Resposta e Objetivos de Controle em Sistemas Discretos

Profa. Cristiane Paim

Objetivos de Controle

O objetivo de um sistema de controle é fazer com que o sistema apresente um comportamento em regime transitório ou permanente, conforme condições definidas previamente, tanto no caso contínuo quanto no discreto.

As especificações da resposta transitória e de regime permanente serão similares àquelas vistas no caso contínuo.

Resposta Transitória no Plano z

As variáveis s e z podem ser relacionadas pela equação,

$$z = e^{Ts}$$

sendo T o período de amostragem.

Para sistemas de 2ª ordem subamortecidos, os polos de malha fechada são definidos por:

$$s = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_d$$

e, portanto,

$$z = e^{-\xi\omega_n T \pm j\omega_d T} = e^{-\xi\omega_n T}\angle \pm \omega_d T$$

Resposta Transitória no Plano z

Os polos complexos de malha fechada podem ser escritos em termos do módulo e fase (radianos),

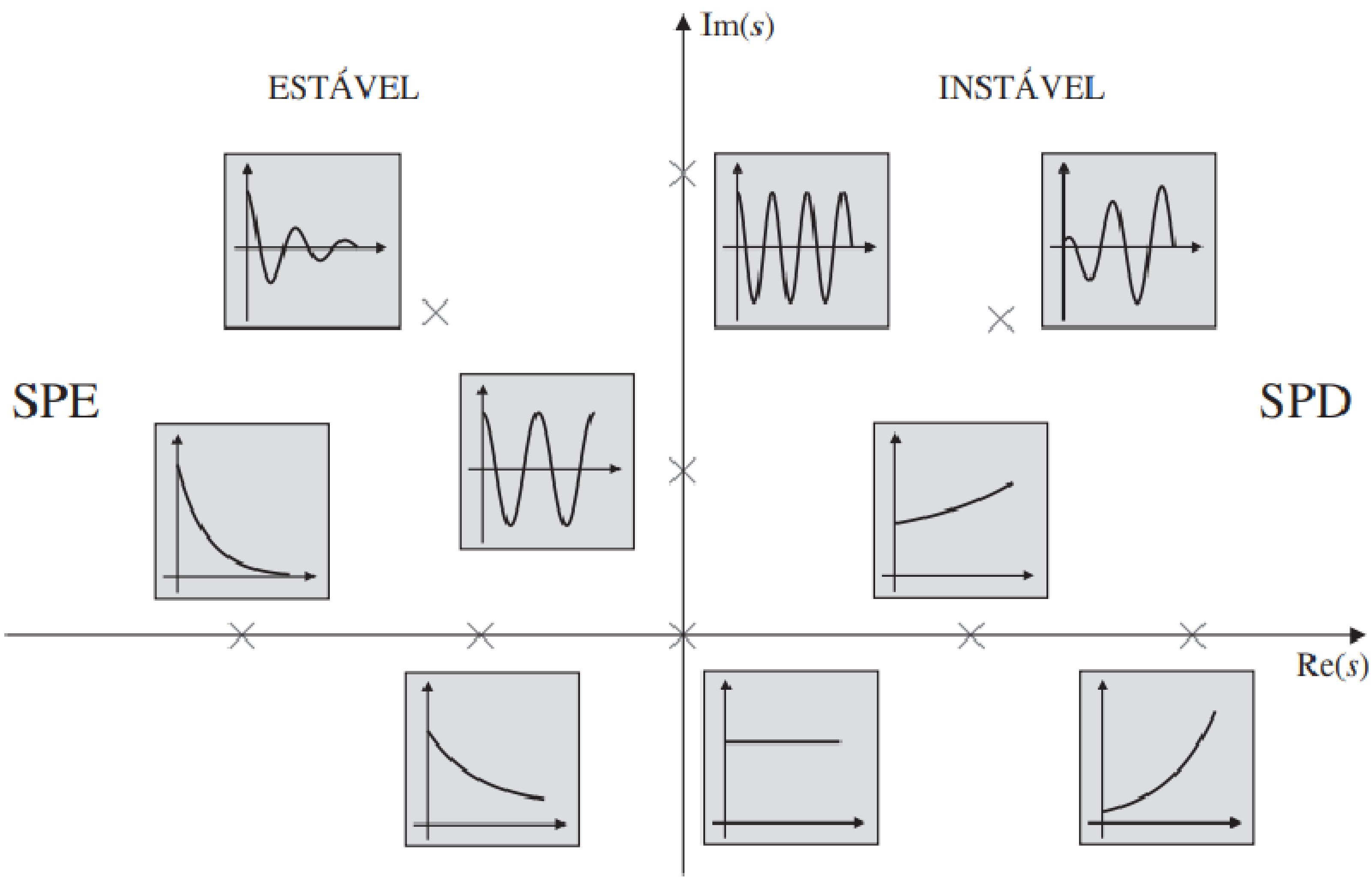
$$z = e^{-\xi\omega_n T} \angle \pm \omega_d T = M \angle \pm N$$

de onde se pode obter diretamente os valores de coeficiente de amortecimento e frequência natural amortecida:

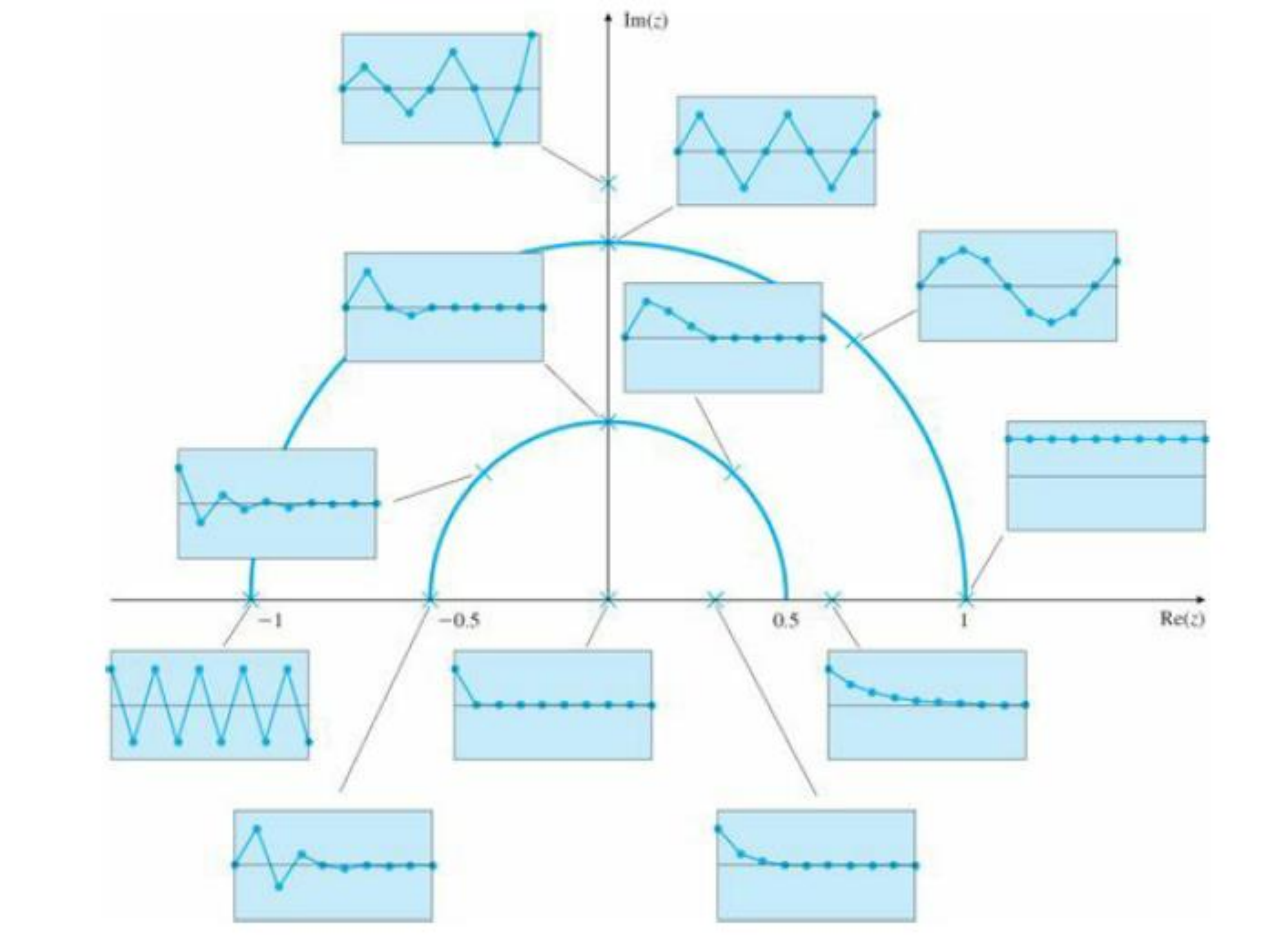
$$\xi = -\frac{\ln(\mathrm{M})}{\sqrt{\ln^2(\mathrm{M}) + \mathrm{N}^2}} \qquad \omega_n = \frac{1}{\mathrm{T}}\sqrt{\ln^2(\mathrm{M}) + \mathrm{N}^2}$$

Obtidos ξ e ω_n as especificações podem ser calculadas usando as mesmas expressões do caso contínuo.

Respostas temporais associadas a pontos do plano s



Sequências temporais associadas a pontos do plano z



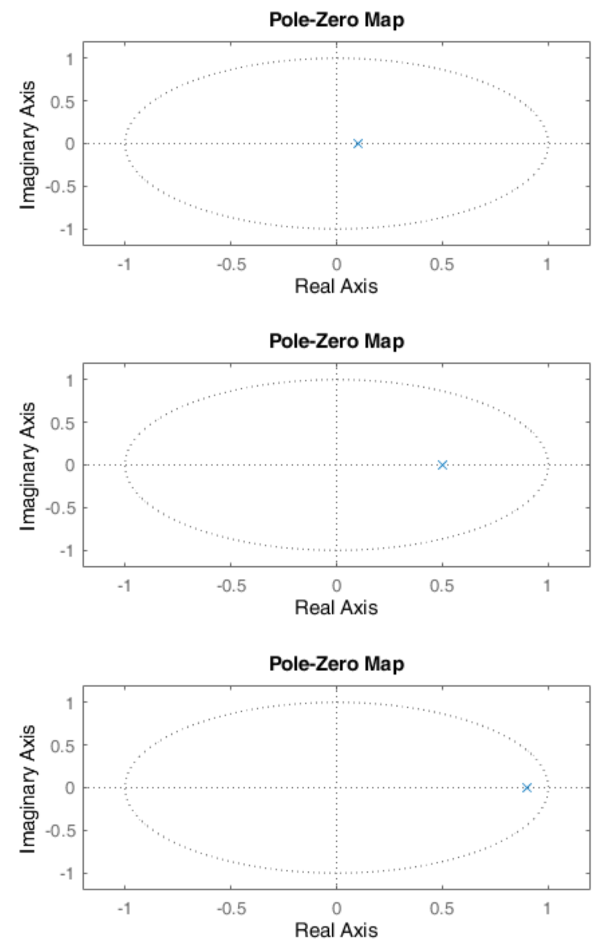
Resposta ao degrau para sistemas de 1ª ordem

Exemplo 1: Sejam 3 sistemas de 1ª ordem que diferem pela posição do polo (variando entre 0 e 1).

$$T_1(z) = \frac{0,9}{z-0,1}$$

$$T_2(z) = \frac{0,5}{z-0,5}$$

$$T_3(s) = \frac{0,1}{z-0,9}$$



Em todos os exemplos será considerado um período de amostragem de T=0,1 e o ganho ajustado para obter-se y(∞) = 1.

Como será a resposta ao degrau de cada sistema ?

Resposta ao degrau para sistemas de 1ª ordem

Considerando as relações entre s e z

$$z = e^{Ts} \quad \rightarrow \quad s = \frac{\ln(z)}{T}$$

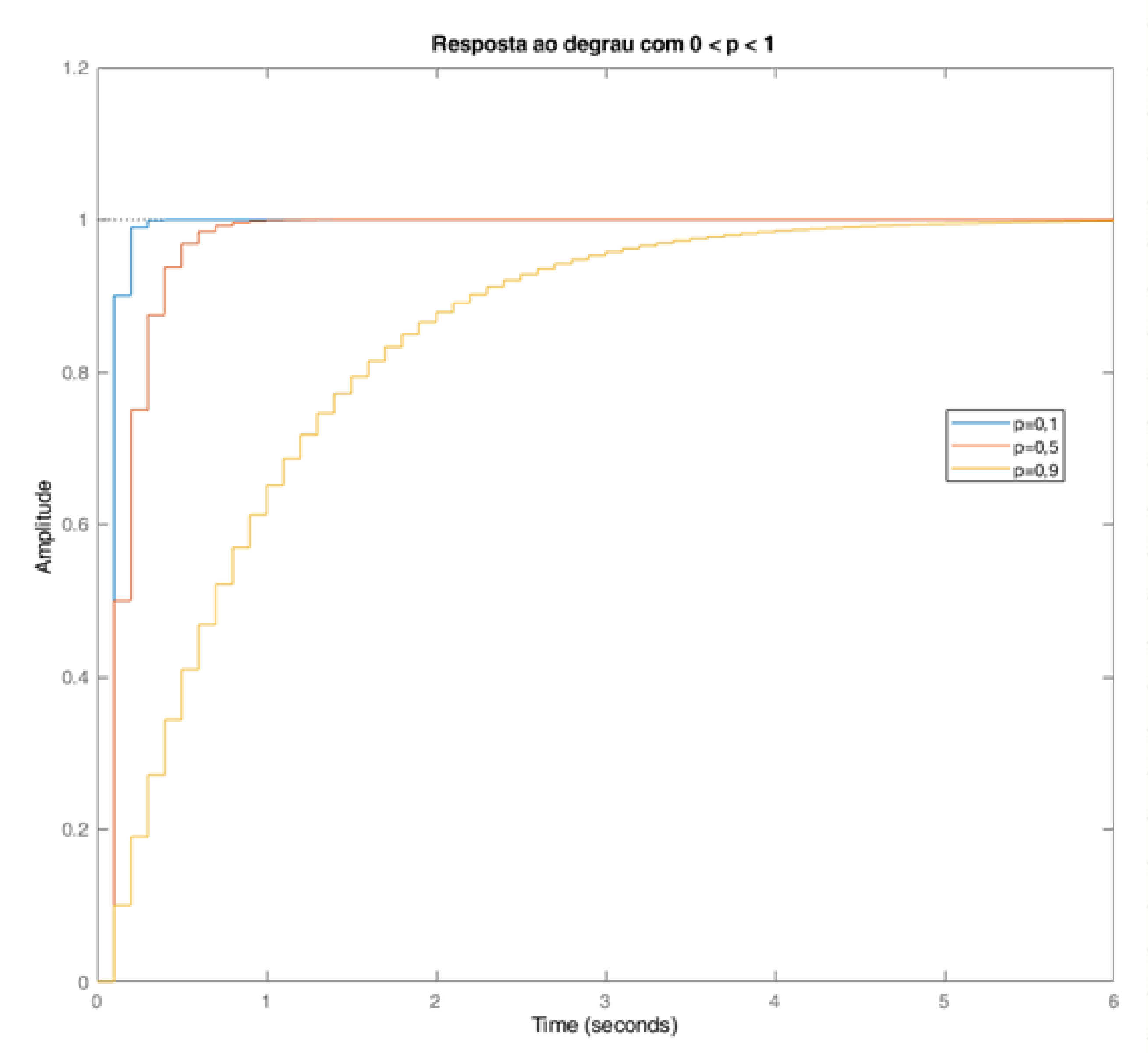
Obtém-se os respectivos valores dos polos no plano s e seus tempo de subida (tr) e tempo de acomodação (ts).

Plano z	Plano s	t_r	t_s
p=0,1	p=-23,03	0,09	0,17
p=0,5	p=-6,93	0,32	0,58
p=0,9	p=-1,05	2,09	3,79

$$t_r = \frac{2,2}{|p_m|}$$

$$t_s = \frac{4}{|p_m|}$$

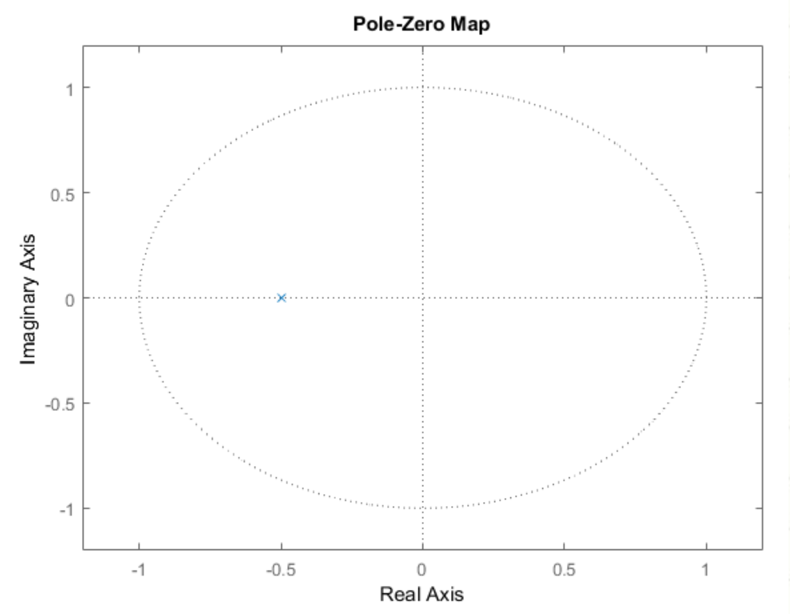
Resposta ao degrau para sistemas de 1ª ordem



Resposta ao degrau para sistemas de 1ª ordem

Exemplo 2: Seja agora o polo situado entre -1 e 0.

$$T_4(z) = \frac{1{,}5}{z + 0{,}5}$$



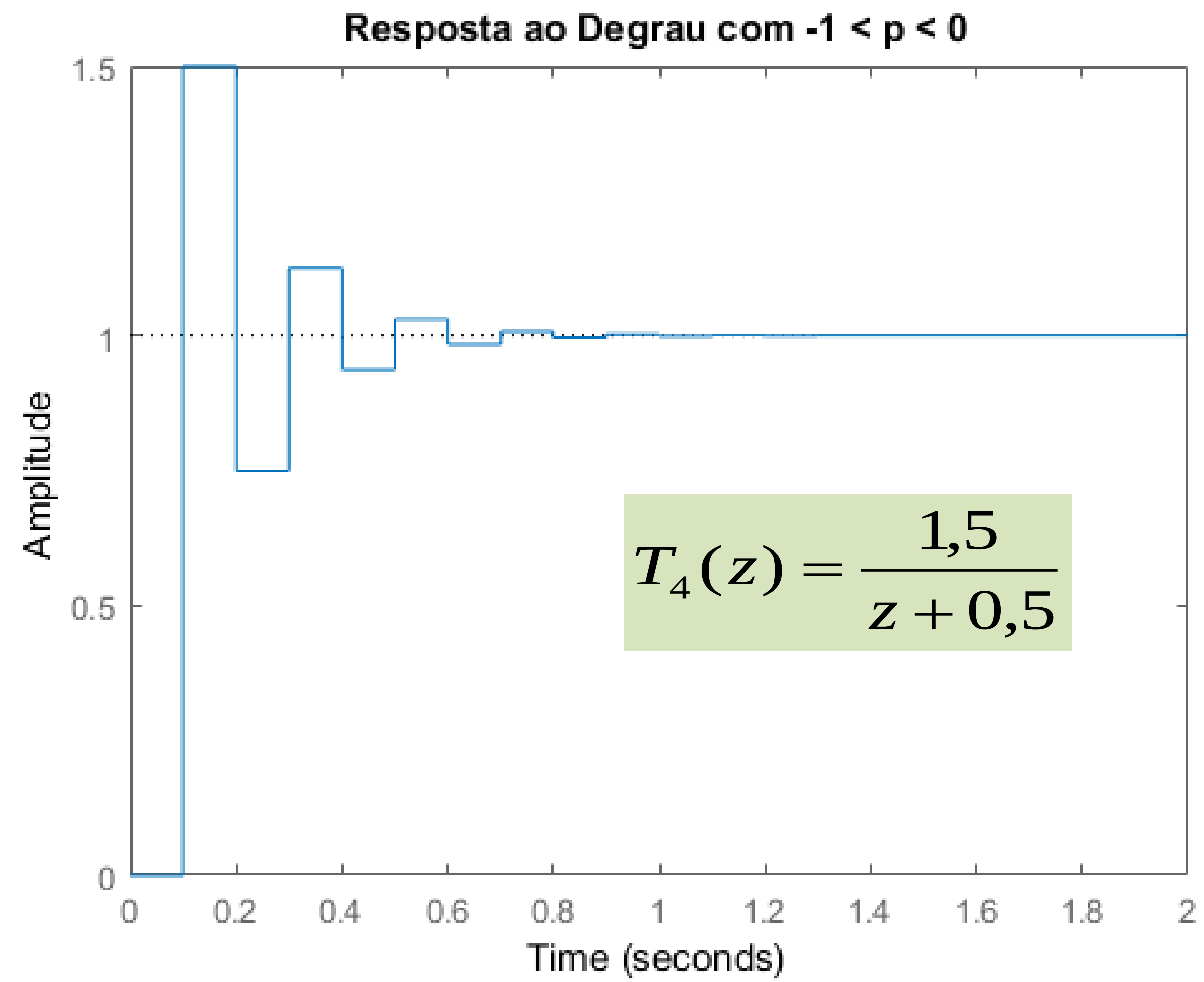
Neste caso, o polo correspondente no plano s será complexo:

$$p = -6{,}43 \pm j31{,}42$$

gerando uma resposta oscilatória

$$\begin{matrix} \xi = 0{,}22 \\ \omega_n = 32{,}17 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} M_P = 50\% \\ t_s = 0{,}58 \end{matrix}$$

Resposta ao degrau para sistemas de 1ª ordem



Efeito no zero na resposta de 1ª ordem

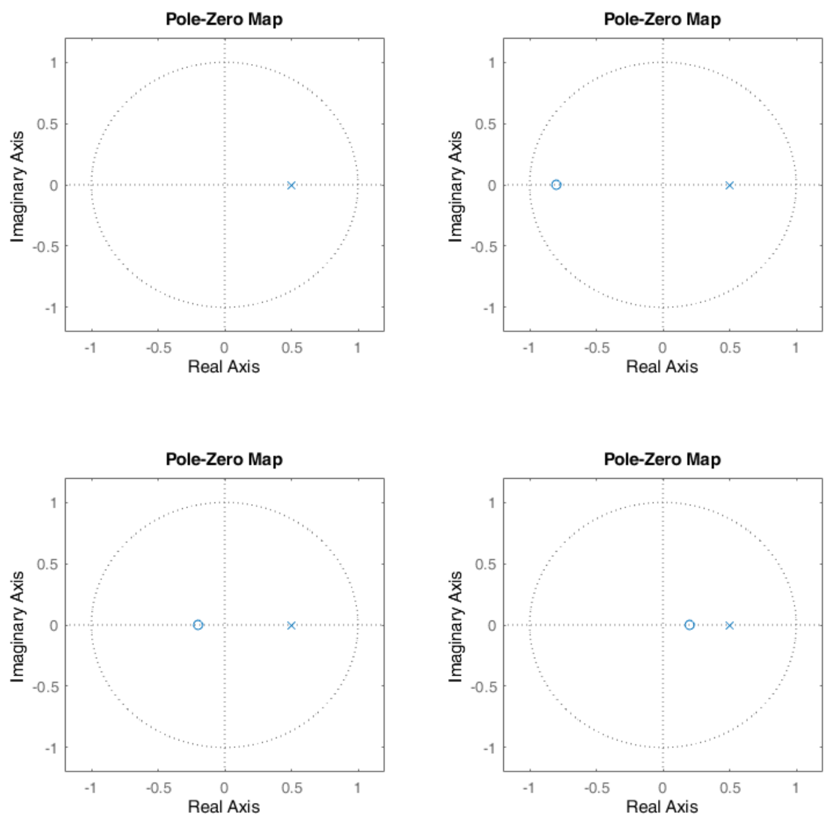
Exemplo 3: Seja um sistema de 1ª ordem que possui um zero localizado à esquerda do polo.

$$T_0(z) = \frac{0,5}{z-0,5}$$

$$T_1(z) = \left(\frac{0,5}{1,8}\right)\frac{z+0,8}{z-0,5}$$

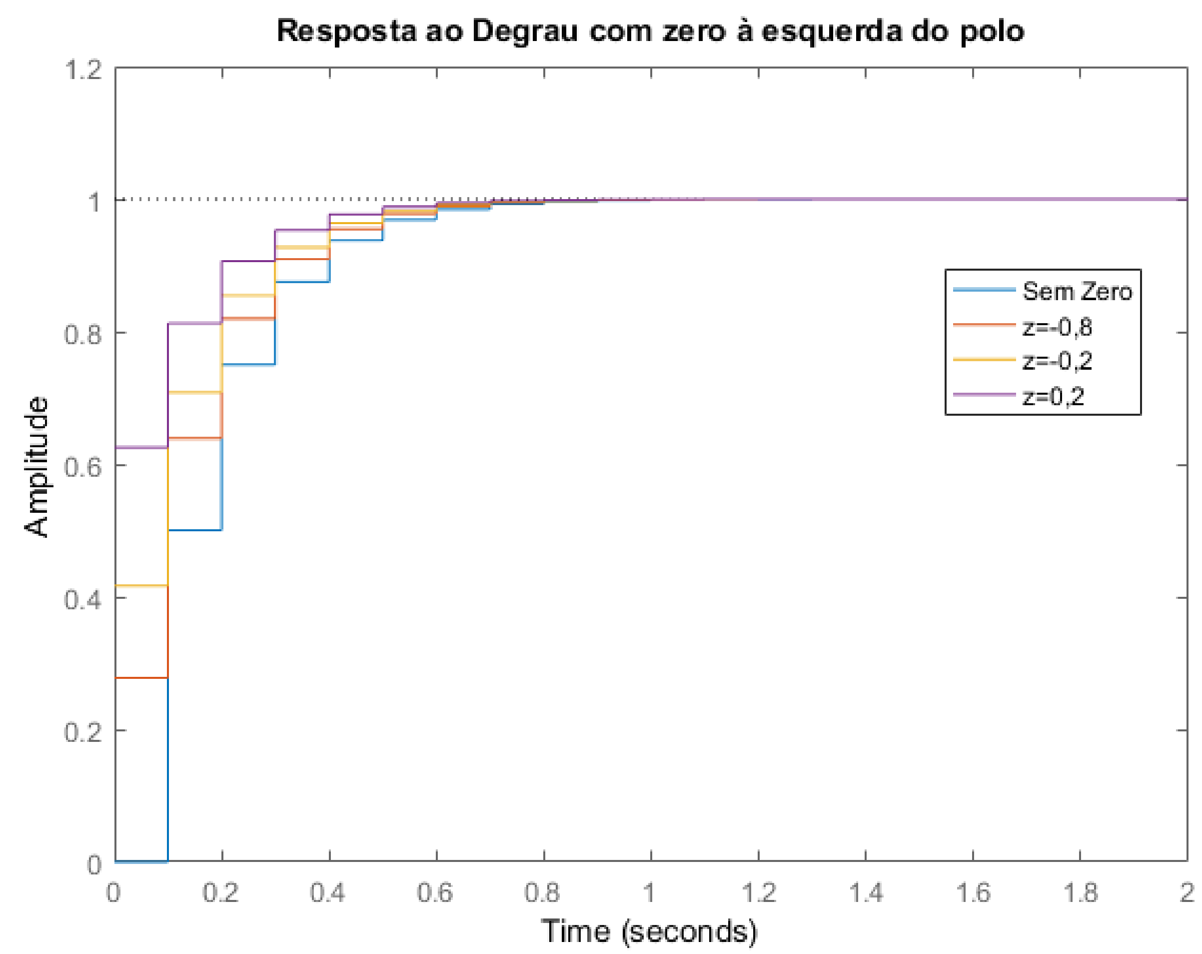
$$T_2(z) = \left(\frac{0,5}{1,2}\right)\frac{z+0,2}{z-0,5}$$

$$T_3(s) = \left(\frac{0,5}{0,8}\right)\frac{z-0,2}{z-0,5}$$



Como a existência deste zero modifica a resposta do sistema ?

Efeito no zero na resposta de 1ª ordem



Os 4 sistemas apresentam aproximadamente os mesmos tempos de subida e tempo de acomodação.

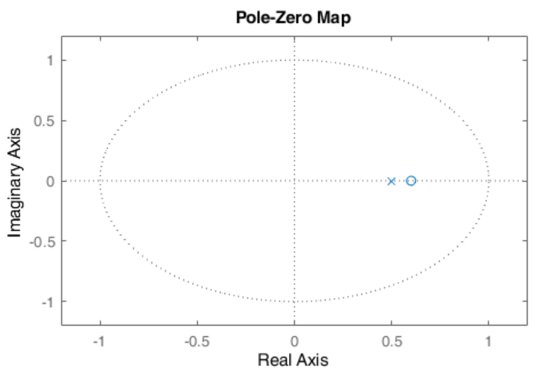
Efeito no zero na resposta de 1ª ordem

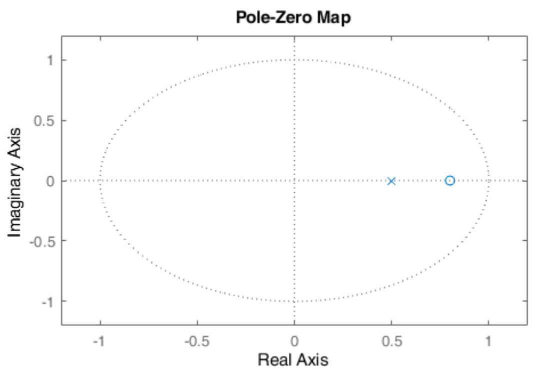
Exemplo 4: Seja um sistema de 1ª ordem que possui um zero localizado à direita do polo.

$$T_0(z) = \frac{0,5}{z-0,5}$$

$$T_1(z) = \left(\frac{0,5}{0,4}\right)\frac{z-0,6}{z-0,5}$$

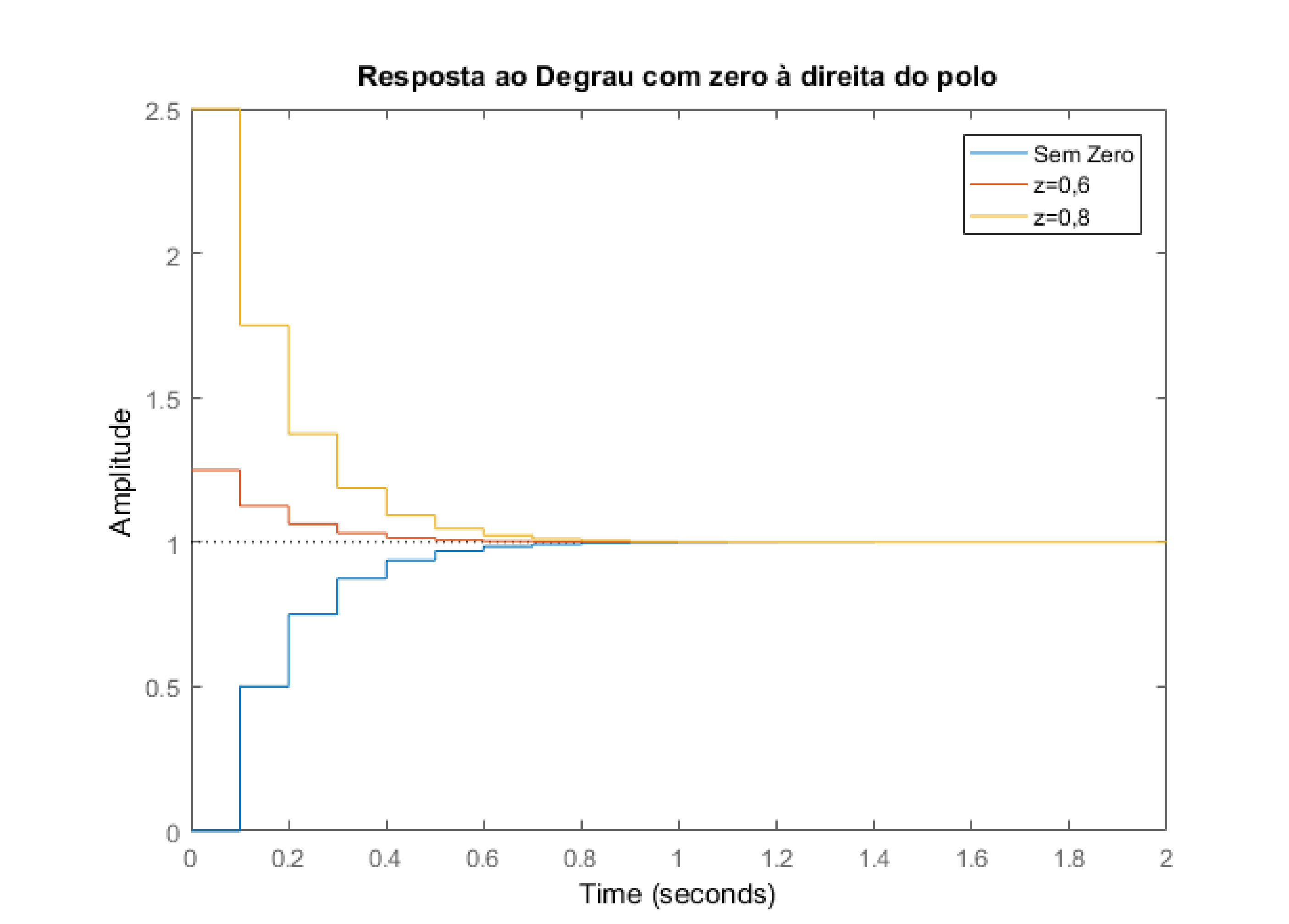
$$T_2(z) = \left(\frac{0,5}{0,2}\right)\frac{z-0,8}{z-0,5}$$





Como será o efeito do zero na resposta do sistema ?

Efeito no zero na resposta de 1ª ordem



Os 3 sistemas apresentam os mesmos tempos de subida e acomodação. A presença do zero à direta do polo gera um sobressinal, que aumenta à medida que o zero se aproxima de 1.

Efeito no zero na resposta de 2ª ordem sobreamortecida

Exemplo 5: Sejam três sistemas de 2ª ordem sobre amortecidos que diferem pela existência e posição de um zero .

$$T_1(z) = \frac{0,18}{(z-0,1)(z-0,8)}$$

$$T_2(z) = \frac{(0,18/0,21)(z-0,79)}{(z-0,1)(z-0,8)}$$

$$T_3(z) = \frac{(0,18/0,19)(z-0,81)}{(z-0,1)(z-0,8)}$$

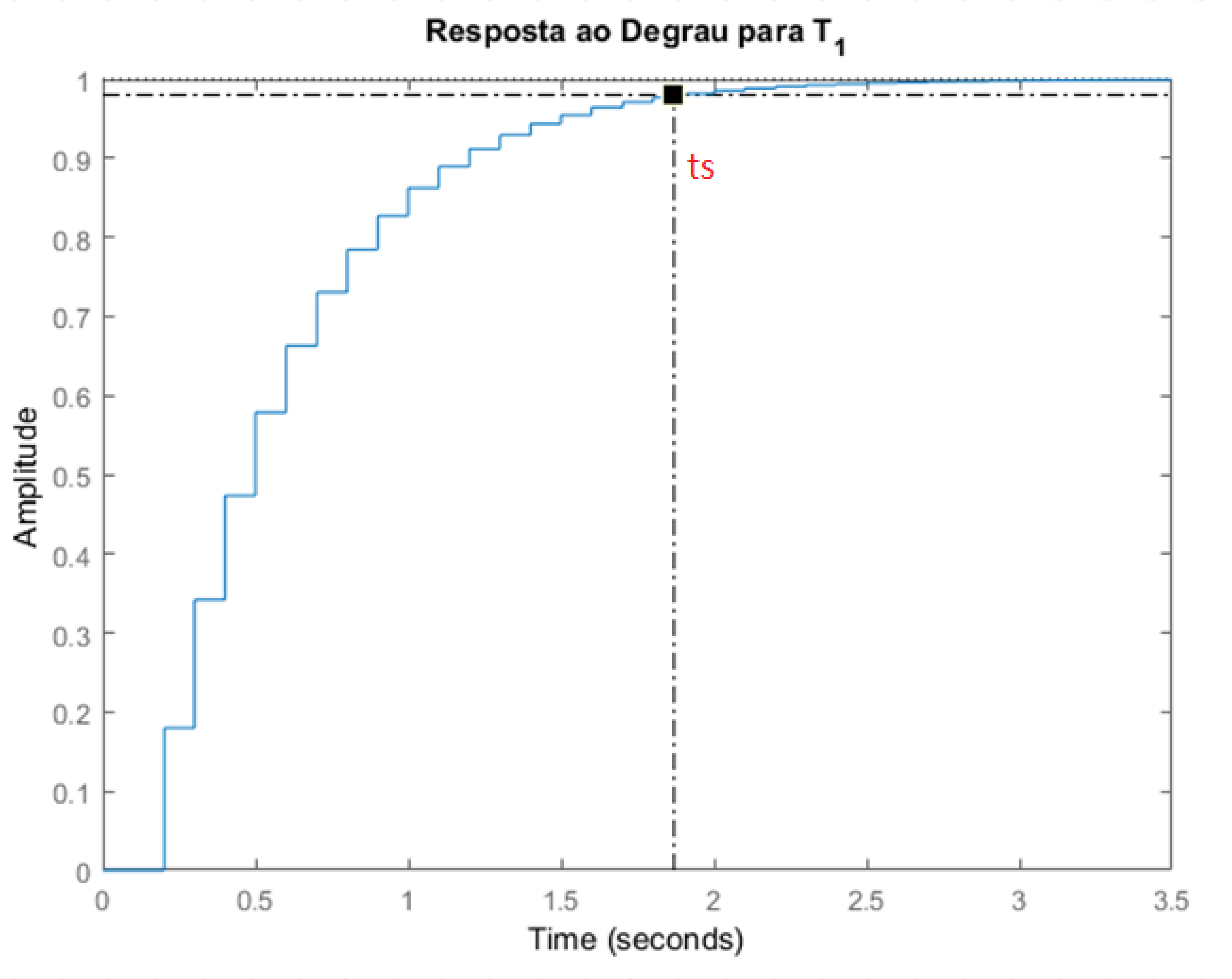
Assim como no caso contínuo a presença do zero muito próximo do polo dominante levará a uma alteração desta dominância.

Efeito no zero na resposta de 2ª ordem sobreamortecida

O sistema 1 tem o polo dominante em p=0,8 (plano z).
Este polo corresponde a um polo p=-2,23 no plano s, gerando uma resposta sem sobressinal e com tempo de acomodação de 1,8 segundos (calculado considerando apenas o polo dominante).

$$T_1(z) = \frac{0,18}{(z-0,1)(z-0,8)} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} Mp = 0 \\ t_s = 1,8 \end{matrix}$$

Efeito no zero na resposta de 2ª ordem sobreamortecida



Efeito no zero na resposta de 2ª ordem sobreamortecida

Os sistemas 2 e 3 tem o polo p=0,1 (plano z) como dominante, uma vez que o zero está “muito próximo” do outro polo do sistema.

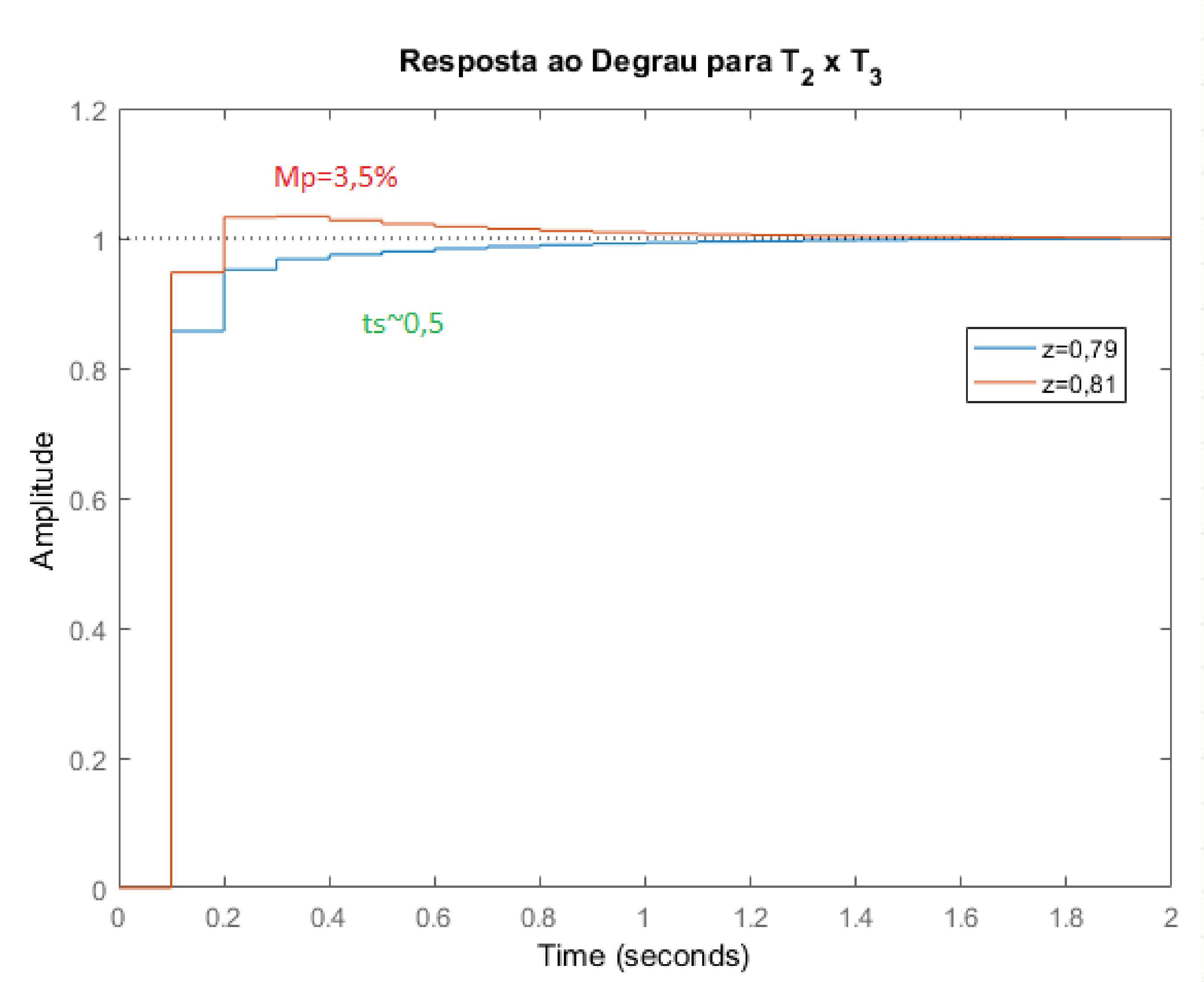
O polo p=0,1 corresponde a um polo p=-23,03 no plano s, gerando uma resposta mais rápida com t_s=0,17 (calculado usando apenas o polo dominante).

$$T_2(z) = \frac{(0{,}18/0{,}21)(z-0{,}79)}{(z-0{,}1)(z-0{,}8)}$$

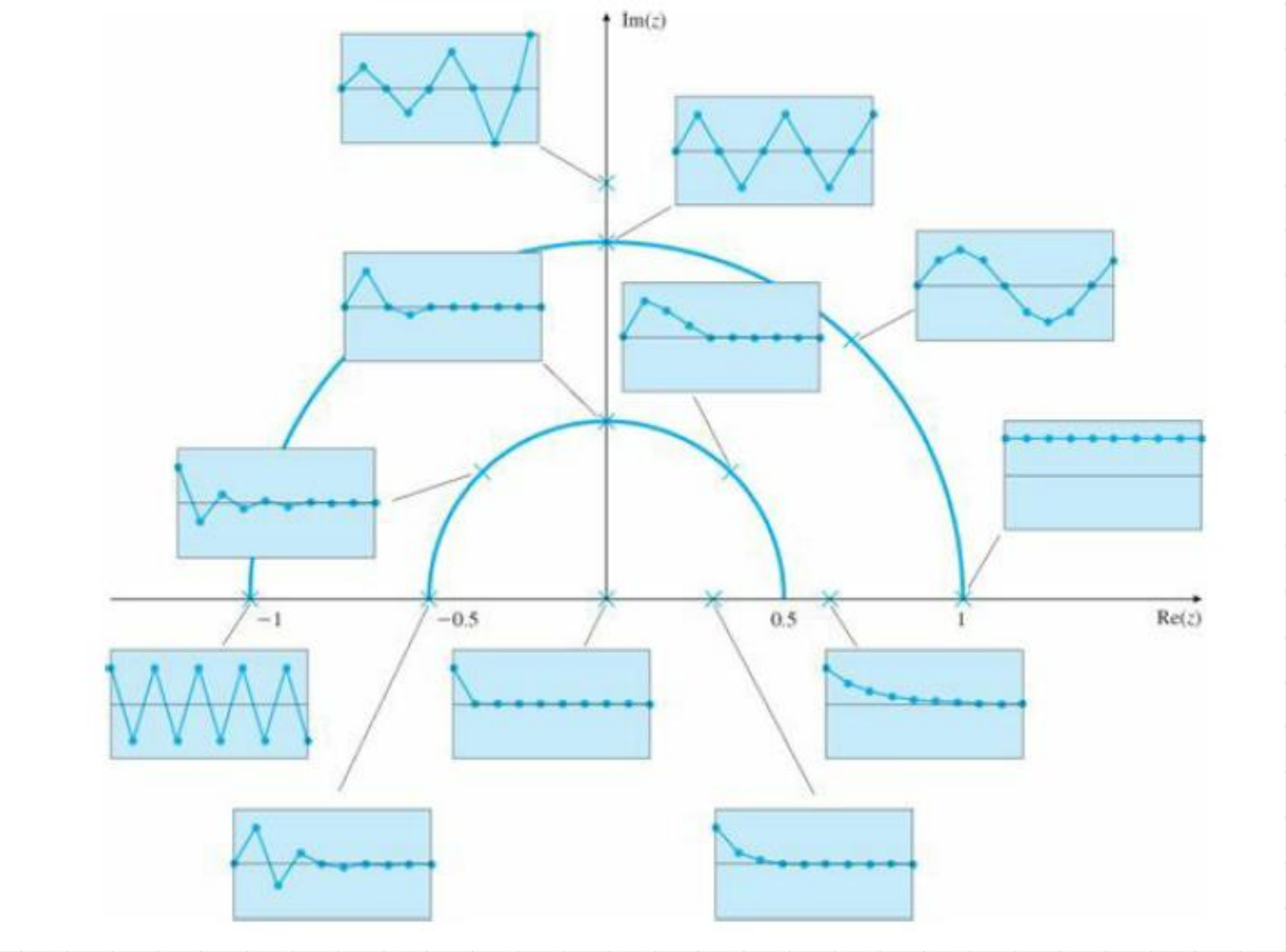
$$T_3(z) = \frac{(0{,}18/0{,}19)(z-0{,}81)}{(z-0{,}1)(z-0{,}8)}$$

Entretanto o efeito do par polo/zero (mesmo que muito próximos) não é totalmente eliminado, podendo gerar um sobressinal na resposta dependo para posição do zero (à direita ou à esquerda do polo p=0,8).

Efeito no zero na resposta de 2ª ordem sobreamortecida



Sequências temporais associadas a pontos do plano z



Resposta ao degrau para sistemas de 2ª ordem subamortecidos

Sejam três sistemas cujos polos complexos conjugados diferem apenas na parte real.

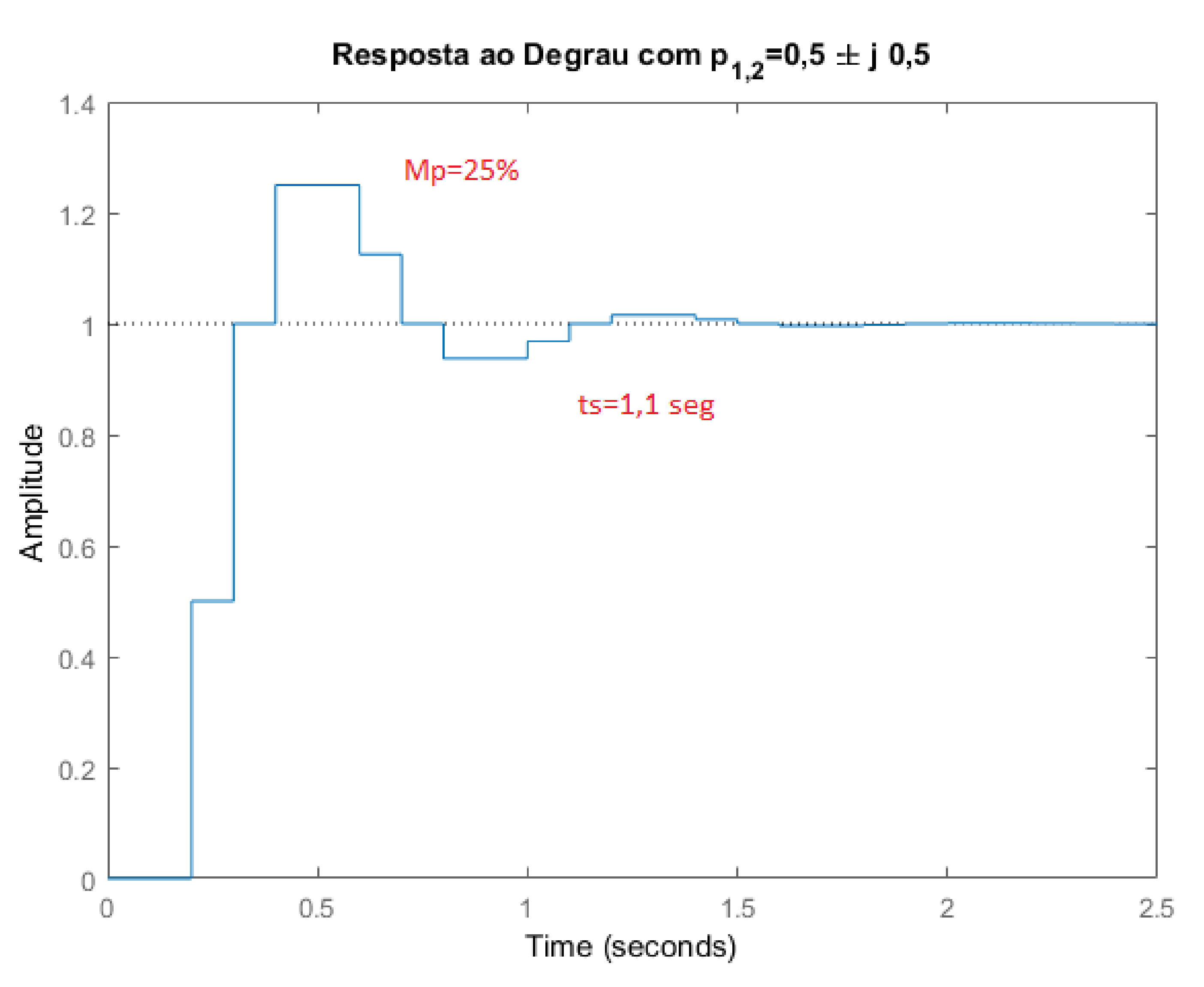
$$T_1(z) = \frac{0,5}{z^2 - z + 0,5} \quad \rightarrow \quad p_{1,2} = 0,5 \pm j0,5$$

$$T_2(z) = \frac{1,25}{z^2 + 0,25} \quad \rightarrow \quad p_{1,2} = \pm j0,5$$

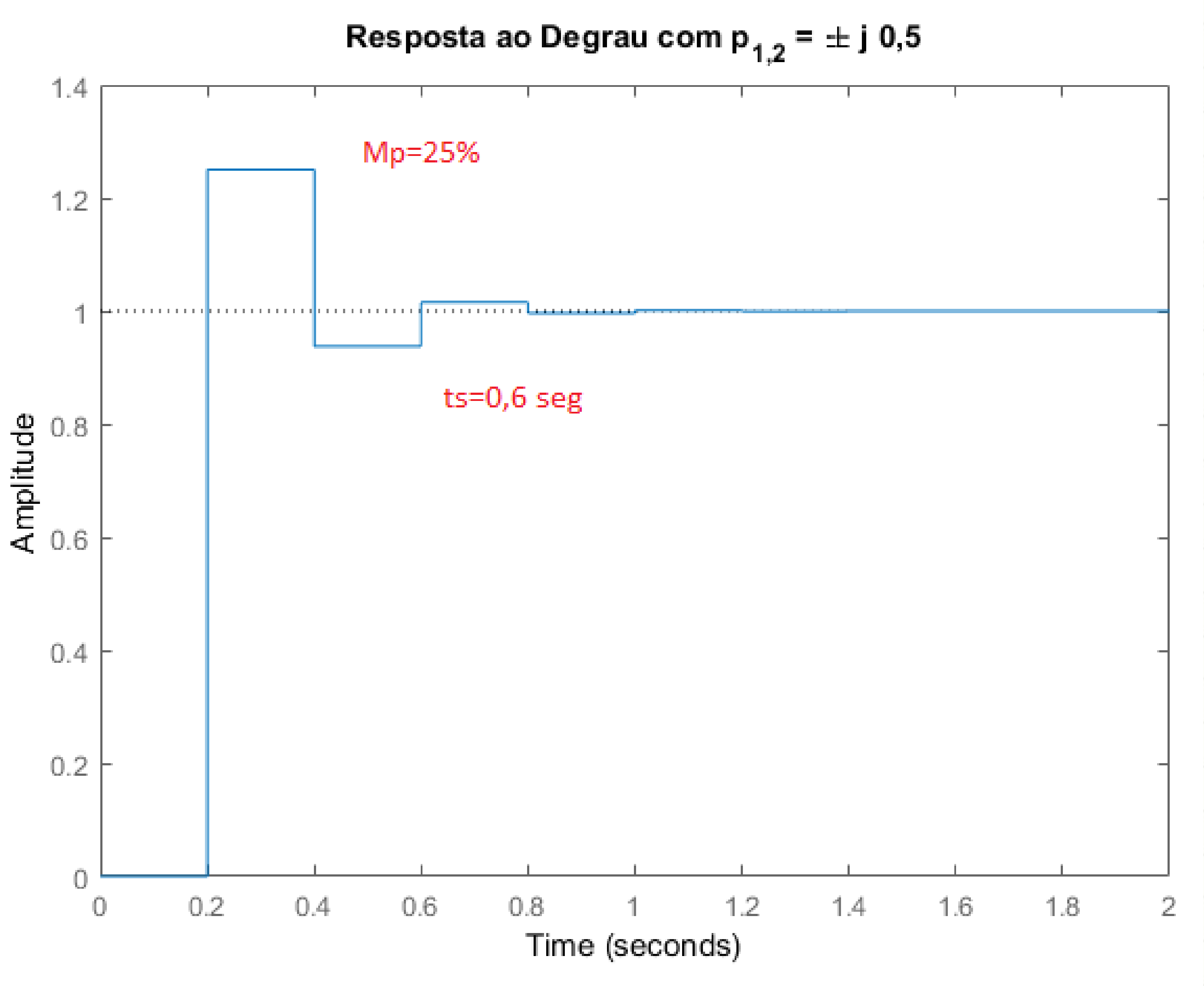
$$T_3(z) = \frac{2,5}{z^2 + z + 0,5} \quad \rightarrow \quad p_{1,2} = -0,5 \pm j0,5$$

Foi novamente considerado um período de amostragem de T=0,1 e o ganho ajustado para obter-se y(∞) = 1.

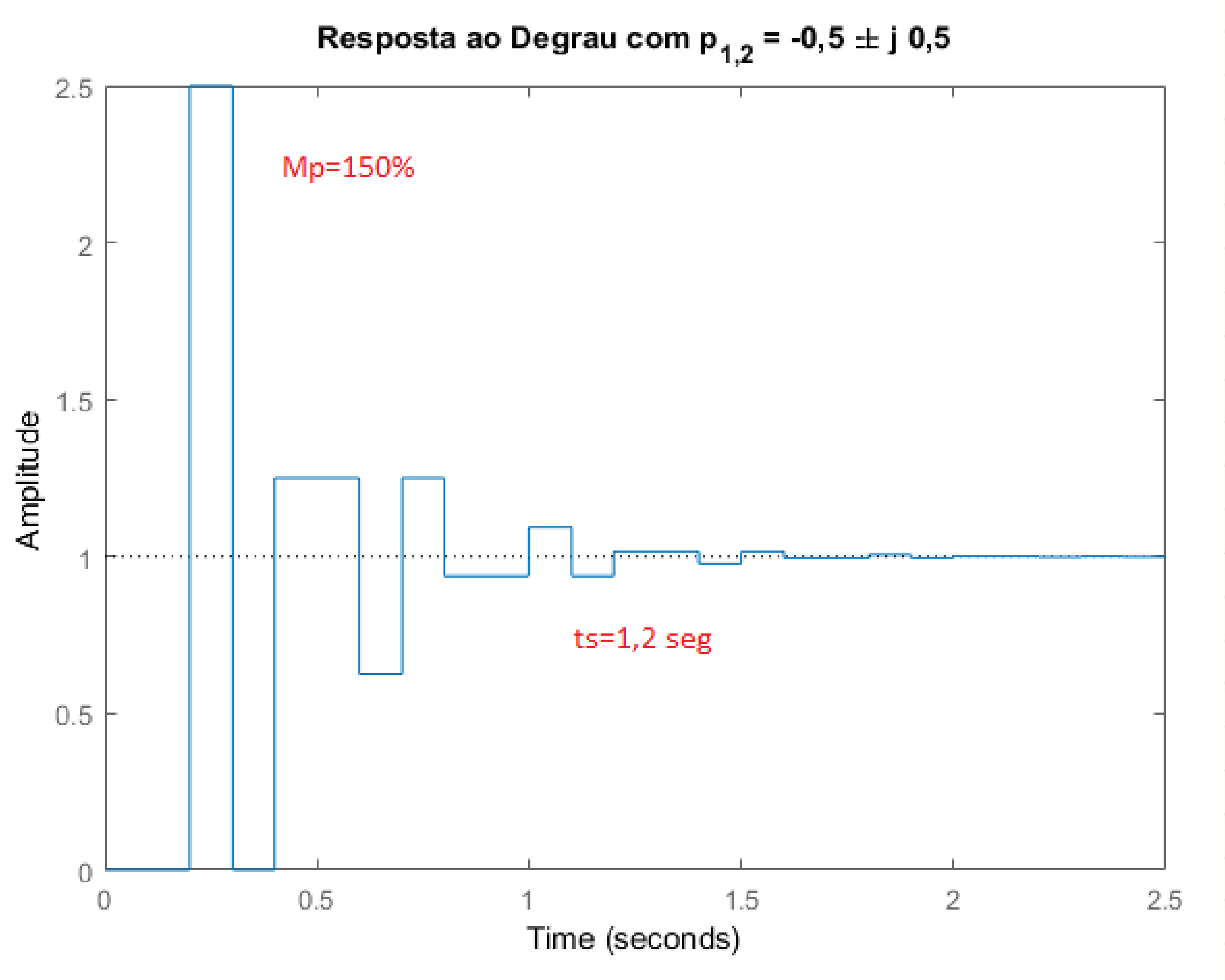
Resposta ao degrau para sistemas de 2ª ordem



Resposta ao degrau para sistemas de 2ª ordem

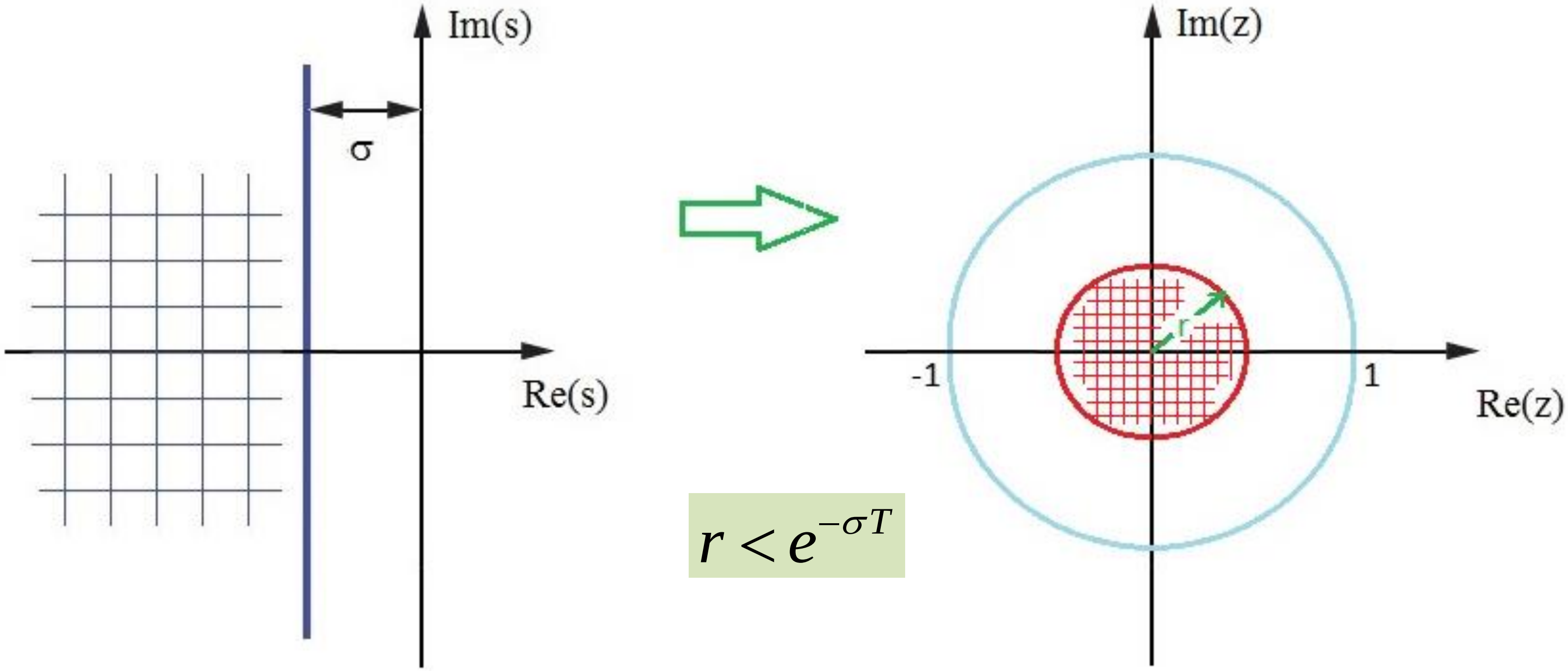


Resposta ao degrau para sistemas de 2ª ordem



Região desejada para os polos de malha fechada

Tempo de acomodação

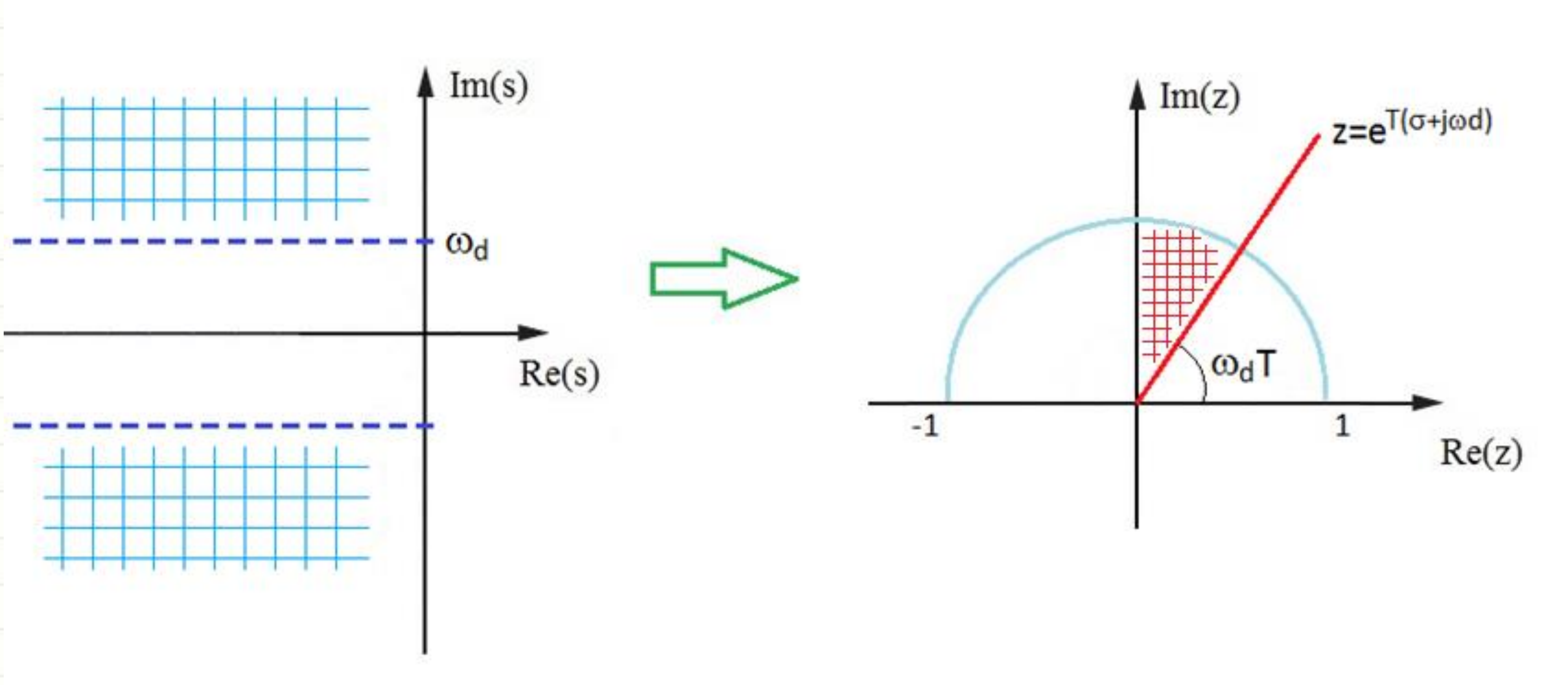


$$r < e^{-\sigma T}$$

$$t_s = \frac{4}{\xi \omega_n} \quad \rightarrow \quad \sigma \text{ constane}$$

Região desejada para os polos de malha fechada

Tempo de pico



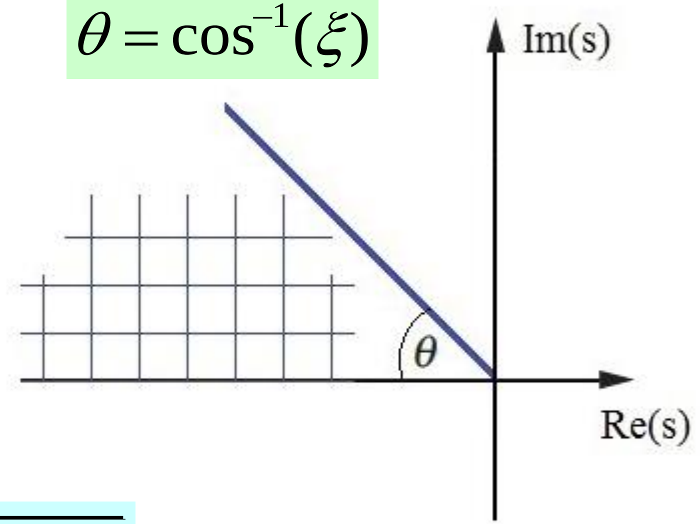
$$t_P = \frac{\pi}{\omega_d} \quad \rightarrow \quad \omega_d \text{ constante}$$

Região desejada para os polos de malha fechada

Sobressinal Máximo

$$M_P = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad \rightarrow \quad 0 < \xi < 1$$

$$\theta = \cos^{-1}(\xi)$$



Sendo

$$z = e^{-\xi\omega_n T} \angle \pm \omega_d T \quad \text{e} \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$$

tem-se:

$$\xi = 1 \quad \Rightarrow \quad \angle z = 0^\circ \quad \text{e} \quad 0 < |z| < 1$$

reta de 0 a 1 (eixo real)

$$\xi = 0 \quad \Rightarrow \quad \angle z = \pm\omega_d T \quad \text{e} \quad |z| = 1$$

círculo unitário

Região desejada para os polos de malha fechada

Sobressinal Máximo

Para $0 < \xi < 1$

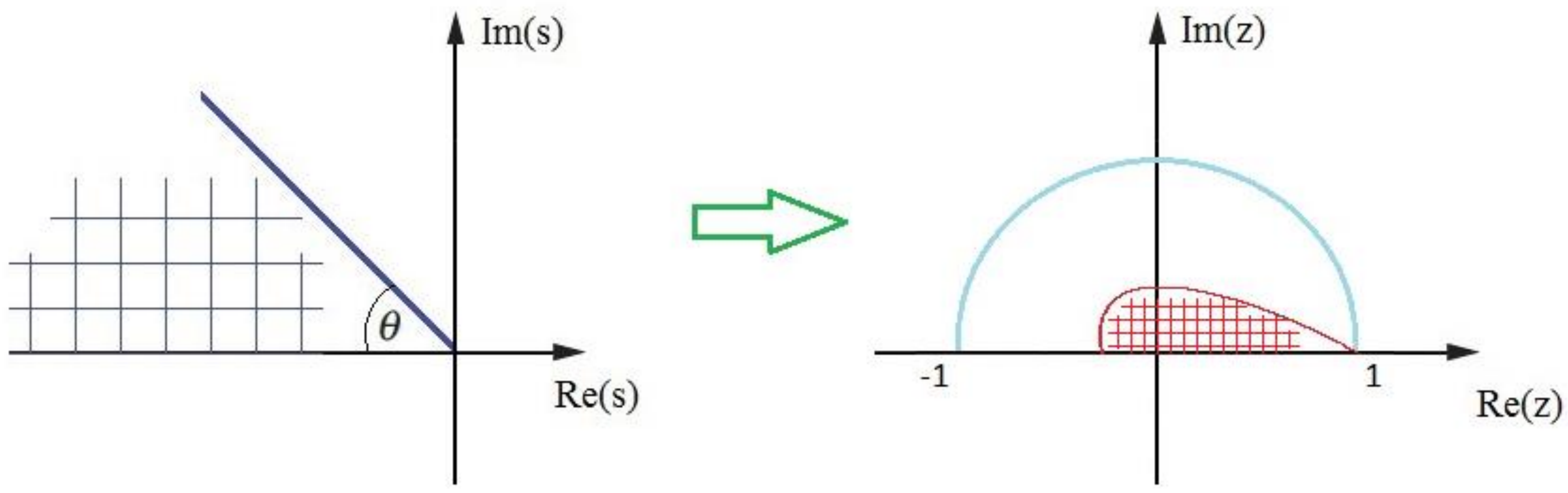
$$\omega_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \angle z = 0^\circ \quad \text{e} \quad |z| = 1$$

$$\omega_n \text{ aumenta} \quad \Rightarrow \quad \angle z \text{ aumenta} \quad \text{e} \quad |z| \text{ diminui}$$

Assim, a linha radial no plano s, que corresponde a uma taxa de amortecimento constante ($0 < \xi < 1$), é mapeada no plano z através de uma **espiral logarítmica.**

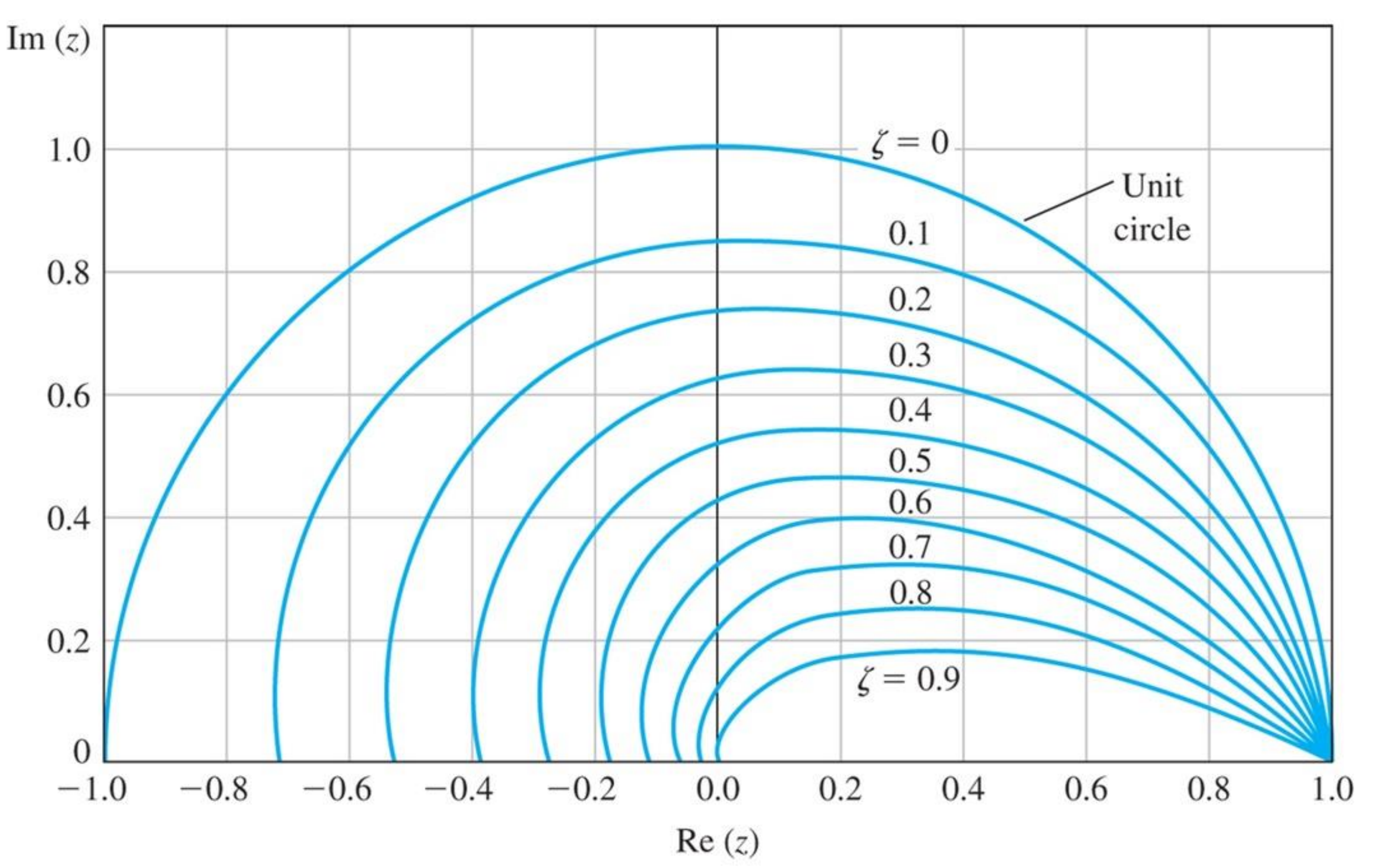
Região desejada para os polos de malha fechada

Sobressinal Máximo



Região desejada para os polos de malha fechada

Sobressinal Máximo



Especificações da resposta transitória

Seja,

$$s = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_d$$

Usando o mapeando

$$z = e^{Ts} = e^{-\xi\omega_n T + j\omega_d T}$$

e escrevendo T em função da frequência de amostragem ($T=2\pi/\omega_s$), tem-se

$$z = e^{\left(\frac{-2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\frac{\omega_d}{\omega_s} + j2\pi\frac{\omega_d}{\omega_s}\right)}$$

sendo

$$|z| = e^{\left(\frac{-2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\frac{\omega_d}{\omega_s}\right)} \quad \text{e} \quad \angle z = 2\pi\frac{\omega_d}{\omega_s}$$

Especificações da resposta transitória

Portanto, para valores fixos de T e ξ, o módulo diminui e a fase aumenta a medida que ω_d cresce.

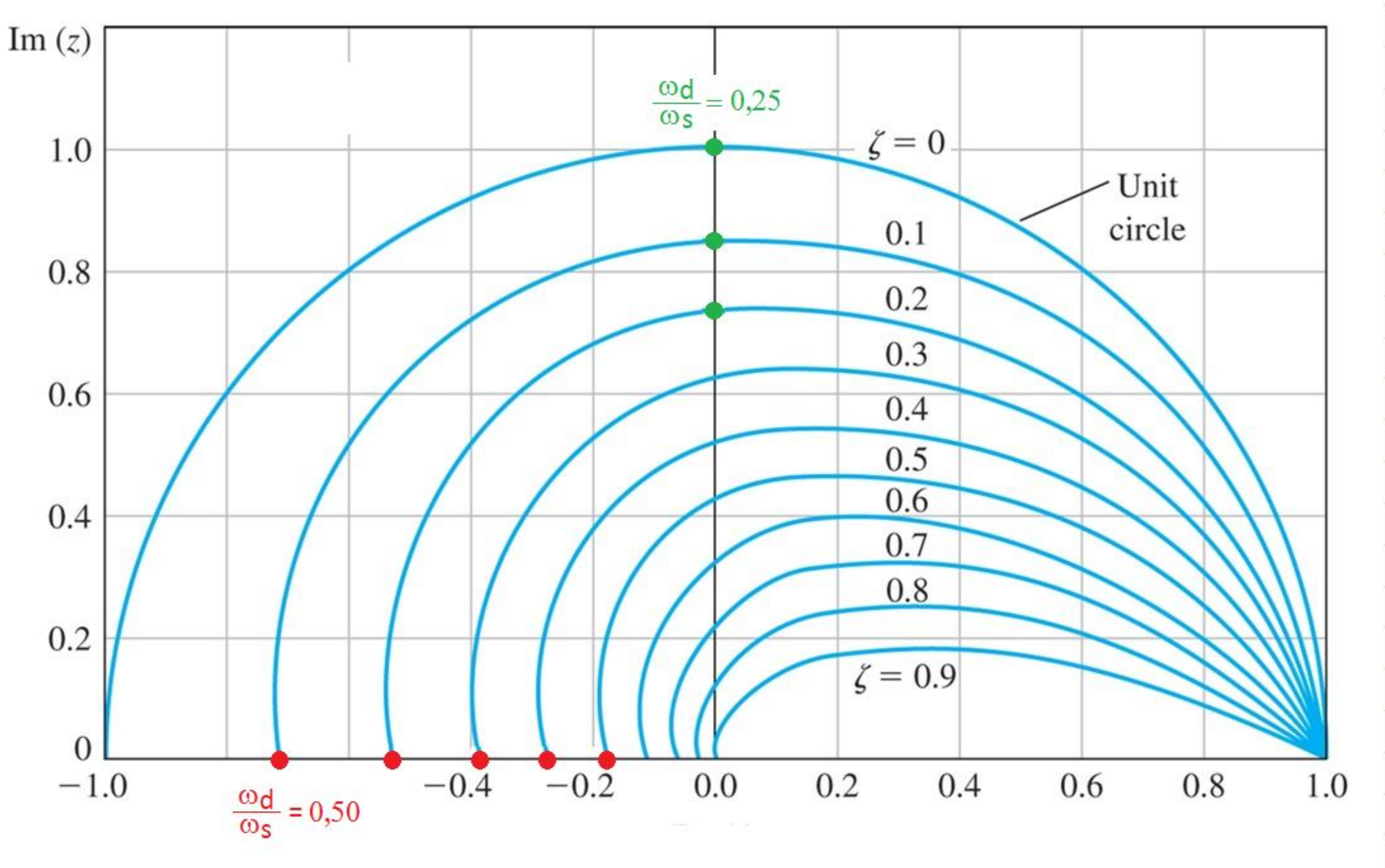
Note que para uma dada relação constante ω_d/ω_s, o módulo é uma função apenas do coeficiente de amortecimento ξ e a fase torna-se constante.

$$\frac{\omega_d}{\omega_s} = 0{,}25 \quad \Rightarrow \quad \angle z = 90^\circ$$

$$\frac{\omega_d}{\omega_s} = 0{,}50 \quad \Rightarrow \quad \angle z = 180^\circ$$

Assim, podem ser calculados os pontos em que a linha correspondente a cada valor de ξ cruza os eixos real e imaginário.

Especificações da resposta transitória



Especificações da resposta transitória

ξ	ω_d/ω_s=0,50 (interseção com eixo real)	ω_d/ω_s=0,25 (interseção com eixo imaginário)
0	1	1
0,1	0,7292	0,8540
0,2	0,5266	0,7257
0,3	0,3723	0,6102
0,4	0,2538	0,5038
0,5	0,1630	0,4038
0,6	0,0948	0,3079
0,7	0,0460	0,2144
0,8	0,0015	0,1231
0,9	0,0002	0,0390
1	0	0

Os valores para a interseção com o eixo real estão apresentados em módulo.

Efeito dos zeros na resposta transitória

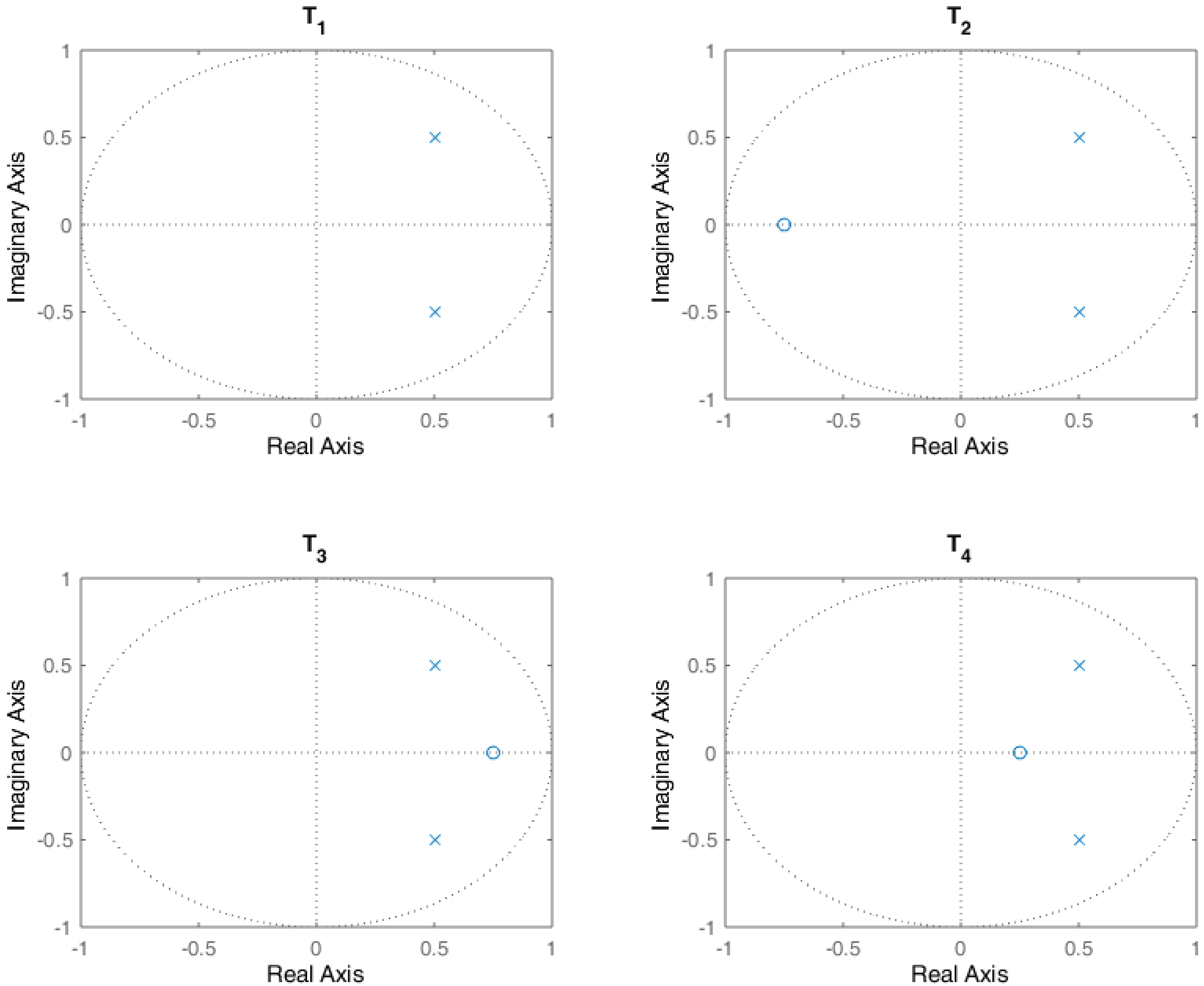
Qual a diferença entre a resposta ao degrau de cada um dos sistemas abaixo?

$$T_1(z) = \frac{0,5}{(z^2 - z + 0,5)} \qquad T_2(z) = \frac{(2/7)(z + 0,75)}{(z^2 - z + 0,5)}$$

$$T_3(z) = \frac{2(z - 0,75)}{(z^2 - z + 0,5)} \qquad T_4(z) = \frac{(2/3)(z - 0,25)}{(z^2 - z + 0,5)}$$

Todos os sistemas têm o mesmo par de polos complexos conjugados:

$$p_{1,2} = 0,5 \pm j0,5 = 0,5\angle 45^\circ$$



T1
T2
T3
T4
Imaginary Axis
Real Axis
1
0.5
0
-0.5
-1

Efeito dos zeros na resposta transitória

Para o sistema sem zero:

$$T_1(z) = \frac{0{,}5}{(z^2 - z + 0{,}5)} \quad \Rightarrow \quad p_{1,2} = 0{,}5 \pm j0{,}5 = 0{,}5\angle 0{,}7854$$

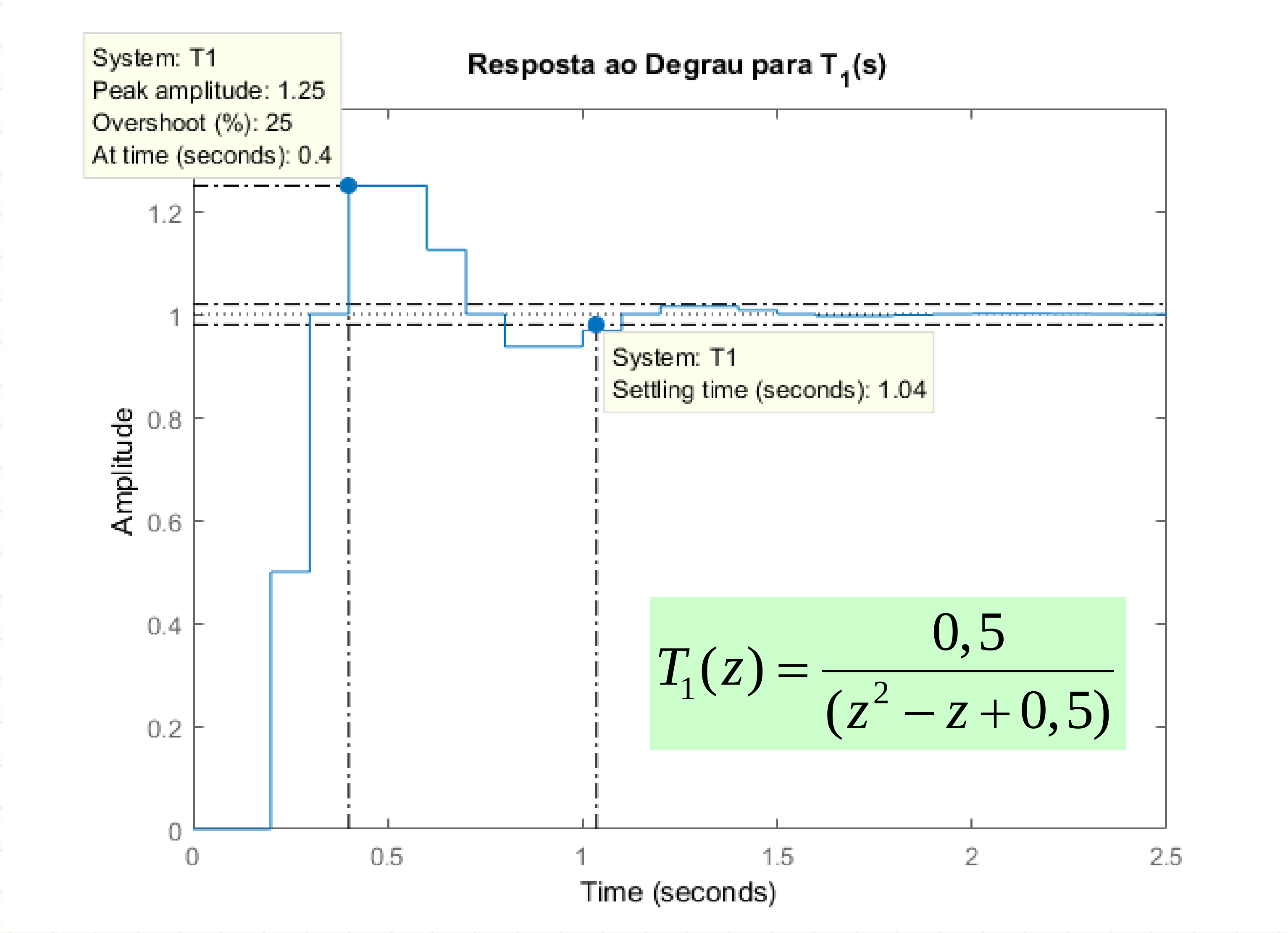
Considerando

$$\xi = -\frac{\ln(\mathrm{M})}{\sqrt{\ln^2(\mathrm{M}) + \mathrm{N}^2}} \qquad \omega_n = \frac{1}{\mathrm{T}}\sqrt{\ln^2(\mathrm{M}) + \mathrm{N}^2}$$

obtém-se

$$\begin{matrix} \xi = 0{,}4 \\ \omega_n = 8{,}6 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} M_p = 25\% \\ t_s = 1{,}15\,seg \end{matrix}$$

Efeito dos zeros na resposta transitória



$$T_1(z) = \frac{0,5}{(z^2 - z + 0,5)}$$

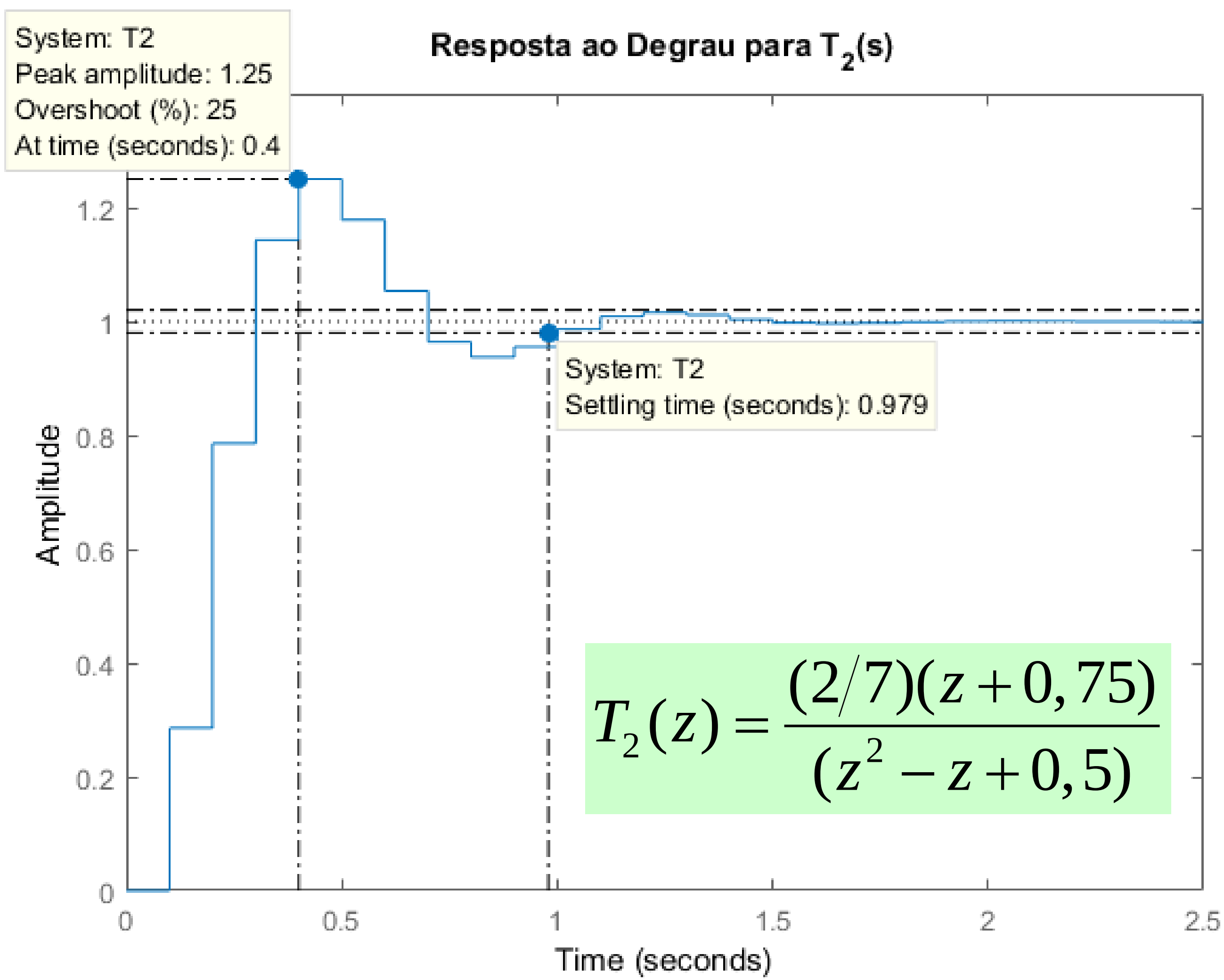
Efeito dos zeros na resposta transitória

Para os demais sistemas (com zero) os polos dominantes são os mesmos, resultando nos valores já calculados:

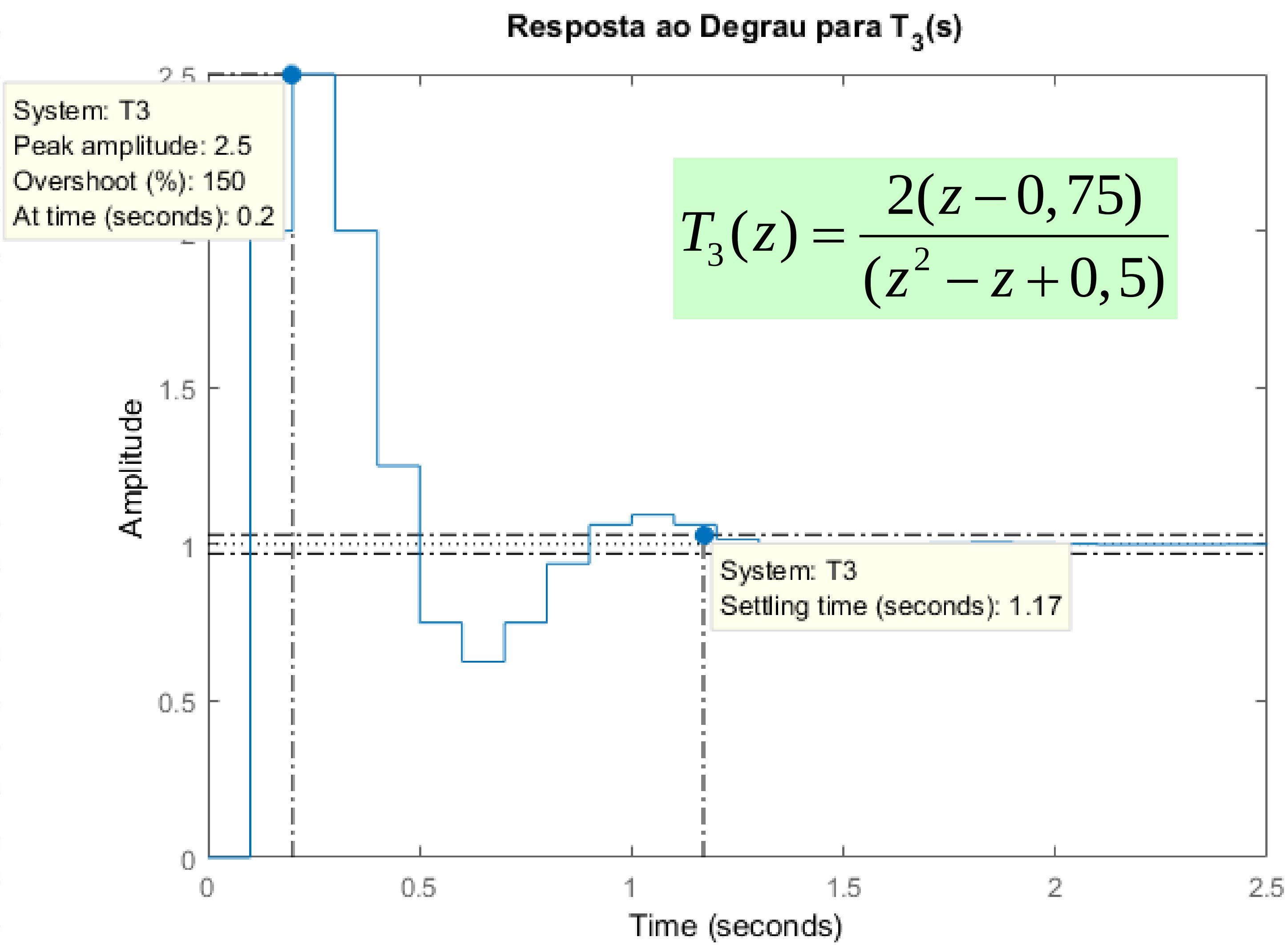
$$p_{1,2} = 0,5 \pm j0,5 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} M_p &= 25\% \\ t_s &= 1,15\,seg \end{aligned}$$

Porém o sobressinal da resposta ao degrau pode sofrer **alterações consideráveis** dependendo da localização do zero.

Efeito dos zeros na resposta transitória

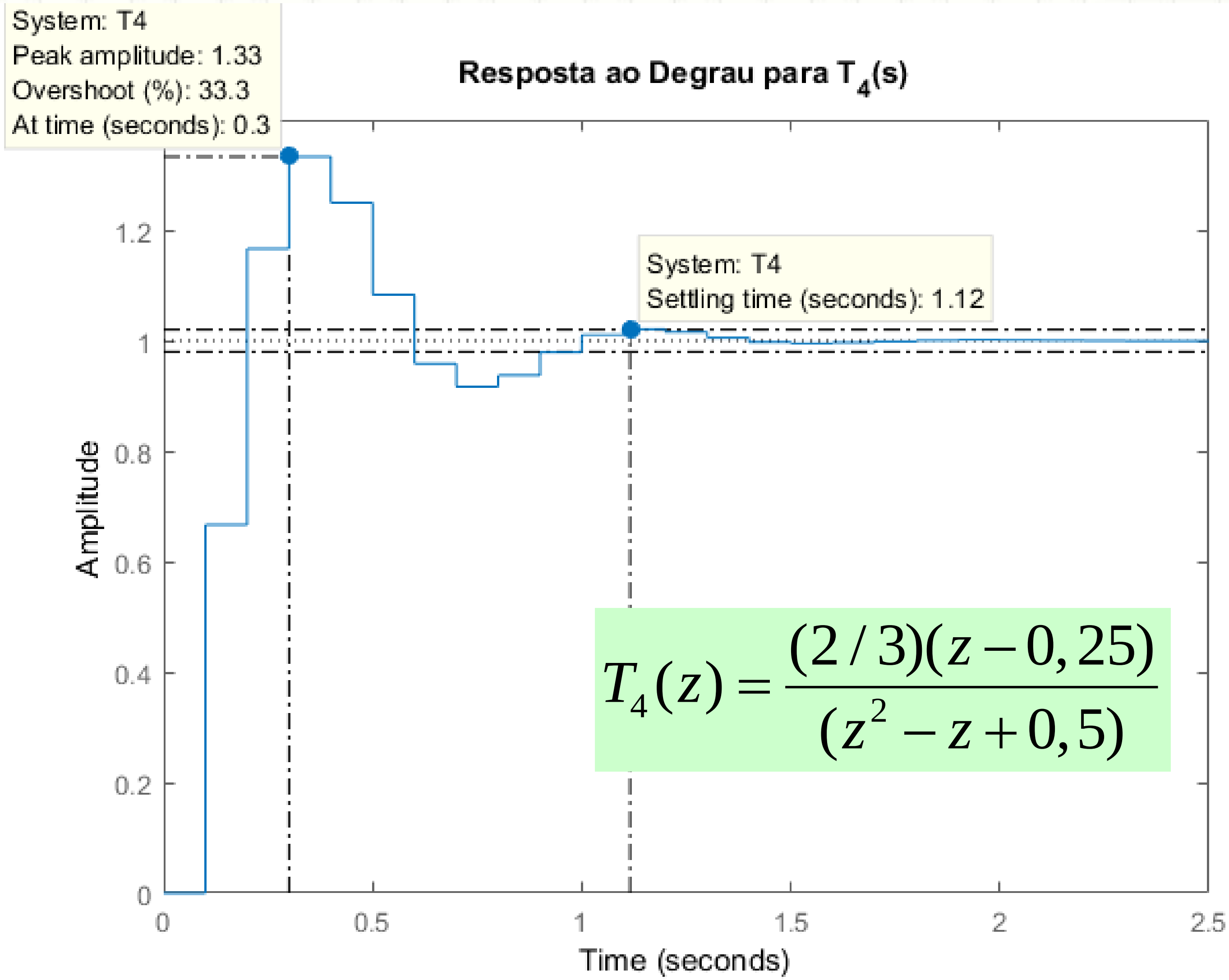


Efeito dos zeros na resposta transitória



$$T_3(z) = \frac{2(z-0,75)}{(z^2 - z + 0,5)}$$

Efeito dos zeros na resposta transitória



$$T_4(z) = \frac{(2/3)(z-0,25)}{(z^2 - z + 0,5)}$$

Efeito de um polo adicional na resposta transitória

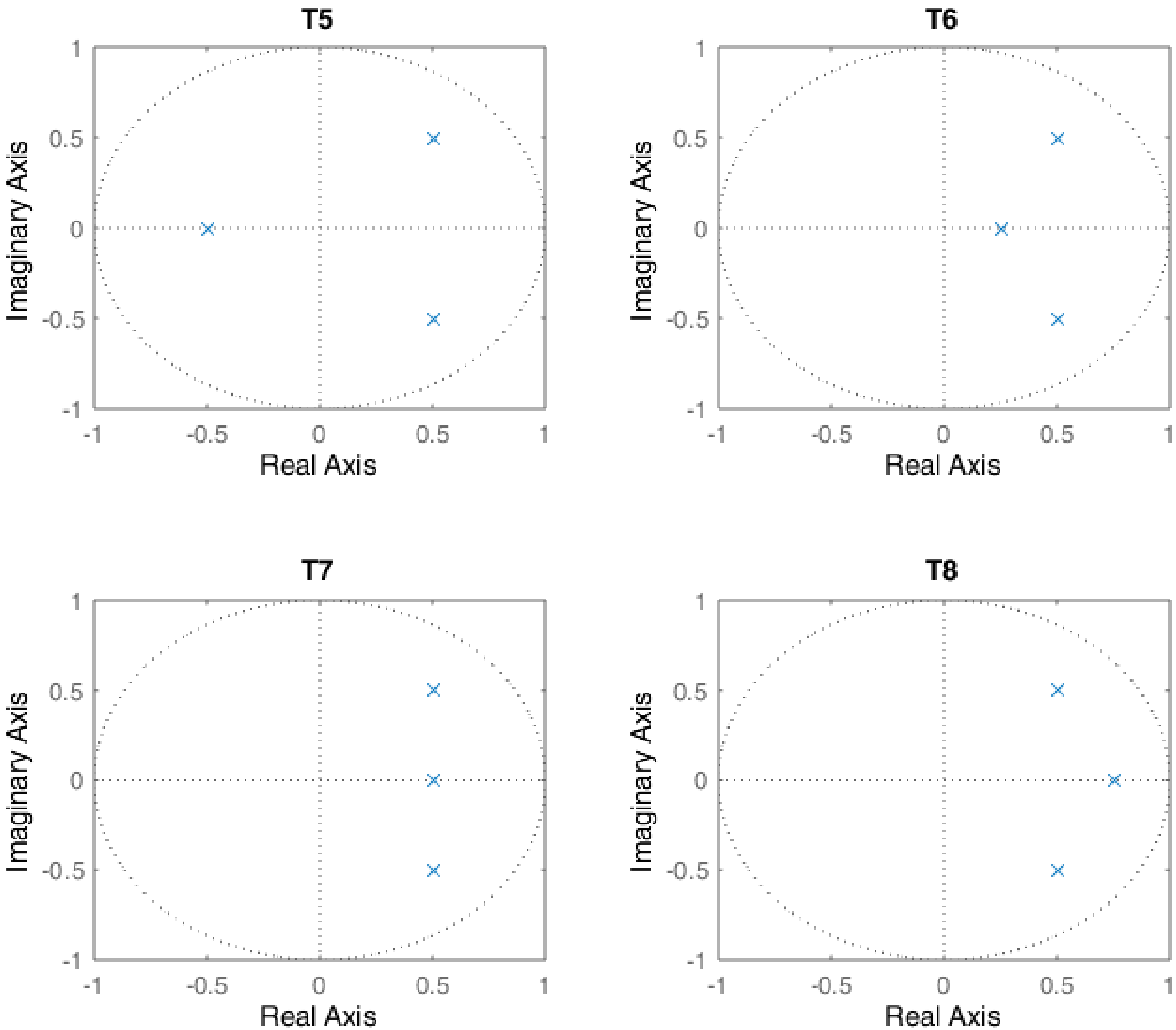
Qual a diferença entre a resposta ao degrau de cada um dos sistemas abaixo?

$$T_5(z) = \frac{0,75}{(z+0,5)(z^2-z+0,5)} \qquad T_6(z) = \frac{0,375}{(z-0,25)(z^2-z+0,5)}$$

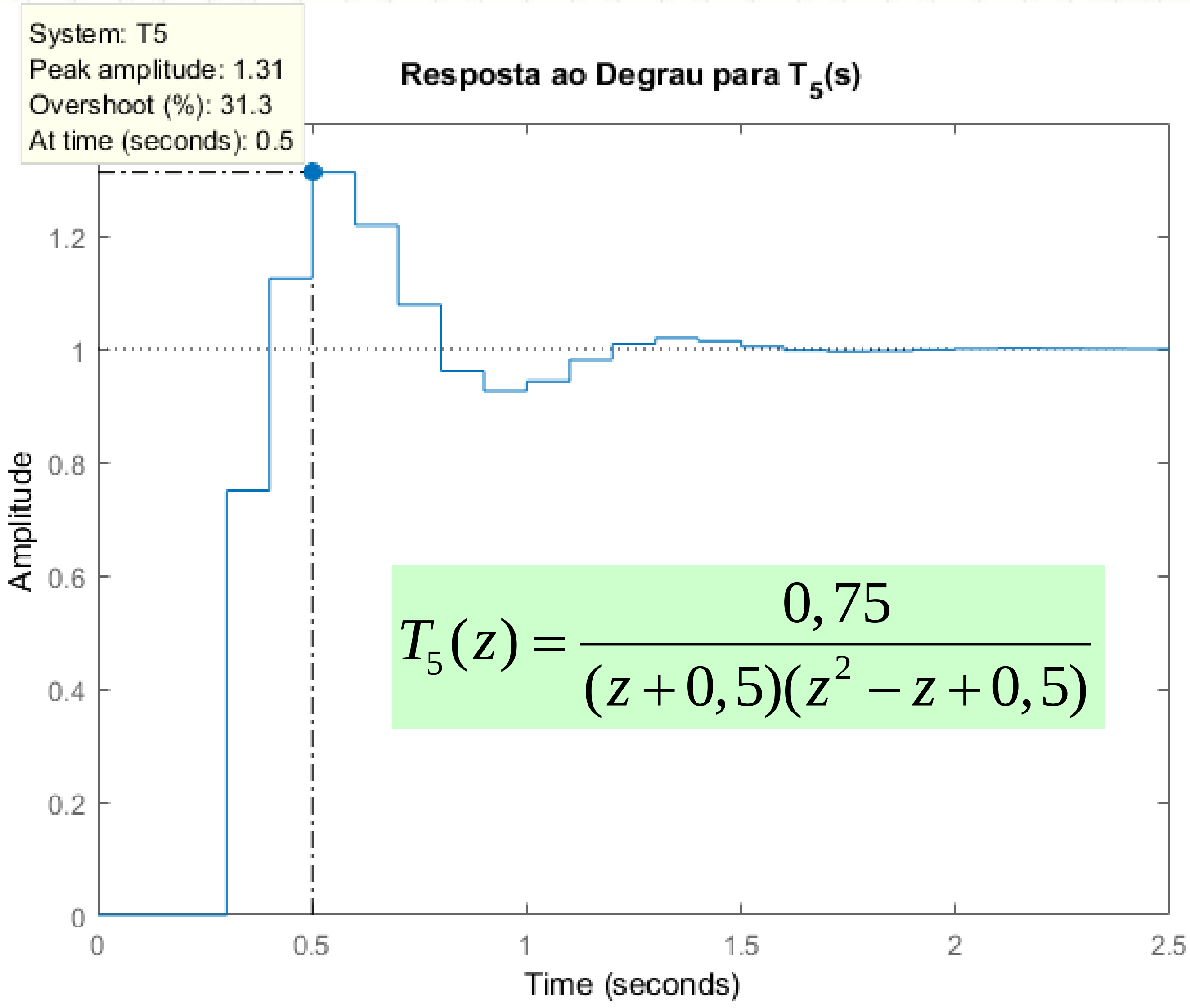
$$T_7(z) = \frac{0,25}{(z-0,5)(z^2-z+0,5)} \qquad T_8(z) = \frac{0,125}{(z-0,75)(z^2-z+0,5)}$$

Todos os sistemas têm o mesmo par de polos complexos conjugados (idem exemplo anterior):

$$p_{1,2} = 0,5 \pm j0,5 = 0,5\angle 45^\circ$$

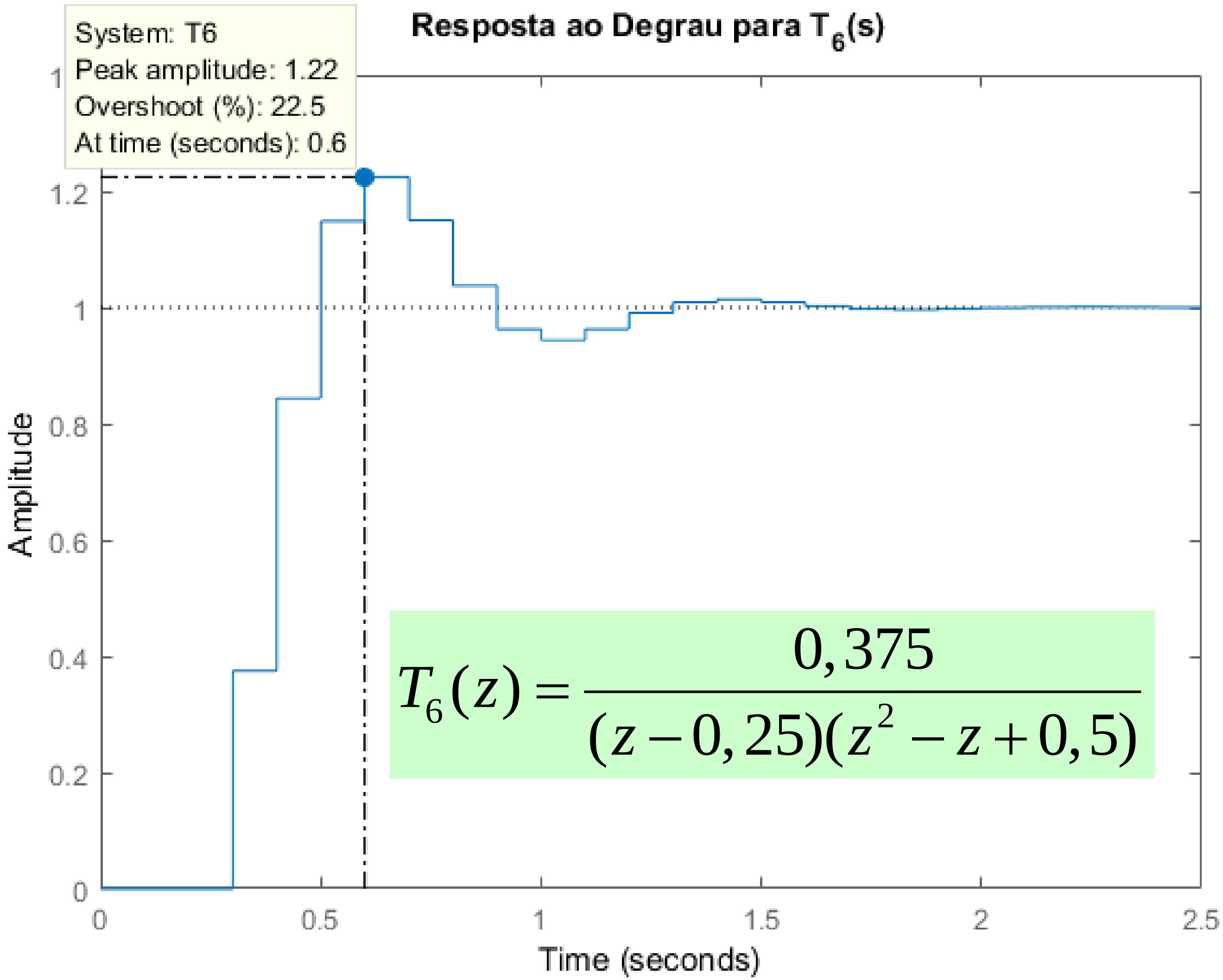

T5
T6
T7
T8
Imaginary Axis
Real Axis
1
0.5
0
-0.5
-1
-1
-0.5
0
0.5
1

Efeito de um polo adicional na resposta transitória



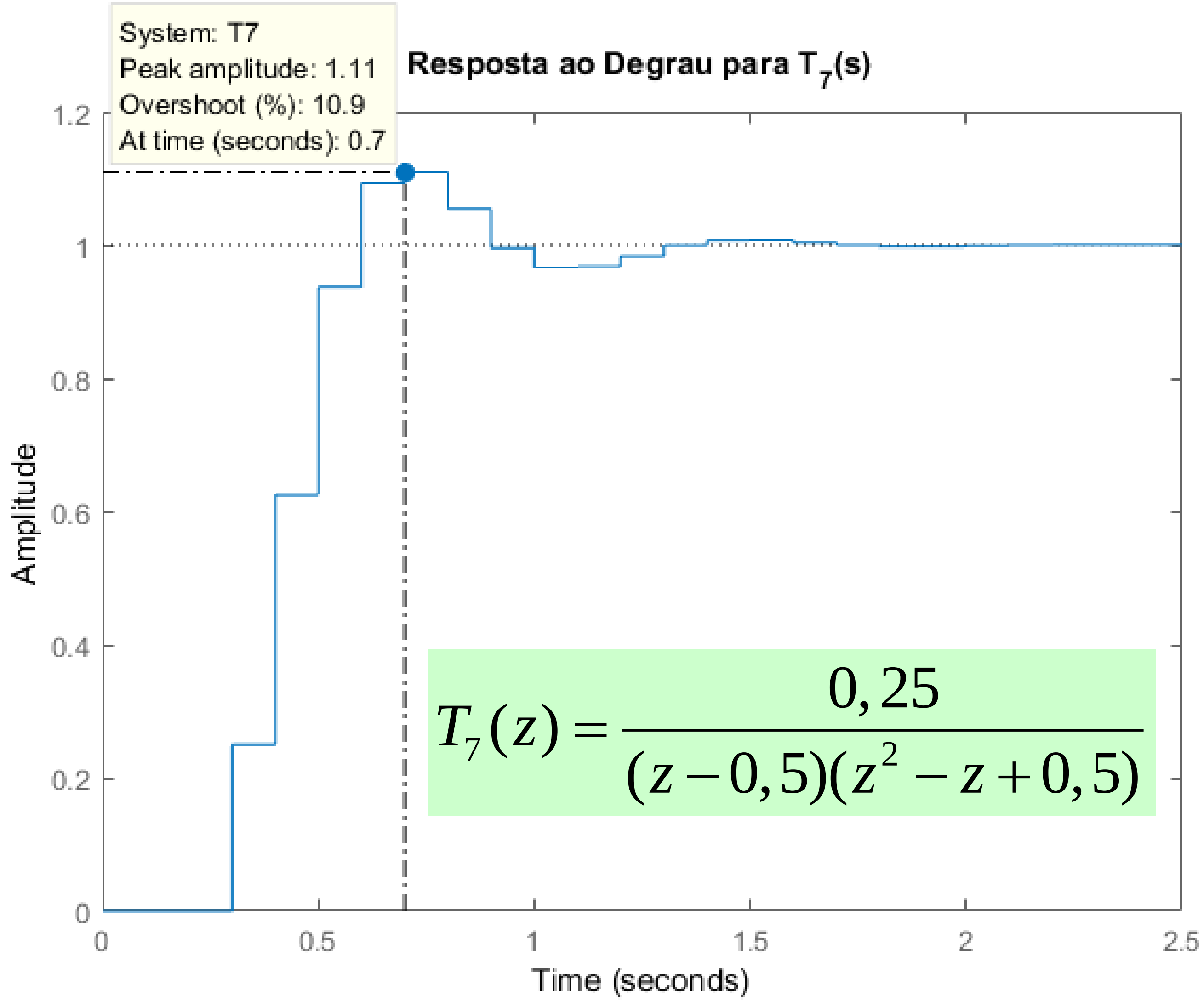
$$T_5(z) = \frac{0,75}{(z+0,5)(z^2 - z + 0,5)}$$

Efeito de um polo adicional na resposta transitória



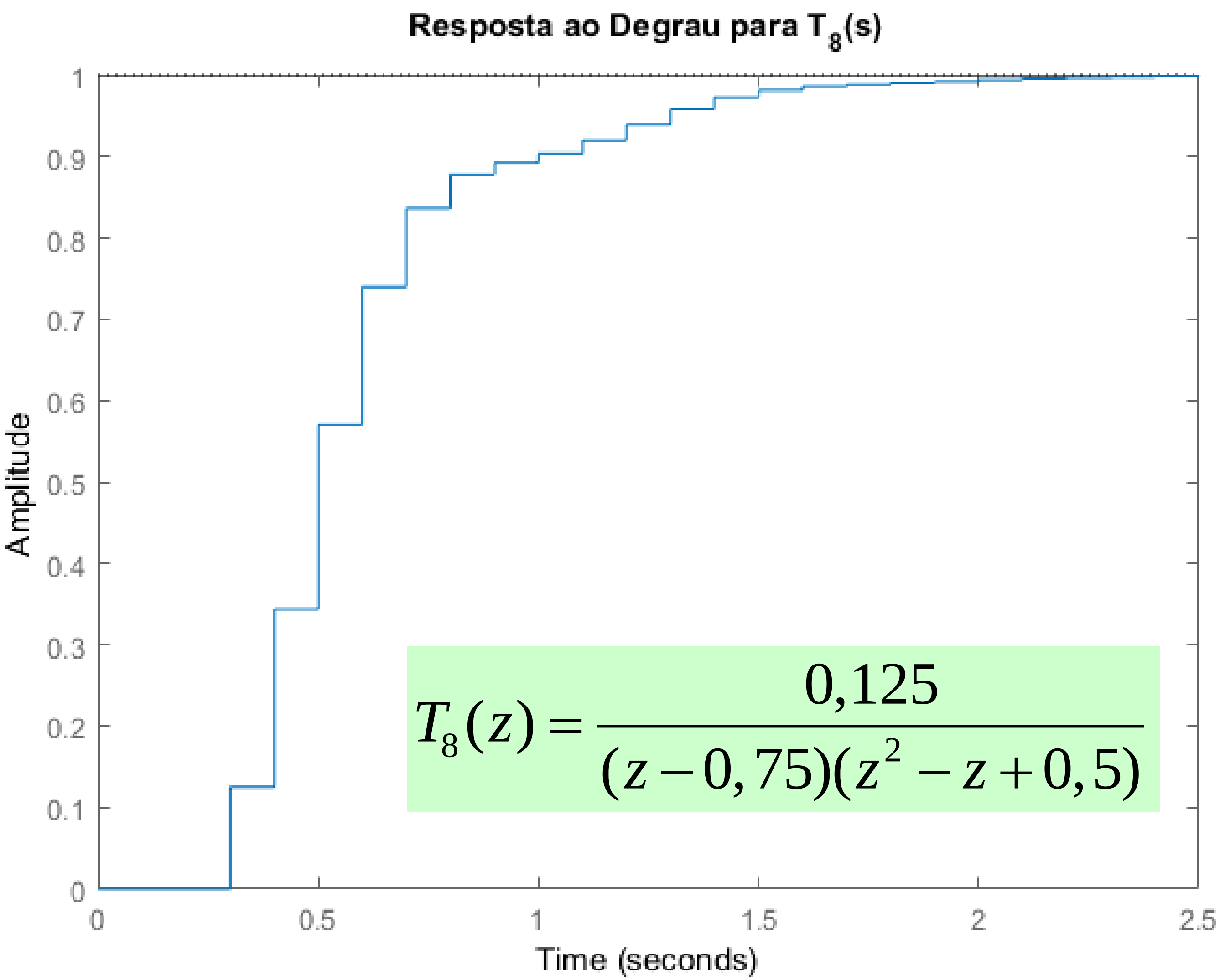
$$T_6(z) = \frac{0,375}{(z-0,25)(z^2-z+0,5)}$$

Efeito de um polo adicional na resposta transitória



$$T_7(z) = \frac{0,25}{(z-0,5)(z^2 - z + 0,5)}$$

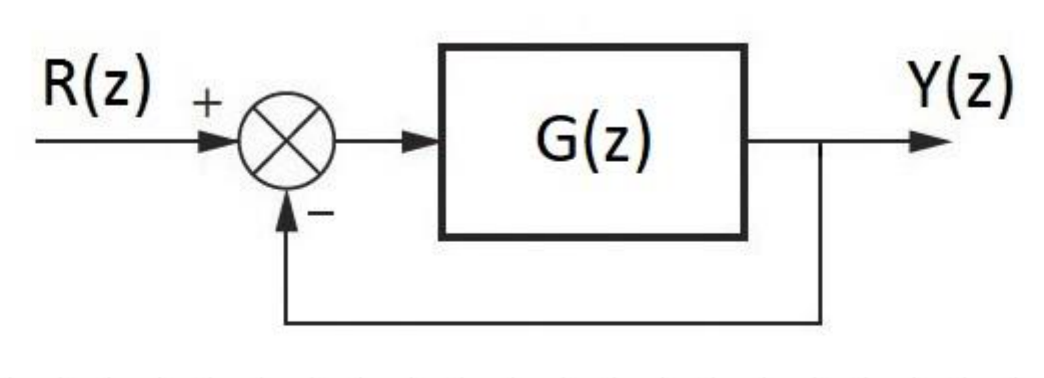
Efeito de um polo adicional na resposta transitória



$$T_8(z) = \frac{0{,}125}{(z-0{,}75)(z^2 - z + 0{,}5)}$$

Resposta em Regime Permanente

Seja o sistema de controle com realimentação unitária:



De modo similar ao caso contínuo, podem ser definidos coeficientes de erro de posição, velocidade e aceleração. A partir destes coeficientes são calculados os erros de regime permanente.

Resposta em Regime Permanente

Em regime permanente, podem ser obtidos os coeficientes e erros estacionários associados a cada tipo de entrada: degrau, rampa e parábola.

$$\mathrm{K_P} = \lim_{z \to 1} G(z) \quad \Rightarrow \quad e_\infty = \frac{1}{1 + \mathrm{K_P}}$$

$$\mathrm{K_V} = \frac{1}{T} \lim_{z \to 1} (z-1) G(z) \quad \Rightarrow \quad e_\infty = \frac{1}{\mathrm{K_V}}$$

$$\mathrm{K_a} = \frac{1}{T^2} \lim_{z \to 1} (z-1)^2 G(z) \quad \Rightarrow \quad e_\infty = \frac{1}{\mathrm{K_a}}$$

Observe que no caso discreto os coeficientes de erro dependem do período de amostragem.

Sugestões de Leitura

Sistemas de Controle Modernos – R. Dorf & R. Bishop
Capítulo 13 – Sistemas de Controle Digital.

Sistemas de Controle para Engenharia – G. Franklin, J. Powel & A. Emami-Naeini
Capítulo 8 – Controle Digital.