Propriedades da Realimentação

Profa. Cristiane Paim

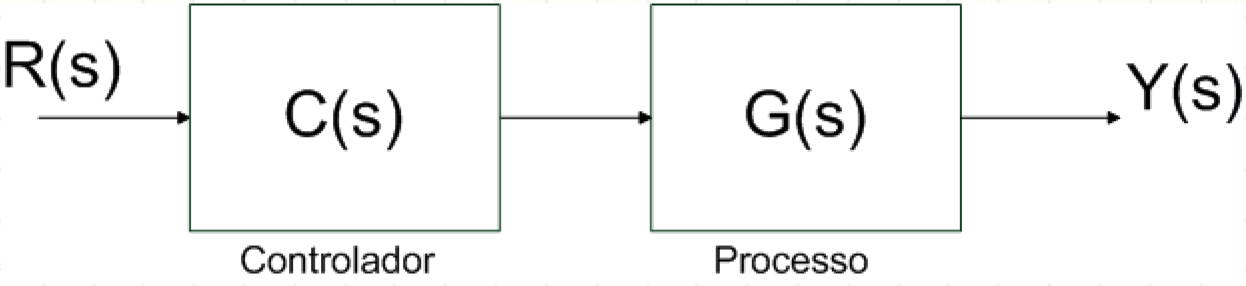
Propriedades da Realimentação

Os sistemas realimentados (em malha fechada) proporcionam algumas vantagens em relação aos sistemas em malha aberta. Estas ***“vantagens”*** podem ser observadas sob alguns aspectos:

- Estabilidade
- Atenuação e/ou Rejeição de Perturbação
- Sensibilidade

Estabilidade

Seja o sistema em malha aberta



A função de transferência de malha aberta (FTMA) será dada por:

$$T_{MA}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = C(s)G(s)$$

Estabilidade

Suponha que o processo seja representado por:

$$G(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s-1)}$$

Observe que G(s) representa um sistema instável.

Teoricamente, seria possível estabilizar o sistema escolhendo o controlador C(s) de modo a cancelar o polo instável. Por exemplo

$$C(s) = \frac{s-1}{s+1} \qquad T_{MA}(s) = C(s)G(s) = \frac{1}{s+2}$$

Estabilidade

Entretanto, tal estratégia de controle pode não funcionar na prática pois devido a imperfeições inevitáveis na modelagem de G(s), não seria possível a obtenção de um cancelamento perfeito, mantendo assim o sistema instável.

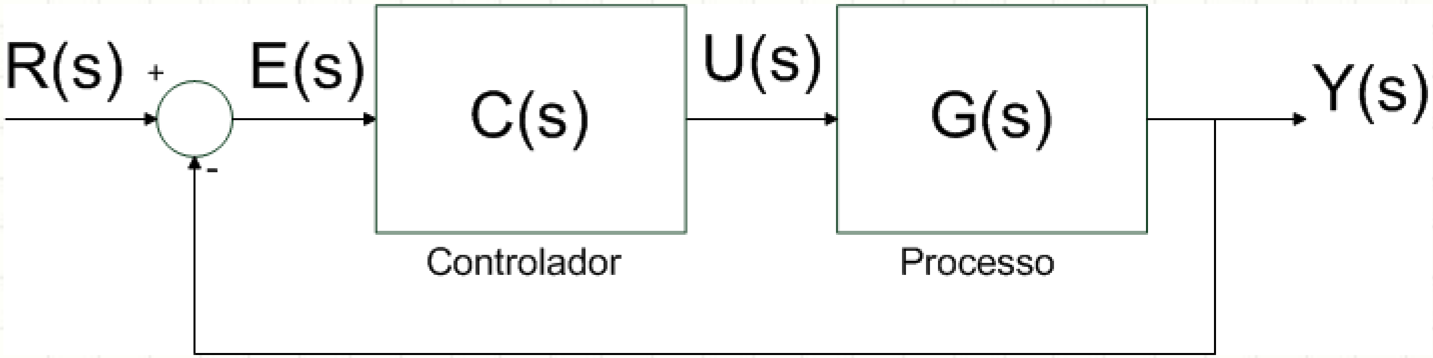
$$T_{MA}(s) = C(s)G(s) = \underbrace{\frac{s-1}{s+1}}_{C(s)} \underbrace{\frac{s+1}{(s+2)(s-1{,}1)}}_{G(s)}$$

$$T_{MA}(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s-1{,}1)}$$

Resposta instável

Estabilidade

Seja agora, um sistema em malha fechada (realimentado)



A função de transferência de malha fechada (FTMF), considerando C(s) = K (constante positiva) será dada por:

$$T_{MF}(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{KG(s)}{1+KG(s)}$$

Estabilidade

Os polos de malha fechada são as raízes do polinômio característico:

$$\Delta(s) = 1 + KG(s) = 1 + K\frac{s+1}{(s+2)(s-1)} = 0$$

ou seja,

$$\Delta(s) = s^2 + (K+1)s + (K-2)$$

Para que o sistema seja estável, as raízes do polinômio característico devem ter parte real negativa. Assim, para garantir estabilidade tem-se:

$$\begin{cases} K+1>0 \\ K-2>0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad K>2$$

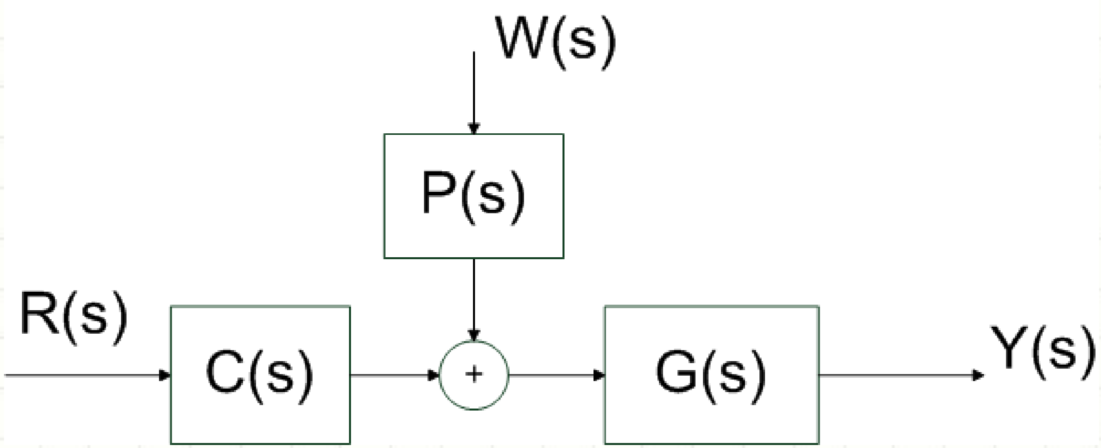
Atenuação/Rejeição de Perturbação

Todos os sistemas de controle reais estão sujeitos à perturbações e ruídos. A reação do sistema a tais perturbações depende de diversos fatores: ponto de entrada, intensidade, duração, etc.

A realimentação pode, em muitos casos, atenuar (ou eliminar completamente) os efeitos das perturbações na operação dos sistemas.

Atenuação/Rejeição de Perturbação

Seja o seguinte sistema em malha aberta:



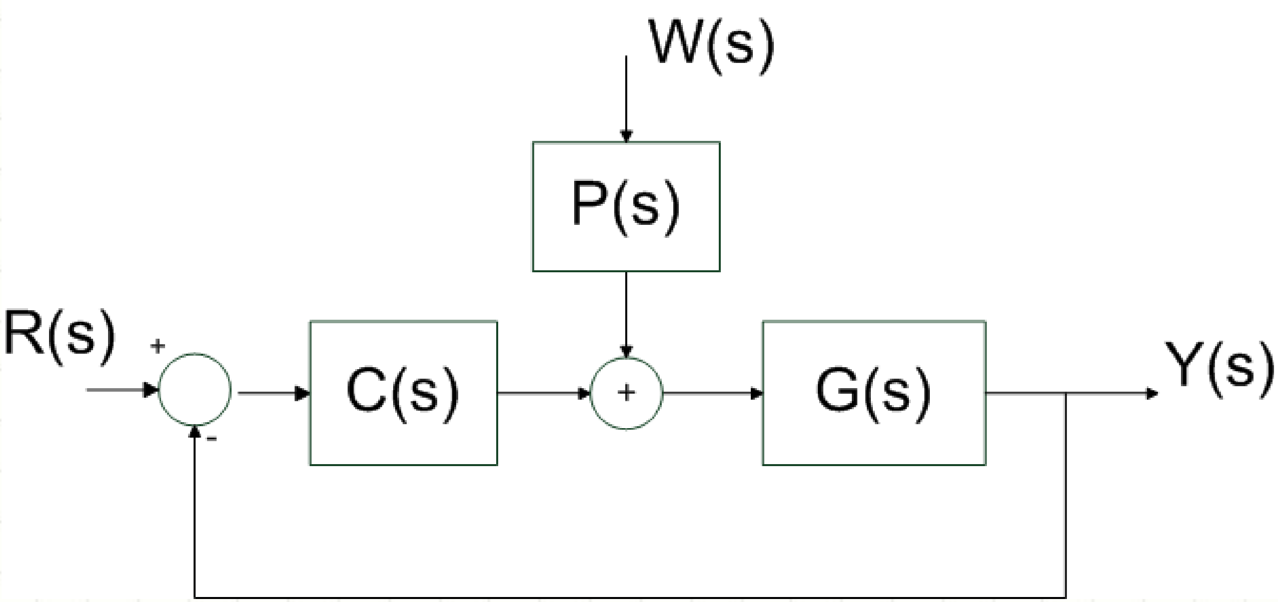
A saída será dada por:

$$Y(s) = C(s)G(s)R(s) + P(s)G(s)W(s)$$

Observa-se claramente que o ajuste do controlador C(s) não modifica o efeito da perturbação na saída.

Atenuação/Rejeição de Perturbação

Seja agora o sistema em malha fechada:



A saída será dada por:

$$Y(s) = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}R(s) + \frac{P(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}W(s)$$

Atenuação/Rejeição de Perturbação

Neste caso, pode-se projetar o controlador C(s) de modo a reduzir o efeito perturbação na saída do sistema.

$$Y(s) = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}R(s) + \frac{P(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}W(s)$$

Exemplo 1

Sejam as funções de transferência do processo e perturbação definidas por:

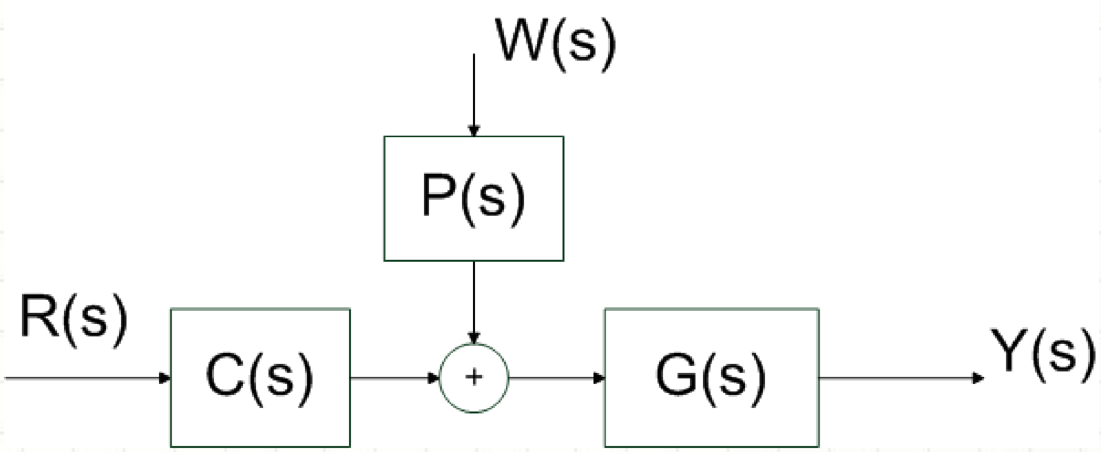
$$G(s) = \frac{10}{(s/60+1)(s/600+1)} \quad \text{e} \quad P(s) = 5$$

Deseja-se aplicar um controle proporcional, ou seja, C(s)=K (constante), de modo que em regime permanente a saída acompanhe uma entrada de referência constante r(t)=100 (degrau de amplitude 100).

O sistema está sujeito a uma perturbação constante w(t)=-0,1 (degrau de amplitude -0,1).

Exemplo 1

Malha Aberta



$$G(s) = \frac{10}{(s/60+1)(s/600+1)} \qquad P(s) = 5 \qquad C(s) = K$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= C(s)G(s)R(s) + P(s)G(s)W(s) \\ &= \frac{10K}{(s/60+1)(s/600+1)}R(s) + \frac{50}{(s/60+1)(s/600+1)}W(s) \end{aligned}$$

Exemplo 1

A saída em regime permanente é dada por

$$y_{\infty} = \lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} sY(s)$$

Para fins de projeto a perturbação é desconsiderada uma vez que esta é geralmente desconhecida.

Então,

$$y_{\infty} = \lim_{s \to 0} s \frac{10K}{(s/60+1)(s/600+1)} \times \frac{100}{s} = 1000K$$

Exemplo 1

Para garantir o seguimento de referência é necessário:

$$y_{\infty}(t) = r(t) = 100$$

Portanto,

$$1000K = 100 \quad \Rightarrow \quad K = 0{,}1$$

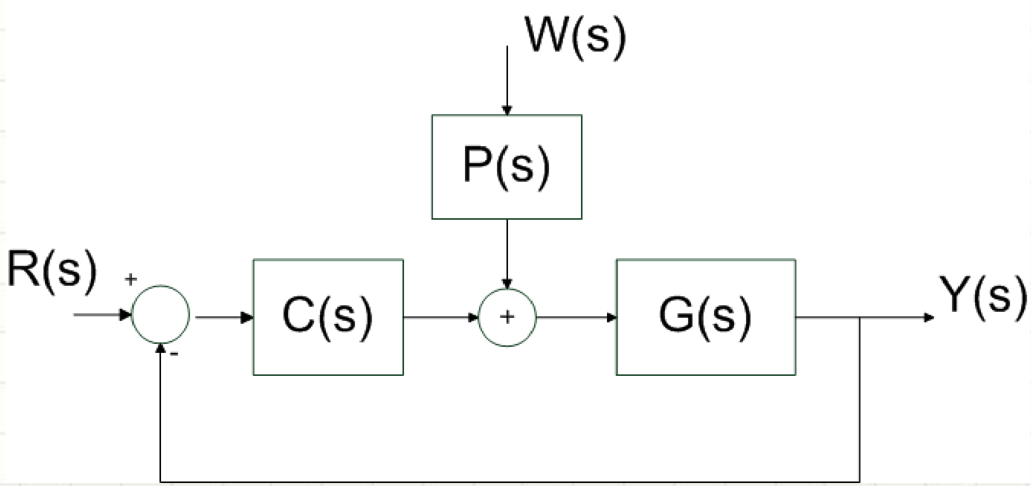
A saída do sistema, em regime permanente, incluindo a perturbação será dada por:

$$y_{\infty} = 100 + \lim_{s \to 0} s \frac{50}{(s/60+1)(s/600+1)} \times \frac{-0{,}1}{s} = 95$$

Assim, observa-se que a perturbação gera um erro em regime permanente de 5%.

Exemplo 1

Malha Fechada



$$G(s) = \frac{10}{(s/60+1)(s/600+1)} \qquad P(s) = 5 \qquad C(s) = K$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}R(s) + \frac{P(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}W(s) \\ &= \frac{10K}{(s/60+1)(s/600+1)+10K}R(s) + \frac{50}{(s/60+1)(s/600+1)+10K}W(s) \end{aligned}$$

Exemplo 1

A saída em regime permanente é dada por

$$y_\infty = \lim_{s\to 0} s\,\frac{10K}{(s/60+1)(s/600+1)+10K}\times\frac{100}{s}+$$

$$+\lim_{s\to 0} s\,\frac{50}{(s/60+1)(s/600+1)+10K}\times\frac{-0{,}1}{s}$$

ou

$$y_\infty = \frac{10K}{1+10K}\times 100 - \frac{50}{1+10K}\times 0{,}1$$

Observa-se que quanto maior o valor de K menor será o efeito da perturbação na saída do sistema.

Exemplo 1

Para garantir o seguimento de referência, desprezando-se a perturbação, é necessário que:

$$\frac{10K}{1+10K} \approx 1$$

Quanto maior o valor de K, mais o termo acima se aproxima da unidade.

Escolhendo K=10, tem-se:

$$y_\infty = \frac{10\times 10}{1+10\times 10}\times 100 - \frac{50}{1+10\times 10}\times 0{,}1 = 98{,}96$$

correspondendo a um erro de 1,04% na saída.

Exemplo 1

Escolhendo K=100, tem-se:

$$y_\infty = \frac{10 \times 100}{1 + 10 \times 100} \times 100 - \frac{50}{1 + 10 \times 100} \times 0{,}1 = 99{,}895$$

representando um erro de 0,1% na saída.

Sensibilidade

A sensibilidade de um sistema é uma medida da mudança no seu comportamento em função da variação em um de seus parâmetros.

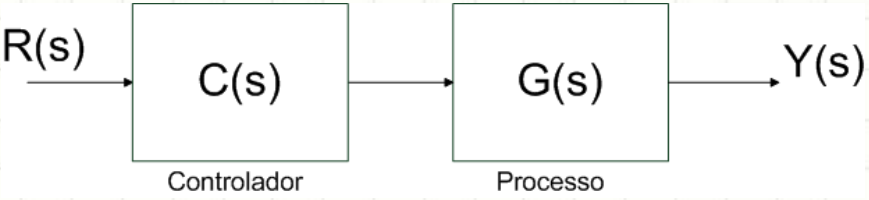
A função de sensibilidade (da função de transferência) é definida como

$$S = \frac{\partial T}{\partial G} \times \frac{G}{T}$$

A função de sensibilidade mede a variação da função de transferência T (em malha aberta ou fechada) em função da variação dos parâmetros do processo (G).

Sensibilidade

Malha Aberta



A função sensibilidade da F.T.M.A. será dada por:

$$S_{MA} = \frac{\partial T_{MA}}{\partial G} \times \frac{G}{T_{MA}}$$

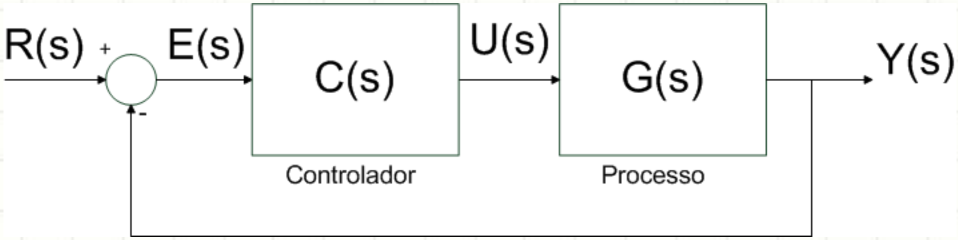
Como $T_{MA} = C(s)G(s)$, obtém-se

$$S_{MA} = C(s) \times \frac{G(s)}{C(s)G(s)} = 1$$

Portanto, o sistema responde com uma variação de 100% a qualquer variação em G(s).

Sensibilidade

Malha Fechada



A função sensibilidade da F.T.M.F. será dada por:

$$S_{MF} = \frac{\partial T_{MF}}{\partial G} \times \frac{G}{T_{MF}}$$

Como $T_{MF} = \dfrac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}$, obtém-se

$$\boxed{S_{MF} = \frac{1}{1+C(s)G(s)}}$$

Assim, é possível reduzir a sensibilidade do sistema através da relação C(s)G(s).

Exemplo 2

Seja o sistema do exemplo 1, desconsiderando a perturbação.

$$G(s) = \frac{10}{(s/60+1)(s/600+1)} \quad \text{e} \quad R(s) = \frac{100}{s}$$

Os valores obtidos para o ganho K , de modo a obter o seguimento de referência foram:

- Malha Aberta: K=0,1
- Malha Fechada: K=10 e K=100

Exemplo 2

A função de sensibilidade, em regime permanente, é definida por:

- Malha Aberta: $S_{MA} = 1$ (variação de 100%)

- Malha Fechada:

$$K = 10 \quad \Rightarrow \quad S_{MF} = \frac{1}{1 + C(0)G(0)} = \frac{1}{1 + 10 \times 10} = 0,00999$$

$$K = 100 \quad \Rightarrow \quad S_{MF} = \frac{1}{1 + C(0)G(0)} = \frac{1}{1 + 100 \times 10} = 0,000999$$

A variação da saída será 1% e 0,1%, respectivamente, para K=10 e K=100.

Exemplo 2

Considere agora que o ganho estático do processo, G(0), sofre uma variação de 10%, de modo que

$$\overline{G}(s) = \frac{11}{(s/60+1)(s/600+1)}$$

Em malha aberta:

$$y_{\infty} = \lim_{s \to 0} s \, \frac{11 \times 0{,}1}{(s/60+1)(s/600+1)} \times \frac{100}{s} = 110$$

Portanto, gerando um erro de 10% na saída.

Exemplo 2

Em malha fechada, para K=10:

$$y_\infty = \lim_{s\to 0} s\,\frac{C(s)\overline{G}(s)}{1+C(s)\overline{G}(s)}R(s) = \frac{C(0)\overline{G}(0)}{1+C(0)\overline{G}(0)}\times 100$$

$$= \frac{10\times 11}{1+10\times 11}\times 100 = 99{,}099$$

Portanto, gerando um erro menor do que 1% na saída.