon

Semelhante ao 1º Método de Ziegler-Nichols.

Os parâmetros de sintonia são alterados para:

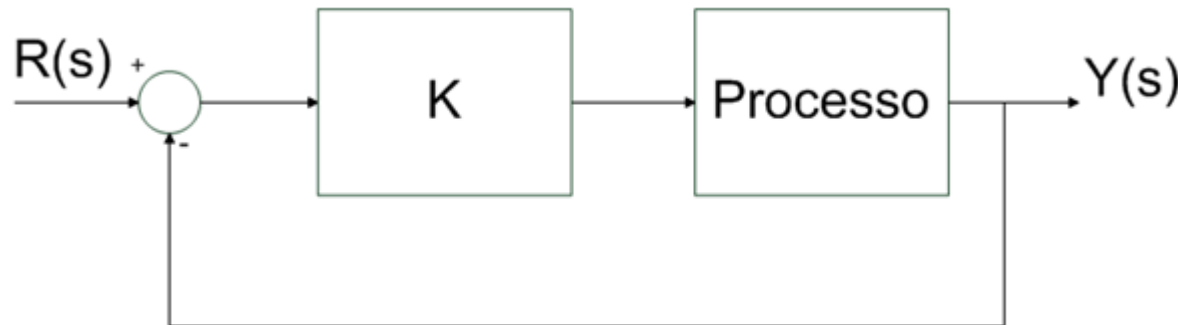
Controlador	$K_p$	$T_i$	$T_D$
P	$\frac{P}{NL} \left( 1 + \frac{R}{3} \right)$	-	-
PI	$\frac{P}{NL} \left( 0,9 + \frac{R}{12} \right)$	$L \left( \frac{30 + 3R}{9 + 20R} \right)$	-
PID	$\frac{P}{NL} \left( 1,33 + \frac{R}{4} \right)$	$L \left( \frac{32 + 6R}{13 + 8R} \right)$	$L \left( \frac{4}{11 + 2R} \right)$

sendo

$$N = \frac{C}{T} \quad R = \frac{L}{T} \quad P = \frac{C}{L}$$

## 2º Método de Ziegler-Nichols

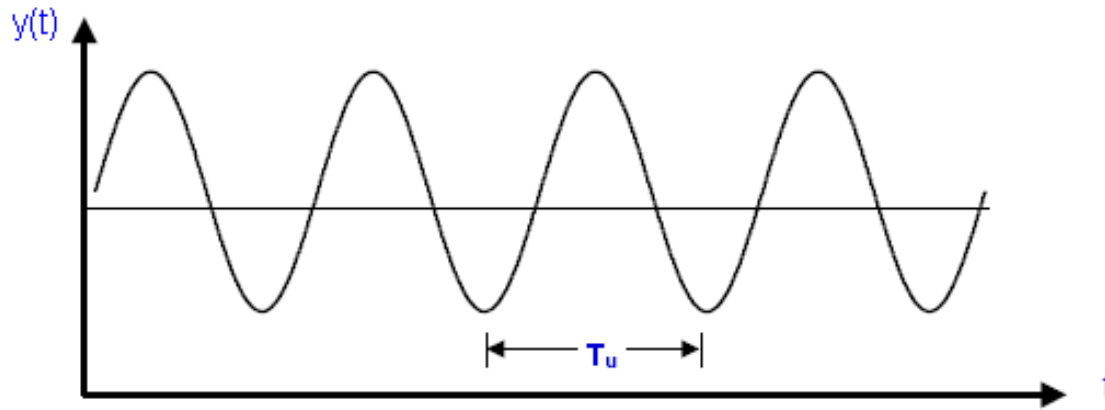
O ensaio é realizado em malha fechada, considerando um controlador proporcional (ganho  $K$ ).



Aplica-se como referência um degrau unitário e aumenta-se o ganho  $K$  até atingir o limite da estabilidade, no qual a resposta apresenta oscilações não amortecidas.

# 2º Método de Ziegler-Nichols

A saída terá a forma:



Obtém-se então o período crítico  $T_u$ , para o ganho crítico  $K_u$  associado.

A estrutura do controlador PID é a mesma do método anterior (configuração ideal).



## 2º Método de Ziegler-Nichols

Os parâmetros de sintonia do controlador serão dados por:

Controlador	$K_p$	$T_i$	$T_D$
P	$0,50K_u$	-	-
PI	$0,45K_u$	$T_u/1,2$	-
PID	$0,60K_u$	$0,5T_u$	$0,125T_u$

Aplicando os parâmetros da tabela, obtém-se:

$$C(s) = 0,6K_U \left[ 1 + \frac{2}{T_U s} + 0,125T_U s \right] = 0,075 K_U T_U \frac{(s + 4/T_U)^2}{s}$$

Neste caso, o zero duplo do controlador é definido por  $-4/T_u$ .

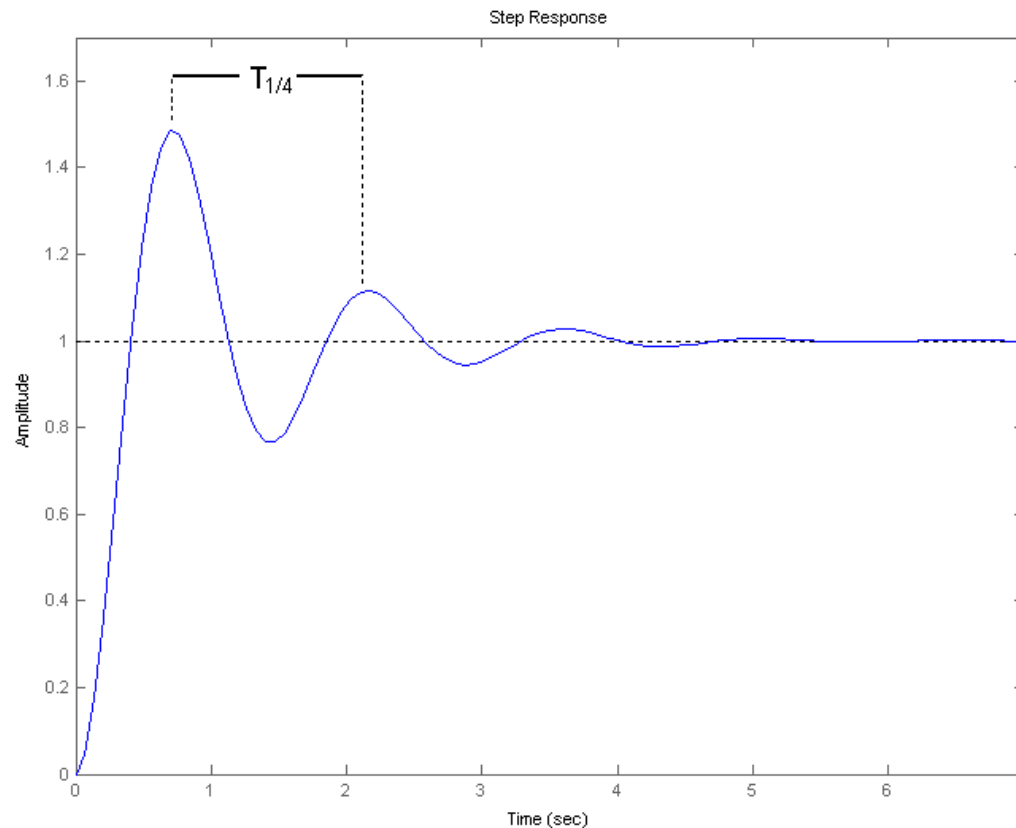
# Parâmetros de Tyreus-Luyben

Semelhante ao método de Ziegler-Nichols em malha fechada. Os valores de  $K_u$  e  $T_u$  são obtidos da mesma forma. Entretanto, os parâmetros de sintonia são modificados para:

Controlador	$K_p$	$T_i$	$T_D$
PI	$0,31K_u$	$2,2T_u$	-
PID	$0,45K_u$	$2,2T_u$	$0,158T_u$

# Ziegler-Nichols Modificado

O ganho  $K_u$  é ajustado de modo que se obtenha um decaimento de  $\frac{1}{4}$  do 1º para o 2º pico da resposta ao degrau.



# Ziegler-Nichols Modificado

O ganho e o período de oscilação são chamados de  $K_{1/4}$  (ganho de amplitude  $1/4$ ) e  $T_{1/4}$  (período de amplitude  $1/4$ ).

A partir destes valores são determinados os parâmetros  $K_u$  e  $T_u$  da tabela de Ziegler-Nichols:

$$K_U = 2K_{1/4}$$

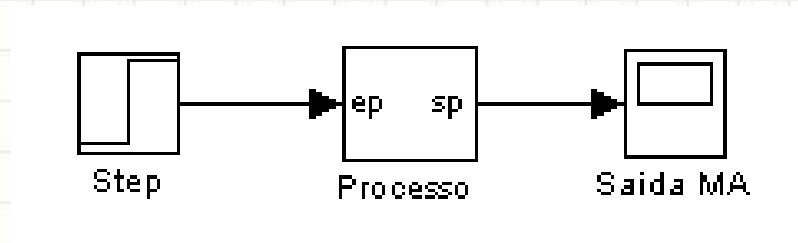
$$T_U = T_{1/4}$$

Controlador	$K_p$	$T_i$	$T_D$
P	$0,50K_u$	-	-
PI	$0,45K_u$	$T_u/1,2$	-
PID	$0,60K_u$	$0,5T_u$	$0,125T_u$

# Exemplos de aplicação dos métodos

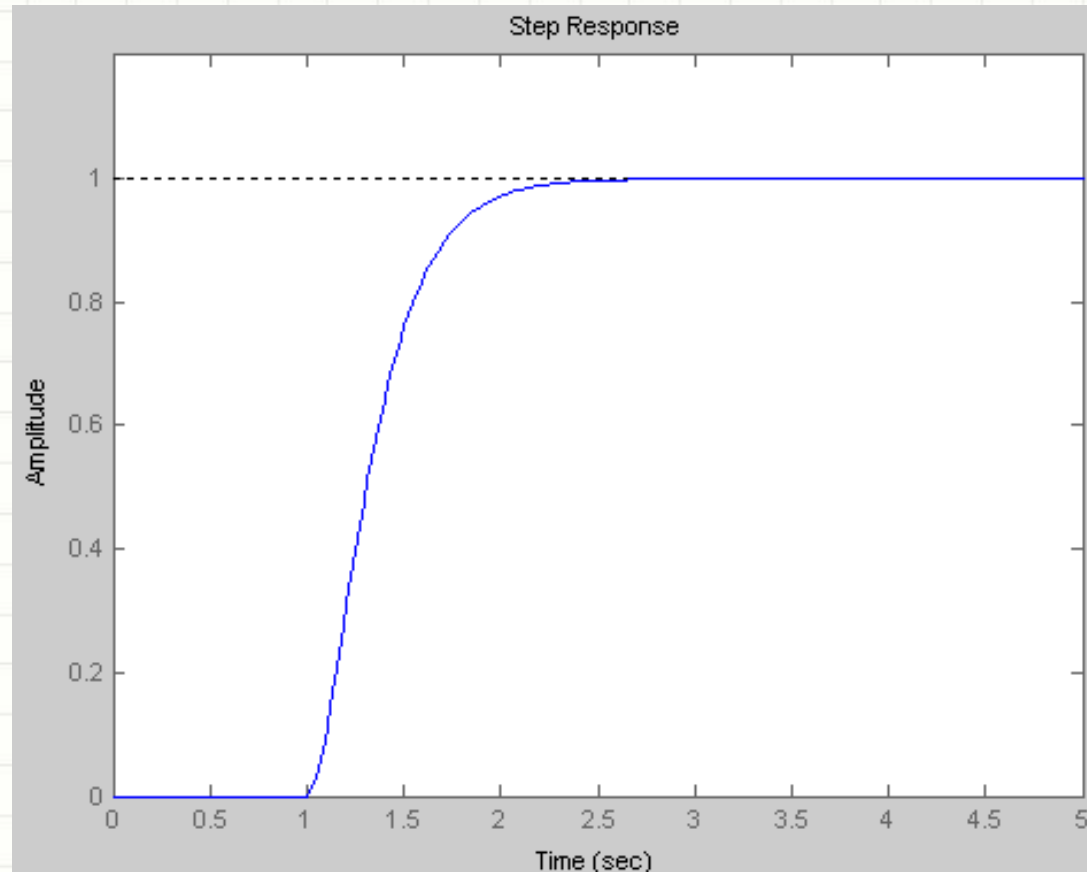
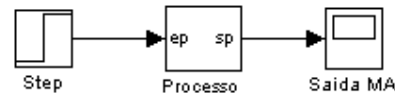
Os métodos empíricos de sintonia servem como ponto de partida para o ajuste de parâmetros.

Exemplo: Ensaaios em malha aberta



# Exemplos de aplicação dos métodos

Processo 1

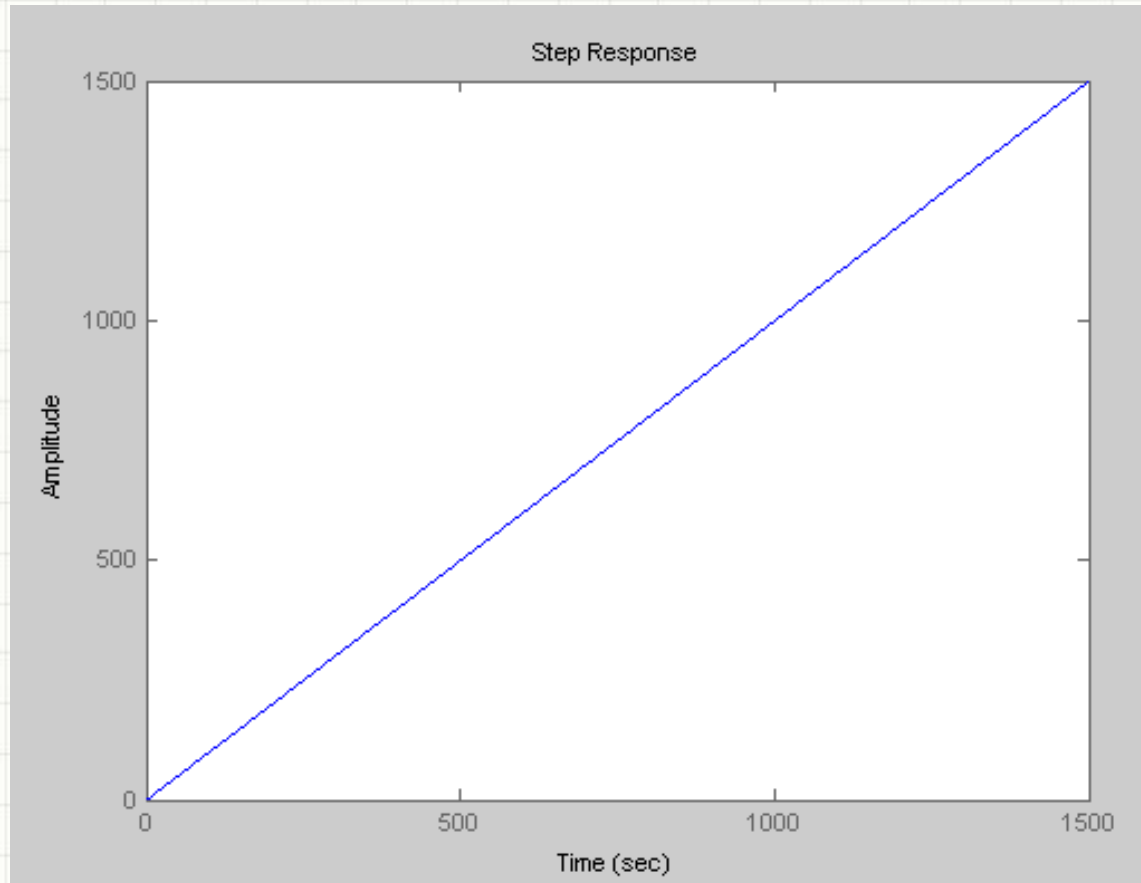
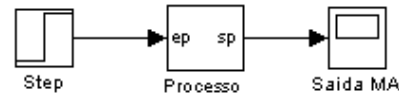


Utilizar métodos de malha aberta (ZN, CHR, etc.)



# Exemplos de aplicação dos métodos

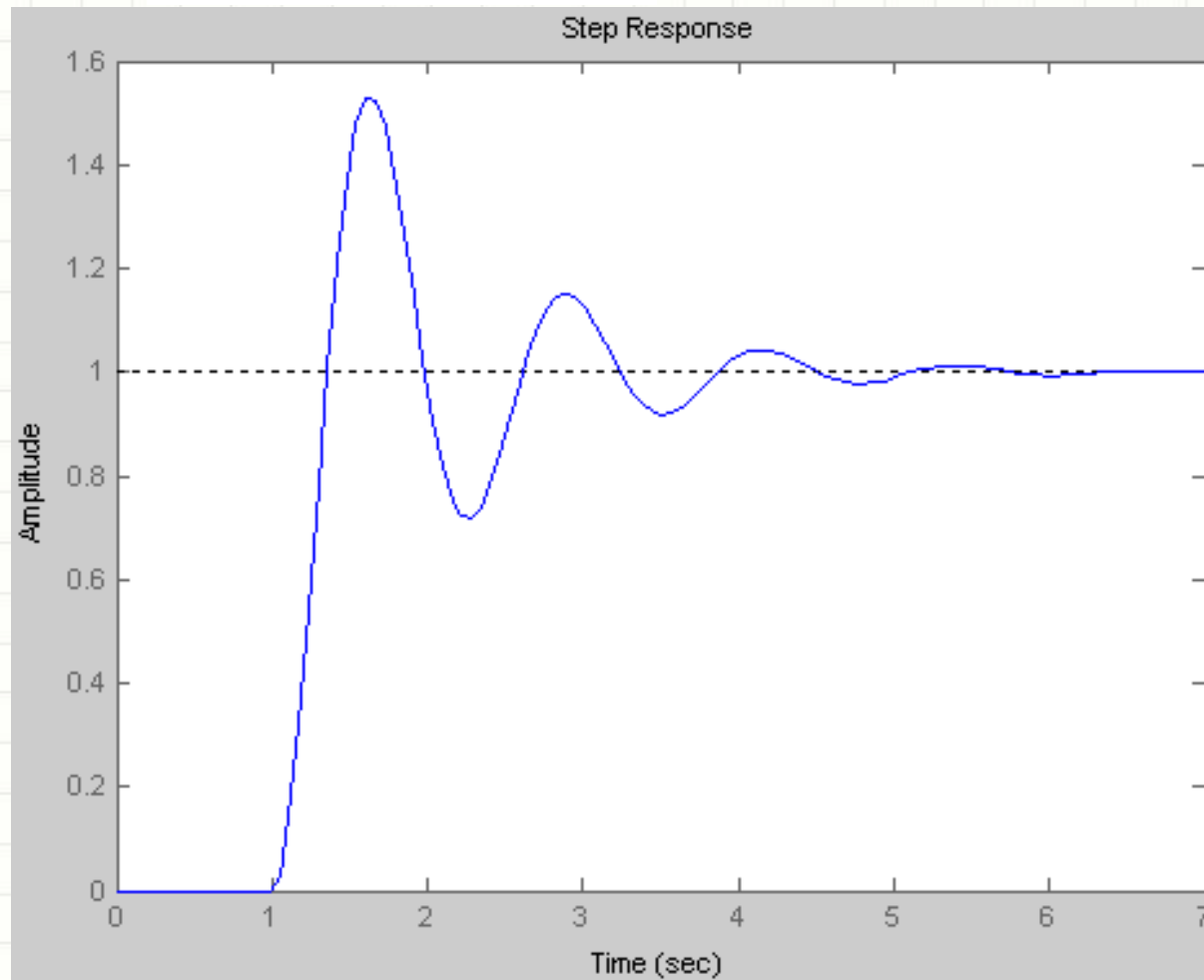
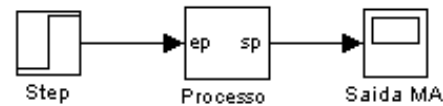
Processo 2



Utilizar métodos de malha fechada.

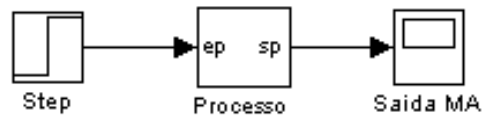
# Exemplos de aplicação dos métodos

Processo 3



Utilizar métodos de malha fechada.

# Exemplo 1: Sintonia com métodos de malha aberta



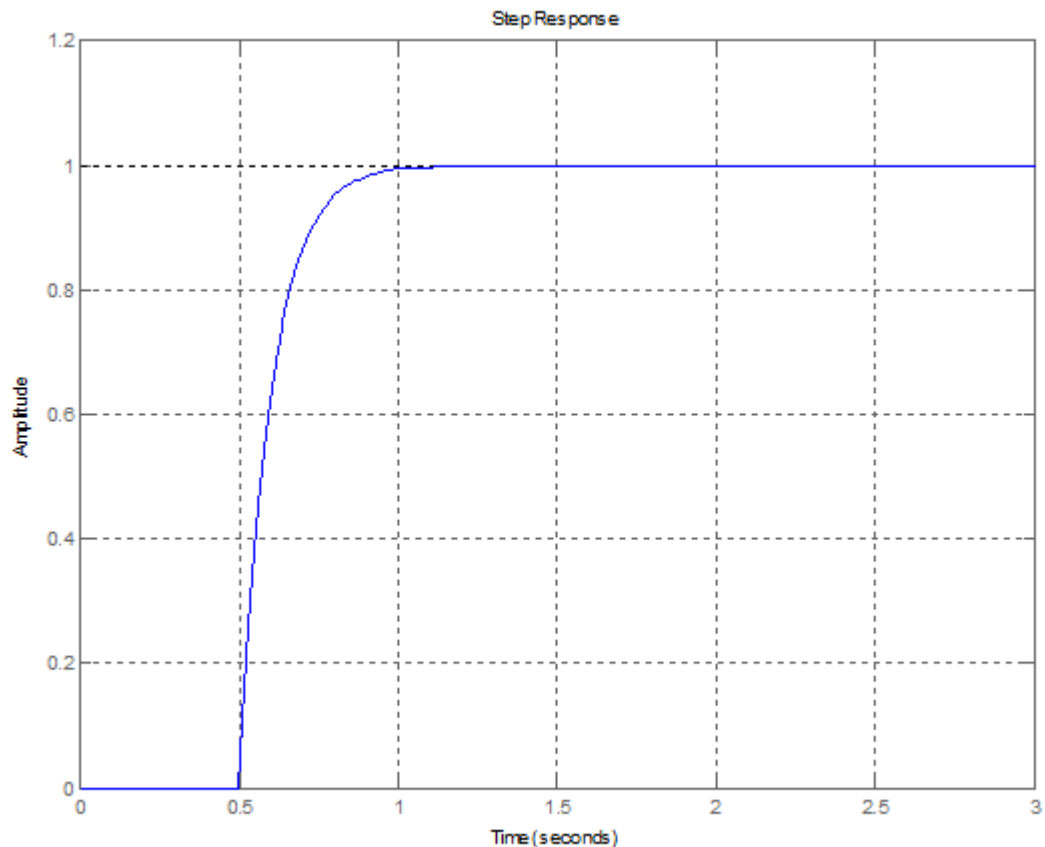
Do gráfico:

$$L=0,5$$

$$C=1$$

$$T=0,6-0,5=0,1$$

$$G(s) \cong \frac{e^{-0,5s}}{0,1s + 1}$$



# Exemplo 1: Sintonia com métodos de malha aberta

Da tabela de sintonia tem-se

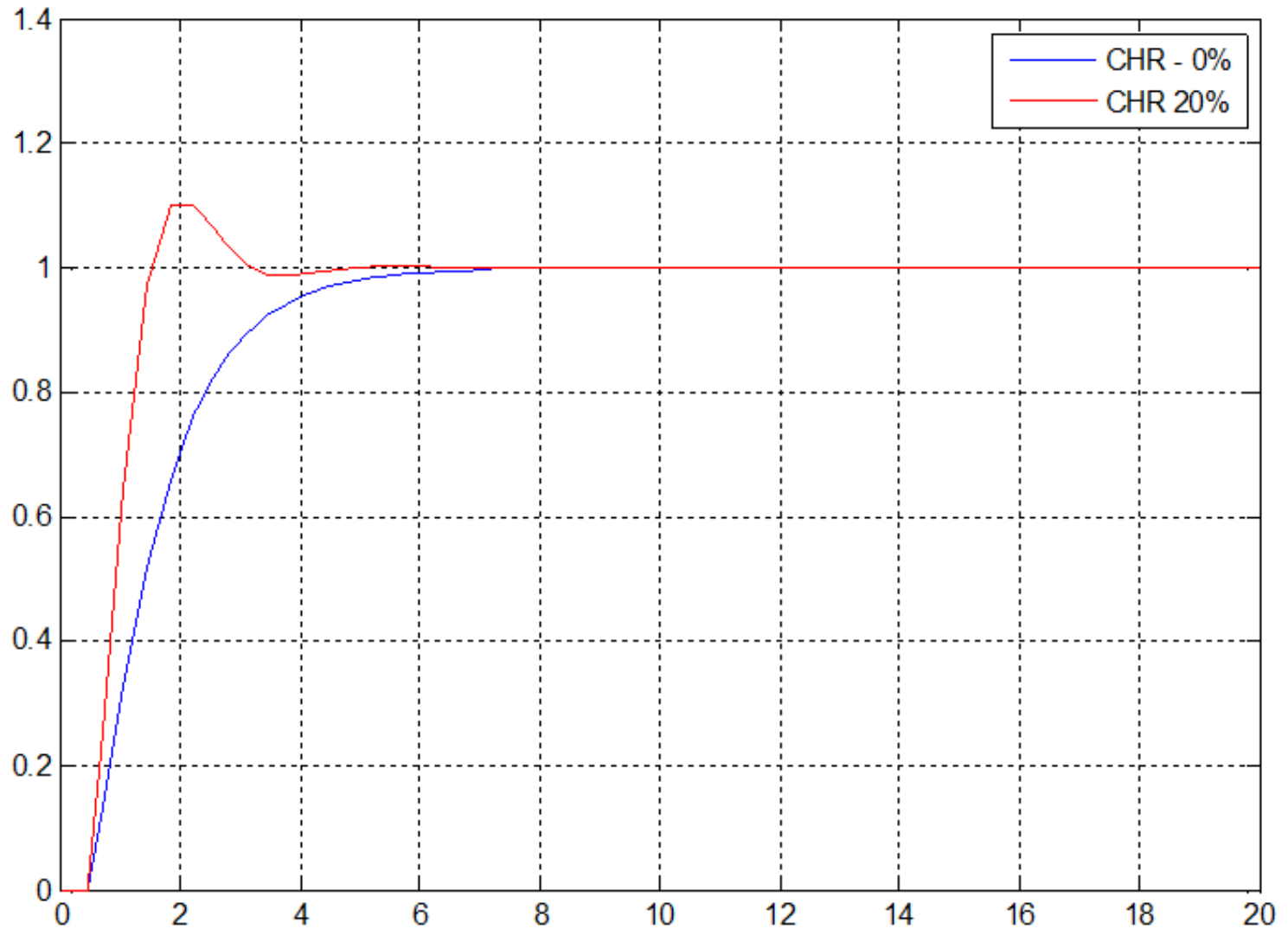
PI	$K_p$	$T_i$
CHR (0%)	$(0,35/RL) = 0,07$	$1,2T = 0,12$
CHR(20%)	$(0,60/RL) = 0,12$	$T = 0,10$

gerando os controladores:

$$C_{CHR0}(s) = 0,07 \left( 1 + \frac{1}{0,12s} \right) = 0,07 \left( \frac{s + 8,33}{s} \right)$$

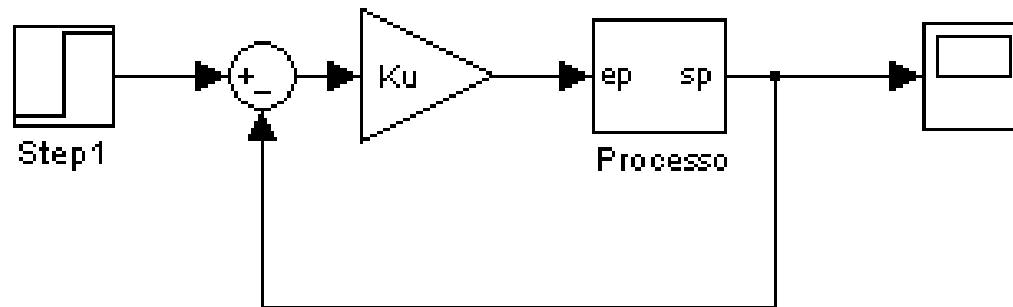
$$C_{CHR20}(s) = 0,12 \left( 1 + \frac{1}{0,10s} \right) = 0,12 \left( \frac{s + 10}{s} \right)$$

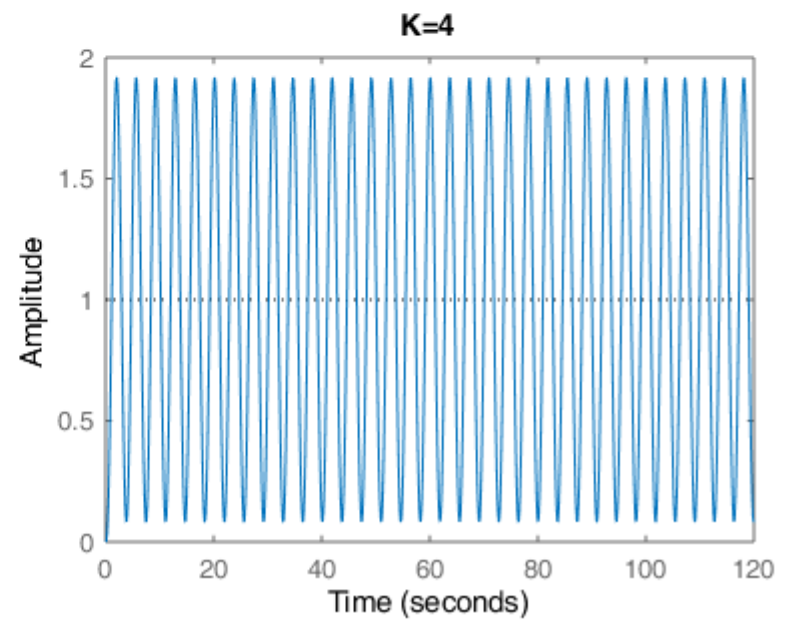
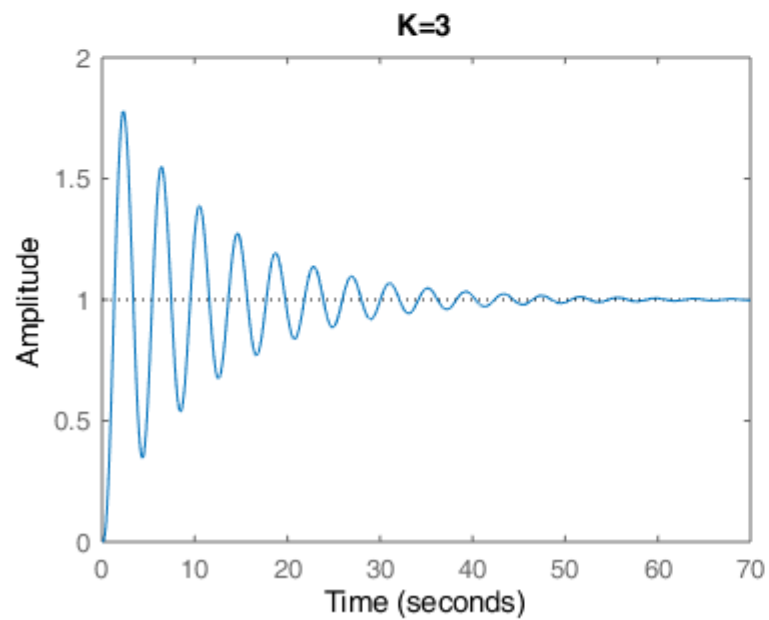
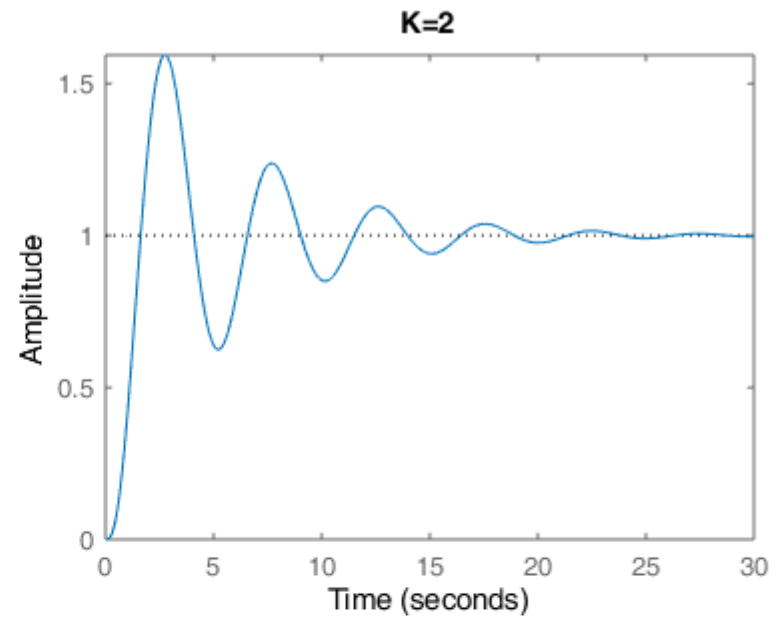
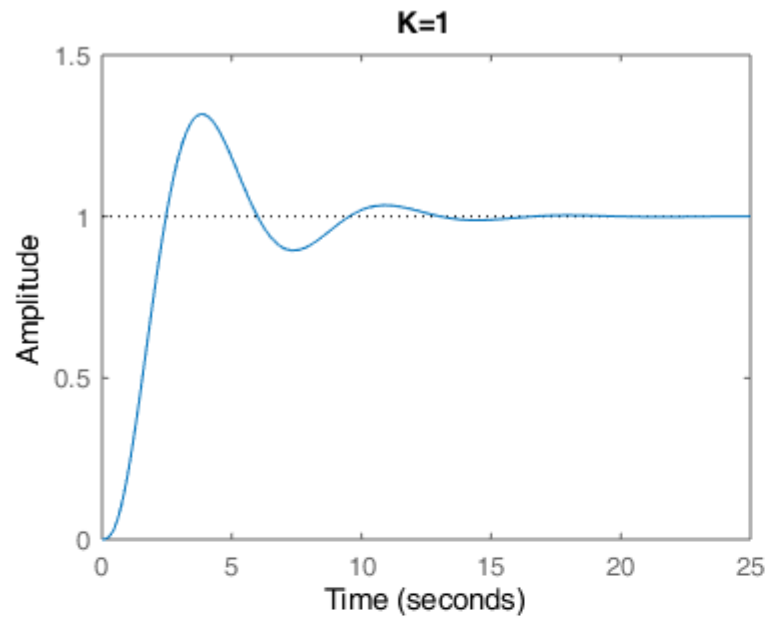
# Exemplo 1: Sintonia com métodos de malha aberta



## Exemplo 2: Determinação do ganho crítico

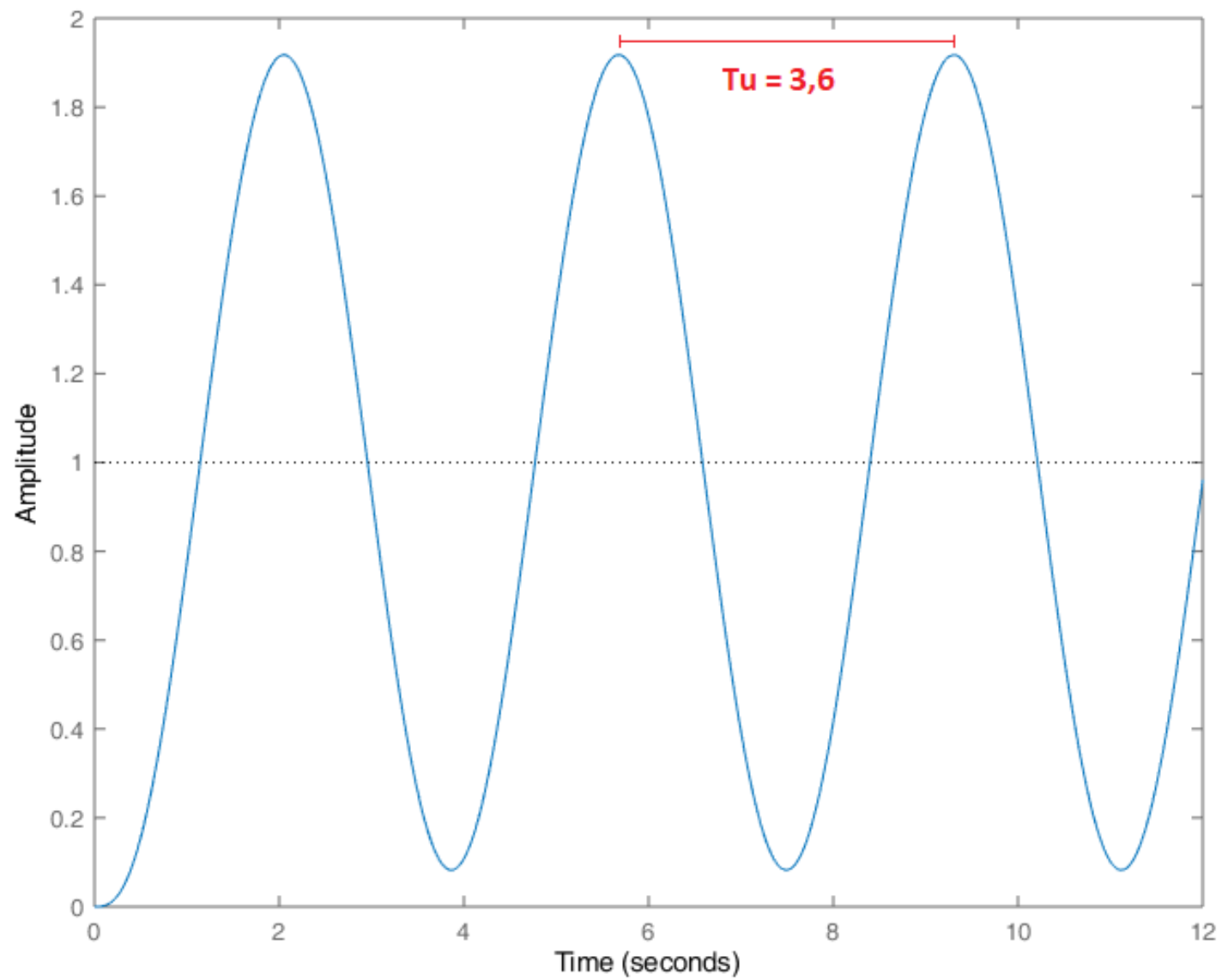
Consiste em testar diferentes valores de  $K_u$  até encontrar o ganho que produz uma oscilação permanente na resposta.







## Resposta ao degrau para $K_u=4$



## Exemplo 3: Sintonia com métodos de malha fechada

Projetar um controlador, usando as regras de sintonia de Ziegler-Nichols, de modo que o sobressinal seja no máximo 25% para uma entrada em degrau unitário.

### Dados do Sistema

Do ensaio de malha fechada obteve-se:

$$K_U = 30 \quad \text{e} \quad T_U = 2,5$$

## Exemplo 3: Sintonia com métodos de malha fechada

Da tabela de parâmetros de sintonia tem-se

$$K_U = 30$$

$$T_U = 2,5$$

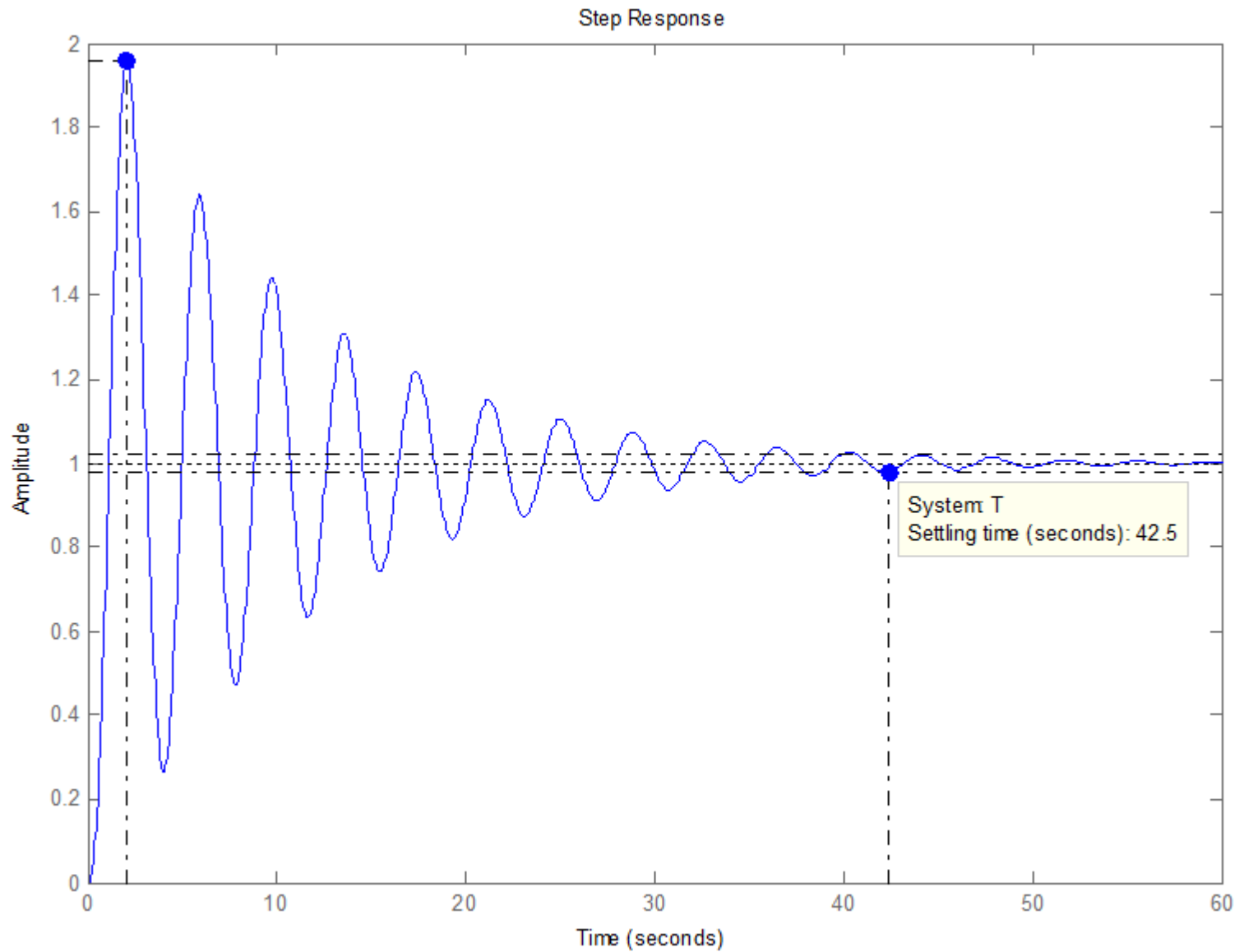
Controlador	$K_p$	$T_i$	$T_D$
PI	$0,45K_u$	$T_u/1,2$	-
PI	13,5	2,083	-

O controlador PI é, então, dado por:

$$C(s) = K_P \left[ 1 + \frac{1}{T_I s} \right] \Rightarrow C(s) = 13,5 \left[ 1 + \frac{1}{2,083 s} \right]$$

$$C(s) = 13,5 \left( \frac{s + 0,48}{s} \right)$$

## Resposta ao degrau para o controlador PI projetado



## Exemplo 3: Sintonia com métodos de malha fechada

Seja agora um controlador PID.

Da tabela de parâmetros de sintonia tem-se

$$K_U = 30$$

$$T_U = 2,5$$

Controlador	$K_p$	$T_i$	$T_D$
PID	$0,60K_u$	$0,5T_u$	$0,125T_u$
PID	18	1,25	0,3125

O controlador PID é, então, dado por:

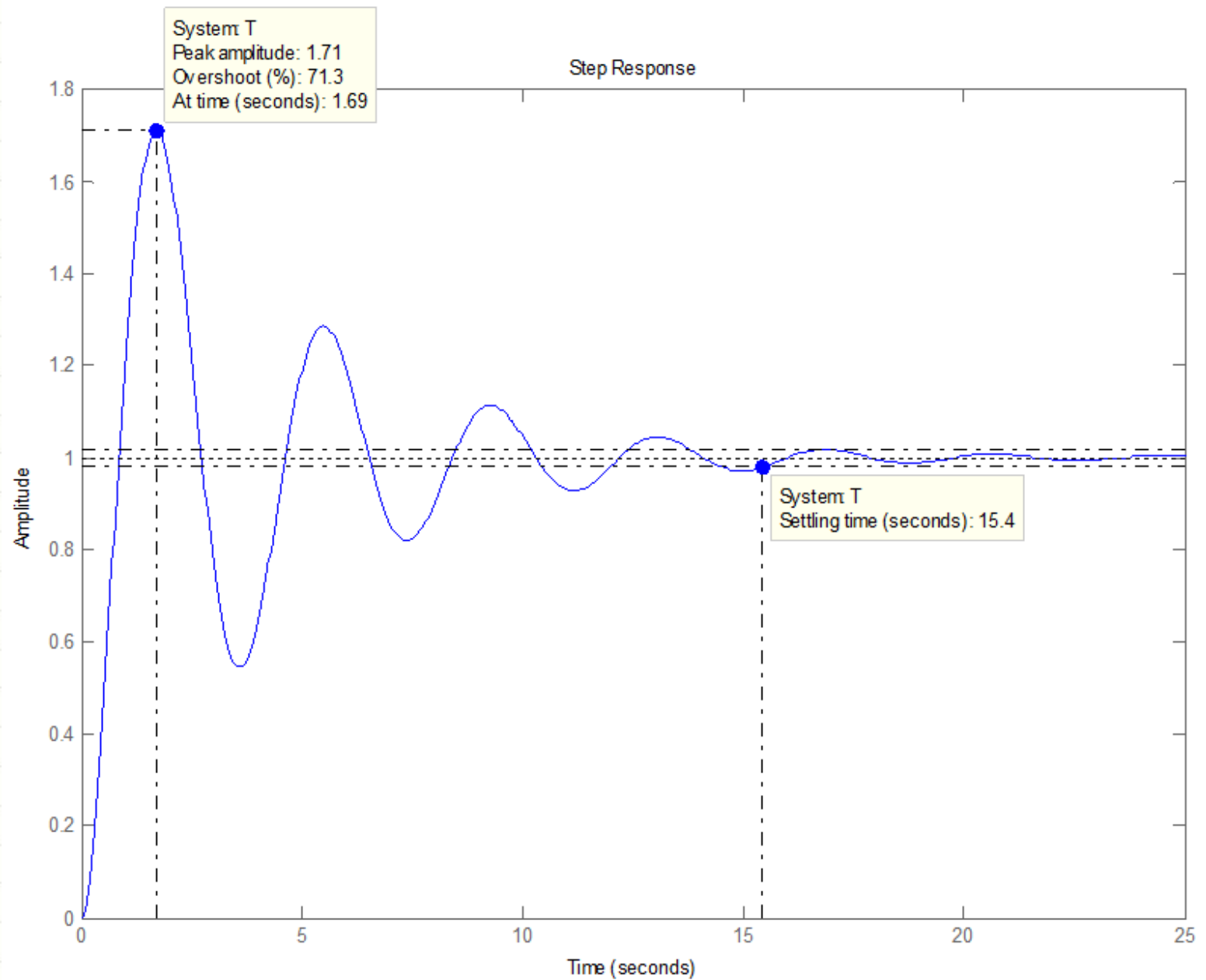
$$C(s) = K_P \left[ 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right] \text{ ou } C(s) = 0,075 K_U T_U \frac{(s + 4/T_U)^2}{s}$$

$$C(s) = 5,625 \frac{(s + 1,6)^2}{s}$$



Controlador  
Ideal

## Resposta ao degrau para o controlador PID projetado



## Exemplo 3: Sintonia com métodos de malha fechada

### Refinamento do Projeto

O sobressinal elevado é decorrente da presença do zero duplo introduzido pelo controlador. Para reduzir o sobressinal os zeros serão deslocados em direção à origem.

Escolhendo  $z=1$ , reajusta-se os demais parâmetros:

$$\frac{4}{T_U} = 1 \Rightarrow T_U = 4$$

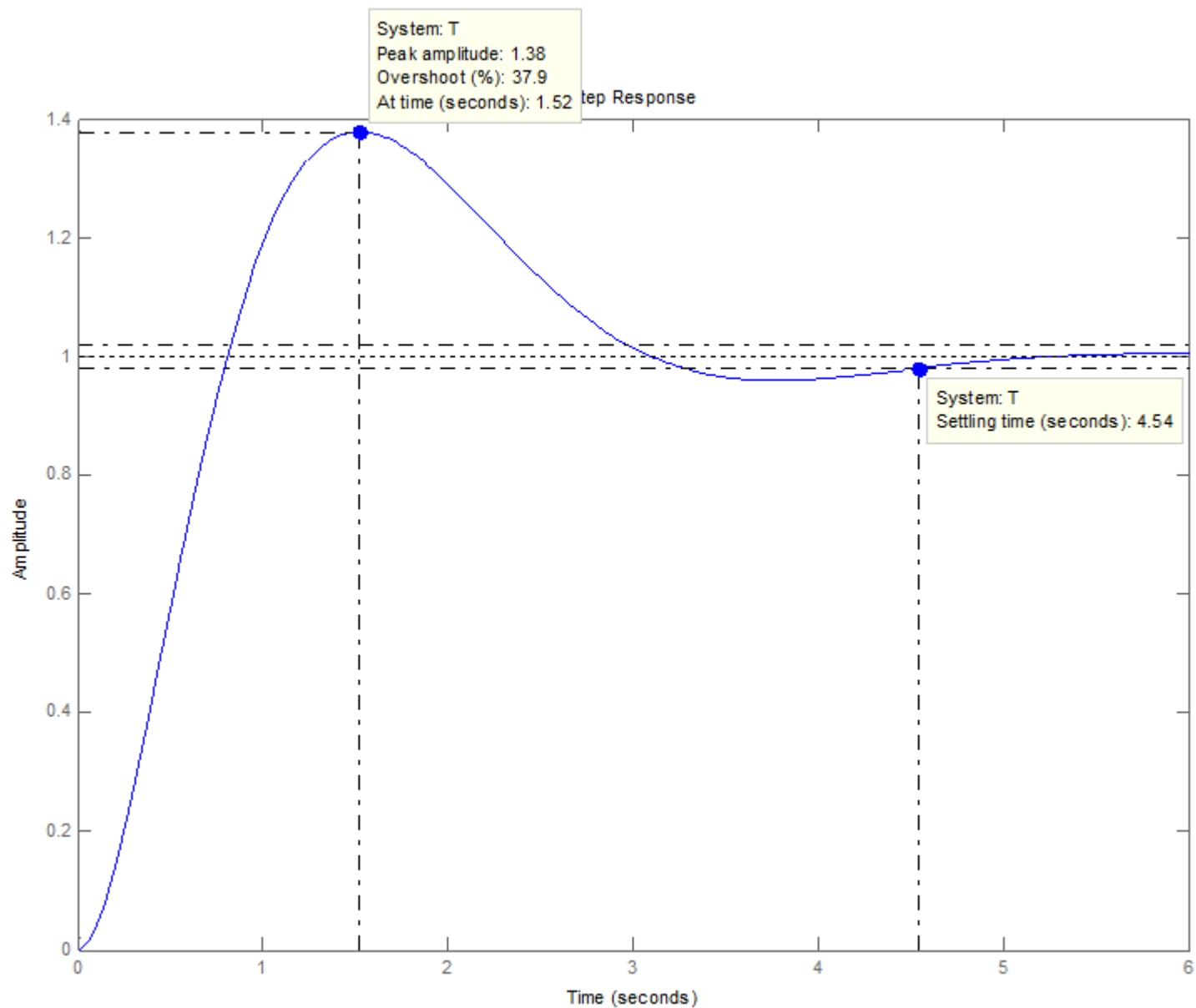
$$K_P = 18 \quad T_D = 0,5T_U = 2 \quad T_I = 0,125T_U = 0,5$$

O novo controlador PID fica:

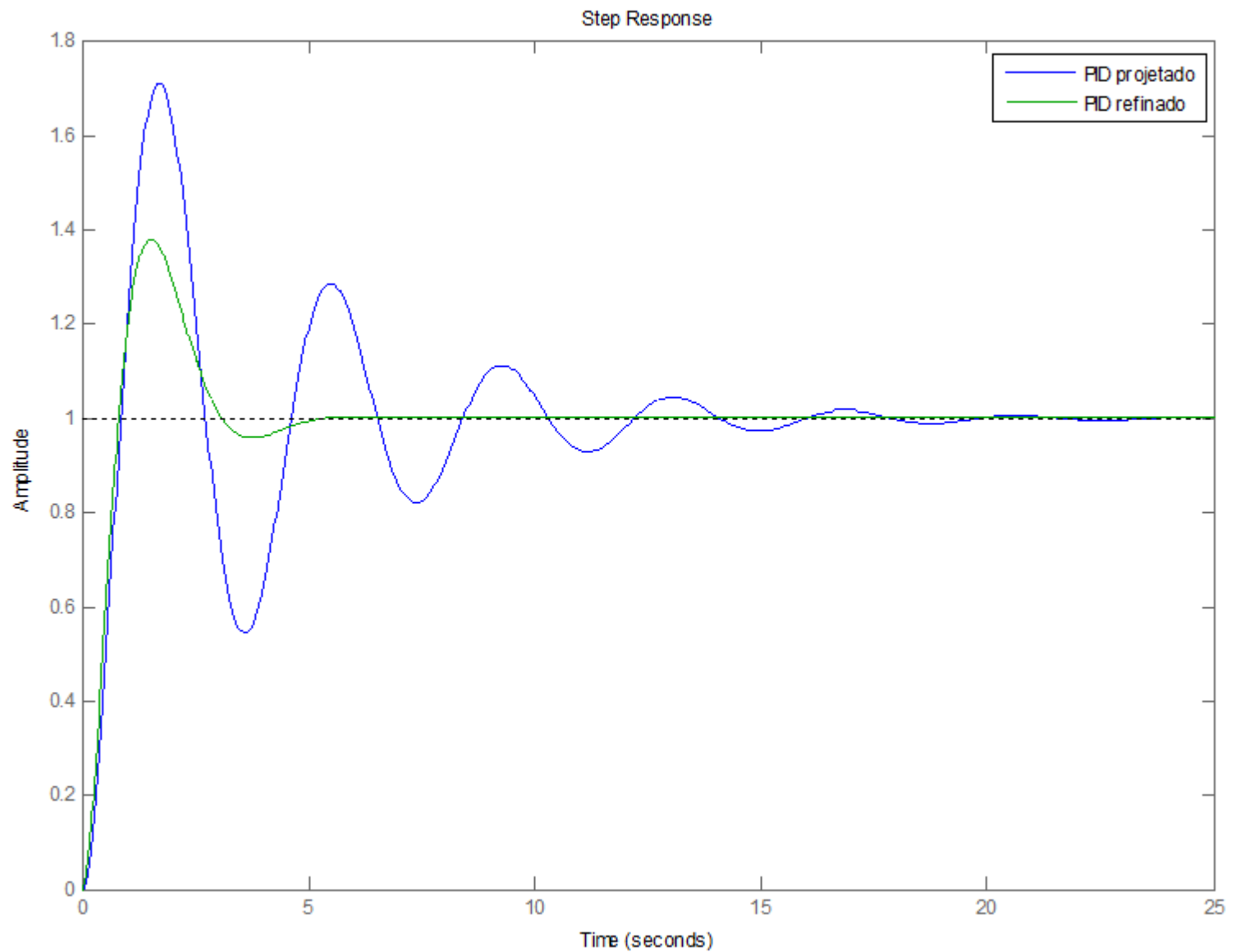
$$C(s) = 0,075 K_U T_U \frac{(s + 4/T_U)^2}{s} = \frac{9(s + 1)^2}{s}$$



## Resposta ao degrau para o controlador PID projetado com refinamento



## Resposta ao degrau: PID original x PID com refinamento



## Exemplo 3: Sintonia com métodos de malha fechada

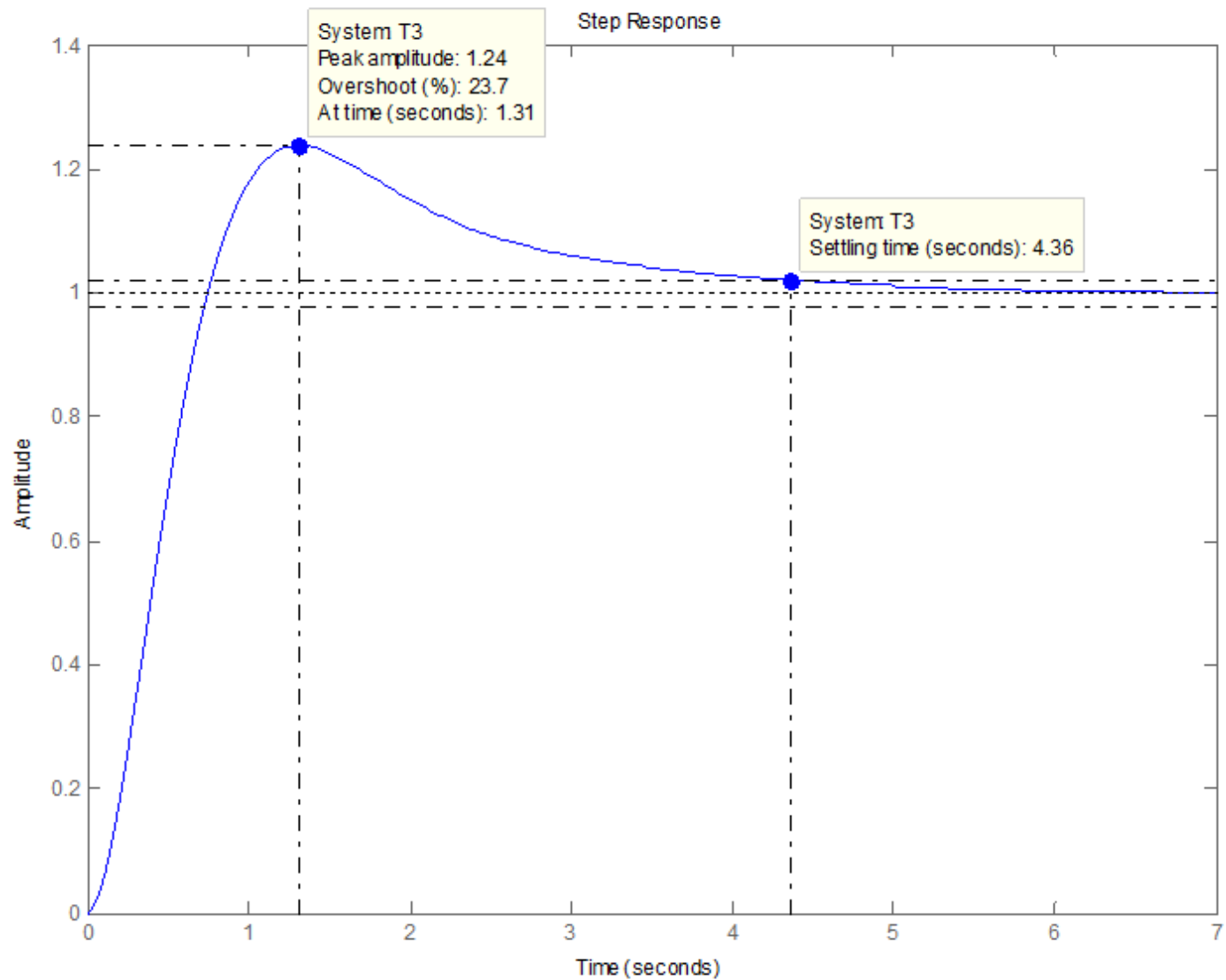
Escolhendo agora  $z=0,75$ , tem-se:

$$\frac{4}{T_U} = 0,75 \quad \Rightarrow \quad T_U = 5,33$$
$$K_p = 18 \quad T_D = 2,67 \quad T_I = 0,67$$

O novo controlador PID fica:

$$C(s) = 0,075 K_U T_U \frac{(s + 4/T_U)^2}{s} = \frac{12(s + 0,75)^2}{s}$$

## Resposta ao degrau para o controlador PID projetado com o 2º refinamento



# Sintonia Baseada em Integrais de Erro

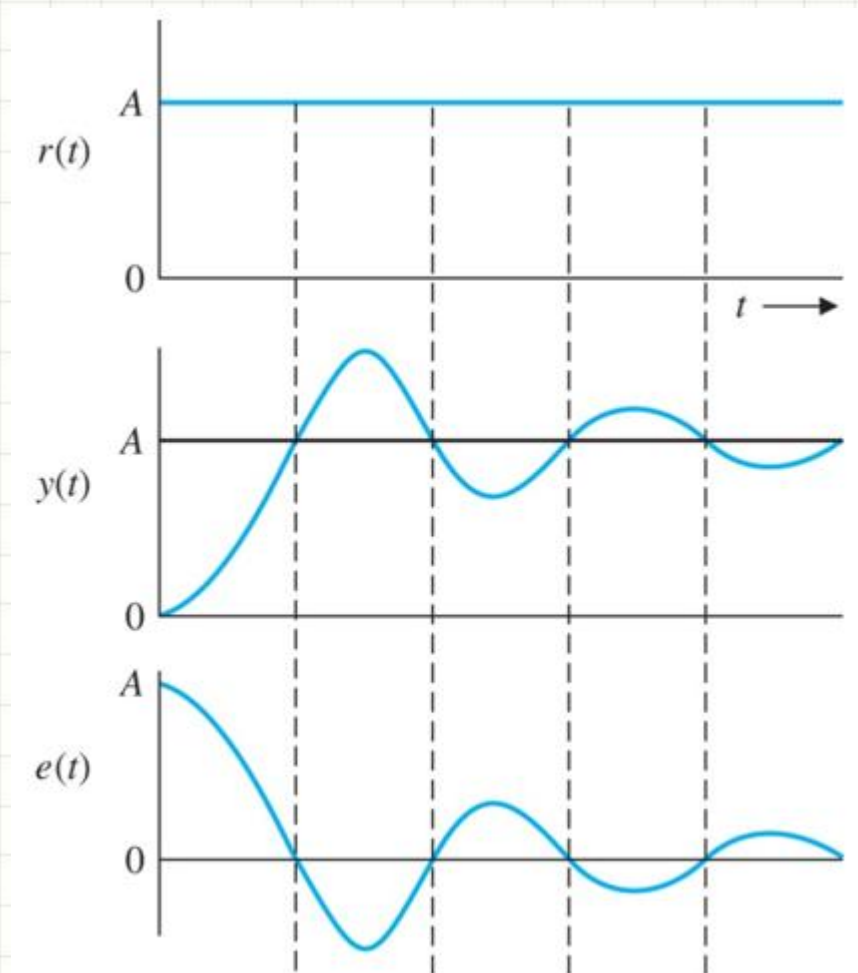
Uma alternativa para a sintonia de controladores é utilizar índices de desempenho baseados em integrais de erro.

Estes índices são obtidos através da ponderação do sinal de erro, seja devido a uma perturbação, seja devido a uma mudança de referência.

**Os parâmetros do controlador são sintonizados de modo a minimizar um índice de desempenho.**

# Sintonia Baseada em Integrais de Erro

Alguns métodos de sintonia se baseiam na minimização da integral do erro do sistema.



# Sintonia Baseada em Integrais de Erro

## IAE - Integral do Erro Absoluto

$$IAE = \int_0^{\infty} |e(t)| dt$$

Adequado quando os erros são pequenos. Pondera mais fortemente os erros maiores. Muito usado para fins de estudo.

## ISE - Integral do Quadrado do Erro

$$ISE = \int_0^{\infty} e^2(t) dt$$

Apresenta convergência lenta para erros grandes.



# Sintonia Baseada em Integrais de Erro

## ITAE - Integral do Erro Absoluto com Ponderação de Tempo

$$ITAE = \int_0^{\infty} t |e(t)| dt$$

Um erro inicial grande é ponderado com peso baixo enquanto erros que ocorrem mais tarde são bastante ponderados.

## ITSE - Integral do Quadrado do Erro com Ponderação de Tempo

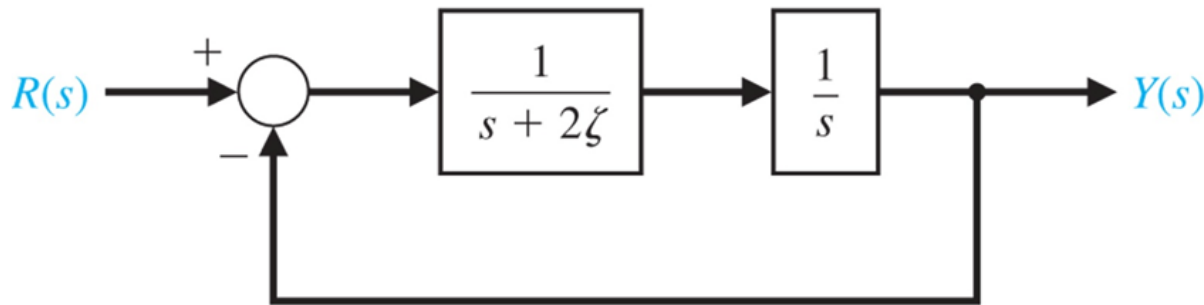
$$ITSE = \int_0^{\infty} t e^2(t) dt$$

Observação: as integrais apresentadas são definidas considerando que o erro é nulo em regime permanente. Caso isto não ocorra, dever-se trocar, no cálculo destas integrais,  $e(t)$  por  $y(t)-y(\infty)$ .

# Sintonia Baseada em Integrais de Erro

O ITAE fornece a melhor seletividade dentre os índices de desempenho.

Por exemplo, seja o sistema de controle com realimentação unitária.

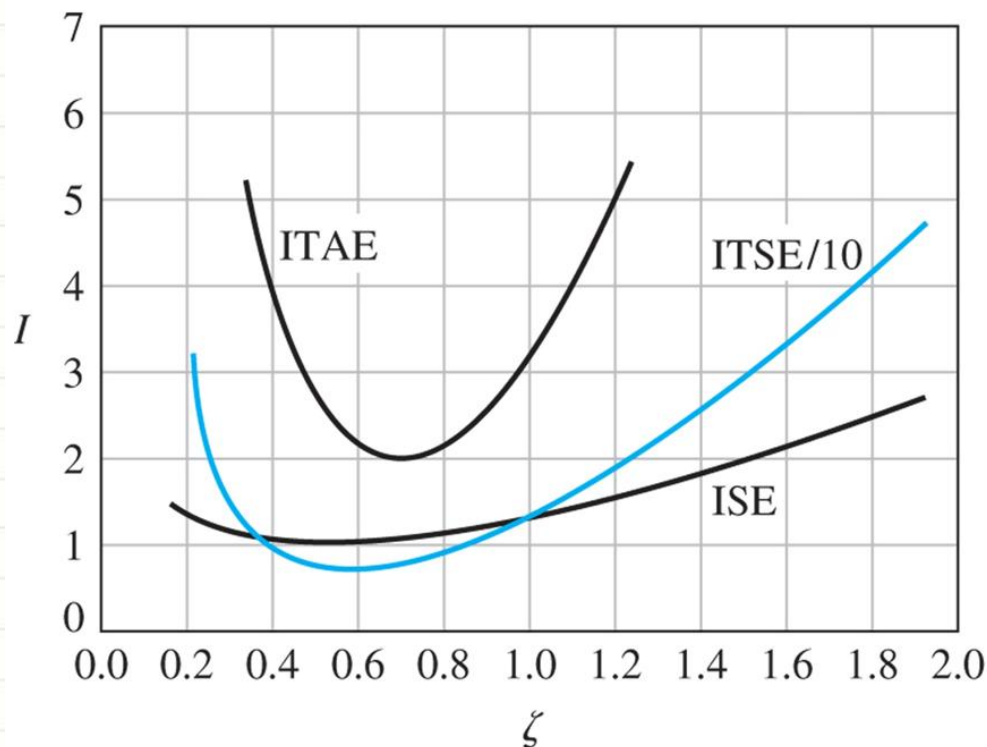


A função de transferência de malha fechada é dada por:

$$T(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1}$$

# Sintonia Baseada em Integrais de Erro

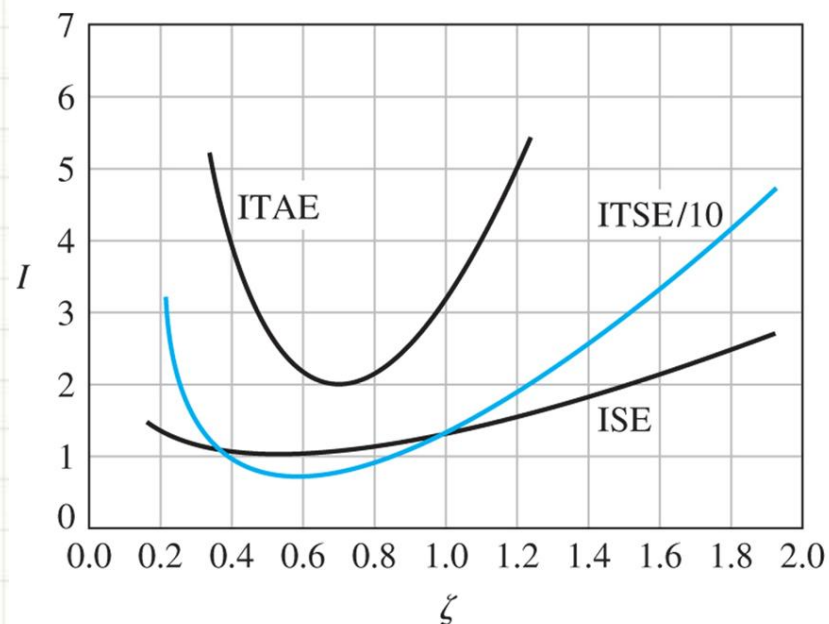
Os índices de desempenho ISE, ITSE e ITAE calculados para diversos valores de  $\zeta$ , considerando uma entrada em degrau unitário, são mostrados na figura a seguir.



As curvas mostram a seletividade do Índice de Desempenho ITAE em comparação com ISE e ITSE.

# Sintonia Baseada em Integrais de Erro

O valor mínimo da relação de amortecimento com base no índice ITAE é de 0,7, que para um sistema de 2ª ordem resulta em uma resposta rápida ao degrau com um sobressinal máximo de 4,6%.



Para os índices ISE e ITSE o amortecimento mínimo fica entre 0,5 e 0,6, que representa uma resposta ao degrau com um sobressinal máximo entre 9,5% e 16%.

# Sintonia Baseada em Integrais de Erro

Em particular, o ITAE é bastante utilizado para alocação de polos de malha fechada.

Neste caso, os coeficientes que minimizarão este critério de desempenho para uma entrada em degrau foram determinados para a função de transferência de malha fechada genérica da seguinte forma:

$$T(s) = \frac{b_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_2s^2 + b_1s + b_0}$$

Observe que esta função de transferência possui erro nulo em regime permanente para uma entrada em degrau.

# Sintonia Baseada em Integrais de Erro

Os coeficientes ótimos de  $T(s)$  baseados no critério ITAE para uma entrada em degrau unitário são:

---

$$\frac{s + \omega_n}{s^2 + 1.4\omega_n s + \omega_n^2} \frac{s^3 + 1.75\omega_n s^2 + 2.15\omega_n^2 s + \omega_n^3}{s^4 + 2.1\omega_n s^3 + 3.4\omega_n^2 s^2 + 2.7\omega_n^3 s + \omega_n^4} \frac{s^5 + 2.8\omega_n s^4 + 5.0\omega_n^2 s^3 + 5.5\omega_n^3 s^2 + 3.4\omega_n^4 s + \omega_n^5}{s^6 + 3.25\omega_n s^5 + 6.60\omega_n^2 s^4 + 8.60\omega_n^3 s^3 + 7.45\omega_n^4 s^2 + 3.95\omega_n^5 s + \omega_n^6}$$

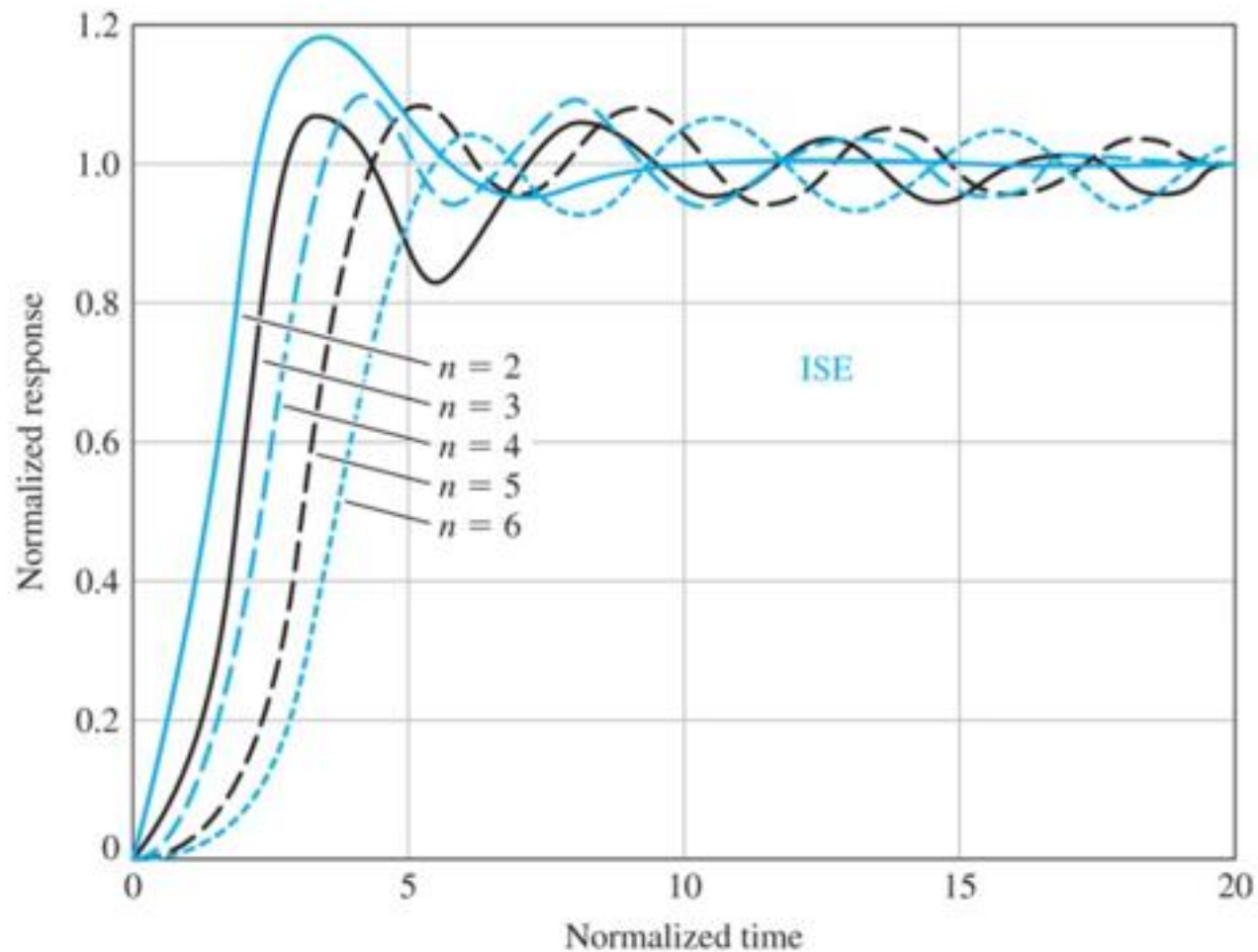
---

As respostas usando coeficientes ótimos para uma entrada em degrau são dadas a seguir para os critérios ISE, IAE e ITAE.

As respostas são fornecidas para o tempo normalizado,  $\omega_n t$ .

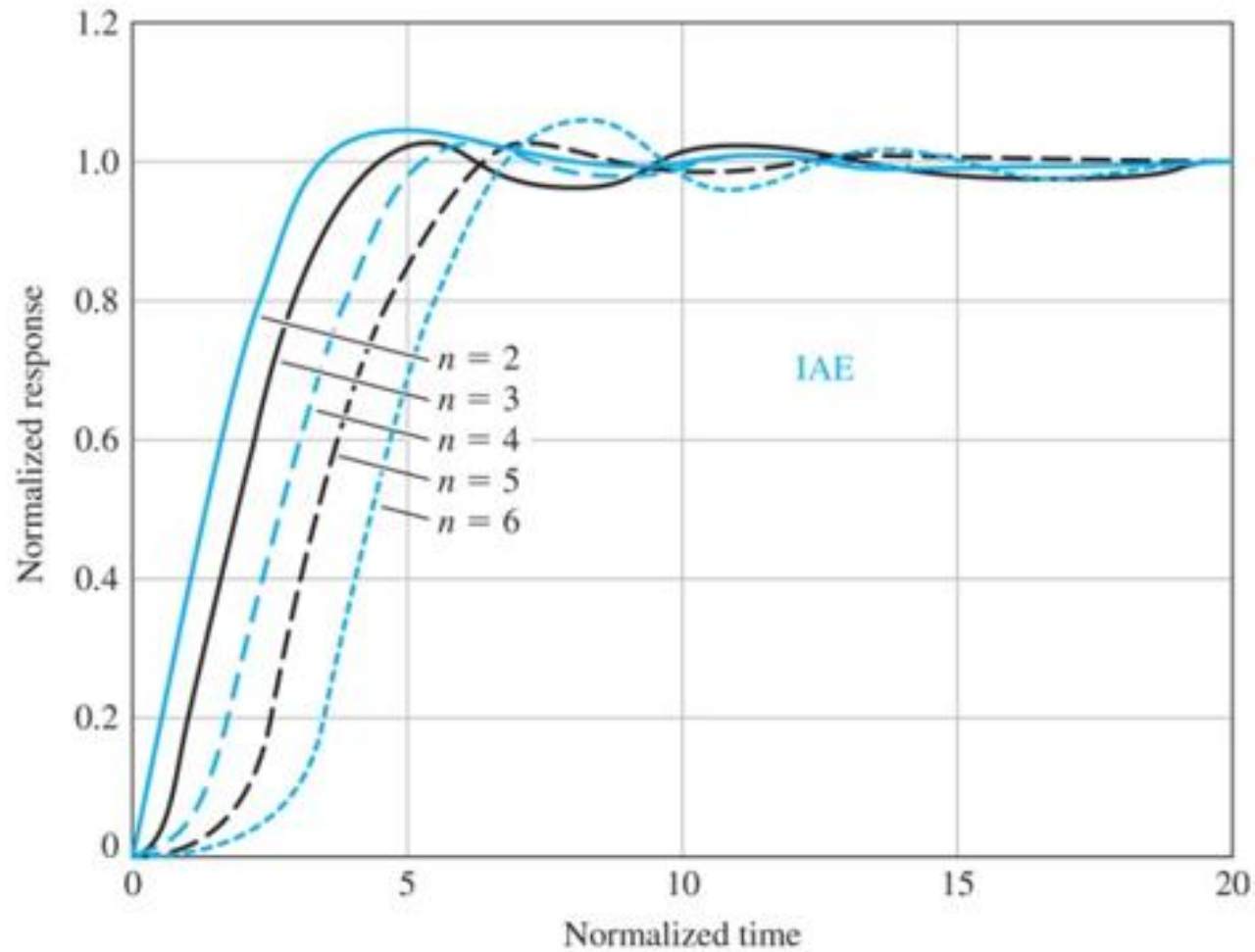


# Sintonia Baseada em Integrais de Erro

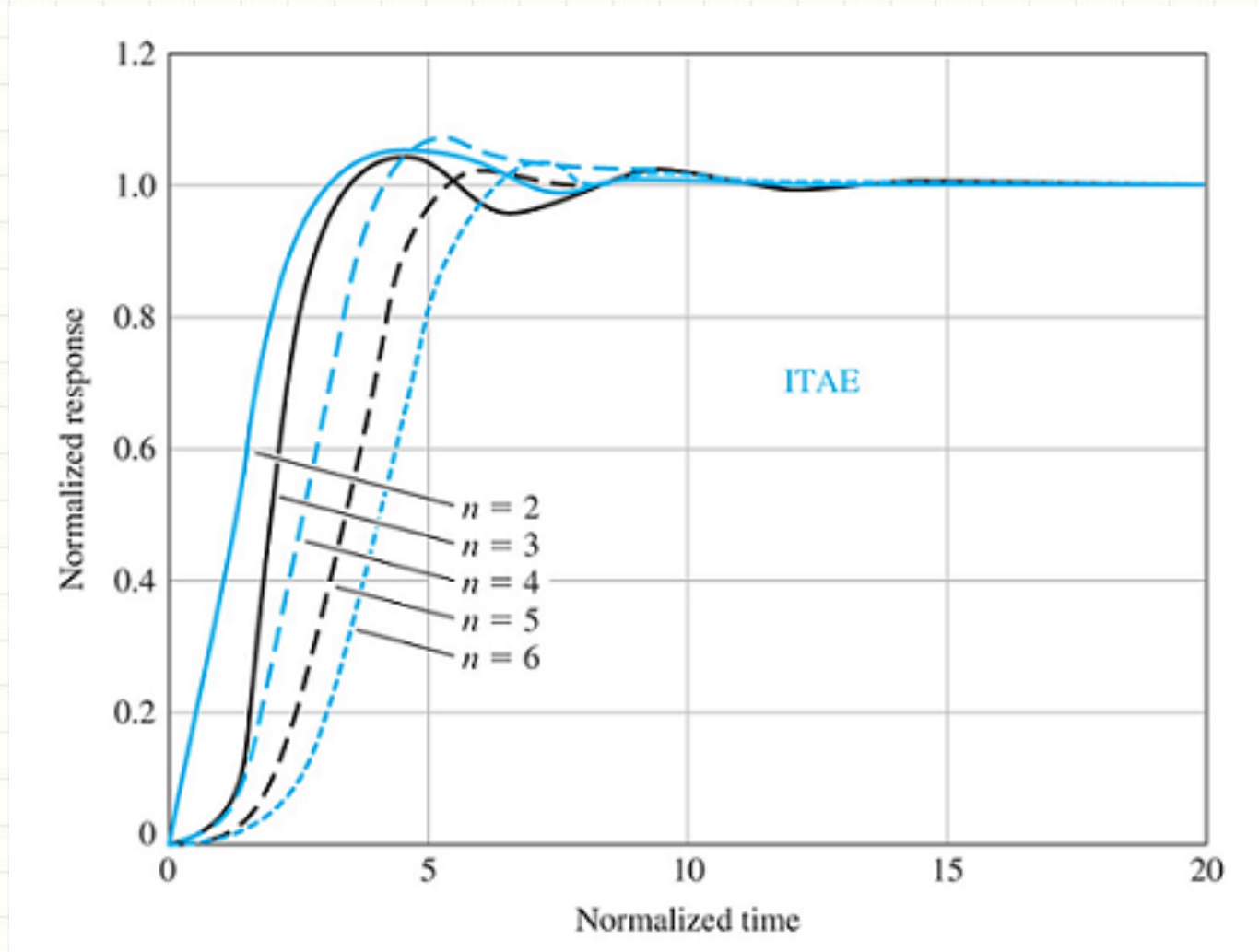




# Sintonia Baseada em Integrais de Erro

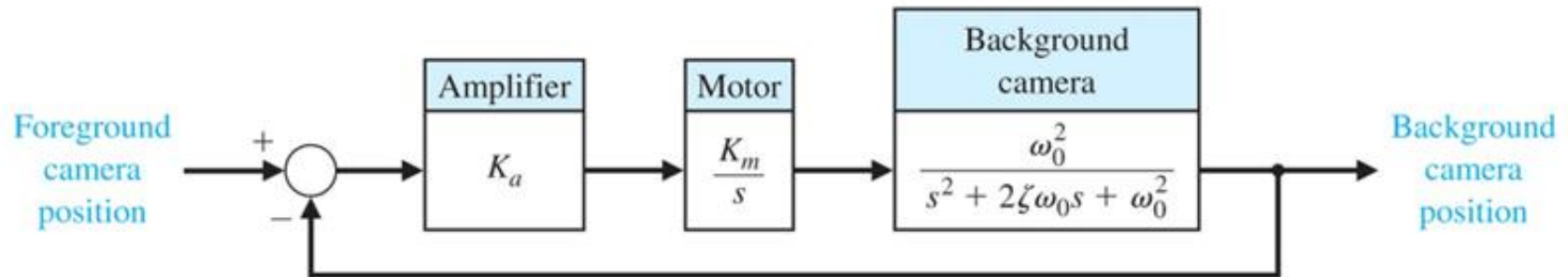


# Sintonia Baseada em Integrais de Erro



# Ex1: Sintonia Baseada em Integrais de Erro

## Controle de duas câmeras



A função de transferência de malha fechada é dada por:

$$T(s) = \frac{K_a K_m \omega_0^2}{s^3 + 2\zeta \omega_0 s^2 + \omega_0^2 s + K_a K_m \omega_0^2}$$

Deseja-se que a resposta ao degrau tenha um tempo de acomodação inferior a 1 segundo.

# Ex1: Sintonia Baseada em Integrais de Erro

Os coeficientes ótimos são obtidos de:

$$\begin{aligned} & s + \omega_n \\ & s^2 + 1.4\omega_n s + \omega_n^2 \\ & \boxed{s^3 + 1.75\omega_n s^2 + 2.15\omega_n^2 s + \omega_n^3} \\ & s^4 + 2.1\omega_n s^3 + 3.4\omega_n^2 s^2 + 2.7\omega_n^3 s + \omega_n^4 \\ & s^5 + 2.8\omega_n s^4 + 5.0\omega_n^2 s^3 + 5.5\omega_n^3 s^2 + 3.4\omega_n^4 s + \omega_n^5 \\ & s^6 + 3.25\omega_n s^5 + 6.60\omega_n^2 s^4 + 8.60\omega_n^3 s^3 + 7.45\omega_n^4 s^2 + 3.95\omega_n^5 s + \omega_n^6 \end{aligned}$$

A equação característica do sistema é dada por:

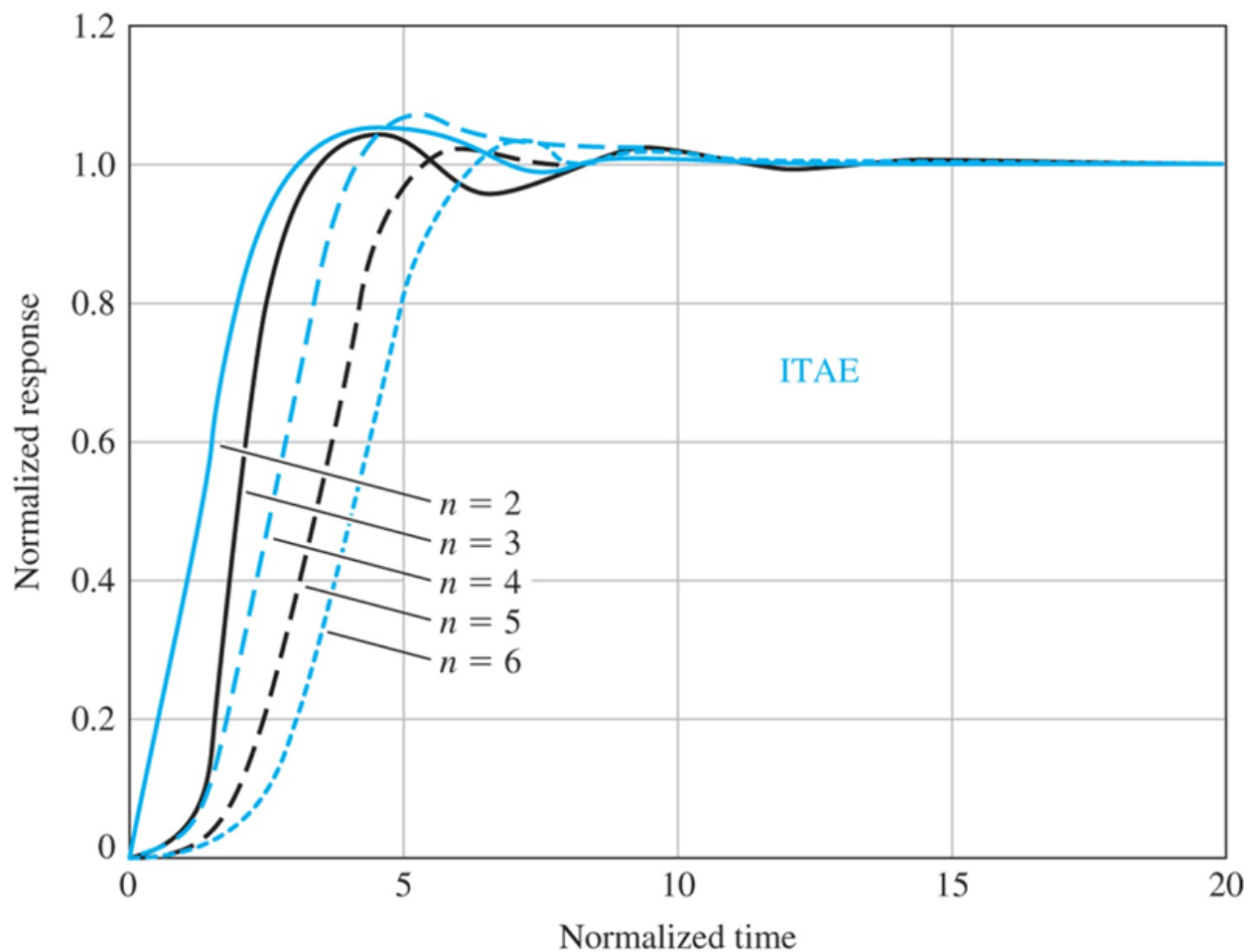
$$\Delta(s) = s^3 + 2\zeta\omega_0 s^2 + \omega_0^2 s + K_a K_m \omega_0^2$$

Comparando os dois polinômios tem-se:

$$2\zeta\omega_0 = 1.75\omega_n \quad \omega_0^2 = 2.15\omega_n^2 \quad K_a K_m \omega_0^2 = \omega_n^3$$

# Ex1: Sintonia Baseada em Integrais de Erro

Para  $n=3$ , da figura abaixo, obtém-se um tempo de acomodação de aproximadamente 8 segundos (tempo normalizado).



# Ex1: Sintonia Baseada em Integrais de Erro

Então, do gráfico

$$\omega_n t_s = 8$$

Para obter-se uma resposta com tempo de acomodação menor do que 1 segundo, escolhe-se uma frequência de 10 rad/s, ou seja,

$$\omega_n = 10 \rightarrow t_s = 0,8$$

Assim, os coeficientes ITAE podem ser calculados:

$$\begin{cases} 2\zeta\omega_0 = 1,75\omega_n \\ \omega_0^2 = 2,15\omega_n^2 \\ K_a K_m \omega_0^2 = \omega_n^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_0 = 14,67 \\ \zeta = 0,597 \\ K_a K_m = 4,65 \end{cases}$$



# Ex1: Sintonia Baseada em Integrais de Erro

Substituindo os valores obtidos na função de transferência de malha fechada

$$T(s) = \frac{K_a K_m \omega_0^2}{s^3 + 2\zeta \omega_0 s^2 + \omega_0^2 s + K_a K_m \omega_0^2}$$

tem-se

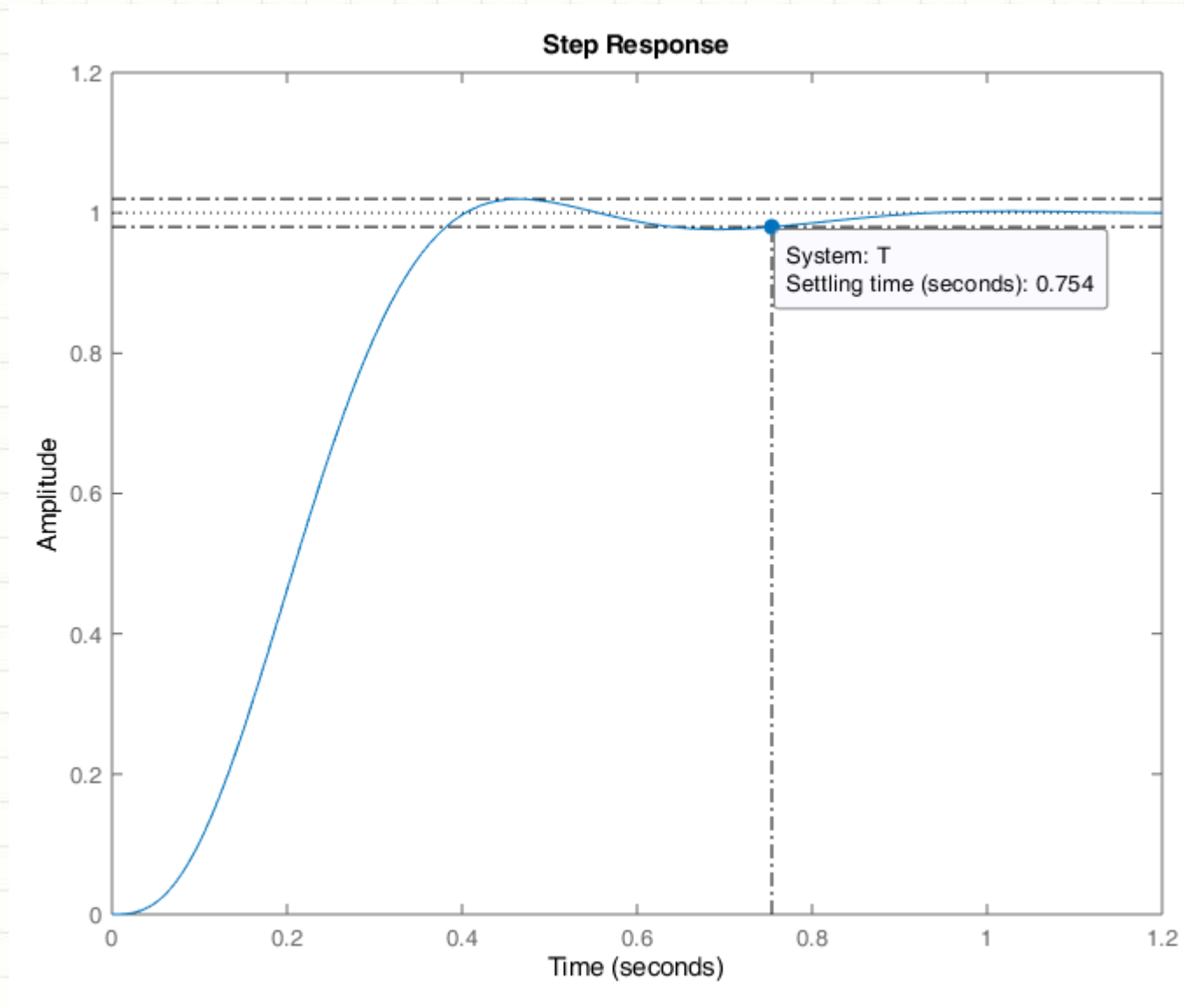
$$T(s) = \frac{1000}{s^3 + 17,5s^2 + 215s + 1000}$$

cujos polos são:

$$p_{1,2} = -5,2 \pm j10,7$$
$$p_3 = -7,1$$



# Ex1: Sintonia Baseada em Integrais de Erro



# Sintonia Baseada em Integrais de Erro

Para uma **entrada em rampa**, os coeficientes ótimos que minimizam o critério ITAE foram determinados considerando a função de transferência de malha fechada da seguinte forma

$$T(s) = \frac{b_1s + b_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_2s^2 + b_1s + b_0}$$

Os coeficientes ótimos de  $T(s)$  baseados no critério ITAE são:

---

$$\begin{aligned} & s^2 + 3.2\omega_n s + \omega_n^2 \\ & s^3 + 1.75\omega_n s^2 + 3.25\omega_n^2 s + \omega_n^3 \\ & s^4 + 2.41\omega_n s^3 + 4.93\omega_n^2 s^2 + 5.14\omega_n^3 s + \omega_n^4 \\ & s^5 + 2.19\omega_n s^4 + 6.50\omega_n^2 s^3 + 6.30\omega_n^3 s^2 + 5.24\omega_n^4 s + \omega_n^5 \end{aligned}$$

---

# Sintonia Baseada em Integrais de Erro

Para uma **entrada em parábola**, os coeficientes ótimos que minimizam o critério ITAE foram determinados considerando a função de transferência de malha fechada da seguinte forma

$$T(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^n + b_{n-1} s^{n-1} + b_{n-2} s^{n-2} + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}$$

Neste caso, os coeficientes ótimos de  $T(s)$  são

---

$$\begin{aligned} & s^3 + 2.97\omega_0 s^2 + 4.94\omega_0^2 s + \omega_0^3 \\ & s^4 + 3.71\omega_0 s^3 + 7.88\omega_0^2 s^2 + 5.93\omega_0^3 s + \omega_0^4 \\ & s^5 + 3.81\omega_0 s^4 + 9.94\omega_0^2 s^3 + 13.44\omega_0^3 s^2 + 7.36\omega_0^4 s + \omega_0^5 \\ & s^6 + 3.93\omega_0 s^5 + 11.68\omega_0^2 s^4 + 18.56\omega_0^3 s^3 + 19.3\omega_0^4 s^2 + 8.06\omega_0^5 s + \omega_0^6 \end{aligned}$$

---

# Sintonia Baseada em Integrais de Erro

Além do seguimento de referência, as integrais de erro também podem ser utilizadas para gerar parâmetros de sintonia para **problemas de regulação** (rejeição de perturbação).

Serão apresentadas a seguir tabelas de sintonia propostas para:

Caso Regulador (rejeição de perturbação) – Lopes *et al* (1967)

Caso Servo (seguimento de referência) – Rovira (1981)

# Sintonia Baseada em Integrais de Erro

Em ambos os casos (rejeição de perturbação e seguimento de referência) os parâmetros foram definidos considerando um modelo de 1ª ordem com atraso:

$$G(s) = \frac{Ce^{-Ls}}{Ts + 1}$$

Os valores de C, L e T são determinados a partir da resposta ao degrau para o sistema em malha aberta (1º método).

# Caso Regulador (rejeição de perturbação)

Controlador Proporcional:  $C(s) = K_p$

	Coeficiente	ISE	IAE	ITAE
$K_p = \frac{a}{C} \left( \frac{L}{T} \right)^b$	a	1.411	0.902	0.490
	b	-0.917	-0.985	-1.084

Controlador PI:  $C(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_I s} \right)$

	Coeficiente	ISE	IAE	ITAE
$K_p = \frac{a_1}{C} \left( \frac{L}{T} \right)^{b_1}$	$a_1$	1.305	0.984	0.859
	$b_1$	-0.959	-0.986	-0.977
	$a_2$	0.492	0.608	0.674
$T_I = \frac{T}{a_2} \left( \frac{L}{T} \right)^{b_2}$	$b_2$	0.739	0.707	0.680

# Caso Regulador (rejeição de perturbação)

Controlador PID:  $C(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right)$

	Coefficiente	ISE	IAE	ITAE
$K_p = \frac{a_1}{C} \left( \frac{L}{T} \right)^{b_1}$	$a_1$	1.495	1.435	1.357
	$b_1$	-0.945	-0.921	-0.947
$T_I = \frac{T}{a_2} \left( \frac{L}{T} \right)^{b_2}$	$a_2$	1.101	0.878	0.842
	$b_2$	0.771	0.749	0.738
$T_D = a_3 T \left( \frac{L}{T} \right)^{b_3}$	$a_3$	0.560	0.482	0.381
	$b_3$	1.006	1.137	0.995



# Caso Servo (seguimento de referência)

Controlador PI:  $C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_I s}\right)$

	Coeficiente	IAE	ITAE
$K_p = \frac{a_1}{C} \left(\frac{L}{T}\right)^{b_1}$	$a_1$	0.758	0.586
	$b_1$	-0.861	-0.916
$T_I = \frac{T}{a_2 + b_2(L/T)}$	$a_2$	1.02	1.03
	$b_2$	-0.323	-0.165

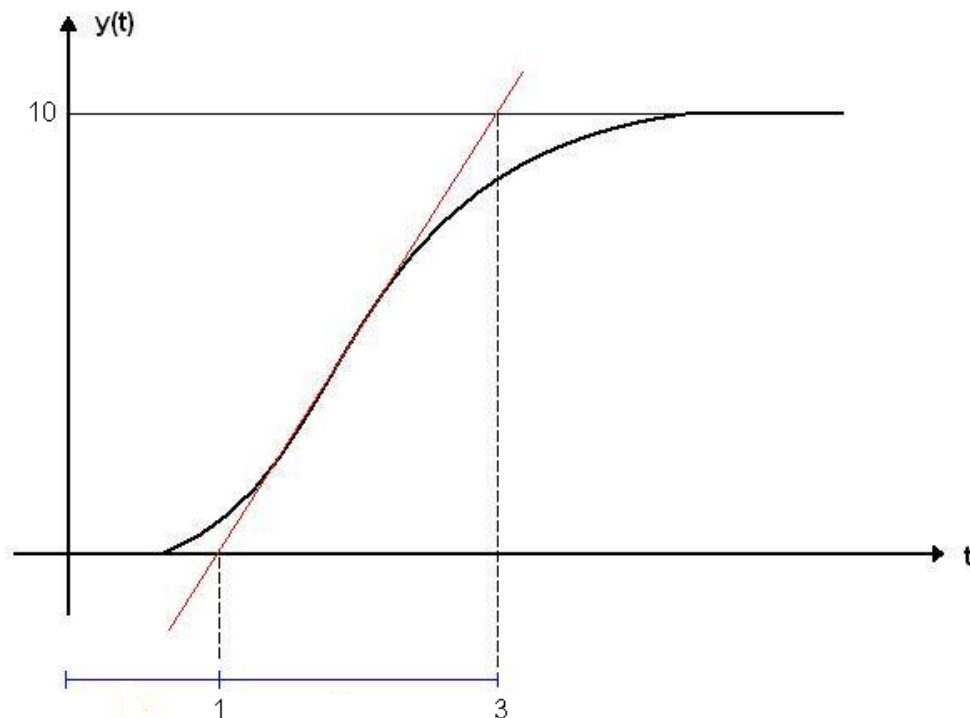
# Caso Servo (seguimento de referência)

Controlador PID:  $C(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right)$

	Coeficiente	IAE	ITAE
$K_p = \frac{a_1}{C} \left( \frac{L}{T} \right)^{b_1}$	$a_1$	1.086	0.965
	$b_1$	-0.869	-0.855
$T_I = \frac{T}{a_2 + b_2(L/T)}$	$a_2$	0.740	0.796
	$b_2$	-0.130	-0.147
$T_D = a_3 T \left( \frac{L}{T} \right)^{b_3}$	$a_3$	0.348	0.308
	$b_3$	0.914	0.929

## Ex2: Sintonia Baseada em Integrais de Erro

Projetar um controlador PI, considerando as tabelas de sintonia baseadas em critérios de erro (Lopes e Rovira) , para o processo cuja resposta do ensaio de malha aberta, é dada no gráfico abaixo.



## Ex2: Sintonia Baseada em Integrais de Erro

Do gráfico:

$$\left. \begin{array}{l} L = 1 \\ T = 2 \\ C = 10 \end{array} \right\} G(s) = \frac{10e^{-s}}{2s + 1}$$

Considerando o problema de regulação:  $C(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_I s} \right)$

	Coeficiente	ISE	IAE	ITAE
$K_p = \frac{a_1}{C} \left( \frac{L}{T} \right)^{b_1}$	$a_1$	1.305	0.984	0.859
	$b_1$	-0.959	-0.986	-0.977
	$a_2$	0.492	0.608	0.674
$T_I = \frac{T}{a_2} \left( \frac{L}{T} \right)^{b_2}$	$b_2$	0.739	0.707	0.680

## Ex2: Sintonia Baseada em Integrais de Erro

Substituindo os dados tem-se:

Critério	$K_p$	$T_i$
ISE	0,245	2,44
IAE	0,195	2,02
ITAE	0,169	1,85

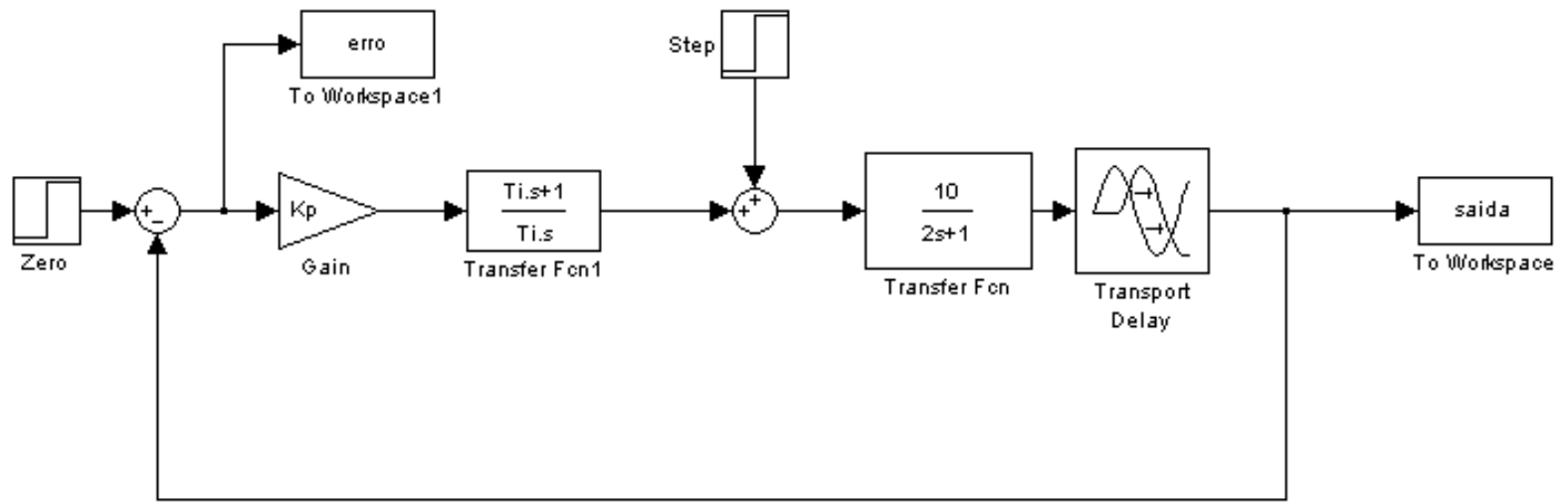
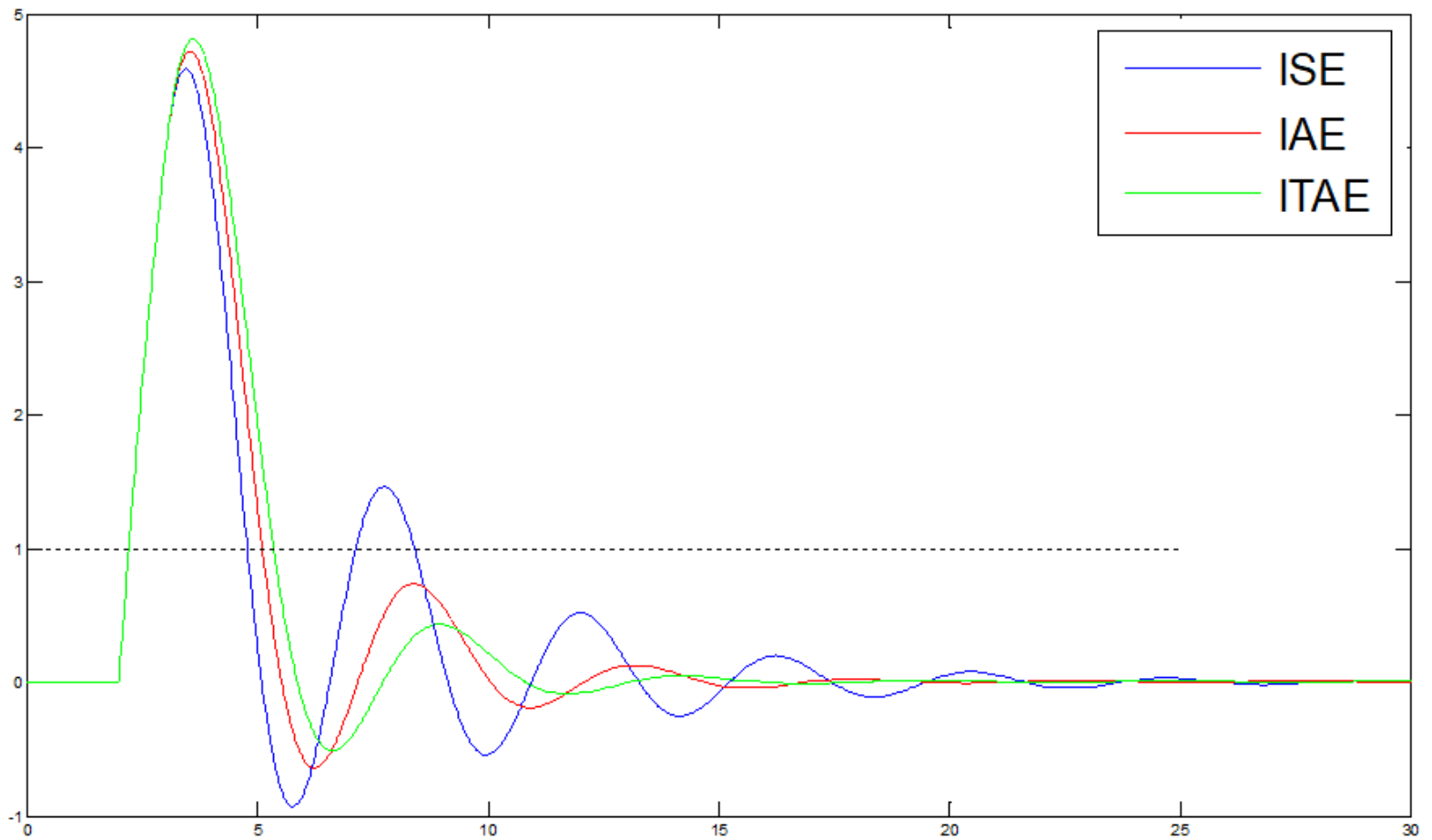
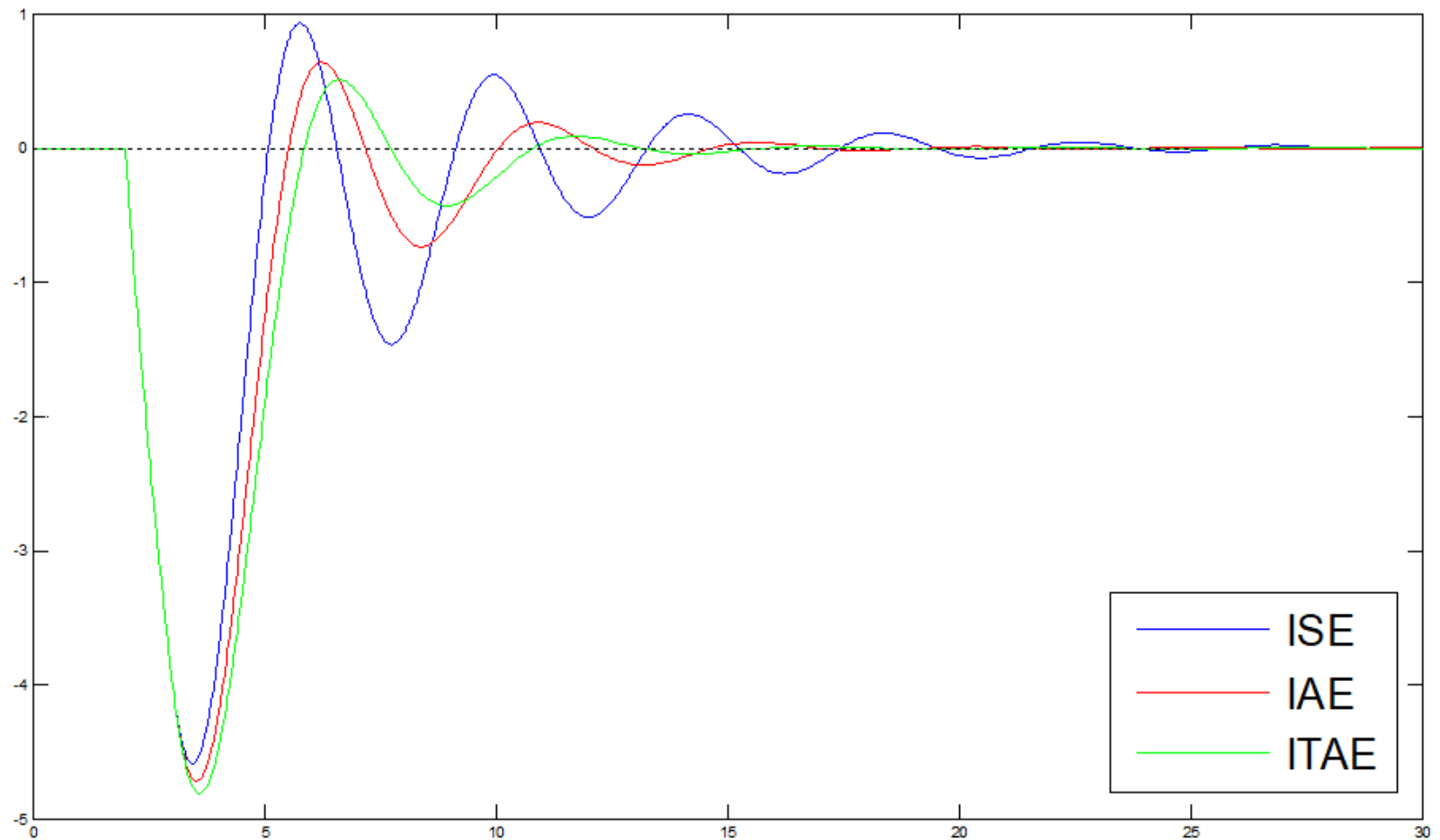


Diagrama de simulação para obtenção da resposta a um degrau unitário de perturbação.

## Resposta a uma perturbação em degrau



## Sinal de Erro



Erro = 0	ISE	IAE	ITAE
Tempo	54,53	35,29	28,44



## Ex2: Sintonia Baseada em Integrais de Erro

Considerando agora o problema seguimento de referência:

$$C(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_I s} \right)$$

	Coeficiente	IAE	ITAE
$K_p = \frac{a_1}{C} \left( \frac{L}{T} \right)^{b_1}$	$a_1$	0.758	0.586
	$b_1$	-0.861	-0.916
$T_I = \frac{T}{a_2 + b_2(L/T)}$	$a_2$	1.02	1.03
	$b_2$	-0.323	-0.165

## Ex2: Sintonia Baseada em Integrais de Erro

Substituindo os dados tem-se:

Critério	$K_p$	$T_i$
IAE	0,14	2,33
ITAE	0,11	2,11

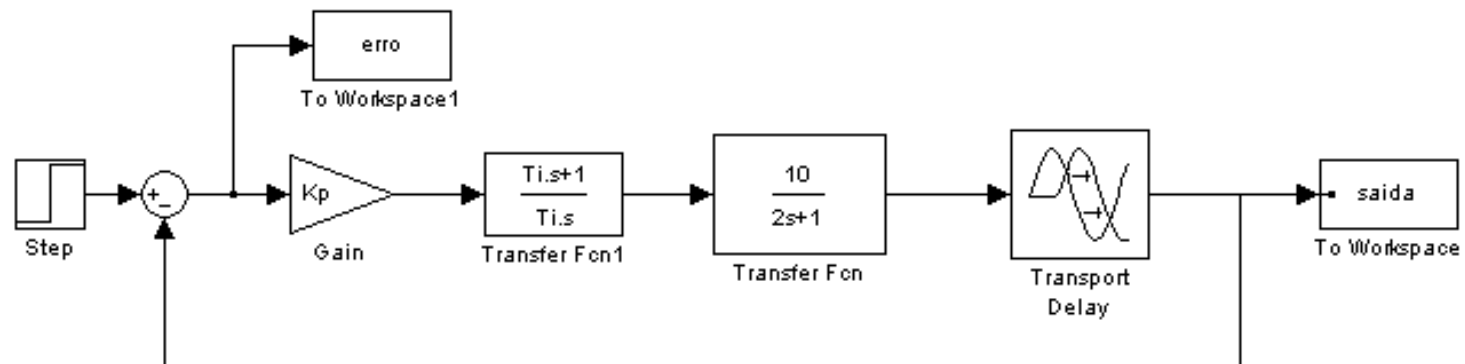
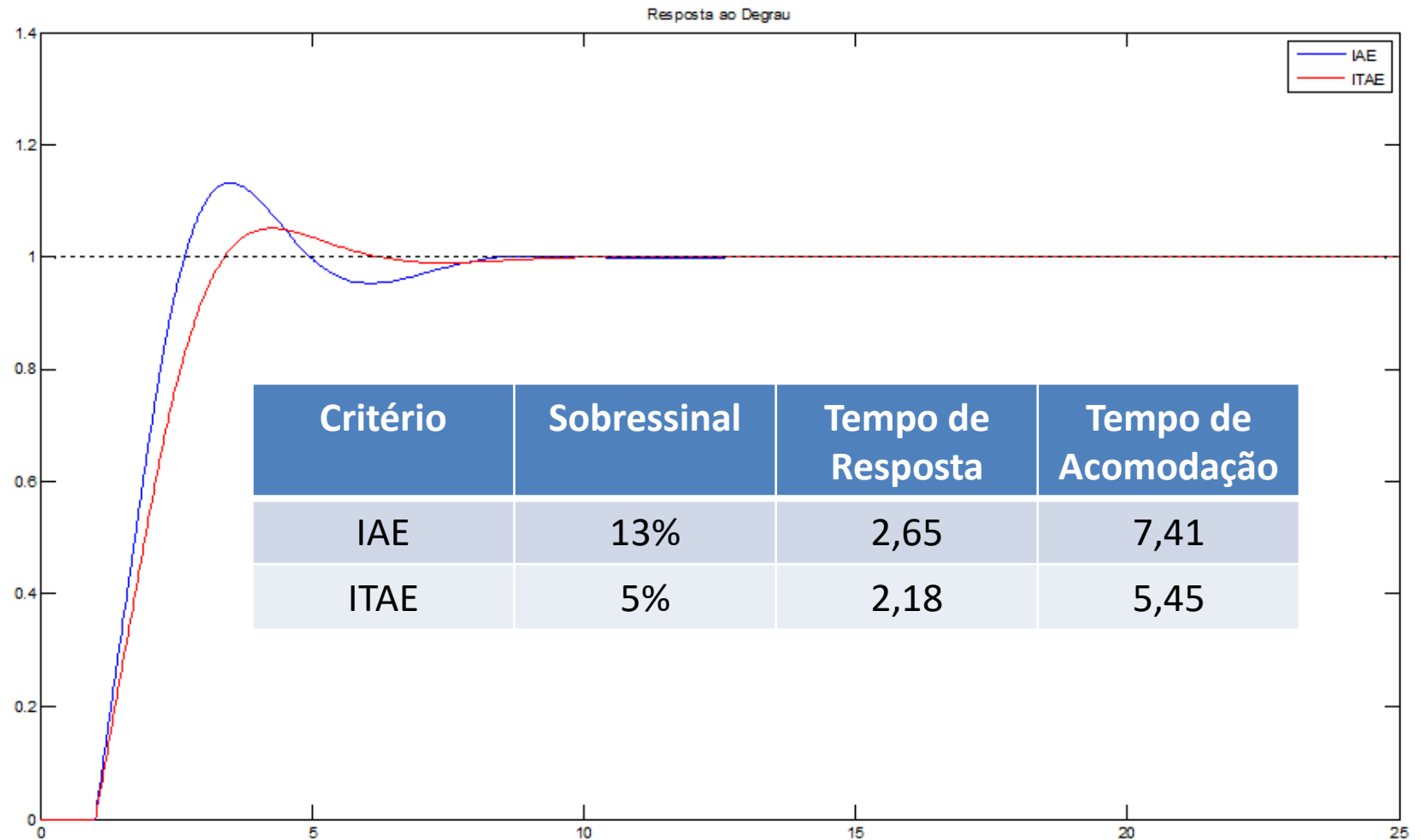
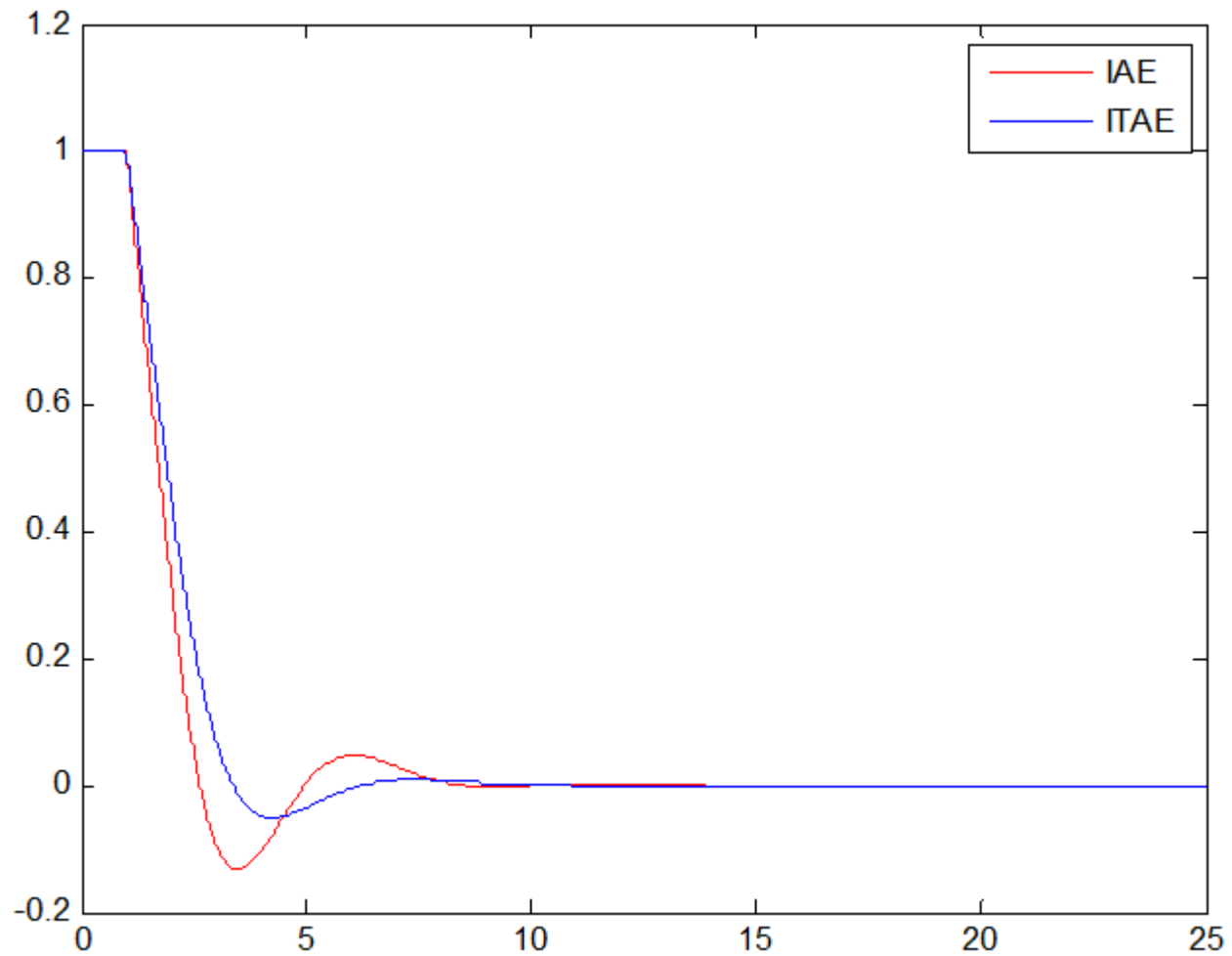


Diagrama de simulação para obtenção da resposta a uma entrada em degrau unitário.

## Resposta a uma entrada em degrau unitário



## Sinal de Erro



Erro = 0	IAE	ITAE
Tempo	20,58	17,45