Projeto de Controladores Discretos

Projeto Por Emulação e
Projeto Direto via Lugar das Raízes

Profa. Cristiane Paim

Introdução

O projeto de controladores discretos pode ser realizado considerando duas abordagens:

- **Projeto Direto:** o controlador é projetado diretamente em tempo discreto (plano z)
- **Projeto por Emulação** : o controlador é projetado em tempo contínuo (plano s) e depois discretizado.

A ações e estruturas de controle são similares àquelas do caso contínuo.

Introdução

Controle Proporcional

$$C(z) = K$$

Controle Derivativo

$$C(z) = K\frac{z-1}{z} \qquad K = K_P T_D$$

Controle Integral

$$C(z) = K\frac{z}{z-1} \qquad K = \frac{K_P}{T_I}$$

Controlador PD

$$C(z) = K\frac{z-\alpha}{z}$$

sendo

$$\alpha = \frac{T_D}{1+T_D} \quad \text{e} \quad K = K_P(T_D + 1)$$

Introdução

Controlador PI

$$C(z) = K\frac{z-\alpha}{z-1}$$

sendo

$$\alpha = \frac{T_I}{T_I+1} \quad \text{e} \quad K = \frac{K_P}{T_I}(T_I+1)$$

Controlador PID (série)

$$C(z) = K_P\left[1 + T_D\left(\frac{z-1}{z}\right) + \frac{1}{T_I}\left(\frac{z}{z-1}\right)\right]$$

Introdução

Controlador em Avanço ou em Atraso

$$C(z) = K\frac{z-\alpha}{z-\beta}$$

$$\text{Avanço}: |\alpha| > |\beta|$$

$$\text{Atraso}: |\beta| > |\alpha|$$

No caso discreto, para que o controlador tenha polo/zero de fase mínima é necessário que α e β tenham módulo menor do que 1.

Projeto por Emulação

Esta abordagem considera que o projeto do controlador é realizado no tempo contínuo. O controlador obtido é então discretizado através de algum método, considerando um período de amostragem adequado.

Os principais métodos de discretização são:

- Segurador de ordem zero (ZOH)
- Métodos de Euler (backward e forward)
- Método de Tustin (transformação bilinear)
- Transformação casada Polo/Zero (MPZ-Matched)

Projeto por Emulação

Segurador de ordem zero (ZOH)

$$C(z) = \left(1 - z^{-1}\right) Z\left\{\frac{C(s)}{s}\right\}$$

Métodos de Euler

O mapeamento do plano s para o plano z é obtido através da relação:

Backward (diferença para trás) $\rightarrow$ $s = \dfrac{z-1}{Tz}$

Forward (diferença para frente) $\rightarrow$ $s = \dfrac{z-1}{T}$

Projeto por Emulação

Método de Tustin (aproximação trapezoidal ou bilinear)

Neste caso, o mapeamento do plano s para o plano z é obtido através da transformação bilinear:

$$s = \frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$$

Transformação casada polo/zero (MPZ-Matched)

Utiliza-se o mapeamento

$$z = e^{sT} \quad \rightarrow \quad s = \frac{\ln(z)}{T}$$

e deve-se ainda garantir que o número de polos é igual ao número de zeros. Se existirem mais polos do que zeros, a diferença é completada acrescentando-se zeros da forma (z+1).

Discretização no Matlab

Função c2d (transforma um sistema dinâmico de tempo contínuo em tempo discreto)

Sintaxe

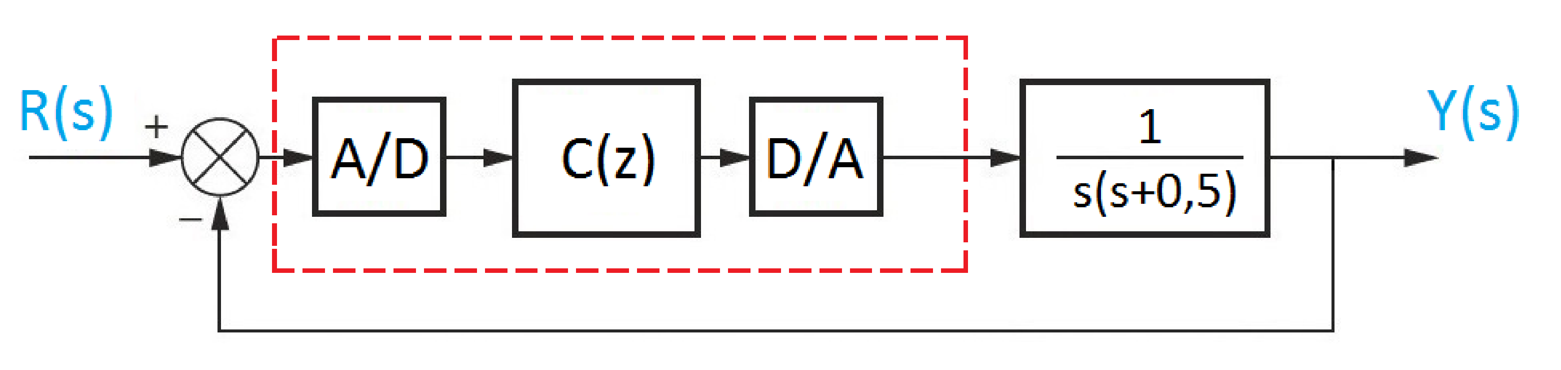
SYSD = c2d(SYSC,TS,METHOD)

Métodos

'zoh'	Zero-order hold on the inputs
'foh'	Linear interpolation of inputs
'impulse'	Impulse-invariant discretization
'tustin'	Bilinear (Tustin) approximation.
'matched'	Matched pole-zero method

Exemplo – Projeto por Emulação

Seja o sistema



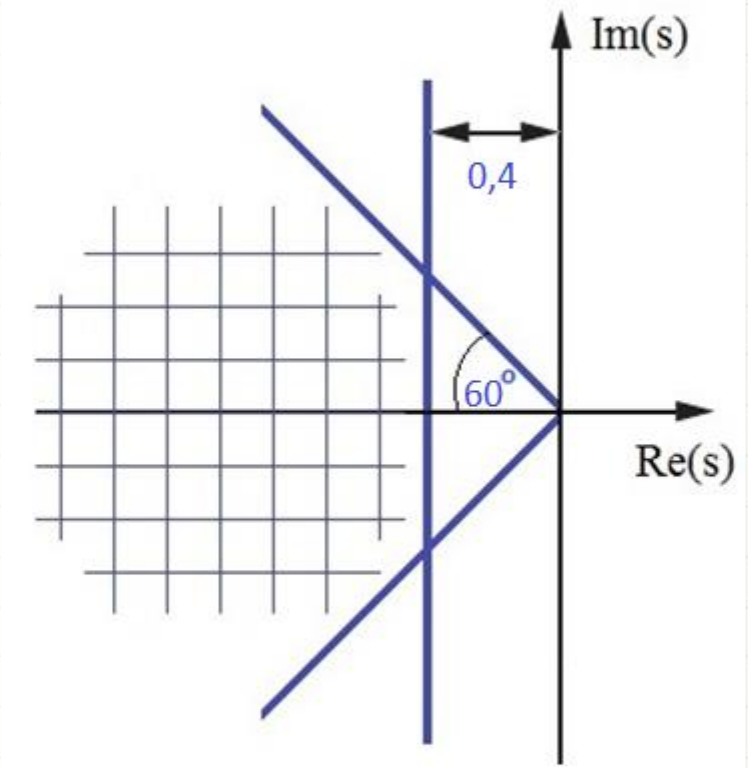
Deseja-se projetar o controlador discreto C(z) por emulação tal que sejam atendidas as seguintes especificações:

- Sobressinal menor do que 16%
- Tempo de acomodação menor do que 10 segundos

Projeto do Controlador (plano s)

$$M_P < 16\% \quad \Rightarrow \quad \xi > 0{,}5 \left(\theta < 60^\circ\right)$$

$$t_s < 10seg \quad \Rightarrow \quad \sigma > 0{,}4$$



Posição desejada para os polos de malha fechada:

$$s_d = -1 \pm j \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \theta = 45^\circ \\ \sigma = 1 \end{matrix}$$

Um controlador em avanço irá garantir as especificações de resposta transitória.

$$C(s) = K \frac{s+b}{s+\alpha b}$$

Projeto do Controlador (plano s)

Para satisfazer a condição de fase:

$$\angle C(s_d)G(s_d) = 180^\circ(2q+1)$$

ou

$$\angle C(s_d) = 180^\circ(2q+1) - \angle G(s_d) \approx 72^\circ$$

Portanto, a contribuição de fase do controlador em avanço será de 72°.
Neste caso, o cancelamento polo/zero pode ser utilizado, simplificando o projeto. Seja, b=0,5, tem-se

$$C(s) = K\frac{s+0{,}5}{s+0{,}5\alpha}$$

Projeto do Controlador (plano s)

Da condição de fase

$$\angle C(s_d) = \angle(s_d + 0{,}5) - \angle(s_d + 0{,}5\alpha) = 72^\circ$$

Resolvendo a equação

$$\alpha = 4$$

Da condição de módulo obtém-se o ganho

$$K = \frac{1}{\left|C(s_d)G(s_d)\right|} = 2$$

Portanto,

$$C(s) = 2\frac{s + 0{,}5}{s + 2}$$

Projeto do Controlador (plano s)

Verificação do resultado

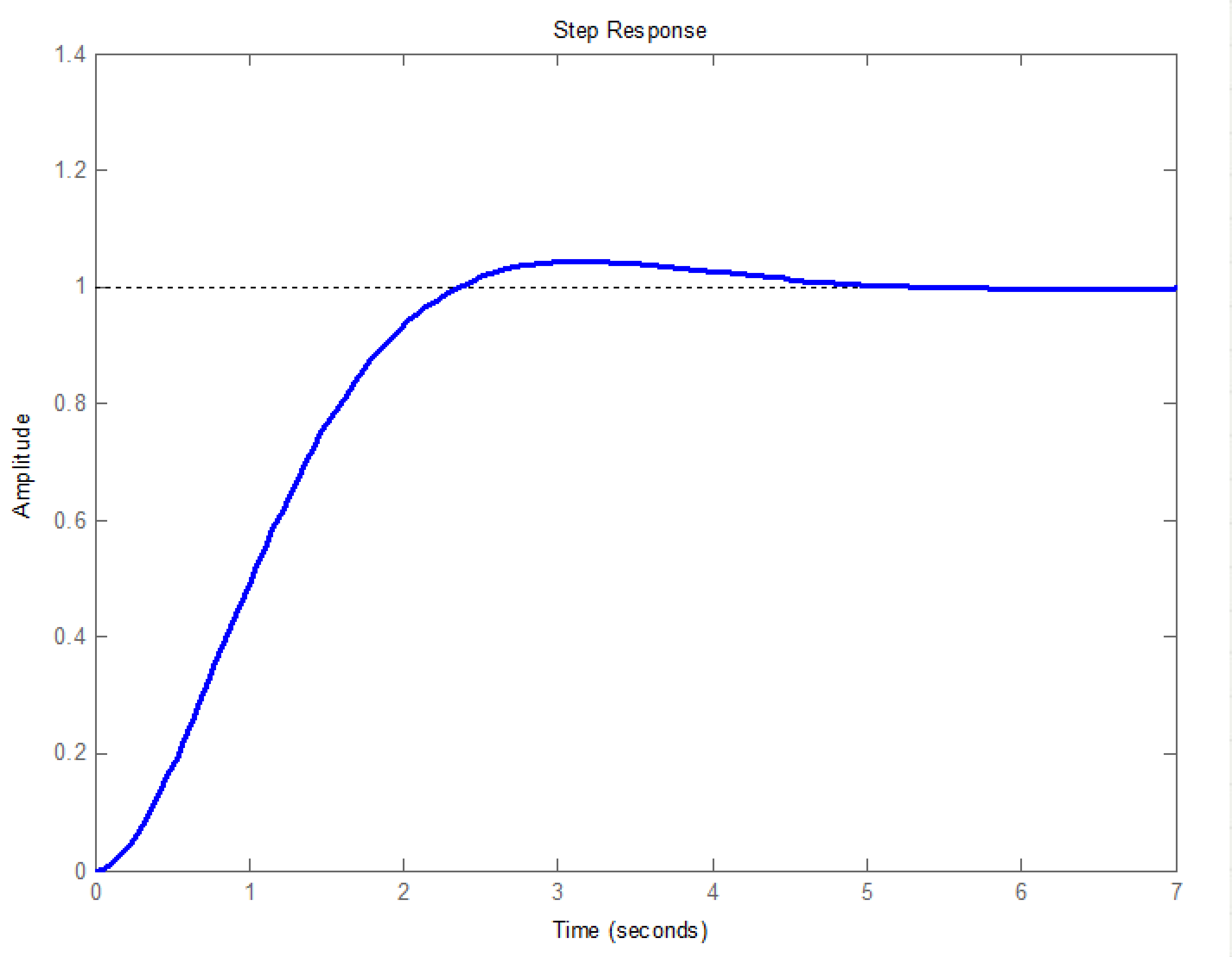
$$C(s)G(s) = \frac{2(s+0,5)}{(s+2)} \ \frac{1}{s(s+0,5)} = \frac{2}{s(s+2)}$$

$$T(s) = \frac{2}{s^2+2s+2} \quad \Rightarrow \quad p_{1,2} = -1 \pm j$$

$$\omega_n = 1,41 \quad \Rightarrow \quad M_P = 4,3\%$$

$$\xi = 0,71 \quad \Rightarrow \quad t_s = 4seg$$

Resposta ao Degrau



Discretização do Controlador

Escolha do período de amostragem

- Em função da resposta no tempo:

$$\frac{t_s}{20} < T < \frac{t_s}{10}$$

- Em função da resposta em frequência:

$$20\omega_B < \omega_S < 40\omega_B$$

sendo

$$\omega_S = \frac{2\pi}{T} \quad \text{e} \quad \omega_B = \omega_n \sqrt{\left(1 - 2\xi^2\right) + \sqrt{4\xi^4 - 4\xi^2 + 2}}$$

Discretização do Controlador

Para o exemplo (sistema controlado):

$$\omega_n = 1{,}41 \qquad t_s = 4$$

$$\xi = 0{,}71 \qquad \omega_B = 1{,}41$$

Em função da resposta no tempo: $0{,}2 < T < 0{,}4$

Em função da resposta em frequência: $0{,}11 < T < 0{,}22$

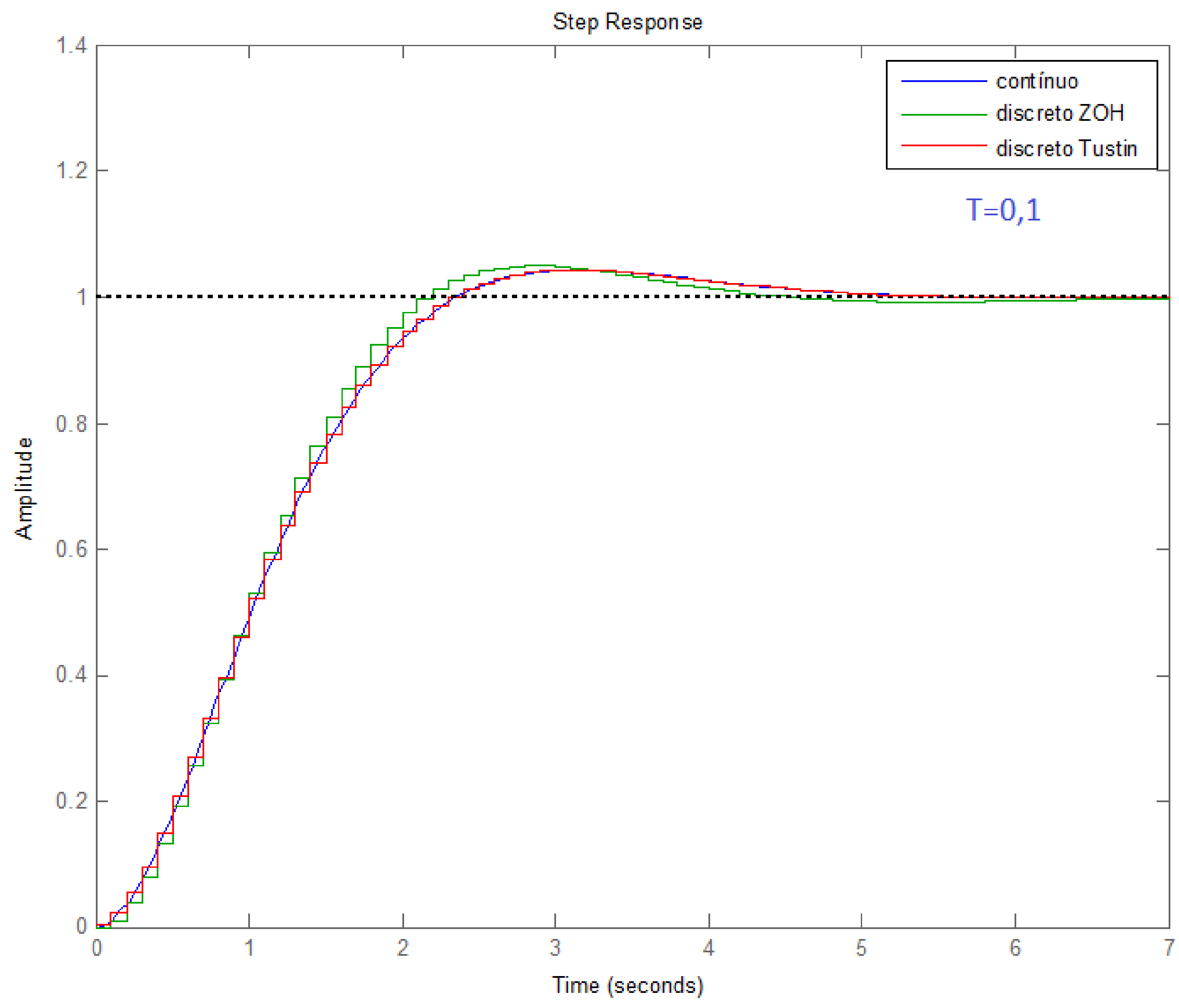
Discretização do Controlador

Considerando diferentes valores de período de amostragem tem-se:

T	ZOH		Tustin	
	Mp (%)	ts (seg)	Mp (%)	ts (seg)
0,1	5,08	3,78	4,36	4,17
0,2	6,82	5,04	4,45	4,15
0,3	9,86	5,53	4,64	4,13
0,4	13,50	5,52	4,80	4,13

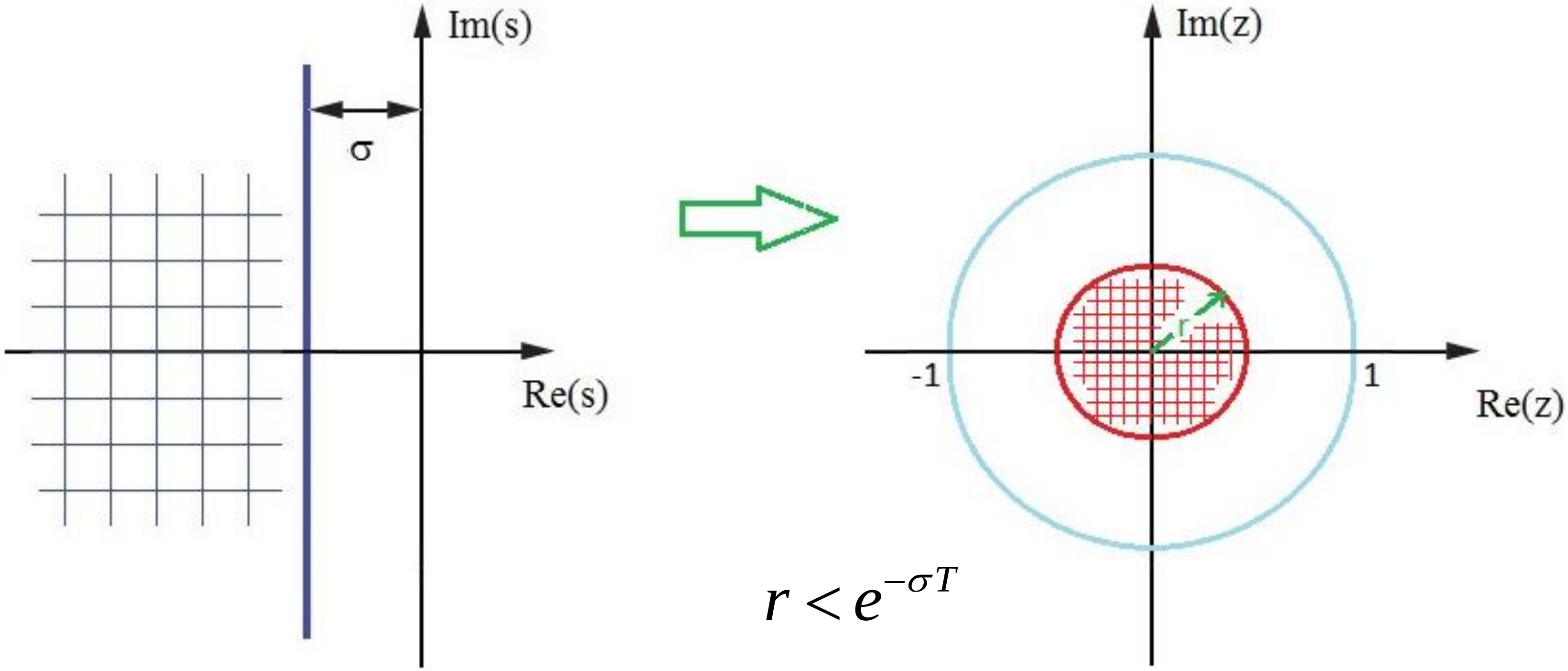
Escolhendo T=0,1 tem a resposta a seguir.

Resposta ao Degrau



Especificações de Resposta Transitória

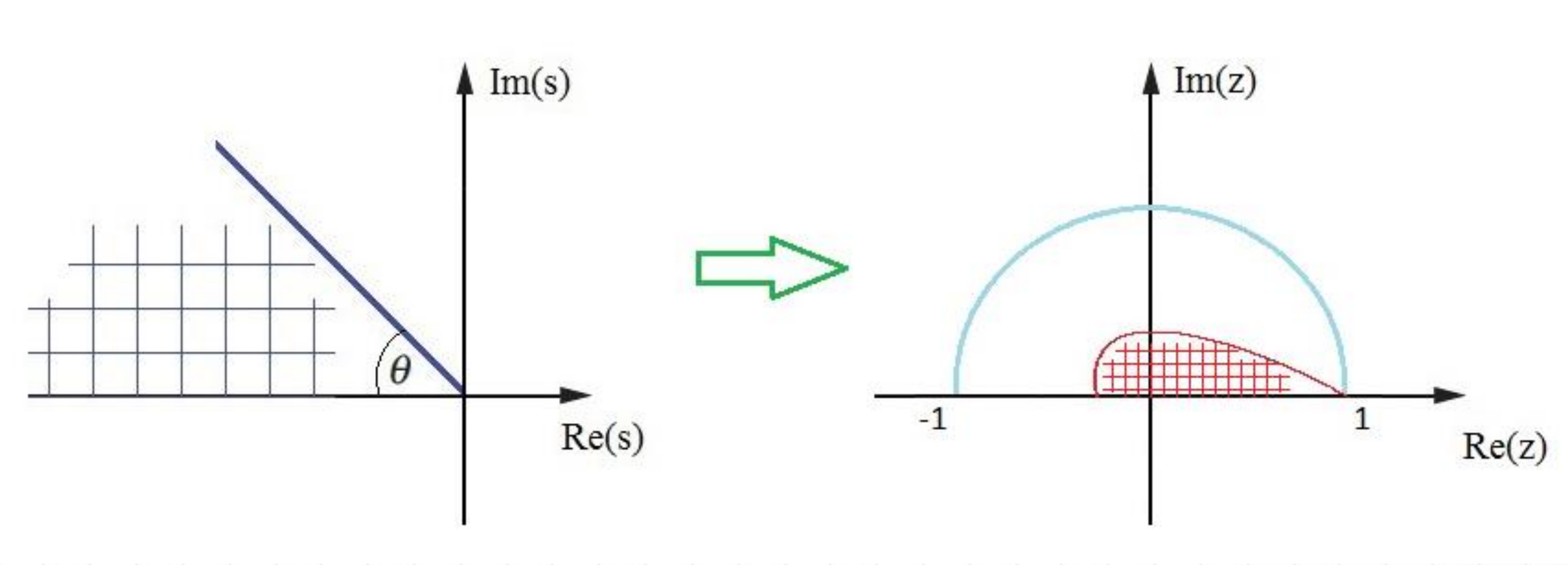
Tempo de acomodação



$$r < e^{-\sigma T}$$

Especificações de Resposta Transitória

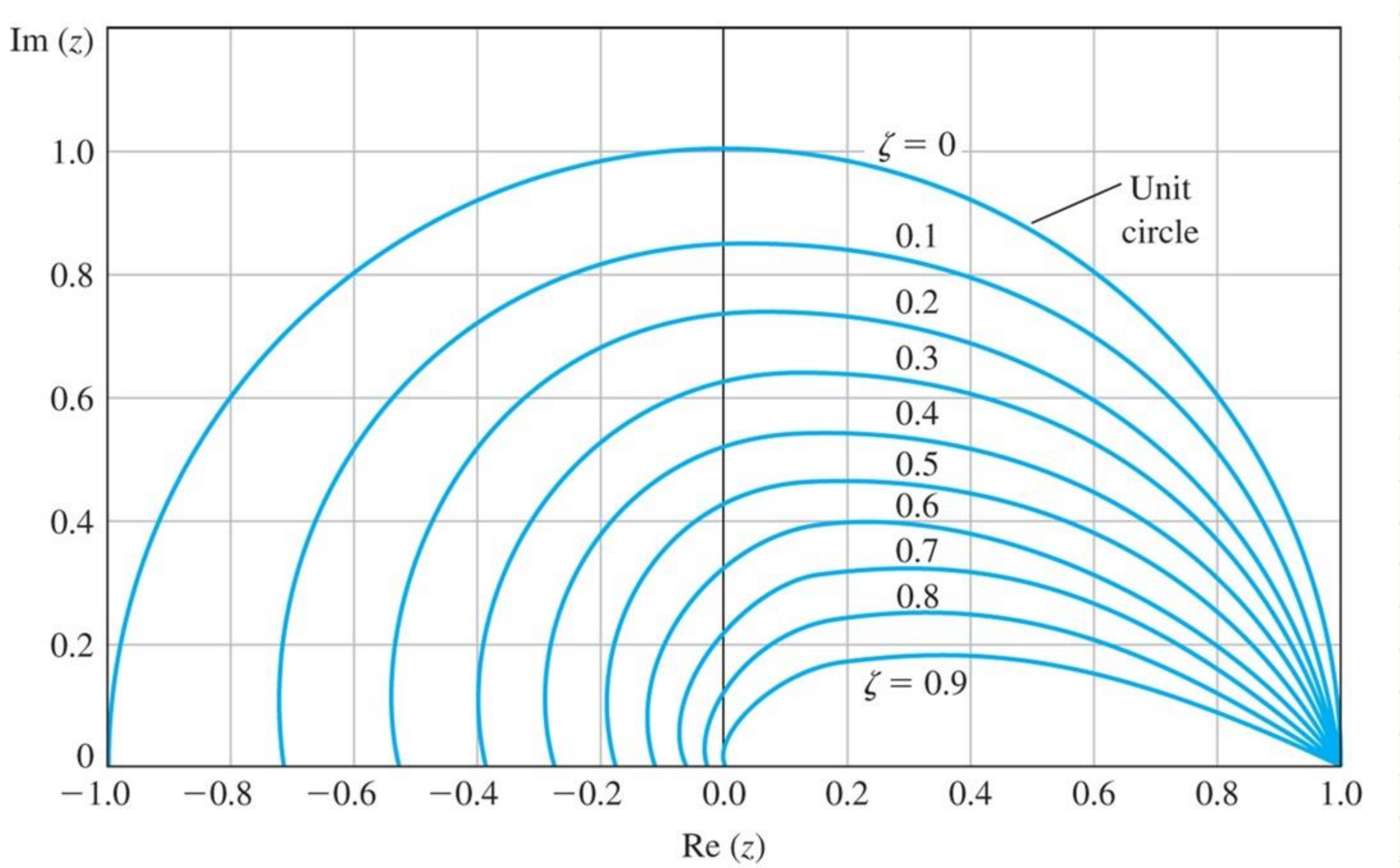
Sobressinal Máximo



A linha radial no plano s, que corresponde a uma taxa de amortecimento constante, é mapeada no plano z através de uma espiral logarítmica.

Especificações de Resposta Transitória

Sobressinal Máximo



Especificações de Resposta Transitória

Seja,

$$s = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -\xi\omega_n + j\omega_d$$

No plano z a linha correspondente a taxa de amortecimento torna-se

$$z = e^{-Ts} = e^{-\xi\omega_n T + j\omega_d T}$$

Escrevendo em função da frequência de amostragem (ω_s=2π/T), tem-se

$$z = e^{\left(\frac{-2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\frac{\omega_d}{\omega_s} + j2\pi\frac{\omega_d}{\omega_s}\right)}$$

sendo

$$|z| = e^{\left(\frac{-2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\frac{\omega_d}{\omega_s}\right)} \quad \text{e} \quad \angle z = 2\pi\frac{\omega_d}{\omega_s}$$

Portanto, para valores fixos de T e ξ, o módulo diminui e a fase aumenta a medida que ω_d cresce.

Especificações de Resposta Transitória

Note que para uma dada relação constante ω_d/ω_s, o módulo torna-se uma função apenas do coeficiente de amortecimento ζ e a fase torna-se constante.

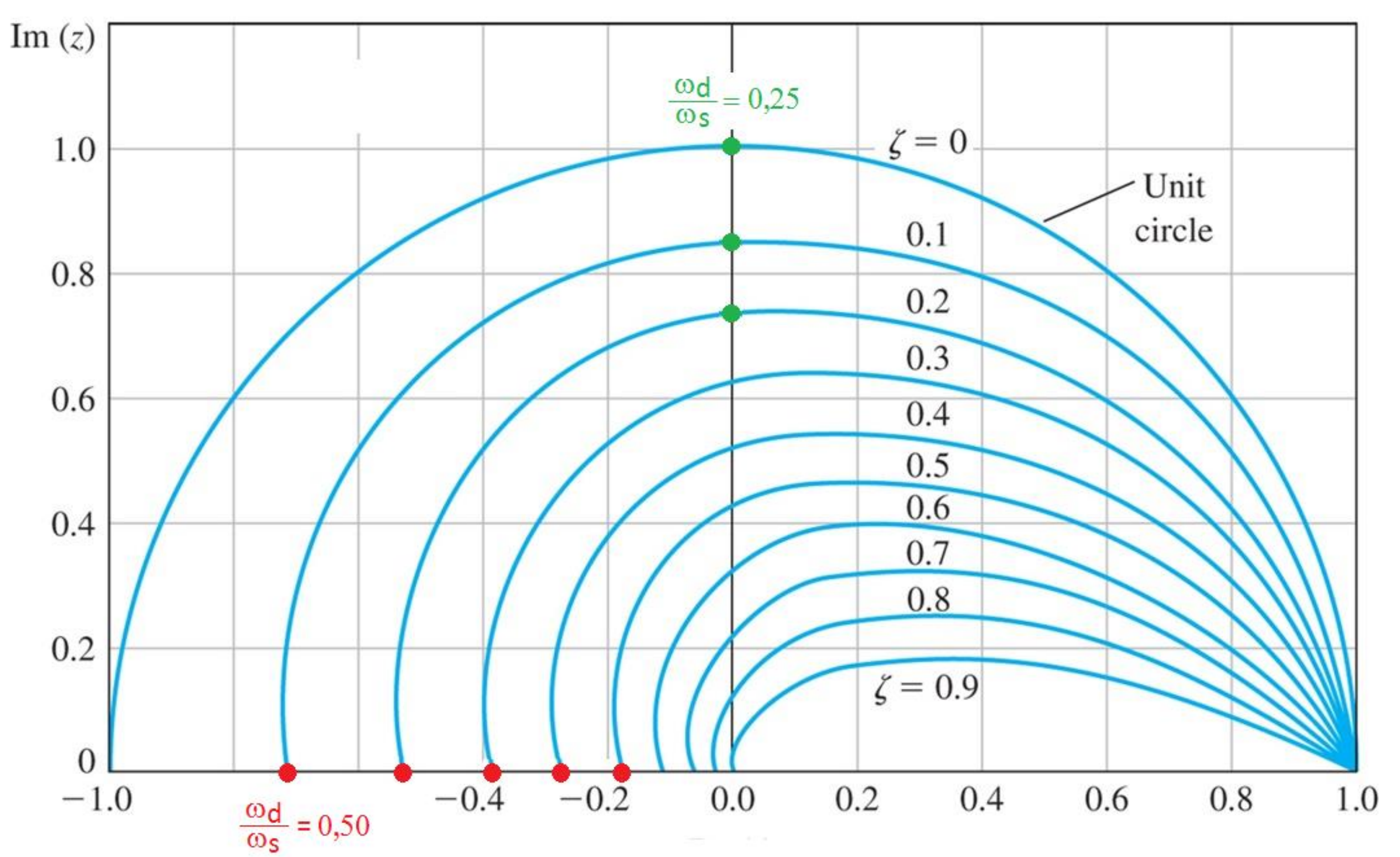
Para,

$$\frac{\omega_d}{\omega_s} = 0,25 \quad \Rightarrow \quad \angle z = 90^\circ$$

$$\frac{\omega_d}{\omega_s} = 0,50 \quad \Rightarrow \quad \angle z = 180^\circ$$

assim, podem ser calculados os pontos em que a linha correspondente a cada valor de ζ cruza os eixos real e imaginário.

Especificações de Resposta Transitória



Especificações de Resposta Transitória

ζ	ω_d/ω_s=0,50	ω_d/ω_s=0,25
0	1	1
0,1	0,7292	0,8540
0,2	0,5266	0,7257
0,3	0,3723	0,6102
0,4	0,2538	0,5038
0,5	0,1630	0,4038
0,6	0,0948	0,3079
0,7	0,0460	0,2144
0,8	0,0015	0,1231
0,9	0,0002	0,0390
1	0	0

Especificações de Regime Permanente

$$\mathrm{K_P} = \lim_{z \to 1} G(z) \qquad \Rightarrow \qquad e_\infty = \frac{1}{1 + \mathrm{K_P}}$$

$$\mathrm{K_V} = \frac{1}{T} \lim_{z \to 1} (z - 1) G(z) \qquad \Rightarrow \qquad e_\infty = \frac{1}{\mathrm{K_V}}$$

$$\mathrm{K_a} = \frac{1}{T^2} \lim_{z \to 1} (z - 1)^2 G(z) \qquad \Rightarrow \qquad e_\infty = \frac{1}{\mathrm{K_a}}$$

Projeto Direto

Esta abordagem considera que o projeto do controlador é realizado diretamente no tempo discreto (plano z), utilizando métodos analíticos tais como Lugar das Raízes ou Resposta em Frequência.

Os procedimentos de projeto são análogos ao caso contínuo, respeitando-se as características do caso discreto.

Exemplo

Projetar um controlador discreto de modo a atender as seguintes especificações de desempenho em tempo contínuo:

- Sobressinal máximo menor ou igual a 16%
- Tempo de acomodação menor ou igual a 2 segundos

A função de transferência discretizada que representa o processo é dada abaixo e foi obtida utilizando um período de amostragem de 0,2 segundos (T=0,2).

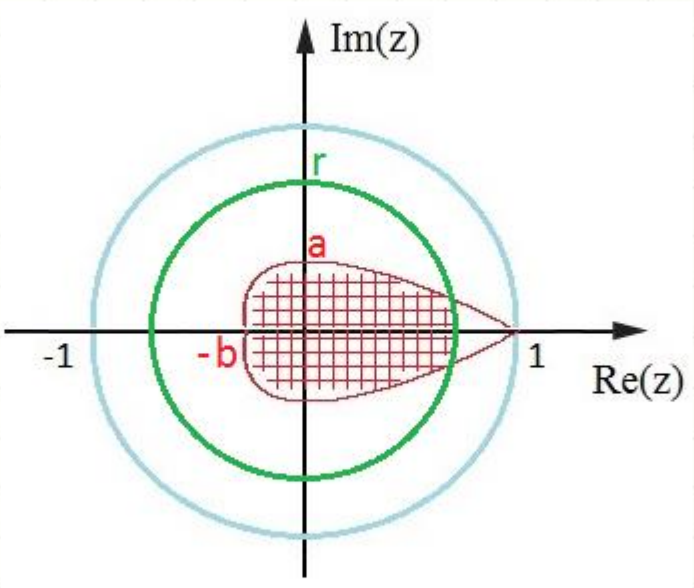
$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)} \xrightarrow[T=0,2]{ZOH} G(z) = \frac{0,01758(z+0,876)}{(z-1)(z-0,6703)}$$

Exemplo

Especificações em tempo contínuo:

$$M_P \leq 16\% \quad \Rightarrow \quad \xi \geq 0{,}5$$
$$t_s \leq 2seg \quad \Rightarrow \quad \sigma \geq 2$$

A especificação representam no plano z, a intersecção de uma espiral logarítmica (sobressinal máximo) e um círculo (tempo de acomodação) de raio r < $e^{-\sigma T}$.



r=0,6703
a=0,4038
b=0,1630

Exemplo

Das especificações, define-se

$$\xi \equiv 0{,}6 \quad \Rightarrow \quad 0{,}6\omega_n \geq 2$$
$$\omega_n \geq 3{,}3 \quad \Rightarrow \quad \omega_n \equiv 5$$

Ou seja, M_P=9,5% e t_s=1,3 segundos.

Para os parâmetros escolhidos, os polos desejados para malha fechada (tempo contínuo) serão

$$s_d = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -3 \pm j4$$

Passando para o tempo discreto

$$z_d = e^{s_d T} = 0{,}3824 \pm j0{,}3937$$

Exemplo

Escolha do controlador

Uma vez que as especificações são relativas à resposta transitória, um controlador PD ou Avanço seria o mais indicado.

Seja o controlador em avanço:

$$C(z) = K\frac{z-\alpha}{z-\beta} \qquad |\alpha| > |\beta|$$

É possível usar o cancelamento polo/zero ?

Neste caso, sim pois o existe um polo do sistema no limite da região desejada para a malha fechada.

Exemplo – Projeto 1 (com cancelamento)

Fazendo α=0,6703 para cancelar o polo do sistema, tem-se o controlador reduzido a

$$C(z) = K\frac{z-0{,}6703}{z-\beta}$$

A seguir obtém-se a contribuição de fase do controlador em avanço:

$$\angle C(z_d)G(z_d) = 180^\circ(2q+1)$$

$$\angle C(z_d) = 180^\circ - 103{,}7^\circ = 76{,}3^\circ$$

Assim,

$$\angle(z_d - 0{,}6703) - \angle(z_d - \beta) = 76{,}3^\circ$$

cuja solução é $\beta = 0{,}0509$

Exemplo – Projeto 1 (com cancelamento)

O controlador fica,

$$C(z) = K\,\frac{z - 0{,}6703}{z - 0{,}0509}$$

Da condição de módulo obtém-se o ganho do controlador

$$K = \frac{1}{\left|C(z_d)G(z_d)\right|} = 16{,}23$$

Portanto,

$$C(z) = \frac{16{,}23(z - 0{,}6703)}{z - 0{,}0509}$$

Exemplo – Projeto 1 (com cancelamento)

Verificação

$$C(z)G(z) = \frac{0{,}2853(z+0{,}876)}{(z-1)(z-0{,}0509)}$$

Em malha fechada

$$\Delta(z) = z^2 - 0{,}7656z + 0{,}3928 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} p_{1,2} &= 0{,}3828 \pm j0{,}3928 \\ z &= -0{,}876 \end{aligned}$$

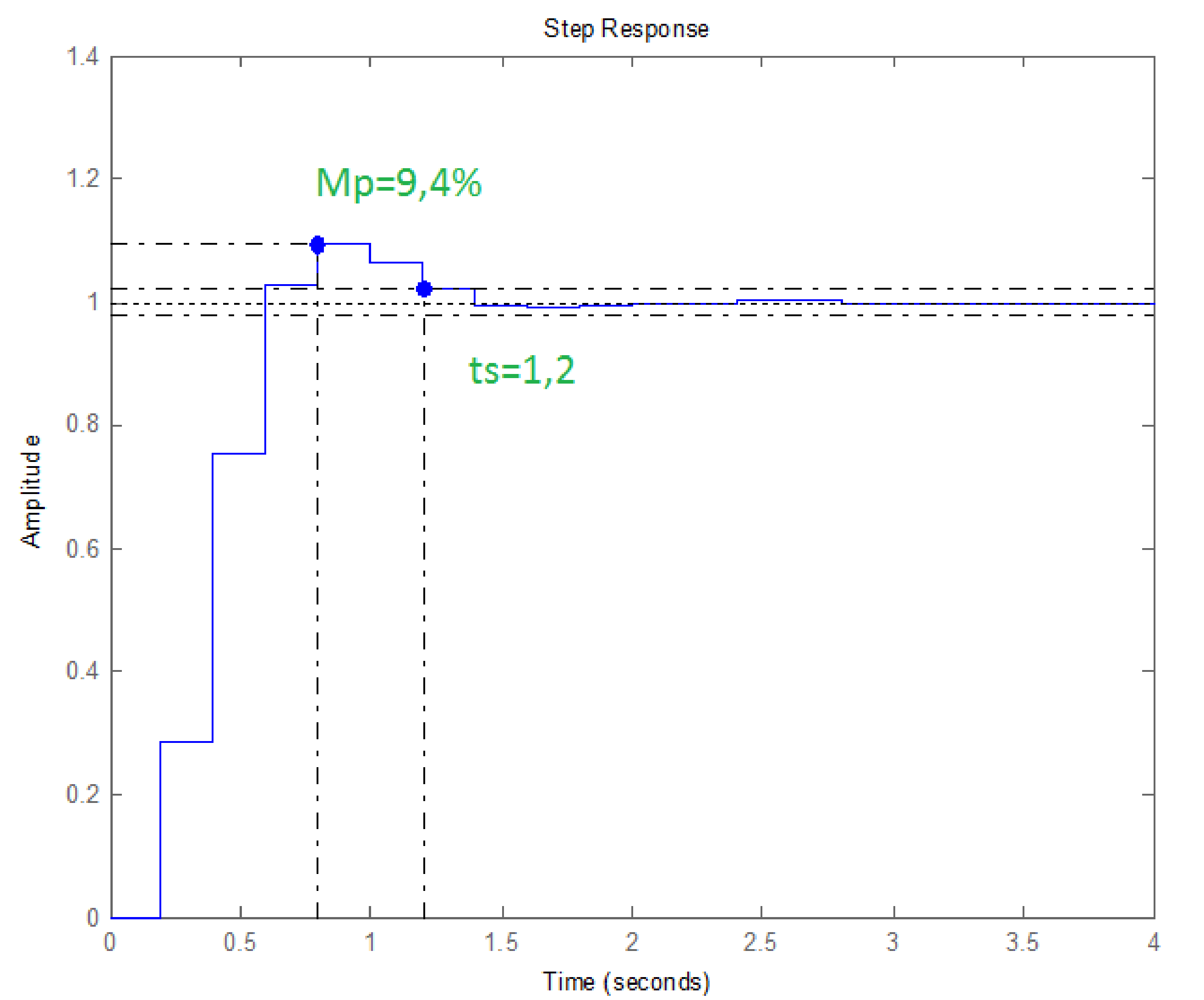
$$p_{1,2} = 0{,}3828 \pm j0{,}3928 = M\angle N$$

$$M = 0{,}5485 \qquad N = 0{,}7983$$

$$\xi = \frac{-\ln(\mathrm{M})}{\sqrt{\ln^2(\mathrm{M}) + \mathrm{N}^2}} = 0{,}6 \qquad \omega_n = \frac{1}{T}\sqrt{\ln^2(\mathrm{M}) + \mathrm{N}^2} = 5$$

Qual será o efeito do zero?

Exemplo – Projeto 1 (com cancelamento)



Exemplo – Projeto 2 (sem cancelamento)

Se não fosse possível usar o cancelamento polo/zero, como os parâmetros do controlador seriam determinados?

Exemplo – Projeto 2 (sem cancelamento)

A forma mais usual de projeto é escolher a posição do zero do controlador.

Como escolher ?

Opção 1: dentro da região desejada para a malha fechada.
Opção 2: próximo do polo do sistema (fora da região)

Exemplo – Projeto 2a

Opção 1:

$$\alpha = 0{,}65$$

Mantendo-se a mesma posição para os polos de malha fechada

$$z_d = 0{,}3824 \pm j0{,}3937 \quad \Rightarrow \quad \angle C(z) = 76{,}3^\circ$$

tem-se

$$\angle(z_d - 0{,}65) - \angle(z_d - \beta) = 76{,}3^\circ$$

de onde obtém-se

$$\beta = 0{,}0268$$

Da condição de módulo

$$K = \frac{1}{\left|C(z_d)G(z_d)\right|} = 17{,}18$$

Exemplo – Projeto 2a

Portanto,

$$C(z) = \frac{17{,}18(z - 0{,}65)}{z - 0{,}0268}$$

Verificação

$$C(z)G(z) = \frac{0{,}302(z - 0{,}65)(z + 0{,}876)}{(z - 1)(z - 0{,}0268)(z - 0{,}6703)}$$

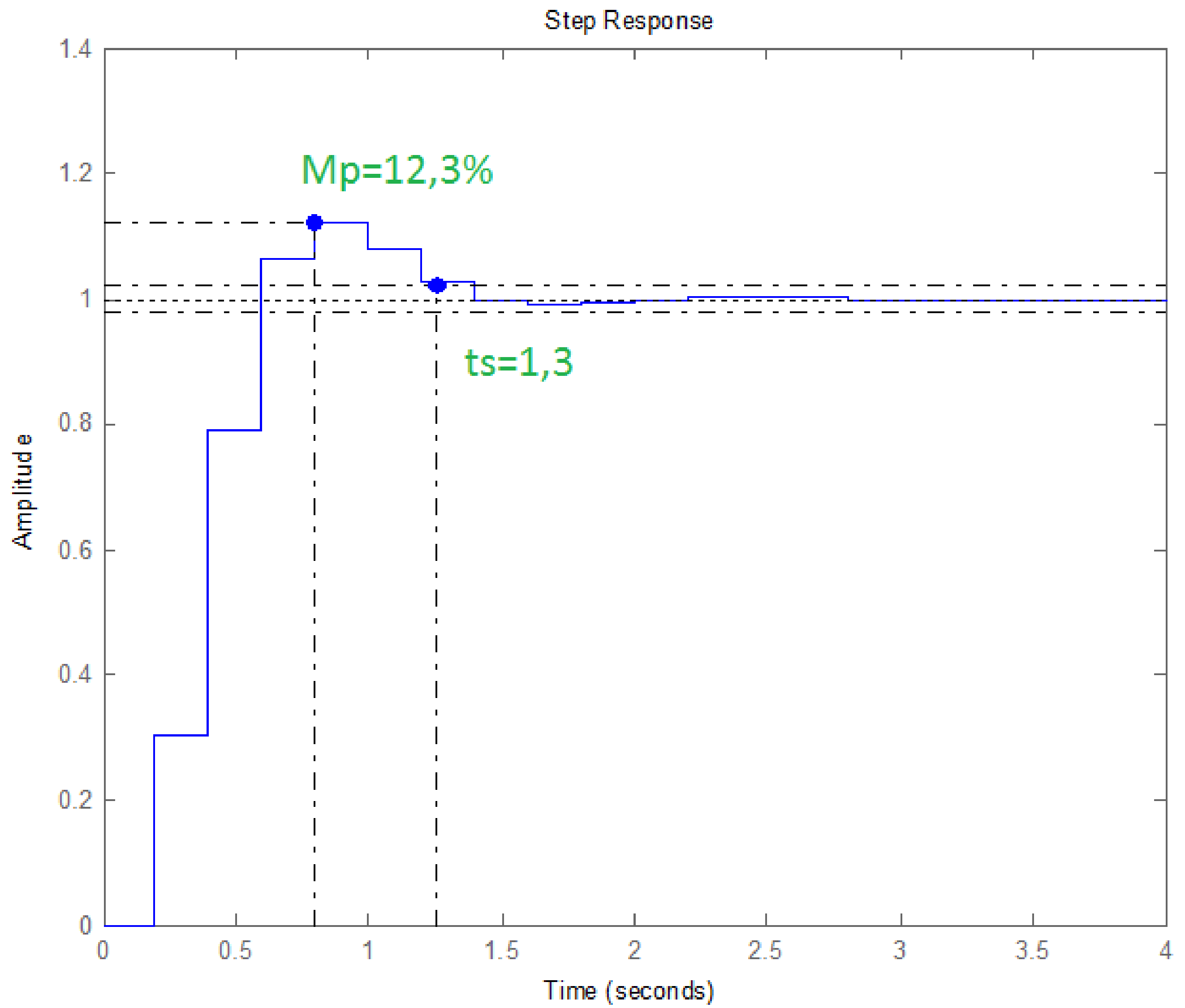
Em malha fechada:

$$\Delta(z) = z^3 - 1{,}395z^2 + 0{,}3871z - 0{,}1898$$

$$p_{1,2} = 0{,}3823 \pm j0{,}3936 \qquad\qquad z = 0{,}65$$

$$p_3 = 0{,}6303$$

Exemplo – Projeto 2a



Exemplo – Projeto 2b

Opção 2:

$$\alpha = 0{,}70$$

Mantendo-se a mesma posição para os polos de malha fechada

$$z_d = 0{,}3824 \pm j0{,}3937 \quad \Rightarrow \quad \angle C(z) = 76{,}3^\circ$$

tem-se

$$\angle(z_d - 0{,}70) - \angle(z_d - \beta) = 76{,}3^\circ$$

de onde obtém-se

$$\beta = 0{,}0814$$

Da condição de módulo

$$K = \frac{1}{\left| C(z_d)G(z_d) \right|} = 15{,}1$$

Exemplo – Projeto 2b

Portanto,

$$C(z) = \frac{15{,}1(z-0{,}70)}{z-0{,}0814}$$

Verificação

$$C(z)G(z) = \frac{0{,}2655(z-0{,}70)(z+0{,}876)}{(z-1)(z-0{,}0814)(z-0{,}6703)}$$

Em malha fechada:

$$\Delta(z) = z^3 - 1{,}486z^2 - 0{,}8528z - 0{,}2172$$

$$p_{1,2} = 0{,}3825 \pm j0{,}3936 \qquad z = 0{,}70$$

$$p_3 = 0{,}721$$

Exemplo – Projeto 2b