Aplicações do Lugar das Raízes

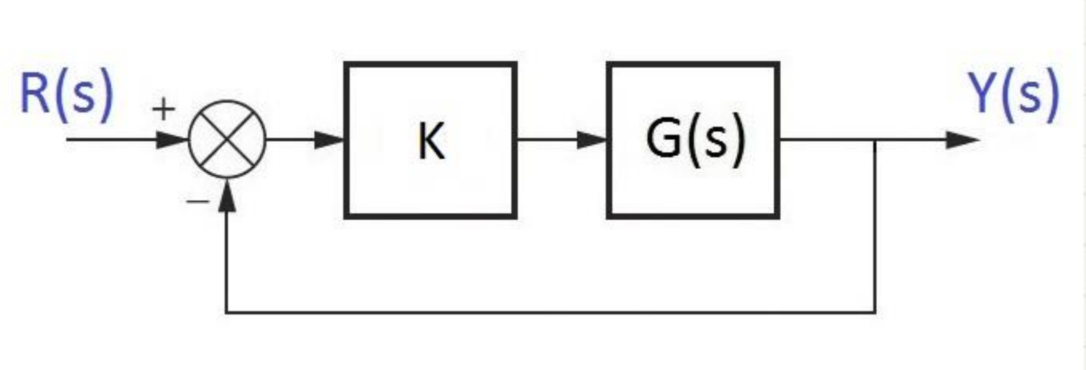
Profa. Cristiane Paim

Aplicações do Lugar das Raízes

Tendo em vista que o Lugar das Raízes permite observar como os polos de malha fechada se deslocam em função da variação de um parâmetro do sistema, a principal aplicação deste será usar esta informação para o **projeto de controladores** (visando atender algum critério de desempenho).

Aplicações do Lugar das Raízes – Exemplo 1

Seja o sistema de controle



sendo K > 0 e

$$G(s) = \frac{1}{s(s^2 + 4s + 5)}$$

determinar, usando o LR, para que valores de K a resposta ao degrau:

a) não apresente sobressinal;

b) tem sobressinal inferior a 16,3%.

Aplicações do Lugar das Raízes – Exemplo 1

$$G(s) = \frac{1}{s(s^2 + 4s + 5)}$$

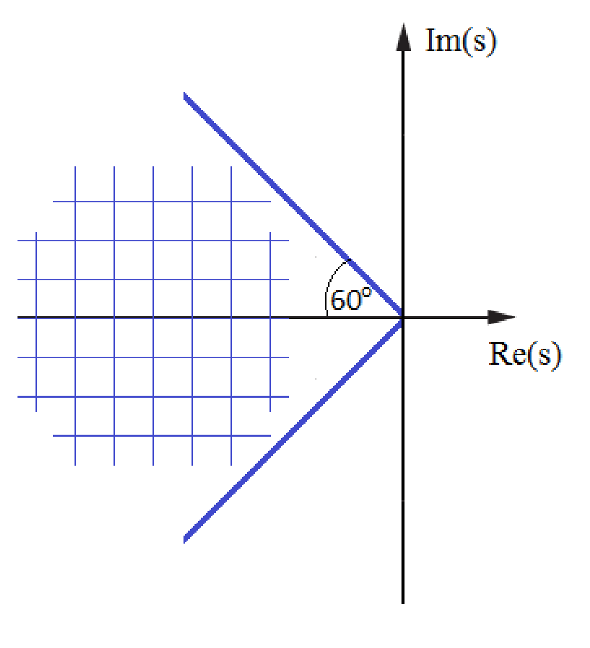
$$p_1 = 0$$
$$p_{2,3} = -2 \pm j$$

Especificações:

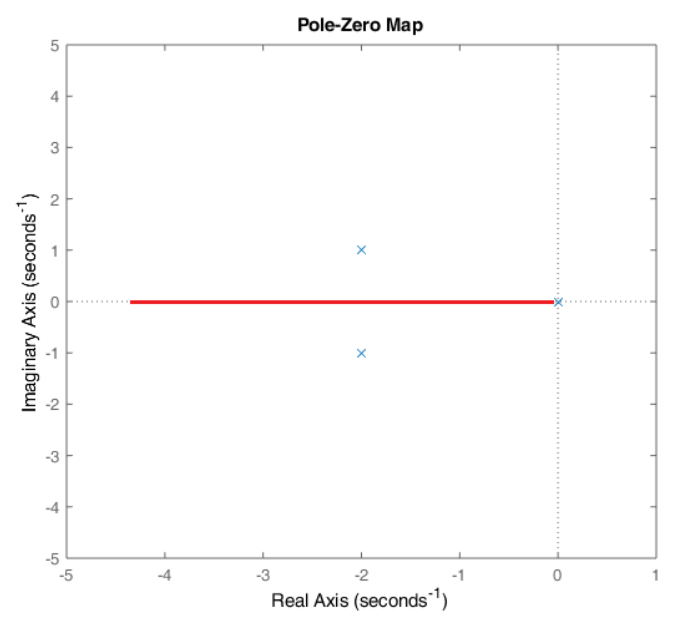
a) Sem sobressinal $\rightarrow \xi \geq 1$ (polos reais)

b) Sobressinal menor do que 16,3%

$\xi > 0{,}5$ ($\theta < 60°$)



Aplicações do Lugar das Raízes – Exemplo 1



Eixo real: [-∞ , 0]

Assíntotas: θ_a = ± 60°, 180°

Ângulos de Partida:

ϕ_1 = 180° ϕ_2 = -63,4° ϕ_3 = 63,4°

Cruzamento com eixo imaginário: ω = ± 2,23 → K=20

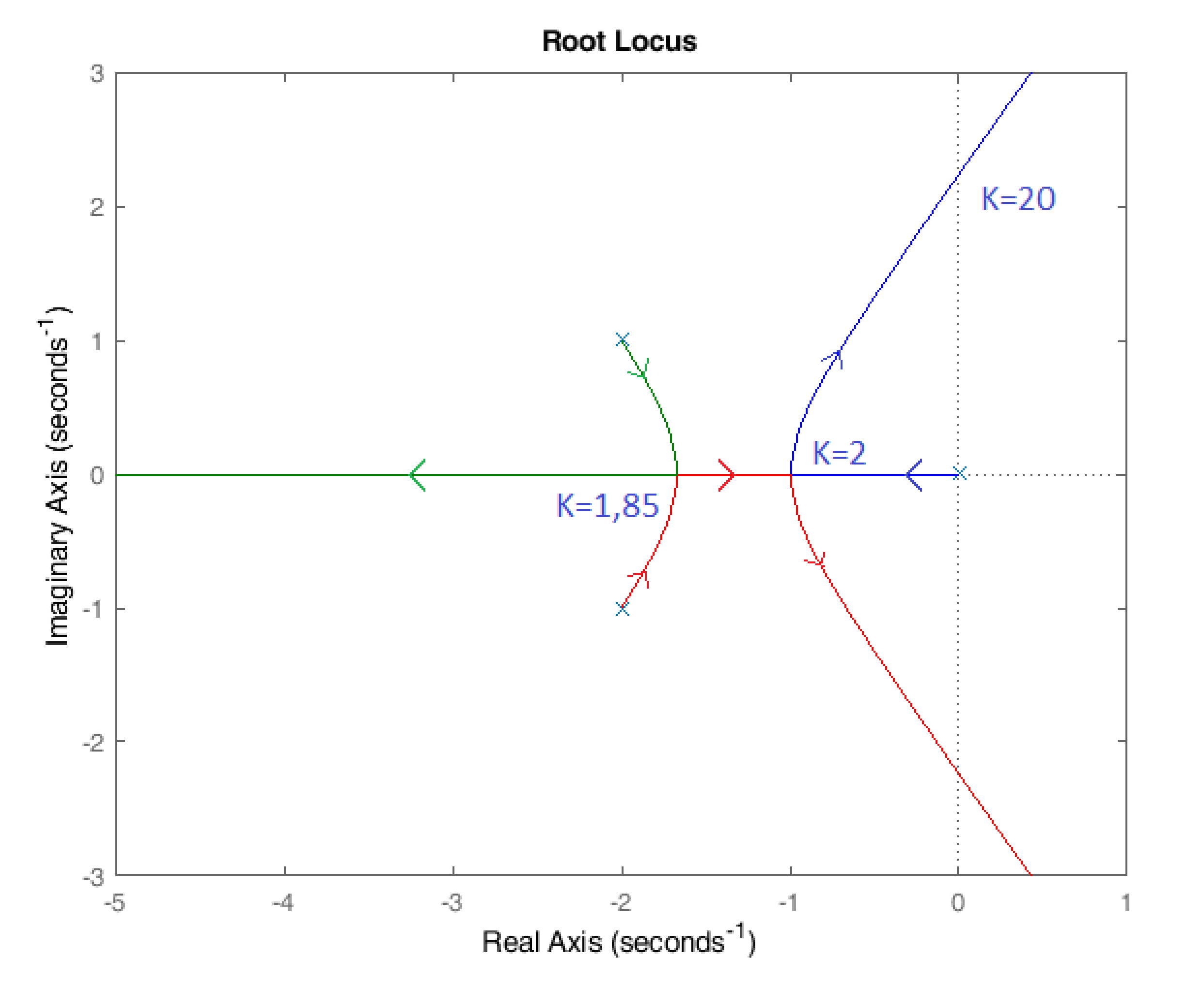
Sistema estável para 0 < K < 20

Ramificação:

$$s_1 = -1 \in \mathrm{LR} \quad \Rightarrow \quad K = 2$$

$$s_2 = -1{,}67 \in \mathrm{LR} \quad \Rightarrow \quad K = 1{,}85$$

Lugar das Raízes – Exemplo 1



a) Para polos reais: $1{,}85 \leq K \leq 2$.

Aplicações do Lugar das Raízes – Exemplo 1

Observe que, para qualquer valor de K entre 0 e 2, polo dominante será real.

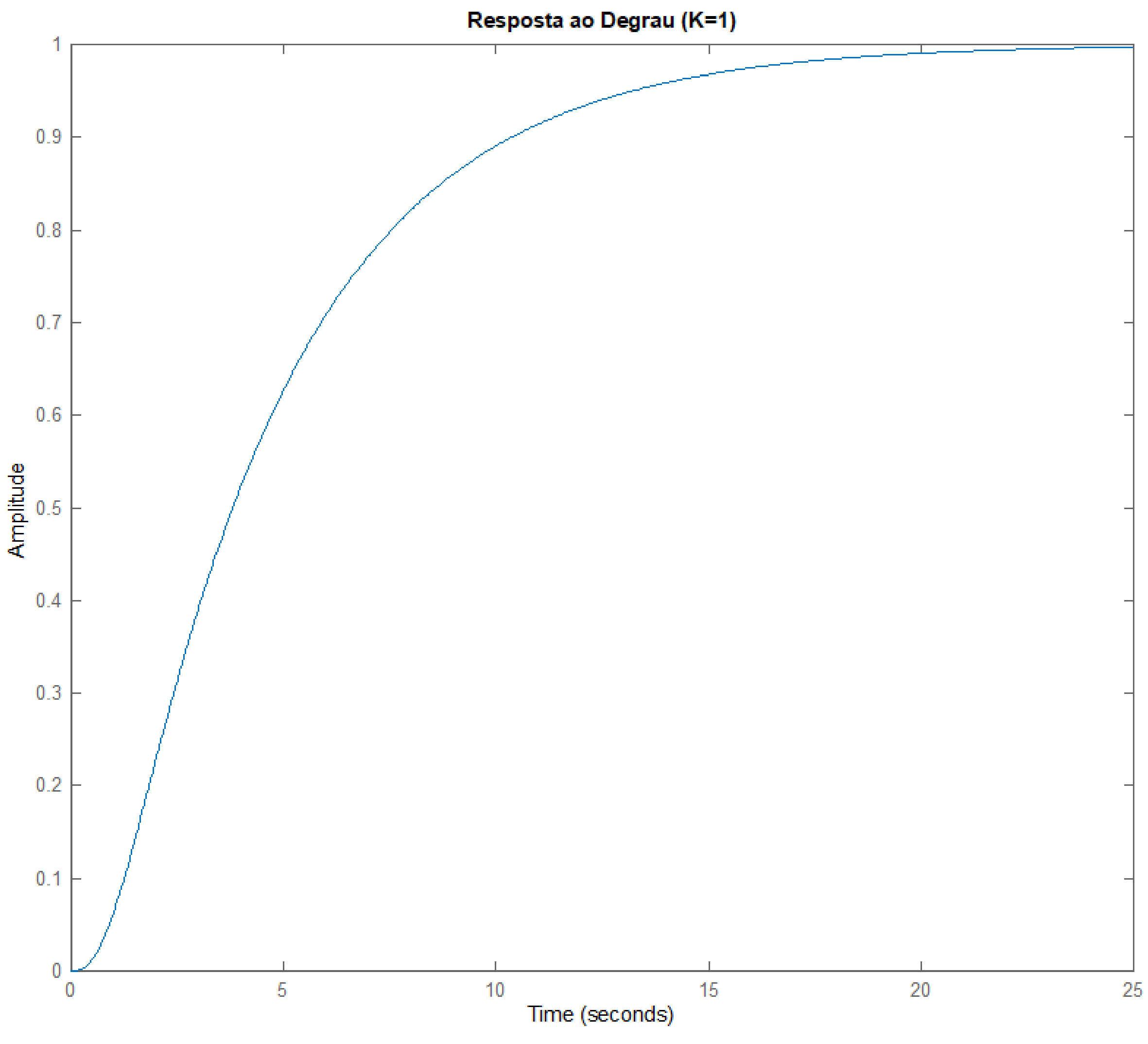
Por exemplo, para K=1, os polos de malha fechada são:

$$p_1 = -0{,}245$$
$$p_{2,3} = -1{,}88 \pm j0{,}75$$

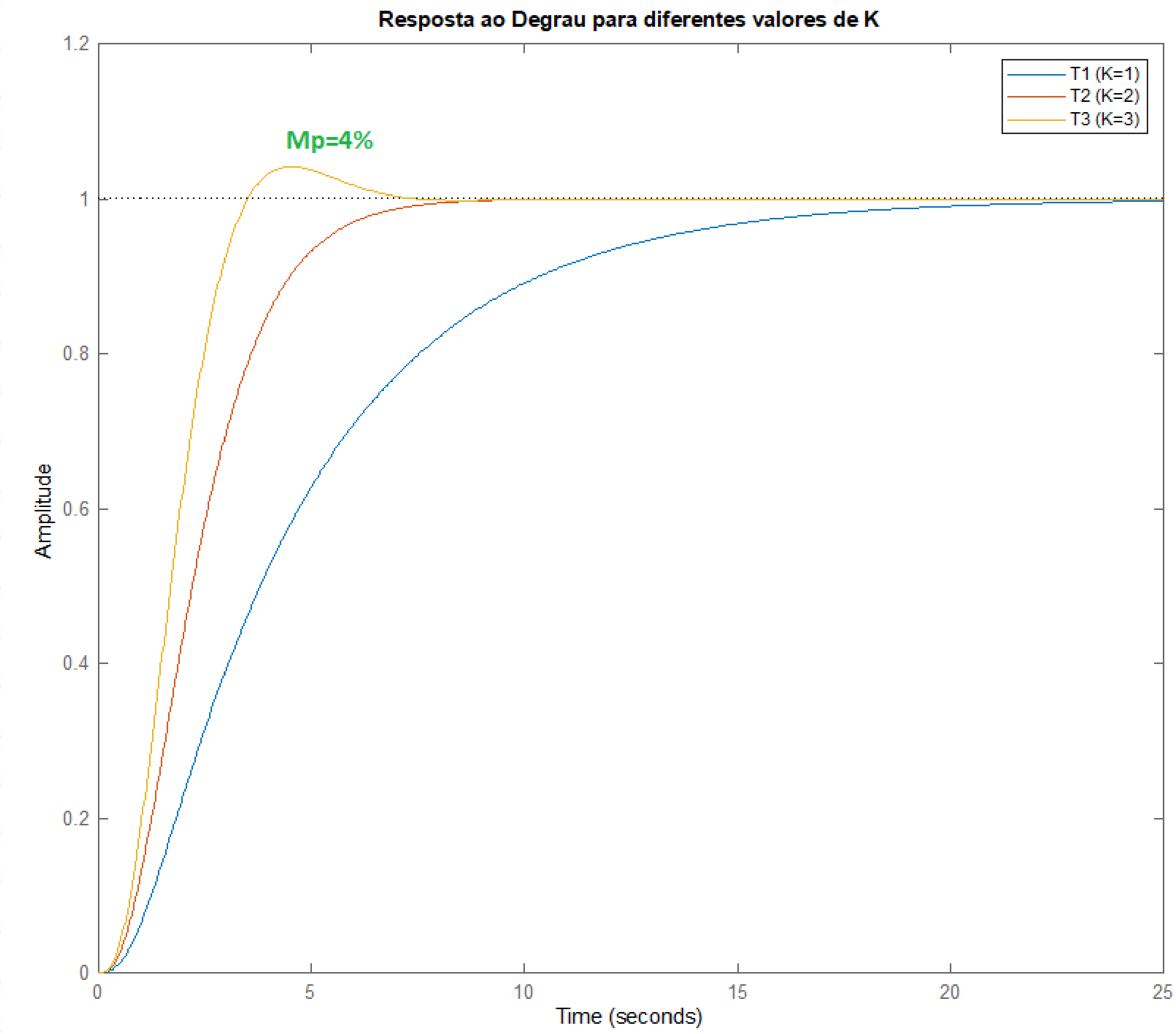
O polo dominante é p_1 e os polos complexos estão distantes, não influenciando a resposta.

Assim, para uma resposta ao degrau sem sobressinal pode ser considerar 0 < K < 2.

Resposta ao degrau – Exemplo 1 (K=1)



Resposta ao degrau – Exemplo 1

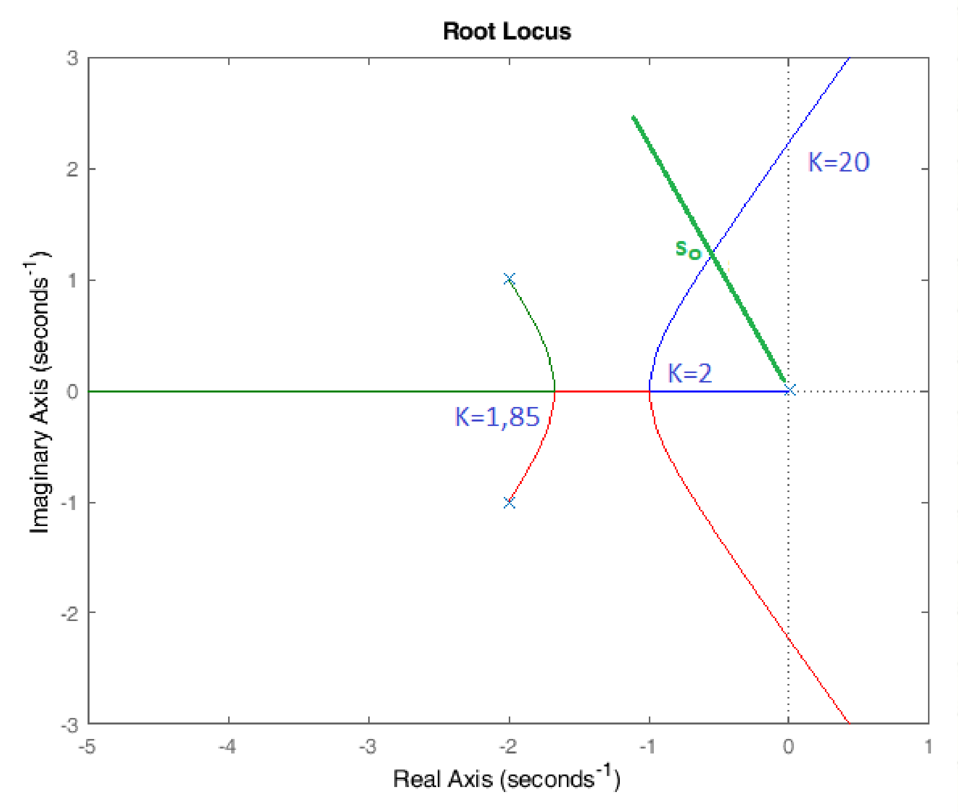


Como esperado, para K>2, haverá sobressinal.

Aplicações do Lugar das Raízes – Exemplo 1

b) Sobressinal menor do que 16,3% $\rightarrow \xi > 0,5$ ($\theta<60°$)

Assim, é necessário encontrar a intersecção do LR com a região que define a especificação de sobressinal (ponto s_o).

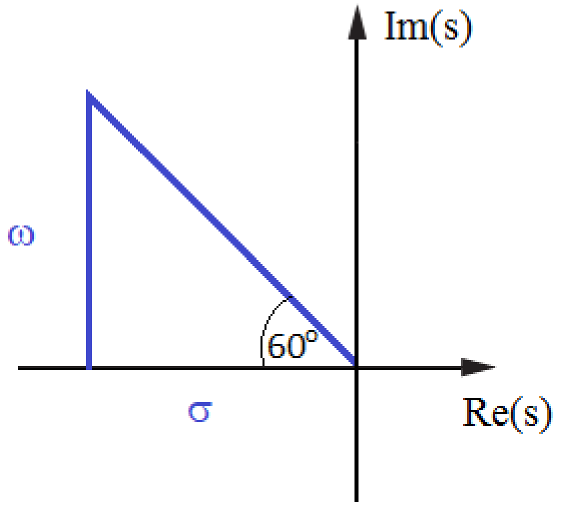


Aplicações do Lugar das Raízes – Exemplo 1

O ponto s_o pode ser escrito em função da relação entre parte real e imaginária, para o ângulo de 60°.

$$\text{tg}\, 60^\circ = \frac{\omega}{\sigma} = \sqrt{3} \quad \rightarrow \quad \omega = \sigma\sqrt{3}$$

$$s_o = -\sigma + j\sigma\sqrt{3} = \sigma(-1 + j\sqrt{3})$$



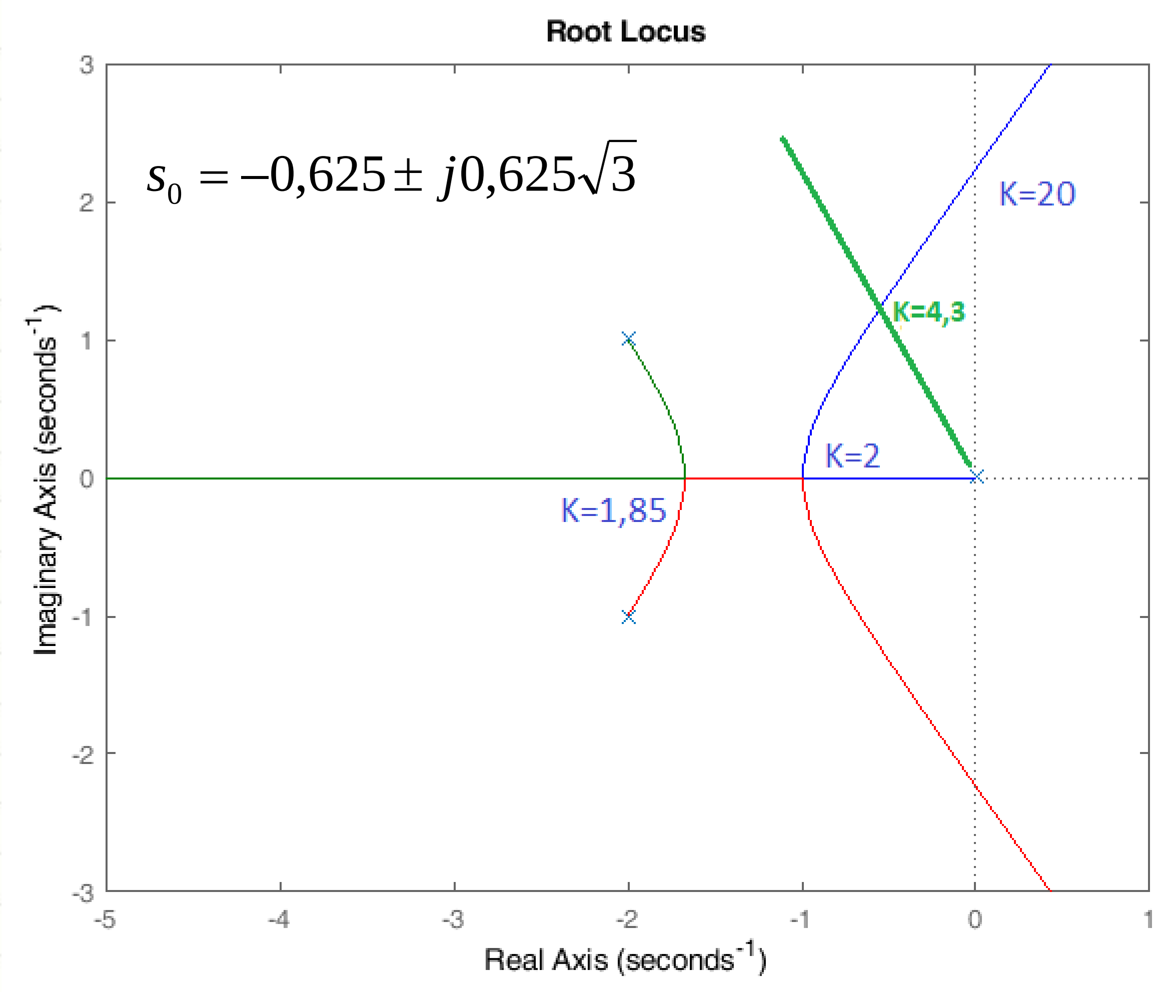
Substituindo $s=s_o$ na equação característica

$$\Delta(s) = s^3 + 4s^2 + 5s + K = 0$$

obtém-se

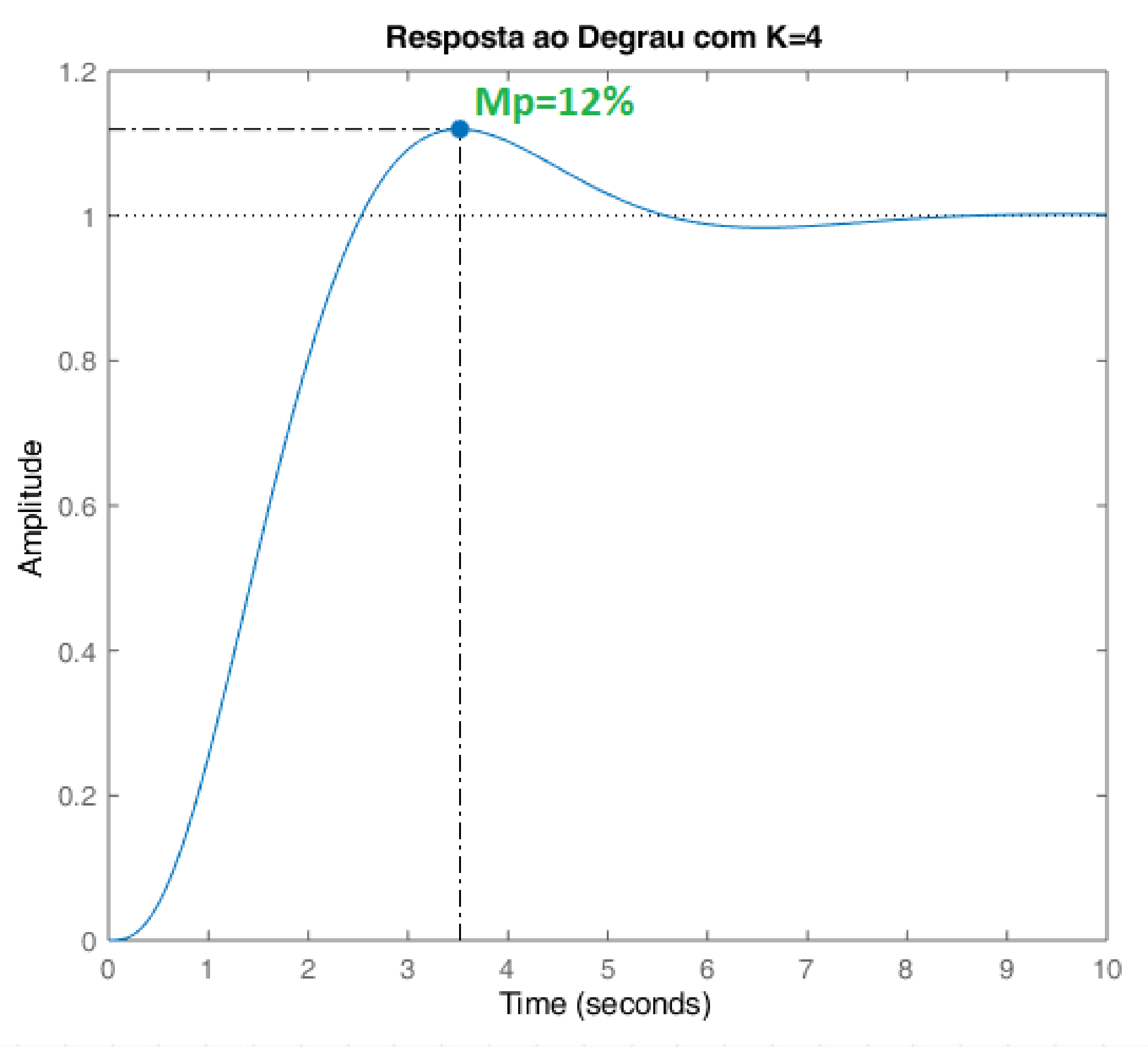
$$\begin{matrix} K = 4{,}3 \\ \sigma = 0{,}625 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad s_o = -0{,}625 \pm j0{,}625\sqrt{3}$$

Exemplo 1 : interseção LR e especificação

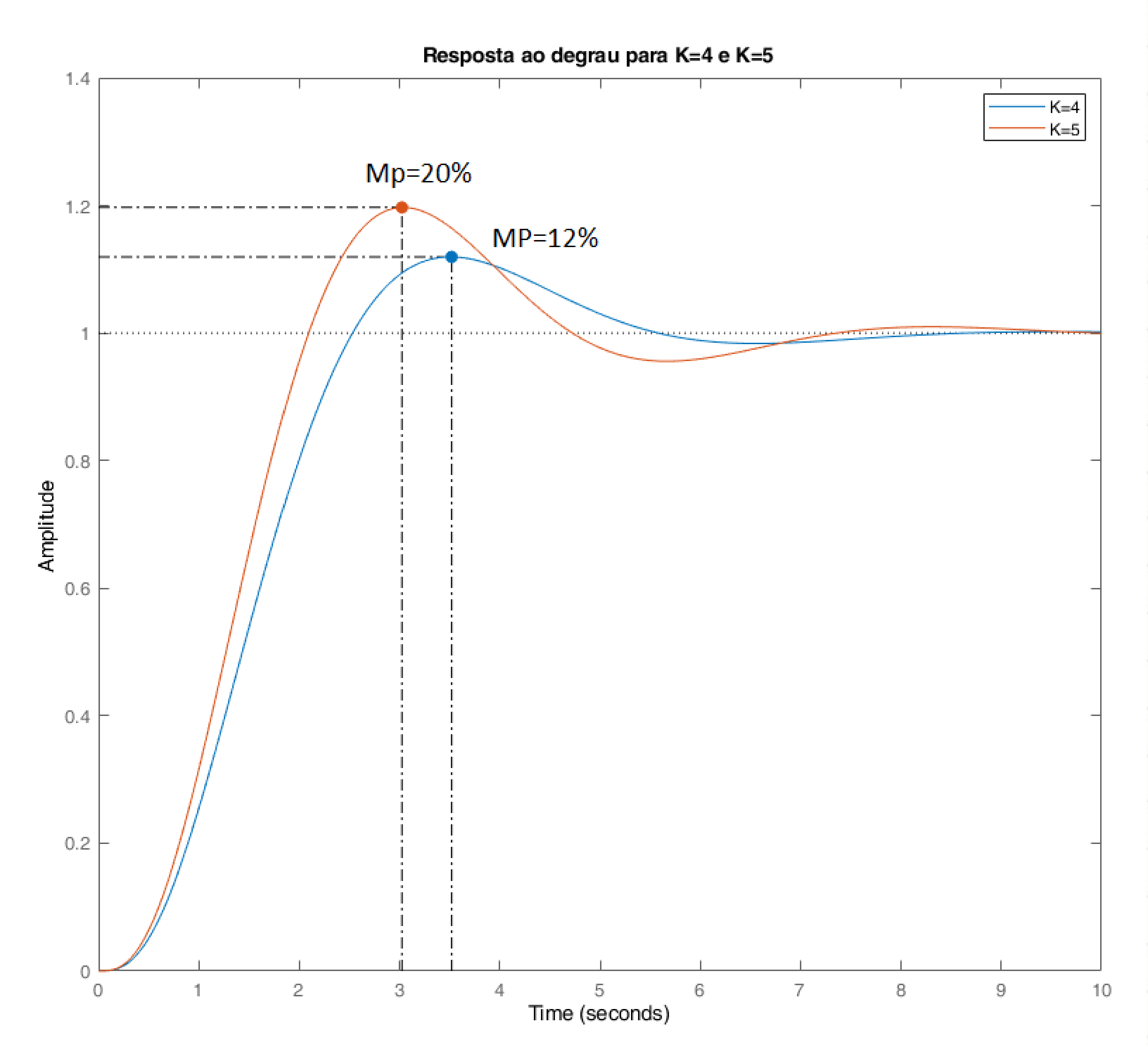


b) Para resposta ao degrau com M_p<16,3%: 0 < K < 4,3

Resposta ao degrau – Exemplo 1 (K=4)



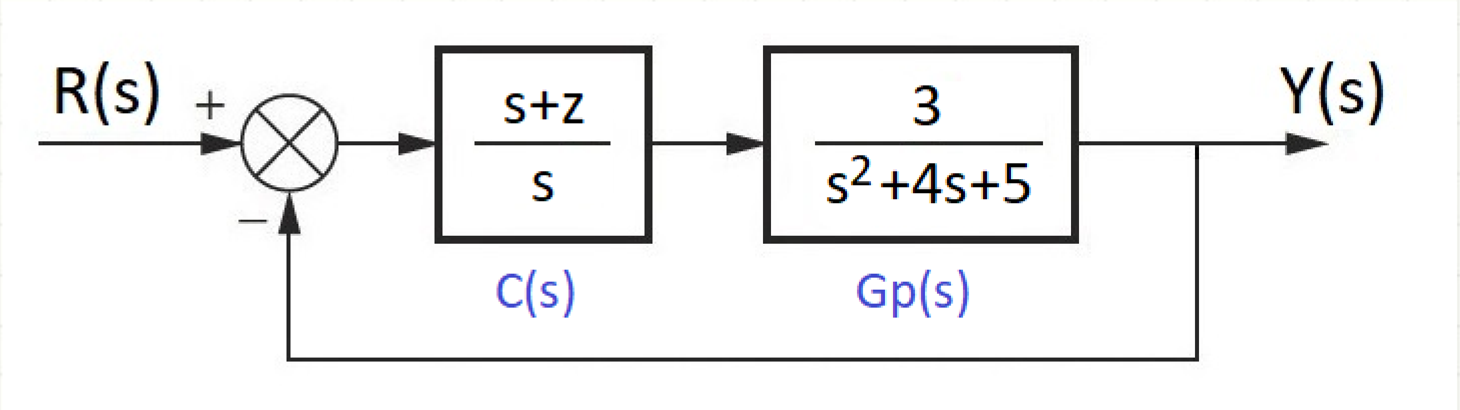
Resposta ao degrau – Exemplo 1



Como esperado, para K>4,3, o sobressinal será maior do que 16,3%.

Aplicações do Lugar das Raízes – Exemplo 2

Seja o sistema de controle, com z > 0.



a) Avaliar a estabilidade do sistema em função da variação do zero do controlador.

b) Determinar para que valores de z a resposta ao degrau do sistema tem tempo de acomodação inferior a 4 segundos.

Aplicações do Lugar das Raízes – Exemplo 2

Neste caso, a equação característica do sistema precisa ser reescrita de modo a ficar na forma "padrão" para aplicação das regras de traçado do Lugar das Raízes:

$$\Delta(s) = 1 + \mathrm{K}\ G(s) = 0$$

parâmetro variável

Para o sistema

$$T(s) = \frac{3(s+z)}{s(s^2+4s+5)+3(s+z)}$$

ou seja,

$$\Delta(s) = s^3 + 4s^2 + 8s + 3z = 0$$

Aplicações do Lugar das Raízes – Exemplo 2

A eq. característica pode ser reescrita como:

$$1+\underbrace{z}_{K}\underbrace{\frac{3}{s(s^2+4s+8)}}_{G(s)}=0$$

Portanto, o Lugar das Raízes será traçado considerando

$$G(s)=\frac{3}{s(s^2+4s+8)}$$

$$p_1=0$$
$$p_{2,3}=-2\pm j2$$

para a variação de $0 < z < +\infty$.

Aplicações do Lugar das Raízes – Exemplo 2

Eixo real: $[-\infty , 0]$

Assíntotas: $\theta_a = \pm 60°, 180°$ $\sigma_a = -1{,}33$

Ângulos de Partida:

$\phi_1 = 180°$ $\phi_2 = -45°$ $\phi_3 = +45°$

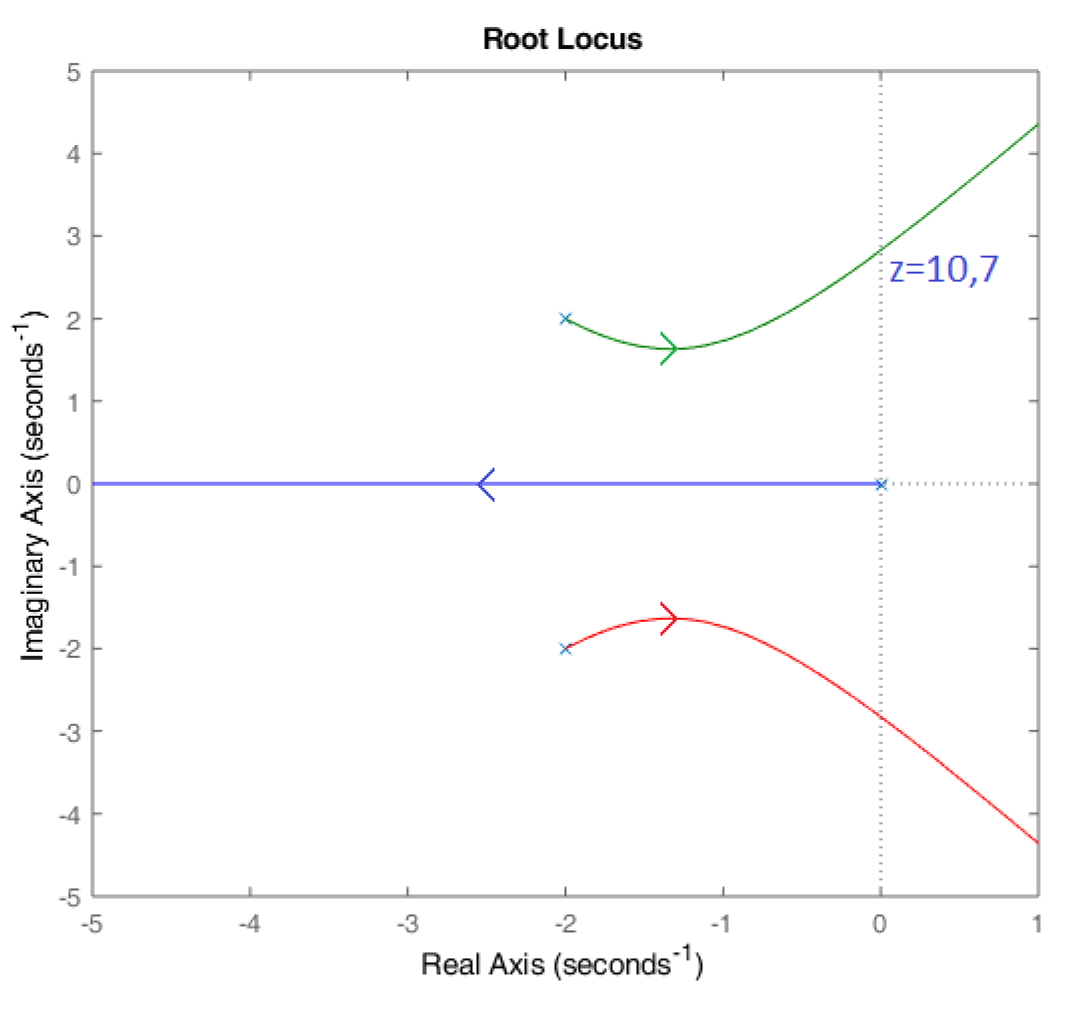
Cruzamento com eixo imaginário: $\omega = \pm 2{,}83 \rightarrow z = 10{,}7$

Sistema estável para $0 < z < 10{,}7$

Ramificação: não existe

$$\mathrm{dK/ds} = 0 \quad \Rightarrow \quad s_{1,2} = -1{,}3 \pm j0{,}94 \notin \mathrm{LR}$$

Aplicações do Lugar das Raízes – Exemplo 2

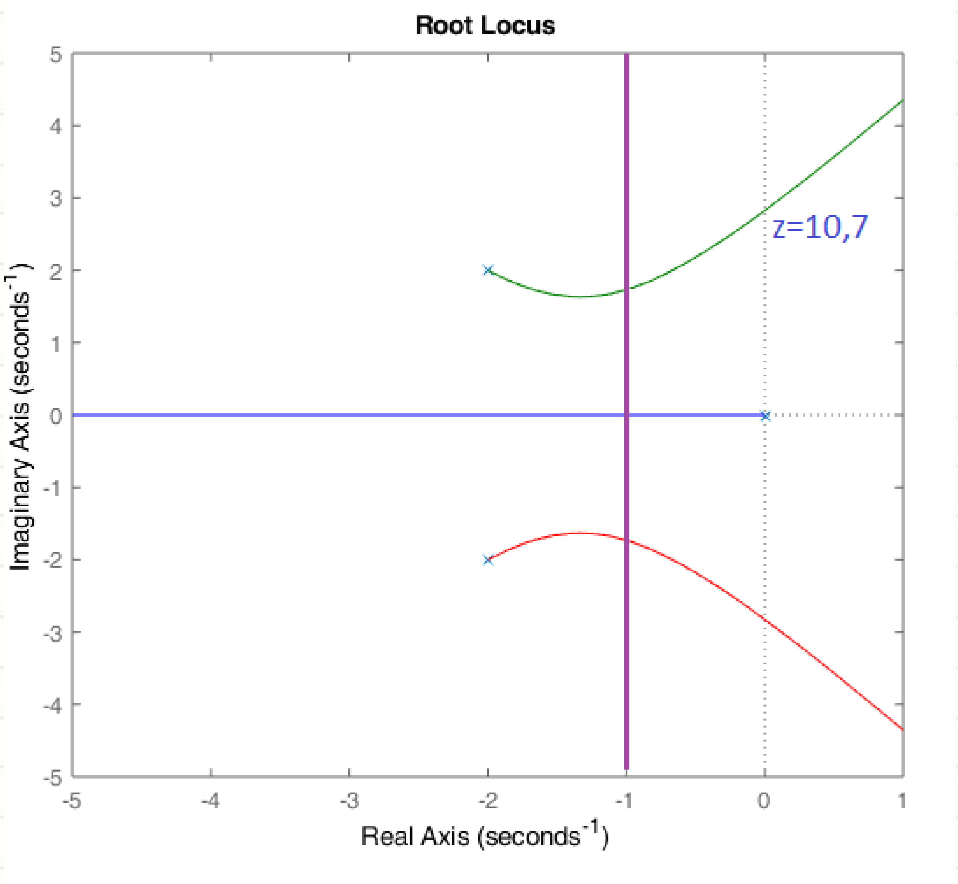


a) O sistema estável para 0 < z < 10,7.

Aplicações do Lugar das Raízes – Exemplo 2

b) Tempo de acomodação: $t_s < 4 \rightarrow \xi\omega_n > 1$

Neste caso, é necessário encontrar a intersecção do LR com a região que define a especificação de tempo de acomodação (reta em -1).



Aplicações do Lugar das Raízes – Exemplo 1

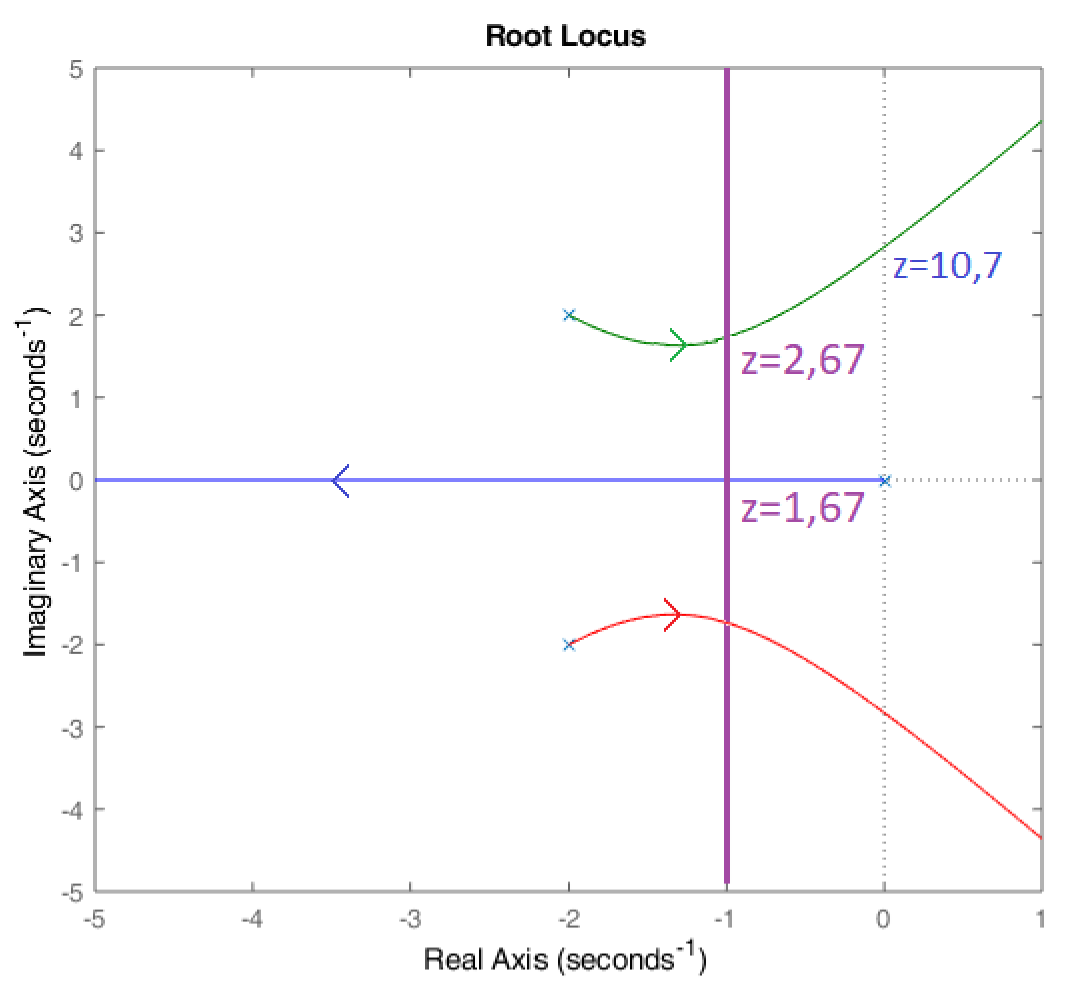
O ponto s_o pode ser definido como:

$$s_o = -1 + j\omega$$

Substituindo s_o na equação característica obtém-se

$$\begin{array}{lll} \omega = 0 & \Rightarrow & z = 5/3 = 1{,}67 \\ \omega = \pm 1{,}73 & \Rightarrow & z = 8/3 = 2{,}67 \end{array}$$

Aplicações do Lugar das Raízes – Exemplo 2

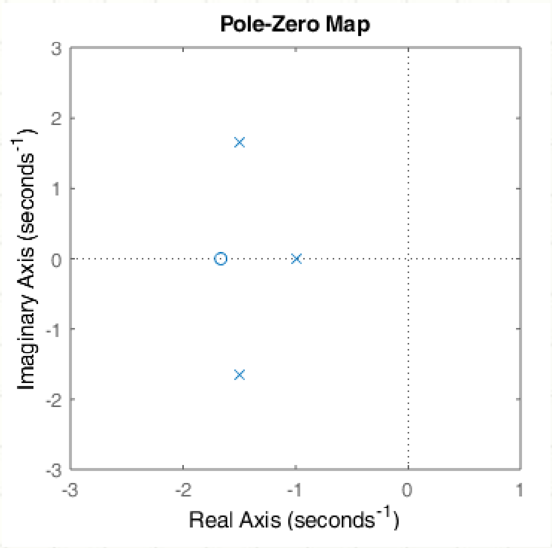


b) Para $t_s < 4$: $1{,}67 < z < 2{,}67$

Aplicações do Lugar das Raízes – Exemplo 2

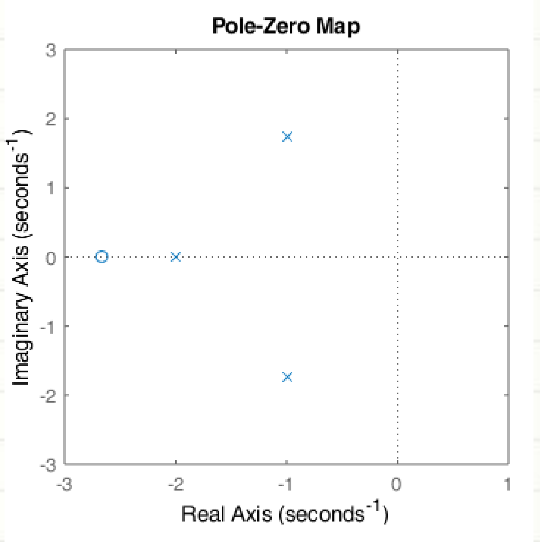
Para z=1,67, os polos de malha fechada são:

$$p_1 = -1$$
$$p_{2,3} = -1{,}5 \pm j1{,}66 \quad (\xi=0{,}67)$$



Para z=2,67, os polos de malha fechada são:

$$p_{1,2} = -1 \pm j1{,}73 \quad (\xi=0{,}5)$$
$$p_{2,3} = -2$$



Resposta ao degrau – Exemplo 2