期末复习笔记

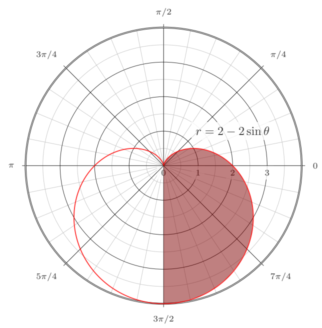
拓扑学摘要

作者：白衣卿相

组织：高树上的橙子呀

时间：January 28, 2020

版本：1.0



三更灯火五更鸡，正是男儿读书时。黑发不知勤学早，白首方悔读书迟。---颜真卿

目　　录

关于《拓扑学摘要》的一点说明

Topology 是数学中一个重要的、基础的分支，起初它是几何学的一个分支，后发展为研究连续性现象的数学分支。拓扑学发展到近代形成了互相联系的几个分支，即一般拓扑学、代数拓扑学、微分拓扑学与几何拓扑学等多个分支。

本笔记是关于点集拓扑学的一些重要定义定理的摘要，其中还包含一些重要例题定理的证明。

第 1 章 拓扑空间及其相关概念

拓扑空间是对欧氏空间的一种推广，本章介绍拓扑空间的概念，给出与拓扑空间相关的一些重要概念与性质。

1.1 拓扑、拓扑空间

定义 1.1. 拓扑空间

设 X 是非空集，$\mathscr{T}$ 是集合 X 的一个子集族，若满足：

1） $\varnothing, X \in \mathscr{T}$

2）若 $G_1, G_2 \in \mathscr{T}$, 则 $G_1 \cap G_2 \in \mathscr{T}$

3）若 $\{G_\lambda | \lambda \in \Lambda\} \subset \mathscr{T}(\Lambda \neq \varnothing)$，则 $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \in \mathscr{T}$

则称 $\mathscr{T}$ 是集合 X 上的一个拓扑或拓扑结构,$(X, \mathscr{T})$ 称为拓扑空间，X 称为拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 的基础集，$\mathscr{T}$ 的元素称为 $(X, \mathscr{T})$ 的个开集，X 的元素、子集分别称为 $(X, \mathscr{T})$ 的点，点集。

注意 集合 X 上的拓扑 $(X, \mathscr{T})$ 是集合 X 的一个子集族，对 $(X, \mathscr{T})$ 中有限个元素的交，任意个元素的并运算封闭。

例 1.1 设 X 是非空集，$\mathscr{T} = \{\varnothing, X\}$，则 $\mathscr{T}$ 是集合 X 上的拓扑，称为**平凡拓扑**，$(X, \mathscr{T})$ 称为**平凡拓扑空间**。

例 1.2 设 X 是非空集，$\mathscr{T} = \mathscr{H}(X)$(即 X 的所有子集组成的集族)，则称 $\mathscr{T}$ 是集合 X 上的**离散拓扑**，$(X, \mathscr{H}(X))$ 称为**离散拓扑空间**。

定义 1.2

设 $\mathscr{T}_1$，$\mathscr{T}_2$ 是集合 X 上的两个拓扑，若 $\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}_2$，则称拓扑 $\mathscr{T}_1$ 小于 (或粗于)$\mathscr{T}_2$，并称拓扑 $\mathscr{T}_2$ 大于 (或细于)$\mathscr{T}_1$。

注意 平凡拓扑是最粗拓扑，离散拓扑是最细拓扑。

为方便记忆，可以将“粗于”理解为“粗糙”,“细于”理解为“细腻”。

命题 1.1

已知 $(X, \mathscr{T})$ 是拓扑空间，D 是 X 的非空子集，记 $\mathscr{T}|D = \{G \cap D | G \in \mathscr{T}\}$，试证 $\mathscr{T}|D$ 是集合 D 上的拓扑。

证明 由于 $(X, \mathscr{T})$ 是拓扑空间, 显然有 $\varnothing, X \in \mathscr{T}$

故 $\varnothing = \varnothing \cap D \in \mathscr{T}|D$

结合 D 是 X 的非空子集可知 $D = X \cap D \in \mathscr{T}|D$

又对于 $G_1, G_2 \in \mathscr{T}$ 有 $G_1 \cap G_2 \in \mathscr{T}$, 从而 $(G_1 \cap G_2) \cap D \in \mathscr{T}|D$

则对 $G_1 \cap D, G_2 \cap D \in \mathscr{T}|D$ 有 $(G_1 \cap D) \cap (G_2 \cap D) = (G_1 \cap G_2) \cap D \in \mathscr{T}|D$

同理可证，对于 $\{G_\lambda \cap D \,|\, \lambda \in \Lambda\} \subset \mathscr{T}|D\,(\Lambda \neq \varnothing)$ 有 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}(G_\lambda \cap D) \in \mathscr{T}|D$

由此可知 $\mathscr{T}|D$ 是集合 D 上的拓扑，证毕！

1.2 拓扑的基与子基

定义 1.3

设 $(X,\mathscr{T})$ 是拓扑空间，$\mathscr{B} \subset \mathscr{T}$，若 $\mathscr{T}$ 的元素都可以表示为 $\mathscr{B}$ 中某些元素的并，即对于 $G \in \mathscr{T}$，$\exists \mathscr{B}_G \subset \mathscr{B}$ 使得 $G = \bigcup\limits_{B\in\mathscr{B}_G} B$，则称 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{T}$（或为 $(X,\mathscr{T})$）的拓扑（基），$\mathscr{B}$ 中的元素称为基开集。♣

定理 1.1

设 $(X,\mathscr{T})$ 为拓扑空间，$\mathscr{B} \subset \mathscr{T}$，则 $\mathscr{B}$ 是拓扑 $\mathscr{T}$ 的基的充要条件是 $\forall G \in \mathscr{T}$，$\forall X \in G$，$\exists \mathscr{B}_x \in \mathscr{B}$，使得 $x \in \mathscr{B}_x \subset G$。♡

证明 $\Rightarrow$ 必要性

$\forall G \in \mathscr{T}$，由于 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{T}$ 的基

故 $G = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{B}_\lambda$，其中 $\{B_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda\} \subset B$

于是 $\forall x \in G$，$\exists \lambda \in \Lambda$ 满足 $x \in \mathscr{B}_x \subset G$

$\Rightarrow$ 充分性

要证 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{T}$ 的基，只需证 $\forall G \in \mathscr{T}$，$\exists \mathscr{B}_G \subset \mathscr{B}$ 满足 $G = \bigcup\limits_{B\in\mathscr{B}_G} \mathrm{B}$

事实上，$G = \bigcup\limits_{x\in G}\{x\}$，又 $\exists B_x \subset \mathscr{B}$ 且 $x \in \mathscr{B}_x \subset G$

故 $\{x\} \subset B_x \subset G$

于是 $G = \bigcup\limits_{x\in G}\{x\} \subset \bigcup\limits_{x\in G} B_x \subset \bigcup\limits_{x\in G} G = G$ 有 $G = \bigcup\limits_{x\in G} B_x$

记 $\{B_x \,|\, x \in G\} = \mathscr{B}_G \subset \mathscr{B}$，则有 $G = \bigcup\limits_{B\in\mathscr{B}_G} \mathrm{B}$，证毕！

例 1.3 设 X 是非空集，记 $\mathscr{B} = \{\{x\} \,|\, x \in X\}$，则 $\mathscr{B}$ 是集合 X 上离散拓扑的基。

1.3 度量空间

定理 1.2

设 (X,ρ) 是度量空间，则集族 $\mathscr{B} = \{B(x,\varepsilon) \,|\, x \in X, \varepsilon > 0\}$ 是集合 X 上一个拓扑的基，称这个拓扑为由集合 X 上的度量 ρ 诱导的拓扑，也称为度量拓扑，记作 $\mathscr{T}_\rho$。♡

定义 1.4

设 (X,ρ) 是度量空间，$a \in X$，对于给定的实数 $\epsilon > 0$，称集合 $B_\rho(a,\varepsilon) = \{x \in X \,|\, \rho(a,x) < \varepsilon\}$ 为以 a 为中心，ϵ 为半径的球形邻域或开球，简称为点 a 的球形邻域或开球。♣

例 1.4 设 X 是非空集，定义映射如下：

$$\rho_0 : X \times X \to R,\ (x,y) \mapsto \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

易证 ρ_0 是 X 上的度量，称为 X 上的离散度量，称 (X,ρ_0) 为离散度量空间。

注意 在离散度量空间 (X,ρ_0) 中，对于 $a \in X$，a 的球形邻域为

$$B(a,\varepsilon) = \begin{cases} \{a\}, \varepsilon \leqslant 1 \\ X, \varepsilon > 1 \end{cases}$$

1.4 一些重要的拓扑概念

定义 1.5

设 $(X,\mathscr{T})$ 是拓扑空间，$a \in M \subset X$，若 $\exists G \in \mathscr{T}$ 满足 $a \in G \subset M$，则称集合 M 为点 a 的邻域，对于 $x \in X$，点 x 的所有领域构成的集族称为点 x 的邻域系，记作 $\mathscr{N}_x$。♣

注意 一点的邻域不一定是开集，但开集一定是它每一点的领域，并称开集为它的点的开邻域。

定理 1.3

$(X,\mathscr{T})$ 是拓扑空间，又设 $M \subset X$，则 M 是开集当且仅当 M 是它每一点的邻域，即 $G \in \mathscr{T} \Longleftrightarrow \forall x \in G, G \in \mathscr{N}_x$。♡

证明 $\Rightarrow$ 必要性

设 M 是开集，则 $M \subset X$ 且 $M \in \mathscr{T}$

故 $\forall x \in M \subset X$，$\exists G = M \in \mathscr{T}$ 使得 $x \in G \subset M$

即 M 是它每一点的邻域

$\Leftarrow$ 充分性

设 $M \subset X$ 是它每一点的邻域

即 $\forall x \in M$，$\exists G_x \in \mathscr{T}$ 满足 $x \in G_x \subset M$

有 $M = \bigcup\limits_{x \in M} \{x\} \subset \bigcup\limits_{x \in M} G_x \in \mathscr{T}$

即 M 是 $(X,\mathscr{T})$ 的开集，证毕！

定义 1.6

设 $(X,\mathscr{T})$ 是拓扑空间，$F \subset X$，若 $X - F \in \mathscr{T}$，则称 F 为 $(X,\mathscr{T})$ 的闭集。♣

结论 设 $(X,\mathscr{T})$ 是拓扑空间，则 $(X,\mathscr{T})$ 的闭集有如下性质：

1) $X,\varnothing$ 都是闭集

2) 有限个闭集的并是闭集

3) 任意个闭集的交是闭集

定义 1.7

设 $(X,\mathscr{T})$ 是拓扑空间，$A \subset X$

1) 设 $x \in X$，若对于点 x 的任意邻域 M 有 $M \cap A \neq \varnothing$，则称点 x 为集合 A 的附着点或闭包点。

2) 记 $\overline{A} = \left\{x \in X \,\middle|\, x\text{是}A\text{的附着点}\right\}$，则称 $\overline{A}$ 是集合 A 在 $(X,\mathscr{T})$ 中的闭包。♣

注意 $\overline{A}$ 是包含 A 的最小闭集，$\overline{A}$ 是所有包含 A 的闭包的交。

定理 1.4

设 $(X,\mathscr{T})$ 是拓扑空间，$A \subset X$，则 A 是 $(X,\mathscr{T})$ 的闭集当且仅当 $\overline{A} = A$

结论 设 $(X,\mathscr{T})$ 是拓扑空间，A、B 均为 X 的任意子集，则

1) $\overline{\varnothing} = \varnothing$，$\overline{X} = X$
2) $A \subset \overline{A}$
3) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$
4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

定义 1.8

设 $(X,\mathscr{T})$ 是拓扑空间，$A \subset X$

1) 设 $x \in X$，若对于点 x 的任意邻域 M 有 $M \cap (A - \{X\}) \neq \varnothing$，则称点 x 为集合 A 的聚点或极限点，也称为凝聚点。

2) 记 $A^d = \left\{x \in X \,\middle|\, x是A的聚点\right\}$，则称 A^d 是集合 A 在 $(X,\mathscr{T})$ 中的导集。

结论 设 $(X,\mathscr{T})$ 是拓扑空间，$A \subset X$，有

1) $\overline{A} = A \cup A^d$
2) A 是 $(X,\mathscr{T})$ 的闭集当且仅当 $A^d \subset A$
3) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$
4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

定义 1.9

设 $(X,\mathscr{T})$ 是拓扑空间，$A \subset X$，则

1) 设 $x \in X$，若 A 是点 x 的邻域，则称点 x 为集合 A 的内点。

2) 记 $A^\circ = \left\{x \in X \,\middle|\, x是A的内点\right\}$，则称 A° 是集合 A 的内部。

定理 1.5

设 $(X,\mathscr{T})$ 是拓扑空间，$A \subset X$，则

1) $A^\circ = \cup\{G \,|\, G \subset A, G \in \mathscr{T}\}$，即 A 的内部 A° 是包含在 A 中的最大开集。

2) A 是 $(X,\mathscr{T})$ 的开集当且仅当 $A = A^\circ$。

结论 设 $(X,\mathscr{T})$ 是拓扑空间，A、B 均为 X 的任意子集，则

1) $\varnothing^\circ = \varnothing$，$X^\circ = X$
2) $A^\circ \subset A$
3) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$
4) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$

定义 1.10

设 $(X,\mathscr{T})$ 是拓扑空间，$A\subset X$，

1) 设 $x\in X$，若对于点 x 的任意邻域 M 有 $M\cap A\neq\varnothing$，$M\cap A^c\neq\varnothing$，则称点 x 是集合 A 的边界点。

2) 记 $\partial A=\left\{x\in X\,\middle|\,x\text{是}A\text{的边界点}\right\}$，则称 ∂A 是集合 A 的边界。

♣

结论 设 $(X,\mathscr{T})$ 是拓扑空间，$A\subset X$，则

1) $\partial A=\overline{A}\cap\overline{A^c}=\partial(A^c)=\overline{A}-A^\circ$

2) $\partial A\cap A^\circ=\varnothing$

3) $\overline{A}=\partial A\cup A^\circ=\partial A\cup A$

4) $A^\circ=A-\partial A=\overline{A}-\partial A$

5) $X=A^\circ\cup\partial A\cup(A^c)^\circ$

定义 1.11

设 $<\xi_i>_{i\in N^+}$ 是拓扑空间 X 中的一个序列，$a\in X$，若对于点 a 的任意邻域 M，$\exists i_0\in N^+$，使得当 $i\in N^+$，$i>i_0$ 时，有 $\xi_i\in M$，则称序列 $<\xi_i>_{i\in N^+}$ 收敛于 a，并称点 a 为序列 $<\xi_i>_{i\in N^+}$ 的极限。

至少有一个极限的序列，称为收敛序列。

♣

注意 平凡空间中的任意序列都收敛，并且收敛于空间中的任一点。

拓扑空间中的收敛序列极限一般不唯一。

练习 1.1 试证度量空间中的收敛序列极限必唯一。

证明 (反证) 设 $<\xi_i>_{i\in N^+}$ 是度量空间 (X,ρ) 中的收敛序列

有 $\lim\limits_{i\to+\infty}\xi_i=a$，$\lim\limits_{i\to+\infty}\xi_i=b$ 其中 $a\neq b$

取 $\varepsilon=\frac{1}{2}min\rho(x,y)$，其中 $x\neq y$ 且 $x,y\in X$

则 $\exists N_1\in N^+$，$\forall i>N_1$ 有 $<\xi_i>\in B(a,\varepsilon)$，$\exists N_2\in N^+$，$\forall i>N_2$ 有 $<\xi_i>\in B(b,\varepsilon)$

取 $N=max\{N_1,N_2\}$

于是 $\exists N\in N^+$，$\forall i>N$ 有 $<\xi_i>\in B(a,\varepsilon)\cap B(b,\varepsilon)$

而 $B(a,\varepsilon)\cap B(b,\varepsilon)=\varnothing$ 矛盾！

从而假设不成立，证毕！

第 2 章 连续映射，构造新空间

2.1 连续映射，同胚与拓扑性质

定义 2.1

设 $(X,\mathscr{T})$，$(Y,\mathscr{U})$ 是两个拓扑空间，$f: X \longrightarrow Y$，当映射 $f: X \longrightarrow Y$ 联系到拓扑空间时也记作

$$f:(X,\mathscr{T}) \longrightarrow (Y,\mathscr{U})$$

称 f 为从 $(X,\mathscr{T})$ 到 $(Y,\mathscr{U})$ 的映射。

设 $a \in X$，若对于点 $f(a)$ 在 $(Y,\mathscr{U})$ 中的任意邻域 W，存在点 a 在 $(X,\mathscr{T})$ 中的邻域 M，使得 $f(M) \subset W$，则称 f 在点 a 连续。若映射 f 在 X 的每一点都连续，则称 f 为从设 $(X,\mathscr{T})$ 到 $(Y,\mathscr{U})$ 的连续映射，简称映射。

定理 2.1

设映射 $f: X \longrightarrow Y$，$a \in X$，则 f 在点 a 连续的充分必要条件是对于点 $f(a)$ 在 $(Y,\mathscr{U})$ 中的任意邻域 W，$f^{-1}(W)$ 是点 a 在 $(X,\mathscr{T})$ 中的邻域。

定理 2.2

设 $(X,\mathscr{T})$，$(Y,\mathscr{U})$ 是两个拓扑空间，$f: X \longrightarrow Y$，则下列定理等价

1) $f:(X,\mathscr{T}) \longrightarrow (Y,\mathscr{U})$ 是连续映射
2) 对于任意 $k \in \mathscr{U}$，$f^{-1}(K) \in \mathscr{T}$
3) 对于 $(Y,\mathscr{U})$ 的任意闭集 H，$f^{-1}(H)$ 是 $(X,\mathscr{T})$ 的闭集
4) 对于任意 $B \in \mathscr{B}$，$f^{-1}(B) \in \mathscr{T}$，其中 $\mathscr{B}$ 是拓扑 $\mathscr{U}$ 的基
5) 对于任意 $A \subset X$，$f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$
6) 对于任意 $B \subset Y$，$\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}\left(\overline{B}\right)$

结论 1) 常值映射是连续映射
2) 从任意空间到平凡空间的映射是连续映射
3) 从离散空间到任意空间的映射是连续映射
4) 任意拓扑空间上的恒同映射是连续映射

定义 2.2

设映射 $f:(X,\mathscr{T}) \longrightarrow (Y,\mathscr{U})$ 是一一映射，且 f，f^{-1} 均为连续映射，则称 f 为同胚映射。若存在同胚映射 $f:(X,\mathscr{T}) \longrightarrow (Y,\mathscr{U})$，则称 $(X,\mathscr{T})$ 与 $(Y,\mathscr{U})$ 同胚，记作 $(X,\mathscr{T}) \cong (Y,\mathscr{U})$。

结论 设 X，Y，Z 都是拓扑空间，则

1) $X \cong X$
2) 若 $X \cong Y$ 则 $Y \cong X$
3) 若 $X \cong Y, Y \cong Z$ 则 $X \cong Z$
4) 恒同映射 $1_X : X \longrightarrow X$ 是同胚映射
5) 若 $f : X \longrightarrow Y$ 是同胚映射，则 $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ 也是同胚映射
6) 若 $f : X \longrightarrow Y$，$g : Y \longrightarrow Z$ 都是同胚映射，则 $g \circ f : X \longrightarrow Z$ 也是同胚映射

2.2 子空间

定义 2.3

设 $(X, \mathscr{T})$ 是拓扑空间，D 是 X 的非空子集，记 $\mathscr{T}|D = \{G \cap D | G \in \mathscr{T}\}$，则 $\mathscr{T}|D$ 是 D 上的拓扑，称为 $\mathscr{T}$ 在 D 上的子空间拓扑或相对拓扑，拓扑空间 $(D, \mathscr{T}|D)$ 称为拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 的子空间，子空间 $(D, \mathscr{T}|D)$ 的开集（或闭集）称为相对开集（或闭集）。

♣

注意 若 D 是 $(X, \mathscr{T})$ 的非空开（闭）集，则称 $(D, \mathscr{T}|D)$ 为 $(X, \mathscr{T})$ 的开（闭）子空间。

定理 2.3

设 $(X, \mathscr{T})$ 是拓扑空间，$(Y, \mathscr{T}|Y)$ 是其子空间，则

1) 若 $\{B_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ 是拓扑 $\mathscr{T}$ 的基（或子基），则 $\{Y \cap B_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ 是拓扑 $\mathscr{T}|Y$ 的基（或子基）。

2) 设 $H \subset Y$，则 H 是子空间 $(Y, \mathscr{T}|Y)$ 的闭集当且仅当存在 $(X, \mathscr{T})$ 的闭集 F 使得 $H = F \cap Y$

证明 由闭集的定义可知,H 是 $(Y, \mathscr{T}|Y)$ 的闭集当且仅当 $Y - H$ 是 $(Y, \mathscr{T}|Y)$ 的开集
而这等价于 $\exists G \in \mathscr{T}$ 满足 $Y - H = Y \cap G$
即有 $H = Y - (Y \cap G) = Y \cap (Y \cap G)^c = Y \cap (Y^c \cup G^c) = Y \cap G^c = Y \cap (X - G)$
于是，取 $F = X - G$ 即有命题成立！

3) 设 $a \in M \subset Y$，则 M 是点 a 在子空间 $(Y, \mathscr{T}|Y)$ 中的邻域当且仅当存在点 a 在 $(X, \mathscr{T})$ 中的邻域 W，使得 $M = W \cap Y$

♡

2.3 积空间

2.4 商空间

第 3 章 可数性，可分性

3.1 第一可数性，第二可数性

定义 3.1

设 $(X, \mathscr{T})$ 是拓扑空间，$x \in X$，N_x 是点 x 的邻域系，$\mathscr{B}_x \subset N_x$。若 $\forall M \in N_x$，$\exists B \in \mathscr{B}_x$ 满足 $B \subset M$，则称 $\mathscr{B}_x$ 是点 x 的邻域基或局部基。

若对于任意 $x \in X$，存在点 x 的一个可数邻域基，即存在点 x 的可数个邻域组成的邻域基，则称 $(X, \mathscr{T})$ 具有第一可数性，也称 $(X, \mathscr{T})$ 是第一可数空间。 ♣

定义 3.2

设拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 具有一个可数基，即存在一个由可数个开集组成的基，则称 $(X, \mathscr{T})$ 具有第二可数性，也称 $(X, \mathscr{T})$ 是第二可数空间。 ♣

- 平凡拓扑空间、离散拓扑空间、度量空间都是第一可数空间。
- 拓扑空间的第一可数性、第二可数性都是拓扑性质。

定理 3.1

第二可数空间是第一可数空间。 ♡

证明 设 $(X, \mathscr{T})$ 是第二可数空间，则 $\mathscr{T}$ 有一个可数基 $\mathscr{B}$

$\forall x \in X$，记 $\mathscr{B}_x = \{B \subset \mathscr{B} | x \in B\}$，易知 $\mathscr{B}_x$ 是点 x 的邻域基

又 $\mathscr{B}$ 是可数族

故 $\mathscr{B}$ 的子集 $\mathscr{B}_x$ 亦为可数族

从而 $\mathscr{B}_x$ 是点 x 的可数邻域基

于是 $(X, \mathscr{T})$ 是第一可数空间，即第二可数空间是第一可数空间。

例题 3.1 设 X 是第一可数空间且 X 是可数集，证明：X 是第二可数空间。

3.2 可分空间，$Lindelof$ 空间

定义 3.3

设 $(X, \mathscr{T})$ 是拓扑空间，$D \subset X$，若 X 的每一个点都是 D 的附着点，即 $\overline{D} = X$，则称 D 是拓扑空间 X 的稠密子集。

若拓扑空间 X 有一个可数稠密子集，则称 X 具有可分性，也称 X 是可分空间。 ♣

- 实数空间、第二可数空间都是可分空间。
- 基础集为不可数集的离散空间不是可分空间。
- 可分的度量空间是第二可数空间。

- n 维欧式空间是可分空间，从而是第二可数空间也是第一可数空间。

定义 3.4

设 $(X, \mathscr{T})$ 是拓扑空间，若集合 X 的每一个开覆盖都有一个可数子覆盖，则称 $(X, \mathscr{T})$ 为 $Lindelof$ 空间，也称 $(X, \mathscr{T})$ 具有 $Lindelof$ 性质。

- 第二可数空间是 $Lindelof$ 空间。
- $Lindelof$ 空间是第二可数空间。

结论 拓扑空间的 $Lindelof$ 性质是拓扑性质。

3.3 T_0，T_1 与 T_2 分离性

定义 3.5

设 X 是拓扑空间，

- 若对于任意 $x, y \in X$，$x \neq y$，存在点 x 的邻域 M_x 使得 $y \notin M_x$，或存在点 y 的邻域 M_y 使得 $x \notin M_y$，则称拓扑空间 X 满足 T_0 分离公理。
- 若对于任意 $x, y \in X$，$x \neq y$，存在点 x 的邻域 M_x 与点 y 的邻域 M_y 使得 $y \notin M_x$ 且 $x \notin M_y$，则称拓扑空间 X 满足 T_1 分离公理。
- 若对于任意 $x, y \in X$，$x \neq y$，存在点 x 的邻域 M_x 与点 y 的邻域 M_y 使得 $M_x \cap M_y = \varnothing$，则称拓扑空间 X 满足 T_2 分离公理。

注意 满足 T_i 分离公理的拓扑空间称为 T_i 空间，也称拓扑空间具有 T_i 分离性，其中 $i = 0, 1, 2$，T_2 空间又被称为 $Hausdorff$ 空间。

T_2 空间是 T_1 空间，T_1 空间是 T_0 空间。

例题 3.2 度量空间是 T_2 空间，特别地，n 维欧氏空间是 T_2 空间。

证明 设 (X, ρ) 是度量空间

对于 $x, y \in X$，$x \neq y$，记 $\rho(x, y) = \varepsilon > 0$

则 $B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap B\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varnothing$

故 (X, ρ) 是 T_2 空间

定理 3.2

设 X 是拓扑空间，则 X 是 T_0 空间当且仅当对任意 $x, y \in X$，$x \neq y$ 有 $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$

- 拓扑空间是 T_1 空间的充分必要条件是它的单点集是闭集。
- 拓扑空间的 T_i 分离性（$i = 0, 1, 2$）是遗传性质、拓扑性质、可积性质。

第 4 章 紧致性，连通性

4.1 紧致性，* 单点紧致化

定义 4.1

设 X 是拓扑空间，若 X 的任意开覆盖都有有限子覆盖，则称 X 为紧致空间。又设 $A \subset X$，若 A 作为拓扑空间 X 的子空间是紧致空间，则称 A 为 X 的紧致子集。

定理 4.1

设 $(X, \mathscr{T})$ 是拓扑空间，$\varnothing \neq A \subset X$，则 A 是 $(X, \mathscr{T})$ 的紧致子集当且仅当 A 在 $(X, \mathscr{T})$ 中的任意开覆盖都有有限子覆盖。

- 实数空间不是紧致空间。
- 实数空间的子集 $[0, 1]$ 是紧致空间。
- T_0 空间的紧致子集是闭集。

定理 4.2

设 X，Y 都是拓扑空间，$f: X \longrightarrow Y$ 是连续映射。若 A 是拓扑空间 X 的紧致子集，则 $f(A)$ 是拓扑空间 Y 的紧致子集。

命题 4.1

紧致空间的（非空）闭集是紧致子集。

证明 设 X 是紧致空间，F 是 X 的非空闭集

则对于 F 在拓扑空间 X 中的任意开覆盖 Ω，$\Omega \cup \{X - F\}$ 是 X 的开覆盖

又 X 是紧致空间

故有有限子覆盖，设为 $\{G_i | i = 1, 2, , m\} \cup \{X - F\}$

从而 $\{G_i | i = 1, 2, , m\}$ 是 F 在拓扑空间 X 中任意开覆盖 Ω 的有限子覆盖

于是 F 是拓扑空间 X 的紧致子集

4.2 紧致度量空间

定义 4.2

设 (X, ρ) 是度量空间，$A \subset X$，若存在正数 l，使得 $\forall x, y \in A$，有 $\rho(x, y) < l$，则称 A 为 (X, ρ) 的有界集。特别地，若 X 是有界的，则称度量空间 (X, ρ) 为有界的。

- 度量空间的紧致子集是有界闭集。
- n 维欧氏空间的非空子集是紧致子集当且仅当它是有界闭集。

4.3 * 几种紧致性与其间关系

4.4 连通性、连通分支

定义 4.3

设 $(X,\mathscr{T})$ 是拓扑空间

- 若存在两个非空开集 G 和 K 使得 $G\cup K=X$，$G\cap K=\varnothing$，则称 $(X,\mathscr{T})$ 为非连通空间，否则称为联通空间。
- 设 $A\subset X$，若 $(A,\mathscr{T}|A)$ 是连通空间，则称 A 为 $(X,\mathscr{T})$ 的连通子集。

♣

定理 4.3

设 X 是拓扑空间，则 X 是连通空间当且仅当 X 不能表示为两个非空隔离子集的并。

♡

定理 4.4

设 X 是拓扑空间，则下列条件等价

- X 是连通空间。
- X 中不存在既开又闭的非空真子集，或者说 X 中恰好有两个开闭集 X 与 $\varnothing$。
- 若 $f: X\longrightarrow S^{\circ}$ 是连续映射，则 f 为常值映射。其中 $S^{\circ}=\{-1,1\}$ 为实数空间 R 的子空间，称为 0 维球面，且为离散空间。

♡

定理 4.5

设 $f:(X,\mathscr{T})\longrightarrow(Y,\mathscr{U})$ 是连续映射，$A\subset X$，若 A 是 $(X,\mathscr{T})$ 的连通子集，则 $f(A)$ 是 $(Y,\mathscr{U})$ 的连通子集。

♡

注意

1) 平凡空间是连通空间。
2) Sierpinski 空间是连通空间。
3) 至少包含两个点的离散拓扑空间是非连通空间。
4) 拓扑空间的连通性是拓扑性质、可积性质，不是遗传性质。
5) n 维欧氏空间是连通空间。

定理 4.6

设 X 是拓扑空间，则

1) 若 A 是拓扑空间 X 的连通子集，则存在 X 的联通分支 C 满足 $A\subset C$。
2) 拓扑空间 X 的任意两个不同的连通分支不相交。
3) 拓扑空间 X 是若干个连通分支的并。

♡

定义 4.4

设 X 为拓扑空间，$C \subset X$，若 C 满足：

1) C 是拓扑空间 X 的连通子集

2) C 不是拓扑空间 X 的任意连通子集的真子集

则称 C 为拓扑空间 X 的一个连通分支或极大连通子集。

定理 4.7

拓扑空间的每个连通分支都是闭集。

4.5 道路连通性

定义 4.5

设 X 为拓扑空间，$I = [0,1]$ 为实数 R 的子空间，若 $\omega: I \longrightarrow X$ 是连续映射，则称 ω 为 X 中的一条道路或路径，$\omega(0)$ 与 $\omega(1)$ 分别称为道路 ω 的起点与终点，也称为连接 $\omega(0)$ 与 $\omega(0)$ 的一条道路，或称为从 $\omega(0)$ 到 $\omega(1)$ 的一条道路。

定义 4.6

设 X 为拓扑空间，若 $\forall x, y \in X$，存在 X 中从 x 到 y 的一条道路，则称 X 为道路连通空间。又设 $A \subset X$，若 A 作为拓扑空间的子空间是道路连通空间，则称 A 为 X 的道路连通子集。

- 平凡空间是道路连通空间。
- n 维欧氏空间是道路连通空间。

  证明 对于 n 维欧氏空间，任取 $x, y \in R^n$

  定义映射 $\omega: I \longrightarrow X$，对于 $t \in I$ 有 $\omega(t) = (1-t)x + ty$

  则 ω 为连续映射，即 ω 是 R^n 中连接 x 与 y 的一条道路

  故 R^n 是道路连通空间，证毕！
- 道路连通空间是连通空间。
- 拓扑空间的道路连通性是拓扑性质、可积性质。

定理 4.8

设 $f: X \longrightarrow Y$ 是连续映射，又设 A 是拓扑空间 X 的道路连通子集，则 $f(A)$ 是拓扑空间 Y 的道路连通子集。