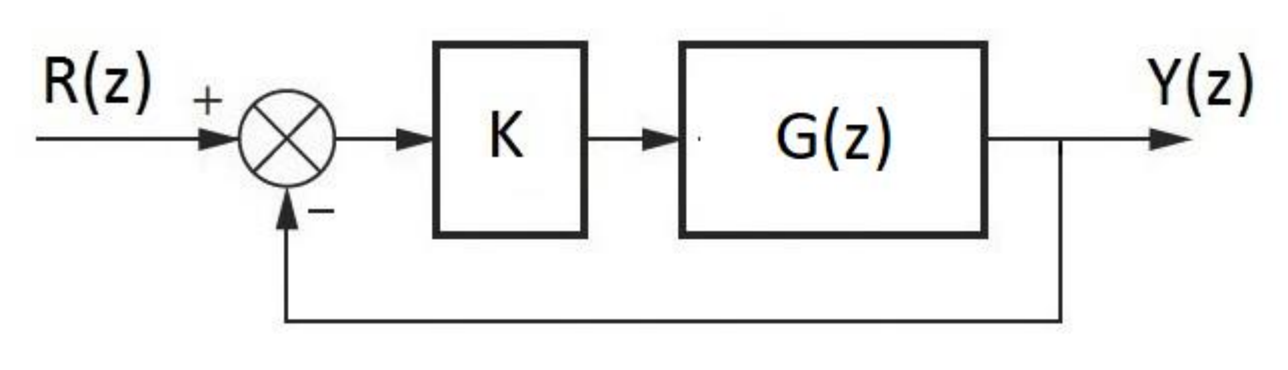
Lugar das Raízes para Sistemas Discretos

Profa. Cristiane Paim

Introdução

Seja o sistema discreto:



A função de transferência de malha fechada é dada por:

$$T(z) = \frac{KG(z)}{1 + KG(z)}$$

Introdução

Os polos de malha fechada serão definidos pelas raízes da equação característica:

$$\Delta(z) = 1 + KG(z) = 0$$

ou

$$G(z) = -\frac{1}{K}$$

Assim, as condições de módulo e fase serão idênticas ao caso contínuo.

Lugar das Raízes para sistemas discretos

Para sistemas discretos (K>0):

$$\left| G(z) \right| = \frac{1}{K}$$

Condição de Módulo

$$\angle G(z) = 180^\circ (2q+1)$$

Condição de Fase

Desta forma, as regras para o traçado do Lugar das Raízes serão as mesmas do caso contínuo com exceção da regra associada à estabilidade.

A interseção com o eixo imaginário torna-se dispensável, uma vez que a estabilidade agora será definida pelo círculo unitário.

Lugar das Raízes para sistemas discretos

A interseção dos ramos do Lugar das Raízes com o círculo unitário será determinada garantindo que o ponto

$$z = a \pm jb$$

seja a solução da equação característica

$$\Delta(z) = 1 + KG(z) = 0$$

com módulo unitário:

$$|a \pm jb| = 1$$

Lugar das Raízes para sistemas discretos

Portanto, para encontrar a interseção do Lugar das Raízes com o círculo unitário é necessário satisfazer três condições:

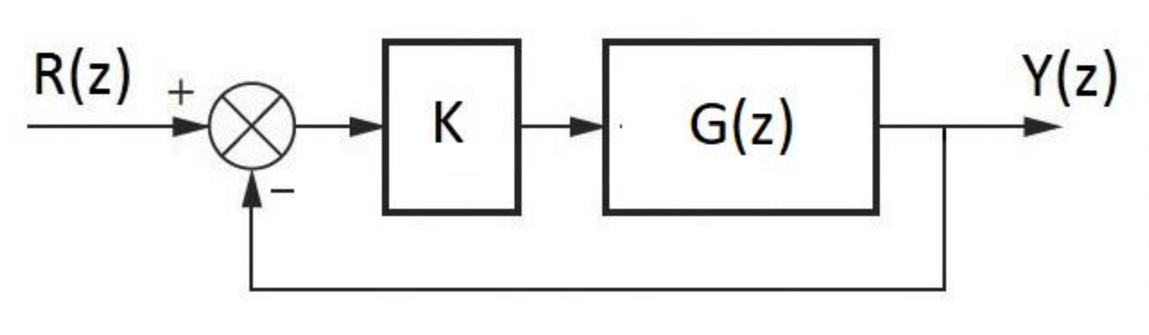
$$\mathrm{Re}\{\Delta(z)\} = 0$$

$$\mathrm{Im}\{\Delta(z)\} = 0$$

$$|z| = 1 \quad \Rightarrow \quad a^2 + b^2 = 1$$

Exemplo 1

Considerando um sistema de controle com realimentação unitária



com a função de transferência de malha aberta abaixo, deseja-se traçar o lugar das raízes para K>0.

$$G(z) = \frac{z+1}{(z-1)(z-0,5)}$$

Exemplo 1

Eixo real:

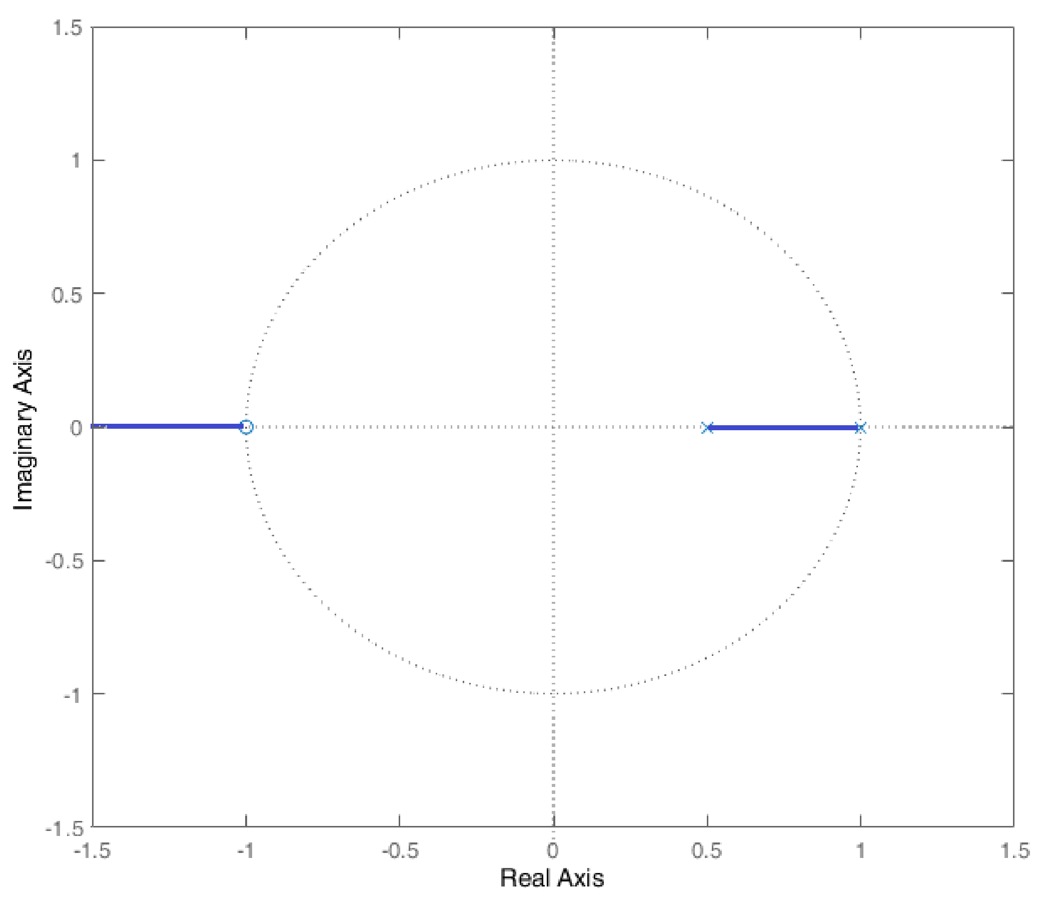
(-∞,-1] [0,5 , 1]

Assíntotas:

θa=180°

Ângulos de partida e chegada:

$$\phi_1 = 0^\circ$$
$$\phi_2 = 180^\circ$$
$$\psi = 180^\circ$$

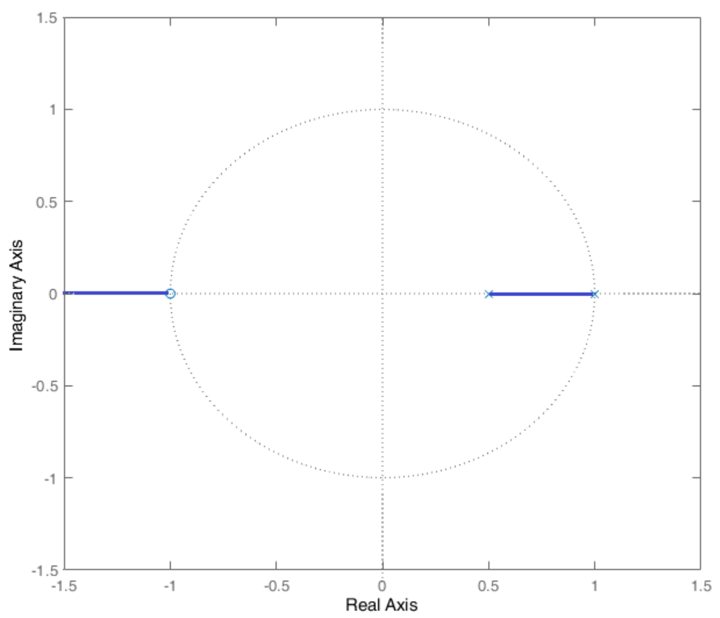


Exemplo 1

Cruzamento com eixo imaginário (opcional): será obtido apenas para dar maior precisão ao esboço do LR.

$$\Delta(z) = z^2 - 1,5z + 0,5 + K(z+1) = 0 \qquad z = jb$$

$$\begin{cases} K - b^2 + 0,5 = 0 \\ b(K - 1,5) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} b = 0 & K = -0,5 \notin LR \\ K = 1,5 & b = \pm\sqrt{2} = \pm 1,41 \end{matrix}$$



O LR cruza o eixo imaginário em b=±1,41, ou seja, fora do círculo unitário.

Exemplo 1

Ramificação: dK/dz=0

$$K = -\frac{z^2 - 1{,}5z + 0{,}5}{z+1} \qquad dK/dz = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 + 2z - 2 = 0$$

$$\begin{cases} z = -2{,}73 \in LR & K = 6{,}96 \\ z = \ 0{,}73 \in LR & K = 0{,}036 \end{cases}$$

Logo, existem dois pontos de ramificação.

Exemplo 1

Intersecção com o círculo unitário

Seja

$$\Delta(z) = z^2 - 1{,}5z + 0{,}5 + K(z+1) = 0$$

para z = a + jb tem-se:

$$\Delta(z) = a^2 + j2ab - b^2 - 1{,}5a - j1{,}5b + 0{,}5 + Ka + jKb + K = 0$$

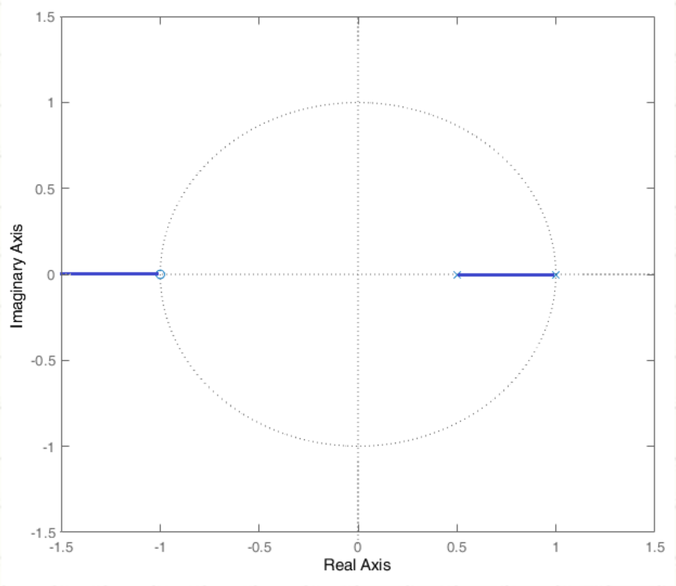
$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\{\Delta(z)\} = 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 - b^2 - 1{,}5a + 0{,}5 + K(a+1) = 0 && (1)\\
&\mathrm{Im}\{\Delta(z)\} = 0 \quad \Rightarrow \quad b(K - 1{,}5 + 2a) = 0 && (2)\\
&a^2 + b^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 1 - a^2 && (3)
\end{aligned}$$

Exemplo 1

De (2) e (3) tem-se

$$b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \pm 1$$

$$b \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} K = 1,5 - 2a \\ b^2 = 1 - a^2 \end{array}$$



Para b=0

$$a = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} a = 1 & K = 0 \\ a = -1 & K = +\infty \end{array}$$

Para $b \neq 0$, substituindo $K=1,5-2a$ e $b^2=1-a^2$ em (1) chega-se a

$$a = 0,5$$

Exemplo 1

Sendo a = 0,5 obtém-se

$$K = 0{,}5 \quad \text{e} \quad \mathrm{b} = 0{,}86$$

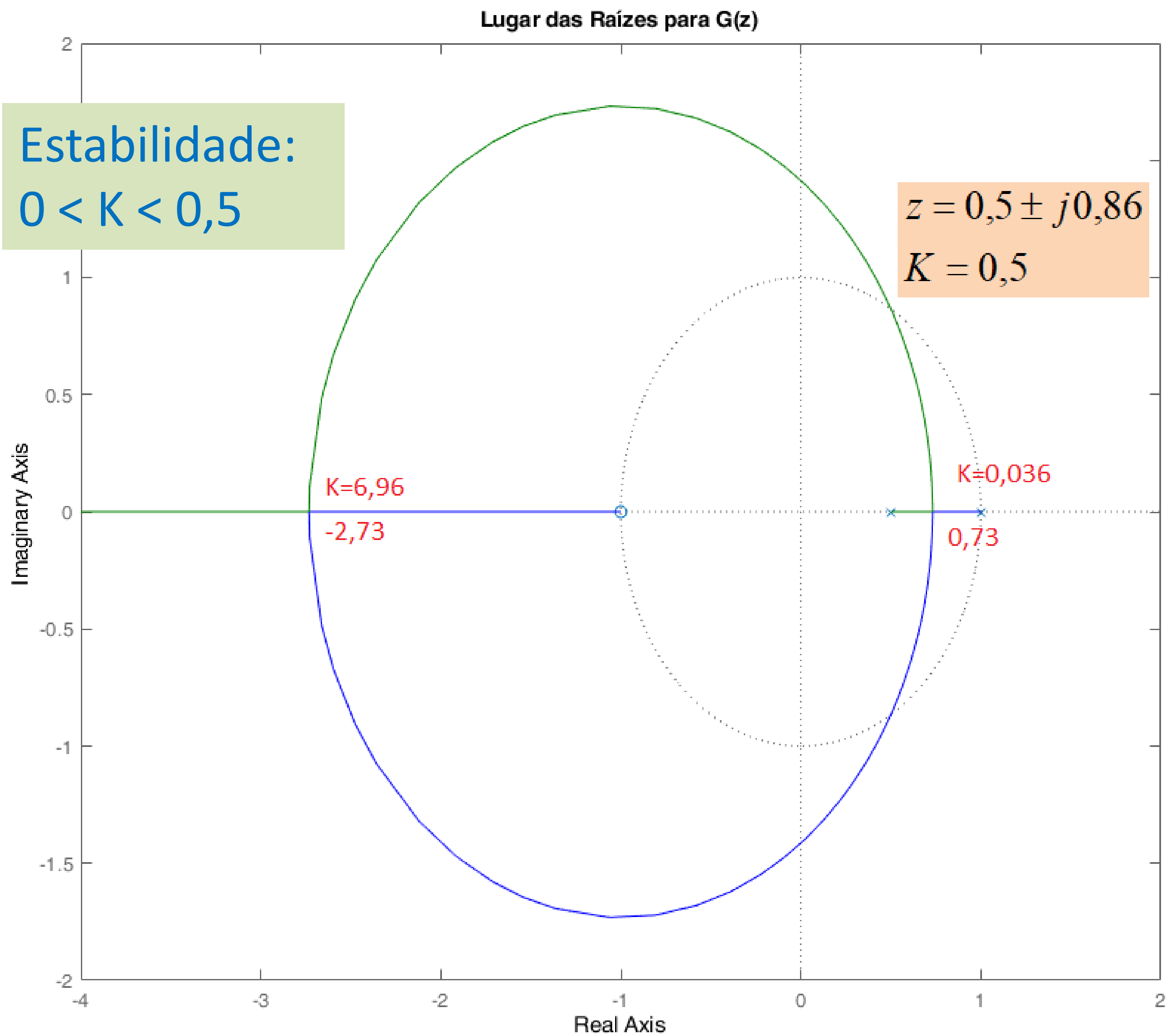
Portanto, a intersecção com o círculo unitário ocorre em

$$z = 0{,}5 \pm j0{,}86 \quad \text{para} \quad K = 0{,}5$$

Logo, o sistema é estável para

$$0 < K < 0{,}5$$

Exemplo 1



Estabilidade:
0 < K < 0,5

$z = 0{,}5 \pm j0{,}86$
$K = 0{,}5$

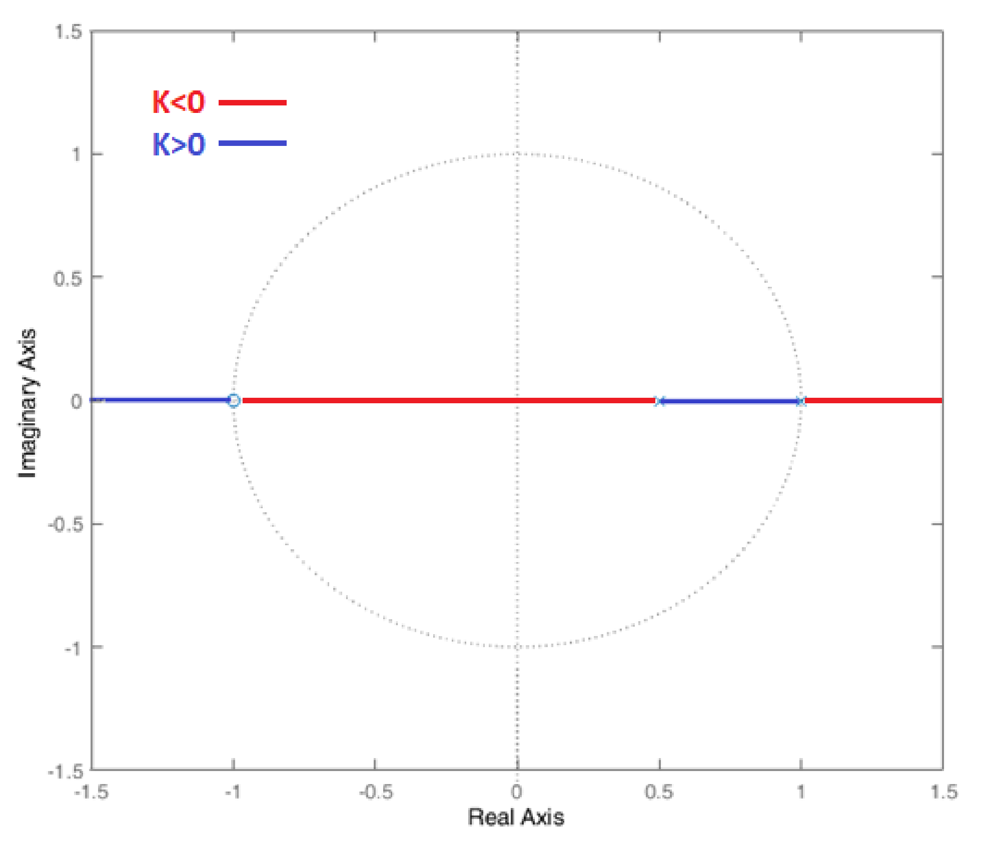
Exemplo 2

Refazer o exemplo anterior considerando $-\infty < K < +\infty$

Eixo real:

K>0: (-∞,-1) (0,5 , 1)

K<0: (-1, 0,5) (1, + ∞)



Assíntotas:

K>0 : θa=180°

K<0: θl=0°

Exemplo 2

Os pontos de ramificação e a interseção com o círculo unitário foram obtidos anteriormente e não sofrem alterações.

Ramificação (já determinada)

$$K = -\frac{z^2 - 1{,}5z + 0{,}5}{z+1} \qquad dK/dz = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 + 2z - 2 = 0$$

$$\begin{cases} z = -2{,}73 \in LR & K = 6{,}96 \\ z = \ 0{,}73 \in LR & K = 0{,}036 \end{cases}$$

Portanto, não existe ramificação para valores negativos de K.

Exemplo 2

Interseção com o círculo unitário (obtida anteriormente)

$$a = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} a = 1 & K = 0 \\ a = -1 & K = +\infty \end{matrix}$$

$$z = 0{,}5 \pm j0{,}86 \quad \Rightarrow \quad K = 0{,}5$$

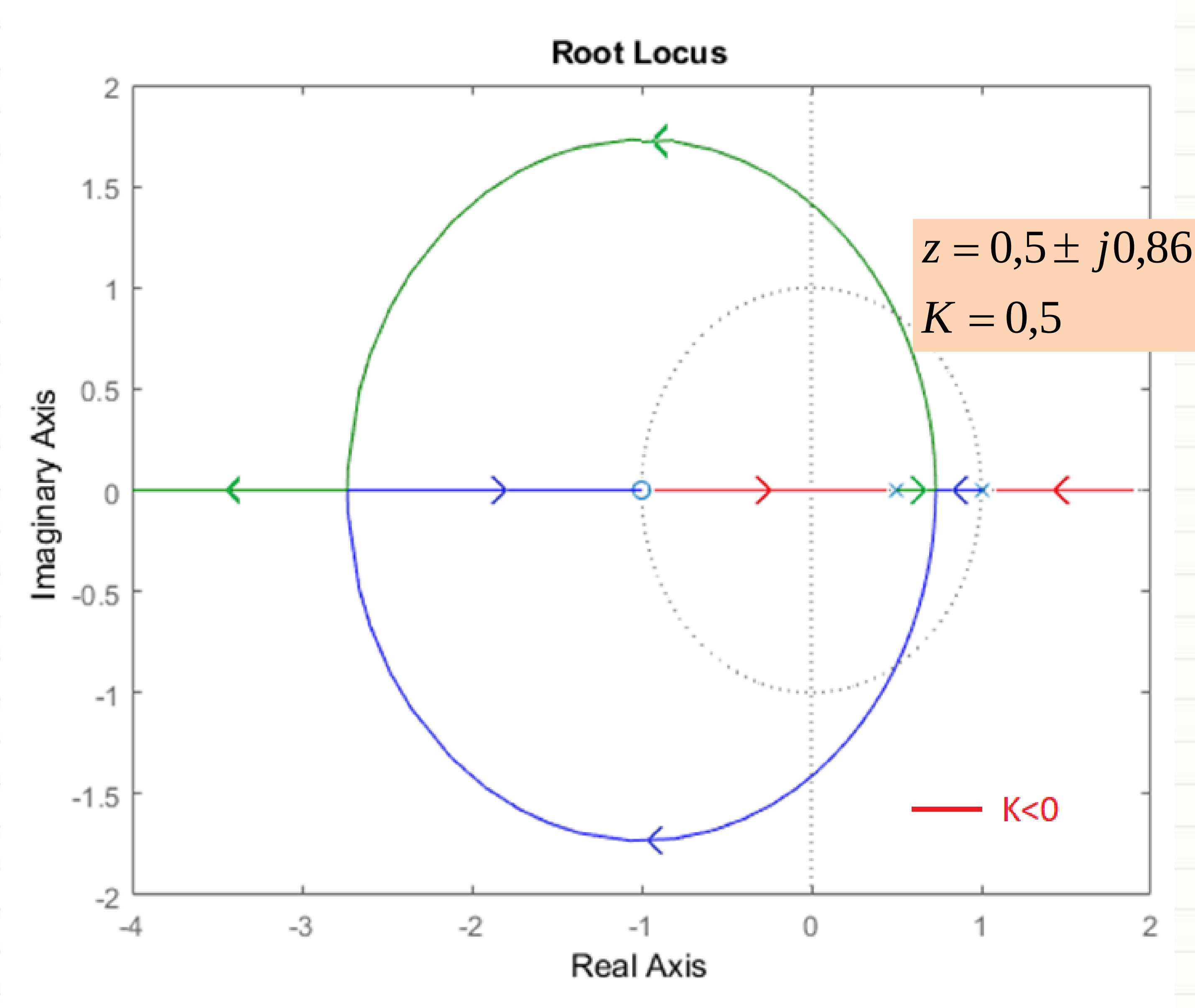
O sistema é estável para valores positivos de ganho:

$$0 < K < 0{,}5$$

Ou seja, <u>não existe interseção com o círculo unitário para valores negativos de ganho</u>.

Assim, para K negativo, os ramos do LR se deslocam do zero real e da assíntota (zero no infinito) diretamente para os polos de malha aberta (sobre o eixo real).

Exemplo 2



$$z = 0{,}5 \pm j0{,}86$$

$$K = 0{,}5$$

Sugestões de Leitura

Sistemas de Controle Modernos
R. Dorf & R. Bishop
Capítulo 13 – Sistemas de Controle Digital. Item 13.10

Sistemas de Controle para Engenharia
G. Franklin, J. Powel & A. Emami-Naeini (6ª edição)
Capítulo 8 – Controle Digital. Item 8.6.1.

Aplicações do Lugar das Raízes para Sistemas Discretos

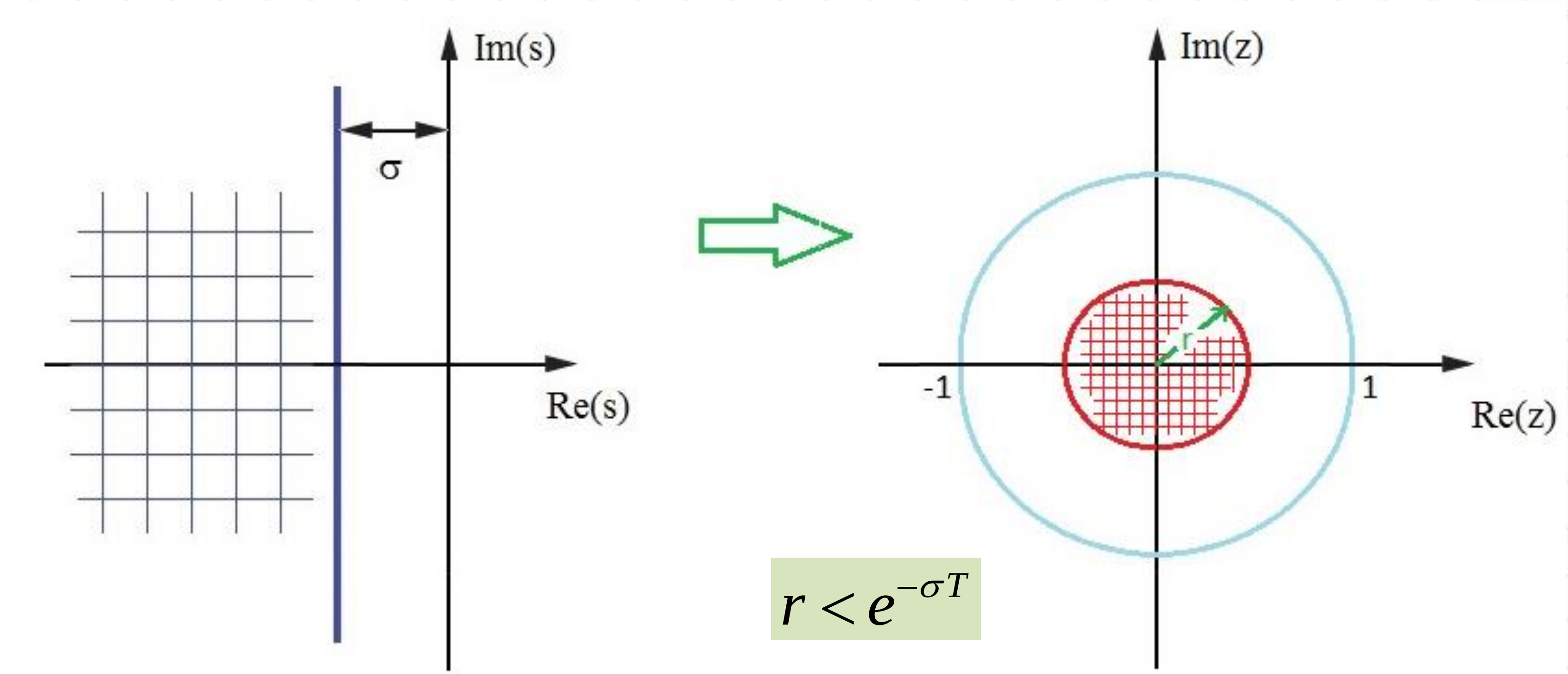
Introdução

Da mesma forma que no caso contínuo, a principal aplicação do Lugar das Raízes de um sistema discreto é usar a informação deste para projetar parâmetros de controladores de modo a atender critérios de desempenho.

Serão consideradas as regiões vistas anteriormente para garantir as especificações da resposta transitória no caso discreto.

Região desejada para os polos de malha fechada

Tempo de acomodação

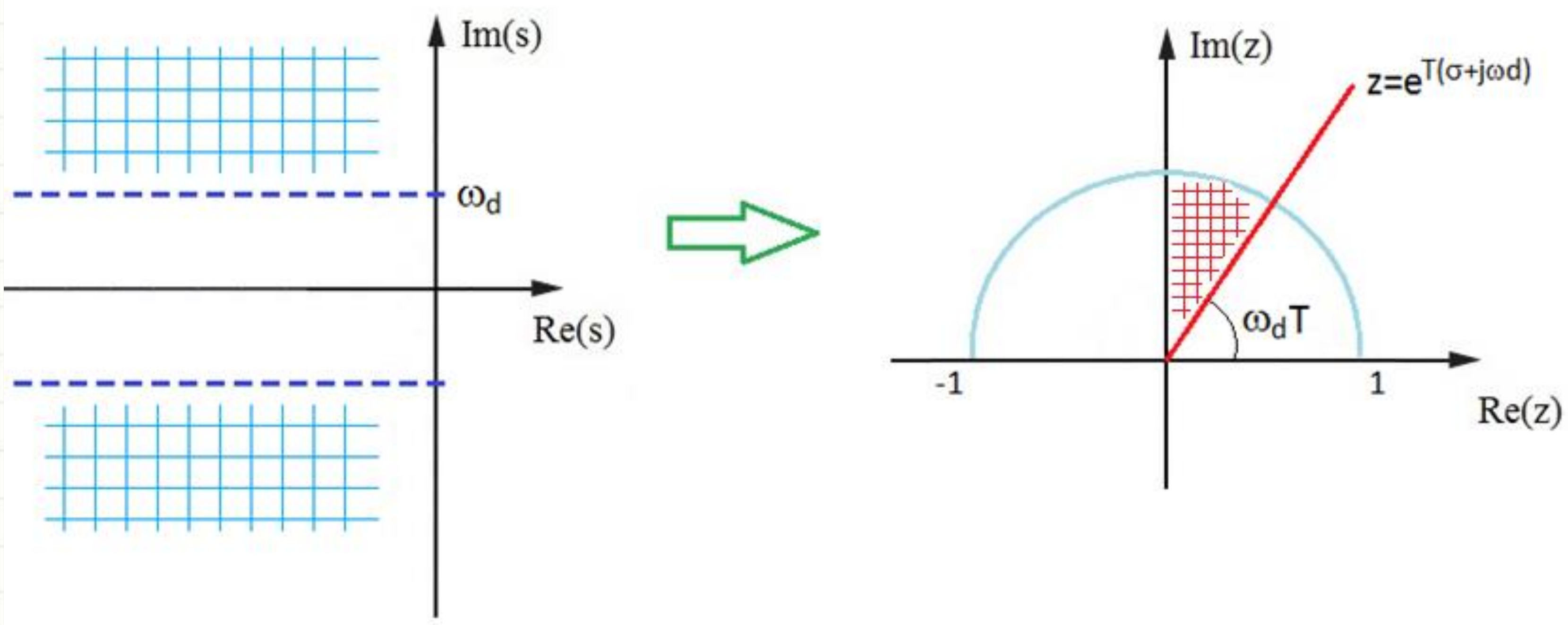


$$r < e^{-\sigma T}$$

$$t_s = \frac{4}{\xi \omega_n} \quad \rightarrow \quad \sigma \text{ constane}$$

Região desejada para os polos de malha fechada

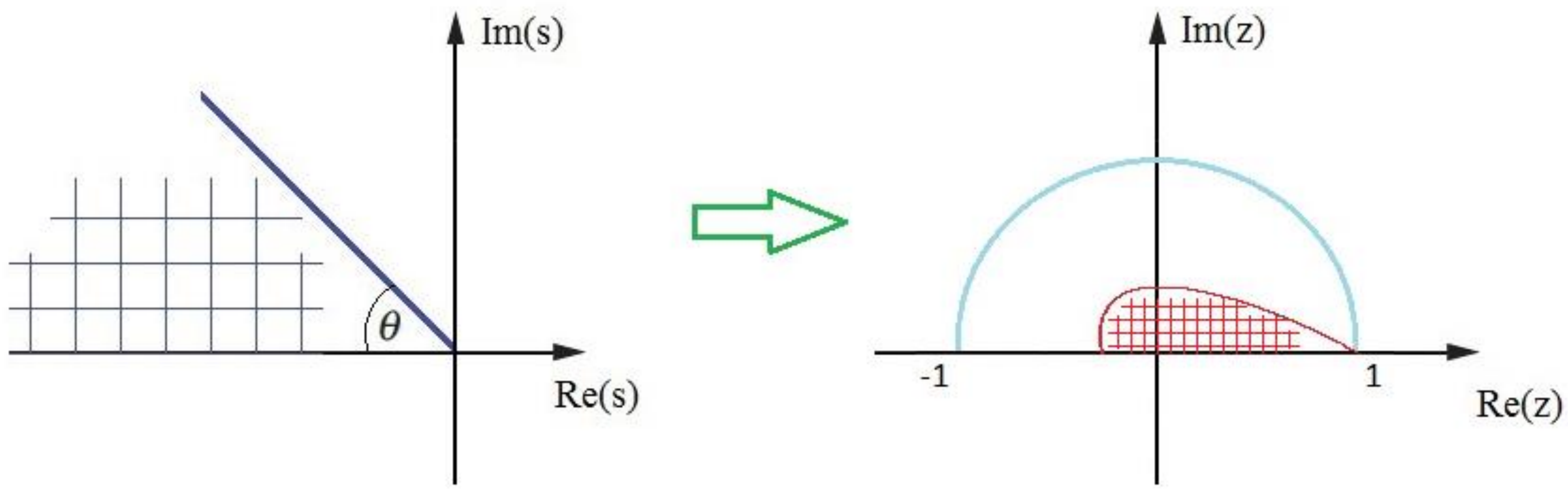
Tempo de pico



$$t_P = \frac{\pi}{\omega_d} \quad \rightarrow \quad \omega_d \text{ constante}$$

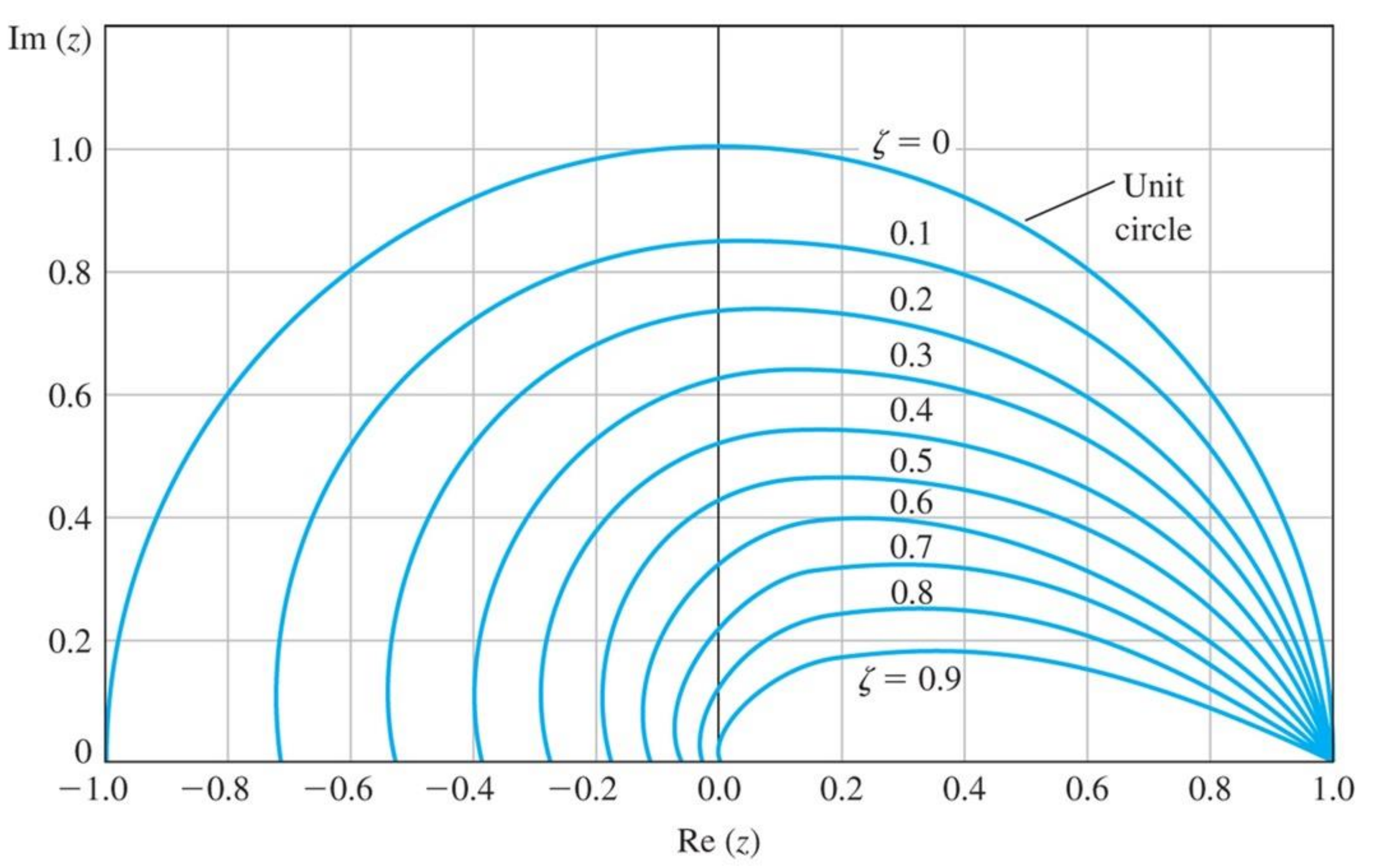
Região desejada para os polos de malha fechada

Sobressinal Máximo



Região desejada para os polos de malha fechada

Sobressinal Máximo



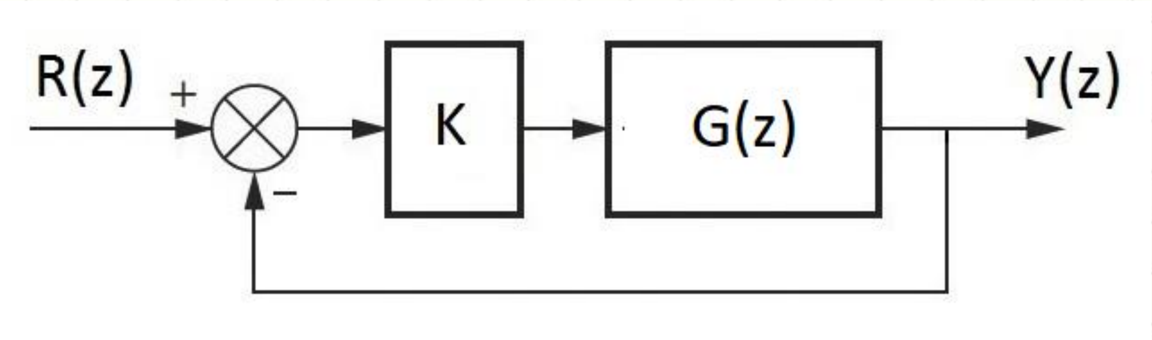
Região desejada para os polos de malha fechada

ξ	$\omega_d/\omega_s=0{,}50$ (interseção com eixo real)	$\omega_d/\omega_s=0{,}25$ (interseção com eixo imaginário)
0	1	1
0,1	0,7292	0,8540
0,2	0,5266	0,7257
0,3	0,3723	0,6102
0,4	0,2538	0,5038
0,5	0,1630	0,4038
0,6	0,0948	0,3079
0,7	0,0460	0,2144
0,8	0,0015	0,1231
0,9	0,0002	0,0390
1	0	0

Os valores para a interseção com o eixo real estão apresentados em módulo.

Exemplo 3

Seja o sistema visto anteriormente



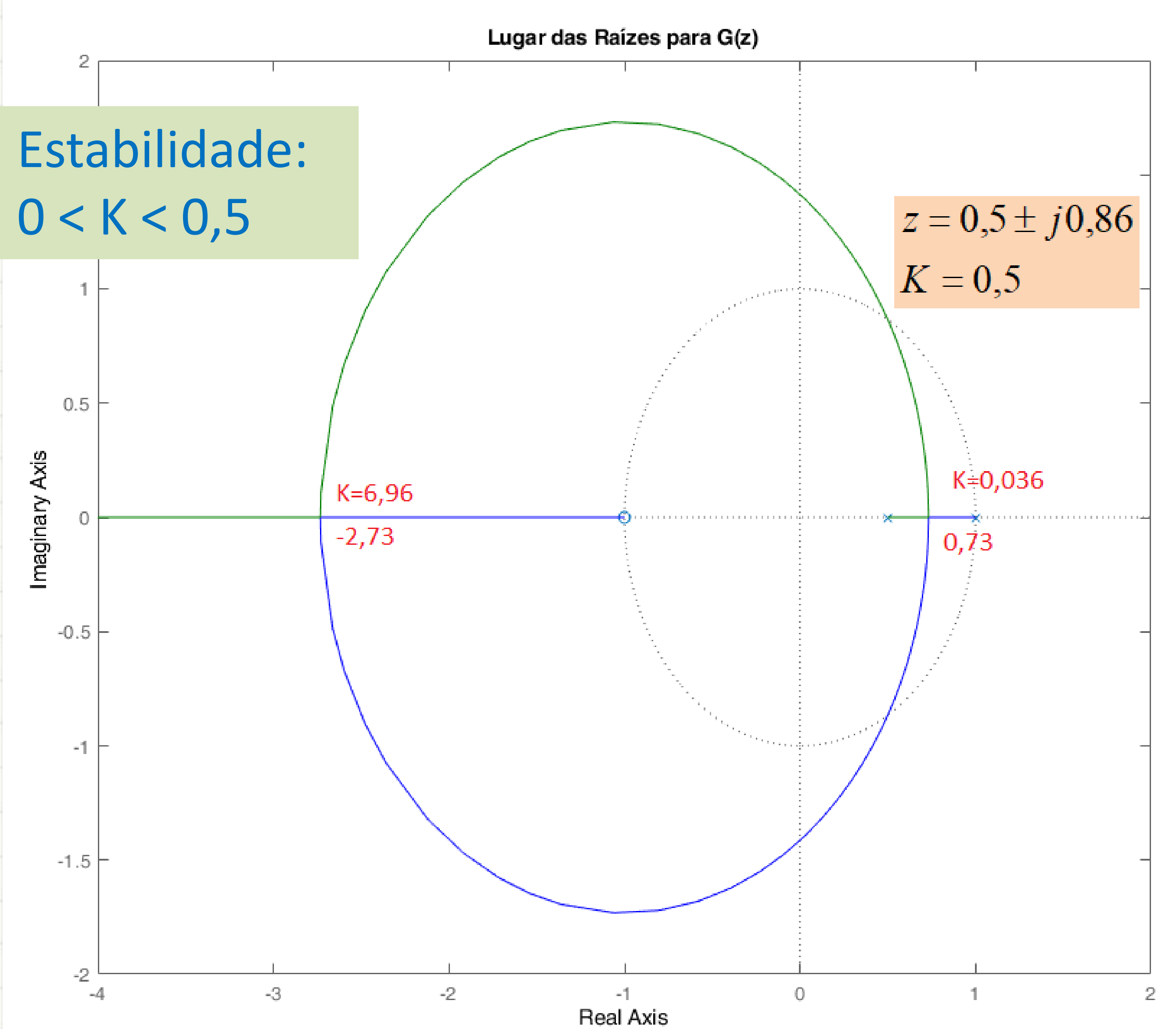
com

$$G(z) = \frac{z+1}{(z-1)(z-0,5)}$$

No exemplo 1, foi traçado o Lugar das Raízes para K > 0 e no exemplo 2 foi considerada toda a variação possível: $-\infty < K < +\infty$.

Lugar das Raízes para o Exemplo 1 (K>0)

Estabilidade:
$0 < K < 0,5$



Exemplo 3

Deseja-se que a resposta ao degrau unitário tenha um tempo de acomodação menor do que 20 segundos. O período de amostragem utilizado para obtenção do modelo discreto foi T=1.

A partir da especificação tem-se

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} < 20 \quad \Rightarrow \quad \xi\omega_n > 0{,}2$$

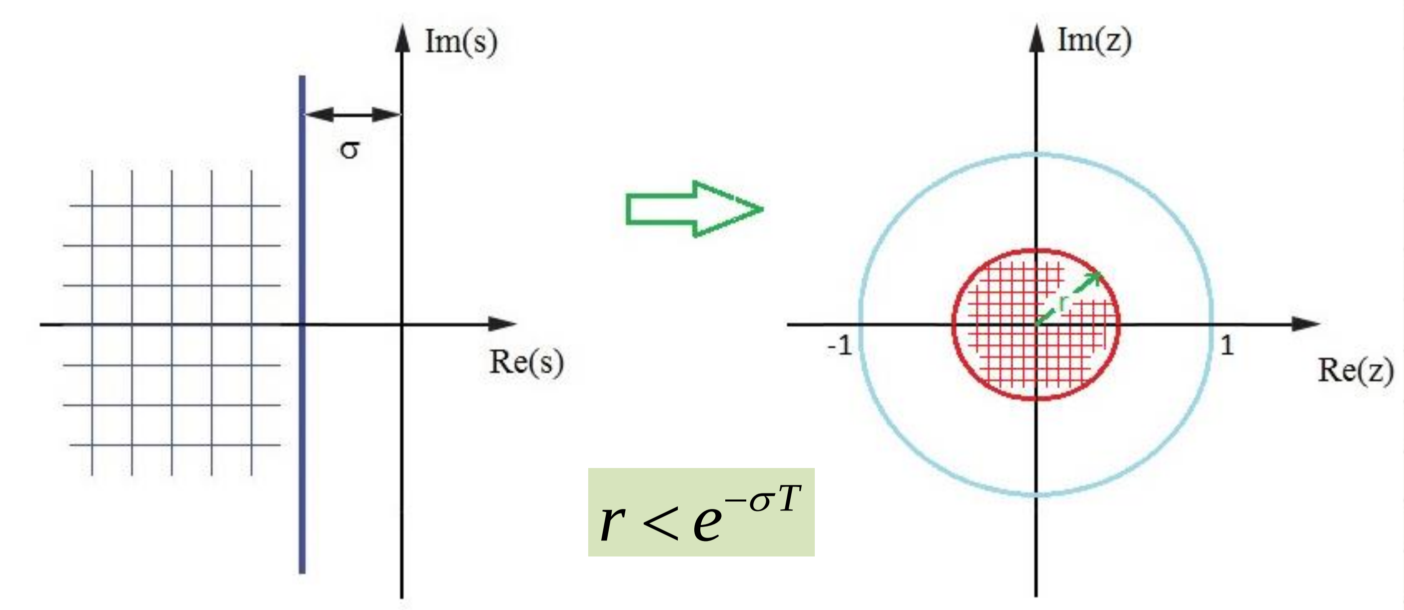
(tempo contínuo)

Exemplo 3

Em tempo discreto:

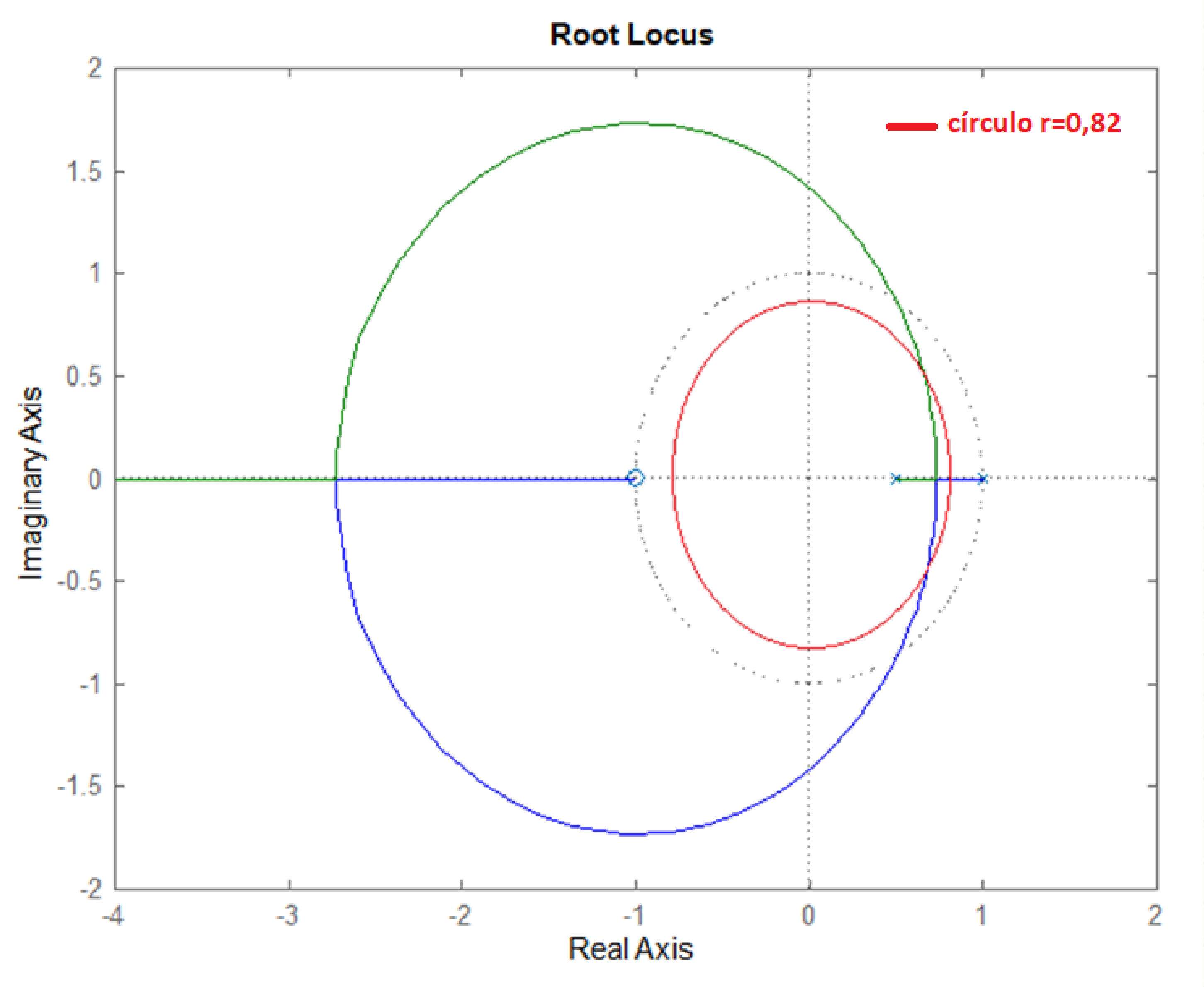
$$r = e^{-\xi\omega_n T} = 0{,}82 \quad \Rightarrow \quad r < 0{,}82$$

Assim, para atender a especificação de tempo de acomodação, os polos de malha fechada precisam estar dentro do círculo de raio 0,82.



$$r < e^{-\sigma T}$$

Exemplo 3



Root Locus
círculo r=0,82
Imaginary Axis
Real Axis
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-4
-3
-2
-1
0
1
2

Exemplo 3

Portanto, é necessário encontrar a **interseção do LR com o círculo de raio 0,82**. Isto será obtido por:

$$\begin{array}{lcll}
\mathrm{Re}\{\Delta(z)\}=0 & \Rightarrow & a^2-b^2-1,5a+0,5+K(a+1)=0 & (1) \\
\mathrm{Im}\{\Delta(z)\}=0 & \Rightarrow & b(K-1,5+2a)=0 & (2) \\
a^2+b^2=0,82^2 & \Rightarrow & b^2=0,67-a^2 & (3)
\end{array}$$

De (2) e (3)

$$\begin{array}{lcl}
b=0 & \Rightarrow & a=\pm 0,82 \\
b\neq 0 & \Rightarrow & \begin{array}{l} K=1,5-2a \\ b^2=0,67-a^2 \end{array}
\end{array}$$

Exemplo 3

Para b=0, obtém-se:

$$a = +0{,}82 \quad \Rightarrow \quad K = 0{,}0316$$
$$a = -0{,}82 \quad \Rightarrow \quad K = -1{,}3347$$

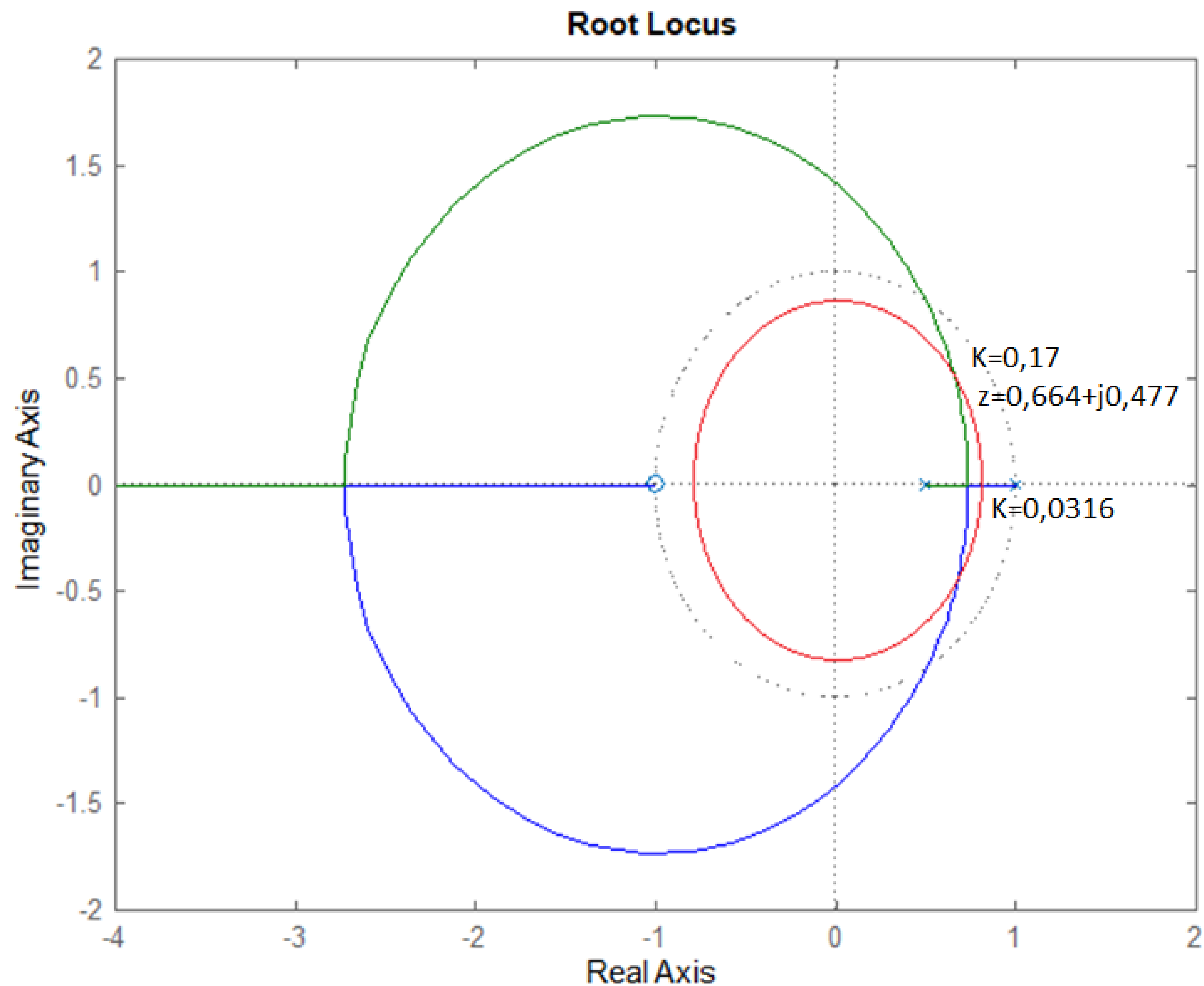
Para b≠0 (substituindo K e b^2 na equação 1), obtém-se:

$$a = 0{,}665$$
$$b = 0{,}477$$
$$K = 0{,}17$$

Assim, a **interseção com o círculo de raio 0,82** ocorre em

$$z = 0{,}665 \pm j0{,}477 \quad \text{para} \quad K = 0{,}17$$

Exemplo 3



Root Locus
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-4
-3
-2
-1
0
1
2
Real Axis
Imaginary Axis
K=0,17
z=0,664+j0,477
K=0,0316

Exemplo 3

Assim, para atender a especificação de tempo de acomodação tem-se:

$$0{,}0316 < K < 0{,}17$$

A especificação é realmente atendida?

Qual o efeito do zero na resposta ?

Exemplo 3

Seja **K=0,15** (próximo do limite superior). Neste caso,

$$KG(z) = \frac{0{,}15(z+1)}{(z-1)(z-0{,}5)}$$

resultando na equação característica

$$\Delta(z) = (z-1)(z-0{,}5) + 0{,}15(z+1) = z^2 - 1{,}35z + 0{,}65$$

Cujos polos de malha fechada são

$$p_{1,2} = 0{,}67 \pm j0{,}441 = 0{,}81\angle 33{,}5^\circ$$

Exemplo 3

ou

$$p_{1,2} = 0{,}81\angle 0{,}5786\ (\text{rad})$$

Sendo

$$z = e^{-\xi\omega_n T}\angle \pm \omega_d T = M\angle \pm N$$

tem-se

$$\xi = -\frac{\ln(\mathrm{M})}{\sqrt{\ln^2(\mathrm{M}) + \mathrm{N}^2}} \qquad \omega_n = \frac{1}{\mathrm{T}}\sqrt{\ln^2(\mathrm{M}) + \mathrm{N}^2}$$

Exemplo 3

Para o exemplo, T=1, então

$$M = 0{,}81$$
$$N = 0{,}5786$$

Assim, **considerando apenas os polos do sistema**

$$\begin{matrix} \xi = 0{,}35 \\ \omega_n = 0{,}62 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} M_p = 31\% \\ t_s = 18{,}4\,seg < 20\,seg \end{matrix}$$

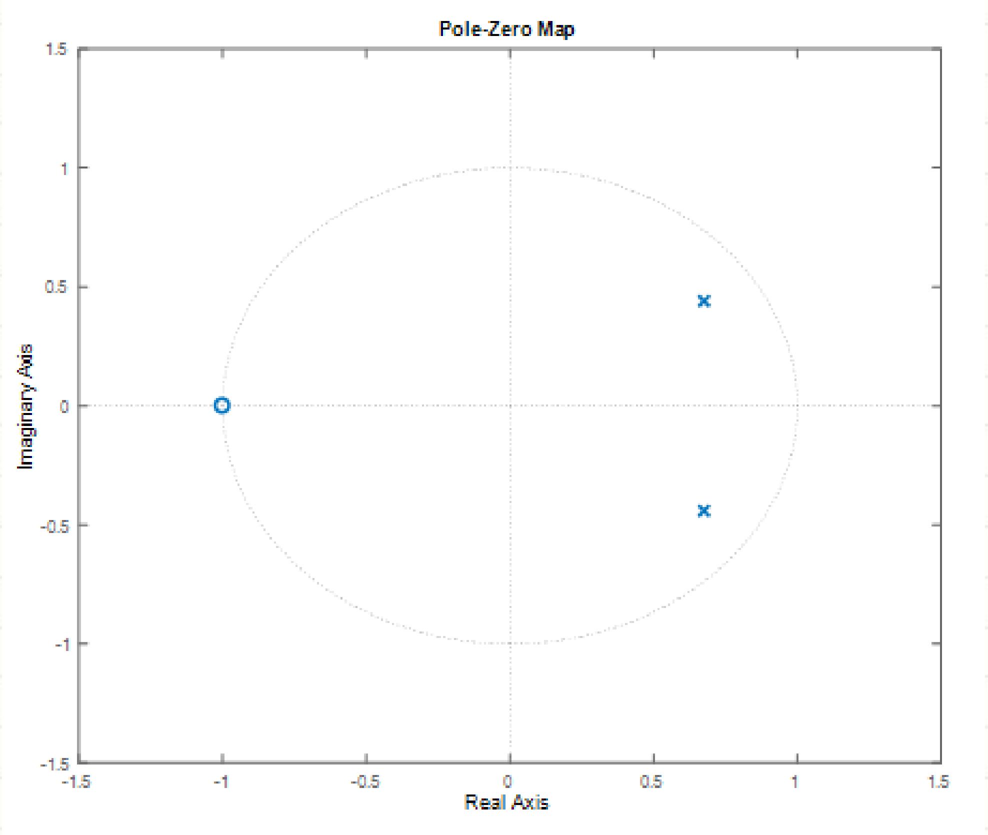
garantindo-se "teoricamente" a especificação.

E se for considerado o zero, qual o efeito deste na resposta ?

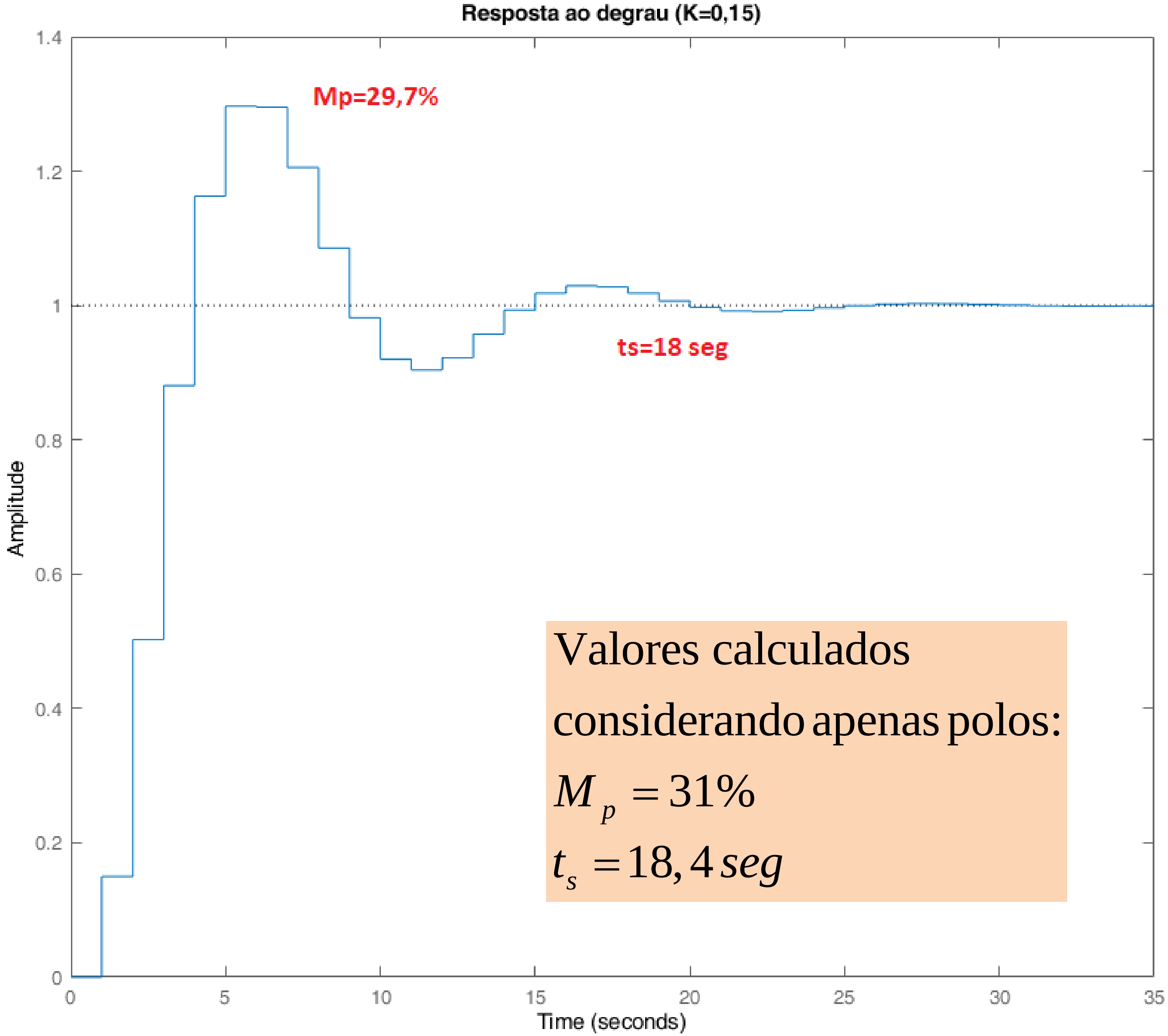
Exemplo 3

Lembrando que, para K=0,15:

$$T(z)=\frac{0{,}15(z+1)}{z^2-1{,}35z+0{,}65}=\frac{0{,}15(z+1)}{(z-0{,}67+j0{,}441)(z-0{,}67-j0{,}441)}$$



Exemplo 3



Valores calculados considerando apenas polos:

$M_p = 31\%$

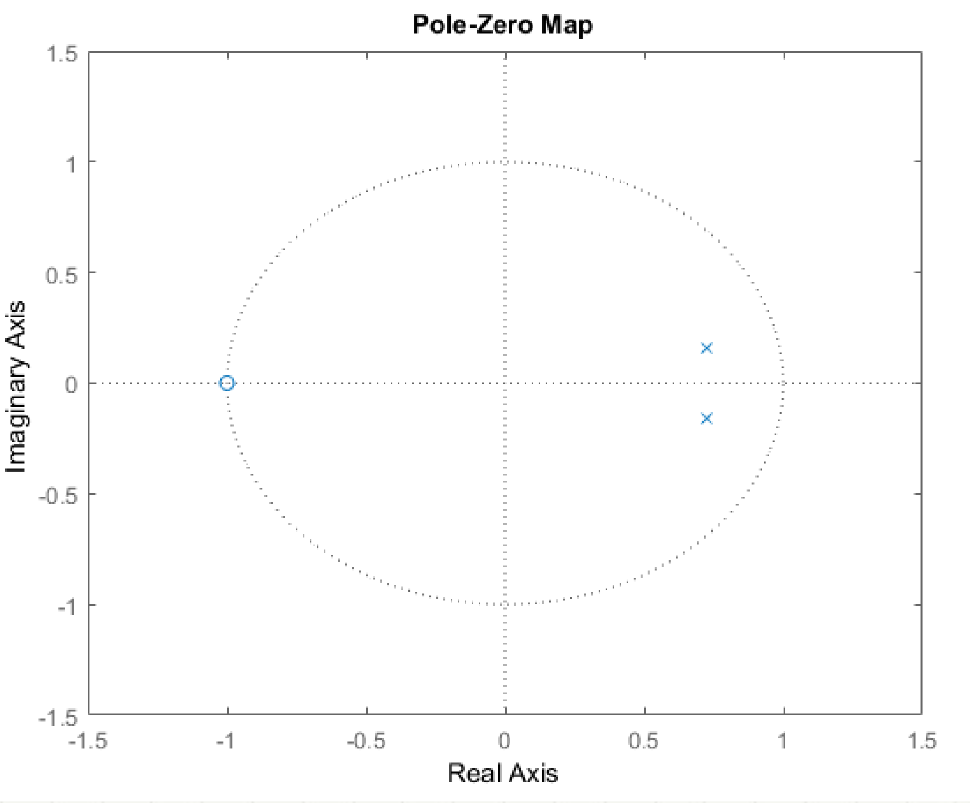
$t_s = 18,4\,seg$

Exemplo 3

Seja agora um ganho próximo ao limite inferior.

Para **K=0,05** tem-se

$$\Delta(z) = z^2 - 1{,}45z + 0{,}55$$



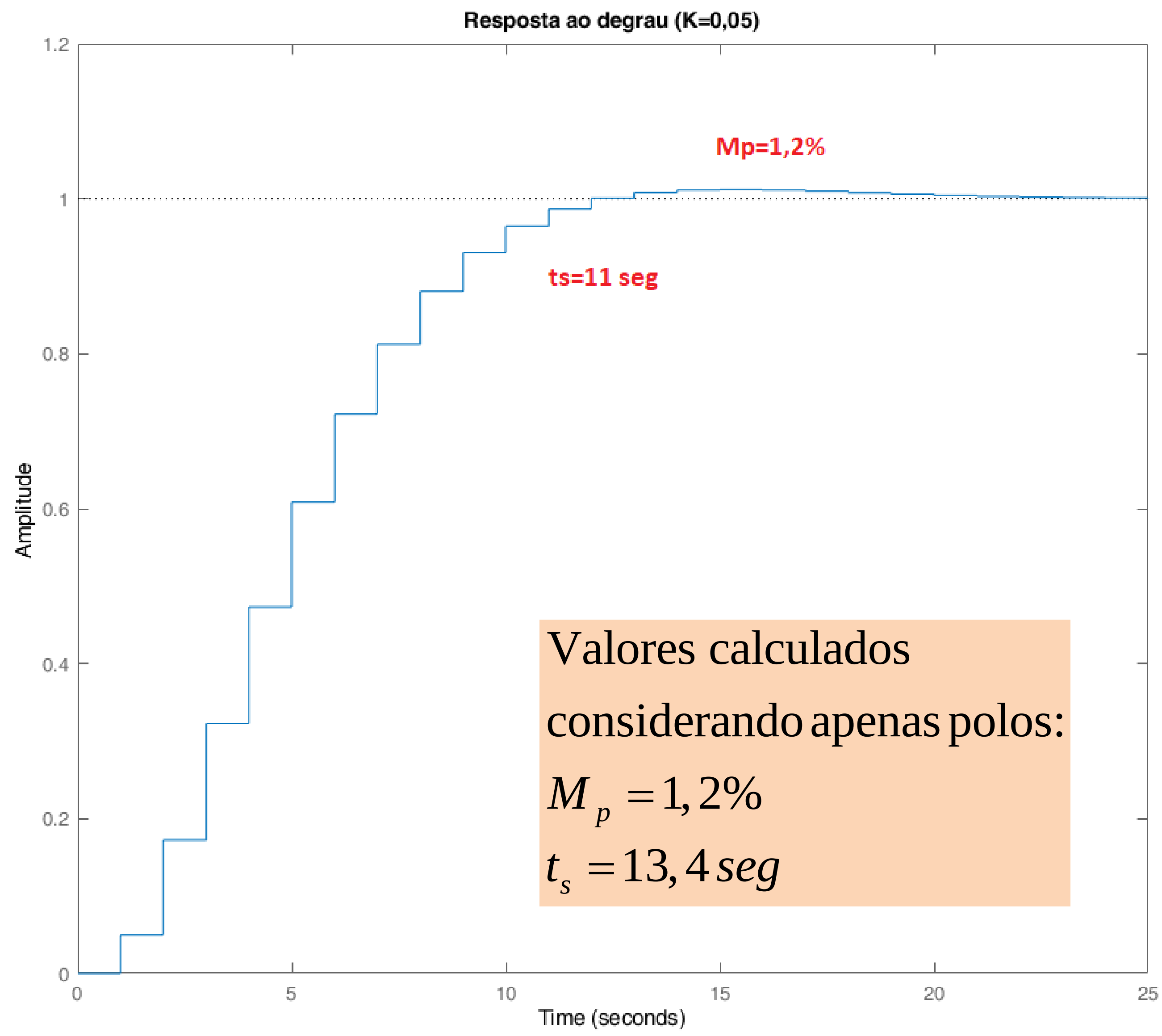
cujos polos são

$$p_{1,2} = 0{,}725 \pm j0{,}156$$
$$= 0{,}74\angle 0{,}2121 rd$$

De onde obtém-se:

$$\begin{matrix} \xi = 0{,}81 \\ \omega_n = 0{,}37 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} M_p = 1{,}2\% \\ t_s = 13{,}4\,seg \end{matrix}$$

Exemplo 3

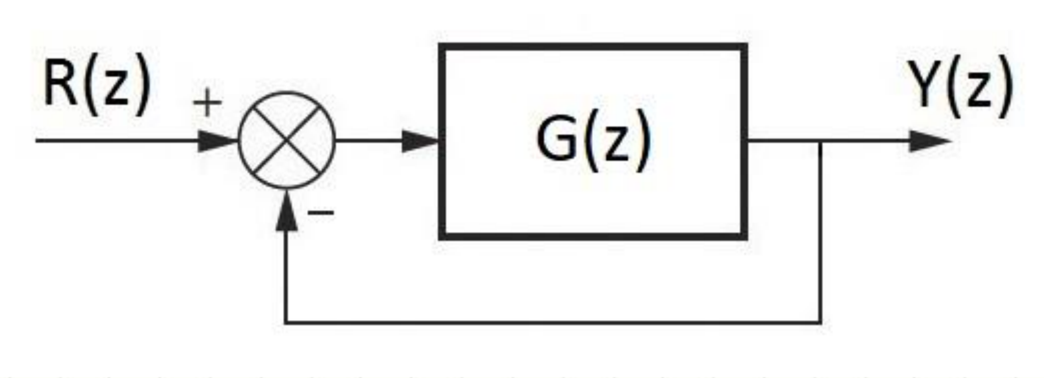


$$M_p = 1,2\%$$

$$t_s = 13,4\,seg$$

Resposta em Regime Permanente

Seja o sistema de controle com realimentação unitária:



De modo similar ao caso contínuo, podem ser definidos coeficientes de erro de posição, velocidade e aceleração. A partir destes coeficientes são calculados os erros de regime permanente.

Resposta em Regime Permanente

Em regime permanente, podem ser obtidos os coeficientes e erros estacionários associados a cada tipo de entrada: degrau, rampa e parábola.

$$\mathrm{K_P} = \lim_{z\to 1} G(z) \quad \Rightarrow \quad e_\infty = \frac{1}{1+\mathrm{K_P}}$$

$$\mathrm{K_V} = \frac{1}{T}\lim_{z\to 1}(z-1)G(z) \quad \Rightarrow \quad e_\infty = \frac{1}{\mathrm{K_V}}$$

$$\mathrm{K_a} = \frac{1}{T^2}\lim_{z\to 1}(z-1)^2 G(z) \quad \Rightarrow \quad e_\infty = \frac{1}{\mathrm{K_a}}$$

Observe que no caso discreto os coeficientes de erro dependem do período de amostragem.

Exemplo 4

Seja o mesmo sistema e especificações do exemplo 3:

$$G(z) = \frac{z+1}{(z-1)(z-0{,}5)} \qquad t_s < 20$$

Deseja-se agora determinar o menor erro em regime permanente considerando entradas degrau e rampa.

Sendo um sistema com realimentação unitária, seu "tipo" pode ser determinado diretamente da função de transferência de malha aberta G(z). Neste caso, o sistema é do tipo 1, uma vez que G(z) possui um integrador.

Assim, o erro de regime permanente é nulo para entrada degrau.

Exemplo 4

Para **entrada rampa**, calcula-se o coeficiente de erro de velocidade:

$$K_V = \frac{1}{T}\lim_{z\to 1}(z-1)G(z)$$

Substituindo G(z):

$$K_V = \frac{1}{T}\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{K(z+1)}{(z-1)(z-0,5)} = \frac{2K}{0,5} = 4K$$

Exemplo 4

O erro de regime permanente será dado por

$$e_V = \frac{1}{4K}$$

Para garantir a especificação de tempo de acomodação (t_s<20)

$$0{,}0316 < K < 0{,}17$$

Portanto, **o mínimo erro de regime permanente será obtido para o maior K possível**:

$$e_V = \frac{1}{4 \times 0{,}17} = 0{,}47 \quad \Rightarrow \quad e_V = 47\%$$

Exemplo 5

Considerando o sistema do exemplo 1, determinar os valores de K>0 de modo a garantir um tempo pico de menor do que 4 segundos.

$$G(z) = \frac{z+1}{(z-1)(z-0,5)}$$

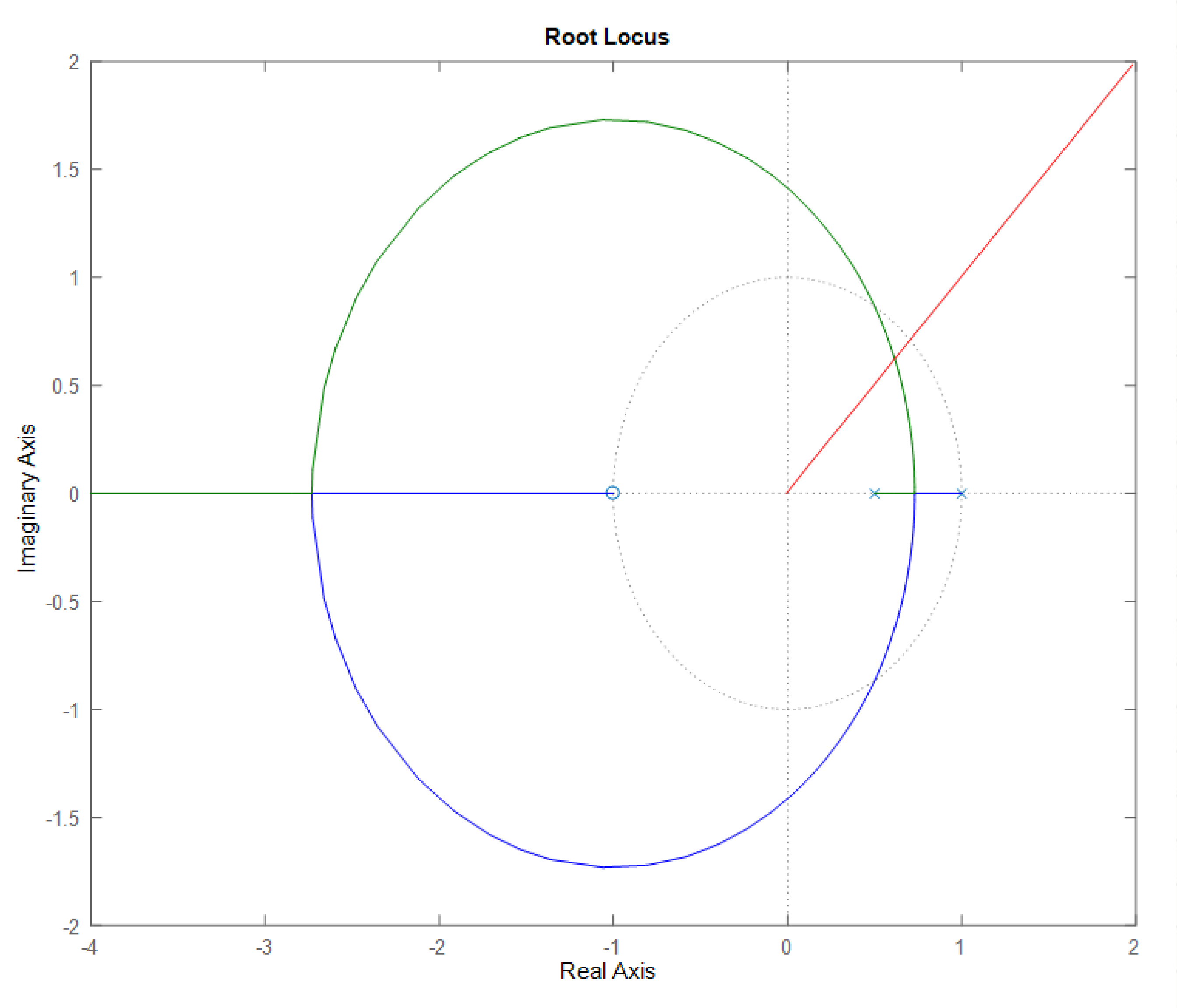
Em tempo contínuo:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} < 4 \quad \Rightarrow \quad \omega_d > \frac{\pi}{4}$$

Em tempo discreto (T=1):

$$\angle z = \omega_d T > \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \angle z > \frac{\pi}{4}$$

Exemplo 5



Root Locus
Imaginary Axis
Real Axis
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-4
-3
-2
-1
0
1
2

Exemplo 5

Seja z = a + j a. Substituindo z na equação característica

$$\Delta(z) = z^2 - 1{,}5z + 0{,}5 + K(z+1) = 0$$

tem-se

$$\begin{cases} -1{,}5a + 0{,}5 + Ka + K = 0 \\ a(2a - 1{,}5 + K) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad K = 1{,}5 - 2a \end{cases}$$

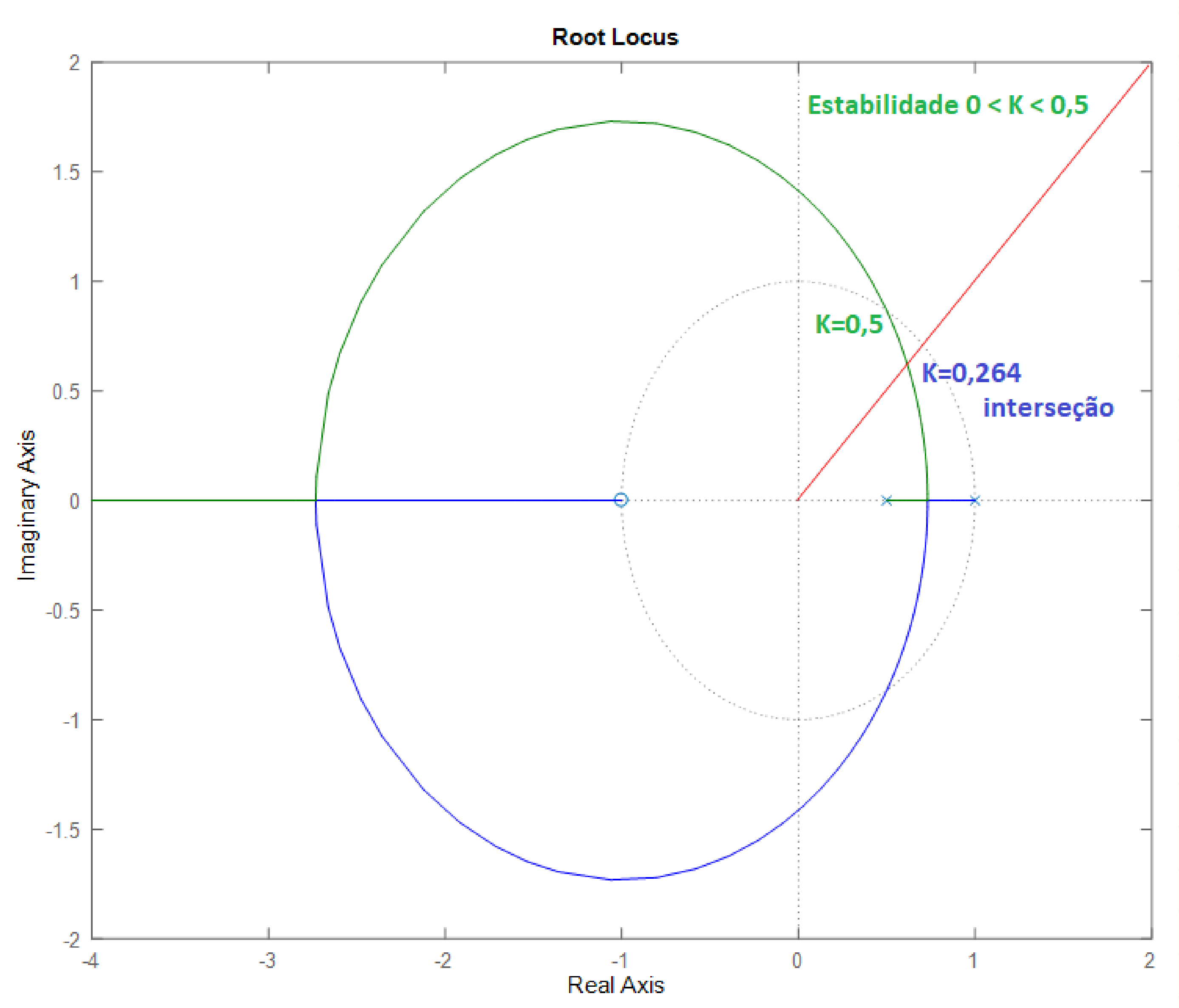
Substituindo K na primeira equação, chega-se a:

$$a = 0{,}618$$
$$K = 0{,}264$$

Portanto, a interseção da reta de 45° com o LR ocorre no ponto

$$z = 0{,}618 \pm j0{,}618 \quad \text{para} \quad K = 0{,}264$$

Exemplo 5



Root Locus
Estabilidade 0 < K < 0,5
K=0,5
K=0,264
interseção
Imaginary Axis
Real Axis
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-4
-3
-2
-1
0
1
2

Exemplo 5

Assim, para garantir a especificação de tempo de pico:

$$0{,}264 < K < 0{,}5$$

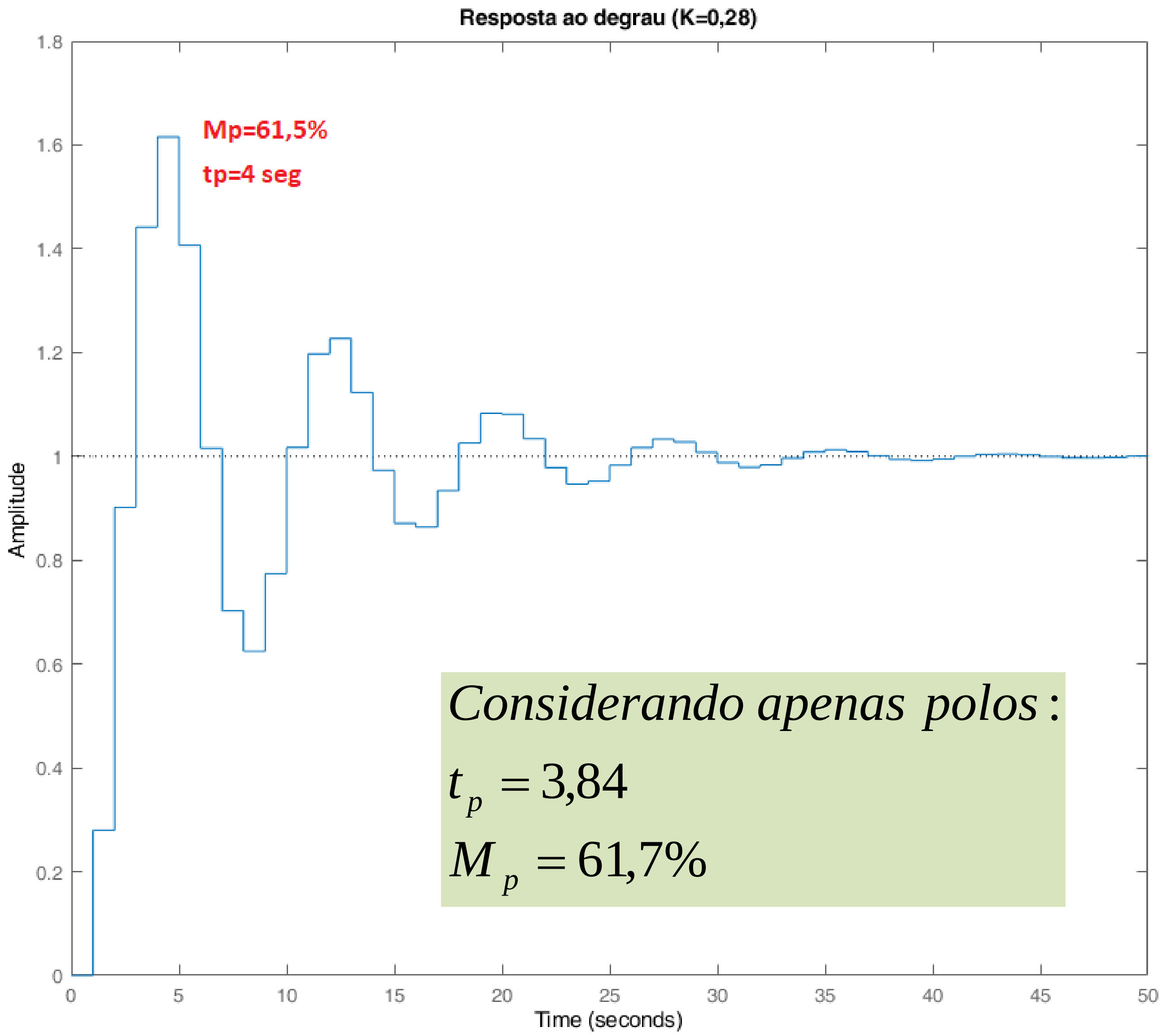
(K<0,5 para garantir estabilidade)

Por exemplo, para K = 0,3:

$$\Delta(z) = z^2 - 1{,}22z + 0{,}78 \quad \Rightarrow \quad p_{1,2} = 0{,}61 \pm j0{,}64$$

$$\begin{cases} M = 0{,}8832 \\ N = 0{,}8084 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi = 0{,}159 \\ \omega_n = 0{,}8178 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_p = 3{,}84 \\ M_p = 61{,}7\% \end{cases}$$

Exemplo 5

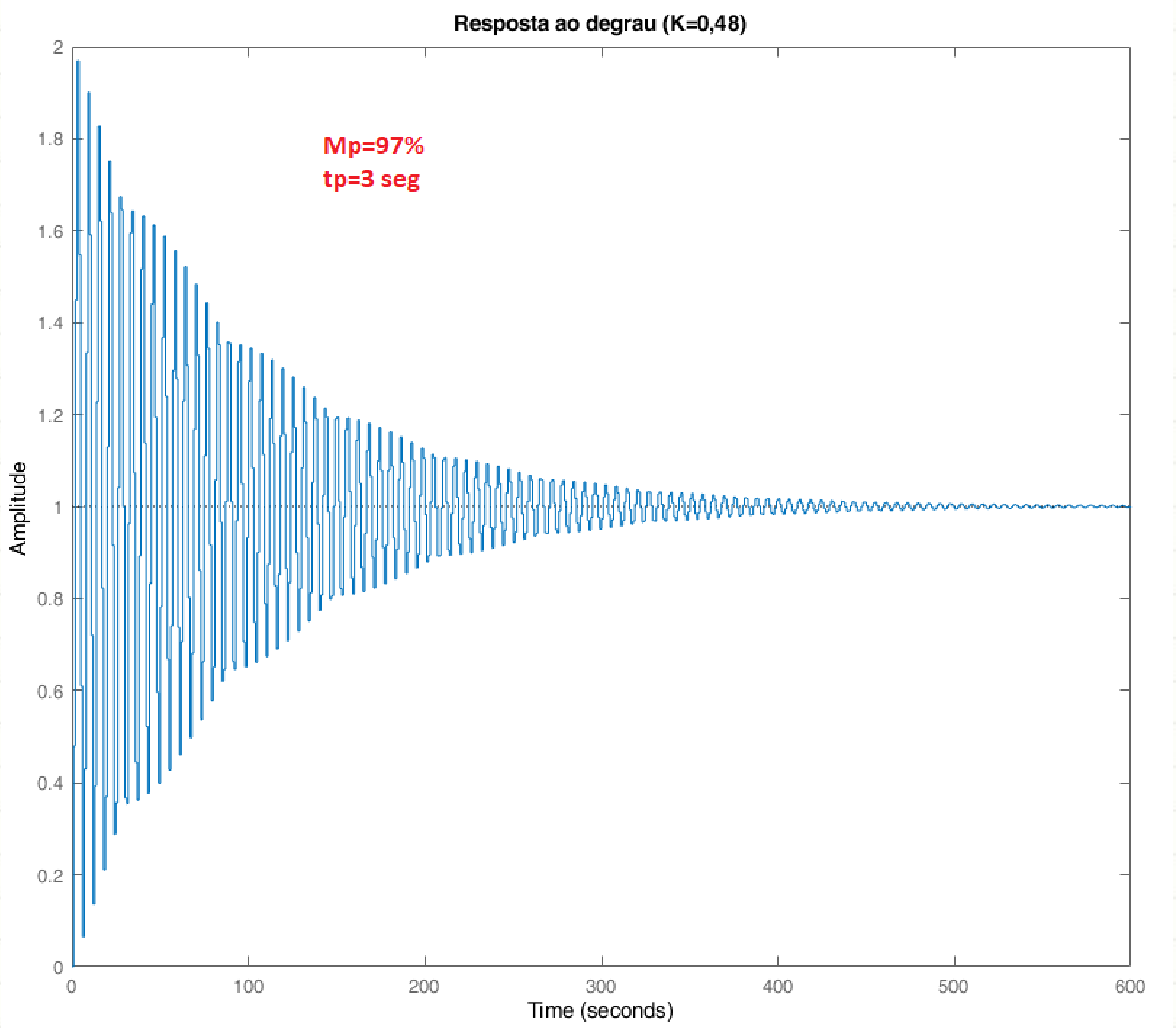


Considerando apenas polos:

$$t_p = 3{,}84$$

$$M_p = 61{,}7\%$$

Exemplo 5



Resposta ao degrau (K=0,48)
Mp=97%
tp=3 seg
Amplitude
Time (seconds)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
0
100
200
300
400
500
600