Projeto de Controladores Usando Resposta em Frequência

Tempo discreto

Profa. Cristiane Paim

Resposta em Frequência de Sistemas Discretos

Resposta de um sistema discreto a uma entrada senoidal

Considere um sistema linear, discreto, invariante no tempo e estável. Seja a entrada do sistema um sinal senoidal

$$u(t) = sen(\omega t)$$

Considerando um amostrador ideal, tem-se

$$u(k) = sen(k\omega T)$$

Então,

$$U(z) = \mathrm{Z}\left[sen(k\omega T)\right] = \frac{z\, sen(\omega T)}{(z - e^{j\omega T})(z - e^{-j\omega T})}$$

Resposta em Frequência de Sistemas Discretos

A resposta do sistema é dada por

$$Y(z) = G(z)U(z) = G(z)\frac{z\,sen(\omega T)}{(z - e^{j\omega T})(z - e^{-j\omega T})}$$

Fazendo-se a expansão em frações parciais, obtém-se

$$Y(z) = \frac{\mathrm{A}z}{(z - e^{j\omega T})} + \frac{\bar{\mathrm{A}}z}{(z - e^{-j\omega T})} +$$

termos associados aos polos de G(z)

sendo

$$\mathrm{A} = \frac{G(e^{j\omega T})}{2j} \quad e \quad \bar{\mathrm{A}} = -\frac{G(e^{-j\omega T})}{2j}$$

Resposta em Frequência de Sistemas Discretos

Em regime permanente, a contribuição dos polos de G(z) desaparece uma vez que o sistema é estável. A resposta do sistema será dada por

$$y_\infty = \mathrm{M}\, sen(k\omega T + \theta)$$

sendo

$$M = \left| G(e^{j\omega T}) \right| \quad e \quad \theta = \angle G(e^{j\omega T})$$

Esta resposta é também senoidal, com amplitude multiplicada por M e com um deslocamento de fase θ.

Ou seja, no caso discreto obtém-se um resultado análogo àquele obtido no caso contínuo.

Resposta em Frequência de Sistemas Discretos

Usando o mapeamento $z=e^{sT}$ seria possível traçar a resposta em frequência no caso discreto.

No entanto, as frequências seriam idealmente limitadas em função do período de amostragem (teorema da amostragem).

Assim, os Diagramas de Bode ficariam limitados em frequência e a analogia com o caso contínuo não poderia ser utilizada para o projeto dos controladores.

Ex: Diagrama de Bode de G(z)

Para o sistema do exemplo visto anteriormente

$$G(z) = \frac{0,01758(z+0,876)}{(z-1)(z-0,6703)}$$

sendo T=0,2 segundos, o diagrama de Bode fica limitado em

$$\frac{\omega_S}{2} = 15,7\,\mathrm{rad/s}$$

Ex: Diagrama de Bode de G(z)

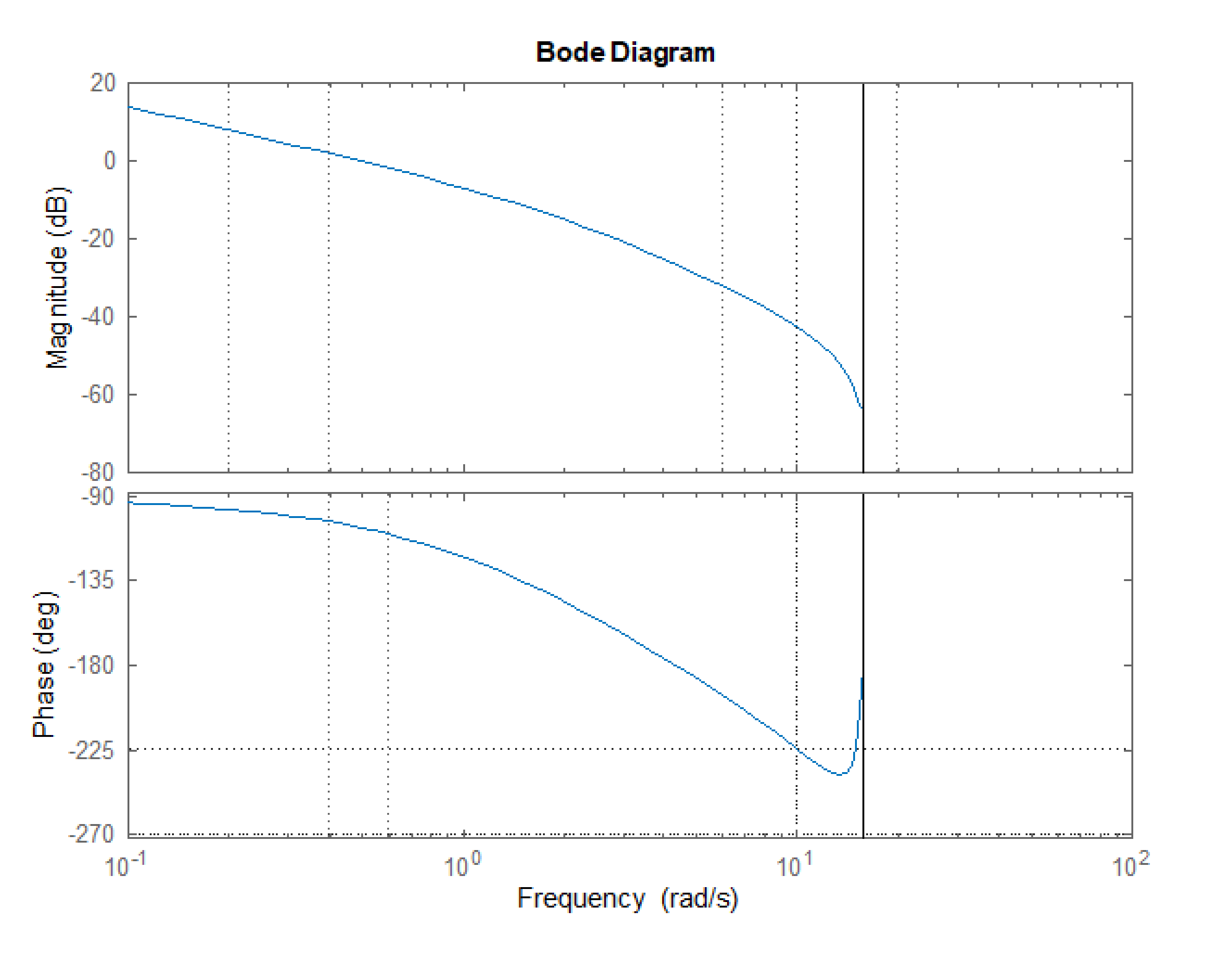


Diagrama de Bode de Sistema Discreto

Assim, para manter as vantagens de trabalhar no domínio da frequência usa-se, no caso discreto, uma transformação bilinear, dada por

$$z = \frac{1 + Tw/2}{1 - Tw/2}$$

sendo T o período de amostragem.

Da equação anterior obtém-se a transformação inversa

$$w = \frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$$

A função de transferência G(w) pode então se escrita como uma função racional e os métodos de resposta em frequência podem utilizados para o projeto dos controladores.

Diagrama de Bode de Sistema Discreto

No plano w pode-se definir uma frequência fictícia η, ou seja, **w=jη**. Esta frequência pode ser relacionada com a frequência ω no plano s, usando-se os mapeamentos:

$$\mathrm{w} = \frac{2}{\mathrm{T}}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) \quad \text{e} \quad z = e^{sT}$$

Pode ser demonstrado que

$$\eta \approx \omega$$

e, portanto, as frequências nos planos s e w são aproximadamente iguais.

Assim, os diagramas de bode podem ser traçados para G(jη) de forma similar ao caso contínuo.

Projeto Direto usando Resposta em Frequência

Procedimento de Projeto

1. Obter G(w) através da transformação linear

$$z = \frac{1 + Tw/2}{1 - Tw/2}$$

para um período de amostragem escolhido adequadamente.

2. Fazer w=jη em G(w) e traçar o diagrama de Bode para G(jη).

3. Utilizar os diagramas de Bode para projetar o controlador, seguindo procedimentos vistos para o caso contínuo.

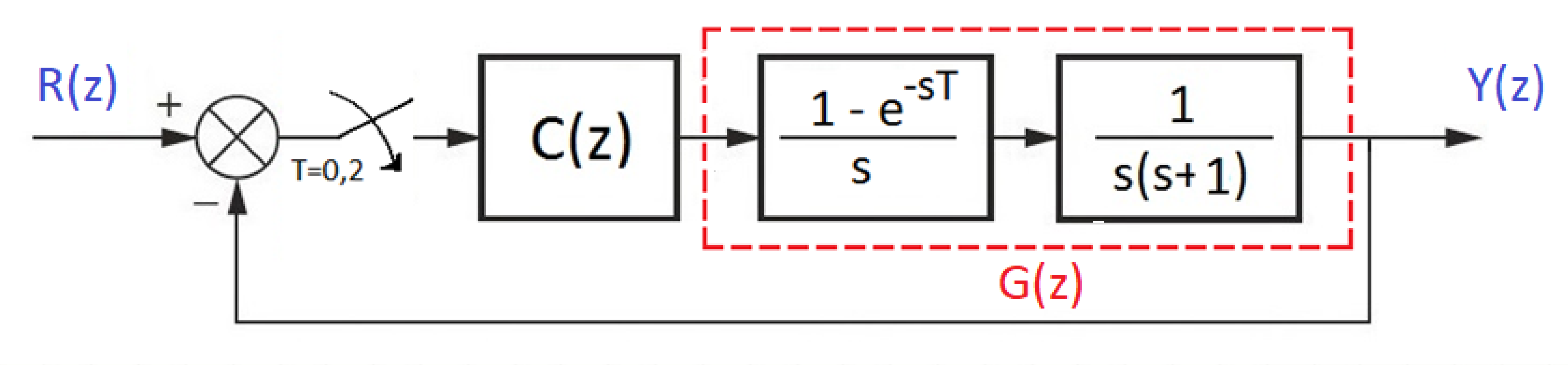
Projeto Direto usando Resposta em Frequência

4. Transformar o controlador C(w) em C(z) utilizando a transformação inversa

$$C(z) = C(\mathrm{w})\Big|_{\mathrm{w} = \frac{2}{\mathrm{T}}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)}$$

Exemplo

Seja o sistema de controle abaixo.



Projetar um controlador C(z) de modo a satisfazer as seguintes especificações:

- $MF \geq 50°$
- $Kv \geq 2$

Exemplo

O modelo discreto do sistema é dado por

$$G(z) = Z\left\{ \frac{1-e^{-sT}}{s} \, \frac{1}{s(s+1)} \right\} = \frac{0{,}01873(z+0{,}9356)}{(z-1)(z-0{,}8187)}$$

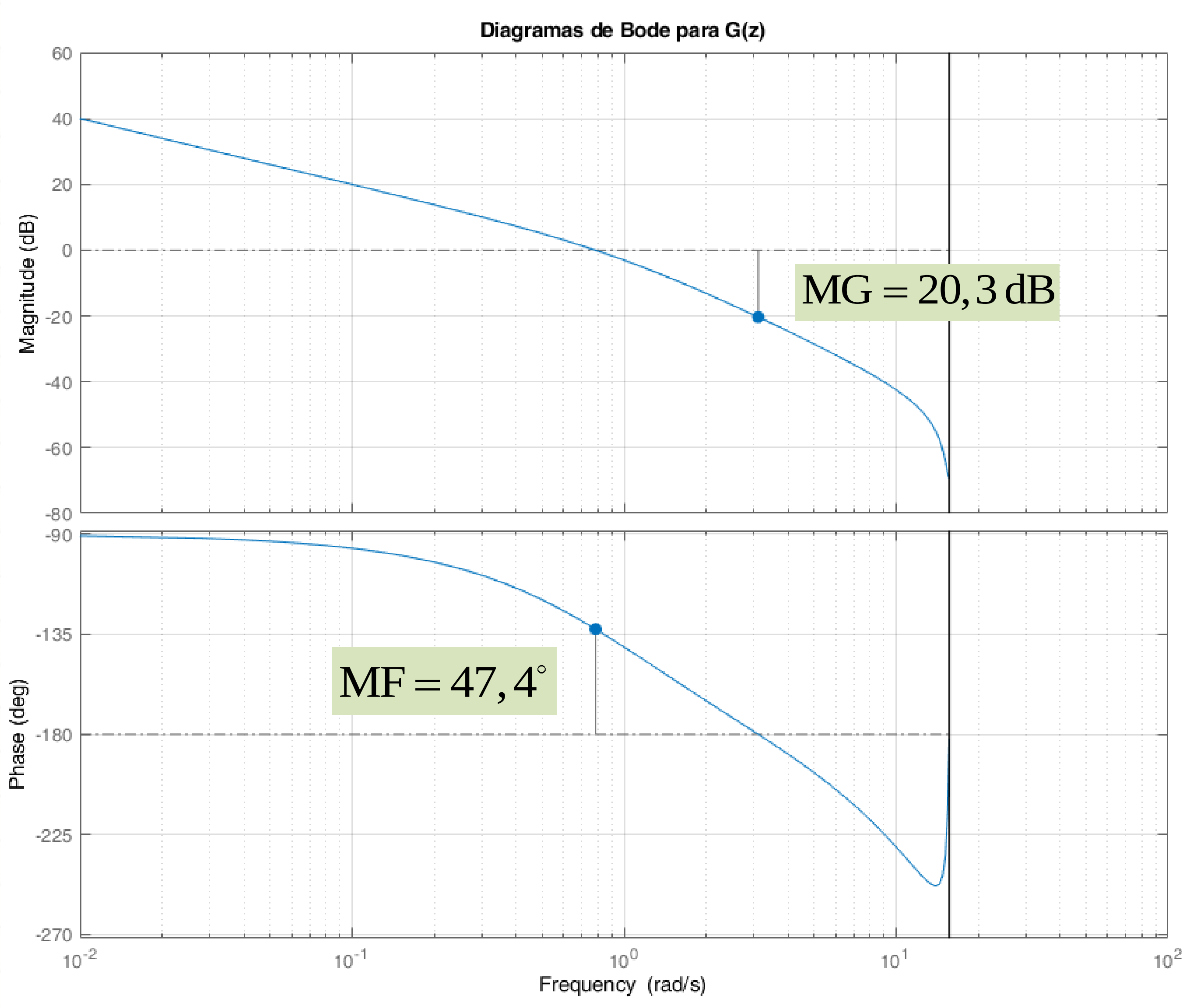
Usando a transformação bilinear

$$z = \frac{1+\mathrm{T}w/2}{1-\mathrm{T}w/2}$$

faz-se

$$G(w) = G(z)\Big|_{z=\frac{1+0{,}1w}{1-0{,}1w}}$$

Exemplo


Diagramas de Bode para G(z)
Magnitude (dB)
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
MG = 20,3 dB
Phase (deg)
-90
-135
-180
-225
-270
MF = 47,4°
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
Frequency (rad/s)

Exemplo

Obtém-se

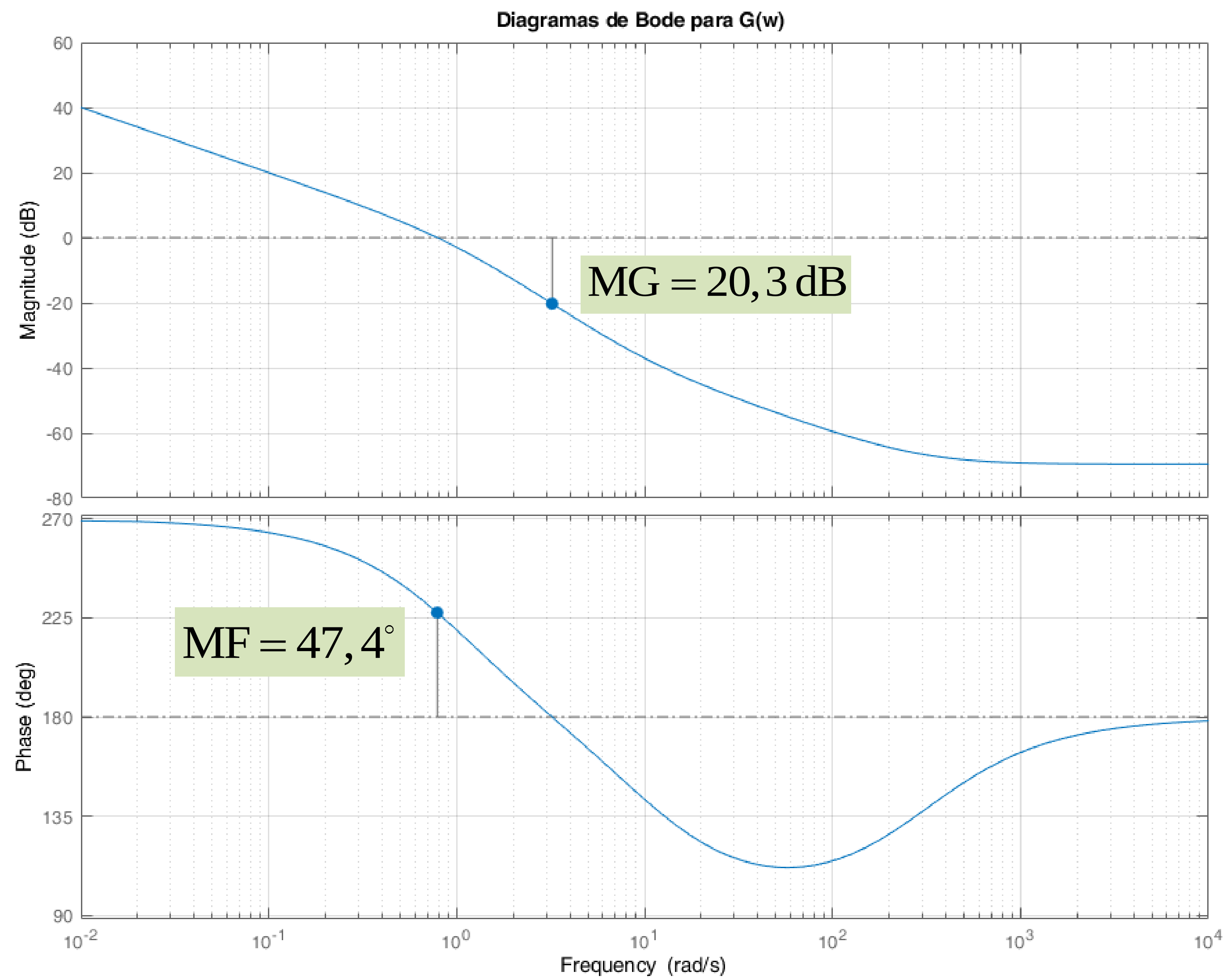
$$G(w) = \frac{(w+300)(10-w)}{3000w(w+1)}$$

Para garantir as especificações de desempenho será projetado um controlador em avanço na forma

$$C(w) = K\frac{1+\alpha Tw}{1+Tw} \qquad \alpha > 1$$

Para a G(w) obtida tem-se os diagramas de bode mostrados a seguir.

Exemplo



Diagramas de Bode para G(w)
Magnitude (dB)
Phase (deg)
Frequency (rad/s)
$MG = 20,3\,dB$
$MF = 47,4^{\circ}$
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
270
225
180
135
90
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
10^{4}

Exemplo

Inicialmente determina-se o ganho necessário para garantir a especificação de erro de regime permanente.

$$Kv = \lim_{w \to 0} w\, C(w) G(w) \geq 2$$

$$Kv = \lim_{w \to 0} w \left(K \frac{1+\alpha T w}{1+Tw} \right) \frac{(w+300)(10\text{-}w)}{3000w(w+1)} = K$$

Portanto,

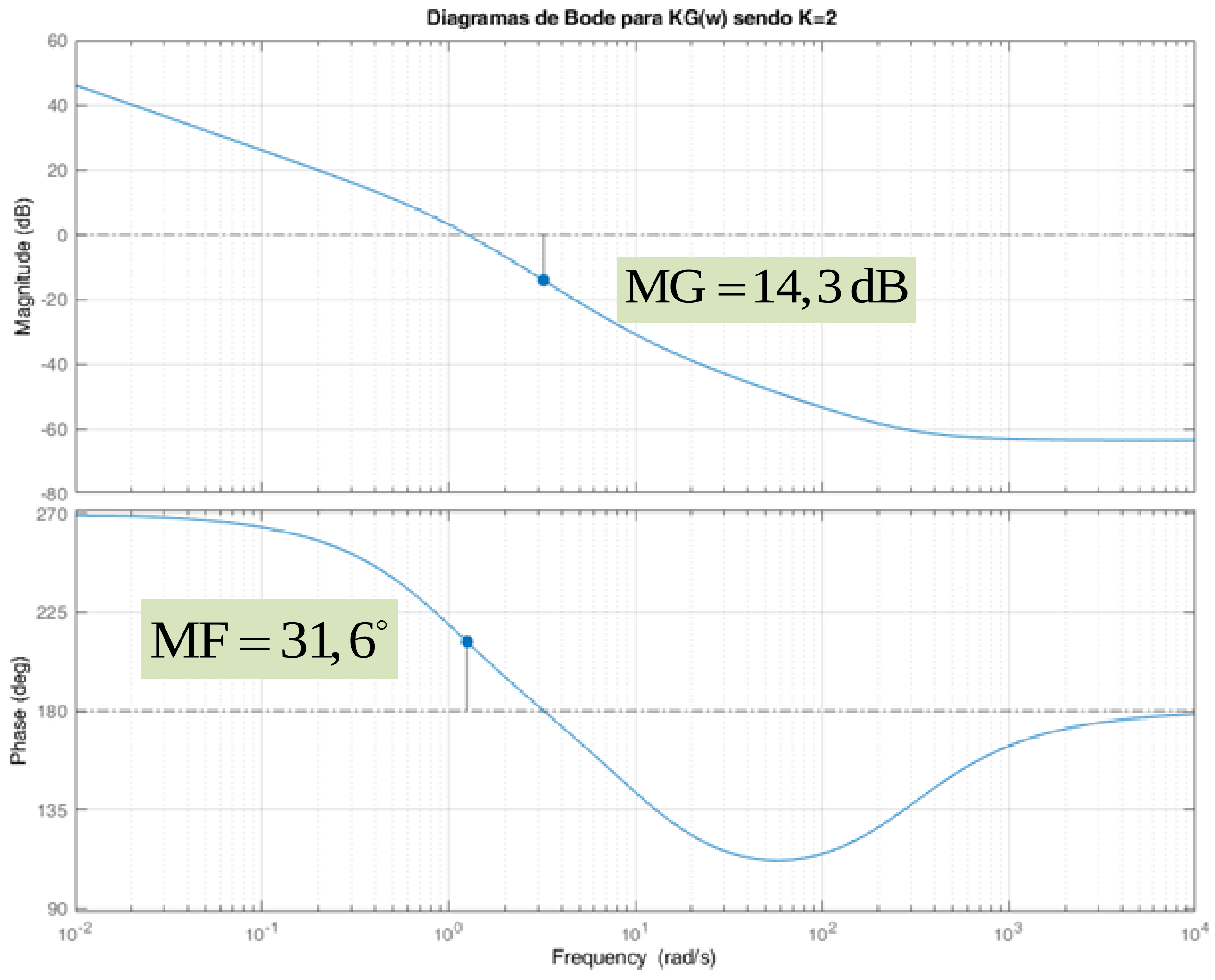
$$K \geq 2$$

Considerando K=2 tem-se:

$$\mathrm{MG} = 14,3\,\mathrm{dB}$$

$$\mathrm{MF} = 31,6^{\circ}$$

Exemplo



Diagramas de Bode para KG(w) sendo K=2
Magnitude (dB)
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
$MG = 14,3\,dB$
Phase (deg)
270
225
180
135
90
$MF = 31,6^{\circ}$
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
10^{4}
Frequency (rad/s)

Exemplo

Define-se a contribuição de fase do controlador como

$$\phi_{\mathrm{m}} = 50^{\circ} - 31{,}6^{\circ} + 11{,}6^{\circ} = 30^{\circ}$$

Assim, o valor de α pode ser calculado por

$$\alpha = \frac{1 + \operatorname{sen}\phi_{\mathrm{m}}}{1 - \operatorname{sen}\phi_{\mathrm{m}}} \quad \rightarrow \quad \alpha = 3$$

Exemplo

Calcula-se agora a frequência de cruzamento de ganho a partir de

$$\left| K\sqrt{\alpha}\, G(j\omega_C) \right| = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_C = 1{,}747$$

Assim,

$$T = \frac{1}{\omega_C \sqrt{\alpha}} = 0{,}3305 \quad \text{e} \quad \alpha T = 0{,}9914$$

gerando o controlador

$$C(\mathrm{w}) = 2\,\frac{1 + 0{,}3305\mathrm{w}}{1 + 0{,}9914\mathrm{w}}$$

Exemplo

O controlador C(w) pode ser reescrito como:

$$C(\mathrm{w}) = 6\left(\frac{\mathrm{w}+1}{\mathrm{w}+3}\right)$$

Observe que o controlador obtido, gera um cancelamento polo/zero.

Em malha aberta tem-se:

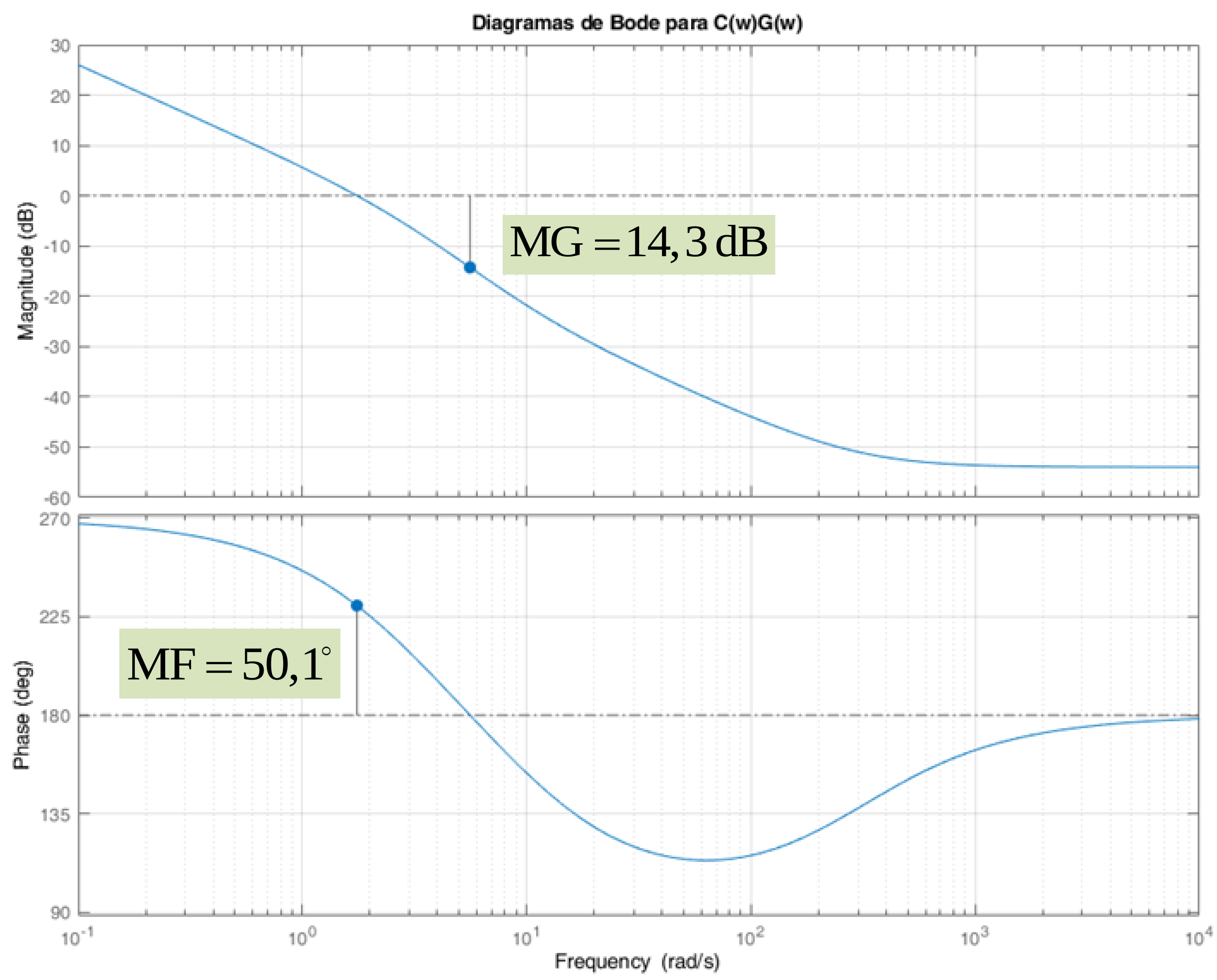
$$C(\mathrm{w})G(\mathrm{w}) = 6\left(\frac{\mathrm{w}+1}{\mathrm{w}+3}\right)\frac{(\mathrm{w}+300)(10-\mathrm{w})}{3000\mathrm{w}(\mathrm{w}+1)} = \frac{6(\mathrm{w}+300)(10-\mathrm{w})}{3000\mathrm{w}(\mathrm{w}+3)}$$

resultando em

$$\mathrm{MG} = 14{,}3\mathrm{dB}$$
$$\mathrm{MF} = 50{,}1^{\circ}$$

atendendo as especificações.

Exemplo



Diagramas de Bode para C(w)G(w)
Magnitude (dB)
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
$MG = 14,3\,\mathrm{dB}$
Phase (deg)
270
225
180
135
90
$MF = 50,1^{\circ}$
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
10^{4}
Frequency (rad/s)

Exemplo

Para obtenção do controlador no plano z, aplica-se a transformação inversa:

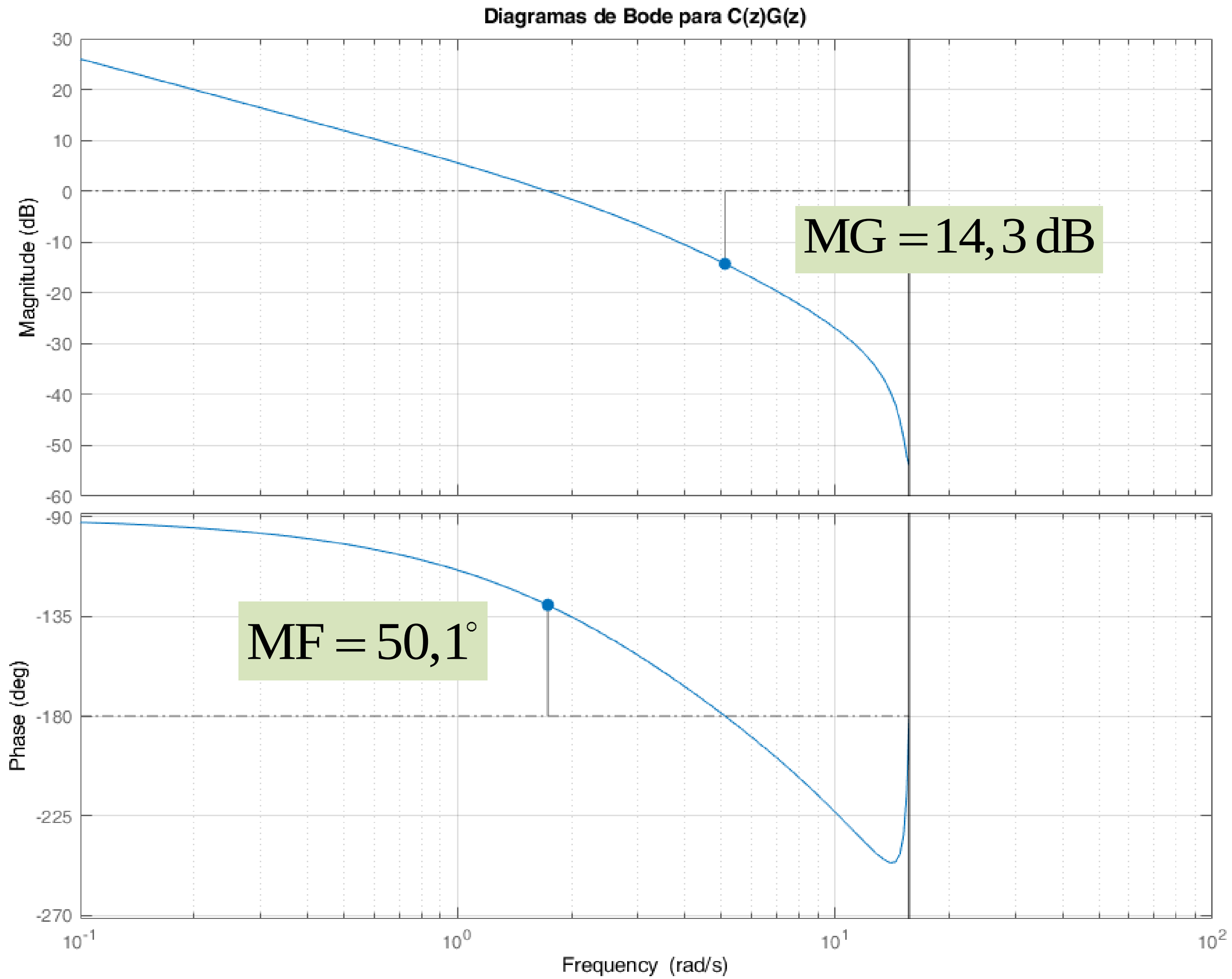
$$C(z) = C(w)\Big|_{w=10\left(\frac{z-1}{z+1}\right)} = 5{,}08\left(\frac{z-0{,}8187}{z-0{,}5385}\right)$$

Verificação

$$C(z)G(z) = \underbrace{\frac{5{,}08(z-0{,}8187)}{z-0{,}5385}}_{C(z)}\ \underbrace{\frac{0{,}01873(z+0{,}9356)}{(z-1)(z-0{,}8187)}}_{G(z)}$$

$$MG = 14{,}3\,dB$$
$$MF = 50{,}1^{\circ}$$

Exemplo


Diagramas de Bode para C(z)G(z)
Magnitude (dB)
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
$MG = 14,3\,\mathrm{dB}$
Phase (deg)
-90
-135
-180
-225
-270
$MF = 50,1^{\circ}$
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
Frequency (rad/s)