UCLouvain

LELEC1755

Partie « Lignes de transmission »

CM5

Lignes de transmission

Phénomènes transitoires

Matière traitée dans le 5e module LELEC1755

1. Introduction

2. Etude des lignes TEM sans pertes en régime transitoire

⇨ **solution des équations différentielles**

⇨ **réflexion aux accès**

3. Applications

⇨ **ligne ouverte, générateur adapté**

⇨ **charge résistive, générateur non adapté**

⇨ **charge capacitive, générateur non adapté**

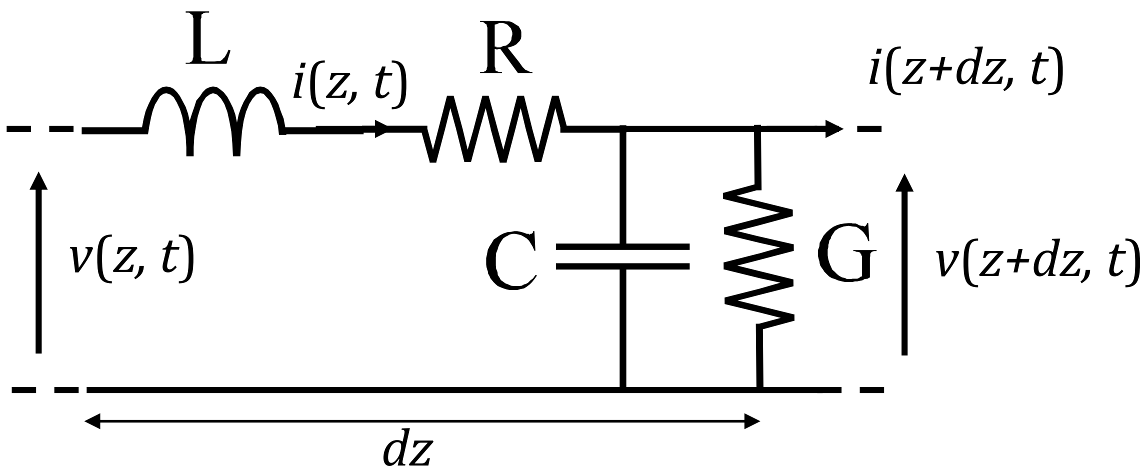
1. Introduction

Phénomènes transitoires sur les lignes

- **phénomènes souhaités: transmission d'impulsions (télégraphe)**
- **phénomènes parasites dont il faut se protéger (durée d'arrivée d'une impulsion au disjoncteur)**

La plupart des phénomènes de propagation dans les milieux continus peuvent se modéliser par la propagation sur les lignes

Equation différentielle dans le domaine temporel



$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial z} &= -Ri - L\frac{\partial i}{\partial t} \\ \frac{\partial i}{\partial z} &= -Gv - C\frac{\partial v}{\partial t} \end{aligned}}$$

2. Etude des lignes TEM sans pertes

Equation des télégraphistes

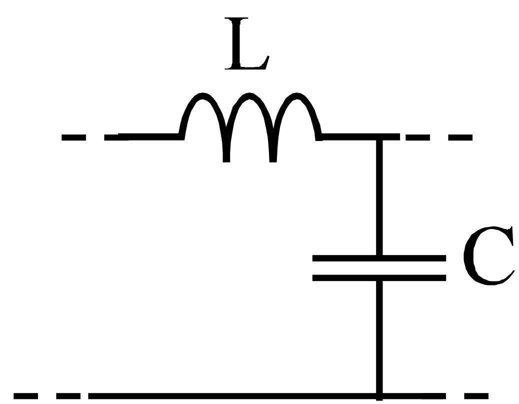
Résolution des équations

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(-Ri - L\frac{\partial i}{\partial t}\right)$$

$$= -R\frac{\partial i}{\partial z} - L\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial i}{\partial t}$$

$$\frac{\partial i}{\partial z} = -Gv - C\frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2} = RGv + (RC + LG)\dfrac{\partial v}{\partial t} + LC\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial^2 i}{\partial z^2} = RGi + (RC + LG)\dfrac{\partial i}{\partial t} + LC\dfrac{\partial^2 i}{\partial t^2} \end{cases}$$



Pour une ligne sans pertes, $R = G = 0$

$$\boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}} \quad \boxed{\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = -LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}}$$

$$LC = \frac{1}{c^2} \qquad c = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad ; \quad Y_c = \sqrt{\frac{C}{L}}$$

2. Etude des lignes TEM sans pertes

Solutions dans le domaine temporel

Si on pose $\boxed{\tau \triangleq \frac{z}{c}}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 (v, i)}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 (v, i)}{\partial t^2}$$

les équations de la tension et du courant deviennent

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial t}\right) v = 0$$

dont les solutions sont

$$\frac{\partial (v)}{\partial t} = \frac{\partial (v)}{\partial \tau} \quad ; \quad \frac{\partial (v)}{\partial t} = -\frac{\partial (v)}{\partial \tau}$$

$f(t+\tau)$ $\qquad$ $f(t-\tau)$

2. Etude des lignes TEM sans pertes

Solutions dans le domaine temporel

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} v(t,\tau) &= f_+(t-\tau) + f_-(t+\tau) \\ i(t,\tau) &= g_+(t-\tau) + g_-(t+\tau) \end{aligned}$$

Comme $\dfrac{\partial v}{\partial z} = -L\dfrac{\partial i}{\partial t}$ $\qquad \dfrac{\partial i}{\partial z} = -C\dfrac{\partial v}{\partial t}$

on a $$\frac{1}{c}\left(-\frac{df_+(t-\tau)}{d(t-\tau)} + \frac{df_-(t+\tau)}{d(t+\tau)}\right) = -L\left(\frac{dg_+(t-\tau)}{d(t-\tau)} + \frac{dg_-(t+\tau)}{d(t+\tau)}\right)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad Y_c = \sqrt{\frac{C}{L}} \qquad \frac{1}{Lc} = \frac{\sqrt{LC}}{L} = \sqrt{\frac{C}{L}} = G_c$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} g_+(t-\tau) &= G_c f_+(t-\tau) + C_+ \\ g_-(t+\tau) &= -G_c f_-(t+\tau) + C_- \end{aligned}$$

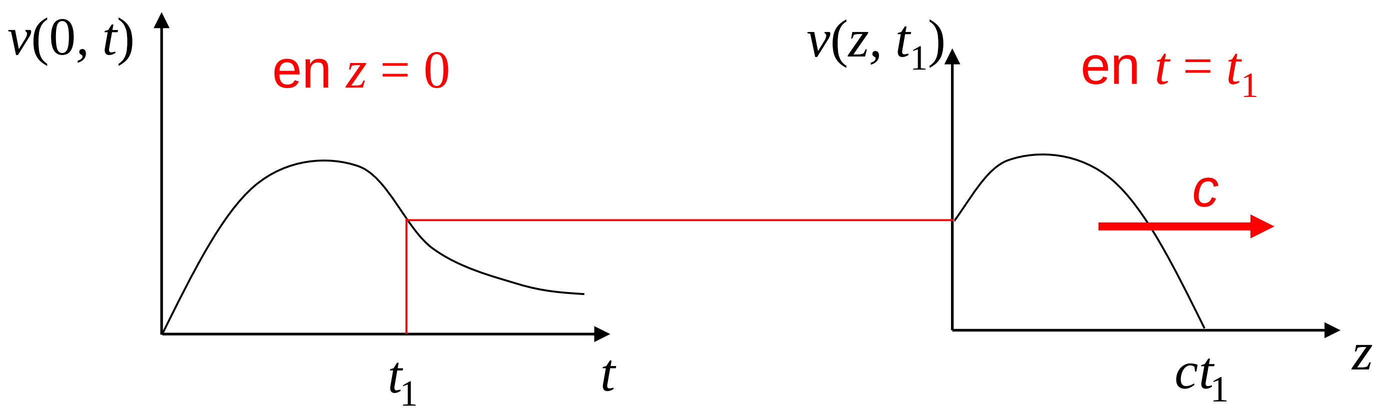
Les constantes C_+ et C_- représentent une solution continue (DC)

Solutions dans le domaine temporel

Solutions générales

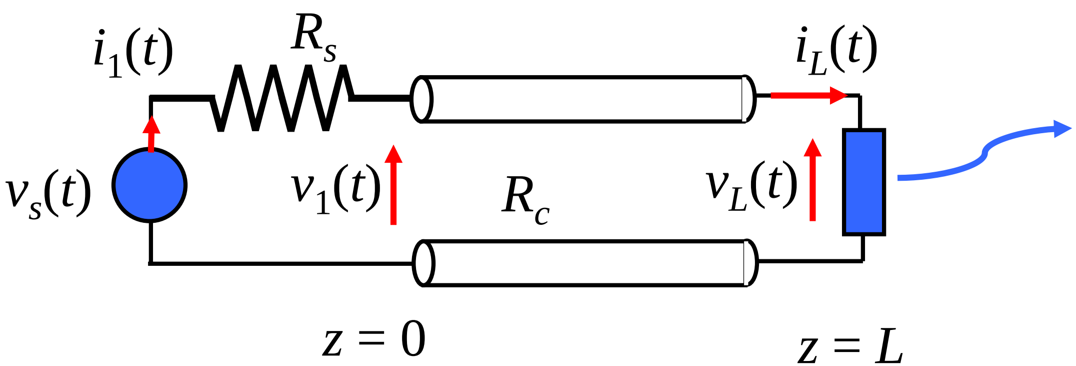
$$\begin{cases} v(z,t) = f_+\left(t-\dfrac{z}{c}\right) + f_-\left(t+\dfrac{z}{c}\right) \\ i(z,t) = G_c\left[f_+\left(t-\dfrac{z}{c}\right) - f_-\left(t+\dfrac{z}{c}\right)\right] \end{cases}$$

- **2 ondes progressives**
  - **vitesses de déplacement +c et -c**
  - **tension et courant liés par la résistance caractéristique R_c**



La forme des ondes dépend des conditions limites càd

- **des circuits présents aux deux extrémités**
- **des distributions temporelles et spatiales des sources éventuelles de tension et de courant**
- **des distributions spatiales de tension et de courant à l'instant initial**



Charge représentée par une fonction F

$$i_L(t) = F[v_L(t)]$$

→ **par exemple,** $i_L = C \frac{dv_L}{dt}$

2. Etude des lignes TEM sans pertes

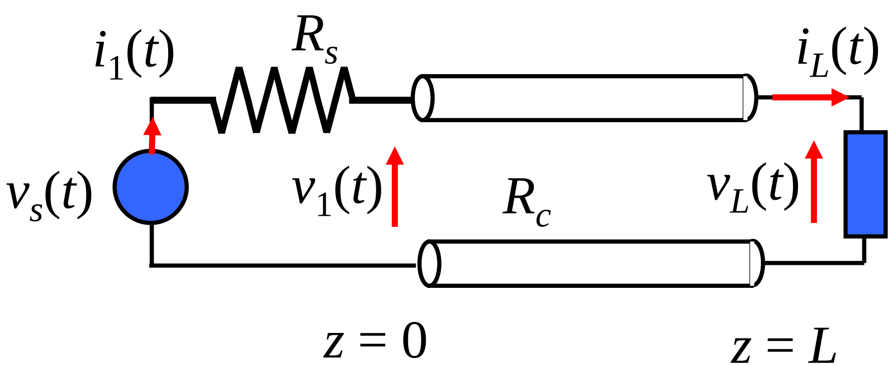
Réflexions aux accès

La ligne présente à chaque onde progressive une impédance R_c

$$v(z,t) = f_+\left(t - \frac{z}{c}\right) \quad ; \quad i(z,t) = G_c\, f_+\left(t - \frac{z}{c}\right) \quad ; \quad \frac{v(z,t)}{i(z,t)} = R_c = \frac{1}{G_c}$$

- **Relation entre deux ondes progressives**

$$f_-\left(t + \frac{z}{c}\right) = f_+\left(t - \frac{z}{c}\right) - R_c\, i(z,t)$$



$$\boxed{\begin{aligned} v_1(t) &\equiv v(0,t) \\ i_1(t) &\equiv i(0,t) \\ v_L(t) &\equiv v(L,t) \\ i_L(t) &\equiv i(L,t) \end{aligned}}$$

$$i_L(t) = F\left[v_L(t)\right]$$

1. Pour $t < 0$, la source est d'amplitude nulle (pas de source branchée)
→ il ne se passe rien, la ligne n'est pas chargée

2. En $t = 0$, on branche la source → les ondes progressives sont d'amplitude nulle, sauf éventuellement en $z = 0$

$$v(z,0) = f_+\left(\cancel{t} - \frac{z}{c}\right) + f_-\left(\cancel{t} + \frac{z}{c}\right) = 0 \quad 0 < z \leq L$$

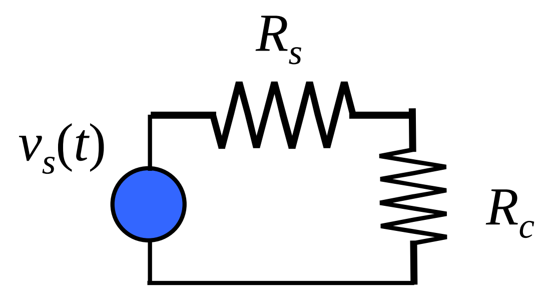
$$i(z,0) = G_c\left(f_+ - f_-\right) = 0$$

$$\boxed{f_+\left(-\frac{z}{c}\right) = 0 = f_-\left(\frac{z}{c}\right)}$$

3. Pour $0 \leq t \leq \dfrac{L}{c}$ **→ à l'entrée de la ligne (en** $z = 0$**)**

$$v_s(t) - R_s\, i_1(t) \equiv v(0,t) = f_+(t)$$

$$i_1(t) \equiv i(0,t) = G_c\, f_+(t)$$



$$\Rightarrow \boxed{f_+(t) = \frac{v_s(t)}{1 + G_c R_s}} = \frac{v_s(t)}{1 + R_s / R_c} = \frac{R_c}{R_c + R_s} v_s(t)$$

diviseur résistif

- **L'onde** f_+ **va se propager vers les** $z > 0$ **à partir de** $t = 0$
- **Comme la ligne est non chargée avant l'instant initial, la seule onde se propageant vers les** $z < 0$ **sera due à la réflexion sur la charge → on ne verra donc rien revenir à la source avant** $2L/c$
- **Pendant l'intervalle de temps de** 0 **à** $2L/c$**, le générateur ignore la charge, il ne voit que** R_c **!!**

4. Pour $0 \le t \le \dfrac{L}{c}$ **→ ailleurs sur la ligne**

$$v(z,t) = f_+\left(t - \frac{z}{c}\right)$$

$$i(z,t) = G_c\, f_+\left(t - \frac{z}{c}\right)$$

$$f_+\left(t - \frac{z}{c}\right) = \frac{v_s\left(t - \frac{z}{c}\right)}{1 + G_c R_s}$$

- **L'onde** f_+ **va se propager vers les** $z > 0$ **à partir de** $t = 0$

5. A l'extrémité de la ligne, la charge impose

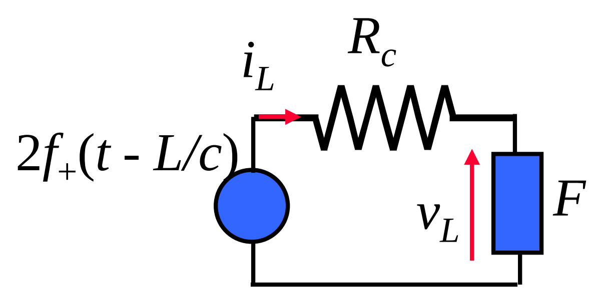
$$i_L(t) = F[v_L(t)]$$

$$i_L(t) = i(L,t)$$

$$v_L(t) = v(L,t)$$

- **Courant incident à l'extrémité de la ligne**

$$R_c\; i(L,t) = f_+\left(t - \frac{L}{c}\right) - f_-\left(t + \frac{L}{c}\right)$$



- **Tension aux bornes de la charge**

$$v_L(t) = v(L,t) = f_+(t - L/c) + f_-(t + L/c) = 2f_+(t - L/c) - R_c i_L(t)$$

→ **similaire à Thévenin: la ligne est remplacée par son circuit équivalent**

5.a Si la charge est un circuit ouvert $i_L = 0$

$$v_L(t) = 2 f_+(t - L/c)$$

$$f_-(t + L/c) = f_+(t - L/c)$$

car $i(L,t) = G_c\left(f_+(t - L/c) - f_-(t + L/c)\right) = 0$

5.b Si la charge est un court-circuit $v_L = 0$

$$i_L(t) = 2G_c f_+(t - L/c)$$

$$f_-(t + L/c) = -f_+(t - L/c)$$

5.c Si la charge est adaptée

$$f_-(t + L/c) = 0$$

5.d Pour une charge quelconque

$$f_-\left(t+\frac{L}{c}\right)=f_+\left(t-\frac{L}{c}\right)-R_c\, i(L,t) \rightarrow (1+R_c F)v_L(t)=2f_+(t-L/c)$$

5.e Pour une charge résistive

$$v_L(t)=R_L i_L(t)=f_+(t-L/c)+f_-(t+L/c)$$

$$R_L G_c(f_+(t-L/c)-f_-(t+L/c))=f_+(t-L/c)+f_-(t+l/c)$$

$$\frac{R_L}{R_c}f_+-\frac{R_L}{R_c}f_-=f_++f_-$$

$$\left(\frac{R_L}{R_c}-1\right)f_+=f_-\left(1+\frac{R_L}{R_c}\right) \Rightarrow \boxed{f_-=\frac{R_L-R_c}{R_L+R_c}f_+}$$

6. Pour $L/c \leq t \leq 2L/c$

- **À l'entrée de la ligne** $(z = 0)$

$$f_{+}(t - z/c) = \frac{v_s(t - z/c)}{1 + G_c R_s}$$

car f_{-} **reste nulle avant** $2L/c$

- **Ailleurs, l'onde réfléchie est égale à sa valeur en** L **retardée de** $(z - L)/c$

$$f_{-}(t + z/c) = f_{+}\left(t - \frac{L}{c} - \frac{L - z}{c}\right) - R_c i_L\left(t - \frac{L - z}{c}\right)$$

2. Etude des lignes TEM sans pertes

Analyse temporelle (pas par pas)

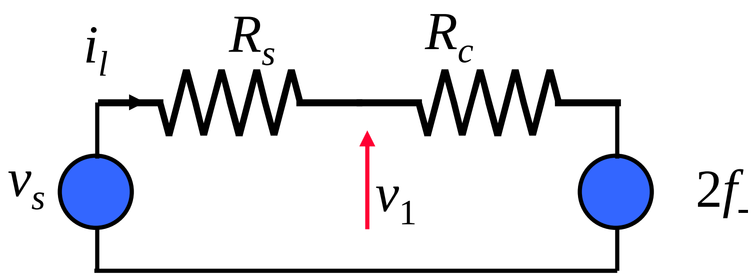
7. En $t = 2L/c$, l'onde réfléchie revient à l'entrée de la ligne

→ conditions à l'entrée

$$v_1(t) = v_s(t) - R_s i_1(t) = f_+(t) + f_-(t)$$

$$i_1(t) = i(0,t) = G_c\left(f_+(t) - f_-(t)\right)$$

$$\Rightarrow \quad v_s(t) - R_s i_1(t) = 2f_-(t) + R_c i_1(t)$$



$$i_1(t) = \frac{v_s(t)}{R_c + R_s} - \frac{2f_-(t)}{R_c + R_s}$$

$$f_+(t) = R_c i_1(t) + f_-(t) = \frac{v_s(t)}{1 + G_c R_s} + \frac{R_s - R_c}{R_s + R_c} f_-(t)$$

onde émise directement par la source

réflexion de l'onde f_- sur le générateur

Equation des télégraphistes

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial z} &= -Ri - L\frac{\partial i}{\partial t} \\ \frac{\partial i}{\partial z} &= -Gv - C\frac{\partial v}{\partial t} \end{aligned}}$$

- **on multiplie la première relation par i et la deuxième par v**

$$-\frac{\partial P}{\partial z} = -\left(i\frac{\partial v}{\partial z} + v\frac{\partial i}{\partial z}\right)$$

$$= \left(Ri^2 + Gv^2\right) + \left(Li\frac{\partial i}{\partial t} + Cv\frac{\partial v}{\partial t}\right)$$

$$\boxed{= P_d + \frac{\partial}{\partial t}(Wm + We)}$$

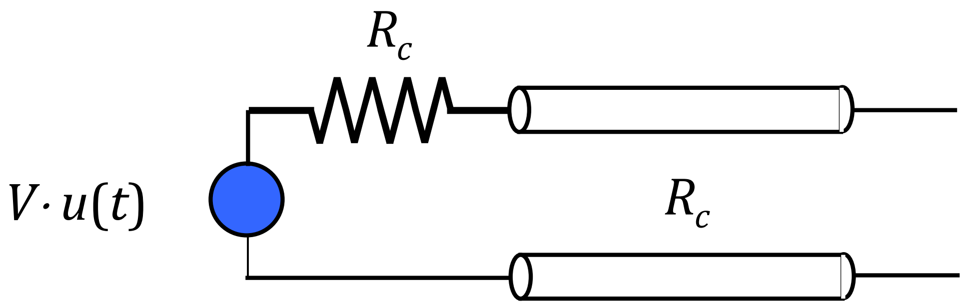
puissance dissipée (effet Joule) **énergie électrique et magnétique**

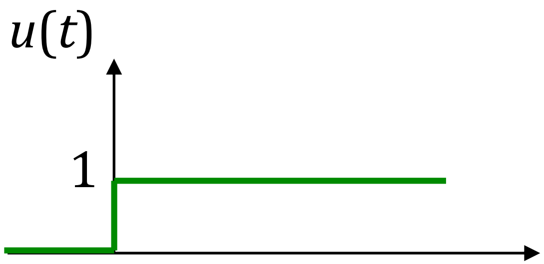
$$\boxed{Ri^2 + Gv^2}$$

$$\boxed{w_m = \frac{Li^2}{2}; \quad w_e = \frac{Cv^2}{2}}$$

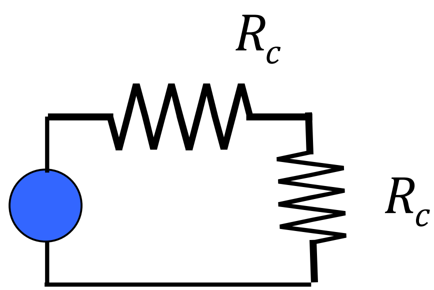
3. Applications

Ligne ouverte, générateur adapté



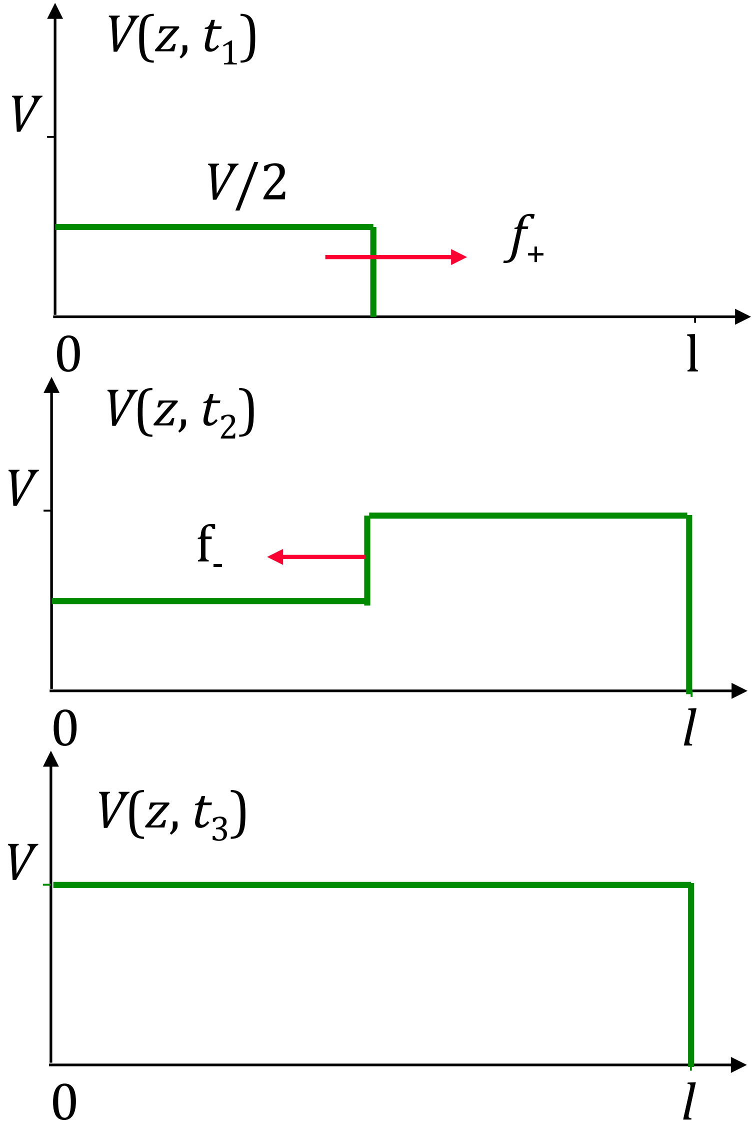


$0 < t < l/c$



$$f_+(t) = \frac{Vu(t)}{1 + G_c R_c} = \frac{Vu(t)}{2}$$

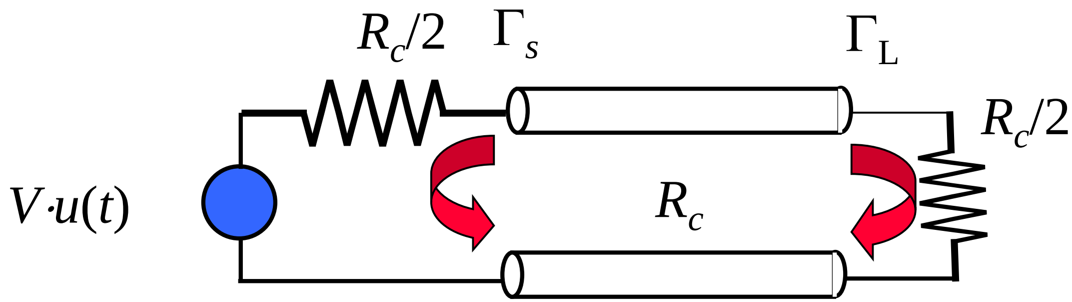
Ligne ouverte, générateur adapté



$$f_-(t + z/c) = f_+(t - 2l/c + z/c)$$

car $i(l,t) = f_+ - f_- = 0$

Charge résistive, générateur non adapté



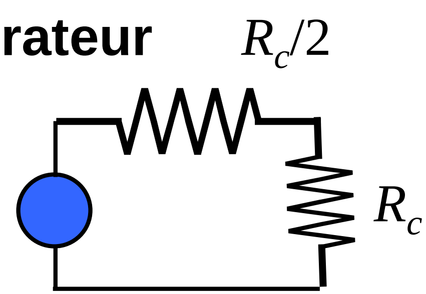
$$v(0,t) = V \frac{R_c}{R_c/2 + R_c} = \frac{2V}{3}$$

Pour une charge résistive

$$f_- = \Gamma_L f_+$$

$$\Gamma_L = \frac{R_L - R_c}{R_L + R_c} \qquad \Gamma_L = \frac{R_c/2 - R_c}{R_c/2 + R_c} = -\frac{1}{3}$$

Au générateur

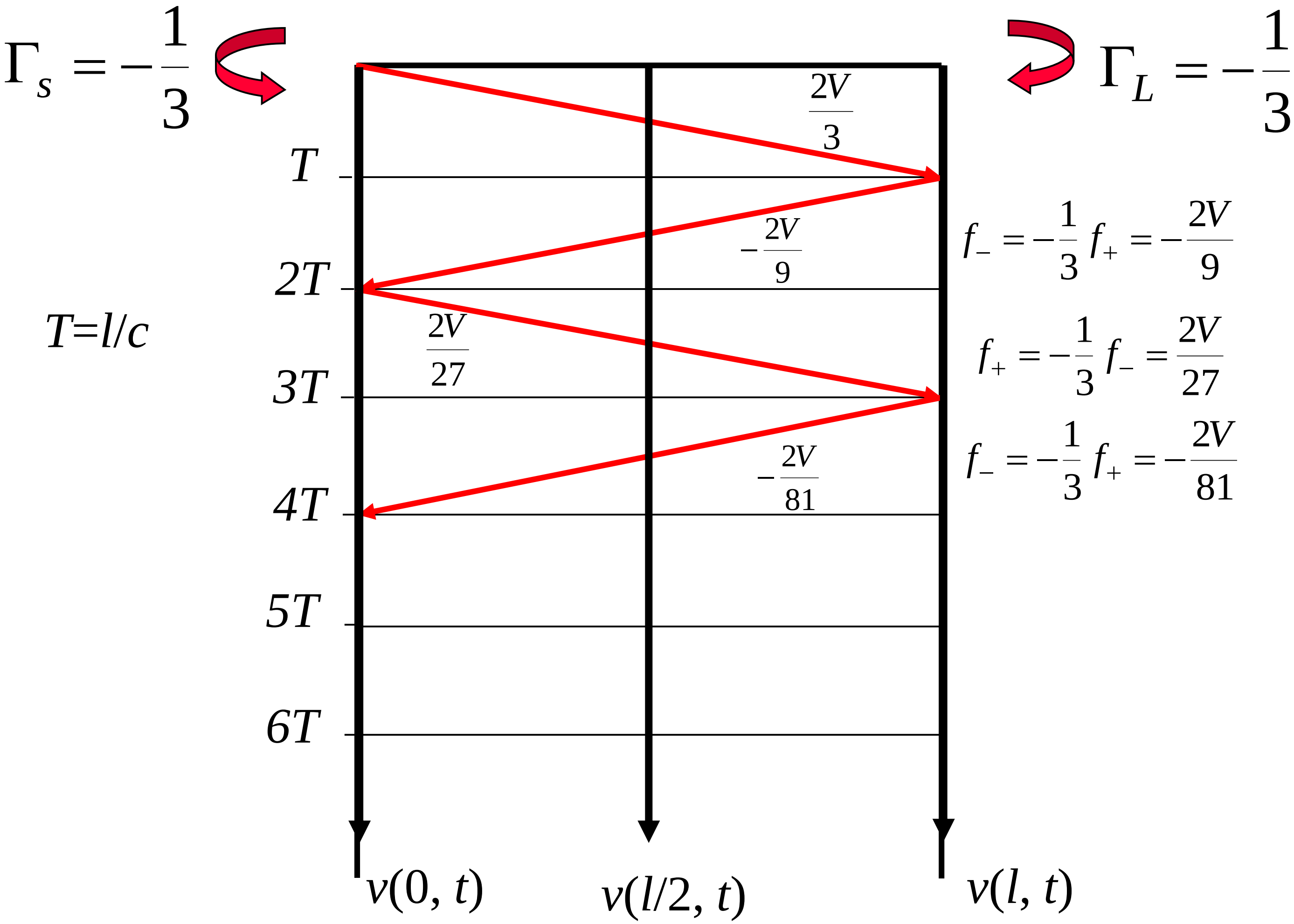


$$f_+ = \Gamma_s f_-$$

$$\Gamma_s = \frac{R_s - R_c}{R_s + R_c} \qquad \Gamma_s = \frac{R_c/2 - R_c}{R_c/2 + R_c} = -\frac{1}{3}$$

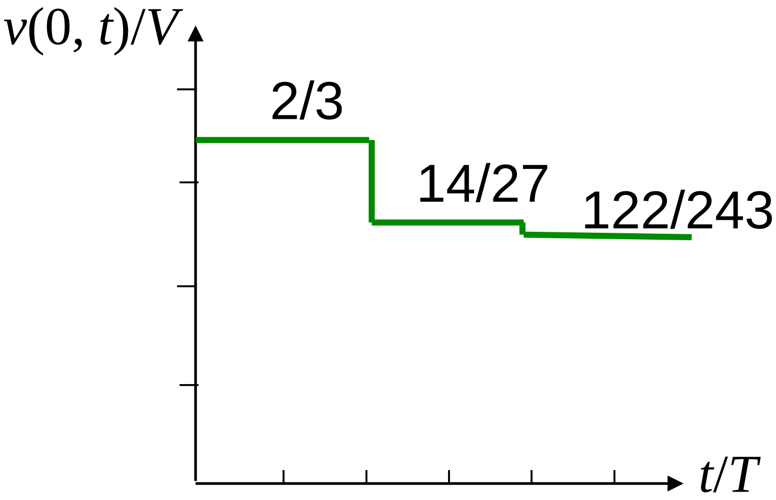
3. Applications

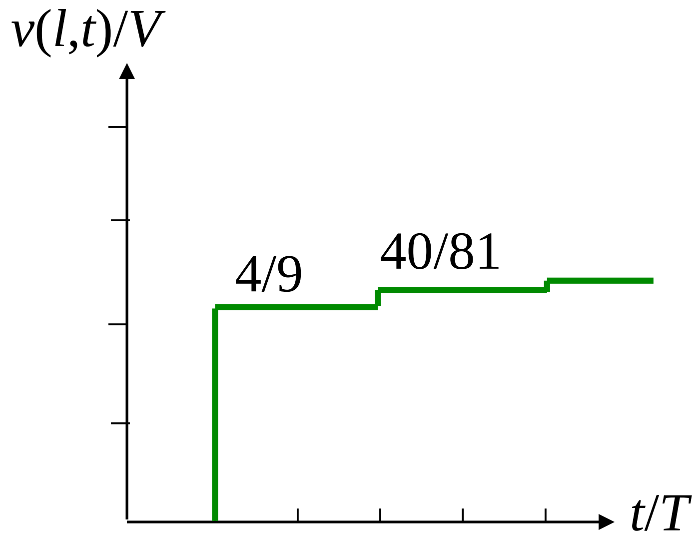
Charge résistive, générateur non adapté

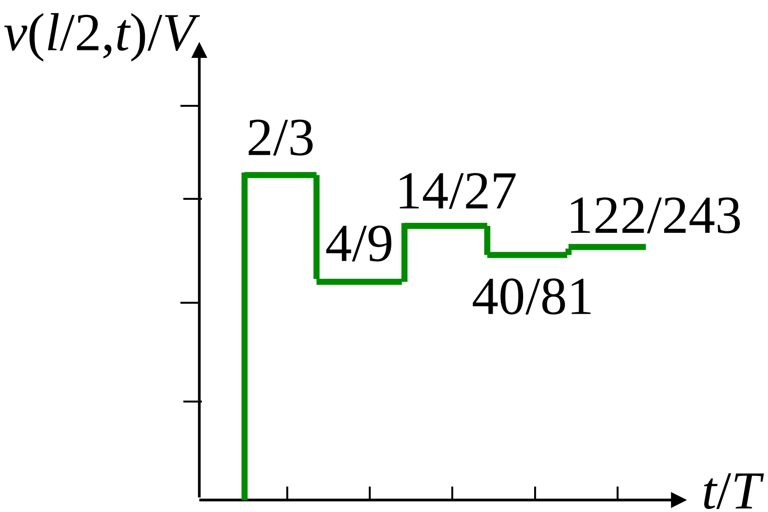


3. Applications

Charge résistive, générateur non adapté







$$v_{régime} = f_+\left[1 - 1/3 + (1/3)^2 - (1/3)^3 + \cdots\right]$$

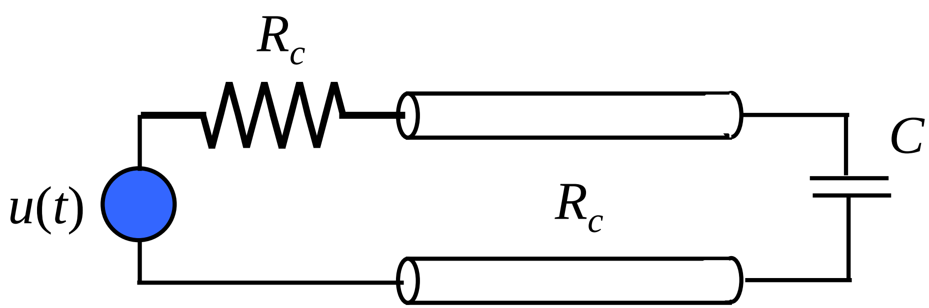
$$f_+/(1+1/3) = (2V/3)3/4 = V/2$$

$$i_{régime} = Y_c\, f_+\left[1 + 1/3 + (1/3)^2 + (1/3)^3 + \cdots\right]$$

$$Y_c\, f_+/(1-1/3) = (2V/3Z_c)3/2 = V/Z_c$$

3. Applications

Charge capacitive, générateur non adapté



$$f_+(t - z/c) = (1/2)u(t - z/c)$$