Lugar das Raízes considerando K negativo

Profa. Cristiane Paim

Introdução

Seja a equação característica

$$\Delta(s) = 1 + KG(s) = 0$$

ou

$$G(s) = -\frac{1}{K}$$

Se K<0, então a condição de ganho não se altera e condição de fase torna-se

$$\angle G(s) = 360^{\circ} l$$

Introdução

Assim, todas as regras para o traçado do Lugar das Raízes que dependem da condição de fase serão modificadas considerando

$$\theta_l = 360^\circ l$$

As demais regras permanecem inalteradas.

Ângulos das Assíntotas

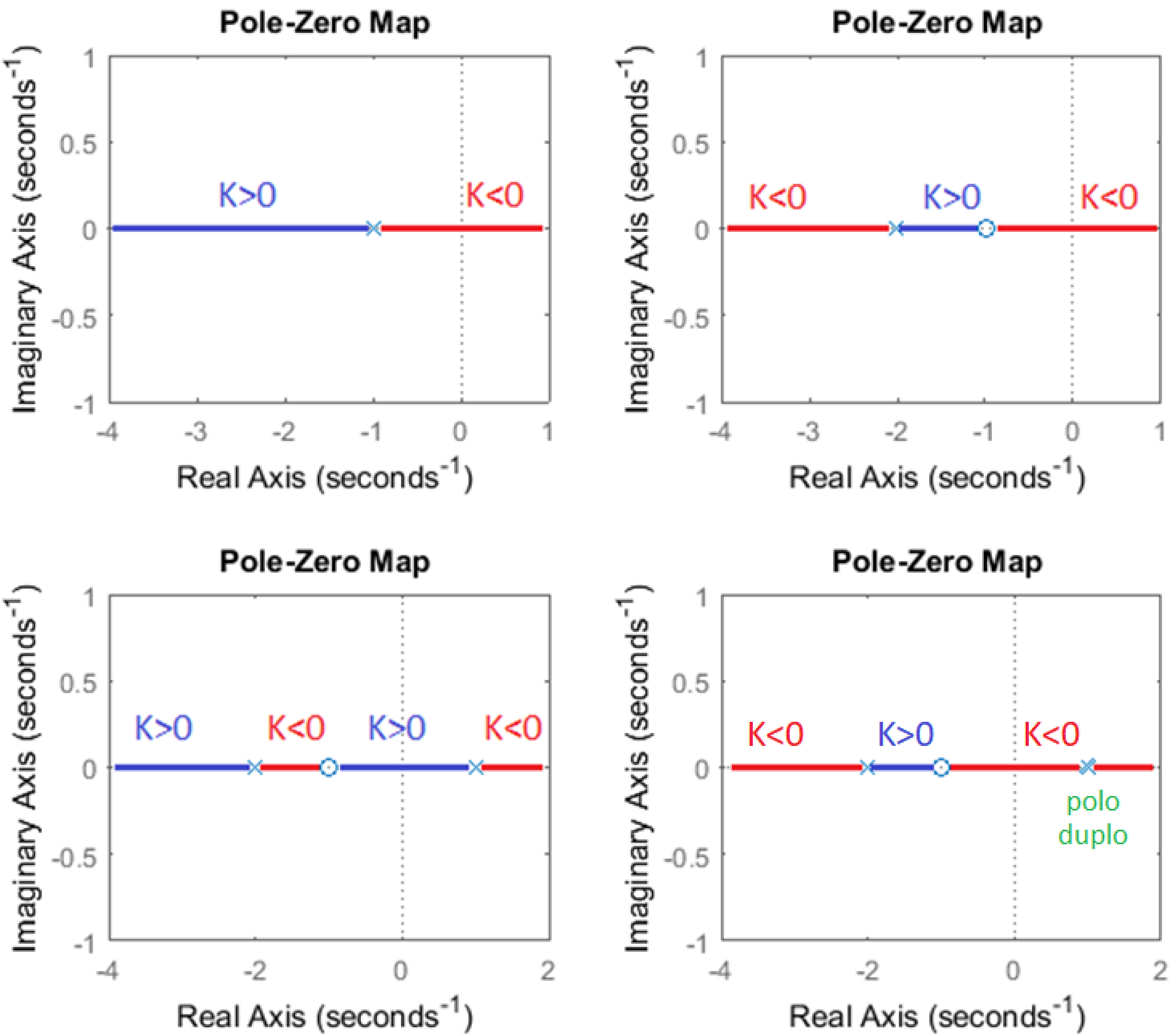
$$\theta_l = \frac{360^\circ l}{n-m} \qquad l = 0, 1, 2, \ldots (n-m-1)$$

Traçado do Lugar das Raízes (K<0)

Segmentos sobre o eixo real

Neste caso, fazem parte do LR os trechos sobre o eixo real que estão à esquerda de um número par (ou ausência) de singularidades.

O LR sobre o eixo real para K<0 é "complementar" àquele para K>0, ou seja, todo trecho do eixo real que não pertencem ao LR associado à K>0 irá pertencer ao LR de K<0.


Pole-Zero Map
Imaginary Axis (seconds⁻¹)
Real Axis (seconds⁻¹)
K>0
K<0
Pole-Zero Map
Imaginary Axis (seconds⁻¹)
Real Axis (seconds⁻¹)
K<0
K>0
K<0
Pole-Zero Map
Imaginary Axis (seconds⁻¹)
Real Axis (seconds⁻¹)
K>0
K<0
K>0
K<0
Pole-Zero Map
Imaginary Axis (seconds⁻¹)
Real Axis (seconds⁻¹)
K<0
K>0
K<0
polo
duplo

Traçado do Lugar das Raízes (K<0)

Sentido de deslocamento das raízes

Considerando apenas uma variação negativa do parâmetro K esta pode ser considerada de duas formas:

a) **K varia de 0 a -∞**. Os ramos continuam iniciando nos polos de malha aberta e terminando os zeros ou infinito, seguindo assíntotas.

b) **K varia de -∞ a 0**. Neste caso, os ramos iniciam nos zeros ou infinito (assíntotas) e terminam nos polos de malha aberta.

Traçado do Lugar das Raízes (K<0)

Sentido de deslocamento das raízes

Considerando $-\infty < K < +\infty$, **obrigatoriamente** a parte negativa do LR precisa ser traçada considerando a variação de $-\infty$ a 0.

O parâmetro K pode assumir efetivamente valores negativos ou a variação de $K<0$ pode ser usada como "artifício" para tratar situações particulares.

Traçado do Lugar das Raízes (K<0)

Ângulos de partida e chegada

Considerando que **K varia de 0 a -∞**, ou seja, que os ramos partem dos polos e chegam nos zeros ou assíntotas, as equações obtidas anteriormente podem ser usadas alterando apenas a condição de fase:

$$\eta\varphi_j = \sum_{i=1}^{m} \angle(p_j - z_i) - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n} \angle(p_j - p_l) - 360^\circ l$$

$$\eta\psi_i = \sum_{j=1}^{n} \angle(z_i - p_j) - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{m} \angle(z_i - z_l) + 360^\circ l$$

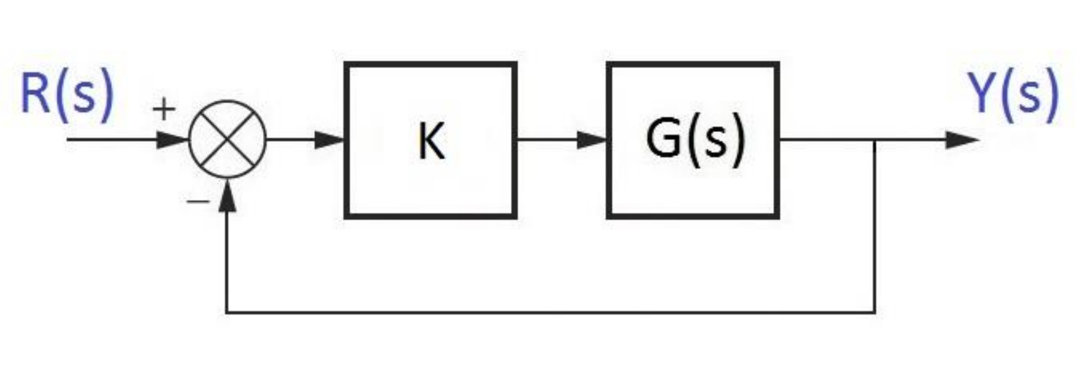
Traçado do Lugar das Raízes (K<0)

Ângulos de partida e chegada

Se **K varia de -∞ a 0**, os ramos partem dos zeros ou assíntotas e chegam nos polos de malha aberta. Os ângulos de partida e chegada podem ser obtidos somando (ou subtraindo) 180° àqueles obtidos considerando K>0.

Exemplo 1: K varia de 0 a -∞

Seja o sistema de controle, com K<0,



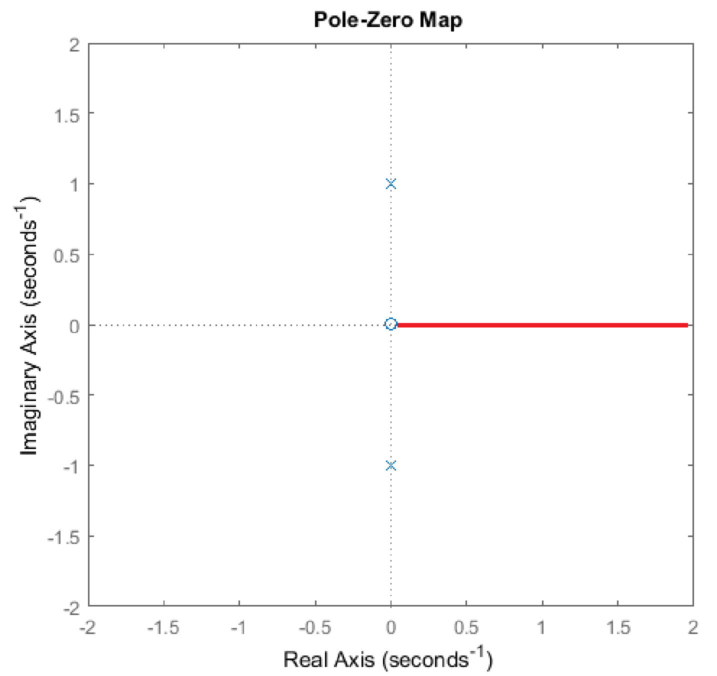
sendo

$$G(s) = \frac{s}{s^2 + 1}$$

Traçar o Lugar das raízes considerando K<0, **variando de K de 0 a -∞.**

$$p_1 = +j \quad p_2 = -j \quad z = 0$$

Exemplo 1: K varia de 0 a -∞



Eixo real: [0 , +∞)

Assíntotas: $\theta_l = 0°$

Ângulos de partida dos polos:

$$\phi_1 = \angle(p_1 - z) - \angle(p_1 - p_2) - 360^\circ = 0^\circ$$
$$\phi_2 = \angle(p_2 - z) - \angle(p_2 - p_1) - 360^\circ = 0^\circ$$

Ângulo de chegada no zero:

$$\psi = \angle(z - p_1) + \angle(z - p_2) + 360^\circ = 0^\circ$$

Exemplo 1: K varia de 0 a -∞

Cruzamento com eixo imaginário: não existe

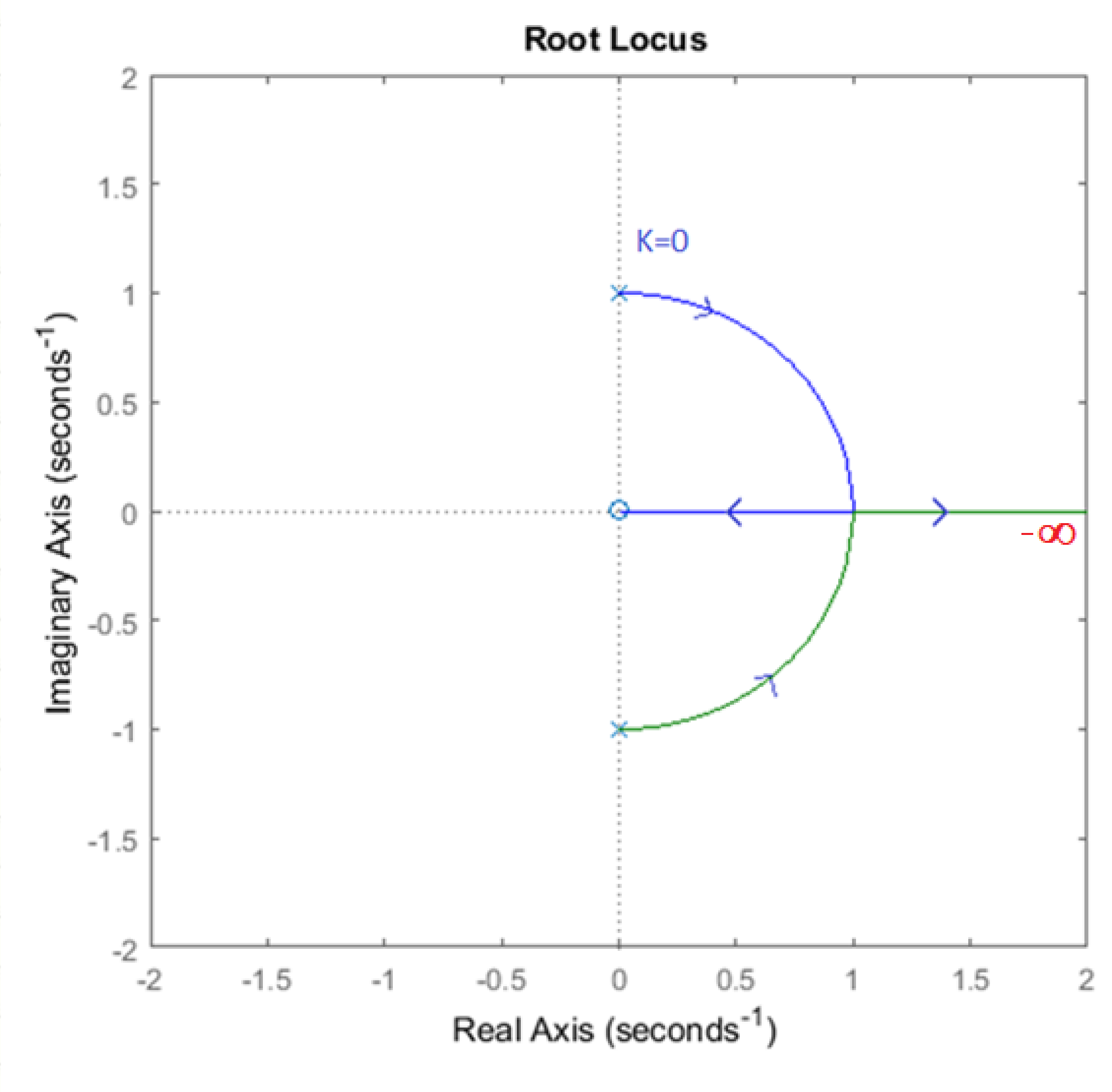
$$\Delta(s) = s^2 + 1 + Ks = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \omega = \pm 1, K = 0 \\ \omega = 0, K \to \infty \end{array}$$

Ramificação (dK/ds=0):

$$K = -\frac{s^2+1}{s} \qquad dK/ds = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2 - 1 = 0$$

$$\begin{array}{l} s_1 = +1 \in \mathrm{LR} \quad \to \quad K = -2 \\ s_2 = -1 \notin \mathrm{LR} \end{array}$$

Exemplo 1: K varia de 0 a -∞



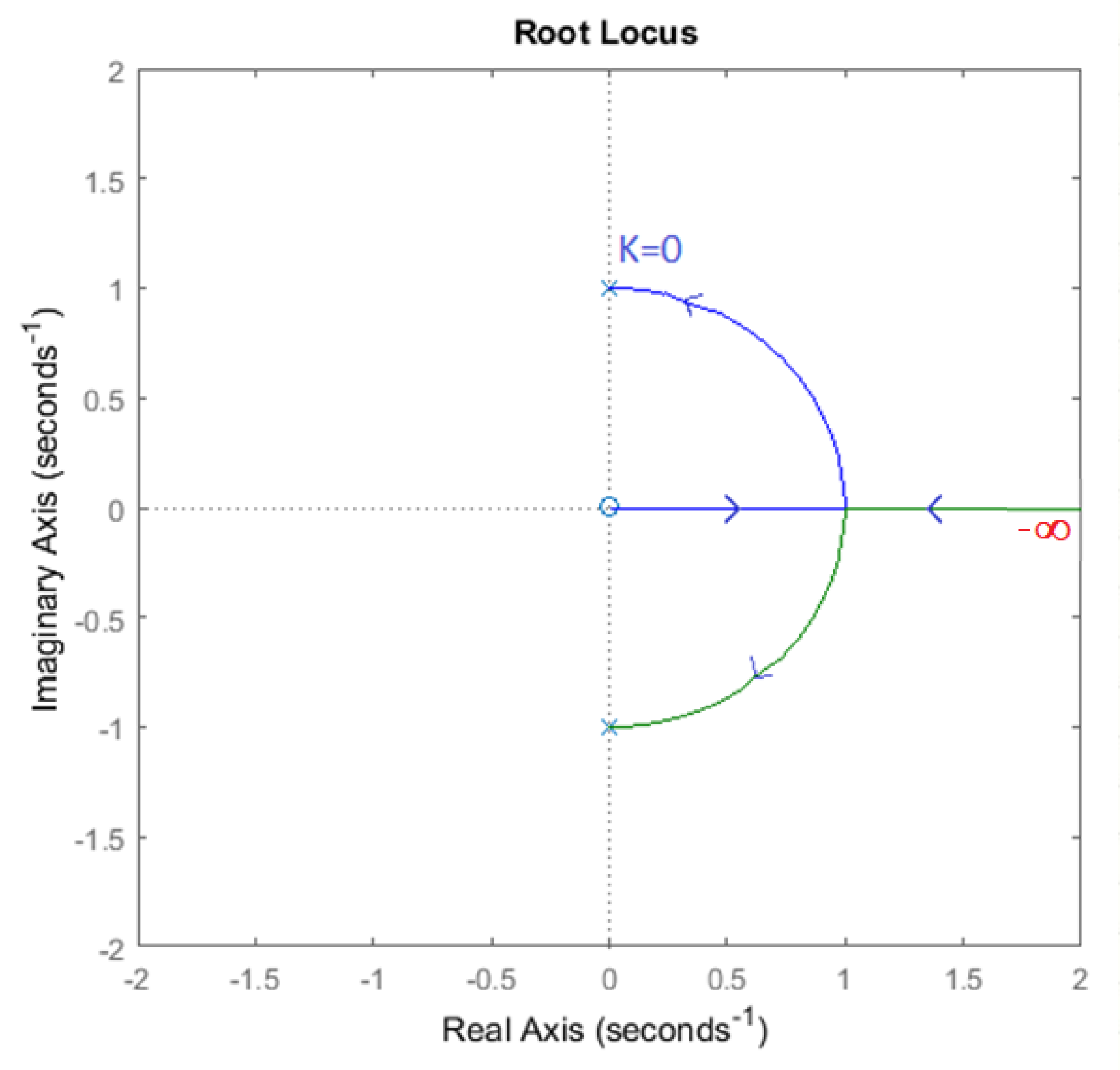
Sistema instável para $\forall K<0$.

Exemplo 2: K varia de -∞ a 0

Para o exemplo 1, traçar o Lugar das raízes para $K<0$, considerando a variação de -∞ a 0.

O Lugar das raízes terá a mesma forma do anterior mudando apenas o <u>sentido de deslocamento das raízes</u> de malha fechada.

Exemplo 2: K varia de -∞ a 0



Sistema instável para ∀K<0.

Exemplo 3: K varia de -∞ a +∞

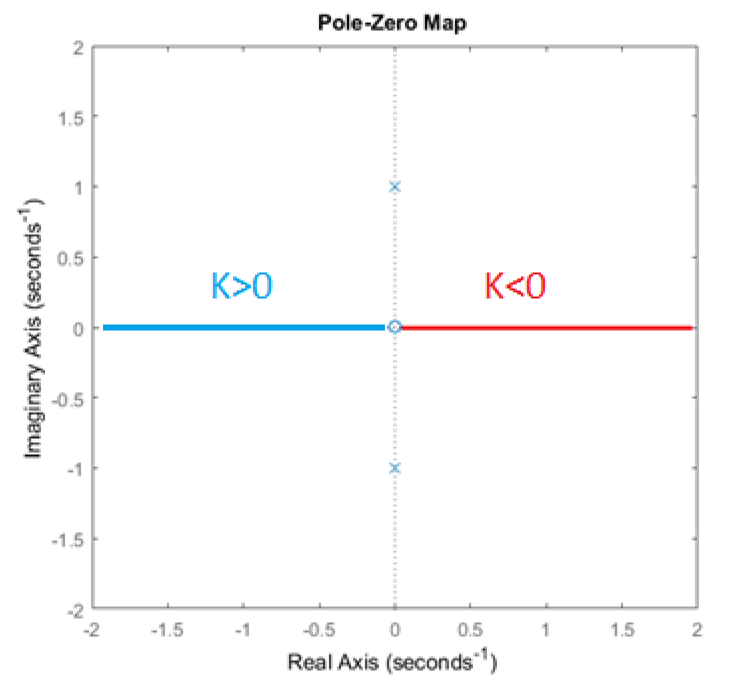
Para o exemplo anterior considerar a variação completa do parâmetro K, -∞ < K +∞.

Eixo real: K<0: [0 , +∞)

K>0: [-∞, 0)

Assíntotas: K<0: $\theta_l = 0°$

K>0: $\theta_a = 180°$



Ramificação (já calculada)

$$s_1 = +1 \in \mathrm{LR} \quad \rightarrow \quad K = -2$$
$$s_2 = -1 \in \mathrm{LR} \quad \rightarrow \quad K = +2$$

Exemplo 3: K varia de -∞ a +∞

Ângulos de partida dos zeros e chegada nos polos (K<0)

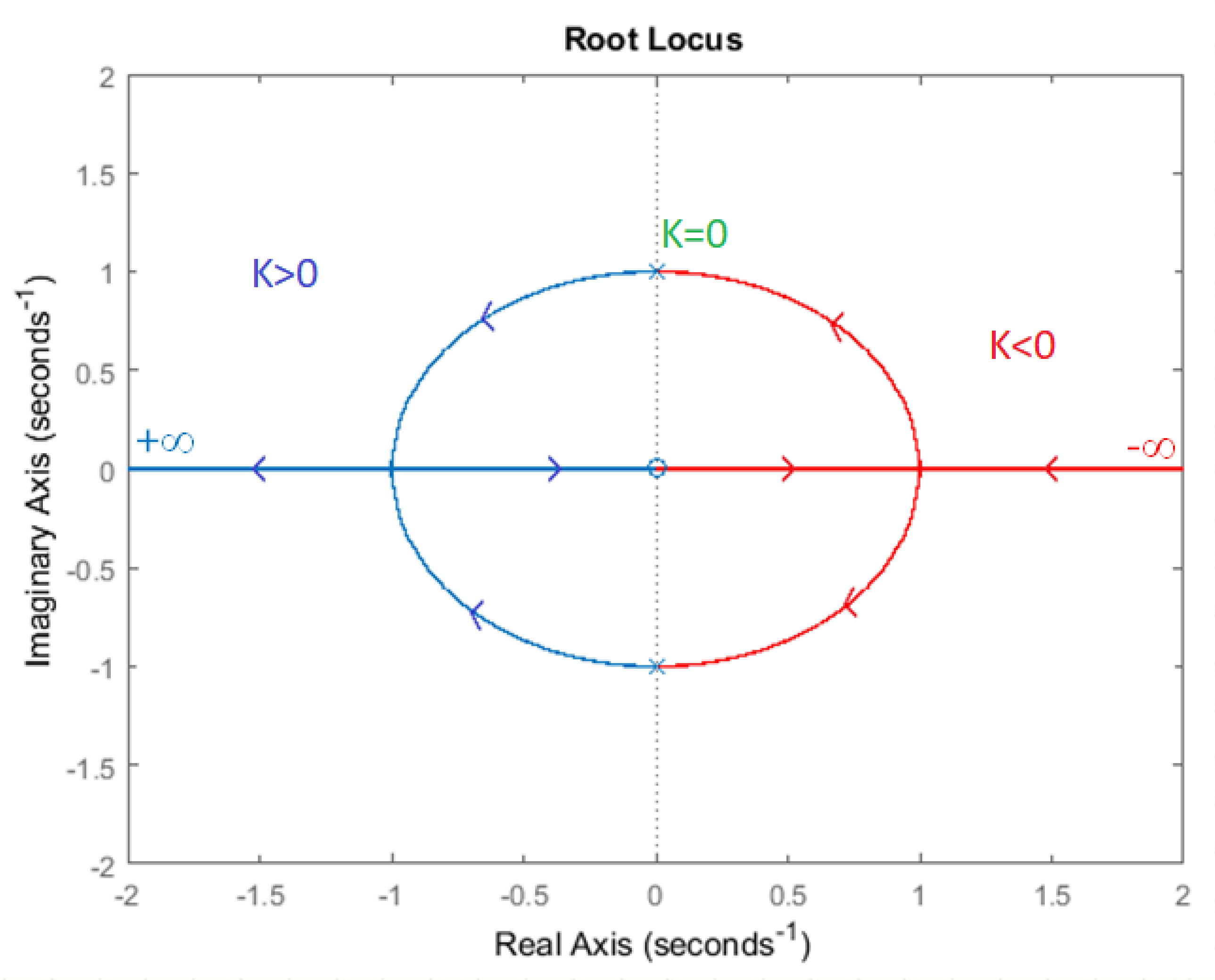
(já calculados)

$$\phi_1, \phi_2 = 0^\circ$$
$$\psi = 0^\circ$$

Ângulos de partida dos polos e chegada nos zeros (K>0)

$$\phi_1, \phi_2 = 180^\circ$$
$$\psi = 180^\circ$$

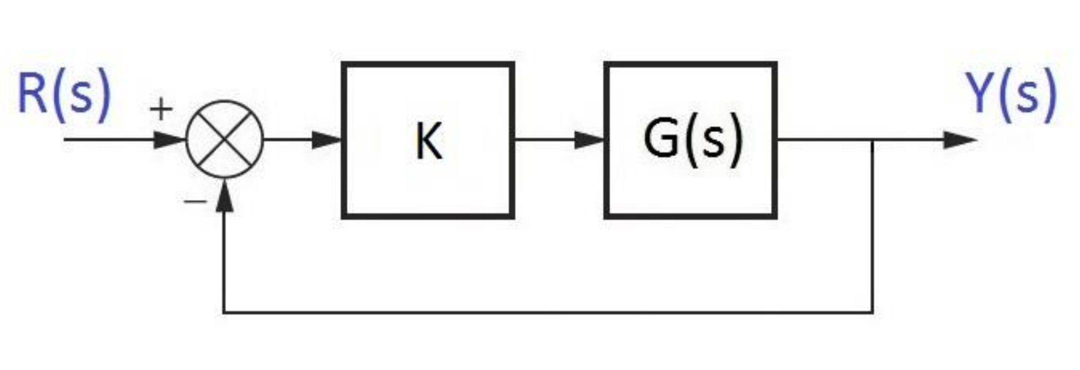
Exemplo 3: K varia de -∞ a +∞



Sistema estável para ∀K>0.

Exemplo 4

Seja o sistema de controle, com K>0,



sendo

$$G(s) = \frac{1-0{,}5s}{(s+1)(s+3)}$$

Traçar o Lugar das raízes considerando K>0, e determinar para que valores de K o sistema de malha fechada tem resposta:

a) Criticamente ou sobreamortecida (polos reais)

b) Subamortecida (polos complexos)

Exemplo 4

Primeiramente é necessário colocar a equação característica na forma padrão para o traçado do LR.

A função G(s) pode ser escrita como:

$$G(s) = -\frac{1}{2}\left(\frac{s-2}{s^2+4s+3}\right)$$

$$p_1 = -1$$
$$p_2 = -3$$
$$z = 2$$

e a equação característica como

$$\Delta(s) = 1 - \frac{K}{2}\left(\frac{s-2}{s^2+4s+3}\right) = 0$$

Exemplo 4

Fazendo $K' = -\dfrac{K}{2}$

a equação característica pode ser colocada na forma padrão

$$\Delta(s) = 1 + K'\left(\frac{s-2}{s^2+4s+3}\right) = 0$$

e o lugar das raízes será traçado para

$$G'(s) = \frac{s-2}{(s+1)(s+3)}$$

considerando K’<0.

Observe que o LR de K’<0, para K’ variando de 0 a -∞, será o mesmo de K>0 variando de 0 a +∞.

Exemplo 4

Lugar das raízes para K'<0 (K' variando de 0 a - ∞)

Eixo real: [-3,-1] [2 , +∞)

Assíntotas: $\theta_l = 0°$

Ângulos de partida dos polos e chegada nos zeros:

$$\phi_1 = 180^\circ \quad \psi = 0^\circ$$
$$\phi_2 = 0^\circ$$

Cruzamento com eixo imaginário:

$$\Delta(s) = s^2 + 4s + 3 + K'(s-2) = 0$$
$$\Delta(j\omega) = -\omega^2 + (4+K')j\omega + (3-2K') = 0$$

Exemplo 4

$$\begin{cases} 3-2K'-\omega^2=0 \\ \omega(4+K')=0 \end{cases}$$

$$\omega=0 \quad \rightarrow \quad K'=1,5(>0)$$

$$K'+4=0 \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} K'=-4 \\ \omega=\pm 3,33 \end{matrix}$$

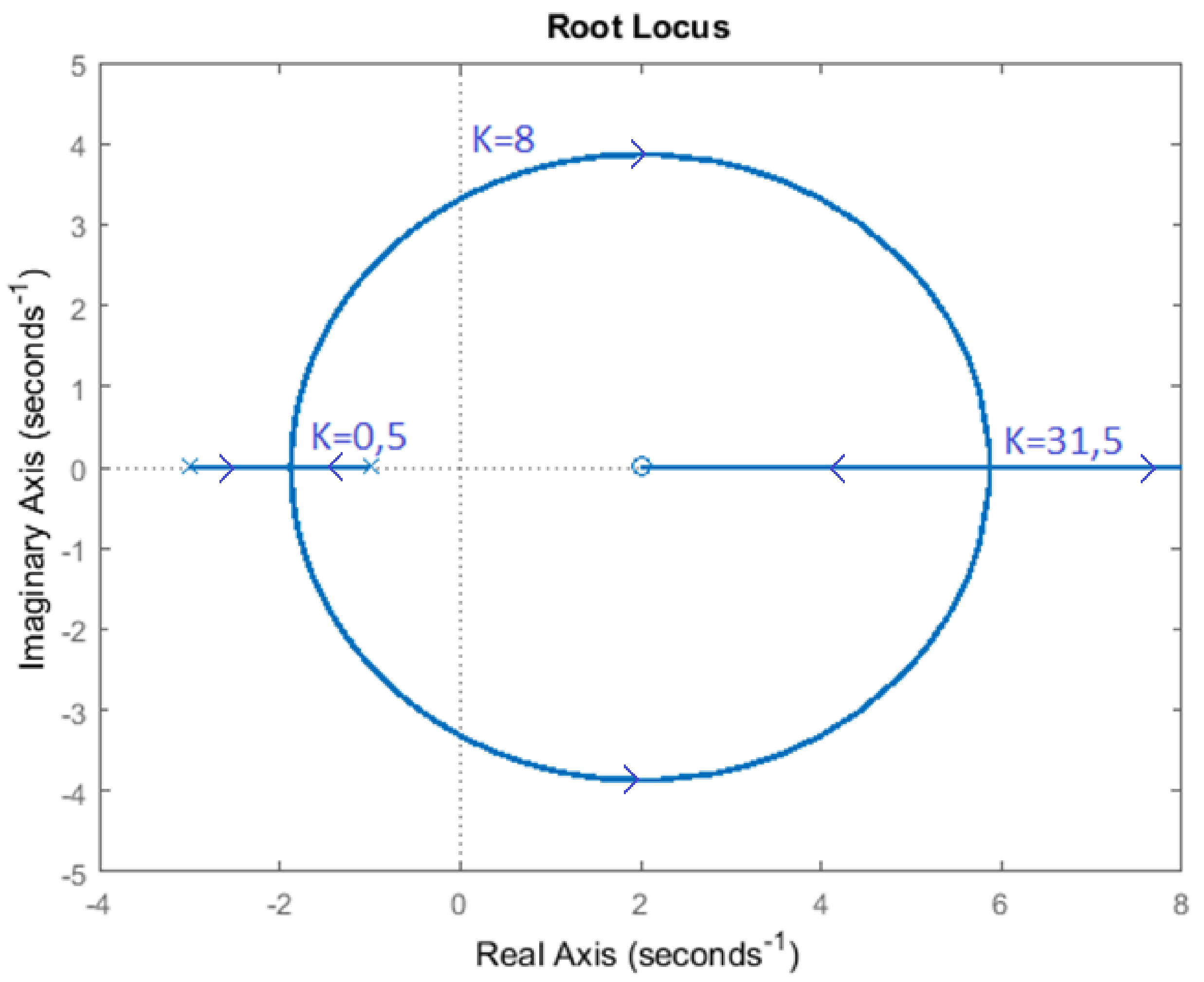
Logo, o cruzamento com o eixo imaginário ocorre para K'= -4, ou K=8, na frequência ω=±3,33.

Ramificação

Fazendo dK'/ds=0, chega-se a

$$s_1=-1,87 \in \mathrm{LR} \quad \rightarrow \quad K'=-0,254 \;\; (K=0,508)$$
$$s_2=+5,87 \in \mathrm{LR} \quad \rightarrow \quad K'=-15,75 \;\; (K=31,5)$$

Exemplo 4



Sistema estável para $0 < K < 8$.

Exemplo 4

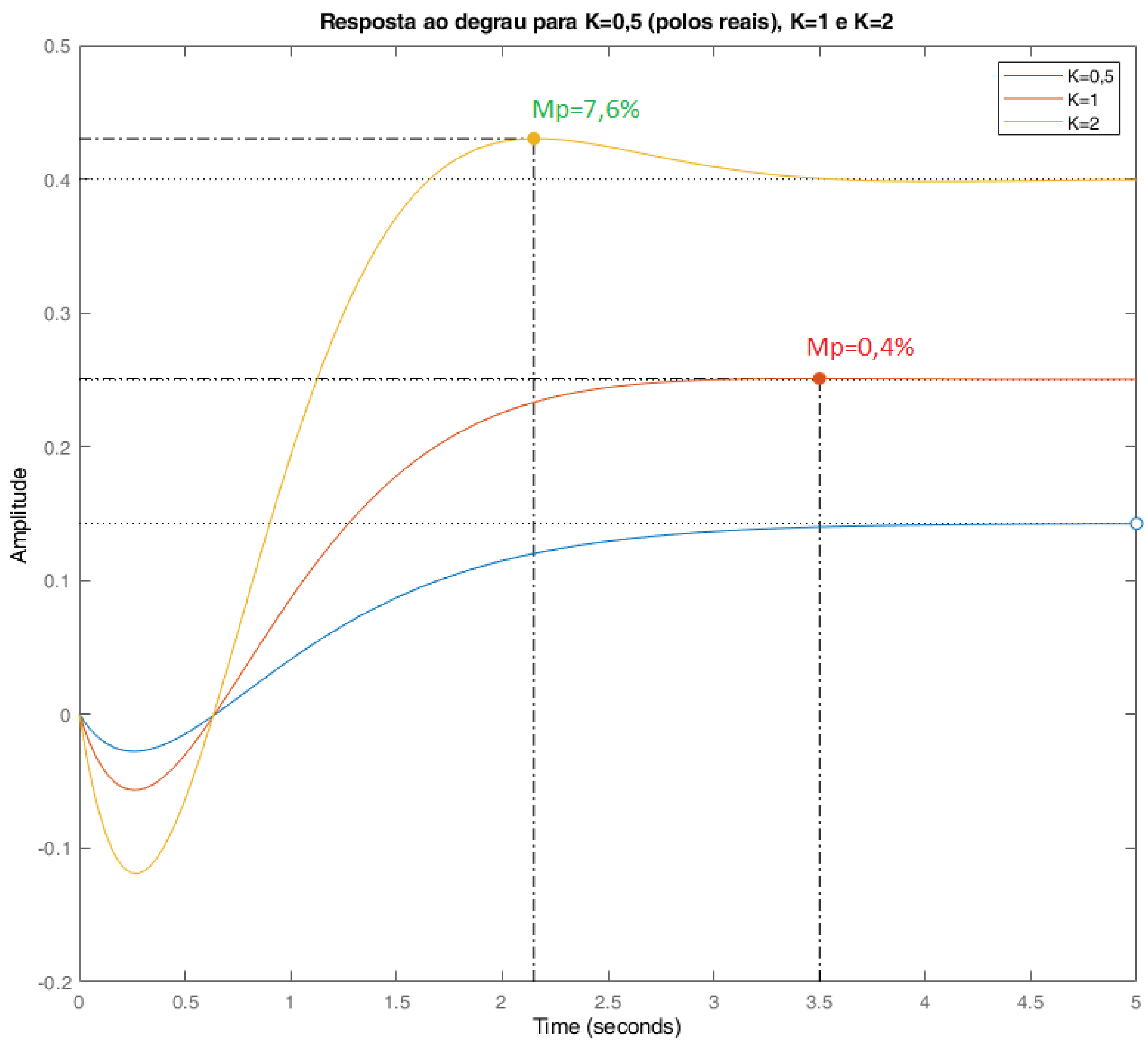
a) Para polos reais:

$$0 < K \leq 0,508$$

b) Para polos complexos:

$$0,508 < K < 8$$

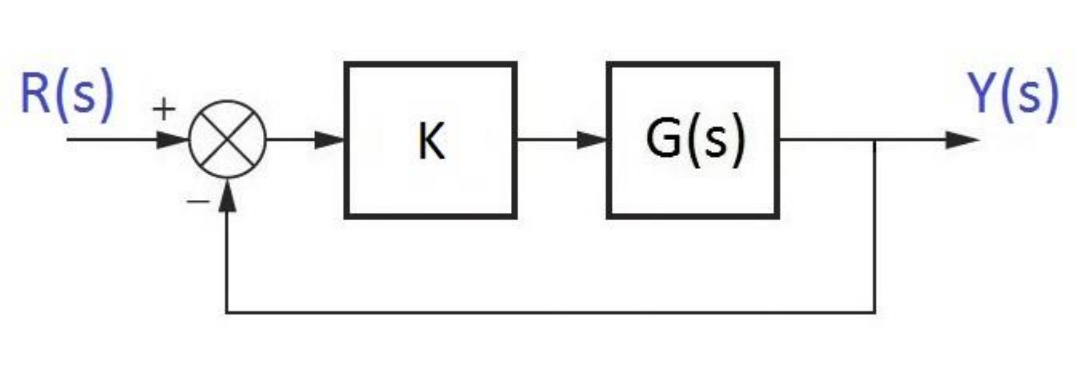
Exemplo 4



Resposta ao degrau para K=0,5 (polos reais), K=1 e K=2
K=0,5
K=1
K=2
Mp=7,6%
Mp=0,4%
Amplitude
Time (seconds)
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5

Exemplo 5

Seja o sistema de controle

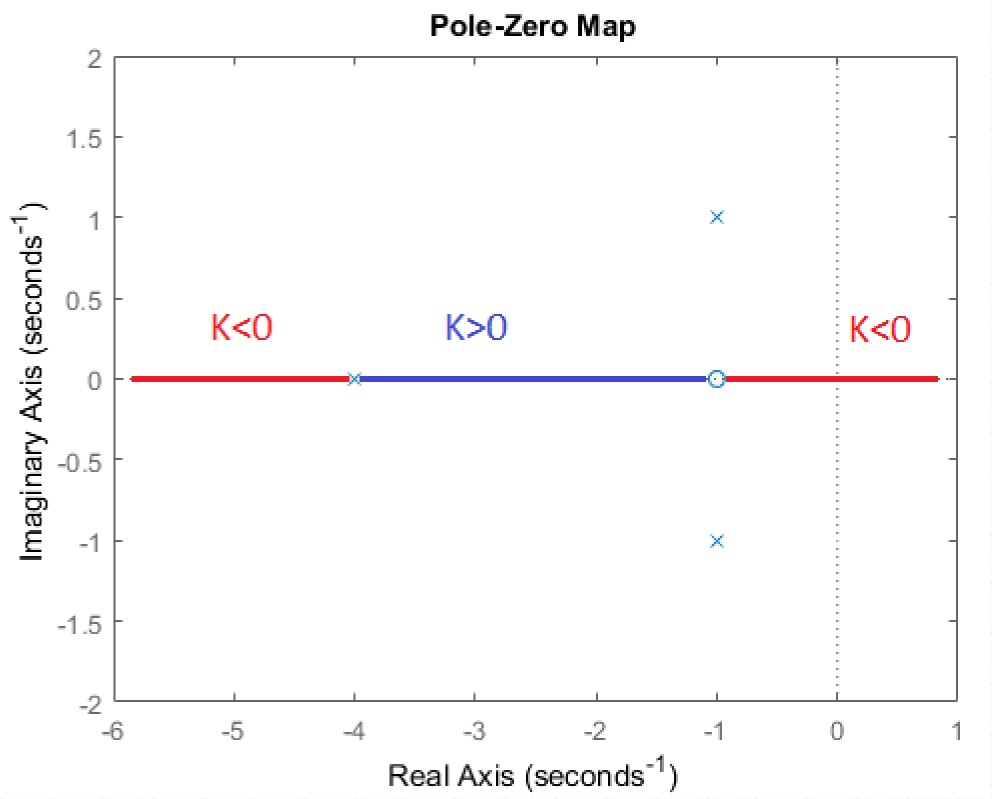


sendo

$$G(s) = \frac{s+1}{(s^2+2s+2)(s+4)}$$

Traçar o Lugar das raízes considerando $-\infty < K < +\infty$. Determinar para que valores de K o sistema de malha fechada é estável e tem apenas polos reais.

Exemplo 5



Eixo real

K>0 : [-4,-1]

K<0 : (-∞, -4], [-1,+∞)

Assíntotas

K>0 : $\theta_a = \pm 90^\circ$

$\sigma_a = -2,5$

K<0: $\theta_l = 0^\circ, 180^\circ$

$$G(s) = \frac{s+1}{(s^2+2s+2)(s+4)}$$

Exemplo 5

Cruzamento com eixo imaginário:

$$\Delta(s) = s^3 + 6s^2 + 10s + 8 + K\,(s+1) = 0$$

$$\Delta(j\omega) = -j\omega^3 - 6\omega^2 + (K+10)\,j\omega + (K+8) = 0$$

$$\begin{cases} K + 8 - 6\omega^2 = 0 \\ \omega(K + 10 - \omega^2) = 0 \end{cases}$$

$$\omega = 0 \quad \rightarrow \quad K = -8$$

Único ponto de cruzamento.

$$\omega^2 = K + 10 \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} K = -10,4 \\ \omega^2 = -0,4 \end{matrix}$$

Frequência complexa. Não representa um ponto de cruzamento.

Exemplo 5

<u>Ramificação</u>

Fazendo dK/ds=0, chega-se a

$$2s^3 + 9s^2 + 12s + 2 = 0$$

$$s_1 = -0{,}194 \in \mathrm{LR} \qquad \rightarrow \qquad K = -7{,}8$$
$$s_{2,3} = -2{,}15 \pm j0{,}73 \notin \mathrm{LR}$$

Único ponto de ramificação.

Exemplo 5

Ângulos de partida dos polos e chegada nos zeros (K>0)

$$\phi_1 = \angle(p_1 - z) - \angle(p_1 - p_2) - \angle(p_1 - p_3) - 180^\circ$$

$$\phi_1 = 161,6^\circ \quad \rightarrow \quad \phi_2 = -161,6^\circ$$

$$\phi_3 = 0^\circ$$

$$\psi = 180^\circ$$

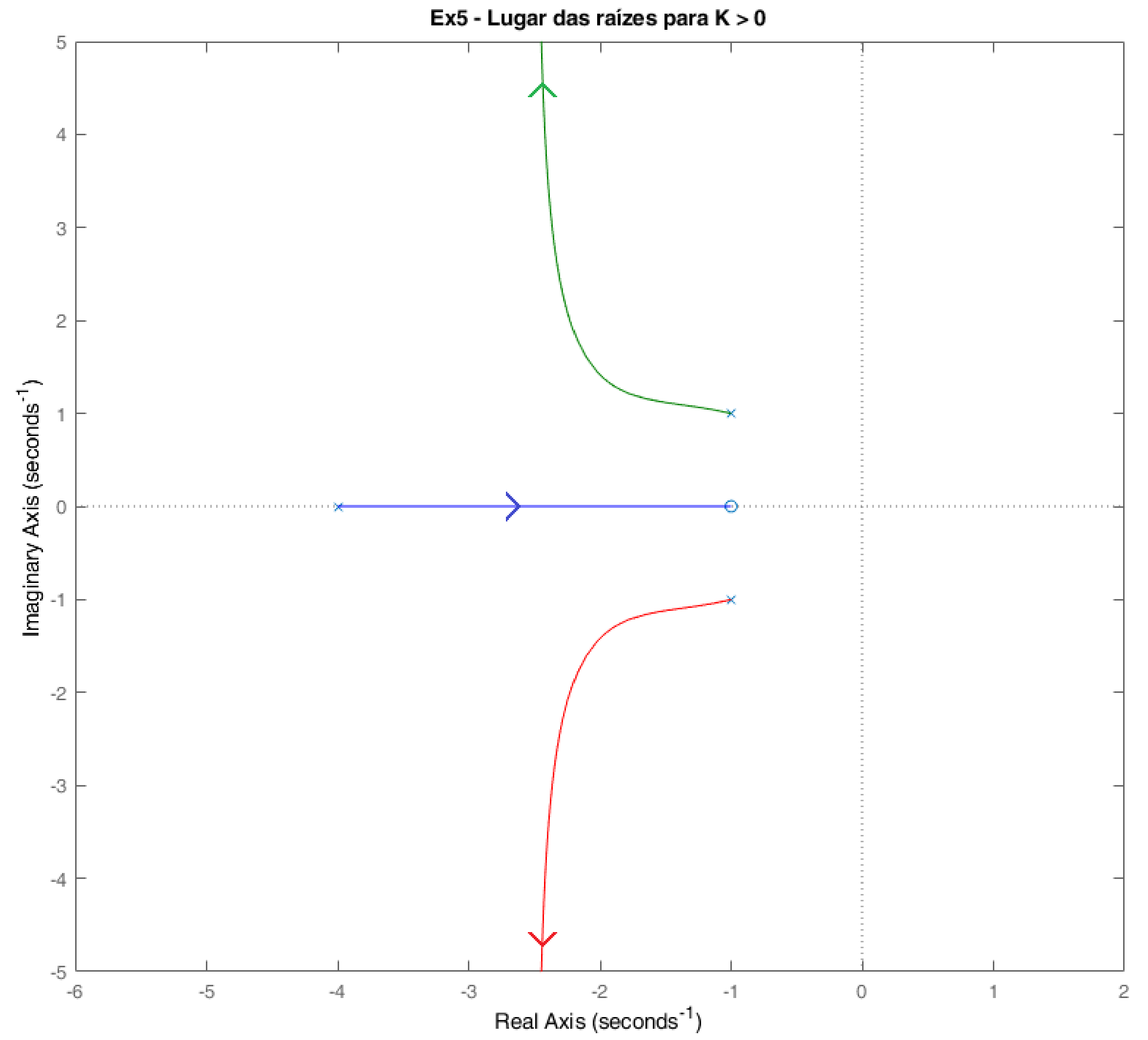
Ângulos de chegada nos polos e partida dos zeros (K<0)

$$\phi'_1 = 161,6^\circ - 180^\circ = -18,4^\circ \quad \rightarrow \quad \phi'_2 = +18,4^\circ$$

$$\phi'_3 = 180^\circ$$

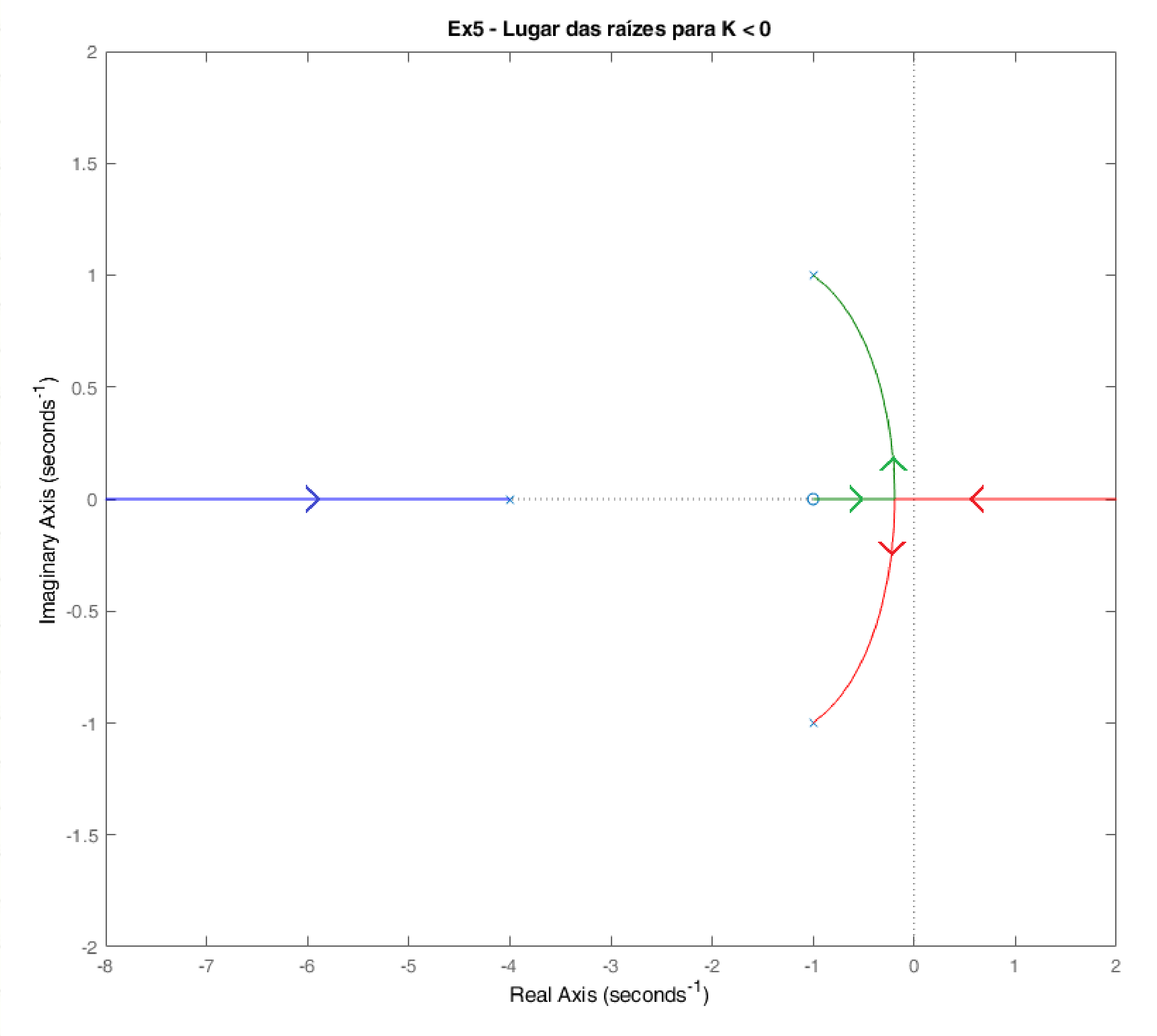
$$\psi' = 0^\circ$$

Exemplo 5 – Lugar das Raízes (K>0)



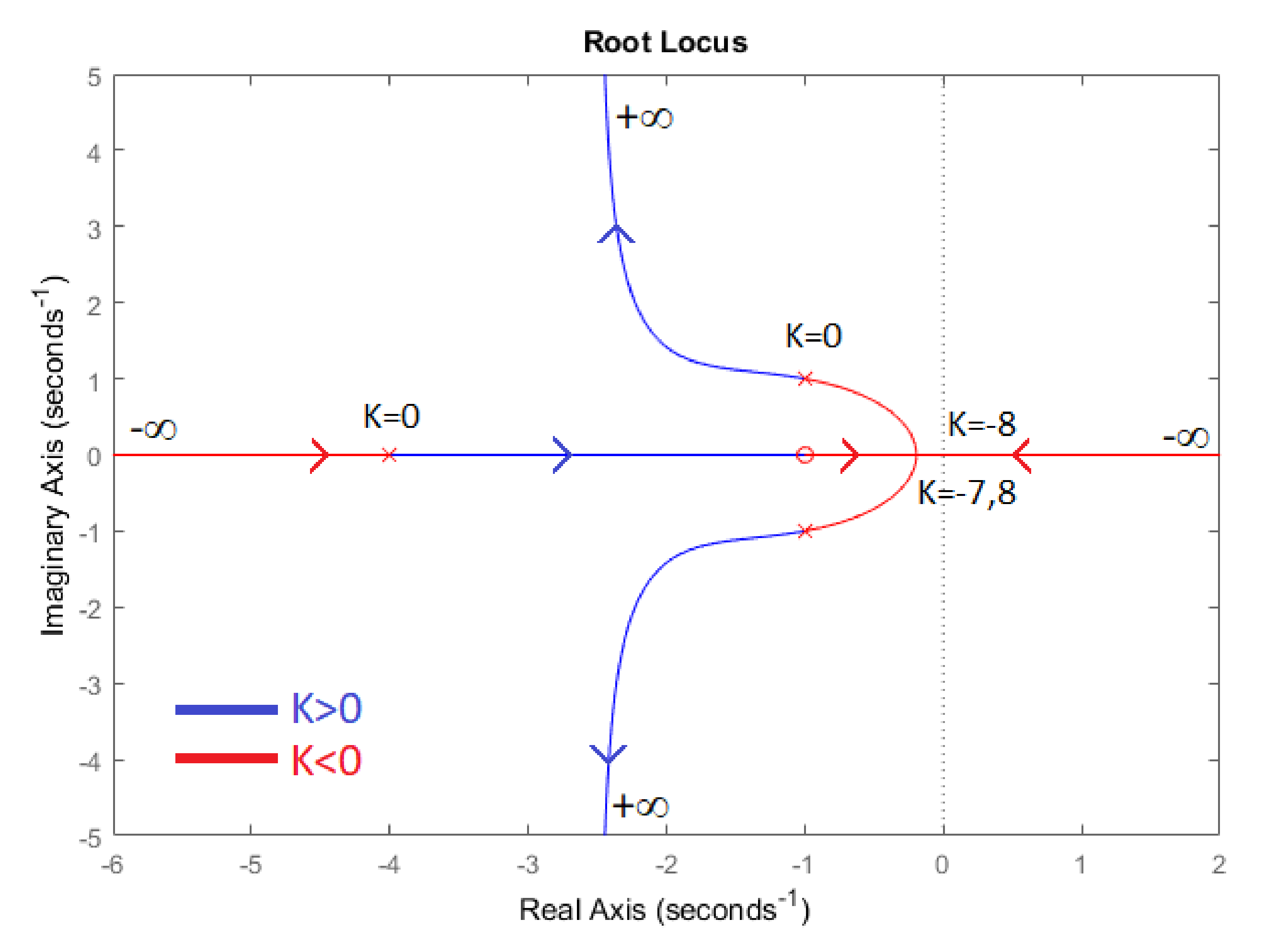
Sistema Estável para K >0.

Exemplo 5 – Lugar das Raízes (K<0)



Sistema Estável para -8 < K < 0

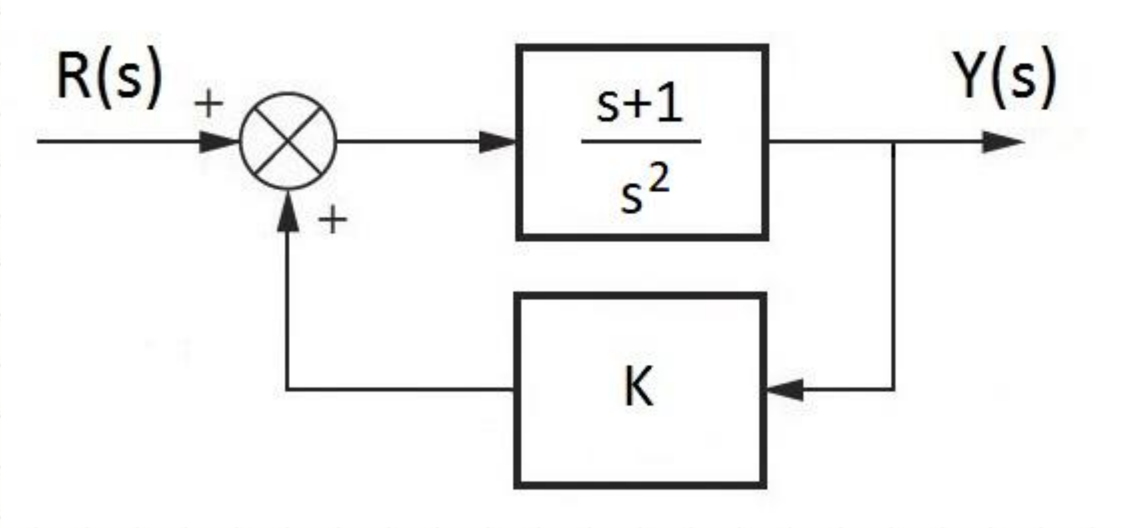
Exemplo 5 – Lugar das Raízes ($-\infty < K < +\infty$)



Sistema Estável para $-8 < K < 0$ e $0 < K < +\infty$.
Para polos reais e estáveis: $-8 < K < -7,8$.

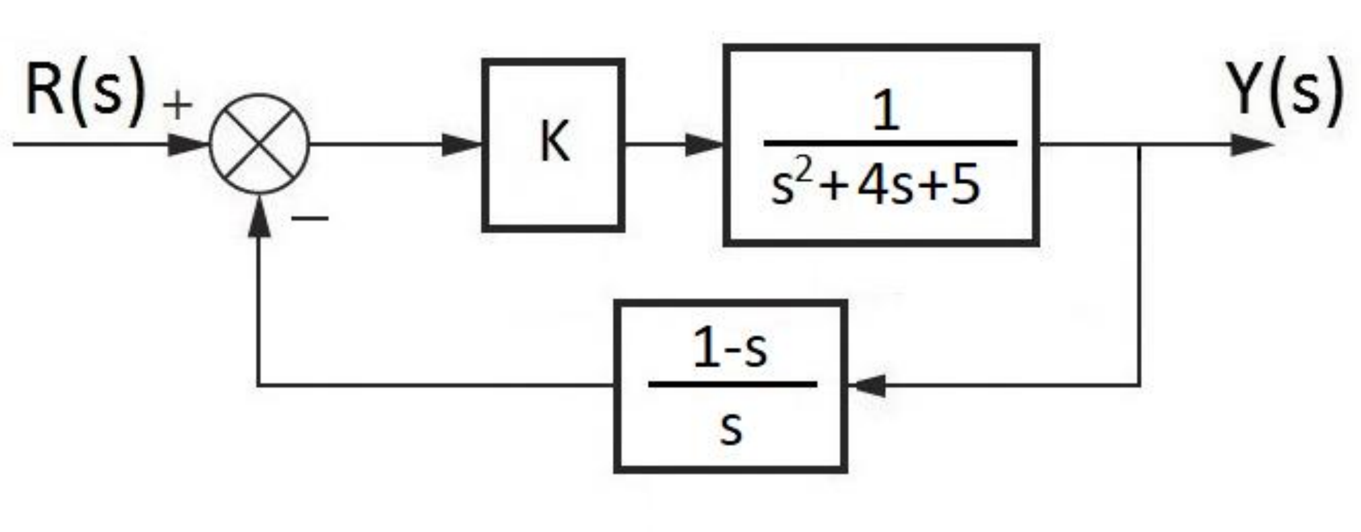
Exercícios Propostos

1. Utilizando o Lugar das Raízes, avaliar a estabilidade do sistema abaixo considerando $-\infty < K < +\infty$.



Exercícios Propostos

2. Utilizando o Lugar das Raízes, avaliar a estabilidade do sistema abaixo considerando $-\infty < K < +\infty$. Determinar para que valores de K os polos de malha fechada são reais e estáveis.



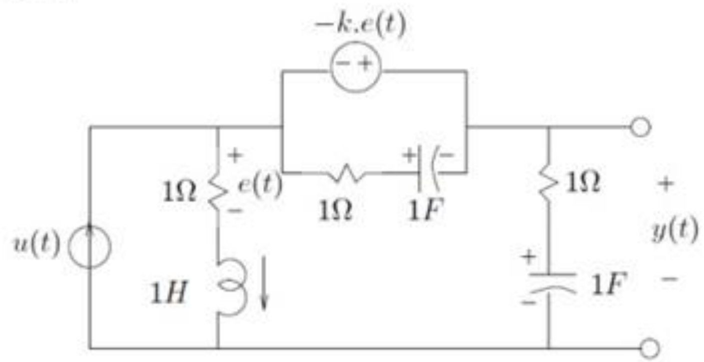
Sugestões de Leitura

Engenharia de Controle Moderno – K. Ogata (5ª edição)
Capítulo 6 - Análise e Projeto de Sistemas pelo Método do Lugar das Raízes. Item 6.4

Sistemas de Controle para Engenharia – G. Franklin, J. Powel & A. Emami-Naeini (6ª edição)
Capítulo 5 – O Método do Lugar das Raízes. Item 5.6.

Exercício 6

6. Seja o circuito elétrico:



Considerando como entrada a fonte de corrente $u(t)$ e como saída a tensão $y(t)$ obtém-se a função de transferência a seguir:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(s+1)(s+1-k)}{s^2+(2-k)s+1}$$

(a) Esboçar o Lugar das Raízes considerando a variação do ganho associado à fonte dependente de tensão, $-\infty < k < +\infty$. Indicar no gráfico: trecho(s) no eixo real, assíntota(s), cruzamento(s) com o eixo imaginário e ponto(s) de ramificação. Indicar explicitamente a faixa de valores de k que garante a estabilidade do sistema.

(b) Determinar a faixa de valores de k de modo a garantir que, teoricamente (desprezando o efeito dos zeros), a tensão de saída não apresente oscilações e tenha um tempo de acomodação (critério 2%) não superior a 5 segundos.

(c) Considerando que a entrada é uma corrente constante de 2A, determinar a faixa de valores de k para que a saída apresente um erro máximo (em módulo) de 15%, garantidas as especificações do item anterior.

(d) Considerando $k = 1,5$, esboçar a resposta a uma corrente constante de 2A.

Exercício 6

(a) Esboçar o Lugar das Raízes considerando a variação do ganho associado à fonte dependente de tensão, $-\infty < k < +\infty$. Indicar no gráfico: trecho(s) no eixo real, assíntota(s), cruzamento(s) com o eixo imaginário e ponto(s) de ramificação. Indicar explicitamente a faixa de valores de k que garante a estabilidade do sistema.

A equação característica é dada por

$$\Delta(s) = s^2 + (2-K)s + 1 = 0$$

que pode ser reescrita como

$$1 - K\frac{s}{s^2+2s+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + K'G(s) = 0$$

Sendo K'=-K, traça-se o LR para K'< 0 (de 0 a - ∞), que é equivalente ao LR de K>0.

$$G(s) = \frac{s}{s^2+2s+1} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} z = 0 \\ p_{1,2} = -1 \end{matrix}$$

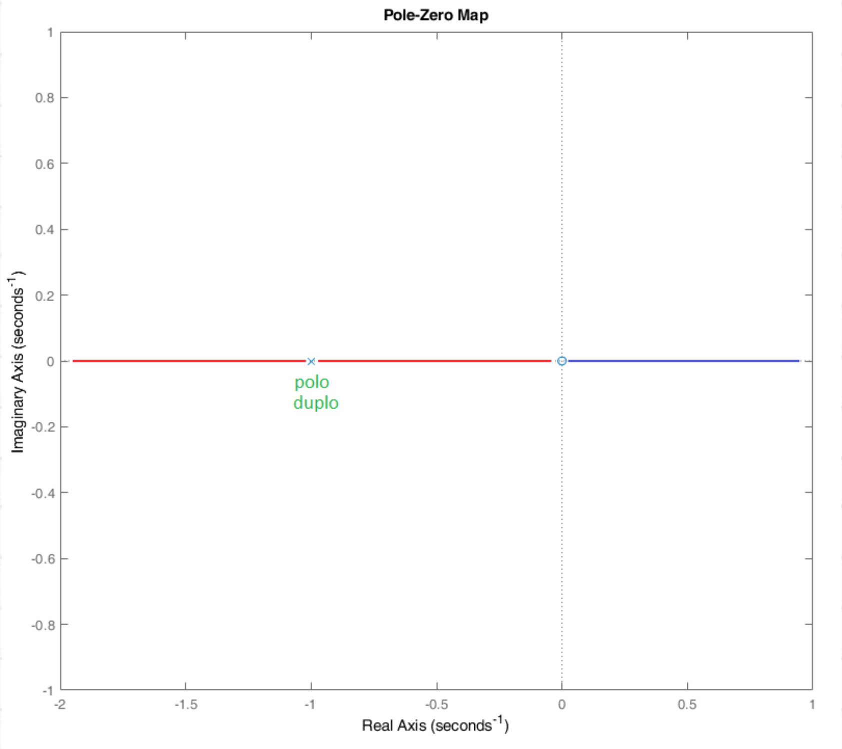
Exercício 6

Eixo real:

K>0 (K'<0) $\rightarrow$ [0 ; + ∞]

K<0 (K'>0) $\rightarrow$ [-∞ ; -1] [-1 ; 0]

ou seja [-∞ ; 0]



Assíntotas:

K>0 $\rightarrow$ $\theta_a = 0°$

K<0 $\rightarrow$ $\theta_l = 180°$

Ramificações:

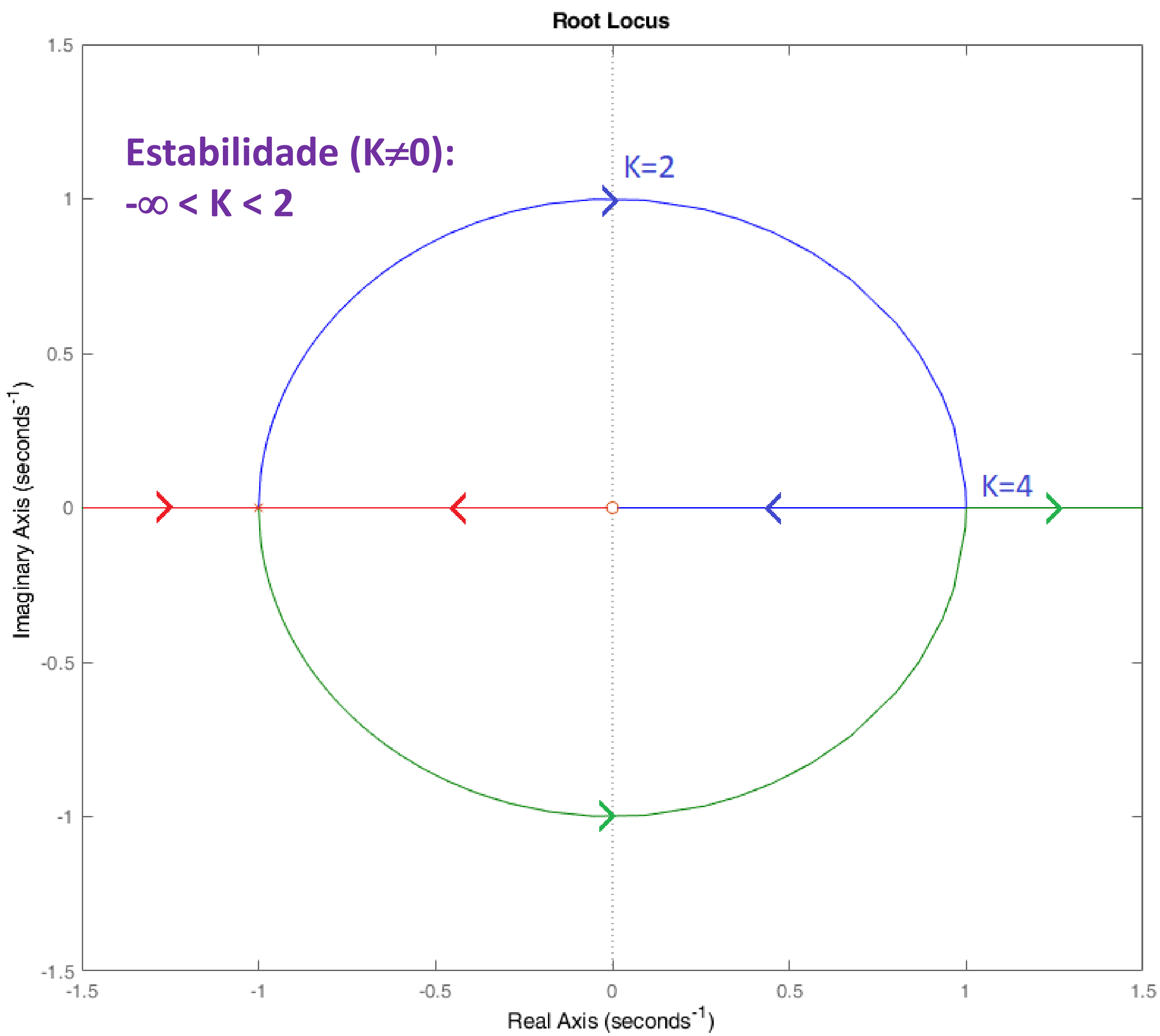
$$s = -1 \qquad K = 0$$

$$s = 1 \qquad K = 4$$

Cruzamento com eixo imaginário: $\omega = \pm 1 \quad \rightarrow \quad K = 2$

Estabilidade: $-\infty < K < 2, \qquad K \neq 0$

Exercício 6



Root Locus
Estabilidade (K≠0):
-∞ < K < 2
K=2
K=4
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
Imaginary Axis (seconds⁻¹)
Real Axis (seconds⁻¹)

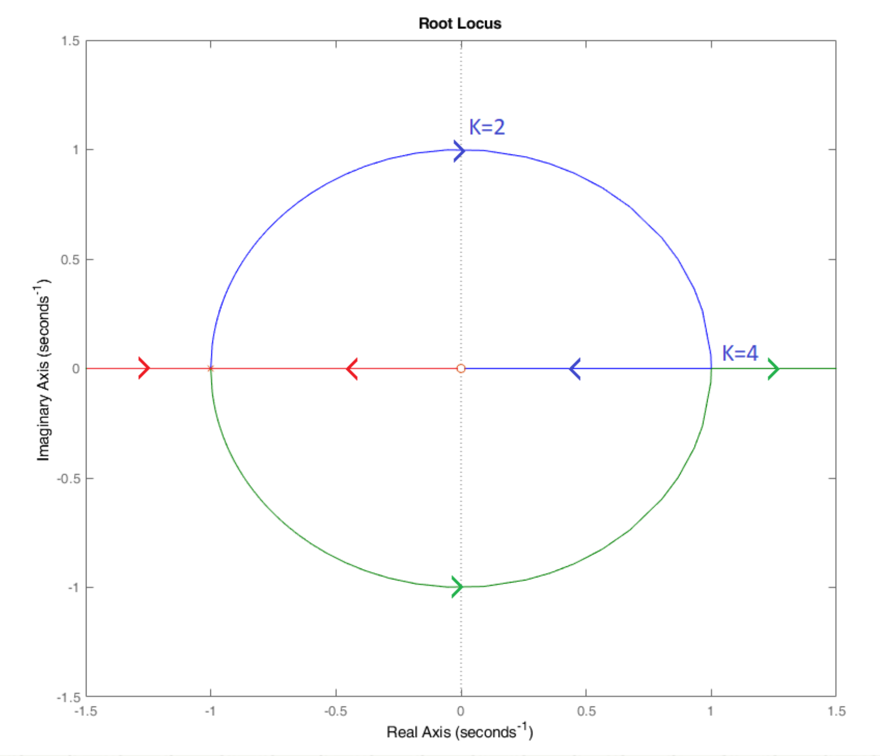
Exercício 6

(b) Determinar a faixa de valores de k de modo a garantir que, teoricamente (desprezando o efeito dos zeros), a tensão de saída não apresente oscilações e tenha um tempo de acomodação (critério 2%) não superior a 5 segundos.

Para que a resposta não oscile os polos precisam ser reais e estáveis.

Do gráfico do Lugar das Raízes observa-se que os polos só serão reais para ganhos negativos de K.

Portanto, $K < 0$.



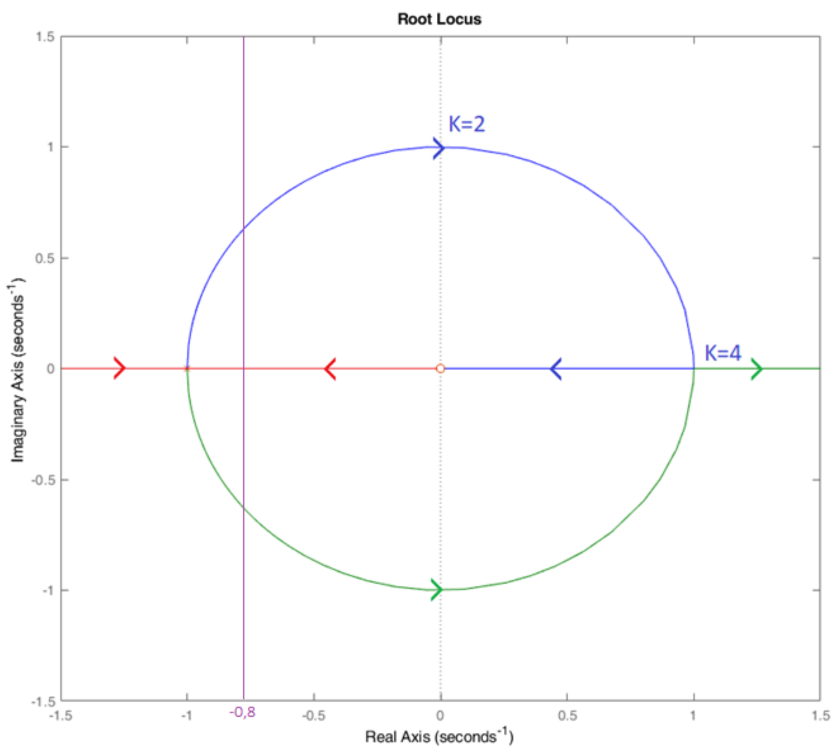
Exercício 6

(b) Determinar a faixa de valores de k de modo a garantir que, teoricamente (desprezando o efeito dos zeros), a tensão de saída não apresente oscilações e tenha um tempo de acomodação (critério 2%) não superior a 5 segundos.

$$t_s = \frac{4}{\xi \omega_n}$$

Para garantir a **especificação de tempo de acomodação** (ts < 5) é necessário σ < 0,8 (reta passando em -0,8).
Fazendo s=-0,8 (apenas o valor real) na equação característica

$$\Delta(s) = s^2 + (2 - K)s + 1 = 0$$



obtém-se K = - 0,05.

Portanto, para atender **ambas as especificações**:

$$-0{,}05 < K < 0$$

Exercício 6

(c) Considerando que a entrada é uma corrente constante de 2A, determinar a faixa de valores de k para que a saída apresente um erro máximo (em módulo) de 15%, garantidas as especificações do item anterior.

$$R(s) = \frac{2}{s}$$

O erro de regime permanente pode ser calculado por

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} s[1 - T_R(s)]U(s) = 2K$$

$$|2K| < 0{,}15 \quad \Rightarrow \quad |K| < 0{,}075$$

Portanto, para atender todas as especificações (itens b e c), garantindo também a estabilidade:

$$-0{,}05 < K < 0$$

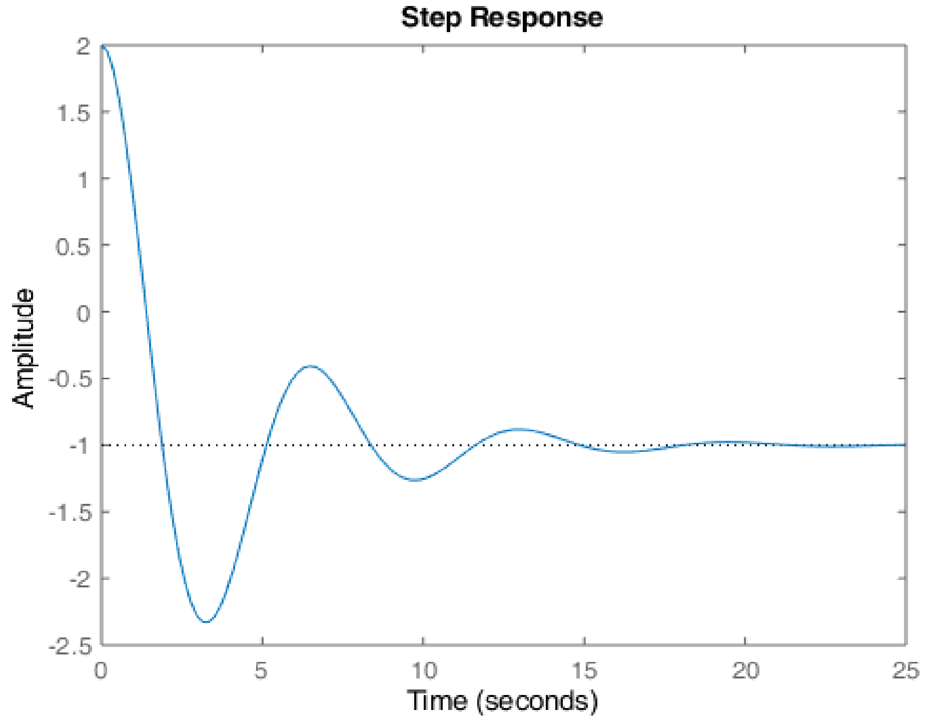
Exercício 6

(d) Considerando $k = 1,5$, esboçar a resposta a uma corrente constante de 2A.

$$T(s) = \frac{s^2 + 0,5s - 0,5}{s^2 + 0,5s + 1}$$

$z_1 = 0,5$ $\qquad$ $z_2 = -1$

$p_{1,2} = -0,25 \pm j0,968$



$$e_\infty = 2K = 3$$

$$y_\infty = -1$$