Especificações da Resposta em Frequência

Profa. Cristiane Paim

Introdução

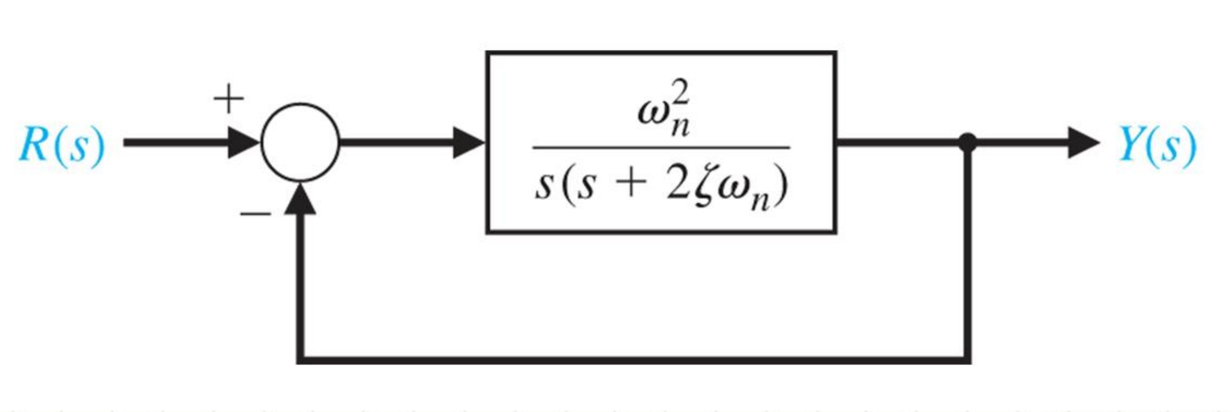
O desempenho de um sistema é, em geral, avaliado em função de sua resposta no tempo.

Sendo assim, é comum relacionar as características dinâmicas da resposta do tempo e os parâmetros da resposta em frequência tais como: margem de ganho, margem de fase, frequência e pico de ressonância.

Assim como na resposta no tempo, as especificações de desempenho serão definidas para sistemas de 2ª ordem sem zeros.

Introdução

Seja o sistema

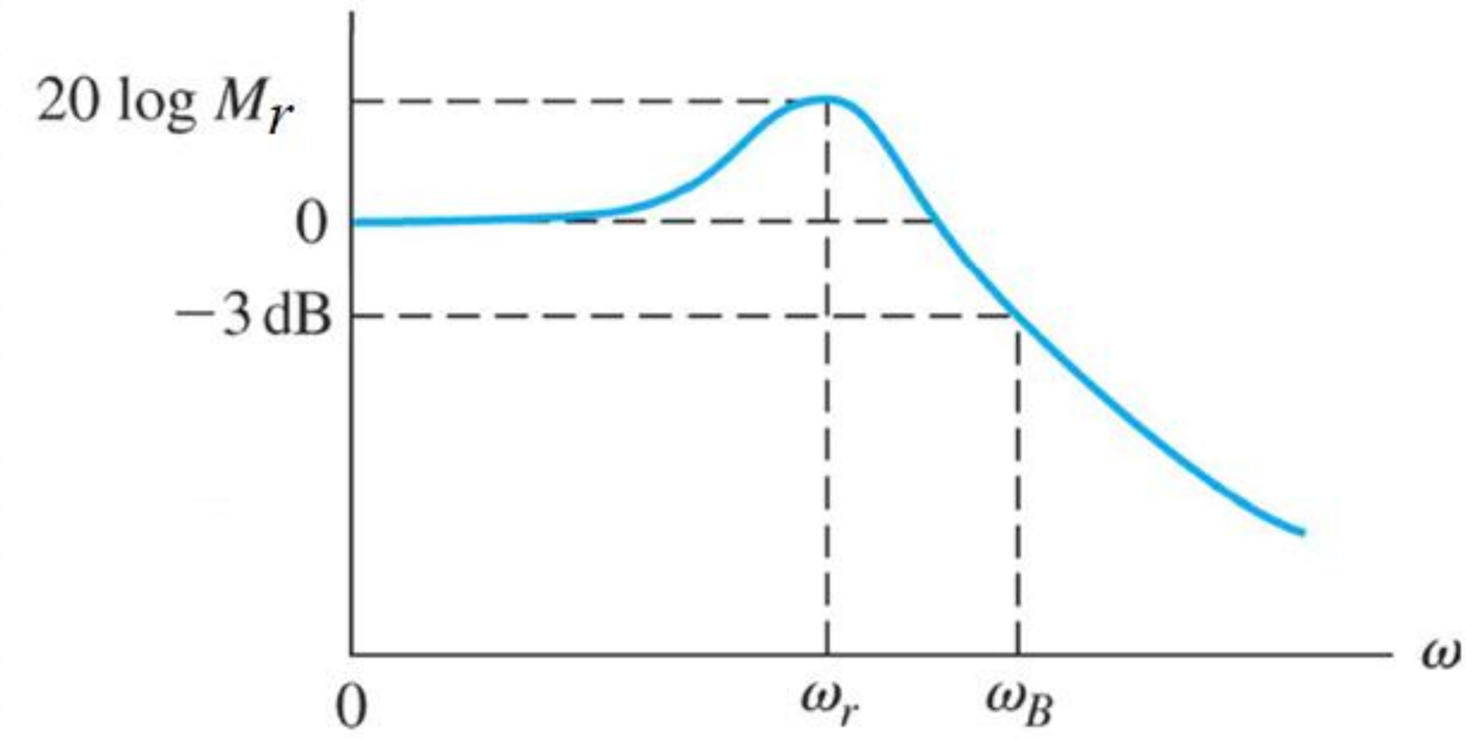


em malha fechada tem-se

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Introdução

Para um sistema subamortecido ($0 < \xi < 0{,}707$), obtém-se a resposta em frequência (diagrama de módulo) abaixo.



Introdução

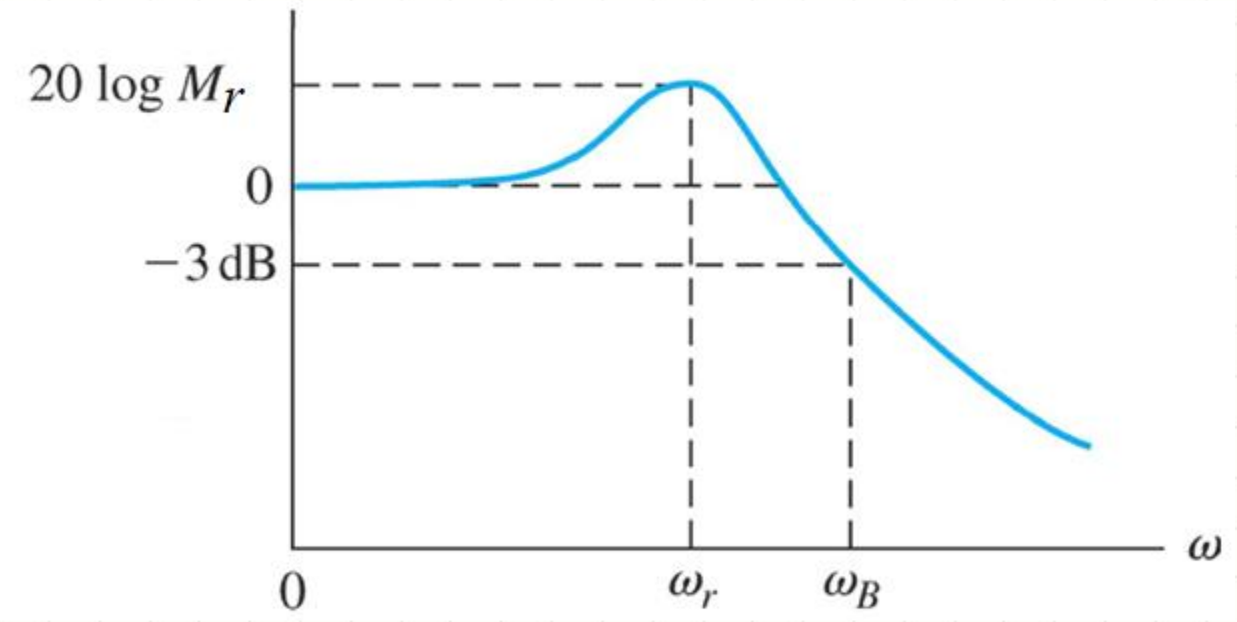
As especificações em frequência serão relacionadas àquelas do domínio do tempo e termos de resposta transitória e de regime permanente.

Resposta transitória: tempo de subida, tempo de pico, tempo de acomodação e sobressinal máximo.

Resposta em regime permanente: erros/coeficientes de posição, velocidade e aceleração.

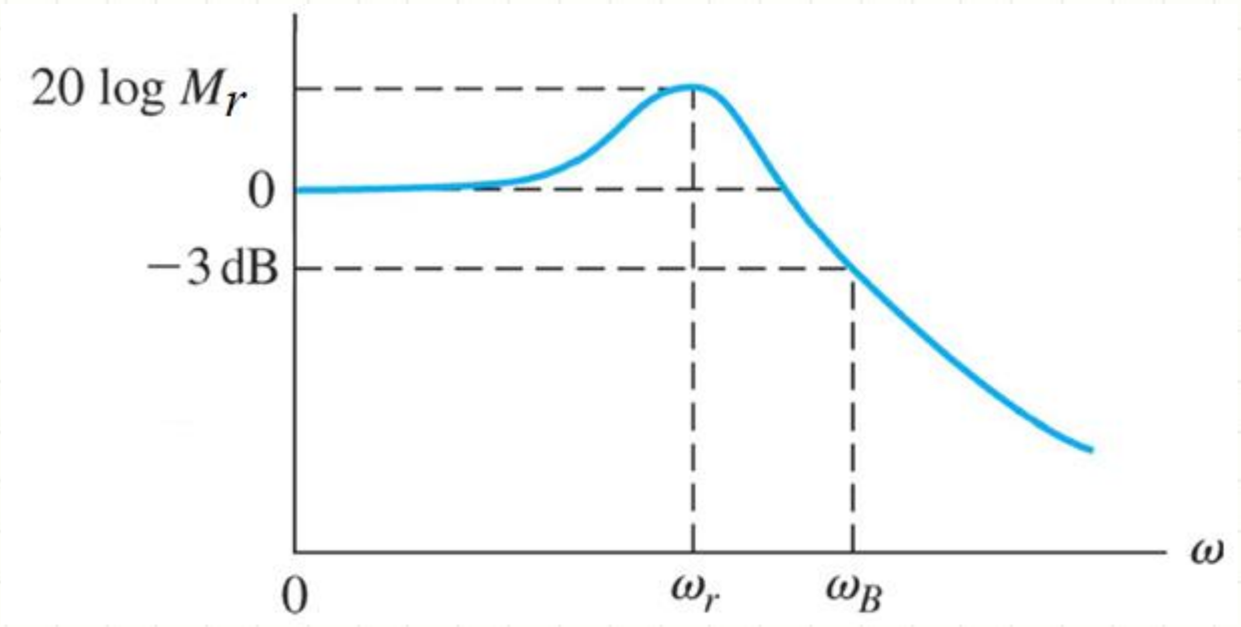
Características da resposta em frequência

- Pico de ressonância (M_R): máximo valor de $|G(j\omega)|$
- Frequência de ressonância (ω_R): frequência na qual ocorre o pico de ressonância.



Características da resposta em frequência

- Frequência de corte (ω_B): frequência na qual $|G(j\omega)| = -3$ dB.
- Largura de faixa: faixa de frequência $0 < \omega < \omega_B$



Frequência e pico de ressonância

Como visto anteriormente, o pico de ressonância é dado por

$$M_R = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

e ocorre na frequência de ressonância

$$\omega_R = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$$

sendo $0 < \xi < 0{,}707$.

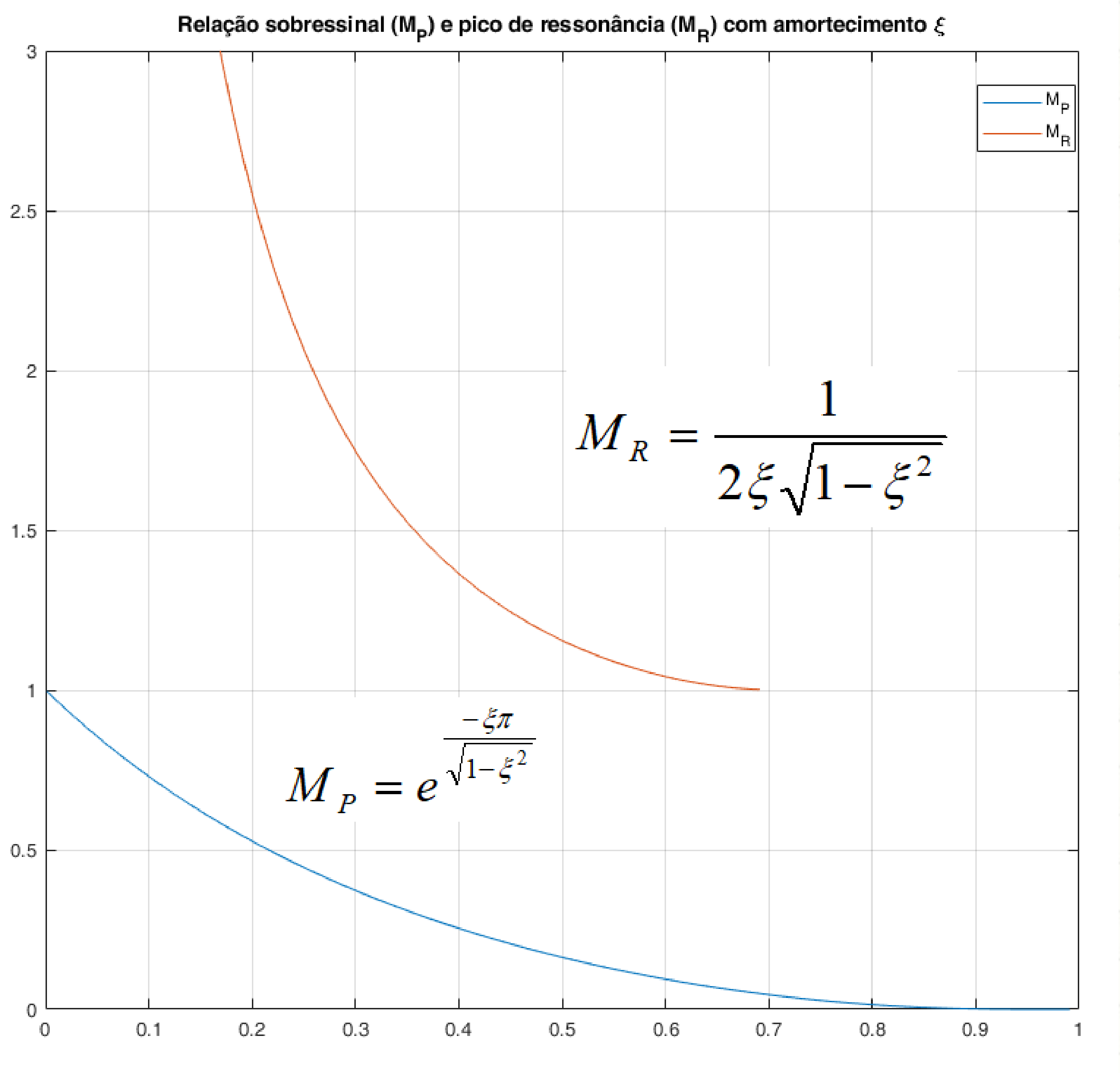
Frequência e pico de ressonância

Observa-se que o pico de ressonância é inversamente proporcional ao coeficiente de amortecimento ξ.

Quanto menor o valor de ξ, maior será o pico de ressonância.

Tendo em vista que o coeficiente de amortecimento ξ está diretamente relacionado ao sobressinal da resposta no tempo, observa-se uma relação direta entre M_P e M_R.

Relação entre M_P , M_R x ξ



Largura de faixa

A largura de faixa (largura de banda) é definida pela frequência ω_B na qual o valor de módulo da resposta em frequência é -3dB ($1/\sqrt{2}$). Desta relação obtém-se:

$$\omega_B = \omega_n \sqrt{(1-2\xi^2) + \sqrt{4\xi^4 - 4\xi^2 + 2}}$$

Portanto, **a largura de faixa depende unicamente do coeficiente de amortecimento ξ**.

No limite:

$$\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \rightarrow \quad \omega_B = \omega_n$$

Largura de faixa

Observa-se que a largura de faixa está diretamente relacionada com ω_n e, consequentemente, com a **velocidade da resposta**.

Assim, uma vez que todas as especificações de “tempo” são inversamente proporcionais a ω_n , **quanto maior a largura de faixa menor será o tempo associado**.

Largura de faixa

Tempo de acomodação:

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} \quad \Rightarrow \quad t_s = \frac{4}{\xi\omega_B}\sqrt{(1-2\xi^2)+\sqrt{4\xi^4-4\xi^2+2}}$$

Tempo de pico:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_B\sqrt{1-\xi^2}}\sqrt{(1-2\xi^2)+\sqrt{4\xi^4-4\xi^2+2}}$$

Tempo de subida:

$$t_r = \frac{\pi-\theta}{\omega_B\sqrt{1-\xi^2}}\sqrt{(1-2\xi^2)+\sqrt{4\xi^4-4\xi^2+2}}$$

Margem de Fase

Seja a função de transferência de malha aberta

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)}$$

A margem de fase é calculada para a frequência ω_{CG} , obtida para $|G(j\omega_{CG})| = 1$. Assim,

$$|G(j\omega_{CG})| = \frac{\omega_n^2}{\omega_{CG}\sqrt{\omega_{CG}{}^2 + 4\xi^2\omega_n^2}} = 1$$

Margem de Fase

Desenvolvendo a igualdade chega-se a:

$$\omega_{CG} = \omega_n \sqrt{-2\xi^2 + \sqrt{1 + 4\xi^4}}$$

Nesta frequência,

$$\angle G(j\omega_{CG}) = -\angle(j\omega_{CG}) - \angle(j\omega_{CG} + 2\xi\omega_n)$$

$$= -90° - tg^{-1}\left(\frac{\sqrt{-2\xi^2 + \sqrt{1 + 4\xi^4}}}{2\xi}\right)$$

Margem de Fase

Assim, a margem de fase será:

$$MF = 180° + \angle G(j\omega_{CG}) = 90° - tg^{-1}\left(\frac{\sqrt{-2\xi^2 + \sqrt{1+4\xi^4}}}{2\xi}\right)$$

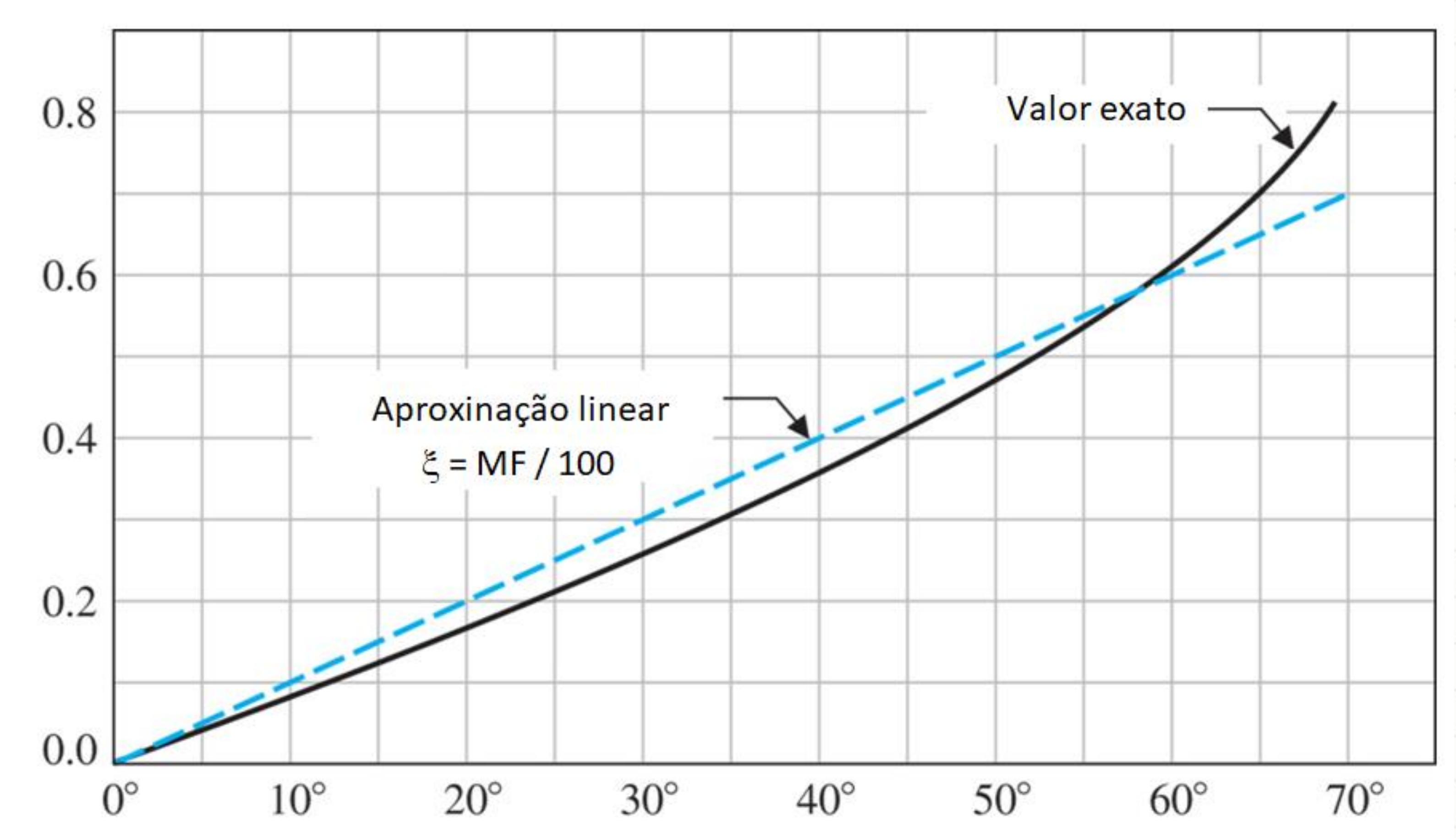
ou

$$MF = tg^{-1}\left(\frac{2\xi}{\sqrt{-2\xi^2 + \sqrt{1+4\xi^4}}}\right)$$

Portanto, **a margem de fase depende unicamente do fator de amortecimento ξ**, estando as duas grandezas diretamente relacionadas.

Margem de Fase

Observa-se que, para $\xi < 0,6$, a relação desta variável com a margem de fase é aproximadamente linear.



Exemplo

Qual a largura de faixa necessária para garantir uma resposta com sobressinal menor do que 20% e tempo de acomodação não superior a 2 segundos?

$$Mp < 0,2 \quad \Rightarrow \quad \xi > 0,456$$

$$t_s = \frac{4}{\xi \omega_n} \quad \Rightarrow \quad \omega_n = \frac{4}{t_s \xi}$$

Considerando os limites, ξ=0,456 e t_s=2,

$$\omega_B = \frac{4}{t_s \xi} \sqrt{(1 - 2\xi^2) + \sqrt{4\xi^4 - 4\xi^2 + 2}} = 5,8$$

$$\omega_B > 5,8 \text{ rd/s}$$

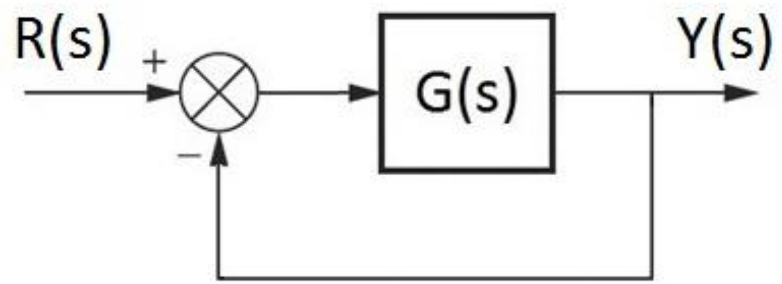
Especificações de Regime Permanente

As especificações em regime permanente normalmente são definidas em termos de coeficientes de erro ou critérios referentes a atenuação/rejeição de perturbações.

Sistema	Entrada		
	Degrau	Rampa	Parábola
Tipo 0	constante	∞	∞
Tipo 1	0	constante	∞
Tipo 2	0	0	constante

Coeficientes de Erro

Para o sistema:



tem-se os coeficientes de erro:

$$K_P = \lim_{s \to 0} G(s) \quad \rightarrow \quad e_p = \frac{1}{1 + K_P}$$

$$K_V = \lim_{s \to 0} sG(s) \quad \rightarrow \quad e_v = \frac{1}{K_V}$$

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 G(s) \quad \rightarrow \quad e_a = \frac{1}{K_a}$$

Determinação de coeficiente de erro

As constantes de erro de posição, velocidade e aceleração descrevem o **comportamento em baixa frequência** para sistemas do tipo 0, 1 e 2.

O tipo do sistema determina a inclinação da curva de módulo (em dB) em baixa frequência.

Portanto, a informação relativa ao erro de regime permanente de um sistema, para uma dada entrada, pode ser determinada a partir da observação da região de baixa frequência no gráfico de módulo do Diagrama de Bode.

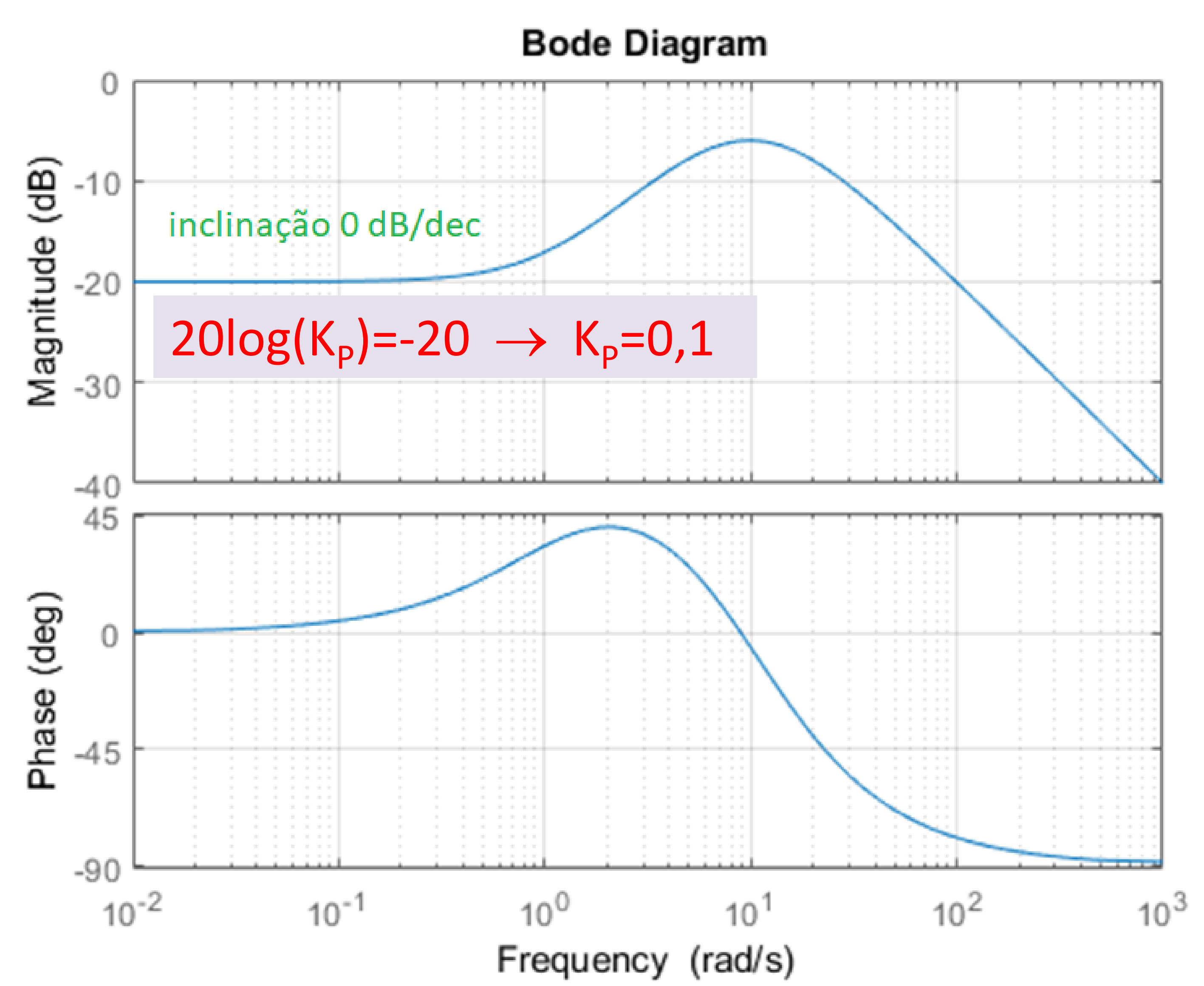
Coeficiente de Erro de Posição

Este coeficiente só será finito e não nulo para sistemas do tipo 0, ou seja, que não contenham polos na origem.

$$K_p = \lim_{s \to 0} G(s) = \lim_{\omega \to 0} G(j\omega) = G(0)$$

Neste caso, **a assíntota de baixa frequência é uma reta com inclinação 0 dB/dec** (paralela ao eixo ω) com valor de módulo 20log(Kp).

Coeficiente de Erro de Posição



Coeficiente de Erro de Velocidade

Este coeficiente só será finito e não nulo para sistemas do tipo 1, ou seja, que contenham um polo na origem.

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s) = \lim_{\omega \to 0} j\omega G(j\omega)$$

Neste caso, **a assíntota de baixa frequência é uma reta com inclinação -20 dB/dec**.

Em baixa frequência ($\omega \to 0$)

$$G(j\omega) = \frac{K_v}{j\omega}$$

Coeficiente de Erro de Velocidade

Em módulo,

$$|K_v| = \omega |G(j\omega)|$$

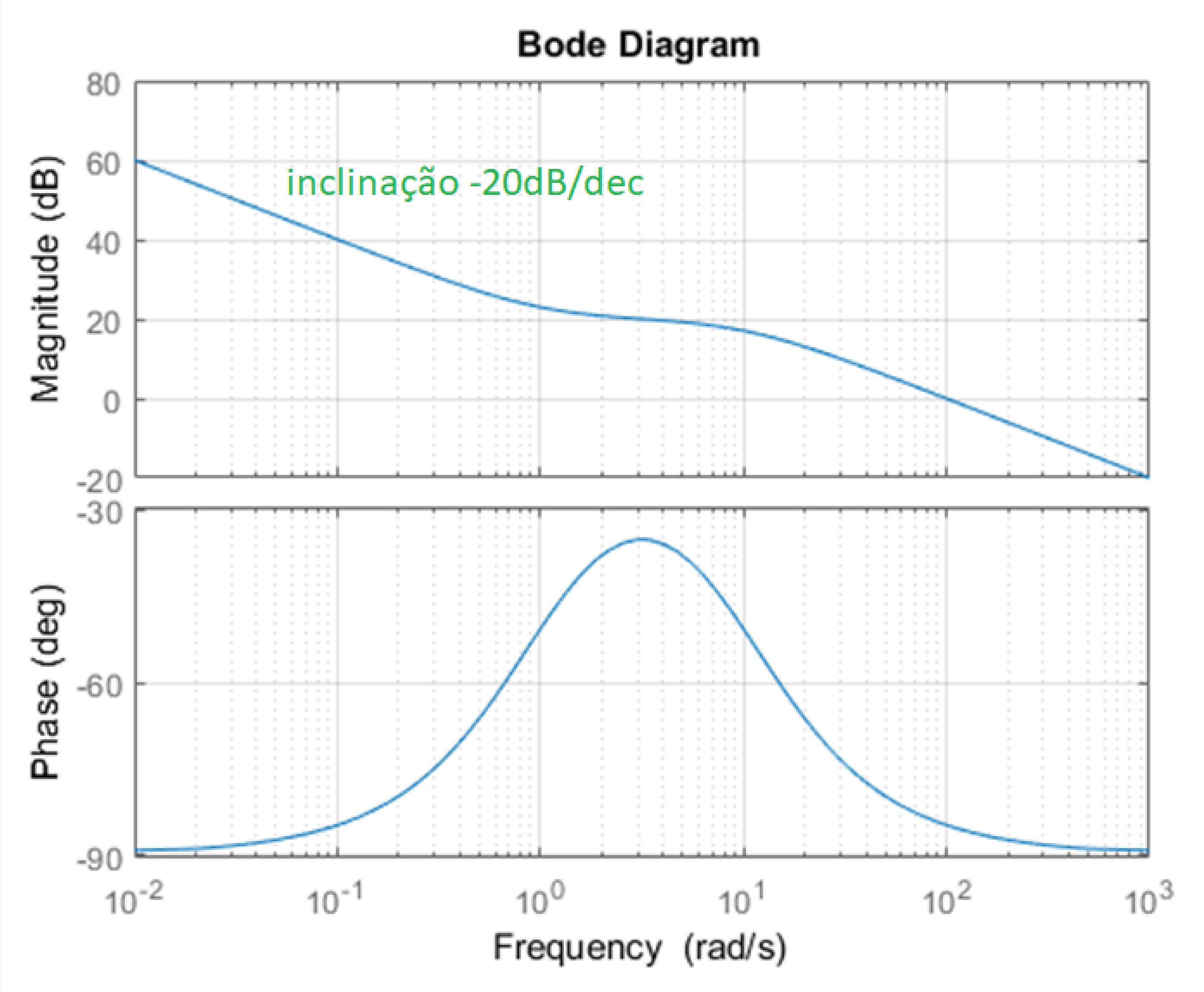
Para $\omega = 1$,

$$|K_v| = |G(j1)|$$

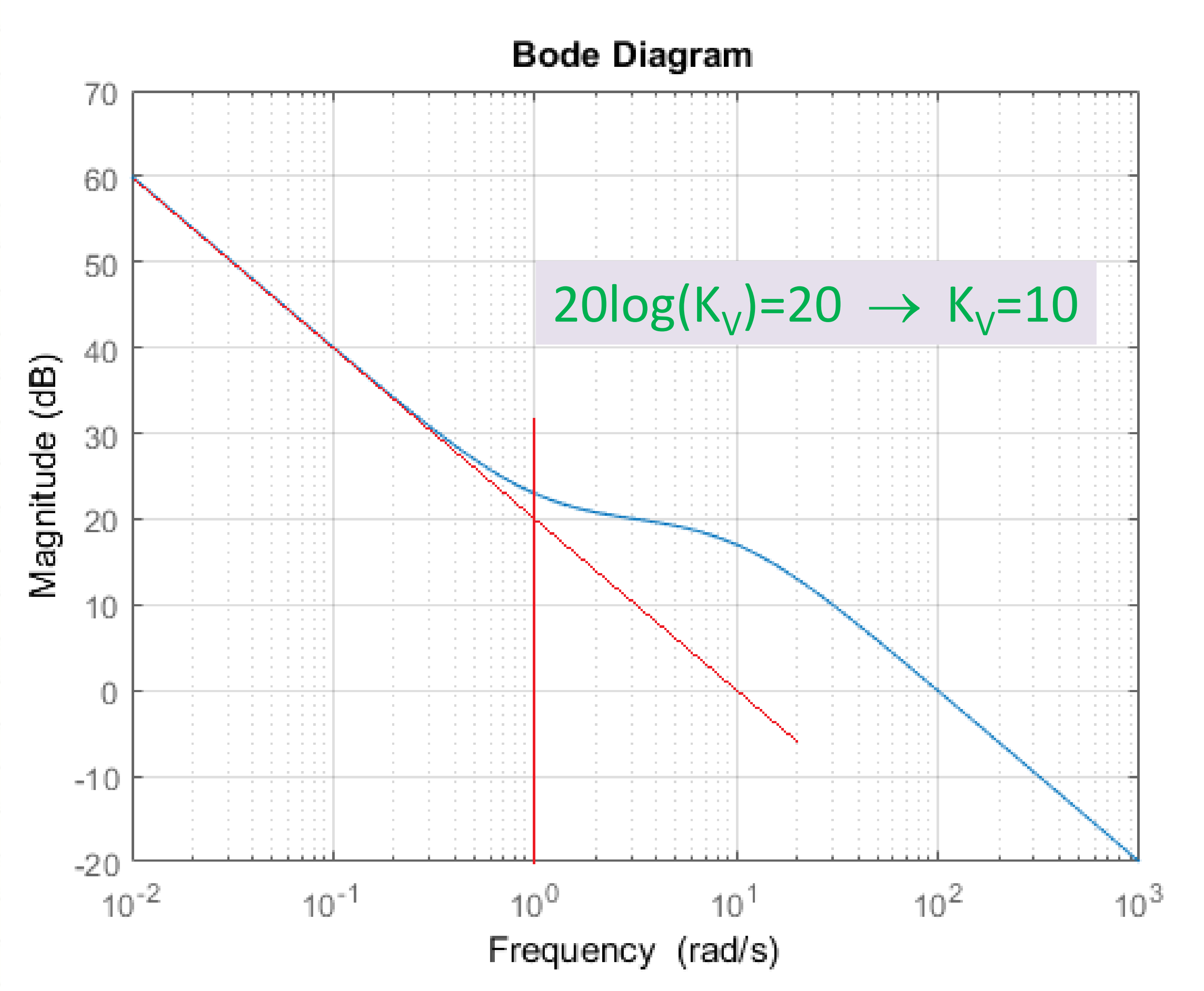
correspondendo a assíntota de baixa frequência em ω=1.

Assim, K_V pode ser obtido da interseção entre a assíntota da baixa frequência (ou sua extensão) e uma reta perpendicular ao eixo horizontal em ω = 1.

Coeficiente de Erro de Velocidade



Coeficiente de Erro de Velocidade



Coeficiente de Erro de Velocidade

Alternativamente, considerando que

$$|K_v| = \omega |G(j\omega)|$$

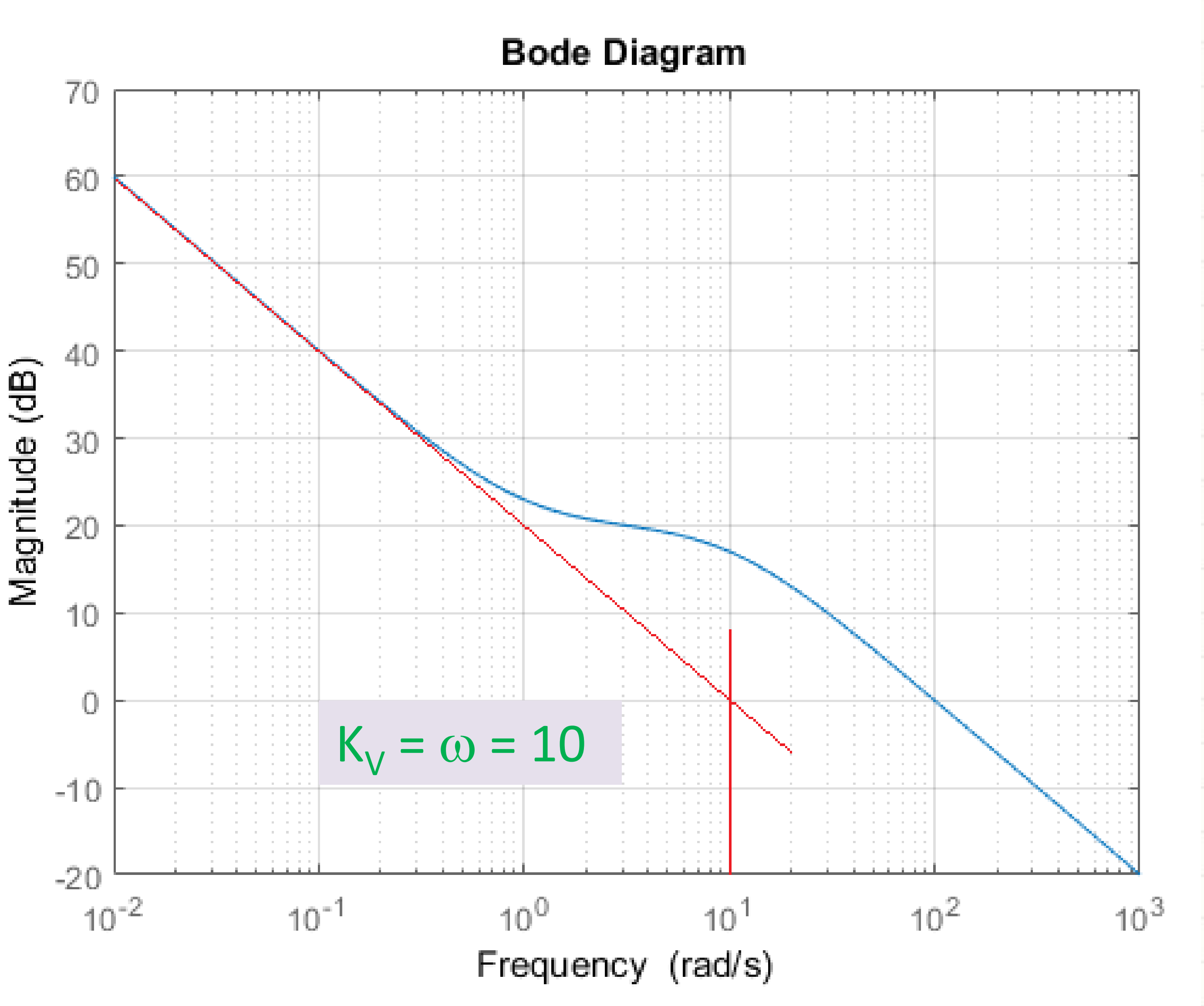
e fazendo $|G(j\omega)| = 1$ (0dB), tem-se

$$K_v = \omega$$

Assim, Kv pode ser obtido da interseção entre a assíntota da baixa frequência (ou sua extensão) e o eixo horizontal (0dB). Neste caso, a interseção ocorre em

$$\omega = K_v$$

Coeficiente de Erro de Velocidade



Coeficiente de Erro de Aceleração

Este coeficiente só será finito e não nulo para sistemas do tipo 2, ou seja, que contenham dois polos na origem.

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s) = \lim_{\omega\to 0} (j\omega)^2 G(j\omega)$$

Neste caso, **a assíntota de baixa frequência é uma reta com inclinação -40 dB/dec.**

Em baixa frequência ($\omega \to 0$)

$$G(j\omega) = \frac{K_a}{(j\omega)^2}$$

Coeficiente de Erro de Aceleração

Em módulo,

$$|K_a| = \omega^2 |G(j\omega)|$$

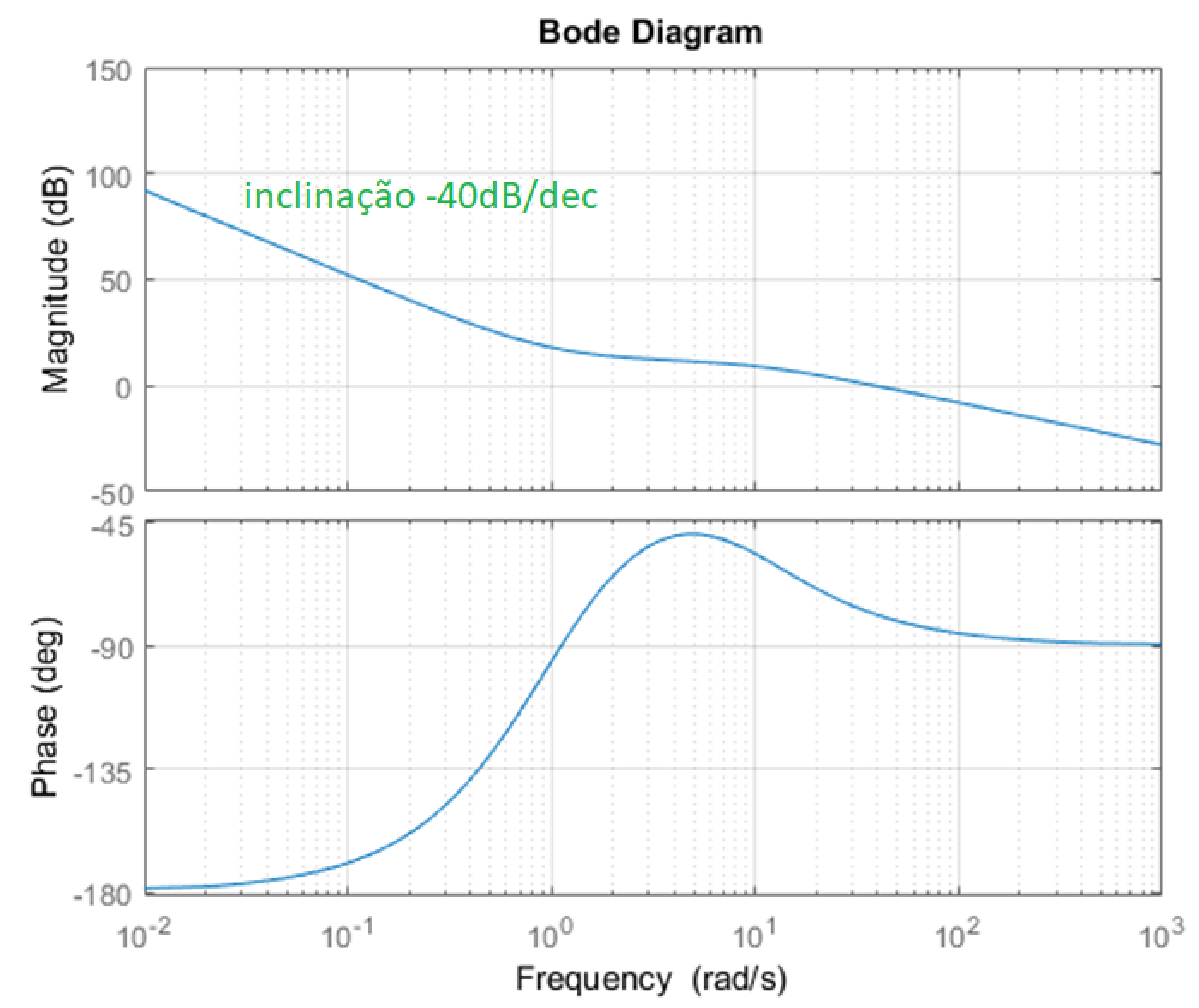
Para $\omega = 1$,

$$|K_a| = |G(j1)|$$

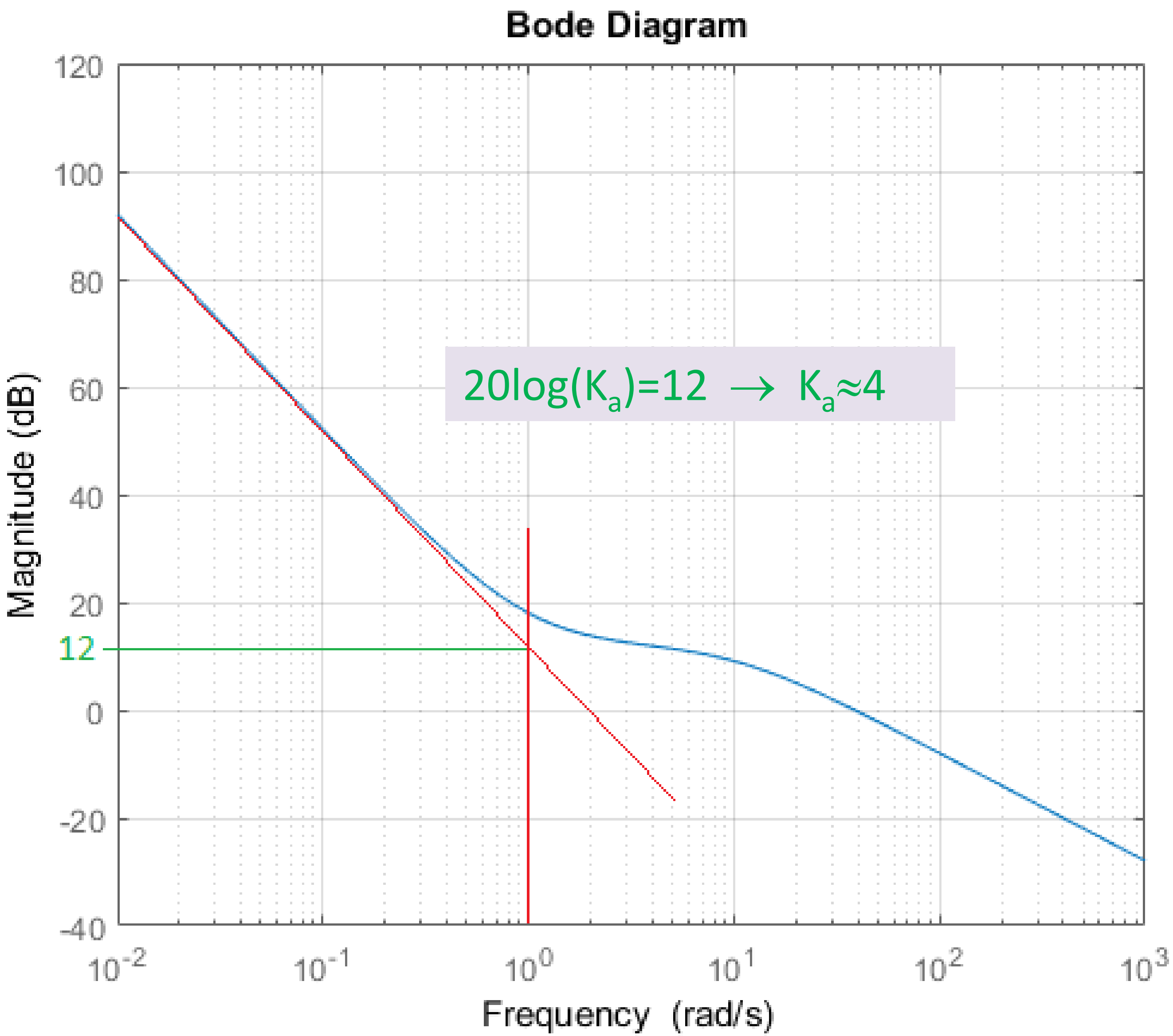
correspondendo a assíntota de baixa frequência em ω=1.

Assim, Ka pode ser obtido da interseção entre a assíntota da baixa frequência (ou sua extensão) e uma reta perpendicular ao eixo horizontal em ω = 1.

Coeficiente de Erro de Aceleração



Coeficiente de Erro de Aceleração



Coeficiente de Erro de Aceleração

Alternativamente, considerando que

$$|K_a| = \omega^2 |G(j\omega)|$$

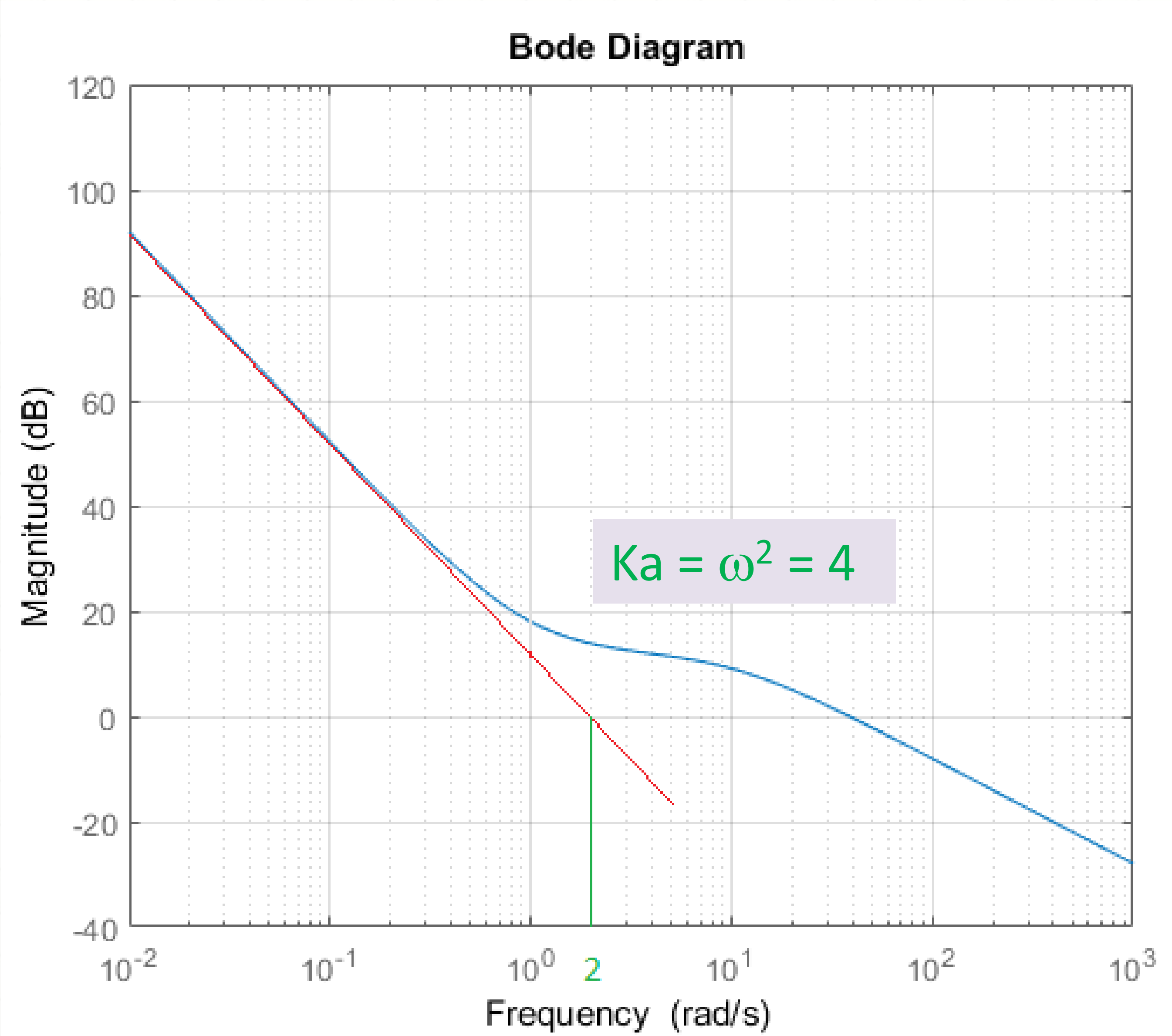
e fazendo $|G(j\omega)| = 1$ (0dB), tem-se

$$K_a = \omega^2$$

Assim, Kv pode ser obtido da interseção entre a assíntota da baixa frequência (ou sua extensão) e o eixo horizontal (0dB). Neste caso, a interseção ocorre em

$$\omega = \sqrt{K_a}$$

Coeficiente de Erro de Aceleração

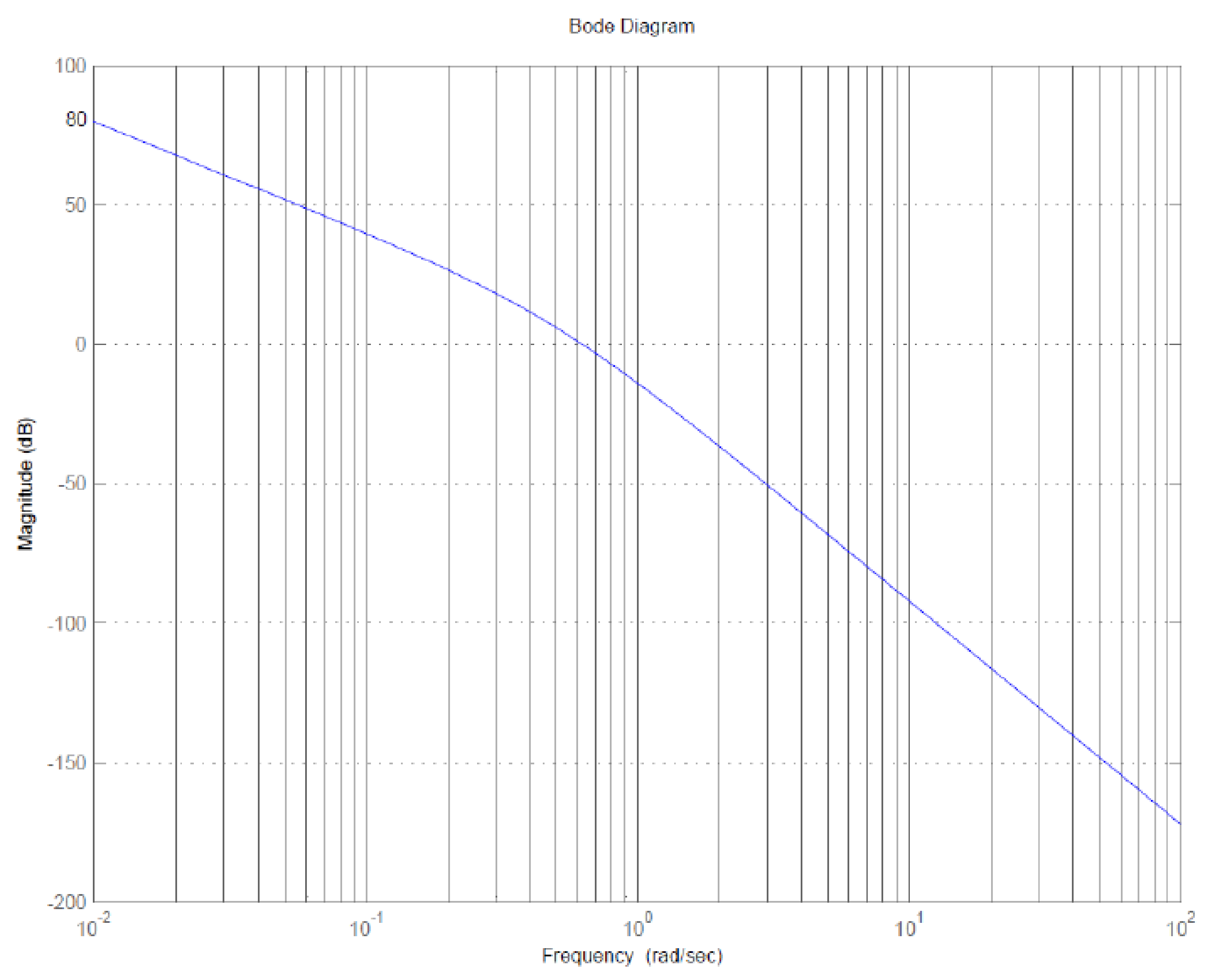


Exemplo

Seja um sistema de controle com realimentação unitária cuja função de transferência (fase mínima) de malha aberta é dada por G(s). A variação do módulo (em dB) para $G(j\omega)$ é dada a seguir.

A partir do diagrama de Bode, **determinar o tipo do sistema e o coeficiente de erro associado.**

Exemplo


Bode Diagram
100
80
50
0
-50
-100
-150
-200
Magnitude (dB)
10^-2
10^-1
10^0
10^1
10^2
Frequency (rad/sec)

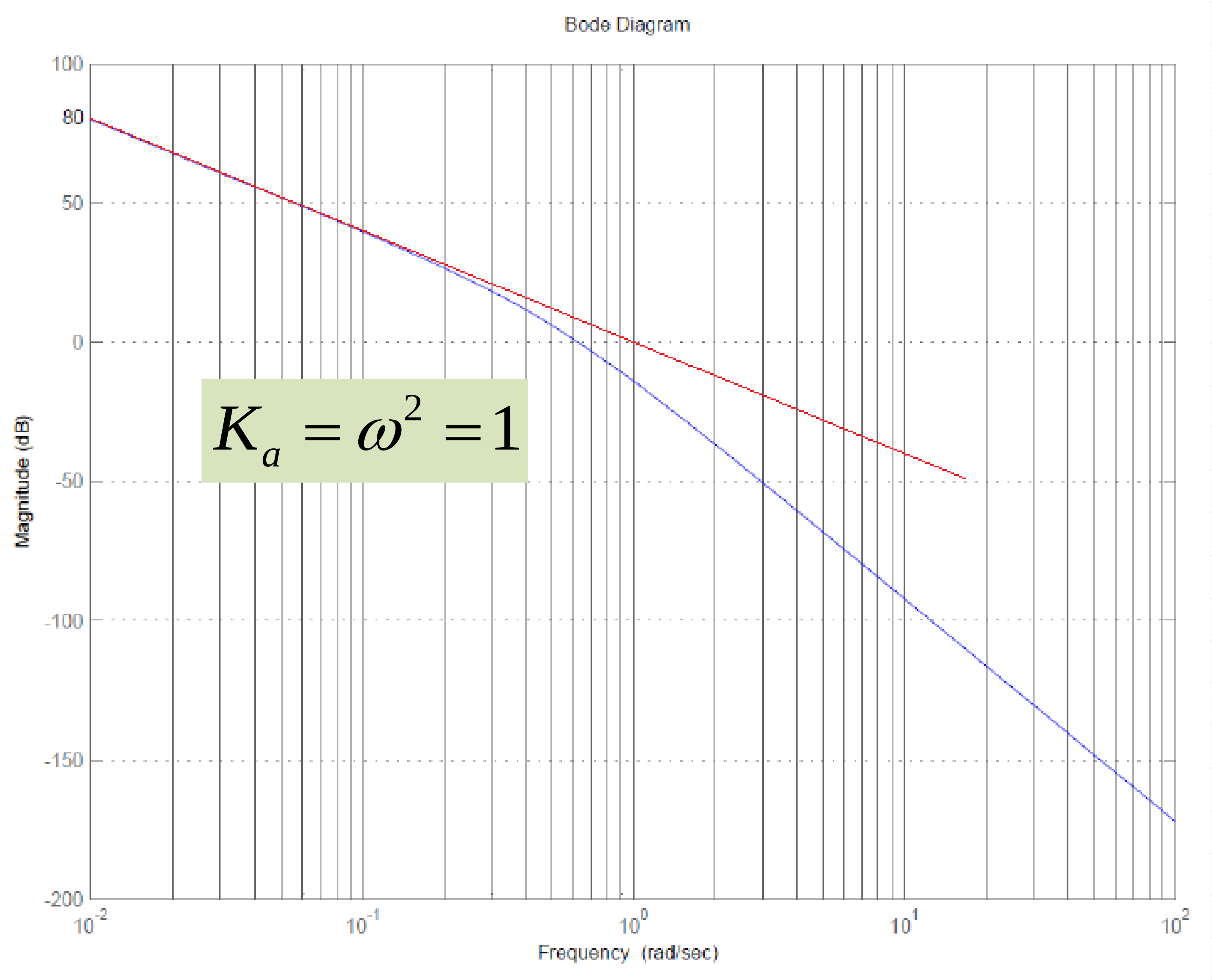
Exemplo

Do gráfico, observa-se que em baixa frequência a variação do módulo é -40dB/dec. **Logo, o sistema é do tipo 2** e o coeficiente associado será o de aceleração Ka.

Fazendo o prolongamento da assíntota de baixa frequência até a linha de 0 dB obtém-se a frequência ω e, consequentemente, o valor de Ka.

$$K_a = \omega^2$$

Exemplo



Bode Diagram
100
80
50
0
-50
-100
-150
-200
Magnitude (dB)
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
Frequency (rad/sec)
$K_a = \omega^2 = 1$

Efeito da adição de polos e zeros na resposta em frequência

A introdução de polos e/ou zeros (de fase mínima) no sistema de malha aberta modificará a resposta de malha fechada.

No lugar das raízes foi observado que a introdução de polos e zeros afeta a estabilidade do sistema. A tendência da adição de um polo é reduzir a estabilidade enquanto a adição de um zero tende a gerar um aumento da estabilidade.

No domínio da frequência uma característica semelhante será observada.

Efeito da adição de polos e zeros na resposta em frequência

O efeito da **adição de um polo** é a **redução das margens de estabilidade e da largura de faixa**.

A redução da margem de fase implica em um **aumento do sobressinal** da resposta ao degrau enquanto que a redução na largura de faixa gera um **aumento do tempo de acomodação**.

O efeito da **adição de um zero** é **aumento das margens de estabilidade e da largura de faixa**.

O aumento da margem de fase implica em uma **redução no sobressinal** da resposta ao degrau enquanto que o aumento da largura de faixa gera em **redução do tempo de acomodação.**

Exemplo

Seja a função de transferência

$$G(s) = \frac{6}{(s+1)(s+3)} \quad \Rightarrow \quad G(0) = 2$$

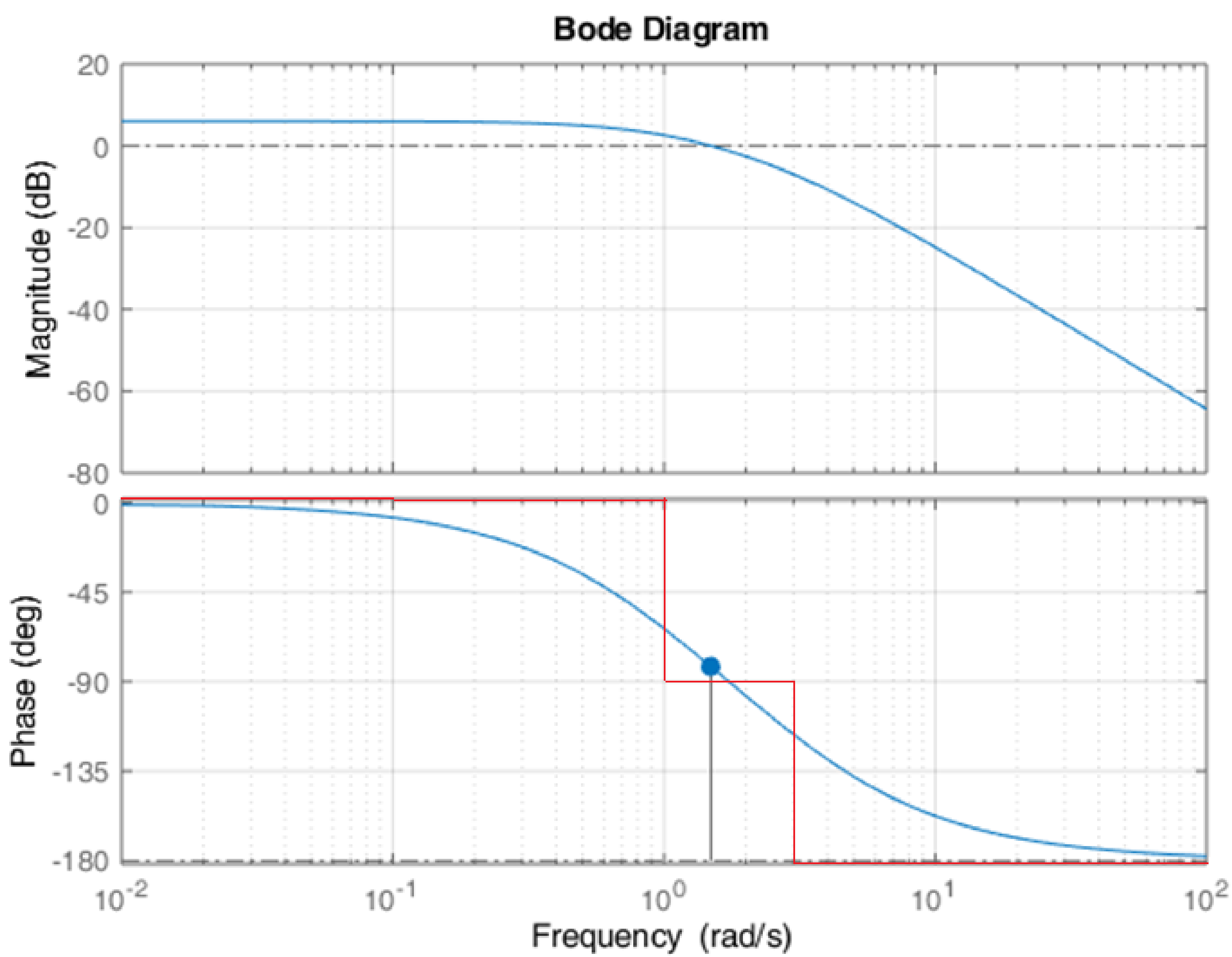
No domínio da frequência

$$G(j\omega) = \frac{6(3-\omega^2)}{(3-\omega^2)^2 + 16\omega^2} - j\frac{24\omega}{(3-\omega^2)^2 + 16\omega^2}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{6}{\sqrt{(3-\omega^2)^2 + 16\omega^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = tg^{-1}\left(\frac{-4\omega}{3-\omega^2}\right)$$

Exemplo: Diagramas de Bode



Exemplo: Margens de Estabilidade

Frequência de cruzamento de ganho

$$|G(j\omega)| = \frac{6}{\sqrt{(3-\omega^2)^2 + 16\omega^2}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_{CG} = 1{,}49$$

Margem de Fase

$$MF = 180^\circ + \angle G(j\omega_{CG}) = 180^\circ - 82{,}5^\circ$$

Margem de Ganho:

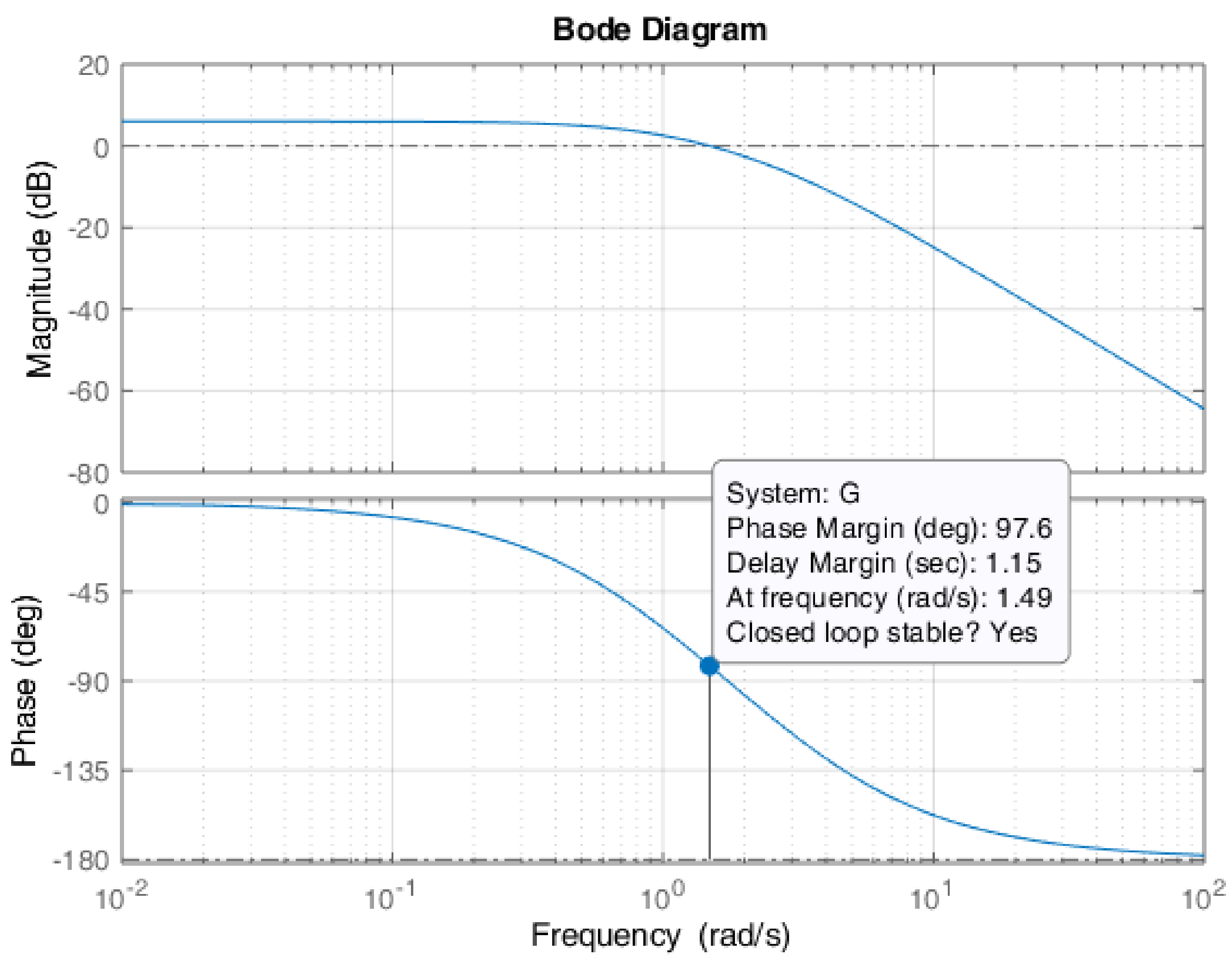
$$MF = 97{,}5^\circ$$

$$MG = \infty$$

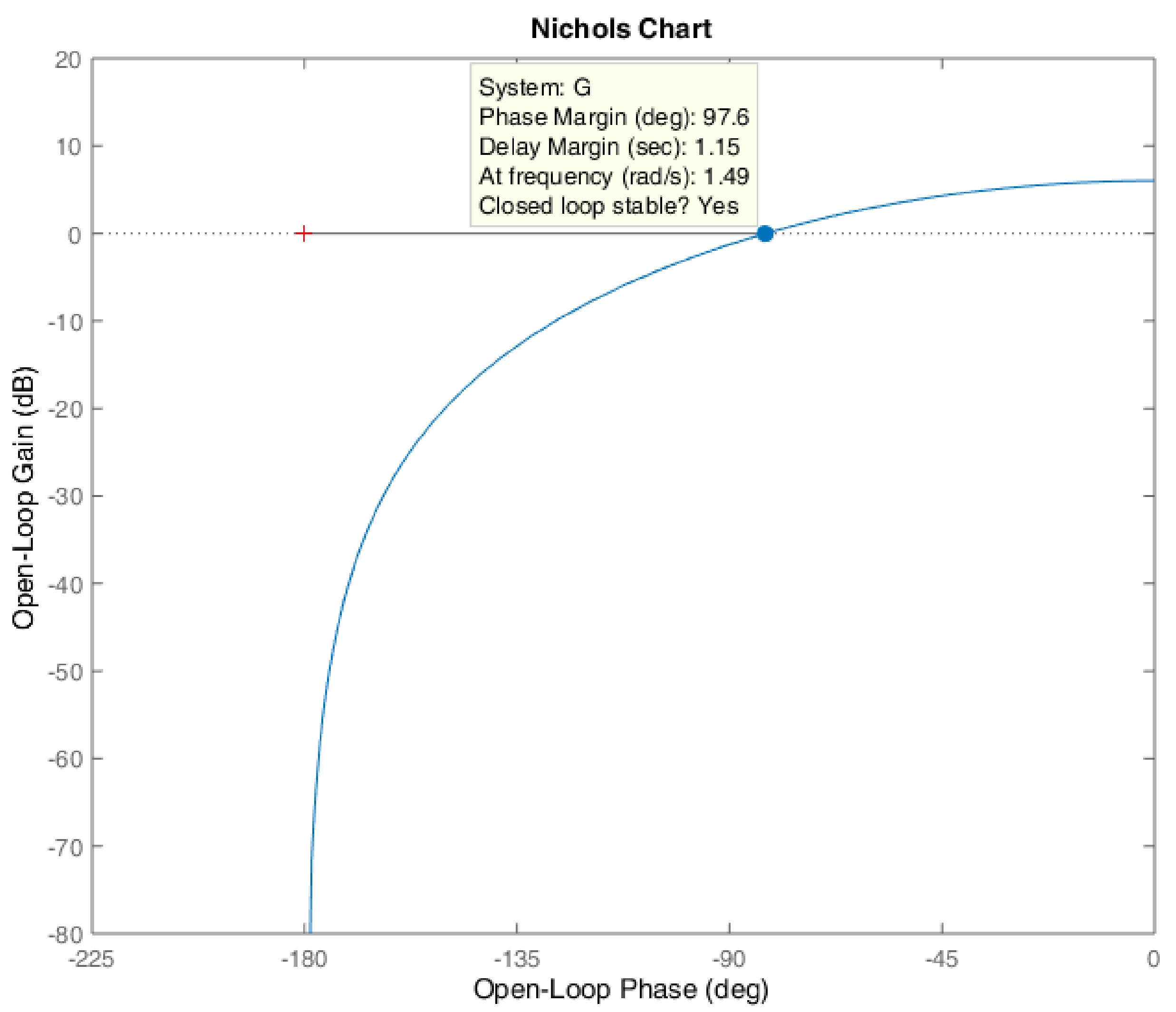
MG> e MF>0

Sistema Estável

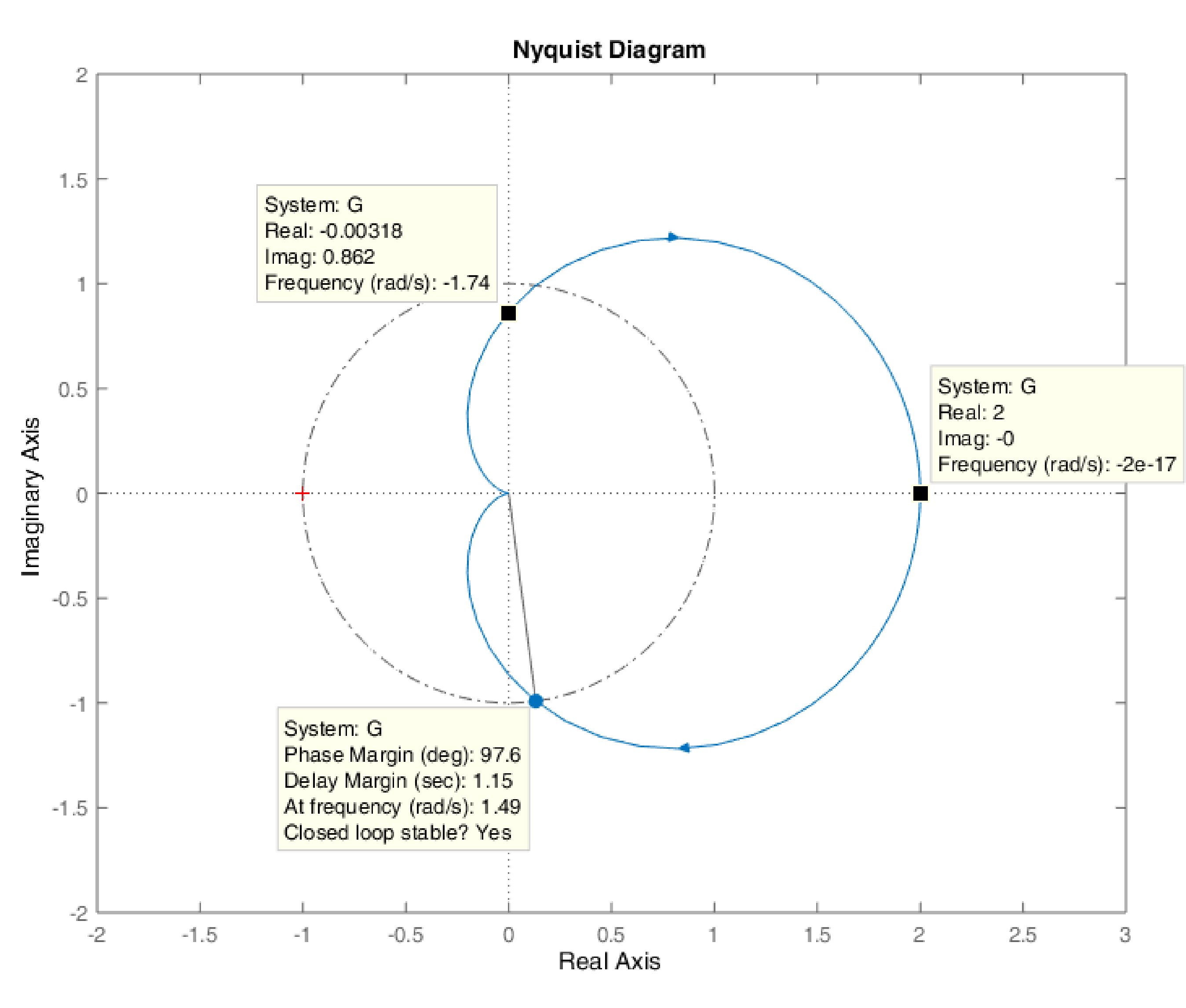
Exemplo: Margens de Estabilidade



Exemplo: Margens de Estabilidade



Exemplo: Margens de Estabilidade



Exemplo: Resposta ao Degrau

Em malha fechada

$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{6}{s^2+4s+9}$$

Polos:

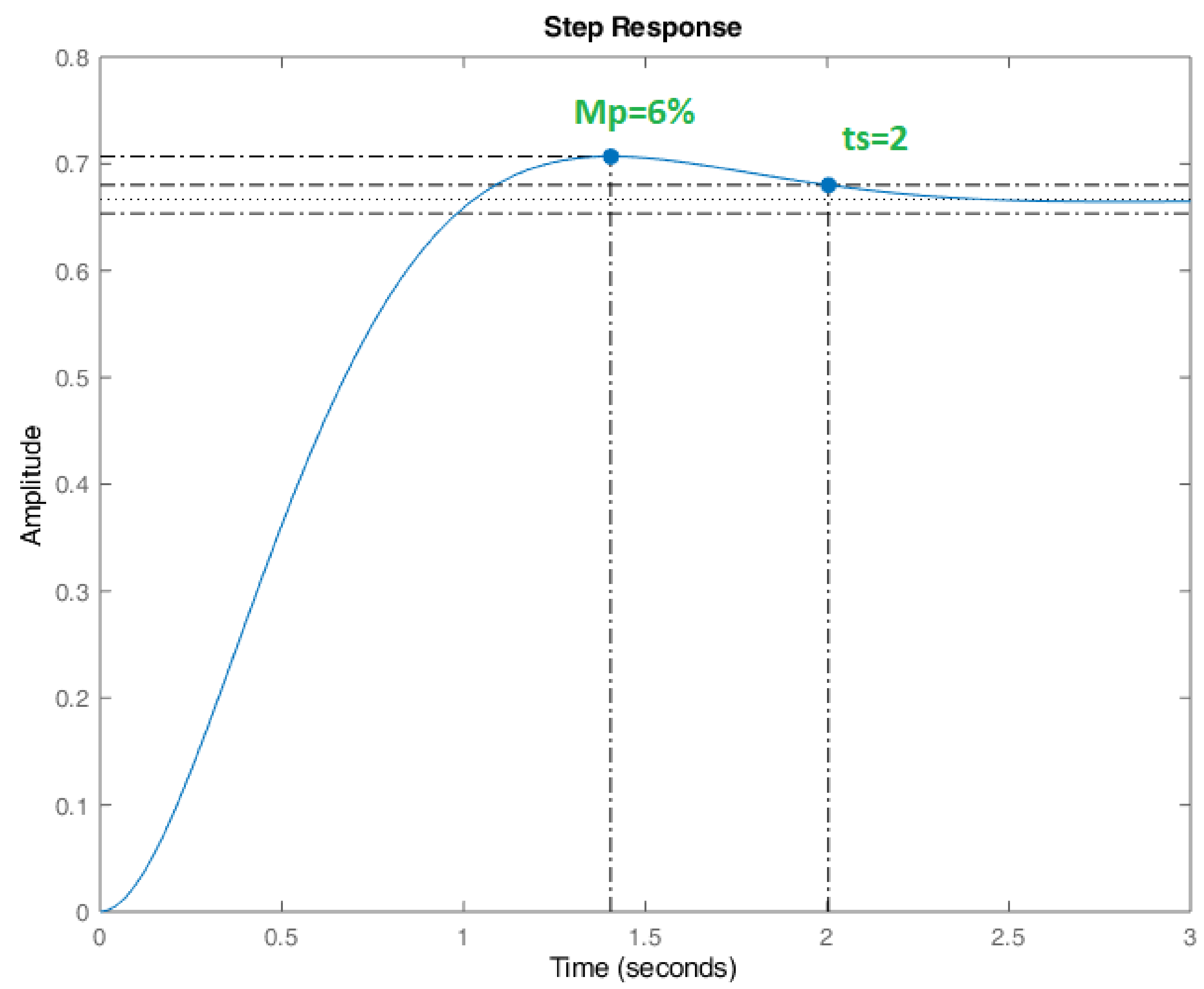
$$y_\infty = 6/9 = 0{,}667$$

$$p_{1,2} = -2 + j2{,}236$$

Resposta ao degrau:

$$\begin{cases} \omega_n = 3 \\ \xi = 0{,}667 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_P = 6\% \\ t_s = 2 \end{cases}$$

Exemplo: Resposta ao Degrau



Exemplo: Adição de um polo

Seja acrescido um polo em -5:

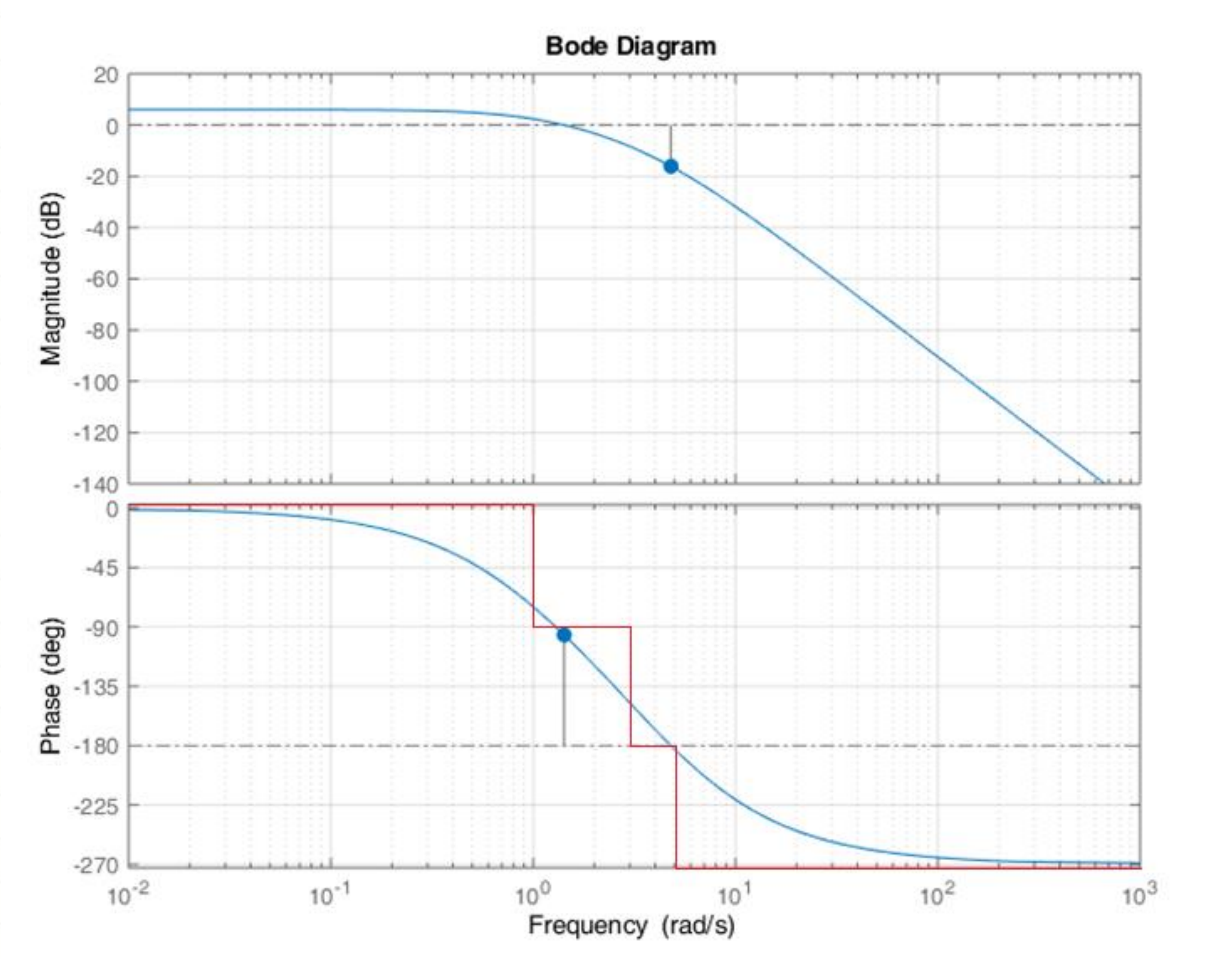
$$G_P(s) = \frac{6 \times 5}{(s+1)(s+3)(s+5)} \quad \Rightarrow \quad G(0) = 2$$

Em frequência:

$$\left|G_P(j\omega)\right| = \frac{30}{\sqrt{(15-9\omega^2)^2 + \omega^2(23-\omega^2)^2}}$$

$$\angle G_P(j\omega) = tg^{-1}\left(\frac{-\omega(23-\omega^2)}{15-9\omega^2}\right)$$

Exemplo: Digramas de Bode com polo adicional



Exemplo: Adição de um polo

Frequência de cruzamento de ganho

$$\left|G_P(j\omega)\right| = \frac{30}{\sqrt{(15-9\omega^2)^2+\omega^2(23-\omega^2)^2}} = 1$$

Margem de Fase

$$\omega_{CG} = 1{,}42$$

$$MF = 180^\circ + \angle G_P(j\omega_{CG}) = 180^\circ - 96^\circ$$

$$MF = 84^\circ$$

Exemplo: Adição de um polo

Frequência de cruzamento de fase

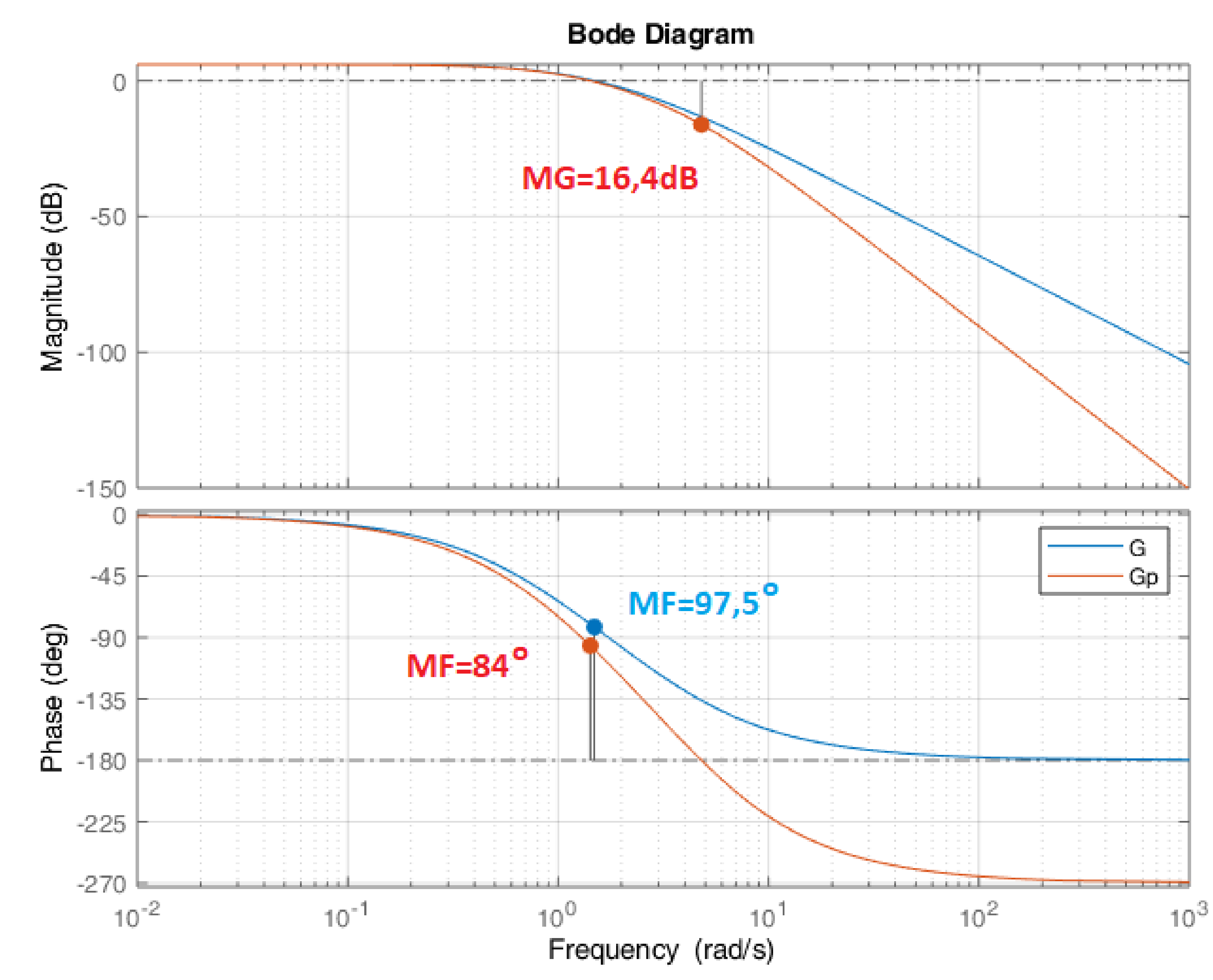
$$\angle G_P(j\omega) = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \omega_{CF} = 4{,}8$$

Margem de Ganho

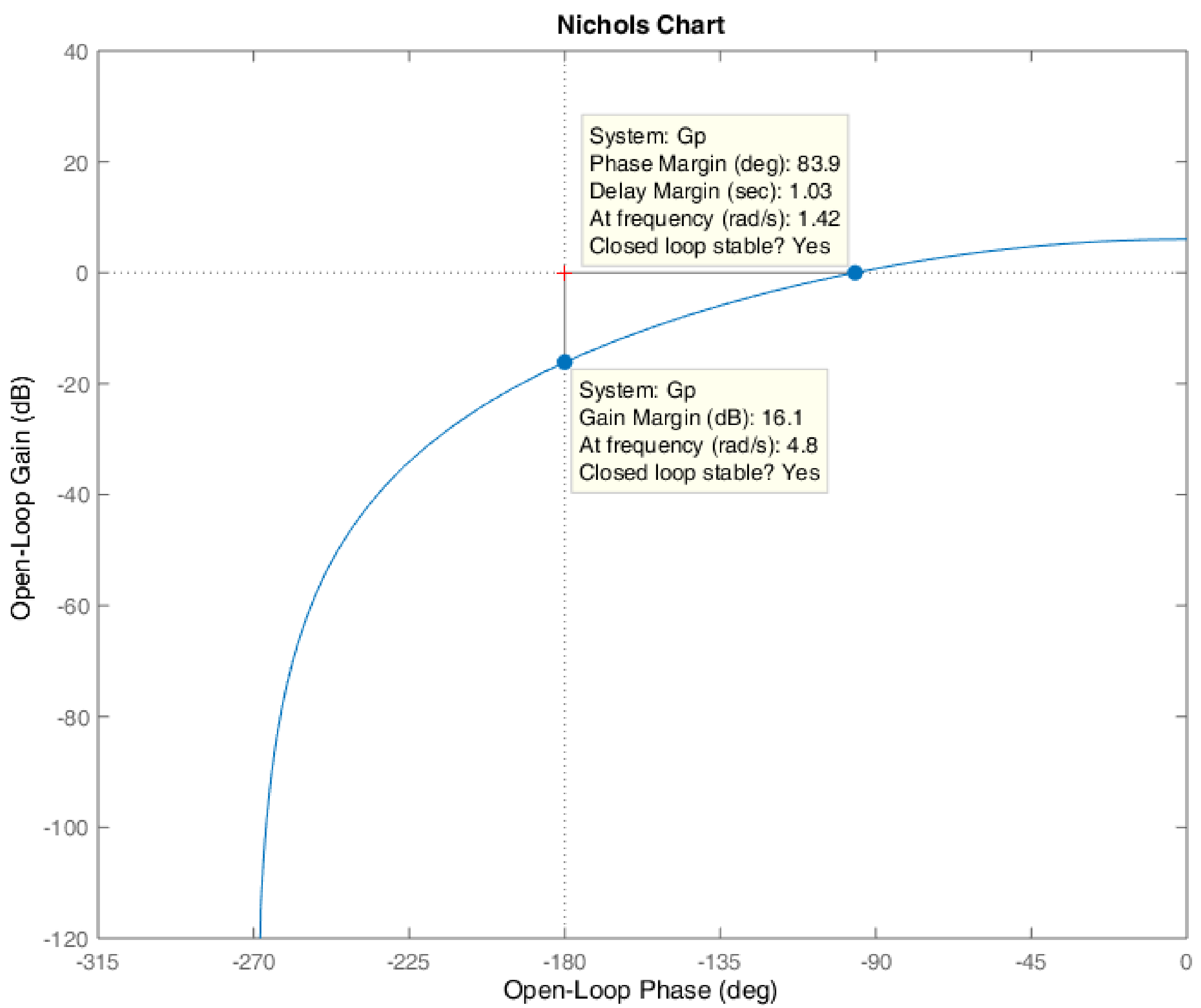
$$MG = \frac{1}{\left|G_P(j\omega_{CF})\right|} = \frac{1}{0{,}156}$$

$$MG_{\mathrm{dB}} = 20\log\left(MG\right) = 16{,}4\mathrm{dB}$$

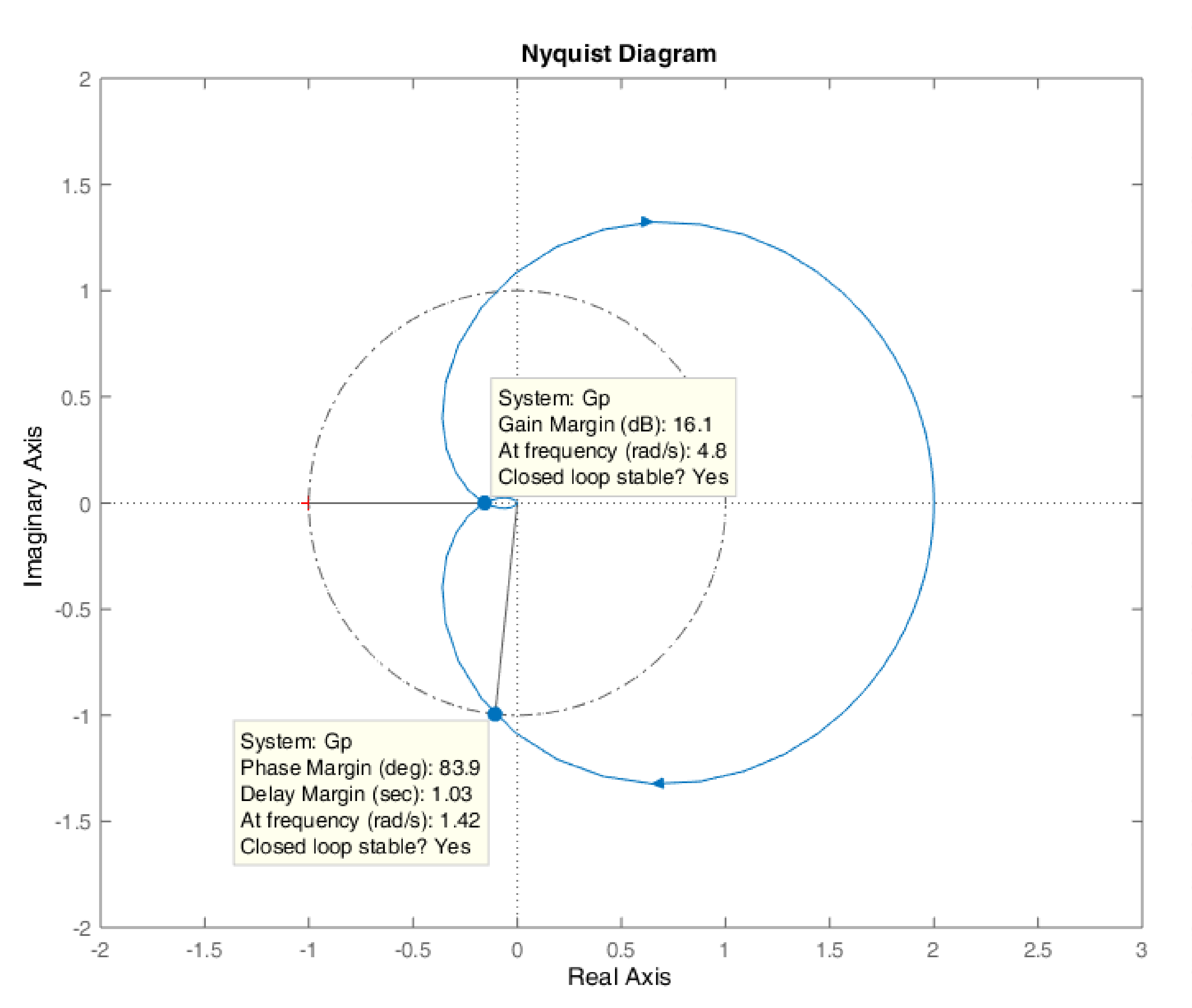
Exemplo: Diagramas de Bode (original x polo adicional)



Exemplo: Carta de Nichols com polo adicional



Exemplo: Digramas de Nyquist com polo adicional



Exemplo: Resposta ao degrau com polo adicional

Em malha fechada

$$T_P(s) = \frac{G_P(s)}{1+G_P(s)} = \frac{30}{s^3+9s^2+2s+45}$$

Polos:

$$p_{1,2} = -1{,}23 + j2{,}32$$
$$p_3 = -6{,}53$$

$$y_\infty = 30/45 = 0{,}667$$

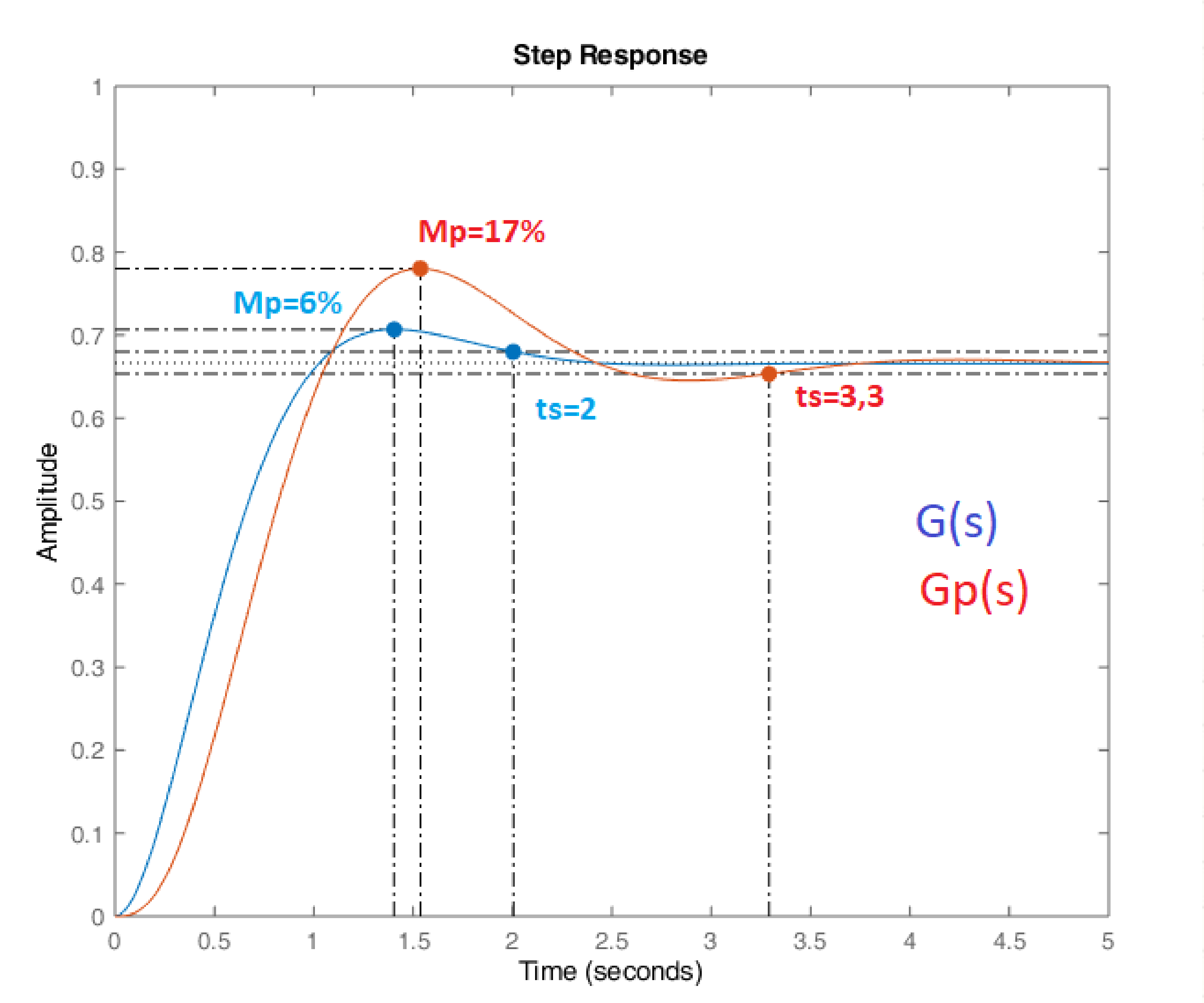
Aproximando pelo dominantes ($p_{1,2}$):

$$\begin{cases} \omega_n = 2{,}62 \\ \xi = 0{,}47 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_P = 19\% \\ t_s = 3{,}25 \end{cases}$$

Valores reais (simulados):

$$M_P = 17\% \text{ e } t_s = 3{,}3$$

Exemplo: Resposta ao degrau (original x polo adicional)



Exemplo: Adição de um zero

Seja a adição de um zero em -5:

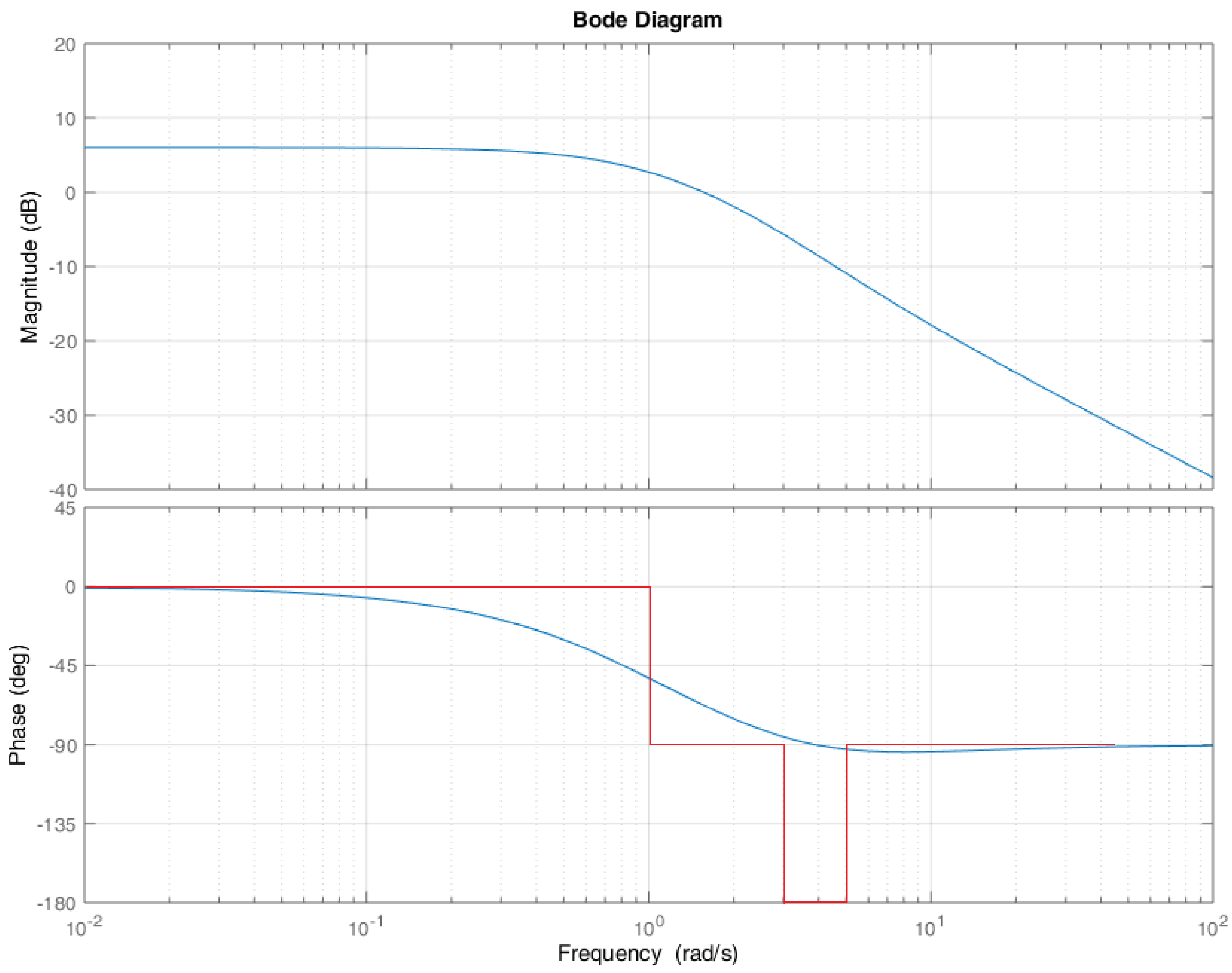
$$G_Z(s) = \frac{(6/5)\,(s+5)}{(s+1)(s+3)} \quad \Rightarrow \quad G(0) = 2$$

Em frequência:

$$\left|G_Z(j\omega)\right| = \frac{1{,}2\sqrt{\omega^2 + 25}}{\sqrt{\omega^2+1}\sqrt{\omega^2+9}}$$

$$\angle G_Z(j\omega) = tg^{-1}\left(\frac{\omega}{5}\right) - tg^{-1}\left(\frac{\omega}{1}\right) - tg^{-1}\left(\frac{\omega}{3}\right)$$

Exemplo: Diagramas de Bode com zero adicional



Exemplo: Adição de um zero

Frequência de cruzamento de ganho

$$\left|G_Z(j\omega)\right| = \frac{1{,}2\sqrt{\omega^2+25}}{\sqrt{\omega^2+1}\sqrt{\omega^2+9}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_{CG} = 1{,}57$$

Margem de Fase

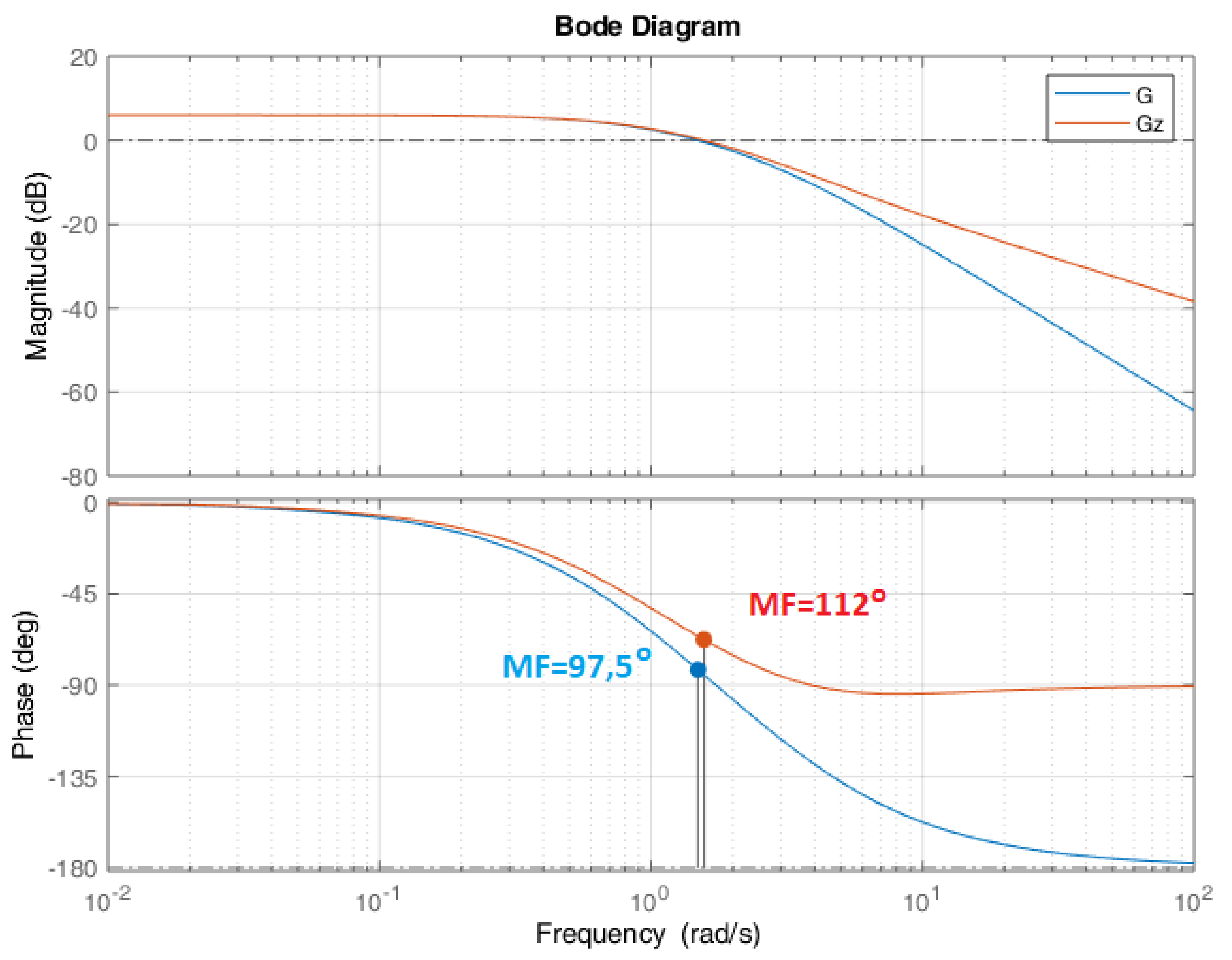
$$MF = 180^\circ + \angle G_Z(j\omega_{CG}) = 180^\circ - 67{,}7^\circ$$

Margem de estabilidade

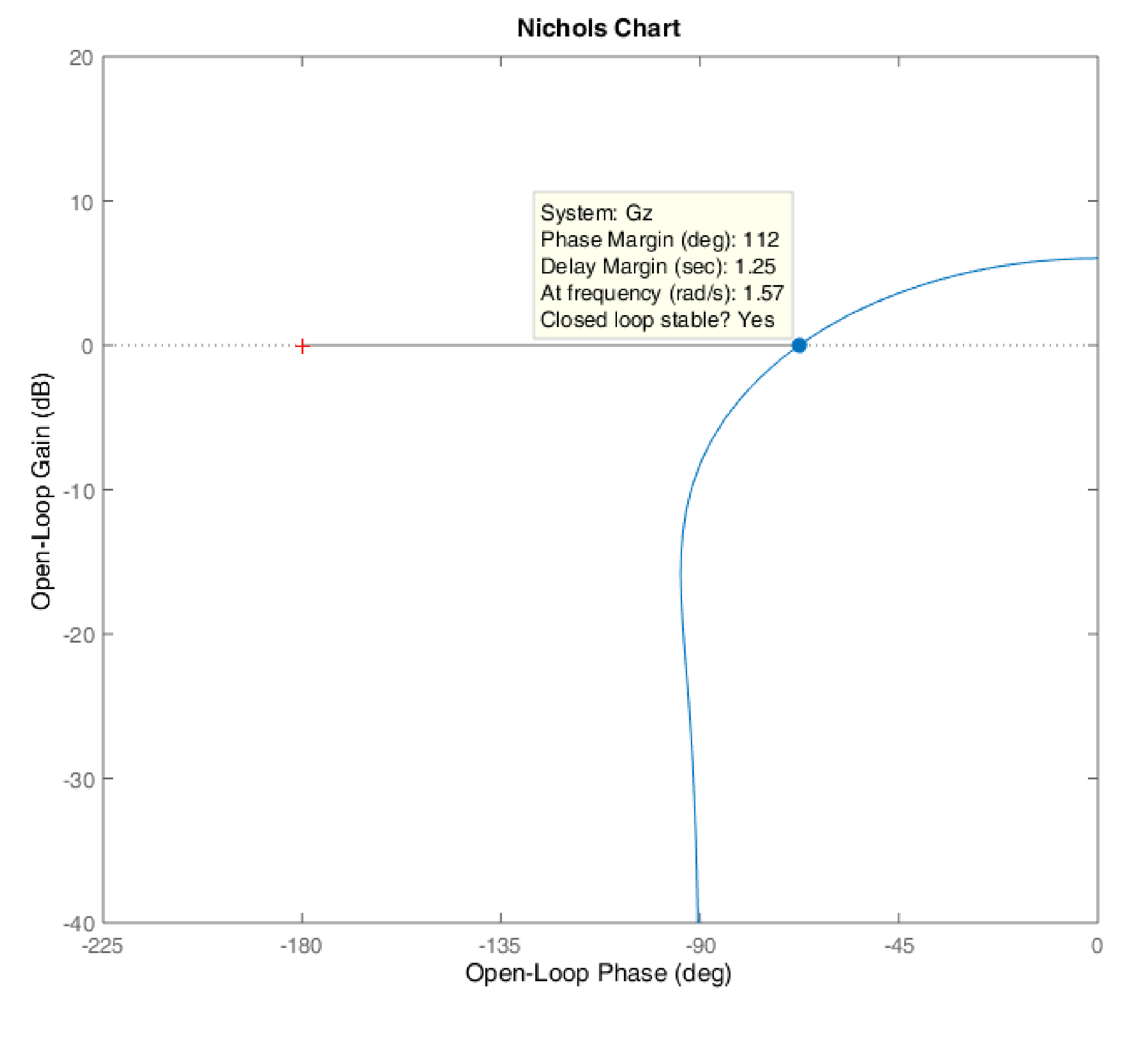
$$MF = 112{,}3^\circ$$

$$MG = \infty$$

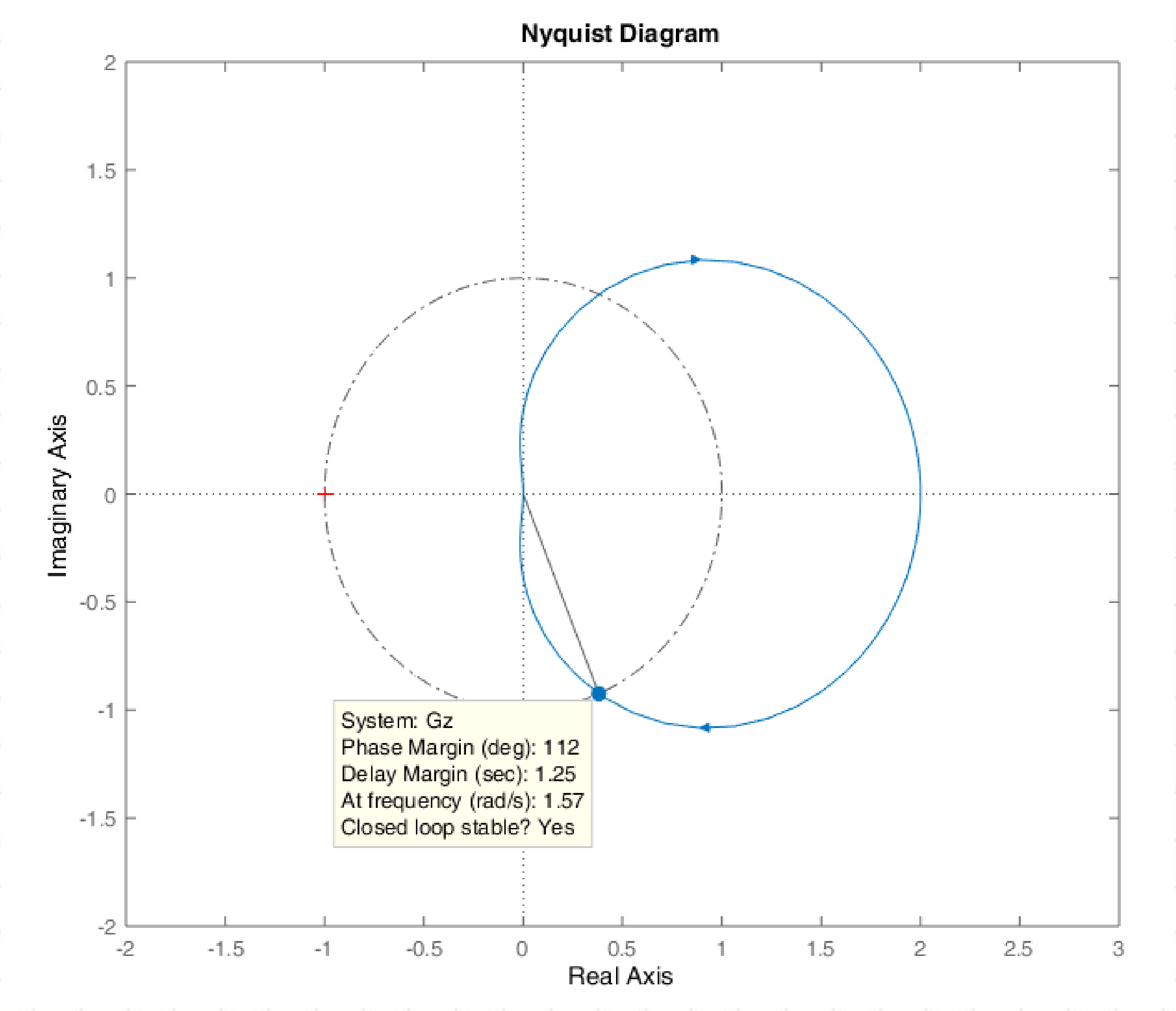
Exemplo: Diagramas de Bode (original x zero adicional)



Exemplo: Carta de Nichols com zero adicional



Exemplo: Diagrama de Nyquist com zero adicional



Exemplo: Resposta ao degrau com zero adicional

Em malha fechada

$$T_Z(s) = \frac{G_Z(s)}{1+G_Z(s)} = \frac{1{,}2(s+5)}{s^2+5{,}2s+9}$$

Polos:

$$p_{1,2} = -2{,}6 + j1{,}5$$

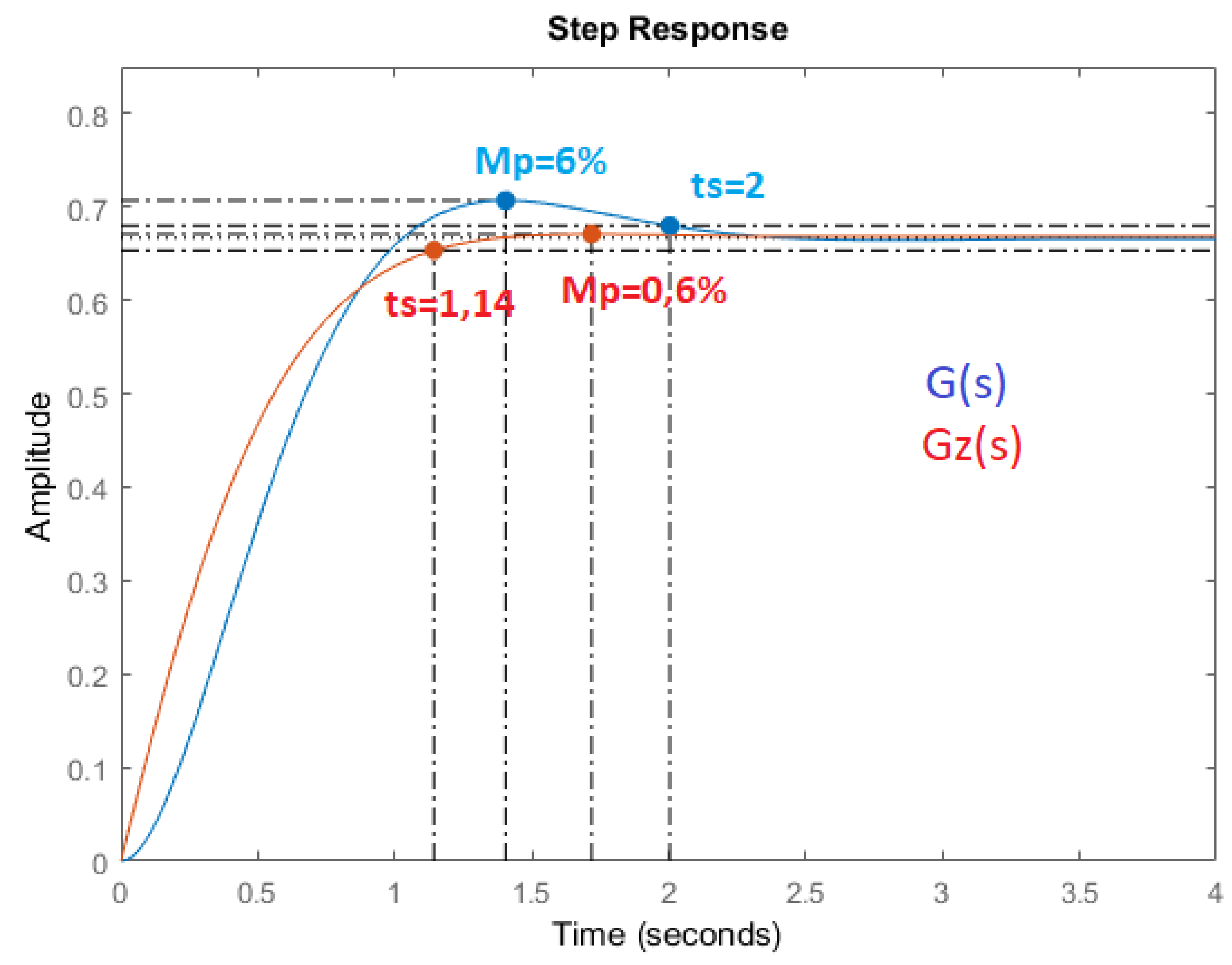
$$y_\infty = 6/9 = 0{,}667$$

Desprezando o efeito do zero:

$$\begin{cases} \omega_n = 3 \\ \xi = 0{,}87 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_P = 0{,}4\% \\ t_s = 1{,}54 \end{cases}$$

Valores reais (simulados): $M_P = 0{,}6\% \text{ e } t_s = 1{,}14$

Exemplo: Resposta ao degrau (original x zero adicional)



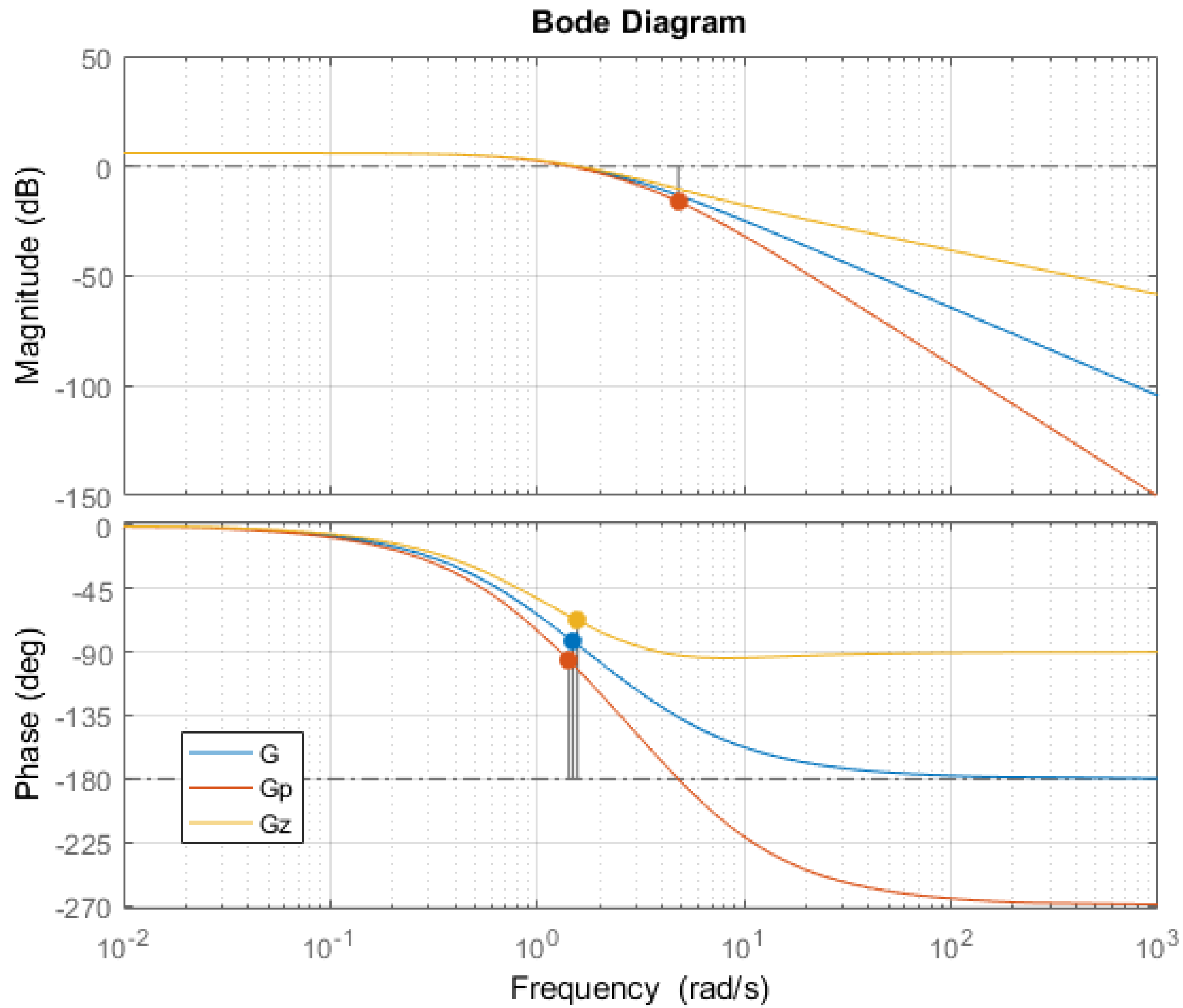
Exemplo: comparativo dos resultados

$$G(s) = \frac{6}{(s+1)(s+3)} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \mathrm{MG} = \infty \mathrm{dB} & \omega_{CF} = \nexists \\ \mathrm{MF} = 97^\circ & \omega_{CG} = 1,49 \end{matrix}$$

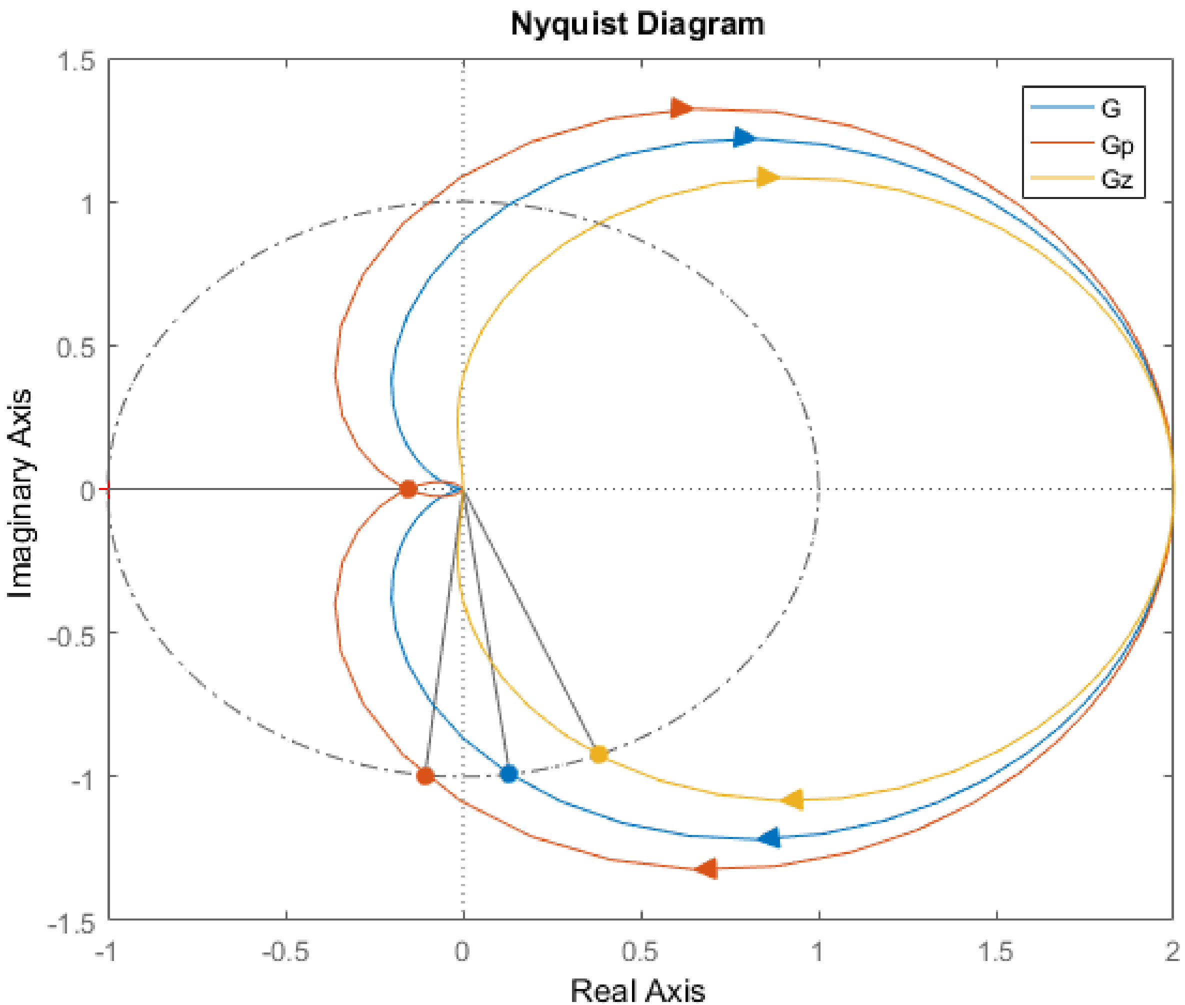
$$G_P(s) = \frac{30}{(s+1)(s+3)(s+5)} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \mathrm{MG} = 16,4\mathrm{dB} & \omega_{CF} = 4,8 \\ \mathrm{MF} = 84^\circ & \omega_{CG} = 1,42 \end{matrix}$$

$$G_Z(s) = \frac{1,2(s+5)}{(s+1)(s+3)} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \mathrm{MG} = \infty \mathrm{dB} & \omega_{CF} = \nexists \\ \mathrm{MF} = 112,3^\circ & \omega_{CG} = 1,56 \end{matrix}$$

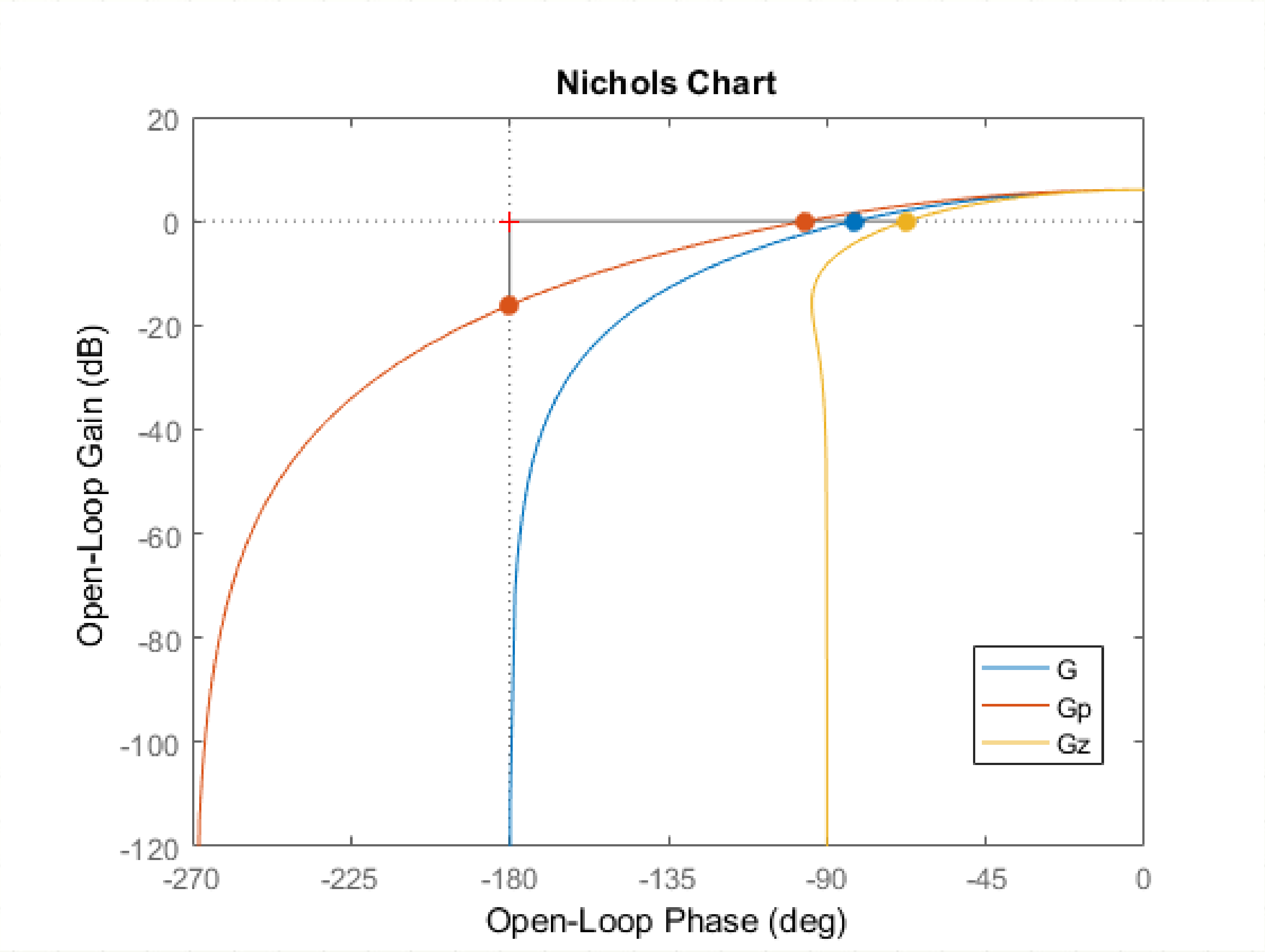
Exemplo: Diagramas de Bode (original, com polo e com zero)



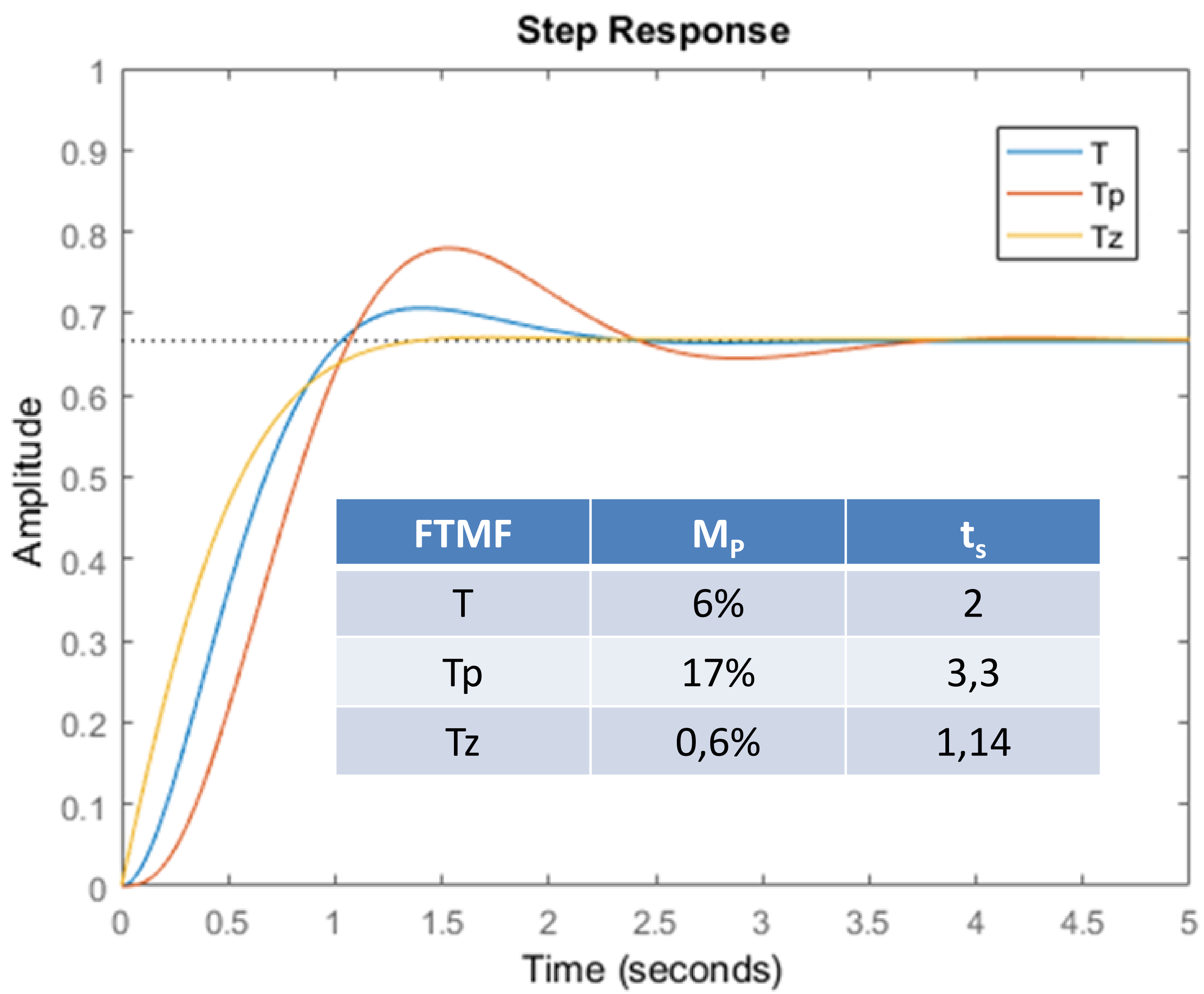
Exemplo: Diagramas de Nyquist (original, com polo e com zero)



Exemplo: Carta de Nichols (original, com polo e com zero)



Exemplo: Resposta ao Degrau (original, com polo e com zero)



FTMF	M_P	t_s
T	6%	2
Tp	17%	3,3
Tz	0,6%	1,14