Projeto de Controladores Usando Lugar das raízes

Avanço de fase e PD

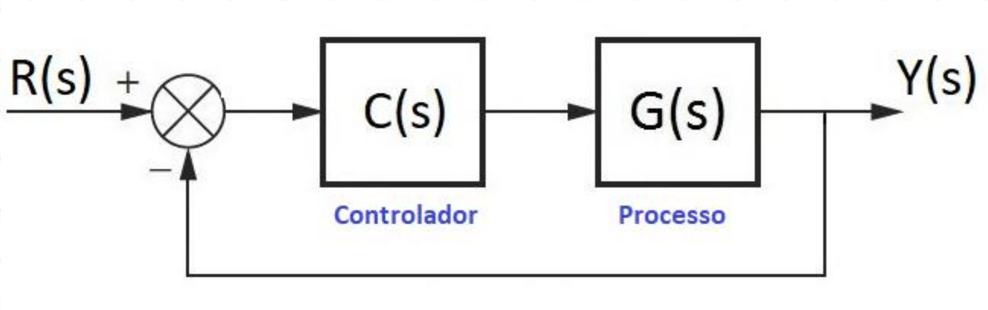
Profa. Cristiane Paim

Tipos de Controladores

- On-Off (liga-desliga)
- Proporcional (P)
- Integral (I)
- Proporcional-Integral (PI)
- Proporcional-Derivativo (PD)
- Proporcional-Integral-Derivativo (PID)
- Controlador em Avanço
- Controlador em Atraso
- Controlador em Avanço-Atraso

Problema Proposto

Seja um sistema de controle com realimentação unitária



com

$$G(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+5)}$$

Projetar um controlador de modo a atender as seguintes especificações para a resposta a um degrau unitário:

- Sobressinal menor do que 5%
- Tempo de acomodação menor do que 5 segundos
- Reduzir o erro de regime permanente à entrada rampa

Resposta ao Degrau para C(s)=1

Seja C(s) um controlador proporcional de ganho unitário.
A função de transferência de malha fechada é dada por:

$$T(s)=\frac{2}{s^3+6s^2+5s+2} \Rightarrow \begin{cases} p_{1,2}=-0{,}452\pm j0{,}434 \\ p_3=-5{,}1 \end{cases}$$

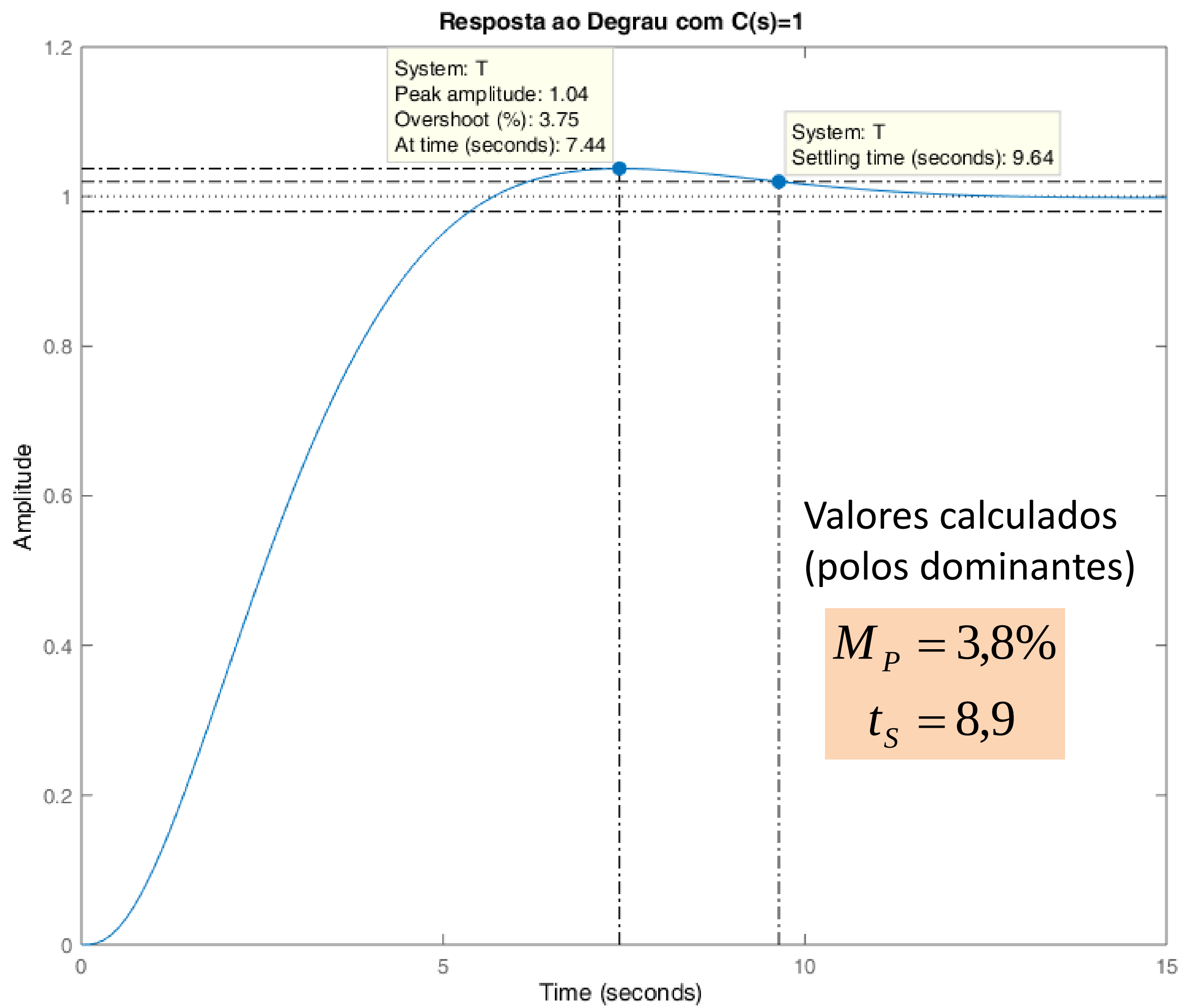
Aproximando pelos polos dominantes (complexos):

$$\begin{matrix} \omega_n=0{,}6265 \\ \xi=0{,}7217 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} M_P=3{,}8\% \\ t_S=8{,}9 \end{matrix}$$

Valores de simulação:
(sistema de 3ª ordem)

$$\begin{matrix} M_P=3{,}75\% \\ t_S=9{,}64 \end{matrix}$$

Resposta ao Degrau para C(s)=1



Resposta ao Degrau para C(s)=1

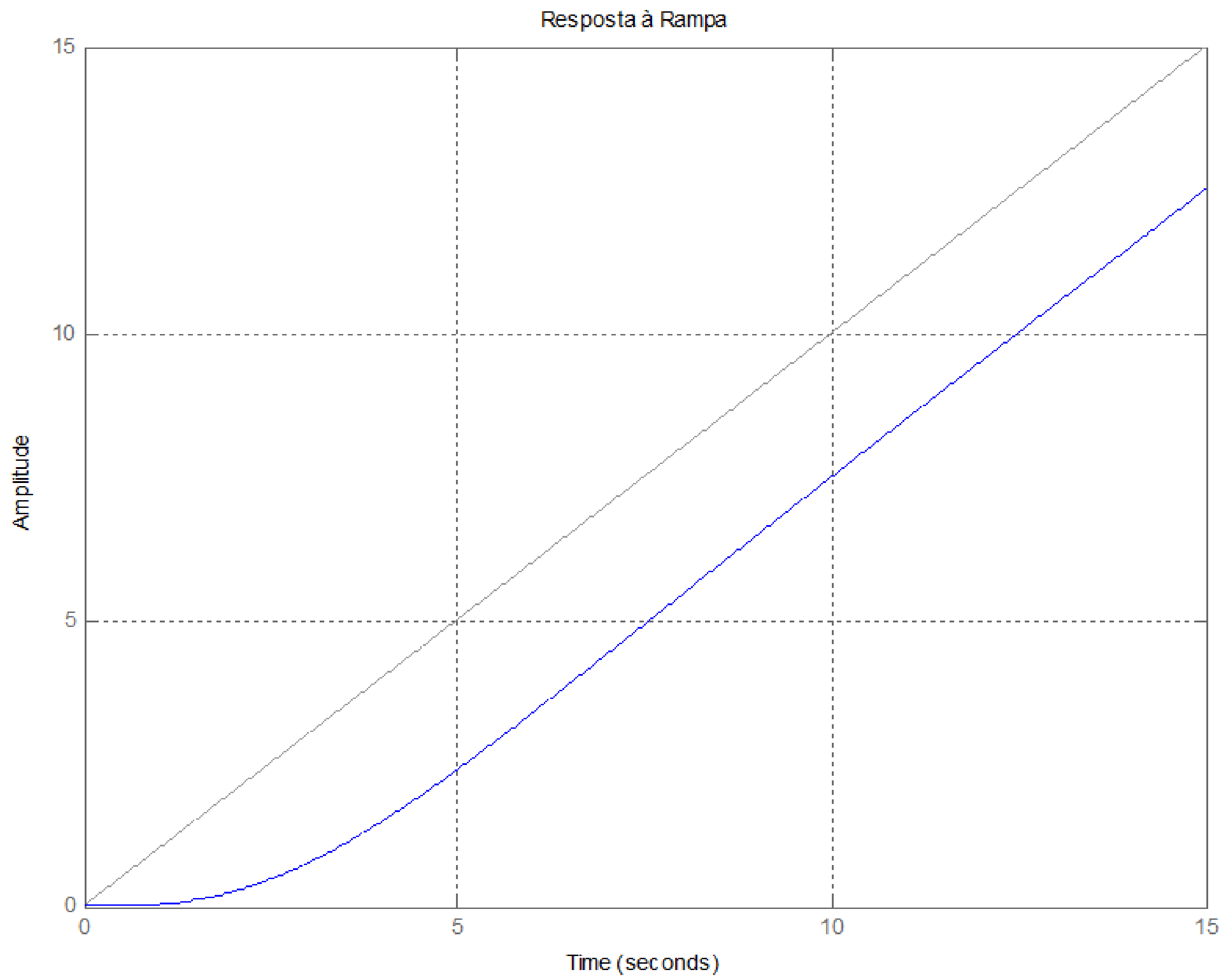
O coeficiente de erro de regime permanente é dado por

$$K_V = \lim_{s\to 0} sG(s) = \frac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad K_V = 0{,}4$$

Portanto,

$$e_\infty = \frac{1}{K_V} = 2{,}5$$

Resposta à rampa para C(s)=1



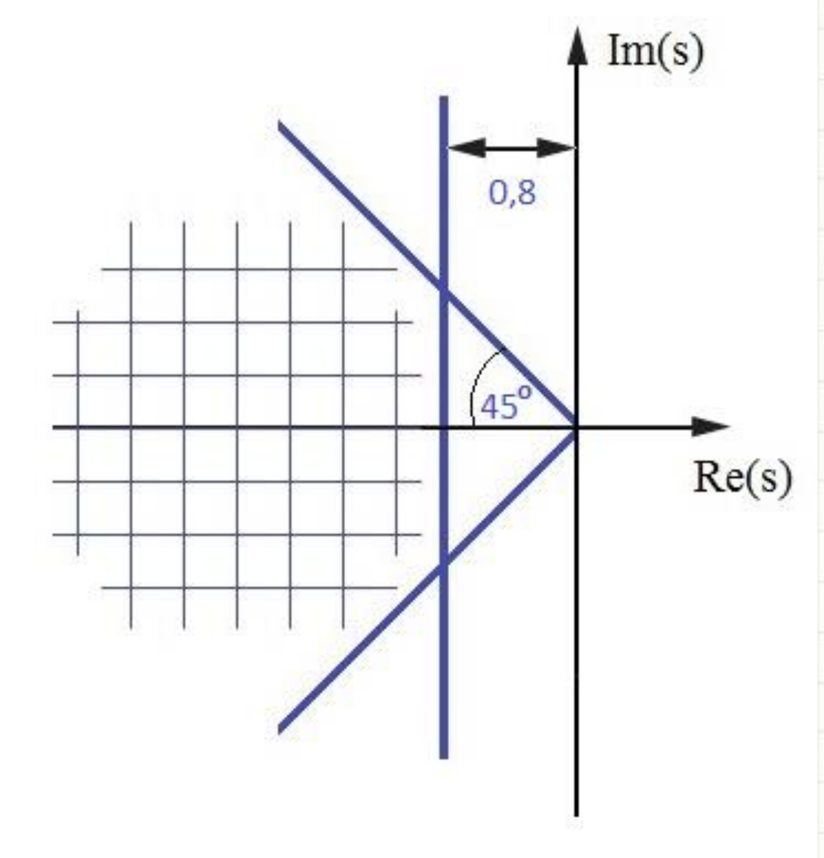
Região desejada para os polos de malha fechada

$$M_P < 5\% \quad \Rightarrow \quad \xi > 0{,}69\left(\theta < 46^\circ\right)$$

$$t_s < 5seg \quad \Rightarrow \quad \sigma > 0{,}8$$

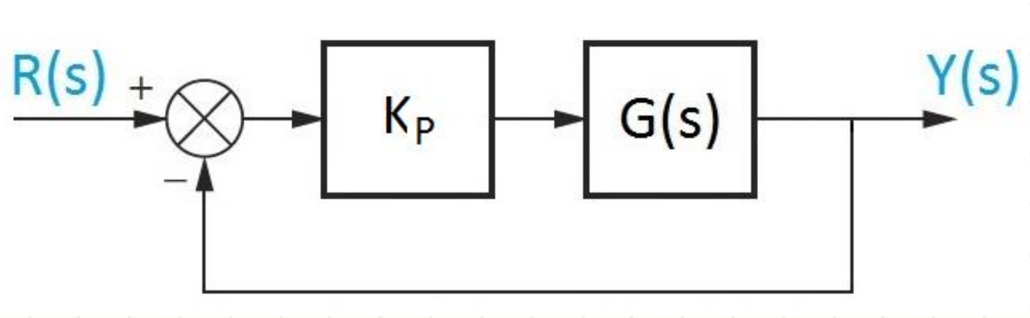
Possíveis Soluções:

- Controlador Proporcional
- Controlador PD
- Controlador em Avanço



Controlador Proporcional

Seja C(s) um controlador proporcional.



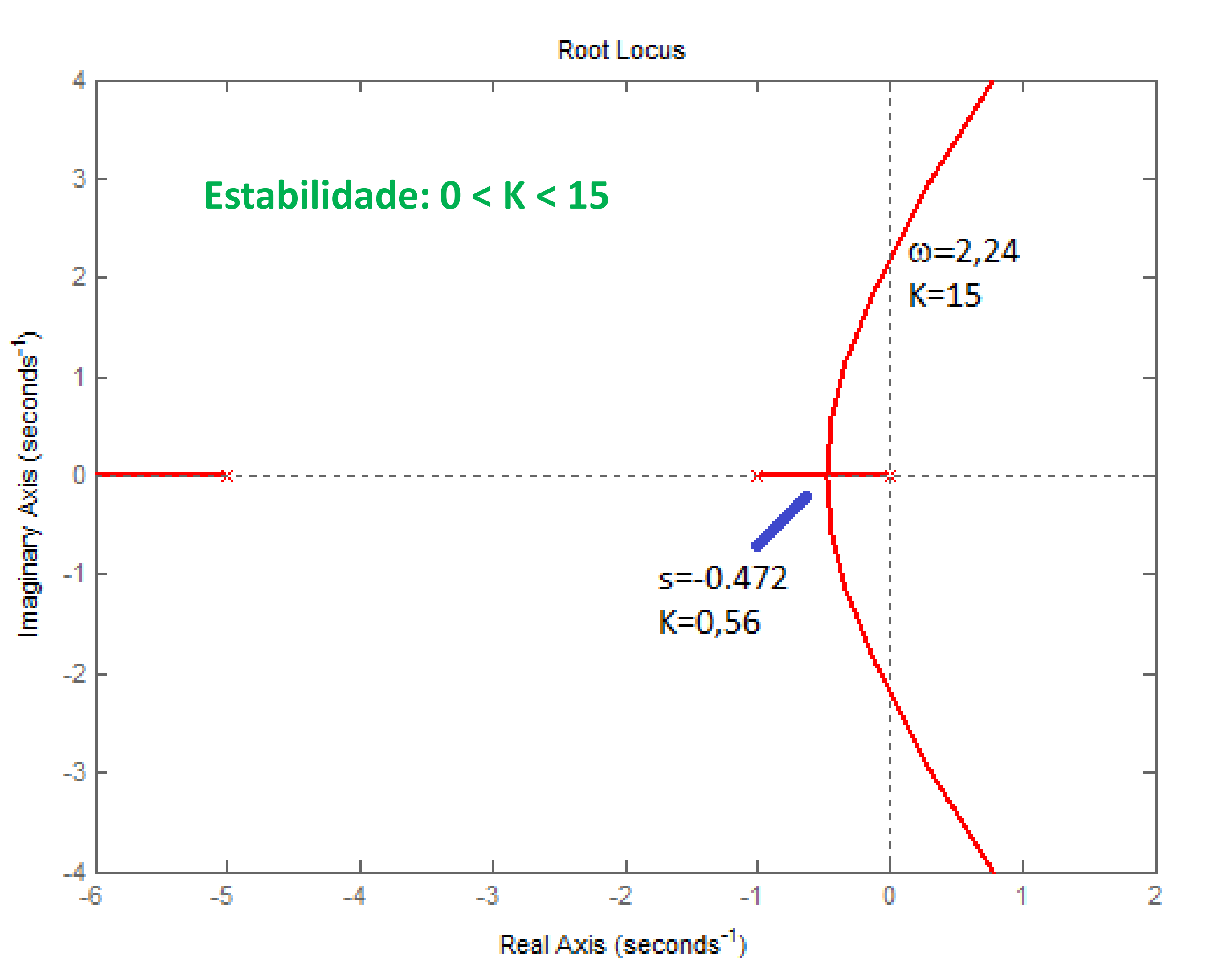
Em malha fechada

$$T(s) = \frac{2K_P}{s(s^2 + 6s + 5) + 2K_P}$$

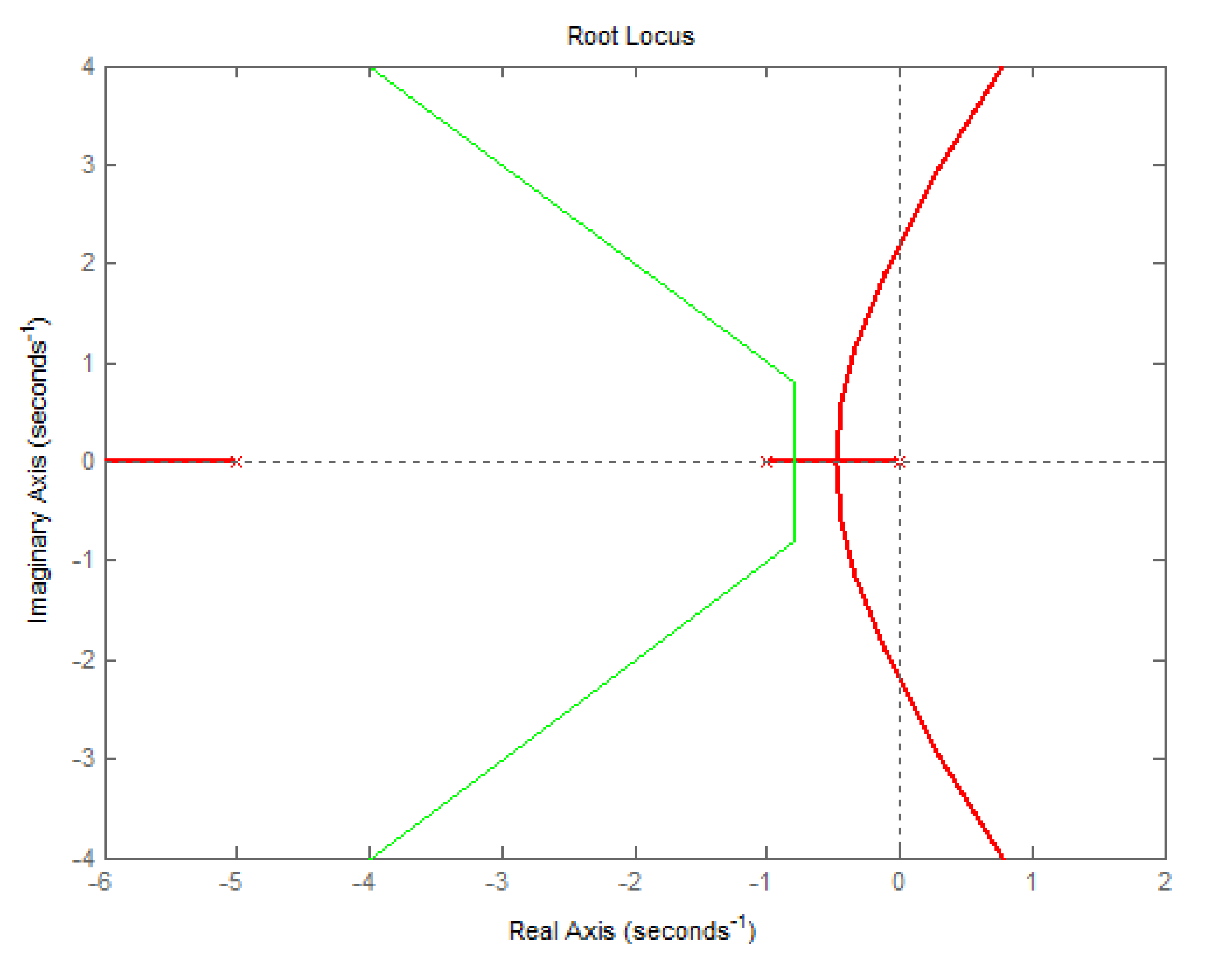
O polinômio característico pode ser escrito como:

$$1 + K_P \frac{2}{s(s^2 + 6s + 5)} = 0$$

Controlador Proporcional



Controlador Proporcional



Como pode ser observado no gráfico é **impossível atender às especificações** com um controlador proporcional.

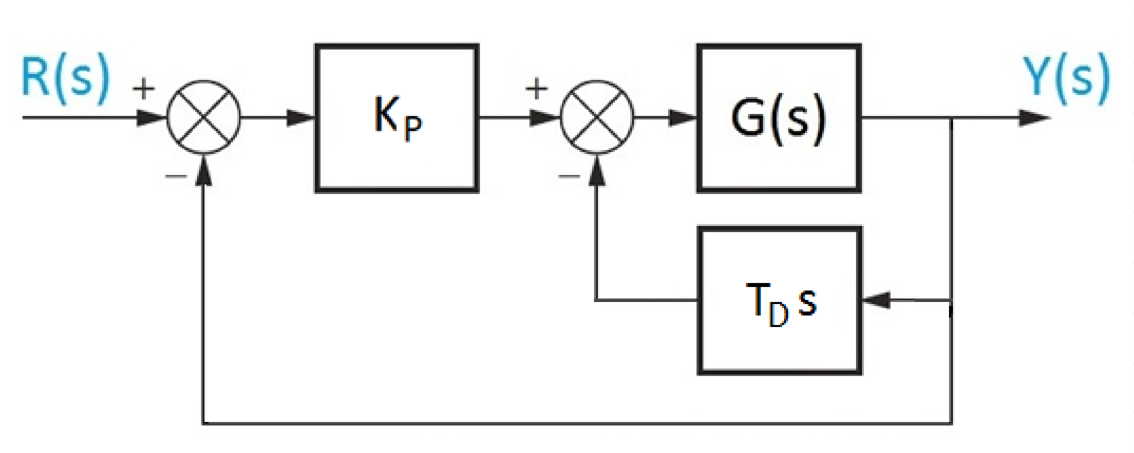
Projetos de Controladores

Serão apresentados diversos projetos que atendem as especificações, considerando diferentes controladores e abordagens:

- PD Misto Ideal
  - Projeto 1: fixando Kp e variando Td
  - Projeto 10: usando o contorno da raízes
- PD Série Ideal
  - Projeto 2: fixando Kp e variando Td
- Controlador em Avanço
  - Projeto 3: fixando K e variando α (usando cancelamento polo/zero)
  - Projeto 4: fixando α e variando K (usando cancelamento polo/zero)
  - Projeto 5: definindo os polos desejados (usando cancelamento polo/zero)
  - Projeto 6: definindo os polos desejados (sem cancelamento polo/zero)
- Alocação Direta de Polos (definindo polos desejados)
  - Projeto 7: PD Série Ideal
  - Projeto 8: PD Misto Ideal
  - Projeto 9: Controlador em Avanço (usando cancelamento polo/zero)

Controlador PD Misto (ideal)

Seja a estrutura de controle:



Em malha fechada:

$$T(s) = \frac{2K_P}{s(s+1)(s+5) + 2T_D s + 2K_P}$$

O erro de regime permanente será dado por:

$$K_V = \frac{2K_P}{5+2T_D} \quad \Rightarrow \quad e_\infty = \frac{5+2T_D}{2K_P}$$

Projeto 1 - PD Misto Ideal (Varia T_D)

Metodologia: Fixar Kp e variar T_D

Em malha fechada

$$T(s) = \frac{2K_P}{s(s+1)(s+5) + 2T_D s + 2K_P}$$

O polinômio característico pode ser escrito como:

$$1 + T_D \frac{2s}{s^3 + 6s^2 + 5s + 2K_P} = 0$$

Pergunta:

Como escolher o valor de Kp?

Projeto 1 - PD Misto Ideal (Varia T_D)

Dependendo da escolha de K_P os polos de <u>malha aberta</u> podem ser reais ou complexos:

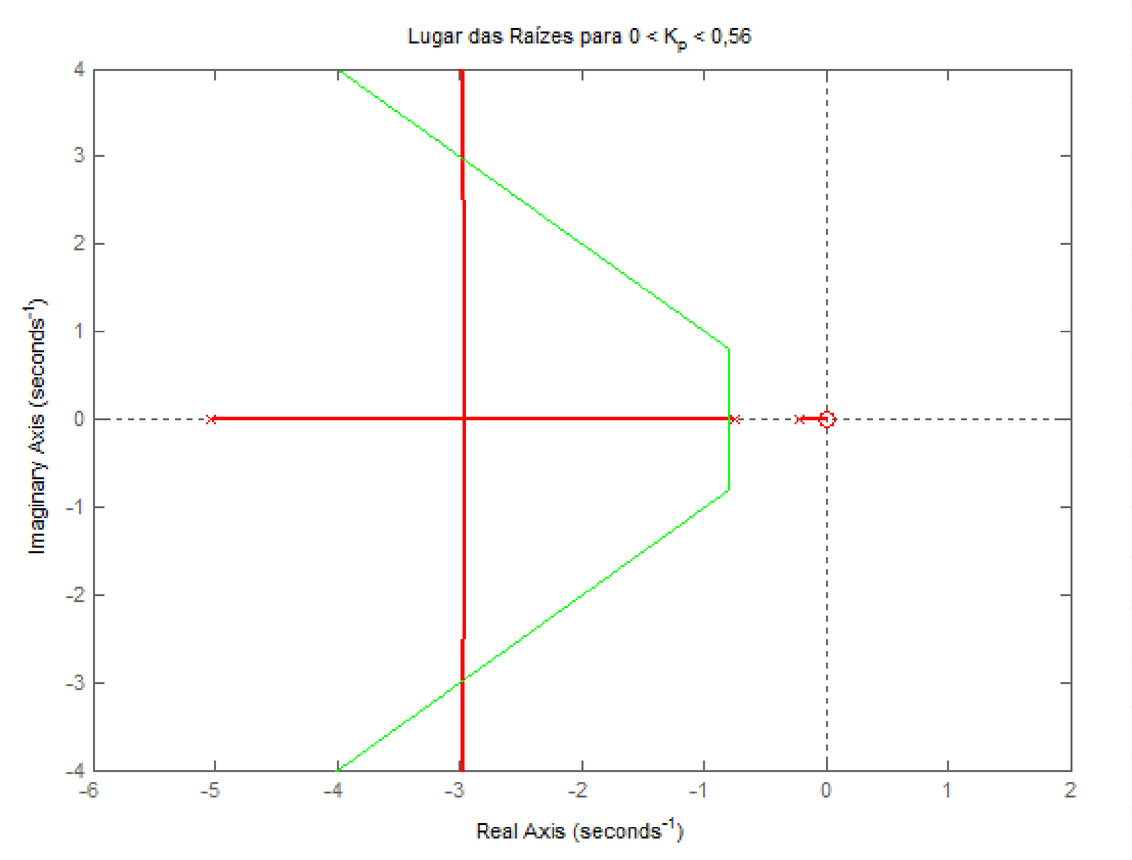
$$\begin{array}{lll} 0 < K_P \leq 0{,}56 & : & \text{polos reais} \\ 0{,}56 < K_P < 15 & : & \text{polos complexos no SPE} \\ K_P \geq 15 & : & \text{polos complexos no SPD} \end{array}$$

(K_P=15 polos sobre o eixo jω)

Através da análise do Lugar das Raízes (fazendo diversas simulações usando MATLAB) é possível avaliar e definir uma faixa de valores de K_P de modo que seja viável atender ambas as especificações de desempenho (Mp<5% e ts<5seg).

Projeto 1 - PD Misto Ideal (Varia T_D)

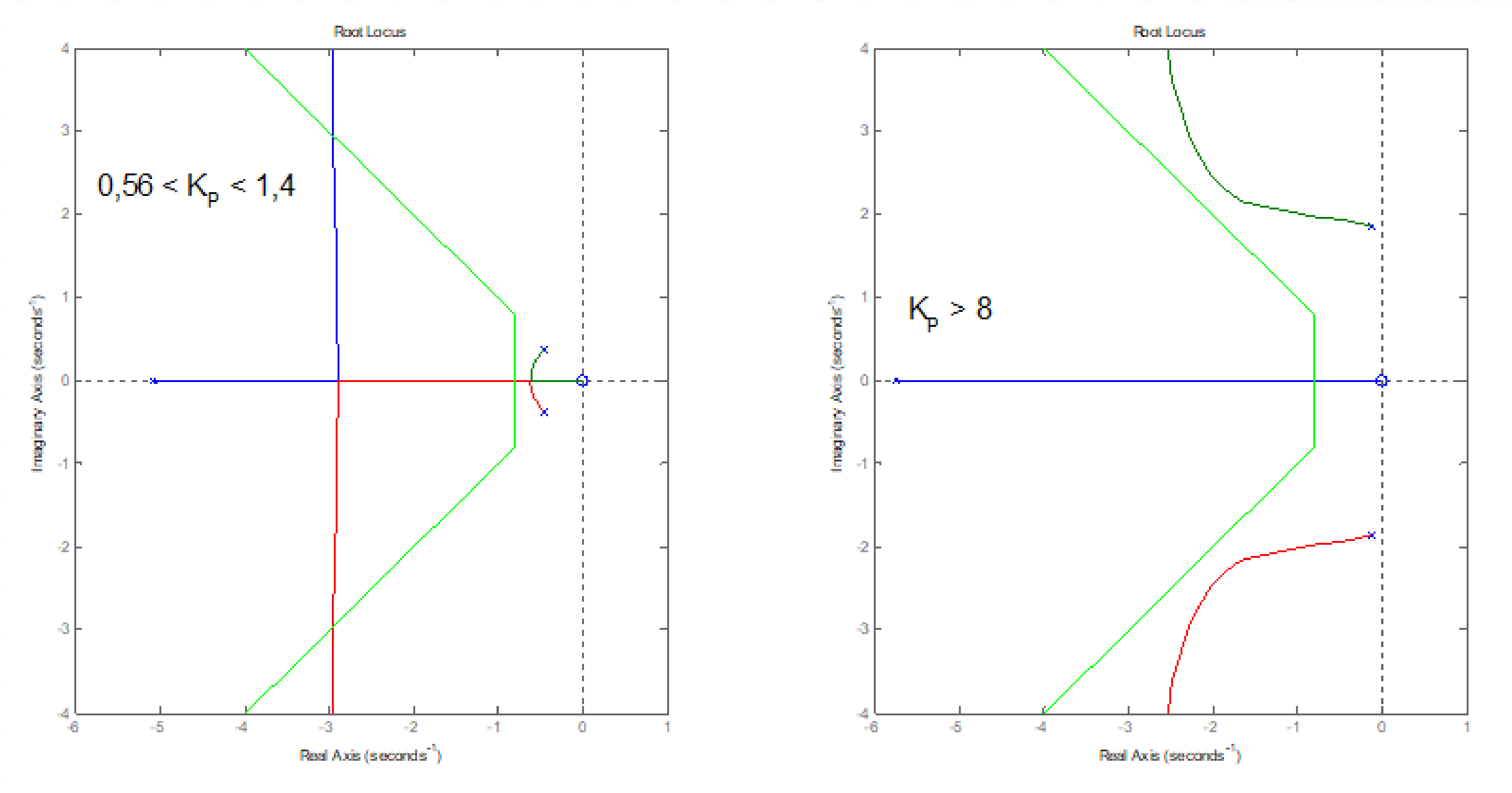
Para $0 < K_P \leq 0{,}56$ (polos reais) tem-se a seguinte configuração para o Lugar das Raízes.



Neste caso, sempre existirá um ramo fora da região desejada e as especificações nunca serão atendidas.

Projeto 1 - PD Misto Ideal (Varia T_D)

Analisando a variação de K_P, é possível determinar outras duas situações onde sempre existirá um ramo do LR fora da região desejada.



Em ambos os casos, as especificações nunca serão atendidas.

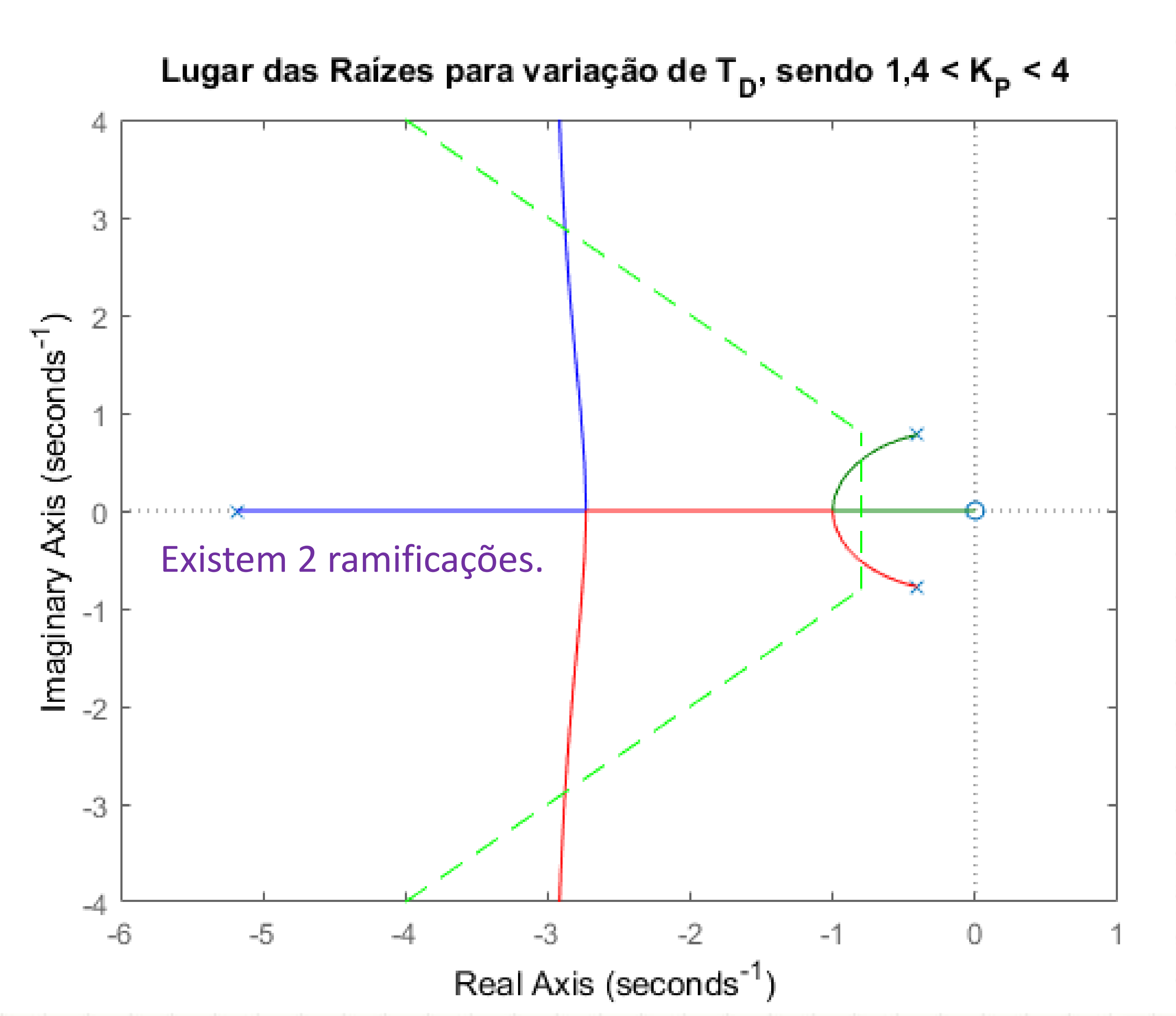
Projeto 1 - PD Misto Ideal (Varia T_D)

Portanto, para atender ambas as especificações o valor de K_P deve ser escolhido entre $1{,}4 < K_P < 8$.

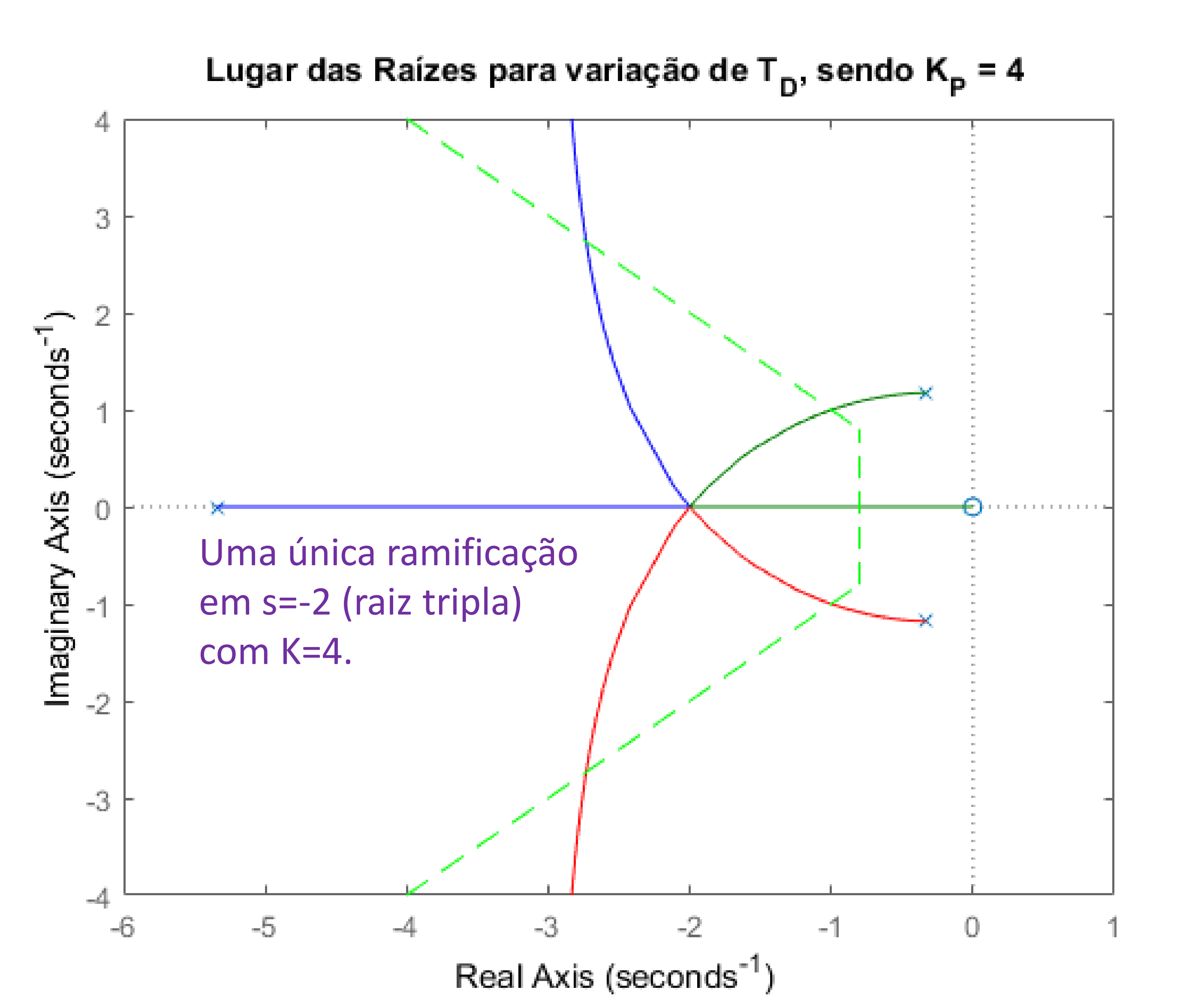
Dentro desta faixa existem três configurações possíveis de Lugar das Raízes:

LR1: $1{,}4 < K_P < 4$ $\rightarrow$ duas ramificações
LR2: $K_P = 4$ $\rightarrow$ uma ramificação (raiz tripla)
LR3: $4 < K_P < 8$ $\rightarrow$ nenhuma ramificação

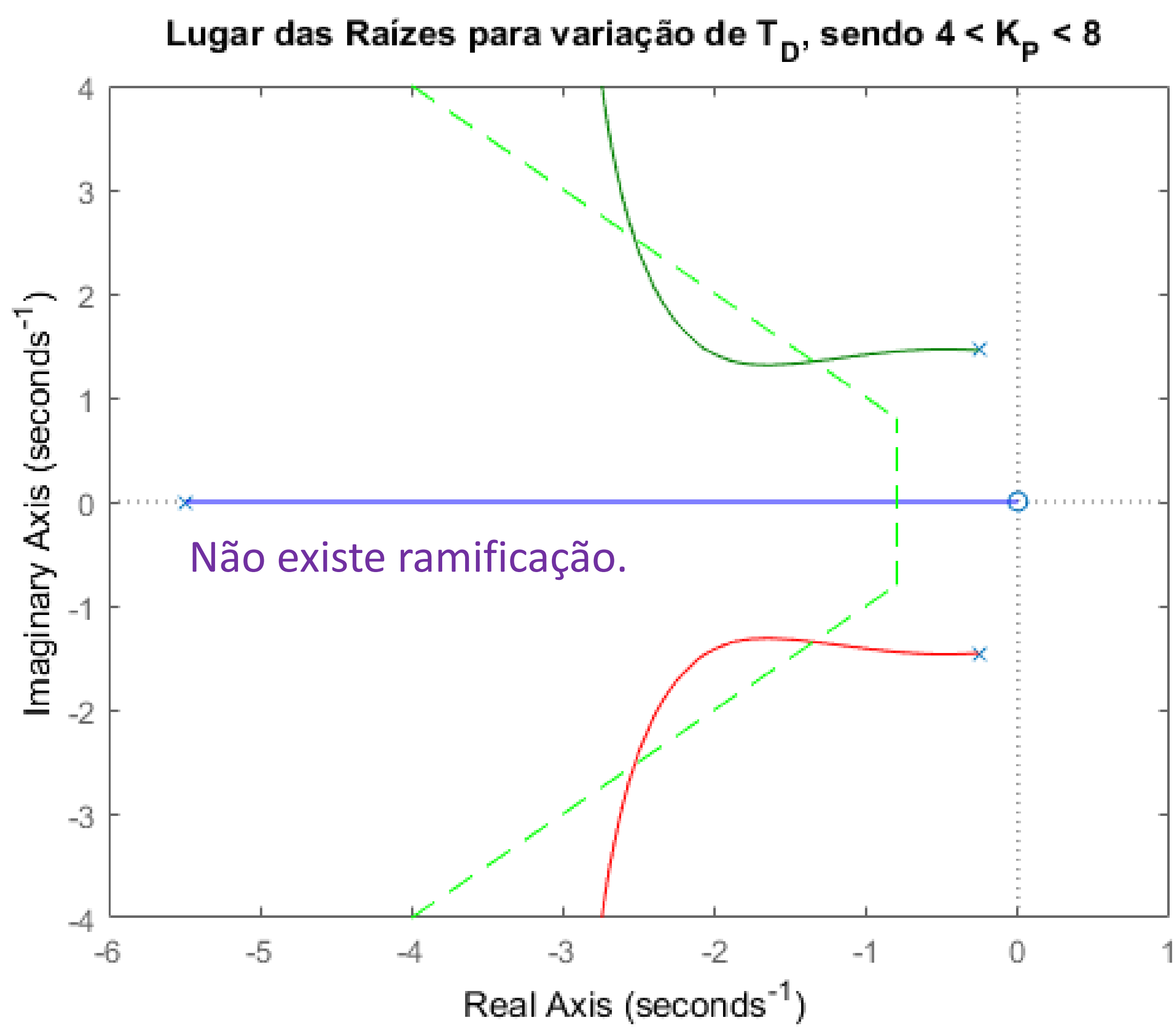
Projeto 1 - PD Misto Ideal (Varia T_D)



Projeto 1 - PD Misto Ideal (Varia T_D)



Projeto 1 - PD Misto Ideal (Varia T_D)



Projeto 1 - PD Misto Ideal (Varia T_D)

Escolhido **K_P=5**, os valores limite de T_D serão determinados pela interseção do Lugar das Raízes com a região desejada.

Projeto 1 - PD Misto Ideal (Varia T_D)

Como determinado anteriormente:

$$M_P < 5\% \quad \Rightarrow \quad \xi > 0{,}69 \left(\theta < 46^\circ\right)$$
$$t_s < 5seg \quad \Rightarrow \quad \sigma > 0{,}8$$

Para M_P < 5%, considera-se $s_0=-\sigma+j\sigma$ ($\theta<45^\circ$, por simplicidade) e determina-se a variação de T_D resolvendo $\Delta(s_0)=0$.

Para ts < 5 seg, considera-se $s_0 = -0{,}8+j\omega$ e determina-se a variação de T_D resolvendo $\Delta(s_0)=0$.

Projeto 1 - PD Misto Ideal (Varia T_D)

Considerando separadamente cada especificação, os valores de T_D que levam os polos de malha fechada para dentro da região desejada são:

$$Mp < 5\% \quad \rightarrow \quad 3{,}14 < T_D < 6{,}37$$
$$t_s < 5 \quad \rightarrow \quad 2{,}16 < T_D < 5{,}83$$

Assim, para atender a ambas as especificações:

$$3{,}14 < T_D < 5{,}83$$

Projeto 1 - PD Misto Ideal (Varia T_D)

O erro de regime permanente é dado por

$$e_\infty = \frac{5 + 2T_D}{10}$$

$$3{,}14 < T_D < 5{,}83$$

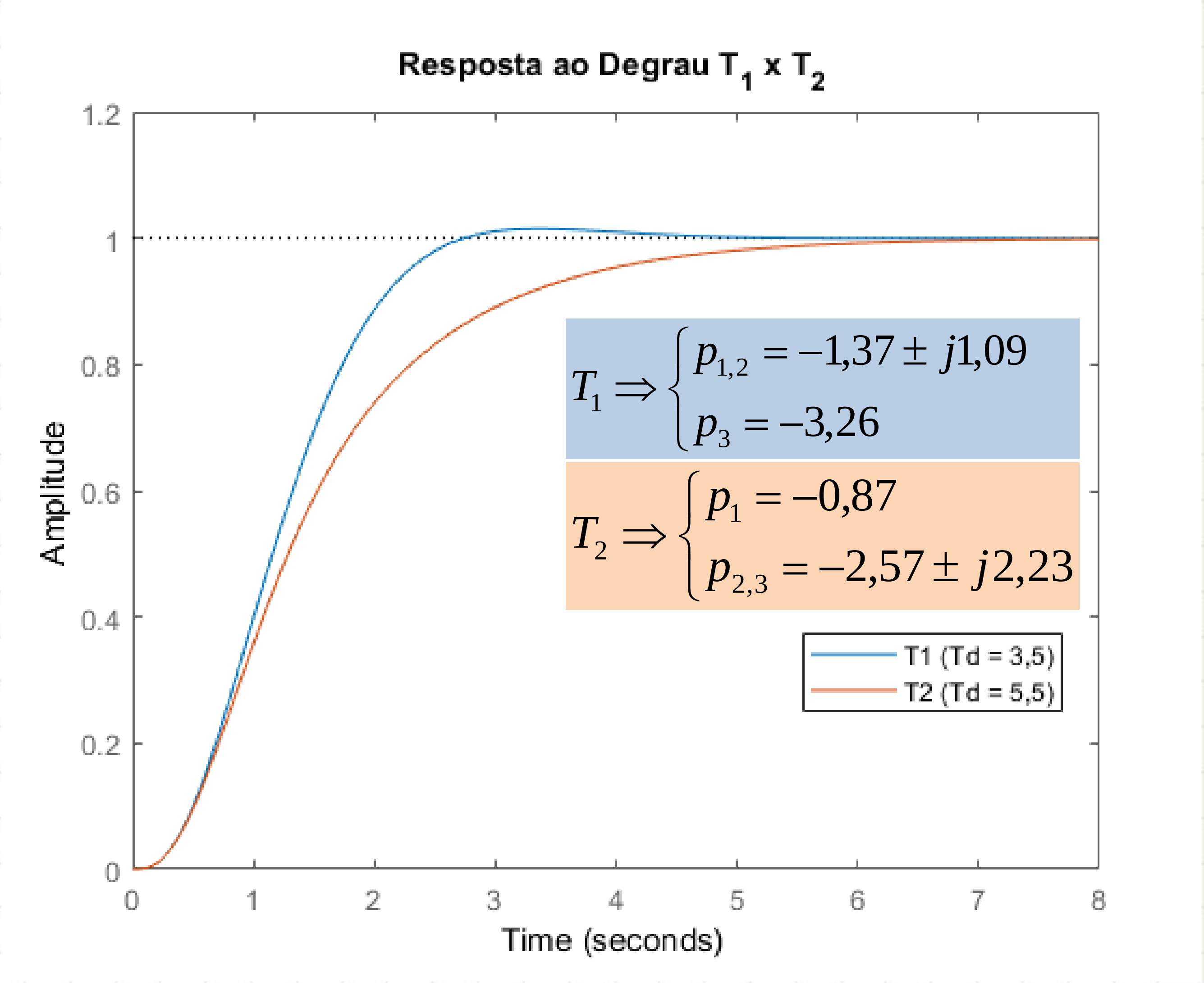
Portanto, quanto menor T_D menor será o erro.

Para exemplificar a resposta forma escolhidos 2 valores de T_D.

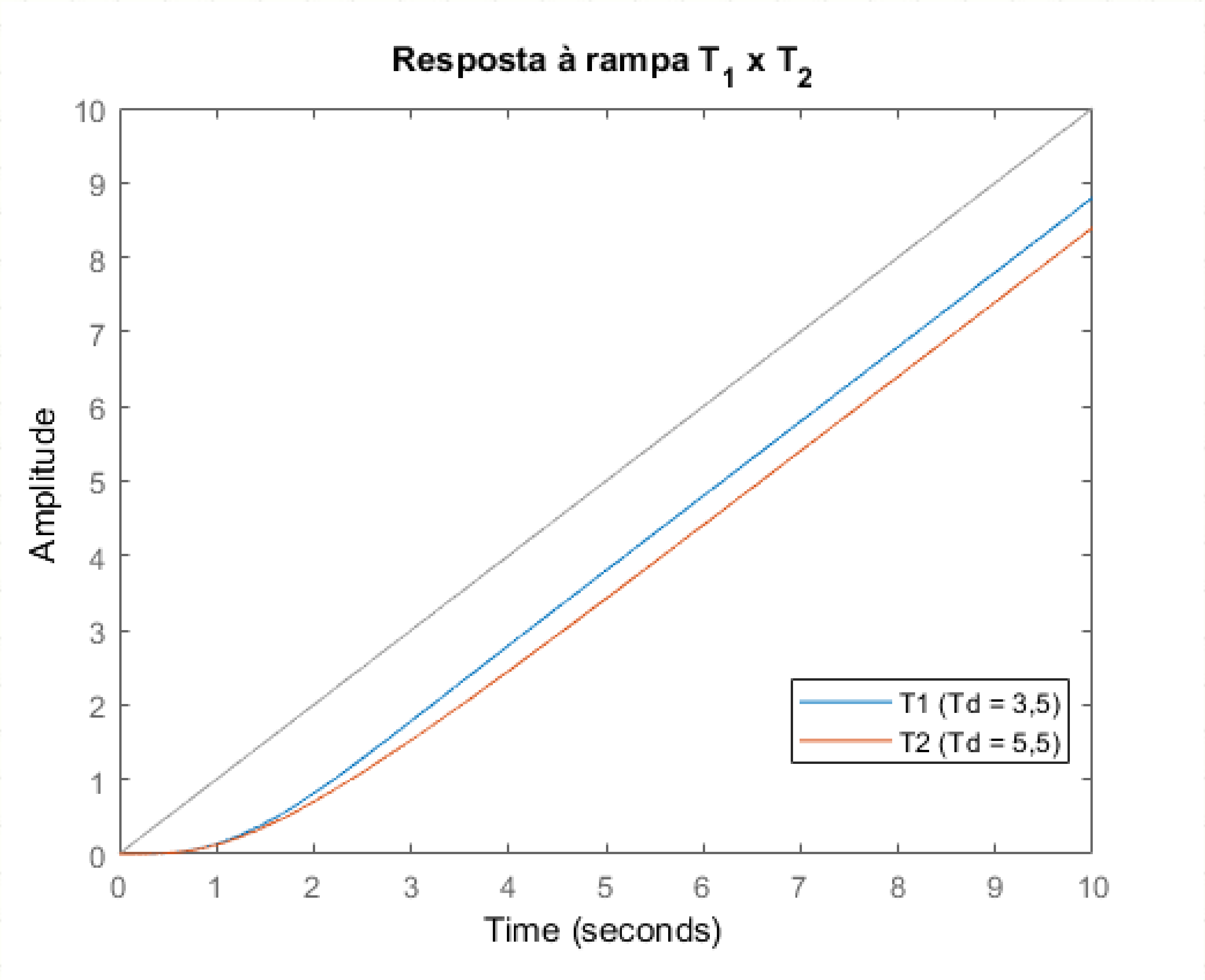
$$\mathrm{T}_1 : \begin{cases} T_D = 3{,}5 \\ K_P = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_P = 1{,}5\% \\ t_S = 2{,}5 \end{cases} \Rightarrow e_\infty = 1{,}20$$

$$\mathrm{T}_2 : \begin{cases} T_D = 5{,}5 \\ K_P = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_P = 0\% \\ t_S = 4{,}97 \end{cases} \Rightarrow e_\infty = 1{,}60$$

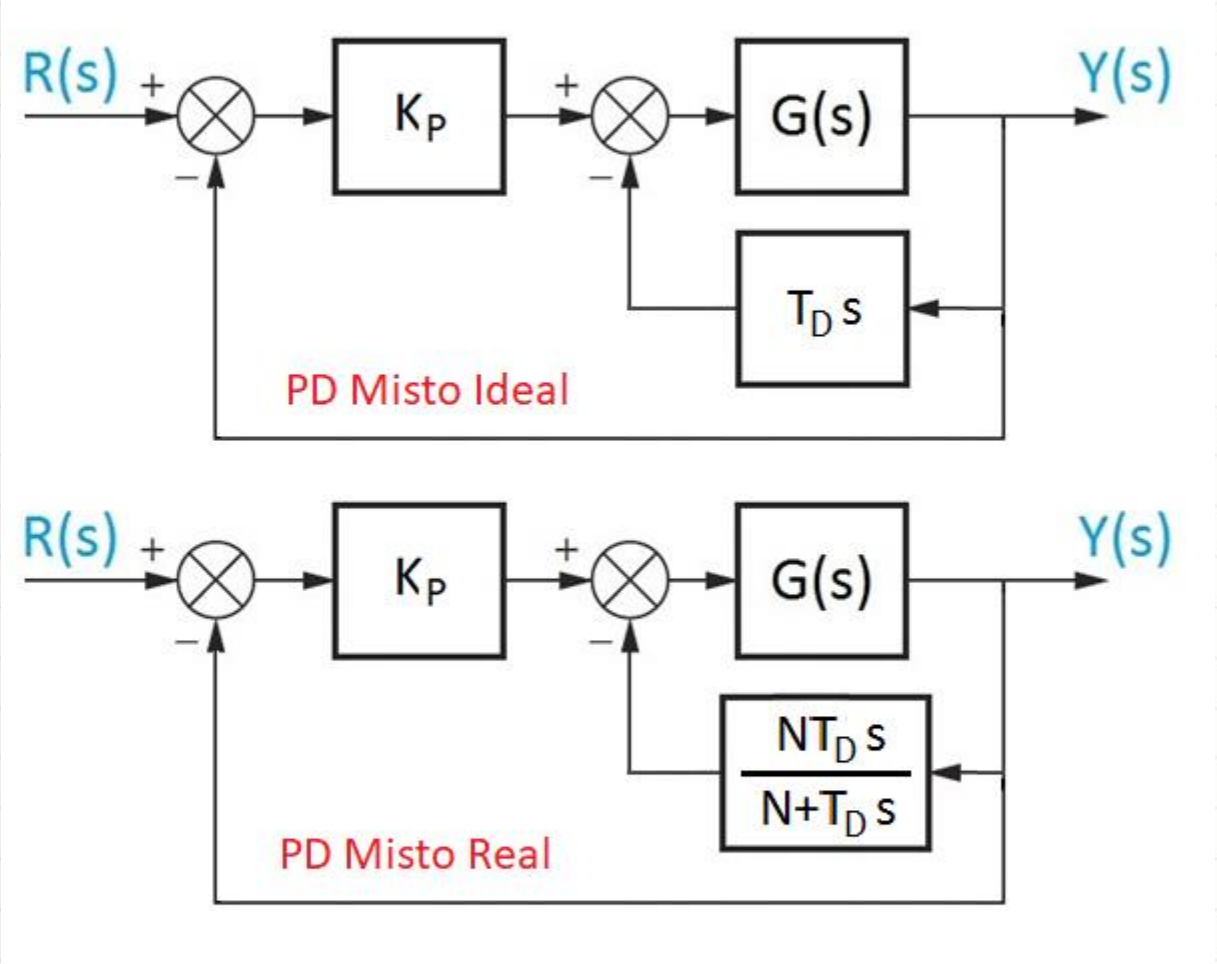
Projeto 1 - PD Misto Ideal (Varia T_D)



Projeto 1 - PD Misto Ideal (Varia T_D)

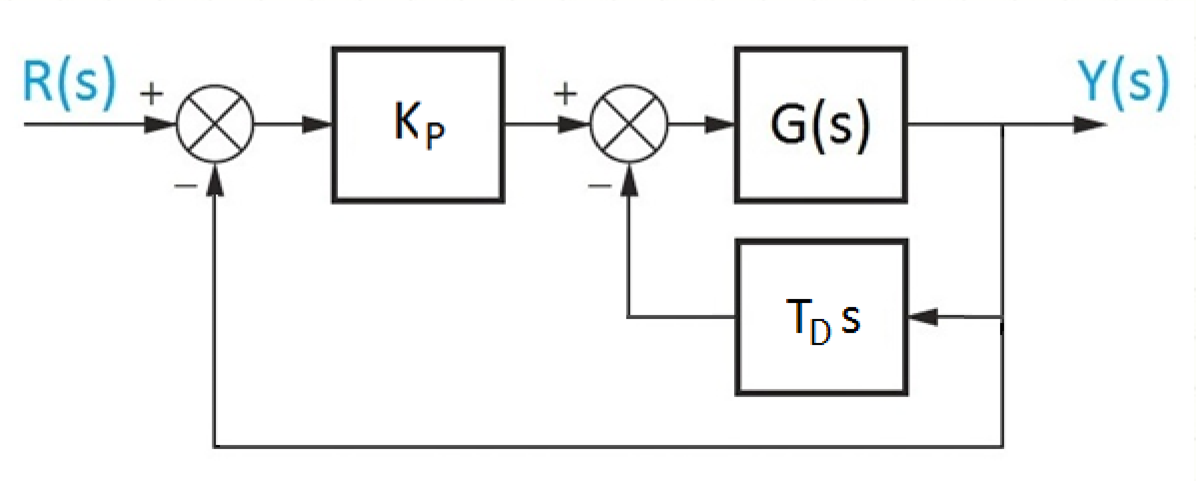


Controlador PD Misto: Ideal x Real



Controlador PD Misto: Ideal x Real

O controlador PD misto ideal que gerou um bom resultado foi aquele obtido com T_D=3,5 e K_P=5:

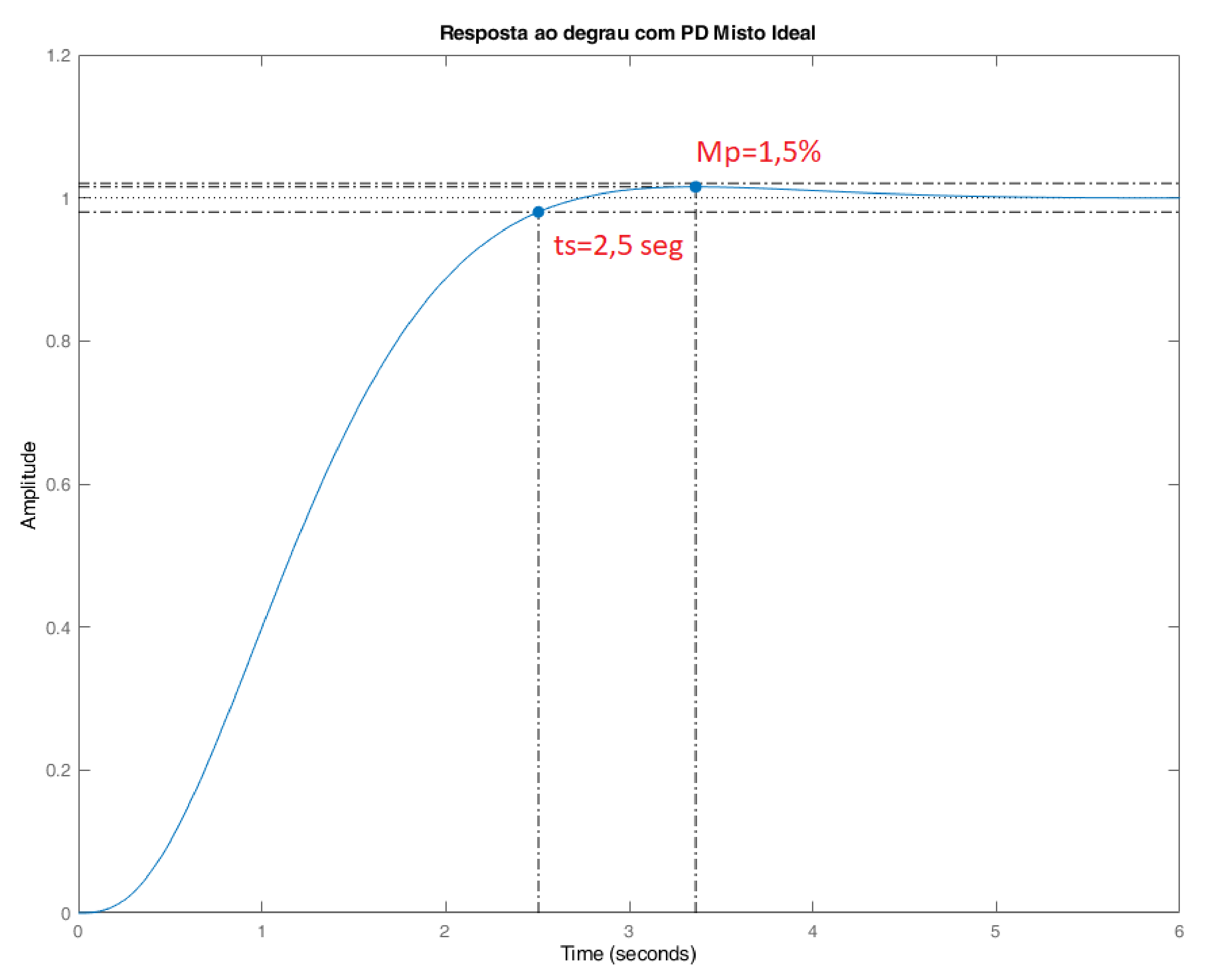


$$T(s) = \frac{2K_P}{s(s+1)(s+5)+2T_D s+2K_P} = \frac{10}{s^3+6s^2+12s+10}$$

$$p_{1,2} = -1{,}37 \pm j1{,}09$$
$$p_3 = -3{,}26$$

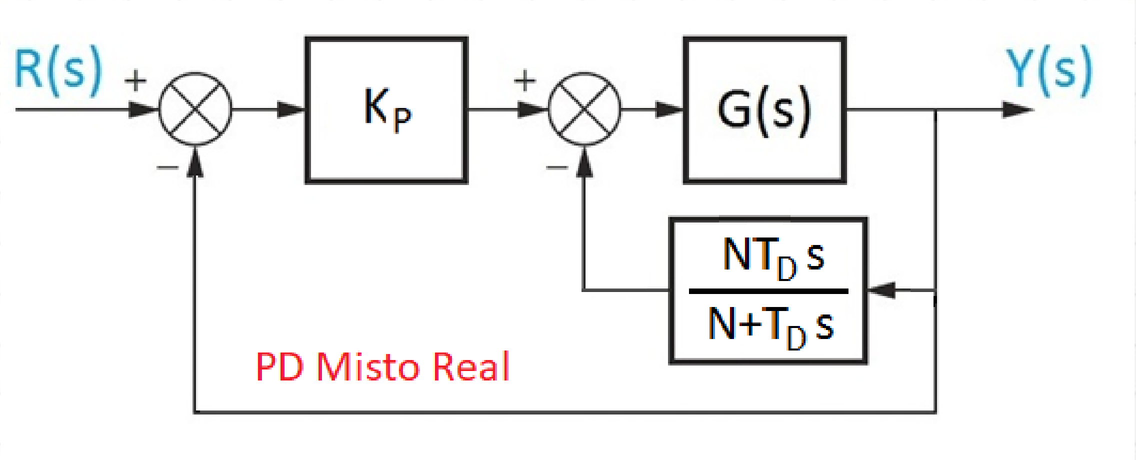
$$\begin{cases} M_P = 1{,}5\% \\ t_S = 2{,}5 \end{cases} \Rightarrow e_\infty = 1{,}20$$

Controlador PD Misto: Ideal x Real



Controlador PD Misto: Ideal x Real

Seja agora o controlador PD Misto Real.



Usando os mesmos valores do controlador ideal (T_D=3,5 e K_P=5) e parte derivativa ajustada por um fator N=100 (valor padrão do MATLAB), obtém-se:

$$T(s) = \frac{10(3{,}5s + 100)}{3{,}5s^4 + 121s^3 + 617{,}5s^2 + 1235s + 1000}$$

Controlador PD Misto: Ideal x Real

Os polos de malha fechada são:

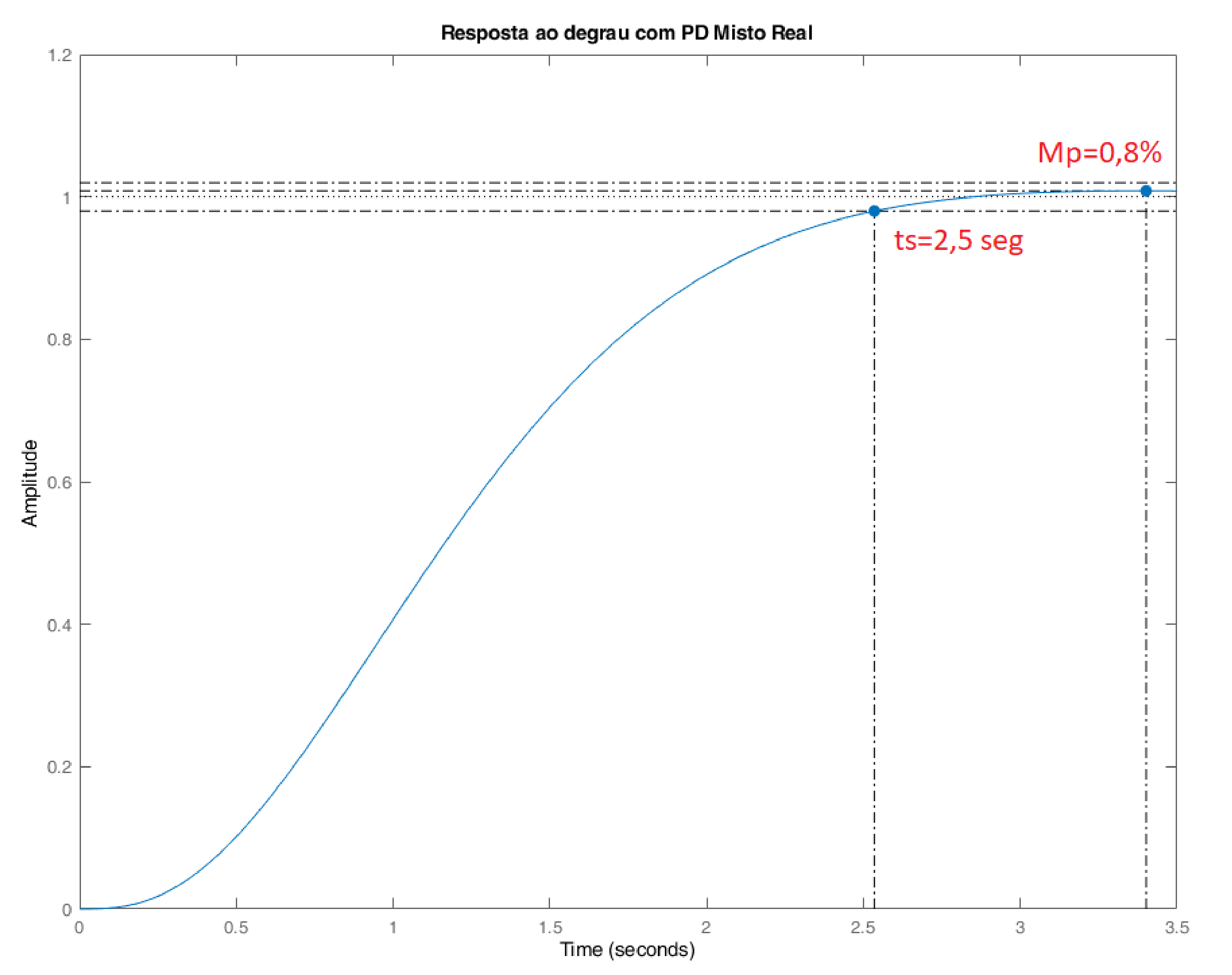
$$p_{1,2} = -1{,}56 \pm j1{,}18$$
$$p_3 = -2{,}59$$
$$p_4 = -28{,}9 \quad \rightarrow \quad z = -28{,}6$$

Observe que os polos dominantes obtidos são muito próximos daqueles encontrados com o PD Misto Ideal

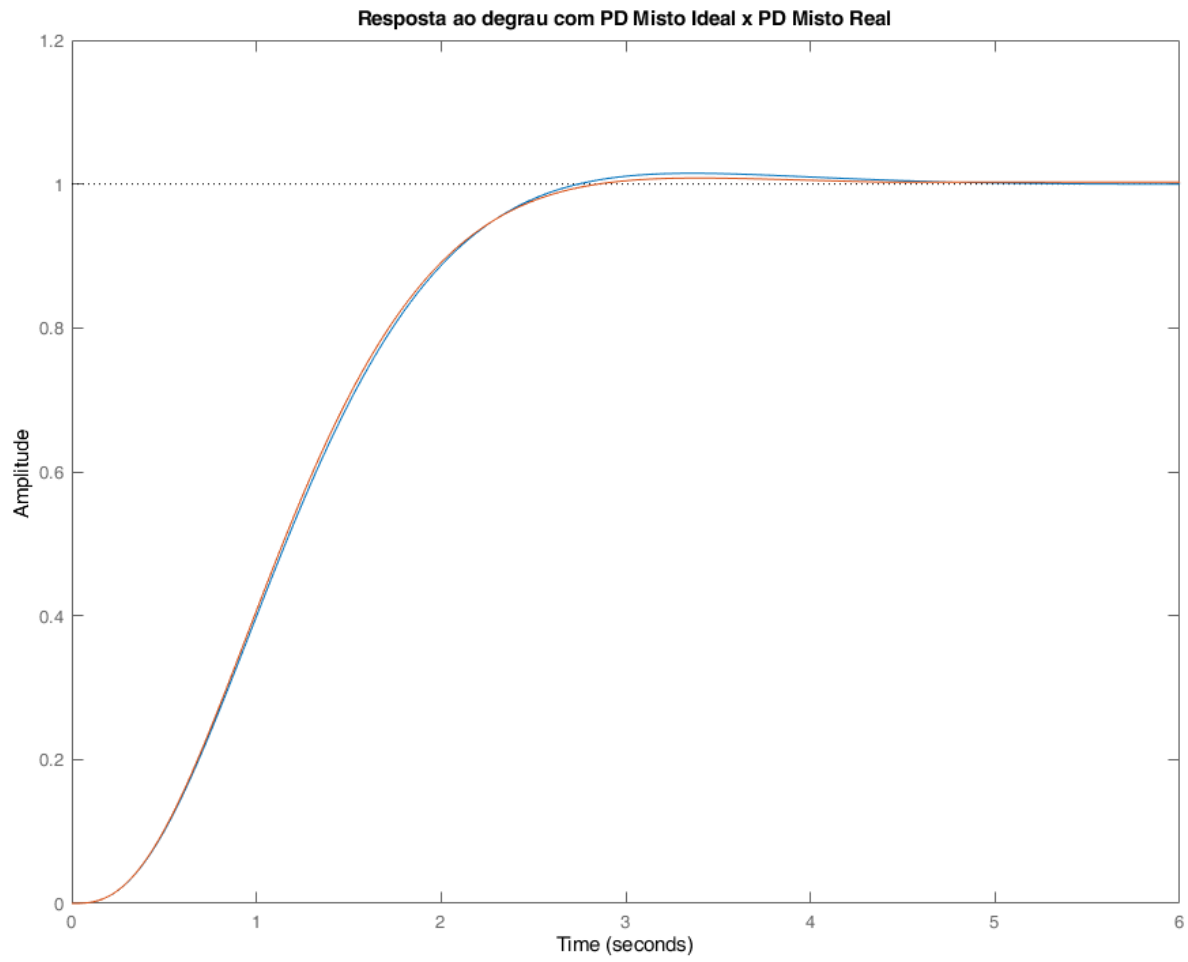
$$p_{1,2} = -1{,}37 \pm j1{,}09$$
$$p_3 = -3{,}26$$

Além disso, zero e polo adicionais estão muito próximos, reduzindo muito (quase anulando) seu efeito na resposta.

Controlador PD Misto: Ideal x Real

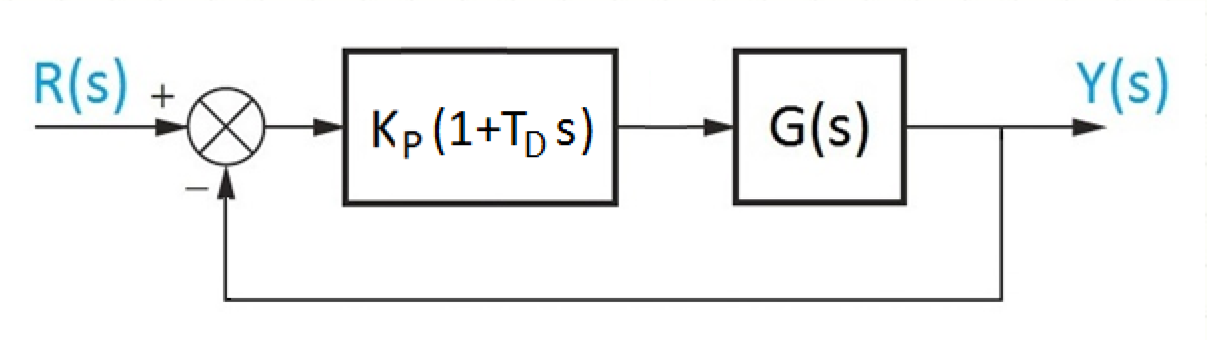


Controlador PD Misto: Ideal x Real



Controlador PD Série Ideal

Seja a estrutura de controle:



Em malha fechada tem-se:

$$T(s) = \frac{2K_P(1+T_D s)}{s(s+1)(s+5)+2K_P(1+T_D s)} = \frac{2K_P(1+T_D s)}{s^3+6s^2+(5+2T_D K_P)s+2K_P}$$

Definindo um valor de K_P o Lugar das Raízes pode ser traçado variando T_D:

$$\Delta(s) = 1 + T_D \frac{2K_P s}{s^3+6s^2+5s+10}$$

Projeto 2 - PD Série Ideal (Varia T_D)

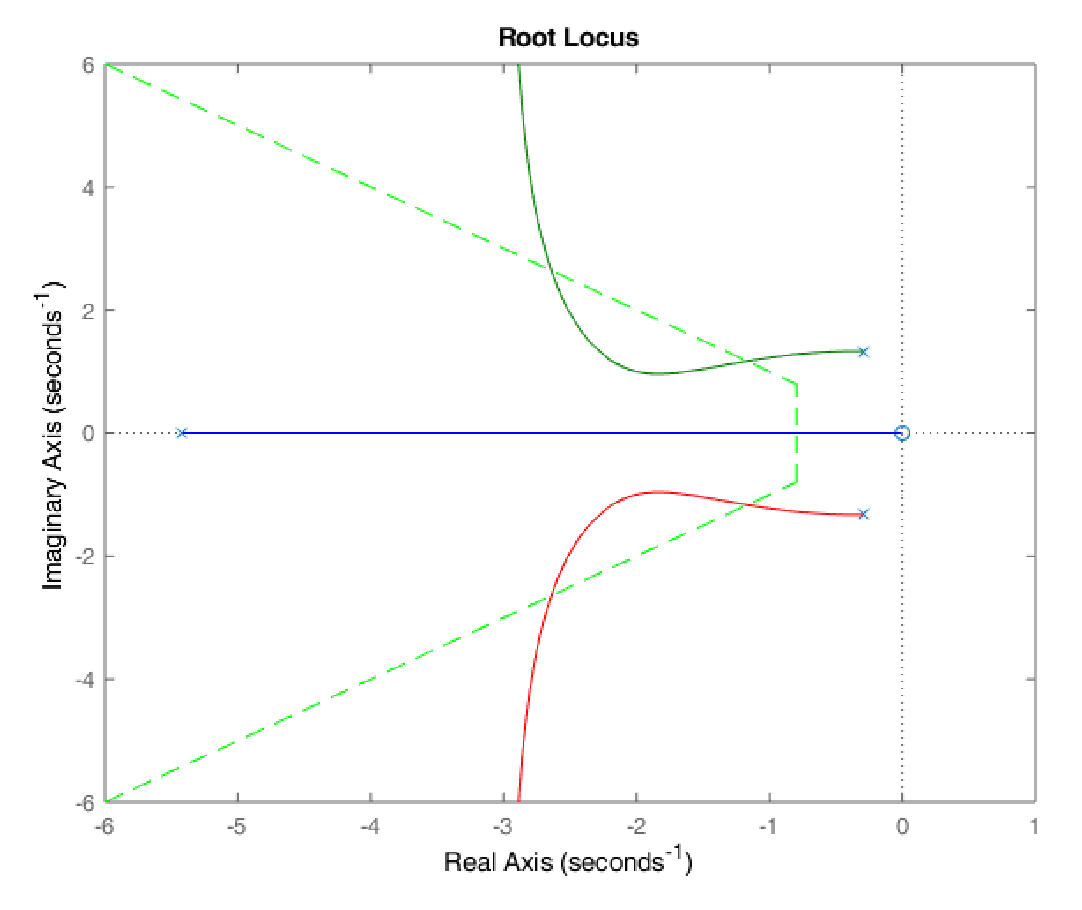
Metodologia: Fixar K_P e variar T_D

Fixando K_P=5 (mesmo do projeto anterior):

$$1 + T_D \frac{10s}{s^3 + 6s^2 + 5s + 10} = 0$$

O Lugar das Raízes terá forma similar ao anterior e a variação de T_D será obtida da intersecção deste com a região desejada.

Projeto 2 - PD Série Ideal (Varia T_D)



Da intersecção do LR com a região desejada obtém-se:

$$0,628 < T_D < 1,16$$

Projeto 2 - PD Série Ideal (Varia T_D)

Neste caso, o erro de regime permanente é independente de T_D:

$$e_\infty = \frac{5}{2Kp} = 0,5$$

$$0,628 < T_D < 1,16$$

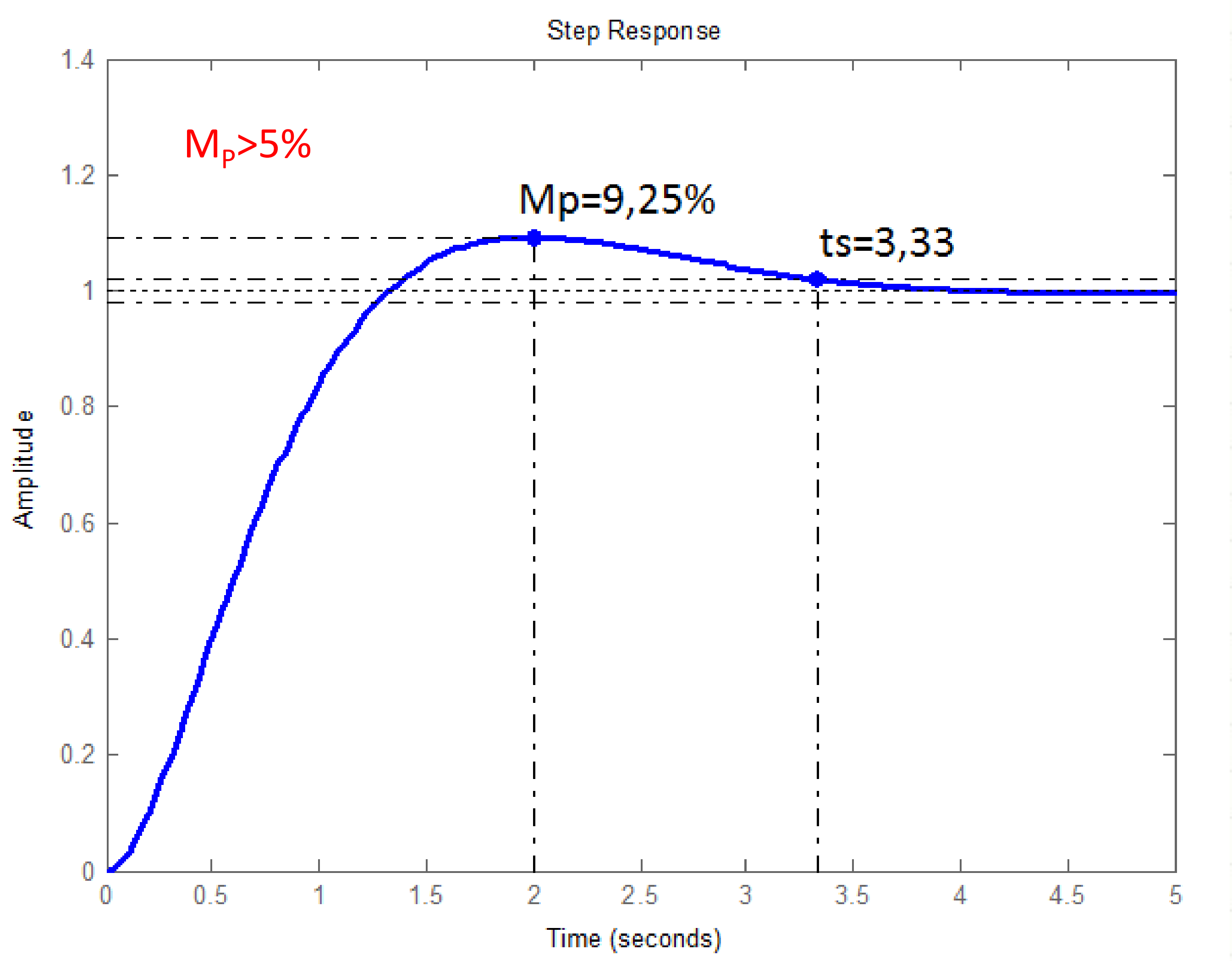
Observa-se que, para valores pequenos de T_D os polos dominantes são complexos e próximos do zero do sistema.

$$T_D = 0,65 \quad \Rightarrow \quad T_1(s) = \frac{10(1+0,65s)}{s^3 + 6s^2 + 11,5s + 10}$$

$$p_{1,2} = -1,22 \pm j1,15 \quad p_3 = -3,56 \quad z = -1,54$$

Assim, a especificação pode não será atendida (devido a influência do zero na resposta do sistema).

Projeto 2 - PD Série Ideal (Varia T_D)



Projeto 2 - PD Série Ideal (Varia T_D)

A presença do zero próximo aos polos dominantes gera o aumento excessivo do sobressinal.

$$0,628 < T_D < 1,16$$

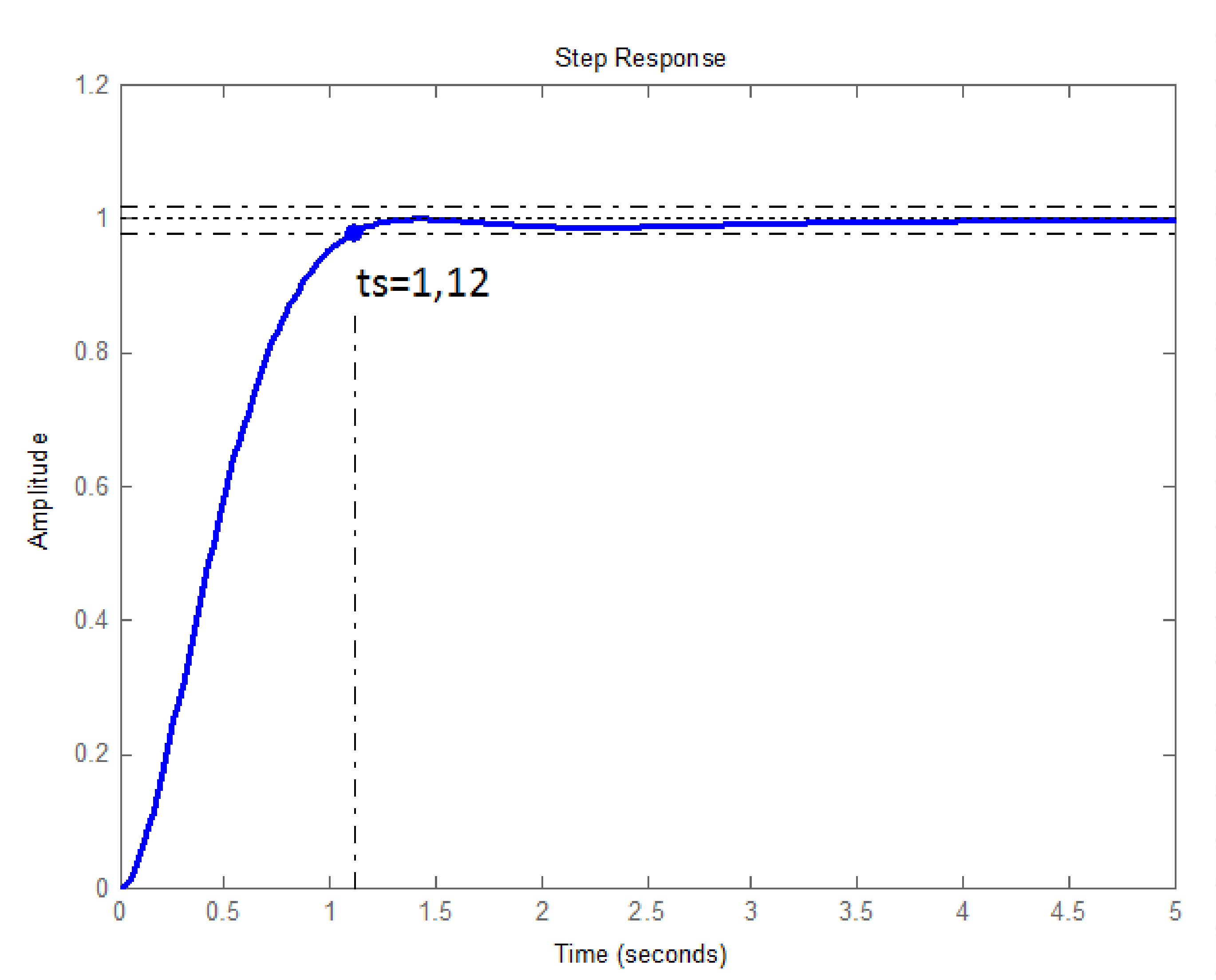
Aumentando o valor de T_D, ocorre uma inversão na dominância dos polos:

$$T_D = 1,15 \quad \Rightarrow \quad T_2(s) = \frac{10(1+1,15s)}{s^3 + 6s^2 + 16,5s + 10}$$

$$p_1 = -0,815 \quad p_{2,3} = -2,59 \pm j2,36 \quad z = -0,87$$

O polo dominante passa a ser real, reduzindo o sobressinal.

Projeto 2 - PD Série Ideal (Varia T_D)



Projeto 2 - PD Série Ideal (Varia T_D)

Em particular, se for escolhido T_D=1, ocorrerá um **cancelamento polo/zero**.

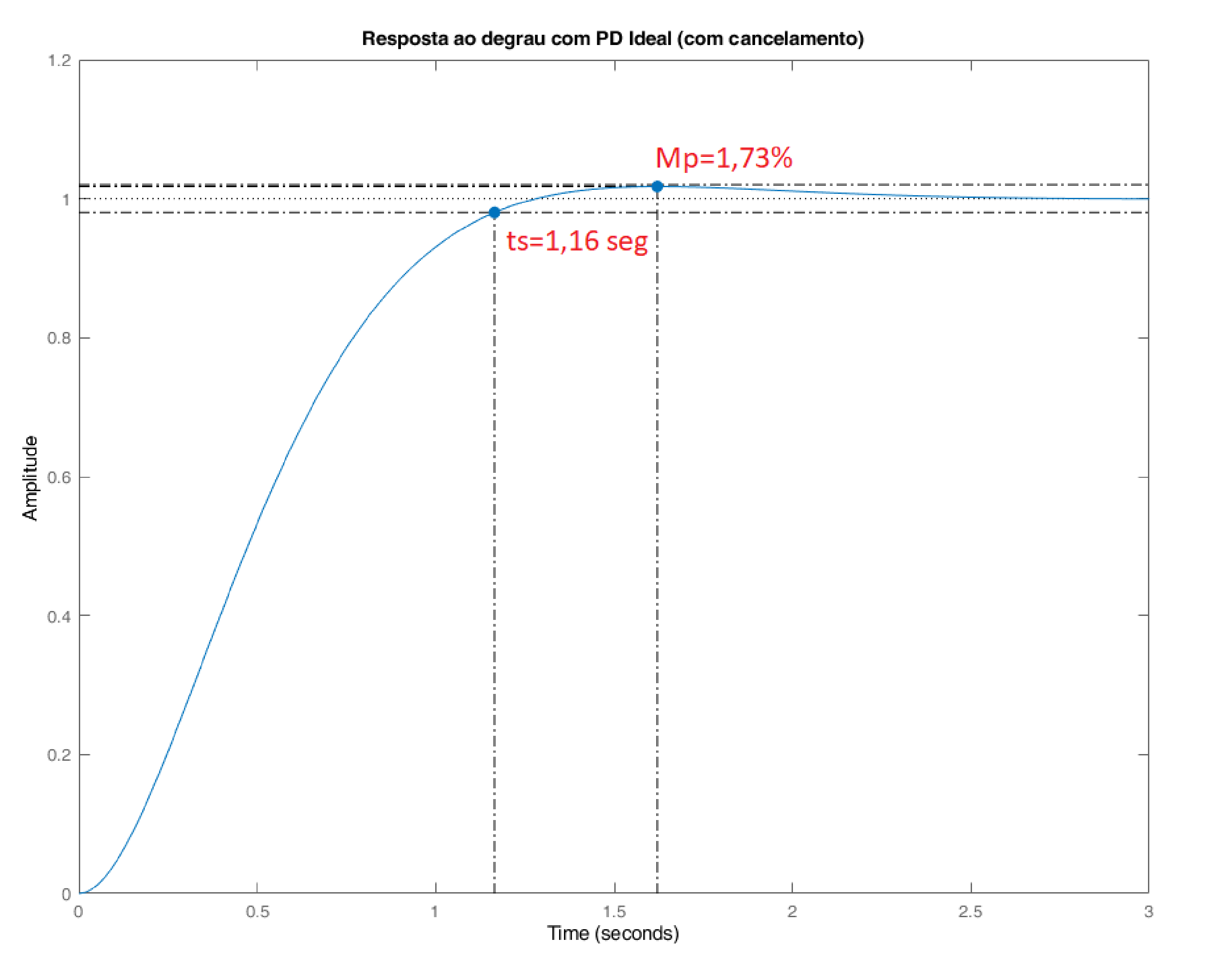
$$C(s)G(s) = (s+1)\frac{10}{s(s+1)(s+5)} = \frac{10}{s(s+5)}$$

$$T(s) = \frac{10}{s^2 + 5s + 10}$$

Os polos de malha fechada são

$$p_{1,2} = -2{,}5 \pm j1{,}94 \Rightarrow \begin{cases} M_p = 1{,}73\% \\ t_s = 1{,}16 \end{cases}$$

Projeto 2 - PD Série Ideal (Varia T_D)



Cancelamento Polo/Zero

O cancelamento Polo/Zero (planta/controlador) pode ser utilizado para a redução de modelos e, consequentemente, a simplificação do projeto de controladores.

Entretanto, algumas condições devem ser observadas para a realização do cancelamento.

É sempre possível cancelar polos estáveis (malha aberta) que estejam dentro da região desejada para a alocação dos polos dominantes de malha fechada.

Portanto, **polos instáveis ou fora da região desejada não devem ser cancelados**.

Porque?????

Cancelamento Polo/Zero

Porque não cancelar polos instáveis de malha aberta?

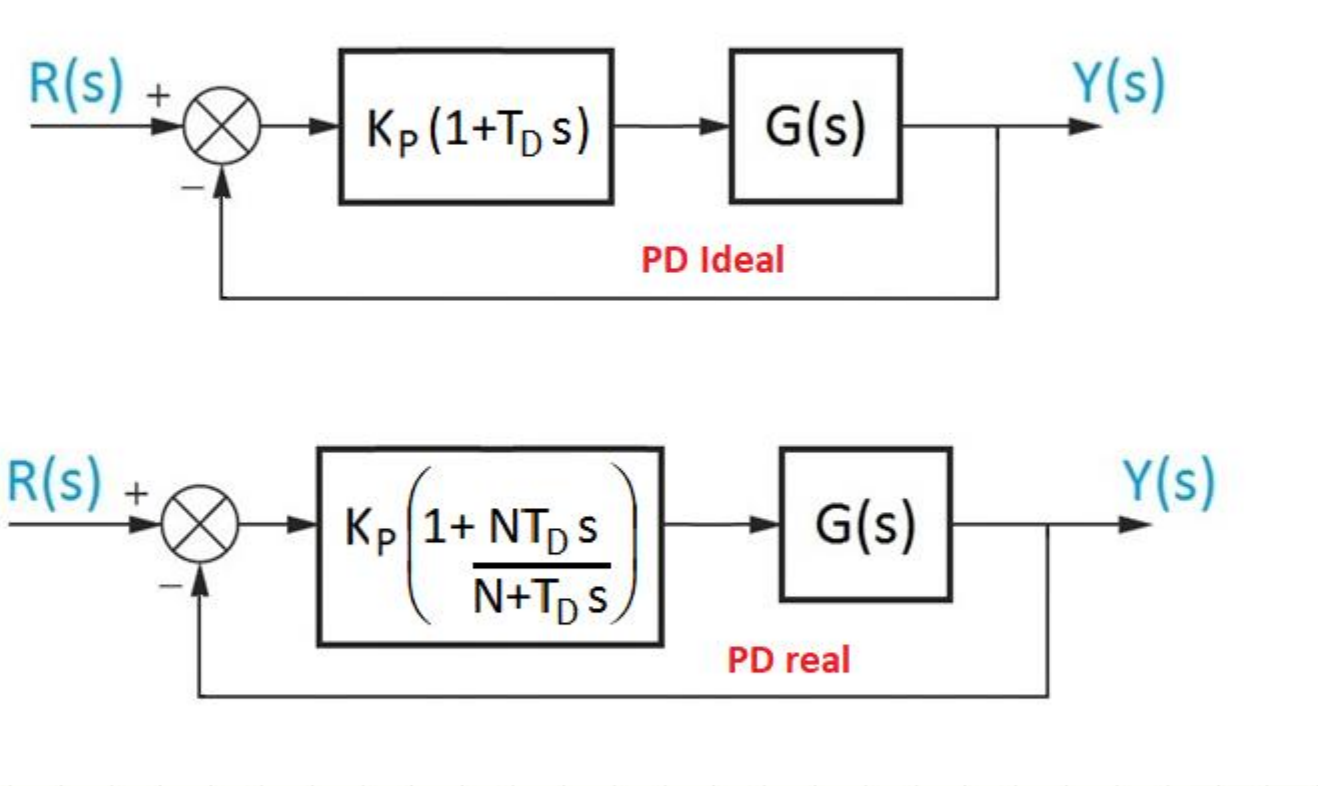
Se existir uma perturbação entre o controlador e a planta, a saída do sistema poderá ser levada à instabilidade uma vez que o polo instável da planta ainda existirá.

Se existir algum erro de modelagem, o cancelamento não ocorrerá e o polo instável continuará existindo, podendo levar o sistema à instabilidade em malha fechada.

Porque cancelar apenas polos na região desejada?

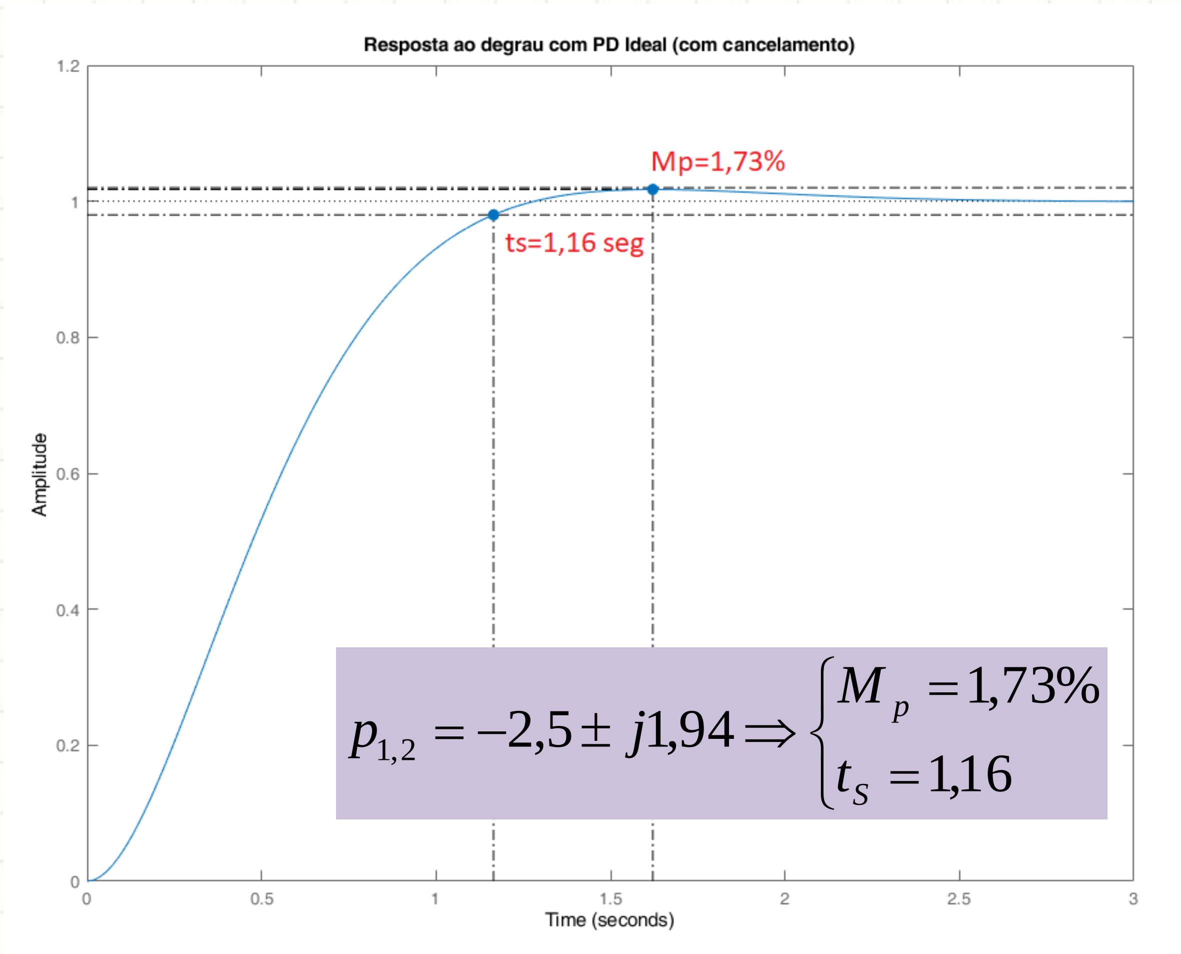
Se o cancelamento não for perfeito (por erros de modelagem) o polo não cancelado ainda continuará existindo, porém estará dentro da região desejada.

Controlador PD Série: Ideal x Real



Controlador PD Série: Ideal x Real

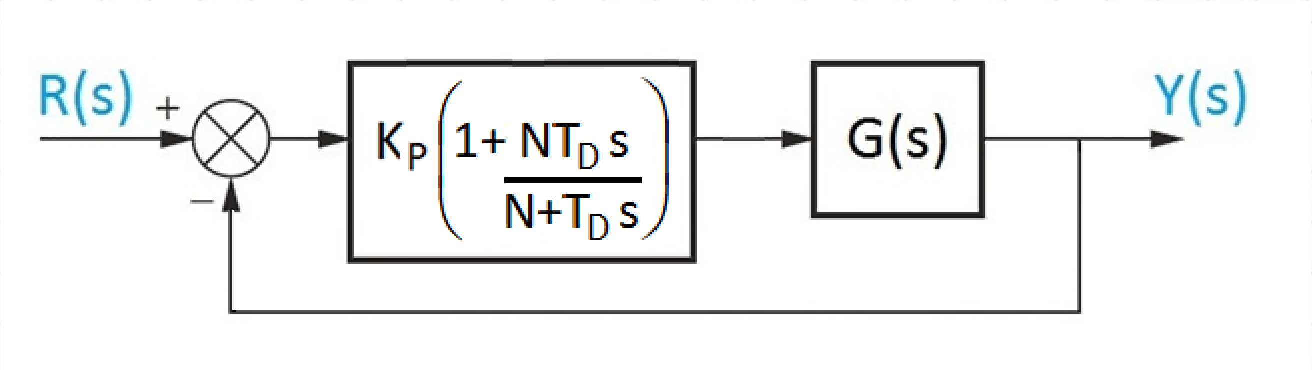
Seja o controlador PD Série Ideal obtido no Projeto 2 (usando cancelamento polo/zero) com T_D=1 e K_P=5:



$$p_{1,2} = -2{,}5 \pm j1{,}94 \Rightarrow \begin{cases} M_p = 1{,}73\% \\ t_S = 1{,}16 \end{cases}$$

Controlador PD Série: Ideal x Real

Seja agora o controlador PD Série Real.



O controlador PD (forma real) pode ser reescrito como

$$C(s) = K\,\frac{s+b}{s+\alpha b}$$

sendo

$$\alpha = N+1, \quad b = \frac{N}{\alpha T_D} \quad \text{e} \quad K = \alpha K_P$$

Controlador PD Série: Ideal x Real

Usando os mesmos valores obtidos para o controlador ideal (T_D=1 e K_P=5) e parte derivativa ajustada por um fator N=100 (valor padrão do MATLAB), tem-se:

$$C(s) = \frac{505(s+0{,}9901)}{s+100} = \frac{505s+500}{s+100}$$

$$T(s) = \frac{1010s+1000}{s^4+106s^3+605s^2+1510s+1000}$$

$$p_{1,2} = -2{,}46 \pm j2{,}03$$

$$p_3 = -0{,}98 \quad \rightarrow \quad z = -0{,}99$$

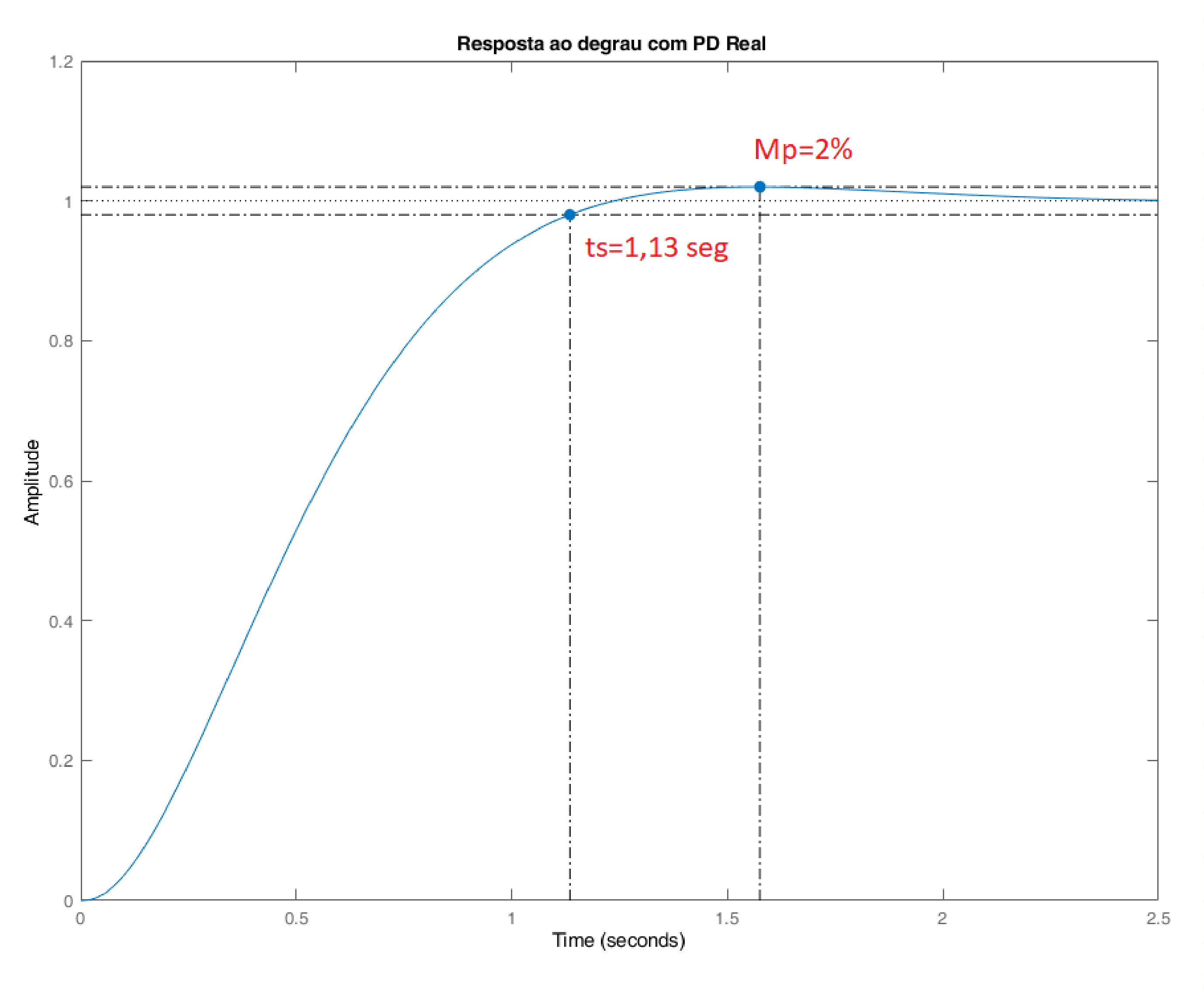
$$p_4 = -100{,}1$$

Polos obtidos no Projeto 2 (PD Série Ideal)

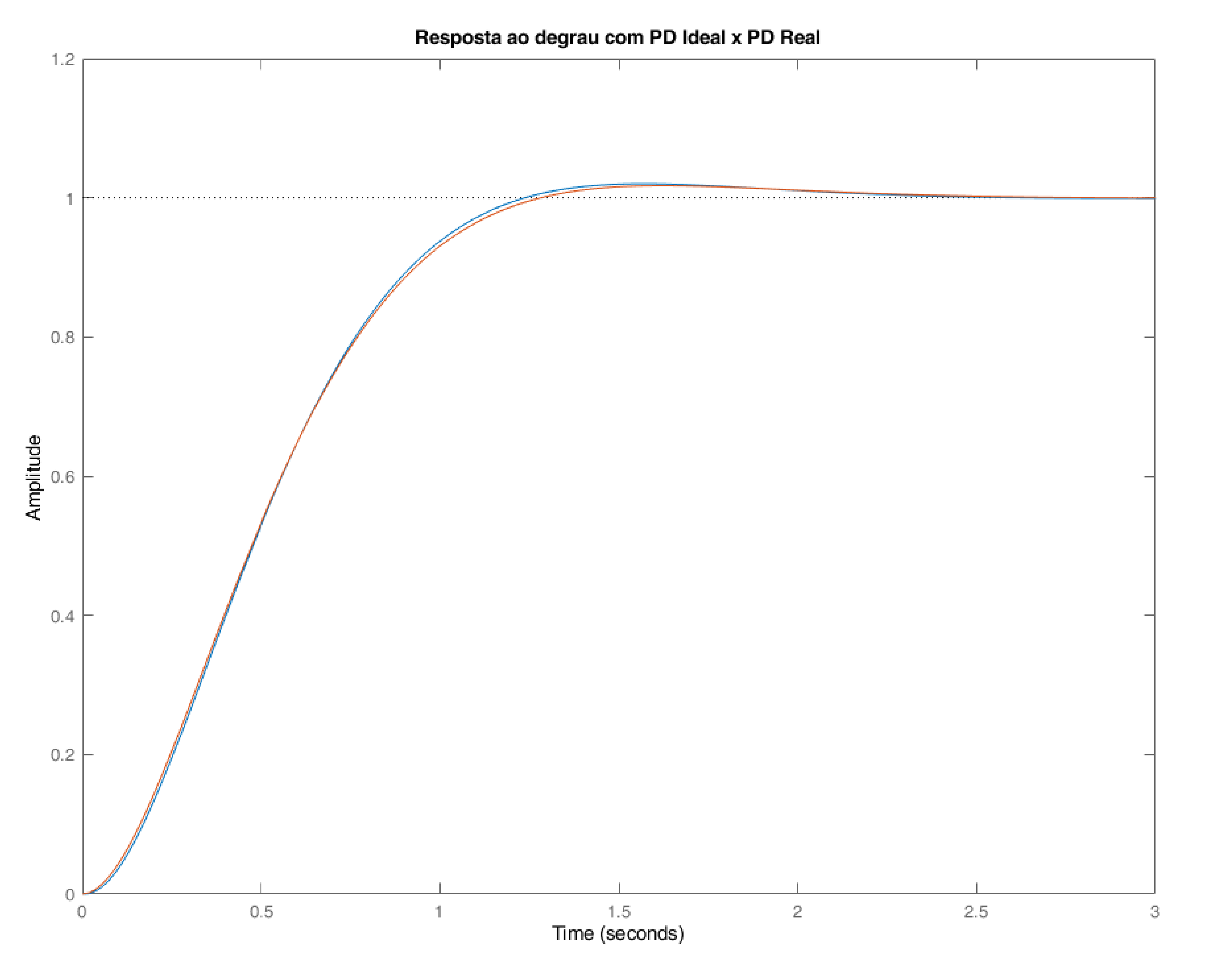
$$p_{1,2} = -2{,}5 \pm j1{,}94$$

Observa-se que os polos dominantes obtidos são muito próximos daqueles encontrados com o PD Misto Ideal.

Controlador PD Série: Ideal x Real



Controlador PD Série: Ideal x Real



Controlador em Avanço

Seja o controlador em avanço:

$$C(s) = K\,\frac{s+b}{s+\alpha b} \qquad \begin{matrix} b > 0 \\ \alpha > 1 \end{matrix}$$

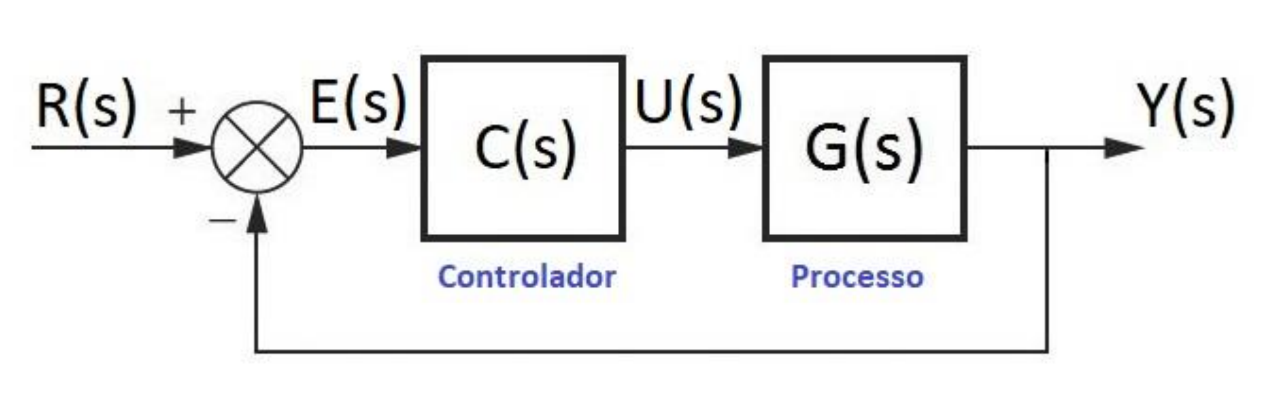
A adição deste controlador aumenta a ordem do sistema aumentando assim a complexidade do projeto.

Além disso, o controlador adiciona um zero à malha direta do sistema, o que pode gerar um aumento no sobressinal.

Neste caso, o cancelamento polo/zero, se possível, será desejável.

Controlador em Avanço

Exemplo em estudo:

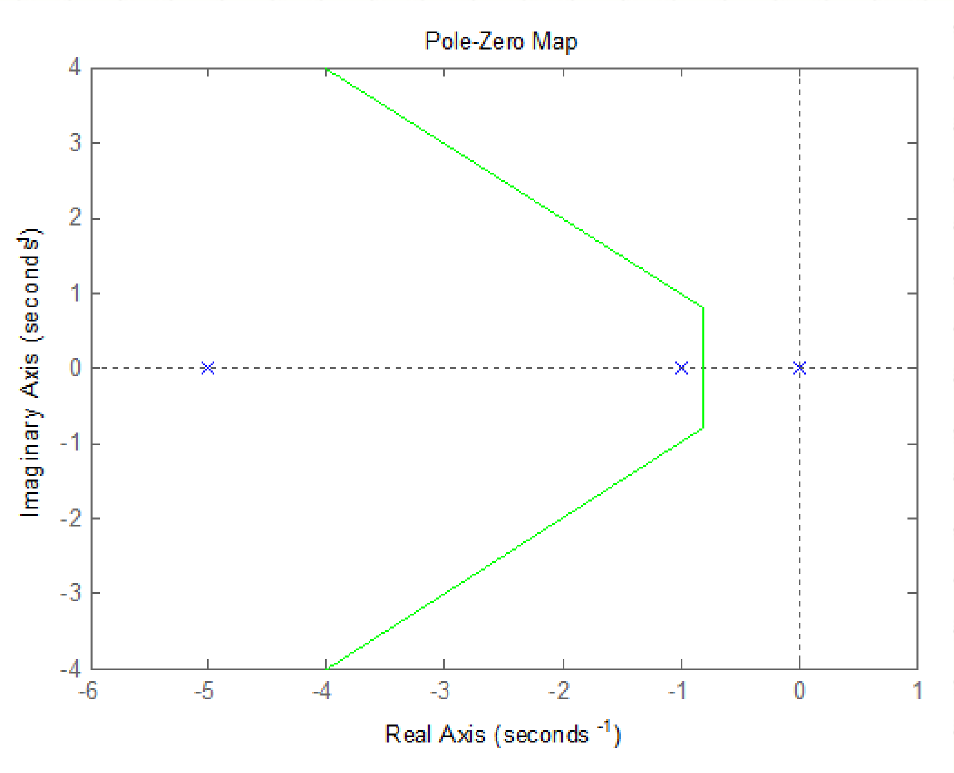


$$G(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+5)} \qquad C(s) = K\,\frac{s+b}{s+\alpha b}$$

O cancelamento polo/ zero pode ser utilizado?

Qual polo deve ser cancelado?

Controlador em Avanço



Dentro da região desejada existem dois polos que poderiam ser cancelados.

A melhor escolha é cancelar o polo em -1, por ser o mais lento.

Considerando o cancelamento polo/zero (b=1):

$$C(s) = K\frac{s+1}{s+\alpha}$$

Projeto 3 – Avanço (varia α, com cancelamento)

Metodologia: fixar K e variar α (usando cancelamento)

Neste caso,

$$C(s)G(s)=\frac{K(s+1)}{s+\alpha}\frac{2}{s(s+1)(s+5)}=\frac{2K}{s(s+\alpha)(s+5)}$$

Definindo **K = 5** (mesmo dos projetos anteriores), tem-se

$$T(s)=\frac{10}{s(s+\alpha)(s+5)+10}$$

e

$$\Delta(s)=s^3+(\alpha+5)s^2+5\alpha s+10$$

Projeto 3 – Avanço (varia α, com cancelamento)

O parâmetro α será ajustado para atender as especificações de desempenho.

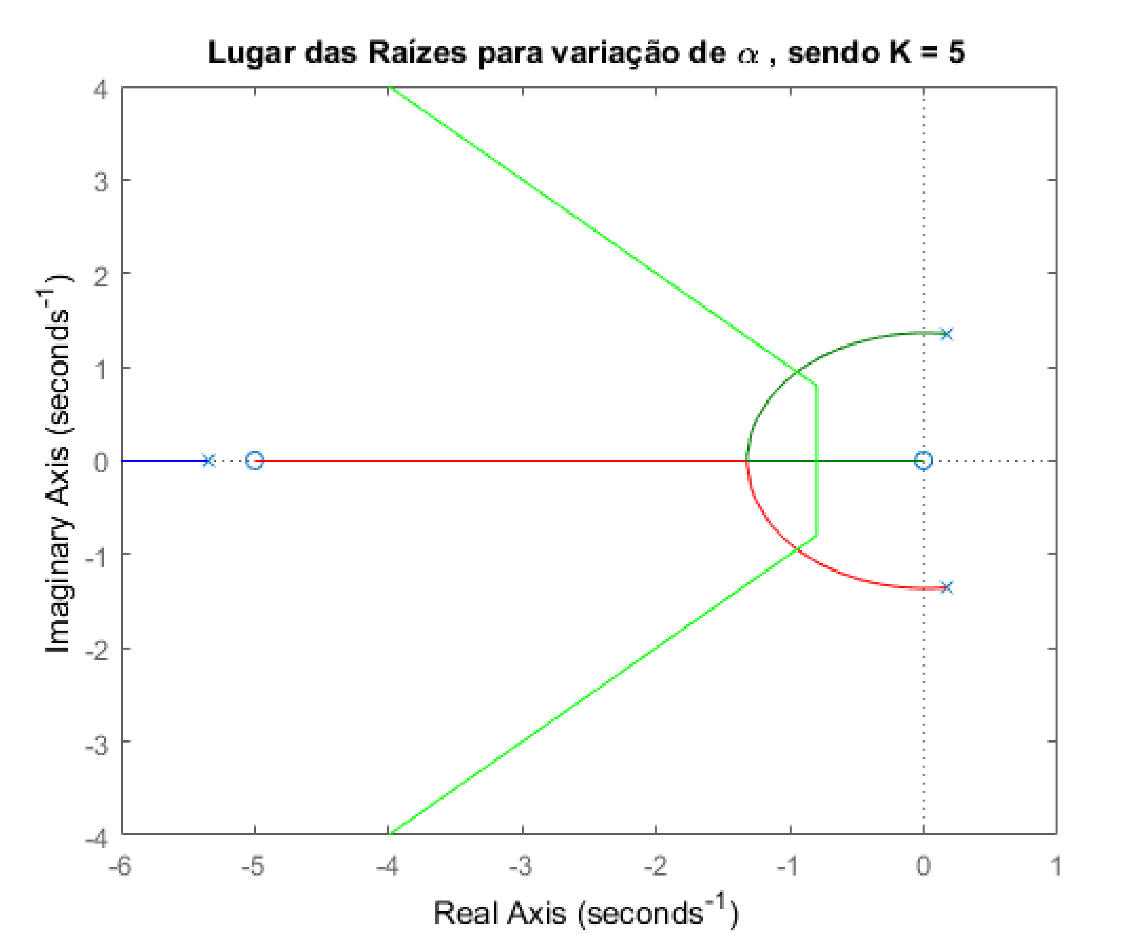
Escrevendo equação característica em função de α

$$1+\alpha\frac{s(s+5)}{s^3+5s^2+10}=0$$

pode ser traçado o Lugar das Raízes para a variação deste parâmetro.

Da interseção do Lugar das Raízes com a região desejada, serão definidos os limites para o parâmetro α.

Projeto 3 – Avanço (varia α, com cancelamento)



Da especificação de sobressinal: $\alpha > 2{,}47$

Da especificação de tempo de acomodação: $2{,}13 < \alpha < 3{,}77$

Projeto 3 – Avanço (varia α, com cancelamento)

Portanto, para atender ambas as especificações:

$$2{,}47 < \alpha < 3{,}77$$

O coeficiente de erro de regime permanente é dado por:

$$K_V = \lim_{s \to 0} s \frac{2K}{s(s+\alpha)(s+5)} = \frac{10}{5\alpha}$$

ou seja,

$$e_\infty = \frac{5\alpha}{2K} = \frac{5\alpha}{10}$$

Assim, quanto menor o valor de α menor será o erro de regime permanente.

Projeto 3 – Avanço (varia α, com cancelamento)

Para diferentes escolhas de α tem-se:

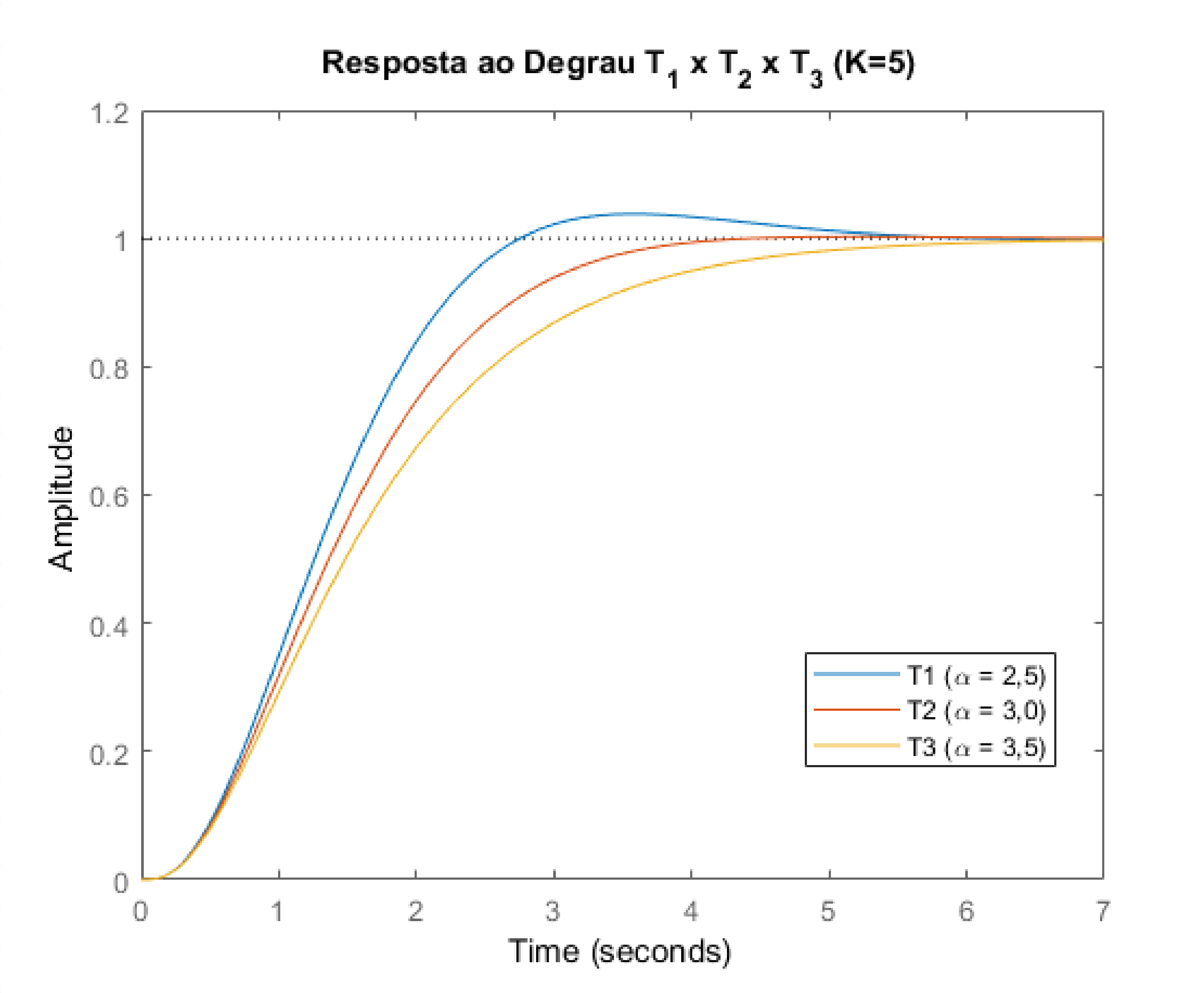
$$2,47 < \alpha < 3,77$$

$$\mathrm{T}_1: \quad \alpha = 2,5 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_P = 3,8\% \\ t_S = 4,6 \end{cases} \Rightarrow e_\infty = 1,25$$

$$\mathrm{T}_2: \quad \alpha = 3,0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_P = 0,3\% \\ t_S = 3,58 \end{cases} \Rightarrow e_\infty = 1,5$$

$$\mathrm{T}_3: \quad \alpha = 3,5 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_P = 0\% \\ t_S = 4,94 \end{cases} \Rightarrow e_\infty = 1,75$$

Projeto 3 – Avanço (varia α, com cancelamento)



Projeto 4 – Avanço (varia K, com cancelamento)

Metodologia: fixar α e variar K (usando cancelamento)

Sendo

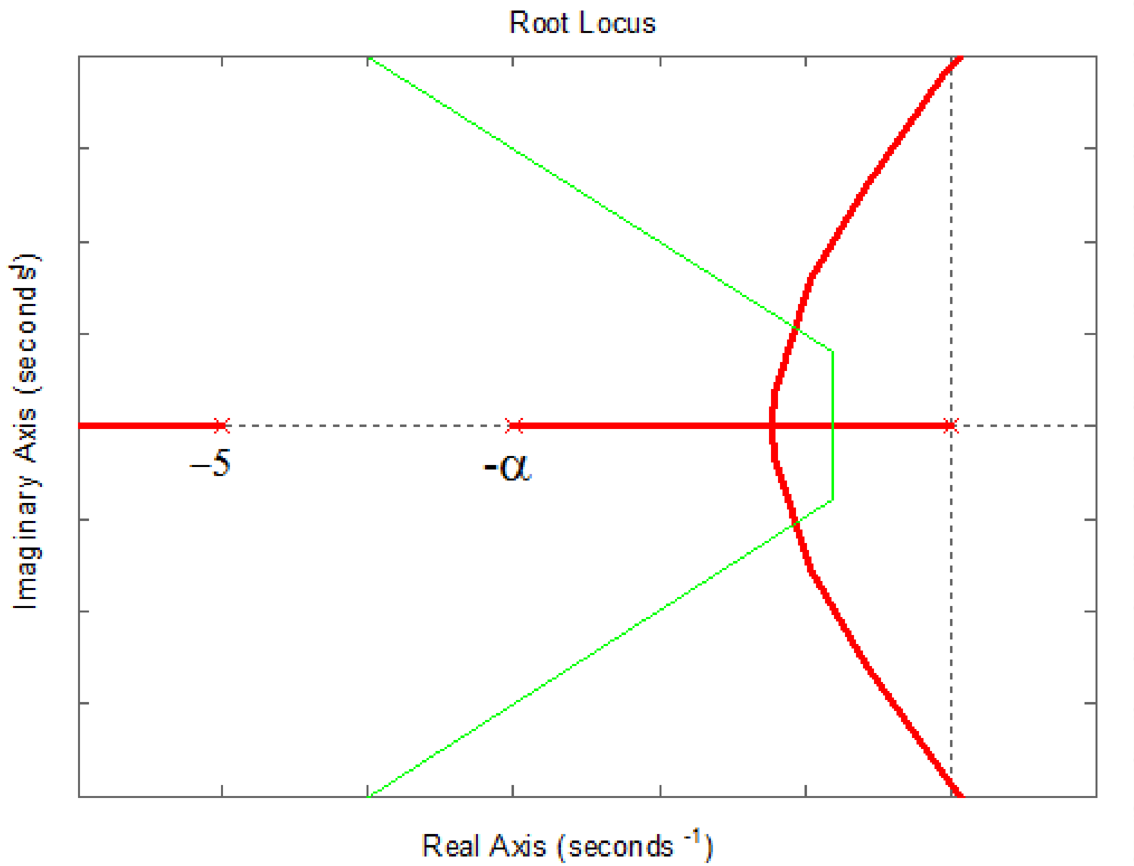
$$\Delta(s) = s^3 + (\alpha + 5)s^2 + 5\alpha s + 2K$$

o Lugar das Raízes deverá será traçado para

$$1 + K\frac{2}{s(s+\alpha)(s+5)} = 0$$

Como definir o valor de α?

Projeto 4 – Avanço (varia K, com cancelamento)



a) Para ser um **controlador em avanço: $\alpha > 1$**

b) Quanto maior o valor de α mais à esquerda (dentro da região) estará o ponto de ramificação.

Projeto 4 – Avanço (varia K, com cancelamento)

Fixando α=4, o Lugar das Raízes será traçado para

$$1 + K\frac{2}{s(s+4)(s+5)} = 0$$

e a intersecção deste com a região desejada definirá os limites para o parâmetro K.

Projeto 4 – Avanço (varia K, com cancelamento)

Da especificação de sobressinal: 0 < K < 10,8

Da especificação de tempo de acomodação: 5,4 < K < 30,2

Projeto 4 – Avanço (varia K, com cancelamento)

Portanto, para atender ambas as especificações:

$$5{,}4 < K < 10{,}8$$

O coeficiente de erro de regime permanente é dado por:

$$Kv = \lim_{s \to 0} s \frac{2K}{s(s+4)(s+5)} = \frac{K}{10}$$

ou seja,

$$e_{\infty} = \frac{10}{K}$$

Assim, quanto **maior o valor de K menor será o erro** de regime permanente.

Projeto 4 – Avanço (varia K, com cancelamento)

$$5{,}4 < K < 10{,}8$$

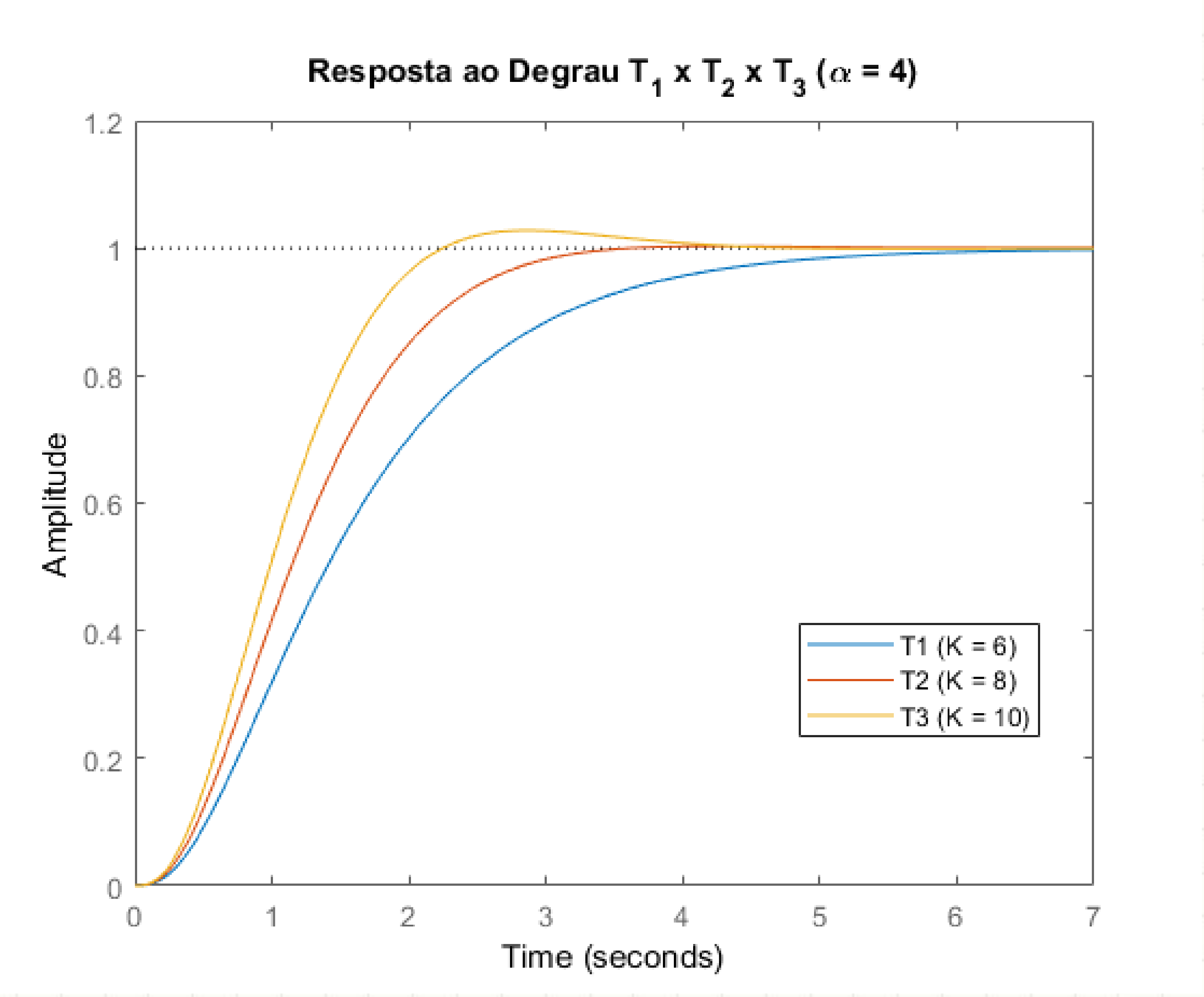
Para diferentes escolhas de K tem-se:

$$\mathrm{T}_1: \quad K = 6 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_P = 0\% \\ t_S = 4{,}78 \end{cases} \Rightarrow e_\infty = 1{,}67$$

$$\mathrm{T}_2: \quad K = 8 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_P = 0{,}3\% \\ t_S = 2{,}95 \end{cases} \Rightarrow e_\infty = 1{,}25$$

$$\mathrm{T}_3: \quad K = 10 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_P = 2{,}76\% \\ t_S = 3{,}4 \end{cases} \Rightarrow e_\infty = 1{,}0$$

Projeto 4 – Avanço (varia K, com cancelamento)



Projeto 5 – Avanço (usando posicionando de polos e cancelamento polo/zero)

Metodologia: definir uma posição exata para os polos dominantes de malha fechada.

A partir das especificações

$$M_P < 5\% \quad \Rightarrow \quad \xi > 0{,}69 \left(\theta < 46^\circ\right)$$
$$t_s < 5seg \quad \Rightarrow \quad \sigma > 0{,}8$$

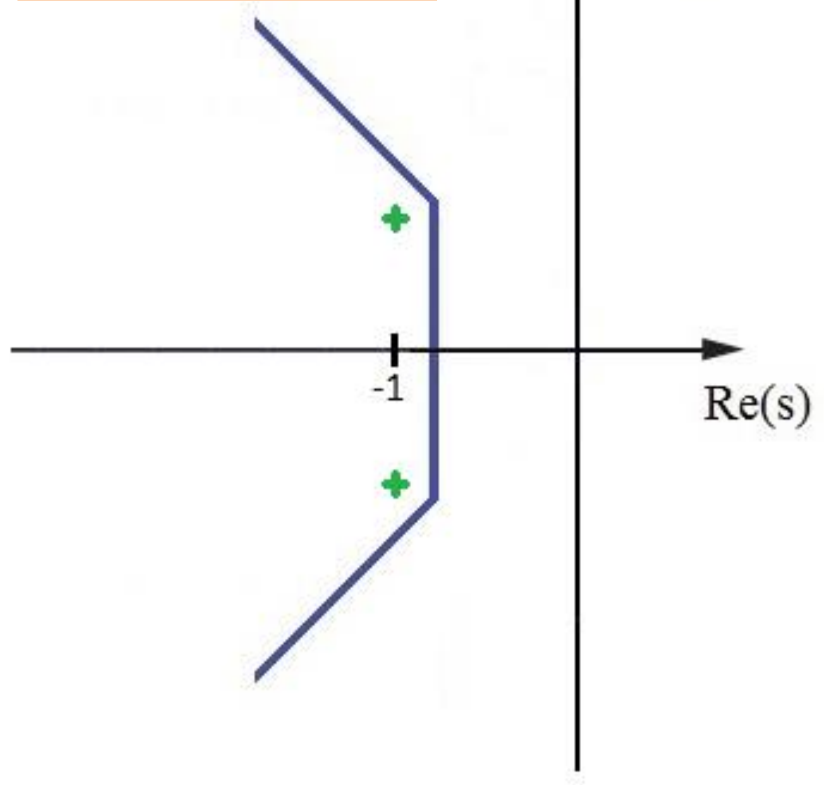
define-se a posição desejada para os polos dominantes de MF:

$$\xi > 0{,}69 \quad \Rightarrow \quad \xi \equiv 0{,}8$$
$$\sigma > 0{,}8 \quad \Rightarrow \quad \sigma \equiv 1$$

$$s_d = \sigma \pm j\omega_d = -1 \pm j0{,}75$$

Projeto 5 – Avanço (usando posicionando de polos e cancelamento polo/zero)

$$s_d = -1 \pm j0{,}75$$



Projeto 5 – Avanço (usando posicionando de polos e cancelamento polo/zero)

Para os polos desejados pertencerem ao Lugar das Raízes, ou seja, serem polos de malha fechada do sistema, é necessário satisfazer a condição de fase para $s=s_d$:

$$\angle C(s_d)G(s_d) = 180^\circ(2q+1)$$

ou

$$\angle C(s_d) = 180^\circ(2q+1) - \angle G(s_d)$$
$$= 180^\circ - 116^\circ = 64^\circ$$

Portanto, **a contribuição de fase do controlador em avanço deve ser de 64°**.

Projeto 5 – Avanço (usando posicionando de polos e cancelamento polo/zero)

Usando o mesmo cancelamento polo/zero mostrado anteriormente, ou seja, b=1, tem-se

$$C(s) = K\frac{s+1}{s+\alpha}$$

Da condição de fase

$$\angle C(s_d) = \angle(s_d+1) - \angle(s_d+\alpha)$$
$$= 90^\circ - \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{0{,}75}{-1+\alpha}\right) = 64^\circ$$

Resolvendo a equação

$$\alpha = 2{,}54$$

Projeto 5 – Avanço (usando posicionando de polos e cancelamento polo/zero)

O ganho K é determinado pela condição de módulo

$$K = \frac{1}{\left| C(s_d)G(s_d) \right|}$$

sendo

$$C(s)G(s) = \frac{2}{s(s+5)(s+2{,}54)}$$

Resolvendo a equação, chega-se a $K = 4{,}36$

Portanto,

$$C(s) = 4{,}36\frac{s+1}{s+2{,}54}$$

Projeto 5 – Avanço (usando posicionando de polos e cancelamento polo/zero)

O erro de regime permanente será

$$e_{\infty} = \frac{5\alpha}{2K} = 1,45$$

$$C(s) = 4,36\frac{s+1}{s+2,54}$$

<u>Verificação</u>

$$C(s)G(s) = \frac{4,36\times 2}{s(s+2,54)(s+5)}$$

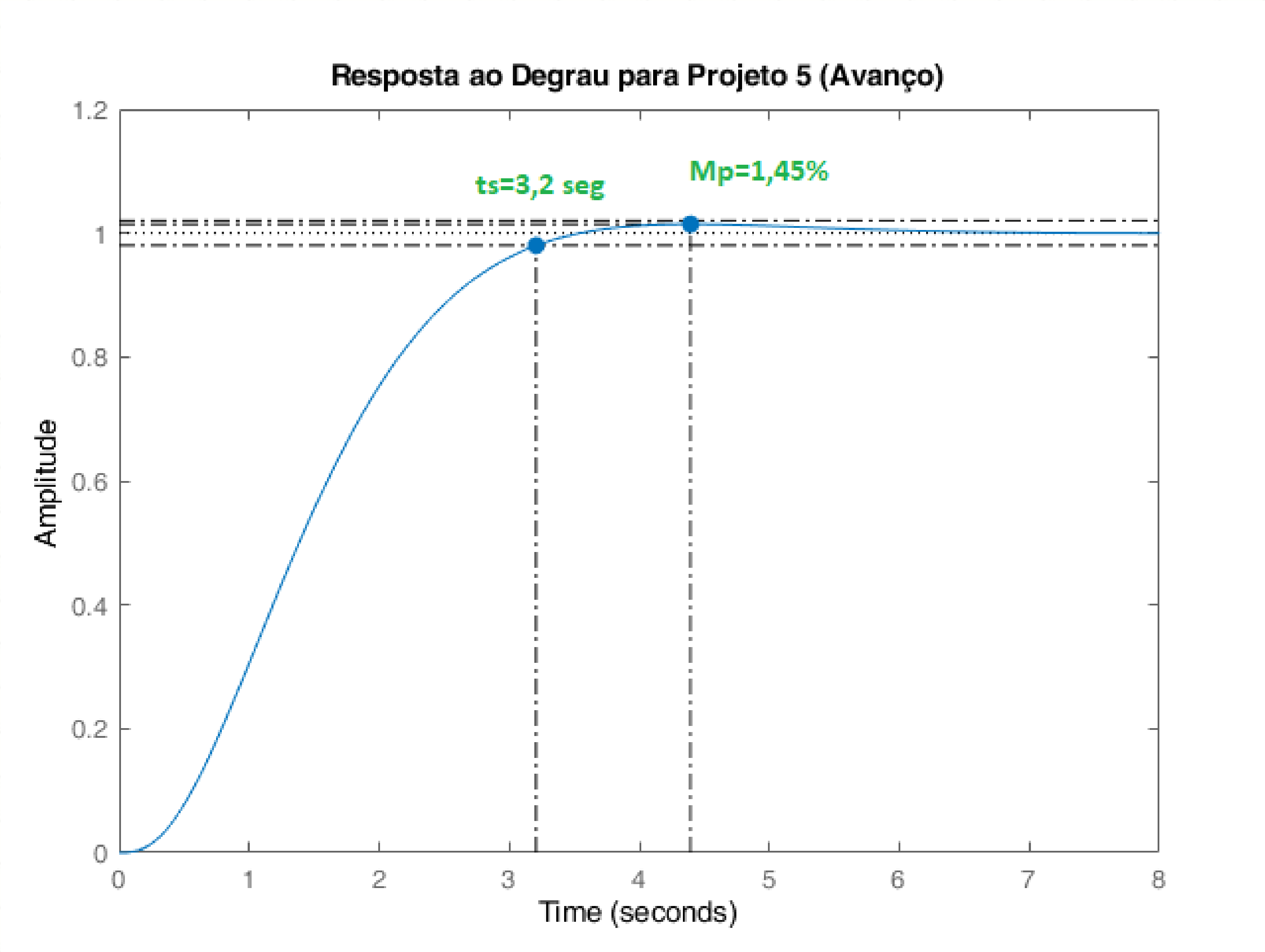
Valores de Simulação

$$T(s) = \frac{8,72}{s(s+2,54)(s+5)+8,72} \Rightarrow \begin{cases} M_P = 1,45\% \\ t_S = 3,2 \end{cases}$$

$$p_{1,2} = -1 \pm j0,752 \quad p_3 = -5,53$$

Aproximando pelos polos dominantes: $M_P = 1,45\% \quad t_S = 4$

Projeto 5 – Avanço (usando posicionando de polos e cancelamento polo/zero)



Exercício Sugerido

Refazer o projeto considerando outra escolha de polos desejados para malha fechada.

Projeto 6 – Avanço (usando posicionando de polos mas sem cancelamento polo/zero)

Metodologia: idem anterior, sem usar cancelamento.

Mantidos os mesmos polos desejados de malha fechada

$$s_d = -1 \pm j0{,}75$$

a contribuição de fase do controlador não será alterada. Assim,

$$\angle C(s_d) = \angle(s_d + b) - \angle(s_d + \alpha b) = 64^\circ$$

Como obter os parâmetros b e α ?

- Solução gráfica (Ogata) – usando relação de ângulos (define b)
- Solução numérica (obtém-se α e b simultaneamente)
- Definir o valor de α (calcular b)

Projeto 6 – Avanço (usando posicionando de polos mas sem cancelamento polo/zero)

Para α = 5, tem-se

$$\angle C(s_d) = \angle(s_d + b) - \angle(s_d + 5b) = 64^\circ$$
$$= \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{0{,}75}{b-1}\right) - \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{0{,}75}{5b-1}\right) = 64^\circ$$

Aplicando a relação

$$\mathrm{tg}^{-1}(\mathrm{A}) - \mathrm{tg}^{-1}(\mathrm{B}) = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{1+\mathrm{AB}}\right)$$

com

$$\mathrm{A} = \frac{0{,}75}{\mathrm{b}-1} \quad \mathrm{e} \quad \mathrm{B} = \frac{0{,}75}{5\mathrm{b}-1}$$

chega-se a

$$\mathrm{b} = 1{,}24$$

Projeto 6 – Avanço (usando posicionando de polos mas sem cancelamento polo/zero)

Portanto,

$$C(s) = 12{,}73\frac{s+1{,}24}{s+6{,}12}$$

O erro de regime permanente será:

$$e_\infty = \frac{5\alpha}{2K} = 0{,}982$$

<u>Verificação</u>

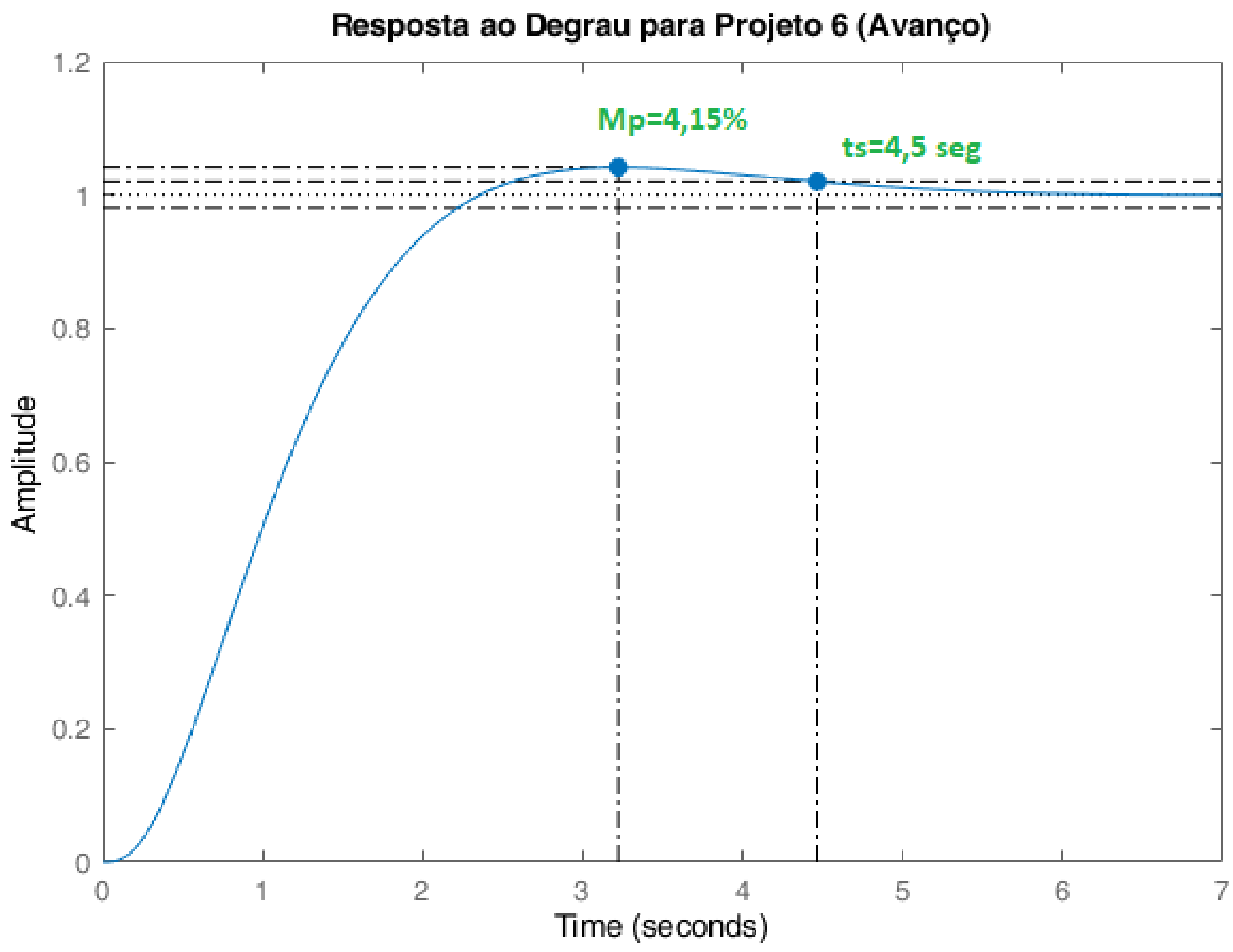
$$C(s)G(s) = \frac{12{,}73\times 2\times (s+1{,}24)}{s(s+1)(s+5)(s+6{,}2)}$$

Valores de Simulação

$$T(s) = \frac{25{,}46(s+1{,}24)}{s^4+12{,}2s^3+42{,}2s^2+56{,}46s+31{,}57} \Rightarrow \begin{cases} M_P = 4{,}15\% \\ t_S = 4{,}5 \end{cases}$$

$$p_{1,2} = -1 \pm j0{,}746 \quad p_3 = -2{,}68 \quad p_4 = -7{,}5$$

Projeto 6 – Avanço (usando posicionando de polos mas sem cancelamento polo/zero)



Exercícios Sugeridos

Fazer novos projetos:

a) Mantendo α=5 e fazendo outra escolha de polos desejados para malha fechada.
b) Escolhendo outro valor para α e mantendo os polos desejados para malha fechada (s_d=-1 ± j0,75).
c) Escolhendo novos valores para α e para os polos desejados de malha fechada.

Controladores em Avanço - comparação

Projetos	Parâmetros	M_P	t_S	e_∞
3	α=3 e K=5	0,3%	3,58	1,50
4	α=4 e K=8	0,3%	2,95	1,25
5	α=2,54 e K=4,36	1,5%	3,20	1,45
6	α=5 e K=12,73	4,2%	4,50	0,98

Projeto 3 – Fixa K e varia α (com cancelamento)
Projeto 4 – Fixa α e varia K (com cancelamento)
Projeto 5 – Define s_d (com cancelamento)
Projeto 6 – Define s_d (sem cancelamento)

$$M_P < 5\%$$
$$t_S < 5$$

Projeto por alocação direta

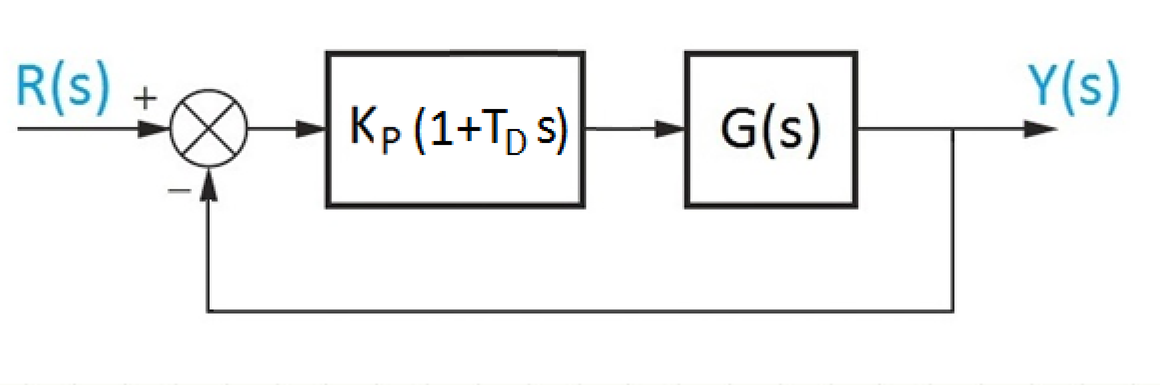
Definida uma posição para os polos dominantes de malha fechada (que atenda as especificações) **compara-se o polinômio característico desejado com o polinômio característico do sistema controlado**.

Observações:

a) dependendo da ordem do sistema a solução do problema pode ser muito complexa, requerendo o uso de algoritmos numéricos.
b) neste método define-se apenas a posição dos polos “dominantes” desejados sem levar em consideração os zeros nem outros polos do sistema, o que pode levar ao não atendimento das especificações.

Projeto 7 – PD Série Ideal (usando alocação direta)

Seja o sistema de controle:



Neste caso,

$$C(s)G(s) = \frac{2K_P(1+T_D s)}{s(s+1)(s+5)}$$

ou seja,

$$\Delta(s) = s(s+1)(s+5) + 2K_P(1+T_D s)$$
$$= s^3 + 6s^2 + (5+2K_P T_D)s + 2K_P$$

Projeto 7 – PD Série Ideal (usando alocação direta)

Usando os mesmos polos desejados de malha fechada definidos anteriormente obtém-se o polinômio desejado para malha fechada:

$$s_d = -1 \pm j0,75 \quad \rightarrow \quad \Delta(s_d) = s^2 + 2s + 1,5625$$

Como o sistema é de 3ª ordem, existirá um 3º polo. Assim, o polinômio desejado para malha fechada torna-se:

$$\begin{aligned}\Delta(s) &= (s^2 + 2s + 1,5625)(s + p_3) \\ &= s^3 + (2 + p_3)s^2 + (1,5625 + 2p_3)s + 1,5625p_3\end{aligned}$$

Projeto 7 – PD Série Ideal (usando alocação direta)

Igualando os polinômios

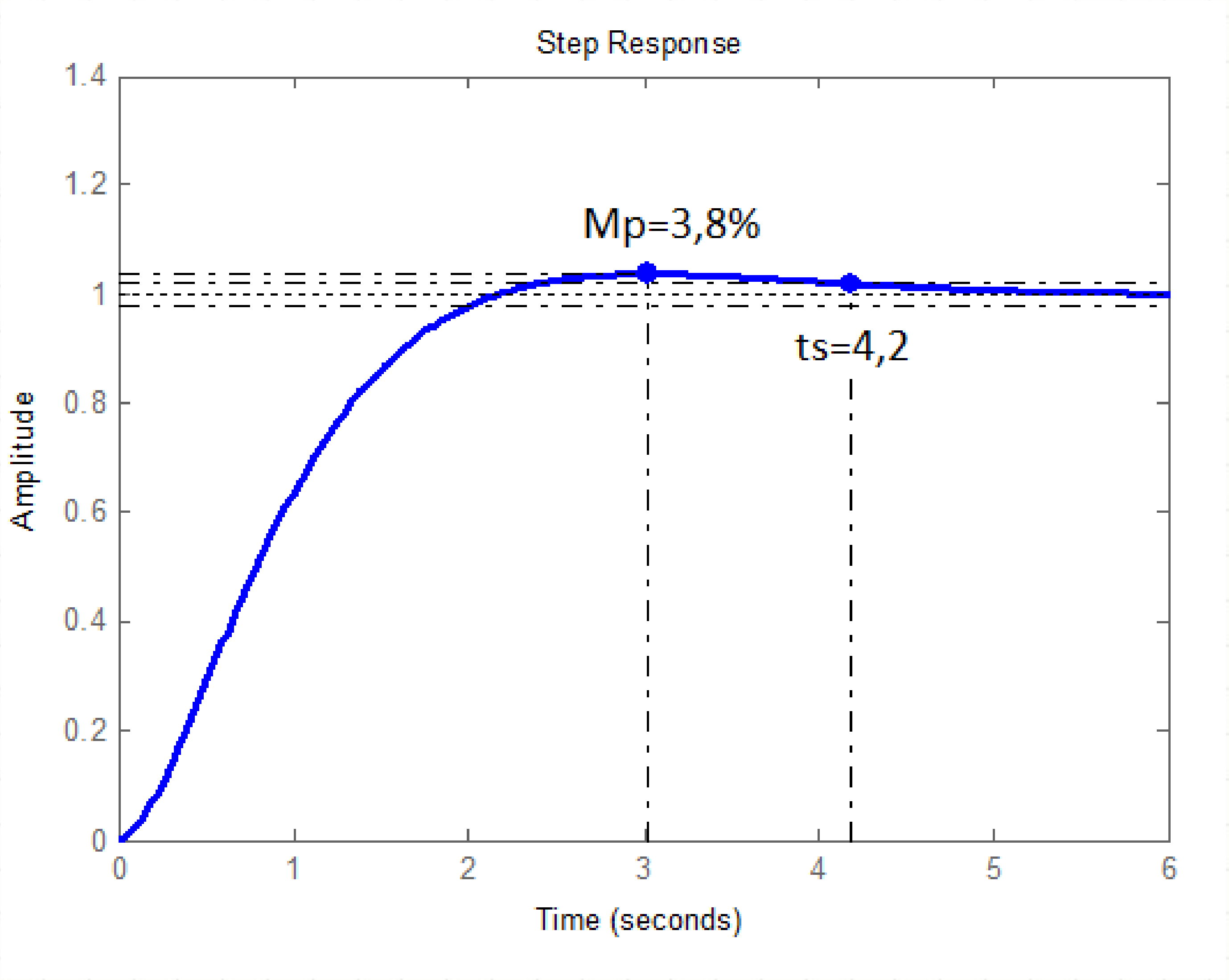
$$
\begin{aligned}
2K_P &= 1{,}5625 p_3 & & K_P = 3{,}125 \\
5 + 2K_P T_D &= 1{,}5625 + 2p_3 & \Rightarrow \quad & T_D = 0{,}73 \\
6 &= 2 + p_3 & & p_3 = 4
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
T(s) = \frac{6{,}25(1+0{,}73s)}{s^3 + 6s^2 + 9{,}2625s + 6{,}25}
\qquad
\begin{aligned}
z &= -1{,}37 \\
p_{1,2} &= -1 \pm j0{,}75 \\
p_3 &= -4
\end{aligned}
$$

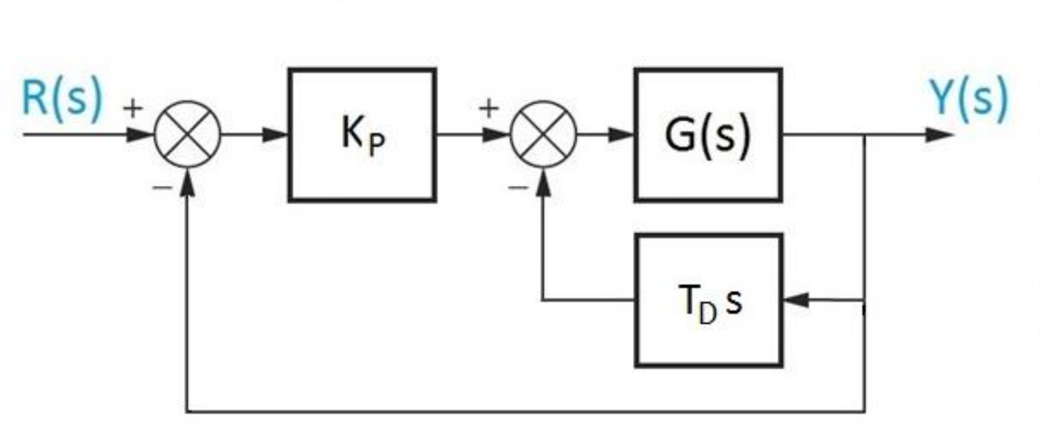
$$
e_\infty = \frac{5}{2K} = 0{,}8
$$

Projeto 7 – PD Série Ideal (usando alocação direta)



Projeto 8 – PD Misto Ideal (usando alocação direta)

Seja o sistema de controle:



Neste caso,

$$T(s) = \frac{2K_P}{s(s+1)(s+5) + 2T_D s + 2K_P}$$

ou seja,

$$\Delta(s) = s^3 + 6s^2 + (5 + 2T_D)s + 2K_P$$

Projeto 8 – PD Misto Ideal (usando alocação direta)

Igualando os polinômios

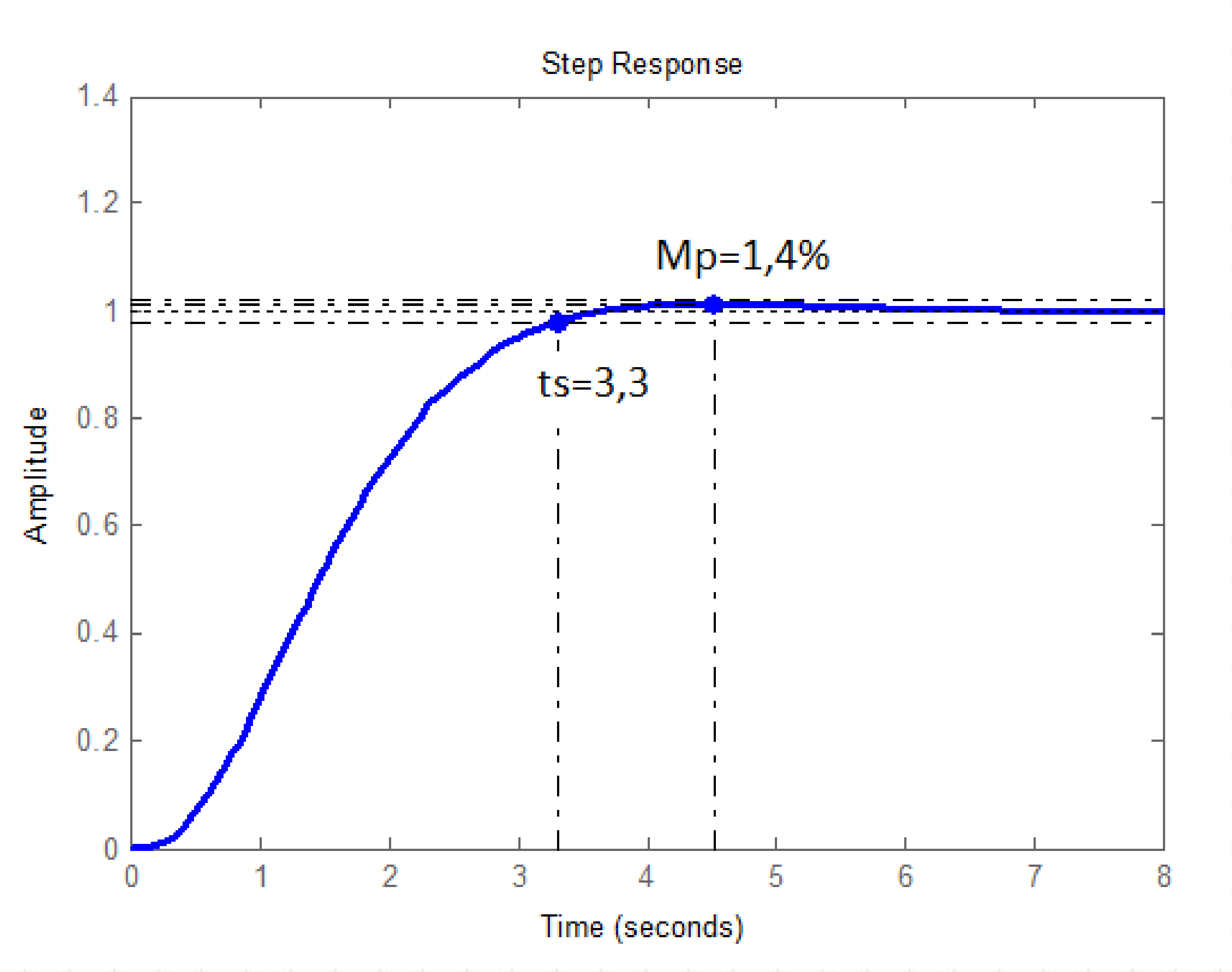
$$\begin{aligned} 2K_P &= 1{,}5625 p_3 \\ 5 + 2T_D &= 1{,}5625 + 2p_3 \\ 6 &= 2 + p_3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} K_P &= 3{,}125 \\ T_D &= 2{,}28 \\ p_3 &= 4 \end{aligned}$$

Assim,

$$T(s) = \frac{6,25}{s^3 + 6s^2 + 9,2625s + 6,25} \qquad \begin{aligned} p_{1,2} &= -1 \pm j0,75 \\ p_3 &= -4 \end{aligned}$$

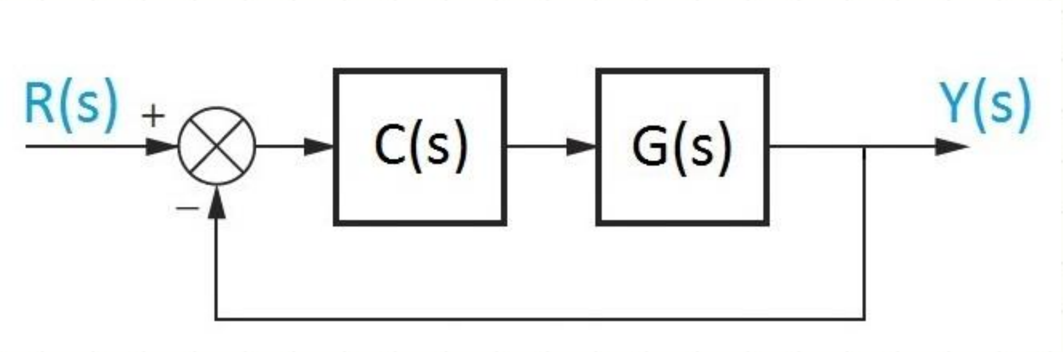
$$e_\infty = \frac{5 + 2T_D}{2K_P} = 1{,}53$$

Projeto 8 – PD Misto Ideal (usando alocação direta)



Projeto 9 – Controlador em Avanço (usando alocação direta e cancelamento Polo/Zero)

Seja o sistema de controle:



Considerando o cancelamento discutido anteriormente

$$C(s) = \frac{K(s+1)}{s+\alpha}$$

e

$$C(s)G(s) = \frac{2K}{s(s+5)(s+\alpha)}$$

Projeto 9 – Controlador em Avanço (usando alocação direta e cancelamento Polo/Zero)

Em malha fechada

$$\Delta(s) = s^3 + (5+\alpha)s^2 + 5\alpha s + 2K$$

Igualando os polinômios

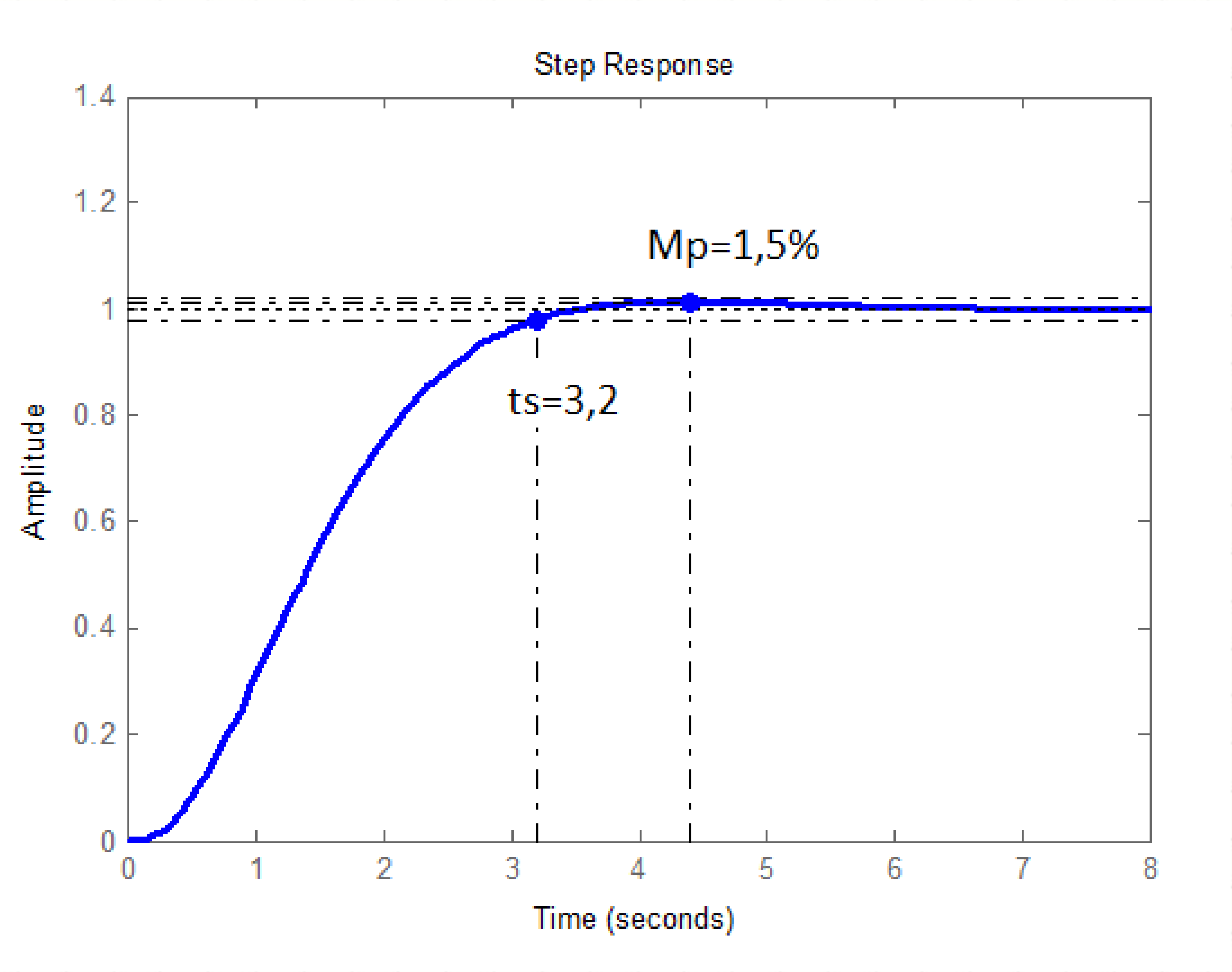
$$\begin{aligned} 2K &= 1{,}5625 p_3 & & K = 4{,}3132 \\ 5\alpha &= 1{,}5625 + 2p_3 & \Rightarrow \quad & \alpha = 2{,}5208 \\ 5+\alpha &= 2 + p_3 & & p_3 = 5{,}5208 \end{aligned}$$

Projeto 9 – Controlador em Avanço (usando alocação direta e cancelamento Polo/Zero)

$$T(s)=\frac{8{,}63}{s^3+7{,}52s^2+12{,}6s+8{,}63} \Rightarrow \begin{array}{l} p_{1,2}=-1\pm j0{,}75 \\ p_3=-5{,}55 \end{array}$$

$$e_\infty=\frac{5\alpha}{2K}=1{,}46$$

Projeto 9 – Controlador em Avanço (usando alocação direta e cancelamento Polo/Zero)



Exercícios Sugeridos

Fazer novos projetos por alocação direta:

a) Mantendo s_d=-1 ± j0,75, projetar um novo controlador em avanço, sem usar o cancelamento polo/zero.

b) Escolher novos polos desejados de malha fechada (novo s_d) e refazer os projetos para os controladores PD Série, PD Misto e Avanço.

Desafio: Fazer o projeto por alocação direta sem o cancelamento polo/zero.

Projetos por alocação direta – comparativo

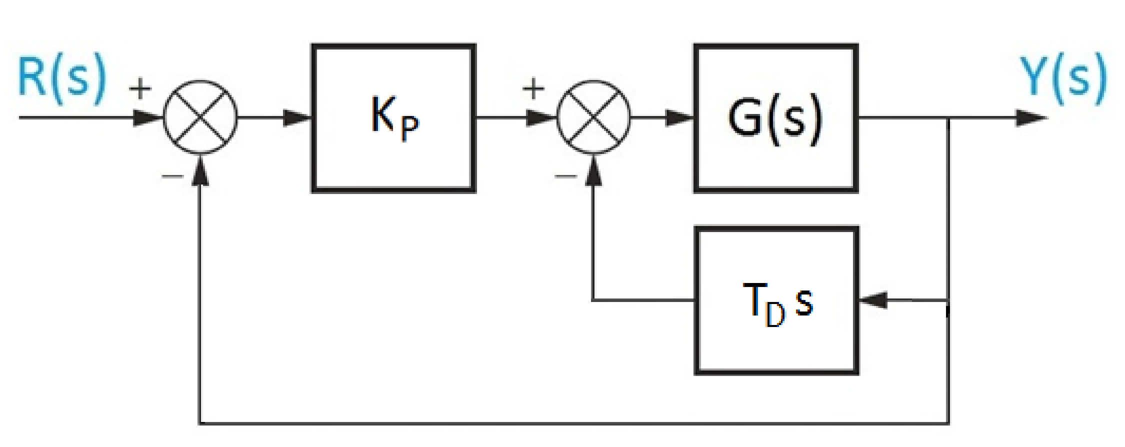
Projetos	Parâmetros	M_P	t_S	e_∞
7	K_P=3,125 e T_D=0,73	3,8%	4,2	0,8
8	K_P=3,125 e T_D=2,28	1,4%	3,3	1,53
9	α=2,52 e K=4,31	1,5%	3,25	1,46

Projeto 7 – PD série
Projeto 8 – PD Misto
Projeto 9 – Controlador em Avanço (com cancelamento)

$$M_P < 5\%$$
$$t_S < 5$$

Projeto 10 – PD Misto Ideal (usando gráfico de contorno das raízes)

Seja o sistema



sendo

$$T(s) = \frac{2K_P}{s(s+1)(s+5) + 2T_D s + 2K_P}$$

O erro de regime permanente será dado por:

$$Kv = \frac{2K_P}{5 + 2T_D} \quad \Rightarrow \quad e_\infty = \frac{5 + 2T_D}{2K_P}$$

Projeto 10 – PD Misto Ideal
(usando gráfico de contorno das raízes)

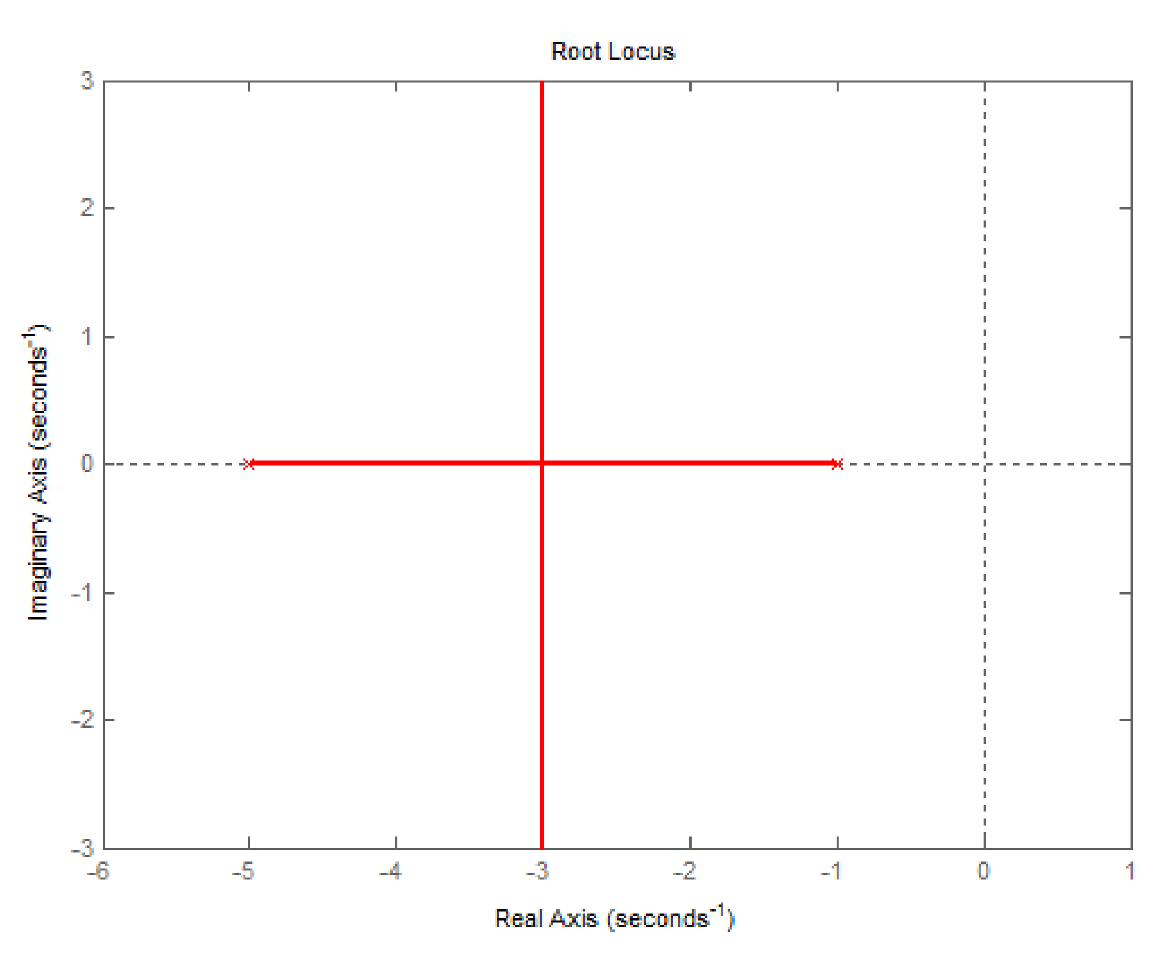
Metodologia

Usar o gráfico de **contorno das raízes** para definir faixas de valores para K_P e T_D que garantam as especificações de desempenho.

1ª etapa: Para K_P=0, o L.R será traçado para

$$1 + T_D \frac{2}{s^3 + 6s^2 + 5s} = 0$$

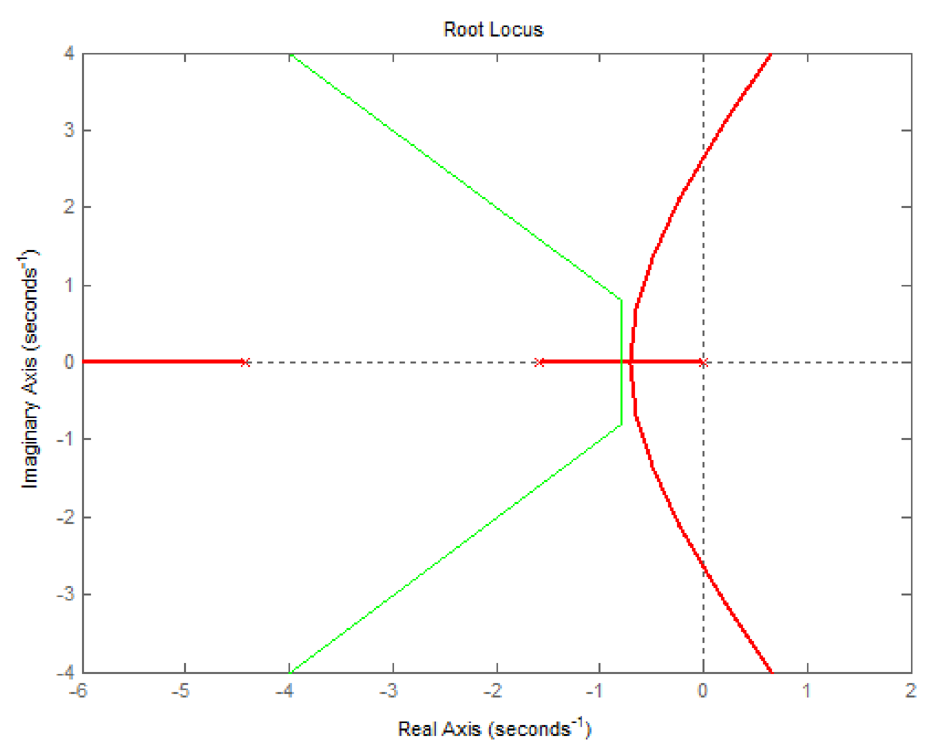
Projeto 10 – PD Misto Ideal (usando gráfico de contorno das raízes)



Projeto 10 – PD Misto Ideal (usando gráfico de contorno das raízes)

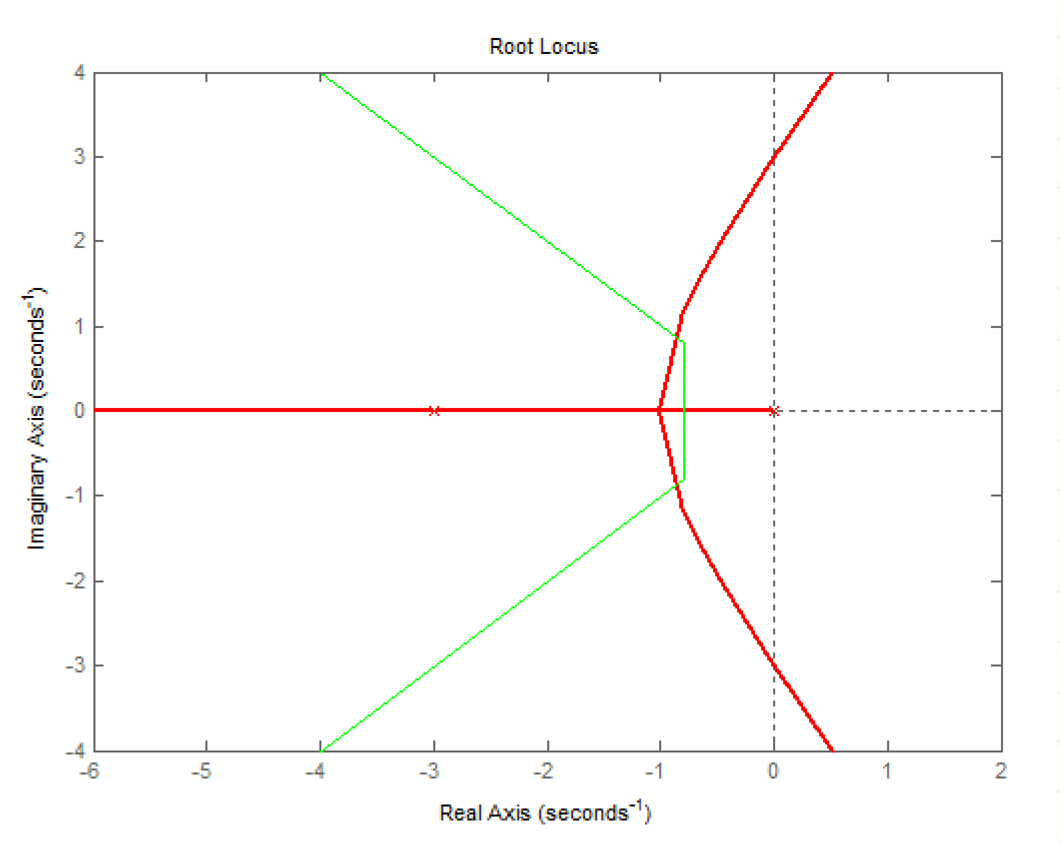
2ª etapa: Variação de K_P para valores fixos de T_D.

$$T_D = 1 \quad \rightarrow \quad 1 + K_P \frac{2}{s^3 + 6s^2 + 7s} = 0$$

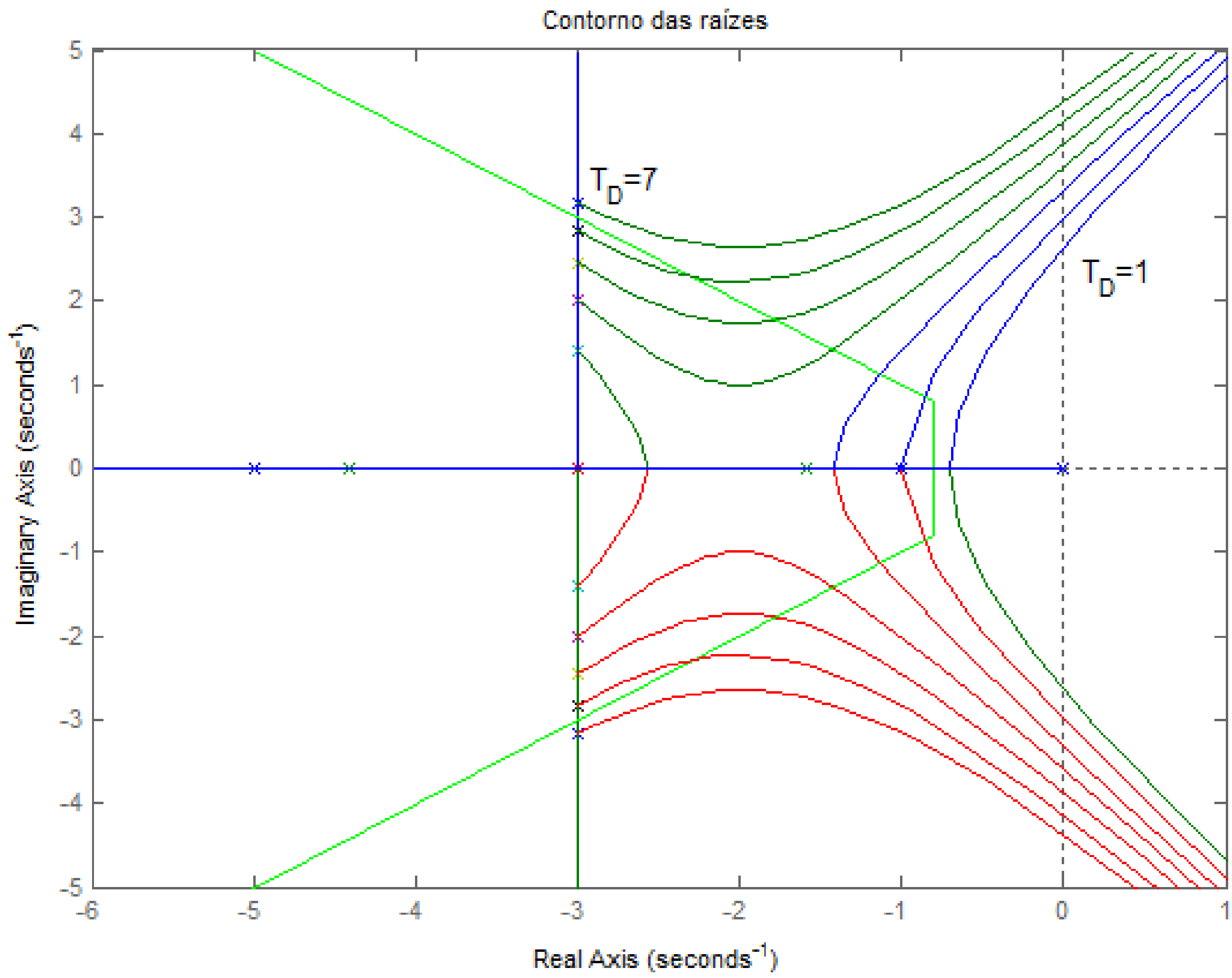


Projeto 10 – PD Misto Ideal
(usando gráfico de contorno das raízes)

$$T_D = 2 \quad \rightarrow \quad 1 + K_P \frac{2}{s^3 + 6s^2 + 9s} = 0$$



Projeto 10 – PD Misto Ideal (usando gráfico de contorno das raízes)



Projeto 10 – PD Misto Ideal (usando gráfico de contorno das raízes)

A partir do gráfico de contorno das raízes obtém-se os valores de K_P que permitem alocar os polos de malha fechada na região desejada:

$T_D = 1$	*fora da região*
$T_D = 2$	$1{,}9 < K_P < 3{,}3$
$T_D = 3$	$2{,}7 < K_P < 4{,}8$
$T_D = 4$	$3{,}5 < K_P < 6{,}3$
$T_D = 5$	$4{,}3 < K_P < 7{,}7$
$T_D = 6$	$5{,}1 < K_P < 7{,}4$
$T_D = 7$	*fora da região*

Projeto 10 – PD Misto Ideal (usando gráfico de contorno das raízes)

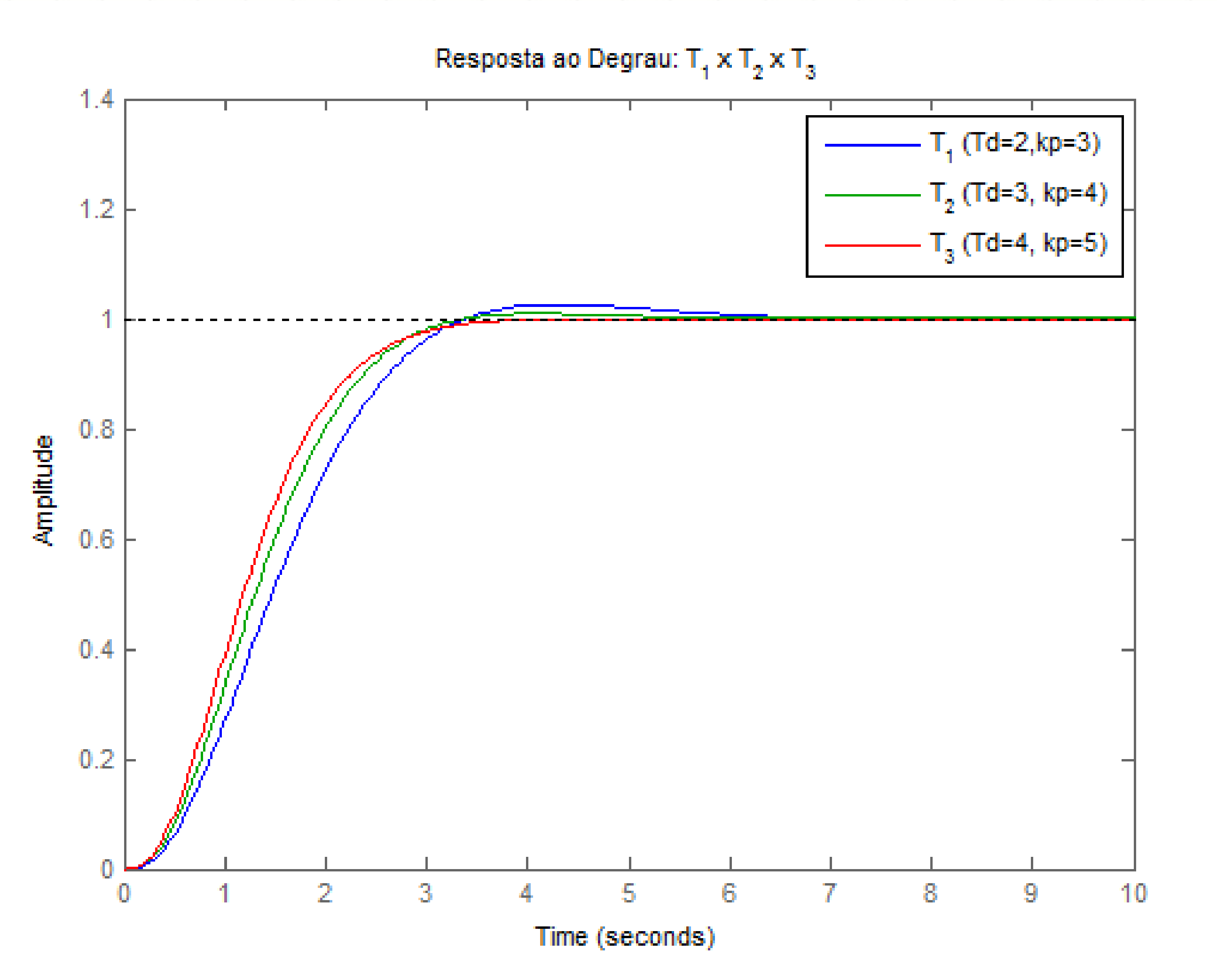
Escolhidos alguns valores de K_P e T_D (nas faixas anteriores) tem-se:

$$\mathrm{T}_1: \begin{cases} T_D = 2 \\ K_P = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_P = 2{,}5\% \\ t_S = 4{,}98 \end{cases} \Rightarrow e_\infty = 1{,}5$$

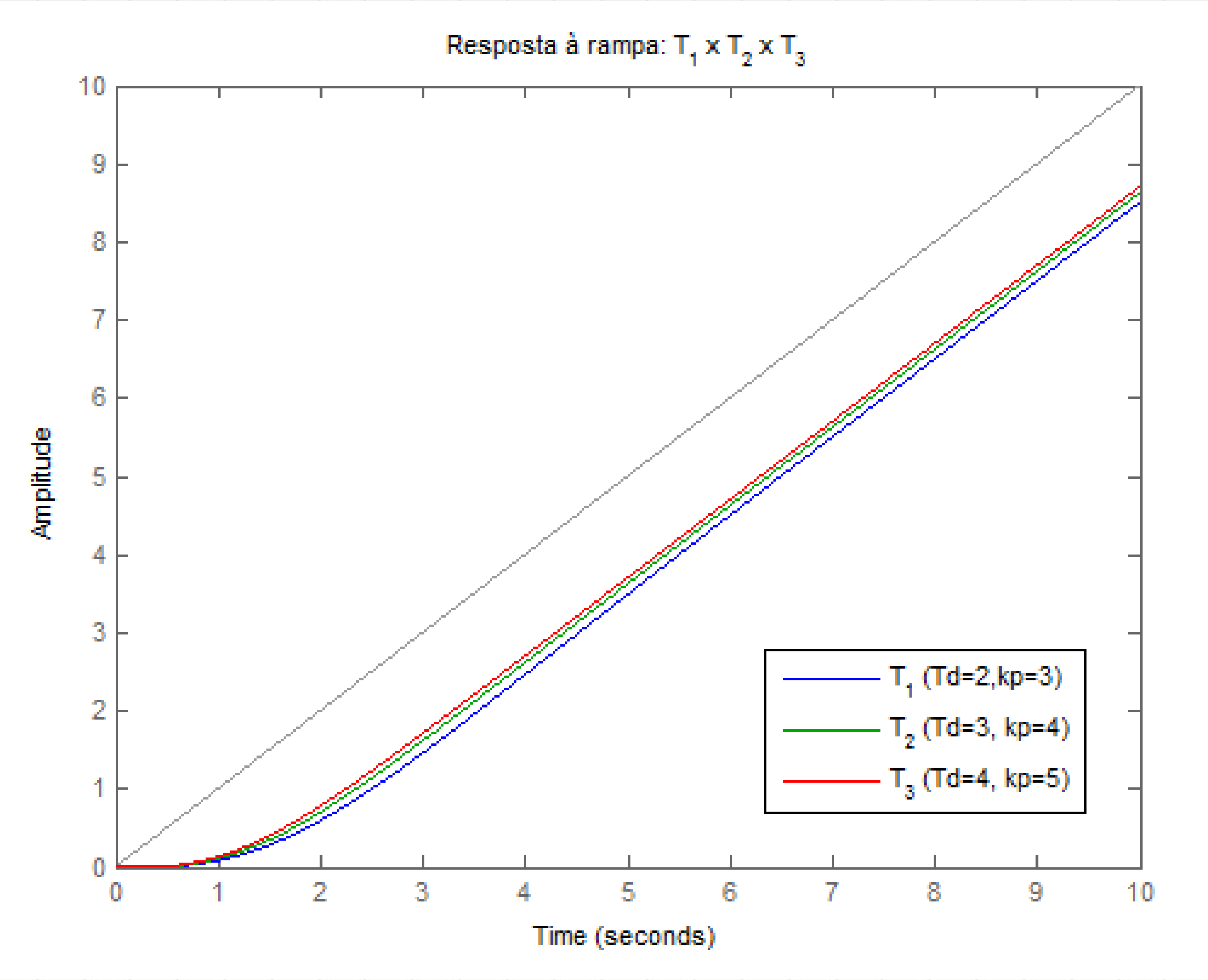
$$\mathrm{T}_2: \begin{cases} T_D = 3 \\ K_P = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_P = 1\% \\ t_S = 2{,}99 \end{cases} \Rightarrow e_\infty = 1{,}4$$

$$\mathrm{T}_3: \begin{cases} T_D = 4 \\ K_P = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_P = 0\% \\ t_S = 3{,}06 \end{cases} \Rightarrow e_\infty = 1{,}3$$

Projeto 10 – PD Misto Ideal (usando gráfico de contorno das raízes)



Projeto 10 – PD Misto Ideal
(usando gráfico de contorno das raízes)



	Projeto	Parâmetros	M_P	t_S	e_∞
1	PD Misto (LR)	T_D=3,5 e K_P=5	1,5%	2,50	1,20
2	PD Série (LR) com cancelamento	T_D=1 e K_P=5	1,7%	1,16	0,50
3	Avanço (LR) - fixa K	α=3 e K=5	0,3%	3,58	1,50
4	Avanço (LR) - fixa α	α=4 e K=8	0,3%	2,95	1,25
5	Avanço (LR) - define s_d com cancelamento	b=1, α=2,54 e K=4,36	1,5%	3,20	1,45
6	Avanço (LR) - define s_d sem cancelamento	b=1,24, α=5 e K=12,73	4,2%	4,50	0,98
7	PD Série (AD)	T_D=0,73 e K_P=3,125	3,2%	4,20	0,80
8	PD Misto (AD)	T_D=2,28 e K_P=3,125	1,4%	3,30	1,53
9	Avanço (AD) com cancelamento	b=1, α=2,52 e K=4,31	1,5%	3,25	1,46
10	PD Misto (LR) contorno das raízes	T_D=4 e K_P=5	0%	3,10	1,30