Projeto de Controladores Discretos

Projeto Por Emulação
Projeto Direto via Lugar das Raízes

Profa. Cristiane Paim

Introdução

O projeto de controladores discretos pode ser realizado considerando duas abordagens:

- **Projeto Direto:** o controlador é projetado diretamente em tempo discreto (plano z)
- **Projeto por Emulação** : o controlador é projetado em tempo contínuo (plano s) e depois discretizado

A ações e estruturas de controle são similares àquelas do caso contínuo.

Introdução

Controle Proporcional

$$C(z) = K$$

Controle Derivativo

$$C(z) = K\frac{z-1}{z} \qquad K = K_P T_D$$

Controle Integral

$$C(z) = K\frac{z}{z-1} \qquad K = \frac{K_P}{T_I}$$

Controlador PD

$$C(z) = K\frac{z-\alpha}{z}$$

sendo

$$\alpha = \frac{T_D}{1+T_D} \quad \text{e} \quad K = K_P(T_D + 1)$$

Introdução

Controlador PI

$$C(z) = K\frac{z-\alpha}{z-1}$$

sendo

$$\alpha = \frac{T_I}{T_I+1} \quad \text{e} \quad K = \frac{K_P}{T_I}(T_I+1)$$

Controlador PID (série)

$$C(z) = K_P\left[1 + T_D\left(\frac{z-1}{z}\right) + \frac{1}{T_I}\left(\frac{z}{z-1}\right)\right]$$

Introdução

Controlador em Avanço ou em Atraso

$$C(z) = K\,\frac{z-\alpha}{z-\beta} \qquad \begin{aligned} \text{Avanço} &: |\alpha| > |\beta| \\ \text{Atraso} &: |\beta| > |\alpha| \end{aligned}$$

Controlador em Avanço-Atraso

$$C(z) = K\left(\frac{z-\alpha_1}{z-\beta_1}\right)\left(\frac{z-\alpha_2}{z-\beta_2}\right) \qquad \begin{aligned} \text{Av} &: |\alpha_1| > |\beta_1| \\ \text{At} &: |\beta_2| > |\alpha_2| \end{aligned}$$

Importante: no caso discreto, para que o controlador tenha polo e zero de fase mínima é necessário que α e β tenham módulo menor do que 1.

Projeto por Emulação

Esta abordagem considera que o projeto do controlador é realizado no tempo contínuo. O controlador obtido é então discretizado através de algum método, considerando um período de amostragem adequado.

Os principais métodos de discretização são:

- Segurador de ordem zero (ZOH)
- Métodos de Euler (backward e forward)
- Método de Tustin (transformação bilinear)
- Transformação casada Polo/Zero (MPZ-Matched)

Projeto por Emulação

Segurador de ordem zero (ZOH)

$$C(z) = \left(1 - z^{-1}\right) Z\left\{\frac{C(s)}{s}\right\}$$

Métodos de Euler

O mapeamento do plano s para o plano z é obtido através das relações:

Backward (diferença para trás) $\rightarrow$ $s = \dfrac{z-1}{Tz}$

Forward (diferença para frente) $\rightarrow$ $s = \dfrac{z-1}{T}$

Projeto por Emulação

Método de Tustin (aproximação trapezoidal ou bilinear)

Neste caso, o mapeamento do plano s para o plano z é obtido através da transformação bilinear:

$$s = \frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$$

Transformação casada polo/zero (MPZ-Matched)

Utiliza-se o mapeamento

$$z = e^{sT} \quad \rightarrow \quad s = \frac{\ln(z)}{T}$$

e deve-se ainda garantir que o número de polos é igual ao número de zeros. Se existirem mais polos do que zeros, a diferença é completada acrescentando-se zeros da forma (z+1).

Discretização no MATLAB

Função c2d (transforma um sistema dinâmico de tempo contínuo em tempo discreto)

Sintaxe

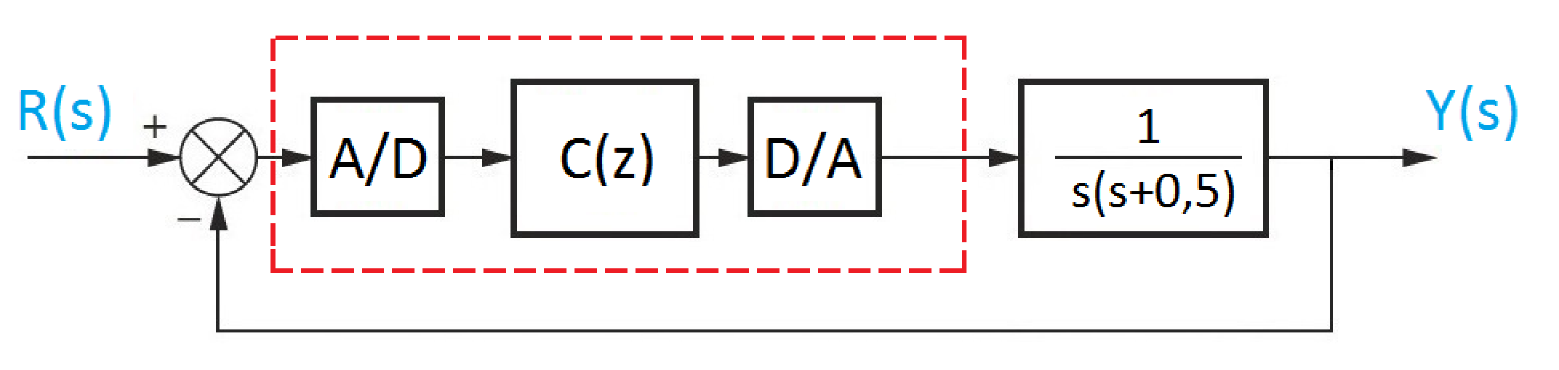
SYSD = c2d(SYSC,TS,METHOD)

Métodos

'zoh'	**Zero-order hold on the inputs (default)**
'foh'	Linear interpolation of inputs
'impulse'	Impulse-invariant discretization
'tustin'	**Bilinear (Tustin) approximation**
'matched'	**Matched pole-zero method**
‘least-squares’	Least-squares minimization (of the error between frequency responses of the continuous and discrete systems)

Exemplo 1 - Projeto por Emulação

Seja o sistema



Deseja-se projetar o controlador discreto C(z) por emulação tal que sejam atendidas as seguintes especificações para a resposta ao degrau unitário:

- Sobressinal menor do que 16%
- Tempo de acomodação menor do que 10 segundos

Exemplo 1 - Projeto por Emulação

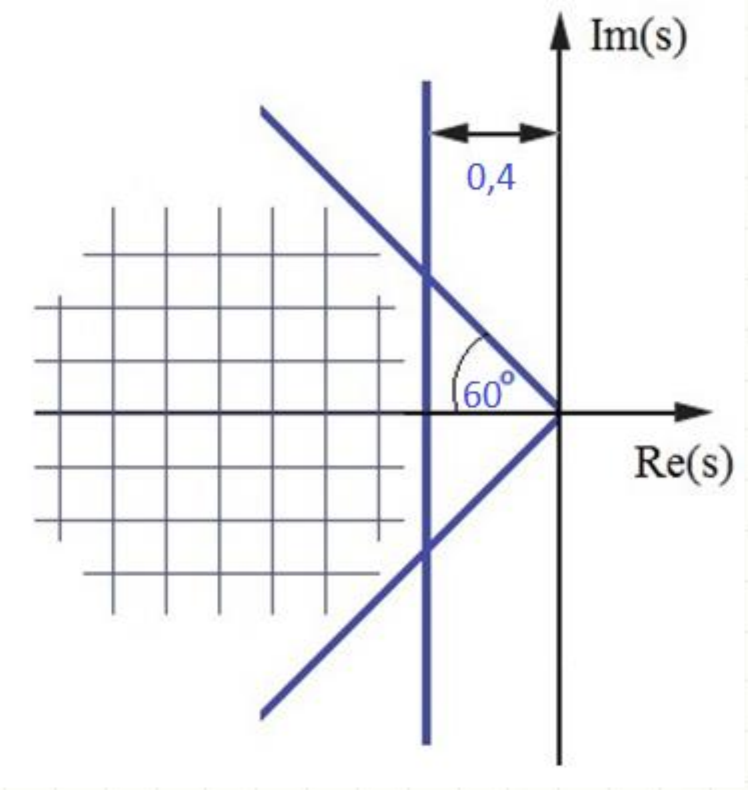
Projeto do controlador (Plano s)

$$M_P < 16\% \quad \Rightarrow \quad \xi > 0{,}5\left(\theta < 60^\circ\right)$$

$$t_s < 10seg \quad \Rightarrow \quad \sigma > 0{,}4$$

Posição desejada para os polos de malha fechada:

$$s_d = -1 \pm j \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \theta = 45^\circ \\ \sigma = 1 \end{matrix}$$



Exemplo 1 - Projeto por Emulação

Projeto do controlador (Plano s)

Um controlador em avanço será projetado para garantir as especificações de resposta transitória:

$$C(s) = K\frac{s+b}{s+\alpha b}$$

Para satisfazer a condição de fase:

$$\angle C(s_d)G(s_d) = 180^{\circ}(2q+1)$$

ou

$$\angle C(s_d) = 180^{\circ}(2q+1) - \angle G(s_d)$$
$$= 180^{\circ} - 108,4^{\circ} = 71,6^{\circ} \approx 72^{\circ}$$

Exemplo 1 - Projeto por Emulação

Projeto do controlador (Plano s)

Portanto, a contribuição de fase do controlador em avanço será de 72°.

Neste caso, o cancelamento polo/zero pode ser utilizado, simplificando o projeto. Seja, b=0,5, tem-se

$$C(s) = K\frac{s+0,5}{s+0,5\alpha}$$

Da condição de fase:

$$\angle C(s_d) = \angle(s_d + 0,5) - \angle(s_d + 0,5\alpha) = 72^{\circ}$$

$$\angle C(s_d) = 116,6^{\circ} - tg^{-1}\left(\frac{1}{0,5\alpha - 1}\right) = 72^{\circ}$$

Exemplo 1 - Projeto por Emulação

Projeto do controlador (Plano s)

Resolvendo a equação:

$$\alpha = 4$$

Da condição de módulo obtém-se o ganho

$$K = \frac{1}{|C(s_d)G(s_d)|} = 2$$

Portanto,

$$C(s) = 2\frac{s+0{,}5}{s+2}$$

Exemplo 1 - Projeto por Emulação

Projeto do controlador (Plano s)

Verificação do resultado:

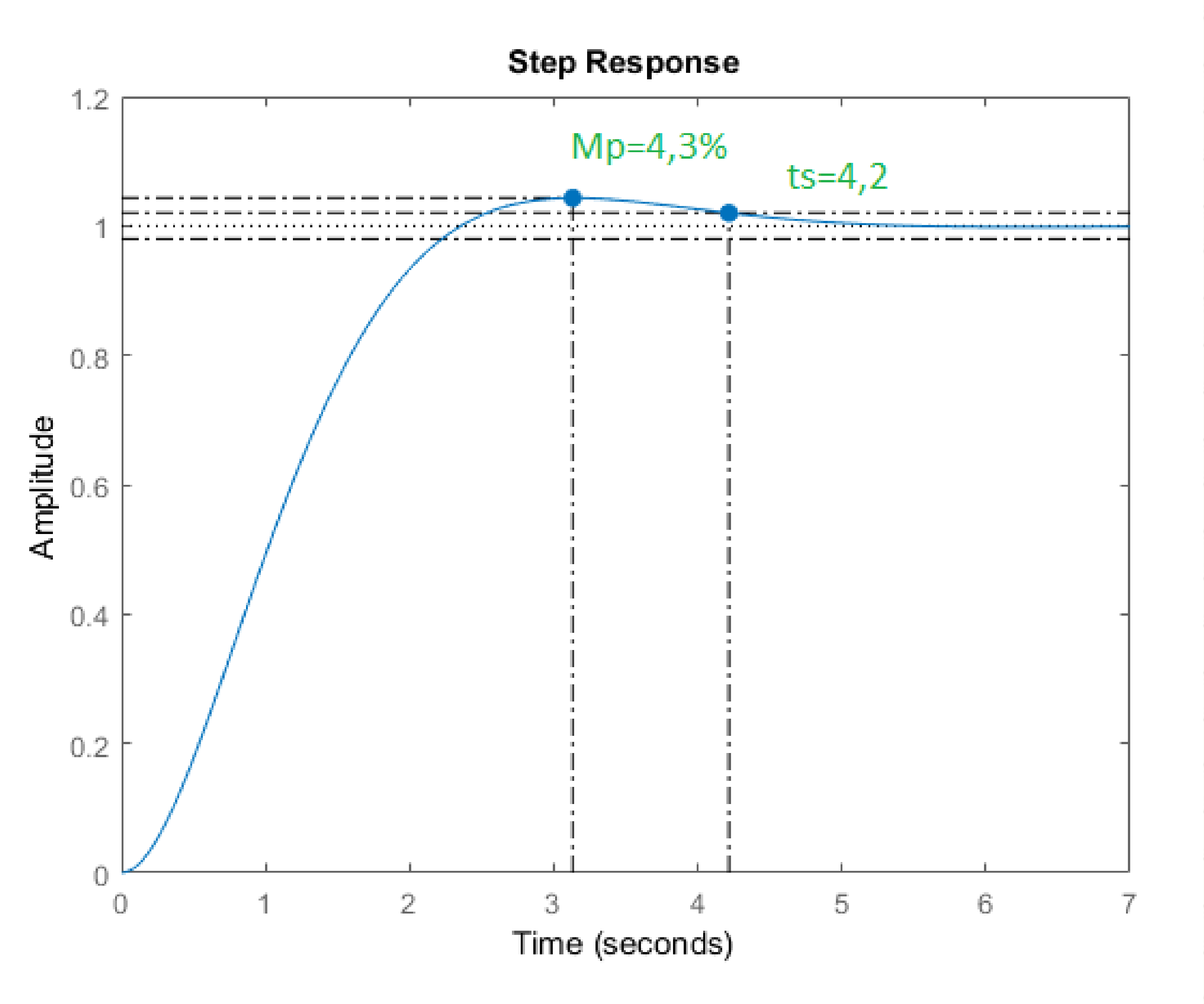
$$C(s)G(s) = \frac{2(s+0,5)}{(s+2)} \frac{1}{s(s+0,5)} = \frac{2}{s(s+2)}$$

$$T(s) = \frac{2}{s^2+2s+2} \quad \Rightarrow \quad p_{1,2} = -1 \pm j$$

$$\omega_n = 1,41 \quad \Rightarrow \quad M_P = 4,3\% < 16\%$$

$$\xi = 0,71 \quad \Rightarrow \quad t_s = 4seg < 10seg$$

Exemplo 1 - Projeto por Emulação



Resposta ao degrau para o controlador C(s) projetado

Exemplo 1 - Projeto por Emulação

Escolha do período de amostragem (para a discretização do controlador)

Tanto o **desempenho** transitório quanto a **estabilidade** assintótica do sistema de controle são afetados pela escolha do período de amostragem.

Geralmente, o desempenho de um controlador digital melhora com o **aumento** da taxa de amostragem. No entanto, nesse caso, o **custo de implementação** também aumenta.

Ao **diminuir** a taxa de amostragem, aumenta-se a **sensibilidade** do sistema de controle digital à **incertezas** na dinâmica do processo.

Portanto, deve-se ponderar estes fatores na escolha da taxa de amostragem. Em alguns casos, é mais adequado escolher uma taxa de amostragem mais lenta mas que garanta satisfação dos critérios de desempenho.

Exemplo 1 - Projeto por Emulação

Escolha do período de amostragem (para a discretização do controlador)

Para definir o período de amostragem é possível considerar características da resposta no tempo ou da resposta em frequência.

Em função da resposta em frequência é comum considerar a frequência de amostragem (ω_S) limitada pela largura de banda (ω_B).

$$\omega_S = \frac{2\pi}{T} \qquad \omega_B = \omega_n \sqrt{\left(1 - 2\xi^2\right) + \sqrt{4\xi^4 - 4\xi^2 + 2}}$$

Em função da resposta no tempo considera-se usualmente o tempo de acomodação ou a constante de tempo dominante do sistema.

Exemplo 1 - Projeto por Emulação

Escolha do período de amostragem (para a discretização do controlador)

Uma diretriz comum é definir a frequência de amostragem ω_S satisfazendo a relação

$$6\omega_B < \omega_S < 25\omega_B$$

ou

$$20\omega_B < \omega_S < 40\omega_B$$

No segundo caso, obtém-se uma resposta mais suave com menos atraso.

Exemplo 1 - Projeto por Emulação

Escolha do período de amostragem (para a discretização do controlador)

O período de amostragem também pode ser escolhido em função da constante de tempo dominante do sistema:

$$0{,}01\tau_D < T < 0{,}05\tau_D$$

ou em função do tempo de acomodação:

$$\frac{t_S}{15} < T < \frac{t_S}{6}$$

Na prática, essas métricas ajudam a fazer uma estimativa inicial para o período de amostragem. É necessário testar o sistema para validar a discretização. Ajusta-se o período de amostragem caso necessário.

Exemplo 1 - Projeto por Emulação

Para o exemplo (considerando o sistema controlado):

$$\omega_n = 1{,}41 \qquad t_s = 4$$
$$\xi = 0{,}71 \qquad \omega_B = 1{,}41$$

Constante de tempo dominante (τ_D = 1)

$$0{,}01\tau_D < T < 0{,}05\tau_D \quad \rightarrow \quad 0{,}01 < T < 0{,}05$$

Tempo de acomodação (t_S = 4)

$$\frac{t_S}{15} < T < \frac{t_S}{6} \quad \rightarrow \quad 0{,}27 < T < 0{,}67$$

Exemplo 1 - Projeto por Emulação

Em função da frequência de amostragem (ω_B=1,41)

$$6\omega_B < \omega_S < 25\omega_B \quad \rightarrow \quad 8{,}46 < \omega_S < 32{,}25$$

ou

$$20\omega_B < \omega_S < 40\omega_B \quad \rightarrow \quad 28{,}2 < \omega_S < 56{,}4$$

Escrevendo em função do período de amostragem:

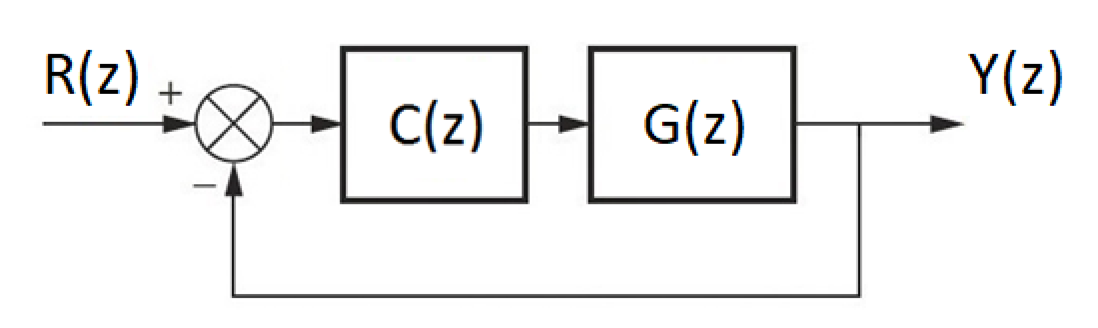
$$0{,}19 < T < 0{,}74$$

ou

$$0{,}11 < T < 0{,}22$$

Exemplo 1 - Projeto por Emulação

Para avaliar os resultados foi simulada a resposta ao degrau unitário para o sistema de malha fechada.



Foram considerados alguns valores de período de amostragem e dois métodos diferentes de discretização: segurador de ordem zero (ZOH) e transformação bilinear (TUSTIN).

Exemplo 1 - Projeto por Emulação

A partir das simulações foram obtidos os valores de sobressinal e tempo de acomodação mostrados na tabela a seguir.

T	ZOH		TUSTIN	
	Mp (%)	ts (seg)	Mp (%)	ts (seg)
0,01	4,36	4,16	4,32	4,22
0,05	4,59	3,98	4,33	4,19
0,10	5,08	3,78	4,36	4,17
0,20	6,82	5,04	4,45	4,15

Resultados obtidos em tempo contínuo:

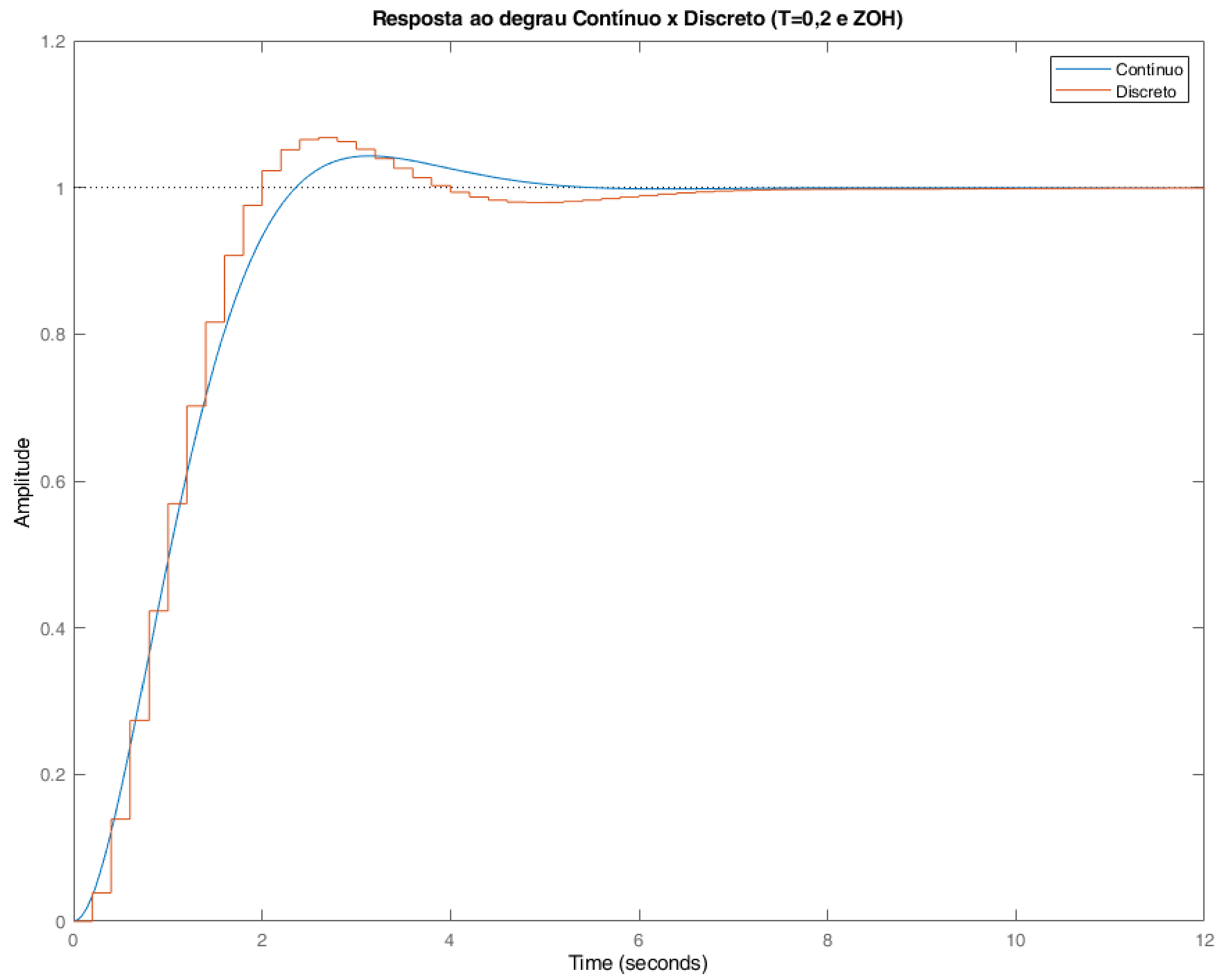
$$M_P = 4{,}3\%$$

$$t_S = 4{,}2\ seg$$

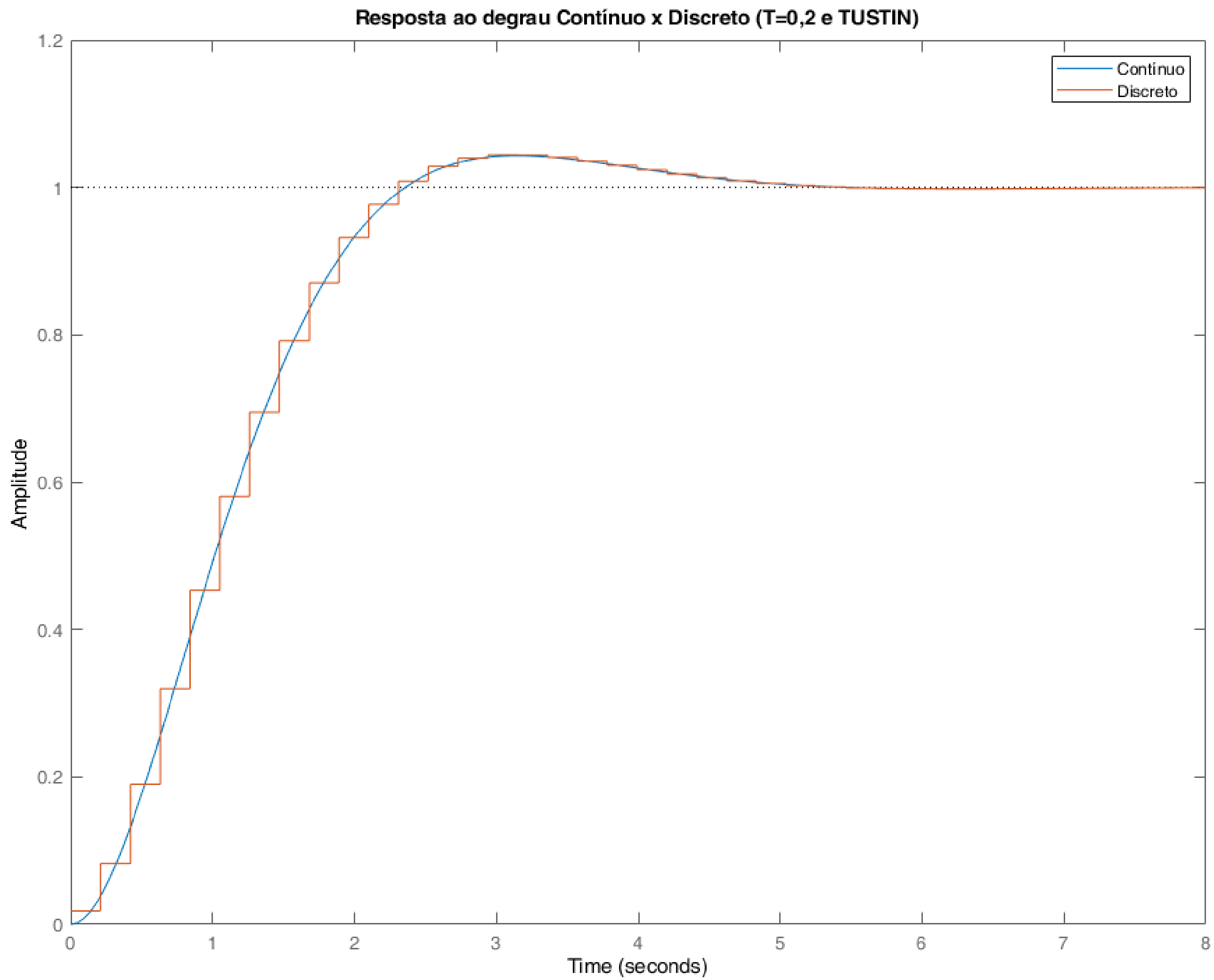
Nitidamente, o método de Tustin fornece melhores aproximações com a resposta em tempo contínuo.

A partir de T=0,2 observa-se uma crescente diferença entre as respostas de tempo contínuo e discreto usando o ZOH.

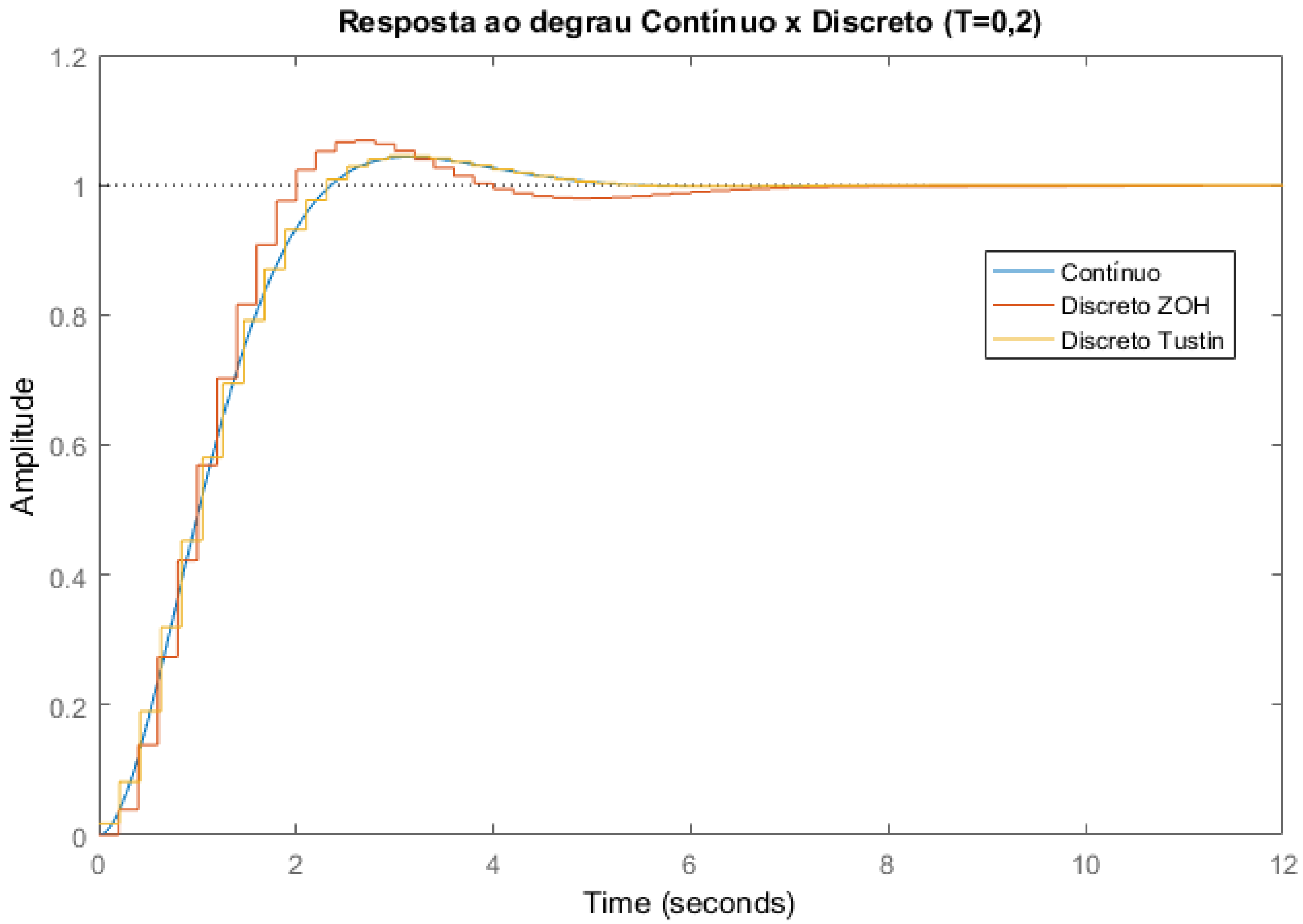
Exemplo 1 - Projeto por Emulação



Exemplo 1 - Projeto por Emulação



Exemplo 1 - Projeto por Emulação



Exemplo 1 - Projeto por Emulação

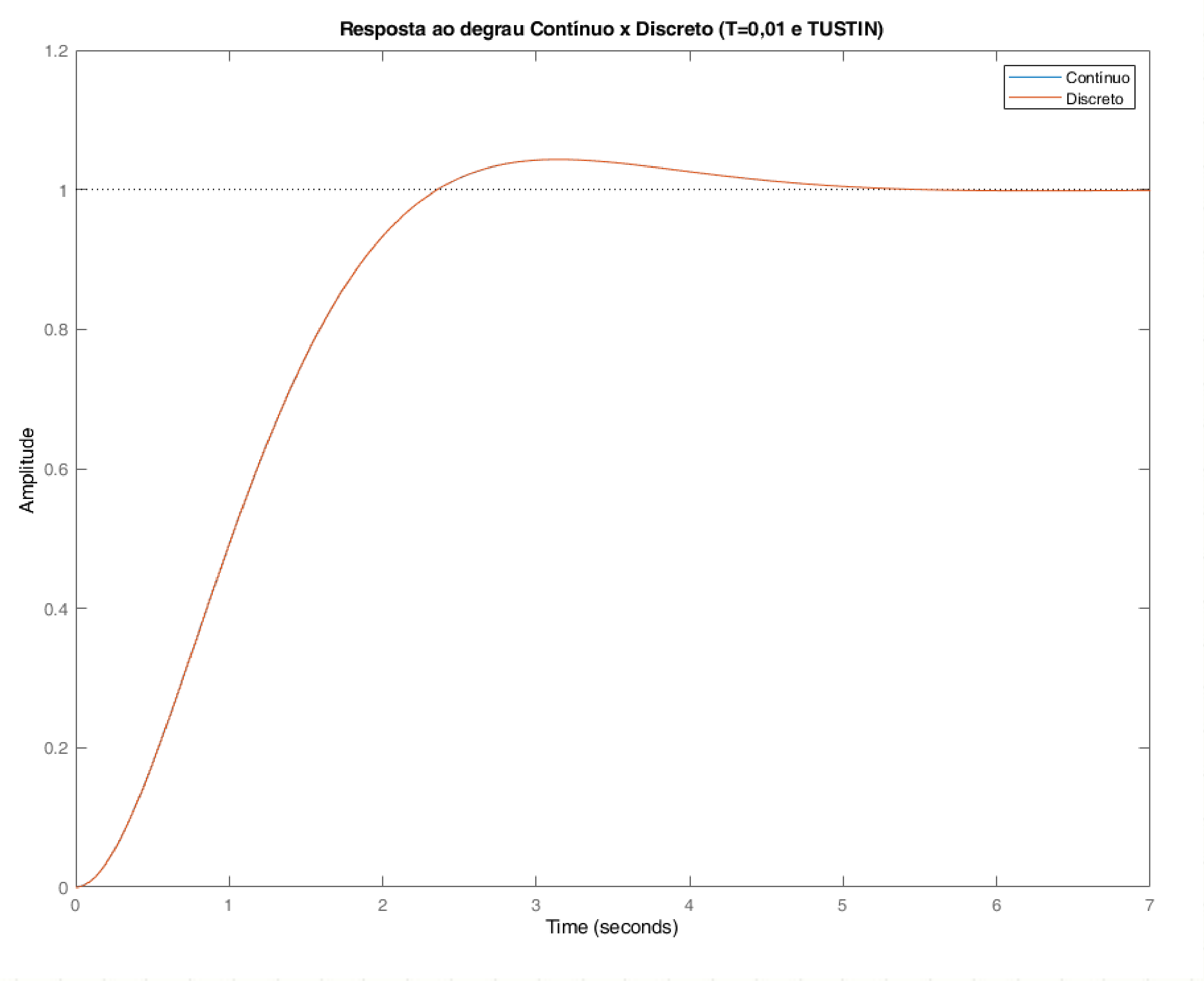
Escolhendo T=0,01 e o método de Tustin, obtém-se as funções de transferência discretas:

$$G(z) = \frac{2\times10^{-5}(z+1)^2}{(z-1)(z-0{,}995)}$$

$$C(z) = \frac{1{,}985(z-0{,}995)}{z-0{,}9802}$$

e a resposta de malha fechada a seguir.

Exemplo 1 - Projeto por Emulação



Projeto de Controladores Discretos – Método Direto

Esta abordagem considera que o projeto do controlador é realizado diretamente no tempo discreto (plano z), utilizando métodos analíticos tais como Lugar das Raízes ou Resposta em Frequência.

Os procedimentos de projeto são análogos ao caso contínuo, respeitando-se as características do tempo discreto.

Exemplo 2 - Projeto Direto

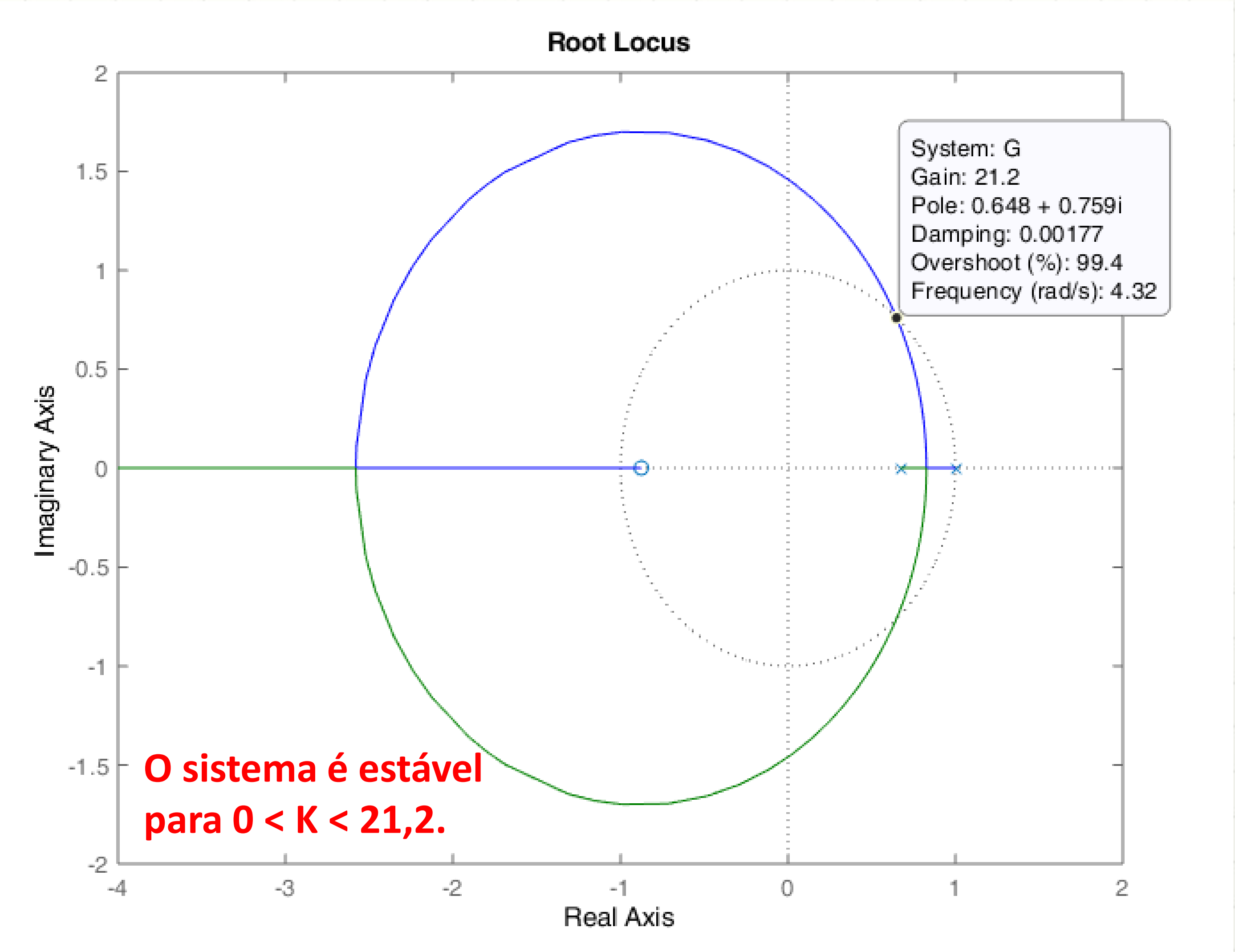
Projetar um controlador discreto de modo a atender as seguintes especificações de desempenho:

- **Sobressinal máximo menor ou igual a 16%**
- **Tempo de acomodação menor ou igual a 2 segundos**

A função de transferência discretizada que representa o processo é mostrada a seguir, tendo sido obtida considerando um período de amostragem de 0,2 segundos (T=0,2).

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)} \quad \xrightarrow[T=0,2]{ZOH} \quad G(z) = \frac{0{,}01758(z+0{,}876)}{(z-1)(z-0{,}6703)}$$

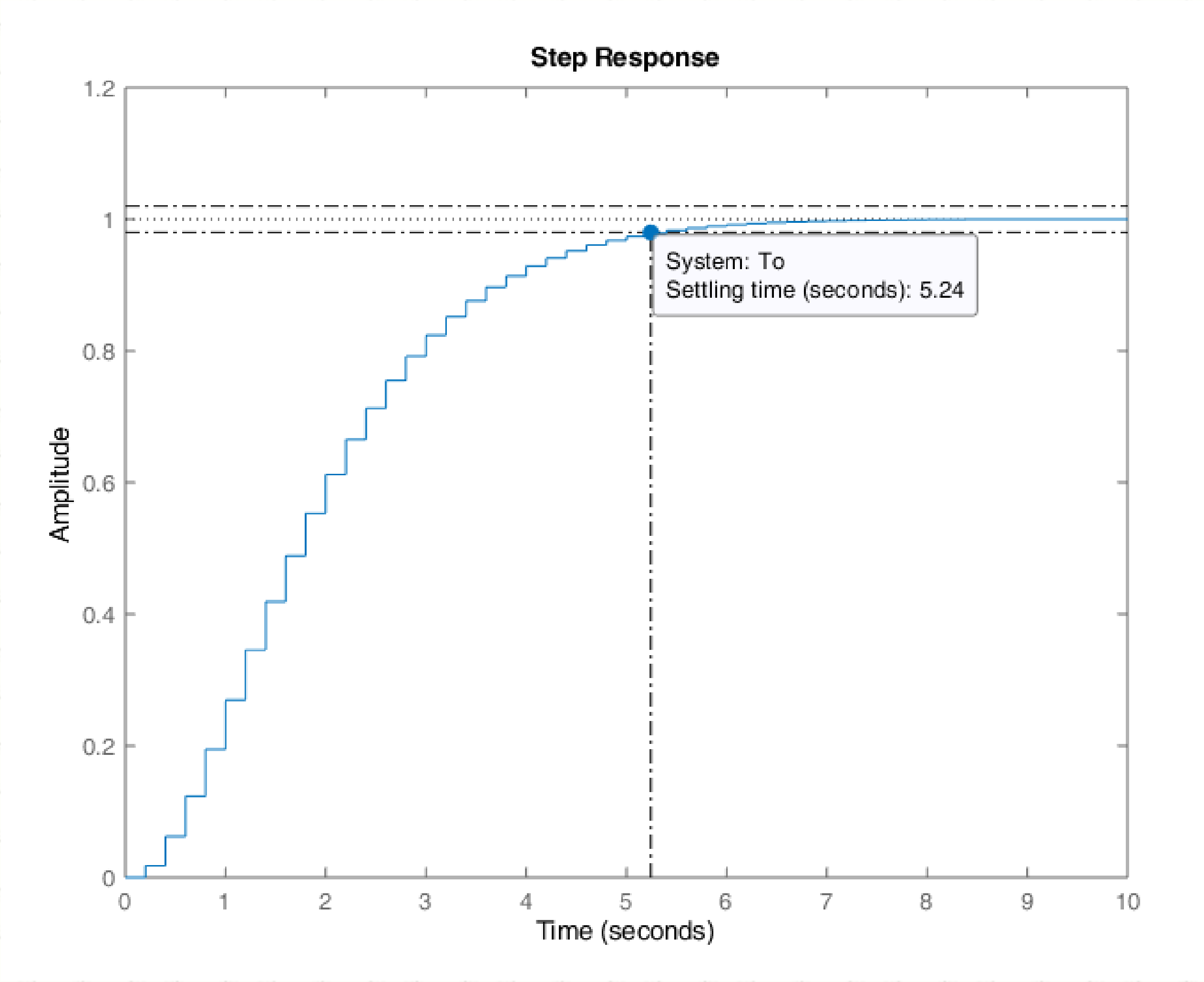
Exemplo 2 - Projeto Direto



O sistema é estável para 0 < K < 21,2.

Lugar das Raízes para G(z)

Exemplo 2 - Projeto Direto



Resposta ao degrau considerando C(z)=1

Exemplo 2 - Projeto Direto

Especificações em tempo contínuo:

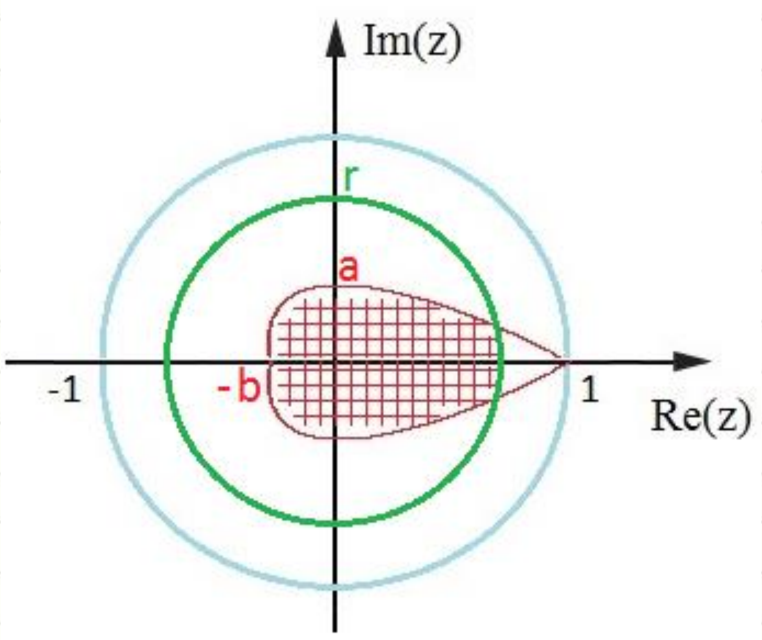
$$M_P \leq 16\% \quad \Rightarrow \quad \xi \geq 0{,}5$$
$$t_s \leq 2seg \quad \Rightarrow \quad \sigma \geq 2$$

As especificações representam no plano z, a intersecção de uma espiral logarítmica (sobressinal máximo) e um círculo (tempo de acomodação) de raio r < $e^{-\sigma T}$.

Sendo T=0,2, tem-se

$$r < e^{-0,4} < 0,6703$$

Exemplo 2 - Projeto Direto



$$r = 0{,}6703$$
$$a = 0{,}4038$$
$$b = 0{,}1630$$

A partir das especificações pode-se definir os valores de projeto:

$$\xi \equiv 0{,}6 \quad \Rightarrow \quad 0{,}6\omega_n \geq 2$$
$$\omega_n \geq 3{,}3 \quad \Rightarrow \quad \omega_n \equiv 5$$

Exemplo 2 - Projeto Direto

Ou seja, definiu-se como objetivos do projeto garantir:

$$\begin{matrix} \xi = 0,6 & \Rightarrow & M_P = 9,5\% \\ \omega_n = 5 & & t_s = 1,33seg \end{matrix}$$

Para os parâmetros escolhidos, os polos desejados para malha fechada (tempo contínuo) serão:

$$s_d = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -3 \pm j4$$

Passando para o tempo discreto

$$z_d = e^{s_d T} = 0,3824 \pm j0,3937$$

Exemplo 2 - Projeto Direto

Escolha do controlador

Uma vez que as especificações são relativas à resposta transitória, um **controlador PD ou Avanço** seria o mais indicado.

Seja o controlador em avanço:

$$C(z) = K\frac{z-\alpha}{z-\beta} \qquad |\alpha| > |\beta|$$

É possível usar o cancelamento polo/zero ?

Neste caso, sim pois existe um polo do sistema no limite da região desejada para a malha fechada.

Exemplo 2 – Projeto 1 (Avanço com cancelamento)

Fazendo α=0,6703 para cancelar o polo do sistema, tem-se o controlador reduzido a

$$C(z) = K\frac{z-0{,}6703}{z-\beta}$$

A seguir obtém-se a contribuição de fase do controlador em avanço:

$$\angle C(z_d)G(z_d) = 180^\circ(2q+1)$$

Assim,

$$\angle C(z_d) = 180^\circ - 103{,}7^\circ = 76{,}3^\circ$$

cuja solução é $\angle(z_d - 0{,}6703) - \angle(z_d - \beta) = 76{,}3^\circ$

$$\beta = 0{,}0509$$

Exemplo 2 – Projeto 1 (Avanço com cancelamento)

O controlador fica,

$$C(z) = K\frac{z - 0{,}6703}{z - 0{,}0509}$$

Da condição de módulo obtém-se o ganho do controlador

$$K = \frac{1}{\left| C(z_d)G(z_d) \right|} = 16{,}23$$

Portanto,

$$C(z) = \frac{16{,}23(z - 0{,}6703)}{z - 0{,}0509}$$

Exemplo 2 – Projeto 1 (Avanço com cancelamento)

Verificação

$$C(z)G(z)=\frac{0{,}2853(z+0{,}876)}{(z-1)(z-0{,}0509)}$$

Em malha fechada

$$\Delta(z)=z^2-0{,}7656z+0{,}3928 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} p_{1,2}=0{,}3828\pm j0{,}3928 \\ z=-0{,}876 \end{array}$$

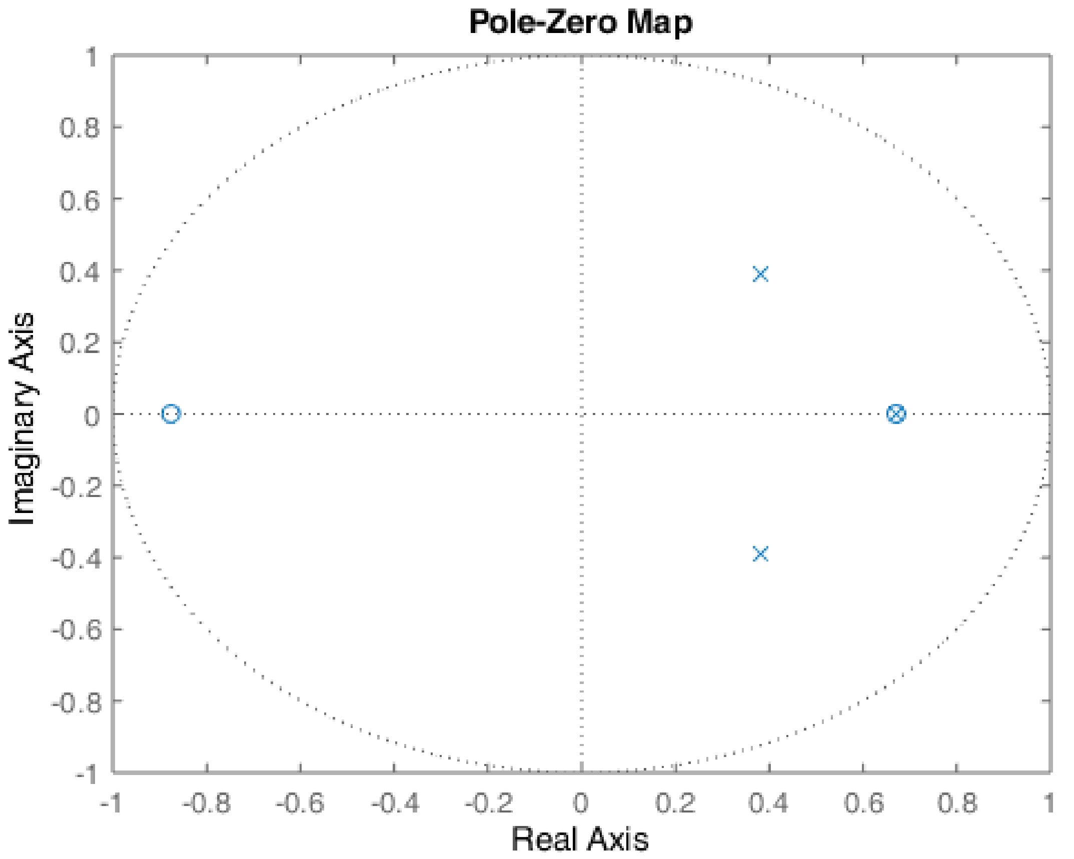
$$p_{1,2}=0{,}3828\pm j0{,}3928=M\angle N$$

$$M=0{,}5485 \qquad N=0{,}7983$$

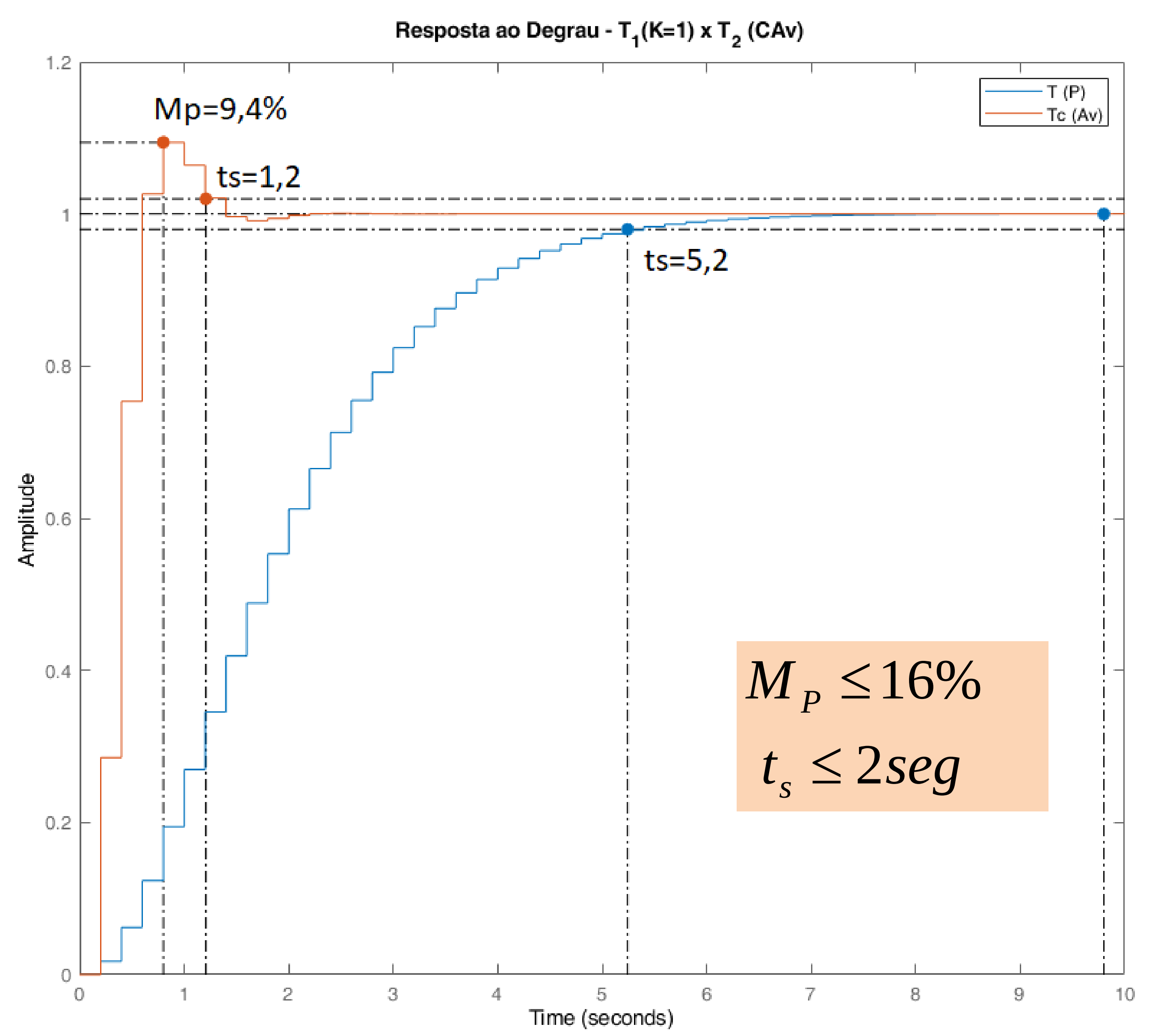
$$\xi=\frac{-\ln(\mathrm{M})}{\sqrt{\ln^2(\mathrm{M})+\mathrm{N}^2}}=0{,}6 \qquad \omega_n=\frac{1}{T}\sqrt{\ln^2(\mathrm{M})+\mathrm{N}^2}=5$$

Exemplo 2 – Projeto 1 (Avanço com cancelamento)

Qual será o efeito do zero?



Exemplo 2 – Projeto 1 (Avanço com cancelamento)



$$M_P \leq 16\%$$
$$t_s \leq 2seg$$

Exemplo 2 – Projeto 2 (Avanço sem cancelamento)

Se não fosse possível usar o cancelamento polo/zero, como os parâmetros do controlador seriam determinados?

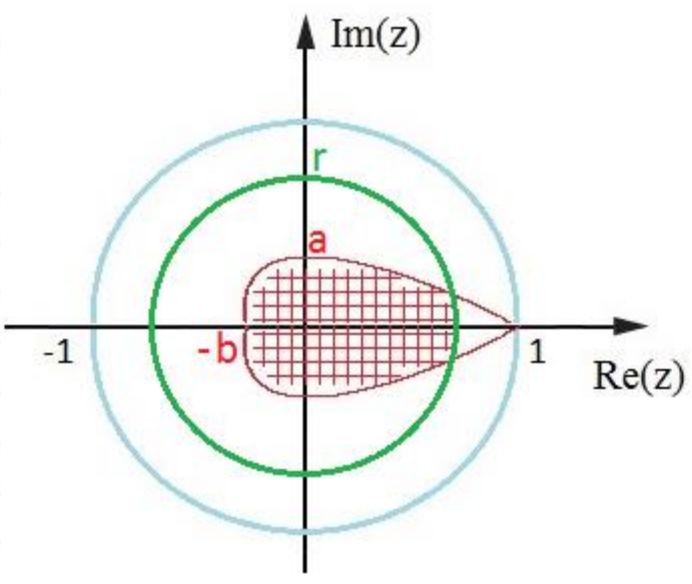
A forma mais usual de projeto é escolher a posição do zero do controlador.

Como escolher a posição do zero ?

Exemplo 2 – Projeto 2 (Avanço sem cancelamento)

Uma boa opção é escolher o zero **próximo ao polo do sistema:**

Opção 1: dentro da região desejada para a malha fechada.
Opção 2: fora da região desejada para a malha fechada
(esta opção precisa ser bem avaliada pois pode levar a resposta que não atende aos critérios de desempenho, caso o zero do controlador não fique suficientemente próximo do polo “acrescido” ao sistema).



$$r = 0{,}6703$$
$$a = 0{,}4038$$
$$b = 0{,}1630$$

Exemplo 2 – Projeto 2a (Avanço sem cancelamento – Op1)

Opção 1 (dentro da região desejada)

Escolhendo o polo $\alpha = 0{,}65$

e mantendo-se a mesma posição para os polos de malha fechada

$$z_d = 0{,}3824 \pm j0{,}3937 \quad \Rightarrow \quad \angle C(z) = 76{,}3^\circ$$

tem-se

$$\angle(z_d - 0{,}65) - \angle(z_d - \beta) = 76{,}3^\circ$$

de onde obtém-se

$$\beta = 0{,}0268$$

Da condição de módulo

$$K = \frac{1}{\left| C(z_d) G(z_d) \right|} = 17{,}18$$

Exemplo 2 – Projeto 2a (Avanço sem cancelamento – Op1)c

Portanto,

$$C(z) = \frac{17{,}18(z-0{,}65)}{z-0{,}0268}$$

Verificação

$$C(z)G(z) = \frac{0{,}302(z-0{,}65)(z+0{,}876)}{(z-1)(z-0{,}0268)(z-0{,}6703)}$$

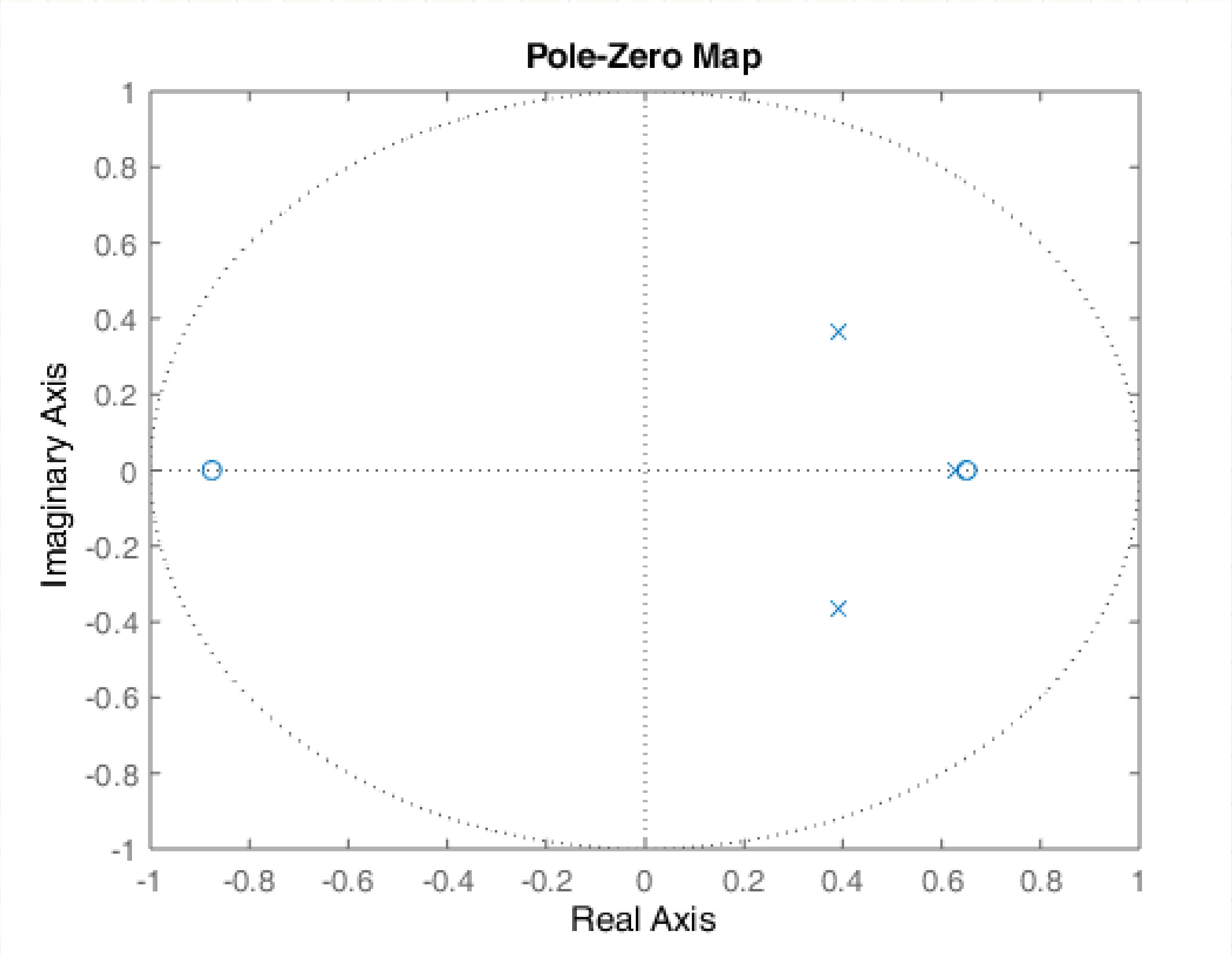
Em malha fechada:

$$\Delta(z) = z^3 - 1{,}395z^2 + 0{,}3871z - 0{,}1898$$

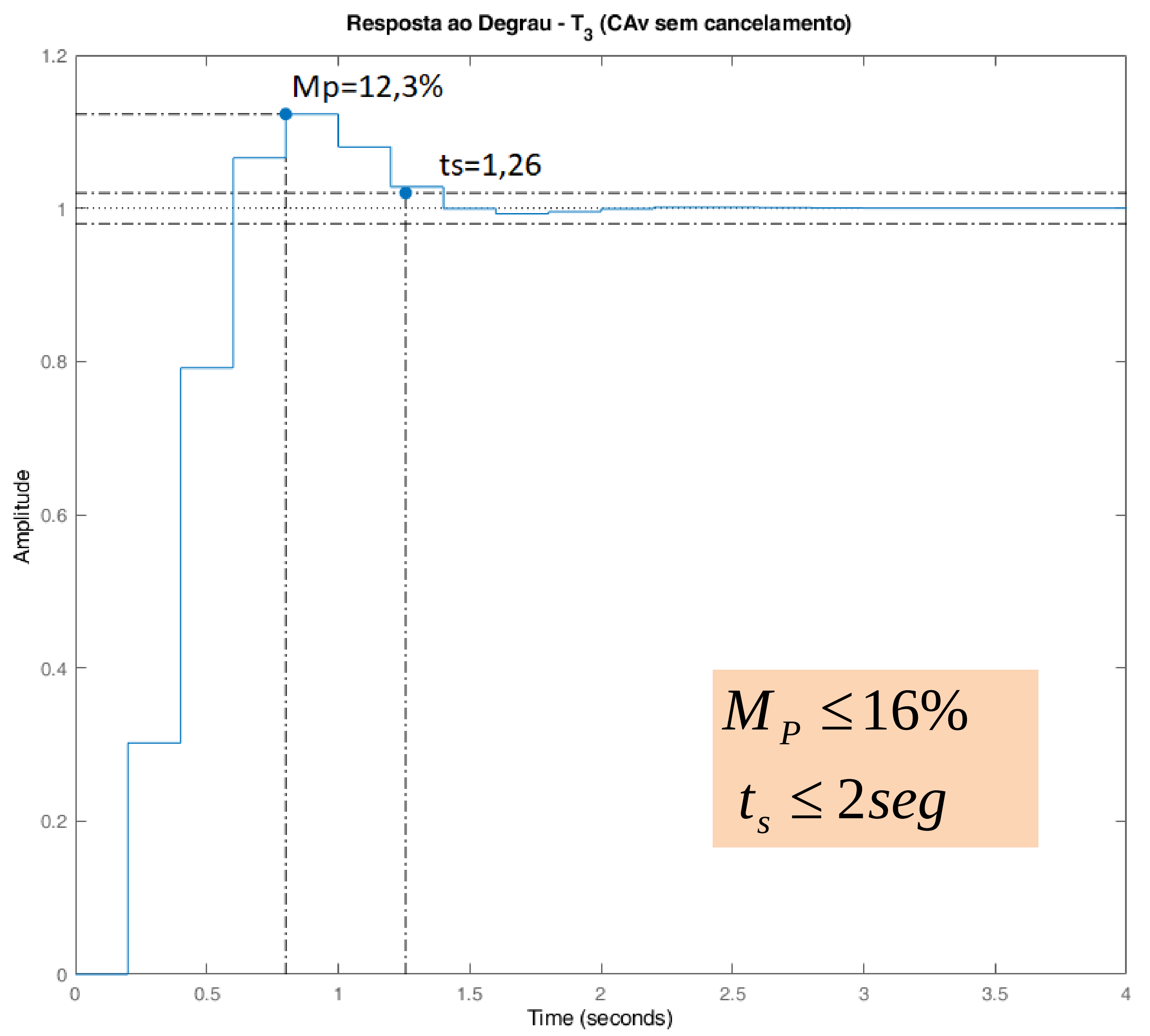
$$p_{1,2} = 0{,}3823 \pm j0{,}3936 \qquad z = 0{,}65$$

$$p_3 = 0{,}6303$$

Exemplo 2 – Projeto 2a (Avanço sem cancelamento – Op1)



Exemplo 2 – Projeto 2a (Avanço sem cancelamento – Op1)



$$M_P \leq 16\%$$

$$t_s \leq 2seg$$

Exemplo 2 – Projeto 2b (Avanço sem cancelamento – Op2)

Opção 2 (fora da região desejada):

$$\alpha = 0{,}70$$

Mantendo-se a mesma posição para os polos de malha fechada

$$z_d = 0{,}3824 \pm j0{,}3937 \quad \Rightarrow \quad \angle C(z) = 76{,}3^\circ$$

tem-se

$$\angle(z_d - 0{,}70) - \angle(z_d - \beta) = 76{,}3^\circ$$

de onde obtém-se

$$\beta = 0{,}0814$$

Da condição de módulo

$$K = \frac{1}{\left| C(z_d) G(z_d) \right|} = 15{,}1$$

Exemplo 2 – Projeto 2b (Avanço sem cancelamento – Op2)

Portanto,

$$C(z) = \frac{15{,}1(z - 0{,}70)}{z - 0{,}0814}$$

<u>Verificação</u>

$$C(z)G(z) = \frac{0{,}2655(z - 0{,}70)(z + 0{,}876)}{(z - 1)(z - 0{,}0814)(z - 0{,}6703)}$$

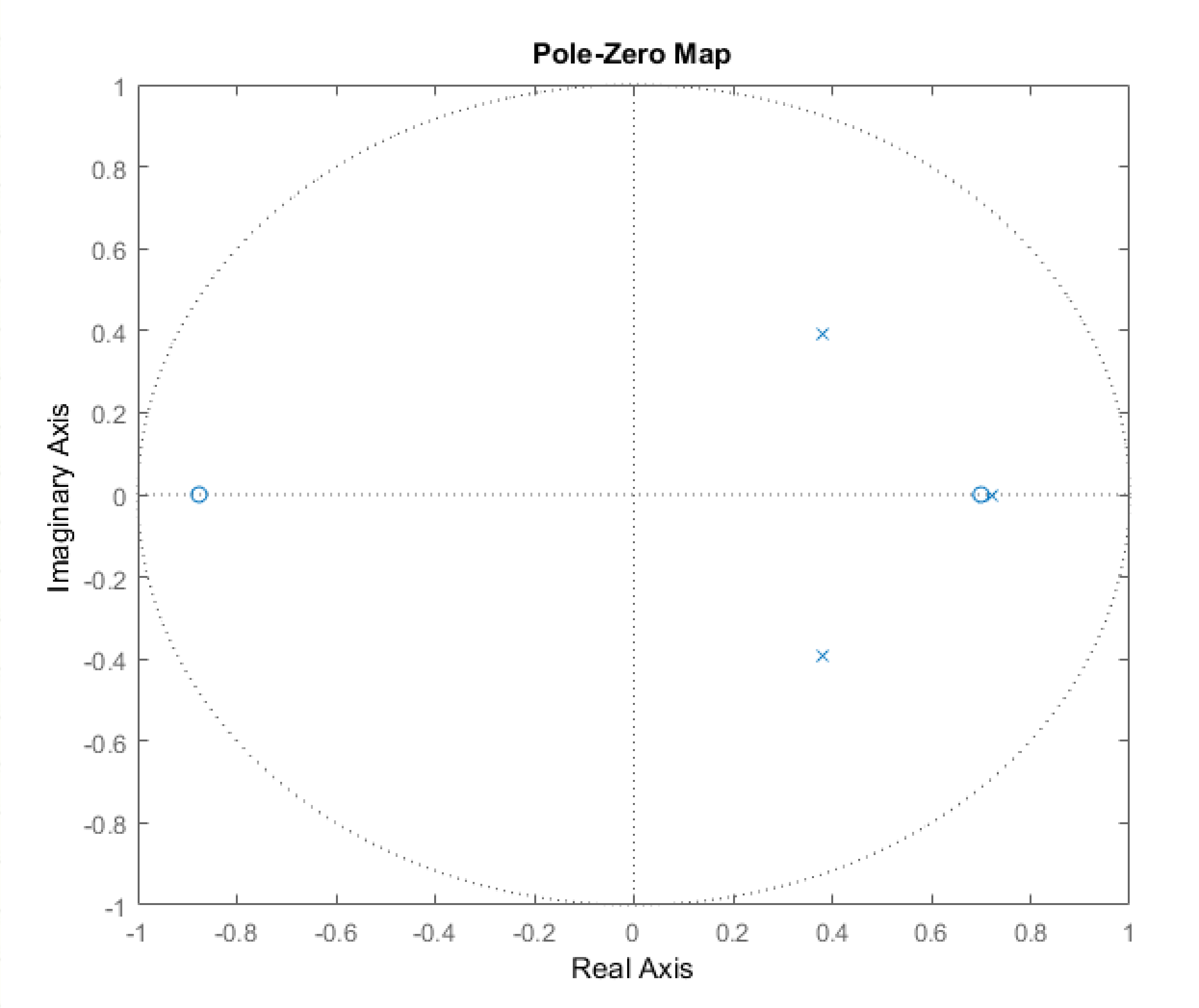
Em malha fechada:

$$\Delta(z) = z^3 - 1{,}486z^2 - 0{,}8528z - 0{,}2172$$

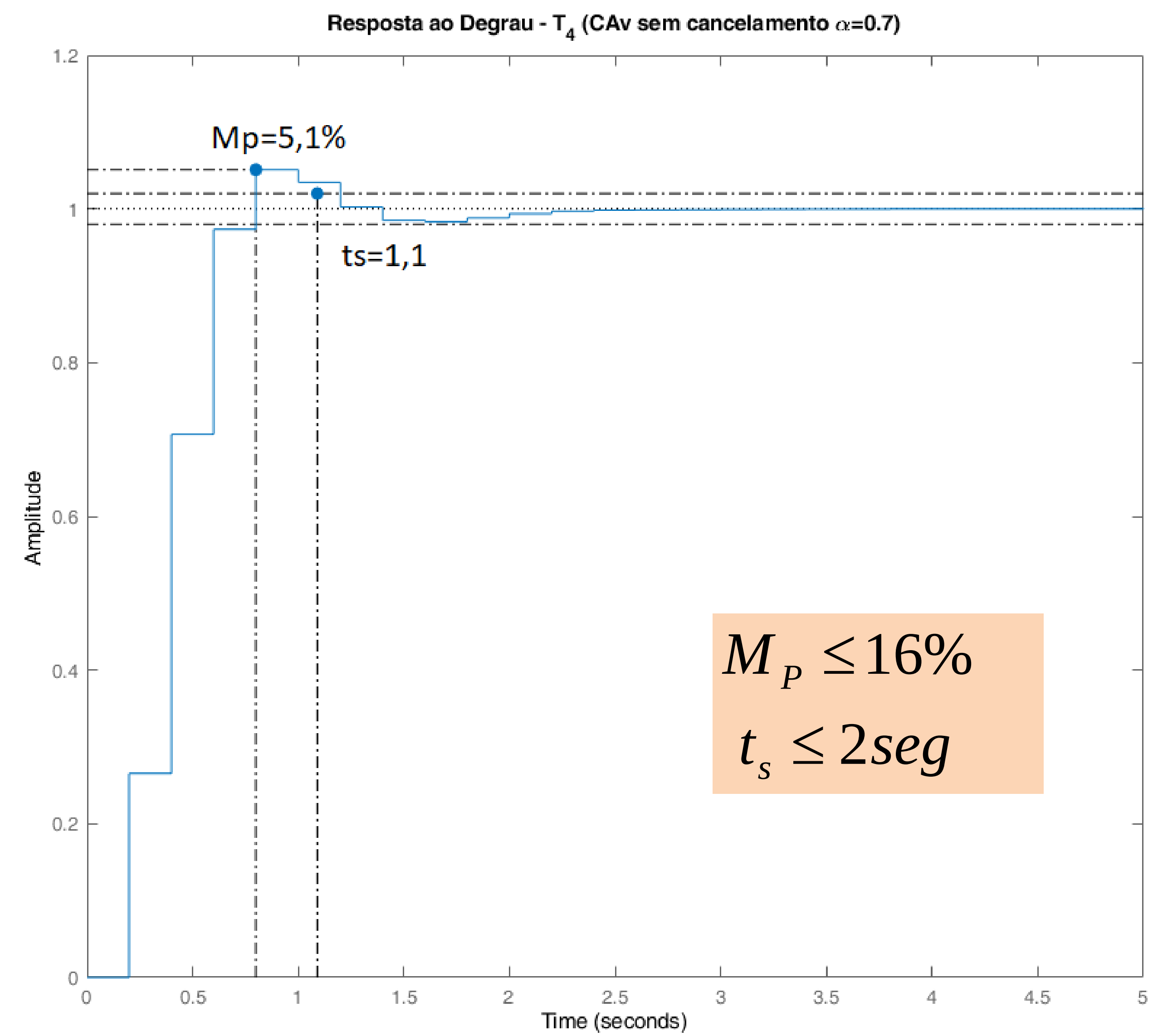
$$p_{1,2} = 0{,}3825 \pm j0{,}3936 \qquad z = 0{,}70$$

$$p_3 = 0{,}721$$

Exemplo 2 – Projeto 2b (Avanço sem cancelamento – Op2)



Exemplo 2 – Projeto 2b (Avanço sem cancelamento – Op2)



$$M_P \leq 16\%$$

$$t_s \leq 2seg$$

Exemplo 2 – Projeto 2b (Avanço sem cancelamento – Op2)

Exercício Sugerido

Verificar se é possível atender às especificações utilizando um controlador PD:

$$C(z) = K\frac{z-\alpha}{z}$$

a) Com cancelamento
b) Sem cancelamento

Controlador em Atraso

A estrutura do controlador em atraso é a mesma do controlador em avanço:

$$C(z) = K\frac{z-\alpha}{z-\beta} \qquad |\beta| > |\alpha|$$

Como no caso contínuo, o controlador em atraso é utilizado para melhor a resposta em regime permanente, sem modificar o comportamento transitório. Desta forma, o procedimento de projeto é análogo (com as devidas adaptações para o caso discreto).

Controlador em Atraso

O zero do controlador é escolhido próximo à unidade:

$$\alpha < 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 1$$

O valor do polo é escolhido de modo a garantir a melhoria necessária no coeficiente de erro, fazendo:

$$C(1) = \frac{1-\alpha}{1-\beta} = N$$

sendo N o número de vezes que o coeficiente de erro precisa ser aumentado.

Exemplo 3

Considere o exemplo apresentado anteriormente. Projetar um controlador discreto de modo a atender as seguintes especificações de desempenho em tempo contínuo:

$$M_P \leq 16\%$$

$$t_s \leq 2seg$$

Deseja-se agora garantir também que o erro de regime permanente a uma entrada rampa seja inferior a 10%.

A função de transferência discretizada que representa o processo foi obtida utilizando um período de amostragem T=0,2 segundos:

$$G(z) = \frac{0{,}01758(z+0{,}876)}{(z-1)(z-0{,}6703)}$$

Exemplo 3

Foi projetado um controlador em avanço, considerando o cancelamento polo/zero:

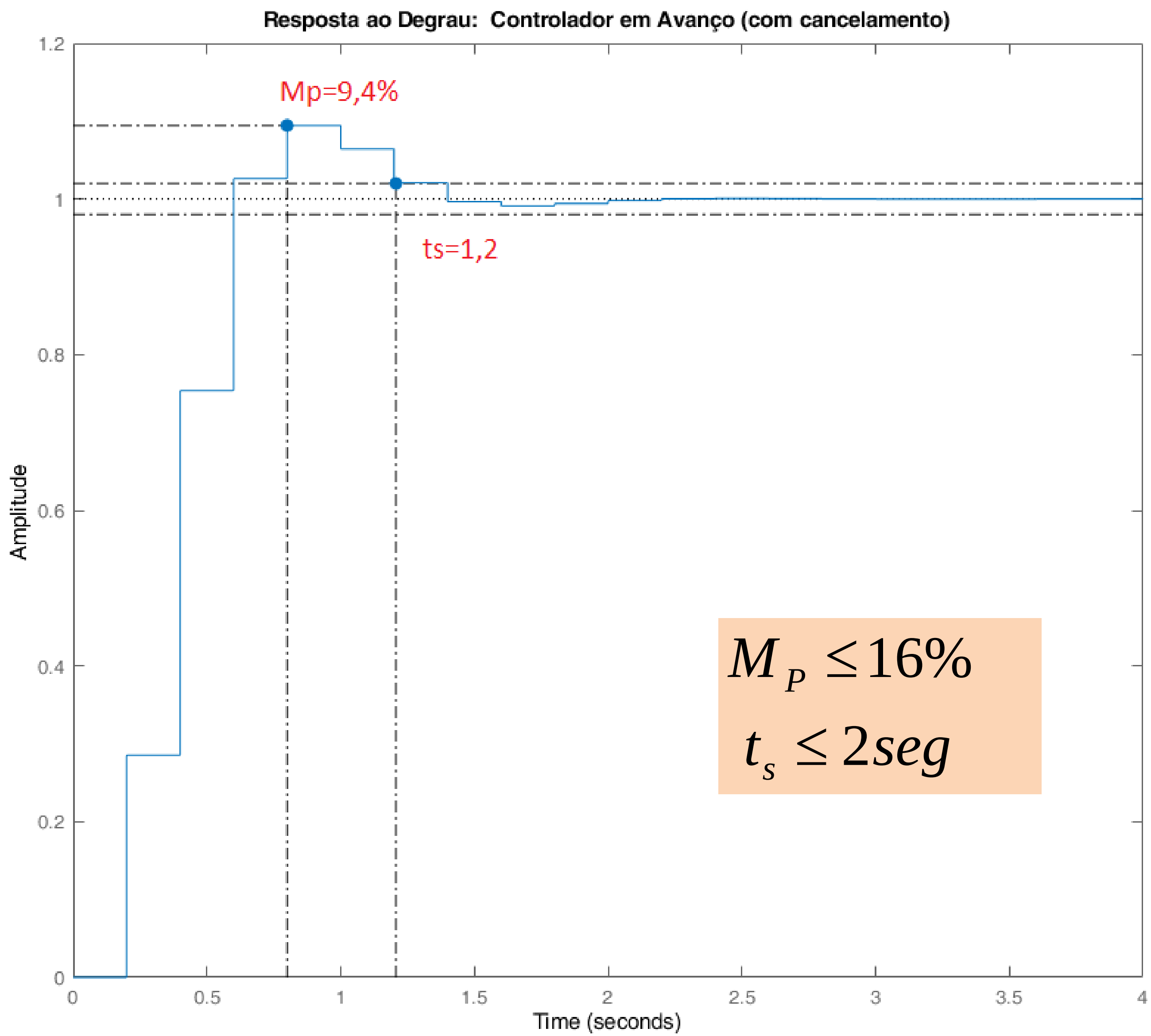
$$C(z) = \frac{16{,}23(z - 0{,}6703)}{z - 0{,}0509}$$

Da aplicação deste controlador foi obtido:

$$M_P = 9{,}4\%$$

$$t_s = 1{,}2seg$$

Exemplo 3



$$M_P \leq 16\%$$

$$t_s \leq 2seg$$

Exemplo 3 – Controlador em Atraso

Para atender a especificação de erro de regime permanente será projetado um **controlador em atraso**, a ser colocado em série com o controlador em avanço. Ou seja, o controlador "final" será um avanço-atraso.

Usando a metodologia de projeto apresentada, o controlador em atraso irá corrigir o erro sem alterar as características da resposta transitória.

Exemplo 3 – Controlador em Atraso

Considerando o controlador em avanço projetado, tem-se na malha direta:

$$C(z)G(z) = \frac{0{,}2853(z+0{,}876)}{(z-1)(z-0{,}0509)}$$

Então, o erro de regime permanente será

$$Kv = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{T} C(z)G(z) = 2{,}82 \quad \Rightarrow \quad e_{\infty} = 35{,}5\%$$

Para atender a especificação de erro

$$e_{\infty} < 10\% \quad \Rightarrow \quad Kv > 10$$

Exemplo 3 – Controlador em Atraso

Assim, o coeficiente Kv precisa ser aumentado no mínimo (10/2,82) 3,55 vezes.

Escolha do zero do controlador

O zero deve ser escolhido próximo a unidade ($\alpha < 1$).

Quanto mais próximo da unidade for escolhido o valor de α mais próximo de 1 será o módulo de C(z) e menor a fase correspondente, não afetando assim as características da resposta transitória.

Exemplo 3 – Controlador em Atraso (α=0,95)

Para **α=0,95** e considerando um aumento de 4 vezes no coeficiente de erro (N=4) tem-se

$$\frac{1-\alpha}{1-\beta}=4 \quad \rightarrow \quad \beta=0,9875$$

Assim,

$$C(z)=\frac{z-0,95}{z-0,9875}$$

Para este controlador,

$$\left|C(z_d)\right|=0,9569 \quad \text{e} \quad \angle C(z_d)=-1,7^{\circ}$$

Observa-se que o **módulo do controlador não está suficientemente próximo de 1**, podendo causar alteração na resposta transitória, não atendendo as especificações.

Exemplo 3 – Controlador em Atraso (α=0,95)

Considerado α=0,95, ou seja,

$$C(z) = \frac{z - 0,95}{z - 0,9875}$$

Em malha fechada são obtidos os seguintes polos e zeros

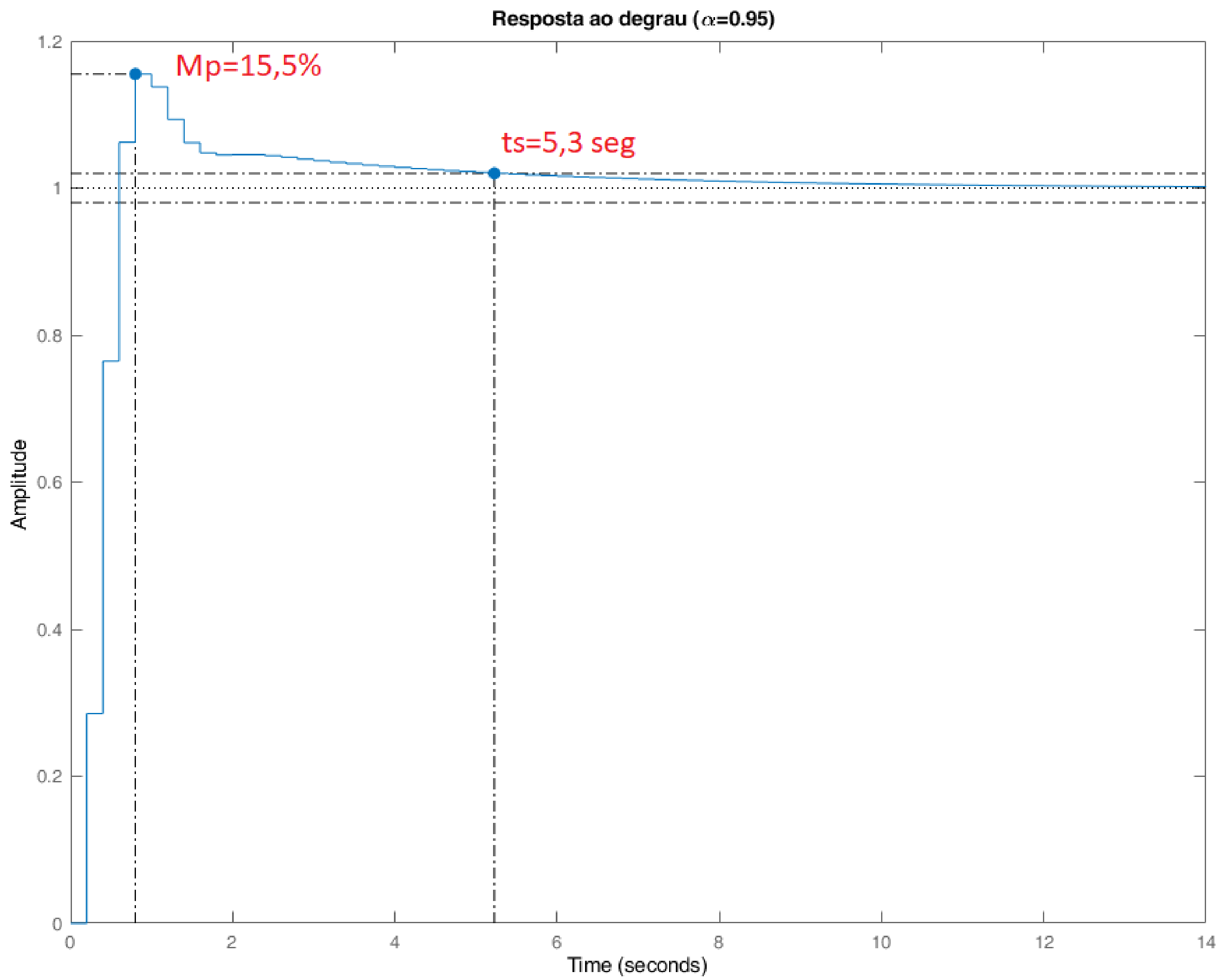
$$p_1 = 0,9462 \qquad z_1 = 0,95$$

$$p_{2,3} = 0,4035 \pm j0,3759 \qquad z_2 = -0,876$$

resultando em um tempo de acomodação acima do desejado.

Neste caso, ts > 2 seg.

Exemplo 3 - Controlador em Atraso (α=0,95)



Exemplo 3 - Controlador em Atraso (α=0,98)

Para **α=0,98** e considerando o mesmo aumento de 4 vezes no coeficiente de erro (N=4) tem-se

$$\frac{1-\alpha}{1-\beta} = 4 \quad \rightarrow \quad \beta = 0{,}995$$

e, assim,

$$C(z) = \frac{z-0{,}98}{z-0{,}995}$$

Para este controlador,

$$\left|C(z_d)\right| = 0{,}98 \quad \text{e} \quad \angle C(z_d) = -0{,}65^\circ$$

Neste caso, **o módulo do controlador se aproxima um pouco mais do valor unitário**, mas ainda podendo gerar alterações na resposta transitória.

Exemplo 3 - Controlador em Atraso (α=0,98)

Adicionando o controlador em atraso em série com o controlador em avanço tem-se, na malha direta

$$C_{AV}(z)C_{AT}(z)G(z) = \frac{0,2853(z-0,98)(z+0,876)}{(z-1)(z-0,0509)(z-0,995)}$$

sendo o erro dado por

$$Kv = 2,82 \times 4 = 12,8 \quad \Rightarrow \quad e_{\infty} = 8,87\%$$

Fechando a malha do sistema tem-se,

$$T(z) = \frac{0,2853(z-0,98)(z+0,876)}{z^3 - 1,761z^2 + 1,067z - 0,2956}$$

Exemplo 3 - Controlador em Atraso (α=0,98)

Resultando os seguintes polos e zeros:

$$p_1 = 0{,}9794 \qquad z_1 = 0{,}98$$
$$p_{2,3} = 0{,}3906 \pm j0{,}3863 \qquad z_2 = -0{,}876$$

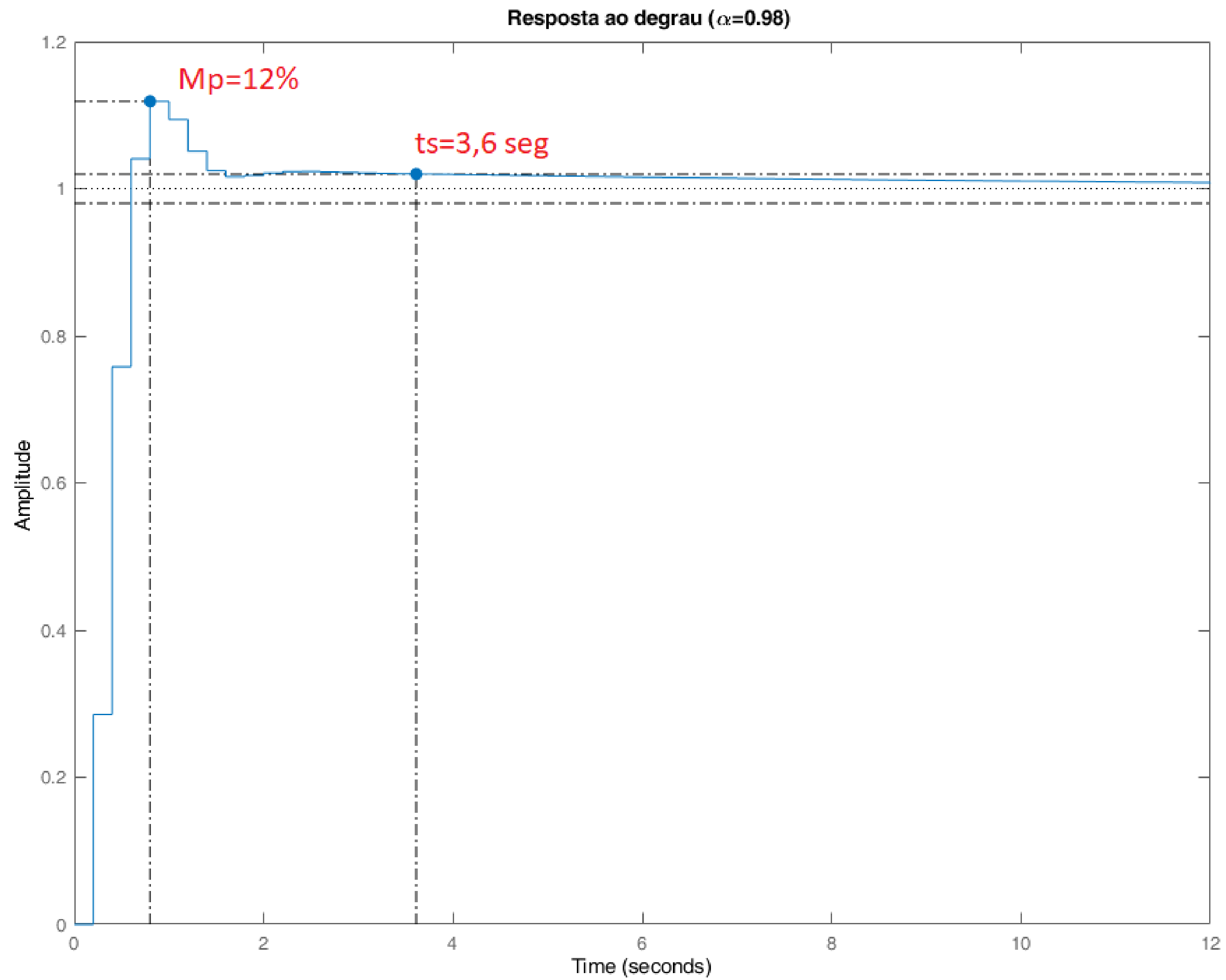
Observe que, de forma similar ao caso contínuo, o polo adicional de malha fechada (p_1) está próximo do zero do controlador (z_1) .

Da resposta ao degrau (simulação) obtém-se

$$Mp = 12\% \quad \text{e} \quad t_s = 3{,}6\,\text{seg}$$

Não atendendo a especificação de tempo de acomodação.

Exemplo 3 - Controlador em Atraso (α=0,98)



Exemplo 3 - Controlador em Atraso (α=0,99)

Escolhendo um valor maior para o zero, **α=0,99** e mantendo o aumento de 4 vezes no coeficiente de erro tem-se

$$\frac{1-\alpha}{1-\beta} = 4 \quad \rightarrow \quad \beta = 0{,}9975$$

e, assim,

$$C(z) = \frac{z - 0{,}99}{z - 0{,}9975}$$

Para este controlador,

$$\left| C(z_d) \right| = 0{,}99 \quad \text{e} \quad \angle C(z_d) = -0{,}32^\circ$$

Exemplo 3 - Controlador em Atraso (α=0,99)

Em malha aberta,

$$C_{AV}(z)C_{AT}(z)G(z)=\frac{0{,}2853(z-0{,}99)(z+0{,}876)}{(z-1)(z-0{,}0509)(z-0{,}9975)}$$

O erro não sofre alteração

$$Kv=2{,}82\times 4=12{,}8 \quad \Rightarrow \quad e_{\infty}=8{,}87\%$$

Fechando a malha do sistema tem-se agora,

$$T(z)=\frac{0{,}2853(z-0{,}98)(z+0{,}876)}{z^{3}-1{,}763z^{2}+1{,}067z-0{,}2982}$$

Exemplo 3 - Controlador em Atraso (α=0,99)

Resultando os seguintes polos e zeros:

$$p_1 = 0{,}9899 \qquad z_1 = 0{,}99$$

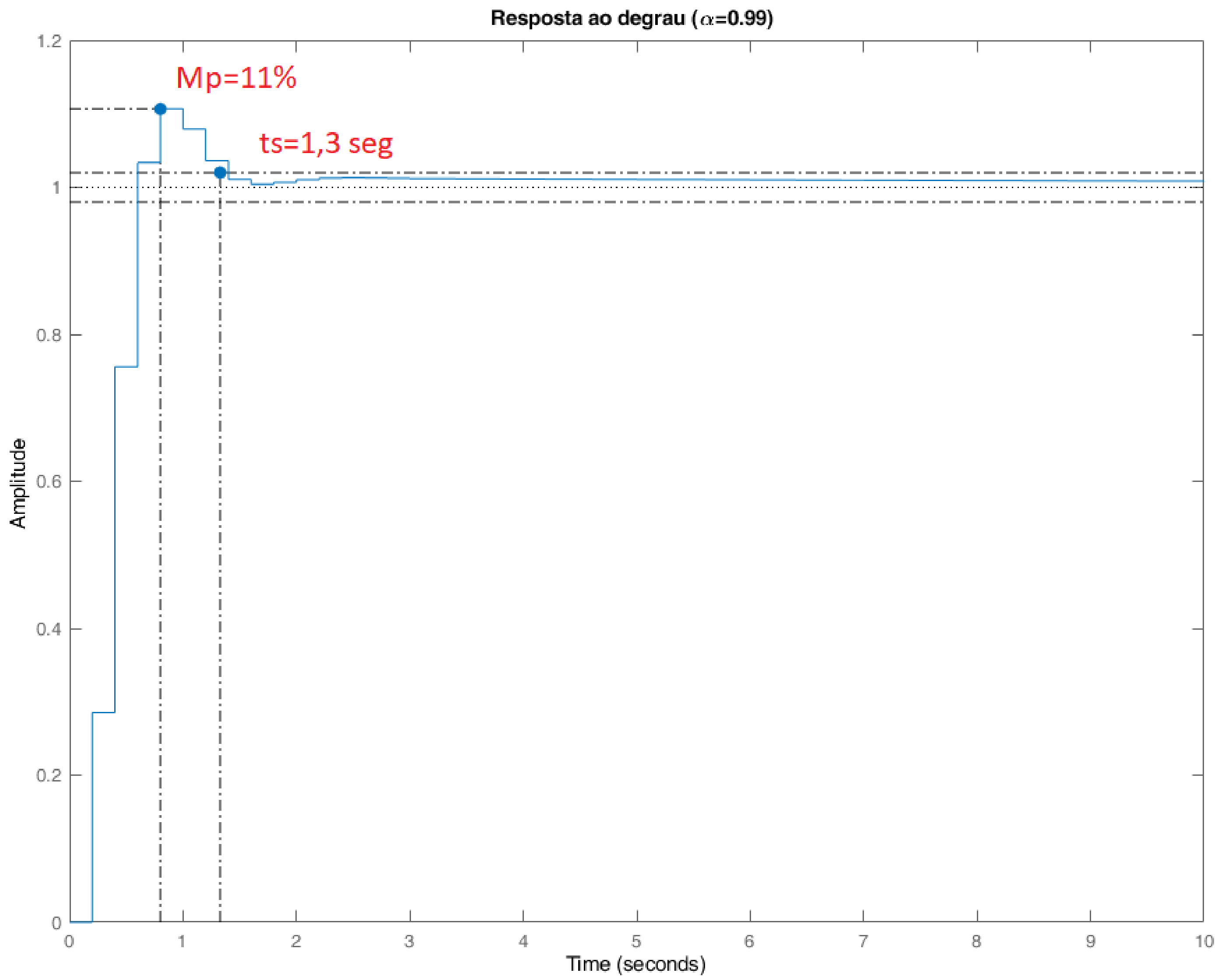
$$p_{2,3} = 0{,}3866 \pm j0{,}3896 \qquad z_2 = -0{,}876$$

Da resposta ao degrau obtém-se

$$Mp = 11\% \quad \text{e} \quad t_s = 1{,}3\,\text{seg}$$

Atendendo todas as especificações.

Exemplo 3 - Controlador em Atraso (α=0,99)



Exemplo 3 - Controlador PID Real

De forma similar ao caso contínuo observa-se que é possível transformar o controlador em avanço em um PI:

$$C_{\mathrm{AT}}(z) = \frac{z-0{,}99}{z-0{,}9975} \quad \rightarrow \quad C_{\mathrm{PI}}(z) = \frac{z-0{,}99}{z-1}$$

Assim, o controlador torna-se um PID real (avanço-PI).
Obtém-se resultados similares para a resposta ao degrau.

$$C_{\mathrm{AVT}}(z) = \frac{16{,}23(z-0{,}6703)(z-0{,}99)}{(z-0{,}0509)(z-0{,}9975)} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} M_P &= 11\% \\ t_S &= 1{,}3\,seg \end{aligned}$$

$$C_{\mathrm{AV\text{-}PI}}(z) = \frac{16{,}23(z-0{,}6703)(z-0{,}99)}{(z-0{,}0509)(z-1)} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} M_P &= 11{,}1\% \\ t_S &= 1{,}37\,seg \end{aligned}$$

Exemplo 3 - Controlador PID Real