Análise da Resposta em Frequência

Diagrama Polar e Carta de Nichols

Sistemas com Atraso

Profa. Cristiane Paim

Introdução

Seja a **Função de Transferência Senoidal**

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)}$$

A análise da resposta em frequência pode ser feita utilizando três representações:

- Diagramas de Bode
- Diagramas Polares
- Carta de Nichols

DIAGRAMA POLAR

Diagrama Polar

O diagrama polar de uma função de transferência senoidal $G(j\omega)$ é um **gráfico de módulo de $G(j\omega)$ *versus* o ângulo de fase de $G(j\omega)$** em coordenadas polares, com a frequência ω variando de 0 a $+\infty$.

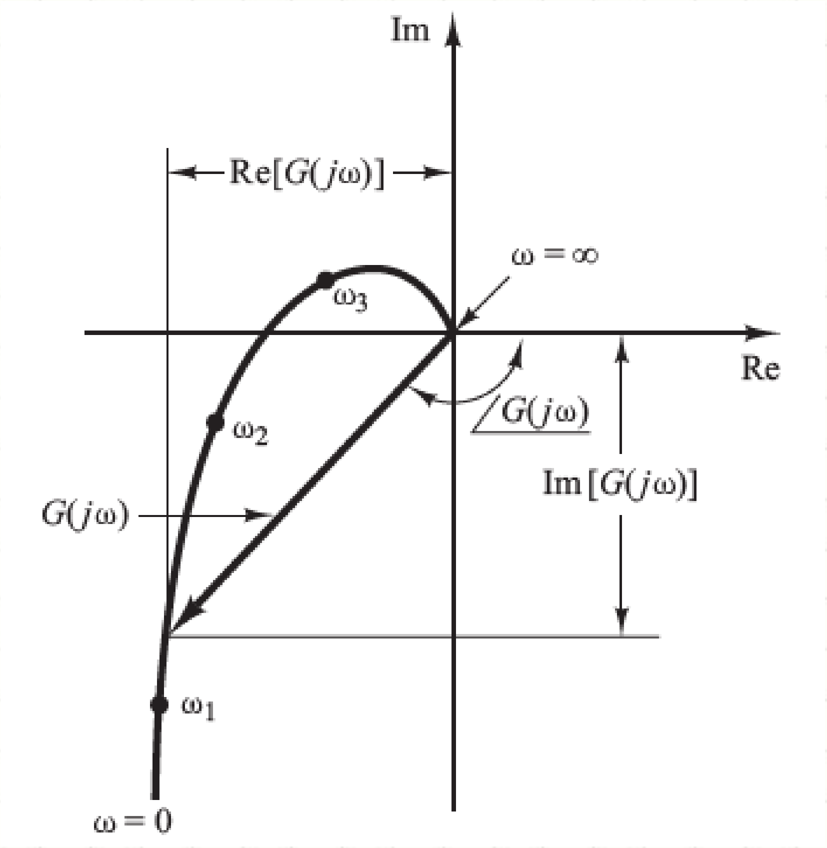
Portanto, é a representação de $|G(j\omega)| \angle G(j\omega)$, com ω variando de 0 a $+\infty$.

No diagrama polar um ângulo de fase positivo é medido no sentido anti-horário a partir do eixo real positivo enquanto um ângulo negativo é medido no sentido horário.

Cada ponto do diagrama representa um ponto terminal de um vetor para determinado valor ω.

Diagrama Polar - exemplo

Um exemplo de diagrama polar é mostrado abaixo.



No diagrama polar são indicados valores de frequência ao longo da curva.

Diagrama Polar: polo na origem

Seja um sistema com um polo na origem:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega}\angle -90^{\circ}$$

$$G(0) = \infty\angle -90^{\circ}$$

$$G(\infty) = 0\angle -90^{\circ}$$

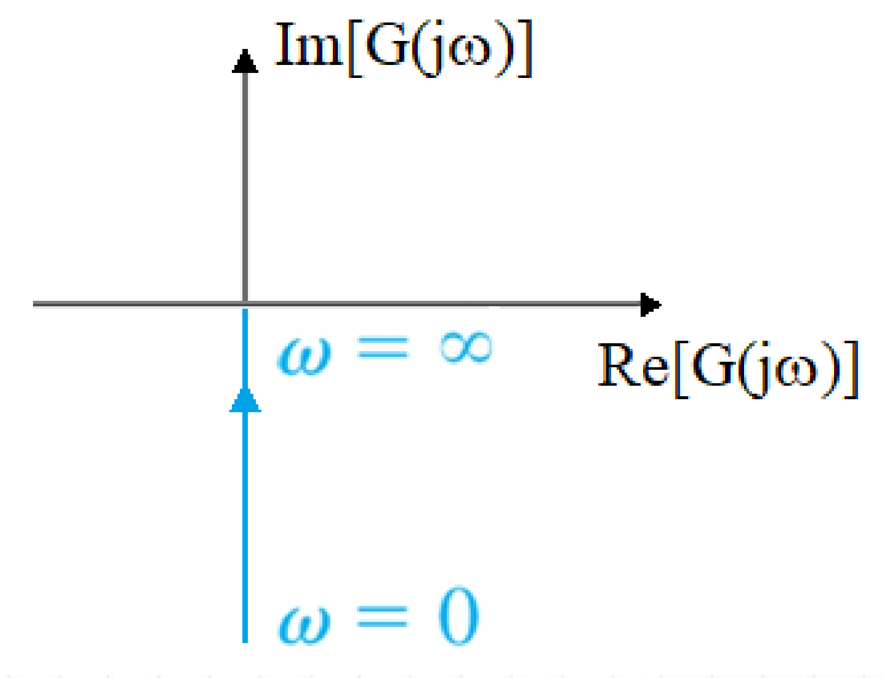


Diagrama Polar: zero na origem

Seja um sistema com um zero na origem:

$$G(j\omega) = j\omega = \omega\angle 90^{\circ}$$

$$G(0) = 0\angle 90^{\circ}$$

$$G(\infty) = \infty\angle 90^{\circ}$$

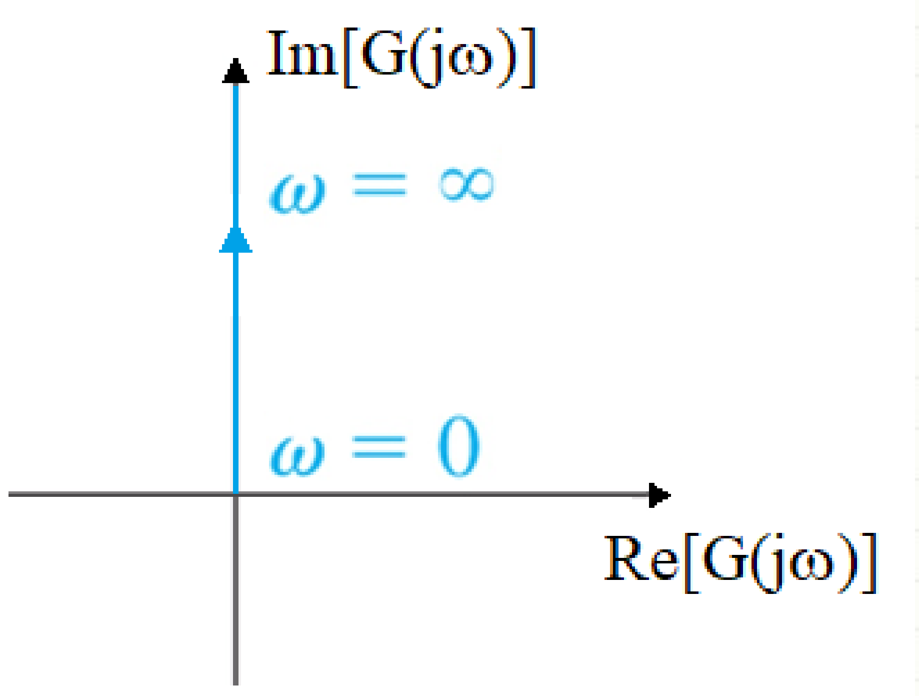


Diagrama Polar: polo real

Seja um sistema com um polo real:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T} \qquad T > 0$$

Multiplicando pelo conjugado:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+(\omega T)^2} - j\frac{\omega T}{1+(\omega T)^2}$$

Para

$$\omega = 0 \qquad G(0) = 1 - j0 = 1\angle 0^\circ$$

Diagrama Polar: polo real

Para

$$\omega = 1/T \qquad G(1/T) = \frac{1}{2} - j\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\angle -45^\circ$$

(freq. Corte)

Para $\omega \to \infty$ ($\omega >> 1/T$), a função pode ser aproximada por:

$$G(j\omega) \approx \frac{1}{j\omega T}$$

e assim

$$G(\infty) \approx -j\frac{1}{\omega} = 0\angle -90^\circ$$

Diagrama Polar: polo real

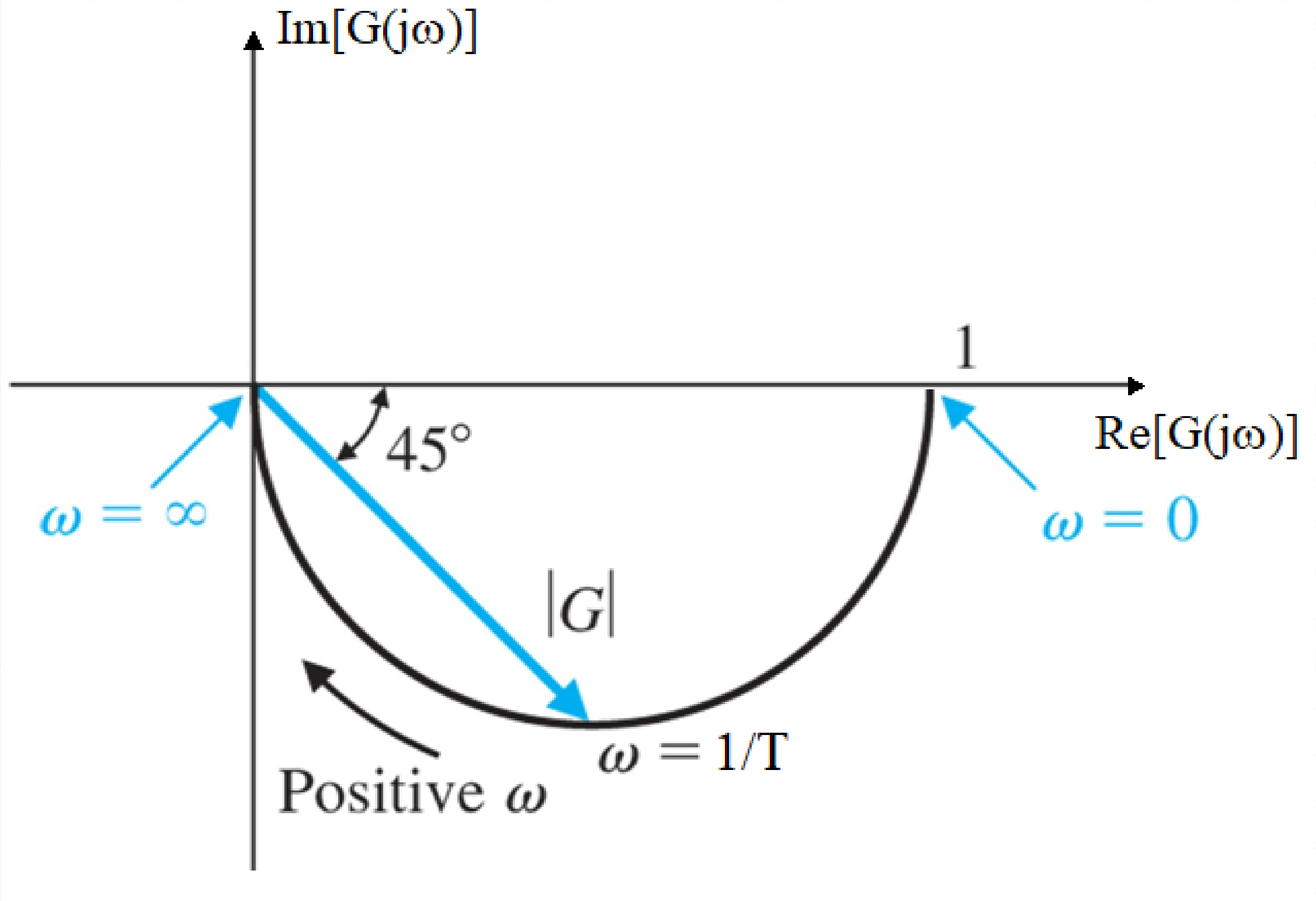


Diagrama Polar: zero real

Seja um sistema com um zero real:

$$G(j\omega) = 1 + j\omega T \qquad T > 0$$

$$\omega = 0 \qquad G(0) = 1 + j0 = 1\angle 0^\circ$$

$$\omega = 1/T \qquad G(1/T) = 1 + j = \sqrt{2}\angle 45^\circ$$

$$\omega = \infty \qquad G(\infty) = 1 + j\infty = \infty\angle 90^\circ$$

Diagrama Polar: zero real

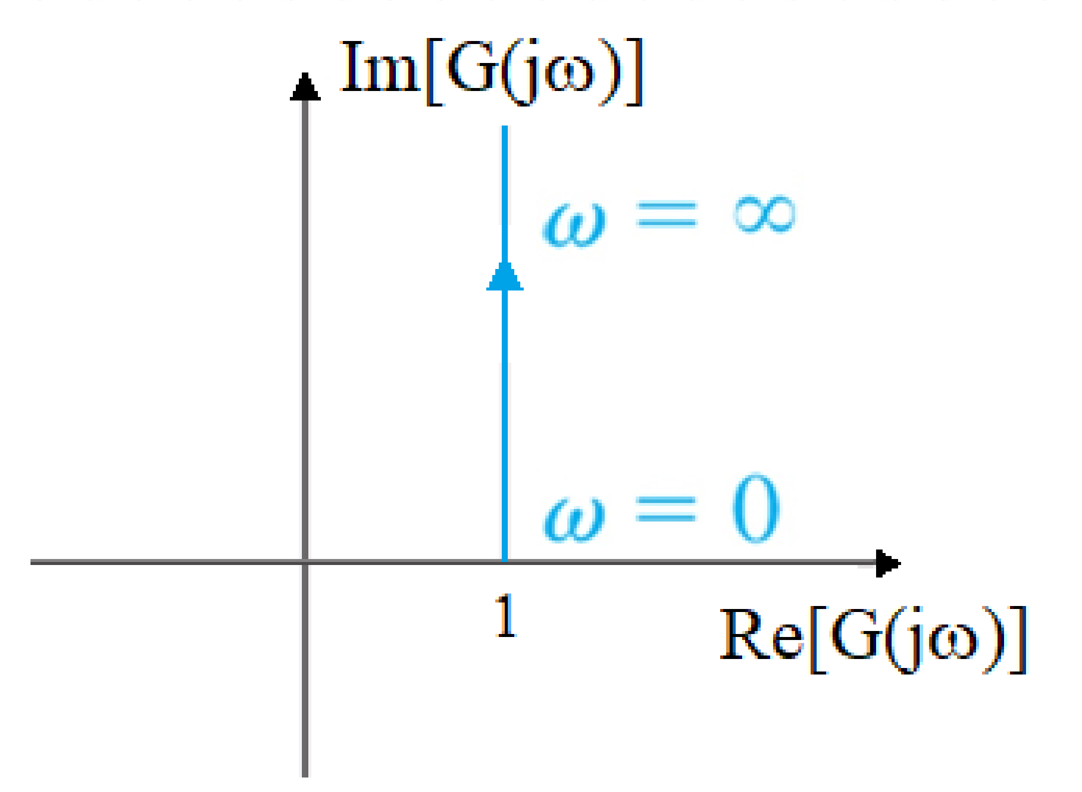


Diagrama Polar: polo complexo

Seja um sistema com um par de polos complexos:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\xi\left(\dfrac{j\omega}{\omega_n}\right) + \left(\dfrac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j\left(2\xi\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)}$$

Diagrama Polar: polo complexo

Multiplicando pelo conjugado:

$$\mathrm{G}(j\omega)=\frac{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)-j\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Para

$$\omega=0 \qquad G(0)=1-j0=1\angle 0^\circ$$

Diagrama Polar: polo complexo

Para

$$\omega = \omega_n \qquad G(\omega_n) = \frac{0 - j2\xi}{(2\xi)^2} = \frac{1}{2\xi}\angle -90^\circ$$

Para $\omega \to \infty$

$$G(j\omega) \approx \frac{1}{(j\omega)^2}$$

e assim,

$$G(\infty) \approx -\frac{1}{\omega^2} = 0\angle -180^\circ$$

Diagrama Polar: polo complexo

Assim, como nos diagramas de Bode, o diagrama polar associado a polos complexos depende do valor do coeficiente de amortecimento ξ.

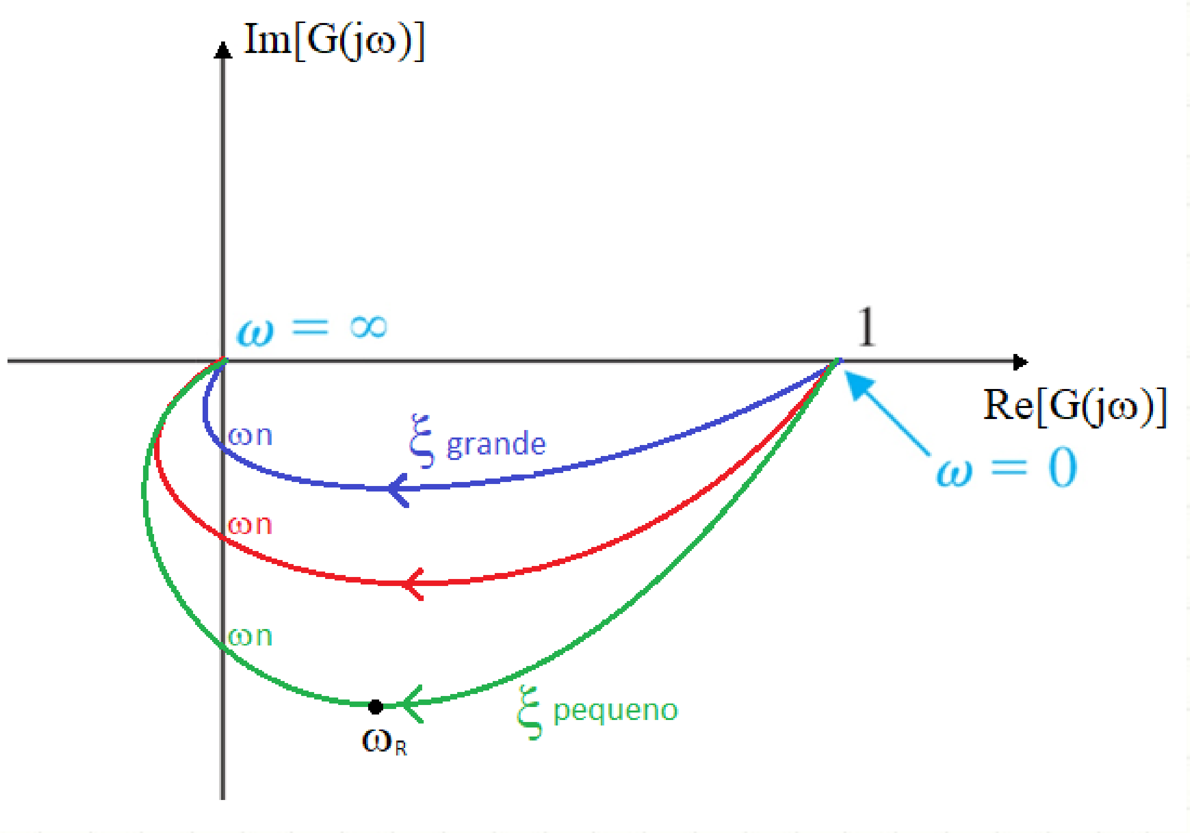


Diagrama Polar: zero complexo

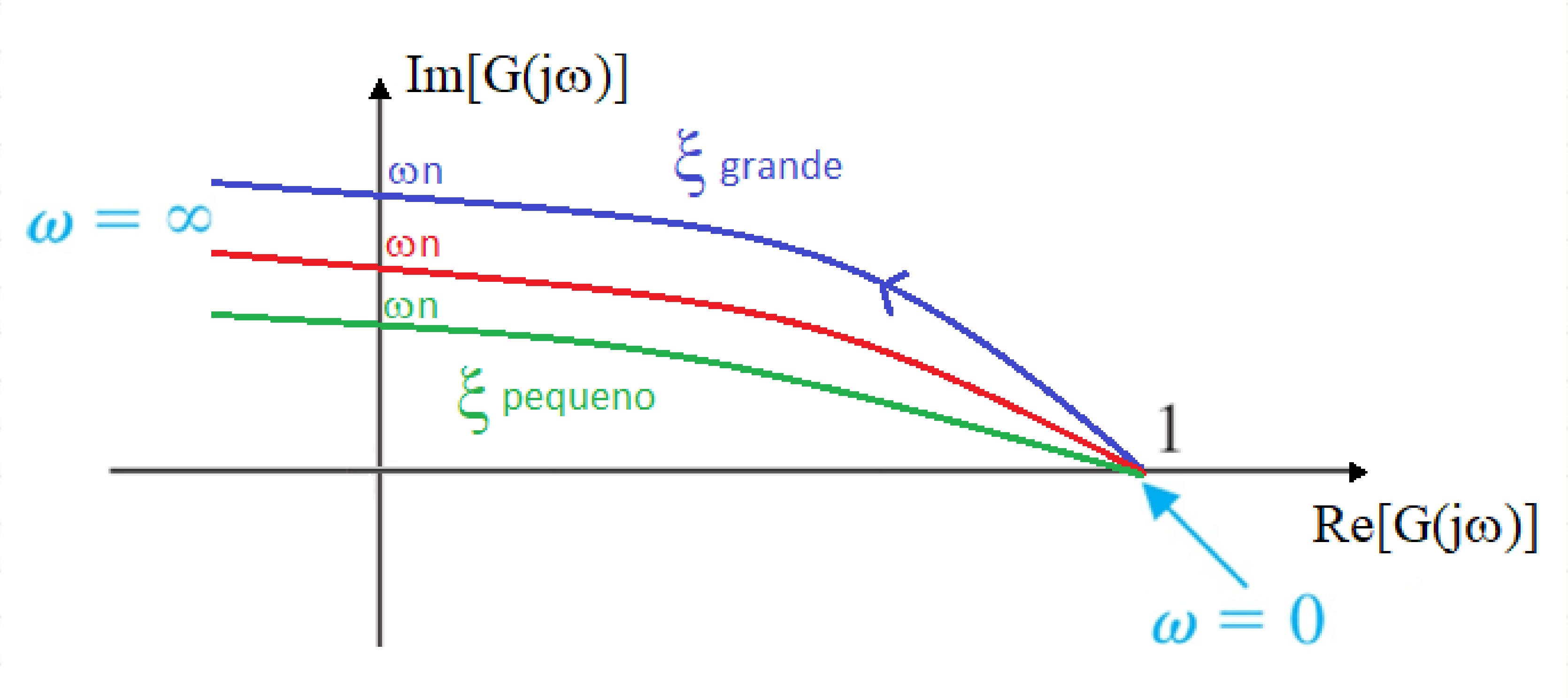
Seja um sistema com um par de zeros complexos:

$$\mathrm{G}(j\omega) = 1 + 2\xi\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2$$

$$= \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)$$

$\omega = 0$	$G(0) = 1 + j0 = 1\angle 0^\circ$
$\omega = \omega_n$	$G(\omega_n) = 0 + j2\xi = 2\xi\angle 90^\circ$
$\omega \to \infty$	$G(\infty) \approx (j\omega)^2 = \infty\angle 180^\circ$

Diagrama Polar: zero complexo



Exemplo 1 - Diagrama Polar

Ex1: Traçar o diagrama polar para a função abaixo.

$$G(s) = \frac{5(s+1)}{(s+5)(s^2+2s+5)} = \frac{5(s+1)}{s^3+7s^2+15s+25}$$

$$G(j\omega) = \frac{5(j\omega+1)}{(25-7\omega^2)+j\omega(15-\omega^2)}$$

Multiplicando pelo conjugado:

$$G(j\omega) = \frac{5\left[(25+8\omega^2-\omega^4)+j\omega(10-6\omega^2)\right]}{(25-7\omega^2)^2+\omega^2(15-\omega^2)^2}$$

Exemplo 1 - Diagrama Polar

$$G(j\omega) = \frac{5\left[(25+8\omega^2-\omega^4)+j\omega(10-6\omega^2)\right]}{(25-7\omega^2)^2+\omega^2(15-\omega^2)^2}$$

Para ω=0

$$G(0) = \frac{5\times 25 + j0}{(25)^2} = 0,2\angle 0^\circ$$

Para $\omega\to\infty$

$$G(j\omega) \approx \frac{1}{(j\omega)^2}$$

e assim,

$$G(\infty) \approx -\frac{1}{\omega^2} = 0\angle -180^\circ$$

Exemplo 1 - Diagrama Polar

$$G(j\omega) = \frac{5\left[(25+8\omega^2-\omega^4)+j\omega(10-6\omega^2)\right]}{(25-7\omega^2)^2+\omega^2(15-\omega^2)^2}$$

Cruzamento com eixo real: Im[G(jω)]=0

$$\omega = 0 \quad \text{ou} \quad \omega = \sqrt{10/6} = 1,29$$

Para ω=0 (já calculado)

$$\mathrm{Re}[G(j\omega)] = 0,2$$

Para ω=1,29

$$\mathrm{Re}[G(j\omega)] = 0,375$$

Exemplo 1 - Diagrama Polar

$$G(j\omega) = \frac{5\left[(25+8\omega^2-\omega^4)+j\omega(10-6\omega^2)\right]}{(25-7\omega^2)^2+\omega^2(15-\omega^2)^2}$$

Cruzamento com eixo imaginário: Re[G(jω)]=0

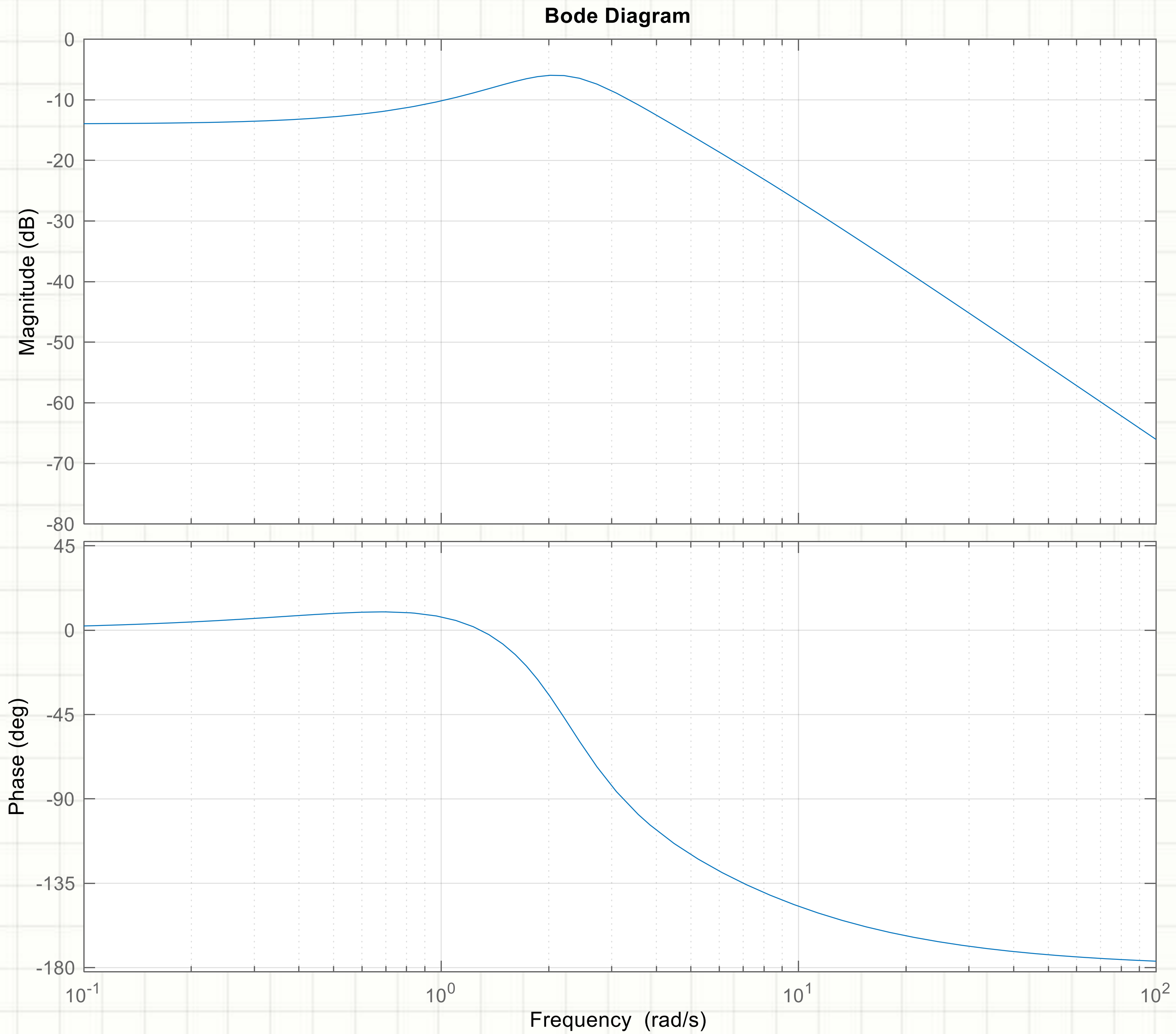
$$25+8\omega^2-\omega^4=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \omega=\pm 3,22 \\ \omega=\pm j1,55 \end{matrix}$$

Para ω=3,22

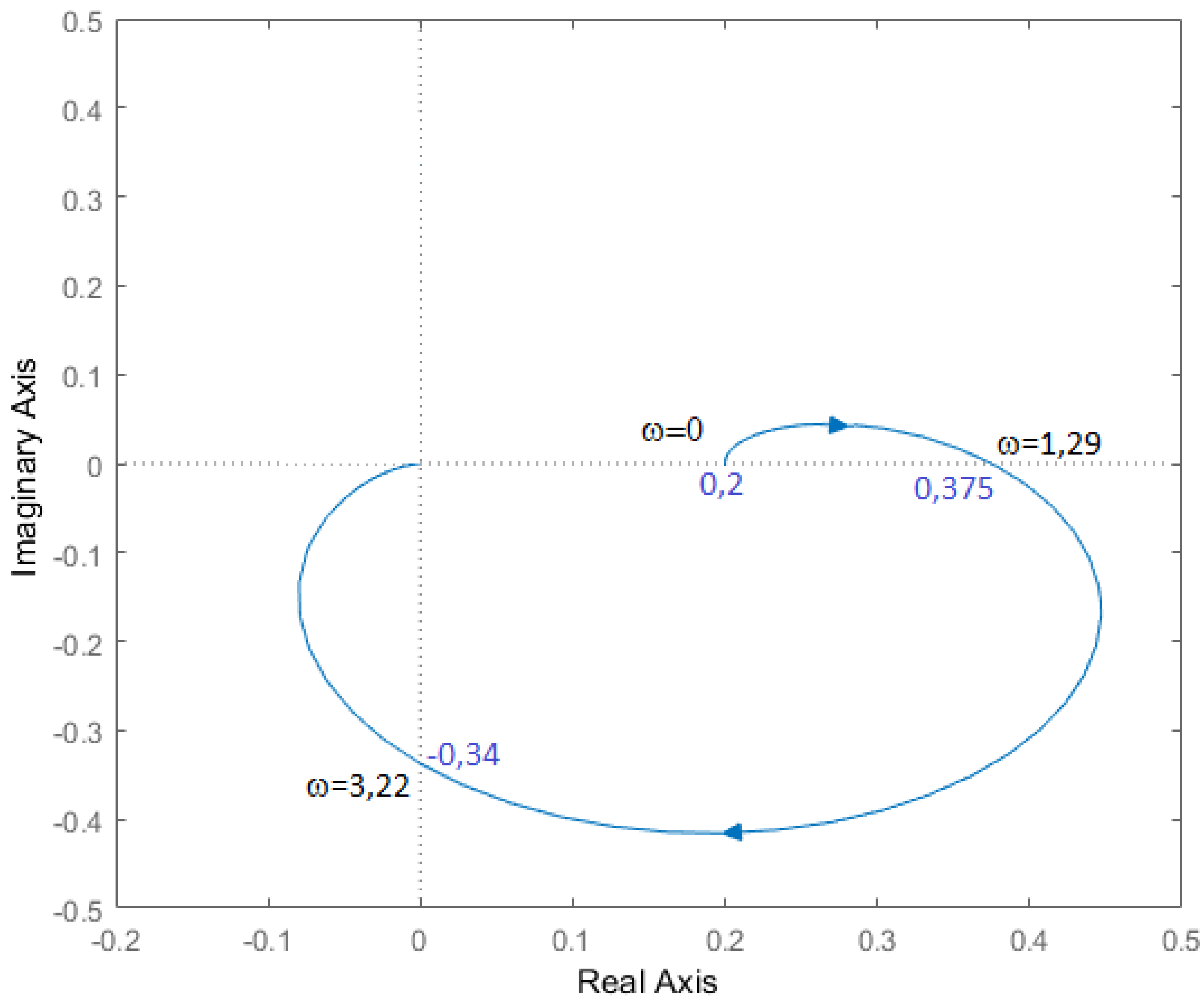
$$\mathrm{Im}[G(j\omega)]=-0,34$$

Obs. A frequência ω precisa ser uma constante real positiva.

Exemplo 1 - Diagramas Bode



Exemplo 1 - Diagrama Polar



Carta de Nichols

Carta de Nichols

É um diagrama de módulo (em dB) *versus* ângulo de fase (em graus) com ω variando de 0 a $+\infty$.

As cartas de Nichols das funções de transferência $G(j\omega)$ e $1/G(j\omega)$ são anti simétricas em relação à origem:

$$\left|\frac{1}{G(j\omega)}\right|_{\mathrm{dB}} = -\left|G(j\omega)\right|_{\mathrm{dB}}$$

$$\angle\frac{1}{G(j\omega)} = -\angle G(j\omega)$$

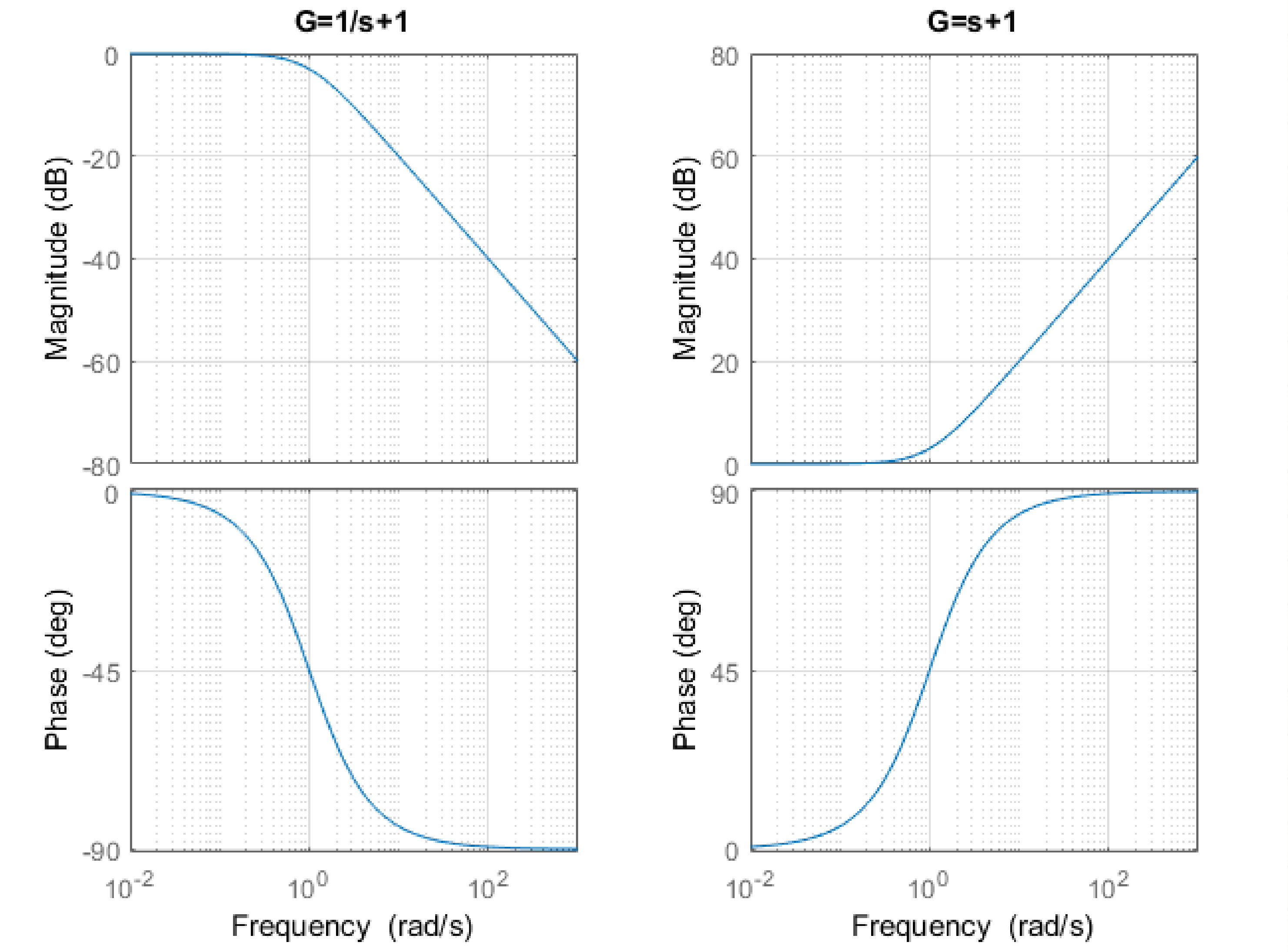
Exemplo 2 – funções antissimétricas

Sejam as funções antissimétricas:

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \quad \rightarrow \quad G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$$

$$G'(s) = s+1 \quad \rightarrow \quad G'(j\omega) = 1+j\omega$$

Exemplo 2 – funções antissimétricas (Diagramas de Bode)



Exemplo 2 – funções antissimétricas

Para a função de transferência

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$$

tem-se

$$\omega = 0 \qquad G(0) = 1\angle 0^\circ = 0\text{dB}\angle 0^\circ$$

$$\omega = 1 \qquad \begin{aligned} G(1/T) &= \sqrt{2}/2\angle -45^\circ \\ &= -3\text{dB}\angle -45^\circ \end{aligned}$$

$$\omega = \infty \qquad G(\infty) = 0\angle -90^\circ = \infty\text{dB}\angle -90^\circ$$

Exemplo 2 – funções antissimétricas

Para a função de transferência:

$$G'(j\omega) = 1 + j\omega$$

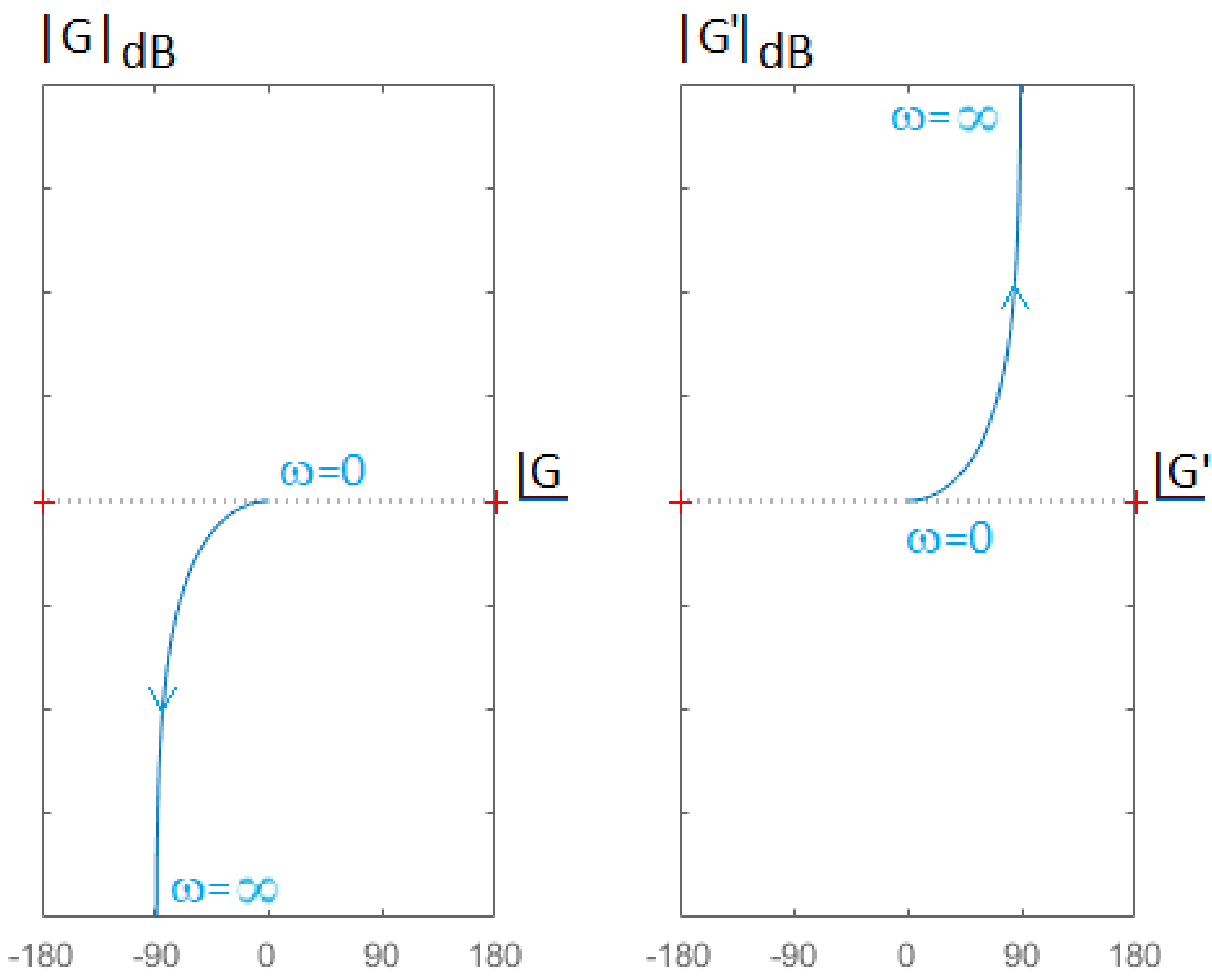
tem-se

$$\omega = 0 \qquad G'(0) = 1\angle 0^\circ = 0\text{dB}\angle 0^\circ$$

$$\omega = 1 \qquad \begin{aligned} G'(1/T) &= \sqrt{2}\angle 45^\circ \\ &= 3\text{dB}\angle 45^\circ \end{aligned}$$

$$\omega = \infty \qquad G'(\infty) = \infty\angle 90^\circ = \infty\text{dB}\angle 90^\circ$$

Exemplo 2 – funções antissimétricas (Carta de Nichols)



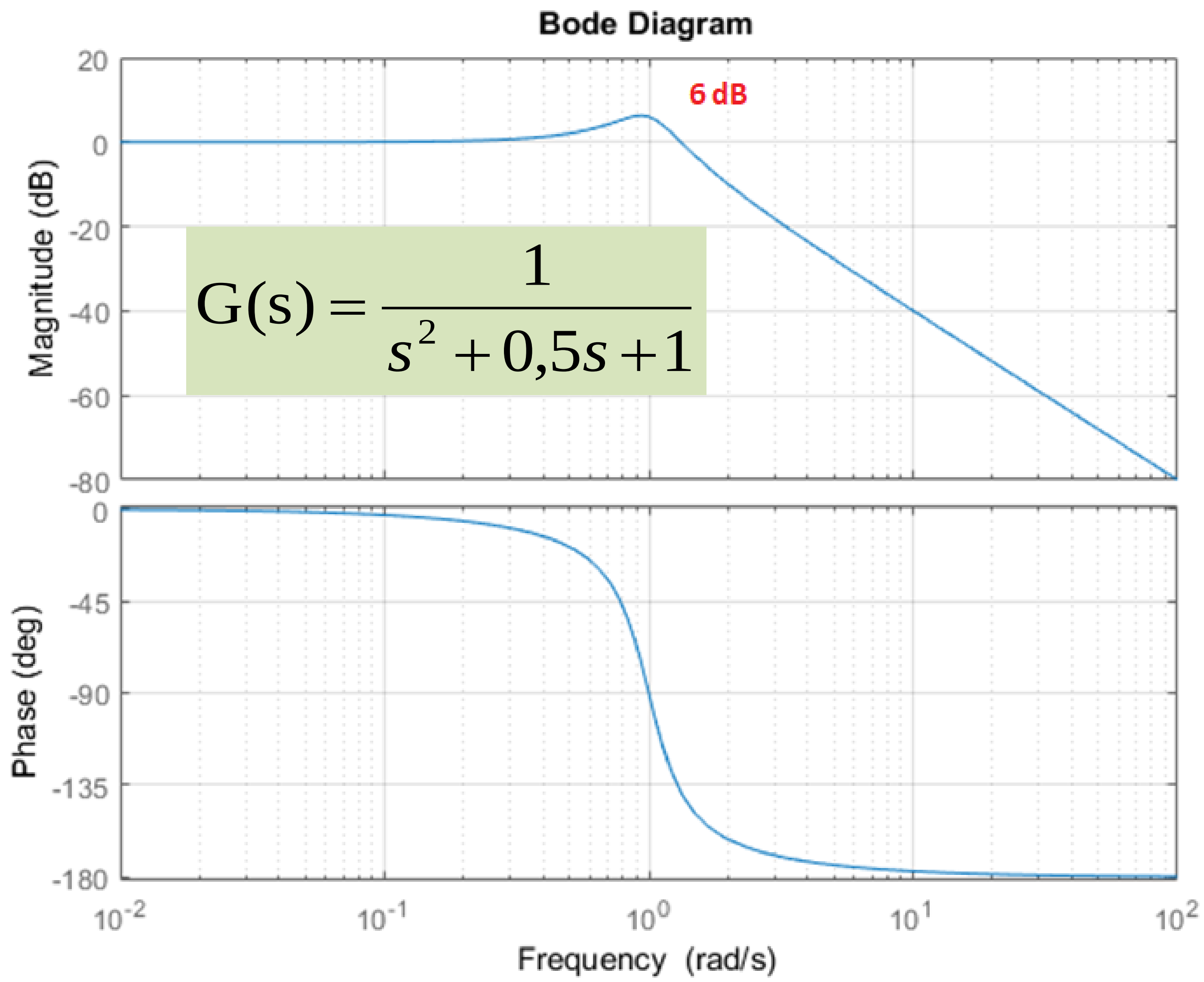
Exemplo 3 – polos complexos

Seja o sistema de 2ª ordem subamortecido, polo complexo ($0 < \xi < 1$)

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\xi\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)}$$

Exemplo 3 – polos complexos (Diagramas de Bode)



$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0{,}5s + 1}$$

Exemplo 3 – polos complexos (Diagrama Polar)

Valores de Módulo e fase:

$$\omega = 0 \qquad G(0) = 1\angle 0^\circ$$

$$\omega = \omega_n \qquad G(\omega) = (1/2\xi)\angle -90^\circ$$

$$\omega = \infty \qquad G(\infty) = 0\angle -180^\circ$$

$$\mathrm{G(s)} = \frac{1}{s^2 + 0,5s + 1} \rightarrow \begin{matrix} \omega_n = 1 \\ \xi = 0,25 \end{matrix}$$

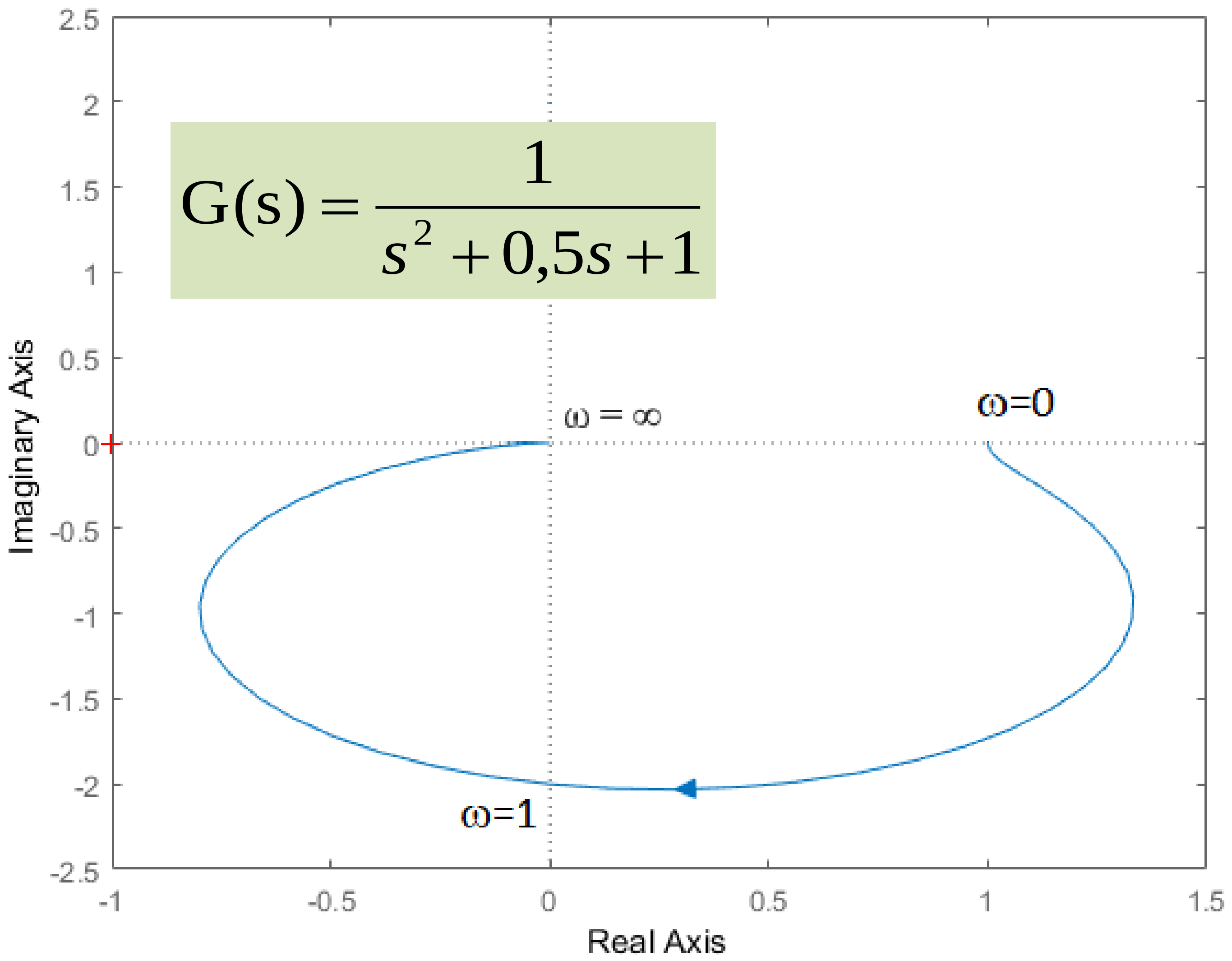
$$\omega = 0 \qquad G(0) = 1\angle 0^\circ$$

$$\omega = 1 \qquad G(\omega) = -2\angle -90^\circ$$

$$\omega = \infty \qquad G(\infty) = 0\angle -180^\circ$$

Exemplo 3 – polos complexos (Diagrama Polar)

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0{,}5s + 1}$$



Exemplo 3 – polos complexos (Carta de Nichols)

Valores de módulo e fase

$$\omega = 0 \qquad G(0) = 1\angle 0^\circ = 0\text{dB}\angle 0^\circ$$

$$\omega = \omega_n \qquad G(\omega) = -20\log(2\xi)\angle -90^\circ$$

$$\omega = \infty \qquad G(\infty) = 0\angle -180^\circ = \infty\text{dB}\angle -180^\circ$$

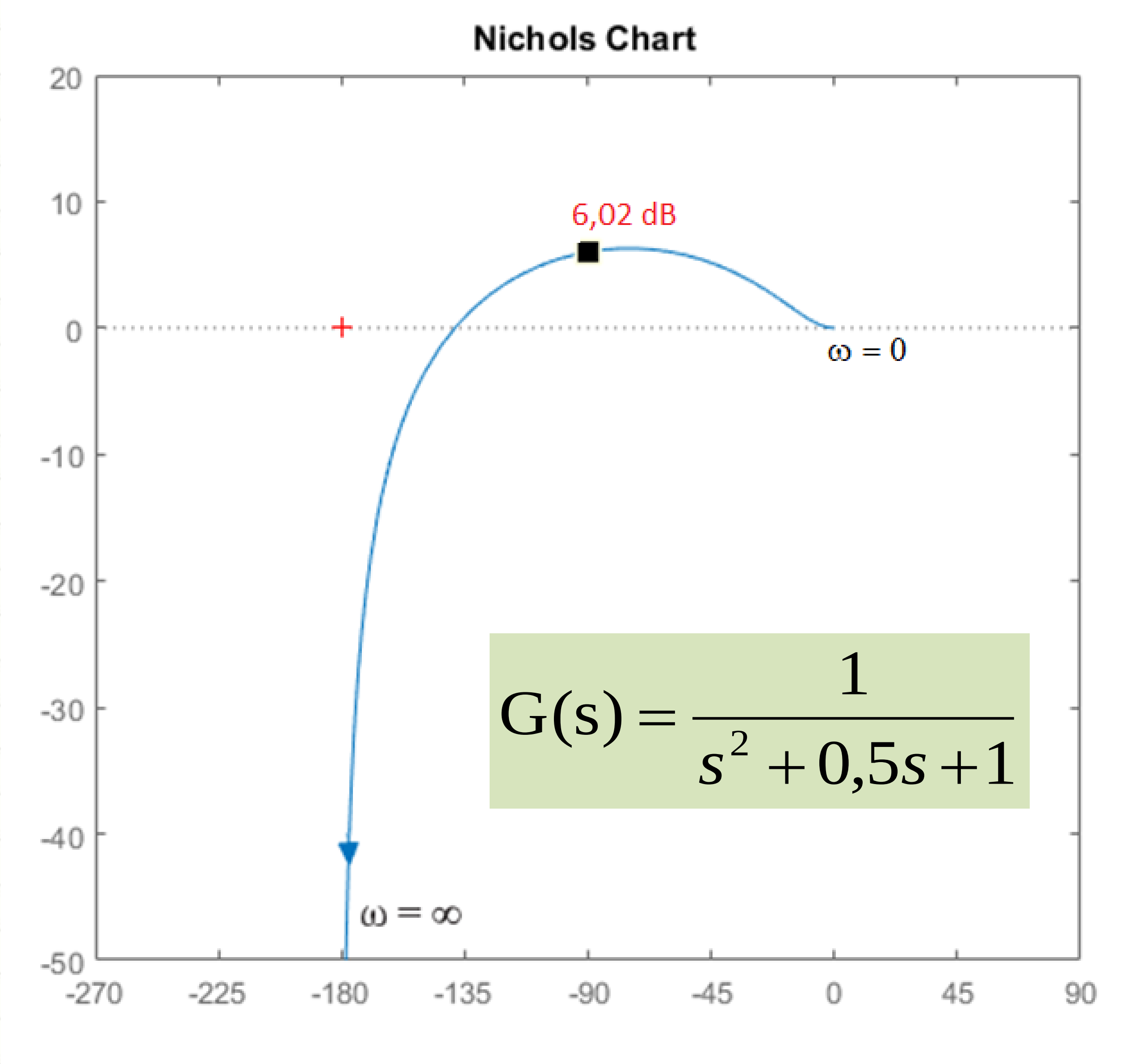
$$\text{G(s)} = \frac{1}{s^2 + 0,5s + 1} \rightarrow \begin{matrix} \omega_n = 1 \\ \xi = 0,25 \end{matrix}$$

$$\omega = 0 \qquad G(0) = 0\text{dB}\angle 0^\circ$$

$$\omega = 1 \qquad G(\omega) = 6,02\text{dB}\angle -90^\circ$$

$$\omega = \infty \qquad G(\infty) = \infty\text{dB}\angle -180^\circ$$

Exemplo 3 – polos complexos (Carta de Nichols)



$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0{,}5s + 1}$$

Sistemas com Atraso

Resposta em frequência para sistemas com atraso

Seja um atraso de transporte:

$$\mathrm{F}(j\omega) = e^{-j\omega L}$$

sendo L um atraso em segundos.

Para esta função tem-se:

$$\left|e^{-j\omega L}\right| = 1 \quad \rightarrow \quad \left|F(j\omega)\right|_{\mathrm{dB}} = 0\mathrm{dB}$$

e

$$\angle e^{-j\omega L} = \underset{radianos}{-\omega L} = \underbrace{-57{,}3^{\circ}\,\omega L}_{graus}$$

Resposta em frequência para sistemas com atraso

Portanto, um sistema com um único atraso de transporte terá seu o módulo igual ao do sistema sem este atraso e sua fase irá variar com ωL.

Exemplo 4 - sistema com atraso

Seja o sistema com atraso

$$G(s) = \frac{1}{s} e^{-s} \quad \rightarrow \quad G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega}$$

Serão traçados os Diagramas de Bode, Diagrama Polar e Carta de Nichols para este sistema.

Exemplo 4 - sistema com atraso (Diagramas de Bode)

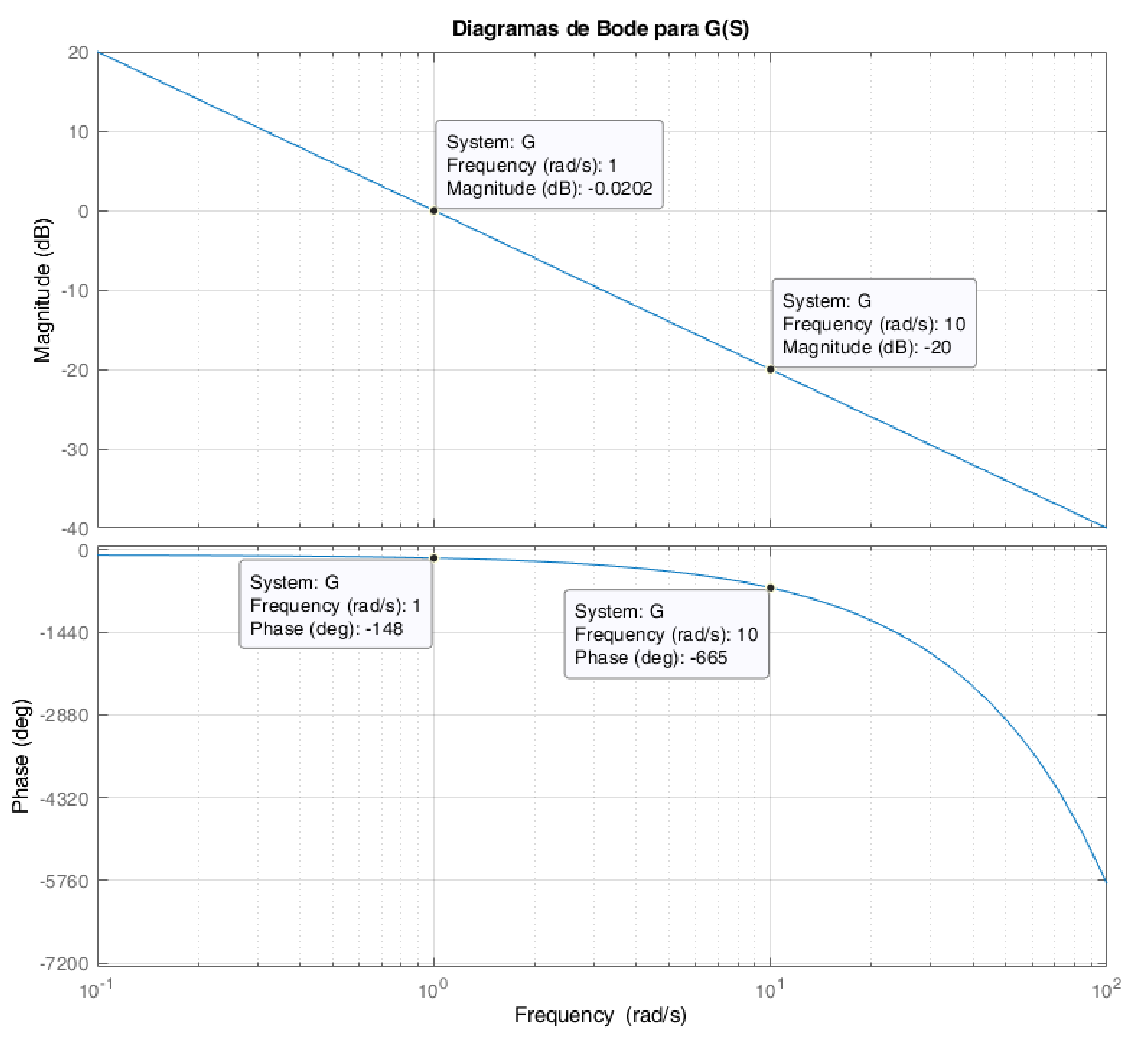
O módulo tem inclinação -20dB/dec em toda a variação de frequência.

A fase é dependente do atraso L=1 segundo:

$$\angle G(j\omega) = -90^{\circ} - 57,3^{\circ}\,\omega \times 1$$

Frequência	Fase
$\omega = 0,1$	-90°-57,3°x0,1x1 = -95,7°
$\omega = 1$	-90°-57,3°x1x1 = -147,30°
$\omega = 10$	-90°-57,3°x10x1 = -663°
$\omega = 100$	-90°-57,3°x100x1 = -5820°

Exemplo 4 - sistema com atraso (Diagramas de Bode)



Exemplo 4 - sistema com atraso (Diagrama Polar)

A função de transferência pode ser escrita como:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-j(\omega+\pi/2)}$$

ou

$$G(j\omega) = \frac{1}{\omega}\left[\cos(\omega+\pi/2) - j\,\mathrm{sen}(\omega+\pi/2)\right]$$

$$= \frac{1}{\omega}\left[-\mathrm{sen}(\omega) + j\cos(\omega)\right]$$

Exemplo 4 - sistema com atraso (Diagrama Polar)

Considerando os limites:

$$\omega = 0 \qquad G(j\omega) = -1 - j\infty = \infty\angle -90^{\circ}$$

$$\omega = \infty \qquad G(\infty) \approx \frac{1}{j\omega} = 0\angle -90^{\circ}$$

Exemplo 4 - sistema com atraso (Diagrama Polar)

Cruzamento com eixo real: Im[G(jω)]=0

$$\frac{-\cos(\omega)}{\omega} = 0 \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \cdots$$

Cruzamento com eixo imaginário: Re[G(jω)]=0

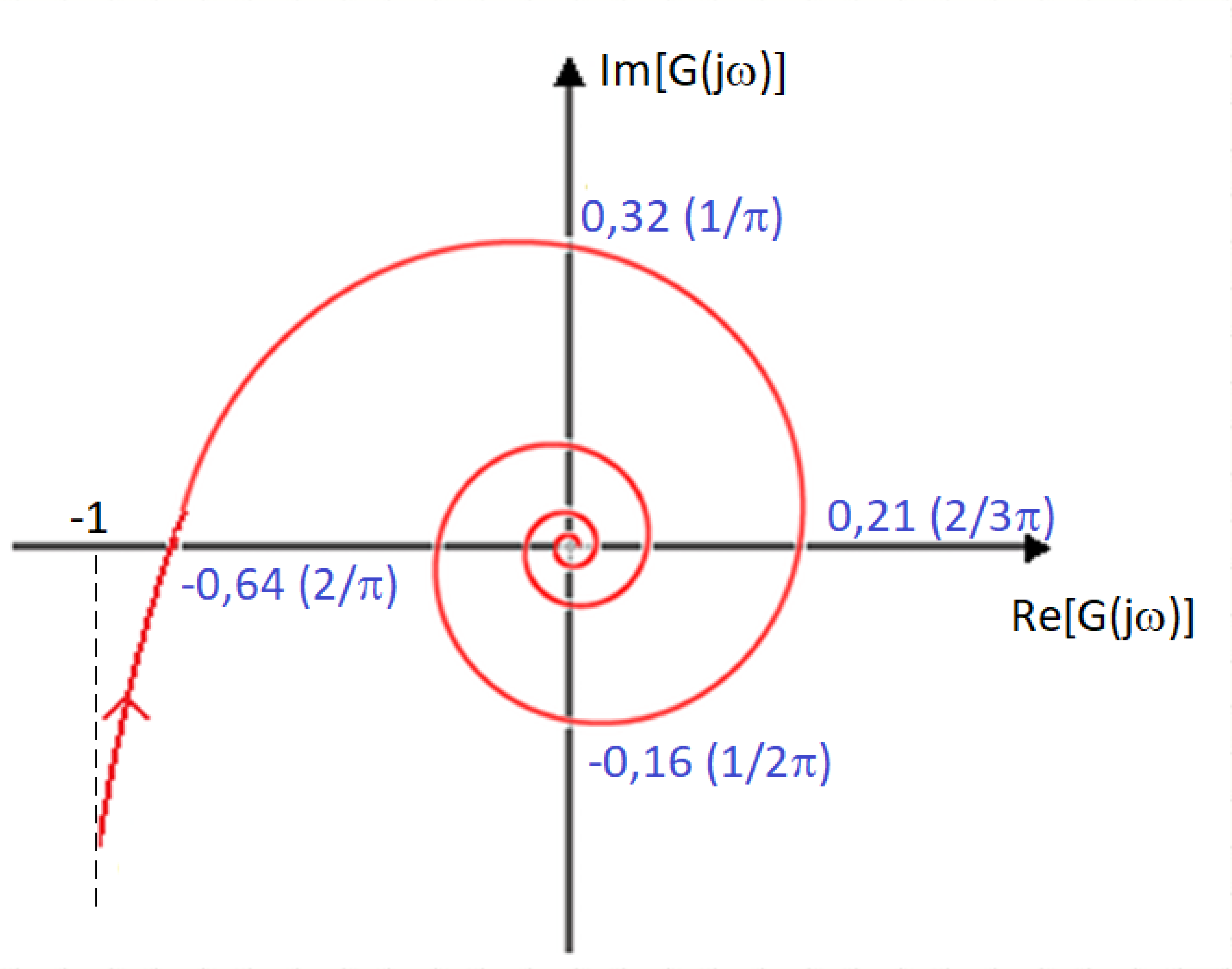
$$\frac{-\text{sen}(\omega)}{\omega} = 0 \quad \rightarrow \quad \omega = \pi, 2\pi, 3\pi, \cdots$$

Exemplo 4 - sistema com atraso (Diagrama Polar)

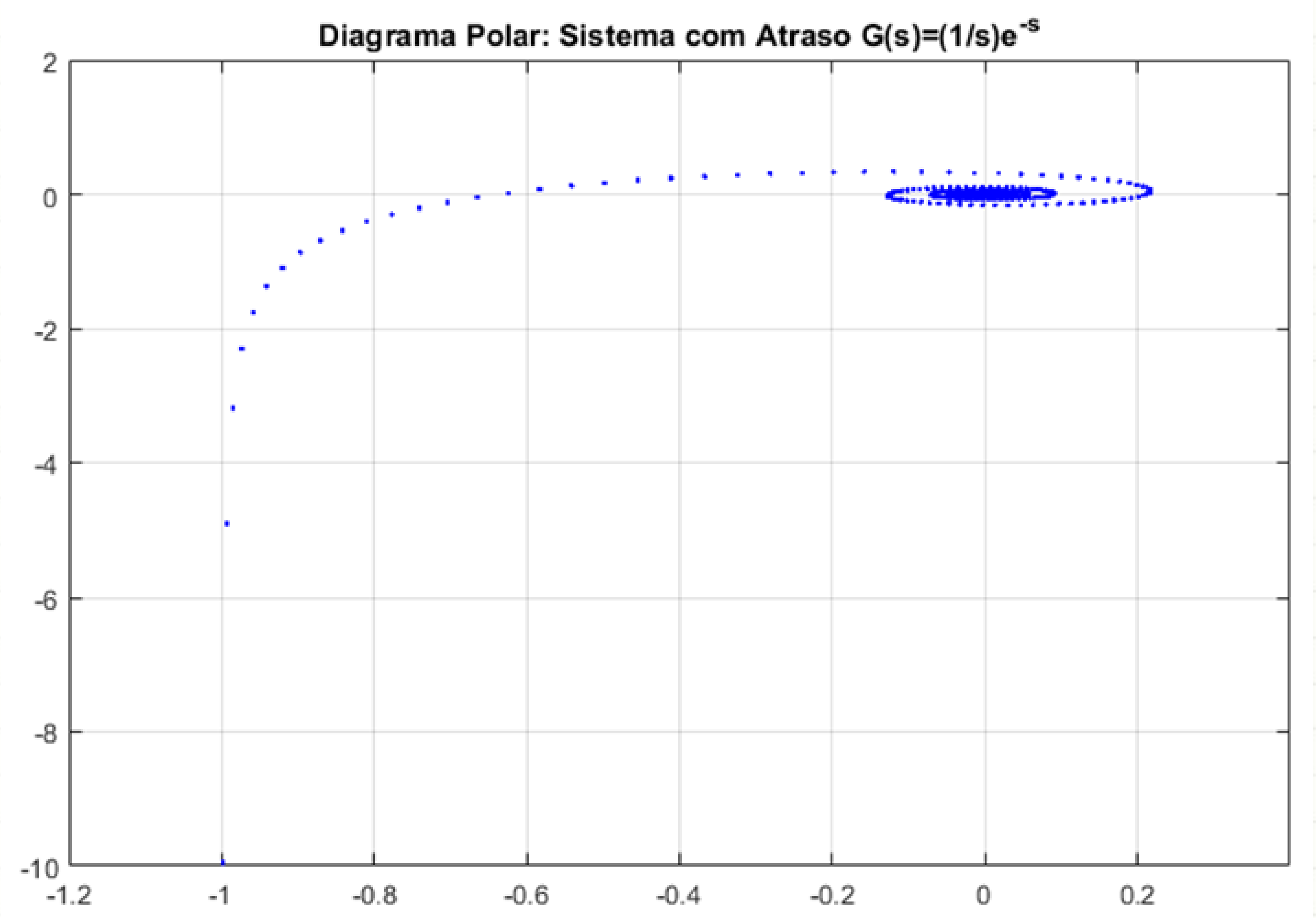
Ou seja, existem múltiplos cruzamentos com os eixos real e imaginário:

Frequência	Real [G(jω)]	Imag [G(jω)]
$\omega = \pi/2$	$-2/\pi$	0
$\omega = \pi$	0	$1/\pi$
$\omega = 3\pi/2$	$2/3\pi$	0
$\omega = 2\pi$	0	$-1/2\pi$
...	...	...

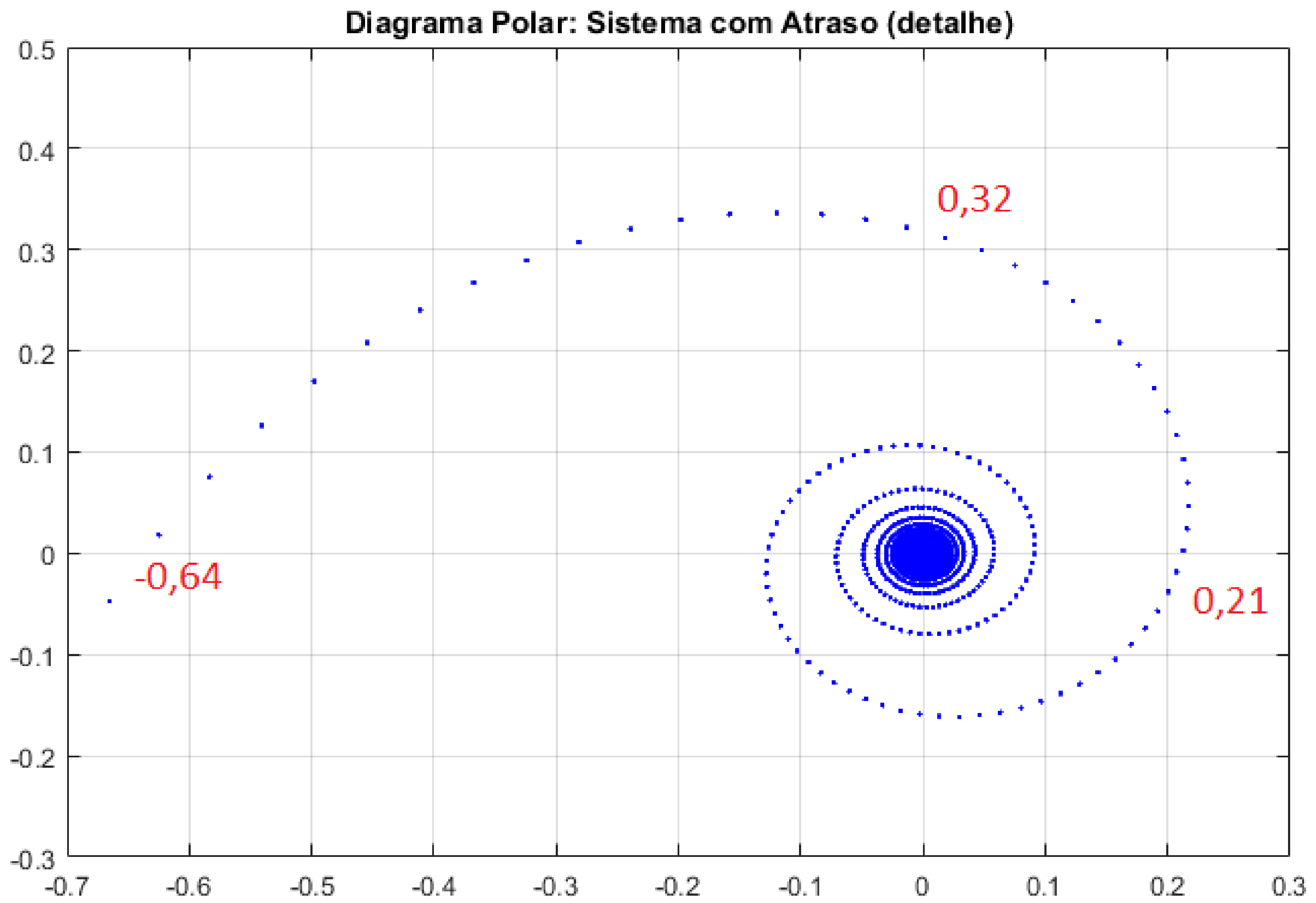
Exemplo 4 - sistema com atraso (Diagrama Polar)



Exemplo 4 - sistema com atraso (Diagrama Polar)



Exemplo 4 - sistema com atraso (Diagrama Polar)

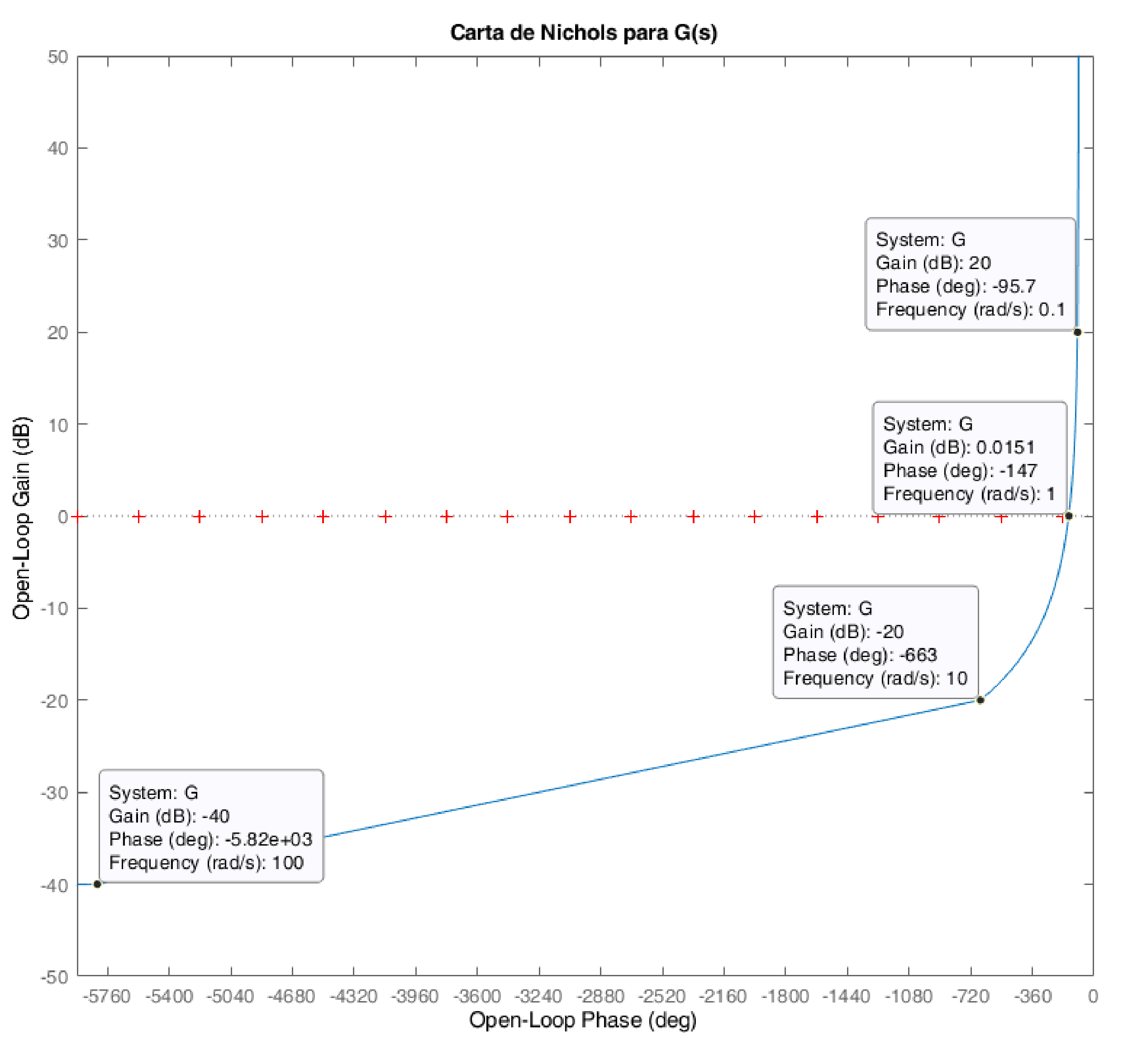


Exemplo 4 - sistema com atraso

Dos valores obtidos para o diagrama de Bode, tem-se:

Frequência	$\|G(j\omega)\|$ dB	$\angle G(j\omega)$
$\omega = 0{,}1$	20 dB	-95,7°
$\omega = 1$	0 dB	-147,30°
$\omega = 10$	-20 dB	-663°
$\omega = 100$	-40 dB	-5820°

Exemplo 4 - sistema com atraso (Carta de Nichols)



Exercícios Sugeridos

Traçar diagramas de Bode, diagrama polar e carta de Nichols para os sistemas:

$$G(s) = \frac{8}{(s+1)(s^2+2s+2)}$$

$$G(s) = \frac{5(s+1)}{(s^2+2s+5)}$$

$$G(s) = \frac{(s-1)}{s(s+1)}$$