Objetivos de Controle

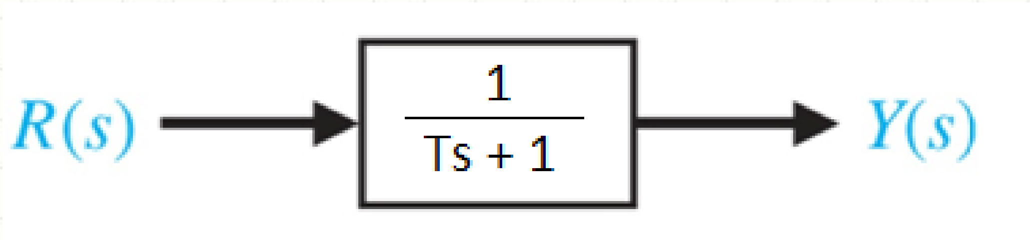
Profa. Cristiane Paim

Objetivos de Controle

O objetivo de um sistema de controle é fazer com que o sistema apresente um comportamento pré definido em regime transitório e/ou permanente.

As especificações (usuais) da resposta transitória e em regime permanente são definidas para sistemas de 1ª e 2ª ordem.

Resposta ao Degrau para Sistemas de 1ª Ordem



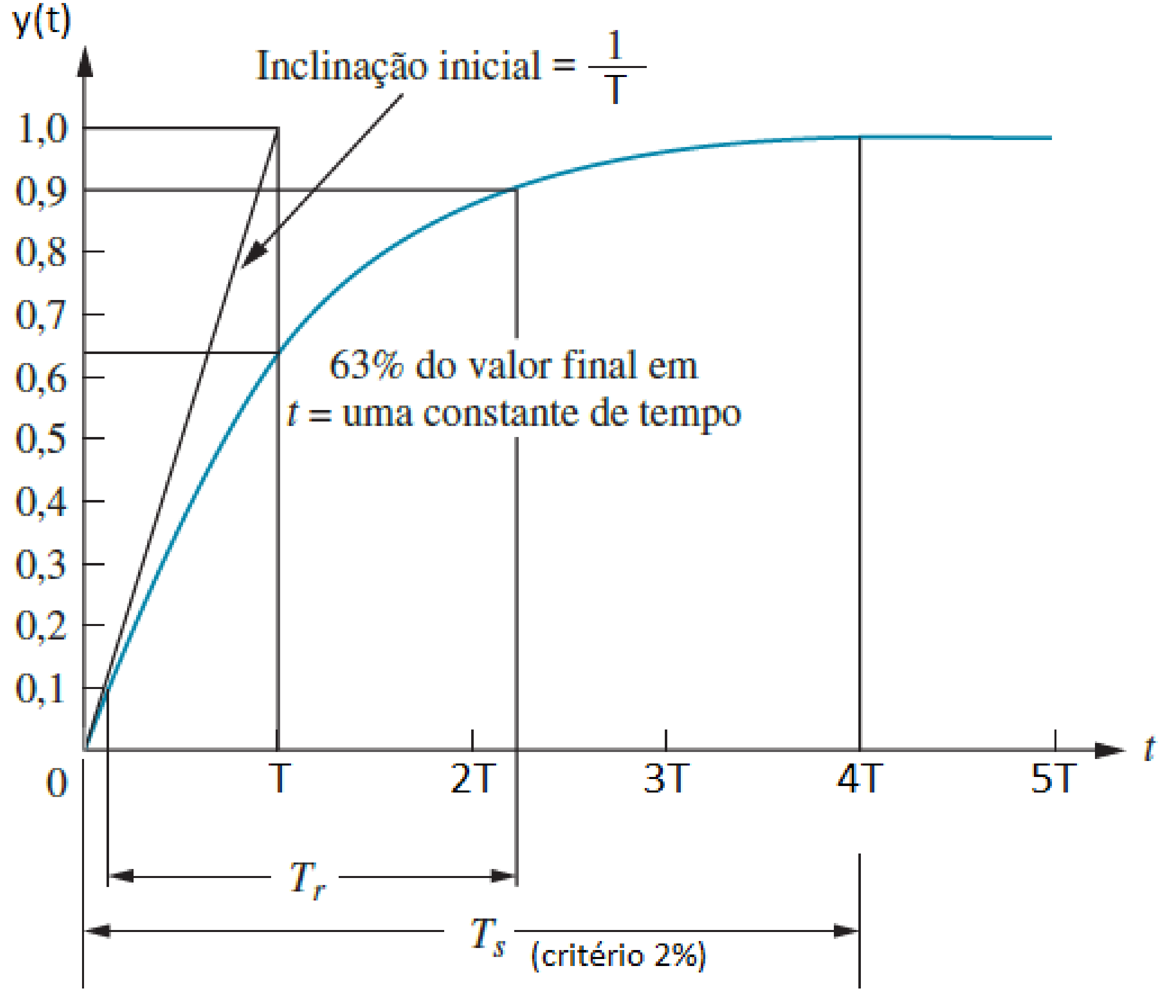
$$R(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{Ts^2 + s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/T}$$

Aplicando Laplace:

$$\boxed{y(t) = 1 - e^{-t/T}}$$

Resposta ao Degrau para Sistemas de 1ª Ordem



Especificações para a resposta transitória de sistemas de 1ª ordem

- **Tempo de subida**:

$$(10\,\text{a}\,90\%) \qquad t_r = 2,20T$$

$$(5\,\text{a}\,95\%) \qquad t_r = 2,94T$$

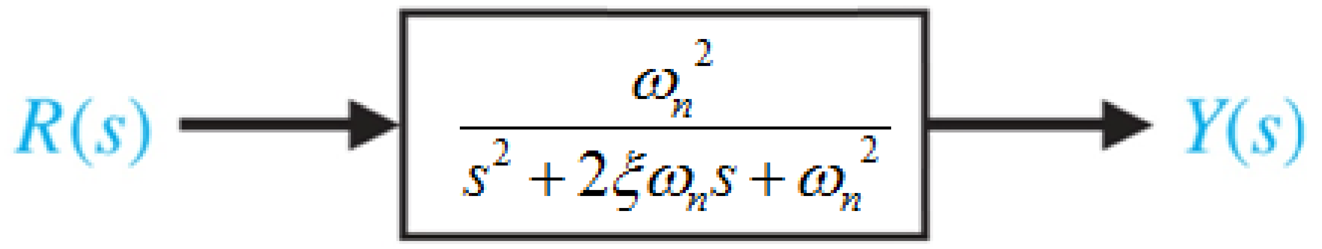
- **Tempo de acomodação**:

$t_s = 3T$ Critério 5%

$t_s = 4T$ Critério 2%

$t_s = 5T$ Critério 1%

Resposta ao Degrau para Sistemas de 2ª Ordem



Os polos do sistema serão dados por:

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

ou

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_d$$

sendo $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ (frequência natural amortecida).

Resposta ao Degrau para Sistemas de 2ª Ordem

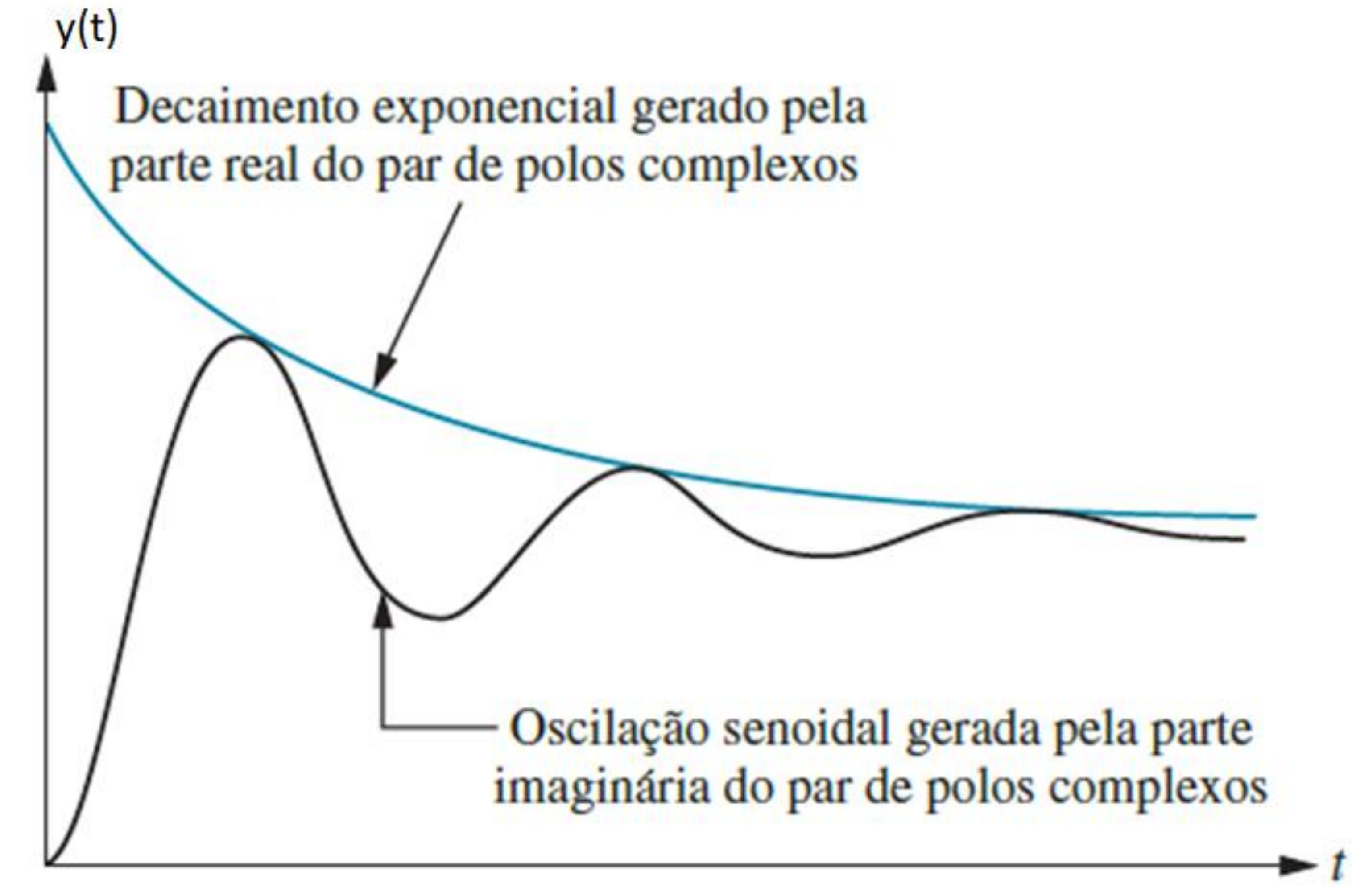
A resposta no tempo é dada por:

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\left[\cos\left(\omega_d t\right) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\operatorname{sen}\left(\omega_d t\right)\right]$$

ou

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\operatorname{sen}\left[\omega_d t + tg^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right]$$

Resposta ao Degrau para Sistemas de 2ª Ordem

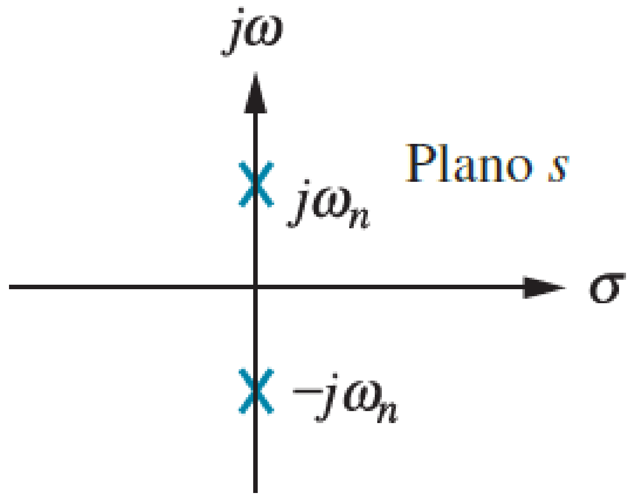


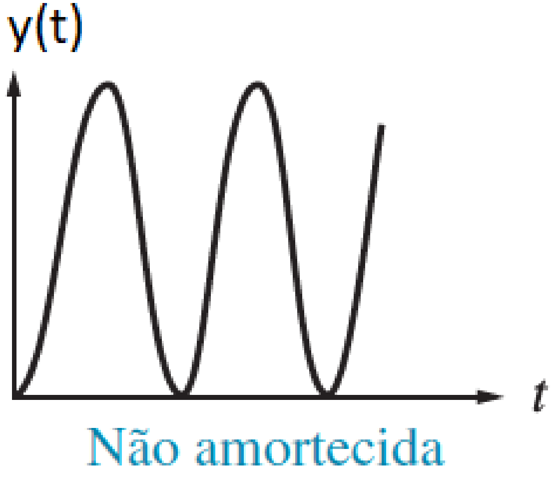
Resposta ao Degrau para Sistemas de 2ª Ordem

$$\xi = 0 \quad \rightarrow \quad s_{1,2} = \pm j\,\omega_n$$

A resposta torna-se não amortecida, com oscilações de frequência ω_n mantidas indefinidamente.

$$y(t) = 1 - \cos(\omega_n t)$$



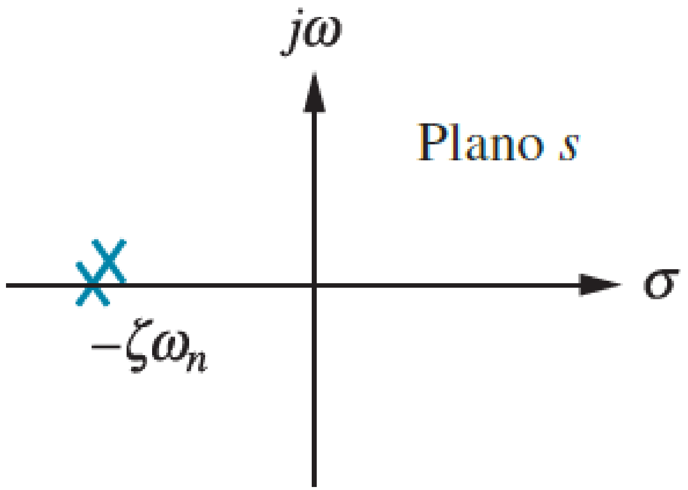


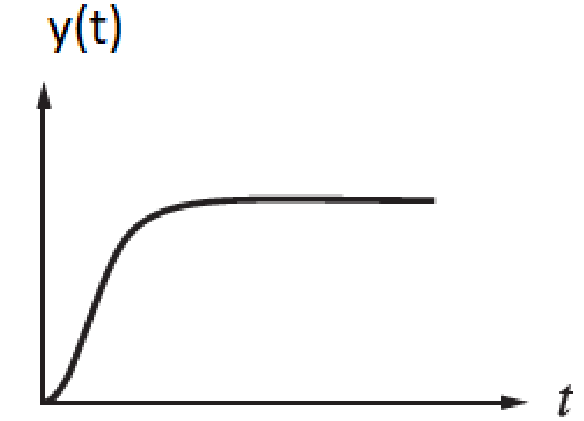
Resposta ao Degrau para Sistemas de 2ª Ordem

$$\xi = 1 \quad \rightarrow \quad s_{1,2} = -\xi\omega_n$$

A resposta será criticamente amortecida.

$$y(t) = 1 - e^{-\omega_n t}\left(\omega_d t + 1\right)$$





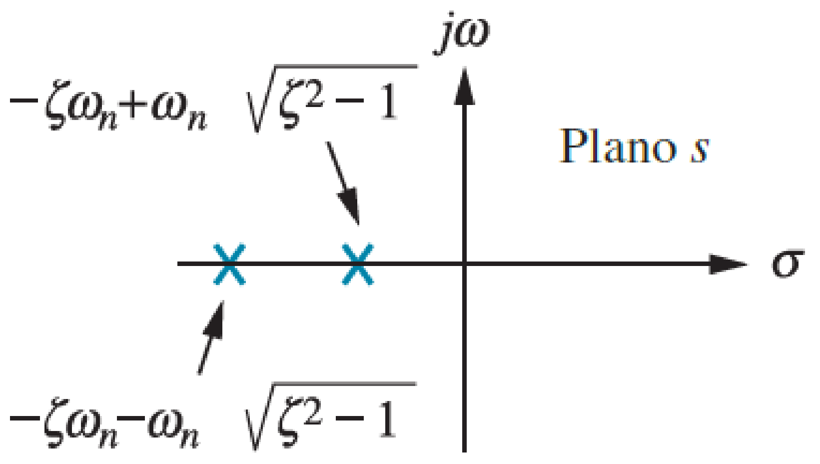
Criticamente amortecida

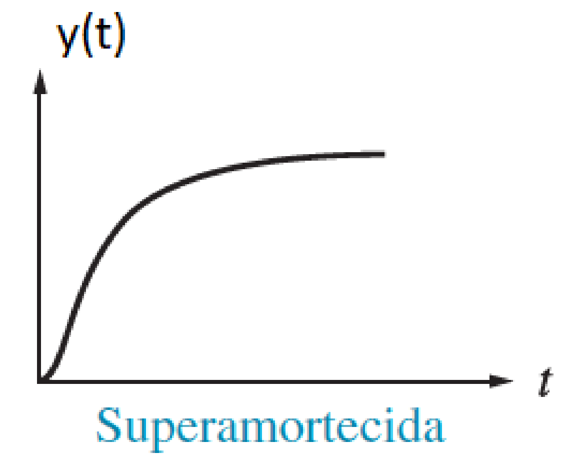
Resposta ao Degrau para Sistemas de 2ª Ordem

$$\xi > 1 \quad \rightarrow \quad s_{1,2} = -\xi\,\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

Neste caso, a resposta é dita sobreamortecida.

$$y(t) = 1 - \frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2 - 1}}\left[\frac{1}{s_1}e^{s_1 t} - \frac{1}{s_2}e^{s_2 t}\right]$$



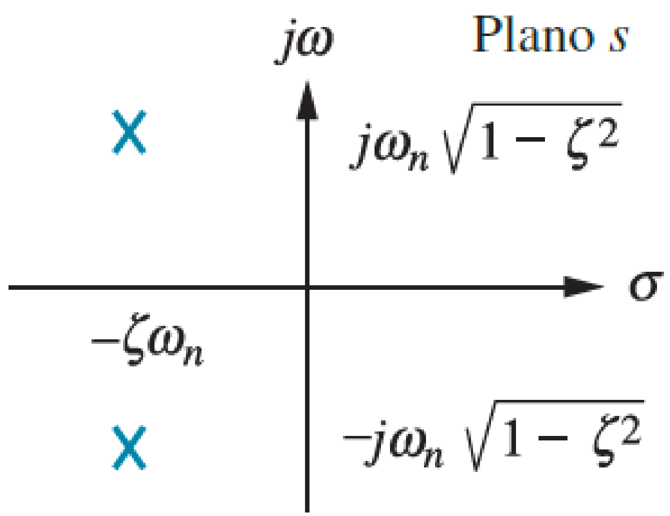


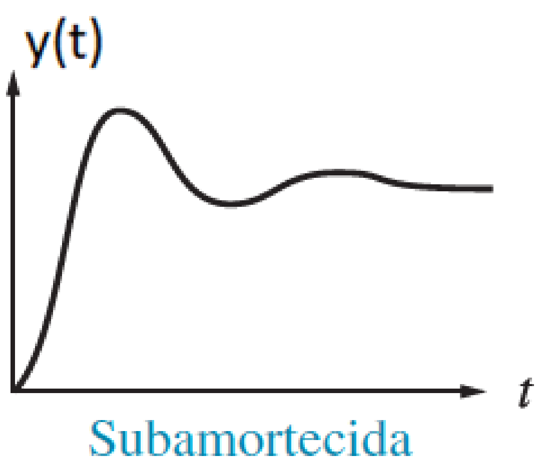
Resposta ao Degrau para Sistemas de 2ª Ordem

$$0<\xi<1 \quad \rightarrow \quad s_{1,2}=-\xi\,\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

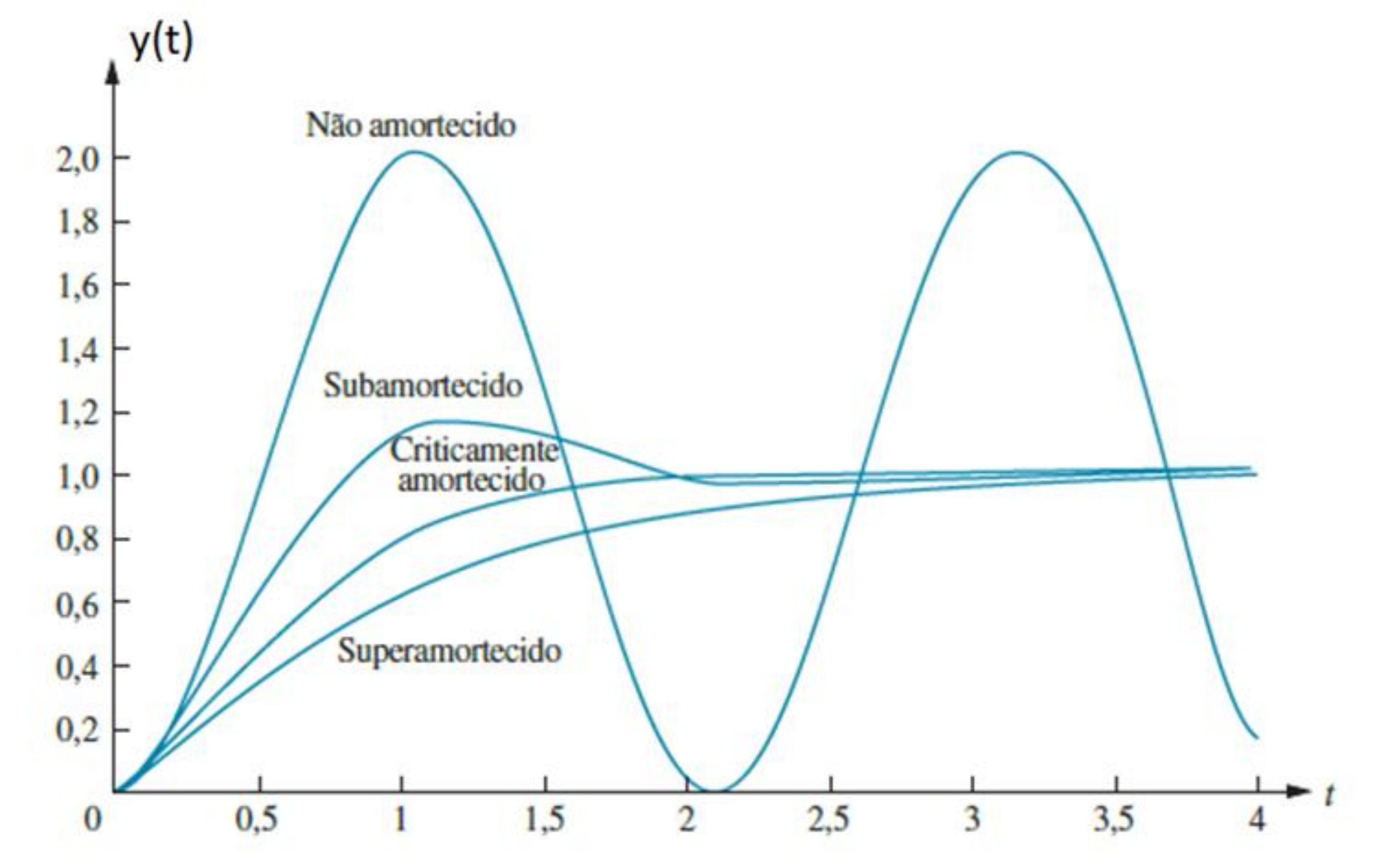
A resposta do sistema é subamortecida.

$$y(t)=1-\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\,\mathrm{sen}\left[\omega_d t+tg^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right]$$

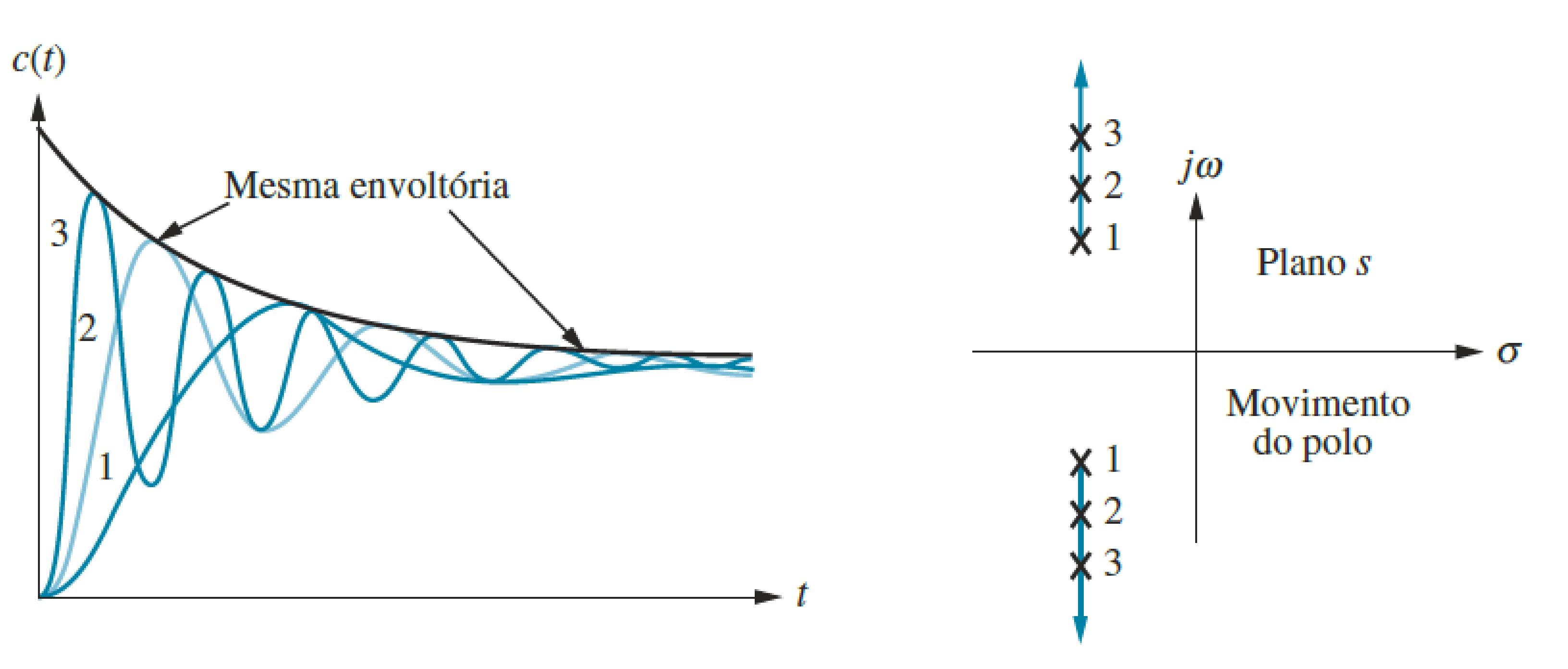




Resposta ao Degrau para Sistemas de 2ª Ordem



Resposta ao degrau para sistemas de 2ª ordem subamortecidos

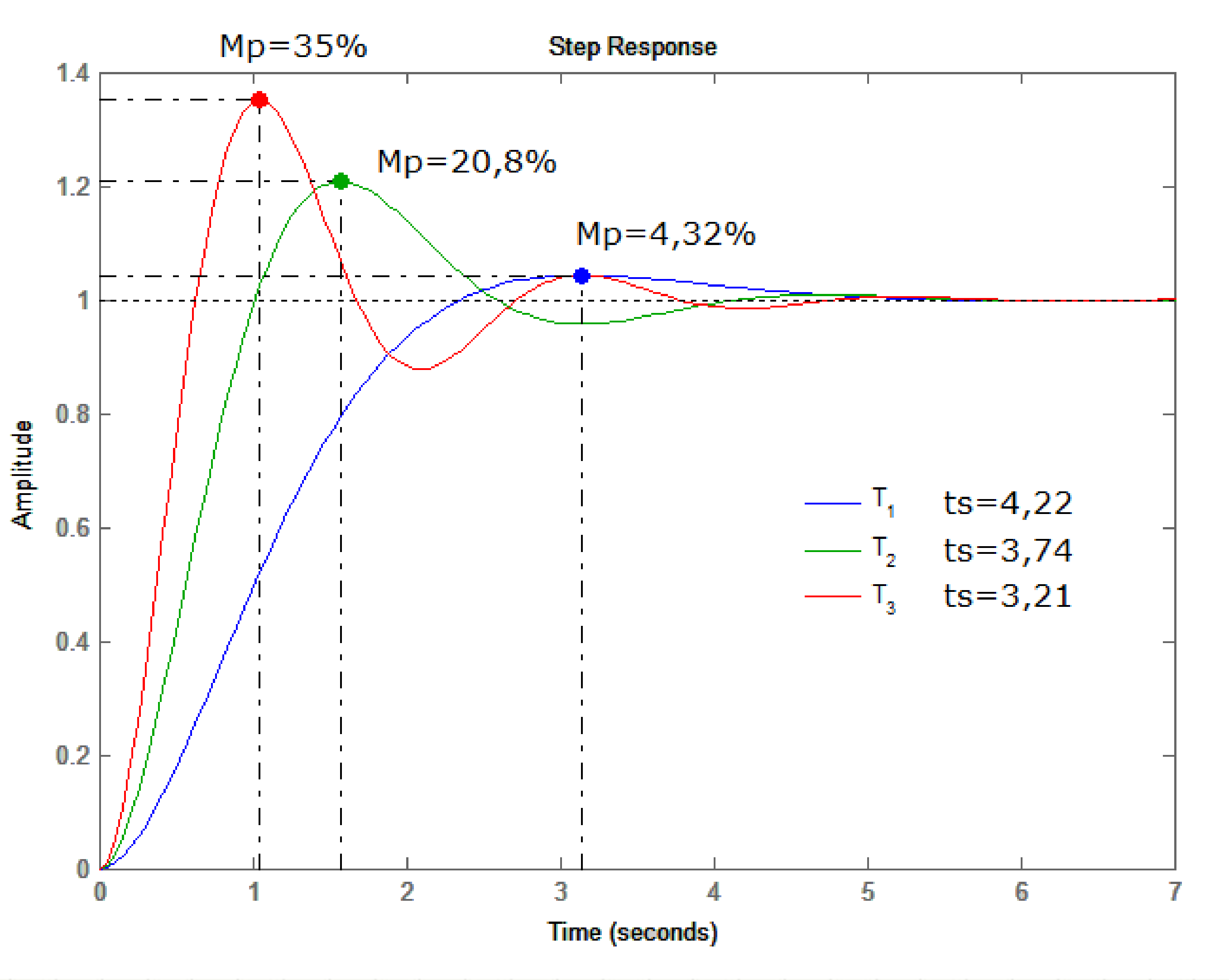


$$T_1 \quad \rightarrow \quad p_{1,2} = -1 \pm j$$

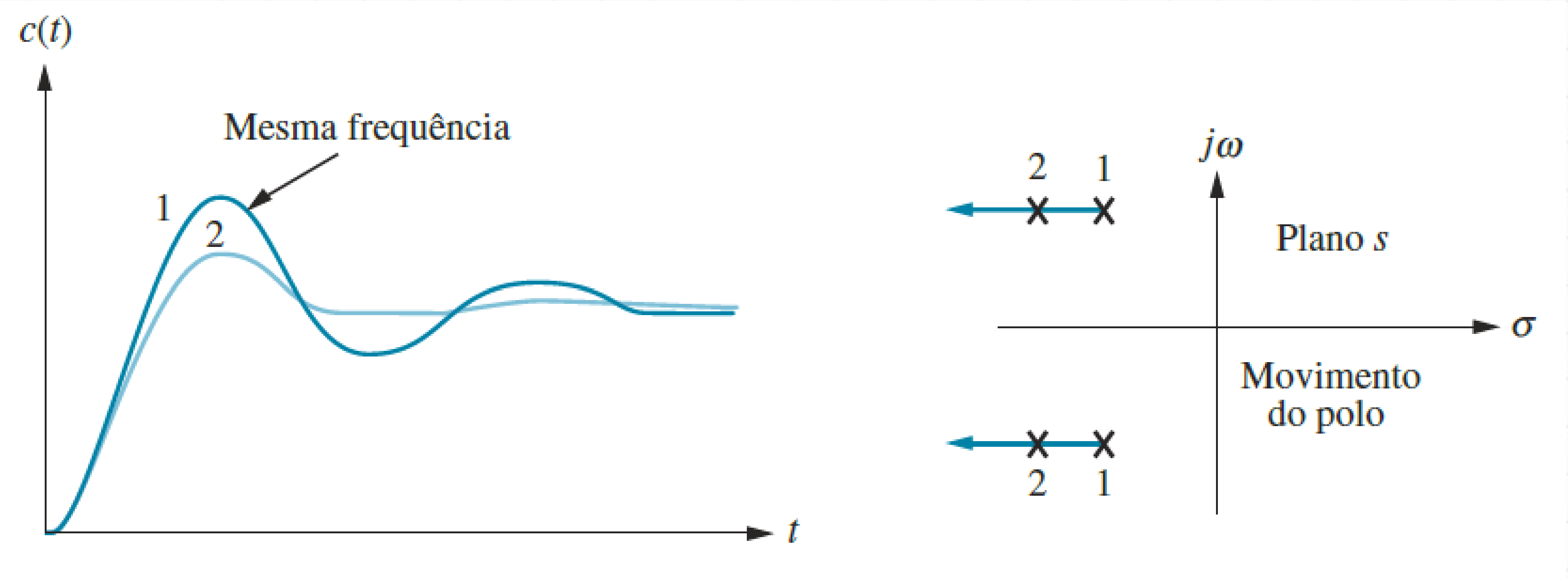
$$T_2 \quad \rightarrow \quad p_{1,2} = -1 \pm j2$$

$$T_3 \quad \rightarrow \quad p_{1,2} = -1 \pm j3$$

Resposta ao degrau para sistemas de 2ª ordem subamortecidos



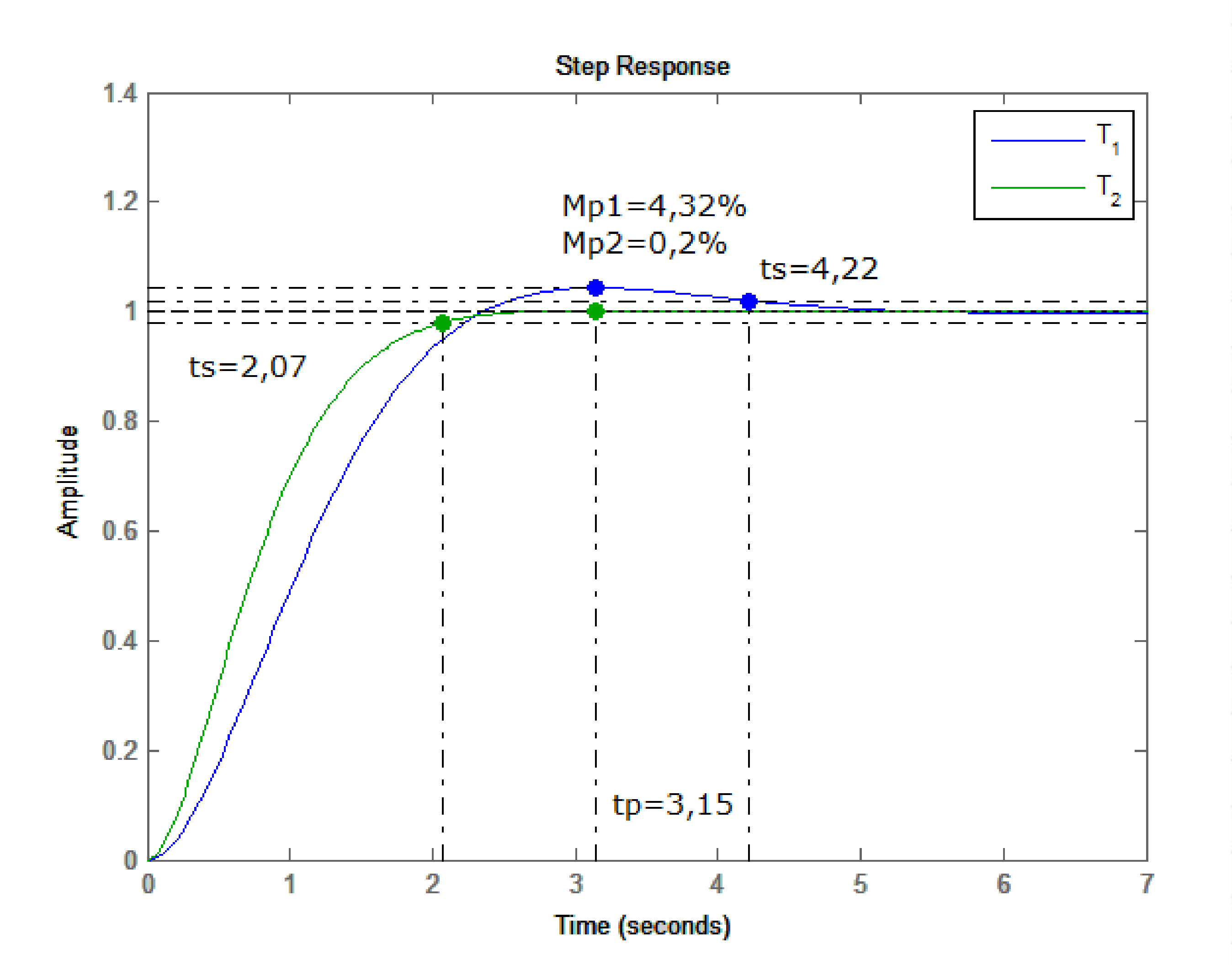
Resposta ao degrau para sistemas de 2ª ordem subamortecidos



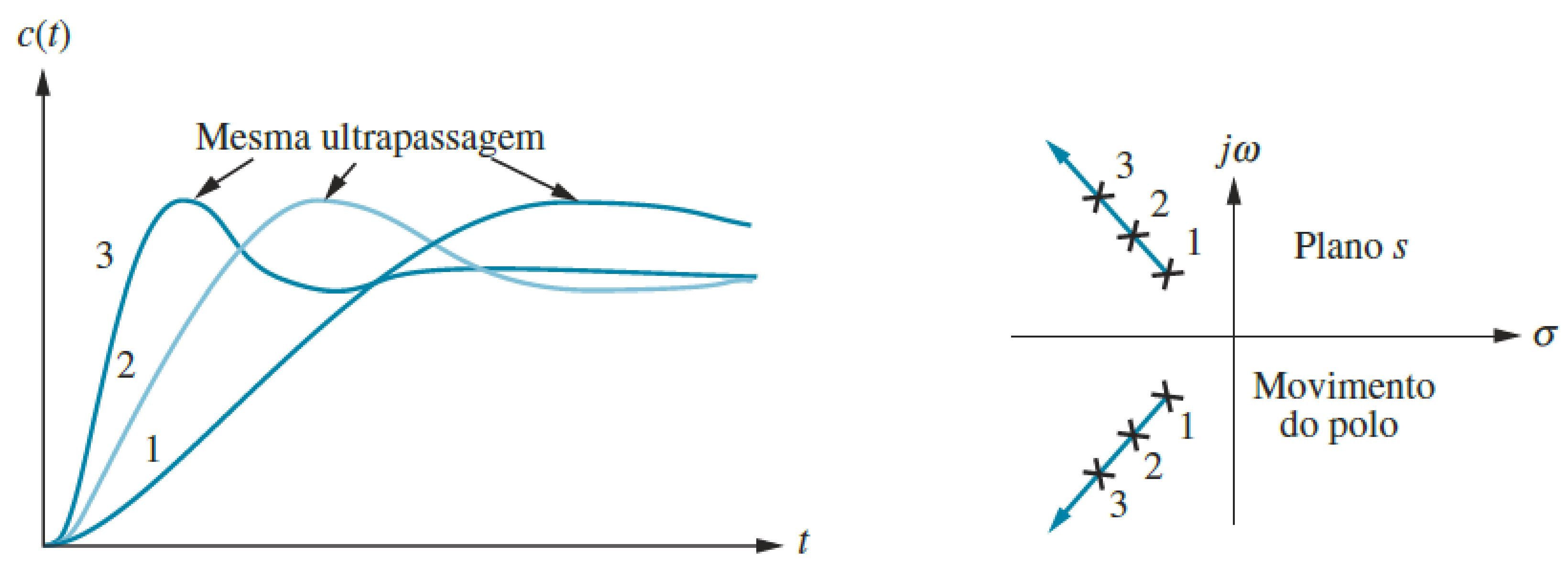
$$T_1 \quad \rightarrow \quad p_{1,2} = -1 \pm j$$

$$T_2 \quad \rightarrow \quad p_{1,2} = -2 \pm j$$

Resposta ao degrau para sistemas de 2ª ordem subamortecidos

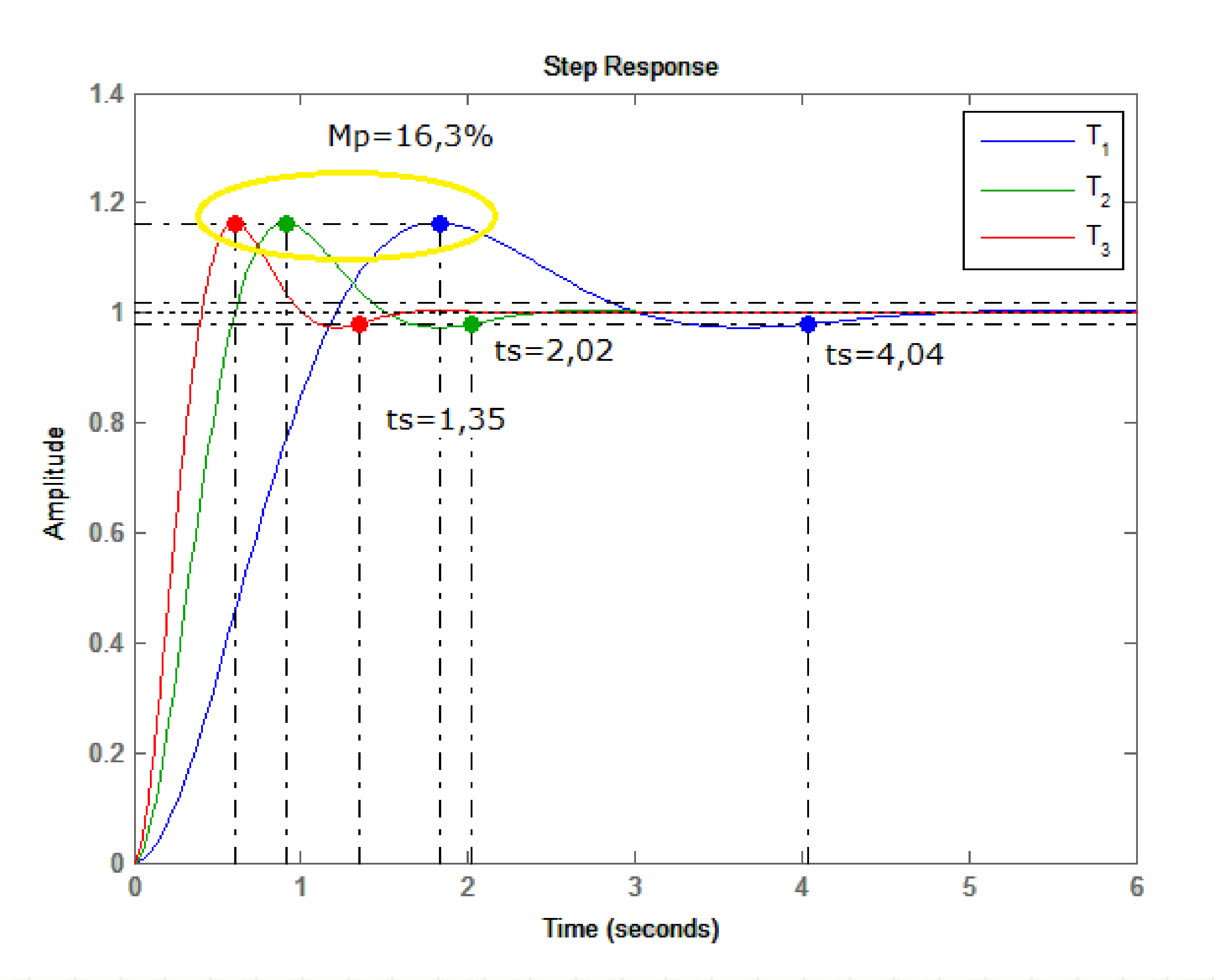


Resposta ao degrau para sistemas de 2ª ordem subamortecidos

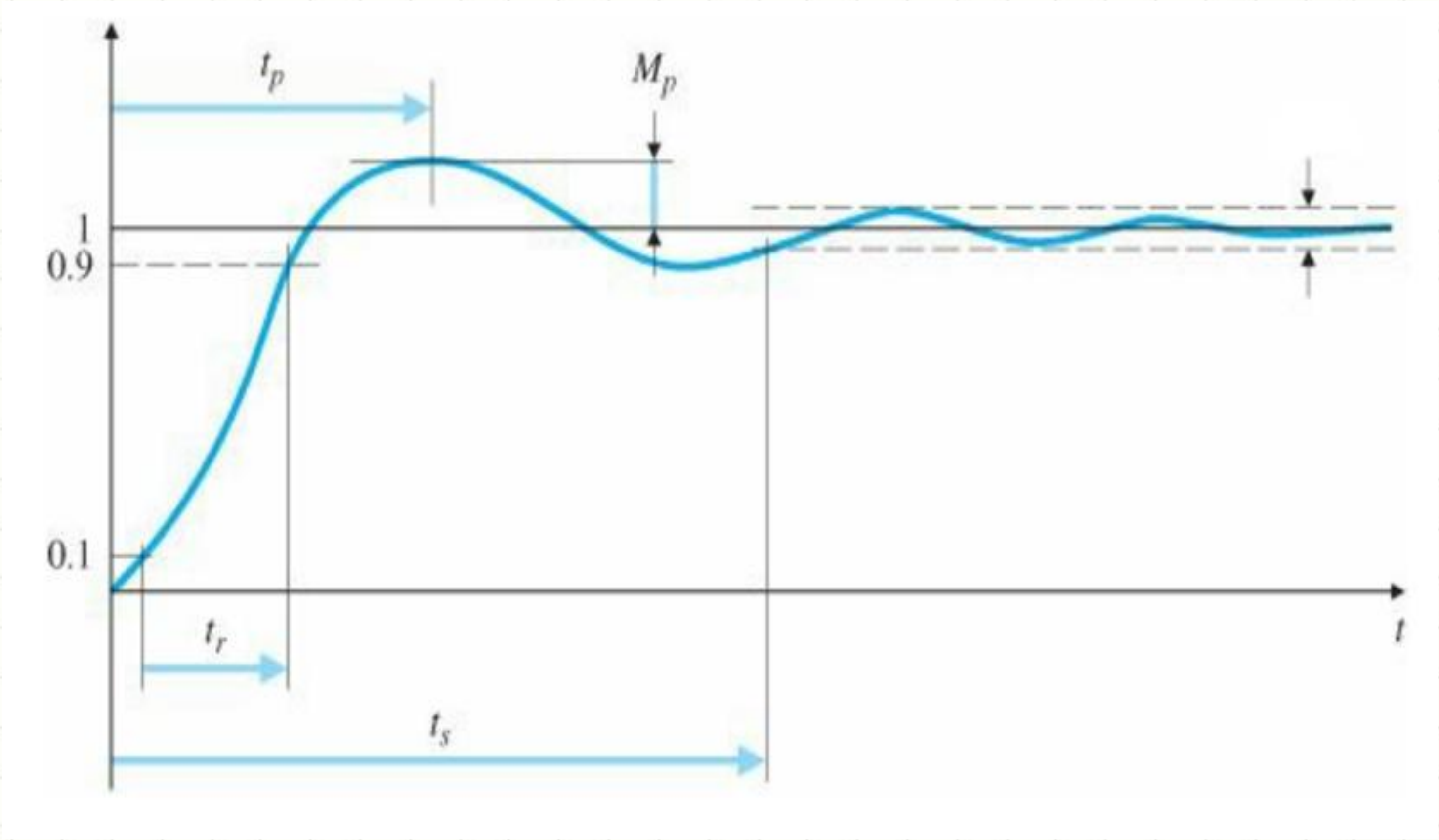


$$\xi = 0{,}5 \quad \begin{cases} T_1 & \rightarrow & \omega_n = 2 & p_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{3} \\ T_2 & \rightarrow & \omega_n = 4 & p_{1,2} = -2 \pm j2\sqrt{3} \\ T_3 & \rightarrow & \omega_n = 6 & p_{1,2} = -3 \pm j3\sqrt{3} \end{cases}$$

Resposta ao degrau para sistemas de 2ª ordem subamortecidos



Especificações para a resposta transitória de sistemas de 2ª ordem subamortecidos



Especificações para a resposta transitória de sistemas de 2ª ordem Subamortecidos

Tempo de Subida (0 – 100%):

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d}$$

sendo

$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right) \quad \text{e} \quad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

Para fins de projeto geralmente utilizam-se as seguintes aproximações:

$$(10 \text{ a } 90\%) \quad t_r = 1{,}8/\omega_n$$

$$(0 \text{ a } 100\%) \quad t_r = 2{,}4/\omega_n$$

Especificações para a resposta transitória de sistemas de 2ª ordem Subamortecidos

Tempo de pico:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

Sobressinal máximo:

$$M_p = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Tempo de acomodação:

critério 5%	$t_s = 3/\xi\omega_n$
critério 2%	$t_s = 4/\xi\omega_n$
critério 1%	$t_s = 5/\xi\omega_n$

Especificações para a resposta transitória de sistemas de 2ª ordem Criticamente ou Sobreamortecidos

Tempo de subida:

$$
\begin{array}{ll}
(10 \text{ a } 90\%) & t_r = 1{,}8/|p_m| \\
(0 \text{ a } 100\%) & t_r = 2{,}4/|p_m|
\end{array}
$$

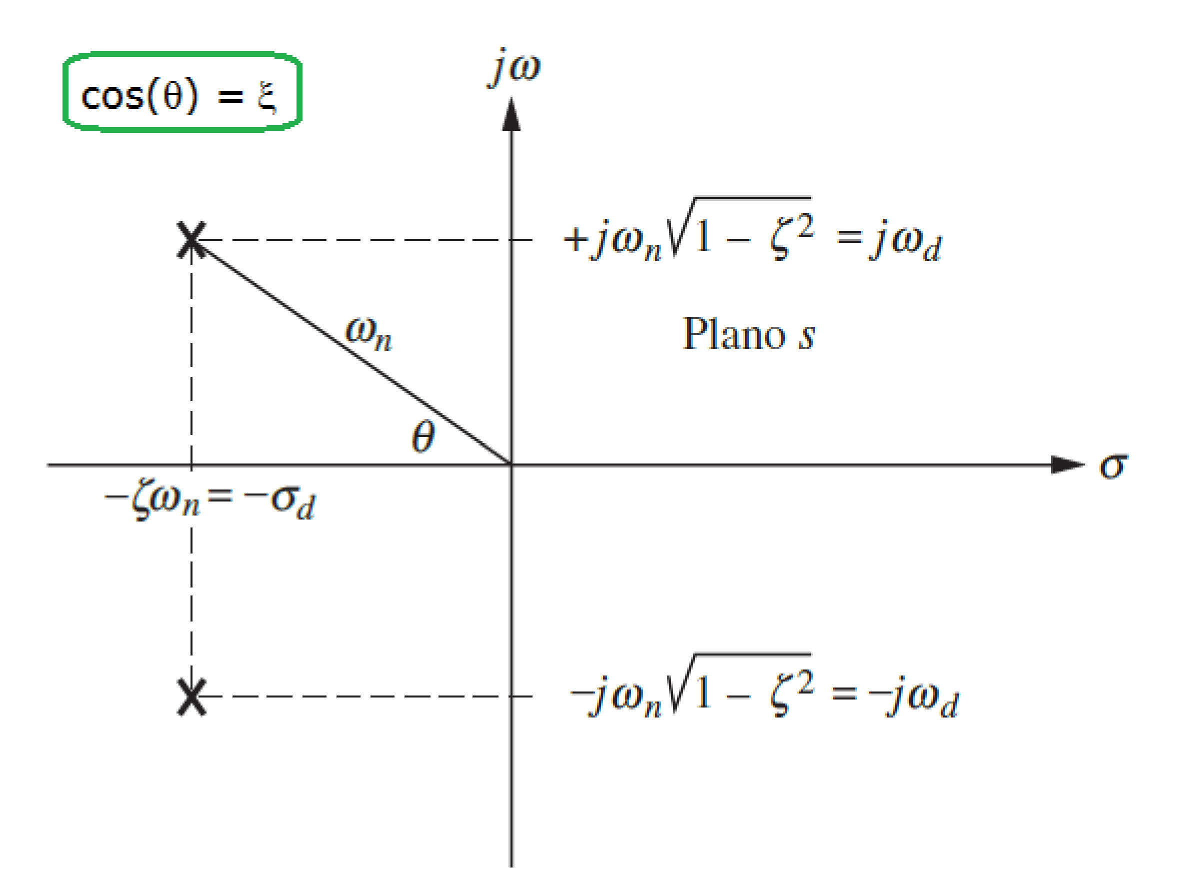
sendo p_m o polo mais próximo da origem.

Tempo de acomodação:

$$
\begin{array}{ll}
\text{critério } 5\% & t_s = 3/|p_m| \\
\text{critério } 2\% & t_s = 4/|p_m| \\
\text{critério } 1\% & t_s = 5/|p_m|
\end{array}
$$

Região desejada para os polos de malha fechada

Sistema subamortecido ⇨ polos complexos conjugados



Região desejadas para os polos de malha fechada

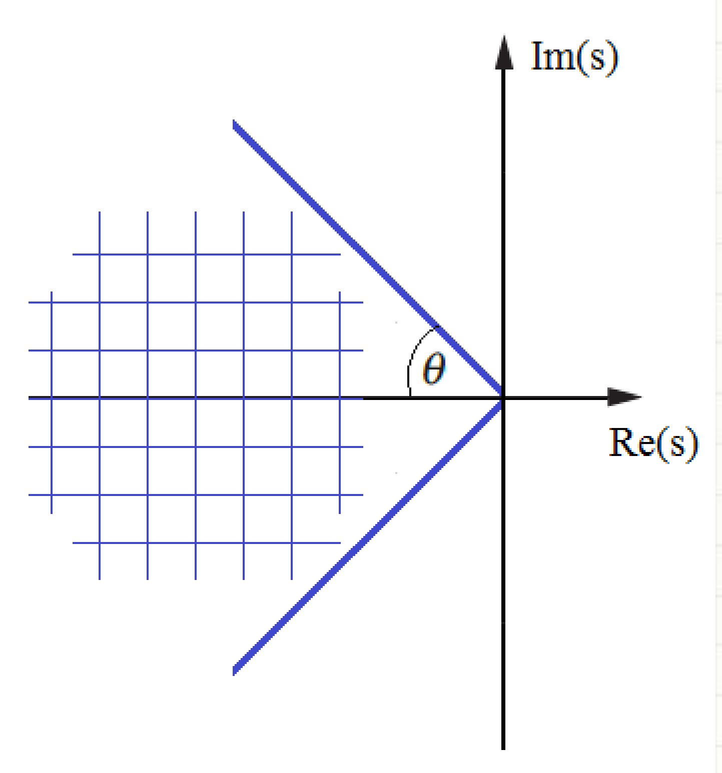
- **Sobressinal máximo**

$$M_p = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \le M_{p_{\max}}$$

Portanto,

$$\xi \ge \frac{\left|\ln\left(M_{p_{\max}}\right)\right|}{\sqrt{\pi^2 + \left[\ln(M_{p_{\max}})\right]^2}}$$

$$\xi \ge \xi_{\min} \quad \Longrightarrow \quad \theta < \theta_{\max}$$

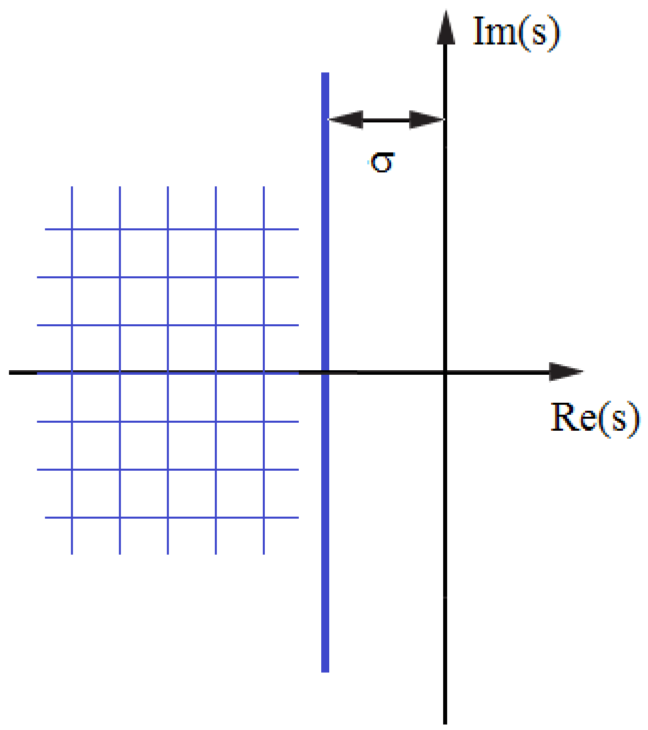


Região desejadas para os polos de malha fechada

- **Tempo de acomodação**

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} \leq t_{s_{Máx}}$$

$$\xi\omega_n \geq \sigma_{\min}$$



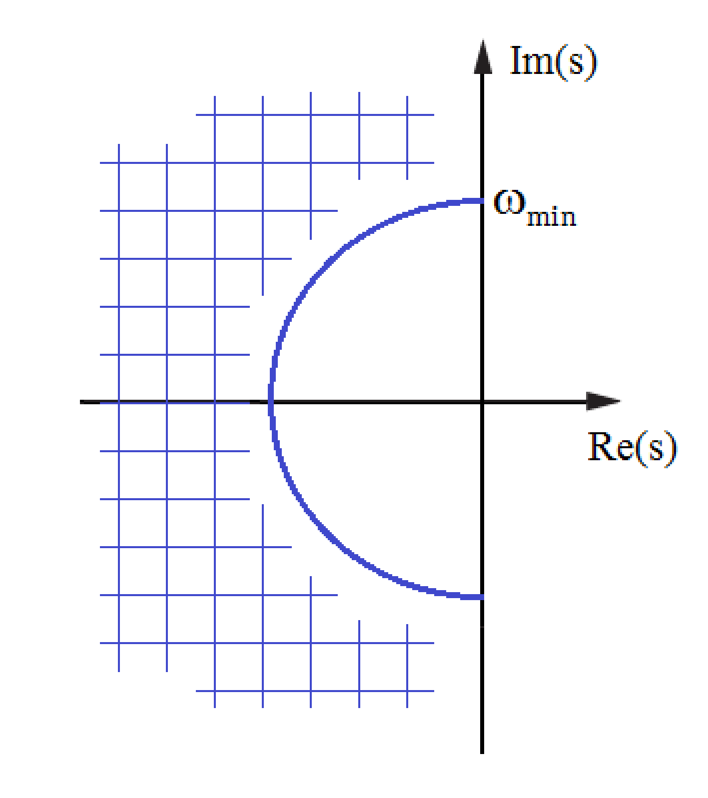
σ: parte real dos polos complexos conjugados

Região desejadas para os polos de malha fechada

- **Tempo de subida**

$$t_r = \frac{2{,}4}{\omega_n} \leq t_{r_{\max}}$$

$$\omega_n \geq \omega_{\min}$$

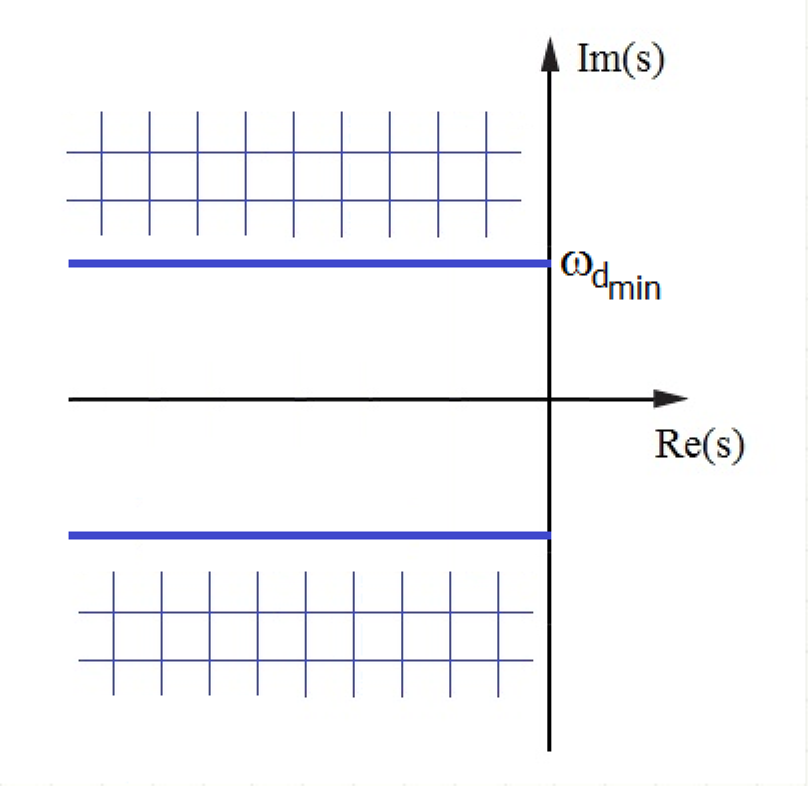


Região desejadas para os polos de malha fechada

- **Tempo de pico**

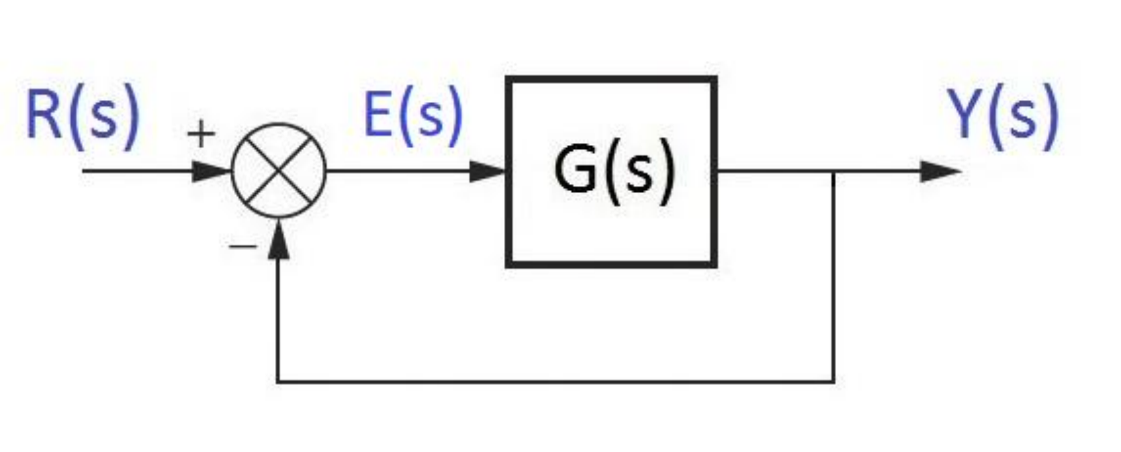
$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \leq t_{p_{\max}}$$

$$\omega_d \geq \omega_{d_{\min}}$$



Resposta em Regime Permanente

Seja o sistema de controle com realimentação unitária:



O sinal de erro é definido como a diferença entre o sinal de entrada e o sinal de saída:

$$E(s) = R(s) - Y(s)$$

Resposta em Regime Permanente

Em regime permanente, podem ser obtidos os coeficientes e erros estacionários associados a cada tipo de entrada: degrau, rampa e parábola.

$$\mathrm{K_P} = \lim_{s\to 0} G(s) \quad \Rightarrow \quad e_\infty = \frac{1}{1+\mathrm{K_P}}$$

$$\mathrm{K_V} = \lim_{s\to 0} sG(s) \quad \Rightarrow \quad e_\infty = \frac{1}{\mathrm{K_V}}$$

$$\mathrm{K_a} = \lim_{s\to 0} s^2 G(s) \quad \Rightarrow \quad e_\infty = \frac{1}{\mathrm{K_a}}$$

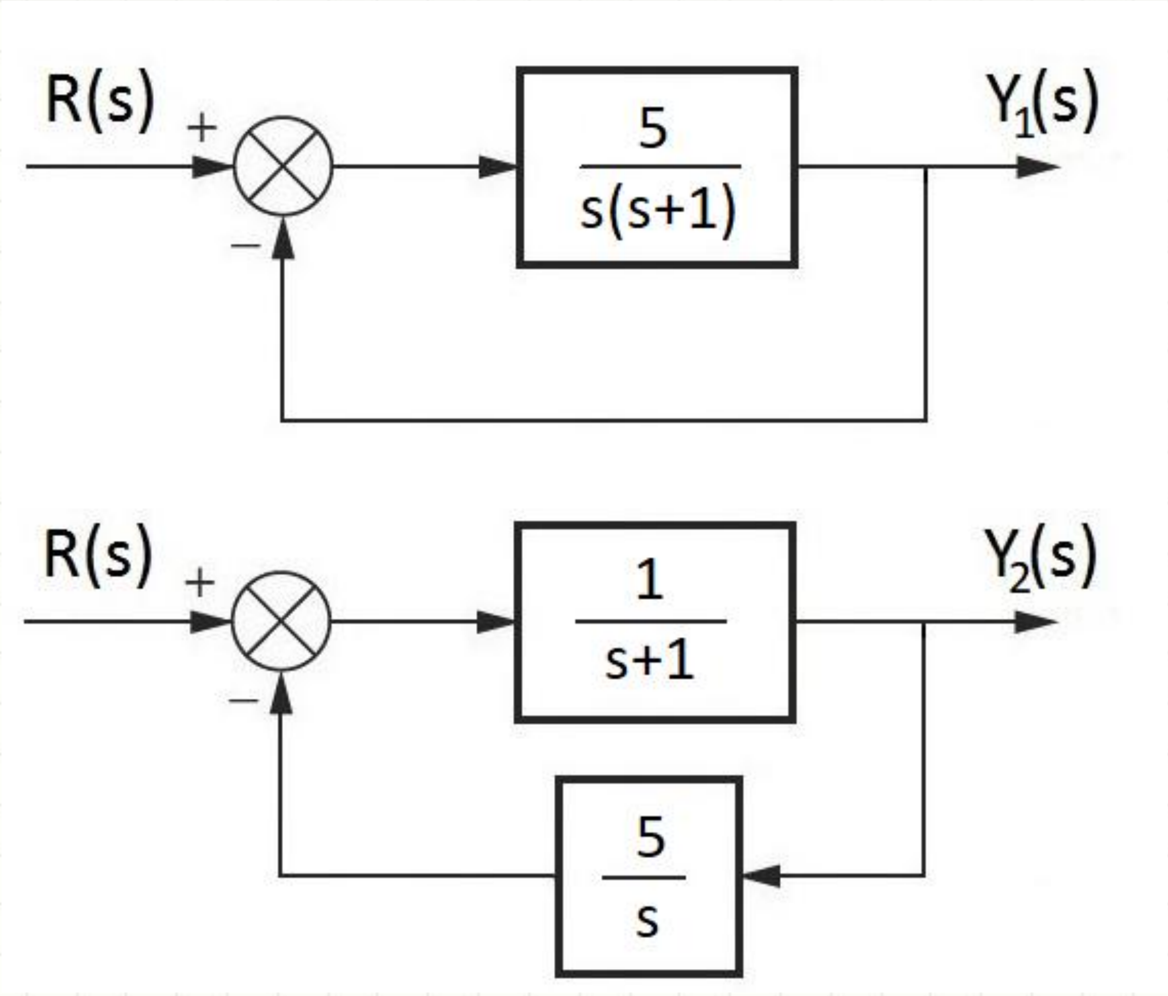
Resposta em Regime Permanente

Neste caso (realimentação unitária), pode ser demonstrado que o tipo do sistema é definido pelo número de integradores da função de transferência G(s).

	Tipo 0		Tipo 1		Tipo 2	
Entrada	**Constante de erro estático**	**Erro**	**Constante de erro estático**	**Erro**	**Constante de erro estático**	**Erro**
Degrau	$K_p = \text{Cte}$	$\frac{1}{1+K_p}$	$K_p = \infty$	0	$K_p = \infty$	0
Rampa	$K_v = 0$	∞	$K_v = \text{Cte}$	$\frac{1}{K_v}$	$K_v = \infty$	0
Parábola	$K_a = 0$	∞	$K_a = 0$	∞	$K_a = \text{Cte}$	$\frac{1}{K_a}$

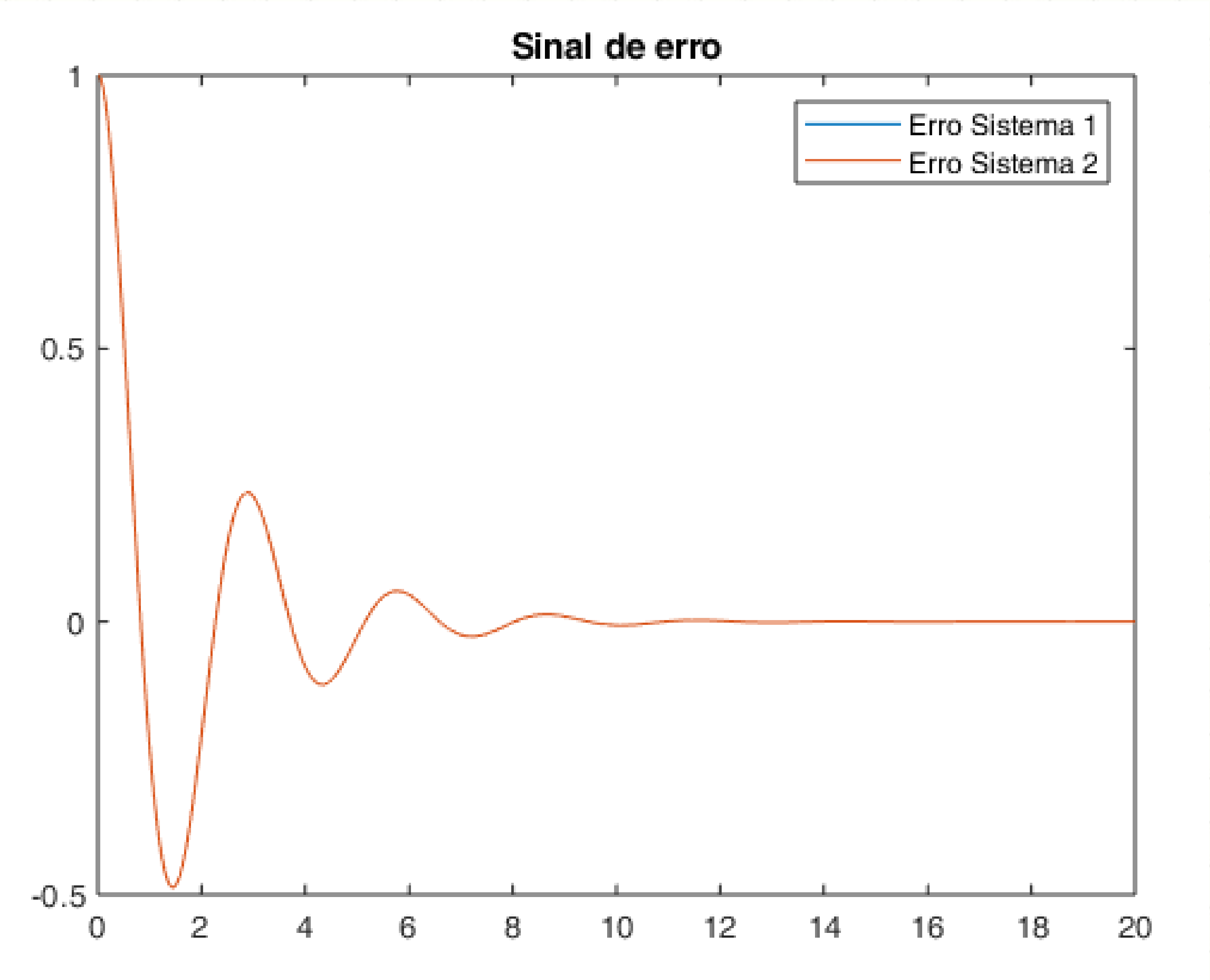
Resposta em Regime Permanente

Qual a diferença da resposta ao degrau para os dois sistemas ?

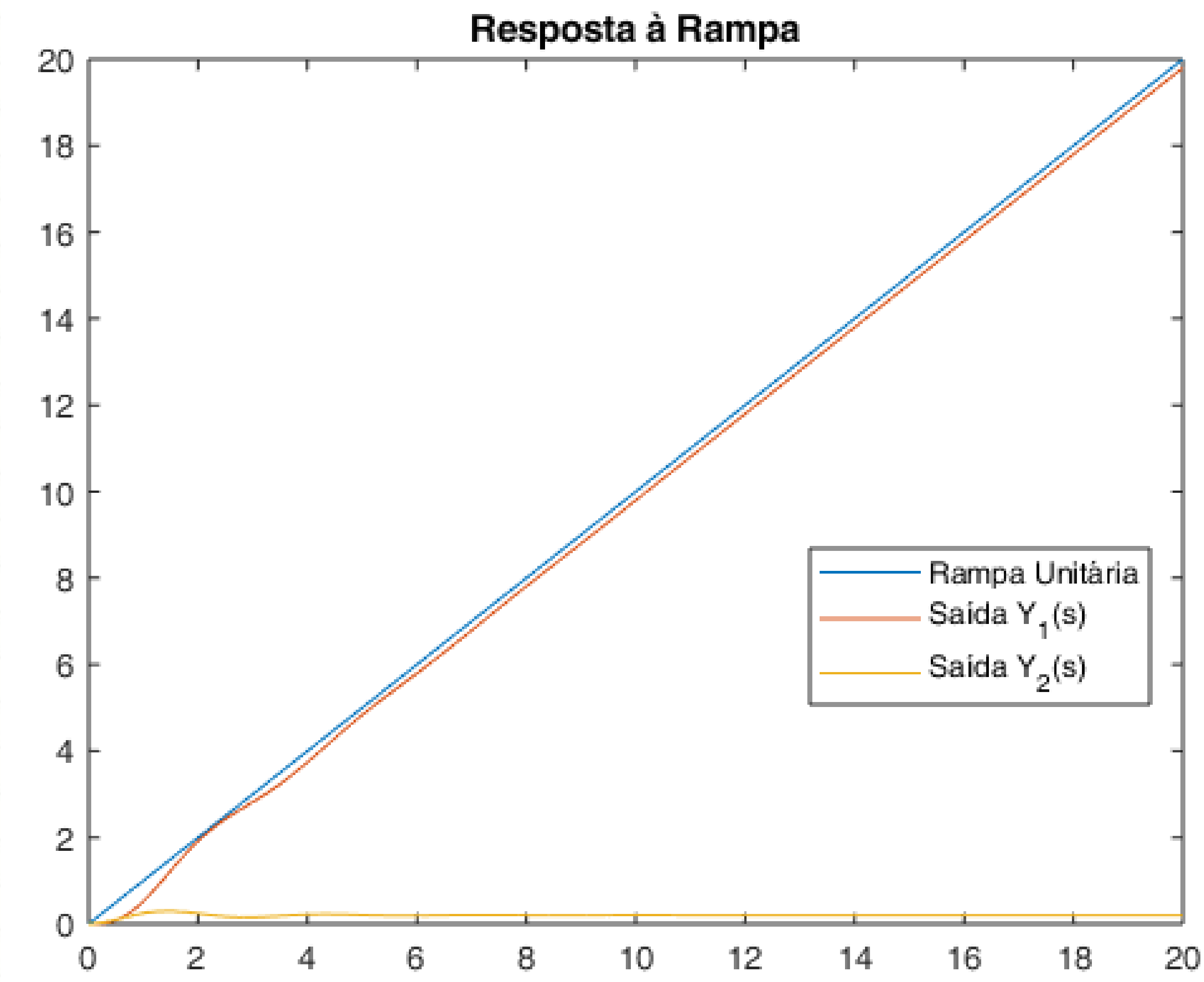


Resposta em Regime Permanente

Resposta em Regime Permanente



Resposta em Regime Permanente



Sugestões de Leitura - Revisão

Engenharia de Controle Moderno – K. Ogata (5ª Ed.)
Capítulo 5 - Análise de Resposta Transitória e de Regime Estacionário

Sistemas de Controle Modernos – R. Dorf & R. Bishop (8ª Ed.)
Capítulo 4 – Características de Sistema de Controle com Retroação, Itens 4.1 a 4.5
Capítulo 5 – O Desempenho de Sistemas de Controle com Retroação, Itens 5.1 a 5.8

Sistemas de Controle para Engenharia – G. Franklin (6ª Ed.)
Capítulo 3 – Resposta Dinâmica: Item 3.4
Capítulo 4 – Uma primeira análise da realimentação: Item 4.2