Exercícios Sugeridos Resoluções

Profa. Cristiane Paim

Exercício 2

2. Um sistema de controle com realimentação unitária possui a seguinte função de transferência de malha aberta:

$$G(s) = \frac{K}{(s+20)(s+a)(s+b)}$$

(a) Determinar os valores de K, a e b, sabendo-se que, em malha fechada:

- O ganho estático do sistema é igual a 1;
- Quando o sistema é submetido a uma entrada em rampa, o erro de rastreamento em regime permanente não é nulo;
- Quando o ganho K é duplicado, a saída do sistema em regime permanente devido a uma entrada em impulso é uma senóide pura com um período de $0,628$s.

(b) Esboçar a resposta do sistema a um degrau unitário. Determinar e indicar no gráfico os valores aproximados de sobresinal máximo e tempo de acomodação (critério de 2%).

(c) Com o auxílio do MATLAB simule a resposta do sistema ao degrau unitário e verifique os valores exatos de sobresinal máximo e tempo de acomodação.

Exercício 2

a) Determinar a, b e K

Das informações fornecidas:

- Ganho estático 1 $\rightarrow$ T(s) = 1

  Para tanto, G(s) tem 1 integrador ⇨ a=0;

- Erro não nulo para entrada rampa $\rightarrow$ sistema do Tipo 1

  Um único polo na origem ⇨ b ≠ 0

Exercício 2

- Quando K é duplicado a saída em regime permanente é senoidal com período 0,628

$\omega = 2\pi / T \;\Rightarrow\; \omega = 10$ rd/s

Para que a saída em regime permanente seja uma senóide com frequência 10 rd/s deve se ter um polo real estável e um par de polos complexos sobre o eixo imaginário em s=±j10.

A função de transferência em malha fechada por ser escrita como:

$$T(s) = \frac{2K}{s(s+20)(s+b)+2K}$$

Exercício 2

Portanto, a equação característica do sistema é

$$\Delta(s) = s^3 + (20 + b)s^2 + 20bs + 2K = 0$$

Os valores de a, b, K podem ser obtido de 2 formas.

1. Substituindo s=j10 na equação característica
2. Comparando o polinômio desejado (polos em j10) à equação característica.

$$\Delta d(s) = (s + p)(s^2 + 10^2)$$
$$= s^3 + ps^2 + 100s + 100p = 0$$

$$20 + b = p \quad \Rightarrow \quad p = 25$$
$$20b = 100 \quad \Rightarrow \quad b = 5$$
$$2K = 100p \quad \Rightarrow \quad K = 1250$$

Exercício 2

b) Resposta ao degrau

Em malha fechada

$$T(s) = \frac{1250}{s(s+20)(s+5)+1250}$$

Resultando na equação característica:

$$\Delta(s) = s^3 + 25s^2 + 100s + 1250 = 0$$

cujas raízes são

$$p_1 = -23,015$$

$$p_{2,3} = -0,993 \pm j7,3 \qquad \text{(dominantes)}$$

Exercício 2

Aproximando pelos polos dominantes

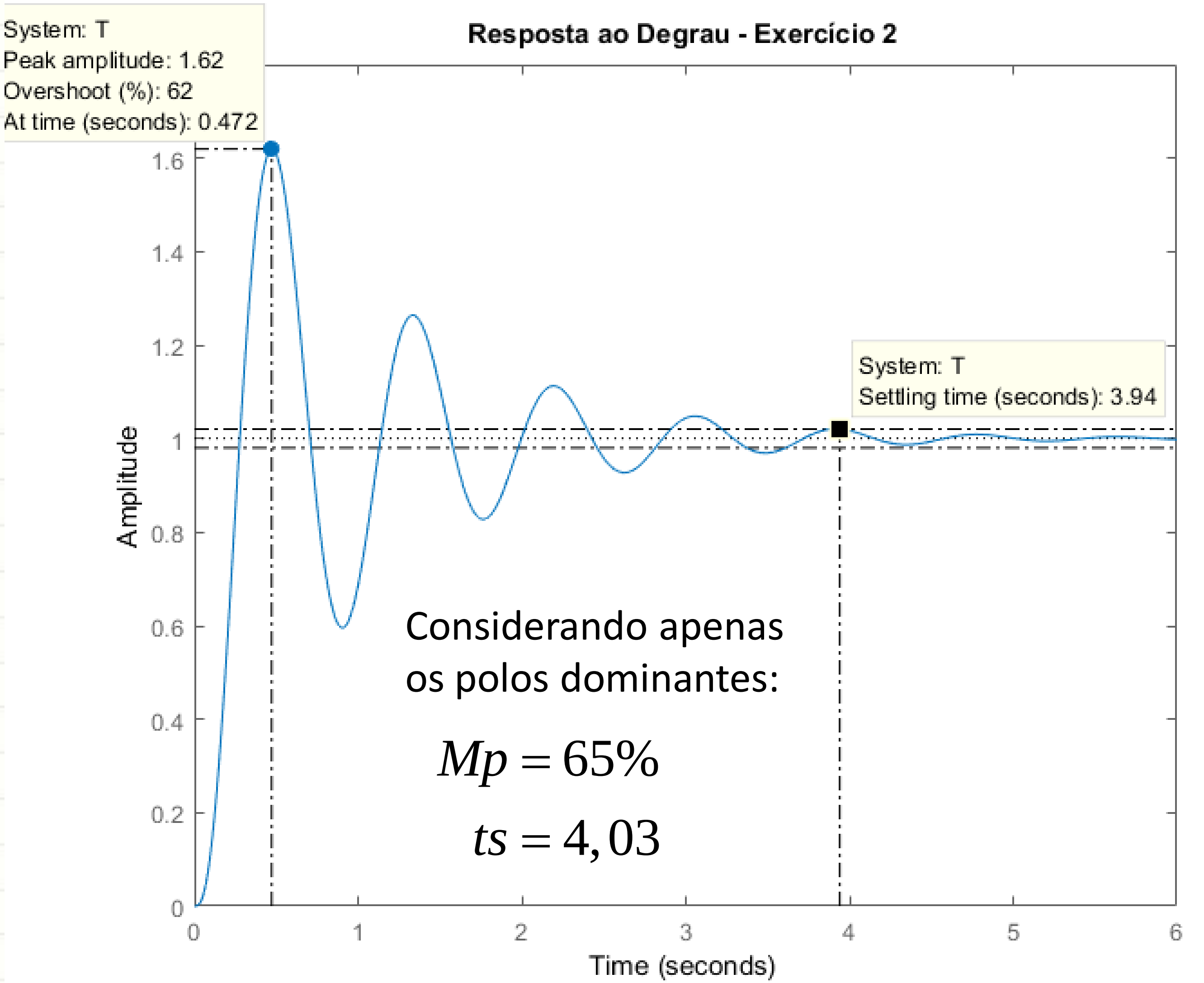
$$s^2 + 1{,}98s + 54{,}28 = 0$$

$$\xi = 0{,}1347 \quad \rightarrow \quad Mp = 65\%$$

$$\omega_n = 7{,}3674 \quad \rightarrow \quad ts = 4{,}03$$

c) Simulando no MATLAB observa-se que as aproximações são boas. Isto acontece pois o 3º polo do sistema (p=-23) está relativamente distante do polos dominantes.

Exercício 2



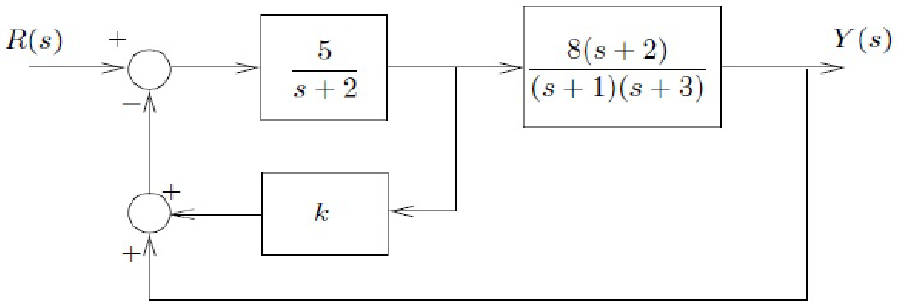
Considerando apenas os polos dominantes:

$$Mp = 65\%$$

$$ts = 4,03$$

Exercício 3

3. Considere o sistema abaixo, sujeito a uma entrada do tipo degrau unitário.



(a) Esboçar o Lugar das Raízes para $-\infty < k < +\infty$, detalhando: trecho(s) no eixo real, assíntota(s), cruzamento(s) com o eixo imaginário, ponto(s) de ramificação, ângulos de partida e chegada. Indicar explicitamente a faixa de valores de k que garante a estabilidade do sistema em malha fechada.

(b) Determinar a faixa de valores de k de modo que a resposta do sistema tenha um tempo de subida (critério 0 a 100%) menor do que 2 segundos. Justificar a resposta.

(c) Determinar a expressão que permite calcular o erro de regime permanente do sistema. Analisar o comportamento do erro de regime permanente em função de todos os valores possíveis para o parâmetro k. É possível obter-se erro nulo? Para que valor(es) de k?

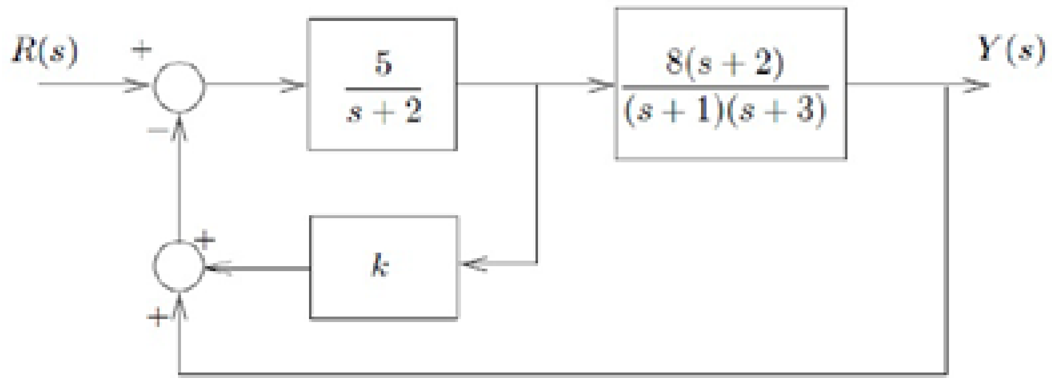
(d) Determinar a sensibilidade do erro em regime permanente em função da variação de k.

(e) Esboçar a resposta do sistema considerando $k = -0,5$. Calcular e indicar no gráfico o valor da saída em regime permanente. Indicar também os valores aproximados de sobresinal máximo e tempo de acomodação (critério de 2%). Pode-se afirmar que esses valores são boas aproximações dos valores reais ? Justificar a resposta.

(f) Com o auxílio do MATLAB simule a resposta do sistema ao degrau unitário e verifique os valores exatos de sobresinal máximo e tempo de acomodação.

Exercício 3

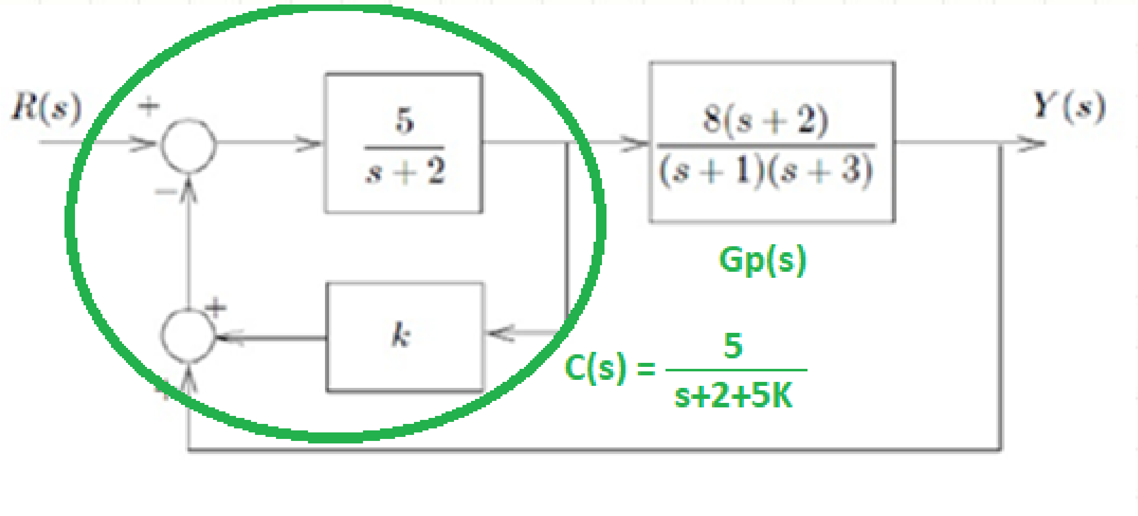
3. Considere o sistema abaixo, sujeito a uma entrada do tipo degrau unitário.



(a) Esboçar o Lugar das Raízes para $-\infty < k < +\infty$, detalhando: trecho(s) no eixo real, assíntota(s), cruzamento(s) com o eixo imaginário, ponto(s) de ramificação, ângulos de partida e chegada. Indicar explicitamente a faixa de valores de k que garante a estabilidade do sistema em malha fechada.

Inicialmente será determinada a F.T.M.F do sistema.

Exercício 3



Assim, a F.T da malha direta será

$$C(s)G_P(s) = \frac{40(s+2)}{(s+2+5K)(s+1)(s+3)}$$

e em malha fechada

$$T(s) = \frac{40(s+2)}{(s+2+5K)(s+1)(s+3)+40(s+2)}$$

Exercício 3

Usando a equação característica

$$\Delta(s) = s^3 + (6+5K)s^2 + (51+20K)s + (86+15K) = 0$$

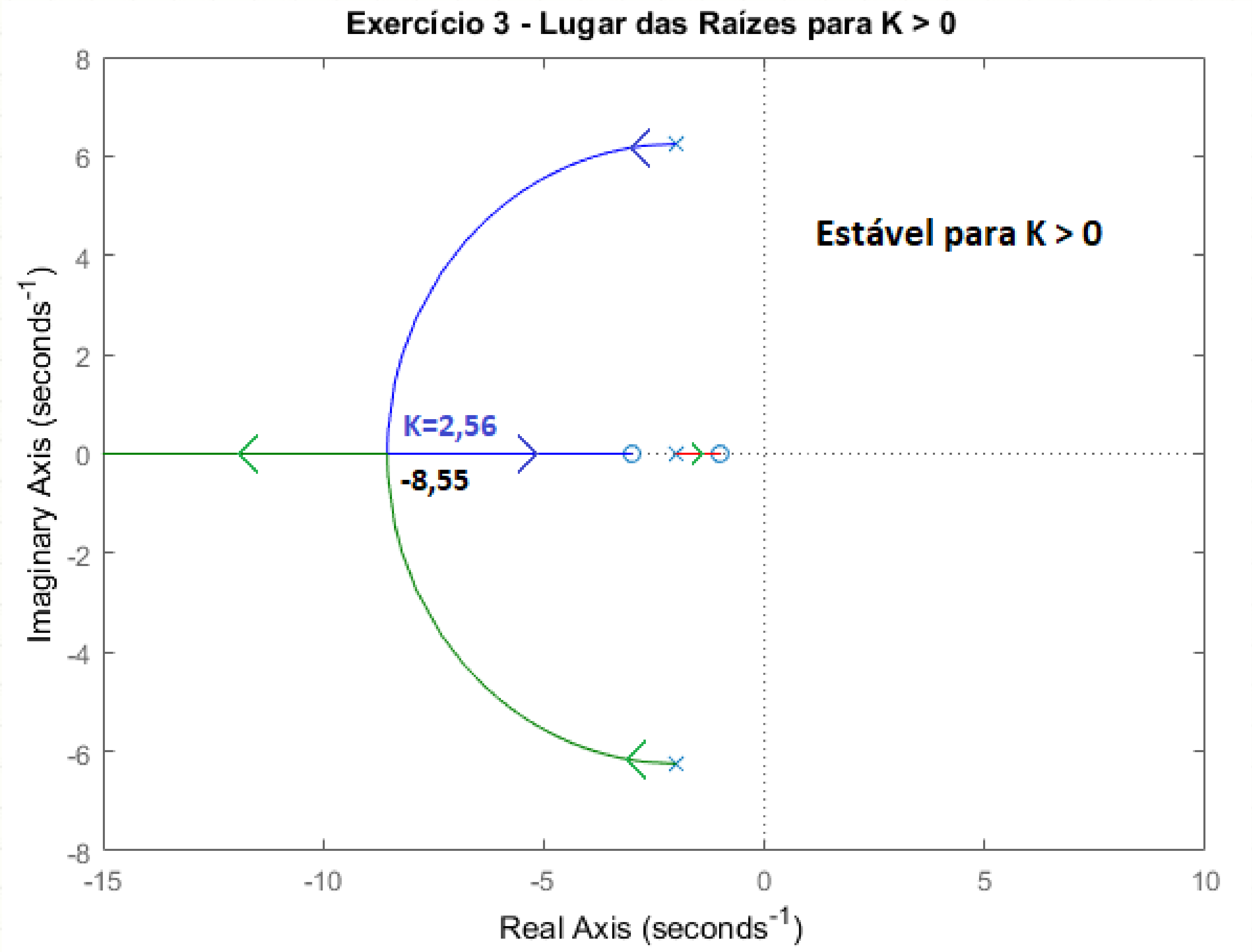
e colocando na forma padrão para o traçado do Lugar das Raízes, tem-se

$$1 + K\frac{5s^2 + 20s + 15}{s^3 + 6s^2 + 51s + 86} = 0$$

$$p_1 = -2 \qquad z_1 = -1$$

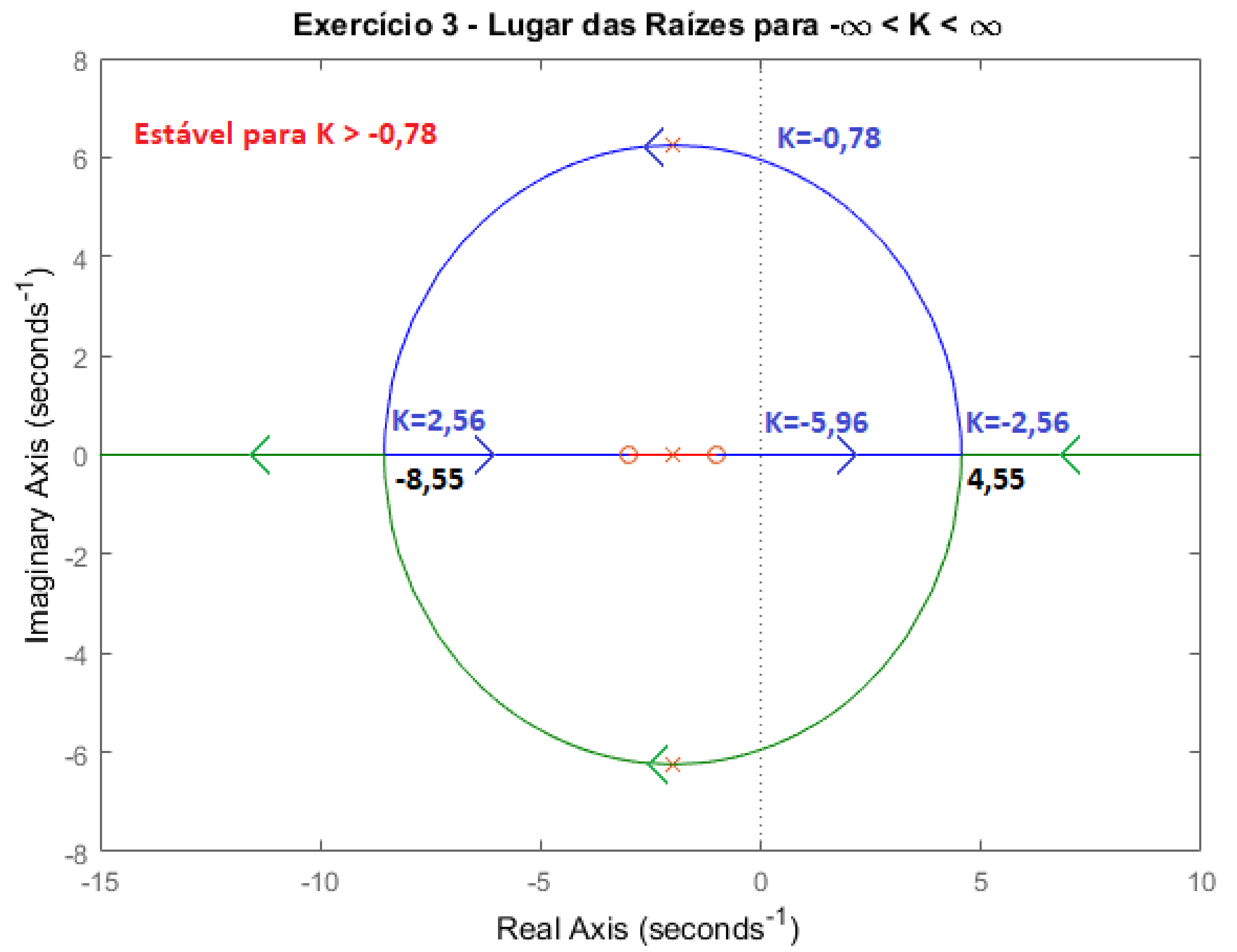
$$p_{2,3} = -2 \pm j6,25 \qquad z_2 = -3$$

Exercício 3



Exercício 3 - Lugar das Raízes para K > 0
Estável para K > 0
K=2,56
-8,55
Imaginary Axis (seconds^{-1})
Real Axis (seconds^{-1})
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-15
-10
-5
0
5
10

Exercício 3



Exercício 3 - Lugar das Raízes para -∞ < K < ∞
Estável para K > -0,78
K=-0,78
K=2,56
K=-5,96
K=-2,56
-8,55
4,55
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-15
-10
-5
0
5
10
Imaginary Axis (seconds^{-1})
Real Axis (seconds^{-1})

Exercício 3

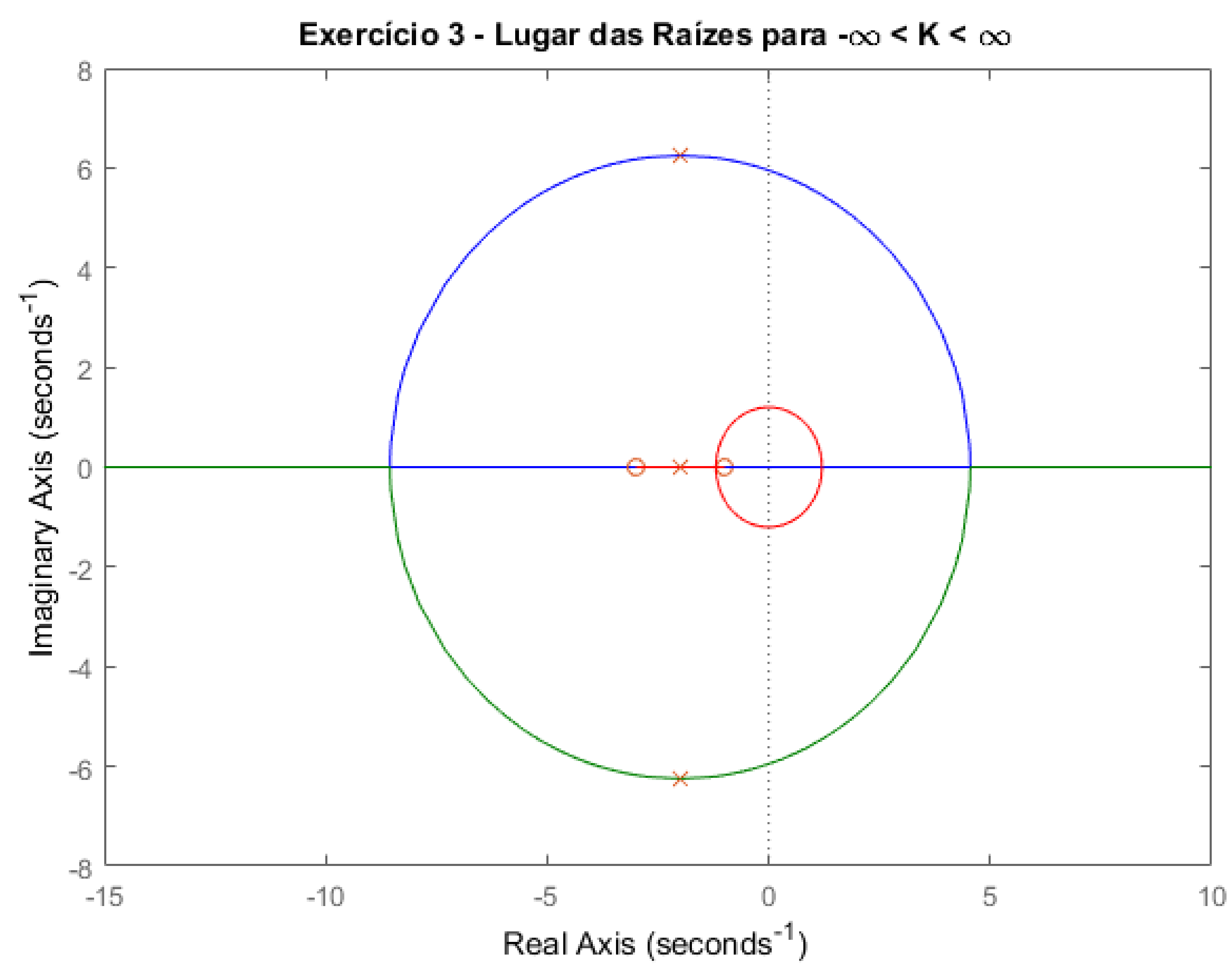
(b) Determinar a faixa de valores de k de modo que a resposta do sistema tenha um tempo de subida (critério 0 a 100%) menor do que 2 segundos. Justificar a resposta.

Tr < 2 $\rightarrow \omega$ > 1,2 (círculo de raio 1,2)

Observa-se que o círculo de raio 1,2 está totalmente incluso no LR e só fará interseção em valores reais de s. Dentro da região de estabilidade s = -1,2. Substituindo este valor na equação característica obtém-se K=17,62.
Assim, para atender "teoricamente" a especificação de tempo de subida:

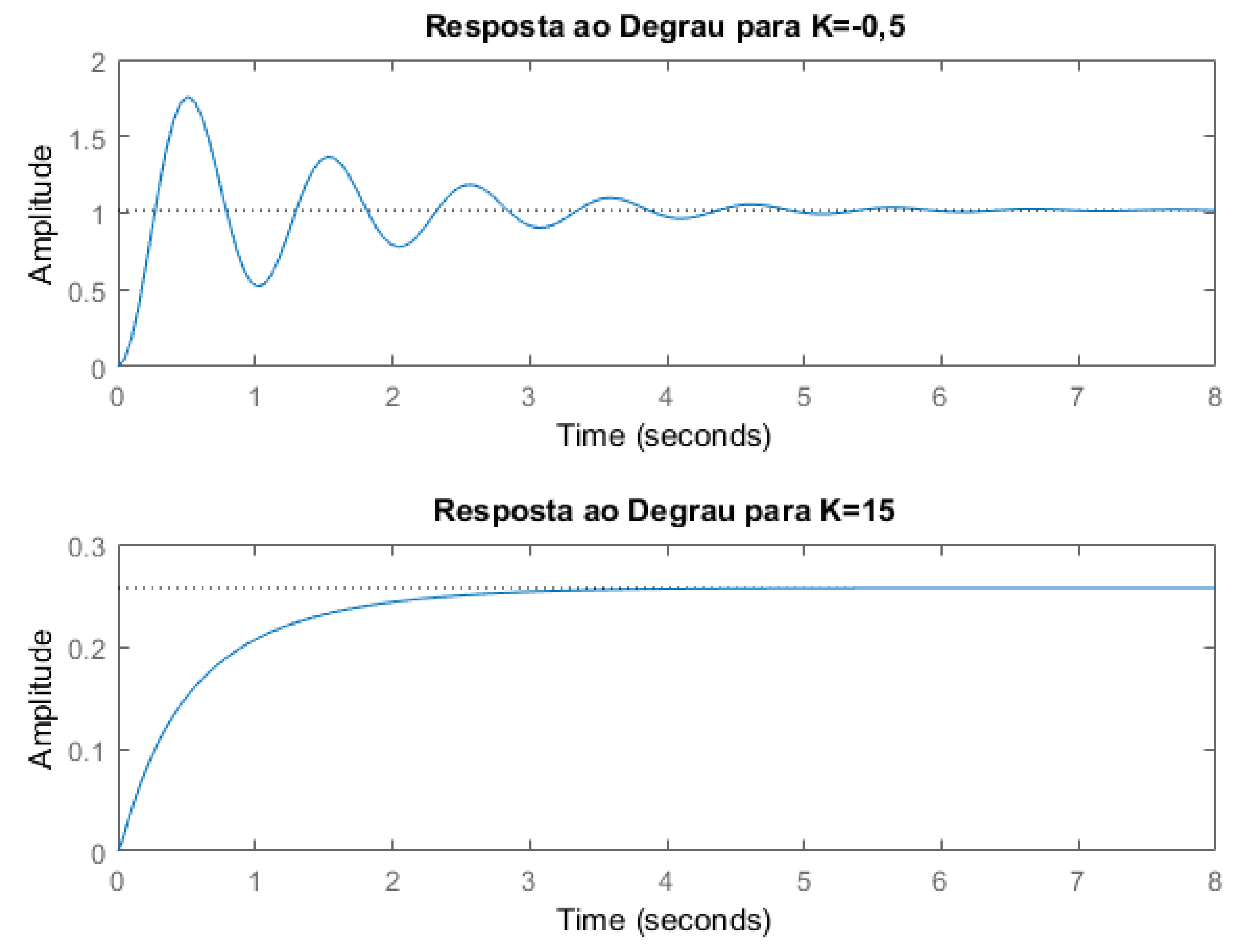
$$-0{,}78 < K < 17{,}62$$

Exercício 3



Exercício 3 - Lugar das Raízes para -∞ < K < ∞
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-15
-10
-5
0
5
10
Imaginary Axis (seconds^{-1})
Real Axis (seconds^{-1})

Exercício 3



Resposta ao Degrau para K=-0,5
Amplitude
Time (seconds)
Resposta ao Degrau para K=15
Amplitude
Time (seconds)

Exercício 3

(c) Determinar a expressão que permite calcular o erro de regime permanente do sistema. Analisar o comportamento do erro de regime permanente em função de todos os valores possíveis para o parâmetro k. É possível obter-se erro nulo? Para que valor(es) de k?

O erro de regime permanente pode ser obtido de diversas formas.

❖ Pelos coeficientes dos polinômios do numerador e denominador de T(s)

$$e_\infty = \frac{ao - bo}{ao} = \frac{86 + 15K - 80}{86 + 15K} = \frac{6 + 15K}{86 + 15K}$$

❖ Pelo limite do erro de regime permanente

$$e_\infty = \lim_{s \to 0} s[1 - T(s)]R(s) = 1 - T(0) = 1 - \frac{80}{86 + 15K} = \frac{6 + 15K}{86 + 15K}$$

Exercício 3

❖ Pelo coeficiente de erro

$$K_P = \lim_{s\to 0} C(s)Gp(s) = \frac{80}{6+15K}$$

$$\Downarrow$$

$$e_\infty = \frac{1}{1+Kp} = \frac{6+15K}{86+15K}$$

Análise da variação do erro

$$K < -0{,}78 \qquad e_\infty \to \infty$$

$$K = -0{,}4 \qquad e_\infty = 0$$

$$K = 0 \qquad e_\infty = 7\%$$

$$K \to \infty \qquad e_\infty \to 100\%$$

Exercício 3

(d) Determinar a sensibilidade do erro em regime permanente em função da variação de k.

$$Se_{\infty} = \frac{\partial e_{\infty}}{\partial K}\frac{K}{e_{\infty}} = \frac{1200K}{(86+15K)(6+15K)}$$

Exercício 3

(e) Esboçar a resposta do sistema considerando $k = -0,5$. Calcular e indicar no gráfico o valor da saída em regime permanente. Indicar também os valores aproximados de sobresinal máximo e tempo de acomodação (critério de 2%). Pode-se afirmar que esses valores são boas aproximações dos valores reais ? Justificar a resposta.

(f) Com o auxílio do MATLAB simule a resposta do sistema ao degrau unitário e verifique os valores exatos de sobresinal máximo e tempo de acomodação.

Para K= -0,5

$$T(s) = \frac{40(s+2)}{s^3 + 3{,}5s^2 + 41s + 78{,}5} = \frac{40(s+2)}{(s+2{,}06)(s^2 + 1{,}44s + 38{,}04)}$$

Observe que o polo real de malha fechada e o zero do sistema estão muito próximos (quase sobrepostos). Assim, o comportamento da resposta ao degrau será dominado pelos polos complexos. Logo, a aproximação é boa.

Exercício 3

Aproximando pelos polos dominantes complexos:

$$T'(s) = \frac{1{,}02 \times 38{,}04}{s^2 + 1{,}44s + 38{,}04}$$

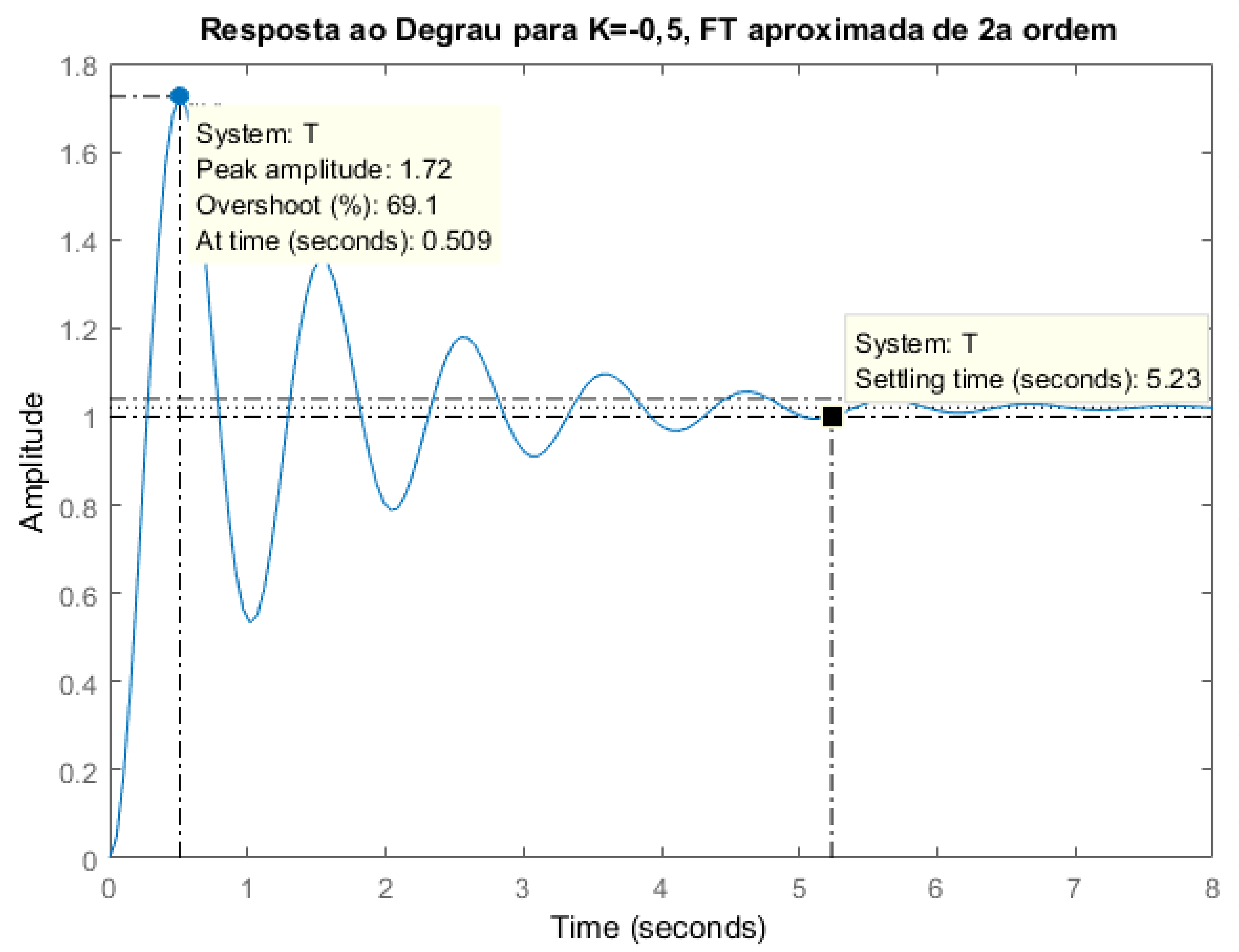
$$s^2 + 1{,}44s + 38{,}04 = 0$$

$$\xi = 0{,}117 \quad \rightarrow \quad Mp = 69\%$$

$$\omega_n = 6{,}17 \quad \rightarrow \quad ts = 5{,}6seg$$

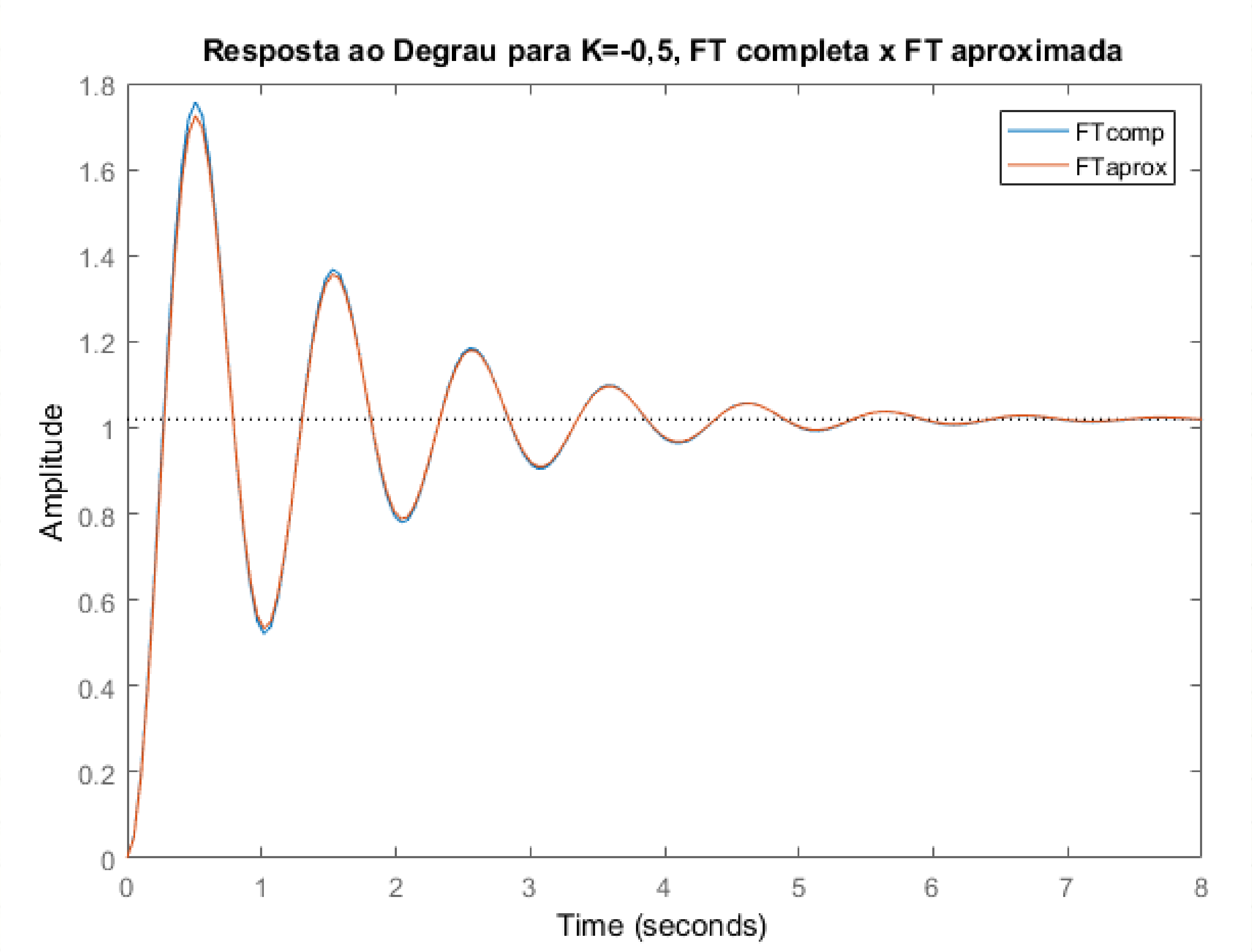
$$e_\infty = \frac{6 + 15K}{86 + 15K} = -0{,}02 \qquad y_\infty = 1{,}02$$

Exercício 3



Resposta ao Degrau para K=-0,5, FT aproximada de 2a ordem
System: T
Peak amplitude: 1.72
Overshoot (%): 69.1
At time (seconds): 0.509
System: T
Settling time (seconds): 5.23
Amplitude
Time (seconds)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
0
1
2
3
4
5
6
7
8

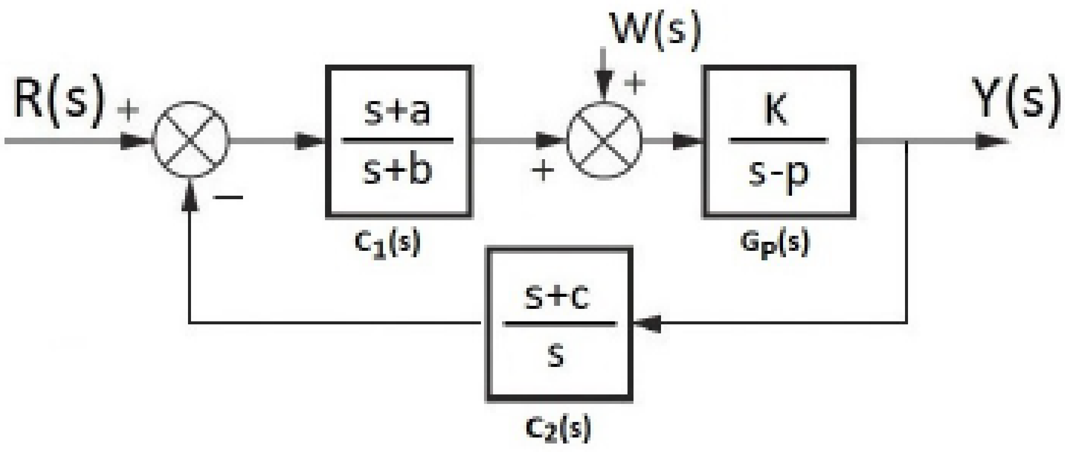
Exercício 3



Resposta ao Degrau para K=-0,5, FT completa x FT aproximada
FTcomp
FTaprox
Amplitude
Time (seconds)
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8

Exercício 13

13. Seja o sistema de controle representado na figura abaixo sendo que os sinais R(s) e W(s) representam, respectivamente, entrada de referência e de perturbação.



Considere que a entrada de referência é um sinal do tipo degrau unitário e a perturbação é uma rampa unitária. Determinar:

(a) As funções de transferência das entradas de referência e de perturbação em relação à saída.

(b) O erro de rastreamento em regime permanente.

(c) A sensibilidade do erro de regime permanente à variações no parâmetro a.

Exercício 13

a) Funções de transferência

$$T_R(s) = \frac{Ks(s+a)}{s(s+b)(s-p)+K(s+a)(s+c)}$$

$$T_W(s) = \frac{Ks(s+b)}{s(s+b)(s-p)+K(s+a)(s+c)}$$

b) Erro em regime permanente

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} s[1-T(s)]R(s) - \lim_{s\to 0} sT_W(s)W(s)$$

$$= 1-0-\frac{Kb}{Kac} = \frac{ac-b}{ac}$$

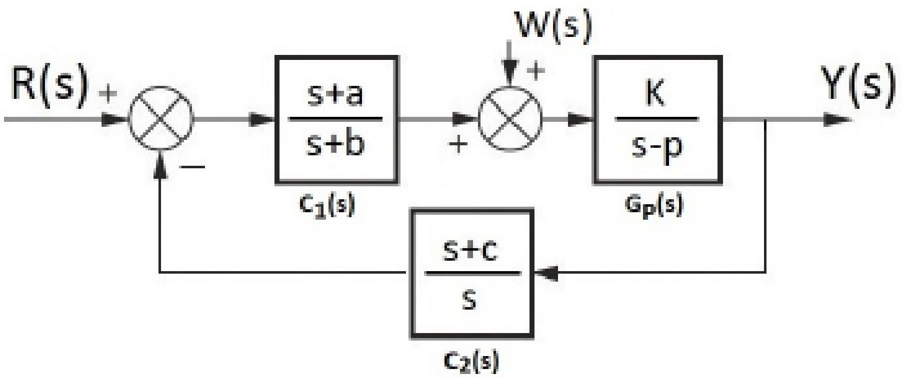
Exercício 13

c) Sensibilidade do erro em relação à varações no parâmetro a

$$Se_{\infty} = \frac{\partial e_{\infty}}{\partial a}\frac{a}{e_{\infty}} = \frac{b}{ac-b}$$

Exercício 13

13. Seja o sistema de controle representado na figura abaixo sendo que os sinais R(s) e W(s) representam, respectivamente, entrada de referência e de perturbação.



Considere agora o sistema sem perturbação (ou seja $W(s) = 0$) e os seguintes parâmetros: $K = 4$, $a = 2$, $b = 1$ e $c = 0$.

(a) Esboçar, o Lugar das Raízes para a variação do polo do sistema $p > 0$, detalhando: trecho(s) no eixo real, cruzamento(s) com o eixo imaginário e ponto(s) de ramificação. Indicar explicitamente a faixa de valores de p que garante a estabilidade do sistema em malha fechada.

(b) Desprezando o efeito dos zeros, determinar a faixa de valores de p de modo que a resposta do sistema a um degrau unitário apresente sobressinal não superior a 10% e tempo de acomodação inferior a 4 segundos.

(c) Avaliar o comportamento da resposta ao degrau em termos de tempo de acomodação e sobresinal, considerando toda a variação possível do parâmetro p.

Exercício 13

(a) Esboçar, o Lugar das Raízes para a variação do polo do sistema $p > 0$, detalhando: trecho(s) no eixo real, cruzamento(s) com o eixo imaginário e ponto(s) de ramificação. Indicar explicitamente a faixa de valores de p que garante a estabilidade do sistema em malha fechada.

A equação característica do sistema

$$\Delta(s) = s^3 + (5 - p)s^2 + (8 - p)s = 0$$

pode ser escrita como

$$1 - p\frac{s^2 + s}{s^3 + 5s^2 + 8s} = 0$$

ou

$$1 + K\frac{s+1}{s^2 + 5s + 8} = 0$$

Exercício 13

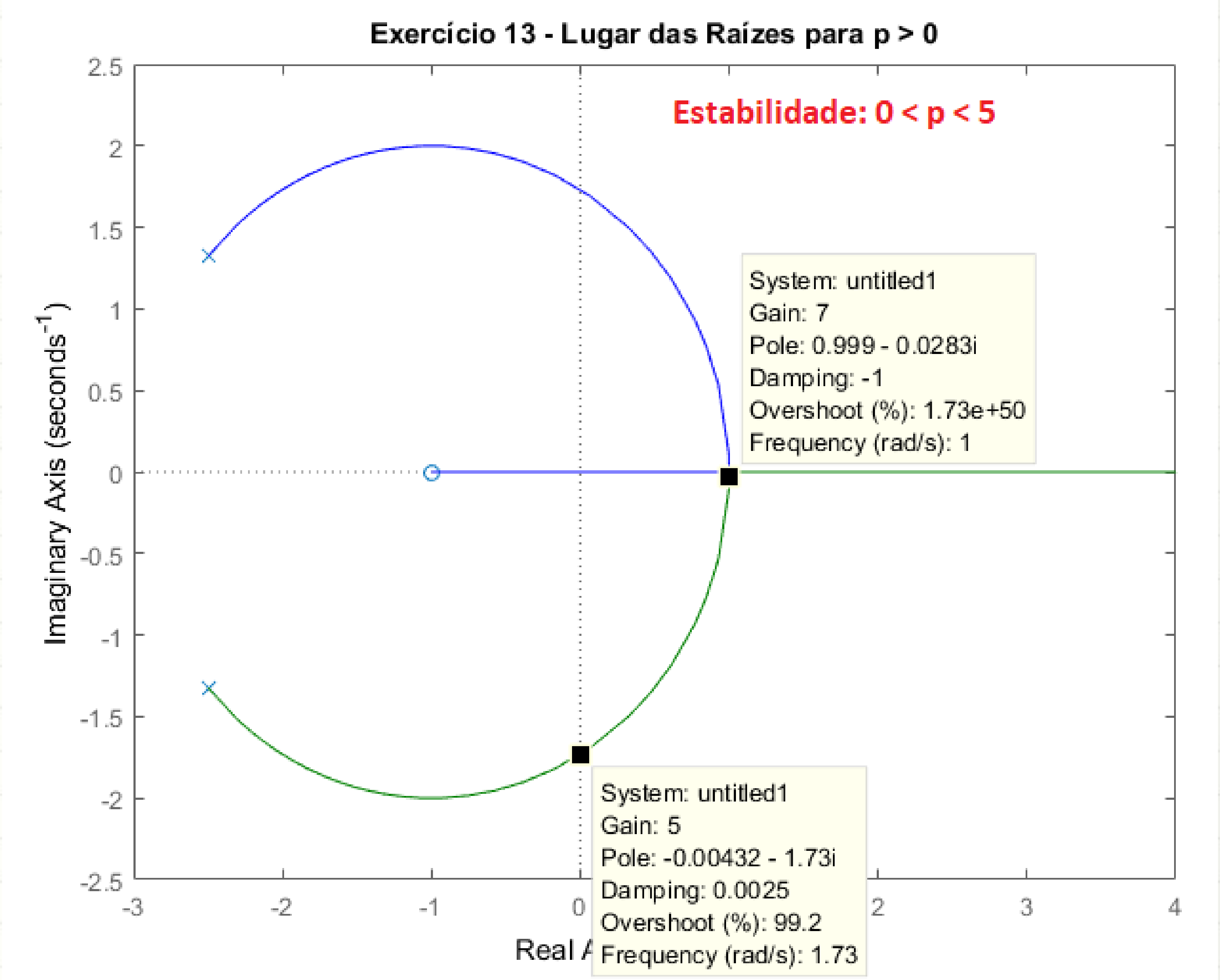
Assim, o LR será traçado para K < 0, equivalente à p > 0, com

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2 + 5s + 8}$$

$$p_{1,2} = -2,5 \pm j1,32$$

$$z = -1$$

Exercício 13



Exercício 13

(b) Desprezando o efeito dos zeros, determinar a faixa de valores de p de modo que a resposta do sistema a um degrau unitário apresente sobressinal não superior a 10% e tempo de acomodação inferior a 4 segundos.

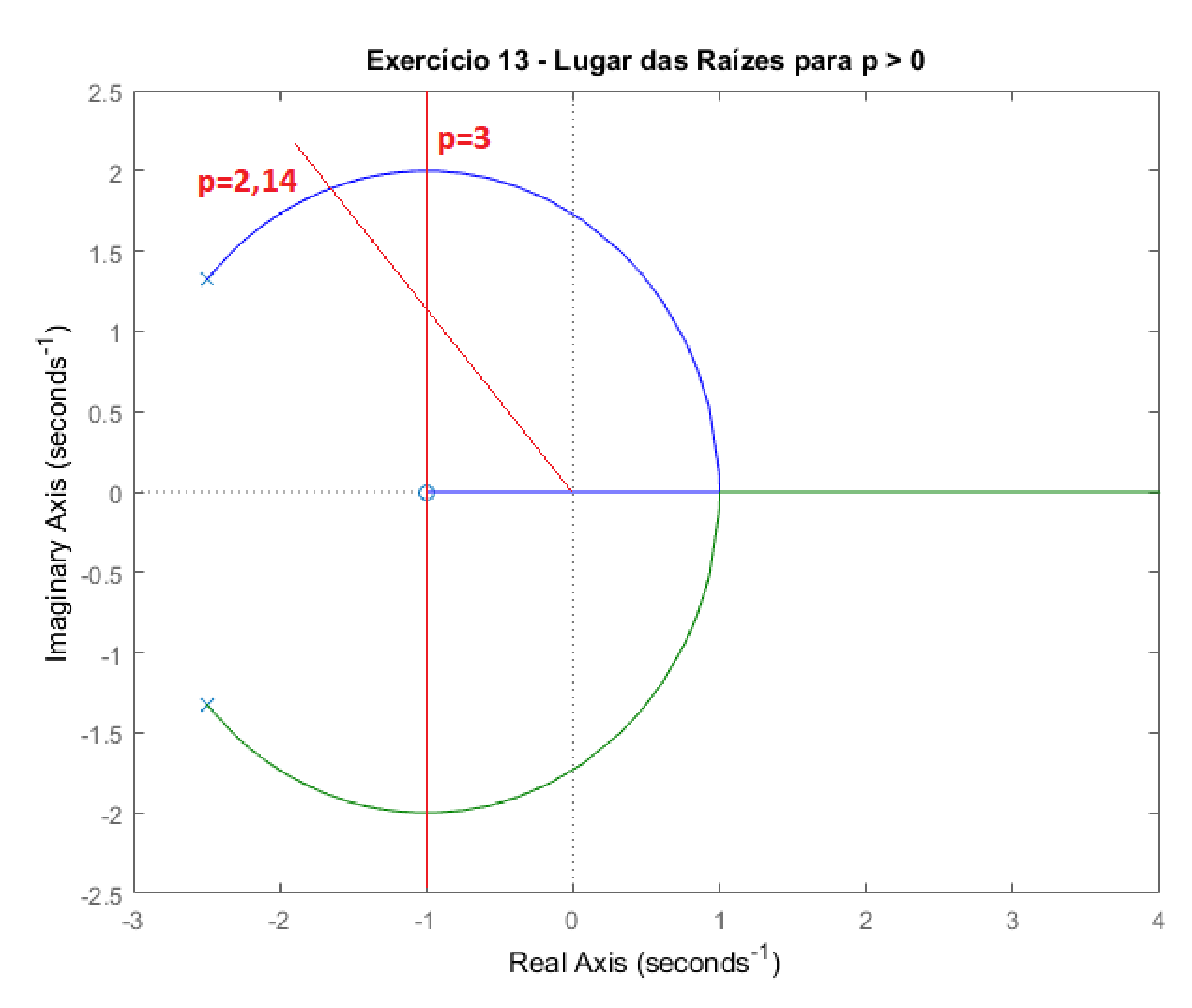
$$\begin{matrix} t_s < 4\,\text{seg} \\ M_p < 10\% \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} \xi\omega_n > 1 \\ \xi > 0,59\,(\theta < 54^\circ) \end{matrix}$$

Assim, devem ser obtidos os valores de p para cada uma das especificações encontrando as interseções das regiões com o Lugar das Raízes.

$$\xi\omega_n > 1 \quad \rightarrow \quad reta\ em\ -1$$

$$\xi > 0,59 \quad \rightarrow \quad reta\ com\ \measuredangle 54^\circ$$

Exercício 13



Exercício 13

Para a especificação de tempo de acomodação obtém-se:

$$p < 3$$

Para a especificação de sobressinal obtém-se:

$$p < 2{,}14$$

Logo, para atender ambas as especificações:

$$0 < p < 2{,}14$$

Exercício 13

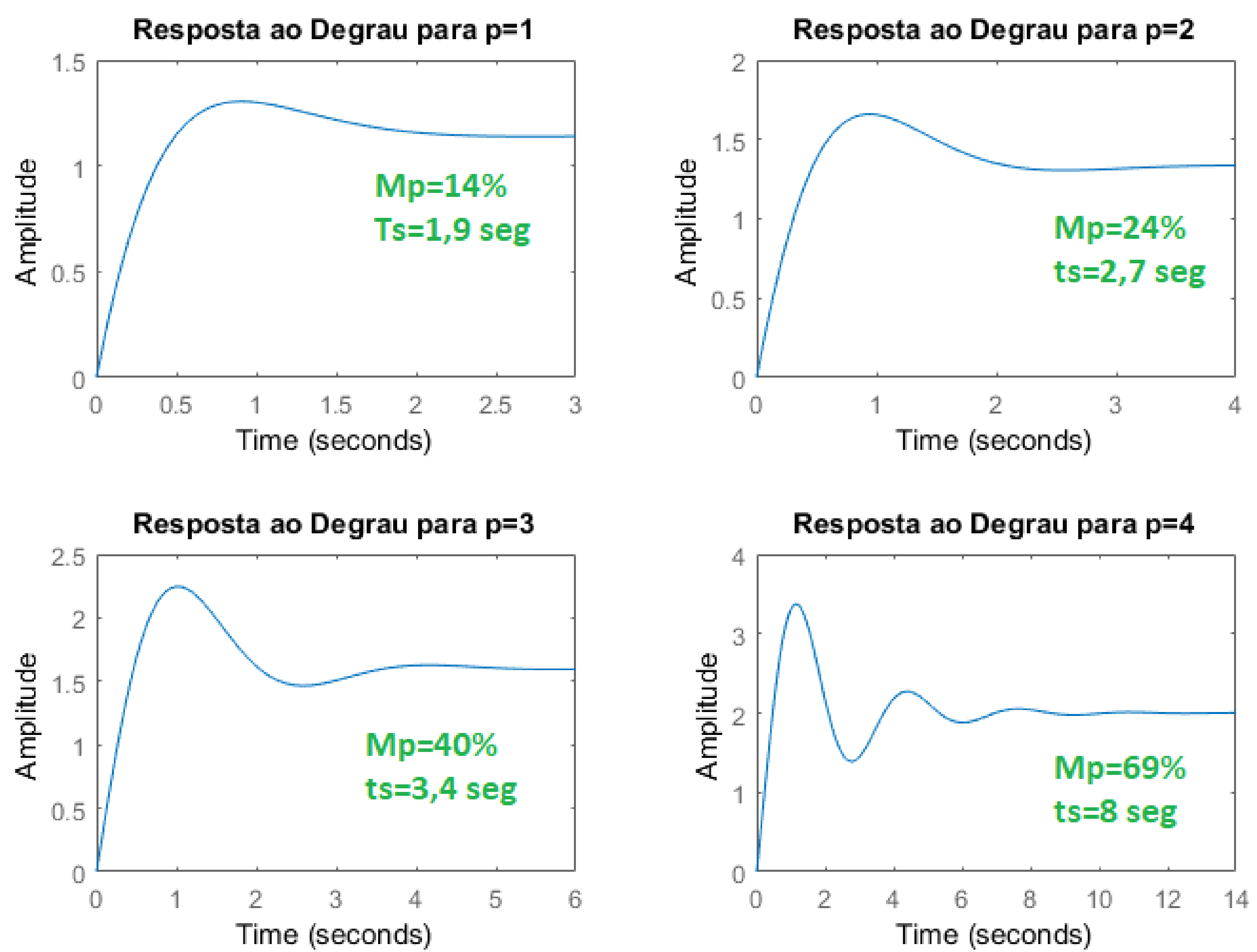
(c) Avaliar o comportamento da resposta ao degrau em termos de tempo de acomodação e sobresinal, considerando toda a variação possível do parâmetro p.

A função de transferência de malha fechada é dada por:

$$T(s) = \frac{4(s+2)s}{s\left[s^2 + (5-p)s + (8-p)\right]}$$

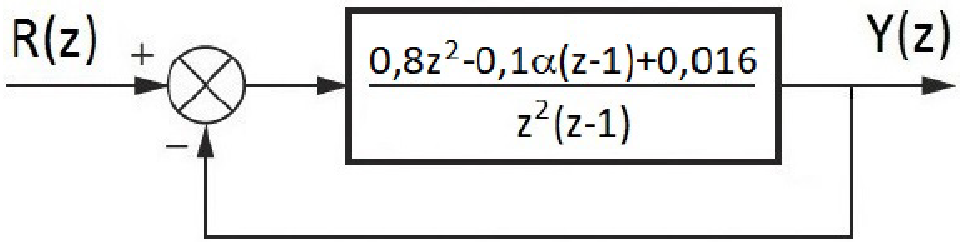
Considerando a variação de p dentro da faixa de estabilidade, a medida que p aumenta diminui a parte real e aumenta a parte imaginária dos polos dominantes. Isto deixa a resposta mais oscilatória aumentando o sobressinal e o tempo de acomodação.

Exercício 13



Exercício 19

19. Considere o sistema de controle mostrado a seguir. Para a obtenção da função de transferência em tempo discreto foi utilizado um período de amostragem $T = 0,15$ segundos.



(a) Esboçar o Lugar das Raízes para a variação do parâmetro $0 < \alpha < +\infty$, detalhando: trecho(s) no eixo real, interseção com o círculo unitário e ponto(s) de ramificação. Utilize a figura a seguir.

(b) Determinar a faixa de valores do parâmetro $\alpha > 0$ de modo a garantir um erro de regime permanente inferior a 20% para uma entrada em rampa unitária. Qual o menor erro que poderia ser obtido? Justificar as respostas.

(c) É possível ajustar o parâmetro $\alpha > 0$ de modo a garantir, para a resposta ao degrau unitário, um tempo de pico não superior a 1 segundo. Justificar a resposta.

Exercício 19

(a) Esboçar o Lugar das Raízes para a variação do parâmetro $0 < \alpha < +\infty$, detalhando: trecho(s) no eixo real, interseção com o círculo unitário e ponto(s) de ramificação. Utilize a figura a seguir.

Inicialmente é preciso escrever a equação característica do sistema na forma padrão para o traçado do Lugar das Raízes.

$$\Delta(z) = z^3 - 0,2z^2 - 0,1\alpha(z-1) + 0,016 = 0$$

ou

$$1 + K\frac{0,1(z-1)}{z^3 - 0,2z^2 + 0,016} = 0$$

sendo K = -α.

Exercício 19

Assim, o LR será traçado para G(z) considerando K < 0 (que é equivalente à $\alpha > 0$).

$$G(z) = \frac{0,1(z-1)}{z^3 - 0,2z^2 + 0,016}$$

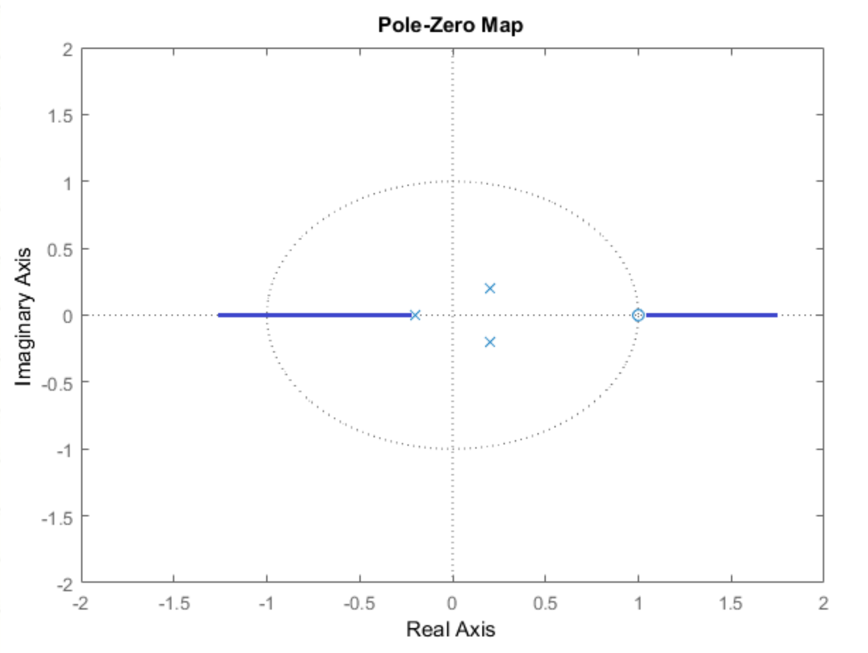
$$z = 1$$

$$p_{1,2} = 0,2 \pm j0,2$$

$$p_3 = -0,2$$

Eixo real: $(-\infty,-0,2]\ [1,+\infty]$

Assíntotas: $\theta l = 0°, 180°$



Exercício 19

Ramificação (dk/dz=0):

$$K = -\frac{z^3 - 0,2z^2 + 0,016}{0,1(z-1)}$$

$$dK/dz = 0 \quad \Rightarrow \quad 2z^3 - 3,2z^2 + 0,4z + 0,016 = 0$$

$$z = 1,47 \in \mathrm{LR} \qquad\qquad K = 58,7$$

$$z = 0,066 \pm j0,032 \notin \mathrm{LR}$$

Portanto, existe uma única ramificação, em z=1,47.

Exercício 19

Intersecção com o círculo unitário:

$$a^3 - 3ab^2 - 0,2a^2 + 0,2b^2 + 0,016 - 0,1\alpha(a-1) \qquad (1)$$

$$b(3a^2 - b^2 - 0,4a - 0,1\alpha) = 0 \qquad (2)$$

$$b^2 = 1 - a^2 \qquad (3)$$

Para b=0

$$a = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} a = 1 & \alpha \to \infty \\ a = -1 & \alpha = 5,92 \end{array}$$

Para b $\neq$ 0, substituindo (3) em (2), tem-se

$$0,1\alpha = 4a^2 - 0,4a - 1 \qquad (4)$$

Exercício 19

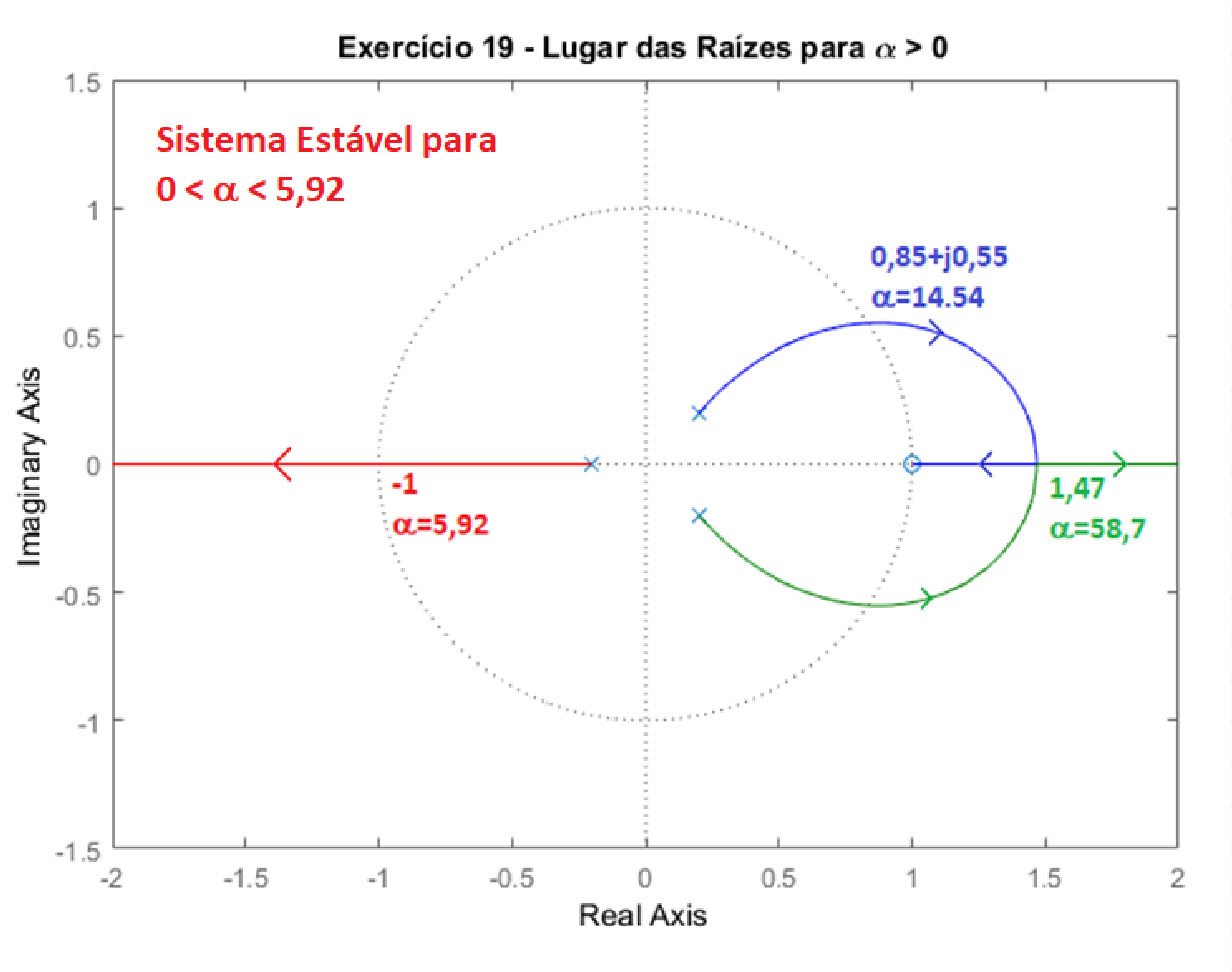
Substituindo (3) e (4) em (1), chega-se a

$$a = +0,8348 \quad \rightarrow \quad b = +0,5506 \quad \alpha = 14,54$$
$$a = -0,2348 \quad \rightarrow \quad b = -6,86 \quad \alpha = 0,972$$

Logo, a interseção com o círculo unitário ocorre em

$$z = 0,8348 \pm j0,5506 \quad \alpha = 14,54$$
$$z = -1 \quad \alpha = 5,92$$

Exercício 19



Exercício 19

(b) Determinar a faixa de valores do parametro $\alpha > 0$ de modo a garantir um erro de regime permanente inferior a 20% para uma entrada em rampa unitária. Qual o menor erro que poderia ser obtido? Justificar as respostas.

Uma vez que o sistema é de realimentação unitária, o erro pode ser calculado diretamente:

$$K_V = \lim_{z \to 1} \frac{z-1}{T} G(z) = 5,44$$

E o menor erro será

$$e_\infty = \frac{1}{K_V} = 18,4\%$$

O erro é independente de α, porém, é necessário que seja garantida a estabilidade do sistema. Assim, para $e_\infty < 20\%$

$$0 < \alpha < 5,92$$

Exercício 19

(c) É possível ajustar o parâmetro $\alpha > 0$ de modo a garantir, para a resposta ao degrau unitário, um tempo de pico não superior a 1 segundo. Justificar a resposta.

$$\underbrace{t_P = \frac{\pi}{\omega_d} < 1}_{\text{contínuo}} \quad \rightarrow \quad \underbrace{\omega_d T = 27^\circ}_{\text{discreto}}$$

Dentro da faixa de estabilidade tem-se

$$K = 0 \qquad p_{1,2} = 0,2 \pm j0,2 \quad \measuredangle 45^\circ$$

$$K = 5,92 \quad p_{1,2} = 0,6 \pm j0,5 \quad \measuredangle 39,5^\circ$$

Portanto, dentro da faixa de estabilidade o ângulo varia de 45° 39,5°, ou seja, é sempre maior do que 27°. Desta forma, a especificação de tempo de pico é sempre garantida.