Especificações da Resposta em Frequência

Profa. Cristiane Paim

Introdução

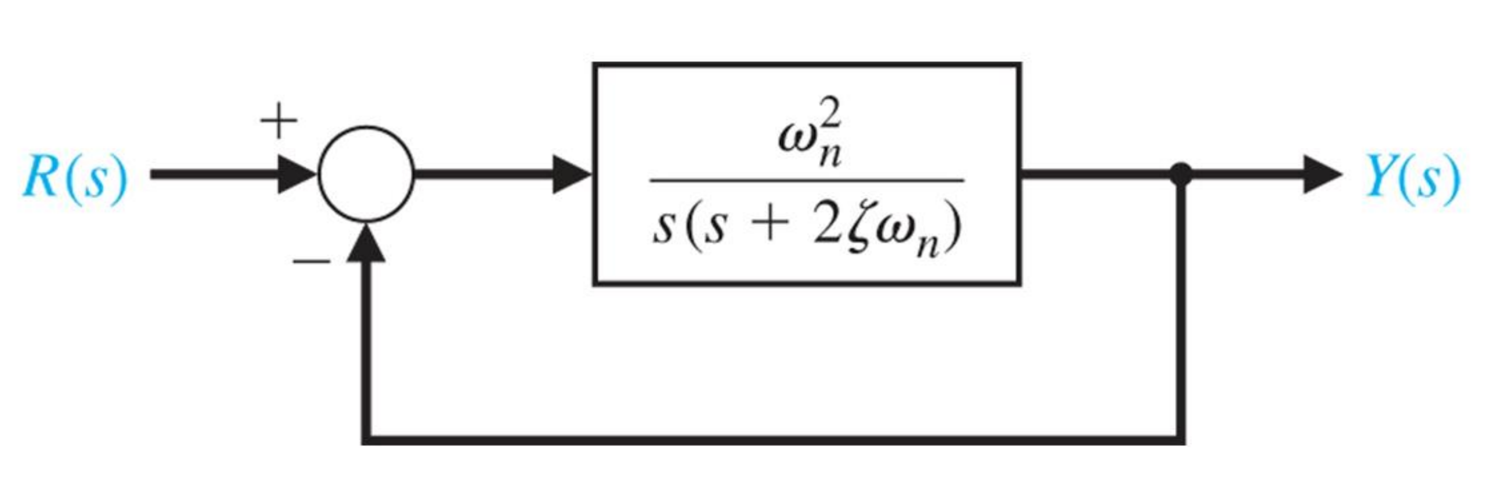
O desempenho de um sistema é, em geral, avaliado em função de sua resposta no tempo.

Sendo assim, é comum relacionar as características dinâmicas da resposta do tempo e os parâmetros da resposta em frequência tais como: margem de ganho, margem de fase, frequência e pico de ressonância, etc.

Assim como na resposta no tempo, as especificações de desempenho serão definidas para sistemas de 2ª ordem sem zeros.

Introdução

Seja o sistema

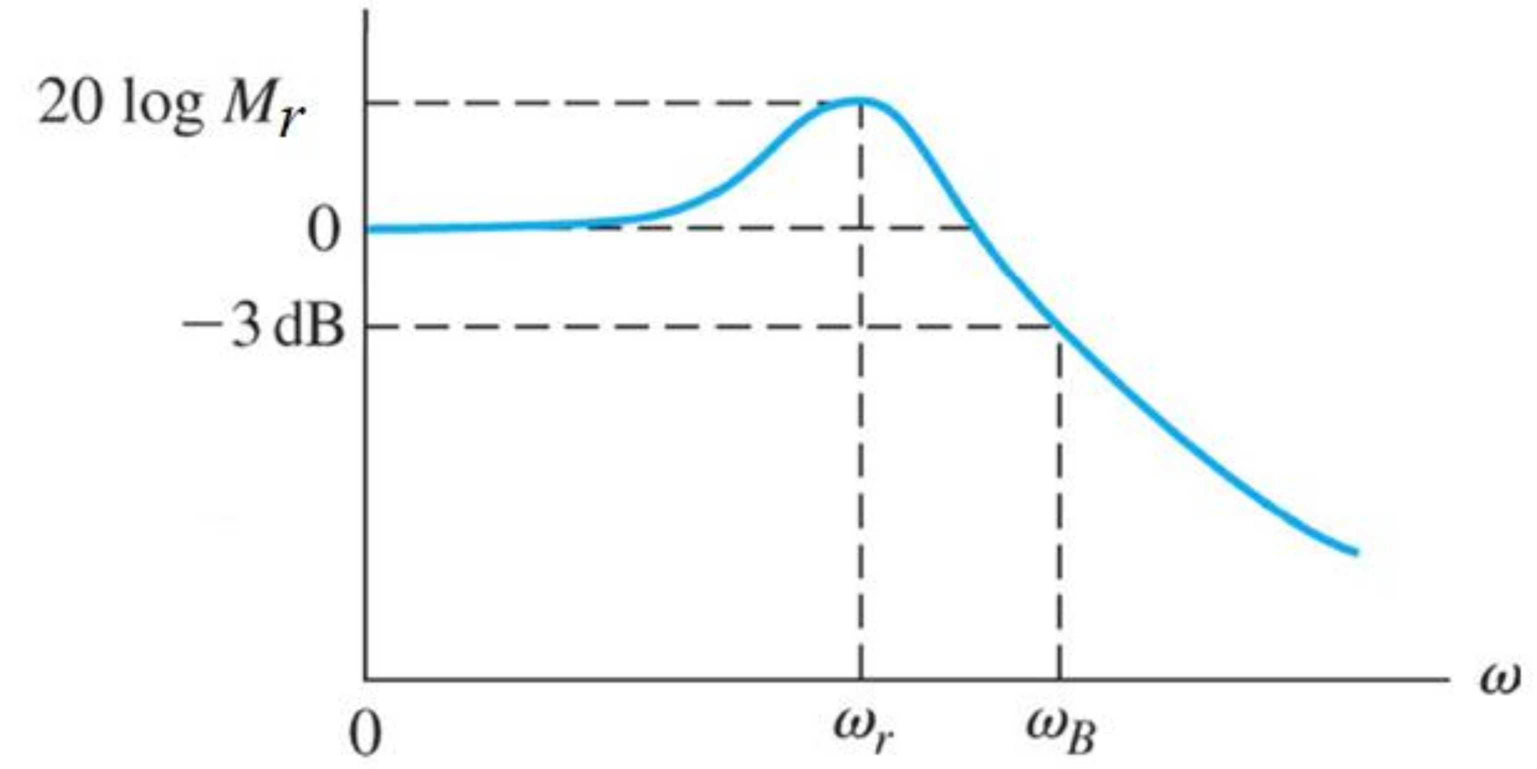


Em malha fechada

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Introdução

Para um sistema subamortecido ($0 < \xi < 0{,}707$), obtém-se a resposta em frequência abaixo.



Introdução

As especificações em frequência serão relacionadas àquelas do domínio do tempo e termos de resposta transitória e de regime permanente:

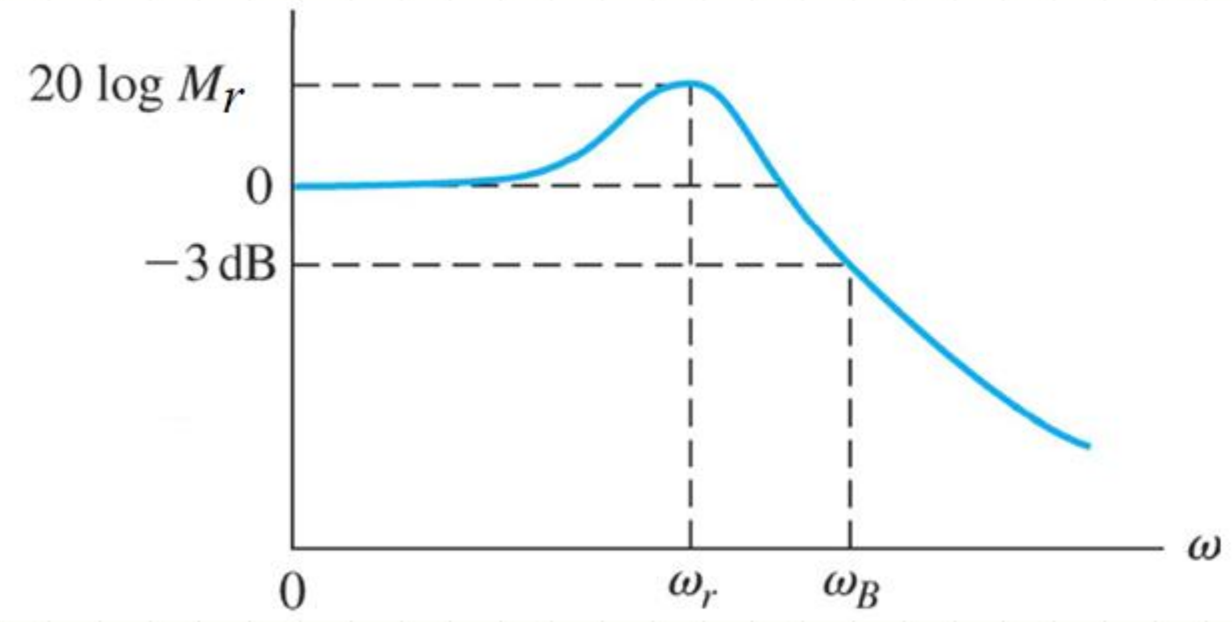
Resposta transitória: tempo de subida, tempo de pico, tempo de acomodação e sobressinal máximo.

Resposta em regime permanente: erros/coeficientes de posição, velocidade e aceleração.

Introdução

Características da resposta em frequência:

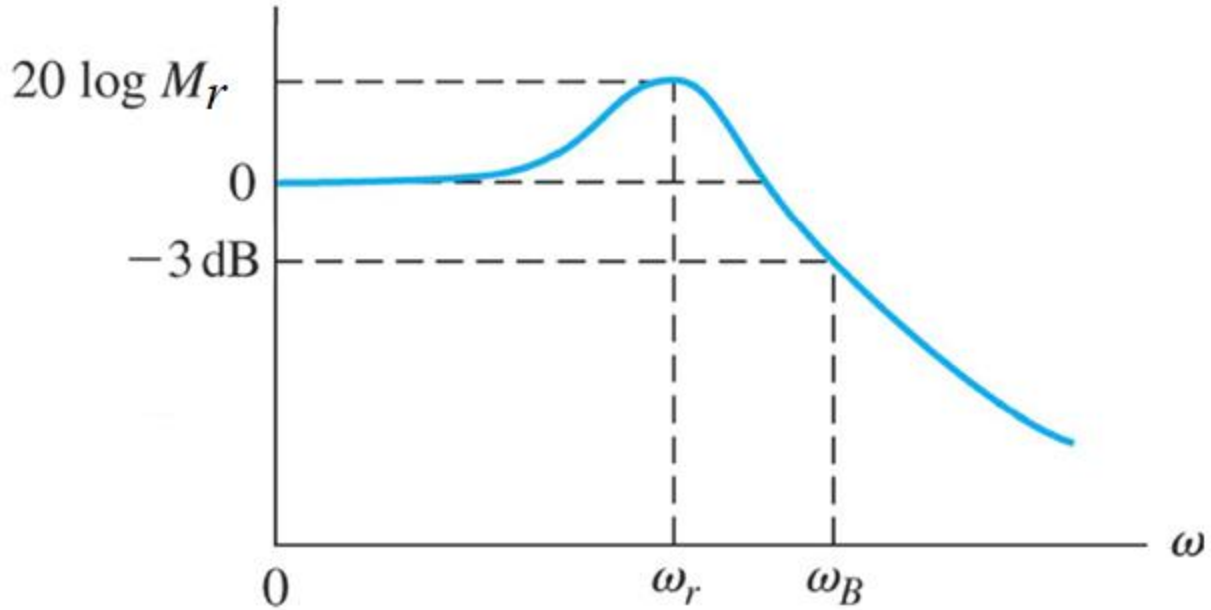
- Pico de ressonância (M_R): máximo valor de $|G(j\omega)|$
- Frequência de ressonância (ω_R): frequência na qual ocorre o pico de ressonância.



Introdução

Características da resposta em frequência:

- Frequência de corte (ω_B): frequência na qual $|G(j\omega)|$= -3 dB.
- Largura de faixa: faixa de frequência $0 < \omega < \omega_B$



Frequência e Pico de Ressonância

O pico de ressonância é dado por

$$M_R = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

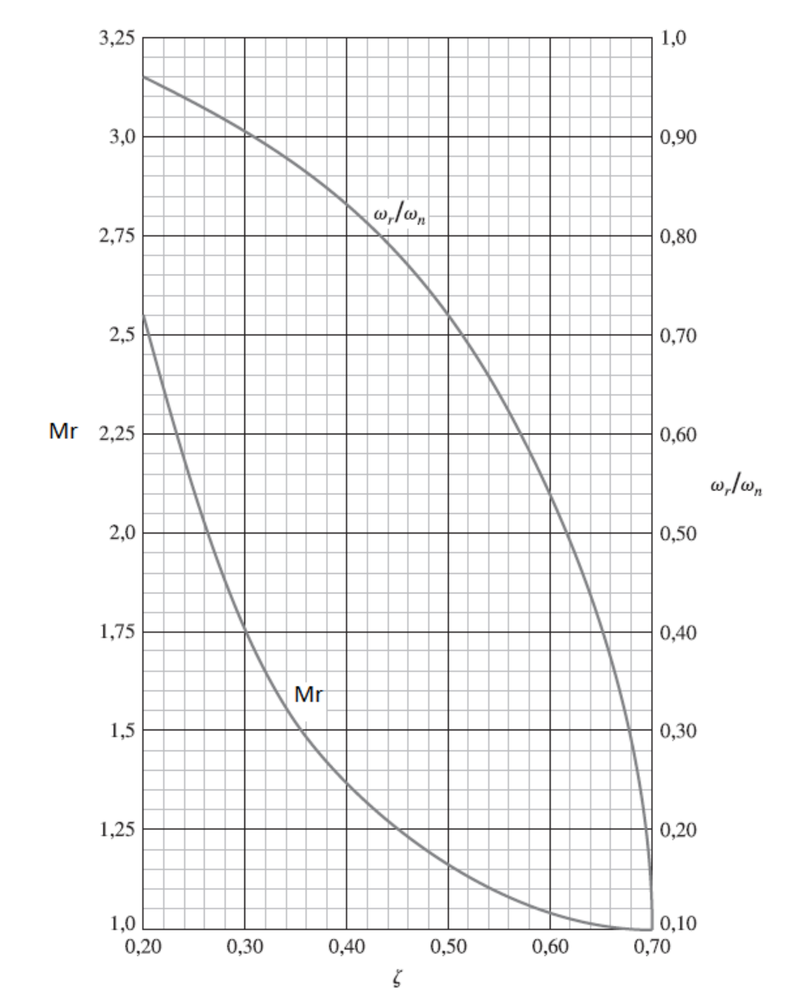
e ocorre na frequência de ressonância

$$\omega_R = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$$

sendo $0 < \xi < 0{,}707$.

Frequência e Pico de Ressonância

Observa-se que o pico de ressonância é inversamente proporcional ao coeficiente de amortecimento ξ.



Quanto menor o valor de ξ, maior será o pico de ressonância.

Tendo em vista que o coeficiente de amortecimento ξ está diretamente relacionado ao sobressinal da resposta, observa-se uma relação direta entre M_P e M_R.

Largura de Faixa

Seja

$$\left|T(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{\left[1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right]^2 + \left[2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}}$$

Se $\omega = \omega_n$, então

$$\left|T(j\omega)\right| = \frac{1}{2\xi}$$

Para $\xi = \sqrt{2}/2$

$$\left|T(j\omega)\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \left|T(j\omega)\right|_{dB} = -3dB$$

Largura de Faixa

Assim, para $\xi = \sqrt{2}/2$ tem-se $\omega_B = \omega_n$.

Para os demais valores de ξ, é necessário resolver a equação

$$\left|T(j\omega_B)\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (-3dB)$$

ou

$$\frac{1}{\sqrt{\left[1-\frac{\omega_B{}^2}{\omega_n^2}\right]^2+\left[2\xi\frac{\omega_B}{\omega_n}\right]^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Largura de Faixa

Desenvolvendo a igualdade chega-se a:

$$\omega_B = \omega_n \sqrt{(1-2\xi^2) + \sqrt{4\xi^4 - 4\xi^2 + 2}}$$

Observa-se que a largura de faixa está diretamente relacionada com ω_n e, consequentemente, com a velocidade da resposta.

Assim, uma vez que todas as especificações de "tempo" são inversamente proporcionais a ω_n , quanto maior a largura de faixa menor será o tempo associado.

Largura de Faixa

Tempo de acomodação:

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} \quad \Rightarrow \quad t_s = \frac{4}{\xi\omega_B}\sqrt{(1-2\xi^2)+\sqrt{4\xi^4-4\xi^2+2}}$$

Tempo de pico:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_B\sqrt{1-\xi^2}}\sqrt{(1-2\xi^2)+\sqrt{4\xi^4-4\xi^2+2}}$$

Tempo de subida:

$$t_r = \frac{\pi-\theta}{\omega_B\sqrt{1-\xi^2}}\sqrt{(1-2\xi^2)+\sqrt{4\xi^4-4\xi^2+2}}$$

Margem de Fase

Seja a função de transferência de malha aberta:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)}$$

A margem de fase é calculada para a frequência ω_{CG} , obtida para $|G(j\omega_{CG})| = 1$. Assim,

$$\left|G(j\omega_{CG})\right| = \frac{\omega_n^2}{\omega_{CG}\sqrt{\omega_{CG}^{\,2} + 4\xi^2\omega_n^2}} = 1$$

Margem de Fase

Desenvolvendo a igualdade chega-se a:

$$\omega_{CG} = \omega_n \sqrt{\sqrt{1+4\xi^4} - 2\xi^2}$$

Nesta frequência,

$$\angle G(j\omega_{CG}) = -\angle(j\omega_{CG}) - \angle(j\omega_{CG} + 2\xi\omega_n)$$

$$= -90° - tg^{-1}\left(\frac{\sqrt{\sqrt{1+4\xi^4} - 2\xi^2}}{2\xi}\right)$$

Margem de Fase

Assim, a margem de fase será:

$$MF = 180° + \angle G(j\omega_{CG}) = 90° - tg^{-1}\left(\frac{\sqrt{\sqrt{1+4\xi^4} - 2\xi^2}}{2\xi}\right)$$

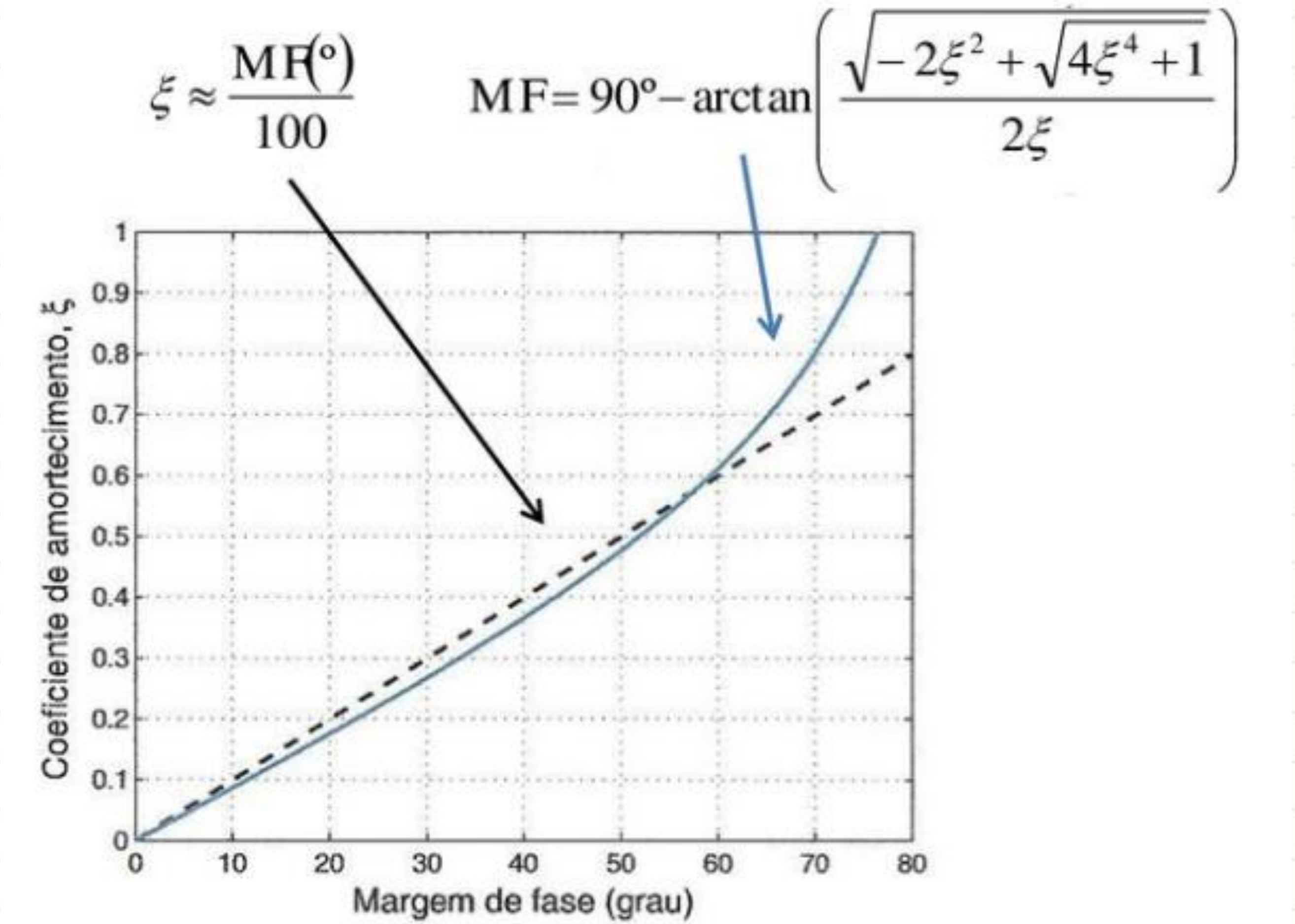
ou

$$MF = tg^{-1}\left(\frac{2\xi}{\sqrt{\sqrt{1+4\xi^4} - 2\xi^2}}\right)$$

Portanto, a margem de fase depende unicamente do fator de amortecimento ξ, estando as duas grandezas diretamente relacionadas.

Margem de Fase

Observa-se que, para ξ < 0,6, a relação desta variável com a margem de fase é aproximadamente linear.



Exemplo

Qual a largura de faixa necessária para garantir uma resposta com sobressinal menor do que 20% e tempo de acomodação não superior a 2 segundos?

$$Mp < 0,2 \quad \Rightarrow \quad \xi > 0,456$$

$$t_s = \frac{4}{\xi \omega_n} \quad \Rightarrow \quad \omega_n = \frac{4}{t_s \xi}$$

Considerando os limites, ξ=0,456 e t_s=2,

$$\omega_B = \frac{4}{t_s \xi} \sqrt{(1-2\xi^2) + \sqrt{4\xi^4 - 4\xi^2 + 2}} = 5,8$$

$$\omega_B > 5,8 \text{ rd/s}$$

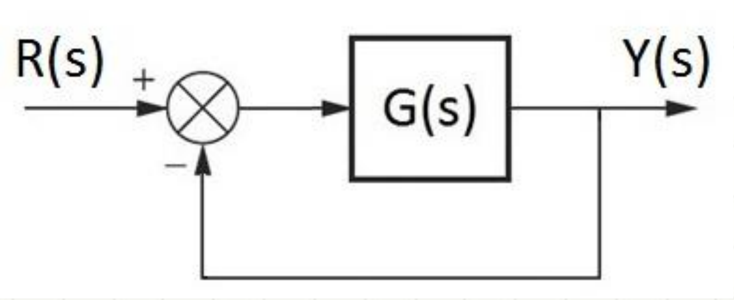
Especificações em Regime Permanente

As especificações em regime permanente normalmente são definidas em temos de coeficientes de erro ou critérios referentes a atenuação/rejeição de perturbações.

Sistema	Entrada		
	Degrau	**Rampa**	**Parábola**
Tipo 0	constante	∞	∞
Tipo 1	0	constante	∞
Tipo 2	0	0	constante

Coeficientes de Erro

Para o sistema



Tem-se os coeficientes de erro:

$$K_p = \lim_{s \to 0} G(s) \quad \rightarrow \quad e_p = \frac{1}{1 + K_P}$$

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s) \quad \rightarrow \quad e_v = \frac{1}{K_v}$$

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 G(s) \quad \rightarrow \quad e_a = \frac{1}{K_a}$$

Erro a partir da Resposta em Frequência

As constantes de erro de posição, velocidade e aceleração descrevem o comportamento em baixa frequência para sistemas do tipo 0, 1 e 2.

O tipo do sistema determina a inclinação da curva de módulo (em dB) em baixa frequência.

Portanto, a informação relativa ao erro de regime permanente de um sistema, para uma dada entrada, pode ser determinada a partir da observação da região de baixa frequência no gráfico de módulo.

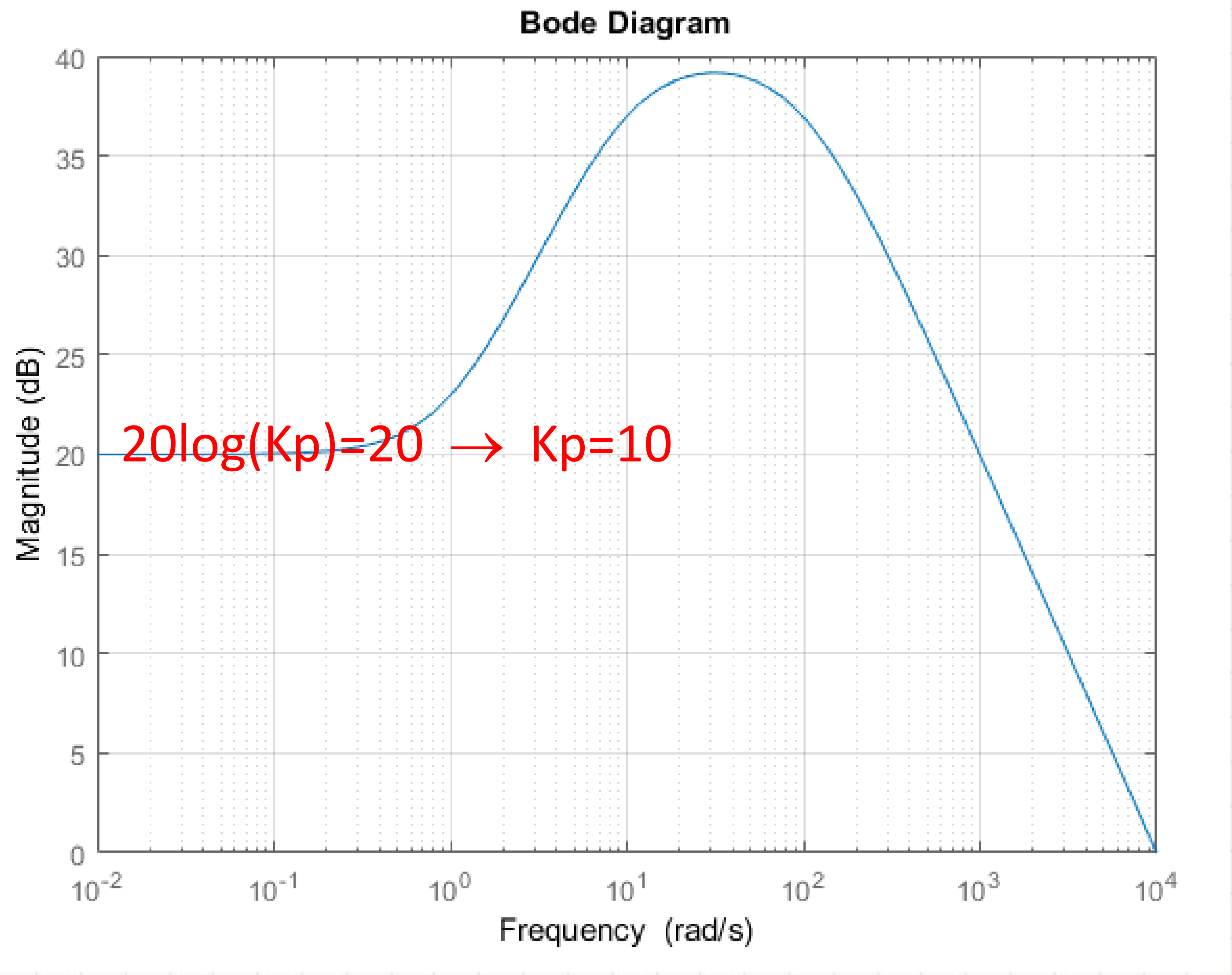
Coeficiente de erro de posição

Este coeficiente só será finito e não nulo para sistemas do tipo 0, ou seja, que não contenham polos na origem.

$$K_p = \lim_{s \to 0} G(s) = \lim_{\omega \to 0} G(j\omega) = G(0)$$

Neste caso, a assíntota de baixa frequência é uma reta horizontal (inclinação 0 dB/dec) com valor de módulo 20log(Kp).

Coeficiente de erro de posição



Coeficiente de erro de velocidade

Este coeficiente só será finito e não nulo para sistemas do tipo 1, ou seja, que contenham um polo na origem.

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s) = \lim_{\omega \to 0} j\omega G(j\omega)$$

Neste caso, a assíntota de baixa frequência é uma reta com inclinação -20 dB/dec.

Em baixa frequência ($\omega \to 0$)

$$G(j\omega) = \frac{K_v}{j\omega}$$

Coeficiente de erro de velocidade

Em módulo,

$$|K_v| = \omega |G(j\omega)|$$

Para $\omega = 1$,

$$|K_v| = |G(j1)|$$

correspondendo a assíntota de baixa frequência em $\omega=1$.

Assim, Kv pode ser obtido da interseção entre a assíntota da baixa frequência (ou sua extensão) e uma reta perpendicular ao eixo horizontal em $\omega = 1$.

Coeficiente de erro de velocidade

Alternativamente, considerando que

$$|K_v| = \omega |G(j\omega)|$$

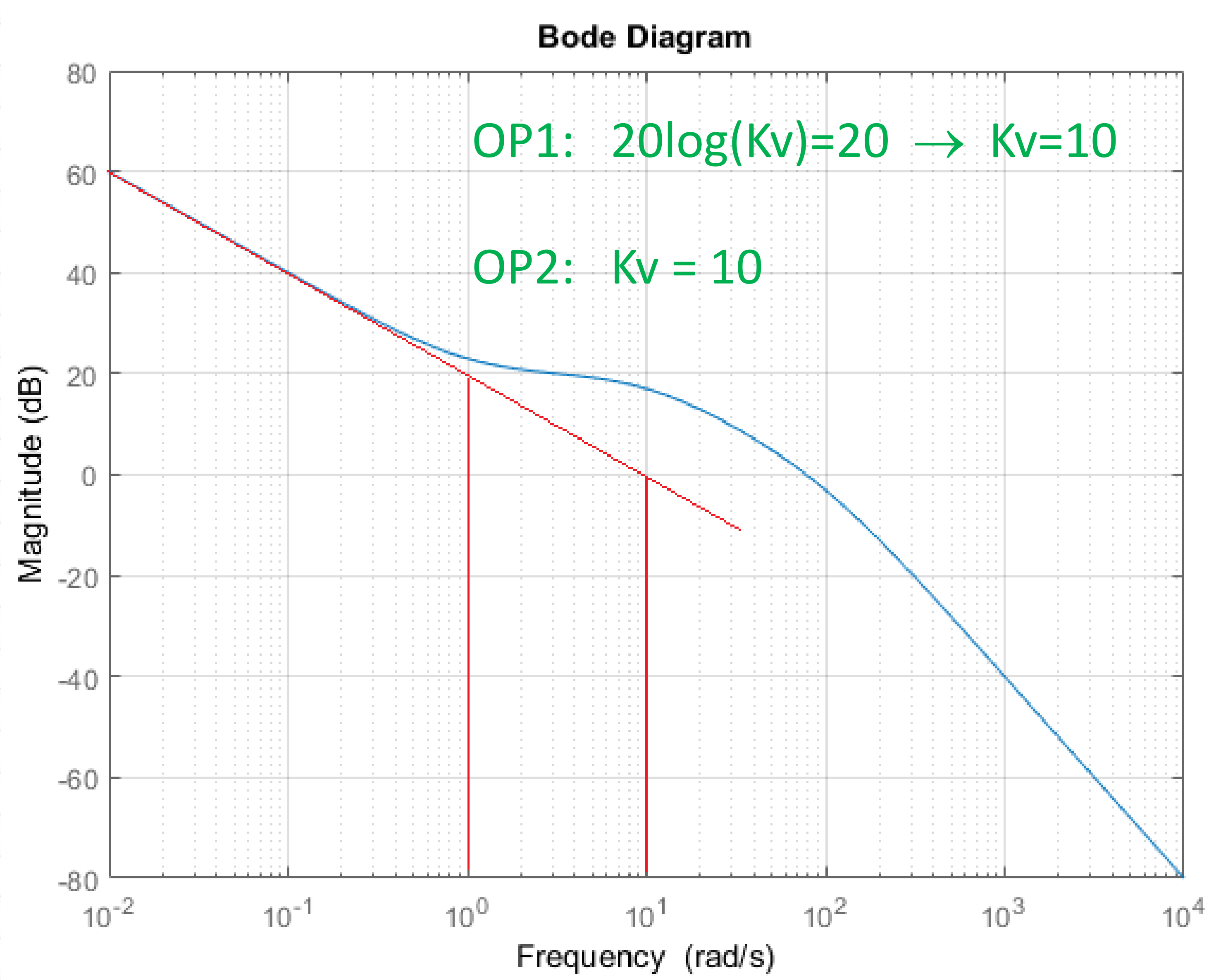
e fazendo $|G(j\omega)|$ =1 (0dB), tem-se

$$K_v = \omega$$

Assim, Ka pode ser obtido da interseção entre a assíntota da baixa frequência (ou sua extensão) e o eixo horizontal (0dB). Neste caso, a interseção ocorre em

$$\omega = K_v$$

Coeficiente de erro de velocidade



Coeficiente de erro de aceleração

Este coeficiente só será finito e não nulo para sistemas do tipo 2, ou seja, que contenham dois polos na origem.

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 G(s) = \lim_{\omega \to 0} (j\omega)^2 G(j\omega)$$

Neste caso, a assíntota de baixa frequência é uma reta com inclinação -40 dB/dec.

Em baixa frequência ($\omega \to 0$)

$$G(j\omega) = \frac{K_a}{(j\omega)^2}$$

Coeficiente de erro de velocidade

Em módulo,

$$|K_a| = \omega^2 |G(j\omega)|$$

Para ω = 1,

$$|K_a| = |G(j1)|$$

correspondendo a assíntota de baixa frequência em ω=1.

Assim, Ka pode ser obtido da interseção entre a assíntota da baixa frequência (ou sua extensão) e uma reta perpendicular ao eixo horizontal em ω = 1.

Coeficiente de erro de velocidade

Alternativamente, considerando que

$$|K_a| = \omega^2 |G(j\omega)|$$

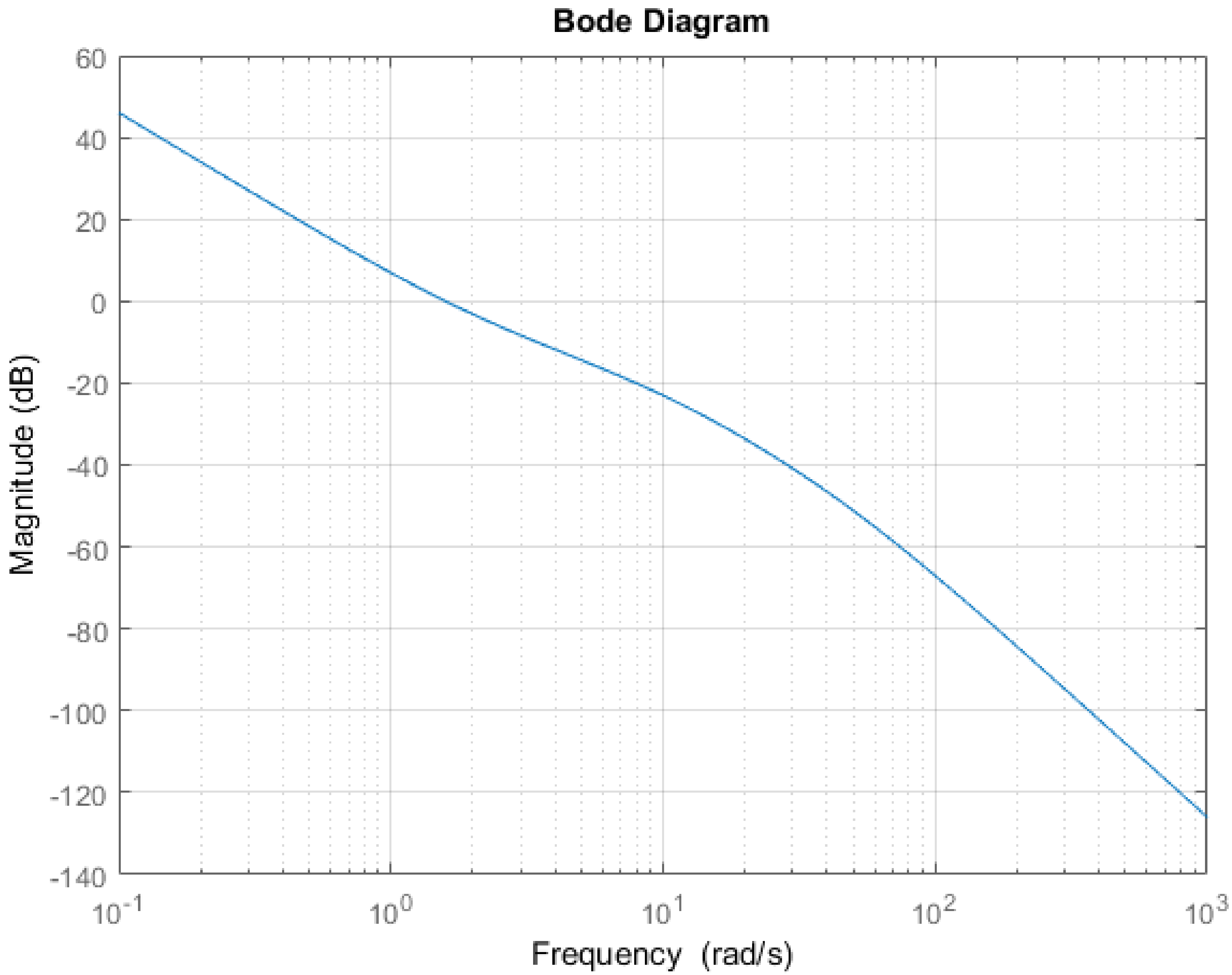
E fazendo |G(jω)| =1 (0dB), tem-se

$$K_a = \omega^2$$

Assim, Kv pode ser obtido da interseção entre a assíntota da baixa frequência (ou sua extensão) e o eixo horizontal (0dB). Neste caso, a interseção ocorre em

$$\omega = \sqrt{K_a}$$

Coeficiente de erro de velocidade



Coeficiente de erro de velocidade