

LELEC1755
Physique des dispositifs électroniques
et des lignes de transmission
Enoncés des séances d'exercices

Année académique 2020–2021

Table des matières

I	Electromagnétisme et lignes de transmission	5
1	Electrostatique	7
2	Electro- et magnétostatique	11
3	Eléments de circuits	15
4	Circuits magnétiques	19
5	Lignes de transmission en régime harmonique	23
6	Lignes de transmission en transitoire	29
7	Exercices complémentaires	33
II	Dispositifs électroniques	35
8	Equations des semiconducteurs, introduction à la jonction PN	37
9	Jonction PN	43
10	Transistor bipolaire I	47
11	Transistor bipolaire II	51
12	Transistor MOS : calcul du courant via l'équation de Poisson	55
13	Transistor MOS : diagramme de Jaspers	59
III	Anciennes questions d'examens	63
IV	Annexes	75
A	Note sur la résolution de problèmes d'électrostatique	77
B	Formulaire d'électromagnétisme	79
C	Formulaire d'analyse vectorielle	81
D	Abaque de Smith	83
E	Formulaire de dispositifs électroniques	85

Première partie

Electromagnétisme et lignes de transmission

Séance 1

Electrostatique

Rappel

La majorité des exercices des ces premières séances peuvent être résolus grâce à la méthode dite *semi-inverse*. Cette méthodologie comprend les étapes suivantes :

1. Choisir un système de coordonnées adéquat (cartésien, sphérique, cylindrique) selon la géométrie du problème.
2. Pour chaque milieu :
 - (a) Ecrire l'expression générale du champ recherché dans le système de coordonnées choisi en explicitant :
 - ses *composantes* vectorielles (selon les axes du repère)
 - ses *dépendances* (variables entre parenthèses dont dépend potentiellement chaque composante).

Exemple : l'expression générale d'un champ électrique en coordonnées cartésiennes s'écrira sous la forme

$$\vec{E}(x, y, z) = E_x(x, y, z)\hat{a}_x + E_y(x, y, z)\hat{a}_y + E_z(x, y, z)\hat{a}_z$$

où \hat{a}_x , \hat{a}_y et \hat{a}_z sont les vecteurs unitaires du repère.

- (b) Simplifier l'expression générale (composantes et dépendances) pour chaque milieu en fonction de la symétrie et des hypothèses du problème. On obtient alors une expression simplifiée appelée *ansatz*.
- (c) Injecter l'ansatz dans les équations de Maxwell. On obtient alors une ou plusieurs équations différentielles que l'on peut résoudre à une ou plusieurs constantes près.

A noter :

- Les équations de Maxwell générales (indépendantes du système de coordonnées choisi) sont rappelées ci-dessous, et disponibles à l'annexe B.
- Les opérateurs vectoriels (divergence, rotationnel,...) prennent des expressions différentes selon le système de coordonnées choisi. Ces expressions sont disponibles à l'annexe C.

3. Utiliser les conditions limites afin de déterminer la valeur des constantes restantes et lier les solutions obtenues pour les différents milieux.

Equations temporelles

Conditions limites

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

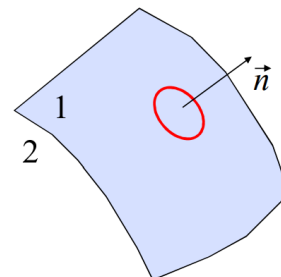
$$\hat{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{tot} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{K}$$



Rappel

A noter :

- Comme indiqué sur la figure, la normale \hat{n} utilisée dans les conditions limites pointe par convention du milieu 2 vers le milieu 1.
- La variable ρ dans l'équation $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ représente une densité de charge volumique (quantité de charge par unité de volume présente dans un milieu). Cette variable ne doit pas être confondue avec le ρ_S de la première condition limite. Ce ρ_S représente une densité de charge surfacique, présente à l'interface entre deux milieux.
- On se rappellera également du lien entre le potentiel électrique et le champ électrique, donné par $\Delta V = V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$. Cette relation peut être utilisée comme 'cinquième' condition limite.

Pour plus d'informations sur les méthodes de résolution : voir annexe A.

Exercice 1.1 Chacune des situations représentées ci-dessous est un système de plaques rectangulaires parfaitement conductrices d'aire $S (= ab)$, parallèles et distantes de d . La région entre les plaques est remplie par un ou plusieurs matériaux diélectriques.

Ces deux plaques sont

- Soit raccordées à une batterie (différence de potentiel V)
- Soit isolées et porteuses d'une charge Q ($+Q$ sur la plaque supérieure, $-Q$ sur la plaque inférieure).

Pour chaque situation, calculez les champs \vec{D} et \vec{E} dans l'espace entre les plaques en fonction des permittivités, des dimensions géométriques et de V ou Q .

Note: On peut définir un axe x , $x = 0$ correspond à la plaque inférieure ; $x = d$ à la plaque supérieure.

Les effets de bords sont ici négligés ($a, b \gg d$).

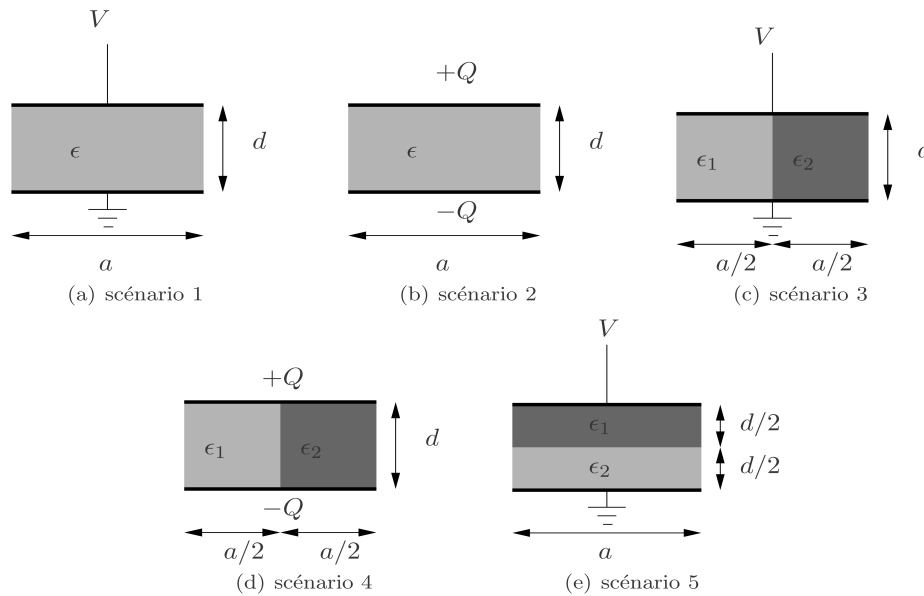


Figure 1.1 – Exercice 1.1

Exercice 1.2 Une capacité à plaques parallèles représentée ci-dessous est soumise à une tension V . La densité de charge ρ_v induite par cette tension est répartie uniformément dans les plaques d'épaisseur δ . On néglige l'effet de bord et il n'y a pas de charge de surface.

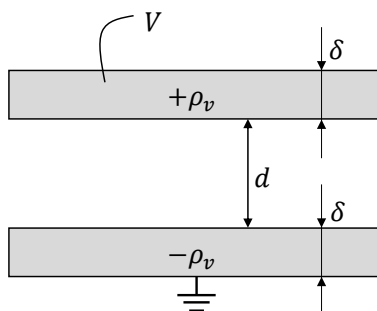


Figure 1.2 – Exercice 1.2

1. Déterminez la solution générale pour \vec{E} en fonction de ρ_v et des dimensions géométriques.
2. Calculez ρ_v en fonction de V .
3. Calculez la force exercée sur les plaques d'aire A .

Exercice 1.3 Soit une sphère chargée de rayon a . La charge Q de la sphère est répartie uniformément dans son volume.

1. Que vaut le champ électrique partout dans l'espace?
2. Que vaut le potentiel partout dans l'espace?
3. Que deviennent les réponses des deux questions précédentes si la charge de la sphère est maintenant répartie uniformément sur sa surface?

Séance 2

Electro- et magnétostatique

Exercice 2.1 On considère une structure cylindrique dont la section droite est représentée ci-dessous. Les conductivités des milieux 1 et 2 valent respectivement 0 et $\sigma \neq 0$. Le rayon du conducteur intérieur vaut a et celui du conducteur extérieur, b . Cette structure est soumise à une différence de potentiel continue, ainsi qu'indiqué sur la figure. Les effets de bord sont négligés.

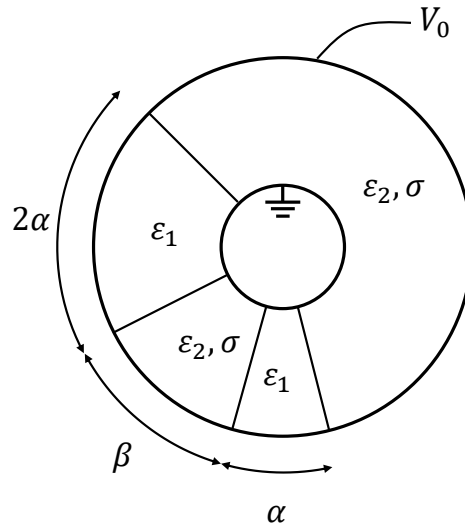


Figure 2.1 – Exercice 2.1

1. Déterminez l'expression des champs \vec{D} et \vec{E} dans la structure, ainsi que la densité de courant \vec{J} en fonction des grandeurs géométriques, et de ϵ_1 , ϵ_2 , σ et V_0 .
2. En déduire l'expression de la capacité C et de la conductance G par unité de longueur.

Rappel

Les définitions formelles des éléments de circuit en fonction des champs sont données par :

$$R \triangleq \frac{V}{I} = \frac{\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\oint_S \sigma \vec{E} \cdot d\vec{S}} \qquad C \triangleq \frac{Q}{V} = \frac{\oint \vec{D} \cdot d\vec{S}}{\int \vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

Ces formules pourront être utilisées afin de calculer les résistances/capacités équivalentes des structures proposées dans ce cours.

3. Si au temps $t = 0$, on débranche la source continue, déterminez l'expression des champs \vec{D} et \vec{E} dans la structure en fonction du temps.

Exercice 2.2 Soit une capacité sphérique, formée par deux sphères conductrices (CEP) de rayon a et b , et remplie de deux demi-sphères de diélectriques de permittivités différentes (voir schéma). La sphère de rayon a porte une charge Q et la sphère de rayon b porte une charge $-Q$.

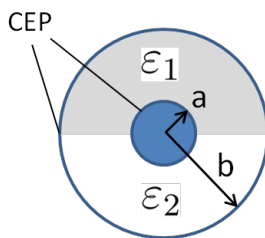


Figure 2.2 – Exercice 2.2

1. Compte tenu de la symétrie du problème, quelles sont les composantes du champ électrique et de quelles variables dépendent-elles? Justifiez.
2. Calculez le champ électrique et le champ de déplacement entre les sphères CEP.
3. Calculez la valeur de la densité de charge de surface sur les CEP en $r = a$.
4. Calculez la différence de potentiel aux bornes de la capacité.

Exercice 2.3 On considère un anneau plat, de rayons intérieur et extérieur égaux à a et b respectivement ($a < b$). Cet anneau est parcouru par un courant I uniformément réparti sur sa section.

On définit l'axe de l'anneau comme la droite passant par le centre de l'anneau et perpendiculaire au plan contenant celui-ci.

1. Donnez le champ magnétique \vec{B} en tout point de cet axe¹.
2. Que devient l'expression de ce champ au centre de l'anneau lorsque celui-ci tend à devenir une boucle ($a \rightarrow b$)?

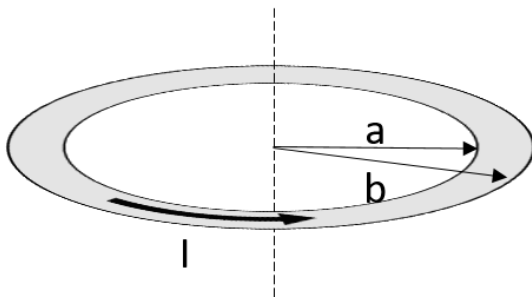


Figure 2.3 – Exercice 2.3

1. L'identité suivante devrait vous être utile: $\int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}} dx = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$

Exercice 2.4 Soit un câble coaxial dont le conducteur intérieur est de rayon a et le conducteur extérieur est compris entre les rayons b et c . Les deux conducteurs (perméabilité μ_0) sont parcourus par un courant I , de sens opposé dans les deux conducteurs. L'espace entre les conducteurs est rempli d'un matériau magnétique dont la perméabilité varie linéairement en fonction du rayon : $\mu(r)$.

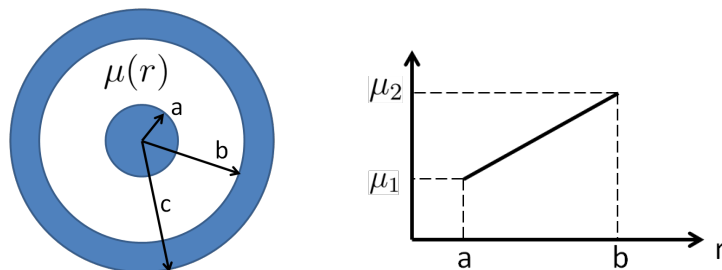


Figure 2.4 – Exercice 2.4

1. Donnez l'expression de la perméabilité en fonction du rayon.
2. Calculez le champ magnétique \mathbf{H} et l'induction magnétique \mathbf{B} dans tout l'espace ($0 < r < \infty$).

Séance 3

Eléments de circuits

Rappel

Conservation de la charge

L'équation de conservation de la charge et sa condition limite sont données par

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \hat{n} \cdot (\vec{J}_1 - \vec{J}_2) + \nabla \cdot \vec{K} + \frac{\partial \rho_S}{\partial t} = 0$$

Dans ces équations :

- ρ est une densité de charge volumique [C/m^3];
- ρ_S est une densité de charge surfacique [C/m^2];
- \vec{J} , \vec{J}_1 and \vec{J}_2 représentent des densités de courant [A/m^2];
- \vec{K} représente la densité de courant de surface [A/m];

Densité de charge volumique

Dans le cadre de ce cours, il peut y avoir une densité de charge volumique présente dans un milieu dans deux cas de figure:

- Si on l'impose dans le milieu de part l'énoncé de l'exercice.
- En conséquence de la loi de conservation de la charge et des conditions aux interfaces. Notamment lorsque la permittivité ou la conductivité d'un milieu varie selon la position (voir exercice 3.2).

Elements de circuits

$$R \triangleq \frac{V}{I} = \frac{\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\oint_S \sigma \vec{E} \cdot d\vec{S}} \quad C \triangleq \frac{Q}{V} = \frac{\oint \vec{D} \cdot d\vec{S}}{\int \vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

Exercice 3.1 On considère une structure formée de deux plaques parallèles CEP infinies, entre lesquelles est placé un matériau conducteur (conductivité σ , permittivité relative ε), porteur d'une densité volumique de charges ρ (voir schéma). En $t = 0$, on soumet les deux plaques à une différence de potentiel constante, V .

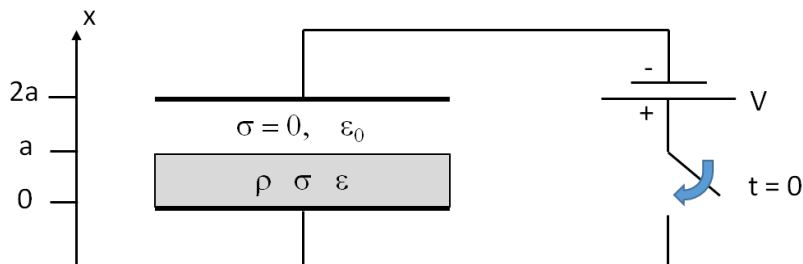


Figure 3.1 – Exercice 3.1

Pour $t < 0$, on considère que $\rho = \rho_0$ et que la densité de charges de surface en $x = a$ est nulle.

1. Pour $t = 0^+$ (c'est-à-dire juste après la fermeture de l'interrupteur), déterminer l'expression des champs \mathbf{D} et \mathbf{E} , ainsi que la densité de courant \mathbf{J} , pour $0 < x < 2a$.
2. Quelle est l'évolution temporelle de la charge volumique ρ (formule)?
3. Pour $t = \infty$, déterminer l'expression des champs \mathbf{D} et \mathbf{E} , ainsi que de la densité de courant \mathbf{J} , pour $0 < x < 2a$. Que valent alors les densités de charges de surface en $x = 0, a$ et $2a$?

Exercice 3.2 Soit le dispositif ci-dessous. il est composé de deux diélectriques de permittivités ε_1 et ε_2 . Le premier milieu est caractérisé par une conductivité constante σ_1 tandis que la conductivité du second milieu varie linéairement : $\sigma_2 = \alpha z$.

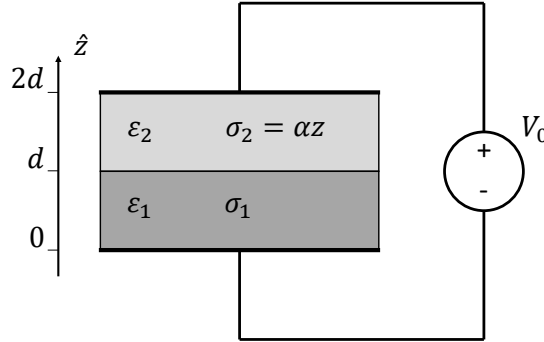


Figure 3.2 – Exercice 3.2

1. Que vaut le champ électrique \vec{E} et la charge volumique ρ_v dans chacun des deux milieux ? Que vaut la charge de surface au niveau de chacune des bornes du dispositif ainsi qu'à l'interface entre les deux milieux ?
2. Calculez le courant passant dans le dispositif.
3. Calculez la charge totale stockée dans le dispositif.
4. Donnez un circuit équivalent du dispositif. A partir des grandeurs calculées précédemment, comment feriez-vous pour estimer la valeur des différents éléments impliqués ?

Exercice 3.3 Considérons le dispositif représenté ci-dessous. Celui-ci consiste en deux cylindres CEP concentriques de rayon a et b . Entre ces cylindres est placé un milieu résistif de conductivité variable $\sigma(r) = \sigma_0 r$ et de permittivité constante ε .

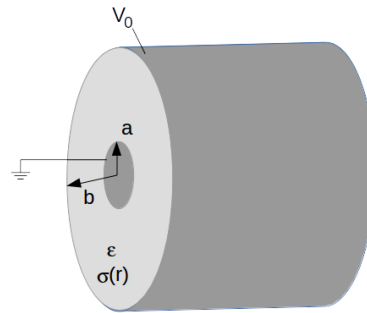


Figure 3.3 – Exercice 3.3

1. Quelle sera la valeur du champ électrique et la distribution de charges dans le diélectrique pour une différence de potentiel V_0 entre la plaque extérieure et la plaque intérieure?
2. Quelle est la valeur de la conductance du dispositif par unité de longueur?
3. Quelle est la valeur de sa capacité par unité de longueur ? (Nb : Attention à prendre en compte toutes les charges)

Exercice 3.4 Un générateur AC est connecté à une capacité à plaques parallèles (cfr. figure ci-dessous). Les plaques sont circulaires, d'aire $A (= \pi a^2)$ et distantes de d . La charge sur les plaques vaut $q_0 \sin(\omega t)$. On néglige les effets de bord et on suppose que la longueur d'onde est grande par rapport aux dimensions.

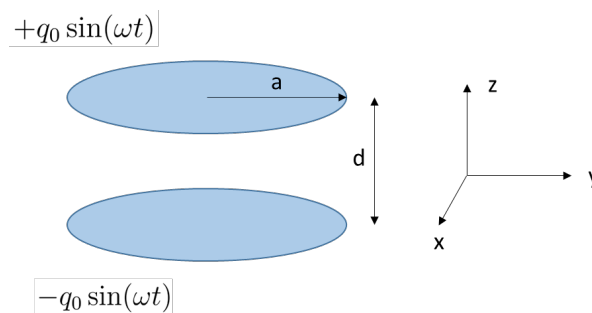


Figure 3.4 – Exercice 3.4

1. Calculez le courant de déplacement à l'intérieur de la capacité. Que vaut le courant de conduction dans le fil reliant la capacité et le générateur? Comparez.
2. Calculez l'amplitude du champ magnétique présent à l'intérieur de la capacité. Quelle est sa direction?
3. Déterminez le vecteur de Poynting à l'intérieur de la capacité.
4. Quelle est l'énergie emmagasinée dans la capacité?
5. Vérifiez le bilan énergétique par le théorème de Poynting.

Exercice 3.5 Un conducteur CEP haute tension (potentiel V) de rayon a traverse un plan de masse à travers un manchon formé de deux cylindres CEP de rayons respectifs b et c ($a < b < c$). Les espaces entre les différents cylindres sont remplis d'un diélectrique de permittivité ϵ . Le cylindre de rayon b est isolé et porte une charge totale nulle. On néglige tous les effets de bord.

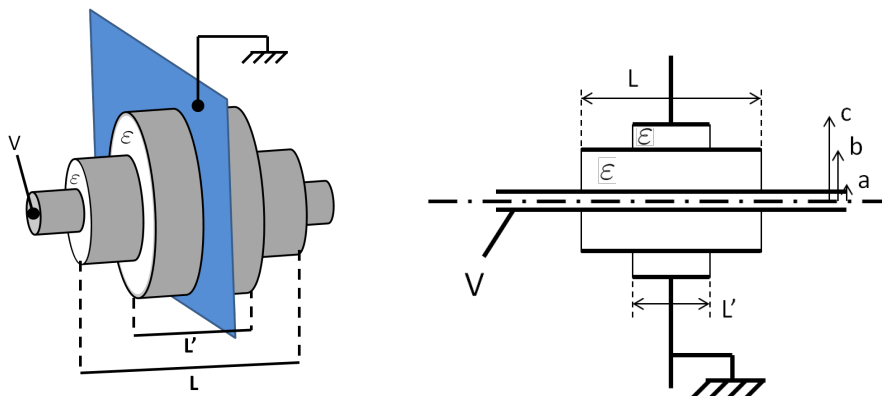


Figure 3.5 – Exercice 3.5

Connaissant a , b , c et L , calculer L' :

1. Pour que la différence de potentiel entre le conducteur central ($r=a$) et le premier cylindre ($r=b$) soit égale à la différence de potentiel entre les cylindres du manchon ($r=b$ et $r=c$).
2. Pour que le champ électrique maximal soit le même dans les deux espaces diélectriques.

Exercice 3.6 Soit un câble coaxial RG-58/U disponible sur le marché et utilisée notamment pour le transport de signaux RF. Le dispositif est représenté ci-dessous.

On vous demande de calculer son impédance sachant que $a = 0.41$ mm, $b = 1.48$ mm, et que les deux conducteurs sont séparés par du polyéthylène (PE) de permittivité relative $\varepsilon_r = 2.25$. On négligera l'épaisseur du conducteur extérieur. On fera aussi l'approximation que le courant passe uniquement le long des parois.

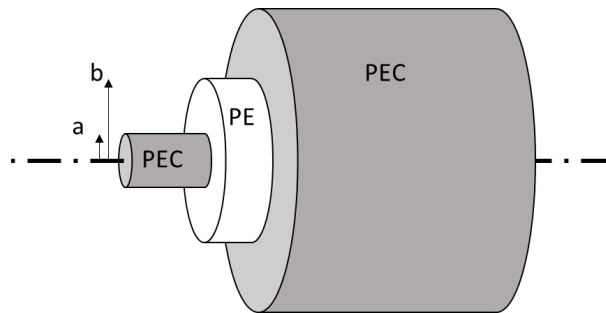


Figure 3.6 – Exercice 3.6

Exercice 3.7 Une capacité représentée ci-dessous est constituée de deux plaques parallèles renfermant deux couches de diélectriques (ε_1, σ_1) et (ε_2, σ_2) de même épaisseur d . On lui applique une différence de potentiel continue V à l'instant $t = 0$.

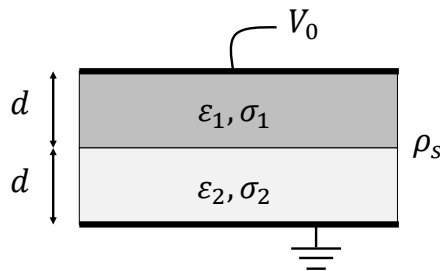


Figure 3.7 – Exercice 3.7

Négligeant les effets de bord,

1. Que vaut la charge de surface ρ_s entre les diélectriques en régime établi?
2. En se servant de l'équation de continuité, déterminez la constante de temps avec laquelle s'établit cette valeur de régime (la densité de charge initiale est nulle).

Séance 4

Circuits magnétiques

Rappel

La notion de *circuit magnétique* peut être introduite au moyen d'une analogie avec les circuits électriques (voir figure 4.1).

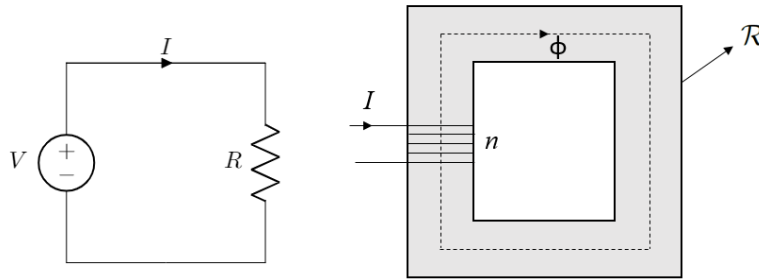


Figure 4.1 – Circuit électrique (droite), circuit magnétique (gauche)

- Dans le circuit électrique ci-dessus, on observe une source de tension de valeur V connectée à une résistance R . La valeur de cette résistance est constante et ne dépend pas de I et V . En raison de la différence de potentiel aux bornes de la source, on observe l'apparition d'un courant I circulant dans le circuit.

La relation liant ces trois grandeurs est donnée par la loi d'Ohm : $V = RI$

- Dans le circuit magnétique ci-dessus, on observe un enroulement de n tours de fil dans lequel circule un courant d'intensité I . La présence de ce courant va donner lieu à une *force magnétomotrice* $\mathcal{F} = nI$. En raison de cette force magnétomotrice, un *flux magnétique* Φ va circuler dans le matériau grisé (selon les pointillés). Ce matériau est caractérisé par une *reluctance* \mathcal{R} , qui ne dépend que de la géométrie et du matériau du circuit.

La relation liant ces trois grandeurs est donnée par la loi d'Hopkinson : $\mathcal{F} = \mathcal{R}\Phi$

Calcul de la reluctance

Par la loi d'Ampère, on sait que $nI = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l}$. L'intégrale est ici calculée sur le chemin fermé représenté par les pointillés de la figure 4.1.

Par ailleurs, le flux magnétique vaut par définition $\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$.

En substituant ces expressions dans la loi d'Hopkinson, on obtient $\mathcal{R} = \frac{\oint \vec{H} \cdot d\vec{l}}{\int \vec{B} \cdot d\vec{S}}$

Pour un circuit magnétique donné, il y a lieu de suivre les étapes suivantes afin de calculer la reluctance du circuit :

1. Si le circuit est composé de plusieurs parties de perméabilités ou de géométries différentes, il faut calculer séparément la reluctance \mathcal{R}_i de chaque partie. Mathématiquement, cela revient à considérer que le flux est constant tout au long du circuit (on néglige les champs de fuite). On va donc diviser l'intégrale le long d'une boucle fermée en une somme d'intégrales correspondant aux différentes parties de la boucle. On pourra ensuite additionner les valeurs obtenues afin d'obtenir la reluctance totale \mathcal{R}_{tot} du circuit.

Rappel

La formule de la reluctance devient donc :

$$\mathcal{R}_{\text{tot}} = \sum_i \mathcal{R}_i = \sum_i \frac{\int \vec{H}_i \cdot d\vec{l}_i}{\int \vec{B}_i \cdot d\vec{S}_i}$$

Exemple

Le circuit représenté à la figure 4.2 est composé d'une première partie de perméabilité μ_1 , de deux entrefers (perméabilité du vide μ_0) et d'une partie courbée de perméabilité μ_2 . On peut donc décomposer la reluctance de ce circuit en 4 reluctances séparées, comme indiqué sur la figure 4.2.

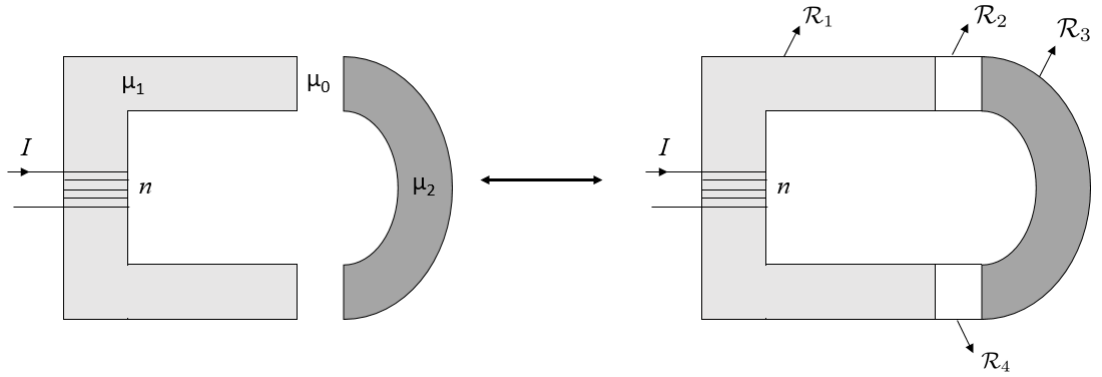


Figure 4.2 – Exemple de décomposition de circuit magnétique

Pour chacune des parties, il faut ensuite procéder comme suit :

2. Simplifier l'expression générale du champ magnétique dans la partie concernée (en utilisant les symétries et hypothèses du problème, comme dans les séances précédentes).
3. Injecter la forme ainsi obtenue dans les équations de Maxwell. On obtient alors une équation différentielle à résoudre pour déterminer l'expression exacte du champ à une ou plusieurs constante(s) près.
4. Injecter l'expression obtenue dans la formule de la reluctance $\mathcal{R} = \frac{\int \vec{H} \cdot d\vec{l}}{\int \vec{B} \cdot d\vec{S}}$.

Etant donné que les champs \vec{H} et \vec{B} sont proportionnels, les constantes indéterminées se simplifient au numérateur et au dénominateur. On obtient alors l'expression de la reluctance qui ne dépend alors que des paramètres géométriques du circuit, et de la perméabilité.

Remarque : si une des parties du circuit comporte une section variable (comme les deux parties 'rétrécissantes' de l'exercice 4.2), la formule de la reluctance peut être exprimée comme ^a

$$\mathcal{R} = \frac{1}{\mu} \int \frac{1}{A(x)} dx$$

avec $A(x)$ l'aire de la section en x .

^a. Pour obtenir cette formule, on fait l'hypothèse que la perméabilité du matériau est très élevée : on néglige donc les effets de bords et on considère que le champ est constant sur la section.

Exercice 4.1 Soit le pot de ferrite ($\mu_r = 2000$) à symétrie cylindrique schématisé ci-dessous. On négligera les effets de bord, les effets de coin ainsi que le champ de fuite.

1. Donnez l'expression de sa reluctance.
2. Estimez l'inductance d'une bobine de 100 tours enroulée autour du cylindre central en adoptant les valeurs suivantes : $a = 5 \text{ mm}$, $b = 15 \text{ mm}$, $c = 20 \text{ mm}$, $h = 20 \text{ mm}$, $e = 1 \text{ mm}$ et $d = 3 \text{ mm}$.

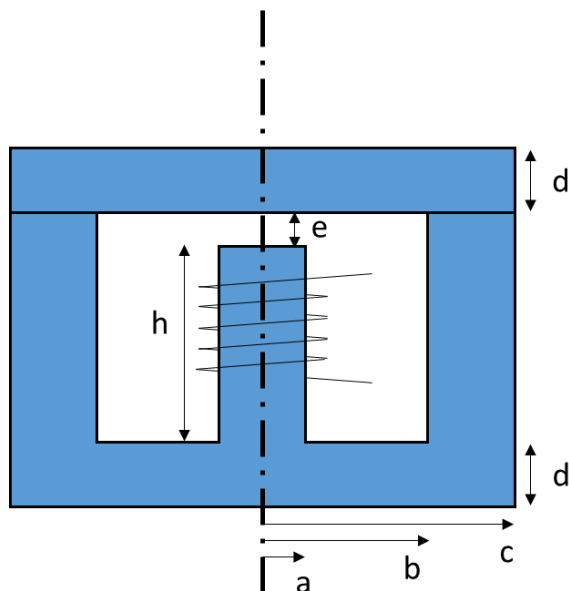


Figure 4.3 – Exercice 4.1

Exercice 4.2 Soit le circuit magnétique représenté à la figure suivante. Calculez le champ magnétique B dans le matériau magnétique et dans l'entrefer. Supposez que la section varie de manière linéaire le long de l_2 de A_1 à A_2 . Négligez les effets de bord.

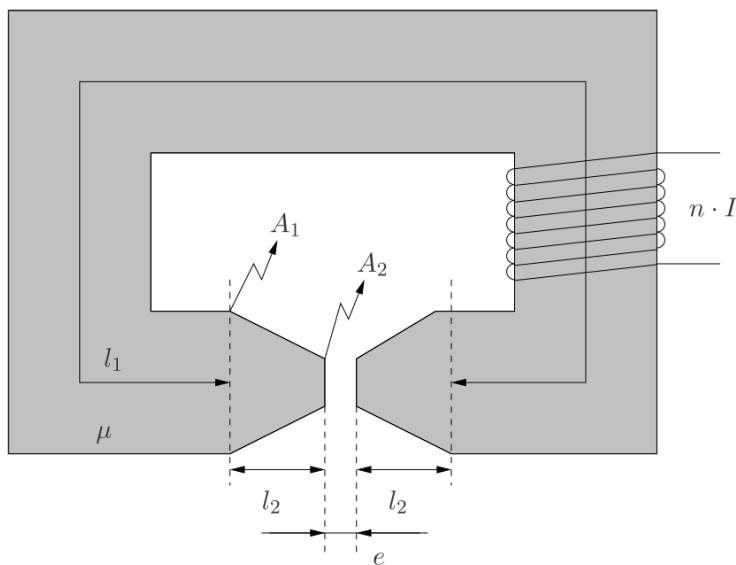


Figure 4.4 – Exercice 4.2

Exercice 4.3 Soit le circuit magnétique représenté ci-dessous. Il est constitué d'acier inoxydable martensitique recuit (permeabilité relative $\mu_r = 850$). Il se compose d'une pièce fixe de section circulaire ainsi que d'une vis de réglage. Un bobinage de $N = 100$ tours est enroulé autour de la partie fixe. Comme indiqué sur la figure, le diamètre de la partie fixe varie linéairement 3 à 5 mm dans deux zones situées de au dessus et en dessous de l'entrefer. En ajustant le réglage au niveau de la vis, il est possible de faire varier la taille de l'entrefer et donc l'inductance propre de la bobine. Dans la suite, vous pouvez considérer l'entrefer comme un cylindre d'air de longueur x et de même rayon que la vis.

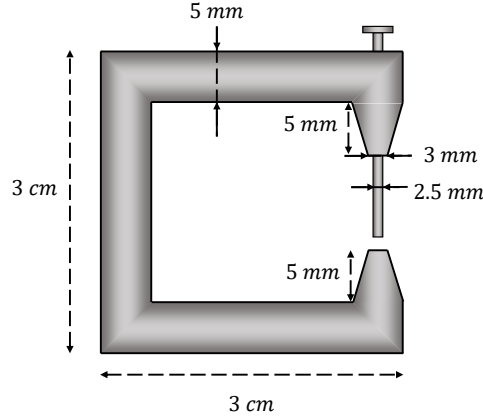


Figure 4.5 – Exercice 4.3

1. Lorsque la vis est totalement fermée ($x = 0$), que vaut l'inductance de la bobine? Indiquez clairement les hypothèses faites.
2. Sachant que le pas de la vis vaut 0.4 mm, que devient l'inductance si on tourne la vis d'un quart de tour?
3. On définit la sensibilité du réglage comme le changement relatif d'inductance par unité de rotation de la vis (en radians):

$$S(x) \triangleq \frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

Donnez l'expression de cette sensibilité en fonction de la taille de l'entrefer x .

Exercice 4.4 (Janvier 2019) On considère un circuit magnétique couplé. Le noyau est un tore circulaire, de rayon b , de section circulaire, de rayon a . Sa perméabilité magnétique est donnée, sur une section circulaire, par

$$\mu(r) = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1) \frac{r}{a},$$

où r est la variable radiale sur une section circulaire.

Le bobinage primaire est constitué de n_1 tours et sa résistance vaut R_1 . Il est alimenté par une source de tension continue, notée V_0 , que l'on branche en $t = 0$. Le bobinage secondaire est constitué de n_2 tours et sa résistance vaut R_2 . Ses bornes sont laissées en circuit ouvert.

On fait l'hypothèse que $a \ll b$, de telle sorte qu'on puisse considérer le champ \vec{H} comme uniforme sur une section droite. On néglige en outre les flux de fuite.

1. Posant un courant $I_1(t)$ dans le bobinage primaire (dont l'expression sera calculée plus tard), calculez les expressions des champs \vec{H} et \vec{B} ainsi que du flux magnétique Φ , au sein du noyau.
2. Déterminez les expressions des inductances propres des bobinages primaire et secondaire, ainsi que de l'inductance mutuelle. Expliquez clairement la démarche.
3. Pour $t \geq 0$, déterminez les expressions, **en fonction du temps**, du courant $I_1(t)$ au primaire et de la tension $V_2(t)$ aux bornes du secondaire.

Séance 5

Lignes de transmission en régime harmonique

Rappel

Définitions

En théorie des circuits, une ligne de transmission est représentée par le symbole de la figure 5.1(a).

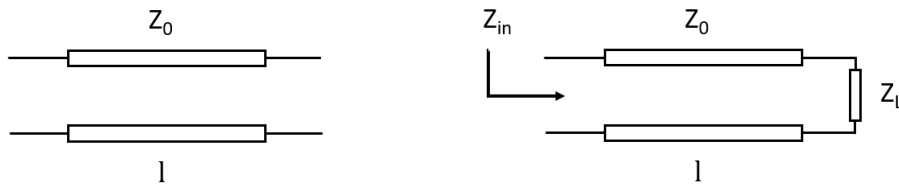


Figure 5.1 – (a) Symbole d’une ligne de transmission (gauche), (b) ligne connectée à une charge (droite)

Le symbole de la ligne est toujours accompagné de deux grandeurs :

- l’impédance caractéristique de ligne Z_0 ;
- la longueur de la ligne l , souvent exprimé en fonction de la longueur d’onde ^a.

Une ligne de transmission est en régime *harmonique* lorsque les grandeurs électriques aux bornes de cette ligne (courant et tension) sont stationnaires.

Calcul de l’impédance équivalente

La figure 5.1(b) représente une ligne de transmission connectée à une charge d’impédance Z_L ^b. Deux méthodes sont possibles pour calculer l’impédance d’entrée équivalente Z_{in} vue aux bornes de la ligne :

- *Méthode graphique* : cette méthode consiste à calculer l’impédance Z_{in} en utilisant l’abaque de Smith (disponible à l’annexe D). Le calcul s’effectue alors en trois étapes :

1. Calculer l’impédance de charge normalisée $z_L = \frac{Z_L}{Z_0}$.
2. Calculer l’impédance d’entrée normalisée z_{in} . Pour ce faire, il faut
 - Placer l’impédance de charge normalisée z_L dans l’abaque selon ses parties réelle et imaginaire.
 - Il faut ensuite faire une rotation de ce point
 - * autour du centre de l’abaque ;
 - * dans le sens horloger (car on s’éloigne de la charge vers le générateur) ;
 - * l’amplitude de la rotation (en radians) est donnée par $\theta = 4\pi \frac{l}{\lambda}$ (un tour correspondant à une demi longueur d’onde)

On obtient alors l’impédance d’entrée normalisée z_{in} .

3. Il faut ensuite calculer l’impédance d’entrée ‘non-normalisée’ $Z_{in} = z_{in} Z_0$

^a. Pour rappel, la longueur d’onde est donnée par $\lambda = v/f$ avec v , la vitesse de phase de l’onde dans la ligne et f la fréquence d’utilisation du circuit.

^b. Il a lieu de bien noter que le L en indice veut dire *load* (= charge en anglais) et non pas ligne.

Rappel

- *Méthode analytique* : cette méthode consiste à utiliser la formule de l'impédance d'entrée d'une ligne sans pertes en régime harmonique

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L \cos(\beta l) + j Z_0 \sin(\beta l)}{Z_0 \cos(\beta l) + j Z_L \sin(\beta l)}$$

où $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ représente le nombre d'onde.

Types de configurations

Dans le reste de ce rappel, on s'intéresse successivement aux connexions de lignes en cascade, en série et en parallèle.

- Les deux lignes représentées à la figure 5.2 sont dites en *cascade*. Pour calculer l'impédance d'entrée Z_{in} , il suffit de calculer successivement Z_{inter} puis Z_{in} en utilisant les méthodes ci-dessus.

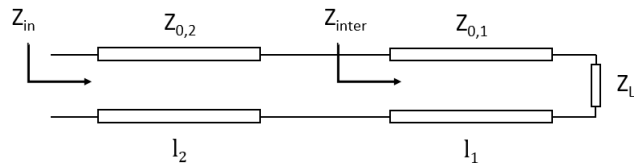


Figure 5.2 – Lignes de transmission en cascade.

- Les deux lignes représentées à la figure 5.3 sont dites en *série*. Pour calculer l'impédance d'entrée Z_{in} , il suffit d'additionner les impédances $Z_{inter,1}$ et $Z_{inter,2}$ vues à l'entrée de chaque ligne.

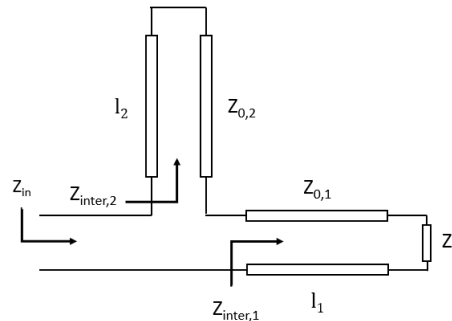


Figure 5.3 – Lignes de transmission en série.

- Les deux lignes représentées à la figure 5.4 sont dites en *parallèle*. Pour calculer l'admittance d'entrée G_{in} , il suffit d'additionner les admittances $Y_{inter,1}$ et $Y_{inter,2}$ vues à l'entrée de chaque ligne.

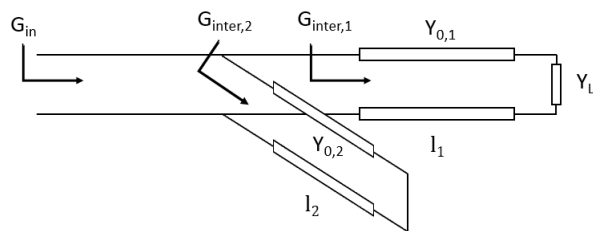


Figure 5.4 – Lignes de transmission en parallèle.

Exercice 5.1 Une ligne de transmission d'impédance caractéristique de 50Ω est terminée par une impédance de $25 + j25\Omega$. La ligne est sans perte. Calculer le facteur de réflexion et le taux d'onde stationnaire à la charge.

Exercice 5.2 Un dipôle est constitué de deux lignes de transmission en cascade fermées sur une charge de 50Ω comme représenté à la figure ci-dessous. Les impédances caractéristiques sont respectivement de 140Ω et 71Ω . Les deux lignes ont une longueur égale au quart de la longueur d'onde. Quelle est l'impédance d'entrée de ce dipôle? Les lignes sont sans perte.

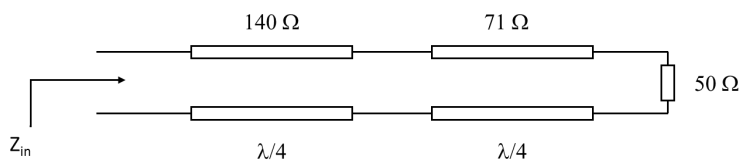


Figure 5.5 – Exercice 5.2

Exercice 5.3 Soit la ligne de transmission avec montage en quart d'onde représentée ci-dessous et terminée par une charge d'admittance $Y_L = 0,02 + j0,015$. On vous demande de trouver l'admittance des lignes ainsi que la longueur l_1 pour que le montage total soit adapté à un générateur possédant une impédance de 50Ω . On considère que les lignes sont sans perte.

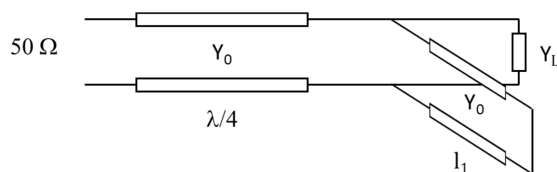


Figure 5.6 – Exercice 5.3

Rappel

A retenir : pour qu'un montage soit adapté à un générateur, il faut que le coefficient de réflexion au niveau du générateur soit nul. Autrement dit, il faut que l'impédance d'entrée du montage soit égale à celle du générateur.

Exercice 5.4 Soit le circuit suivant:

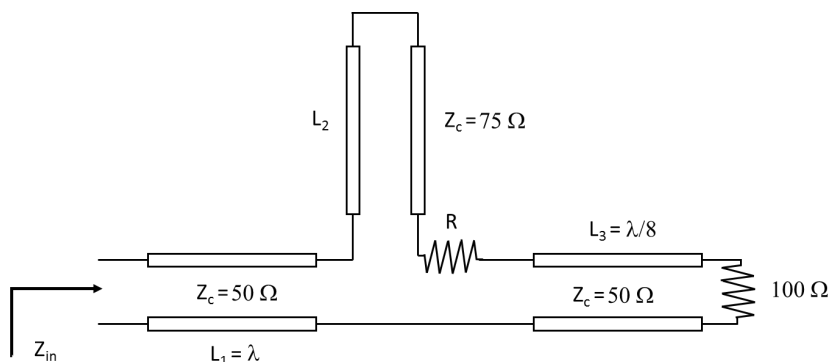


Figure 5.7 – Exercice 5.4

Calculez la longueur de la ligne L_2 et la valeur de la résistance R en vue de réaliser l'adaptation à l'entrée de la ligne à 50Ω . Expliquez clairement la démarche suivie.

Exercice 5.5 (Janvier 2020) On souhaite adapter l'impédance d'entrée d'un transistor $Z_{tr} = 7 + j13\Omega$ à une ligne de transmission de 50Ω . On envisage deux dispositifs.

1. Pour le premier dispositif ci-dessous, calculer les impédances caractéristiques Z_1 et Z_2 des lignes de longueurs respectives $\lambda/4$ et $\lambda/8$.

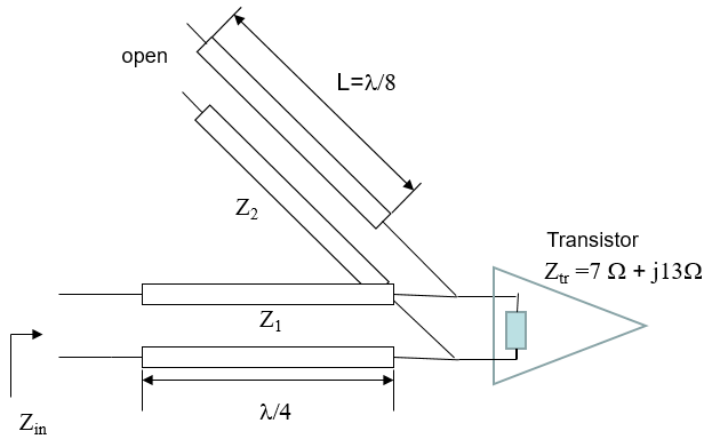


Figure 5.8 – Exercice 5.5

2. Pour le second dispositif, on souhaite privilégier la symétrie et on utilise 2 stubs en circuit ouvert. Calculer les longueurs L_1 et L_2 en utilisant l'abaque de Smith. Donnez deux solutions.

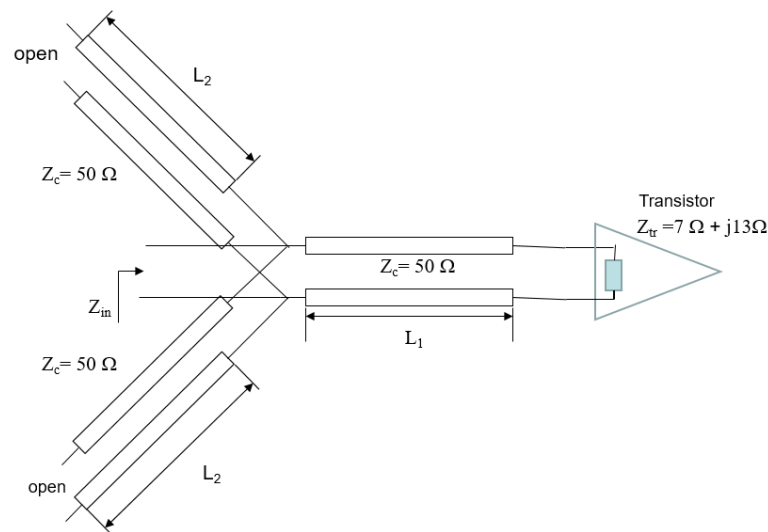


Figure 5.9 – Exercice 5.5

Exercice 5.6 Soit le milieu à couche illustré ci-dessous, éclairé par une onde plane de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 600\text{nm}$ arrivant à incidence perpendiculaire. Le milieu est fait de deux couches de diélectrique entourées d'air. Le premier milieu est caractérisé par une permittivité relative $\varepsilon_{r,1} = 15$ et une épaisseur de 200nm . Le second milieu a une permittivité relative $\varepsilon_{r,2} = 4$ et une épaisseur de 50nm . Aux fréquences considérées, l'activité magnétique des matériaux est négligeable.

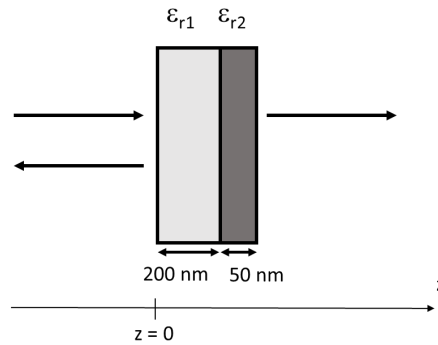


Figure 5.10 – Exercice 5.6

1. Dessinez le schéma équivalent à l'aide de lignes de transmission. Veillez à bien indiquer l'impédance des lignes et leur longueur relative à la longueur d'onde dans le milieu.
2. Que vaut le coefficient de réflexion de l'onde incidente en $z = 0$?
3. On désire appliquer un traitement anti-reflets, de façon à ce que le coefficient de réflexion pour une onde à incidence normale soit nul. Pour ce faire, on dépose d'abord une couche de nitrure de silicium ($\varepsilon_r = 4$) d'épaisseur à déterminer, puis une couche de métamatériau dont l'épaisseur est égale au quart de la longueur d'onde **dans celui-ci**. La permittivité du métamatériau dépend des conditions de fabrication de celui-ci et peut donc être choisie. Donnez une possibilité pour la couche anti-reflets (épaisseur du nitrure de silicium, du métamatériau et permittivité du métamatériau).
4. Si maintenant on étudiait le coefficient de réflexion à incidence oblique, que deviendrait le schéma du point 1 ? Expliquez qualitativement les changements.

Séance 6

Lignes de transmission en transitoire

Rappel

Cette séance est consacrée aux lignes de transmission en transitoire, et non plus en régime harmonique. Les solutions des exercices de cette séance ne sont donc plus des solutions d'équilibre.

En transitoire, une impulsion incidente à un noeud entre plusieurs lignes de transmission ne peut pas 'savoir' ce qu'il y a au bout des lignes qui l'entourent. Elle ne sera donc pas influencée par les composants situés au bout de ces lignes. Par exemple, une impulsion présente au niveau de la flèche sur la figure 6.1 n'est influencée que par les deux lignes de 100 et 75 Ω , et non pas par les résistances de 75 et 50 Ω .

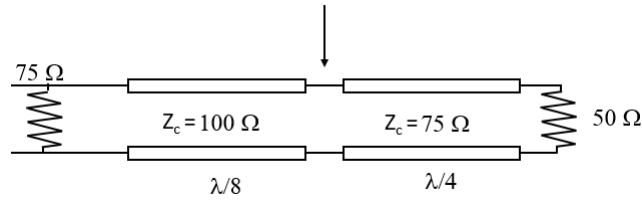


Figure 6.1 – Rappel - exemple

Pour résoudre les exercices de lignes en transitoire, il y a lieu d'utiliser la méthodologie suivante :

1. Décomposer le circuit en *lignes* et en *zones* (voir figure 6.2). Les *zones* sont les parties du circuit présentes entre les lignes, pouvant comprendre des éléments de circuits (résistances, etc).

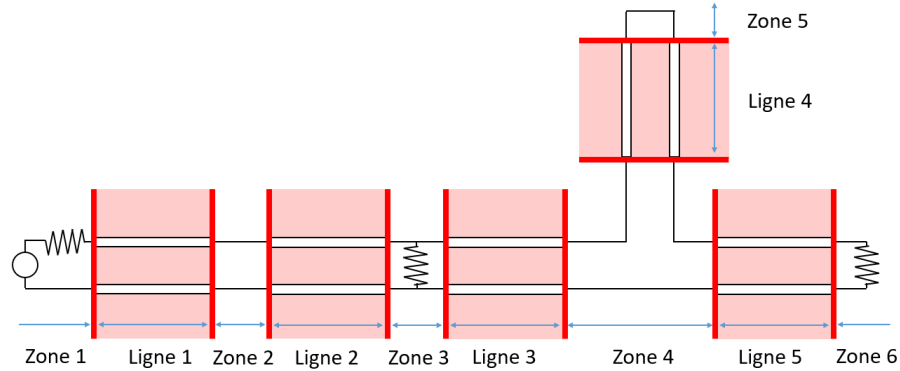


Figure 6.2 – Exemple de décomposition

2. Calculer le coefficient de réflexion $\Gamma_{i,j}$ pour chaque zone i vue depuis chaque ligne j adjacente à cette zone. Ce coefficient est donné par

$$\Gamma_{i,j} = \frac{Z_{ij} - Z_{cj}}{Z_{ij} + Z_{cj}}$$

où Z_{cj} est l'impédance caractéristique de la ligne j et Z_{ij} est la résistance vue dans la zone i depuis la ligne j .

Rappel

Concernant le calcul de l'impédance Z_{ij} , on peut mentionner les points d'attention suivants :

- Si la ligne j est uniquement en cascade avec une autre ligne, l'impédance perçue est uniquement l'impédance caractéristique de la ligne adjacente.
 \hookrightarrow *exemple* : impédance perçue de la zone 2 depuis la ligne 1 sur la figure 6.2
- Si les lignes de l'autre côté de la zone i sont en série, l'impédance perçue par la ligne j sera la mise en série des impédances de ces deux lignes ^a.
 \hookrightarrow *exemple* : impédance perçue de la zone 4 depuis la ligne 3 sur la figure 6.2. L'impédance perçue par la ligne 3 sera la somme des impédances caractéristiques des lignes 4 et 5.
- Si les lignes de l'autre côté de la zone i sont en parallèle, l'impédance perçue par la ligne j sera la mise en parallèle des impédances de ces deux lignes.
- Si la zone contient des éléments de circuit (résistances, etc), il y a lieu de prendre en compte ces éléments en les mettant en série/parallèle avec la (les) ligne(s) suivante(s) ^b
 \hookrightarrow *exemple* : impédance perçue de la zone 3 depuis la ligne 2. La valeur de l'impédance perçue sera celle de la résistance mise en parallèle avec l'impédance caractéristique de la ligne 3.

3. Une fois les coefficients de réflexion calculés, on suppose ensuite dans un premier temps que le générateur n'envoie qu'une impulsion (= delta de dirac $\delta(t)$) dans le circuit. On peut alors tracer le *diagramme des impulsions* parcourant le circuit.

Au niveau du générateur : l'amplitude de l'impulsion effectivement transmise au circuit est obtenue en effectuant un diviseur de tension avec l'impédance de la source et la ligne adjacente.
 \hookrightarrow *exemple* : la résistance de la zone 1 et l'impédance caractéristique de la ligne 1 sur le circuit de la figure 6.2.

Au niveau du reste du circuit : lorsqu'une impulsion d'amplitude a arrive d'une ligne j vers une zone i , une partie de cette impulsion va être transmise à la suite du circuit, et une autre partie sera réfléchiée dans la ligne j .

- L'amplitude de la partie réfléchiée est alors donnée par $r = \Gamma_{i,j}a$
- L'amplitude de la partie transmise est alors donnée ^c par $t = (1 + \Gamma_{i,j})a$.

Attention : il faut être attentif au cas où l'impédance $\Gamma_{i,j}$ est calculée avec une zone i comprenant plusieurs lignes ou d'éléments de circuit en série. L'amplitude transmise t se répartit dans ce cas sur ces différents éléments. Il y a donc lieu d'utiliser un diviseur de tension pour calculer l'amplitude sur chaque des éléments.

^a. En effet, les deux parties de l'entrée de lignes mises en série sont liées via des effets inductifs et capacitifs. Ainsi, l'information du pulse peut 'sauter' d'une branche d'une ligne à l'autre

^b. car les composants en question sont supposés 'courts' par rapport aux lignes de transmission

^c. On notera que le coefficient de transmission peut donc être plus grand que 1. Cela n'est cependant pas en contradiction avec la physique étant donné que l'énergie transmise dépend de la tension mais également du courant transmis.

Exercice 6.1 On branche un générateur d'impulsions dont l'impédance vaut $50\ \Omega$ à une ligne de transmission (voir figure 6.3). Celui-ci fournit une impulsion de $1V$ à l'entrée en $t = 0$.

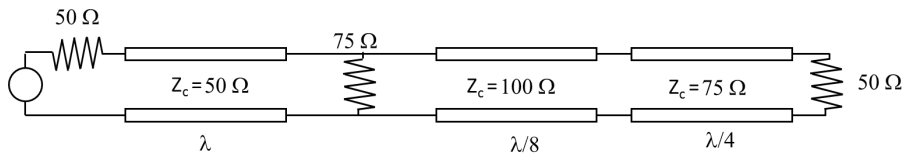


Figure 6.3 – Exercice 6.1

1. Calculez la valeur des deux premières impulsions revenant au générateur.
2. On considère à présent que le générateur émet un signal continu à partir du temps $t = 0$. Comment évolue sur la même période de temps le signal mesuré au générateur ? (prenant compte de l'onde émise et de l'onde revenant vers le générateur)

Exercice 6.2 Soit le circuit suivant :

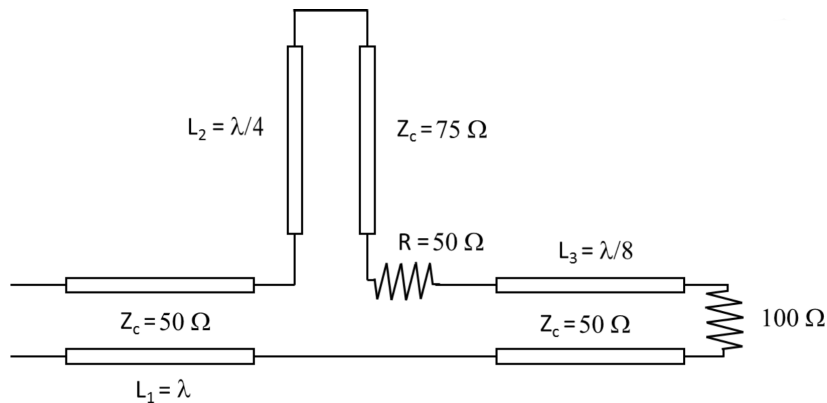


Figure 6.4 – Exercice 6.2

On place un générateur d'impédance $Z_g = 50\Omega$, fournissant une impulsion de $1V$ à l'entrée de la ligne. Donnez la valeur des deux premières impulsions revenant au générateur.

Exercice 6.3 Soit le circuit représenté ci-dessous. Le générateur se met en route à l'instant $t = 0$. On vous demande de tracer l'évolution de la différence de potentiel entre les deux parties de la ligne au point A pour tout temps $t \leq \lambda/c$ pour les deux cas suivants :

- Le générateur envoie un pulse de tension à $1V$ lorsqu'il se met en route.
- Le générateur commence à envoyer $1V$ en continu une fois mis en route.

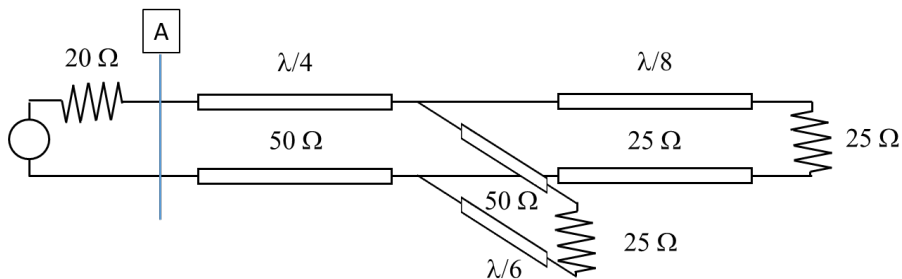


Figure 6.5 – Exercice 6.3

Exercice 6.4 Soient deux lignes de transmission en cascade, représentées dans la figure ci-dessous. Les deux lignes ont la même longueur L . Aux temps $t < 0$, la tension est nulle sur toute la ligne.

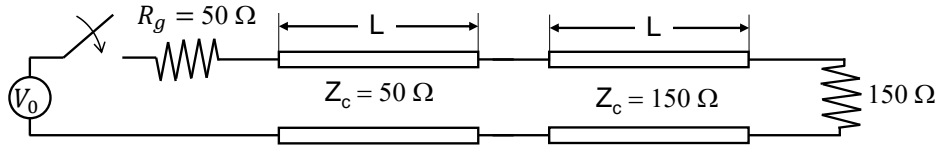


Figure 6.6 – Exercice 6.4 : circuit

1. En $t = 0$, on ferme l'interrupteur sur une source de tension continue de 10V. Complétez le graphe bidimensionnel $v(l, t)$ (voir ci-dessous) avec les différentes réflexions, jusqu'à $t = 3T$, où T est la durée du transit de l'onde sur une ligne de longueur L .
2. Représentez la tension sur la ligne en fonction du temps en $z = 0$, $z = L$ et $z = 2L$.
3. Si la tension présente à l'entrée de la ligne en $z = 0$ n'est plus une source de tension continue de 10V mais correspond à une impulsion de 10V et de durée $T/2$, la tension revenant à 0V en $T/2$,

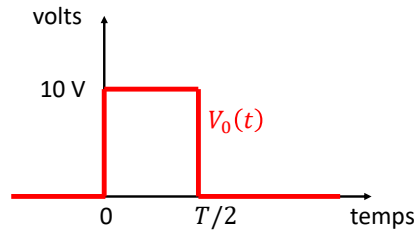
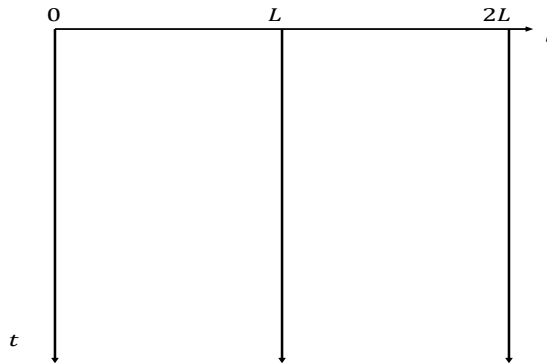


Figure 6.7 – Exercice 6.4 : évolution de la tension d'entrée

- Comment introduisez-vous cela dans le graphe $v(l, t)$? Expliquez.
- Dessinez le graphe de la tension en fonction de la position sur la ligne $v(l, t)$ pour $t = T$ et pour $t = 2T$.



Séance 7

Exercices complémentaires

Exercice 7.1 Soit un demi anneau de section rectangulaire fait à partir d'un matériau de conductivité σ , tel que représenté ci-dessous.

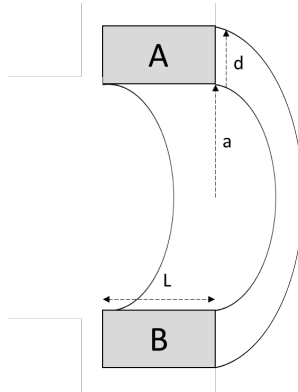


Figure 7.1 – Exercice 7.1

1. Calculer la résistance entre A et B de façon rigoureuse.
2. A quoi se réduit la valeur de la résistance pour $a \gg d$? Donnez son expression analytique simplifiée.

Exercice 7.2 Soit un tore magnétique de perméabilité relative $\mu_r = 400$ et de section carrée. Le rayon intérieur du tore vaut a et le rayon extérieur b . Autour du noyau magnétique se trouve un bobinage de n spires. Déterminer la valeur de l'inductance. Nb : on négligera les champs de fuite.

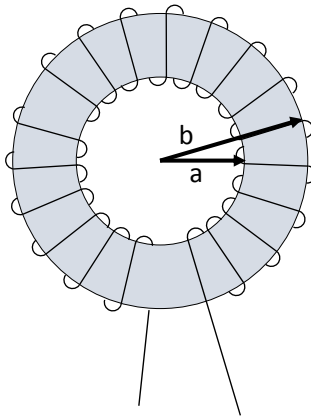


Figure 7.2 – Exercice 7.2

Deuxième partie

Dispositifs électroniques

Séance 8

Equations des semiconducteurs, introduction à la jonction PN

Partie 1 - Equations générales des semiconducteurs

Rappel

L'objectif de cette première partie consiste à déterminer les concentration en porteurs $n(x)$ et $p(x)$ dans des semiconducteurs dopés. Pour rappel, ces concentrations sont calculées au moyen des équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} &= \frac{1}{q} \frac{\partial J_n}{\partial x} - U_n + G & \frac{\partial p}{\partial t} &= -\frac{1}{q} \frac{\partial J_p}{\partial x} - U_p + G & (\text{continuité}) \\ J_n &= q \left(n \mu_n E + D_n \frac{\partial n}{\partial x} \right) & J_p &= q \left(p \mu_p E - D_p \frac{\partial p}{\partial x} \right) & (\text{densités de courant}) \\ \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x^2} &= -\frac{\rho(x)}{\epsilon} & E(x) &= -\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} & (\text{Poisson}) \end{aligned}$$

Dans le cadre de ce cours, nous utiliserons le modèle de recombinaison suivant :

$$U_n = \frac{n(x) - n_0}{\tau_n} \quad U_p = \frac{p(x) - p_0}{\tau_p} \quad (\text{recombinaison})$$

Dans ces équations, le terme G représente la génération, J_n et J_p les densités de courant, U_n et U_p la recombinaison, τ_n et τ_p les temps de vie, D_n et D_p les coefficients de diffusion, μ_n et μ_p les mobilités des porteurs, n_0 et p_0 les concentrations à l'équilibre, ρ la densité de charge, E le champ électrique, Φ le potentiel et ϵ la permittivité absolue.

On fait souvent l'hypothèse de stationarité, auquel cas les dérivées par rapport au temps sont nulles. Dans le cas d'un scénario homogène dans l'espace, ce sont les dérivées spatiales qui sont nulles.

On peut distinguer différentes conditions limites applicables à l'extrémité x_e d'un semiconducteur:

Type	Description	Condition
Contact ohmique	L'excès de porteurs est nul en x_e . Le métal est un réservoir de charge permettant aux porteurs de se recombiner jusqu'à l'équilibre.	$n(x_e) = n_0$
Vitesse de recombinaison en surface	A appliquer dans le cas où l'on suppose que la vitesse de recombinaison s en surface est finie. Le signe +/- est utilisé à l'extrémité gauche/droite du semiconducteur (pour un axe x orienté vers la droite).	$\pm D_n \frac{\partial n(x)}{\partial x} \Big _{x_e} = s(n(x_e) - n_0)$
Génération lumineuse g_e	En supposant que la génération lumineuse n'a lieu qu'en surface en x_e .	$D_n \frac{\partial n(x)}{\partial x} \Big _{x_e} = g_e$
Contact réfléchissant	Le flux sortant d'électrons est nul. Cela revient à imposer que le gradient de la concentration des porteurs doit être nul.	$\frac{\partial n(x)}{\partial x} \Big _{x_e} = 0$

Ces conditions, indiquées pour les porteurs de type n dans le tableau ci-dessus, sont également valable pour le type p.

Rappel

On se souviendra également de la relation entre les concentrations des porteurs de type N et P d'un matériau dopé : $pn = n_i^2$ où n_i est la concentration intrinsèque du matériau. Cette relation est valable à l'équilibre (donc en l'absence d'illumination).

La résolution des exercices suivants suit la même méthodologie :

1. Simplifier les équations fondamentales au moyen des hypothèses mentionnées ci-dessus.
2. Résoudre l'équation différentielle obtenue.
3. Déterminer la valeur des constantes inconnues en utilisant les différentes conditions limites.

Exercice 8.1 Soit un barreau de silicium homogène de type N dopé au phosphore à une concentration $N_D = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$. Ce barreau est de longueur $L = 200 \mu\text{m}$ et de section $S = 0.1 \text{ mm}^2$. Une différence de potentiel de 1 V est appliquée à ses bornes. On demande de calculer n , p et I pour les cas suivants :

1. Dans le noir
2. Sous une illumination $G = 10^{19} \text{ cm}^{-3}\text{s}^{-1}$

Supposer : $\tau_p = \tau_n = 50 \mu\text{s}$, $\mu_n = 1200 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ et $\mu_p = 400 \text{ cm}^2/\text{Vs}$.

Pour du silicium, $n_i = 1.38 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$.

Exercice 8.2 On considère un barreau de silicium homogène de type N, de longueur L , de hauteur h et dopé au phosphore à une concentration N_D . En $x = 0$ et $x = L$ on impose respectivement une condition de contact réfléchissant et une condition de contact ohmique.

Le barreau est exposé à une génération lumineuse $G(x)$ dans le sens de sa longueur (voir figure 8.1). La hauteur h est supposée suffisamment petite que pour supposer une génération dans le barreau constante selon y . Calculez les expressions de la concentration en porteurs minoritaires dans les deux cas suivants:

1. Lorsque la génération lumineuse est linéaire : $G(x) = G_0(1 - x/L)$.
2. Lorsque la première moitié du barreau est exposée à une génération constante G_0 et la seconde moitié n'est pas exposée.

Indice: il est ici conseillé de scinder la résolution en deux sous-domaines et d'imposer la continuité de la solution ainsi que de sa dérivée à l'interface des deux sous-domaines.

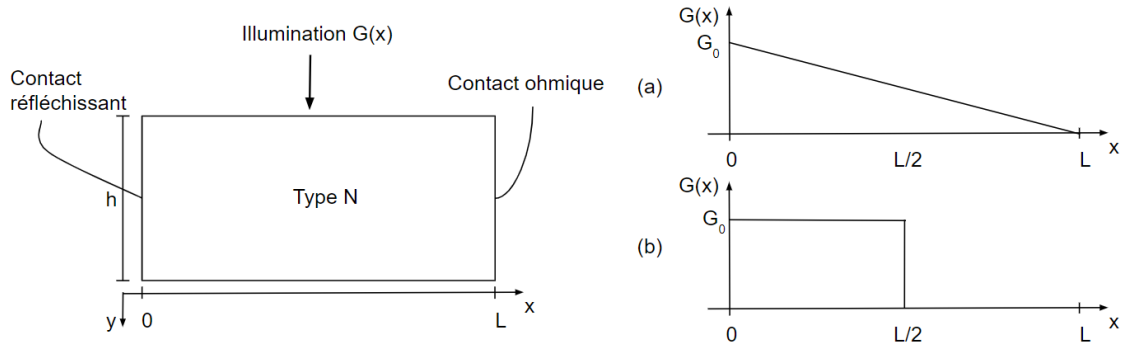


Figure 8.1 – (gauche) schéma du barreau de l'exercice 8.2, (droite) graphes des deux types d'illumination

Partie 2 - Introduction à la jonction PN

On considère la diode en SiO_2 représentée à la figure 8.2 :

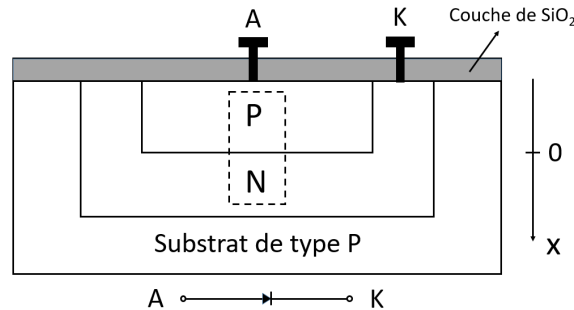


Figure 8.2 – Jonction PN

On commence par analyser le comportement de la diode lorsque la tension V à ses bornes (entre A et K) est nulle. On fera ici les hypothèses suivantes :

- La section S de la jonction est constante et suffisamment grande que pour pouvoir négliger les effets de bord et de surface.
- La jonction ne dépend donc que d'une seule direction : la profondeur. On notera x la coordonnée dans cette direction.
- La jonction est *abrupte* : la variation de concentration en centres donneurs et accepteurs est abrupte (on passe directement de la zone P à la zone N en $x = 0$).
- On suppose que toutes les impuretés sont ionisées.

Données :

- $\epsilon_r = 3.9$ et $n_i = 1.38 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$.
- On considère ici un dopage $N_D = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ en zone N et $N_A = 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ en zone P.
- La diode est à température ambiante (300K).

Représentation des niveaux d'énergie

1. Représentez de manière qualitative les niveaux d'énergie (Valence, conduction, Fermi et intrinsèque) que l'on retrouve dans un semiconducteur de type P et dans un semiconducteur de type N.
2. On met en contact un semiconducteur de type P avec un semiconducteur de type N. On peut conceptuellement considérer que l'ensemble des deux forme une jonction PN (pointillés sur la figure 8.2). La zone P se trouve en $x < 0$, la zone N en $x > 0$ et l'interface en $x = 0$.

Sachant que les niveaux d'énergie de Fermi des deux semiconducteurs s'alignent lorsqu'ils sont mis en contact, tracez de manière qualitative les niveaux d'énergie pour l'ensemble de la structure. Qu'observe-t-on aux alentours de la jonction ?

3. Le potentiel de contact Φ_0 est défini comme la différence entre les niveaux de Fermi des deux semiconducteurs avant la mise en contact : $q\Phi_0 = E_{Fn} - E_{Fp}$. Calculez la valeur du potentiel de contact de la diode pour les valeurs données.

Rappel: les concentrations d'équilibre d'un semiconducteur homogène sont peuvent être exprimées de la manière suivante (syllabus p. 2-7).

$$n_0 = n_i e^{(E_F - E_i)/kT} \qquad p_0 = n_i e^{(E_i - E_F)/kT}$$

Le potentiel de contact provient physiquement de la variation abrupte de porteurs en $x = 0$. On dit qu'il y a un important *gradient en concentration de porteurs* au niveau de l'interface. Cela va entraîner la diffusion d'électrons (trous) de la zone N (P) vers la zone P (N). Le système tend à homogénéiser les concentrations de porteurs en son sein, il y a donc formation d'un *courant de diffusion*.

A cause de la diffusion, une zone dépeuplée d'électrons (trous) se forme côté N(P) près de la jonction. Cette zone porte le nom de *zone de déplétion*. La charge locale des ions positifs (négatifs) fixes n'est plus localement compensée par des porteurs libres (voir figure 8.3). Il y a formation d'un champ électrique dans cette zone. Ce champ exerce sur chaque porteur une force électrostatique qui s'oppose au phénomène de diffusion. Il y a donc formation d'un *courant de dérive*.

Dans le cas où la tension V appliquée aux bornes de la diode est nulle, les courants de diffusion et de dérive se compensent exactement. Il n'y a donc aucun courant total circulant dans la diode.

Concentration des porteurs

4. Tracez de manière qualitative (en échelle logarithmique) les concentrations en porteurs de type n et p dans l'ensemble de la structure.

Résolution de l'équation de Poisson

Afin de rendre les calculs possibles, on approxime souvent la densité de charge fixe $\rho(x)$ dans les zones de déplétion par des valeurs constantes (voir figure 8.3). Cette densité représente les charges des ions fixes (délaissés de leurs porteurs libres).

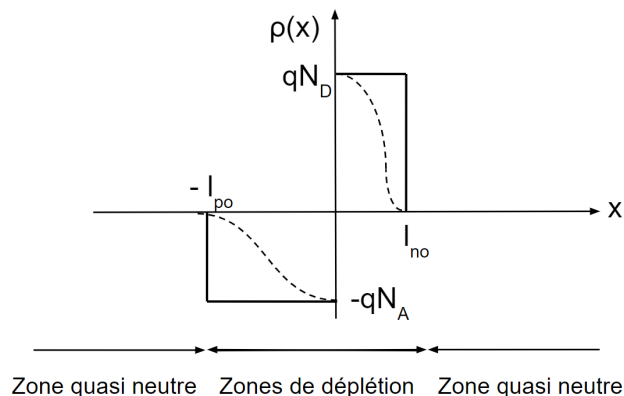


Figure 8.3 — Représentation des zones de déplétion. Traits pointillés: résultats réels, traits continus: approximation.

Rappel**Résolution de l'équation de Poisson (*A connaître pour l'examen*)**

L'équation de Poisson est définie comme :

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

Cette relation lie le potentiel électrique Φ à la densité de charge ρ . Si cette équation est considérée en une dimension et dans un milieu de permittivité constante ϵ , elle peut être résolue en deux étapes:

Connaissant la densité de charge, il est possible de calculer l'expression du champ électrique selon x en utilisant la première équation de Maxwell :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\rho}{\epsilon} \Rightarrow E_x(x) = \frac{1}{\epsilon} \int_{-\infty}^x \rho(x') dx'$$

Une fois le champ électrique obtenu, il est également possible d'obtenir le potentiel :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \Rightarrow \Phi(x) = -\int_{-\infty}^x E_x(x') dx'$$

5. En résolvant l'équation de Poisson sur base de approximations de la figure 8.3, calculez les expressions du champ et du potentiel électrique au sein de la diode. Représentez-les graphiquement.
6. Quelles conditions doit-on imposer afin de déterminer les constantes l_{no} et l_{po} sur la figure 8.3 (appelées longueurs de déplétion) ?
7. En utilisant ces conditions ainsi que l'expression du potentiel de contact, donner les expressions de l_{no} et l_{po} .

Influence de la tension

8. Que se passe-t-il si l'on applique une tension $V > 0$ ou $V < 0$ aux bornes de la diode ? Discutez notamment l'influence sur :
 - les niveaux d'énergies ;
 - les concentrations en porteurs ;
 - la charge volumique ;
 - le champ électrique ;
 - le potentiel électrique ;
 - l'existence éventuelle d'un courant traversant la diode.

Séance 9

Jonction PN

Rappel

Dans les deux premiers exercices de cette séance, on s'intéresse au calcul du courant circulant au sein d'une jonction PN. Dans le cadre de ce cours, ce courant est calculé à partir des concentrations en porteurs minoritaires, et sur base des hypothèses suivantes :

- H1. On considère trois zones au sein de la structure: une zone quasi-neutre du côté P, séparée de la région quasi-neutre du côté N par une zone de déplétion (les transitions entre zones sont abruptes).
- H2. La tension V appliquée aux bornes de la structure apparaît entièrement aux limites de la zone de déplétion. Le champ électrique est par conséquent considéré comme nul dans les zones quasineutres.
- H3. On suppose que l'injection dans les régions quasi-neutres est faible.
- H4. Les courants de porteurs minoritaires dans les régions quasi-neutres sont des courants de diffusion.
- H5. Dans la zone de transition (également appelée zone de déplétion) les relations de Boltzmann restent valables. Pour rappel, ces relations sont données par :

$$n(x) = n_i e^{\Phi(x)/\Phi_T} \quad p(x) = n_i e^{-\Phi(x)/\Phi_T}$$

Dans le cadre des hypothèses mentionnées, ces relations prennent une forme simplifiée lorsque qu'elles sont appliquées aux porteurs minoritaires aux bords de la zone de déplétion:

$$n_p(-l_p) = n_{po} e^{qV/kT} \quad p_n(l_n) = p_{no} e^{qV/kT}$$

où $-l_p$ et l_n sont les longueurs de déplétion.

- H6. On néglige les phénomènes de recombinaison et de génération dans la zone de transition.

On rappelle également la définition de la longueur de diffusion (utile pour la suite) :

$$L_n = \sqrt{D_n \tau_n} \quad L_p = \sqrt{D_p \tau_p}$$

Exercice 9.1 Soit une jonction PN en silicium représentée à la figure 9.1. La partie semi-infinie de type P est soumise à une illumination conduisant à une génération de volume de $G[\#/cm^3]$ paires électrons-trous. La partie de type N semi-infinie ainsi que la zone de déplétion sont protégées par un cache. La longueur de la zone de déplétion est supposée équitablement répartie entre les deux zones N et P et de longueur d donnée. Une différence de potentiel nulle est appliquée aux bornes de la diode (entre $-x_P \rightarrow -\infty$ et $x_N \rightarrow +\infty$).

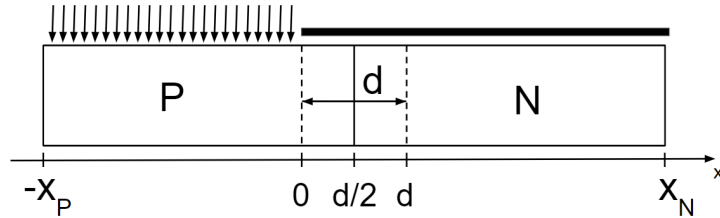


Figure 9.1 – Schéma de la jonction PN

On suppose que les dopages N_A et N_D sont connus ainsi que D_n , D_p , μ_n et μ_p . On suppose également que les 6 hypothèses mentionnées dans le rappel sont respectées.

On demande de trouver l'expression de la densité de photocourant J_{ph} dans la diode pour une tension nulle appliquée à ses bornes ($V = 0$).

1. Donnez les équations différentielles à résoudre afin de calculer les concentrations en porteurs minoritaires dans les zones quasi-neutres.
2. Résolvez ces équations différentielles.
3. Donnez les conditions limites nécessaires au calcul des constantes inconnues. Calculez ces constantes.
4. Donnez l'expression de la densité de courant dans la diode en fonction des densités de courant dans chaque zone de la diode.

Exercice 9.2 En repartant de la même jonction, étudiez l'influence des éléments suivants sur les solutions obtenues à l'issue de l'exercice 1:

1. On décide à présent d'appliquer une tension $V > 0$ aux bornes de la diode.
2. On suppose à présent que l'hypothèse H6 n'est plus valable: la recombinaison dans la zone de déplétion n'est plus négligeable et est donnée par $U(x) = U_0$.
3. On suppose à présent que les zones N et P ne sont plus semi-infinies mais chacune de longueurs L . La zone P va de $-x_P = -L + \frac{d}{2}$ à $\frac{d}{2}$ et la zone N de $\frac{d}{2}$ à $x_N = \frac{d}{2} + L$. Chaque extrémité est à présent connectée à un contact ohmique (cfr rappel de la séance précédente). La longueur L est telle que $L \ll L_n$ et $L \ll L_p$.

Exercice 9.3 Des mesures de la capacité de déplétion d'une diode en silicium P^+N ont été réalisées à température ambiante en fonction de la tension v_{AB} appliquée à ses bornes (figure 9.2). La section de cette diode vaut 10^{-3} cm^2 , sa permittivité relative vaut 11.7 et sa concentration intrinsèque $1.38 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$.

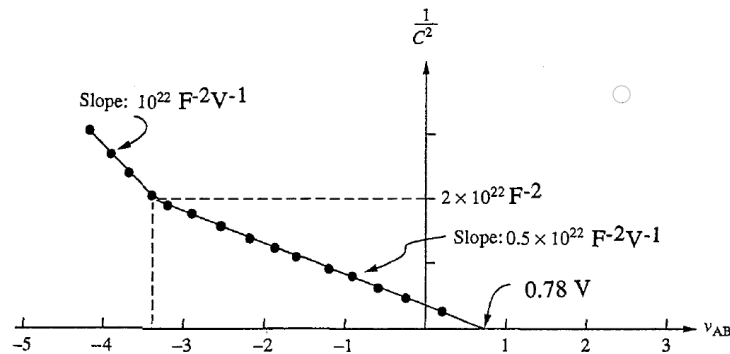


Figure 9.2 – Mesures capacité

1. Calculez les niveaux de dopages N_D et N_A de la diode.
(Rappel: pour une diode P^+N on a $N_A \gg N_D$).
2. A une certaine distance de la jonction métallurgique, le niveau de dopage introduit dans silicium change. A quelle distance de la jonction métallurgique ce changement a-t-il lieu ? Le niveau de dopage augmente-t-il ou diminue-t-il ?

Exercice 9.4 On considère une structure pour laquelle la distribution de charge est représentée à la figure 9.3. La permittivité de la structure est donnée par ϵ supposé connu. La charge totale de la structure est par ailleurs électriquement neutre.

1. Donnez l'équation à satisfaire liant ρ_1 et ρ_2 afin d'avoir la neutralité totale de la charge.
2. Calculez le champ électrique et le potentiel dus à cette distribution de charges. Considérez :
 - Que le champ électrique est nul dans les zones $x < -2W$ et $x > W$;
 - Que le potentiel a pour référence $\Phi(-2W) = 0$.
3. Calculez les valeurs de ρ_1 et ρ_2 sachant qu'en plus de la neutralité de la charge, on souhaite avoir une différence de potentiel $\Phi(-2W) - \Phi(W)$ égale à une constante Φ^* .

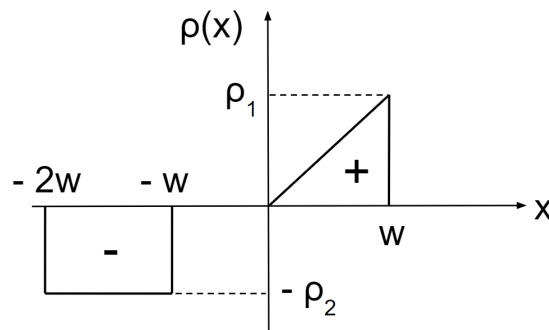


Figure 9.3 – Distribution de charge exercice 4

Séance 10

Transistor bipolaire I

Rappel

Transistor bipolaire

Le transistor bipolaire est un dispositif comportant trois accès :

- un émetteur (E)
- une base (B)
- un collecteur (C)

Selon le dopage de ces trois accès, le transistor est soit de type NPN (dont le symbole est représenté ci-dessous) soit de type PNP.

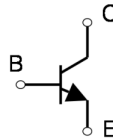


Figure 10.1 – Symbole du transistor NPN

Le gain en polarisation directe du transistor (β_F) est défini comme le rapport entre le courant de collecteur I_C et le courant de base I_B lorsque la jonction BE est passante et la jonction BC bloquante.

Constante de diffusion

Dans le cadre de cette séance, on se rappellera également de la formule générale liant la constante de diffusion et la mobilité

$$D_n = \mu_n \phi_T$$

$$D_p = \mu_p \phi_T$$

où $\phi_T \triangleq V_T \triangleq kT/q$ est le potentiel thermique (26 mV à température ambiante).

Exercice 10.1 On s'intéresse au transistor bipolaire NPN représenté en figure 10.2 ci-dessous.

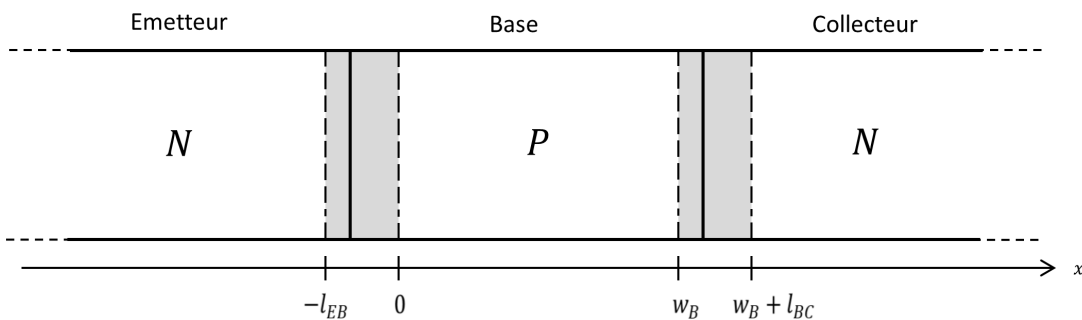


Figure 10.2 – Schéma unidimensionnel du transistor NPN.

Les paramètres du transistor supposés connus sont repris dans le tableau ci-dessous :

L_{pE}	$3 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$	V_{BE}	0.6 V	w_B	10^{-4} cm
V_{BC}	0 V	$\tau_B \text{ (base)}$	$10 \mu\text{s}$	μ_n	$1200 \text{ cm}^2/(\text{Vs})$
μ_p	$400 \text{ cm}^2/(\text{Vs})$	$N_{D,E}$	10^{20} cm^{-3}	$N_{A,B}$	$3.05 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$

On supposera également que les hypothèses suivantes sont respectées :

- La base du transistor est courte.
- On se trouve en faible injection.
- Les courants de fuite du transistor sont négligeables.
- La section du transistor est constante.

L'objectif de cet exercice est de calculer l'expression du gain sur base d'un raisonnement reposant sur les notions abordées dans le chapitre sur la diode. On remarquera utilement que la transistor bipolaire tel qu'abordé dans cet exercice peut être représenté comme la mise en série de deux jonctions PN.

1. Donnez la significations des hypothèses mentionnées ci-dessus.
2. Quels sont les courants de porteurs les plus importants pour le calcul du gain ?
3. Donnez les équations différentielles régissant les concentrations de porteurs minoritaires dans les trois zones quasi neutres ainsi que leurs conditions limites.
4. Donnez les expressions des concentrations des porteurs minoritaires en excès dans les trois zones. Représentez graphiquement sur la figure 1 l'évolution (selon l'axe vertical) de ces concentrations en fonction de x .
5. Donnez les expressions des différentes densités de courant traversant les jonctions.
6. Donnez l'expression des courants I_B et I_C , du courant de saturation I_S ainsi que du gain en polarisation directe β_F du transistor.
7. Calculez la valeur du temps de vie des trous dans l'émetteur.

Exercice 10.2 (Aout 2018) Soit la structure suivante, composée d'un barreau de silicium avec un profil de dopage variable. Trois contacts électriques lient cette structure au monde extérieur :

- E : zone dopée P du semiconducteur (de dopage N_{A1}) ;
- B : partie centrale dopée N du semiconducteur (de dopage N_D) ;
- C : zone dopée P du semiconducteur (de dopage N_{A2}) ;

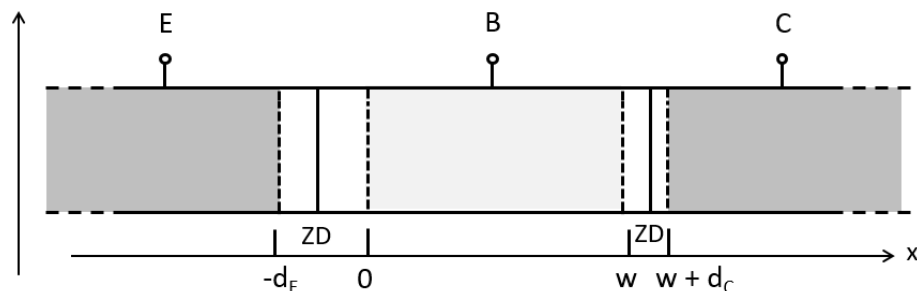


Figure 10.3 – Structure exercice 3

Tout au long de cet exercice, nous considérerons le cas où $V_{BE} = 0$ [V] et $V_{BC} = V < 0$.

Les paramètres suivants seront supposés connus :

- la largeur $w = 0.5 \mu\text{m}$;
- les largeurs des zones de déplétion $d_E = d_C = 200 \mu\text{m}$;
- l'aire de la section S de la structure ;
- les temps de vie $\tau_n = 40 \mu\text{s}$ et $\tau_p = 40 \mu\text{s}$
- les constantes de diffusion $D_n = 7,8 \text{ cm}^2/\text{s}$ et $D_p = 2,6 \text{ cm}^2/\text{s}$;
- les mobilités $\mu_n = 300 \text{ cm}^2/(\text{Vs})$ et $\mu_p = 100 \text{ cm}^2/(\text{Vs})$;
- les dopages $N_{A1} = 10^{20} \text{ cm}^{-3}$, $N_D = 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ et $N_{A2} = 10^{18} \text{ cm}^{-3}$;

Les deux zones grisées sont toutes les deux considérées comme étant semi-infinies. Veillez à utiliser les conventions et notations indiquées sur la figure 2.

1. De quel type de dispositif s'agit-il ? En quel régime fonctionne-t-il ?
2. Calculez la longueur de diffusion des porteurs minoritaires dans la base et comparez-la à la largeur w . Quelle hypothèse usuelle pouvez-vous en déduire ?
3. Donnez les équations différentielles régissant les concentrations de porteurs minoritaires dans les trois zones ($x < -d_E$, $0 < x < w$ et $x > w + d_C$) ainsi que leurs conditions limites. Énoncez les hypothèses simplificatrices utilisées.
4. Trouvez les expressions des concentrations des porteurs minoritaires en excès dans les trois zones. Représentez graphiquement sur la figure 10.3 l'évolution (selon l'axe vertical) de ces concentrations en fonction de x .
5. Trouvez les expressions des différentes densités de courant traversant les jonctions. Énoncez les hypothèses utilisées.
6. Donnez les expressions des courants I_B et I_E . Énoncez les hypothèses utilisées.
7. Donnez l'expression du gain en courant I_E/I_B dans le cas traité. Calculez également sa valeur numérique. Comparez qualitativement ce gain avec le gain β_F en émetteur commun étudié dans le cours. Justifiez.
8. En pratique, le gain I_E/I_B n'est pas constant et varie selon la tension V_{BC} comme l'illustre la figure 10.4. Expliquez les origines physiques du comportement de la courbe.

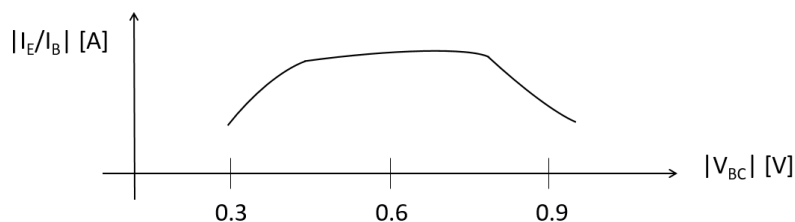


Figure 10.4 – Evolution du gain selon la tension V_{BC}

Exercice 10.3 *L'objectif de cet exercice est de comparer les résultats analytiques obtenus pour le transistor de l'exercice 1 avec les résultats obtenus via LTspice pour ce même transistor.*

1. *Le modèle Spice du transistor est BC547B. En utilisant ce modèle, générez les caractéristiques courant/tension en polarisation directe (DC sweep sur V_{BE} de 0.25V à 0.85V ; V_{CE} fixé à 3V), et exportez les courbes dans Python (ou autre langage de programmation de votre choix).*
2. *En utilisant les mesures de courant exportées, calculez en fonction de V_{BE}*
 - *Le gain β_F ;*
 - *Le courant de saturation ;*
 - *Le dopage et la concentration en porteurs dans la base.*

Portez-les ensuite sur des graphes en fonction de V_{BE} . Comparez avec les valeurs théoriques du modèle Spice. Pour quelle gamme de tension V_{BE} le modèle analytique est-il valable? Quelles sont les causes des disparités entre le modèle analytique et le modèle Spice?

3. *Vérifiez les hypothèses de faible injection et de base courte pour toute la gamme de tensions V_{BE} . Sont-elles respectées partout ?*
4. *Calculez la tension d'Early en faisant varier la tension de collecteur V_{CE} entre 3V et 10V, avec une tension V_{BE} fixée à une valeur calculée au point d. A quelle variation de la largeur de base w_B cela correspond-t-il ?*

Séance 11

Transistor bipolaire II

Rappel

Notion de zone courte ou longue

Par *zone*, nous entendons ici

- La zone P ou la zone N dans le cas de la diode.
- L'émetteur, la base ou le collecteur dans le cas du transistor bipolaire.

Nous avons vu dans les séances précédentes que les porteurs minoritaires présents dans ces deux dispositifs satisfont généralement à l'équation différentielle

$$D_n \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - U_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - \frac{n - n_0}{L_n^2} = 0$$

où $U_n = \frac{n - n_0}{\tau_n}$ est le taux de recombinaison et $L_n = \sqrt{D_n \tau_n}$ la longueur de diffusion.

On distingue deux cas de figure :

La zone est dite <i>courte</i>	La zone est dite <i>longue</i>
\Leftrightarrow La longueur w de la zone considérée est beaucoup plus petite que la longueur de diffusion : $w \ll L_n$	\Leftrightarrow La longueur w de la zone considérée n'est pas beaucoup plus petite que la longueur de diffusion.
\Leftrightarrow La recombinaison U_n est négligeable. Les porteurs minoritaires n'ont (presque) pas le temps de se recombiner dans la zone.	\Leftrightarrow La recombinaison U_n n'est pas négligeable. Les porteurs minoritaires ont l'occasion de se recombiner dans la zone.
\Leftrightarrow L'équation différentielle ci-dessus devient $\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = 0$. La solution de cette équation est une fonction linéaire.	\Leftrightarrow L'équation différentielle ci-dessus est inchangée. La solution de cette équation est composée de fonctions exponentielles.
\Leftrightarrow La longueur présente dans la formule du gain du transistor est la longueur w de la zone.	\Leftrightarrow La longueur présente dans la formule du gain du transistor est la longueur de diffusion L_n .

Quelques remarques:

- Les concepts ci-dessus ont été illustrés avec les équations des porteurs de type n . Ces concepts sont évidemment aussi valables pour les porteurs de type p minoritaires dans une zone.
- En termes d'ordre de grandeur, on considère ici comme règle de bonne pratique qu'un facteur 5 est suffisant pour avoir $w \ll L_n$.
- Dans un transistor bipolaire classique, on a généralement une base courte, un émetteur long et un collecteur long. Comme on le verra dans l'exercice 1, cela permet d'augmenter le gain du transistor.

Exercice 11.1 On s'intéresse au transistor bipolaire NPN représenté en figure 11.1 ci-dessous.

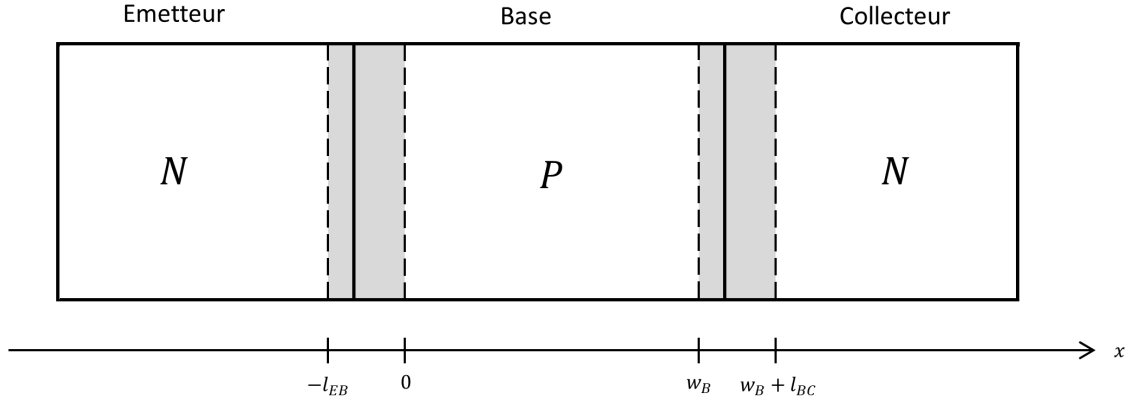


Figure 11.1 – Schéma unidimensionnel du transistor NPN.

Les paramètres supposés connus sont repris dans le tableau ci-dessous :

μ_n	$1200 \text{ cm}^2/(\text{Vs})$	μ_p	$400 \text{ cm}^2/(\text{Vs})$
$N_{D,C}$	10^{15} cm^{-3}	$N_{A,B}$	$2 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$
$N_{D,E}$	10^{19} cm^{-3}	n_i	$1.38 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$
w_B	10^{-4} cm	$\tau_B \text{ (base)}$	$10 \mu\text{s}$
w_E	10^{-5} cm	L_{pE}	$5 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$
w_C	10^{-2} cm	L_{pC}	$6 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$

1. Calculez le gain en régime actif (β_F) et le gain en régime inverse (β_R) du transistor. Représentez le circuit du modèle équivalent d'Ebers et Moll.
2. Pour $I_B = 210 \mu\text{A}$, on dispose des mesures suivantes en régime actif :

V_{CE}	I_C
3 V	31.17 mA
10 V	35.02 mA

- Estimez la tension d'Early en émetteur commun du transistor en régime actif. Esquissez également la caractéristique de sortie du transistor en émetteur commun. Situez les différents régimes de fonctionnement et leurs limites.
3. Esquissez la caractéristique de sortie en base commune. Situez les différents régimes de fonctionnement et leurs limites.

Exercice 11.2 On considère le transistor PNP correspondant à celui de l'exercice précédent (possédant les même profile de dopage).

1. Ce transistor aurait-il un gain en courant plus ou moins élevé que le transistor NPN ? Que vaut le rapport des gains en régime actif ?
2. Par analogie avec le transistor NPN, tracez les caractéristiques de ce transistor.

Exercice 11.3 Le modèle petit signal du transistor bipolaire en régime actif est présenté à la Figure 11.2.

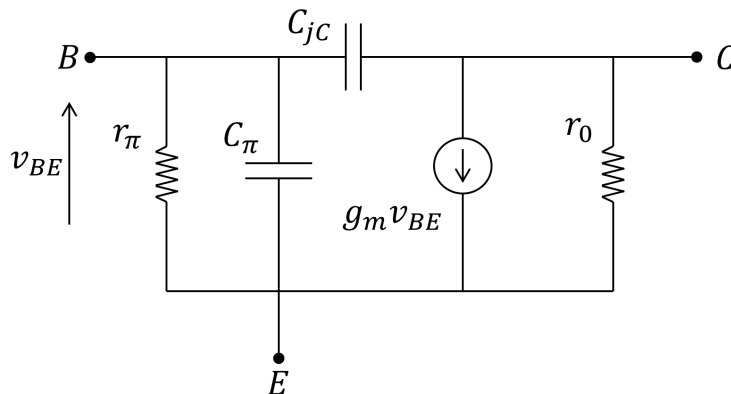


Figure 11.2 – Modèle petit signal π -hybride simplifié.

L'objectif de cet exercice est de calculer les expressions mathématiques des éléments de ce circuit.

1. On commence par considérer le modèle quasi-statique, dans lequel les capacités sont négligées. Le circuit équivalent est alors donné à la figure 11.3.

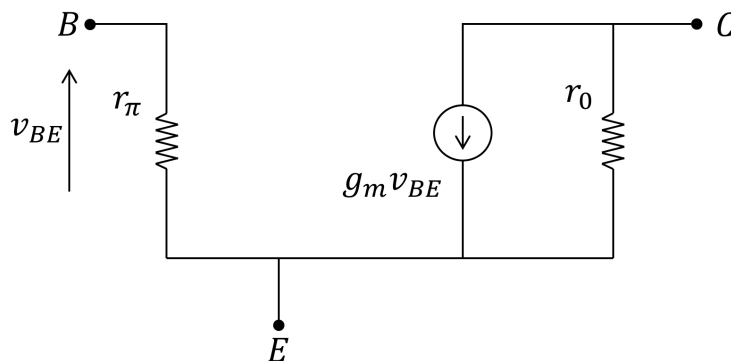


Figure 11.3 – Modèle quasi-statique.

Calculez les expressions mathématiques des éléments suivants:

- La transconductance g_m ;
- La résistance de base r_π ;
- La résistance de sortie r_o issue de l'effet Early (en émetteur commun).

Pour rappel, l'expression du courant de collecteur en émetteur commun (en tenant compte de l'effet Early) est donnée par

$$I_C = I_{TS,f} \left(e^{V_{BE}/V_T} - 1 \right) \left(1 + \frac{V_{CE}}{V_{EAE}} \right)$$

2. On considère à présent le modèle plus complet de la figure 11.2. Calculez les expressions des capacités du circuit:

- C_{jc} qui correspond à la capacité de la zone de déplétion base-collecteur.
- $C_\pi = C_F + C_{je}$ où C_F représente la variation des charges dans la base en fonction de V_{BE} et C_{je} la capacité de la zone de déplétion base-émetteur.

Indication : la méthode de calcul des capacités de déplétion et de base a été vue pour des situations similaires dans le chapitre sur la diode.

Pour rappel, la charge d'espace stockée de part et d'autre de la jonction métallurgique d'une diode de section A est donnée par:

$$Q = AqN_Dl_n = AqN_Al_p$$

où l_n et l_p sont les longueurs de déplétions données par:

$$l_p = \sqrt{\frac{2\epsilon}{q}(\phi_0 - V) \frac{N_D}{N_A(N_A + N_D)}} \quad l_n = \sqrt{\frac{2\epsilon}{q}(\phi_0 - V) \frac{N_A}{N_D(N_A + N_D)}}$$

Attention, tous ces éléments sont issus d'un modèle linéarisé, et dépendent donc du point de fonctionnement V_{BE} , V_{BC} .

Séance 12

Transistor MOS : calcul du courant via l'équation de Poisson

Rappel

L'objectif de cette séance est d'introduire le transistor MOS et de proposer une méthode (simplifiée par rapport à celle du cours magistral) permettant de calculer l'expression du courant pour cette structure.

On considère le transistor NMOS représenté à la figure 12.1.

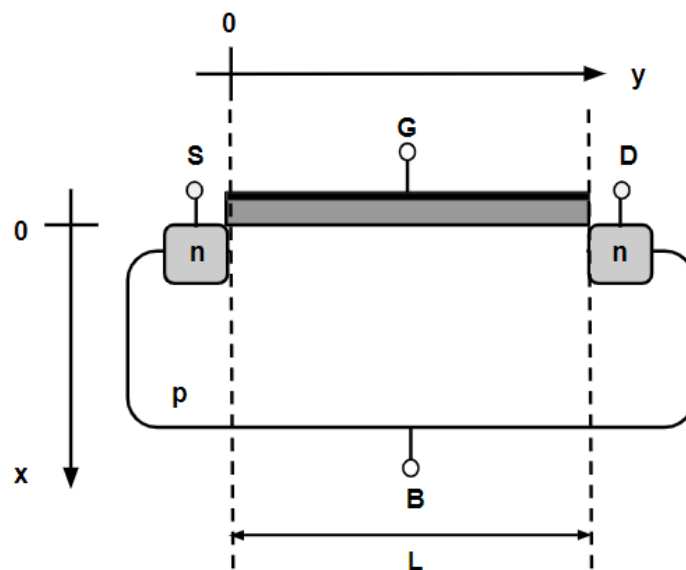


Figure 12.1 – Schéma du transistor NMOS.

Comme indiqué sur le schéma, cette structure est composée de quatre accès :

- Un substrat B, dopé P.
- Une source S, dopée N.
- Un drain D, dopé N.
- Une grille G (en noir), séparée du substrat par un oxyde (en gris foncé).

On supposera ici que le substrat est connecté à la masse ($V_B = 0$). Selon les différentes valeurs de tension appliquées aux trois autres accès, on peut distinguer trois cas de fonctionnement :

- *Accumulation* ($V_S \geq 0, V_G < V_{FB}, V_D > 0$)
Pour V_G suffisamment négatif (inférieur à une tension flat-band V_{FB} dépendant de l'oxyde de grille), les trous présents dans le substrat sont attirés sous la grille. Il y a renforcement du type P entre les zones S et D qui restent donc bien isolées. Aucun courant ne circule.

— Rappel —

- *Déplétion* ($V_S \geq 0$, $V_G > V_{FB}$, $V_D = V_S$)

En augmentant progressivement la tension de grille (au delà de V_{FB}), on a tendance à repousser les porteurs libres P présents sous la grille, et donc à réduire la concentration de porteurs libres qui s'y trouvent. Une zone de déplétion (vidée de porteurs P) se crée sous la grille. La profondeur de cette zone de déplétion dépend de la tension V_G appliquée. Il n'y a toujours aucun courant qui circule entre la source et le drain.

- *Inversion* ($V_S \geq 0$, $V_G > V_{Th}$, $V_D \sim V_S$)

Lorsque l'on continue à augmenter la tension au delà d'une valeur seuil V_{th} dépendant du transistor, on finit par attirer des électrons sous la grille au point de créer un canal de porteurs N juste en dessous de la grille. On a donc une inversion du type de semiconducteur présent juste en dessous de la grille. Si l'on applique une différence de tension suffisamment importante entre la source et le drain, ces électrons pourront circuler entre ces deux accès et donc générer un courant électrique.

Tout au long de cette séance, nous ferons par ailleurs les hypothèses suivantes:

- Les effets de bords sont négligés. Par conséquent l'analyse du NMOS est ici unidimensionnelle selon la profondeur x . Le repère utilisé dans cet exercice est représenté à la figure 12.1. La profondeur $x = 0$ est positionnée à l'interface entre l'oxyde de grille et le substrat.
- Nous supposons que le substrat est une zone quasi neutre.
- On suppose que le métal au niveau de la grille est un conducteur électrique parfait. La charge de grille est donc entièrement située en surface de ce métal.
- On suppose qu'il n'y a pas de charge présente dans l'oxyde.
- On suppose que les permittivités de l'oxyde de grille et du substrat sont identiques et connues (hypothèse forte!).
- Le dispositif dans sa globalité est électriquement neutre.
- On suppose que la transition entre la zone de déplétion et la zone quasi neutre est abrupte.
- On suppose que la valeur des tension de seuil V_{Th} et de 'flat-band' V_{FB} sont connues.
- Quand on passe de la déplétion à l'inversion (càd quand la tension V_G devient supérieure à V_{Th}), on suppose que la zone de déplétion ne grandit plus, et que le canal d'électrons commence à se former.

Exercice 12.1 On considère le transistor de la figure 12.1 en déplétion. Soit t_{ox} , l'épaisseur de l'oxyde de grille, N_A le dopage du substrat (supposés connus) et x_d la profondeur de la zone de déplétion (dont la valeur dépend de la tension V_G appliquée).

1. Représentez graphiquement la densité de charge au sein du transistor MOS selon la profondeur x en $y = L/2$.
(Indice: on utilisera ici la notion de delta de dirac qui est la dérivée de la fonction échelon)
2. En résolvant l'équation de Poisson, représentez graphiquement le champ électrique ainsi que le potentiel au sein du dispositif.
3. Pour V_G fixé, calculez x_d ainsi que la charge totale de déplétion Q_D .
4. Que valent la profondeur maximale x_{dmax} de la zone de déplétion et la charge maximale de déplétion ?

Rappel

Résolution de l'équation de Poisson (*A connaître pour l'examen*)

L'équation de Poisson est définie comme:

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

Cette relation lie le potentiel électrique Φ à la densité de charge ρ . Si cette équation est considérée en une dimension et dans un milieu de permittivité constante ϵ , elle peut être résolue en deux étapes:

Connaissant la densité de charge, il est possible de calculer l'expression du champ électrique selon x en utilisant la première équation de Maxwell :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\rho}{\epsilon} \Rightarrow E_x(x) = \frac{1}{\epsilon} \int_{-\infty}^x \rho(x') dx'$$

Une fois le champ électrique obtenu, il est également possible d'obtenir le potentiel :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \Rightarrow \Phi(x) = -\int_{-\infty}^x E_x(x') dx'$$

Rappel

Delta de Dirac

Pour représenter des charges situées localement en un point précis, il est suggéré d'utiliser ici la notion de delta de Dirac. Pour rappel, cette fonction est définie de la manière suivante

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On se souviendra également des deux propriétés ci-dessous :

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a) dx = 1 \quad \forall a \in \mathbb{R}$
- Le delta de Dirac $\delta(x)$ est la dérivée de la fonction échelon donnée par

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 12.2 On considère à présent que le transistor de la figure 12.1 est en inversion ($V_G > V_{Th}$, avec V_{Th} fixé et supposé connu).

1. Représentez graphiquement la densité de charge au sein du dispositif selon la profondeur x .
2. En résolvant l'équation de Poisson, représentez graphiquement le champ électrique ainsi que le potentiel au sein du dispositif.
3. On définit $C_{ox} = \epsilon/t_{ox}$ la capacité d'oxyde par unité de surface. En utilisant la définition de C_{ox} et celle de x_{dmax} obtenue dans l'exercice 1, calculez l'expression de la charge de canal Q_C .

Exercice 12.3 En repartant de l'exercice 2 (transistor en inversion), on applique à présent une différence de tension $V_{DS} \ll V_G$.

Démontrez que la formule du courant pour un transistor NMOS en régime linéaire est donnée par :

$$I_D = \mu_n C_{ox} \frac{W}{L} [V_G - V_{Th}] V_{DS}$$

Indices :

- le courant électrique circulant dans le canal $[C/s]$ peut-être exprimé comme le produit entre
 - le nombre de charges n_C en électrons par section horizontale de canal $[C/m]$;
 - la vitesse de dérive v_d des électrons $[m/s]$.
- la vitesse de dérive v_d d'électrons sous un champ électrique E constant peut être exprimée par la relation $v_d = \mu_n E$.

Séance 13

Transistor MOS : diagramme de Jespers

Rappel

Dans l'ensemble de ce rappel, on considèrera :

- que l'on se trouve en *forte inversion* : la tension de grille V_G appliquée au transistor NMOS est élevée, de sorte qu'un canal important d'électrons soit présent sous l'oxyde.
- que le substrat B est considéré comme masse de référence. On a donc $V_B = 0$ V.

On peut distinguer en forte inversion deux régimes de fonctionnement : *linéaire* et *saturé*.

Régime linéaire (également appelé triode)

On retrouve ce régime pour de très faibles valeurs de V_{DS} (typiquement de l'ordre de $V_T = kT/q$).

Pour ce régime, la formule du courant est donnée par

$$I_D = \beta \frac{W}{L} [(V_G - V_{T,S}) + (V_G - V_{T,D})] V_{DS}$$

où $\beta = \mu_n C_{ox}/2$. Cette expression peut être représentée graphiquement en utilisant le diagramme de Jespers-Memmelink (figure 13.1).

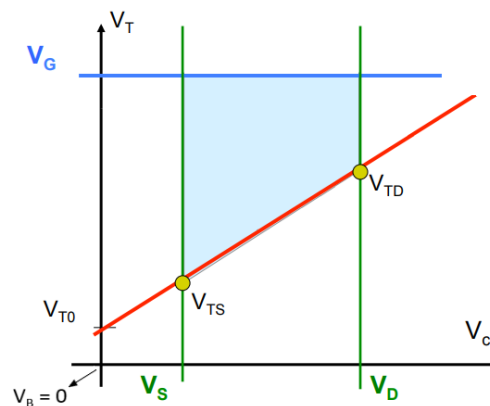


Figure 13.1 – Diagramme de Jespers du transistor NMOS en régime linéaire, avec $V_B = 0$

Concernant ce graphique:

- L'axe horizontal représente l'évolution de la tension de canal V_C , en partant de $V_B = 0$. Cette tension varie linéairement le long du canal de V_S à V_D entre la source et le drain.
- L'axe vertical représente l'évolution de la tension de seuil V_T le long du canal. Cette tension varie linéairement selon la formule $V_T(V_C) = V_{T0} + \lambda V_C$ (effet de substrat).
- On représente également la tension de grille V_G constante et indépendante de V_C .
- En forte inversion, l'aire entre les droites des tensions V_G et V_T est proportionnelle au courant I_D . Dans le cas du régime linéaire, cette aire est trapézoïdale.

Rappel

On notera que si on diminue la tension V_G en dessous de la valeur $V_{TS} = V_{T0} + \lambda V_S$, il n'y aura plus de courant de forte inversion. Graphiquement, on fait descendre verticalement la droite horizontale V_G en dessous de V_{TS} : il n'y a donc plus d'aire. La tension V_G ne sera en effet plus assez élevée que pour qu'un canal de forte inversion ne se forme sous la grille.

Régime saturé

Si l'on choisit à présent une tension de grille V_G telle que $V_{TS} < V_G < V_{TD}$, on se trouvera alors en régime saturé. La formule du courant est alors donnée par

$$I_D = \beta \frac{W}{L} \frac{(V_G - V_{TS})^2}{\lambda}$$

On observe que la formule du courant est alors indépendante de la tension V_{DS} . Physiquement, la tension V_D appliquée est telle que le canal d'électrons va s'étrangler très rapidement entre la source et le drain, au point d'être (presque) inexistant au niveau du drain. L'aire sur le diagramme de Jaspers est alors triangulaire, comme représenté à la figure 13.2.

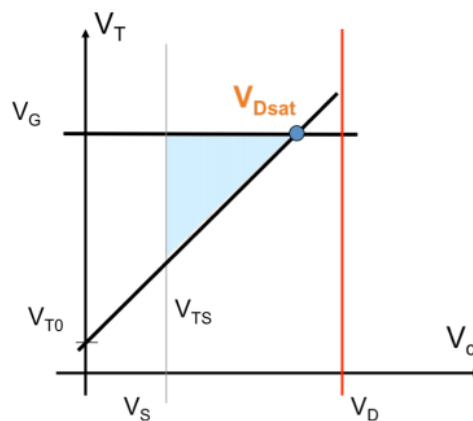


Figure 13.2 – Diagramme de Jaspers du transistor NMOS en régime saturé.

Sur le diagramme, on observe également la valeur $V_{Dsat} = \frac{V_G - V_{T0}}{\lambda}$. Pour une tension V_G fixée, on revient en régime linéaire (avec une aire trapézoïdale) si l'on fait diminuer V_D en dessous de V_{Dsat} .

En résumé :

- Si $V_G < V_{TS}$: il n'y a pas de courant de forte inversion, la tension V_G n'est pas assez importante que pour avoir un canal de forte inversion ^a.
- Si $V_{TS} < V_G < V_{TD}$: régime saturé
- Si $V_G > V_{TD}$: régime linéaire.

Attention : on notera bien que les formules de courant présentées ici ne sont pas les mêmes que celles du cours d'électronique (LELEC1530) pour le transistor NMOS. Les notations des formules ne sont pas les mêmes. Il a donc lieu de ne pas les confondre lors de l'étude de ces deux cours.

^a. On notera que lorsque V_G est légèrement inférieur à V_{TS} , on peut se trouver en *faible inversion*. Il est alors possible qu'un faible courant non nul d'électrons puisse quand même circuler. Ce cas n'est cependant pas traité dans ce cours.

Exercice 13.1 La figure 13.3 représente la courbe de mesure $(\sqrt{I_D}, V_{GS})$ d'un transistor NMOS pour une tension drain-source $V_{DS} = 0.5V$ et $V_S = V_B = 0V$.

1. Expliquez quels régimes du transistor apparaissent sur ce graphe. Justifiez.
2. Déterminez, à partir de cette courbe, la tension de seuil V_{T0} approximative du transistor.
3. Sachant que la courbe $(\sqrt{I_D}, V_{GS})$ est déplacée de 500mV vers la droite lorsque la tension de substrat V_B est portée à -2.5V ($V_S = 0V$), déterminez le facteur λ d'effet de substrat du transistor.
4. Déterminez, suivant la valeur de V_{GS} , dans quel mode se trouve le transistor.
5. A partir d'un point de la courbe en mode saturé, déterminez la valeur de $(W/L)\beta$. Vous pouvez par exemple prendre le point (1V ; 0.0022 A^{1/2}).
6. Représentez sur un diagramme "Jespers-Memmelink" l'évolution du courant suivant le niveau de la tension grille-source.

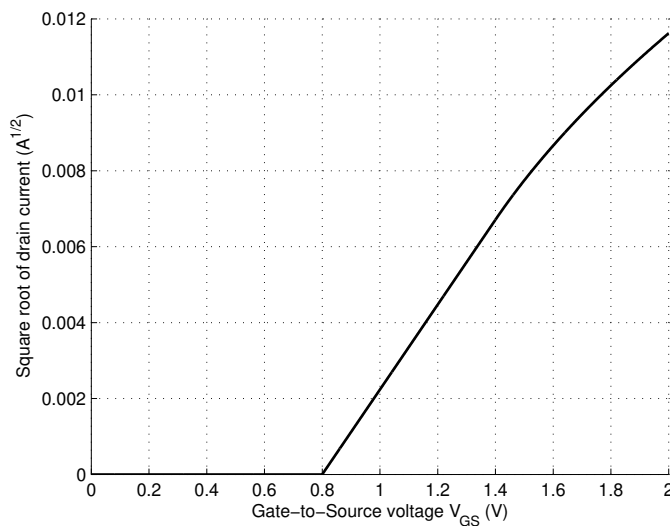


Figure 13.3 – Graphe exercice 1

Exercice 13.2 Soit le circuit représenté à la figure 13.4 composé de deux transistors NMOS.

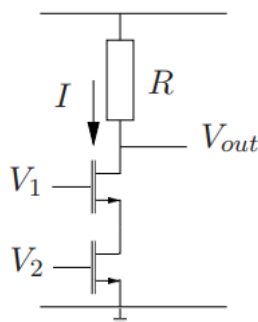


Figure 13.4 – Circuit exercice 2

On fournit les données suivantes :

- $\lambda_1 = \lambda_2 = 1.2$
- $(W/L)_1 = 10$ et $(W/L)_2 = 40$

- $V_{T0,1} = V_{T0,2} = 0.5 \text{ V}$

- Les accès S et B sont connectés entre eux pour chaque transistor.

1. En supposant $V_2 = 0.8 \text{ V}$, déterminez les tensions V_1 et V_{out} minimales pour que les deux transistors fonctionnent en régime saturé.
2. Représentez le diagramme de Jespers correspondant.
3. Comment sont modifiées ces tensions si le substrat des deux transistors est connecté à la masse du circuit ? Que se passe-t-il au niveau du diagramme de Jespers ?
4. En considérant V_1 et V_2 comme les entrées du circuit, quelle est la fonction logique de ce circuit ?

Exercice 13.3 (Janvier 2019)

On considère un transistor NMOS dont on sait que $V_{T0} = 0.5 \text{ [V]}$ et $(W/L) = 20$.

1. On dispose des mesures suivantes en régime saturé :

$V_G \text{ [V]}$	$V_S \text{ [V]}$	$V_D \text{ [V]}$	$V_B \text{ [V]}$	$I_D \text{ [}\mu\text{A]}$
1	0.2	0.7	0	8.8615
1.5	0.5	1	0	18.846

Calculez le facteur d'effet de substrat λ du transistor ainsi que le facteur $\beta = \mu C_{ox}/2$.

2. On considère à présent les tensions suivantes :

$V_G \text{ [V]}$	$V_S \text{ [V]}$	$V_D \text{ [V]}$	$V_B \text{ [V]}$
1.4	0.2	0.6	0

Pour ces valeurs de tension, calculez le courant I_D circulant dans le transistor. Représentez et légendez le diagramme de Jespers-Memelink correspondant.

Troisième partie

Anciennes questions d'examens

Ancien examen 1

Condensateur à plaques parallèles (Janvier 2017)

Soit le condensateur à plaques parallèles carrées illustré ci-dessous. Les plaques sont séparées par deux diélectriques différents de conductivités σ_1 et σ_2 et de permittivités relatives ε_1 et ε_2 . Au temps $t = 0$, on branche le dispositif à une source de courant fournissant un courant continu I_0 .

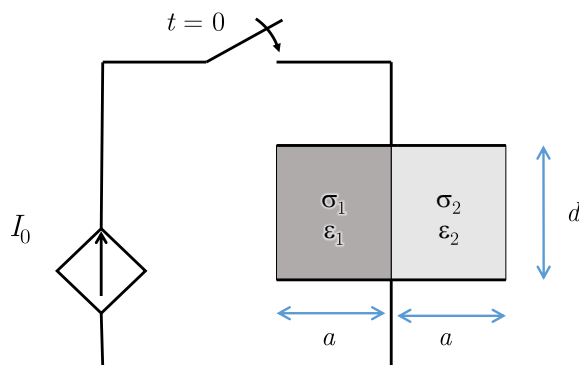


Figure 1.1 – Condensateur à plaques parallèles

1. Déterminez l'expression des champs électriques \vec{E}_1 et \vec{E}_2 dans les deux diélectriques, ainsi que de la charge totale sur les plaques, en fonction du temps (pour $t > 0$). La charge est-elle distribuée uniformément ? Expliquez clairement les hypothèses posées.
2. Que deviennent les expressions des champs en régime (pour $t \rightarrow \infty$) ?
3. Proposez une représentation du problème à l'aide d'un circuit équivalent.
4. Déterminez, si $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, l'expression des champs électriques \vec{E}_1 et \vec{E}_2 dans les deux diélectriques en fonction du temps (pour $t > 0$). Que se passerait-il dans la pratique ? Commentez votre réponse.

Ancien examen 2

Lignes de transmission (Janvier 2018)

Un amplificateur d'impédance d'entrée de $30 - j20 \Omega$ est connecté à une ligne de transmission de 75Ω de longueur L_1 .

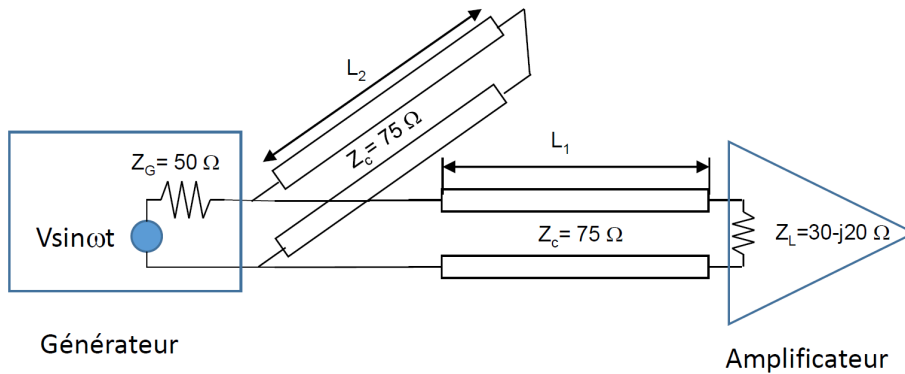


Figure 2.1 – Sous-question 1

1. On souhaite adapter l'ensemble à un générateur d'impédance interne 50Ω en utilisant un stub parallèle d'impédance 75Ω de longueur L_2 , placé à l'entrée. Calculer toutes les solutions pour les longueurs des lignes L_1 et L_2 en vue de réaliser l'adaptation à l'entrée de la ligne. Expliquez clairement la démarche suivie.
2. Y a-t-il une solution à ce problème quelle que soit la valeur de l'impédance de charge? Justifier.
3. Un générateur impulsionnel de $1V$ et d'impédance interne 75 est placé à l'entrée de la ligne ci-dessous. Calculer les 2 premières impulsions revenant au générateur.

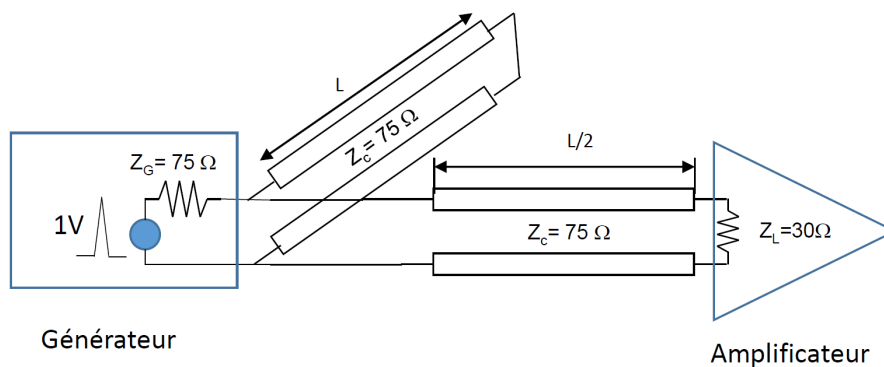
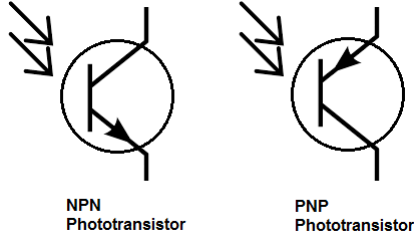


Figure 2.2 – Sous-question 3

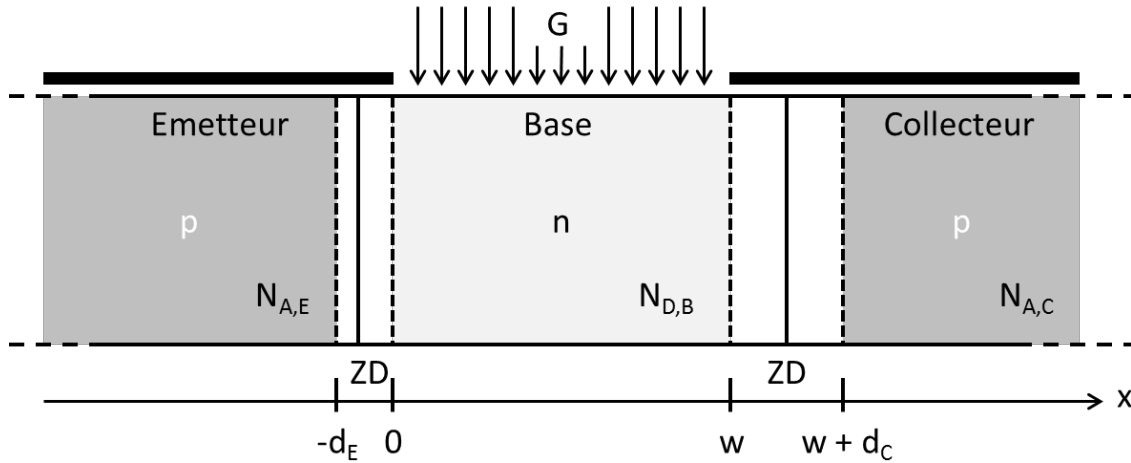
Ancien examen 3

Phototransistor (Janvier 2017)



Un phototransistor est un transistor bipolaire dont la base est déconnectée du circuit, et commandée par une source lumineuse (Figure ci-contre). Son fonctionnement interne est similaire à celui d'un transistor PNP classique, et utilise les mêmes principes que la photo-diode pour la génération par illumination.

On considère le phototransistor PNP présenté ci-dessous. Les dopages $N_{A,E}$, $N_{D,B}$ et $N_{A,C}$ [cm^{-3}] sont connus, avec $N_{A,E} \gg N_{D,B} > N_{A,C}$. La largeur de la base w [cm] est aussi connue, ainsi que les largeurs des zones de déplétion (d_E et d_C [cm]) et les temps de vie τ_n et τ_p [s]. Le collecteur et l'émetteur sont tous deux considérés comme semi-infinis. La base ne comporte pas de connexion externe, mais l'illumination donne lieu à une génération de volume uniforme G [$\text{s}^{-1}\text{cm}^{-3}$] uniquement dans la zone quasi-neutre. La section du transistor vaut S [cm^2].



On considère le transistor en régime actif, et plus particulièrement $V_{EB} = V > 0$ (jonction passante), $V_{CB} = 0$ [V] (jonction bloquée).

En utilisant les hypothèses usuelles (analyse 1D, jonctions abruptes, existence de zones de déplétion et zones quasi-neutres, équations de Boltzmann valides aux bornes des zones de déplétion, faible injection, base courte, recombinaison négligeable dans la base, ...), on demande de calculer les courants I_E et I_C [V], en présence d'une illumination, selon la procédure suivante.

1. Porteurs minoritaires

- Enoncez les équations régissant les concentrations de porteurs minoritaires ($n_E(x)$, $p_B(x)$ et $n_C(x)$) dans les trois zones quasi-neutres. Précisez les hypothèses utilisées.
- Donnez les conditions aux limites permettant de résoudre ces équations.
- Calculez les expressions des porteurs minoritaires.

2. Densités de courants minoritaires

- (a) Énoncez les équations régissant les densités de courant minoritaires, dans les trois zones quasi-neutres. Précisez les hypothèses utilisées.
- (b) Calculez les expressions des densités de courant traversant les jonctions.

3. Courants externes

- (a) Énoncez les équations régissant les courants I_E et I_C , en fonction des densités de courant. Précisez les hypothèses utilisées.
- (b) Dans cette situation, la tension de polarisation V et la génération G ne sont pas indépendantes. Pourquoi ? Proposer une équation liant ces deux termes.

Ancien examen 4

Transistor FINFET (Janvier 2018)

Le transistor FINFET est une variante 3D de la structure MOSFET ayant été sujet à de nombreuses recherches et développements industriels ces dernières années, notamment par Intel.

Comme indiqué à la figure 4.1, ce transistor est fabriqué à partir d'une fin barreau rectangulaire en silicium (vertical, en blanc) reposant sur une surface isolante. Les zones de source et de drain sont connectées à des contacts ohmiques. La zone centrale de la barre est entourée d'une couche d'oxyde (représentée en gris clair). Cette couche d'oxyde est elle-même entourée soit d'une couche de métal (grille en gris foncé).

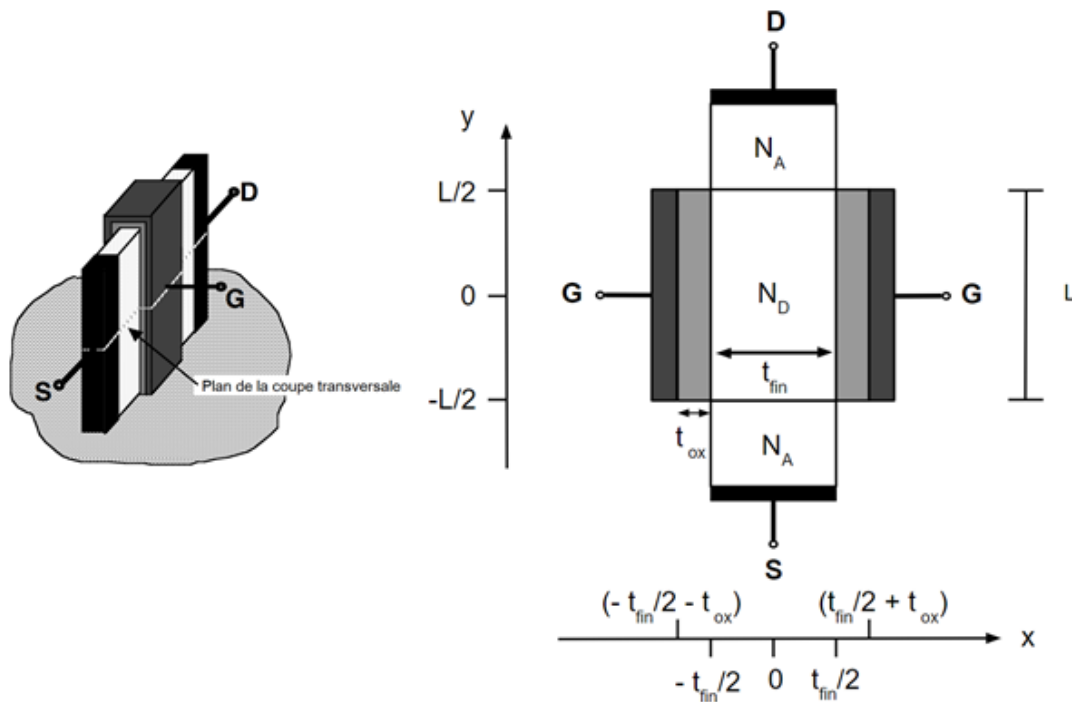


Figure 4.1 – Représentation 3D du FINFET (gauche) et coupe transversale dans l'axe S-D (droite)

Les informations suivantes sont fournies :

- $L = 60 \text{ [nm]}$ et $t_{ox} = 7 \text{ [nm]}$.
- Le dopage dans la zone centrale du transistor est donné par $N_D = 10^{16} \text{ [cm}^{-3}\text{]}$.
- Pour simplifier les calculs, on considérera une permittivité ϵ de 10^{-10} [F/m] pour l'ensemble des milieux (hypothèse forte).
- La source du transistor est connectée à la masse ($V_s = 0 \text{ [V]}$).
- On supposera qu'il n'y a pas de charge dans l'oxyde de grille.

On vous demande d'effectuer **une analyse unidimensionnelle du dispositif** selon x en $y = 0$ dans le repère ci-dessus. Il y a lieu d'utiliser les conventions et notations indiquées sur la figure 4.1. Énoncez clairement l'ensemble des hypothèses que vous utiliserez dans votre analyse. Nommez également vos axes et indiquez les unités.

Questions :

On commence par considérer une épaisseur de barreau $t_{\text{fin}} = 1 \text{ } [\mu\text{m}]$, supérieure aux autres longueurs physiques du problème. Il ne s'agit pas dans ce cas d'un transistor FINFET à proprement parler mais d'un double gate MOSFET (càd à 'grille des deux côtés').

1. S'agit-il d'un NMOS ou d'un PMOS ? Justifiez
2. Soit V_{Th} la tension de seuil du transistor supposée connue. Citez les différents modes de fonctionnement du transistor et indiquez les valeurs de la tension de grille pour lesquelles on se trouve dans ces modes de fonctionnement.

On applique une valeur de tension de grille VG pour que le transistor soit en déplétion et une tension $V_D = 0 \text{ } [V]$.

3. Déterminez la densité de charge et représentez-la graphiquement. Indiquez les valeurs clefs de cette grandeur sur le graphe. Veillez bien à couvrir l'ensemble des valeurs de x indiquées sur le repère.
4. En résolvant l'équation de Poisson, déterminez ensuite le champ électrique et le potentiel. Représentez-les également graphiquement. Indiquez également leurs valeurs clefs. On supposera que la constante d'intégration du potentiel est telle qu'il est nul en $x = 0$.
5. Sachant que la tension de seuil V_{Th} est égale à $-0.8 \text{ } [V]$, calculer la profondeur maximale x_{dmax} de la zone de déplétion d'un côté du transistor. Vérifiez que l'inégalité $t_{\text{fin}} > 2x_{\text{dmax}}$ est bien respectée¹.

On applique à présent une autre valeur de tension de grille pour que le transistor soit en inversion.

6. Déterminez à nouveau la densité de charge et représentez-la graphiquement. Indiquez les valeurs clefs de cette grandeur sur le graphe. Veillez bien à couvrir l'ensemble des valeurs de x indiquées sur le repère.
7. On applique une valeur de tension de drain V_D choisie de manière à ce qu'il n'y ait pas de phénomène de saturation. Démontrez l'expression mathématique du courant circulant dans le transistor. Quelle différence remarquez-vous par rapport à la formule du courant dans un transistor MOS classique ?

On suppose à présent que la valeur de t_{fin} est à présent égale à $400 \text{ } [nm]$. On applique la même valeur de tension de grille qu'aux sous-questions 6 et 7.

8. Quelle sera l'impact de cette nouvelle valeur de t_{fin} sur les régimes de fonctionnement du transistor ? Comment la tension de seuil va-t-elle évoluer ? Justifiez

On suppose à présent que t_{fin} est égal à $15 \text{ } [nm]$. Pour cette épaisseur, il s'agit à présent bien d'un transistor de type FINFET.

9. Que va-t-il se passer physiquement au niveau du canal ? Quelle hypothèse supposée vraie dans les sous-questions précédentes n'est plus respectée ?

1. si vous n'avez pas trouvé la réponse à cette sous-question, vous pouvez considérer pour la suite que la réponse était $x_{\text{dmax}} = 280 \text{ } [nm]$

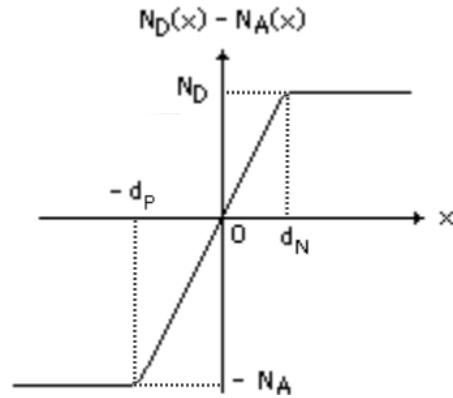
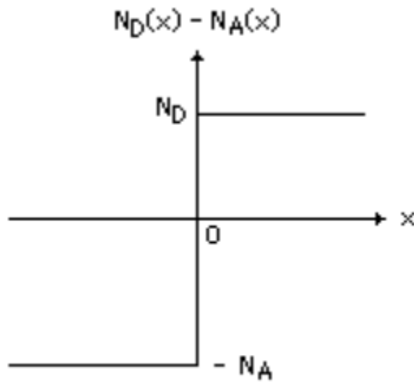
Ancien examen 5

Jonction PN linéaire (Janvier 2019)

Dans le cadre de ce cours, nous avons analysé des diodes à jonction abrupte, c'est-à-dire dans lesquelles on passe d'une zone P (dopée avec une concentration N_A d'atomes accepteurs) à une zone N (dopée avec une concentration N_D d'atomes donneurs) selon une fonction échelon¹.

Selon le procédé de fabrication utilisé, il existe également des jonctions linéaires, pour lesquelles la transition entre la zone P et la zone N se fait de manière linéaire en termes de dopage.

Ces deux types de jonction sont illustrées ci-dessous.



Jonction abrupte, caractérisée par l'équation :

Jonction linéaire, caractérisée par l'équation :

$$N_D(x) - N_A(x) = (N_D + N_A)u(x) - N_A \quad N_D(x) - N_A(x) = \begin{cases} -N_A & \text{si } x < -d_P \\ ax & \text{si } -d_P < x < d_N \\ N_D & \text{si } x > d_N \end{cases} \quad \text{avec } a = \frac{N_D + N_A}{d_P + d_N}$$

On considère une jonction linéaire aux bornes de laquelle on applique dans un premier temps une tension V nulle.

On considèrera que les longueurs de déplétion l_{p0} et l_{n0} sont telles que $l_{p0} < d_P$ et $l_{n0} < d_N$. On supposera également que le champ électrique est nul dans les zones quasi-neutres².

La permittivité absolue ϵ du matériau, le potentiel de contact Φ_0 et la pente a du graphe ci-dessus sont supposés connus.

1. Représentez graphiquement la densité de charge d'espace au sein de la structure. Indiquez les valeurs clés sur votre graphe.
2. Représentez graphiquement le champ électrique au sein de la structure. Indiquez les valeurs clés sur votre graphe. Quelle est la valeur maximale/ minimale du champ ?
3. Représentez graphiquement le potentiel électrique au sein de la structure. Indiquez les valeurs clés sur votre graphe.
4. Calculez les expressions analytiques des longueurs de déplétion l_{p0} et l_{n0} . Quelles conditions utilisez-vous pour calculer ces expressions ?

1. pour rappel, la fonction échelon est définie comme $u(x) = 1$ si $x \geq 0$ et 0 si $x < 0$
 2. hypothèse forte dans le cas d'une jonction linéaire.

On considère à présent que la tension V appliquée aux bornes de la jonction est positive, et que les longueurs de déplétion l_p et l_n sont toujours telles que $l_p < d_P$ et $l_n < d_N$.

5. Sur base des expressions précédentes, calculez l'expression analytique de la capacité de déplétion de la jonction. Montrez également que l'inverse du cube de la capacité varie linéairement en fonction de V .

Quatrième partie

Annexes

Annexe A

Note sur la résolution de problèmes d'électrostatique

Le but de cette note est de fournir un résumé des méthodes qui peuvent être utilisées pour résoudre un problème d'électrostatique.

Dans un premier temps, on pose un repère (cartésien, cylindrique ou sphérique) et on simplifie l'expression générale du champ électrique (composantes et dépendances) indépendamment pour chaque milieu. Attention qu'il faut bien justifier cette étape en utilisant, par exemple, les symétries de la géométrie considérée.

En fonction du résultat, trois méthodes sont possibles. En partant de la plus simple et en allant vers la plus compliquée, on a

1. Si la situation est très symétrique, on peut appliquer Gauss :

$$\oint_{\delta\Omega} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega} \rho \, dV = Q_{in}$$

Si la situation est suffisamment symétrique, le champ est constant le long de la surface. Dès lors, $\oint_{\delta\Omega} \vec{D} \cdot d\vec{S} = |\vec{D}|S$ et on obtient facilement l'expression du champ en tout point en modifiant la surface de contrôle choisie.

2. Si la situation est quelconque, mais ne comporte ni charge ponctuelle, ni charge linéique, nous pouvons utiliser les équations de Maxwell en statique et les conditions limites correspondantes.

Cela se fait en deux étapes:

- (a) Injecter l'expression simplifiée du champ électrique dans les équations de Maxwell et les résoudre. Celles-ci étant sous forme différentielle, la forme générale des champs (i.e. le champ en tout point) pourra être déterminée à une ou plusieurs constantes près. La résolution se fait indépendamment pour chaque milieu.
- (b) Utiliser les conditions limites pour déterminer la valeur des constantes restantes et lier les solutions obtenues pour les différents milieux.

Cette méthode est généralement la plus sûre et sera celle qui sera utilisée le plus souvent dans le cours.

3. Connaissant la distribution de champ résultant d'une charge ponctuelle située en \vec{r}' ($\vec{G}(\vec{r} - \vec{r}') = \vec{E}(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|^2}\hat{a}_r$), utiliser le principe de superposition pour décomposer la distribution totale de charges en une intégrale de charges ponctuelles, et résoudre cette intégrale:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \int_V \rho_v(\vec{r}') \vec{G}(\vec{r} - \vec{r}') dV(\vec{r}') \\ &+ \int_S \rho_S(\vec{r}') \vec{G}(\vec{r} - \vec{r}') dS(\vec{r}') \\ &+ \int_l \rho_l(\vec{r}') \vec{G}(\vec{r} - \vec{r}') dl(\vec{r}') \\ &+ \sum q(\vec{r}') \vec{G}(\vec{r} - \vec{r}') \end{aligned} \tag{A.1}$$

Cette méthode est la plus polyvalente, puisqu'elle fonctionne même dans le cas où des charges linéiques ou ponctuelles sont présentes. Cependant, elle est beaucoup plus lourde au niveau des calculs, puisque les intégrales impliquées sont en générales assez compliquées.

Annexe B

Formulaire d'électromagnétisme

Les équations de Maxwell temporelles

	Equations intégrales	Equations temporelles	Conditions limites
Gauss :	$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{in} \rho dV$ $\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ $\nabla \cdot \vec{B} = 0$	$\hat{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_S$ $\hat{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$
Faraday :	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{in} \vec{B} \cdot d\vec{S}$	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\hat{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$
Ampère :	$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{in} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \int_{in} \vec{J} \cdot d\vec{S}$	$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{tot} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{K}$
	Champ de déplacement électrique (milieu linéaire isotrope) : $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ avec Champ d'induction magnétique (milieu linéaire isotrope) : $\vec{B} = \mu \vec{H}$ Courant induit (milieu linéaire isotrope) : $\vec{J} = \sigma \vec{E}$		

Conservation de la charge : $\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

Vecteur de poynting : $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$

Conditions limites : $\hat{n} \cdot (\vec{J}_1 - \vec{J}_2) + \nabla \cdot \vec{K} + \frac{\partial \rho_S}{\partial t} = 0$

Electrostatique

Loi de coulomb : $\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \hat{u}_r$ Champ électrique : $\vec{E} \triangleq \frac{\vec{F}}{q}$ $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ (ε_r : permittivité relative)

Potentiel électrique : $\vec{E} = -\nabla V$ $\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$

Loi de Gauss : $\oint_{\delta\Omega} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega} \rho dV = Q_{in}$

Loi de Poisson : $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon}$

Courant

Intensité : $I \triangleq \frac{dQ}{dt}$ Densité de courant : $\vec{J} = \frac{\Delta I}{\Delta S} \hat{u}_n$ $I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$

Conductivité : σ Résistivité : $\rho = \sigma^{-1}$ Loi d'Ohm : $V = RI$

Résistance : $R \triangleq \frac{V}{I} = \frac{\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\oint_S \sigma \vec{E} \cdot d\vec{S}}$ Puissance dissipée : $P = VI = RI^2$

Conducteur de section constante parcouru par un courant uniformément réparti : $R = \frac{\rho l}{S}$

Capacité : $C \triangleq \frac{Q}{V} = \frac{\oint \vec{D} \cdot d\vec{S}}{\int \vec{E} \cdot d\vec{l}}$ Energie potentielle : $U = \frac{QV}{2} = \frac{CV^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}$

Energie potentielle (formes intégrales en temporel) : $U = \int_{vol} \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} dv = \frac{1}{2} \int_{vol} V \rho \, dv$

relation courant-tension : $I = C \frac{dV}{dt}$

Magnétostatique

Loi de Biot-Savart : $\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J} \times \hat{u}_r}{R^2} dV$ Force de Lorentz : $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$

Force sur un courant : $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$ Flux : $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$

Moment magnétique d'une spire de surface S : $\vec{m} = SI\hat{n}$ Couple sur une spire : $\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}$

Milieu magnétique linéaire isotrope : $\vec{B} = \mu \vec{H}$ $\mu = \mu_r \mu_0$ (μ_r : perméabilité relative)

Circuits magnétiques

Force magnétomotrice : $\mathcal{F} = NI$ Loi d'Hopkinson : $\Phi = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}}$

Reluctance : $\mathcal{R} = \frac{\oint \vec{H} \cdot d\vec{l}}{\int \vec{B} \cdot d\vec{S}}$

Induction

Force électromotrice induite : $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$

Relation courant-tension dans un inductance : $V = L \frac{dI}{dt}$

Inductance propre : $L \triangleq \frac{\Phi_{tot}}{I}$

Inductance mutuelle : $M \triangleq \frac{\Phi_{2,1,tot}}{I_1} = \frac{\Phi_{1,2,tot}}{I_2}$ Transformateur idéal : $\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1}$

Energie potentielle magnétique : $dU = -Id\Phi$ $U = \frac{LI^2}{2}$

Sous forme intégrale (et dans un milieu linéaire) : $U = \int_{vol} \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2} dV$

Lignes de transmission

Solution des équations des télégraphistes $\begin{cases} V_s = V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{\gamma z} \\ I_s Z_0 = V_0^+ e^{-\gamma z} - V_0^- e^{\gamma z} \end{cases}$ avec $\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$
 $Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$

Coefficient de réflexion en z pour une ligne sans pertes d'impédance caractéristique Z_0 : $\Gamma(z) = \frac{V_0^- e^{j\beta z}}{V_0^+ e^{-j\beta z}} = \frac{Z(z) - Z_0}{Z(z) + Z_0}$

Taux d'onde stationnaire : $VSWR = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$

Impédance d'entrée d'une ligne sans pertes en régime harmonique : $Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L \cos(\beta l) + j Z_0 \sin(\beta l)}{Z_0 \cos(\beta l) + j Z_L \sin(\beta l)}$

Annexe C

Formulaire d'analyse vectorielle

Analyse vectorielle

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

Coordonnées cartésiennes

$$\nabla = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}}$$

Coordonnées cylindriques

$$\nabla = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\varphi}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right] \hat{\mathbf{r}} + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] \hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right] \hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

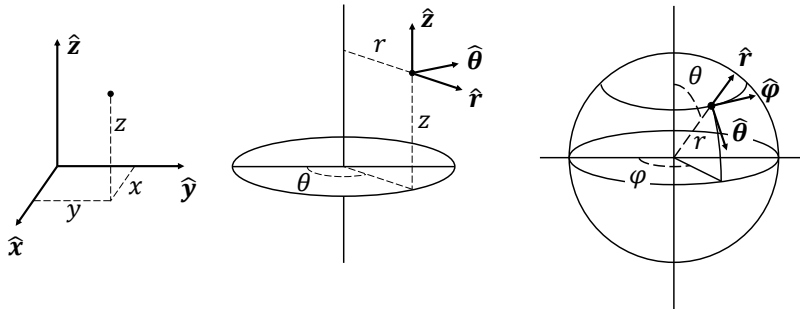
Coordonnées sphériques

$$\nabla = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{\varphi}} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \hat{\mathbf{r}} + \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}$$

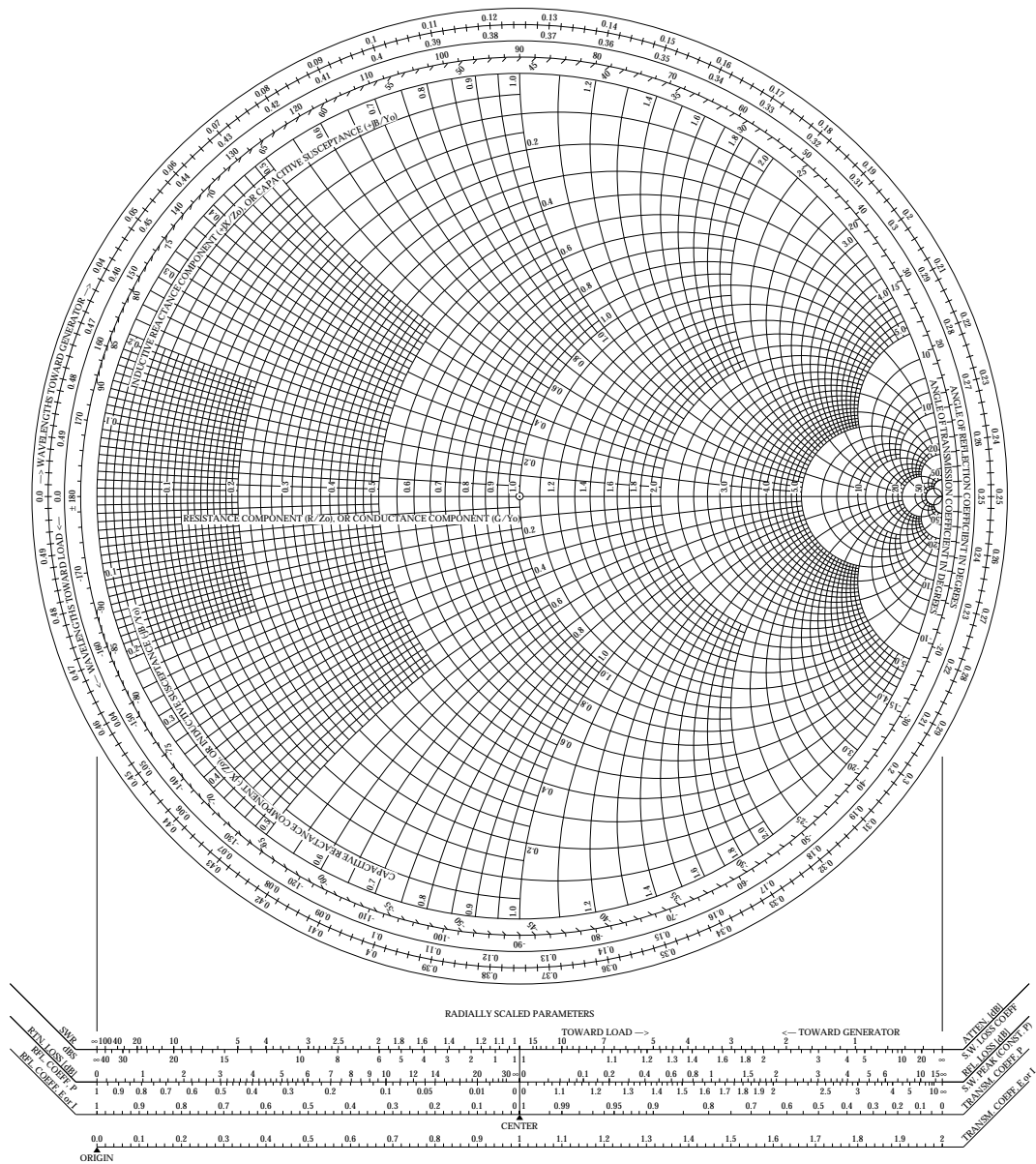


Annexe D

Abaque de Smith

The Complete Smith Chart

Black Magic Design



Annexe E

Formulaire de dispositifs électroniques

Continuité

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{q} \frac{\partial J_n}{\partial x} - U_n + G \qquad \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{q} \frac{\partial J_p}{\partial x} - U_p + G$$

Densité de courant

$$J_n = q \left(n \mu_n E + D_n \frac{\partial n}{\partial x} \right) \qquad J_p = q \left(p \mu_p E - D_p \frac{\partial p}{\partial x} \right)$$

Modèle de recombinaison

$$U_n = \frac{n(x) - n_0}{\tau_n} \qquad U_p = \frac{p(x) - p_0}{\tau_p}$$

Relation de Boltzmann

$$n(x) = n_i e^{\frac{q\Phi(x)}{kT}} \qquad p(x) = p_i e^{\frac{-q\Phi(x)}{kT}}$$

Longueur de diffusion

$$L_n = \sqrt{D_n \tau_n} \qquad L_p = \sqrt{D_p \tau_p}$$