



LELEC1310

Convertisseurs Électromécaniques

Synthèse du Cours

Clément Van den Eynde

Guillaume van der Rest

Enseignant : Bruno DEHEZ

Table des matières

Introduction	1
1 Rappels	1
1.1 Grandeurs fonctions du temps	1
1.2 Phaseurs	2
1.3 Puissance	3
1.4 Notions d'impédances	5
1.5 Mesures en électrotechnique	5
2 Les transformateurs monophasés	6
2.1 Rappels et lois fondamentales	6
2.2 Le transformateur idéal	7
2.3 Le transformateur parfait	7
2.4 Le transformateur réel	8
2.5 Le transformateur en charge	9
2.6 Essais	11
2.6.1 Essai en court-circuit	11
2.6.2 Essai à vide	11
2.6.3 Circuit équivalent de référence et améliorations	12
2.7 Résumé des deux dernières sections	13
2.8 Caractéristiques	13
2.9 Divers	15
2.9.1 Déphasage	15
2.9.2 Marche en parallèle de transformateurs	15
2.9.3 Transformateur à prises multiples et auto-transformateurs	16
3 Les Transformateurs triphasés	17
3.1 Les systèmes triphasés	17
3.1.1 Intérêt du triphasé	17
3.1.2 Deux types de systèmes triphasés	17
3.1.3 Puissance triphasée	18
3.1.4 Phaseurs	18
3.1.5 Circuit équivalent monophasé (1)	19
3.1.6 Liaisons	20
3.1.7 Grandeurs de ligne et de phase	20
3.1.8 Circuit équivalent monophasé (2)	22
3.1.9 Bornier de connexion	23
3.2 Transformateurs triphasés	23
3.2.1 Grandeurs nominales	23
3.2.2 Indice Horaire	23
3.2.3 Essais	23
4 Théorie générale des convertisseurs	24
4.1 Introduction générale	24
4.1.1 Définition	24
4.1.2 Classification par principe	24
4.1.3 Classification par fonction	24
4.2 Théorie générale	25
4.2.1 Structure	25
4.2.2 Équations fondamentales	25
4.2.3 Bilan énergétique	26
4.2.4 Co-énergie magnétique	28
4.2.5 Couple électromagnétique	28
4.2.6 Couple dans un convertisseur comportant des aimants	29
4.2.7 Classification	30

5	Les machines à champ tournant	31
5.1	Structure	31
5.1.1	Dispositifs	31
5.1.2	Enroulements	31
5.1.3	Relations flux-courants	31
5.1.4	Cas des systèmes triphasés d'enroulements	35
5.1.5	Autres structures	35
5.2	Principe de fonctionnement	36
5.2.1	Structure de base	36
5.2.2	Équations	37
5.2.3	Alimentation par des courants sinusoïdaux	38
5.2.4	Représentation phasorielle	40
5.2.5	Schéma équivalent	40
5.2.6	Courants magnétisants	41
5.2.7	Saturation des matériaux ferromagnétiques	41
6	Machine asynchrone	41
6.1	Conditions d'utilisation	41
6.2	Dispositions constructives particulières	41
6.3	Équations	42
6.3.1	Mise du rotor en circuit ouvert	42
6.3.2	Mise du rotor en court-circuit	42
6.3.3	Notation phasorielle	43
6.4	Schéma équivalent	43
6.5	Caractéristique couple-vitesse	45
6.6	Point de fonctionnement	48
6.7	Effet des matériaux magnétiques	49
6.8	Puissance et rendement	49
6.8.1	Rendements	51
6.9	Problèmes d'utilisation	51
6.9.1	Phases de fonctionnement	51
6.9.2	Couple de démarrage <i>versus</i> rendement	52
6.9.3	Courants et tensions de démarrage	53
6.9.4	Réglage de la vitesse	53
6.10	Moteur asynchrone monophasé	53
6.10.1	Structure de base	54
6.10.2	Fonctionnement en régime	54
6.10.3	Caractéristique couple-vitesse	54
6.11	Démarrage	55
6.11.1	Autres structures	55
7	Machine synchrone	56
7.1	Dispositions constructives particulières	56
7.1.1	L'induit	56
7.1.2	L'inducteur	56
7.2	Équations	58
7.2.1	Équations électriques	58
7.2.2	Couple électromagnétique	59
7.3	Schéma équivalent	60
7.3.1	Bilan de puissance	61
7.4	Diagramme vectoriel	61
7.5	Point de fonctionnement	62
7.5.1	Réglage	64
7.5.2	Stabilité	65
7.6	Régulateurs associés aux alternateurs	66
7.7	Démarrage et synchronisation	68
7.7.1	Moteurs pouvant démarrer de manière autonome	68
7.7.2	Moteurs ne pouvant pas démarrer de manière autonome	69
7.8	Marche en moteur et en alternateur isolé	69
7.9	Détermination des paramètres – Méthode de Potier	69
7.9.1	Essai à vide (induit non connecté au réseau)	69

7.9.2	Essai en court-circuit	70
7.9.3	Essai en parallèle sur le réseau – Essai en déwatté	71
8	Machine à courant continu	72
8.1	Structure de base	72
8.2	Coefficients d'inductances propres et mutuelles	74
8.3	Équations en régime permanent	77
8.4	Fonctionnement en moteur	78
8.4.1	Modes d'excitation	78
8.4.2	Excitation indépendante	79
8.4.3	Excitation par aimants permanents	80
8.4.4	Excitation série	80
8.4.5	Moteur universel	81
8.5	Machine DC à commutation électronique	81

Introduction

Cette synthèse est entièrement basée sur l'excellent cours de *Convertisseurs électromécaniques* dispensé par le professeur *M. Bruno Dehez* dans la filière d'électricité en 3^{ème} année du bachelier à l'École Polytechnique de Louvain (EPL), faculté de l'UCLouvain.

Section 1: Rappels

1.1 Grandeurs fonctions du temps

Avant d'écrire la moindre équation, il convient de rappeler les notations des deux grandeurs principales : le courant et la tension. Sauf indiqué, l'électrotechnique considère — par convention — les grandeurs comme étant des grandeurs efficaces, à l'inverse de l'électronique.

Symbole	Signification
u	Valeur instantanée de la tension
i	Valeur instantanée du courant
U_c, U_p ou U_{max}	Valeur de crête (peak) de la tension
I_c, I_p ou I_{max}	Valeur de crête (peak) du courant
U ou U_{eff}	Valeur efficace (rms) de la tension
I ou I_{eff}	Valeur efficace (rms) du courant
U_{moyr}	Valeur moyenne redressée de la tension
I_{moyr}	Valeur moyenne redressée du courant
ff_u	Facteur de forme sur la tension
ff_i	Facteur de forme sur le courant

TABLE 1 – Diverses notations utiles relatives au courant et à la tension

Note : Les majuscules désignent généralement des grandeurs ne dépendant pas du temps.

Définitions et formules Si $\langle g \rangle$ désigne la valeur moyenne d'une fonction du temps quelconque g , alors

$$\begin{aligned}
 U &= U_{eff} = \sqrt{\langle u^2 \rangle} & \text{et} & & I &= I_{eff} = \sqrt{\langle i^2 \rangle} \\
 U_{moyr} &= \langle |u| \rangle & \text{et} & & I_{moyr} &= \langle |i| \rangle \\
 ff_u &= \frac{U}{U_{moyr}} & \text{et} & & ff_i &= \frac{I}{I_{moyr}}
 \end{aligned}$$

Cas particulier : grandeurs alternatives Une grandeur g est périodique si

$$\exists T \text{ tel que } \forall t, g(t) = g(t + T) \quad (1.1)$$

On définit alors

- La fréquence $f = \frac{1}{T}$ (1.2)

- La pulsation $\omega = 2\pi f$ (1.3)

et

- La valeur moyenne $\langle g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T g dt$ (1.4)

- La valeur efficace $G = \sqrt{\langle g^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T g^2 dt}$ (1.5)

On définit une grandeur alternative comme une grandeur périodique dont la valeur moyenne $\langle g \rangle = 0$.

Cas particulier : grandeurs sinusoïdales

$$g = G_c \cos(\omega t + \phi_g) \Rightarrow \begin{cases} u &= U_c \cos(\omega t + \phi_u) \\ i &= i_c \cos(\omega t + \phi_i) \end{cases} \quad (1.6)$$

On a alors dans ce cas spécifique¹ :

$$\begin{cases} U_c = \sqrt{2}U \\ I_c = \sqrt{2}I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u &= \sqrt{2}U \cos(\omega t + \boxed{\phi_u}) \\ i &= \sqrt{2}I \cos(\omega t + \boxed{\phi_i}) \end{cases} \Rightarrow \phi = \phi_u - \phi_i \quad (1.7)$$

1.2 Phaseurs

Une grandeur sinusoïdale $g = \sqrt{2}G \cos(\omega t + \phi_g)$ peut s'écrire sous une forme phasorielle $\overline{G} = Ge^{j\phi_g}$, qui est évidemment équivalent à $\overline{G} = G \cos(\phi_g) + jG \sin(\phi_g)$. On peut représenter un phaseur au moyen d'un diagramme phasoriel comme montré à la figure 1.

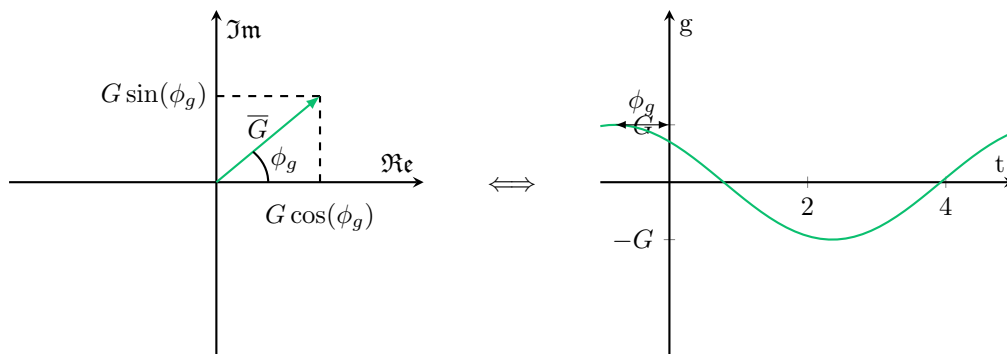


FIGURE 1 – Conversion d'un signal sinusoïdal en phaseur

Conformément aux conventions d'électrotechnique, le module du phaseur correspond à la valeur efficace de la grandeur sinusoïdale, ou plus exactement :

$$\Re[\overline{U}e^{j\omega t}] = U \cos(\omega t + \phi_u) = \frac{u}{\sqrt{2}} \quad (1.8)$$

$$\Im[\overline{U}e^{j\omega t}] = U \sin(\omega t + \phi_u) = \frac{u}{\sqrt{2}} \quad (1.9)$$

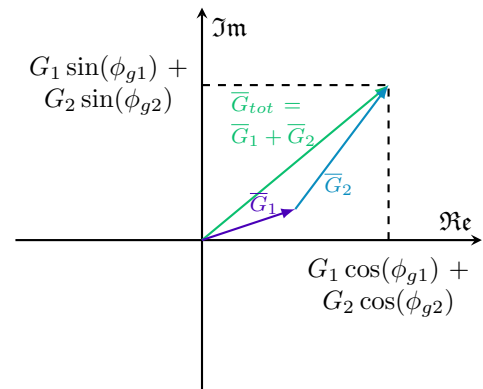
Arithmétique des phaseurs

- Addition

$$\overline{G}_{tot} = \overline{G}_1 + \overline{G}_2 \quad (1.10)$$

$$= G_1 \cos(\phi_{g1}) + G_2 \cos(\phi_{g2}) + j(G_1 \sin(\phi_{g1}) + G_2 \sin(\phi_{g2})) \quad (1.11)$$

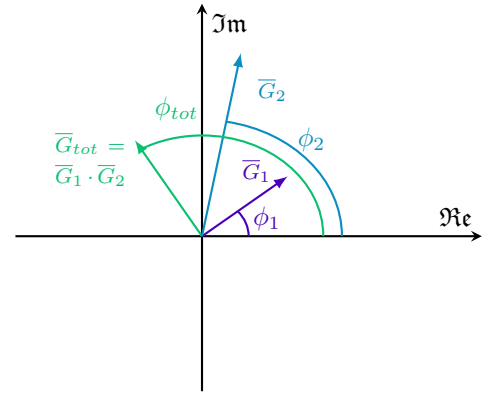
$$\Rightarrow \begin{cases} G_{tot} = \sqrt{(G_1 \cos(\phi_{g1}) + G_2 \cos(\phi_{g2}))^2 + (G_1 \sin(\phi_{g1}) + G_2 \sin(\phi_{g2}))^2} \\ \phi_{tot} = \arctan\left(\frac{G_1 \sin(\phi_{g1}) + G_2 \sin(\phi_{g2})}{G_1 \cos(\phi_{g1}) + G_2 \cos(\phi_{g2})}\right) \end{cases} \quad (1.12)$$



1. Rappelez-vous bien qu'en électrotechnique, les grandeurs sont efficaces par défaut.

- Multiplication

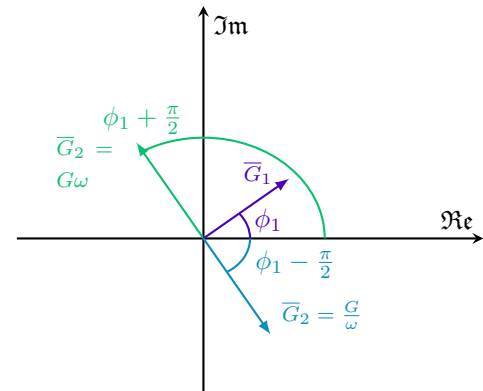
$$\begin{aligned}\bar{G} &= \bar{G}_1 \bar{G}_2 \\ \bar{G}_{tot} &= G_1 G_2 e^{j(\phi_1 + \phi_2)} \Rightarrow \begin{cases} G_{tot} = G_1 G_2 \\ \phi_{tot} = \phi_1 + \phi_2 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.13)$$



- Dérivée et intégrale

$$\bar{G} \xrightarrow{d/dt} j\omega \bar{G} = e^{j\pi/2} \omega \bar{G} = \omega G e^{j(\phi + \pi/2)} \quad (1.14)$$

$$\xrightarrow{\int dt} \frac{1}{j\omega} \bar{G} = e^{-j\pi/2} \frac{1}{\omega} \bar{G} = \frac{G}{\omega} e^{j(\phi - \pi/2)} \quad (1.15)$$



Conventions de signe À l'évidence, le sens des courants se doit d'être respecté dans les équations. La convention est la suivante :

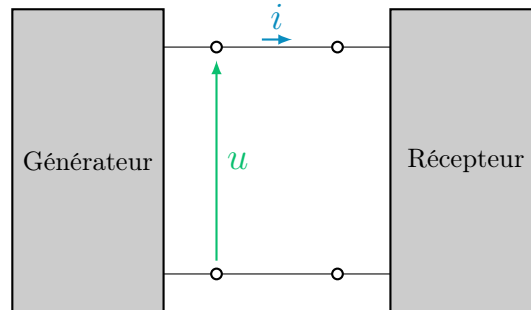


FIGURE 2 – Convention de signe pour un générateur et récepteur

1.3 Puissance

Similairement à la tension et au courant, les notations pour la puissance suivent certaines conventions.

Désignation	Notation	Définition	Unités
Puissance instantanée	p	$p = ui$	W
Puissance active	P	$P = \langle p \rangle = \langle ui \rangle$	W
Puissance apparente	S	$S = UI$	VA
Facteur de puissance	$f.p.$	$f.p. = \frac{P}{S}$	\sim
Puissance réactive	Q	$Q = UI \sin(\phi)$	VAR

TABLE 2 – Diverses notations utiles relatives à la puissance

Grandeurs quelconques Avec des grandeurs quelconques on peut dire :

$$\langle ui \rangle^2 \leq \langle u \rangle^2 \langle i \rangle^2 \implies |P| \leq S \implies -1 < f.p. < 1 \quad (1.16)$$

Grandeurs sinusoïdales Pour la puissance active on a :

$$\left. \begin{aligned} u &= \sqrt{2}U \cos(\omega t + \phi_u) \\ i &= \sqrt{2}I \cos(\omega t + \phi_i) \end{aligned} \right\} \implies P = UI \cos(\phi) \implies f.p. = \cos(\phi) \quad (1.17)$$

Pour la puissance instantanée on a :

$$\left. \begin{aligned} u &= \sqrt{2}U \cos(\omega t + \phi_u) \\ i &= \sqrt{2}I \cos(\omega t + \phi_i) \end{aligned} \right\} \implies p = [\sqrt{2}U \cos(\omega t + \phi_u)] [\sqrt{2}I \cos(\omega t + \phi_i)] \quad (1.18)$$

$$\implies p = UI [\cos(\phi_u - \phi_i) + \cos(2\omega t + \phi_u + \phi_i)] \quad (1.19)$$

$$\implies p = P + S \cos(2\omega t + \phi_u + \phi_i) \quad (1.20)$$

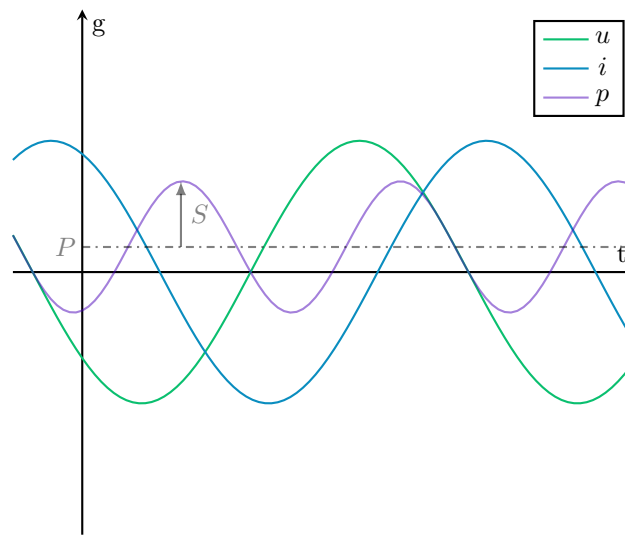


FIGURE 3 – Visualisation des puissances S , P et p

Pour la puissance réactive on a :

$$\left. \begin{aligned} Q &= UI \sin(\phi) \\ P &= UI \cos(\phi) \\ S &= UI \end{aligned} \right\} \implies S^2 = P^2 + Q^2 \quad (1.21)$$

$$P = \Re[\bar{S}] \quad (1.22)$$

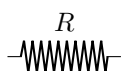
On définit la puissance complexe $\bar{S} = \overline{UI^*}$. Celle-ci possède diverses propriétés :

$$Q = \Im[\bar{S}] \quad (1.23)$$

$$S = |\bar{S}| \quad (1.24)$$

Cas particuliers d'éléments de circuits

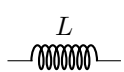
- Résistances



$$u = Ri \Rightarrow \phi = 0^\circ \Rightarrow \begin{cases} Q = 0 \\ P = S > 0 \end{cases}$$

Absorbent uniquement de la puissance active

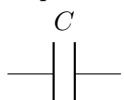
- Inductances



$$u = L \frac{di}{dt} \Rightarrow \phi = 90^\circ \Rightarrow \begin{cases} P = 0 \\ Q = S > 0 \end{cases}$$

Absorbent uniquement de la puissance réactive

- Capacités



$$i = C \frac{dv}{dt} \Rightarrow \phi = -90^\circ \Rightarrow \begin{cases} P = 0 \\ Q = -S < 0 \end{cases}$$

Produisent uniquement de la puissance réactive

Plus généralement, on parlera d'élément inductif lorsque $0 < \phi < 90^\circ$ et d'élément capacitif lorsque $-90 < \phi < 0^\circ$.

1.4 Notions d'impédances

Dans le domaine phasorial l'impédance est définie comme :

$$\bar{Z} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} \quad (1.25)$$

Il s'agit d'un nombre complexe pouvant dépendre de la fréquence (par le terme $\omega = 2\pi f$) et qui ne peut être utilisé que dans le cas de composants linéaires (>< diodes, inductances saturables, ...) ou d'un régime sinusoïdale établi.

Chaque composant d'un circuit a sa propre impédance dont la formule est donné par

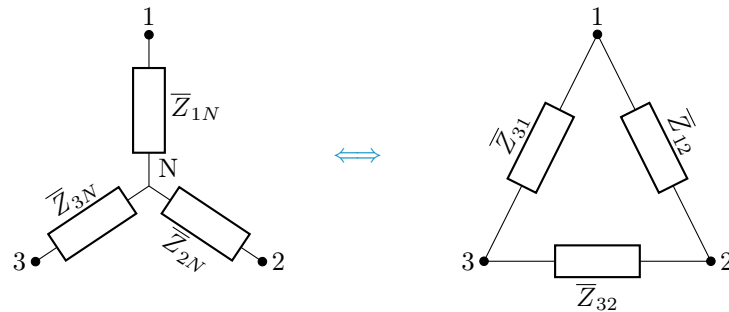
$$\bar{Z} = R \text{ Pour une résistance}$$

$$\bar{Z} = j\omega L \text{ pour une inductance}$$

$$\bar{Z} = \frac{1}{j\omega C} \text{ pour une capacité}$$

Substitutions utiles

- Série – Parallèle : Les impédances en série ou en parallèle se substituent de la même manière que des résistances.
- Étoile – Triangle



$$\bar{Z}_{1N} = \frac{\bar{Z}_{31}\bar{Z}_{12}}{\bar{Z}_{31}\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{32}}$$

$$\bar{Z}_{2N} = \frac{\bar{Z}_{12}\bar{Z}_{23}}{\bar{Z}_{31}\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{32}}$$

$$\bar{Z}_{3N} = \frac{\bar{Z}_{31}\bar{Z}_{23}}{\bar{Z}_{31}\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{32}}$$

 \Leftrightarrow

$$\bar{Z}_{31} = \bar{Z}_{3N} + \bar{Z}_{1N} + \frac{\bar{Z}_{3N}\bar{Z}_{2N}}{\bar{Z}_{2N}}$$

$$\bar{Z}_{12} = \bar{Z}_{1N} + \bar{Z}_{2N} + \frac{\bar{Z}_{1N}\bar{Z}_{2N}}{\bar{Z}_{3N}}$$

$$\bar{Z}_{23} = \bar{Z}_{2N} + \bar{Z}_{3N} + \frac{\bar{Z}_{2N}\bar{Z}_{3N}}{\bar{Z}_{1N}}$$

1.5 Mesures en électrotechnique

Les trois mesures les plus courantes sur une même liaison sont le courant efficace (avec un ampèremètre), la tension efficace (avec un voltmètre) et la puissance active (avec un Wattmètre).

Les valeurs mesurées ne sont jamais tout à fait correctes. Une légère erreur est toujours introduite par l'appareil de mesure qui rajoute une impédance en parallèle au circuit et par de possibles mauvaises liaisons qui rajoutent des impédances en série au circuit.

Pour transformer une impédance en son équivalent série, composé d'une résistance et d'une réactance, il faut utiliser les formules suivantes :

$$R_s = Z \cos(\phi) \quad (1.26)$$

$$X_s = Z \sin(\phi) \quad (1.27)$$

De la même manière, on peut transformer une impédance en son équivalent parallèle avec :

$$R_p = \frac{Z}{\cos(\phi)} \quad (1.28)$$

$$X_p = \frac{Z}{\sin(\phi)} \quad (1.29)$$

Section 2: Les transformateurs monophasés

2.1 Rappels et lois fondamentales

Rappels d'électromagnétisme Un conducteur parcouru par un courant i génère un champ magnétique H .

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = Ni \quad \text{Loi d'ampère} \quad (2.1)$$

La présence d'un matériau ferromagnétique ($\mu_r \gg 1$) permet de canaliser les lignes de champ, comme l'indique la relation

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (2.2)$$

La variation du flux Φ , dont l'expression est donnée par l'équation 2.3, engendre une force électromotrice ϵ sur un circuit fermé.

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} \quad (2.3)$$

$$\epsilon = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (2.4)$$

Structure des transformateurs Deux structures fondamentales pour les transformateurs monophasés existent : la structure en colonne (4a), où les deux bobines sont isolées l'une de l'autre, et la structure en manteau (4), où les deux bobines sont entrelacées.

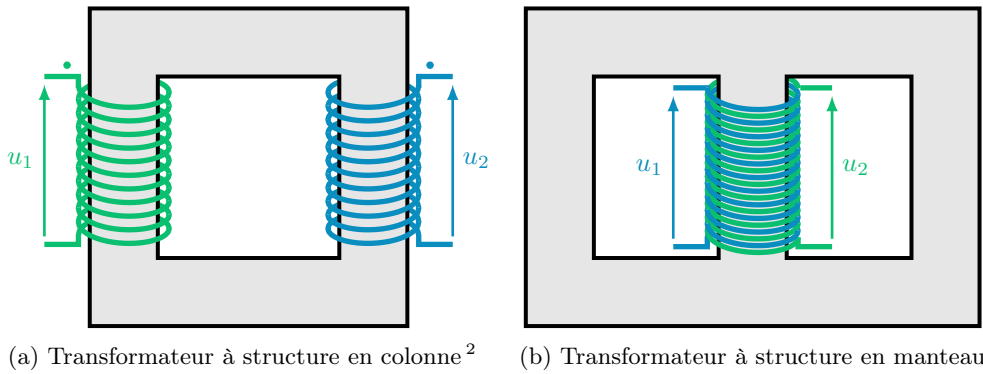


FIGURE 4 – Deux structures courantes de transformateurs

Relation flux–tension En négligeant les fuites magnétiques, le flux est concentré dans le circuit magnétique. Il en résulte que

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= n_1 \Phi \\ \Psi_2 &= n_2 \Phi \\ \frac{\Psi_2}{\Psi_1} &= \frac{n_2}{n_1} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Avec Φ , le flux élémentaire, constant sur le circuit magnétique. Par ailleurs, le flux et la tension sont liés par la loi de Faraday

$$u = \frac{d\Psi}{dt} + Ri \quad (2.6)$$

En négligeant la résistance des conducteurs, on obtient

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{n_1}{n_2} = k \quad (2.7)$$

2. Les • représentent les bornes homologues (voir plus tard)

Relation *fmm*–courant Pour la relation de courant, on applique la loi d’Ampère

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = Ni \quad (2.8)$$

Qui dans notre cas, devient

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = n_1 i_1 + n_2 i_2 \quad (2.9)$$

Sous l’hypothèse d’un matériau ferromagnétique parfait (càd $\mu_r = 0$), on obtient $H = 0$.³
L’équation 2.9 se simplifie alors pour obtenir

$$\begin{aligned} n_1 i_1 + n_2 i_2 &= 0 \\ \frac{i_1}{i_2} &= -\frac{n_2}{n_1} = -\frac{1}{k} \end{aligned} \quad (2.10)$$

2.2 Le transformateur idéal

Hypothèses Dans le transformateur idéal, on effectue les hypothèses suivantes :

H₁: Aucun flux de fuite

H₂: Matériau ferromagnétique parfait

H₃: Résistance des enroulements nulle

Notation Le symbole mathématique du transformateur idéal est le suivant :⁴

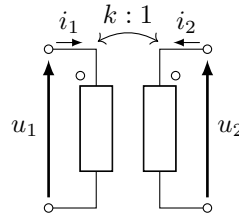


FIGURE 5 – Schéma d’un transformateur idéal

Propriétés

- Non énergétique : $\frac{u_2}{u_1} = -\frac{i_1}{i_2} \Rightarrow u_2 i_2 + u_1 i_1 = 0$
- Manipulations de circuits aisées (voir fig. 6)

2.3 Le transformateur parfait

Le transformateur parfait ne vérifie pas l’hypothèse H₁ (et par extension la H₂ non plus) du transformateur idéal. Cette non-idéalité est modélisée par une inductance en parallèle avec le primaire.

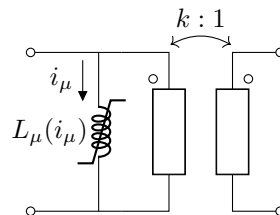


FIGURE 7 – Transformateur parfait

3. Ce résultat s’obtient par la relation $B = H\mu_r$, avec B fini.

4. Les bornes homologues indiquent le sens entrant du courant

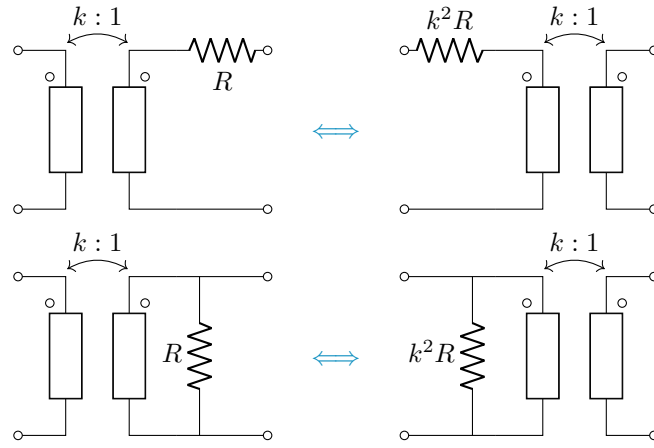


FIGURE 6 – Manipulations autour d'un transformateur

La valeur de cette inductance est donnée par

$$L_\mu = n_1^2 \Lambda \quad (2.11)$$

avec $\Lambda = \frac{1}{\Re}$ où la valeur de \Re est donnée par la loi d'Hopkinson

$$\frac{\Gamma}{\mu S} \quad (2.12)$$

En conséquence, les relations constitutives du transformateur parfait sont non linéaires et cette inductance est en réalité une inductance à saturation, et sa valeur dépend de i_μ .

2.4 Le transformateur réel

Dans le transformateur réel, on rejette l'hypothèse H_3 , et le modèle du transformateur s'enrichit d'une résistance série au primaire comme au secondaire. Ensuite, on considère les pertes sur le flux généré par le

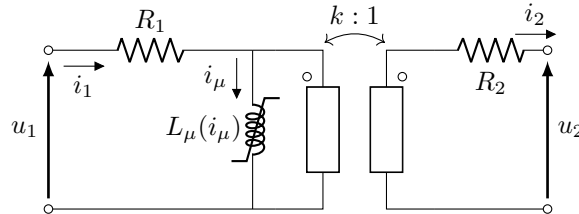


FIGURE 8 – Caption

bobinage mais perdu en dehors du circuit magnétique. Celles-ci sont modélisées par des inductances séries au primaire et au secondaire. Deux autres types de pertes sont aussi considérées : les pertes par hystérésis et les

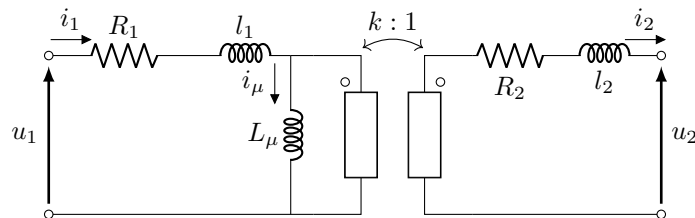
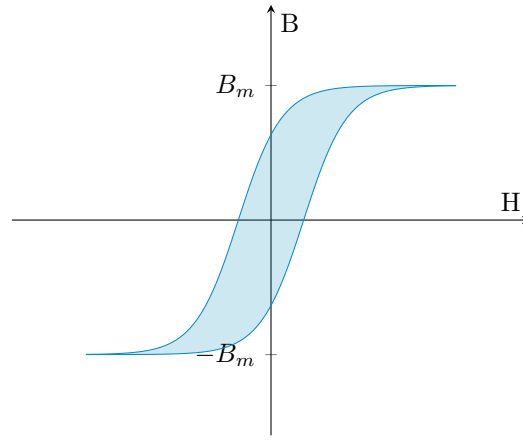


FIGURE 9 – Caption

pertes par courants de foucault. Sans entrer dans trop de détails, les premières sont dues à l'effet d'hystérésis magnétique (relation non-linéaire entre B et H).



$$P_{hyst} = K_h f V B_m^2 \quad (2.13)$$

Avec K_h une constante propre à un matériau.

La seconde est reliée à l'effet des courants de Foucault au sein du matériau.

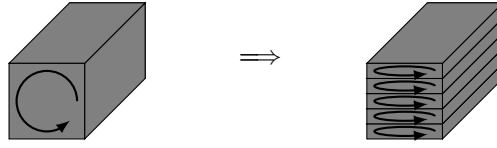


FIGURE 10 – Courants de Foucault : Bloc unique et Tôles multiples

$$P_{fouc} = K_f f^2 V B_m^2 \quad (2.14)$$

Avec K_f une constante propre à un matériau et à l'épaisseur de tôle.

Les pertes totales, qui résultent donc de la somme des deux ci-dessus, sont appelées *pertes fer* ou *pertes magnétiques*. Les pertes fer se traduisent par une résistance R_{pm} en parallèle au primaire. En réalité, d'autres effets

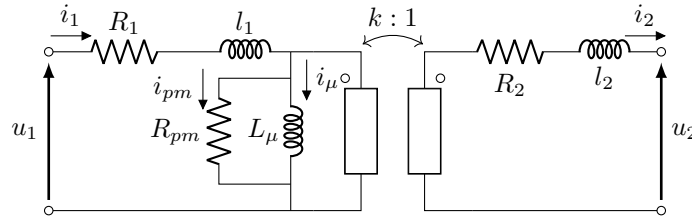


FIGURE 11 – Modèle complet du transformateur réel

non idéaux surviennent. On pourrait penser en tenir compte et enrichir notre modèle de la figure 11. Au lieu de cela, on garde le même modèle mais on détermine la valeur des paramètres expérimentalement.

2.5 Le transformateur en charge

À ce propos, on peut remarquer que déterminer la valeur des paramètres du schéma tel quel est une fameuse gageure, compte tenu de la variation de leur nombre et de la variation de certains selon la fréquence.

Simplification 1 Pour simplifier le schéma, on commence par déplacer les éléments parallèle du primaire :

L'oeil attentif aura remarqué le changement de sens du courant I_2 , dû à la convention de sens définie à la figure 2. Le rapport de transformation devient d'ailleurs complexe. La valeur des nouveaux paramètres se trouve à partir des précédents :

$$\bar{Z}_{po} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_\mu \quad (2.15)$$

$$\bar{Z}'_1 = \frac{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_\mu}{\bar{Z}_\mu} \bar{Z}_1 \quad (2.16)$$

$$\bar{k}_s = \frac{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_\mu}{\bar{Z}_\mu} k \quad (2.17)$$

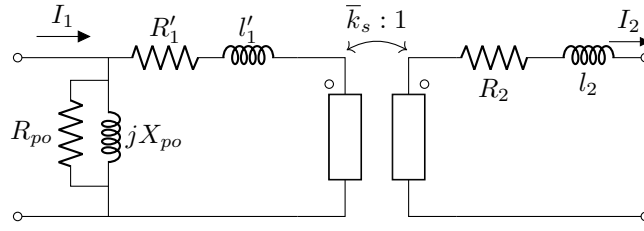


FIGURE 12 – Première simplification : Déplacement des éléments en parallèle

On vient ensuite ramener les éléments série du primaire vers le secondaire.

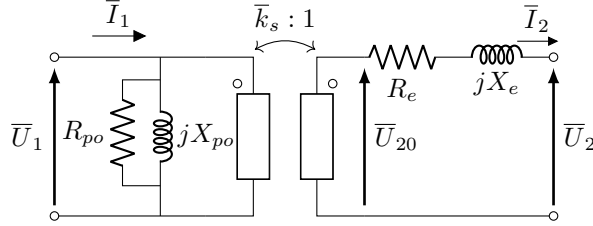


FIGURE 13 – Première simplification : Regroupement des éléments série au secondaire

Les valeurs de \bar{Z}_e et \bar{U}_{20} sont données par les équations suivantes :

$$\bar{Z}_e = \frac{\bar{Z}'_1}{\bar{k}_s^2} + \bar{Z}_2 \quad (2.18)$$

$$\bar{U}_{20} = \frac{\bar{U}_1}{\bar{k}_s} \quad (2.19)$$

Simplification 2 Grâce à la première simplification, nous avons pu réduire de un le nombre d'inconnues sur notre modèle, mais il est nécessaire d'opérer davantage de simplifications. Nous allons considérer l'effet de chaque partie (parallèle et série) individuellement. Sans retranscrire exhaustivement le développement, on arrive au modèle final :

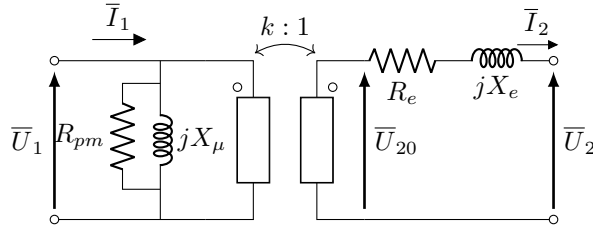


FIGURE 14 – Deuxième simplification

D'une certaine façon, on a simplement ignoré la composante complexe de \bar{k}_s

Effet de la charge En connaissant \bar{U}_1 , on connaît \bar{U}_{20} via k . L'identification se fera via le diagramme de

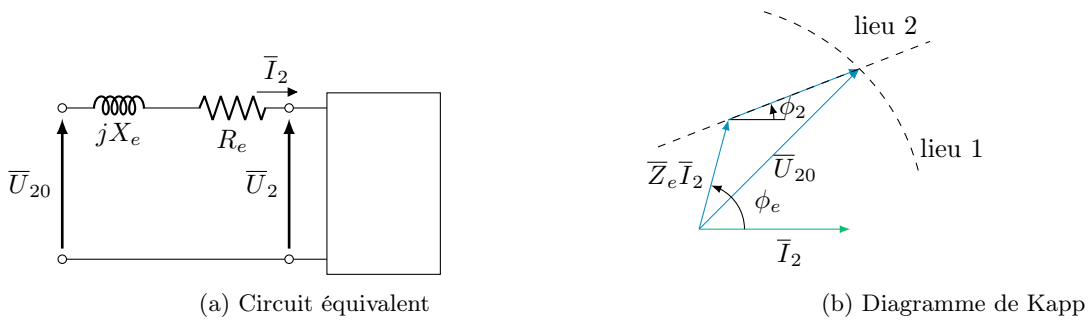


FIGURE 15 – Mise en relation avec une charge

Kapp (figure 15b) et la formule de Pythagore généralisé.

2.6 Essais

L'objectif des essais est de déterminer, le plus simplement possible, la valeur des 5 paramètres du schéma équivalent repris à la figure 14. L'on distingue deux types d'essais principaux : l'essai en court-circuit et l'essai en circuit ouvert.

2.6.1 Essai en court-circuit

Lors de l'essai en court-circuit, un des enroulements est alimenté tandis que l'autre est court-circuité. La puissance transmise, la tension d'alimentation ainsi que le courant d'alimentation sont tous trois mesurés. La valeur du courant est élevée ($0.25I_N \leq I \leq I_N$), à l'inverse des tensions qui sont bien inférieures à leurs valeurs nominales. L'objectif final étant évidemment de déterminer la valeur des éléments série X_e et R_e .

Court-circuit par le secondaire

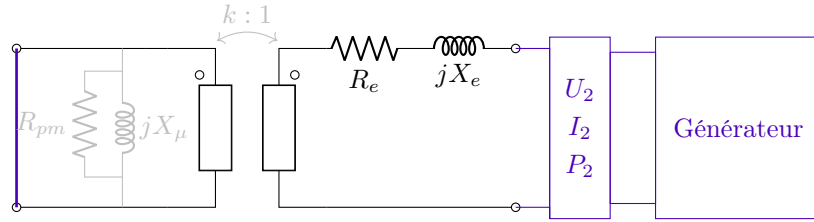


FIGURE 16 – Circuit équivalent d'un essai en court-circuit par le secondaire

R_e et X_e se trouvent par les formules suivantes :

$$Z_e = \frac{U_2}{I_2} \quad (2.20)$$

$$\cos \phi_e = \frac{P_2}{U_2 I_2} \quad (2.21)$$

$$R_e = Z_e \cos \phi_e \quad (2.22)$$

$$X_e = Z_e \sin \phi_e \quad (2.23)$$

Court-circuit par le primaire

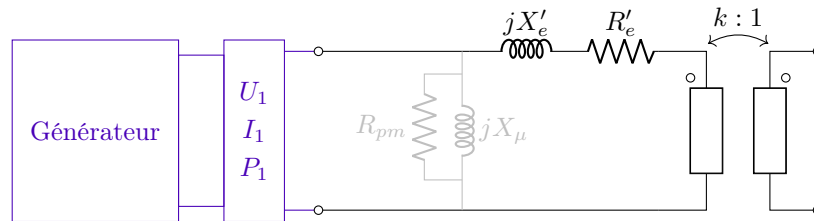


FIGURE 17 – Circuit équivalent d'un essai en court-circuit par le primaire

Ici, on doit ramener \bar{Z}_e au primaire pour en déterminer la valeur. Il est alors mis en parallèle avec \bar{Z}_1 , qu'on ignore car $Z_e \ll Z_1$. R'_e et jX'_e se trouvent alors par les formules suivantes :

$$Z'_e = \frac{U_1}{I_1} \quad (2.24)$$

$$\cos \phi'_e = \frac{P_1}{U_1 I_1} \quad (2.25)$$

$$R'_e = Z'_e \cos \phi'_e \quad (2.26)$$

$$X'_e = Z'_e \sin \phi'_e \quad (2.27)$$

On se rappellera évidemment la figure 6 pour retrouver \bar{Z}_e à partir de \bar{Z}'_e .

2.6.2 Essai à vide

Lors de l'essai en circuit ouvert, un des enroulements est alimenté tandis que l'autre est laissé ouvert. On a dans ce cas des tensions élevées ($U = U_N$) à l'inverse des courants qui eux sont bien inférieurs à leurs valeurs nominales. L'objectif est ici de déterminer les éléments parallèles X_μ et R_{pm} .

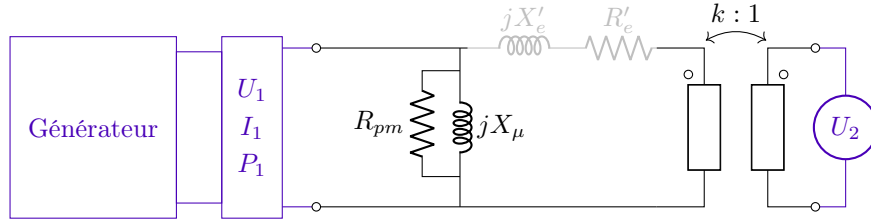
Circuit ouvert par le primaire

FIGURE 18 – Circuit équivalent d'un essai en circuit ouvert par le primaire

R_{pm} et X_{μ} se trouvent par les formules suivantes :

$$Z_{\mu} = \frac{U_1}{I_1} \quad (2.28)$$

$$\cos \phi_{\mu} = \frac{P_1}{U_1 I_1} \quad (2.29)$$

$$R_{pm} = \frac{Z_{\mu}}{\cos \phi_{\mu}} \quad (2.30)$$

$$X_{\mu} = \frac{Z_{\mu}}{\sin \phi_{\mu}} \quad (2.31)$$

$$U_2 = U_{20} \rightarrow k = \frac{U_1}{U_{20}} \quad (2.32)$$

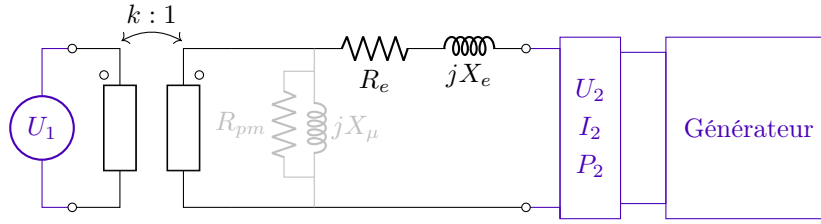
Circuit ouvert par le secondaire

FIGURE 19 – Circuit équivalent d'un essai en circuit ouvert par le secondaire

R'_{pm} et X'_{μ} se trouvent par les formules suivantes :

$$Z'_{\mu} = \frac{U_2}{I_2} \quad (2.33)$$

$$\cos \phi'_{\mu} = \frac{P_2}{U_2 I_2} \quad (2.34)$$

$$R'_{pm} = \frac{Z'_{\mu}}{\cos \phi'_{\mu}} \quad (2.35)$$

$$X'_{\mu} = \frac{Z'_{\mu}}{\sin \phi'_{\mu}} \quad (2.36)$$

$$U_1 = U_{10} \rightarrow k = \frac{U_2}{U_{10}} \quad (2.37)$$

2.6.3 Circuit équivalent de référence et améliorations

Pour les essais en court-circuit et les essais à vide on peut supposer que :

$$X_1 = X'_2 \rightarrow \begin{cases} X_1 &= \frac{X'_e}{2} \\ X'_2 &= \frac{X'_e}{2} \end{cases} \quad (2.38)$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_{1DC}}{R_{2DC}} \rightarrow \begin{cases} R_1 &\cong \frac{R'_e}{R_{1DC} + k^2 R_{2DC}} R_{1DC} \\ R_2 &\cong \frac{R'_e}{R_{1DC} + k^2 R_{2DC}} R_{2DC} \end{cases} \quad (2.39)$$

où R_{1DC} et R_{2DC} sont les résistances en courant continu respectivement au primaire et au secondaire. On peut améliorer l'essai à vide en tenant compte des éléments série. Dans ce cas on obtient :

$$\bar{Z}_\mu = \bar{Z}_0 - R_1 - jX_1 \quad (2.40)$$

$$k = \frac{Z_\mu}{Z_0} \frac{U_1}{U_{20}} \xrightarrow{\text{Valable uniquement si}} Z_1 \ll Z_0 \quad (2.41)$$

On ne peut toutefois pas améliorer l'essai en court circuit en tenant compte des éléments parallèles car son niveau de saturation est beaucoup plus faible qu'en fonctionnement normal dû au fait qu'il s'effectue à tension réduite.

2.7 Résumé des deux dernières sections

Résumons un peu de manière concise ce dont on vient de parler dans les sections précédentes. Le schéma équivalent de référence complet d'un transformateur est donné à la figure 20

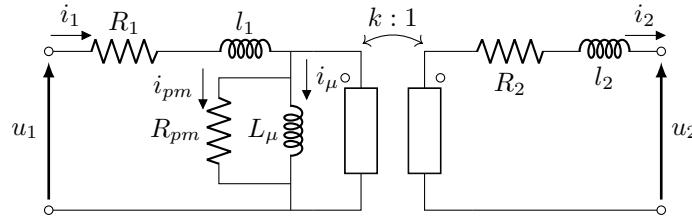


FIGURE 20 – Modèle complet du transformateur réel

Ce schéma n'est pas des plus pratiques car il a 7 paramètres indépendants à déterminer. On peut donc le simplifier de manière à n'avoir plus que 5 paramètres indépendants. En considérant $Z_1 \ll Z_\mu$, on obtient la figure 21⁵.

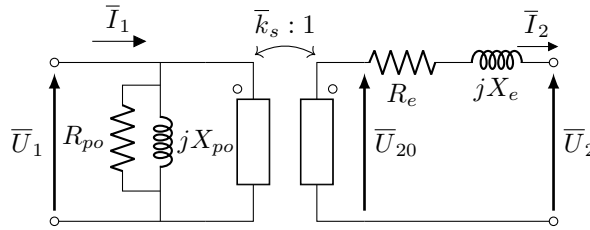


FIGURE 21 – Schéma équivalent simplifié

Dans ce schéma simplifié on définit :

$$X_e = \frac{\omega l_1}{k^2} + \omega l_2 \quad (2.42)$$

$$R_e = \frac{R_1}{k^2} + R_2 \quad (2.43)$$

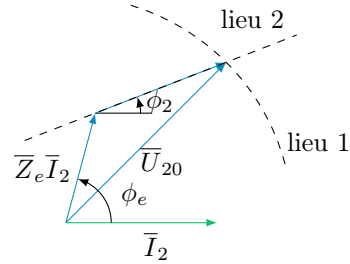
La caractéristique externe est donnée par :

$$1 = \left(\frac{U_2}{U_{20}} \right)^2 + 2 \frac{U_2}{U_{20}} \frac{I_2}{I_{cc}} \cos(\phi_e - \phi_2) + \left(\frac{I_2}{I_{cc}} \right)^2$$

Si $Z_e \ll \frac{U_2}{I_2}$ et que donc $I_2 \ll I_{2cc}$ alors

$$U_2 = U_{20} - Z_e I_2 \cos(\phi_e - \phi_2)$$

Avec le digramme de Kapp correspondant :



2.8 Caractéristiques

Les transformateurs monophasés ont plusieurs caractéristiques spécifiques dont nous allons parler ici.

5. Pour savoir comment passer de l'un à l'autre, nous vous renvoyons à la section 2.5

Valeurs nominales En ce qui concerne les valeurs nominales, il y a plusieurs choses à dire.

- Ce sont les valeurs inscrites sur la plaquette signalétique du transformateur
- Il s'agit de valeurs efficaces
- Elles correspondent à un fonctionnement normal (C'est à dire pas lors d'un essai).

En pratique, les deux valeurs nominales standards sont : la tension au primaire $U_{1N} = 230$ V et la fréquence $f_N = 50$ Hz.

Si la tension primaire dépasse sa valeur nominale le champ magnétique va augmenter. Cela aura deux conséquences :

- Une surchauffe du noyau magnétique
- Une augmentation importante du courant magnétisant dû à la saturation magnétique

La tension nominale secondaire n'est pas choisie arbitrairement mais elle est définie comme la tension à vide quand le primaire est à la tension nominale.

$$U_{2N} = U_2 \quad \text{quand} \quad U_1 = U_{1N} \quad \text{et} \quad I_2 = 0 \quad (2.44)$$

En ce qui concerne le courant et la puissance au secondaire :

- Les pertes joules peuvent induire une surchauffe du transformateur si le courant dépasse sa valeur nominale (En effet les pertes et le courant sont liés)
- Le courant nominal se trouve avec la puissance nominale par la formule :

$$I_{2N} = \frac{S_{2N}}{U_{2N}} \quad (2.45)$$

Avec S_{2N} La puissance apparente car on ne peut évidemment pas prédire le facteur de puissance de la charge.

En considérant le comportement du transformateur comme celui d'un transformateur idéal ($S_{1N} = S_{2N} = S_N$) Le courant primaire nominal se trouve de la même manière qu'au secondaire mais avec les valeurs du primaire :

$$I_{1N} = \frac{S_N}{U_{1N}} \quad \text{Si} \quad I_0 \ll I_{1N} \quad \text{et} \quad Z_e I_{2N} \ll U_{2N}. \quad (2.46)$$

Courant de court-circuit Il s'agit du courant lorsqu'un enroulement est court-circuité et que l'autre est à tension nominale.

$I_{cc} \gg I_N$ donc, comme mentionné précédemment, le mesurer peut endommager le transformateur. Il permet tout de même de déterminer les éléments séries du schéma équivalent avec les essais comme expliqué dans la section 2.6.

Tension de court-circuit Il s'agit de la tension nécessaire pour que circule un courant nominal lorsque l'autre enroulement est court-circuité.

$U_{cc} \ll U_N$, on peut donc le mesurer sans risque et il permet de déterminer les éléments série du schéma équivalent avec les essais comme expliqué dans la section 2.6.

Pertes Deux pertes existent quand on parle de transformateurs monophasés :

- Les pertes magnétiques, aussi appelées "pertes fer" ou "pertes fixes" (car elles sont quasi indépendantes de la charge) :

$$P_{fer} = \frac{E^2}{R_p} \cong \frac{U_1^2}{R_p} \quad (2.47)$$

- Les pertes par effet Joule, aussi appelées "pertes dues à la charge" :

$$P_{Joule} = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 \cong R_e I_2^2 \quad \text{avec} \quad R_e = \frac{R_1}{k^2} + R_2 \quad (2.48)$$

Rendement Le rendement est défini comme :

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} \Rightarrow \eta = \frac{P_2}{P_2 + P_{pertes}} \Rightarrow \eta = \frac{U_2 I_2 \cos(\phi_2)}{U_2 I_2 \cos(\phi_2) + P_{fer} + P_{Joule}} \quad (2.49)$$

Il existe évidemment un rendement optimum défini comme :

$$\frac{\delta \eta}{\delta I_2} = 0 \Rightarrow P_{fer} = P_{Joule} \quad (2.50)$$

Cela en supposant qu'à tension primaire fixée, il en est de même au secondaire.

En pratique, cela signifie qu'on cherche à rapprocher le plus possible les pertes Joule et fer en trouvant le courant nominal optimal.

2.9 Divers

2.9.1 Déphasage

Un changement de signe de transmission est induit par une inversion des bornes d'un des enroulements. On tient compte de ce changement dans le schéma équivalent par l'ajout d'un déphaseur.

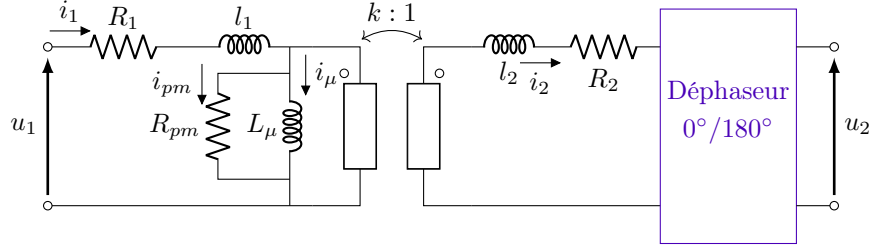


FIGURE 22 – Schéma équivalent avec Déphaseur

2.9.2 Marche en parallèle de transformateurs

Deux transformateurs fonctionnant en parallèle, tel que montré à la figure 23 additionnent leur puissance apparente.

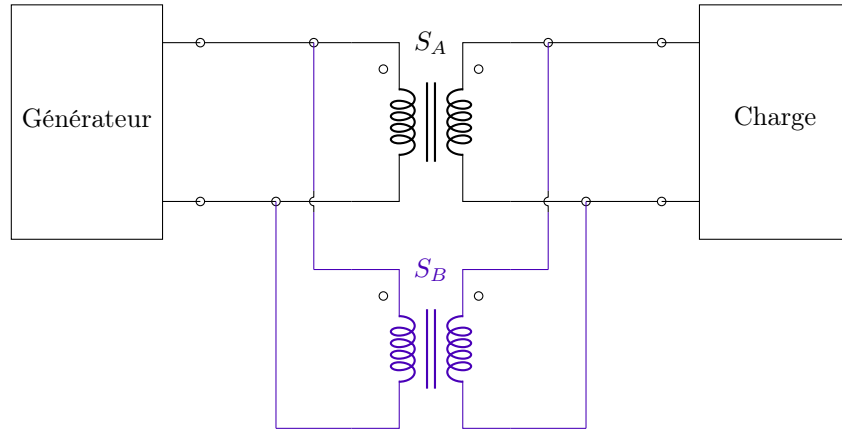


FIGURE 23 – Mise en parallèle de deux transformateurs

$$S_{tot} \cong S_A + S_B \quad (2.51)$$

Il y a tout de même quelques conditions à respecter pour pouvoir les mettre en parallèles :

- Les enroulements secondaires doivent être connectés dans le même sens par rapport aux bornes de référence
- Pour éviter un courant à vide, il faut que les tensions secondaires à vide soient identiques :

$$U_{2A} = U_{2B} \Rightarrow k_A = k_B \quad (2.52)$$

- Les tensions secondaires de court-circuit doivent être identiques afin d'assurer une répartition de puissance respectant les rapports de puissance nominale des transformateurs :

$$U_{2ccA} = U_{2ccB} \quad (2.53)$$

- Les déphasages introduits par chacun des transformateurs doivent être identiques :

$$\phi_{2A} = \phi_{2B} \quad (2.54)$$

On peut faire usage d'un transformateur d'équilibrage, comme sur la figure 24, pour combler les petites erreurs qui pourraient survenir.

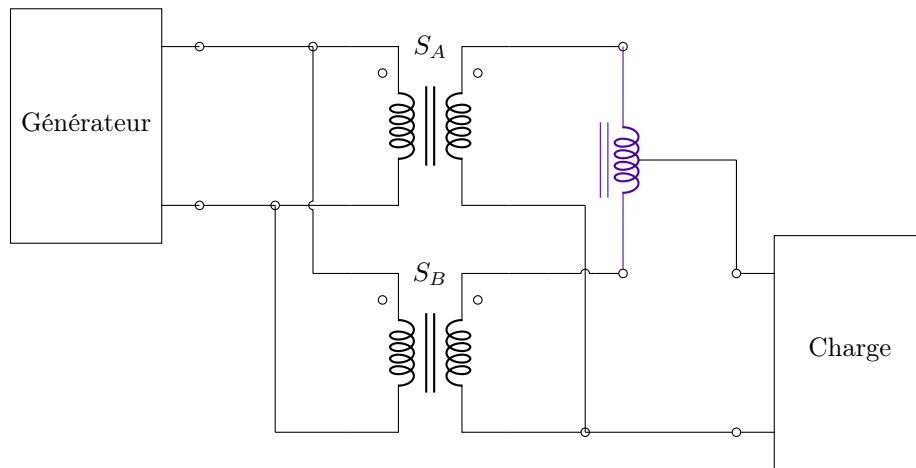


FIGURE 24 – Mise en parallèle de deux transformateurs

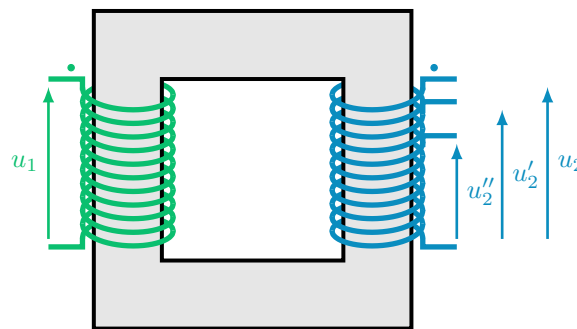


FIGURE 25 – Transformateur à structure en colonne à prises multiples

2.9.3 Transformateur à prises multiples et auto-transformateurs

Transformateur à prises multiples Ce type de transformateurs, comme montré à la figure 25 permet d'adapter l'enroulement secondaire pour contrôler le niveau de tension. Cela a plusieurs avantages comme maintenir une tension relativement constante malgré une variation de la charge.

Pour effectuer le changement de prise on peut :

- Ouvrir le circuit pour déplacer la connexion d'une prise à l'autre
- Court-circuiter les prises pour éviter l'interruption d'alimentation
- Court-circuiter les prises via un dispositif (résistances, selfs à point milieu) limitant le courant de court-circuit

Auto-transformateurs Ces transformateurs n'utilisent qu'un seul enroulement duquel sort trois branches : l'entrée, la terre et la sortie, comme le montre la figure 26.

Ce type de configuration permet une économie de fil électrique mais n'assure pas une isolation galvanique⁶ entre le primaire et le secondaire.

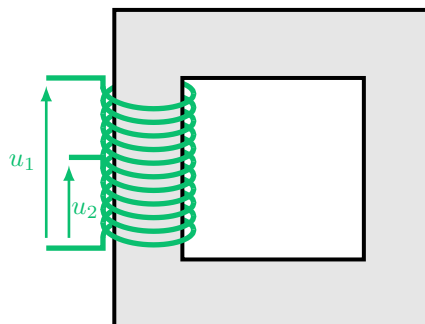


FIGURE 26 – Auto-transformateur (à rapport de transformation éventuellement variable)

6. "Qui a rapport aux courants électriques"

Section 3: Les Transformateurs triphasés

3.1 Les systèmes triphasés

3.1.1 Intérêt du triphasé

Dans un système monophasé classique, la puissance instantanée p n'est pas constante : elle oscille autour de P à une magnitude S . L'objectif du système triphasé est de combiner trois systèmes monophasés déphasés de $2\frac{\pi}{3}$ l'un de l'autre pour "lisser" la puissance.

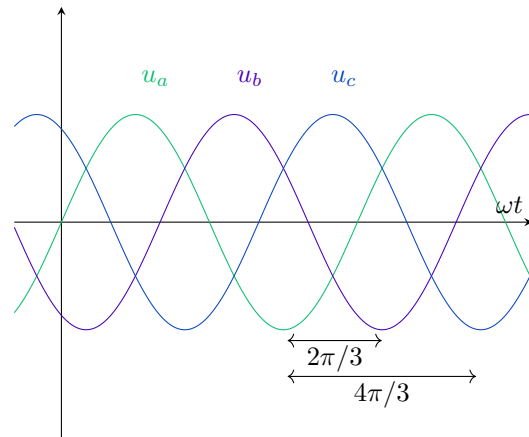
3.1.2 Deux types de systèmes triphasés

L'on mentionnait précédemment le déphasage de $2\frac{\pi}{3}$ entre deux phases du système, sans préciser si ce déphasage était positif ou négatif. En réalité, deux types de systèmes existent.

Les systèmes directs Dans le système direct, les trois phases ont pour équations constitutives :

$$\begin{aligned} u_a &= \sqrt{2}U_{ph,a} \cos(\omega t + \phi_u) \\ u_b &= \sqrt{2}U_{ph,b} \cos(\omega t + \phi_u - \frac{2\pi}{3}) \\ u_c &= \sqrt{2}U_{ph,c} \cos(\omega t + \phi_u - \frac{4\pi}{3}) \\ i_a &= \sqrt{2}I_{ph,a} \cos(\omega t + \phi_i) \\ i_b &= \sqrt{2}I_{ph,b} \cos(\omega t + \phi_i - \frac{2\pi}{3}) \\ i_c &= \sqrt{2}I_{ph,c} \cos(\omega t + \phi_i - \frac{4\pi}{3}) \end{aligned}$$

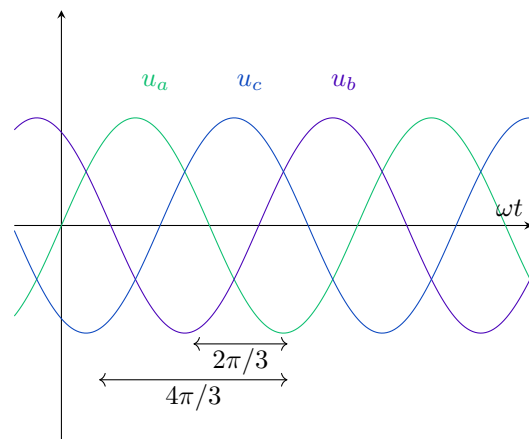
u_a est en avance sur u_b qui est en avance sur u_c .



Les systèmes inverses Dans le système inverse, les trois phases ont pour équations constitutives :

$$\begin{aligned} u_a &= \sqrt{2}U_{ph,a} \cos(\omega t + \phi_u) \\ u_b &= \sqrt{2}U_{ph,b} \cos(\omega t + \phi_u + \frac{2\pi}{3}) \\ u_c &= \sqrt{2}U_{ph,c} \cos(\omega t + \phi_u + \frac{4\pi}{3}) \\ i_a &= \sqrt{2}I_{ph,a} \cos(\omega t + \phi_i) \\ i_b &= \sqrt{2}I_{ph,b} \cos(\omega t + \phi_i + \frac{2\pi}{3}) \\ i_c &= \sqrt{2}I_{ph,c} \cos(\omega t + \phi_i + \frac{4\pi}{3}) \end{aligned}$$

u_c est en avance sur u_b qui est en avance sur u_a .



Lorsque $U_{ph,a} = U_{ph,b} = U_{ph,c}$, on parle de système triphasé équilibré de tension, conversément pour les courants.

3.1.3 Puissance triphasée

La puissance instantanée pour chaque phase est donnée par

$$p_a = u_a i_a = P_a + S_a \cos(2\omega t + \phi_u + \phi_i) \quad (3.1)$$

$$p_b = u_b i_b = P_b + S_b \cos(2\omega t + \phi_u + \phi_i - \frac{4\pi}{3}) \quad (3.2)$$

$$p_c = u_c i_c = P_c + S_c \cos(2\omega t + \phi_u + \phi_i - \frac{2\pi}{3}) \quad (3.3)$$

La puissance totale est donnée par la somme sur les trois phases :

$$p = p_a + p_b + p_c \quad (3.4)$$

On peut démontrer que, dans un système équilibré en tension et en courant ($P_a = P_b = P_c = P$) et ($S_a = S_b = S_c = S$) :

$$p = 3P + S(\cos(2\omega t + \phi_u + \phi_i) + \cos(2\omega t + \phi_u + \phi_i - \frac{2\pi}{3}) + \cos(2\omega t + \phi_u + \phi_i - \frac{4\pi}{3})) \quad (3.5)$$

En se rappelant que $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$:

$$p = 3P = 3U_{ph} I_{ph} \cos \phi \quad (3.6)$$

où $\phi = \phi_u - \phi_i$.

3.1.4 Phaseurs

Il est évidemment possible d'exprimer les trois phases de façon phasorielle :

$$\left. \begin{aligned} u_a &= \sqrt{2}U_{ph} \cos(\omega t + \phi_u) \\ u_b &= \sqrt{2}U_{ph} \cos(\omega t + \phi_u - \frac{2\pi}{3}) \\ u_c &= \sqrt{2}U_{ph} \cos(\omega t + \phi_u - \frac{4\pi}{3}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \bar{U}_a &= U_{ph} e^{j\phi_u} \\ \bar{U}_b &= U_{ph} e^{j(\phi_u - 2\pi/3)} \\ \bar{U}_c &= U_{ph} e^{j(\phi_u - 4\pi/3)} \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\left. \begin{aligned} i_a &= \sqrt{2}U_{ph} \cos(\omega t + \phi_i) \\ i_b &= \sqrt{2}U_{ph} \cos(\omega t + \phi_i - \frac{2\pi}{3}) \\ i_c &= \sqrt{2}U_{ph} \cos(\omega t + \phi_i - \frac{4\pi}{3}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \bar{I}_a &= I_{ph} e^{j\phi_i} \\ \bar{I}_b &= I_{ph} e^{j(\phi_i - 2\pi/3)} \\ \bar{I}_c &= I_{ph} e^{j(\phi_i - 4\pi/3)} \end{cases} \quad (3.8)$$

Puisque seul un déphasage différencie ces trois phaseurs, il est possible de simplifier leur expression en définissant $\bar{a} = e^{j2\pi/3}$. Les expressions deviennent alors ⁷ :

$$\bar{U}_a = \bar{U} \quad \bar{I}_a = \bar{I} \quad (3.9)$$

$$\bar{U}_b = \bar{a}^2 \bar{U} \quad \bar{I}_b = \bar{a}^2 \bar{I} \quad (3.10)$$

$$\bar{U}_c = \bar{a} \bar{U} \quad \bar{I}_c = \bar{a} \bar{I} \quad (3.11)$$

$$(3.12)$$

Ce qui nous permet de trouver des équations relativement simples pour les différentes puissances :

$$\bar{S}_{3\phi} = \bar{U}_a \bar{I}_a^* + \bar{U}_b \bar{I}_b^* + \bar{U}_c \bar{I}_c^* \Rightarrow \bar{S}_{3\phi} = \bar{U} \bar{I}^* + \bar{a}^2 \bar{U} \bar{a}^{-2} \bar{I}^* + \bar{a} \bar{U} \bar{a}^{-1} \bar{I}^* \Rightarrow \bar{S}_{3\phi} = 3 \bar{U} \bar{I}^* \quad (3.13)$$

$$\Rightarrow P_{3\phi} = \Re(\bar{S}_{3\phi}) = 3UI \cos \phi \quad (3.14)$$

$$\Rightarrow Q_{3\phi} = \Im(\bar{S}_{3\phi}) = 3UI \sin \phi \quad (3.15)$$

7. Remarquez que ces exemples utilisent le système triphasé direct équilibré

3.1.5 Circuit équivalent monophasé (1)

Comme il est plus simple de manipuler des systèmes monophasés, on va transformer un système triphasé en trois circuits monophasés identiques juxtaposés et non couplés qui permettront de reproduire son comportement. On considère donc une seule des trois phases en posant :

$$\begin{cases} u &= \alpha u_a \\ i &= \alpha i_a \end{cases} \quad (3.16)$$

Généralement on choisira $\alpha = 1$. En phasoriel et en ce qui concerne les puissances cela donne pour chacune des phases :

$$\begin{cases} \bar{U}_a &= \bar{U} \\ \bar{U}_b &= a^2 \bar{U} \\ \bar{U}_c &= a \bar{U} \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_{3\phi} &= 3UI \\ P_{3\phi} &= 3UI \cos \phi \\ Q_{3\phi} &= 3UI \sin \phi \end{cases} \quad (3.18)$$

$$\begin{cases} \bar{I}_a &= \bar{I} \\ \bar{I}_b &= a^2 \bar{I} \\ \bar{I}_c &= a \bar{I} \end{cases} \quad (3.19)$$

Si les phases d'un système triphasé sont couplées, comme pour une inductance triphasée tel que montré à la figure 27, alors on ne peut pas déterminer les paramètres du circuit équivalent monophasé à partir d'une phase seule ni en effectuant des mesures sur cette même phase seule. Pour ce faire, on aura besoin de l'inductance mutuelle M . Chaque inductance prendra alors comme valeur : $L_p - M$. Les deux schémas de la figure 27 sont équivalents.

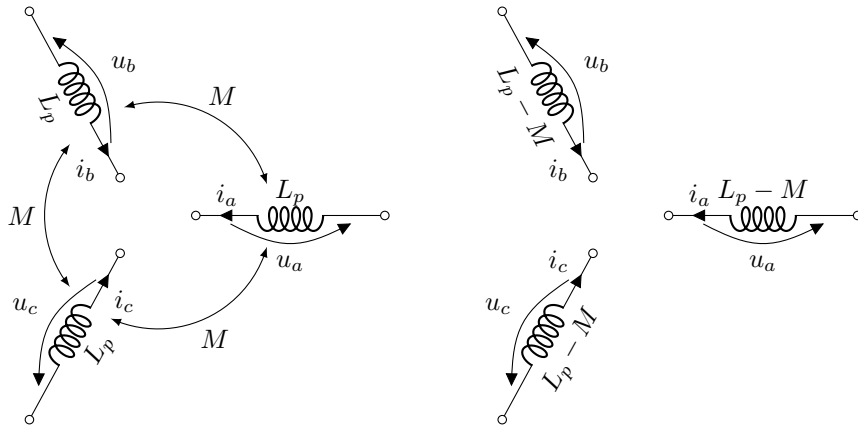


FIGURE 27 – Inductance triphasée constituée de trois inductances couplées

Les sources de tensions triphasées peuvent être modélisées par trois sources monophasées, c'est ce que nous allons considérer pour la suite par simplicité, mais ce n'est en pratique pas toujours le cas.

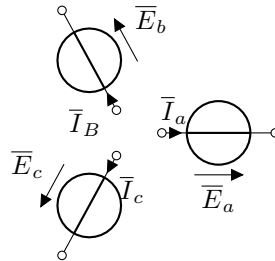


FIGURE 28 – Source de tension triphasée

3.1.6 Liaisons

instinctivement, on aurait tendance à vouloir représenter un système triphasé avec 6 fils. Un pour chaque tension et un pour chaque courant. Cela fonctionne mais on remarque vite que 4 fils sont suffisants pour définir 3 tensions et 3 courants, comme le montre la figure 29.

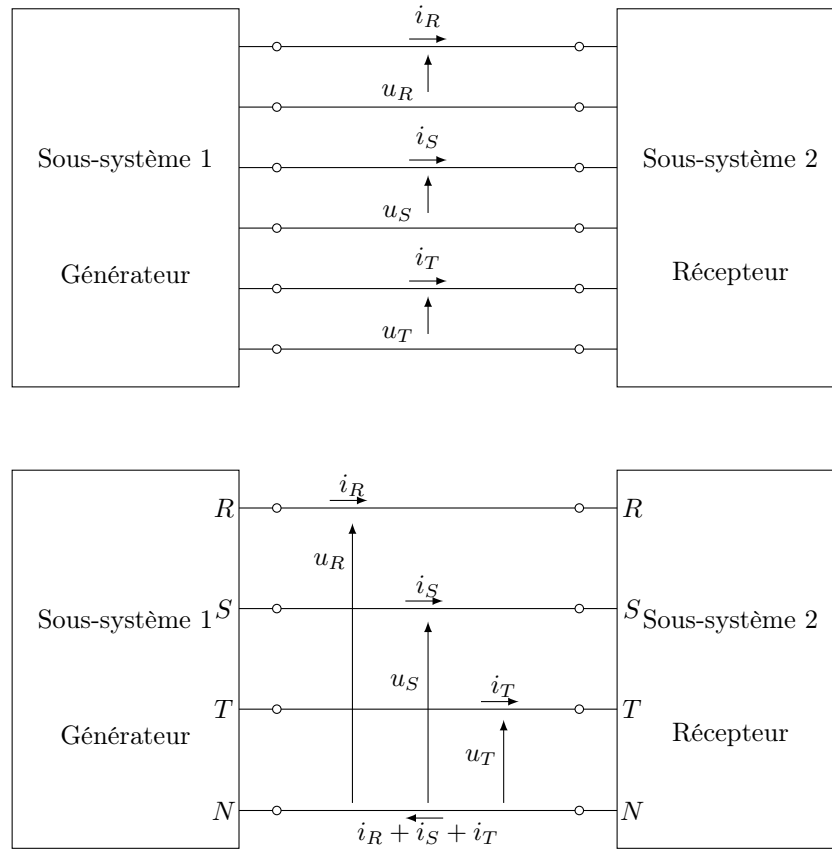
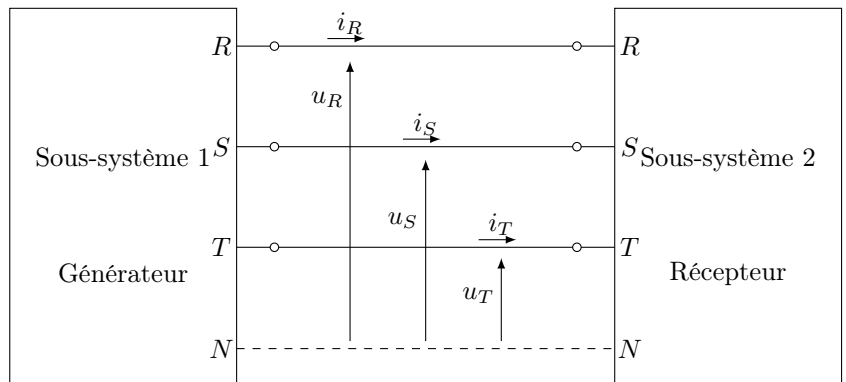


FIGURE 29 – liaisons à 4 fils d'un système triphasé

On peut même pousser le vice jusqu'à n'utiliser que 3 fils si on est en présence d'un système équilibré. C'est-à-dire quand

$$i_R + i_S + i_T = 0$$

On obtient alors le schéma de la figure ci-contre



3.1.7 Grandeurs de ligne et de phase

En regardant le schéma de la figure 30 du côté liaisons, on peut définir déjà les grandeurs de ligne et de phase du système.

- Le courant de ligne correspond au courant dans l'une des trois phases, c'est à dire l'une des trois lignes \bar{I}_R , \bar{I}_S et \bar{I}_T . Il est par conséquent confondu avec le courant de phase.
- La tension de ligne correspond à la tension entre deux phases : \bar{U}_{RS} , \bar{U}_{ST} et \bar{U}_{TR} .
- La tension de phase correspond à la tension entre une phase et le neutre, même si ce dernier est fictif : \bar{U}_{RN} , \bar{U}_{SN} et \bar{U}_{TN} .

🔍 En électrotechnique, les grandeurs — sauf contre-indication — sont des grandeurs de ligne.

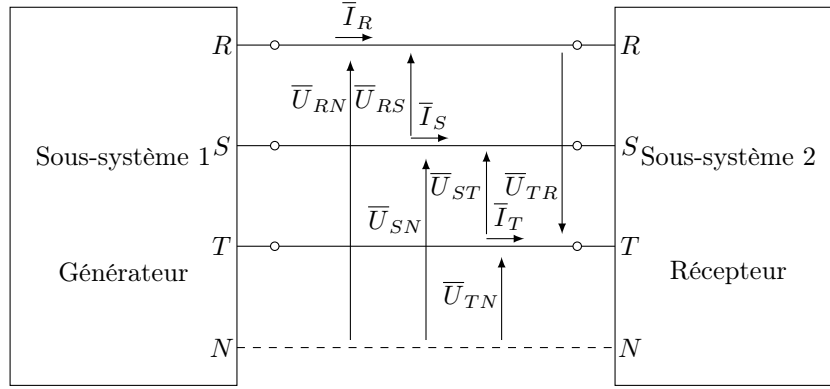
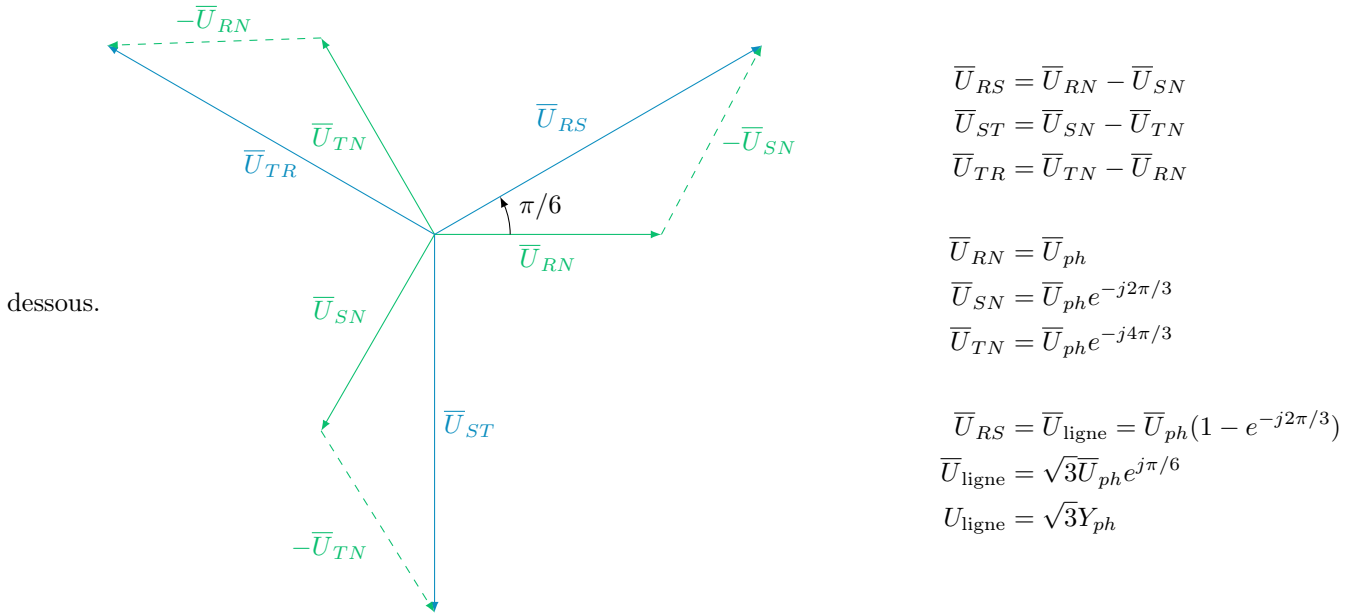


FIGURE 30 – Grandeurs de ligne et de phases du côté liaison

Les relations phasorielles entre toutes ces grandeurs sont représentées graphiquement et énoncée sur le schéma ci-



Puissance triphasée Il n'y a pas de distinction entre puissance de ligne et puissance de phase, mais on peut l'exprimer de deux façons différentes, selon qu'on ait accès à des grandeurs de ligne ou de phase :

$$P = p = 3 U_{ph} I_{ph} \cos \phi \quad (3.20)$$

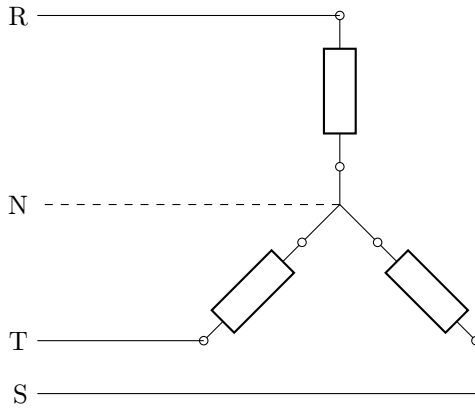
Sachant que $U_{\text{ligne}} = \sqrt{3} U_{ph}$ et $I_{\text{ligne}} = I_{\text{phase}}$ (ou l'inverse, selon le mode de connexion),

$$P = p = \sqrt{3} U_{\text{ligne}} I_{\text{ligne}} \cos \phi \quad (3.21)$$

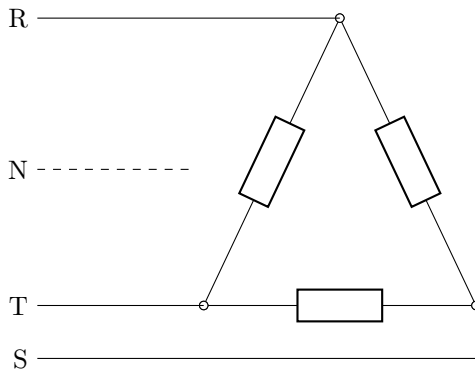
$$Q = \sqrt{3} U_{\text{ligne}} I_{\text{ligne}} \sin \phi \quad (3.22)$$

$$S = \sqrt{3} U_{\text{ligne}} I_{\text{ligne}} \quad (3.23)$$

Connexions Si on regarde maintenant la figure 30 d'un côté dispositif, on peut établir des relations entre les grandeurs de ligne et de phase qui dépendront du type de connexion du dispositif. Les éléments constituant le dispositif sont 3 impédances (aussi appelées "phase" du dispositif) qu'on peut connecter en triangle ou en étoile, comme le montre les figures ci-dessous.



$$\begin{cases} \bar{U}_{\text{phdispositif}} = \bar{U}_{\text{phliaison}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \bar{U}_{\text{ligne}} e^{-j\pi/6} \\ \bar{I}_{\text{phdispositif}} = \bar{I}_{\text{phliaison}} = \bar{I}_{\text{ligne}} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \bar{U}_{\text{phdispositif}} = \bar{U}_{\text{ligne}} = \sqrt{3} \bar{U}_{\text{phliaison}} e^{j\pi/6} \\ \bar{I}_{\text{phdispositif}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \bar{I}_{\text{phliaison}} e^{j\pi/6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \bar{I}_{\text{ligne}} e^{j\pi/6} \end{cases}$$

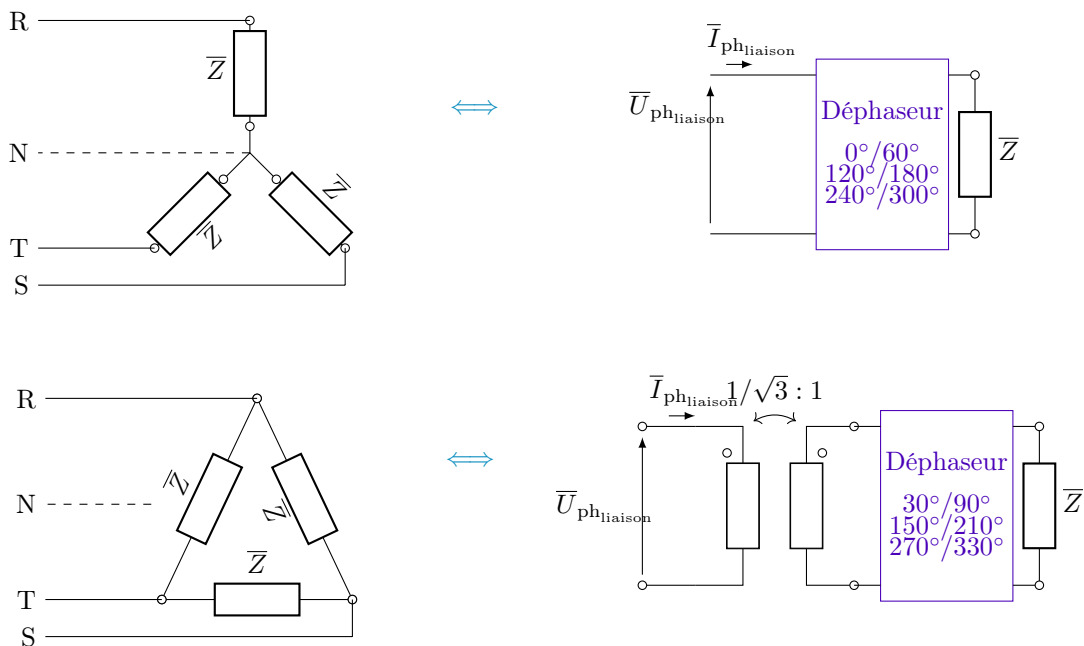
3.1.8 Circuit équivalent monophasé (2)

Comme toujours, il est possible de transformer un système triphasé en des circuits équivalents monophasés. Dans ce cas-ci, par convention on le définit par rapport aux grandeurs de phase d'un point de vue liaison.

Ce circuit équivalent est dépendant du type de connexion physique et s'obtient avec des résultats expérimentaux.

Par exemple Si une impédance triphasée est formée de trois impédances monophasées montées en étoile, et que ces impédances ne sont pas couplées. Alors, l'impédance du circuit équivalent équivalent est celle d'une impédance monophasée comme en témoigne l'image ci-dessous.

Les grandeurs de ligne et de phase suivent les équations de la section 3.1.7.



3.1.9 Bornier de connexion

Dans pas mal de dispositifs, y compris les transformateurs, le mode de connexion (Y ou Δ) est laissé en choix à l'utilisateur. Ainsi, on représentera via un bornier le mode de connexion utilisé :

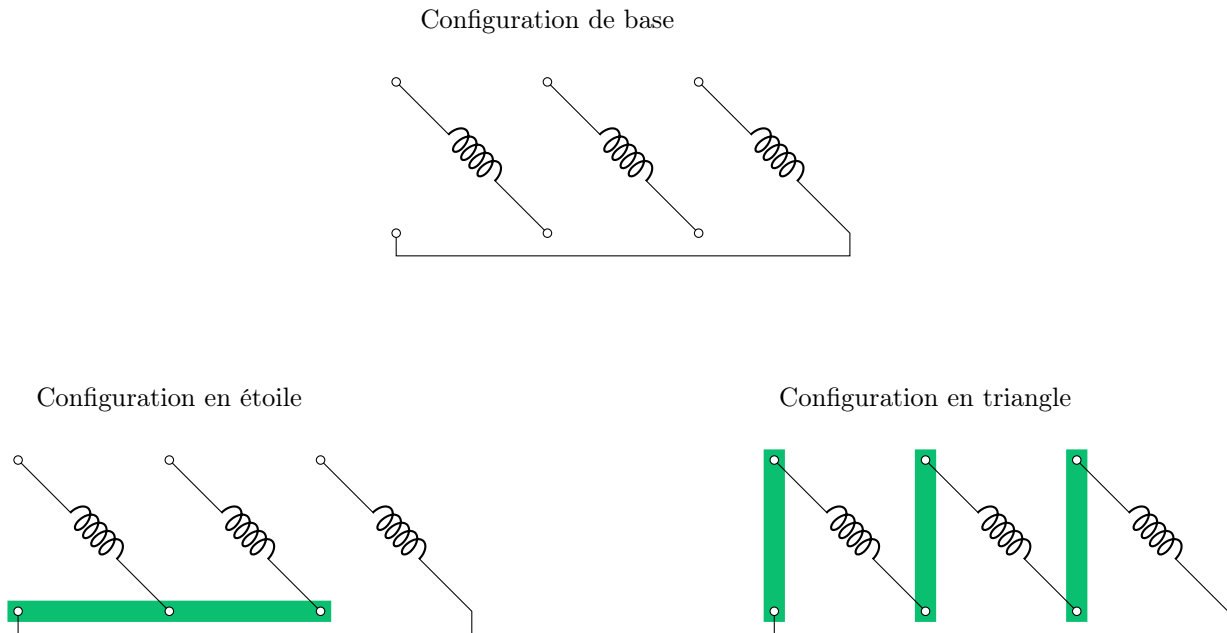


FIGURE 31 – Bornier et mode de connexion

3.2 Transformateurs triphasés

Un transformateur peut être modélisé comme trois transformateurs monophasés mis en Y / Δ au primaire et en Y / Δ au secondaire. Il existe donc quatre configurations différentes.

3.2.1 Grandeurs nominales

Les valeurs nominales suivent la convention d'être données comme des valeurs de ligne, la puissance étant la puissance sur les trois phases réunies.

Cependant, les grandeurs nominales dépendent du mode de connexion. En effet, ce sont les enroulements qui dictent une tension et un courant nominaux. Ces valeurs dépendent évidemment du mode de connexion. Il faudra donc multiplier et diviser par $\sqrt{3}$ selon le mode de connexion utilisé. La puissance, quant à elle, reste constante en dépit du mode de connexion et sera toujours donnée par l'équation 3.23.

3.2.2 Indice Horaire

L'indice horaire d'un transformateur indique le déphasage (en unités de multiples de $\pi/6$, c'est donc un entier compris entre 0 et 11) entre les grandeurs de phase du **primaire** et du **secondaire**.

🔔 Deux transformateurs mis en parallèle doivent avoir le même indice horaire pour fonctionner correctement.

Le tableau 3 reprend les quatre configurations de base et leurs indices horaires correspondants. Pour obtenir les autres indices horaires, il faut opérer des inversions de polarité (décalage de 6) ou des inversions de phase (décalage de 4).

3.2.3 Essais

Malgré l'ajout de deux nouvelles phases, la détermination des paramètres parasites et du rapport de transformation se fait comme auparavant, en tenant bien compte de la conversion ligne - phase ainsi que du facteur 3 apparaissant dans le calcul de la puissance.

Mode	Symbole	Déphasage	Couplage
Δ -Y	Dy	$11\pi/6$	Dy11
Y-Y	Yy	$0\pi/6$	Yy0
Y - Δ	Yd	$1\pi/6$	Yd1
Δ - Δ	Dd	$0\pi/6$	Dd0

TABLE 3 – Indices horaire des quatre configurations

Section 4: Théorie générale des convertisseurs

4.1 Introduction générale

4.1.1 Définition

Un convertisseur électromécanique est un dispositif au sein duquel on exploite les couplages qui peuvent se produire entre des phénomènes électriques (tension, courant,...) et des phénomènes mécaniques (force, couple, vitesse, position).

4.1.2 Classification par principe

Ce couplage peut s'effectuer de plusieurs façons :

- Couplage via le champ magnétique B (convertisseurs électromagnétiques) :
 - Par la force électrodynamique : un conducteur de longueur l parcouru par un courant i et plongé dans un champ B subit une force égale à Bli . Réciproquement, un conducteur de longueur l se déplaçant dans un champ B à vitesse v voit apparaître à ses extrémités une différence de potentiel égale à Blv .
 - Par la force réluctante : un corps ferromagnétique plongé dans un champ B subit une force qui l'attire vers une position maximisant le flux magnétique produit. Réciproquement, la variation de flux associé au déplacement du corps ferromagnétique induit une force électromotrice au sein de la spire qui génère le champ.
 - Possibilité de générer un champ magnétique par des aimants permanents (matériaux magnétiques à large cycle d'hystérésis) ou par des électroaimants
- Couplage via le champ électrique E (convertisseurs électrostatiques) :
 - Un corps portant une charge q plongé dans un champ électrique E subit une force qE . Réciproquement, un corps chargé se déplaçant dans un champ électrique E voit son potentiel électrique varier.
 - Un corps diélectrique plongé dans un champ électrique E subit une force qui l'attire vers une position maximisant le flux électrique produit. Réciproquement, la variation de flux associée au déplacement du corps diélectrique induit une variation de charge (càd un courant) au niveau des électrodes qui génère le champ électrique E .
- Couplage piézoélectrique – magnétostrictif :
 - Utilisation de propriétés intrinsèques de certains matériaux
 - Déplacements de très faibles amplitudes, rendement électromécanique faible,...

4.1.3 Classification par fonction

- Convertisseurs d'énergie :
 - Générateurs : convertissent l'énergie mécanique en énergie électrique
 - Moteurs : convertissent l'énergie électrique en énergie mécanique
 - Caractéristiques : rendement de conversion élevé, fonctionnement à puissance constante, interconnectables
 - Types : convertisseurs électromagnétiques (machines à champ tournant sinusoïdal, machines à courant continu)
- Actionneurs :
 - Convertisseurs conçus pour assurer la commande de systèmes mécaniques à partir des grandeurs électriques imposées
 - Caractéristiques : facilité et précision de la commande, couple ou force massique élevés, rendement élevé, connecté à une source d'énergie électrique à travers un convertisseur électronique de puissance.
 - Types : convertisseurs électromagnétiques, électrostatiques, piézoélectriques, magnétostrictifs.
- Capteurs :

- Interactions électromécaniques utilisées pour effectuer la mesure de grandeurs mécaniques en les transformant sous forme de signaux électriques
- Type : dépend de la grandeur à mesurer et de la gamme de mesure.

4.2 Théorie générale

4.2.1 Structure

Dans un convertisseur électromécanique, on distingue trois éléments constitutifs principaux :

- L'élément fixe, appelé stator
- L'élément mobile, appelé rotor
- Le guidage

Un exemple de base de convertisseur est le haut parleur (figure 32). On y retrouve bien un rotor (la membrane), un stator (le noyau) et un guidage (l'entrefer).

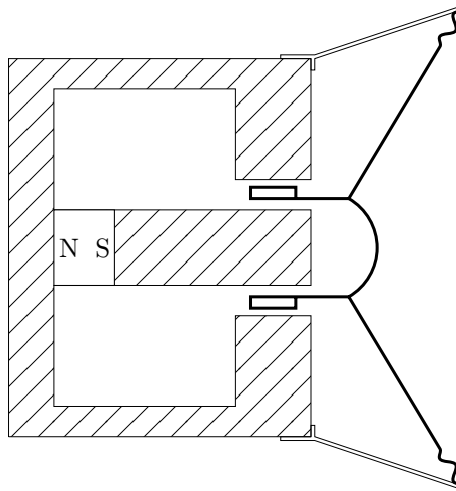


FIGURE 32 – Schéma d'un haut-parleur

Généralisation En somme, un convertisseur est constitué d'une partie fixe, pouvant comprendre des enroulements, des pièces ferromagnétiques et des aimants permanents, ainsi qu'une partie mobile pouvant comprendre les mêmes éléments.

4.2.2 Équations fondamentales

Hypothèses de base Dans les développements suivants, on considèrera les hypothèses suivantes :

H₄: Les conducteurs sont toujours assimilables à des bobinages pour chacun desquels on peut définir :

- Un courant i qui y circule
- Une tension u à ses bornes

H₅: Les phénomènes d'hystérésis et les courants induits dans les matériaux magnétiques sont négligés.

H₆: Les corps sont supposés rigides

H₇: Les corps ont un degré de liberté

Sur base des deux hypothèses ci-dessus, on associera les positions linéaire et angulaire d'un corps à la force et au couple qui lui ont été appliqués, respectivement.

Loi de Faraday La tension sur un enroulement k est donnée par l'équation

$$u_k = R_k i_k + \frac{d\phi_k}{dt} \quad (4.1)$$

où $R_k i_k$ représente les pertes Joule et ϕ_k le flux au sein dudit enroulement. Le deuxième terme correspond donc à la loi de Faraday.

On exprimera alors le flux par

$$\phi_k = \phi_k(i_1, i_2, \dots, i_k, \dots, i_n, \theta_m) \quad (4.2)$$

En somme, le flux magnétique au sein du k -ème enroulement peut dépendre du courant dans tous les enroulements ainsi que de la position angulaire θ_m du *rotor*. On peut aussi envisager de retourner cette relation pour obtenir

$$i_k = i_k(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k, \dots, \phi_n, \theta_m) \quad (4.3)$$

Si l'hypothèse H_5 est vérifiée, la relation constitutive $\phi(i)$ est parfaitement affine pour un θ_m donné. On exprimera alors l'inductance reliant le flux ϕ_k au courant i_j par

$$L_{kj} = \left. \frac{\phi_k}{i_j} \right|_{i_k=0} \quad (4.4)$$

L'équation 4.2 prend alors la forme

$$\phi_k(i_1, i_2, \dots, i_k, \dots, i_n, \theta_m) = \sum_{j=1}^n L_{kj}(\theta_m) i_j \quad (4.5)$$

Et l'équation 4.1 devient alors

$$u_k = R_k i_k + \sum_{j=1}^n L_{kj} \frac{di_j}{dt} + \frac{d\theta_m}{dt} \sum_{j=1}^n \frac{dL_{kj}}{d\theta_m} i_j \quad (4.6)$$

Si, par contre, l'hypothèse H_5 n'est pas vérifiée (cas non linéaire), alors, l'inductance reliant le flux ϕ_k au courant i_j est dite "variationnelle" et se trouve par l'équation

$$L_{vkj} = \left. \frac{d\phi_k}{d\phi_j} \right|_{i_k=0} \quad (4.7)$$

Énergie magnétique L'énergie magnétique s'exprime de trois façons différentes :

— L'énergie associée aux champs magnétiques

$$W_{\text{mag}} = \int H dB \quad (4.8)$$

— L'énergie associée aux flux magnétiques

$$W_{\text{mag}} = \int \mathfrak{J} d\Phi \quad (4.9)$$

— L'énergie associée aux flux encerclés par les enroulements

$$W_{\text{mag}} = \int i d\phi \quad (4.10)$$

4.2.3 Bilan énergétique

Sur un intervalle de temps dt et pour une position θ_m donnée, le bilan énergétique se représente de la façon suivante :

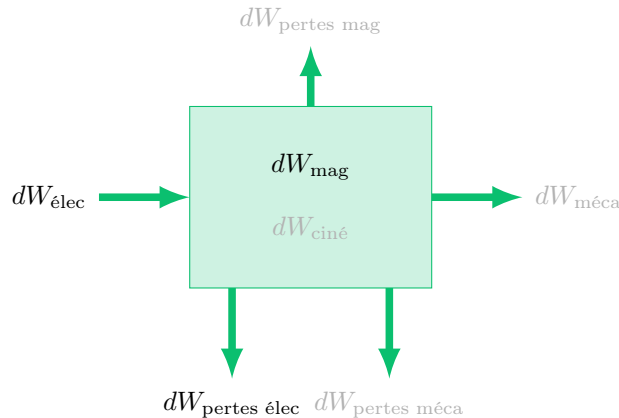


FIGURE 33 – Bilan énergétique schématique

On y retrouve :

— L'apport d'énergie électrique $dW_{\text{élec}}$

$$dW_{\text{élec}} = \sum_{k=1}^n u_k i_k dt \quad (4.11)$$

En reprenant l'équation 4.1,

$$= \sum_{k=1}^n R_k i_k^2 dt + i_k d\phi_k \quad (4.12)$$

— L'énergie mécanique en *output* du bilan $dW_{\text{méca}}$

$$dW_{\text{méca}} = \omega_m C_u dt \quad (4.13)$$

La position ω_m étant constante,

$$dW_{\text{méca}} = 0 \quad (4.14)$$

— L'énergie électrique perdue par effet Joule $dW_{\text{pertes élec}}$

$$dW_{\text{pertes élec}} = \sum_{k=1}^n R_k i_k^2 dt \quad (4.15)$$

— L'énergie magnétique perdue $dW_{\text{pertes mag}}$

$$dW_{\text{pertes mag}} = dW_{\text{pertes hyst}} + dW_{\text{pertes foug}} \quad (4.16)$$

Par l'hypothèse H₅,

$$dW_{\text{pertes mag}} = 0 \quad (4.17)$$

— L'énergie mécanique perdue $dW_{\text{pertes méca}}$

$$dW_{\text{pertes méca}} = \omega_m C_p dt \quad (4.18)$$

L'angle θ_m étant constant,

$$dW_{\text{pertes méca}} = 0 \quad (4.19)$$

— Et enfin, la variation d'énergie cinétique au sein du dispositif

$$W_{\text{ciné}} = \frac{1}{2} J \omega_m^2 \quad (4.20)$$

L'angle θ_m étant constant,

$$dW_{\text{ciné}} = 0 \quad (4.21)$$

Le bilan se simplifie alors comme étant

$$dW_{\text{élec}} = dW_{\text{pertes élec}} + dW_{\text{mag}} \quad (4.22)$$

Cette équation, sur base des relations 4.15 et 4.12, se simplifie pour donner

$$dW_{\text{mag}} = \sum_{k=1}^n i_k d\phi_k \quad (4.23)$$

En intégrant sur tous les flux,

$$W_{\text{mag}} = \int_{0,0,\dots,0}^{\phi_1,\phi_2,\dots,\phi_n} \sum_{k=1}^n i_k(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \theta_m) d\phi_k \quad (4.24)$$

$$= W_{\text{mag}}(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \theta_m) \quad (4.25)$$

Les flux ont la propriété d'être des fonctions d'état et les dérivées selon le courant sont donc réciproques :

$$\frac{d\phi_j}{di_k} = \frac{d\phi_k}{di_j} \quad (4.26)$$

4.2.4 Co-énergie magnétique

On introduit une forme d'énergie appelée co-énergie magnétique. Celle-ci est définie comme suit :

$$W_{\text{cmag}} \triangleq \sum_{k=1}^n i_k \phi_k - W_{\text{mag}} \quad (4.27)$$

Si θ_m est constant,

$$dW_{\text{cmag}} = \sum_{k=1}^n (i_k d\phi_k + di_k \phi_k) - dW_{\text{mag}} \quad (4.28)$$

Cette relation se simplifie sur base de l'équation 4.23 pour donner

$$dW_{\text{cmag}} = \sum_{k=1}^n \phi_k di_k \quad (4.29)$$

En intégrant sur tous les courants,

$$W_{\text{cmag}} = \int_{0,0,\dots,0}^{i_1,i_2,\dots,i_n} \sum_{k=1}^n \phi_k(i_1,i_2,\dots,i_n,\theta_m) di_k \quad (4.30)$$

$$= W_{\text{cmag}}(i_1,i_2,\dots,i_n,\theta_m) \quad (4.31)$$

Dans le cas linéaire, cette co-énergie magnétique s'exprime de façon vectorielle :

$$W_{\text{cmag}} = \frac{1}{2} \mathbf{I}' \cdot \mathbf{L}(\theta_m) \cdot \mathbf{I} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \mathbf{I} &= [i_1, i_2, \dots, i_n]^t \\ \mathbf{L}(\theta_m) &= [L_{kj}(\theta_m)] \end{cases} \quad (4.32)$$

4.2.5 Couple électromagnétique

Si l'on considère maintenant que θ_m n'est pas constant, le bilan énergétique évolue et devient

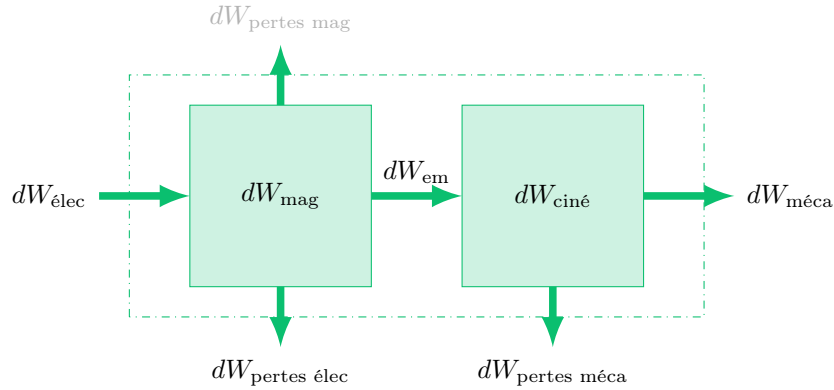


FIGURE 34 – Bilan énergétique pour θ_m non constant

Les quatre couples que l'on retrouve dans le convertisseur sont

- C_a Le Couple accélération, tel que $C_a = J \frac{d^2\theta_m}{dt^2}$
- C_{em} Le Couple électromagnétique
- C_p Le Couple de frottement
- C_u Le Couple utile

Le nouveau bilan d'énergie permet d'isoler quatre équations particulièrement utiles :

Énergie magnétique

$$dW_{\text{élec}} = dW_{\text{pertes élec}} + dW_{\text{mag}} + dW_{\text{em}} \quad (4.33)$$

avec

$$dW_{\text{élec}} = \sum_{k=1}^n u_k i_k dt = \sum_{k=1}^n R_k i_k^2 dt + i_k d\phi_k \quad (4.34)$$

$$dW_{\text{pertes élec}} = \sum_{k=1}^n R_k i_k^2 dt \quad (4.35)$$

$$dW_{\text{mag}} = \sum_{k=1}^n \frac{dW_{\text{mag}}}{d\phi_k} d\phi_k + \frac{dW_{\text{mag}}}{d\theta_m} d\theta_m \quad (4.36)$$

$$dW_{\text{em}} = C_{\text{em}} d\theta_m \quad (4.37)$$

En survolant un raisonnement — disponible dans les slides — particulièrement ennuyeux, et sur base de l'indépendance de ϕ_k et θ_m , on obtient

$$i_k = \frac{dW_{\text{mag}}}{d\phi_k} \quad (4.38)$$

$$C_{\text{em}} = -\frac{dW_{\text{mag}}}{d\theta_m} \quad (4.39)$$

Co-énergie magnétique

$$dW_{\text{élec}} = dW_{\text{pertes élec}} + dW_{\text{mag}} + dW_{\text{em}} \quad (4.40)$$

avec

$$dW_{\text{élec}} = \sum_{k=1}^n u_k i_k dt = \sum_{k=1}^n R_k i_k^2 dt + i_k d\phi_k \quad (4.41)$$

$$dW_{\text{pertes élec}} = \sum_{k=1}^n R_k i_k^2 dt \quad (4.42)$$

$$dW_{\text{mag}} = \sum_{k=1}^n (i_k d\phi_k + \phi_k di_k) - \left(\sum_{k=1}^n \frac{dW_{\text{mag}}}{di_k} di_k + \frac{dW_{\text{mag}}}{d\theta_m} d\theta_m \right) \quad (4.43)$$

$$dW_{\text{em}} = C_{\text{em}} d\theta_m \quad (4.44)$$

De même, et sur base de l'indépendance de i_k et θ_m , on obtient

$$\phi_k = \frac{dW_{\text{cmag}}}{di_k} \quad (4.45)$$

$$C_{\text{em}} = -\frac{dW_{\text{cmag}}}{d\theta_m} \quad (4.46)$$

Enfin, on peut exprimer le couple électromagnétique sur base de la co-énergie magnétique :

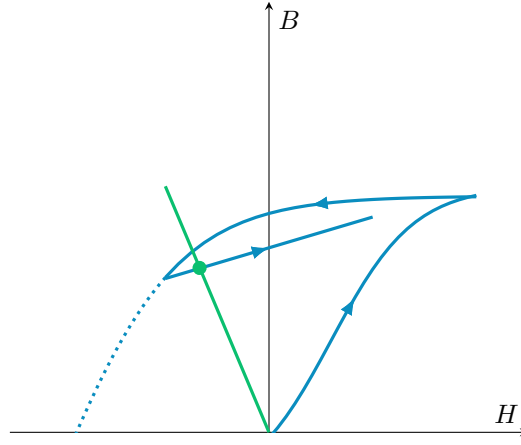
$$C_{\text{em}} = \frac{dW_{\text{cmag}}}{d\theta_m}$$

En reprenant l'équation 4.32,

$$= \frac{1}{2} \mathbf{I}^t \cdot \frac{d\mathbf{L}(\theta_m)}{d\theta_m} \cdot \mathbf{I} \quad (4.47)$$

4.2.6 Couple dans un convertisseur comportant des aimants

Modèle magnétique d'un aimant permanent La caractéristique $H - B$ d'un aimant permanent est assez particulière :



Le lien entre le flux et le courant est donné, dans le cas linéaire, par :

$$\phi_k = \phi_k(i_1, i_2, \dots, i_k, \dots, i_n, \theta_m) = \phi_{k0}(\theta_m) + \sum_{j=1}^n L_{jk}(\theta_m) i_j \quad (4.48)$$

En ce qui concerne l'énergie et la co-énergie magnétiques de tels convertisseurs, on a :

$$W_{mag}(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \theta_m) = W_{mag0}(\theta_m) + \int_{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, 0}^{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n} \sum_{k=1}^n i_k(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \theta_m) d\phi_k \quad (4.49)$$

$$W_{cmag}(i_1, i_2, \dots, i_n, \theta_m) = W_{cmag0}(\theta_m) + \int_{0,0,\dots,0}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \sum_{k=1}^n \phi_k(i_1, i_2, \dots, i_n, \theta_m) di_k \quad (4.50)$$

Par conséquent, dans le cas linéaire et en se rappelant l'équation 4.48

$$W_{cmag}(i_1, i_2, \dots, i_n, \theta_m) = W_{cmag0}(\theta_m) + \sum_{k=1}^n \phi_{k0}(\theta_m) i_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n L_{kj}(\theta_m) i_k i_j \quad (4.51)$$

Enfin, puisque $C_{em} = \frac{dW_{cmag}}{d\theta_m}$

$$C_{em} = \frac{dW_{cmag0}(\theta_m)}{d\theta_m} + \sum_{k=1}^n \frac{d\phi_{k0}(\theta_m)}{d\theta_m} i_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{dL_{kj}(\theta_m)}{d\theta_m} i_k i_j \quad (4.52)$$

$$C_{em} = \frac{dW_{cmag0}(\theta_m)}{d\theta_m} + \mathbf{I}' \frac{d\phi_0(\theta_m)}{d\theta_m} + \frac{1}{2} \mathbf{I}' \frac{d\mathbf{L}(\theta_m)}{d\theta_m} \mathbf{I} \quad (4.53)$$

4.2.7 Classification

On peut classer les convertisseurs encore de deux manières différentes :

- D'après les liaisons entre les enroulements :
 - Liaisons invariantes : Machines à champ tournant
 - Liaisons commutées : Machines à courant continu et machine pas-à-pas
- D'après l'origine du couple électromagnétique(équation 4.52 :

$$C_{em} = \boxed{\frac{dW_{cmag0}(\theta_m)}{d\theta_m}} + \boxed{\sum_{k=1}^n \frac{d\phi_{k0}(\theta_m)}{d\theta_m} i_k} + \boxed{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{dL_{kj}(\theta_m)}{d\theta_m} i_k i_j}$$

Couple de détente
Couple électrodynamique
stator-rotor
(exemple haut-parleur)
Couple réluctant
stator-rotor
rotor-rotor
(exemple rasoir électrique)

Section 5: Les machines à champ tournant

5.1 Structure

5.1.1 Dispositifs

En plus du convertisseur en lui même, constitué comme annoncé d'un rotor, d'un stator et des choses nécessaires pour le maintien et la mobilité de ces deux composants ainsi que, éventuellement, un entrefer, il faut envisager d'autres dispositifs utiles au fonctionnement de notre système :

- Dispositif servant à la connexion des bobinages
- Dispositif servant au refroidissement du convertisseur
- Dispositif de fixation du convertisseur
- Dispositif de transmission

5.1.2 Enroulements

Les enroulements sont constitués de N spires de fils ou de barres de cuivres dans le convertisseur. Plusieurs configurations sont possibles en ce qui concerne les enroulements : une, deux voire p paires de pôles sont envisageables.

Une ou deux paire de pôles

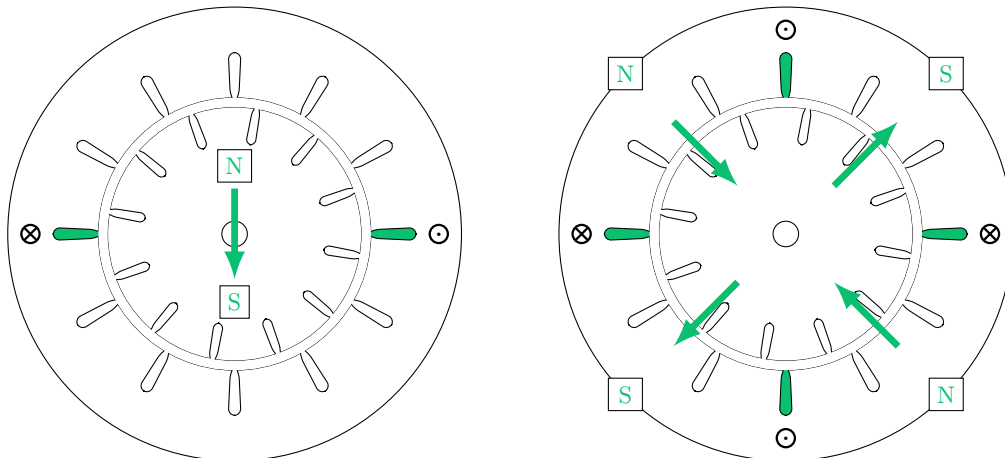


FIGURE 35 – Configuration magnétique à une paire de pôles

FIGURE 36 – Configuration magnétique à deux paires de pôles

Configuration à p paires de pôles Pour un cas général à p paires de pôles, les conducteurs aller et retour seront espacés de $180/p$ degrés. On obtient alors p pôles nord et p pôles sud. Dans le cas d'enroulements statoriques **et** rotoriques, les enroulements doivent posséder le même nombre de paires de pôles.

5.1.3 Relations flux-courants

Hypothèses de base Dans les développements suivants, on considèrera les hypothèses suivantes :

H₈: L'entrefer est lisse et d'épaisseur $e' > e$

H₉: Les enroulements sont remplacés par un conducteur situé à l'interface rotor ou stator - entrefer

H₁₀: La perméabilité magnétique des circuits magnétiques statoriques et rotoriques est supposée infinie :

- ⇒ Champ magnétique nul en dehors de l'entrefer
- ⇒ Comportement linéaire

H₁₁: L'entrefer est mince par rapport au rayon

- ⇒ Champ magnétique radial
- ⇒ Champ magnétique indépendant du rayon

H₁₂: Les effets de bord sont supposés négligeables

- ⇒ Étude 2D dans un plan de coupe

Loi d'ampère et développement en série En appliquant la loi d'ampère telle qu'indiquée à la figure 37a, on obtient un champ magnétique $H_e(\theta)$ tel qu'indiqué à la figure 37b. Le développement en série de cosinus de la fonction carrée permet d'exprimer $H_e(\theta)$ comme la somme d'une fondamentale et d'une infinité d'harmoniques :

$$H_e(\theta) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{2Ni}{\pi e'} \frac{\cos [(2j-1)(\theta - \theta_0)]}{(2j-1)} \quad (5.1)$$

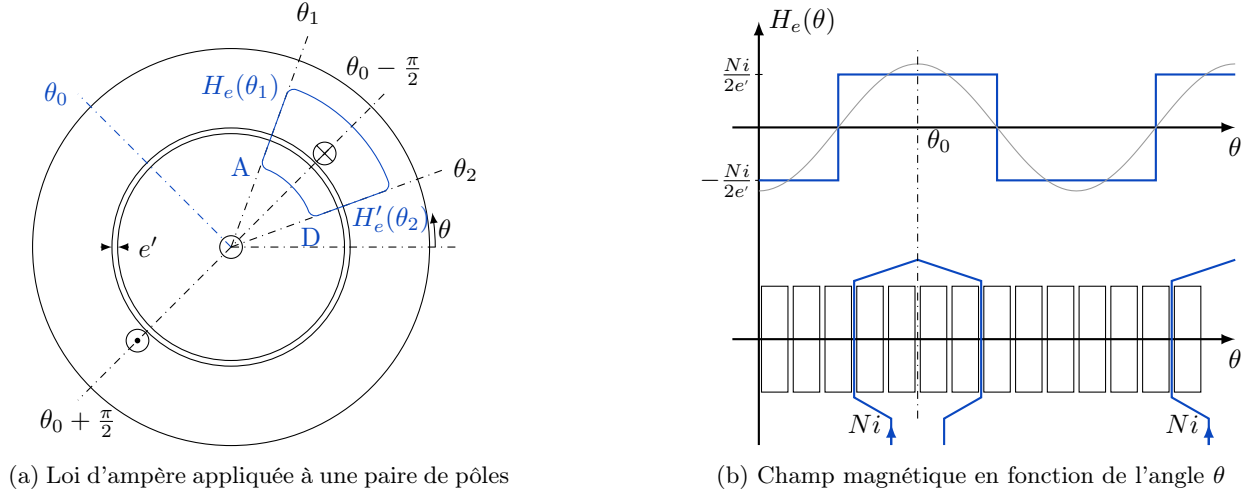


FIGURE 37 – Loi d'ampère appliquée à une paire de pôles

Étalement Idéalement, on aimerait bien réduire l'importance des harmoniques par rapport à la fondamentale afin d'obtenir un champ magnétique qui ressemble le plus possible à un cosinus. Pour cette raison, on vient étaler le conducteur sur plusieurs encoches. L'expression de $H_e(\theta)$ devient alors :

$$H_e(\theta) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \cdot \frac{2Ni}{\pi e'} \cdot \frac{\sin [(2j-1)\pi/6]}{m \sin [(2j-1)\frac{\pi}{6m}]} \cdot \frac{\cos [(2j-1)(\theta - \theta_0)]}{(2j-1)} \quad (5.2)$$

↓
Coefficient d'étalement
(considérant un étalement sur 60°)

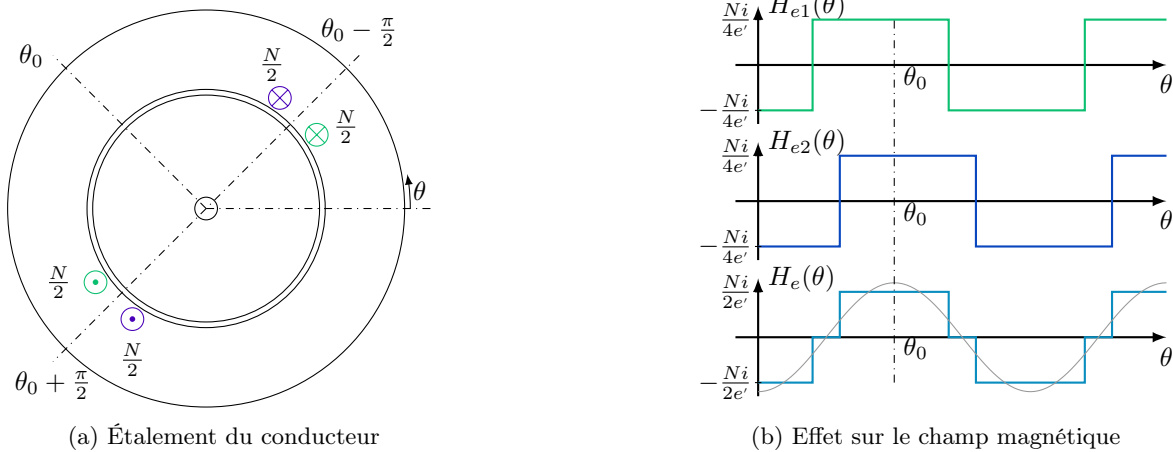
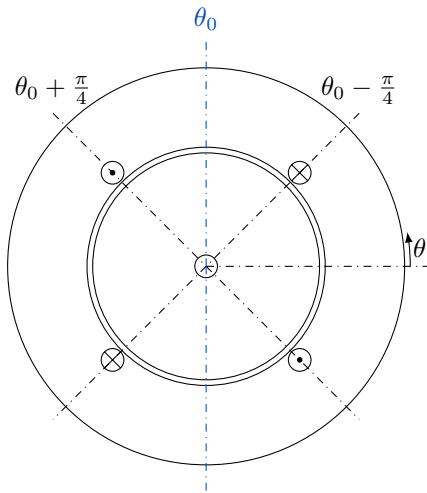
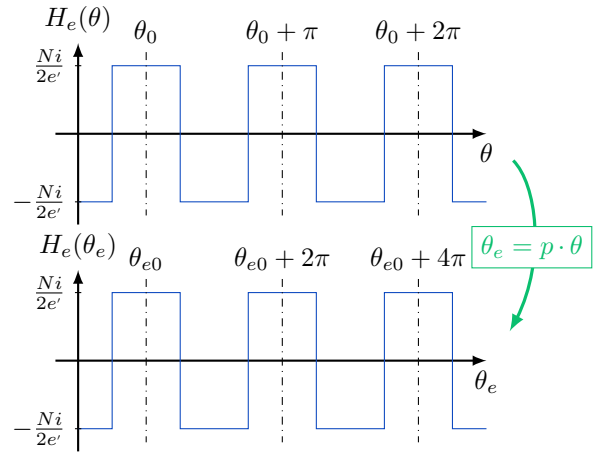


FIGURE 38 – Étalement : principe et utilité

Loi d'ampère pour p paires de pôles En introduisant plus de paires de pôles, on change la "fréquence" du champ magnétique.



(a) Loi d'ampère appliquée à p paire de pôles



(b) Effet sur le champ magnétique

Inductance propre (enroulements concentrés) Le flux total dans l'enroulement est défini comme étant :⁸

$$\psi = N\theta \quad (5.3)$$

$$= \mu_0 \frac{N^2 i \pi R_e L_z}{2e'} \quad (5.4)$$

L'inductance a pour valeur $L = \frac{\psi}{i}$ et vaut donc

$$L = \mu_0 \frac{N^2 \pi R_e L_z}{2e'} \quad (5.5)$$

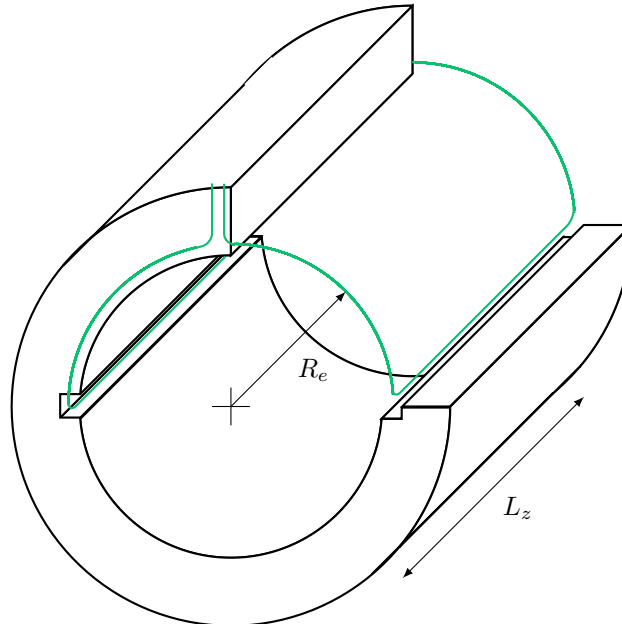
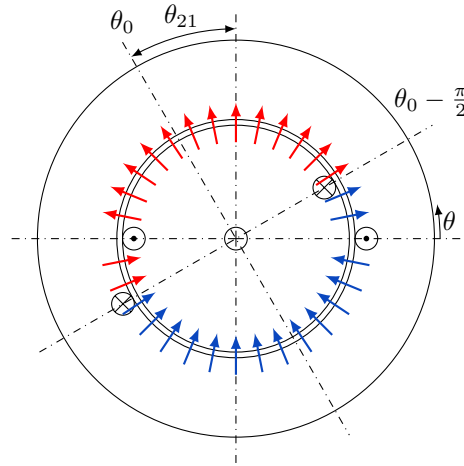


FIGURE 40 – Dimensions utilisées

8. On trouve cette équation en intégrant le champ magnétique $B_e(\theta) = \mu_0 \frac{Ni}{2e'}$

FIGURE 41 – Expression du flux dans deux enroulements espacés de θ_{21}

Inductance mutuelle (enroulements concentrés) Pour trouver l'inductance mutuelle entre plusieurs enroulements, on exprime à nouveau les flux. On arrive à

$$M_{21} = \mu_0 \frac{N_1 N_2 R_e L_z}{2e'} (\pi - 2\theta_{21}) \quad (5.6)$$

La signification de θ_{21} . L'inductance mutuelle se représente dès lors comme une fonction triangulaire oscillant entre $-M_0$ et M_0 où

$$M_0 = \mu_0 \frac{N_1 N_2 \pi R_e L_z}{2e'} \quad (5.7)$$

Inductances propres et mutuelles – enroulements étalés Lorsque les enroulements sont étalés, la valeur des inductances propres change :

$$L_1 = L_{1'} + L_{1''} + 2M_{1'1''} \quad (5.8)$$

$$L_2 = L_{2'} + L_{2''} + 2M_{2'2''} \quad (5.9)$$

$$M_{12} = M_{1'2'} + M_{1'2''} + M_{1''2'} + M_{1''2''} \quad (5.10)$$

où

$$M_{1'2'} = M_{1''2''} \quad (5.11)$$

Le résultat pour M_{12} est qu'elle en devient une somme de fonctions triangulaires, et se rapproche ainsi d'une sinusoïde, comme à la figure 38.

Non-idéalités au niveau de l'entrefer En théorie, nous avons considéré le flux au sein de l'entrefer comme étant purement radial. En réalité, à proximité des enroulements le champ se court-circuite.

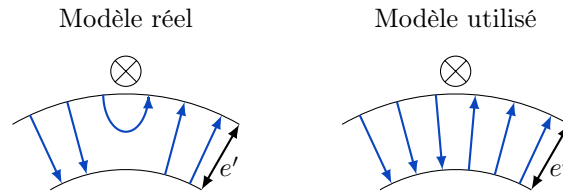


FIGURE 42 – Effet de court-circuit du champ magnétique

Ceci entraîne une augmentation de l'inductance propre des enroulements. En effet, l'inductance se calcule comme $L = \frac{N^2}{R}$ où la réluctance R diminue évidemment lorsque le champ se court-circuite. En pratique, on peut difficilement quantifier cette augmentation, on exprime dès lors

$$L_1 = \mu_0 \cdot \frac{N_1^2 \pi R_e L_z}{2e'} + l_1 = L_{10} + l_1 \quad (5.12)$$

$$L_2 = \mu_0 \cdot \frac{N_2^2 \pi R_e L_z}{2e'} + l_2 = L_{20} + l_2 \quad (5.13)$$

$$M_0 = \mu_0 \cdots \frac{N_1 N_2 \pi R_e L_z}{2e'} + m_0 \quad (5.14)$$

avec $0 < l_1, l_2 \ll L_{10}, L_{20}$.⁹ On définit aussi le coefficient de dispersion

$$\sigma = 1 - \frac{M_0^2}{L_1 L_2} \quad (5.15)$$

5.1.4 Cas des systèmes triphasés d'enroulements

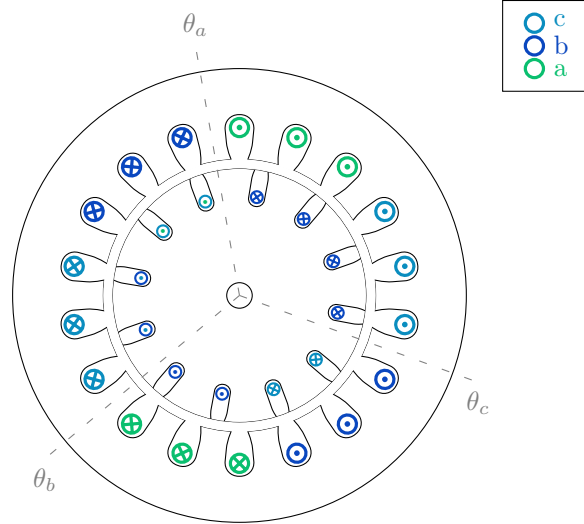


FIGURE 43 – Caption

On a donc trois enroulements décalés de 120° d'un point de vue électrique et 60° ¹⁰ d'un point de vue physique. Qui plus est, l'harmonique d'ordre trois (voir figure 37b) du champ en l'entrefer disparaît lorsque

$$i_a + i_b + i_c = 0 \quad (5.16)$$

L'expression de l'inductance mutuelle est dès lors

$$M = M_0 \cos(\theta_{12}) \quad (5.17)$$

$$M_0 = \frac{4\mu_0 N_1 N_2 R_e L_z}{p^2 \pi e'} \frac{\sin(\pi/6)}{m_1 \sin(\pi/6m_1)} \frac{\sin(\pi/6)}{m_2 \sin(\pi/6m_2)} \quad (5.18)$$

5.1.5 Autres structures

Structure à aimants permanents montés en surface Dans ce cas on a par la loi d'Ampère :

$$\int \vec{H} \cdot d\vec{l} = N \cdot i \quad (5.19)$$

$$\int_{ABCD} \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2 \cdot H_e \cdot e' + 2 \cdot H_a \cdot e_a = 0 \quad (5.20)$$

$$H_e = -\frac{H_a \cdot e_a}{e'} \quad (5.21)$$

Comme $B_e = B_a$ et $B_e = \mu_0 \cdot H_e$

$$(5.22)$$

$$B_a = -\mu_0 \cdot \frac{e_a}{e'} \cdot H_a \quad (5.23)$$

Citons aussi les structures à pôles saillants. Un invariant de toutes ces structures : le nombre de paires de pôles au stator et au rotor sont toujours égaux.

⁹. Si vous me permettez cette notation douteuse

¹⁰. D'où le choix d'un angle d'étalement de 60°

5.2 Principe de fonctionnement

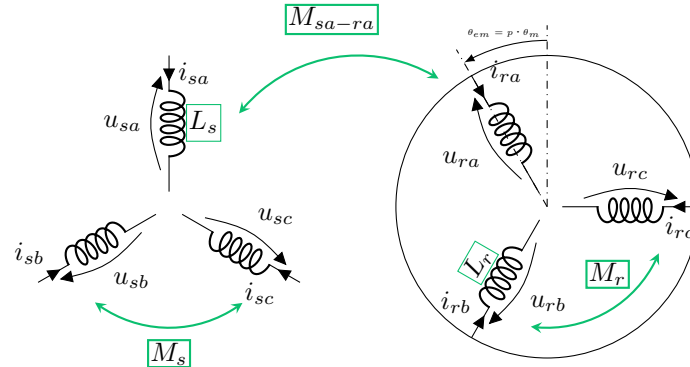


FIGURE 44 – Schéma électrique utilisé

5.2.1 Structure de base

Rappelons les hypothèses sur la structure que nous utiliserons dans ce qui suit : On considèrera les "hypo-

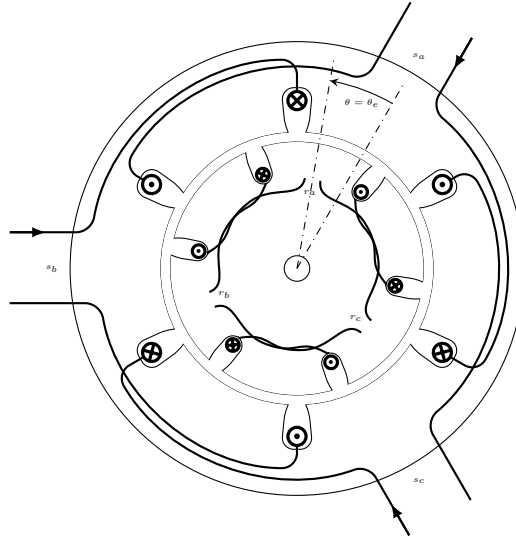


FIGURE 45 – Schéma physique et électrique de la machine à champ tournant

thèses" suivantes

- Convertisseur rotatif
- Stator et rotor concentriques
- Pôles lisses
- Systèmes triphasés d'enroulements
- p Paires de pôles
- Étalement sur $2m$ encoches tel que chaque enroulement occupe 120° électriques.

La connexion électrique du rotor n'est pas triviale : on ne peut pas le connecter à l'aide de connecteurs "câble" classiques. On utilise donc un système de bagues-balais. Le mode de connexion triphasée peut d'ailleurs être choisi.

Inductances propres et mutuelles Dans le cas idéal (sous l'hypothèse d'une inductance mutuelle sinusoïdale (sans harmoniques), $\sigma = 0$),

$$M_{sa-ra} = M_{sb-rb} = M_{sc-rc} = M_{sr} \cos(\theta_{em}) \quad (5.24)$$

$$M_{sa-rb} = M_{sb-rc} = M_{sc-ra} = M_{sr} \cos(\theta_{em} + 2\pi/3) \quad (5.25)$$

$$M_{sa-rc} = M_{sb-ra} = M_{sc-rb} = M_{sr} \cos(\theta_{em} + 4\pi/3) \quad (5.26)$$

où

$$M_{sr} = \frac{4\mu_0 N_s N_r R_e L_z}{p^2 \pi e'} \cdot \frac{\sin(\pi/6)}{m_s \sin(\pi/6m_s)} \cdot \frac{\sin(\pi/6)}{m_r \sin(\pi/6m_r)} \quad (5.27)$$

Au sein du rotor et du stator, respectivement, les inductances propres et mutuelles sont

$$L_r = \frac{N_r}{N_s} \cdot \frac{m_s}{m_r} \frac{\sin(\pi/6m_s)}{\sin(\pi/6m_r)} \cdot M_{sr} \quad (5.28)$$

$$M_r = L_r \cos(2\pi/3) = -0.5L_r \quad (5.29)$$

et

$$L_s = \frac{N_s}{N_r} \cdot \frac{m_r}{m_s} \frac{\sin(\pi/6m_r)}{\sin(\pi/6m_s)} \cdot M_{sr} \quad (5.30)$$

$$M_s = L_s \cos(2\pi/3) = -0.5L_s \quad (5.31)$$

5.2.2 Équations

Équations électriques En reprenant les résultats de la théorie générale des convertisseurs (section 4), on exprime la tension sur chacun des 6 enroulements :

$$u_{sk} = R_{sk} i_{sk} + \frac{d\psi_{sk}}{dt}$$

$$u_{rk} = R_{rk} i_{rk} + \frac{d\psi_{rk}}{dt}$$

Où k représente la phase (a , b ou c).

Dans le cas linéaire, les équations s'expriment de façon matricielle :

$$\mathbf{U}_s = \mathbf{R}_s \mathbf{I}_s + \frac{d}{dt} [\mathbf{L}_s \mathbf{I}_s + \mathbf{M}_{sr}(\theta_{em}) \mathbf{I}_r] \quad (5.32)$$

$$\mathbf{U}_r = \mathbf{R}_r \mathbf{I}_r + \frac{d}{dt} [\mathbf{L}_r \mathbf{I}_r + \mathbf{M}_{sr}^t(\theta_{em}) \mathbf{I}_s] \quad (5.33)$$

Avec les vecteurs de tension, de résistance, d'inductance et de courant au stator et au rotor, respectivement :

$$\mathbf{U}_s = \begin{bmatrix} u_{sa} \\ u_{sb} \\ u_{sc} \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_s = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & R_s \end{bmatrix} \quad \mathbf{L}_s = \begin{bmatrix} L_s & M_s & M_s \\ M_s & L_s & M_s \\ M_s & M_s & L_s \end{bmatrix} \quad \mathbf{I}_s = \begin{bmatrix} i_{sa} \\ i_{sb} \\ i_{sc} \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

$$\mathbf{U}_r = \begin{bmatrix} u_{ra} \\ u_{rb} \\ u_{rc} \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_r = \begin{bmatrix} R_r & 0 & 0 \\ 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & R_r \end{bmatrix} \quad \mathbf{L}_r = \begin{bmatrix} L_r & M_r & M_r \\ M_r & L_r & M_r \\ M_r & M_r & L_r \end{bmatrix} \quad \mathbf{I}_r = \begin{bmatrix} i_{ra} \\ i_{rb} \\ i_{rc} \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

Et la matrice d'inductances mutuelles entre le stator et le rotor :

$$\mathbf{M}_{sr} = M_{sr} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta_{em}) & \cos(\theta_{em} + 2\pi/3) & \cos(\theta_{em} + 4\pi/3) \\ \cos(\theta_{em} + 4\pi/3) & \cos(\theta_{em}) & \cos(\theta_{em} + 2\pi/3) \\ \cos(\theta_{em} + 2\pi/3) & \cos(\theta_{em} + 4\pi/3) & \cos(\theta_{em}) \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

Co-énergie magnétique et couple électromagnétique Dans le cas général, la co-énergie magnétique et le couple s'expriment :

$$W_{cmag} = \int_{0,0,\dots,0}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \sum_{k=1}^n \psi_k(i_1, i_2, \dots, i_n, \theta_m) di_k \quad (5.37)$$

$$C_{em} = \frac{dW_{cmag}}{d\theta_m} \quad (5.38)$$

Et dans le cas linéaire,

$$W_{cmag} = \frac{1}{2} [\mathbf{I}_s^t \quad \mathbf{I}_r^t] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{L}_s & \mathbf{M}_{sr}(\theta_{em}) \\ \mathbf{M}_{sr}(\theta_{em}) & \mathbf{L}_r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_s \\ \mathbf{I}_r \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

$$C_{em} = \frac{1}{2} [\mathbf{I}_s^t \quad \mathbf{I}_r^t] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{d\mathbf{M}_{sr}(\theta_{em})}{d\theta} \\ \frac{d\mathbf{M}_{sr}(\theta_{em})}{d\theta} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_s \\ \mathbf{I}_r \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

On remarquera d'ailleurs de l'équation 5.40 qu'il faut avoir du courant au rotor **et** au stator pour avoir un couple électromagnétique.

5.2.3 Alimentation par des courants sinusoïdaux

Le stator et le rotor peuvent être alimentés par des courants sinusoïdaux dont les équations sont :

$$\text{Stator} \quad \begin{cases} i_{sa} = \sqrt{2}I_s \cos(\omega_s t + \phi_s) \\ i_{sb} = \sqrt{2}I_s \cos(\omega_s t + \phi_s - \frac{2\pi}{3}) \\ i_{sc} = \sqrt{2}I_s \cos(\omega_s t + \phi_s - \frac{4\pi}{3}) \end{cases} \quad (5.41)$$

$$\text{Rotor} \quad \begin{cases} i_{ra} = \sqrt{2}I_r \cos(\omega_r t + \phi_r) \\ i_{rb} = \sqrt{2}I_r \cos(\omega_r t + \phi_r \pm \frac{2\pi}{3}) \\ i_{rc} = \sqrt{2}I_r \cos(\omega_r t + \phi_r \pm \frac{4\pi}{3}) \end{cases} \quad (5.42)$$

Le signe plus ou moins indique si l'on travaille en système direct ou inverse, le cas direct correspondant à un signe négatif.

Les expressions de la Co-énergie magnétique et du couple électromagnétique deviennent :

$$W_{cmag} = \frac{1}{2} [\mathbf{I}_s^t \quad \mathbf{I}_r^t] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{L}_s & \mathbf{M}_{sr}(\theta_{em}) \\ \mathbf{M}_{sr}(\theta_{em}) & \mathbf{L}_r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_s \\ \mathbf{I}_r \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

$$\Rightarrow W_{cmag} = \frac{3}{2}(L_s - M_s)I_s^2 + \frac{3}{2}(L_r - M_r)I_r^2 + \frac{9}{2}M_{sr}I_sI_r \cos(\omega_s t - \omega_r t - \theta_{em} + \phi_s - \phi_r) \quad (5.44)$$

En se rappelant que $C_{em} = \frac{\delta W_{cmag}(\theta_{em})}{\delta \theta}$:

$$(5.45)$$

$$C_{em} = \frac{1}{2} [\mathbf{I}_s^t \quad \mathbf{I}_r^t] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{d\mathbf{M}_{sr}(\theta_{em})}{d\theta} \\ \frac{d\mathbf{M}_{sr}(\theta_{em})}{d\theta} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_s \\ \mathbf{I}_r \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

$$\Rightarrow C_{em} = \frac{9}{2}p.M_{sr}.I_s.I_r \sin(\omega_s t - \omega_r t - \theta_{em} + \phi_s - \phi_r) \quad (5.47)$$

Et comme $\theta_{em} = p.\omega_m t + \theta_{e0}$:

$$(5.48)$$

$$C_{em} = \frac{9}{2}p.M_{sr}.I_s.I_r \sin((\omega_s - \omega_r - p\omega_m)t + \phi_s - \phi_r - \theta_{e0}) \quad (5.49)$$

$$(5.50)$$

À cause du terme $(\omega_s - \omega_r - p\omega_m)$, le couple a une valeur moyenne nulle. Pour éviter ceci, on vient annuler ce terme, pour que le couple ne soit plus fonction du temps. Il faut évidemment que le terme restant soit non nul.¹¹

$$\text{Dans le cas direct} \quad \omega_s - \omega_r - p\omega_m = 0 \Rightarrow \omega_r = \omega_s - p\omega_m \quad (5.51)$$

$$\text{Dans le cas inverse} \quad \omega_s + \omega_r - p\omega_m = 0 \Rightarrow \omega_r = -(\omega_s - p\omega_m) \quad (5.52)$$

$$C_{em} = \frac{9}{2}p.M_{sr}.I_s.I_r \sin(\phi_s - \phi_r - \theta_{e0}) \quad (5.53)$$

$$W_{cmag} = \frac{3}{2}(L_s - M_s)I_s^2 + \frac{3}{2}(L_r - M_r)I_r^2 + \frac{9}{2}M_{sr}I_sI_r \cos(\phi_s - \phi_r - \theta_{e0}) \quad (5.54)$$

11. Une remarque intéressante est celle de l'interprétation de ce terme $\phi_s - \phi_r - \theta_{e,0}$. On peut s'intéresser à deux termes séparément :

- ϕ_s est la phase des courants statoriques. Indirectement, il représente la direction dans laquelle se trouve le champ magnétique au stator.
- ϕ_r est la phase des courants rotoriques. Il représente aussi la direction dans laquelle se trouve le champ magnétique au rotor. En y ajoutant le terme $\theta_{e,0}$, on exprime en fait la direction du champ magnétique rotorique par rapport au stator.

La soustraction des deux termes indique la différence d'angle entre le champ magnétique rotorique et statorique. Si les champs sont alignés, c'est à dire si cette différence est nulle, il n'y a pas de couple.

On arrive ici à un résultat paradoxal : on a vu dans l'équation 5.38 que C_{em} était la dérivée partielle de W_{cmag} selon θ_{em} . Or, dans l'équation ci-dessus, W_{cmag} est indépendant de θ_{em} . Pourtant, C_{em} n'est pas nul. En fait, en imposant les conditions 5.51 et 5.52, nous avons relié les courants (par leur pulsation) I_r et I_s à θ_{em} . W_{cmag} n'est donc pas réellement indépendant de θ_{em} . Relier les tensions statoriques/rotoriques à leurs courants correspondants se fait alors par l'équation 5.33 :

$$\begin{pmatrix} u_{sa} \\ u_{sb} \\ u_{sc} \end{pmatrix} = R_s \sqrt{2} \begin{pmatrix} I_s \cos(\omega_s t + \phi_s) \\ I_s \cos(\omega_s t + \phi_s - 2\pi/3) \\ I_s \cos(\omega_s t + \phi_s - 4\pi/3) \end{pmatrix} + (L_s - M_s) \sqrt{2} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I_s \cos(\omega_s t + \phi_s) \\ I_s \cos(\omega_s t + \phi_s - 2\pi/3) \\ I_s \cos(\omega_s t + \phi_s - 4\pi/3) \end{pmatrix} \\ + 3/2 M_{sr} \sqrt{2} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I_r \cos(\omega_s t + \theta_{e0} + \phi_r) \\ I_r \cos(\omega_s t + \theta_{e0} + \phi_r - 2\pi/3) \\ I_r \cos(\omega_s t + \theta_{e0} + \phi_r - 4\pi/3) \end{pmatrix} \quad (5.55)$$

Le premier terme est trivial, mais le second et le troisième le sont moins. Le deuxième vient du produit de la matrice \mathbf{L}_s et du vecteur \mathbf{I}_s . En développant le produit et en utilisant l'équilibre des courants triphasés, on obtient $(L_s - M_s) \sqrt{2} \frac{d}{dt} \mathbf{I}_s$. Pour le troisième terme, on multiplie la matrice \mathbf{M}_{sr} par le vecteur de courants du rotor. On obtient pour chaque ligne six termes (en appliquant la formule de Simpson $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$). Trois de ces termes sont décalés de $4\pi/3$ l'un de l'autre, leur somme vaut donc 0. Les trois autres sont identiques et sont des

$$\cos(\theta_{em} + \omega_r t + \phi_r)$$

En remplaçant θ_{em} par $p\omega_m t + \theta_{e0}$, on obtient des termes

$$\cos(p\omega_m t + \omega_r t + \phi_r + \theta_{e0})$$

En reprenant l'équation 5.51, on a donc

$$\cos(\omega_s t + \theta_{e0} + \phi_r)$$

Pour la relation courant-tension du rotor, le raisonnement est très similaire, et on obtient

$$\begin{pmatrix} u_{ra} \\ u_{rb} \\ u_{rc} \end{pmatrix} = R_r \sqrt{2} \begin{pmatrix} I_r \cos(\omega_r t + \phi_r) \\ I_r \cos(\omega_r t + \phi_r - 2\pi/3) \\ I_r \cos(\omega_r t + \phi_r - 4\pi/3) \end{pmatrix} + (L_r - M_r) \sqrt{2} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I_r \cos(\omega_r t + \phi_r) \\ I_r \cos(\omega_r t + \phi_r - 2\pi/3) \\ I_r \cos(\omega_r t + \phi_r - 4\pi/3) \end{pmatrix} \\ + 3/2 M_{sr} \sqrt{2} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I_s \cos(\omega_r t - \theta_{e0} + \phi_s) \\ I_s \cos(\omega_r t - \theta_{e0} + \phi_s - 2\pi/3) \\ I_s \cos(\omega_r t - \theta_{e0} + \phi_s - 4\pi/3) \end{pmatrix} \quad (5.56)$$

Où $\omega_r = \omega_s - p\omega_m$.

Alimentation par des tensions sinusoïdales On est arrivé précédemment à une relation qui dit qu'avec un couple moyen non nul, on a que la tension de rotor a pour pulsation $\omega_s - p\omega_m$ et que la tension de stator a pour pulsation ω_s . On retourne la relation en disant "Si j'impose des tensions qui vérifient ces propriétés, j'aurai un couple non nul".

$$\text{Stator} \quad \begin{cases} v_{sa} &= \sqrt{2} V_s \cos(\omega_s t + \psi_s) \\ v_{sb} &= \sqrt{2} V_s \cos(\omega_s t + \psi_s - \frac{2\pi}{3}) \\ v_{sc} &= \sqrt{2} V_s \cos(\omega_s t + \psi_s - \frac{4\pi}{3}) \end{cases} \quad (5.57)$$

$$\text{Rotor} \quad \begin{cases} v_{ra} &= \sqrt{2} V_r \cos((\omega_s t - p\omega_m) + \psi_r) \\ v_{rb} &= \sqrt{2} V_r \cos((\omega_s t - p\omega_m) + \psi_r - \frac{2\pi}{3}) \\ v_{rc} &= \sqrt{2} V_r \cos((\omega_s t - p\omega_m) + \psi_r - \frac{4\pi}{3}) \end{cases} \quad (5.58)$$

Intérêt d'un couplage sinusoïdal On peut dès lors expliquer tout l'intérêt d'un couplage sinusoïdal entre les inductances (sans harmoniques, donc). En ayant des harmoniques, on se retrouve (via le produit avec la fondamentale dans les termes de courant) avec un couple qui oscille autour de sa valeur moyenne. D'un point de vue électrique, l'équation 5.33 relie les tensions $u_{s,r}$ à la matrice d'inductance mutuelle \mathbf{M}_{sr} . Si cette matrice "comporte" des harmoniques, alors la tension n'est plus une sinusoïde pure et contient alors des harmoniques. Si le convertisseur est utilisé comme générateur, ceci pose évidemment problème.

5.2.4 Représentation phasorielle

Au stator En combinant les équations 5.55 et 5.57 et en représentant le résultat sous forme d'un phaseur où

$$\bar{V}_s = V_s e^{j\psi_s} \quad (5.59)$$

$$\bar{I}_s = I_s e^{j\phi_s} \quad (5.60)$$

on obtient

$$\bar{V}_s = R_s \bar{I}_s + j\omega_s \underbrace{(L_s - M_s)}_{L_{cs}} \bar{I}_s + j\omega_s \frac{3}{2} M_{sr} \bar{I}_r e^{j\theta_{e0}} \quad (5.61)$$

On appellera le terme L_{cs} l'inductance cyclique.

Au rotor On combine ici les équations 5.56 et 5.58, en adoptant les notations

$$\bar{V}_r = V_r e^{j\psi_r} \quad (5.62)$$

$$\bar{I}_r = I_r e^{j\phi_r} \quad (5.63)$$

$$\bar{V}_r = R_r \bar{I}_r + j(\omega_s - p\omega_m) \underbrace{(L_r - M_r)}_{L_{cr}} \bar{I}_r + j(\omega_s - p\omega_m) \frac{3}{2} M_{sr} \bar{I}_s e^{-j\theta_{e0}} \quad (5.64)$$

Fort de cette nouvelle notation phasorielle, on exprime le couple d'une façon d'autant plus simple :

$$C_{em} = \Im \left[\frac{9}{2} p M_{sr} \bar{I}_s (\bar{I}_r e^{j\theta_{e0}})^* \right] \quad (5.65)$$

L'expression de l'inductance cyclique se simplifie aussi :

$$L_{cs} = L_s - M_s = k \frac{3}{2} M_{sr} + l_{cs} \quad (5.66)$$

$$L_{cr} = L_r - M_r = \frac{1}{k} \frac{3}{2} M_{sr} + l_{cr} \quad (5.67)$$

avec

$$k = \frac{N_s}{N_r} \cdot \frac{m_r \sin(\pi/(6m_r))}{m_s \sin(\pi/(6m_s))} \quad (5.68)$$

l_{cs} et l_{cr} sont inconnues a priori, leur origine est décrite à la figure 42

5.2.5 Schéma équivalent

Comme pour les transformateurs, on aimerait disposer d'un schéma équivalent à notre circuit, permettant notamment de relier courant et tension. En combinant les équations précédemment développées, on trouve les deux relations suivantes :

$$\bar{V}_s = R_s \bar{I}_s + j\omega_s l_{cs} \bar{I}_s + j\omega_s k \frac{3}{2} M_{sr} \left(\bar{I}_s + \frac{1}{k} e^{j\theta_{e0}} \bar{I}_r \right) \quad (5.69)$$

Et au rotor,

$$\bar{V}_r = R_r \bar{I}_r + j(\omega_s - p\omega_m) l_{cr} \bar{I}_r + j(\omega_s - p\omega_m) \frac{1}{k} \frac{3}{2} M_{sr} (\bar{I}_r + k e^{-j\theta_{e0}} \bar{I}_s) \quad (5.70)$$

Le circuit équivalent à ces deux relations est donné à la figure 46

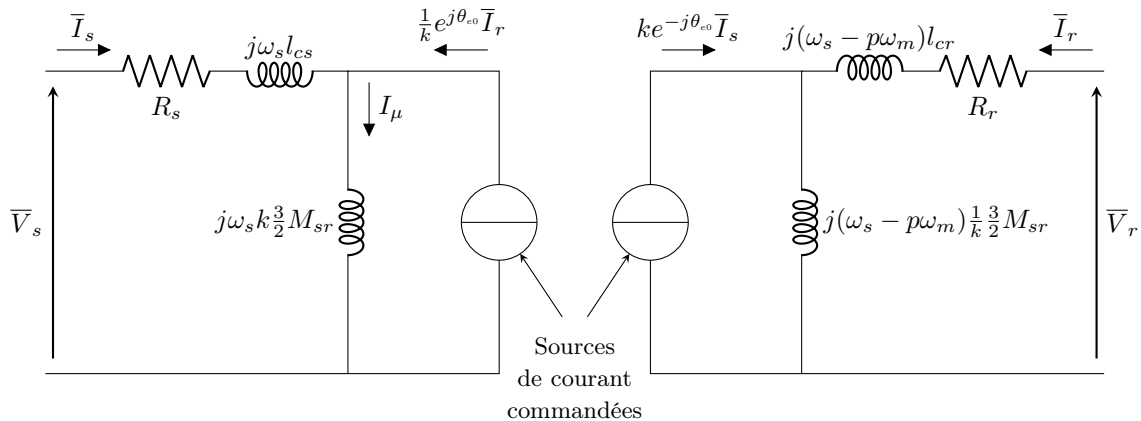


FIGURE 46 – Circuit équivalent des équations 5.69 et 5.70

☞ On ne couvrira pas dans cette synthèse la section sur la redémonstration des résultats précédents à l'aide de la loi $Bli - Blv$.

5.2.6 Courants magnétisants

On définit la notion de courant magnétisant comme étant le système triphasé de courant statorique qui entraîne la même FEM aux bornes des enroulements statoriques ou rotoriques, ou comme celui qui entraîne le même champ magnétique d'entrefer que les courants statoriques et rotoriques. Il est indiqué à la figure 46 sous le symbole I_μ .

5.2.7 Saturation des matériaux ferromagnétiques

La saturation des matériaux ferromagnétiques influence uniquement les inductances dont le circuit magnétique est formé. l_{cs} et l_{cr} ne s'en retrouvent donc pas altérées. Le niveau de saturation dépend du niveau de champ dans le matériau, donc du courant magnétisant I_μ , et donc de la FEM aux bornes de l'inductance.

Ceci conclut le chapitre sur les machines à champ tournant. Les deux chapitres suivants, à savoir la machine synchrone et asynchrone, se basent sur la machine à champ tournant, en développant la façon dont l'équation 5.51 est vérifiée.

Section 6: Machine asynchrone

6.1 Conditions d'utilisation

On considérera ici que la pulsation, la tension et la phase sont imposées par le réseau et que la machine n'a aucune influence dessus. On tiendra aussi compte de l'inductance parasite du réseau. On notera ces grandeurs par ω_∞ , V_∞ et ψ_∞ , respectivement.

On peut distinguer deux situations d'utilisation pour la machine : en génératrice ou en moteur, connectée à une turbine ou un moteur thermique et produisant ainsi une certaine puissance électrique, ou alimentée en tension et fournissant de l'énergie mécanique à une charge (pompe, ventilateur, etc...).

Dans les deux cas, le couple (moteur ou résistant) peut être fonction de la vitesse de rotation ω_m .

Au niveau mécanique, on rappellera l'équation constitutive

$$C_{em} - C_p - C_r = J_t \cdot \frac{d\omega_m}{dt} \quad (6.1)$$

avec C_p , le couple de frottement et C_r , la couple résistant de la charge mécanique (on peut remplacer $-C_r$ par $+C_m$ si l'on utilise la machine dans une autre configuration).

On fait aussi l'hypothèse suivante :

H₁₃: Les équations sont valables peu importe la vitesse de rotation, la dynamique mécanique n'a pas d'impact sur la dynamique électrique.

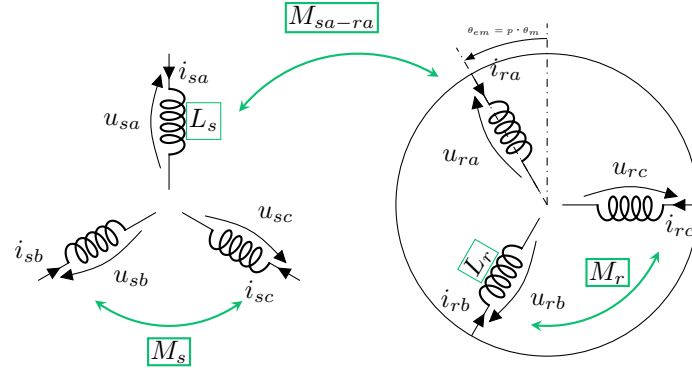
6.2 Dispositions constructives particulières

On distingue deux types de machines asynchrones :

- Machines à rotor bobiné : c'est la structure "de base", c'est à dire que les conducteurs sont effectivement des bobines.
- Machines à rotor à cage d'écureuil : On remplace les conducteurs par une structure en "cage d'écureuil", composée de barres de cuivre réparties en cylindre et court-circuitées à l'autre bout. Ce type de structure est moins coûteuse à fabriquer et permet un meilleur refroidissement en rajoutant des "ailettes" aux extrémités.

6.3 Équations

On réutilisera ici le même schéma électrique qu'à la figure 44. Le re-voici dans toute sa splendeur :



Toutes les équations vues à la section précédentes sont évidemment toujours d'actualité.

6.3.1 Mise du rotor en circuit ouvert

Lorsqu'on met le rotor en circuit ouvert,

$$I_r = 0$$

Dans les équations matricielles, ceci se traduit par

$$\begin{pmatrix} u_{sa} \\ u_{sb} \\ u_{sc} \end{pmatrix} = R_s \sqrt{2} \begin{pmatrix} I_s \cos(\omega_s t + \phi_s) \\ I_s \cos(\omega_s t + \phi_s - 2\pi/3) \\ I_s \cos(\omega_s t + \phi_s - 4\pi/3) \end{pmatrix} + (L_s - M_s) \sqrt{2} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I_s \cos(\omega_s t + \phi_s) \\ I_s \cos(\omega_s t + \phi_s - 2\pi/3) \\ I_s \cos(\omega_s t + \phi_s - 4\pi/3) \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

et

$$\begin{pmatrix} u_{ra} \\ u_{rb} \\ u_{rc} \end{pmatrix} = \frac{3}{2} M_{sr} \sqrt{2} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I_s \cos((\omega_s - p\omega_m)t - \theta_{e0} + \phi_s) \\ I_s \cos((\omega_s - p\omega_m)t - \theta_{e0} + \phi_s - 2\pi/3) \\ I_s \cos((\omega_s - p\omega_m)t - \theta_{e0} + \phi_s - 4\pi/3) \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

De cette dernière équation, on retombe bel et bien sur une tension rotorique qui vérifie

$$\omega_r = \omega_s - p\omega_m$$

6.3.2 Mise du rotor en court-circuit

Sachant ça, on vient court-circuiter le rotor pour obtenir un courant de la même pulsation. Dans les équations matricielles,

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \begin{pmatrix} V_s \cos(\omega_s t + \psi_s) \\ V_s \cos(\omega_s t + \psi_s - 2\pi/3) \\ V_s \cos(\omega_s t + \psi_s - 4\pi/3) \end{pmatrix} &= R_s \sqrt{2} \begin{pmatrix} I_s \cos(\omega_s t + \phi_s) \\ I_s \cos(\omega_s t + \phi_s - 2\pi/3) \\ I_s \cos(\omega_s t + \phi_s - 4\pi/3) \end{pmatrix} + (L_s - M_s) \sqrt{2} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I_s \cos(\omega_s t + \phi_s) \\ I_s \cos(\omega_s t + \phi_s - 2\pi/3) \\ I_s \cos(\omega_s t + \phi_s - 4\pi/3) \end{pmatrix} \\ &\quad + 3/2 M_{sr} \sqrt{2} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I_r \cos(\omega_s t + \theta_{e0} + \phi_r) \\ I_r \cos(\omega_s t + \theta_{e0} + \phi_r - 2\pi/3) \\ I_r \cos(\omega_s t + \theta_{e0} + \phi_r - 4\pi/3) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.4)$$

et

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= R_r \sqrt{2} \begin{pmatrix} I_r \cos((\omega_s - p\omega_m)t + \phi_r) \\ I_r \cos((\omega_s - p\omega_m)t + \phi_r - 2\pi/3) \\ I_r \cos((\omega_s - p\omega_m)t + \phi_r - 4\pi/3) \end{pmatrix} + (L_r - M_r) \sqrt{2} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I_r \cos((\omega_s - p\omega_m)t + \phi_r) \\ I_r \cos((\omega_s - p\omega_m)t + \phi_r - 2\pi/3) \\ I_r \cos((\omega_s - p\omega_m)t + \phi_r - 4\pi/3) \end{pmatrix} \\ &\quad + 3/2 M_{sr} \sqrt{2} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I_r \cos((\omega_s - p\omega_m)t - \theta_{e0} + \phi_s) \\ I_r \cos((\omega_s - p\omega_m)t - \theta_{e0} + \phi_s - 2\pi/3) \\ I_r \cos((\omega_s - p\omega_m)t - \theta_{e0} + \phi_s - 4\pi/3) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.5)$$

6.3.3 Notation phasorielle

En notation phasorielle, les équations deviennent

Au stator,

$$\bar{V}_s = R_s \bar{I}_s + j\omega_s l_{cs} \bar{I}_s + j\omega_s k \frac{3}{2} M_{sr} \left(\bar{I}_s + \frac{1}{k} e^{j\theta_{e0}} \bar{I}_r \right) \quad (6.6)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{V}_s &= V_s e^{j\psi_s} \\ \bar{I}_s &= I_s e^{j\phi_s} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_{cs} &= L_s - M_s = k \cdot \frac{3}{2} M_{sr} + l_{cs} \\ k &= \frac{N_s}{N_r} \cdot \frac{m_r \sin\left(\frac{\pi}{6m_r}\right)}{m_s \sin\left(\frac{\pi}{6m_s}\right)} \end{cases} \quad (6.7)$$

Au rotor,

$$(6.8)$$

$$0 = R_r \bar{I}_r + j \cdot (\omega_s - p \cdot \omega_m) \cdot l_{cr} \bar{I}_r + j \cdot (\omega_s - p \cdot \omega_m) \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{3}{2} M_{sr} \cdot (\bar{I}_r + k \cdot e^{-j\theta_{e0}} \bar{I}_s) \quad (6.9)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{V}_r &= V_r \cdot e^{j\psi_r} \\ \bar{I}_r &= I_r \cdot e^{j\phi_r} \end{cases} \quad L_{cr} = L_r - M_r = \frac{1}{k} \cdot \frac{3}{2} M_{sr} + l_{cr} \quad (6.10)$$

Pour le couple électromagnétique

$$(6.11)$$

$$C_{em} = \Im \left[\frac{9}{2} \cdot p \cdot M_{sr} \bar{I}_s \cdot (\bar{I}_r \cdot e^{j\theta_{e0}}) \right] \quad (6.12)$$

On introduit aussi quelques notations simplificatrices :

$$L_\mu = k \frac{3}{2} M_{sr} \quad \text{appelée l'inductance magnétisante} \quad (6.13)$$

$$R'_r = k^2 R_r \quad (6.14)$$

$$l'_{cr} = k^2 l_{cr} \quad (6.15)$$

$$\bar{I}'_r = -\frac{1}{k} e^{j\theta_{e0}} \bar{I}_r \quad (6.16)$$

$$\gamma = \frac{\omega_\infty - p\omega_m}{\omega_\infty} \quad \text{appelé le coefficient de glissement} \quad (6.17)$$

Le coefficient de glissement représente en fait la différence de vitesse entre la vitesse de synchronisme ω_∞/p et la vitesse de rotation.

Avec ces nouvelles notations, on simplifie nos trois équations électriques :

Au stator,

$$\bar{V}_\infty = R_s \bar{I}_s + j\omega_\infty l_{cs} \bar{I}_s + j\omega_\infty L_\mu (\bar{I}_s - \bar{I}'_r) \quad (6.18)$$

au rotor,

$$j\omega_\infty L_\mu (\bar{I}_s - \bar{I}'_r) = \frac{R'_r}{\gamma \bar{I}'_r} + j\omega_\infty l'_{cr} \bar{I}'_r \quad (6.19)$$

et le couple électromagnétique

$$C_{em} = -\Im(3p L_\mu \bar{I}_s \bar{I}'_r^*) \quad (6.20)$$

6.4 Schéma équivalent

On ramène toute la partie rotor du schéma équivalent au stator :

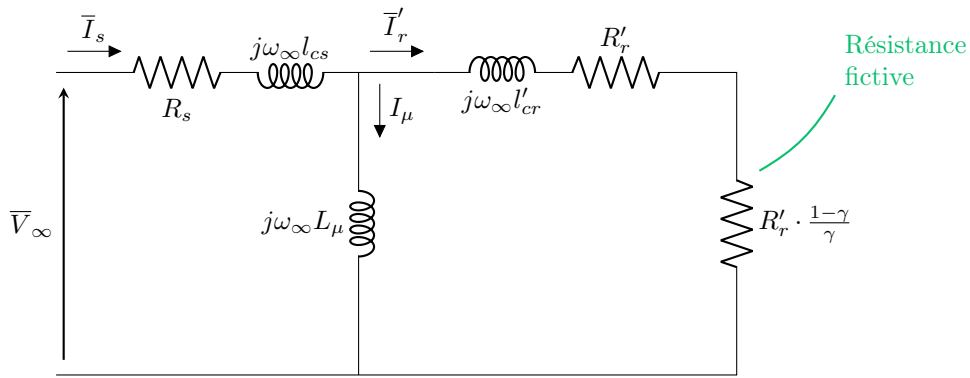


FIGURE 47 – Circuit équivalent non simplifié

Le diagramme phasoriel qui lui est associé (lorsque $\gamma > 0$) :

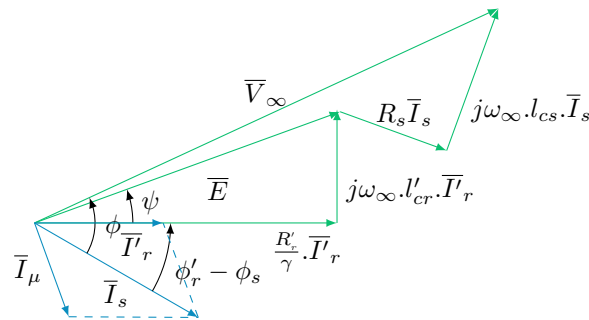


FIGURE 48 – Diagramme phasoriel non simplifié

On y retrouve le déphasage entre \bar{I}_s et la tension d'alimentation \bar{V}_∞ , noté ϕ . Comme pour les transformateurs, on peut simplifier ce circuit équivalent.¹² On obtient alors

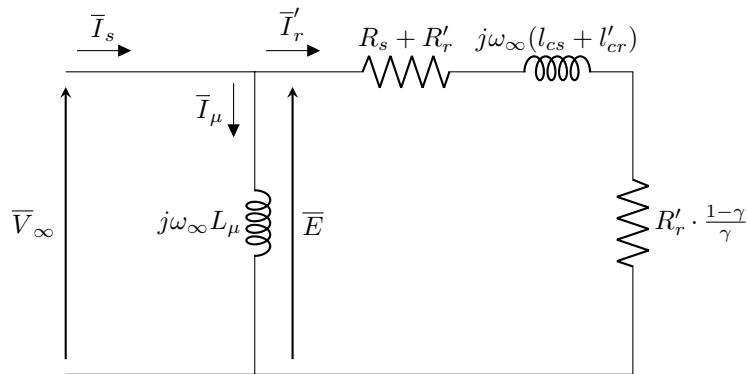
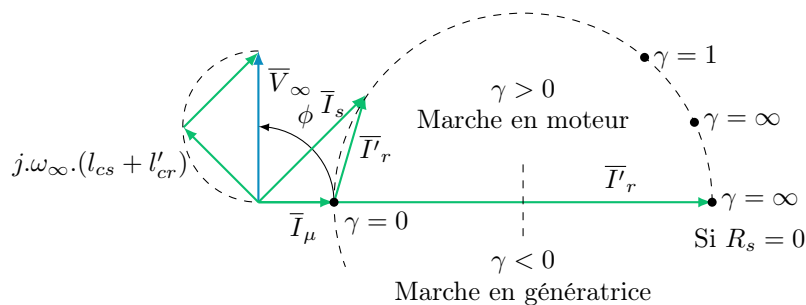


FIGURE 49 – Circuit équivalent simplifié

Cette version simplifiée du circuit équivalent suggère un diagramme phasoriel fortement simplifié, qu'on appellera le "diagramme du cercle" :



12. À noter que la simplification qui supposait que $Z_{\text{série}} \ll Z_L \ll Z_{\text{parallèle}}$ est beaucoup moins bien vérifiée dans la machine asynchrone que dans le transformateur, en raison de la présence de l'entrefer qui vient augmenter la réluctance et diminuer l'inductance parallèle car elle dépend de M_{sr} , qui est inversement proportionnelle à la réluctance. Les éléments série sont augmentés car on a un moins bon couplage et plus de flux de fuite.

FIGURE 50 – Diagramme phasorial simplifié

On y retrouve bien plusieurs propriétés :

- Lorsque $\gamma = 0$, \bar{I}'_r est bien nul, et $\bar{I}_s = \bar{I}_\mu$.
- Lorsque $\gamma = 1$, $\omega_m = 0$, la machine est à l'arrêt.
- Lorsque $\gamma < 0$, la phase de \bar{I}_s par rapport à \bar{V}_∞ dépasse $\pi/2$ et on se retrouve en génératrice plutôt qu'en moteur.

On exprime enfin la tension \bar{V}_∞ en fonction du courant \bar{I}_s :

$$\bar{I}'_r = \frac{\bar{V}_\infty}{R_s + \frac{R'_r}{\gamma} + j\omega_\infty(l'_{cs} + l'_{cr})} \quad (6.21)$$

6.5 Caractéristique couple-vitesse

Le couple développé par la machine est donné par

$$C_{em} = 3pL_\mu I_s I'_r \sin(\theta'_r - \theta_s) \quad (6.22)$$

Cette expression utilise cependant des valeurs "résultantes" plutôt que des valeurs fixées (ex. la tension d'alimentation), elle n'est donc pas franchement utilisable.

Cependant, l'utilisation attentive du diagramme phasorial du circuit équivalent non simplifié nous permet de modifier cette expression :

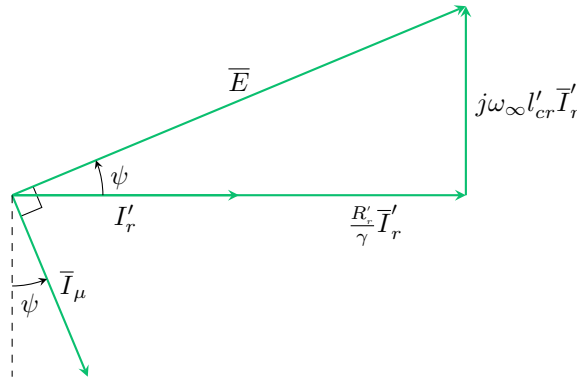
Sur base de l'équation

$$I_s \sin(\theta'_r - \theta_s) = I_\mu \cos(\psi) \quad (6.23)$$

on peut ré-écrire l'équation 6.22

$$C_{em} = 3pL_\mu I_\mu I'_r \cos(\psi) \quad (6.24)$$

Sur base d'un diagramme phasorial simplifié, on peut identifier la valeur de $\cos \psi$:



Où l'on trouve directement que

$$\cos \psi = \frac{R'_r/\gamma}{\sqrt{(R'_r/\gamma)^2 + (\omega_\infty l'_{cr})^2}} \quad (6.25)$$

ainsi que

$$I'_r = \frac{E}{\sqrt{(R'_r/\gamma)^2 + (\omega_\infty l'_{cr})^2}} \quad (6.26)$$

et

$$I_\mu = \frac{E}{\omega_\infty L_\mu} \quad (6.27)$$

Le couple électromagnétique devient alors

$$C_{em} = \frac{3p}{\omega_\infty} R'_r/\gamma \frac{E^2}{(R'_r/\gamma)^2 + (\omega_\infty l'_{cr})^2} \quad (6.28)$$

$$= \frac{3p}{\omega_\infty} R'_r/\gamma \cdot (I'_r)^2 \quad (6.29)$$

Puissance mécanique La puissance mécanique peut se trouver de deux façons, soit directement par la formule

$$P_{\text{méca}} = \omega_m C_{em} \quad (6.30)$$

$$= 3R'_r \frac{1-\gamma}{\gamma} (I'_r)^2 \quad (6.31)$$

soit en la modélisant comme étant la puissance dissipée dans la résistance fictive $R'_r \frac{1-\gamma}{\gamma}$. Dans les deux cas, la formule est évidemment la même.

De cette équation, on tire trois cas de figure :

— Le cas $0 < \gamma < 1$ (Marche en moteur) :

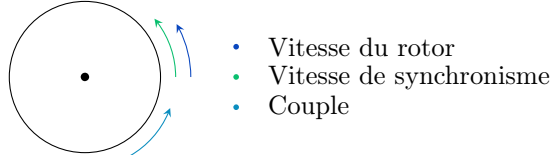
$$0 < \omega_m < \frac{\omega_\infty}{p}$$

$$R'_r \cdot \frac{(1-\gamma)}{\gamma} > 0 \implies P_{\text{méca}} > 0$$

Si l'on représente la machine comme ayant un accès électrique et un accès mécanique, on aurait :



Au sein même de la machine, le champ tournant à une vitesse ω_∞/p et la vitesse de rotation ω_m plus petite que la vitesse du champ tournant entraînent un couple qui va avoir tendance à accélérer le rotor :



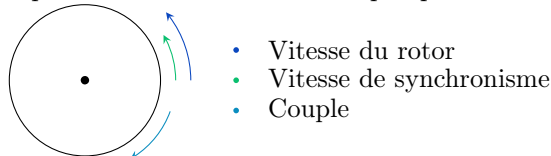
— Le cas $\gamma < 0$ (Marche en génératrice) :

$$\omega_m > \frac{\omega_\infty}{p}$$

$$R'_r \cdot \frac{(1-\gamma)}{\gamma} < 0 \implies P_{\text{méca}} < 0$$



Au sein même de la machine, le champ tournant à une vitesse ω_∞/p et la vitesse de rotation ω_m plus grande que la vitesse du champ tournant entraînent un couple qui va avoir tendance à freiner le rotor :



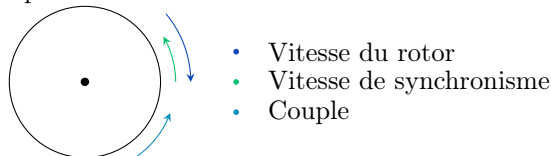
— Le cas $\gamma > 1$ (Marche en frein) :

$$\omega_m < 0$$

$$R'_r \cdot \frac{(1-\gamma)}{\gamma} < 0 \implies P_{\text{méca}} < 0$$



Au sein même de la machine, le champ tournant à une vitesse ω_∞/p et la vitesse de rotation ω_m de signe opposé entraînent un couple qui va avoir tendance à accélérer le rotor :



Pour comprendre comment on peut avoir une consommation de puissance électrique et de puissance mécanique, il faut regarder non pas le signe mais la valeur absolue de la résistance fictive :

$$\left| R'_r \cdot \frac{1-\gamma}{\gamma} \right| < R'_r \implies |P_{\text{méca}}| < P_{\text{joule-motor}}$$

En fait, la puissance mécanique fournie n'est pas suffisante par rapport aux pertes joules au sein du moteur, et l'on consomme donc de la puissance électrique plutôt que d'en produire.

Couple électromagnétique Pour rappel, notre formule actuelle du couple électromagnétique était celle de l'équation 6.28. On peut aller un peu plus loin et considérer que les éléments parasites du stator (à savoir R_s et l'inductance l_{cs}) sont petits et que dès lors, $\bar{E} \approx \bar{V}_\infty$. Dans ce cas, l'expression devient

$$\frac{3p}{\omega_\infty} \frac{V_\infty^2 \cdot R'_r / \gamma}{(R'_r / \gamma)^2 + (\omega_\infty l'_{cr})^2} \quad (6.32)$$

Plus visuellement, La figure 51 suggère de trouver la valeur de glissement pour laquelle C_{em} est maximal. On

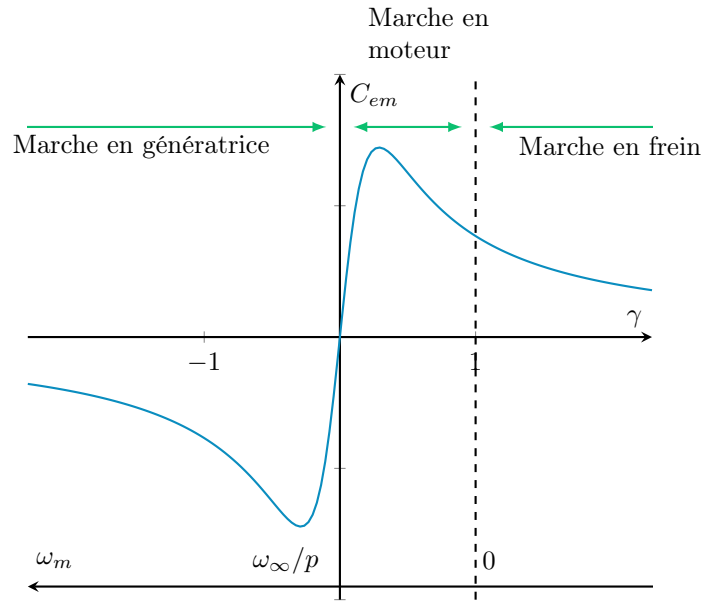


FIGURE 51 – Relation $C_{em} - \gamma$ (et Couple – vitesse)

trouve que pour

$$\gamma_{\max} = \frac{R'_r}{\omega_\infty l'_{cr}} \quad (6.33)$$

alors

$$C_{\max} = \frac{3p}{\omega_\infty} \cdot \frac{V_\infty^2}{2\omega_\infty l'_{cr}} \quad (6.34)$$

6.6 Point de fonctionnement

Point d'équilibre En vertu de l'équilibre des couples, représenté par l'équation suivante, le point d'équilibre sera donné par le point d'intersection des courbes $C_{em}(\omega_m)$ et $C_r(\omega_m) + C_p(\omega_m)$, la première des deux ayant déjà été identifiée.

$$\sum C = C_{em} - C_p - C_r = 0 \longrightarrow C_{em} = C_p + C_r \quad (6.35)$$

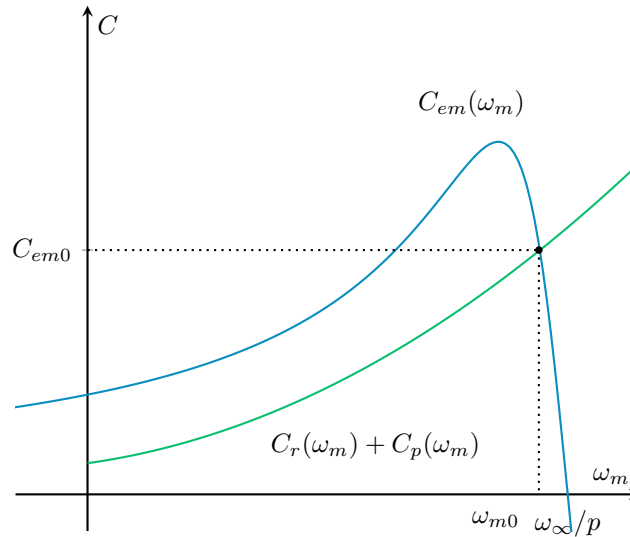


FIGURE 52 – Point d'équilibre des couples

Stabilité du point d'équilibre En fonction de la position du point d'équilibre, celui-ci peut s'avérer stable ou instable :

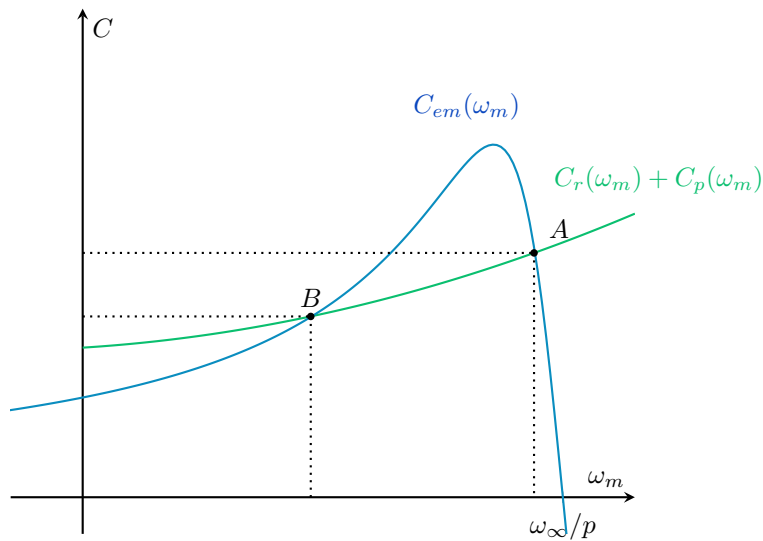


FIGURE 53 – Stabilité des points d'équilibre

Au point d'équilibre A, une augmentation de ω_m entraîne une diminution du couple, donc une décélération. À l'inverse, une diminution de ω_m entraîne une augmentation du couple, donc une accélération.

Au point d'équilibre B, une augmentation de ω_m entraîne une augmentation du couple, donc une accélération supplémentaire. À l'inverse, une diminution de ω_m entraîne une diminution du couple, donc une accélération et un arrêt.

Plus mathématiquement, on part de l'équation

$$C_{em} - C_p - C_r = J_t \frac{d\omega_m}{dt}$$

En introduisant une variation de vitesse $\delta\omega_m = \omega_{m0} - \omega_m$,

$$\left(\frac{dC_{em}}{d\omega_m} - \frac{dC_p}{d\omega_m} - \frac{dC_r}{d\omega_m} \right) \cdot \delta\omega_m$$

L'équation différentielle donne une solution du type

$$\delta\omega_m \propto e^{t/\tau}$$

où

$$\tau = \frac{J_t}{(dC_{em}/d\omega_m - dC_p/d\omega_m - dC_r/d\omega_m)}$$

Cet équilibre sera stable si $\tau < 0$ ou encore

$$\frac{dC_{em}}{d\omega_m} < \frac{d(C_p + C_r)}{d\omega_m} \quad (6.36)$$

On mentionnera aussi la possibilité d'un décrochage en cas de chute de la tension de réseau V_∞ . Le couple diminue alors jusqu'à atteindre 0.

6.7 Effet des matériaux magnétiques

Comme dans les transformateurs, on distingue deux types de pertes, les pertes par hystérésis et les pertes par courants de Foucault. Ces pertes sont toutes les deux proportionnelles au carré du champ magnétique dans l'entrefer, mais les pertes hystérésis sont proportionnelles à la vitesse de synchronisme, là où les pertes de Foucault sont proportionnelles au carré de cette vitesse.

Au stator, ces pertes sont modélisées par l'ajout d'une résistance en parallèle avec L_μ .

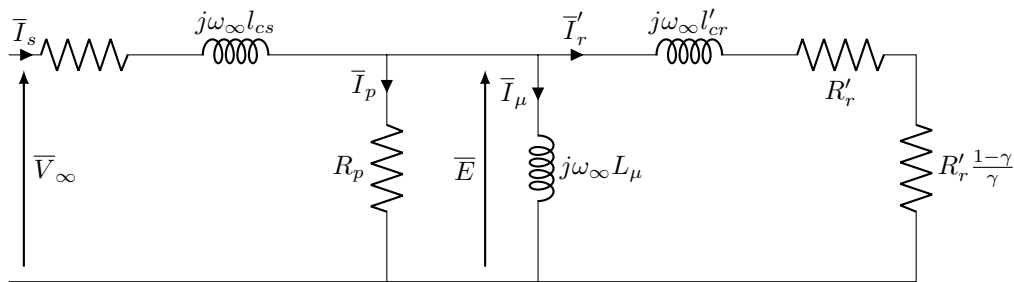


FIGURE 54 – Circuit équivalent complet

Au rotor, on néglige les pertes car la vitesse $\omega_r \approx 0$ lorsque la vitesse de rotation est proche de la vitesse de synchronisme.

Le diagramme du cercle se voit modifié pour tenir compte de cette résistance :

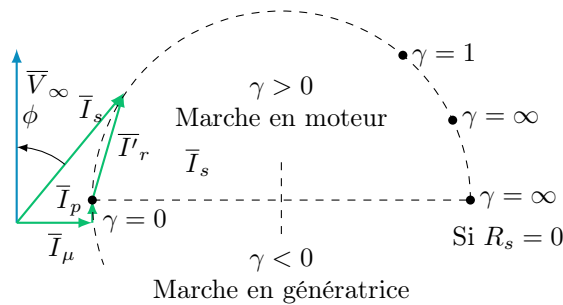


FIGURE 55 – Caption

6.8 Puissance et rendement

Rappel : signe des grandeurs de puissance Au tableau 4, l'on rappelle le signe des diverses grandeurs de puissance dans les deux cas principaux (moteur/ génératrice).

Grandeur	Symbole	Marche en moteur	Marche en génératrice
Déphasage $V - I$	ϕ	$< \pi/2$	$> \pi/2$
Facteur de puissance	$\cos(\phi)$	> 0	< 0
Puissance active	$P = 3V_\infty I_s \cos(\phi)$	> 0	< 0
Puissance réactive	$Q = 3V_\infty I_s \sin(\phi)$	> 0	> 0
Puissance apparente	$S = 3V_\infty I_s$	> 0	> 0

TABLE 4 – Rappel des signes de puissances

Bilan de puissance Le bilan de puissance général du système est indiqué à la figure 56.

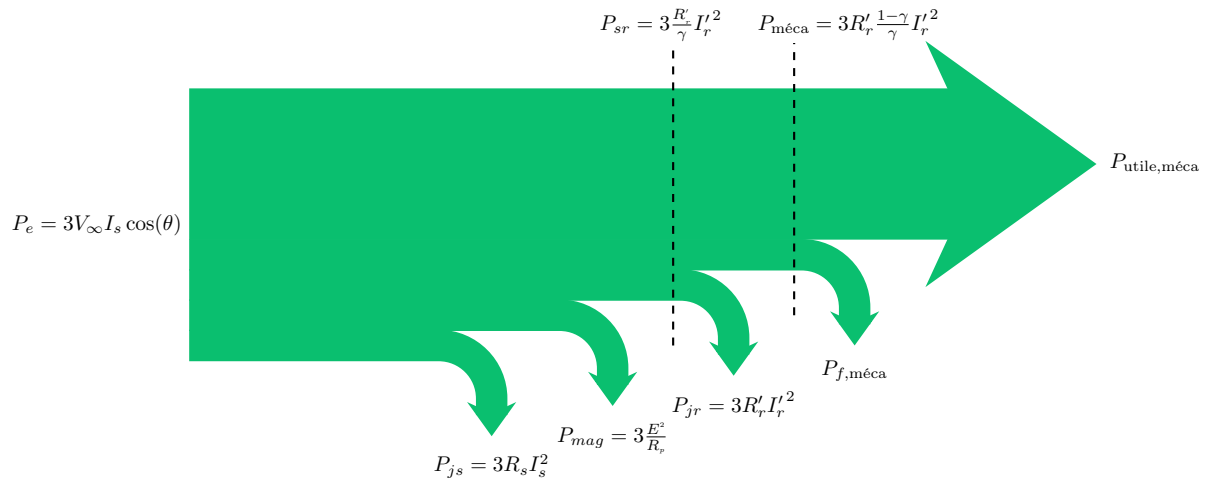


FIGURE 56 – Bilan de puissance

On y trouve

- La puissance électrique fournie P_e
- La puissance perdue par effet Joule dans le stator P_{js}
- La puissance perdue par pertes magnétiques P_{mag}
- La puissance fournie du stator au rotor P_{sr}
- La puissance dissipée par effet Joule dans le rotor P_{jr}
- La puissance mécanique "en théorie" $P_{méca}$
- La puissance perdue par frottement $P_{f,méca}$
- La puissance réellement fournie $P_{utile,méca}$

Sur base du graphe du couple, on peut comprendre un peu mieux le sens de ces différentes puissances : La puissance transmise au rotor a pour expression

$$P_{sr} = \frac{\omega_\infty}{p} C_{em0} \quad (6.37)$$

Dès lors, il correspond à l'aire indiquée sur le graphe de gauche de la figure 57. Selon la figure 56, cette puissance P_{sr} peut encore être séparée en deux parties : la puissance mécanique et la puissance dissipée par effet Joule dans le rotor. Les deux ont pour équations :

$$P_{méca} = (1 - \gamma) \frac{\omega_\infty}{p} C_{em0} \quad (6.38)$$

$$P_{jr} = \gamma \frac{\omega_\infty}{p} C_{em0} \quad (6.39)$$

On vérifie effectivement que la somme des deux nous redonne l'équation 6.37. On retrouve ce bilan à la partie de droite de la figure 57.

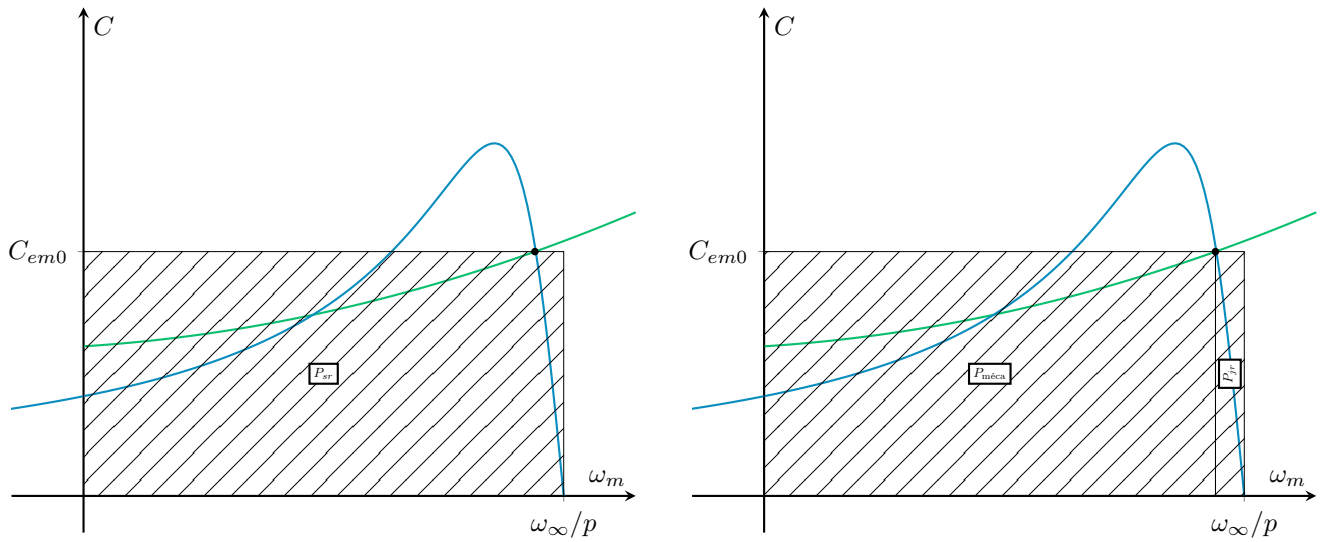


FIGURE 57 – Interprétation graphique

6.8.1 Rendements

Rendement électrique Le rendement électrique indique le rendement de la machine entière. Il est donné par l'équation

$$\eta_{\text{électrique}} = \frac{P_{\text{utile,méca}}}{P_e} = \frac{P_{\text{méca}} - P_{f,\text{méca}}}{P_{\text{méca}} + P_{jr} + P_{mag} + P_{js}} \quad (6.40)$$

Naturellement, ce rendement sera maximal au plus γ est proche de 0.

Rendement de conversion Le rendement de conversion concerne principalement le rotor, car il représente le rapport entre la puissance mécanique et la puissance fournie au rotor.

$$\eta_{\text{conversion}} = \frac{P_{\text{méca}}}{P_{sr}} = \frac{P_{\text{méca}}}{P_{\text{méca}} + P_{jr}} = (1 - \gamma) \quad (6.41)$$

Encore une fois, le rendement sera maximal au plus γ est proche de 0.¹³

6.9 Problèmes d'utilisation

6.9.1 Phases de fonctionnement

On distingue trois étapes successives lors du fonctionnement du moteur :

1. La phase à vitesse nulle (qui ne dure naturellement pas très longtemps) : à vitesse nulle, $\gamma = 1$ et donc

$$C_{em} = \frac{3p}{\omega_{\infty}} \cdot \frac{V_{\infty}^2 R'_r}{R_r'^2 + (\omega_{\infty} + l'_{cr})^2}$$

2. La phase d'accélération : durant l'accélération, γ passe progressivement de 1 à 0 ou du moins une valeur proche de 0. Les trois équations fondamentales de cette étape ont déjà été vues auparavant :

$$\begin{aligned} C_{em} - C_p - C_r &= J_t \frac{d\omega_m}{dt} \\ C_{em} &= \frac{3p}{\omega_{\infty}} \frac{V_{\infty}^2 R'_r / \gamma}{(R'_r / \gamma)^2 + (\omega_{\infty} l'_{cr})^2} \\ \gamma &= \frac{\omega_{\infty} / p - \omega_m(t)}{\omega_{\infty} / p} \end{aligned}$$

Ces équations donneront naturellement lieu à une équation différentielle qui ne nous intéresse pas vraiment dans ce cours.

13. En pratique, le glissement sera en général compris entre 0 et 0.1, voire 0 et 0.01 selon la puissance du moteur. Le facteur de puissance $\cos(\theta)$ vaut aux alentours de 0.75 et le rendement électrique sera généralement compris entre 0.75 et 0.95.

3. La phase de régime a lieu en fin d'accélération, c'est à dire lorsque $\frac{d\omega_m}{dt} = 0$. Ainsi, les équations précédentes se simplifient :

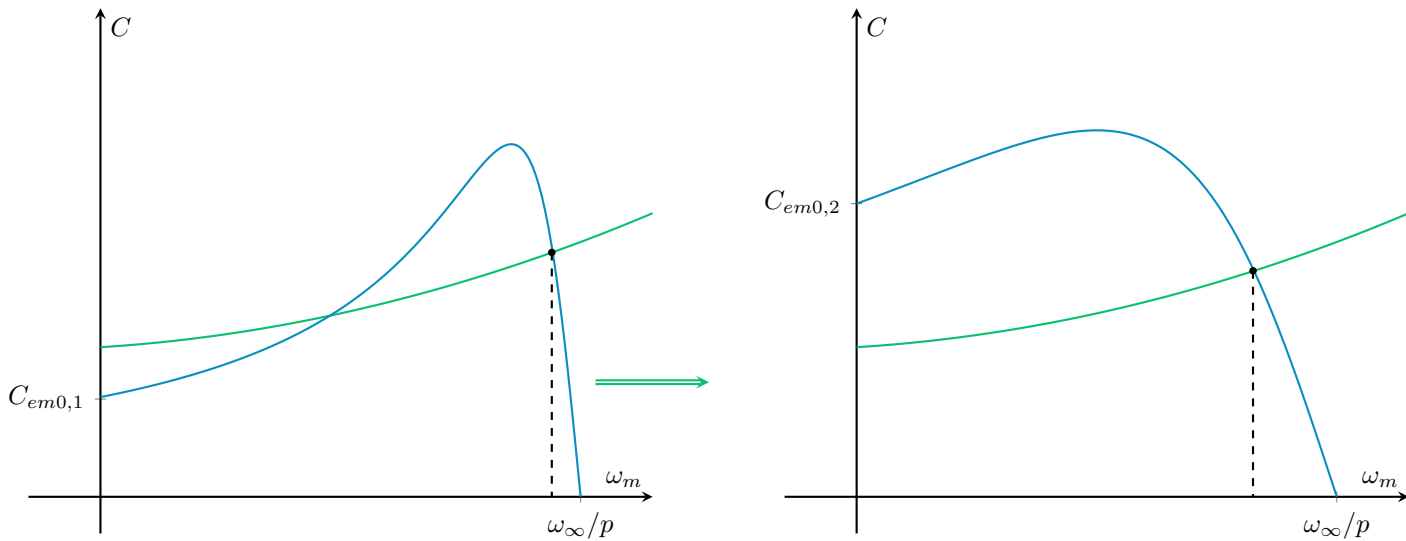
$$C_{em} = C_p + C_r$$

$$C_{em} = \frac{3p}{\omega_\infty} \frac{V_\infty^2 R'_r / \gamma}{(R'_r / \gamma)^2 + (\omega_\infty l'_{cr})^2}$$

$$\gamma = \frac{\omega_\infty / p - \omega_m}{\omega_\infty / p}$$

6.9.2 Couple de démarrage *versus* rendement

L'oeil avisé aura remarqué dès la figure 52 l'impossibilité dans certaines circonstances de démarrer le moteur. En effet, le couple de charge ($C_p + C_r$) est supérieur au couple C_{em} . Une première alternative serait de faire en sorte que le moteur aie un plus grand couple électromagnétique à vitesse nulle :

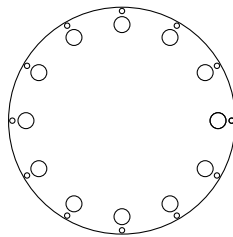


Dans le deuxième cas, $C_{em0,1} < C_{em0,2}$ mais en contrepartie $\eta_1 > \eta_2$. Si l'on graphe le couple électromagnétique en fonction de γ au lieu de ω_m , on observe que l'on cherche en fait à augmenter γ_{\max} . Son expression, pour rappel, est donnée par

$$\gamma_{\max} = \frac{R'_r}{\omega_\infty l'_{cr}}$$

En pratique, augmenter R'_r n'est pas toujours faisable. Pour un rotor bobiné, on peut envisager d'intégrer une résistance variable au rotor. Cependant, pour un moteur à cage d'écureuil, c'est impossible. On vient donc exploiter l'effet de double cage.

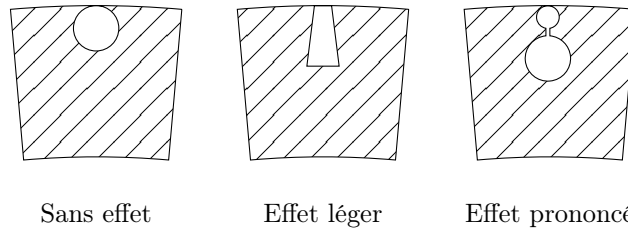
Effet de double cage Au lieu de n'avoir qu'un cercle de barres à la cage d'écureuil, on vient en rajouter un deuxième. On se retrouve alors avec une cage intérieure, où les barres ont un diamètre élevé, et une cage extérieure où les barres sont plus fines.



On peut facilement déduire que la cage intérieure aura une résistance $R'_{r,int}$ faible mais une inductance de fuite importante. Pour la cage extérieure, c'est l'inverse. Une explication de la raison pour laquelle l'inductance est plus importante pour la cage intérieure est le moins bon couplage qui existe entre la cage intérieure et les enroulements statoriques, vu qu'ils en sont plus éloignés. Au niveau du circuit équivalent, on obtient deux branches à droite, une par cage. Au démarrage, lorsque $\gamma = 1$, les effets inductifs sont prépondérants. Le courant va dès lors circuler dans la branche ayant la plus petite inductance propre, c'est à dire la cage extérieure. La résistance

$R'_{r,ext}$ y est importante et l'objectif est rempli. Lorsque $\gamma \approx 0$, les effets résistifs sont plus importants. Le courant va donc circuler dans la branche ayant la plus petite résistance, c'est à dire la cage intérieure.

De plus, on peut varier la forme des deux cages pour obtenir un effet plus ou moins prononcé :



6.9.3 Courants et tensions de démarrage

Un dernier problème relatif au démarrage est le courant gigantesque qu'il nécessite :

$$\bar{I}_s|_{\gamma=1} \approx 5 \dots 10 \bar{I}_s|_{\gamma=0}$$

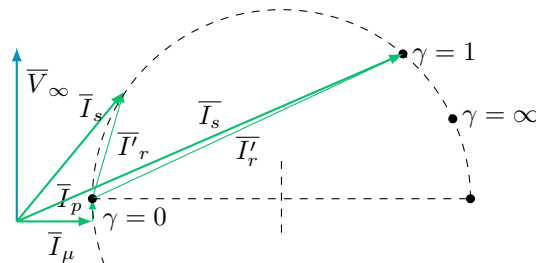


FIGURE 58 – Diagramme du cercle au démarrage

Ceci n'est clairement pas idéal car il faudrait alors surdimensionner tout l'équipement de sécurité. On vient donc augmenter la résistance R'_r . En effet, c'est elle qui, à $\gamma = 1$, est équivalente à un court-circuit et qui pompe le courant. Pour un rotor bobiné, on peut augmenter la résistance mais pour un rotor à cage, c'est impossible. Pour pallier à ce problème, on vient alimenter le moteur en triangle plutôt qu'en étoile. Ceci a pour effet de réduire le courant de phase d'un facteur $\sqrt{3}$, et le courant de ligne d'un facteur 3. Une dernière solution est d'utiliser un autotransformateur pour diminuer la tension et ainsi le courant. Cependant, cette solution n'est pas idéale car le couple est au carré de la tension d'alimentation. Ainsi, le couple de démarrage devient dérisoire.

6.9.4 Réglage de la vitesse

Pour régler la vitesse, plusieurs solutions :

- Installer plusieurs systèmes d'enroulements statoriques, ayant chacun un nombre de paires de pôles différent.
- Faire varier la résistance rotorique, ce qui vient déplacer le point d'équilibre mais augmente fâcheusement les pertes.
- Faire varier la tension d'alimentation vu que le couple est au carré de la tension.
- Faire varier la fréquence.
- Faire varier la tension et la fréquence simultanément, en maintenant le rapport U/f constant. En diminuant la vitesse de cette façon, on diminue aussi le rendement vu que la surface $P_{méca}$ diminue alors que P_{jr} ne change pas.

Les trois dernières options nécessitent une électronique de puissance.

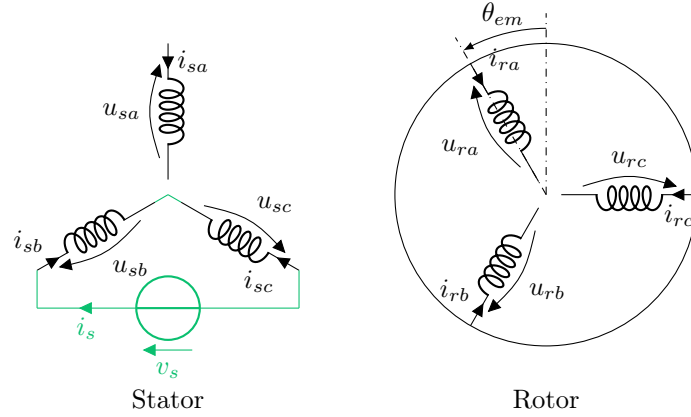
Pour inverser le sens de rotation, on passe d'un système direct à un système inverse, via une électronique de puissance, ou bien on intervertit deux phases.

6.10 Moteur asynchrone monophasé

Ceux-ci ont une faible puissance (< 1 kW) et une alimentation triphasée n'est pas disponible, comme par exemple dans une application domestique.

6.10.1 Structure de base

Ces moteurs sont constitués de deux enroulements statoriques en quadrature, l'un dit principal et l'autre auxiliaire. Le rotor quant à lui n'est autre qu'un rotor à cage. On peut obtenir cette structure et son fonctionnement à partir d'un moteur triphasé. De cette façon, nous pouvons utiliser nos modèles triphasés développés précédemment.



6.10.2 Fonctionnement en régime

En régime, la tension d'alimentation est

$$v_s = V_\infty \sin(\omega_\infty t) \quad (6.42)$$

mais le courant est plus particulier : dans la phase a , on n'introduit pas de courant. Dans les deux autres phases, les courants sont opposés mais "de même phase" :

$$i_{sa} = 0 \quad (6.43)$$

$$i_{sb} = I_s \sin(\omega_\infty t + \phi_s) \quad (6.44)$$

$$i_{sc} = -I_s \sin(\omega_\infty t + \phi_s) \quad (6.45)$$

Ce système de courant peut être vu comme la somme d'un système triphasé direct et d'un système triphasé inverse.

Au système direct, le glissement, la puissance et le couple sont donnés par

$$\gamma_1 = \frac{\omega_\infty - \omega_m}{\omega_\infty / p} \quad (6.46)$$

$$P_{\text{méca},1} = 3R'_r \frac{1 - \gamma_1}{\gamma_1} I'_{r1}{}^2 \quad (6.47)$$

$$C_{em1} = \frac{3p}{\omega_\infty} \frac{R'_r}{\gamma_1} I'_{r1}{}^2 \quad (6.48)$$

Au système inverse, le glissement, la puissance et le couple sont donnés par

$$\gamma_2 = \frac{\omega_\infty + \omega_m}{\omega_\infty / p} = 2 - \gamma_1 \quad (6.49)$$

$$P_{\text{méca},2} = 3R'_r \frac{1 - \gamma_2}{\gamma_2} I'_{r2}{}^2 \quad (6.50)$$

$$C_{em2} = \frac{3p}{\omega_\infty} \frac{R'_r}{\gamma_2} I'_{r2}{}^2 \quad (6.51)$$

La différence des deux nous donne

$$C_{em} = C_{em1} - C_{em2} = \frac{3p}{\omega_\infty} \frac{R'_r}{\gamma_1} I'_{r1}{}^2 - \frac{3p}{\omega_\infty} \frac{R'_r}{\gamma_2} I'_{r2}{}^2 \quad (6.52)$$

6.10.3 Caractéristique couple-vitesse

On exprime dès lors la relation couple-vitesse comme étant la différence de C_{em1} et de C_{em2} .

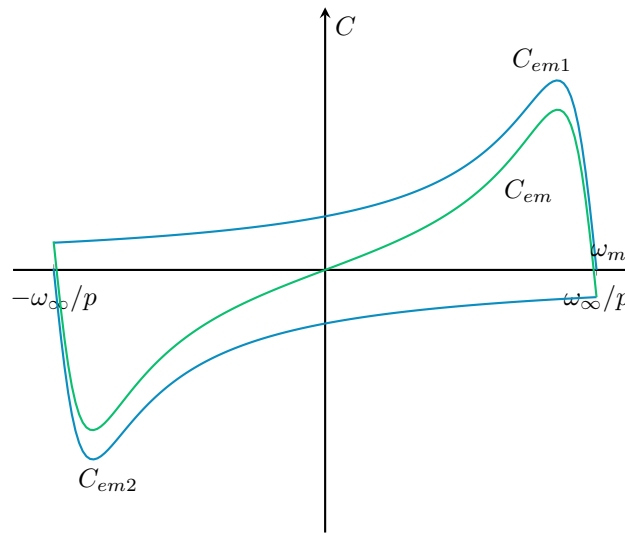
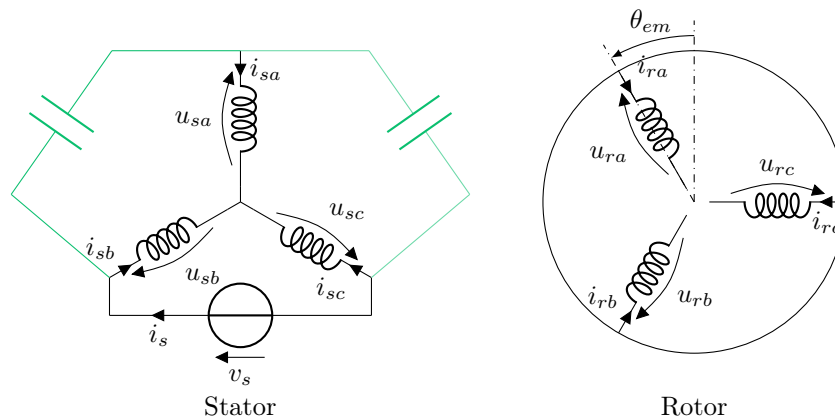


FIGURE 59 – Caractéristique couple-vitesse

6.11 Démarrage

À nouveau, le problème du démarrage se pose, de façon d'autant plus dramatique ici vu que le couple est nul. On fait alors usage du deuxième enroulement en y faisant passer un courant décalé du premier par une capacité. Le choix de la position de la capacité influe aussi sur le sens de rotation.

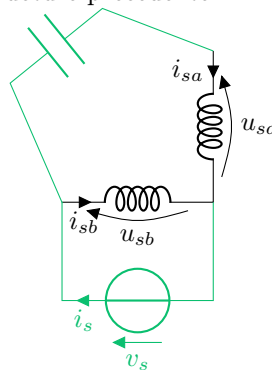


6.11.1 Autres structures

On citera deux autres structures :

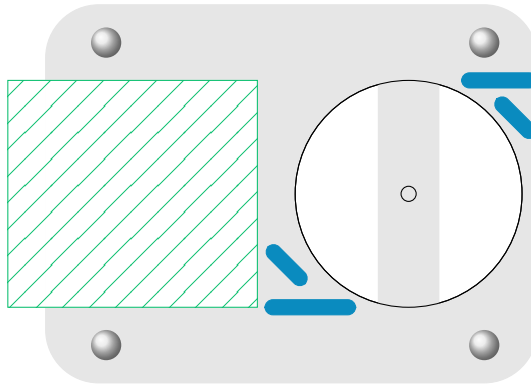
— Le moteur à deux systèmes d'enroulements statoriques

Il est en fait une simplification de la structure précédente :



Ici, le sens de rotation est unique vu qu'on ne peut pas déplacer la capacité.

— Le moteur à spires de Frager :



Dans cette structure particulière, les spires induisent un champ magnétique pour faire démarrer le moteur.

Section 7: Machine synchrone

7.1 Dispositions constructives particulières

Dans la machine synchrone, on génère un champ tournant par rapport au stator (qu'on appelle aussi l'induit) par un système triphasé d'enroulements, et un champ fixe par rapport au rotor (qu'on appelle l'inducteur) par des enroulements alimentés en DC, des aimants permanents ou des saillances magnétiques.

Le cas inverse (induit au rotor et inducteur au stator) n'est pas favorable car

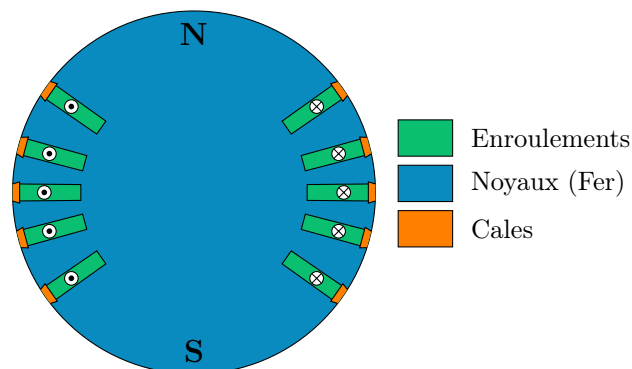
- Le transfert de puissance convertie se fait via l'induit, or ce transfert est difficile via les contacts glissants (leur résistance est plus grande que des câbles au sens classique)
- L'inducteur est fixe par rapport au champ magnétique, il n'est donc pas laminé (voir figure 10). De ce fait, il est plus "solide", d'où l'intérêt de l'utiliser comme pièce tournante (donc au rotor).

7.1.1 L'induit

D'une façon similaire à la machine asynchrone, le stator est laminé, à encoches et le nombre de paires de pôles de l'induit et de l'inducteur sont égaux.

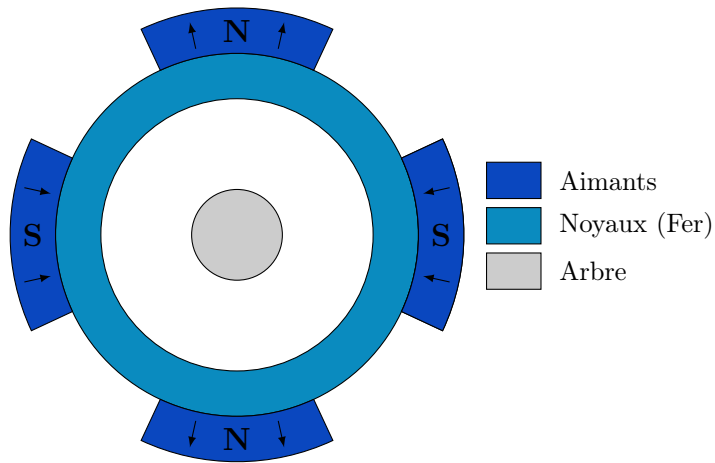
7.1.2 L'inducteur

À pôles lisses bobiné



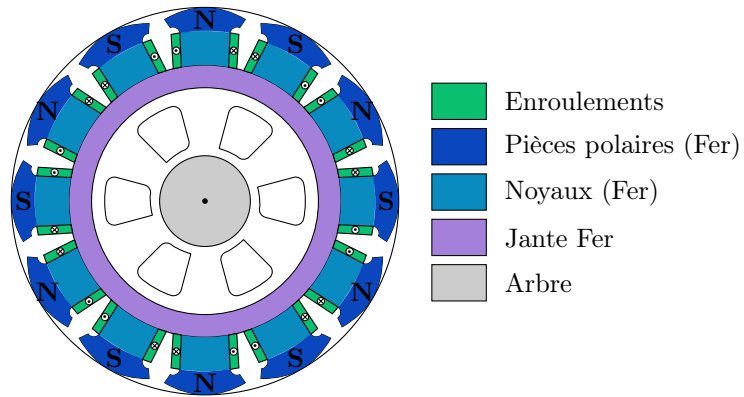
Dans cette structure, les enroulements sont disposés dans des encoches rectangulaires, d'où la nécessité de placer des cales pour les y contenir malgré l'effet centrifuge. Ces rotors sont pensés pour tourner à haute vitesse (type centrales thermiques). Les enroulements ne sont pas disposés de façon régulière, de façon à éviter d'obtenir des harmoniques (couplage sinusoïdal).

À pôles lisses et aimants permanents



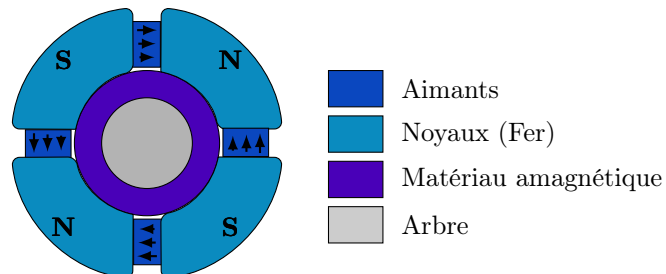
Dans ce type de rotor, les aimants sont placés en surface. Ceci permet d'éviter de devoir alimenter le rotor en courant (on évite donc les pertes Joules, notamment). En revanche, ces structures sont chères et il est compliqué de fixer les aimants de façon solide.

À pôles saillants bobiné



Cette structure génère un nombre élevé de paires de pôles. On remarque d'ailleurs la forme particulière des saillances, elle n'épouse pas exactement le rayon du rotor afin d'obtenir un couplage sinusoïdal. Cette structure sera utilisée en conjonction avec ce qu'on appelle un genre de cage d'écureuil qu'on appellera *l'amortisseur Leblanc*. Ce type de rotor tournera en général à une vitesse bien plus faible (vu la relation $\omega_m = \omega_s/p$).

À pôles saillants et aimants permanents



Cette dernière structure est assez contraignante en fabrication. On remarque que les aimants sont mis dans un sens opposé pour ne pas court-circuiter le champ.

👉 Dans ce cours, on ne considèrera que les inducteurs à pôles lisses bobinés.

7.2 Équations

7.2.1 Équations électriques

Au rotor Vu que l'on alimente le rotor en courant DC, $\omega_r = 0$ et $p\omega_m = \omega_s$. Plus précisément, les circuits du rotor et du stator seront donnés par

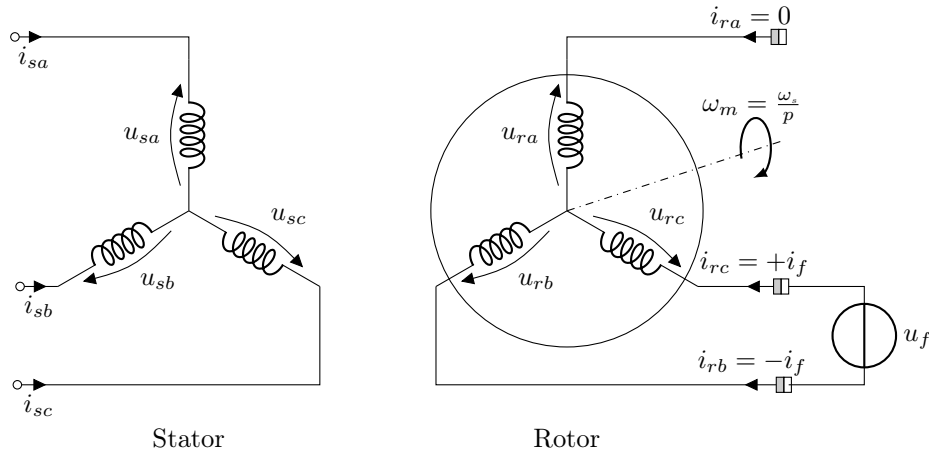


FIGURE 60 – Schéma électrique utilisé

Vu qu'une des phases du rotor n'est pas connectée, nous pouvons le simplifier en une seule inductance.

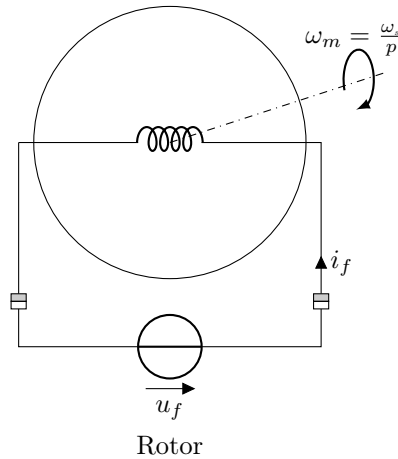


FIGURE 61 – Schéma électrique simplifié du rotor

On fait apparaître plusieurs nouveaux paramètres :

- R_f , la résistance de l'inducteur
- M_f , l'amplitude de l'inductance mutuelle inducteur-induit
- u_f , la tension de l'inducteur
- i_f , le courant de l'inducteur

La valeur de R_f se trouve à partir de R_r (voir la section 5) :

$$R_f = 2R_r \quad (7.1)$$

Naturellement, par la loi d'Ohm,

$$u_f = R_f i_f \quad (7.2)$$

Pour rester dans le cadre de la machine à champ tournant, on exprime I_r et V_r en fonction de i_f et u_f .

$$I_r = \sqrt{\frac{2}{3}} i_f \quad (7.3)$$

$$V_r = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} u_f \quad (7.4)$$

Au stator Pour rappel, l'équation de la tension dans une machine à champ tournant est

$$\bar{V}_s = R_s \bar{I}_s + j\omega_s L_{cs} \bar{I}_s + j\omega_s \frac{3}{2} M_{sr} \bar{I}_r e^{j\theta_{e0}}$$

Au vu de l'équation de I_r vue précédemment, et sachant que $\phi_r = -\pi/2$ (voir figure 61),¹⁴

$$\bar{V}_s = R_s \bar{I}_s + j\omega_s L_{cs} \bar{I}_s + j\omega_s M_f \frac{i_f}{\sqrt{2}} e^{j(\theta_{e0} - \pi/2)} \quad (7.5)$$

Pour la connexion au réseau, on considère à nouveau que

$$\bar{V}_s = \bar{V}_\infty - j\omega_\infty l_g \bar{I}_s$$

🔗 En pratique, on utilisera une convention de signe de type "génératrice". Dans une convention génératrice, on remplacera \bar{I}_s par $-\bar{I}_s$ dans les équations.

Finalement, on sépare $j\omega_s L_{cs} \bar{I}_s$ en $j\omega_s (L_{cs} + l_{cs}) \bar{I}_s$. On appelle le premier terme la réaction d'induit vu que $L_{cm} \bar{I}_s$ est le flux associé au champ d'entrefer créé par l'induit. l_{cs} quant à lui représente les flux de fuite.

Récapitulons par notre équation générale :

$$\bar{V}_s = \boxed{j\omega_s M_f \frac{i_f}{\sqrt{2}} e^{j(\theta_{e0} - \pi/2)} - j\omega_s L_{cm} \bar{I}_s} - j\omega_s L_{cm} \bar{I}_s - R_s \bar{I}_s \quad (7.6)$$

Tension induite par le flux associé au champ d'entrefer total (induit et inducteur)

En introduisant la notation

$$\alpha = \sqrt{2} \cdot \frac{L_{cm}}{M_f} \quad (7.7)$$

qui peut être vue comme un rapport de nombre de tours de l'induit et de l'inducteur.

$$\bar{V}_s = j\omega_s L_{cm} \left(\frac{i_f}{\alpha} e^{j(\theta_{e0} - \pi/2)} - \bar{I}_s \right) - j\omega_s l_{cs} \bar{I}_s - R_s \bar{I}_s \quad (7.8)$$

Courant magnétisant \bar{I}_μ

7.2.2 Couple électromagnétique

On trouvera le couple électromagnétique par l'expression

$$C_{em} = 3p M_f I_s \frac{i_f}{\sqrt{2}} \sin(\phi_s - \theta_{e0} + \pi/2) \quad (7.9)$$

L'argument du sinus représente l'angle électrique entre le champ d'entrefer généré par l'inducteur et celui généré par l'induit.

14. On remarque que dans cette équation, l'amplitude M_{sr} a été remplacée par $M_f/\sqrt{3}$. Ceci vient du fait que

$$M_f = M_{sa-rb} - M_{sa-rc}$$

où

$$M_{sa-rb} = M_{sr} \cos(\theta_{sa-rb})$$

et

$$M_{sa-rc} = M_{sr} \cos(\theta_{sa-rc})$$

Au point où M_f est maximal, $\theta_{sa-rb} = 30^\circ$ et $\theta_{sa-rc} = 150^\circ$. Dès lors,

$$M_f = \sqrt{3} M_{sr}$$

7.3 Schéma équivalent

On développe deux schémas équivalents : un schéma équivalent partant de l'équation 7.5 et de $u_f = R_f i_f$:

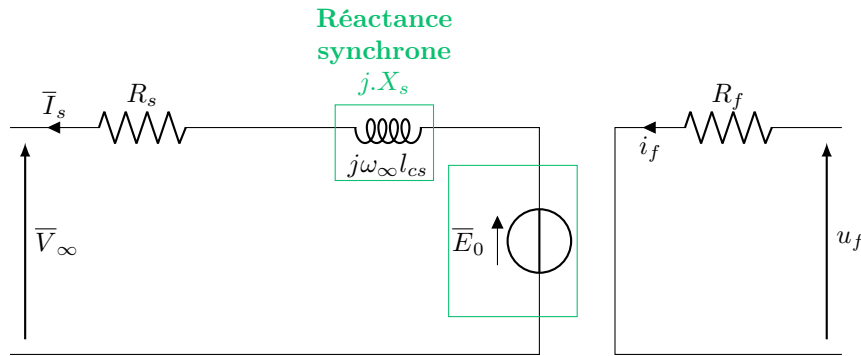


FIGURE 62 – Circuit équivalent à réactance synchrone

On l'appelle le schéma équivalent à réactance synchrone. E_0 est la tension à vide de la machine, c'est à dire la tension induite par le flux associé au champ d'entrefer créé par l'inducteur. Ce schéma ne tient cependant pas compte de la saturation magnétique.

Partant de l'équation 7.6,

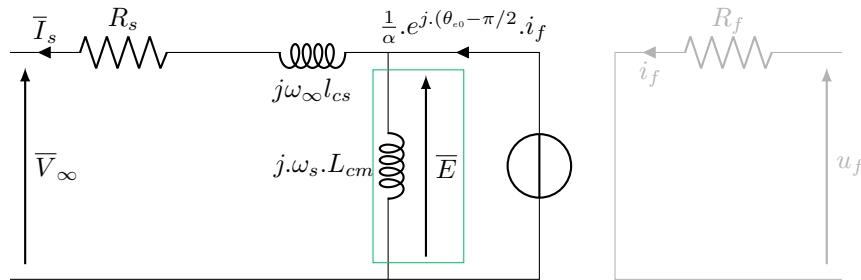


FIGURE 63 – Schéma équivalent de Potier ou de référence

On l'appelle schéma équivalent de Potier ou schéma équivalent de référence. E est la tension induite par le flux associé au champ d'entrefer total. Si L_{cm} est exprimé comme étant fonction de \bar{E} , le schéma tient compte de la saturation.¹⁵

Effet des matériaux magnétiques À nouveau, on rajoute une résistance en parallèle pour tenir compte des pertes magnétiques dans l'induit (hystérésis et courants de Foucault)

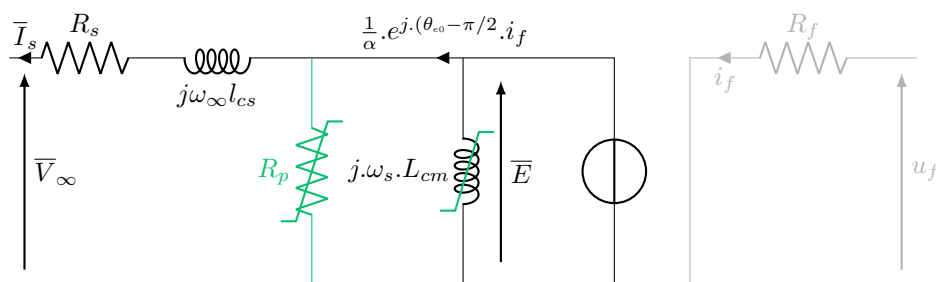


FIGURE 64 – Circuit équivalent sur base des matériaux magnétiques

Comme dit précédemment, on tiendra compte de la saturation en exprimant L_{cm} et R_p comme étant fonctions de E .

¹⁵. Car E est un indicateur du champ d'entrefer, donc de la saturation

7.3.1 Bilan de puissance

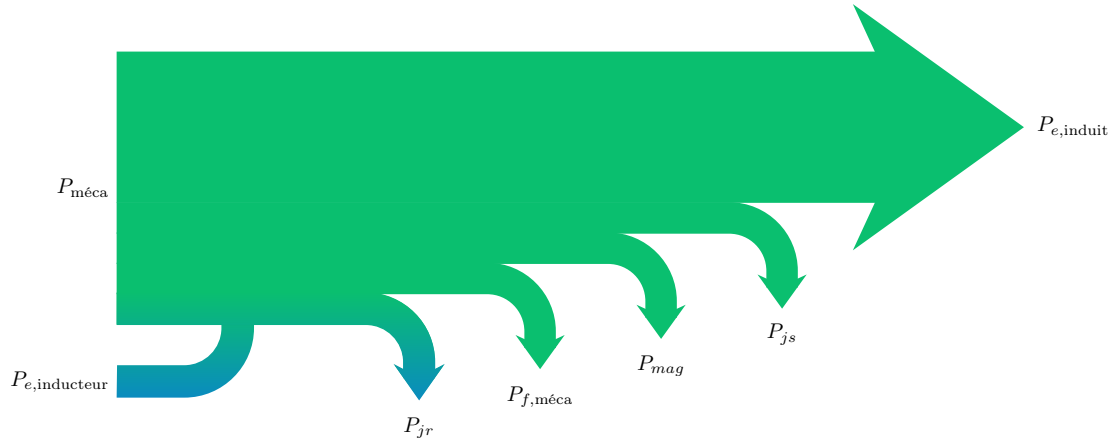


FIGURE 65 – Bilan de puissance

La couleur **bleue** indique qu'il s'agit de puissance fournie et perdue au rotor via u_f et i_f .

Par le circuit équivalent de Potier Dans ce cas, on obtient que la puissance mécanique convertie vaut le triple de la puissance de la source de courant :

$$P_{\text{méca, conv}} = 3\overline{E} \frac{1}{\alpha} e^{j(\theta_{e0} - \pi/2)} \cdot i_f \quad (7.10)$$

Par le circuit équivalent à réactance synchrone Ici on a que le puissance de la source de tension vaut le tiers de la puissance mécanique diminuée des pertes magnétiques :

$$P_{\text{méca, conv}} = 3\overline{E}_0 \overline{I}_s + P_{\text{mag}} \quad (7.11)$$

En considérant, comme on le fera dans ce cours, que les pertes magnétiques sont assimilées à un couple de pertes, cela n'est plus le cas et on obtient tout simplement :

$$P_{\text{méca, conv}} = 3\overline{E}_0 \overline{I}_s \quad (7.12)$$

$$P_{\text{méca, conv}} = 3\overline{E}_0 \overline{I}_s \quad (7.13)$$

7.4 Diagramme vectoriel

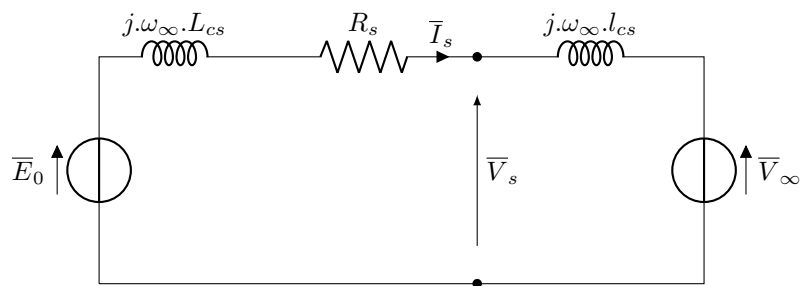


FIGURE 66 – Circuit équivalent que l'on utilisera

Charge inductive Dans le cas d'une charge inductive, $\phi > 0$, et le diagramme vectoriel est le suivant :

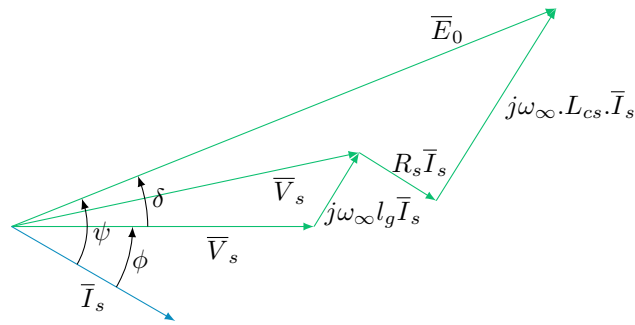
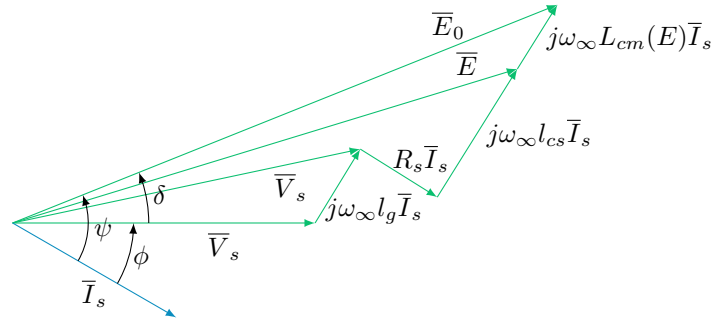


FIGURE 67 – Diagramme vectoriel du circuit équivalent à réactance synchrone

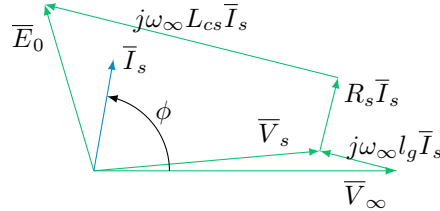
Si l'on veut tenir compte de la saturation, on utilisera l_{cs} pour déterminer \bar{E} puis $L_{cm}(E)$ et enfin \bar{E}_0 :



Dans les deux cas, on a

$$i_f = \frac{\sqrt{2}E_0}{\omega_\infty M_f} \quad (7.14)$$

Charge capacitive Dans ce cas-ci, $\phi < 0$.



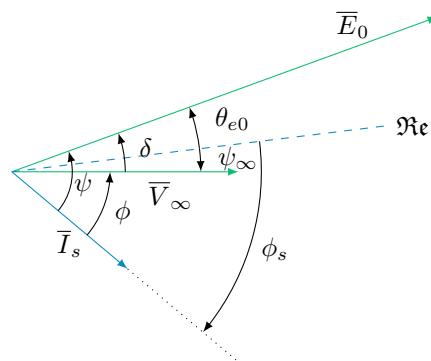
Par rapport à V_s , E_0 sera en général d'amplitude inférieure et en avance de phase de plus de 90° . Si E_0 est plus faible, i_f le sera aussi.

Dans le cas d'un courant purement réactif, et en négligeant R_s ,

$$E_0 \approx V_s \pm \omega_\infty L_{cs} I_s \quad (7.15)$$

7.5 Point de fonctionnement

Pour la détermination du point de fonctionnement, on dresse un axe réel choisi arbitrairement :



La puissance mécanique convertie en puissance électrique est donnée par l'expression

$$P_{\text{méca,conv}} = C_{em,r} \frac{\omega_\infty}{p} \quad (7.16)$$

Sur base de l'expression du couple électromagnétique résistant $C_{em,r} = 3pM_f I_s \frac{i_f}{\sqrt{2}} \sin(\phi_s - \theta_{e0} + \pi/2)$

$$= 3\omega_\infty M_f I_s \frac{i_f}{\sqrt{2}} \cos(\theta_{e0} - \phi_s) \quad (7.17)$$

$$= 3E_0 I_s \cos \psi \quad (7.18)$$

Où ψ est le déphasage entre E_0 et I_s

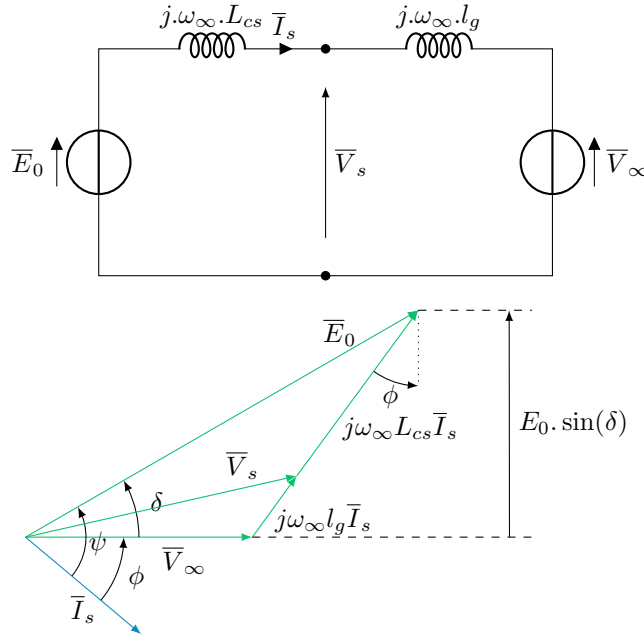
$$= 3\Re[\overline{E_0} \overline{I_s}^*] \quad (7.19)$$

En négligeant la chute de potentiel sur la résistance statorique R_s ,

$$P_{\text{méca,conv}} = 3E_0 I_s \cos \psi = 3V_\infty I_s \cos(\phi) \quad (7.20)$$

Ce qui nous dit que la puissance mécanique convertie en puissance électrique correspond à la puissance active fournie au réseau.

Finalement, on reprend notre circuit et notre diagramme phasorial :



Du diagramme phasorial, on tire que

$$3V_\infty I_s \cos \phi = \frac{3E_0 V_\infty \sin \delta}{\omega_\infty (l_g + L_{cs})} \quad (7.21)$$

Or, le terme de gauche est la puissance mécanique convertie, qui équivaut à

$$\frac{\omega_\infty}{p} C_{em,r}$$

On en tire donc une équation d'une importance capitale :

$$E_0 \sin \delta = \frac{C_{em,r} \omega_\infty^2 (l_g + L_{cs})}{3pV_\infty} \quad (7.22)$$

Dans le terme de droite, tout est soit imposé soit fixé à la machine. En effet, seul le couple $C_{em,r}$ est variable, mais il est relié au couple moteur par la relation

$$C_m = C_{em,r} + C_p \quad (7.23)$$

Pour “séparer” les deux dernières inconnues E_0 et δ , on ramène une équation développée précédemment, à savoir

$$E_0 = \omega_s M_f \frac{i_f}{\sqrt{2}}$$

Sur base de i_f , on détermine d’abord E_0 (lieu de point circulaire), puis $E_0 \sin \delta$ via le choix du couple $C_{em,r}$.

On différencie deux cas de figure, selon que la machine fonctionne en moteur ou en génératrice. Dans le cas où il s’agit d’une génératrice, le couple fourni $C_{em,r}$ est positif, donc $E_0 \sin \delta > 0$.

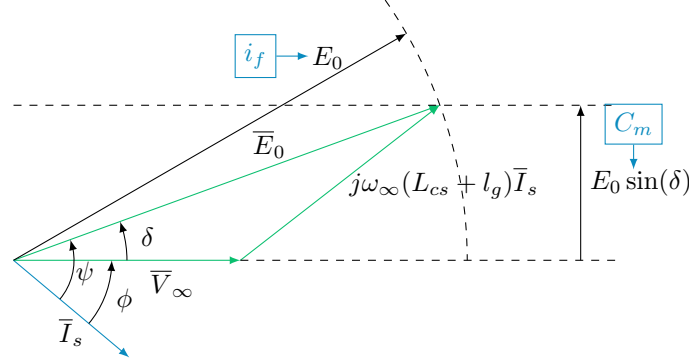


FIGURE 68 – Marche en génératrice

Dans le cas moteur, c’est l’inverse.

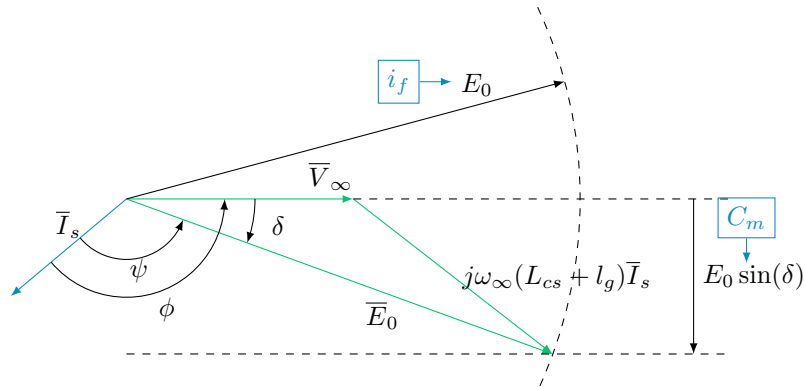


FIGURE 69 – Marche en moteur

7.5.1 Réglage

Évolution en fonction du couple résistant

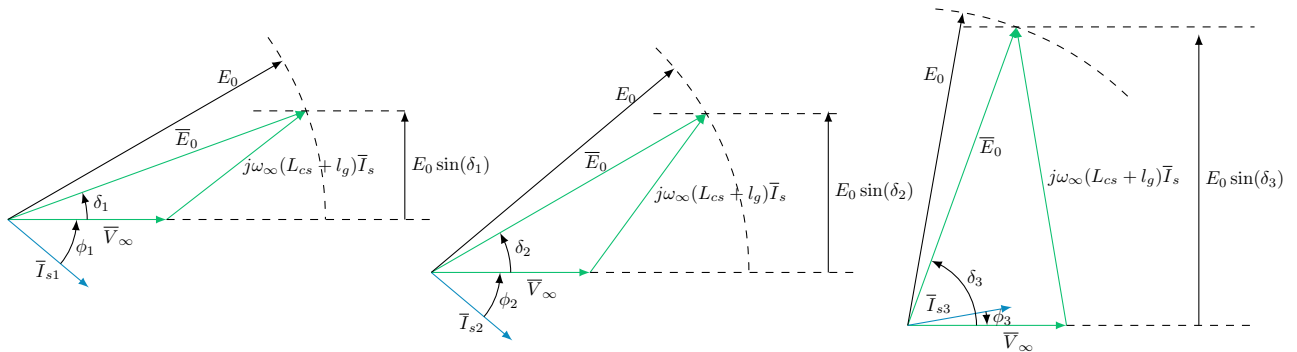


FIGURE 70 – Évolution du diagramme selon une valeur croissante du couple $C_{em,r}$

Quand $C_{em,r}$ augmente, le produit $E_0 \sin \delta$ augmente pareillement, de même pour le courant statorique I_s . Le déphasage entre V_∞ et I_s , quant à lui, diminue, en restant compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$. À la figure 70, on voit même que ϕ_3 est négatif. La puissance active fournie au réseau, notée P , augmente, à l’inverse de Q qui diminue. En effet, leurs expressions sont données par

$$P = 3V_\infty I_s \cos \phi \quad (7.24)$$

et

$$Q = 3V_{\infty} I_s \sin \phi \quad (7.25)$$

respectivement.

Évolution en fonction du courant inducteur

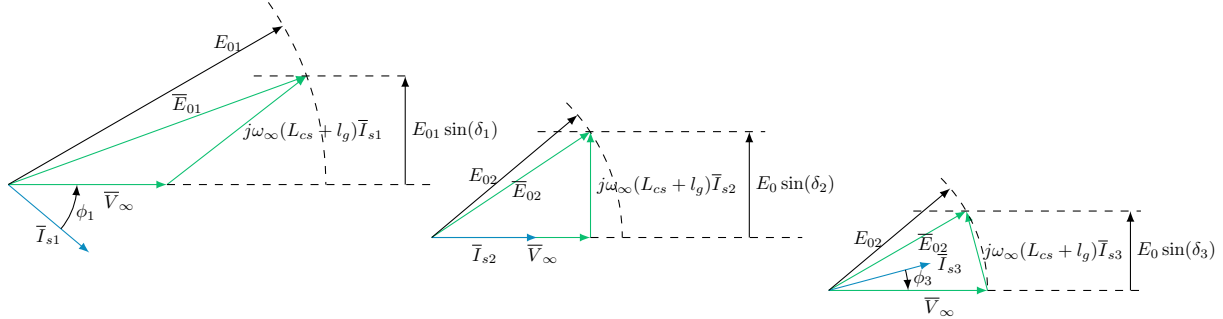


FIGURE 71 – Évolution du diagramme selon une valeur décroissante du courant inducteur i_f

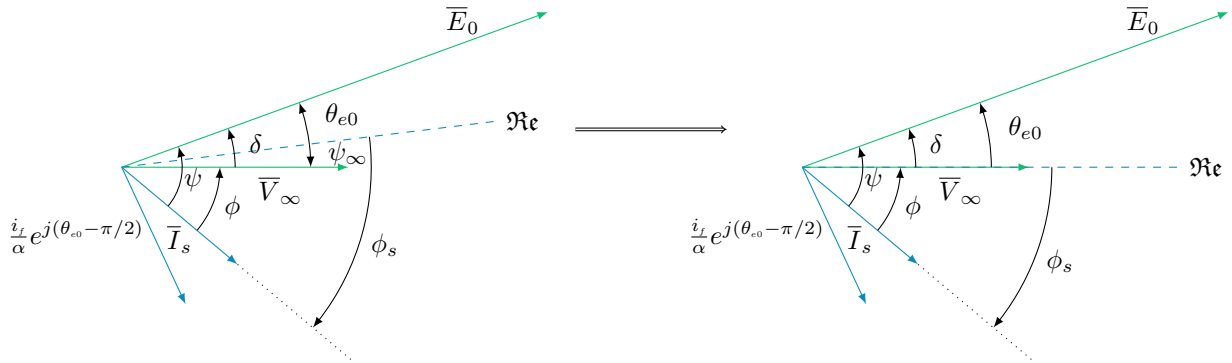
Quand $C_{em,r}$ est constant, le produit $E_0 \sin \delta$ l'est aussi, au même titre que la puissance active P . La diminution du courant i_f entraîne une diminution de E_0 , et un déphasage ϕ , ce qui a pour conséquence une diminution de la puissance réactive Q . On parle d'inductive en surexcitation lorsque $Q > 0$ et de capacitive en sous-excitation lorsque $Q < 0$.

En conclusion, le réglage du couple résistant via le couple moteur (ex. une turbine) permet de régler la puissance active fournie au réseau, là où le courant inducteur permet de régler la puissance réactive.

7.5.2 Stabilité

Comme pour la machine asynchrone, l'étude du point de fonctionnement suggère l'étude de la stabilité. Pour la machine synchrone, cette étude est un peu plus compliquée.

On fixe d'abord l'origine "réelle" du diagramme phasorial de façon à égaliser θ_{e0} et δ :



Lors d'une variation de la vitesse de rotation $\Delta\omega_m$, la phase δ de \bar{E}_0 va varier selon le signe de $\Delta\omega_m$. On exprime alors δ comme une fonction du temps :

$$\delta(t) = \Delta\delta(t) + \delta_0 \quad (7.26)$$

où

$$\Delta\delta(t) = p\Delta\omega_m t \quad (7.27)$$

Au niveau du couple électromagnétique résistant $C_{em,r}$, lui aussi va varier en fonction du temps :¹⁶

$$C_{em,r}(t) = C_{em,r0} + \Delta C_{em,r}(t) \quad (7.28)$$

où

$$C_{em,r0} = \frac{3pV_{\infty}E_0 \sin(\delta_0)}{\omega_{\infty}^2(l_g + L_{cs})} \quad (7.29)$$

$$\Delta C_{em,r} = \frac{3pV_{\infty}E_0 \cos \delta_0}{\omega_{\infty}^2(l_g + L_{cs})} \cdot \Delta\delta(t) \quad (7.30)$$

16. En faisant le développement au premier ordre de $\sin(\delta(t))$

En reliant le couple $C_{em,r0}$ à la variation en vitesse angulaire via l'équation mécanique du couple

$$C_m - C_{em,r} - C_p = J_t \frac{d\omega_m}{dt} \quad (7.31)$$

où les termes en vert sont considérés comme constants dans ce cas-ci,

$$-\Delta C_{em,r} = J_t \frac{d\Delta\omega_m}{dt} \quad (7.32)$$

Ceci correspond en fait à l'équation différentielle

$$J_t \frac{1}{p} \frac{d^2 \Delta\delta(t)}{dt^2} + \frac{3p V_\infty E_0 \cos \delta_0}{\omega_\infty^2 (l_g + L_{cs})} \Delta\delta(t) = 0 \quad (7.33)$$

Ce qui correspond en fait à une équation masse-ressort.¹⁷ La solution d'une telle équation est stable si l'expression

$$\frac{3p V_\infty E_0 \cos \delta_0}{\omega_\infty^2 (l_g + L_{cs})}$$

est supérieure à 0, ce qui est vrai tant que

$$-\frac{\pi}{2} < \delta_0 < \frac{\pi}{2}$$

Plus graphiquement, la relation Couple - δ est représentée à la figure 72

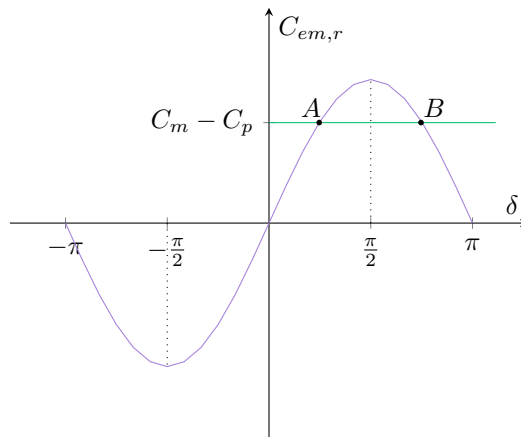


FIGURE 72 – Relation $C_{em,r} - \delta$

On y trouve le point A, stable car compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, et le point B qui ne l'est pas.

Lors d'une variation brusque du couple moteur, le couple viendra osciller. On y observe d'ailleurs à droite une oscillation à la limite du décrochage. L'aire supérieure et inférieure sont évidemment égales par conservation d'énergie.

7.6 Régulateurs associés aux alternateurs

Avec notre machine, on aimerait pouvoir faire varier la puissance active et la puissance réactive en agissant sur les deux paramètres principaux, à savoir le couple moteur et le courant d'excitation. Un tel système est décrit à la figure 73.

17. Des inventeurs français Maurice Masse (1812 – 1894) et Robert-Émile Resson (1803 – 1882)

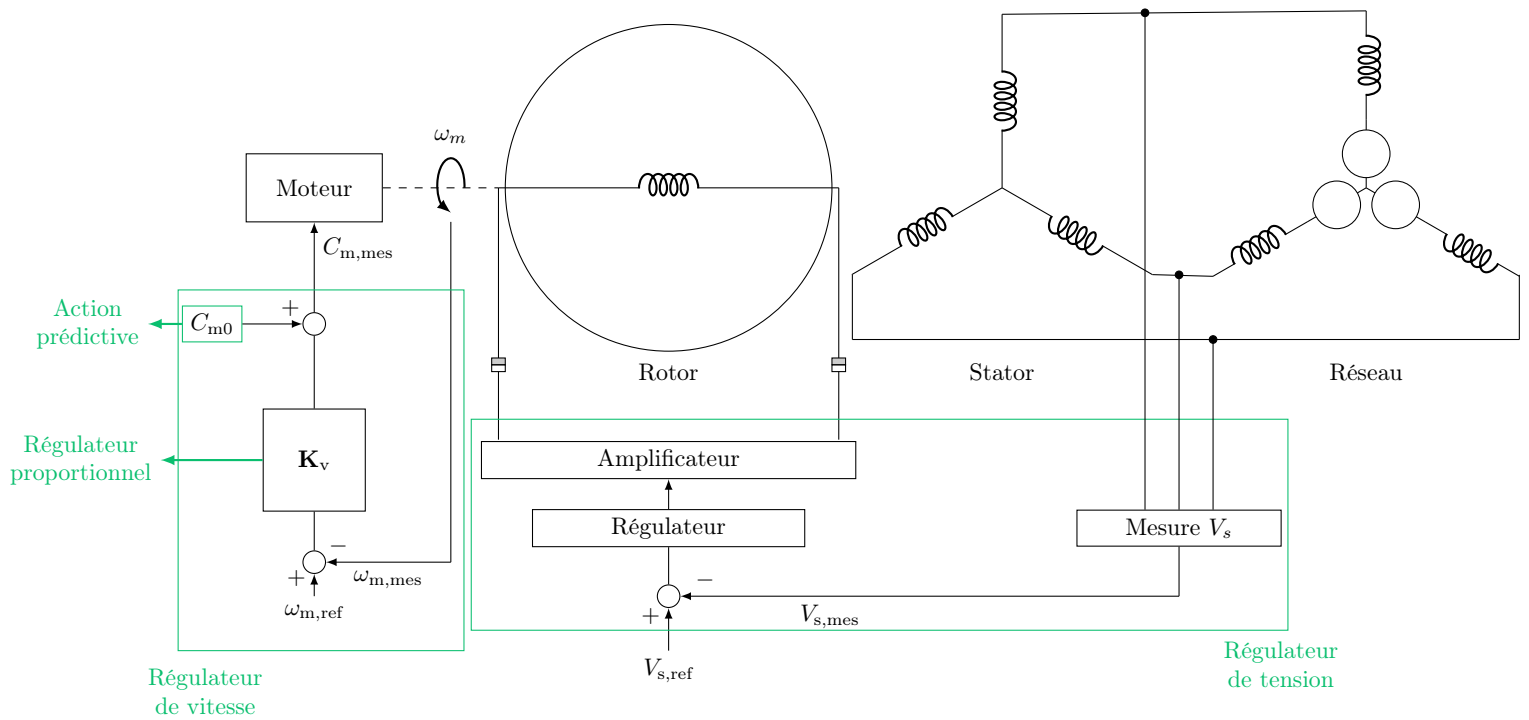


FIGURE 73 – Système de régulation vitesse et tension

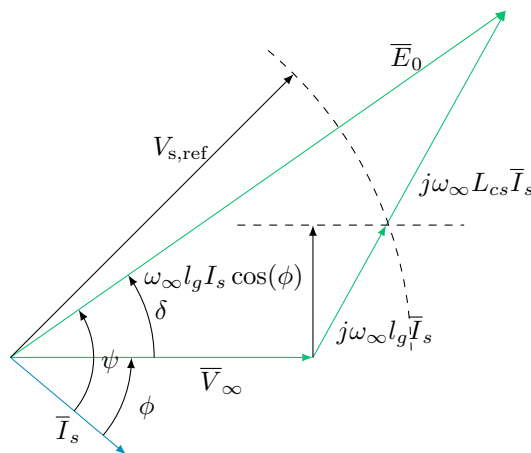
On y distingue deux parties : le régulateur de vitesse et le régulateur de tension.

Régulateur de vitesse Le régulateur de vitesse compare la vitesse de rotation du moteur à une vitesse de référence $\omega_{m,ref} = \omega_{\infty}/p$, multiplie cette différence de vitesse et y ajoute une action prédictive. Le couple demandé au moteur est donc de

$$C_{ref} = K_v \varepsilon + C_{m0} \quad (7.34)$$

où l'on appelle C_{m0} l'action prédictive. Le fonctionnement est assez simple : si le réseau consomme plus de puissance active que la machine en produit, la machine va ralentir. Le régulateur va donc augmenter la puissance mécanique fournie. L'utilité de l'action prédictive va définir la valeur "moyenne" à viser lorsqu'aucun déséquilibre ne survient. Cette valeur moyenne peut d'ailleurs varier dans le temps (selon le jour de la semaine, l'heure, etc. . .)

La régulation en tension permet, quant à elle, de réguler le niveau de puissance réactive. Nous savons déjà que la puissance réactive est régulée par le courant d'excitation i_f . On voit à la figure 74 qu'influencer sur V_s influence sur E_0 , et donc sur i_f de façon indirecte.

FIGURE 74 – Relation phasorielle entre E_0 et V_s

7.7 Démarrage et synchronisation

7.7.1 Moteurs pouvant démarrer de manière autonome

Le processus de démarrage d'une machine synchrone lorsque son moteur (à interpréter au sens de **turbine**) peut démarrer de façon autonome. Un tel processus comporte quatre étapes :

1. Mise en route du moteur, régulé à une vitesse proche de la vitesse $\omega_{m,ref} = \omega_{\infty}/p$, avec l'action prédictive désactivée. La vitesse est légèrement inférieure à la vitesse de synchronisme pour des raisons de frottement mais aussi pour la synchronisation.
2. Le régulateur de tension impose une tension $V_{s,ref} = V_{\infty}$.
3. À l'aide d'un synchronoscope, la phase du réseau et de l'alternateur sont synchronisées. Le fonctionnement d'un tel synchronoscope est expliqué plus bas.
4. La machine est *accrochée* au réseau et tourne à la vitesse de synchronisme, la régulation de la puissance (ré-)active est enclenchée.

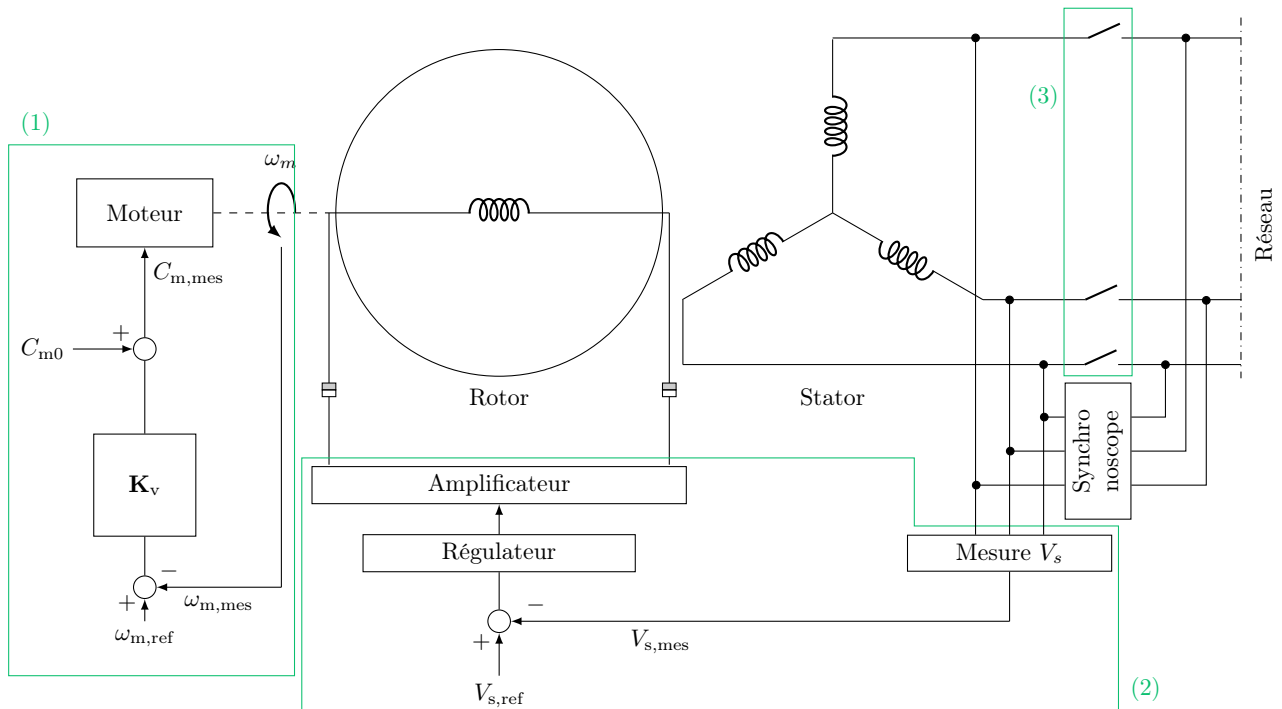


FIGURE 75 – Système de connexion au réseau

Synchronoscope Le synchronoscope à aiguille consiste en une machine asynchrone donc la tension statorique est reliée à la machine synchrone et dont les enroulements rotoriques sont reliés au réseau. Si les tensions sont parfaitement synchronisées (càd si $\omega_s = \omega_r$), alors le rotor ne tournera pas ($\omega_m = 0$).

Un autre synchronoscope, le synchronoscope à lampe, connecte l'alternateur et le réseau via des lampes, connectées d'une façon décrite à la figure 76 :

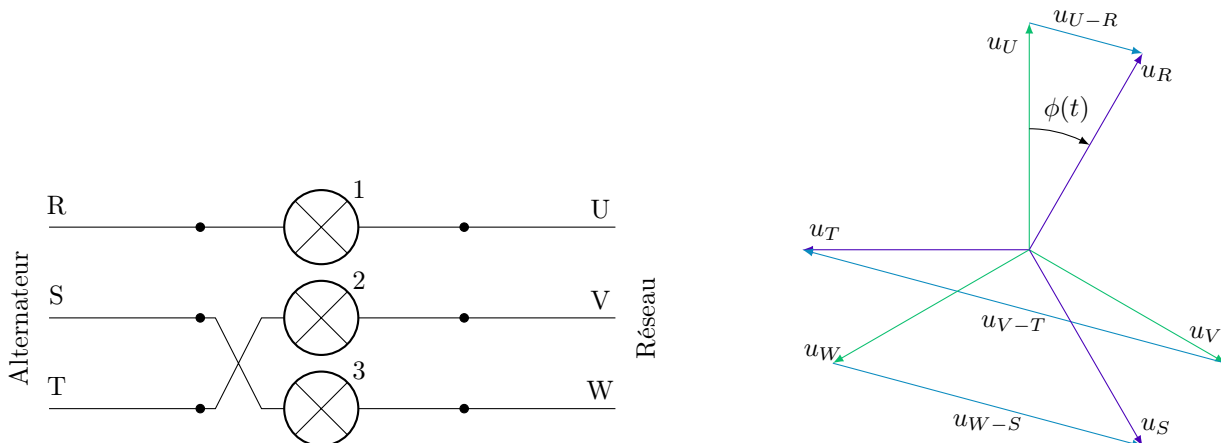


FIGURE 76 – Synchronoscope à lampe (feu tournant)

Dans cette configuration, lorsque les phases sont synchronisées, la lampe 1 sera éteinte, et la lampe 2 et 3 auront le même éclat. Avant cette synchronisation, on observera des lampes qui *pulsent* en intensité, déphasées l'une de l'autre de $2\pi/3$. On appelle ça le feu tournant.

Si le branchement est incorrect, on observera trois lampes *pulsant* à la même phase :

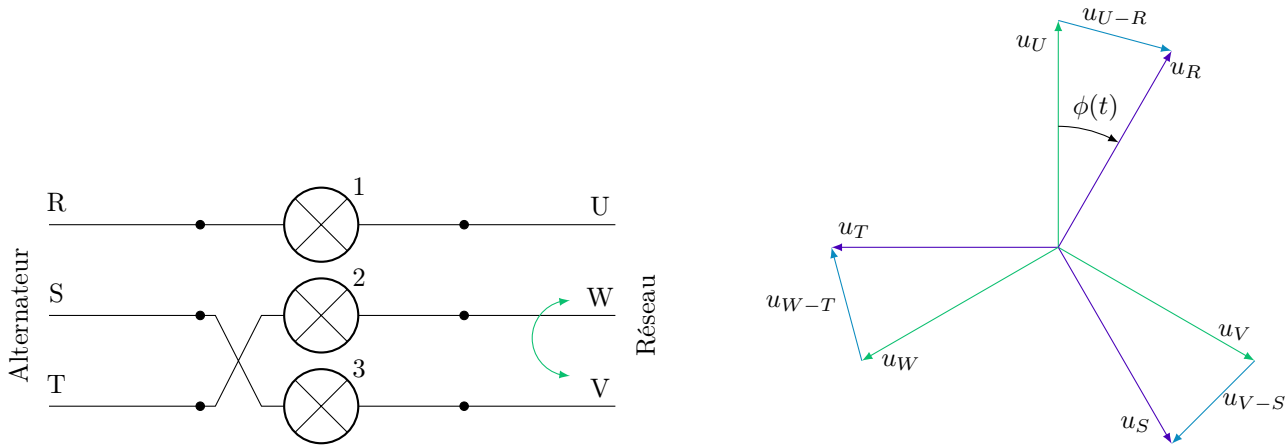


FIGURE 77 – Synchronoscope à lampe (feu battant)

7.7.2 Moteurs ne pouvant pas démarrer de manière autonome

Pour des moteurs ne pouvant pas démarrer de manière autonome, plusieurs solutions existent :

- Utilisation d'un moteur électrique auxiliaire
- Utiliser l'alternateur lui-même en utilisant l'effet asynchrone de l'amortisseur de Leblanc et en court-circuitant l'inducteur tant que la vitesse de synchronisme n'est pas atteinte, sinon des tensions énormes seront induites
- Utilisation de l'alternateur lui-même en moteur autopiloté via un système redresseur-onduleur

7.8 Marche en moteur et en alternateur isolé

Marche en moteur Lorsqu'on fait fonctionner la machine en moteur, le bilan de puissance change de sens : c'est de la puissance électrique qui est fournie à la machine, et de la puissance mécanique qu'elle nous fournit. Les conventions de signe des pertes restent correctes. On peut aussi envisager de réguler la puissance réactive absorbée en jouant sur le courant d'excitation.

Marche en alternateur isolé (groupe électrogène) L'objectif d'un tel groupe électrogène est d'alimenter des charges isolées du réseau, mais on doit réguler la fréquence et la tension via la vitesse du moteur et le courant d'excitation, respectivement.

7.9 Détermination des paramètres – Méthode de Potier

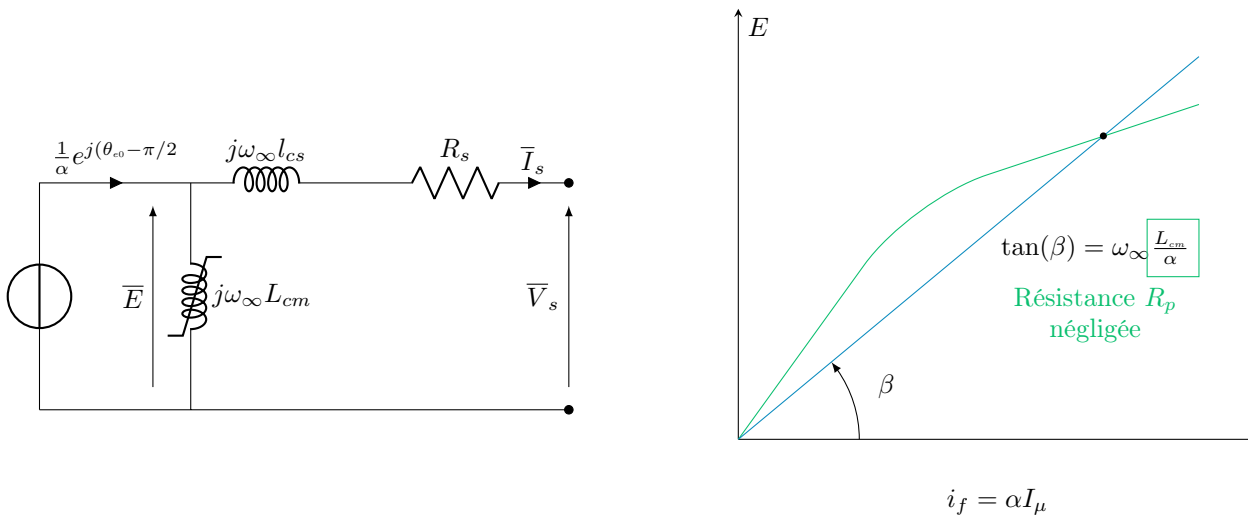
7.9.1 Essai à vide (induit non connecté au réseau)

La machine est entraînée à la vitesse de synchronisme et la tension à vide est mesurée, elle est évidemment fonction du courant d'excitation. Dès lors,

$$\begin{aligned}\bar{I}_s &= 0 \\ \bar{V}_s &= \bar{E}\end{aligned}$$

Ceci permet de déterminer, via plusieurs mesures, la caractéristique magnétique de la machine, c'est à dire son profil de saturation ($E - i_f$). En effet, à un paramètre α près, i_f est relié à I_μ . Pour une valeur particulière, elle permet de déterminer la valeur de L_{cm} via

$$\tan \beta = \omega_\infty \frac{L_{cm}}{\alpha} \quad (7.35)$$



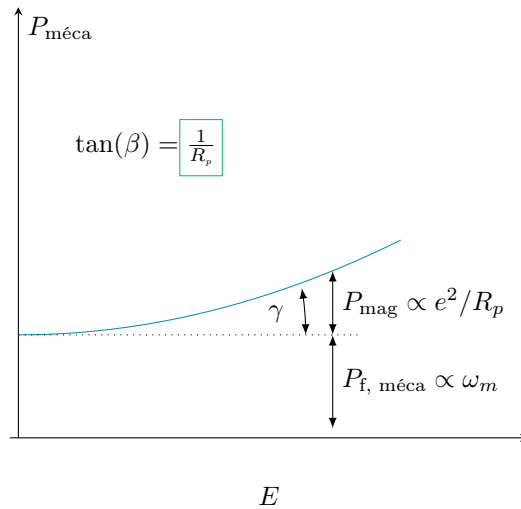
Dans le cas où l'inducteur n'est pas une bobine mais un aimant permanent, on ne peut mesurer qu'un seul point de la caractéristique.

Vu que la tension à vide est quasi proportionnelle à la vitesse, on pourrait envisager d'effectuer les mesures à une vitesse inférieure et d'utiliser une règle de trois pour retomber sur la caractéristique recherchée.

Mesure des pertes magnétiques L'essai à vide permet aussi de mesurer les pertes magnétiques. En effet, dans le bilan de puissance, P_{js} et $P_{e, \text{induit}}$ sont nuls. Ainsi, seules subsistent les pertes par frottement et pertes magnétiques.

$$P_{\text{méca}} = P_{f, \text{méca}} + P_{\text{mag}} \quad (7.36)$$

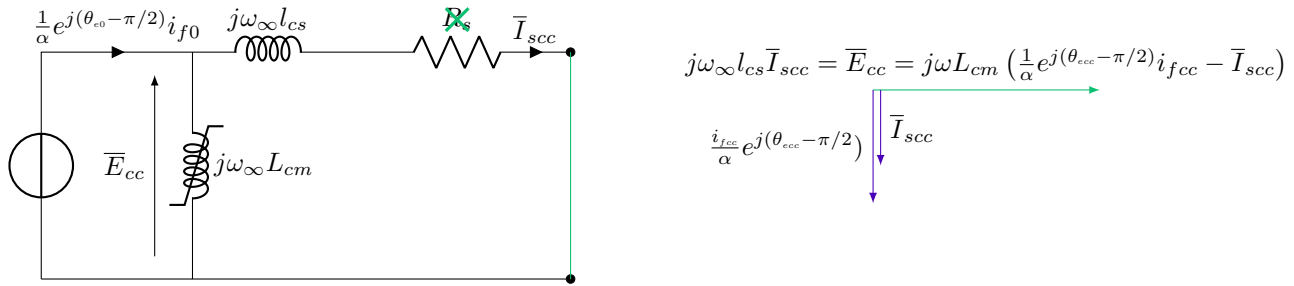
Les pertes magnétiques sont au carré de E , mais les pertes mécaniques sont proportionnelles à ω_m :



L'utilisation d'aimants permanents ne permet évidemment pas cet essai.

7.9.2 Essai en court-circuit

Les enroulements de l'induit sont mis en court-circuit, et la machine est entraînée à la vitesse de synchronisme. Le courant d'excitation est fixé jusqu'à ce que le courant statorique soit à une valeur $I_{s, cc}$ (le courant d'excitation est alors noté $i_{f, cc}$). La tension aux bornes de l'inductance magnétisante est notée \bar{E}_{cc} . En négligeant la résistance R_s , la tension sur $j\omega_\infty l_{cs}$ est \bar{E}_{cc} . Ceci est représenté sur le diagramme phasorielle suivant :



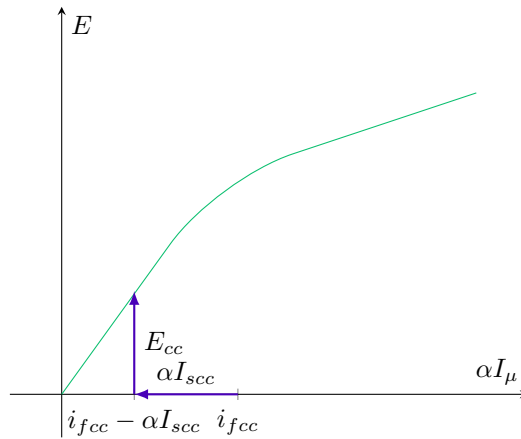
On en tire une équation réelle

$$E_{cc} = \omega_{\infty} L_{cm} \left(\underbrace{\frac{i_{f,cc}}{\alpha} - I_{s,cc}}_{I_{\mu}} \right) = \omega_{\infty} l_{cs} I_{s,cc} \quad (7.37)$$

On pourrait trouver E_{cc} , si l'on connaissait α , et ainsi déterminer l_{cs} par la relation

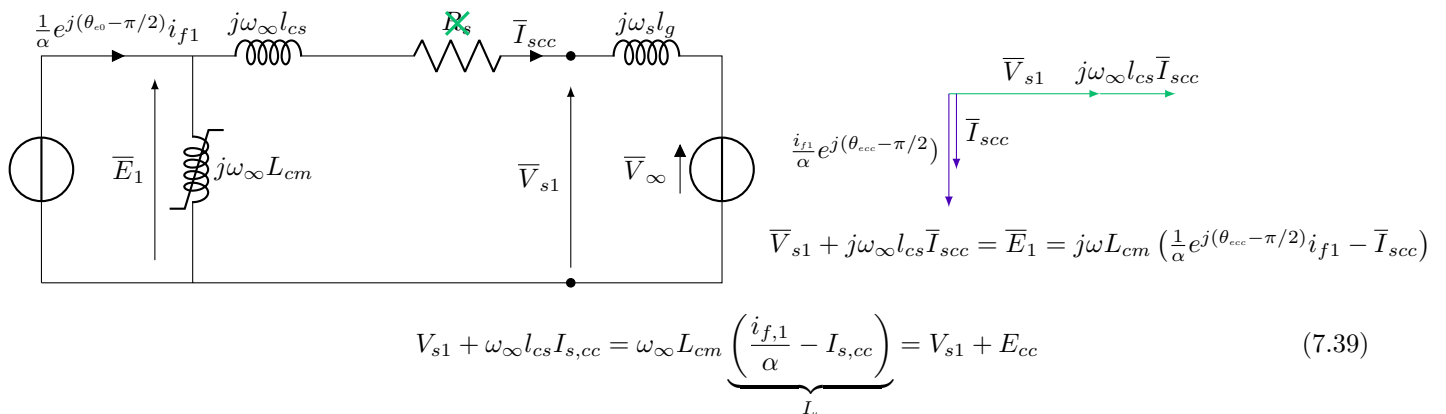
$$l_{cs} = \frac{E_0}{\omega_{\infty} I_{s,cc}} \quad (7.38)$$

Sur la caractéristique magnétique, on représente la tension E_{cc} et le courant αI_{μ} . À bas courant, on est hors de la zone de saturation.



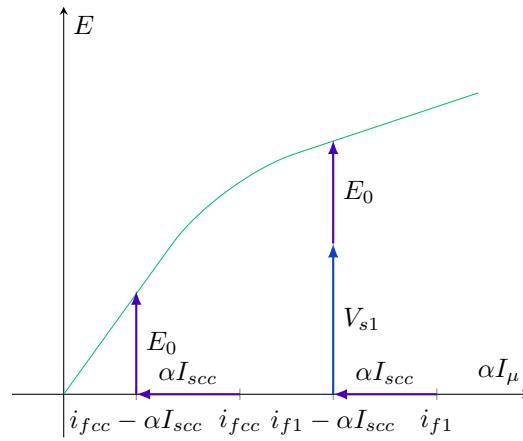
7.9.3 Essai en parallèle sur le réseau – Essai en déwatté

Dans cet essai, on connecte la machine au réseau mais à une puissance mécanique nulle. La machine n'échange avec le réseau que de la puissance réactive. On règle le courant d'excitation de sorte que la machine débite un courant de la même valeur qu'à l'essai précédent. On mesure la tension statorique à la machine V_{s1} . On réalise le diagramme phasorial sur les deux branches : \bar{I}_1 sur l'inductance magnétisante est égal à la tension mesurée + la tension sur l_{cs} .

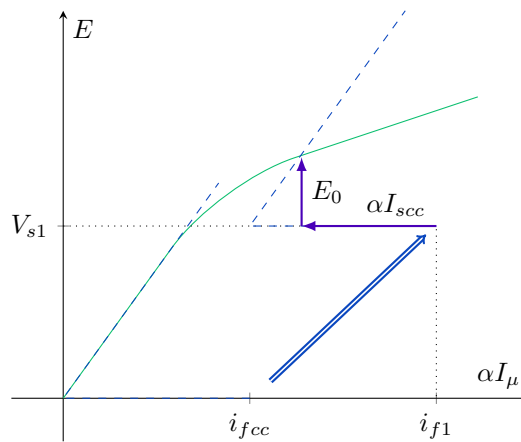


$$V_{s1} + \omega_{\infty} l_{cs} I_{s,cc} = \omega_{\infty} L_{cm} \left(\underbrace{\frac{i_{f,1}}{\alpha} - I_{s,cc}}_{I_{\mu}} \right) = V_{s1} + E_{cc} \quad (7.39)$$

On replace la tension $V_{s1} + E_0$ sur la caractéristique magnétique.



Combinaisons des essais Une résolution graphique permet de déterminer la valeur de α en ramenant l'essai en court-circuit au niveau de l'essai en parallèle. Ce raisonnement ne fonctionne évidemment pas si la machine n'est pas en saturation lors de l'essai en parallèle, il y aurait alors une infinité de solution.



Section 8: Machine à courant continu

8.1 Structure de base

La structure de base d'une machine DC est donnée à la figure 78. Dans cette structure, le rotor est appelé l'induit et le stator est appelé l'inducteur. Il présente deux zones, appelées "pièces polaires", où l'entrefer est fin et deux autres zones où il est bien plus large. L'axe magnétique de l'inducteur est l'axe séparant les pièces polaires en deux. L'axe neutre se situe à 90° de l'axe magnétique.

Au niveau du rotor, on a $2n$ enroulements placés dans $2n$ encoches. Une encoche comprend un enroulement aller et un enroulement retour. Les enroulements rentrent dans une encoche et sortent dans l'encoche diamétralement opposée.

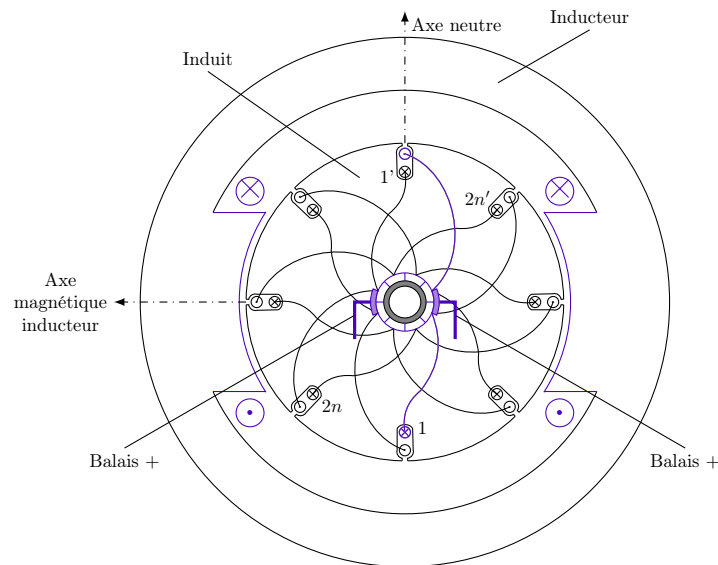


FIGURE 78 – Structure d'une machine DC

Au centre du rotor, des lames sont accrochées à l'arbre. Deux balais, placés de part et d'autre dans l'axe magnétique, alimentent les enroulements rotoriques. En partant d'une lame en contact avec le balai, on peut suivre le chemin emprunté par le courant. Vu que deux lames sont en contact avec le balai, certains enroulements sont aussi court-circuités.

En suivant le chemin emprunté par le courant, on distingue rapidement deux voies, que l'on appellera des "sections d'induit" :

- La voie + : Celle-ci contient les enroulements dont le champ magnétique va vers le dessus. Ils ont, par rapport à l'axe neutre, une position comprise entre $-\pi/2 + \pi/(2n)$ et $\pi/2 - \pi/(2n)$.
- La voie - : Celle-ci contient les enroulements dont le champ magnétique va vers le bas. Ils ont, par rapport à l'axe neutre, une position comprise entre $\pi/2 + \pi/(2n)$ et $3\pi/2 - \pi/(2n)$.

Les deux bobines qui sont mises en court-circuit sont appelées sections commutantes.

Pour se figurer le circuit d'une façon plus digeste, la figure 79 représente la même structure avec des inductances à la place des enroulements. On y voit clairement les enroulements 1 et $n+1$ qui sont court-circuités, ainsi que les deux voies empruntées par le courant.

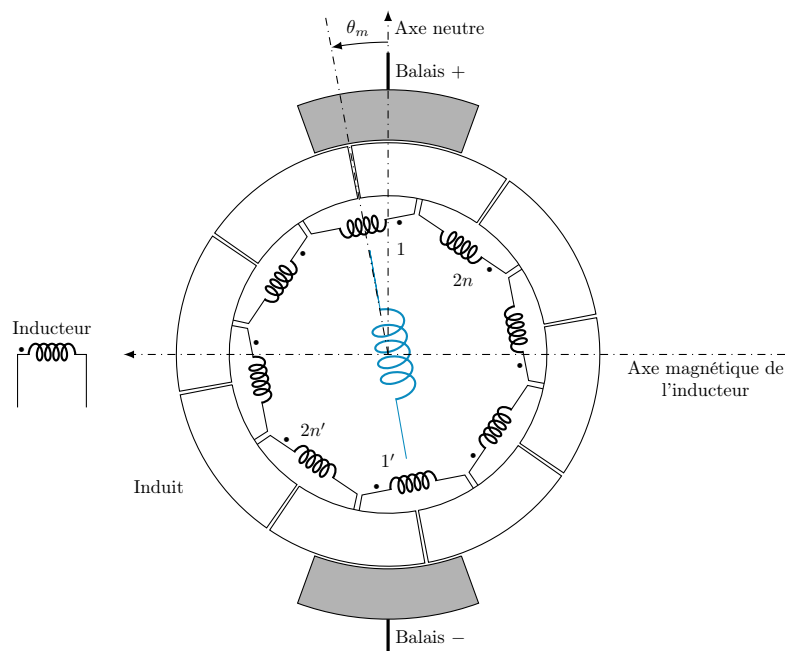


FIGURE 79 – Structure électrique à inductances

Enfin, on y représente en bleu l'enroulement équivalent à la mise en parallèle de la voie - et +. Lors de la rotation, cet enroulement équivalent commutera et suivra la rotation.

8.2 Coefficients d'inductances propres et mutuelles

Hypothèses On fait d'abord quelques hypothèses quant à la structure du rotor :

H₁₄: Entrefer lisse d'épaisseur $e' > e$.

H₁₅: Les enroulements rotoriques sont remplacés par des conducteurs situés à l'interface rotor – entrefer.

H₁₆: La perméabilité magnétique des circuits magnétiques statoriques et rotoriques est supposée infinie.

De cette dernière hypothèse, on peut conclure que le champ magnétique est nul en dehors de l'entrefer, et que le comportement est linéaire.

H₁₇: En dehors des pôles, le champ magnétique est négligeable. On considère donc que le champ est nul en dehors des saillances.

H₁₈: Les effets de bord sont supposés négligeables, on étudiera donc uniquement le problème en 2D.

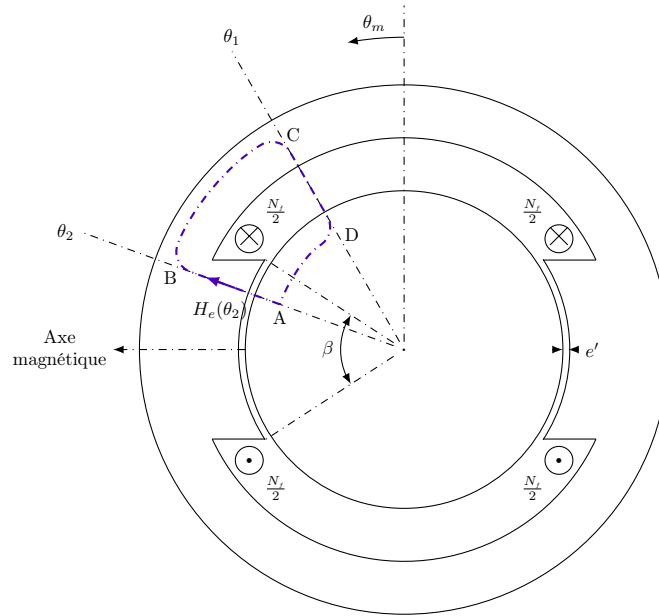
Enfin, on considérera que le nombre de bobines de l'induit (noté n) est élevé.

Inductance propre de l'inducteur On applique à nouveau la loi d'Ampère pour déterminer les inductances propres du stator. On intègre $\vec{H}d\vec{l}$ sur le contour $A - B - C - D$ pour finalement obtenir que

$$H_e(\theta_2) = \frac{N_f i_f}{2e'} \quad (8.1)$$

et donc que

$$B_e(\theta_2) = \mu_0 \frac{N_f i_f}{2e'} \quad (8.2)$$



Le champ magnétique en fonction de l'angle est représenté à la figure 80. Ceci nous permet de trouver le flux

$$\begin{aligned} \phi &= \int_S \vec{B} d\vec{S} \\ &= \int_{\pi/2-\beta/2}^{\pi/2+\pi} B_e(\theta) R_e L_z d\theta \\ &= \mu_0 \frac{N_f i_f}{2e'} R_e L_z \beta \end{aligned} \quad (8.3)$$

L'inductance propre, donnée via $L = N\phi/i$, s'exprime par

$$L_f = \mu_0 \frac{N_f^2}{2e'} R_e L_z \beta \quad (8.4)$$

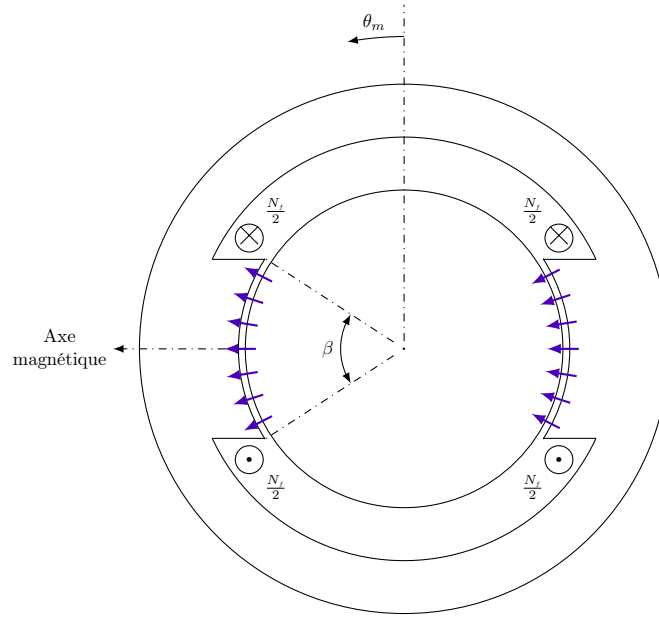


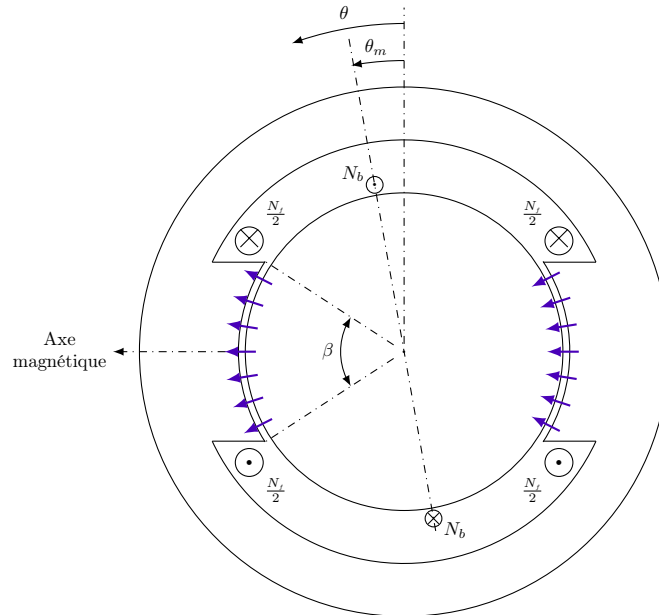
FIGURE 80 – Champ magnétique en fonction de l'angle

Inductance mutuelle inducteur-induit On trouve l'inductance mutuelle en considérant l'enroulement rotorique numéroté 1. Dans le cas où $-\pi/2 + \beta/2 + 2k\pi < \theta_m < \pi/2 - \beta/2 + 2k\pi$ (c'est à dire que les conducteurs "aller" sont en dehors du pôle), l'inductance mutuelle M se trouve d'une façon fort similaire :

$$M = \mu_0 \frac{N_f N_b}{2e'} R_e L_z \beta \quad (8.5)$$

Si le rotor tourne d'un demi tour ($\pi/2 + \beta/2 + 2k\pi < \theta_m < 3\pi/2 - \beta/2 + 2k\pi$), l'inductance mutuelle change de signe.

$$M = -\mu_0 \frac{N_f N_b}{2e'} R_e L_z \beta \quad (8.6)$$

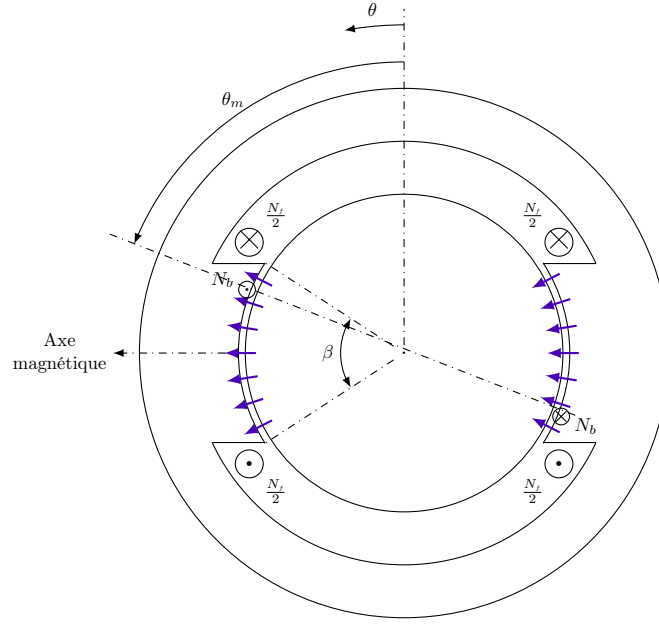


Dans le second cas, où $\pi/2 - \beta/2 + 2k\pi < \theta_m < \pi/2 + \beta/2 + 2k\pi$ (c'est à dire que l'enroulement équivalent de l'induit a ses bornes dans les saillances), l'inductance mutuelle M se trouve d'une façon fort similaire :

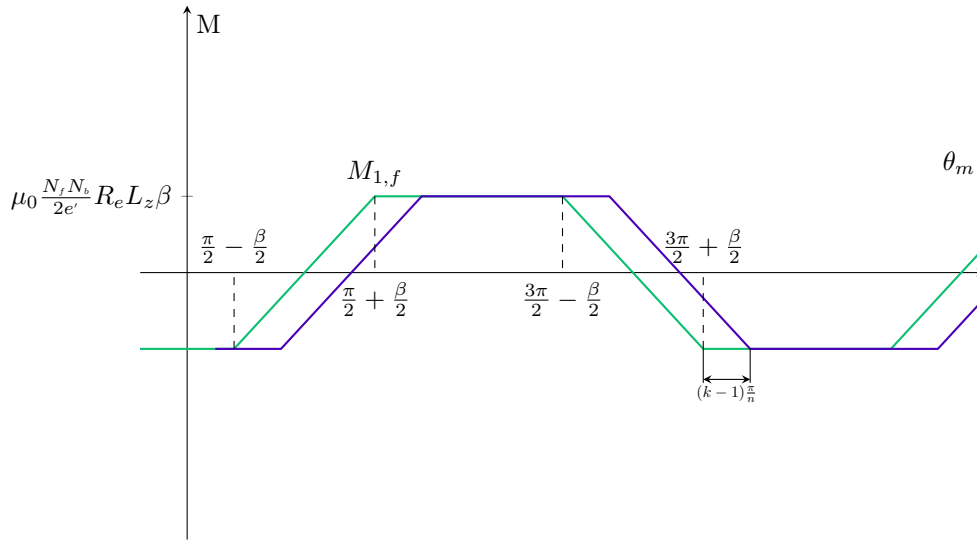
$$M = \mu_0 \frac{N_f N_b}{2e'} R_e L_z (2\theta_m - \pi) \quad (8.7)$$

Enfin, si le rotor tourne d'un demi tour ($3\pi/2 - \beta/2 + 2k\pi < \theta_m < 3\pi/2 + \beta/2 + 2k\pi$),

$$M = -\mu_0 \frac{N_f N_b}{2e'} R_e L_z (2\theta_m - \pi) \quad (8.8)$$



Si l'on représente cela graphiquement, on obtient une inductance mutuelle fonction de θ_m telle que représentée à la figure 8.2. On y voit aussi l'inductance mutuelle pour un autre enroulement rotorique, numéroté k . La fonction est simplement décalée d'une valeur $(k-1)\frac{\pi}{n}$.



L'inductance mutuelle totale se trouve comme étant la somme des inductances mutuelles de tous les enroulements numérotés de 2 à n ou de $n+2$ à $2n$ vu qu'on les a mises en série :

$$M_{af} = \sum_{k=2}^n M_{k,f} = - \sum_{k=n+2}^{2n} M_{k,f} \quad (8.9)$$

Cette somme est assez compliquée à évaluer, on va donc l'étudier dans certains cas particuliers pour mieux la comprendre. En $\theta_m = 0$, l'inductance équivalente est en quadrature avec celle de l'inducteur. Leur mutuelle est donc nulle. Aussi, la dérivée de M_{af} selon θ_m peut nous intéresser. En effet, elle équivaut à la somme

$$\frac{dM_{af}}{d\theta_m} = \sum_{k=2}^n \frac{dM_{k,f}}{d\theta_m} \quad (8.10)$$

Pour les enroulements situés entre $-\beta/2$ et $\beta/2$, ils ont une dérivée non nulle selon θ_m et sa valeur est de

$$\mu_0 \frac{N_f N_b}{e'} R_e L_z \quad (8.11)$$

Pour tous les autres enroulements, la dérivée est nulle. Le problème revient à compter le nombre d'enroulements qui sont sous le pôle, qu'on peut facilement déterminer comme valant $n\beta/\pi$. Donc,

$$\frac{dM_{af}}{d\theta_m} \approx n \frac{\beta}{\pi} \mu_0 \frac{N_f N_b}{e'} R_e L_z \quad (8.12)$$

De cette dérivée, on peut trouver M_{af} au premier ordre

$$M_{af} \approx \frac{dM_{af}}{d\theta_m} \theta_m \quad (8.13)$$

$$\approx n \frac{\beta}{\pi} \mu_0 \frac{N_f N_b}{e'} R_e L_z \theta_m \quad (8.14)$$

Inductance propre de l'induit L'inductance propre de l'induit est considérée comme constante si $2n$ est grand. Elle est notée L_a .

Inductance mutuelle sections commutantes – induit Pour déterminer cette inductance mutuelle, on considère que les enroulements sont équivalents à des enroulements situés au niveau de l'inducteur mais ayant un nombre de tours N_b . L'inductance mutuelle vaut alors

$$M_{c2,a} \approx n \frac{\beta}{\pi} \mu_0 \frac{N_b^2}{e'} R_e L_z \theta_m \quad (8.15)$$

Pour l'autre section commutante, le signe est simplement inversé.

Inductance mutuelle sections commutantes – inducteur On applique quasi le même raisonnement mais avec la formule de l'inductance propre dans l'inducteur,

$$M_{c1,f} = -M_{c2,f} = M_{1,f}|_{\theta_m=0} = -\mu_0 \frac{N_b N_f}{2e'} R_e L_z \beta \quad (8.16)$$

8.3 Équations en régime permanent

On fait l'hypothèse qu'on est en régime permanent, c'est à dire qu'on est à vitesse ω_m constante. En appliquant la loi de Faraday,

$$u_a = R_a i_a + \frac{d}{dt}(L_a i_a) + \frac{d}{dt}(M_{af} i_f) + \frac{d}{dt}(M_{c1,a} i_{c1}) + \frac{d}{dt}(M_{c2,a} i_{c2}) \quad (8.17)$$

$$u_f = R_f i_f + \frac{d}{dt}(L_f i_f) + \frac{d}{dt}(M_{af} i_a) + \frac{d}{dt}(M_{c1,f} i_{c1}) + \frac{d}{dt}(M_{c2,f} i_{c2}) \quad (8.18)$$

En supposant $L_a = L_f = \text{Cst}$, et $i_a = i_f = \text{Cst}$ sur un intervalle de temps sans commutation $t \in [t_0, t_1]$ tel que

$$\begin{aligned} \theta_m &= \omega_m t_0 + \theta_0 = -\frac{\pi}{2n} + k \frac{\pi}{n} \\ \theta_m &= \omega_m t_1 + \theta_0 = \frac{\pi}{2n} + k \frac{\pi}{n} \end{aligned}$$

$$u_a = R_a i_a + \frac{d}{dt}(M_{af} i_f) + \frac{d}{dt}(M_{c1,a} i_{c1}) + \frac{d}{dt}(M_{c2,a} i_{c2}) \quad (8.19)$$

$$u_f = R_f i_f + \frac{d}{dt}(M_{af} i_a) + \frac{d}{dt}(M_{c1,f} i_{c1}) + \frac{d}{dt}(M_{c2,f} i_{c2}) \quad (8.20)$$

Courants dans les sections commutantes Avant de devenir une section commutante, le courant qui parcourt une section commutante est égal à $i_{c1}(t_0) = -i_a/2$. Après "avoir été une section commutante", son courant est égal à $i_{c1}(t_1) = i_a/2$. Cette discontinuité de courant soudaine n'est pas vraiment compatible avec une inductance.¹⁸

On peut exprimer la dérivée temporelle du courant comme étant i_a divisé par le laps de temps entre t_0 et t_1 . À la vitesse ω_m , celui-ci vaut $\pi/(n\omega_m)$. Ainsi,

$$\left(\frac{di_{c1}}{dt} \right)_{moy} = - \left(\frac{di_{c2}}{dt} \right)_{moy} = \frac{i_a}{t_1 - t_0} = \frac{\omega_m}{\pi/n} i_a \quad (8.21)$$

Sur base de ces résultats, on peut démontrer que

$$\frac{d}{dt}(M_{c1,a} i_{c1}) = \frac{d}{dt}(M_{c2,a} i_{c2}) = 0 \quad (8.22)$$

18. Ce qui explique d'ailleurs la présence d'étincelles que l'on peut apercevoir dans une perceuse par exemple

en moyenne. On ré-exprime donc l'équation 8.19

$$u_a = R_a i_a + \frac{dM_{af}}{dt} i_f \quad (8.23)$$

$$= R_a i_a + \omega_m \frac{dM_{af}}{d\theta_m} i_f \quad (8.24)$$

$$= R_a i_a + \omega_m n \frac{\beta}{\pi} \mu_0 \frac{N_f N_b}{e'} R_e L_z i_f \quad (8.25)$$

Du côté de l'inducteur, les simplifications sont d'autant plus drastiques que même le terme d'inductance mutuelle entre l'induit et l'inducteur disparaît.

$$u_f = R_f i_f \quad (8.26)$$

Couple électromagnétique Sur base des équations de base du calcul du couple faisant intervenir la matrice d'inductance et le vecteur de courants, le couple électromagnétique C_{em} a pour expression

$$C_{em} = \frac{\partial M_{af}}{\partial \theta_m} i_a i_f = n \frac{\beta}{\pi} \mu_0 \frac{N_f N_b}{e'} R_e L_z i_a i_f \quad (8.27)$$

On a donc trois équations, une reliant le courant et la tension à l'induit, une reliant le courant et la tension à l'inducteur et une enfin permettant de calculer le couple. Pour alléger les notations, on introduit le flux élémentaire ϕ et un rapport k :

$$u_a = R_a i_a + \omega_m k \phi \quad (8.28)$$

$$u_f = R_f i_f \quad (8.29)$$

$$C_{em} = k \phi i_a \quad (8.30)$$

Pour tenir compte de la saturation, on admettra que le flux élémentaire soit fonction de i_f et de i_a :

$$\phi = \phi(i_a, i_f) \quad (8.31)$$

Équations en transitoire électrique Vu la simplicité des équations ci-dessus, on peut envisager de tenir compte du régime transitoire, en rajoutant un terme $L_a \frac{di_a}{dt}$ à u_a et un terme $L_f \frac{di_f}{dt}$ à u_f .

Commutation linéaire Pour imposer un passage linéaire du courant de $-i_a/2$ à $i_a/2$, on rajoute un pôle auxiliaire dans l'axe neutre dans lequel circule un courant égal à i_a . Comme la section commutante est en court-circuit, son équation électrique est donnée par

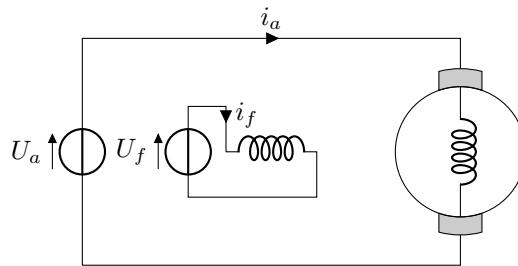
$$0 = R_{c1} i_{c1} + L_{c1} \frac{di_{c1}}{dt} + \frac{d\phi_{c1}}{dt} \quad (8.32)$$

8.4 Fonctionnement en moteur

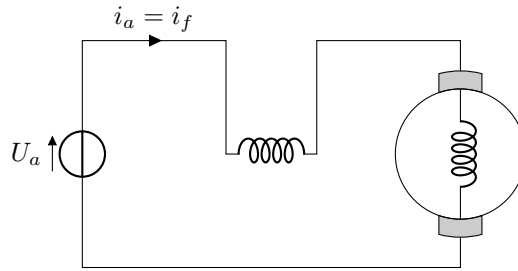
8.4.1 Modes d'excitation

Sur base des deux paires de bornes (une pour l'inducteur et une pour l'induit), on distingue quatre modes de connexion différents :

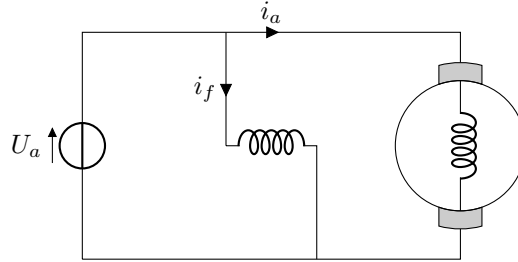
1. Excitation indépendante : les deux sont alimentés de façon indépendante.



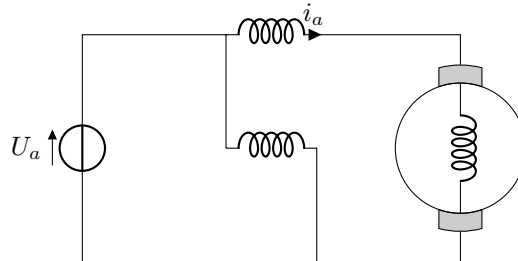
2. Excitation série : les deux sont branchés en série.



3. Excitation parallèle – *shunt* : Les deux sont branchés en parallèle.



4. Excitation *compound* : Une partie des spires de l'inducteur sont branchées en parallèle et l'autre partie en série.



Pour limiter les pertes de puissance dans l'inducteur, on limite sa résistance lorsqu'il est en série et on augmente sa résistance lorsqu'il est en parallèle, en jouant sur le nombre d'enroulements et sur la section.

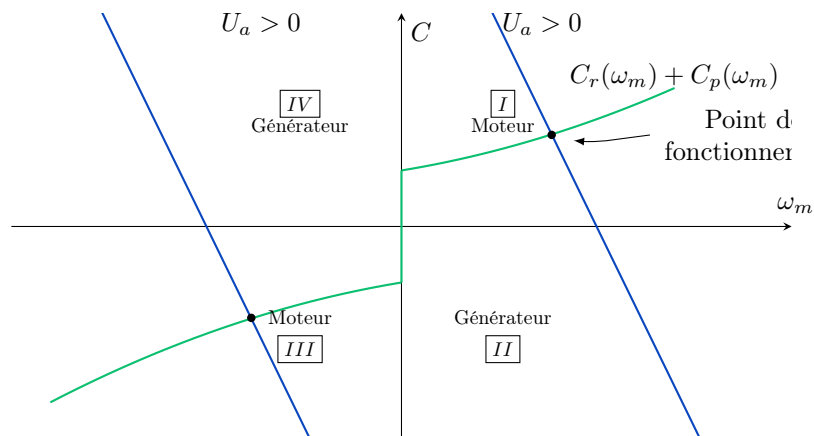
8.4.2 Excitation indépendante

En excitation indépendante, le couple vaut

$$C_{em} = k\phi \frac{U_a - \omega_m k\phi}{R_a} \quad (8.33)$$

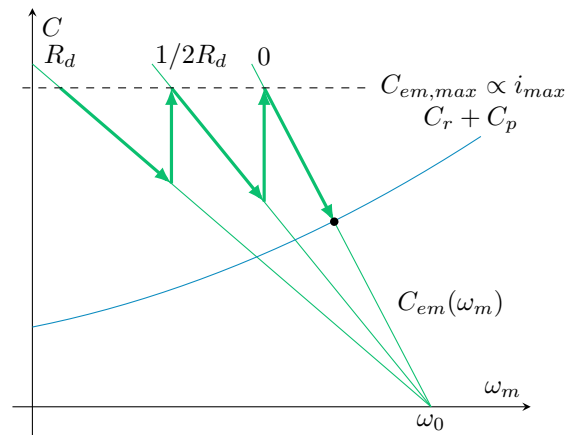
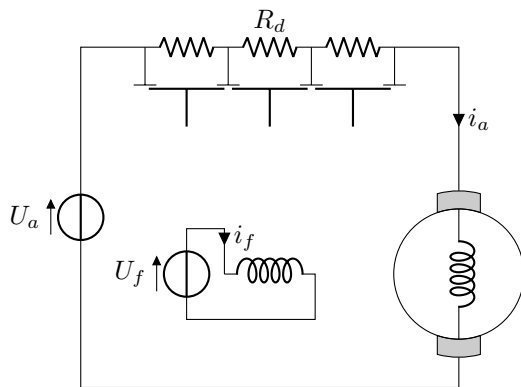
C'est donc une droite de pente $-(k\phi)^2/R_a$ et dont la racine se situe en $\omega_0 = \frac{U_a}{k\phi}$.

À nouveau, le point de fonctionnement se trouve comme étant le point de rencontre du couple électromagnétique et du couple résistant $C_r + C_p$.



Réglage de la vitesse via i_f En faisant diminuer i_f , la vitesse à vide théorique augmente mais la pente diminue. Cependant, à bas courant, la vitesse devient gigantesque, au risque de briser le moteur.

Démarrage Au démarrage, le courant est donc énorme car la vitesse est nulle. On peut pallier à ce problème en rajoutant une résistance R_d en série avec l'induit. Cette résistance sera variable par paliers, de façon à éviter un trop grand saut de courant lorsqu'on la court-circuite ($R_d = 0$). La relation $C - \omega_m$ évoluera donc en zig-zag, en diminuant progressivement R_d .



8.4.3 Excitation par aimants permanents

Lorsque l'inducteur est remplacé par des aimants permanents, on n'a plus d'équation sur u_f et i_f , et la valeur de ϕ est constante.

8.4.4 Excitation série

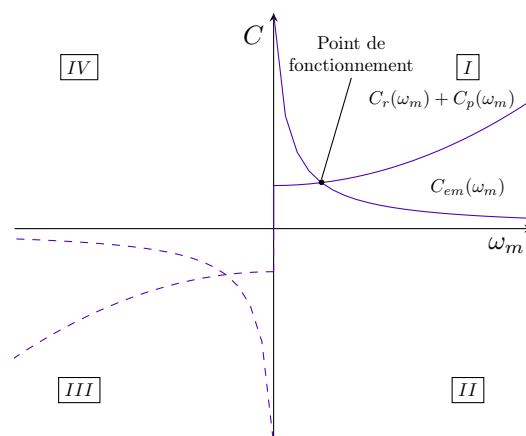
Vu qu'ils sont mis en série, l'inducteur et l'induit ont $i_a = i_f$ et $U_a = u_a + u_f$. On retourne à nos trois équations précédentes :

$$U_a = (R_a + R_f)i_a + \omega_m \frac{dM_{af}}{d\theta_m} i_a \quad (8.34)$$

$$C_{em} = \frac{dM_{af}}{d\theta_m} i_a^2 \quad (8.35)$$

Ce qui nous donne la relation Couple – vitesse :

$$C_{em} = \frac{dM_{af}}{d\theta_m} \cdot \frac{U_a^2}{\left(R_a + R_f + \omega_m \cdot \frac{dM_{af}}{d\theta_m}\right)^2} \quad (8.36)$$



On remarque d'ailleurs quelque chose d'assez particulier : cette équation ne permet pas de passer en vitesse négative. Une façon de l'interpréter est la suivante : vu que l'inducteur et l'induit sont en série, changer le signe de la tension les affecte tous les deux de la même manière et on a donc une "double négation" dans l'expression du couple. On peut tout de même avoir un couple négatif en inversant le sens de l'inductance.

Démarrage À nouveau, le courant au démarrage est énorme. Le mécanisme de correction est le même, on rajoute une résistance variable R_d , dont la valeur diminue par paliers lorsque la vitesse augmente.

8.4.5 Moteur universel

Le moteur universel est un moteur DC série alimenté en alternatif. En série, le couple est au carré du courant i_a . Or, ce courant est sinusoïdale lorsque la tension est sinusoïdale. Le couple est donc en moyenne non-nul. Pour une alimentation

$$U_a = V_M \cos(\omega t + \psi) \quad (8.37)$$

$$C_{em} = \frac{dM_{af}}{d\theta_m} \cdot \frac{V_M^2 \cos^2(\omega t + \psi - \varphi)}{\left(R_a + R_f + \omega_m \frac{dM_{af}}{d\theta_m}\right)^2 + \omega^2(L_a + L_f)^2} \quad (8.38)$$

où

$$\varphi = \arctan \left(\frac{\omega(L_a + L_f)}{R_a + R_f + \omega_m \frac{dM_{af}}{d\theta_m}} \right) \quad (8.39)$$

Par Carnot, ceci équivaut à dire

$$C_{em} = C_{em0} + C_{em2} \quad (8.40)$$

où

$$C_{em0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{dM_{af}}{d\theta_m} \cdot \frac{V_M^2}{\left(R_a + R_f + \omega_m \frac{dM_{af}}{d\theta_m}\right)^2 + \omega^2(L_a + L_f)^2} \quad (8.41)$$

et

$$C_{em2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{dM_{af}}{d\theta_m} \cdot \frac{V_M^2 \cos[2(\omega t + \psi - \varphi)]}{\left(R_a + R_f + \omega_m \frac{dM_{af}}{d\theta_m}\right)^2 + \omega^2(L_a + L_f)^2} \quad (8.42)$$

8.5 Machine DC à commutation électronique

Au lieu d'utiliser un système collecteur-balai, on alimente uniquement les enroulements ayant un axe magnétique à 90 degrés de l'axe magnétique de l'inducteur. Dans une telle machine, l'inducteur est le rotor, il est composé d'aimants permanents. Au stator, des interrupteurs électroniques se ferment lorsqu'un enroulement a son axe magnétique proche de 90 degrés. Ce système requiert évidemment d'utiliser un capteur de position pour commander les interrupteurs.

