

# Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων

## Εργασία 1

### Θέμα:

Γραμμική Παραμετροποίηση, Εκτίμηση Άγνωστων  
Παραμέτρων, Μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων

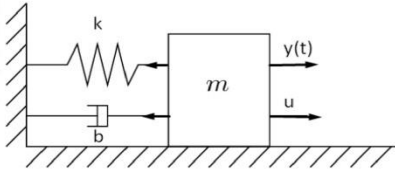
AEM: 10216

Όνομα: Καλαϊτζίδης Ελευθέριος

Email: [elftherk@ece.auth.gr](mailto:elftherk@ece.auth.gr)

## Θέμα 1

A)



$$\sum F = m \cdot a \Rightarrow m \cdot \ddot{y}(t) = u(t) - b \cdot \dot{y}(t) - k y(t) \Rightarrow \ddot{y}(t) = -b \cdot \dot{y}(t) \frac{1}{m} - k y(t) \frac{1}{m} + u(t) \frac{1}{m}$$

$$s^2 y = -s b y \frac{1}{m} - k y \frac{1}{m} + u \frac{1}{m}$$

$$\text{Φιλάρο: } \Lambda(s) = (s+\lambda)^2$$

$$\frac{s^2}{(s+\lambda)^2} y = -\frac{s}{(s+\lambda)^2} \cdot b y \frac{1}{m} - \frac{1}{(s+\lambda)^2} k y \frac{1}{m} + \frac{1}{(s+\lambda)^2} u \frac{1}{m} \Rightarrow$$

$$+ \frac{2\lambda s + \lambda^2}{(s+\lambda)^2} y - \frac{2\lambda s + \lambda^2}{(s+\lambda)^2} y + \frac{s^2}{(s+\lambda)^2} y = -\frac{s}{(s+\lambda)^2} b y \frac{1}{m} - \frac{1}{(s+\lambda)^2} k y \frac{1}{m} + \frac{1}{(s+\lambda)^2} u \frac{1}{m} \Rightarrow$$

$$y = -\left(b \frac{1}{m} - 2\lambda\right) \frac{s}{(s+\lambda)^2} y - \left(k \frac{1}{m} - \lambda^2\right) \frac{1}{(s+\lambda)^2} y + \frac{1}{m} \frac{1}{(s+\lambda)^2} u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} -\left(b \frac{1}{m} - 2\lambda\right) & -\left(k \frac{1}{m} - \lambda^2\right) & \frac{1}{m} \end{bmatrix}}_{\Theta^{*T}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{s}{(s+\lambda)^2} y \\ \frac{1}{(s+\lambda)^2} y \\ \frac{1}{(s+\lambda)^2} u \end{bmatrix}}_{\Sigma}$$

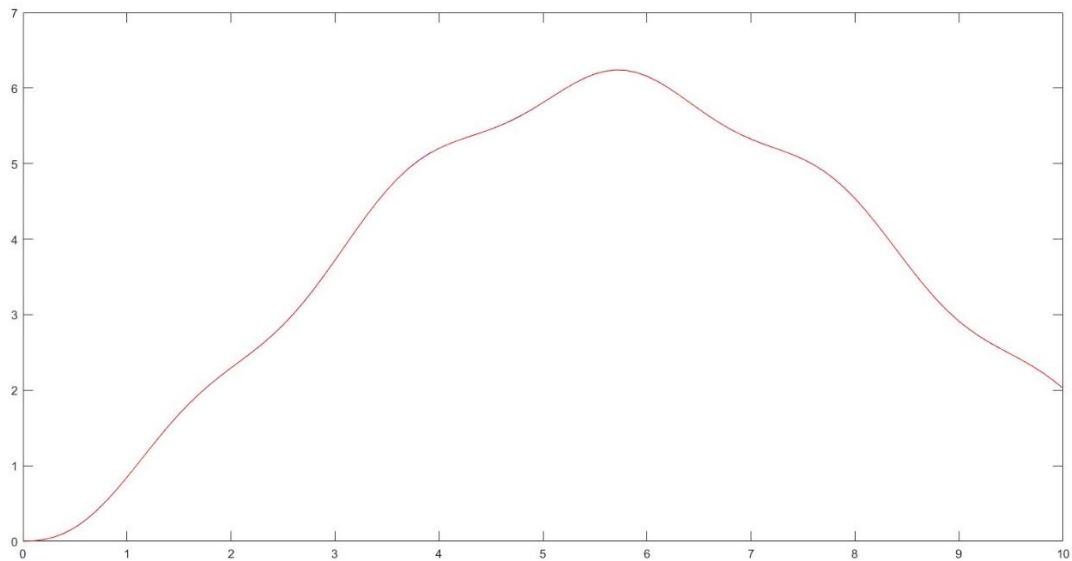
B)

Για να γίνει η υλοποίηση πρέπει να δημιουργήσουμε τον πίνακα  $\Phi$  ο οποίος περιλαμβάνει τιμές των μετρήσιμων μεγεθών σε διάφορες χρονικές στιγμές (για να γεμίσει με τιμές χρησιμοποιούμε στην συνάρτηση `lsim` για την δημιουργία κάθε στήλης του πίνακα και μετά τις ενώνουμε σε έναν πίνακα). Στην συνέχεια υπολογίζουμε τον πίνακα  $\Theta_0$  από τον τύπο  $\Theta_0^T = Y^T * \Phi * (\Phi^T * \Phi)^{-1}$  κάθε στοιχείο του οποίου αποτελεί συνάρτηση των αγνώστων παραμέτρων και μέσω ενός συστήματος γίνεται η εύρεση τους.

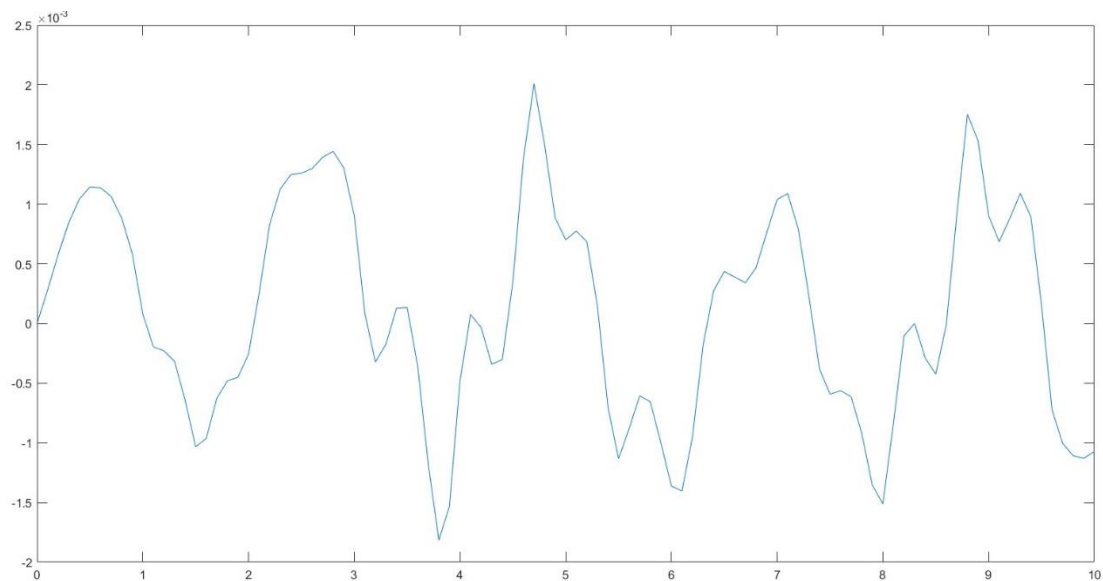
Κώδικας στο matlab

Γ)

Ο πόλος που χρησιμοποιήθηκε για το φίλτρο είναι  $\lambda = 2$



Παραπάνω παρουσιάζεται το σχεδιάγραμμα της εξόδου  $y$  και της προβλεπόμενης εξόδου  $\hat{y}$  με το χρόνο  $t$ . Στον οριζόντιο άξονα είναι ο χρόνος ενώ στον κατακόρυφο η έξοδος.



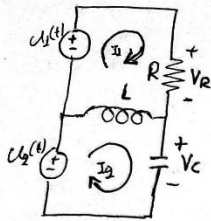
Γράφημα του σφάλματος ως προς το χρόνο. Ο χρόνος στον οριζόντιο άξονα και το σφάλμα στο κατακόρυφο.

Παρατηρούμε ότι το σφάλμα για τον πόλο που επιλέξαμε ( $\lambda=2$ ) είναι πολύ μικρό οπότε οι γραφικές παραστάσεις του  $y$  και  $\hat{y}$  σχεδόν συμπίπτουν.

Τέλος οι παράμετροι  $m, k, b$  υπολογίστηκαν πολύ κοντά στις πραγματικές, 10.00048, 2.4975, 0.49063 αντίστοιχα

## Θέμα 2

A)



$$u_1 = V_R + L \dot{i}_1 - L \dot{i}_2 \quad (1) \quad I_1 = \frac{V_R}{R} \quad (3) \quad I_2 = \dot{V}_C \cdot C \quad (4)$$

$$u_2 = V_C + L \dot{i}_2 - L \dot{i}_1 \quad (2)$$

$$u_1 + u_2 = V_R + V_C$$

$$V_R = u_1 + u_2 - V_C$$

$$\dot{V}_R = \dot{u}_1 + \dot{u}_2 - \dot{V}_C \quad (5)$$

$$V_C = u_1 + u_2 - V_R$$

$$\dot{V}_C = \dot{u}_1 + \dot{u}_2 - \dot{V}_R \quad (6)$$

$$\ddot{V}_C = \ddot{u}_1 + \ddot{u}_2 - \ddot{V}_R \quad (7)$$

$$(1) \quad (4) \Rightarrow u_1 = V_R + L \frac{\dot{V}_R}{R} - L \ddot{V}_C \cdot C \quad (8)$$

$$(2) \quad (3) \Rightarrow u_2 = V_C + L \cdot C \cdot \ddot{V}_C - L \frac{\dot{V}_R}{R} \quad (9) \quad \text{Για το } V_C:$$

$$(9) \Rightarrow u_2 = V_C + L \cdot C \cdot \ddot{V}_C - \frac{L}{R} \dot{u}_1 - \frac{L}{R} \dot{u}_2 + \frac{L}{R} \dot{V}_C \Rightarrow$$

$$\ddot{V}_C = -\frac{1}{RC} \dot{V}_C - \frac{1}{LC} V_C + \frac{1}{RC} \dot{u}_1 + \frac{1}{RC} \dot{u}_2 + \frac{1}{LC} u_2 \Rightarrow$$

$$s^2 V_C = -\frac{1}{RC} s V_C + \frac{1}{LC} V_C + \frac{1}{RC} s u_1 + \frac{1}{RC} s u_2 + \frac{1}{LC} u_2$$

$$\varphi(\lambda)_{\text{epo}} = \lambda(s) = (s+\lambda)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(s+\lambda)^2} s^2 V_C = -\frac{1}{RC} \frac{s}{(s+\lambda)^2} V_C - \frac{1}{LC} \frac{1}{(s+\lambda)^2} V_C + \frac{1}{RC} \frac{s}{(s+\lambda)^2} u_1 + \frac{1}{RC} \frac{s}{(s+\lambda)^2} u_2 + \frac{1}{LC} \frac{1}{(s+\lambda)^2} u_2$$

$$\Rightarrow \frac{2\lambda s + \lambda^2}{(s+\lambda)^2} V_C + \frac{s^2}{(s+\lambda)^2} V_C = -\frac{1}{RC} \frac{s}{(s+\lambda)^2} V_C - \frac{1}{LC} \frac{1}{(s+\lambda)^2} V_C + \frac{1}{RC} \frac{s}{(s+\lambda)^2} u_1 + \frac{1}{RC} \frac{s}{(s+\lambda)^2} u_2 + \frac{1}{LC} \frac{1}{(s+\lambda)^2} u_2$$

$$\Rightarrow V_C = -\left(\frac{1}{RC} - 2\lambda\right) \frac{s}{(s+\lambda)^2} V_C - \left(\frac{1}{LC} - \lambda^2\right) \frac{1}{(s+\lambda)^2} V_C + \frac{1}{RC} \frac{s}{(s+\lambda)^2} u_1 + \frac{1}{RC} \frac{s}{(s+\lambda)^2} u_2 + \frac{1}{LC} \frac{1}{(s+\lambda)^2} u_2$$

$$V_C = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{RC} - 2\lambda\right) & -\left(\frac{1}{LC} - \lambda^2\right) & \frac{1}{RC} & \frac{1}{RC} & \frac{1}{LC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s}{(s+\lambda)^2} V_C \\ \frac{1}{(s+\lambda)^2} V_C \\ \frac{s}{(s+\lambda)^2} u_1 \\ \frac{s}{(s+\lambda)^2} u_2 \\ \frac{1}{(s+\lambda)^2} u_2 \end{bmatrix}$$

Για το  $V_R$ :

$$\begin{aligned} \textcircled{8} \Rightarrow u_1 &= V_R + \frac{1}{R} \dot{V}_R - L \cdot \ddot{u}_1 - LC \ddot{u}_2 + L \cdot C \cdot \ddot{V}_R \Rightarrow \ddot{V}_R = -\frac{1}{RC} \dot{V}_R - \frac{1}{LC} V_R + \ddot{u}_2 + \ddot{u}_1 + \frac{1}{LC} u_1 \\ s^2 V_R &= -\frac{1}{RC} \frac{s}{(s+2)^2} V_R - \frac{1}{LC} \frac{1}{(s+2)^2} V_R + \frac{1}{(s+2)^2} s^2 u_2 + \frac{s^2}{(s+2)^2} u_1 + \frac{1}{LC} \frac{1}{(s+2)^2} u_1 \quad \text{προσ-} \\ V_R &= -\left(\frac{1}{RC} - 2\right) \frac{s}{(s+2)^2} V_R - \left(\frac{1}{LC} - 2^2\right) \frac{1}{(s+2)^2} V_R + \frac{1}{(s+2)^2} s^2 u_2 + \frac{s^2}{(s+2)^2} u_1 + \frac{1}{LC} \frac{1}{(s+2)^2} u_1 \quad \text{αφαιρέση} \\ &\quad \text{αντίστοιχα} \\ &\quad \text{μ.ε.π.} \end{aligned}$$

$$V_R = \left[ -\left(\frac{1}{RC} - 2\right) \quad -\left(\frac{1}{LC} - 2^2\right) \quad 1 \quad 1 \quad \frac{1}{LC} \right] \begin{bmatrix} \frac{s}{(s+2)^2} V_R \\ \frac{1}{(s+2)^2} V_R \\ \frac{s^2}{(s+2)^2} u_2 \\ \frac{s^2}{(s+2)^2} u_1 \\ \frac{1}{(s+2)^2} u_1 \end{bmatrix}$$

$\Theta^{*T}$   $\Sigma$

Με την εφαρμογή της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων για κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις και επιλεγμένο πόλο φίλτρου  $\lambda=100$  προκύπτουν οι αντίστοιχοι πίνακες  $\Theta^*$

Για το  $V_C$ :

$$\Theta^* = [199,8 \quad -990008,2 \quad 0,2 \quad 0,002 \quad 1000008,2]$$

Για το  $V_R$ :

$$\Theta^* = [199.8 \quad -990008.2 \quad 0.99 \quad 1.09 \quad 1000009.8]$$

Και με αντικατάσταση τους στις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει:

$$\begin{aligned} V_C &= 199,8 \frac{s}{(s+100)^2} V_C - 990008,2 \frac{1}{(s+100)^2} + 0,2 \frac{s}{(s+100)^2} u_1 + 0,002 \frac{s}{(s+100)^2} u_2 + 1000008,2 \frac{1}{(s+100)^2} u_2 \\ V_C &= \frac{0,2 \frac{s}{(s+100)^2}}{1 - 199,8 \frac{s}{(s+100)^2} + 990008,2 \frac{1}{(s+100)^2}} u_1 + \frac{\frac{s}{(s+100)^2} + \frac{1}{(s+100)^2}}{1 - 199,8 \frac{s}{(s+100)^2} + 990008,2 \frac{1}{(s+100)^2}} u_2 \\ V_C &= \frac{0,2 s}{(s+100)^2 - 199,8 \cdot s + 990008,2} u_1 + \frac{s + 1}{(s+100)^2 - 199,8 \cdot s + 990008,2} u_2 \end{aligned}$$

$$V_C = 199,8 \frac{s}{(s+100)^2} V_C - 990008,2 \frac{1}{(s+100)^2} + 0,2 \frac{s}{(s+100)^2} u_1 + 0,002 \frac{s}{(s+100)^2} u_2 + 1000008,2 \frac{1}{(s+100)^2} u_2$$

$$V_C = \frac{0,2 \frac{s}{(s+100)^2}}{1 - 199,8 \frac{s}{(s+100)^2} + 990008,2 \frac{1}{(s+100)^2}} u_1 + \frac{0,002 \frac{s}{(s+100)^2} + 1000008,2 \frac{1}{(s+100)^2}}{1 - 199,8 \frac{s}{(s+100)^2} + 990008,2 \frac{1}{(s+100)^2}} u_2$$

$$V_C = \frac{0,2 s}{(s+100)^2 - 199,8 s + 990008,2} u_1 + \frac{0,002 s + 1000008,2}{(s+100)^2 - 199,8 s + 990008,2} u_2$$

$$V_R = 199,8 \frac{s}{(s+100)^2} V_R - 990008,2 \frac{1}{(s+100)^2} V_R + 0,99 \frac{s^2}{(s+100)^2} u_2 + 1,09 \frac{s^2}{(s+100)^2} u_1 + 1000008,2 \frac{1}{(s+100)^2} u_1$$

$$V_R = \frac{0,99 \frac{s^2}{(s+100)^2}}{1 - 199,8 \frac{s}{(s+100)^2} + 990008,2 \frac{1}{(s+100)^2}} u_2 + \frac{1,09 \frac{s^2}{(s+100)^2} + 1000008,2 \frac{1}{(s+100)^2}}{1 - 199,8 \frac{s}{(s+100)^2} + 990008,2 \frac{1}{(s+100)^2}} u_1$$

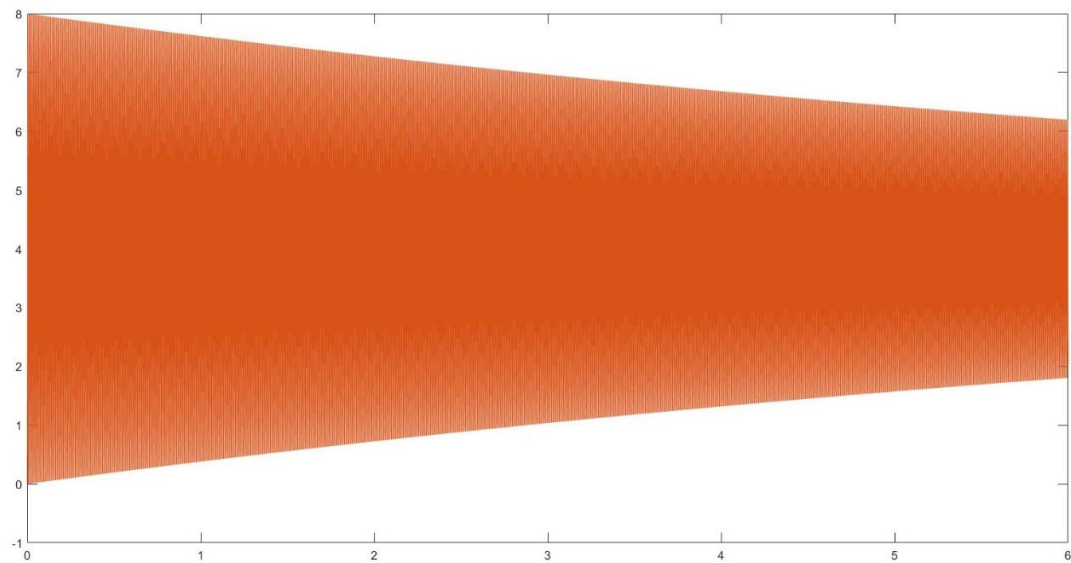
$$V_R = \frac{0,99 s^2}{(s+100)^2 - 199,8 s + 990008,2} u_2 + \frac{1,09 s^2 + 1000008,2}{(s+100)^2 - 199,8 s + 990008,2} u_1$$

$$\rightarrow (s+100)^2 - 199,8 s + 990008,2 = s^2 + 200s + 10000 - 199,8 s + 990008,2 = s^2 + 0,2s + 1000008,2$$

Άρα

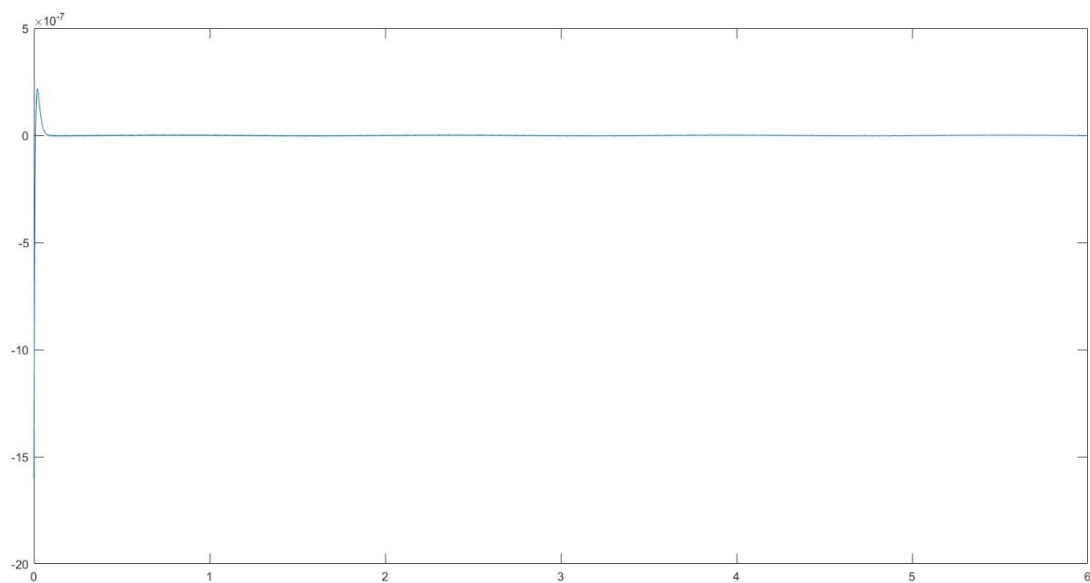
$$\begin{bmatrix} V_C \\ V_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0,2 s}{s^2 + 0,2s + 1000008,2} & \frac{0,002 s + 1000008,2}{s^2 + 0,2s + 1000008,2} \\ \frac{1,09 s^2 + 1000008,2}{s^2 + 0,2s + 1000008,2} & \frac{0,99 s^2}{s^2 + 0,2s + 1000008,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Πίνακας μεταφοράς του συστήματος

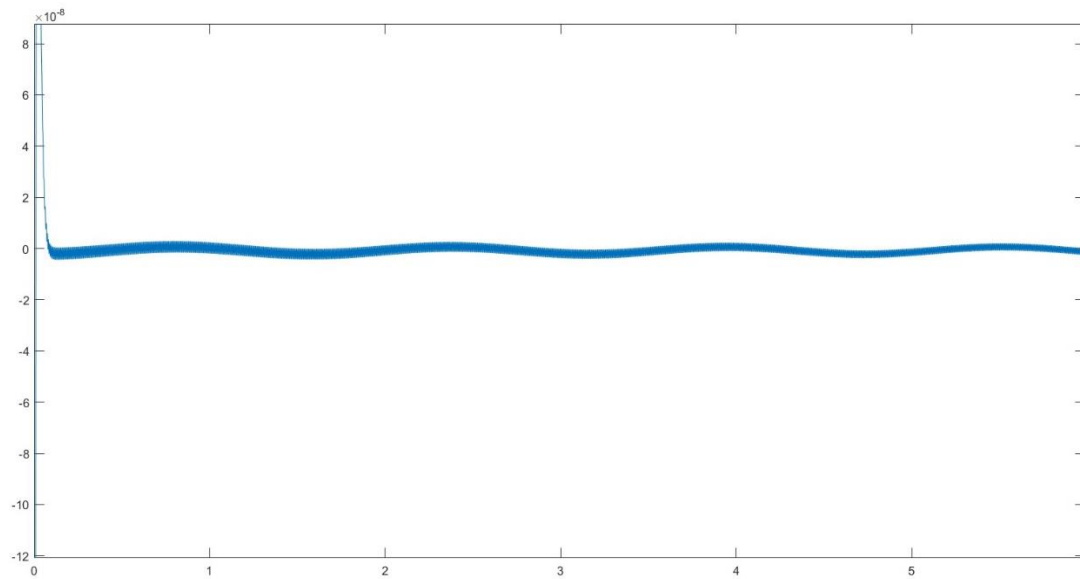


Γραφική παράσταση  $V_c$ ,  $\hat{V}_c$  με χρόνο  $t$  (οριζόντιος άξονας  $t$ , κατακόρυφος  $V_c$  &  $\hat{V}_c$ )

Στο παραπάνω γράφημα φαίνεται σαν να υπάρχει μία μόνο γραφική παράσταση. Αυτό συμβαίνει διότι η προσέγγιση είναι πάρα πολύ κοντά με τις πραγματικές τιμές και οι δυο γραφικές ταυτίζονται. Αυτό γίνεται αντιληπτό και από την γραφική του σφάλματος που ακολουθεί (σφάλματα της τάξεως του  $10^{-6}$  και μικρότερο).

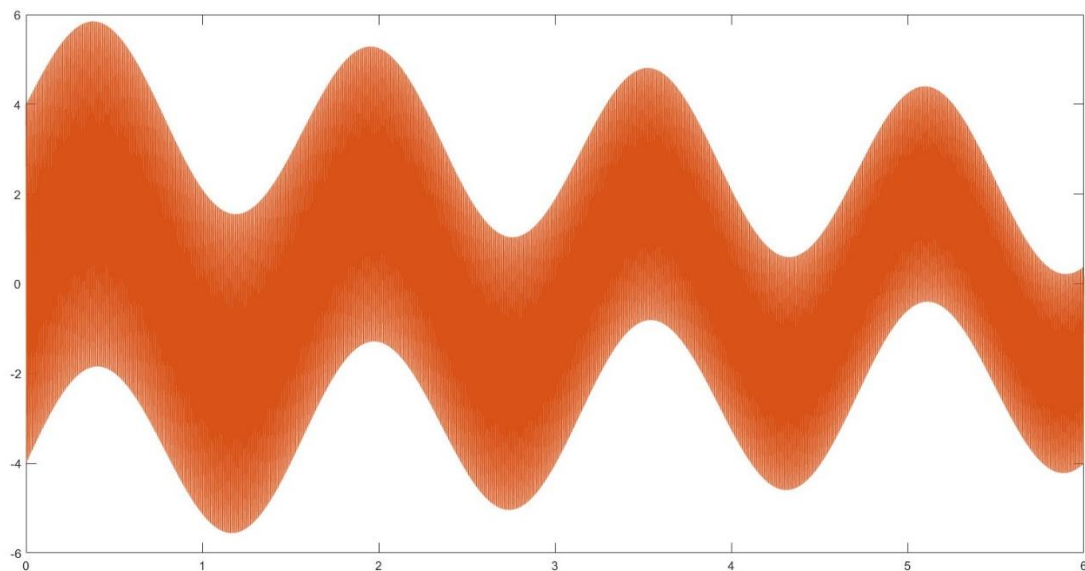


Γραφική παράσταση σφάλματος  $\hat{V}_c - V_c$  με χρόνο  $t$  (οριζόντιος άξονας  $t$  κατακόρυφος άξονας error)



Γραφική παράσταση σφάλματος  $\hat{V}_C - V_C$  με χρόνο  $t$  (οριζόντιος άξονας  $t$  κατακόρυφος άξονας error) zoom

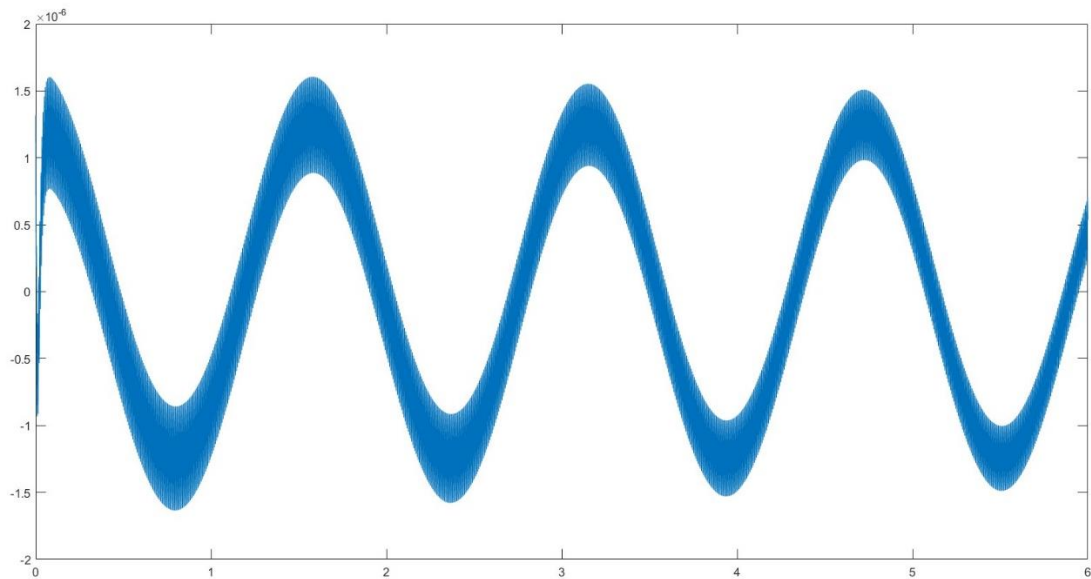
Παραπάνω βλέπουμε την γραφική του σφαλματος δηλαδή της διαφοράς  $\hat{V}_C - V_C$ . Στο μεγαλύτερο μέρος η διαφορά είναι της τάξης του  $10^{-8}$  εκτός από την αρχή όπου παρατηρείται το μεταβατικό φαινόμενο όπου και πάλι το σφάλμα είναι πολύ μικρό. Άρα λογικό και ότι οι τιμές στην προηγούμενη γραφική ( $\hat{V}_C - V_C$ ) είναι τόσο κοντινές ώστε είναι αδύνατο να τις ξεχωρίσουμε.



Γραφική παράσταση  $V_R, \hat{V}_R$  με χρόνο  $t$  (οριζόντιος άξονας  $t$ , κατακόρυφος  $V_R$  &  $\hat{V}_R$ )

Στο παραπάνω γράφημα φαίνεται σαν να υπάρχει μία μόνο γραφική παράσταση. Αυτό συμβαίνει διότι η προσέγγιση είναι πάρα πολύ κοντά με τις πραγματικές τιμές και οι δυο γραφικές ταυτίζονται. Αυτό γίνεται αντιληπτό και από την γραφική του σφάλματος που ακολουθεί (σφάλματα της τάξεως του  $10^{-6}$  και μικρότερο).





Γραφική παράσταση σφάλματος  $\hat{V}_R - V_R$  με χρόνο  $t$  (οριζόντιος άξονας  $t$  κατακόρυφος άξονας error)

Παραπάνω βλέπουμε την γραφική του σφαλματος δηλαδή της διαφοράς  $\hat{V}_R - V_R$ . Η διαφορά είναι της τάξης του  $10^{-6}$  άρα λογικό και ότι οι τιμές στην προηγούμενη γραφική ( $\hat{V}_R - V_R$ ) είναι τόσο κοντινές ώστε είναι αδύνατο να τις ξεχωρίσουμε.

Οι εκτίμηση των παραμέτρων είναι οι εξής:

$$1/RC=0.2$$

$$1/LC=1000008,2 \text{ (από το } V_C)$$

$$1/LC=1000009,8 \text{ (από το } V_R)$$

Τέλος παρατηρούμε ότι η μία τιμή που παίρνουμε από το  $V_C$  αποκλίνει από τις υπόλοιπες (0.002). Το σφάλμα φαίνεται να είναι λογικό καθώς αφορά συντελεστή όρου που προήλθε από δεύτερη παραγώγιση του  $U_2$  που είναι σταθερός αριθμός, άρα έχει μηδενική παράγωγο.

## B)

Αφού προστέθηκαν τα σφάλματα σε 3 χρονικές στιγμές οι πίνακες  $\Theta_0$  που προέκυψαν ήταν οι εξής :

Για το  $V_C$ :

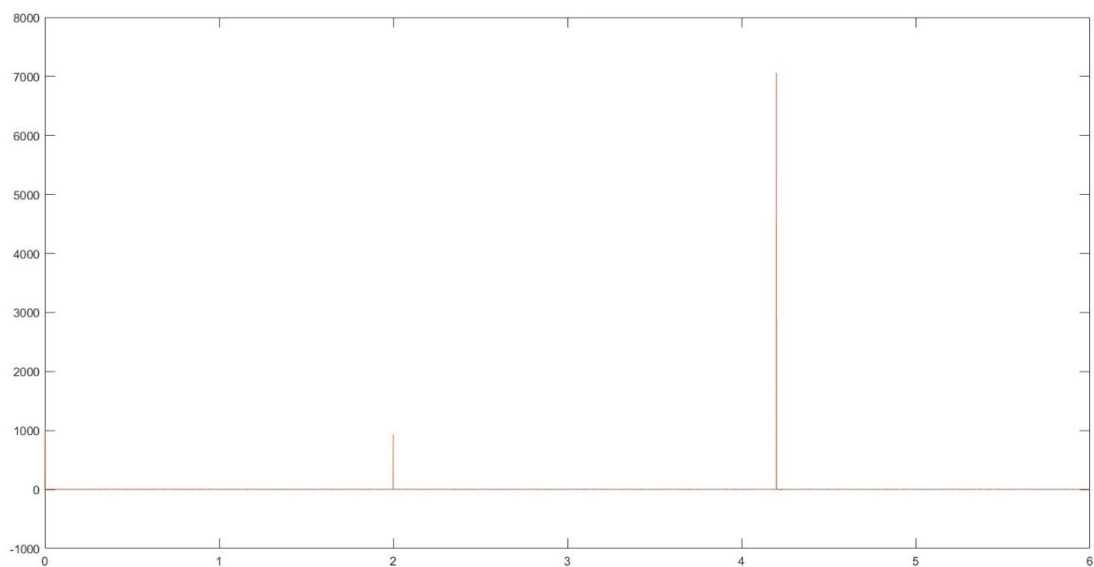
$$\theta^* = [134,78 \quad -21794,78 \quad 45,18 \quad 130,61 \quad 31894,54]$$

Για το  $V_R$ :

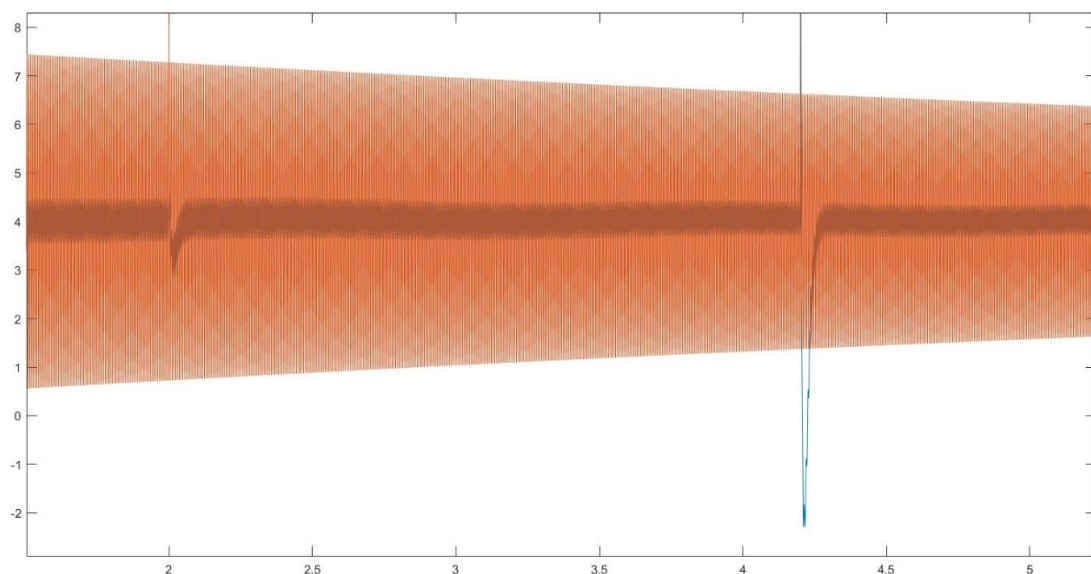
$$\theta^* = [120,11 \quad -23001,15 \quad 1,64 \quad 97,87 \quad 34741,13]$$

Από τους παραπάνω πίνακες δεν μπορούμε να βγάλουμε ακριβές συμπέρασμα για τις παραμέτρους του προβλήματος αφού συγκρίνοντας με τους πίνακες  $\Theta^*$  της θεωρητικής ανάλυσης του ερωτήματος Α προκύπτουν πολλές τιμές για κάθε παράμετρο οι οποίες απέχουν αρκετά μεταξύ τους. Οπότε παρατηρούμε πως με την ύπαρξη κάποιων ακραίων τιμών, ακόμα και λίγων η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων δεν καταλήγει σε σωστά αποτελέσματα. Άρα συμπεραίνουμε ότι για να πάρουμε σωστή λύση με την μέθοδο αυτή θα πρέπει να μην λάβουμε υπόψιν μας τέτοιες ακραίες τιμές.

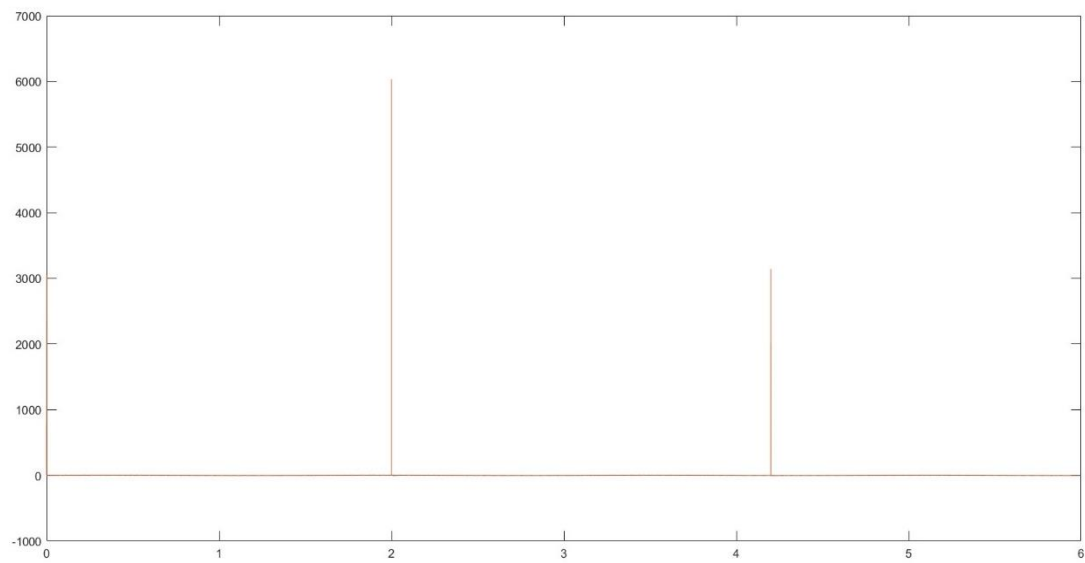
Για επιβεβαίωση των παραπάνω συμπερασμάτων παρακάτω παρατίθενται τα γραφήματα των  $V_R, \hat{V}_R, V_C, \hat{V}_C$  με τον χρόνο  $t$  καθώς και των διαφορών τους(σφάλμα).



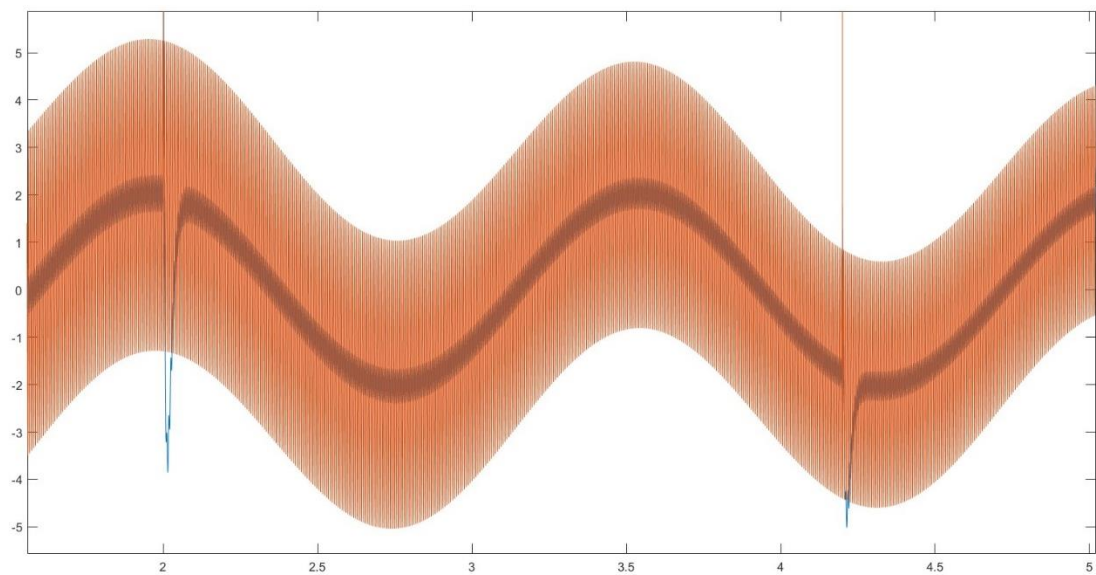
Γραφική παράσταση  $V_C, \hat{V}_C$  με χρόνο  $t$ (οριζόντιος άξονας  $t$ , κατακόρυφος  $V_C$  &  $\hat{V}_C$ )



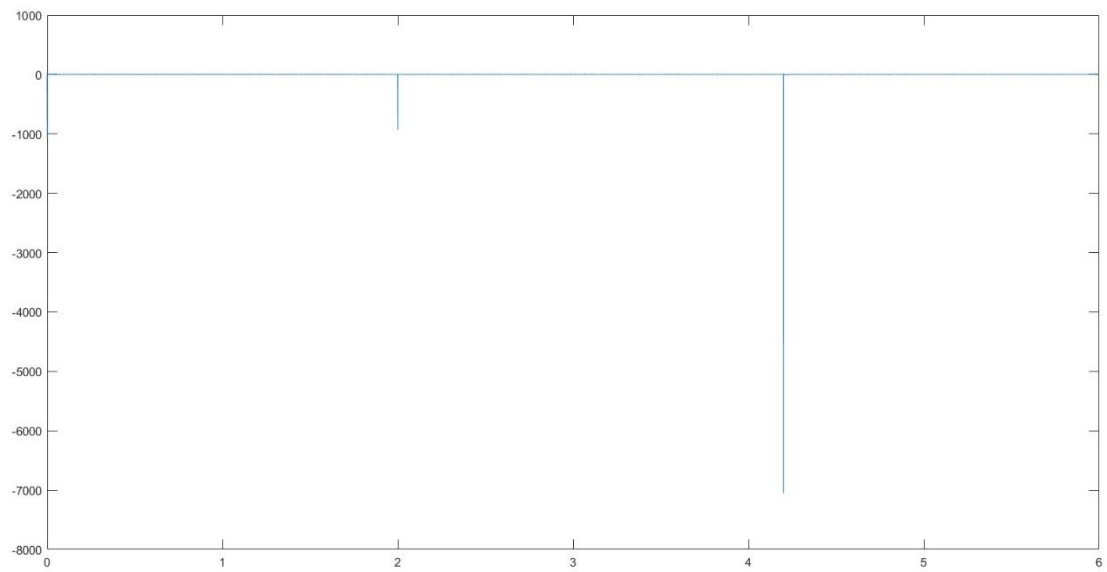
Γραφική παράσταση  $V_C, \hat{V}_C$  με χρόνο  $t$ (οριζόντιος άξονας  $t$ , κατακόρυφος  $V_C$  &  $\hat{V}_C$ ) zoom



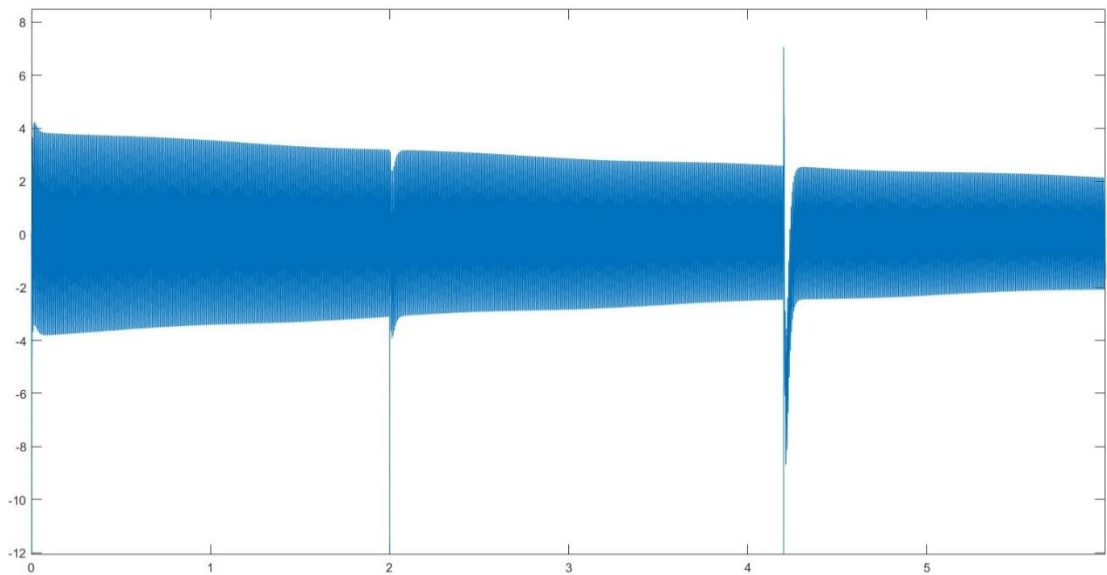
Γραφική παράσταση  $V_R$ ,  $\hat{V}_R$  με χρόνο  $t$ (οριζόντιος άξονας  $t$ ,κατακόρυφος  $V_R$  &  $\hat{V}_R$ )



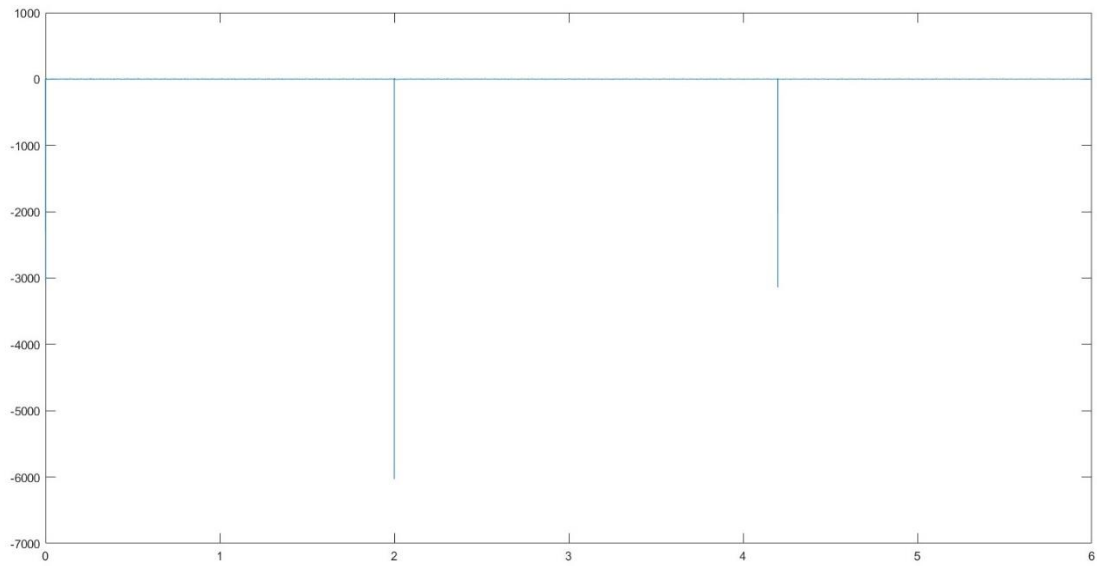
Γραφική παράσταση  $V_R$ ,  $\hat{V}_R$  με χρόνο  $t$ (οριζόντιος άξονας  $t$ ,κατακόρυφος  $V_R$  &  $\hat{V}_R$ ) zoom



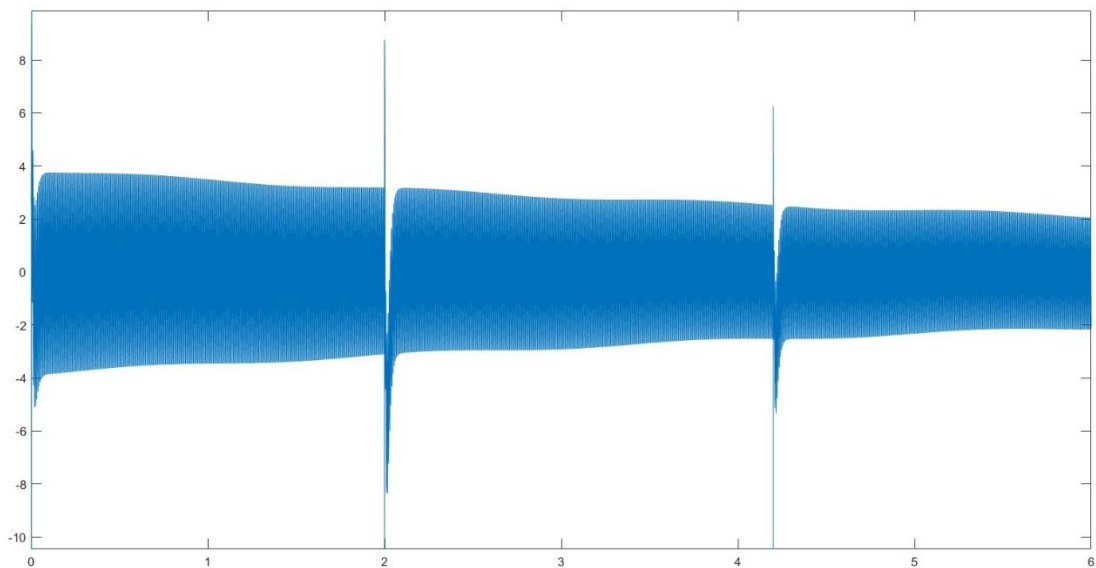
Γραφική παράσταση σφάλματος  $\hat{V}_C - V_C$  με χρόνο  $t$  (οριζόντιος άξονας  $t$  κατακόρυφος άξονας error)



Γραφική παράσταση σφάλματος  $\hat{V}_C - V_C$  με χρόνο  $t$  (οριζόντιος άξονας  $t$  κατακόρυφος άξονας error) zoom



Γραφική παράσταση σφάλματος  $\hat{V}_R - V_R$  με χρόνο  $t$  (οριζόντιος άξονας  $t$  κατακόρυφος άξονας error)



Γραφική παράσταση σφάλματος  $\hat{V}_R - V_R$  με χρόνο  $t$  (οριζόντιος άξονας  $t$  κατακόρυφος άξονας error) zoom

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι επιβεβαιώνεται το συμπέρασμα ότι δεν λειτουργεί η μέθοδος για ακραίες τιμές αφού το σφάλμα είναι υπολογίσιμο και οδηγεί σε τελείως λανθασμένες τιμές εξόδου.