Contorno das Raízes
Sistemas Condicionalmente Estáveis
Sistemas com atraso

Profa. Cristiane Paim

Semestre 2018-1

Contorno das Raízes

Gráfico de Contorno das Raízes

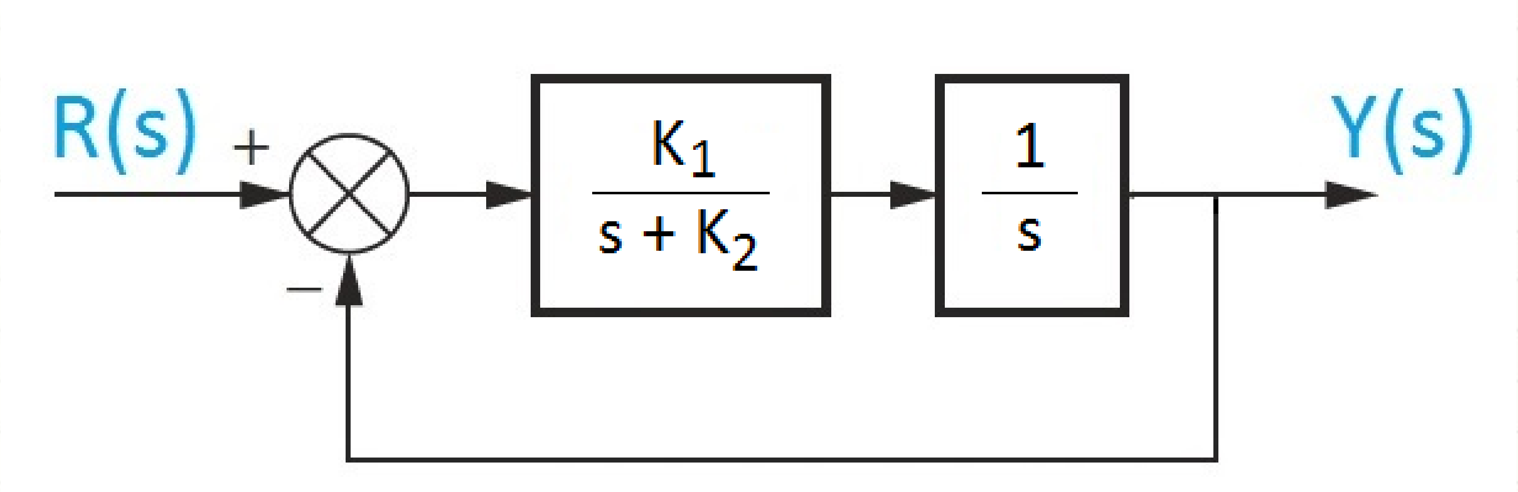
Em muitos problemas é necessário conhecer o efeito da variação de mais de um parâmetro sobre a localização dos polos de malha fechada de um sistema.

O diagrama do Lugar das Raízes quando mais de um parâmetro varia chama-se **Contorno das Raízes**.

É construído traçando-se o Lugar das Raízes considerando um parâmetro fixo e o outro variando, e vice-versa.

Exemplo

Seja o sistema:



Traçar o contorno das Raízes para os parâmetros K_1 e K_2 variando de 0 a $+\infty$.

Exemplo

Para o sistema, a FTMF é dada por:

$$T(s) = \frac{K_1}{s(s+K_2)+K_1}$$

Portanto,

$$\Delta(s) = s^2 + K_2 s + K_1$$

Exemplo

1ª parte: Fixar K_2 variar $0 < K_1 < +\infty$

$$K_2 \equiv 0 \quad \rightarrow \quad \Delta(s) = s^2 + K_1 = 0$$

Portanto, o Lugar das Raízes será traçado para

$$1 + K_1 \frac{1}{s^2} = 0$$

Exemplo

Lugar das Raízes para $K_1 > 0$

Eixo real: $\nexists$

Assíntotas: $\theta_a = \pm 90°$

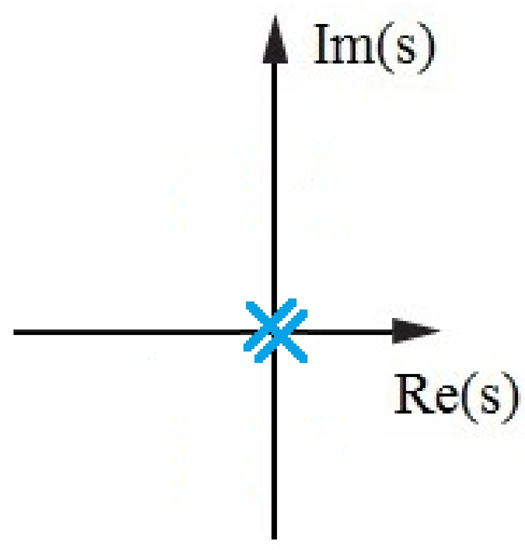
Ângulos de Partida: $\phi = \pm 90°$

Cruzamento com eixo imaginário:

existe apenas em $s=0$ ($K_1=0$)

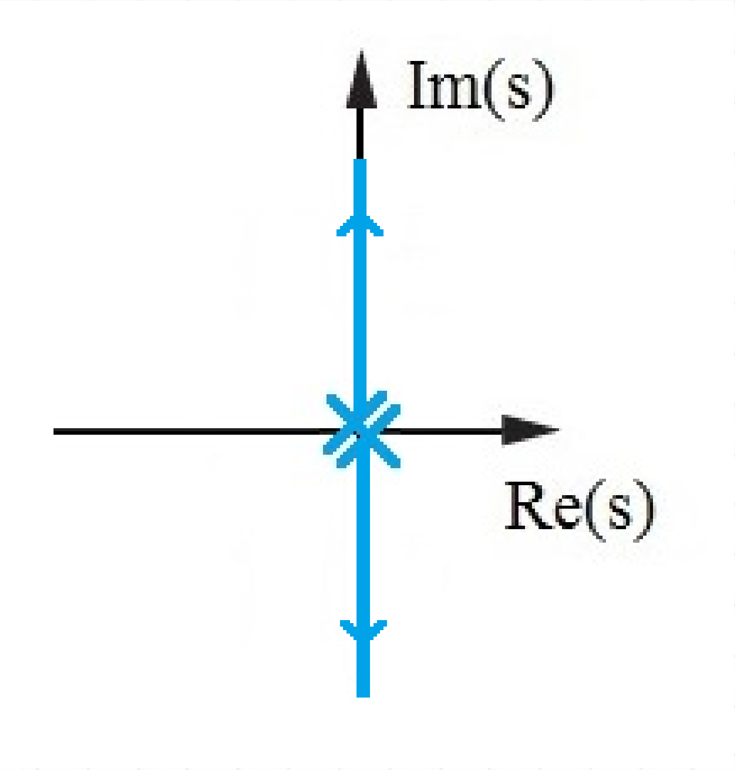
Ramificação:

existe apenas em $s=0$ ($K_1=0$)



Exemplo

Lugar das Raízes para $K_1 > 0$



Exemplo

2ª parte: Fixar K_1 variar $0 < K_2 < +\infty$

Para $K_2 \neq 0$

$$\Delta(s) = 1 + K_2 \frac{s}{s^2 + K_1} = 0$$

Assim, o Lugar das Raízes será traçado para

$0 < K_2 < +\infty$ considerando valores fixos de K_1 .

Exemplo

Para **K_1 = 1**

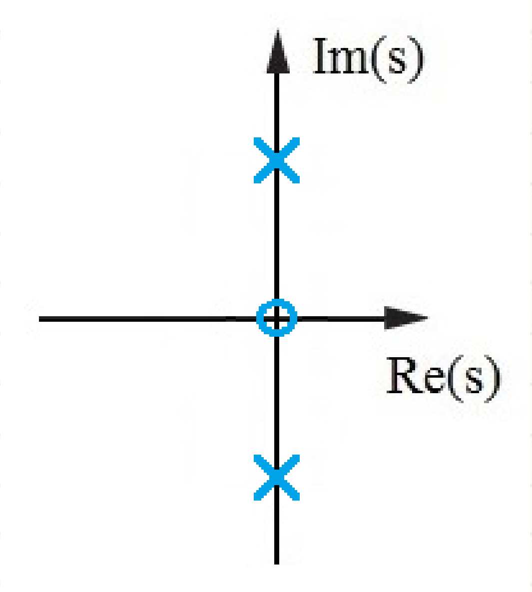
$$\Delta(s) = 1 + K_2 \frac{s}{s^2+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} p_{1,2} = \pm j \\ z = 0 \end{cases}$$

Eixo real: $(-\infty, 0]$

Assíntotas: $\theta_a = 180°$

Cruzamento com eixo imaginário:

apenas em $s=\pm j$ (K_1=1)



Exemplo

Ramificação:

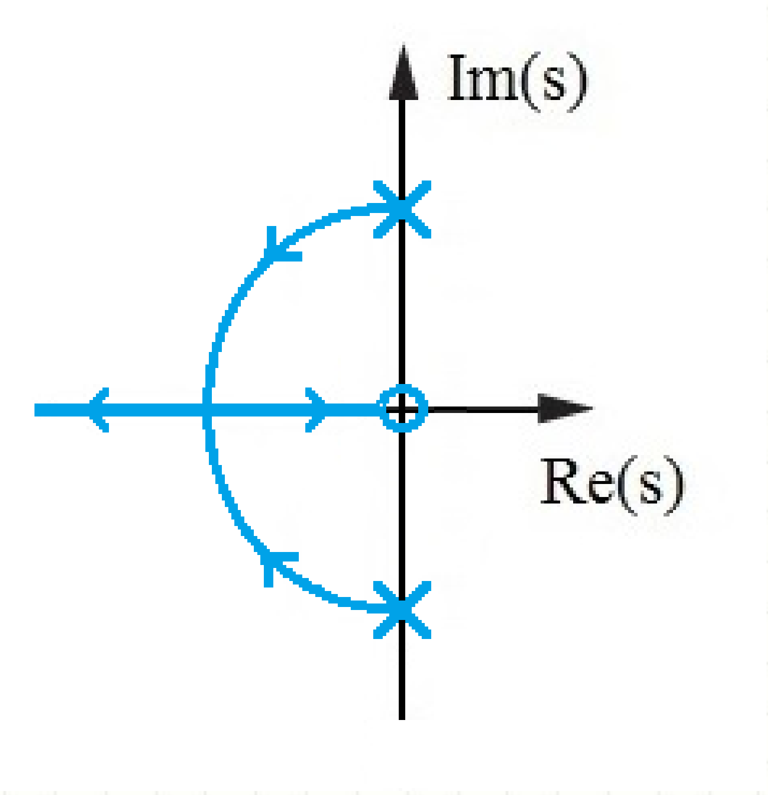
$$K_2 = -\left(\frac{s^2+1}{s}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{dK_2}{ds} = s^2 - 1 = 0$$

Portanto,

$$s = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} s = -1 \in \mathrm{LR} & \Rightarrow \quad K_2 = 2 \\ s = 1 \notin \mathrm{LR} \end{cases}$$

Exemplo

Lugar das Raízes para $K_1 = 1$ e $0 < K_2 < +\infty$

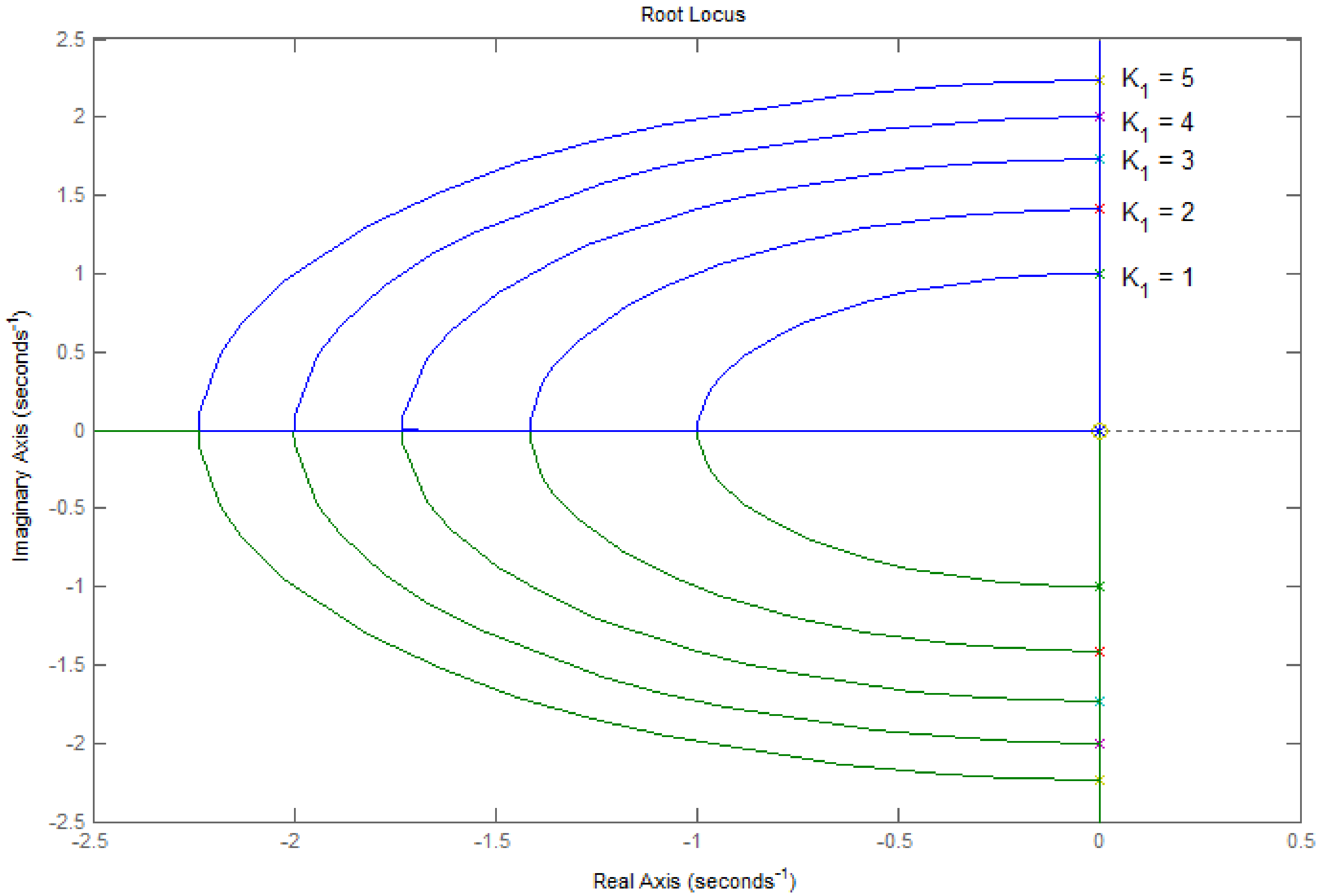


Exemplo

Para demais valores de $K_{1,}$ o Lugar das Raízes terá forma semelhante, mudando os polos iniciais e as respectivas ramificações.

K_1	polos	Ramificação	
2	$p_{1,2}=\pm\sqrt{2}$	$s=-\sqrt{2}$	$K_2=2,83$
3	$p_{1,2}=\pm\sqrt{3}$	$s=-\sqrt{3}$	$K_2=3,46$
4	$p_{1,2}=\pm\sqrt{4}$	$s=-\sqrt{4}$	$K_2=4$
5	$p_{1,2}=\pm\sqrt{5}$	$s=-\sqrt{5}$	$K_2=4,47$

Exemplo



Root Locus
K1 = 5
K1 = 4
K1 = 3
K1 = 2
K1 = 1
Imaginary Axis (seconds-1)
Real Axis (seconds-1)
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5

Exemplo

Lembrando que os polos de malha fechada serão dados por

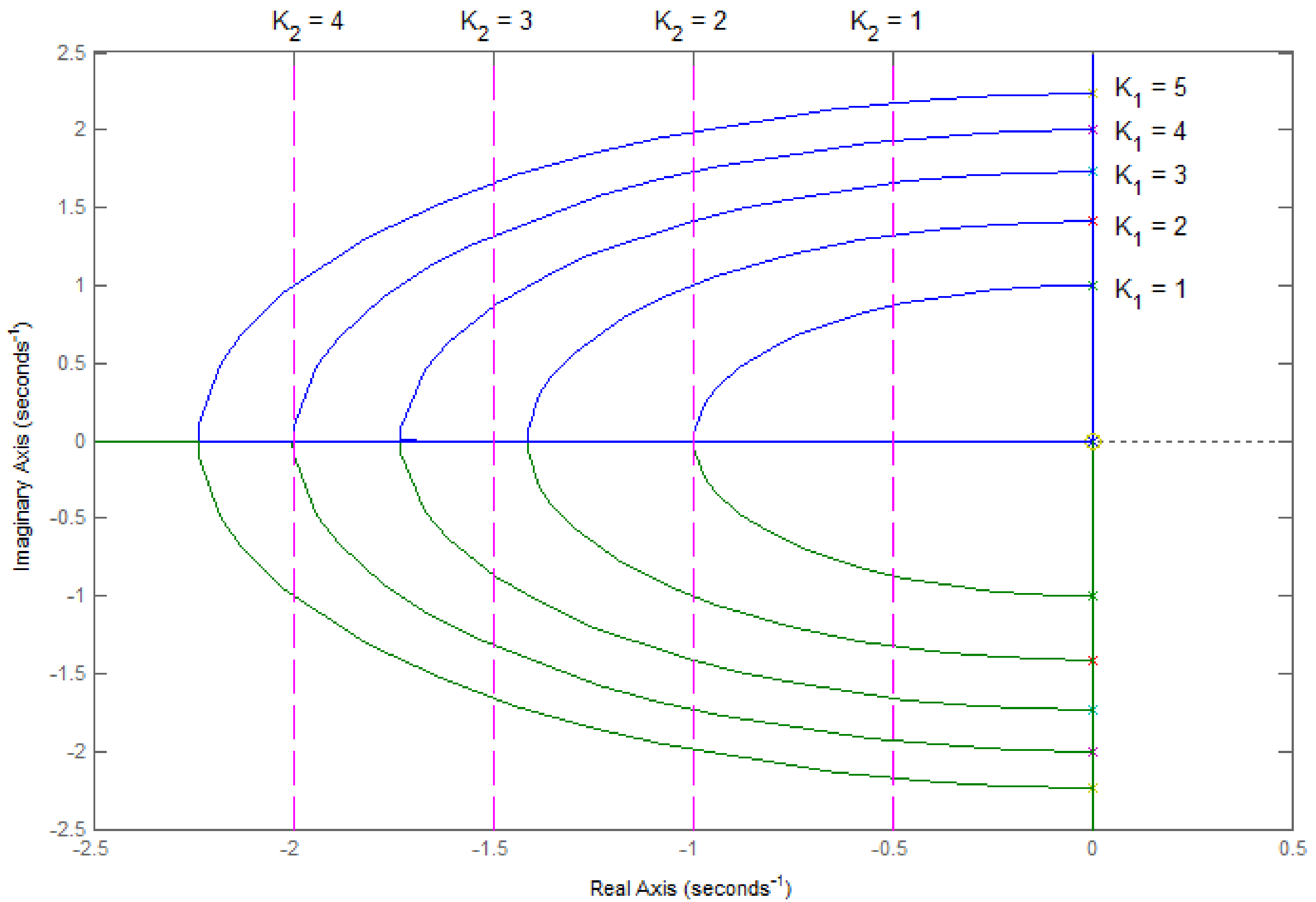
$$p_{1,2} = \frac{-K_2 \pm \sqrt{K_2^2 - 4K_1}}{2}$$

para valores fixos de K_2, a parte real é constante e representa uma reta em $-K_2/2$.

Por exemplo,

$$K_2 = 2 \quad \rightarrow \quad p_{1,2} = -1 \pm \frac{\sqrt{4 - 4K_1}}{2}$$

Exemplo



$K_2 = 4$
$K_2 = 3$
$K_2 = 2$
$K_2 = 1$
$K_1 = 5$
$K_1 = 4$
$K_1 = 3$
$K_1 = 2$
$K_1 = 1$
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
Imaginary Axis (seconds^{-1})
Real Axis (seconds^{-1})

Utilização do Contorno das Raízes

Para o sistema anterior, deseja-se garantir uma especificação de tempo de acomodação para a resposta ao degrau.

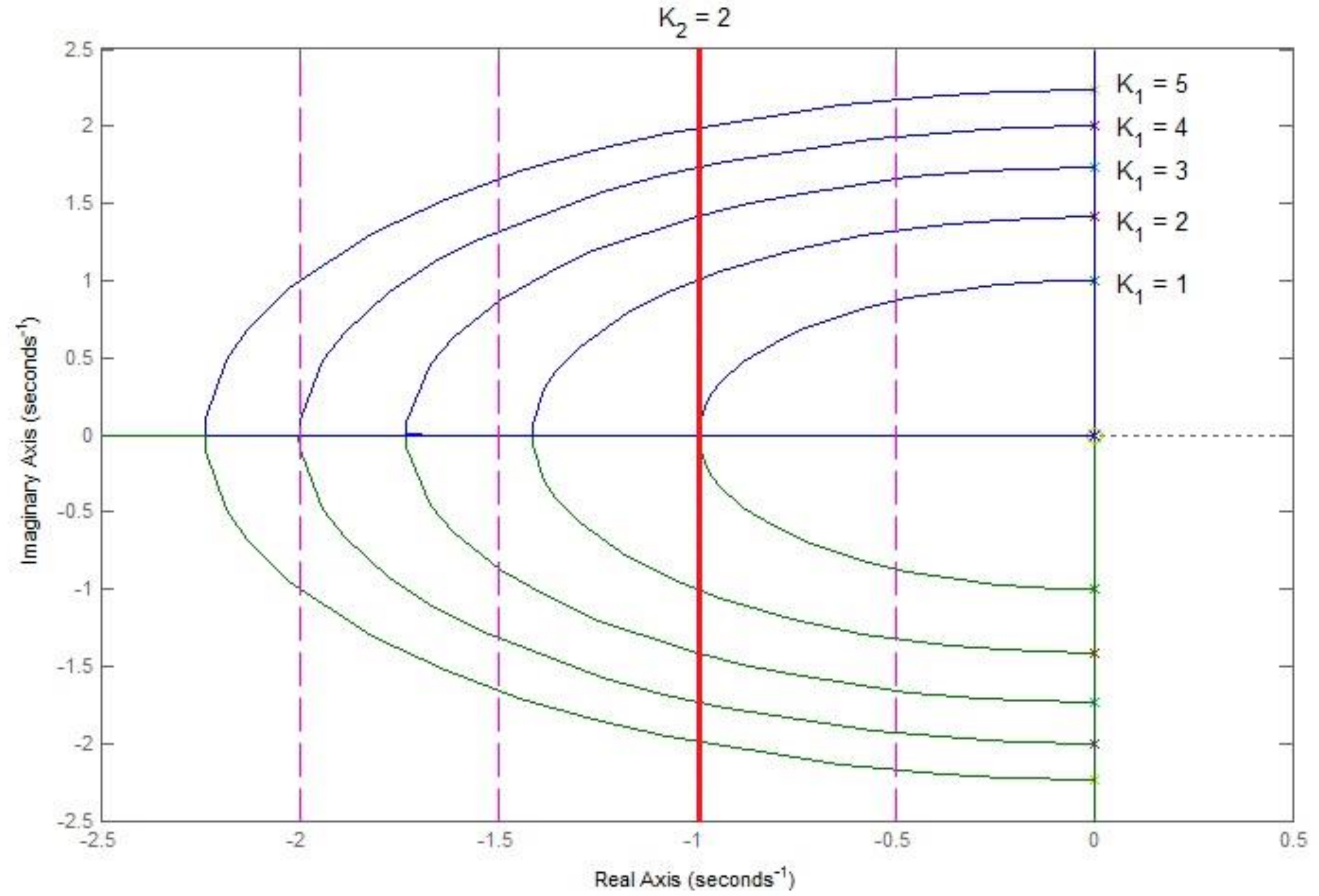
$$t_s = \frac{4}{\xi \omega_n} < 4 \quad \Rightarrow \quad \xi \omega_n > 1$$

Reta passando em -1

Neste caso, do gráfico do Contorno das Raízes, observa-se que para atender essa especificação:

$$K_1 > 2 \quad \text{e} \quad K_2 > 1$$

Exemplo



K2 = 2
K1 = 5
K1 = 4
K1 = 3
K1 = 2
K1 = 1
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
Imaginary Axis (seconds-1)
Real Axis (seconds-1)

Exemplo

De forma similar, se a especificação fosse alterada para:

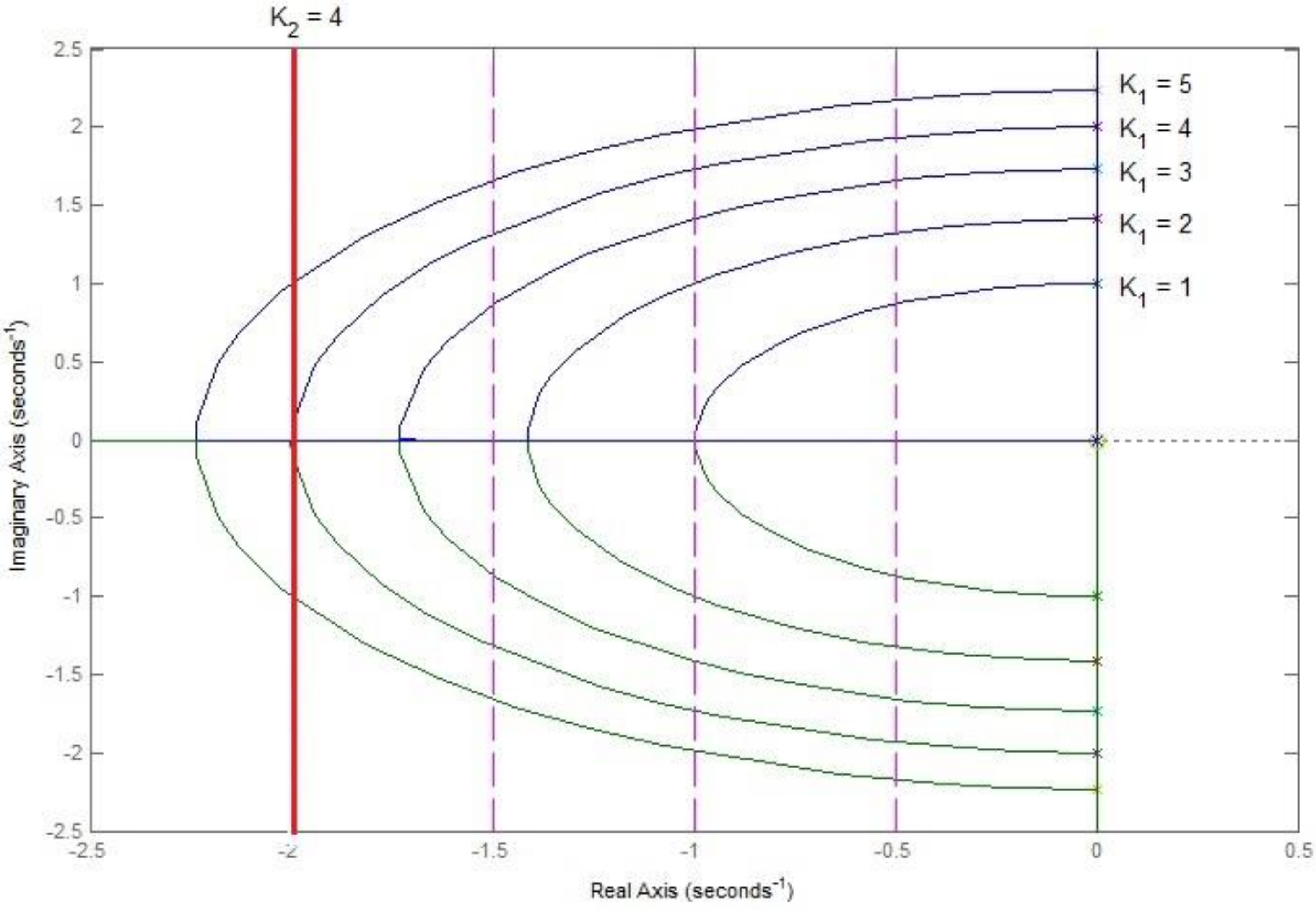
$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} < 2 \quad \Rightarrow \quad \xi\omega_n > 2$$

Reta passando em -2

Chegaria se a

$$K_1 > 4 \quad \text{e} \quad K_2 > 4$$

Exemplo



$K_2 = 4$
$K_1 = 5$
$K_1 = 4$
$K_1 = 3$
$K_1 = 2$
$K_1 = 1$
Imaginary Axis (seconds^{-1})
Real Axis (seconds^{-1})
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5

Exemplo

E se a especificação fosse alterada para:

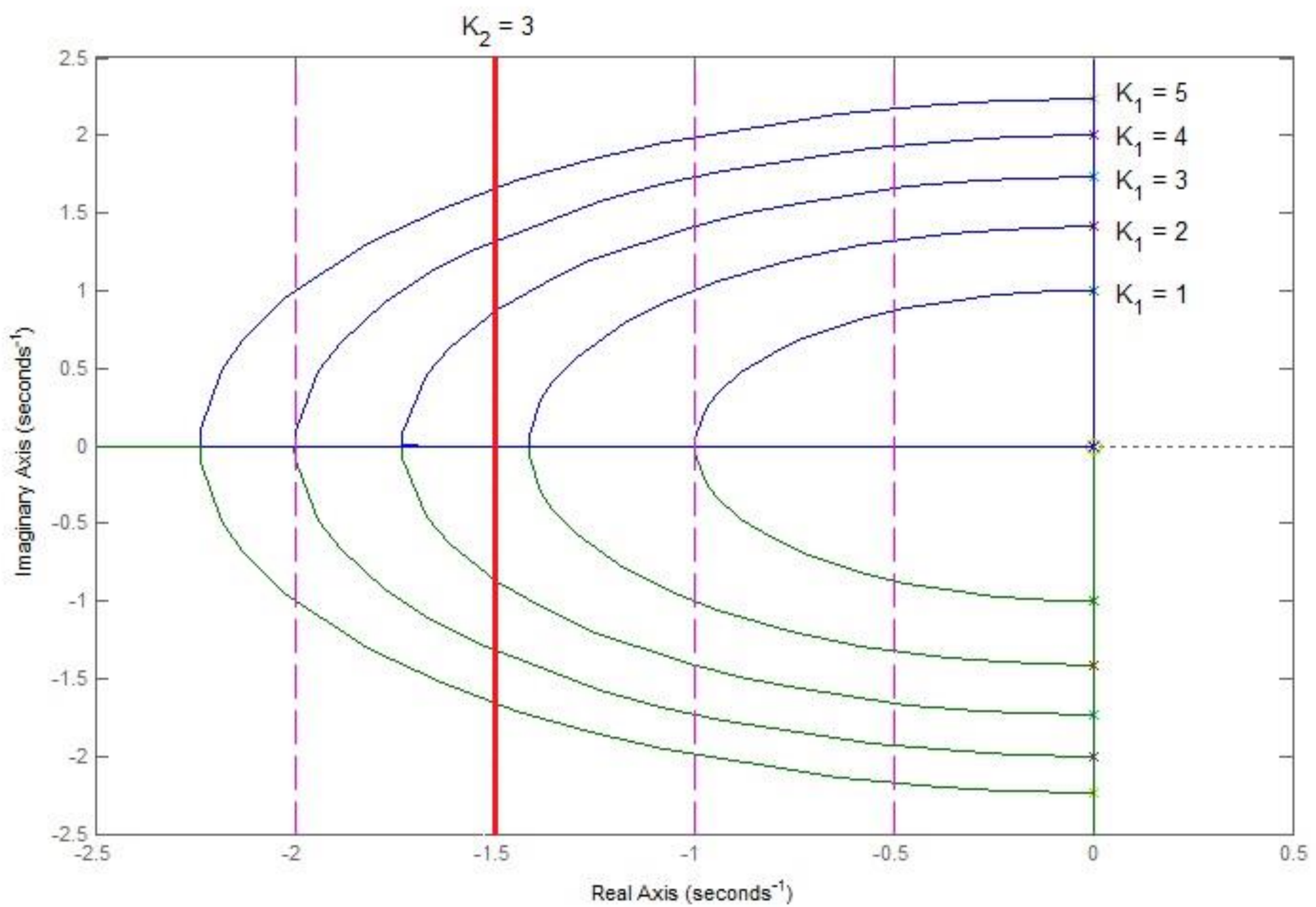
$$\xi\omega_n > 1{,}5 \quad (t_s < 2{,}67)$$

Como os valores de K_1 e K_2 seriam obtidos?

Como visto anteriormente, a parte real é constante e representa uma reta em $-K_2/2$. Portanto, para garantir a especificação

$$K_2 > 3$$

Exemplo



$K_2 = 3$
$K_1 = 5$
$K_1 = 4$
$K_1 = 3$
$K_1 = 2$
$K_1 = 1$
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
Imaginary Axis (seconds^{-1})
Real Axis (seconds^{-1})

Exemplo

O valor de K_1 pode ser obtido resolvendo

$$\Delta(s) = s^2 + 3s + K_1 = 0 \quad \text{para} \quad s = -1{,}5 + j\omega$$

cuja solução é K_1 = 2,25. (reta em K_2 = 3)

Portanto, para garantir um tempo de acomodação menor do que 2,67 segundos:

$$K_2 > 3 \quad \text{e} \quad K_1 > 2{,}25$$

Exemplo

Suponha que deseja-se garantir também um sobressinal menor do que 4,32%, ou seja,

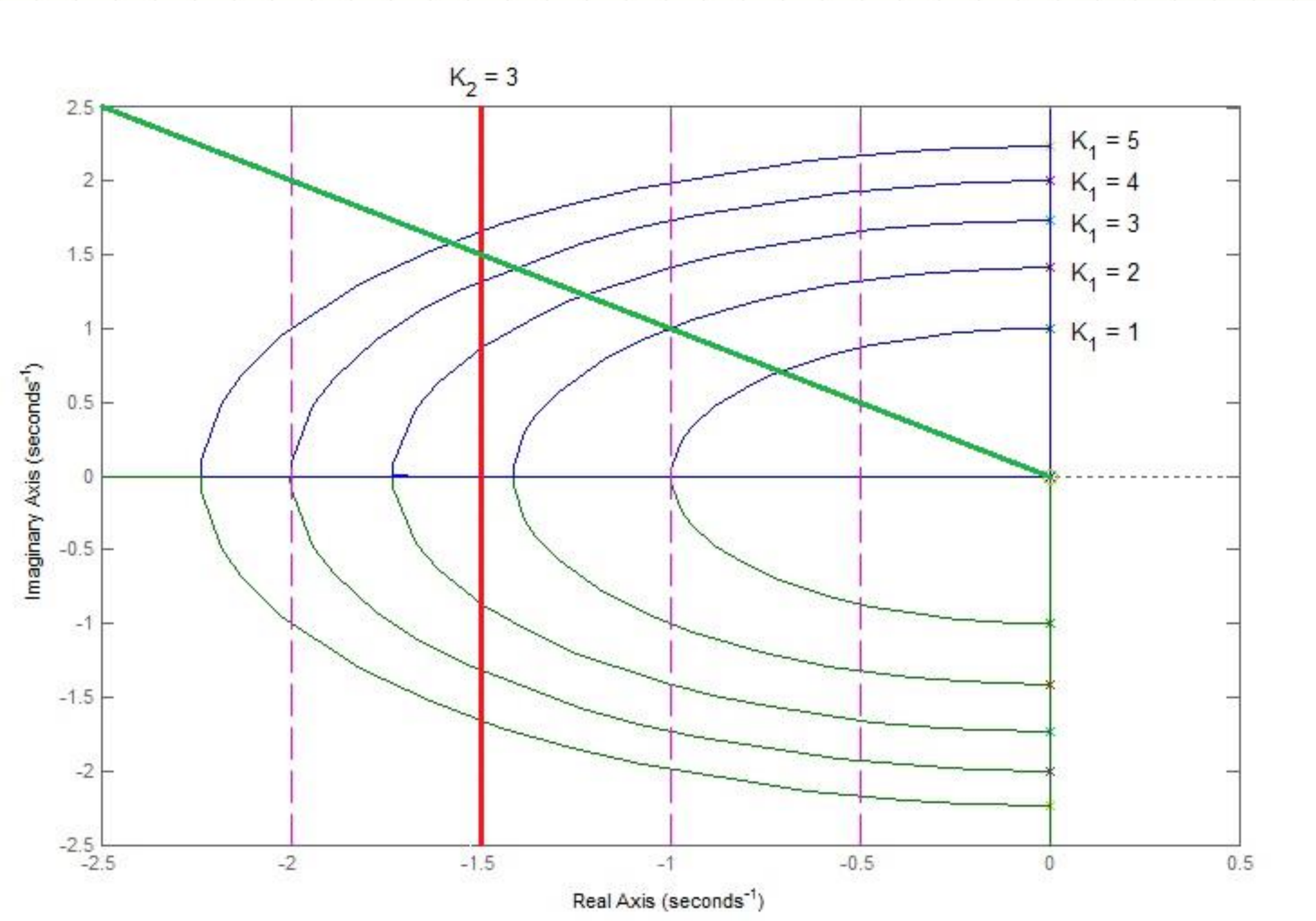
$$\xi > \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta < 45^{\circ}$$

Neste caso, a interseção do LR com a especificação de coeficiente de amortecimento pode ser obtida resolvendo:

$$\Delta(s) = s^2 + K_2 s + K_1 = 0 \quad \text{para} \quad \mathrm{s} = \sigma(\text{-}1 + \mathrm{j}\sigma)$$

$$\theta = 45^{\circ}$$

Exemplo



$K_2 = 3$
$K_1 = 5$
$K_1 = 4$
$K_1 = 3$
$K_1 = 2$
$K_1 = 1$
Imaginary Axis (seconds^{-1})
Real Axis (seconds^{-1})
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5

Exemplo

Substituindo s na eq. característica, tem-se

$$\Delta(s) = -j2\sigma^2 - K_2\sigma + jK_2\sigma + K_1 = 0$$

$$\begin{cases} K_1 - K_2\sigma = 0 \\ \sigma(K_2 - 2\sigma) = 0 \end{cases} \qquad \sigma = 0 \quad \text{ou} \quad K_2 = 2\sigma$$

$$\sigma = 0 \quad \rightarrow \quad K_1 = 0 \qquad (origem)$$

$$\sigma = K_2/2 \quad \rightarrow \quad K_1 = K_2^2/2$$

Exemplo

Para garantir a especificação de tempo de acomodação (intersecção com a reta passando em -1,5) é necessário $K_2>3$.

Considerando o valor mínimo $K_2 \equiv 3$, chega-se a

$K_1 > 4,5$.

Assim, para atender ambas as especificações:

$$K_2 \equiv 3 \quad \text{e} \quad K_1 > 4{,}5$$

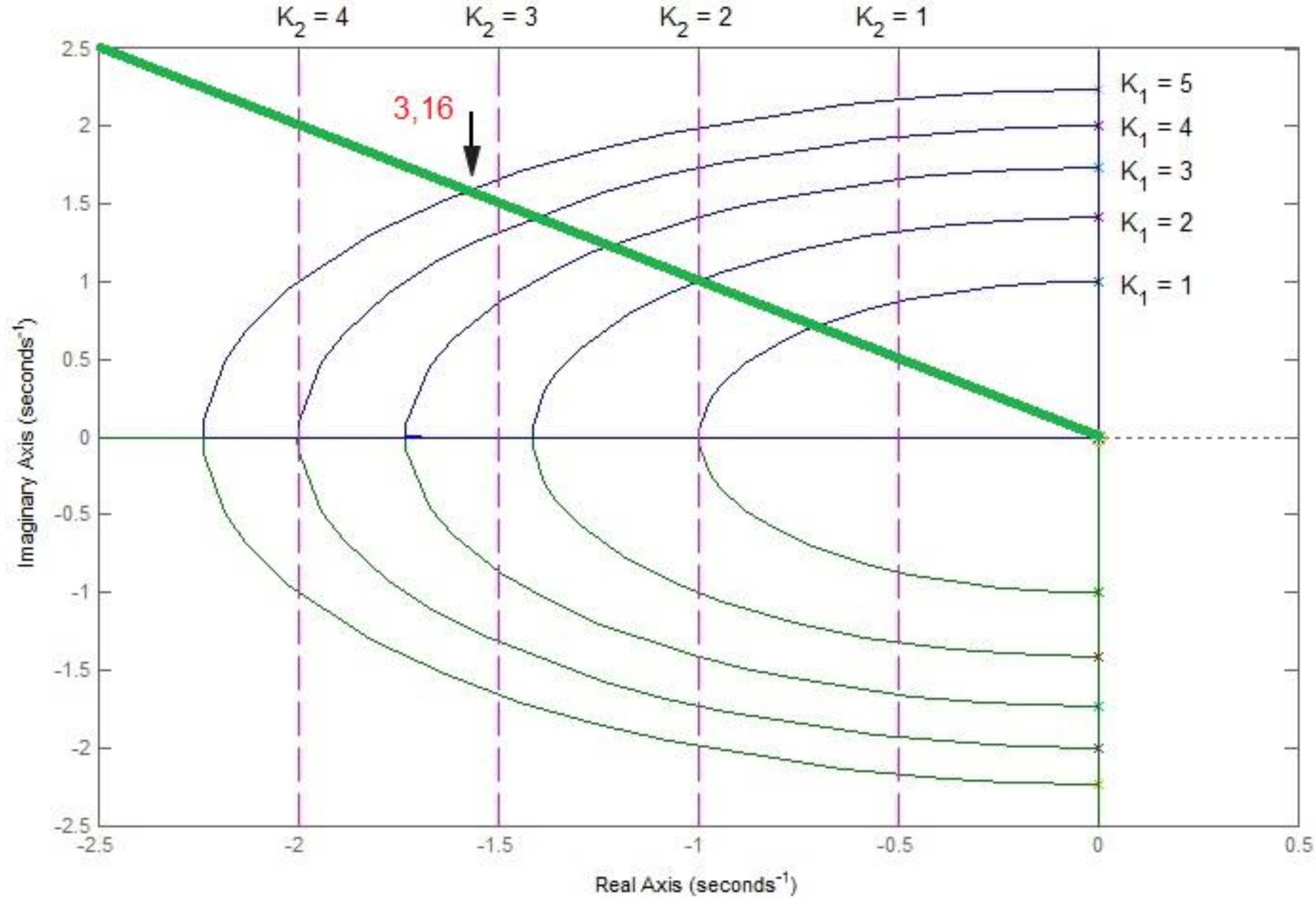
Outras combinações podem ser obtidas.

Por exemplo:

$$K_1 \equiv 5 \quad \rightarrow \quad K_2 > ?$$

Exemplo

$$K_1 \equiv 5 \quad \rightarrow \quad K_2 > 3{,}16$$



Sistemas Condicionalmente Estáveis

Sistemas Condicionalmente Estáveis

São sistemas que são estáveis para **faixas de valores** de ganho.

Na prática, este tipo de sistema é indesejável uma vez que os valores de ganho são críticos para a garantia de estabilidade.

Sistemas Condicionalmente Estáveis

Exemplo 1:

$$G(s) = \frac{s^2 + 2s + 4}{s(s+4)(s+6)(s^2 + 1{,}41s + 1)}$$

$$p_1 = 0$$

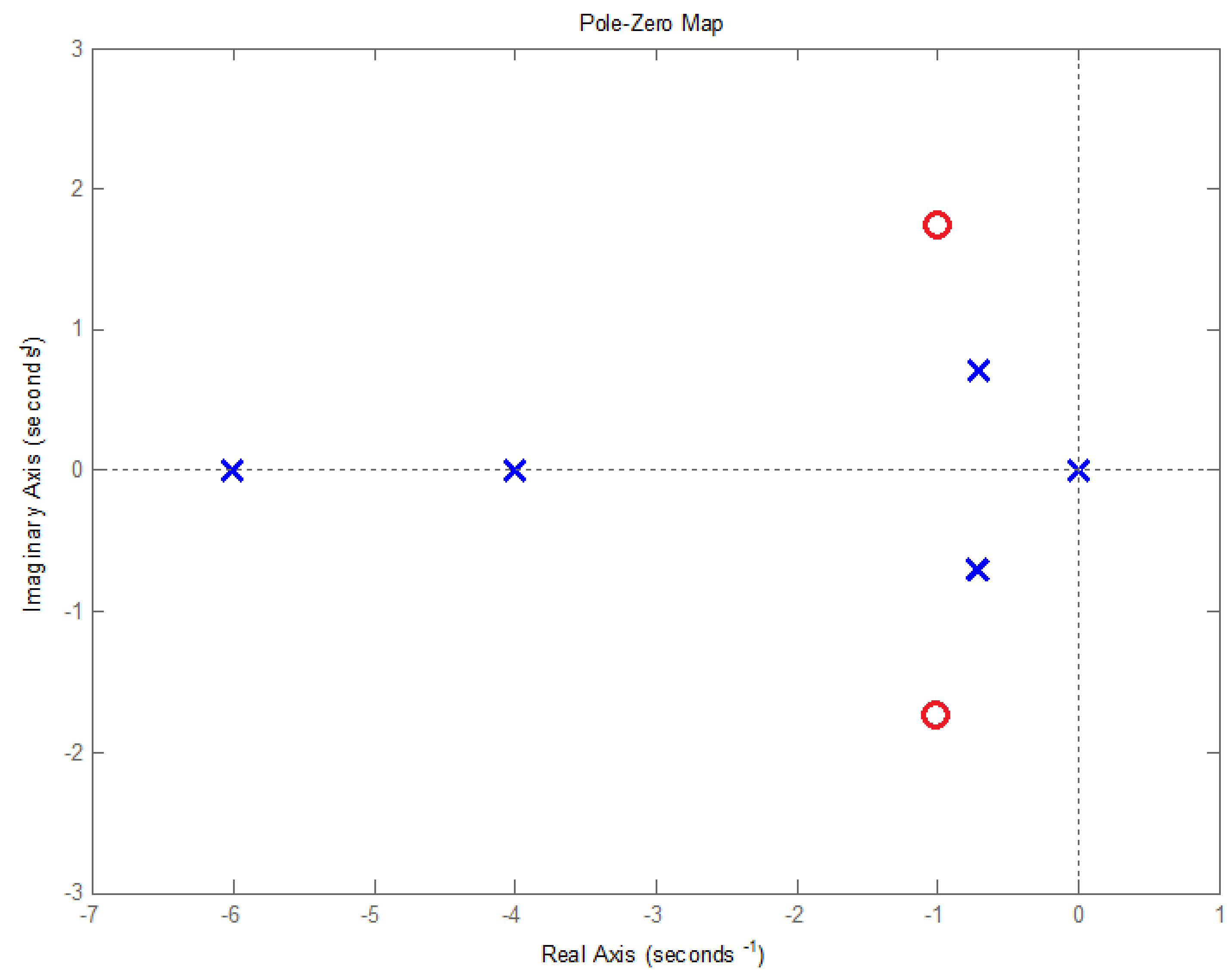
$$p_2 = -4$$

$$p_3 = -6$$

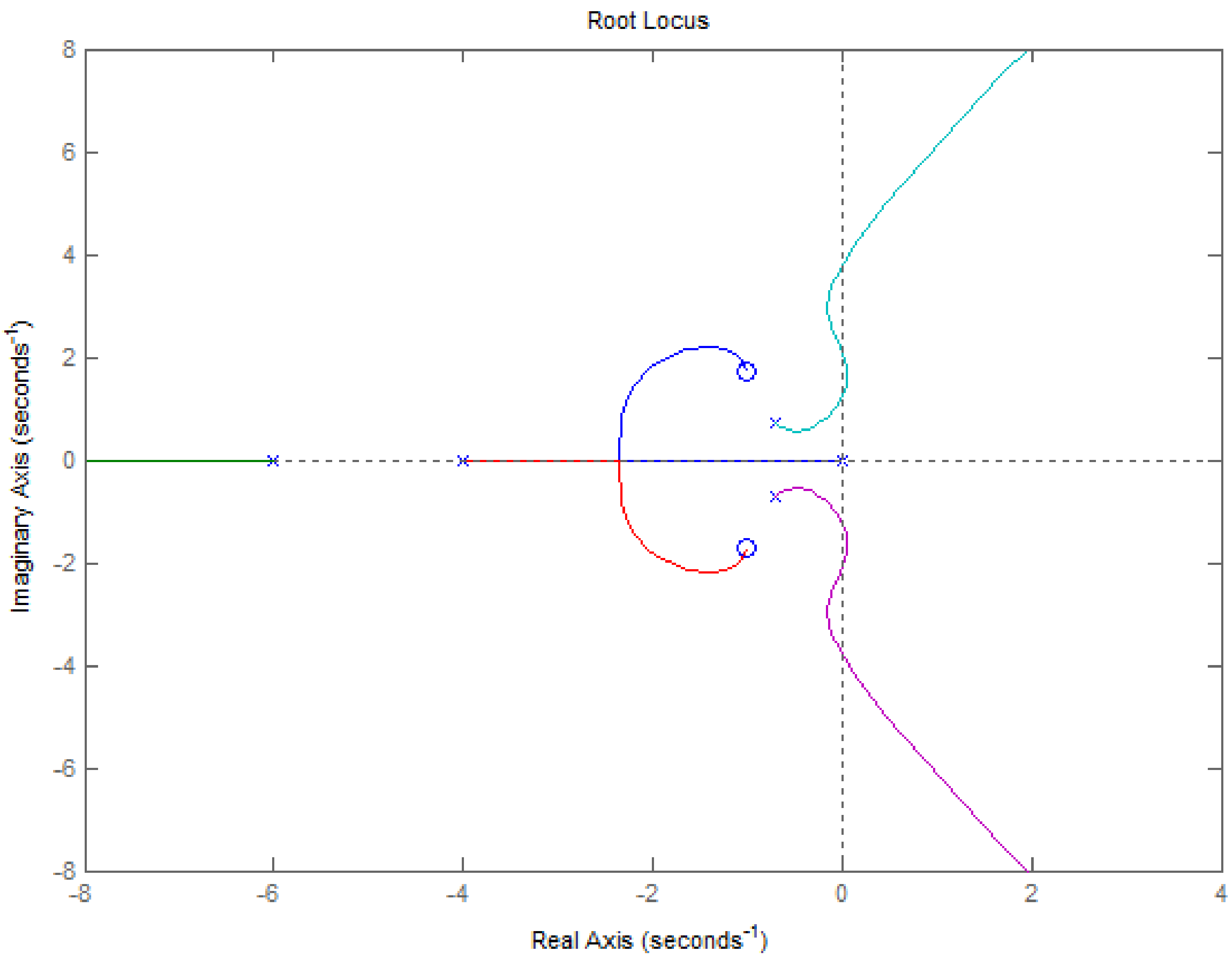
$$p_{4,5} = -0{,}707 \pm j0{,}707$$

$$z_{1,2} = -1 \pm j1{,}73$$

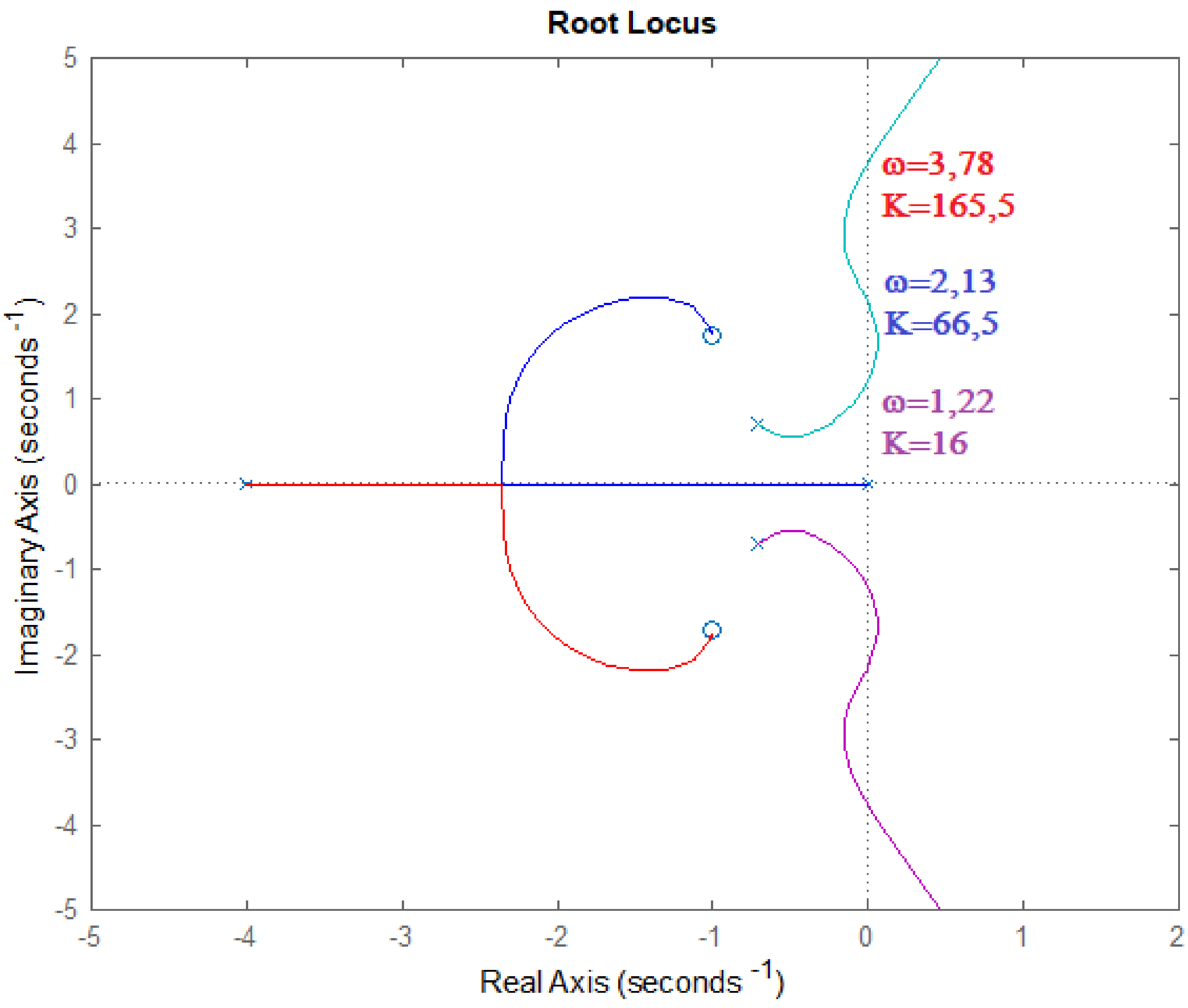
Sistemas Condicionalmente Estáveis



Sistemas Condicionalmente Estáveis



Sistemas Condicionalmente Estáveis



Sistemas Condicionalmente Estáveis

Portanto, o sistema é estável para duas faixas de valores de ganho :

$$0 < K < 16$$

$$66{,}5 < K < 165{,}5$$

Obs: os valores obtidos analiticamente.

Sistemas Condicionalmente Estáveis

Exemplo 2:

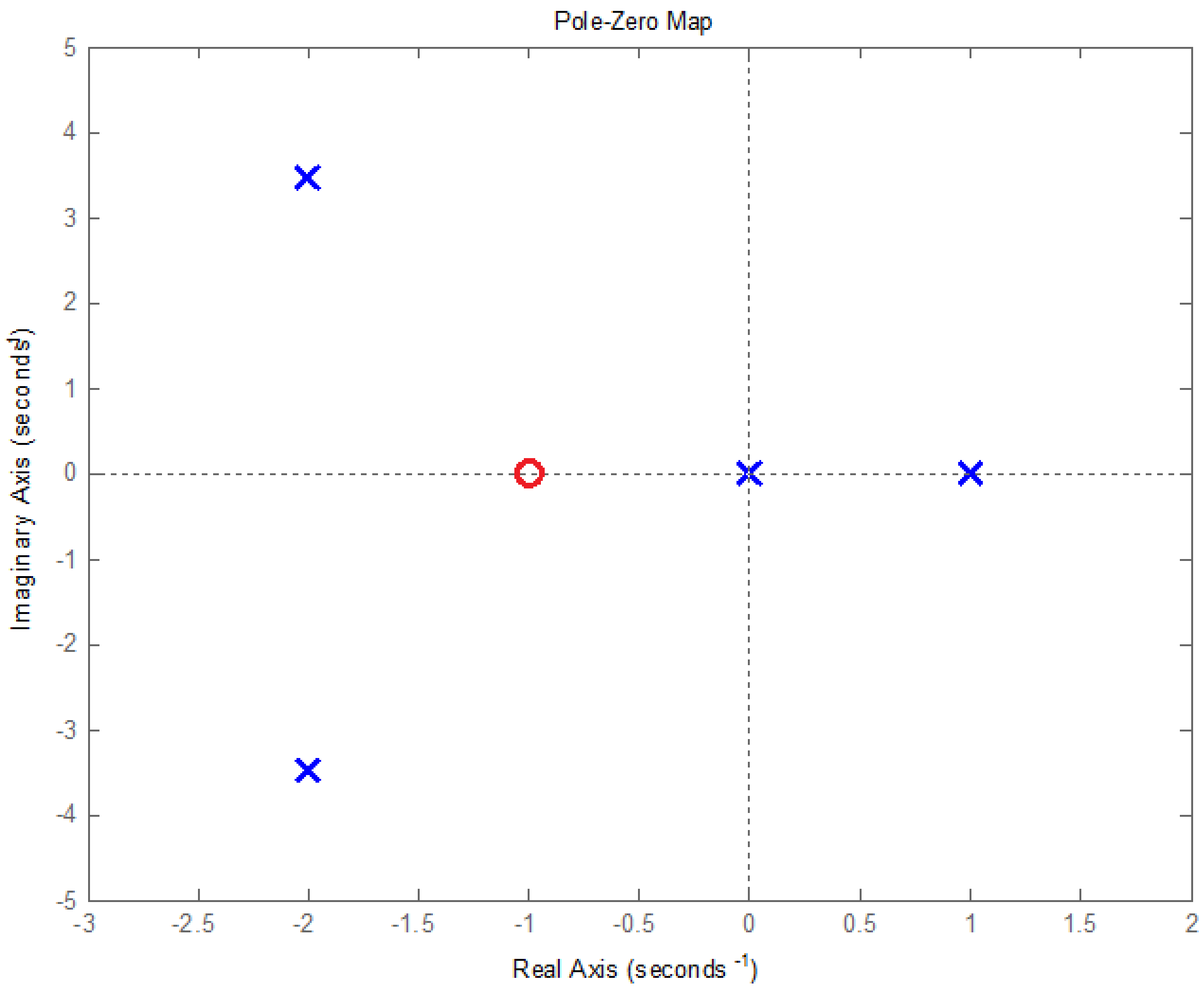
$$G(s) = \frac{s+1}{s(s-1)(s^2+4s+16)}$$

$$p_1 = 0 \qquad z_{1,2} = -1$$

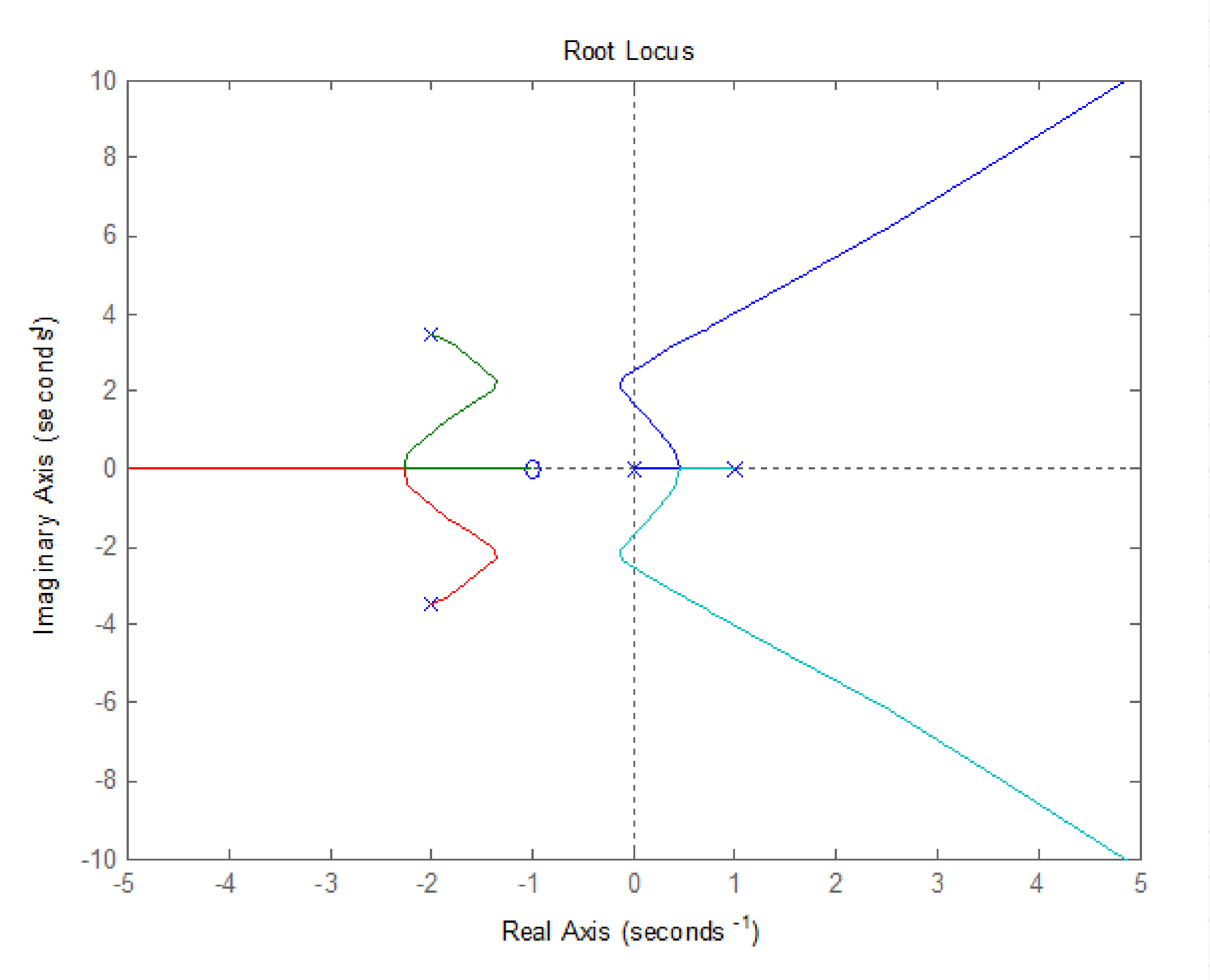
$$p_2 = 1$$

$$p_{3,4} = -2 \pm j3{,}46$$

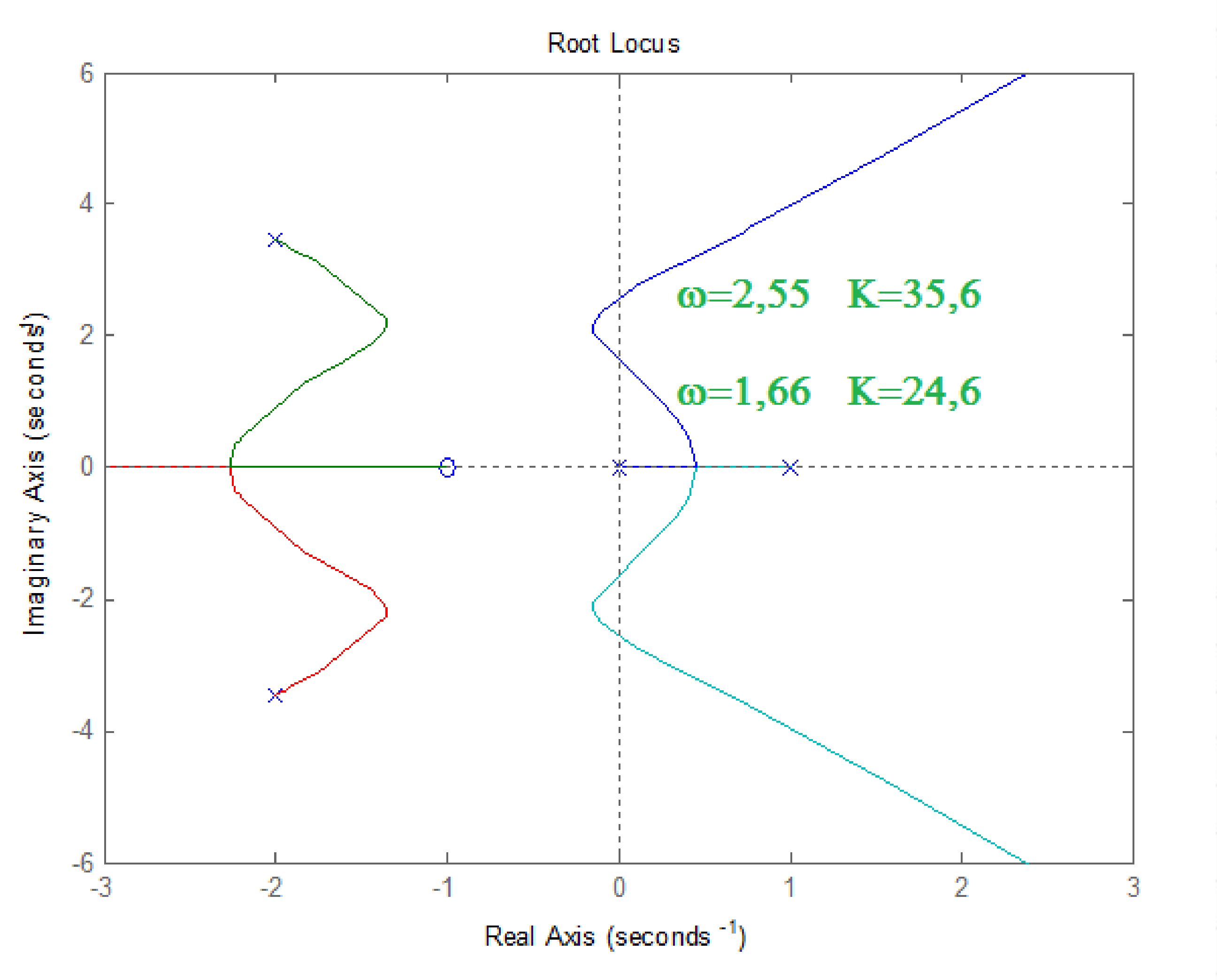
Sistemas Condicionalmente Estáveis



Sistemas Condicionalmente Estáveis



Sistemas Condicionalmente Estáveis



Assim, o sistema é estável para 24,6 < K < 35,6.

Sistemas com Atraso

Sistemas com atraso

O Lugar das Raízes para sistemas com atraso pode ser traçado de duas formas:

- **Forma Exata**: as condições de módulo e fase são aplicadas à função de transferência com atraso. O LR será traçado a partir de valores calculados.
- **Forma Aproximada**: o atraso é representado através de uma aproximação de Padé, e desta forma, podem ser utilizadas as regras usuais para o traçado do LR.

Lugar das Raízes exato

Uma função de transferência com único atraso pode ser escrita como:

$$G(s) = e^{-Ls}\overline{G}(s)$$

sendo L uma constante positiva, que representa um atraso em segundos.

Considerando

$$s = \sigma + j\omega$$

tem-se

$$G(\sigma + j\omega) = e^{-L\sigma} e^{-jL\omega}\overline{G}(\sigma + j\omega)$$

Lugar das Raízes exato

Sabendo que

$$\angle e^{-L\sigma} = 0$$

$$\angle e^{-jL\omega} = \angle(\cos(\omega L) - j\text{sen}(\omega L))$$

$$= -L\omega \quad (\text{radianos})$$

a condição de fase será escrita como

$$\angle G(\sigma + j\omega) = -L\omega + \angle\overline{G}(\sigma + j\omega) = \pi(2q+1)$$

ou $$\angle\overline{G}(\sigma + j\omega) = \pi(2q+1) + L\omega$$

$$= 180^\circ(2q+1) + 57{,}3^\circ L\omega$$

Lugar das Raízes exato

Assim, o Lugar das Raízes será traçado fixando-se ω procurando σ que verifique a condição de fase. O processo é repetido para todos os valores possíveis de ω.

Observe que, para cada valor de q existe um Lugar das Raízes diferente. Além disso, existe um número infinito de ramos no LR.

Entretanto, pode ser feita uma análise simplificada considerando apenas q=0.

Lugar das Raízes exato

Desta forma, o Lugar das Raízes exato é traçado a partir de

$$\angle\overline{G}(\sigma + j\omega) = \pi + L\omega$$

$$= 180^{\circ} + 57{,}3^{\circ} L\omega$$

calculando σ para (infinitos) valores fixos de ω.

Exemplo – Lugar das Raízes exato

Seja a FTMA

$$G(s) = \frac{2e^{-4s}}{100s+1}$$

ou seja,

$$\overline{G}(s) = \frac{2}{100s+1} \quad \text{e} \quad L = 4$$

A condição de fase será dada por:

$$\angle\overline{G}(\sigma + j\omega) = \pi + L\omega$$

Exemplo – Lugar das Raízes exato

Sendo

$$s = \sigma + j\omega$$

tem-se

$$\angle\overline{G}(\sigma + j\omega) = \angle 2 - \angle(100(\sigma + j\omega) + 1$$

$$= 0 - tg^{-1}\left(\frac{100\omega}{1+100\sigma}\right)$$

Substituindo na condição de fase

$$-tg^{-1}\left(\frac{100\omega}{1+100\sigma}\right) = \pi + 4\omega$$

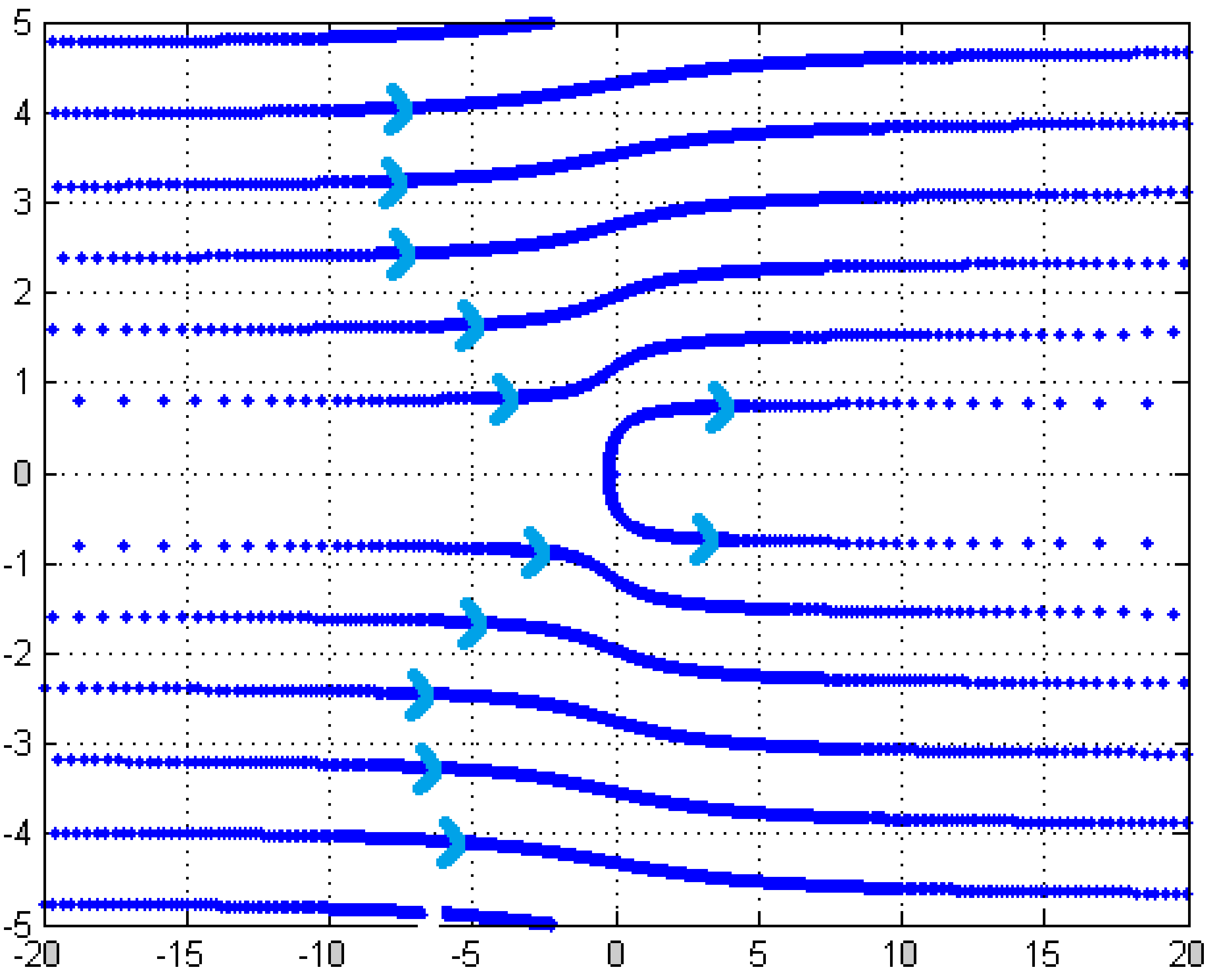
Exemplo – Lugar das Raízes exato

Após manipulações:

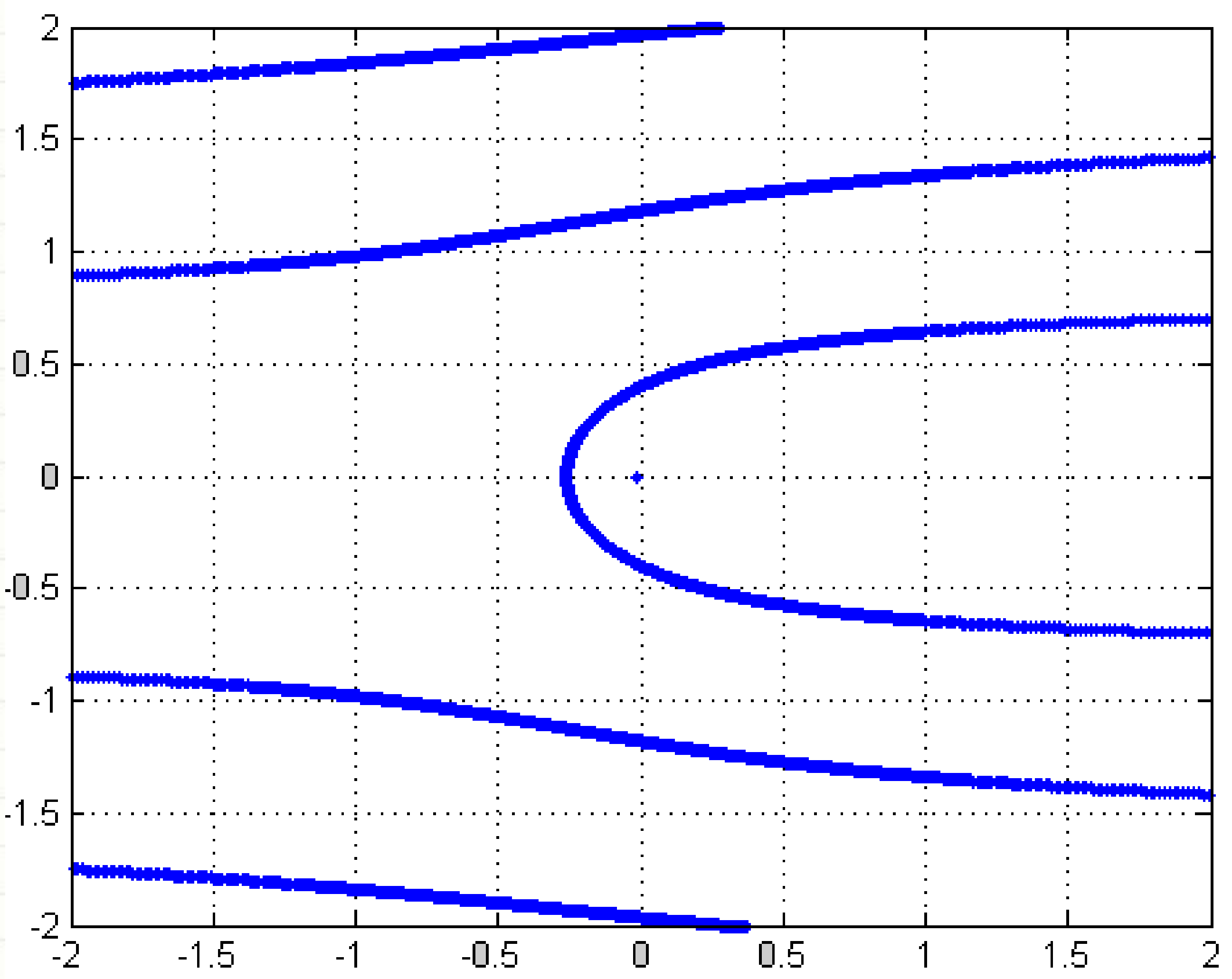
$$\sigma = \frac{100\omega - \mathrm{tg}(\pi + 4\omega)}{100\,\mathrm{tg}(\pi + 4\omega)}$$

Considerando ω = [-5 : 0,01 : 5], obtém-se o LR a seguir.

Exemplo – Lugar das Raízes exato



Exemplo – Lugar das Raízes exato



Exemplo – Lugar das Raízes exato

Do gráfico (ou dos valores calculados), observa-se que o primeiro cruzamento com eixo imaginário ocorre em ω=0,4.

A estabilidade pode ser obtida através da condição de módulo:

$$|\,G(s)\,| = \frac{1}{K} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{2e^{-4s}}{100s+1}\right| = \frac{1}{K}$$

Exemplo – Lugar das Raízes exato

Para s = j0,4

$$2K\left| e^{-4\times j0,4} \right| = \left|\left(100\times j0,4\right)+1\right|$$

$$2K = \sqrt{40^2+1^2} \Rightarrow K = 20,01$$

Portanto, o sistema é estável para 0 < K < 20.

Lugar das Raízes Aproximado

Neste caso, o atraso é representado por uma **aproximação de Padé** de ordem apropriada.

$$\text{Padé}(0,1) \quad \rightarrow \quad e^{-Ls} = \frac{1}{Ls+1}$$

$$\text{Padé}(1,1) \quad \rightarrow \quad e^{-Ls} = \frac{2-Ls}{2+Ls}$$

$$\text{Padé}(2,2) \quad \rightarrow \quad e^{-Ls} = \frac{1-(Ls/2)s+(Ls)^2/12}{1+(Ls/2)s+(Ls)^2/12}$$

Exemplo - Lugar das Raízes Aproximado

Do exemplo anterior:

$$\overline{G}(s) = \frac{2}{100s+1} \quad \text{e} \quad L = 4$$

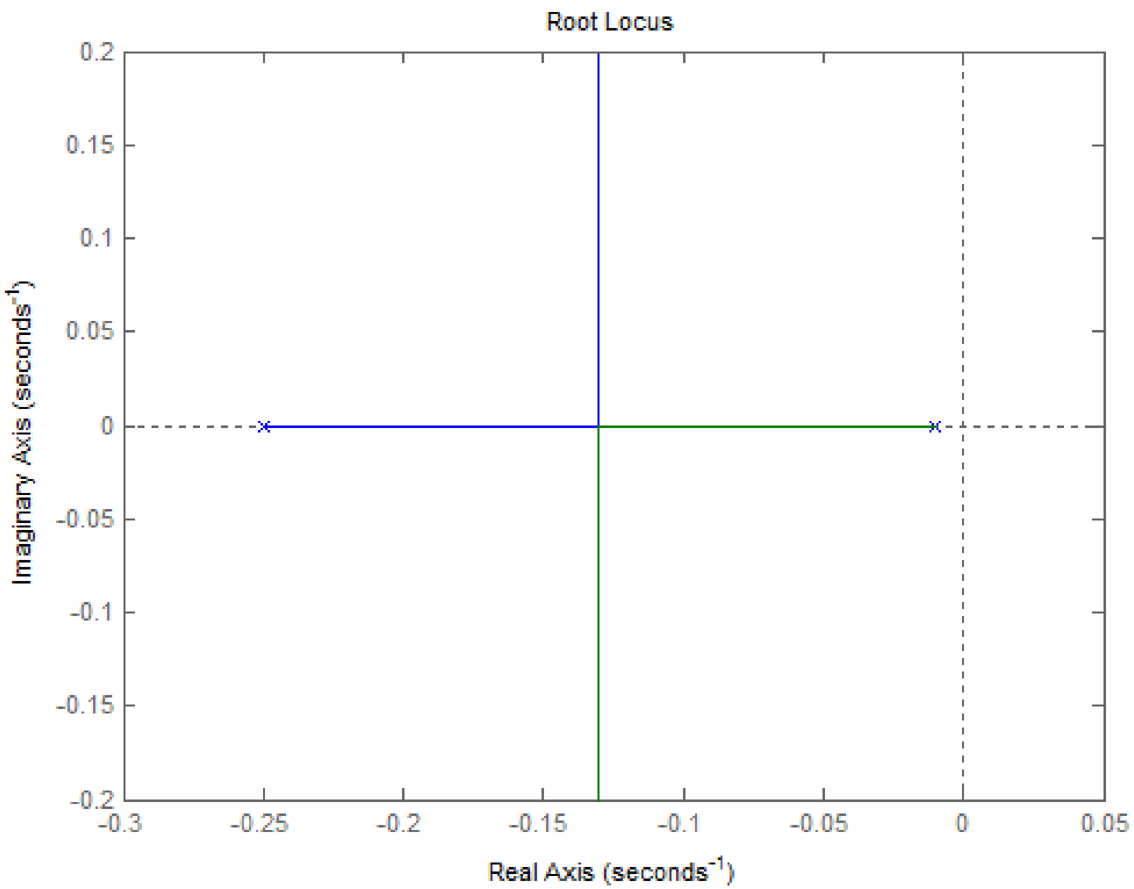
Aproximação de Padé (0,1)

$$e^{-Ls} = \frac{1}{Ls+1} \quad \rightarrow \quad e^{-4s} = \frac{1}{4s+1}$$

ou seja,

$$G_1(s) = \frac{2}{(4s+1)(100s+1)} = \frac{0{,}005}{(s+0{,}01)(s+0{,}25)}$$

Aproximação de Padé (0,1)



Sistema estável para qualquer valor K > 0.

Exemplo - Lugar das Raízes Aproximado

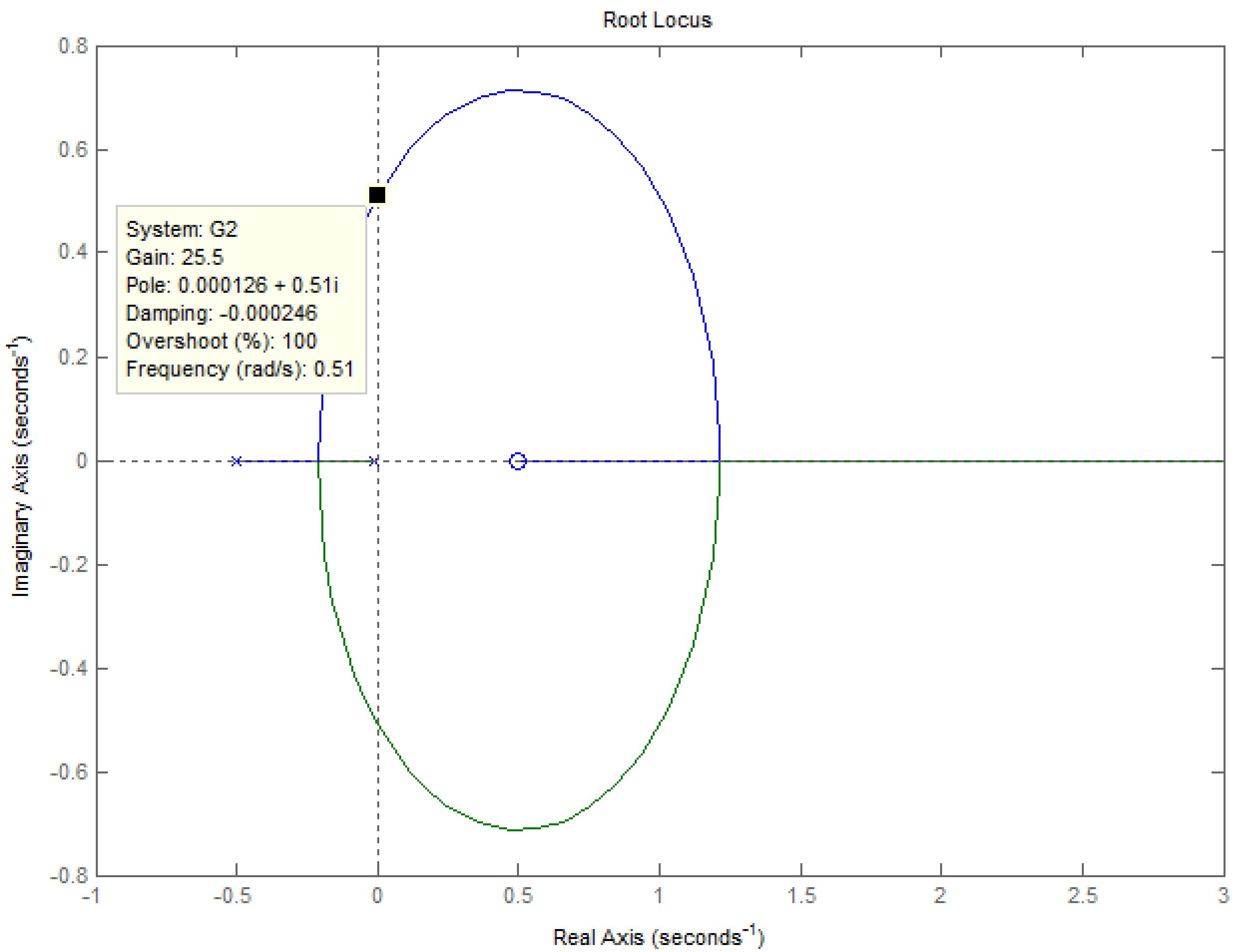
Aproximação de Padé (1,1)

$$e^{-Ls} = \frac{2 - Ls}{2 + Ls} \quad \rightarrow \quad e^{-4s} = \frac{2 - 4s}{2 + 4s}$$

ou seja,

$$G_2(s) = \frac{2(2 - 4s)}{(2 + 4s)(100s + 1)} = \frac{-0{,}02(s - 0{,}5)}{(s + 0{,}01)(s + 0{,}5)}$$

Aproximação de Padé (1,1)



Sistema estável para $0 < K < 25{,}5$.

Exemplo - Lugar das Raízes Aproximado

Aproximação de Padé (2,2)

$$e^{-Ls} = \frac{1 - (Ls/2)s + (Ls)^2/12}{1 + (Ls/2)s + (Ls)^2/12}$$

$$\downarrow$$

$$e^{-4s} = \frac{s^2 - 1{,}5s + 0{,}75}{s^2 + 1{,}5s + 0{,}75}$$

Exemplo - Lugar das Raízes Aproximado

$$G_3(s) = \frac{2(s^2 - 1{,}5s + 0{,}75)}{(s^2 + 1{,}5s + 0{,}75)(100s + 1)}$$

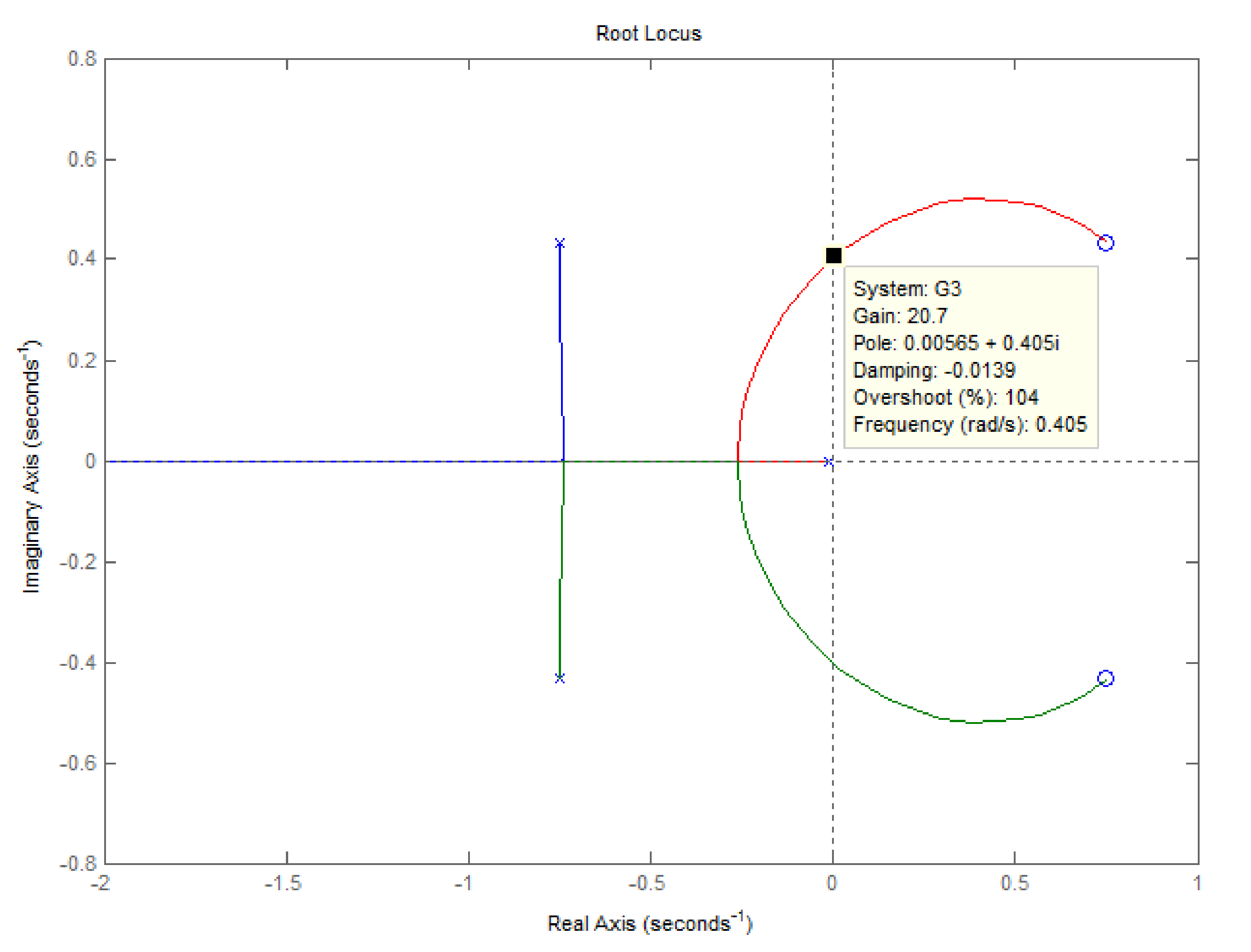
$$= \frac{0{,}02(s^2 - 1{,}5s + 0{,}75)}{(s^2 + 1{,}5s + 0{,}75)(s + 0{,}01)}$$

$$z_{1,2} = 0{,}75 \pm j0{,}43$$

$$p_{1,2} = -0{,}75 \pm j0{,}43$$

$$p_3 = -0{,}01$$

Aproximação de Padé (2,2)



Sistema estável para 0< K < 20,7.