



CM1: Actuarial Mathematics

精算后花园 IFoA 系列课程配套讲义

作者: Jackie

组织: 微信公众号: 精算后花园

时间: November 16, 2019

版本: 0.01



Actuary: [n.] A person who wishes everyone to be dead on time.

目 录



1 拓展阅读：如何有效记忆寿险和年金符号	1	1.2 EPV 符号的中心部分	2
1.1 EPV 符号的一般化结构 . . .	2	1.3 EPV 符号的 I 号位	3
		1.4 EPV 符号的 III 号位：实体 .	3

第1章 拓展阅读：如何有效记忆寿险和年金符号

内容提要

- 符号中心部分的字母：寿险还是年金。
- 符号 III 号位的实体：保险金给付（或给付结束）的时点。
- 符号中心部分的上标：保险金的给付方式。
- 符号 I、II、IV 号位：保险金给付是否延期等其他信息。

金融数学和寿险精算是符号逻辑的学科，符号众多，容易混淆。其中，最难记忆的是寿险和年金的期望现值（Expected Present Value, EPV）符号。本文将通过对 EPV 符号不同角标位置的标记的讲解，帮助读者更有效地记忆这些符号。

1.0.1 寿险和年金的分类

首先我们对寿险和年金进行分类，以便于下文对符号的讨论。

在金融数学中，我们只讨论确定性年金，它仅和保单期限（duration status）有关。在寿险精算中，我们讨论的年金和寿险还与个体的生存和死亡概率（life status）相关，可以分成单生命（single life）和双生命两大类。

我们先讨论单生命的寿险和年金。根据保险责任分类，单生命的寿险分为终身寿险（Whole life assurance）、定期寿险（Term assurance）、生存保险（Pure endowment）、生死两全保险（Endowment assurance）四类，每种寿险都有延期（Deferred）的形式；年金分为终身生存年金（Whole life annuity）、定期生存年金（Temporary annuity）、最低保证生存年金（Guaranteed annuity），每种年金也都有延期的形式。

在各类型下，根据给付时点，寿险可以进一步分为死亡年度末给付（payable at the end of the year of death）和死亡时立即给付（payable on the policyholder's death）；年金可进一步分为期初给付（payable in advance）、期末给付（payable in arrear）和连续给付（payable continuously）。

拓展至双生命的情况。双生命的寿险和年金可以分成四类：联合寿险（Joint life assurance）、联合年金（Joint life annuity）、最后生存人寿险（Last survivor assurance）、最后生存人年金（Last survivor annuity）。

进一步考虑个体 (x) 和个体 (y) 死亡的先后顺序（即：带顺序的双生命寿险和年金），那么还会出现两种情况：或有寿险（contingent assurance）和继承年金（reversionary annuity）。我们也可以在双生命寿险和年金上加上期限（duration status），这就是带期限的双生命寿险和年金。

1.1 EPV 符号的一般化结构

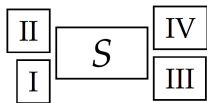


图 1.1: 寿险年金 EPV 符号的一般化结构

图 1.1 表示寿险年金 EPV 符号的一般化结构。主体部分 S 和 I、II、III、IV 号位置的符号使用均有严格的规约，本文主要讲解主体部分 S 和 I、III 号位置的符号含义。

1.2 EPV 符号的中心部分

1.2.1 中心部分的字母

符号的中心部分（图中记为 S ）通常是一个字母，表示该符号为寿险还是年金。具体地：

- 符号 A ，表示**寿险**（Assurance）的 EPV。寿险即和人的寿命关联的保险，是由保险公司在特定的生死事件发生时进行单次给付的保险。
- 符号 a ，表示**年金**（Annuity）的 EPV。年金即年金保险，是由保险公司持续给付到特定的生死事件发生时为止的保险。
- 符号 s ，表示年金的积累值，并不常用。

符号的中心部分也可以由两个字母组成，通常用括号括起来，如 (IA) 表示保险金在死亡年度末给付的递增寿险， $(D\bar{A})$ 表示保险金在死亡时立即给付的递减寿险。

1.2.2 字母上方的横杠或两点

中心部分的字母上方还会加横杠（如： \bar{A} ，读作 A-bar）或两点（如： \ddot{a} ，读作 a-due），表示该寿险或年金的保险金 (benefit) 的给付方式。具体地：

上标有横杠表示“连续”。 \bar{A} 为连续型保险， \bar{a} 为连续给付的年金。

- **连续型保险**，即保险金在死亡时立即给付（因此给付可能发生在任何时间点，是连续的）。例如死亡时立即给付的终身寿险 EPV： \bar{A}_x 。
- **连续给付的年金**，即年金的给付是每分每秒一直发生的（当然这只在理论研究时有意义）。例如连续给付的终身年金 EPV： \bar{a}_x 。

上标无横杠表示“离散”。 A 为离散型保险， a 和 \ddot{a} 为非连续给付的年金。

- **离散型保险**，即保险金在死亡年度末给付（因此给付只可能发生在各年年末，是离散的）。例如死亡年度末给付的终身寿险 EPV： A_x 。
- **非连续给付的年金**，分为期初（payable in advance）年金（ \ddot{a} ）和期末（payable in arrears）年金（ a ）。例如期初给付的终身年金 EPV： \ddot{a}_x ；期末给付的终身年金 EPV： a_x 。

1.3 EPV 符号的 I 号位

EPV 符号左下角的 I 号位可以用来表示延期的寿险或年金。延期 n 年的表示方法是在左下角加一个角标 $n|$ 。例如，延期 n 年的终身生存年金的 EPV： $n|a_x$ 。

在继承年金的 EPV 符号 $\bar{a}_{x|y}$ 中，竖杠同样表示延期。这里的 $x|$ 表示延期的时长为个体 (x) 的余命。也就是说，继承年金 $\bar{a}_{x|y}$ 表示在个体 (x) 死亡以后开始给付给个体 (y) 的终身生存年金。

1.4 EPV 符号的 III 号位：实体

符号右下方的 III 号位置是由数字和字母组成的实体 (status, entities)。实体是可以存在 (remain in existence, active) 或失效 (cease to exist, fail, elapse) 的客体。

实体失效等价于寿险和年金的概念中的特定生死事件的发生，

- 对于寿险，实体失效的时点即保险金给付时点；
- 对于年金，实体失效的时点即保险金给付结束时点。

符号右下角最常见的 x 和 \bar{n} 都属于实体。其中， x 为 life status， \bar{n} 为 duration status。

1.4.1 Life status x

x 为 life status，和当前 x 岁的个体相关。一般用 (x) 表示该个体。

- life status 存在：即 (x) 存活。
- life status 失效：即 (x) 死亡。

例题 1.1 解释符号 A_x 的含义。

解 终身寿险。右下角为 life status x ，所以该符号代表在 status x 失效的年度末（即死亡年度末）给付的一块钱的 EPV。

例题 1.2 解释符号 a_x 的含义。

解 终身生存年金。左下角没有延期的角标，所以是即期年金。

a_x 代表从 x 岁开始给付，每年年末给付一块钱，给付一直持续到 life status x 失效（即个体 (x) 死亡）时。

1.4.2 Duration status \bar{n}

\bar{n} 为 duration status，一般和保单期限相关。 \bar{n} 一定在 n 年后失效。

- duration status 存在：即从起始日（投保时）到评估日经过的时间长度未超过 n 年。
- duration status 失效：即从起始日（投保时）到评估日经过的时间长度超过 n 年。

例题 1.3 解释符号 $a_{\bar{n}}$ 的含义。

解 期末支付的确定性年金。保险金从当前一直给付到 duration status \bar{n} 失效时，故 $a_{\bar{n}}$ 表示从当前开始每年年末给付 1 块钱，一直给付到 n 时刻为止。

两个（或多个）实体可以组成一个新的实体 (combined status)，假定 u 和 v 是两个小实体，两者组成的大实体可以为 Joint life status uv 和 Last survivor status \overline{uv} 。

当 u 和 v 是具体的数字而不是抽象的符号时，为将两个数字间隔开以免混淆，中间会加冒号，比如 u 为 55， v 为 53，则 joint life status 会写作 55 : 53。冒号仅用来分隔两个实体，没有实际含义。

1.4.3 Joint life status uv

uv 为 joint life status，该实体在 u 和 v 中第一个小实体失效时失效。

例题 1.4 解释符号 $A_{x:\overline{n}|}$ 的含义。

解 生死两全保险。保险金给付发生在 status $x:\overline{n}|$ 失效时，即 life status x 和 duration status $\overline{n}|$ 任意一个先失效时，与两者失效的顺序无关。也就是说，个体 (x) 若在保险期限 n 年内死亡，可以在死亡时获得死亡给付；若个体 (x) 存活至 n 年，则在 n 时刻获得生存给付。生死两全保险相当于定期寿险和生存保险的组合。

例题 1.5 解释符号 $a_{x:\overline{n}|}$ 的含义。

解 定期生存年金。从 x 岁开始给付，每年年末给付一块钱，给付一直持续到 life status x 和 duration status $\overline{n}|$ 两者任意一个先失效时（即个体 (x) 若在 n 年内死亡，则给付在死亡时终止；个体 (x) 若存活至 n 年，则给付在 n 时刻终止）。

例题 1.6 解释符号 \bar{A}_{xy} 的含义。

解 联合寿险。 xy 为 joint life status，和当前 x 岁和 y 岁的两个个体相关。一般用 (x) 和 (y) 表示这两个个体。

- Joint life status 存在：即个体 (x) 和个体 (y) 均存活。
- Joint life status 失效：即个体 (x) 和个体 (y) 至少有一个死亡。

\bar{A}_{xy} 表示保额为 1，个体 (x) 和个体 (y) 中的第一个死亡时立即给付的联合寿险的现值。

例题 1.7 解释符号 \bar{a}_{xy} 的含义。

解 联合年金。 \bar{a}_{xy} ，表示 rate of payment 为 1，当前开始连续给付，到个体 (x) 和个体 (y) 中的第一个死亡时停止给付的联合年金的现值。

1.4.4 Joint life status uv 的上方有数字的情况

Joint life status uv 的上方可以附加数字，以限定大实体失效所需要满足的小实体失效顺序。更确切地说，该实体的失效依次取决于：

- 数字位于哪个小实体上：当且仅当数字下方的小实体失效时，大实体失效。
- 数字是 1 还是 2：“1”意为“first”，“2”意为“second”。数字为 1 表示大实体失效的前提条件是数字下方的小实体需先于另外一个小实体失效。数字为 2 表示大实体失效的前提条件是数字下方的小实体需次于另外一个小实体失效。

例题 1.8 解释符号 $A_{x:\overline{n}|}^1$ 的含义。

解 定期寿险。

- 数字放在 life status x 上：表示保险金给付仅发生在 life status x 失效时（即死亡时）
- 放在 life status x 上的数字为“1”：“1”是“first”的意思。表示发生保险金给付的条件必须是 life status x 比 duration status $\overline{n}|$ 先失效（即个体 (x) 在 n 年内死亡）。

例题 1.9 解释符号 $A_{x:\overline{n}|}^1$ 的含义。

解 生存保险。

- 数字放在 duration status $\overline{n}|$ 上：表示保险金给付仅发生在 duration status $\overline{n}|$ 失效时（即 $t = n$ 时刻）
- 放在 life status x 上的数字为“1”：表示发生保险金给付的条件必须是 duration status $\overline{n}|$ 比 life status x 先失效（即个体 (x) 至少要存活到 n 时刻）。

例题 1.10 解释符号 \bar{A}_{xy}^1 的含义。

解 或有寿险。符号上面的数字限定了保险金给付要求的个体 (x) 和个体 (y) 死亡的先后顺序。我们在读这个符号的时候，首先看数字的位置，再看数字是几（1 还是 2）。

- 数字放在 x 上：表示保险金给付仅发生在 (x) 死亡时。
- x 上的数字为“1”：“1”是“first”的意思。表示发生保险金给付的条件必须是 status x 比 status y 先失效（即个体 (x) 比个体 (y) 先死亡）。

\bar{A}_{xy}^1 表示保额为 1，个体 (x) 死亡时立即给付的寿险现值，条件是个体 (x) 比个体 (y) 先死。

例题 1.11 解释符号 \bar{A}_{xy}^1 的含义。

解 或有寿险。 \bar{A}_{xy}^1 表示保额为 1，个体 (y) 死亡时立即给付的寿险现值，条件是个体 (y) 比个体 (x) 先死。

例题 1.12 解释符号 \bar{A}_{xy}^2 的含义。

解 或有寿险。 \bar{A}_{xy}^2 表示保额为 1，个体 (x) 死亡时立即给付的寿险现值，条件是个体 (x) 比个体 (y) 后死。

例题 1.13 解释符号 \bar{A}_{xy}^2 的含义。

解 或有寿险。 \bar{A}_{xy}^2 表示保额为 1，个体 (y) 死亡时立即给付的寿险现值，条件是个体 (y) 比个体 (x) 后死。

1.4.5 Last survivor status \overline{uv}

\overline{uv} 为 last survivor status，该实体在 u 和 v 中第二个小实体失效时失效。

例题 1.14 解释符号 $a_{x:\overline{n}|}$ 的含义。

解 最低保证生存年金。给付一直持续到 life status x 和 duration status $\overline{n}|$ 均失效时，所以是最低保证给付 n 年且期末给付的终身生存年金。

例题 1.15 解释符号 $\bar{A}_{\overline{xy}}$ 的含义。

解 最后生存人寿险。 \overline{xy} 为 Last survivor status, 和当前 x 岁和 y 岁的两个个体相关。一般用 (x) 和 (y) 表示这两个个体。

- Last survivor status 存在：即个体 (x) 和个体 (y) 中至少有一个还存活。
- Last survivor status 失效：即个体 (x) 和个体 (y) 均死亡。

故 $\bar{A}_{\overline{xy}}$ 表示保额为 1, 个体 (x) 和个体 (y) 中的第二个死亡时立即给付的最后生存人寿险的现值。

1.4.6 Joint life status uv 的上方有数字, 且 u 也为复合实体的情况

这是更加复杂的嵌套情况, 常见于带期限的双生命寿险和年金符号。阅读符号时, 只需要把复合实体 u 作为一个整体来看待即可。我们来看几个带期限的联合寿险和年金的 EPV 符号:

$\bar{A}_{\overline{xy}:\overline{n}}^1$: 表示保额为 1, 个体 (x) 和个体 (y) 中的第一个死亡时立即给付的联合寿险的现值, 条件是第一个死亡发生在 n 年内。

$\bar{A}_{xy:\overline{n}}$: 表示保额为 1, 个体 (x) 和个体 (y) 中的第一个死亡时立即给付, 或者在在 n 时刻给付的联合寿险的现值, 给付发生于这两个事件中较早发生的那件。

$\bar{A}_{xy:\overline{n}}^1$: 表示保额为 1, 在 n 时刻给付的联合寿险的现值, 条件是个体 (x) 和个体 (y) 在 n 年内均未发生死亡。

$\bar{a}_{xy:\overline{n}}$: 表示 rate of payment 为 1, 当前开始连续给付, 到个体 (x) 和个体 (y) 中的第一个死亡时停止给付的联合年金的现值, 给付最长持续到 n 时刻。

类似地, 带期限的最后生存人年金和寿险的 EPV 符号有: $\bar{A}_{\overline{xy}:\overline{n}}$ 、 $\bar{A}_{\overline{xy}:\overline{n}}^1$ 、 $\bar{a}_{\overline{xy}:\overline{n}}$ 等, 符号的含义就留给大家自己理解。