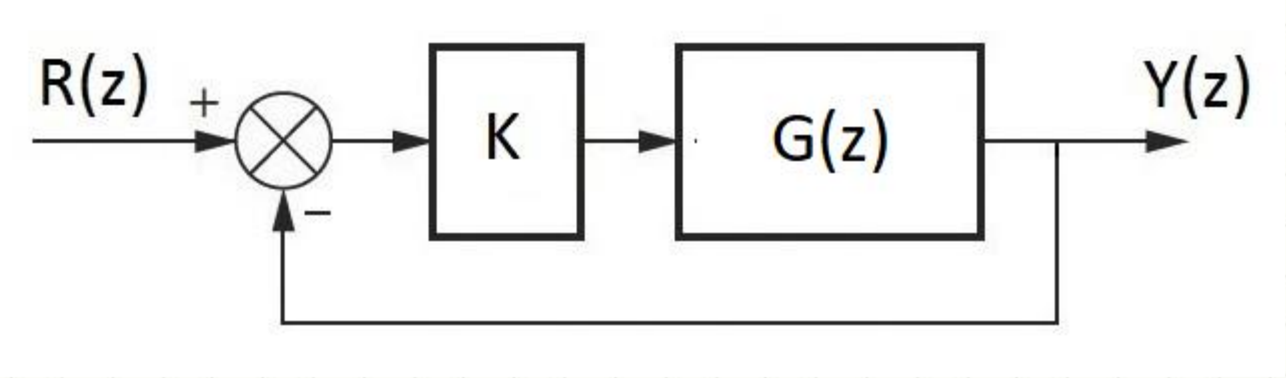
Lugar das Raízes para Sistemas Discretos

Profa. Cristiane Paim

Semestre 2018-1

Introdução

Seja o sistema discreto:



A função de transferência de malha fechada é dada por:

$$T(z) = \frac{KG(z)}{1 + KG(z)}$$

Introdução

Os polos de malha fechada serão definidos pelas raízes da equação característica:

$$\Delta(z) = 1 + KG(z) = 0$$

ou

$$G(z) = -\frac{1}{K}$$

Assim, as condições de módulo e fase serão idênticas ao caso contínuo.

Lugar das Raízes: Caso Discreto

Neste caso:

$$\left| G(z) \right| = -\frac{1}{K}$$ **Condição de Módulo**

$$\angle G(z) = 180^{\circ}(2q+1)$$ **Condição de Fase**

Desta forma, as regras para o traçado do L.R. serão as mesmas do caso contínuo com exceção da regra associada à estabilidade.

A interseção com o eixo imaginário torna-se dispensável, uma vez que a estabilidade agora será definida pelo círculo unitário.

Lugar das Raízes: Caso Discreto

A interseção dos ramos do L.R. com o círculo unitário será determinada garantindo que um ponto

$$z = a \pm jb$$

é uma solução da equação característica

$$\Delta(z) = 1 + KG(z) = 0$$

com módulo unitário, ou seja,

$$\left| a \pm jb \right| = 1$$

Lugar das Raízes: Caso Discreto

Portanto, para encontrar a interseção do L.R. com o círculo unitário é necessário satisfazer três condições:

$$\mathrm{Re}\{1+KG(z)\}=0$$

$$\mathrm{Im}\{1+KG(z)\}=0$$

$$|z|=1 \quad \Rightarrow \quad a^2+b^2=1$$

Exemplo 1

Considerando um sistema de controle com realimentação unitária e a função de transferência de malha aberta a seguir, traçar o lugar das raízes para K>0.

$$G(z) = \frac{z+1}{(z-1)(z-0,5)}$$

Exemplo 1

Eixo real: $(-\infty, -1] \cup [0{,}5, 1]$

Assíntotas: $\theta_a = 180°$

Ângulos de Partida e chegada:

$$\phi_1 = 0^\circ$$

$$\phi_2 = 180^\circ$$

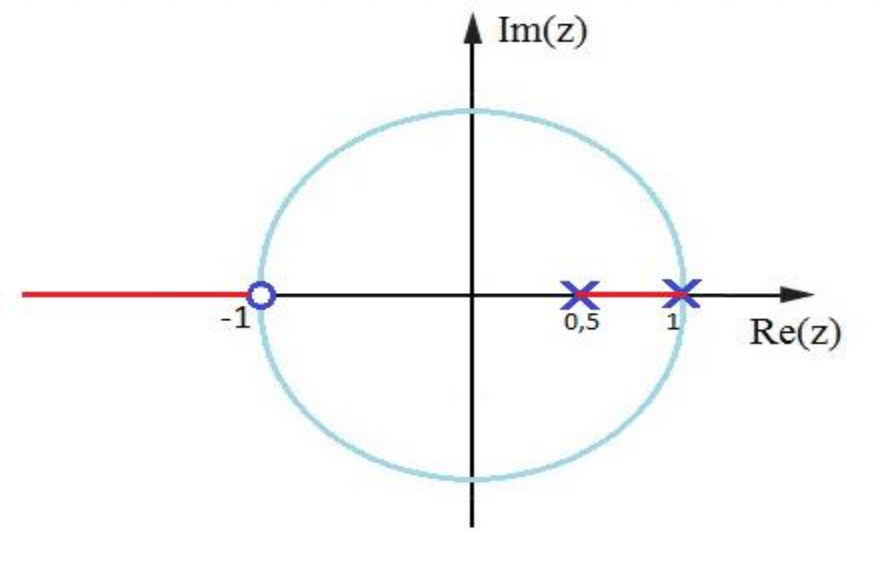
$$\psi = 180^\circ$$

Cruzamento com eixo imaginário (opcional)

$$\Delta(z) = z^2 - 1{,}5z + 0{,}5 + K(z+1) = 0$$

fazendo $z = jb$

$$\Delta(z) = -b^2 - j1{,}5b + 0{,}5 + jKb + K = 0$$



$$\begin{cases} K - b^2 + 0{,}5 = 0 \\ b(K - 1{,}5) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} b = 0 & K = -0{,}5 \notin LR \\ K = 1{,}5 & b = \pm\sqrt{2} = \pm 1{,}41 \end{matrix}$$

Exemplo 1

Ramificação: dk/dz=0

$$K = -\frac{z^2 - 1{,}5z + 0{,}5}{z+1} \qquad dK/dz = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 + 2z - 2 = 0$$

$$\begin{cases} z = -2{,}73 \in LR & K = 6{,}96 \\ z = \ 0{,}73 \in LR & K = 0{,}036 \end{cases}$$

Intersecção com o círculo unitário

$$\Delta(z) = z^2 - 1{,}5z + 0{,}5 + K(z+1) = 0$$

para: z = a + jb

$$a^2 + j2ab - b^2 - 1{,}5a - j1{,}5b + 0{,}5 + Ka + jKb + K = 0$$

Exemplo 1

$$\mathrm{Re}\{1+KG(z)\}=0 \quad \Rightarrow \quad a^2-b^2-1{,}5a+0{,}5+K(a+1)=0 \quad (1)$$

$$\mathrm{Im}\{1+KG(z)\}=0 \quad \Rightarrow \quad b(K-1{,}5+2a)=0 \quad (2)$$

$$a^2+b^2=1 \quad \Rightarrow \quad b^2=1-a^2 \quad (3)$$

De (2) e (3)

$$b=0 \quad \Rightarrow \quad a=\pm 1$$

$$b\neq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} K=1{,}5-2a \\ b^2=1-a^2 \end{array}$$

Para b=0,

$$a=\pm 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} a=1 & K=0 \\ a=-1 & K=+\infty \end{array}$$

Para b ≠ 0, substituindo K=1,5-2a e $b^2=1-a^2$ em (1) chega-se a

a = 0,5

Exemplo 1

Para a = 0,5

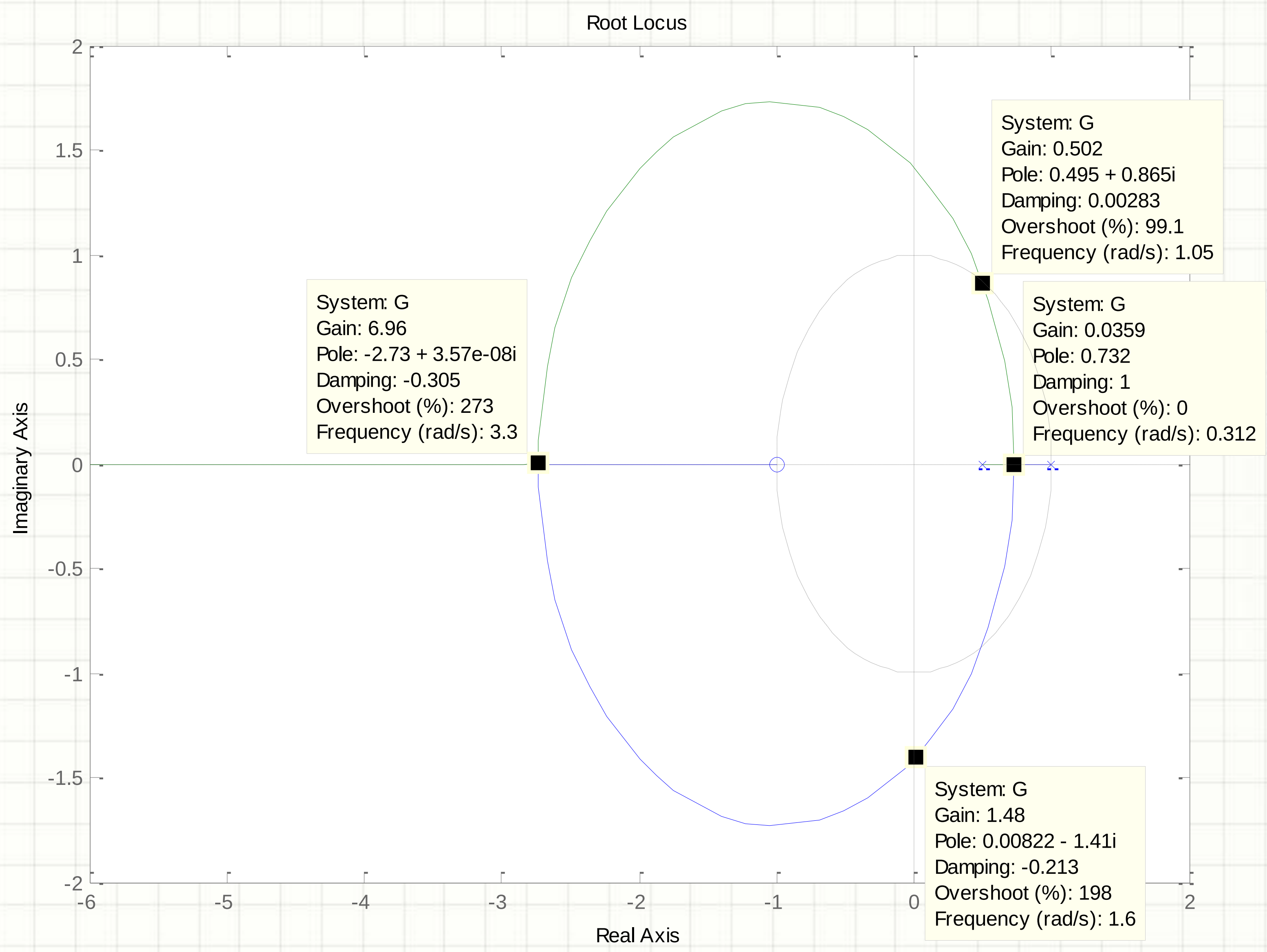
$$K = 0{,}5 \quad \text{e} \quad \mathrm{b} = 0{,}86$$

Portanto, a intersecção com o círculo unitário ocorre em

$$z = 0{,}5 \pm j0{,}86 \quad \text{para} \quad K = 0{,}5$$

Logo, o sistema é estável para

$$0 < K < 0{,}5$$


Root Locus
System: G
Gain: 0.502
Pole: 0.495 + 0.865i
Damping: 0.00283
Overshoot (%): 99.1
Frequency (rad/s): 1.05
System: G
Gain: 6.96
Pole: -2.73 + 3.57e-08i
Damping: -0.305
Overshoot (%): 273
Frequency (rad/s): 3.3
System: G
Gain: 0.0359
Pole: 0.732
Damping: 1
Overshoot (%): 0
Frequency (rad/s): 0.312
System: G
Gain: 1.48
Pole: 0.00822 - 1.41i
Damping: -0.213
Overshoot (%): 198
Frequency (rad/s): 1.6
Imaginary Axis
Real Axis
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
2

Exemplo 2

Considere no exemplo anterior que

$$-\infty < K < +\infty$$

Eixo real:

K>0 $(-\infty, -1] \cup [0{,}5, 1]$

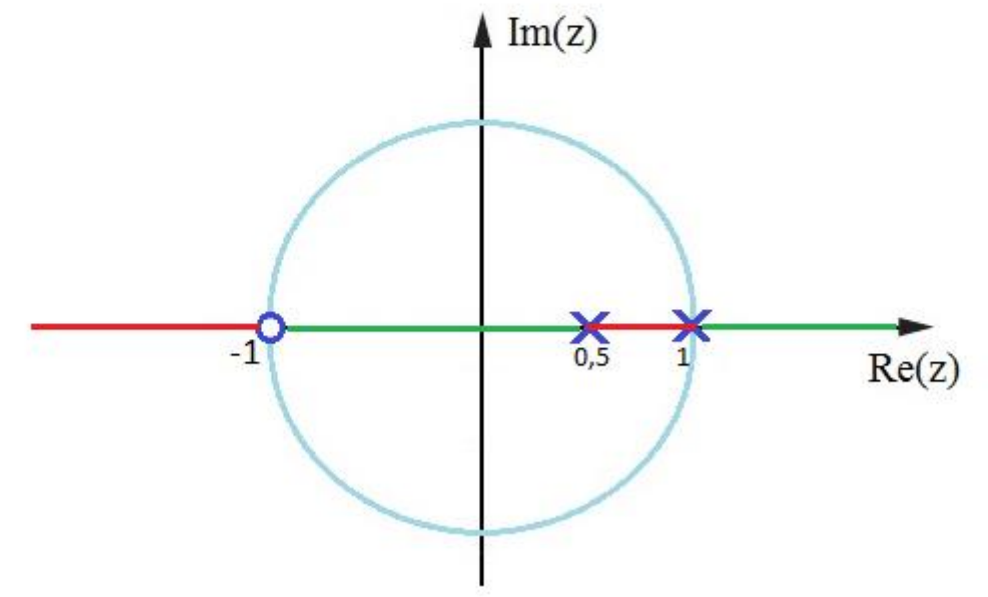
K<0 $[-1, 0{,}5] \cup [1, +\infty]$

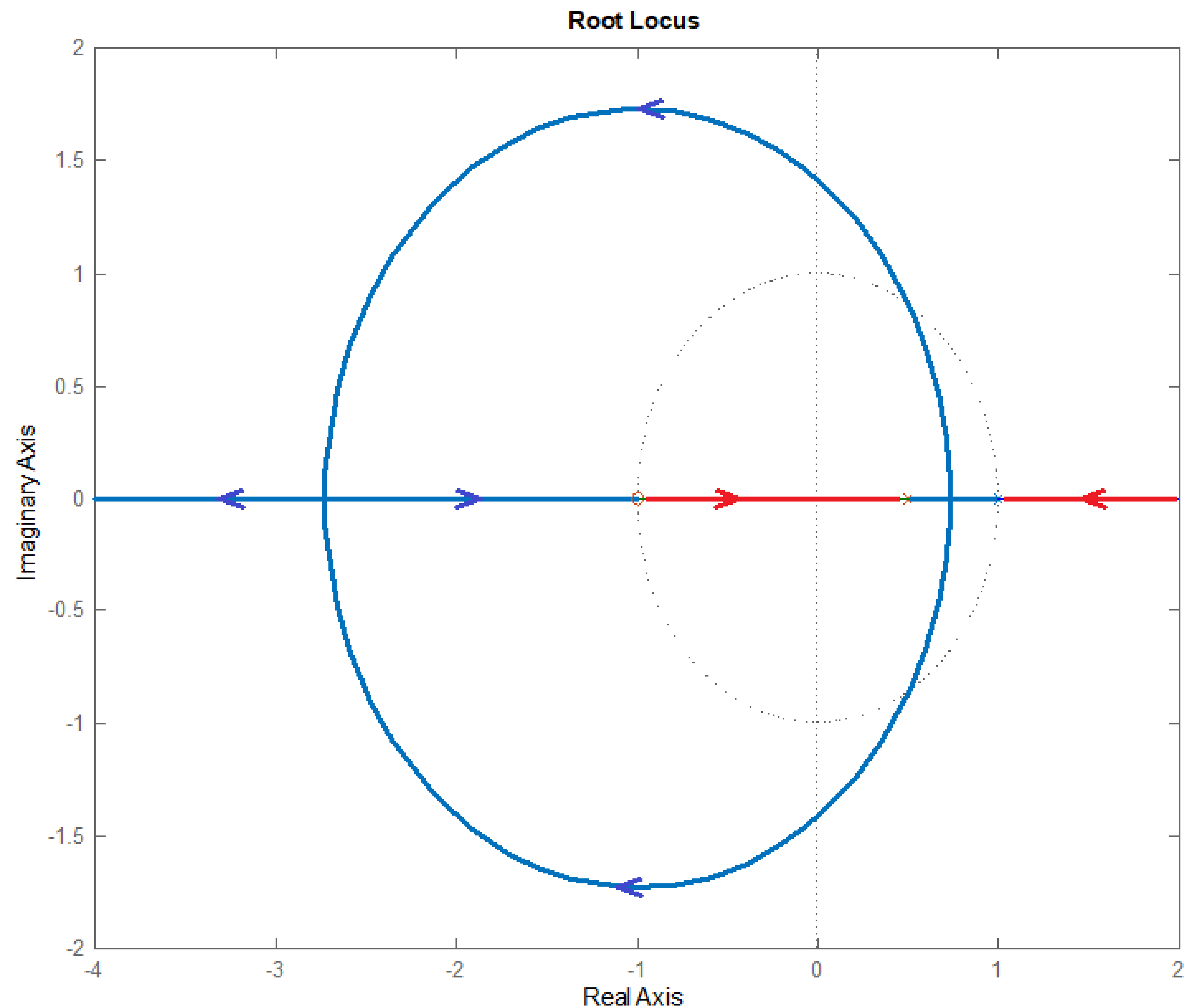
Assíntotas: $\theta_l = 0°$

Sem alterações:

Ramificação

Estabilidade




Root Locus
Imaginary Axis
Real Axis
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-4
-3
-2
-1
0
1
2

Especificações de Resposta Transitória

As variáveis s e z podem ser relacionadas pela equação,

$$z = e^{Ts}$$

sendo T o período de amostragem.

Para sistemas de 2ª ordem, os polos de malha fechada são definidos por:

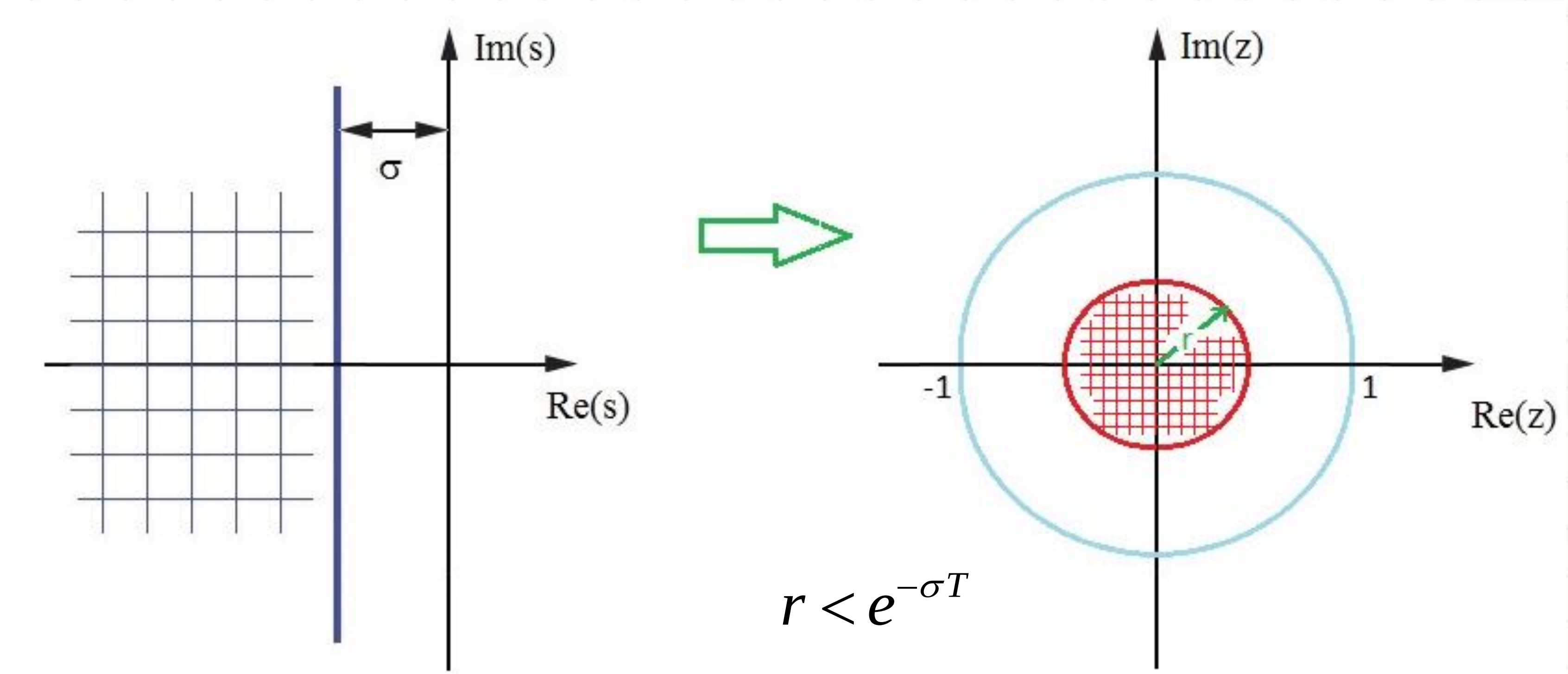
$$s = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_d$$

e, portanto,

$$z = e^{-\xi\omega_n T \pm j\omega_d T} = e^{-\xi\omega_n T}\angle \pm \omega_d T$$

Especificações de Resposta Transitória

Tempo de acomodação

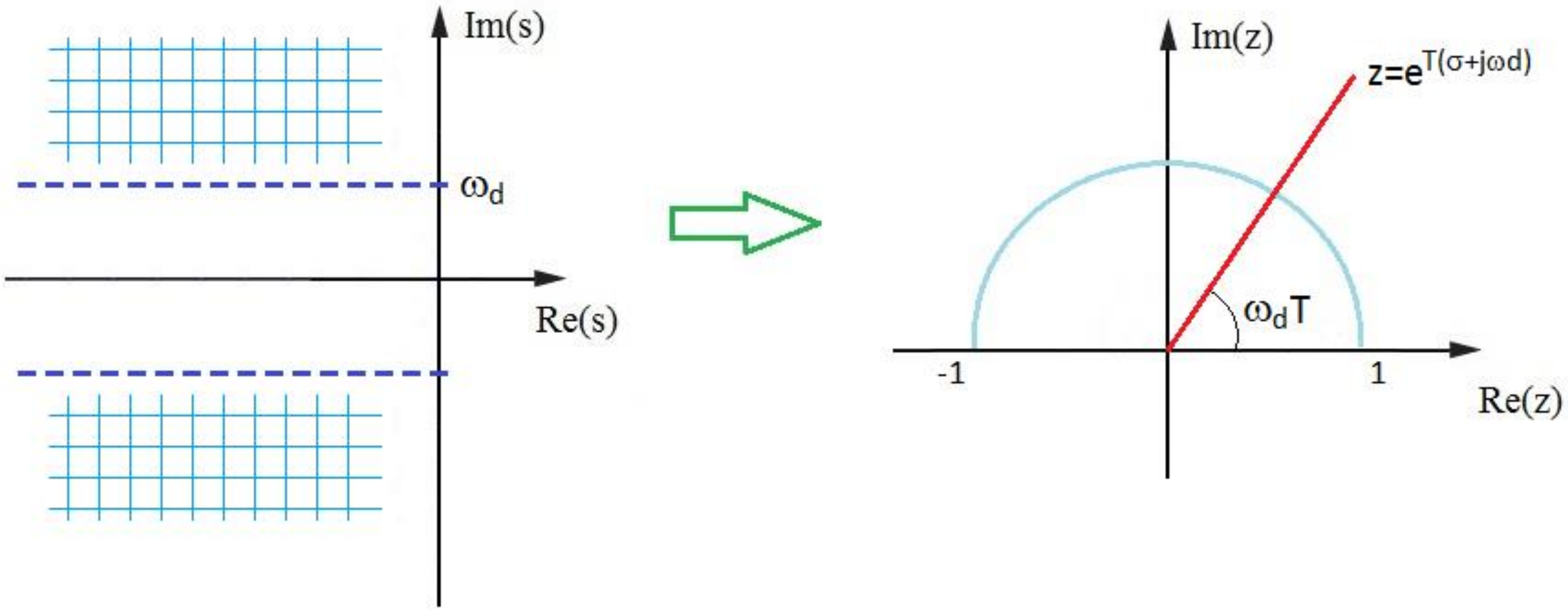


$$r < e^{-\sigma T}$$

$$t_s = \frac{4}{\xi \omega_n} \quad \rightarrow \quad \sigma \text{ constane}$$

Especificações de Resposta Transitória

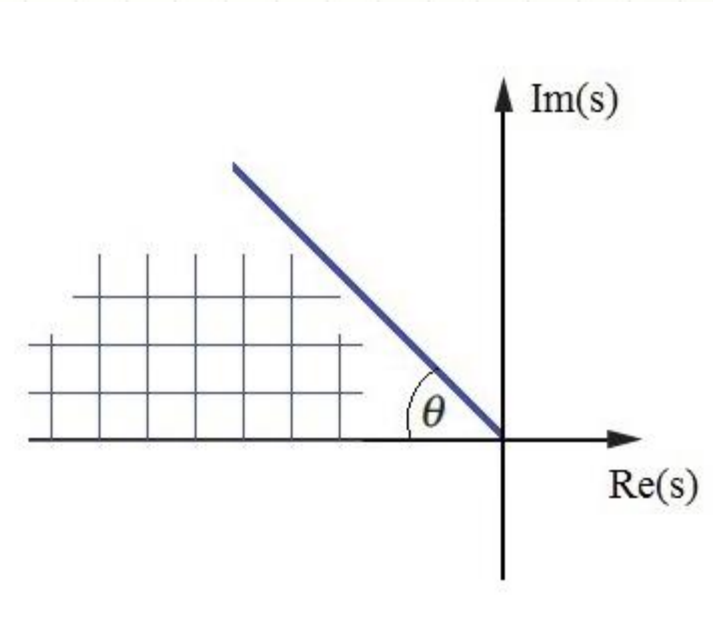
Tempo de pico



$$t_P = \frac{\pi}{\omega_d} \quad \rightarrow \quad \omega_d \text{ constante}$$

Especificações de Resposta Transitória

Sobressinal Máximo



$$M_P = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad \rightarrow \quad 0 < \xi < 1$$

$$\theta = \cos^{-1}(\xi) \qquad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

Sendo $z = e^{-\xi\omega_n T}\angle \pm \omega_d T$ tem-se:

$\xi = 1 \quad \Rightarrow \quad \angle z = 0^\circ \qquad 0 < |z| < 1$ **reta de 0 a 1 (eixo real)**

$\xi = 0 \quad \Rightarrow \quad \angle z = \pm\omega_d T \quad |z| = 1$ **círculo unitário**

Especificações de Resposta Transitória

Sobressinal Máximo

Para $0 < \xi < 1$

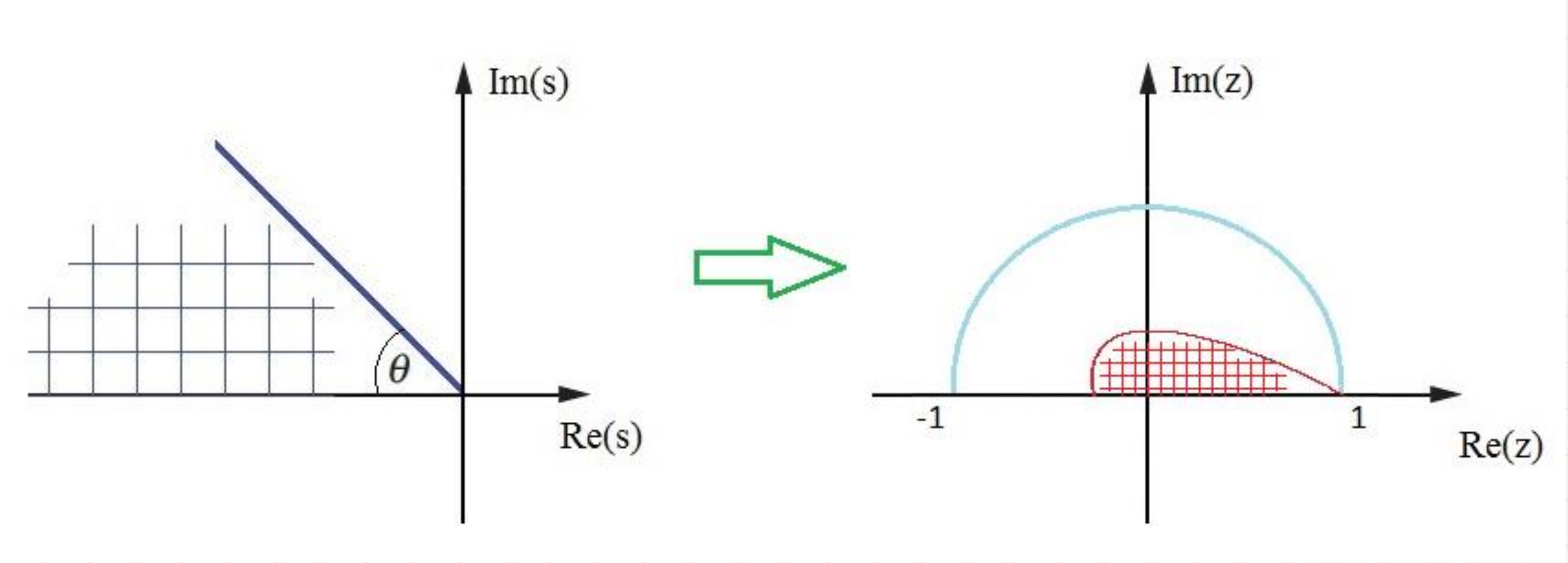
$$\omega_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \angle z = 0^\circ \qquad |z| = 1$$

$$\omega_n \text{ aumenta} \quad \Rightarrow \quad \angle z \text{ aumenta} \qquad |z| \text{ diminui}$$

A linha radial no plano s, que corresponde a uma taxa de amortecimento constante ($0 < \xi < 1$), é mapeada no plano z através de uma **espiral logarítmica.**

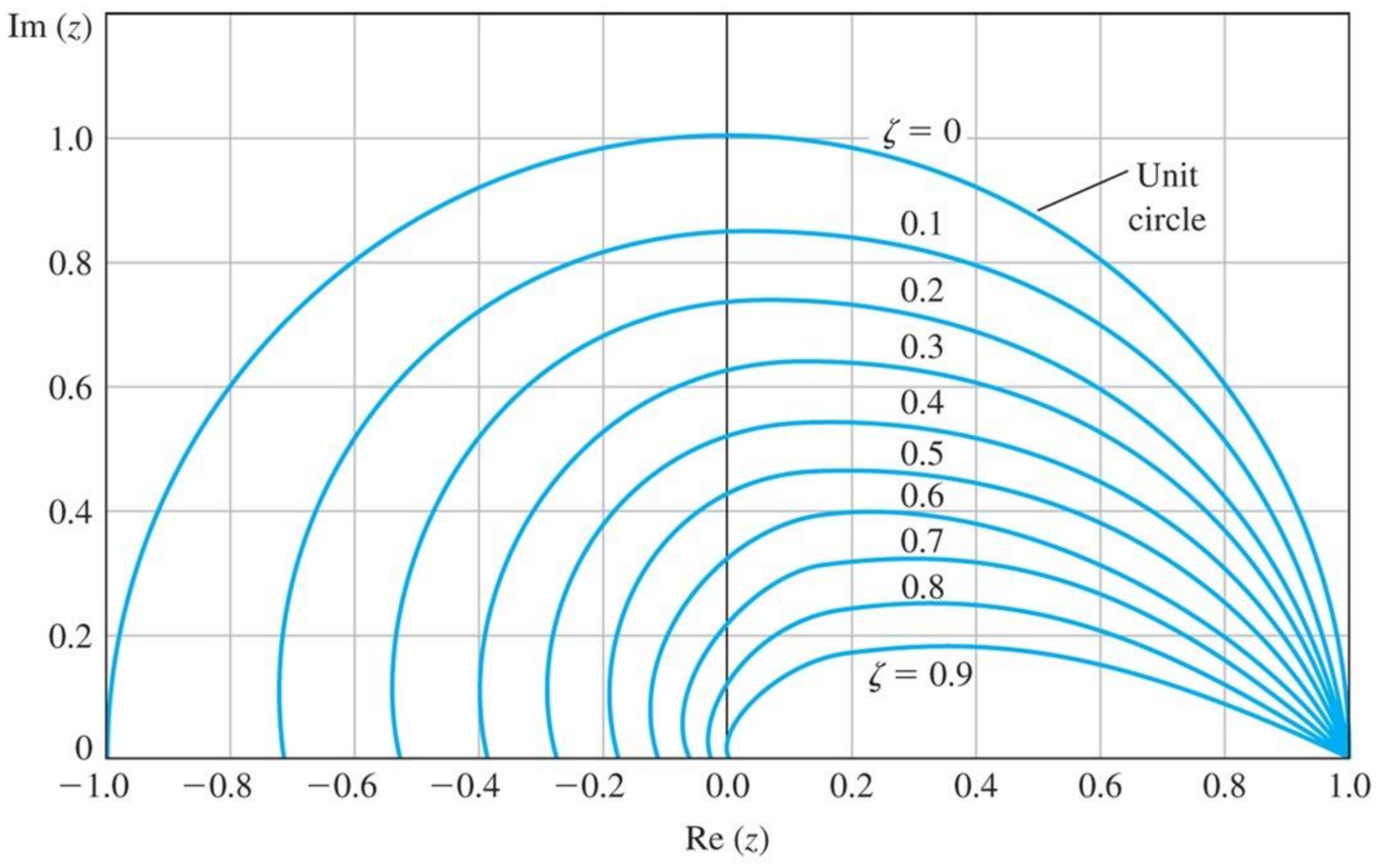
Especificações de Resposta Transitória

Sobressinal Máximo



Especificações de Resposta Transitória

Sobressinal Máximo



Especificações de Resposta Transitória

Seja,

$$s = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_d$$

No plano z a linha correspondente a taxa de amortecimento torna-se

$$z = e^{Ts} = e^{-\xi\omega_n T + j\omega_d T}$$

Escrevendo em função da frequência de amostragem ($\omega_s = 2\pi/T$), tem-se

$$z = e^{\left(\frac{-2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\frac{\omega_d}{\omega_s} + j2\pi\frac{\omega_d}{\omega_s}\right)}$$

sendo

$$|z| = e^{\left(\frac{-2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\frac{\omega_d}{\omega_s}\right)} \quad \text{e} \quad \angle z = 2\pi\frac{\omega_d}{\omega_s}$$

Especificações de Resposta Transitória

Portanto, para valores fixos de T e ξ, o módulo diminui e a fase aumenta a medida que ω_d cresce.

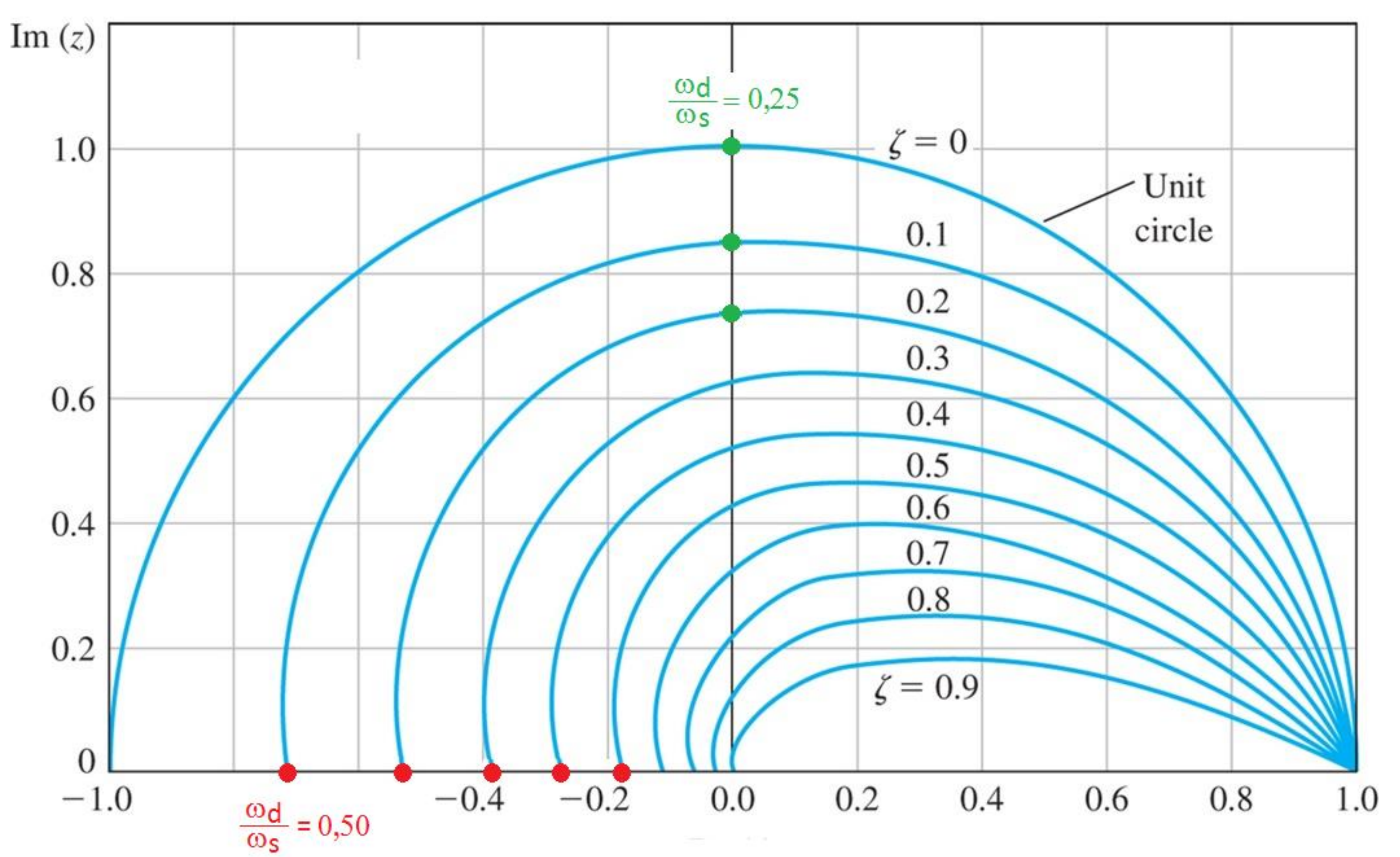
Note que para uma dada relação constante ω_d/ω_s, o módulo torna-se uma função apenas do coeficiente de amortecimento ζ e a fase torna-se constante.

$$\frac{\omega_d}{\omega_s} = 0{,}25 \quad \Rightarrow \quad \angle z = 90^\circ$$

$$\frac{\omega_d}{\omega_s} = 0{,}50 \quad \Rightarrow \quad \angle z = 180^\circ$$

Assim, podem ser calculados os pontos em que a linha correspondente a cada valor de ζ cruza os eixos real e imaginário.

Especificações de Resposta Transitória



Especificações de Resposta Transitória

ζ	$\omega_d/\omega_s=0,50$	$\omega_d/\omega_s=0,25$
0	1	1
0,1	0,7292	0,8540
0,2	0,5266	0,7257
0,3	0,3723	0,6102
0,4	0,2538	0,5038
0,5	0,1630	0,4038
0,6	0,0948	0,3079
0,7	0,0460	0,2144
0,8	0,0015	0,1231
0,9	0,0002	0,0390
1	0	0

Exemplo 3

Para o exemplo anterior deseja-se que a resposta ao degrau unitário tenha um tempo de acomodação menor do que 20 segundos. O período de amostragem utilizado para obtenção do modelo discreto foi T=1.

A partir da especificação tem-se

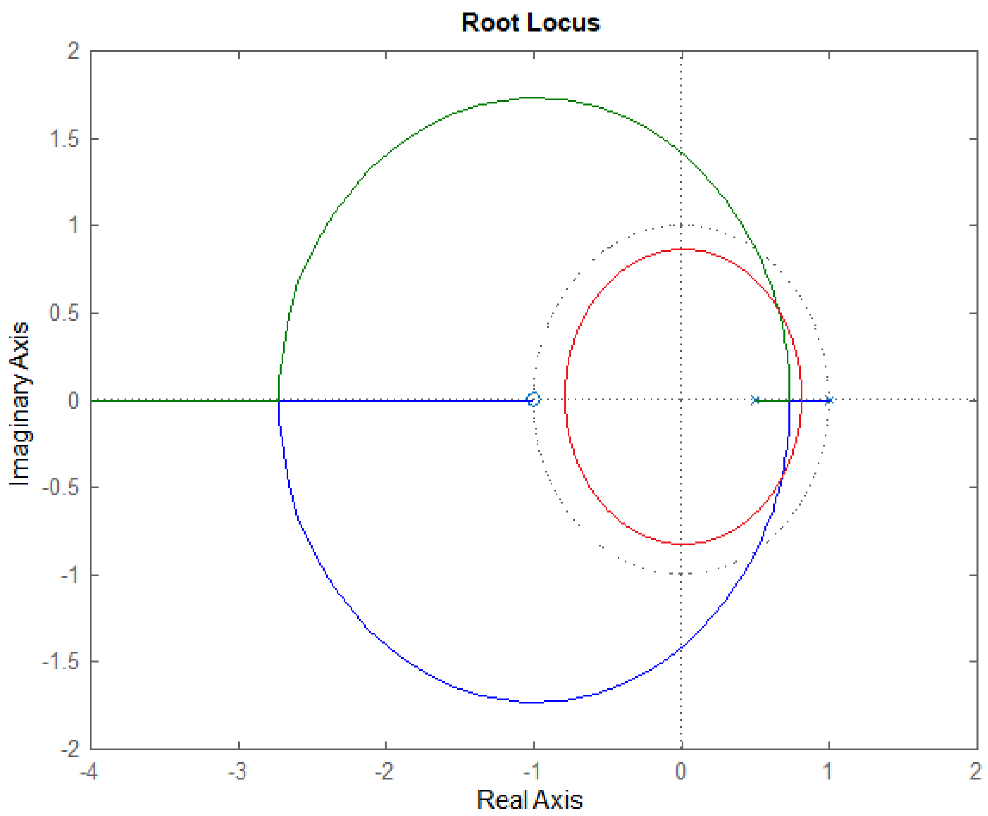
$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} < 20 \quad \Rightarrow \quad \xi\omega_n > 0{,}2$$

(tempo contínuo)

Exemplo 3

Em tempo discreto:

$$r = e^{-\xi\omega_n T} = 0{,}82 \quad \Rightarrow \quad r < 0{,}82$$ **círculo de raio r<0,82**



Exemplo 3

Ou seja, é necessário garantir que os polos de malha fechada estejam dentro de um círculo de raio menor do que 0,82. Isto será obtido por:

$$\mathrm{Re}\{1 + KG(z)\} = 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 - b^2 - 1{,}5a + 0{,}5 + K(a+1) = 0$$

$$\mathrm{Im}\{1 + KG(z)\} = 0 \quad \Rightarrow \quad b(K - 1{,}5 + 2a) = 0$$

$$a^2 + b^2 = 0{,}82^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 0{,}67 - a^2$$

De (2)

$$b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \pm 0{,}82$$

$$b \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} K &= 1{,}5 - 2a \\ b^2 &= 0{,}67 - a^2 \end{aligned}$$

Exemplo 3

Para b=0

$$a = +0{,}82 \quad \Rightarrow \quad K = 0{,}0316$$

$$a = -0{,}82 \quad \Rightarrow \quad K = -1{,}3347$$

Para b$\neq$0

$$a = 0{,}665$$

$$b = 0{,}477$$

$$K = 0{,}17$$

Assim, a interseção com o círculo de raio 0,82 ocorre em

$$z = 0{,}665 \pm j0{,}477 \quad \text{para} \quad K = 0{,}17$$

Exemplo 3

Assim, a interseção com o círculo de raio 0,82 ocorre em

$$0{,}0316 < K < 0{,}17$$

A especificação é realmente atendida?

Qual o efeito do zero na resposta ?

Exemplo 3

<u>Verificação</u>

Seja K=0,15. Neste caso,

$$KG(z) = \frac{0{,}15(z+1)}{(z-1)(z-0{,}5)}$$

Resultando na equação característica

$$\Delta(z) = (z-1)(z-0{,}5) + 0{,}15(z+1) = z^2 - 1{,}35z + 0{,}65$$

cujos raízes (polos) são

$$p_{1,2} = 0{,}67 \pm j0{,}441 = 0{,}81\angle 33{,}5^\circ$$

Exemplo 3

ou

$$p_{1,2} = 0{,}81\angle 0{,}5786rd$$

Sendo

$$z = e^{-\xi\omega_n T}\angle \pm \omega_d T = M\angle \pm N$$

tem-se

$$\xi = -\frac{\ln(\mathrm{M})}{\sqrt{\ln^2(\mathrm{M}) + N^2}} \qquad \omega_n = \frac{1}{\mathrm{T}}\sqrt{\ln^2(\mathrm{M}) + N^2}$$

Exemplo 3

Para o exemplo, T=1 e

$$M = 0{,}81$$
$$N = 0{,}5786$$

Assim, considerando apenas os polos do sistema:

$$\begin{matrix} \xi = 0{,}35 \\ \omega_n = 0{,}62 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} M_p = 31\% \\ t_s = 18{,}4\,seg < 20seg \end{matrix}$$

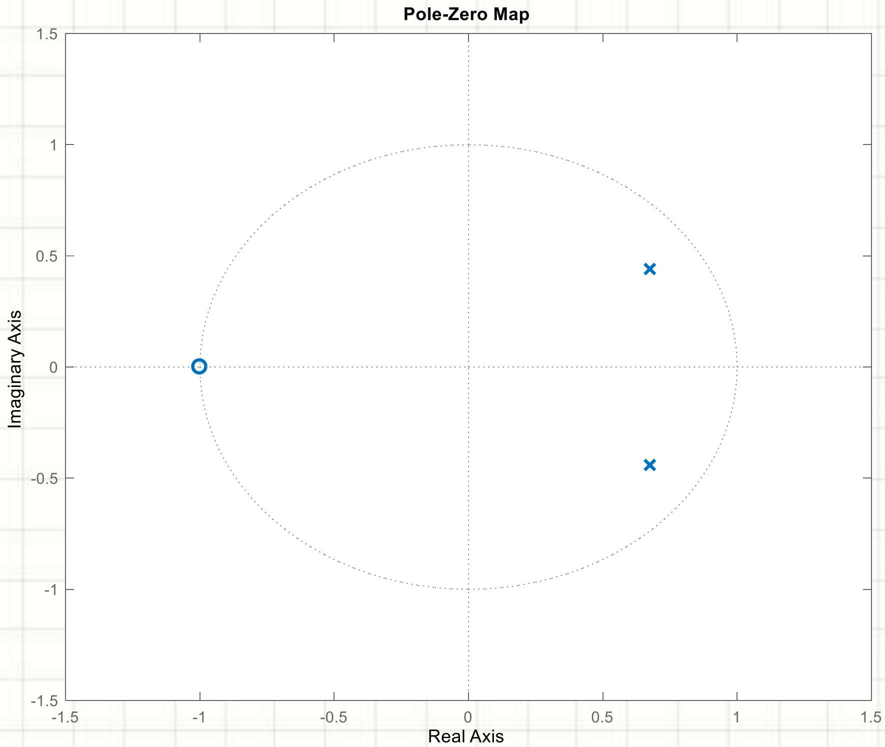
garante-se a especificação.

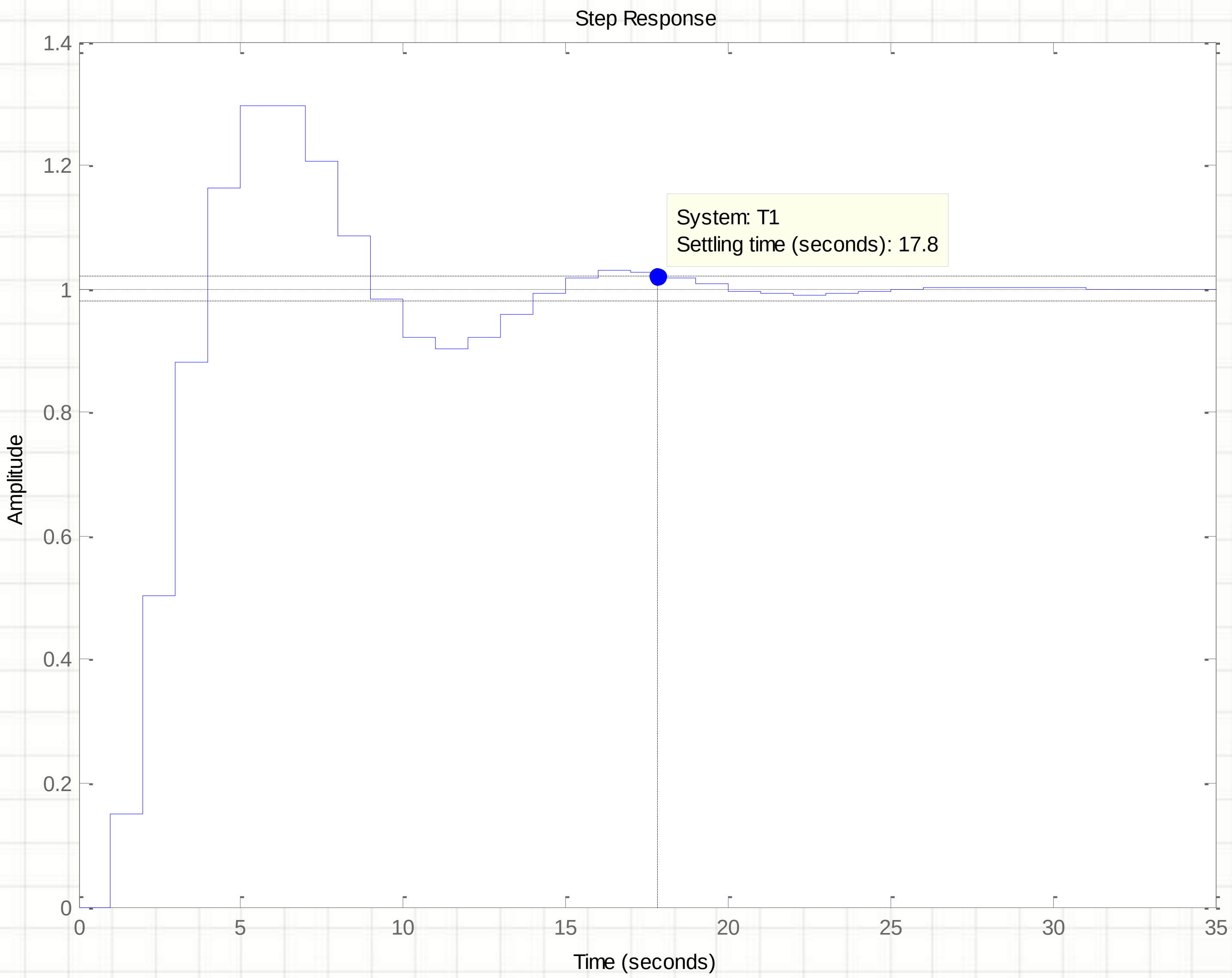
E se for considerado o zero, qual o efeito deste na resposta ?

Exemplo 3

Lembrando que

$$T(z) = \frac{0{,}15(z+1)}{z^2 - 1{,}35z + 0{,}65} = \frac{0{,}15(z+1)}{(z - 0{,}67 + j0{,}441)(z - 0{,}67 - j0{,}441)}$$




Step Response
System: T1
Settling time (seconds): 17.8
Amplitude
Time (seconds)
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
5
10
15
20
25
30
35

Exemplo 3

Seja agora o limite inferior. Para K=0,05 tem-se

$$\Delta(z) = z^2 - 1{,}45z + 0{,}55$$

cujos polos são

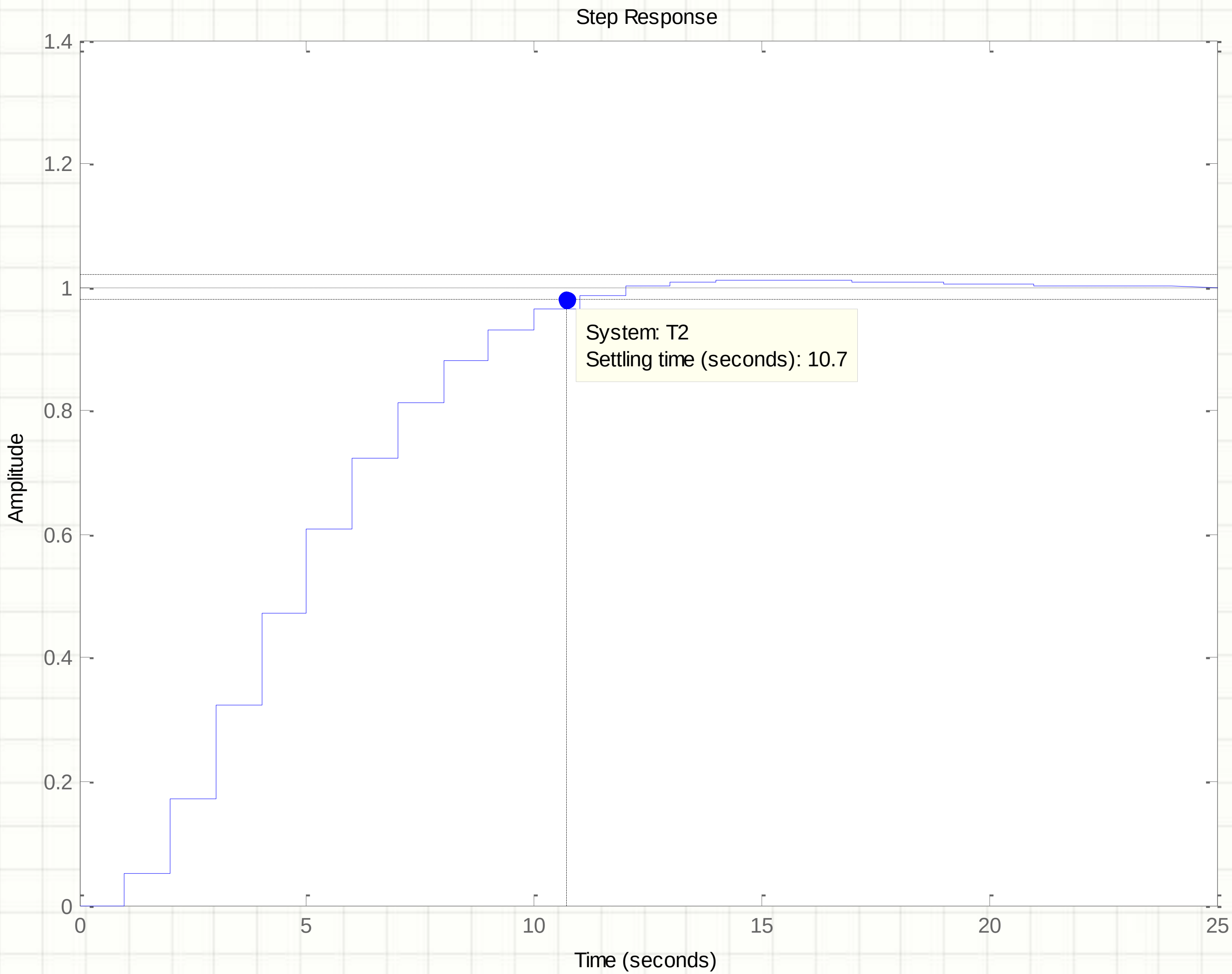
$$p_{1,2} = 0{,}725 \pm j0{,}156 = 0{,}74\angle 0{,}2121rd$$

$$\begin{matrix} \xi = 0{,}81 \\ \omega_n = 0{,}37 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} M_p = 1{,}2\% \\ t_s = 13{,}4\,seg \end{matrix}$$

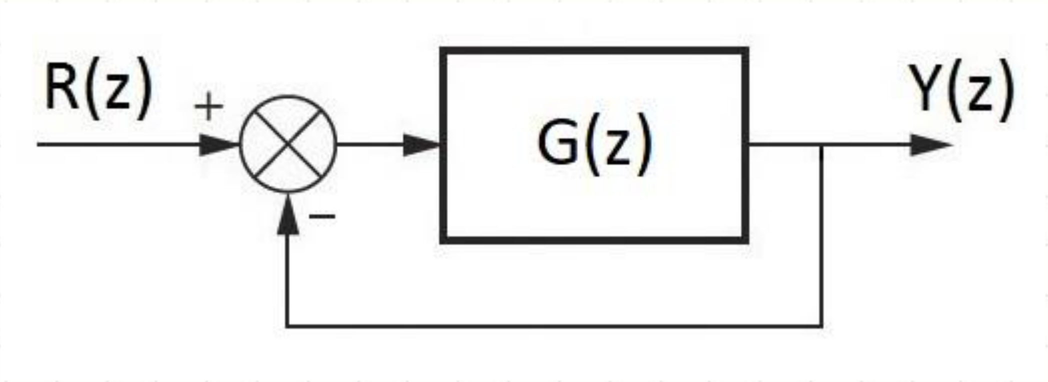
Os valores reais, considerando o zero do sistema, são

$$M_p = 1{,}2\%$$

$$t_s = 10{,}7\,seg$$


Step Response
System: T2
Settling time (seconds): 10.7
Amplitude
Time (seconds)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
0
5
10
15
20
25

Especificações de Regime Permanente



$$K_P = \lim_{z \to 1} G(z) \quad \Rightarrow \quad e_\infty = \frac{1}{1 + K_P}$$

$$K_V = \frac{1}{T} \lim_{z \to 1} (z-1) G(z) \quad \Rightarrow \quad e_\infty = \frac{1}{K_V}$$

$$K_a = \frac{1}{T^2} \lim_{z \to 1} (z-1)^2 G(z) \quad \Rightarrow \quad e_\infty = \frac{1}{K_a}$$

Exemplo 4

Para exemplo anterior, determinar o menor erro em regime permanente considerando entradas degrau e rampa.

Como o sistema é do tipo 1, o erro de regime permanente é nulo para entrada degrau. Para entrada rampa, tem-se

$$K_V = \frac{1}{T}\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{K(z+1)}{(z-1)(z-0,5)} = \frac{2K}{0,5} = 4K$$

$$e_V = \frac{1}{4K}$$

Assim, garantindo a especificação de tempo de acomodação, o mínimo erro de regime permanente será obtido para o maior K possível:

$$e_V = \frac{1}{4\times 0,17} = 0,47$$

Exemplo 5

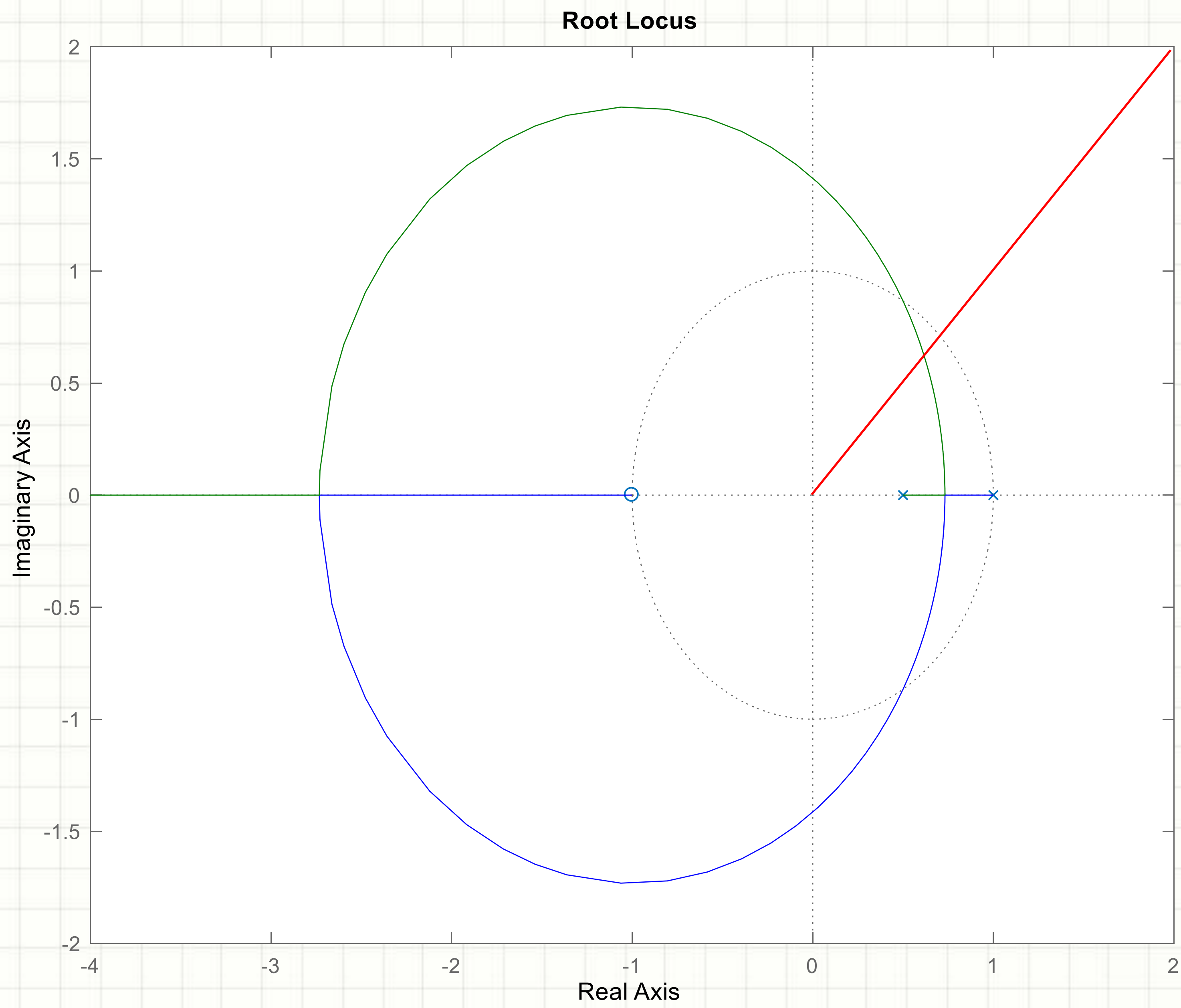
Para o exemplo 1, determinar os valores de K>0 de modo a garantir um tempo de pico menor do que 4 segundos.

Em tempo contínuo

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} < 4 \quad \Rightarrow \quad \omega_d > \frac{\pi}{4}$$

Em tempo discreto (T=1):

$$\angle z = \omega_d T > \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \angle z > \frac{\pi}{4}$$



Root Locus
Imaginary Axis
Real Axis
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-4
-3
-2
-1
0
1
2

Exemplo 5

Seja z = a + j a (45°). Substituindo z na equação característica

$$\Delta(z) = z^2 - 1{,}5z + 0{,}5 + K(z+1) = 0$$

tem-se

$$\begin{cases} -1{,}5a + 0{,}5 + Ka + K = 0 \\ a(2a - 1{,}5 + K) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad K = 1{,}5 - 2a$$

Substituindo K na primeira equação, chega-se a:

$$a = 0{,}618$$

$$K = 0{,}264$$

Portanto, a interseção da reta de 45° com o LR ocorre no ponto

$$z = 0{,}618 \pm j0{,}618 \quad \text{para} \quad K = 0{,}264$$

Exemplo 5

Assim, para garantir a especificação de tempo de pico:

$$0,264 < K < 0,5$$

Verificação

Para K = 0,3

$$\Delta(z) = z^2 - 1,2z + 0,8 \quad \Rightarrow \quad p_{1,2} = 0,6 \pm j0,66$$

$$\begin{cases} M = 0,892 \\ N = 0,833 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi = 0,1360 \\ \omega_n = 0,8408 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_p = 3,2 \\ M_p = 65\% \end{cases}$$

Exemplo 5

Para K=0,4

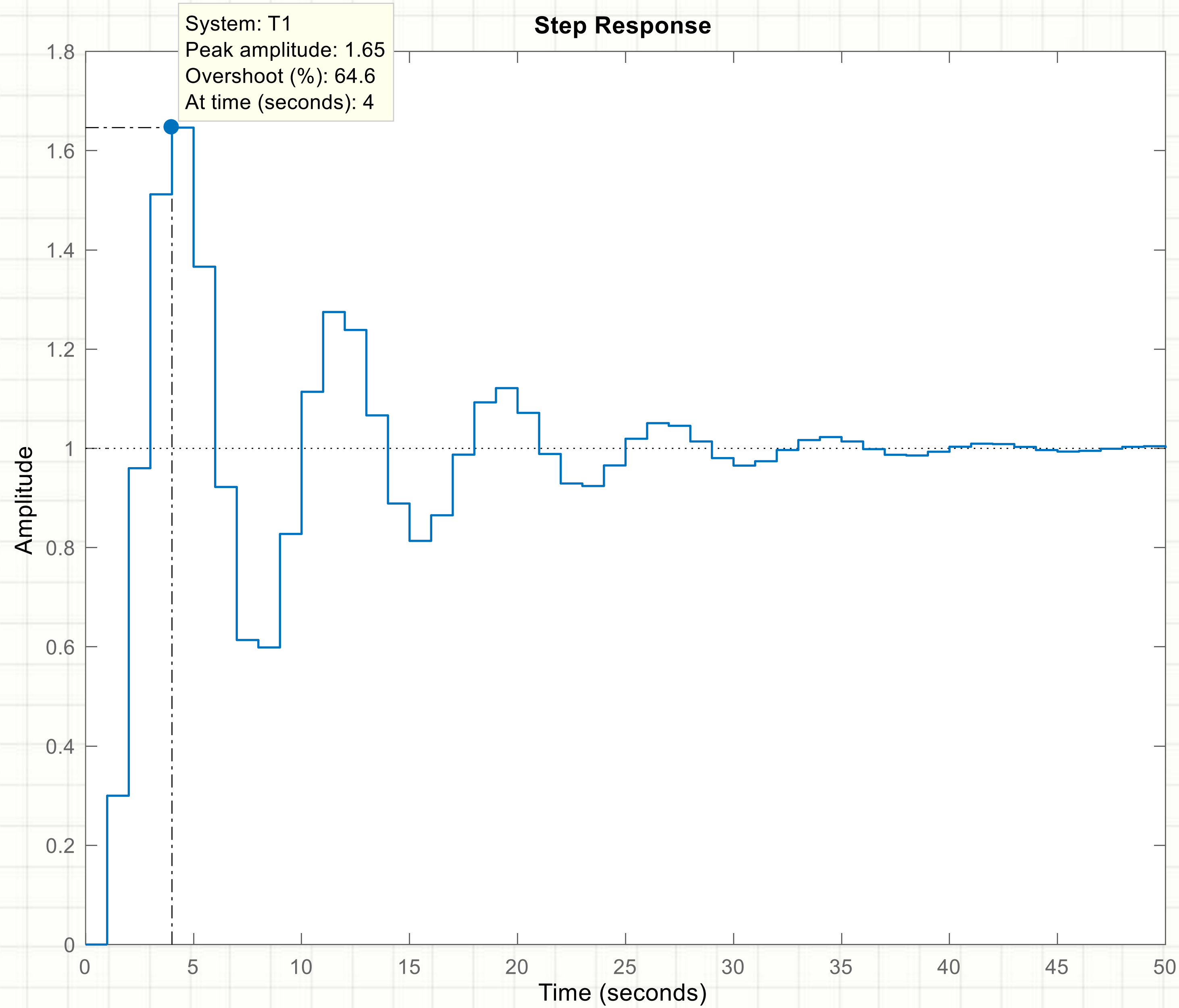
$$\Delta(z) = z^2 - 1{,}1z + 0{,}9 \quad \Rightarrow \quad p_{1,2} = 0{,}55 \pm j0{,}78$$

$$\begin{cases} M = 0{,}9544 \\ N = 0{,}9566 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi = 0{,}0487 \\ \omega_n = 0{,}9578 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_p = 3{,}15 \\ M_p = 86\% \end{cases}$$

Para K=0,5

$$\Delta(z) = z^2 - z + 1 \quad \Rightarrow \quad p_{1,2} = 0{,}50 \pm j0{,}86$$

$$\begin{cases} M = 1 \\ N = 1{,}0472 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi = 0 \\ \omega_n = 1{,}0472 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_p = 3{,}14 \\ M_p = 100\% \end{cases}$$


System: T1
Peak amplitude: 1.65
Overshoot (%): 64.6
At time (seconds): 4
Step Response
Amplitude
Time (seconds)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50