Projeto de Controladores Usando Resposta em Frequência

Tempo Contínuo

Profa. Cristiane Paim

Introdução

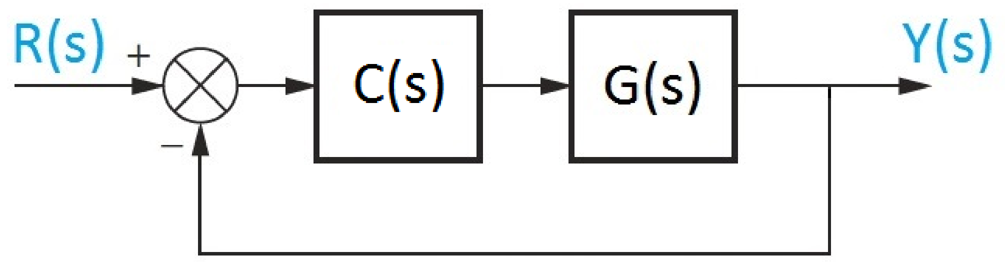
No projeto de controladores usando a resposta em frequência as principais especificações de desempenho são:

- **Margem de Fase**
- **Largura de Faixa**
- **Erro de Regime Permanente**

Como visto anteriormente, **margem de fase e largura de faixa** estão relacionadas com características da **resposta transitória**. A **margem de fase** está associada com o **coeficiente de amortecimento** enquanto a **largura de faixa** está relacionada com a **velocidade da resposta.**

Controladores em Avanço

Seja a configuração de controle em série;



O controlador em avanço é escrito na forma

$$C(s) = K\frac{1+\alpha Ts}{1+Ts} \qquad T>0, \alpha>1$$

ou, em frequência

$$C(j\omega) = K\frac{1+j\omega\alpha T}{1+j\omega T}$$

Controladores em Avanço

A resposta em frequência do controlador, considerando K=1 (por simplicidade), terá as variações de módulo e fase definidas a seguir.

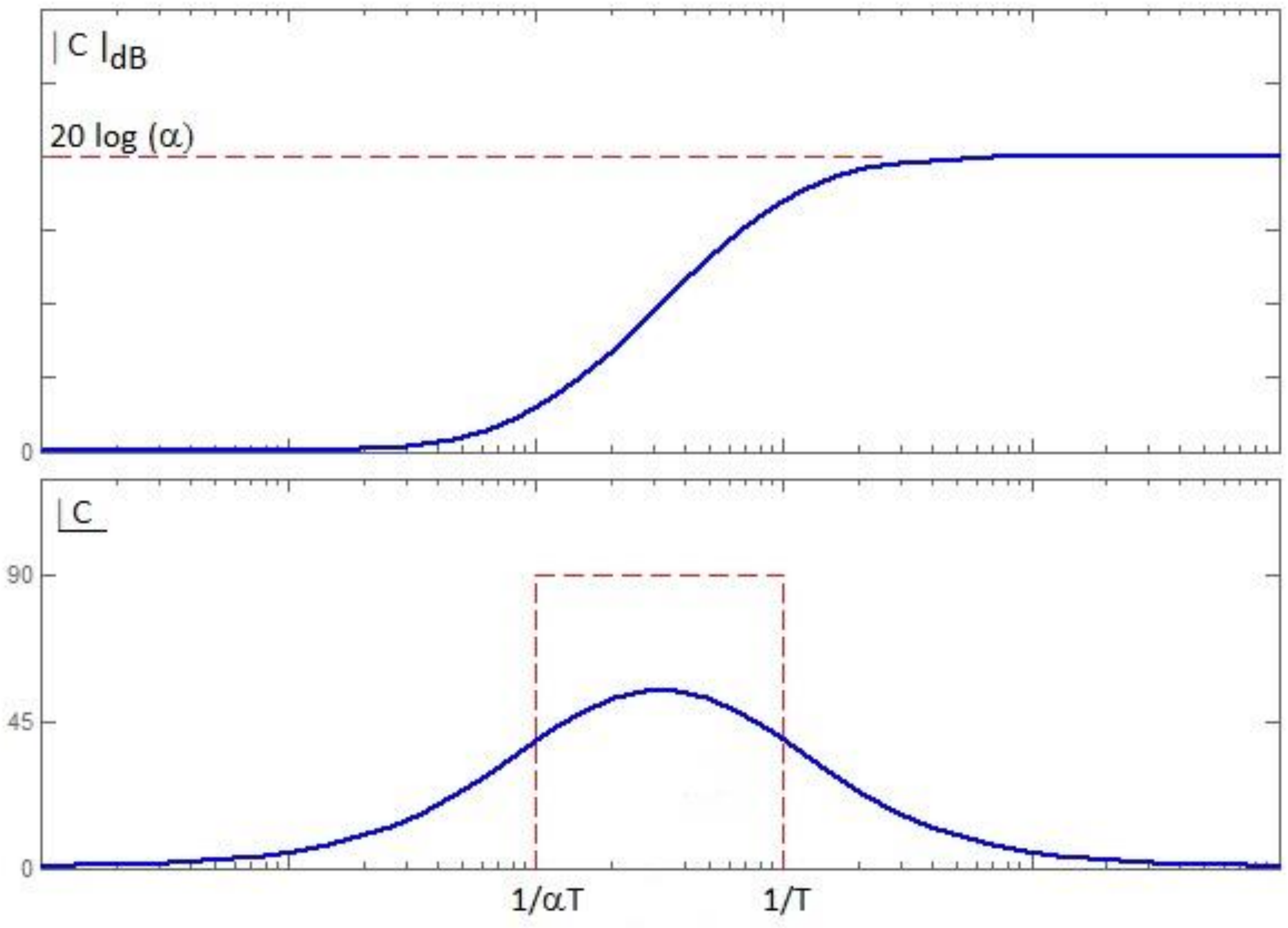
$$C(j\omega) = \frac{1 + j\omega\alpha T}{1 + j\omega T}$$

Frequência	Módulo	Fase
ω=0 a ω=1/αT	0 dB/dec	0°
ω=1/αT a ω=1/T	20 dB/dec	90°
ω=1/T a $\omega \to \infty$	0 dB/dec	0°

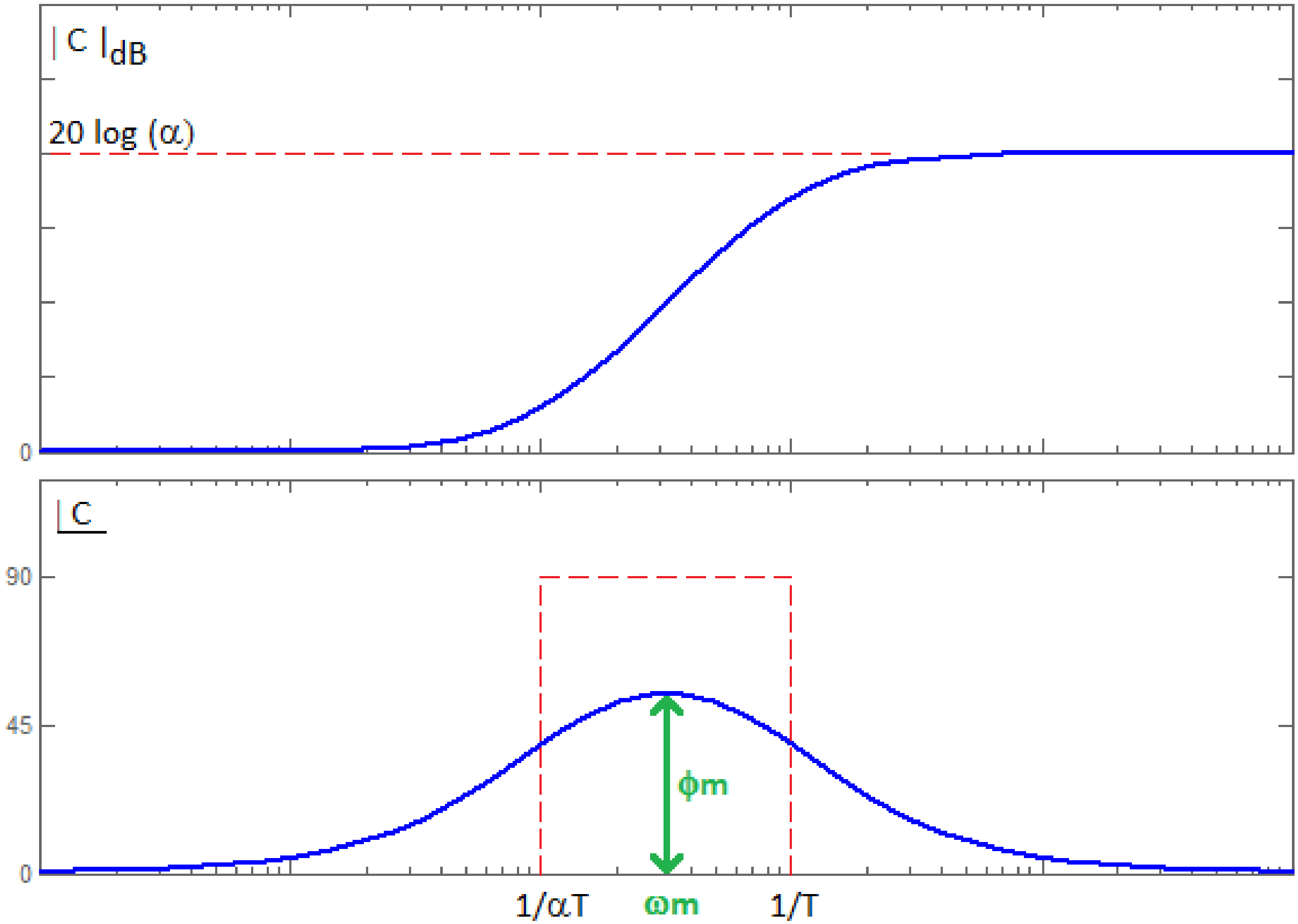
$$\omega \to 0 \quad \to \quad |C| = 0\,\text{dB} \qquad \angle C = 0^\circ$$

$$\omega \to \infty \quad \to \quad |C| = 20\log(\alpha) \qquad \angle C = 0^\circ$$

Diagramas de Bode para um controladores em avanço



Diagramas de Bode para um controladores em avanço



Controladores em Avanço

$$C(j\omega) = K\frac{1+j\omega\alpha T}{1+j\omega T}$$

A fase do controlador é dada por:

$$\angle C(j\omega) = tg^{-1}(\alpha T\omega) - tg^{-1}(T\omega)$$

Definindo,

$$\phi(\omega) = \angle C(j\omega)$$

e calculando a tangente, tem-se

$$\mathrm{tg}\,\phi(\omega) = \frac{(\alpha - 1)T\omega}{1+\alpha T^2\omega^2}$$

O pico de fase do controlador ocorre na frequência onde

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\mathrm{tg}\,\phi(\omega) = 0$$

Controladores em Avanço

Resolvendo a equação, chega-se que a frequência onde pico ocorre é dada por

$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$

Na frequência de pico (ω_m),

$$\mathrm{tg}\,\phi(\omega_m) = \mathrm{tg}\,\phi_m = \frac{\alpha - 1}{2\sqrt{\alpha}}$$

ou

$$\mathrm{sen}\,\phi_m = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$$

Controladores em Avanço

Assim, **quanto maior o valor de α, maior será o ângulo de fase (ϕ_m) e menor (mais à esquerda) será a frequência onde o pico ocorre (ω_m).**

$$\operatorname{sen}\phi_m = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$$

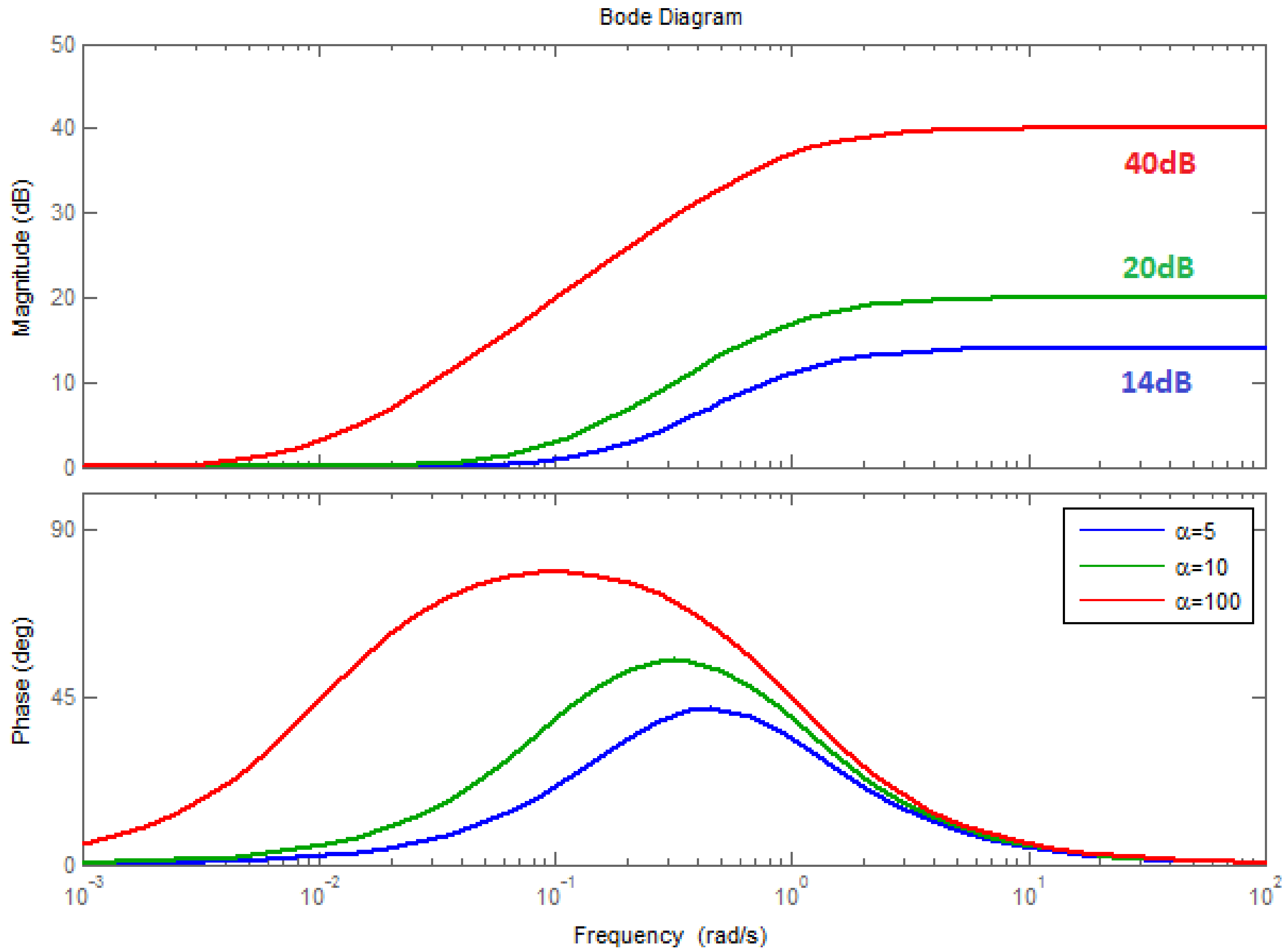
Por exemplo, considerando T=K=1, tem-se

$$C(j\omega) = \frac{1 + j\omega\alpha}{1 + j\omega}$$

$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$

α	ω_m	ϕ_m
5	0,45	41,8°
10	0,32	54,9°
100	0,10	78,6°

Controladores em Avanço



Controladores em Avanço

O valor de α, entretanto, não deve ser muito grande para evitar ruídos de alta frequência. Usualmente $\alpha<20$.

O valor de α pode ser reescrito como

$$\alpha = \frac{1+\operatorname{sen}\phi_m}{1-\operatorname{sen}\phi_m}$$

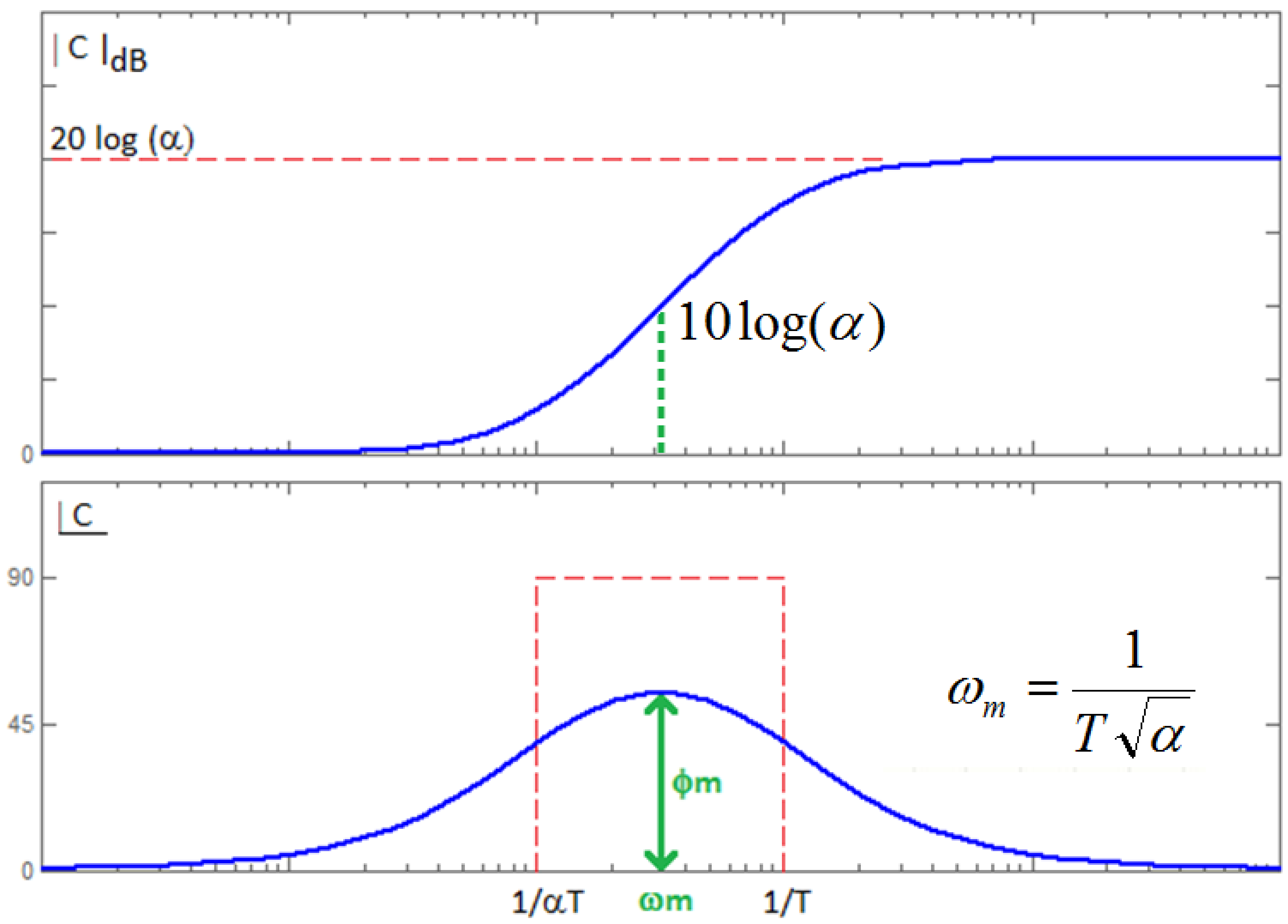
Na frequência de pico (ω_m), o módulo do controlador é dado por

$$\left|C(j\omega_m)\right| = \sqrt{\alpha}$$

ou

$$\left|C(j\omega_m)\right|_{dB} = 20\log\sqrt{\alpha} = 10\log(\alpha)$$

Controladores em Avanço



Controladores em Avanço

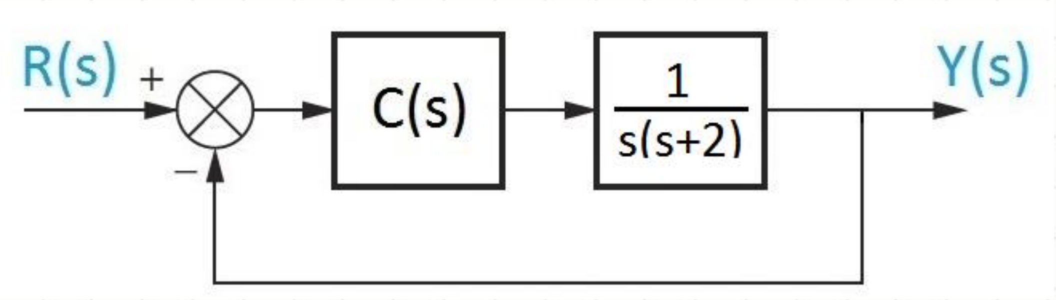
O controlador em avanço é projetado com o objetivo de **aumentar a margem de fase** do sistema melhorando assim a estabilidade e as características da **resposta transitória**.

Fazendo ω_m igual a frequência de cruzamento de ganho do sistema não compensado (ω_G) a fase aumentaria de um fator ϕ_m. Por outro lado, o controlador também introduz uma modificação no módulo, causando um pequeno deslocamento de ω_G para a direita, acarretando uma redução na margem de fase.

O efeito deste deslocamento pode ser compensado introduzindo no projeto uma "margem de segurança" na determinação de ϕ_m .

Exemplo 1

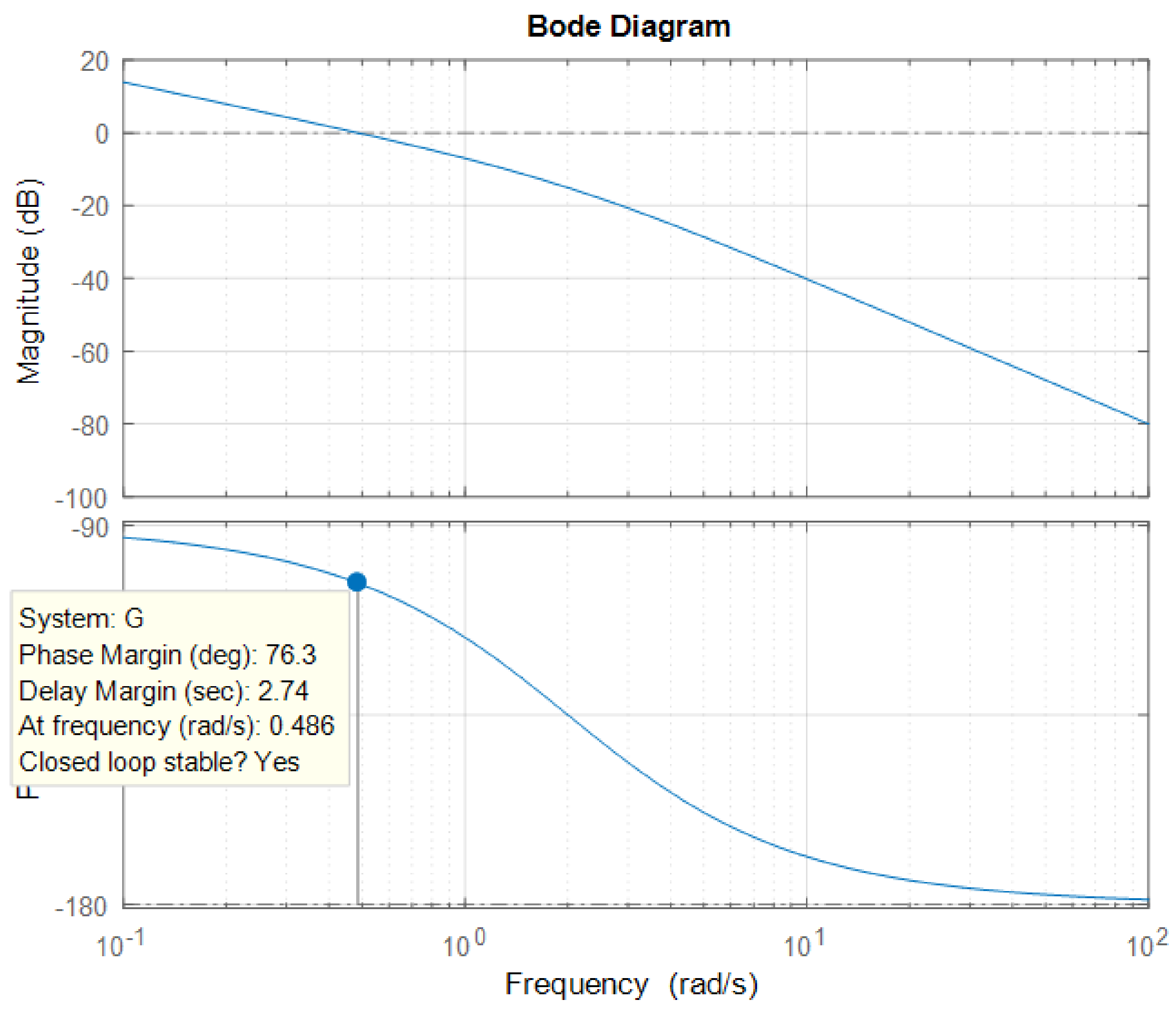
Seja o sistema de controle a seguir.



Projetar um controlador em avanço de fase de modo a atender as seguintes especificações:

- Erro à rampa menor ou igual a 10%
- Margem de fase maior ou igual a 60°

Exemplo 1 – Diagramas de Bode para G(s)



Exemplo 1

Como visto no diagrama de bode, a especificação de margem de fase já é atendida porém o erro de regime permanente é muito maior do que a especificação.

$$K_V = \lim_{s \to 0} sG(s) = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad e_\infty = 2$$

O ganho K do controlador pode ser ajustado para garantir a especificação de erro. Entretanto, este ajuste causará uma redução na margem de fase que será corrigida com a alocação do polo e do zero do controlador em avanço.

Exemplo 1

Introduzindo o controlador em avanço, o erro de regime permanente torna-se:

$$K_V = \lim_{s\to 0} sC(s)G(s) = \frac{K}{2} \qquad \rightarrow \qquad e_\infty = \frac{2}{K}$$

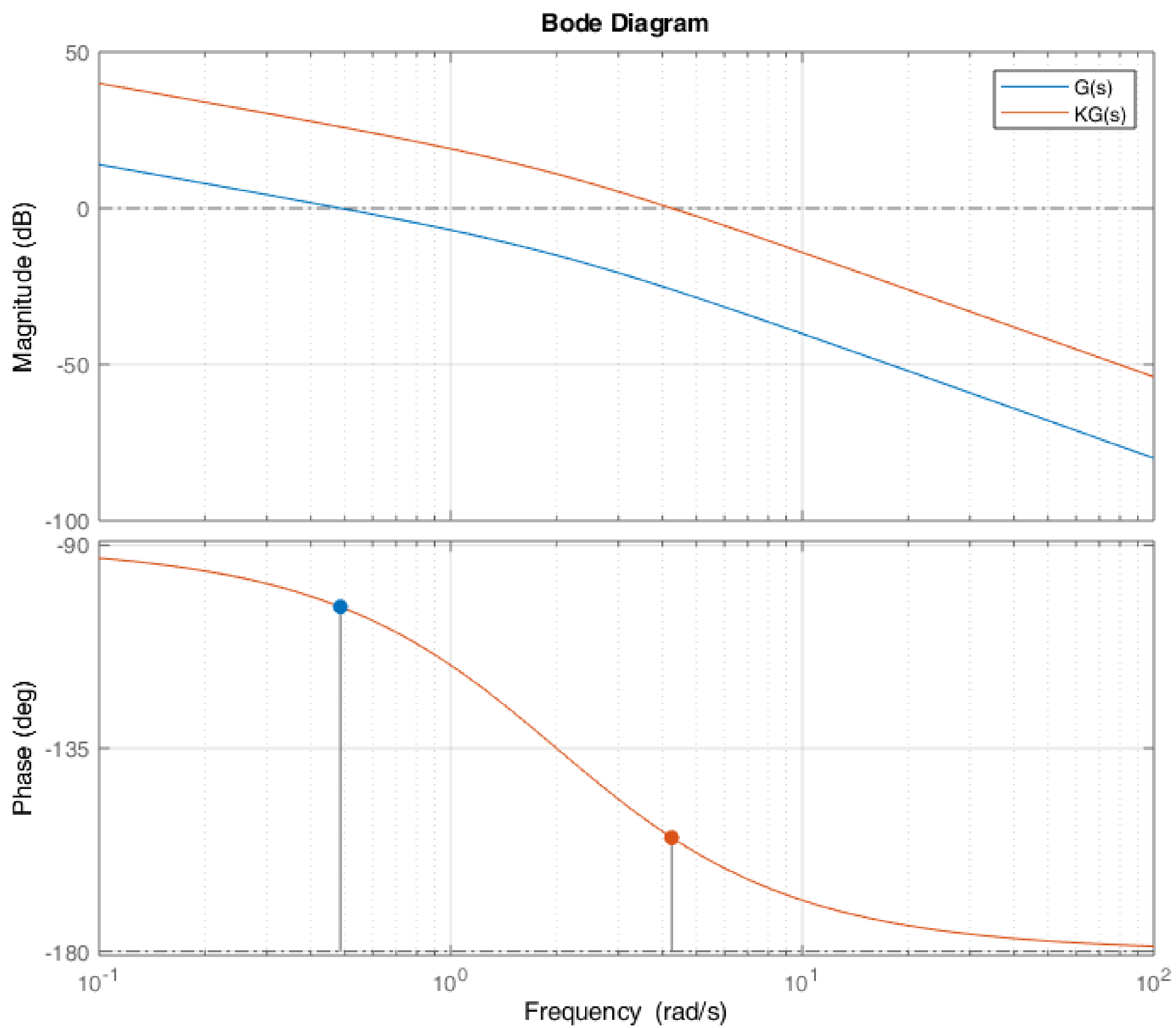
Assim, para garantir a especificação de erro,

$$e_\infty = \frac{2}{K} \leq 0{,}1 \quad \rightarrow \quad K \geq 20$$

Para K=20 tem-se

$$KG(j\omega) = \frac{20}{(j\omega)(j\omega + 2)}$$

Exemplo 1 – Diagramas de Bode para G(s) e KG(s)



Exemplo 1

A frequência de cruzamento de ganho ω_G será determinada por

$$|KG(j\omega)| = \frac{20}{\omega\sqrt{\omega^2+4}} = 1 \quad \rightarrow \quad \omega^4 + 4\omega^2 - 400 = 0$$

$$\begin{matrix} \omega = \pm 4{,}25 \\ \omega = \pm j4{,}7 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \omega_G = 4{,}25$$

Nesta frequência

$$\angle KG(j\omega_G) = -\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{2}{-\omega_G}\right) = -154{,}8^\circ$$

Portanto,

$$MF = 180^\circ - 154{,}8^\circ = 25{,}2^\circ$$

Exemplo 1

A contribuição de fase do controlador é escolhida de modo a garantir a margem de fase desejada.

MF do sistema (KG)

$$\phi_m = 60^\circ - 25{,}2^\circ + 10{,}2^\circ = 45^\circ$$

MF desejada

Ajuste de Fase

Geralmente, o ajuste de fase é feito adicionando uma fase entre 5 e 12 graus.

Definida a contribuição de fase do controlador, o valor de α pode ser calculado:

$$\alpha = \frac{1 + \operatorname{sen}\phi_m}{1 - \operatorname{sen}\phi_m} \quad \rightarrow \quad \alpha = 5{,}83$$

Exemplo 1

A frequência de cruzamento de ganho do sistema controlado, será definida pela condição de módulo

$$\left|C(j\omega_C)G(j\omega_C)\right| = 1$$

Assim, para conseguir o aumento necessário de fase, a frequência de cruzamento de ganho é ajustada para o pico de fase do controlador

$$\left|K\sqrt{\alpha}\, G(j\omega_C)\right| = 1$$

$$\frac{20}{\omega\sqrt{\omega^2+4}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \quad \rightarrow \quad \omega^4 + 4\omega^2 - 2332{,}9 = 0$$

$$\begin{matrix} \omega = \pm 6{,}81 \\ \omega = \pm j7{,}1 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \omega_C = 6{,}8$$

Exemplo 1

Verificação

$$\angle KG(j\omega_C) = -\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{2}{-\omega_C}\right) = -163{,}6^\circ$$

$$MF = 180^\circ - 163{,}6^\circ + 45^\circ = 61{,}4^\circ > 60^\circ$$

Para concluir o projeto falta definir polo e zero do controlador.

A frequência de cruzamento de ganho do sistema controlado deve ser posicionada na frequência de pico do controlador:

$$\omega_C = \omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} \quad \rightarrow \quad T = \frac{1}{\omega_C\sqrt{\alpha}}$$

Exemplo 1

Assim,

$$T = \frac{1}{\omega_C \sqrt{\alpha}} = 0{,}061 \quad \text{e} \quad \alpha T = 0{,}355$$

O controlador em avanço fica na forma

$$C(s) = 20\frac{1+0{,}355s}{1+0{,}061s}$$

ou

$$C(s) = 116{,}4\frac{s+2{,}82}{s+16{,}4}$$

Exemplo 1 – Controlador Proporcional (C(s)=1)

1. Sistema com C(s)=1

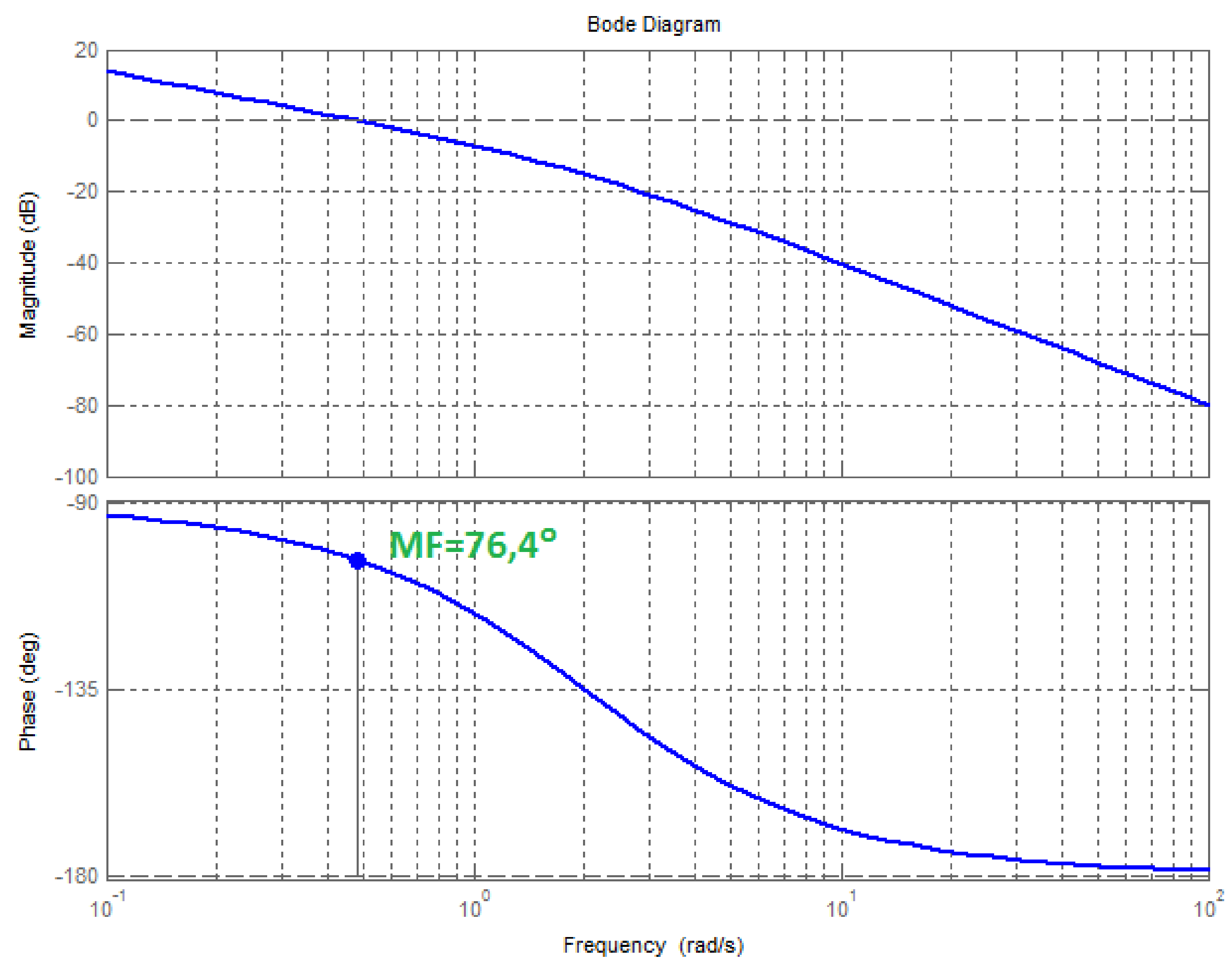
$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} MG &= \infty \\ MF &= 76{,}4^\circ \\ \omega_{CG} &= 0{,}486 \end{aligned}$$

$$Kv = \lim_{s \to 0} sG(s) = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad e_\infty = 200\%$$

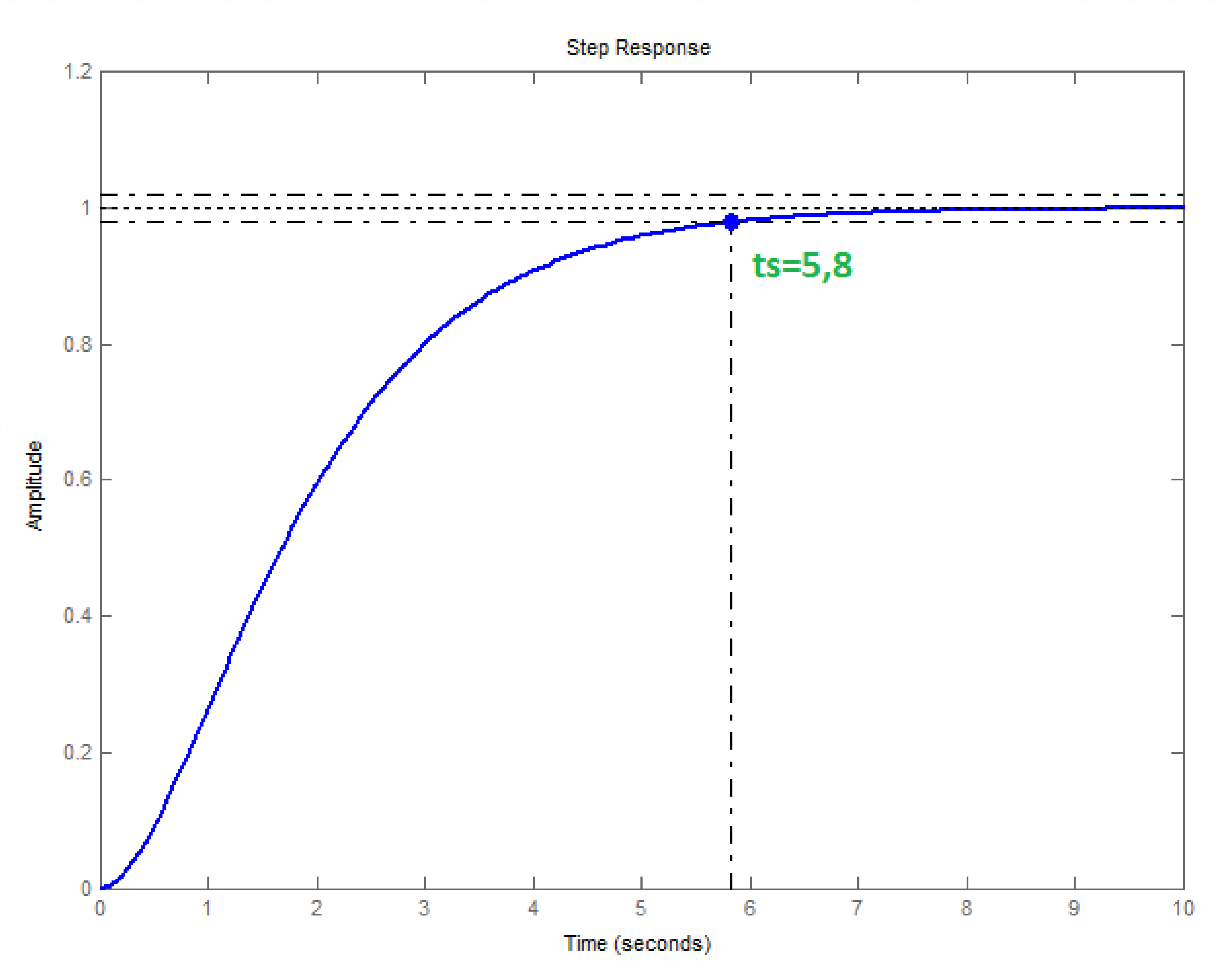
No domínio do tempo:

$$T(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} M_P &= 0\% \\ t_s &= 5{,}8 \end{aligned}$$

Exemplo 1 – Diagramas de Bode para C(s)=1



Exemplo 1 – Resposta ao degrau para C(s)=1



Exemplo 1 – Controlador Proporcional (K=20)

2. Sistema com ganho K=20

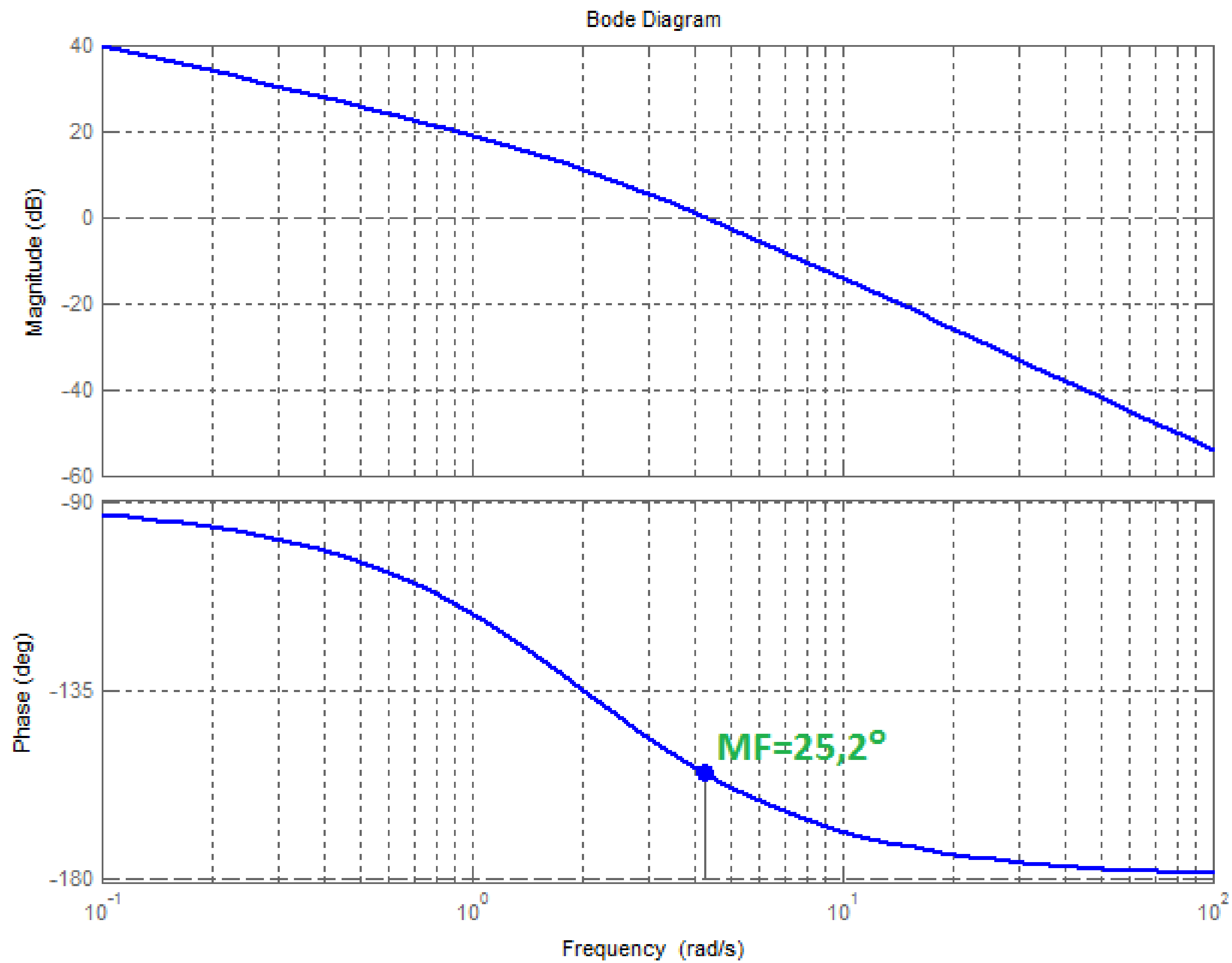
$$G(s)=\frac{20}{s(s+2)} \rightarrow \begin{aligned} MG &= \infty \\ MF &= 25{,}4^{\circ} \\ \omega_{CG} &= 4{,}25 \end{aligned}$$

$$K_V=\lim_{s\to 0} sG(s)=10 \qquad \rightarrow \qquad e_{\infty}=10\%$$

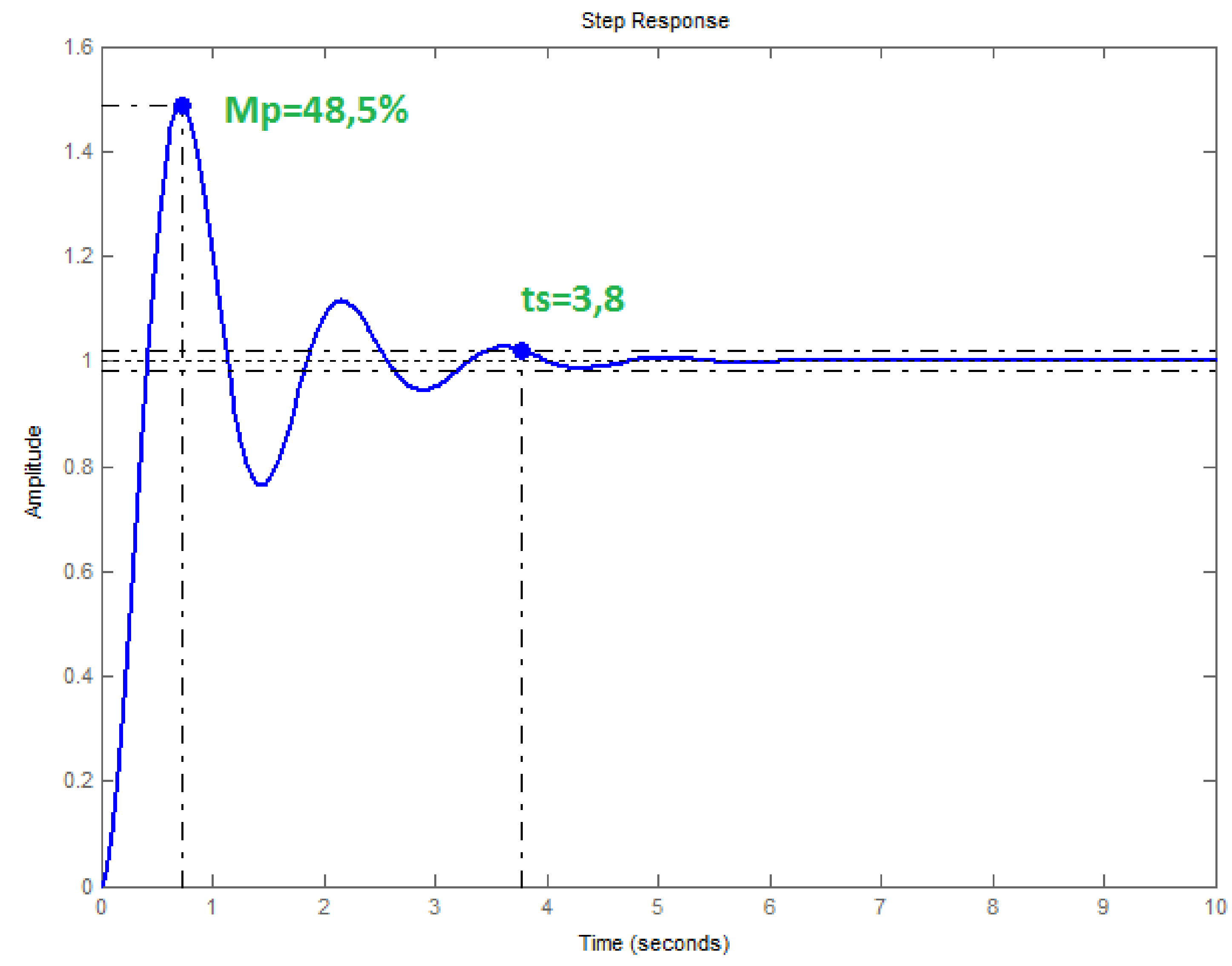
No domínio do tempo:

$$T(s)=\frac{20}{s^2+2s+20} \rightarrow \begin{aligned} M_P &= 48{,}5\% \\ t_s &= 3{,}8 \end{aligned}$$

Exemplo 1 – Diagramas de Bode para KG(s)



Exemplo 1 – Resposta ao degrau para K=20



Exemplo 1 – Controlador em avanço

3. Sistema com controlador em avanço

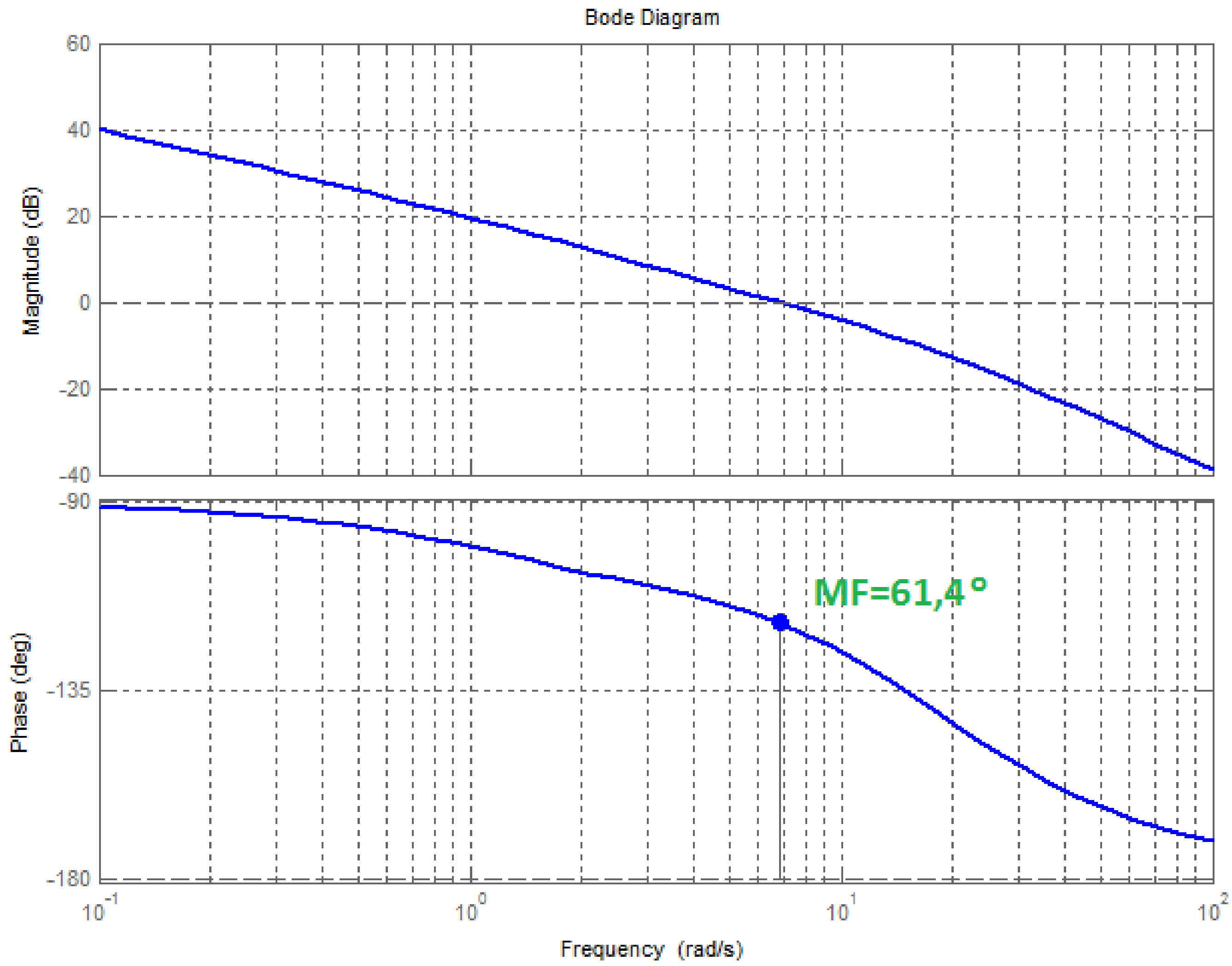
$$C(s)G(s) = \frac{116{,}4(s+2{,}82)}{s(s+2)(s+16{,}4)} \rightarrow \begin{array}{l} MG = \infty \\ MF = 61{,}4^\circ \\ \omega_{CG} = 6{,}8 \end{array}$$

$$Kv = \lim_{s \to 0} sG(s) = 10 \quad \rightarrow \quad e_\infty = 10\%$$

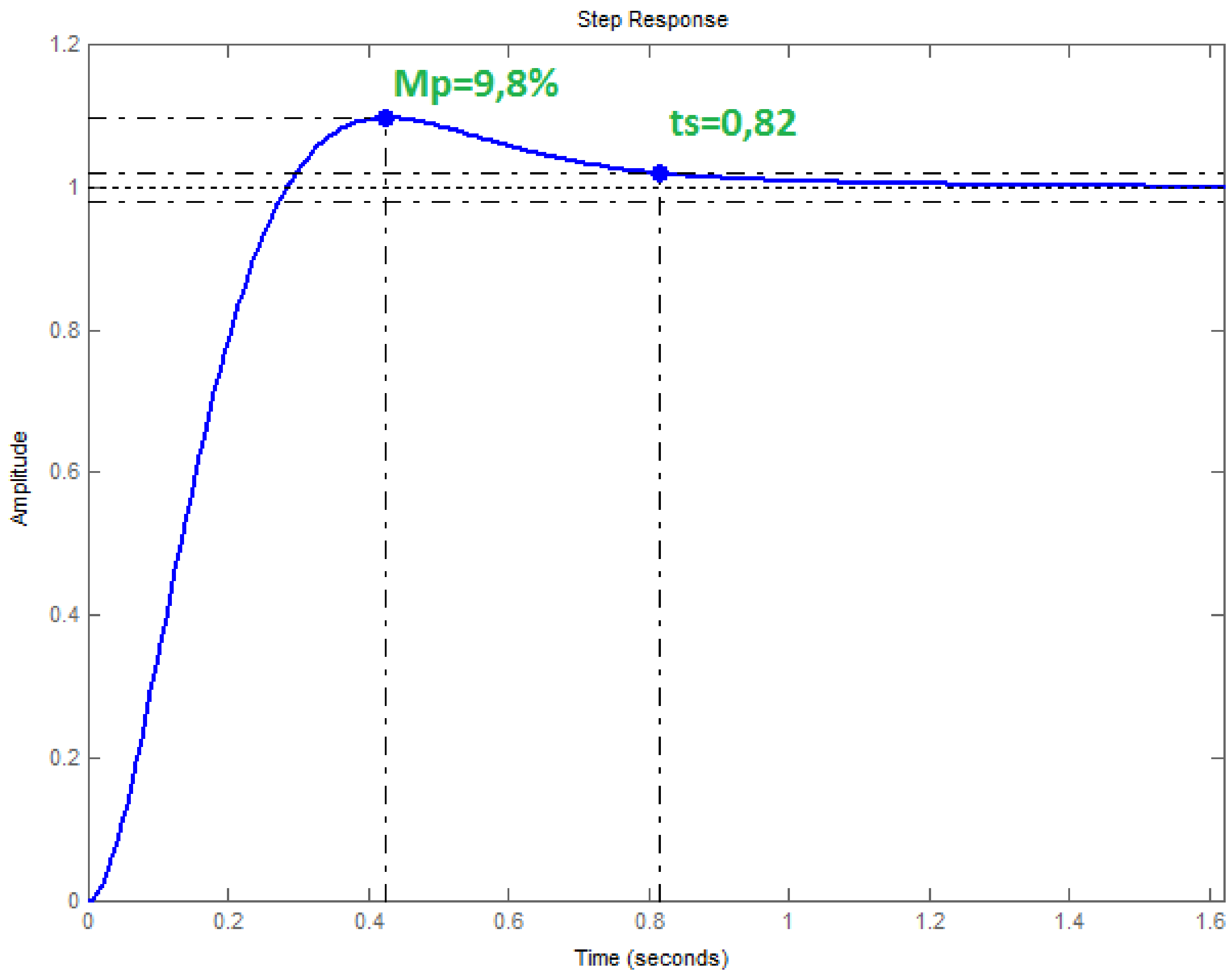
No domínio do tempo:

$$T(s) = \frac{116{,}4(s+2{,}82)}{s^3 + 18{,}4s^2 + 149{,}2s + 328{,}2} \rightarrow \begin{array}{l} M_P = 9{,}8\% \\ t_s = 0{,}82seg \end{array}$$

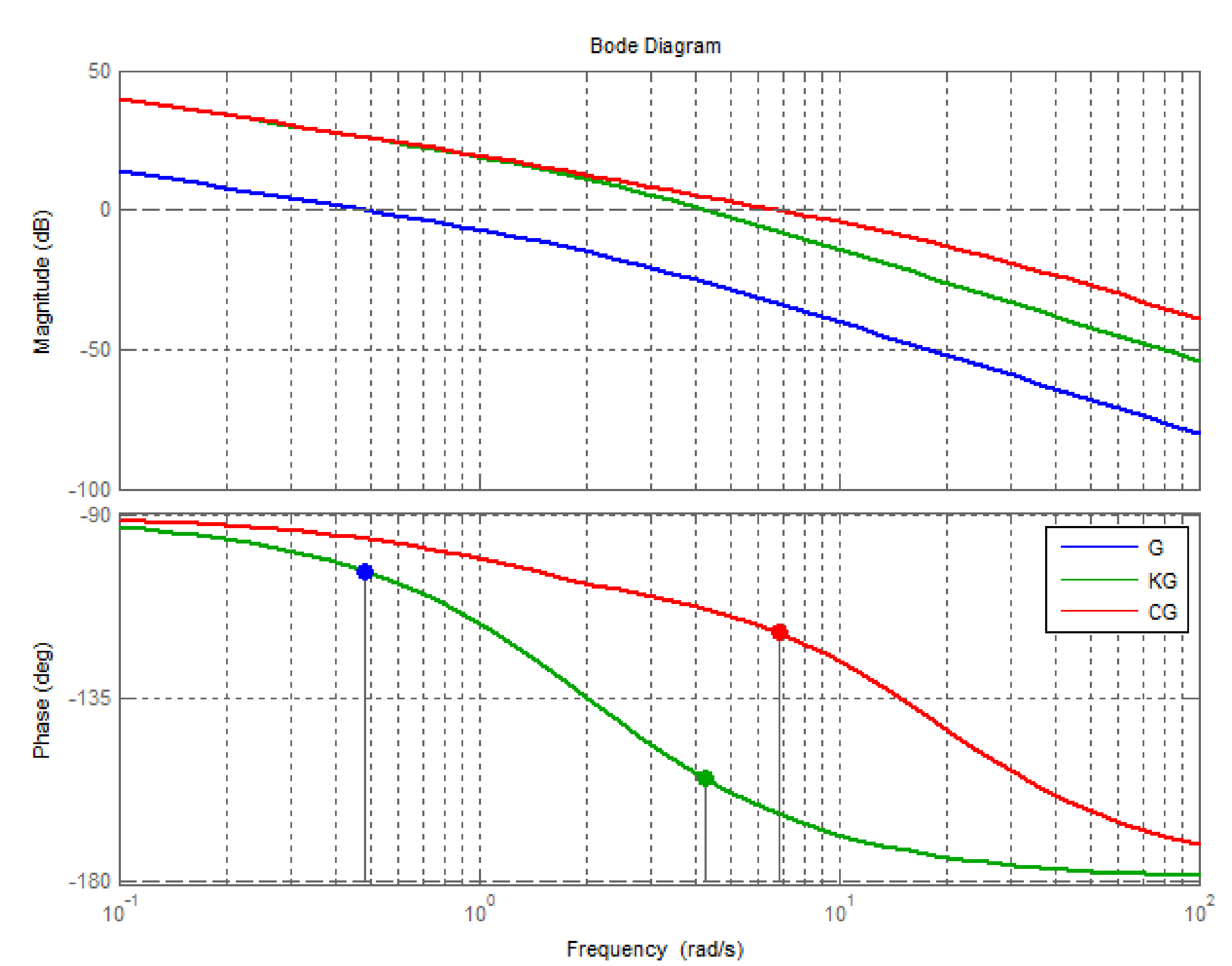
Exemplo 1 – Diagramas de Bode com $C_{AV}(S)$



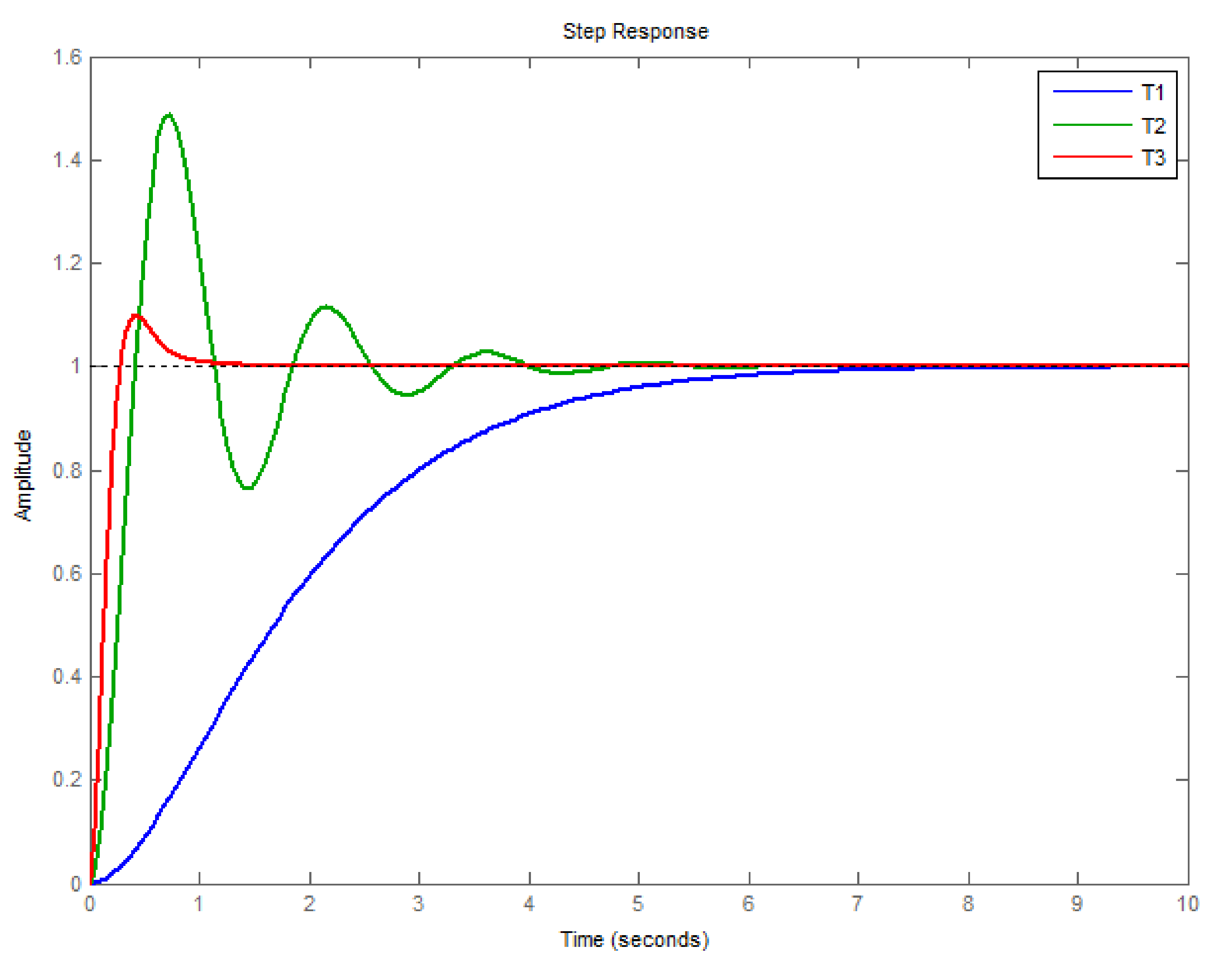
Exemplo 1 – Resposta ao degrau com $C_{AV}(S)$



Exemplo 1 – Diagramas de Bode (comparativo)



Exemplo 1 – Resposta ao degrau (comparativo)



Controladores em Avanço

Efeitos da introdução de um controlador em avanço

- Melhoria na margem de fase $\rightarrow$ redução de sobressinal
- Aumento da largura de faixa $\rightarrow$ maior velocidade da resposta

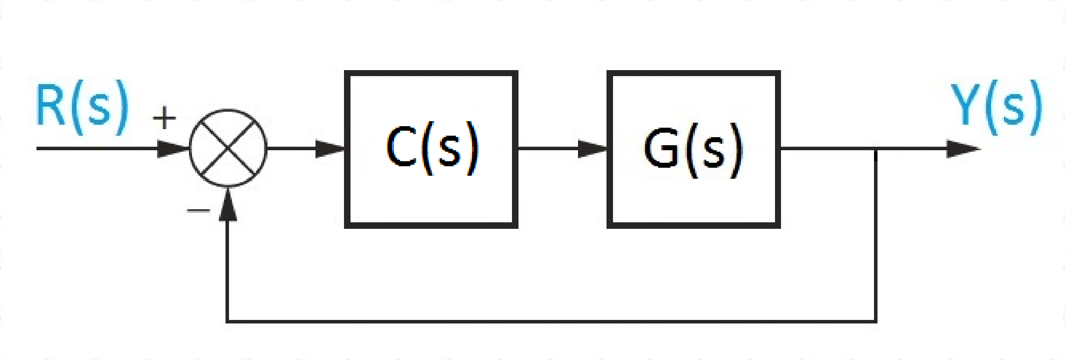
Limitações

Necessidade de fase muito grande para o controlador o que acarretaria em valores elevados de α. Isto implica em grande largura de faixa podendo gerar problemas de ruído. Além disso, valores elevados de α podem levar a problemas de implementação prática em função do dimensionamento dos componentes.

Recomenda-se que o valor de α não seja superior a 20.

Controladores em Atraso

Seja a configuração de controle em série;



O controlador em atraso é escrito na forma

$$C(s) = K\frac{1+\alpha Ts}{1+Ts} \qquad T > 0,\ 0 < \alpha < 1$$

ou, em frequência

$$C(j\omega) = K\frac{1+j\omega\alpha T}{1+j\omega T}$$

Controladores em Atraso

A resposta em frequência do controlador, considerando K=1 por simplicidade, terá as variações de módulo e fase definidas a seguir.

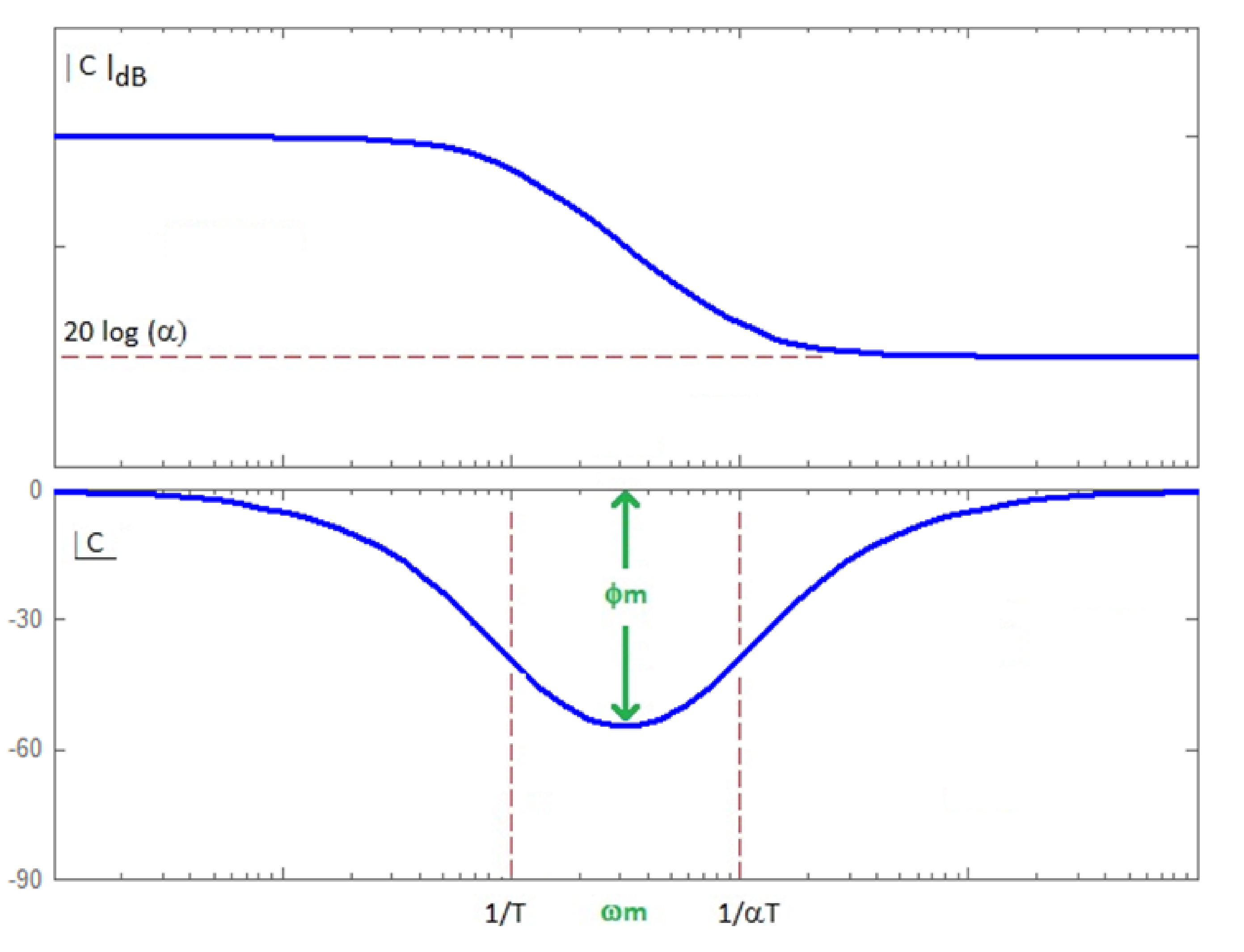
$$C(j\omega) = \frac{1 + j\omega\alpha T}{1 + j\omega T}$$

Frequência	Módulo	Fase
ω=0 a ω=1/T	0 dB/dec	0°
ω=1/T a ω=1/αT	-20 dB/dec	-90°
ω=1/T a $\omega \to \infty$	0 dB/dec	0°

$$\omega \to 0 \quad \to \quad |C| = 0\,\text{dB} \qquad \angle C = 0^\circ$$

$$\omega \to \infty \quad \to \quad |C| = 20\log(\alpha) \qquad \angle C = 0^\circ$$

Controladores em Atraso



Controladores em Atraso

Os valores de ω_m e ϕ_m são os mesmos obtidos para o controlador em avanço:

$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} \qquad \operatorname{sen}\phi_m = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$$

Entretanto, a metodologia de projeto será diferente uma vez o pico de fase do controlador é negativo.

Neste caso, **polo e zero do controlador em atraso, serão alocados em uma frequência abaixo da frequência de cruzamento de ganho** (para atender a MF desejada) de modo que a contribuição de fase (negativa) não provoque redução na MF do sistema controlado.

Controladores em Atraso

Escolhe-se a frequência de cruzamento de ganho do sistema controlado, ω_C, uma década acima do zero do controlador, ou seja,

$$\omega_C = \frac{10}{\alpha T}$$

Nesta frequência,

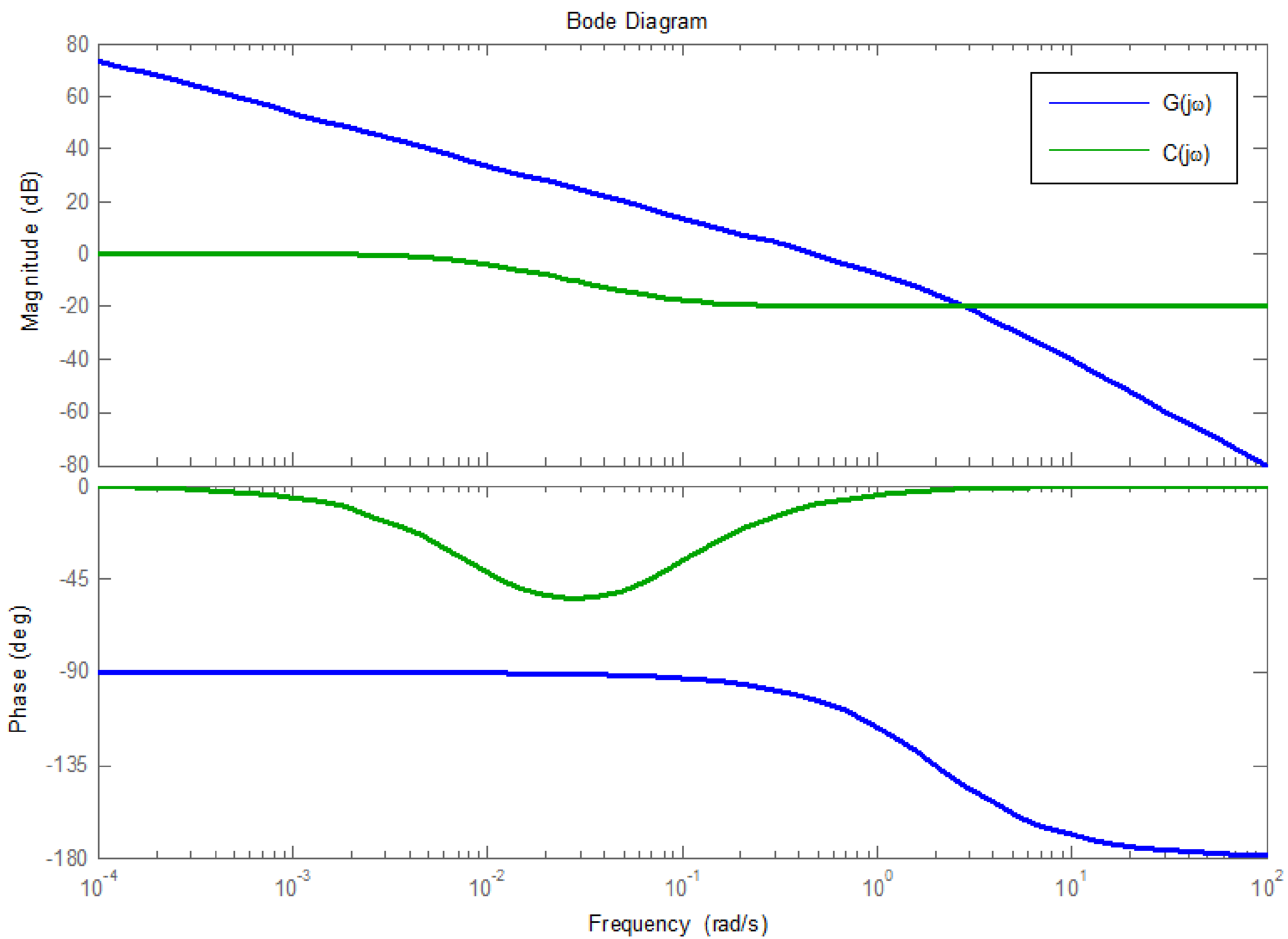
$$\begin{aligned}\angle C(j\omega_C) &= \mathrm{tg}^{-1}(\alpha T\omega_C) - \mathrm{tg}^{-1}(T\omega_C)\\ &= \mathrm{tg}^{-1}(10) - \mathrm{tg}^{-1}(10/\alpha)\end{aligned}$$

Para $0 < \alpha < 1$,

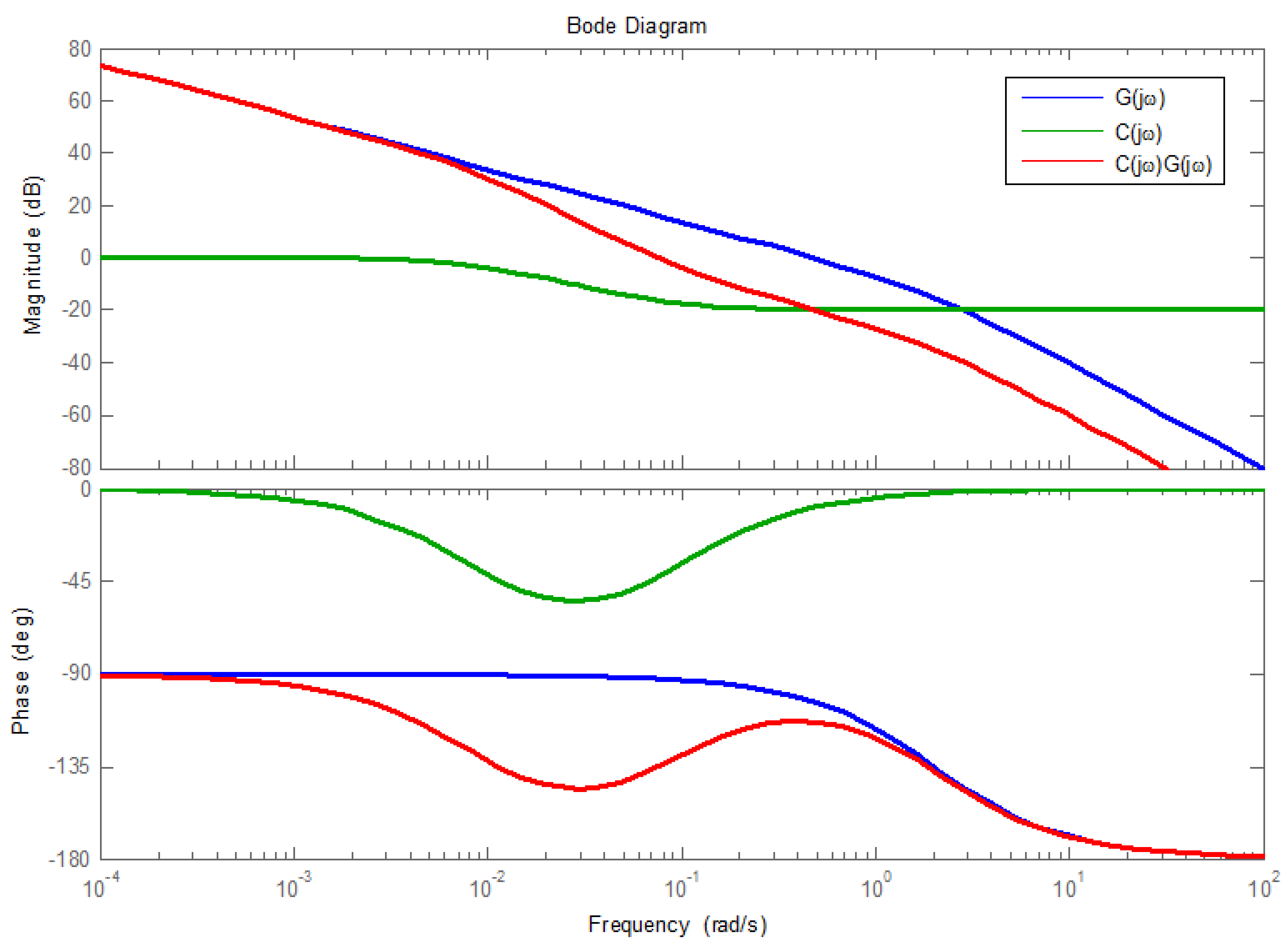
$$-5{,}7^\circ < \angle C(j\omega_C) < 0^\circ$$

ou seja, no limite a contribuição negativa de fase será aproximadamente -6°.

Controladores em Atraso



Controladores em Atraso



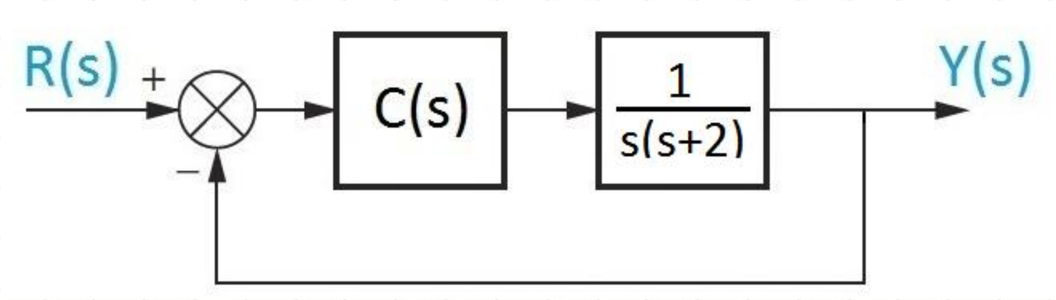
Controladores em Atraso

De forma similar ao controlador em avanço, o controlador em atraso é projetado com o objetivo de **melhorar a margem de fase** do sistema melhorando assim de estabilidade e reduzindo o sobressinal da resposta no tempo.

Ajusta-se inicialmente o ganho K do controlador para garantir a especificação de erro. Consequentemente, este ajuste causará uma redução na margem de fase. **A margem de fase desejada será obtida através da alocação do zero do controlador em uma frequência uma década abaixo daquela definida para atender a especificação**.

Exemplo 2 – Controlador em Atraso

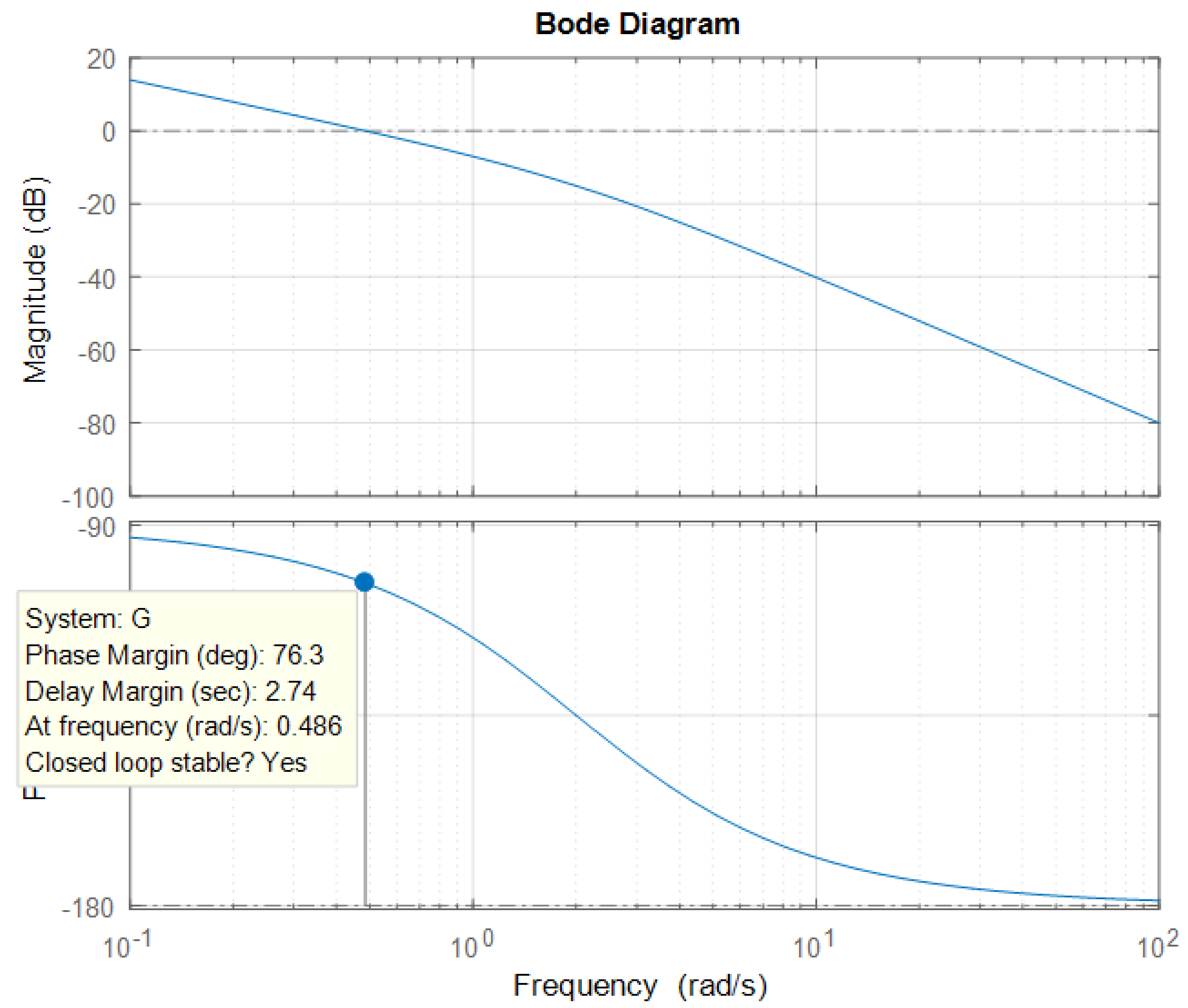
Seja o sistema de controle a seguir.



Projetar um controlador em atraso de fase de modo a atender as seguintes especificações:

- Erro à rampa menor ou igual a 10%
- Margem de fase maior ou igual a 60°

Exemplo 2 – Diagramas de Bode para C(s)=1



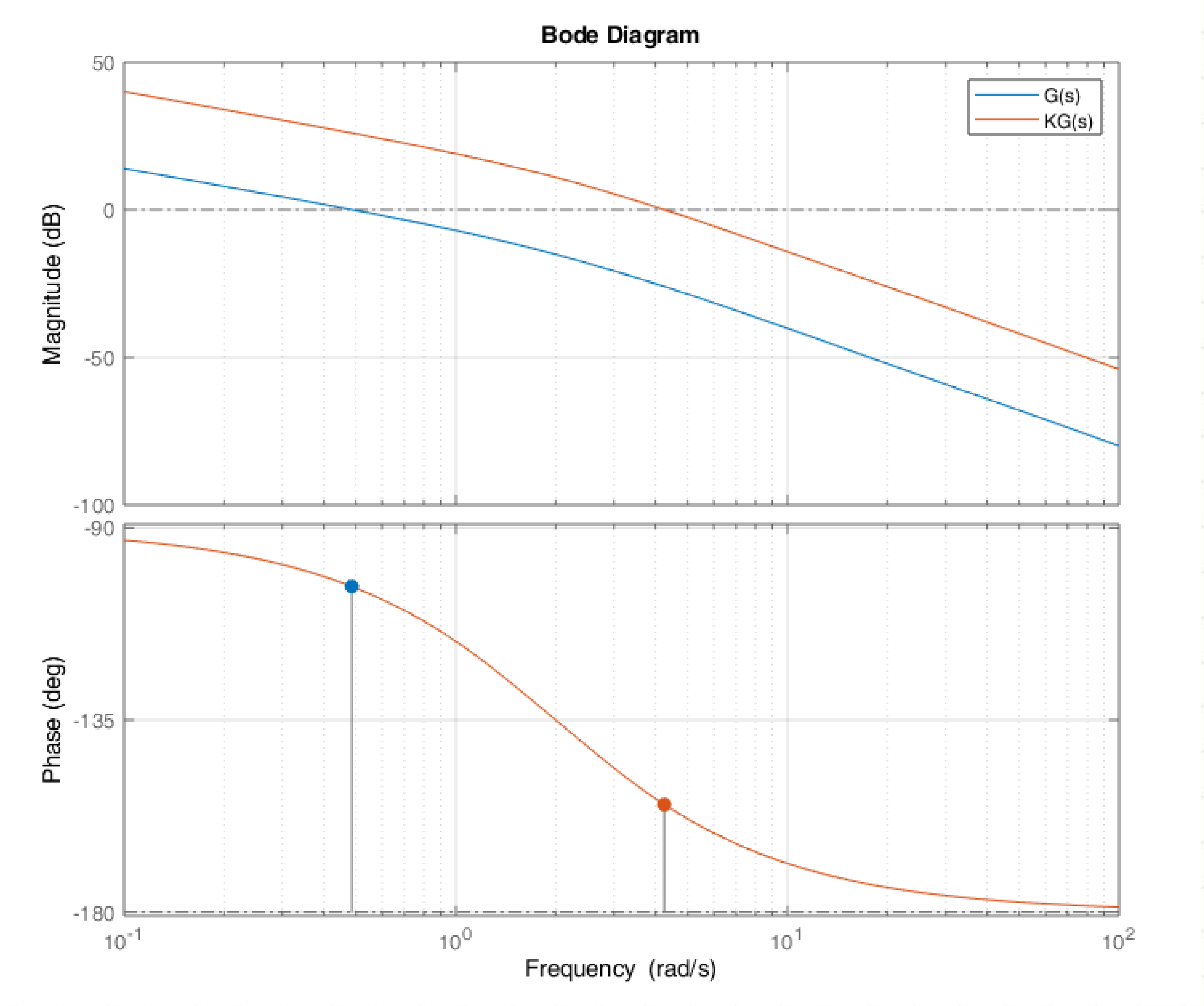
Exemplo 2 – Controlador em Atraso

Como visto no exemplo anterior um ganho K $\geq$ 20 irá garantir a especificação de erro de regime permanente.

Considerando **K=20**, tem-se

$$\omega_{CG} = 4{,}25 \quad \text{e} \quad MF = 25{,}2^{\circ}$$

Exemplo 2 – Diagramas de Bode para K=20



Exemplo 2 – Controlador em Atraso

Inicialmente calcula-se a frequência de cruzamento de ganho necessária para garantir o atendimento da margem de fase desejada.

$$\underbrace{180^\circ + \angle KG(j\omega)}_{\text{MF do sistema (KG)}} = \overbrace{60^\circ}^{\text{MF desejada}} + \underbrace{6^\circ}_{\text{Fase negativa do controlador}}$$

$$\angle KG(j\omega_C) = -\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{2}{-\omega_C}\right) = -114^\circ \quad \Rightarrow \quad \omega_C = 0{,}89$$

Portanto, a nova frequência de cruzamento de ganho será ω_C**=0,89**.

Exemplo 2 – Controlador em Atraso

É preciso garantir agora que ω_C seja a frequência de cruzamento de ganho do sistema controlado. Para tanto,

$$\left|C(j\omega_C)G(j\omega_C)\right| = 1$$

Uma vez que utiliza-se a parte de alta frequência do controlador, a condição acima reduz-se a

$$\left|\alpha K\, G(j\omega_C)\right| = 1$$

Assim,

$$\alpha = \frac{1}{\left|K\, G(j\omega_C)\right|}$$

No exemplo,

$$\alpha = \frac{\omega_C \sqrt{\omega_C + 4}}{20} = 0{,}1$$

Exemplo 2 – Controlador em Atraso

A frequência de cruzamento de ganho do sistema controlado, ω_C, deve estar uma década acima do zero do controlador, ou seja,

$$\omega_C = \frac{10}{\alpha T} \quad \rightarrow \quad T = \frac{10}{\alpha \omega_C}$$

Assim,

$$T = \frac{10}{0{,}1 \times 0{,}89} = 112{,}4 \quad \text{e} \quad \alpha T = 11{,}24$$

O controlador fica

$$C(s) = 20\frac{11{,}24s + 1}{112{,}4s + 1}$$

Exemplo 2 – Controlador em Atraso

ou

$$C(s) = 2\frac{s+0{,}09}{s+0{,}009}$$

Observe que, esta metodologia de projeto leva a um controlador em atraso que tem forma semelhante àquele projetado usando Lugar das Raízes, **com polo e zero próximos à origem**.

Exemplo 2 – Controlador Proporcional C(s)=1

1. Sistema com C(s)=1

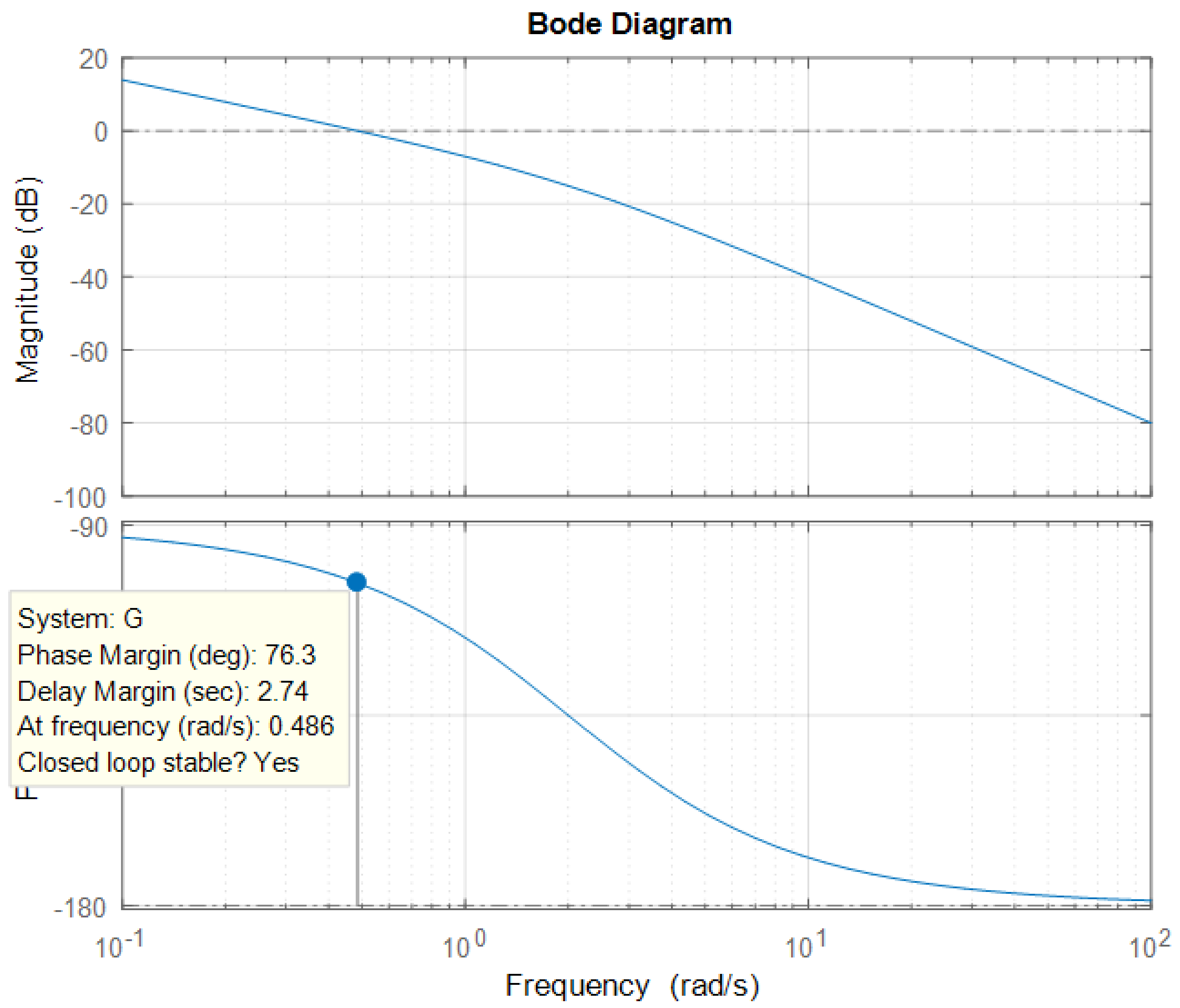
$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} MG &= \infty \\ MF &= 76{,}4^{\circ} \\ \omega_{CG} &= 0{,}486 \end{aligned}$$

$$Kv = \lim_{s \to 0} sG(s) = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad e_{\infty} = 200\%$$

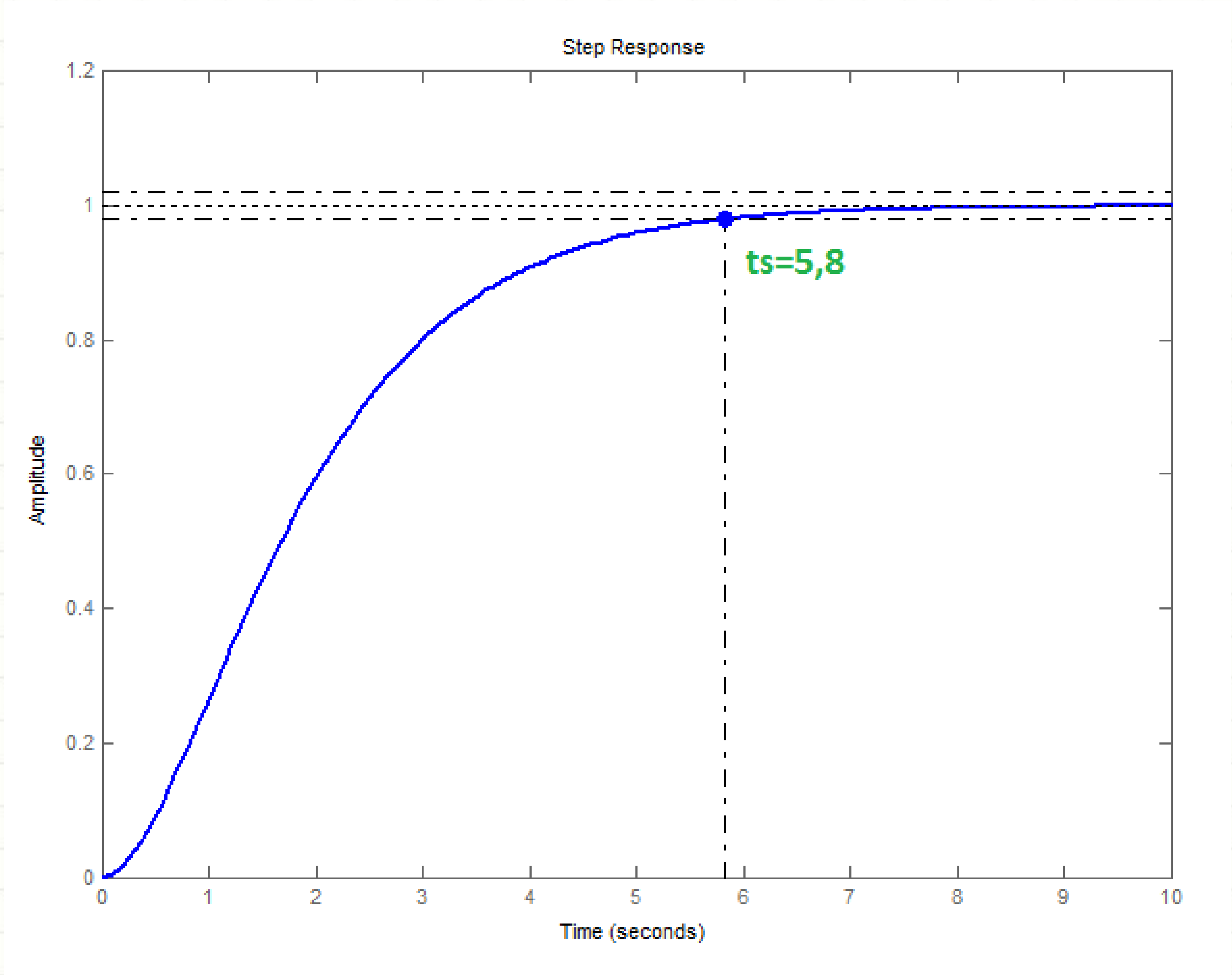
No domínio do tempo:

$$T(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} M_P &= 0\% \\ t_s &= 5{,}8 \end{aligned}$$

Exemplo 2 – Diagramas de Bode para C(s)=1



Exemplo 2 – Resposta ao degrau para C(s)=1



Exemplo 2 – Controlador Proporcional K=20

2. Sistema com ganho K=20

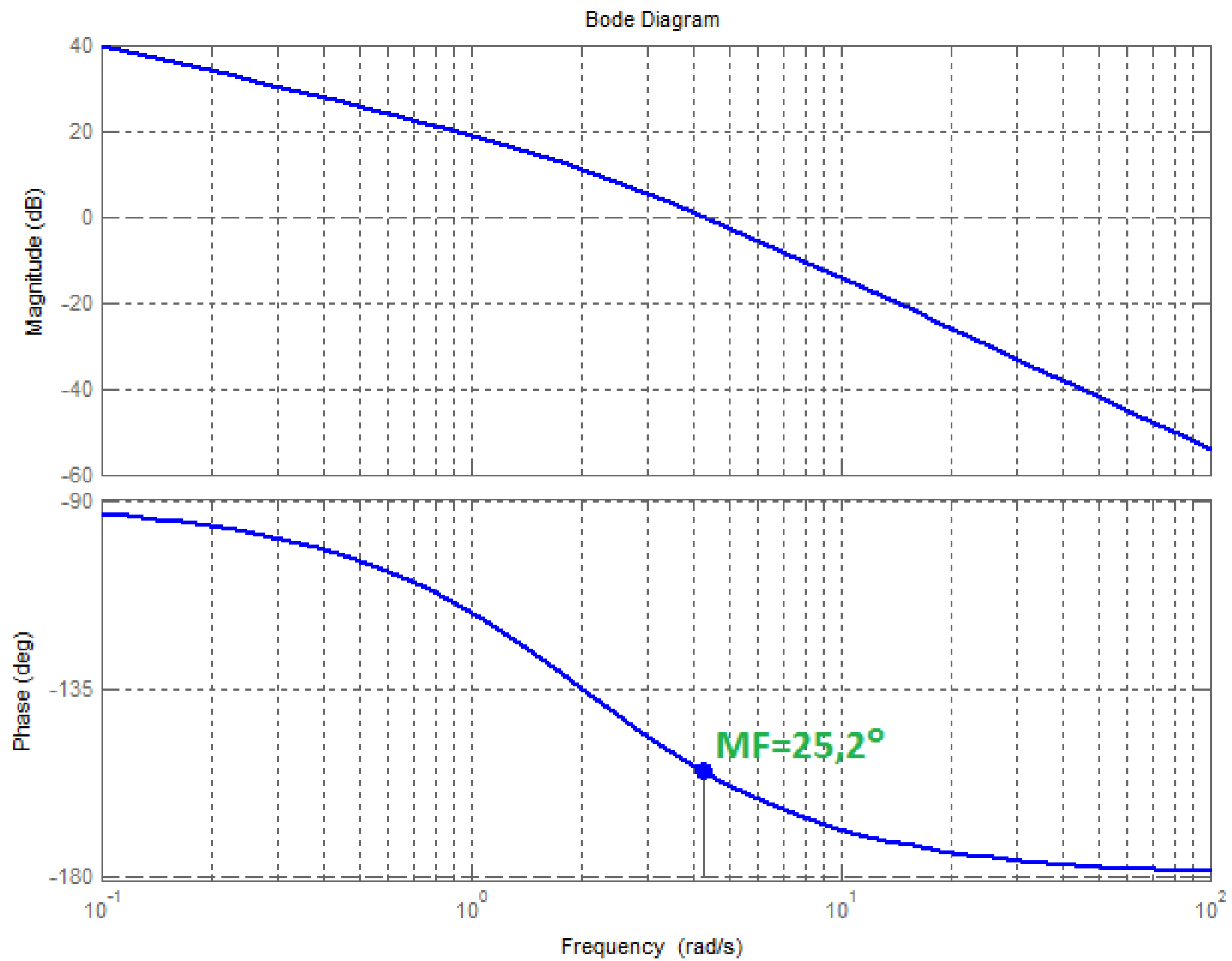
$$G(s) = \frac{20}{s(s+2)} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} MG &= \infty \\ MF &= 25{,}4^{\circ} \\ \omega_{CG} &= 4{,}25 \end{aligned}$$

$$Kv = \lim_{s \to 0} sG(s) = 10 \quad \rightarrow \quad e_{\infty} = 10\%$$

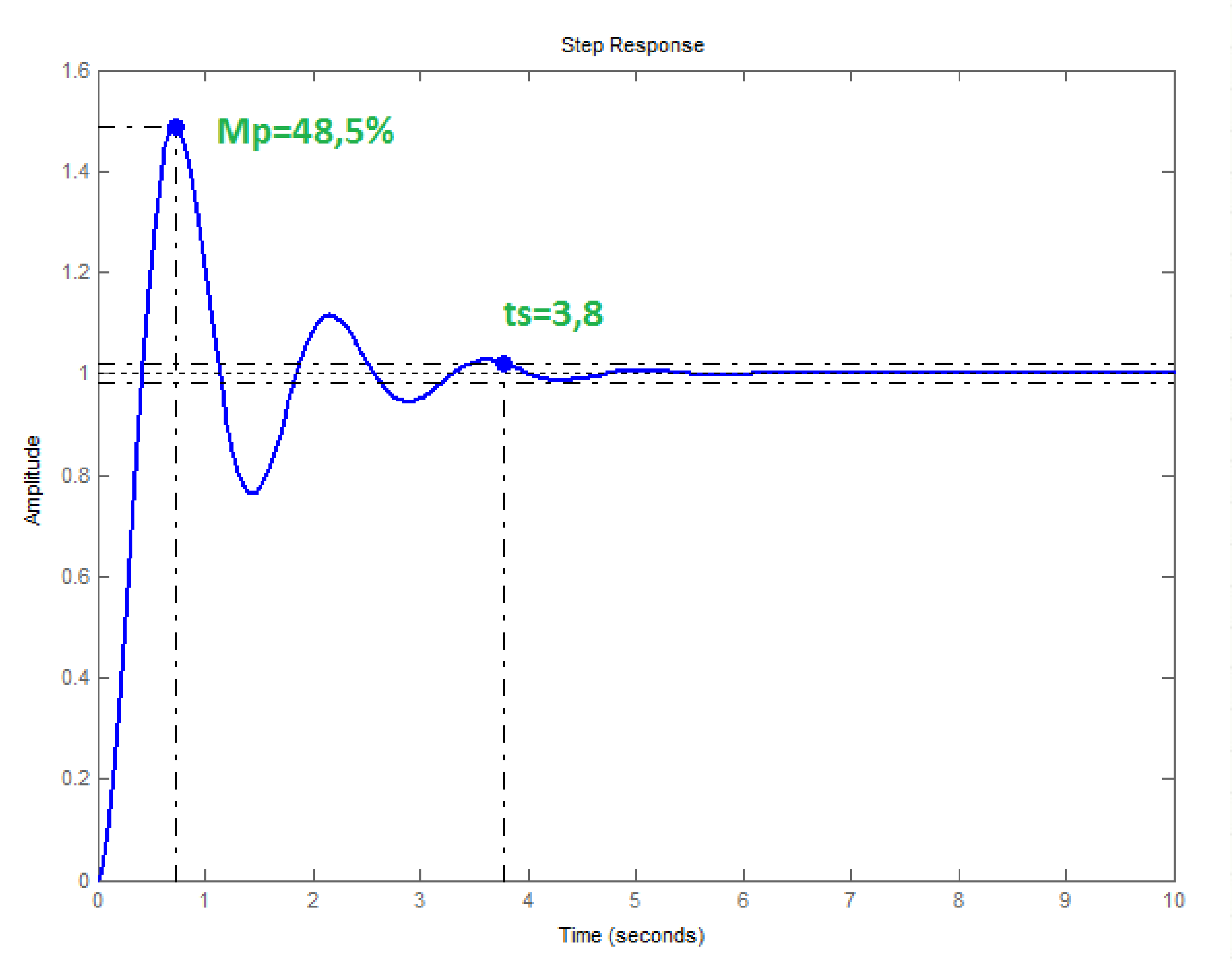
No domínio do tempo:

$$T(s) = \frac{20}{s^2 + 2s + 20} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} M_P &= 48{,}5\% \\ t_s &= 3{,}8 \end{aligned}$$

Exemplo 2 – Diagramas de Bode para K=20



Exemplo 2 – Resposta ao degrau para K=20



Exemplo 2 – Controlador em Atraso

3. Sistema com controlador em atraso

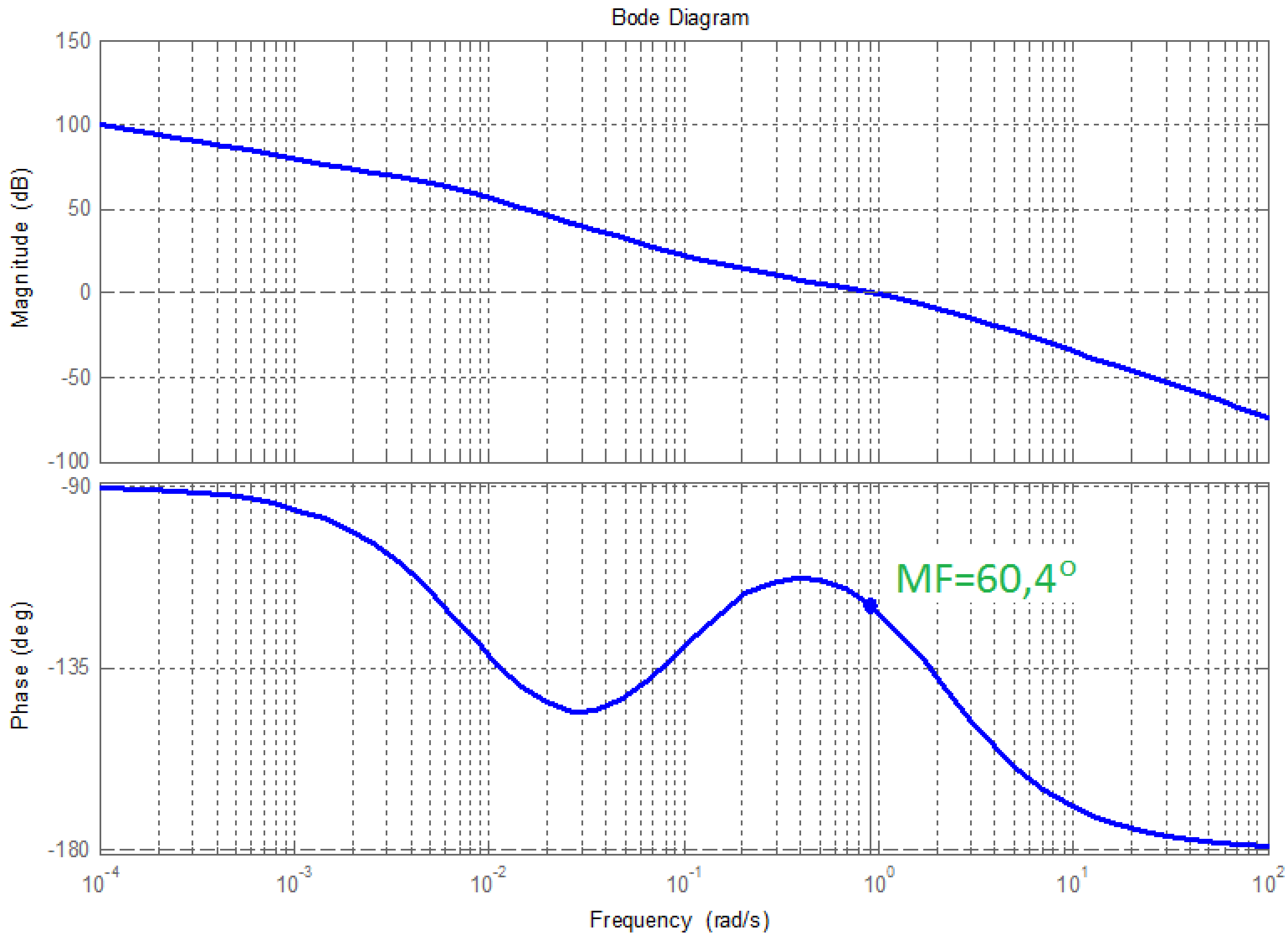
$$C(s)G(s) = \frac{2(s+0{,}09)}{s(s+0{,}009)(s+2)} \rightarrow \begin{matrix} MG = \infty \\ MF = 60{,}4^\circ \\ \omega_{CG} = 0{,}9 \end{matrix}$$

$$K_V = \lim_{s\to 0} sG(s) = 10 \quad \rightarrow \quad e_\infty = 10\%$$

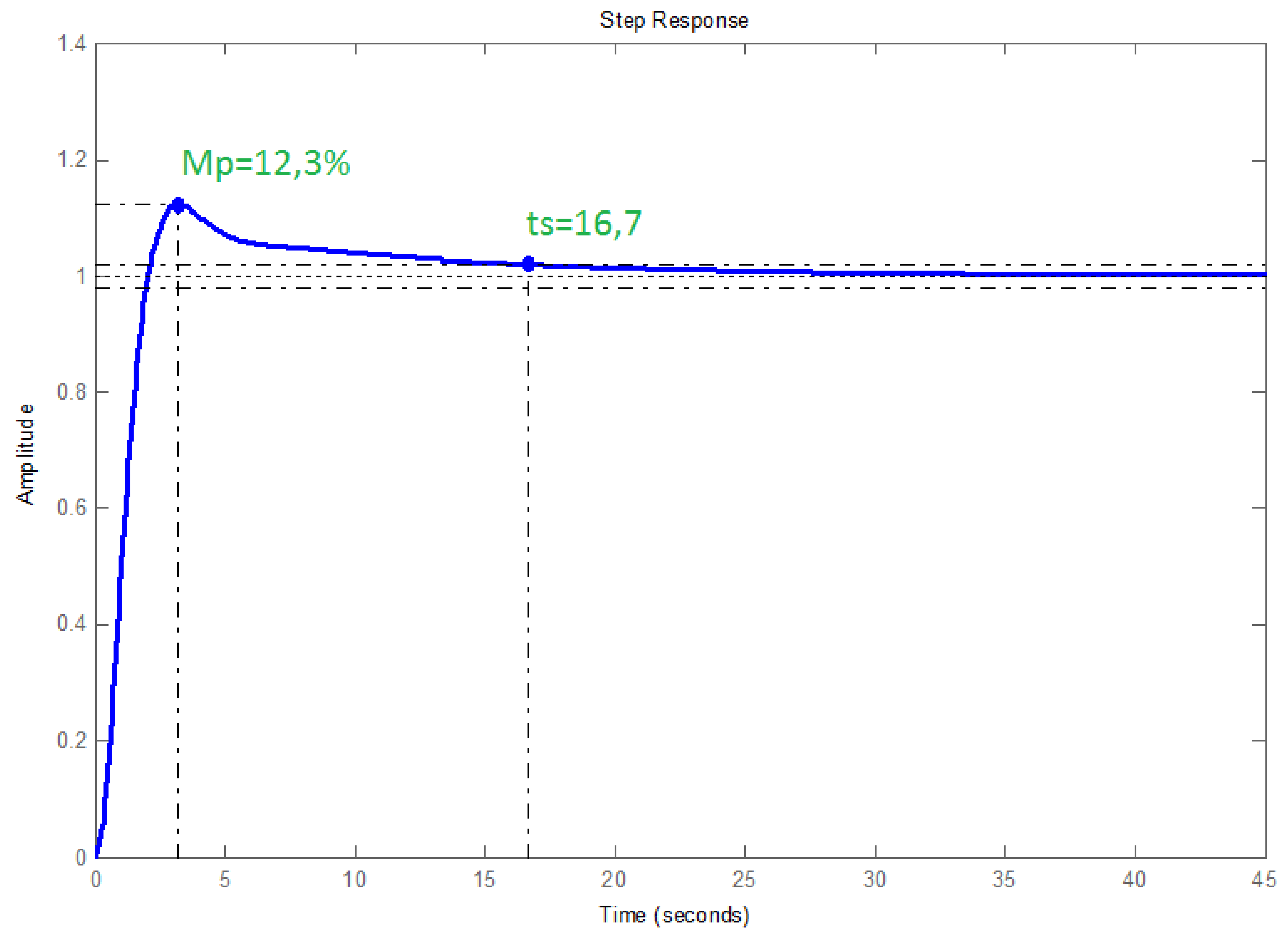
No domínio do tempo:

$$T(s) = \frac{2(s+0{,}09)}{s^3 + 2{,}009s^2 + 2{,}018s + 0{,}18} \rightarrow \begin{matrix} M_P = 12{,}3\% \\ t_s = 16{,}7seg \end{matrix}$$

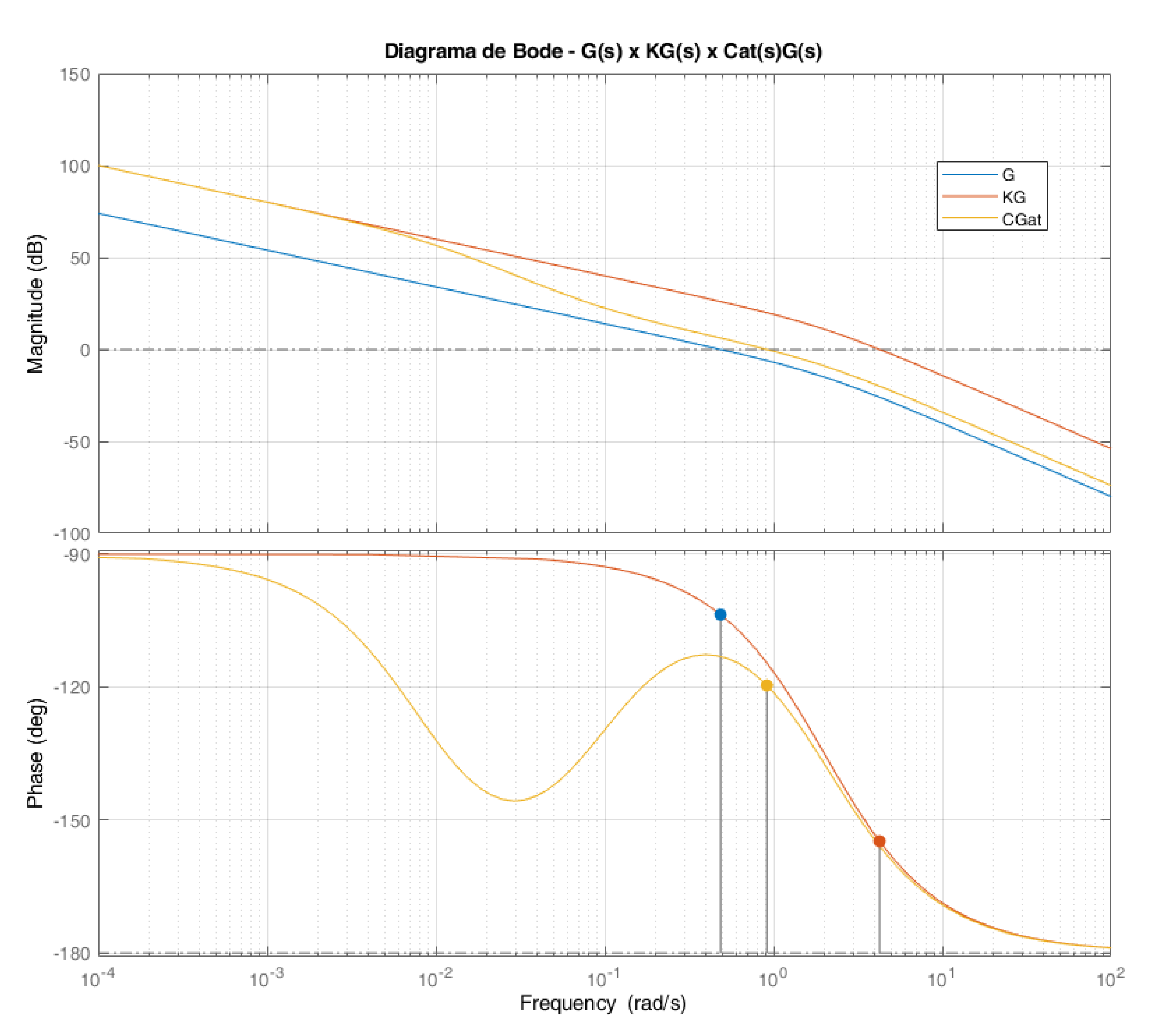
Exemplo 2 – Diagramas de Bode para $C_{AT}(s)$



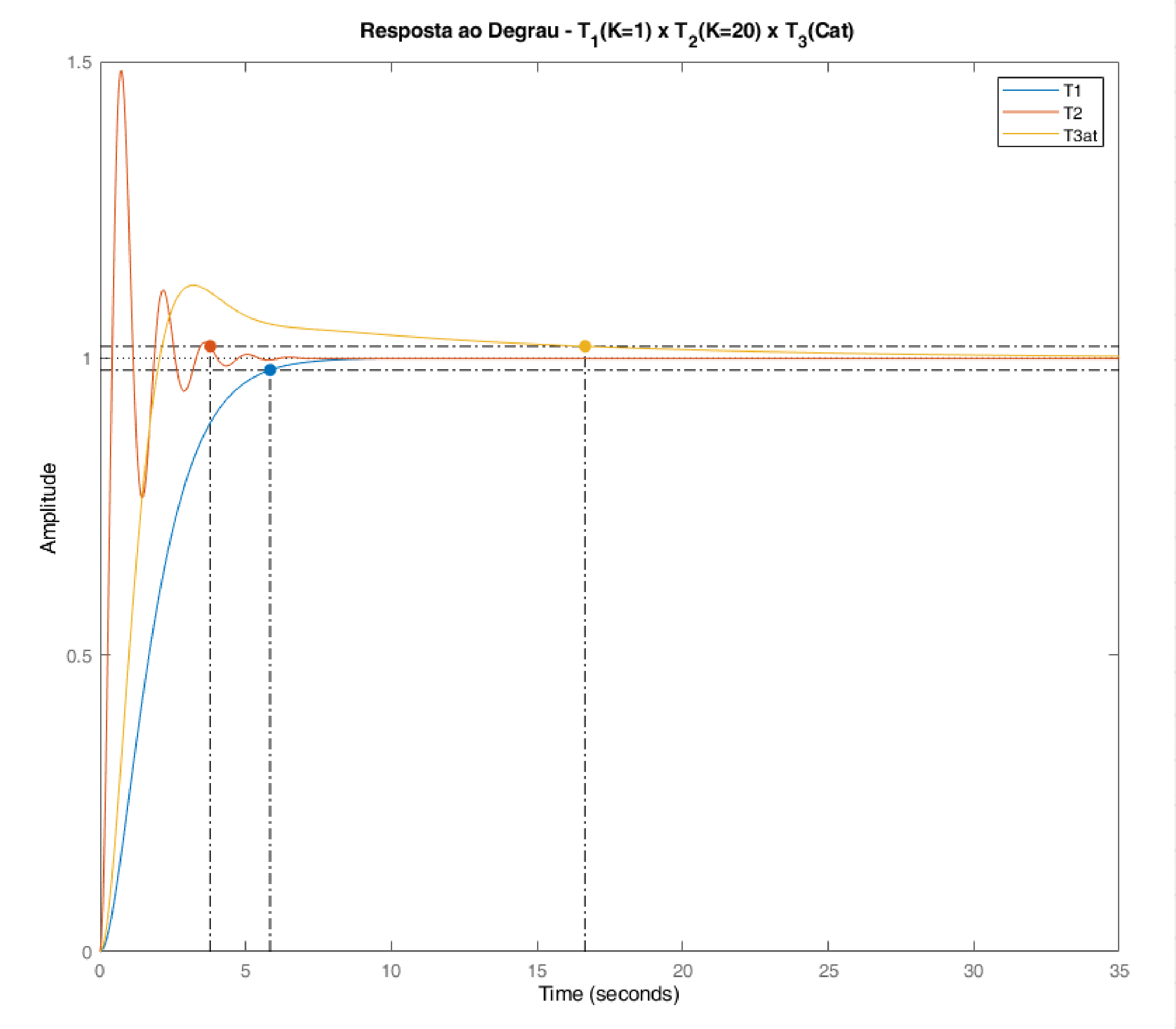
Exemplo 2 – Resposta ao degrau para $C_{AT}(s)$



Exemplo 2 - Diagramas de Bode



Exemplo 2 - Resposta ao Degrau



Controladores em Atraso

Efeitos da introdução de um controlador em atraso

- Melhoria na margem de fase $\rightarrow$ redução de sobressinal
- Redução da largura de faixa $\rightarrow$ menor velocidade da resposta

Limitações

A introdução de um controlador em atraso pode gerar estabilidade condicional ou mesmo a instabilidade do sistema, sobretudo quando existe saturação ou atraso de transporte (grande variação de fase).

Comparativo: Avanço x Atraso

Controlador em Avanço

$$C(s)G(s) = \frac{116{,}4(s+2{,}82)}{s(s+2)(s+16{,}4)} \rightarrow \begin{aligned} MG &= \infty \\ MF &= 61{,}4^\circ \\ \omega_{CG} &= 6{,}8 \end{aligned}$$

$$T(s) = \frac{116{,}4(s+2{,}82)}{s^3+18{,}4s^2+149{,}2s+328{,}2} \rightarrow \begin{aligned} M_P &= 9{,}8\% \\ t_s &= 0{,}82\ \text{seg} \end{aligned}$$

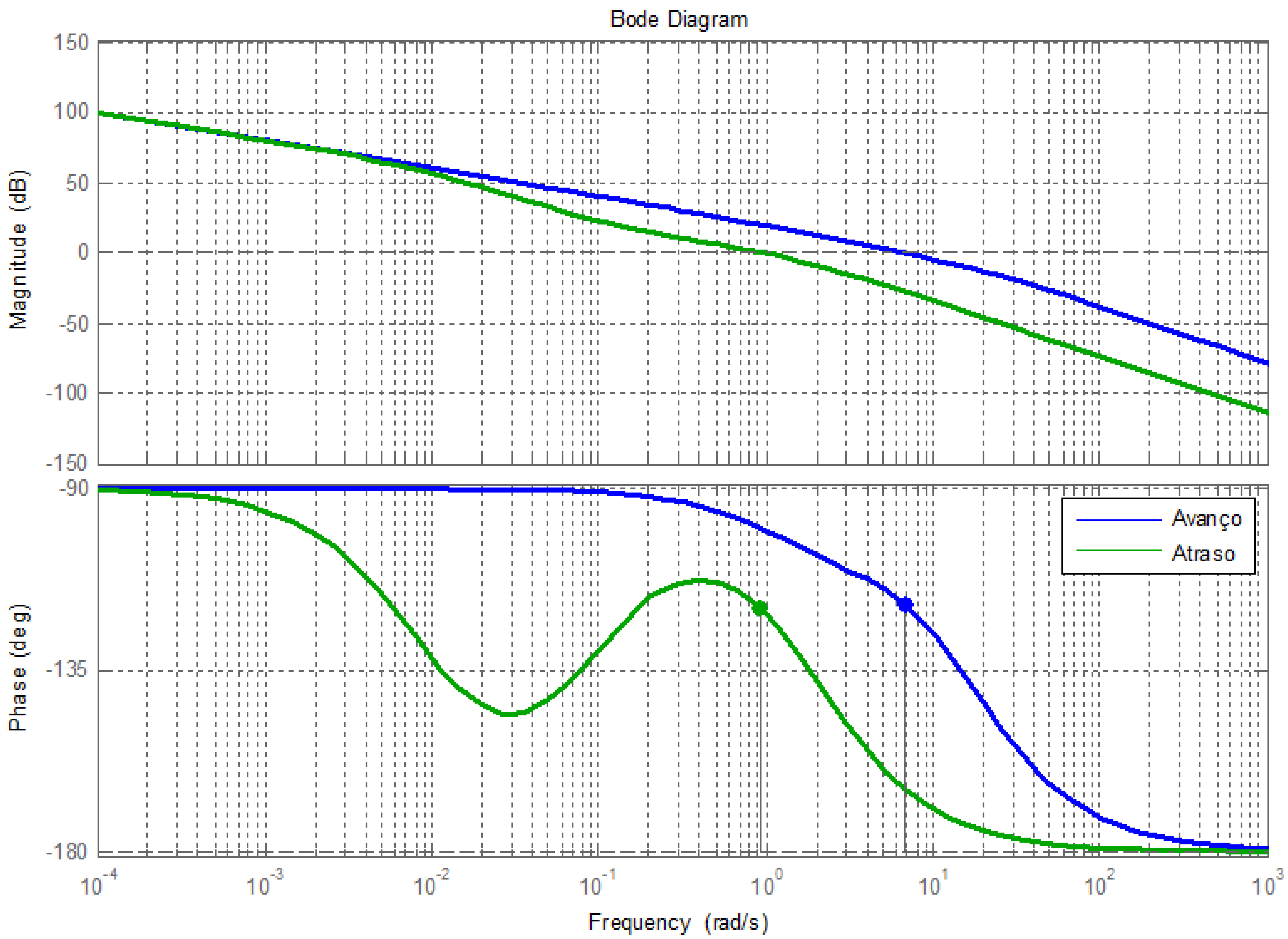
Comparativo: Avanço x Atraso

Controlador em Atraso

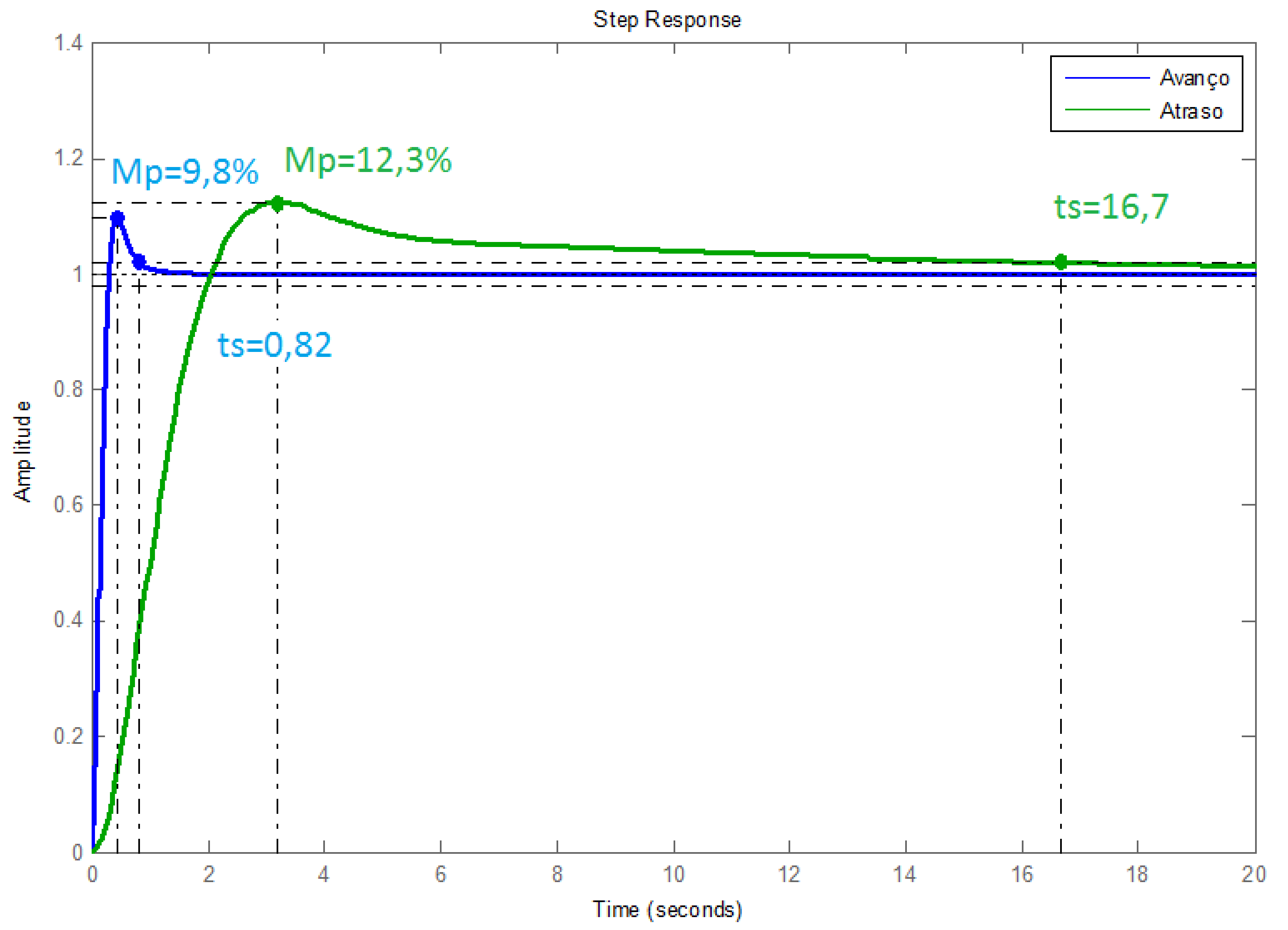
$$C(s)G(s) = \frac{2(s+0,09)}{s(s+0,009)(s+2)} \rightarrow \begin{matrix} MG = \infty \\ MF = 60,4^{\circ} \\ \omega_{CG} = 0,9 \end{matrix}$$

$$T(s) = \frac{2(s+0,09)}{s^3 + 2,009s^2 + 2,018s + 328,2} 0,18 \rightarrow \begin{matrix} M_P = 12,3\% \\ t_s = 16,7 \text{ seg} \end{matrix}$$

Diagramas de Bode $C_{AV}(s)$ x $C_{AT}(s)$



Resposta ao Degrau $C_{AV}(s)$ x $C_{AT}(s)$



Exemplo 3 - Controlador PI

Se fosse solicitado **erro nulo em regime permanente**, o **controlador em atraso poderia ser transformado em um PI ?** (de forma similar ao que foi feito no projeto pelo lugar das raízes)

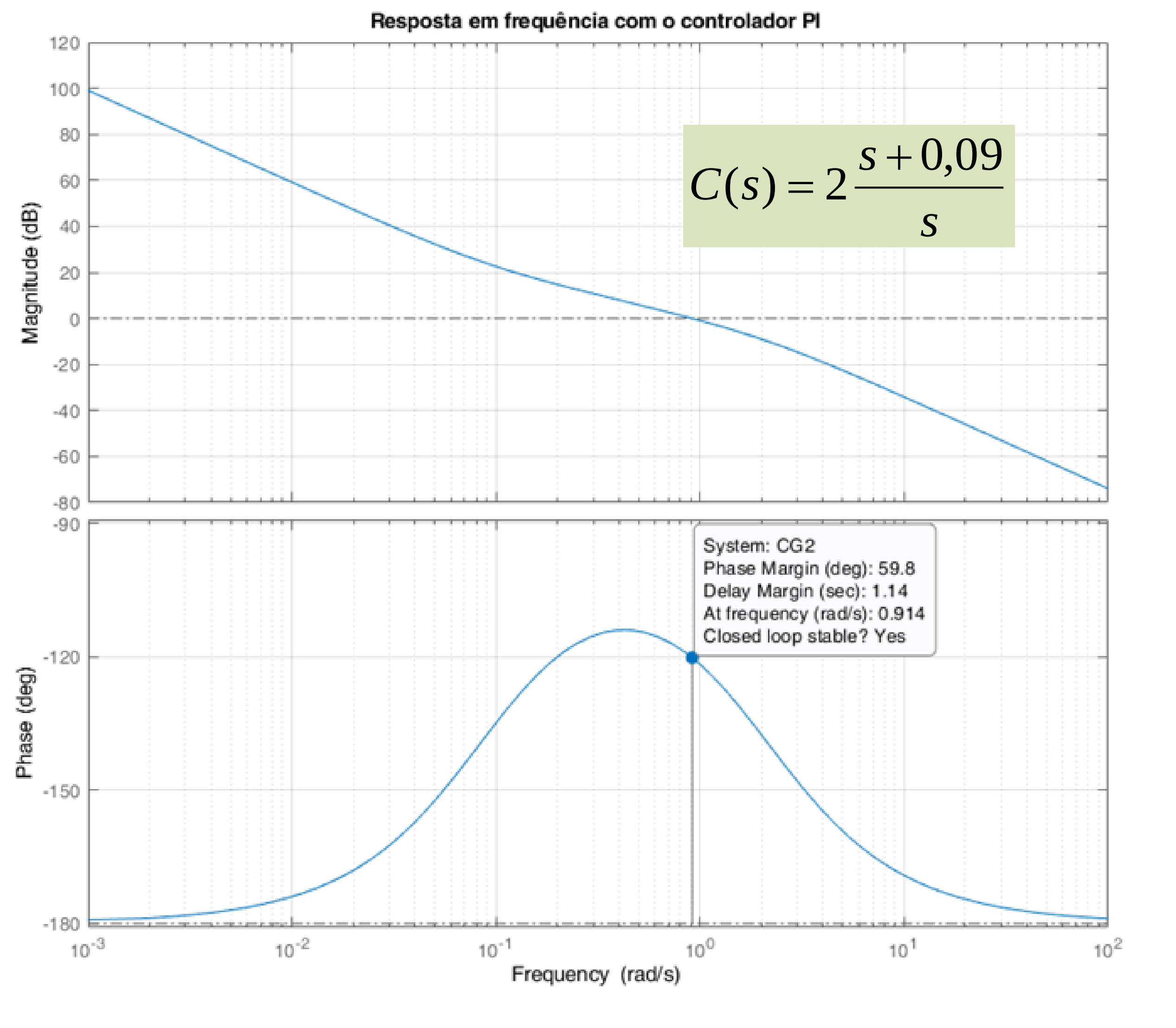
O controlador em atraso reduzido "diretamente" a um PI tem a forma:

$$C(s) = 2\frac{s+0{,}09}{s}$$

Da resposta em frequência para o sistema com este controlador obtém-se uma margem de fase de 59,8°, ligeiramente menor do que o valor especificado.

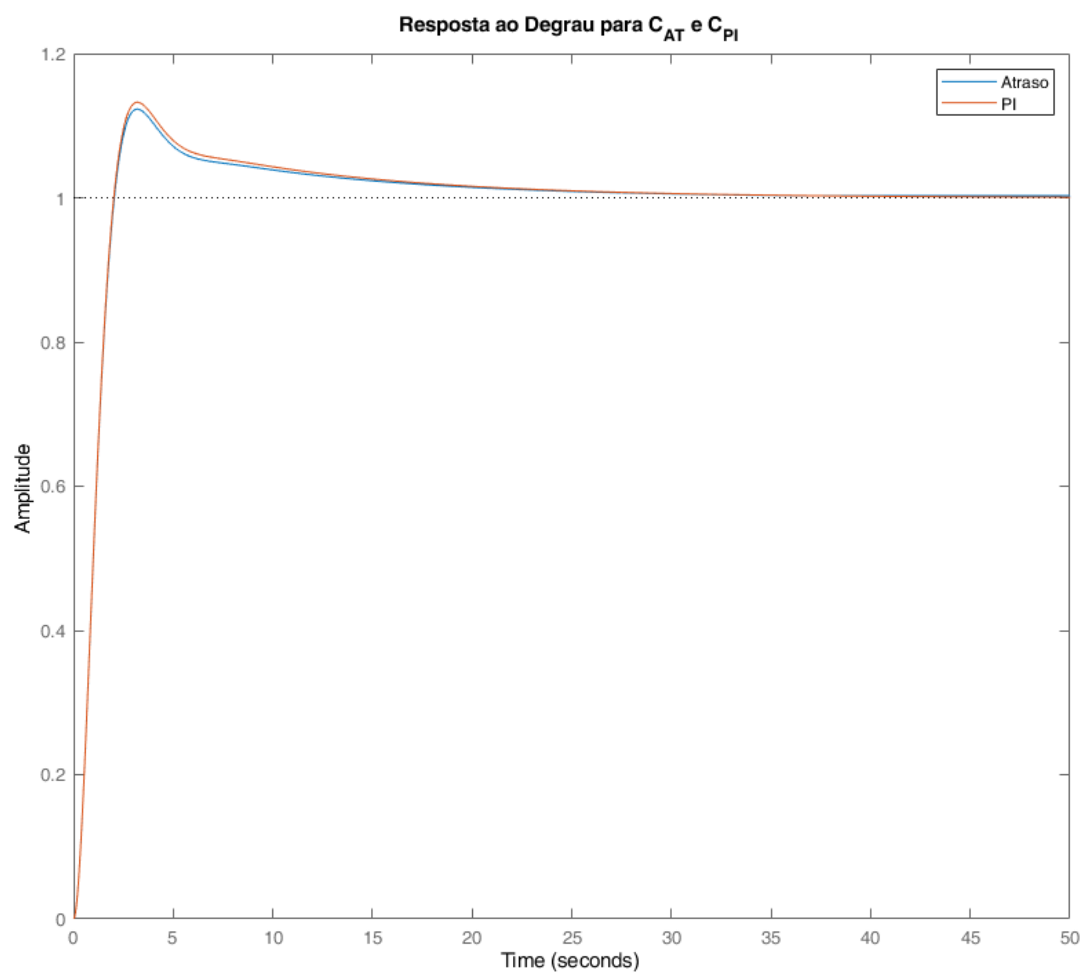
A resposta no tempo não apresenta diferenças significativas.

Exemplo 3 – Diagramas de Bode para $C_{PI}(s)$



$$C(s) = 2\frac{s+0{,}09}{s}$$

Exemplo 3 – Resposta ao degrau para $C_{PI}(s)$



Exemplo 3 - Controlador PI

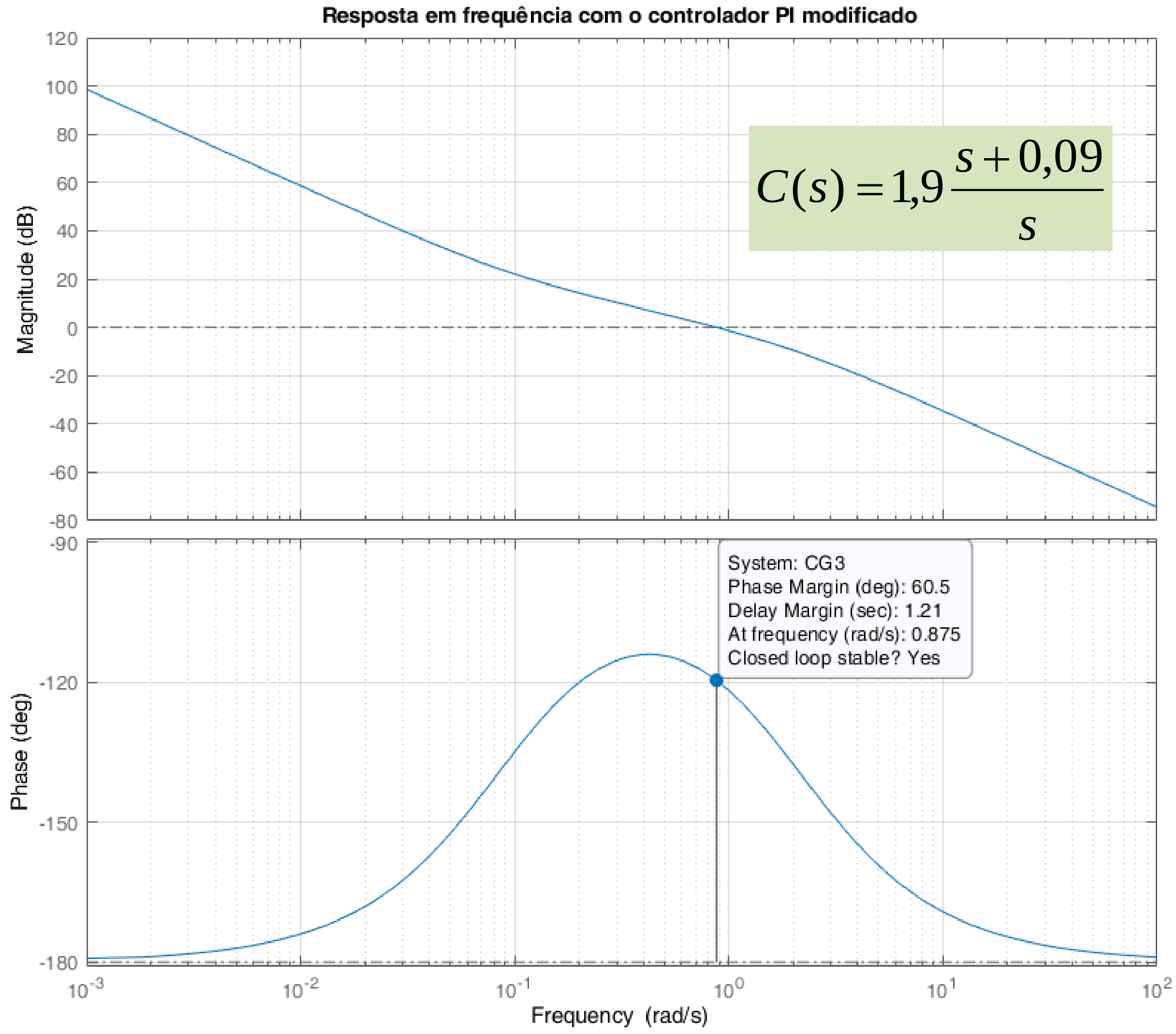
Uma vez que o controlador PI garante o erro nulo, **o ganho K pode ser modificado para justar a margem de fase**.

Dos Diagramas de Bode observa-se que uma pequena redução no ganho deslocará a frequência de cruzamento de ganho para a esquerda, aumentando a margem de fase.
Escolhendo K=1,9, ou seja:

$$C(s) = 1{,}9\,\frac{s + 0{,}09}{s}$$

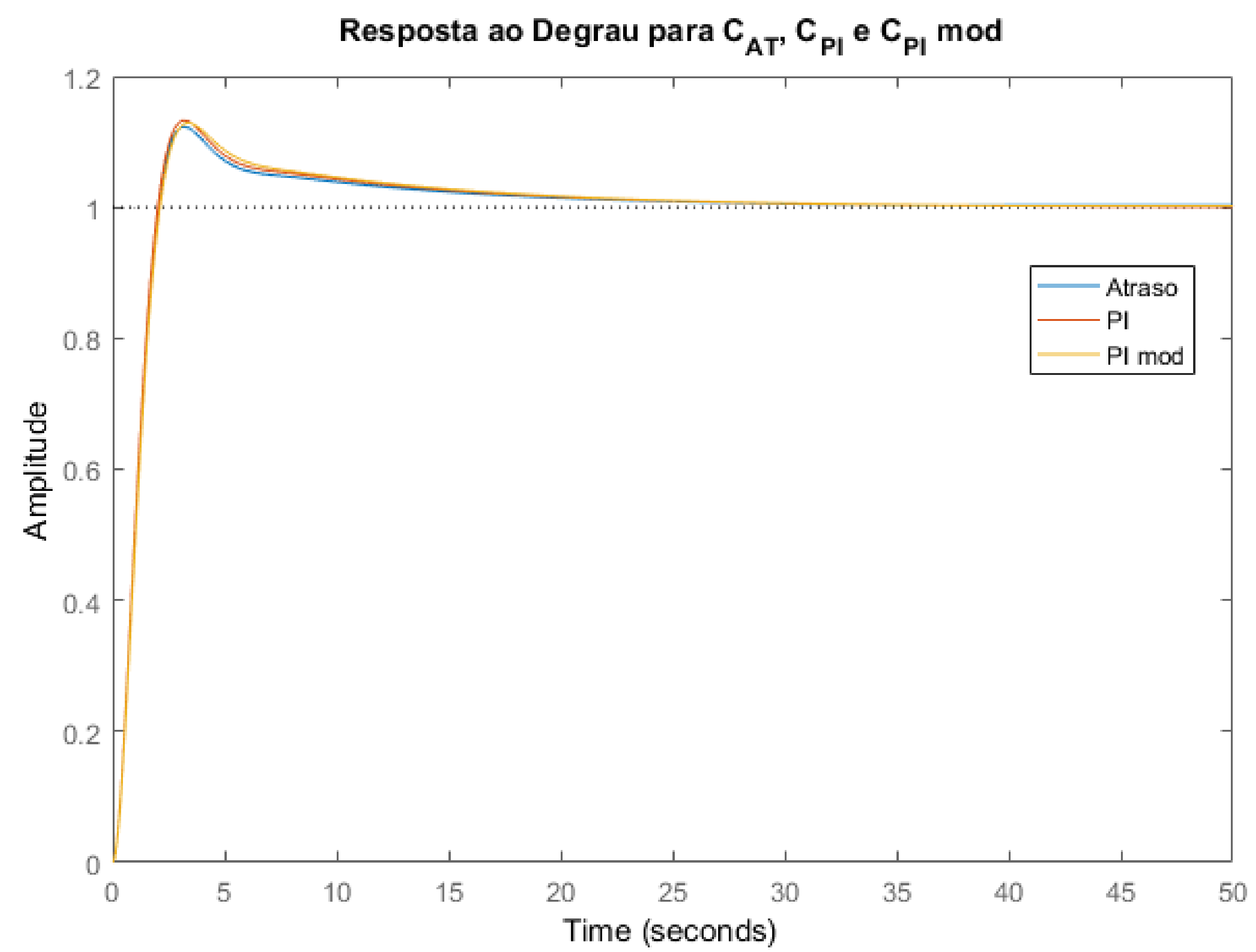
obtém-se uma margem de fase de 60,5°, atendendo a especificação.
A resposta no tempo continua é similar às anteriores.

Exemplo 3 – Diagramas de Bode para $C_{PI}(s)$ ajustado



$$C(s) = 1{,}9\,\frac{s+0{,}09}{s}$$

Exemplo 3 – Resposta ao degrau para $C_{PI}(s)$ ajustado



Controladores em Avanço-Atraso

A estrutura do controlador será definida por:

$$C(s) = K\left(\frac{s+1/T_1}{s+\alpha/T_1}\right)\left(\frac{s+1/T_2}{s+\beta/T_2}\right) \qquad \begin{array}{l} \alpha > 1 \\ 0 < \beta < 1 \end{array}$$

Existem duas possibilidades para o controlador:

$$\begin{array}{l} \alpha \neq \beta \\ \alpha = 1/\beta \end{array}$$

Os controladores em avanço-atraso usualmente são utilizados quando existe mais de uma especificação relativa à resposta transitória.

Controladores em Avanço-Atraso ($\beta=1/\alpha$)

A estrutura do controlador será definida por:

$$C(s) = K\left(\frac{s+1/T_1}{s+\alpha/T_1}\right)\left(\frac{s+1/T_2}{s+1/\alpha T_2}\right) \qquad \alpha > 1$$

Observe que, nesta estrutura a relação polo/zero é a mesma no avanço e no atraso.

A parcela relativa ao avanço será usada para melhorar a margem de fase e largura de faixa (resposta transitória) enquanto **o ganho e a parcela do atraso são ajustados para atender a especificação de regime permanente**.

Controladores em Avanço-Atraso (β=1/α)

Procedimento de Projeto

1. A partir das especificações de desempenho da resposta transitória determinar MF e largura de faixa necessárias:

$$\omega_B = \omega_n \sqrt{\left(1-2\xi^2\right)+\sqrt{4\xi^4-4\xi_2+2}}$$

2. Ajustar o ganho K para atender a especificação de regime permanente.

3. Verificar MF e frequência de cruzamento de ganho para KG(jω).

Controladores em Avanço-Atraso ($\beta=1/\alpha$)

4. Determinar a nova frequência de cruzamento de ganho, ω_C, próximo da largura de faixa desejada.

5. Determinar a contribuição angular do controlador em avanço, ϕ_m, de modo a atender a MF desejada.

6. Determinar α a partir dos requisitos do avanço.

$$\alpha = \frac{1+\operatorname{sen}\phi_m}{1-\operatorname{sen}\phi_m}$$

Controladores em Avanço-Atraso (β=1/α)

7. Projetar o controlador em atraso, escolhendo o zero uma década abaixo da nova frequência de cruzamento de ganho.

$$\frac{1}{T_2} = \frac{\omega_C}{10}$$

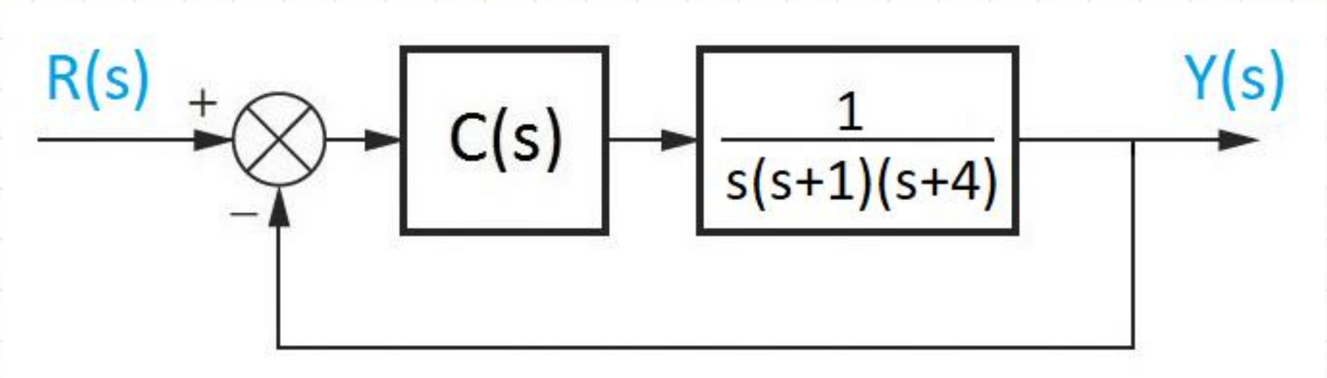
8. Determinar polo e zero do controlador em avanço:

$$T_1 = \frac{1}{\omega_C \sqrt{1/\alpha}}$$

9. Fazer a verificação do Projeto.

Exemplo 4

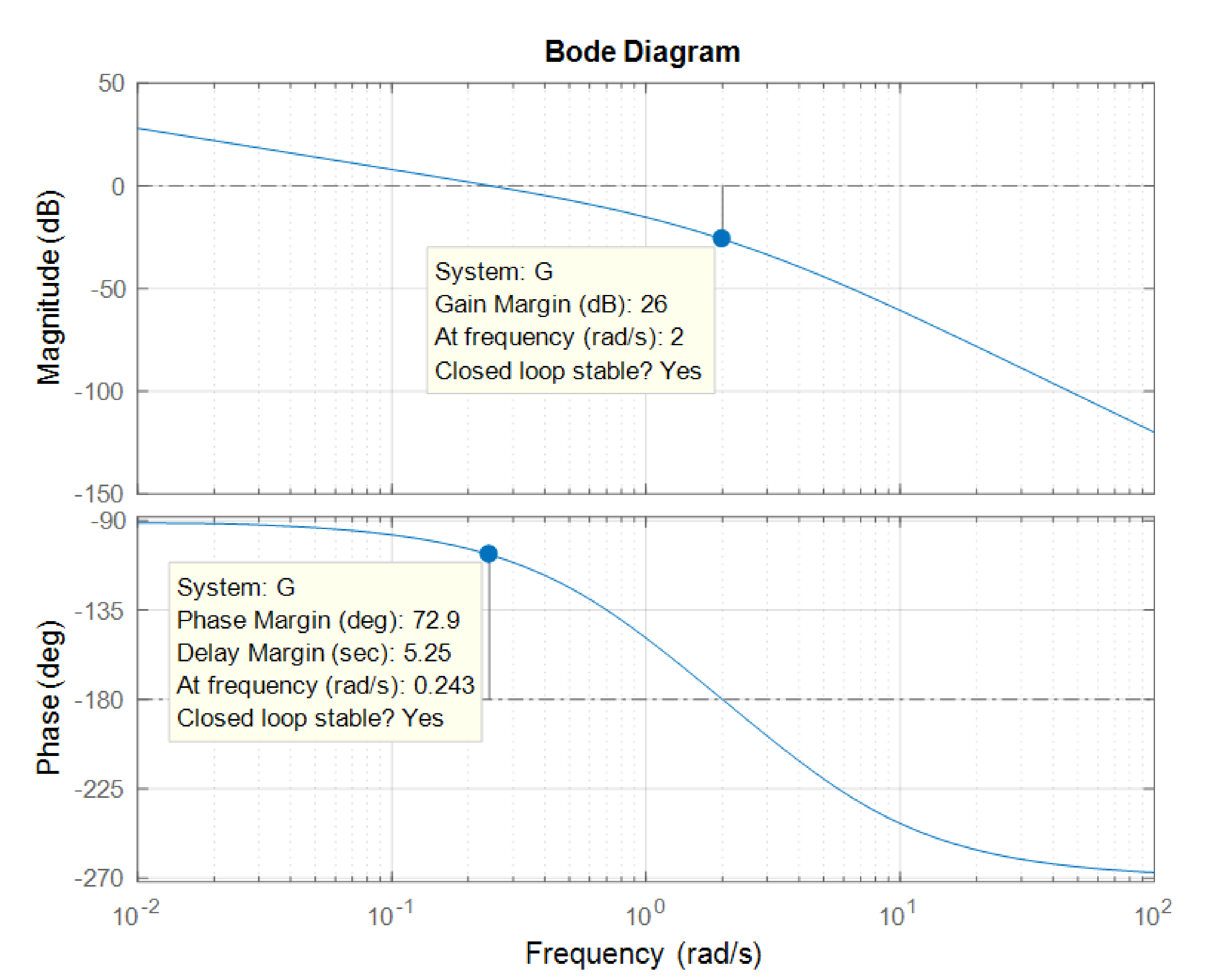
Seja o sistema de controle a seguir.



Projetar um controlador em avanço-atraso de fase (usando a resposta em frequência) de modo a atender as seguintes especificações, no domínio do tempo:

- Sobressinal máximo menor do que 15%
- Tempo de pico menor ou igual a 2 segundos
- Coeficiente de erro de velocidade maior ou igual a 12

Exemplo 4 – Diagramas de Bode para C(s)=1



Exemplo 4

Seja

$$G(j\omega)=\frac{-5\omega-j(4-\omega^2)}{\omega^2[25\omega^2+(4-\omega^2)^2]}$$

tem-se

$$|G(j\omega)|=\frac{1}{\omega\sqrt{25\omega^2+(4-\omega^2)^2}}$$

e

$$\angle G(j\omega)=-\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{-(4-\omega^2)}{-5\omega}\right)$$

de onde obtém-se

$$\begin{aligned}\omega_{CG}&=0{,}243 &&\rightarrow && \mathrm{MF}=72{,}9^\circ\\ \omega_{CF}&=2 &&\rightarrow && \mathrm{MG}=26\ \mathrm{dB}\end{aligned}$$

Exemplo 4 – Projeto 1

1. **A partir das especificações de desempenho para a resposta transitória determinar MF e largura de faixa necessárias.**

Sobressinal:

$$M_P \leq 15\% \quad \Rightarrow \quad \xi \geq 0{,}5168 \quad (\mathrm{MF} \geq 52^{\circ})$$

Valor de Projeto: MF ≡ 55° (ou ξ=0,55)

Tempo de pico:

$$t_P = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \quad \text{ou} \quad \omega_n = \frac{\pi}{t_P\sqrt{1-\xi^2}}$$

Exemplo 4 – Projeto 1

Lembrando a relação

$$\omega_B = \omega_n \sqrt{\left(1-2\xi^2\right) + \sqrt{4\xi^4 - 4\xi_2 + 2}}$$

e colocando ω_B em função de t_P, chega-se a

$$\omega_B = \frac{\pi}{t_P\sqrt{1-\xi^2}} \sqrt{\left(1-2\xi^2\right) + \sqrt{4\xi^4 - 4\xi^2 + 2}}$$

Usando os limites de projeto

$$\xi = 0{,}55\,(\mathrm{MF} = 55^\circ) \quad \text{e} \quad t_p = 2$$

encontra-se a frequência de corte necessária para atender as especificações:

$$\omega_B = 2{,}28$$

Exemplo 4 – Projeto 1

1. A partir das especificações de desempenho para a resposta transitória determinar MF e largura de faixa necessárias:

$$\mathrm{MF} = 55^\circ \qquad \omega_B = 2,28$$

2. Ajustar o ganho K para atender a especificação de regime permanente, $K_V \geq 12$:

$$K_V = \lim_{s \to 0} sKG(s) = \frac{K}{4} \quad \rightarrow \quad K \geq 48$$

Valor de projeto: $K \equiv 50$

Exemplo 4 – Projeto 1

3. Verificar MF e frequência de cruzamento de ganho (ωcg) para KG(jω).

Para K=50:

$$\left|KG(j\omega)\right| = \frac{50}{\omega\sqrt{25\omega^2 + (4-\omega^2)^2}}$$

$$\frac{50}{\omega\sqrt{25\omega^2 + (4-\omega^2)^2}} = 1 \quad \rightarrow \quad \omega^6 + 17\omega^4 + 16\omega^2 - 2500 = 0$$

$$\omega = \pm 3{,}07$$

$$\omega = 1{,}24 \pm j1{,}84 \qquad \rightarrow \qquad \omega_{CG} = 3{,}07$$

$$\omega = -1{,}24 \pm j1{,}84$$

Exemplo 4 – Projeto 1

A fase do sistema é dada por:

$$\angle G(j\omega) = -\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{-(4-\omega^2)}{-5\omega}\right)$$

Portanto a margem de fase será:

$$MF = 180^\circ - \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{-(4-\omega_{CG}^2)}{-5\omega_{CG}}\right) = -19{,}5^\circ$$

Frequência de cruzamento de fase (sem alteração):

$$\angle G(j\omega) = -180^\circ \quad \rightarrow \quad 4-\omega^2 = 0$$

$$\omega_{CF} = 2$$

Exemplo 4 – Projeto 1

Portanto, a margem de ganho será

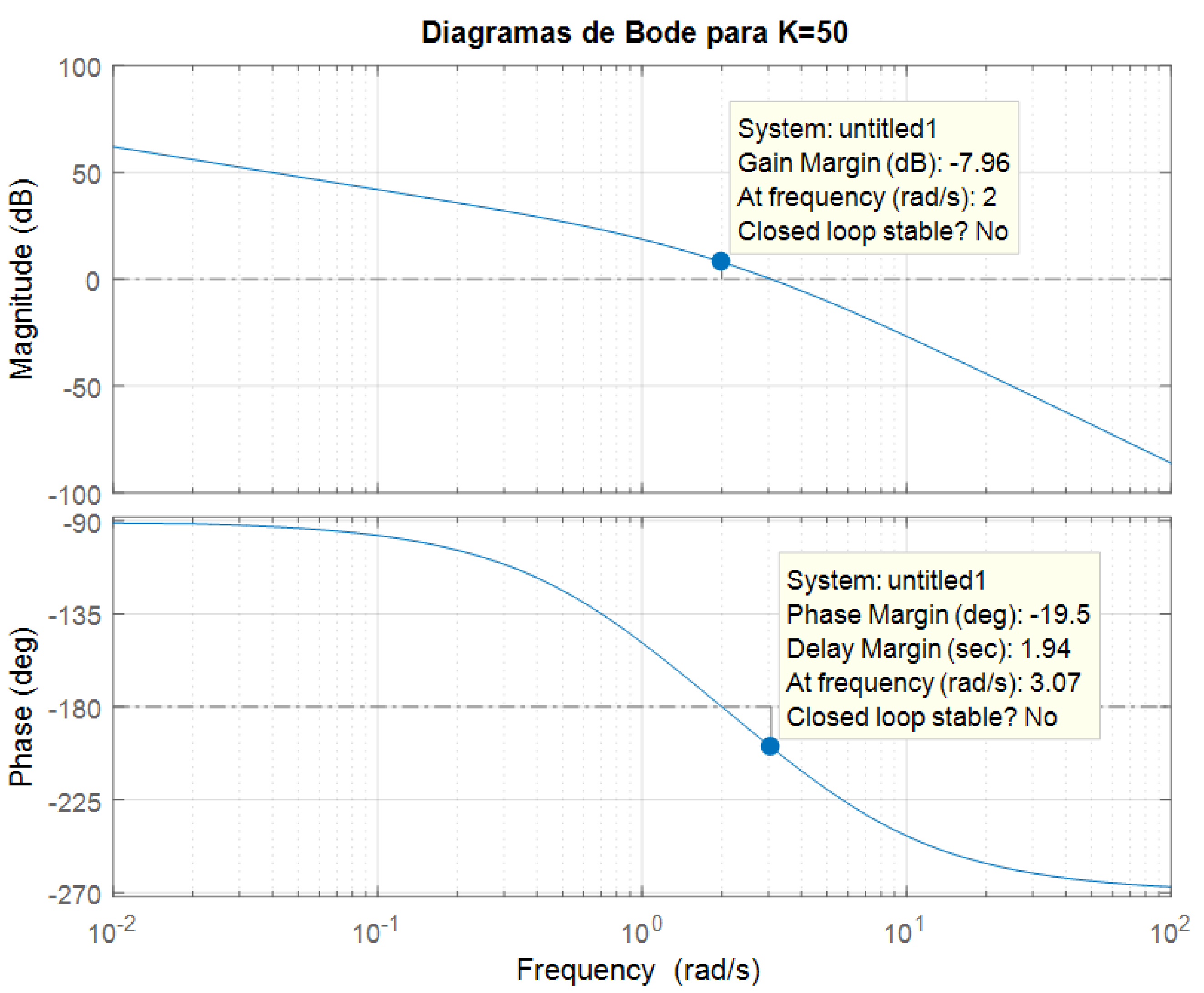
$$MG = \frac{1}{\left|KG(j\omega)\right|} = 0{,}4$$

ou

$$\mathrm{MG}_{\mathrm{dB}} = -7{,}96\,\mathrm{dB}$$

O sistema torna-se instável (MG<0 e MF<0) após o ajuste de ganho, necessário para atender a especificação de erro de regime permanente.

Exemplo 4 – Projeto 1



Exemplo 4 – Projeto 1

4. Determinar a nova frequência de cruzamento de ganho, ω_C, próximo da largura de faixa desejada (ω_B =2,28).

Para escolhas de ω_C (abaixo de ω_B), tem-se:

$$\omega_C = 1,8 \quad \rightarrow \quad MF = 5^\circ$$
$$\omega_C = 2,0 \quad \rightarrow \quad MF = 0^\circ$$
$$\omega_C = 2,2 \quad \rightarrow \quad MF = -4^\circ$$

O valor adotado para o Projeto 1 será:

$$\omega_C \equiv 1,8$$

Exemplo 4 – Projeto 1

5. Determinar a contribuição angular do controlador em avanço, ϕ_m, de modo a atender a MF desejada.

$$\phi_m = \underbrace{55^\circ}_{\text{MF Desejada}} - \overbrace{5^\circ}^{\text{MF do sistema (KG)}} + \underbrace{11^\circ}_{\text{ajuste do avanço}} - \overbrace{6^\circ}^{\text{ajuste do atraso}} = 55^\circ$$

Exemplo 4 – Projeto 1

6. Determinar α a partir dos requisitos do avanço:

$$\alpha = \frac{1+\operatorname{sen}\phi_m}{1-\operatorname{sen}\phi_m} \quad \rightarrow \quad \alpha = 10$$

7. Projetar o controlador em atraso, escolhendo o zero uma década abaixo da nova frequência de cruzamento de ganho.

$$z_{AT} = \frac{1}{T_2} = \frac{\omega_C}{10} \quad \rightarrow \quad z_{AT} = 0{,}18$$

Exemplo 4 – Projeto 1

Assim,

$$P_{AT} = \frac{1}{\alpha T_2} = 0,018$$

O controlador em atraso fica

$$C_{AT}(s) = \frac{s+0,18}{s+0,018}$$

Exemplo 4 – Projeto 1

8. Determinar polo e zero do controlador em avanço:

$$T_1 = \frac{1}{\omega_C \sqrt{1/\alpha}} = 1,76$$

Portanto,

$$z_{AV} = \frac{1}{T_1} = 0,57 \qquad P_{AV} = \frac{\alpha}{T_1} = 5,7$$

O controlador em avanço fica:

$$C_{AV}(s) = \frac{s+0,57}{s+5,7}$$

Exemplo 4 – Projeto 1

Controlador avanço-atraso:

$$C(s) = 50\left(\frac{s+0{,}18}{s+0{,}018}\right)\left(\frac{s+0{,}57}{s+5{,}7}\right)$$

Exemplo 4 – Projeto 1

9. Verificação do Projeto:

$$C(s)G(s) = \frac{50}{s(s+1)(s+4)}\left(\frac{s+0{,}18}{s+0{,}018}\right)\left(\frac{s+0{,}57}{s+5{,}7}\right)$$

$$\omega_{CG} = 1{,}76 \quad \rightarrow \quad \mathrm{MF} = 55{,}5^{\circ}$$

$$\omega_{CF} = 5{,}02 \quad \rightarrow \quad \mathrm{MG} = 13{,}9\ \mathrm{dB}$$

Sobressinal: $\xi = 0{,}555 \quad \rightarrow \quad M_P = 12{,}3\% < 15\%$

Largura de faixa:

$$\left|C(j\omega)G(j\omega)\right| = -3\mathrm{dB} \quad \rightarrow \quad \omega_B = 2{,}3$$

Exemplo 4 – Projeto 1

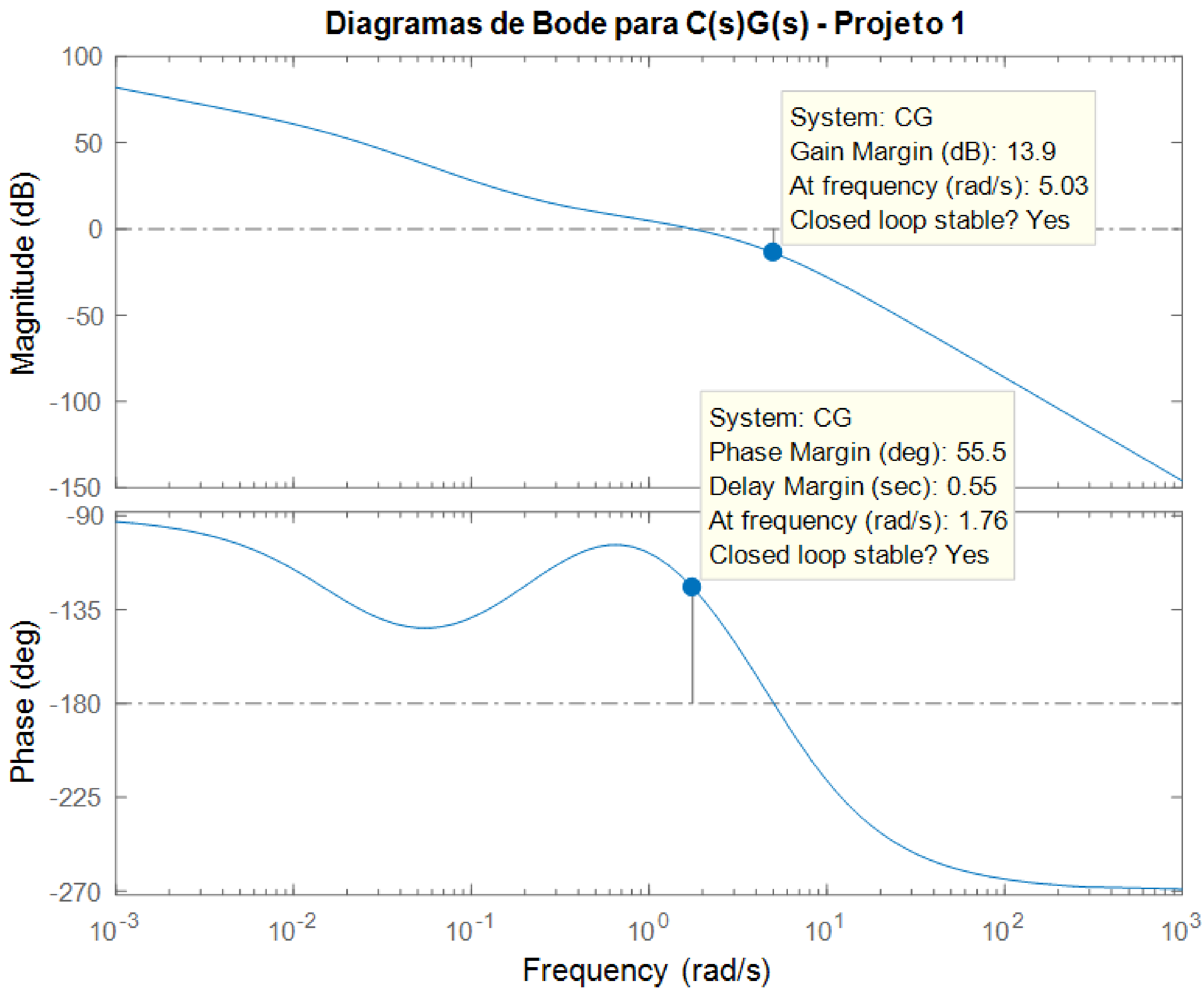
Tempo de pico:

$$t_P = \frac{\pi}{\omega_B \sqrt{1-\xi^2}} \sqrt{\left(1-2\xi^2\right) + \sqrt{4\xi^4 - 4\xi^2 + 2}} = 1{,}98 < 2$$

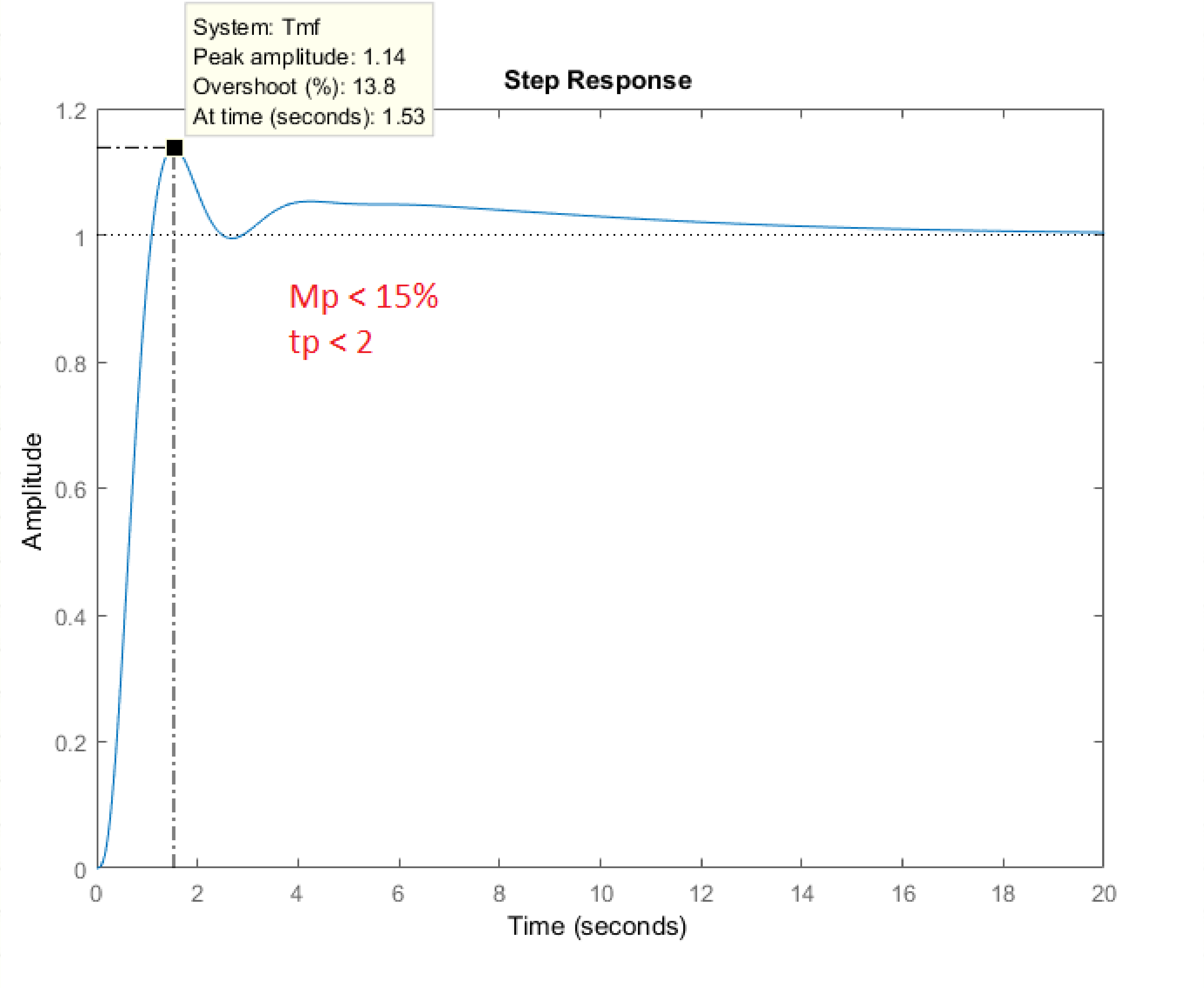
Coeficiente de erro:

$$K_V = \frac{50}{4} = 12,5 > 12 \qquad \rightarrow \qquad e_\infty = 8\%$$

Exemplo 4 – Projeto 1



Exemplo 4 – Projeto 1



Exemplo 4 – Projeto 2 (ω_C= 2)

Escolhendo ω_C= 2:

$$\omega_C \equiv 2{,}0 \quad \rightarrow \quad \mathrm{MF} = 0^\circ$$

Mantendo a mesma contribuição de fase para o controlador em avanço:

$$\phi_m = 55^\circ \quad \rightarrow \quad \alpha = 10$$

O zero do controlador em atraso pode ser definido por

$$z_{AT} = \frac{1}{T_2} = \frac{\omega_C}{10} \quad \rightarrow \quad z_{AT} = 0{,}2$$

Exemplo 4 – Projeto 2 ($\omega_C = 2$)

e o polo por:

$$p_{AT} = \frac{1}{\alpha T_2} \quad \rightarrow \quad p_{AT} = 0{,}02$$

Assim, o controlador em atraso é definido como:

$$C_{AT}(s) = \frac{s + 0{,}2}{s + 0{,}02}$$

O controlador em avanço será determinado a partir de:

$$T_1 = \frac{1}{\omega_C \sqrt{1/\alpha}} = 1{,}58$$

Exemplo 4 – Projeto 2 ($\omega_C = 2$)

Polo e zero do controlador em avanço serão:

$$p_{AV} = \frac{\alpha}{T_1} = 0{,}6325$$

e

$$z_{AV} = \frac{1}{T_1} = 6{,}325$$

Assim, o controlador em avanço é definido como:

$$C_{AV}(s) = \frac{s + 0{,}6325}{s + 6{,}325}$$

Exemplo 4 – Projeto 2 ($\omega_C = 2$)

Verificação do Projeto

$$C(s)G(s) = \frac{50}{s(s+1)(s+4)}\left(\frac{s+0{,}6325}{s+6{,}325}\right)\left(\frac{s+0{,}2}{s+0{,}02}\right)$$

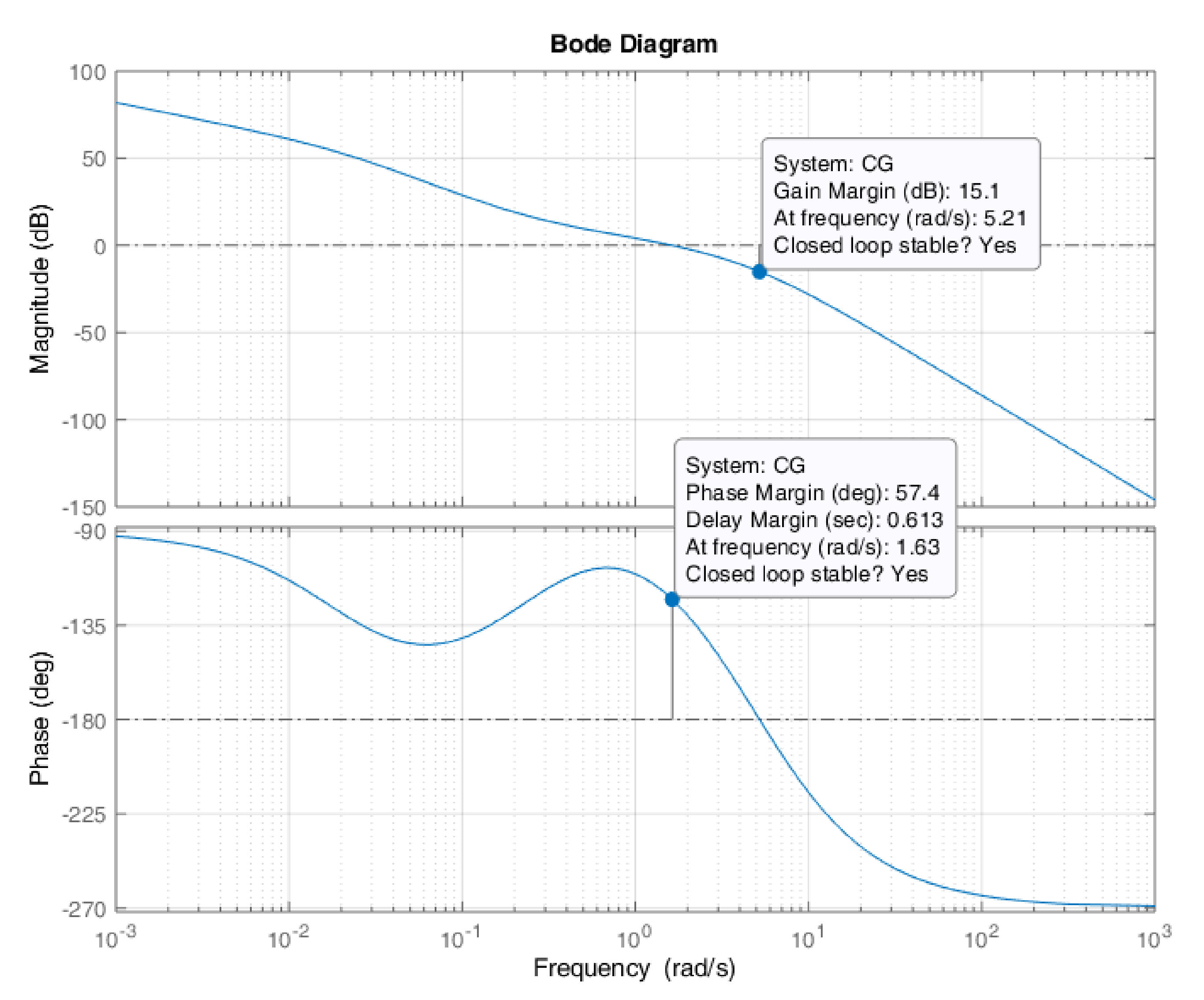
$$\omega_{CG} = 5{,}21 \quad \rightarrow \quad \mathrm{MF} = 57{,}4^\circ$$

$$\omega_{CF} = 1{,}63 \quad \rightarrow \quad \mathrm{MG} = 15\,\mathrm{dB}$$

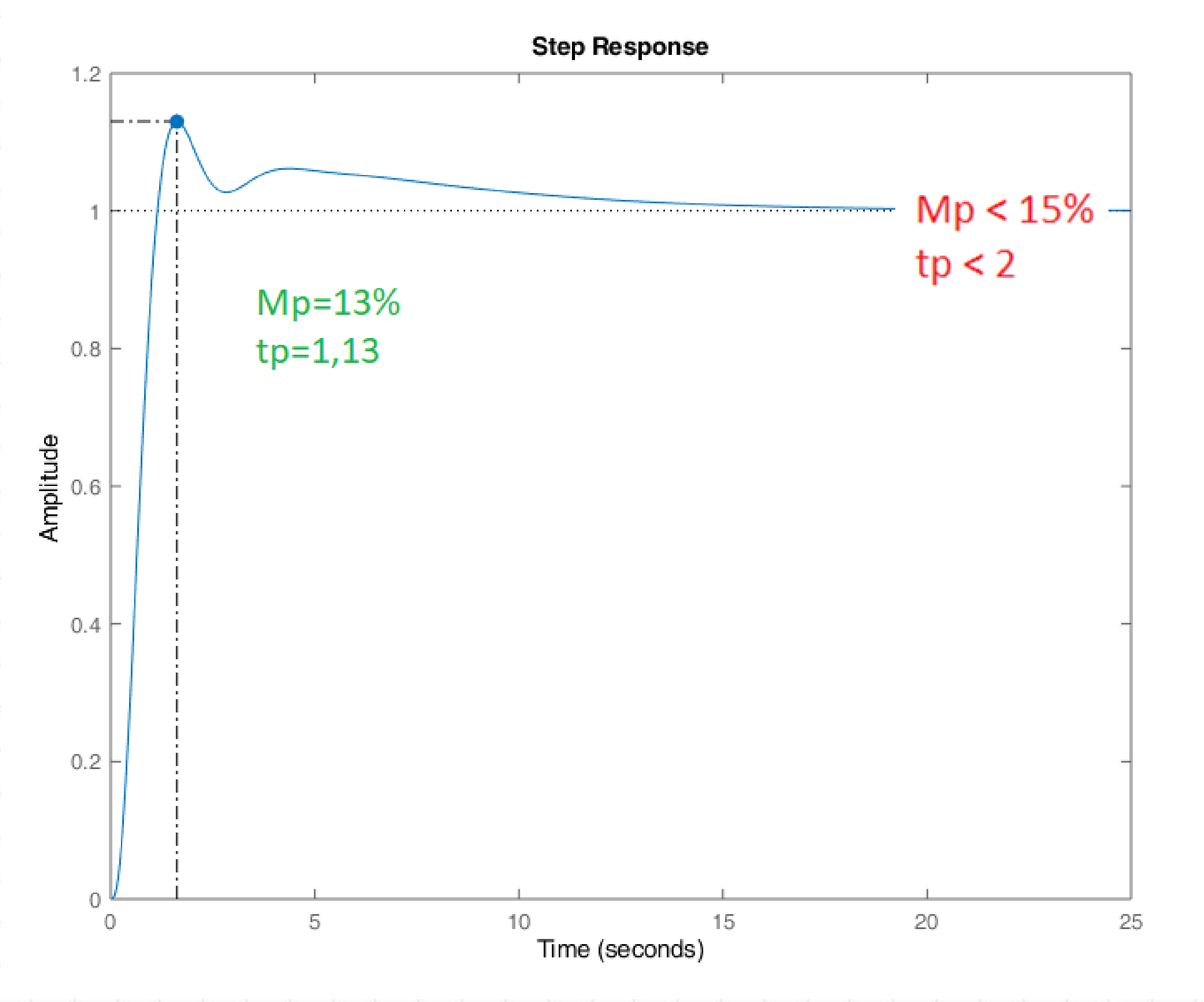
$$\xi = 0{,}574 \quad \rightarrow \quad M_P = 11\% < 15\%$$

$$K_V = \frac{50}{4} = 12{,}5 \quad \rightarrow \quad e_\infty = 8\%$$

Exemplo 4 – Projeto 2 (ω_C= 2)



Exemplo 4 – Projeto 2 (ω_C= 2)



Exemplo 4 – Projeto 3 (ω_C= 2 e ϕ_m=60°)

Mantendo a escolha de ω_C= 2

$$\omega_C \equiv 2{,}0 \quad \rightarrow \quad \mathrm{MF} = 0^\circ$$

e aumentando a contribuição de fase do controlador em avanço para 60°, obtém um novo α:

$$\phi_m = 60^\circ \quad \rightarrow \quad \alpha = 14$$

Refazendo o projeto chega-se a um novo controlador avanço-atraso:

$$C(s) = 50\left(\frac{s+0{,}535}{s+7{,}483}\right)\left(\frac{s+0{,}2}{s+0{,}014}\right)$$

Exemplo 4 – Projeto 3 (ω_C= 2 e ϕ_m=60°)

Verificação do Projeto

$$C(s)G(s) = \frac{50}{s(s+1)(s+4)}\left(\frac{s+0{,}535}{s+7{,}483}\right)\left(\frac{s+0{,}2}{s+0{,}014}\right)$$

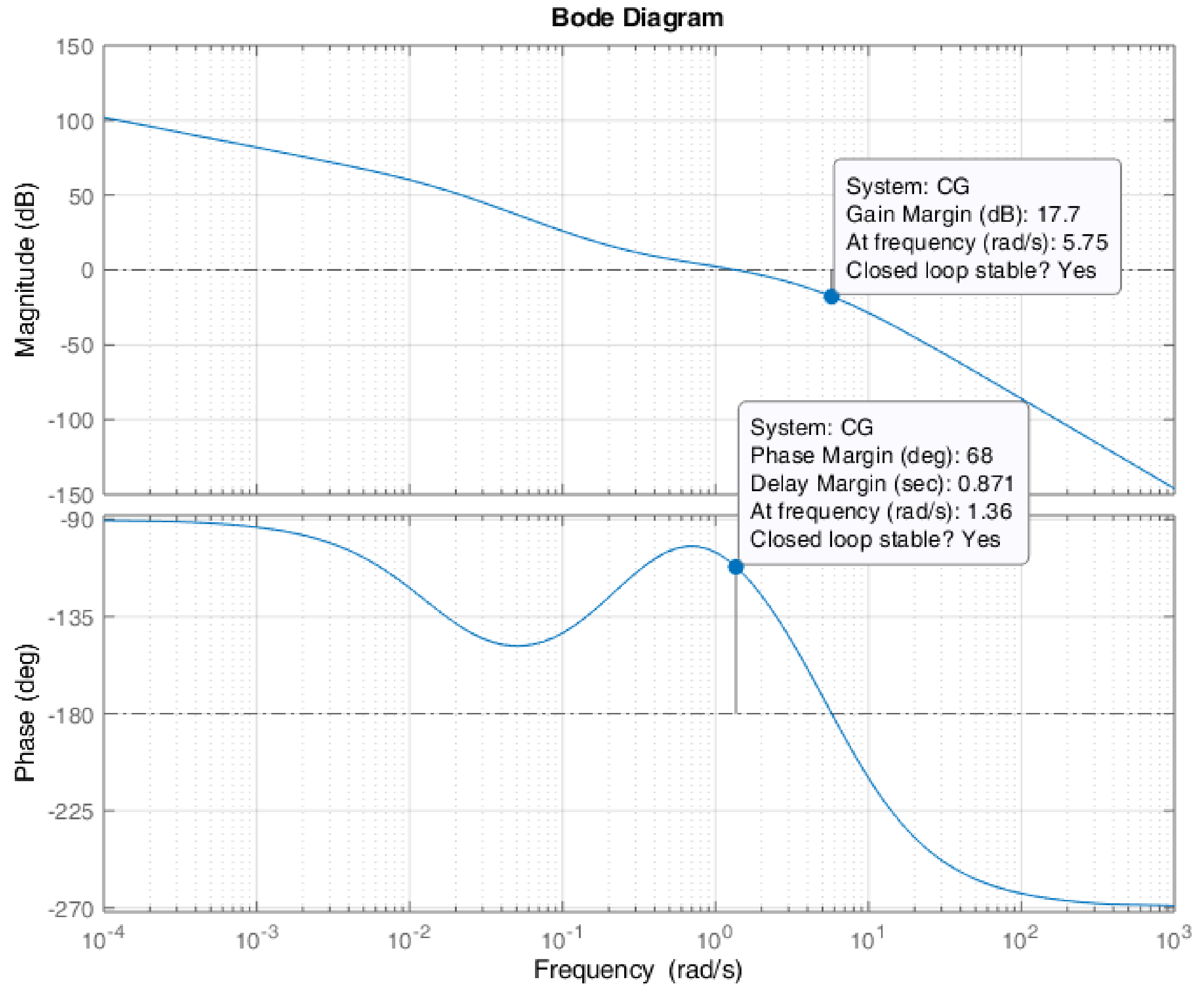
$$\omega_{CG} = 5{,}75 \quad \rightarrow \quad \mathrm{MF} = 68^{\circ}$$

$$\omega_{CF} = 1{,}36 \quad \rightarrow \quad \mathrm{MG} = 17{,}7\ \mathrm{dB}$$

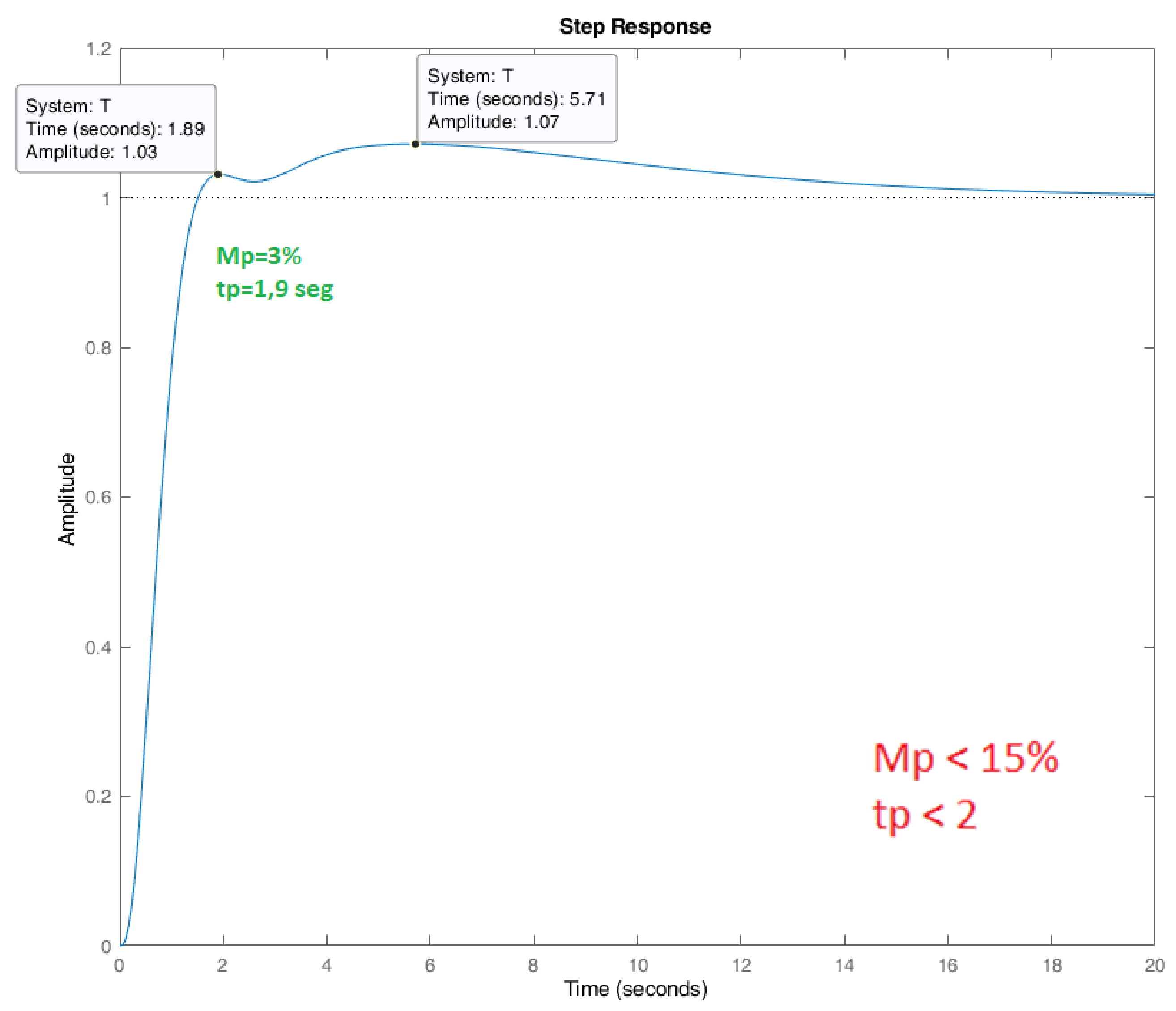
$$\xi = 0{,}68 \quad \rightarrow \quad M_P = 5{,}4\% < 15\%$$

$$K_V = \frac{50}{4} = 12{,}5 \quad \rightarrow \quad e_{\infty} = 8\%$$

Exemplo 4 – Projeto 3 (ω_C= 2 e ϕ_m=60°)



Exemplo 4 – Projeto 3 (ω_C= 2 e ϕ_m=60°)



Exemplo 4 – Projeto 4 (Controlador Avanço-PI)

Transformando o controlador em atraso do Projeto 2 em um PI tem-se um controlador PID Real (Avanço-PI):

$$C(s)G(s) = \frac{50}{s(s+1)(s+4)}\left(\frac{s+0{,}6325}{s+6{,}325}\right)\left(\frac{s+0{,}2}{s}\right)$$

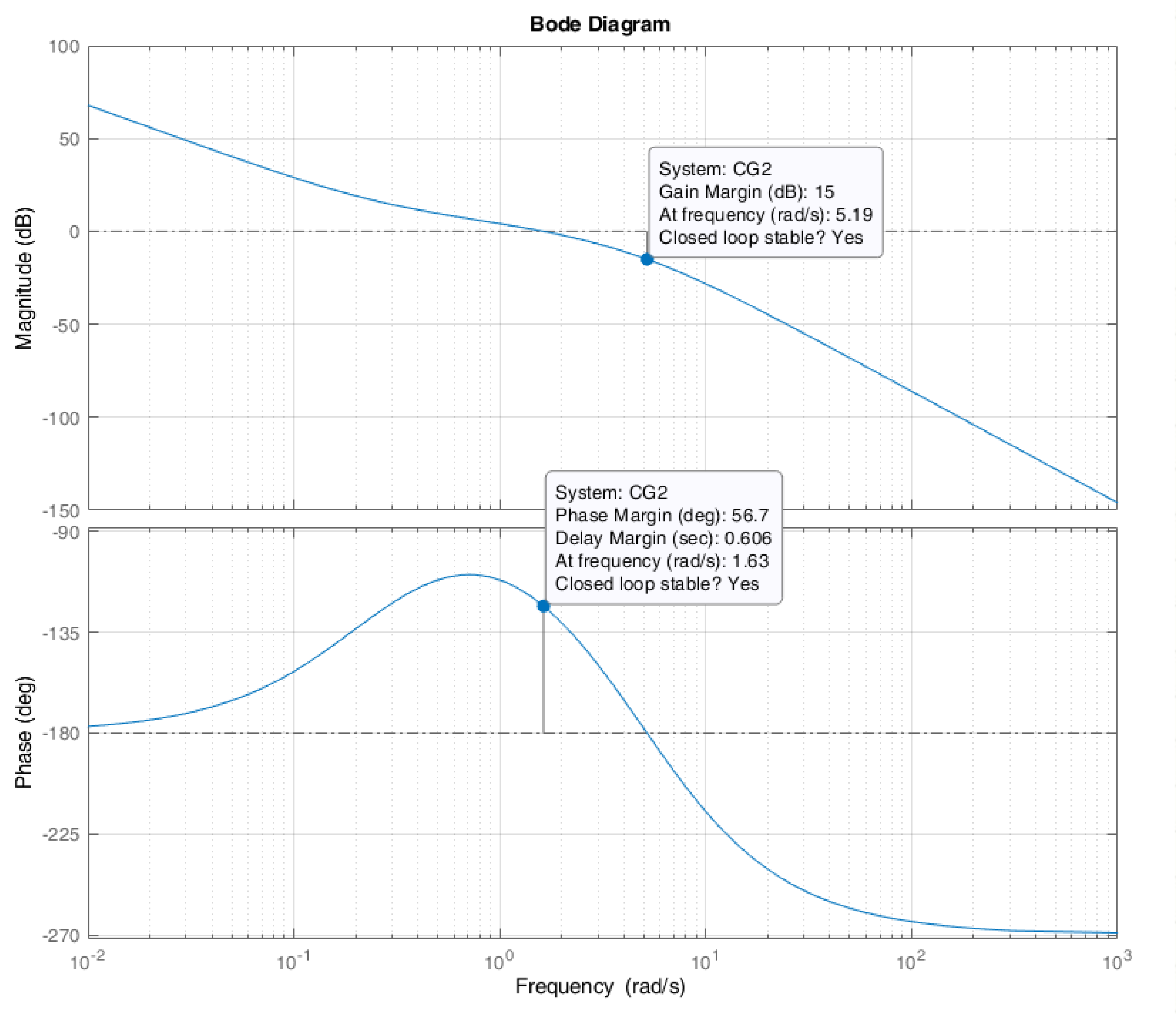
Resultando em:

$$\omega_{CG} = 5{,}2 \quad \rightarrow \quad \mathrm{MF} = 56{,}7^{\circ}$$
$$\omega_{CF} = 1{,}63 \quad \rightarrow \quad \mathrm{MG} = 15\,\mathrm{dB}$$

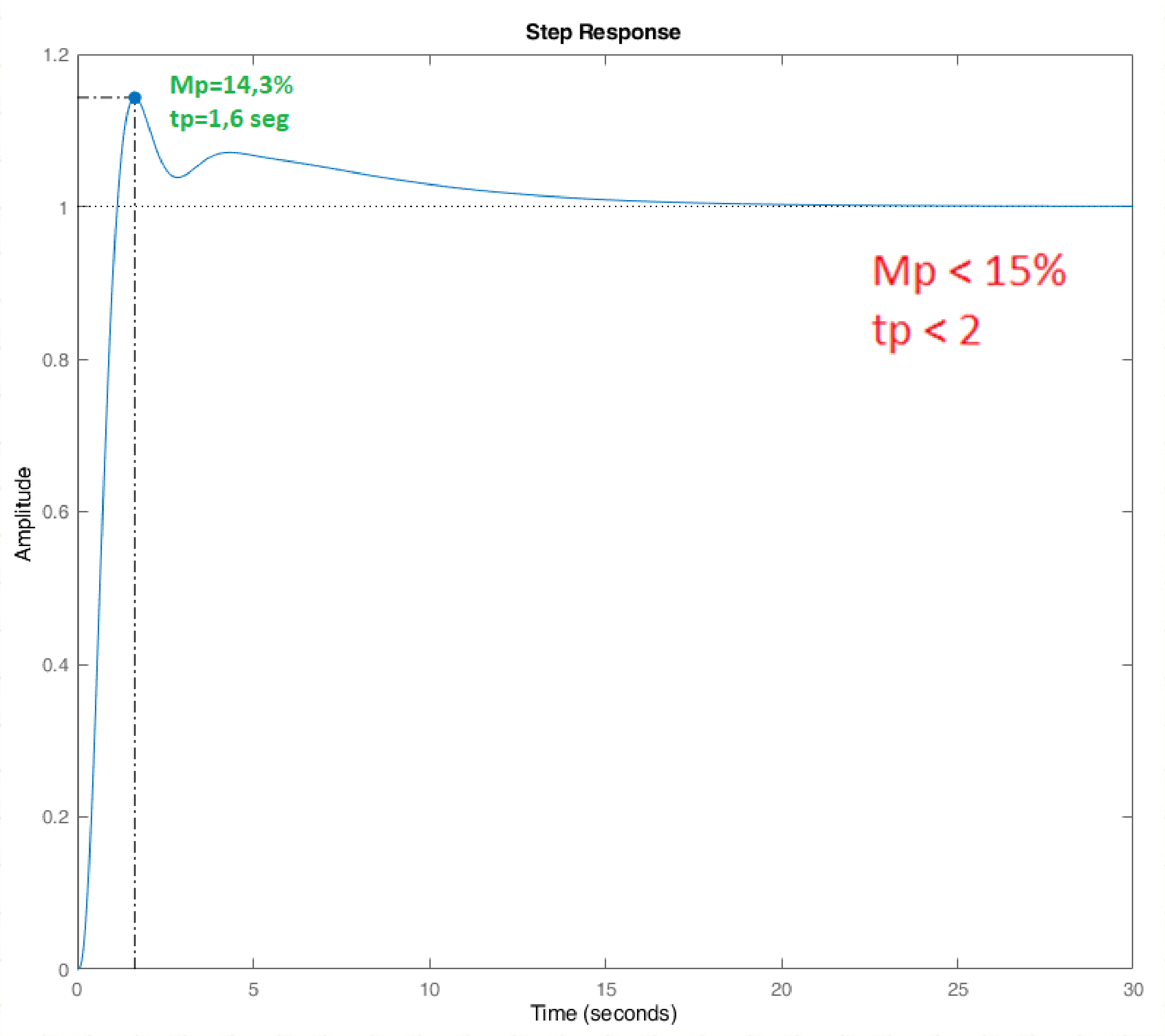
$$\xi = 0{,}567 \quad \rightarrow \quad M_P = 11{,}5\% < 15\%$$

$$K_V = \infty \quad \rightarrow \quad e_\infty = 0$$

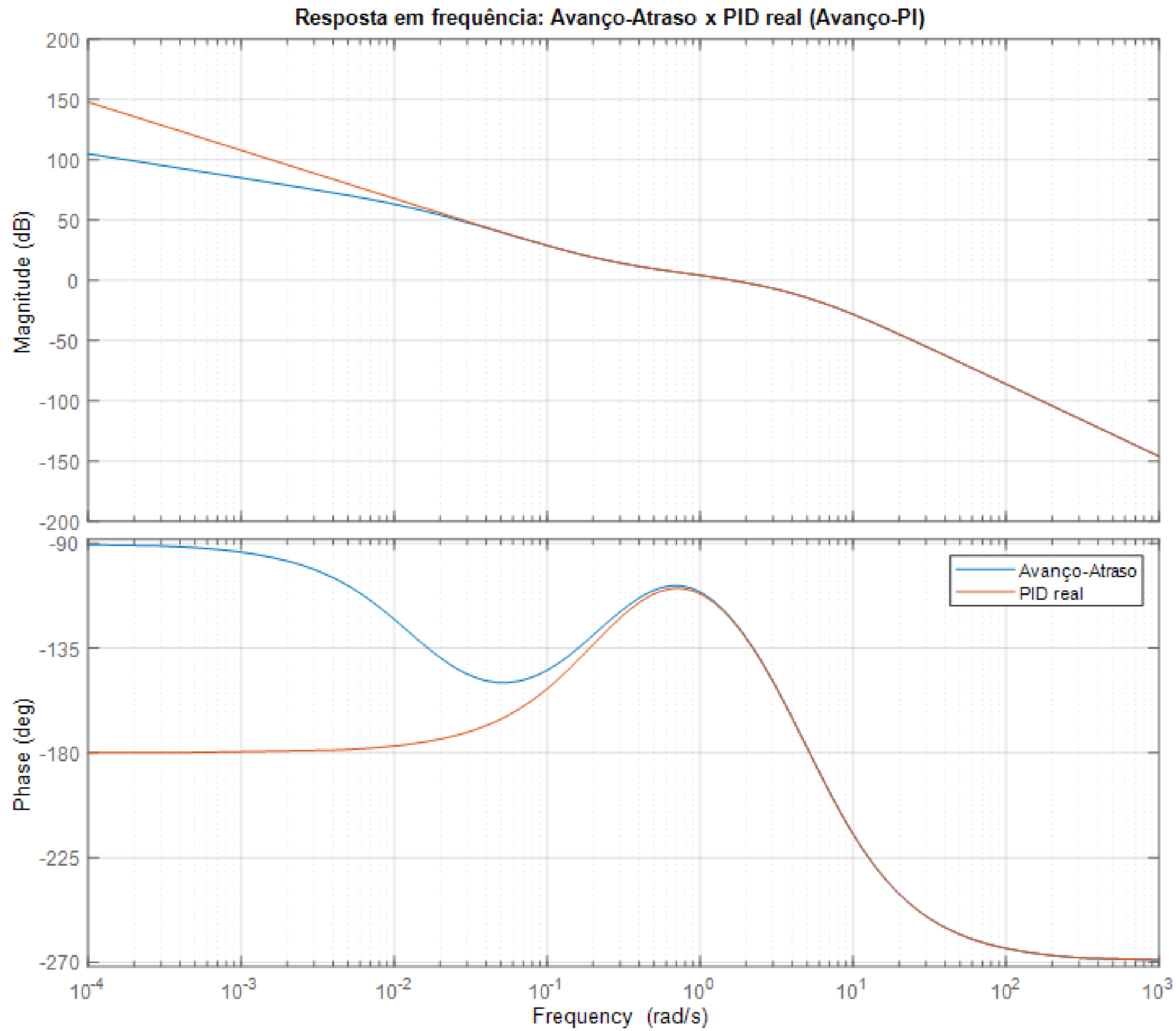
Exemplo 4 – Projeto 4 (Controlador Avanço-PI)



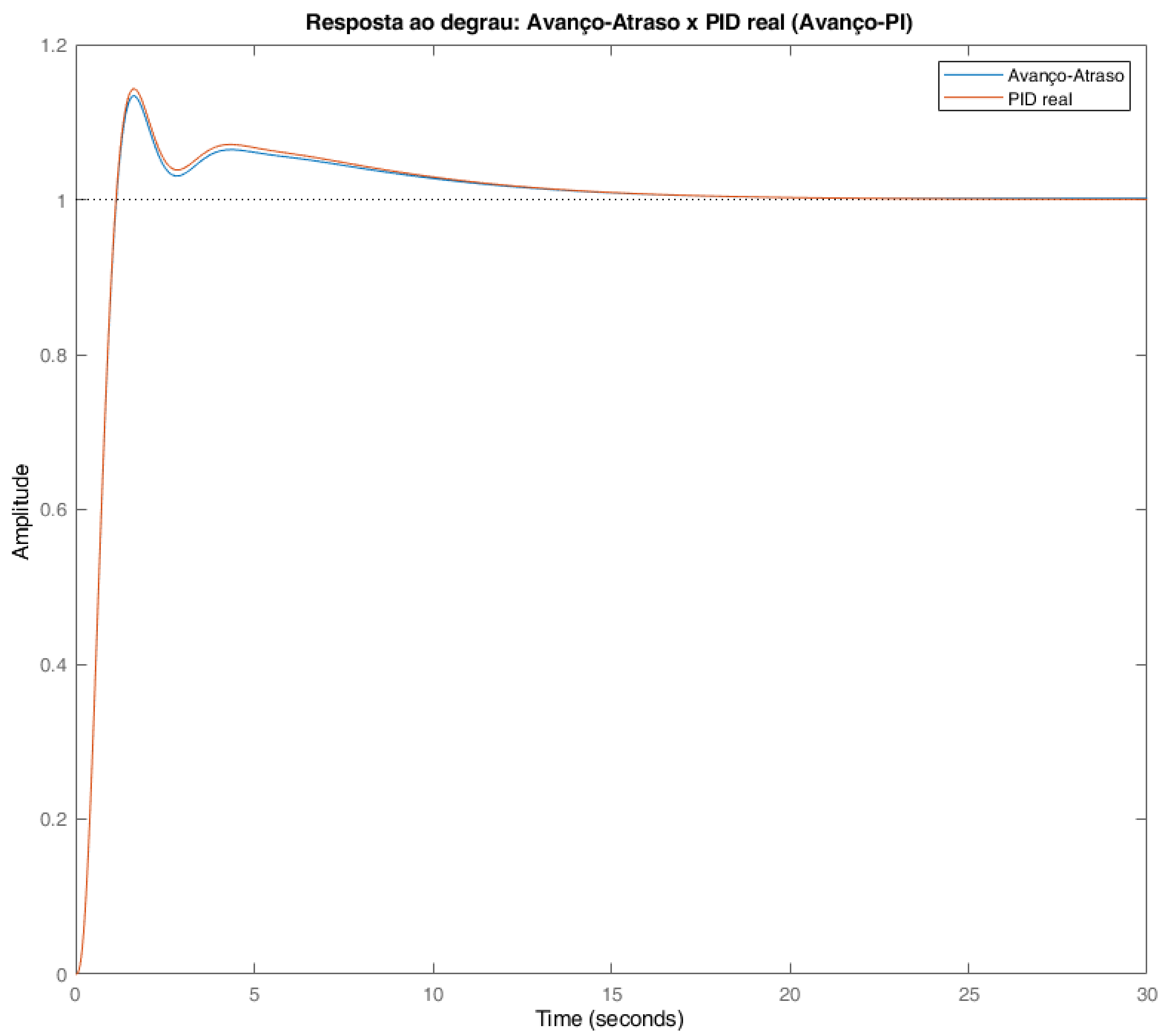
Exemplo 4 – Projeto 4 (Controlador Avanço-PI)



Avanço-Atraso x Avanço-PI



Avanço-Atraso x Avanço-PI



Exercícios Sugeridos

a) Projetar um controlador avanço-atraso para o exemplo em estudo, considerando $\alpha \neq \beta$.
b) Comparar os controladores obtidos para $\alpha \neq \beta$ e $\beta=1/\alpha$.
c) Tentar projetar um controlador mais simples para resolver o problema.