OZNACZENIA

$\mathbb{N}$ - liczby naturalne

$\mathbb{Z}$ - liczby całkowite

$\mathbb{Q}$ - liczby wymierne

$\mathbb{Q}^c$ - liczby niewymierne

$\mathbb{R}$ - liczby niewymierne

$\mathbb{C}$ - liczby zespolone

$$\sum_{k=3}^{5} f(k) = f(3) + f(4) + f(5)$$

np:

$$\sum_{k=2}^{6} k^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$$

$\longrightarrow$ suma

INDUKCJA MATEMATYCZNA

★ Bankomat wypłaca pieniądze przy użyciu banknotów o nominałach 20 zł i 50 zł. Jakie kwoty może taki bankomat wypłacić

10 x
20 ✓
30 x
40 ✓
50 ✓
60 ✓ tak bo mamy 40
70 ✓ tak bo możemy 50

★ $a_1 = 1$, $a_n = \dfrac{a_{n-1}^3 + 2}{17}$

$a_2 = \dfrac{a_1^3 + 2}{17} = \dfrac{1+2}{17} = \dfrac{3}{17} > 0$

$a_3 = \dfrac{a_2^3 + 2}{17} = \dfrac{\frac{3}{17} + 2}{17} = \dfrac{37}{17^2} > 0$

dodatnie

dodatnie

$a_n = \dfrac{a_{n-1}^3 + 2}{17}$

podzielić na dodatnie

Twierdzenie (zasada indukcji matematycznej - ZIM)

Niech $p(n)$ będzie stwierdzeniem zależnym od $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$
Jeśli:

1) $P(n_0)$ jest prawdą [baza indukcji]

2) dla każdego $n \geq n_0$ z prawdziwości $P(n)$ wynika prawdziwość $P(n+1)$ [krok indukcyjny]

wtedy stwierdzenie $P(n)$ jest prawdziwe dla wszystkich $n \geq n_0$

PRZYKŁADY

PRZYKŁAD 1

$$\overbrace{1+2+\ldots+n}^{\sum_{k=1}^{n} k} = \frac{n(n+1)}{2} \quad , \; n \geq 1$$

1) Sprawdzamy dla $n=1$

$P = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$, $L = 1 = P$ ✓

2) Załóżmy, że wzór jest prawdziwy dla pewnego $n \geq n_0$

$$1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{[założenie indukcyjne]}$$

Udowodnimy, że jest prawdziwy dla $n+1$, czyli

$$1+2+\ldots+(n+1) = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$$

$$L = \underbrace{1+2+\ldots+n}_{\frac{n(n+1)}{2} \text{ z zał. ind.}} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) =$$

$$= (n+1)\left(\frac{n+2}{2}\right) = P$$

Z 1) i 2) na mocy Z.I.M. wzór jest prawdziwy dla wszystkich $n \geq 1$

PRZYKŁAD 2

$2^n > n^2$

$n = 1$	2	✓	1
2	4	✗	4
3	8	✗	9
4	16	✗	16
$n_0 = 5$	32	✓	25
6	64	✓	36
7	128	✓	49

1) $n = 5$

$L = 32$, $P = 25 < L$

2) Załóżmy, że $2^n > n^2$ dla pewnego $n \geq 5$

Pokażemy, że $2^{n+1} > (n+1)^2$

$L = 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n^2 \ldots \overset{?}{\geq} \ldots (n+1)^2$

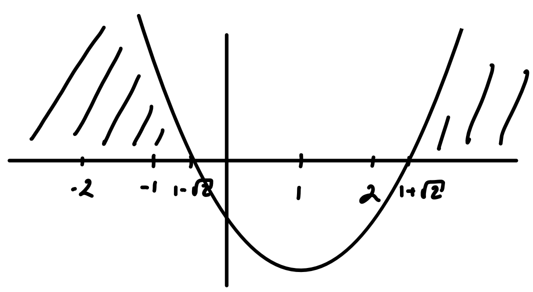
Udowadniamy, że $2n^2 \geq (n+1)^2$, $n \geq 5$

$2n^2 \geq n^2 + 2n + 1$

$n^2 - 2n - 1 \geq 0$

$n_1 = 1 + \sqrt{2}$

$n_2 = 1 - \sqrt{2}$



$n \in (-\infty, 1-\sqrt{2}\rangle \cup \langle 1+\sqrt{2}, +\infty)$

$\{5, 6 \ldots\} \subseteq \langle 1+\sqrt{2}, +\infty)$, więc

$2n^2 \geq (n+1)^2$ dla $n \geq 5$

Z 1) i 2) na mocy 2.1.M $2^n > n^2$ dla $n \geq 5$

LUB $n^2 - 2n - 1 \geq 0$

$n^2 \geq 2n + 1$

$1 + 2n \leq n + 2n = 3n < n \cdot n = n^2$

PRZYKŁAD 3

Uzasadnić, że dla $n \in \mathbb{N}_0$ liczba $n^3 + 2n$ jest podzielna przez 3

1) $n = 0$

$n^3 + 2n = 0$ jest podzielne dla 3

2) zał... $3 \mid n^3 + 2n$ → $n^3 + 2n = 3k$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}_0$

sprawdzimy czy $3 \mid (n+1)^3 + 2(n+1)$

$$(n+1)^3 + 2(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 =$$

$$(n^3 + 2n) + 3n^2 + 3n + 3 = 3(k + n^2 + n + 1)$$

więc $(1+1)^3 + 2(n+1)$ jest podzielna przez 3

z 1) i 2) na mocy 2.1.M udowodniliśmy, że

$3 \mid n^3 + 2n$ dla $n \in \mathbb{N}_0$

PRZYKŁAD 4

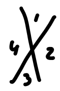
Udowodnić, że rysując n prostych na płaszczyźnie, takich że

- żadne dwie nie są równoległe
- żadne trzy nie przetną się w jednym punkcie,

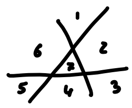
dzielą one płaszczyznę na $1 + \frac{n(n+1)}{2}$ obszarów

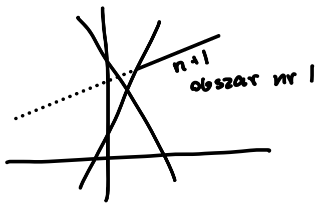
$n = 1$

$n = 2$



$n = 3$





1) $n = 1$ ok

$$1 + \frac{1 \cdot 2}{2} = 2$$

2) załóżmy, że n prostych dzieli na

$$1 + \frac{n(n+1)}{2}$$ obszarów

$$1 + \frac{n(n+1)}{2} + 1 + n = 1 + (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) =$$
$$= 1 + \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

WYJAŚNIENIE:

★ Nowych obszarów jest tyle ile starych przecięła prosta nr. $n+1$

★ Jest ich $1 + n$

obszar z którego zaczynamy rysowanie tej prostej

każde przecięcie jednej ze starych prostych (jest ich n) oznacza wkroczenie na nowy obszar

Z 1) i 2) na mocy 2.1.M udowodniliśmy, że n prostych dzieli płaszczyznę na $1 + \frac{n(n+1)}{2}$ obszarów