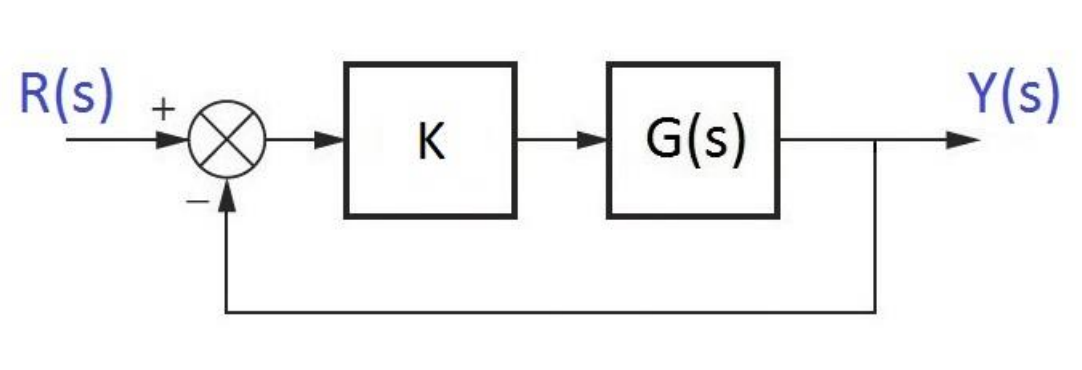
Lugar das Raízes Exemplos

Profa. Cristiane Paim

Exemplo 1: Multiplicidade

Seja o sistema de controle, com K>0:



sendo

$$G_1(s) = \frac{(s+2)(s+3)}{(s+1)^3}$$

Exemplo 1: Multiplicidade

Eixo real: $(-\infty, -3]\ [-2, -1]$

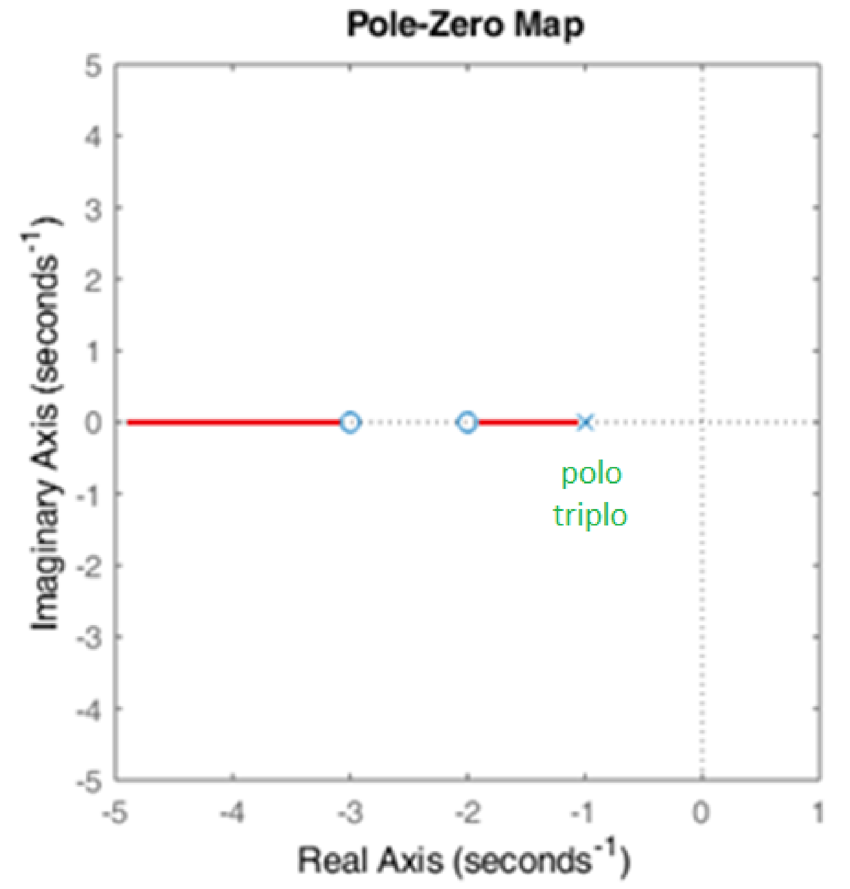
Assíntotas: $\theta_a = 180°$

Ângulos de Partida:

$\phi = \pm 60°, 180°$

Ângulos de chegada:

$\psi_1 = 0°,\ \psi_2 = 180°$



Observação: para polos e zeros reais os ângulos de partida e chegada podem ser obtidos por inspeção.

Exemplo 1: Multiplicidade

Cruzamento com eixo imaginário:

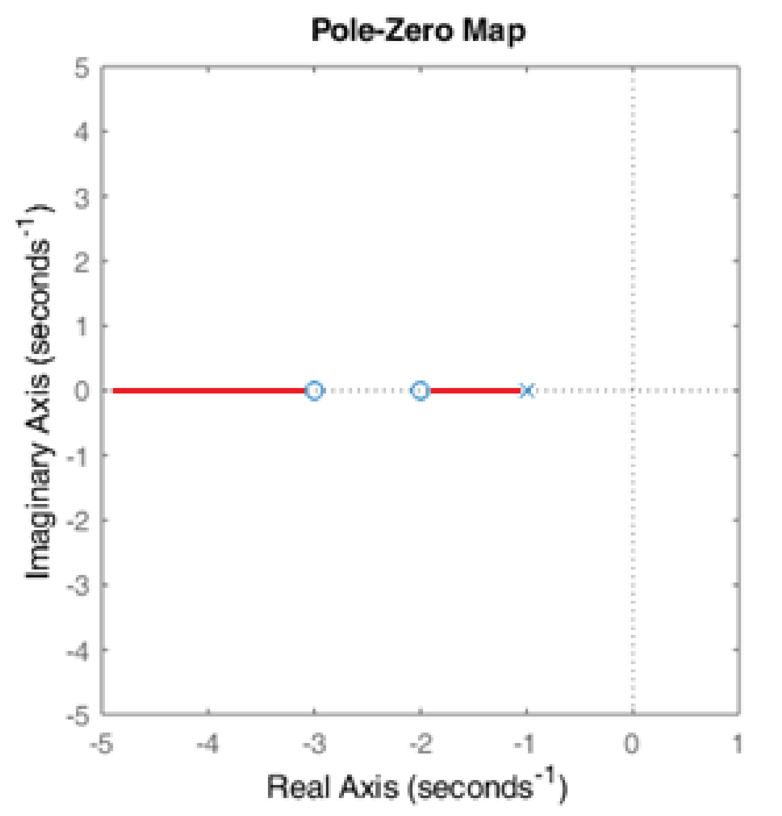
não existe (estável para $\forall$K>0)

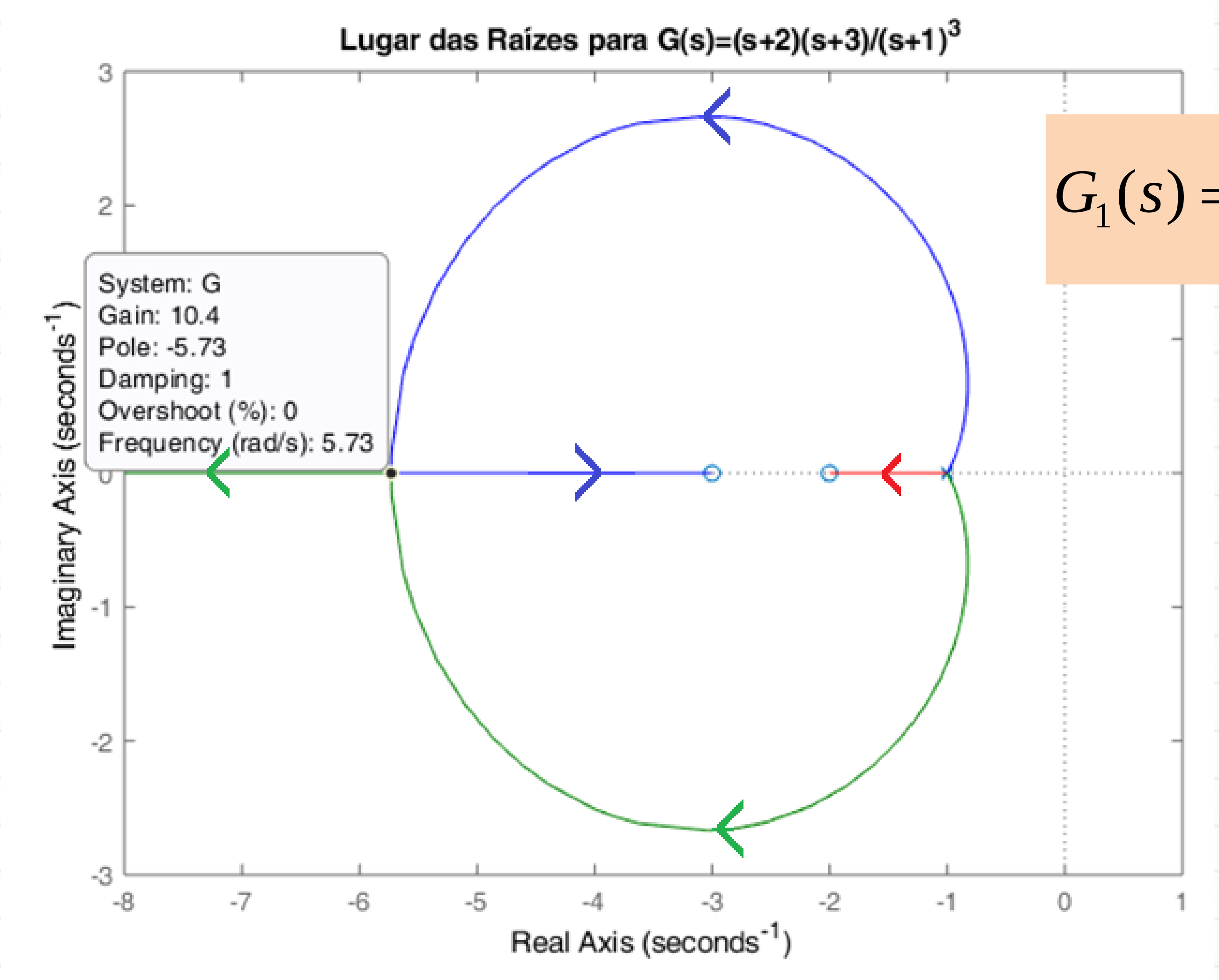
Ramificação: dK/ds=0

$$s_1 = -5{,}73 \in \mathrm{LR} \quad \Rightarrow \quad K = 10{,}4$$

$$s_2 = -2{,}27 \notin \mathrm{LR}$$

$$s_{3,4} = -1 \in \mathrm{LR} \quad \Rightarrow \quad K = 0$$





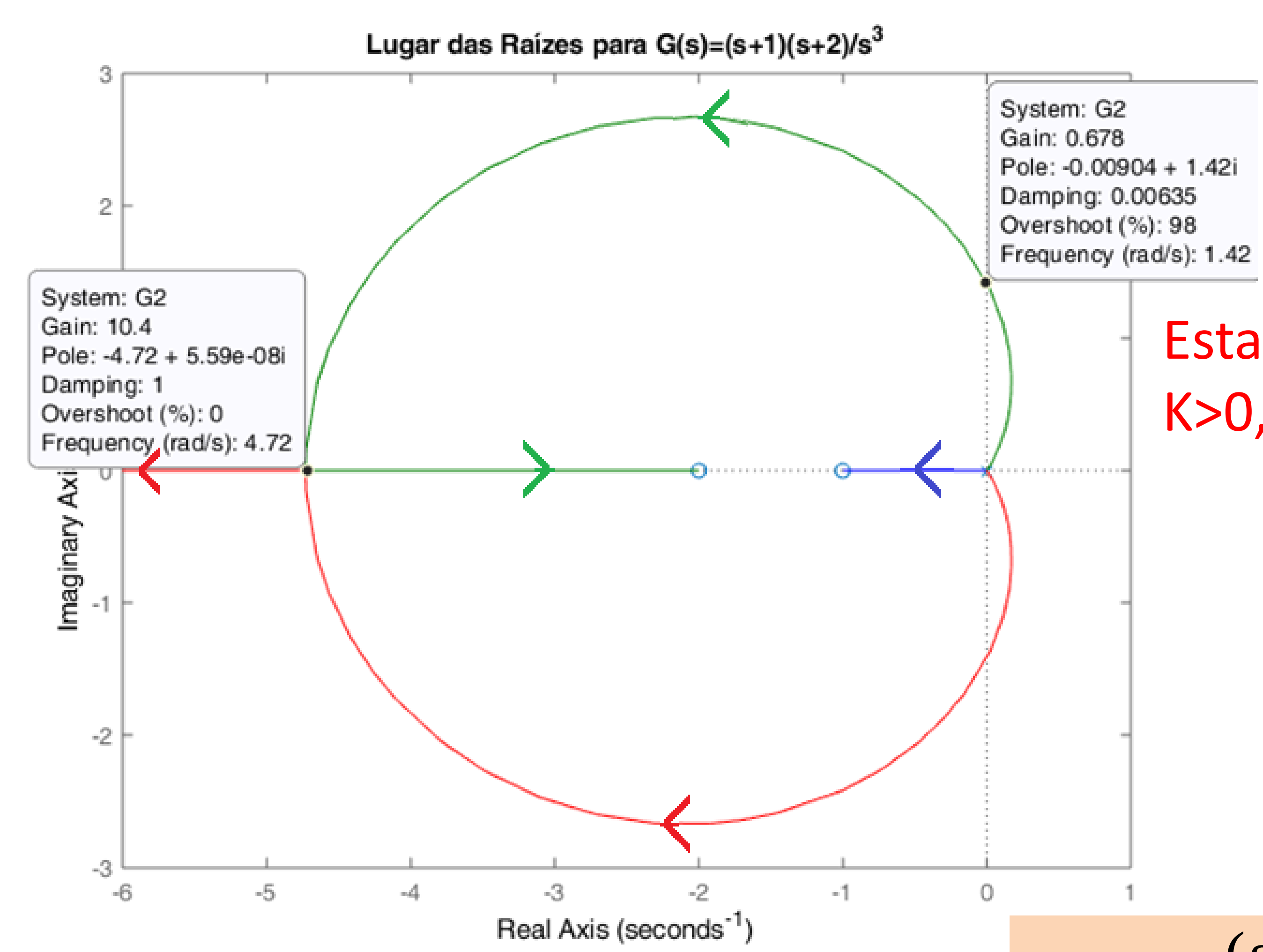
$$G_1(s) = \frac{(s+2)(s+3)}{(s+1)^3}$$

Estabilidade:
$\forall$K>0

$$0 < K < 10{,}4 \quad \Rightarrow \quad \Delta(s) \text{ tem 2 polos complexos e 1 polo real}$$

$$K \geq 10{,}4 \quad \Rightarrow \quad \Delta(s) \text{ tem 3 polos reais}$$

Exemplo 2 – Multiplicidade (G_1 deslocada)

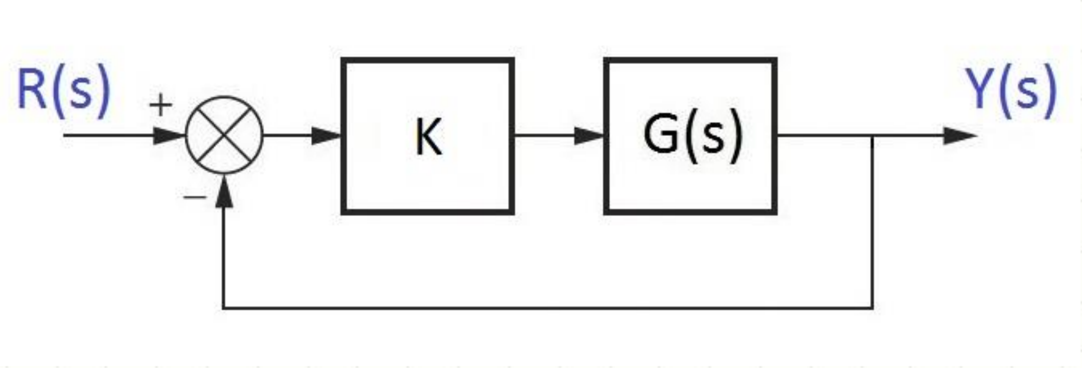


Estabilidade:
K>0,678

$$G_2(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{s^3}$$

Exemplo 3: Ramificação Complexa

Seja o sistema de controle, com K>0:



$$G_3(s) = \frac{1}{s(s+2)(s^2+2s+5)}$$

Exemplo 3: Ramificação Complexa

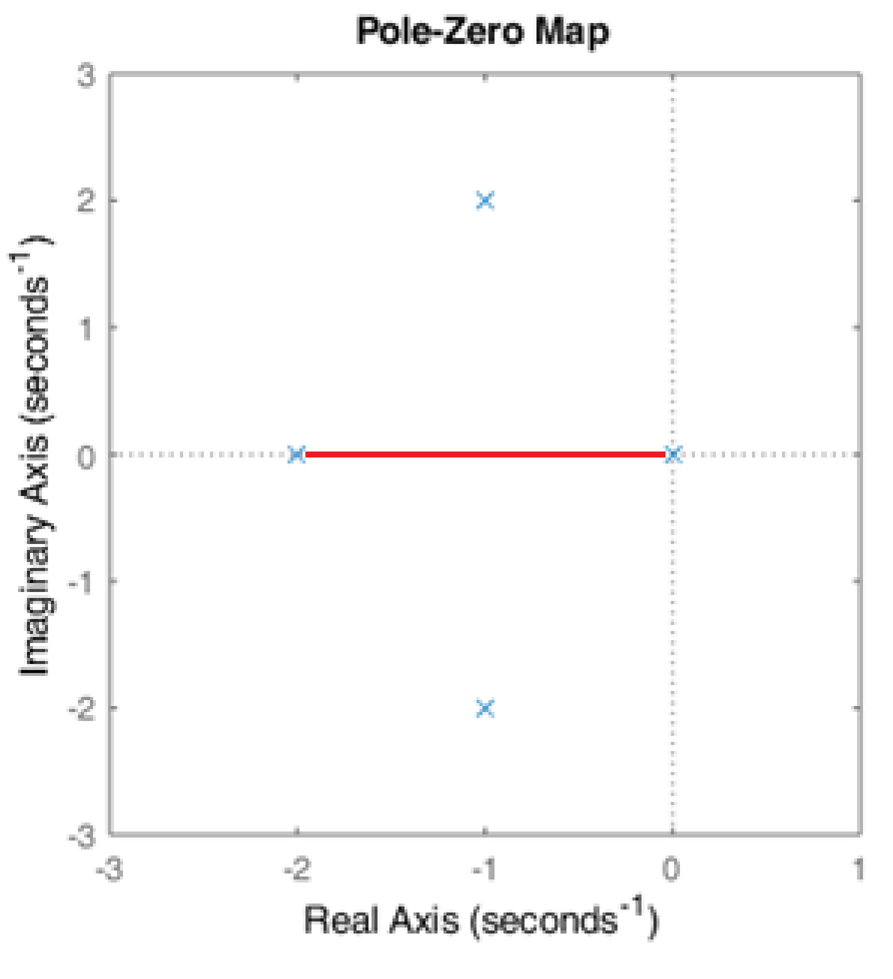
Eixo real: [-2 , 0]

Assíntotas: $\theta_a = \pm 45°, \pm 135°$

Ângulos de Partida:

$\phi_1 = -90°$ $\phi_2 = +90°$

$\phi_3 = 180°$ $\phi_4 = 0°$



Exemplo 3: Ramificação Complexa

Cruzamento com eixo imaginário: $\omega = \pm 1{,}58 \rightarrow K=16{,}24$

Sistema estável para 0 < K < 16,24

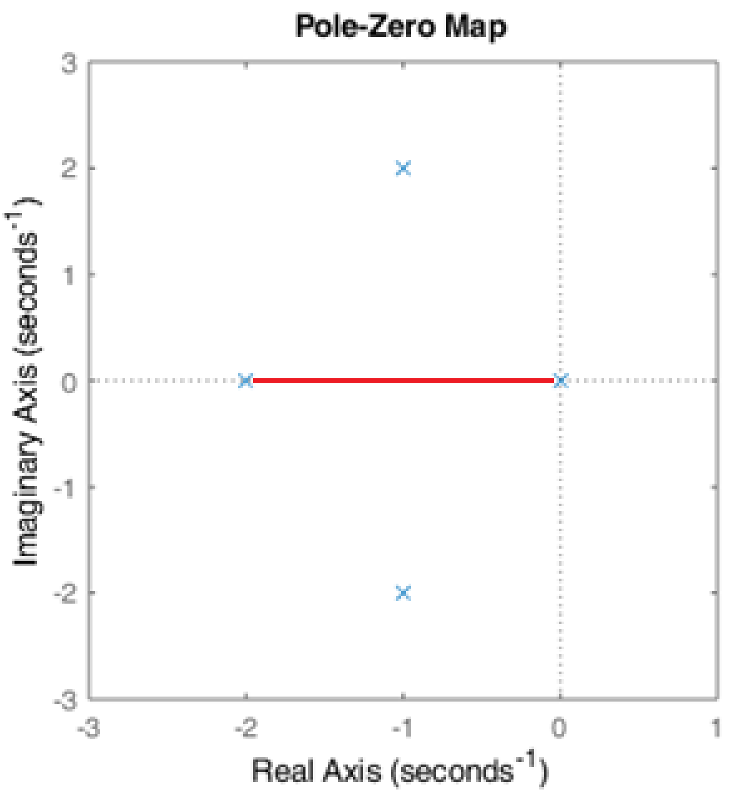
Ramificação:

$$s_1 = -1 \in \mathrm{LR}$$

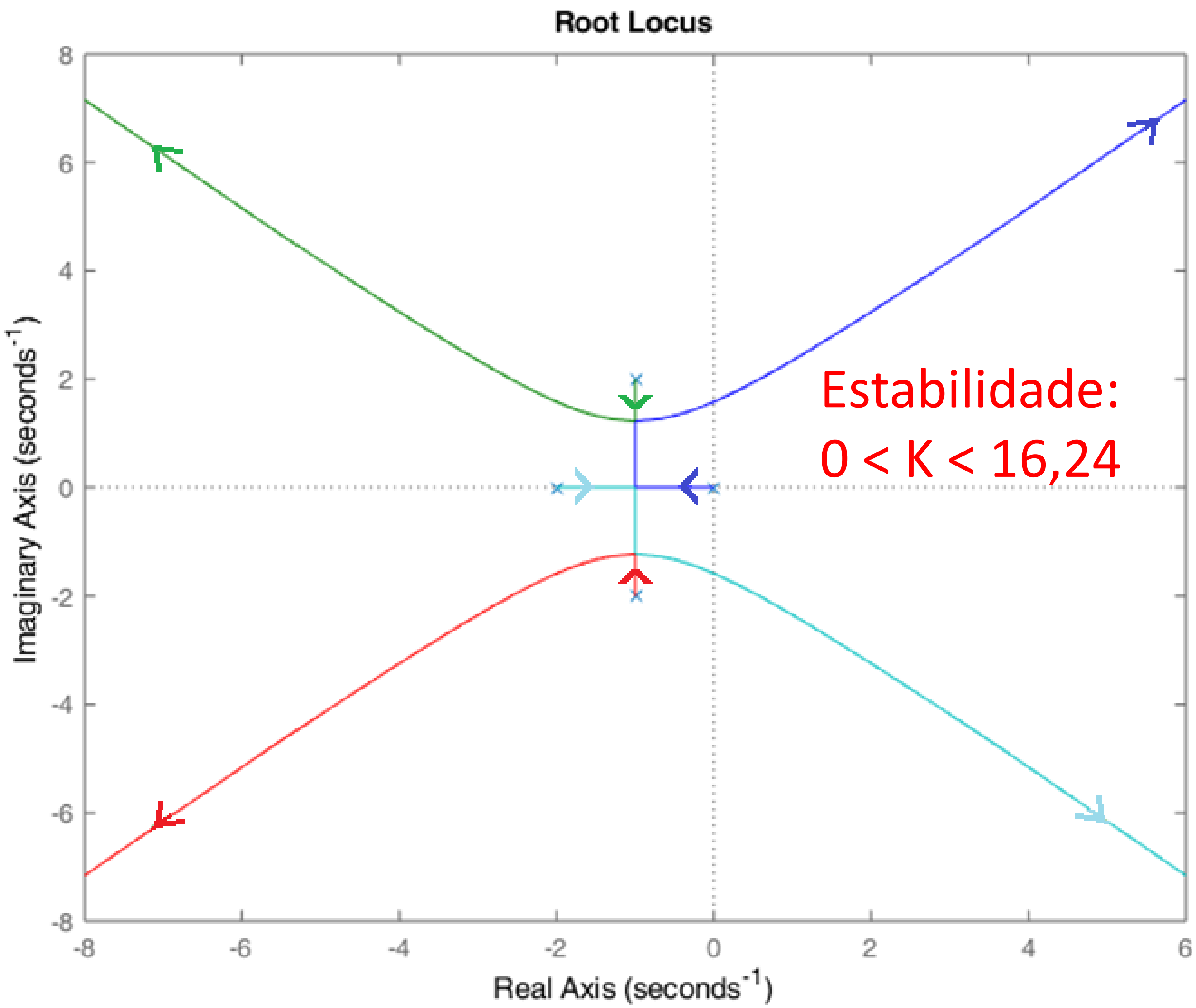
$$s_{2,3} = -1 \pm j1{,}22 \in \mathrm{LR}$$

$$s_1 = -1 \qquad \Rightarrow \qquad K = 4$$

$$s_{2,3} = -1 \pm j1{,}22 \qquad \Rightarrow \qquad K = 6{,}25$$



$$G_3(s) = \frac{1}{s(s+2)(s^2+2s+5)}$$

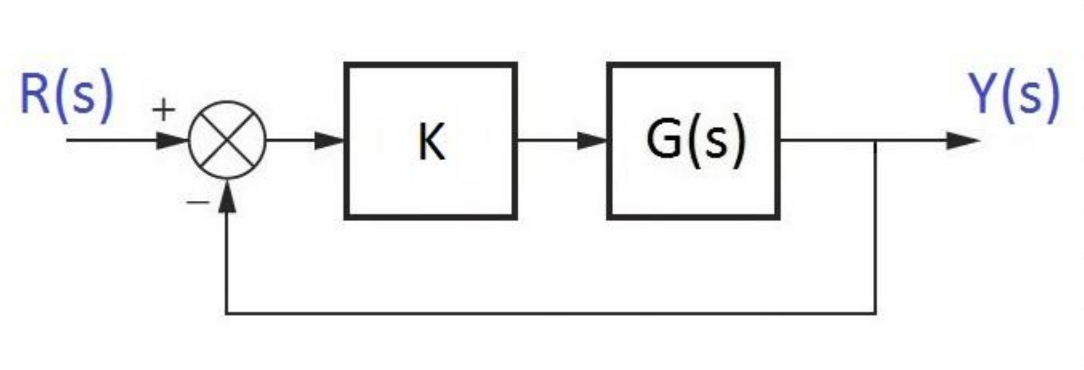


Estabilidade:

0 < K < 16,24

Exemplo 4 : deslocamento dos polos reais do exemplo anterior

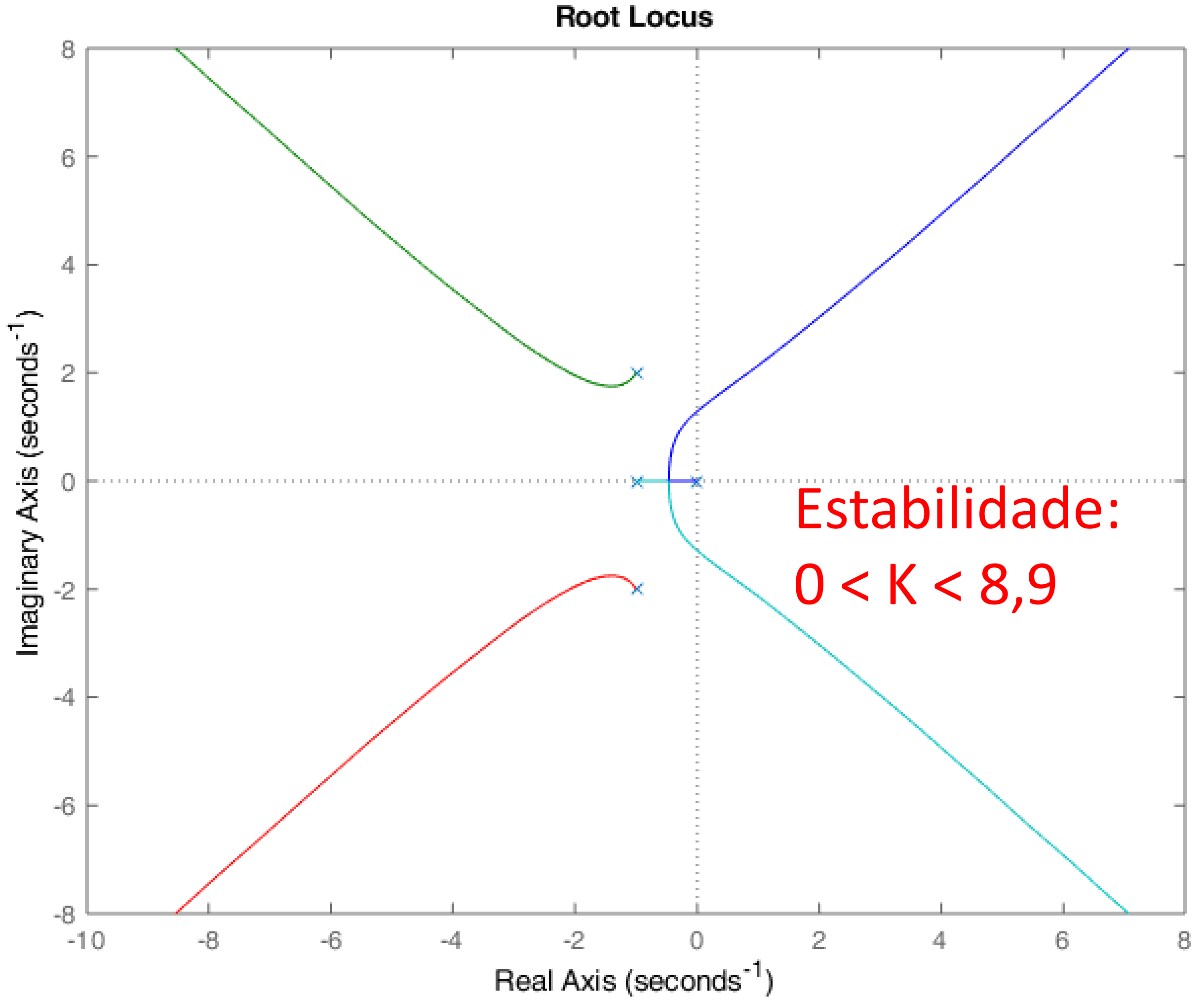
Seja o sistema de controle, com K>0:



$$G_4(s) = \frac{1}{s(s+1)(s^2+2s+5)}$$

$$G_5(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s^2+2s+5)}$$

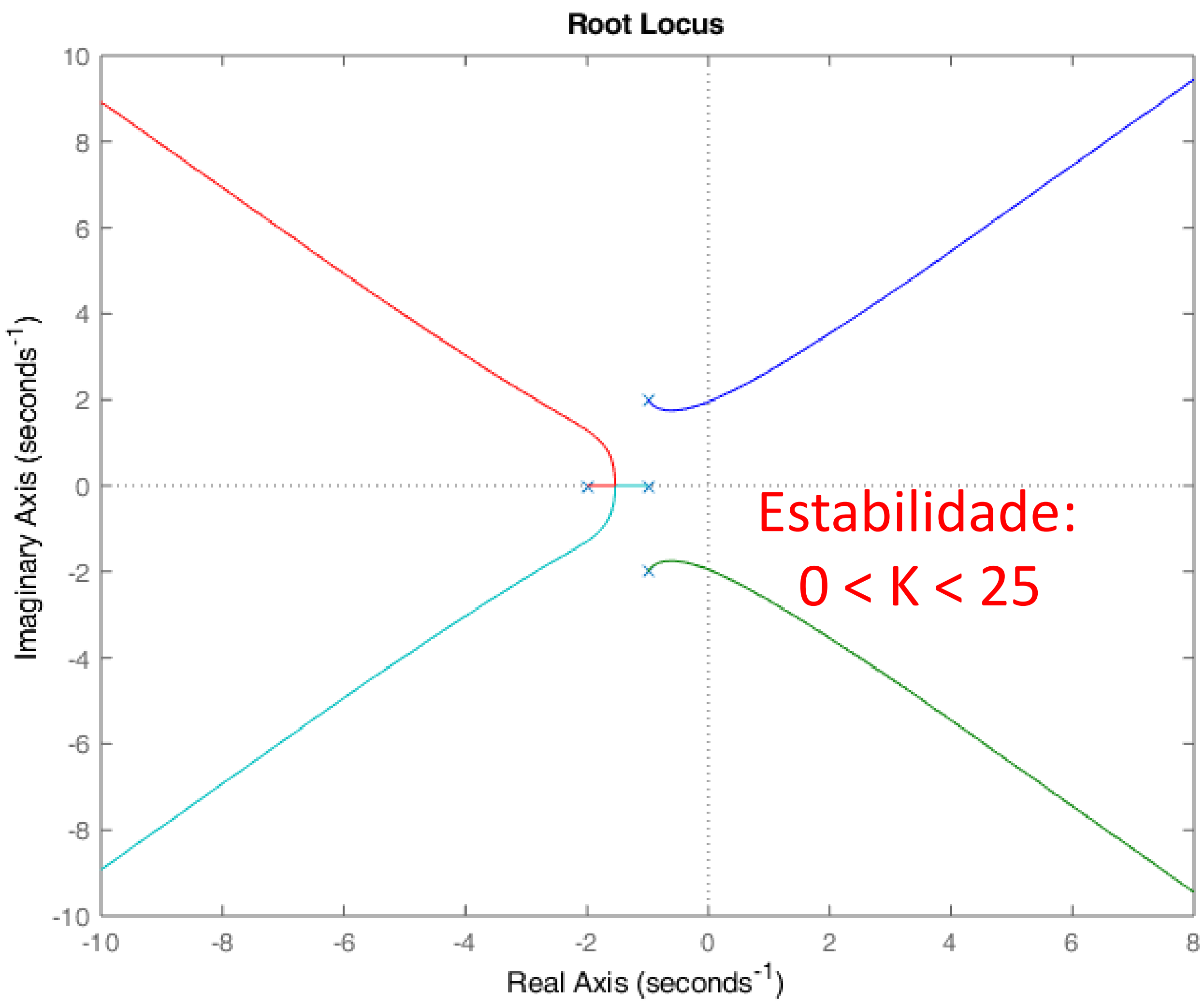
$$G_4(s) = \frac{1}{s(s+1)(s^2+2s+5)}$$



Estabilidade:

0 < K < 8,9

$$G_5(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s^2+2s+5)}$$

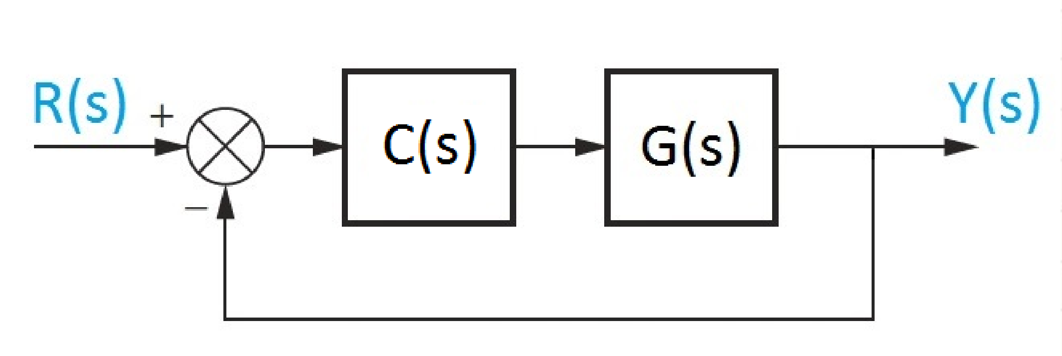


Estabilidade:

$0 < K < 25$

Exemplo 5 : Variação do LR em função da posição das singularidades

Considere a configuração clássica de um sistema de controle:



As funções de transferência G(s), correspondendo ao processo, e C(s), representando o controlador, são definidas por

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \quad \text{e} \quad C(s) = K\frac{s+b}{s+a}$$

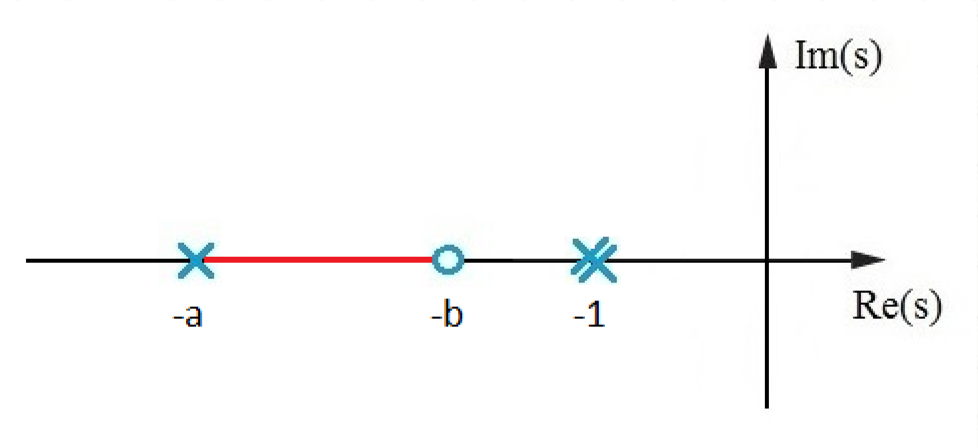
com K>0, a>1, b>1, e a>b.

Exemplo 5 : Variação do LR em função da posição das singularidades

Deseja-se conhecer a trajetória dos polos de malha fechada do sistema quando o ganho K do controlador C(s) varia de 0 a $+\infty$, por meio do traçado do Lugar das Raízes, para diversos valores dos parâmetros a e b.

Exemplo 5 : Variação do LR em função da posição das singularidades

a) Determinar os trechos sobre o eixo real que pertencem ao Lugar das Raízes em função dos parâmetros desconhecidos a e b.



Eixo Real: [-a, -b]

Exemplo 5 : Variação do LR em função da posição das singularidades

b) Determinar o comportamento assintótico do Lugar das Raízes em função dos parâmetros a e b. Detalhar o número de assíntotas, seus ângulos e centroide.

Nº de assíntotas: n-m = 2 assíntotas

Ângulo das assíntotas: $$\theta_a = \frac{180^\circ(2q+1)}{n-m} = \pm 90^\circ$$

Centroide: $$\sigma_a = \frac{\sum \text{polos-} \sum \text{zeros}}{n-m} = \frac{b-a-2}{2}$$

Exemplo 5 : Variação do LR em função da posição das singularidades

c) Determinar ângulos de partida e chegada, em função dos parâmetros a e b.

$$p_{1,2} = -1$$

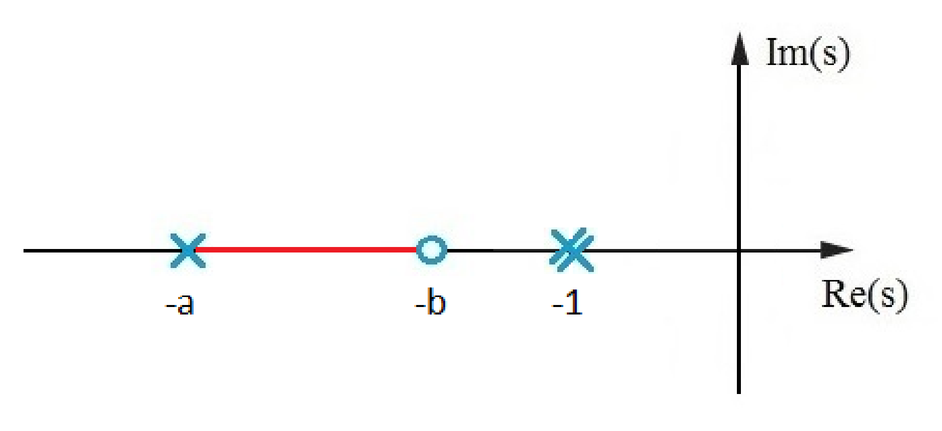
$$p_3 = -a \qquad z = -b$$

Ângulos de partida dos polos (por inspeção):

$$\phi_{1,2} = \pm 90^\circ \qquad \phi_3 = 0^\circ$$

Ângulo de chegada no zero (por inspeção):

$$\psi = 180^\circ$$



Exemplo 5 : Variação do LR em função da posição das singularidades

d) Determinar o número mínimo e máximo de ramificações do Lugar das Raízes, incluindo o polo duplo em -1.

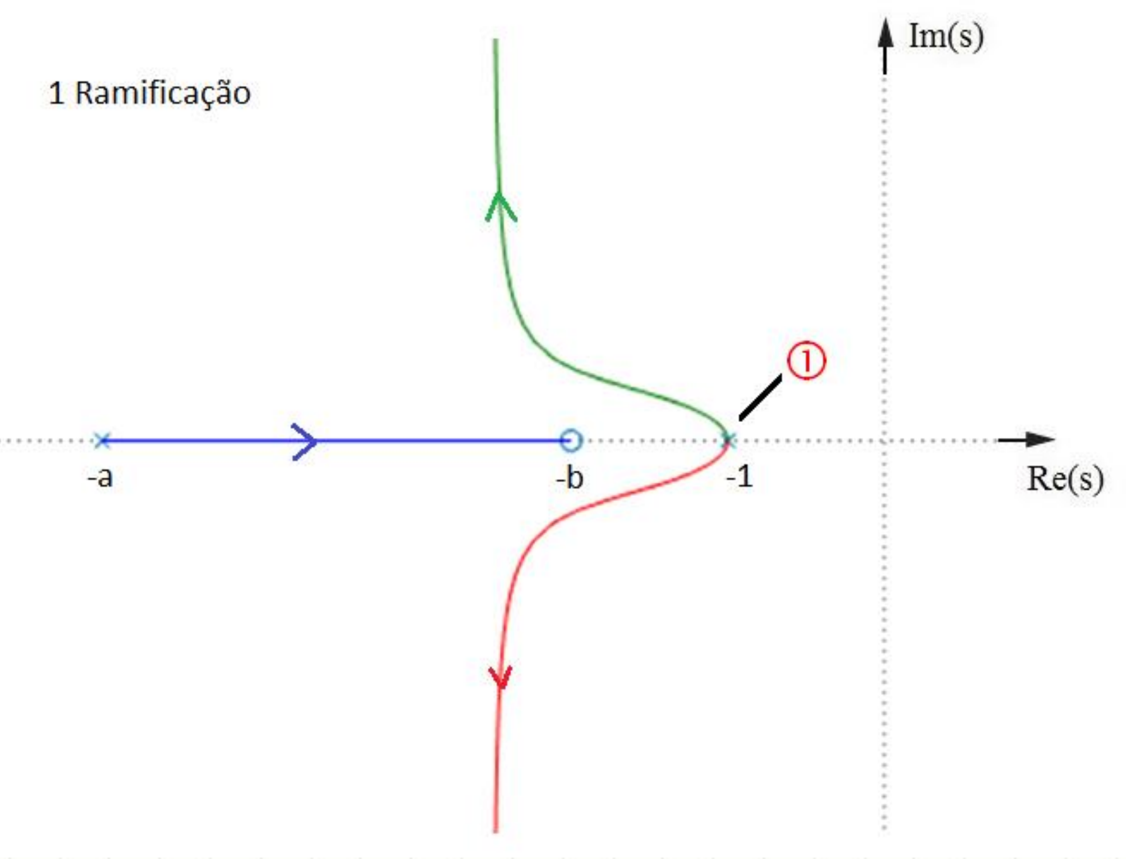
Sendo $$K = -\frac{s^3 + (a+2)s^2 + (2a+1)s + a}{s+b}$$

dK/ds=0 resultará em um polinômio de 3ª ordem.

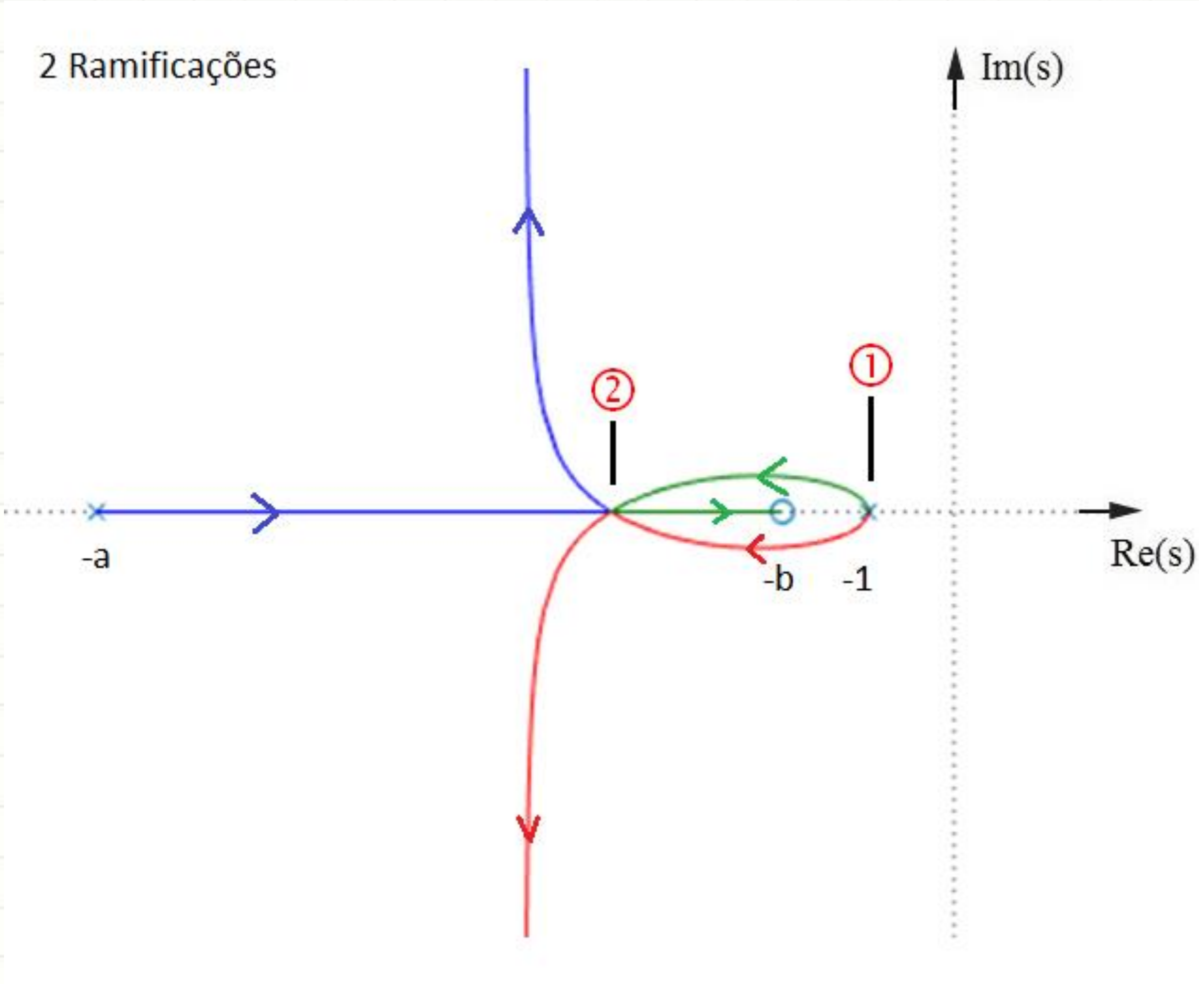
Logo, poderão existir no mínimo uma (polo duplo) e no máximo 3 ramificações.

Exemplo 5 : Variação do LR em função da posição das singularidades

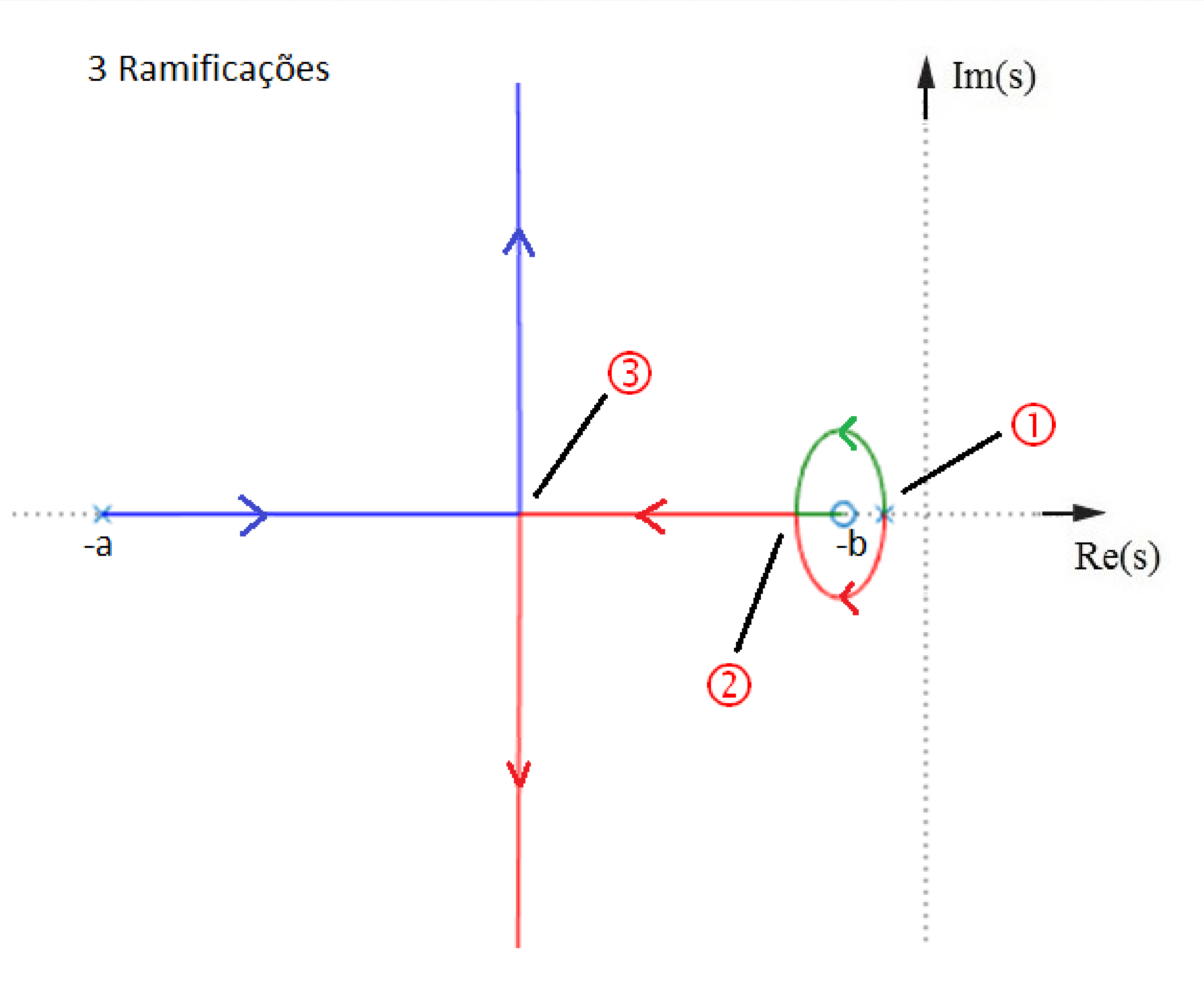
e) Esboçar todas as possíveis formas do Lugar das Raízes.



Exemplo 5 : Variação do LR em função da posição das singularidades

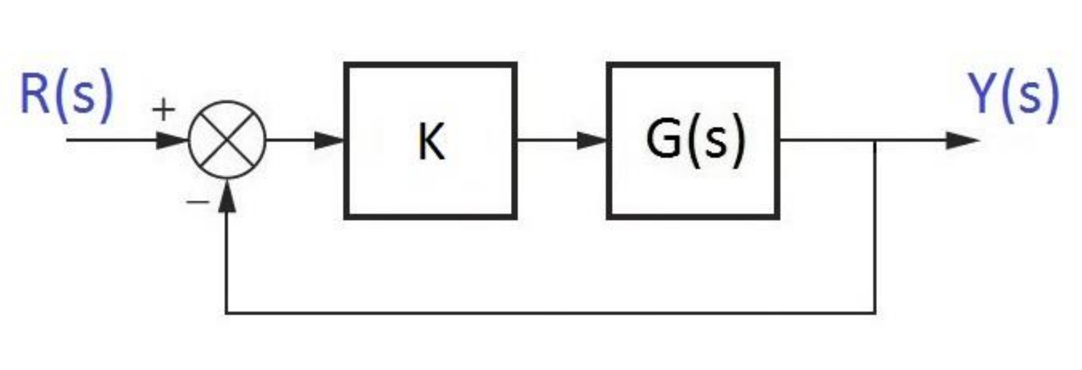


Exemplo 5 : Variação do LR em função da posição das singularidades



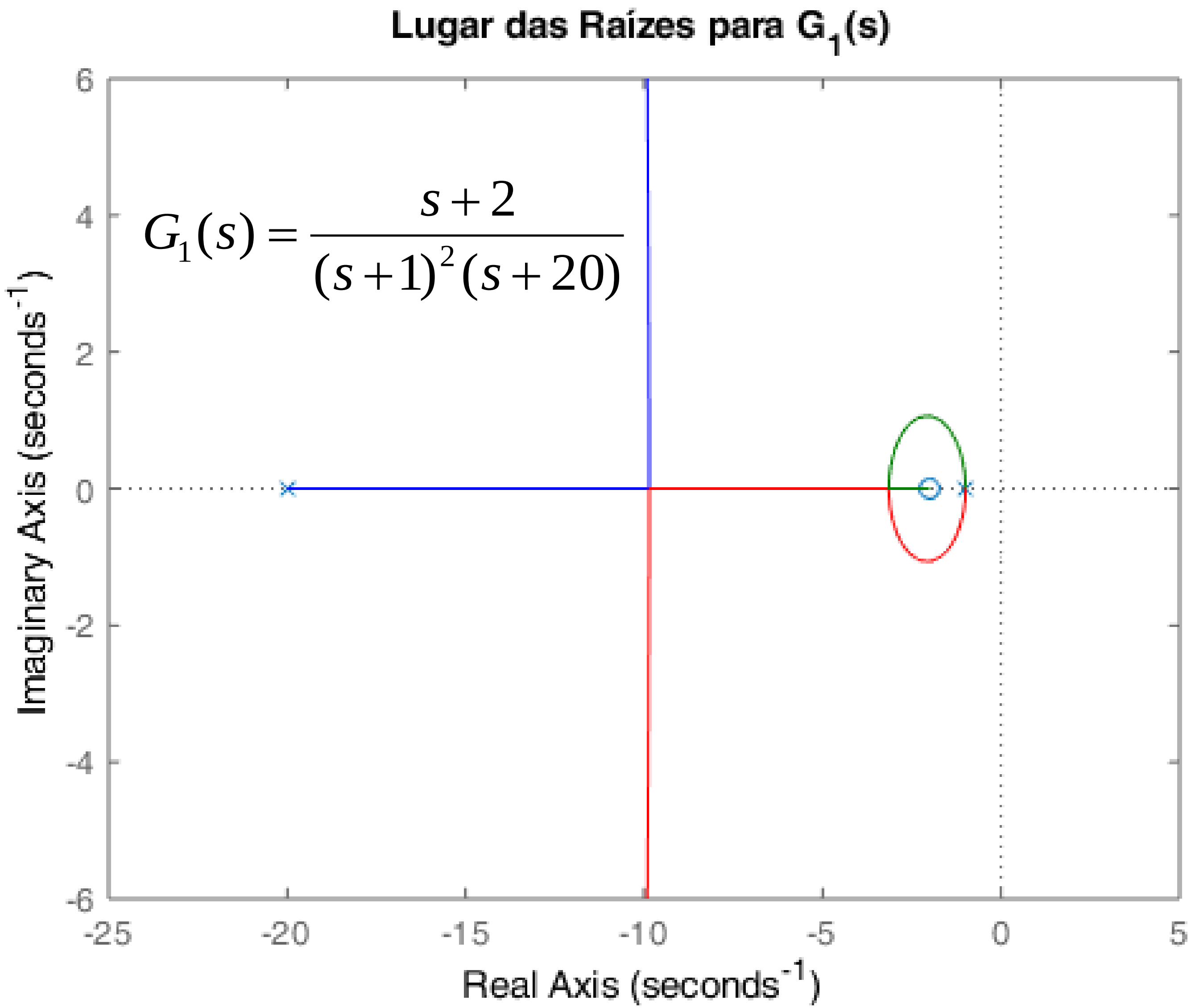
Exemplo 6: deslocamento dos polos (similar ao exemplo anterior)

Seja o sistema de controle, com K>0:

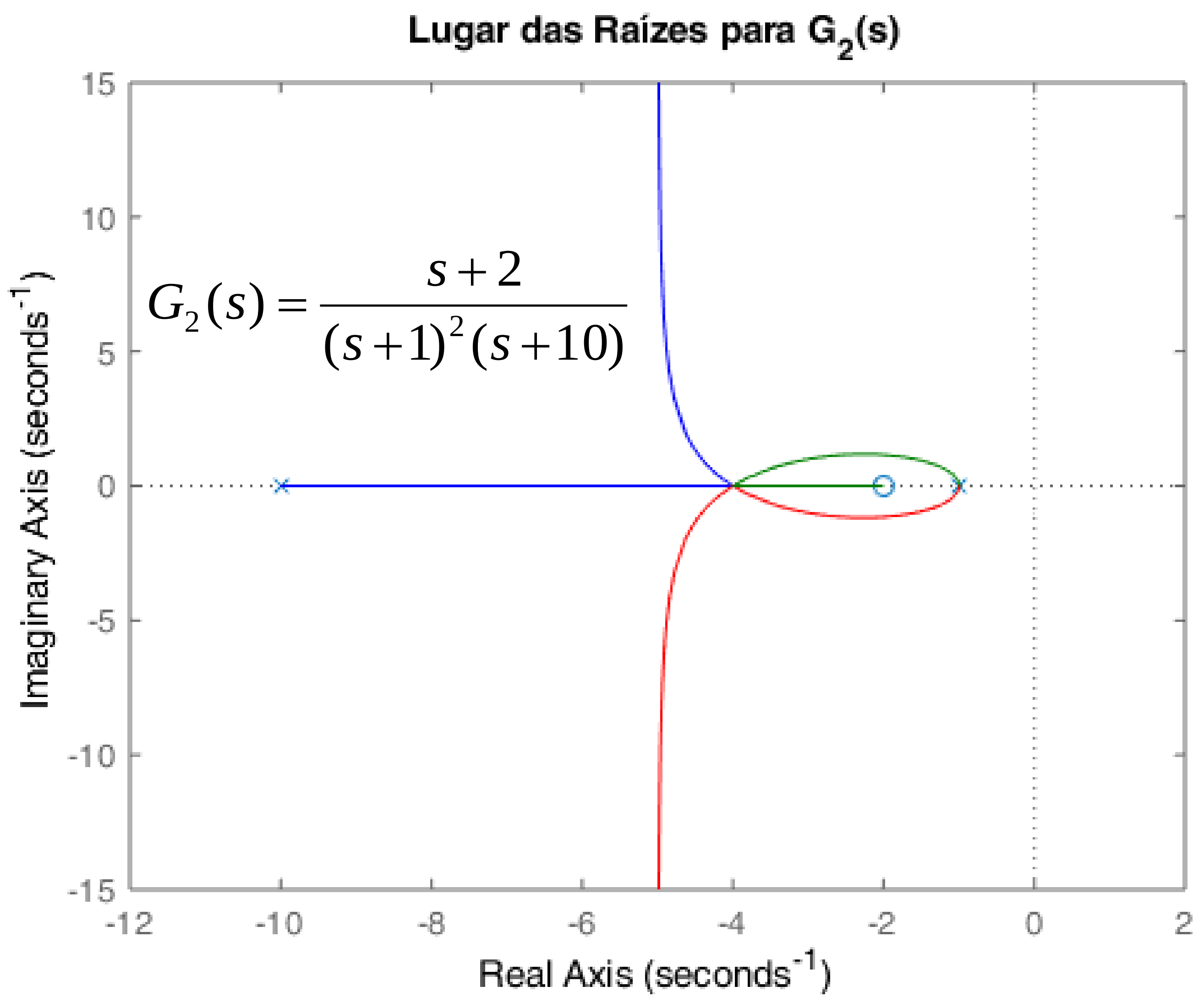


$$G_1(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2(s+20)} \qquad G_2(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2(s+10)}$$

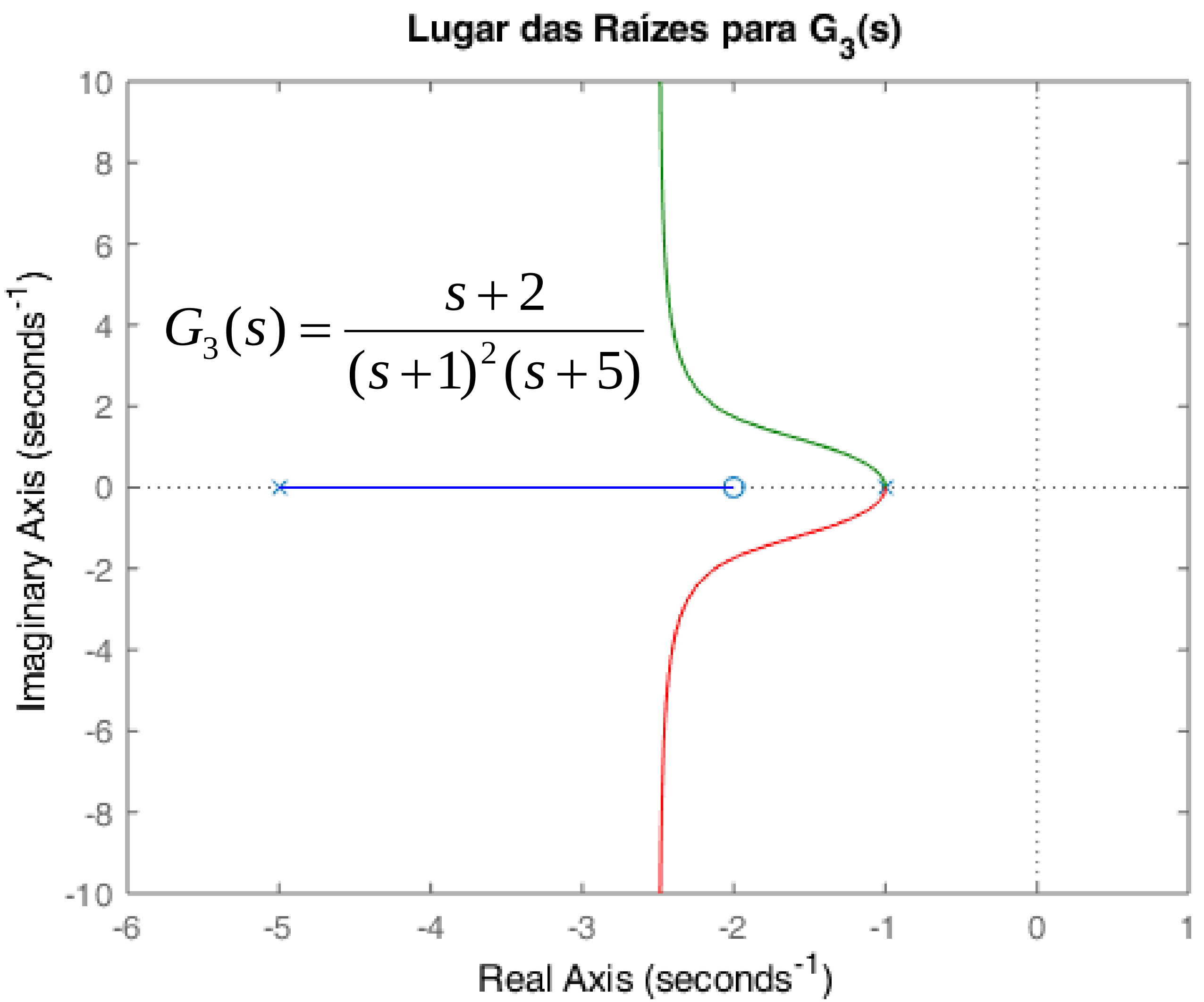
$$G_3(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2(s+5)} \qquad G_4(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2(s+1)}$$



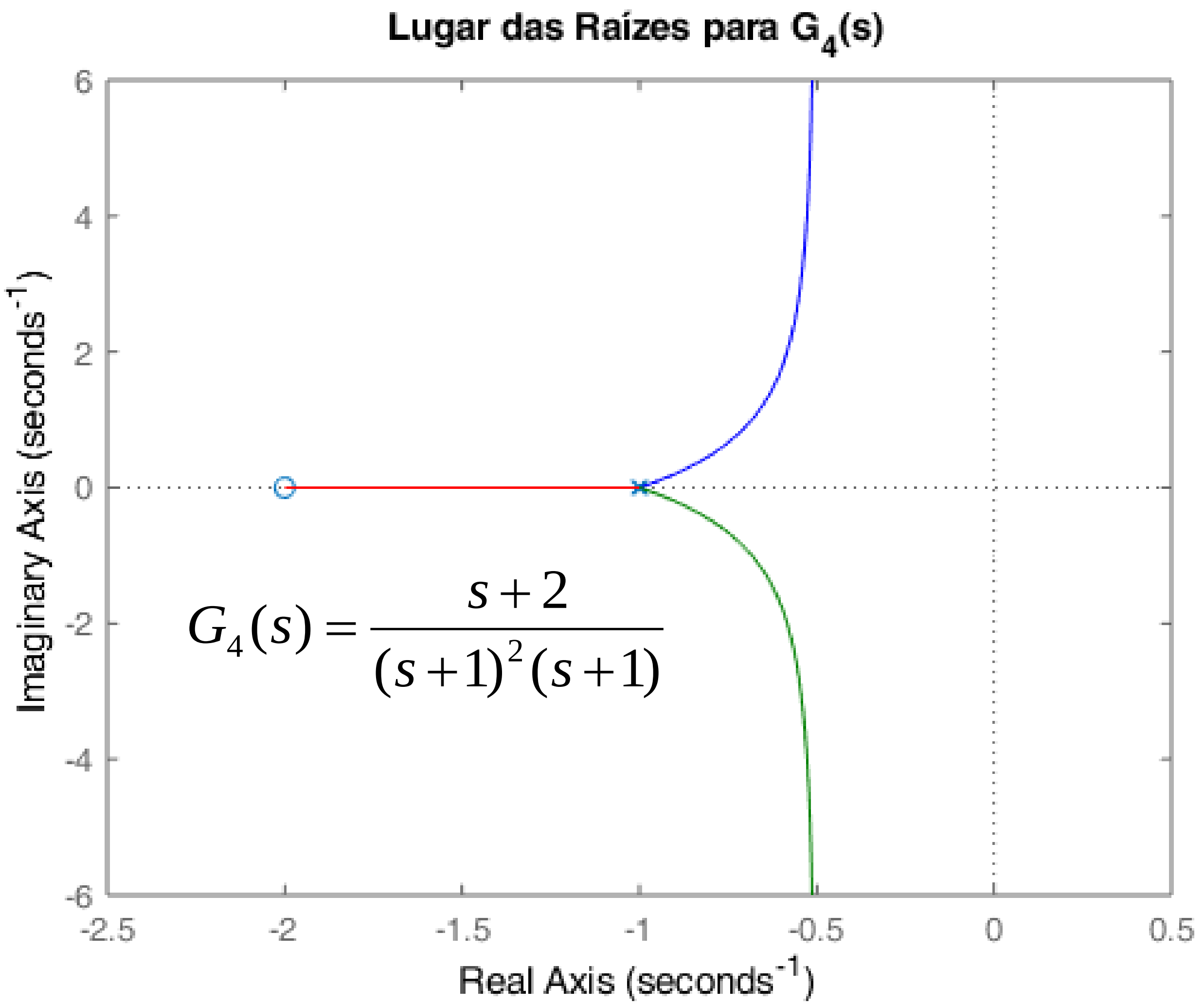
Existem 3 ramificações.



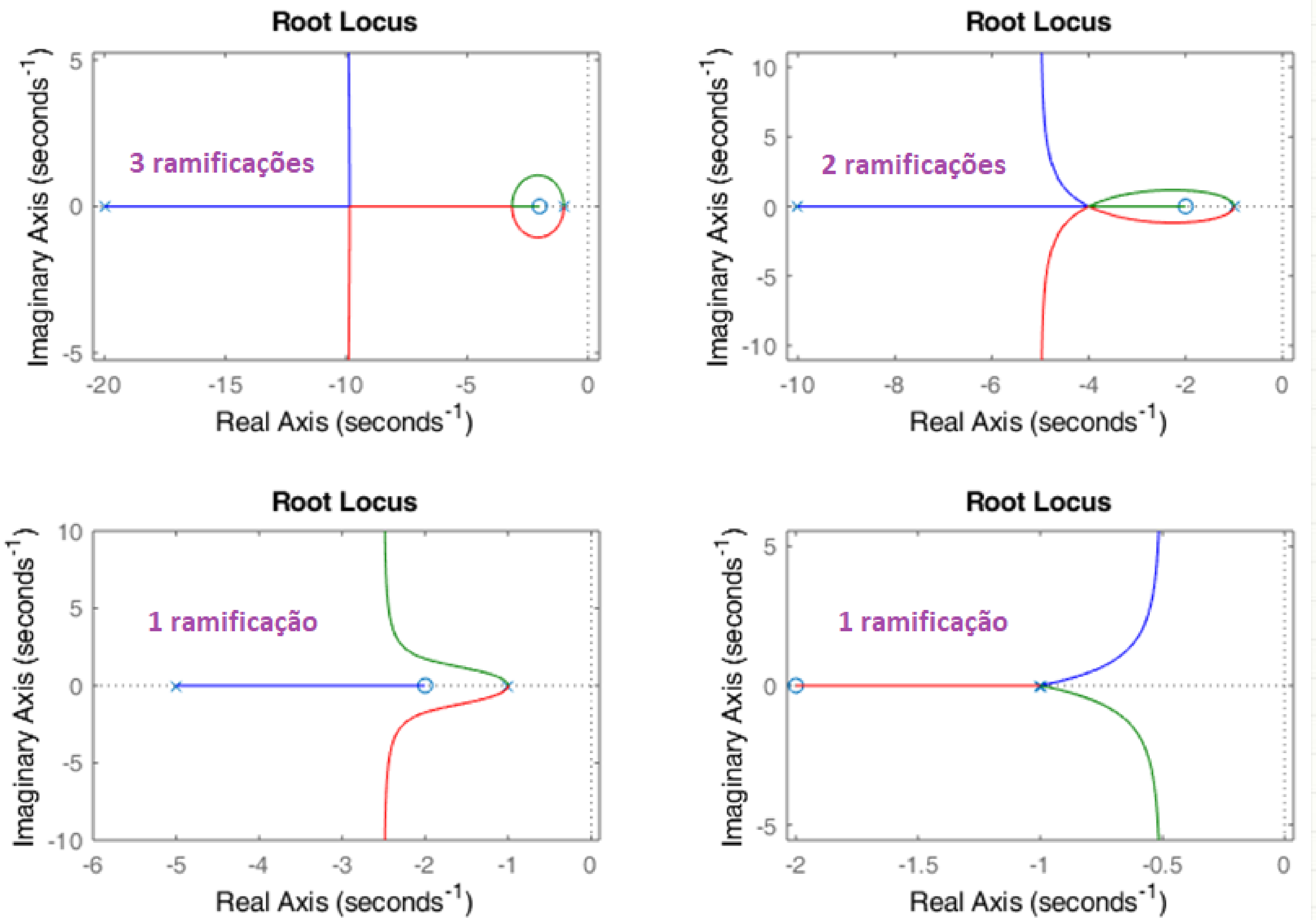
Existem 2 ramificações. Três ramos chegam simultaneamente em -4.



Existe 1 ramificação, que é o ponto de partida do polo duplo de malha aberta.



Existe 1 ramificação, que é o ponto de partida do polo triplo de malha aberta.


Root Locus
3 ramificações
Imaginary Axis (seconds-1)
Real Axis (seconds-1)
Root Locus
2 ramificações
Imaginary Axis (seconds-1)
Real Axis (seconds-1)
Root Locus
1 ramificação
Imaginary Axis (seconds-1)
Real Axis (seconds-1)
Root Locus
1 ramificação
Imaginary Axis (seconds-1)
Real Axis (seconds-1)