Método do Lugar das Raízes

Regras de Construção

Profa. Cristiane Paim

Introdução

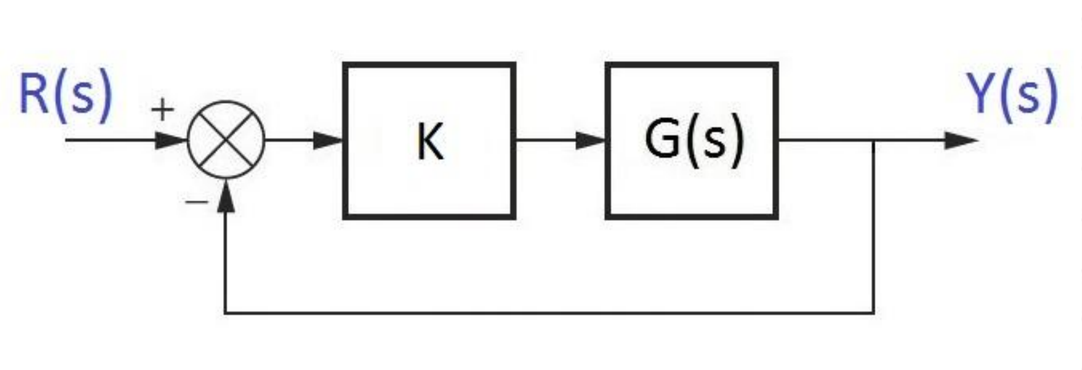
O **Lugar das Raízes** é um método pelo qual as raízes dos sistema em malha fechada são traçadas em um **gráfico para todos os valores possíveis de um determinado parâmetro do sistema**.

Através do gráfico do Lugar das Raízes (LR) é possível observar como a variação de um parâmetro afeta os polos de malha fechada e, consequentemente, a resposta do sistema.

Assim, o LR pode ser usado como ferramenta de análise e de projeto para ajustar parâmetros para atendimento de algum critério de desempenho.

Introdução

Seja o sistema de controle, com K>0:



A função de transferência de malha fechada (FTMF) é dada por:

$$T(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$$

Introdução

Os polos de malha fechada serão definidos pelas raízes da equação característica:

$$\Delta(s) = 1 + KG(s) = 0$$

O gráfico do Lugar das Raízes (LR) representa o conjunto de soluções para a equação característica quando o parâmetro K varia de 0 a +∞.

A equação característica pode ser reescrita como:

$$G(s) = -\frac{1}{K} = |G(s)| \angle G(s)$$

Lugar das Raízes

Sendo K>0, pode-se concluir que “s” pertencerá ao Lugar das Raízes se e somente se:

$$|G(s)| = \frac{1}{K}$$

Condição de Módulo

$$\angle G(s) = 180^{\circ}(2q+1)$$

Condição de Fase

Assim, o Lugar das Raízes de G(s) é o conjunto de pontos para os quais a fase de G(s) mede 180°, considerando cada valor possível de K no intervalo de 0 a +∞.

Lugar das Raízes

Convém lembrar que G(s) é uma função racional própria (grau do polinômio do denominador maior que do que o grau do polinômio do numerador). Assim, a equação característica pode ser escrita da forma :

$$\Delta(s) = 1 + K\frac{B(s)}{A(s)} = 0$$

sendo que os polinômios A(s) e B(s) têm grau n (nº de polos) e m (nº de zeros), respectivamente, e podem ser escritos como:

$$A(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n$$

$$B(s) = s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_m$$

Lugar das Raízes

Os polinômios A(s) e B(s) podem ser ainda escritos na forma fatorada, em função de seus polos e zeros:

$$A(s) = \prod_{j=1}^{n} (s - p_j)$$

$$B(s) = \prod_{i=1}^{m} (s - z_i)$$

Lugar das Raízes – Definições

Ramo: é o caminho que o polo de malha fechada percorre quando o parâmetro K é variado.

Nº de ramos: igual ao número de polos de malha fechada.

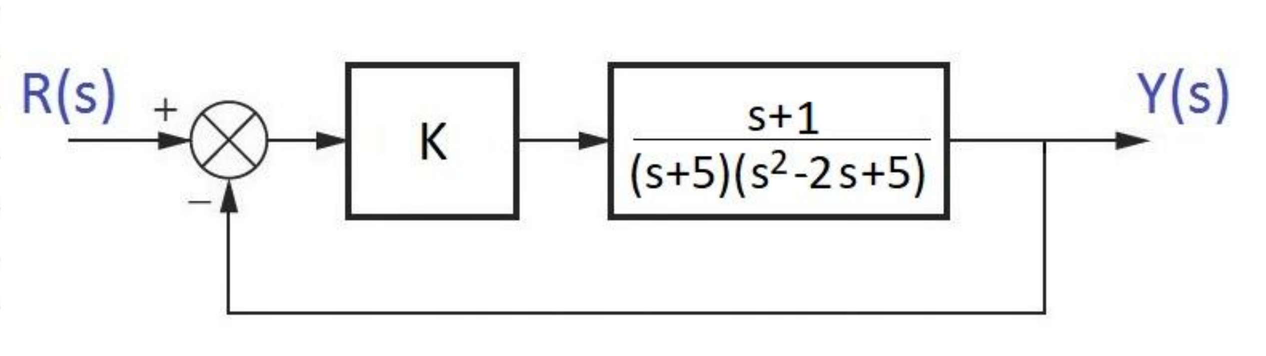
Lugar das Raízes – Observações

Os ramos do Lugar das Raízes (para K>0) iniciam no polos de malha aberta e terminam nos zeros finitos ou no infinito seguindo assíntotas.

O Lugar das Raízes é simétrico em relação ao eixo real.

Lugar das Raízes – Exemplo Referência

Seja o sistema de controle abaixo. Será traçado o lugar das raízes para 0 < K < +∞.



Raízes de malha aberta:

$$p_{1,2} = 1 \pm j2 \quad z = -1$$
$$p_3 = -5$$

A eq. característica é um polinômio de 3ª ordem, ou seja, existem 3 polos de malha fechada, portanto o LR possuirá 3 ramos.

Traçado do Lugar das Raízes - Procedimento

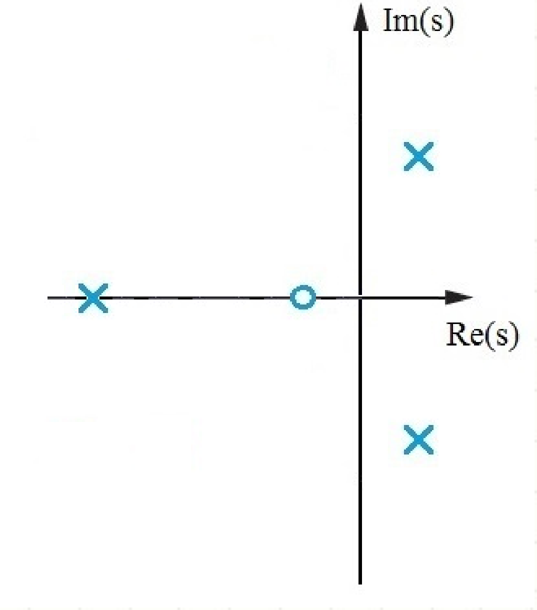
1. Localização dos polos e zeros de malha aberta

Identificar no plano "s" todos os polos e zeros do sistema em malha aberta.

× polo

○ zero

$$p_{1,2} = 1 \pm j2 \quad z = -1$$
$$p_3 = -5$$



MATLAB: Função pzmap

$$G(s)=\frac{s+1}{(s+5)(s^2-2s+5)}=\frac{s+1}{s^3+3s^2-5s+25}$$

Sintaxe no MATLAB

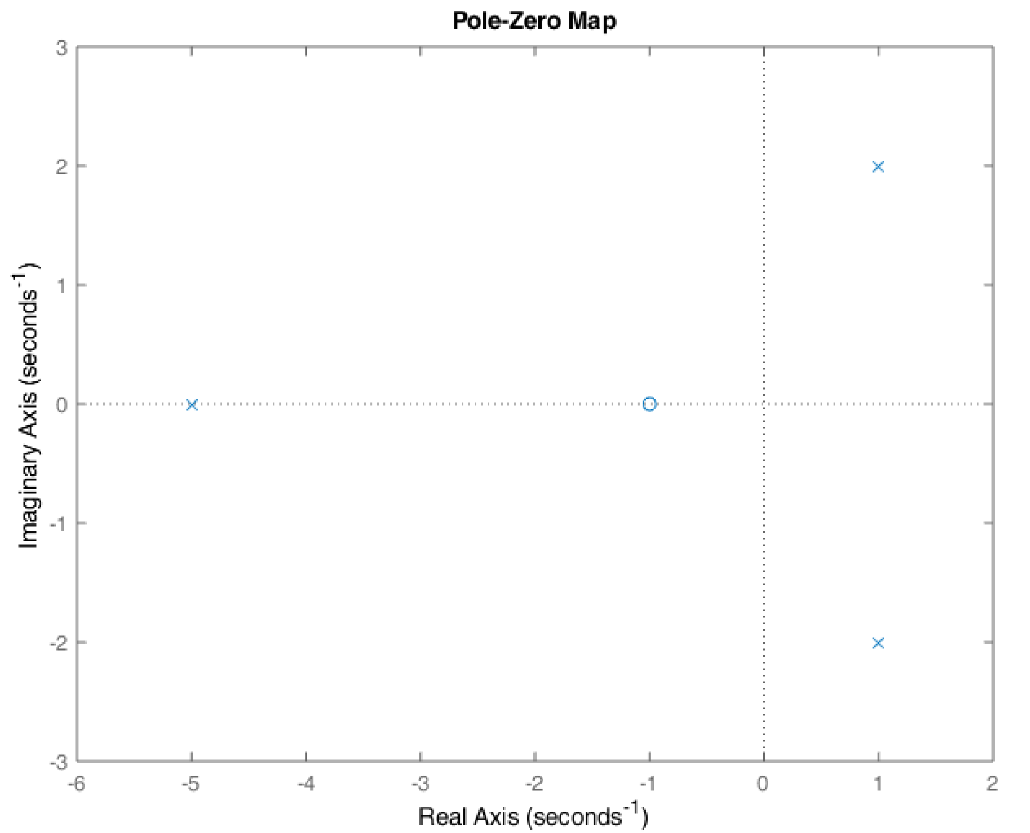
```
>> G=tf([1 1],conv([1 5],[1 -2 5]))

G =

         s + 1
  ----------------------
  s^3 + 3 s^2 - 5 s + 25

Continuous-time transfer function.

>> pzmap(G)
```



Traçado do Lugar das Raízes - Procedimento

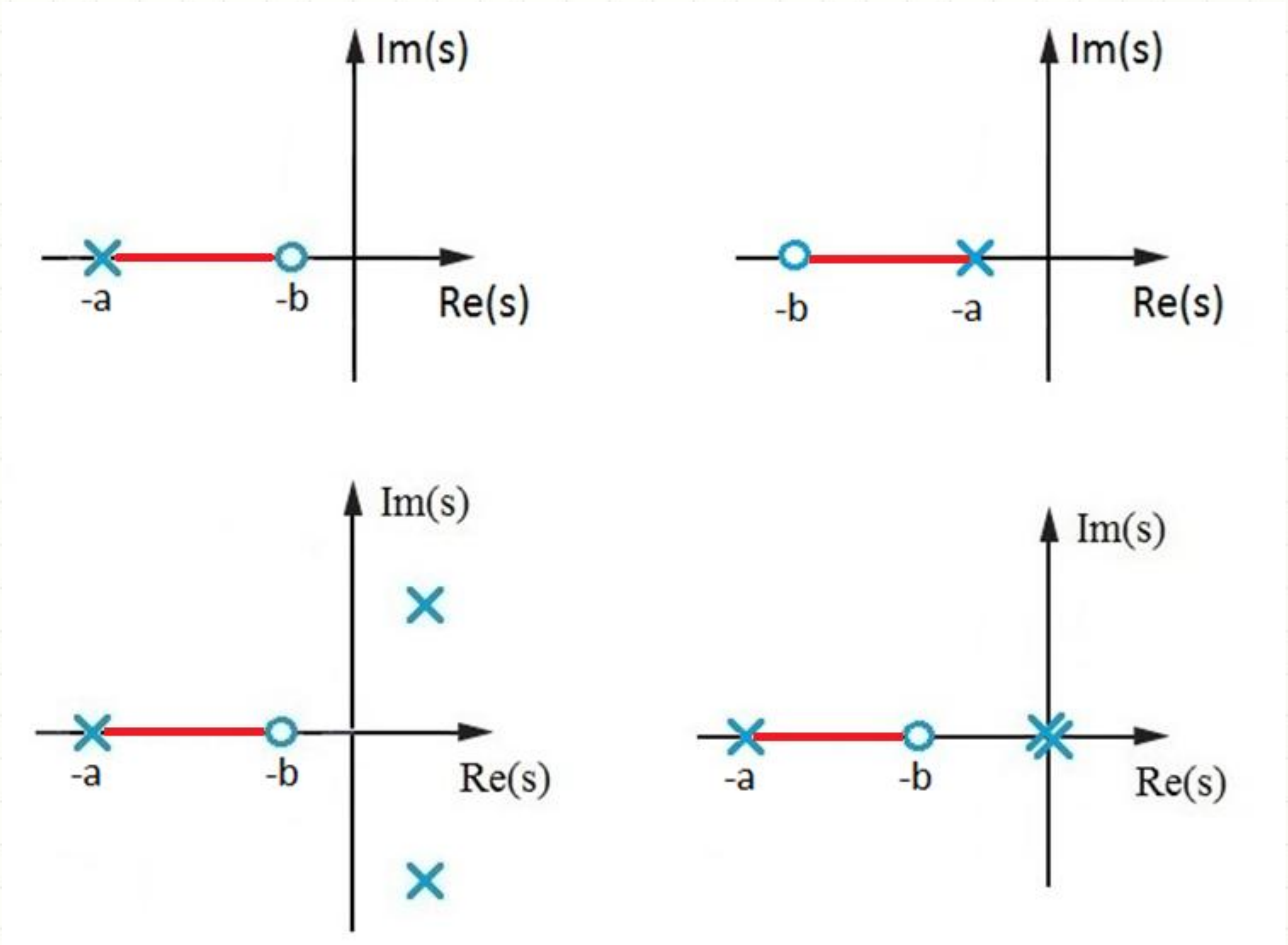
2. Segmentos sobre o eixo real

Identificar no plano s os trechos sobre o eixo real que pertencem ao LR.

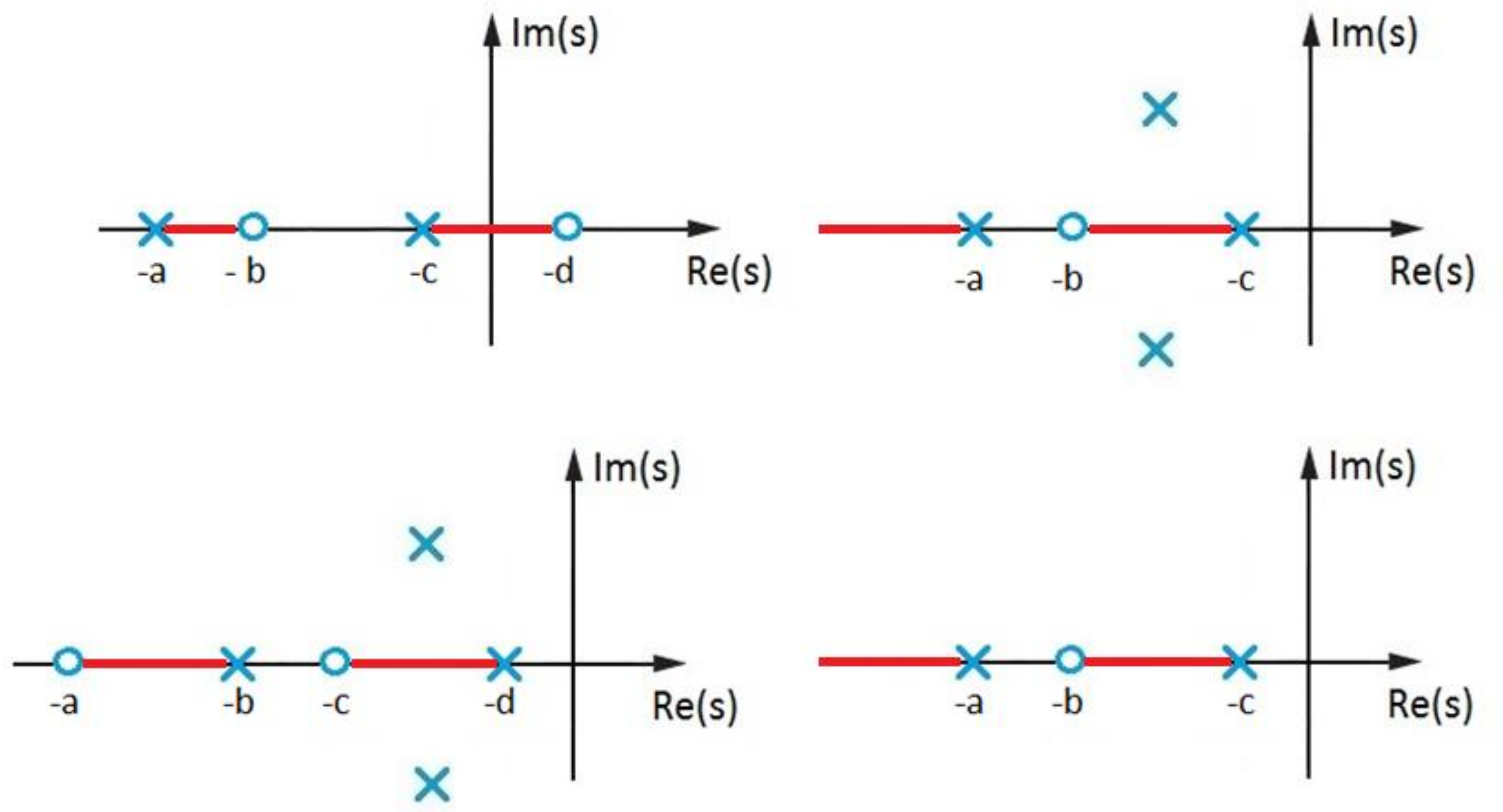
Fazem parte do LR (para K>0) os trechos sobre o eixo real que estão à esquerda de um número ímpar de singularidades (polos e zeros reais).

Polos e zeros complexos não impactam em trechos sobre o eixo real.

Exemplos de segmentos sobre o eixo real (K>0)

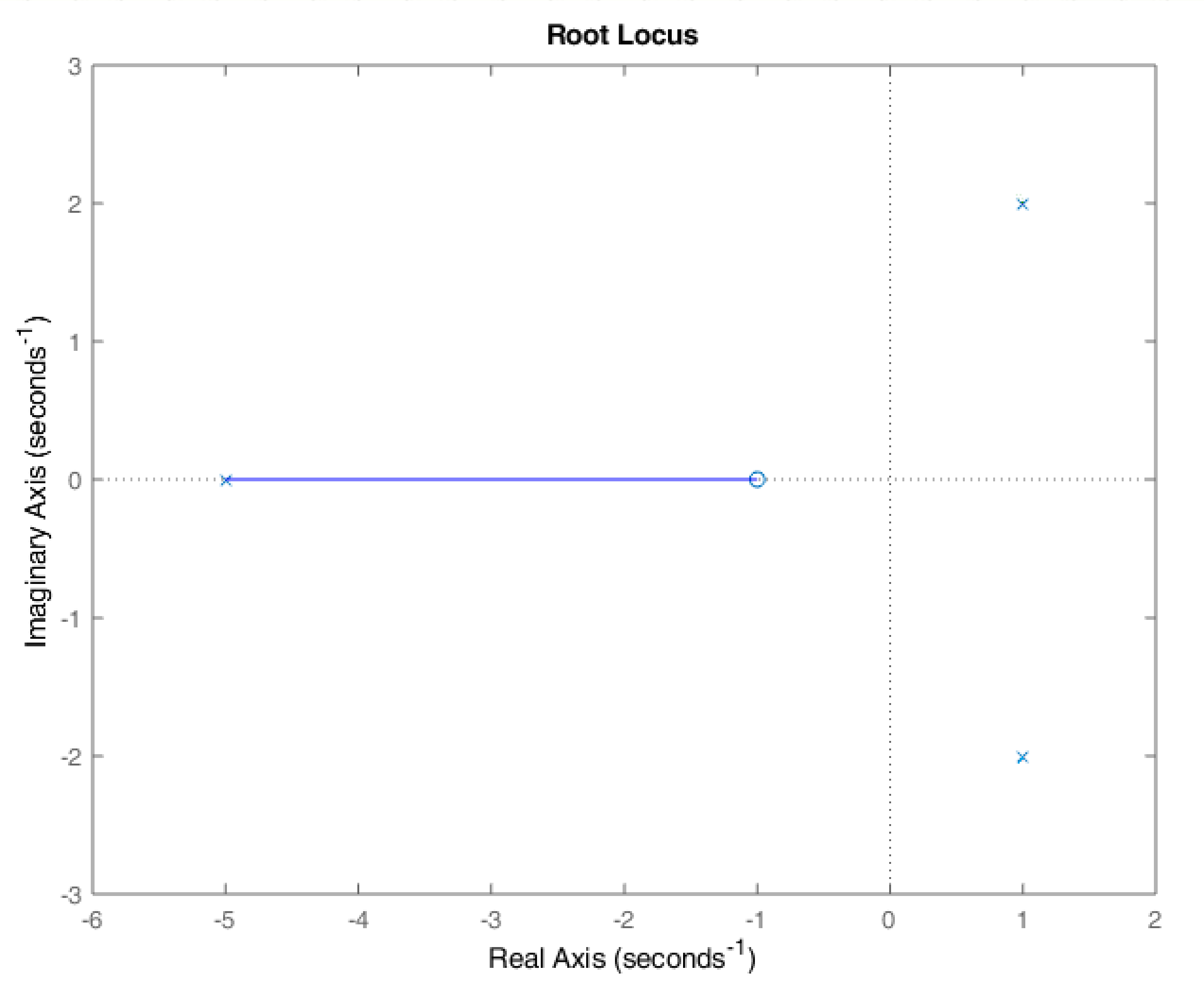


Exemplos de segmentos sobre o eixo real (K>0)



Lugar das Raízes – Exemplo Referência

No exemplo em estudo, o Lugar das Raízes sobre o eixo real existe no intervalo [-5 , -1].



Traçado do Lugar das Raízes - Procedimento

3. Comportamento Assintótico

Os ramos do LR que vão para o infinito seguem assíntotas que se cruzam sobre o eixo real em um ponto denominado "centro de gravidade das assíntotas" ou **centroide**. Este ponto é determinado por:

$$\sigma_a = \frac{\sum \text{polos} - \sum \text{zeros}}{n - m}$$

sendo n o nº de polos e m o nº de zeros do sistema.

Traçado do Lugar das Raízes - Procedimento

Os **ângulos das assíntotas** em relação ao eixo real podem ser obtidos por:

$$\theta_a = \frac{180^\circ(2q+1)}{n-m} \qquad q = 0,1,2,\ldots(n-m-1)$$

sendo n o nº de polos e m o nº de zeros do sistema.

No exemplo em estudo:

$$\begin{matrix} n = 3\,(\text{polos}) \\ m = 1\,(\text{zero}) \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad 2\,\text{assíntotas}$$

Traçado do Lugar das Raízes - Procedimento

Centroide:

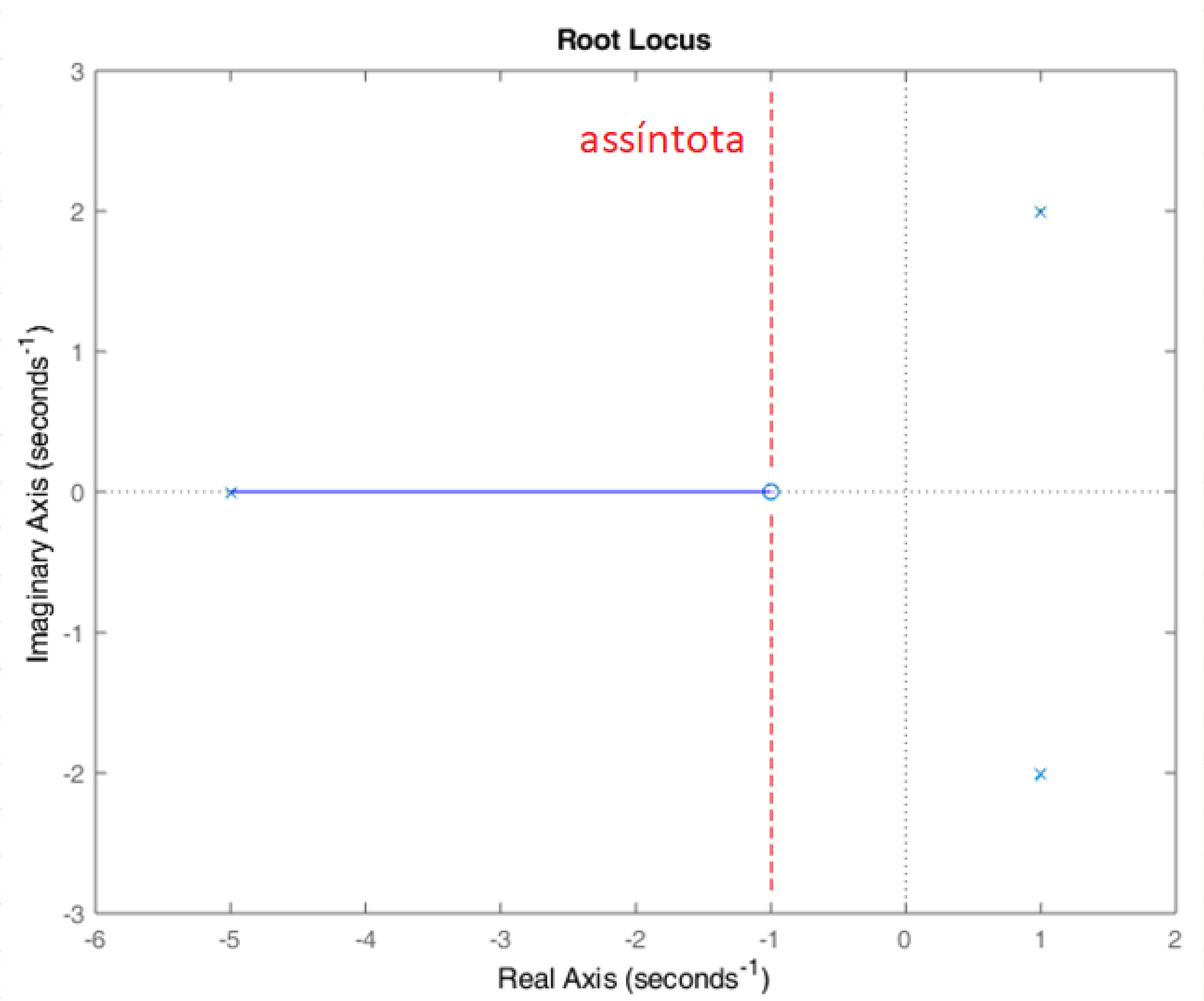
$$\sigma_a = \frac{(1 + j2 + 1 - j2 - 5) - (-1)}{3 - 1} = -1$$

Ângulos das assíntotas:

$$\theta_a = \frac{180^\circ (2q + 1)}{2} \qquad q = 0,1$$

$$\theta_a = \pm 90^\circ$$

Lugar das Raízes – Exemplo Referência



Observação: as assíntotas são elementos "auxiliares" e não fazem parte do diagrama.

Traçado do Lugar das Raízes - Procedimento

4. Ponto de Ramificação

É um ponto onde dois os mais ramos do LR se encontram e se ramificam. Representam raízes múltiplas da equação característica. O(s) ponto(s) de ramificação pode(m) ser obtido(s) encontram os valores de "s" tais que

$$\frac{dK}{ds} = 0$$

e verificando se o(s) valor(es) encontrado(s) pertence(m) ao LR, uma vez que a condição acima é necessária mas não suficiente.

Traçado do Lugar das Raízes - Procedimento

No exemplo:

$$\Delta(s) = 1 + K\frac{s+1}{(s+5)(s^2-2s+5)} = 0$$

ou

$$K = -\frac{s^3+3s^2-5s+25}{s+1}$$

Calculando

$$\frac{dK}{ds} = -\left[\frac{(3s^2+6s-5)(s+1)-(s^3+3s^2-5s+25)}{(s+1)^2}\right] = 0$$

obtém-se $2s^3+6s^2+6s-30=0$

Traçado do Lugar das Raízes - Procedimento

cuja solução é

$$s_{1,2} = 2{,}26 \pm j2{,}18 \quad \notin \mathrm{LR} \qquad (\mathrm{K} = 0{,}03 \pm j0{,}028)$$
$$s_3 = 1{,}52 \quad \notin \mathrm{LR} \qquad (\mathrm{K} = -0{,}083)$$

Portanto, no exemplo em estudo não existe nenhum ponto de ramificação.

Traçado do Lugar das Raízes - Procedimento

5. Ângulos de Partida e Chegada

O ângulo ϕ_j de partida de um polo p_j, com multiplicidade η, pode ser obtido de:

$$\eta\phi_j = \sum_{i=1}^{m} \angle(p_j - z_i) - \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq j}}^{n} \angle(p_j - p_l) - 180^\circ(2q+1)$$

O ângulo ψ_i de chegada em um zero z_i, com multiplicidade η, pode ser obtido de:

$$\eta\psi_i = \sum_{j=1}^{n} \angle(z_i - p_j) - \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq i}}^{m} \angle(z_i - z_l) + 180^\circ(2q+1)$$

Traçado do Lugar das Raízes - Procedimento

No exemplo,

$$p_1 = 1 + j2$$
$$p_2 = 1 - j2 \qquad z = -1$$
$$p_3 = -5$$

Então, o ângulo de partida do polo p_1 será dado por:

$$\phi_1 = \angle(p_1 - z) - \angle(p_1 - p_2) - \angle(p_1 - p_3) - 180^\circ(2q+1)$$
$$= 45^\circ - 90^\circ - 18{,}4^\circ - 180^\circ$$
$$= -234{,}4^\circ = 116{,}6^\circ$$

$$\phi_1 = 116{,}6^\circ \quad \Rightarrow \quad \phi_2 = -116{,}6^\circ$$

Traçado do Lugar das Raízes - Procedimento

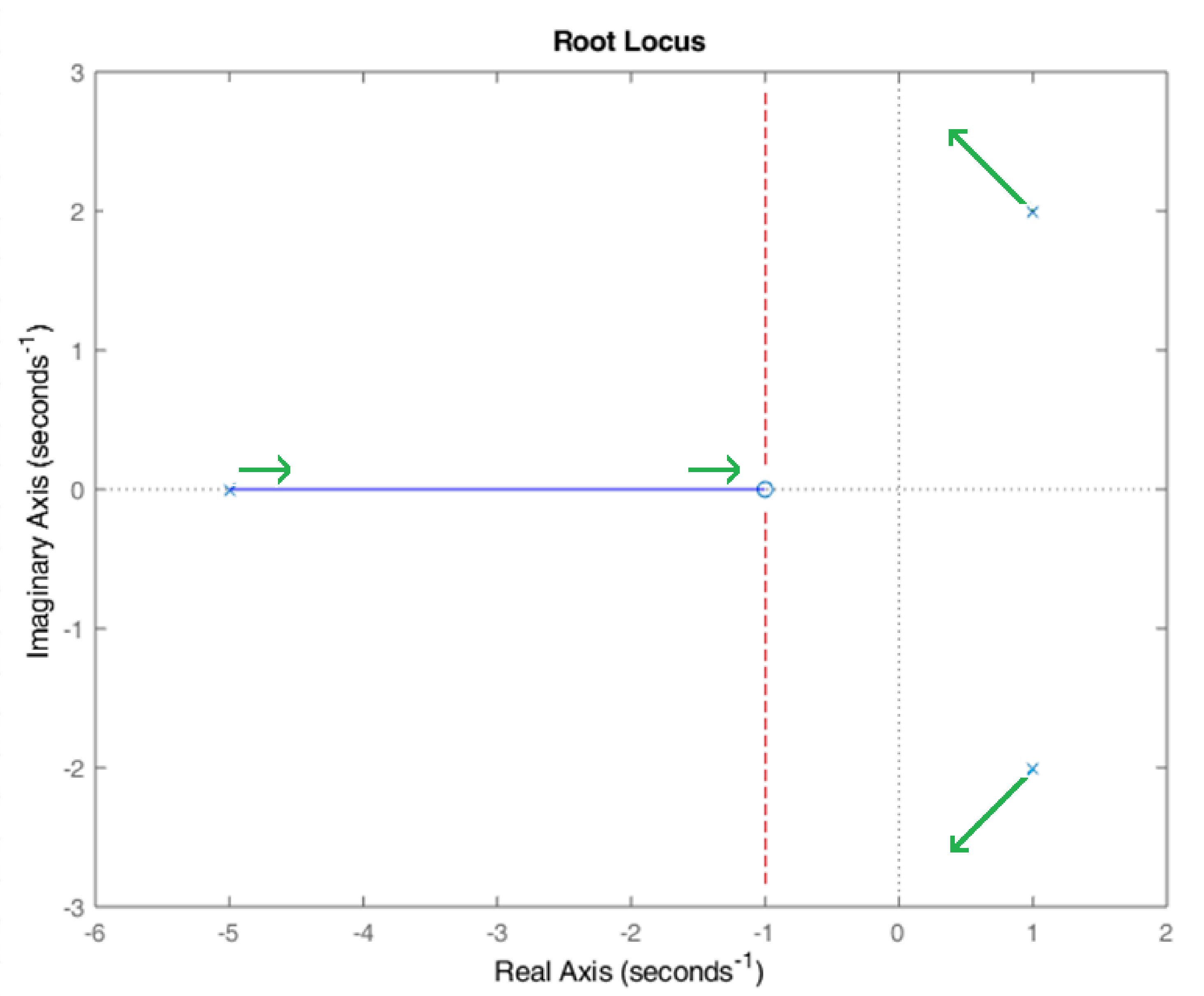
Ângulo de partida do polo p_3:

$$\begin{aligned}\phi_3 &= \angle(p_3 - z) - \angle(p_3 - p_1) - \angle(p_3 - p_2) - 180^\circ(2q+1) \\ &= 180^\circ - (-161{,}6^\circ) - 161{,}6^\circ - 180^\circ \\ &= 0^\circ\end{aligned}$$

Ângulo de chegada no zero:

$$\begin{aligned}\psi &= \angle(z - p_1) + \angle(z - p_2) + \angle(z - p_3) + 180^\circ(2q+1) \\ &= -135^\circ + 135^\circ + 0^\circ + 180^\circ \\ &= 180^\circ\end{aligned}$$

Lugar das Raízes – Exemplo Referência



Traçado do Lugar das Raízes - Procedimento

6. Cruzamento com o eixo imaginário (estabilidade)

A interseção do LR com o eixo imaginário pode ser obtida resolvendo a equação característica do sistema considerando s=jω.

No exemplo:

$$\Delta(s) = s^3 + 3s^2 - 5s + 25 + K(s+1) = 0$$

Fazendo s=jω

$$\Delta(j\omega) = -j\omega^3 - 3\omega^2 - j5\omega + 25 + K(j\omega+1) = 0$$

Traçado do Lugar das Raízes - Procedimento

De onde obtém-se:

$$\mathrm{Re}\left[\Delta(j\omega)\right]=0 \quad \Rightarrow \quad K+25-3\omega^2=0 \qquad (1)$$
$$\mathrm{Im}\left[\Delta(j\omega)\right]=0 \quad \Rightarrow \quad \omega\,(K-5-\omega^2)=0 \qquad (2)$$

De (2)

$$\omega=0 \quad \text{ou} \quad K=5+\omega^2$$

Substituindo em (1)

$$\omega=0 \quad \Rightarrow \quad K=-25 \quad \Rightarrow \quad K<0$$
$$K=5+\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega=\pm\sqrt{15}=\pm 3{,}86 \quad \Rightarrow \quad K=20$$

Traçado do Lugar das Raízes - Procedimento

Assim, o LR cruza o eixo imaginário em $\omega = \pm\ 3{,}86$ que corresponde a um ganho K=20. Portanto, o sistema é estável para

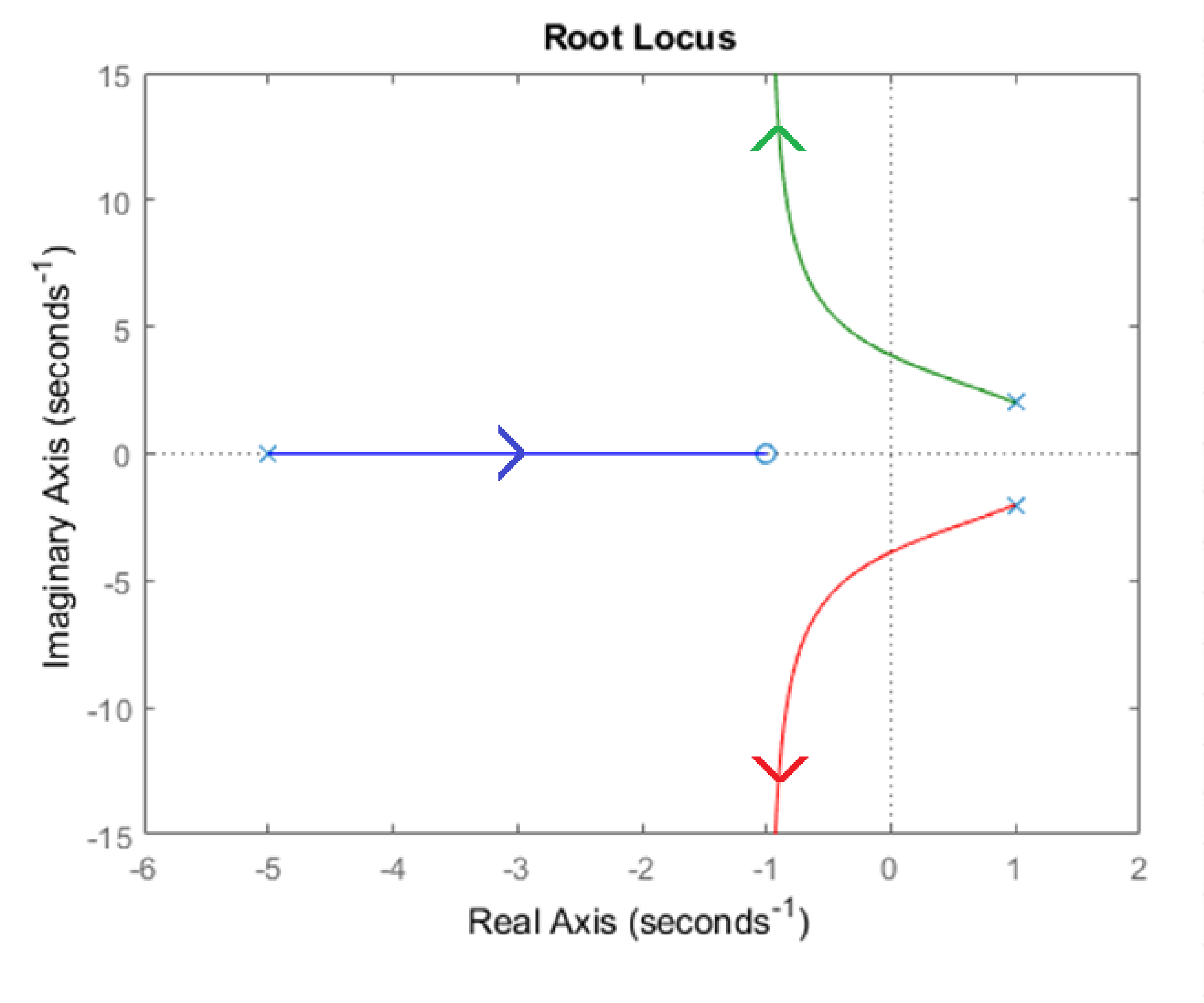
$$K > 20$$

No MATLAB, o LR é traçado com o comando rlocus.

Sintaxe: rlocus(G)

Sendo G a função de transferência em malha aberta.

Lugar das Raízes – Exemplo Referência



Observação: o gráfico gerado pelo MATLAB não explicita o sentido de deslocamento das raízes.

Sugestões de Leitura

Engenharia de Controle Moderno – K. Ogata (5ª edição)
Capítulo 6 - Análise e Projeto de Sistemas pelo Método do Lugar das Raízes. Itens 1 a 3.

Sistemas de Controle Modernos – R. Dorf & R. Bishop (8ª edição)
Capítulo 7 – O Método do Lugar das Raízes. Itens 1 a 3.

Sistemas de Controle para Engenharia – G. Franklin, J. Powel & A. Emami-Naeini (6ª edição)
Capítulo 5 – O Método do Lugar das Raízes. Itens 1 a 3.