Studium Talent

Lista 1. *Zasada Indukcji Matematycznej - wskazówki i rozwiązania.*

1. Kroki indukcyjne wyglądają następująco:

a)

$$\left[1^2+2^2+3^2+...+n^2\right]+(n+1)^2 \overset{\text{zał.ind.}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{n+1}{6}\left(n(2n+1)+6(n+1)\right)$$
$$=\frac{n+1}{6}\left(2n^2+7n+6\right)=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

b)

$$\left[1^3+2^3+3^3+...+n^3\right]+(n+1)^3 \overset{\text{zał.ind.}}{=} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2}{4}\left(n^2+4(n+1)\right)$$
$$=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

c)

$$\left[1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+...+n\cdot 2^n\right]+(n+1)2^{n+1} \overset{\text{zał.ind.}}{=} (n-1)2^{n+1}+2(n+1)2^{n+1}=2n2^{n+1}=n2^{n+2}$$

d)

$$[1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+...+n\cdot n!]+(n+1)\cdot(n+1)! \overset{\text{zał.ind.}}{=} (n+1)!-1+(n+1)\cdot(n+1)!$$
$$=(n+1)!\,(1+(n+1))-1=(n+2)!-1$$

2. a)

$$n=1\longrightarrow 1$$
$$n=2\longrightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}=1+\frac{\sqrt{2}-1}{2}=\sqrt{2}$$
$$n=3\longrightarrow \sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}$$

Hipoteza:

$$1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n}.$$

1) Dla $n=1$ zgadza się
2) Załóżmy prawdziwość wzoru dla pewnego $n\geq 1$. wtedy

$$\left(1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right)+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$
$$\overset{\text{zał.ind.}}{=} \sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\sqrt{n}+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\sqrt{n+1}.$$

Z 1) i 2), na mocy Zasady indukcji matematycznej, wzór jest prawdziwy dla wszystkich $n\in\mathbb{N}$.

b)

$$n=1\longrightarrow \frac{1}{3}$$
$$n=2\longrightarrow \frac{2}{5}$$
$$n=3\longrightarrow \frac{3}{7}$$
$$n=4\longrightarrow \frac{4}{9}$$

Hipoteza:

$$1+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}.$$

1) Dla $n=1$ zgadza się
2) Załóżmy prawdziwość wzoru dla pewnego $n\geq 1$. wtedy

$$\begin{aligned}&\left(1+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)+\frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)}\\ &\overset{\text{zał.ind.}}{=}\frac{n}{2n+1}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)}\\ &=\frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n+1}{2(n+1)+1}\end{aligned}$$

Z 1) i 2), na mocy Zasady indukcji matematycznej, wzór jest prawdziwy dla wszystkich $n\in\mathbb{N}$.

3. Zapisać wzory z zadań 1 i 2 przy pomocy znaku sumy Σ.

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$\sum_{k=1}^{n}k\cdot 2^k=(n-1)2^{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n}k\cdot k!=(n+1)!-1$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}}=\sqrt{n}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{n}{2n+1}$$

4. Kroki indukcyjne:

a)

$$(1+x)^{n+1}=(1+x)^n(1+x)\overset{\text{zał.ind.}}{\geq}(1+nx)(1+x)=1+(n+1)x+nx^2\geq 1+(n+1)x,$$

przy czym pierwsza nierówność jest prawdziwa tylko, gdy $1+x\geq 0$, stąd założenie $x\geq -1$.

b)

$$3^{n+1}=3\cdot 3^n\overset{\text{zał.ind.}}{\geq}3\left(n^2+n\right)\overset{??}{\geq}(n+1)^2+n+1.$$

Teraz wystarczy pokazać, że zachodzi ostatnia nierówność. Można ją przekształcić do $2n^2\geq 2$, co jest oczywiście prawdą dla $n\geq 1$.

c)

$$(n+1)!=n!(n+1)\overset{\text{zał.ind.}}{>}2^n(n+1)\geq 2^n\cdot 2=2^{n+1}$$

d)

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\overset{\text{zał.ind.}}{\geq}\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\overset{??}{\geq}\sqrt{n+1}.$$

Wystarczy pokazać ostatnią nierówność. Mnożąc obie strony przez $\sqrt{n+1}$ (jest to czynnik dodatni, więc znak nierówności się nie zmieni) a następnie podnosząc do kwadratu, otrzymujemy równoważną (ponieważ obie strony są dodatnie) nierówność

$$n(n+1)+1+2\sqrt{n(n+1)} \geq n^2+2n+1$$

$$2\sqrt{n^2+n} \geq n,$$

co jest oczywiście prawdą. Ewentualnie można jeszcze raz podnieść do kwadratu.

5. a)

$$(n+1)^3-(n+1) = n^3+3n^2+3n+1-n-1 = (n^3-n)+3(n^2+n) = (n^3-n)+3n(n+1)$$

Wśród dwóch ostatnich nawiasów lewy jest podzielny przez 6 z założenia indukcyjnego, a prawy ponieważ $n(n+1)$ to iloczyn dwóch kolejnych liczb naturalnych, więc jedna z nich jest podzielna przez 2.

b)

$$\begin{aligned}(n+1)^5-(n+1) &= (n+1)(n^2+2n+1)^2-n-1 = (n+1)(n^4+4n^4+4n^2+4n+1)-n-1 \\ &= (n^5+5n^4+10n^3+10n^2+5n+1)-n-1 \\ &= (n^5-n)+5n(n^3+2n^2+2n+1)\end{aligned}$$

Z założenia indukcyjnego n^5-n dzieli się przez 10 (lub 30, w zależności od udowodnianej wersji). Pozostaje zająć się składnikiem $5n(n^3+2n^2+2n+1)$. Podzielność przez 5 jest oczywista, więc potrzebujemy pokazać, że mamy też podzielność przez 2. Dla n parzystage sprawa znów jest oczywista, a dla n nieparzystego n^3+1 to suma dwóch liczb nieparzystych, więc cały nawias jest liczbą parzystą. W przypadku podzielności przez 30 należy pokazać, że $n(n^3+2n^2+2n+1)$ dzieli się przez 6. Można udowodnić to osobno również indukcyjnie (powstanie indukcyjna ”incepcja”, choć po polsku mówimy raczej ”rekurencja”) lub rozpisać następująco:

$$n(n^3+2n^2+2n+1) = n(n^3-n)+n(2n^2+3n+1) = n(n^3-n)+n(n+1)(2n+1).$$

n^3-n jest podzielne przez 6 na mocy podpunktu a), a $n(n+1)(2n+1)$ na mocy zadania $1a$).

c)

$$\begin{aligned}10^{n+1}-(-1)^{n+1} &= 10(10^n)+(-1)^n = 10(10^n-(-1)^n+(-1)^n)+(-1)^n \\ &= 10(10-(-1)^n)+11(-1)^n.\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}2^{2^{n+1}}-6 &= 2^{2\cdot 2^n}-6 = \left(2^{2^n}\right)^2-6 = \left((2^{2^n}-6)+6\right)^2-6 \\ &= (2^{2^n}-6)^2+12(2^{2^n}-6)+30.\end{aligned}$$

30 jest oczywiście podzielne przez 6, a dwa pozostałe składniki są podzielne przez 6 z założenia indukcyjnego.

6. Krok indukcyjny:
Rozważmy n+1-kąt wypukły i nazwijmy kolejne wierzchołki za pomocą A_1, A_2,...,A_{n+1}. Łącząc wierzchołki A_1 i A_n, nowo powstała figura $A_1A_2...A_n$ to już n-kąt foremny, więc z założenia indukcyjnego ma $\frac{n(n-3)}{2}$ przekątnych. Na przekątne całej figury $A_1A_2...A_{n+1}$ składają się przekątne n-kąta $A_1A_2...A_n$, odcinek A_1A_n oraz przekątne wychodzące z wierzchołka A_{n+1}, których jest $n+1-3=n-2$. W sumie daje to

$$\frac{n(n-3)}{2}+1+n-2 = \frac{n^2-3n+2(n-1)}{2} = \frac{n^2-n-2}{2} = \frac{(n+1)(n-2)}{2}.$$

7. 1) Szachownicę 2×2 bez jednego pola oczywiści możemy pokryć jednym tryminem.
2) Załóżmy, że dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ potrafimy pokryć tryminami szachownicę $2^n \times 2^n$ bez jednego pola, niezależnie od wyboru tego pola.

Rozważmy teraz szachownicę $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ z usuniętym jednym polem i podzielmy ją na 4 szachownice $2^n \times 2^n$. Usunięte pole zawiera się w jednej z tych mniejszych szachownic. Połóżmy teraz pierwsze trymino na środku całej szchownicy, tak aby zakrywało po jednym z pól szachownic $2^n \times 2^n$, z wyjątkiem tej, która ma usunięte pole. W tym momencie zostały nam do pokrycia 4 szachownice $2^n \times 2^n$ za wyjątkiem jednego pola na każdej, co umiemy zrobić na mocy założenia indukcyjnego.

Z 1) i 2), na mocy Zasady indukcji matematycznej, każdą szachownicę, o wymiarach będących potęgą dwójki, z usuniętym jednym polem można pokryć tryminami.

8. Krok indukcyjny nie jest prawdziwy już dla $n = 1$ (i tylko dla $n = 1$, ale to wystarczy. Dla wszystkich $n \geq 2$ krok jest prawdziwy, ale baza indukcji dla $n = 2$ już nie jest prawdą), ponieważ wtedy mamy w grupie tylko Mruczka i Pusię. W związku z tym nie ma "reszty kotów", które były łącznikiem i "przekazywały" kolor między Mruczkiem i Pusią