Fluid Mechanics

Notes

作者：李晨迪

组织：China University of Mining & Technology, Beijing

时间：January 20, 2020

版本：0.00

「明日やろう」じゃなくて「今やろう」

目　　录

第 1 章 流体力学的基本方程

1.1 一些准备

注意

- 流体力学研究的对象: 连续介质.
- 连续介质模型: 物质连续的无间断地分布于物质所占有的整个空间, 流体宏观物理量是空间及时间的连续函数.

定义 1.1. 随体导数算子

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla$$

分析一流体微元的运动, 我们可以得到如下的亥姆霍兹速度分解定理:

定理 1.1. 亥姆霍兹速度分解定理

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}(M) &= \boldsymbol{v}(M_0) + \delta \boldsymbol{v} \\
&= \boldsymbol{v}(M_0) + (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{S}) \cdot \delta \boldsymbol{r} \\
&= \boldsymbol{v}(M_0) + \frac{1}{2}(\nabla \times \boldsymbol{v}) \cdot \delta \boldsymbol{r} + \boldsymbol{S} \cdot \delta \boldsymbol{r}
\end{aligned}$$

1.2 本构方程

假设:

1. 应力张量是应变率张量的线性函数;
2. 流体是各向同性的;
3. 流体静止时, 应变率为零, 流体中的应力就是流体的静压强.

设 $\boldsymbol{P} = a\boldsymbol{S} + b\boldsymbol{I}$, 根据牛顿内摩擦定律可知 $a = 2\mu$.

由 $p_{11} + p_{22} + p_{33} = 2\mu\nabla \cdot \boldsymbol{v} + 3b$, 可得 $b = \frac{p_{11}+p_{22}+p_{33}}{3} - \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \boldsymbol{v}$, 代入本构方程可得:

$$\boldsymbol{P} = 2\mu\boldsymbol{S} + \frac{1}{3}(p_{11} + p_{22} + p_{33} - 2\mu\nabla \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{I}$$

由假设 3 可知 $\boldsymbol{P}$ 在 $\boldsymbol{S}=0$ 时, $\boldsymbol{P}=-p\boldsymbol{I}$, 且 $p_{11}+p_{22}+p_{33}$ 为应力张量的不变量, 故也应该与应变率张量的不变量有关, 则可设:

$$\frac{1}{3}(p_{11}+p_{22}+p_{33})=-p+\mu'\nabla\cdot\boldsymbol{v}$$

于是可得:

$$\boldsymbol{P}=2\mu\boldsymbol{S}+\left[-p+\left(\mu'-\frac{2\mu}{3}\right)\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right]\boldsymbol{I}$$

现做如下定义:

$$\lambda\triangleq\left(\mu'-\frac{2\mu}{3}\right)$$

则可得**本构方程**:

定义 1.2. 本构方程

$$\boldsymbol{P}=2\mu\boldsymbol{S}+(-p+\lambda\nabla\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{I}$$

♣

但在一般情况下 μ' 可以忽略不计, 故本构方程又可写成如下形式:

$$\boldsymbol{P}=2\mu\boldsymbol{S}-\left(p+\frac{2\mu}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right)\boldsymbol{I}$$

1.3 平衡方程

平衡方程可以取一个流体微元进行分析得到:

$$\rho\boldsymbol{F}_b=\nabla p \tag{1.1}$$

定义 1.3. 正压流体与斜压流体

- 正压流体: 密度只是压强的函数;
- 斜压流体: 密度除与压强有关之外, 还和其他参数有关.

♣

1.3.1 流体平衡的条件

我们做如下演算:

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\boldsymbol{F}_b &= \nabla\times\left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right)\\
&= -\frac{1}{\rho^2}\nabla\rho\times\nabla p+\overbrace{\frac{1}{\rho}\nabla\times(\nabla p)}^{=0}\\
&= -\frac{1}{\rho^2}\nabla\rho\times\nabla p
\end{aligned}
$$

则可得:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_b\cdot(\nabla\times\boldsymbol{F}_b) &= -\frac{1}{\rho^3}\nabla p\cdot(\nabla\rho\times\nabla p)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

所以流体平衡的条件为: $\boldsymbol{F}_b\cdot(\nabla\times\boldsymbol{F}_b)\equiv 0$

根据以上分析过程, 有两种特殊情况:

1. 均匀流体此时 $\rho\equiv const$, 则有如下结果:
$$\nabla\times\boldsymbol{F}_b=-\frac{1}{\rho^2}\nabla\rho\times\nabla p=0$$
这意味着体力有势, 设体力的势函数为 Π, 则有 $\boldsymbol{F}_b=-\nabla\Pi$
2. 正压流体时, 密度 ρ 只是压强的函数, 则可设如下的压强函数:
$$\frac{1}{\rho}\nabla p=\nabla P$$
依然可以得到: $\nabla\times\boldsymbol{F}_b\equiv 0$.
故正压流体平衡的必要条件也是体力有势.

对于正压流体, 由于 p 为常数时 Π 为常数, 故等势面与等压面重合, 又由于密度只是压强的函数, 故当压强 p 为常数时, 密度也为常数, 所以等密度面与等压面也重合, 由此我们得出结论: **正压流体的等压面, 等势面, 等密度面重合.**

而斜压流体的等压面与等密度面一般不重合 (密度不只是压强的函数), 故而 $\nabla\rho\times\nabla p\neq 0$, 亦即 $\nabla\times\boldsymbol{F}_b\neq 0$, 也就是体力无势, 因而可以得到结论: **斜压流体在有势力作用下不可能处于平衡状态.**

1.3.2 两种不同密度流体的分界面

假设在两层密度不同的液体分界面, 体力与压强连续, 则有:

$$\begin{cases} \mathrm{d}p = \mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\nabla p = \mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot(\rho_1\boldsymbol{F}_b) \\ \mathrm{d}p = \mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\nabla p = \mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot(\rho_2\boldsymbol{F}_b) \end{cases}$$

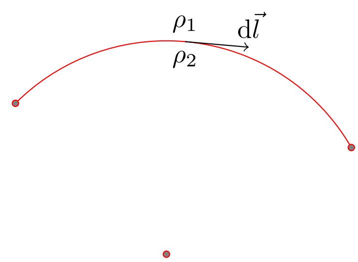

图 1.1: 两种不同密度流体的分界面

如图1.1所示.

则有:

$$\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right)\mathrm{d}p = 0$$

可知在 $\rho_1 \neq \rho_2$ 时, 必有 $\mathrm{d}p = 0$, 即密度不同的液体的分界面必是等压面, 当体力有势时, 也必是等势面.

1.4 雷诺输运定理

先介绍两个基本概念:

定义 1.4. 系统与控制体

- 系统: 某一确定流体质点的集合的总体;
- 控制体: 在流体所占有的空间, 以一个形状任意的流体边界包围所形成的空间体积, 可动可不动, 可变形也可以不变形.

♣

注意 系统与外界无质量交换, 而控制体与外界有质量的交换.

系统的特点:

1. 系统将随系统内的质点一起运动, 且系统内的质点始终在系统内, 系统的空间体积和形状均可发生变化;
2. 系统与外界无质量的交换, 但是可以有能量以及力的相互作用.

控制体的特点:

1. 控制体内的质点并非一成不变;
2. 控制体既可通过边界与外界有能量和质量的交换, 也可以与外界有力的相互作用.

注意 系统用于拉格朗日描述, 控制体用于欧拉描述.

定理 1.2. 雷诺输运定理

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_\tau f(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}\tau = \frac{\partial}{\partial t}\int_\tau f(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}\tau + \oint_{\mathcal{S}_1+\mathcal{S}_2} f(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{v}\cdot\hat{n}\mathrm{d}\mathcal{S}$$

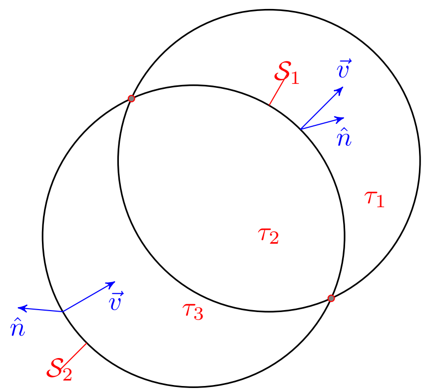

图 1.2: 控制体及其运动

证明 如图1.2所示, 考虑控制体 $\tau=\tau_2+\tau_3$ 移动至 $\tau_2+\tau_1$, 做如下演算:

注意到 $\tau_1+\tau_2=\tau+\tau_1-\tau_3$, 令 $I(t)=\int_\tau f(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}\tau$, 则有:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{D}I(t)}{\mathrm{D}t} &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{I(t+\Delta t)-I(t)}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{I_{\tau+\tau_1-\tau_3}(t+\Delta t)-I_\tau(t)}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{I_\tau(t+\Delta t)-I_\tau(t)+I_{\tau_1}(t+\Delta t)-I_{\tau_3}(t+\Delta t)}{\Delta t}\\
&= \frac{\partial}{\partial t}\int_\tau f(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}\tau + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{I_{\tau_1}(t+\Delta t)}{\Delta t} - \lim_{\Delta t\to 0}\frac{I_{\tau_3}(t+\Delta t)}{\Delta t}
\end{aligned}$$

注意到: $\mathrm{d}\tau_1=\boldsymbol{v}\cdot\hat{n}\mathrm{d}\mathcal{S}\Delta t$ 和 $\mathrm{d}\tau_3=-\boldsymbol{v}\cdot\hat{n}\mathrm{d}\mathcal{S}\Delta t$, 于是有:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\int_\tau f(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}\tau + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{I_{\tau_1}(t+\Delta t)}{\Delta t} - \lim_{\Delta t\to 0}\frac{I_{\tau_3}(t+\Delta t)}{\Delta t}\\
=&\frac{\partial}{\partial t}\int_\tau f(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}\tau + \lim_{\Delta t\to 0}\int_{\mathcal{S}_1} f(\boldsymbol{r},t+\Delta t)\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}} + \lim_{\Delta t\to 0}\int_{\mathcal{S}_2} f(\boldsymbol{r},t+\Delta t)\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}}\\
=&\frac{\partial}{\partial t}\int_\tau f(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}\tau + \oint_{\mathcal{S}_1+\mathcal{S}_2} f(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{v}\cdot\hat{n}\mathrm{d}\mathcal{S}
\end{aligned}$$

得证.

1.5 连续性方程

定理 1.3. 连续性方程

1. 积分形式:

$$\int_\tau \left[\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right]\mathrm{d}\tau = 0$$

2. 微分形式:

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0$$

证明 由质量守恒定律可得:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_\tau \rho\mathrm{d}\tau = 0$$

将左边进行整理:

$$\begin{aligned}
\text{左边} &= \frac{\partial}{\partial t}\int_\tau \rho\mathrm{d}\tau + \oint_S \rho\boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{S} \\
&= \int_\tau \frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}\tau + \int_\tau \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_\tau \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})\right]\mathrm{d}\tau \\
&= \int_\tau \left[\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right]\mathrm{d}\tau \\
&= 0
\end{aligned}$$

于是得到了积分形式的连续性方程:

$$\int_\tau \left[\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right]\mathrm{d}\tau = 0$$

考虑到控制体 τ 的任意性, 有:

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0$$

即微分形式的连续性方程, 证毕.

1.6 运动方程

定理 1.4. 运动方程

1. 积分形式:

$$\int_\tau \rho \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}\mathrm{d}\tau = \int_\tau (\rho \boldsymbol{F}_b + \nabla \cdot \boldsymbol{P})\,\mathrm{d}\tau$$

2. 微分形式:

$$\rho \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t} = \rho \boldsymbol{F}_b + \nabla \cdot \boldsymbol{P}$$

♡

证明 由动量定理可得:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_\tau \rho \boldsymbol{v}\mathrm{d}\tau = \int_\tau \rho \boldsymbol{F}_b \mathrm{d}\tau + \int_S \hat{n}\cdot \boldsymbol{P}\mathrm{d}S \tag{1.2}$$

在继续往下证明之前, 先证明一个重要的引理:

引理 1.1

$$\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}\cdot \nabla(\rho \boldsymbol{v}) + \rho \boldsymbol{v}\nabla \cdot \boldsymbol{v}$$

♡

证明

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}) &= \frac{\partial(\rho \boldsymbol{v} u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \boldsymbol{v} v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \boldsymbol{v} w)}{\partial z} \\
&= \frac{\partial(\rho \boldsymbol{v})}{\partial x}u + \frac{\partial(\rho \boldsymbol{v})}{\partial y}v + \frac{\partial(\rho \boldsymbol{v})}{\partial z}w \\
&+ \frac{\partial u}{\partial x}\rho \boldsymbol{v} + \frac{\partial v}{\partial y}\rho \boldsymbol{v} + \frac{\partial w}{\partial z}\rho \boldsymbol{v} \\
&= \boldsymbol{v}\cdot \nabla(\rho \boldsymbol{v}) + \rho \boldsymbol{v}\nabla \cdot \boldsymbol{v}
\end{aligned}$$

证毕.

接下来将利用上述引理进行证明. 将式(1.2)左边进行化简如下:

$$\begin{aligned}
\text{左边} &= \frac{\partial}{\partial t}\int_\tau \rho \boldsymbol{v}\mathrm{d}\tau + \oint_S \rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\
&= \int_\tau \left[\frac{\partial(\rho \boldsymbol{v})}{\partial t} + \overbrace{\boldsymbol{v}\cdot \nabla(\rho \boldsymbol{v}) + \rho \boldsymbol{v}\nabla \cdot \boldsymbol{v}}^{\text{利用引理1.1}}\right]\mathrm{d}\tau \\
&= \int_\tau \left[\frac{\mathrm{D}(\rho \boldsymbol{v})}{\mathrm{D}t} + \rho \boldsymbol{v}\nabla \cdot \boldsymbol{v}\right]\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_\tau \left[\rho \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t} + \frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}\boldsymbol{v} + \rho\boldsymbol{v}\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right]\mathrm{d}\tau \\
&= \int_\tau \left[\rho \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t} + \boldsymbol{v}\overbrace{\left(\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right)}^{\text{由连续性方程可知}=0}\right]\mathrm{d}\tau \\
&= \int_\tau \rho \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}\mathrm{d}\tau
\end{aligned}
$$

再将式(1.2)右边进行整理:

$$
\text{右边} = \int_\tau \rho\boldsymbol{F}_b\mathrm{d}\tau + \int_\tau \nabla\cdot\boldsymbol{P}\mathrm{d}\tau
$$

于是可得:

$$
\int_\tau \rho\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}\mathrm{d}\tau = \int_\tau (\rho\boldsymbol{F}_b + \nabla\cdot\boldsymbol{P})\,\mathrm{d}\tau
$$

此即为积分形式的运动方程, 考虑到控制体 τ 的任意性, 便可得到运动方程的微分形式:

$$
\rho\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t} = \rho\boldsymbol{F}_b + \nabla\cdot\boldsymbol{P}
$$

证毕.

接下来根据上述的结论, 来给出一些推论:

1.6.1 纳维-斯托克斯方程

推论 1.1. $\mathcal{N}-\mathcal{S}$ 方程

$$
\begin{aligned}
\rho\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t} &= \rho\boldsymbol{F}_b + \nabla\cdot\left[\overbrace{2\mu\boldsymbol{S} - \left(p + \frac{2\mu}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right)\boldsymbol{I}}^{\text{本构方程1.2}}\right] \\
&= \rho\boldsymbol{F}_b + \nabla\cdot(2\mu\boldsymbol{S}) - \nabla p - \frac{2}{3}\nabla(\mu\nabla\cdot\boldsymbol{v})
\end{aligned}
$$

现证明一个引理, 当粘度系数为常数时将 $\mathcal{N}-\mathcal{S}$ 方程的 $\nabla\cdot(2\mu\boldsymbol{S})$ 这一项进行整理:

引理 1.2

$$
\nabla\cdot(2\mu\boldsymbol{S}) = \mu\nabla^2\boldsymbol{v} + \mu\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v})
$$

证明

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\hat{e}_i\hat{e}_j$$

而

$$\begin{aligned}\nabla \boldsymbol{v} &= (\partial_j \hat{e}_j)(v_i \hat{e}_i) = \partial_j v_i \hat{e}_j \hat{e}_i \\ \boldsymbol{v}\nabla &= (\nabla \boldsymbol{v})^T = (v_j \hat{e}_j)(\partial_i \hat{e}_i) = \partial_i v_j \hat{e}_j \hat{e}_i\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\left[\nabla \boldsymbol{v} + (\nabla \boldsymbol{v})^T\right]$

则有:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (2\boldsymbol{S}) &= \nabla \cdot \left[\nabla \boldsymbol{v} + (\nabla \boldsymbol{v})^T\right] \\ &= \nabla^2 \boldsymbol{v} + \nabla \cdot (\nabla \boldsymbol{v})^T \\ &= \nabla^2 \boldsymbol{v} + \partial_i(\partial_k v_i)\hat{e}_k \\ &= \nabla^2 \boldsymbol{v} + \partial_k(\partial_i v_i)\hat{e}_k \\ &= \nabla^2 \boldsymbol{v} + \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{v})\end{aligned}$$

证毕.

利用引理1.2, $\mathcal{N}-\mathcal{S}$ 方程 (粘度系数为常数) 可表示为:

$$\rho\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t} = \rho \boldsymbol{F}_b + \mu\nabla^2\boldsymbol{v} - \nabla p + \frac{1}{3}\mu\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{v})$$

当密度为常数, 流体不可压缩, 且粘度系数为常数时, 纳维-斯托克斯方程又可继续简化为:

$$\rho\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t} = \rho \boldsymbol{F}_b + \mu\nabla^2\boldsymbol{v} - \nabla p$$

$\mathcal{N}-\mathcal{S}$ 方程各项的物理含义如下:

$$\overbrace{\rho\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}}^{\text{单位体积流体的惯性力}} = \underbrace{\rho \boldsymbol{F}_b}_{\text{单位体积的质量力}} + \overbrace{\nabla \cdot (2\mu \boldsymbol{S})}^{\text{粘性变形应力}} - \underbrace{\nabla p}_{\text{压强的梯度力}} - \overbrace{\frac{2}{3}\nabla(\mu\nabla\cdot\boldsymbol{v})}^{\text{粘性体膨胀应力}}$$

1.6.2 欧拉方程

当流体无粘性时, 方程可简化为**欧拉方程**:

推论 1.2. 欧拉方程

$$\rho\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}=\rho\boldsymbol{F}_b-\nabla p$$

如流体静止, 则上述方程就可退化为静止流体的平衡方程1.1

1.6.3 兰姆-葛罗米柯方程

将随体导数中的位变导数项 $\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}$ 进行整理, 便可以得到**兰姆-葛罗米柯方程**:

推论 1.3. 兰姆-葛罗米柯方程

$$\rho\left[\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\nabla\frac{v^2}{2}+(\nabla\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{v}\right]=\rho\boldsymbol{F}_b+\nabla\cdot\boldsymbol{P}$$

现证明如下, 我们只需证明出其中位变导数项即可:

证明

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}=v_i(\partial_i v_j)\hat{e}_j \tag{1.3a}$$

$$\nabla\left(\frac{v^2}{2}\right)=\frac{1}{2}\nabla(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})=v_i(\partial_j v_i)\hat{e}_j \tag{1.3b}$$

用式(1.3a)减去(1.3b)可得:

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}-\nabla\left(\frac{v^2}{2}\right)=\left[v_i(\partial_i v_j)-v_i(\partial_j v_i)\right]\hat{e}_j=(\nabla\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{v}$$

于是: $\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}=\nabla\frac{v^2}{2}+(\nabla\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{v}$

证毕.

1.7 能量方程

先给出热力学第一定律:

定理 1.5. 热力学第一定律

系统能量的变化率等于单位时间内对某一流体系统所做的功和加给系统的热量.

系统能量:

$$E=\int_\tau e_s\rho\mathrm{d}\tau=\int_\tau\left(e+\frac{v^2}{2}+gz\right)\rho\mathrm{d}\tau$$

其中:

- e : 单位质量的内能;
- $\dfrac{v^2}{2}$: 单位质量的动能;
- gz : 单位质量的重力势能.

定理 1.6. 能量方程

1. 积分形式:
$$\int_\tau \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\rho e_s \mathrm{d}\tau = \int_\tau \rho \boldsymbol{F}_{b1} \cdot \boldsymbol{v} \mathrm{d}\tau + \int_\tau \nabla \cdot (\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{v}) \mathrm{d}\tau + \int_\tau \nabla \cdot (k \nabla T) \mathrm{d}\tau$$
2. 微分形式:
$$\frac{\mathrm{D}e_s}{\mathrm{D}t} = \boldsymbol{F}_{b1} \cdot \boldsymbol{v} + \frac{1}{\rho}\nabla \cdot (\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{v}) + \frac{1}{\rho}\nabla \cdot (k\nabla T) + q$$

注意 式中的 $\boldsymbol{F}_{b1}$ 不包含重力.

第 2 章 基本方程的应用

2.1 纳维-斯托克斯方程的简化

通常情况下, 本构方程 1.2 中的 μ' 可以忽略不计, 故可得:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{P}=\nabla\cdot(2\mu\boldsymbol{S})-\nabla p-\frac{2}{3}\nabla(\mu\nabla\cdot\boldsymbol{v})$$

纳维-斯托克斯方程为:

$$\rho\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}=\rho\boldsymbol{F}_b+\nabla\cdot(2\mu\boldsymbol{S})-\nabla p-\frac{2}{3}\nabla(\mu\nabla\cdot\boldsymbol{v})$$

对于无粘性流体, 其兰姆-葛罗米柯形式为:

$$\rho\left(\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\nabla\frac{v^2}{2}+(\nabla\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{v}\right)=\rho\boldsymbol{F}_b-\nabla p$$

若流体正压, 体力有势, 即:

$$\boldsymbol{F}_b=-\nabla\Pi,\frac{1}{\rho}\nabla p=\nabla P$$

则有:

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{v^2}{2}+\Pi+P\right)+(\nabla\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{v}=0 \tag{2.1}$$

2.2 伯努利积分

定理 2.1. 伯努利积分

$$\frac{v^2}{2}+gy+\int\frac{\mathrm{d}p}{\rho(p)}=c(\varphi)$$

其中 $c(\varphi)$ 随流线不同而不同的常数.

证明 若流体定常, 则式(2.1)可变为:

$$\nabla\left(\frac{v^2}{2}+\Pi+P\right)+(\nabla\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{v}=0$$

两边同时点成 d$\boldsymbol{r}$ 可得:

$$\nabla\left(\frac{v^2}{2}+\Pi+P\right)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}+\overbrace{[(\nabla\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{v}]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}}^{\text{由于}\mathrm{d}\boldsymbol{r}\text{与速度}\boldsymbol{v}\text{同向,故此部分等于0}}=0$$

则:

$$\mathrm{d}\left[\frac{v^2}{2}+\Pi+P\right]=0$$

考虑在重力场中: $\Pi = gy + const$
沿流线积分可得:

$$\frac{v^2}{2}+gy+\int\frac{\mathrm{d}p}{\rho(p)}=c(\varphi)$$

证毕.

若 $\rho = const$, 则:

$$\frac{v^2}{2}+gy+\frac{p}{\rho}=c(\varphi)$$

此即为不可压缩流体的伯努利积分.

注意 伯努利积分的条件:

$$\begin{cases}\text{流体正压}\\ \text{无粘性}\\ \text{体力有势}\\ \text{定常流动}\\ \text{沿一条流线积分}\end{cases}$$

2.3 拉格朗日积分

当流体无旋时, $\nabla\times\boldsymbol{v}=0$, 且 $\boldsymbol{v}=\nabla\varphi$, 则:

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}=\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

于是:

$$\nabla\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{v^2}{2}+\Pi+P\right]=0$$

故:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{v^2}{2}+\Pi+P=F(t)$$

此即为**拉格朗日积分**, 当流体密度 $\rho = const$, 且定常时, 在重力场中有:

$$\frac{v^2}{2} + gy + \frac{p}{\rho} = F$$

第 3 章 涡旋

3.1 基本概念

先给出一些流体涡旋的基本概念:

1. **涡量**: $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{v}$
   若 $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$, 则称流动是有旋的, 否则无旋;
2. **涡线方程**: $\boldsymbol{\omega} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathbf{0}$
   在直角坐标中为:
$$\frac{\mathrm{d}x}{\omega_x} = \frac{\mathrm{d}y}{\omega_y} = \frac{\mathrm{d}z}{\omega_z}$$
3. **涡面**: 在流场中任取一条非涡线的曲线, 在其上每一点作同一时刻的涡线, 这些涡线形成的曲面为涡面, 若任取的曲线为闭合曲线, 那么此时形成的涡面为涡管;
4. **涡通量**: $\mathcal{J} = \iint_A \boldsymbol{\omega} \cdot \mathrm{d}A$
5. **涡管强度**: 对于流场中某时刻的涡管, 如图3.1所示, 任取其一横截面 $\mathcal{A}$, 通过 $\mathcal{A}$ 的涡通量称为该瞬时的涡管强度. 可以证明涡管强度与 $\mathcal{A}$ 的选择无关, 这就是涡管强度守恒定理.

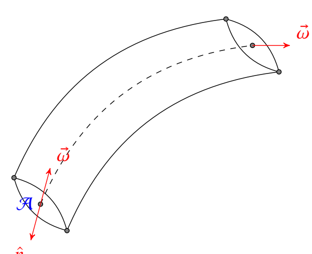

图 3.1: 涡管

6. **速度环量**: 如图3.2所示, 速度环量定义为 $\Gamma = \oint_{\mathcal{L}} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$
   速度环量 Γ 与流场中速度有关, 还与积分时绕行 $\mathcal{L}$ 的方向有关, 通常按逆时针方向为正向.

可以推出速度环量与涡通量之间的关系:

$$\begin{aligned}\Gamma &= \oint_{\mathcal{L}} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \\ &= \iint_S (\nabla \times \boldsymbol{v}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &= \iint_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\end{aligned}$$

由斯托克斯定理可得

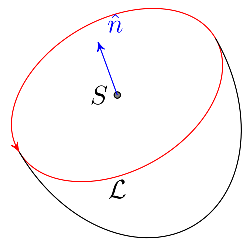

图 3.2: 速度环量

注意 由涡管守恒定理可得出如下结论:

(a). 同一涡管, 在面积小的地方涡量大, 面积大的地方涡量小;

(b). 涡管不可能在流场中产生或终止, 只能形成环状, 或始于终于边界, 或延伸至无穷处, 否则将会出现涡管强度无穷大的情况, 而这是不可能的.

3.2 涡量输运方程

当粘度 μ 为常数时, 有纳维-斯托克斯方程:

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t} = \boldsymbol{F}_b - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\boldsymbol{v} + \frac{1}{3}\nu\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v})$$

注意

1. 此处用到了前面的结论:

$$\nabla\cdot(2\mu\boldsymbol{S}) = \mu\nabla^2\boldsymbol{v} + \mu\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v})$$

2. 此方程中的 ν 为运动粘度系数, 具体定义如下:

$$\nu \triangleq \frac{\mu}{\rho}$$

兰姆-葛罗米柯形式为:

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + \nabla\frac{v^2}{2} + (\nabla\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F}_b - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\boldsymbol{v} + \frac{1}{3}\nu\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v})$$

亦即:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\nabla\frac{v^2}{2}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{F}_b-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2\boldsymbol{v}+\frac{1}{3}\nu\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) \tag{3.1}$$

接下来给出一个引理, 以便进一步推导:

引理 3.1

$$\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\nabla\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\nabla\cdot\boldsymbol{a}$$

证明

$$\begin{aligned}
\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) &= (\partial_i\hat{e}_i)\times\left[(a_j\hat{e}_j)\times(b_k\hat{e}_k)\right]\\
&= (\partial_i\hat{e}_i)\times(a_jb_ke_{jkl}\hat{e}_l)\\
&= \partial_i(a_jb_k)e_{jkl}e_{ilm}\hat{e}_m
\end{aligned}$$

引理 3.2

$$e_{ijk}e_{lmk}=\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}$$

继续上述的推导:

$$\begin{aligned}
\partial_i(a_jb_k)e_{jkl}e_{ilm}\hat{e}_m &= \partial_i(a_jb_k)\hat{e}_m\overbrace{(\delta_{jm}\delta_{ki}-\delta_{ji}\delta_{km})}^{\text{引理3.2}}\\
&= \partial_i(a_jb_i)\hat{e}_j-\partial_i(a_ib_k)\hat{e}_k\\
&= \partial_i(a_jb_i)\hat{e}_j-\partial_i(a_ib_j)\hat{e}_j\\
&= \partial_i(a_jb_i-a_ib_j)\hat{e}_j\\
&= (b_i\partial_ia_j+a_j\partial_ib_i-b_j\partial_ia_i-a_i\partial_jb_j)\hat{e}_j\\
&= (\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\nabla\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\nabla\cdot\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}
\end{aligned}$$

证毕.

于是利用引理3.1, 将式(3.1)两边同时取旋度可得:

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega}-(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\omega}(\nabla\cdot\boldsymbol{v})=\nabla\times\boldsymbol{F}_b-\nabla\times\left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right)+\nabla\times(\nu\nabla^2\boldsymbol{v})+\overbrace{\frac{1}{3}\nu\nabla\times[\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v})]}^{=0}$$

于是我们就得到了**涡量输运方程**:

定理 3.1. 涡量输运方程

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} - \boldsymbol{\omega}(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) + \nabla\times\boldsymbol{F}_b + \frac{1}{\rho^2}\nabla\rho\times\nabla p + \nu\nabla^2\boldsymbol{\omega}$$

在涡量输运方程中有两项需要特别说明:

1. $(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$: 速度沿涡线的变化, 平行于涡线的变化使涡线伸长或缩短, 垂直于涡线的变化使涡线扭曲;
2. $-\boldsymbol{\omega}(\nabla\cdot\boldsymbol{v})$: 与流体体积收缩有关的项, $\nabla\cdot\boldsymbol{v} > 0$ 时, 体积增大, 涡量减小, 反之则增大.

注意 涡量随体运动发生变化的因素:

$$\begin{cases} \text{外力} \\ \text{流体非正压性} \\ \text{粘性} \\ \boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\boldsymbol{v}\text{及} - \boldsymbol{\omega}(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\text{的影响} \end{cases}$$

3.3 速度环量的变化率

由上我们已经得知常值粘度的 $\mathcal{N}-\mathcal{S}$ 方程:

$$\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \boldsymbol{F}_b - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\boldsymbol{v} + \frac{1}{3}\nu\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v})$$

两边作线积分可得:

$$\oint_l \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}\cdot d\boldsymbol{l} = \oint_l \boldsymbol{F}_b\cdot d\boldsymbol{l} - \oint_l \frac{1}{\rho}\nabla p\cdot d\boldsymbol{l} + \oint_l \nu\nabla^2\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l} + \oint_l \frac{1}{3}\nu\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\cdot d\boldsymbol{l} \tag{3.2}$$

为了进一步推导, 我们先证明一个引理:

引理 3.3

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_l \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}\cdot d\boldsymbol{l}$$

其中: $\Gamma = \oint_l \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l}$

证明 如图3.3所示, 由几何关系可得:

$$\delta\boldsymbol{l} + (\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v})\Delta t - \boldsymbol{v}\Delta t = \delta\boldsymbol{l} + \frac{d(\delta\boldsymbol{l})}{dt}\Delta t$$

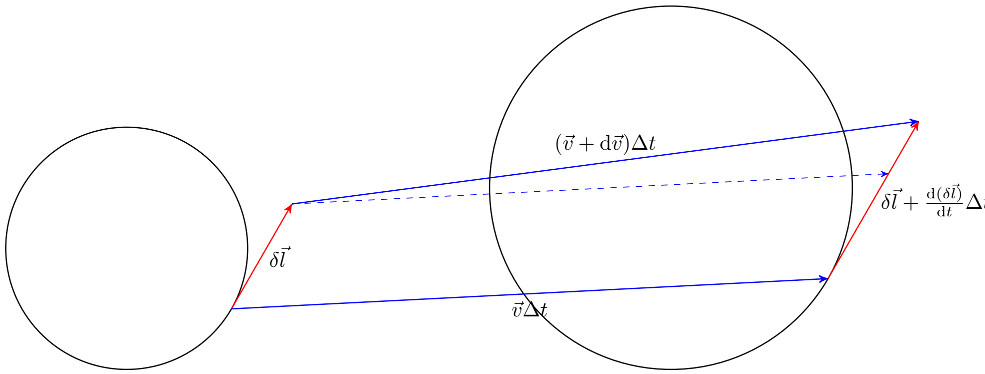

图 3.3: 封闭流体线的运动

亦即:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}(\delta\boldsymbol{l})}{\mathrm{d}t}$$

于是可得:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l})&=\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}+\boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}\boldsymbol{l})\\&=\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}+\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v}\\&=\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}+\mathrm{d}\left(\frac{v^2}{2}\right)\end{aligned}$$

则:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}\Gamma}{\mathrm{D}t}&=\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\oint_l\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\\&=\oint_l\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l})\\&=\oint_l\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}+\overbrace{\oint_l\mathrm{d}\left(\frac{v^2}{2}\right)}^{=0}\\&=\oint_l\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\end{aligned}$$

证毕.

于是式(3.2)就变成了:

$$\frac{\mathrm{D}\Gamma}{\mathrm{D}t}=\oint_l\boldsymbol{F}_b\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}-\oint_l\frac{1}{\rho}\nabla p\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}+\oint_l\nu\nabla^2\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}+\oint_l\frac{1}{3}\nu\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\qquad(3.3)$$

这就是**速度环量的变化率**.

3.4 一些推论

3.4.1 开尔文定理

由上节的方程(3.3), 在体力有势, 流体正压, 无粘性流体条件下, 可以得到开尔文定理:

定理 3.2. 开尔文定理

$$\frac{\mathrm{D}\Gamma}{\mathrm{D}t} = 0$$

注意 开尔文定理成立的条件:

$$\begin{cases} \text{体力有势} \\ \text{流体正压} \\ \text{无粘性} \end{cases}$$

3.4.2 亥姆霍兹方程

由定理(3.1), 在无粘性, 体力有势, 正压流体的条件下, 可以得到亥姆霍兹方程:

定理 3.3. 亥姆霍兹方程

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{D}t} - \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega}(\nabla \cdot \boldsymbol{v}) = 0$$

3.4.3 拉格朗日涡保持定理

在体力有势, 流体正压, 无粘性流体的条件下, 有如下的关系:

$$\Gamma = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{\omega} = 0$$

注意 这里的 $\Longleftrightarrow$ 是“等价于”的意思.

定理 3.4. 涡保持定理

在体力有势, 流体正压, 无粘性的前提下, 流体的某一时刻某一部分内无旋涡, 则在此前与此后的该部分均无旋涡.

第 4 章 液体表面波

4.1 基本方程组

假定:

1. 液体无粘性;
2. 液体不可压缩, $\rho = const$;
3. 质量力只有重力;
4. 液体运动无旋.

由前述我们已经知道了连续性方程: $\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0$

对于不可压缩流体我们有: $\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = 0$, 故而 $\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0$.

对于无旋流动我们有: $\nabla\times\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, 即 $\boldsymbol{v} = \nabla\varphi$.

则: $\nabla^2\varphi = 0$

于是基本方程组为:

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi = 0 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial t} + \dfrac{v^2}{2} + \dfrac{p}{\rho} + gz = 0 \end{cases}$$

4.2 边界条件

1. 底部边界条件:

   如图4.1所示, 假设底部曲线的边界方程为 $F(x, y, z) = 0$

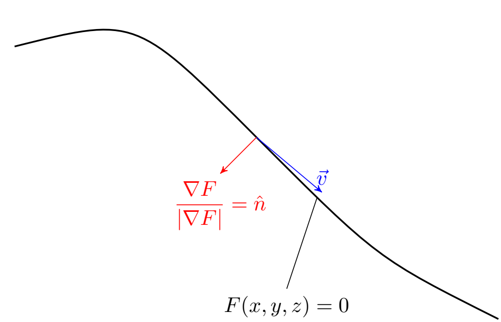

图 4.1: 底部边界

由 $\dfrac{\mathrm{D}F}{\mathrm{D}t} = \overbrace{\dfrac{\partial F}{\partial t}}^{=0} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla F = 0$, 可知:

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla F = 0 \Rightarrow u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} + w\frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

几何意义: $\boldsymbol{v}$ 方向即为边界面的切线方向, $\boldsymbol{v}\perp\nabla F$.

将 $F = z + d = 0$ 代入可得:

$$w|_{z=-d} = -u\frac{\partial d}{\partial x} - v\frac{\partial d}{\partial y}$$

再由 $\boldsymbol{v} = \nabla\varphi$ 可得:

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=-d} = -\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{z=-d}\frac{\partial d}{\partial x} - \left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{z=-d}\frac{\partial d}{\partial y}$$

2. 自由面上的运动学边界条件: 设 $F = z - \zeta$ 为自由面的方程, 由课本的第三章第九节的结论 $\dfrac{\mathrm{D}F}{\mathrm{D}t} = 0$ 可得:

$$-\frac{\partial\zeta}{\partial t} - u|_{z=\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x} - v|_{z=\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y} + w|_{z=\zeta} = 0$$

3. 自由面动力学边界条件:

$$p|_{z=\zeta} = p_a$$

代入拉格朗日积分可得:

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{z=\zeta} + \left.\frac{v^2}{2}\right|_{z=\zeta} + \frac{p_a}{\rho} + g\zeta = 0$$

第 5 章 粘性不可压缩流体的层流运动

5.1 相似律

两个流动现象彼此相似, 有如下四个层次:

- **几何相似**
- **运动相似**
- **动力相似**
- **热力相似**

接下来具体进行说明:

1. 几何相似: 两流场中的被绕流物体与流场中的各对应线元之间的夹角相等, 且对应长度成比例;
2. 运动相似: 指两个几何相似的流场中的时空对应点处的速度方向相同, 大小成比例;
3. 动力相似: 指两个运动相似的流场中的时空对应点处的面元上的力方向相同, 大小成比例;
4. 热力相似: 指两个动力相似的流场中的时空对应点的温度成比例, 通过对应点上对应面元的热流方向相同, 大小成比例.

注意 时空对应点: 分别取实物和模型的特征长度和特征时间构成无量纲量, 则两流场中的无量纲量坐标和无量纲时间相同的点称为时空对应点.

接下来给出一个非常重要的定理:

定理 5.1. Π 定理

在一个物理问题中如果有 n 个物理量, 其中包括 r 个基本量纲, 那么这个问题就可以用 $n-r$ 个独立的无量纲量来描述.

现在给出几个常见的无量纲量:

- **斯特劳哈尔数**: $St = \dfrac{L}{U_\infty t_0}$;
- **Froude 数**: $Fr = \dfrac{U_\infty^2}{gL}$, 惯性力与重力之比;

- **Euler 数**: $Eu = \dfrac{p_0}{\rho U_\infty^2}$, 静压与动压之比;
- **Reynolds 数**: $Re = \dfrac{\rho U_\infty L}{\mu}$, 惯性力与黏性力之比;
- **Prandtl 数**: $Pr = \dfrac{c\mu}{k}$, 黏性扩散系数与热扩散系数之比;
- **Eckert 数**: $Ec = \dfrac{U_\infty^2}{c(T_w - T_\infty)}$, 动能与焓之比.

定理 5.2. 量纲的幂次律

任何物理量的量纲式都是基本量纲的幂次单项式的形式.

定理 5.3. 量纲一致性定律

每个公式中相加的量其量纲必须一致.

5.2 层流运动的精确解

纳维-斯托克斯方程和能量方程:

$$
\begin{aligned}
&\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \\
&\rho \left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}\right] = -\nabla p + \mu \nabla^2 \boldsymbol{v} \\
&\rho c \left[\frac{\partial T}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)T\right] = \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi
\end{aligned}
$$

5.2.1 两平行平板间的粘性流动

如图5.1所示, 假设 $\dfrac{\partial p}{\partial x} = P =$ 常数.
纳维-斯托克斯方程的分量形式:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\
u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{\mu}{\rho}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \\
u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} + \dfrac{\mu}{\rho}\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y_2}\right)
\end{cases}
$$

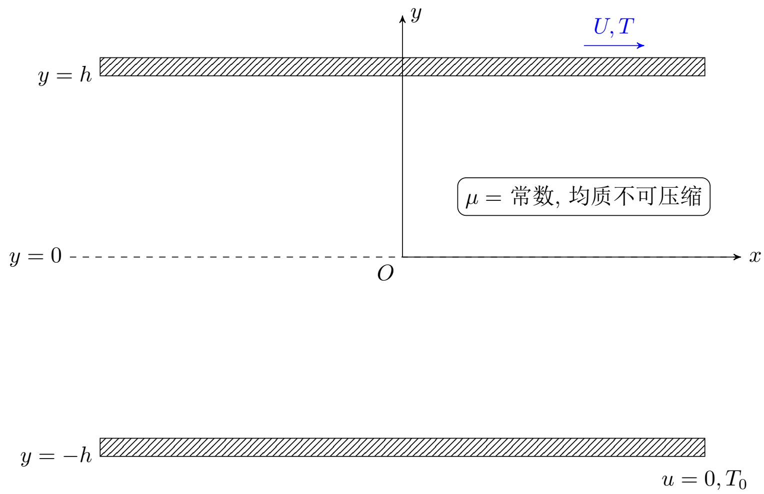

图 5.1: 平行平板流动

边界条件:

$$\begin{cases} u|_{y=-h} = 0 & v|_{y=-h} = 0 \\ u|_{y=h} = U & v|_{y=h} = 0 \end{cases}$$

注意 x 方向无特征长度, 故有:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

一些特殊情况:

1. **简单库埃特流动**: x 方向压强梯度为 0 , 流体仅仅由于上板的运动而运动;
2. **二位泊肃叶流动**: 上下板都静止不动, 流体仅仅由于 x 方向的压强梯度而运动.

注意

1. 流体总朝向压强减小的方向;
2. 流量: $Q_v = \int_S \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$

若定义平均速度 $\bar{u} \triangleq \dfrac{Q_v}{2h}$, 那么二位泊肃叶流动的最大速度在 $y = 0$ 处取得, 且其值为 $u_{\max} = \dfrac{3}{2}\bar{u}$

5.3 边界层

当流体的粘度很小时, 流经物体的流动可以分为两个区:

$$\begin{cases}\text{物体附近一层很薄的}\textbf{边界层}\\ \textbf{主流区}\end{cases}$$

注意 两个常见情况下的雷诺数:

取特征长度和特征速度分别为 1cm和1cm/s 时, 对空气和水的雷诺数分别为 6.67和100

定义 5.1. 速度边界层

流体运动时, 上一层流体的运动总会受到下一层流体的阻滞, 随着 x 的增加, 速度变化明显的区域会在 y 方向上增大, 这段速度变化明显的区域常称为速度边界层. ♣

边界层与主流区之间没有明显的分界线, 通常将 $u = 0.99v_\infty$ 处的 y 值定义为边界层的名义厚度 $\delta_v(x)$. 边界层内的流体的粘性起着重要作用.

由边界层的**名义厚度** $\delta_v(x)$ 与 $(\nu t)^{\frac{1}{2}}$ 同阶, 我们可以推出如下关系:

$$\delta_v(x) \sim (\nu t)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\mu t}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \xlongequal{x=v_\infty t} \left(\frac{\mu x}{\rho v_\infty}\right)^{\frac{1}{2}} = x\left(\frac{\mu}{\rho v_\infty x}\right)^{\frac{1}{2}} = xRe_x^{-\frac{1}{2}}$$

于是就得到了: $\delta_v(x) \sim xRe_x^{-\frac{1}{2}}$

注意 其中 Re_x 是以 x 为特征长度的雷诺数, 我们还可推得与 δ_v 有关的雷诺数和与 x 有关的雷诺数之间的关系:

$$\frac{\rho v_\infty \delta_v(x)}{\mu} \sim \frac{\rho v_\infty x}{\mu}Re_x^{-\frac{1}{2}} = (Re_x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$Re_{\delta_v} \sim (Re_x)^{\frac{1}{2}}$$

5.3.1 位移厚度

y 处的速度为 u , 则单位时间内通过 $\mathrm{d}y$ 厚度的质量为 $\rho u\mathrm{d}y$, 相较于无粘性, 亏损为 $\rho(v_e - u)\mathrm{d}y$. 则整个边界层内的亏损为:

$$\int_0^{\delta_v(x)} \rho(v_e - u)\mathrm{d}y$$

假设一厚度 δ_d , 使得无粘性流体单位时间通过该厚度的质量恰好为亏损质量, 即:

$$\rho v_e \delta_d = \int_0^{\delta_v} \rho(v_e - u)\mathrm{d}y$$

则:

$$\delta_d = \int_0^{\delta_v} \left[1 - \frac{u}{v_e}\right]\mathrm{d}y \longrightarrow \text{位移厚度}$$

5.3.2 动量厚度

y 处的动量亏损 (相较于无粘性) 为 $\rho u(v_e - u)\mathrm{d}y$, 则整个边界层厚度内亏损为:

$$\int_0^{\delta_v} \rho u(v_e - u)\mathrm{d}y$$

假设一厚度 δ_m , 使得无粘性流体单位时间通过该厚度的动量恰好为动量亏损:

$$\rho v_e^2 \delta_m = \int_0^{\delta_v} \rho u(v_e - u)\mathrm{d}y$$

则:

$$\delta_m = \int_0^{\delta_v} \frac{u}{v_e}\left[1 - \frac{u}{v_e}\right]\mathrm{d}y \longrightarrow \text{动量厚度}$$

第 6 章 粘性不可压缩流体的湍流运动

6.1 时均

定义 6.1. 时均

任一物理量 $f(x,y,z,t)$ 的时均值定义为:

$$\bar{f}(x,y,z,t) = \frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} f(x,y,z,t)\mathrm{d}t$$

♣

注意

1. $\bar{f}$ 不随时间 t 而变的湍流运动，简称为定常湍流;
2. 一般我们把一个物理量分解为时均量和涨落量:

$$f = \bar{f} + f'$$

   - $\bar{f}$: 时均量;
   - f': 涨落量

性质:

1. $\bar{\bar{f}} = f$;
2. $\overline{\bar{f}g} = \bar{f}\bar{g}$;
3. $\overline{f+g} = \bar{f} + \bar{g}$;
4. $\overline{f'} = 0$;
5. $\overline{fg} = \bar{f}\bar{g} + \overline{f'g'}$;
6. $\overline{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}$;
7. $\overline{\frac{\partial f}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t}$

注意

1. 分子粘性应力: $\begin{bmatrix} \bar{\tau}_{xx} & \bar{\tau}_{xy} & \bar{\tau}_{xz} \\ \bar{\tau}_{xy} & \bar{\tau}_{yy} & \bar{\tau}_{yz} \\ \bar{\tau}_{xz} & \bar{\tau}_{yz} & \bar{\tau}_{zz} \end{bmatrix}$;
2. 雷诺应力: $\begin{bmatrix} -\rho\overline{u'^2} & -\rho\overline{u'v'} & -\rho\overline{u'w'} \\ -\rho\overline{u'v'} & -\rho\overline{v'^2} & -\rho\overline{u'w'} \\ -\rho\overline{u'w'} & -\rho\overline{v'w'} & -\rho\overline{w'^2} \end{bmatrix}$

6.2 混合长理论 (动量输运理论)

为将雷诺应力表示成: $-\rho\overline{u'v'} = \mu^t \dfrac{d\bar{u}}{dy}$, 需找到 μ^t 与哪些参数相关以及如何相关.

定义 6.2. 混合长

湍流理论的基本量, 湍流场中流体的微涡经一段距离, 不与周围介质混合, 仍保持其固有特性的长度.

6.2.1 混合长理论

假设:

1. 对于某一给定的点 y, 流体微团各从 $y+l'$ 和 $y-l'$ 以随机的时间间隔到达 y 点, 在达到 y 点之前保持原来的速度 $\bar{u}|_{y=y+l'}$, $\bar{u}|_{y=y-l'}$, 在到达 y 点之后便与该处原来的流体质点发生碰撞;
2. x 方向和 y 方向的速度涨落量为同阶.

由以上假设我们可以推出: $\mu^t = \rho l^2 \left|\dfrac{d\bar{u}}{dy}\right|$

第 7 章 气体动力学初步

7.1 无粘性可压缩流体运动方程组

无粘性可压缩流体运动方程组为:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0 \\ \dfrac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla p \\ p = \rho RT \\ p = c\rho^{\gamma} \end{cases}$$

定解条件:

$$\begin{cases} \text{初始条件}: \boldsymbol{v}_0, p_0, \rho_0, T_0 \\ \text{边界条件} \begin{cases} \text{固壁条件}: (\boldsymbol{v}\cdot\nabla F)|_w = -\dfrac{\partial F}{\partial t} \\ \text{固壁温度条件}: T|_w \\ \text{绝热条件}: \dfrac{\partial T}{\partial n} = 0 \end{cases} \end{cases}$$

7.2 小扰动波

定义 7.1. 小扰动波

发生器所发生的微弱振动而引起的周围空气变化的一种微弱扰动波. ♣

7.2.1 声速

定义 7.2. 波阵面

在流体受扰动部分和未受扰动部分之间有一个分界面, 即波阵面. 声波的传播速度就是波阵面的传播速度. ♣

定义 7.3. 声速

小扰动波阵面在流体中的传播速度

接下来证明声速的公式:

定理 7.1

设声速为 a, 则有:

$$a = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}\right)_s}$$

注意

- 式中的下标 s 表示等熵过程, 声音传播的过程为等熵过程;
- 声波为小扰动波.

证明 如图7.1所示, 取图示虚线框内为控制体.

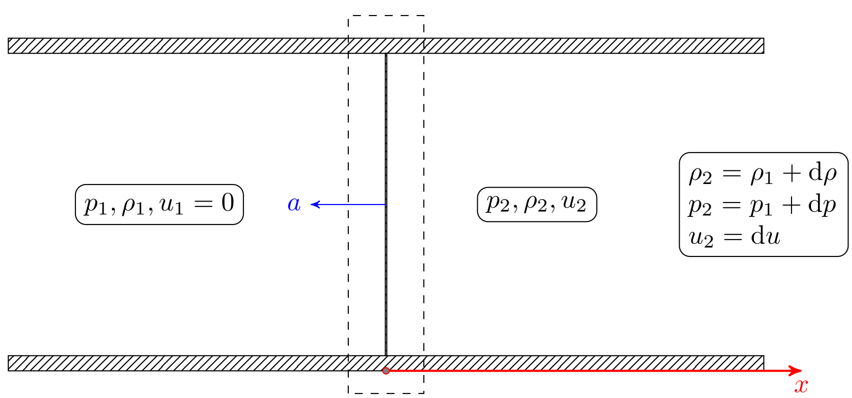

图 7.1: 声音传播模型

由质量守恒和动量定理可得:

$$\rho_1 a = \rho_2(a + \mathrm{d}u)$$
$$p_1 + \rho_1 a^2 = p_2 + \rho_2(a + \mathrm{d}u)^2$$

即:

$$\begin{cases} \rho_1 a = (\rho_1 + \mathrm{d}\rho)(a + \mathrm{d}u) \\ p_1 + \rho_1 a^2 = p_1 + \mathrm{d}p + (\rho_1 + \mathrm{d}p)(a + \mathrm{d}u)^2 \end{cases}$$

略去二阶及以上小量后有:

$$a^2 = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}$$
$$\Downarrow$$
$$a = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}\right)_s}$$

证毕.

注意 上述证明中的动量定理可以由如下推出:

动量定理为:

$$\sum F = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_V \rho\boldsymbol{v}\mathrm{d}V = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\boldsymbol{v}\mathrm{d}V}_{\text{定常时}=0} + \oint_S \rho\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\hat{n})\mathrm{d}S$$

即:

$$\sum F = \oint_S \rho\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\hat{n})\mathrm{d}S \Longrightarrow \text{一维情形:} \sum \pm(\rho v^2) = \sum p$$

其中正负号的确定由 $\hat{n}\cdot\boldsymbol{v}$ 的符号决定, 如图7.2所示:

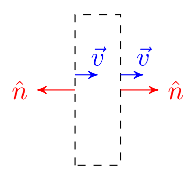

图 7.2: $\hat{n}\cdot\boldsymbol{v}$

7.2.2 马赫数

定义 7.4. 马赫数

$$M = \frac{v}{a}$$

其中:

- v: 流体流动速度;
- a: 声速.

接下来给出四种小扰动在不同来流速度流场中的传播:

这四种情况的传播特点为:

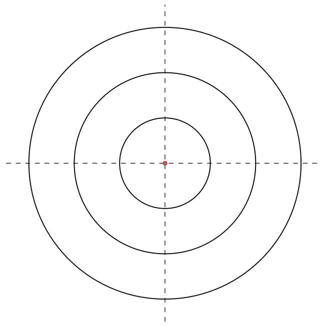

图 7.3: 静止流场: $M = 0, v = 0$

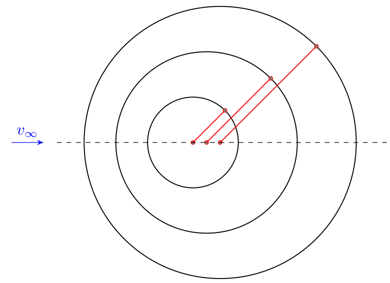

图 7.4: 亚声速流场: $M < 1, v < a$

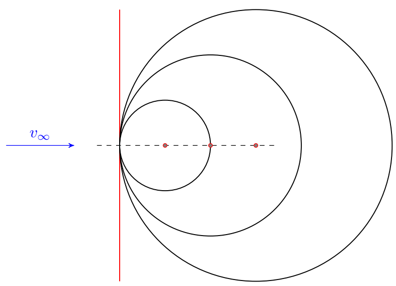

图 7.5: 声速流场: $M = 1, v = a$

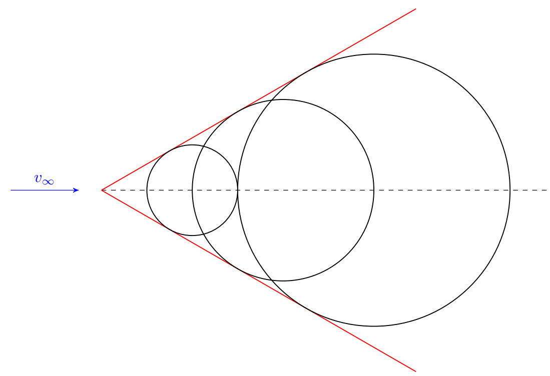

图 7.6: 超声速流场: $M > 1, v > a$

1. **静止流场**: 声速向四面八方传播, 且各方向传播速度相等, 如图7.3所示;
2. **亚声速流场**: 向四面八方传播, 但是顺流方向速度更大, 逆流则相对较小, 如图7.4;
3. **声速流场**: 只能沿顺流方向传播, 不能逆流传播, 如图7.5所示;
4. **超声速流场**: 不能再向逆流方向传播, 并且会形成**马赫锥**, 如图7.6所示.

第 8 章 一道课后习题的解答

练习 8.1 如图8.1所示, 无限长的平板与水平面的夹角为 α , 其上有一层厚度为 h 的均质不可压缩粘性流体在重力作用下平行于板面流动, 其上为自由面. 求此定常流动的速度分布, 流量, 平均速度, 最大速度和作用于板上的摩擦力, 并求流体中的压强分布.

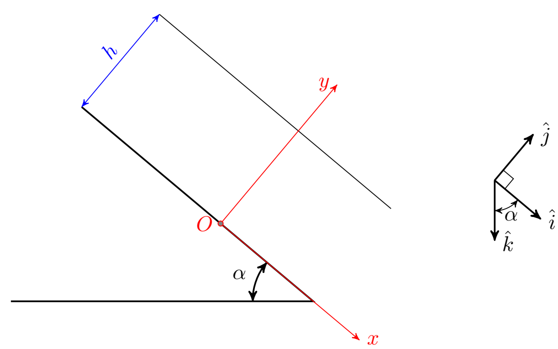

图 8.1: 练习题图

解 不可压缩定常 $\mathcal{N}-\mathcal{S}$ 方程为:

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + g\hat{k} + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2\boldsymbol{v}$$

将方程两边分别点乘 $\hat{i}$ 和 $\hat{j}$ 可得:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + g\sin\alpha + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$
$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - g\cos\alpha + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

仅考虑 $u = u(y), v = 0$(x 方向无特征长度, 故 u 仅与 y 有关).

则有:

$$\begin{cases} \mu\dfrac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}y^2} + \rho g\sin\alpha = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} + \rho g\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

定解条件为:

$$\begin{cases} u|_{y=0} = 0 \qquad p|_{y=h} = p_0 \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right|_{y=h} = 0 \end{cases}$$

解得:

$$\begin{cases} u = -\dfrac{g\sin\alpha}{2\nu}y^2 + \dfrac{gh\sin\alpha}{\nu}y \\ p = p_0 + \rho g(h-y)\cos\alpha \end{cases}$$

则流量: $Q_v = \displaystyle\int_S \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_0^h u\mathrm{d}h = \frac{gh^3\sin\alpha}{3\nu}$, 平均速度为 $\bar{u} = \dfrac{Q_v}{h} = \dfrac{gh^2\sin\alpha}{3\nu}$, 最大速度为 $u_{\max} = \dfrac{3}{2}\bar{u} = \dfrac{gh^2\sin\alpha}{2\nu}$, 作用于板上的摩擦力为 $\tau = \mu\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = \rho gh\sin\alpha$

索引