Séance 1

Circuits résistifs et puissance

Rappel

Cette première séance consiste en un rappel des notions de base de la théorie des circuits : lois de Kirchhoff, circuits en régime transitoire et transfert de puissance. Le but est de se re-familiariser avec ces concepts, abordés en Physique 1.

- **Loi de Kirchhoff** (Section 2.2, p.29-37) : Ce sont les lois de base des circuits, régissant le comportement des tensions et courants aux *noeuds* et *mailles* d'un circuit.

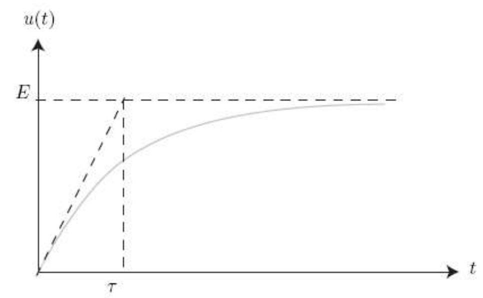
$$\boxed{\underline{\text{Noeuds}} : \sum_i I_i = 0 \qquad \underline{\text{Mailles}} : \sum_i V_i = 0}$$

- **Système en transitoire** (Section 7.2, p.270-281) : Lorsqu'un échelon est appliqué à un système comportant un seul élément capacitif ou inductif (système dit du *premier ordre*) , celui-ci évolue vers un nouveau point de régime avec un temps caractéristique $\tau_C = R_{eq}\, C$ ou $\tau_L = L/R_{eq}$.

  Dans un système du premier ordre en transitoire, la tension/courant aux bornes de l'élément
  capacitif/inductif suit une relation exponentielle de la forme :

$$f(t) = A + B\exp\big(-t/\tau\big)$$

  Les constantes A et B sont déterminées en étudiant le circuit dans ses deux situations de régime ($t < t^*$ et $t \to \infty$, pour un transitoire débutant en $t = t^*$). La représentation de cette réponse est illustrée ci-contre, avec la constante de temps τ mise en évidence.



- **Notion de puissance** (Section 5.4, p.205-210) : tout élément soit fournit, soit consomme de l'énergie. La notion de *puissance DC* réunit grandeurs électriques et transfert d'énergie au cours du temps.

$$P = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = V\,I$$

  L'expression de la puissance dans une résistance s'obtient par application de la loi d'Ohm pour les circuits résistifs,

$$P = R\,I^2 = \frac{V^2}{R}$$

Séance 2

Dipôles équivalents

Rappel

Cette deuxième séance est consacrée aux équivalents de Thévenin et Norton (Section 5.3, p.198-215).

Tout circuit contenant des résistances et des sources peut être remplacé par un dipôle équivalent de Norton ou de Thévenin : les caractéristiques du circuit vues depuis l'extérieur de celui-ci sont alors préservées. Le dipôle équivalent est constitué d'une source équivalente et d'une résistance équivalente R_{th}.

- Dans le cas d'un équivalent de Thévenin, la résistance R_{th} est en série avec une source de tension équivalente V_{th}.
- Dans le cas d'un équivalent de Norton, la résistance R_{th} est en parallèle avec une source de courant équivalente I_{th}.

Notons qu'on peut facilement passer d'un équivalent à l'autre par la relation

$$\boxed{V_{\text{th}} = R_{\text{th}} I_{\text{th}}}$$

Les trois étapes clés pour calculer un équivalent sont :

- Calcul de la tension V_{th} : cette tension est calculée en mesurant la tension aux bornes du circuit original lorsqu'on le met en *circuit ouvert*.
- Calcul du courant I_{th} : ce courant est calculé en mesurant le courant obtenu lorsque l'on met le circuit original en *court-circuit*.
- Calcul de la résistance équivalente R_{th} :
  - Si le circuit ne comporte pas de sources commandées : la résistance équivalente peut être calculée rapidement en calculant la résistance vue aux bornes du circuit lorsque l'on annule ses sources de courant/tension. Pour rappel : annuler une source de tension (resp. courant) revient à la mettre en court-circuit (resp. circuit ouvert).
  - Si le circuit comporte des sources commandées : il faut avoir calculé I_{th} et V_{th} au préalable et appliquer la relation fondamentale ci-dessus.

Séance 3

Phaseurs

Rappel

Les phaseurs sont utilisés dans le cas de circuits :

- linéaires.
- en état de régime.
- contenant des sources de courant/tension alternatives de même pulsation ω.

Dans de tels circuits, toutes les tensions et courants sont de la forme $A\cos(\omega t+\phi)$, avec une amplitude et une phase différentes pour chaque tension/courant (Sections 8.2-8.8, pp. 373-408).

Transformation temporel - fréquentiel
Cette forme générale $A\cos(\omega t+\phi)$ peut être exprimée de la manière suivante :

$$A\cos(\omega t+\phi) = \mathbb{R}\Big[A\cos(\omega t+\phi)+jA\sin(\omega t+\phi)\Big] = \mathbb{R}\Big[Ae^{j(\omega t+\phi)}\Big] = \mathbb{R}\Big[\underbrace{(Ae^{j\phi})}_{\text{Phaseur}}e^{j\omega t}\Big]$$

On observe qu'en ajoutant la partie imaginaire $jA\sin(\omega t+\phi)$, on obtient une expression de la forme $Ae^{j\phi}e^{j\omega t}$. Etant donné que toutes les grandeurs au sein du circuit sont à la même fréquence, le facteur $e^{j\omega t}$ est commun à toutes les grandeurs électriques (tensions/courants) du circuit. Le facteur $Ae^{j\phi}$, qui porte le nom de **phaseur**, suffit donc à lui seul à caractériser un courant ou une tension du circuit, étant donné qu'il contient à la fois son amplitude et sa phase.

Tous les courants et tensions au sein du circuit peuvent donc être écrits en notation phasorielle :

$$\begin{cases} \bar{V} = V_m e^{j\psi_v} \\ \bar{I} = I_m e^{j\psi_i} \end{cases}$$

Impédance
Les relations différentielles liant la tension au courant pour chaque élément de circuit peuvent ici être appliquées. Dans le cas où $I(t) = Ae^{j(\omega t+\phi)}$, on obtient :

- Résistance : $V(t) = RI(t)$
- Capacité : $Q(t) = CV(t) \Leftrightarrow V(t) = \dfrac{1}{C}\int I(t)dt = \dfrac{1}{C}\dfrac{1}{j\omega}Ae^{j(\omega t+\phi)} = \dfrac{1}{j\omega C}I(t)$
- Inductance : $V(t) = L\dfrac{dI(t)}{dt} = Lj\omega Ae^{j(\omega t+\phi)} = j\omega L\, I(t)$

En utilisant la notation phasorielle introduite ci-dessus, on peut définir pour chacun de ces trois éléments la notion d'**impédance** $\bar{Z}$ telle que $\bar{V} = \bar{Z}\bar{I}$.

- Résistance : $\bar{Z} = R$
- Capacité[a] : $\bar{Z} = \dfrac{1}{j\omega C}$
- Inductance : $\bar{Z} = j\omega L$

[a]. Moyen mnémotechnique : CIVIL - **C**apacité, le courant (**I**) est à l'avance par rapport à la tension (**V**). La tension est à l'avance sur le courant (**I**) dans le cas d'une inductance (**L**).

Séance 4

Bode I

Rappel

La **fonction de transfert** d'un circuit d'ordre N prend la forme générale suivante dans le domaine de Fourier :

$$H(j\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = H_0 \frac{(1 - jz_1\omega)(1 - jz_2\omega)...(1 - jz_M\omega)}{(1 - jp_1\omega)(1 - jp_2\omega)...(1 - jp_N\omega)},$$

où H_0 est la **gain DC** du système et où les p_i $(1 \leq i \leq N)$ et z_i $(1 \leq i \leq M, M \leq N)$ représentent respectivement les **pôles** et les **zéros** de celui-ci.

La fonction de transfert est généralement représentée via un **diagramme de Bode** donnant la réponse en fréquence de son amplitude **et** de sa phase. Les deux graphes sont nécessaires étant donné que la fonction de transfert est complexe ! La Figure 4.1 donne un exemple de ce diagramme pour un circuit à un pôle et aucun zéro.

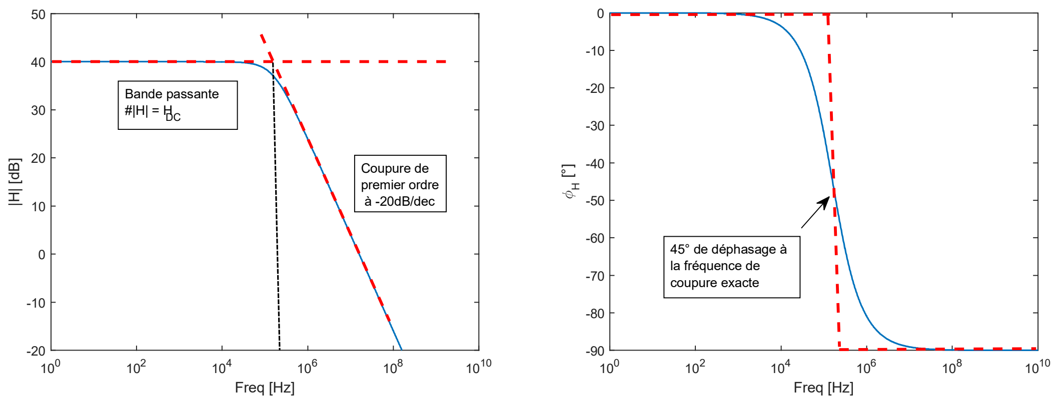


Fig. 4.1 – Diagramme de Bode de la réponse en fréquence d'un système de premier ordre, amplitude et phase.

Dessiné à la main, le diagramme de Bode est généralement approximé par des droites, comme indiqué par les traits rouges à la Figure 4.1 ; cette approche est dite "asymptotique". Une **lecture attentive** du diagramme de Bode permet en outre de directement déterminer la sortie du système pour une entrée donnée à une fréquence précise.

Séance 5

Bode II

Rappel

Dans cette séance, nous nous intéressons aux fonctions de transfert du second ordre.
Une fonction de transfert du second ordre se présente sous la forme canonique suivante :

$$H(j\omega) = \frac{H_0}{1 + 2\xi\dfrac{j\omega}{\omega_0} + \left(\dfrac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

où H_0 est le **gain DC**, ξ est le **facteur d'amortissement** et ω_0 est la fréquence de résonance ou de coupure, selon la valeur de ξ. La valeur de ξ influence le diagramme de Bode et résulte en 3 cas distincts :

1. $\xi < 1$ correspond à une réponse **sous-amortie**, c'est-à-dire que le diagramme de Bode présente un dépassement/overshoot à la fréquence ω_0. Le dénominateur de la fonction de transfert possède alors deux racines complexes, qui sont le conjugué l'une de l'autre.
2. $\xi = 1$ correspond à une réponse **critiquement amortie**. Dans ce cas, le diagramme de Bode ne présente plus d'overshoot à la fréquence ω_0 et le dénominateur de la fonction de transfert possède une racine réelle double.
3. $\xi > 1$ correspond à une réponse **suramortie**, pour laquelle on ne trouve plus d'overshoot à la fréquence ω_0. Le dénominateur de la fonction de transfert possède alors 2 racines réelles distinctes, ce qui revient au cas où on aurait un produit de deux fonctions du premier ordre.

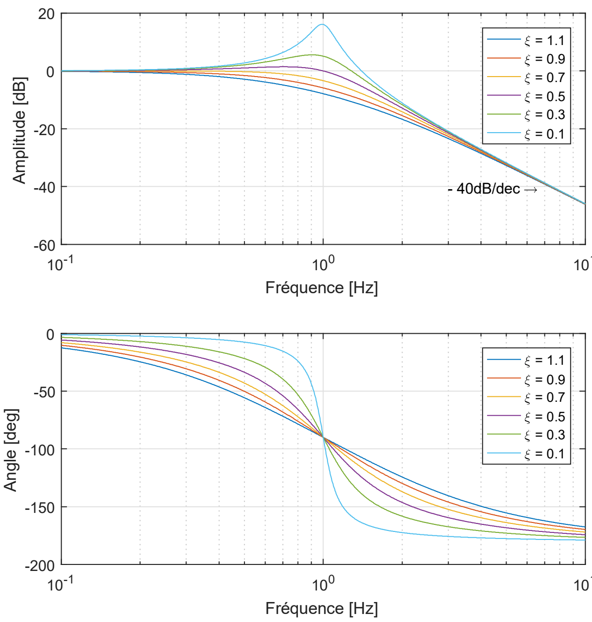


Fig. 5.1 – Diagramme de Bode pour différents facteurs d'amortissement.

Par ailleurs, le **facteur de qualité** est défini comme $Q = \dfrac{1}{2\xi}$.

Séance 6

Rétroaction

Rappel

Cette séance est consacrée au principe de rétroaction et aux circuits en boucle fermée. En toute généralité, les systèmes de rétroaction peuvent être représentés selon la forme canonique donnée à la Figure 6.1 [a].

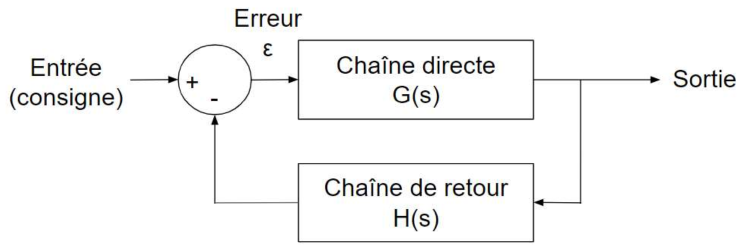


Fig. 6.1 – Représentation d'un système en boucle fermée.

Dans cette représentation, on peut distinguer les éléments suivants :

- L'*entrée* (également appelée *consigne*) et la *sortie*. L'objectif du système en boucle fermée est d'amener la sortie du système à une valeur la plus proche possible de celle du signal d'entrée.
- La *chaîne de retour* (de fonction de transfert $H(s)$). Cette chaîne permet d'effectuer un feed-back afin de réguler la valeur de la sortie. En pratique, cette chaîne peut être par exemple un capteur qui va fournir une valeur proportionnelle à la valeur de la sortie.
- La *chaîne directe* (de fonction de transfert $G(s)$). Cette chaîne représente le système physique que l'on souhaite commander. Dans un système en boucle fermée, on met en entrée de la chaîne directe un signal d'erreur ϵ. Ce signal est défini comme la différence entre la consigne et le signal fourni par la chaîne de retour. La chaîne directe va agir uniquement sur ce signal d'erreur, ce qui permet d'ajuster la sortie afin de lui donner une valeur plus proche de la consigne.

Le gain dit en *boucle ouverte* correspond au gain de la sortie à travers la chaîne de retour et la chaîne directe, dans le cas où la boucle de rétroaction est coupée. Il est défini comme :

$$T_{bo}(s) = G(s)H(s)$$

Le gain dit en *boucle fermée* du système est défini comme la fonction de transfert globale du système représenté à la Figure 6.1. Ce gain est donné par :

$$T_{bf}(s) = \frac{1}{H(s)} \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

a. Les fonctions de transfert sont ici écrites dans le domaine de Laplace, en fonction de la variable s. La transformée de Laplace est étudiée dans le cours LEPL1106 - Signaux et systèmes. Pour passer du domaine de Fourier au domaine de Laplace, il suffit ici de substituer la variable s par $j\omega$.

Rappel

Premier ordre - Réponse en fréquence de l'amplificateur opérationnel
On considère le circuit en boucle fermée représenté à la Figure 6.2.

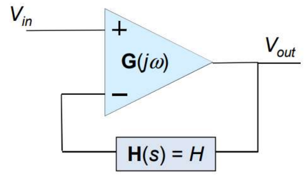


Fig. 6.2 – Amplificateur opérationnel en boucle fermée.

Dans ce circuit, l'amplificateur opérationnel comprend à la fois l'opération de soustraction (entre l'entrée V_{in} et le signal de feedback) et le gain de la chaîne directe $G(j\omega)$.

Dans le cadre des séances précédentes, ce gain a toujours été supposé infini. En pratique, il prend une valeur finie et dépend de la fréquence ω (en raisons des capacités internes de l'amplificateur et de la capacité de charge en sortie de celui-ci). On dit qu'il s'agit d'une *non-idéalité* de l'amplificateur.

Le gain en tension a une réponse en fréquence de type passe-bas :

$$G(j\omega) = G_0 \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

où G_0 est le **gain DC** de l'amplificateur et ω_0 est sa **fréquence de coupure** ou **pôle dominant**. Le diagramme de Bode de $G(j\omega)$ est représenté à la Figure 6.3. Dans la zone où le gain en tension décroît avec une pente de -20 dB/dec, le produit entre le gain en tension G_0 et la fréquence de coupure du montage ω_0 reste constant.

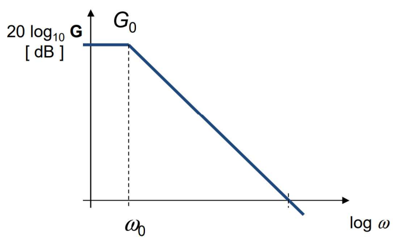


Fig. 6.3 – Diagramme de Bode de la fonction de transfert $G(j\omega)$ (amplitude).

La fonction de transfert globale $T_{bf}(j\omega)$ du système en boucle fermée est donnée par :

$$T_{bf}(j\omega) = T_{bf,0} \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{G_0\omega_0/T_{bf,0}}}$$

avec $T_{bf,0} = G_0/(1 + G_0 H)$. On observe que le produit entre le gain $T_{bf,0}$ et la fréquence de coupure $G_0\omega_0/T_{bf,0}$ est égal à $G_0\omega_0$, comme pour $G(j\omega)$. Le produit gain bande passante de l'amplificateur opérationnel est donc constant lorsqu'on lui applique une rétroaction réelle H.

Second ordre
Lorsque la fonction $G(j\omega)$ est une fonction du second ordre, on peut montrer que c'est le produit entre le facteur d'amortissement et la fréquence de coupure qui reste constant lorsqu'on applique une rétroaction réelle.

Séance 7

Séance 7 : Quadripôles

Rappel

Tout comme les dipôles équivalents (représentant des circuits à 2 accès), il existe des quadripôles équivalents (représentant des circuits à 4 accès). Un quadripôle équivalent comporte 4 variables : les tensions d'entrée v_i et de sortie v_o, et les courants d'entrée i_i et de sortie i_o. Ces variables sont définies selon la convention indiquée à la Figure 7.1.

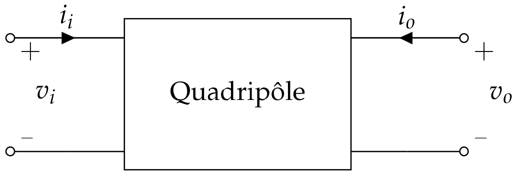


Fig. 7.1 – Convention des courants et tensions aux accès du quadripôle.

Dans le cadre de ce cours, nous étudions 4 types de quadripôles équivalents : **G**, **Y**, **Z** et **H**. Ces équivalents sont généralement écrits sous forme matricielle. Ces différentes représentations matricielles ainsi que les formules de conversion (pour passer d'une représentation à une autre) sont données dans le formulaire du cours.

Calcul des coefficients d'une représentation équivalente
Prenons comme exemple la représentation **Y** dont la matrice est définie telle que :

$$\begin{bmatrix} i_i \\ i_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_i & y_r \\ y_f & y_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ v_o \end{bmatrix}$$

On souhaite déterminer les coefficients de cette matrice. Pour déterminer le premier coefficient y_i, on sait par l'équation ci-dessus que :

$$i_i = y_i v_i + y_r v_o$$

Cette équation comporte deux inconnues y_i et y_r. Pour ne garder qu'une seule inconnue y_i au sein de l'équation, il suffit de mettre à zéro le second terme en mettant la sortie en court-circuit ($v_o = 0$). On met également une source de tension virtuelle v_{test} à l'entrée du quadripôle, comme représenté à la Figure 7.2.

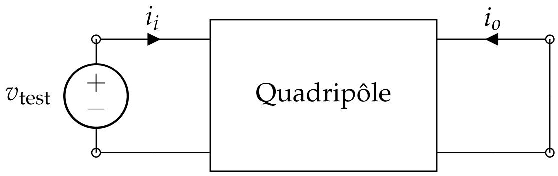


Fig. 7.2 – Détermination du coefficient y_i.

Le coefficient y_i est alors donné par :

$$y_i = \left. \frac{i_i}{v_{\text{test}}} \right|_{v_o = 0}$$

Séance 8

Circuits magnétiques couplés

Rappel

Dans cette séance d'exercices, nous introduisons deux nouveaux éléments de circuits :

- les circuits magnétiques couplés (avec deux bobines, comportant des inductances propres et mutuelles).
- les transformateurs idéaux (cas particulier des circuits magnétiques couplés).

Circuits magnétiques couplés

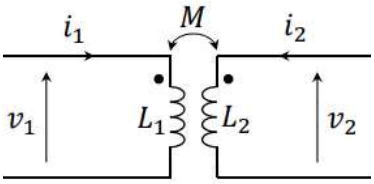


Fig. 8.1 – Circuit magnétique couplé (convention).

Chaque bobine génère un champ magnétique dû au courant qui la traverse, et intercepte le champ magnétique généré par l'autre bobine. Soit M, l'inductance mutuelle entre les deux bobines. Par la loi de Faraday, on peut écrire en régime sinusoïdal :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \overline{V}_1 & = & j\omega L_1 \, \overline{I}_1 \pm \, j\omega M \, \overline{I}_2 \\ \overline{V}_2 & = & \pm \, j\omega M \, \overline{I}_1 + j\omega L_2 \, \overline{I}_2 \end{array} \right.$$

Bornes homologues : Les bornes homologues servent à prendre le sens de bobinage en compte, elles sont indiquées par les «boules noires» sur les circuits.

- Lorsque les deux bobines sont bobinées selon la convention de la Figure 1, il y a lieu de prendre les signes + dans les équations ci-dessus.
- Lorsque les deux bobines sont bobinées dans des sens opposés (dans le cas de la Figure 1 : si la boule associée à L_2 se trouvait en-dessous de l'inductance), il y a lieu de prendre les signes - dans les équations ci-dessus.

Transformateurs idéaux

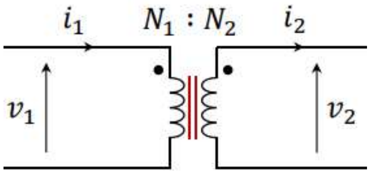


Fig. 8.2 – Transformateur idéal (convention). (Notez bien le sens de i_2)

Soit N_1, le nombre de tours au primaire du transformateur et N_2, le nombre de tours au secondaire. Pour un transformateur *idéal*, on peut écrire en régime sinusoïdal :

$$\frac{\overline{V}_1}{\overline{V}_2} = \pm\frac{1}{n} \qquad \frac{\overline{I}_1}{\overline{I}_2} = \pm n \qquad \text{avec } n = \frac{N_2}{N_1}$$

Bornes homologues : Selon les bornes indiquées à la Figure 2, il y a lieu de prendre le signe + dans les équations ci-dessus. Dans le cas contraire (si la boule du secondaire était située en bas), il y a lieu de prendre le signe -.

Manipulations primaire-secondaire dans un transformateur. Soit un circuit contenant un transformateur idéal de rapport $1 : n$. Si le circuit contient de nombreux éléments, il est possible de le simplifier en faisant passer les éléments de circuits du secondaire au primaire, ou du primaire au secondaire :

- Les impédances peuvent être déplacées du secondaire au primaire (resp. du primaire au secondaire) à condition de les diviser (resp. multiplier) par n^2.

Rappel

- Les sources de tension peuvent être déplacées du secondaire au primaire (resp. du primaire au secondaire) à condition de les diviser (resp. multiplier) par $\pm n$ (selon le sens des bornes).
- Les sources de courant peuvent être déplacées du secondaire au primaire (resp. du primaire au secondaire) à condition de les multiplier (resp. diviser) par $\pm n$ (selon le sens des bornes).

Pour des explications plus détaillées, voir section 10.1 du livre de référence.

Séance 9

Triphasé

Rappel

On considère la forme générale d'un circuit triphasé représentée à la Figure 9.1.

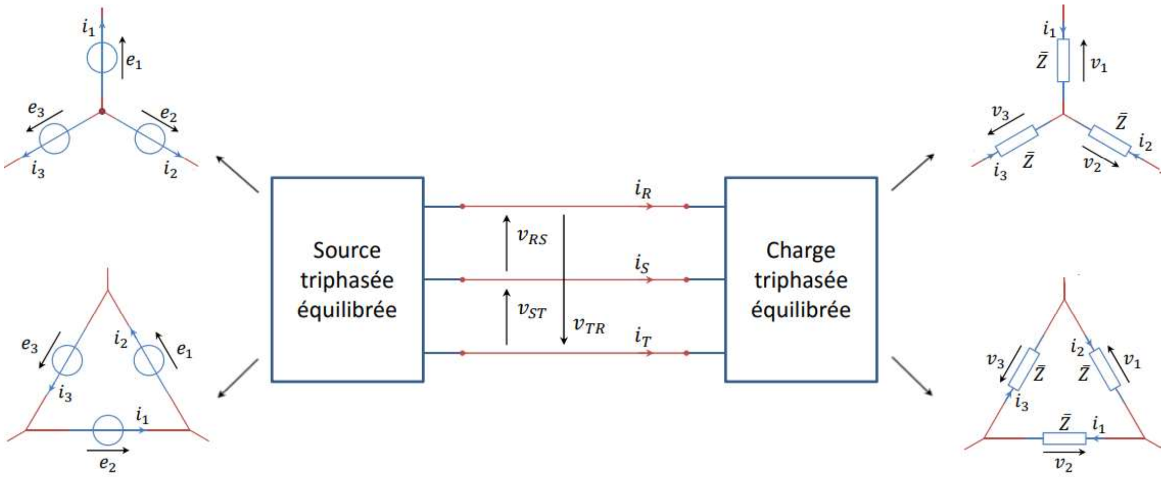


Fig. 9.1 – Représentation générale d'un circuit triphasé.

Le circuit triphasé ci-dessus est constitué :

- d'une *source triphasée*, qui peut être représentée comme la connexion en triangle ou en étoile de trois sources monophasées. La source triphasée est dite *équilibrée* car les trois sources monophasées la constituant sont de même amplitude et fréquence, et déphasées de $\frac{2\pi}{3}$ les unes par rapport aux autres.
- d'une *charge triphasée*, qui peut être représentée comme la connexion en triangle ou en étoile de trois impédances monophasées. La charge triphasée est dite *équilibrée* car les trois charges monophasées la constituant sont de même valeur.
- de trois fils établissant les connexions entre la source et la charge triphasée.

Lorsque l'on décrit les grandeurs électriques au sein d'un circuit triphasé, il y a lieu de distinguer les grandeurs de *phase* et les grandeurs de *ligne* :

- *courants de ligne* : courants circulant sur les trois fils (i_R, i_S et i_T sur la figure ci-dessus).
- *tensions de ligne* : tensions mesurées en prenant deux à deux les fils de la liaison (v_{RS}, v_{TR} et v_{ST}).
- *courants de phase* : courants circulant dans les sources ou impédances constituant la source ou la charge triphasée (i_1, i_2 et i_3).
- *tensions de phase* : tensions mesurées sur les sources ou impédances constituant la source ou la charge triphasée (e_1, e_2 et e_3).

À noter : Si l'on donne une tension sans préciser sa nature dans un énoncé, il faut considérer par défaut qu'il s'agit d'une **tension de ligne**. Sauf indication contraire, les grandeurs sont toujours données **en valeur efficace**.

Rappel

Équivalent monophasé

Un système triphasé équilibré en régime sinusoïdal peut être complètement caractérisé par un circuit équivalent monophasé. Ce circuit équivalent monophasé est le circuit monophasé obtenu en prenant une phase du circuit triphasé dont les sources et les charges ont été remplacées par leurs équivalents étoile.

- Soit une source triphasée équilibrée connectée en triangle. Soit $\bar{V} = \bar{V}_\Delta e^{j\phi_\Delta}$ la valeur d'une source monophasée de cette source triphasée (les deux autres étant déphasées de $\frac{2\pi}{3}$). Cette source peut être remplacée par une source triphasée équivalente étoile. La valeur des sources monophasées constituant l'étoile sera donnée par $\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{V}_\Delta e^{j(\phi_\Delta - \frac{\pi}{6})}$.
- Soit une charge triphasée équilibrée connectée en triangle, et soit Z_Δ la valeur de chaque impédance monophasée de cette charge. Cette charge peut être remplacée par une charge équivalente étoile dont l'impédance d'une branche est donnée par $Z_Y = Z_\Delta/3$.

Séance 10

Laplace I

Rappel

L'objectif de cette séance est de se familiariser à l'utilisation de la transformée de Laplace pour l'analyse de circuits en régime continu ou transitoire.

Transformée de Laplace (Section 13.1-13.5)
La transformée de Laplace est une opération permettant de transformer une fonction $f(t)$ en une image unique $F(s)$ définie dans le domaine dit de Laplace (avec $s = \sigma + j\omega,\ \ \sigma, \omega \in \mathbb{R}$). Le mapping inverse, du domaine de Laplace au domaine temporel, est réalisé en appliquant la transformée de Laplace inverse. La transformée de Laplace unilatérale et son inverse sont définies de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mathscr{L}_u\big(f(t)\big) = F_u(s) \triangleq \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt, \\ \mathscr{L}_u^{-1}\big(F_u(s)\big) = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F_u(s)e^{st}ds \quad (\sigma_0 \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

Pour rappel, la transformée de Laplace $F(s)$ d'un signal est toujours associée à une *région de convergence* (ROC). Cette région est l'ensemble des points du plan complexe pour lesquels $F(s)$ prend une valeur finie.

Méthodologie
Les exercices 1 à 4 de cette séance suivent tous la même méthodologie de résolution :

1. *Calcul de la fonction de transfert du circuit.*

   Pour rappel, la fonction de transfert d'un circuit est définie comme $H(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)}$. On utilisera utilement le fait que dans le domaine de Laplace, les impédances des résistances, inductances et capacités sont respectivement données par R, sL et $\frac{1}{sC}$. On notera également que les amplificateurs opérationnels présents dans cette séance sont tous idéaux, ce qui implique aux bornes d'entrée :

$$\begin{aligned} v_+ &= v_- \\ i_+ &= i_- = 0 \end{aligned}$$

2. *Calcul de la sortie (réponse) du circuit dans le domaine temporel.*
   Afin d'obtenir la sortie du circuit, il y a d'abord lieu de calculer la transformée de Laplace $V_{in}(s)$ du signal d'entrée. Ce calcul peut être effectué en utilisant les tables de transformées disponibles dans le formulaire du cours. On peut ensuite calculer la sortie dans le domaine de Laplace $V_{out}(s) = H(s)V_{in}(s)$. Il faut pour terminer effectuer la transformée inverse de $V_{out}(s)$ afin d'obtenir le signal de sortie $v_{out}(t)$ dans le domaine temporel. Pour pouvoir utiliser les tables dans ce calcul de transformée inverse, il faut en général effectuer une décomposition en fraction simple de la fonction $V_{out}(s)$ au préalable (voir ci-dessous).

Rappel

Décomposition en fractions simples (Section 13.5) Soit une expression fractionnelle dont le numérateur est d'ordre M et le dénominateur d'ordre $N > M$. La décomposition en fractions simples permet d'identifier la fraction à une somme de fractions ne comportant qu'un seule pôle ,

$$H(s) = \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + ... + a_M s^M}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + ... + b_N s^N} \Longleftrightarrow H(s) = \sum_i \frac{A_i}{(s - p_i)^{n_i}}.$$

Les p_i dans l'expression décomposée représentent les racines du dénominateur.
Ci-dessous, un exemple simple pour un dénominateur du second ordre,

$$H(s) = \frac{s+1}{4 - 5s + s^2} \Leftrightarrow H(s) = \frac{s+1}{(s-1)(s-4)} \Leftrightarrow H(s) = \frac{A_0}{s-1} + \frac{A_1}{s-4}.$$

En mettant la dernière expression au même dénominateur, on obtient

$$H(s) = \frac{(A_0 + A_1)s - (4A_0 + A_1)}{(s-1)(s-4)}.$$

En identifiant les coefficients du polynôme du numérateur avec l'expression factorisée précédemment obtenue, on trouve rapidement $A_0 = -2/3$ et $A_1 = 5/3$.

Séance 11

Laplace II

Rappel

L'objectif de cette seconde séance sur la transformée de Laplace est d'étudier des circuits en régime transitoire comprenant des *conditions initiales*. La transformée de Laplace *unilatérale* permet en effet de facilement prendre en compte ces conditions.

Transformée de Laplace unilatérale Soit $f(t)$ une fonction causale (c'est-à-dire définie pour $t > 0$) dans le domaine temporel. La transformée de Laplace unilatérale de cette fonction est donnée par

$$\mathscr{L}_u(f(t)) = F_u(s) \triangleq \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

La transformée unilatérale de la dérivée de $f(t)$ est donnée par

$$\mathscr{L}_u\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = sF_u(s) - f(0^-)$$

où $f(0^-)$ représente, dans le cadre de cette séance, les conditions initiales du circuit.

Conditions initiales (Section 14.2) Soit un circuit dont le régime transitoire commence en $t = 0$. Les relations entre tensions et courants des éléments de ce circuit sont détaillées dans le tableau ci-dessous :

Elément de circuit	Domaine temporel	Domaine de Laplace
Résistance	$v_R(t) = Ri_R(t)$	$V_R(s) = RI_R(s)$
Inductance	$v_L(t) = L\dfrac{di_L(t)}{dt}$	$V_L(s) = L\big(sI_L(s) - i_L(0^-)\big)$
Capacité	$i_C(t) = C\dfrac{dv_C(t)}{dt}$	$I_C(s) = C\big(sV_C(s) - v_C(0^-)\big)$

Méthodologie (Section 13.8, 14.3)

1. Supposer le circuit en situation de régime en $t < 0$ et déterminer son point de fonctionnement afin d'obtenir les conditions initiales (pour les capacités $v_C(0^-) = v_C(0^+)$ et pour les inductances $i_L(0^-) = i_L(0^+)$). Si seules des sources DC (non-commandées) alimentent celui-ci, les capacités peuvent être mises en circuit ouvert et les inductances en court-circuit. Si le circuit est en régime sinusoïdal, il faut le résoudre en utilisant la notion de phaseur (cfr Séance 3).
2. Une fois les conditions initiales connues, obtenir un système d'équations dans le domaine de Laplace en appliquant les lois de Kirchhoff. Il y a lieu à ce stade de bien tenir compte de ces conditions initiales dans les équations obtenues.
3. Résoudre le système d'équations pour déterminer l'expression de la/les grandeur(s) demandée(s), toujours dans le domaine de Laplace.
4. Finalement, repasser dans le domaine temporel à l'aide de la transformée de Laplace inverse, afin d'observer la/les grandeur(s) dans le domaine temporel. Une décomposition en fractions simples pourrait être requise (cfr. Séance 10).