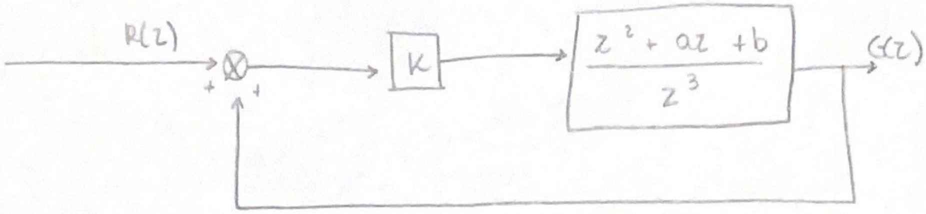
UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA – ESCOLA POLITÉCNICA
ENGC42 – SISTEMAS DE CONTROLE I – T01
1 **PROFESSORA**: CRISTIANE PAIM
ALUNA: BEATRIZ PEREIRA BARBOSA
Semestre: 2021.1
UNIDADE 1 **Avaliação Módulo 1**

Questão | 1



a) Para $K = 1$:

$$G(z) = \frac{z^2 + az + b}{z^3 - z^2 - az - b} \quad R(z)$$

$$E(z) = R(z) - G(z) = 1 - \frac{(z^2 + az + b)}{z^3 - z^2 - az - b} = \frac{z^3 - z^2 - az - b - z^2 - az - b}{z^3 - z^2 - az - b} R(z)$$

$$E(z) = \frac{z^3 - 2z^2 - 2az - 2b}{z^3 - z^2 - az - b} \cdot \left[\frac{z}{z-1}\right]$$ Entrada degrau unitário.

$$e_\infty = \lim_{(z \to 1)} \cancel{(z-1)} \cdot \frac{z}{\cancel{(z-1)}} \cdot \frac{(z^3 - 2z^2 - 2az - 2b)}{z^3 - z^2 - az - b}$$

$$= \frac{1 - 2 - 2a - 2b}{1 - 1 - a - b} = \frac{-1 - 2a - 2b}{-a - b}$$

$$\frac{\partial e_\infty}{\partial a} = \frac{-2(-a-b) - (-1 - 2a - 2b)}{(-a-b)^2} = \frac{\cancel{2a} + \cancel{2b} - 1 - \cancel{2a} - \cancel{2b}}{(-a-b)^2} = \frac{-1}{(-a-b)^2}$$

$$S_{MF} = \frac{\partial e_\infty}{\partial a} \cdot \frac{a}{e_\infty} = \frac{-1}{(-a-b)^{\cancel{2}}} \cdot a \cdot \frac{\cancel{(-a-b)}}{-1 - 2a - 2b} = \frac{-a}{(-a-b)(-1-2a-2b)}$$

$$\boxed{S_{MF} = \frac{-a}{2a^2 + 2b^2 + 4ab + a + b}}$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA – ESCOLA POLITÉCNICA
ENGC42 – SISTEMAS DE CONTROLE I – T01
PROFESSORA: CRISTIANE PAIM
ALUNA: BEATRIZ PEREIRA BARBOSA
Semestre: 2021.1
UNIDADE 1 **Avaliação Módulo 1**

Questão | 1

b. $K = 0{,}1$ $b = -1$ $T = 0{,}1s$

$$G(z) = \frac{K(z^2 + az + b)}{z^3 - Kz^2 - Kaz - Kb} = \frac{0{,}1(z^2 + az - 1)}{z^3 - 0{,}1z^2 - 0{,}1az + 0{,}1}$$

$$\Delta(z) = z^3 - 0{,}1z^2 - 0{,}1az + 0{,}1 = 0$$

$$1 - a\,\frac{0{,}1 \cdot z}{z^3 - 0{,}1z^2 + 0{,}1} = 0$$

↓

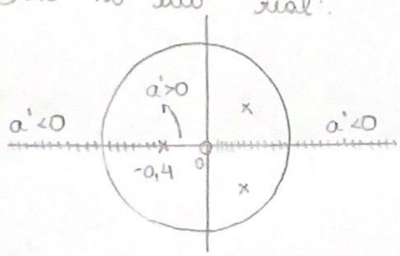
Fazendo $a' = -a$

ZERO: $z = 0$

POLOS: $p_1 \cong -0{,}4331$

$p_{2,3} = 0{,}2665 \pm j0{,}3998$

① LR no eixo real:



② assíntotas:

$a'>0$: $\frac{180(2K+1)}{3-1}$; $K = 0{,}1$

$\theta = \pm 90°$

$a'<0$: $\frac{360\,l}{2}$; $l = 0{,}1$

$\phi = \pm 180°$

$$s' = \frac{-0{,}4331 + 0{,}2665 + 0{,}2665}{2}$$

$s' \cong 0{,}05$

③ Ponto de ramificação

$$a' = \frac{-(z^3 - 0{,}1z^2 + 0{,}1)}{0{,}1z}$$

$$\frac{\partial a'}{\partial z} = -(3z^2 - 0{,}2z)(0{,}1z) + (z^3 - 0{,}1z^2 + 0{,}1)(0{,}1) = 0$$

$$-0{,}3z^3 + 0{,}02z^2 + 0{,}1z^3 - 0{,}01z^2 + 0{,}01 = 0$$

$$-0{,}2z^3 + 0{,}01z^2 + 0{,}01 = 0$$

$z = -0{,}168 \pm j0{,}318 \rightarrow \notin$ LR

$z = 0{,}386 \rightarrow \notin$ LR p/ $a'<0$

④ Interseção com o círculo unitário:

$$\Delta(z) = z^3 - 0,1z^2 - 0,1a'z + 0,1 = 0$$

Sendo $z = a + jb$ e $a' = K$ (provisoriamente)

$$\Delta(z) = a^3 + j3a^2b - 3ab^2 - jb^3 - 0,1(a^2 + j2ab - b^2) + 0,1K(a + jb) + 0,1 = 0$$

$$\begin{cases} Re\{\Delta(z)\} = a^3 - 3ab^2 - 0,1a^2 + 0,1b^2 + 0,1Ka + 0,1 = 0 \\ Im\{\Delta(z)\} = 3a^2b - b^3 - 0,2ab + 0,1Kb = 0 \\ b^2 = 1 - a^2 \end{cases}$$

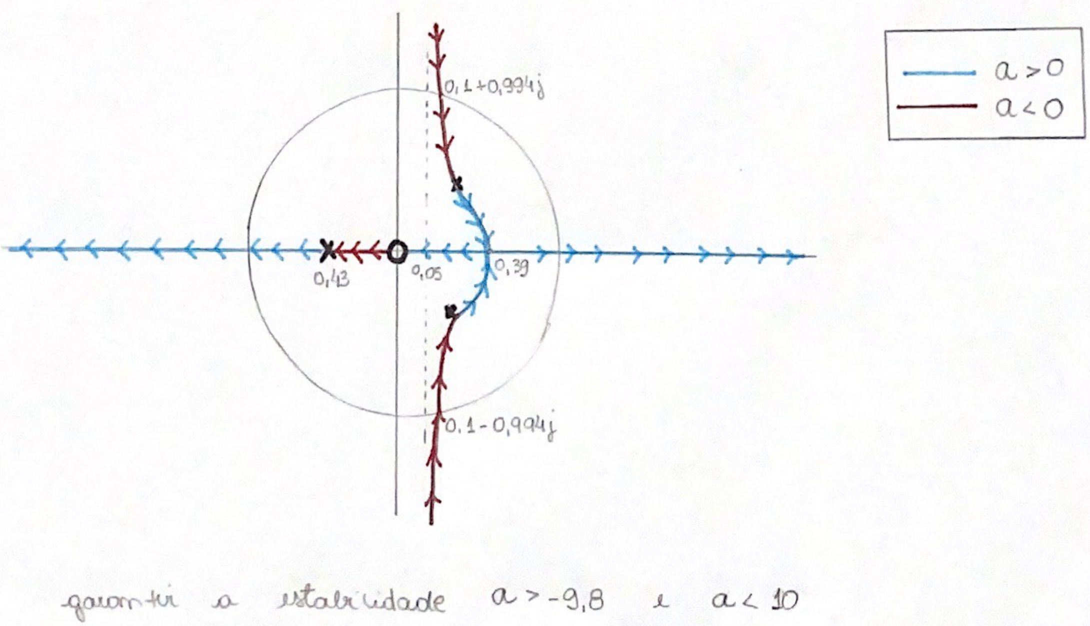
Resolvendo sistema acima, temos:

$a = -1$, $b = 0$, $K = -10$ $\longrightarrow$ $a = 10$

$a = 0,1$, $b = -0,994$, $K = 9,8$ $\longrightarrow$ $a = -9,8$

$a = 0,1$, $b = 0,994$, $K = 9,8$

$a = 1$, $b = 0$, $K = -10$



Para garantir a estabilidade $a > -9,8$ e $a < 10$

$$\boxed{-9,8 < a < 10}$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA – ESCOLA POLITÉCNICA
ENGC42 – SISTEMAS DE CONTROLE I – T01
PROFESSORA: CRISTIANE PAIM
ALUNA: BEATRIZ PEREIRA BARBOSA
Semestre: 2021.1
UNIDADE 1 **Avaliação Módulo 1**

3

Questão |1

c. $\frac{4}{\xi\omega_n} < 2 \therefore \xi\omega_n > 2 \quad \therefore r < e^{-2 \cdot 0,1} \quad \therefore r < 0,8187$

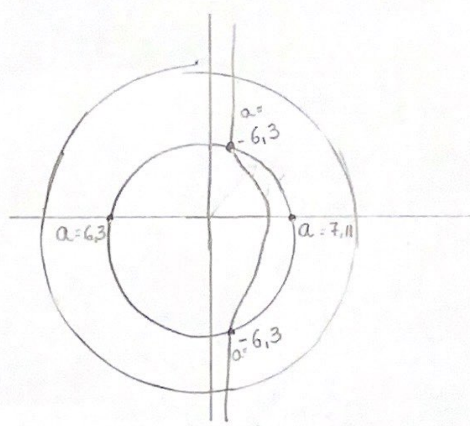
Resolvendo a equação característica para o círculo de raio 0,8187 (A equação $a^2 + b^2 = 1^2$ passa a ser $a^2 + b^2 = 0,8187^2$), temos:

$a = 0,125 \quad b = -0,809 \longrightarrow a' = 6,33$

$a = 0,125 \quad b = 0,809 \longrightarrow a' = 6,33$

$a = -0,819 \quad b = 0 \longrightarrow a' = -6,30$

$a = 0,819 \quad b = 0 \longrightarrow a' = -7,11$



$$\boxed{-6,3 < a < 6,3}$$

Para garantir $t_s < 2s$

Questão | 1

d. O erro para regime permanente considerando $K = 0,1$:

$$e_\infty = \frac{z^3 - 0,1z^2 - 0,1az - 0,1b - (0,1z^2 + 0,1az + 0,1b)}{z^3 - 0,1z^2 + 0,1az + 0,1b}$$

$$e_\infty = \frac{z^3 - 0,2z^2 - 0,2az - 0,2b}{z^3 - 0,1z^2 + 0,1az + 0,1} = \frac{1 - 0,2a}{1 - 0,1a}$$

Para o menor valor de estabilidade $a = -9,8$, temos:

$$e_\infty = 1,495$$

Polos complexos em malha fechada quando $a = -9,8$:

$$p = 0,1 \pm j0,995$$
$$= 1 \angle 1,47$$

$$\xi = \frac{-\ln(1)}{\sqrt{\ln^2(1) + \pi^2}} \cong 0 \qquad e \qquad M_p = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \cong 100\%$$

Polos complexos em malha fechada $a = 10$

$$p = 1,00498 \angle -1,47$$

$$\xi = 0,003 \qquad e \qquad M_p = 1,00498 = 0,498\%$$

$$e_\infty \to \infty$$

Quanto maior o valor de a, maior o erro em regime permanente. O valor do sobressinal não apresenta alterações significativas.

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA – ESCOLA POLITÉCNICA
ENGC42 – SISTEMAS DE CONTROLE I – T01
5
PROFESSORA: CRISTIANE PAIM
ALUNA: BEATRIZ PEREIRA BARBOSA
Semestre: 2021.1
UNIDADE 1 Avaliação Módulo 1

Questão | 1

e.

$$e_\infty = \frac{1-0,2a}{1-0,1a} < 0,15$$

$$1-0,2a < 0,15 - 0,015a$$

$$0,185a > 0,85$$

$$a > 4,6$$

$$e_\infty = \frac{1-0,2a}{1-0,1a} > -0,15$$

$$1-0,2a > -0,15 + 0,015a$$

$$0,215a < 1,15$$

$$a < 5,35$$

Para garantir $|e_\infty| < 15\%$, temos:

$$\boxed{4,6 < a < 5,35}$$