Studium Talent

Lista 1. *Zasada Indukcji Matematycznej.*

1. Udowodnić poniższe wzory dla $n \geq 1$ przy pomocy Zasady indukcji matematycznej:
   a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,
   b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$,
   c) $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + ... + n \cdot 2^n = (n-1)2^{n+1} + 2$,
   d) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + ... + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.
2. Obliczając wartości dla kilku początkowych $n \geq 1$ odgadnij wzór na sumę i wykaż jego prawdziwość za pomocą indukcji matematycznej:
   a) $1 + \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$,
   b) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.
3. Zapisać wzory z zadań 1 i 2 przy pomocy znaku sumy Σ.
4. Udowodnić poniższe nierówności przy pomocy Zasady indukcji matematycznej.
   a) Nierówność Bernoulli'ego: $(1+x)^n \geq 1 + nx, \qquad x \geq -1, n \geq 1$,
   b) $3^n \geq n^2 + n, \qquad n \geq 1$,
   c) $n! > 2^n, \qquad n \geq 4$,
   d) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}, \qquad n \geq 1$.
5. Udowodnić poniższe własności podzielności przy pomocy Zasady indukcji matematycznej
   a) 6 dzieli $n^3 - n$,
   b) 10 (dla ambitniejszych 30) dzieli $n^5 - n$,
   c) 11 dzieli $10^n - (-1)^n$,
   d) 10 dzieli $2^{2^n} - 6$.
6. Przy pomocy Zasady indukcji matematycznej udowodnić, że n-kąt wypukły, $n \geq 3$, ma $\frac{n(n-3)}{2}$ przekątnych.
7. Z szachownicy o wymiarach $2^n \times 2^n$ usunięto jedno pole. Wykaż, że otrzymaną figurę można pokryć tryminami, tzn. kostkami złożonymi z trzech jednostkowych kwadratów, w kształcie równoramiennej elki.
8. Znajdź błąd w poniższym rozumowaniu.
   <u>Stwierdzenie:</u> Dla każdego $n \geq 1$, każda grupa n kotów składa się z kotów tego samego koloru (czyli po prostu wszystkie koty są tego samego koloru).
   <u>Dowód indukcyjny:</u>
   1) $n = 1$. Jeden kot ma taki sam kolor jak on sam, więc teza prawdziwa.
   2) Załóżmy, że dla pewnego $n \geq 1$ każda grupa n kotów składa się z kotów tego samego koloru. Rozważmy $n+1$ elementową grupę kotów. Wyróżnijmy dwa z nich i najwijmy je Mruczek i Pusia. Nie licząc Pusi, grupa ta ma juz n elementów, więc, na mocy założenia indukcyjnego, wszystkie koty poza Pusią mają ten sam kolor. Analogicznie, wszystkie koty poza Mruczkiem też mają ten sam kolor. Tak więc, zarówno Mruczek jak i Pusia mają ten sam kolor, co reszta kotów w grupie, więc ostatecznie cała $n+1$ elementowa grupa kotów ma ten sam kolor.
   Na mocy Zasady indukcji matematycznej, wszystkie koty mają ten sam kolor.