Margens de Estabilidade (Estabilidade Relativa)

Profa. Cristiane Paim

Introdução

A estabilidade de um sistema é definida em função da localização dos polos de malha fechada. Os mesmos devem estar no semiplano esquerdo no caso contínuo e dentro do círculo unitário no caso discreto.

A estabilidade relativa de um sistema é definida em função da proximidade da curva de resposta em frequência com o limite de estabilidade (ponto crítico):

$-1 + j0$ → diagrama polar

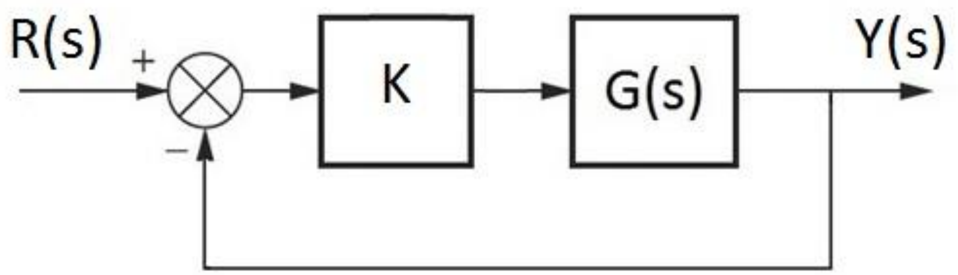
$0\text{dB} \angle 180°$ → diagramas de bode

carta de nichols

Introdução

A proximidade da resposta em frequência com o ponto crítico (-1+j0) pode ser utilizada como uma medida das margens de estabilidade do sistema: **margem de ganho e margem de fase**.

Considerando a configuração abaixo, a grande maioria dos sistema de fase mínima que são estáveis para valores pequenos de ganho tendem a se tornarem instáveis para valores elevados.



Margens de Estabilidade

MARGEM DE GANHO (MG): é o inverso do módulo de $G(j\omega)$ na frequência na qual o ângulo mede -180°.

Definindo a frequência de cruzamento de fase, ω_{CF}, como a frequência na qual a fase de $G(j\omega)$ é -180°, a margem de ganho pode ser calculada por

$$MG = \frac{1}{\left|G(j\omega_{CF})\right|}$$

Em decibéis,

$$MG_{dB} = 20\log(MG) = -20\log\left|G(j\omega_{CF})\right|$$

Margens de Estabilidade

Para que um sistema de fase mínima seja estável em malha fechada é necessário (mas não suficiente) que sua margem de ganho seja positiva, ou seja, $| G(j\omega) | < 1$ (0 dB).

Uma margem de ganho negativa implica instabilidade.

Para um sistema de fase mínima estável, a margem de ganho indica o quanto o ganho pode ser aumentado antes que o sistema se torne instável. Para um sistema instável, a margem de ganho indica o quanto o ganho deve ser reduzido para que o sistema se torne estável.

Margens de Estabilidade

MARGEM DE FASE (MF): é o atraso de fase adicional, na frequência em que | G(jω) | = 1, necessário para que o sistema atinja o limiar de estabilidade.

Definindo a frequência de cruzamento de ganho, ω_{CG}, como a frequência na qual | G(jω) | = 1, a margem de fase pode ser calculada por

$$MF = 180^\circ + \angle G(j\omega_{CG})$$

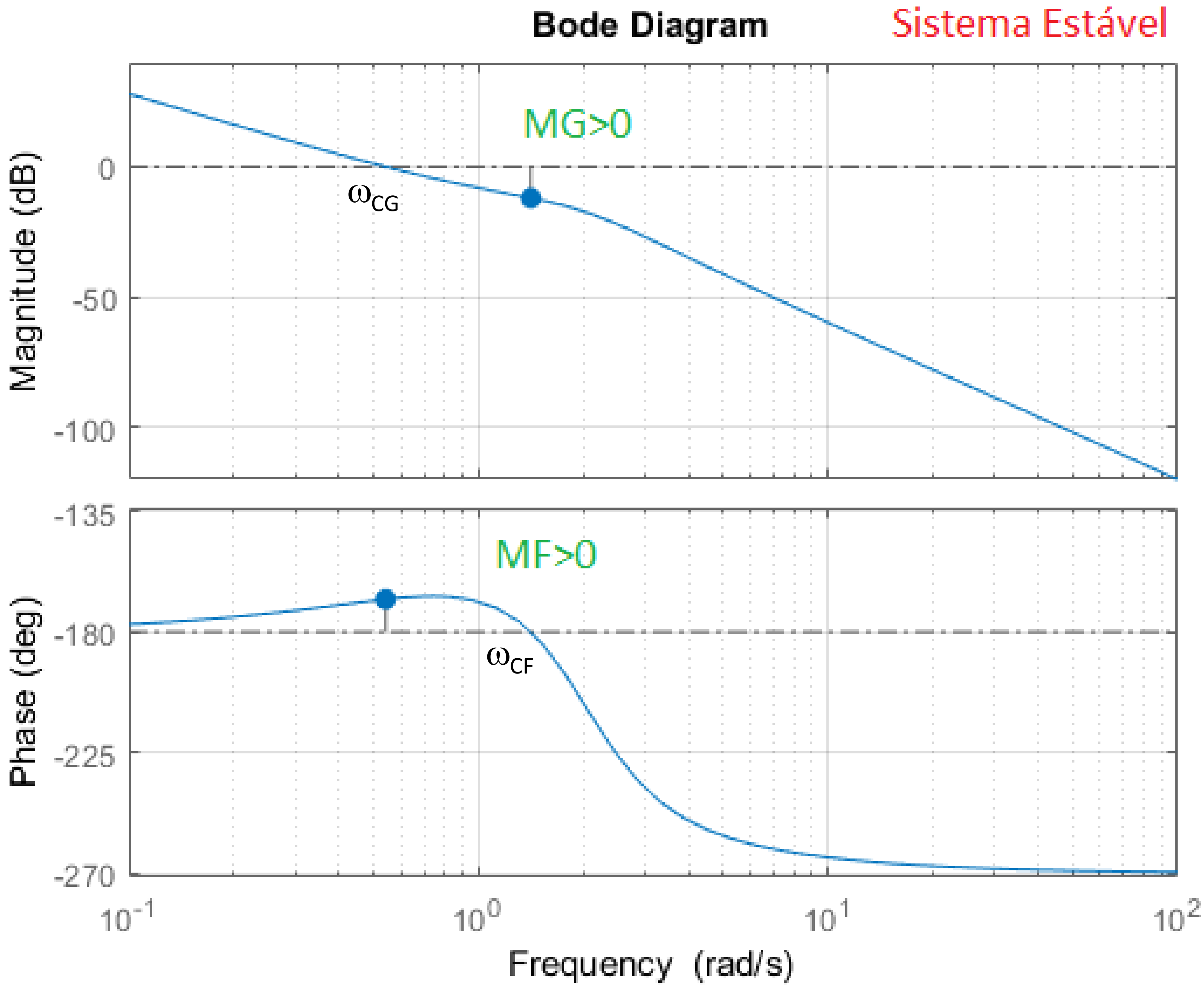
Sendo $\angle$ G(jω) medida no sentido horário.

Margens de Estabilidade

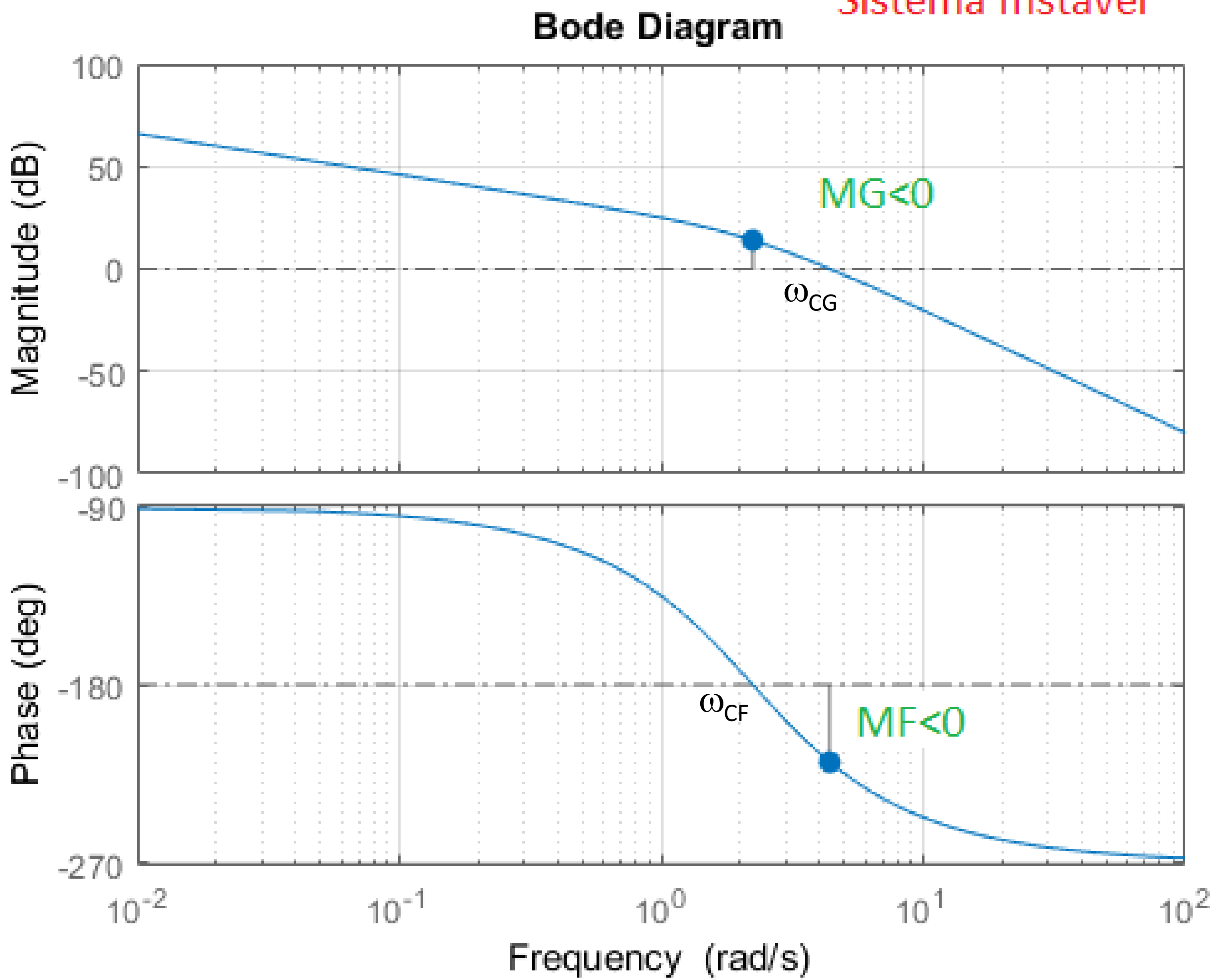
Para que um sistema de fase mínima seja estável em malha fechada é necessário (mas não suficiente) que sua margem de fase seja positiva. Uma margem de fase negativa implica instabilidade.

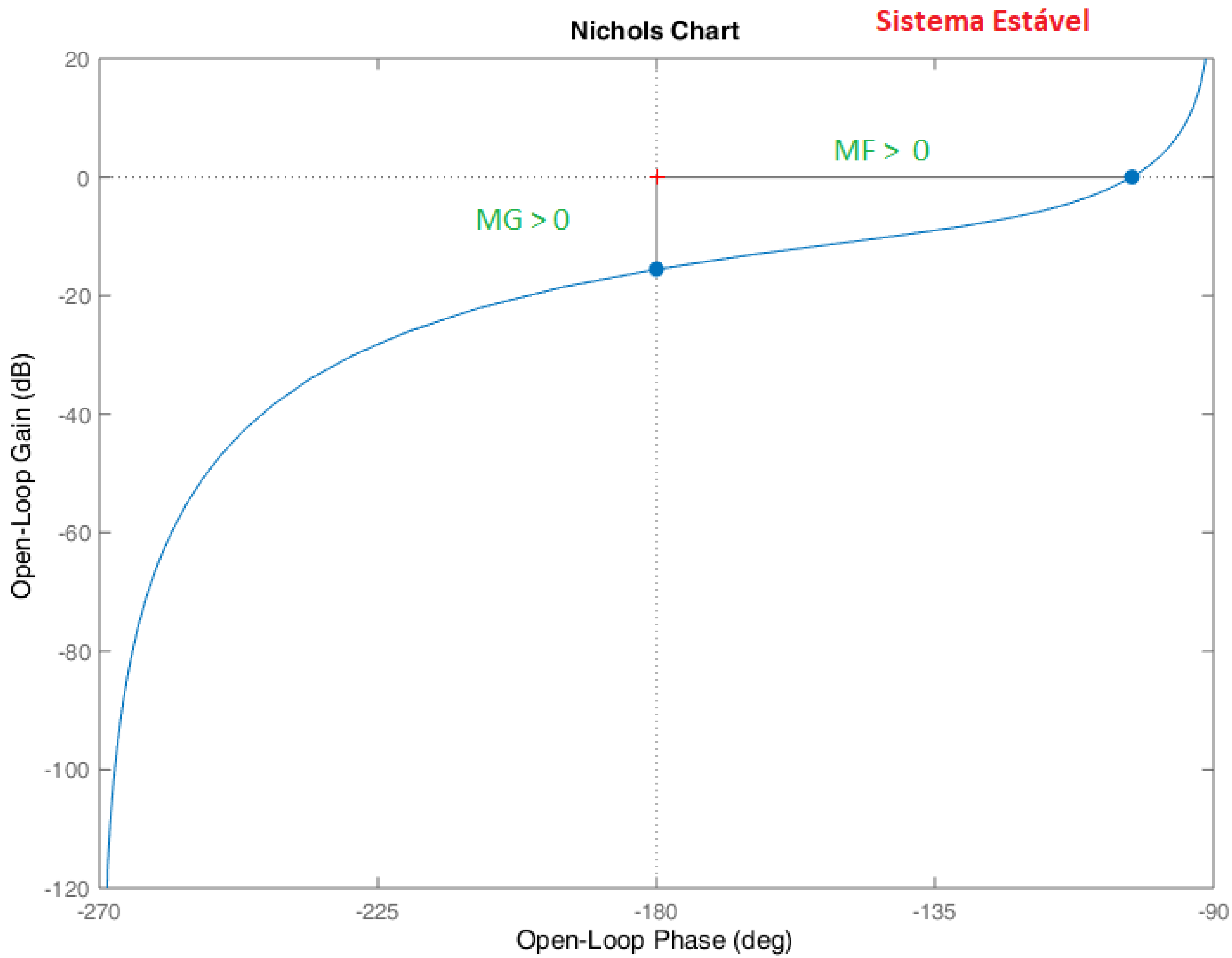
Um sistema de fase mínima é estável em malha fechada se e somente se ambas as margens de estabilidade são positivas.

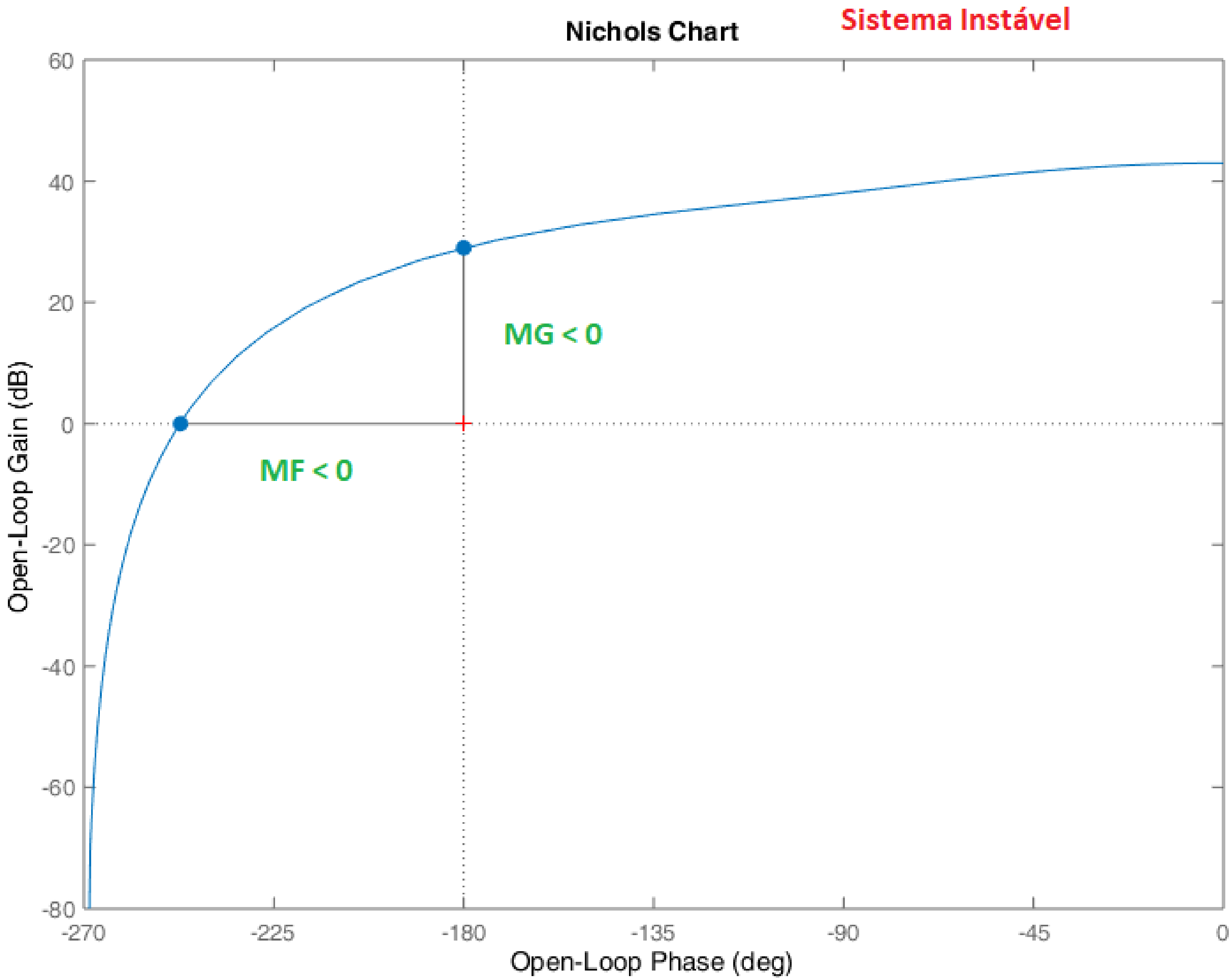
Sistema Estável



Sistema Instável

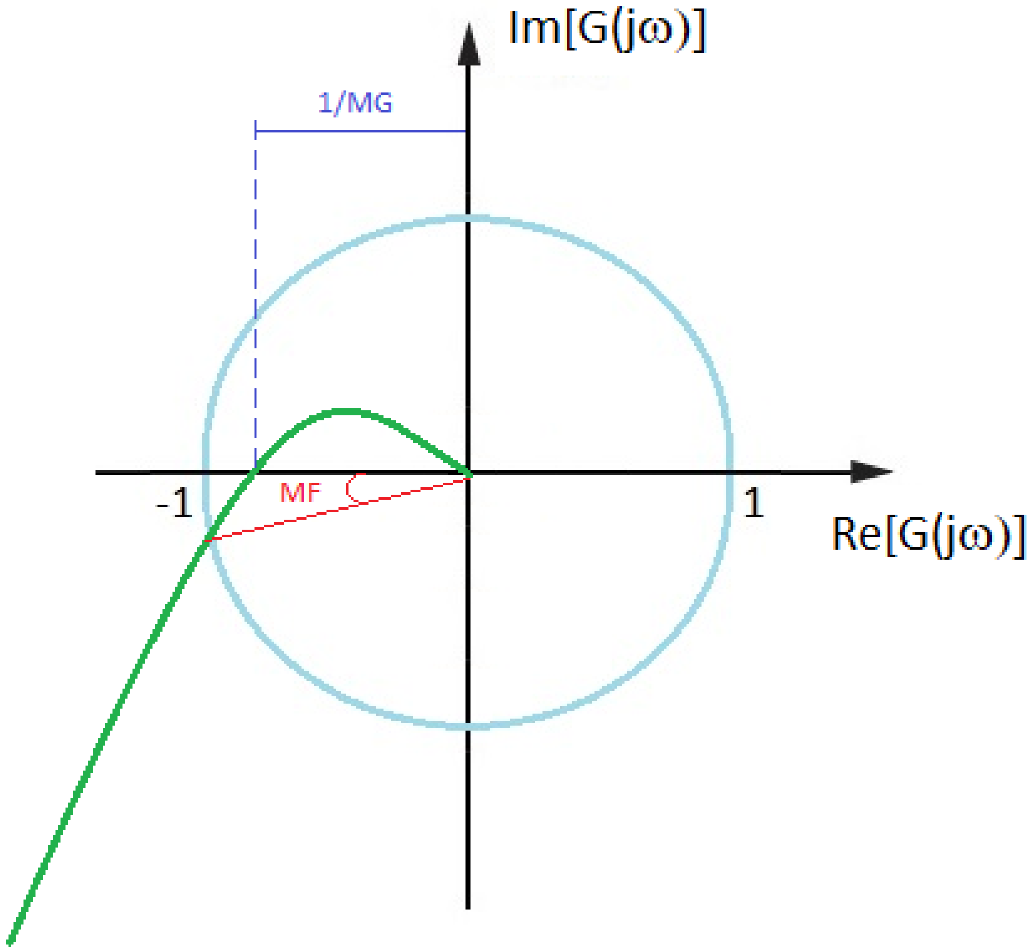



Nichols Chart
Sistema Estável
MF > 0
MG > 0
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
-120
Open-Loop Gain (dB)
-270
-225
-180
-135
-90
Open-Loop Phase (deg)



Nichols Chart
Sistema Instável
MG < 0
MF < 0
Open-Loop Gain (dB)
Open-Loop Phase (deg)
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-270
-225
-180
-135
-90
-45
0

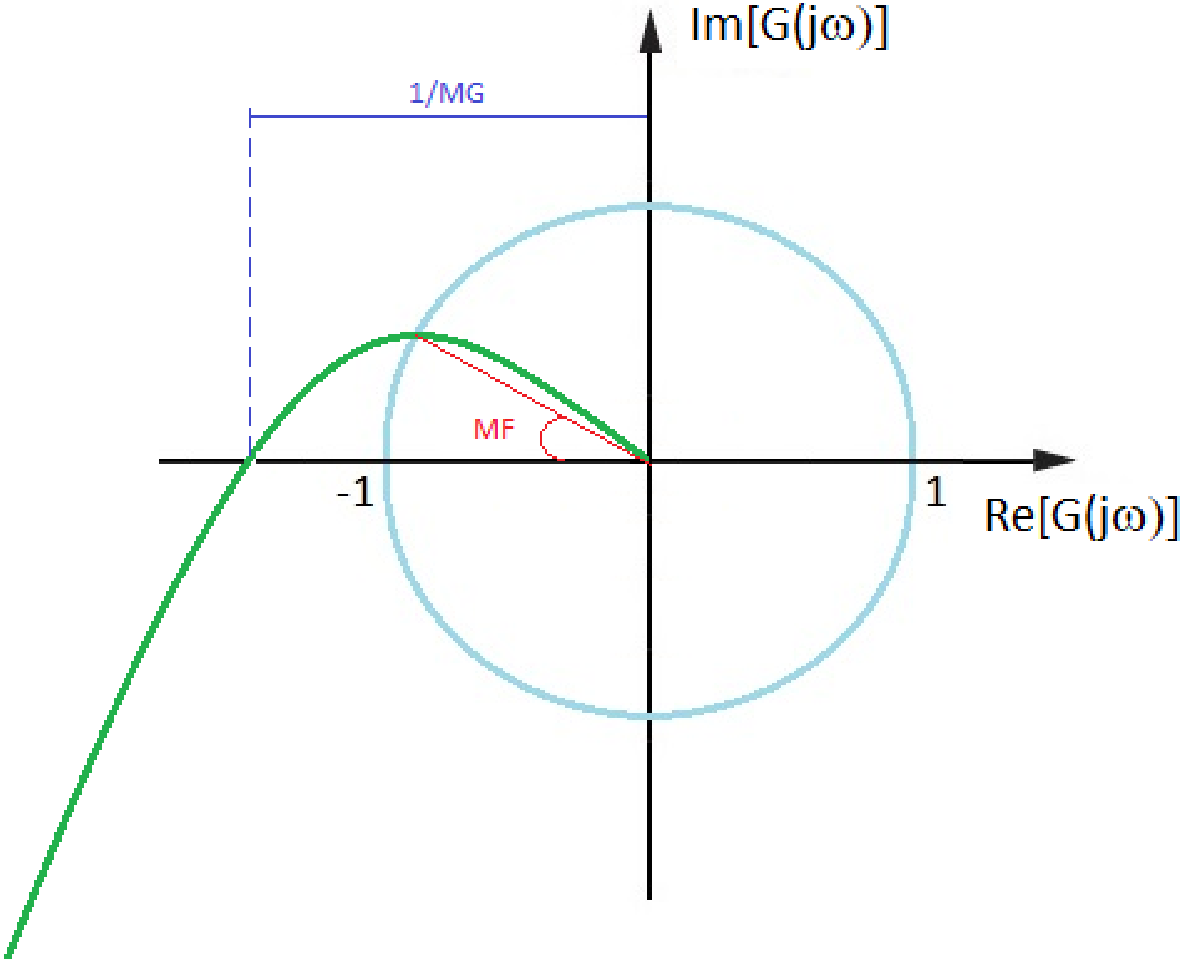
Diagrama Polar



MG > 0
MF > 0

Sistema Estável

Diagrama Polar



MG < 0
MF < 0

Sistema Instável

Exemplo 1

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+10)} = \frac{1}{s^3 + 11s^2 + 10s}$$

$$G(j\omega) = \frac{10}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+10)} = 10\left(\frac{-11\omega^2 - j(10\omega - \omega^3)}{121\omega^4 + (10\omega - \omega^3)^2}\right)$$

$$|G(j\omega)| = \frac{10}{\sqrt{121\omega^4 + (10\omega - \omega^3)^2}} \qquad \angle G(j\omega) = tg^{-1}\left(\frac{-10+\omega^2}{-11\omega}\right)$$

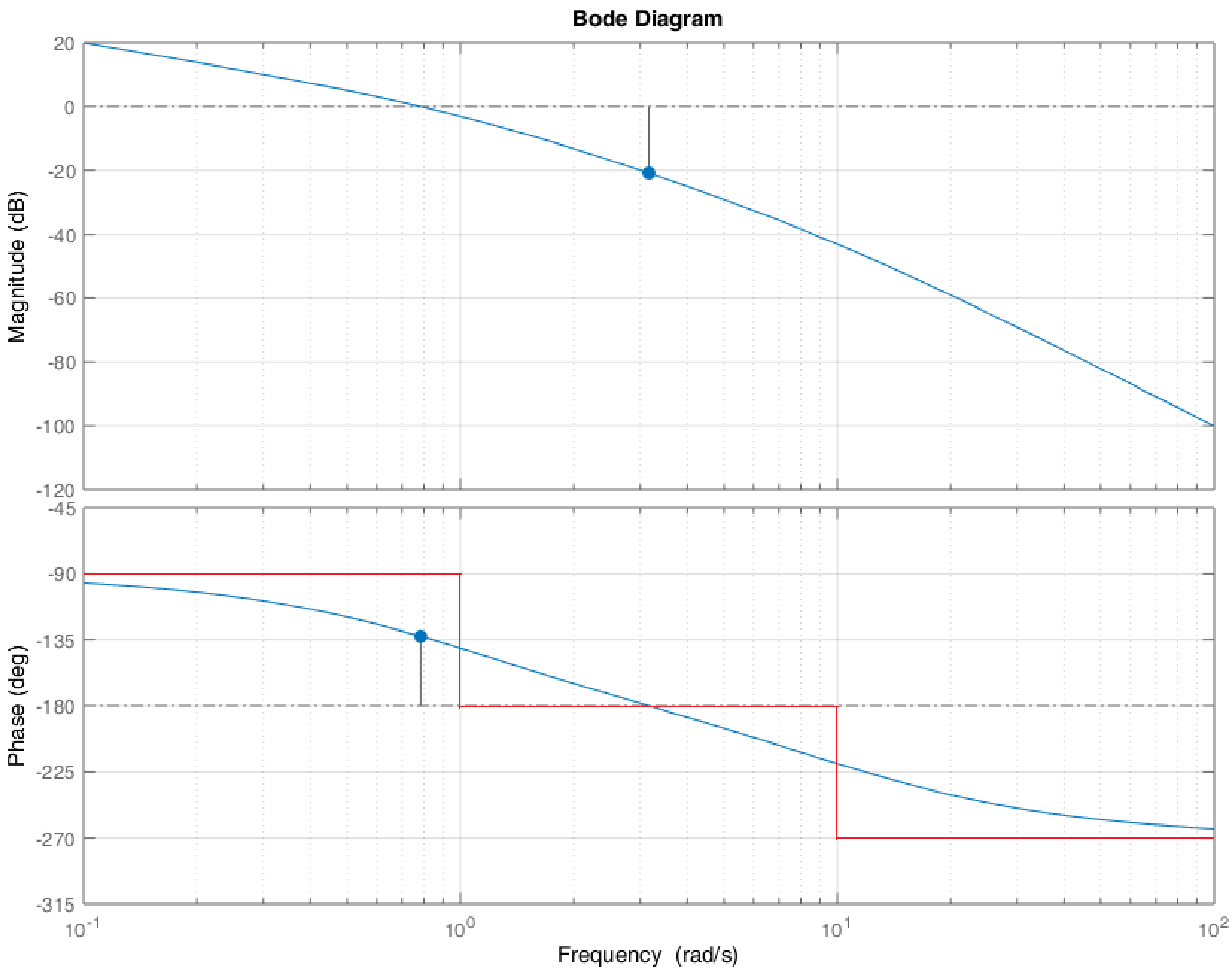
Variação assintótica de Módulo e Fase

Frequência	Módulo	Fase
$\omega = 0$ a $\omega = 1$	-20 dB/ dec	-90°
$\omega = 1$ a $\omega = 10$	-40 dB/dec	-180°
$\omega = 10$ a $\omega \to \infty$	-60 dB/dec	-270°

Exemplo 1

Valores assintóticos e reais (módulo e fase)

Frequência	Valores Assintóticos		Valores Reais	
	Módulo	Fase	Módulo	Fase
$\omega = 0,1$	20 dB	20 dB	-90°	-96,3°
$\omega = 1,0$	0 dB	-3 dB	-135°	-140,7°
$\omega = 10$	-40 dB	-43 dB	-225°	-219,3°
$\omega = 100$	-100 dB	-100 dB	-270°	-263,7°


Bode Diagram
Magnitude (dB)
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
-120
Phase (deg)
-45
-90
-135
-180
-225
-270
-315
10^-1
10^0
10^1
10^2
Frequency (rad/s)

Exemplo 1

Frequência de cruzamento de ganho: | G(jω) | = 1

$$|G(j\omega)| = \frac{10}{\sqrt{121\omega^4 + (10\omega - \omega^3)^2}} = 1 \quad \rightarrow \quad \omega^6 + 101\omega^4 + 100\omega^2 - 100 = 0$$

$$\omega = \begin{cases} \pm j10 \\ \pm j1{,}275 \\ \pm 0{,}784 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \omega_{CG} = 0{,}784$$

Margem de Fase (MF)

$$MF = 180° + \angle G(j\omega_{CG}) \qquad G(j\omega_{CG}) = tg^{-1}\left(\frac{-10 + {\omega_{CG}}^2}{-11\omega_{CG}}\right) = -132{,}6°$$

$$MF = 180° - 132{,}6° = 47{,}4°$$

Exemplo 1

Frequência de cruzamento de fase: $\angle G(j\omega) = -180°$

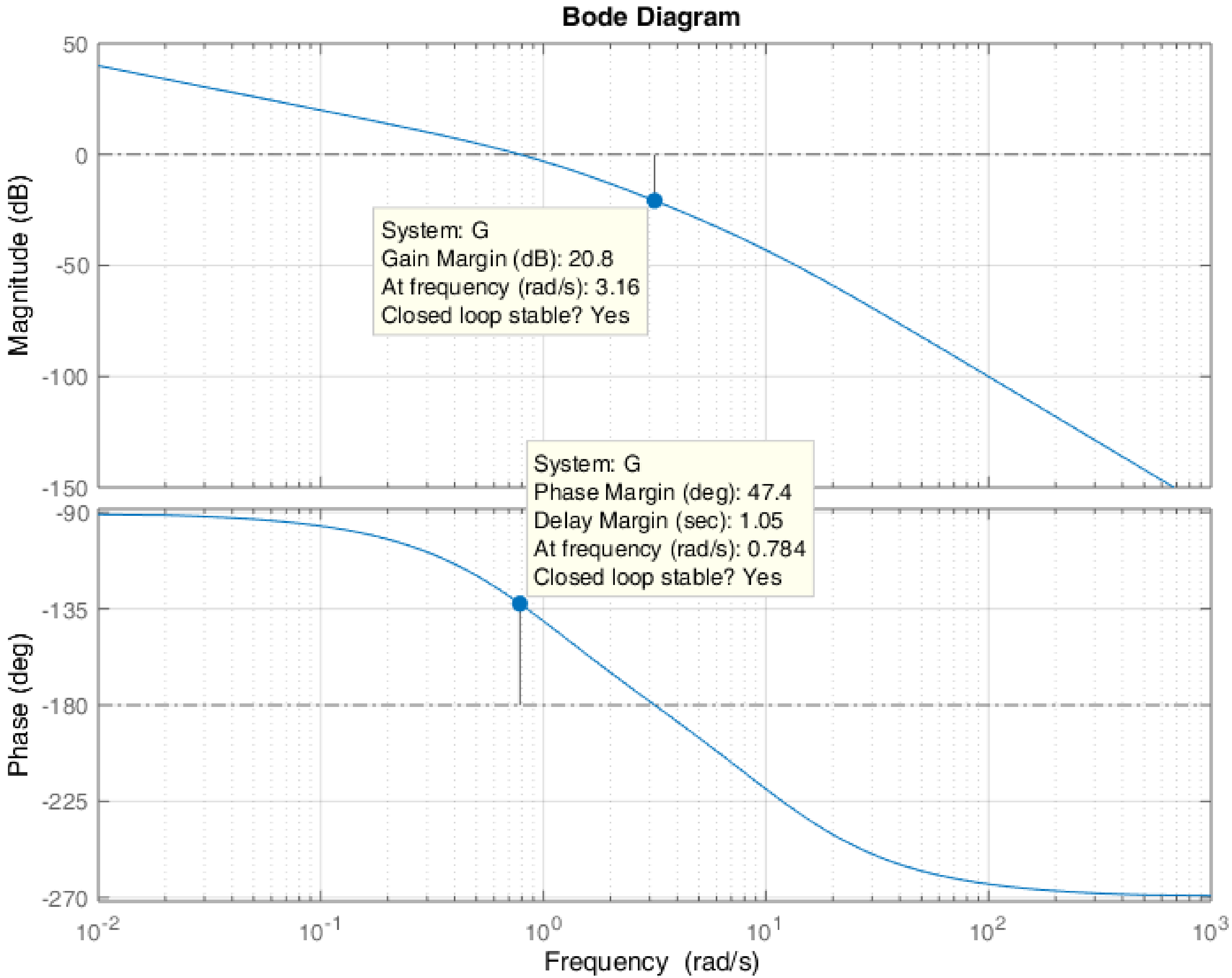
$$tg^{-1}\left(\frac{-10+\omega^2}{-11\omega}\right) = -180° \quad \rightarrow \quad \omega = \pm\sqrt{10}$$

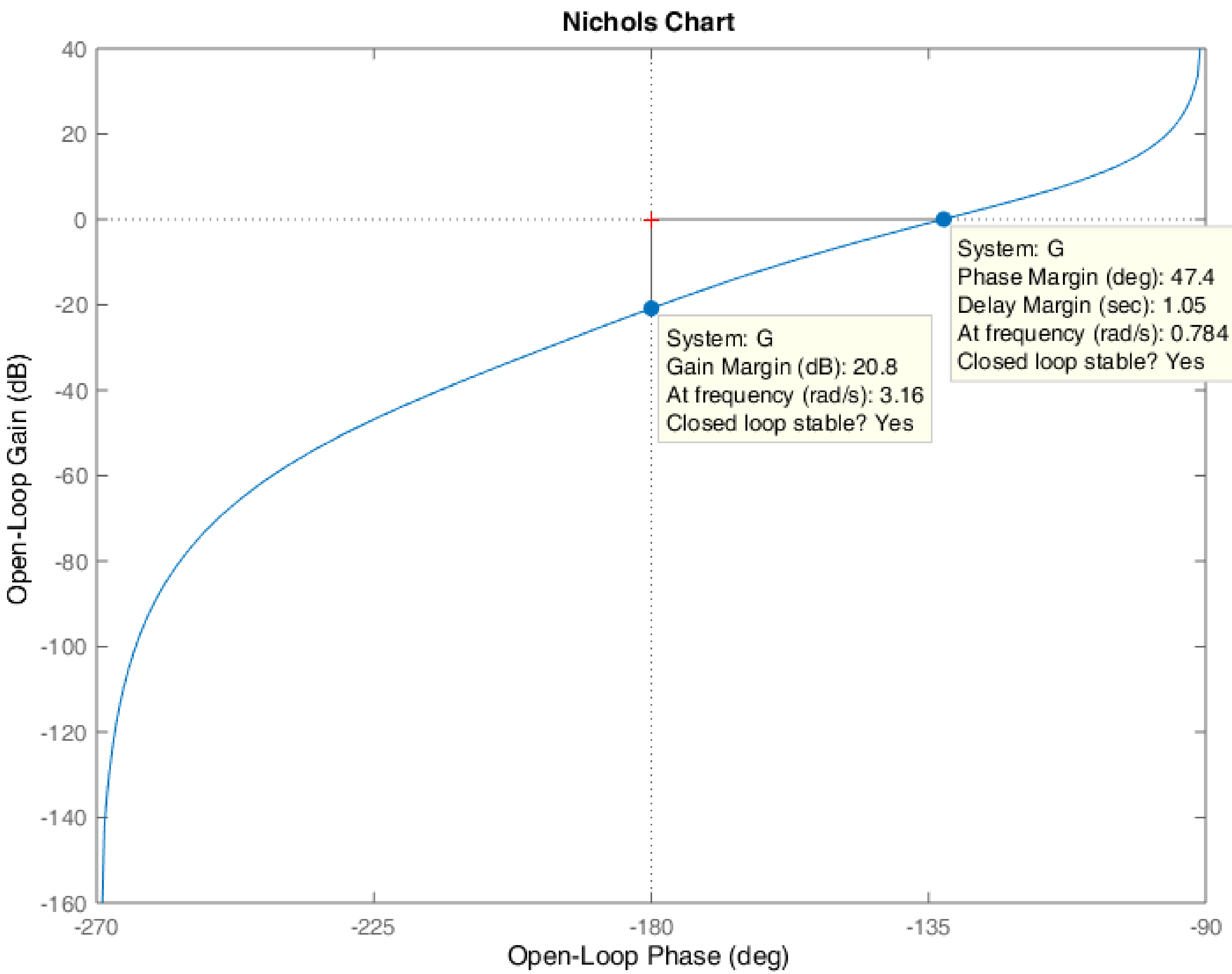
$$\omega_{CF} = 3{,}1623$$

Margem de Ganho (MG)

$$|G(\omega_{CF})| = 0{,}0909 \quad \rightarrow \quad MG = 20log\frac{1}{|G(\omega_{CF})|} = 20{,}83dB$$

Uma vez que MG>0 e MF>0, o sistema é estável em malha fechada.
O ganho pode ser aumentado em 11 vezes (1/0,0909), garantindo-se a estabilidade do sistema.


Bode Diagram
Magnitude (dB)
50
0
-50
-100
-150
System: G
Gain Margin (dB): 20.8
At frequency (rad/s): 3.16
Closed loop stable? Yes
Phase (deg)
-90
-135
-180
-225
-270
System: G
Phase Margin (deg): 47.4
Delay Margin (sec): 1.05
At frequency (rad/s): 0.784
Closed loop stable? Yes
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
Frequency (rad/s)


Nichols Chart
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
-120
-140
-160
Open-Loop Gain (dB)
-270
-225
-180
-135
-90
Open-Loop Phase (deg)
System: G
Phase Margin (deg): 47.4
Delay Margin (sec): 1.05
At frequency (rad/s): 0.784
Closed loop stable? Yes
System: G
Gain Margin (dB): 20.8
At frequency (rad/s): 3.16
Closed loop stable? Yes

Exemplo 1

Análise da estabilidade pelo critério de Nyquist

$$G(j\omega) = \frac{-110}{121\omega^2 + (10-\omega^2)^2} - j\frac{10-\omega^2}{121\omega^3 + \omega(10-\omega^2)^2}$$

$$G(0^+) = \frac{-110}{100} - j\frac{10}{0} = \infty \angle -90°$$

$$G(0^-) = \infty \angle 90°$$

$$G(+\infty) \approx \frac{1}{(j\omega)^3} - j\frac{1}{\omega^3} = 0 \angle 90°$$

$$G(-\infty) = 0 \angle -90°$$

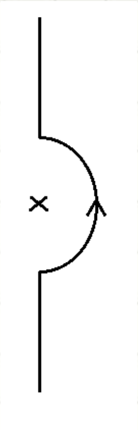
Cruzamento com eixo imaginário: $\omega = \pm \infty$

Cruzamento com eixo real: $10 - \omega^2 = 0$

$$\omega = \pm\sqrt{10} \quad \rightarrow \quad Re\left[G\left(j\sqrt{10}\right)\right] = -\frac{11}{121} = -0{,}0909$$

Exemplo 1

Comportamento em torno da origem

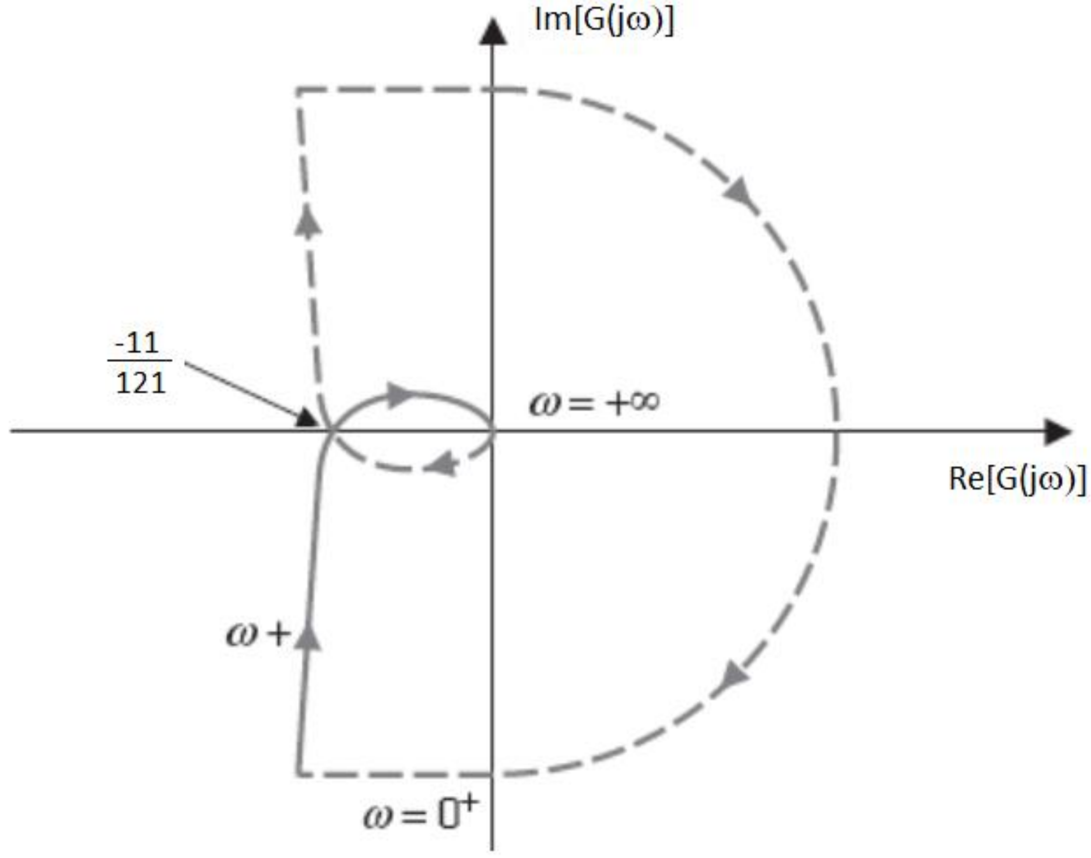


$s = \varepsilon e^{j\theta}$

θ varia de 0^- a 0^+, de -90° a +90°, no sentido anti-horário.

$$G(s) = \frac{10}{\varepsilon e^{j\theta}(\varepsilon e^{j\theta} + 1)(\varepsilon e^{j\theta} + 10)}$$

$\varepsilon \to 0$ $\quad G(s) = \frac{1}{0} e^{-j\theta}$ semicírculo de raio infinito no sentido horário



Análise da estabilidade

P=0

Assim, para o sistema ser estável é preciso N=0.

$$-\frac{1}{K} < -\frac{11}{121} \quad \rightarrow \quad 0 < K < 11$$

Observação 1

Sistema de fase não mínima

As definições de margem de ganho e de fase não podem ser aplicadas diretamente. Faz-se necessário um estudo adequado do sistema.

Neste caso, recomenda-se utilizar o critério de Nyquist para análise da estabilidade.

Observação 2

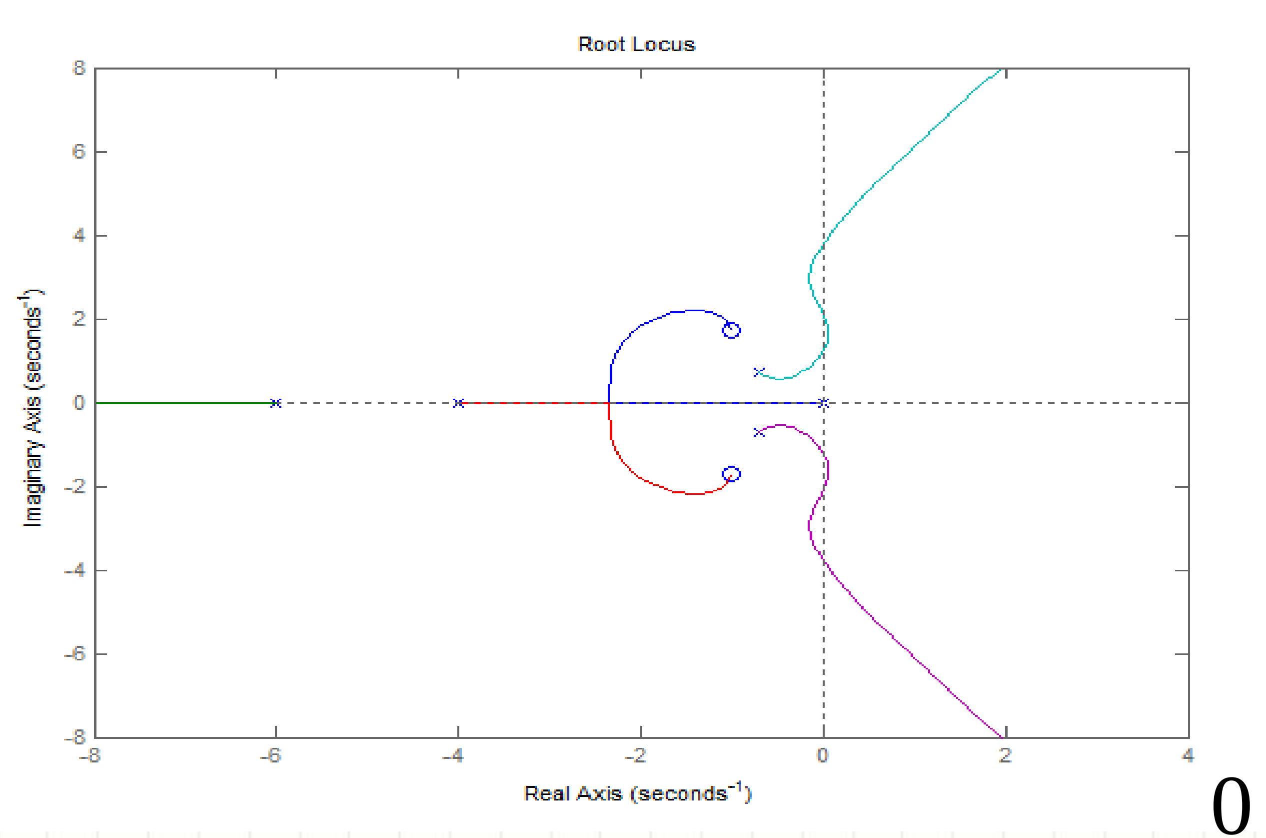
Sistemas condicionalmente estáveis

Neste tipo de sistema podem existir múltiplas frequências de cruzamento de fase ou de ganho.

Para sistemas estáveis com duas ou mais frequências de cruzamento de ganho, a margem de fase é medida pela frequência de cruzamento de ganho mais alta.

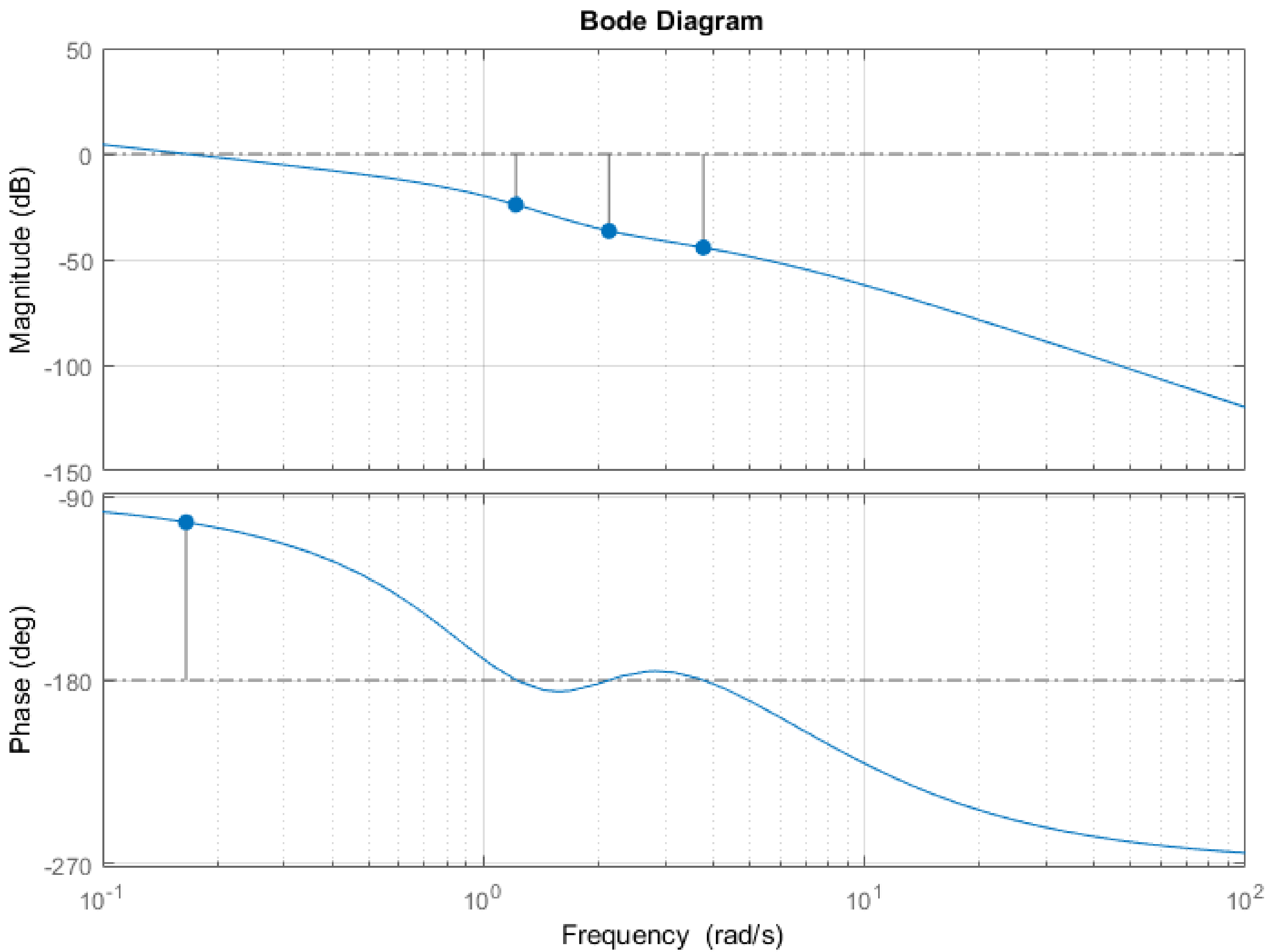
Para sistemas estáveis com duas ou mais frequências de cruzamento de fase, a margem de ganho é medida pela frequência de cruzamento de ganho mais baixa.

$$G(s)=\frac{s^2+2s+4}{s(s+4)(s+6)(s^2+1{,}41s+1)}$$



$$0<K<16$$

$$66{,}5<K<165{,}5$$



Bode Diagram
Magnitude (dB)
50
0
-50
-100
-150
Phase (deg)
-90
-180
-270
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
Frequency (rad/s)

20log(16) ~ 24dB