Resposta e Objetivos de Controle em Sistemas Contínuos

Profa. Cristiane Paim

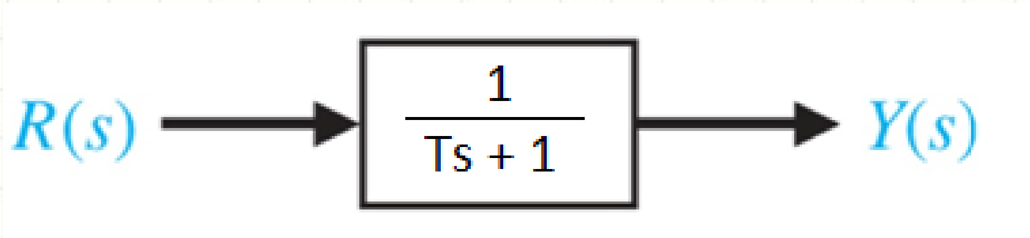
Objetivos de Controle

O objetivo de um sistema de controle é fazer com que o sistema apresente um comportamento em regime transitório ou permanente, conforme condições definidas previamente.

As especificações (usuais) da resposta transitória e de regime permanente são definidas para sistemas de 1ª e 2ª ordem (sem zeros).

Resposta ao Degrau para Sistemas de 1ª ordem

Seja o sistema de 1ª ordem.



$$R(s) = \frac{1}{s}$$

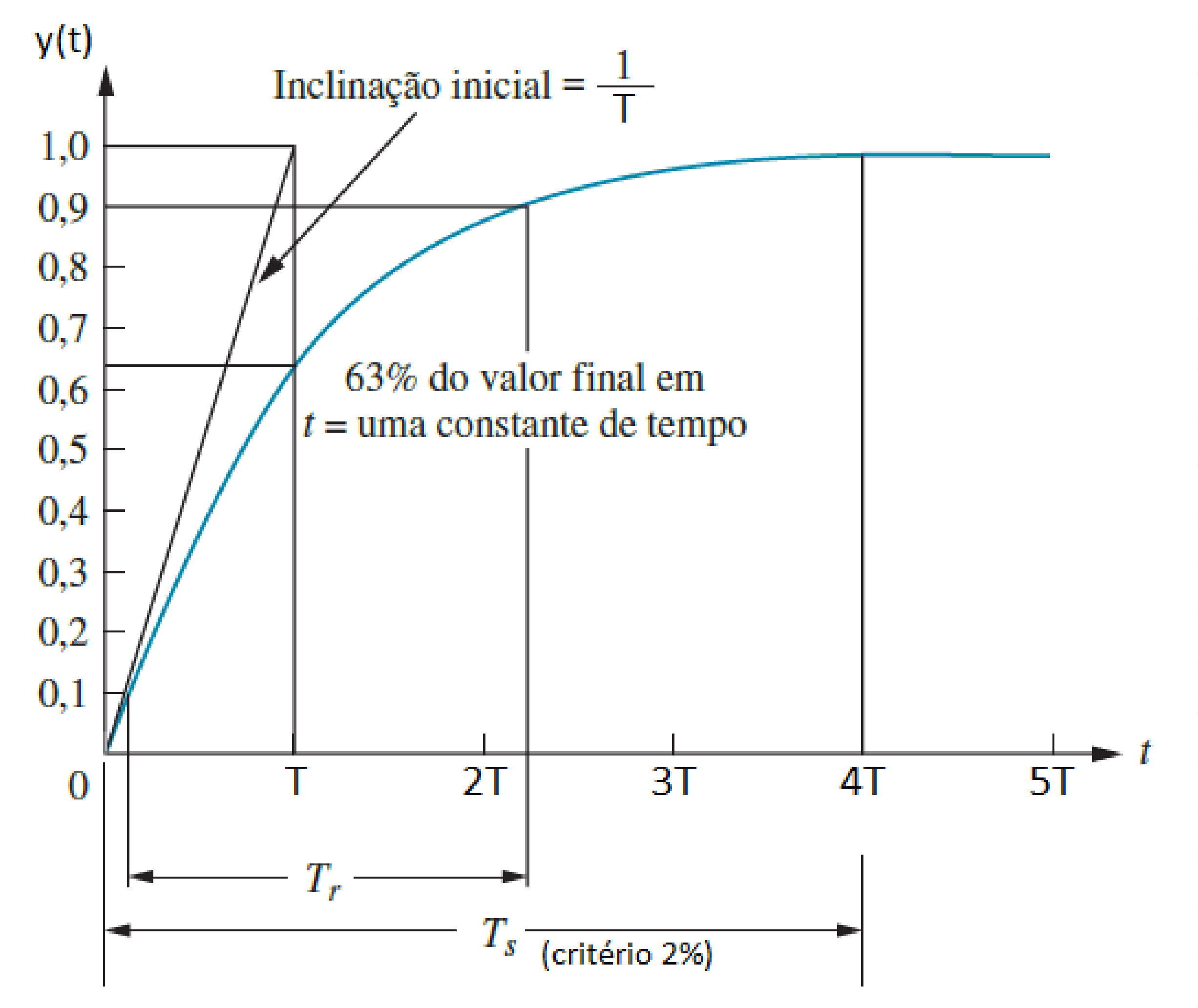
Aplicando uma entrada em degrau unitário, tem a saída

$$Y(s) = \frac{1}{Ts^2 + s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/T}$$

e a resposta no tempo dada por

$$y(t) = 1 - e^{-t/T}$$

Resposta ao Degrau para Sistemas de 1ª ordem



Especificação da resposta transitória para sistemas de 1ª ordem

Tempo de subida:

$$\left(10\,\text{a}\ 90\%\right) \qquad t_r = 2,20T$$

$$\left(5\,\text{a}\ 95\%\right) \qquad t_r = 2,94T$$

Tempo de acomodação:

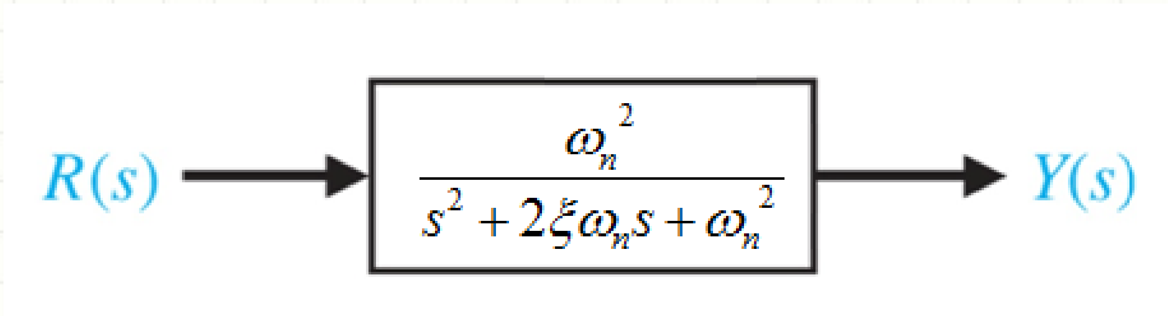
$$\text{Critério}\ 5\% \quad \rightarrow \quad t_s = 3T$$

$$\text{Critério}\ 2\% \quad \rightarrow \quad t_s = 4T$$

$$\text{Critério}\ 1\% \quad \rightarrow \quad t_s = 5T$$

Resposta ao Degrau para Sistemas de 2ª ordem

Seja o sistema de 2ª ordem.



Os polos serão dados por:

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

ou

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_d$$

sendo $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ a frequência natural amortecida.

Resposta ao Degrau para Sistemas de 2ª ordem

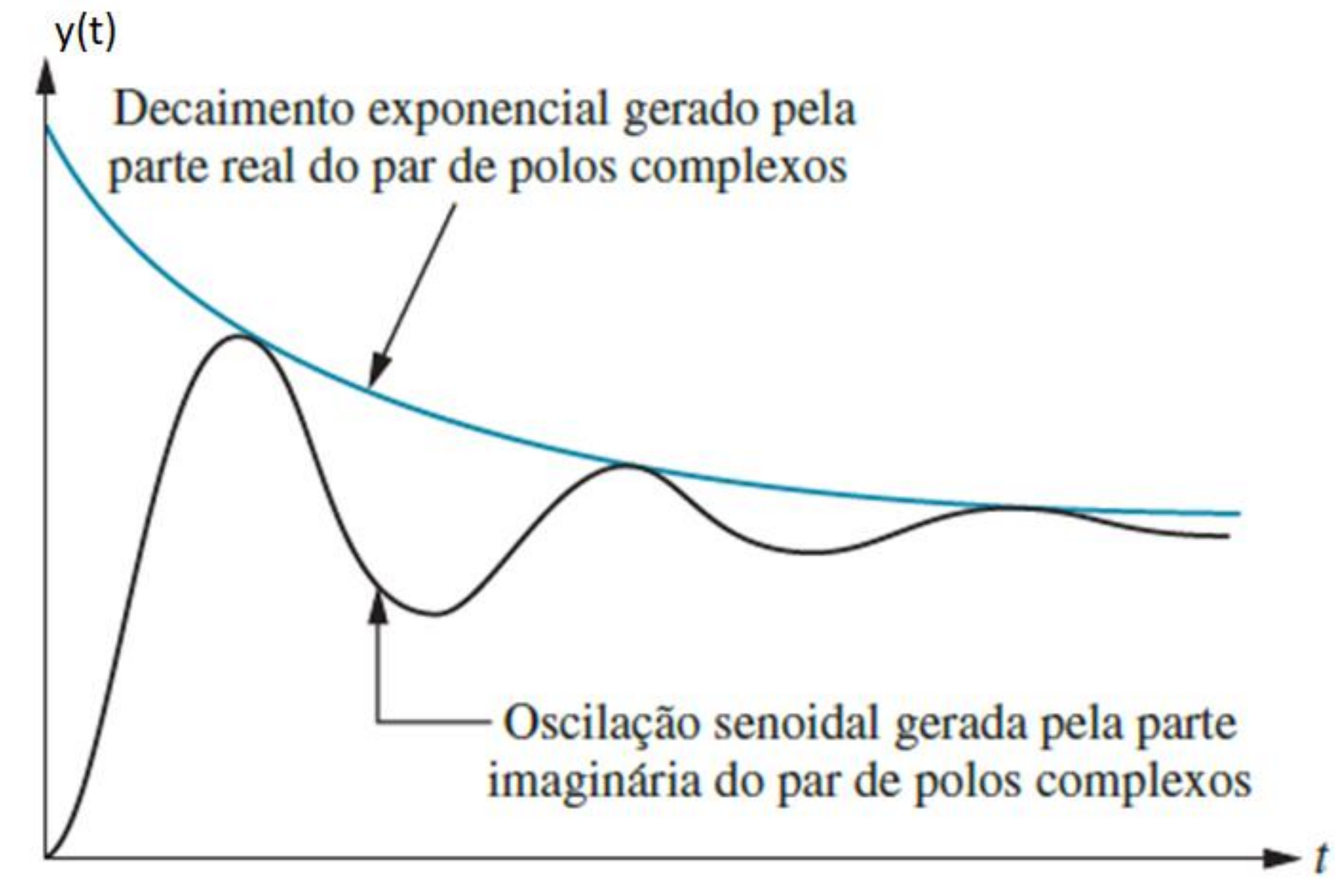
A resposta no tempo é dada por:

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\left[\cos\left(\omega_d t\right) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\operatorname{sen}\left(\omega_d t\right)\right]$$

ou

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\operatorname{sen}\left[\omega_d t + tg^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right]$$

Resposta ao Degrau para Sistemas de 2ª ordem



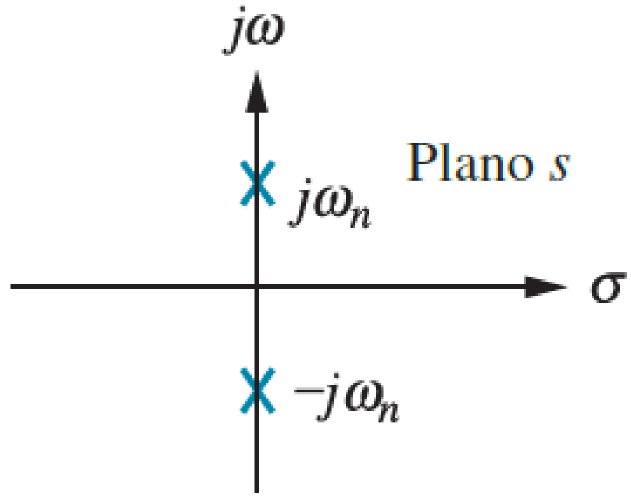
Resposta ao Degrau para Sistemas de 2ª ordem

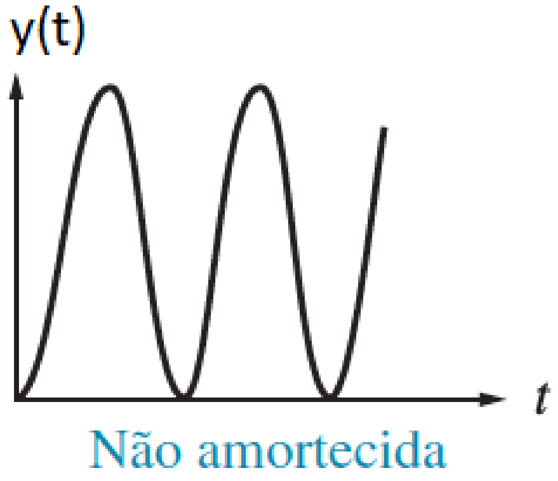
Seja

$$\xi = 0 \quad \rightarrow \quad s_{1,2} = \pm j\,\omega_n$$

A resposta torna-se não amortecida, com oscilações de frequência ω_n mantidas indefinidamente.

$$y(t) = 1 - \cos(\omega_n t)$$





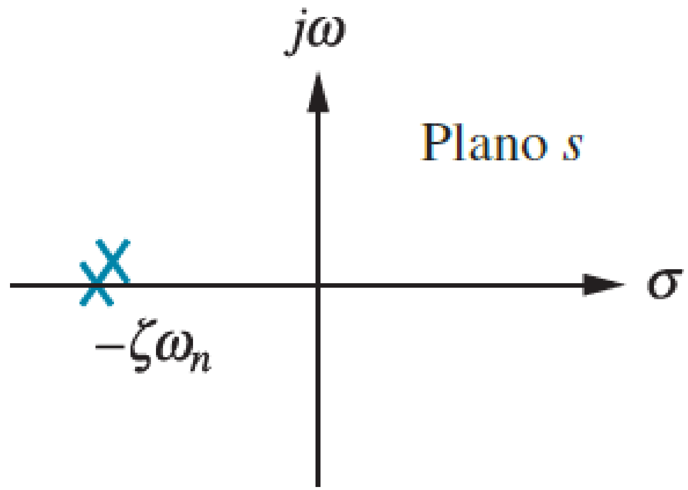
Resposta ao Degrau para Sistemas de 2ª ordem

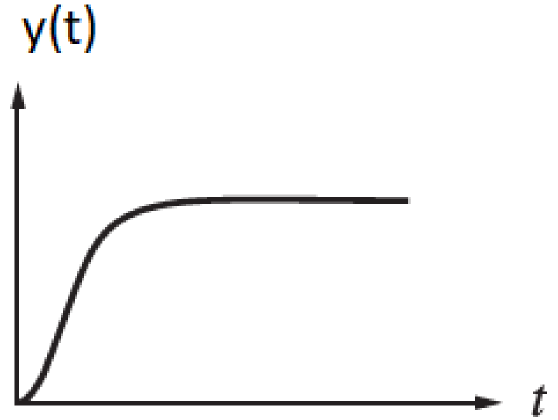
Seja

$$\xi = 1 \quad \rightarrow \quad s_{1,2} = -\xi\omega_n$$

A resposta será criticamente amortecida.

$$y(t) = 1 - e^{-\omega_n t}\left(\omega_d t + 1\right)$$





Criticamente amortecida

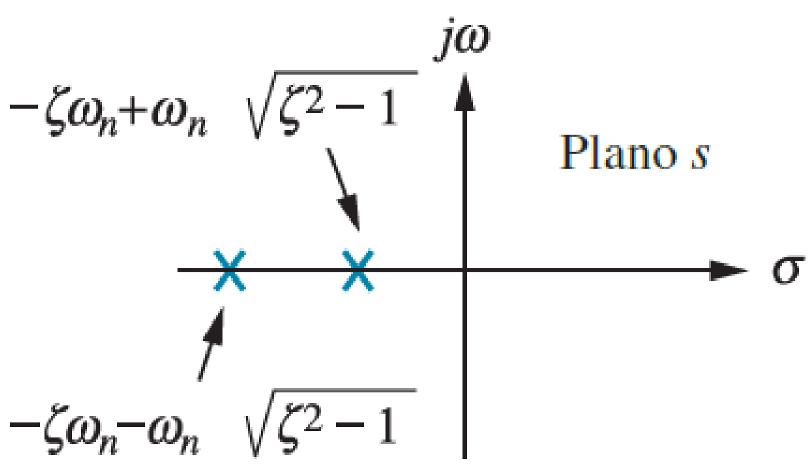
Resposta ao Degrau para Sistemas de 2ª ordem

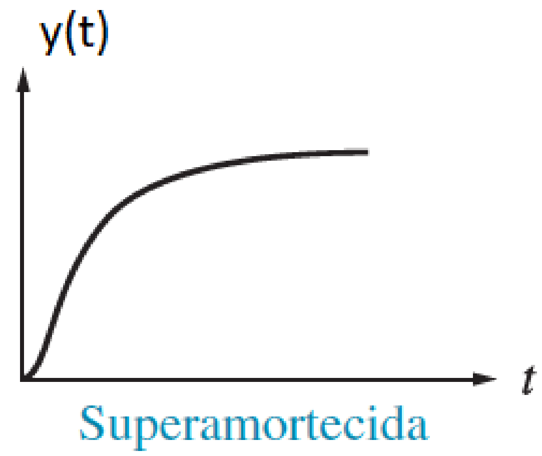
Seja

$$\xi > 1 \quad \rightarrow \quad s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

Neste caso, a resposta é dita sobreamortecida.

$$y(t) = 1 - \frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2 - 1}}\left[\frac{1}{s_1}e^{s_1 t} - \frac{1}{s_2}e^{s_2 t}\right]$$





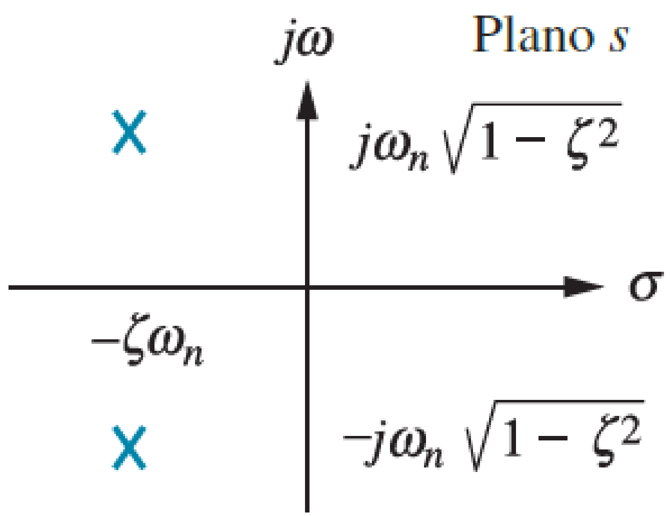
Resposta ao Degrau para Sistemas de 2ª ordem

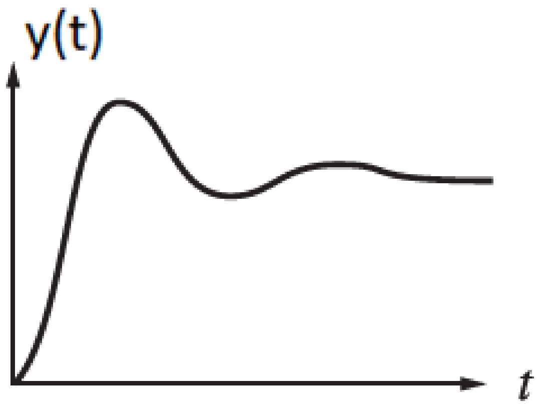
Para

$$0 < \xi < 1 \quad \rightarrow \quad s_{1,2} = -\xi\,\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

A resposta do sistema é subamortecida.

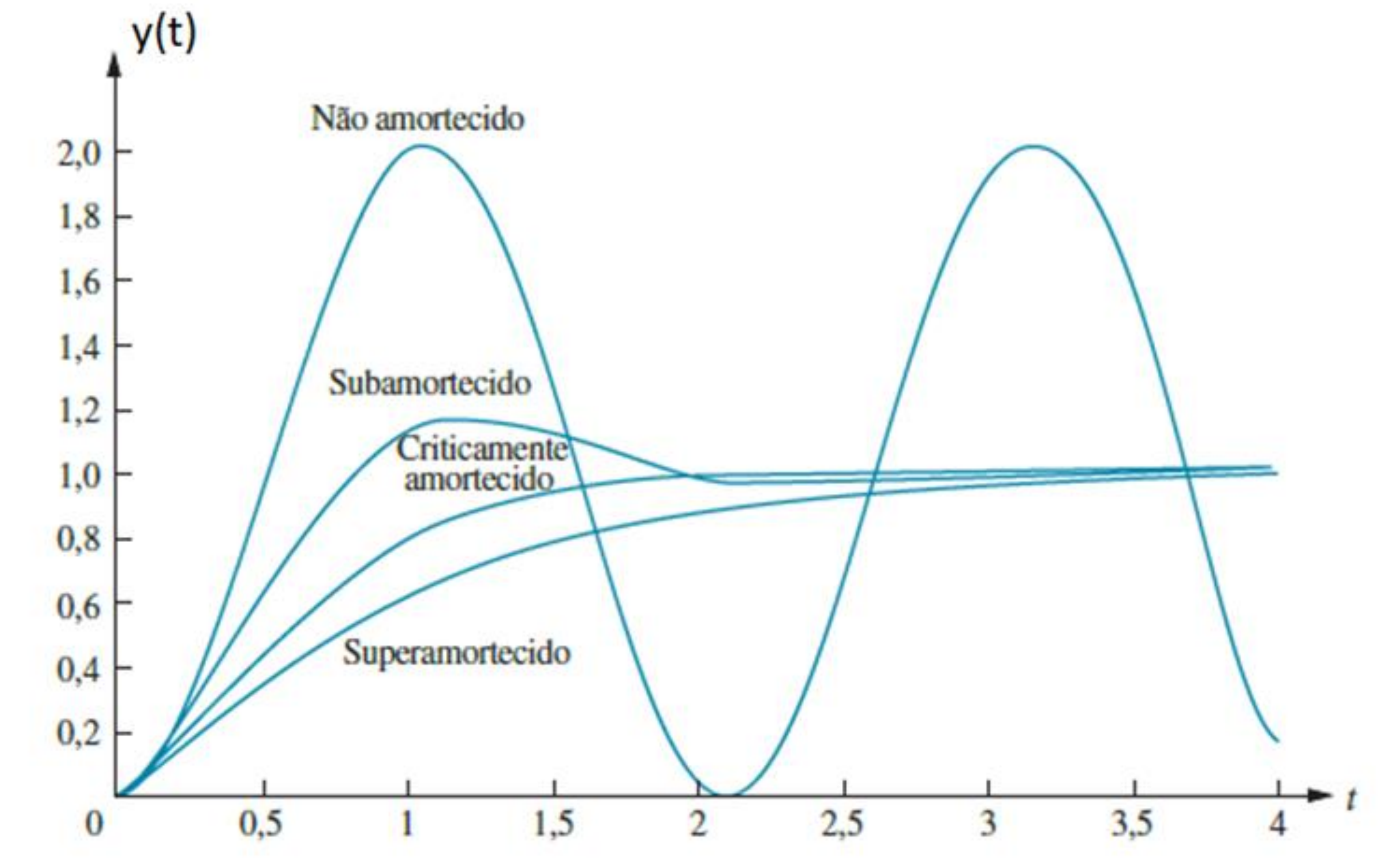
$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\,\mathrm{sen}\left[\omega_d t + tg^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right]$$





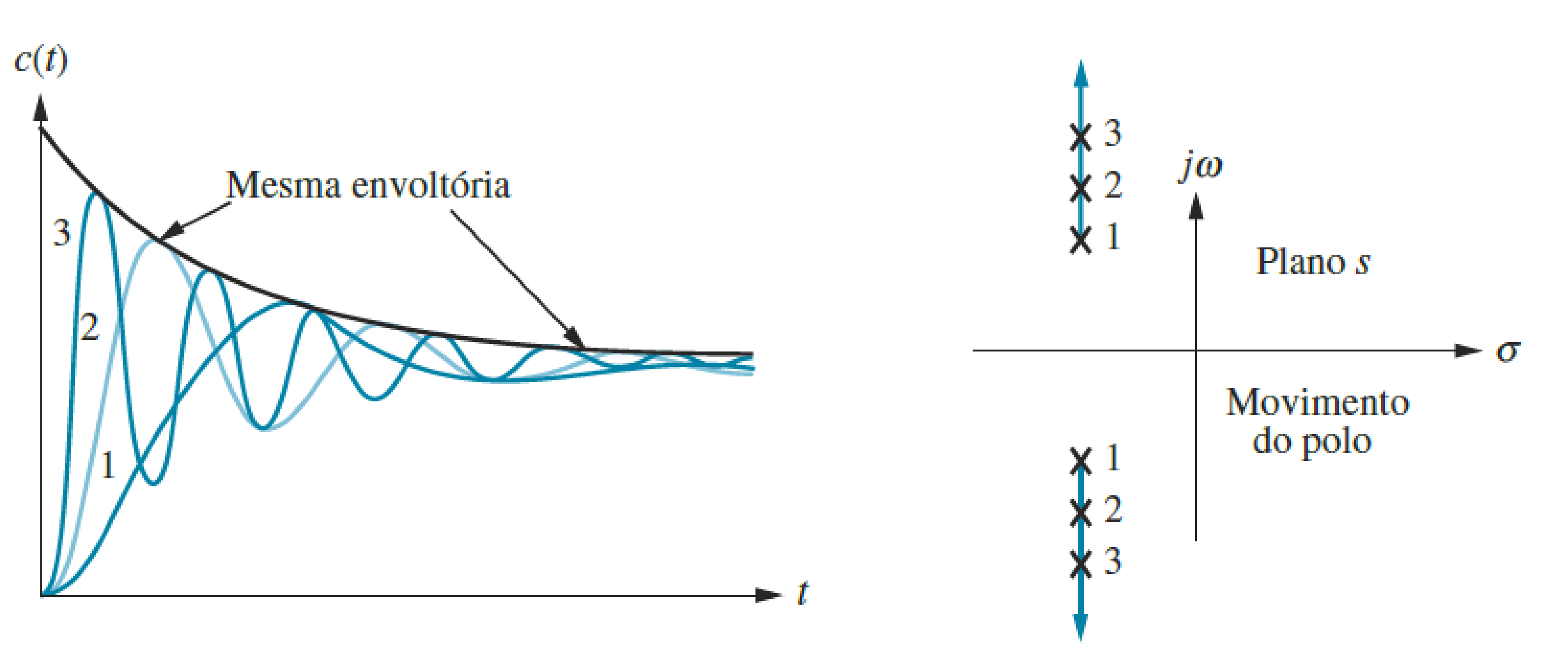
Subamortecida

Resposta ao Degrau para Sistemas de 2ª ordem



Resposta ao Degrau para Sistemas de 2ª ordem

Exemplo: Sistemas com a mesma parte real (mesma envoltória)

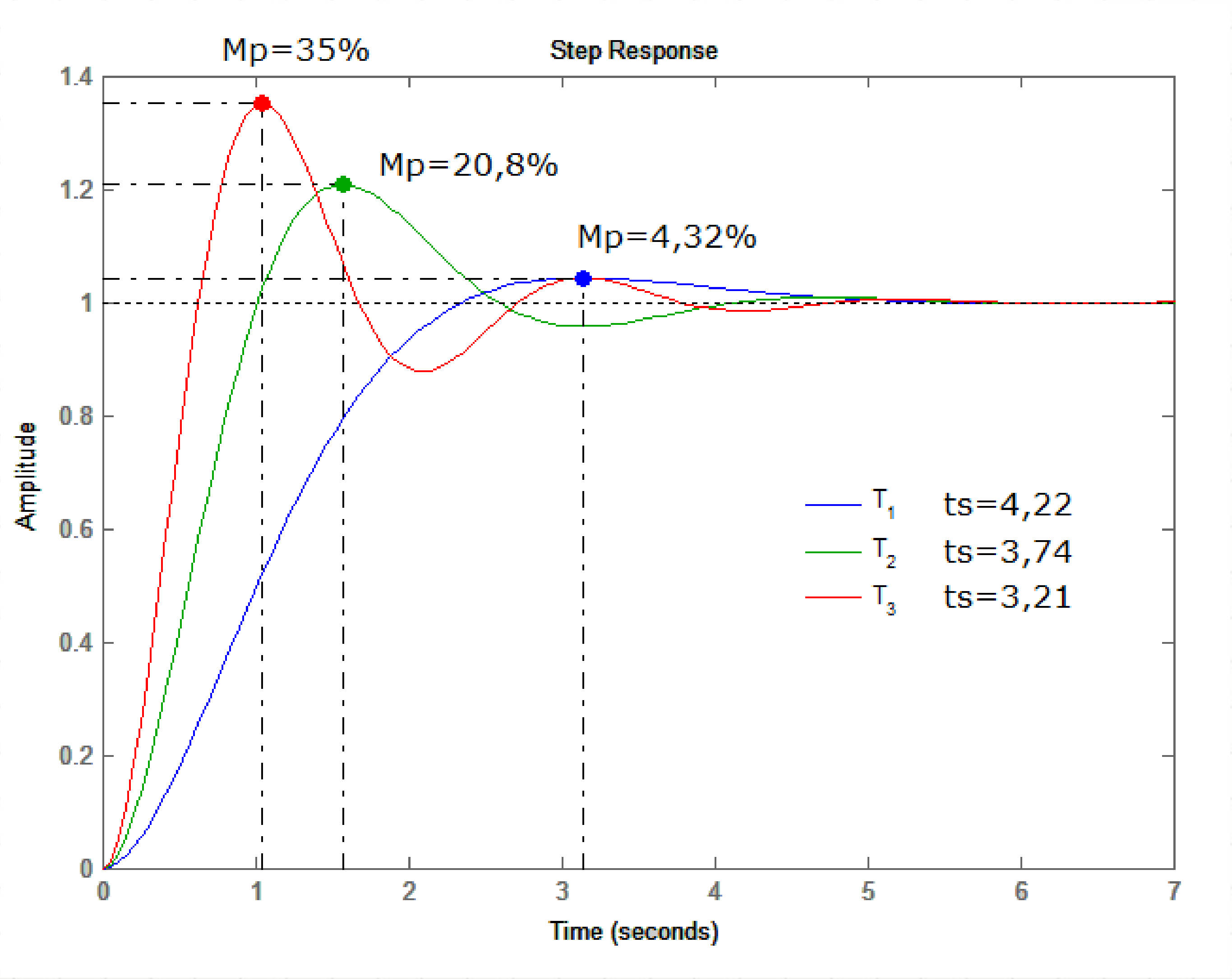


$$T_1 \rightarrow p_{1,2} = -1 \pm j$$

$$T_2 \rightarrow p_{1,2} = -1 \pm j2$$

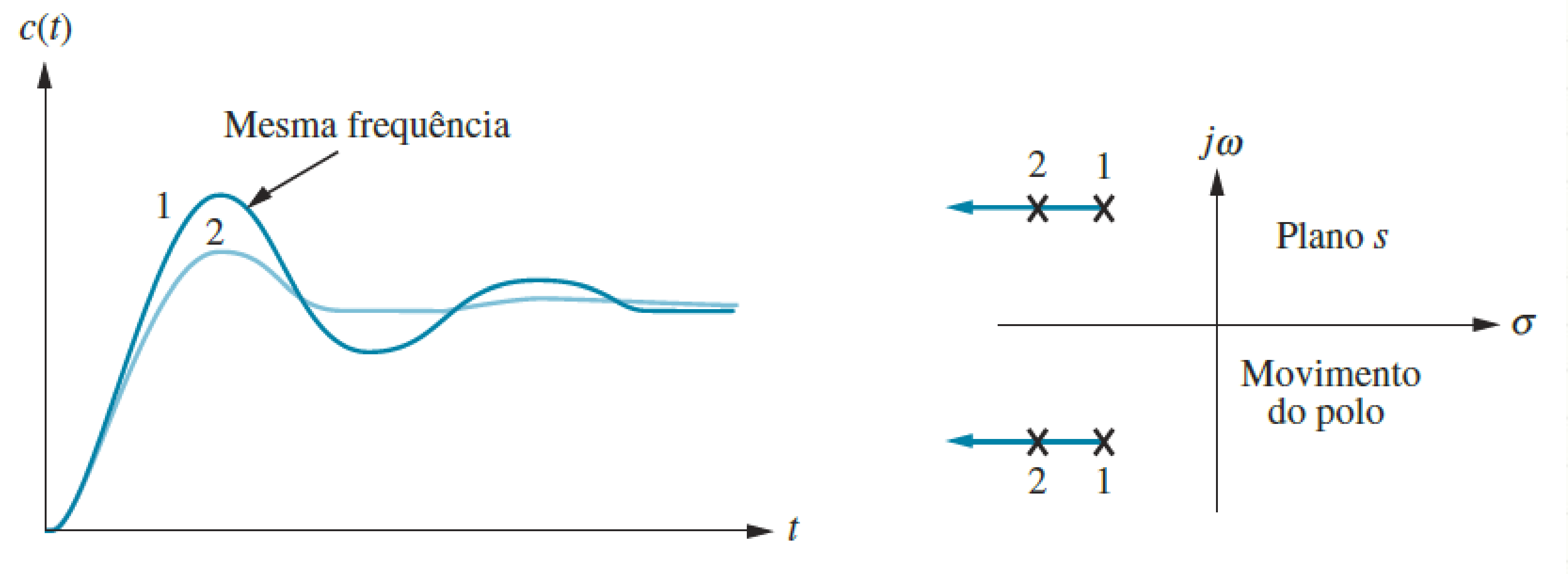
$$T_3 \rightarrow p_{1,2} = -1 \pm j3$$

Resposta ao Degrau para Sistemas de 2ª ordem



Resposta ao Degrau para Sistemas de 2ª ordem

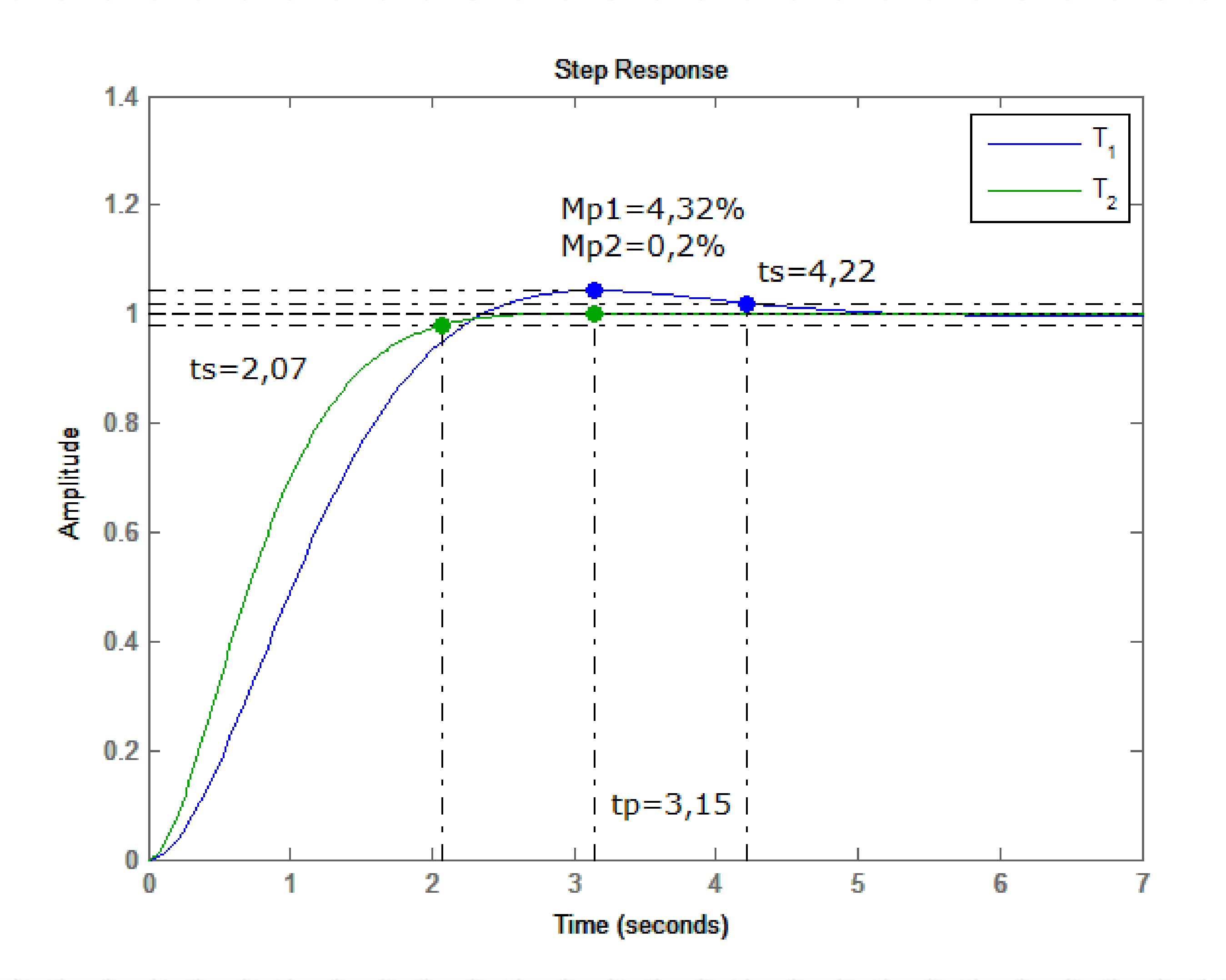
Exemplo: Sistemas com a mesma parte imaginária (mesma frequência ω_d)



$$T_1 \quad \rightarrow \quad p_{1,2} = -1 \pm j$$

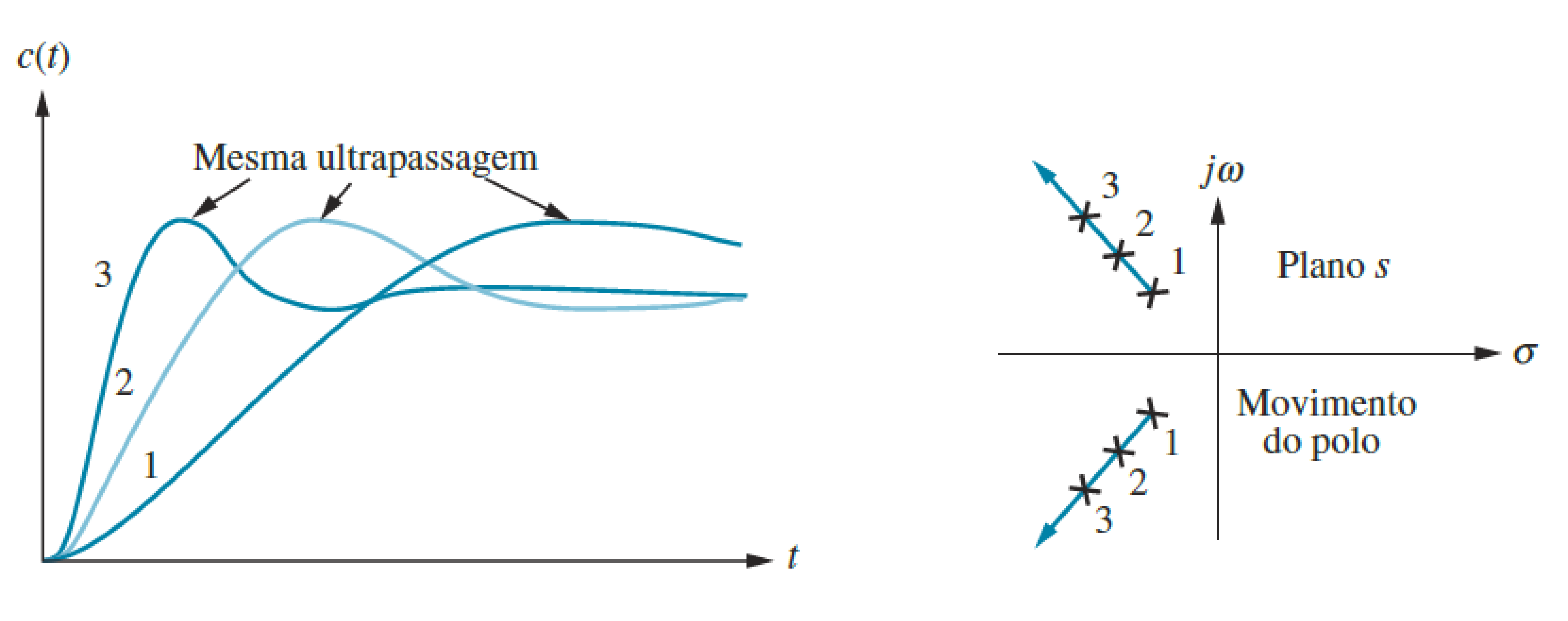
$$T_2 \quad \rightarrow \quad p_{1,2} = -2 \pm j$$

Resposta ao Degrau para Sistemas de 2ª ordem



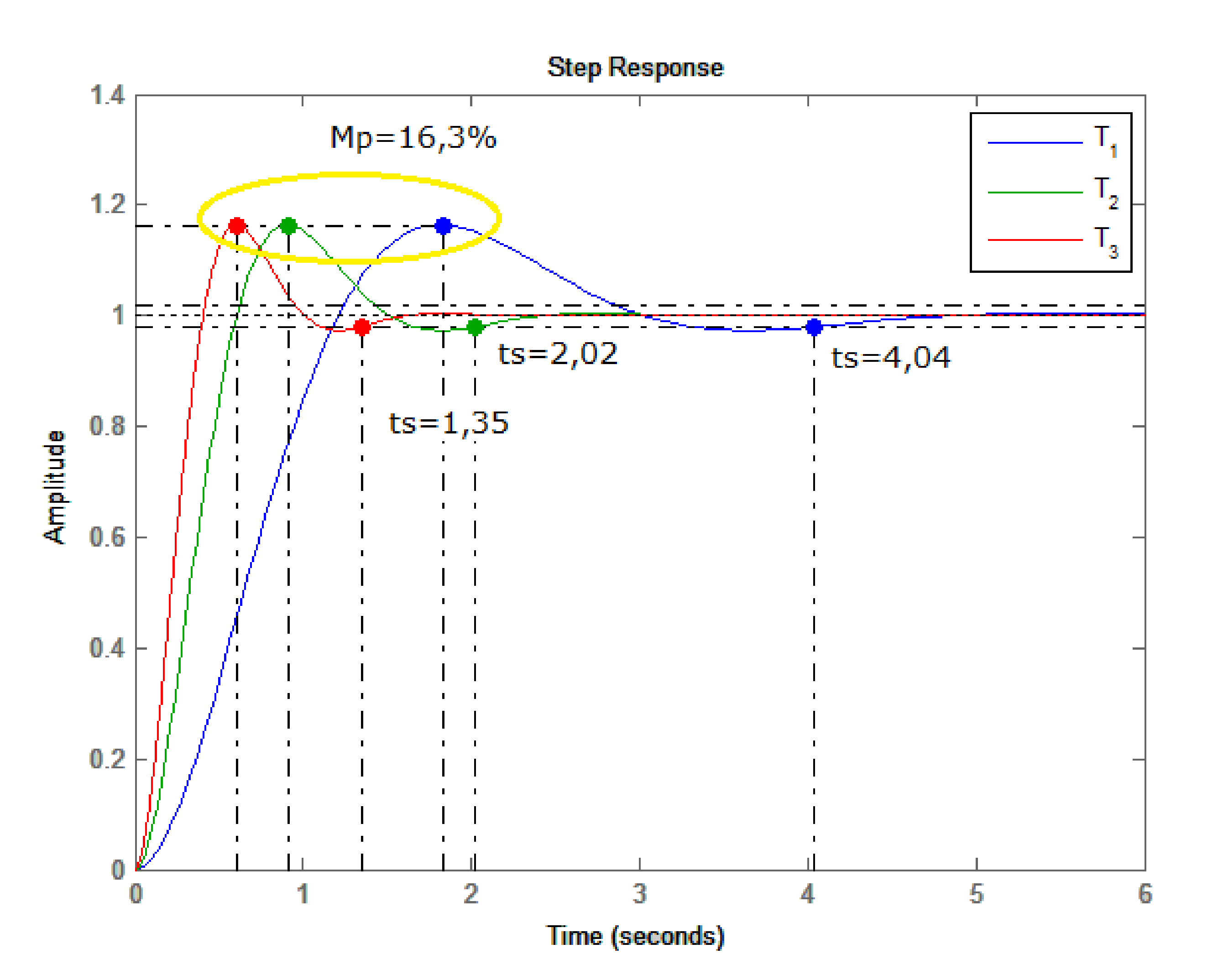
Resposta ao Degrau para Sistemas de 2ª ordem

Exemplo: Sistemas com o mesmo coeficiente de amortecimento (mesmo sobressinal)

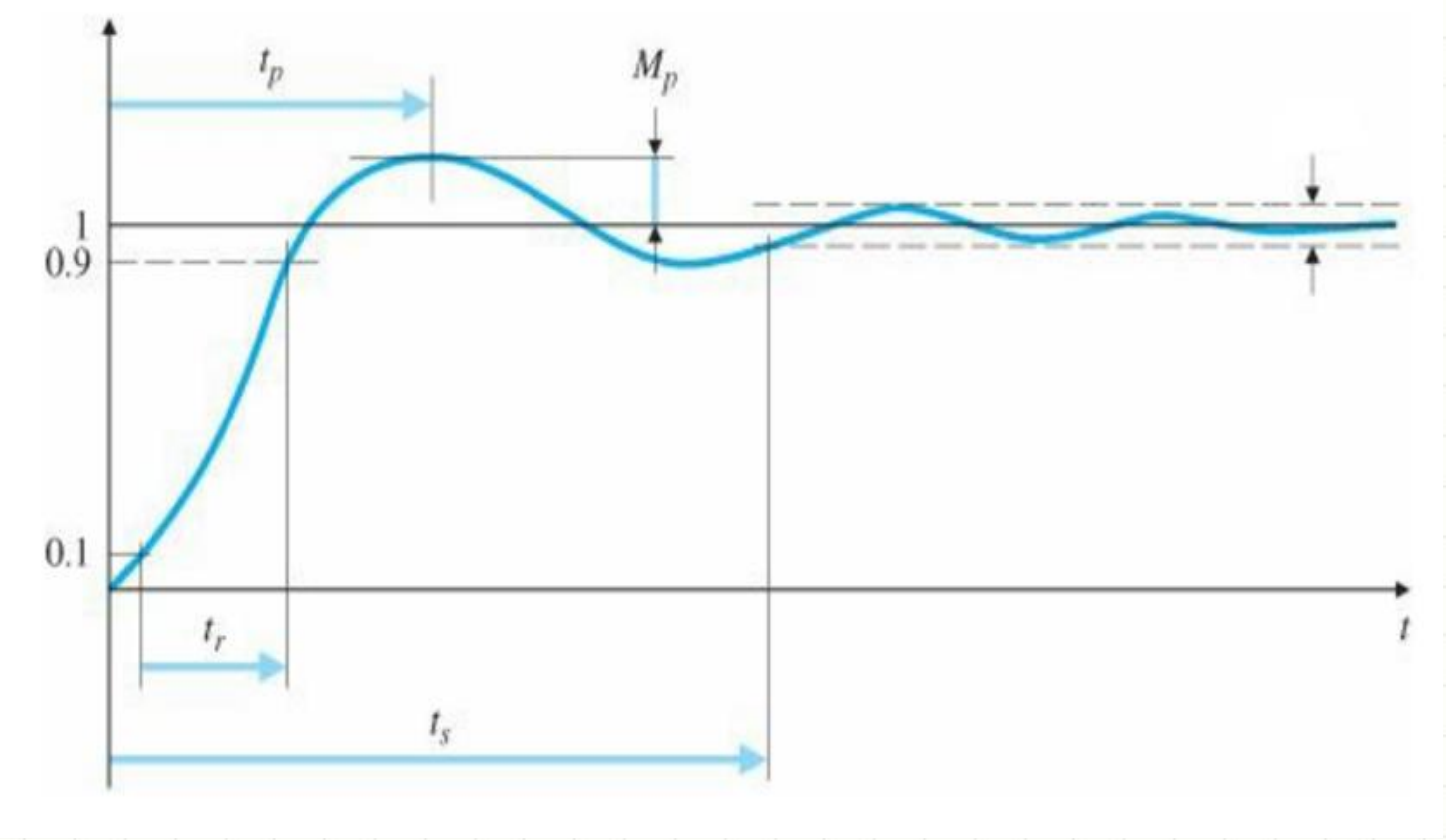


$$\xi = 0{,}5 \qquad \begin{cases} T_1 \rightarrow \omega_n = 2 & p_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{3} \\ T_2 \rightarrow \omega_n = 4 & p_{1,2} = -2 \pm j2\sqrt{3} \\ T_3 \rightarrow \omega_n = 6 & p_{1,2} = -3 \pm j3\sqrt{3} \end{cases}$$

Resposta ao Degrau para Sistemas de 2ª ordem



Especificação da resposta transitória para sistemas de 2ª ordem subamortecidos ($0 < \xi < 1$)



Especificação da resposta transitória para sistemas de 2ª ordem subamortecidos (0 < ξ < 1)

Tempo de Subida (0 – 100%):

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d}$$

sendo

$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right) \quad \text{e} \quad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

Para fins de projeto geralmente utilizam-se as seguintes aproximações:

$$(10 \text{ a } 90\%) \quad t_r = 1{,}8/\omega_n$$
$$(0 \text{ a } 100\%) \quad t_r = 2{,}4/\omega_n$$

Especificação da resposta transitória para sistemas de 2ª ordem subamortecidos ($0 < \xi < 1$)

Tempo de pico:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

Sobressinal máximo:

$$M_p = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Tempo de acomodação:

$$\begin{array}{ll} \text{critério } 5\% & t_s = 3/\xi\omega_n \\ \text{critério } 2\% & t_s = 4/\xi\omega_n \\ \text{critério } 1\% & t_s = 5/\xi\omega_n \end{array}$$

Especificação da resposta transitória para sistemas de 2ª ordem criticamente ou sobreamortecidos ($\xi \geq 1$)

Tempo de subida:

$$
\begin{aligned}
&(10\text{ a }90\%) \quad t_r = 1{,}8/|p_m| \\
&(0\text{ a }100\%) \quad t_r = 2{,}4/|p_m|
\end{aligned}
$$

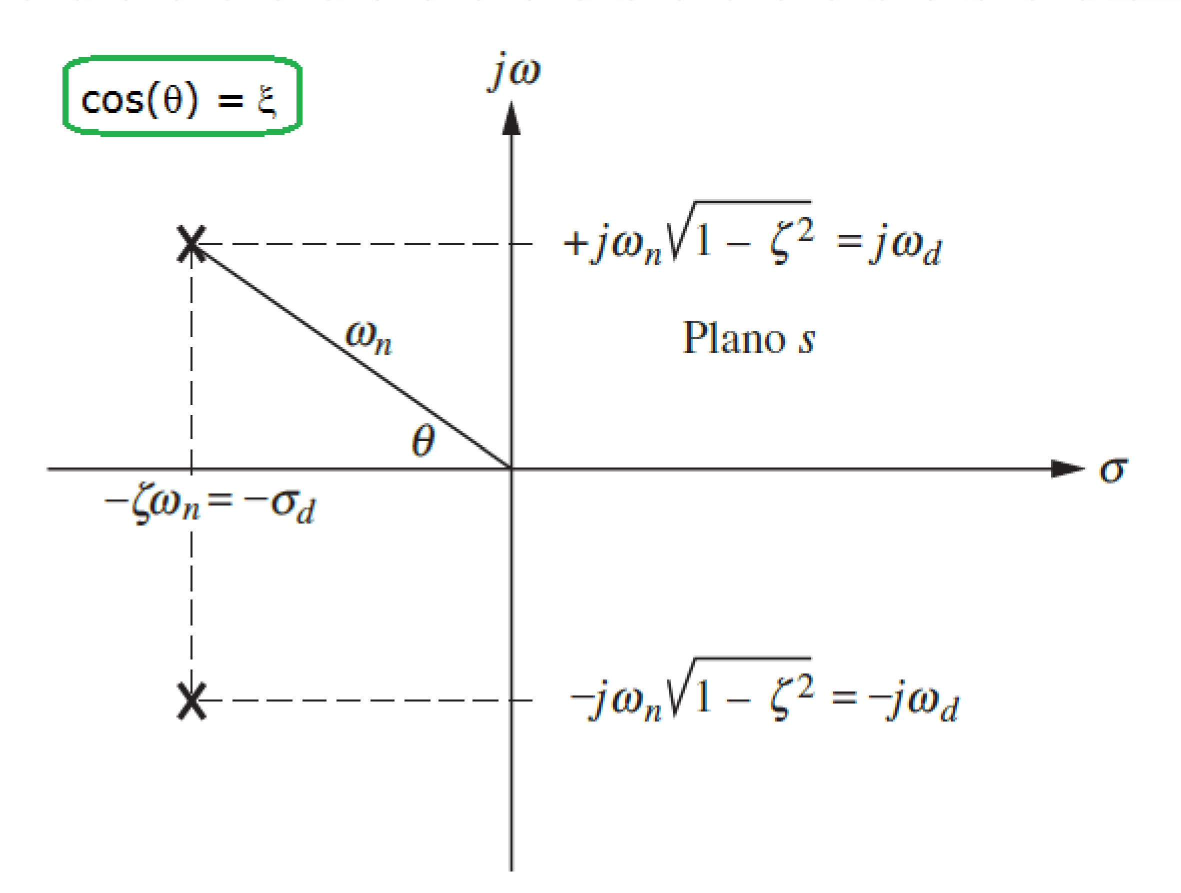
sendo p_m o polo mais próximo da origem.

Tempo de acomodação:

$$
\begin{aligned}
&\text{critério } 5\% \qquad t_s = 3/|p_m| \\
&\text{critério } 2\% \qquad t_s = 4/|p_m| \\
&\text{critério } 1\% \qquad t_s = 5/|p_m|
\end{aligned}
$$

Região desejada para os polos de malha fechada

Sistema subamortecido ⇨ polos complexos conjugados



Região desejada para os polos de malha fechada

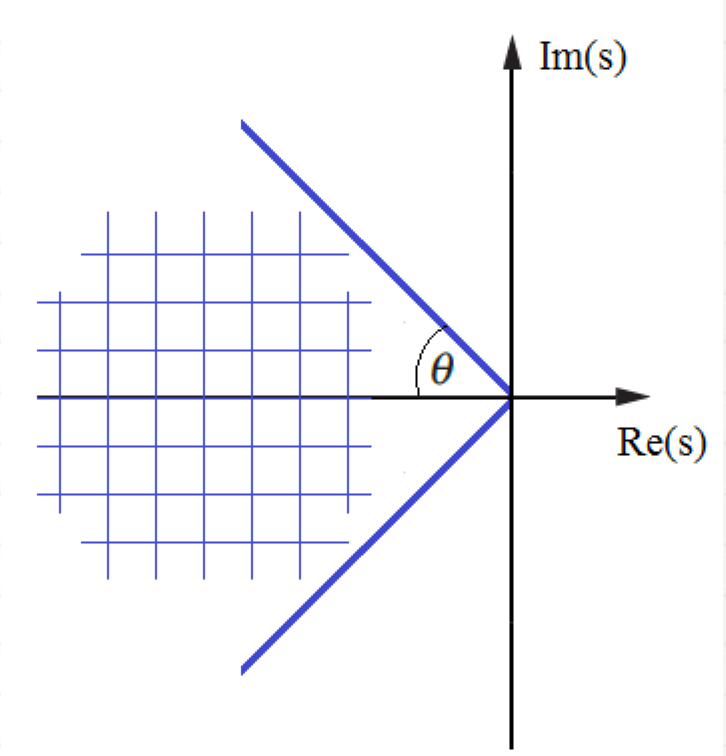
- **Sobressinal máximo**

$$M_p = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \leq M_{p_{\max}}$$

Portanto,

$$\xi \geq \frac{\left|\ln\left(M_{p_{\max}}\right)\right|}{\sqrt{\pi^2 + \left[\ln(M_{p_{\max}})\right]^2}}$$

$$\xi \geq \xi_{\min} \quad \Longrightarrow \quad \theta < \theta_{\max}$$

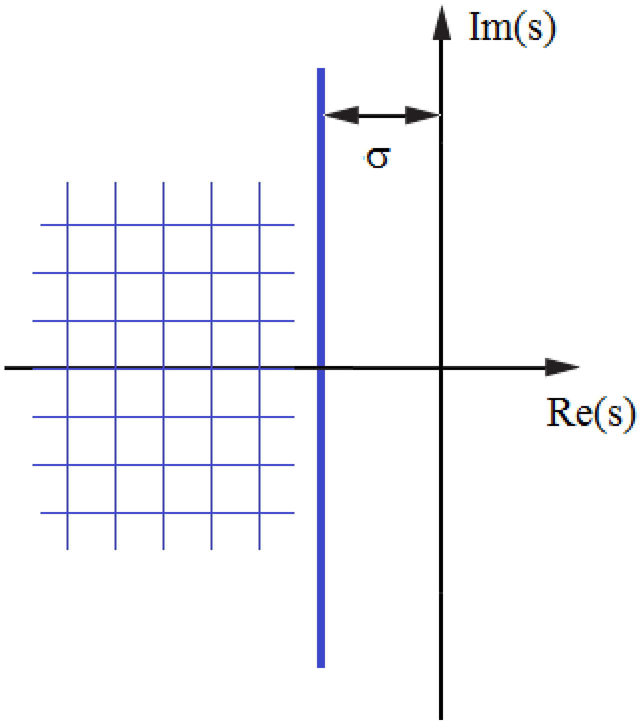


Região desejada para os polos de malha fechada

- **Tempo de acomodação (2%)**

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} \leq t_{s_{Máx}}$$

$$\xi\omega_n \geq \sigma_{\min}$$



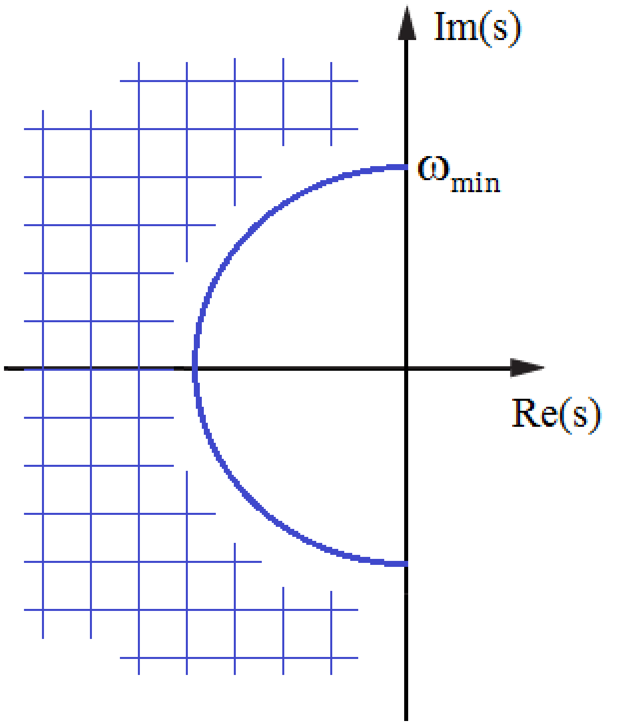
σ: parte real dos polos complexos conjugados

Região desejada para os polos de malha fechada

- **Tempo de subida (0-100%)**

$$t_r = \frac{2,4}{\omega_n} \leq t_{r_{\max}}$$

$$\omega_n \geq \omega_{\min}$$

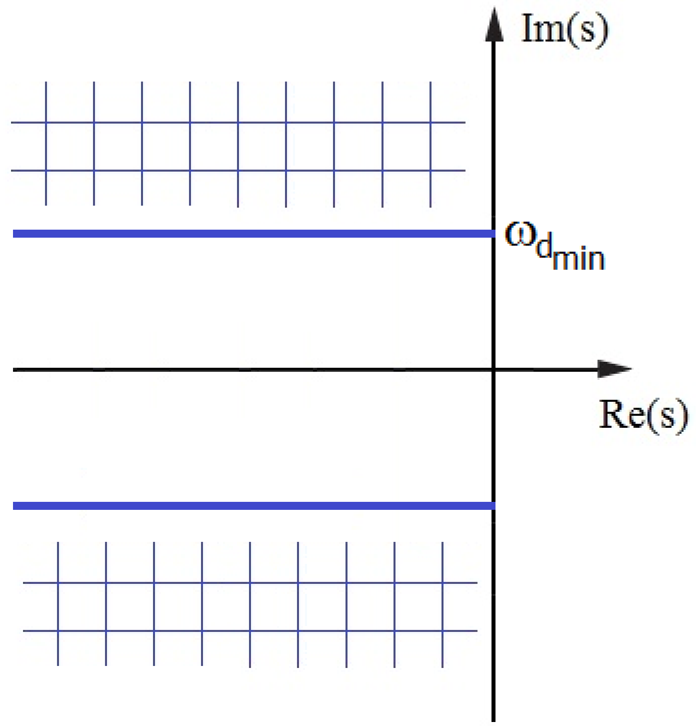


Região desejada para os polos de malha fechada

- **Tempo de pico**

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \leq t_{p_{\max}}$$

$$\omega_d \geq \omega_{d_{\min}}$$



Efeito dos zeros na resposta transitória

Os zeros da função de transferência exercem influência na resposta transitória modificando os coeficientes (resíduos) dos termos exponenciais resposta.

Ex: Seja o sistema de 2ª ordem:

$$T(s) = \frac{s+z}{(s+p_1)(s+p_2)} = \frac{z-p_1}{p_2-p_1}\left(\frac{1}{s+p_1}\right) + \frac{z-p_2}{p_1-p_2}\left(\frac{1}{s+p_2}\right)$$

Se o zero é muito próximo do polo a constante associada a este polo será pequena reduzindo a influência deste modo na resposta. Por outro lado, se o zero for muito grande (muito distante dos polos) sua influência torna-se insignificante na resposta do sistema.

Efeito dos zeros na resposta transitória

Exemplo 1: Considerando um sistema de 2ª ordem sobreamortecido, será observado o efeito da introdução de um zero na resposta ao degrau.

$$T_1(s) = \frac{6}{(s+1)(s+6)} \quad \Rightarrow \quad T_1(0) = 1 \rightarrow y_1(t)$$

$$T_2(s) = \frac{6(s+1{,}1)}{1{,}1(s+1)(s+6)} \quad \Rightarrow \quad T_2(0) = 1 \rightarrow y_2(t)$$

$$T_3(s) = \frac{(s+18)}{3(s+1)(s+6)} \quad \Rightarrow \quad T_3(0) = 1 \rightarrow y_3(t)$$

Efeito dos zeros na resposta transitória

Resposta ao degrau (sistema 1)

$$R(s) = \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad Y_1(s) = \frac{1}{s} T_1(s)$$

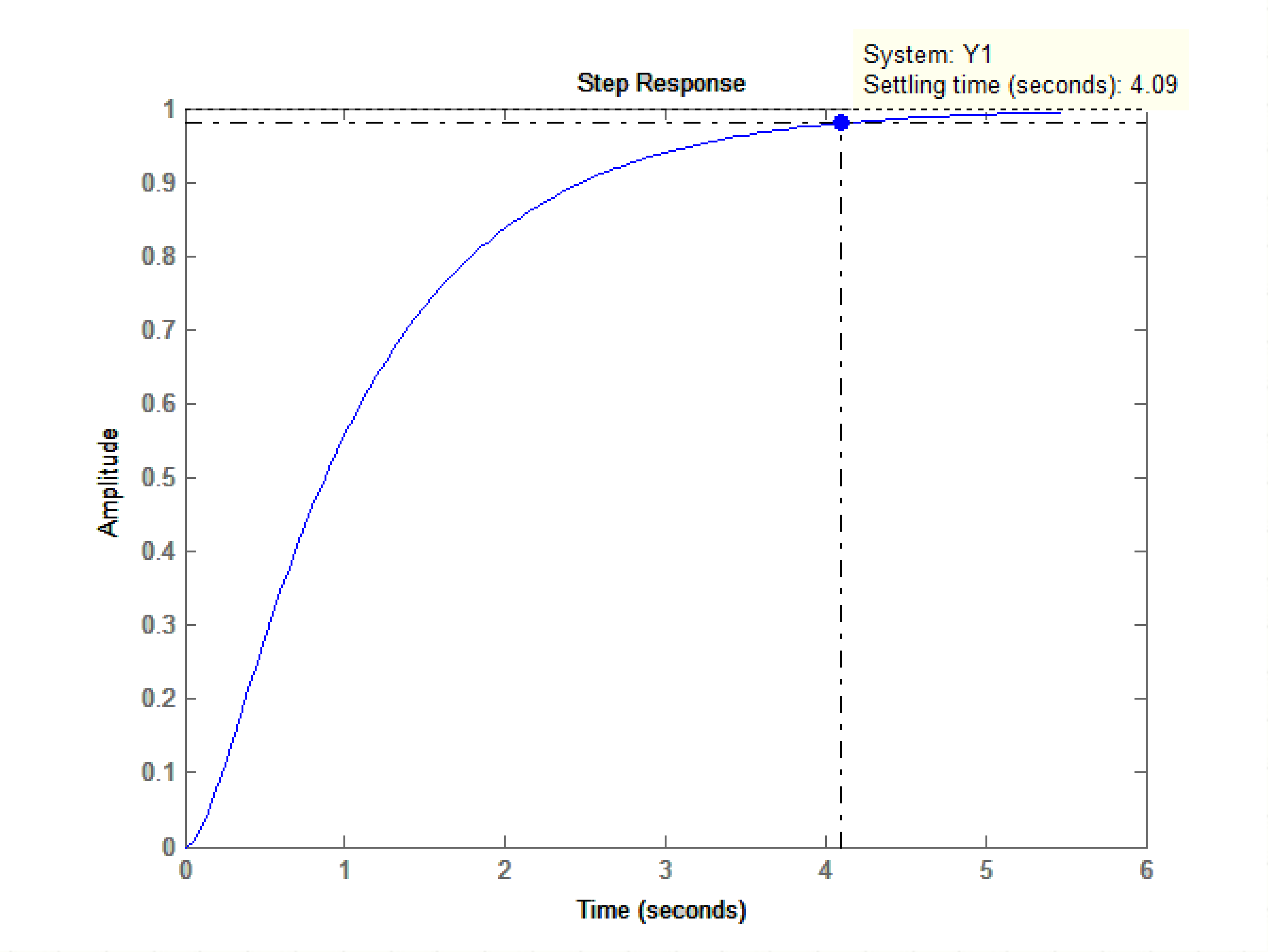
$$Y_1(s) = \frac{6}{s(s+1)(s+6)} = \frac{1}{s} - 1{,}2\frac{1}{s+1} + 0{,}2\frac{1}{s+6}$$

$$\Downarrow$$

$$y_1(t) = 1 - 1{,}2e^{-t} + 0{,}2e^{-6t}$$

O polo dominante será p_1=-1 e comportamento da resposta será similar a um de 1ª ordem.

Efeito dos zeros na resposta transitória



Efeito dos zeros na resposta transitória

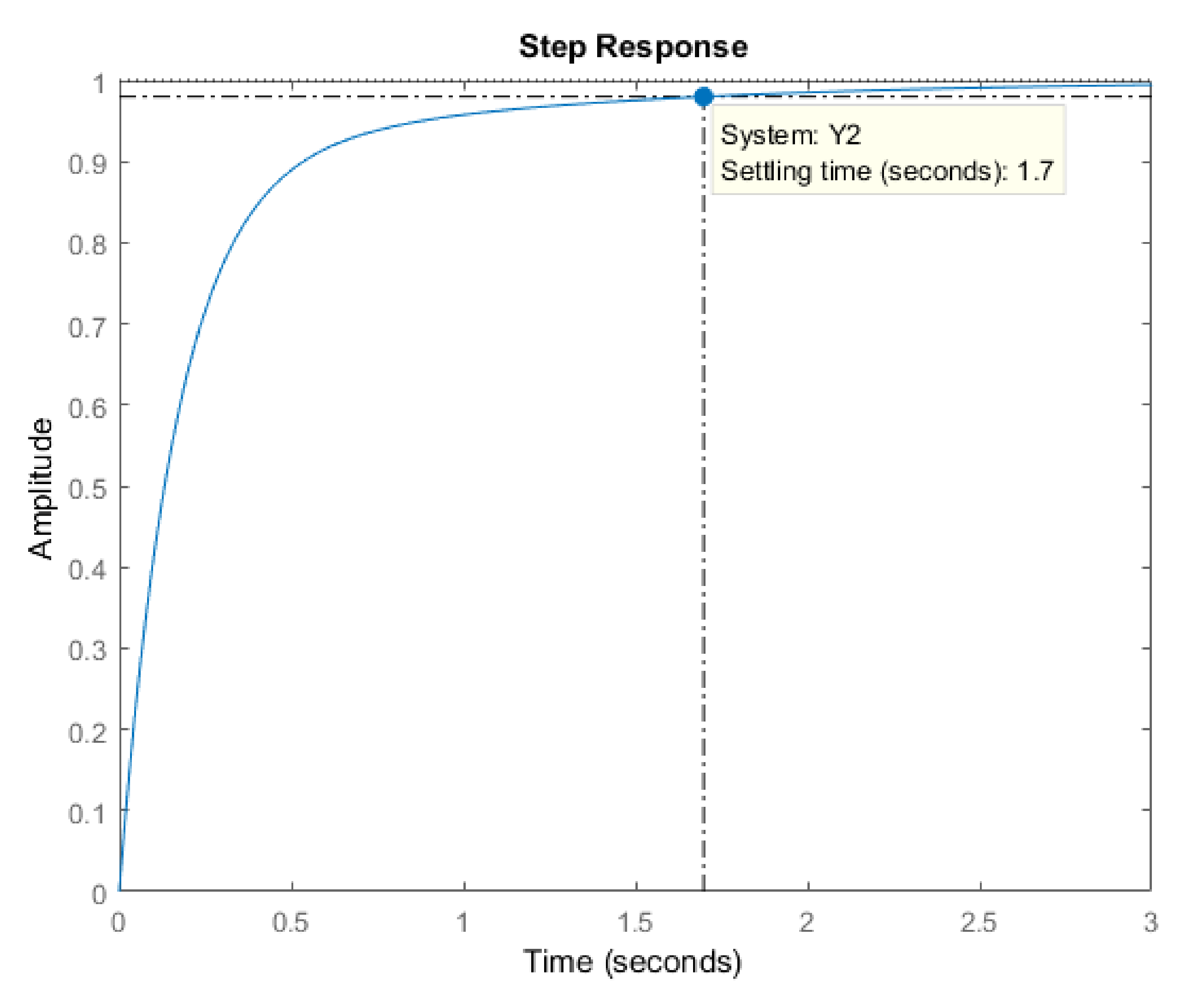
Considerando a introdução de um zero próximo do polo p_1 **(sistema 2)**, a saída será definida por:

$$Y_2(s) = \frac{6(s+1{,}1)}{1{,}1s(s+1)(s+6)} = \frac{1}{s} - 0{,}11\frac{1}{s+1} - 0{,}89\frac{1}{s+6}$$

$$y_2(t) = 1 - 0{,}11e^{-t} - 0{,}89e^{-6t}$$

Em relação ao sistema sem zero, observa-se uma redução no coeficiente associado ao termo e^{-t} e o polo dominante passa a ser $p_2=-6$.

Efeito dos zeros na resposta transitória



Efeito dos zeros na resposta transitória

Seja agora um zero introduzido distante dos polos do sistema **(sistema 3)**, a saída será definida por:

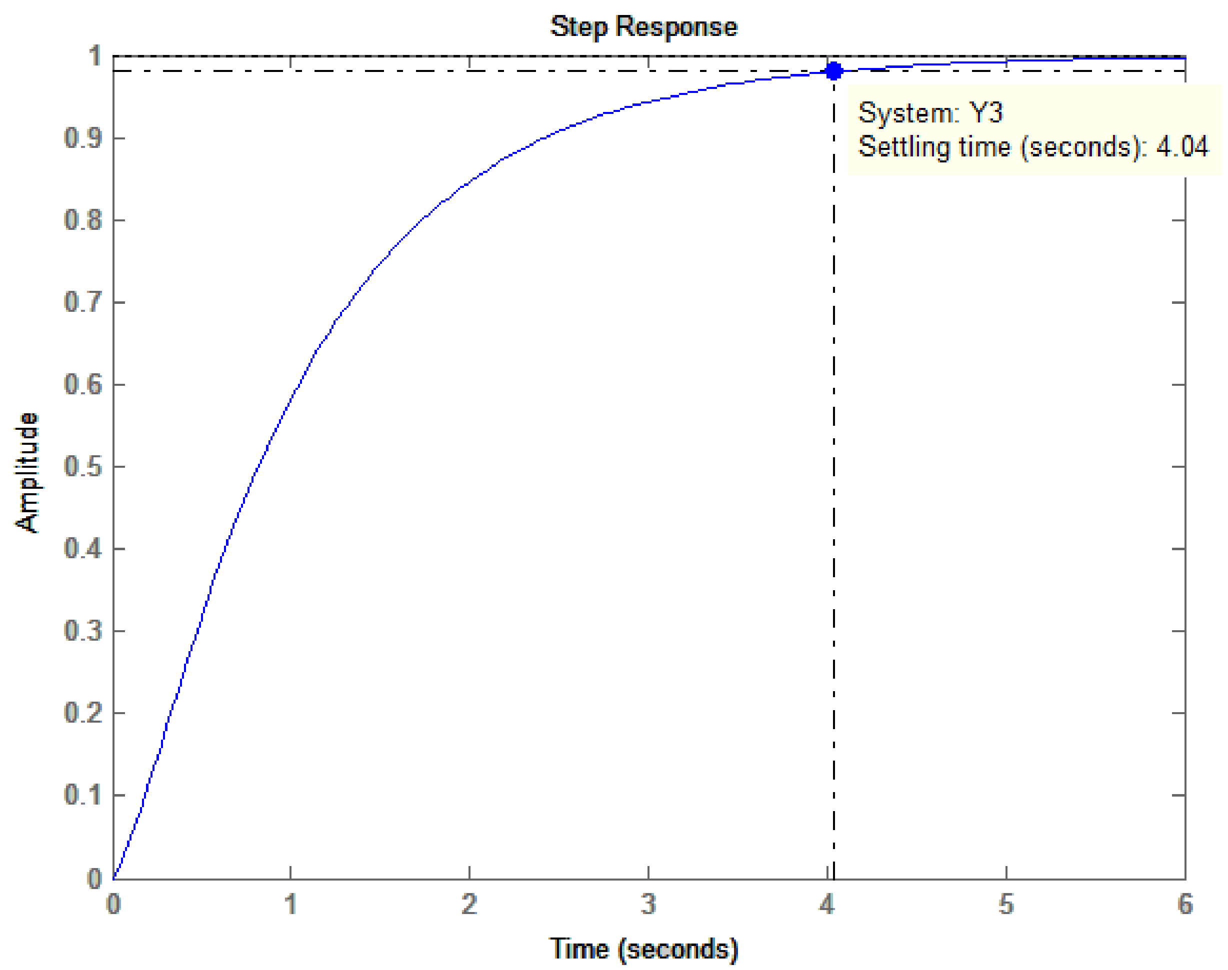
$$Y_3(s) = \frac{s+18}{3s(s+1)(s+6)} = \frac{1}{s} - 1{,}13\frac{1}{s+1} + 0{,}13\frac{1}{s+6}$$

$$\Downarrow$$

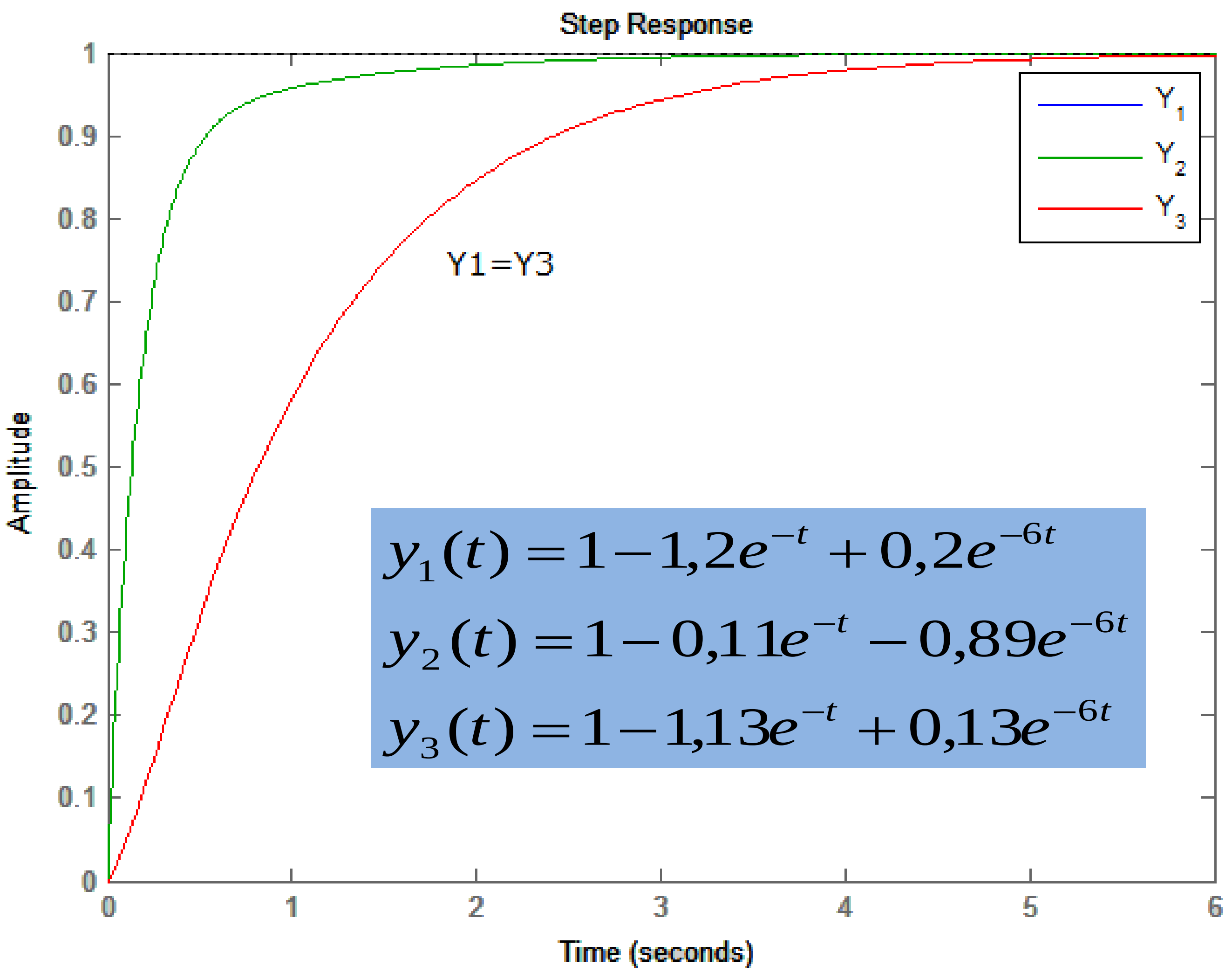
$$y_3(t) = 1 - 1{,}13e^{-t} + 0{,}13e^{-6t}$$

Neste caso, a resposta se assemelha ao sistema sem zeros (sistema 1). Quanto maior o valor do zero menor será sua influência na resposta.

Efeito dos zeros na resposta transitória



Efeito dos zeros na resposta transitória



$$y_1(t) = 1 - 1{,}2e^{-t} + 0{,}2e^{-6t}$$

$$y_2(t) = 1 - 0{,}11e^{-t} - 0{,}89e^{-6t}$$

$$y_3(t) = 1 - 1{,}13e^{-t} + 0{,}13e^{-6t}$$

Efeito dos zeros na resposta transitória

Seja agora um zero introduzido em outras localizações.

$$T_4(s) = \frac{6(s+3,5)}{3,5(s+1)(s+6)} \quad \Rightarrow \quad T_4(0) = 1 \rightarrow y_4(t)$$

$$T_5(s) = \frac{12(s+0,5)}{(s+1)(s+6)} \quad \Rightarrow \quad T_5(0) = 1 \rightarrow y_5(t)$$

$$T_6(s) = \frac{-6(s-1)}{(s+1)(s+6)} \quad \Rightarrow \quad T_6(0) = 1 \rightarrow y_6(t)$$

Como o zero adicional irá influenciar na resposta ?

Efeito dos zeros na resposta transitória

Seja o sistema de 2ª ordem subamortecido ($0 < \xi < 1$) com um único zero real ($\alpha > 0$).

$$T(s) = \left(\frac{\omega_n}{\alpha\xi}\right)\frac{s+\alpha\xi\,\omega_n}{(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n{}^2)} \quad \Rightarrow \quad T(0)=1$$

Sua resposta ao degrau será definida por:

$$y(t) = 1 - \frac{\sqrt{(\alpha-1)^2\,\xi^2+\left(1-\xi^2\right)}}{\alpha\xi\sqrt{1-\xi^2}}\,e^{-\xi\omega_n t}\,\mathrm{sen}\left[\omega_d t+\phi+\theta\right]$$

sendo

$$\phi = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{(\alpha-1)\xi}\right) \quad \mathrm{e} \quad \theta = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$$

Efeito dos zeros na resposta transitória

A partir de y(t) pode-se demonstrar as alterações que ocorrem nas especificações da resposta transitória devido à introdução do zero.

Tempo de Subida (0 – 100%):

$$t_r = \frac{\pi - \theta - \phi}{\omega_d}$$

Considerando um valor fixo de ξ, quanto maior o valor α menor será o valor de φ.

Fazendo $\alpha \to \infty$ tem-se $\varphi \to 0$, o que representa o sistema sem zero.

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d}$$

Efeito dos zeros na resposta transitória

Tempo de pico:

$$t_p = \frac{\pi - \phi}{\omega_d}$$

Sobressinal máximo:

$$M_p = \frac{\sqrt{(\alpha - 1)^2 \xi^2 + (1 - \xi^2)}}{\alpha \xi} e^{\frac{-\xi(\pi - \phi)}{\sqrt{1 - \xi^2}}}$$

Fazendo $\alpha \to \infty$ (sistema sem zero), chega-se as especificações vistas anteriormente.

$$M_p = e^{\frac{-\xi \pi}{\sqrt{1 - \xi^2}}} \quad \text{e} \quad t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

Efeito dos zeros na resposta transitória

Seja o sistema de 2ª ordem subamortecido ($0 < \xi < 1$) com um único zero real e, por simplicidade, ω_n=1.

$$T(s) = \frac{s + \alpha\xi}{\alpha\xi(s^2 + 2\xi s + 1)} \quad \Rightarrow \quad T(0) = 1$$

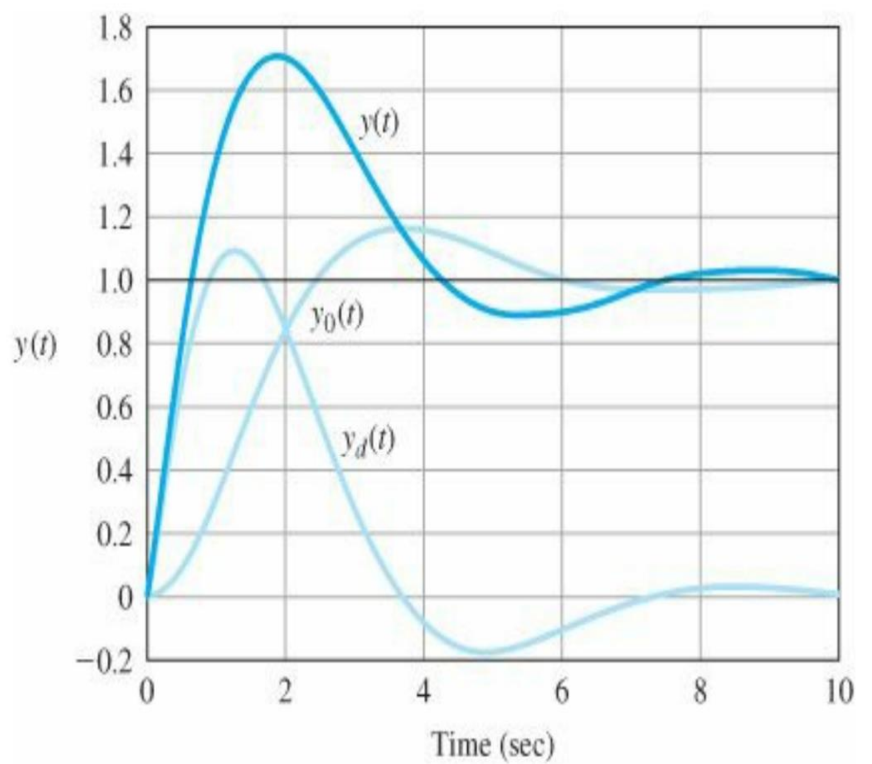
ou

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{1}{s^2 + 2\xi s + 1} + \frac{1}{\alpha\xi}\,\frac{s}{s^2 + 2\xi s + 1} \\ &= T_o(s) + T_d(s) \end{aligned}$$

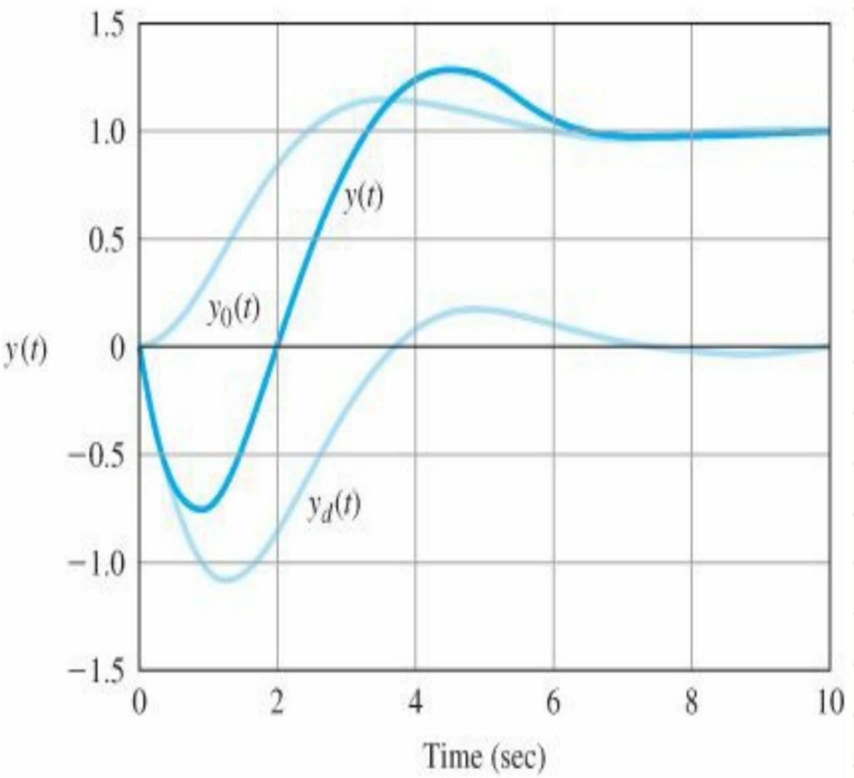
Logo, a resposta total do sistema é a soma da resposta do sistema sem zero, $T_o(s)$, mais sua derivada, $T_d(s)$, multiplicada por uma constante ($1/\alpha\xi$).

Efeito dos zeros na resposta transitória

$\alpha > 0$



$\alpha < 0$



Efeito dos zeros na resposta transitória

O efeito da adição de um **zero estável** ($\alpha > 0$, zero no semiplano esquerdo) é o aumento do sobressinal, consequentemente gerando a aceleração da resposta (menores valores de tr e tp).

Para $\alpha < 0$ (**zero instável**, de fase não mínima) a resposta evolui negativamente antes de estabilizar no valor de regime permanente.

Ainda existe um aumento do sobressinal porém este é menor em relação a introdução de um zero estável.

Efeito dos zeros na resposta transitória

Sejam os três sistemas abaixo que têm os mesmos polos de malha fechada.

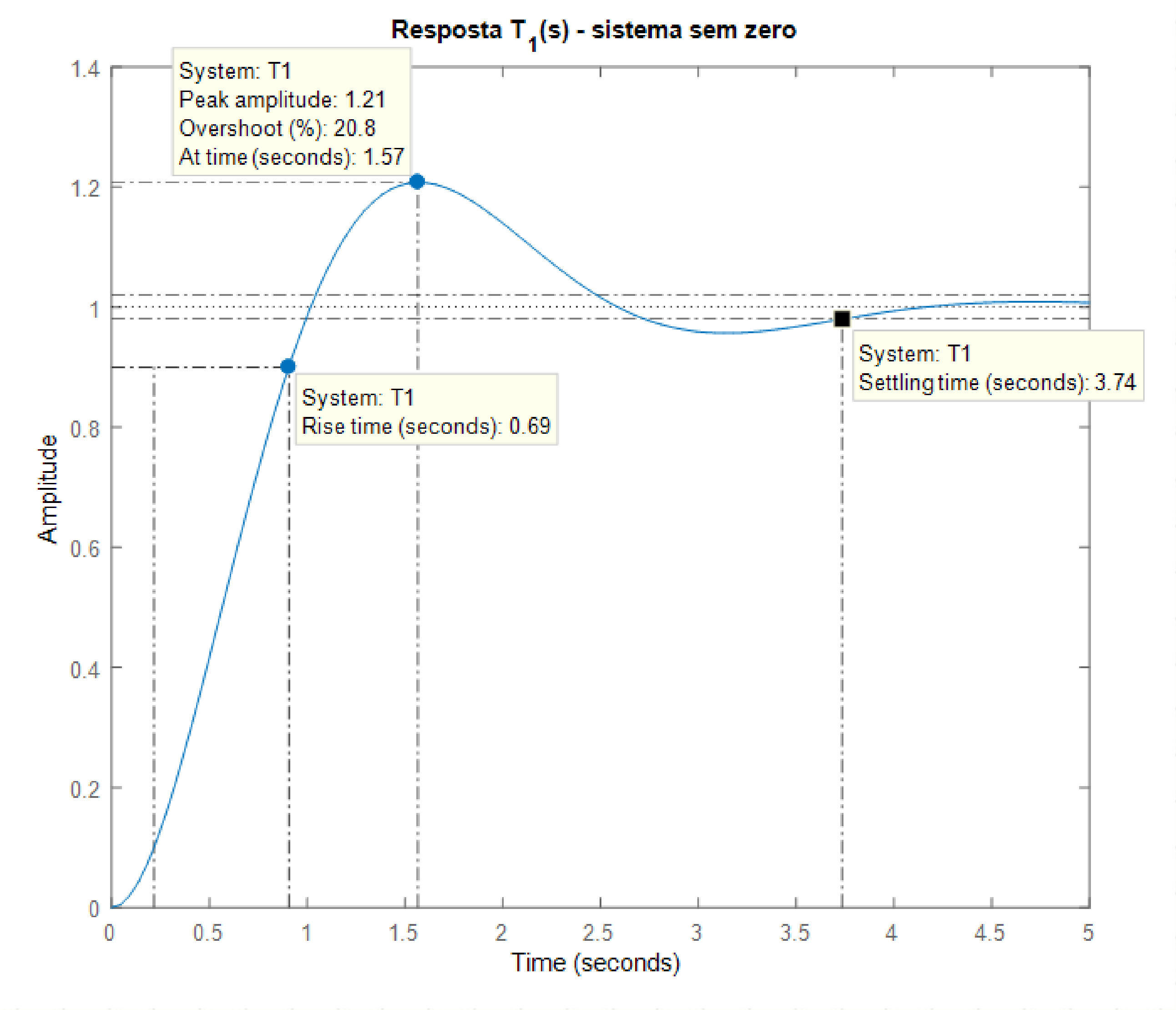
$$T_1(s) = \frac{5}{s^2 + 2s + 5} \qquad p_{1,2} = -1 \pm j2$$

$$T_2(s) = \frac{5(s+1)}{s^2 + 2s + 5} \qquad p_{1,2} = -1 \pm j2, \quad z = -1$$

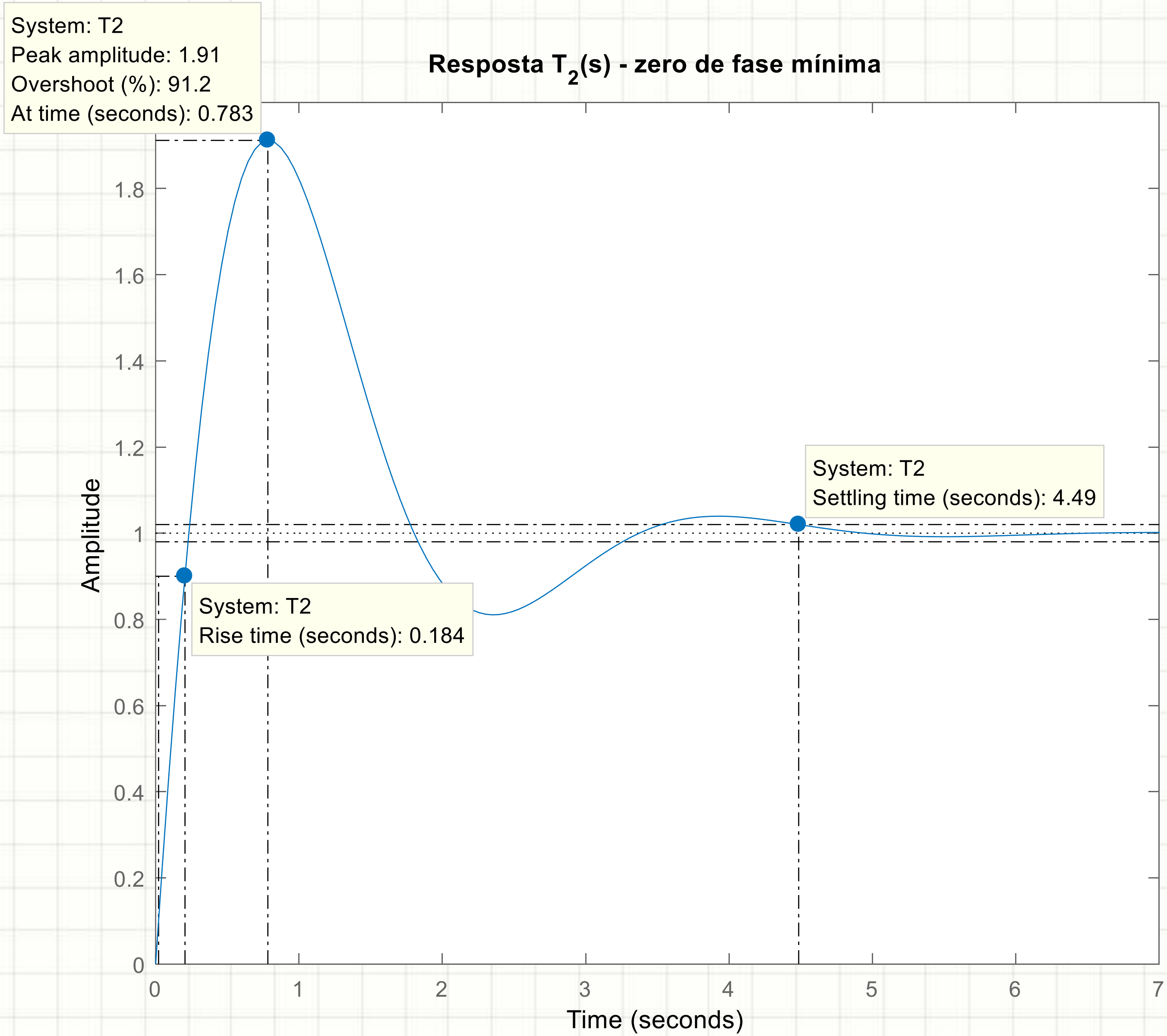
$$T_3(s) = \frac{-5(s-1)}{s^2 + 2s + 5} \qquad p_{1,2} = -1 \pm j2, \quad z = 1$$

Qual será a influência do zero na resposta ao degrau?

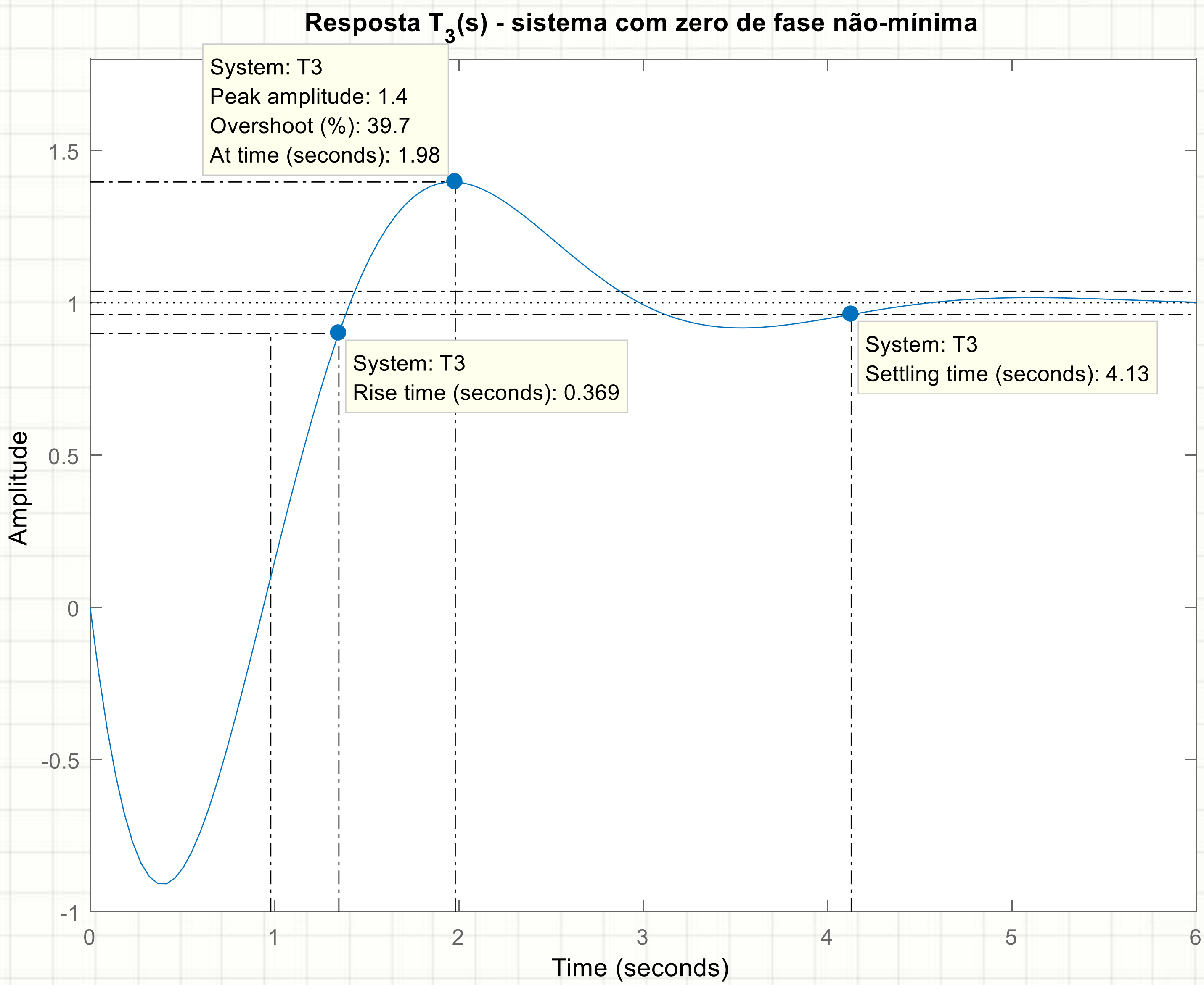
Efeito dos zeros na resposta transitória



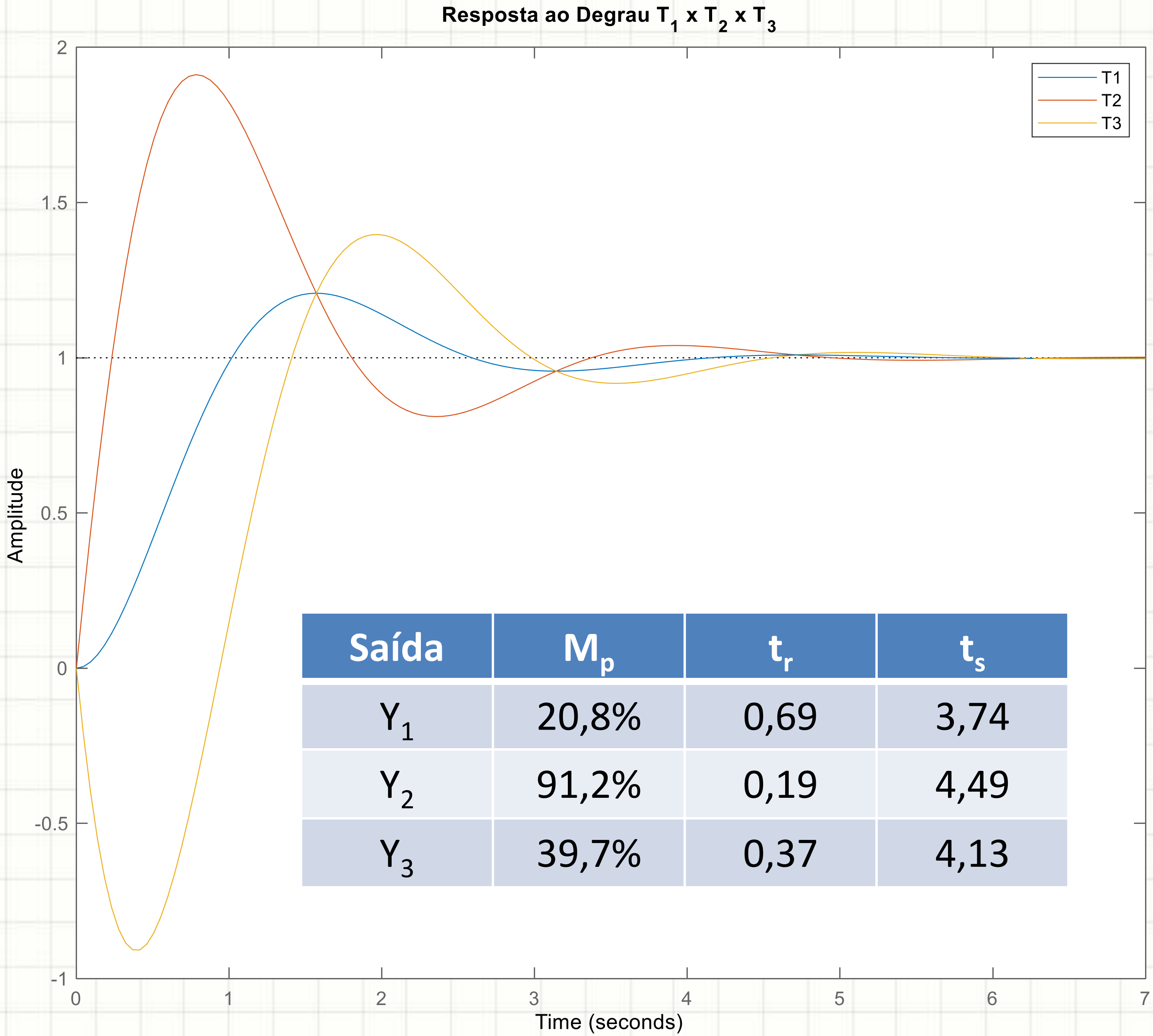
Efeito dos zeros na resposta transitória



Efeito dos zeros na resposta transitória



Efeito dos zeros na resposta transitória



Saída	M_p	t_r	t_s
Y_1	20,8%	0,69	3,74
Y_2	91,2%	0,19	4,49
Y_3	39,7%	0,37	4,13

Efeito dos zeros na resposta transitória

Variando a posição do zero de fase mínima, a resposta também sofrerá alterações.

$$T_{2a}(s) = \frac{(5/1{,}5)(s+1{,}5)}{s^2+2s+5}$$

$$p_{1,2} = -1 \pm j2$$

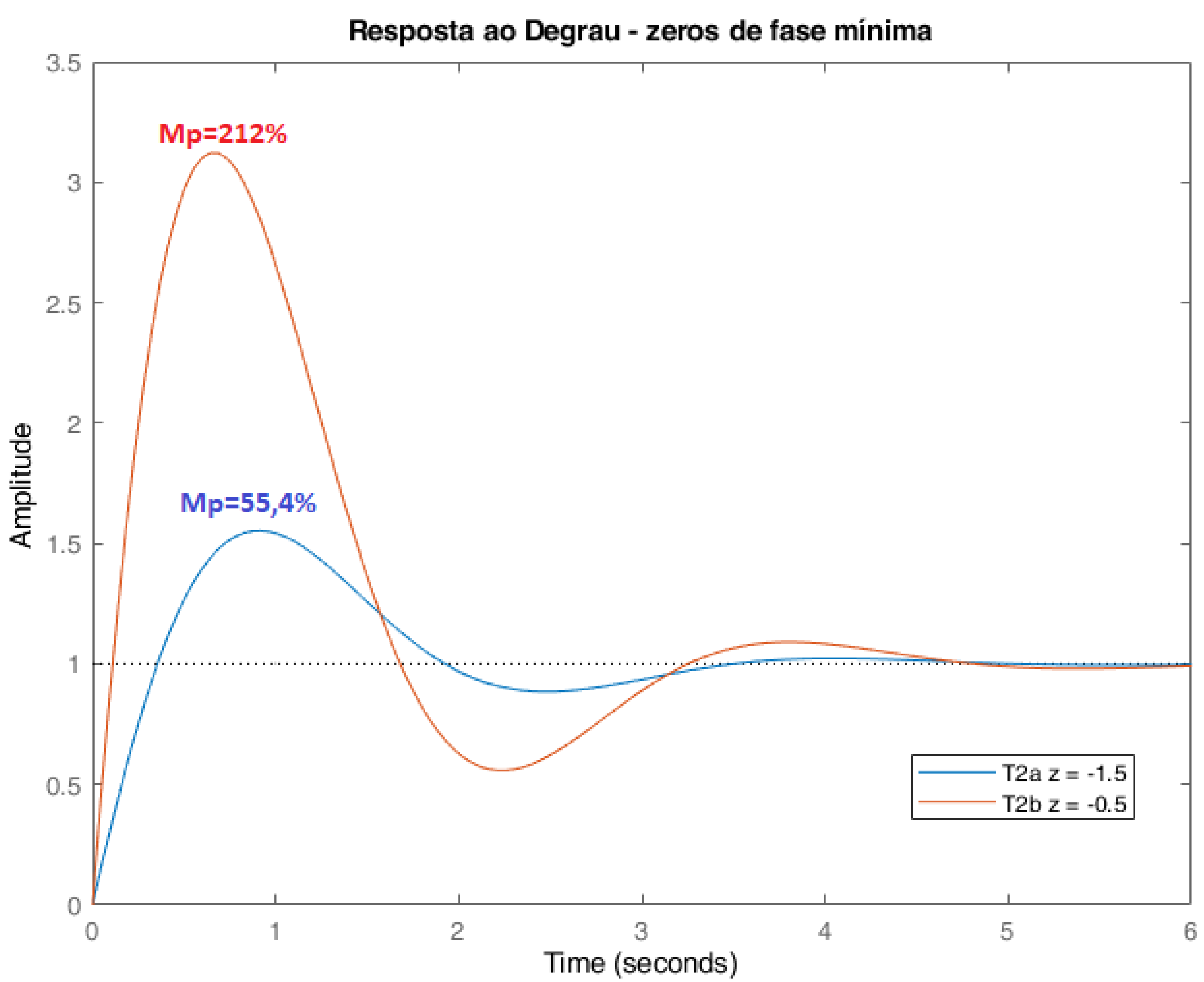
$$z = -1{,}5$$

$$T_{2b}(s) = \frac{(5/0{,}5)(s+0{,}5)}{s^2+2s+5}$$

$$p_{1,2} = -1 \pm j2$$

$$z = -0{,}5$$

Efeito dos zeros na resposta transitória



Efeito dos zeros na resposta transitória

Variando a posição do zero de fase não mínima ….

$$T_{3a}(s) = \frac{-(5/1{,}5)(s-1{,}5)}{s^2+2s+5}$$

$$p_{1,2} = -1 \pm j2$$

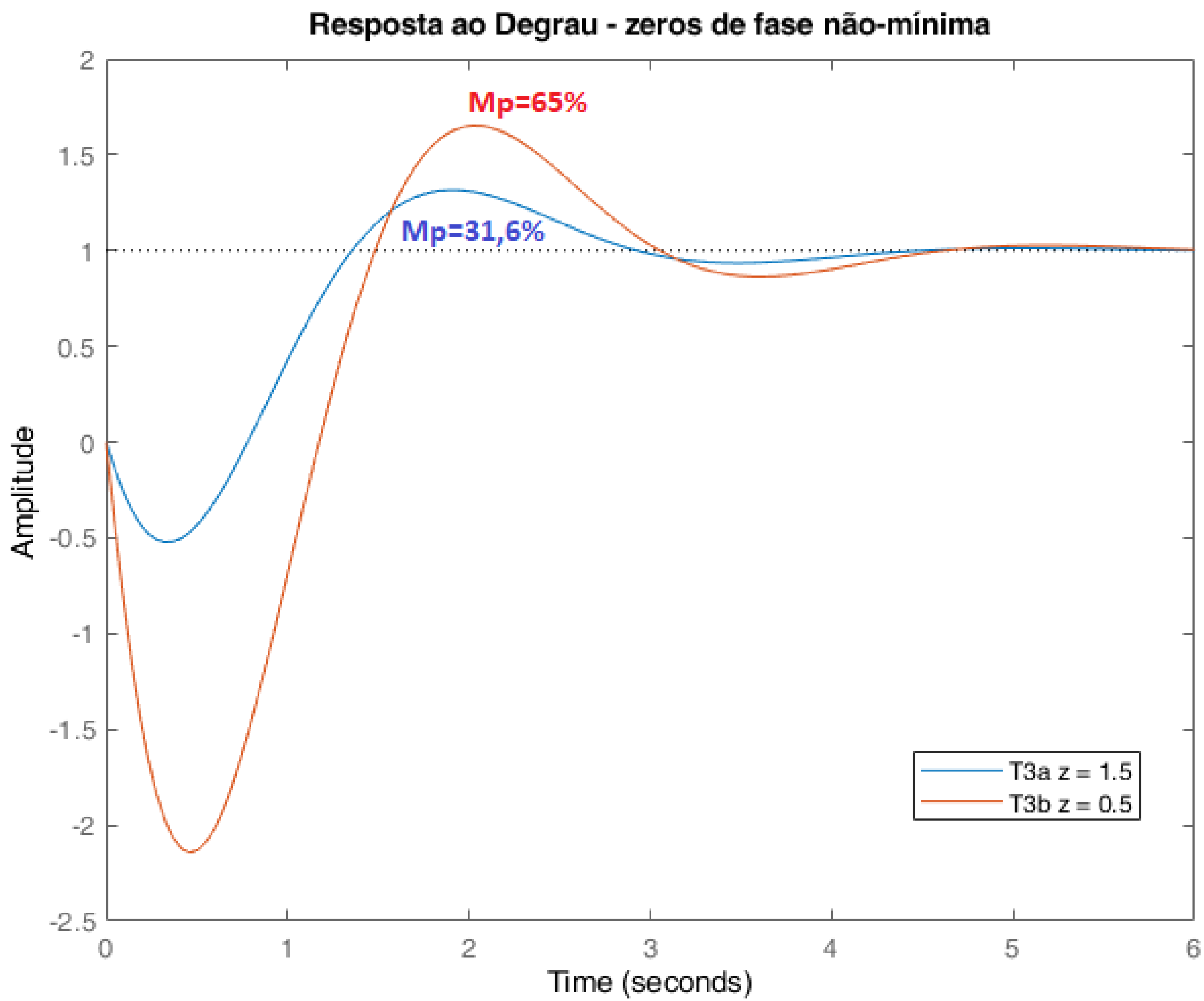
$$z = 1{,}5$$

$$T_{3b}(s) = \frac{-(5/0{,}5)(s-0{,}5)}{s^2+2s+5}$$

$$p_{1,2} = -1 \pm j2$$

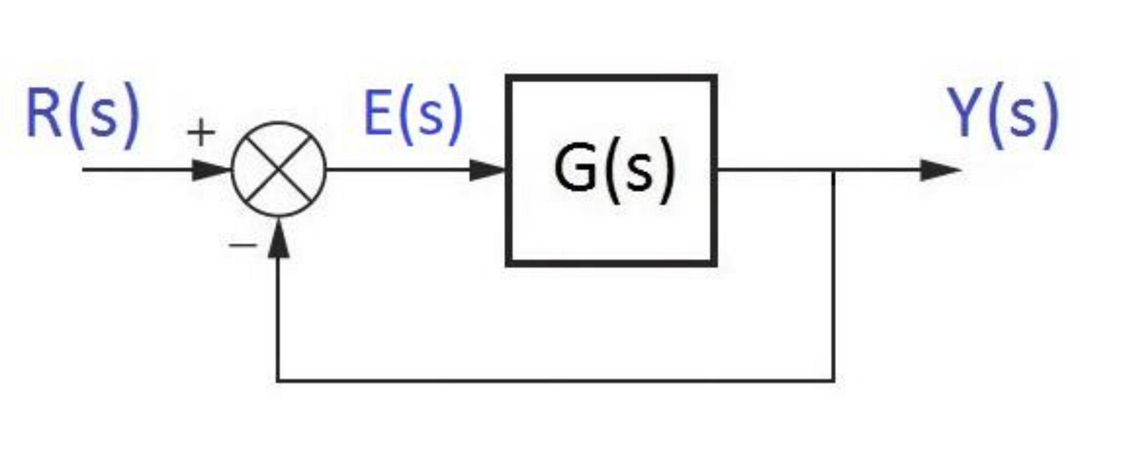
$$z = 0{,}5$$

Efeito dos zeros na resposta transitória



Resposta em Regime Permanente

Seja o sistema de controle com realimentação unitária:



O sinal de erro é definido como a diferença entre o sinal de entrada e o sinal de saída:

$$E(s) = R(s) - Y(s)$$

Resposta em Regime Permanente

Em regime permanente, podem ser obtidos os coeficientes e erros estacionários associados a cada tipo de entrada: degrau, rampa e parábola.

$$\mathrm{K_P} = \lim_{s \to 0} G(s) \quad \Rightarrow \quad e_\infty = \frac{1}{1 + \mathrm{K_P}}$$

$$\mathrm{K_V} = \lim_{s \to 0} sG(s) \quad \Rightarrow \quad e_\infty = \frac{1}{\mathrm{K_V}}$$

$$\mathrm{K_a} = \lim_{s \to 0} s^2 G(s) \quad \Rightarrow \quad e_\infty = \frac{1}{\mathrm{K_a}}$$

Resposta em Regime Permanente

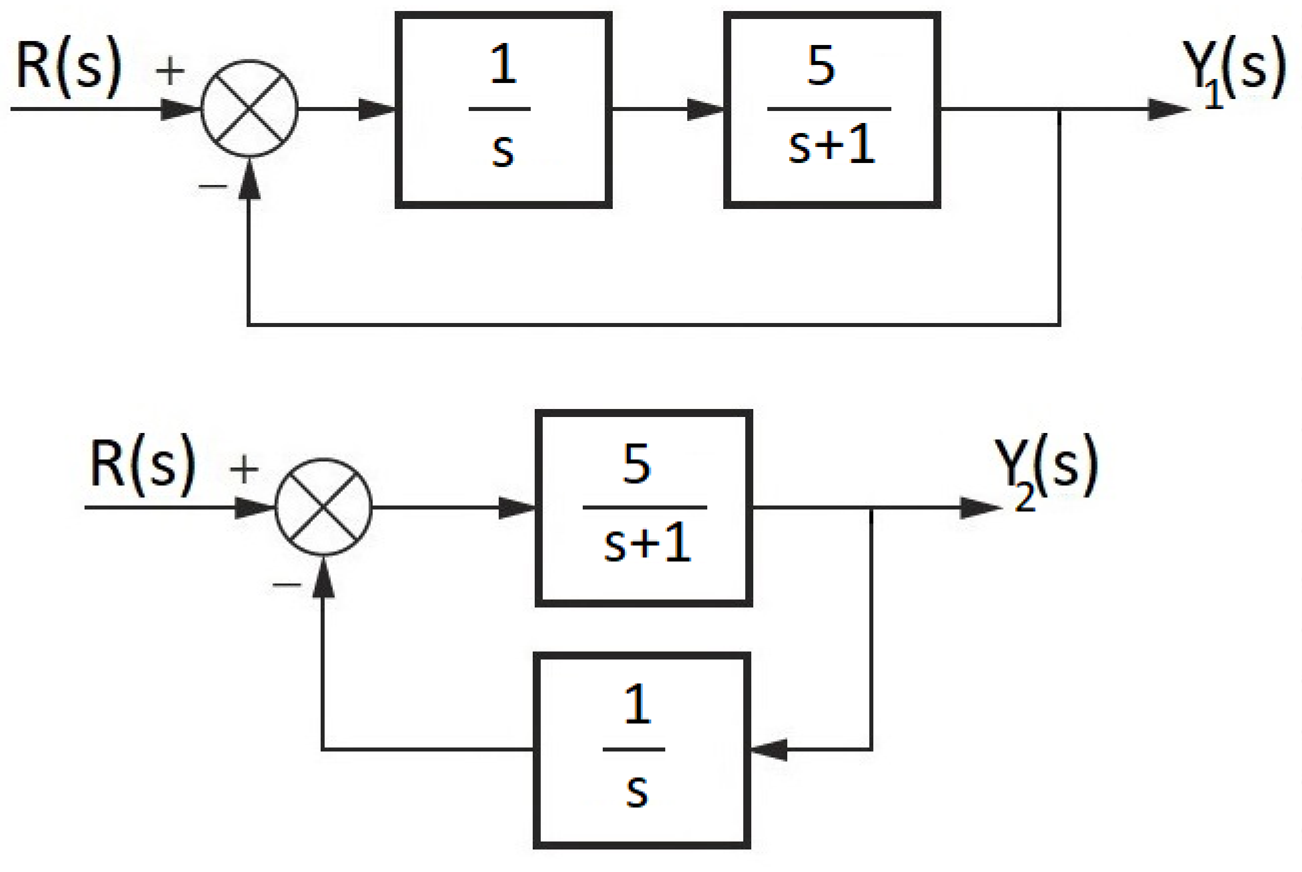
Considerando realimentação unitária, pode ser demonstrado que o tipo do sistema é definido pelo número de integradores da função de transferência G(s).

	Tipo 0		Tipo 1		Tipo 2	
Entrada	**Constante de erro estático**	**Erro**	**Constante de erro estático**	**Erro**	**Constante de erro estático**	**Erro**
Degrau	$K_p = \text{Cte}$	$\frac{1}{1+K_p}$	$K_p = \infty$	0	$K_p = \infty$	0
Rampa	$K_v = 0$	∞	$K_v = \text{Cte}$	$\frac{1}{K_v}$	$K_v = \infty$	0
Parábola	$K_a = 0$	∞	$K_a = 0$	∞	$K_a = \text{Cte}$	$\frac{1}{K_a}$

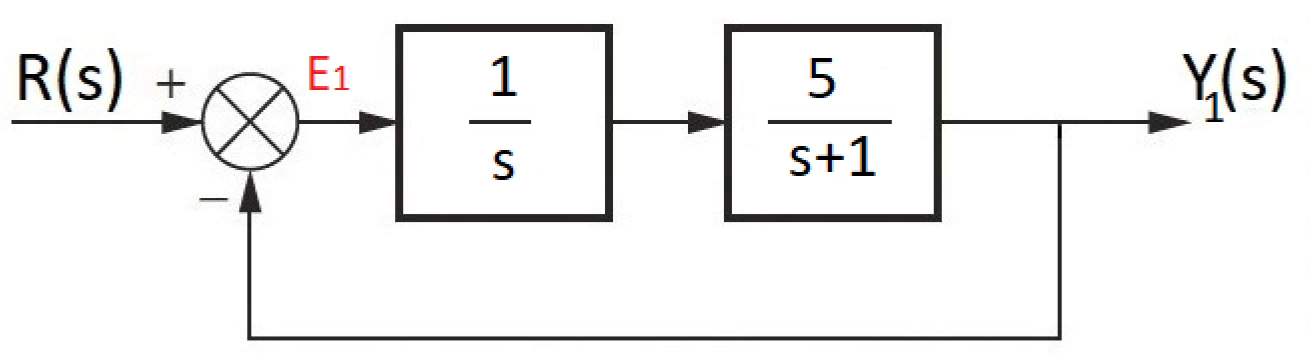
Resposta em Regime Permanente

Qual a diferença da resposta ao degrau para os dois sistemas ?

Qual o “tipo” de cada sistema?



Resposta em Regime Permanente



Sistema Tipo 1

$$T_1(s) = \frac{5}{s^2 + s + 5}$$

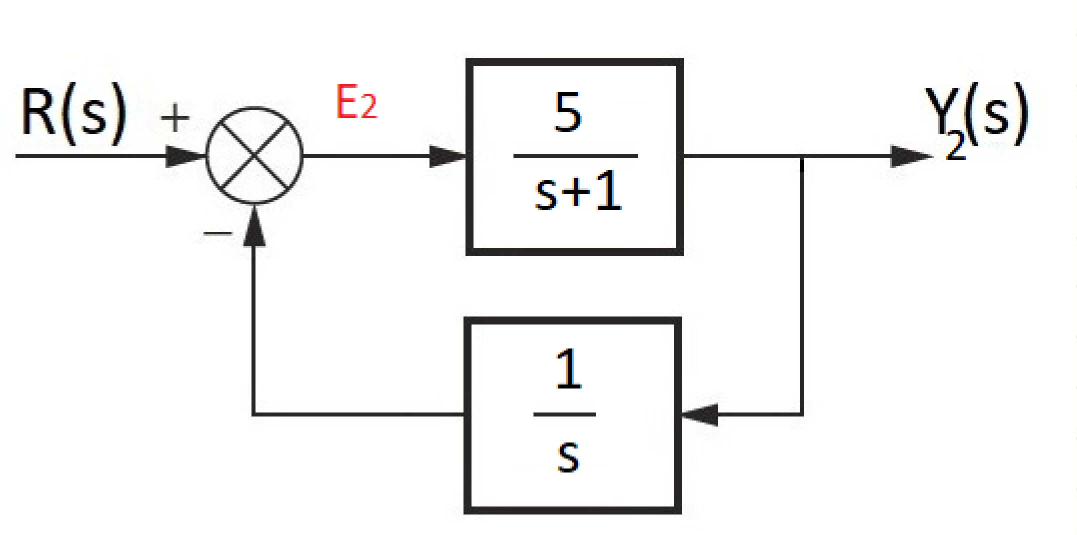
$$p_{1,2} = -0,5 \pm j2,18$$

$$\xi = 0,22 \qquad M_p = 48,7\%$$

$$\omega_n = 2,24 \quad \rightarrow \quad t_s = 0,5\,seg$$

$$y(\infty) = T(0) = 1 \quad \rightarrow \quad e_\infty = 1 - T(0) = 0$$

Resposta em Regime Permanente



Sistema Tipo 0

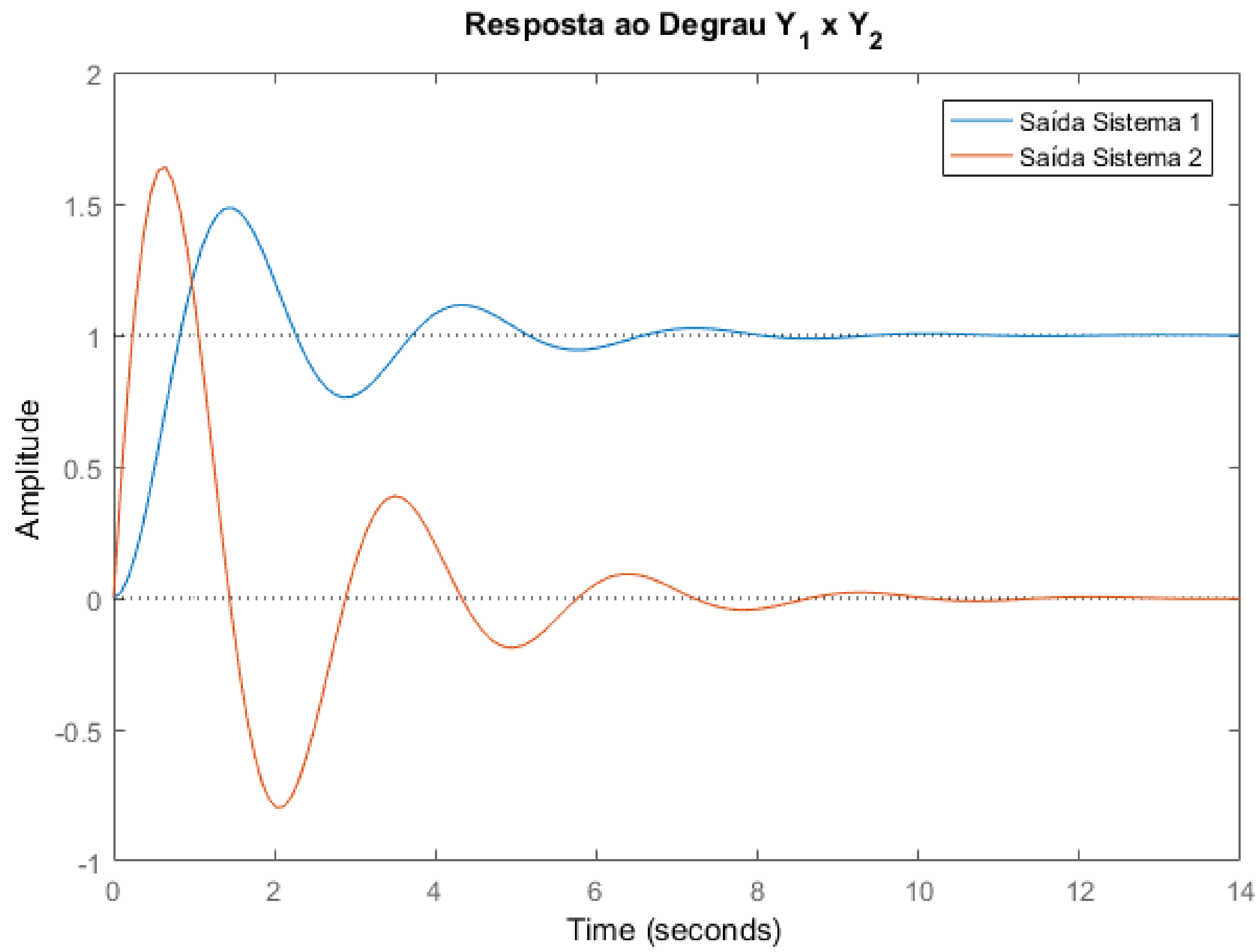
$$T_2(s) = \frac{5s}{s^2 + s + 5}$$

$$p_{1,2} = -0,5 \pm j2,18$$

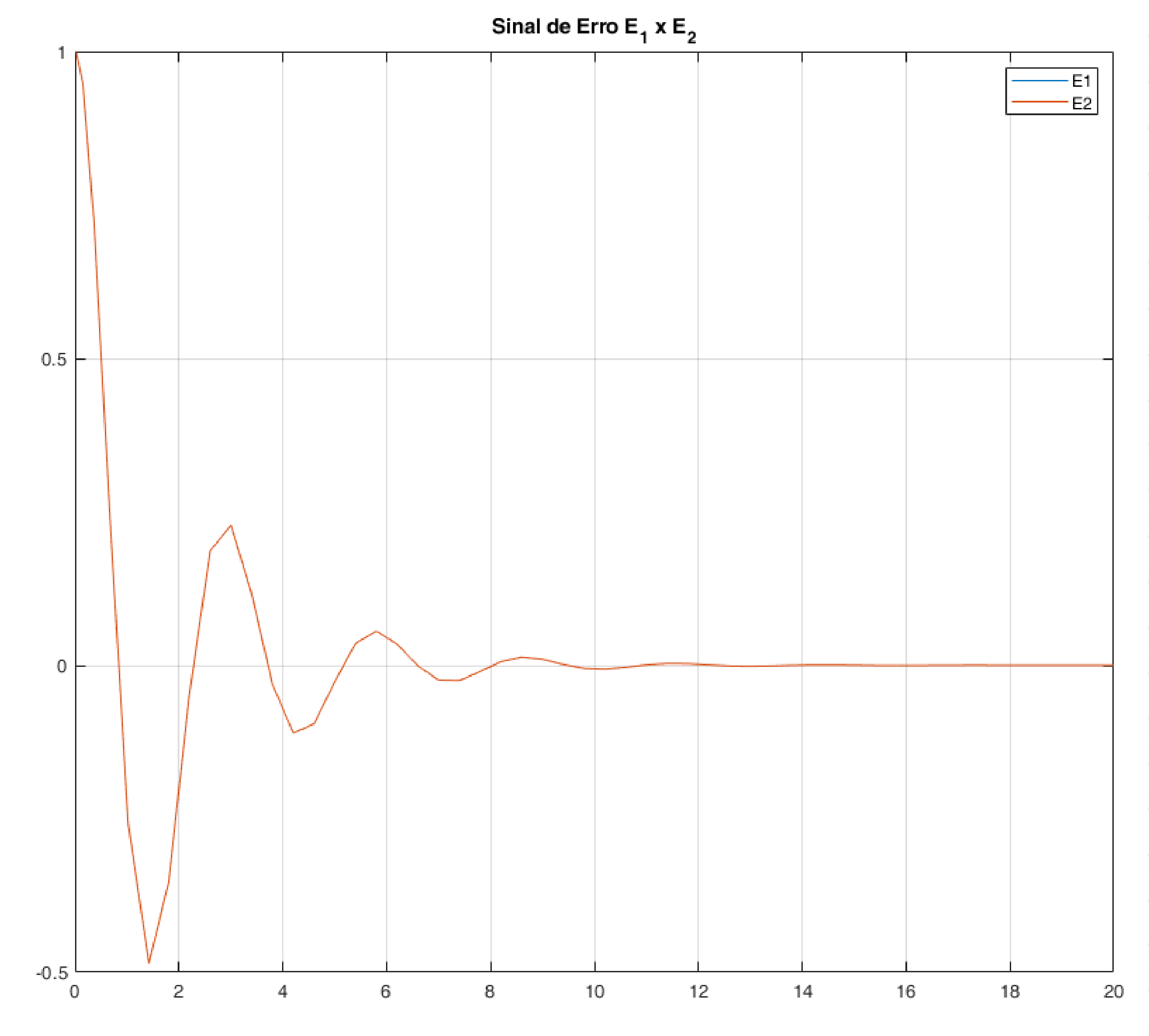
$$z = 0$$

$$y(\infty) = T(0) = 0 \quad \rightarrow \quad e_\infty = 1 - T(0) = 1$$

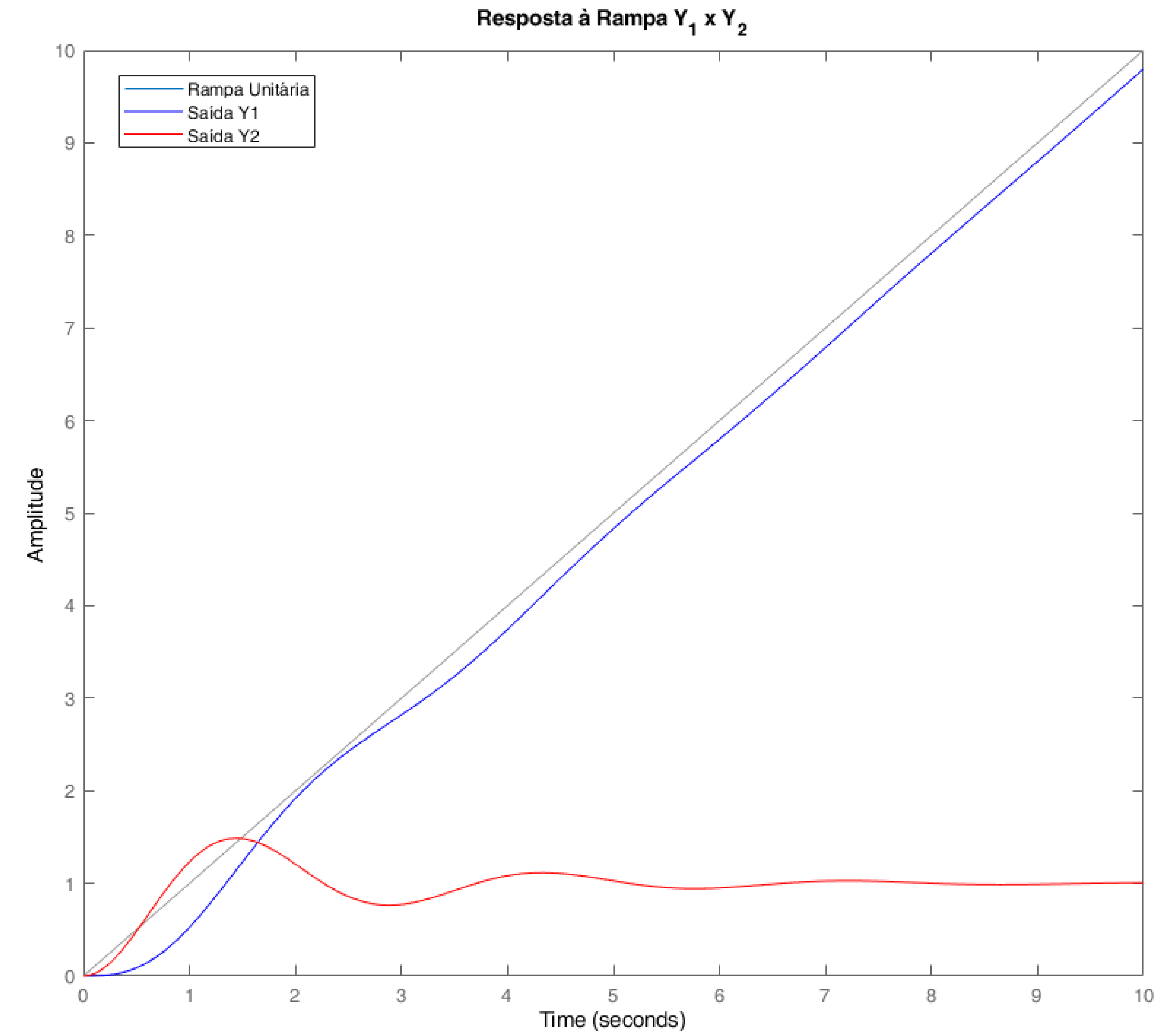
Resposta em Regime Permanente



Resposta em Regime Permanente



Resposta em Regime Permanente



Sistemas de Ordem Superior - Dominância de polos

Sejam os sistemas abaixo que têm um mesmo par de polos complexos de malha fechada e 3º polo real (que irá influenciar na dominância desses polos complexos sobre a resposta).

$$T_1(s) = \frac{50}{(s+10)(s^2+2s+5)}$$

$$T_2(s) = \frac{15}{(s+3)(s^2+2s+5)}$$

$$T_3(s) = \frac{2{,}5}{(s+0{,}5)(s^2+2s+5)}$$

Qual será a influência do polo real na resposta ao degrau?

Dominância de polos

Sistema 1: o polo real está "bem afastado" dos polos complexos:

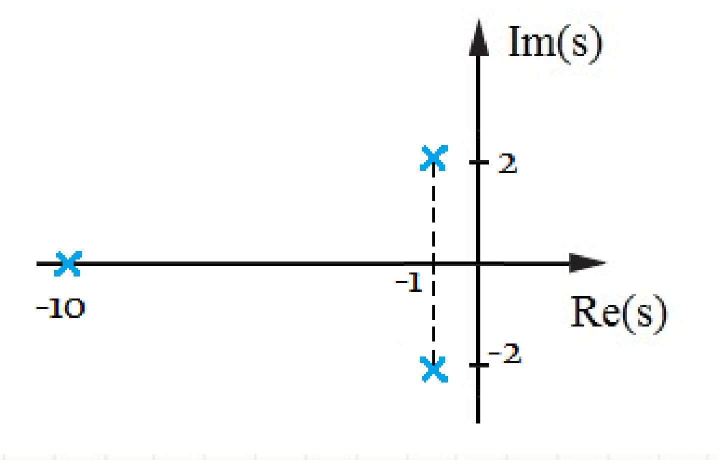
$$T_1(s) = \frac{50}{(s+10)(s^2+2s+5)}$$

Polos dominantes (PD): $p_{1,2}$=-1±j2

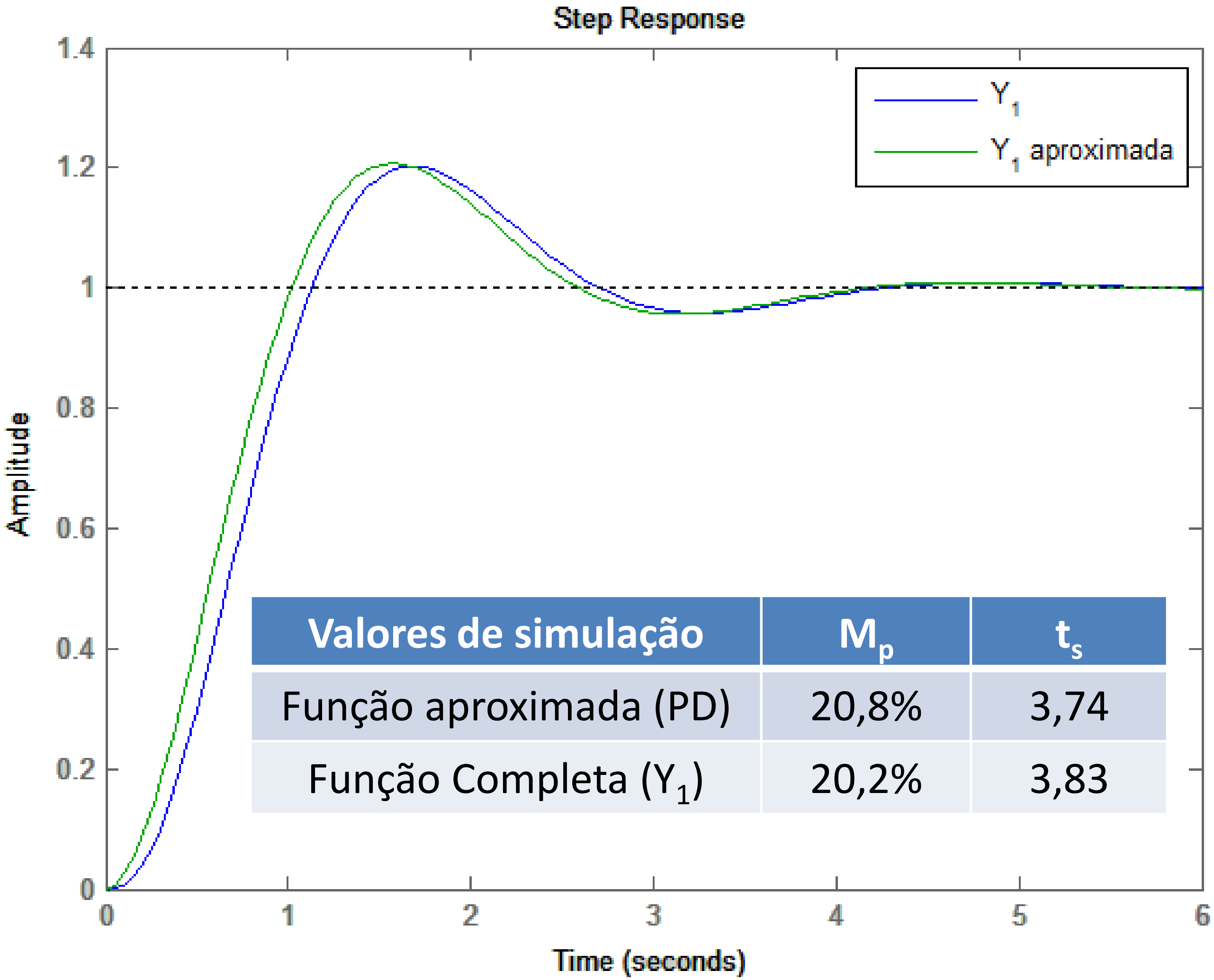
$$\begin{aligned} \omega_n^2 &= 5 & \rightarrow && \omega_n &= 2{,}23 \\ 2\xi\omega_n &= 2 & \rightarrow && \xi &= 0{,}45 \end{aligned}$$

Usando as aproximações:

$$\begin{aligned} \mathrm{M_p} &= 20{,}5\% \\ \mathrm{t_s} &= 3{,}74\, seg \end{aligned}$$



Dominância de polos



Valores de simulação	M_p	t_s
Função aproximada (PD)	20,8%	3,74
Função Completa (Y_1)	20,2%	3,83

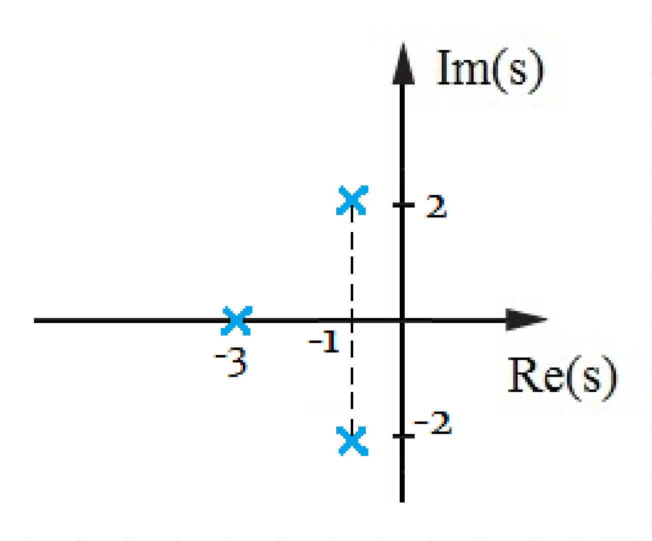
Dominância de polos

Sistema 2: o polo real está "próximo" dos polos complexos:

$$T_2(s) = \frac{15}{(s+3)(s^2+2s+5)}$$

Polos dominantes (PD): $p_{1,2}$=-1±j2

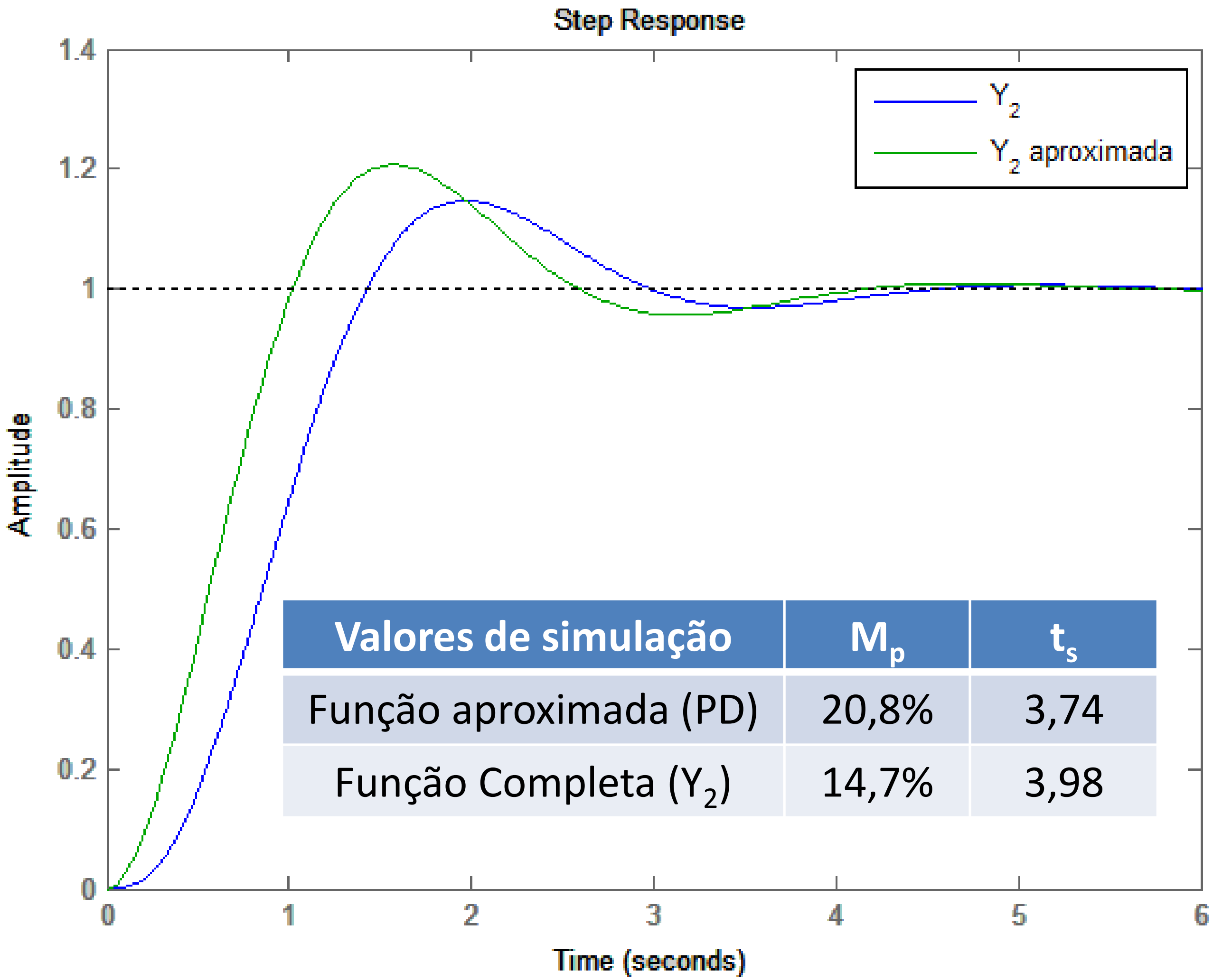
$$\begin{aligned} \omega_n^2 &= 5 & \rightarrow && \omega_n &= 2{,}23 \\ 2\xi\omega_n &= 2 & \rightarrow && \xi &= 0{,}45 \end{aligned}$$



Usando as aproximações:

$$\begin{aligned} \mathrm{M_p} &= 20{,}5\% \\ \mathrm{t_s} &= 3{,}74\,seg \end{aligned}$$

Dominância de polos



Valores de simulação	M_p	t_s
Função aproximada (PD)	20,8%	3,74
Função Completa (Y_2)	14,7%	3,98

Dominância de polos

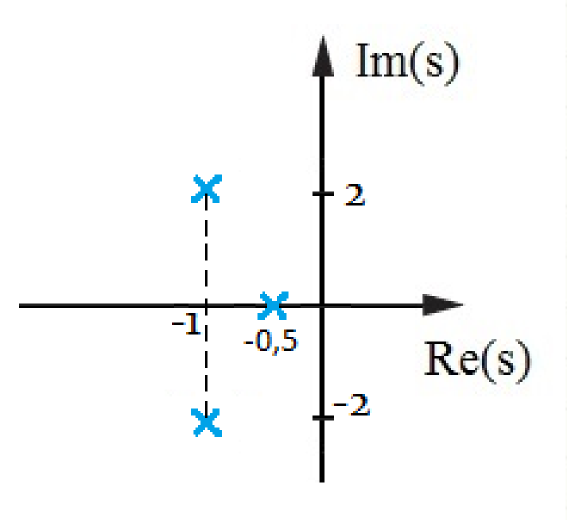
Sistema 3: o polo real está à direita dos polos complexos, mudando a dominância do sistema.

$$T_3(s) = \frac{2{,}5}{(s+0{,}5)(s^2+2s+5)}$$

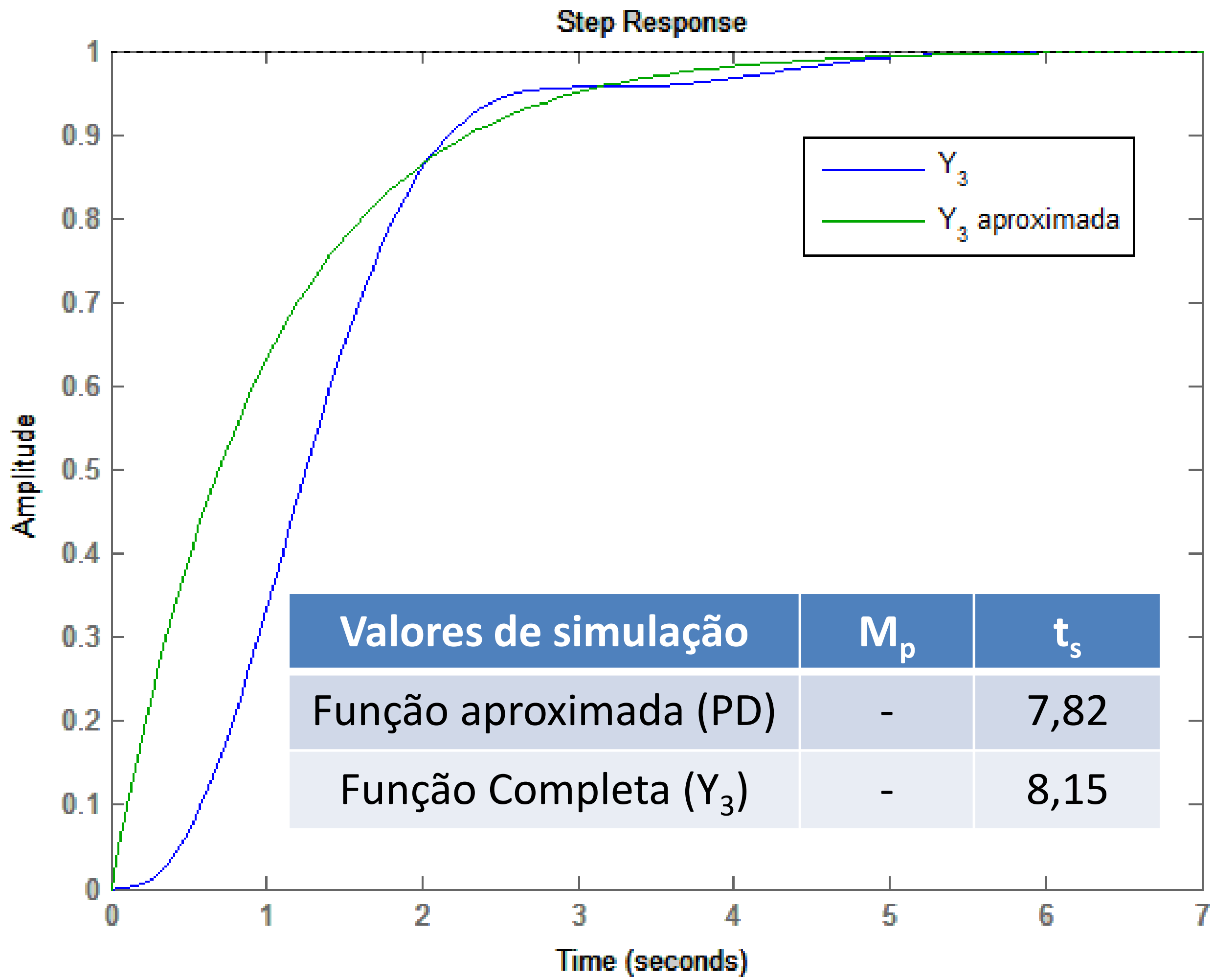
Polo dominante (PD): p_1=-0,5

Usando as aproximações:

$$t_r = 1{,}8/|p_1| \quad \rightarrow \quad t_r = 3{,}6$$
$$t_s = 4/|p_1| \quad \rightarrow \quad t_s = 8{,}0$$



Dominância de polos



Valores de simulação	M_p	t_s
Função aproximada (PD)	-	7,82
Função Completa (Y_3)	-	8,15

Sugestões de Leitura

Engenharia de Controle Moderno – K. Ogata (5ª Ed.)
Capítulo 5 - Análise de Resposta Transitória e de Regime Estacionário

Sistemas de Controle Modernos – R. Dorf & R. Bishop (8ª Ed.)
Capítulo 4 – Características de Sistema de Controle com Retroação, Itens 4.1 a 4.5
Capítulo 5 – O Desempenho de Sistemas de Controle com Retroação, Itens 5.1 a 5.8

Sistemas de Controle para Engenharia – G. Franklin (6ª Ed.)
Capítulo 3 – Resposta Dinâmica: Item 3.4
Capítulo 4 – Uma primeira análise da realimentação: Item 4.2