Efeito dos zeros e Dominância de polos

Profa. Cristiane Paim

Efeito dos zeros na resposta transitória

Os zeros da função de transferência exercem influência na resposta transitória modificando os coeficientes (resíduos) dos termos exponenciais resposta.

Ex: Seja o sistema de 2ª ordem:

$$T(s) = \frac{s+z}{(s+p_1)(s+p_2)} = \frac{z-p_1}{p_2-p_1}\left(\frac{1}{s+p_1}\right) + \frac{z-p_2}{p_1-p_2}\left(\frac{1}{s+p_2}\right)$$

Portanto, se o zero é muito próximo do polo a constante associada a este polo será pequena reduzindo a influência deste modo na resposta. Por outro lado, se o zero for muito grande sua influência torna-se insignificante na resposta do sistema.

Efeito dos zeros na resposta transitória

Ex: Efeito da introdução de um zero na resposta do sistema.

$$T_1(s) = \frac{6}{(s+1)(s+6)} \quad \Rightarrow \quad T_1(0) = 1 \rightarrow y_1(t)$$

$$T_2(s) = \frac{6(s+1{,}1)}{1{,}1(s+1)(s+6)} \quad \Rightarrow \quad T_2(0) = 1 \rightarrow y_2(t)$$

$$T_3(s) = \frac{(s+18)}{3(s+1)(s+6)} \quad \Rightarrow \quad T_3(0) = 1 \rightarrow y_3(t)$$

Efeito dos zeros na resposta transitória

Resposta ao degrau (sistema 1)

$$R(s) = \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad Y_1(s) = \frac{1}{s} T_1(s)$$

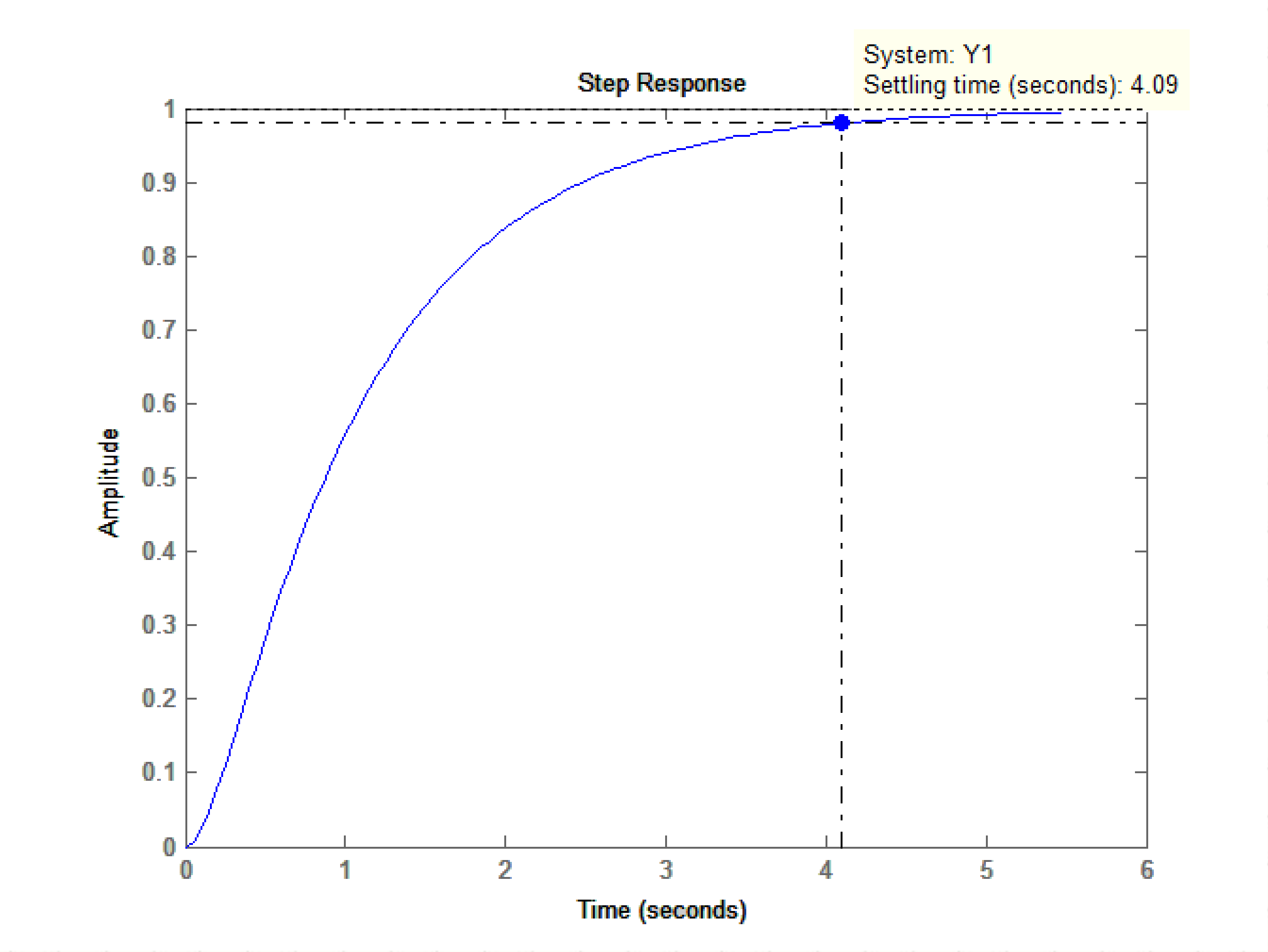
$$Y_1(s) = \frac{6}{s(s+1)(s+6)} = \frac{1}{s} - 1{,}2\frac{1}{s+1} + 0{,}2\frac{1}{s+6}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{y_1(t) = 1 - 1{,}2e^{-t} + 0{,}2e^{-6t}}$$

O polo dominante será p_1=-1 e comportamento da resposta será similar a um de 1ª ordem.

Efeito dos zeros na resposta transitória



Efeito dos zeros na resposta transitória

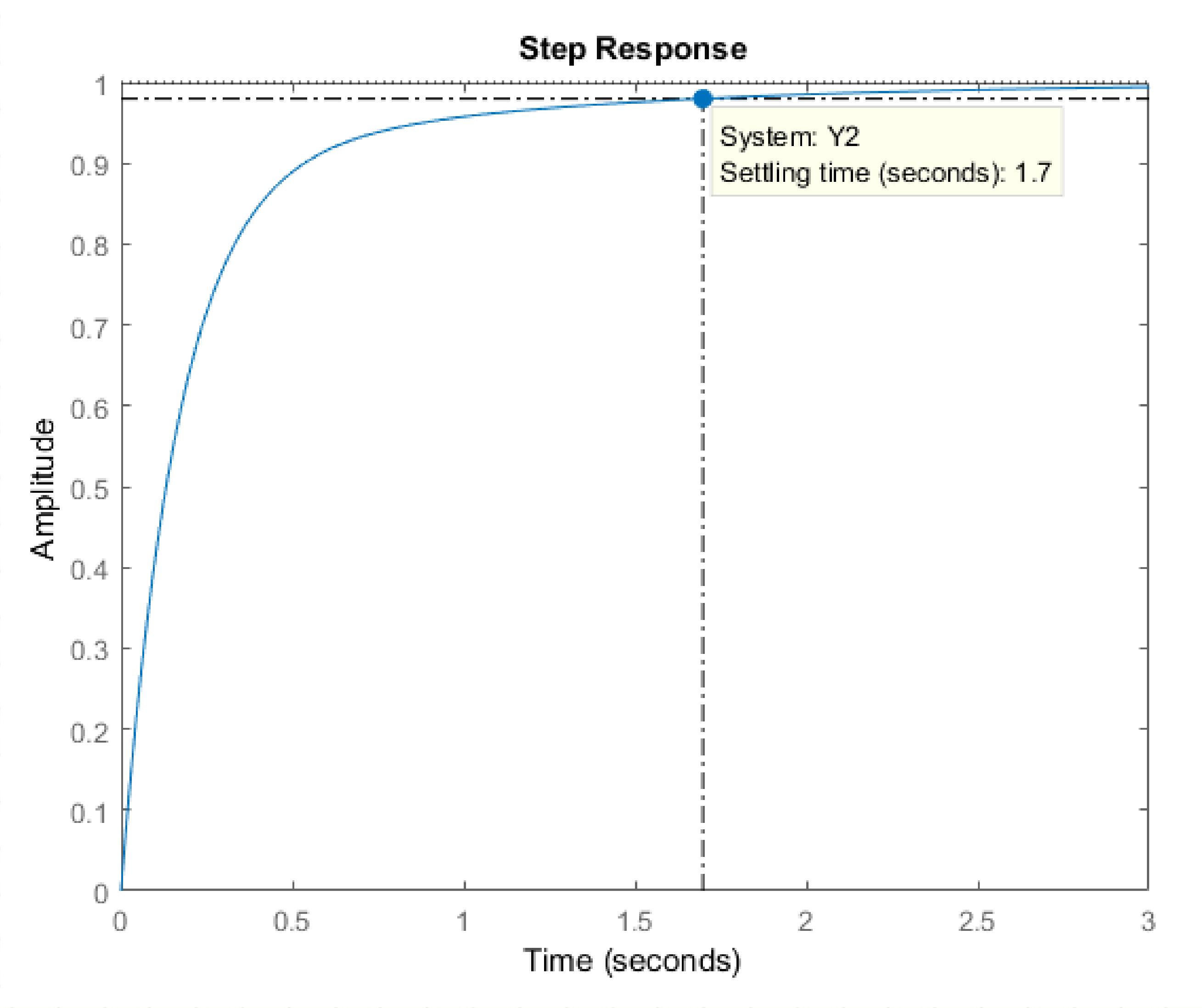
Considerando a introdução de um zero próximo do polo p_1 **(sistema 2)**, a saída será definida por:

$$Y_2(s) = \frac{6(s+1{,}1)}{1{,}1s(s+1)(s+6)} = \frac{1}{s} - 0{,}11\frac{1}{s+1} - 0{,}89\frac{1}{s+6}$$

$$\boxed{y_2(t) = 1 - 0{,}11e^{-t} - 0{,}89e^{-6t}}$$

Em relação ao sistema sem zero, observa-se uma redução no coeficiente associado ao termo e^{-t} e o polo dominante passa a ser p_2=-6.

Efeito dos zeros na resposta transitória



Efeito dos zeros na resposta transitória

Seja agora um zero próximo introduzido distante dos polos do sistema **(sistema 3)**, a saída será definida por:

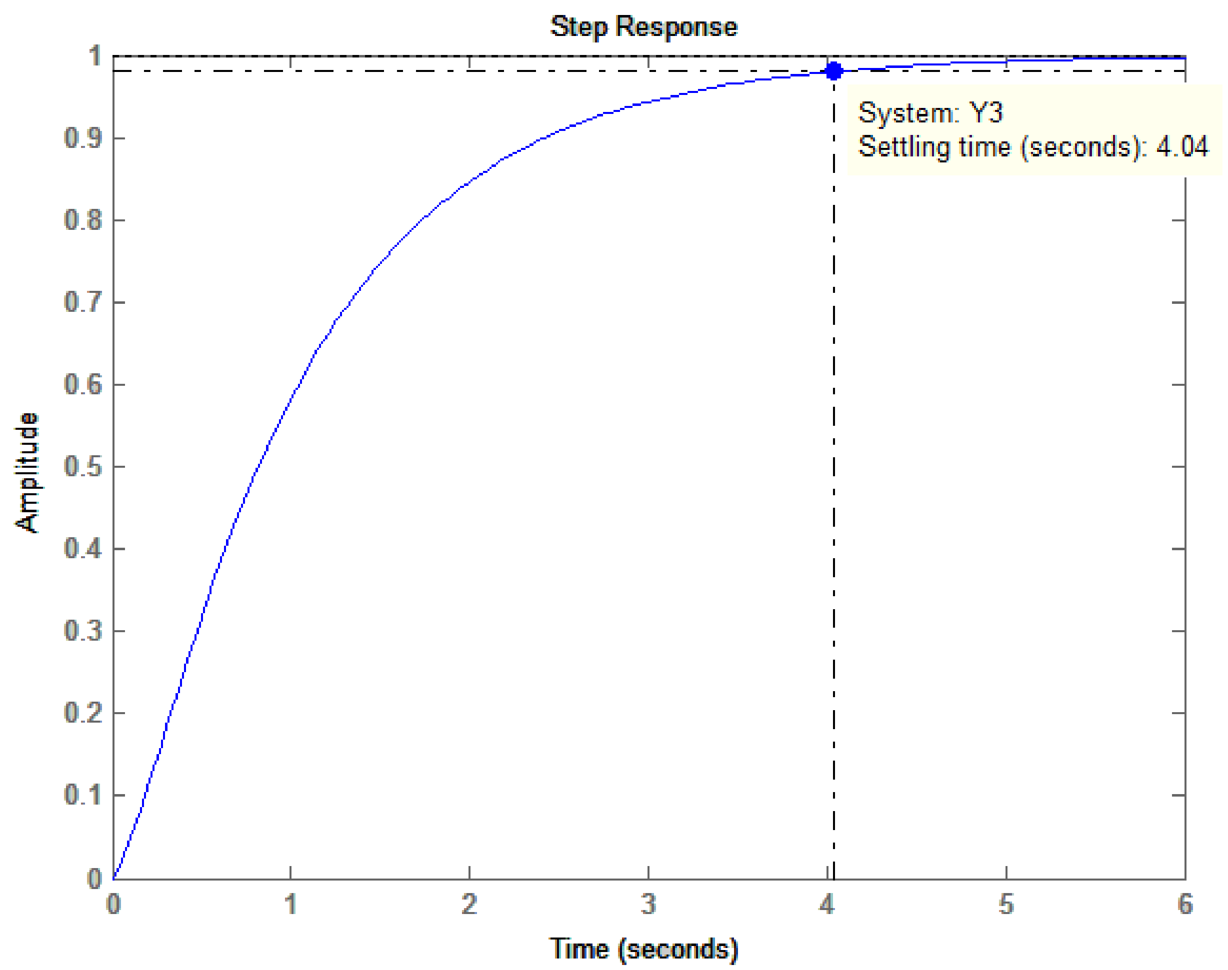
$$Y_3(s) = \frac{s+18}{3s(s+1)(s+6)} = \frac{1}{s} - 1{,}13\frac{1}{s+1} + 0{,}13\frac{1}{s+6}$$

$$\Downarrow$$

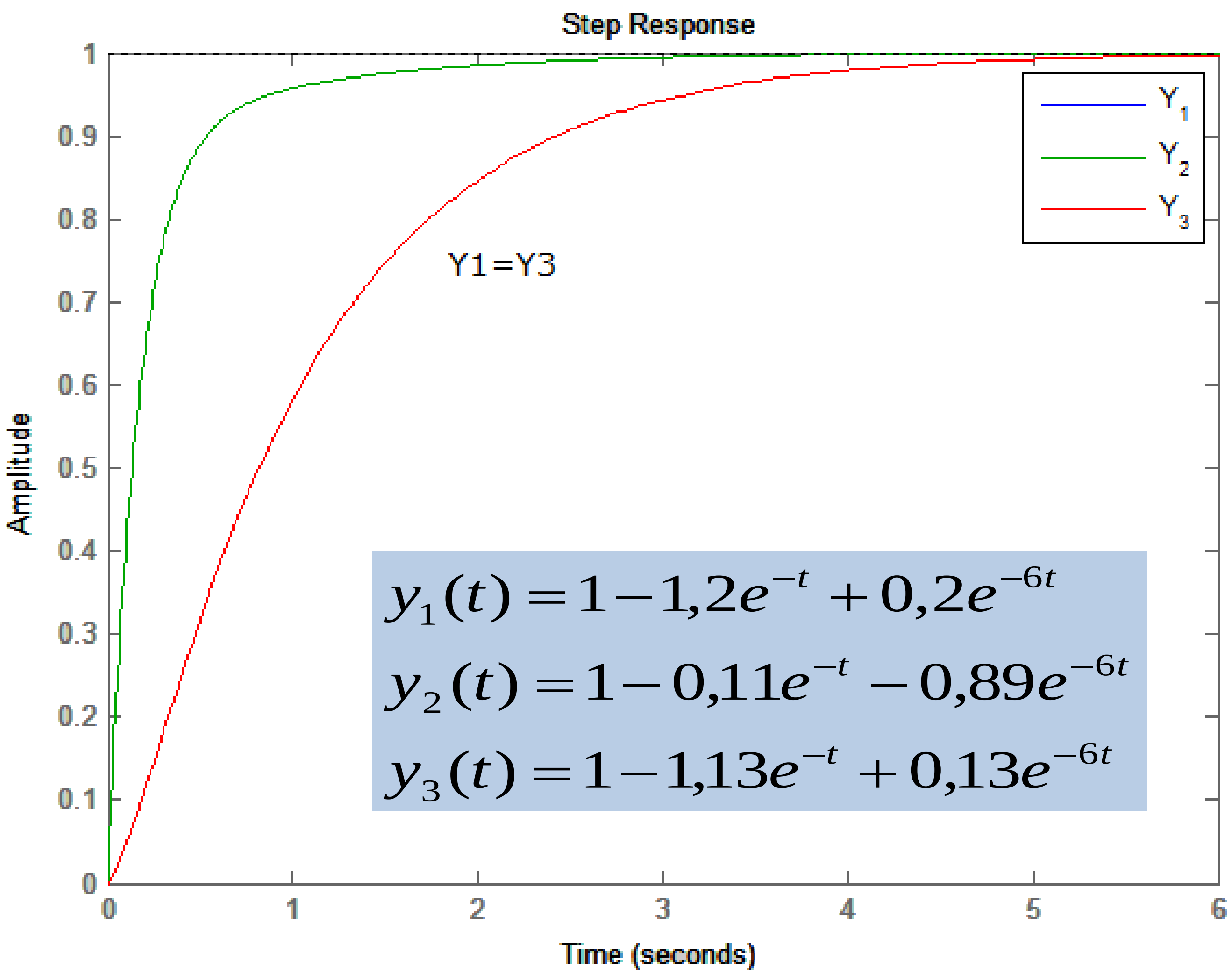
$$y_3(t) = 1 - 1{,}13e^{-t} + 0{,}13e^{-6t}$$

Neste caso, a resposta se assemelha ao sistema sem zeros (sistema 1).

Efeito dos zeros na resposta transitória



Efeito dos zeros na resposta transitória



$$y_1(t) = 1 - 1{,}2e^{-t} + 0{,}2e^{-6t}$$

$$y_2(t) = 1 - 0{,}11e^{-t} - 0{,}89e^{-6t}$$

$$y_3(t) = 1 - 1{,}13e^{-t} + 0{,}13e^{-6t}$$

Efeito dos zeros na resposta transitória

Seja o sistema de 2ª ordem subamortecido ($0 < \xi < 1$) com um único zero real e, por simplicidade, $\omega_n=1$.

$$T(s) = \frac{s+\alpha\xi}{\alpha\xi(s^2+2\xi s+1)} \quad \Rightarrow \quad T(0)=1$$

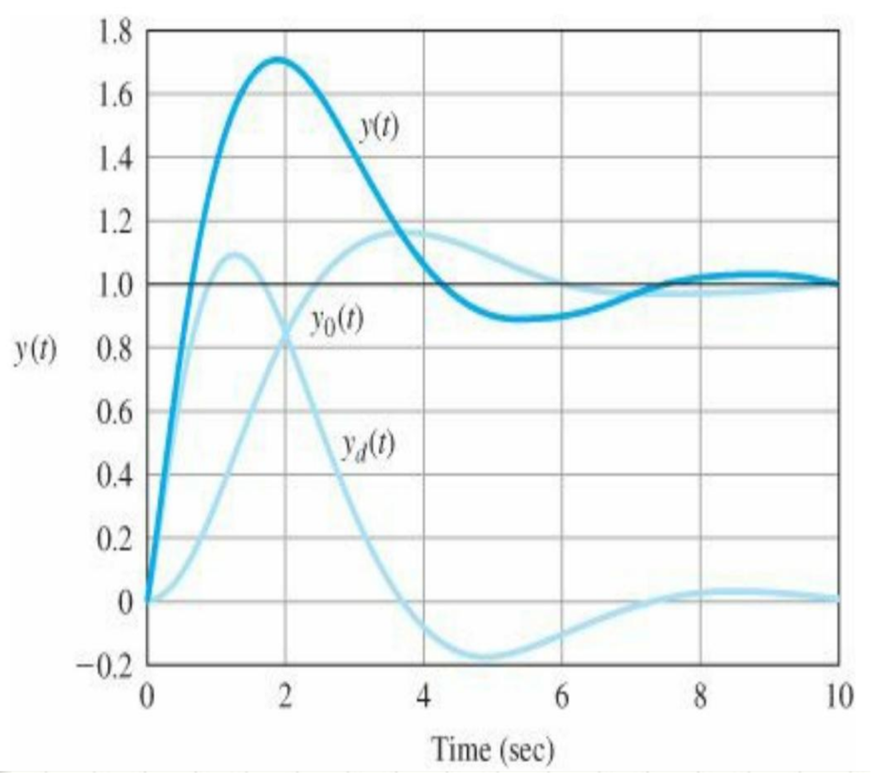
ou

$$T(s) = \frac{1}{s^2+2\xi s+1} + \frac{1}{\alpha\xi}\frac{s}{s^2+2\xi s+1} = T_o(s)+T_d(s)$$

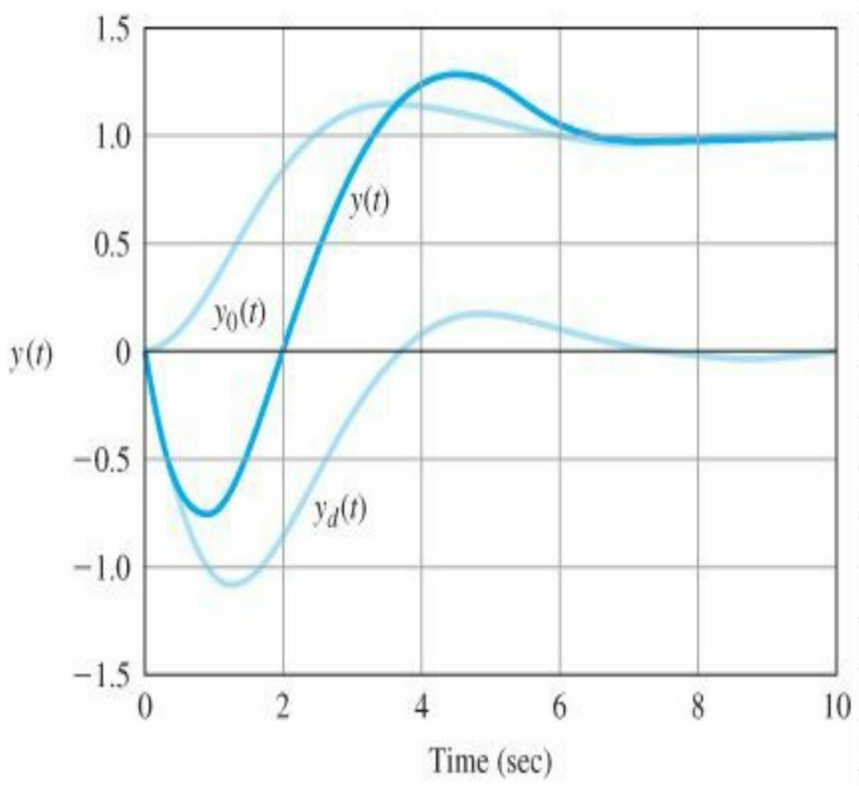
Logo, a resposta total do sistema é a soma da resposta do sistema sem zero, $T_o(s)$, mais sua derivada, $T_d(s)$, multiplicada por uma constante ($1/\alpha\xi$).

Efeito dos zeros na resposta transitória

$\alpha > 0$



$\alpha < 0$



Efeito dos zeros na resposta transitória

O efeito da adição de um **zero estável** ($\alpha > 0$, semiplano esquerdo) é o aumento do sobressinal, consequentemente gerando a aceleração da resposta (menores valores de tr).

Para $\alpha < 0$ (**zero instável**, de fase não mínima) a resposta evolui negativamente antes de estabilizar no valor de regime permanente.

Ainda existe um aumento do sobressinal porém este é menor em relação a introdução de um zero estável.

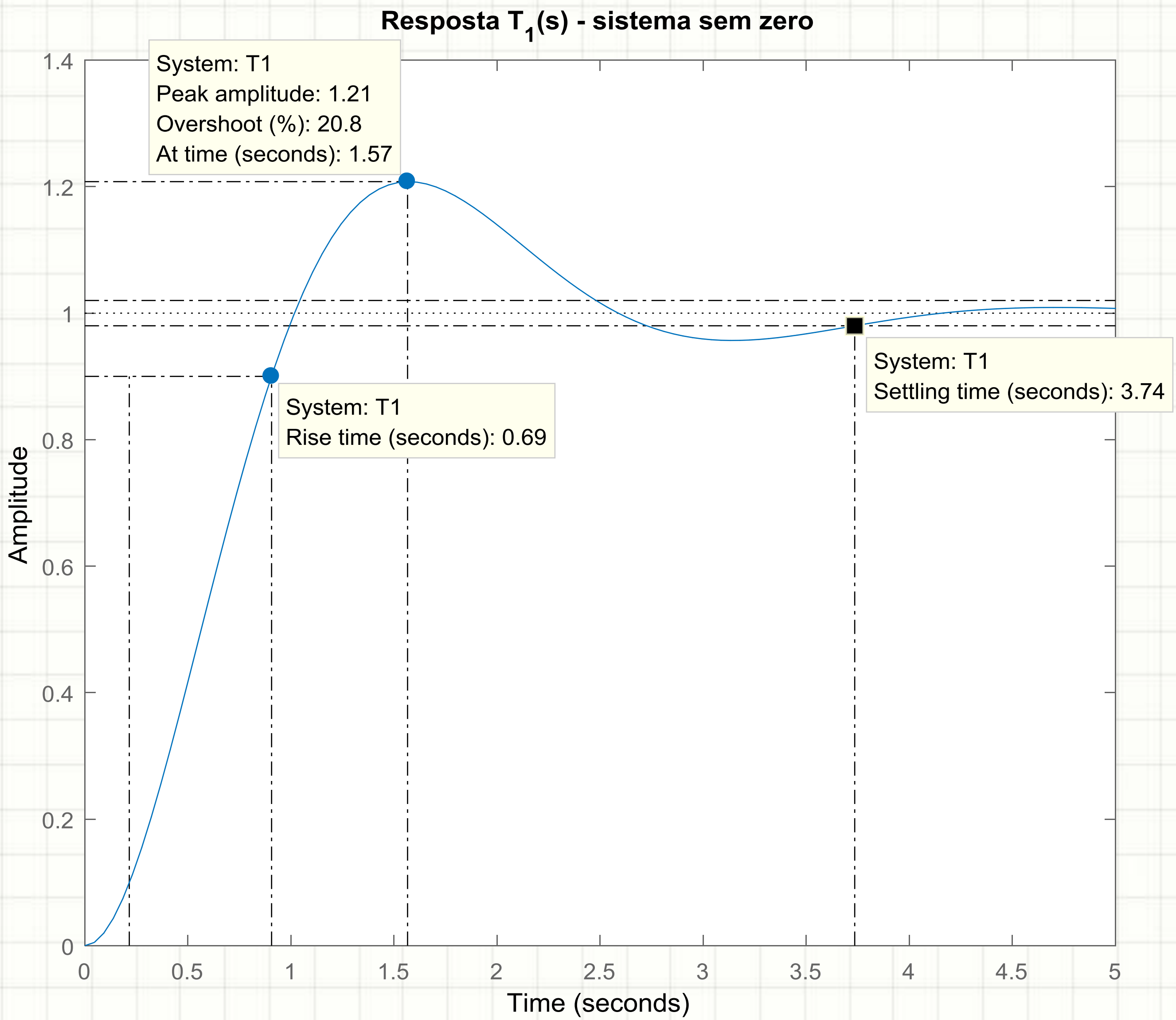
Efeito dos zeros na resposta transitória

$$T_1(s) = \frac{5}{s^2 + 2s + 5} \qquad p_{1,2} = -1 \pm j2$$

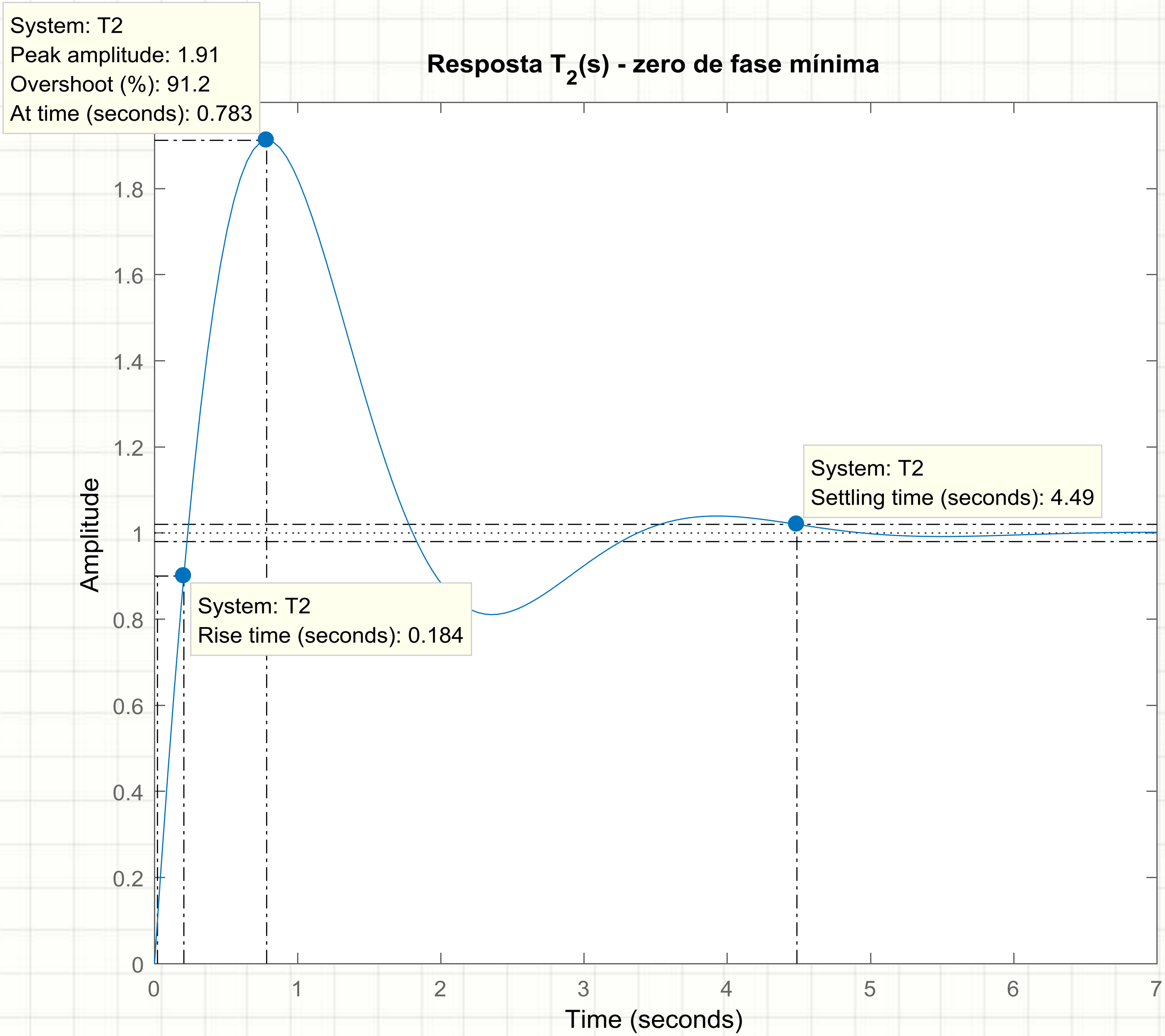
$$T_2(s) = \frac{5(s+1)}{s^2 + 2s + 5} \qquad \begin{aligned} p_{1,2} &= -1 \pm j2 \\ z &= -1 \end{aligned}$$

$$T_3(s) = \frac{-5(s-1)}{s^2 + 2s + 5} \qquad \begin{aligned} p_{1,2} &= -1 \pm j2 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

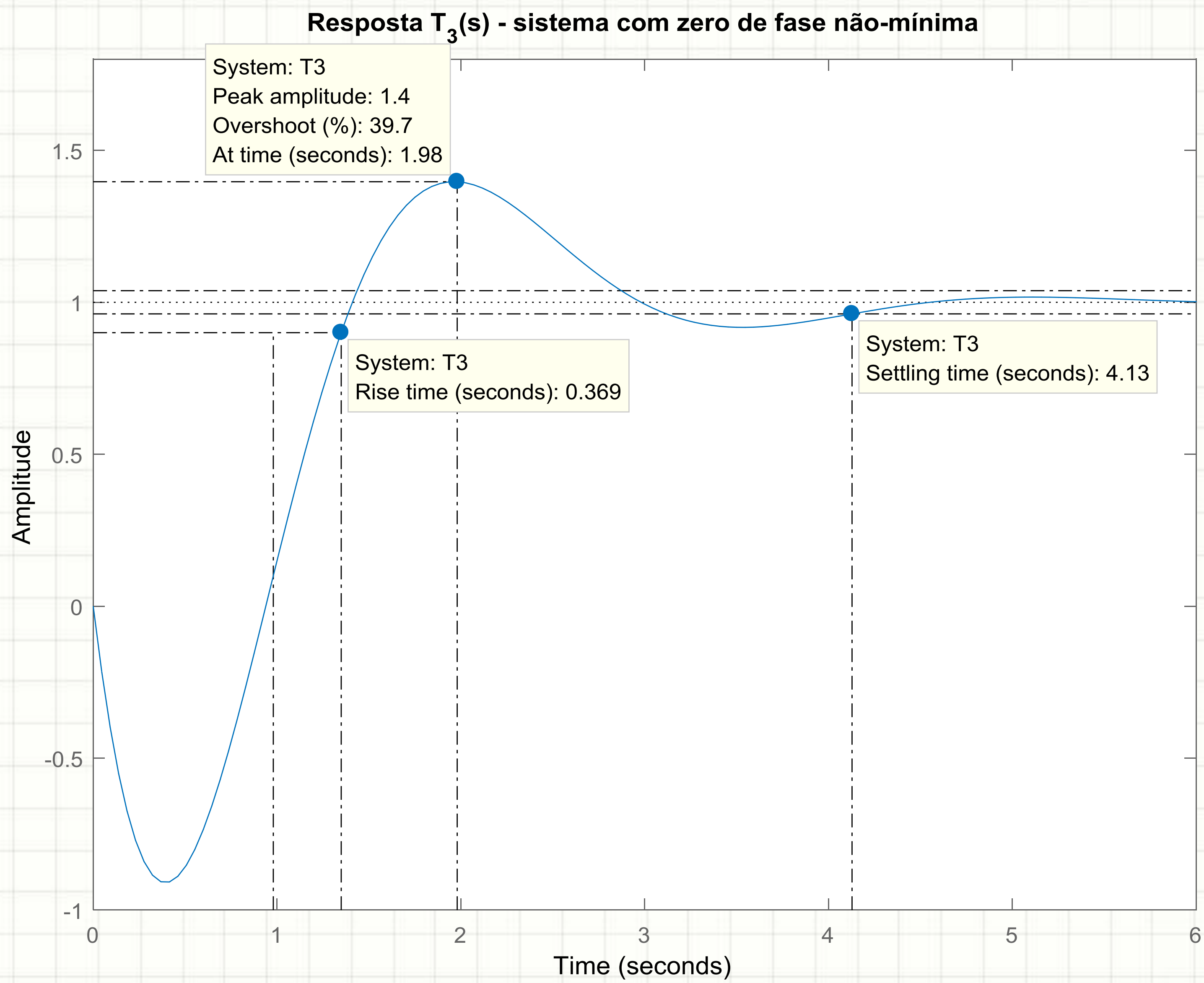
Efeito dos zeros na resposta transitória



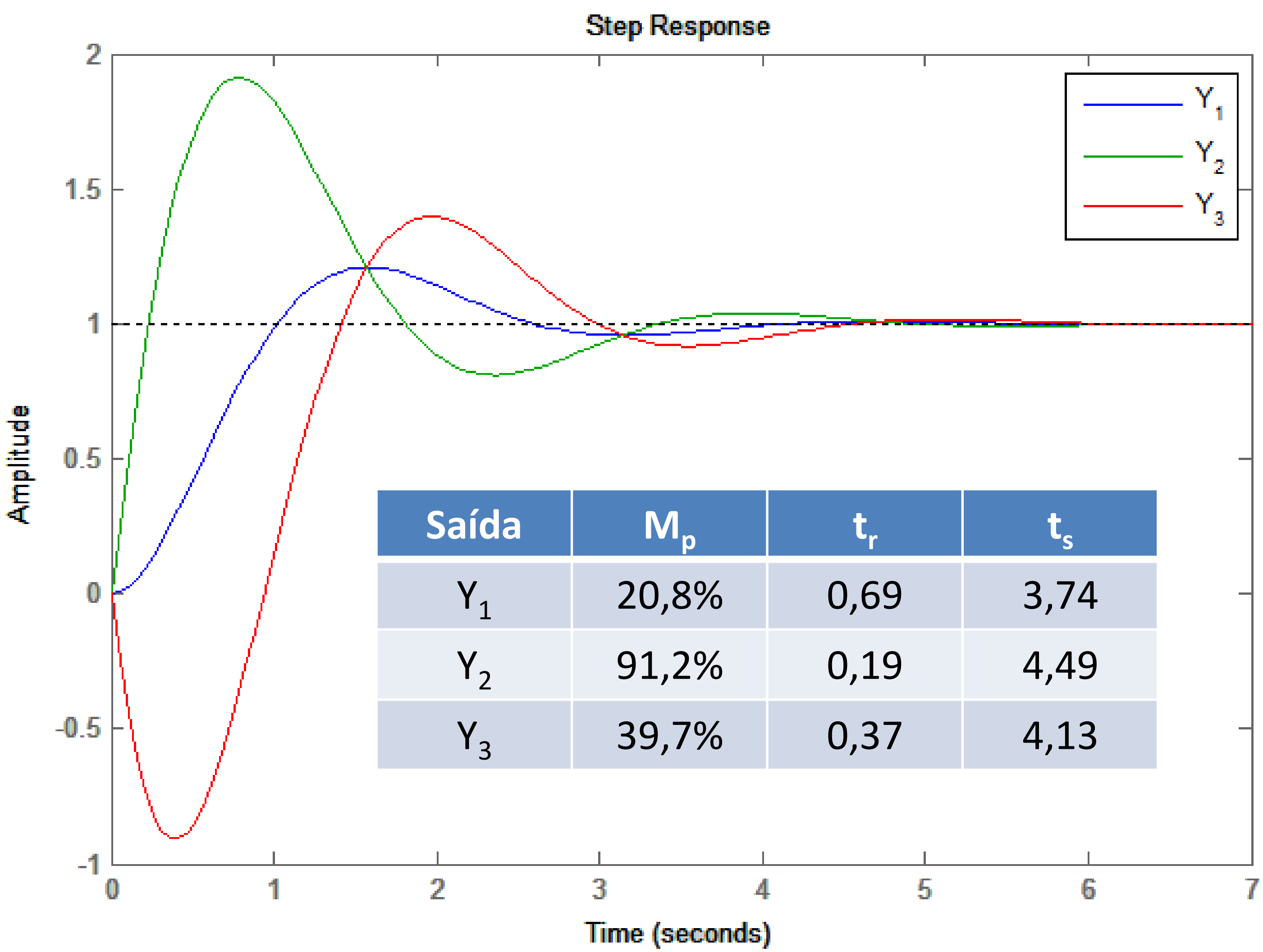
Efeito dos zeros na resposta transitória



Efeito dos zeros na resposta transitória



Efeito dos zeros na resposta transitória



Saída	M_p	t_r	t_s
Y_1	20,8%	0,69	3,74
Y_2	91,2%	0,19	4,49
Y_3	39,7%	0,37	4,13

Efeito dos zeros na resposta transitória

$$T_{2a}(s) = \frac{(5/1,5)(s+1,5)}{s^2+2s+5}$$

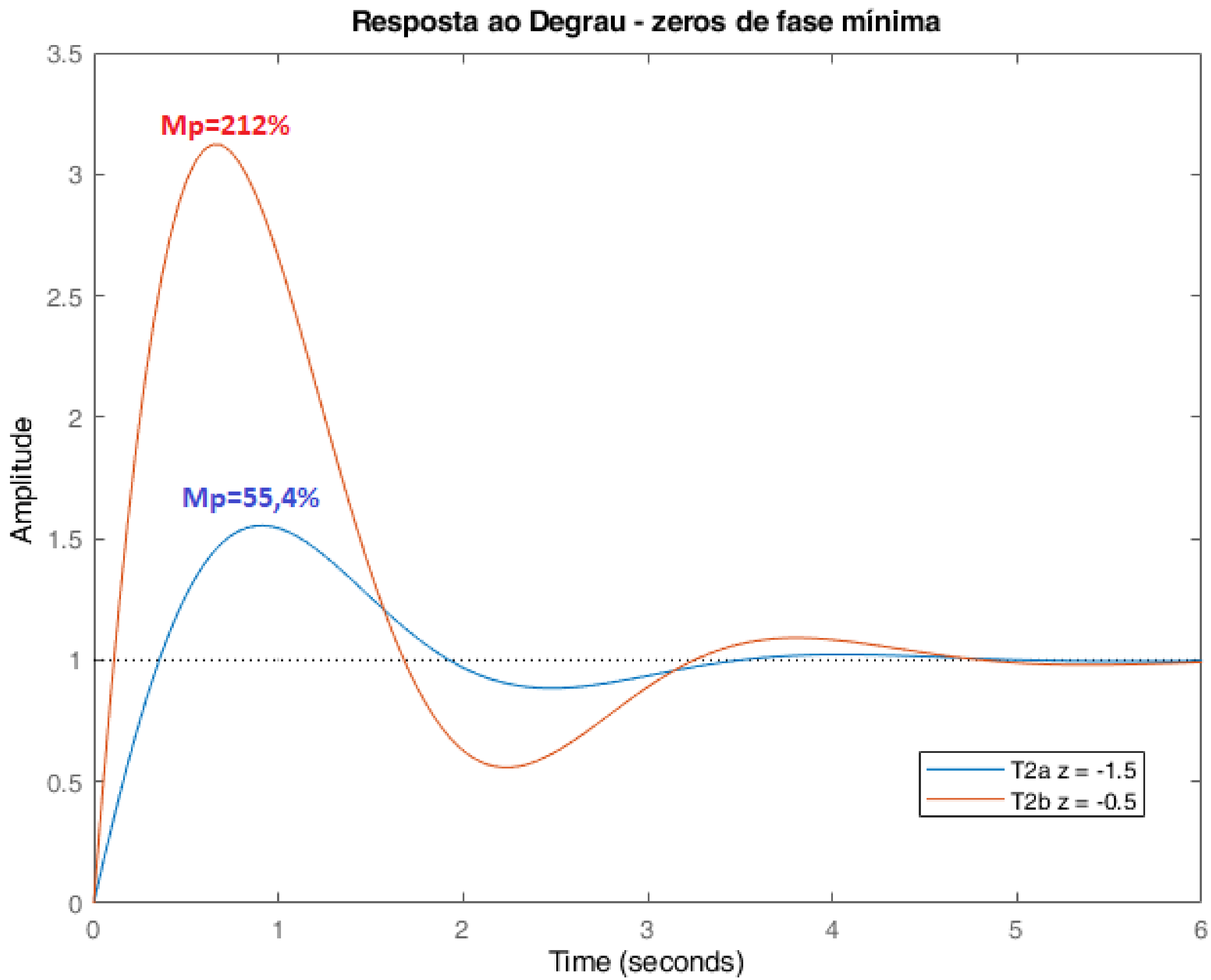
$$p_{1,2} = -1 \pm j2$$

$$z = -1,5$$

$$T_{2b}(s) = \frac{(5/0,5)(s+0,5)}{s^2+2s+5}$$

$$p_{1,2} = -1 \pm j2$$

$$z = -0,5$$



Resposta ao Degrau - zeros de fase mínima
Mp=212%
Mp=55,4%
Amplitude
Time (seconds)
T2a z = -1.5
T2b z = -0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
0
1
2
3
4
5
6

Efeito dos zeros na resposta transitória

$$T_{3a}(s) = \frac{-(5/1{,}5)(s-1{,}5)}{s^2+2s+5}$$

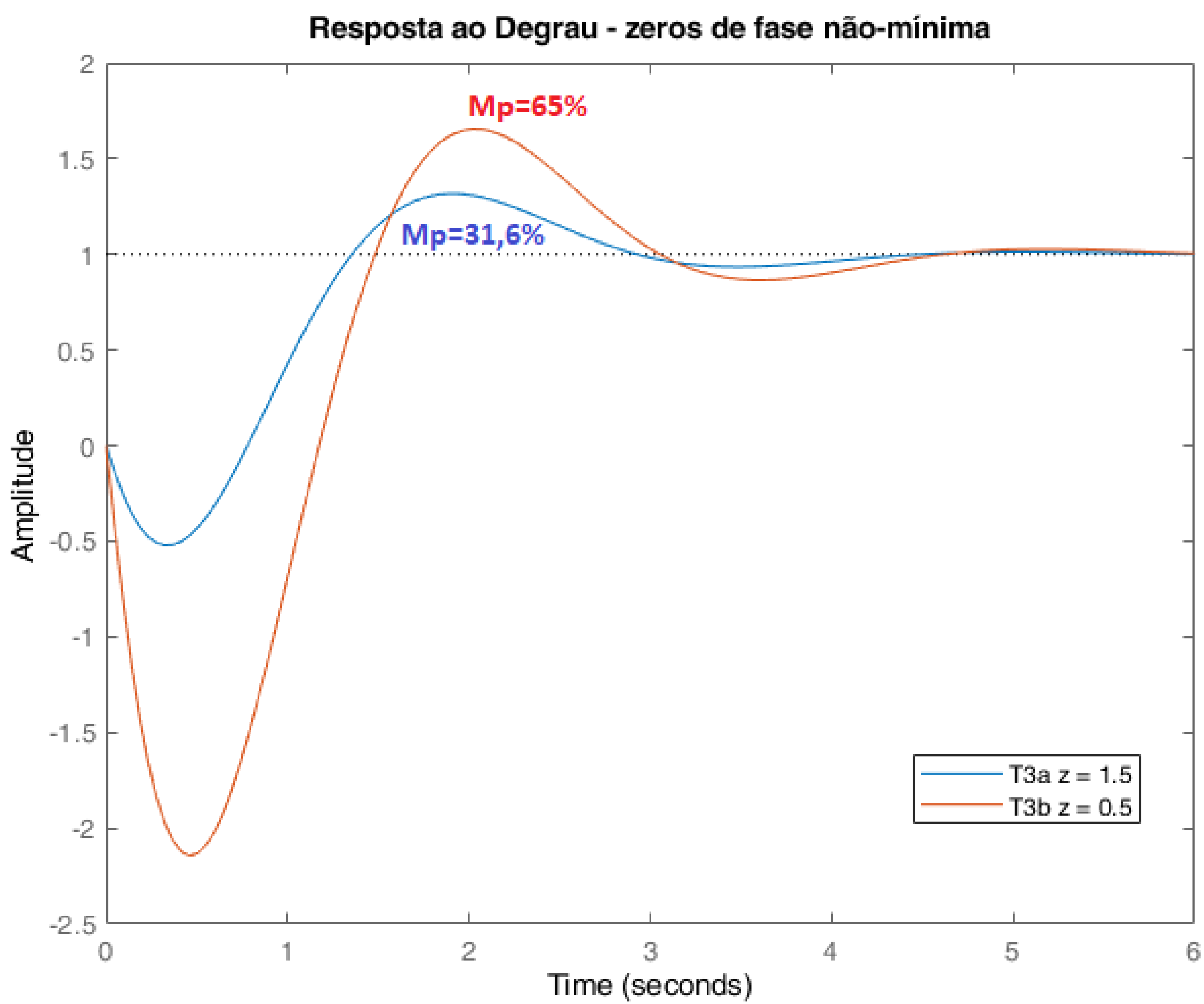
$$p_{1,2} = -1 \pm j2$$

$$z = 1{,}5$$

$$T_{3b}(s) = \frac{-(5/0{,}5)(s-0{,}5)}{s^2+2s+5}$$

$$p_{1,2} = -1 \pm j2$$

$$z = 0{,}5$$



Resposta ao Degrau - zeros de fase não-mínima
Mp=65%
Mp=31,6%
Amplitude
Time (seconds)
T3a z = 1.5
T3b z = 0.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
0
1
2
3
4
5
6

Dominância de Polos

$$T_1(s) = \frac{50}{(s+10)(s^2+2s+5)}$$

$$T_2(s) = \frac{15}{(s+3)(s^2+2s+5)}$$

$$T_3(s) = \frac{2{,}5}{(s+0{,}5)(s^2+2s+5)}$$

Dominância de Polos

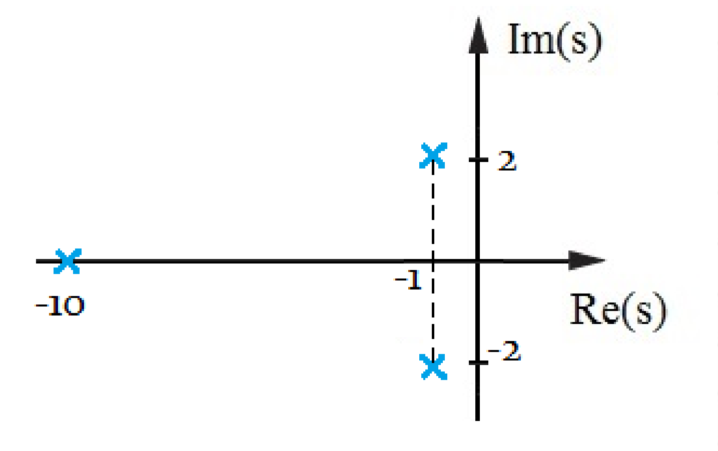
$$T_1(s) = \frac{50}{(s+10)(s^2+2s+5)}$$

Polos dominantes (PD): $p_{1,2}$=-1±j2

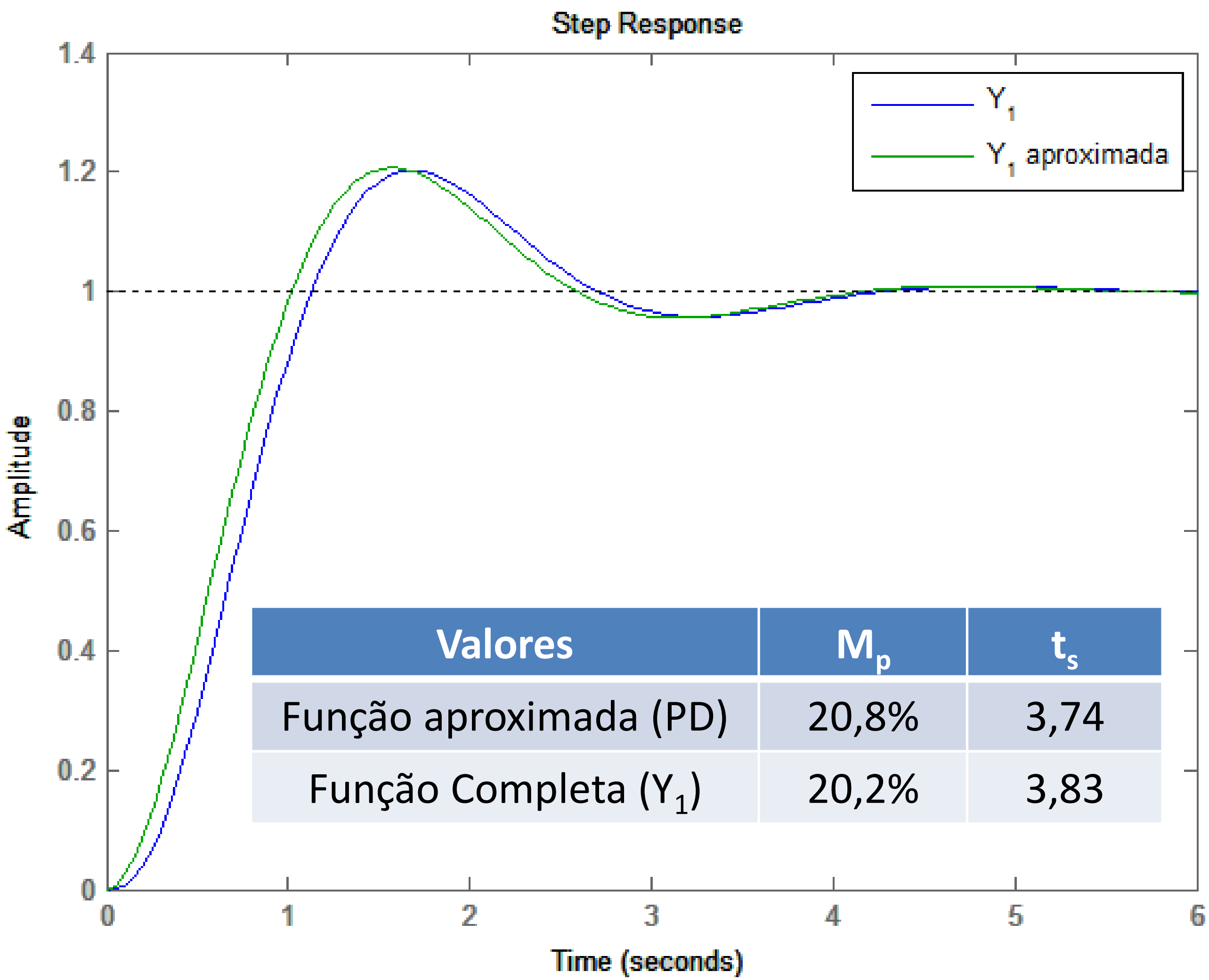
$$\omega_n^2 = 5 \quad \rightarrow \quad \omega_n = 2,23$$
$$2\xi\omega_n = 2 \quad \rightarrow \quad \xi = 0,45$$

Usando as aproximações:

$$\mathrm{M_p} = 20,5\%$$
$$\mathrm{t_s} = 3,74\, seg$$



Dominância de Polos



Valores	M_p	t_s
Função aproximada (PD)	20,8%	3,74
Função Completa (Y_1)	20,2%	3,83

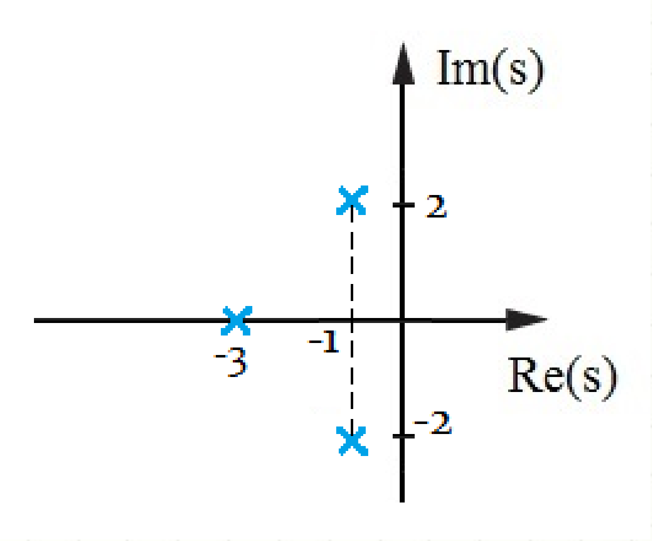
Dominância de Polos

$$T_2(s) = \frac{15}{(s+3)(s^2+2s+5)}$$

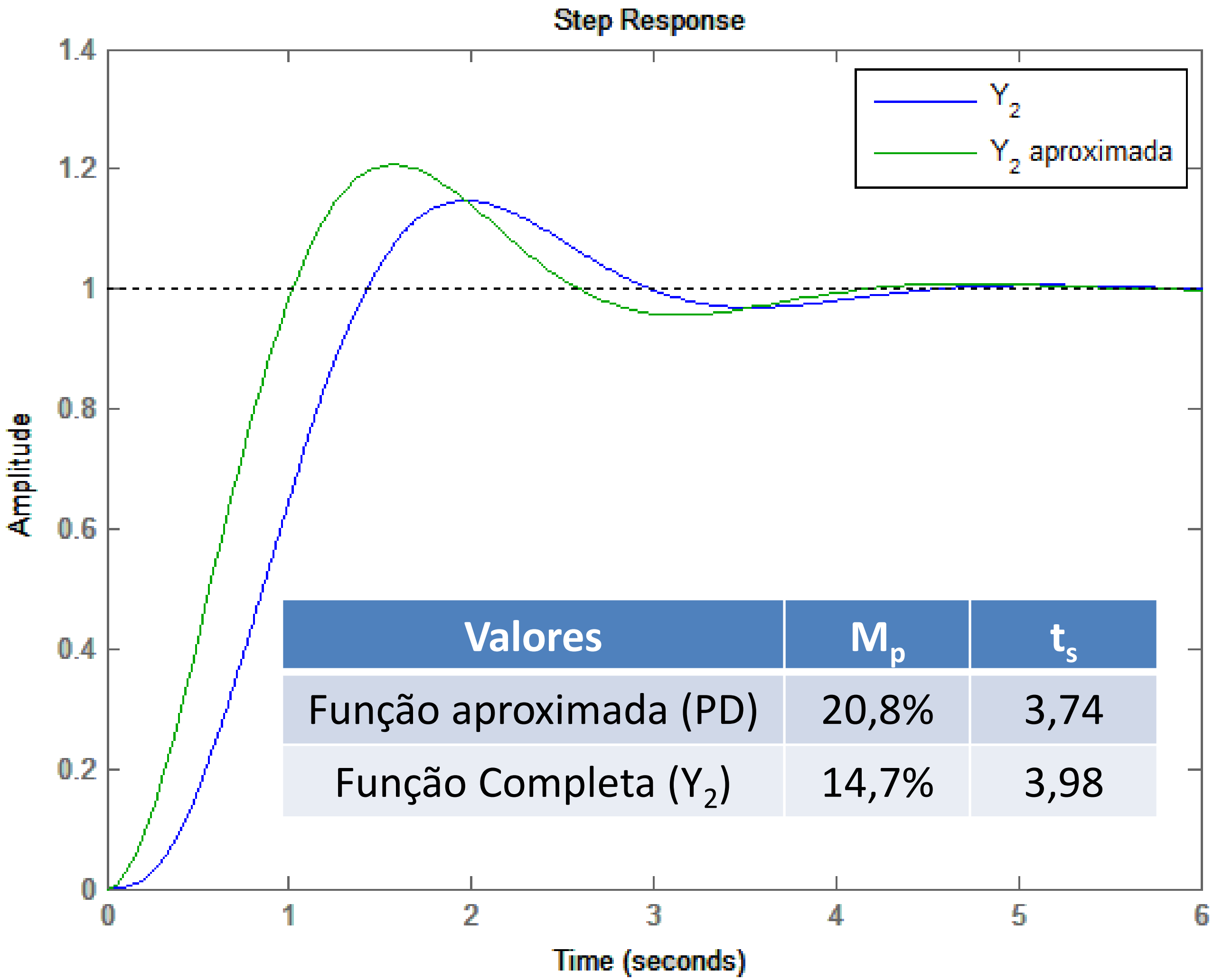
Polos dominantes (PD): $p_{1,2}$=-1±j2

$$\omega_n^2 = 5 \quad \rightarrow \quad \omega_n = 2{,}23$$
$$2\xi\omega_n = 2 \quad \rightarrow \quad \xi = 0{,}45$$

$$\mathrm{M_p} = 20{,}5\%$$
$$\mathrm{t_s} = 3{,}74\, seg$$



Dominância de Polos



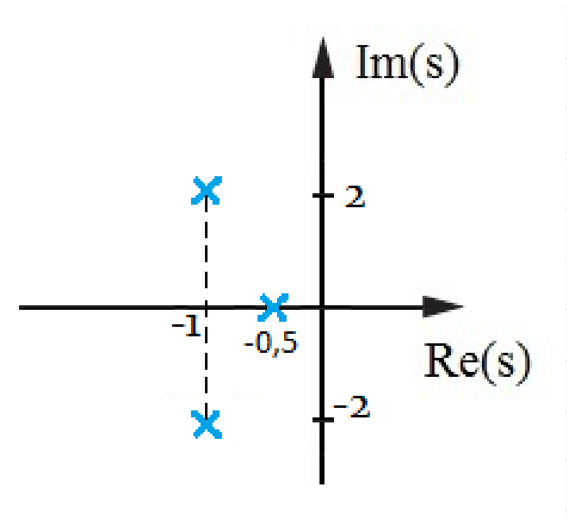
Valores	M_p	t_s
Função aproximada (PD)	20,8%	3,74
Função Completa (Y_2)	14,7%	3,98

Dominância de Polos

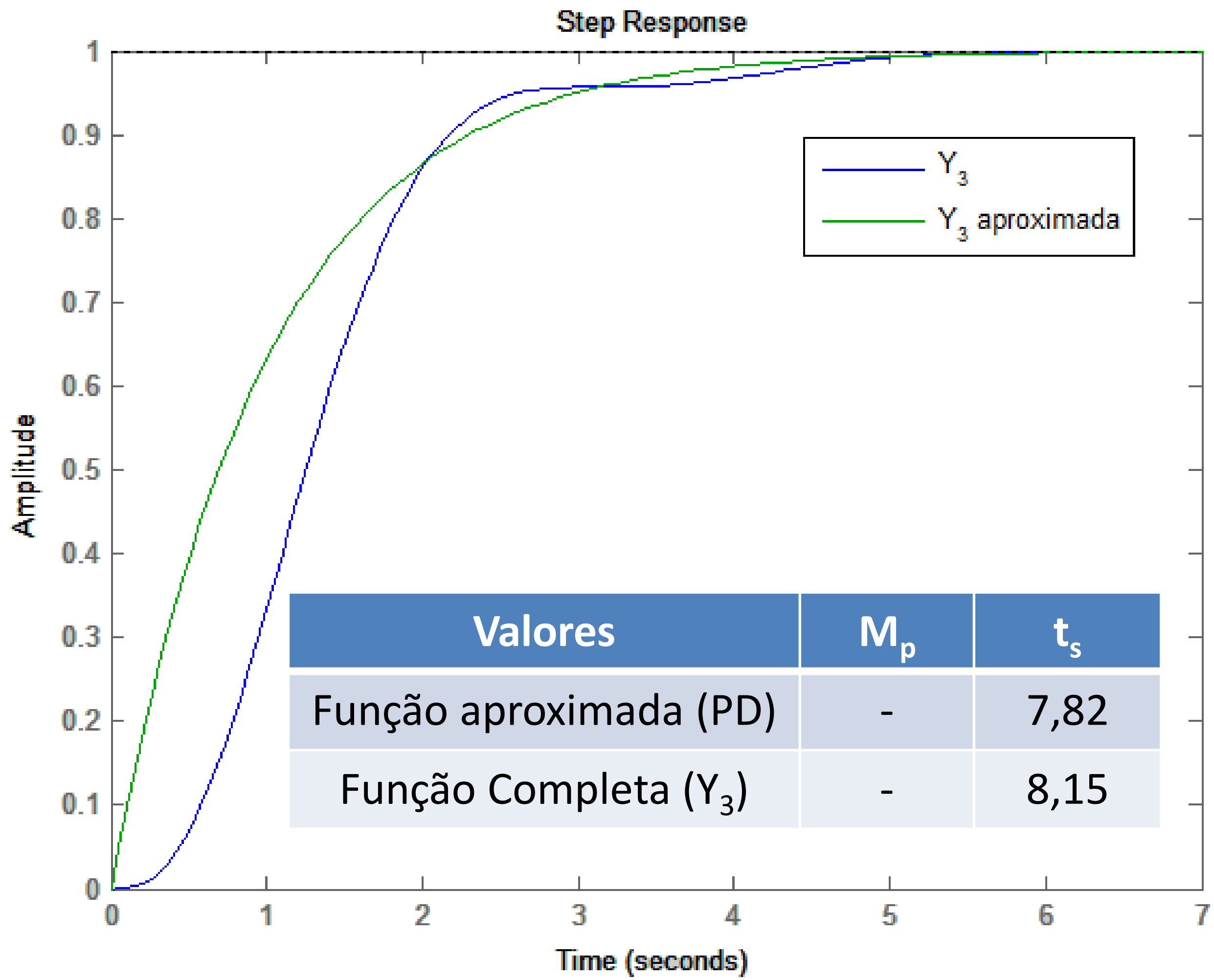
$$T_3(s) = \frac{2{,}5}{(s+0{,}5)(s^2+2s+5)}$$

Polo dominante (PD): p_1=-0,5

$$\begin{aligned} t_r &= 1{,}8/|p_1| \quad \rightarrow \quad t_r = 3{,}6 \\ t_s &= 4/|p_1| \quad \rightarrow \quad t_s = 8{,}0 \end{aligned}$$



Dominância de Polos



Valores	M_p	t_s
Função aproximada (PD)	-	7,82
Função Completa (Y_3)	-	8,15