Gráfico do Contorno das Raízes

Profa. Cristiane Paim

Gráfico de Contorno das Raízes

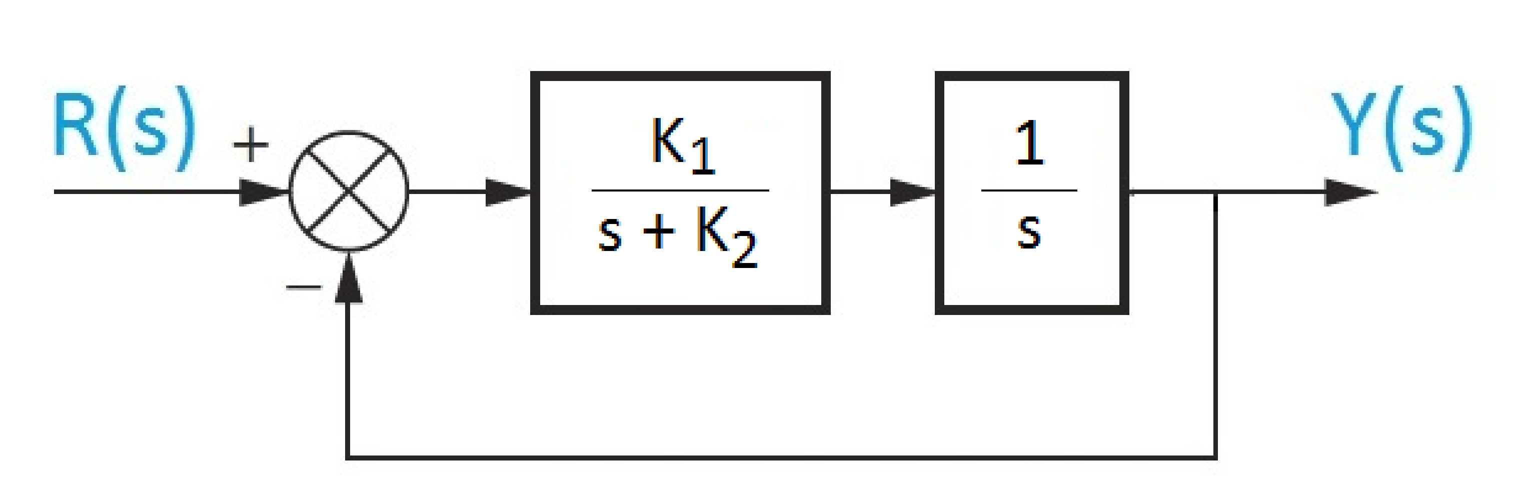
Em muitos problemas é necessário conhecer o efeito da variação de mais de um parâmetro sobre a localização dos polos de malha fechada de um sistema.

O diagrama do Lugar das Raízes quando mais de um parâmetro varia chama-se **Contorno das Raízes**.

É construído traçando-se o Lugar das Raízes considerando um parâmetro fixo e o outro variando, e vice-versa.

Exemplo

Seja o sistema:



Traçar o contorno das Raízes para os parâmetros K_1 e K_2 variando de 0 a $+\infty$.

Exemplo

Para o sistema, a FTMF é dada por:

$$T(s) = \frac{K_1}{s(s + K_2) + K_1}$$

Portanto,

$$\Delta(s) = s^2 + K_2 s + K_1$$

Exemplo

1ª parte: Fixar K_2 variar $0 < K_1 < +\infty$

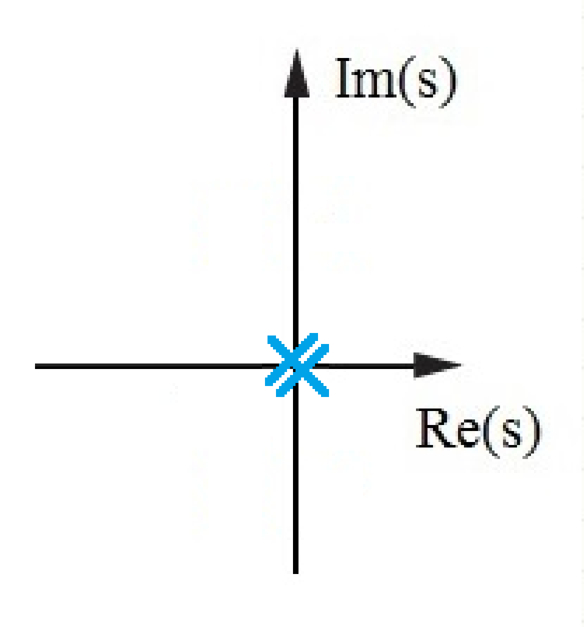
$$K_2 \equiv 0 \quad \rightarrow \quad \Delta(s) = s^2 + K_1 = 0$$

Portanto, o Lugar das Raízes será traçado para

$$1 + K_1 \frac{1}{s^2} = 0$$

Exemplo

Lugar das Raízes para $K_1 > 0$



Eixo real: $\nexists$

Assíntotas: $\theta_a = \pm 90°$

Ângulos de Partida: $\phi = \pm 90°$

Cruzamento com eixo imaginário:

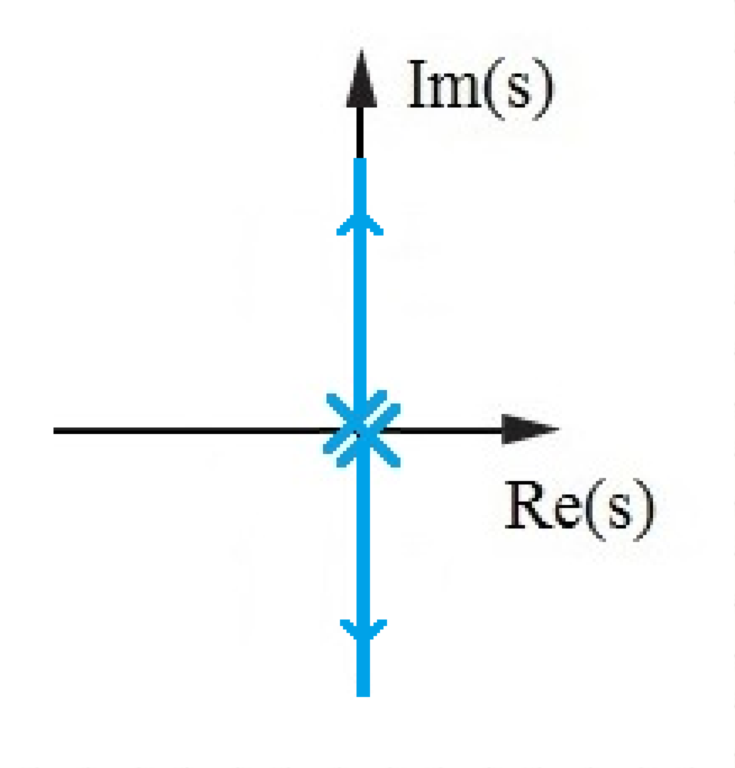
existe apenas em s=0 (K_1=0)

Ramificação:

existe apenas em s=0 (K_1=0)

Exemplo

Lugar das Raízes para $K_1 > 0$



Exemplo

2ª parte: Fixar K_1 variar $0 < K_2 < +\infty$

Para $K_2 \neq 0$

$$\Delta(s) = 1 + K_2 \frac{s}{s^2 + K_1} = 0$$

Assim, o Lugar das Raízes será traçado para $0 < K_2 < +\infty$ considerando valores fixos de K_1.

Exemplo

Para **K_1 = 1**

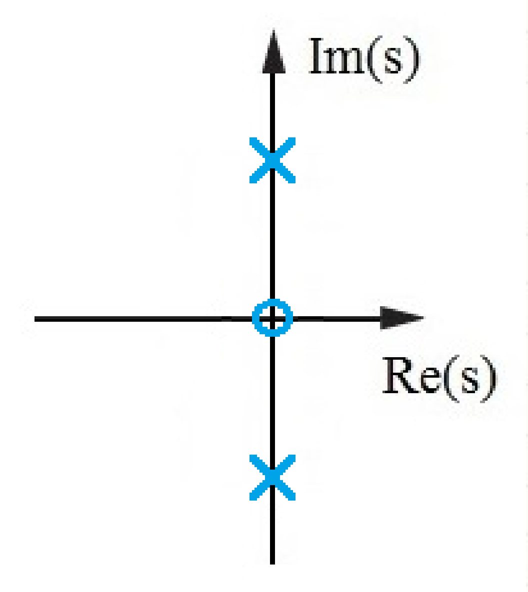
$$\Delta(s) = 1 + K_2 \frac{s}{s^2+1} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} p_{1,2} = \pm j \\ z = 0 \end{cases}$$

Eixo real: (-∞ , 0]

Assíntotas: θ_a = 180°

Cruzamento com eixo imaginário:

apenas em s=±j (K_1=1)



Exemplo

Ramificação:

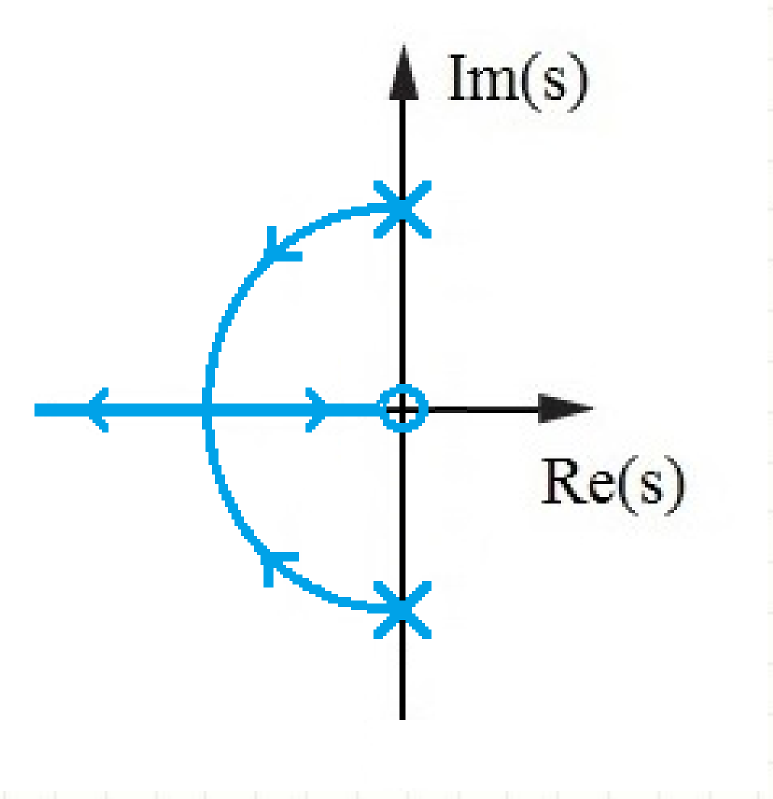
$$K_2 = -\left(\frac{s^2+1}{s}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{dK_2}{ds} = s^2 - 1 = 0$$

Portanto,

$$s = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} s = -1 \in \mathrm{LR} \quad \Rightarrow \quad K_2 = 2 \\ s = 1 \notin \mathrm{LR} \end{cases}$$

Exemplo

Lugar das Raízes para $K_1 = 1$ e $0 < K_2 < +\infty$

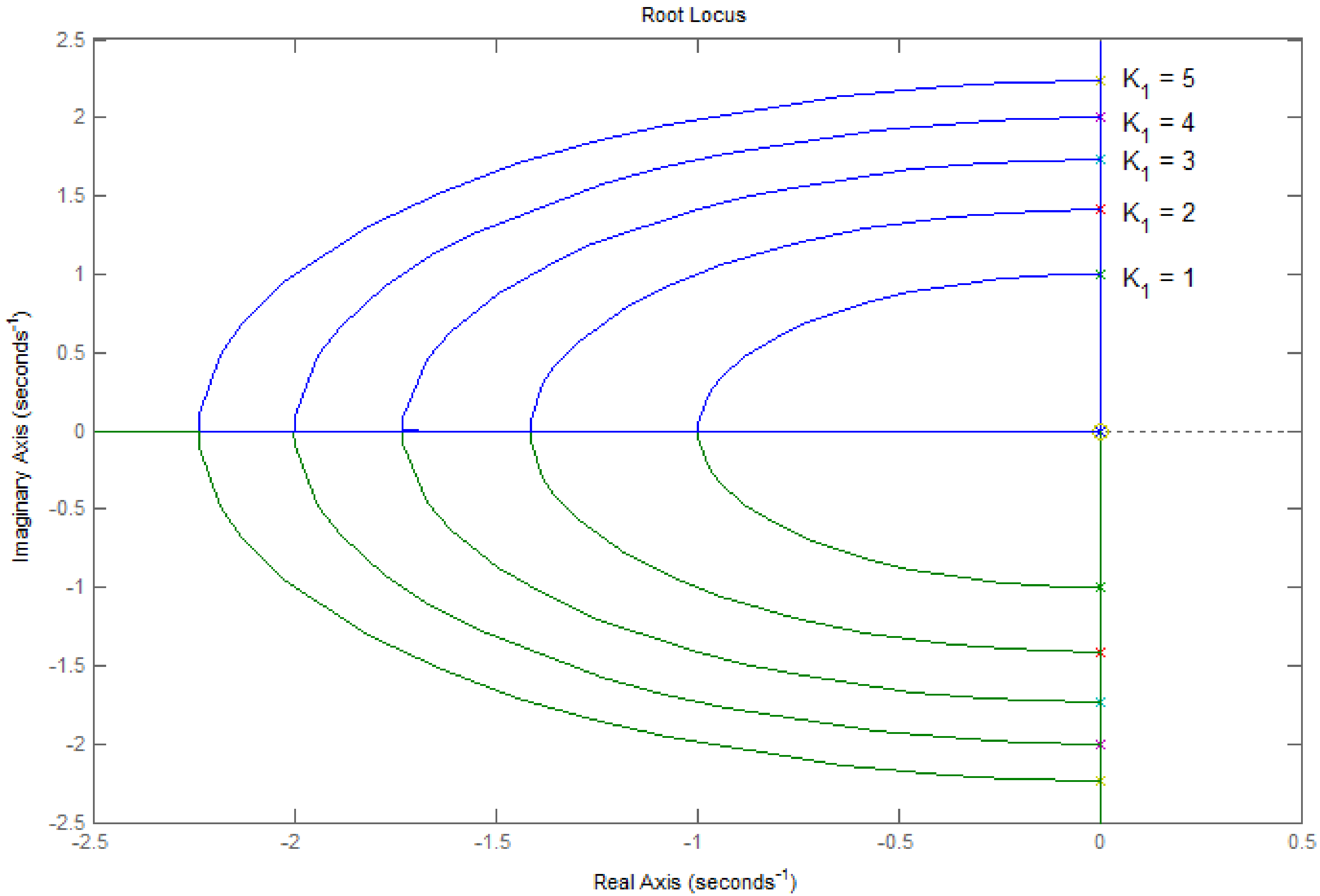


Exemplo

Para demais valores de $K_{1,}$ o Lugar das Raízes terá forma semelhante, mudando os polos iniciais e as respectivas ramificações.

K_1	polos	Ramificação	
2	$p_{1,2}=\pm\sqrt{2}$	$s=-\sqrt{2}$	$K_2=2{,}83$
3	$p_{1,2}=\pm\sqrt{3}$	$s=-\sqrt{3}$	$K_2=3{,}46$
4	$p_{1,2}=\pm\sqrt{4}$	$s=-\sqrt{4}$	$K_2=4$
5	$p_{1,2}=\pm\sqrt{5}$	$s=-\sqrt{5}$	$K_2=4{,}47$

Exemplo



Root Locus
Imaginary Axis (seconds^{-1})
Real Axis (seconds^{-1})
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
$K_1 = 5$
$K_1 = 4$
$K_1 = 3$
$K_1 = 2$
$K_1 = 1$

Exemplo

Lembrando que os polos de malha fechada serão dados por

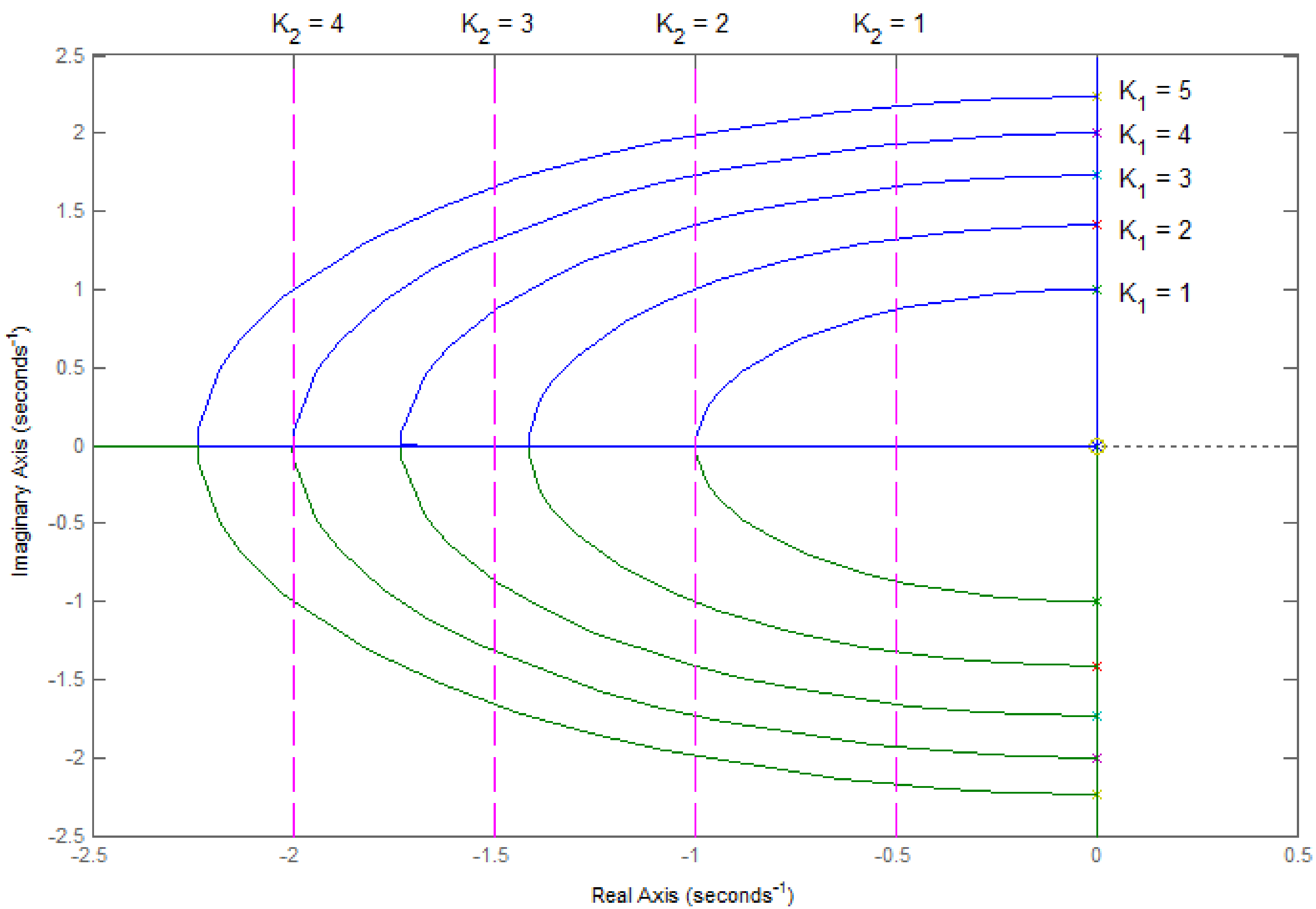
$$p_{1,2} = \frac{-K_2 \pm \sqrt{K_2^2 - 4K_1}}{2}$$

para valores fixos de K_2, a parte real é constante e representa uma reta em $-K_2/2$.

Por exemplo,

$$K_2 = 2 \quad \rightarrow \quad p_{1,2} = -1 \pm \frac{\sqrt{4 - 4K_1}}{2}$$

Exemplo



K2 = 4
K2 = 3
K2 = 2
K2 = 1
K1 = 5
K1 = 4
K1 = 3
K1 = 2
K1 = 1
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
Imaginary Axis (seconds-1)
Real Axis (seconds-1)

Utilização do Contorno das Raízes

Para o sistema anterior, deseja-se garantir uma especificação de tempo de acomodação para a resposta ao degrau:

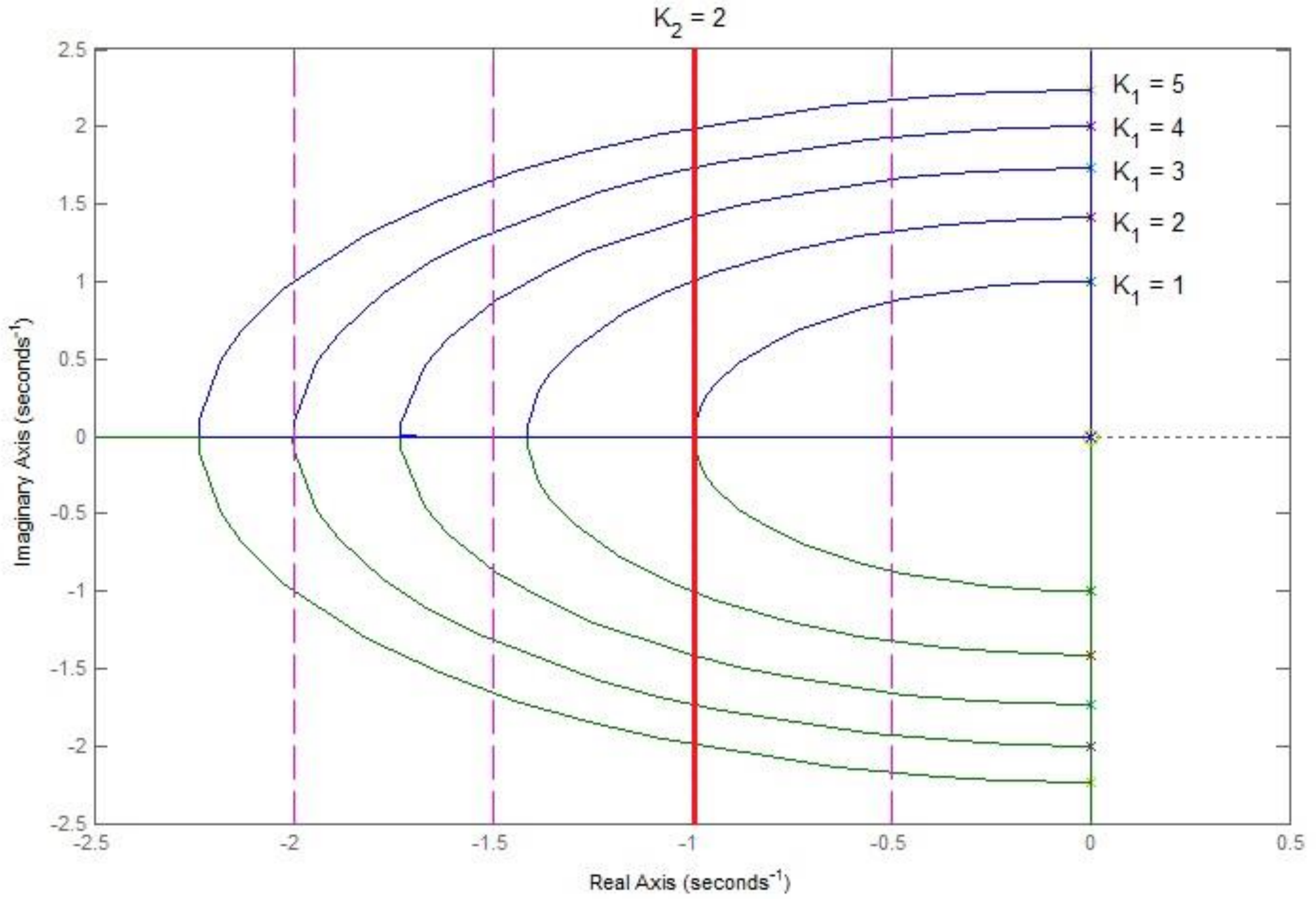
$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} < 4 \quad \Rightarrow \quad \xi\omega_n > 1$$

Reta passando em -1

Neste caso, do gráfico do Contorno das Raízes, observa-se que para atender essa especificação:

$$K_1 > 1 \quad \text{e} \quad K_2 > 2$$

Exemplo



K2 = 2
K1 = 5
K1 = 4
K1 = 3
K1 = 2
K1 = 1
Imaginary Axis (seconds-1)
Real Axis (seconds-1)
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5

Exemplo

De forma similar, se a especificação fosse alterada para:

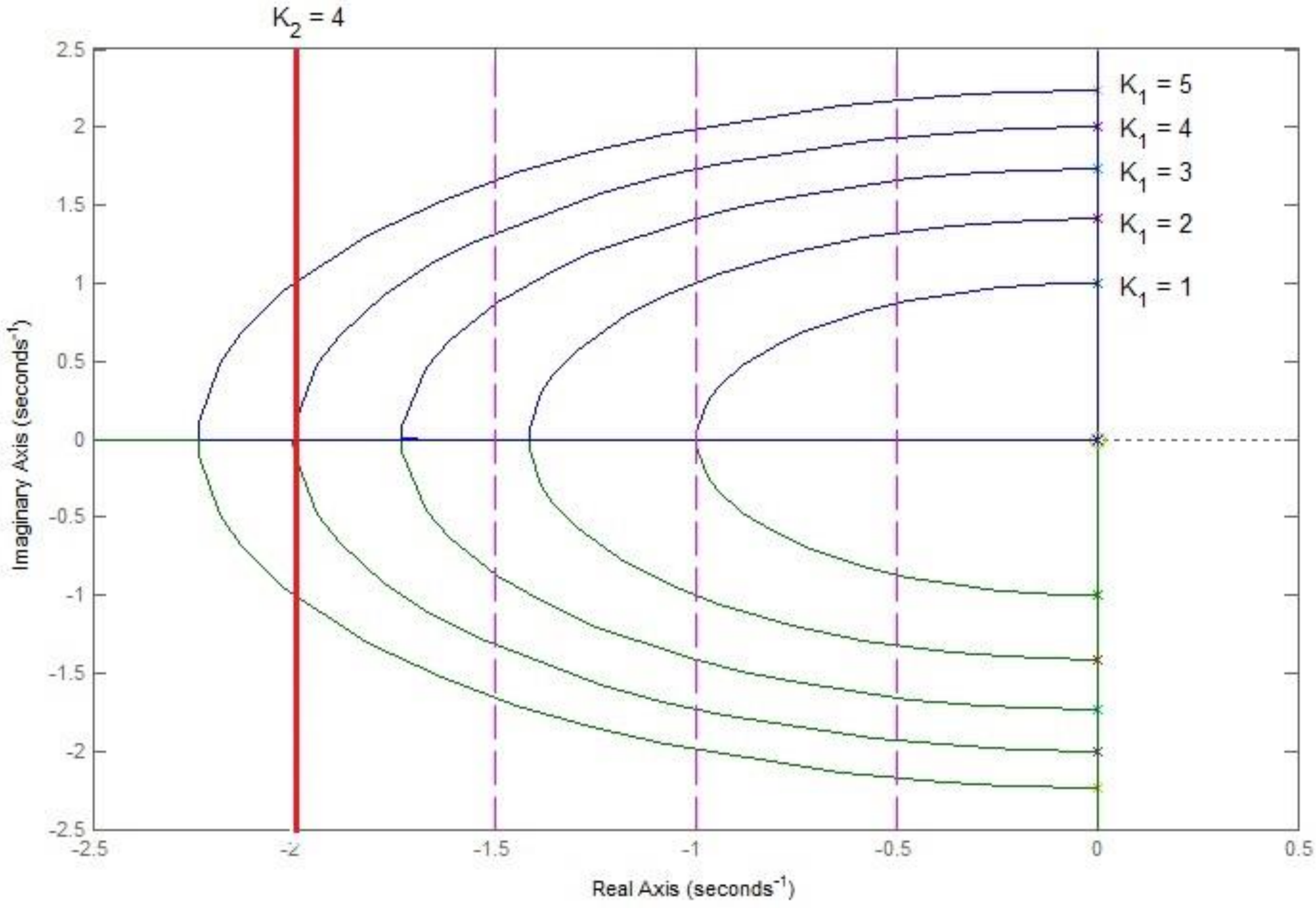
$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} < 2 \quad \Rightarrow \quad \xi\omega_n > 2$$

Reta passando em -2

Chegaria se a

$$K_1 > 4 \quad \text{e} \quad K_2 > 4$$

Exemplo



$K_2 = 4$
$K_1 = 5$
$K_1 = 4$
$K_1 = 3$
$K_1 = 2$
$K_1 = 1$
Imaginary Axis (seconds^{-1})
Real Axis (seconds^{-1})
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5

Exemplo

E se a especificação fosse alterada para:

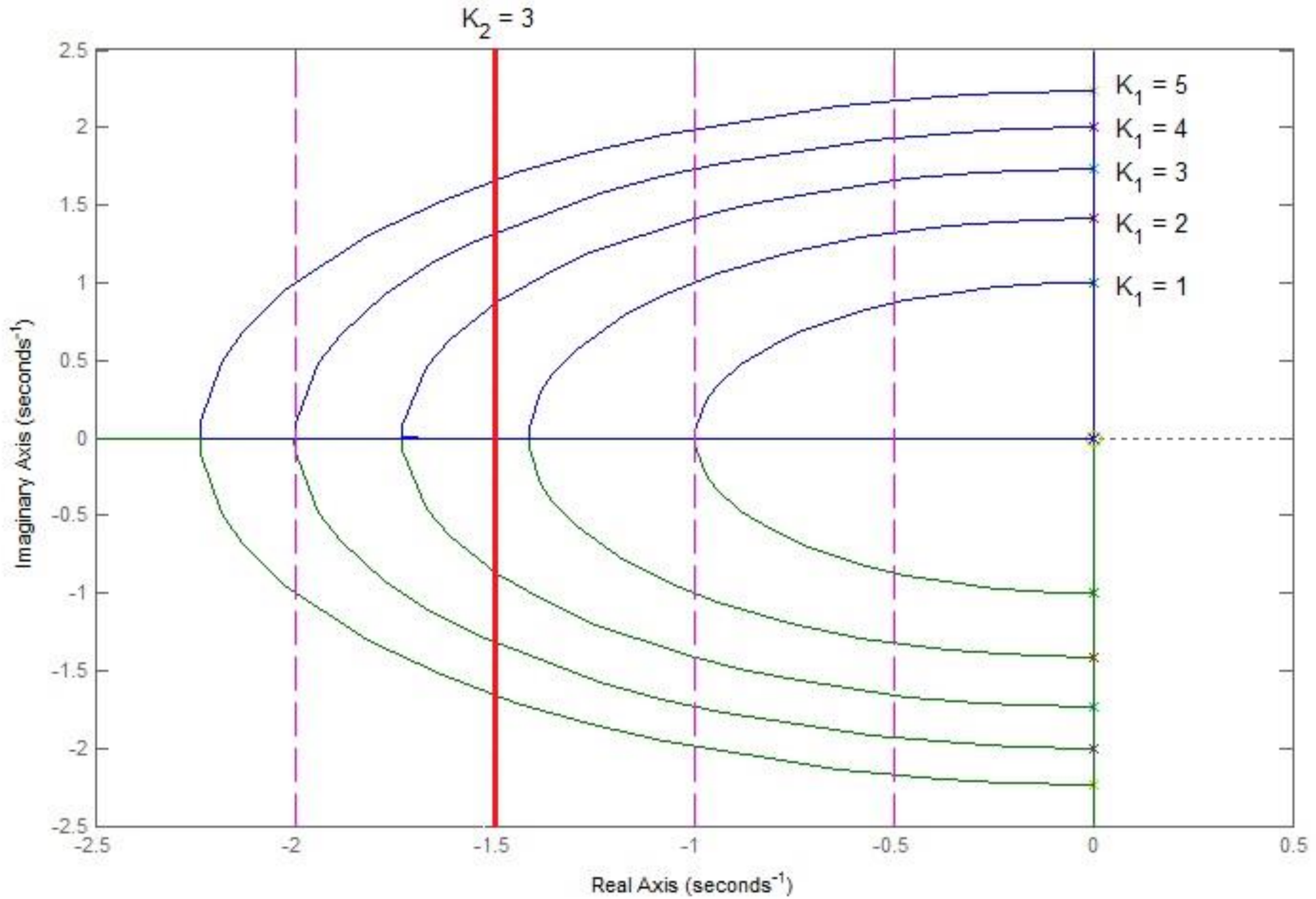
$$\xi\omega_n > 1{,}5 \quad (t_s < 2{,}67)$$

Como os valores de K_1 e K_2 seriam obtidos?

Como visto anteriormente, a parte real é constante e representa uma reta em $-K_2/2$. Portanto, para garantir a especificação

$$K_2 > 3$$

Exemplo



$K_2 = 3$
$K_1 = 5$
$K_1 = 4$
$K_1 = 3$
$K_1 = 2$
$K_1 = 1$
Imaginary Axis (seconds^{-1})
Real Axis (seconds^{-1})
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5

Exemplo

O valor de K_1 pode ser obtido resolvendo

$$\Delta(s) = s^2 + 3s + K_1 = 0 \quad \text{para} \quad \text{s} = \text{-1,5} + \text{j}\omega$$

cuja solução é K_1 = 2,25. (reta em K_2 = 3)

Portanto, para garantir um tempo de acomodação menor do que 2,67 segundos:

$$K_2 > 3 \quad \text{e} \quad K_1 > 2{,}25$$

Exemplo

Suponha que deseja-se garantir também um sobressinal menor do que 4,32%, ou seja,

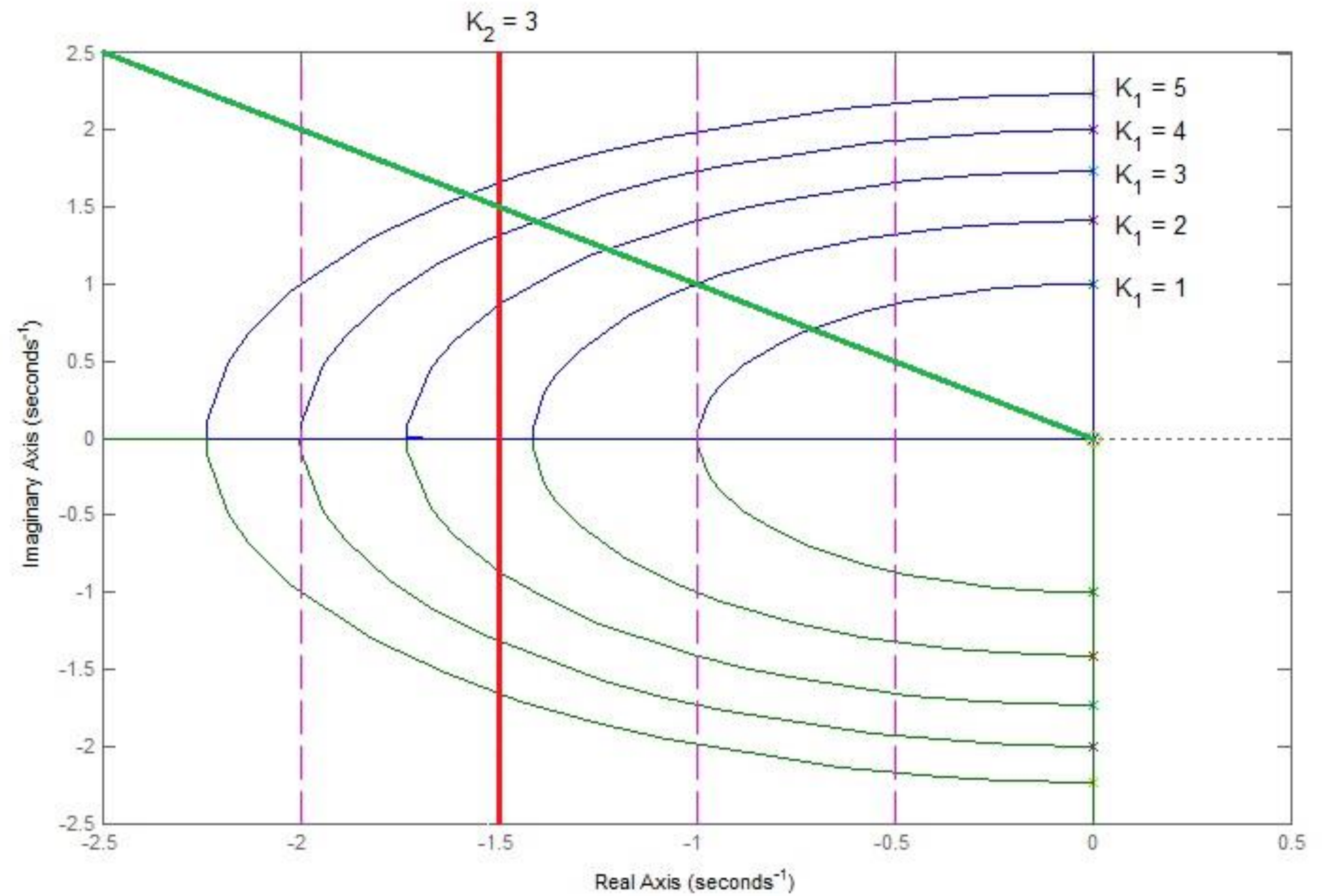
$$\xi > \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta < 45^\circ$$

Neste caso, a interseção do LR com a especificação de coeficiente de amortecimento pode ser obtida resolvendo:

$$\Delta(s) = s^2 + K_2 s + K_1 = 0 \quad \text{para} \quad \mathrm{s}_0 = \sigma(\text{-}1 + \mathrm{j})$$

$$\theta = 45^\circ$$

Exemplo



K2 = 3
K1 = 5
K1 = 4
K1 = 3
K1 = 2
K1 = 1
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
Imaginary Axis (seconds-1)
Real Axis (seconds-1)

Exemplo

Substituindo s_0 na eq. característica, tem-se

$$\Delta(s_0) = -j2\sigma^2 - K_2\sigma + jK_2\sigma + K_1 = 0$$

$$\begin{cases} K_1 - K_2\sigma = 0 \\ \sigma(K_2 - 2\sigma) = 0 \end{cases} \qquad \sigma = 0 \quad \text{ou} \quad K_2 = 2\sigma$$

$$\sigma = 0 \qquad \rightarrow \quad K_1 = 0 \qquad (origem)$$

$$\sigma = K_2/2 \quad \rightarrow \quad K_1 = K_2^2/2$$

Exemplo

Para garantir a especificação de tempo de acomodação (intersecção com a reta passando em -1,5) é necessário $K_2>3$.

Considerando o valor mínimo $K_2 \equiv 3$, chega-se a

$K_1 > 4,5$.

Assim, para atender ambas as especificações:

$$K_2 \equiv 3 \quad \text{e} \quad K_1 > 4,5$$

Outras combinações podem ser obtidas.

Por exemplo:

$$K_1 \equiv 5 \quad \rightarrow \quad K_2 > ?$$

Exemplo

$$K_1 \equiv 5 \quad \rightarrow \quad K_2 > 3{,}16$$