

Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων

Εργασία 2

Θέμα:

On line εκτίμηση άγνωστων παραμέτρων

Μέθοδος Κλίσης-Μέθοδος Lyapunov

AEM: 10216

Όνομα: Καλαϊτζίδης Ελευθέριος

Email: eleftherk@ece.auth.gr

Θέμα 1

$$\dot{x} = -ax + bu$$

Προσθαφαιρώ τον όρο a_mx στο δεύτερο μέλος και προκύπτει

$$\dot{x} + a_mx = (a_m - a)x + bu \Rightarrow$$

$$(s + a_m)x = (a_m - a)x + bu$$

$$y = x = (a_m) \left[\frac{1}{s + a_m} \right] x + b \left[\frac{1}{s + a_m} \right] u$$

Άρα έχουμε

$$\theta^* = [a_m - a \quad b]^T$$

$$\varphi = \left[\frac{x}{s + a_m} \quad \frac{u}{s + a_m} \right]^T$$

$$(1) \hat{x} = \theta^{*T} \varphi$$

$$e = x - \hat{x} = x - \hat{\theta}^T \varphi = -\tilde{\theta}^T \varphi \quad (\mu\epsilon \tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta^*)$$

$$K(\hat{\theta}) = \frac{e^2}{2} = \frac{(x - \hat{\theta}^T \varphi)^2}{2}$$

$$\nabla K(\hat{\theta}) = (x - \hat{\theta}^T \varphi)(-\varphi) = -e\varphi$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma e \varphi$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{\theta}}_1 \\ \dot{\hat{\theta}}_2 \end{bmatrix} = \gamma e \begin{bmatrix} \frac{x}{s + a_m} \\ \frac{u}{s + a_m} \end{bmatrix}$$

$$(2) \varphi_1 = \frac{x}{s + a_m} \Rightarrow \dot{\varphi}_1 = -a_m \varphi_1 + x, (\varphi_1(0) = 0)$$

$$(3) \varphi_2 = \frac{u}{s + a_m} \Rightarrow \dot{\varphi}_2 = -a_m \varphi_2 + u, (\varphi_2(0) = 0)$$

$$(4) \dot{\hat{\theta}}_1 = \gamma e \varphi_1$$

$$(5) \dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma e \varphi_2$$

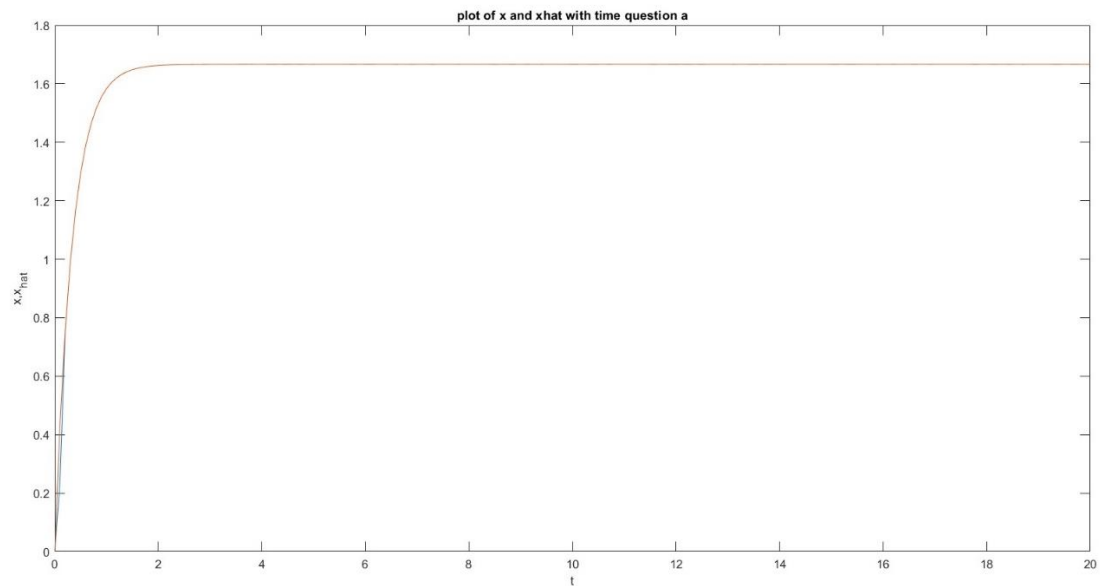
Από την εξίσωση του συστήματος παίρνω τις τιμές του x για τις διάφορες τιμές του t

Και επιλύοντας τις 1,2,3,4,5 βρίσκω την εκτιμώμενη έξοδο \hat{x} καθώς και τις εκτιμήσεις των παραμέτρων του συστήματος \hat{a}, \hat{b}

A)

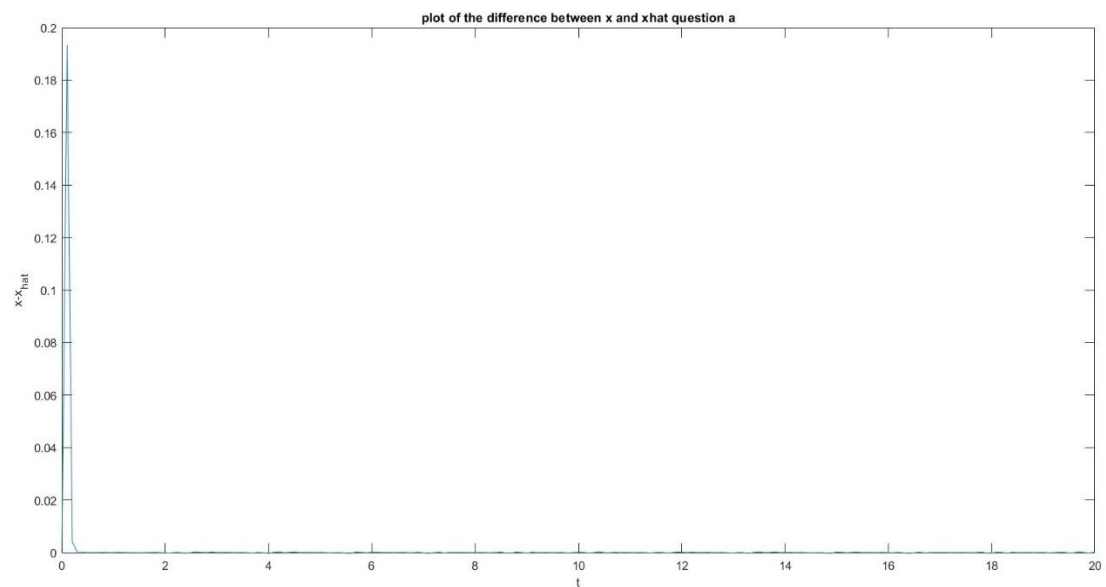
Θεωρούμε ότι: $u = 10$, $a = 3$, $b = 0.5$, (πόλος) $e| = 3$, $g = 40$

Γραφική παράσταση των x και \hat{x} με τον χρόνο:



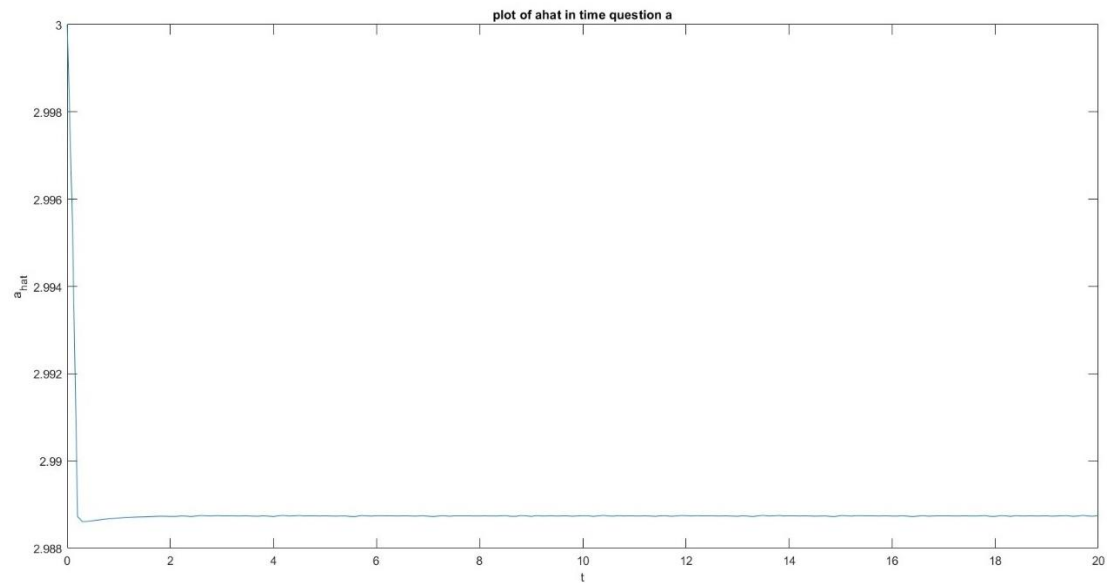
παρατηρούμε ότι στην αρχή είναι διακριτή η απόκλιση της εκτίμησης από την πραγματική τιμή του x , κάτι το οποίο φαίνεται και από την γραφική της διαφοράς τους που ακολουθεί.

Γραφική παράσταση της διαφοράς $x - \hat{x}$:



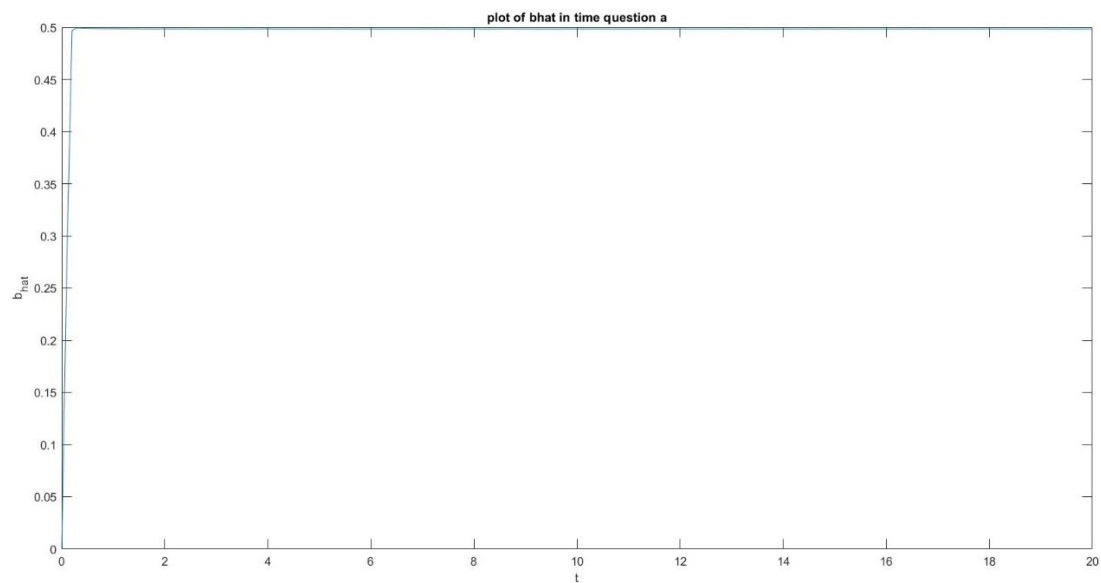
Διακρίνεται ότι το σφάλμα είναι μεγάλο στην αρχή ενώ μετά οδηγείται στο μηδέν.

Γραφική παράσταση του \hat{a} :



Η εκτίμηση του a , για τον συγκεκριμένο πόλο είναι από την αρχή κιόλας πολύ καλή και έχει ελάχιστη απόκλιση.

Γραφική παράσταση του \hat{b} :



Όπως βλέπουμε και η εκτίμηση του b συγκλίνει αρκετά γρήγορά στην πραγματική τιμή του b

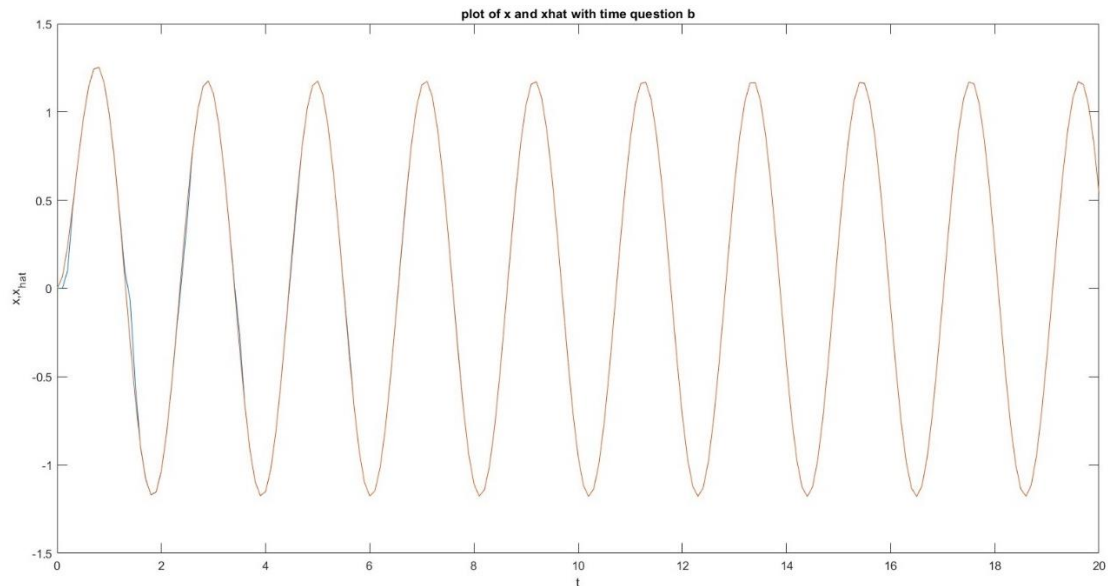
Αξίζει να σχολιάσουμε ότι η επιλογή του πόλου παίζει καθοριστικό ρόλο στην σύγκλιση των εκτιμήσεων παραμέτρων a, b στις πραγματικές τους τιμές. Για τιμές του πόλου διάφορες του 3 παρατηρούμε ότι οι παράμετροι δεν οδηγούνται στις πραγματικές τους τιμές ακόμα και αν το \hat{x} συγκλίνει στην πραγματική του τιμή x .

Όσον αφορά την επιλογή του g (γ στην μαθηματική ανάλυση) παρατηρούμε ότι παίζει ρόλο στην ταχύτητα σύγκλισης, και όσο μεγαλώνει τόσο πιο οι εκτιμήσεις συγκλίνουν στις πραγματικές τους τιμές (εάν συγκλίνουν).

B)

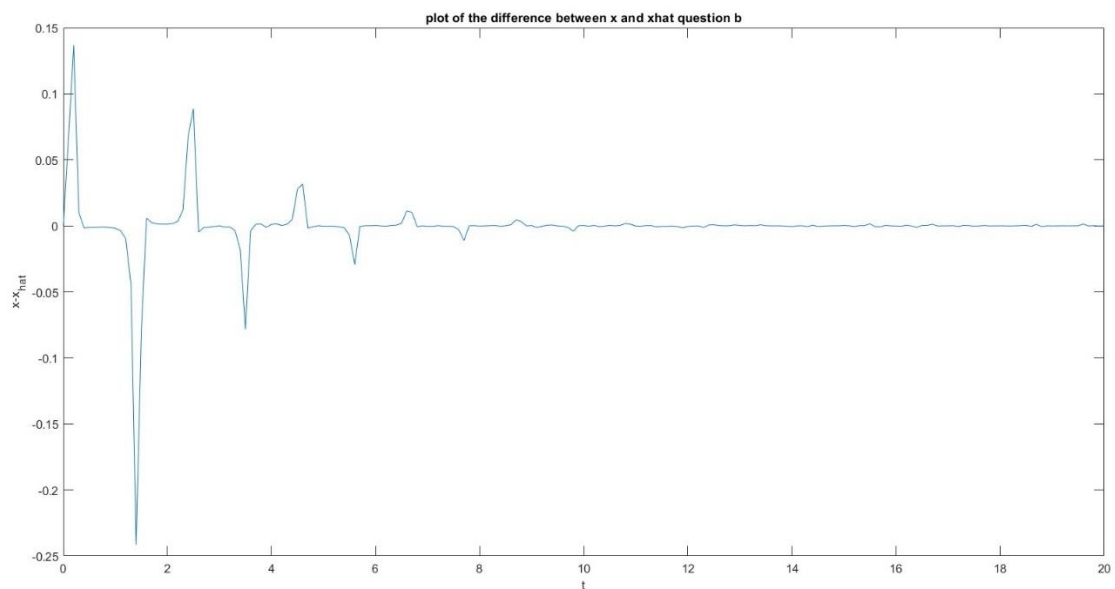
Θεωρούμε ότι: $u = 10\sin(3t)$, $a = 3$, $b = 0.5$, (πόλος) $el=2$, $g=50$

Γραφική παράσταση των x και \hat{x} με τον χρόνο:



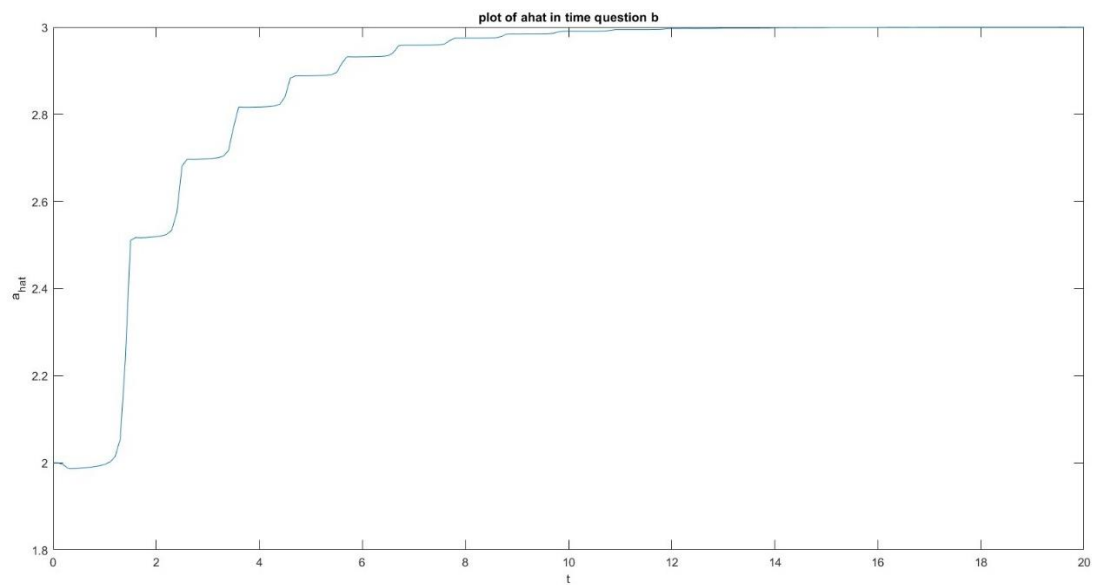
Στα πρώτα δευτερόλεπτα της προσομοίωσης είναι ορατή η απόκλιση του \hat{x} από το x , ενώ στην συνέχεια βλέπουμε ότι υπάρχει σύγκλιση, κάτι το οποίο φαίνεται και από την επόμενη γραφική.

Γραφική παράσταση της διαφοράς $x - \hat{x}$:



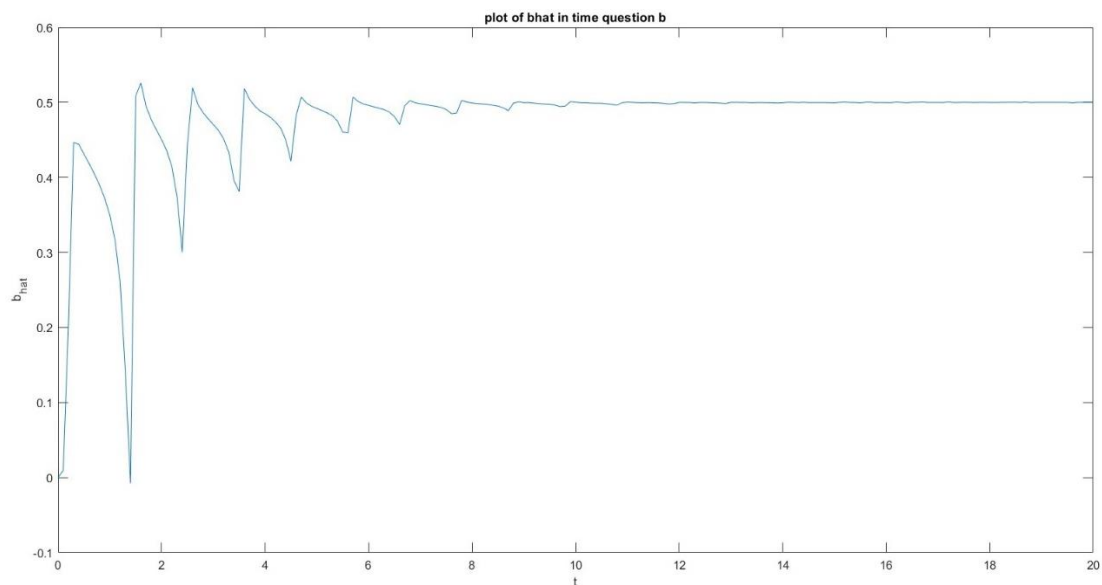
Αρχικά παρατηρούμε μία ελαττώμενη 'ταλάντωση' του σφάλματος το οποίο καταλήγει στο μηδέν.

Γραφική παράσταση του \hat{a} :



Η εκτίμηση του a βλέπουμε ότι μετά από λίγη ώρα συγκλίνει στην πραγματική τιμή του a που είναι 3.

Γραφική παράσταση του \hat{b} :



Και η εκτίμηση του b βλέπουμε ότι μετά από λίγη ώρα συγκλίνει στην πραγματική τιμή του b που είναι 0.5.

Για την επιλογή του πόλου παρατηρούμε ότι όσο ο πόλος αυξάνεται η σύγκλιση των παραμέτρων γίνεται πιο αργά. (επίσης παρατηρήθηκε ότι για πόλο 1 η σύγκλιση ήταν γρηγορότερη αλλά το σφάλμα στην εκτιμήτρια του χ στην αρχή ήταν μεγαλύτερο από ότι για πόλο 2)

Για την επιλογή του $g(\gamma)$ στην μαθηματική ανάλυση) παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται (μέχρι κάποιο σημείο) η σύγκλιση γίνεται γρηγορότερα και το σφάλμα στην αρχή μειώνεται.

Μεταξύ του α και β ερωτήματος παρατηρούμε ότι στο πρώτο δεν έχουμε σύγκλιση των παραμέτρων για πόλο διάφορο του 3 (που ισούται και με το πραγματικό α) ενώ στο δεύτερο μπορούμε να επιλέξουμε διάφορες τιμές και να συνεχίσουμε να έχουμε σύγκλιση απλά πιο αργά, οπότε δεν περιοριζόμαστε τόσο στην επιλογή του πόλου.

Θέμα 2

- Για την παράλληλη δομή θα έχουμε :

$$\dot{x} = -ax + bu$$

$$\text{το σύστημα αναγνώρισης: (1) } \dot{\hat{x}} = -\hat{a}\hat{x} + \hat{b}u$$

$$\text{σφάλμα: } e = x - \hat{x}$$

$$\text{διαφορική εξίσωση σφάλματος: } \dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = -ax + bu + \hat{a}\hat{x} - \hat{b}u$$

$$= -ax + \hat{a}\hat{x} - (\hat{b} - b)u \quad (\text{προσθαφαιρώ τον όρο } a\hat{x}) \Rightarrow$$

$$\dot{e} = -ax + \hat{a}\hat{x} - (\hat{b} - b)u + a\hat{x} - a\hat{x} = -a(x - \hat{x}) + (\hat{a} - a)\hat{x} - (\hat{b} - b)u$$

$$\text{θέτοντας } \hat{b} - b = \tilde{b}, \hat{a} - a = \tilde{a}$$

$$\text{οπότε: } \dot{e} = -ae + \tilde{a}\hat{x} - \tilde{b}u$$

$$\text{Εξίσωση Lyapunov: } V(e, \hat{a}, \hat{b}) = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2\gamma_1}\tilde{a}^2 + \frac{1}{2\gamma_2}\tilde{b}^2, \text{ με } \gamma_1, \gamma_2 > 0$$

$$\dot{V} = e\dot{e} + \frac{\tilde{a}\dot{\hat{a}}}{\gamma_1} + \frac{\tilde{b}\dot{\hat{b}}}{\gamma_2} = -ae^2 + e\tilde{a}\hat{x} - e\tilde{b}u + \frac{\tilde{a}\dot{\hat{a}}}{\gamma_1} + \frac{\tilde{b}\dot{\hat{b}}}{\gamma_2}$$

$$\text{Επιλέγοντάς: (2) } \dot{\hat{a}} = -\gamma_1 e \hat{x} \text{ και (3) } \dot{\hat{b}} = \gamma_2 eu$$

$$\text{Παίρνω: } \dot{V} = -ae^2 \leq 0$$

$$\text{Επομένως } e, \tilde{a}, \tilde{b} \in L_\infty$$

Χρησιμοποιώντας την διαφορική του συστήματος παίρνουμε την έξοδο y για κάθε t
και επιλύοντας τις 1,2,3 βρίσκω την εκτιμώμενη έξοδο \hat{x} καθώς και τις εκτιμήσεις
των παραμέτρων του συστήματος \hat{a}, \hat{b}

- Για την μικτή δομή θα έχουμε:

$$\dot{x} = -ax + bu$$

$$\text{το σύστημα αναγνώρισης: (1) } \dot{\hat{x}} = -\hat{a}\hat{x} + \hat{b}u + \theta_m(x - \hat{x}), \text{ με } \theta_m > 0$$

$$\text{σφάλμα: } e = x - \hat{x}$$

$$\text{διαφορική εξίσωση σφάλματος: } \dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} =$$

$$-ax + bu - (-\hat{a}\hat{x} + \hat{b}u + \theta_m(x - \hat{x})) = -\theta_m e + \tilde{a}\hat{x} - \tilde{b}u$$

$$\text{Εξίσωση Lyapunov: } V(e, \hat{a}, \hat{b}) = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2\gamma_1}\tilde{a}^2 + \frac{1}{2\gamma_2}\tilde{b}^2, \text{ με } \gamma_1, \gamma_2 > 0$$

$$\dot{V} = e\dot{e} + \frac{\tilde{a}\dot{\hat{a}}}{\gamma_1} + \frac{\tilde{b}\dot{\hat{b}}}{\gamma_2} = -\theta_m e^2 + \tilde{a}ex - \tilde{b}eu + \frac{\tilde{a}\dot{\hat{a}}}{\gamma_1} + \frac{\tilde{b}\dot{\hat{b}}}{\gamma_2}$$

$$\text{Επιλέγοντάς: (2) } \dot{\hat{a}} = -\gamma_1 e\hat{x} \text{ και (3) } \dot{\hat{b}} = \gamma_2 eu$$

$$\text{Παίρνω: } \dot{V} = -\theta_m e^2 \leq 0$$

$$\text{Επομένως } e, \tilde{a}, \tilde{b} \in L_\infty$$

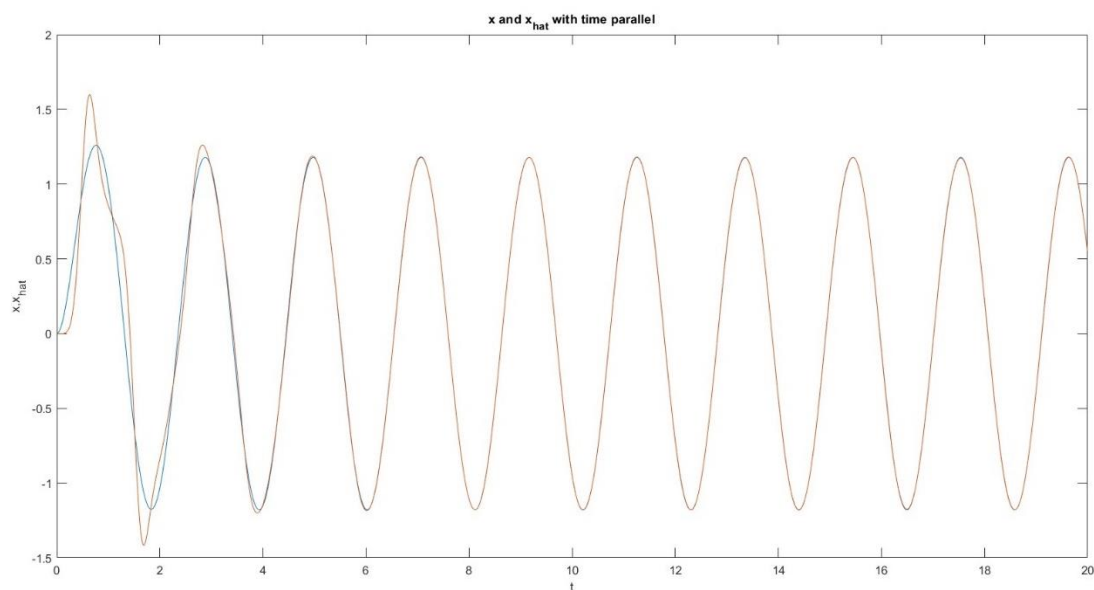
Χρησιμοποιώντας την διαφορική του συστήματος παίρνουμε την έξοδο x για κάθε t

Και επιλύοντας τις 1,2,3 βρίσκω την εκτιμώμενη έξοδο \hat{x} καθώς και τις εκτιμήσεις των παραμέτρων του συστήματος \hat{a}, \hat{b}

i) παράλληλης δομής

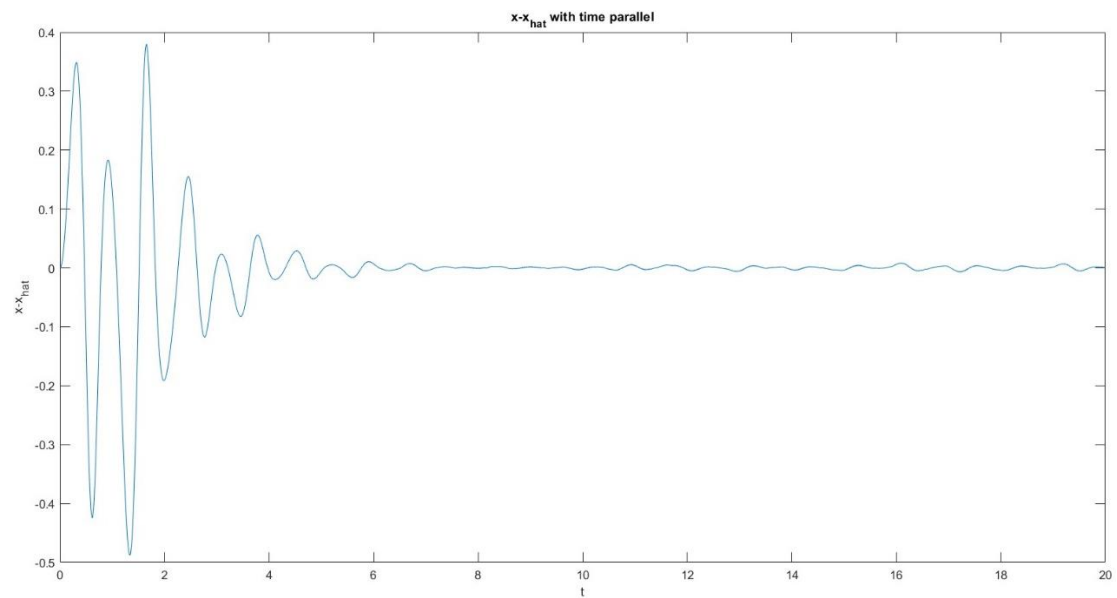
επιλέχθηκαν : $g_1=15$ (γ_1 στην ανάλυση), $g_2=1$ (γ_2 στην ανάλυση)

γραφική παράσταση της εξόδου x (χωρίς θόρυβο), και της εκτίμησης της εξόδου \hat{x}



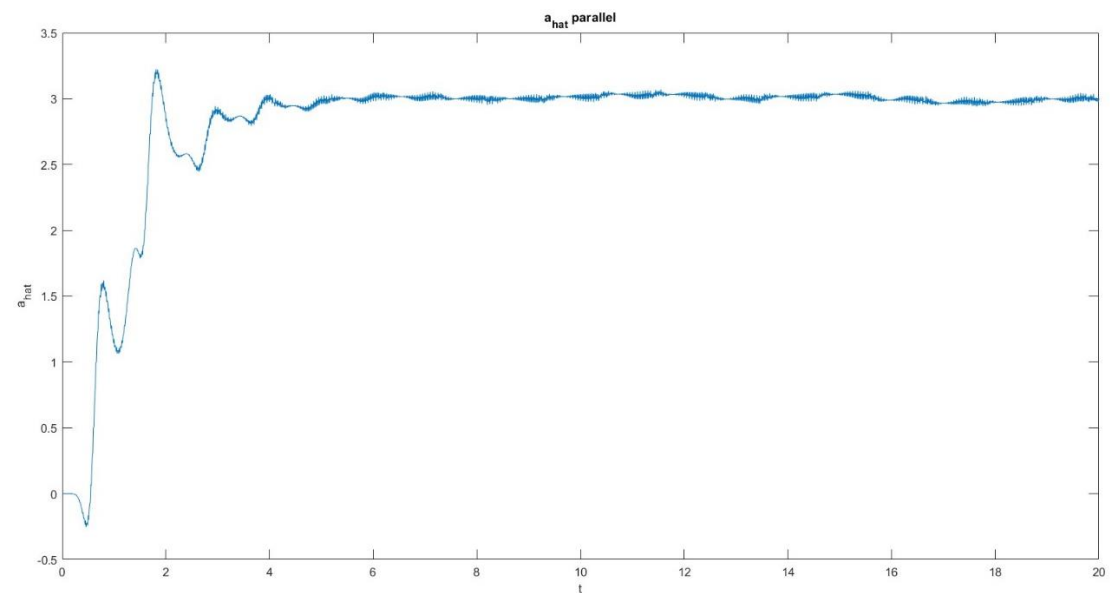
Στην αρχή έχουμε μεγάλη απόκλιση από την πραγματική τιμή ενώ στην συνέχεια η εκτίμηση μας είναι αρκετά καλή. Αυτό φαίνεται και από την γραφική της διαφοράς του – σφάλμα

Γραφική εξίσωση διαφοράς $x - \hat{x}$



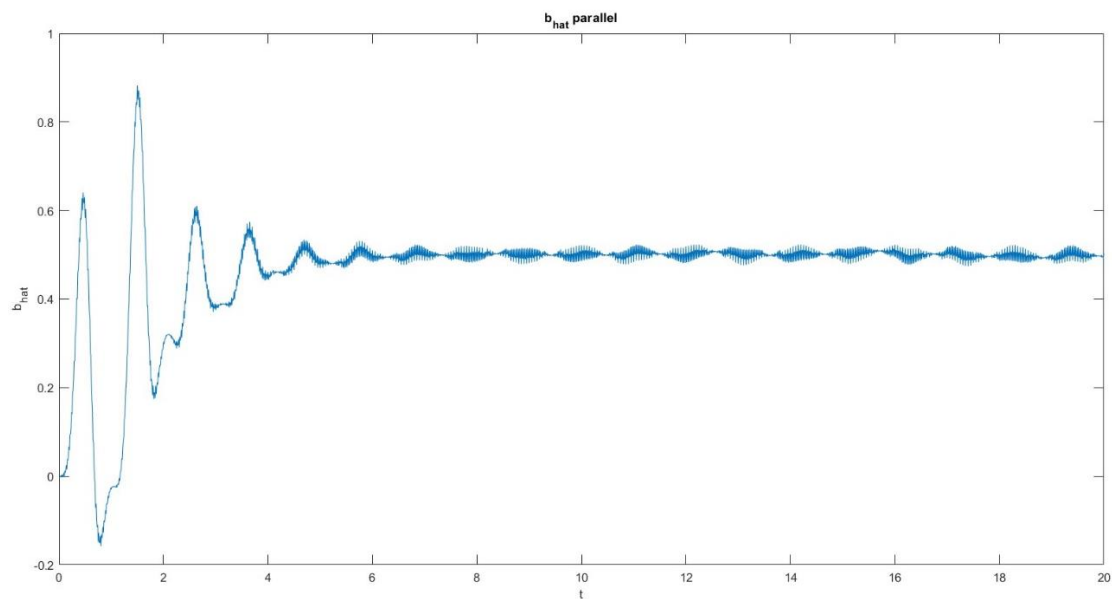
Γίνεται πλέον ευδιάκριτο ότι το σφάλμα της εκτίμησης ενώ αρχικά είναι μεγάλο, στην συνέχεια κινείται γύρω από το μηδέν.

Γραφική εξίσωση του \hat{a} (εκτίμηση του α)



Η εκτίμηση του α όσο περνάει ο χρόνος τείνει στην πραγματική τιμή του α που είναι 3 και κινείται γύρω από αυτό με μικρές ταλαντώσεις.

Γραφική εξίσωση του \hat{b} (εκτίμηση του b)



Και η εκτίμηση του b είναι αρκετά καλή όσο περνά ο χρόνος με μικρές ταλαντώσεις γύρω από την πραγματική τιμή που είναι 0.5.

Παρατηρούμε ότι παρά τον θόρυβο η παράλληλη δομή λειτουργεί αρκετά καλά τόσο για την πρόβλεψη της εξόδου όσο και των παραμέτρων του συστήματος (a, b).

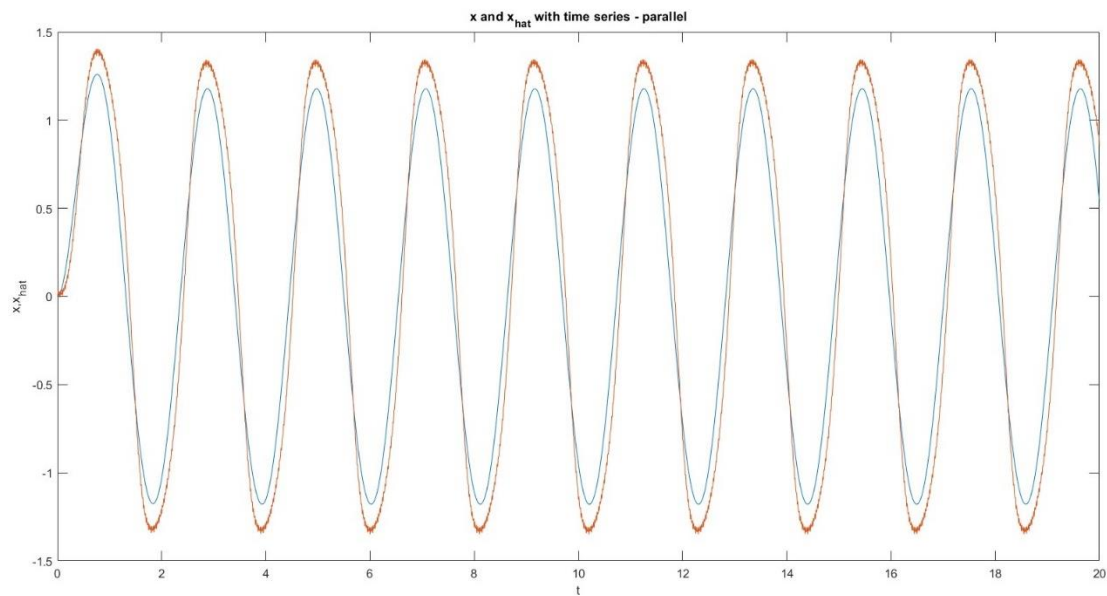
Όσον αφορά την επιλογή των γ_1, γ_2 με αλλαγές του γ_1 παρατηρώ ότι η εκτίμηση της εξόδου εμφανίζει μεγαλύτερο σφάλμα όπως και των παραμέτρων a, b (ταλαντώσεις μεγαλύτερου πλάτους), ενώ με την αλλαγή γ_2 μπορεί να παρατηρούμε μεταβολές στο σφάλμα των παραμέτρων (συνήθως όσο μεγαλώνει, μεγαλώνει και το σφάλμα στα a και b ενώ στο x μέχρι κάποιο σημείο μπορεί να έχουμε καλύτερη εκτίμηση).

Με μεταβολή της συχνότητας μερικές φορές παρατηρούμε ότι η εκτιμήσεις μας αρχίζουν και έχουν μεγαλύτερα σφάλματα και σε μερικές περιπτώσεις είναι σχεδόν αδύνατη η εκτίμηση των παραμέτρων ενώ άλλες φορές έχουμε καλύτερες εκτιμήσεις. Όσων αφορά το πλάτος του θορύβου όσο μικραίνει έχουμε καλύτερη εκτίμηση τόσο των παραμέτρων όσο και της εξόδου και όσο μεγαλώνει χειρότερη ή και δεν μπορούμε να τις εκτιμήσουμε, κάτι το οποίο είναι και λογικό.

ii) μικτής δομής

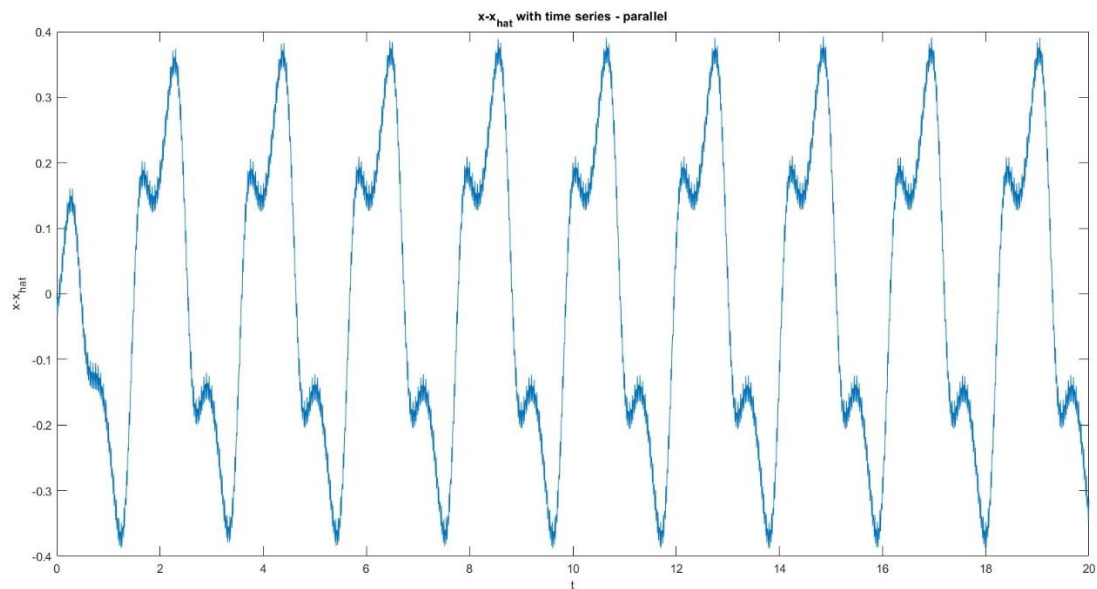
επιλέχθηκαν : $g_1=15$ (γ_1 στην ανάλυση), $g_2=1$ (γ_2 στην ανάλυση), $thm=10$ (Θ_m στην ανάλυση)

γραφική παράσταση της εξόδου x (χωρίς θόρυβο), και της εκτίμησης της εξόδου \hat{x}



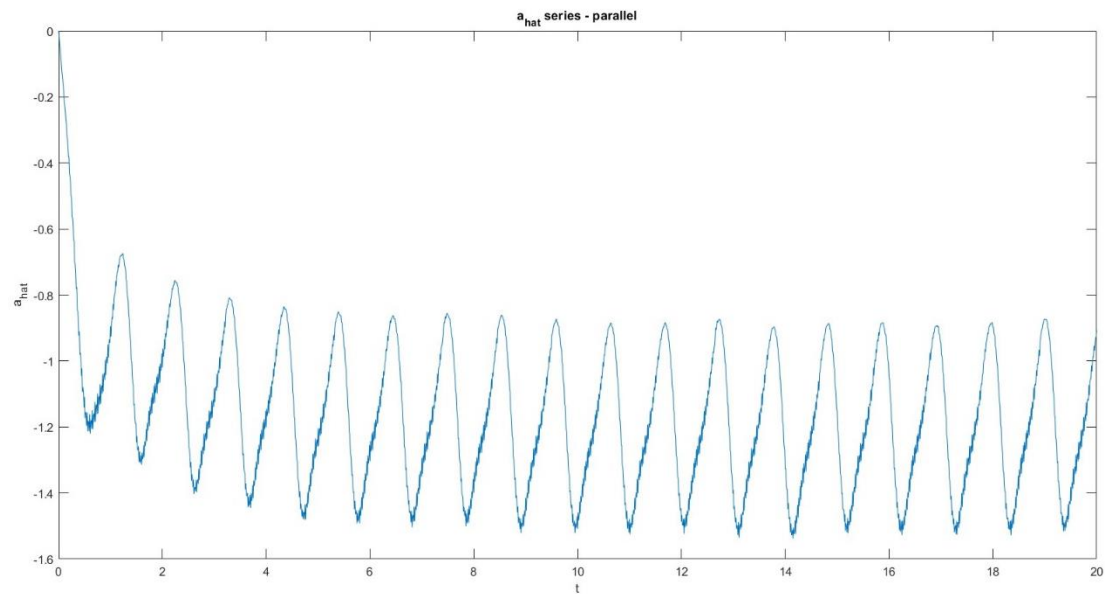
Παρατηρούμε ότι η εκτίμηση έχει ορατή απόκλιση από την πραγματική τιμή της εξόδου καθ' όλη την διάρκεια την προσομοίωσης. Αυτό φαίνεται και από την γραφική του σφάλματος.

Γραφική εξίσωση διαφοράς $x - \hat{x}$



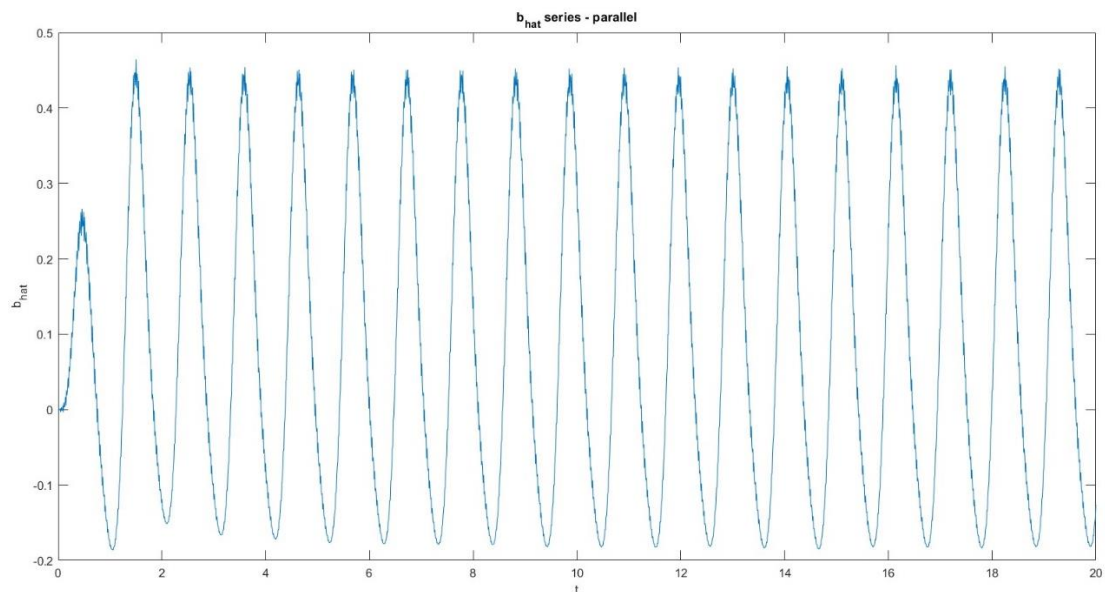
Επιβεβαιώνεται αυτό το οποίο αναφέρθηκε παραπάνω, ότι δηλαδή υπάρχει αρκετή απόκλιση της εκτίμησης από την πραγματική τιμή, και αυτή δεν φαίνεται να καταλήγει στο μηδέν με την πάροδο του χρόνου.

Γραφική εξίσωση του \hat{a} (εκτίμηση του α)



Μπορούμε να διακρίνουμε ότι η εκτίμηση του α αποκλίνει από την πραγματική τιμή και δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα για αυτή.

Γραφική εξίσωση του \hat{b} (εκτίμηση του b)



Και για το b δεν μπορούμε να βγάλουμε κάποιο συμπέρασμα καθώς όπως φαίνεται η εκτίμηση του δεν συγκλίνει σε κάποια τιμή.

Για όσες τιμές γ_1 , γ_2 , θ_m έγιναν δοκιμές δεν παρατηρήθηκε σύγκλιση των παραμέτρων ή της εξόδου στις πραγματικές τους τιμές.

Όσον αφορά τον θόρυβο όσο μικραίνει το πλάτος του οι εκτιμήσεις αρχίζουν να πλησιάζουν τις πραγματικές τιμές χωρίς όμως να έχουμε εύκολα συμπεράσματα. Με αλλαγή της συχνότητας δεν παρατηρείται κάποια διαφορά που μας βοηθά στο να πάρουμε τις εκτιμήσεις μας σωστά.

Συμπερασματικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι η μικτή δομή επηρεάζεται πολύ περισσότερο από τον θόρυβο σε σχέση με την παράλληλη, αφού δεν μπορέσαμε καν να βγάλουμε εκτιμήσεις. Αντίθετα στην παράλληλη μπορέσαμε να βγάλουμε τιμές οι οποίες μάλιστα προσεγγίζουν και τις πραγματικές με καλή ακρίβεια.

Θέμα 3

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

το σύστημα αναγνώρισης: (1) $\dot{\hat{x}} = \hat{A}x + \hat{B}u + \theta_m(x - \hat{x})$, με $\theta_m > 0$

$$\sigma\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha: e = x - \hat{x}$$

διαφορική εξίσωση σφάλματος: $\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} \Rightarrow$

$$\dot{e} = Ax + Bu - (\hat{A}x + \hat{B}u + \theta_m(x - \hat{x})) = -\theta_m e - \tilde{A}x - \tilde{B}u$$

$$\text{Εξίσωση Lyapunov: } V(e, \hat{A}, \hat{B}) = \frac{1}{2}e^T e + \frac{1}{2}\text{tr}\{\tilde{A}^T \Gamma_1^{-1} \tilde{A}\} + \frac{1}{2}\text{tr}\{B^T \Gamma_2^{-1} \tilde{B}\}$$

$$\text{με } \gamma_1, \gamma_2 > 0$$

$$\dot{V} = e^T \dot{e} + \text{tr}\{\tilde{A}^T \Gamma_1^{-1} \dot{\tilde{A}}\} + \text{tr}\{B^T \Gamma_2^{-1} \dot{\tilde{B}}\} \Rightarrow$$

$$\dot{V} = -e^T \theta_m e - e^T \tilde{A}x - e^T \tilde{B}u + \text{tr}\{\tilde{A}^T \Gamma_1^{-1} \dot{\tilde{A}}\} + \text{tr}\{B^T \Gamma_2^{-1} \dot{\tilde{B}}\}$$

$$e^T \tilde{A}x = \text{tr}\{\tilde{A}x e^T\} = \text{tr}\{(ex^T \tilde{A}^T)^T\}$$

$ex^T \tilde{A}^T$ τετραγωνικός (αφου $e \rightarrow 2 \times 1, x^T \rightarrow 1 \times 2, \tilde{A}^T \rightarrow 2 \times 2$) άρα 2×2 οπότε:

$$\text{tr}\{(ex^T \tilde{A}^T)^T\} = \text{tr}\{ex^T \tilde{A}^T\} = \text{tr}\{\tilde{A}^T ex^T\}$$

$$e^T \tilde{B}u = \text{tr}\{\tilde{B}ue^T\} = \text{tr}\{(eu^T \tilde{B}^T)^T\}$$

$eu^T \tilde{B}^T$ τετραγωνικός (αφου $e \rightarrow 2 \times 1, u^T \rightarrow 1 \times 1, \tilde{B}^T \rightarrow 1 \times 2$) άρα 2×2 οπότε:

$$\text{tr}\{(eu^T \tilde{B}^T)^T\} = \text{tr}\{eu^T \tilde{B}^T\} = \text{tr}\{\tilde{B}^T eu^T\}$$

Και η παράγωγος της Lyapunov γίνεται:

$$\dot{V} = -e^T \theta_m e - \text{tr}\{\tilde{A}^T ex^T\} - \text{tr}\{\tilde{B}^T eu^T\} + \text{tr}\{\tilde{A}^T \Gamma_1^{-1} \dot{\tilde{A}}\} + \text{tr}\{B^T \Gamma_2^{-1} \dot{\tilde{B}}\} \Rightarrow$$

$$\dot{V} = -e^T \theta_m e + \text{tr}\{\tilde{A}^T \Gamma_1^{-1} \dot{\tilde{A}} + B^T \Gamma_2^{-1} \dot{\tilde{B}} - \tilde{A}^T ex^T - \tilde{B}^T eu^T\}$$

$$\text{Επιλέγοντας: (2) } \dot{\tilde{A}} = \Gamma_1 ex^T \text{ και (2) } \dot{\tilde{B}} = \Gamma_2 eu^T$$

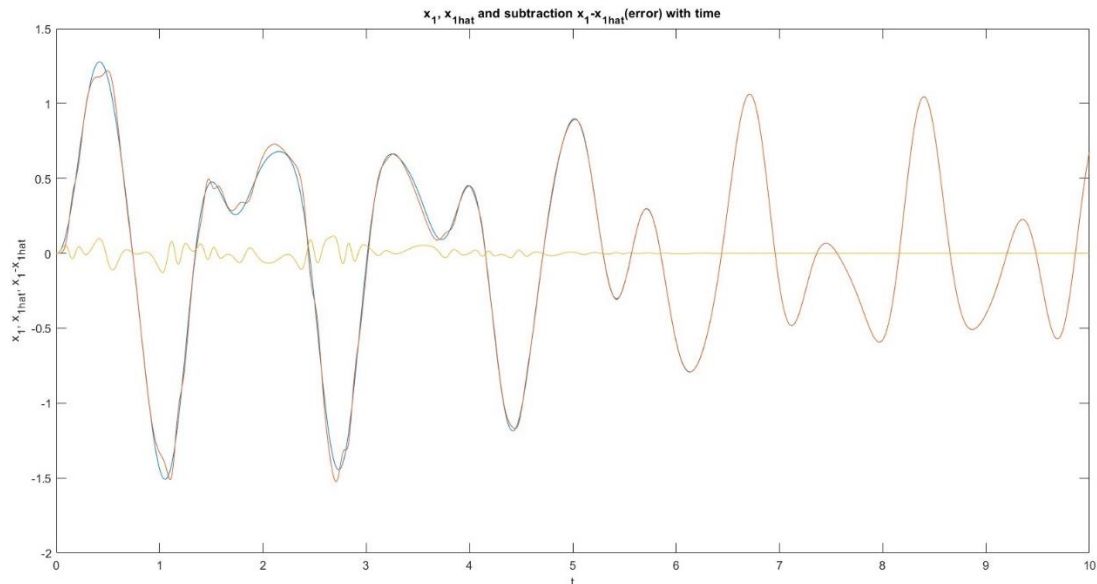
$$\text{Προκύπτει: } \dot{V} = -e^T \theta_m e \leq 0$$

Χρησιμοποιώντας την διαφορική του συστήματος παίρνουμε τις εξόδους x_1 και x_2 για κάθε t

Και επιλύοντας τις 1,2,3 βρίσκω την εκτιμώμενη έξοδο \hat{x} καθώς και τις εκτιμήσεις των παραμέτρων του συστήματος \hat{A}, \hat{B}

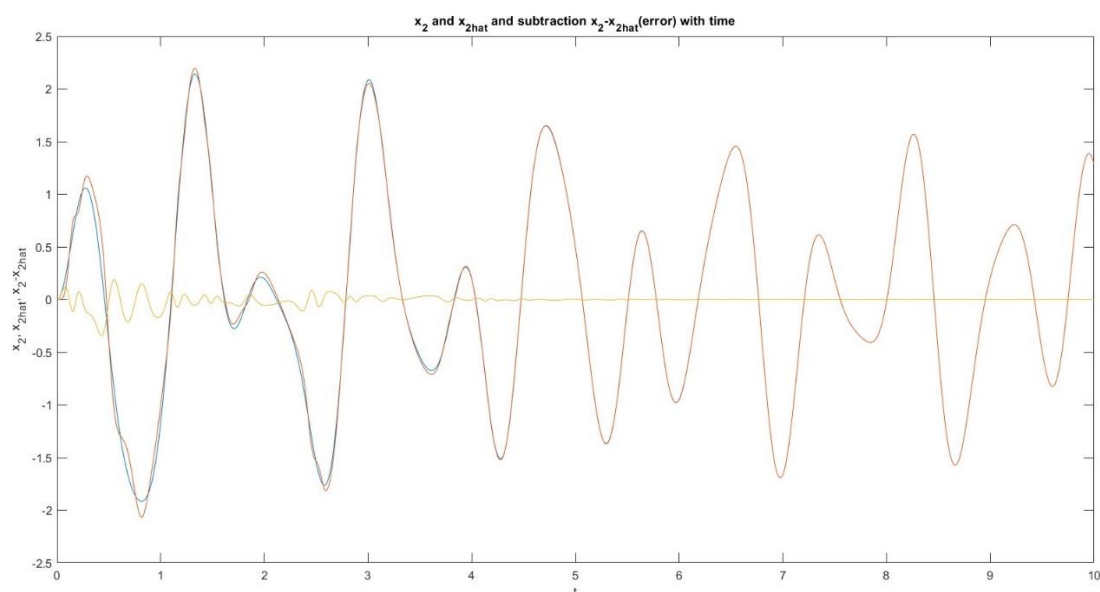
επιλέχθηκαν : $g_1=100$ (Γ_1 στην ανάλυση), $g_2=100$ (Γ_2 στην ανάλυση), $\text{thm}=5$ (Θ_m στην ανάλυση)

γραφική παράσταση της εξόδου x_1 (με μπλε), της εκτίμησης της εξόδου \hat{x}_1 (με πορτοκαλί) καθώς και της διαφοράς του (σφάλμα με κίτρινο)



Φαίνεται από την παραπάνω γραφική ότι η εκτίμηση μας για το x_1 είναι αρκετά καλή αφού μετά από ένα σημείο οι δύο γραφικές φαίνεται να ταυτίζονται, αυτό μπορεί να φανεί και από την γραφική σφάλματος που φαίνεται στο σχήμα όπου οδηγείται στο μηδέν μετά από λίγη ώρα.

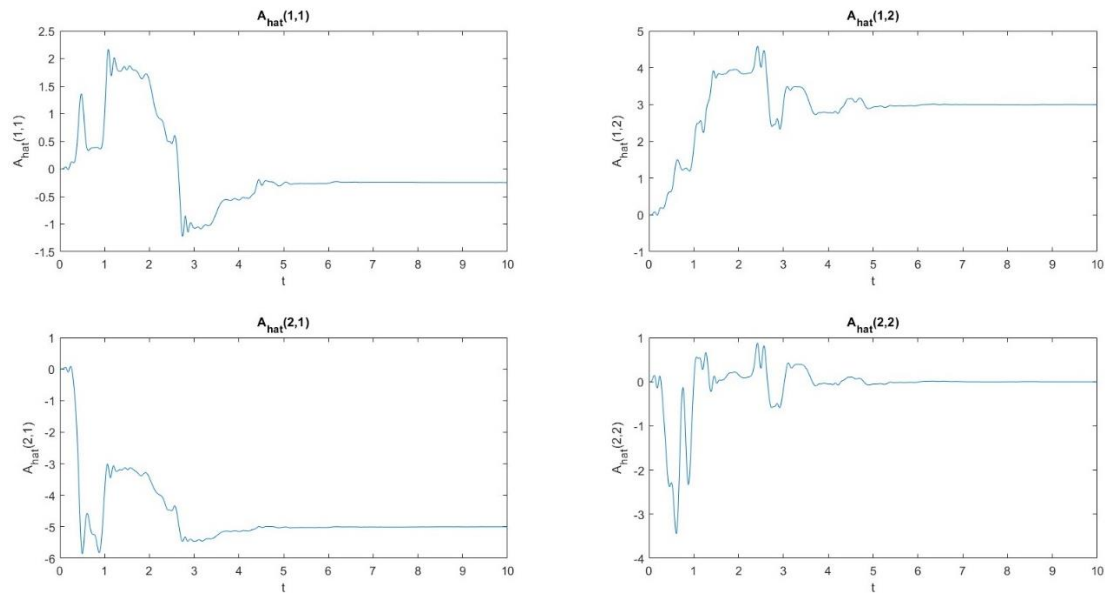
Γραφική παράσταση της εξόδου x_2 (με μπλε), της εκτίμησης της εξόδου \hat{x}_2 (με πορτοκαλί) καθώς και της διαφοράς του (σφάλμα με κίτρινο)



Όπως και για το x_1 , από την παραπάνω γραφική φαίνεται ότι η εκτίμηση μας για το x_2 είναι αρκετά καλή αφού μετά από ένα σημείο οι δύο γραφικές φαίνεται να

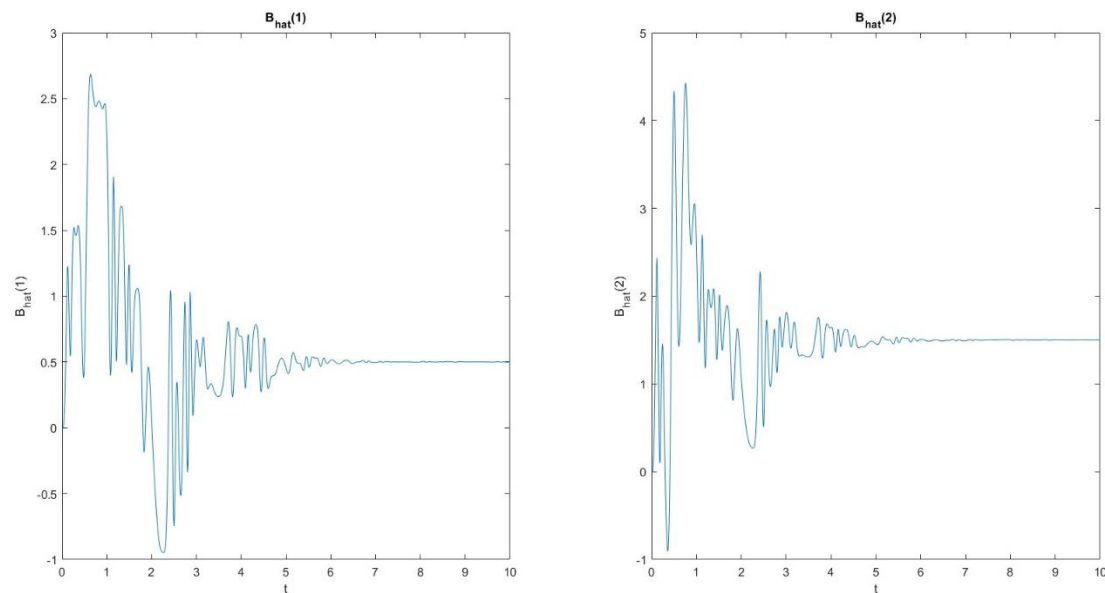
ταυτίζεται, αυτό μπορεί να φανεί και από την γραφική σφάλματος που φαίνεται στο σχήμα όπου οδηγείται στο μηδέν μετά από λίγη ώρα.

Γραφικές παραστάσεις των όρων του \hat{A} (εκτίμηση του A)



Βλέπουμε ότι όλες οι τιμές συγκλίνουν μετά από λίγο στις πραγματικές τιμές των παραμέτρων του συστήματος που περιλαμβάνει ο πίνακας A .

Γραφικές παραστάσεις των όρων του \hat{B} (εκτίμηση του B)



Βλέπουμε ότι και οι παράμετροι b του συστήματος συγκλίνουν στις πραγματικές τους τιμές μετά από ένα χρονικό διάστημα.

Οπότε βλέπουμε ότι το μοντέλο μας είναι καλό αφού και οι μεταβλητές του συγκλίνουν στις πραγματικές και οι έξοδοι του επίσης.

Αλλάζοντας τις τιμές των Γ_1 και Γ_2 παρατηρούμε ότι για πολύ μεγάλες τιμές ή πολύ μικρές αργεί το σύστημα να έχει σύγκλιση, τόσο στις μεταβλητές όσο και στην έξοδο. Όσον αφορά το θ_m παρατηρήθηκε ότι για τιμές στην περιοχή 5-20 έχουμε αρκετά καλή σύγκλιση στις πραγματικές τιμές όλων των μεγεθών ενώ όσο απομακρυνόμαστε η σύγκλιση γίνεται πιο αργή ή παρατηρούνται περισσότερες ταλαντώσεις γύρω από την πραγματική τιμή (μικρού πλάτους).