



EFEITO DA ADIÇÃO DE POLOS E ZEROS NA RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

Profa. Cristiane Paim

Exemplo

Seja a função de transferência

$$G(s) = \frac{6}{(s+1)(s+3)} \Rightarrow G(0) = 2$$

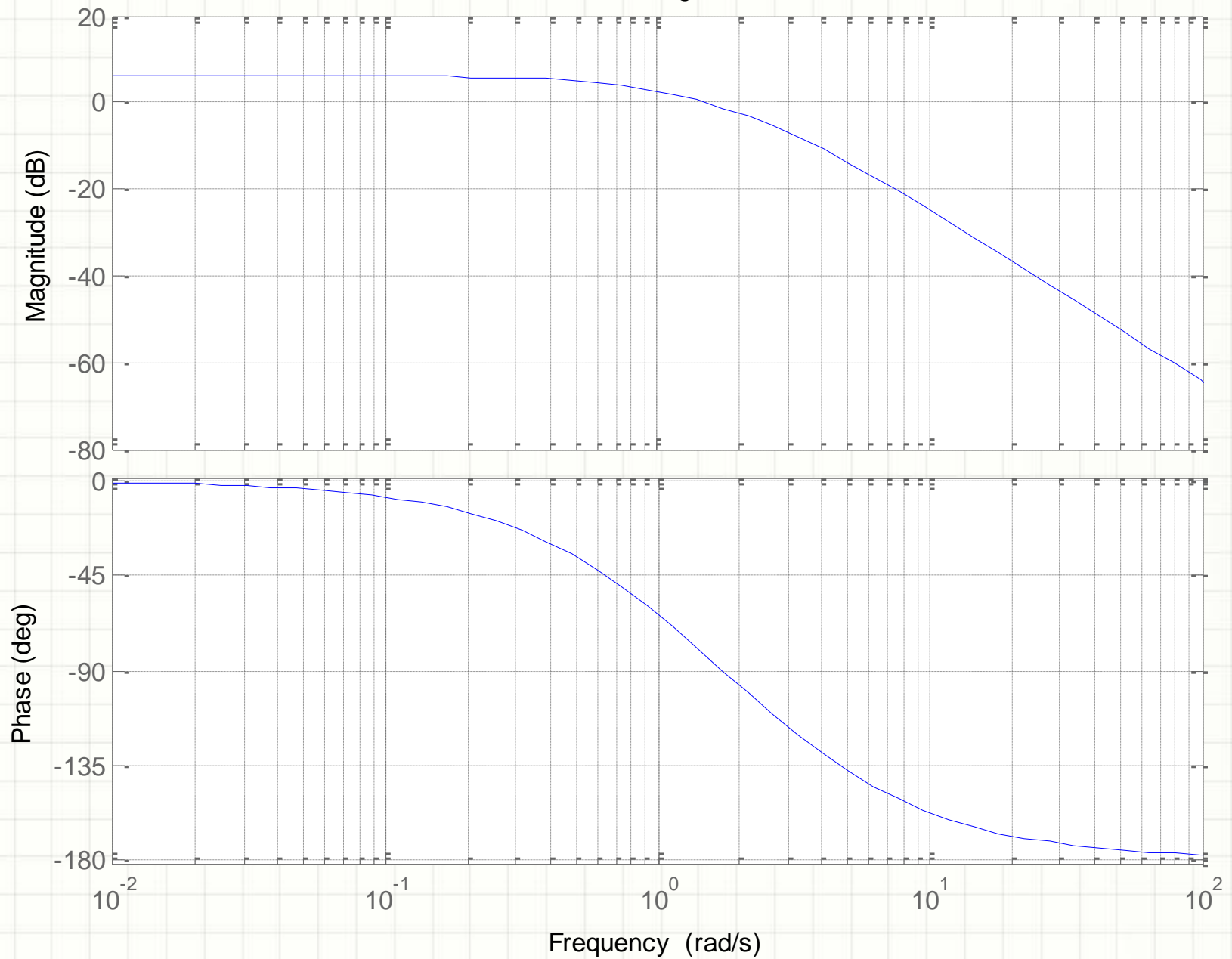
No domínio da frequência

$$G(j\omega) = \frac{6(3-\omega^2)}{(3-\omega^2)^2 + 16\omega^2} - j \frac{24\omega}{(3-\omega^2)^2 + 16\omega^2}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{6}{\sqrt{(3-\omega^2)^2 + 16\omega^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{-4\omega}{3-\omega^2} \right)$$

Bode Diagram



Margens de Estabilidade

Frequência de cruzamento de ganho

$$|G(j\omega)| = \frac{6}{\sqrt{(3-\omega^2)^2 + 16\omega^2}} = 1 \Rightarrow \omega_{CG} = 1,49$$

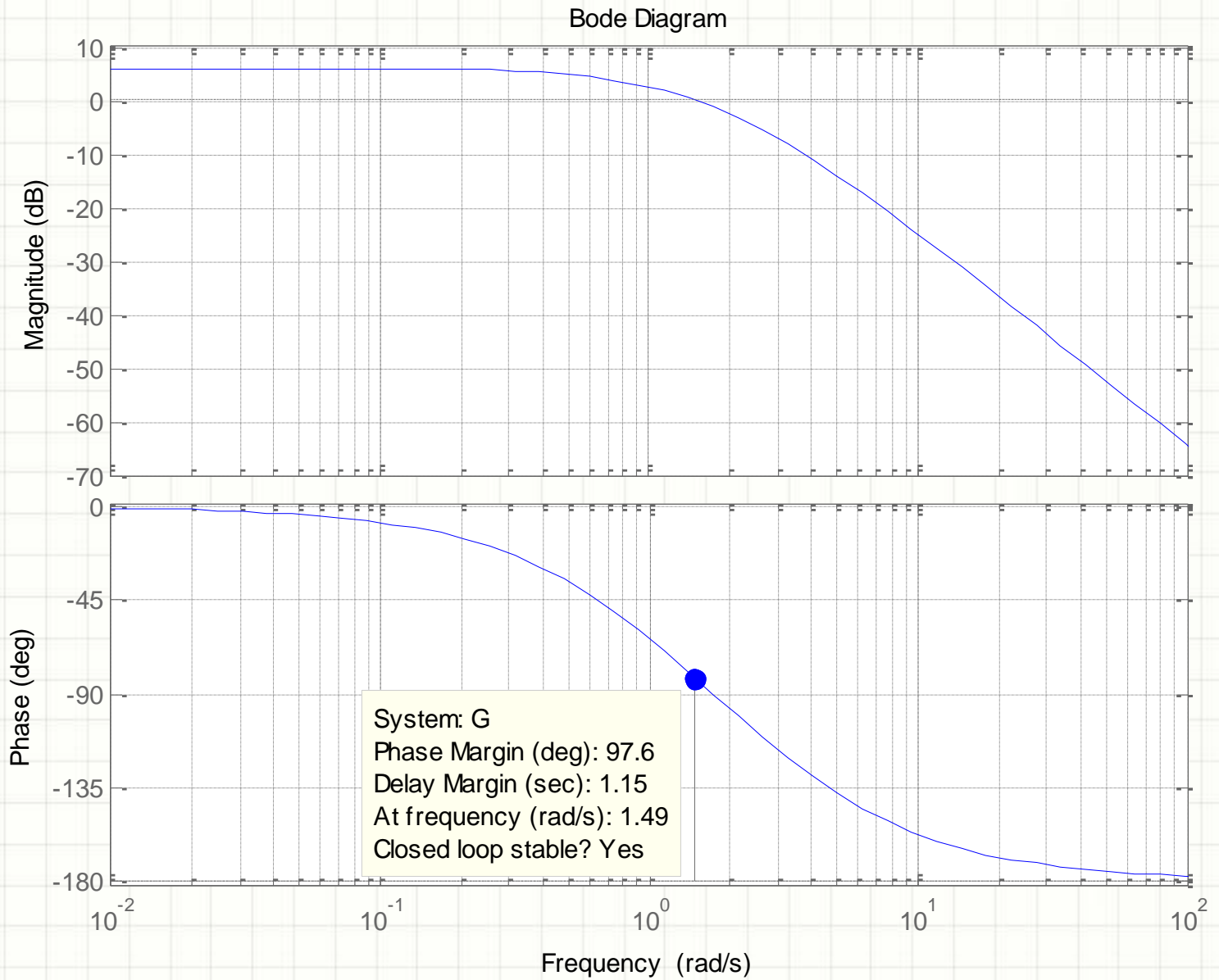
Margem de Fase

$$MF = 180^\circ + \angle G(j\omega_{CG}) = 180^\circ - 82,5^\circ$$

$$MF = 97,5^\circ$$

Margem de Ganho

$$MG = \infty$$



Resposta ao Degrau

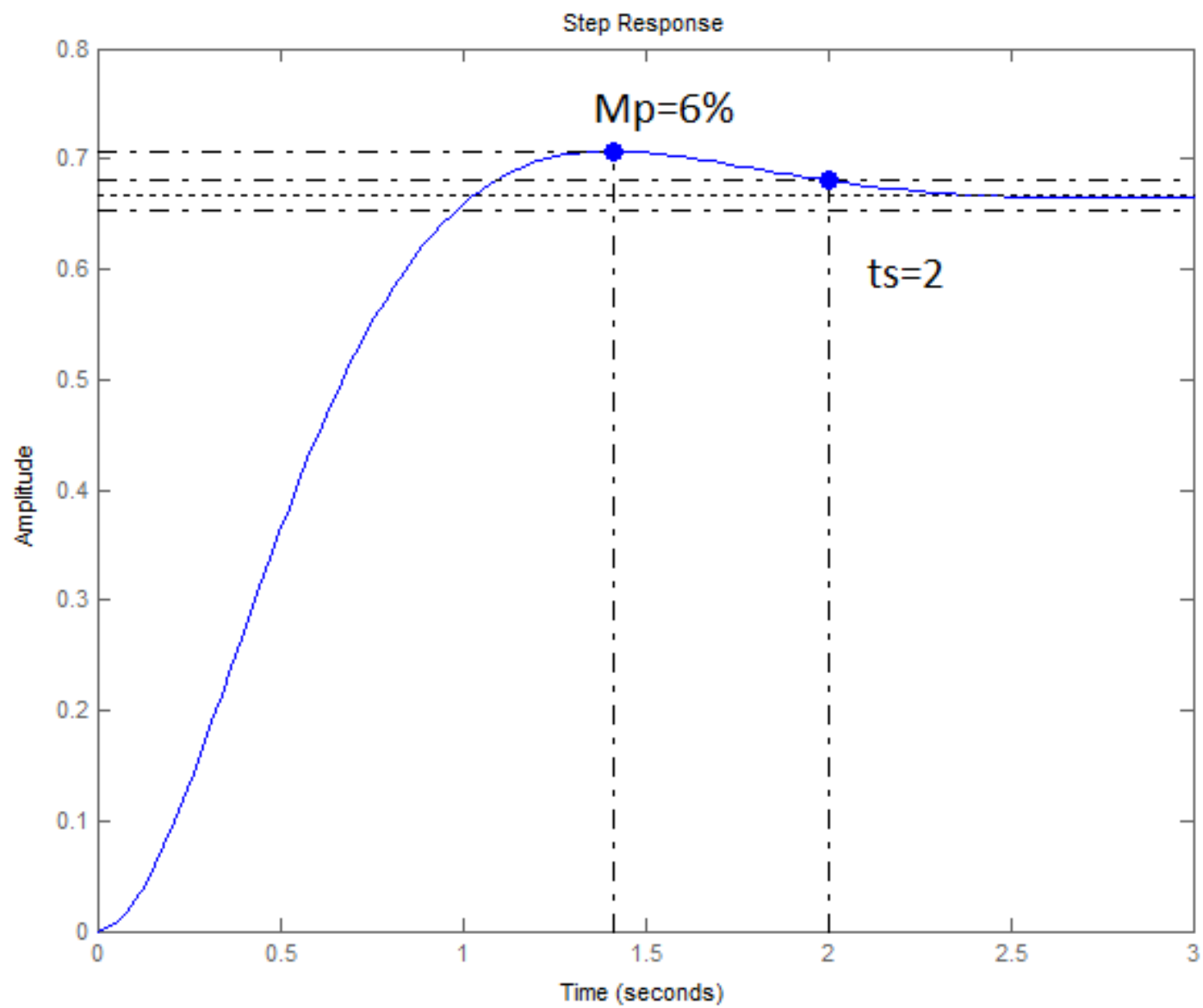
$$y_{\infty} = 6/9 = 0,667$$

Em malha fechada

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{6}{s^2 + 4s + 9}$$

Polos: $p_{1,2} = -2 + j2,236$

$$\begin{cases} \omega_n = 3 \\ \xi = 0,667 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_P = 6\% \\ t_s = 2 \end{cases}$$



Adição de um polo

Seja acrescentado um polo em -5:

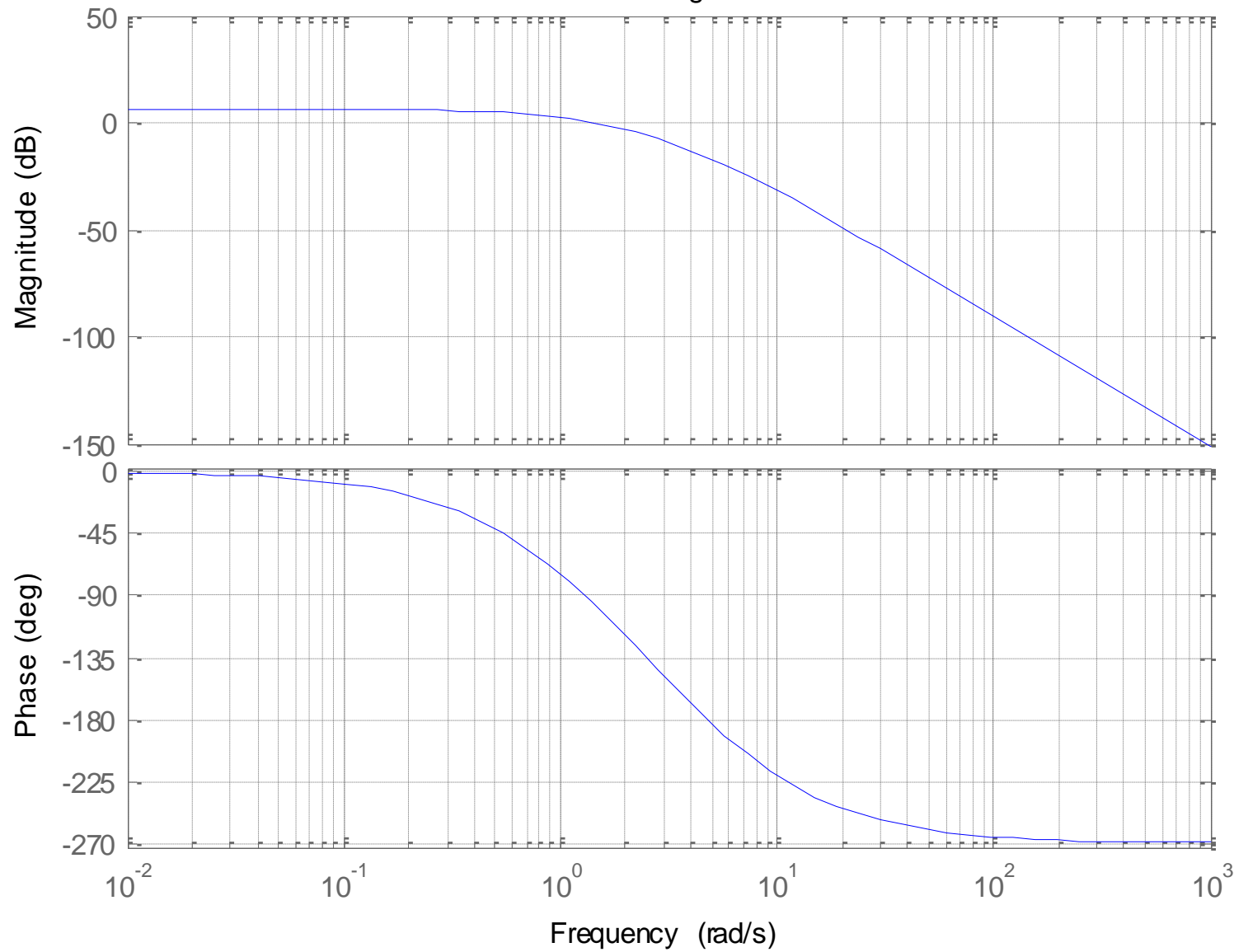
$$G_P(s) = \frac{30}{(s+1)(s+3)(s+5)} \Rightarrow G(0) = 2$$

Em frequência

$$|G_P(j\omega)| = \frac{30}{\sqrt{(15-9\omega^2)^2 + \omega^2(23-\omega^2)^2}}$$

$$\angle G_P(j\omega) = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{-\omega(23-\omega^2)}{15-9\omega^2} \right)$$

Bode Diagram



Margens de Estabilidade

Frequência de cruzamento de ganho

$$|G_P(j\omega)| = \frac{30}{\sqrt{(15-9\omega^2)^2 + \omega^2(23-\omega^2)^2}} = 1$$

$$\omega_{CG} = 1,42$$

Margem de Fase

$$MF = 180^\circ + \angle G(j\omega_{CG}) = 180^\circ - 96^\circ$$

$$MF = 84^\circ$$

Margens de Estabilidade

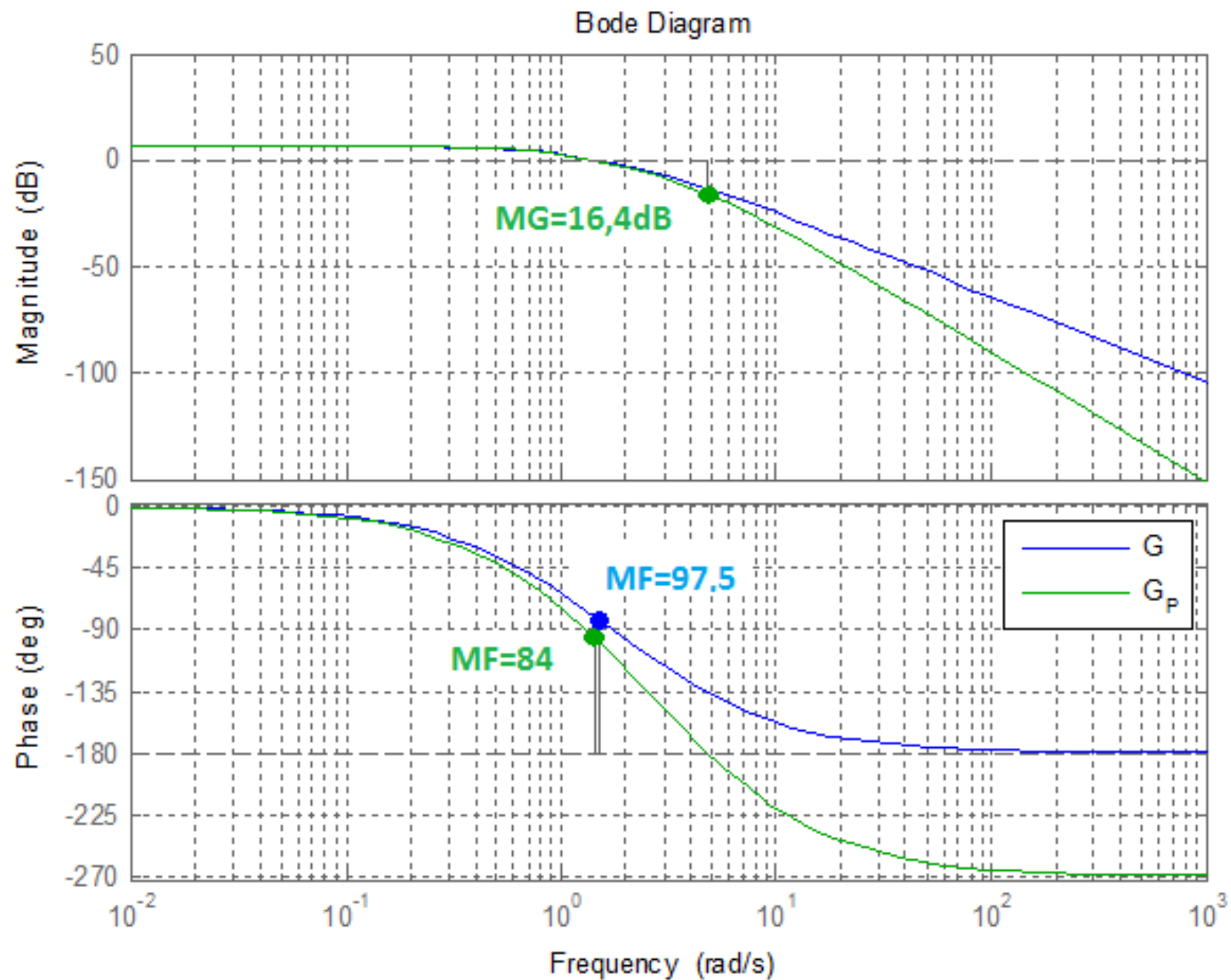
Frequência de cruzamento de fase

$$\angle G(j\omega) = 180^\circ \Rightarrow \omega_{CF} = 4,8$$

Margem de Ganho

$$MG = \frac{1}{|G(j\omega_{CF})|} = \frac{1}{0,156}$$

$$MG_{dB} = 20\log(MG) = 16,4\text{dB}$$



Resposta ao Degrau

$$y_{\infty} = 30/45 = 0,667$$

Em malha fechada

$$T_P(s) = \frac{G_P(s)}{1 + G_P(s)} = \frac{30}{s^3 + 9s^2 + 2s + 45}$$

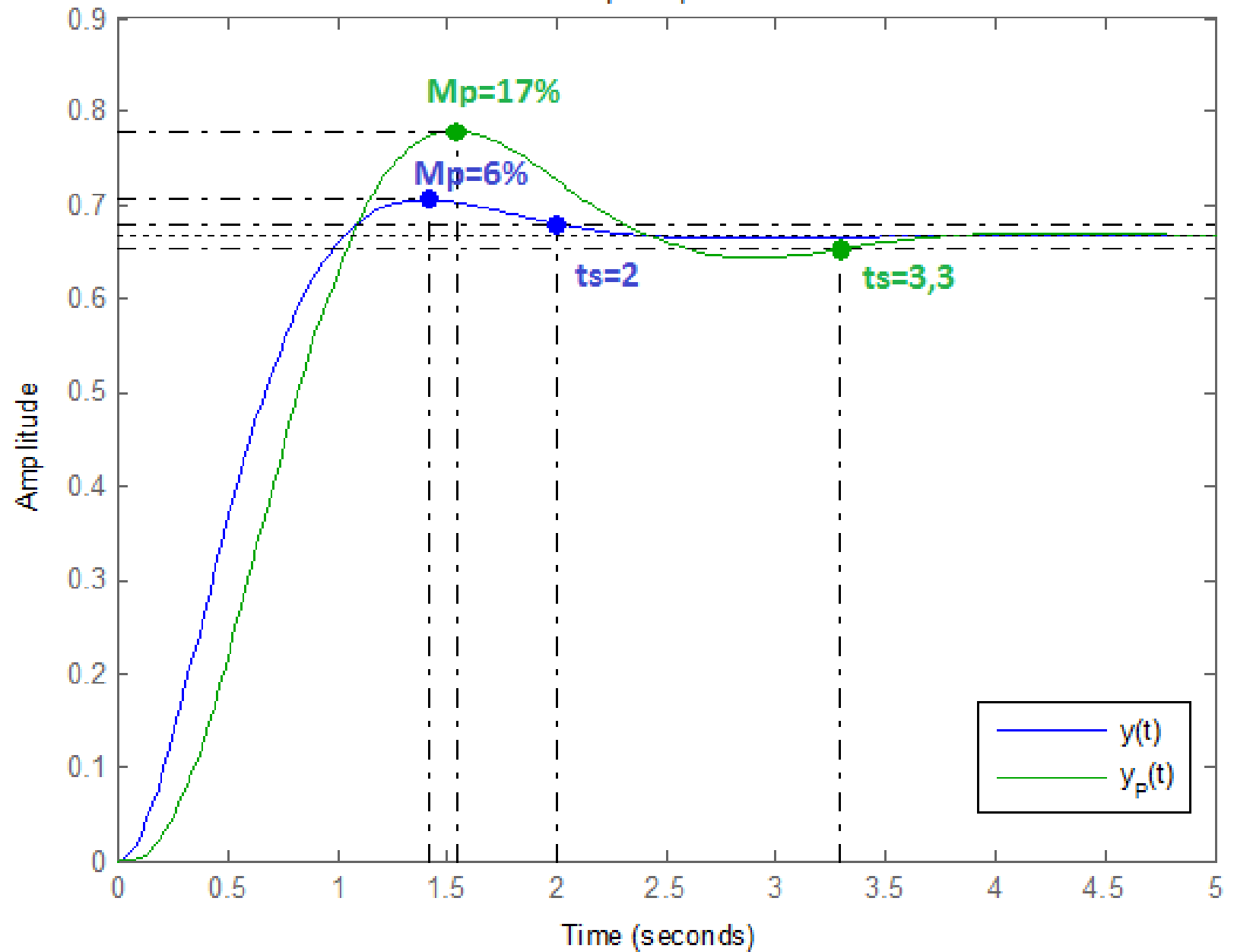
Polos: $p_{1,2} = -1,23 + j2,32$
 $p_3 = -6,53$

Aproximando pelo dominantes:

$$\begin{cases} \omega_n = 2,62 \\ \xi = 0,47 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_P = 19\% \\ t_s = 3,25 \end{cases}$$

Valores reais (simulados): $M_P = 17\%$ e $t_s = 3,3$

Step Response



Efeito da adição de um polo

O efeito da adição de um polo é a **redução das margens de estabilidade e da largura de faixa.**

A redução da margem de fase implica em um aumento do sobressinal da resposta ao degrau enquanto que a redução na largura de faixa gera um aumento do tempo de acomodação.

Adição de um zero

Seja a adição de um zero em -5:

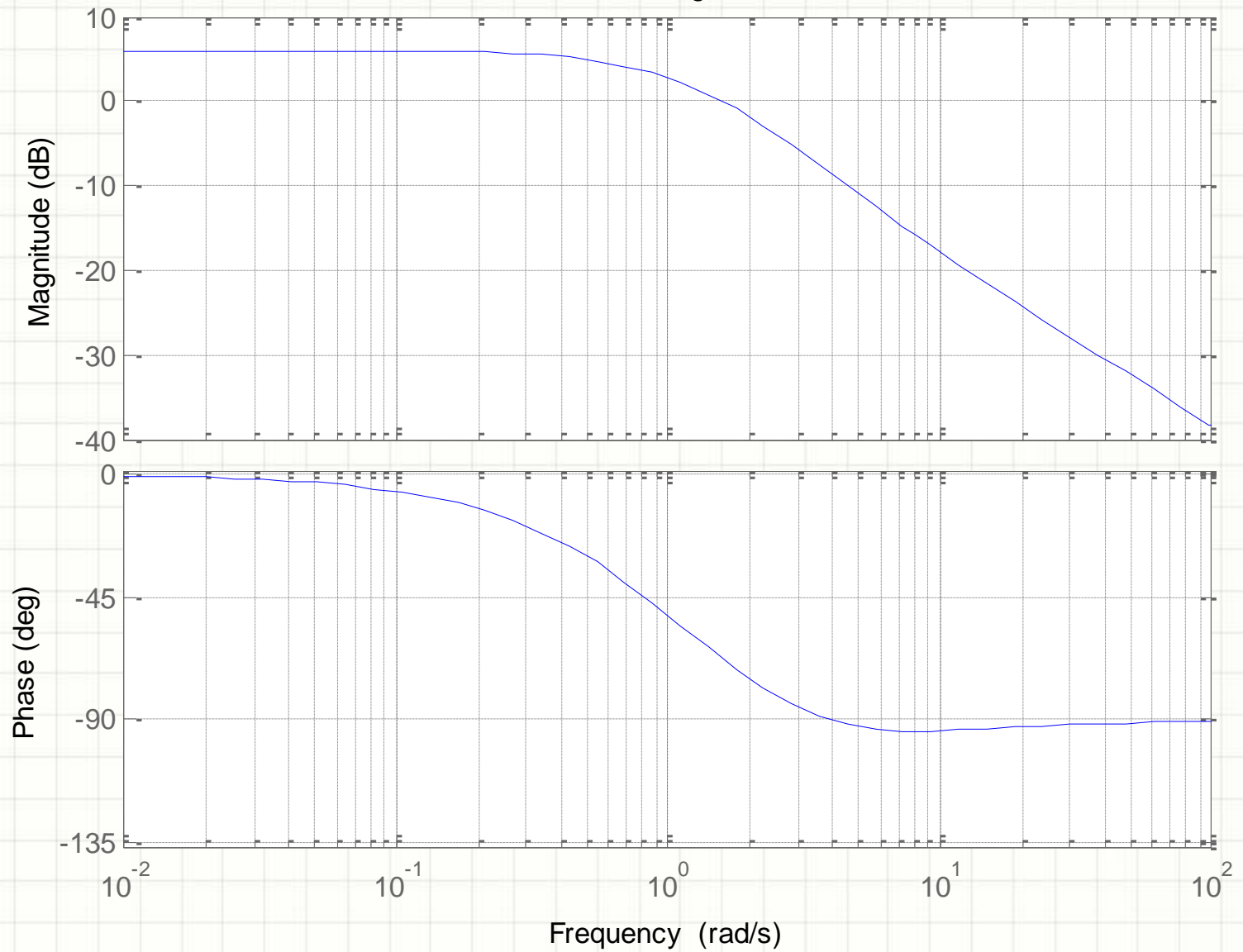
$$G_Z(s) = \frac{1,2 (s + 5)}{(s + 1)(s + 3)} \Rightarrow G(0) = 2$$

Em frequência:

$$|G_P(j\omega)| = \frac{1,2\sqrt{\omega^2 + 25}}{\sqrt{\omega^2 + 1}\sqrt{\omega^2 + 9}}$$

$$\angle G_P(j\omega) = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{5}\right) - \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{1}\right) - \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{3}\right)$$

Bode Diagram



Margens de Estabilidade

Frequência de cruzamento de ganho

$$|G_Z(j\omega)| = \frac{1,2\sqrt{\omega^2 + 25}}{\sqrt{\omega^2 + 1}\sqrt{\omega^2 + 9}} = 1 \Rightarrow \omega_{CG} = 1,57$$

Margem de Fase

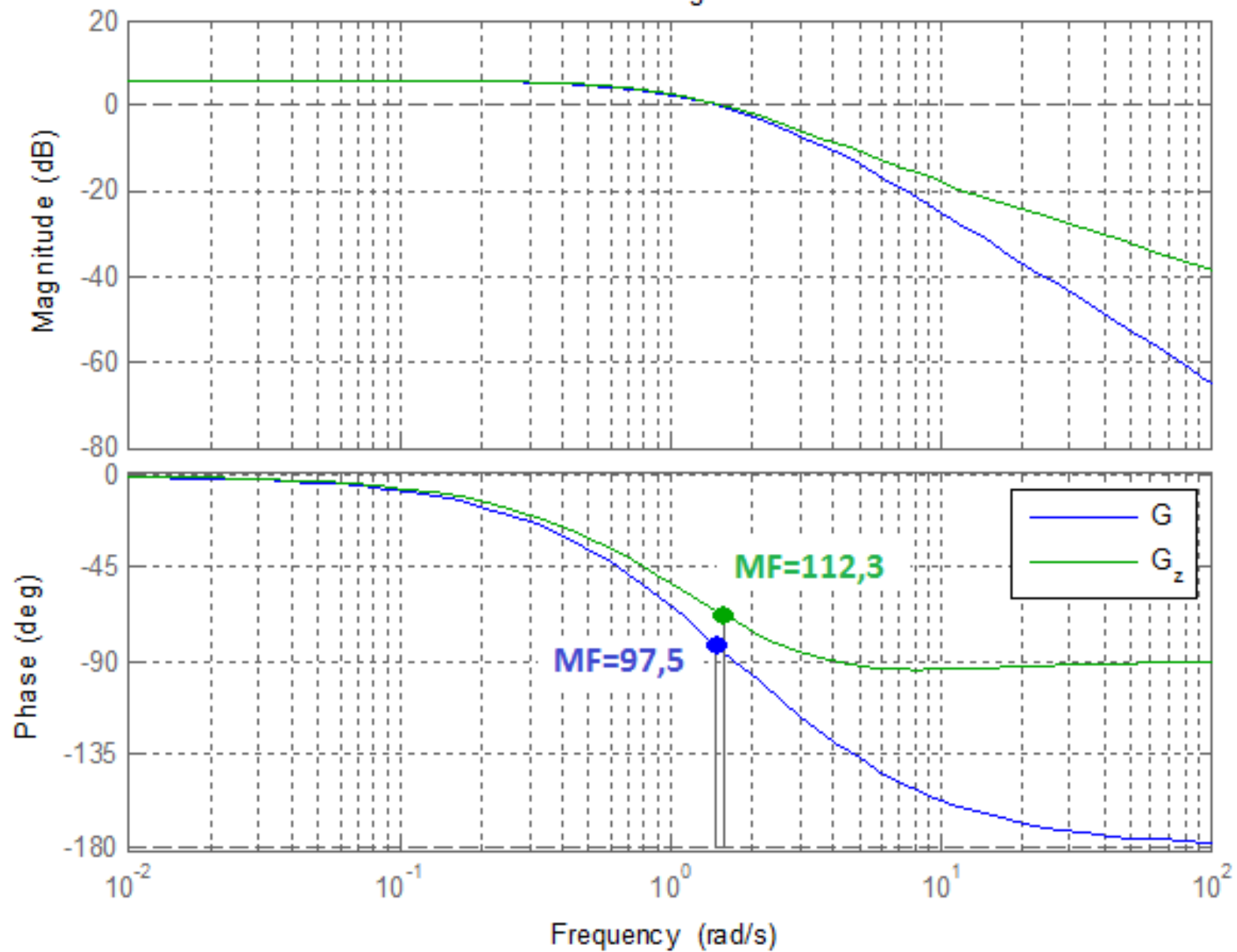
$$MF = 180^\circ + \angle G(j\omega_{CG}) = 180^\circ - 67,7^\circ$$

$$MF = 112,3^\circ$$

Margem de Ganho

$$MG = \infty$$

Bode Diagram



Resposta ao Degrau

$$y_{\infty} = 6/9 = 0,667$$

Em malha fechada

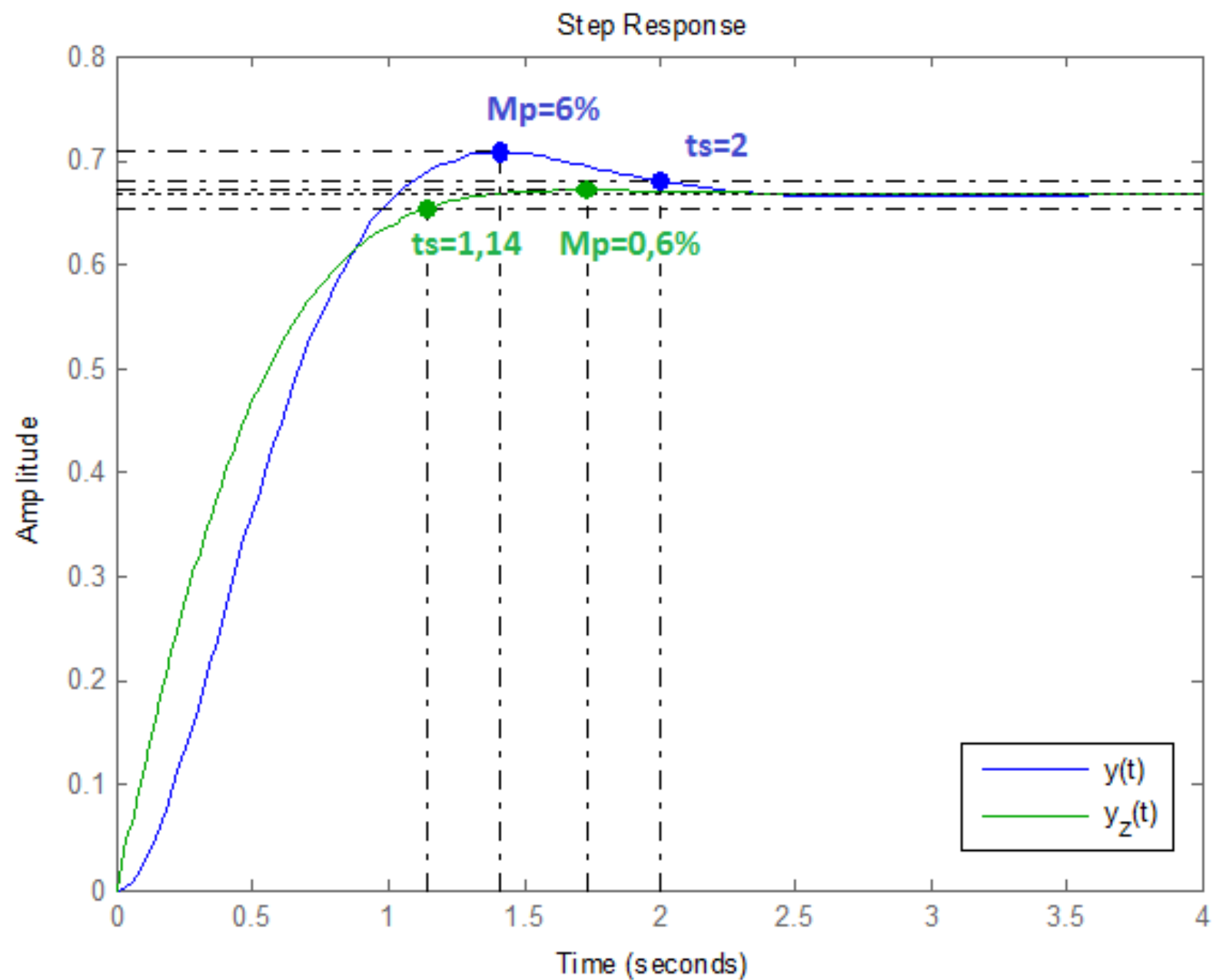
$$T_z(s) = \frac{G_z(s)}{1 + G_z(s)} = \frac{1,2(s + 5)}{s^2 + 5,2s + 9}$$

Polos: $p_{1,2} = -2,6 + j1,5$

Desprezando o efeito do zero:

$$\begin{cases} \omega_n = 3 \\ \xi = 0,87 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_P = 0,4\% \\ t_s = 1,54 \end{cases}$$

Valores reais (simulados): $M_P = 0,6\%$ e $t_s = 1,14$



Efeito da adição de um zero

O efeito da adição de um zero é **aumento das margens de estabilidade e da largura de faixa.**

O aumento da margem de fase implica em uma redução no sobressinal da resposta ao degrau enquanto que o aumento da largura de faixa gera em redução do tempo de acomodação.

