



LELEC1755

Partie « Lignes de transmission »

CM3

Introduction aux circuits distribués

***Des champs électromagnétiques aux ondes de tension et de courant
dans les lignes de transmission***

Matière traitée dans le 3e module LELEC1755

1. Limite de la représentation par éléments localisés
... « *tension et courant deviennent des ondes* »

2. Champs dans les lignes de transmission

- ⇒ ondes TEM, TE et TM
- ⇒ équation de Helmholtz
- ⇒ paramètres fondamentaux: α , β , Z_c , L , C
- ⇒ application au câble coaxial

3. Lignes avec pertes

- ⇒ dans le milieu
- ⇒ dans les conducteurs

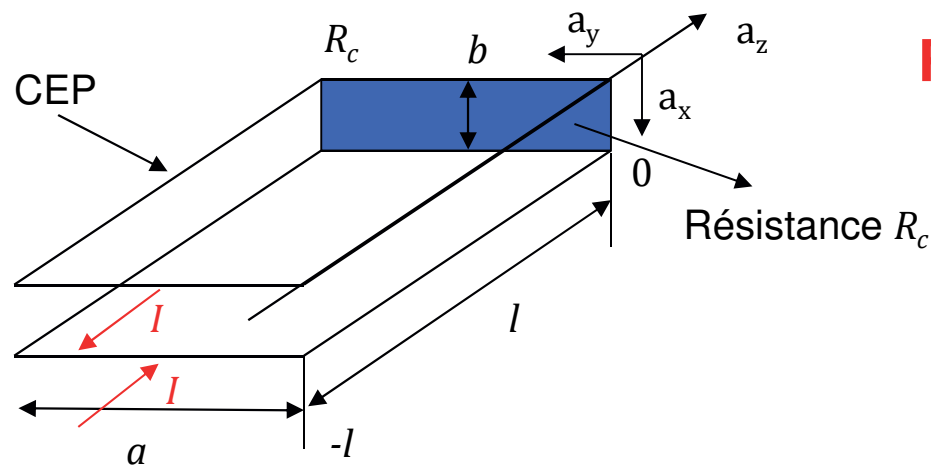
4. Circuit distribué équivalent d'une ligne TEM

1. Limite de la représentation par éléments localisés

Au CM2, on a lié la notion de capacité, inductance et résistance aux champs électromagnétiques et aux équations de Maxwell

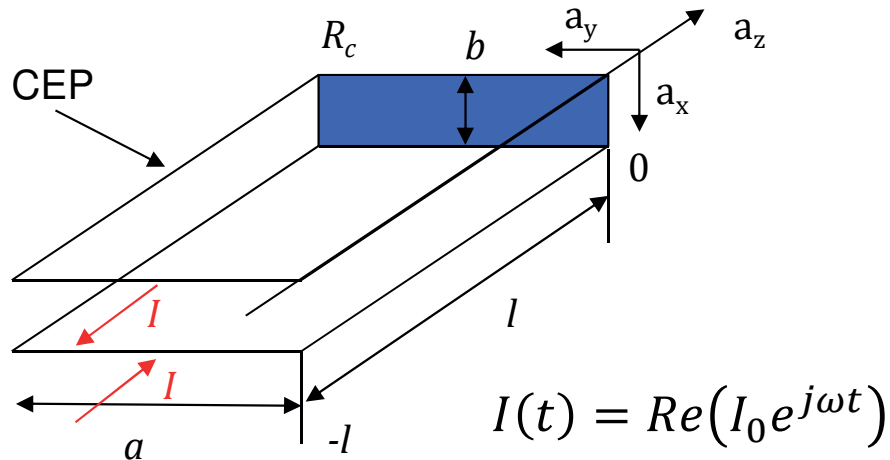
- Éléments de circuit considérés comme idéaux (R ou L ou C)
- Pertes dans les éléments idéaux modélisée par une résistance (série ou parallèle)

Le circuit suivant pose cependant question



R, L, C ????

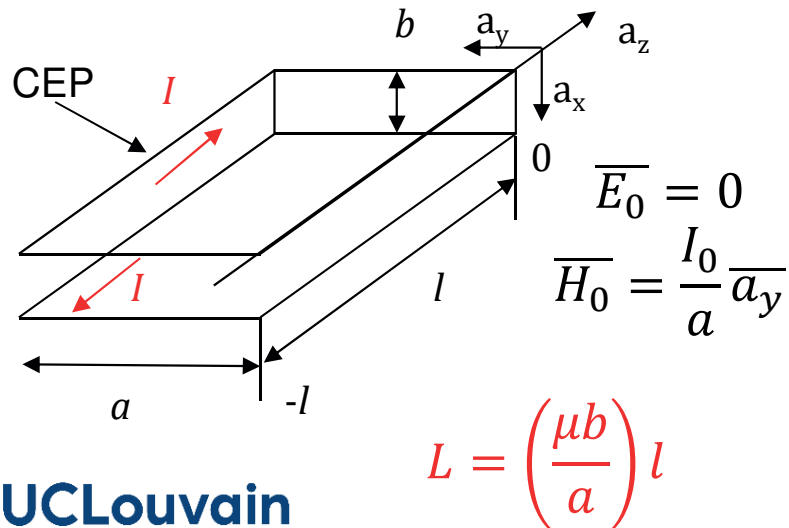
1. Limite de la représentation par éléments localisés



R_c, L, C ?? combinés

Que se passe-t-il à très basse fréquence (et DC) ?

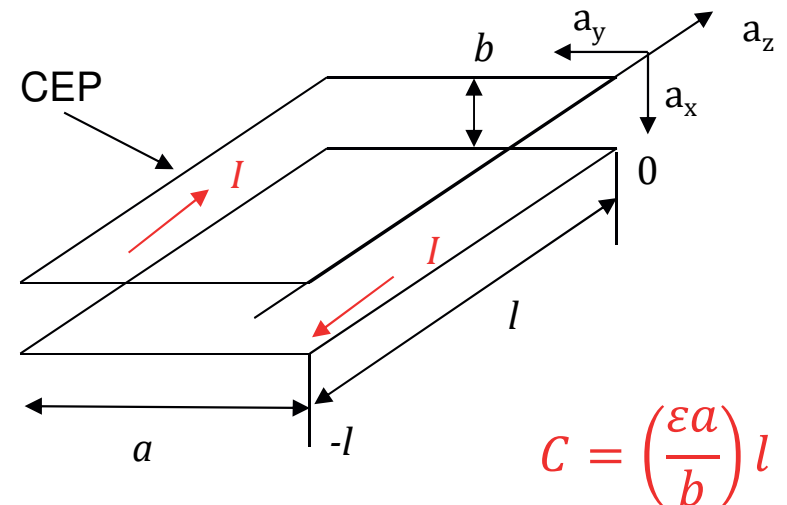
Si $R_c = 0$



Si $R_c = \infty$

$$\overline{E}_0 = \frac{V_0}{b} \overline{a}_x$$

$$\overline{H}_0 = 0$$



1. Limite de la représentation par éléments localisés

Décomposition en série des champs en fonction de la fréquence (phaseurs)

$$E_x = E_{x0} + E_{x1}\omega + E_{x2}\omega^2 + \dots \quad (1)$$

$$E_{xn}, H_{yn} = f(z, \text{géométrie})$$

$$H_y = H_{y0} + H_{y1}\omega + H_{y2}\omega^2 + \dots \quad (2)$$

➤ Champs incorporés dans Maxwell

$$\begin{aligned} \nabla \times \bar{E} &= -j\omega\mu\bar{H} \\ \nabla \times \bar{H} &= j\omega\bar{D} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \frac{dE_x}{dz} &= -j\omega\mu H_y \\ \frac{dH_y}{dz} &= -j\omega\varepsilon E_x \end{aligned}$$

➤ Condition limite en $z = 0$ (phaseurs)

$$\begin{aligned} I = I_0 &= a H_y \Big|_{z=0} & H_{y0}(z=0) &= I_0/a \\ & & E_{x0}(z=0) &= I_0 R_c/b \\ H_{yn} &= 0 = E_{xn}; n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

➤ Injectant les expressions (1) et (2) dans les équations ci-dessus et égalisant les termes de même puissance en ω , on obtient

	ω	ω^2	\dots
$\frac{dE_{x0}}{dz} = 0$	$\frac{dE_{x1}}{dz} = -j\mu H_{y0}$	$\frac{dE_{x2}}{dz} = -j\mu H_{y1}$	
$\frac{dH_{y0}}{dz} = 0$	$\frac{dH_{y1}}{dz} = -j\varepsilon E_{x0}$	$\frac{dH_{y2}}{dz} = -j\varepsilon E_{x1}$	\dots

1. Limite de la représentation par éléments localisés

Décomposition en série des champs en fonction de la fréquence (phaseurs)

➤ **Ordre 0:** E_{x0} et H_{y0} sont indépendants de z , ils gardent donc la valeur obtenue en $z = 0$

$$\begin{aligned}\frac{dE_{x0}}{dz} &= 0 & H_{y0} &= I_0/a \\ \frac{dH_{y0}}{dz} &= 0 & E_{x0} &= I_0 R_c/b\end{aligned}$$

➤ **Ordre 1:** les constantes d'intégration sont nulles car $H_{y1} = E_{x1} = 0$ en $z = 0$

ω

$$\frac{dE_{x1}}{dz} = -j\mu H_{y0} \qquad \omega E_{x1} = -j\omega\mu \frac{I_0}{a} z = -j\beta_0 z \left(\frac{\eta I_0}{a} \right)$$

$$\frac{dH_{y1}}{dz} = -j\varepsilon E_{x0} \qquad \omega H_{y1} = -j\omega\varepsilon \frac{I_0 R_c}{b} z = -j\beta_0 z \left(\frac{I_0 R_c}{\eta b} \right)$$

$$\beta_0 = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}; \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

1. Limite de la représentation par éléments localisés

Décomposition en série des champs en fonction de la fréquence (phaseurs)

ω^2

$$\frac{dE_{x2}}{dz} = -j\mu H_{y1} \quad \omega^2 E_{x2} = \frac{I_0 R_c}{b} \frac{(j\beta_0 z)^2}{2!}$$

ω^3

$$\frac{dE_{x3}}{dz} = -j\mu H_{y2} \quad \omega^3 E_{x3} = -\frac{I_0 \eta}{a} \frac{(j\beta_0 z)^3}{3!}$$

$$\frac{dH_{y2}}{dz} = -j\varepsilon E_{x1} \quad \omega^2 H_{y2} = \frac{I_0}{a} \frac{(j\beta_0 z)^2}{2!} \quad \frac{dH_{y3}}{dz} = -j\varepsilon E_{x2} \quad \omega^3 H_{y3} = -\frac{I_0 R_c}{\eta b} \frac{(j\beta_0 z)^3}{3!}$$

$$E_x = \frac{I_0 R_c}{b} \left[1 - \left(\frac{\eta b}{a R_c} \right) (j\beta_0 z) + \frac{(j\beta_0 z)^2}{2!} - \left(\frac{\eta b}{a R_c} \right) \frac{(j\beta_0 z)^3}{3!} + \dots \right]$$

$$H_y = \frac{I_0}{a} \left[1 - \left(\frac{a R_c}{\eta b} \right) (j\beta_0 z) + \frac{(j\beta_0 z)^2}{2!} - \left(\frac{a R_c}{\eta b} \right) \frac{(j\beta_0 z)^3}{3!} + \dots \right]$$

$$V = bE_x = I_0 R_c \left[1 + \frac{(j\beta_0 z)^2}{2!} + \frac{(j\beta_0 z)^4}{4!} \dots - \frac{\eta}{r} \left((j\beta_0 z) + \frac{(j\beta_0 z)^3}{3!} + \dots \right) \right]$$

$$\chi = \frac{\eta}{r}$$

$$R_c = b \frac{r}{a}$$

$$V = I_0 R_c [\cosh(j\beta_0 z) - \chi \sinh(j\beta_0 z)]$$

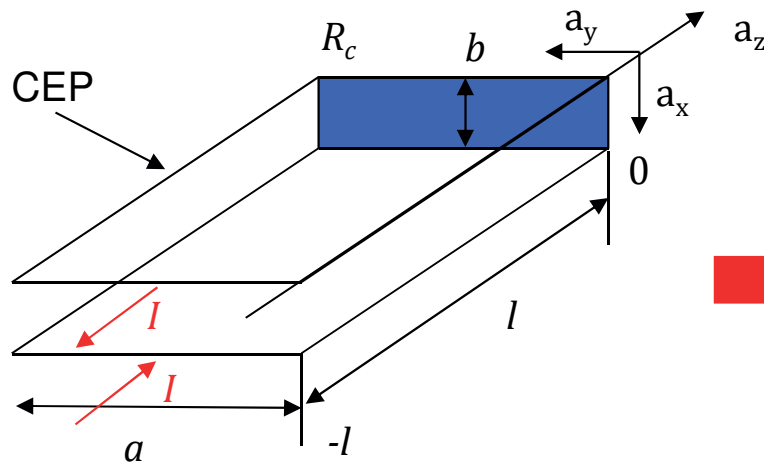
1. Limite de la représentation par éléments localisés

Décomposition en série des champs en fonction de la fréquence (phaseurs)

$$V = I_0 R_c [\cosh(j\beta_0 z) - \chi \sinh(j\beta_0 z)]$$

$$I = a H_y = I_0 \left[\cosh(j\beta_0 z) - \frac{1}{\chi} \sinh(j\beta_0 z) \right]$$

sont des solutions de l'équation d'ondes ($e^{\pm j\beta z}$) → que devient la théorie des circuits (LELEC1370) ?



Cette structure n'est ni une capacité, ni une inductance mais le siège d'une **onde de tension** $V(z, t) = f_V(\omega t \pm \beta z) \neq V(t)$ et d'une **onde de courant** $I(z, t) = f_I(\omega t \pm \beta z) \neq I(t)$

- Les différents termes de la décomposition en série sont de la forme $(j\beta_0 l)^n$ et dépendent donc du rapport l/λ entre la longueur de l'élément et la longueur d'onde

2. Champs dans les lignes de transmission

Circuits distribués

Transmission de l'énergie et de l'information dans la direction z

Lignes de transmission → structure propageant les **ondes EM**

Circuit ~~localisé~~ (LELEC1370, LELEC1755-CM2) → circuit distribué
car **une dimension est grande par rapport à la longueur d'onde**

Transmission → propagation le long de la ligne

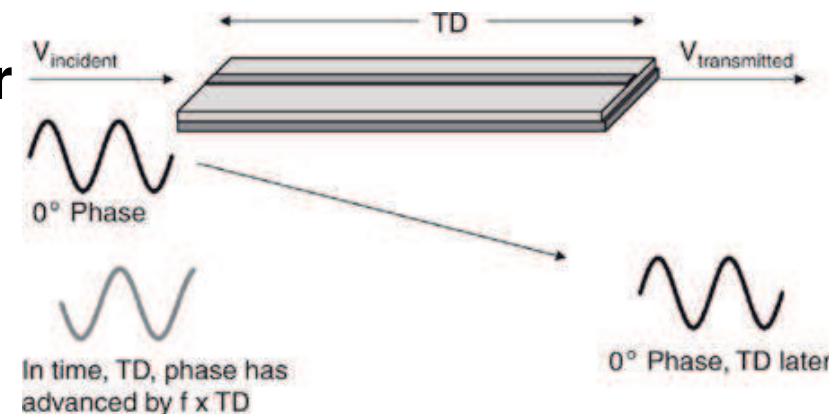
$$e^{\pm j\beta z}$$

$$\cos(\omega t \pm \beta z)$$

phaseur (domaine fréquentiel)

domaine temporel

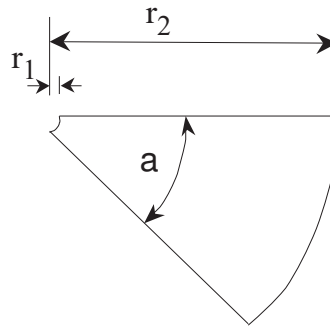
→ Lorsqu'un signal sinusoïdal est envoyé sur une ligne de transmission, il subit un délai



2. Champs dans les lignes de transmission

Lignes de transmission

Les lignes usuelles sont **uniformes**
càd leur configuration transverse est indépendante de z
Exemple de ligne non uniforme: ligne radiale



Une ligne de transmission est capable de guider un grand nombre de **modes** (configurations de champs différentes), mais **on utilise généralement les lignes à des fréquences telles qu'un seul mode se propage** (! pertes par conversion de mode)

Dans ce cours, on s'intéresse aux **ondes planes**
les surfaces à phase constante sont des plans

Plan transverse \equiv plan perpendiculaire à la direction de propagation

- Ondes TEM (**Transverse Electro-Magnétique**): les champs électrique et magnétique sont entièrement transverses, leurs composantes longitudinales sont nulles
- Ondes TE (**Transverse Electrique**): seul le champ électrique est purement transverse, le champ magnétique a une composante longitudinale
- Ondes TM (**Transverse Magnétique**): seul le champ magnétique est purement transverse, le champ électrique a une composante longitudinale

Propriété des ondes TEM: leurs composantes obéissent aux équations de la statique dans le plan transverse (démonstration: cfr. suite)
→ dans le plan transverse (en tout z donné), représentation par un circuit localisé (mais uniquement valable pour une longueur dz infinitésimale)

Démonstration: on décompose les champs et les opérateurs dans leur composante transverse t (attention $t \neq$ temps) et leur composante longitudinale suivant z

$$\nabla = \nabla_t + \bar{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{et} \quad \bar{E} = \bar{E}_t + \bar{a}_z E_z$$

gradient spatial dans le plan transverse !!

On applique cette décomposition aux équations de Maxwell

$$\nabla \times \bar{E} = -\mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}$$
$$\nabla \times \bar{H} = \epsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \sigma \bar{E}$$

dérivée temporelle !!

2. Champs dans les lignes de transmission

Ondes TEM

$$\left(\nabla_t + \overline{a_z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\overline{E_t} + \overline{a_z} E_z) = -\mu \left(\frac{\partial (\overline{\mathcal{H}_t} + \overline{a_z} \mathcal{H}_z)}{\partial t} \right)$$

$$\underbrace{\nabla_t \times \overline{E_t}}_{\text{suivant } z} + \underbrace{\overline{a_z} \times \frac{\partial \overline{E_t}}{\partial z}}_{\text{dans le plan transverse}} + \underbrace{\nabla_t \times \overline{a_z} E_z}_{\text{dans le plan transverse}} + \underbrace{\overline{a_z} \times \overline{a_z} \frac{\partial E_z}{\partial z}}_{=0} = -\mu \left(\underbrace{\frac{\partial \overline{\mathcal{H}_t}}{\partial t}}_{\text{suivant } z} + \underbrace{\frac{\partial \overline{a_z} \mathcal{H}_z}{\partial t}}_{\text{dans le plan transverse}} \right)$$



suivant z



dans le plan transverse

En séparant les composantes, on obtient

suivant z

$$\nabla_t \times \overline{E_t} = -\mu \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial t} \overline{a_z}$$

dans le plan transverse

$$\overline{a_z} \times \frac{\partial \overline{E_t}}{\partial z} + (\nabla_t \times \overline{E_z} \overline{a_z}) = -\mu \frac{\partial \overline{\mathcal{H}_t}}{\partial t}$$

2. Champs dans les lignes de transmission

Ondes TEM

Avec l'autre équation

$$\nabla_t \times \overline{\mathcal{H}}_t = \left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + \sigma \right) \overline{E}_z \overline{a}_z$$

$$\overline{a}_z \times \frac{\partial \overline{\mathcal{H}}_t}{\partial z} + \nabla_t \times \overline{\mathcal{H}}_z \overline{a}_z = \left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + \sigma \right) \overline{\mathcal{E}}_t$$

Dans le cas des ondes TEM

$$\overline{E}_z = 0 \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{H}}_z = 0$$

Equations de la statique

$$\begin{cases} \nabla_t \times \overline{\mathcal{E}}_t = 0 \\ \nabla_t \times \overline{\mathcal{H}}_t = 0 \end{cases}$$

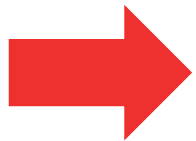
$$\overline{\mathcal{E}}_t \perp \overline{\mathcal{H}}_t$$

Equations d'ondes ??

$$\overline{a}_z \times \frac{\partial \overline{\mathcal{E}}_t}{\partial z} = -\mu \frac{\partial \overline{\mathcal{H}}_t}{\partial t}$$

$$\overline{a}_z \times \frac{\partial \overline{\mathcal{H}}_t}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial \overline{\mathcal{E}}_t}{\partial t} + \sigma \overline{\mathcal{E}}_t$$

... et l'un se calcule aisément par rapport à l'autre



Dans un CEP, on ne peut avoir ni champ électrique, ni champ magnétique variable dans le temps

→ ligne avec conducteurs CEP : mêmes conditions aux limites qu'en statique

→ pas d'onde TEM à l'intérieur d'un tube creux en CEP $\left(\overline{\mathcal{E}} = \overline{0}\right)$

→ pour une onde TEM il faut au moins 2 conducteurs

Applications: lignes coaxiale, bifilaire, micro-ruban, coplanaire, etc.

2. Champs dans les lignes de transmission

Ondes TEM,
lignes sans pertes

Ondes TEM sur une ligne sans pertes

→ conducteurs électriques parfaits
et milieu sans pertes

$$\begin{aligned}\overline{a_z} \times \frac{\partial \overline{E}_t}{\partial z} &= -\mu \frac{\partial \overline{H}_t}{\partial t} \\ \overline{a_z} \times \frac{\partial \overline{H}_t}{\partial z} &= \epsilon \frac{\partial \overline{E}_t}{\partial t} + \cancel{0 \overline{E}_t}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \nabla_t \times \overline{E}_t = 0 \\ \nabla_t \cdot \overline{E}_t = 0 \end{cases}$$

Le rotationnel du champ électrique transverse est nul, il dépend d'un potentiel scalaire

$$\overline{E}_t \triangleq -\nabla_t \phi \quad \text{ou} \quad \nabla_t^2 \phi = 0$$

2. Champs dans les lignes de transmission

Ondes TEM,
lignes sans pertes

On travaille en phaseurs + propagation en z

→ la dépendance en z s'écrit uniquement via $e^{-j\beta z}$

$$\phi = \Phi e^{-j\beta z} \quad !! \quad \underline{\Phi(x, y)}$$

$$\overline{E} = \overline{E}_t = -\nabla_t \Phi e^{-j\beta z} \quad \overline{a}_z \times \frac{\partial \overline{E}_t}{\partial z} = -\mu \frac{\partial \overline{H}_t}{\partial t}$$

$$-\mu \frac{\partial}{\partial t} j\omega \overline{H}_t = \overline{a}_z \times (-j\beta) \left(-\nabla_t \Phi \right) e^{-j\beta z}$$

$$\overline{H}_t = \frac{\beta}{\omega\mu} \overline{a}_z \times \overline{E}_t$$

$$\overline{E}_t \perp \overline{H}_t$$

$$\overline{H}_t = \frac{\beta}{\omega\mu} \overline{a}_z \times (-\nabla_t \Phi) e^{-j\beta z}$$

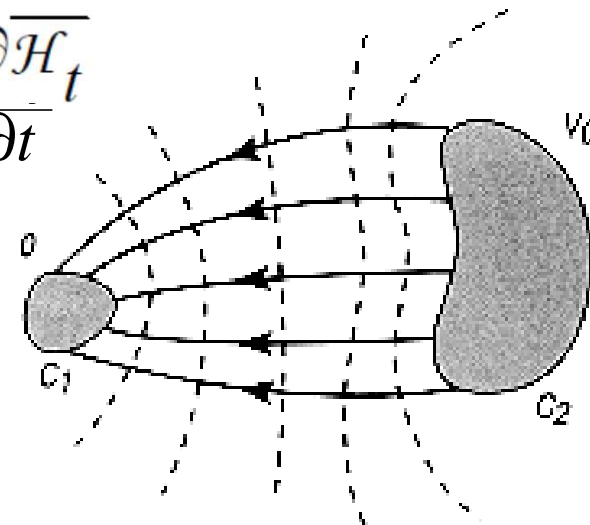


Fig. 1.1 - Système à deux conducteurs

2 conducteurs de section
quelconque, auxquels on
applique une différence de
potentiel V_0

2. Champs dans les lignes de transmission

Equation de Helmholtz

Calcul de l'exposant β

$$\bar{E} = \bar{E}_t = -\nabla_t \Phi e^{-j\beta z}$$

$$\nabla \times \bar{E} = -j\omega\mu \bar{H}$$

$$\nabla \times \bar{H} = j\omega\epsilon \bar{E}$$

$$\nabla \times \nabla \times \bar{E} = -j\omega\mu \nabla \times \bar{H} = \omega^2 \epsilon \mu \bar{E}$$

$$\nabla (\nabla \cdot \bar{E}) - \nabla^2 \bar{E} = k^2 \bar{E}$$

$$= 0$$

$$k^2 \triangleq \omega^2 \epsilon \mu$$

$$(\nabla^2 + k^2) \bar{E} = 0$$

Equation de Helmholtz

$$\nabla = \nabla_t - j\beta z$$

$$\nabla^2 = \nabla_t^2 - \beta^2$$

$$\bar{E}_t = \bar{e}_t e^{-j\beta z}$$

$$\begin{aligned} (\nabla_t^2 + (k^2 - \beta^2)) \bar{e}_t &= 0 \\ \nabla_t [\nabla_t^2 + (k^2 - \beta^2)] \Phi &= 0 \end{aligned}$$

2. Champs dans les lignes de transmission

Equation de Helmholtz

Calcul de l'exposant β

$$\begin{aligned} (\nabla_t^2 + (k^2 - \beta^2)) \bar{e}_t &= 0 \\ \nabla_t [\nabla_t^2 + (k^2 - \beta^2)] \Phi &= 0 \end{aligned}$$

Or $\nabla_t^2 \Phi = 0 \quad \rightarrow \quad \beta^2 = k^2$

Soit l'admittance du milieu

$$Y_{\Delta} \triangleq \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \quad \text{et} \quad Y_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \quad \text{dans le vide } (= 377\Omega)$$

On peut écrire le champ magnétique $\bar{H}_t = \frac{\beta}{\omega\mu} \bar{a}_z \times \bar{E}_t$ sous la forme

$$\bar{H}_t = Y \bar{a}_z \times \bar{E}_t = Y \bar{a}_z \times (-\nabla_t \Phi) e^{-j\beta z}$$

car
$$\frac{\beta}{\omega\mu} = \frac{\omega\sqrt{\epsilon\mu}}{\omega\mu} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} = Y$$

2. Champs dans les lignes de transmission

Paramètres fondamentaux

TEM → équations de la statique dans le plan transverse + propagation en z

➤ on définit une **onde de tension** $V(z) = V_0 e^{-j\beta z}$

avec $V_0 \triangleq \int_{C_1}^{C_2} \nabla_t \Phi \cdot \overline{dl}$

➤ on définit une **onde de courant** $I(z) = I_0 e^{-j\beta z}$

avec $I_0 = \oint \overline{H} \cdot \overline{dl} \triangleq \oint_C Y \overline{a_z} \times (-\nabla_t \Phi) \cdot \overline{dl}$

car $\overline{H}_t = Y \overline{a_z} \times \overline{E}_t = Y \overline{a_z} \times (-\nabla_t \Phi) e^{-j\beta z}$

2. Champs dans les lignes de transmission

Paramètres fondamentaux

Impédance caractéristique $Z_C = \frac{1}{Y_C} \triangleq \frac{V_0}{I_0}$

- Z_C **n'est pas** l'impédance d'onde (= rapport des champs instantanés, cfr. LEPL1203) ... mais il existe un lien entre les deux (cfr. suite)
- Z_C est le rapport des amplitudes des ondes de tension et de courant **se déplaçant dans un même sens**

Puissance électromagnétique traversant le plan transverse

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_A \overline{\mathbf{E}} \times \overline{\mathbf{H}}^* \cdot d\overline{\mathbf{a}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_A \overline{\mathbf{E}}_t \times \overline{\mathbf{H}}_t^* \cdot \overline{\mathbf{a}}_z da = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (VI^*)$$

= intégrale du vecteur de Poynting sur la section

= définition "circuits"

→ **égalité** de ces deux expressions: tension et courant sont donc définis de façon telle qu'ils soient compatibles avec la théorie des circuits ☺

2. Champs dans les lignes de transmission

Résumé

$$\overline{E} = -\nabla_t \Phi e^{-j\beta z}$$

$$V_0 \triangleq \int_{C_1}^{C_2} \nabla_t \Phi \cdot d\overline{l}$$

$$I_0 \triangleq \oint_C Y \overline{a}_z \times (-\nabla_t \Phi) \cdot d\overline{l}$$

$$Z_c = \frac{1}{Y_c} = \frac{V_0}{I_0}$$

$$\overline{H} = Y \overline{a}_z \times \overline{E} \quad Y \triangleq \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}$$

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_A \overline{E}_t \times \overline{H}_t^* \cdot \overline{a}_z da = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (VI^*)$$

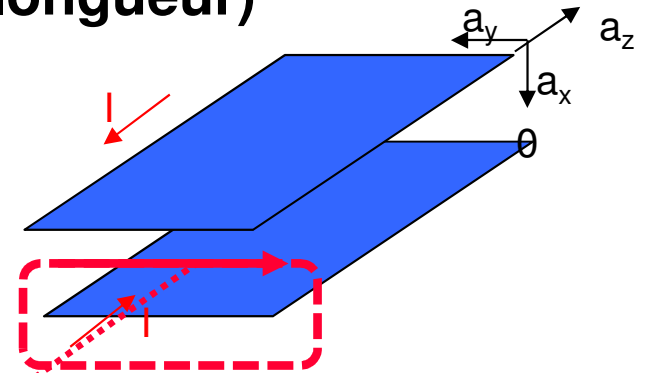
2. Champs dans les lignes de transmission

Paramètres linéiques

On définit des paramètres linéiques (par unité de longueur)

➤ Capacité linéique

$$C = \frac{\rho_l}{V_0} \quad (\text{F/m})$$



$$\rho_S = \bar{n} \cdot \bar{D} = \bar{a}_x \cdot \varepsilon(-\nabla_t \Phi) \quad (\text{Cb/m}^2)$$

$$\rho_l = \int \rho_S dl = \int \bar{a}_x \cdot \varepsilon(-\nabla_t \Phi) dy = \int \varepsilon \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) dy$$

$$I_0 = \int Y \bar{a}_z \times (-\nabla_t \Phi) \cdot \bar{dl} = \int Y \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) dy = \frac{Y \rho_l}{\varepsilon}$$

$$Z_c = \frac{V_0}{I_0} = \frac{\rho_l / C}{Y \rho_l / \varepsilon} = \frac{Z \varepsilon}{C}$$

$$\text{ou } Z_c = \frac{\sqrt{\varepsilon \mu}}{C} = \frac{1}{vC}$$

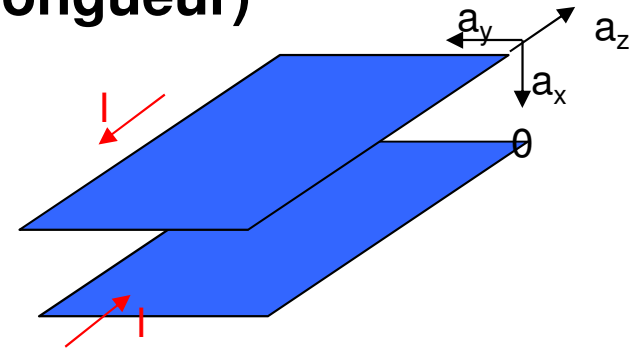
2. Champs dans les lignes de transmission

Paramètres linéiques

On définit des paramètres linéiques (par unité de longueur)

➤ Inductance linéique

$$L = \frac{\phi}{I_0} \quad (\text{H/m})$$



$$\phi = \int \bar{B} \cdot (-\bar{a}_y) dx \quad (\text{flux } \textbf{par unité de longueur !!})$$

$$\phi = \int \mu Y \bar{a}_z \times (-\nabla_t \Phi) \cdot (-\bar{a}_y) dx = \int \mu Y \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) dx = \mu Y \Delta \Phi = \mu Y V_0$$

$$L = \mu Y \frac{V_0}{I_0} = \mu Y Z_C = \frac{Z_C}{v}$$

2. Champs dans les lignes de transmission

Paramètres linéiques

Pour les lignes sans pertes, on obtient

$$Z_c = \sqrt{L/C}$$

$$v = 1/\sqrt{LC}$$

$$LC = \varepsilon\mu$$

$$\beta = \omega\sqrt{LC}$$

- Lien entre les paramètres « circuits » et les paramètres ondulatoires

2. Champs dans les lignes de transmission

**Application:
câble coaxial**

Equation de Laplace en coordonnées polaires

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\Phi e^{-j\beta z} \right) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \Phi^2} \left(\Phi e^{-j\beta z} \right) = 0$$

avec $\Phi = V_0$ sur le conducteur central ($r = a$)
 $\Phi = 0$ sur le conducteur extérieur ($r = b$)

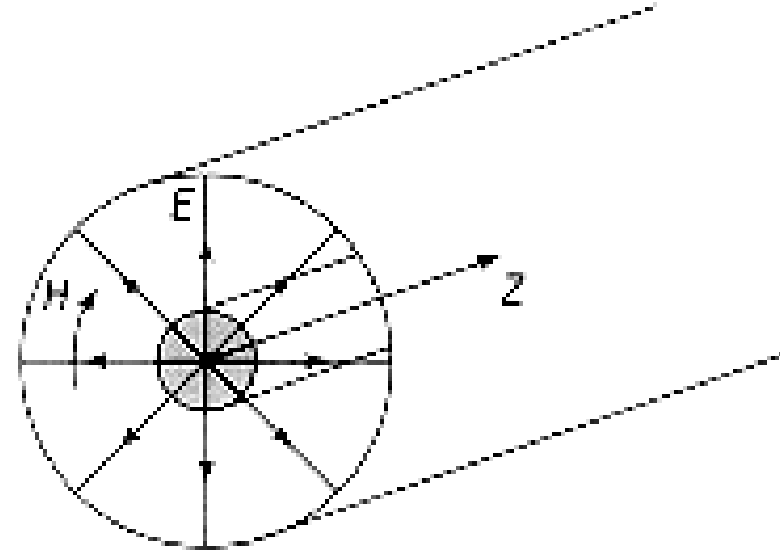


Fig. 1.3 - Câble coaxial

Les conditions aux limites imposent de chercher une solution indépendante de l'angle polaire \rightarrow l'équation à résoudre se réduit donc successivement à

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\Phi}{dr} \right) = 0 \quad \text{puis} \quad \frac{d\Phi}{dr} = \frac{C_1}{r}$$

$$\Phi = C_1 \ln r + C_2 \quad \text{avec} \quad \Phi(r = a) = V_0 \quad \text{et} \quad \Phi(r = b) = 0$$

2. Champs dans les lignes de transmission

Application:
câble coaxial

On en déduit

$$\Phi = V_0 \frac{\ln(r/b)}{\ln(a/b)}$$

ce qui permet de calculer

$$\overline{E} = -\nabla_t \Phi e^{-j\beta z} = \frac{V_0}{\ln(b/a)} \frac{\overline{a_r}}{r} e^{-j\beta z}$$

$$\overline{H} = Y_0 \frac{V_0}{\ln(b/a)} \frac{\overline{a_\phi}}{r} e^{-j\beta z}$$

$$\overline{K} = \overline{n} \times \overline{H} = Y_0 \frac{V_0}{\ln(b/a)} \frac{\overline{a_z}}{a} e^{-j\beta z}$$

sur la surface intérieure

$$\overline{K} = \overline{H} \times \overline{n} = -Y_0 \frac{V_0}{\ln(b/a)} \frac{\overline{a_z}}{b} e^{-j\beta z}$$

sur la surface extérieure

2. Champs dans les lignes de transmission

Application:
câble coaxial

Courant total sur les conducteurs

$$I(r=a) = \oint_{r=a} \overline{H} \cdot \overline{dl} = Y_0 \frac{2\pi V_0}{\ln(b/a)} e^{-j\beta z} \quad \text{intérieur}$$

$$I(r=b) = -I(r=a) \quad \text{extérieur}$$

Impédance caractéristique

$$Z_c = \frac{V_0}{I_0} = \frac{Z_0 \ln(b/a)}{2\pi} \rightarrow \text{lien entre impédance d'onde et impédance caractéristique}$$

Flux de puissance

$$P = (1/2) \operatorname{Re} \int_a^b \int_0^{2\pi} \overline{E} \times \overline{H}^* \cdot \overline{a_r} r d\phi dr$$

Capacité et inductance par unité de longueur

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)} \quad \text{et} \quad L = \frac{\mu}{2\pi} \ln(b/a)$$

**Relation générale
entre Z_c et Z :**

$$Z_c = Z \cdot f(\text{géométrie})$$

3. Lignes de transmission avec pertes

Les pertes peuvent modifier la nature des ondes électromagnétiques

- **pertes dans le milieu**: celui-ci sera caractérisé non plus par une permittivité réelle ε mais par une permittivité complexe $\varepsilon' - j\varepsilon''$ ou par la combinaison d'une permittivité et d'une conductivité
- **pertes dans les conducteurs**: ceux-ci ne sont pas parfaits $\varepsilon - j\sigma/\omega$

Dans les deux cas, on obtient un exposant de propagation complexe

$$\alpha + j\beta$$

La dépendance en z du phaseur devient

$$e^{-\gamma z} = e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$$

3. Lignes de transmission avec pertes

Pertes dans le milieu

$$\bar{J} = \sigma \bar{E} \quad \text{ou} \quad \bar{J} = \omega \varepsilon'' \bar{E}$$

On introduit une solution du type $e^{-\gamma z}$ dans les équations de Maxwell qui deviennent

$$\begin{aligned} \bar{a}_z \times \frac{\partial \bar{H}_t}{\partial z} &= \varepsilon \frac{\partial \bar{E}_t}{\partial t} + \sigma \bar{E}_t \\ \bar{a}_z \times \frac{\partial \bar{E}_t}{\partial z} &= -\mu \frac{\partial \bar{H}_t}{\partial t} \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} \bar{a}_z \times (-\gamma) \bar{H}_t &= (j\omega\varepsilon + \sigma) \bar{E}_t \\ \bar{a}_z \times (-\gamma) \bar{E}_t &= -j\omega\mu \bar{H}_t \end{aligned} \quad \gamma = \alpha + j\beta$$

$$\text{et } \nabla \times \nabla \times \bar{E} = -j\omega\mu \nabla \times \bar{H} = -j\omega\mu(j\omega\varepsilon + \sigma) \bar{E} \quad \longrightarrow \quad \nabla^2 \bar{E} - j\omega\mu(j\omega\varepsilon + \sigma) \bar{E} = 0$$

En faisant un raisonnement similaire au cas sans pertes, on obtient

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)}$$

3. Lignes de transmission avec pertes

Pertes dans le milieu

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}$$

On sépare en parties réelles et imaginaires

$$\gamma^2 = j\omega\mu(j\omega\epsilon + \sigma)$$

$$(\alpha + j\beta)^2 = -\omega^2\epsilon\mu + j\omega\mu\sigma$$

$$(\alpha^2 - \beta^2) + 2j\alpha\beta = -\omega^2\epsilon\mu + j\omega\mu\sigma$$

$$\beta^2 - \alpha^2 = \omega^2\epsilon\mu \quad \text{et} \quad \alpha\beta = \omega\mu\sigma / 2$$

On obtient l'équation

$$\beta^4 - \omega^2\epsilon\mu\beta^2 - (\omega\sigma\mu / 2)^2 = 0$$

3. Lignes de transmission avec pertes

Pertes dans le milieu

On obtient l'équation

$$\beta^4 - \omega^2 \varepsilon \mu \beta^2 - (\omega \sigma \mu / 2)^2 = 0$$

qui a pour solutions

$$\beta^2 = \left(\omega^2 \varepsilon \mu / 2 \right) \left[\sqrt{1 + (\sigma / \omega \varepsilon)^2} + 1 \right]$$
$$\alpha^2 = \left(\omega^2 \varepsilon \mu / 2 \right) \left[\sqrt{1 + (\sigma / \omega \varepsilon)^2} - 1 \right]$$

pour rappel: vitesse de phase $\omega \sqrt{\varepsilon \mu}$
angle de pertes $\operatorname{tg} \delta = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon}$

→ on a toujours

$$\beta \geq \omega \sqrt{\varepsilon \mu} \quad \text{et} \quad \alpha \leq \beta$$

3. Lignes de transmission avec pertes

Pertes dans le milieu

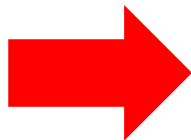
Dans un bon diélectrique (= faibles pertes, c'est quand même le but !)

→ courant de déplacement \gg courant de conduction ($\sigma/\omega\epsilon \ll 1$)

(autrement dit: effet capacitif \gg effet conductif)

→ les expressions précédentes se décomposer en série en faisant l'hypothèse que $\sigma/\omega\epsilon \ll 1$

$$\beta \cong \omega\sqrt{\epsilon\mu} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2 + \dots \right] \cong \omega\sqrt{\epsilon\mu}$$



$$\alpha \cong \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2 + \dots \right] \cong \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

- coefficient de propagation β identique à celui obtenu dans le cas sans pertes
- coefficient d'atténuation α proportionnel à la conductivité σ

3. Lignes de transmission avec pertes

Pertes dans le milieu:
représentation « circuits »

Représentation par une conductance parallèle ou shunt
(dans le plan transverse)

➤ l'équation $\nabla \times \overline{H} = (j\omega\epsilon + \sigma)\overline{E}$

devient, intégrée autour d'un conducteur

$$\oint_C (\nabla \times \overline{H}) \cdot d\overline{l} = I = (j\omega\epsilon + \sigma) \oint_C (-\nabla_t \Phi) \cdot \overline{n} dl = I_d + I_c$$

$$G + j\omega C = (I_d + I_c)/V_0$$

$$G = \frac{I_c}{V_0} = \frac{I_c}{I_d} \frac{I_d}{V_0} = \frac{\sigma}{j\omega\epsilon} j\omega C = \sigma \frac{C}{\epsilon} = \sigma \frac{Z}{Z_0}$$

Formule générale (cfr. CM2)

$$G = \frac{\sigma \oint_{C_1} \overline{E}_t \cdot \overline{n} dl}{\int_{C_1}^{C_2} \overline{E}_t \cdot \overline{n} dl}$$

Câble coaxial (cfr. CM2)

$$G = \frac{2\pi\sigma}{\ln(b/a)}$$

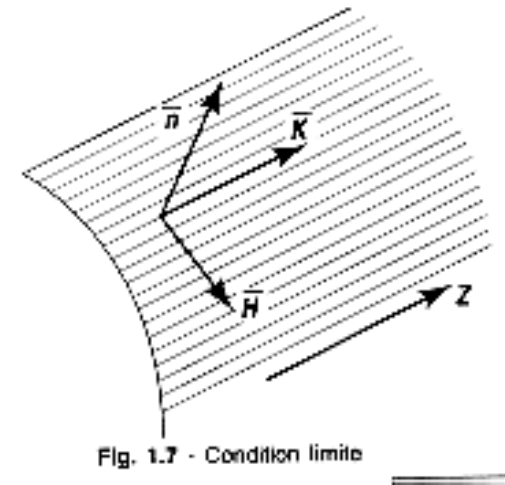
3. Lignes de transmission avec pertes

Pertes dans les conducteurs

En cas de pertes dans les conducteurs, un courant **longitudinal** circule à **l'intérieur** de ces derniers

$$\overline{K}_{long} = \overline{n} \times \overline{H}$$

$$\rightarrow \overline{E}_{long} \quad \text{càd } E_z \neq 0 \quad ! \quad \text{TEM}$$



En toute rigueur, l'onde n'est plus TEM si les pertes sont importantes !

Généralement, ce n'est pas le cas dans les lignes de transmission et on peut donc considérer l'onde comme « quasi »-TEM et calculer le courant et le champ électrique longitudinal à partir des champs TEM calculés en l'absence de pertes

3. Lignes de transmission avec pertes

Pertes dans les conducteurs

Dans un bon conducteur

→ courant de déplacement \ll courant de conduction ($\omega\epsilon/\sigma \ll 1$)

→ partant de $\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}$, on avait trouvé pour α et β

$$\beta^2 = (\omega^2 \epsilon \mu / 2) \left[\sqrt{1 + (\sigma / \omega \epsilon)^2} + 1 \right]$$

$$\alpha^2 = (\omega^2 \epsilon \mu / 2) \left[\sqrt{1 + (\sigma / \omega \epsilon)^2} - 1 \right]$$

qui peuvent se décomposer en série en faisant l'hypothèse que $\omega\epsilon/\sigma \ll 1$

$$\beta \cong \sqrt{\omega\mu\sigma/2} (1 + \omega\epsilon/2\sigma + \dots) \cong \sqrt{\omega\mu\sigma/2}$$

$$\alpha \cong \sqrt{\omega\mu\sigma/2} (1 - \omega\epsilon/2\sigma + \dots) \cong \sqrt{\omega\mu\sigma/2} = \delta^{-1} \quad (\delta \equiv \text{profondeur de peau})$$

$$\gamma \cong \sqrt{j\omega\mu\sigma} (1 + j\omega\epsilon/2\sigma + \dots) \cong \sqrt{j\omega\mu\sigma}$$

Le calcul du coefficient d'atténuation est la démonstration de l'effet de peau (vu au CM2): les champs EM sont confinés à la surface, ils ne pénètrent pas au-delà de quelques « profondeurs de peau »

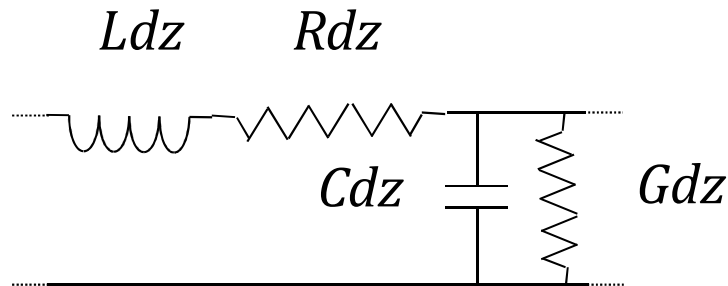
- Plus la fréquence augmente, plus l'atténuation est grande (plus la profondeur de peau diminue)

4. Circuit équivalent d'une ligne de transmission

Circuit équivalent d'une ligne TEM

onde TEM	→	L, C
pertes milieu	→	G (généralement faible)
pertes conducteurs	→	R (généralement faible)

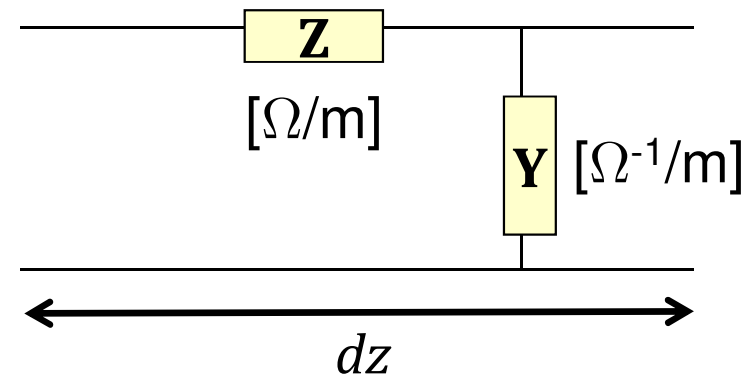
Circuit équivalent infinitésimal (= circuit **distribué**, cfr. CM4)



$$Z = R + j\omega L$$

$$Y = G + j\omega C$$

Ceci n'est pas un filtre !!!



4. Circuit équivalent d'une ligne de transmission

Lien entre les paramètres linéiques et les paramètres fondamentaux

Lignes sans pertes

→

Lignes avec pertes

$$Z_c = \sqrt{L/C}$$

$$Z_c = \sqrt{Z/Y}$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\gamma = j\beta = \omega\sqrt{LC}$$

$$\gamma = \sqrt{ZY}$$

$$\begin{aligned}\gamma &= \alpha + j\beta \\ &= \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}\end{aligned}$$