Projeto de Controladores Usando Resposta em Frequência

Profa. Cristiane Paim

Introdução

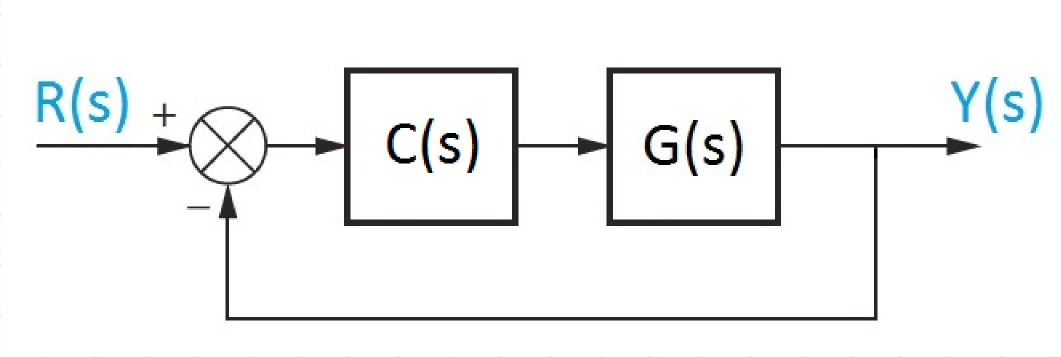
No projeto de controladores usando a resposta em frequência as principais especificações de desempenho são:

- Margens de Fase
- Largura de Faixa
- Erro de Regime Permanente

Como visto anteriormente, margem de fase e largura de faixa estão relacionadas com características da resposta transitória. A margem de fase está associada com o amortecimento enquanto a largura de faixa indica a velocidade da resposta.

Controladores em Avanço

Seja a configuração de controle em série;



O controlador em avanço é escrito na forma

$$C(s) = K\frac{1+\alpha Ts}{1+Ts} \qquad T > 0, \alpha > 1$$

ou, em frequência

$$C(j\omega) = K\frac{1+j\omega\alpha T}{1+j\omega T}$$

Controladores em Avanço

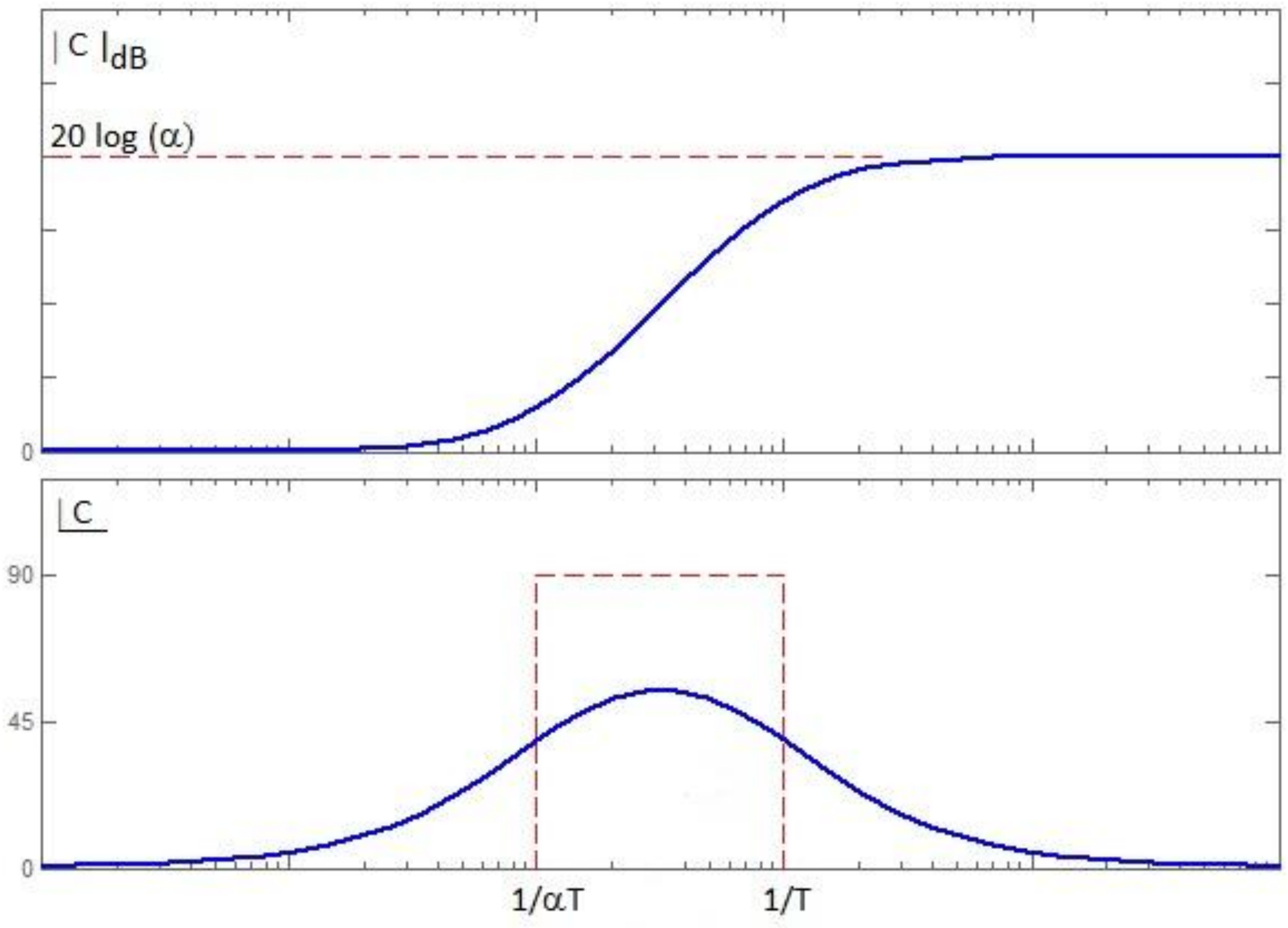
A resposta em frequência do controlador, considerando K=1 por simplicidade, terá as variações de módulo e fase definidas a seguir.

Frequência	Módulo	Fase
ω=0 a ω=1/αT	0 dB/dec	0°
ω=1/αT a ω=1/T	20 dB/dec	90°
ω=1/T a $\omega \to \infty$	0 dB/dec	0°

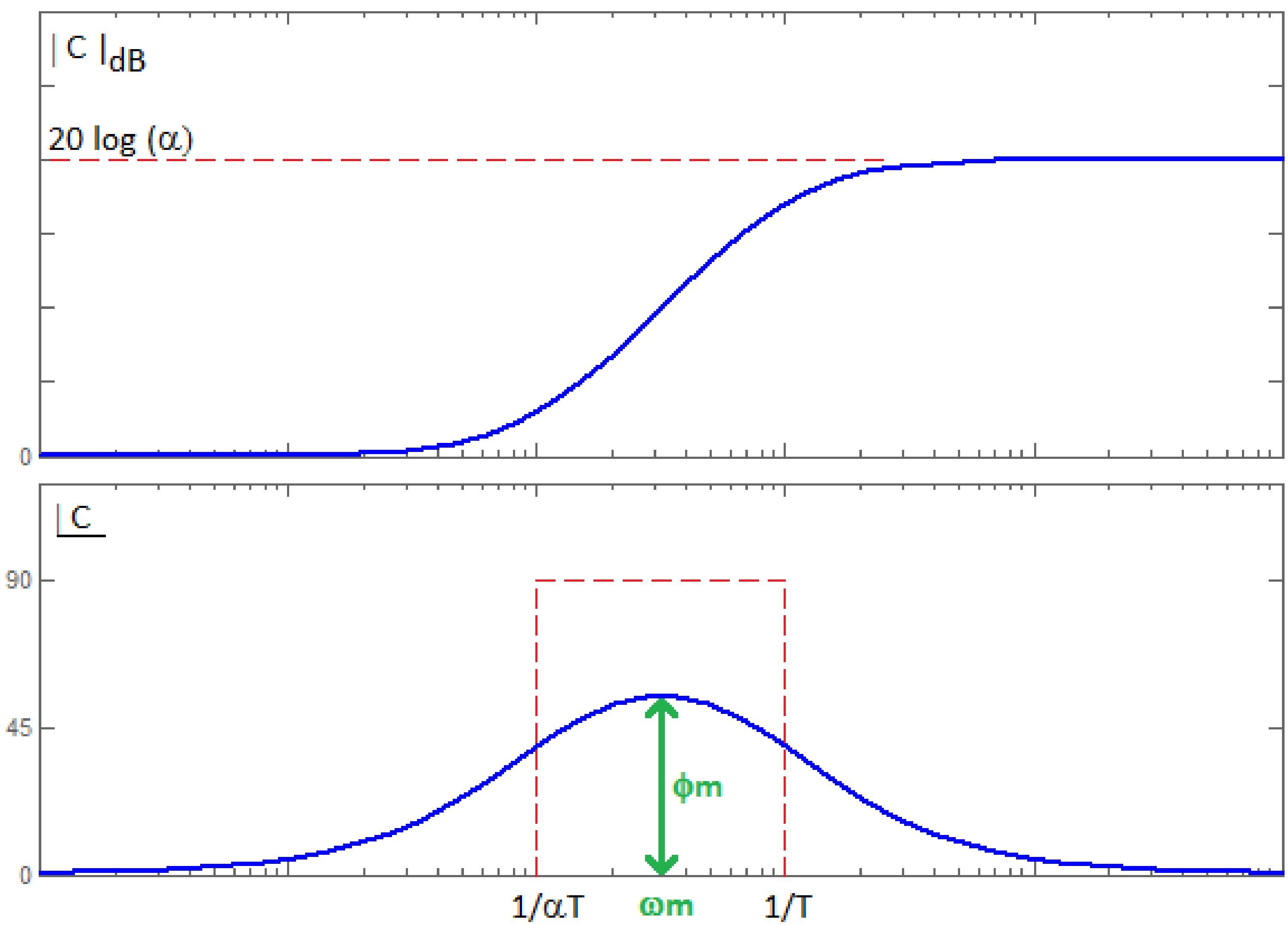
$$\omega << 1 \quad \rightarrow \quad \left|C\right| = 0\,\mathrm{dB} \qquad \angle C = 0^{\circ}$$

$$\omega >> 1 \quad \rightarrow \quad \left|C\right| = 20\log(\alpha) \qquad \angle C = 0^{\circ}$$

Controladores em Avanço



Controladores em Avanço



Controladores em Avanço

A fase do controlador é dada por

$$\angle C(j\omega) = tg^{-1}(\alpha T\omega) - tg^{-1}(T\omega)$$

Definindo,

$$\phi(\omega) = \angle C(j\omega)$$

e calculando a tangente, tem-se

$$\mathrm{tg}\,\phi(\omega) = \frac{(\alpha - 1)T\omega}{1 + \alpha T^2\omega^2}$$

O pico de fase do controlador ocorre na frequência onde

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\mathrm{tg}\,\phi(\omega) = 0$$

Controladores em Avanço

Resolvendo a equação, chega-se que a frequência onde pico ocorre é dada por

$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$

Na frequência de pico (ω_m),

$$\operatorname{tg}\phi(\omega_m) = \operatorname{tg}\phi_m = \frac{\alpha - 1}{2\sqrt{\alpha}}$$

Ou ainda,

$$\operatorname{sen}\phi_m = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$$

Controladores em Avanço

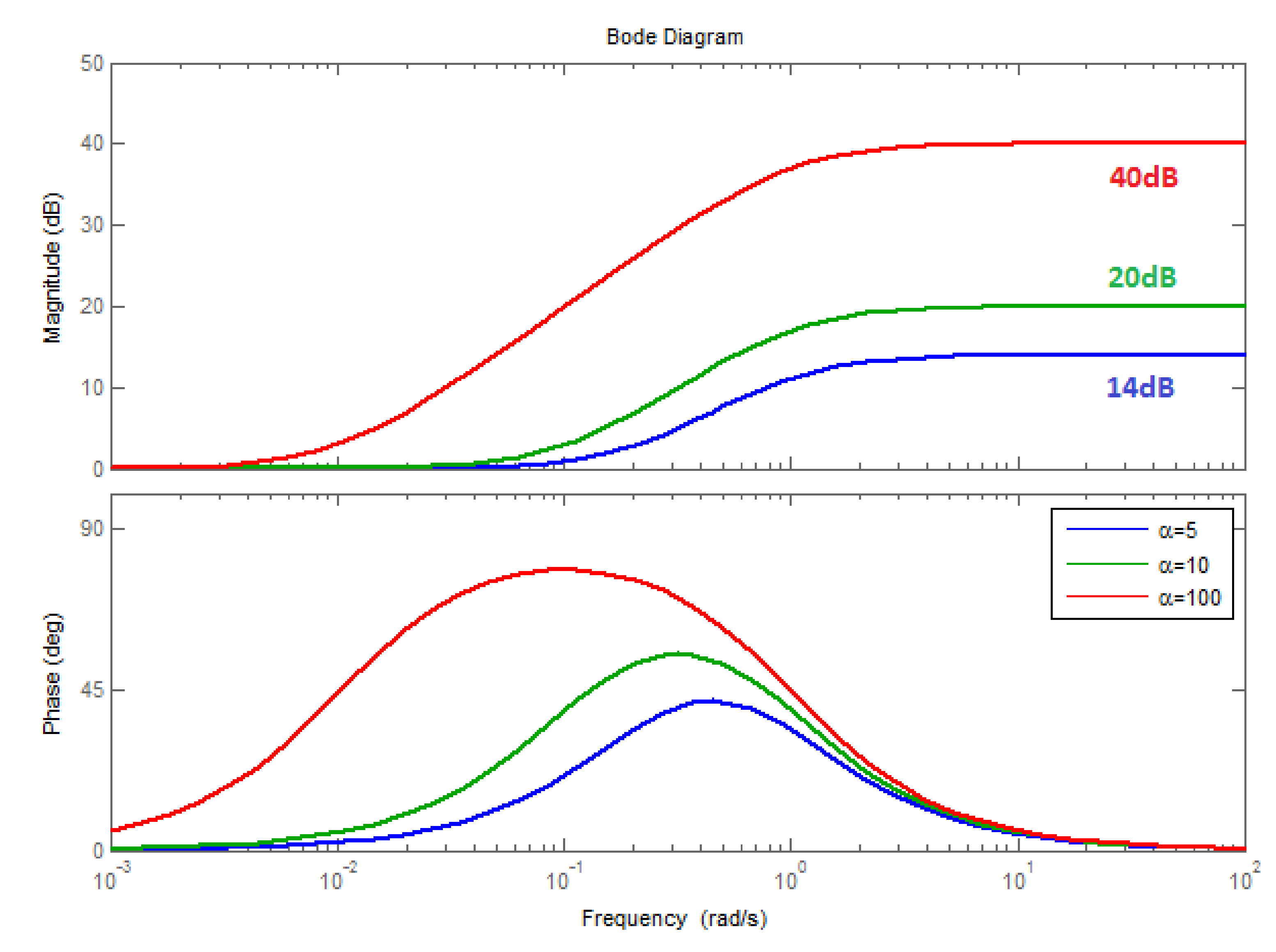
Assim, quanto maior o valor de α, maior será o ângulo de fase (ϕ_m) e menor (mais à esquerda) será a frequência onde o pico ocorre (ω_m).

Por exemplo, considerando T=K=1, tem-se

$$C(j\omega) = \frac{1 + j\omega\alpha}{1 + j\omega}$$

α	ω_m	ϕ_m
5	0,45	41,8°
10	0,32	54,9°
100	0,10	78,6°

Controladores em Avanço



Controladores em Avanço

O valor de α, entretanto, não deve ser muito grande para evitar ruídos de alta frequência.

O valor de α pode ser reescrito como

$$\alpha = \frac{1+\operatorname{sen}\phi_m}{1-\operatorname{sen}\phi_m}$$

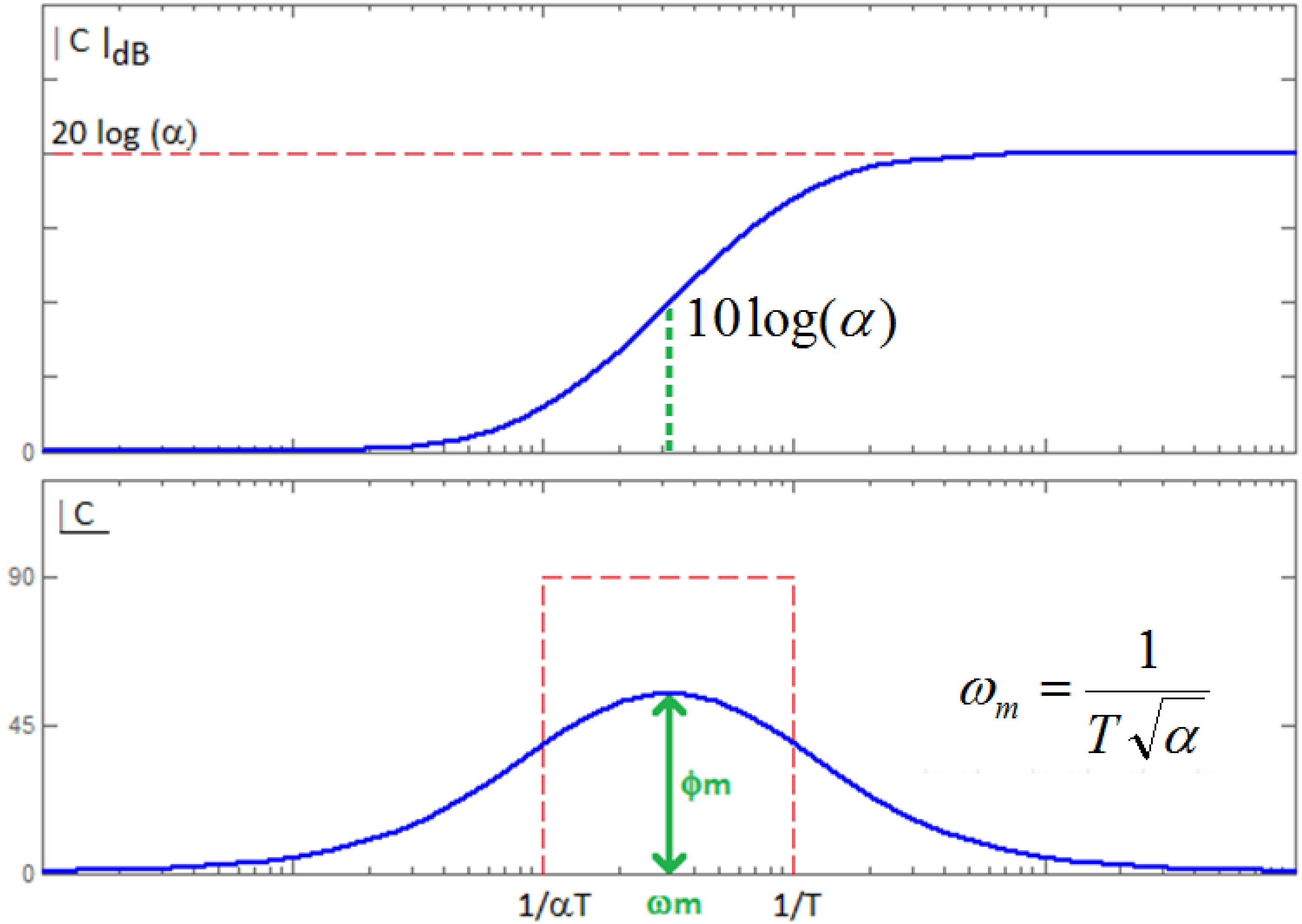
Na frequência de pico (ω_m), o módulo do controlador é dado por

$$\left|C(j\omega_m)\right| = \sqrt{\alpha}$$

ou

$$\left|C(j\omega_m)\right|_{dB} = 20\log\sqrt{\alpha} = 10\log(\alpha)$$

Controladores em Avanço



$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$

Controladores em Avanço

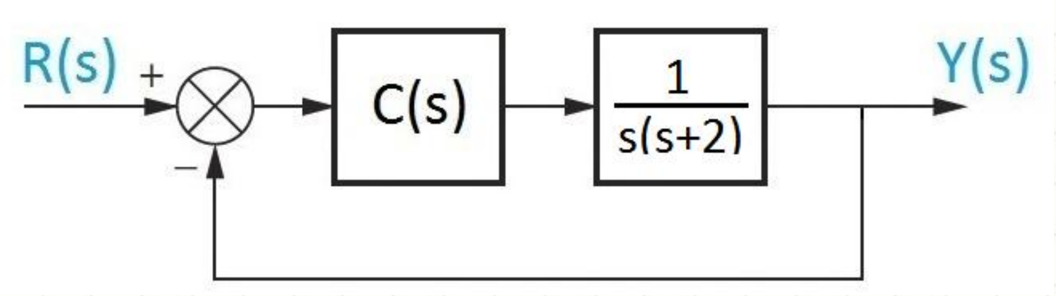
O controlador em avanço é projetado com o objetivo de **aumentar a margem de fase** do sistema melhorando assim a margem de estabilidade e as características da resposta transitória.

Fazendo ω_m igual a frequência de cruzamento de ganho do sistema não compensado (ω_G) a fase aumentaria de um fator ϕ_m. Por outro lado, o controlador também introduz uma modificação no módulo, causando um pequeno deslocamento de ω_G para a direita, acarretando uma redução na margem de fase.

O efeito deste deslocamento pode ser compensado introduzindo no projeto uma "margem de segurança" na determinação de ϕ_m .

Exemplo 1

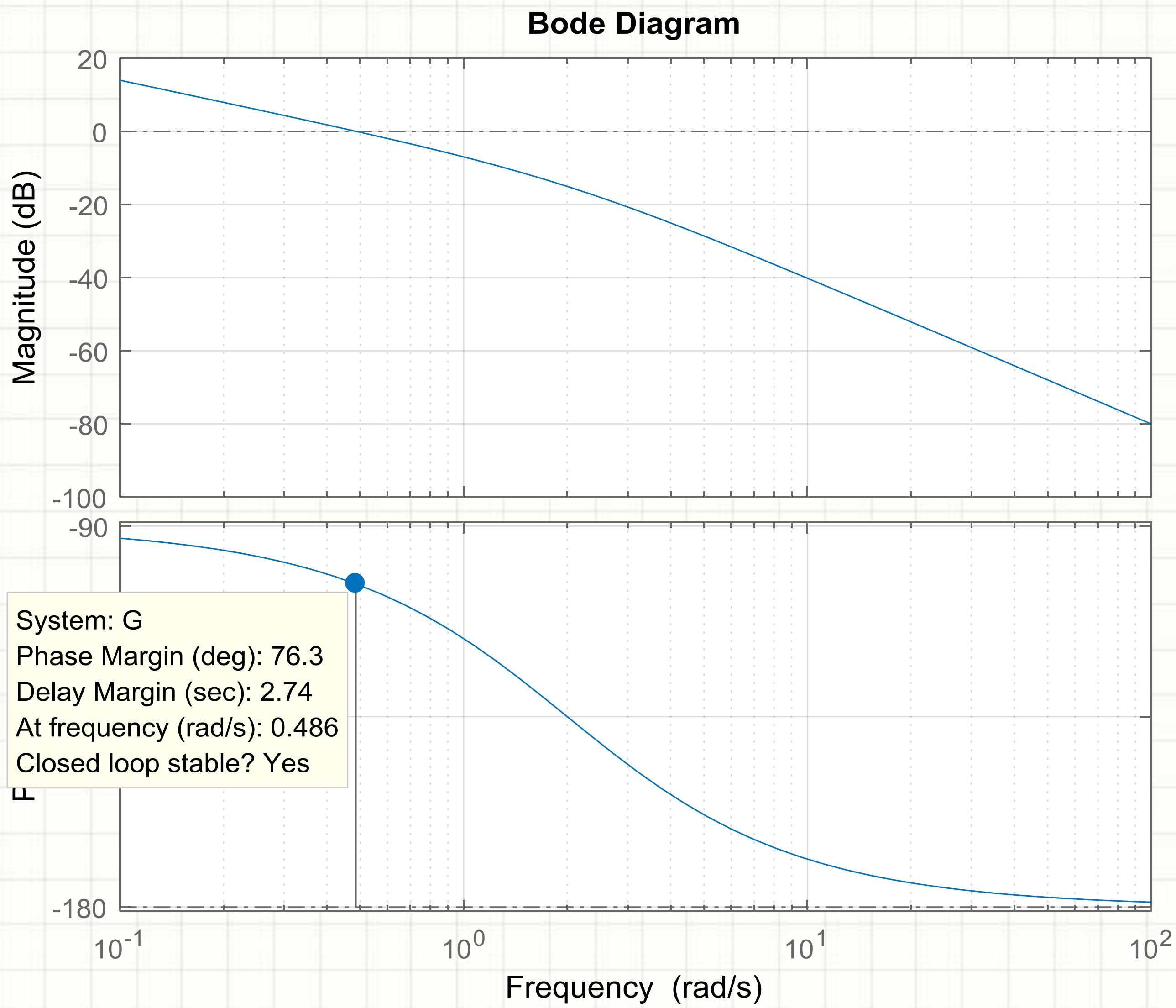
Seja o sistema de controle a seguir.



Projetar um controlador em avanço de fase de modo a atender as seguintes especificações:

- Erro à rampa menor do que 10%
- Margem de fase maior ou igual a 60°

Exemplo 1


Bode Diagram
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
Magnitude (dB)
-90
-180
System: G
Phase Margin (deg): 76.3
Delay Margin (sec): 2.74
At frequency (rad/s): 0.486
Closed loop stable? Yes
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
Frequency (rad/s)

Exemplo 1

Como visto no diagrama de bode, a especificação de margem de fase já é atendida porém o erro de regime permanente é muito maior do que a especificação.

$$Kv = \lim_{s \to 0} sG(s) = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad e_{\infty} = 2$$

O ganho K do controlador pode ser ajustado para garantir a especificação de erro. Entretanto, este ajuste causará uma redução na margem de fase que será corrigida com a alocação de polo e zero do controlador.

Exemplo 1

Considerando o controlador em avanço, o erro de regime permanente será

$$Kv = \lim_{s \to 0} sC(s)G(s) = \frac{K}{2} \quad \rightarrow \quad e_\infty = \frac{2}{K}$$

Assim, para garantir a especificação de erro,

$$e_\infty = \frac{2}{K} \leq 0{,}1 \quad \rightarrow \quad K \geq 20$$

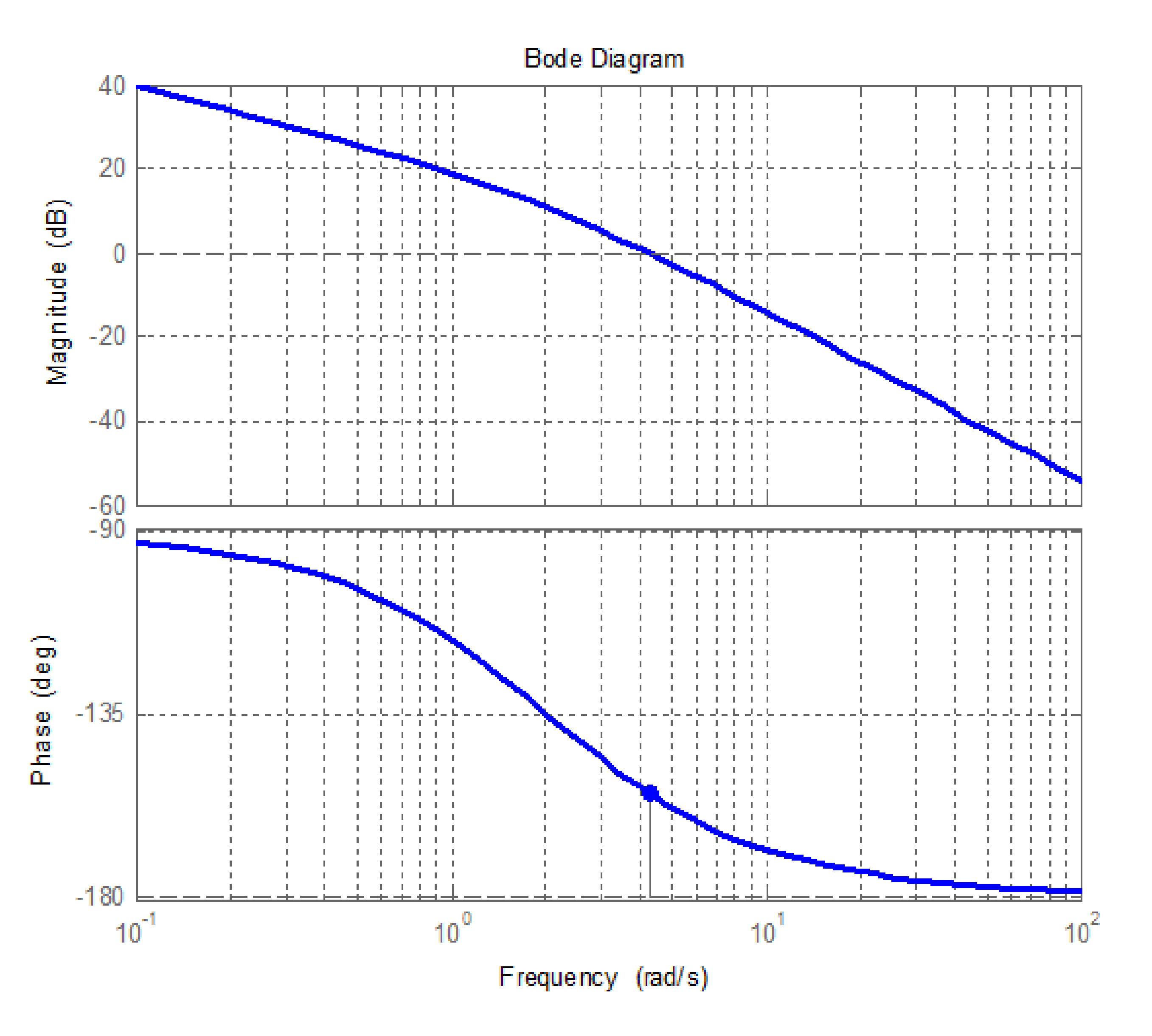
Para K=20 tem-se

$$\left|KG(j\omega)\right| = \frac{20}{\omega\sqrt{\omega^2 + 4}}$$

$$KG(j\omega) = \frac{20}{(j\omega)(j\omega + 2)} \quad \rightarrow$$

$$\angle KG(j\omega) = -\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{2\omega}{-\omega^2}\right)$$

Exemplo 1


Bode Diagram
Magnitude (dB)
40
20
0
-20
-40
-60
Phase (deg)
-90
-135
-180
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
Frequency (rad/s)

Exemplo 1

A frequência de cruzamento de ganho ω_G será determinada por

$$\left|KG(j\omega)\right| = \frac{20}{\omega\sqrt{\omega^2+4}} = 1 \quad \rightarrow \quad \omega^4 + 4\omega^2 - 400 = 0$$

$$\begin{matrix} \omega = \pm 4{,}25 \\ \omega = \pm j4{,}7 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \omega_G = 4{,}25$$

Nesta frequência

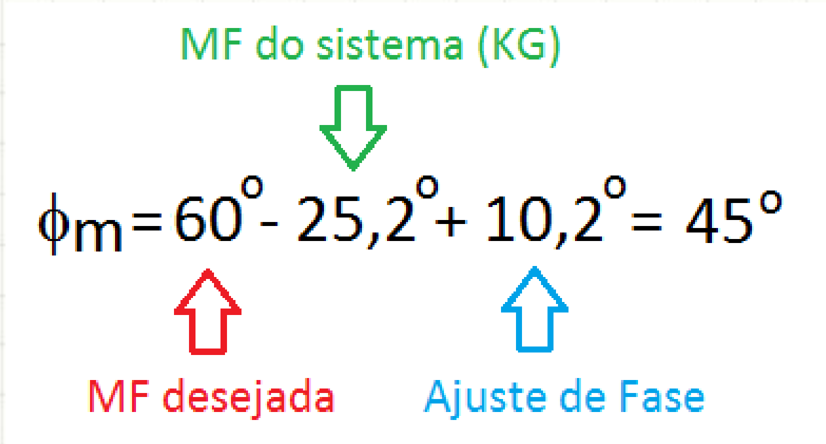
$$\angle KG(j\omega_G) = -\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{2}{-\omega_G}\right) = -154{,}8^\circ$$

Portanto,

$$MF = 180^\circ - 154{,}8^\circ = 25{,}2^\circ$$

Exemplo 1

A contribuição de fase do controlador é escolhida de modo a garantir a margem de fase desejada.



Geralmente, o ajuste de fase é feito adicionado uma fase entre 5 e 12 graus.

Definida a contribuição de fase do controlador, o valor de α pode ser calculado:

$$\alpha = \frac{1 + \operatorname{sen} \phi_m}{1 - \operatorname{sen} \phi_m} \quad \rightarrow \quad \alpha = 5{,}83$$

Exemplo 1

A frequência de cruzamento de ganho do sistema controlado, será definida pelo módulo

$$\left|C(j\omega_C)G(j\omega_C)\right| = 1$$

Assim, para conseguir o aumento necessário de fase, a frequência de cruzamento de ganho é ajustada para o pico de fase do controlador

$$\left|K\sqrt{\alpha}\,G(j\omega_C)\right| = 1$$

$$\frac{20}{\omega\sqrt{\omega^2+4}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \quad \rightarrow \quad \omega^4 + 4\omega^2 - 2332{,}9 = 0$$

$$\begin{aligned} \omega &= \pm 6{,}81 \\ \omega &= \pm j7{,}1 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \omega_C = 6{,}8$$

Exemplo 1

Verificação

$$\angle KG(j\omega_C) = -\text{tg}^{-1}\left(\frac{2}{-\omega_C}\right) = -163{,}6^\circ$$

$$MF = 180^\circ - 163{,}9^\circ + 45^\circ = 61{,}4^\circ > 60^\circ$$

Para concluir o projeto falta definir polo e zero do controlador.

A frequência de cruzamento de ganho do sistema controlado deve ser posicionada frequência de pico do controlador:

$$\omega_C = \omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} \quad \rightarrow \quad T = \frac{1}{\omega_C\sqrt{\alpha}}$$

Exemplo 1

Assim,

$$T = \frac{1}{\omega_C \sqrt{\alpha}} = 0{,}061 \quad \text{e} \quad \alpha T = 0{,}355$$

O controlador fica

$$C(s) = 20\,\frac{1+0{,}355s}{1+0{,}061s}$$

ou

$$C(s) = 116{,}4\,\frac{s+2{,}82}{s+16{,}4}$$

Exemplo 1 – Verificação dos resultados

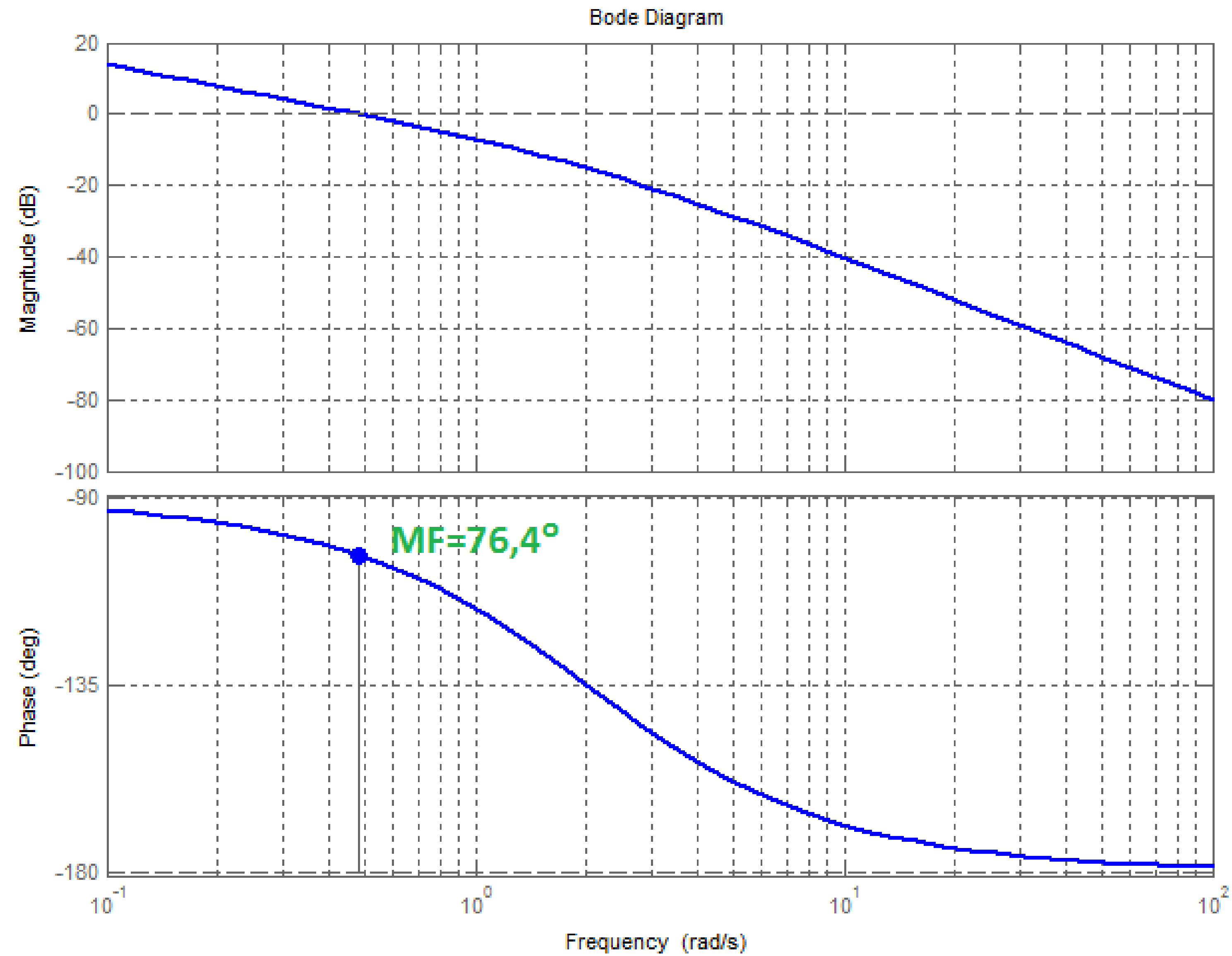
1. Sistema sem controlador (ou C(s)=1)

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} MG &= \infty \\ MF &= 76{,}4^\circ \\ \omega_{CG} &= 0{,}486 \end{aligned}$$

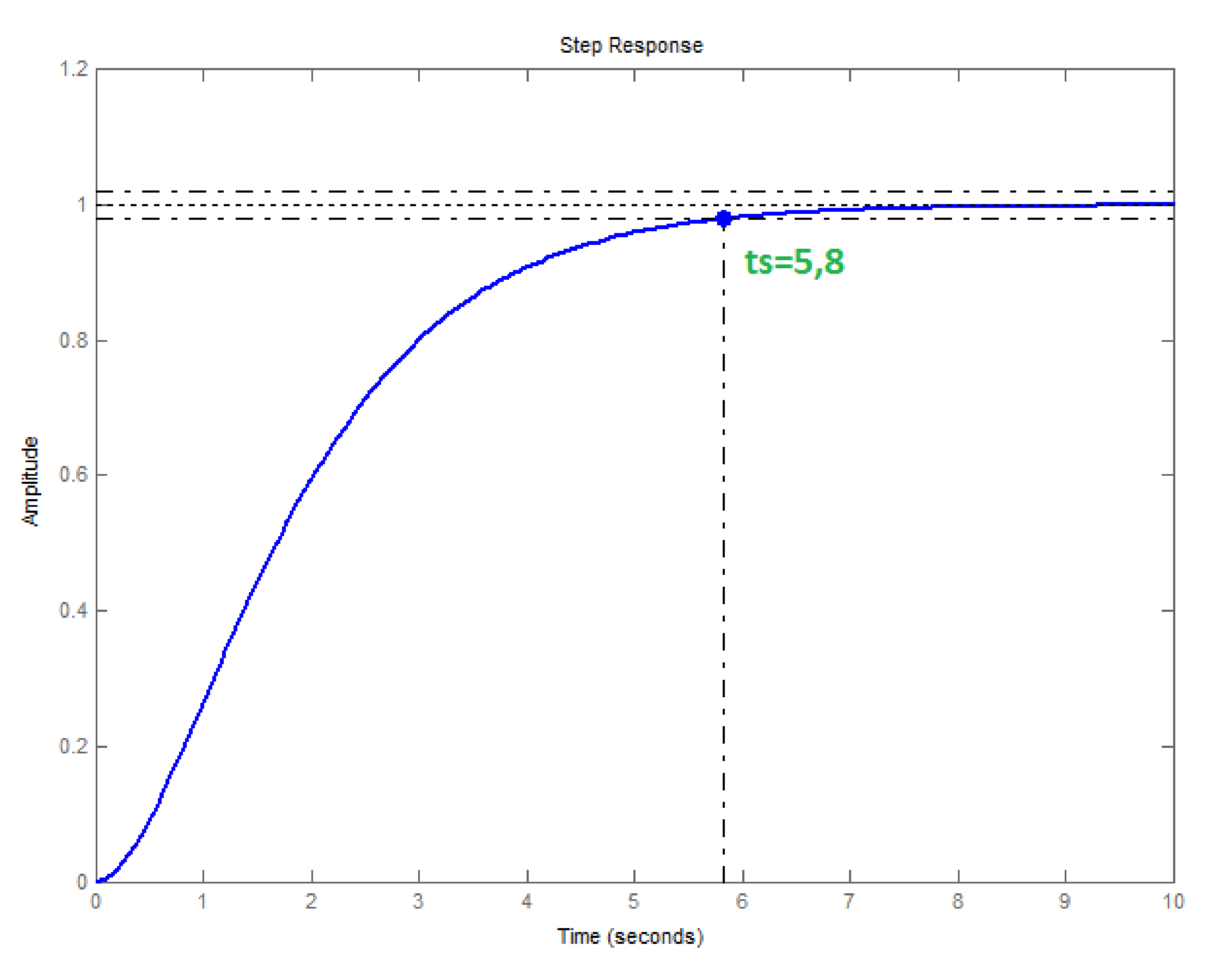
$$Kv = \lim_{s \to 0} sG(s) = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad e_\infty = 200\%$$

$$T(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} M_P &= 0\% \\ t_s &= 5{,}8 \end{aligned}$$

Resposta em Frequência (sem controlador)



Resposta ao Degrau



Exemplo 1 – Verificação dos resultados

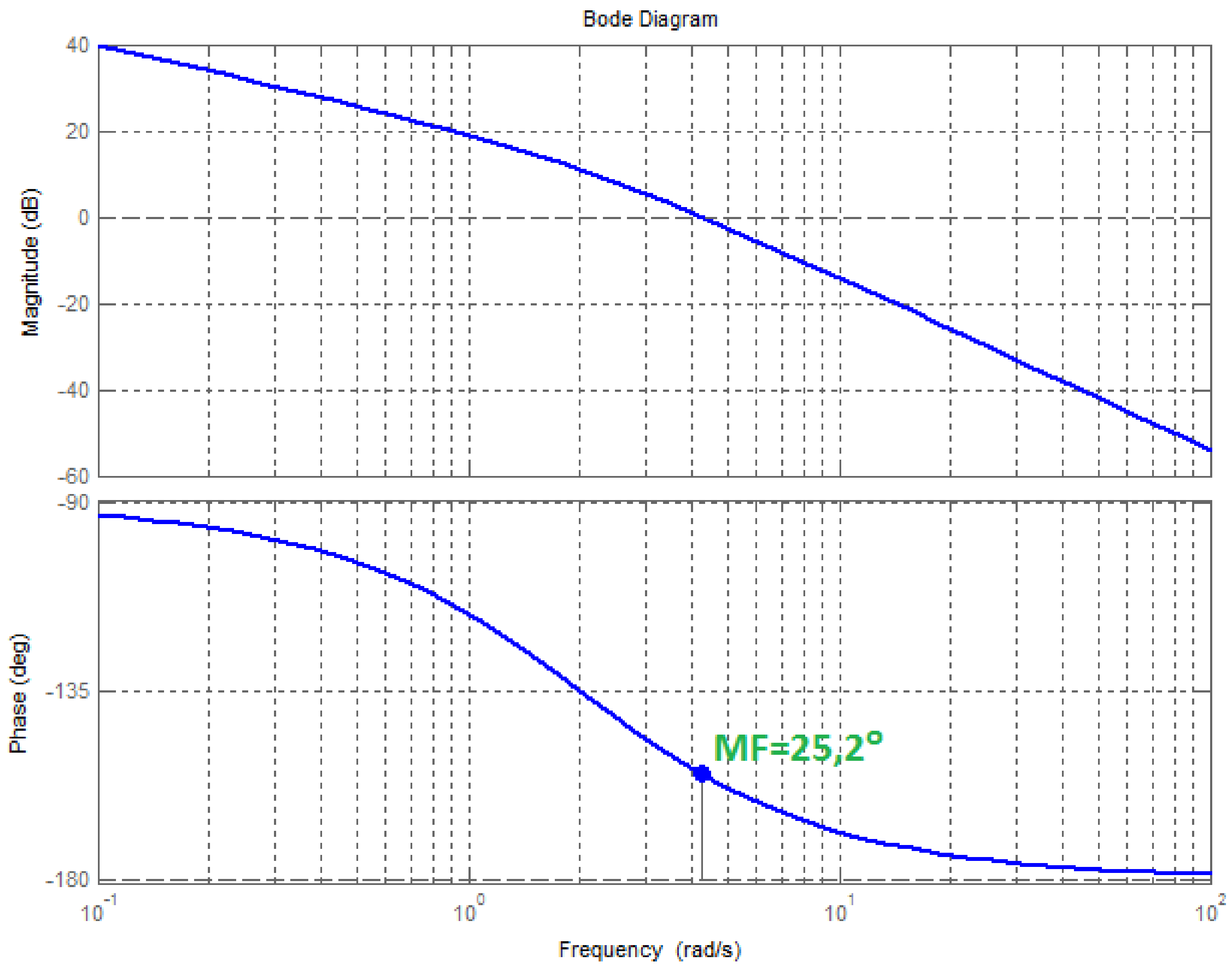
2. Sistema com ganho K=20

$$G(s) = \frac{20}{s(s+2)} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} MG &= \infty \\ MF &= 25{,}4^\circ \\ \omega_{CG} &= 4{,}25 \end{aligned}$$

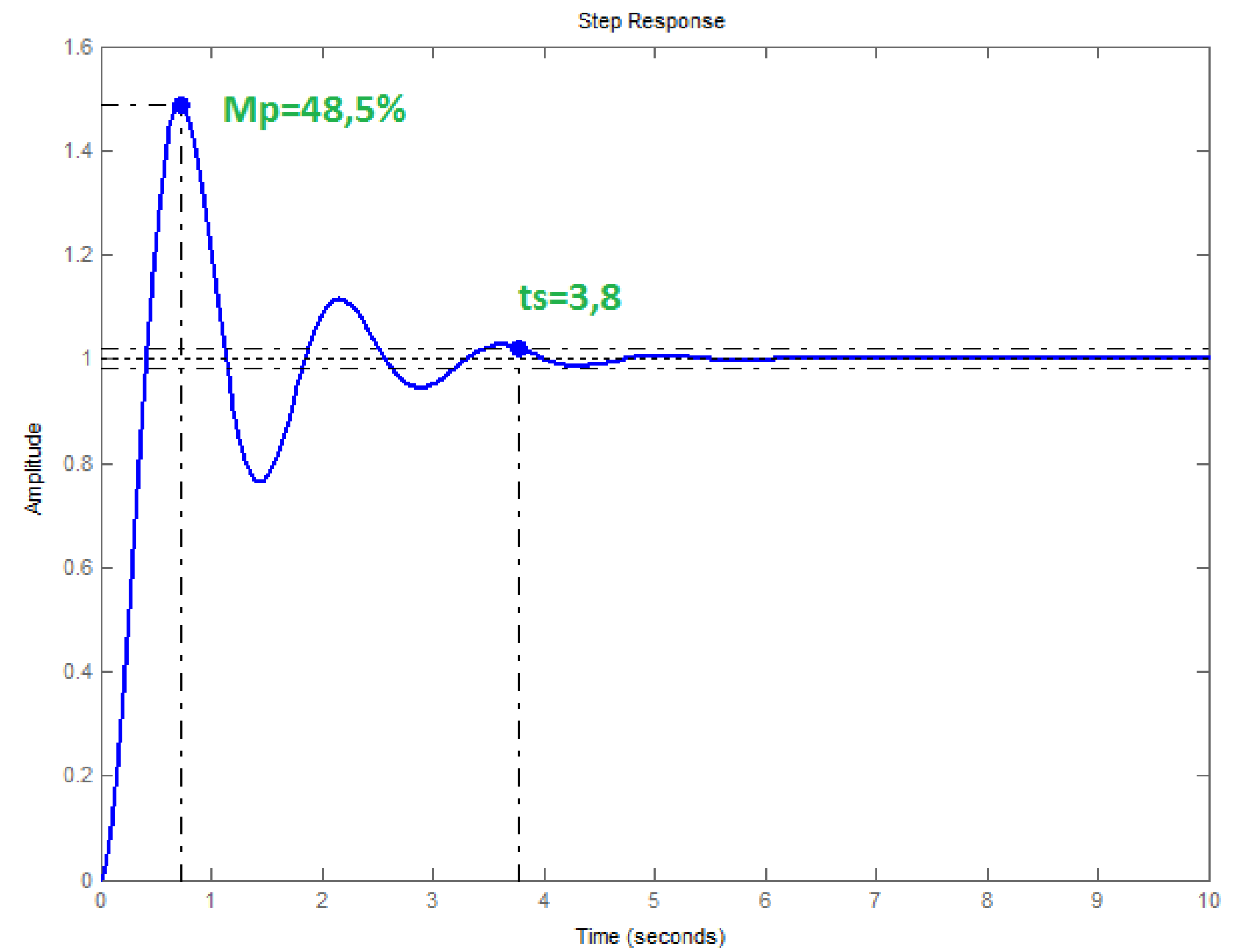
$$Kv = \lim_{s \to 0} sG(s) = 10 \quad \rightarrow \quad e_\infty = 10\%$$

$$T(s) = \frac{20}{s^2 + 2s + 20} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} M_P &= 48{,}5\% \\ t_s &= 3{,}8 \end{aligned}$$

Resposta em Frequência (com ganho K)



Resposta ao Degrau (K=20)



Exemplo 1 – Verificação dos resultados

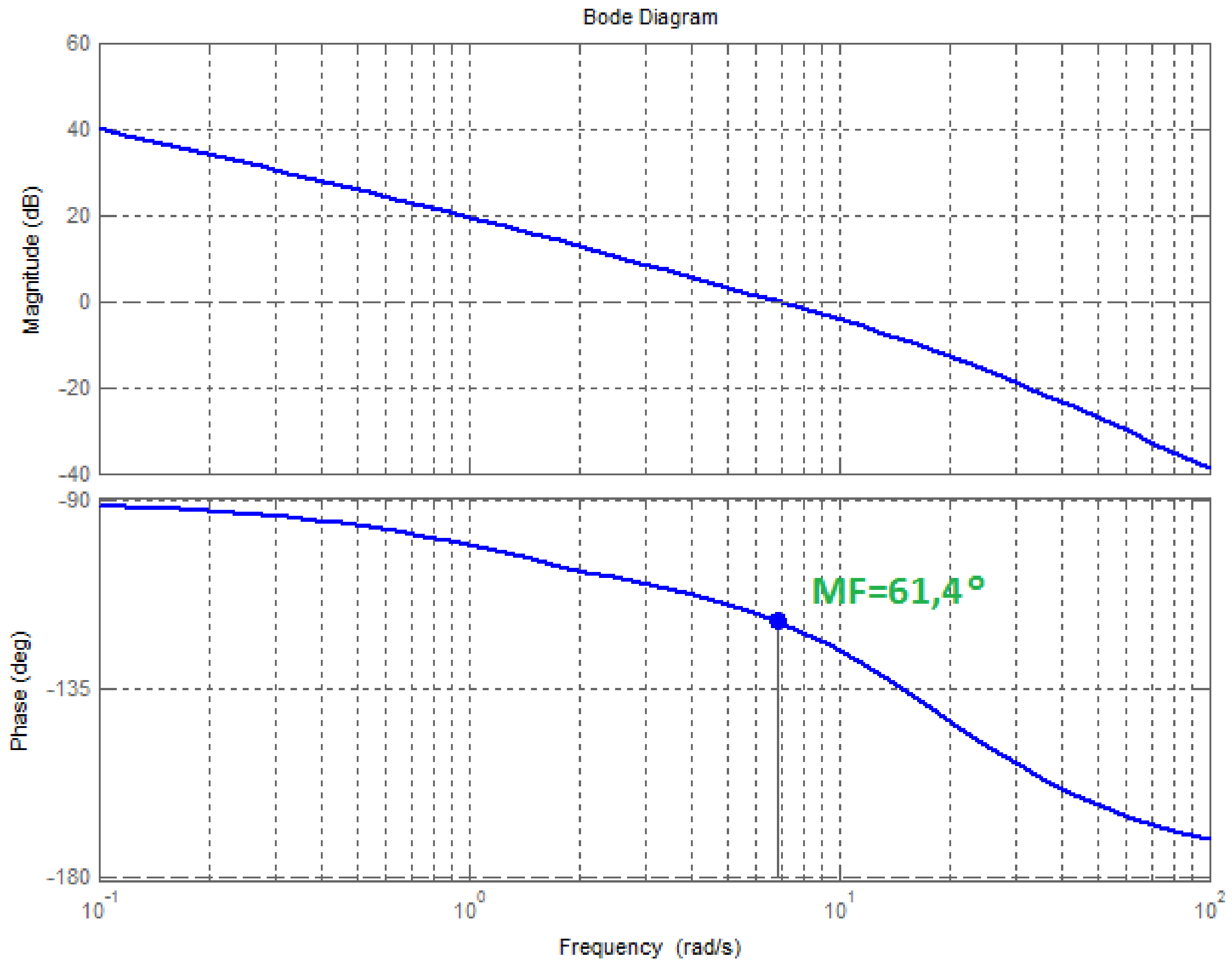
3. Sistema com controlador em avanço

$$C(s)G(s) = \frac{116{,}4(s+2{,}82)}{s(s+2)(s+16{,}4)} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} MG = \infty \\ MF = 61{,}4^\circ \\ \omega_{CG} = 6{,}8 \end{array}$$

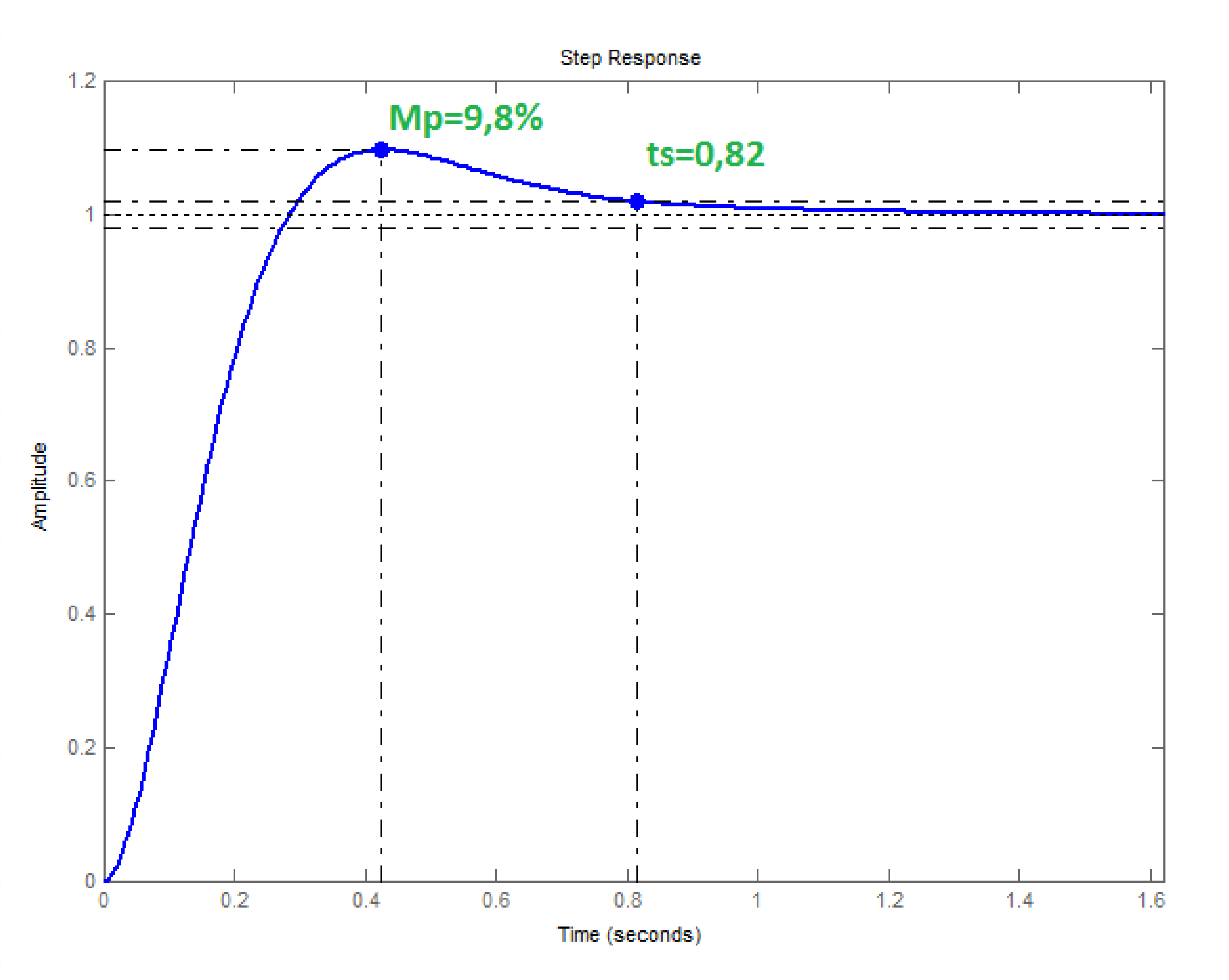
$$Kv = \lim_{s \to 0} sG(s) = 10 \quad \rightarrow \quad e_\infty = 10\%$$

$$T(s) = \frac{116{,}4(s+2{,}82)}{s^3 + 18{,}4s^2 + 149{,}2s + 328{,}2} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} M_P = 9{,}8\% \\ t_s = 0{,}82seg \end{array}$$

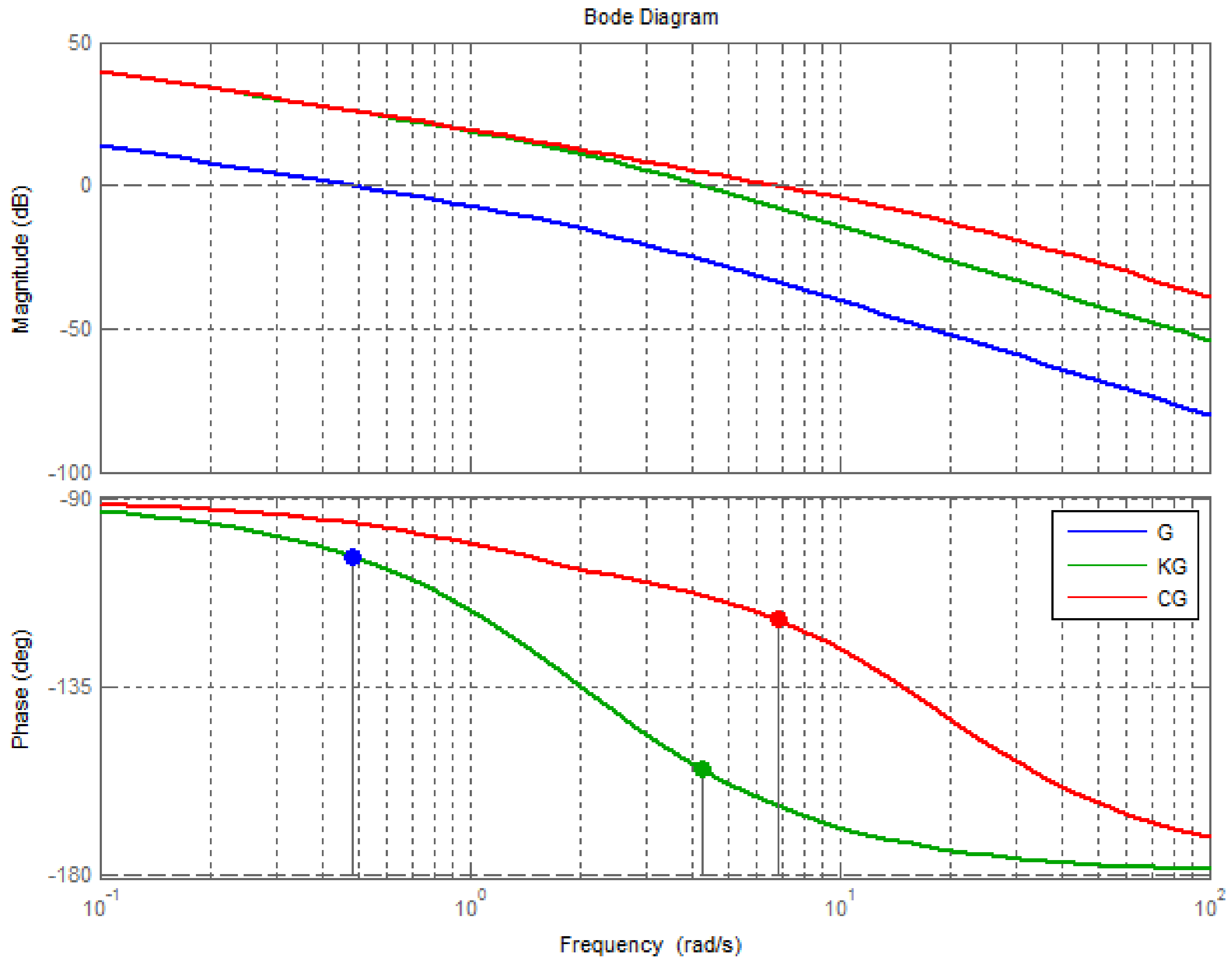
Resposta em Frequência (com controlador em avanço)



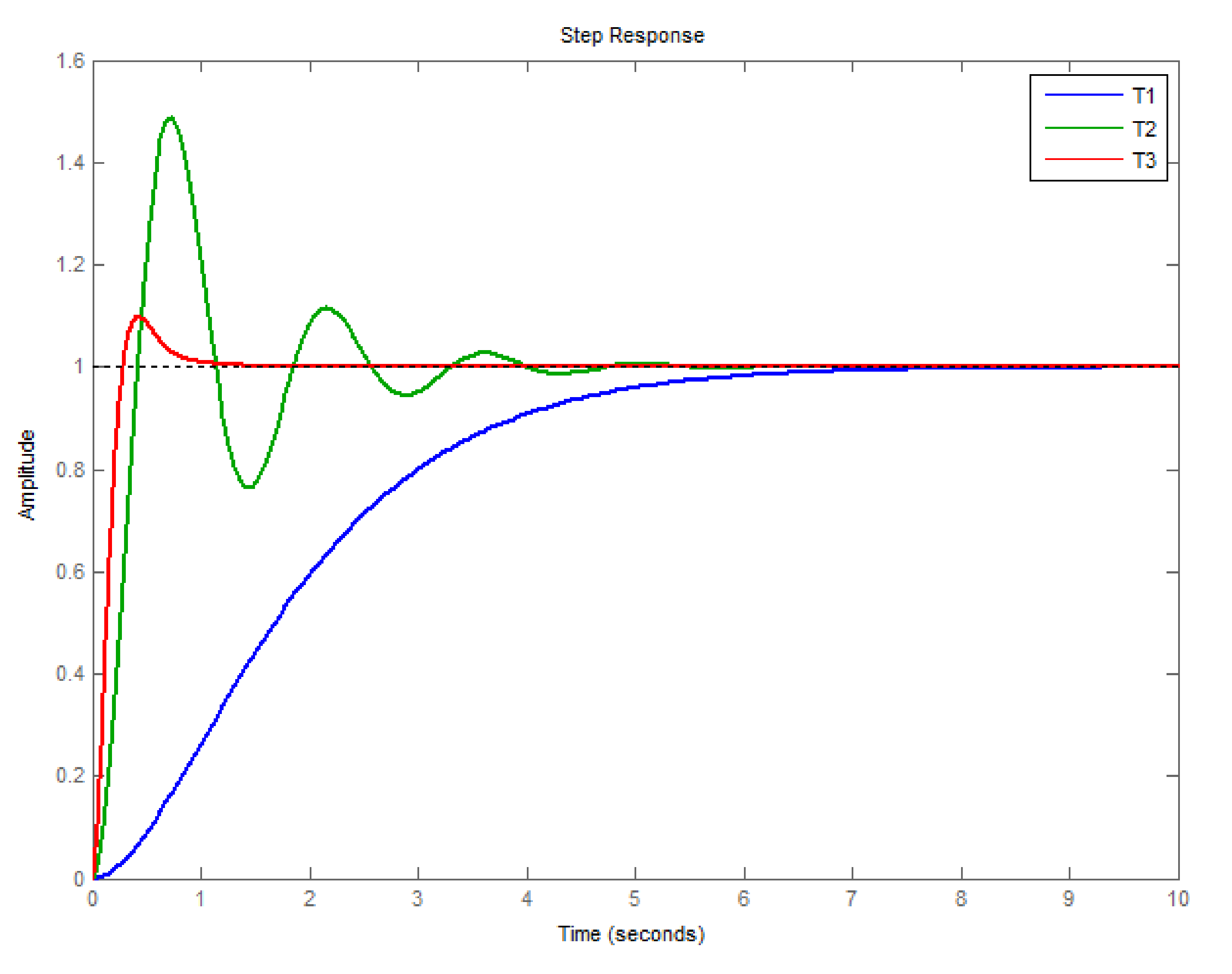
Resposta ao Degrau (com controlador em avanço)



Resposta em Frequência



Resposta ao Degrau



Controladores em Avanço

Efeitos da introdução de um controlador em avanço:

- Melhoria na margem de fase $\rightarrow$ redução de sobressinal
- Aumento da largura de faixa $\rightarrow$ maior velocidade da resposta

Limitações:

- Necessidade de fase muito grande para o controlador o que acarretaria em valores elevados de α. Isto implica em valores elevados de largura de faixa podendo gerar problemas de ruído. Além disso, valores elevados de α geralmente estão associados a problemas de implementação prática em função do dimensionamento dos componentes.

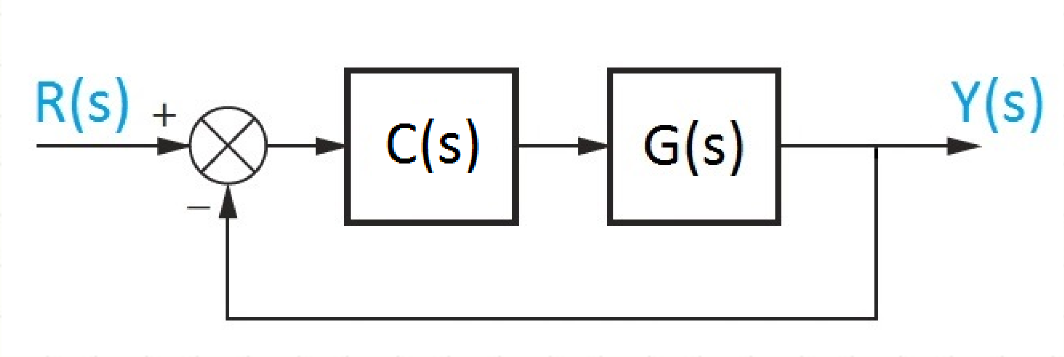
Recomenda-se que o valor de α não seja superior a 15.

Controladores em Avanço

- Quando a fase decresce muito rapidamente (devido a presença de polos muito próximos ou polos complexos com pequeno fator de amortecimento) um controlador em avanço simples pode não ser suficiente para gerar MF desejada.

Controladores em Atraso

Seja a configuração de controle em série;



O controlador em atraso é escrito na forma

$$C(s) = K\frac{1+\alpha Ts}{1+Ts} \qquad T > 0,\ 0 < \alpha < 1$$

ou, em frequência

$$C(j\omega) = K\frac{1+j\omega\alpha T}{1+j\omega T}$$

Controladores em Avanço

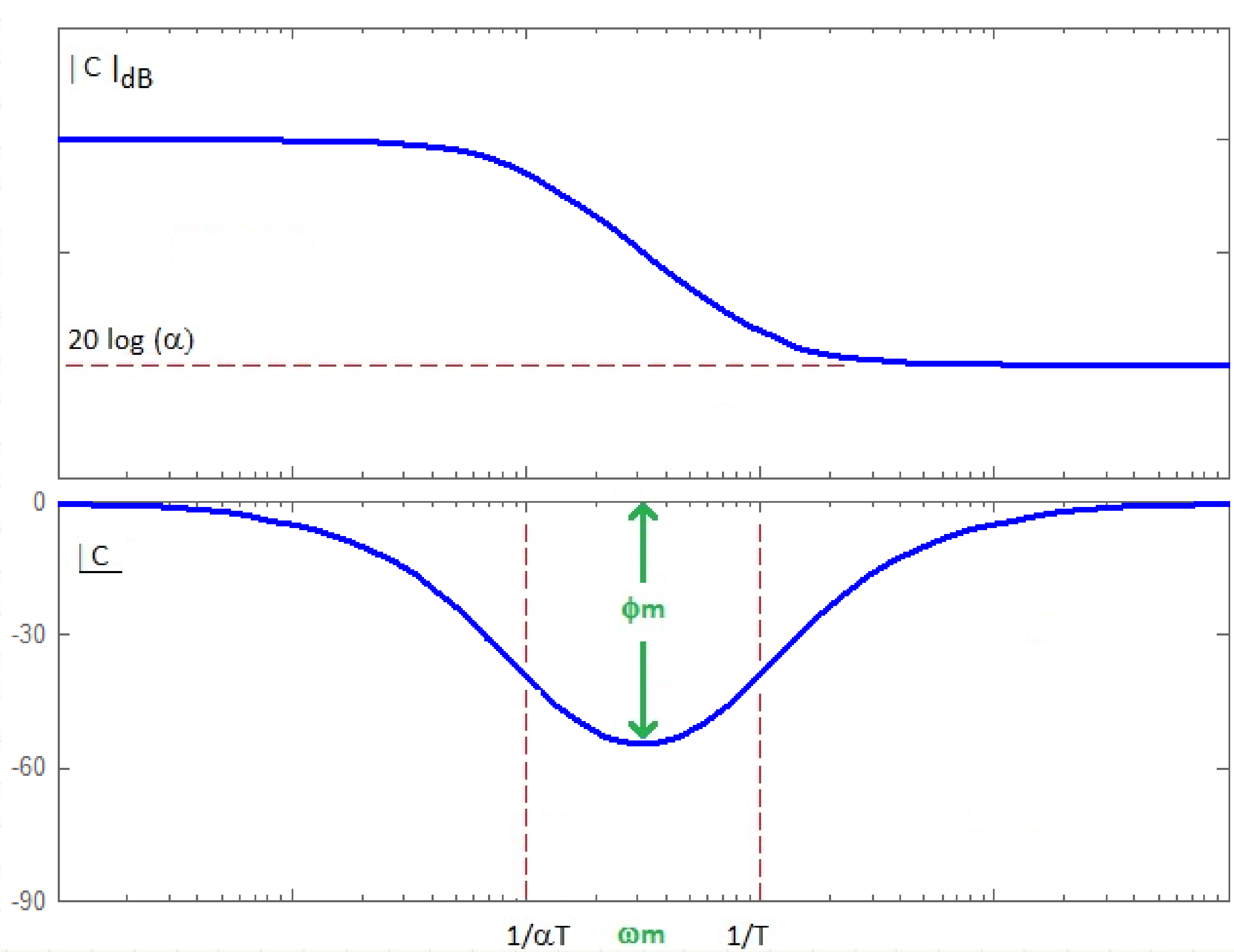
A resposta em frequência do controlador, considerando K=1 por simplicidade, terá as variações de módulo e fase definidas a seguir.

Frequência	Módulo	Fase
ω=0 a ω=1/αT	0 dB/dec	0°
ω=1/αT a ω=1/T	-20 dB/dec	-90°
ω=1/T a $\omega \to \infty$	0 dB/dec	0°

$$\omega << 1 \quad \rightarrow \quad |C| = 0\,\mathrm{dB} \qquad \angle C = 0^\circ$$

$$\omega >> 1 \quad \rightarrow \quad |C| = 20\log(\alpha) \qquad \angle C = 0^\circ$$

Controladores em Atraso



Controladores em Atraso

Os valores de ω_m e ϕ_m são os mesmos obtidos para o controlador em avanço:

$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} \qquad \operatorname{sen}\phi_m = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$$

Entretanto, a metodologia de projeto será diferente uma vez o pico de fase do controlador é negativo.

Neste caso, **polo e zero do controlador em atraso, serão alocados em uma frequência abaixo da frequência de cruzamento de ganho** (para atender a MF desejada) de modo que a contribuição negativa de fase não provoque redução na MF do sistema.

Controladores em Atraso

Escolhe-se a frequência de cruzamento de ganho do sistema controlado, ω_C, uma década acima do zero do controlador, ou seja,

$$\omega_C = \frac{10}{\alpha T}$$

Nesta frequência,

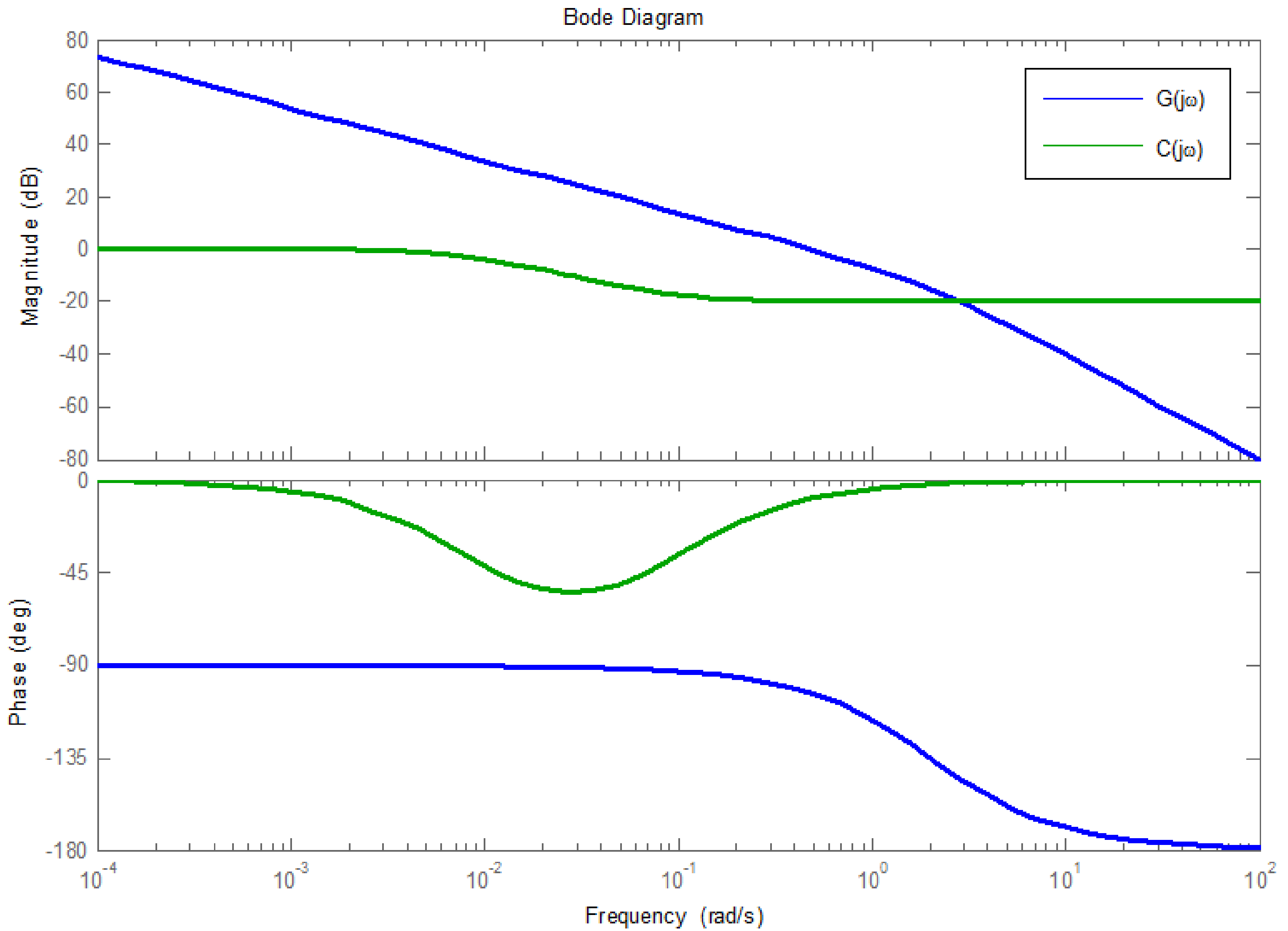
$$\begin{aligned}\angle C(j\omega_C) &= \mathrm{tg}^{-1}(\alpha T\omega_C) - \mathrm{tg}^{-1}(T\omega_C) \\ &= \mathrm{tg}^{-1}(10) - \mathrm{tg}^{-1}(10/\alpha)\end{aligned}$$

Para $0 < \alpha < 1$,

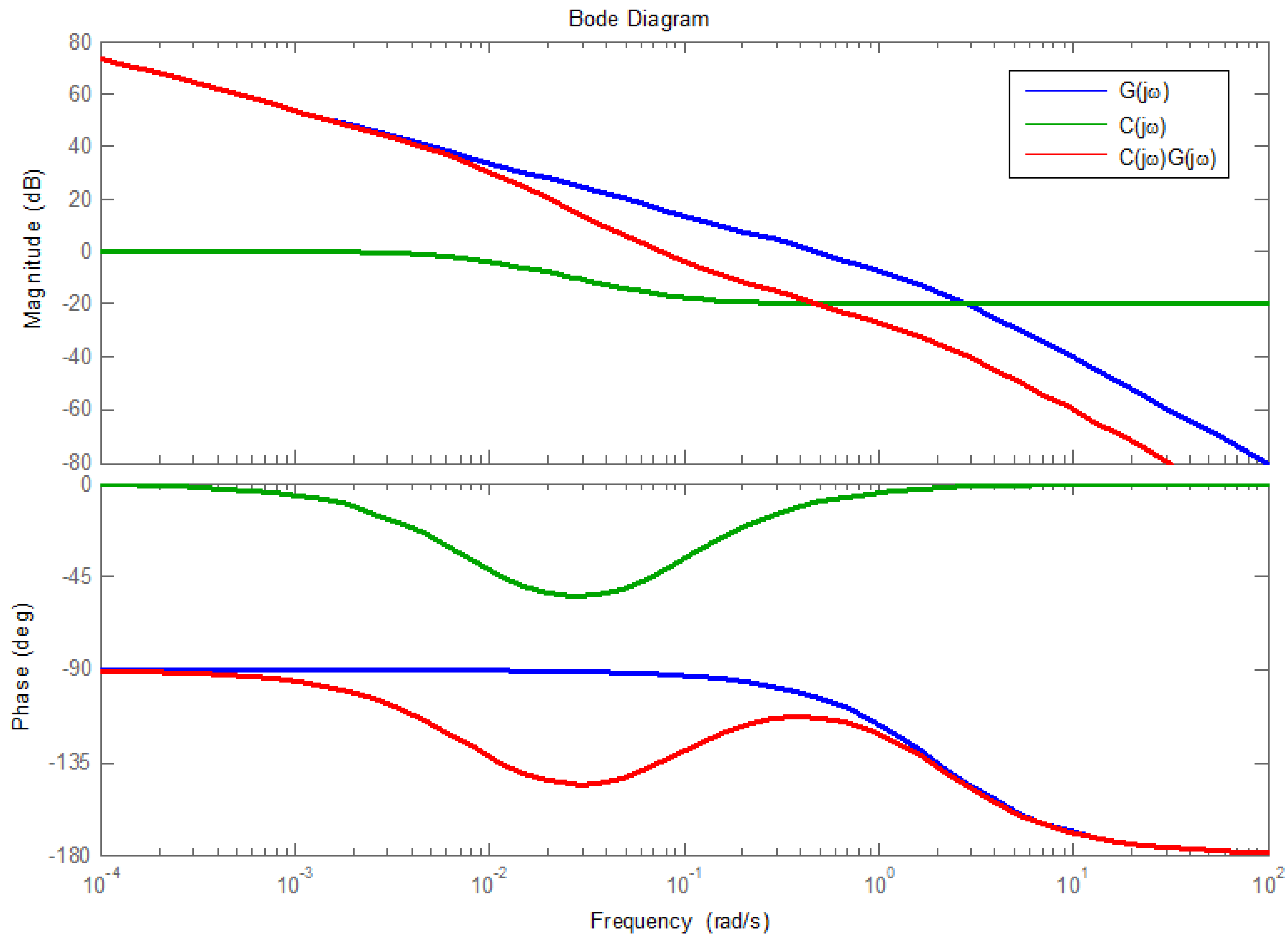
$$-5{,}7^\circ < \angle C(j\omega_C) < 0^\circ$$

ou seja, no limite a contribuição negativa de fase será aproximadamente -6°.

Controladores em Atraso



Controladores em Atraso



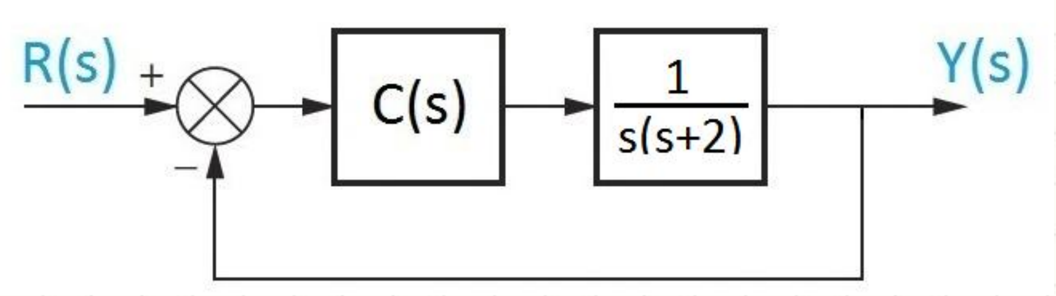
Controladores em Atraso

De forma similar ao controlador em avanço, o controlador em atraso é projetado com o objetivo de **melhorar a margem de fase** do sistema melhorando assim a margem de estabilidade.

Ajusta-se inicialmente o ganho K do controlador para garantir a especificação de erro. Consequentemente, este ajuste causará uma redução na margem de fase. A margem de fase desejada será obtida através da alocação do zero do controlador em uma frequência uma década abaixo da definida para atender a especificação.

Exemplo

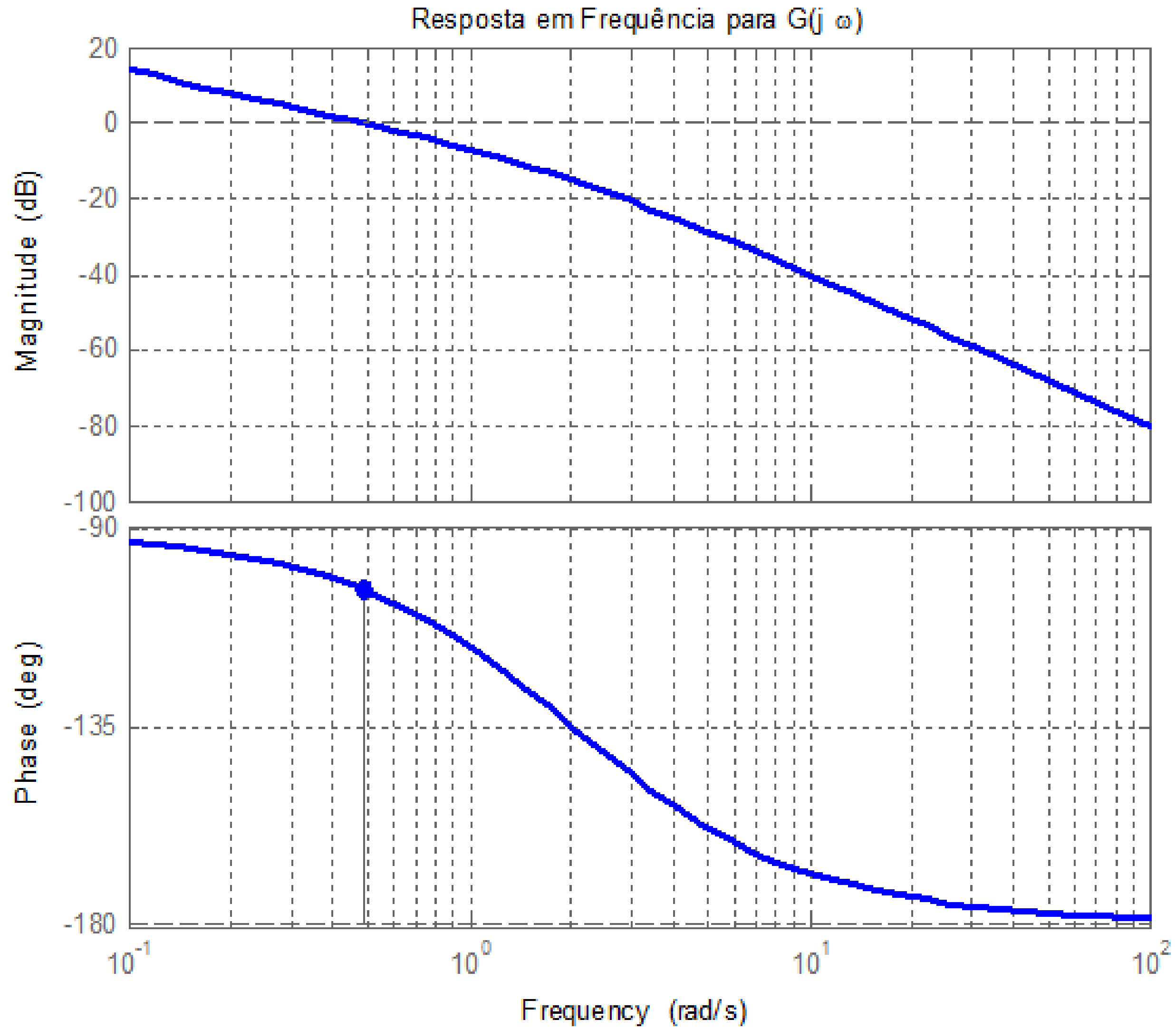
Seja o sistema de controle a seguir.



Projetar um controlador em avanço de fase de modo a atender as seguintes especificações:

- Erro à rampa menor do que 10%
- Margem de fase maior ou igual a 60°

Exemplo



Resposta em Frequência para G(j ω)
Magnitude (dB)
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
Phase (deg)
-90
-135
-180
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
Frequency (rad/s)

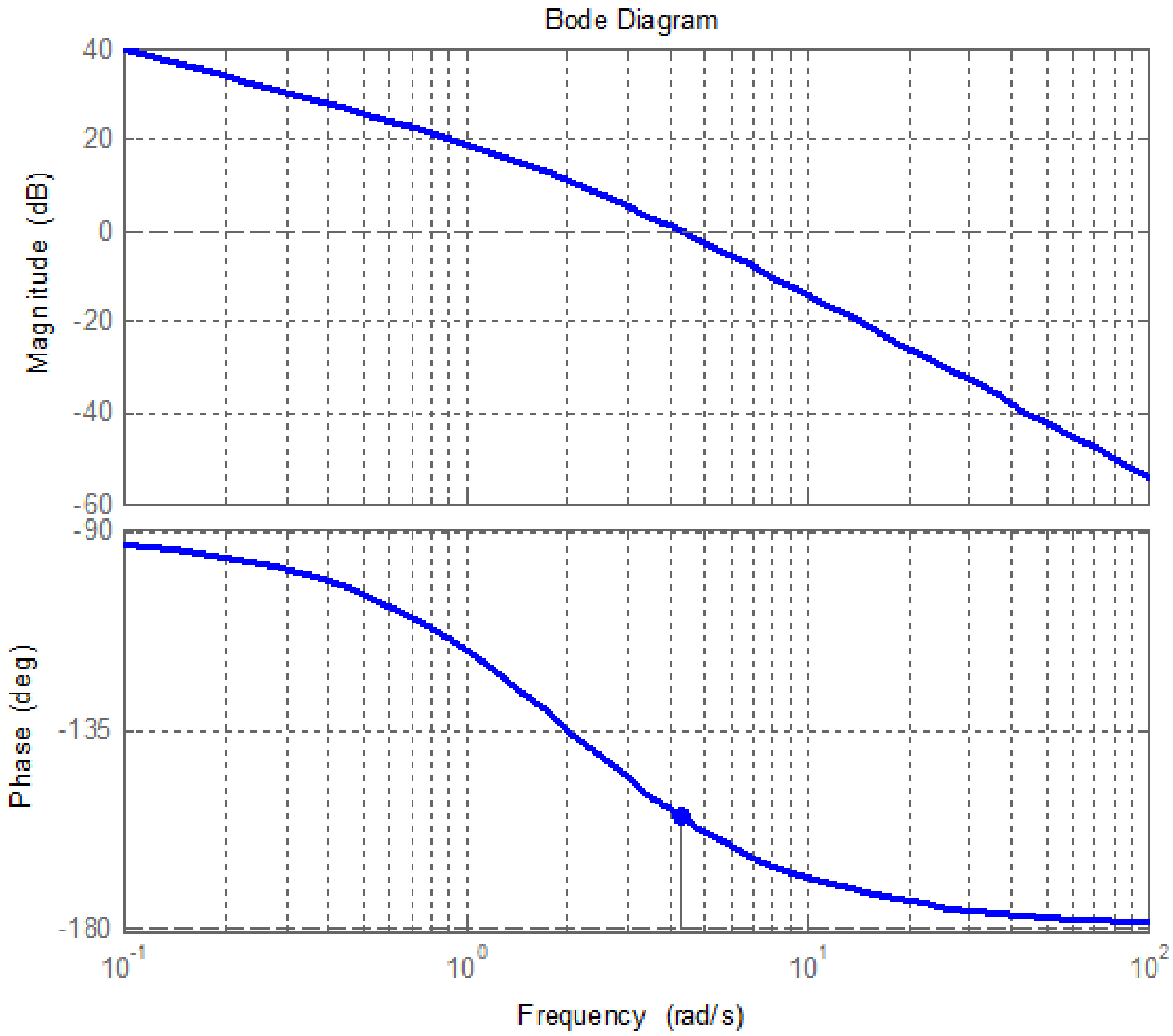
Exemplo

Como visto no exemplo anterior um ganho K $\geq$ 20 irá garantir a especificação de erro de regime permanente.

Considerando K=20, tem-se

$$\omega_{CG} = 4{,}25 \quad \text{e} \quad MF = 25{,}2^{\circ}$$

Exemplo



Bode Diagram
40
20
0
-20
-40
-60
Magnitude (dB)
-90
-135
-180
Phase (deg)
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
Frequency (rad/s)

Exemplo

Inicialmente calcula-se a frequência de cruzamento de ganho necessária para garantir o atendimento da margem de fase desejada.

$$\underbrace{180^\circ + \angle KG(j\omega)}_{\text{MF do sistema (KG)}} = \overbrace{60^\circ}^{\text{MF desejada}} + \underbrace{6^\circ}_{\text{Fase negativa do controlador}}$$

$$\angle KG(j\omega_C) = -\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{2}{-\omega_C}\right) = -114^\circ \quad \Rightarrow \quad \omega_C = 0{,}89$$

Portanto, a nova frequência de cruzamento de ganho será ω_C=0,89.

Exemplo

É preciso garantir agora que ω_C seja a frequência de cruzamento de ganho do sistema controlado. Para tanto,

$$\left|C(j\omega_C)G(j\omega_C)\right| = 1$$

Uma vez que utiliza-se a parte de alta frequência do controlador, a condição acima reduz-se a

$$\left|\alpha\, K\, G(j\omega_C)\right| = 1$$

Assim,

$$\alpha = \frac{1}{\left|K\, G(j\omega_C)\right|}$$

No exemplo,

$$\alpha = \frac{\omega_C\sqrt{\omega_C + 4}}{20} = 0{,}1$$

Exemplo

A frequência de cruzamento de ganho do sistema controlado, ω_C, deve estar uma década acima do zero do controlador, ou seja,

$$\omega_C = \frac{10}{\alpha T} \quad \rightarrow \quad T = \frac{10}{\alpha\,\omega_C}$$

Assim,

$$T = \frac{10}{0{,}1 \times 0{,}89} = 112{,}4 \quad \text{e} \quad \alpha T = 11{,}24$$

O Controlador fica

$$C(s) = 20\,\frac{11{,}24s + 1}{112{,}4s + 1}$$

Exemplo

ou

$$C(s) = 2\frac{s+0{,}09}{s+0{,}009}$$

Observe que, esta metodologia de projeto leva a um controlador em atraso que tem forma semelhante àquele projetado usando Lugar das Raízes, com polo e zero próximos à origem.

Exemplo – Verificação dos resultados

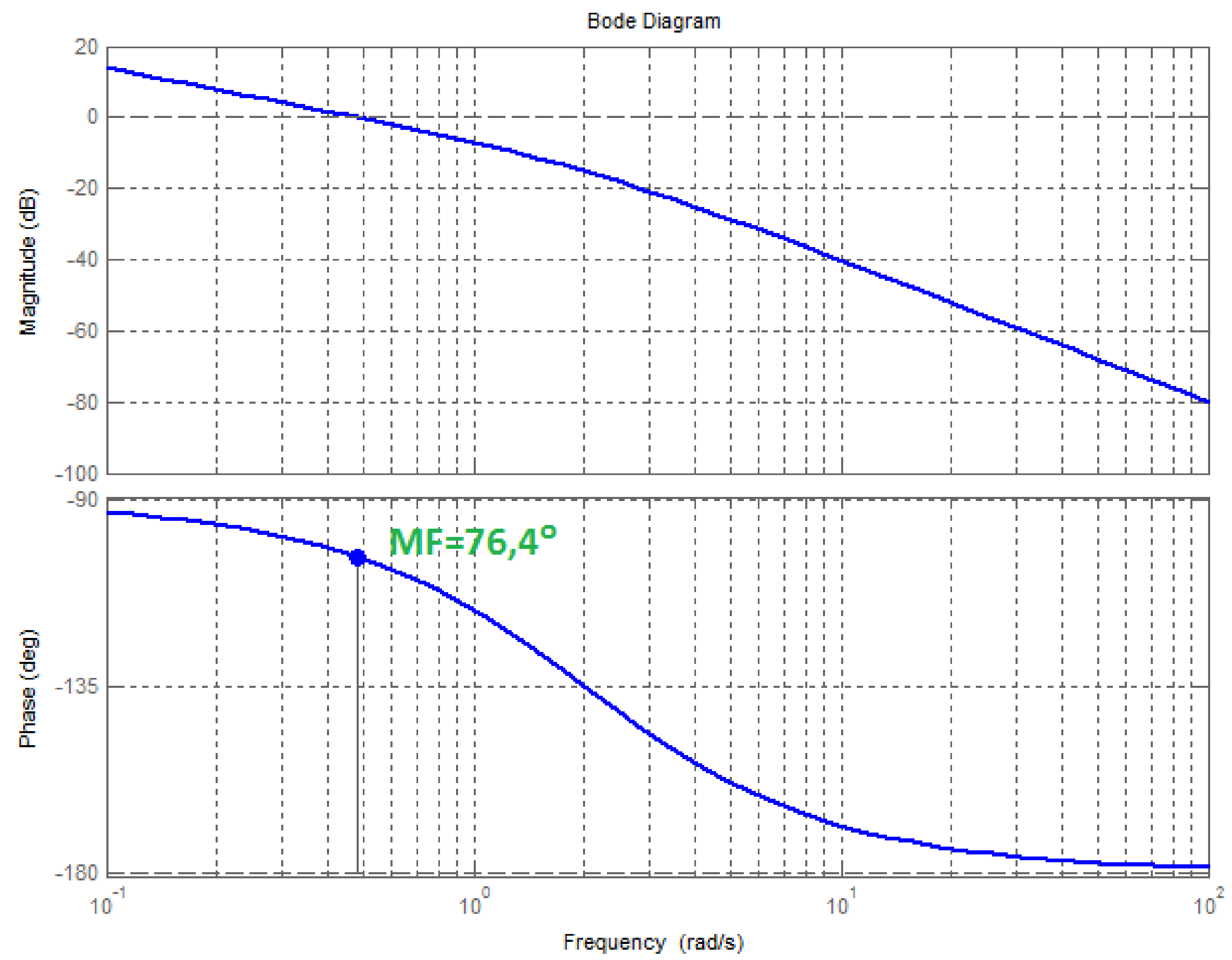
1. Sistema sem controlador (C(s)=1)

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} MG &= \infty \\ MF &= 76{,}4^{\circ} \\ \omega_{CG} &= 0{,}486 \end{aligned}$$

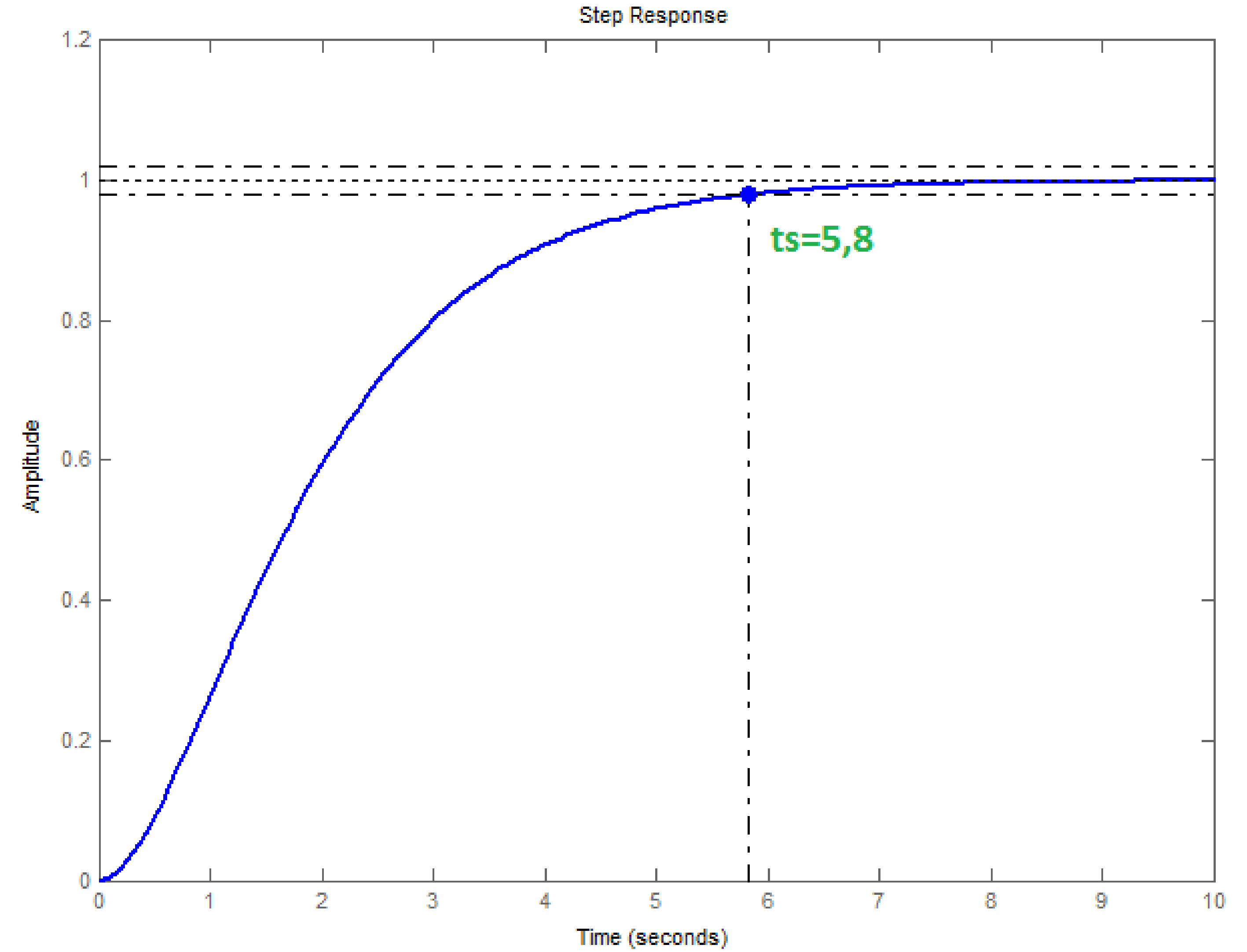
$$Kv = \lim_{s\to 0} sG(s) = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad e_{\infty} = 200\%$$

$$T(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} M_P &= 0\% \\ t_s &= 5{,}8 \end{aligned}$$

Resposta em Frequência (sem controlador)



Resposta ao Degrau (sem controlador)



Exemplo – Verificação dos resultados

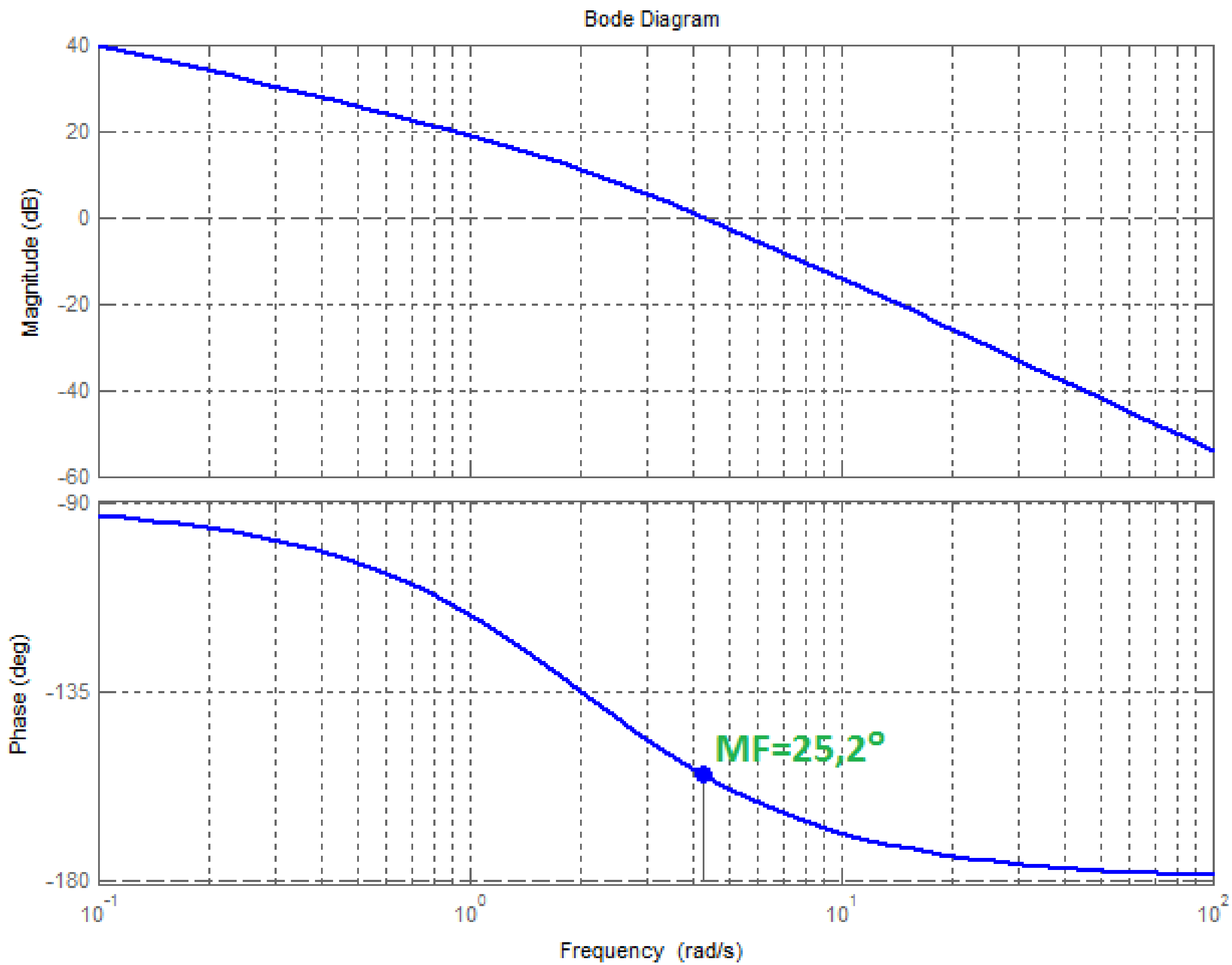
2. Sistema com ganho K=20

$$G(s) = \frac{20}{s(s+2)} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} MG &= \infty \\ MF &= 25{,}4^{\circ} \\ \omega_{CG} &= 4{,}25 \end{aligned}$$

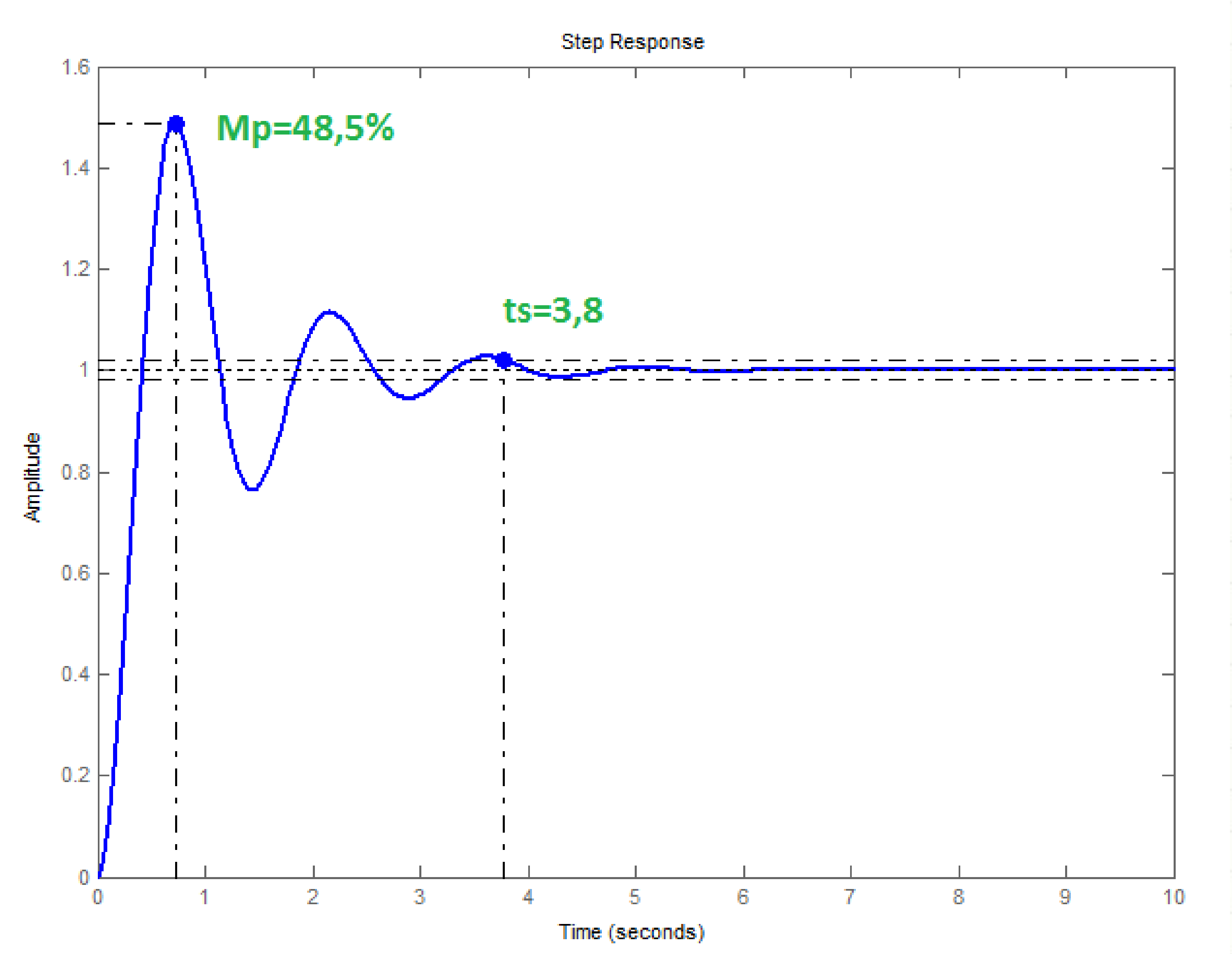
$$Kv = \lim_{s \to 0} sG(s) = 10 \quad \rightarrow \quad e_{\infty} = 10\%$$

$$T(s) = \frac{20}{s^2 + 2s + 20} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} M_P &= 48{,}5\% \\ t_s &= 3{,}8 \end{aligned}$$

Resposta em Frequência (com ganho K=20)



Resposta ao Degrau (com ganho K=20)



Exemplo – Verificação dos resultados

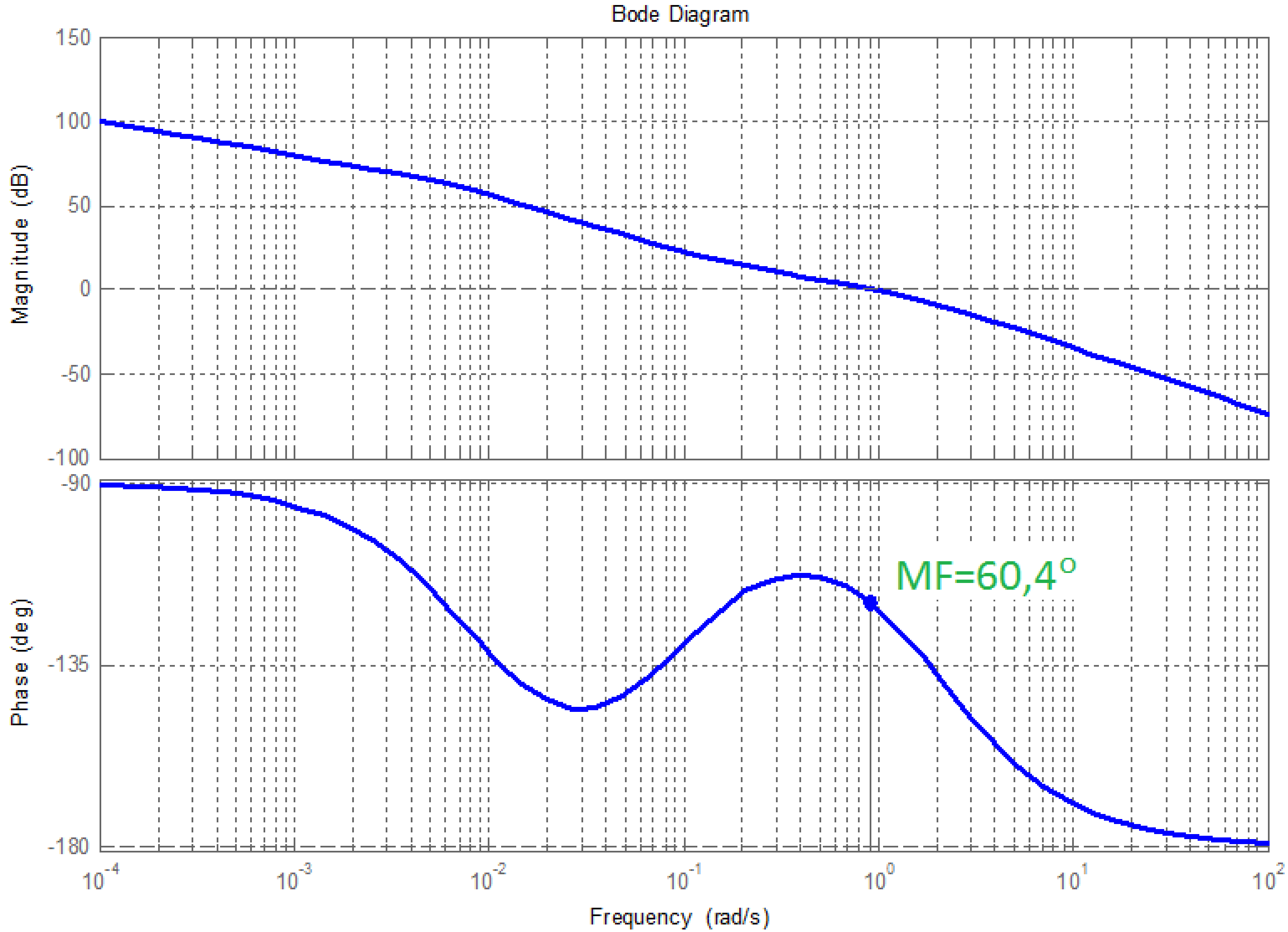
3. Sistema com controlador em atraso

$$C(s)G(s) = \frac{2(s+0{,}09)}{s(s+0{,}009)(s+2)} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} MG &= \infty \\ MF &= 60{,}4^\circ \\ \omega_{CG} &= 0{,}9 \end{aligned}$$

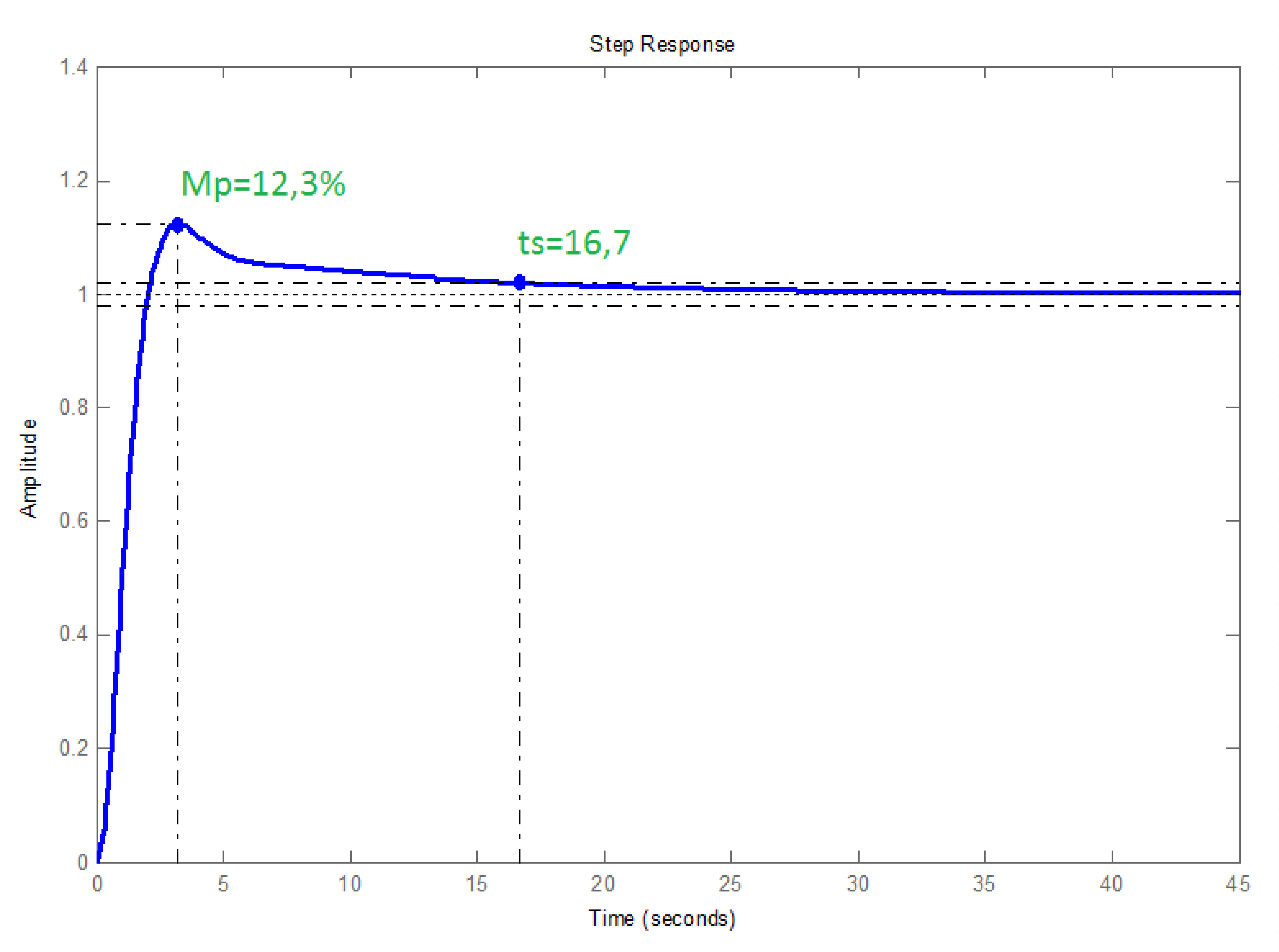
$$Kv = \lim_{s \to 0} sG(s) = 10 \quad \rightarrow \quad e_\infty = 10\%$$

$$T(s) = \frac{2(s+0{,}09)}{s^3 + 2{,}009s^2 + 2{,}018s + 0{,}18} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} M_P &= 12{,}3\% \\ t_s &= 16{,}7seg \end{aligned}$$

Resposta em Frequência (com controlador em atraso)



Resposta ao Degrau (com controlador em atraso)



Controladores em Atraso

Efeitos da introdução de um controlador em atraso:

- Melhoria na margem de fase $\rightarrow$ redução de sobressinal
- Redução da largura de faixa $\rightarrow$ menor velocidade da resposta

Problema:

Quando existe saturação no sistema, a rede em atraso pode gerar estabilidade condicional ou mesmo a instabilidade do sistema.

Comparação Avanço x Atraso

Controlador em Avanço

$$C(s)G(s) = \frac{116{,}4(s+2{,}82)}{s(s+2)(s+16{,}4)} \rightarrow \begin{array}{l} MG = \infty \\ MF = 61{,}4^\circ \\ \omega_{CG} = 6{,}8 \end{array}$$

$$T(s) = \frac{116{,}4(s+2{,}82)}{s^3 + 18{,}4s^2 + 149{,}2s + 328{,}2} \rightarrow \begin{array}{l} M_P = 9{,}8\% \\ t_s = 0{,}82\ \text{seg} \end{array}$$

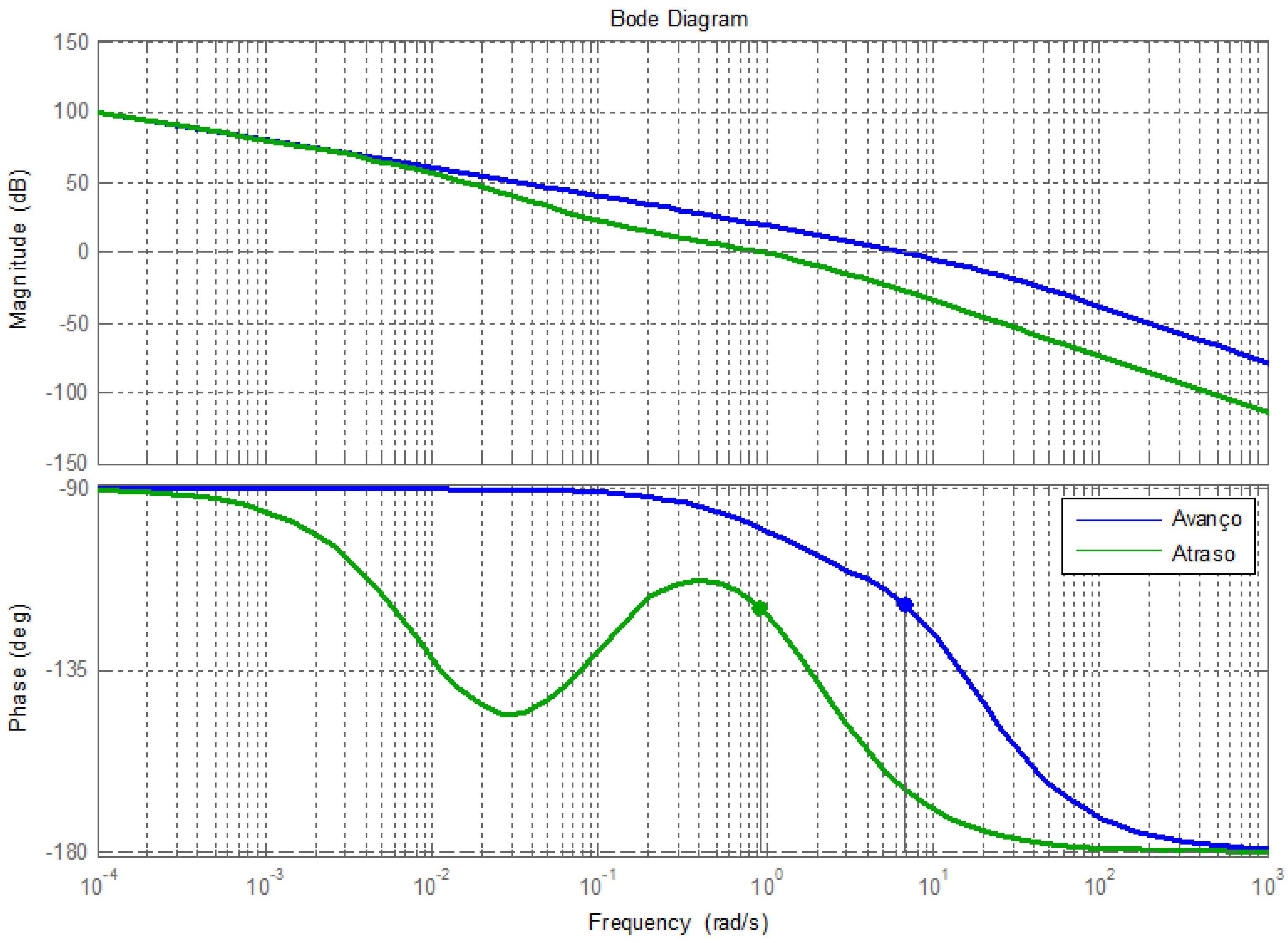
Comparação Avanço x Atraso

Controlador em Atraso

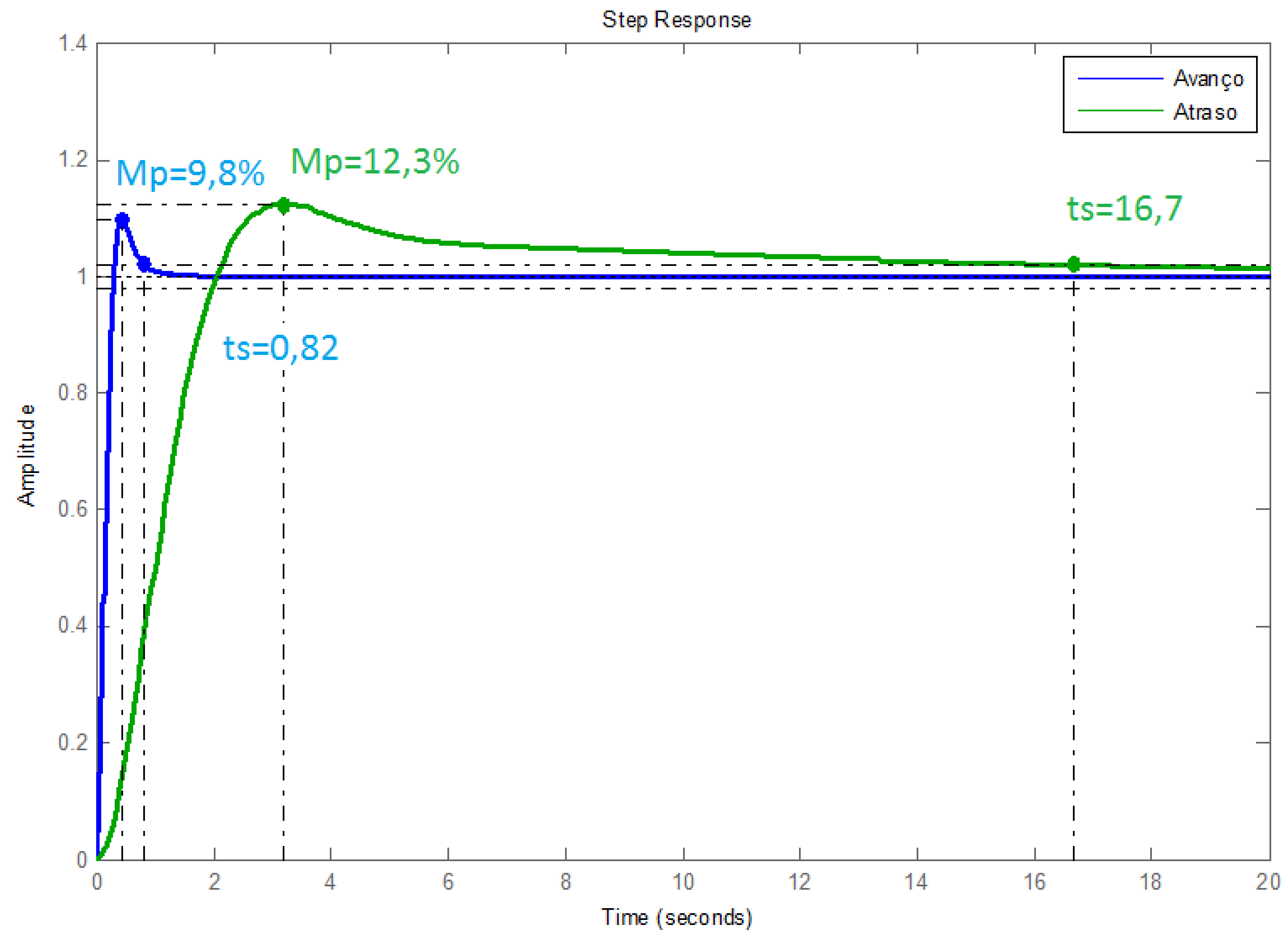
$$C(s)G(s) = \frac{2(s+0{,}09)}{s(s+0{,}009)(s+2)} \rightarrow \begin{matrix} MG = \infty \\ MF = 60{,}4^{\circ} \\ \omega_{CG} = 0{,}9 \end{matrix}$$

$$T(s) = \frac{2(s+0{,}09)}{s^3 + 2{,}009s^2 + 2{,}018s + 328{,}2} 0{,}18 \rightarrow \begin{matrix} M_P = 12{,}3\% \\ t_s = 16{,}7 \text{ seg} \end{matrix}$$

Comparação Avanço x Atraso



Comparação Avanço x Atraso



Controlador Avanço-Atraso

A estrutura do controlador será definida por:

$$C(s) = K\left(\frac{s+1/T_1}{s+\alpha/T_1}\right)\left(\frac{s+1/T_2}{s+\beta/T_2}\right) \quad \begin{matrix} \alpha > 1 \\ 0 < \beta < 1 \end{matrix}$$

Existem duas possibilidades para o controlador:

$$\alpha \neq \beta$$
$$\alpha = 1/\beta$$

Usualmente utilizado quando existe mais de uma especificação relativa à resposta transitória.

Controlador Avanço-Atraso ($\beta=1/\alpha$)

A estrutura do controlador será definida por:

$$C(s) = K\left(\frac{s+1/T_1}{s+\alpha/T_1}\right)\left(\frac{s+1/T_2}{s+1/\alpha T_2}\right) \qquad \alpha > 1$$

Observe que, nesta estrutura a relação polo/zero é a mesma no avanço e no atraso.

A parcela relativa ao avanço será usada para melhorar a margem de fase e largura de faixa (resposta transitória) enquanto o ganho e a parcela do atraso são ajustados para atender a especificação de regime permanente.

Controlador Avanço-Atraso (β=1/α)

Procedimento de Projeto

1. A partir das especificações de desempenho da resposta transitória determinar MF e largura de faixa necessárias:

$$\omega_B = \omega_n \sqrt{\left(1-2\xi^2\right)+\sqrt{4\xi^4-4\xi_2+2}}$$

2. Ajustar o ganho K para atender a especificação de regime permanente.

3. Verificar MF e frequência de cruzamento de ganho para o KG(jω).

Controlador Avanço-Atraso (β=1/α)

4. Determinar a nova frequência de cruzamento de ganho, ω_C, próximo da largura de faixa desejada.

5. Determinar a contribuição angular do controlador em avanço, ϕ_m, de modo a atender a MF desejada.

6. Determinar α a partir dos requisitos do avanço.

$$\alpha = \frac{1+\operatorname{sen}\phi_m}{1-\operatorname{sen}\phi_m}$$

Controlador Avanço-Atraso (β=1/α)

7. Projetar o controlador em atraso, escolhendo o zero uma década abaixo da nova frequência de cruzamento de ganho.

$$\frac{1}{T_2} = \frac{\omega_C}{10}$$

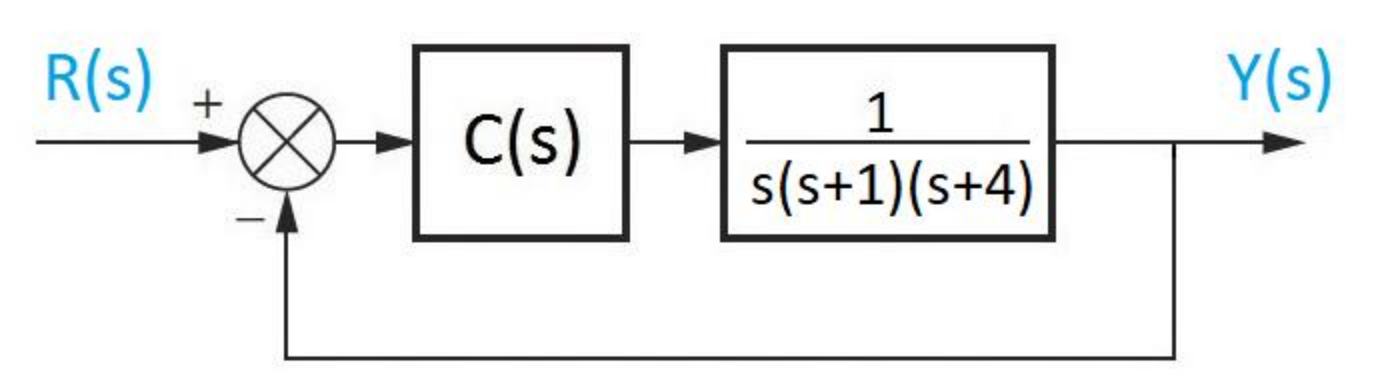
8. Determinar polo e zero do controlador em avanço:

$$T_1 = \frac{1}{\omega_C \sqrt{1/\alpha}}$$

9. Fazer a verificação do Projeto.

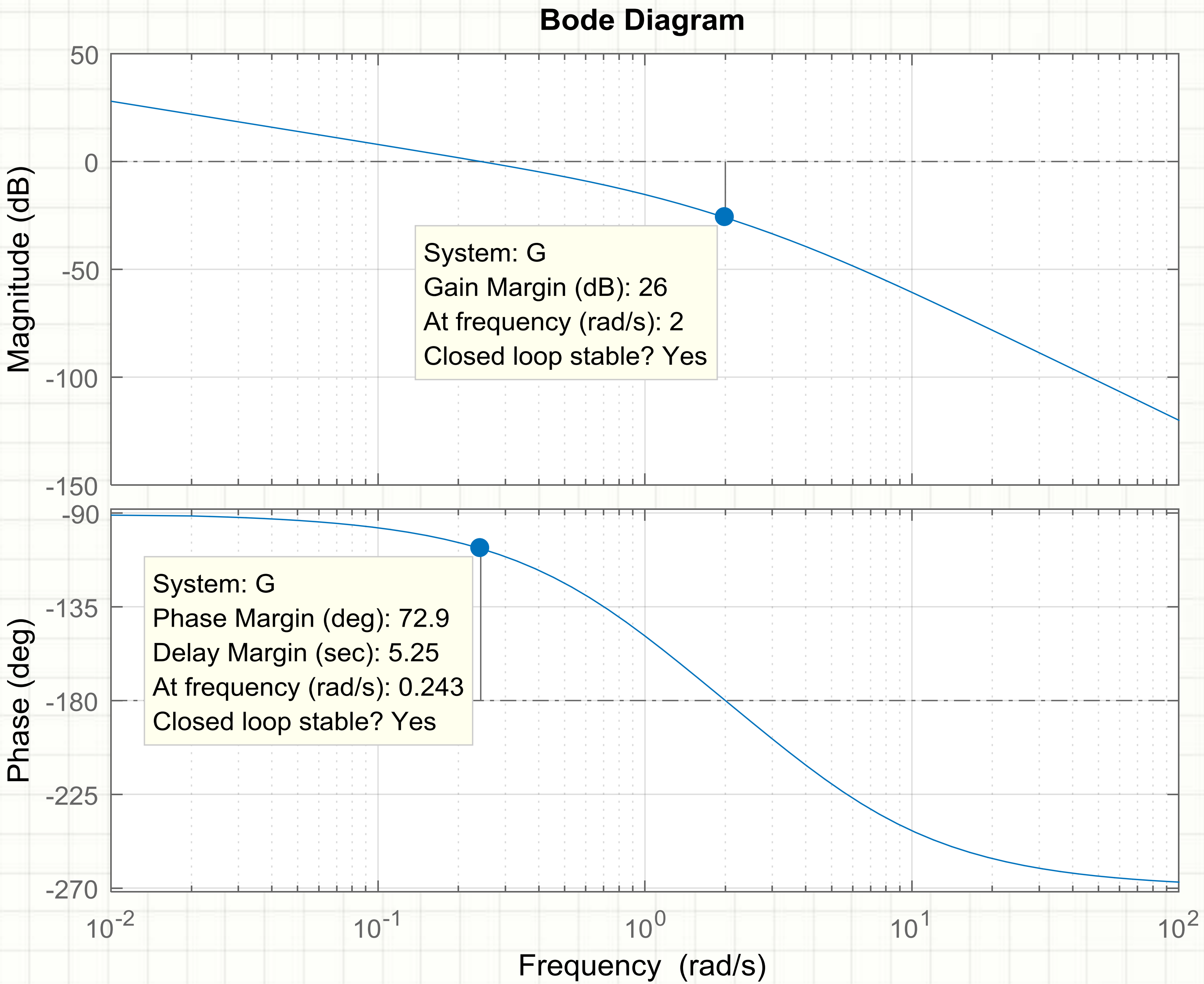
Exemplo

Seja o sistema de controle a seguir.



Projetar um controlador em avanço-atraso de fase de modo a atender as seguintes especificações, no domínio do tempo:

- Sobresinal máximo menor do que 15%
- Tempo de pico menor do que 2 segundos
- Coeficiente de erro de velocidade menor ou igual a 12


Bode Diagram
Magnitude (dB)
50
0
-50
-100
-150
System: G
Gain Margin (dB): 26
At frequency (rad/s): 2
Closed loop stable? Yes
Phase (deg)
-90
-135
-180
-225
-270
System: G
Phase Margin (deg): 72.9
Delay Margin (sec): 5.25
At frequency (rad/s): 0.243
Closed loop stable? Yes
10-2
10-1
100
101
102
Frequency (rad/s)

Exemplo

Das especificações:

- $M_P \leq 15\% \quad \Rightarrow \quad \xi \geq 0{,}5168 \quad (\text{MF} \geq 52^\circ)$

Valor de Projeto: MF ≡ 55°

- $t_P < 2$

$$t_P = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \quad \text{ou} \quad \omega_n = \frac{\pi}{t_P\sqrt{1-\xi^2}}$$

Assim,

$$\omega_B = \frac{\pi}{t_P\sqrt{1-\xi^2}}\sqrt{\left(1-2\xi^2\right)+\sqrt{4\xi^4-4\xi_2+2}}$$

Exemplo

Usando os valores limite:

$$\xi = 0{,}55\,(\mathrm{MF} = 55^\circ) \quad \text{e} \quad t_p = 2$$

chega-se a

$$\omega_B = 2{,}28$$

Exemplo

1. A partir das especificações de desempenho da resposta transitória determinar MF e largura de faixa necessárias:

$$\omega_B = 2{,}28$$

2. Ajustar o ganho K para atender a especificação de regime permanente: $K_V \geq 12$

$$K_V = \lim_{s \to 0} sC(s)G(s) = \frac{K}{4} \quad \rightarrow \quad K \geq 48$$

Valor de projeto:

$$K \triangleq 50$$

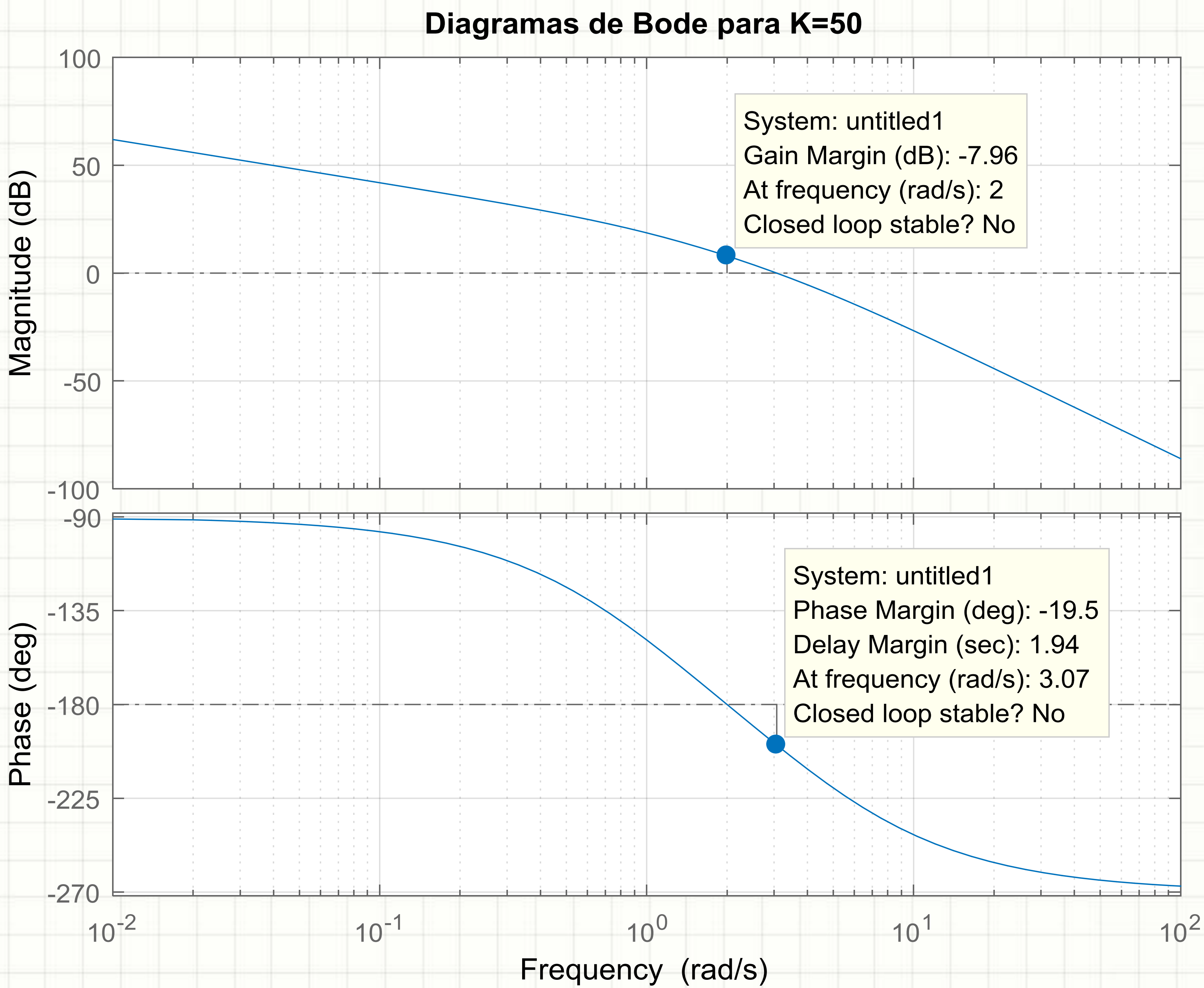
Exemplo

3. Verificar MF e frequência de cruzamento de ganho para o KG(jω).

Para K=50:

$$\omega_{CG} = 3,07 \quad \rightarrow \quad \mathrm{MF} = -19,5^{\circ}$$
$$\omega_{CF} = 2 \quad \rightarrow \quad \mathrm{MG} = -7,96\,\mathrm{dB}$$

Ou seja, o sistema torna-se instável.



Diagramas de Bode para K=50
100
50
0
-50
-100
Magnitude (dB)
System: untitled1
Gain Margin (dB): -7.96
At frequency (rad/s): 2
Closed loop stable? No
-90
-135
-180
-225
-270
Phase (deg)
System: untitled1
Phase Margin (deg): -19.5
Delay Margin (sec): 1.94
At frequency (rad/s): 3.07
Closed loop stable? No
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
Frequency (rad/s)

Exemplo

4. Determinar a nova frequência de cruzamento de ganho, ω_C, próximo da largura de faixa desejada (ω_B =2,28).

Para escolhas de ω_C, entre 5 e 20% , abaixo de ω_B , tem-se:

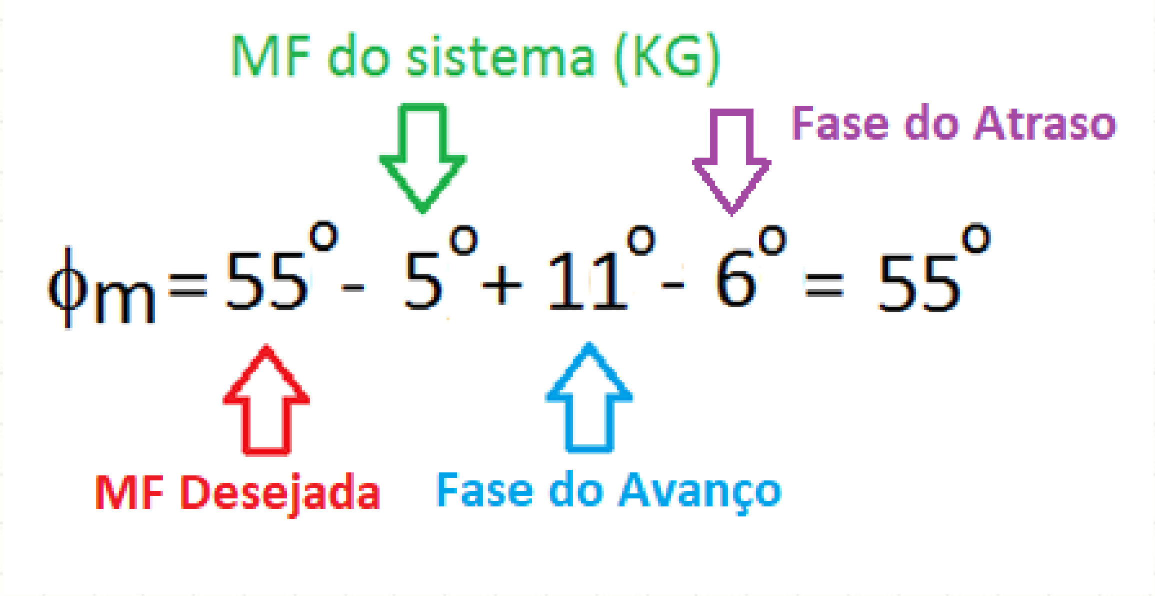
$$\omega_C \triangleq 1{,}8 \quad \rightarrow \quad \mathrm{MF} = 5^\circ$$
$$\omega_C \triangleq 2{,}0 \quad \rightarrow \quad \mathrm{MF} = 0^\circ$$
$$\omega_C \triangleq 2{,}2 \quad \rightarrow \quad \mathrm{MF} = -4^\circ$$

Valor de projeto:

$$\omega_C \triangleq 1{,}8$$

Exemplo

5. Determinar a contribuição angular do controlador em avanço, ϕ_m, de modo a atender a MF desejada.



Exemplo

6. Determinar α a partir dos requisitos do avanço.

$$\alpha = \frac{1 + \operatorname{sen}\phi_m}{1 - \operatorname{sen}\phi_m} \quad \rightarrow \quad \alpha = 10$$

7. Projetar o controlador em atraso, escolhendo o zero uma década abaixo da nova frequência de cruzamento de ganho.

$$z_{AT} = \frac{1}{T_2} = \frac{\omega_C}{10} \quad \rightarrow \quad z_{AT} = 0{,}18$$

Exemplo

Assim,

$$P_{AT} = \frac{1}{\alpha T_2} = 0,018$$

O controlador em atraso fica

$$C_{AT}(s) = \frac{s + 0,18}{s + 0,018}$$

Controlador Avanço-Atraso (β=1/α)

8. Determinar polo e zero do controlador em avanço:

$$T_1 = \frac{1}{\omega_C \sqrt{1/\alpha}} = 1,76$$

Portanto,

$$z_{AV} = \frac{1}{T_1} = 0,57 \qquad P_{AV} = \frac{\alpha}{T_1} = 5,7$$

O controlador em avanço fica:

$$C_{AV}(s) = \frac{s + 0,57}{s + 5,7}$$

Exemplo

Controlador avanço-atraso:

$$C(s) = 50\left(\frac{s+0,18}{s+0,018}\right)\left(\frac{s+0,57}{s+5,7}\right)$$

Exemplo

9. Verificação do Projeto.

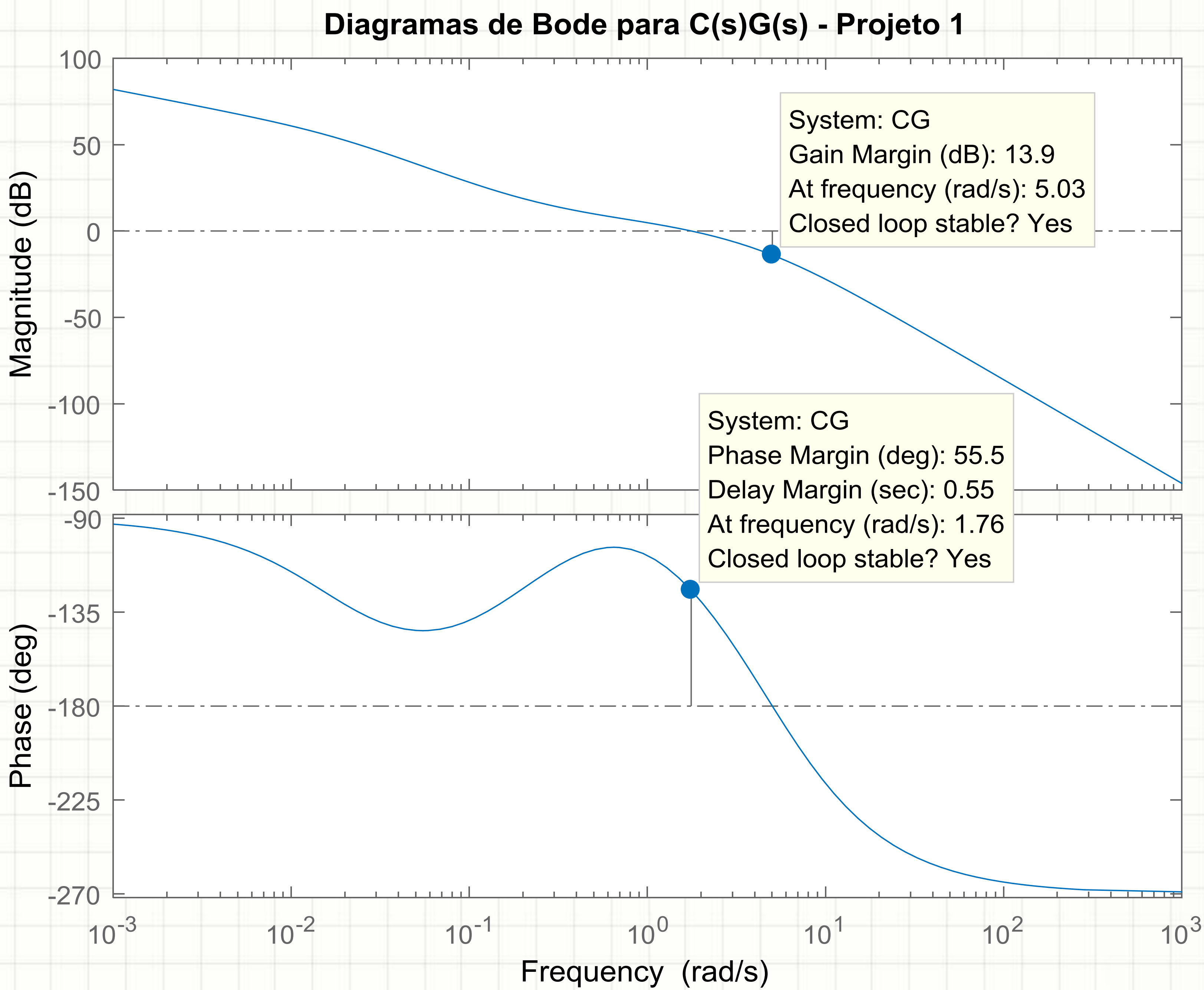
$$C(s)G(s) = \frac{50}{s(s+1)(s+4)}\left(\frac{s+0,18}{s+0,018}\right)\left(\frac{s+0,57}{s+5,7}\right)$$

$$\omega_{CG} = 1,76 \quad \rightarrow \quad \mathrm{MF} = 55,5^{\circ}$$

$$\omega_{CF} = 5,02 \quad \rightarrow \quad \mathrm{MG} = 13,9\,\mathrm{dB}$$

Especificação de coeficiente de erro:

$$K_V = \frac{50}{4} = 12,5 > 12 \quad \rightarrow \quad e_{\infty} = 8\%$$



Diagramas de Bode para C(s)G(s) - Projeto 1
System: CG
Gain Margin (dB): 13.9
At frequency (rad/s): 5.03
Closed loop stable? Yes
System: CG
Phase Margin (deg): 55.5
Delay Margin (sec): 0.55
At frequency (rad/s): 1.76
Closed loop stable? Yes
Magnitude (dB)
100
50
0
-50
-100
-150
Phase (deg)
-90
-135
-180
-225
-270
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
Frequency (rad/s)

Exemplo

$$\Delta(s) = s(s+1)(s+4)(s+0,018)(s+5,7) + 50(s+0,18)(s+5,7)$$

$$= s^5 + 10,7s^4 + 32,7s^3 + 73,4s^2 + 37,9s + 5,1$$

$p_1 = -0,22$

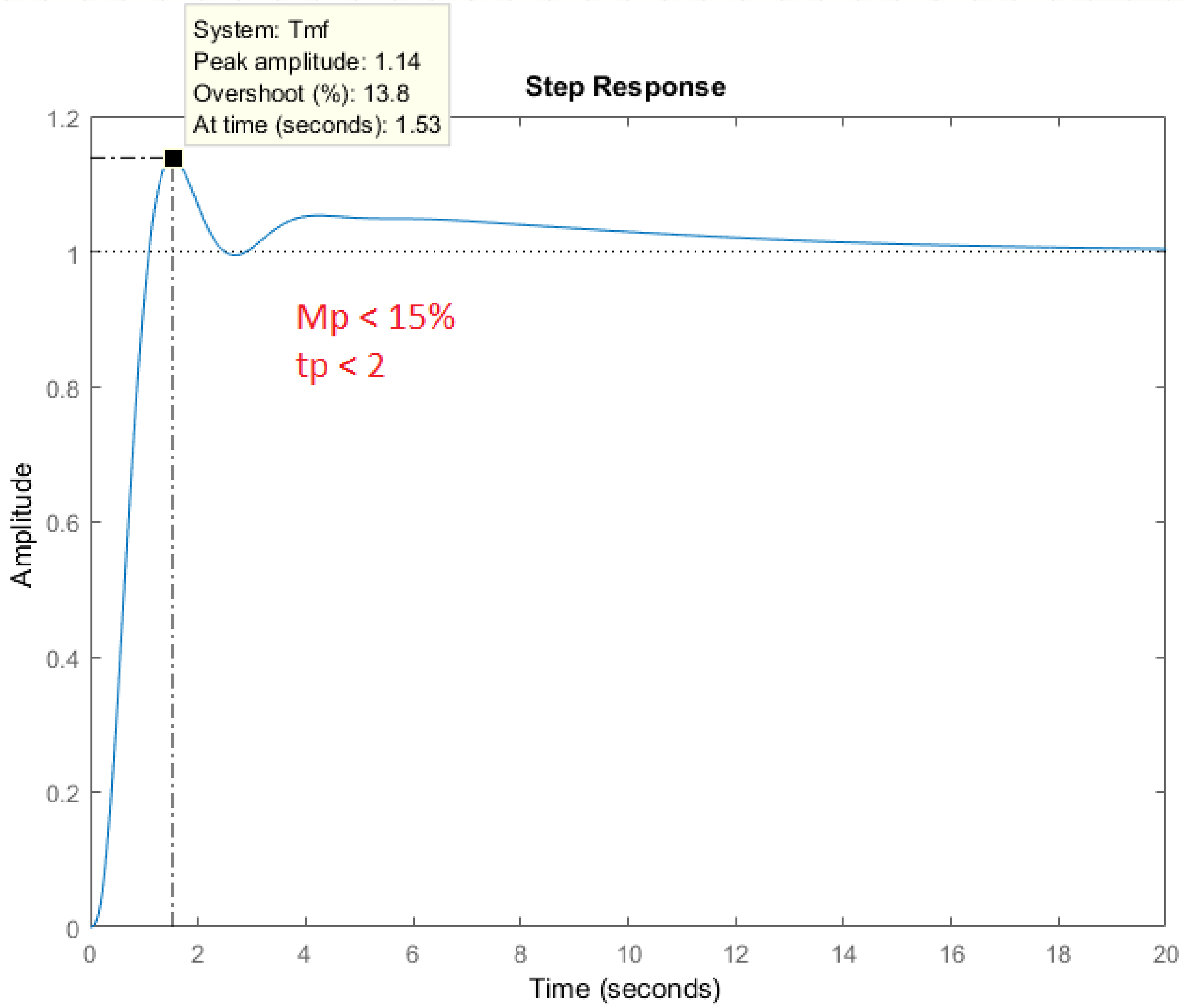
$p_2 = -0,41$

$p_{3,4} = -1,24 \pm j2,4$

$p_5 = -7,6$

$z_1 = -0,018$

$z_2 = -0,57$


System: Tmf
Peak amplitude: 1.14
Overshoot (%): 13.8
At time (seconds): 1.53
Step Response
Mp < 15%
tp < 2
Amplitude
Time (seconds)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20

Projeto 2 – Nova escolha para ω_C

Escolhendo ω_C= 2:

$$\omega_C \triangleq 2,0 \quad \rightarrow \quad \text{MF} = 0^\circ$$

Mantendo

$$\phi_m = 55^\circ$$

Projeto 3 – Nova escolha para ω_C

Escolhendo ω_C= 2:

$$\omega_C \triangleq 2,0 \quad \rightarrow \quad \mathrm{MF} = 0^\circ$$

Fazendo

$$\phi_m = 60^\circ$$