Análise da Resposta em Frequência
Diagramas de Bode

Profa. Cristiane Paim

Introdução

O termo ***resposta em frequência*** representa a resposta em regime permanente de um sistema para uma entrada senoidal.

Considere um sistema descrito por sua função de transferência

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$$

e uma entrada senoidal do tipo

$$r(t) = \mathrm{A}\ sen(\omega t)$$

Introdução

No domínio da frequência

$$R(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Sendo o sistema linear, estável e invariante no tempo, sua resposta será definida por

$$Y(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} G(s)$$

Na resposta em regime permanente as parcelas associadas aos polos tenderão para zero, uma vez que o sistema é estável, restando apenas a parcela associada à entrada senoidal.

Introdução

Assim, em regime permanente tem-se:

$$y_{\infty} = \mathrm{A}\left|\mathrm{G}(\mathrm{j}\omega)\right|\left\{\frac{e^{j(\omega t+\phi)} - e^{-j(\omega t+\phi)}}{2j}\right\}$$

ou

$$y_{\infty} = \mathrm{B}\ sen(\omega t + \phi)$$

sendo

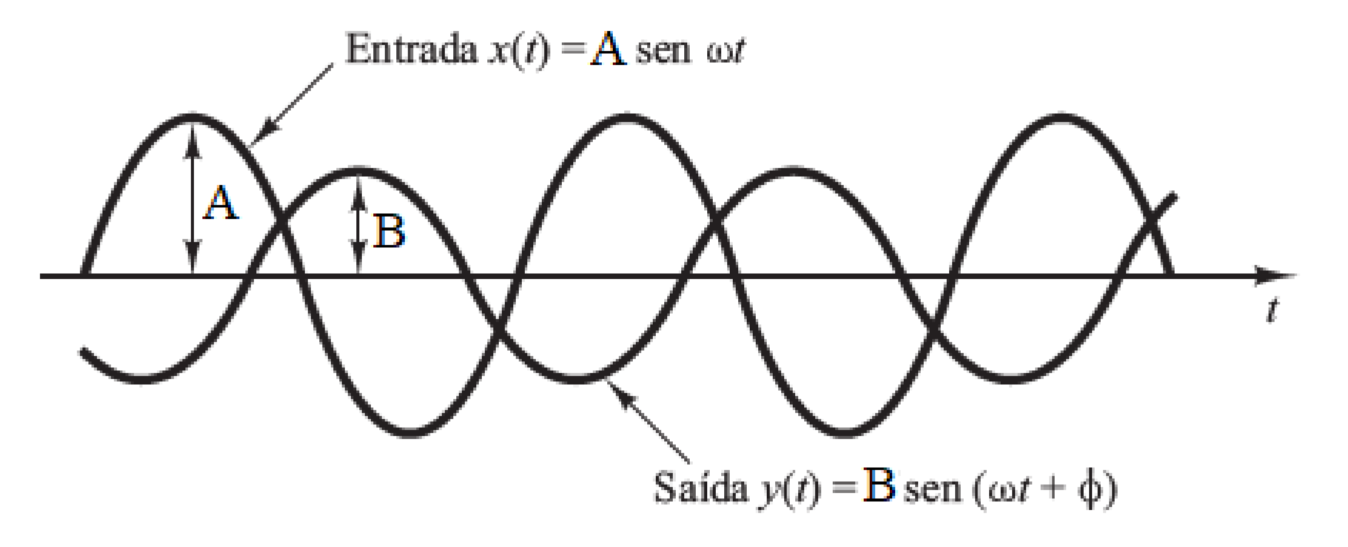
e

$$\mathrm{B} = \mathrm{A}\left|\mathrm{G}(\mathrm{j}\omega)\right|$$

$$\phi = \angle\mathrm{G}(\mathrm{j}\omega)$$

Introdução

Portanto, a saída em regime permanente de um sistema submetido a uma entrada senoidal é também senoidal com amplitude B defasada da entrada por um fator ϕ.



$$B = A\left|G(j\omega)\right|$$

$$\phi = \angle G(j\omega)$$

Introdução

Deste modo, as características da resposta em regime permanente de um sistema sujeito a uma entrada senoidal são diretamente obtidas da chamada **Função de Transferência Senoidal**:

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)}$$

A análise da resposta em frequência pode ser feita utilizando três representações:

- Diagramas de Bode
- Carta de Nichols
- Diagramas Polares

Introdução

- **Diagramas de Bode**

  Gráfico logarítmico de módulo (em dB)

  Gráfico logarítmico de fase (em graus)

- **Carta de Nichols**

  Gráfico de módulo (em dB) *versus* fase (em graus)

- **Diagrama de Polar**

  Gráfico $Re[G(j\omega)]$ *versus* $Im[G(j\omega)]$

Diagramas de Bode

Seja a função de transferência

$$G(j\omega) = K\,\frac{(\mathrm{j}\omega + z_1)(\mathrm{j}\omega + z_2)\cdots(\mathrm{j}\omega + z_m)}{(\mathrm{j}\omega + p_1)(\mathrm{j}\omega + p_2)\cdots(\mathrm{j}\omega + p_n)}$$

O módulo, em escala logarítmica, será definido por

$$\log\left|G(j\omega)\right| = \log K + \log\left|\mathrm{j}\omega + z_1\right| \cdots + \log\left|\mathrm{j}\omega + z_m\right| + \\ -\log\left|\mathrm{j}\omega + p_1\right| \cdots - \log\left|\mathrm{j}\omega + p_n\right|$$

Em decibéis:

$$\left|G(j\omega)\right|_{\mathrm{dB}} = 20\log\left|G(j\omega)\right|$$

Diagramas de Bode

A fase, será definida por:

$$\begin{aligned}\angle G(j\omega) = \angle(\mathrm{j}\omega + z_1) + \cdots + \angle(\mathrm{j}\omega + z_m) + \\ - \angle(\mathrm{j}\omega + p_1) - \cdots - \angle(\mathrm{j}\omega + p_n)\end{aligned}$$

Desse modo as curvas de módulo e fase podem ser obtidas da soma das curvas associadas a cada termo da função de transferência (ganho, fatores integrais e derivativos, fatores de 1ª e 2ª ordem).

Diagramas de Bode – Ganho (K)

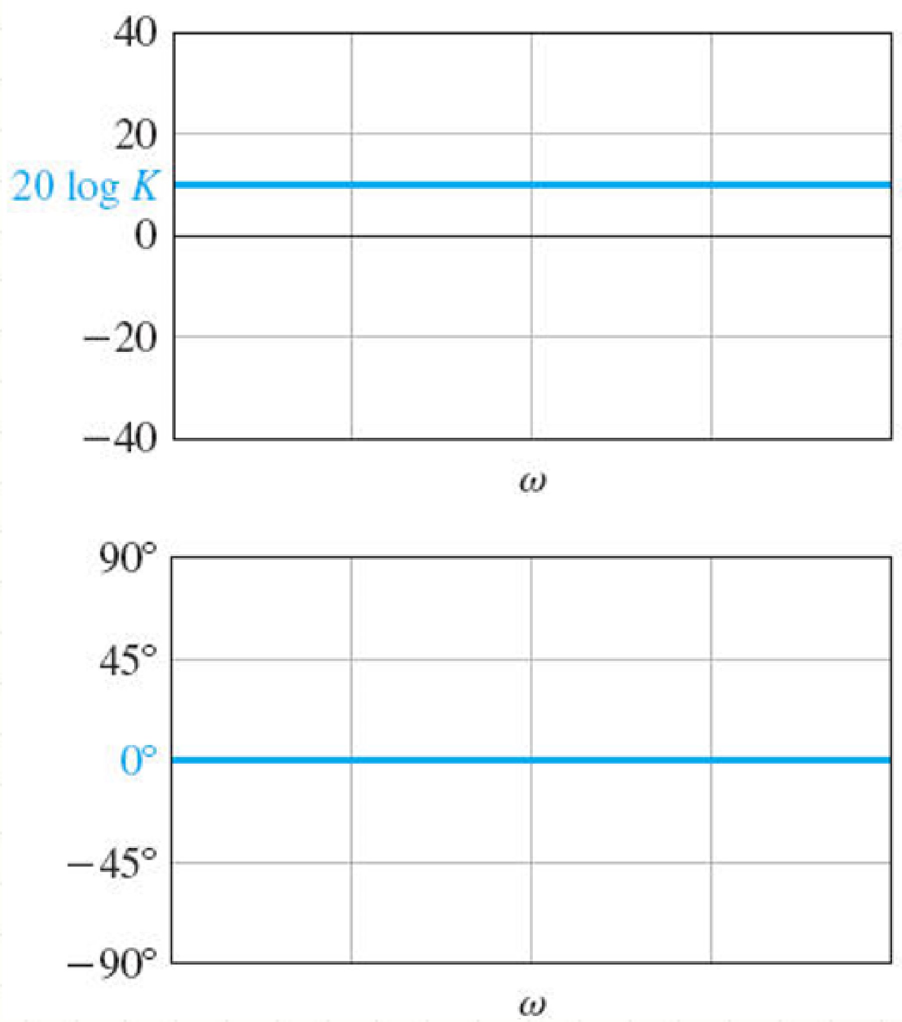
Neste caso:

$$G(j\omega) = K$$

Tem-se:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log K$$

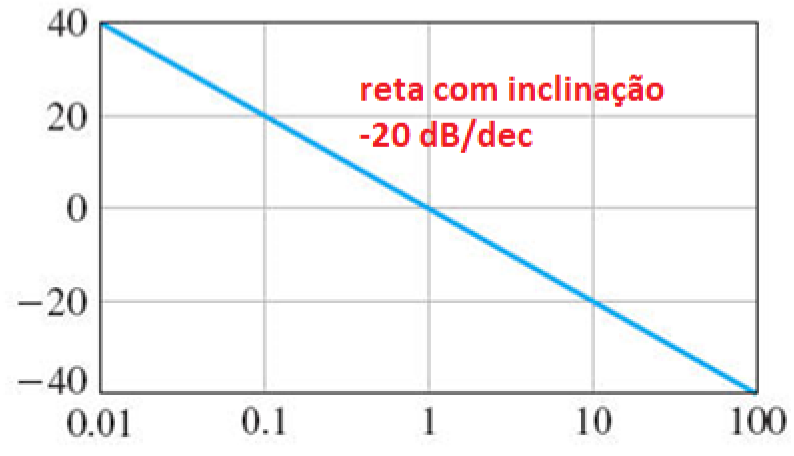
$$\angle G(j\omega) = \angle K = 0^\circ$$



Diagramas de Bode – Fatores Integrais ou Derivativos (polos ou zeros na origem)

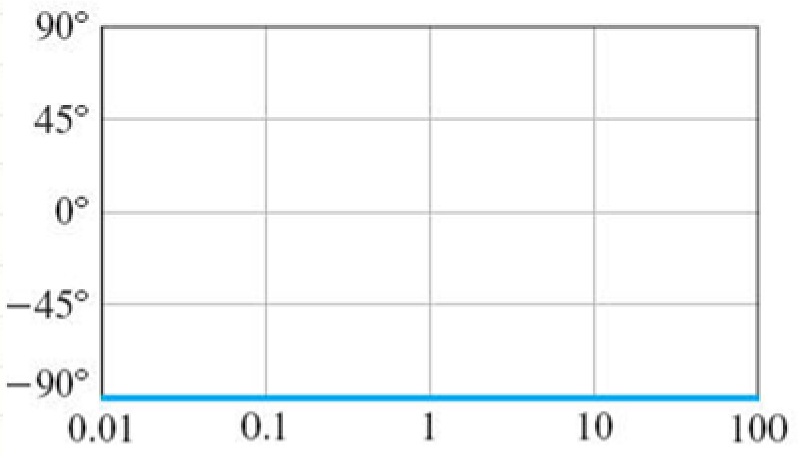
Polo na origem

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$



$$|G(j\omega)|_{dB} = -20\log\omega$$

$$\angle G(j\omega) = -90^\circ$$



Multiplicidade n:

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20 \times n\log\omega$$

$$\angle G(j\omega) = -90^\circ \times n$$

Diagramas de Bode – Fatores Integrais ou Derivativos (polos ou zeros na origem)

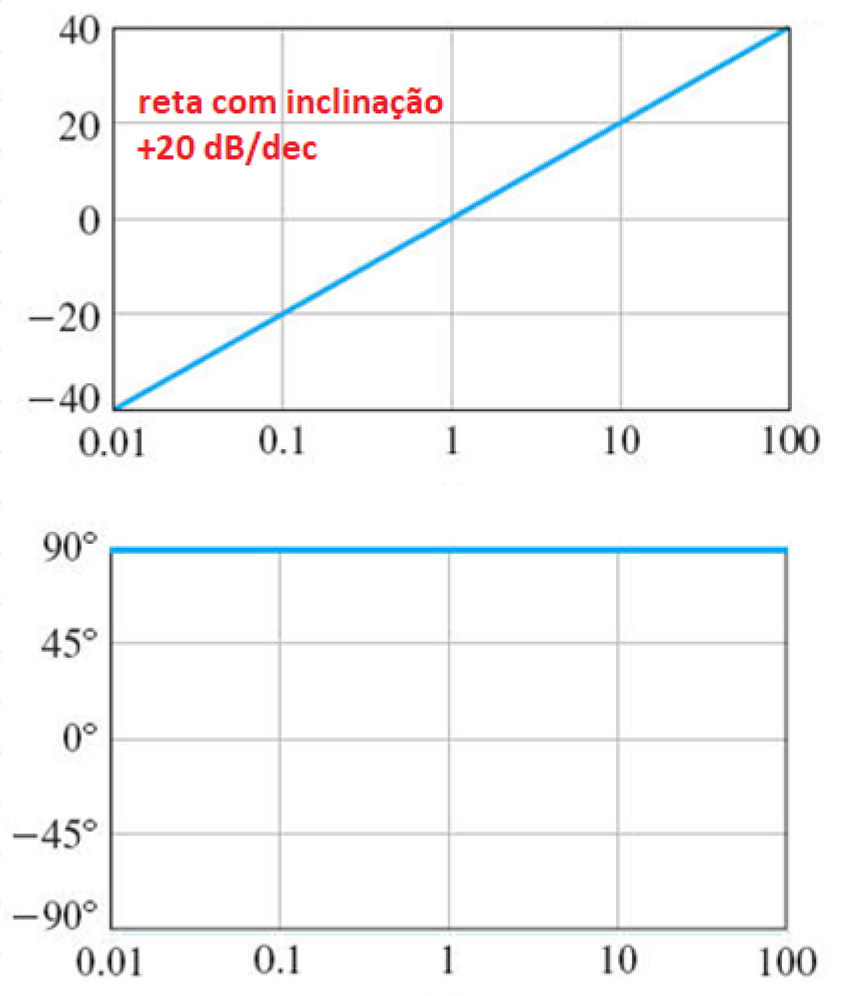
Zero na origem

$$G(j\omega) = j\omega$$

$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} = 20\log\omega$$
$$\angle G(j\omega) = 90^\circ$$

Multiplicidade n:

$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} = 20\times n\log\omega$$
$$\angle G(j\omega) = 90^\circ \times n$$



Diagramas de Bode – Polo de 1ª ordem

Polo de 1ª ordem

$$G(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega T}$$

$$\left|G(j\omega)\right|_{dB}=-20\log\sqrt{1+(\omega T)^2}$$

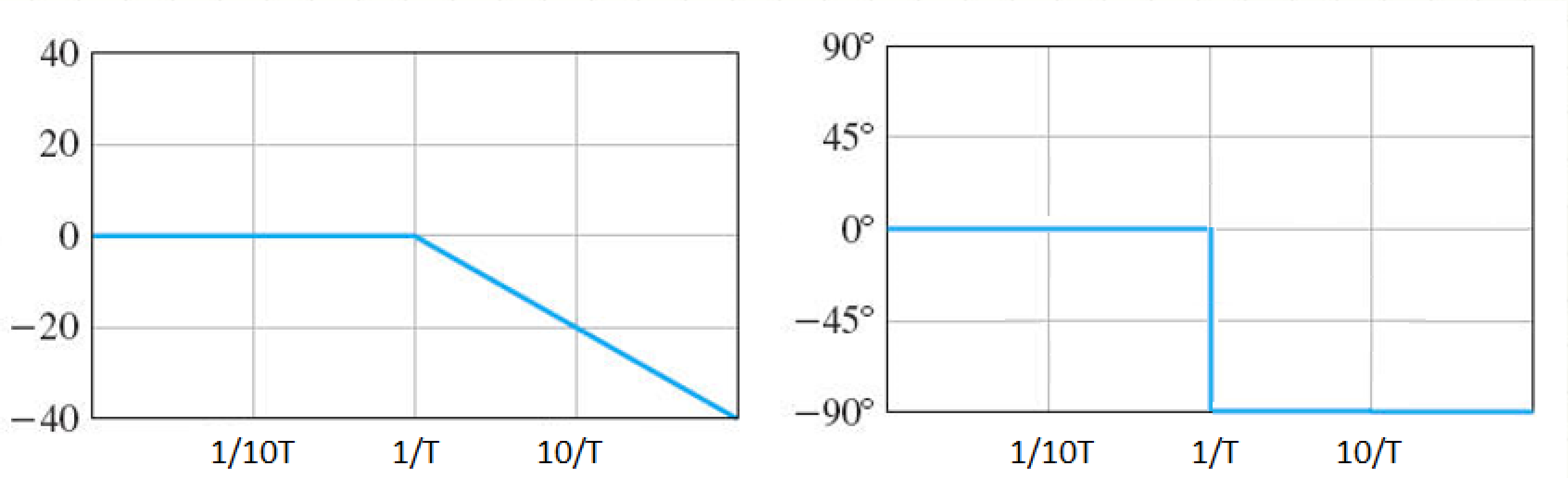
$$\angle G(j\omega)=-\mathrm{tg}^{-1}(\omega T)$$

Em frequências baixas ($\omega << 1/T$) e altas ($\omega >> 1/T$), tem-se:

Frequência	Módulo	Fase
$\omega << 1/T$	Reta com inclinação 0 dB	0°
$\omega >> 1/T$	Reta com inclinação -20 dB/dec	-90°

Diagramas de Bode – Polo de 1ª ordem

Assintoticamente tem-se:



Na curva real, para $\omega = 1/T$:

$$\left|G\right|_{dB} = -20\log\sqrt{2} = -3dB$$

$$\angle G = -45^{\circ}$$

Exemplo – Polo Simples

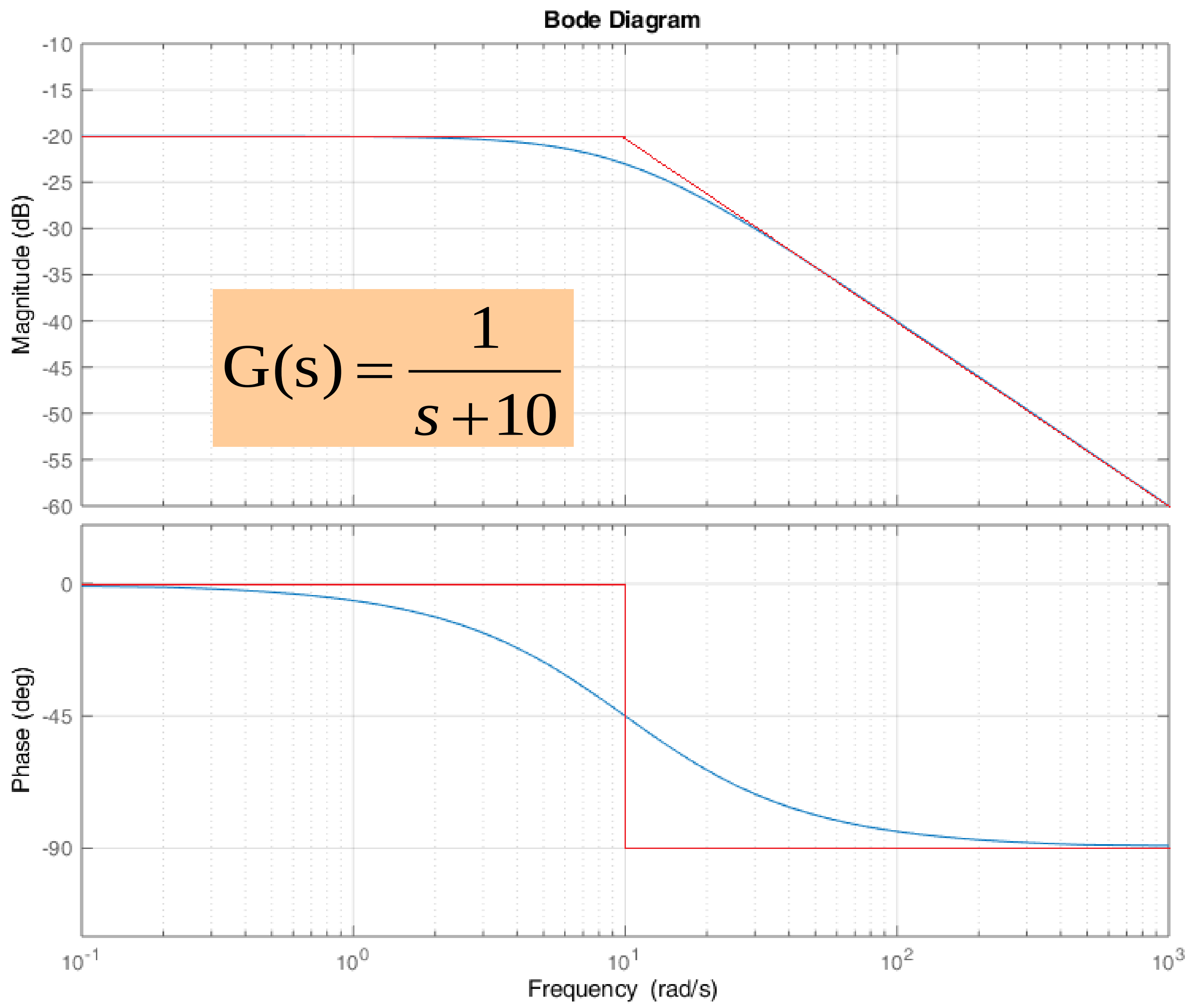
Seja a função de transferência com um polo real:

$$\mathrm{G}(s)=\frac{1}{s+10} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{G}(j\omega)=\frac{0{,}1}{1+j\omega/10}$$

Valores reais:

Frequência	Módulo	Fase
$\omega = 0{,}1$	-20 dB	0°
$\omega = 1$	-20 dB	-6°
$\omega = 10$	-23 dB	-45°
$\omega = 100$	-40 dB	-84°
$\omega = 1000$	-60 dB	-90°

Exemplo – Polo Simples



$$G(s) = \frac{1}{s+10}$$

Diagramas de Bode – Polo de 1ª ordem com multiplicidade

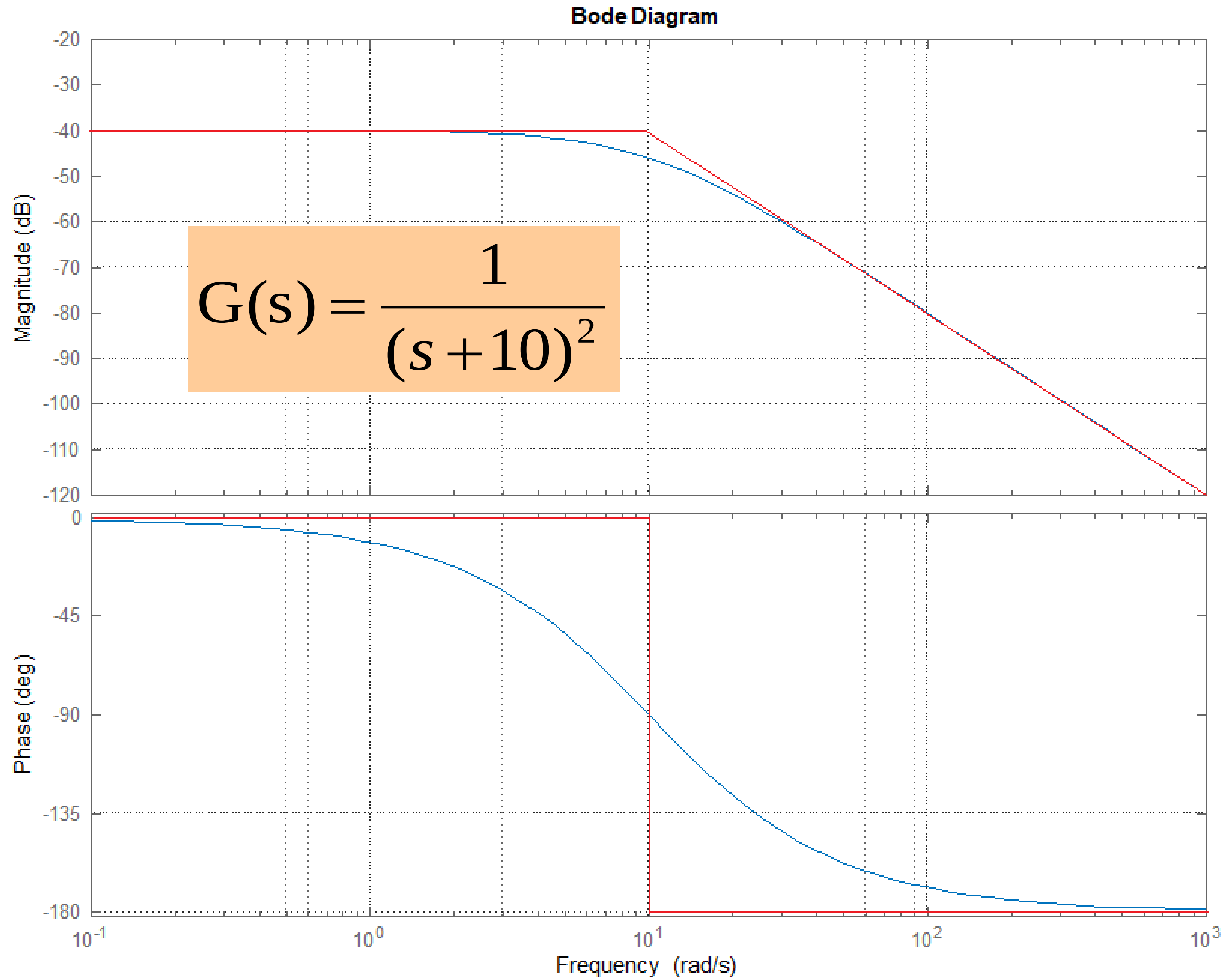
Seja um sistema com um polo real de multiplicidade n:

$$\mathrm{G}(j\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega T)^{n}}$$

$$\left|\mathrm{G}(j\omega)\right|_{\mathrm{dB}} = -20 \times \mathrm{n} \times \log \sqrt{1 + (\omega T)^{2}}$$

$$\angle \mathrm{G}(j\omega) = -\mathrm{n} \times \mathrm{tg}^{-1}(\omega T)$$

Exemplo – Polo Duplo



$$G(s) = \frac{1}{(s+10)^2}$$

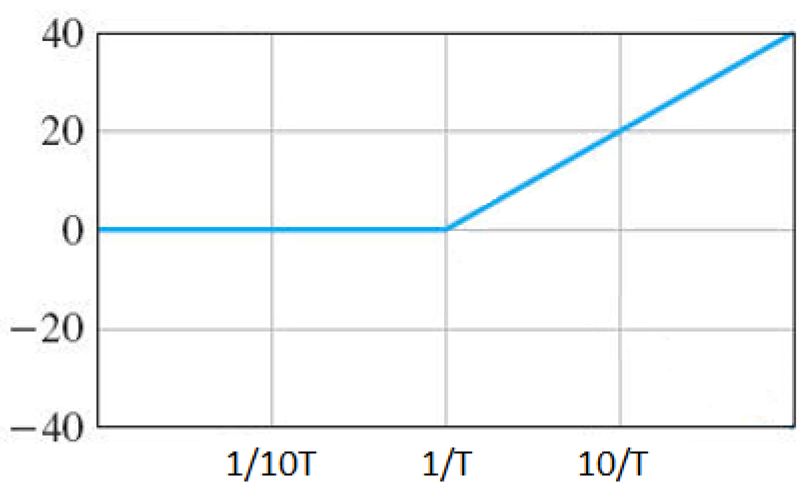
Diagramas de Bode – Zero de 1ª ordem

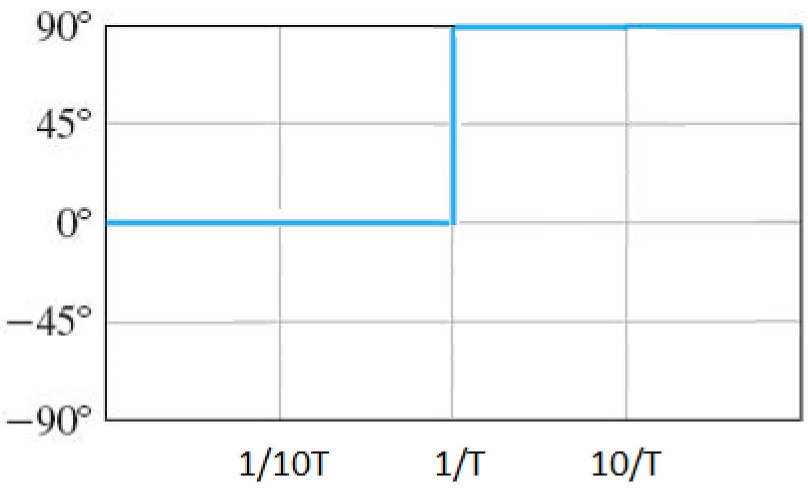
Zero de 1ª ordem

$$G(j\omega) = 1 + j\omega T$$

$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} = 20\log\sqrt{1+(\omega T)^2}$$

$$\angle G(j\omega) = \text{tg}^{-1}(\omega T)$$





Diagramas de Bode – Polos complexos

Polos complexos (0 < ξ < 1)

$$\mathrm{G}(j\omega)=\frac{1}{1+2\xi\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)+\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Neste caso, o módulo é dado por:

$$\left|\mathrm{G}(j\omega)\right|=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

Diagramas de Bode – Polos complexos

E a fase:

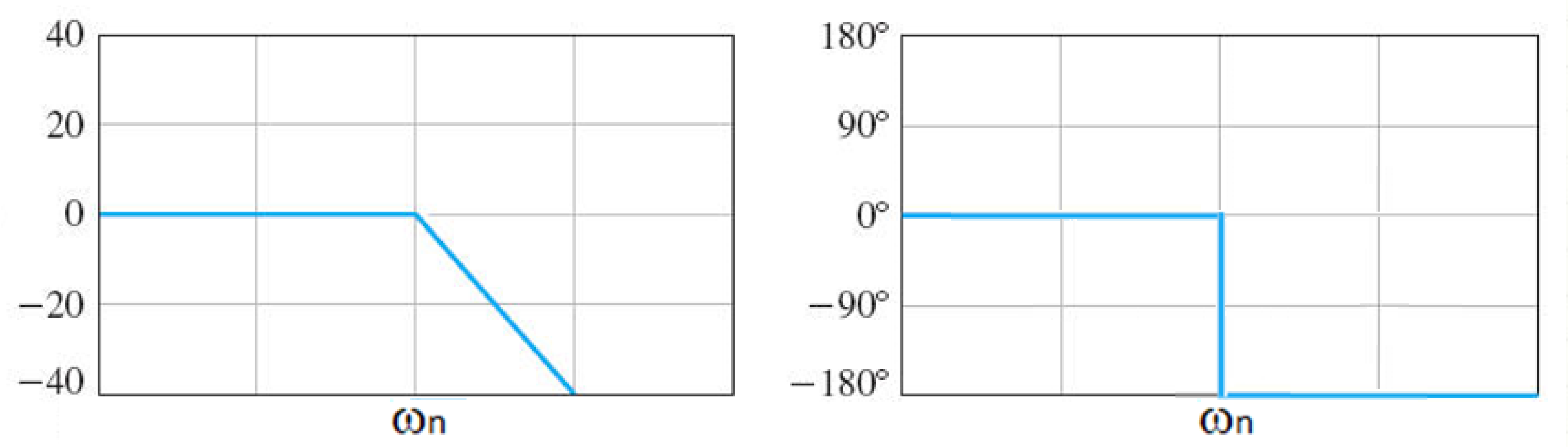
$$\angle G(j\omega) = -\mathrm{tg}^{-1}\left[\frac{2\xi\left(\omega/\omega_n\right)}{1-\left(\omega^2/\omega_n^2\right)}\right]$$

Em frequências baixas ($\omega \ll \omega_n$) e altas ($\omega \gg \omega_n$), tem-se:

Frequência	Módulo	Fase
$\omega \ll \omega_n$	Reta com inclinação 0 dB/dec	0°
$\omega \gg \omega_n$	Reta com inclinação -40 dB/dec	-180°

Diagramas de Bode – Polos complexos

Assintoticamente tem-se:



Na curva real, a transição de baixa para alta frequência depende do valor do coeficiente de amortecimento ξ, podendo existir picos no gráfico de módulo.

Diagramas de Bode – Polos complexos

Para $0 < \xi < 0{,}707$ ocorrem picos de ressonância.

A **frequência de ressonância** é determinada por:

$$\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

e o **pico de ressonância** dado por:

$$M_R = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

Diagramas de Bode – Polos complexos

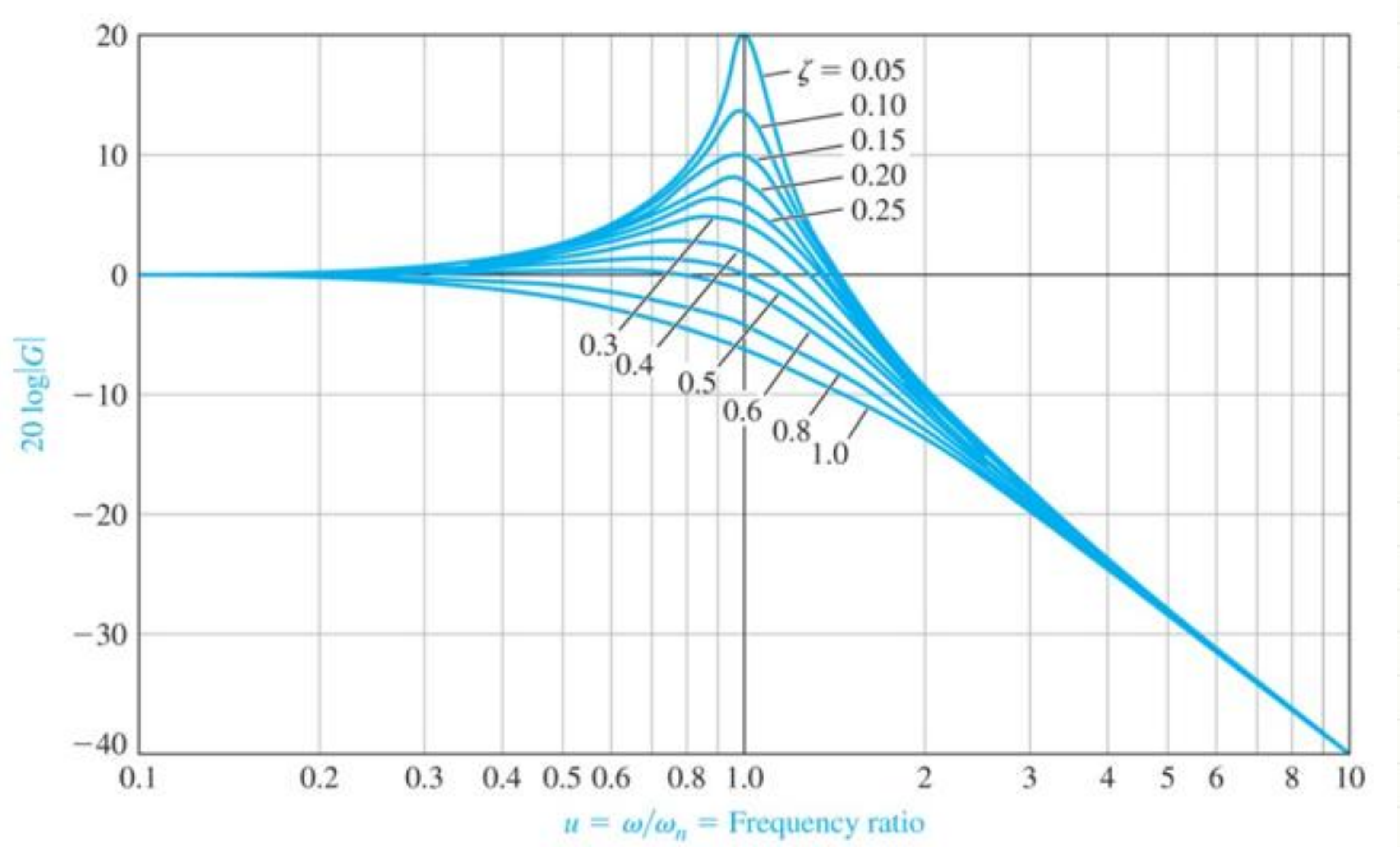
A curva de fase também depende do valor do coeficiente de amortecimento ξ:

$$\angle G(j\omega_R) = -\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-2\xi^2}}{\xi}\right)$$

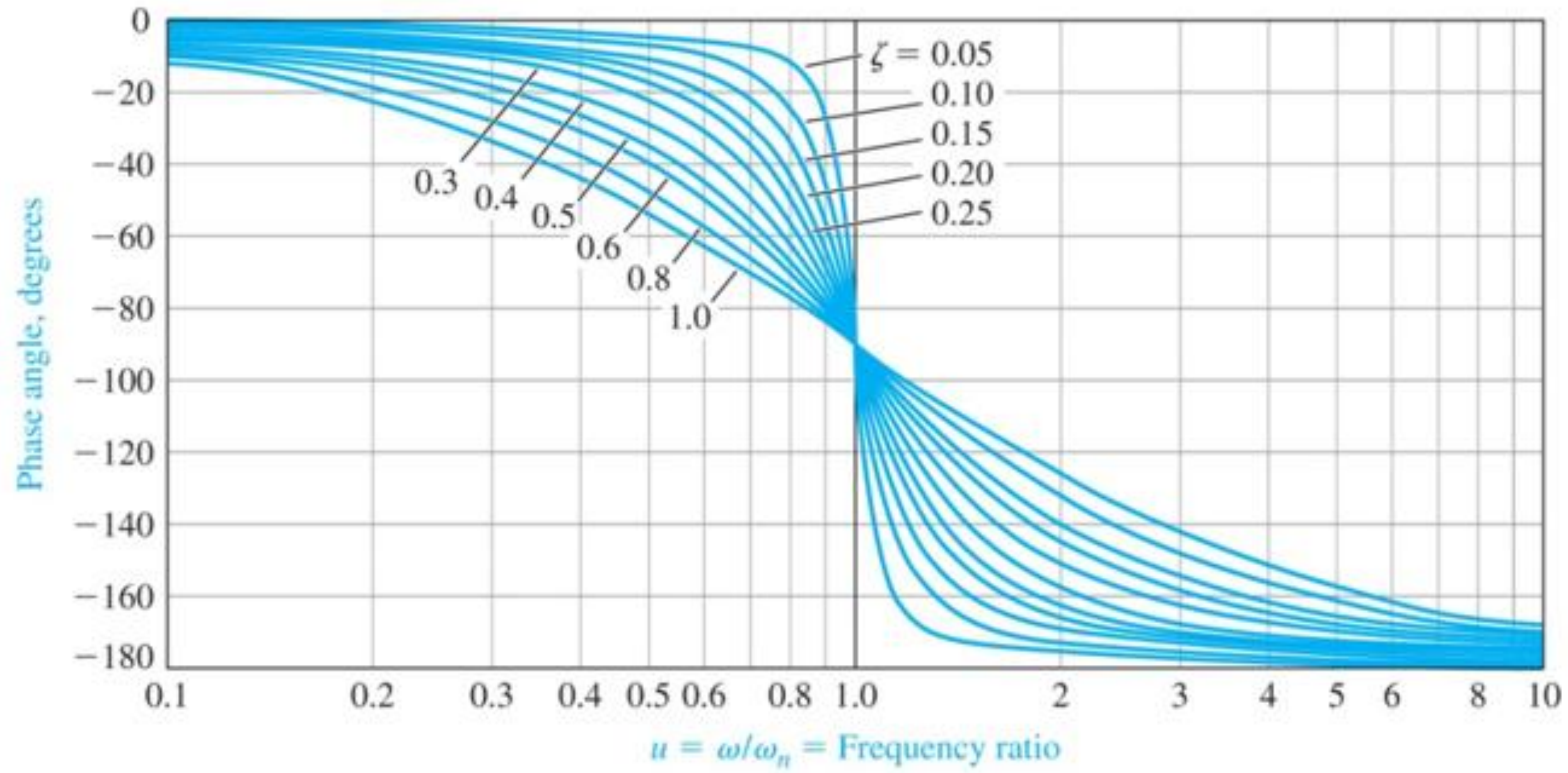
ou

$$\angle G(j\omega_R) = -90^\circ + \mathrm{sen}^{-1}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-2\xi^2}}\right)$$

Diagramas de Bode – Polos complexos (Módulo em função de ξ)



Diagramas de Bode – Polos complexos (Fase em função de ξ)



Exemplo 1 – Polos e zeros complexos

Traçar os diagramas de Bode para:

$$G(s) = 0{,}01\frac{s^2 + 0{,}01s + 1}{s^2(0{,}25s^2 + 0{,}01s + 1)}$$

$$\begin{cases} \xi = 0{,}005 \\ \omega_n = 1 \end{cases}$$

Em frequência:

$$\mathrm{G}(j\omega) = 0{,}01\frac{1 + 2\times 0{,}005(j\omega) + (j\omega)^2}{(j\omega)^2\left[1 + 2\times 0{,}01\left(\frac{j\omega}{2}\right) + \left(\frac{j\omega}{2}\right)^2\right]}$$

$$\begin{cases} \xi = 0{,}01 \\ \omega_n = 2 \end{cases}$$

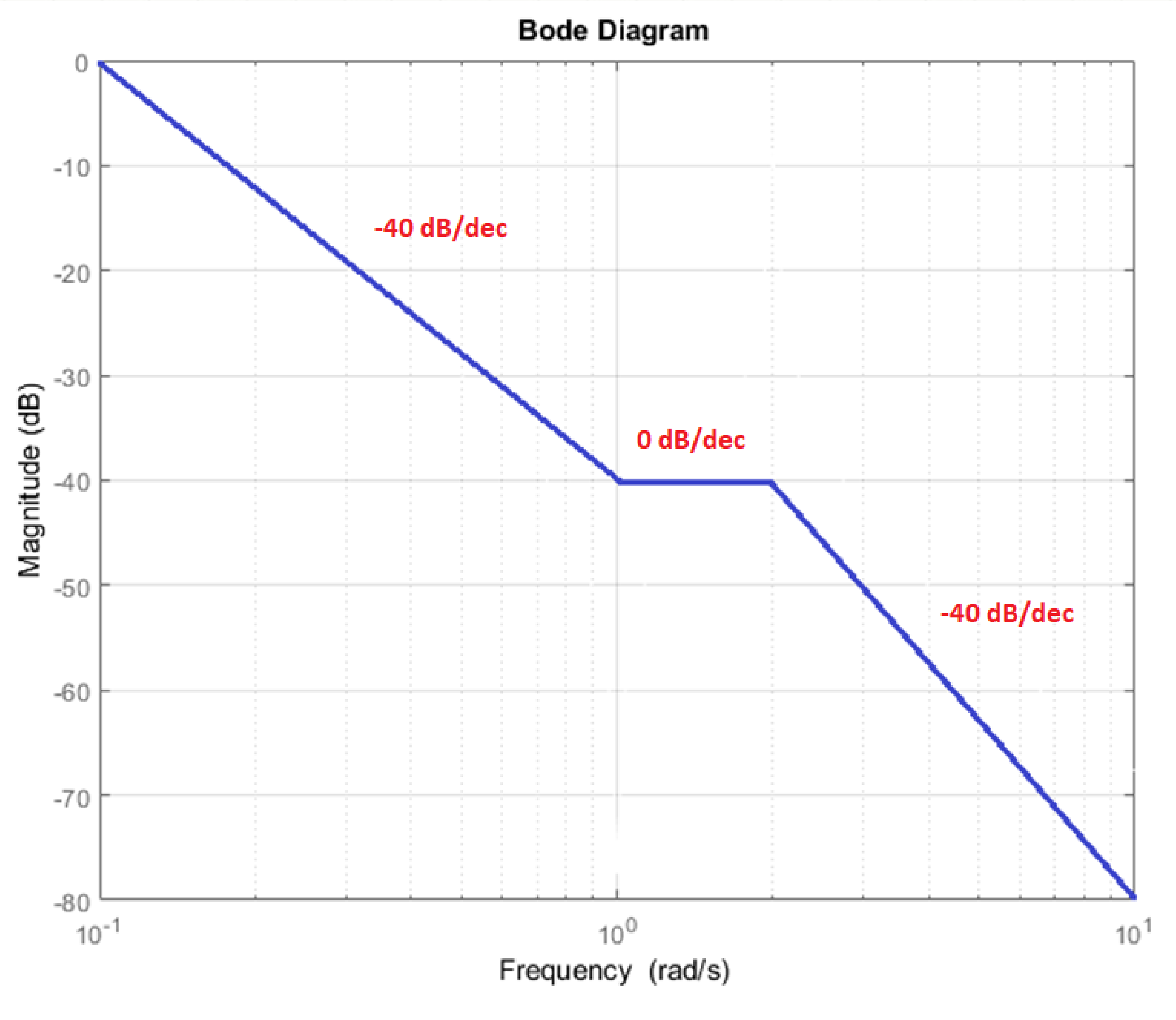
Exemplo 1 – Polos e zeros complexos

Variação e assíntotas de módulo

Faixa de Frequência	Variação do Módulo
$\omega = 0$ a $\omega = 1$	Reta com inclinação -40 dB/dec
$\omega = 1$ a $\omega = 2$	Reta com inclinação 0 dB/dec
$\omega = 2$ a $\omega \to \infty$	Reta com inclinação -40 dB/dec

Frequência	Valor assintótico de módulo
$\omega = 0{,}1$	0 dB
$\omega = 1$	-40 dB
$\omega = 2$	-40 dB
$\omega = 20$	-80 dB

Exemplo 1 – Polos e zeros complexos (gráfico assintótico de módulo)



Exemplo 1 – Polos e zeros complexos

1º Pico de Ressonância

$$\omega_n = 1 \quad \rightarrow \quad \omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \approx 1$$

$$M_R = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = 100 \quad \text{ou} \quad M_R = 40\text{dB}$$

Em ω=1 ocorre o primeiro pico de ressonância.

Nesta frequência o valor de módulo é -40-40 = -80 dB.

pico de ressonância

valor assintótico

Exemplo 1 – Polos e zeros complexos

2º Pico de Ressonância

$$\omega_n = 2 \quad \rightarrow \quad \omega_R = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2} \approx 2$$

$$M_R = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = 50 \quad \text{ou} \quad M_R = 34\text{dB}$$

Em ω=2 ocorre o segundo pico de ressonância.

Nesta frequência o valor de módulo é -40+34=-6 dB.

pico de ressonância

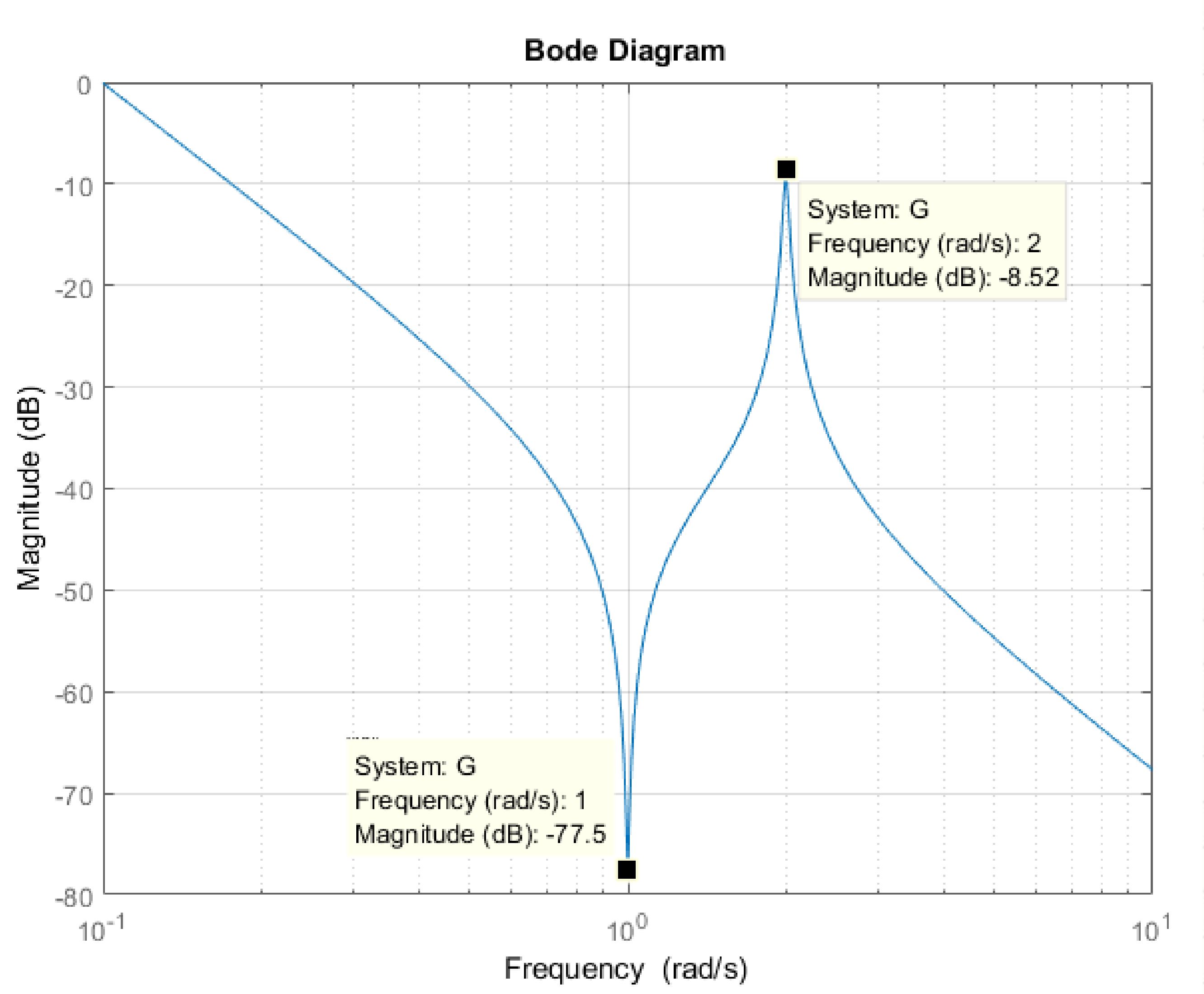
valor assintótico

Exemplo 1 – Polos e zeros complexos

Valores reais e assintóticos de módulo

Frequência	Assintótico	Real
$\omega = 0,1$	0 dB	0 dB
$\omega = 1$	-40 dB	-77,5 dB
$\omega = 2$	-40 dB	-8,5 dB
$\omega = 20$	-80 dB	-80 dB

Exemplo 1 – Polos e zeros complexos (Gráfico de módulo)



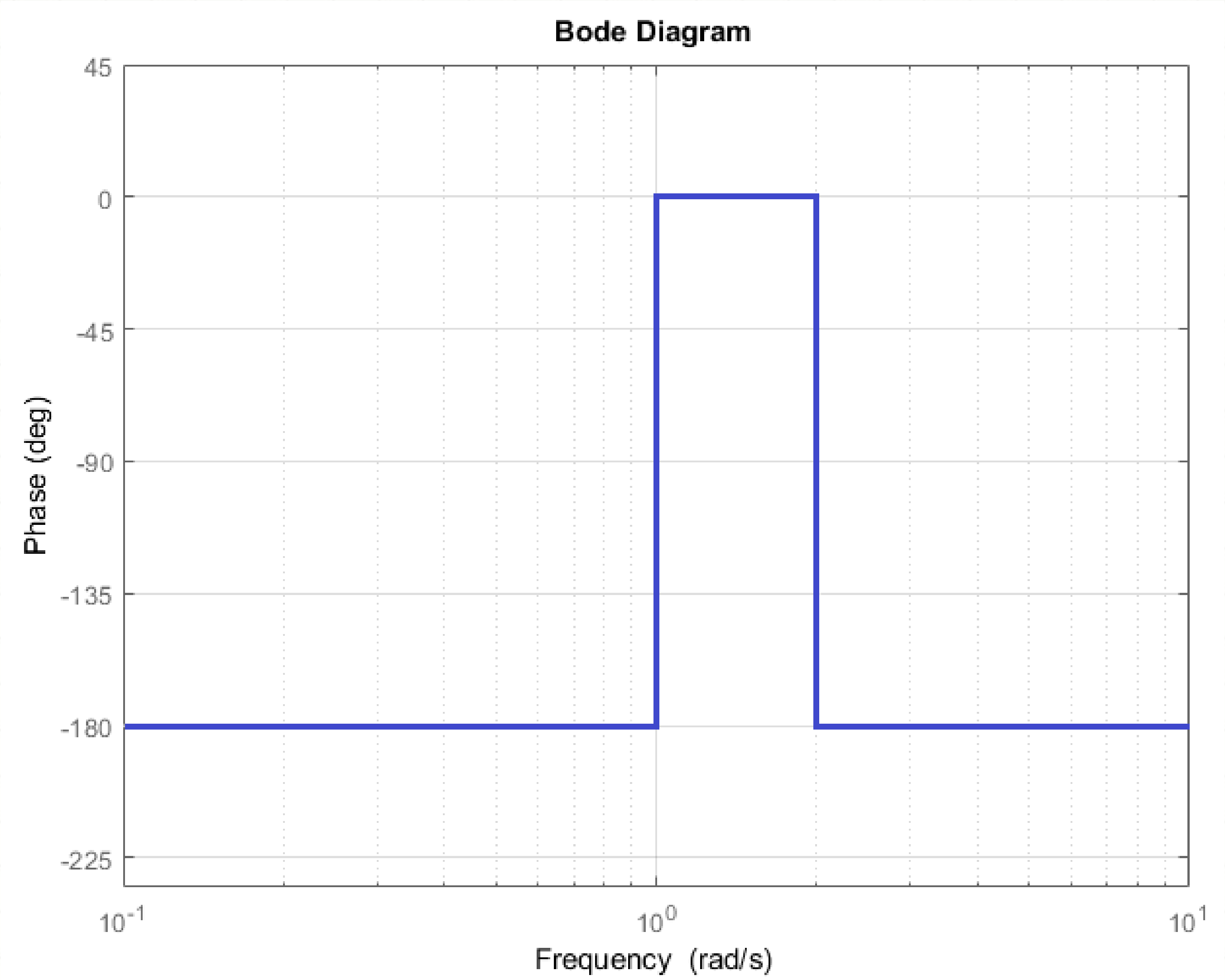
Exemplo 1 – Polos e zeros complexos

Variação e assíntotas de fase

Faixa de Frequência	Fase
$\omega = 0$ a $\omega = 1$	-180°
$\omega = 1$ a $\omega = 2$	0°
$\omega = 2$ a $\omega \to \infty$	-180°

Frequência	Valor assintótico de fase
$\omega = 0{,}1$	-180°
$\omega = 1$	-90°
$\omega = 2$	-90°
$\omega = 20$	-180°

Exemplo 1 – Polos e zeros complexos (Gráfico assintótico de fase)



Exemplo 1 – Polos e zeros complexos

Fase nas frequências de ressonância (ω_R=1 e ω_R=2)

$$\angle G(j\omega_R) = -\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-2\xi^2}}{\xi}\right)$$

$$\omega_R = 1 \quad \rightarrow \quad \angle G(j\omega_R) = -90{,}3^\circ$$

$$\omega_R = 2 \quad \rightarrow \quad \angle G(j\omega_R) = -90{,}6^\circ$$

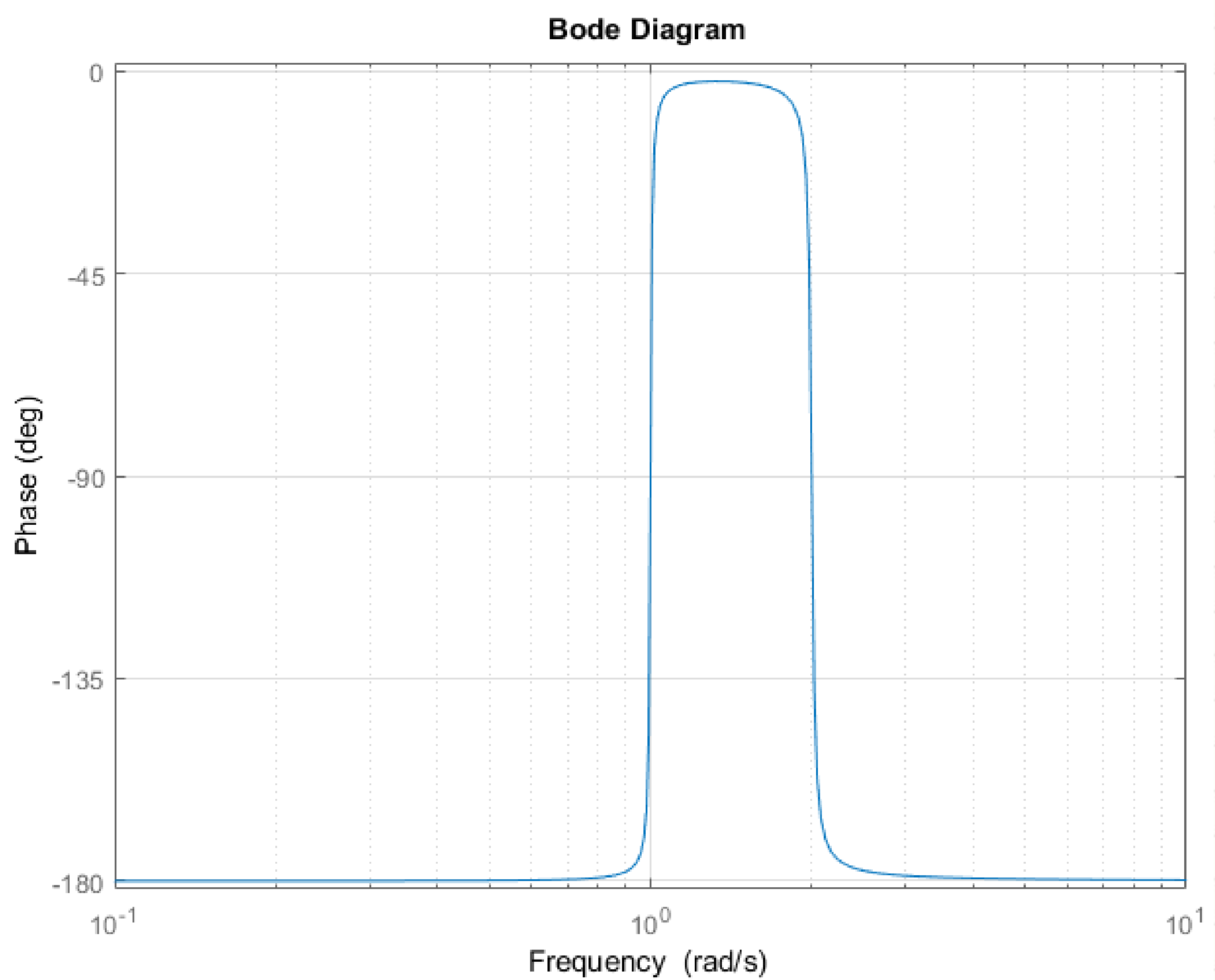
Uma vez que $\omega_R \approx \omega_n$, os valores de fase reais associados são aproximadamente iguais.

Exemplo 1 – Polos e zeros complexos

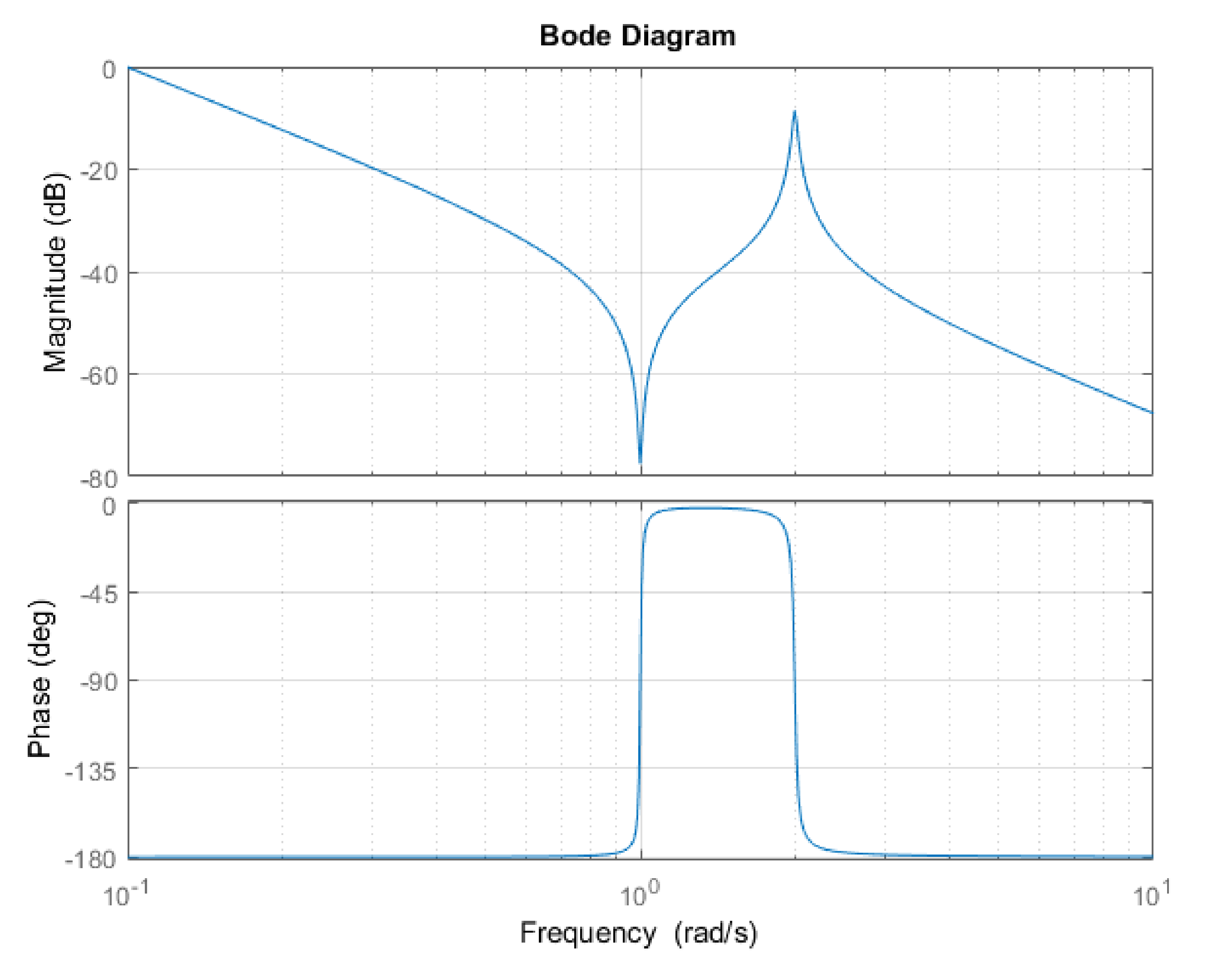
Valores reais e assintóticos de fase

Frequência	Assintótico	Real
$\omega = 0,1$	-180°	-180°
$\omega = 1$	-90,3°	-90,7°
$\omega = 2$	-90,6°	-90,4°
$\omega = 20$	-180°	-180°

Exemplo 1 – Polos e zeros complexos (Gráfico de Fase)



Exemplo 1 – Polos e zeros complexos
Diagramas de Bode (módulo e fase)



Exemplo 2 – Polo de fase mínima x não mínima

Sejam os sistemas representados por G_1 (fase mínima) e G_2 (fase não mínima):

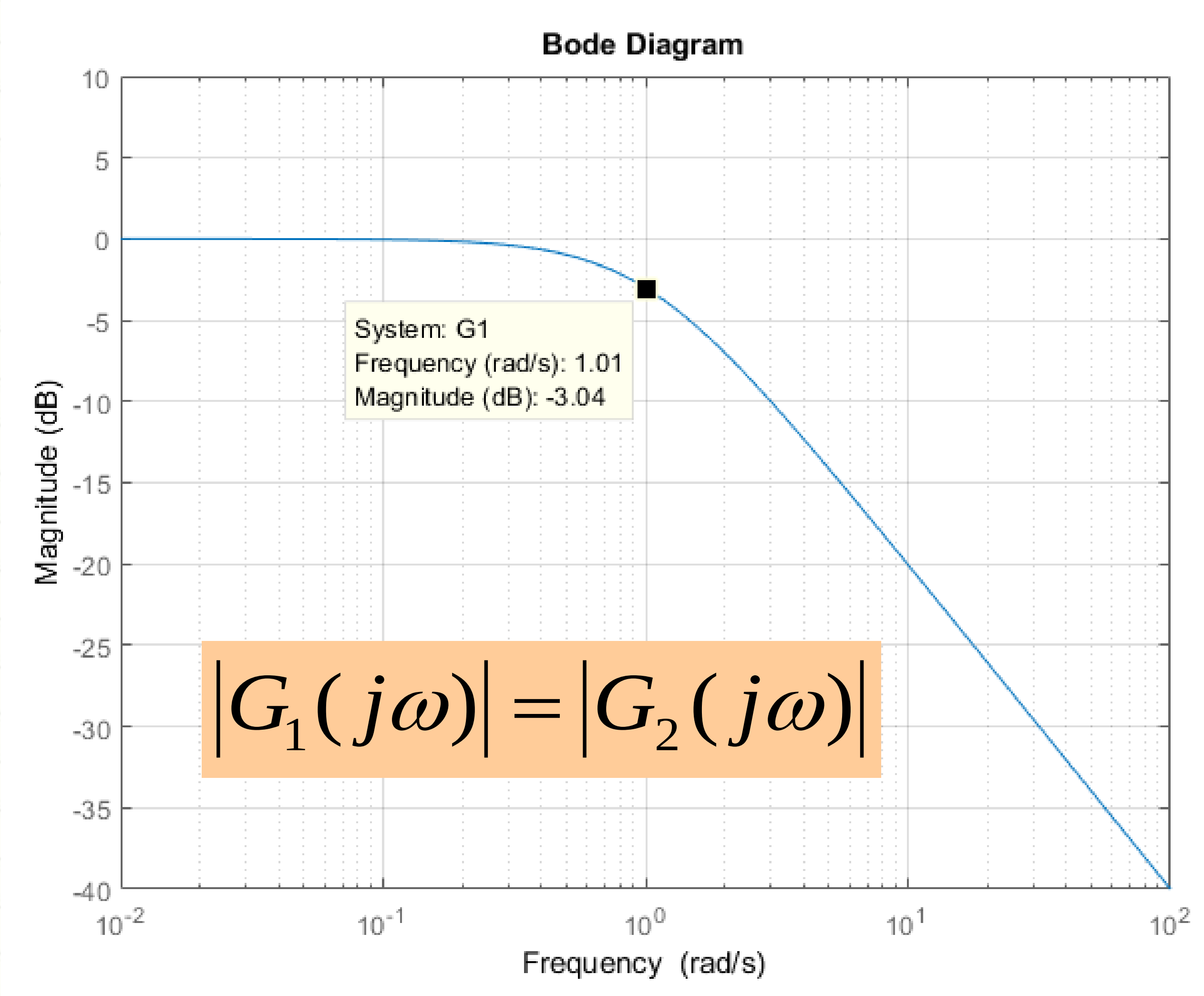
$$G_1(s) = \frac{1}{s+1} \quad \Rightarrow \quad G_1(j\omega) = \frac{1}{j\omega+1}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{s-1} \quad \Rightarrow \quad G_2(j\omega) = \frac{1}{j\omega-1}$$

O módulo será o mesmo para as duas funções de transferências:

$$|G_1(j\omega)| = |G_2(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$$

Exemplo 2 – Polo de fase mínima x não mínima (Gráfico de Módulo)



$$\left|G_1(j\omega)\right| = \left|G_2(j\omega)\right|$$

Exemplo 2 – Polo de fase mínima x não mínima

A fase de cada sistema será dada por:

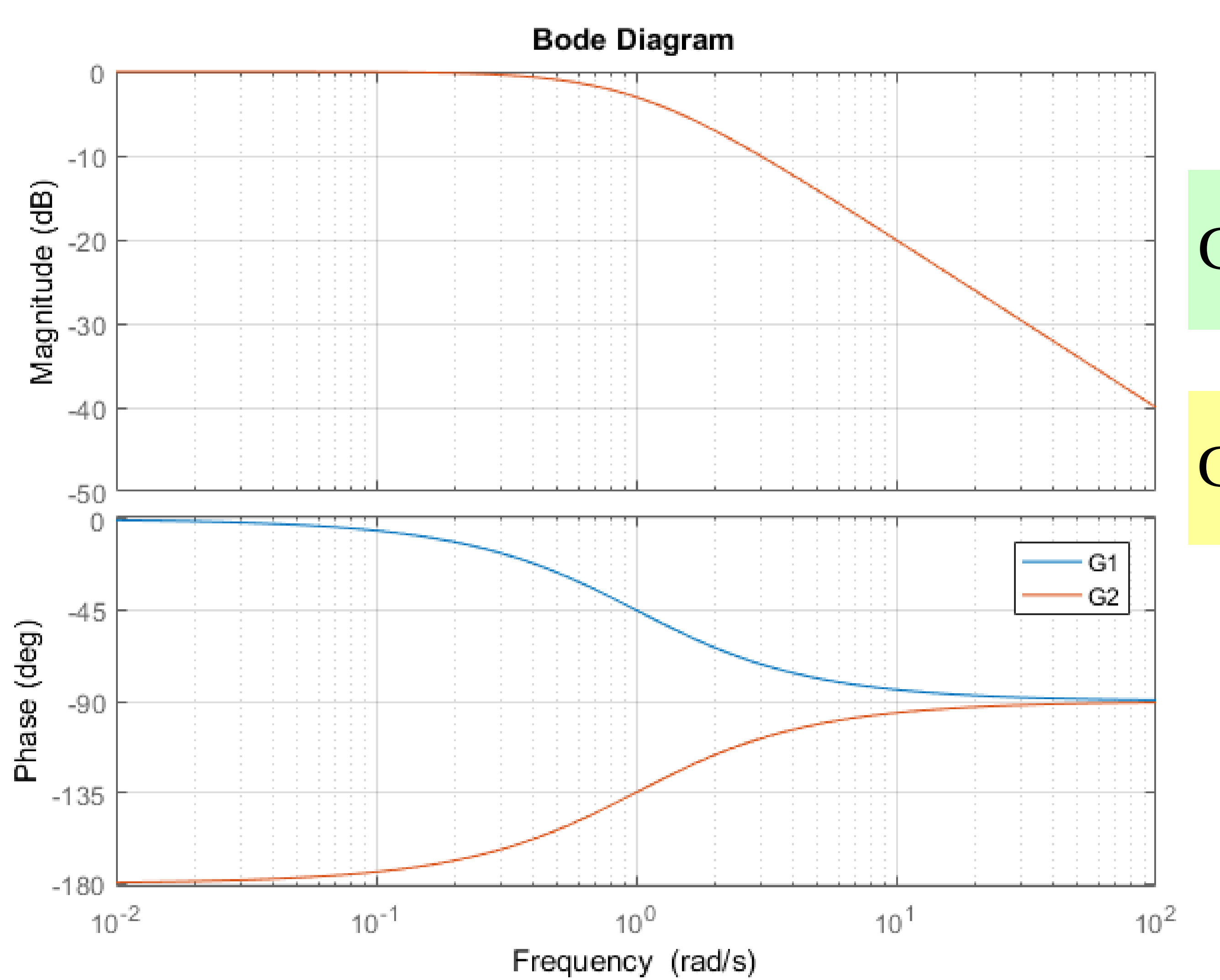
$$\angle G_1(j\omega) = -\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{1}\right)$$

a fase varia de 0 a -90°

$$\angle G_2(j\omega) = -\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{-1}\right)$$

a fase varia de -180° a -90°

Exemplo 2 – Polo de fase mínima x não mínima
Diagramas de Bode (módulo e fase)



$$G_1(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{s-1}$$

Exemplo 3 – Zero de fase mínima x não mínima

Seja agora um sistema com zero de fase não mínima:

$$G_3(s)=\frac{s+1}{s+10} \quad \Rightarrow \quad G_3(j\omega)=\frac{1}{10}\frac{j\omega+1}{j(\omega/10)+1}$$

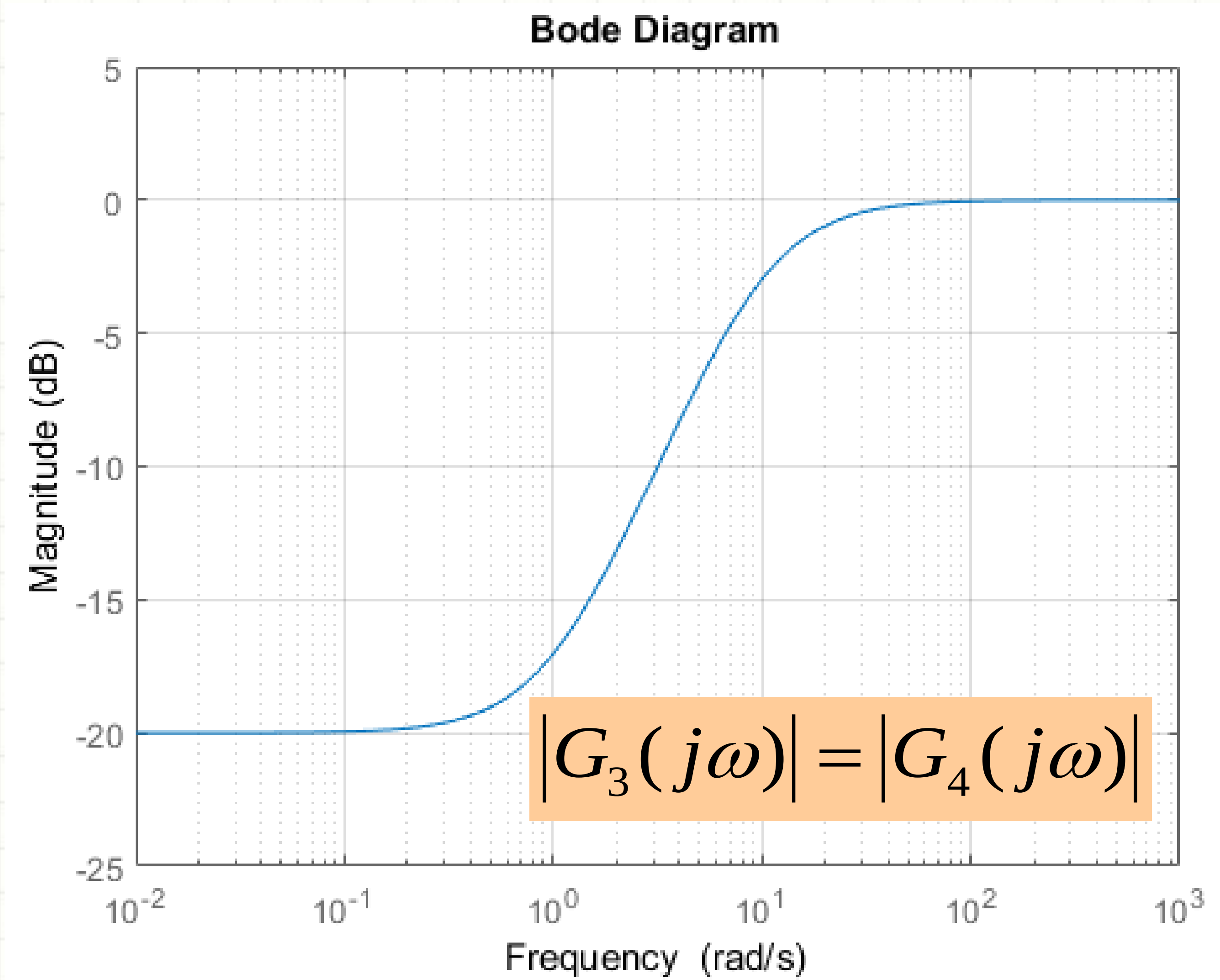
$$G_4(s)=\frac{s-1}{s+10} \quad \Rightarrow \quad G_4(j\omega)=\frac{1}{10}\frac{j\omega-1}{j(\omega/10)+1}$$

Exemplo 3 – Zero de fase mínima x não mínima

Novamente, o módulo será o mesmo para as duas funções:

$$\left|G_3(j\omega)\right| = \left|G_4(j\omega)\right| = 0{,}1\frac{\sqrt{1+\omega^2}}{\sqrt{1+(\omega/10)^2}}$$

Exemplo 3 – Zero de fase mínima x não mínima (Gráfico de Módulo)



$$\left|G_3(j\omega)\right| = \left|G_4(j\omega)\right|$$

Exemplo 3 – Zero de fase mínima x não mínima

Para a fase tem-se:

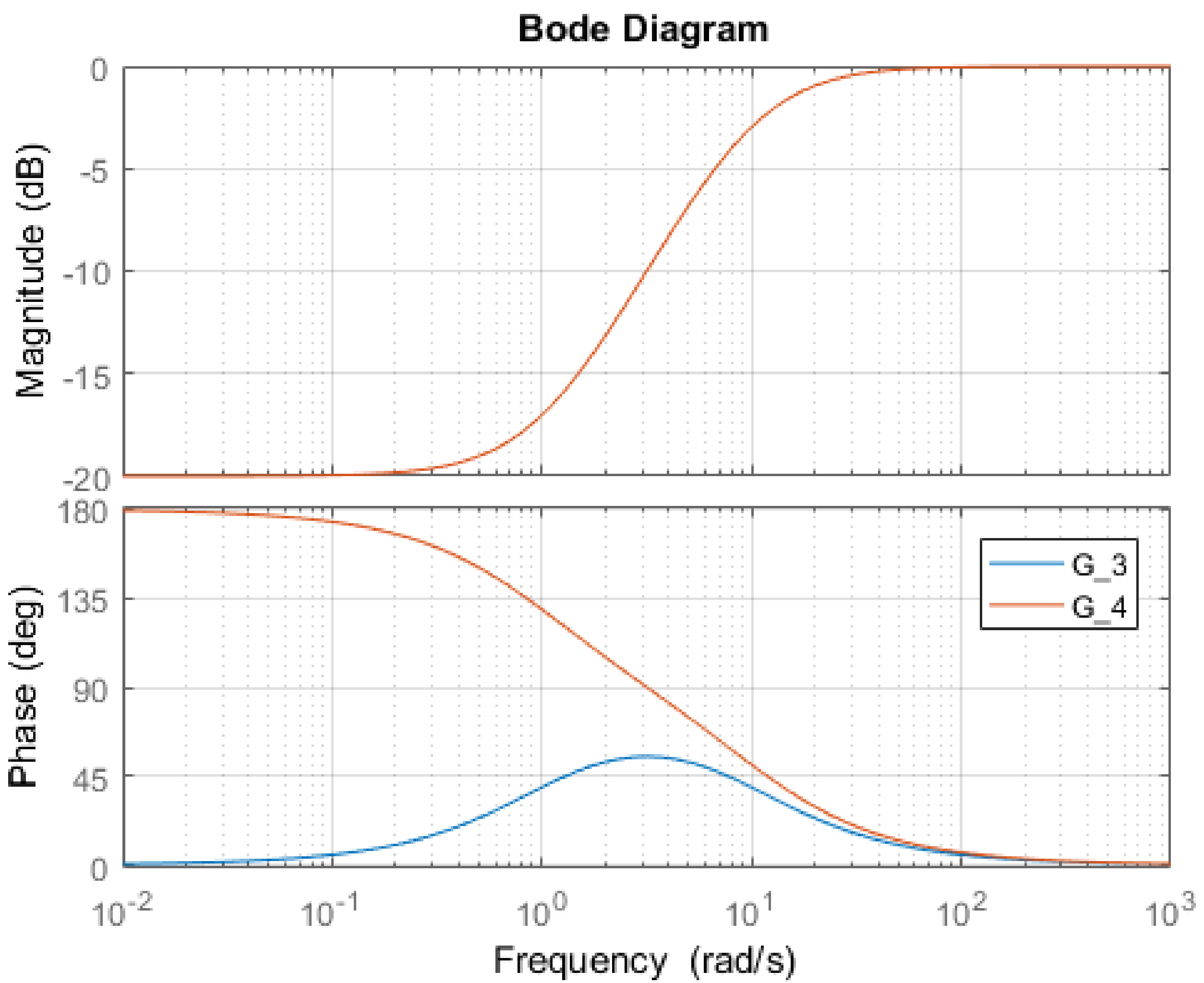
$$\angle G_3(j\omega) = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{1}\right) - \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\omega/10}{1}\right)$$

Para G_3 a fase varia de: $0 \rightarrow 90^\circ \rightarrow 0^\circ$

$$\angle G_4(j\omega) = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{-1}\right) - \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\omega/10}{1}\right)$$

Para G_4 a fase varia de: $180^\circ \rightarrow 90^\circ \rightarrow 0^\circ$

Exemplo 3 – Zero de fase mínima x não mínima
Diagramas de Bode (módulo e fase)



$$G_3(s)=\frac{s+1}{s+10}$$

$$G_4(s)=\frac{s-1}{s+10}$$

Exemplo 4 – Polo de fase não mínima

Traçar os diagramas de Bode para:

$$G(s) = 1000 \frac{s+1}{s(s-10)(s+100)}$$

$$\mathrm{G}(j\omega) = \frac{1 + j\omega}{(j\omega)\left(-1 + j\dfrac{\omega}{10}\right)\left(1 + j\dfrac{\omega}{100}\right)}$$

Exemplo 4 – Polo de fase não mínima

Faixa de Frequência	Variação do Módulo
$\omega = 0$ a $\omega = 1$	Reta com inclinação -20 dB/dec
$\omega = 1$ a $\omega = 10$	Reta com inclinação 0 dB/dec
$\omega = 10$ a $\omega = 100$	Reta com inclinação -20 dB/dec
$\omega = 100$ a $\omega \to \infty$	Reta com inclinação -40 dB/dec

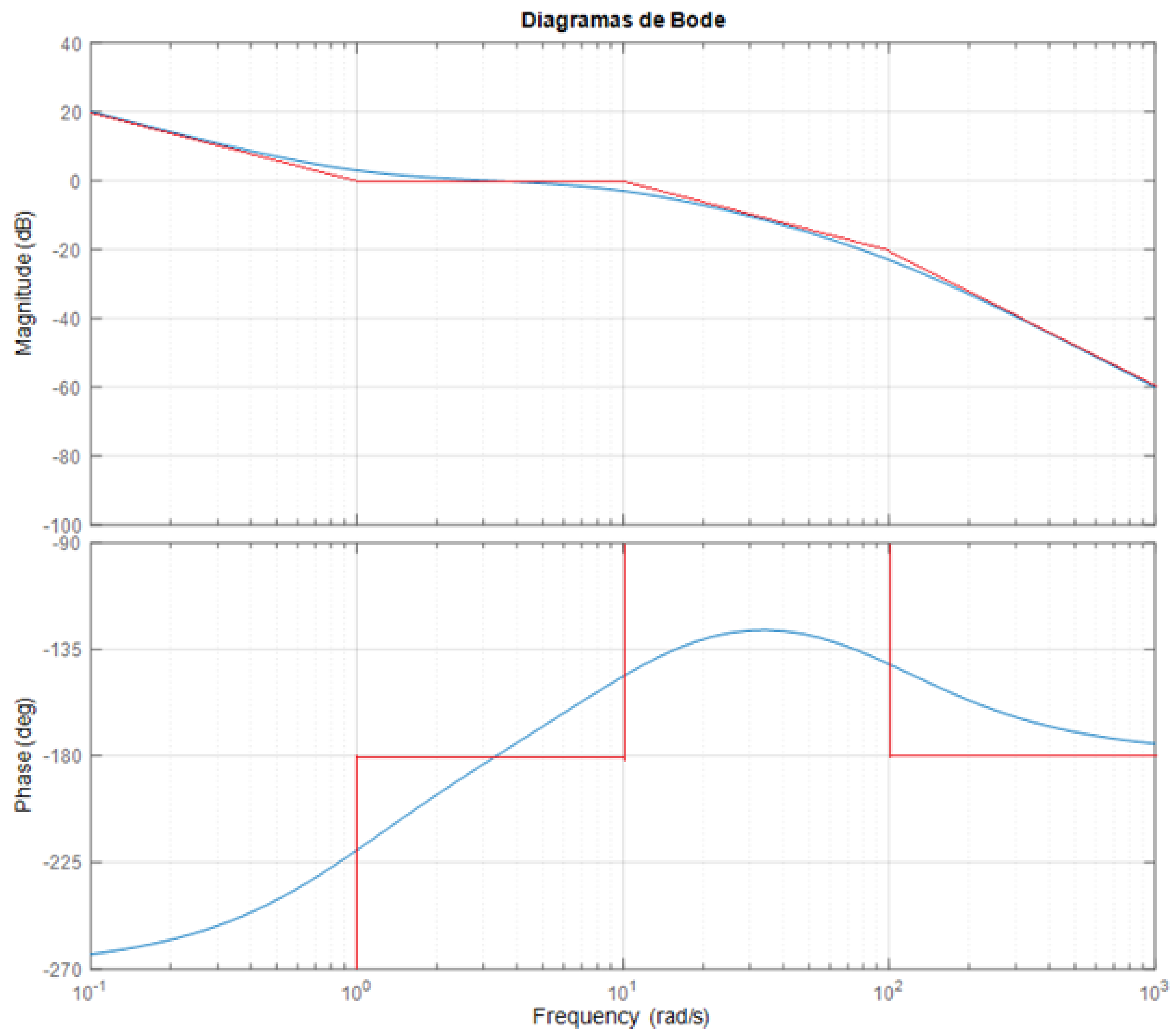
Frequência	Valor assintótico	Valor real
$\omega = 0{,}1$	20 dB	20 dB
$\omega = 1$	0 dB	3 dB
$\omega = 10$	0 dB	-3- dB
$\omega = 100$	-20 dB	-23 dB
$\omega = 1000$	-60 dB	-60 dB

Exemplo 4 – Polo de fase não mínima

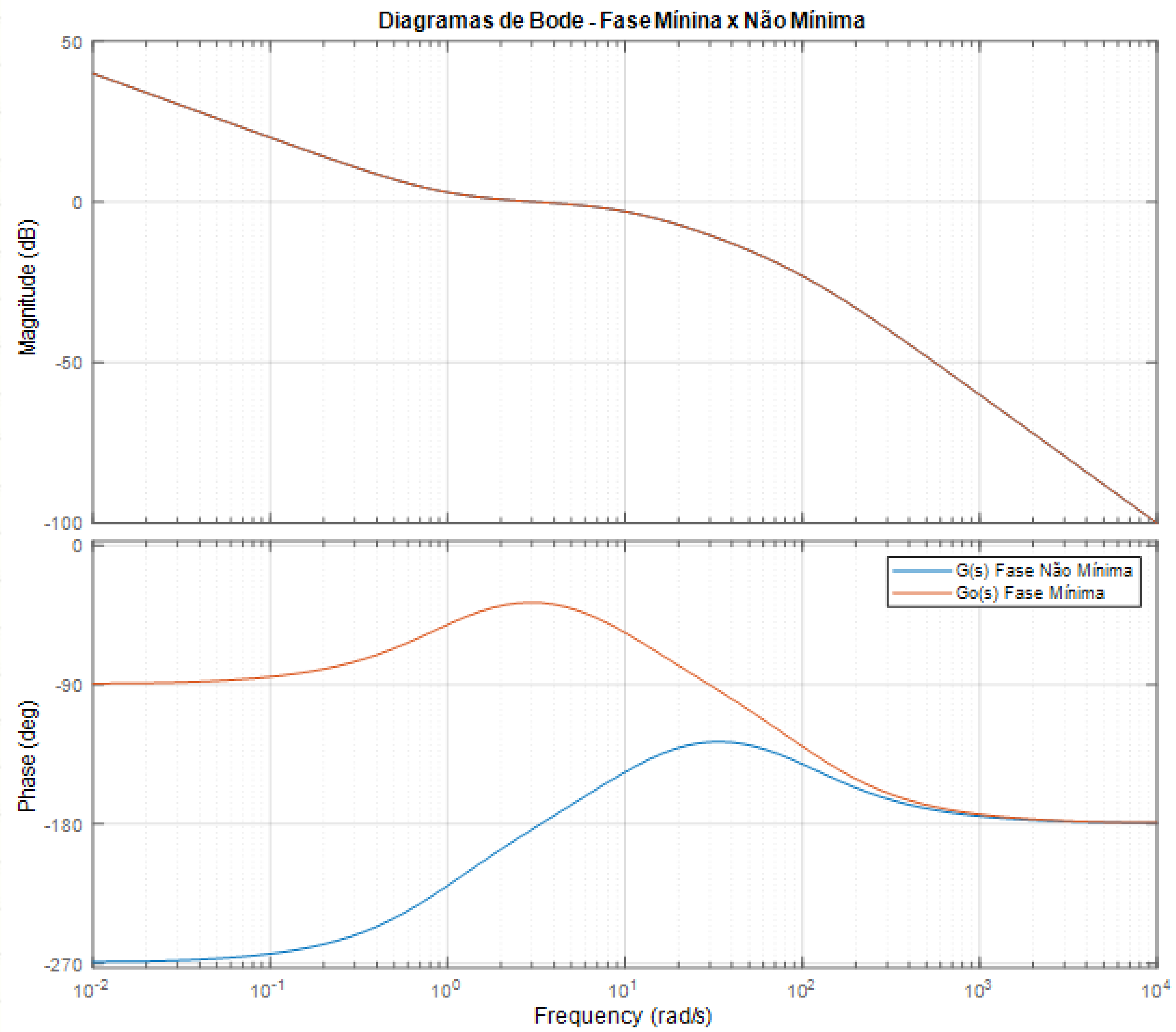
Faixa de Frequência	Variação de fase
ω = 0 a ω = 1	-90°-180°=270°
ω = 1 a ω = 10	-270°+90°=-180°
ω = 10 a ω = 100	-180°+90°=-90°
ω = 100 a $\omega \rightarrow \infty$	-90°-90°=-180°

Frequência	Valor assintótico	Valor real
ω = 0,1	-270°	-264°
ω = 1	-225°	-220°
ω = 10	-135°	-146°
ω = 100	-135°	-141°
ω = 1000	-180°	-175°

Exemplo 4 – Polo de fase não mínima



Exemplo 4 – Fase mínima x não mínima



Exemplo 5 – Fase não mínima e pico de ressonância

Traçar os diagramas de Bode para:

$$G(s) = 2500\,\frac{s^2 - 0,2s + 1}{s(s+50)^2}$$

ou

$$\mathrm{G}(j\omega) = \frac{1 - 2\times 0,1 j\omega + (j\omega)^2}{(j\omega)\left(1 + j\dfrac{\omega}{50}\right)^2}$$

$$\begin{cases} \xi = 0,1 \\ \omega_n = 1 \end{cases}$$

Exemplo 5 – Fase não mínima e pico de ressonância

Variação de Módulo

Faixa de Frequência	Variação do Módulo
ω = 0 a ω = 1	Reta com inclinação -20 dB/dec
ω = 1 a ω = 50	Reta com inclinação +20 dB/dec
ω = 50 a $\omega \rightarrow \infty$	Reta com inclinação -20 dB/dec

Frequência	Valor assintótico	Valor real
ω = 0,1	20 dB	19,9 dB
ω = 1	0 dB	-14 dB
ω = 10	20 dB	19,6 dB
ω = 50	34 dB	28 dB
ω = 100	26 dB	26 dB
ω = 1000	8 dB	8 dB

Exemplo 5 – Fase não mínima e pico de ressonância

Cálculo dos valores assintóticos de módulo

$$\omega = 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad 20\log(K) - 20\log(\omega) = 20$$

$$\omega = 1 \quad \Rightarrow \quad 20\log(K) - 20\log(\omega) = 0$$

$$\omega = 50$$

$$20\log(K) - 20\log(\omega) + 20\log(\sqrt{(1-\omega^2)^2 + (0,2\omega)^2}) = 34$$

$$\omega = 100$$

$$20\log(K) - 20\log(\omega) + 20\log(\sqrt{(1-\omega^2) + (0{,}2\omega)^2}) +$$

$$-40\log(\sqrt{1+(\omega/50)^2}) = 26$$

$$\omega = 1000 \quad \rightarrow \quad 8\text{dB}$$

Exemplo 5 – Fase não mínima e pico de ressonância

Pico de Ressonância

$$\omega_n = 1 \quad \rightarrow \quad \omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \approx 1$$

$$M_R = 5{,}02 \quad ou \quad 14\text{dB}$$

$$\omega = 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad 20\log(K) - 20\log(\omega) = 20$$

Em ω=1 ocorre o primeiro pico de ressonância.

Nesta frequência o valor de módulo é 0 -14 = -14 dB.

pico de ressonância

valor assintótico

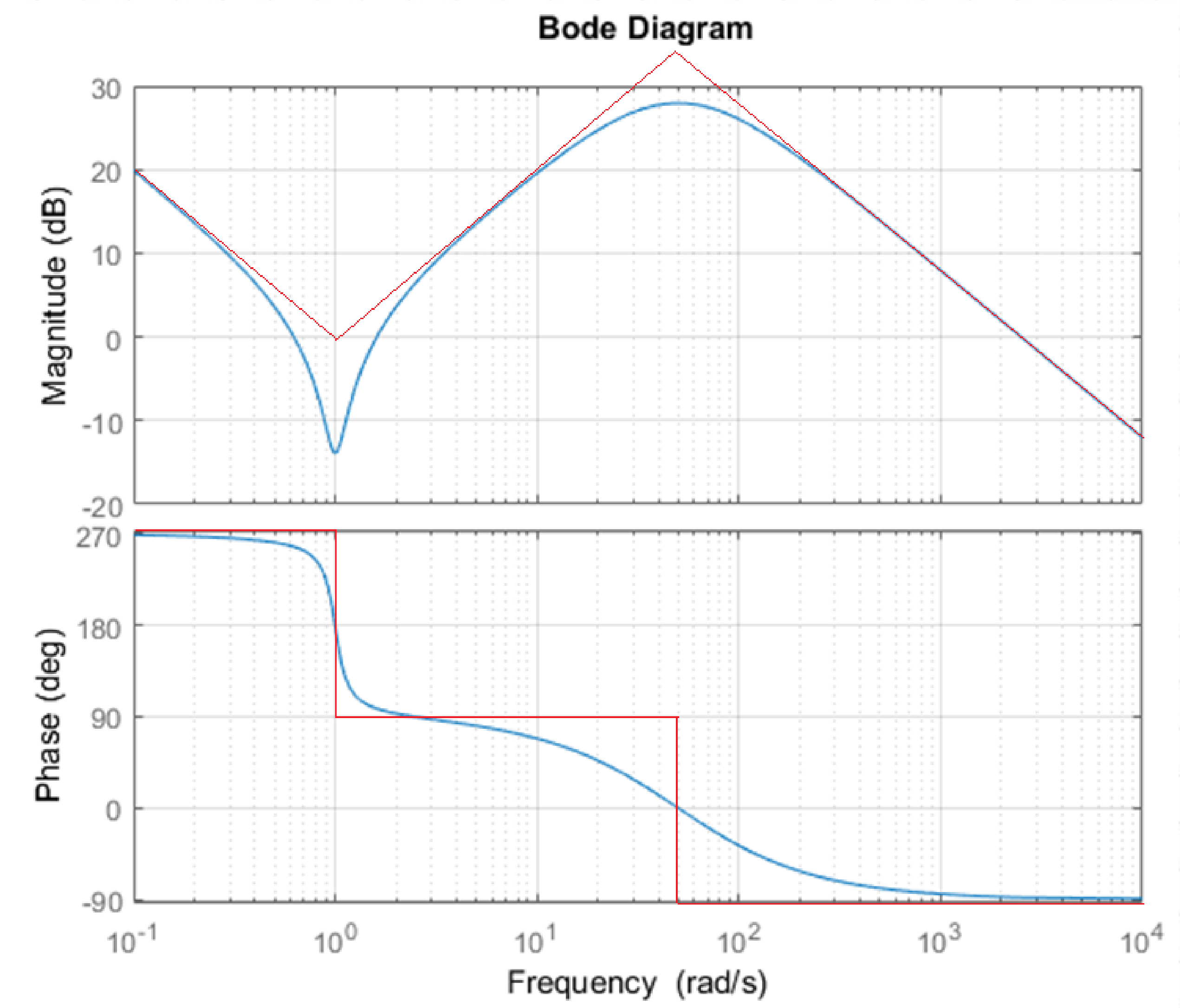
Exemplo 5 – Fase não mínima e pico de ressonância

Variação de Fase

Faixa de Frequência	Variação de fase
$\omega = 0$ a $\omega = 1$	-90°+2x180°=270°
$\omega = 1$ a $\omega = 50$	270°-180°=90°
$\omega = 2$ a $\omega \to \infty$	90°-180°=-90°

Frequência	Valor assintótico	Valor real
$\omega = 0,1$	270°	271°
$\omega = 1$	180°	178°
$\omega = 50$	0°	0,3°
$\omega = 1000$	-90°	-84,7°

Exemplo 5 – Fase não mínima e pico de ressonância
Diagramas de Bode (assintótico e real)



Exemplo 5 – Fase não mínima e pico de ressonância
Diagramas de Bode (MATLAB)