Análise da Resposta em Frequência

Diagrama de Nyquist para sistemas com singularidades na origem

Profa. Cristiane Paim

Introdução

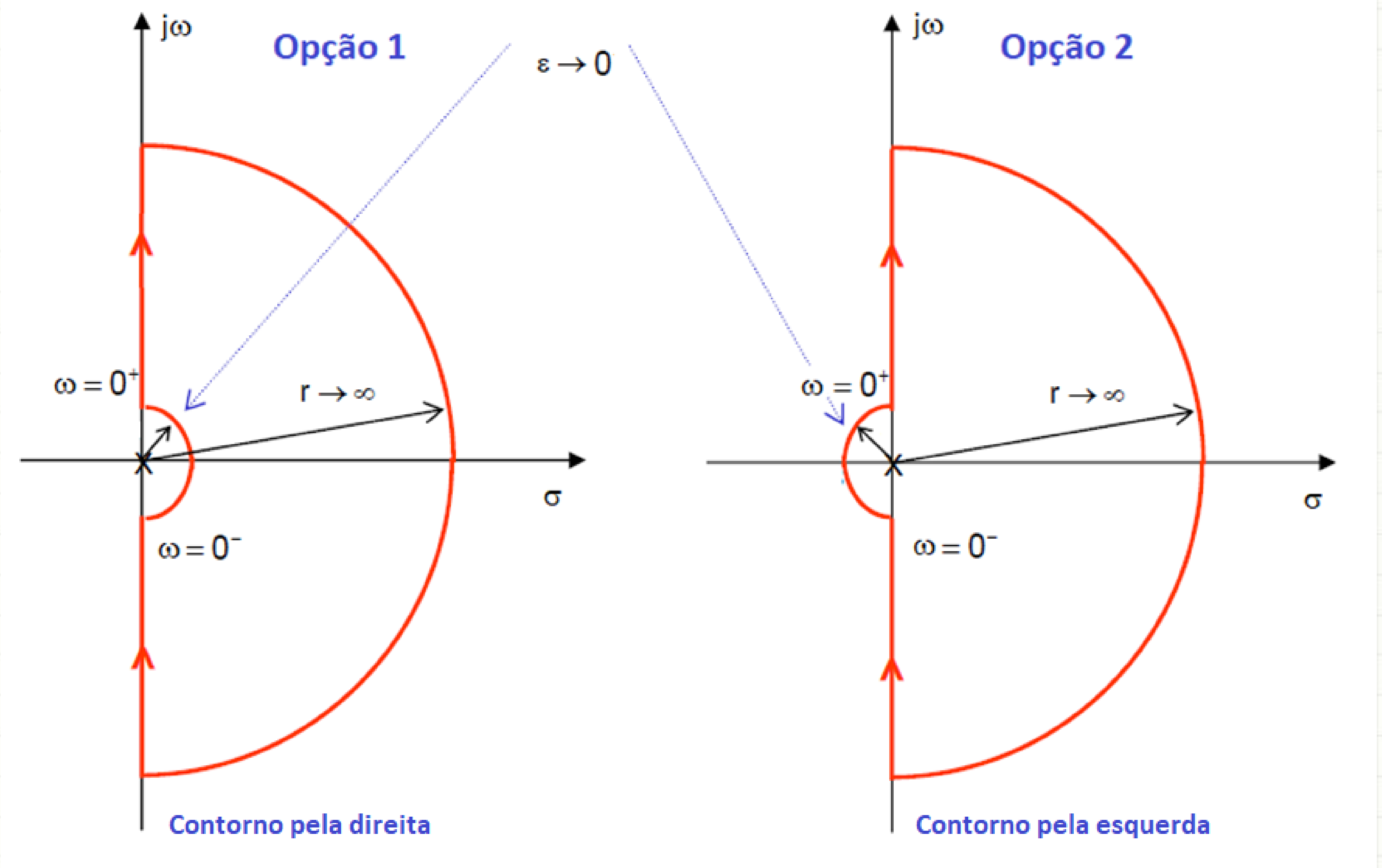
Quando a função de transferência em análise possuir singularidade(s) na origem é necessário **modificar o contorno de Nyquist de modo a evitar esta(s) singularidade(s).**

A singularidade é evitada traçando-se uma semicircunferência de raio ε muito pequeno em torno desta. Para o traçado do Diagrama de Nyquist faz-se $\varepsilon \rightarrow 0$.

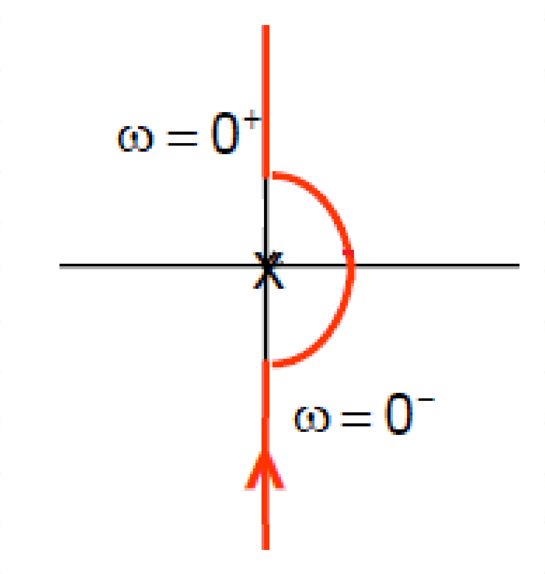
Existem duas possibilidades para o contorno de uma singularidade sobre o eixo imaginário.

Considerando, por exemplo, um polo na origem, os dois contornos definidos a seguir pode ser utilizados.

Contornos da origem



Contornos da origem

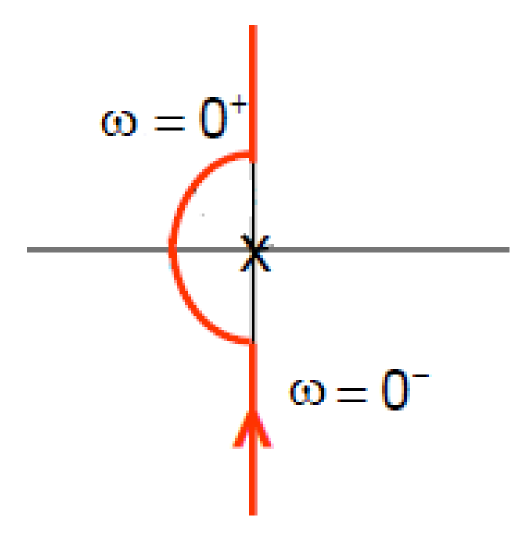


CONTORNO PELA DIREITA

A origem é evitada usando uma semicircunferência que varia no **sentido anti-horário** de 0^- a 0^+, de -90° a +90°.

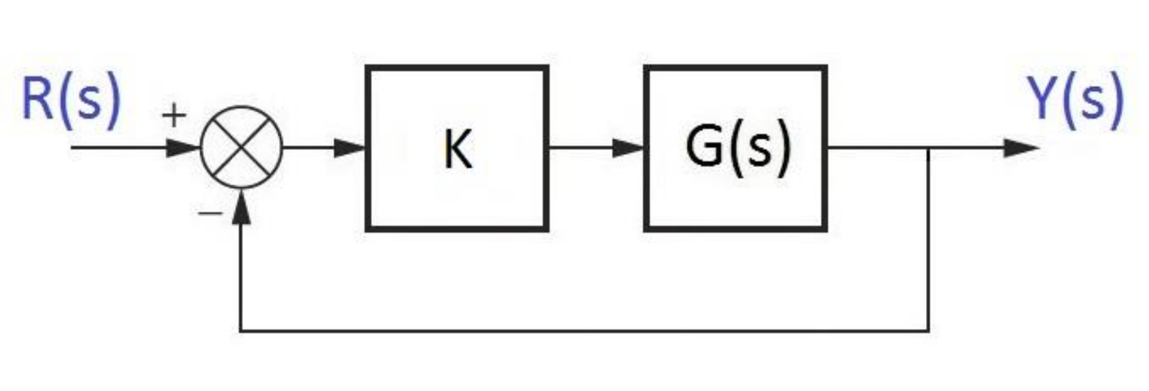
CONTORNO PELA ESQUERDA

A origem é evitada usando uma semicircunferência que varia no **sentido horário.** **Neste caso, o polo na origem está dentro do contorno de Nyquist e, portanto, precisa ser considerado na análise.**



Exemplo 1 – polo na origem

Analisar a estabilidade do sistema para -∞ < K < ∞, utilizando o Critério de Nyquist.



$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + s}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{-2\omega^2 + j\omega(1-\omega^2)} = \frac{-2\omega^2 - j\omega(1-\omega^2)}{4\omega^4 + \omega^2(1-\omega^2)^2}$$

Exemplo 1 – polo na origem

Diagrama de Nyquist

$$G(j\omega) = \frac{-2}{4\omega^2 + (1-\omega^2)^2} - j\frac{(1-\omega^2)}{4\omega^3 + \omega(1-\omega^2)^2}$$

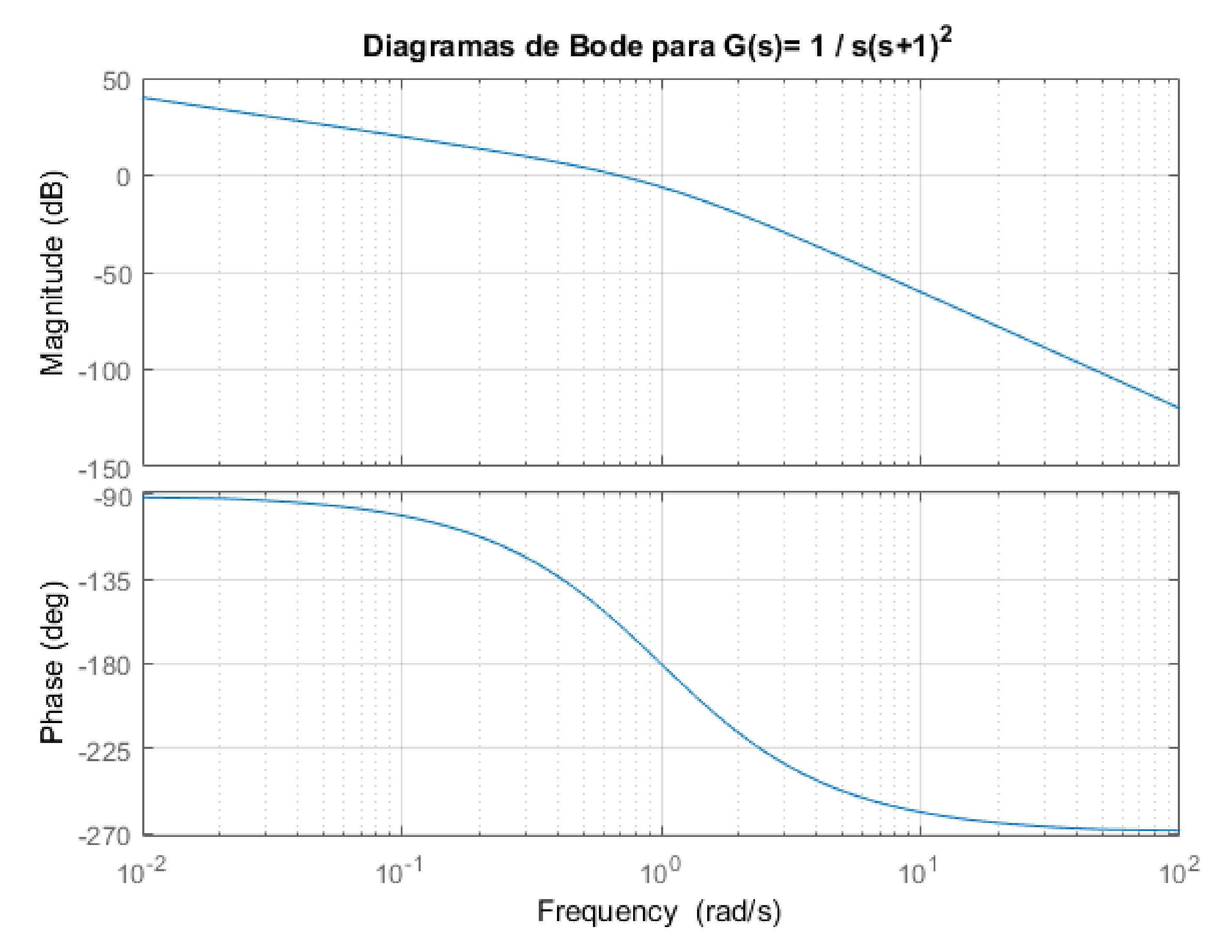
$$\omega = 0^+ \qquad G(0^+) = -2 - j\infty = \infty\angle -90^\circ$$

$$\omega = +\infty \qquad G(j\omega) \approx \frac{1}{(j\omega)^3} = j\frac{1}{\infty} = 0\angle 90^\circ$$

$$\omega = -\infty \qquad G(-\infty) = 0\angle -90^\circ$$

$$\omega = 0^- \qquad G(0^-) = \infty\angle 90^\circ$$

Exemplo 1 – polo na origem (Diagramas de Bode)



Exemplo 1 – polo na origem

$$G(j\omega) = \frac{-2}{4\omega^2 + (1-\omega^2)^2} - j\frac{(1-\omega^2)}{4\omega^3 + \omega(1-\omega^2)^2}$$

<u>Cruzamento com eixo real</u>:

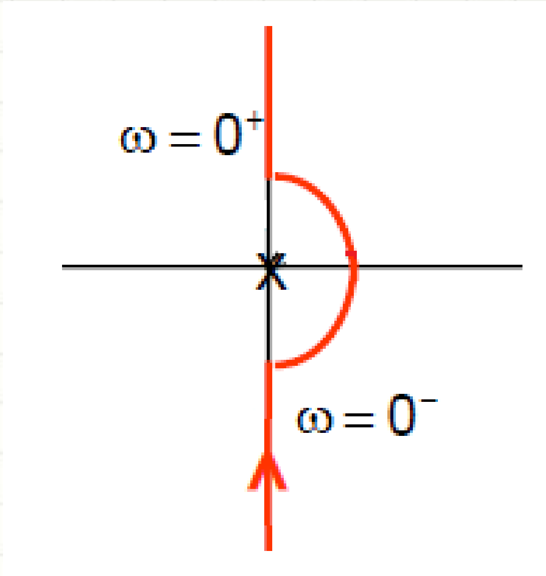
$$1-\omega^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \omega = \pm 1$$

$$\omega = \pm 1 \quad \rightarrow \quad G(j\omega) = -\frac{1}{2}$$

<u>Cruzamento com eixo imaginário</u>: $\omega=\pm\infty$

Exemplo 1 – polo na origem

Análise do comportamento em torno da origem



Seja o contorno pela direita e $s = \varepsilon e^{j\theta}$. Neste caso, θ varia de 0^- a 0^+, de -90° a +90°, no **sentido anti-horário.**

Assim,

$$G(s) = \frac{1}{\varepsilon e^{j\theta}(\varepsilon e^{j\theta}+1)^2} = \frac{1}{\varepsilon} e^{-j\theta} \frac{1}{(\varepsilon e^{j\theta}+1)^2}$$

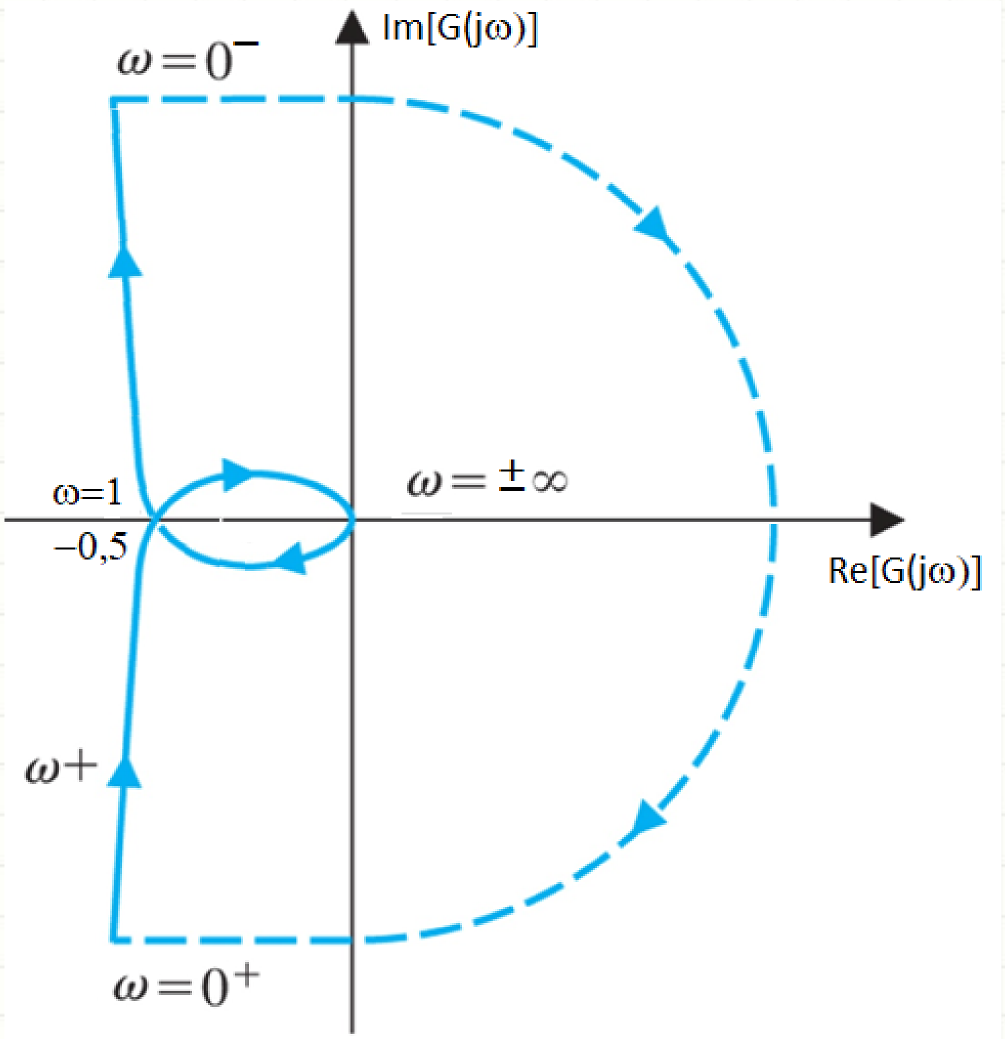
Exemplo 1 – polo na origem

Para $\varepsilon \to 0$, tem-se

$$G(s) \approx \frac{1}{0} e^{-j\theta} = \infty \angle -\theta$$

que representa no Diagrama de Nyquist uma **semicircunferência de raio infinito no sentido horário**.

Exemplo 1 – polo na origem



Exemplo 1 – polo na origem

Análise da estabilidade

Como G(s) não possui polos no SPD, P=0.

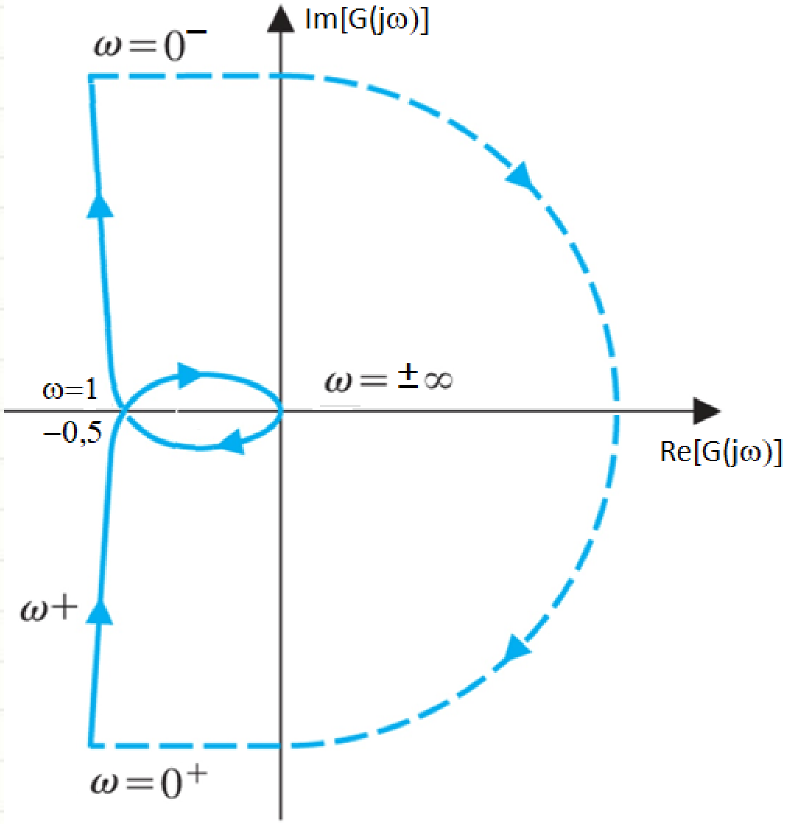
Logo, para estabilidade é necessário N=0.

Do Diagrama de Nyquist observa-se que N=0 quando

$$-\frac{1}{K} < -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 0 < K < 2$$

Portanto, o sistema é estável para

$$0 < K < 2$$



Exemplo 1 – polo na origem

Análise para variação completa do ganho K

N=1 ⇨ Sistema instável com 1 polo no SPD.

$$-\frac{1}{K} > 0 \quad \rightarrow \quad K < 0$$

N=2 ⇨ Sistema instável com 2 polos no SPD.

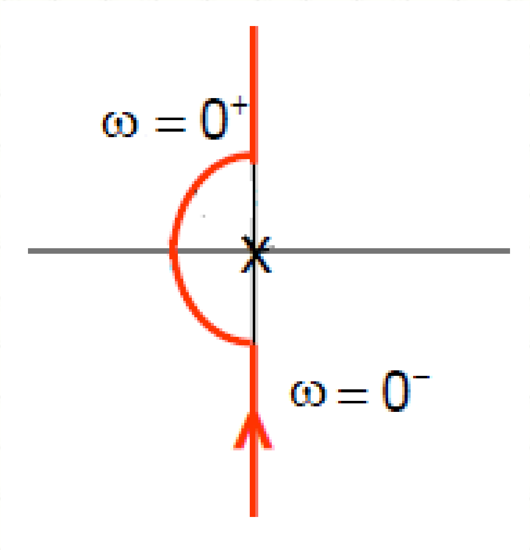
$$-\frac{1}{2} < -\frac{1}{K} < 0 \qquad -\frac{1}{K} < 0 \quad \rightarrow \quad K > 0$$

$$-\frac{1}{K} > -\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad K > 2$$

Ou seja, **K > 2**.

Exemplo 1b – polo na origem (contorno pela esquerda)

E se fosse utilizado o contorno pela esquerda para o polo da origem?



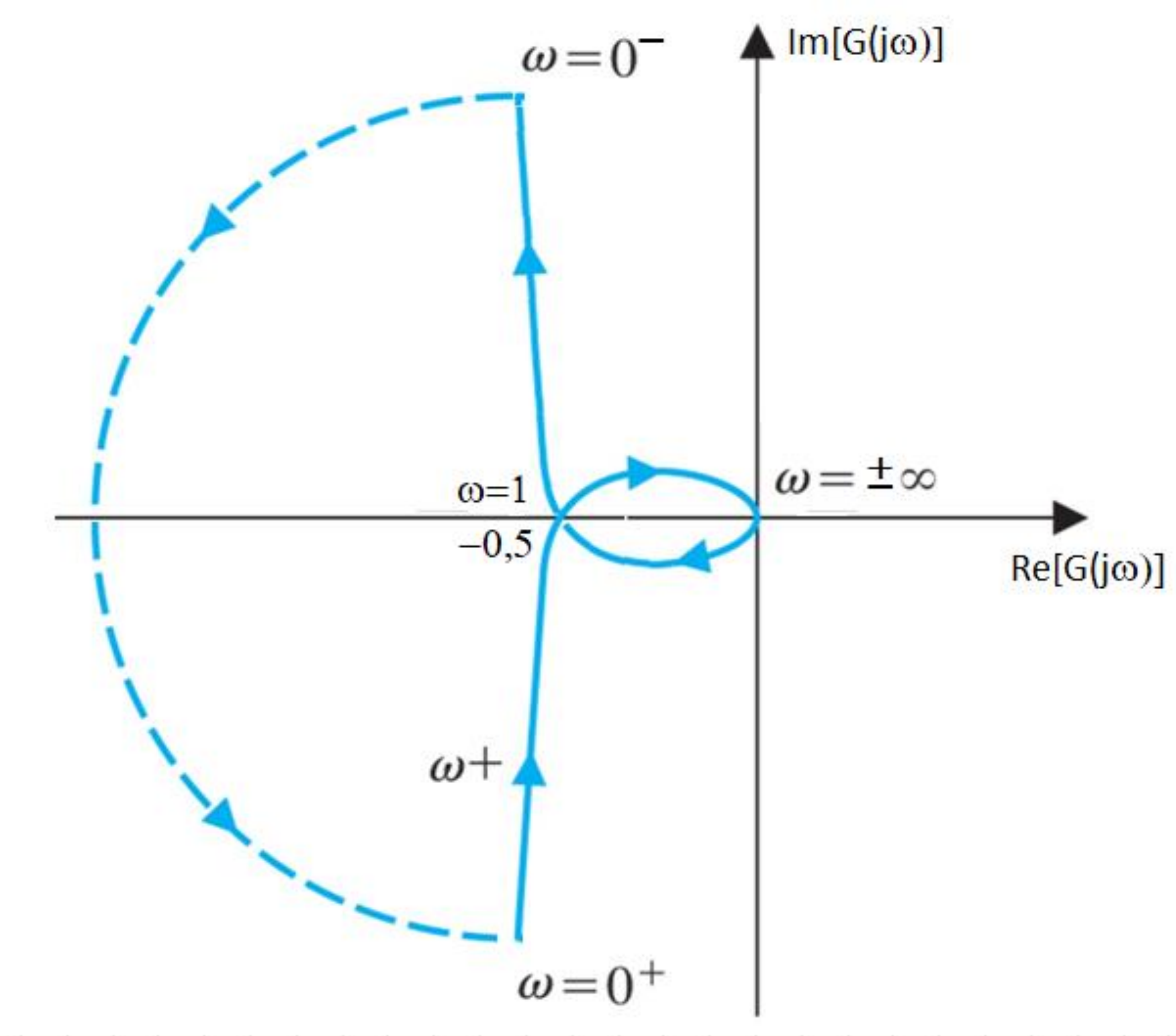
Seja o contorno pela esquerda e $s = \varepsilon\, e^{j\theta}$. Agora θ varia de 0^- a 0^+, de $-90°$ a $+90°$, no **sentido horário.**

A análise para $\varepsilon \to 0$ é similar:

$$G(s) \approx \frac{1}{0} e^{-j\theta} = \infty \angle -\theta$$

Porém, representa agora uma **semicircunferência de raio infinito no sentido anti-horário.**

Exemplo 1b – polo na origem (contorno pela esquerda)

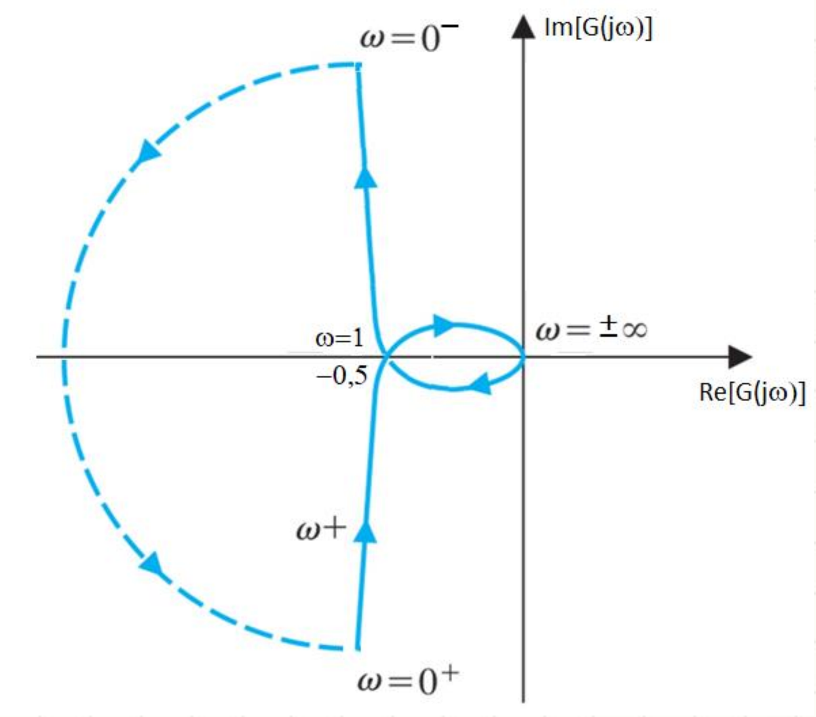


Exemplo 1b – polo na origem (contorno pela esquerda)

Análise da estabilidade

Como o contorno de Nyquist inclui o polo da origem, este precisa ser contabilizado, logo, **P=1**.

Assim, para estabilidade é necessário N=-1, ou seja, um **contorno no sentido anti-horário**.



Exemplo 1b – polo na origem (contorno pela esquerda)

Análise da estabilidade

Do Diagrama de Nyquist observa-se que N=-1 quando

$$-\frac{1}{K} < -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 0 < K < 2$$

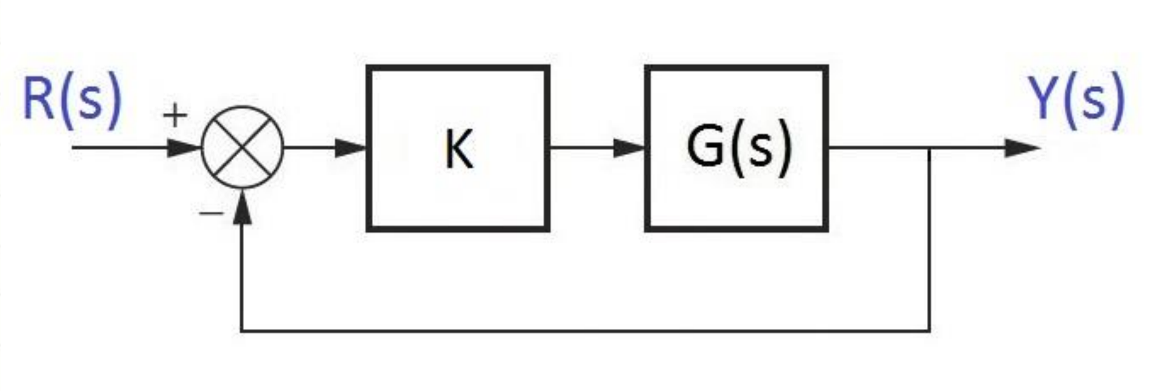
Portanto, o sistema é estável para

$$0 < K < 2$$

Mesma conclusão obtida contornando o polo na origem pela direita (sentido anti-horário).

Exemplo 2 – polo duplo na origem

Analisar a estabilidade do sistema para -∞ < K < +∞, utilizando o Critério de Nyquist.



$$G(s) = \frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{1}{s^3 + s^2}$$

$$G(j\omega) = \frac{-1}{\omega^2(\omega^2+1)} + j\frac{1}{\omega(\omega^2+1)}$$

Exemplo 2 – polo duplo na origem

Diagrama de Nyquist

$$G(j\omega) = \frac{-1}{\omega^2(\omega^2+1)} + j\frac{1}{\omega(\omega^2+1)}$$

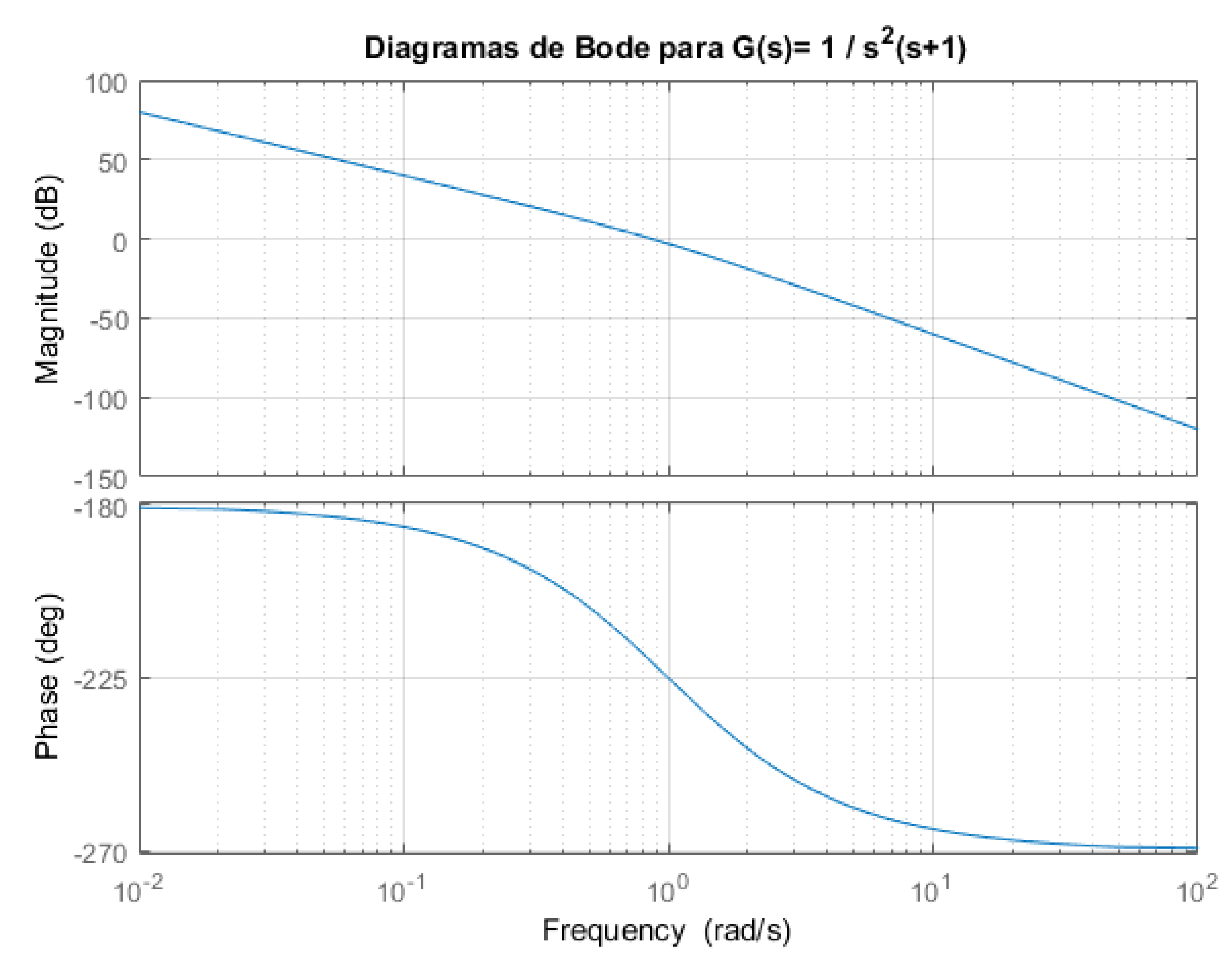
$$\omega = 0^+ \qquad G(0^+) = \frac{-1+j}{0} = \infty\angle -180^\circ$$

$$\omega = +\infty \qquad G(j\omega) \approx \frac{1}{(j\omega)^3} = j\frac{1}{\infty} = 0\angle 90^\circ$$

$$\omega = -\infty \qquad G(-\infty) = 0\angle -90^\circ$$

$$\omega = 0^- \qquad G(0^-) = \infty\angle 180^\circ$$

Exemplo 2 – polo duplo na origem (Diagramas de Bode)

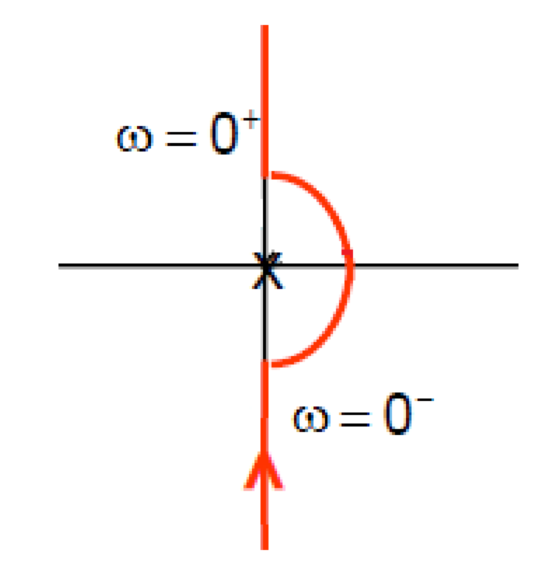


Exemplo 2 – polo duplo na origem

Cruzamento com eixo real: : $\omega=\pm\infty$

Cruzamento com eixo imaginário: $\omega=\pm\infty$

Análise do comportamento em torno da origem



Seja o contorno pela direita e $s= \varepsilon e^{j\theta}$, sendo que θ varia de 0^- a 0^+, de -90° a +90°, no **sentido anti-horário.**

Exemplo 2 – polo duplo na origem

Assim,

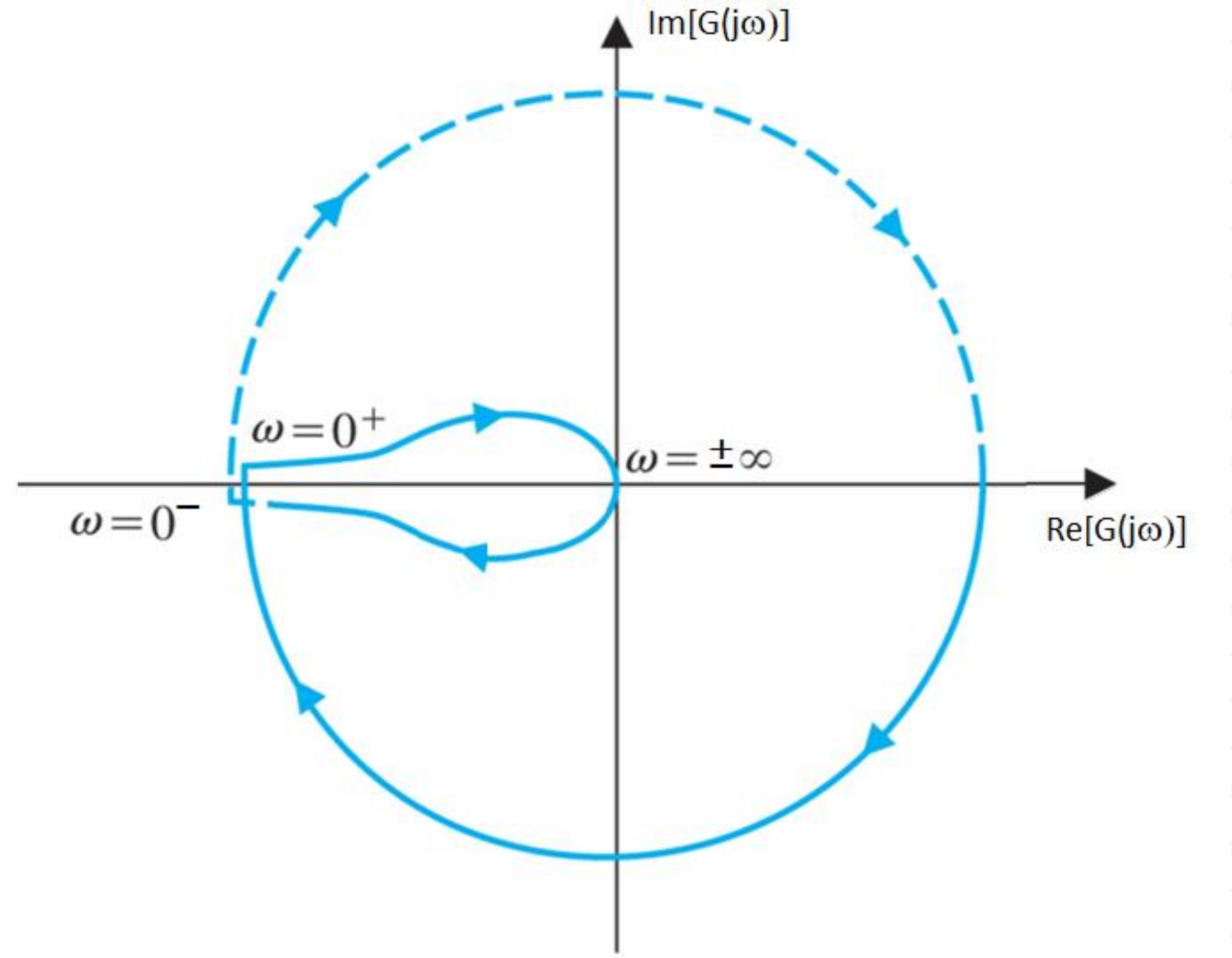
$$G(s)=\frac{1}{\varepsilon^2 e^{j2\theta}(\varepsilon e^{j\theta}+1)}=\frac{1}{\varepsilon^2}e^{-j2\theta}\frac{1}{(\varepsilon e^{j\theta}+1)}$$

Para $\varepsilon \to 0$, tem-se

$$G(s)\approx\frac{1}{0}e^{-j2\theta}=\infty\angle-2\theta$$

que representa no Diagrama de Nyquist uma circunferência de raio infinito no sentido horário.

Exemplo 2 – polo duplo na origem



Exemplo 2 – polo duplo na origem

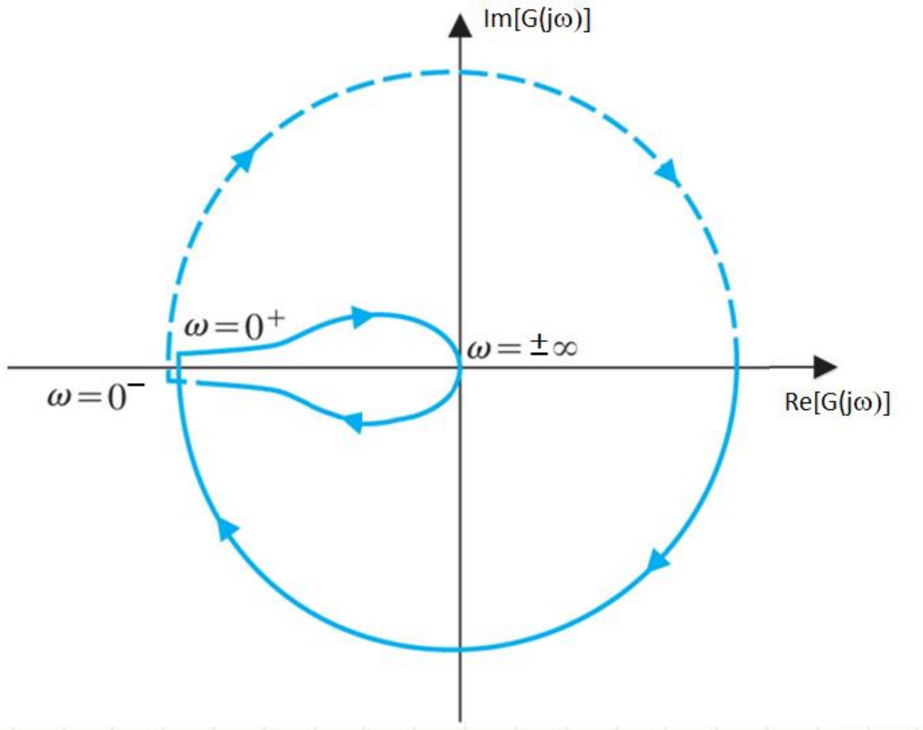
Análise da estabilidade

P=0: G(s) não possui polos no SPD

Logo, para estabilidade é necessário N=0.

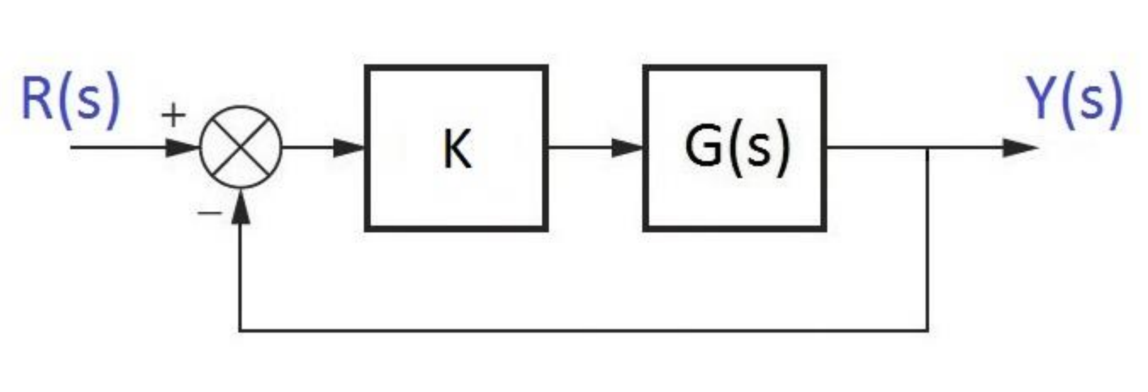
Do Diagrama de Nyquist observa-se que é impossível obter-se N=0.

Portanto, o sistema é instável para ∀K.



Exemplo 3 – zero na origem

Analisar a estabilidade do sistema para -∞ < K < +∞, utilizando o Critério de Nyquist.



$$G(s) = \frac{8s}{(s-1)(s-2)} = \frac{8s}{s^2 - 3s + 2}$$

$$G(j\omega) = \frac{j8\omega}{(2-\omega^2) - j3\omega}$$

Exemplo 3 – zero na origem

Diagrama de Nyquist

$$G(j\omega)=\frac{-24\omega^2}{(2-\omega^2)^2+9\omega^2}+j\frac{8\omega(2-\omega^2)}{(2-\omega^2)^2+9\omega^2}$$

$\omega=0^+$ $$G(0^+)=\frac{-0+j0}{4}=0\angle 90^\circ$$

$\omega=+\infty$ $$G(j\omega)\approx\frac{1}{(j\omega)}=-j\frac{1}{\infty}=0\angle-90^\circ$$

$\omega=-\infty$ $$G(-\infty)=0\angle 90^\circ$$

$\omega=0^-$ $$G(0^-)=0\angle-90^\circ$$

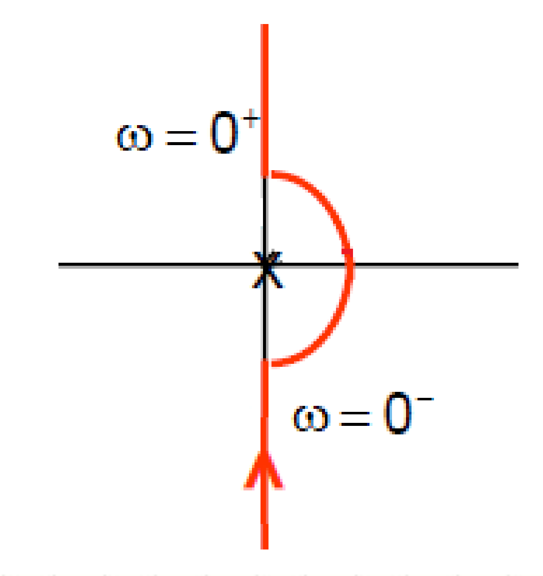
Exemplo 3 – zero na origem

Cruzamento com eixo imaginário: $\omega=0$

Cruzamento com eixo real: $\omega=0$ ou $2-\omega^2=0$

$$\omega = \pm\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad G(j\omega) = -8/3 = -2{,}67$$

Análise do comportamento em torno da origem



Seja o contorno pela direita e $s=e^{j\theta}$, sendo que θ varia de 0^- a 0^+, de -90° a +90°, no **sentido anti-horário.**

Exemplo 3 – zero na origem

Assim,

$$G(s) = \frac{8\varepsilon e^{j\theta}}{(\varepsilon e^{j\theta} - 1)(\varepsilon e^{j\theta} - 2)}$$

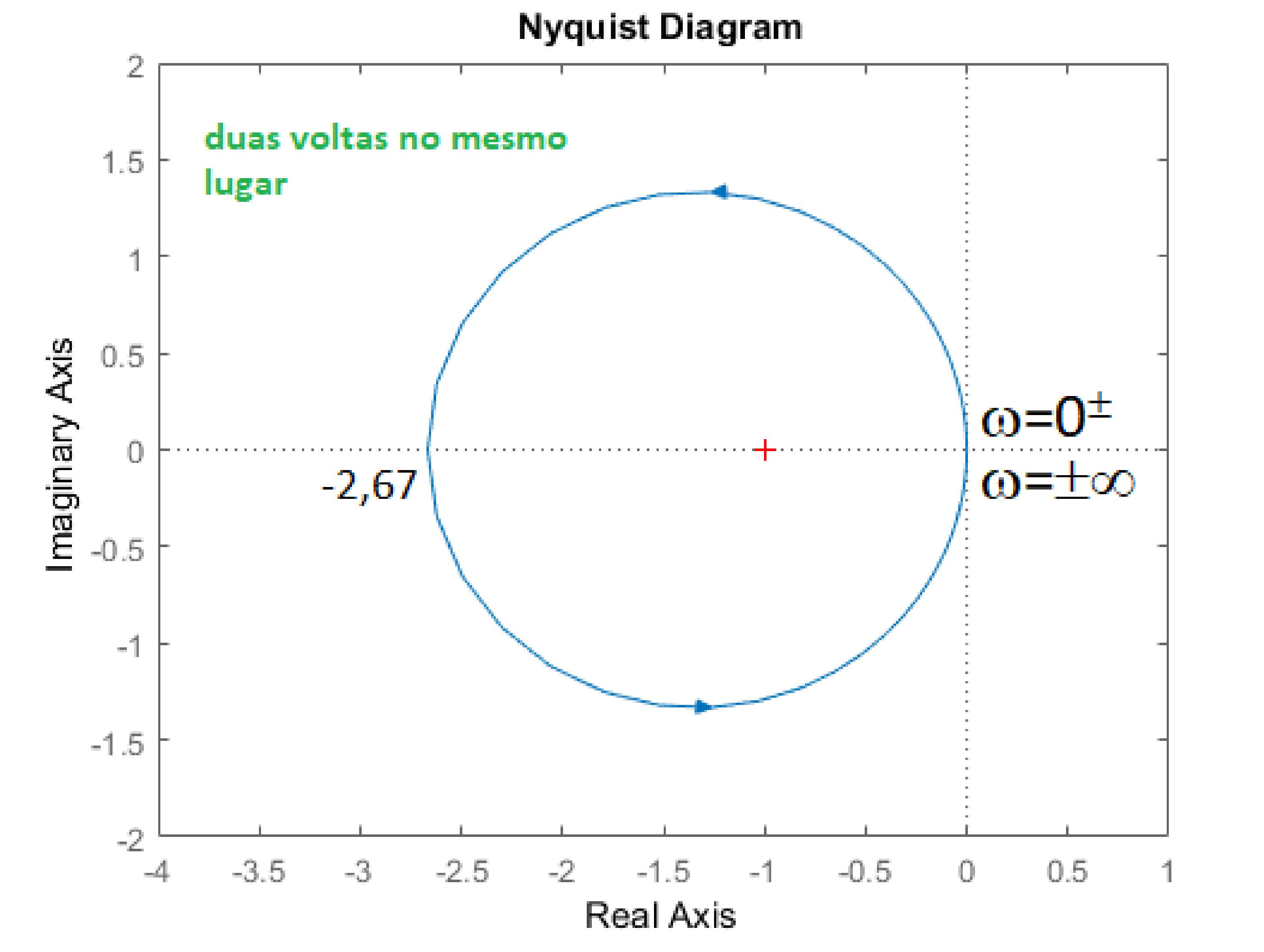
Para $\varepsilon \rightarrow 0$, tem-se

$$G(s) = \frac{0}{2}$$

que representa no Diagrama de Nyquist uma **semicircunferência de raio ZERO.**

Ou seja, a presença de um zero na origem não gera alterações no diagrama de Nyquist.

Exemplo 3 – zero na origem

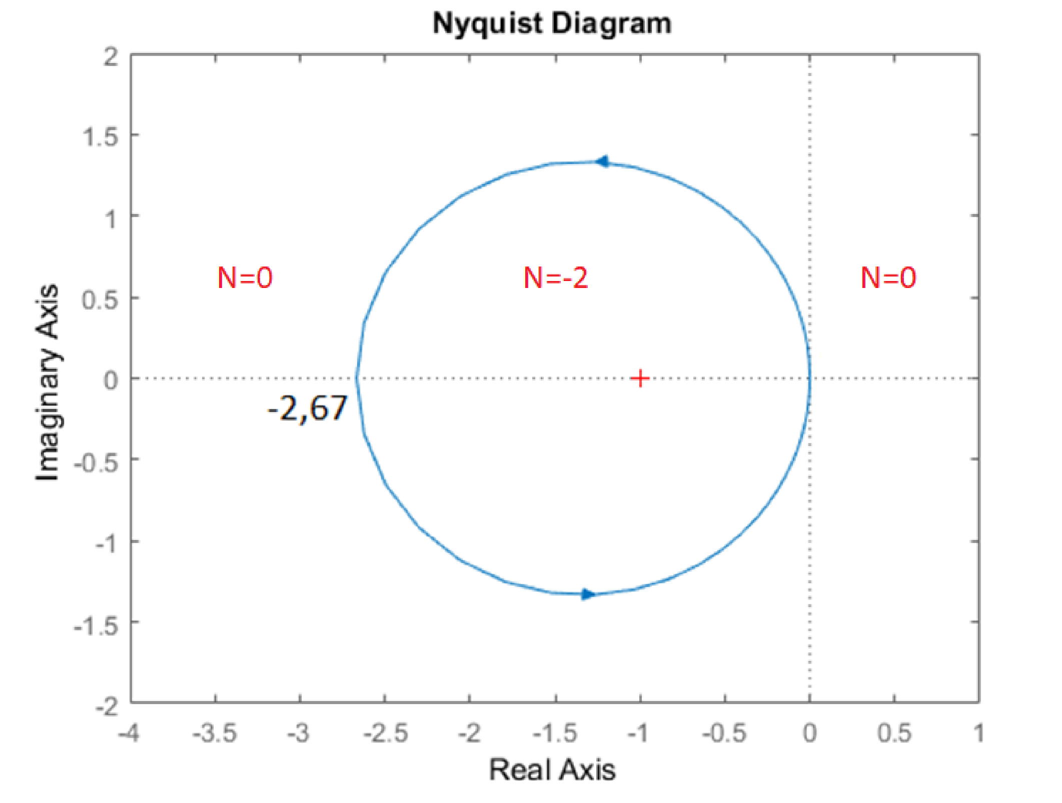


Exemplo 3 – zero na origem

Análise da estabilidade

Como G(s) possui 2 polos no SPD, P=2. Logo, para estabilidade é necessário N=-2 (2 voltas no sentido anti-horário). Do Diagrama de Nyquist observa-se esta condição para

$$-\frac{8}{3} < -\frac{1}{K} < 0$$

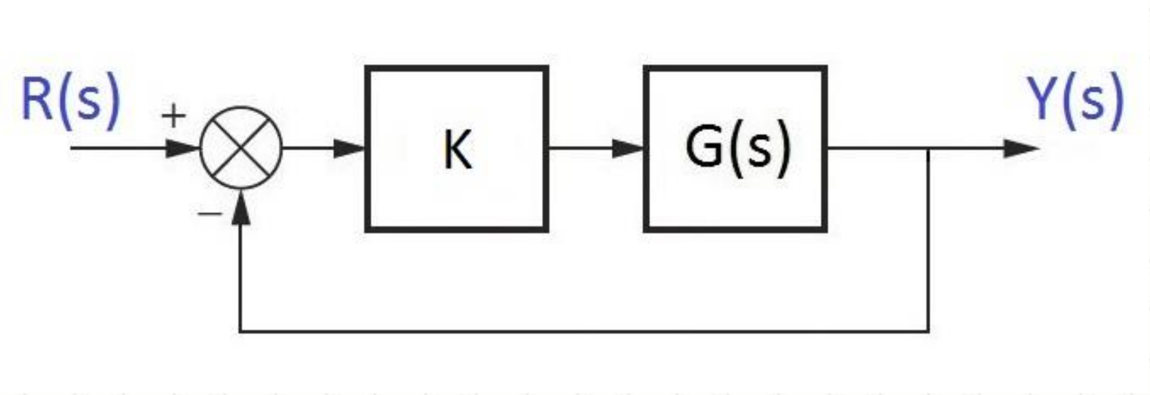


Portanto, o sistema é estável para

$$K > 0,375$$

Exemplo 4 – polo na origem e atraso

Analisar a estabilidade do sistema para -∞ < K < ∞, utilizando o Critério de Nyquist.



$$G(s) = \frac{1}{s} e^{-s}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{\omega}\left[\text{-sen}(\omega) + j\cos(\omega)\right]$$

Exemplo 4 – polo na origem e atraso

Como visto anteriormente

$$\omega = 0^{+} \qquad G(j\omega) = -1 - j\infty = \infty\angle -90^{\circ}$$

$$\omega \to \infty \qquad G(\infty) \approx \frac{1}{j\omega} = 0\angle -90^{\circ}$$

$$\omega = -\infty \qquad G(\infty) \approx 0\angle +90^{\circ}$$

$$\omega = 0^{-} \qquad G(j\omega) = \infty\angle 90^{\circ}$$

Exemplo 4 – polo na origem e atraso

Cruzamento com eixo real: Im[G(jω)]=0

$$\frac{-\cos(\omega)}{\omega} = 0 \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \cdots$$

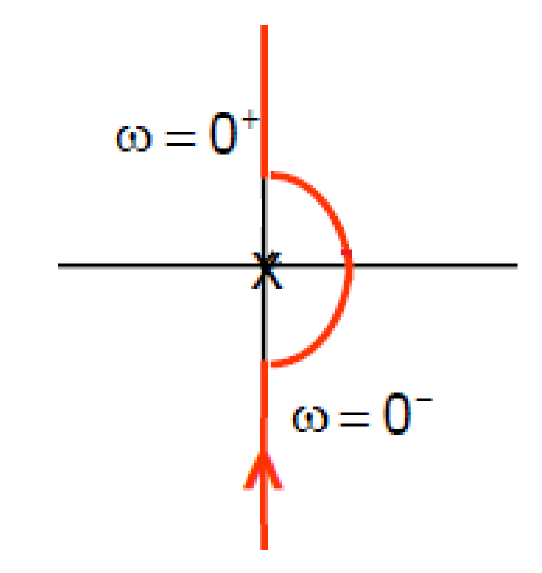
Cruzamento com eixo imaginário: Re[G(jω)]=0

$$\frac{-\text{sen}(\omega)}{\omega} = 0 \quad \rightarrow \quad \omega = \pi, 2\pi, 3\pi, \cdots$$

Frequência	Real [G(jω)]	Imag [G(jω)]
$\omega = \pi/2$	$-2/\pi$	0
$\omega = \pi$	0	$1/\pi$
$\omega = 3\pi/2$	$2/3\pi$	0
$\omega = 2\pi$	0	$-1/2\pi$

Exemplo 4 – polo na origem e atraso

Análise do comportamento em torno da origem



Seja um contorno pela direita e $s=\varepsilon e^{j\theta}$, sendo que θ varia de 0^- a 0^+, de -90° a +90°, no **sentido anti-horário.**

Assim,

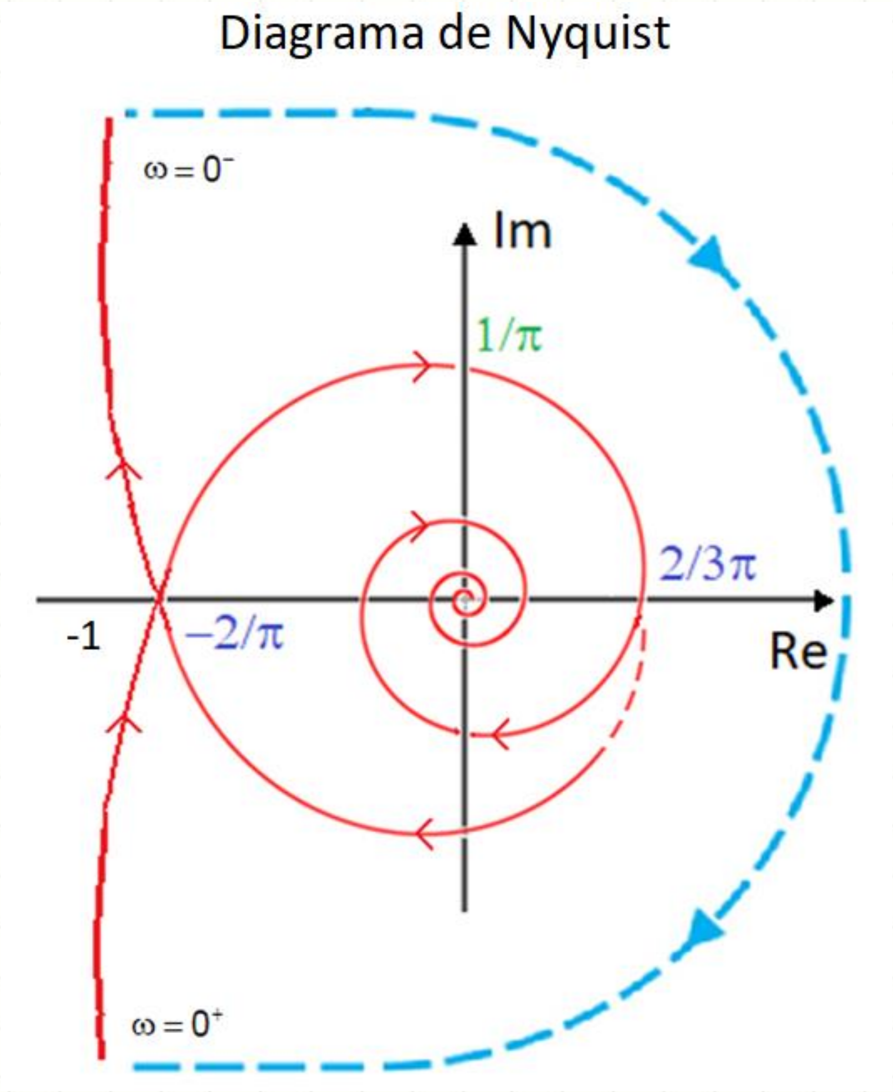
$$G(s) = \frac{1}{\varepsilon e^{j\theta}} e^{-\varepsilon e^{j\theta}}$$

Para $\varepsilon \rightarrow 0$, tem-se

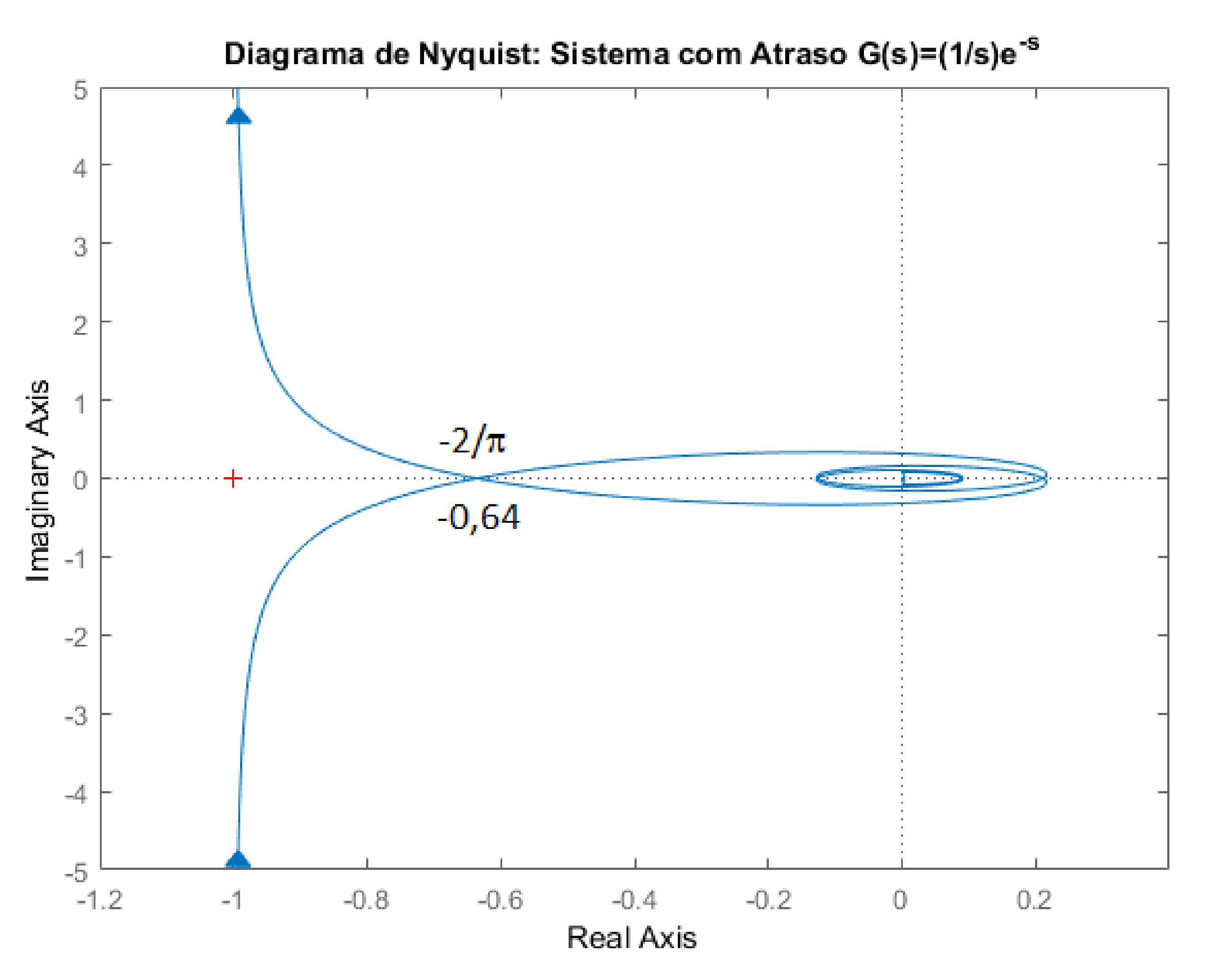
$$G(s) = \frac{1}{0} e^{-j\theta} = \infty \angle -\theta$$

que representa uma **semicircunferência de raio infinito no sentido horário.**

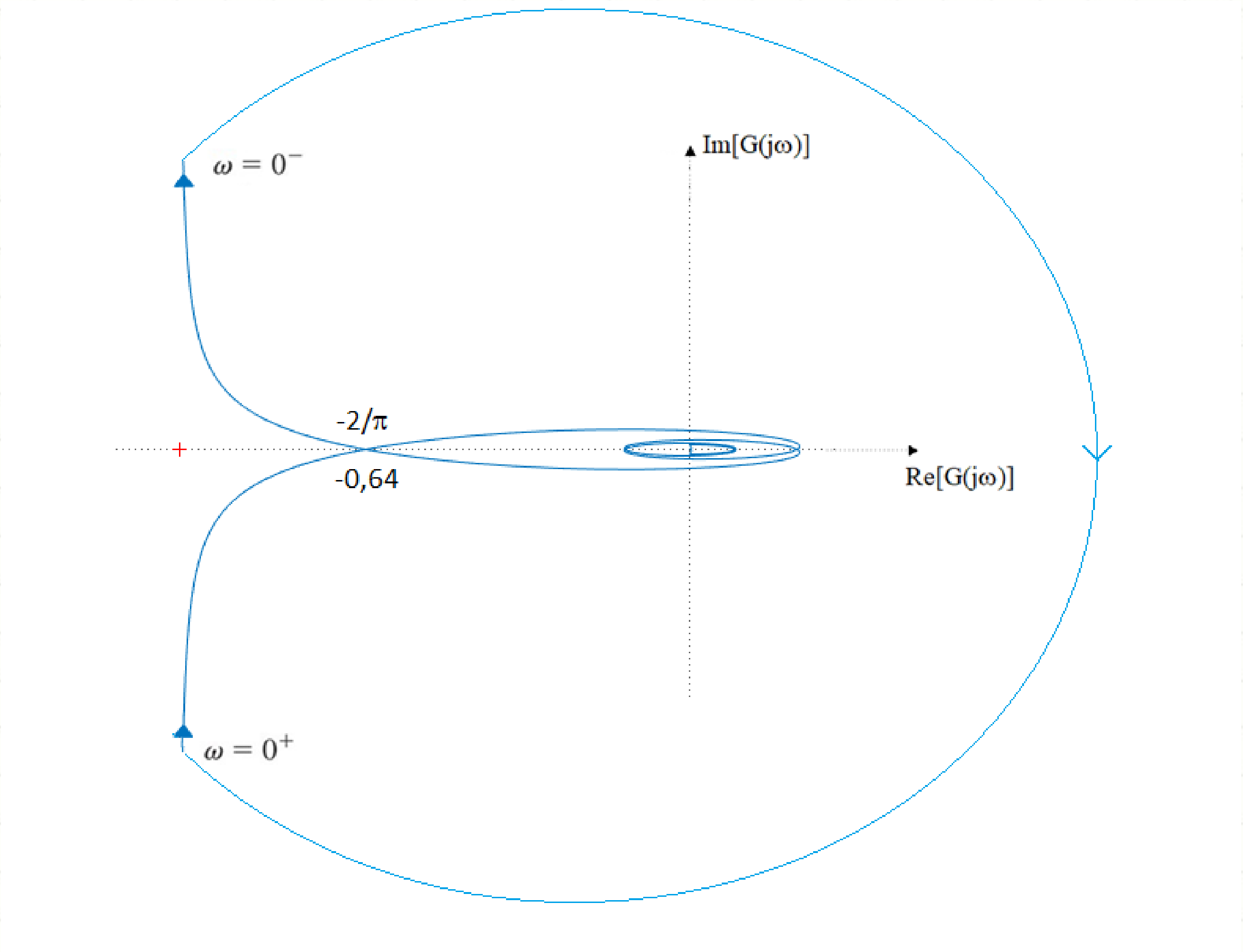
Exemplo 4 – polo na origem e atraso



Exemplo 4 – polo na origem e atraso



Exemplo 4 – polo na origem e atraso



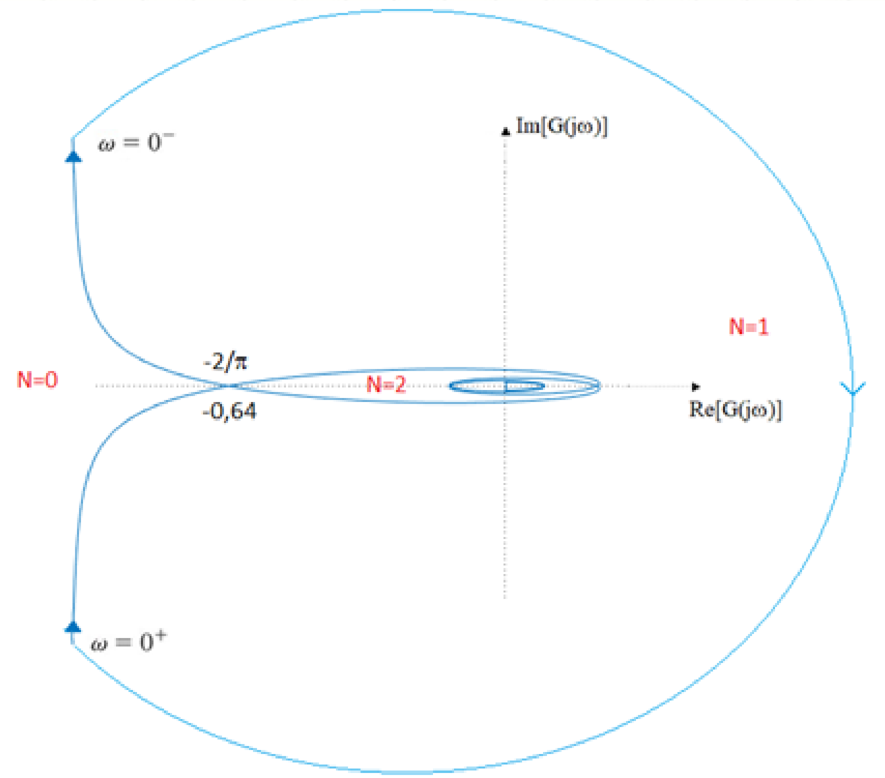
Exemplo 4 – polo na origem e atraso

Análise da estabilidade

Como G(s) não possui polos no SPD, P=0. Logo, para estabilidade é necessário N=0.

Do diagrama de Nyquist observa-se esta condição para

$$-\frac{1}{K} < -\frac{2}{\pi}$$

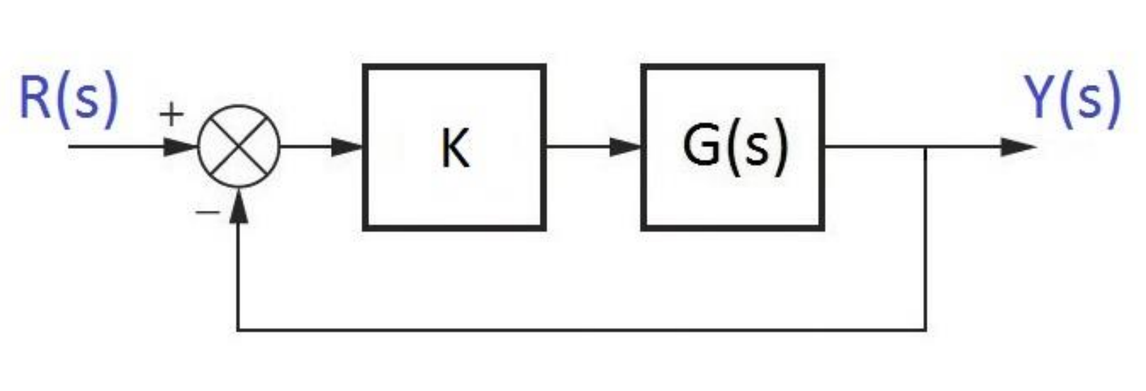


Portanto, o sistema é estável para

$$0 < K < \frac{\pi}{2}$$

Exemplo 5 – polo na origem e fase não mínima

Analisar a estabilidade do sistema para -∞ < K < +∞, utilizando o Critério de Nyquist.



$$G(s) = \frac{1}{s(s-1)}$$

$$G(j\omega) = \frac{-1}{\omega^2+1} + j\frac{1}{\omega(\omega^2+1)}$$

Exemplo 5 – polo na origem e fase não mínima

Diagrama de Nyquist

$$G(j\omega) = \frac{-1}{\omega^2+1} + j\frac{1}{\omega(\omega^2+1)}$$

$$\omega = 0^+ \qquad G(j\omega) = -1 + j\infty = \infty\angle 90^\circ$$

$$\omega = +\infty \qquad G(\infty) \approx \frac{1}{(j\omega)^2} = 0\angle 180^\circ$$

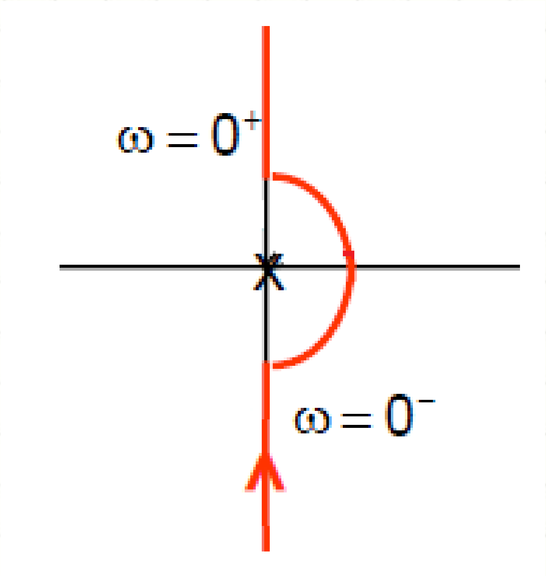
$$\omega = -\infty \qquad G(\infty) \approx 0\angle -180^\circ$$

$$\omega = 0^- \qquad G(j\omega) = \infty\angle -90^\circ$$

Exemplo 5 – polo na origem e fase não mínima

Cruzamentos com eixos real e imaginário: apenas no infinito.

Comportamento em torno da origem



Seja um contorno pela direita e s= $\varepsilon e^{j\theta}$, sendo que θ varia de 0^- a 0^+, de -90° a +90°, no **sentido anti-horário.** Assim,

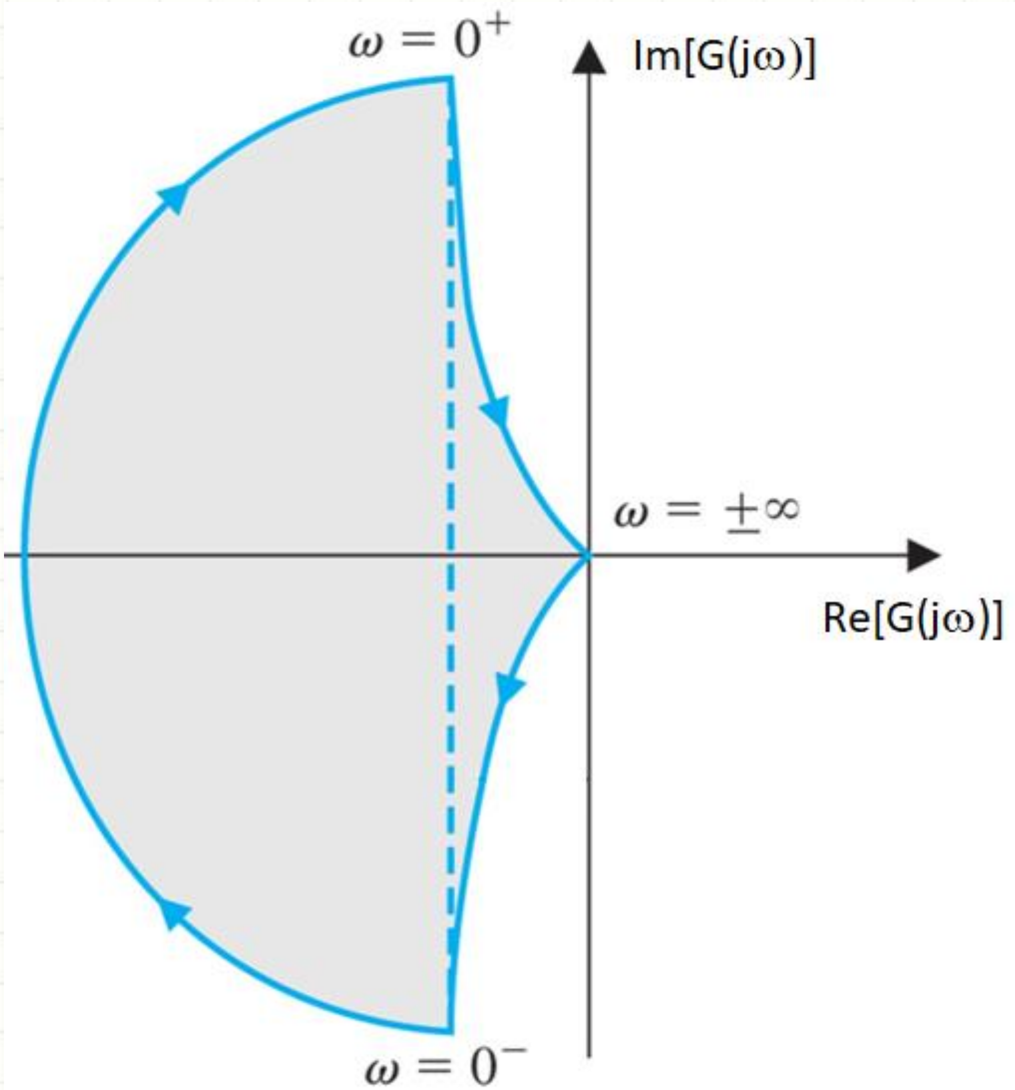
$$G(s) = \frac{1}{\varepsilon e^{j\theta}} \frac{1}{(\varepsilon e^{j\theta} - 1)}$$

Para $\varepsilon \to 0$, tem-se

$$G(s) \approx \infty e^{-j\theta}$$

que representa uma **semicircunferência de raio infinito no sentido horário.**

Exemplo 5 – polo na origem e fase não mínima



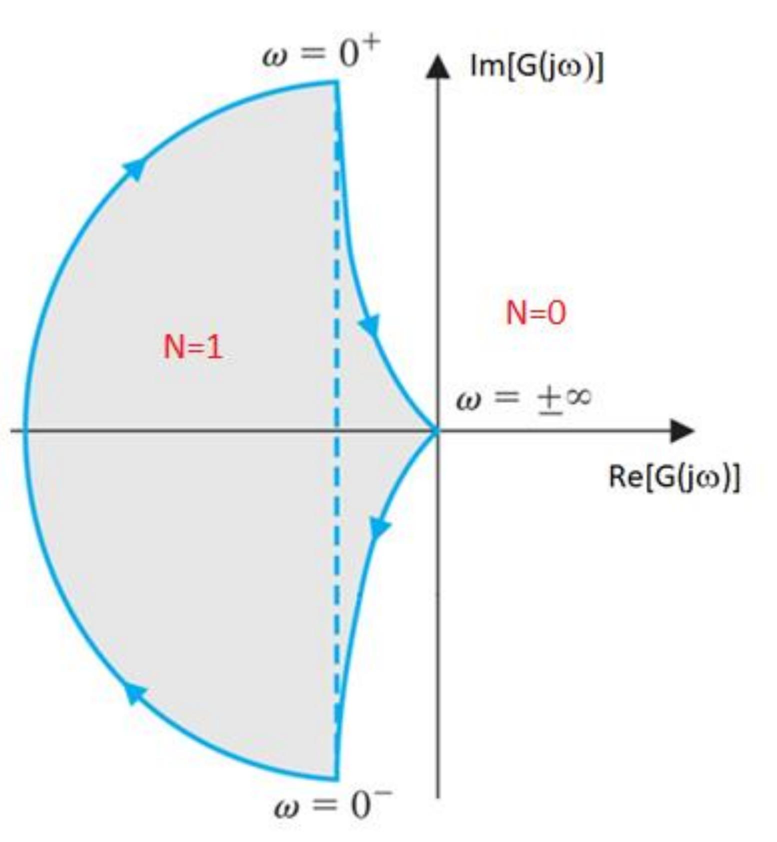
Exemplo 5 – polo na origem e fase não mínima

Análise da estabilidade

Como P=1, para estabilidade é necessário N=-1 (uma volta no sentido anti-horário).

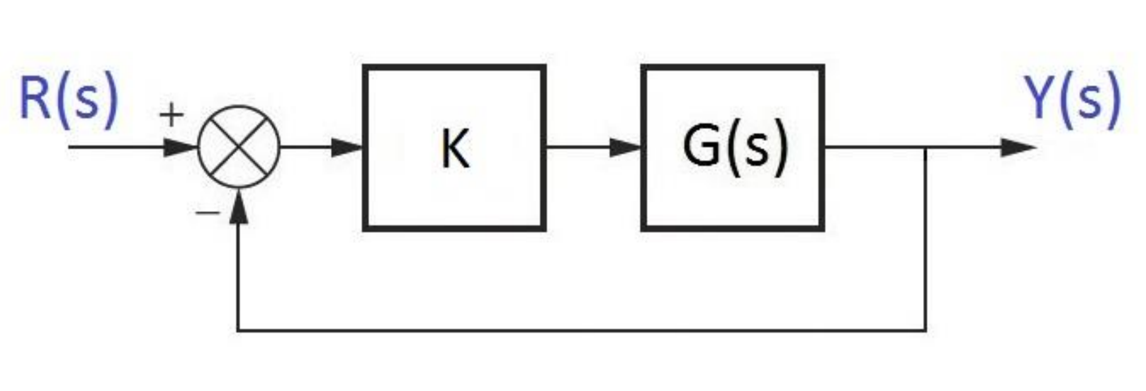
Do gráfico, observa-se que esta condição é impossível.

Logo, o **sistema é instável para qualquer valor de K.**



Exemplo 6 – polo na origem e fase não mínima

Analisar a estabilidade do sistema para -∞ < K < +∞, utilizando o Critério de Nyquist.



$$G(s) = \frac{s-2}{s(s+1)^2}$$

Exemplo 6 – polo na origem e fase não mínima

$$G(s) = \frac{s-2}{s(s+1)^2}$$

$$G(j\omega) = \frac{5-\omega^2}{(1-\omega^2)+4\omega^2} + j\frac{2(1-2\omega^2)}{\omega\left[(1-\omega^2)+4\omega^2\right]}$$

$$\omega = 0^+ \qquad G(j\omega) = 5 + j\infty = \infty\angle 90^\circ$$

$$\omega = +\infty \qquad G(\infty) \approx \frac{1}{(j\omega)^2} = 0\angle -180^\circ$$

$$\omega = -\infty \qquad G(\infty) = 0\angle 180^\circ$$

$$\omega = 0^- \qquad G(j\omega) = \infty\angle -90^\circ$$

Exemplo 6 – polo na origem e fase não mínima

$$G(j\omega)=\frac{5-\omega^2}{(1-\omega^2)+4\omega^2}+j\frac{2(1-2\omega^2)}{\omega\left[(1-\omega^2)+4\omega^2\right]}$$

Cruzamento com eixo real: Im[G(jω)]=0

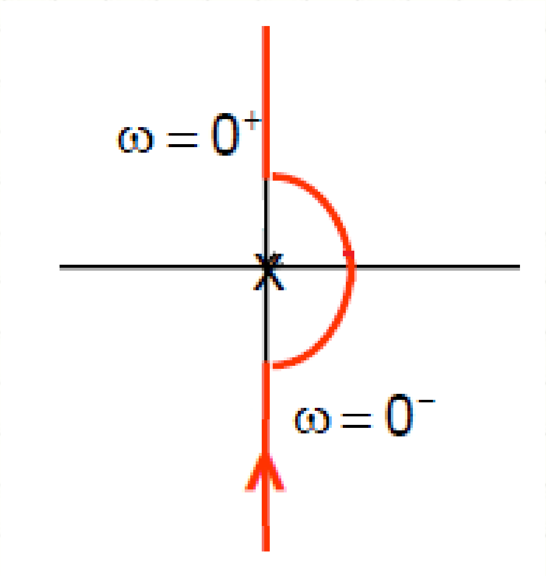
$$\omega=\pm\sqrt{0,5}=\pm 0,707 \quad \rightarrow \quad G(j\omega)=2$$

Cruzamento com eixo imaginário: Re[G(jω)]=0

$$\omega=\pm\sqrt{5}=\pm 2,23 \quad \rightarrow \quad G(j\omega)=-0,22$$

Exemplo 6 – polo na origem e fase não mínima

Comportamento em torno da origem



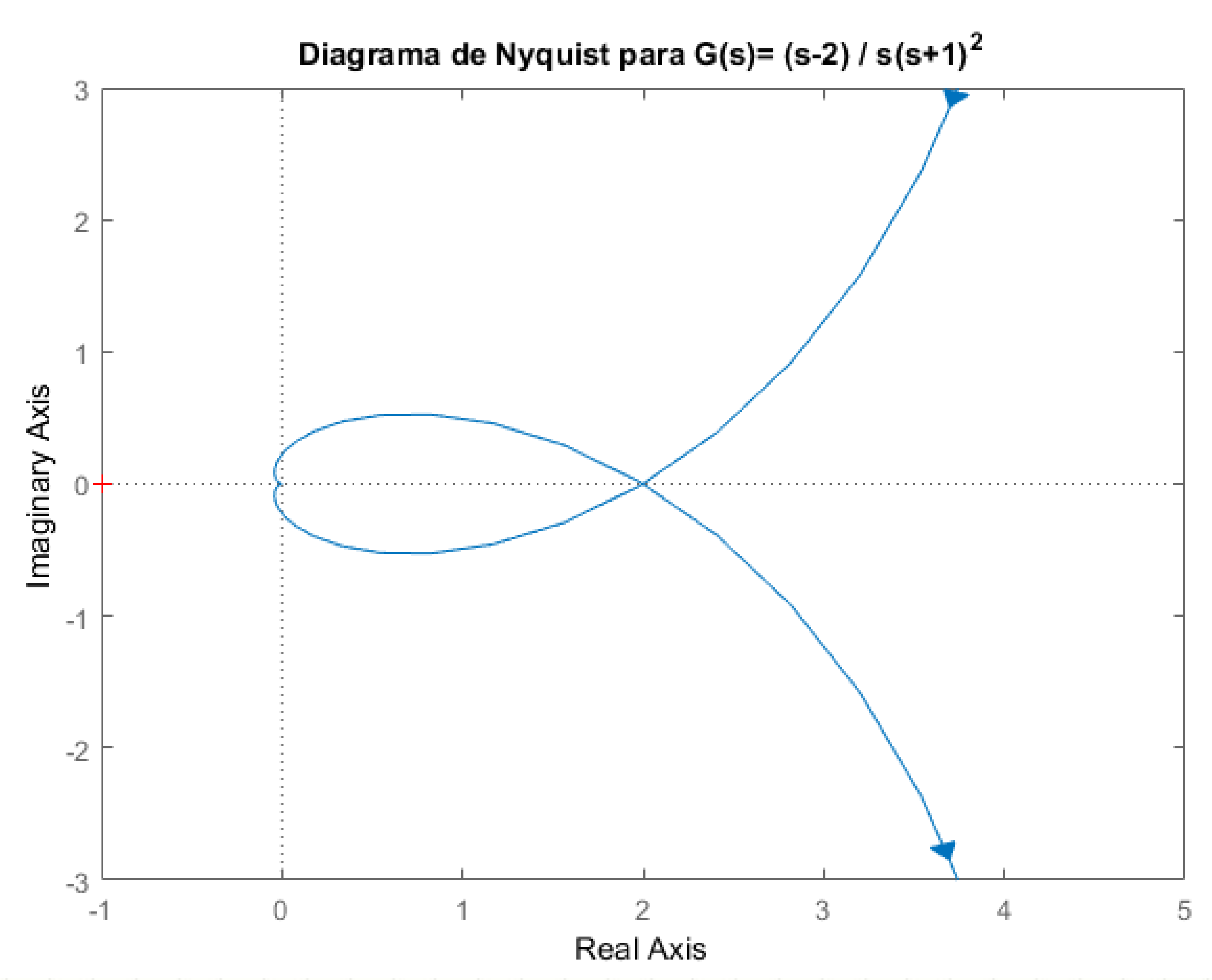
Seja um contorno pela direita e s= $\varepsilon\ e^{j\theta}$, sendo que θ varia de 0^- a 0^+, de -90° a +90°, no **sentido anti-horário.**

Para $\varepsilon \rightarrow 0$, tem-se

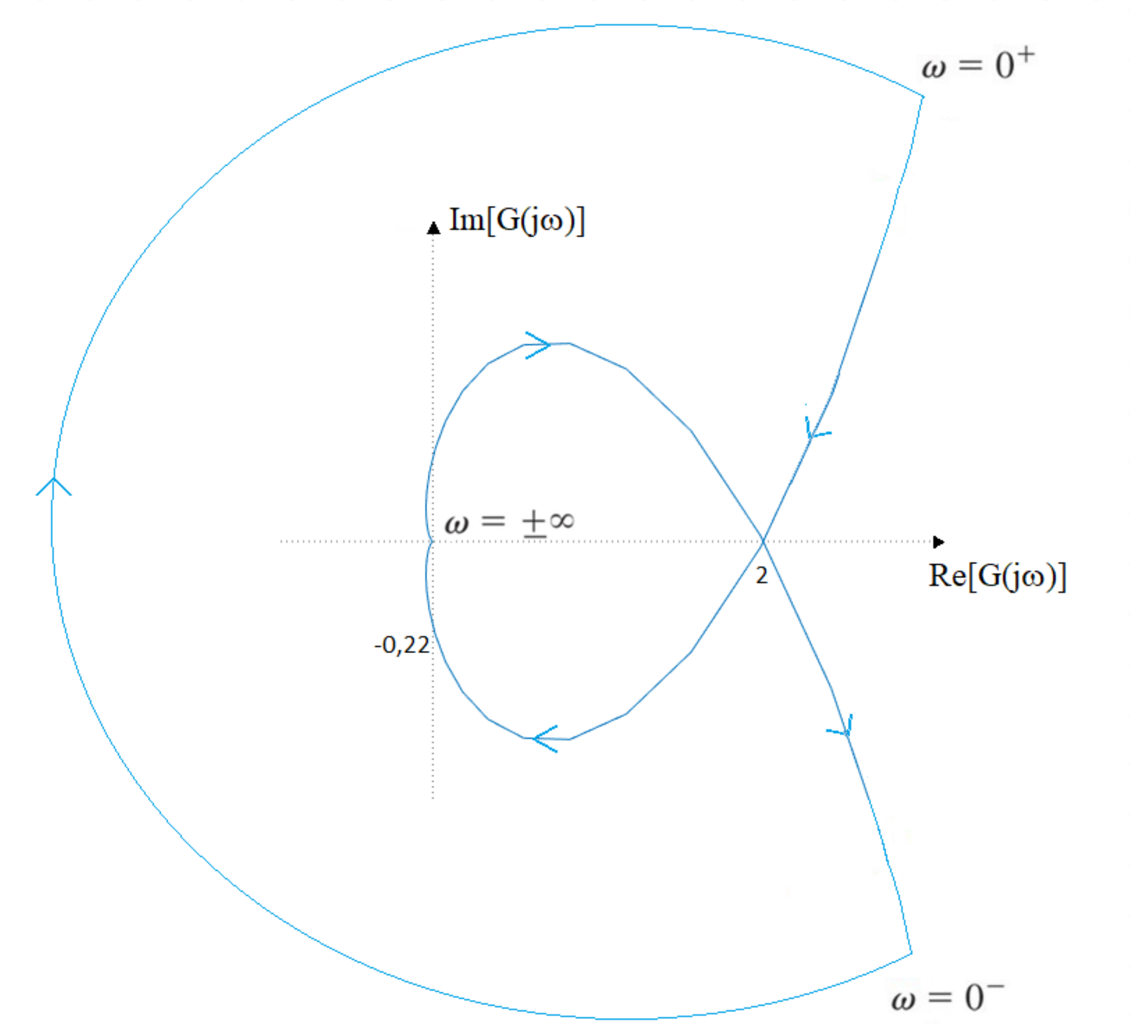
$$G(s) \approx \infty e^{-j\theta}$$

que representa uma **semicircunferência de raio infinito no sentido horário**.

Exemplo 6 – polo na origem e fase não mínima



Exemplo 6 – polo na origem e fase não mínima



Exemplo 6 – polo na origem e fase não mínima

Análise da estabilidade

Como P=0, para estabilidade é necessário N=0.
Do gráfico, observa-se que esta condição para:

$$-\frac{1}{K} > 2$$

Logo, o **sistema é estável para**

$$-\frac{1}{2} < K < 0$$