03 - Кинематика материальной точки (описания движения в векторной и координатной форме)

Понятия

Кинематика - раздел механики, занимающийся описанием движения без изучения его причин

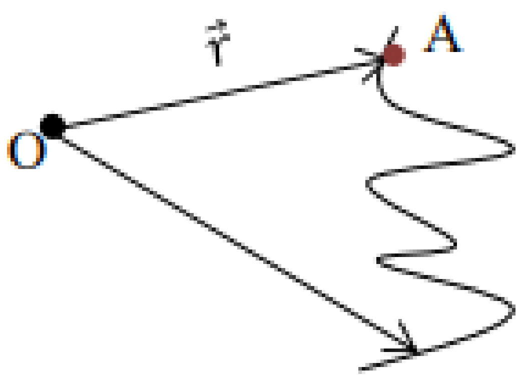
Материальная точка (МТ) – тело, размерами которого в условиях данного движения можно пренебречь. МТ – понятие относительное, одно и тоже материальное тело при одном движении можно считать МТ, а при другом – нельзя

Траектория - линия в пространстве, по которой движется МТ, представляющая собой множество точек, в которых находилась, находится или будет находиться МТ при своём перемещении в пространстве.

Далее в оригинале идет длиннющее математическое приложение которое больше интересно с точки зрения математики нежели физики, а потому позволю себе предположить, что после 1 семестра мы уже преисполнились в работе с векторами и матрицами

Радиус-вектор - вектор, задающий положение точки в пространстве (например, евклидовом) относительно некоторой заранее фиксированной точки, называемой началом координат. Если точка отсчета - O, а конечная точка A, то $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$

Описание движения через векторы



Δt - конечный интервал времени (конечное изменение времени)
$\Delta\vec{r}$ - вектор перемещения (или приращения радиус-вектора; конечное изменение радиус-вектора)

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

$$\langle\vec{v}\rangle \overset{\text{def}}{=} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

В данном случае мы получим усредненную скорость на интервале времени Δt. Однако часто возникает необходимость узнать скорость объекта в моменте. Для этого необходимо устремить интервал времени Δt к нулю:
dt - бесконечно малый интервал времени
$d\vec{r}$ - бесконечно малое приращение радиус-вектора
Тогда вектор мгновенной скорости будет находиться как

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Из этого в частности вытекает, что $\vec{v} \uparrow\uparrow d\vec{r}$, т.е направлен по касательной линии в данном месте траектории

еще одно мат. приложение, но уже про интегралы. Опять же позволю себе его опустить

(ни с того ни с сего в документе)

$$|\langle\vec{v}\rangle| = \left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$$

Если устремить к нулю время движения, то путь, который пройдет тело за это время тоже устремится к нулю.

$$\Delta t \to dt$$

$$|d\vec{r}| = dS$$

Где dS - длина вектора перемещения

$$v = |\vec{v}| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \frac{dS}{dt}$$

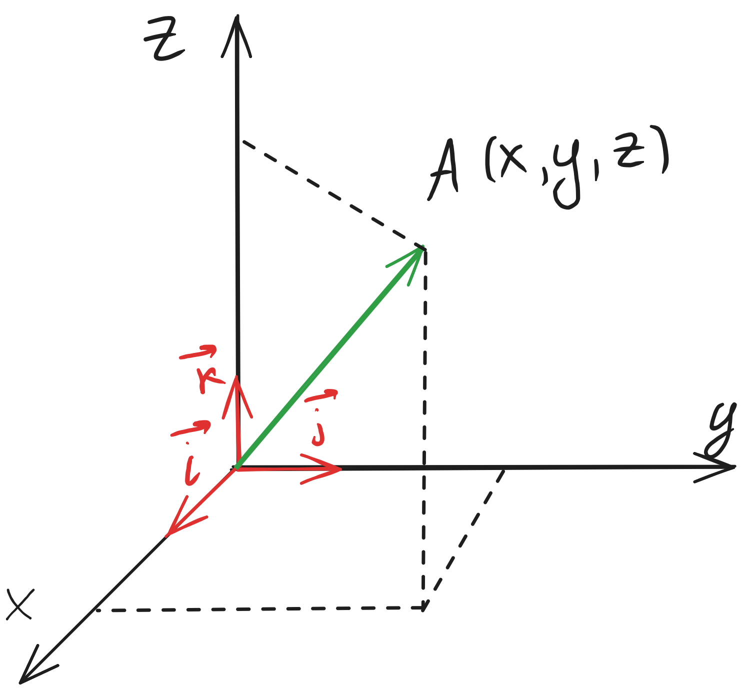
$$\Delta\vec{r} = \int dr = \int\limits_{t_o^t} \vec{v}dt$$

$$\vec{r}(t) - r(t_{0)} = \int\limits_{t_0^t} \vec{v}dt$$

$$S = \int dS = \int v dt$$

Описание движения через координаты

Пусть в пространстве для задания положения тел используется декартовая система координат (ДСК). Используя покомпонентную форму записи вектора $\vec{r}$



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$x = x(t)$

$y = y(t)$

$z = z(t)$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты ДСК

$r = r(t)$

Вектор мгновенной скорости:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad \vec{v}_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Вектор мгновенного ускорения

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{d^2z}{dt^2}$$