Análise da Resposta em Frequência

Critério de Estabilidade de Nyquist

Profa. Cristiane Paim

Introdução

O **Critério de Nyquist** é um método gráfico que permite concluir sobre a **estabilidade de um sistema em malha fechada** a partir de sua resposta em frequência de malha aberta.

Da aplicação do Critério de Nyquist obtém-se o **número de polos de malha fechada no semiplano direito** (SPD), ou seja, o número de polos instáveis do sistema.

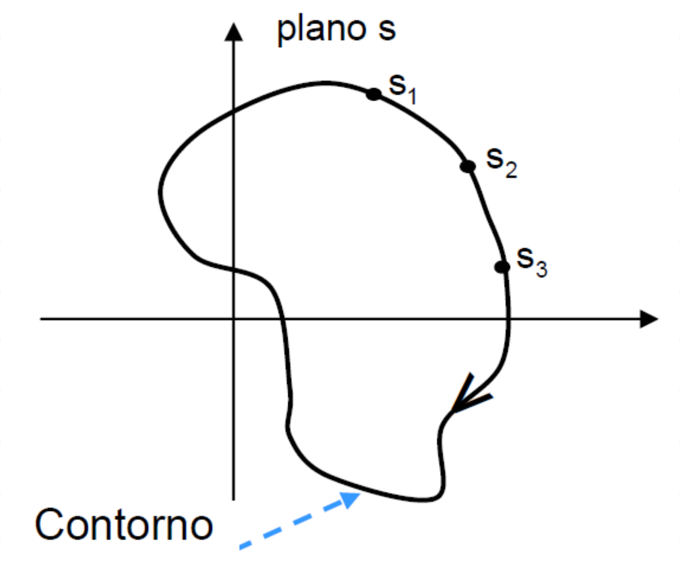
O Critério de Nyquist baseia-se no **Teorema de Cauchy** para variáveis complexas, mais conhecido como princípio do argumento.

Para entender o princípio do argumento é necessário conhecer os conceitos de **contorno** e **mapeamento** de um contorno.

Contorno e Mapeamento

Contorno

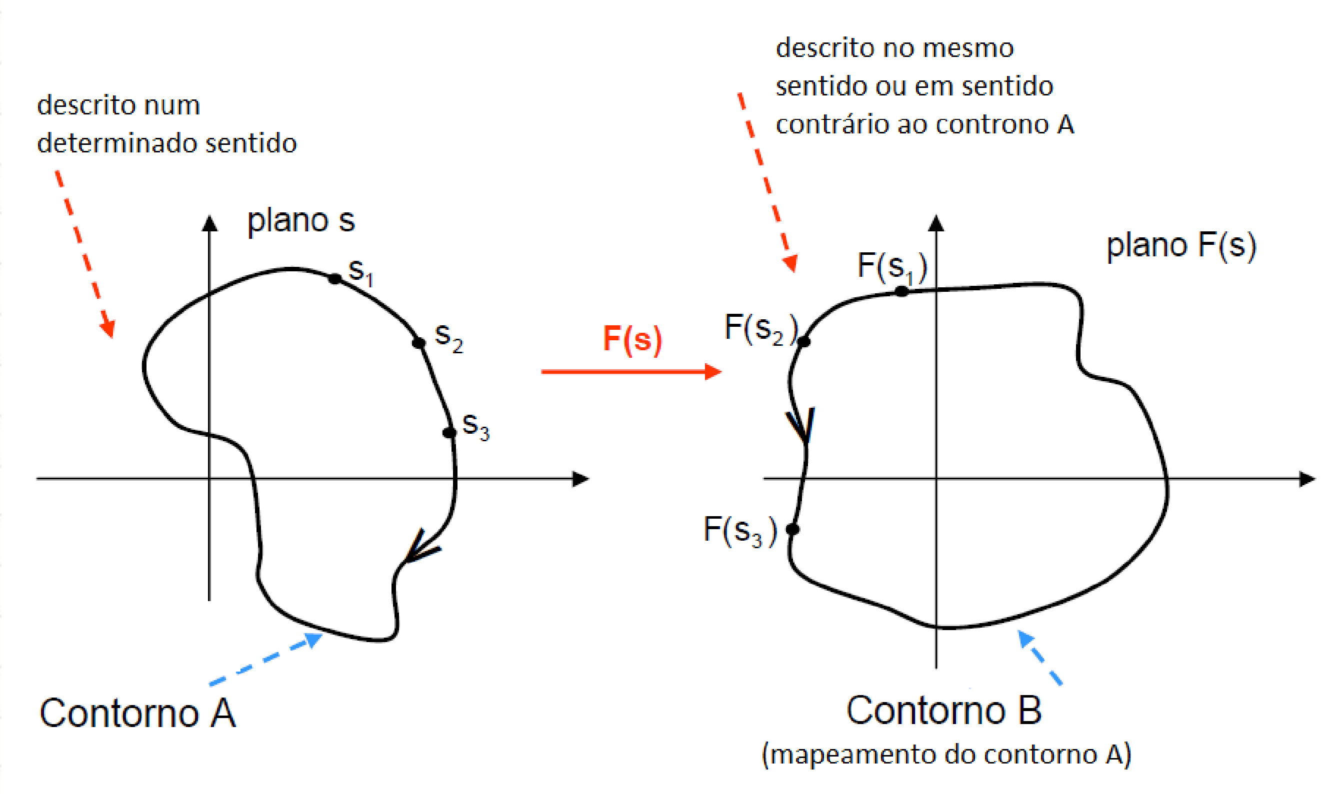
É uma curva que começa e termina no mesmo lugar sem passar mais de uma vez pelo mesmo ponto. No contorno é definido um sentido (horário ou anti-horário) de deslocamento dos pontos.



Contorno e Mapeamento

Mapeamento de um Contorno

Cada ponto do contorno no plano s pode ser mapeado por uma função F (s)* em um novo plano, gerando um contorno no plano F(s).



*F(s) é uma função racional em s.

Princípio do Argumento (Teorema de Cauchy)

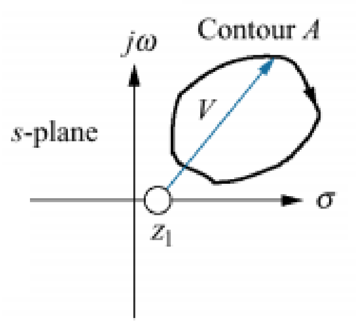
Seja um contorno no plano s definido no sentido horário, contendo Z zeros e P polos. O mapeamento desse contorno circundará a origem (do novo plano) $N = Z - P$ vezes no sentido horário quando $N>0$ ou anti-horário se $N<0$.

Se $N=0$, o mapeamento do contorno não circundará a origem e o sentido do contorno dependerá da função e suas singularidades.

Princípio do Argumento (Teorema de Cauchy)

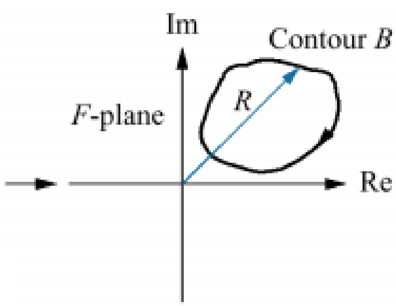
Exemplos

1 zero
no exterior
do controno A



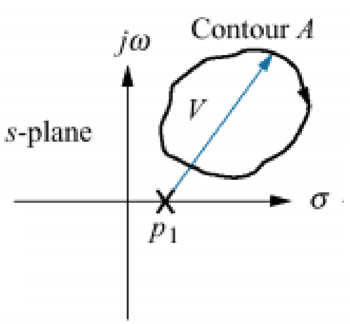
P=Z=N=0

⇒



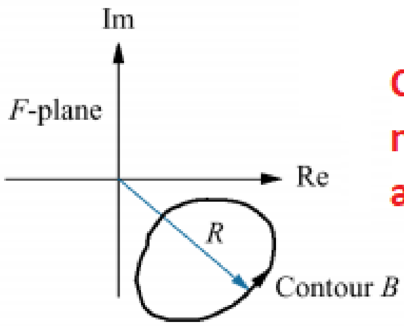
Contorno B
não contém
a origem

1 pólo
no exterior
do controno A



P=Z=N=0

⇒

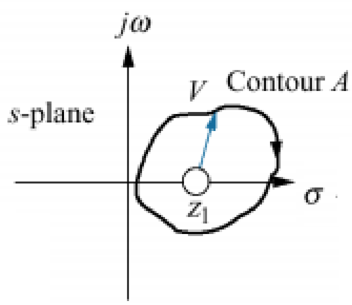


Contorno B
não contém
a origem

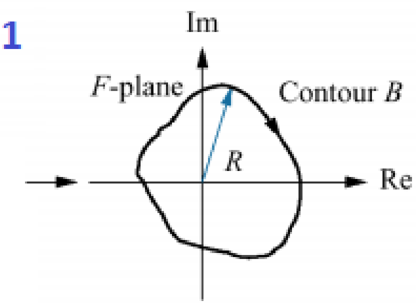
Princípio do Argumento (Teorema de Cauchy)

Exemplos

1 zero
no interior
do controno A

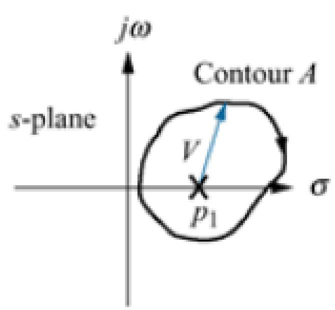


P=0, Z=1
N=1

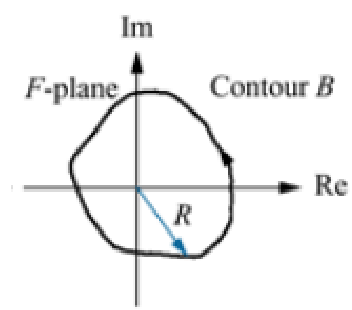


Contorno B
contém a
origem

1 pólo
no interior
do controno A



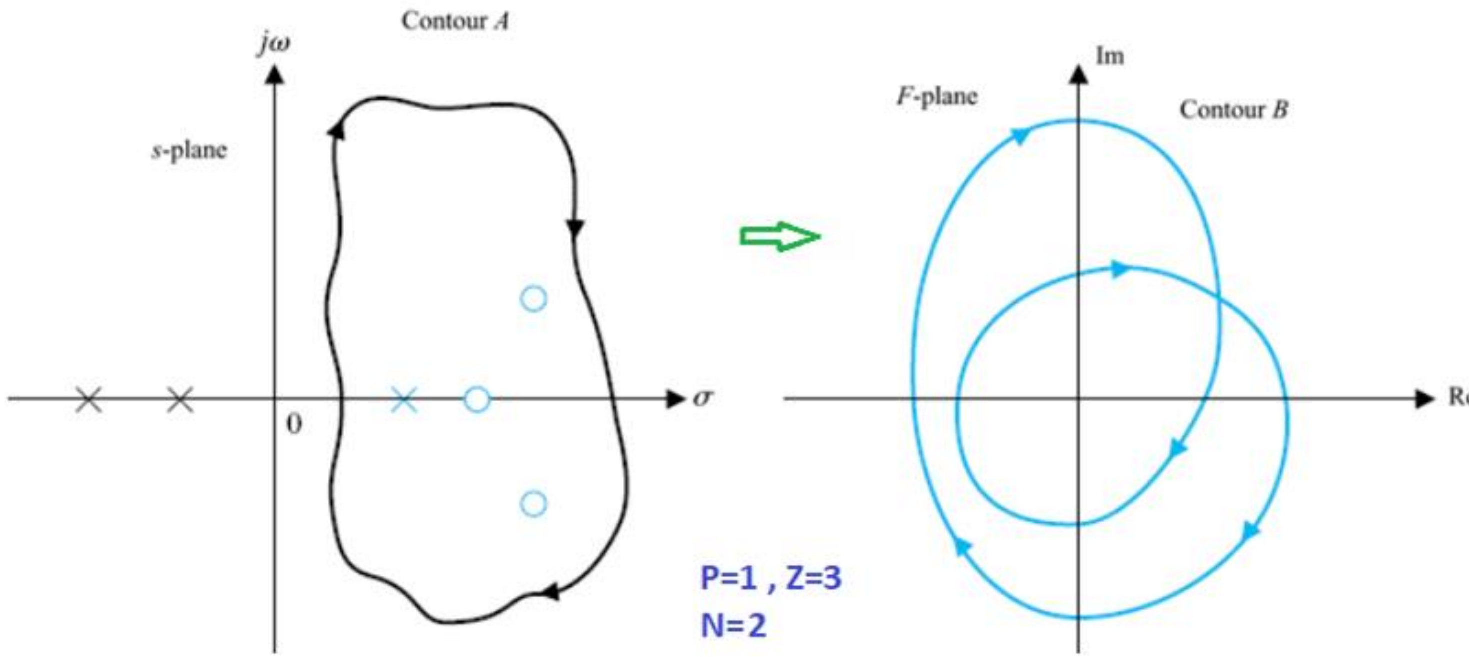
P=1, Z=0
N=-1



Contorno B
contém a
origem

Princípio do Argumento (Teorema de Cauchy)

Exemplos

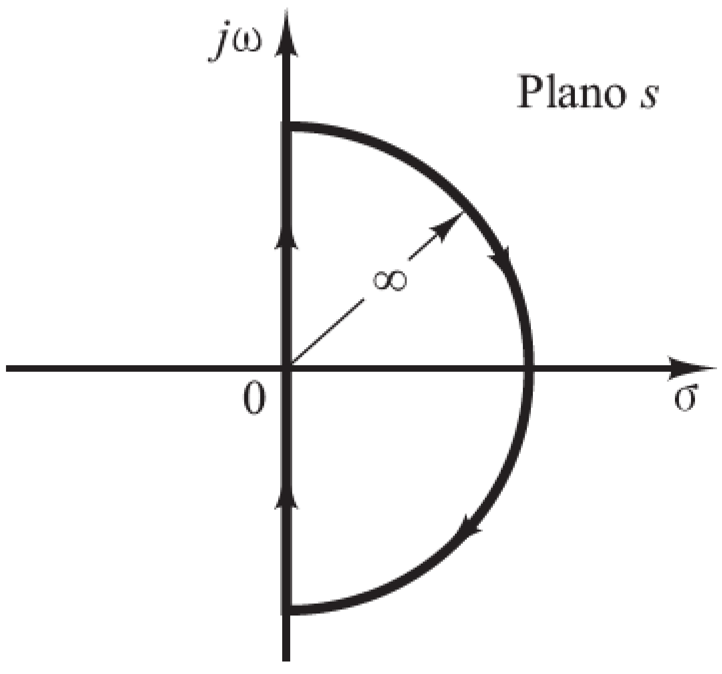


3 Zeros e 1 Polo
no interior do contorno A

O Contorno B circunda a
origem 2 vezes

Aplicação em sistemas de controle

Se for considerado como contorno no plano s todo o SPD, então o mapeamento deste contorno circundará a origem se e somente se a diferença entre o número de polos e zeros no SPD (ou seja, dentro do contorno) for diferente de zero (N≠0).



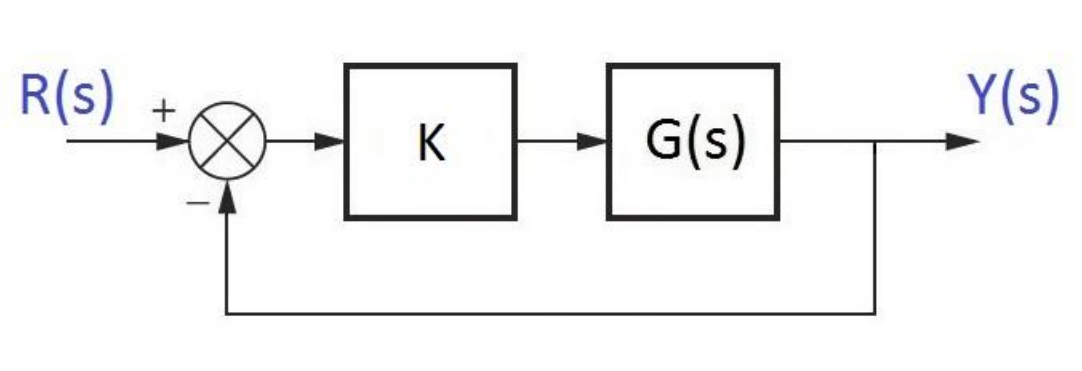
Contorno de Nyquist

O contorno de todo o SPD é chamado de **Contorno de Nyquist** e é definido no sentido horário.

SPD: Semi Plano Direito

Aplicação em sistemas de controle

Seja o sistema de controle:



Os polos de malha fechada serão as soluções da equação característica:

$$\Delta(s) = 1 + KG(s) = 0$$

Assim, para estudar a estabilidade em malha fechada, o princípio do argumento deveria ser aplicado para 1+KG(s)=0. Seria avaliado se o mapeamento do contorno associado circundaria ou não a origem.

Aplicação em sistemas de controle

Note que

$$1+KG(s)=0 \quad \Rightarrow \quad KG(s)=-1$$

Portanto, se o mapeamento associado a 1+KG(s) envolver a origem, então, o mapeamento associado a KG(s) envolverá o ponto (-1+j0).

Desse modo, pode-se concluir sobre o número de polos de 1+KG(s) no SPD contando-se o número de vezes que o ponto (-1) é circundado pelo gráfico de KG(s), ou seja, considerando a função de malha aberta.

Aplicação em sistemas de controle

Considerando

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

a equação caraterística 1+KG(s)=0 pode ser escrita como:

$$1 + K\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{A(s) + KB(s)}{A(s)} = 0$$

Aplicação em sistemas de controle

Observe que:

- A(s): **polos de 1+KG(s)** e **polos de G(s)**

$$1+KG(s)=1+K\frac{B(s)}{\boxed{A(s)}}=\frac{A(s)+KB(s)}{\boxed{A(s)}}=0$$

- A(s) + KB(s): **zeros de 1+KG(s)** e polos de malha fechada (solução de 1+KG(s)=0)

$$1+KG(s)=1+K\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{\boxed{A(s)+KB(s)}}{A(s)}=0$$

Aplicação em sistemas de controle

Para a aplicação do princípio do argumento e enunciado do critério de Nyquist, considera-se:

- **P: número de polos de malha aberta no SPD** (ou seja, número de polos de G(s) no SPD).
- **N: número de vezes que o gráfico de KG(s) circunda o ponto (-1) no sentido horário**. Se o contorno ocorrer no sentido anti-horário N será negativo.
- **Z: número de zeros de 1+KG(s) no SPD**, ou seja, número de polos instáveis de malha fechada.

Portanto, para que o sistema seja estável é necessário obter-se Z=0. Como Z=N+P, número de vezes que o ponto (-1) é circundado no sentido anti-horário (N negativo) precisa ser igual ao número de polos de malha aberta no SPD.

Critério de Estabilidade de Nyquist

Um sistema representado pela equação caraterística 1+G(s)=0 é estável em malha fechada se e somente se o Diagrama de Nyquist de G(s), para s variando de -j∞ a +j∞, não passa pelo ponto crítico (-1) e o número de vezes que o ponto (-1) é circundado pelo diagrama no sentido anti-horário é igual ao número de polos de G(s) no SPD.

O Diagrama de Nyquist é obtido pelo mapeamento do contorno de Nyquist, que é **o Diagrama Polar de G(s)** com s variando de -j∞ a +j∞.

O Diagrama de Nyquist é simétrico em relação ao eixo real.

Observação: quando existirem polos sobre o eixo imaginário, o contorno de Nyquist precisa ser modificado.

Exemplo 1

Seja um sistema de controle com realimentação unitária cuja função de transferência de malha aberta é dada pela função de transferência G(s) abaixo. **Deseja-se analisar a estabilidade do sistema utilizando o Critério de Nyquist.**

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2} = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{(1-\omega^2) + j2\omega} = \frac{(1-\omega^2) - j2\omega}{(1-\omega^2)^2 + 4\omega^2}$$

Exemplo 1 – Diagrama Polar

$$G(j\omega) = \frac{(1-\omega^2) - j2\omega}{(1-\omega^2)^2 + 4\omega^2}$$

Módulo e fase nas frequências limite

$$\omega = 0 \qquad G(0) = 1 - j0 = 1\angle 0^\circ$$

$$\omega = +\infty \qquad G(\infty) = 0\angle -180^\circ$$

Cruzamento com eixo real

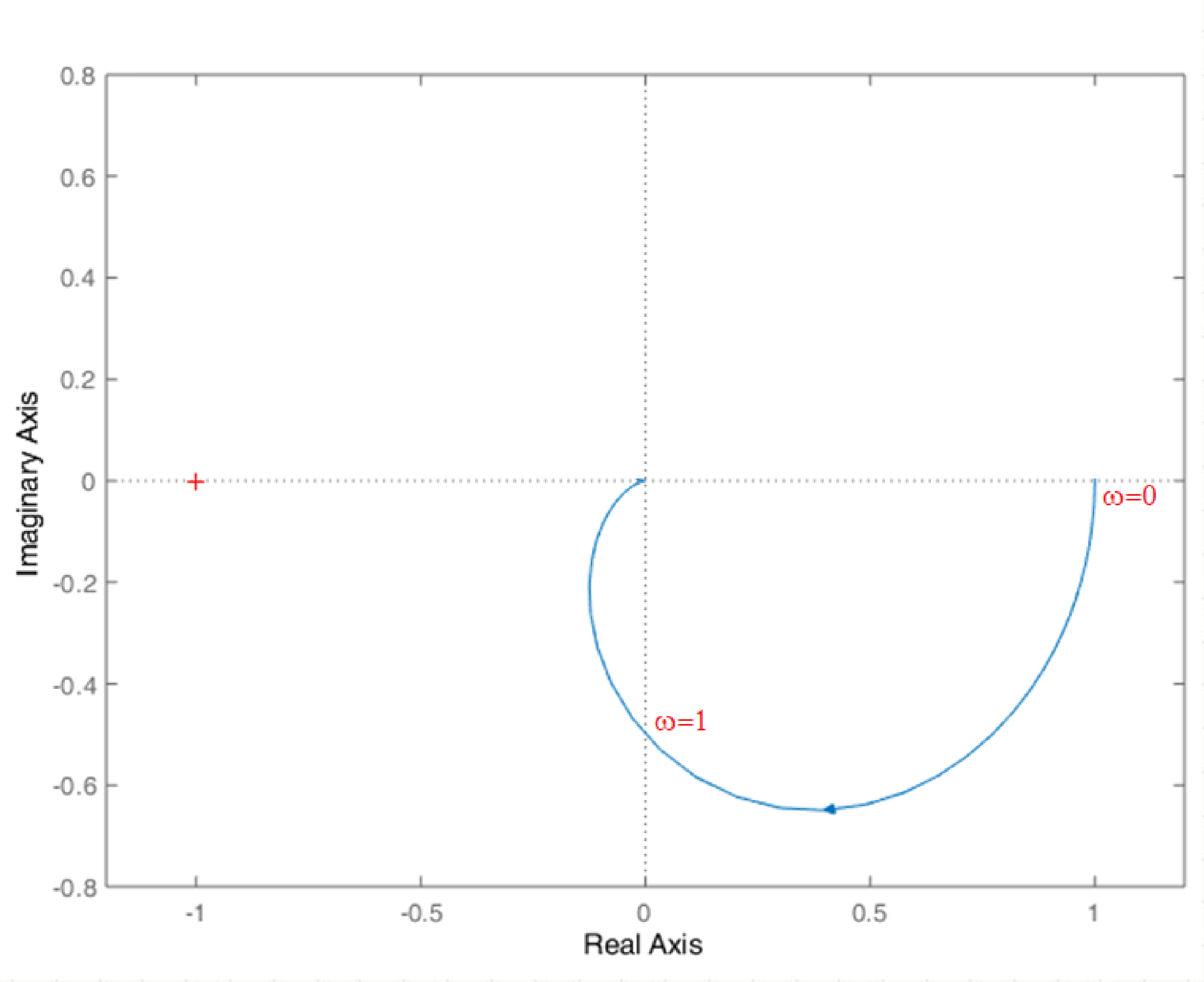
O diagrama toca o eixo real apenas em ω=0 e ω=∞

Cruzamento com eixo imaginário

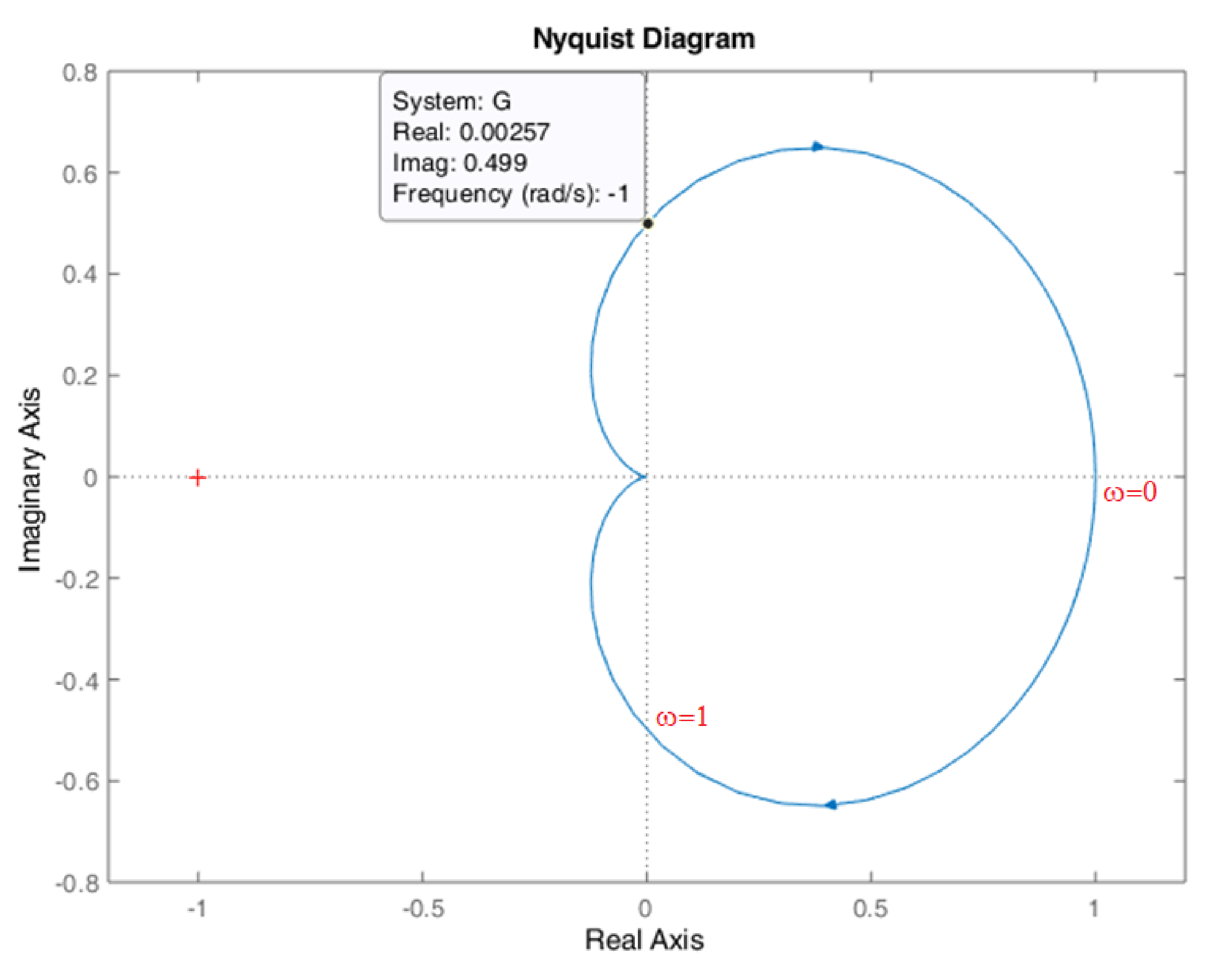
$$1-\omega^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \omega = \pm 1$$

$$\omega = 1 \quad \rightarrow \quad G(j1) = -j\frac{1}{2}$$

Exemplo 1 – Diagrama Polar



Exemplo 1 – Diagrama de Nyquist



Exemplo 1 – Análise da Estabilidade

Análise da estabilidade

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

P=0: G(s) não possui polos no SPD

N=0: Diagrama de Nyquist não circunda o ponto (-1)

Assim,

$$Z = N + P = 0$$

Portanto, não existem polos de malha fechada no SPD.

Logo, o sistema é estável em malha fechada.

Exemplo 2

Analisar a estabilidade do sistema abaixo utilizando o Critério de Nyquist.

$$G(s)=\frac{s-2}{s^2+2s+2} \quad \rightarrow \quad G(j\omega)=\frac{j\omega-2}{(2-\omega^2)+j2\omega}$$

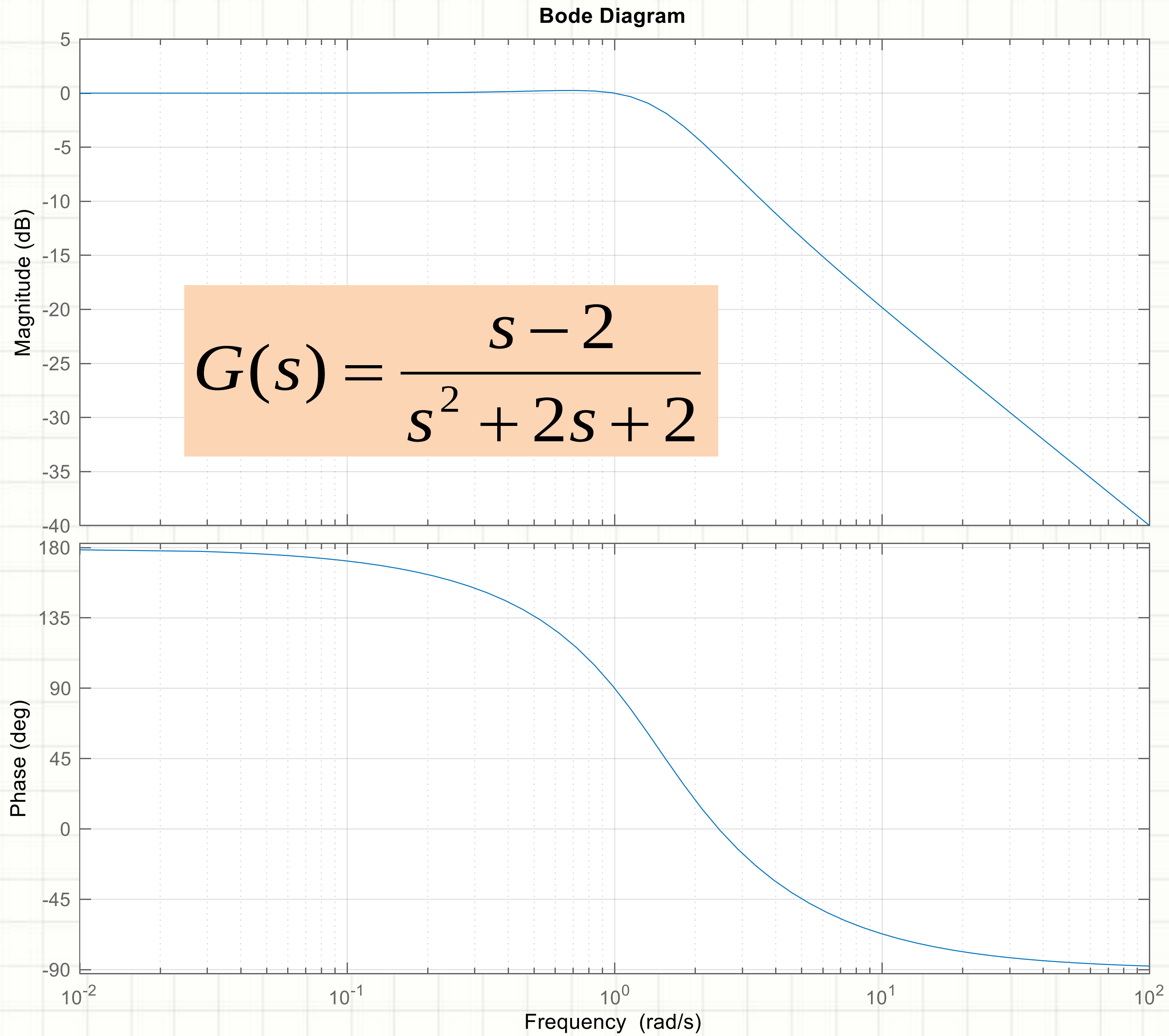
$$G(j\omega)=\frac{4\omega^2-4}{(2-\omega^2)^2+4\omega^2}+j\frac{\omega(6-\omega^2)}{(2-\omega^2)^2+4\omega^2}$$

Nas frequências limite:

$$G(0)=-1+j0=1\angle 180^\circ$$

$$G(j\omega)\approx\frac{1}{j\omega} \quad \rightarrow \quad G(\infty)=-j\frac{1}{\infty}=0\angle -90^\circ$$

Exemplo 2 – Diagramas de Bode



$$G(s) = \frac{s-2}{s^2+2s+2}$$

Exemplo 2

$$G(j\omega) = \frac{(4\omega^2 - 4) + j\omega(6-\omega^2)}{(2-\omega^2)^2 + 4\omega^2}$$

Cruzamento com eixo real:

$$\omega = 0 \quad \text{ou} \quad 6-\omega^2 = 0$$

$$\omega = 0 \quad \rightarrow \quad G(0) = -1$$

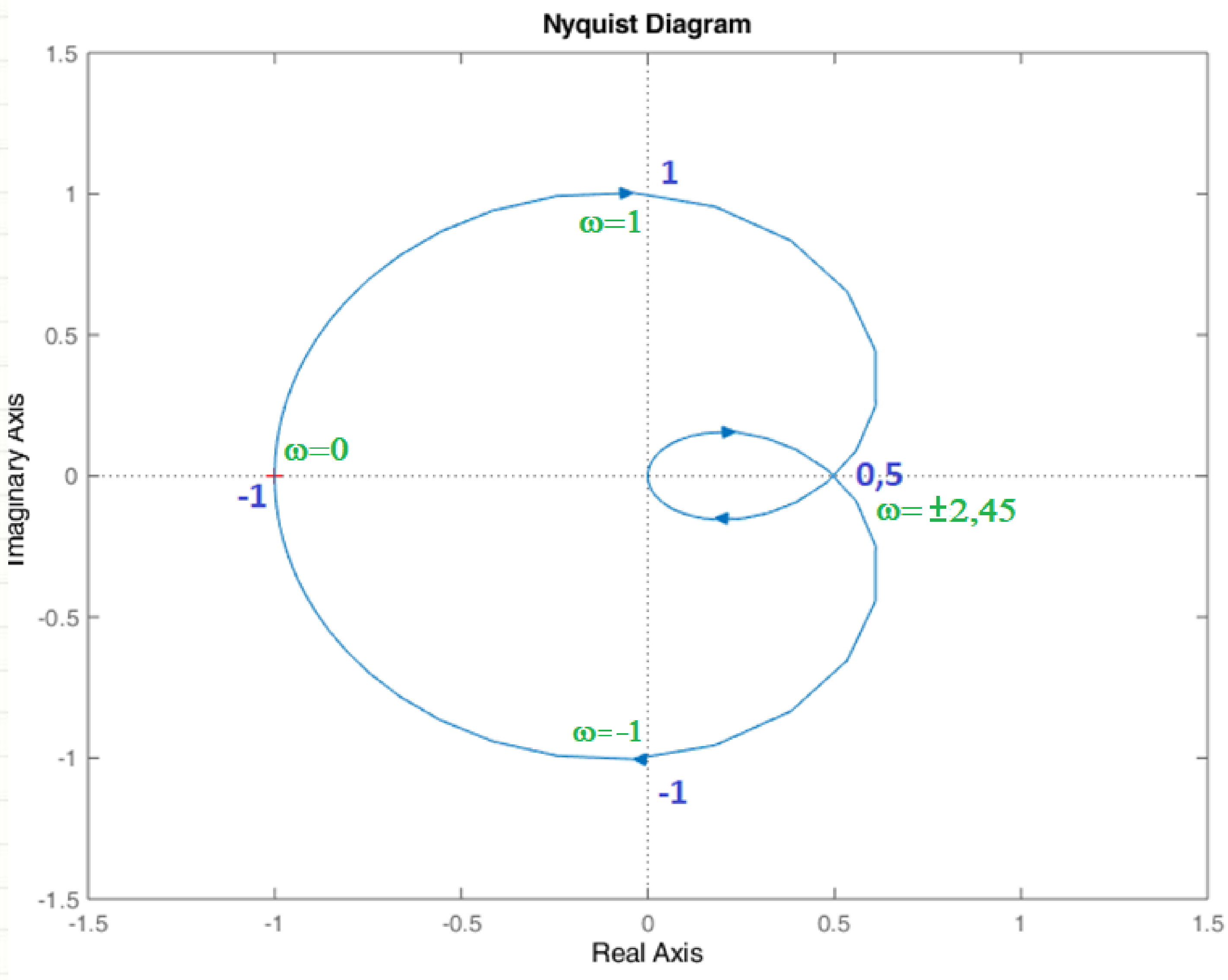
$$\omega = \pm\sqrt{6} \quad \rightarrow \quad G(j\sqrt{6}) = \frac{1}{2}$$

Cruzamento com eixo imaginário:

$$4\omega^2 - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad \omega = \pm 1$$

$$\omega = 1 \quad \rightarrow \quad G(j1) = j$$

Exemplo 2 – Diagrama de Nyquist



Exemplo 2 – Análise da estabilidade

Análise da estabilidade

$$G(s) = \frac{s-2}{s^2+2s+2}$$

P=0: G(s) não possui polos no SPD

N=0: Diagrama de Nyquist não circunda o ponto (-1)

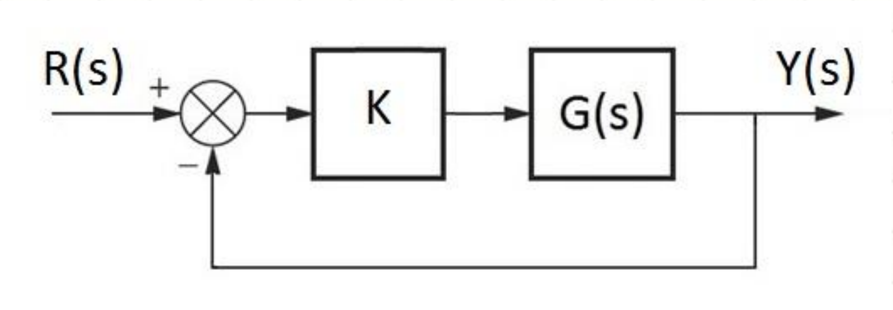
Assim,

$$Z = N + P = 0$$

Porém, o Diagrama de Nyquist passa sobre o ponto crítico (-1) e, portanto, **o sistema é instável.**

Estabilidade para um parâmetro K variável

Seja o sistema



Deseja-se avaliar a estabilidade do sistema em função da variação do parâmetro K.

Observe que, KG(s) circundar o ponto (-1) equivale a G(s) circundar o ponto (-1/K).

Assim, para a análise da estabilidade observa-se **quantas vezes o Diagrama de Nyquist circunda (-1/K) considerando todos os valores possíveis para o parâmetro K.**

Estabilidade para um parâmetro K variável

Eq. Característica	Diagrama de Nyquist
1+KG(s)=0	1+KG(s) circundar a origem
KG(s)=-1	KG(s) circundar o ponto (-1)
G(s)=-1/K	G(s) circundar o ponto (-1/K)

Exemplo 3

Analisar a estabilidade do sistema do exemplo 2 considerando o ganho - ∞ < K < +∞.

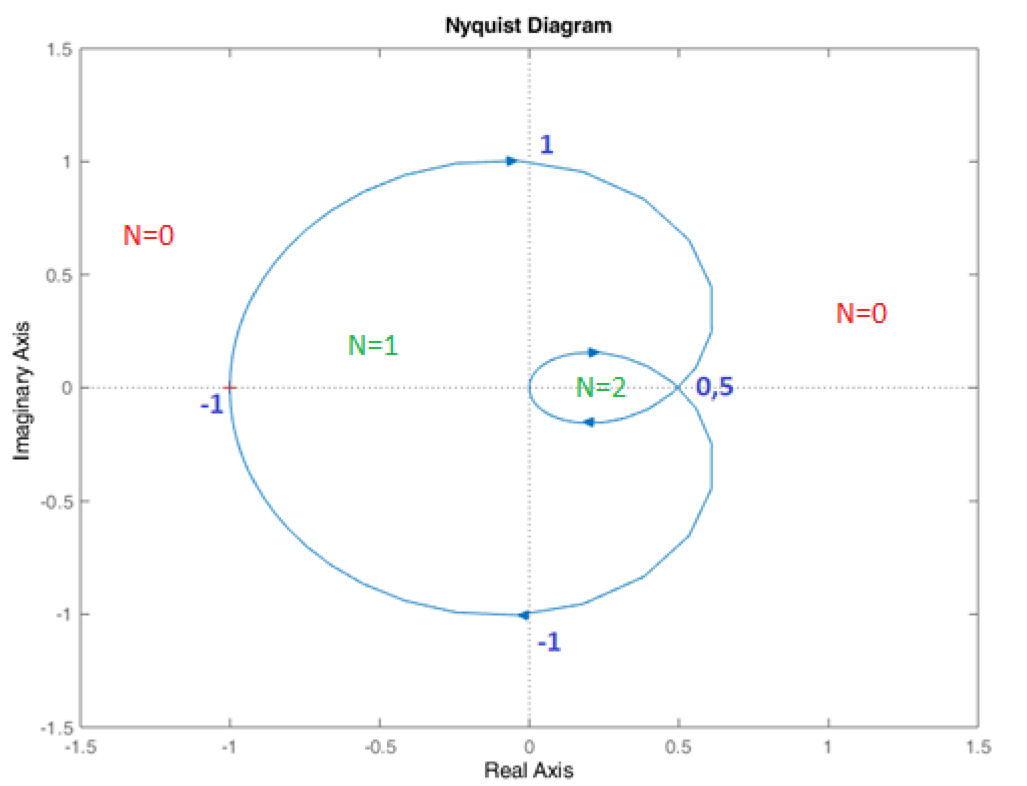
$$G(s) = \frac{s-2}{s^2+2s+2}$$

Para estabilidade:

Z=N+P=0

Como P=0, então é necessário obter N=0. Do gráfico, N será zero para:

$$-\frac{1}{K} < -1 \quad \text{e} \quad -\frac{1}{K} > \frac{1}{2}$$



Exemplo 3

De $-\dfrac{1}{K} < -1$ obtém-se

$$K > 0 \quad \text{e} \quad -K > -1 \rightarrow K < 1$$

Ou seja, **o sistema é estável para 0 < K < 1.**

De $-\dfrac{1}{K} > \dfrac{1}{2}$ obtém-se

$$K < 0 \quad \text{e} \quad -K < 2 \rightarrow K > -2$$

Ou seja, **o sistema é estável para -2 < K < 0.**

Exemplo 3

Portanto, **o sistema em malha fechada será estável para**

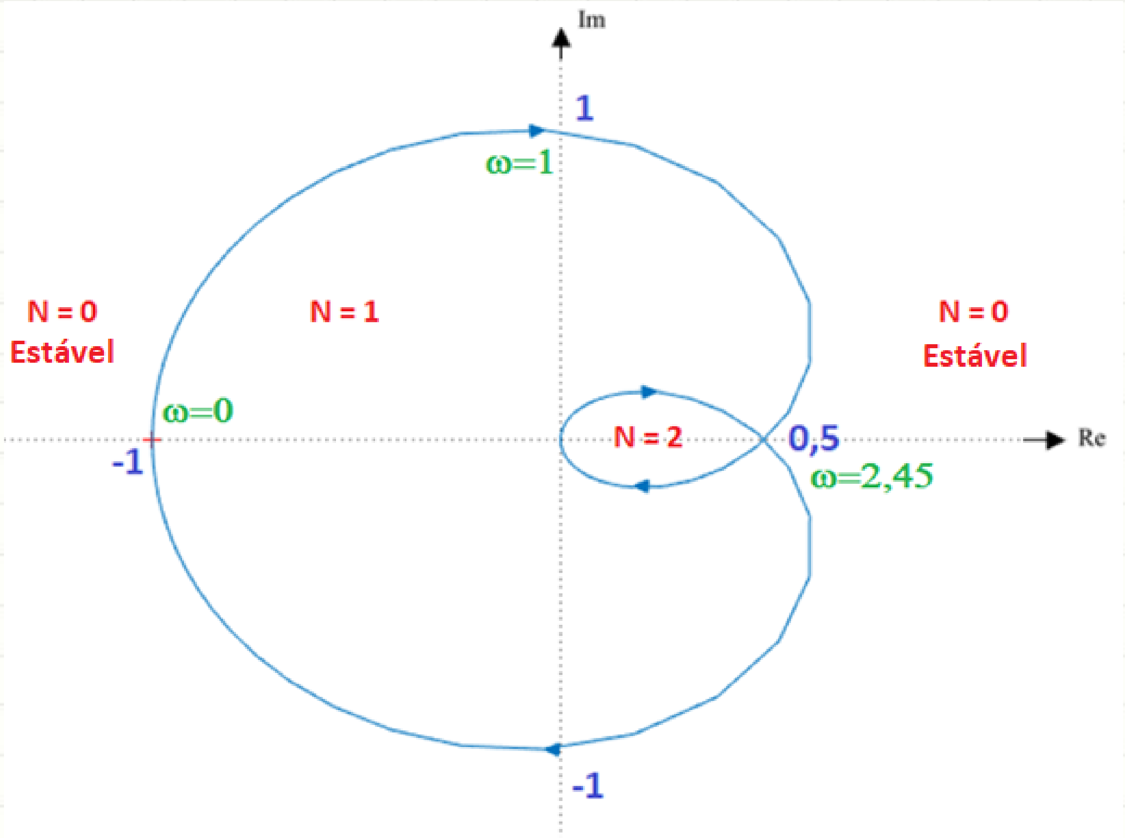
$$-2 < K < 1$$

sendo $K \neq 0$.

Lembre que K=0, representa o sistema em malha aberta.

Exemplo 3

Análise para variação completa do ganho K



$$N = 1 \quad \rightarrow \quad -1 < -\frac{1}{K} < 0$$

$$N = 2 \quad \rightarrow \quad 0 < -\frac{1}{K} < \frac{1}{2}$$

Exemplo 3

Análise para variação completa do ganho K

N=1 ⇨ Sistema instável com 1 polo no SPD.

$$-1 < -\frac{1}{K} < 0$$

$$-\frac{1}{K} < 0 \quad \rightarrow \quad K > 0$$

$$-\frac{1}{K} > -1 \quad \rightarrow \quad K > 1$$

$$K > 1$$

N=2 ⇨ Sistema instável com 2 polos no SPD.

$$0 < -\frac{1}{K} < \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{K} > 0 \quad \rightarrow \quad K < 0$$

$$-\frac{1}{K} < \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad K < -2$$

$$K < -2$$

Exemplo 3

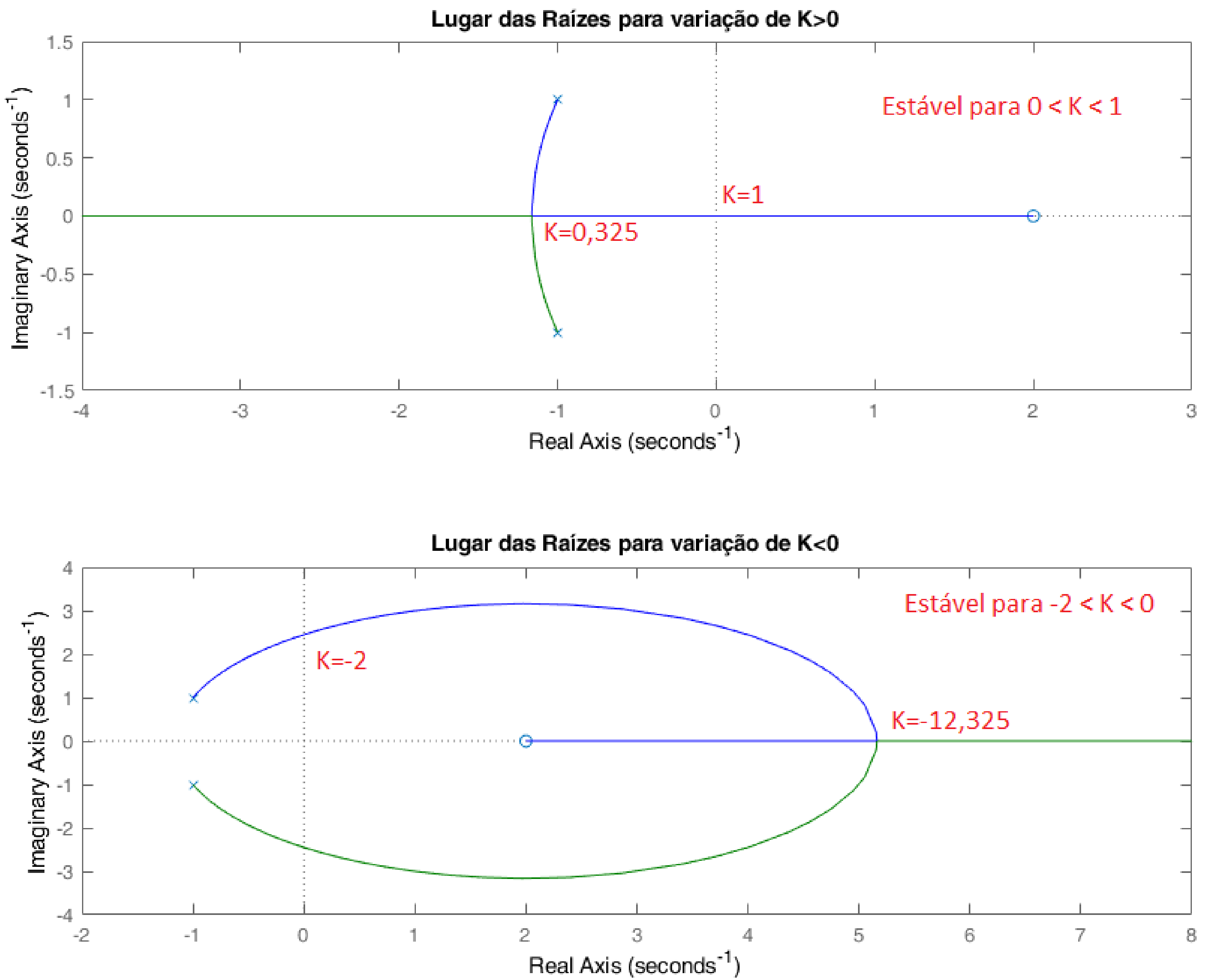
Análise para a variação completa do ganho K

Sistema Instável 2 polos no SPD	Sistema Estável	Sistema Instável 1 polo no SPD
$-\infty$ a -2	-2 a 1	1 a $+\infty$

$K \neq 0$

Ganho	Polos de Malha fechada
K=-5	$p_{1,2}=1,5 \pm j3,12$
K=-2	$p_{1,2}=\pm j2,45$
K=0,5	$p_1=-0,5$ e $p_2=-2$
K=1	$p_1=0$ e $p_2=-3$
K=2	$p_1=-4,45$ e $p_2=0,45$

Exemplo 3 – Lugar das Raízes



Exemplo 4

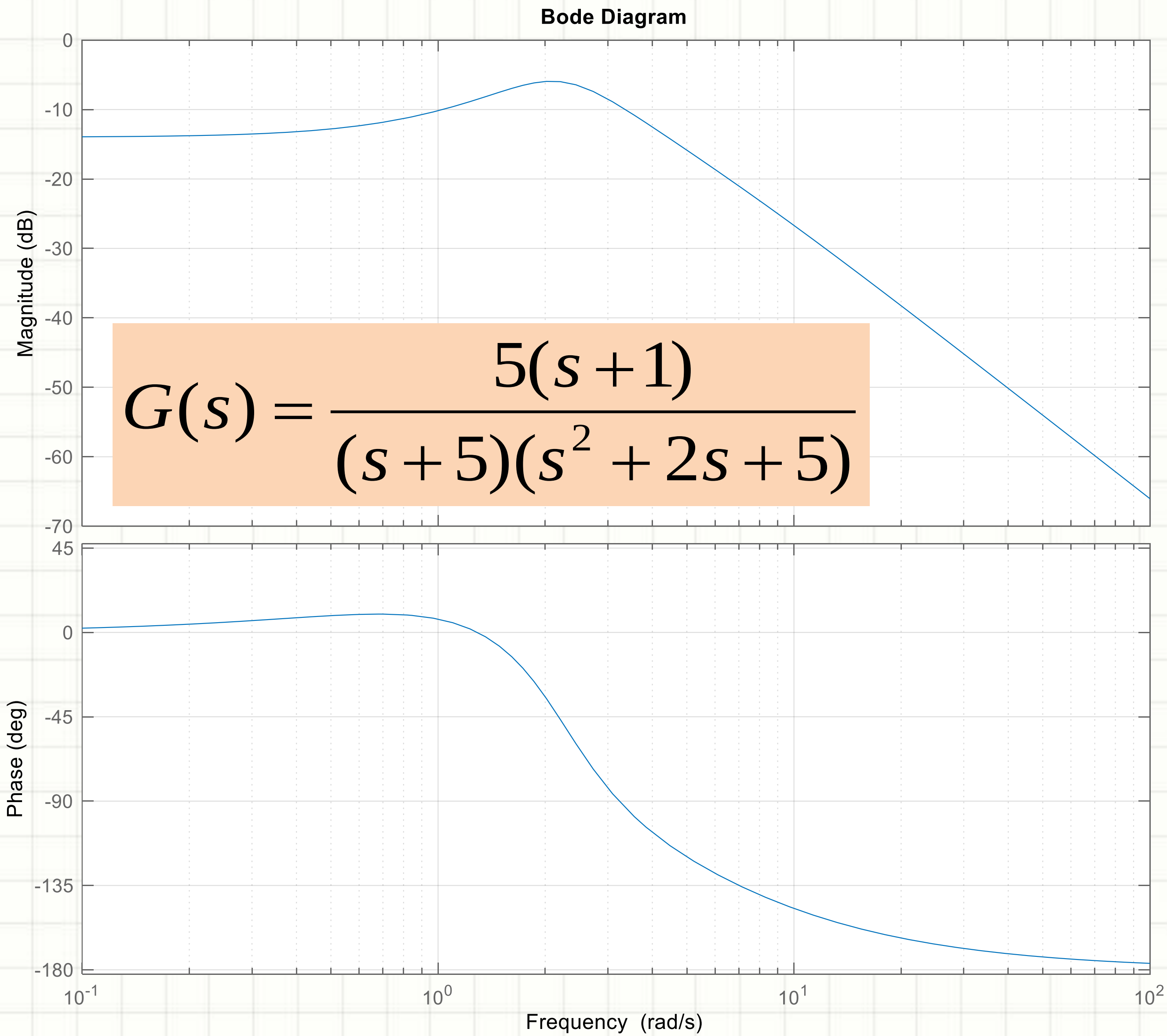
Seja a função de transferência abaixo (vista anteriormente como exemplo de diagrama polar). **Analisar a estabilidade do sistema considerando o ganho - ∞ < K < +∞.**

$$G(s)=\frac{5(s+1)}{(s+5)(s^2+2s+5)}=\frac{5(s+1)}{s^3+7s^2+15s+25}$$

$$G(j\omega)=\frac{5(j\omega+1)}{(25-7\omega^2)+j\omega(15-\omega^2)}$$

$$G(j\omega)=\frac{5\left[(25+8\omega^2-\omega^4)+j\omega(10-6\omega^2)\right]}{(25-7\omega^2)^2+\omega^2(15-\omega^2)^2}$$

Exemplo 4 – Diagramas de Bode



$$G(s) = \frac{5(s+1)}{(s+5)(s^2+2s+5)}$$

Exemplo 4 – Diagrama Polar

Conforme obtido anteriormente,

$$G(0) = \frac{5\times 25 + j0}{(25)^2} = 0,2\angle 0^\circ$$

e

$$G(\infty) \approx -\frac{1}{\omega^2} = 0\angle -180^\circ$$

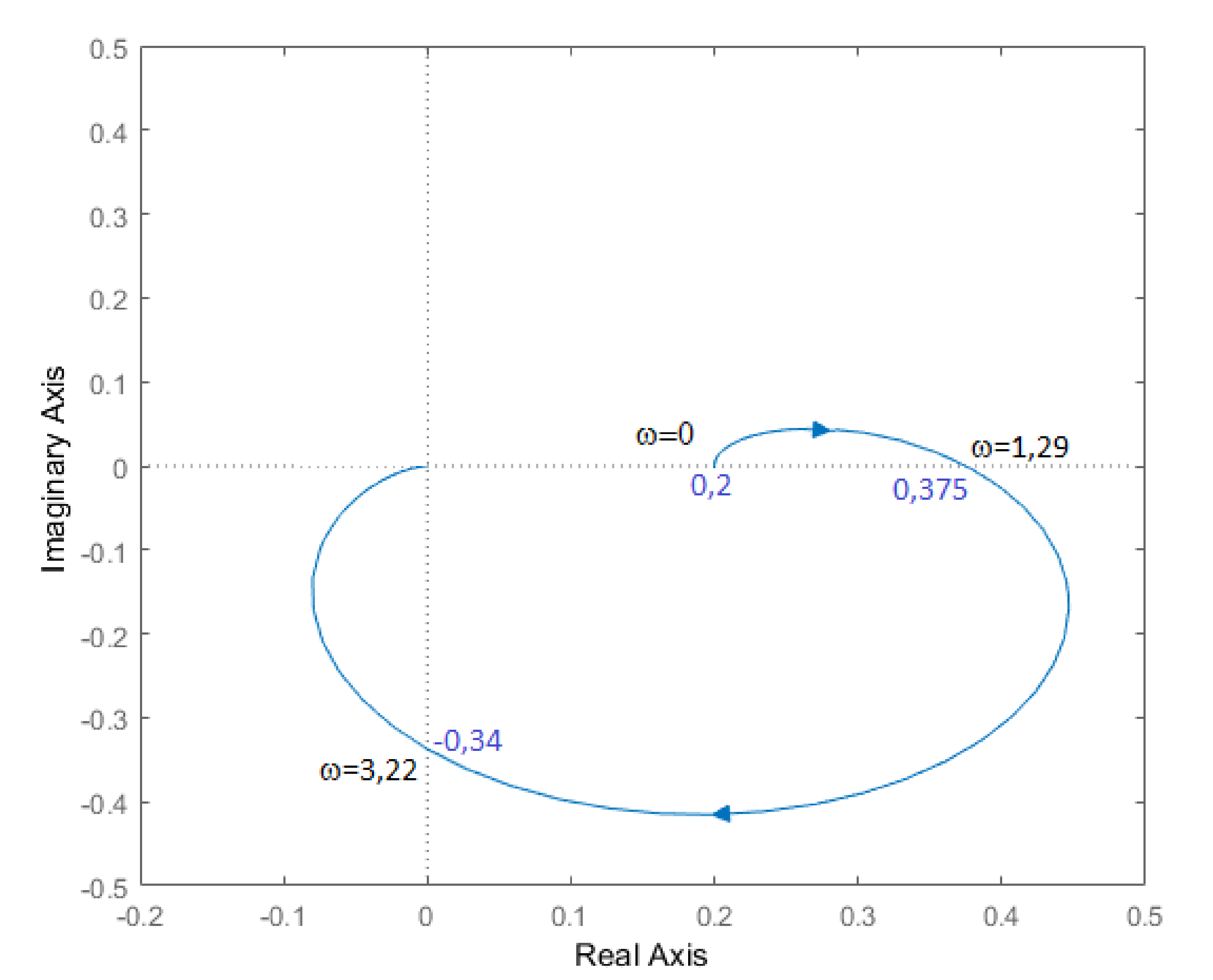
Cruzamento com eixo real:

$$\omega = 1,29 \quad \rightarrow \quad G(j1,29) = 0,375$$

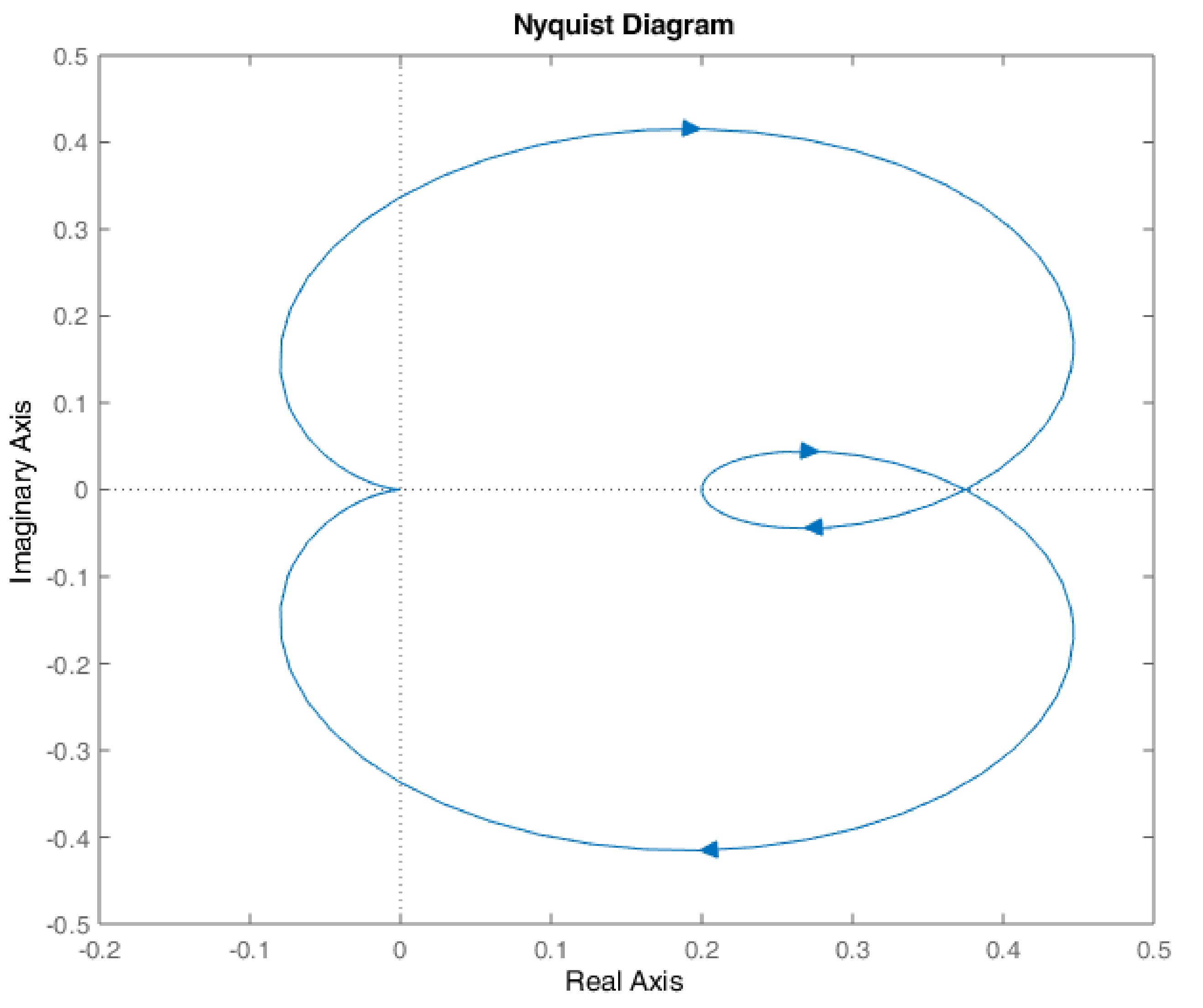
Cruzamento com eixo imaginário:

$$\omega = 3,22 \quad \rightarrow \quad G(j3,22) = -0,34$$

Exemplo 4 – Diagrama Polar



Exemplo 4 – Diagrama de Nyquist



Exemplo 4 – Análise da estabilidade

Análise da estabilidade

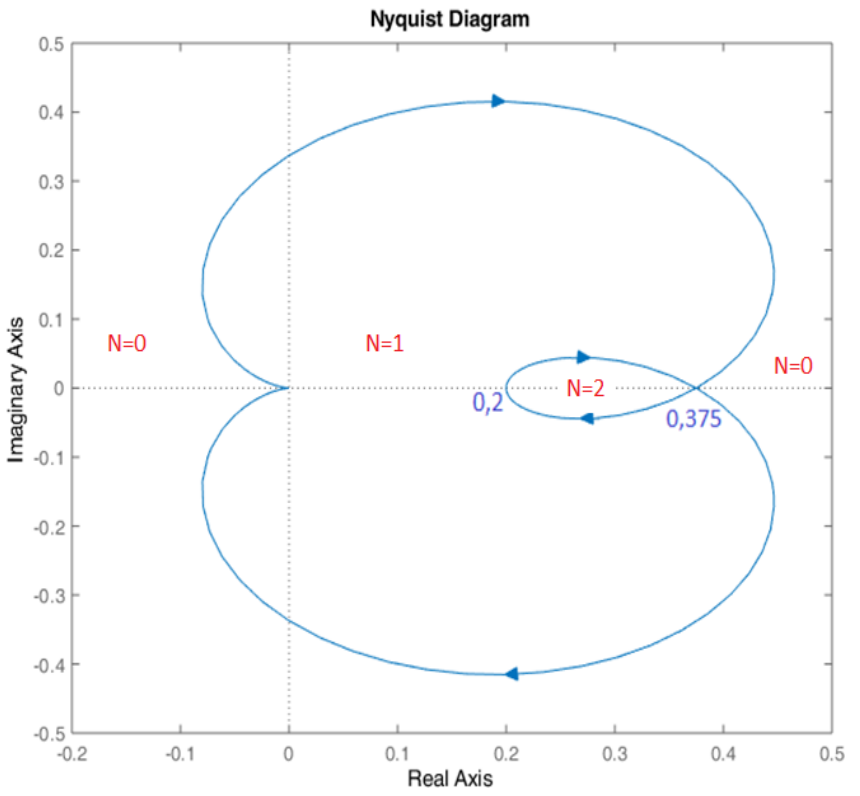
$$G(s) = \frac{5(s+1)}{(s+5)(s^2+2s+5)}$$

Para estabilidade é preciso garantir: Z = N + P = 0

Como P=0, então é necessário obter N=0.

Do gráfico, N será zero para:

$$-\frac{1}{K} < 0 \quad \text{e} \quad -\frac{1}{K} > 0{,}375$$



Exemplo 4 – Análise da estabilidade

$$-\frac{1}{K} < 0 \quad \rightarrow \quad K > 0$$

$$-\frac{1}{K} > 0{,}375 \quad \rightarrow \quad K > -2{,}667$$

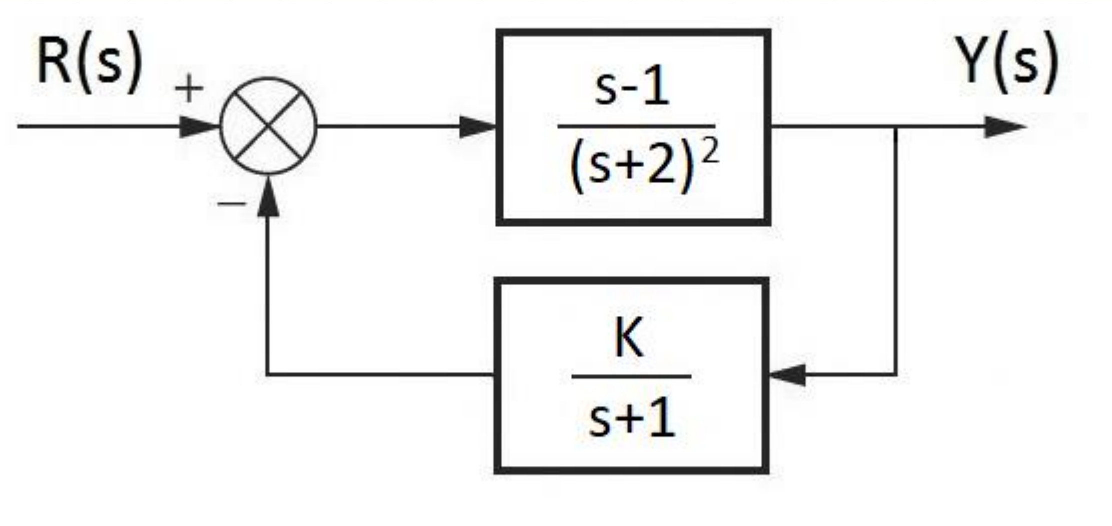
Portanto, **o sistema em malha fechada será estável para**

$$-2{,}667 < K < +\infty$$

sendo K $\neq$ 0.

Exemplo 5

Analisar a estabilidade do sistema abaixo considerando o ganho $-\infty < K < +\infty$.



O diagrama de Nyquist será traçado considerando a equação característica:

$$1 + K\frac{(s-1)}{(s+1)(s+2)^2} = 0$$

Exemplo 5

O Diagrama de Nyquist será traçado para

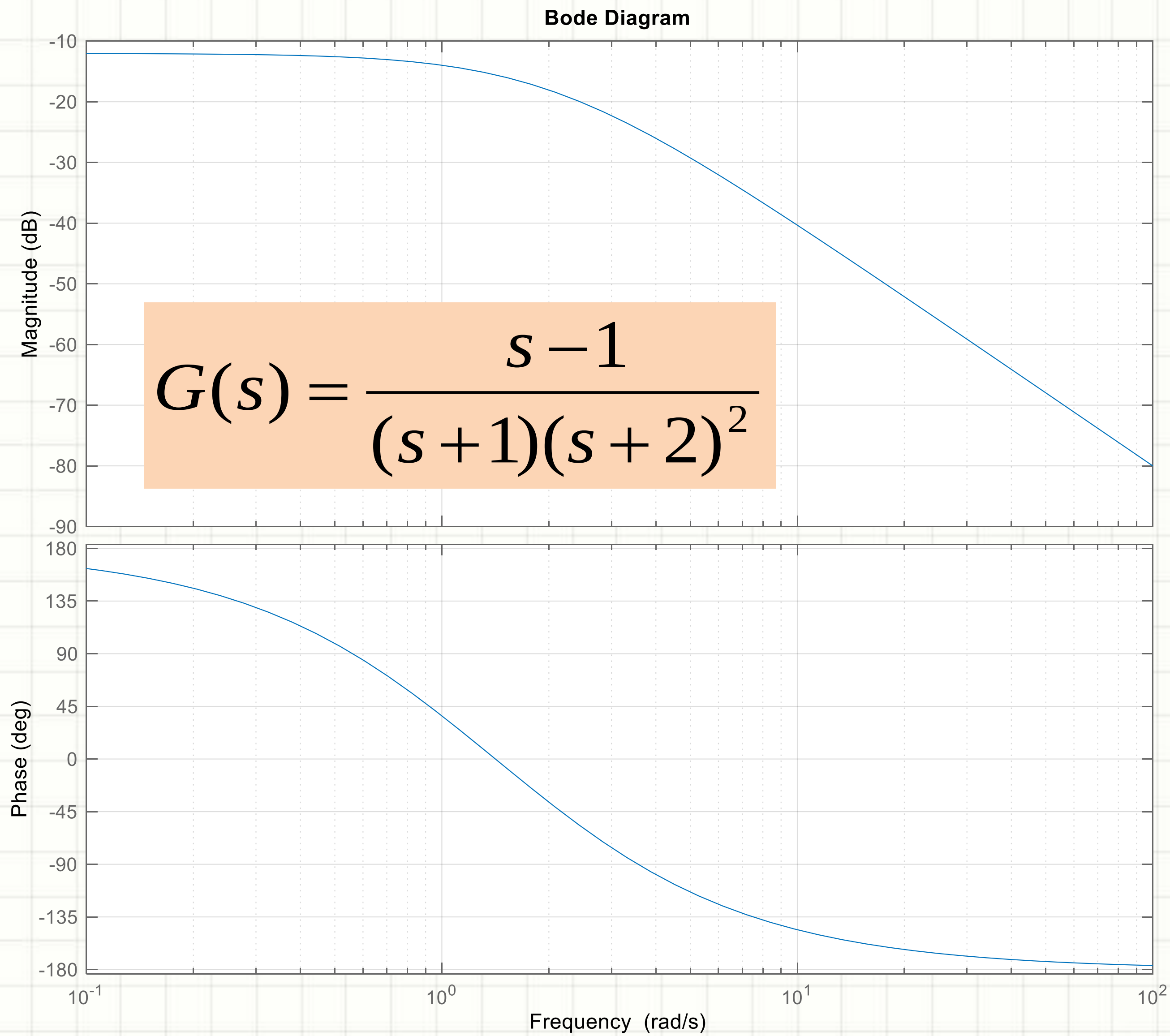
$$G(s) = \frac{(s-1)}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{(s-1)}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4}$$

No domínio da frequência

$$G(j\omega) = \frac{-1 + j\omega}{(4 - 5\omega^2) + j\omega(8 - \omega^2)}$$

$$G(j\omega) = \frac{(-4 + 13\omega^2 - \omega^4) + j\omega(12 - 6\omega^2)}{(4 - 5\omega^2)^2 + \omega^2(8 - \omega^2)^2}$$

Exemplo 5 – Diagramas de Bode



$$G(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s+2)^2}$$

Exemplo 5

$$G(j\omega) = \frac{(-4+13\omega^2-\omega^4)+j\omega(12-6\omega^2)}{(4-5\omega^2)^2+\omega^2(8-\omega^2)^2}$$

Na frequências limite obtém-se,

$$G(0) = -\frac{1}{4} + j0 = 0,25\angle 180^\circ$$

e

$$G(\infty) \approx -\frac{1}{\omega^2} = 0\angle -180^\circ$$

<u>Cruzamento com eixo real</u>: $12\text{-}6\omega^2=0$

$$\omega = \pm\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad G(j\sqrt{2}) = 1/6 = 0{,}167$$

Exemplo 5

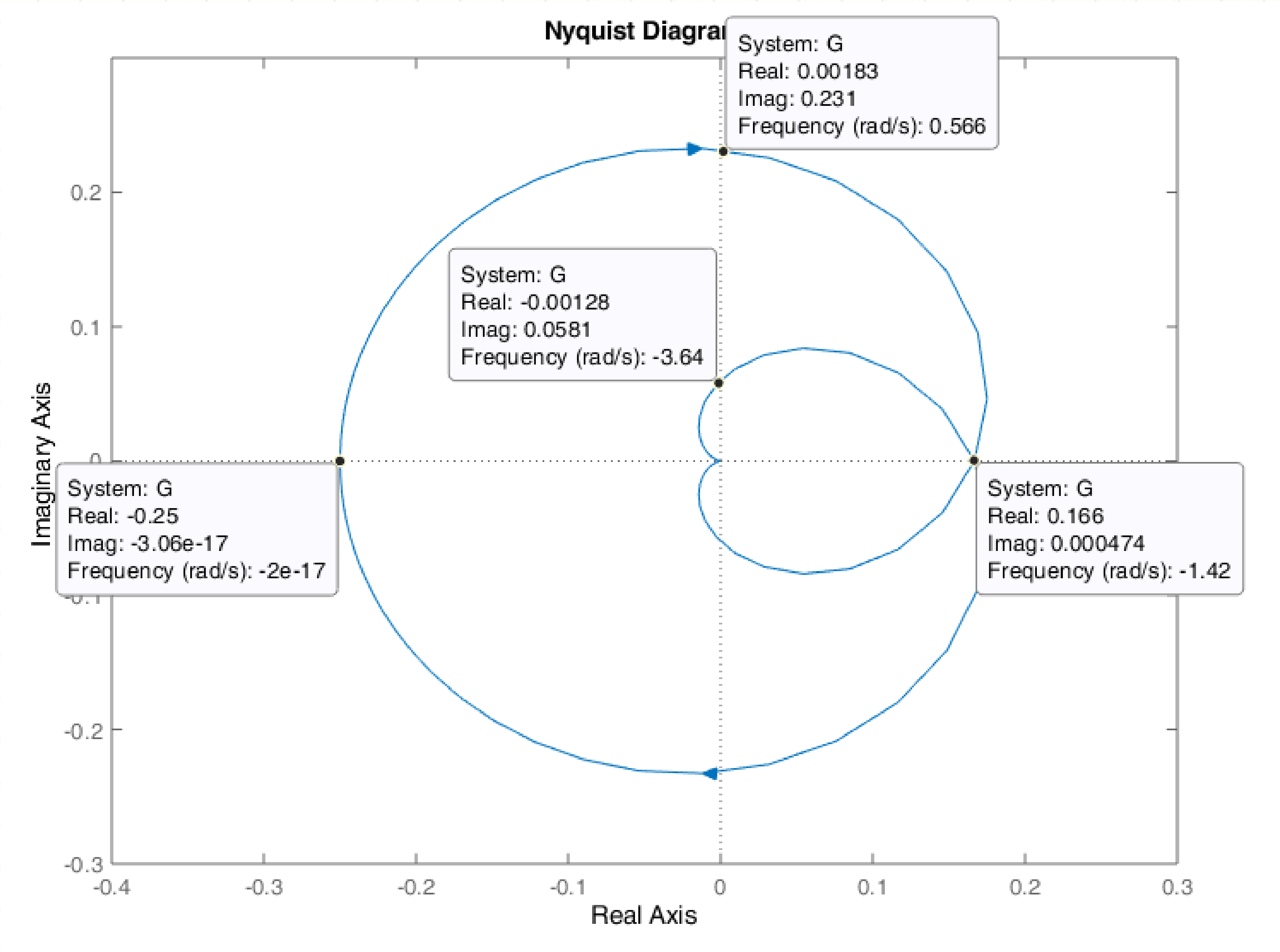
$$G(j\omega) = \frac{(-4+13\omega^2-\omega^4)+j\omega(12-6\omega^2)}{(4-5\omega^2)^2+\omega^2(8-\omega^2)^2}$$

Cruzamento com eixo imaginário: $-4+13\omega^2-\omega^4=0$

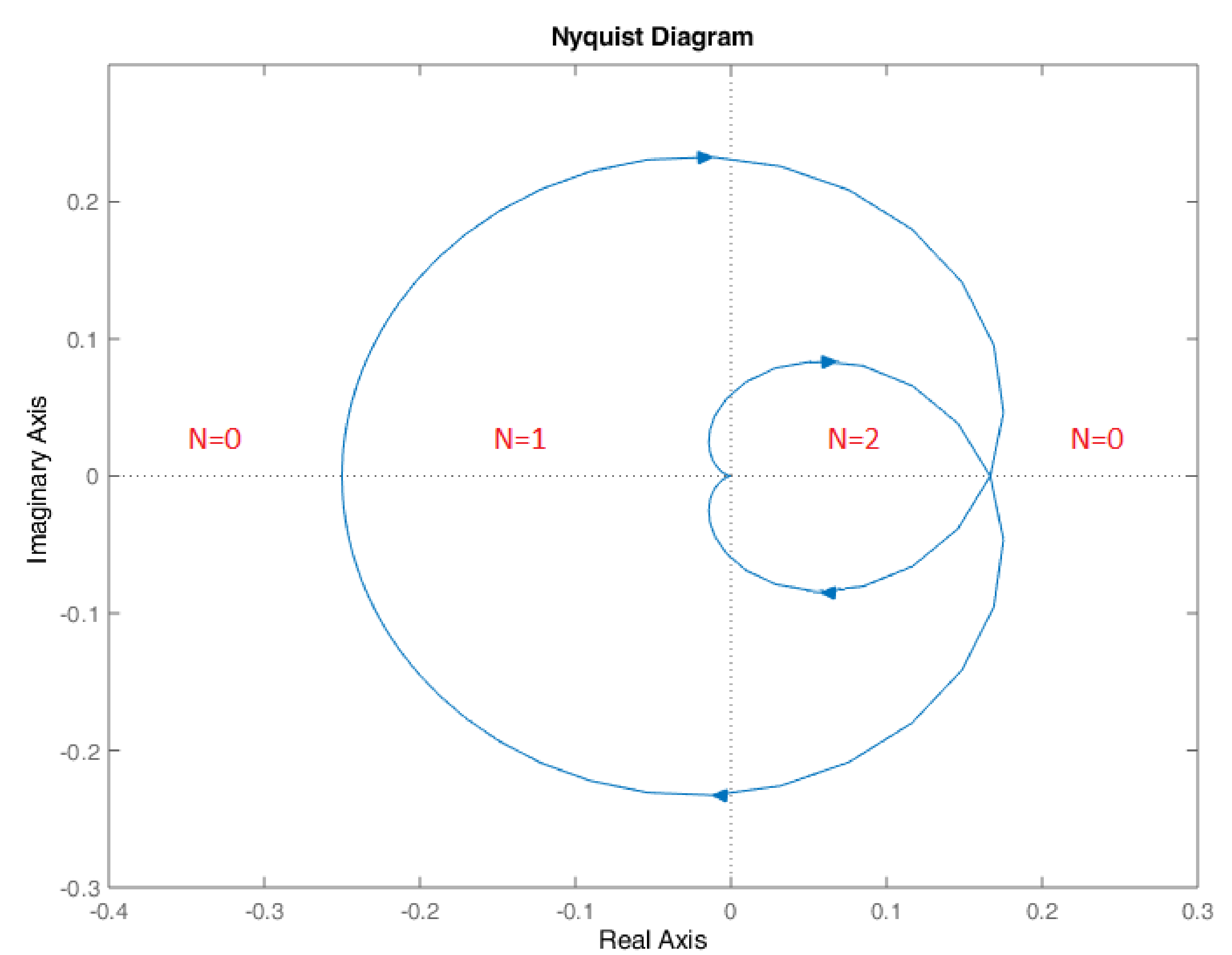
$$\omega = \pm 0,56 \quad \rightarrow \quad G(j0,56) = j0,231$$
$$\omega = \pm 3,56 \quad \rightarrow \quad G(j3,56) = -j0,06$$

Ou seja, existem 2 cruzamentos com o eixo imaginário.

Exemplo 5 – Diagrama de Nyquist



Exemplo 5



Nyquist Diagram
Imaginary Axis
Real Axis
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-0.3
-0.2
-0.1
0
0.1
0.2
0.3
N=0
N=1
N=2
N=0

Exemplo 5 – Análise da estabilidade

Análise da estabilidade

Para estabilidade é preciso garantir: Z = N + P = 0

Como P=0, então é necessário obter N=0.

Do gráfico, N será zero para:

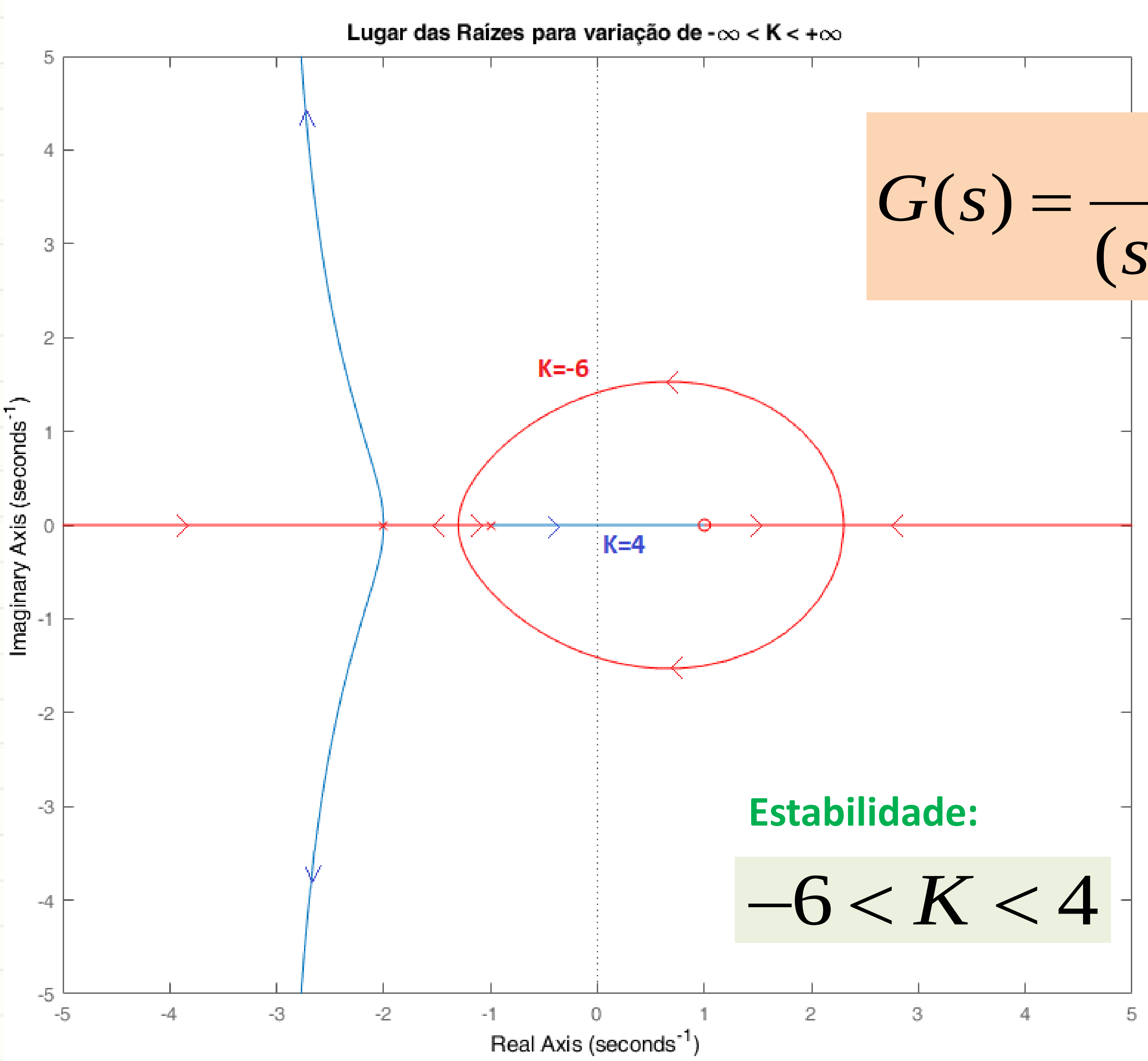
$$-\frac{1}{K} < -\frac{1}{4} \quad \text{e} \quad -\frac{1}{K} > \frac{1}{6}$$

Portanto, **o sistema em malha fechada será estável para**

$$-6 < K < 4$$

sendo $K \neq 0$.

Exemplo 5 – Lugar das Raízes



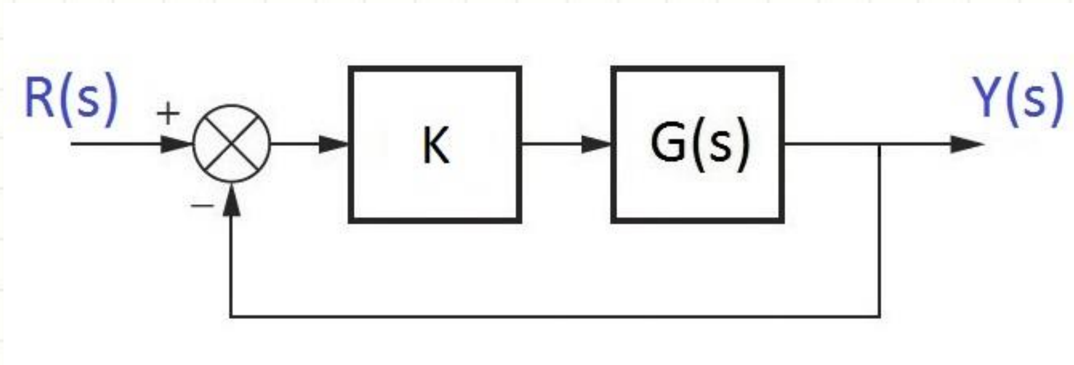
$$G(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s+2)^2}$$

Estabilidade:

$$-6 < K < 4$$

Exemplo 6

Seja o sistema de controle

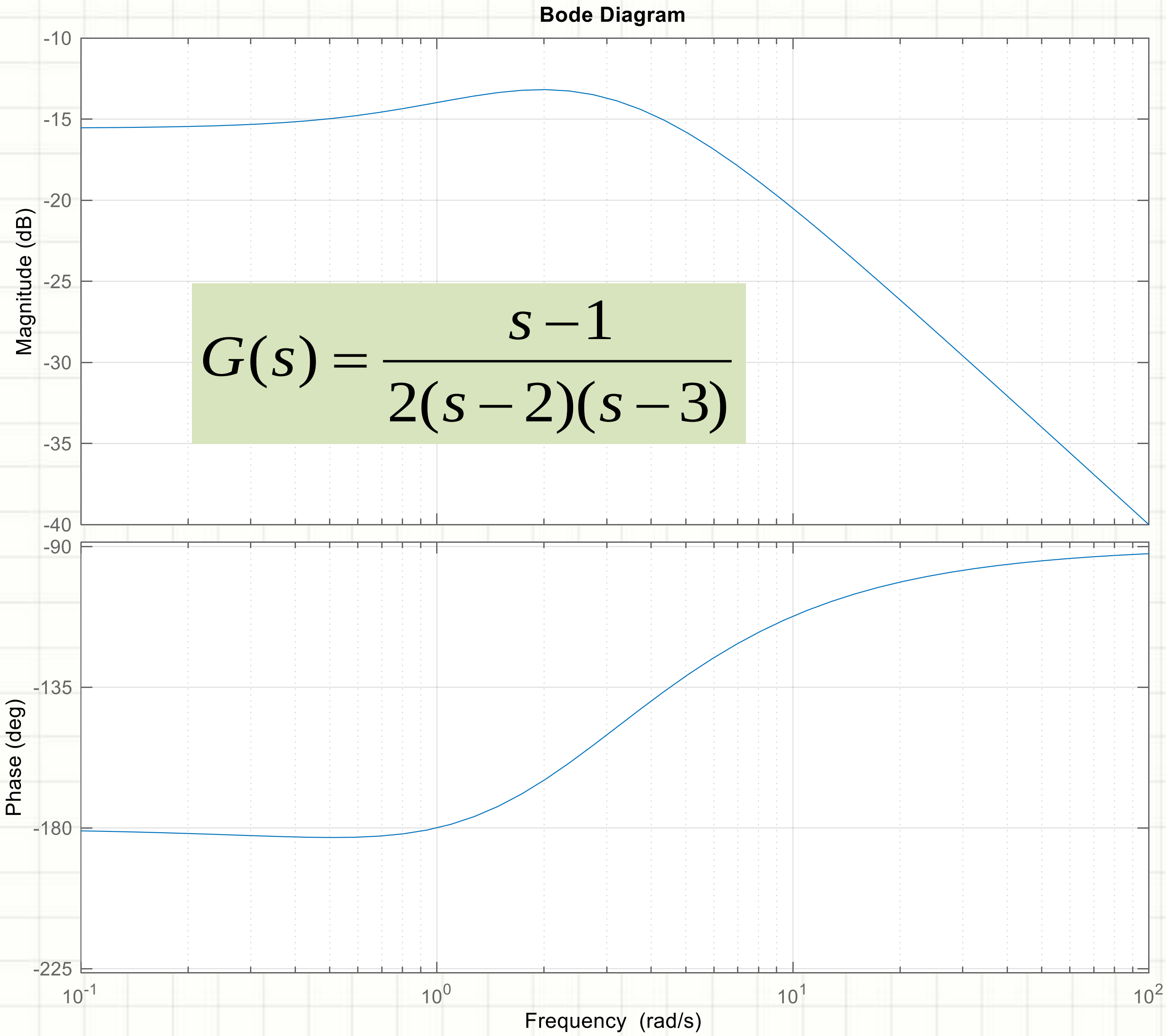


sendo

$$G(s) = \frac{s-1}{2(s-2)(s-3)}$$

Avaliar a estabilidade do sistema utilizando o critério de estabilidade de Nyquist.

Exemplo 6 – Diagramas de Bode



$$G(s) = \frac{s-1}{2(s-2)(s-3)}$$

Exemplo 6

O Diagrama de Nyquist será traçado para:

$$G(j\omega) = \frac{1}{2}\frac{(-6-4\omega^2)-j\omega(1-\omega^2)}{(6-\omega^2)^2+25\omega^2}$$

Nas frequências limite:

$$\omega = 0 \qquad G(0) = -\frac{1}{12} + j0 = \frac{1}{12}\angle -180^\circ$$

$$\omega \to \infty \qquad G(\infty) \approx \frac{1}{j\omega} = 0\angle -90^\circ$$

Exemplo 6

$$G(j\omega) = \frac{1}{2}\frac{(-6-4\omega^2) - j\omega(1-\omega^2)}{(6-\omega^2)^2 + 25\omega^2}$$

Cruzamento com eixo real:

$$\omega = \pm 1 \quad \rightarrow \quad G(j1) = -\frac{1}{10}$$

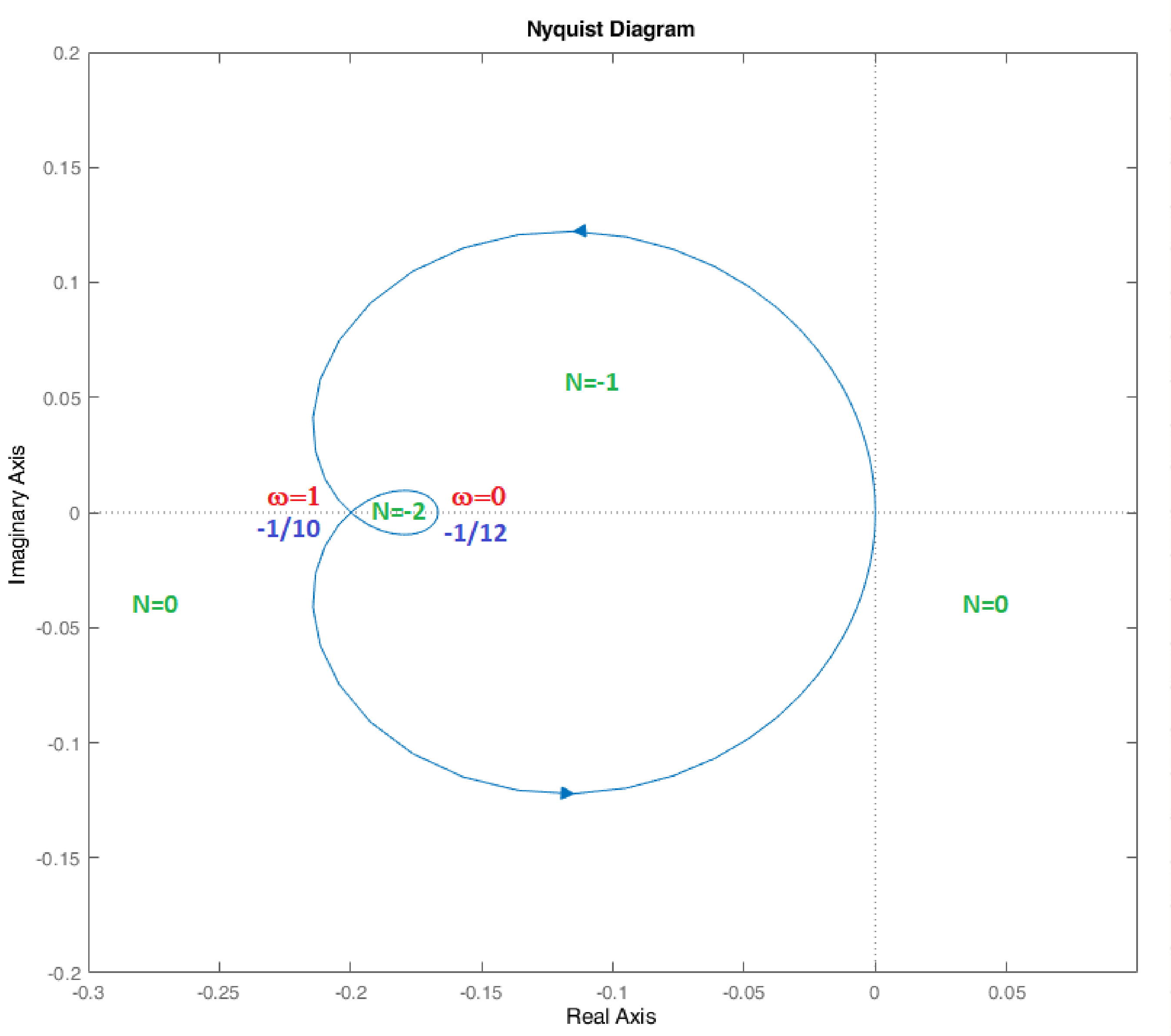
Cruzamento com eixo imaginário:

$$-6-4\omega^2 \quad \rightarrow \quad \omega = \pm j\sqrt{6/4}$$

frequência complexa

Logo, **não existe cruzamento com eixo imaginário**.

Exemplo 6 – Diagrama de Nyquist



Exemplo 6 – Análise da estabilidade

Análise da estabilidade

P=2: G(s) possui 2 polos no SPD

Para estabilidade é necessário N=-2 (2 voltas no sentido anti-horário), obtido para:

$$-\frac{1}{10} < -\frac{1}{K} < -\frac{1}{12}$$

Logo, o sistema é estável para:

$$10 < K < 12$$