Lugar das Raízes: Sistemas com Atraso e Condicionalmente Estáveis

Profa. Cristiane Paim

Sistemas com Atraso

Introdução

O Lugar das Raízes para sistemas com atraso pode ser traçado de duas formas:

- **Forma Exata**: as condições de módulo e fase são aplicadas à função de transferência com atraso. O Lugar das Raízes será traçado a partir de valores calculados.
- **Forma Aproximada**: o atraso é representado através de uma aproximação de Padé, e desta forma, podem ser utilizadas as regras usuais para o traçado do Lugar das Raízes.

Lugar das Raízes exato

Uma função de transferência com único atraso pode ser escrita como:

$$G(s) = e^{-Ls}\overline{G}(s)$$

sendo L uma constante positiva, que representa um atraso em segundos.

Considerando

$$s = \sigma + j\omega$$

tem-se

$$G(\sigma + j\omega) = e^{-L\sigma}e^{-jL\omega}\overline{G}(\sigma + j\omega)$$

Lugar das Raízes exato

Sabendo que

$$\angle e^{-L\sigma} = 0$$

$$\angle e^{-jL\omega} = \angle(\cos(\omega L) - j\mathrm{sen}(\omega L))$$

$$= -L\omega \quad (\text{radianos})$$

a condição de fase pode ser escrita como

$$\angle G(\sigma + j\omega) = -L\omega + \angle\overline{G}(\sigma + j\omega) = \pi(2q+1)$$

ou $$\angle\overline{G}(\sigma + j\omega) = \pi(2q+1) + L\omega$$

$$= 180^{\circ}(2q+1) + 57{,}3^{\circ} L\omega$$

Lugar das Raízes exato

Assim, o Lugar das Raízes será traçado fixando-se ω procurando σ que verifique a condição de fase. O processo é repetido para todos os valores possíveis de ω.

Observe que, para cada valor de q existe um Lugar das Raízes diferente. Além disso, existe um número infinito de ramos no LR.

Entretanto, pode ser feita uma análise simplificada considerando apenas q=0.

Lugar das Raízes exato

Desta forma, o Lugar das Raízes exato é traçado a partir de

$$\angle\overline{G}(\sigma + j\omega) = \pi + L\omega$$

ou

$$\angle\overline{G}(\sigma + j\omega) = 180^{\circ} + 57{,}3^{\circ} L\omega$$

calculando σ para (infinitos) valores fixos de ω.

Exemplo – Lugar das Raízes exato

Seja a função de transferência de malha aberta:

$$G(s) = \frac{2e^{-4s}}{100s+1}$$

ou seja,

$$\overline{G}(s) = \frac{2}{100s+1} \quad \text{e} \quad L = 4$$

A condição de fase será dada por:

$$\angle \overline{G}(\sigma + j\omega) = \pi + L\omega$$

Exemplo – Lugar das Raízes exato

Sendo

$$s = \sigma + j\omega$$

tem-se

$$\angle \overline{G}(\sigma + j\omega) = \angle 2 - \angle(100(\sigma + j\omega) + 1$$

$$= 0 - tg^{-1}\left(\frac{100\omega}{1+100\sigma}\right)$$

Substituindo na condição de fase

$$-tg^{-1}\left(\frac{100\omega}{1+100\sigma}\right) = \pi + 4\omega$$

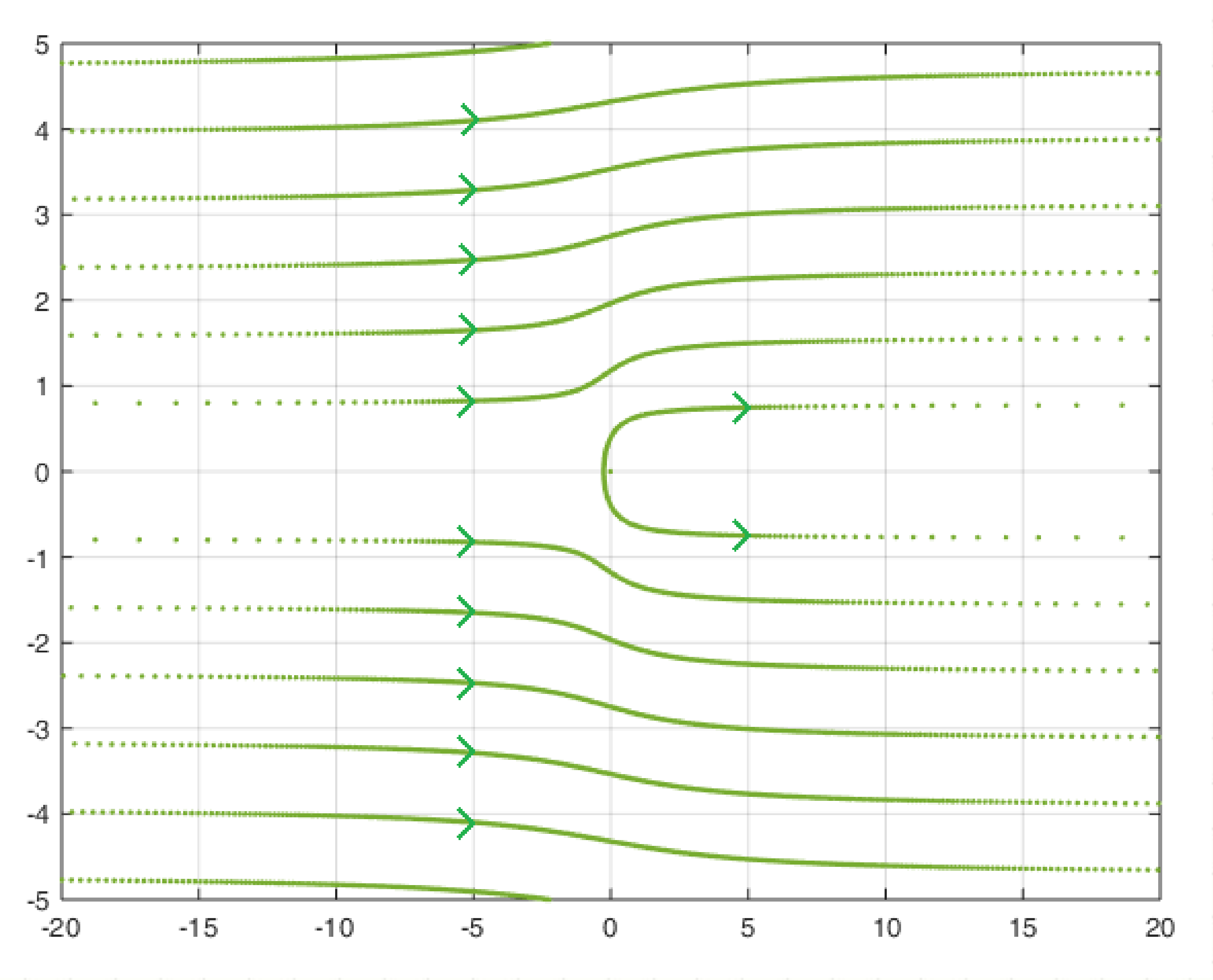
Exemplo – Lugar das Raízes exato

Após manipulações:

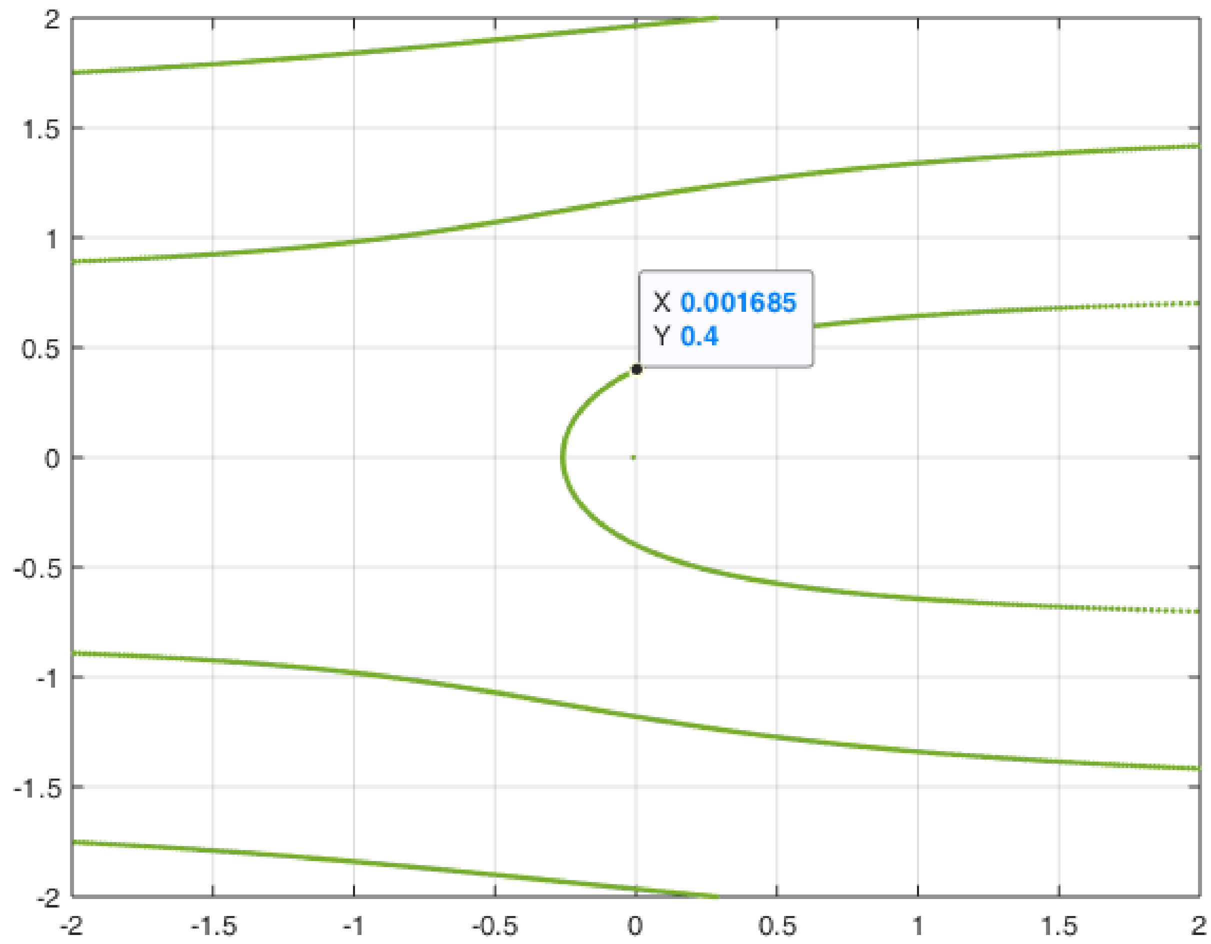
$$\sigma = \frac{100\omega - \mathrm{tg}(\pi + 4\omega)}{100\,\mathrm{tg}(\pi + 4\omega)}$$

Considerando ω = [-5 : 0,01 : 5], obtém-se o LR a seguir.

Exemplo – Lugar das Raízes exato



Exemplo – Lugar das Raízes exato



Exemplo – Lugar das Raízes exato

Do gráfico (ou dos valores calculados), observa-se que o primeiro cruzamento com eixo imaginário ocorre em ω=0,4.

A estabilidade pode ser obtida através da condição de módulo:

$$|\,G(s)\,| = \frac{1}{K} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{2e^{-4s}}{100s+1}\right| = \frac{1}{K}$$

Exemplo – Lugar das Raízes exato

Para s = j0,4

$$2K\left| e^{-4\times j0,4} \right| = \left|\left(100\times j0,4\right)+1\right|$$

$$2K = \sqrt{40^2+1^2} \Rightarrow K = 20,01$$

Portanto, o sistema é estável para 0 < K < 20.

Lugar das Raízes Aproximado

Neste caso, o atraso é representado por uma **aproximação de Padé** de ordem apropriada.

Padé(0,1) $\rightarrow$ $e^{-Ls} = \dfrac{1}{Ls+1}$

Padé(1,1) $\rightarrow$ $e^{-Ls} = \dfrac{2-Ls}{2+Ls}$

Padé(2,2) $\rightarrow$ $e^{-Ls} = \dfrac{1-(Ls/2)s+(Ls)^2/12}{1+(Ls/2)s+(Ls)^2/12}$

Exemplo - Lugar das Raízes Aproximado

Do exemplo anterior:

$$\overline{G}(s) = \frac{2}{100s+1} \quad \text{e} \quad L = 4$$

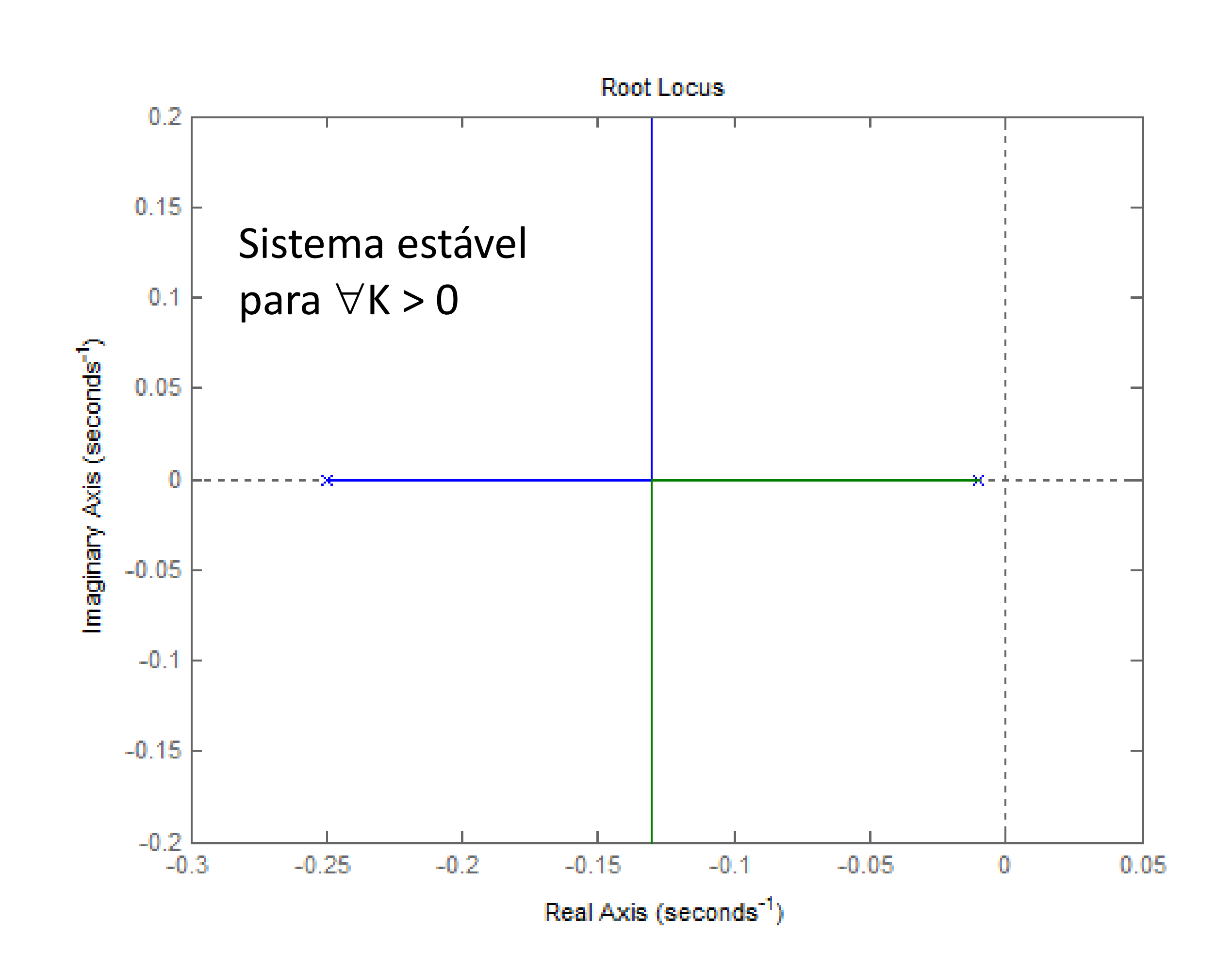
Aproximação de Padé (0,1)

$$e^{-Ls} = \frac{1}{Ls+1} \quad \rightarrow \quad e^{-4s} = \frac{1}{4s+1}$$

ou seja,

$$G_1(s) = \frac{2}{(4s+1)(100s+1)} = \frac{0{,}005}{(s+0{,}01)(s+0{,}25)}$$

Aproximação de Padé (0,1)



Portanto, esta aproximação não representa adequadamente o sistema.

Exemplo - Lugar das Raízes Aproximado

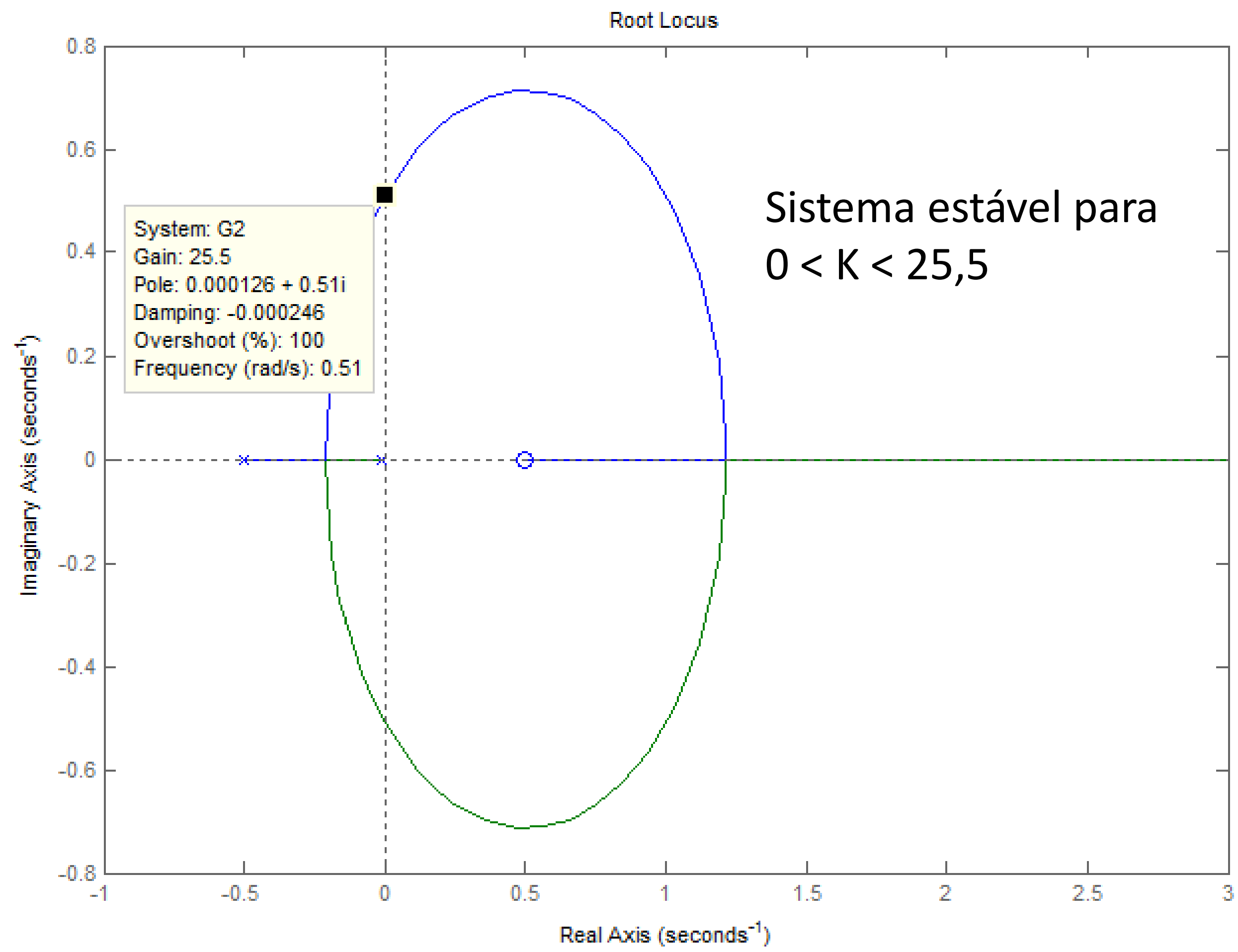
Aproximação de Padé (1,1)

$$e^{-Ls} = \frac{2 - Ls}{2 + Ls} \quad \rightarrow \quad e^{-4s} = \frac{2 - 4s}{2 + 4s}$$

ou seja,

$$G_2(s) = \frac{2(2 - 4s)}{(2 + 4s)(100s + 1)} = \frac{-0{,}02(s - 0{,}5)}{(s + 0{,}01)(s + 0{,}5)}$$

Aproximação de Padé (1,1)



Sistema estável para
0 < K < 25,5

Esta aproximação também não é adequada para representar o sistema em estudo.

Exemplo - Lugar das Raízes Aproximado

Aproximação de Padé (2,2)

$$e^{-Ls} = \frac{1 - (Ls/2)s + (Ls)^2/12}{1 + (Ls/2)s + (Ls)^2/12}$$

$$\downarrow$$

$$e^{-4s} = \frac{s^2 - 1{,}5s + 0{,}75}{s^2 + 1{,}5s + 0{,}75}$$

Exemplo - Lugar das Raízes Aproximado

$$G_3(s) = \frac{2(s^2 - 1{,}5s + 0{,}75)}{(s^2 + 1{,}5s + 0{,}75)(100s + 1)}$$

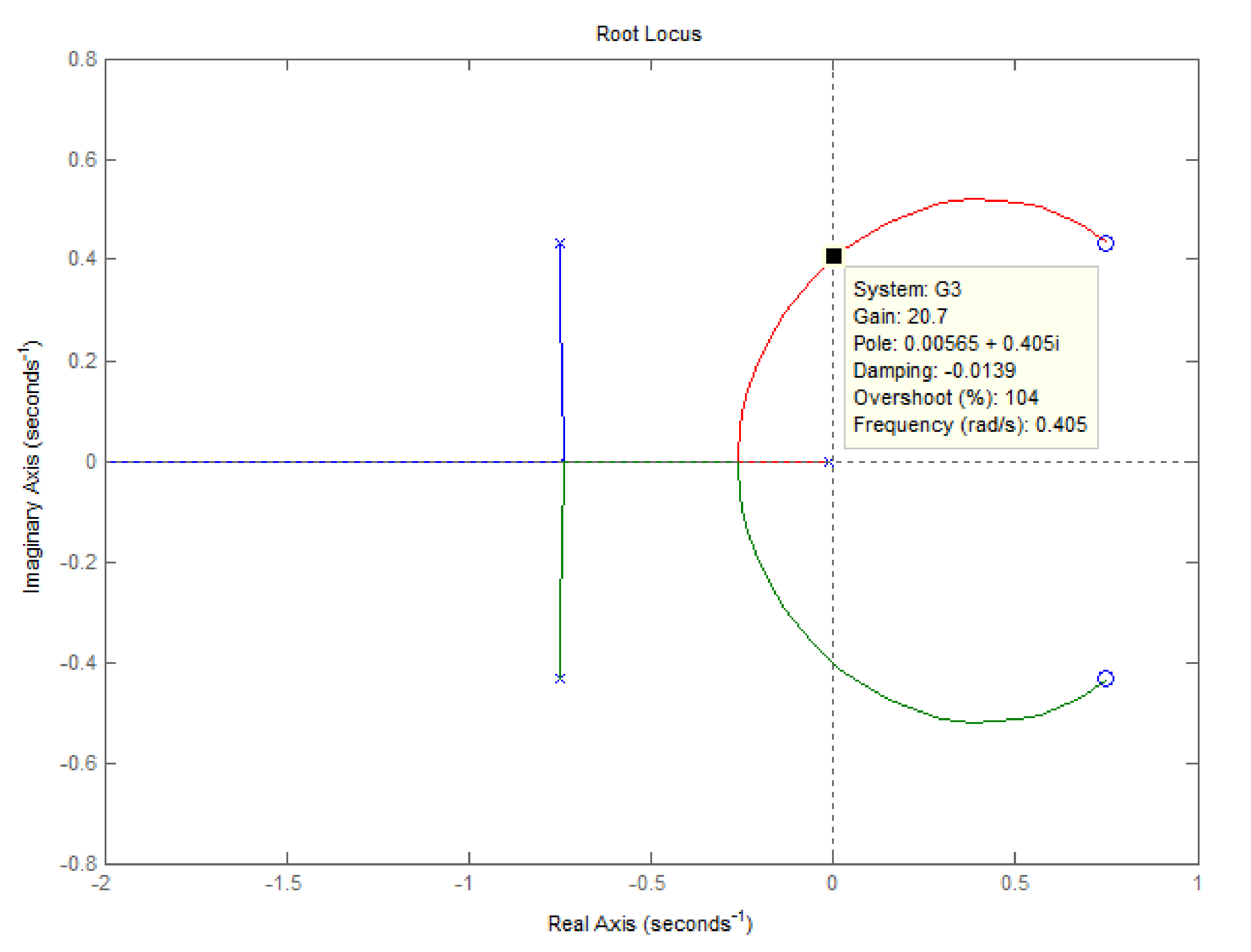
$$= \frac{0{,}02(s^2 - 1{,}5s + 0{,}75)}{(s^2 + 1{,}5s + 0{,}75)(s + 0{,}01)}$$

$$z_{1,2} = +0{,}75 \pm j0{,}43$$

$$p_{1,2} = -0{,}75 \pm j0{,}43$$

$$p_3 = -0{,}01$$

Aproximação de Padé (2,2)



Sistema estável para 0< K < 20,7.

Sistemas Condicionalmente Estáveis

Introdução

São sistemas que são estáveis para **faixas de valores** de ganho.

Na prática, este tipo de sistema é indesejável uma vez que os valores de ganho são críticos para a garantia de estabilidade.

Exemplo 1

Seja a F.T.M.A. e K>0:

$$G(s) = \frac{s^2 + 2s + 4}{s(s+4)(s+6)(s^2 + 1{,}41s + 1)}$$

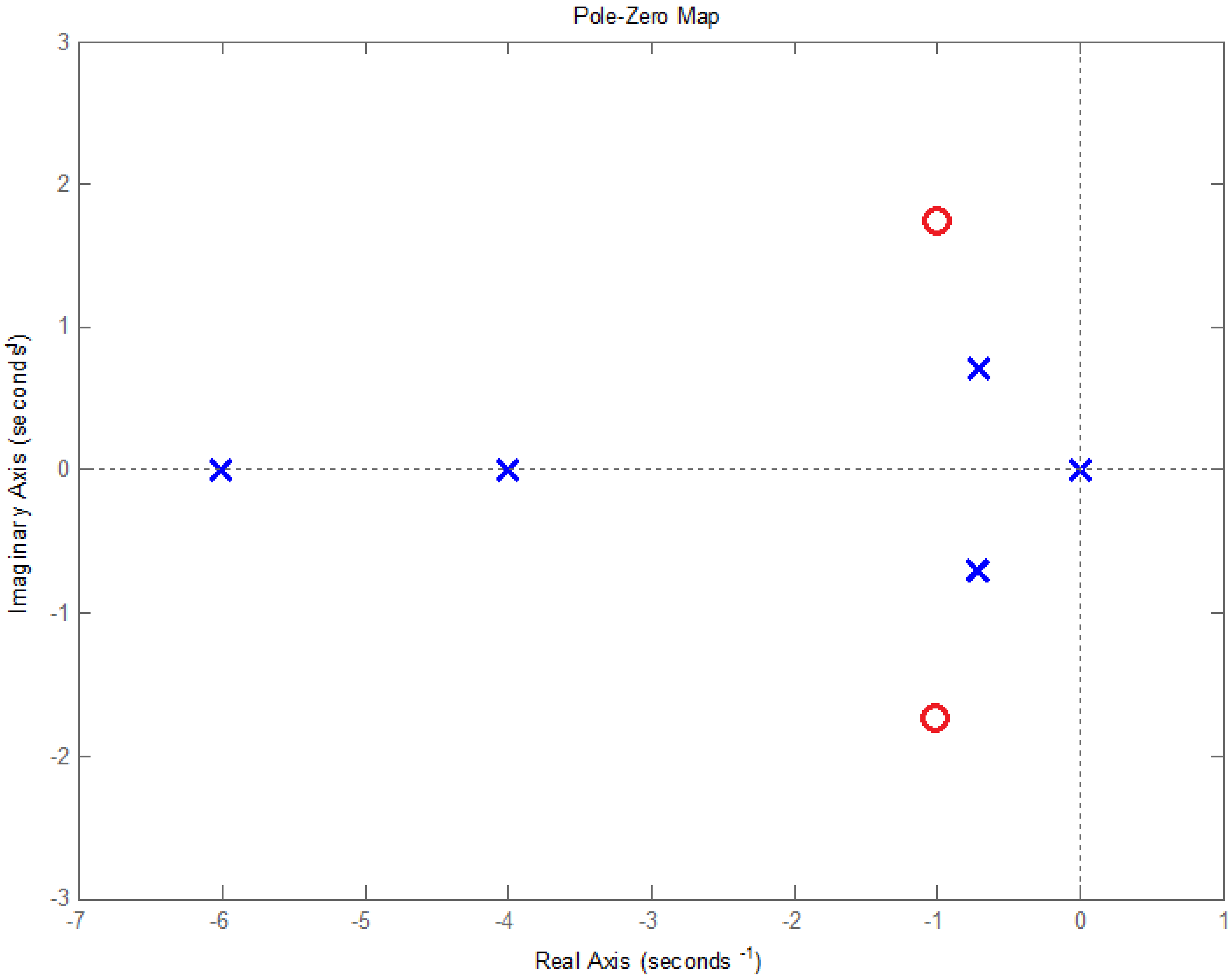
$$p_1 = 0 \qquad z_{1,2} = -1 \pm j1{,}73$$

$$p_2 = -4$$

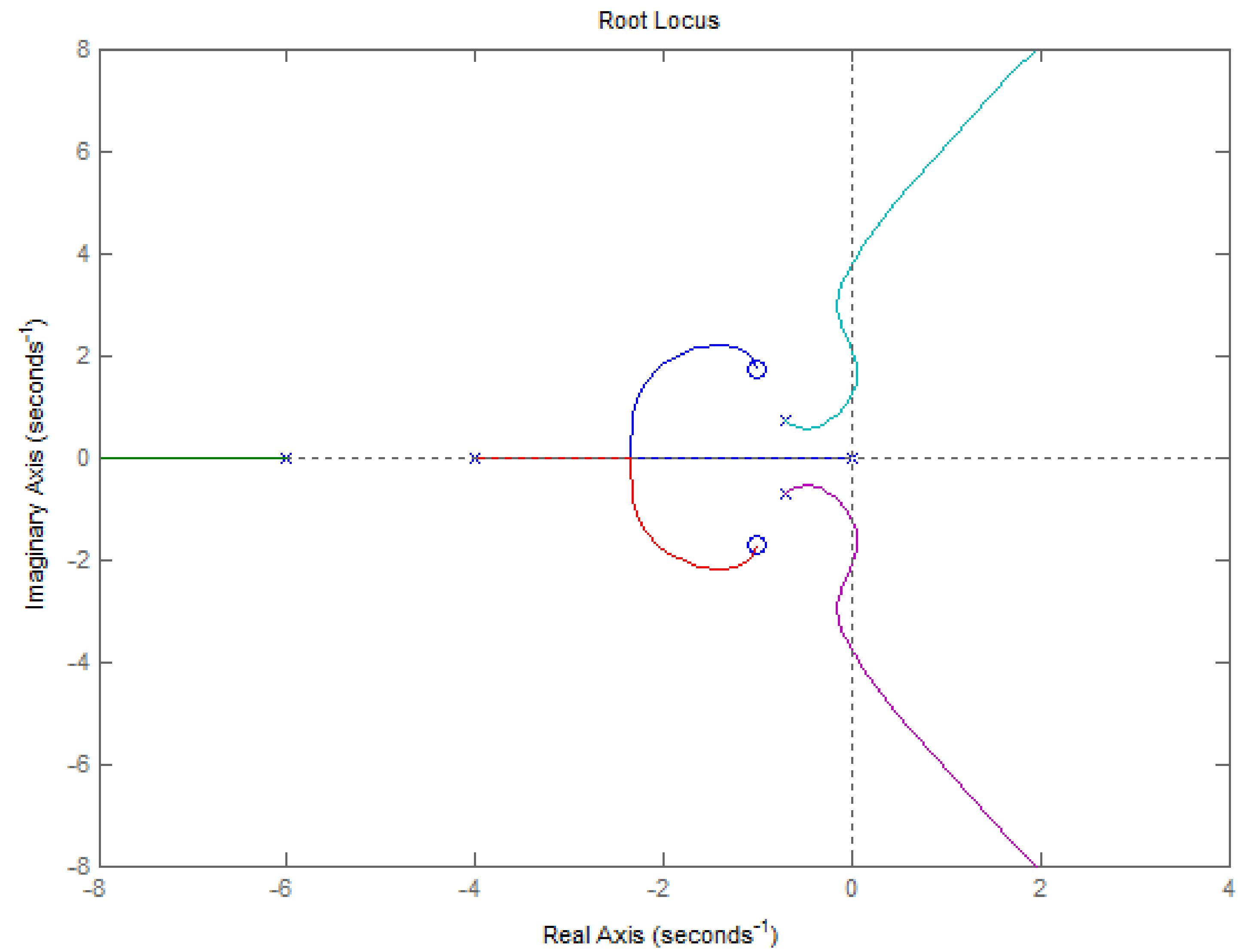
$$p_3 = -6$$

$$p_{4,5} = -0{,}707 \pm j0{,}707$$

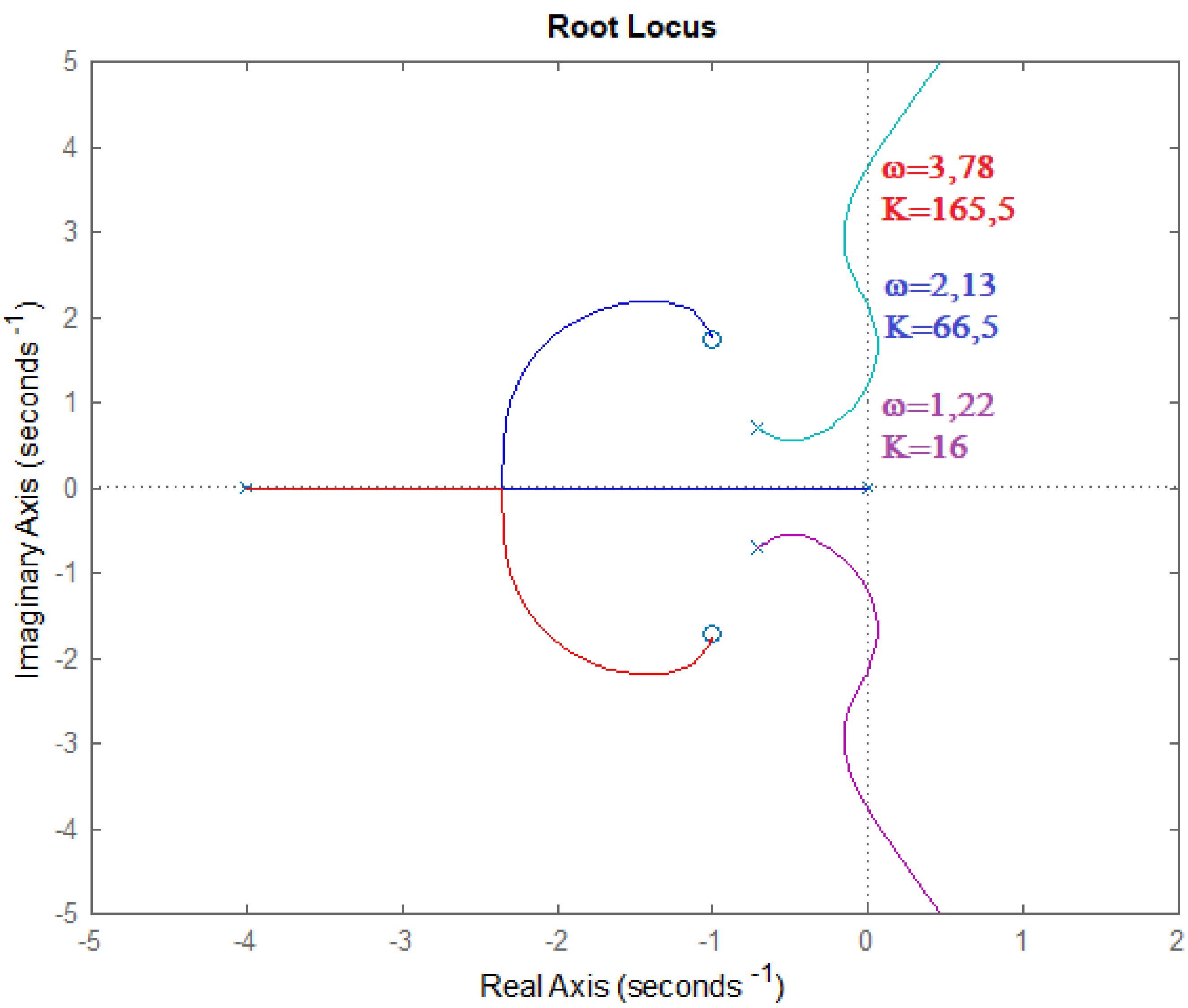
Exemplo 1 – mapeamento polo/zero



Exemplo 1 – Lugar das Raízes



Exemplo 1 – Lugar das Raízes (detalhe)



Exemplo 1 – análise da estabilidade

Portanto, o sistema é estável para duas faixas de valores de ganho :

$$0 < K < 16$$

$$66,5 < K < 165,5$$

Obs: valores obtidos analiticamente.

Exemplo 1b

Considere agora o exemplo 1, modificando o par de polos complexos.

$$G(s)=\frac{s^2+2s+4}{s(s+4)(s+6)(s^2+s+1)}$$

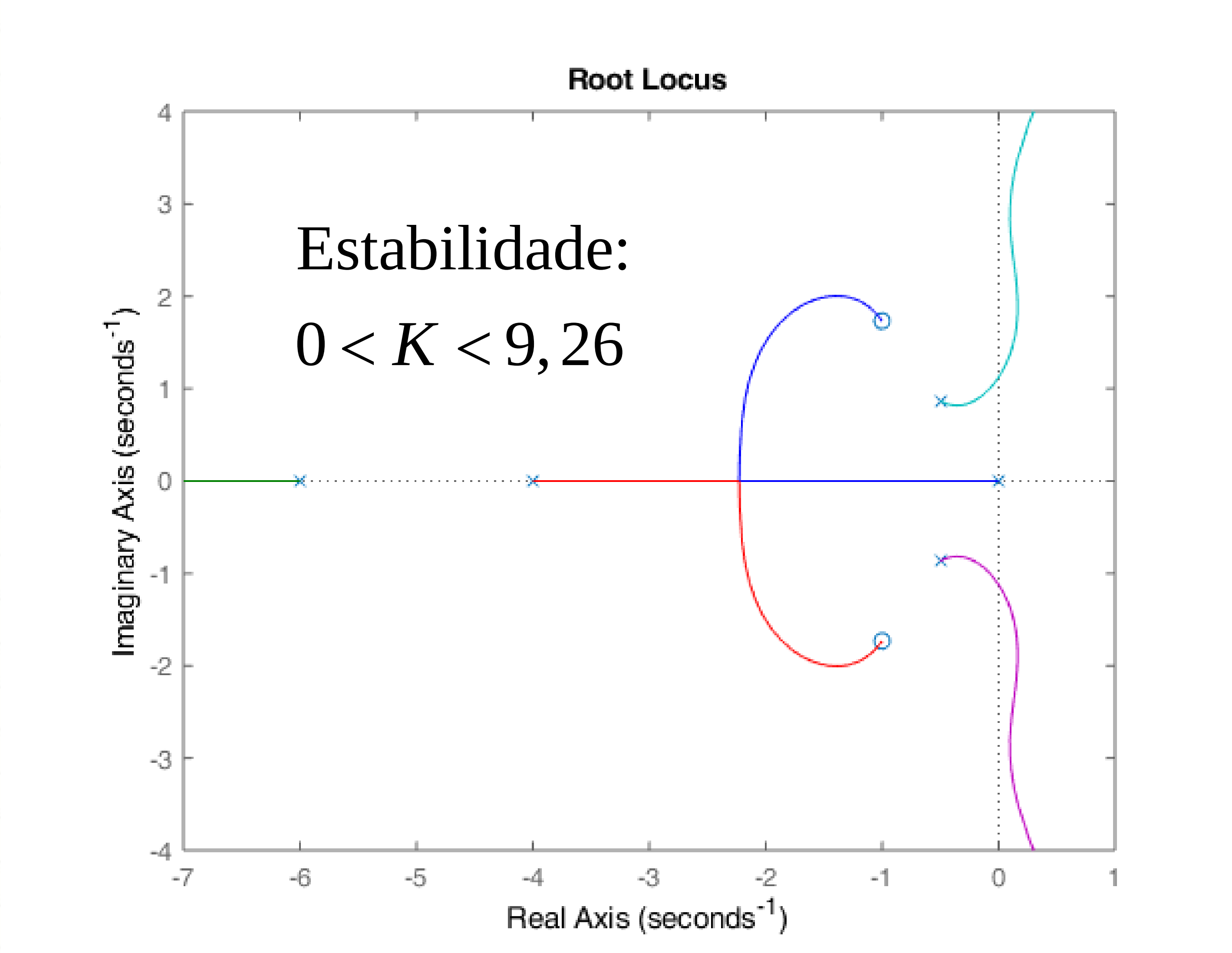
$$p_1=0 \qquad z_{1,2}=-1\pm j1{,}73$$

$$p_2=-4$$

$$p_3=-6$$

$$p_{4,5}=-0{,}5\pm j0{,}86$$

Exemplo 1b – Lugar das Raízes



A modificação da posição dos polos complexos “tirou” o sistema da estabilidade condicional.

Exemplo 1c

Considere novamente o exemplo 1, com outro par de polos complexos.

$$G(s) = \frac{s^2 + 2s + 4}{s(s+4)(s+6)(s^2 + 2s + 2)}$$

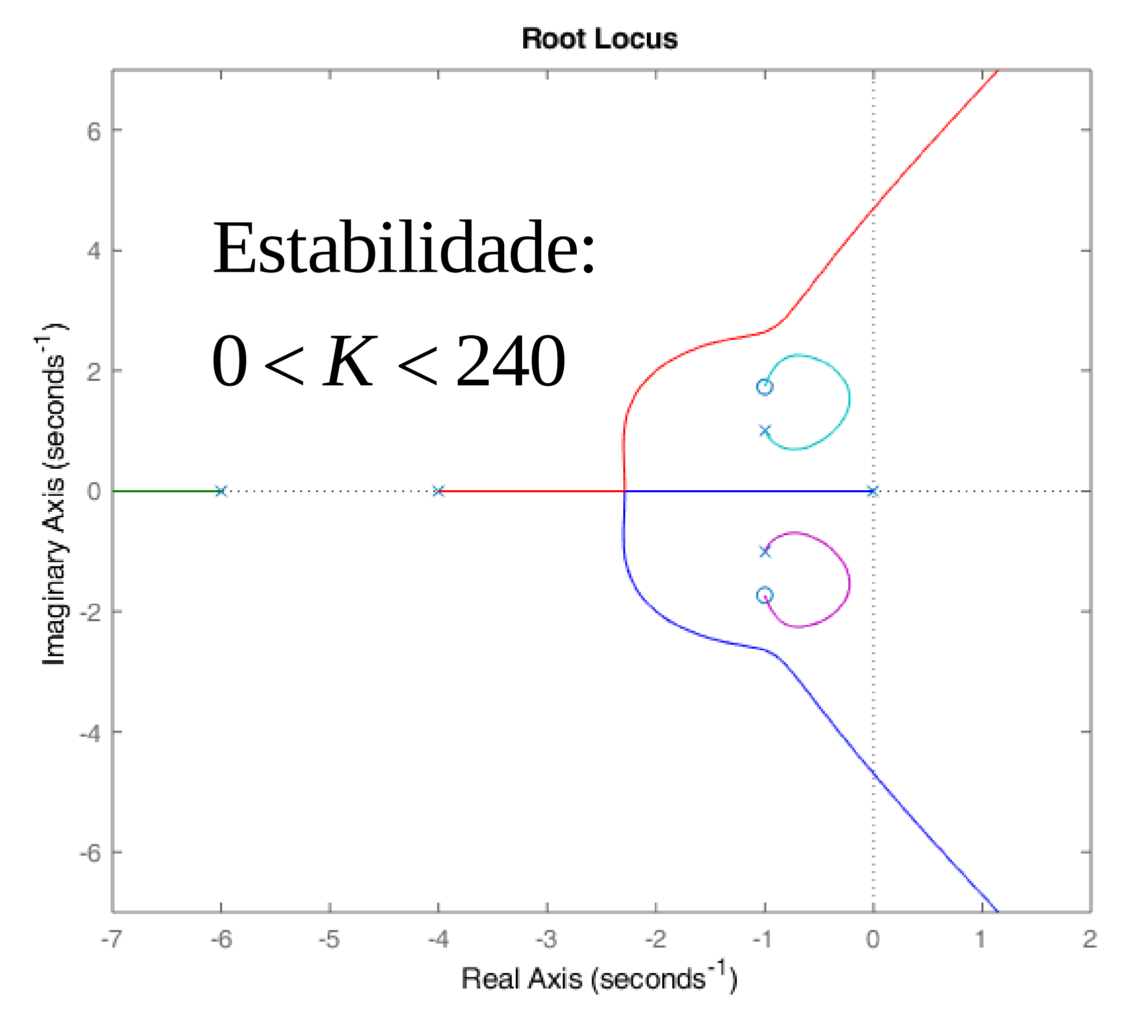
$$p_1 = 0 \qquad z_{1,2} = -1 \pm j1{,}73$$

$$p_2 = -4$$

$$p_3 = -6$$

$$p_{4,5} = -1 \pm j$$

Exemplo 1c – Lugar das Raízes



Esta modificação na posição dos polos complexos também “tirou” o sistema da estabilidade condicional.

Exemplo 2

Seja a F.T.M.A. e K>0:

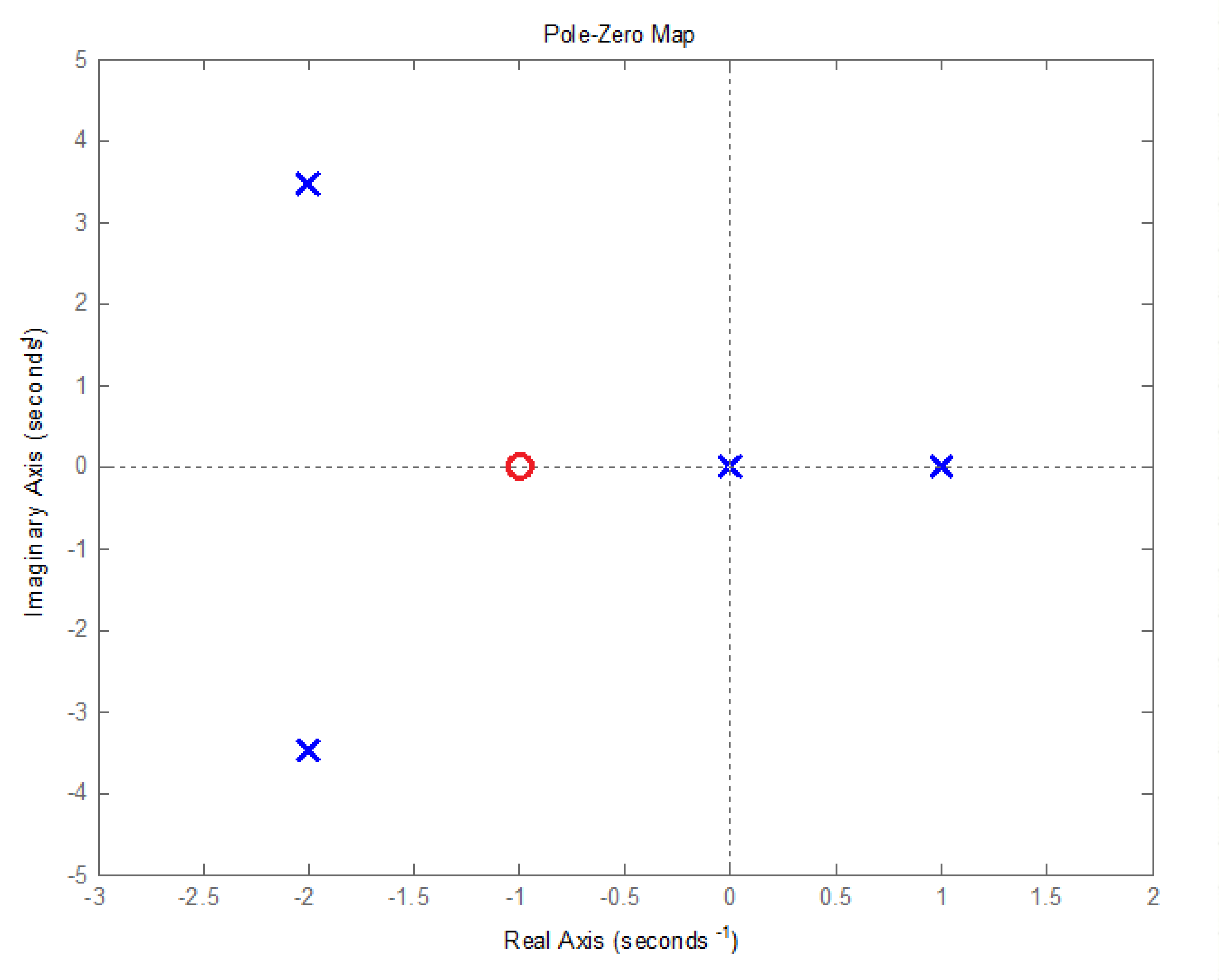
$$G(s)=\frac{s+1}{s(s-1)(s^2+4s+16)}$$

$$p_1=0 \qquad\qquad z_1=-1$$

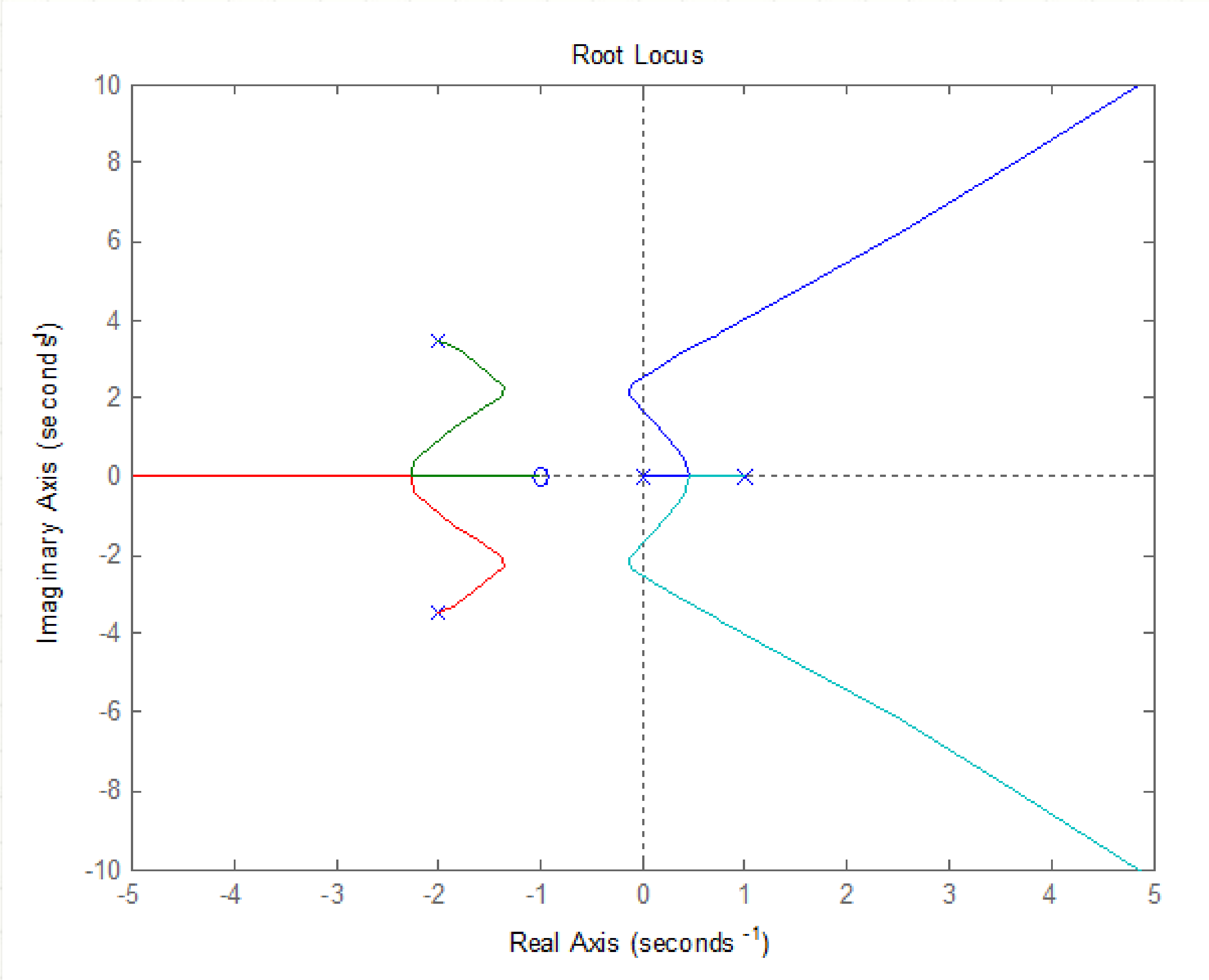
$$p_2=1$$

$$p_{3,4}=-2\pm j3{,}46$$

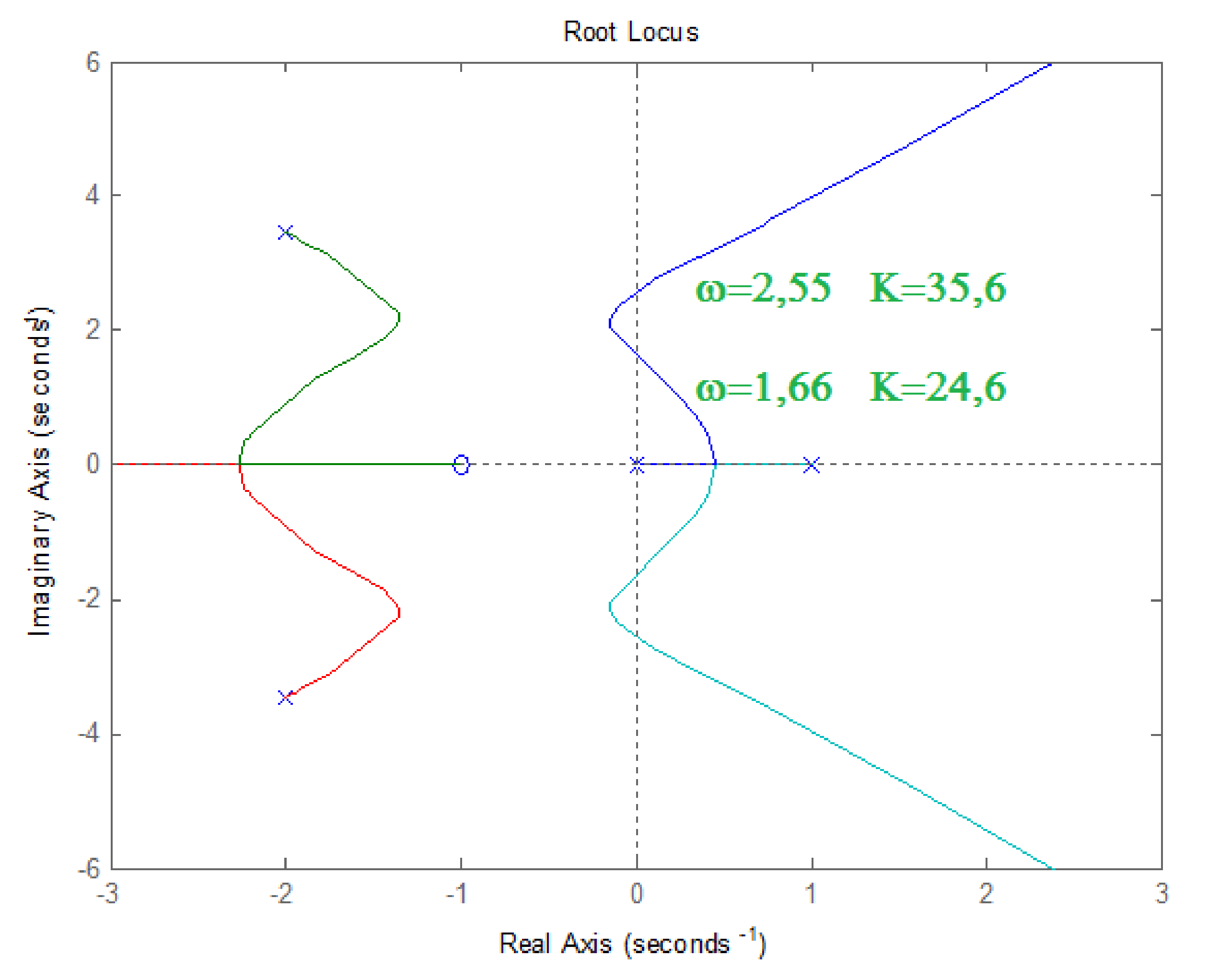
Exemplo 2 – mapeamento polo/zero



Exemplo 2 – Lugar das Raízes



Exemplo 2 – Lugar das Raízes (detalhe)



Assim, o sistema é estável para 24,6 < K < 35,6.

Exemplo 2a

Considere agora o exemplo 2, modificando a posição do polo de fase não mínima.

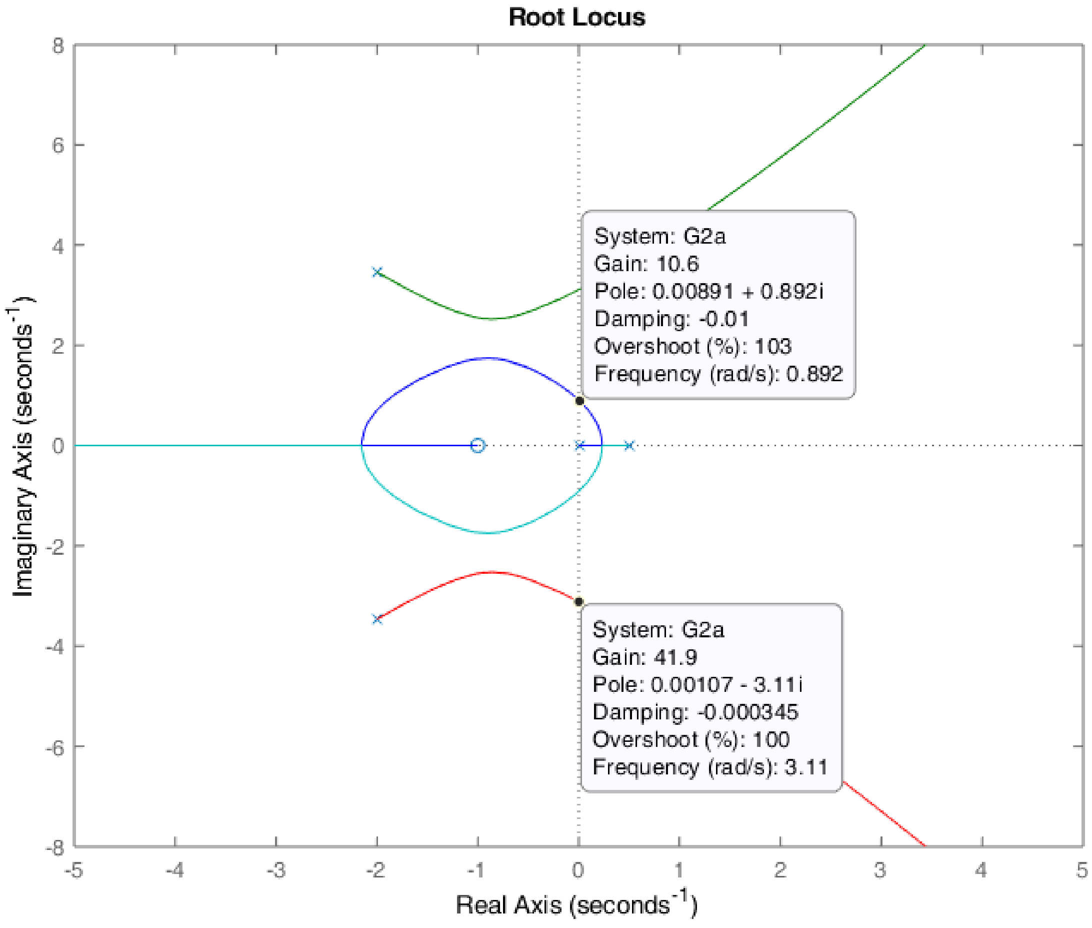
$$G(s) = \frac{s+1}{s(s-0,5)(s^2+4s+16)}$$

$$p_1 = 0 \qquad\qquad z_1 = -1$$

$$p_2 = 0,5$$

$$p_{3,4} = -2 \pm j3,46$$

Exemplo 2a – Lugar das Raízes



O sistema é estável para 10,6 < K < 41,9. O sistema ainda é condicionalmente estável mas a faixa de estabilidade foi alterada.

Exemplo 2b

Considere novamente o exemplo 2, com outro polo de fase não mínima.

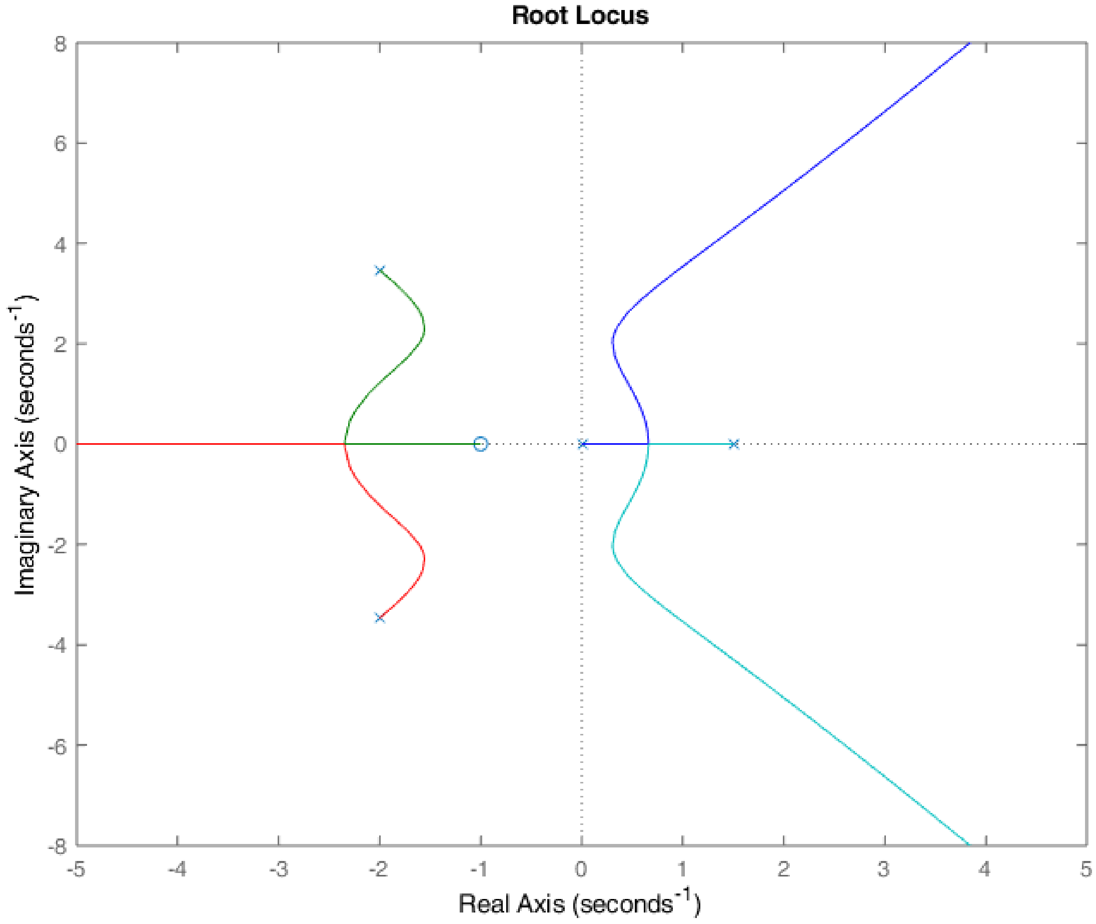
$$G(s)=\frac{s+1}{s(s-1{,}5)(s^2+4s+16)}$$

$$p_1=0 \qquad\qquad z_1=-1$$

$$p_2=1{,}5$$

$$p_{3,4}=-2\pm j3{,}46$$

Exemplo 2b – Lugar das Raízes



Neste caso, o sistema tornou-se instável para $\forall K>0$.