LELEC1755

Partie « Lignes de transmission »

CM2

Eléments de circuits localisés

Lien entre lois de Maxwell et Kirchhoff

Matière traitée dans le 2e module LELEC1755

1. Equivalents EM des lemmes de Kirchhoff

- ⇨ **circulation de E et conservation de la charge**
- ⇨ **lois des mailles et des noeuds**

2. Résistance

3. Capacité

4. Inductance et reluctance

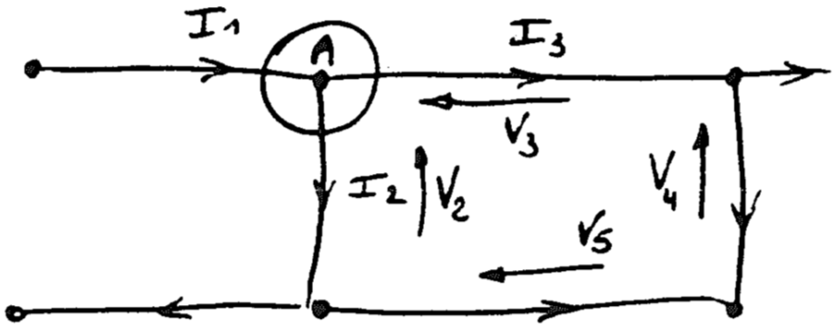
- ⇨ **inductance propre**
- ⇨ **inductance mutuelle**
- ⇨ **reluctance**

1. Rappel: lemmes de Kirchhoff

Théorie des circuits localisés

- **Premier lemme de Kirchoff: loi des nœuds**
  → la somme des courants arrivant à un noeud est nulle

- **Deuxième lemme de Kirchoff: loi des mailles**
  → la somme algébrique des tensions le long d'une maille est nulle



$$\sum_n I_n = 0$$

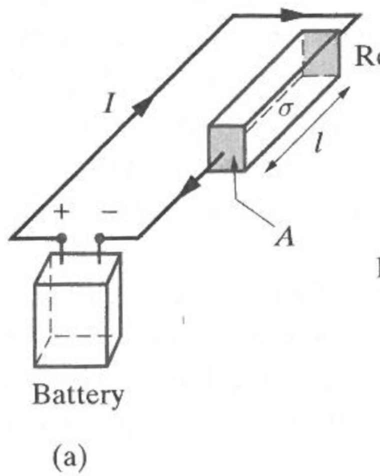
$$V_2 - V_3 - V_4 + V_5 = 0$$

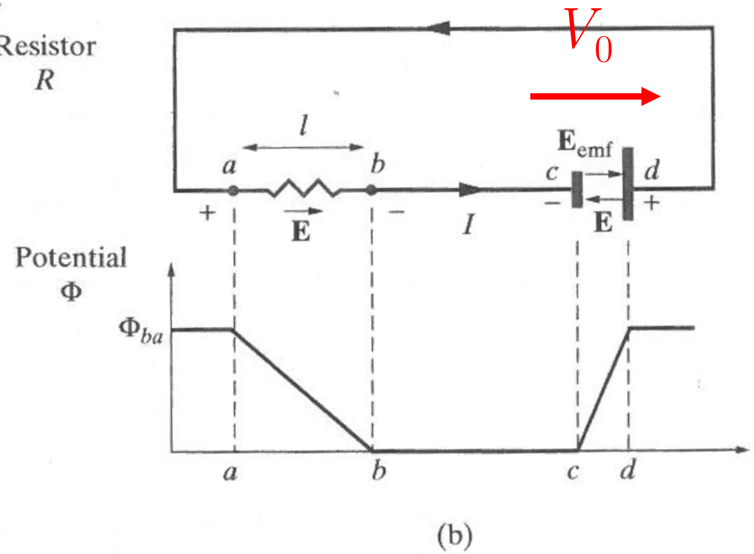
Peut-on retrouver ces lemmes à partir des équations de Maxwell ?

1. Rappel: force électromotrice

Force électromotrice d'une batterie

Exemple: une batterie est connectée à un barreau conducteur





- **Au sein du barreau**
  champ électrostatique E
  courant J

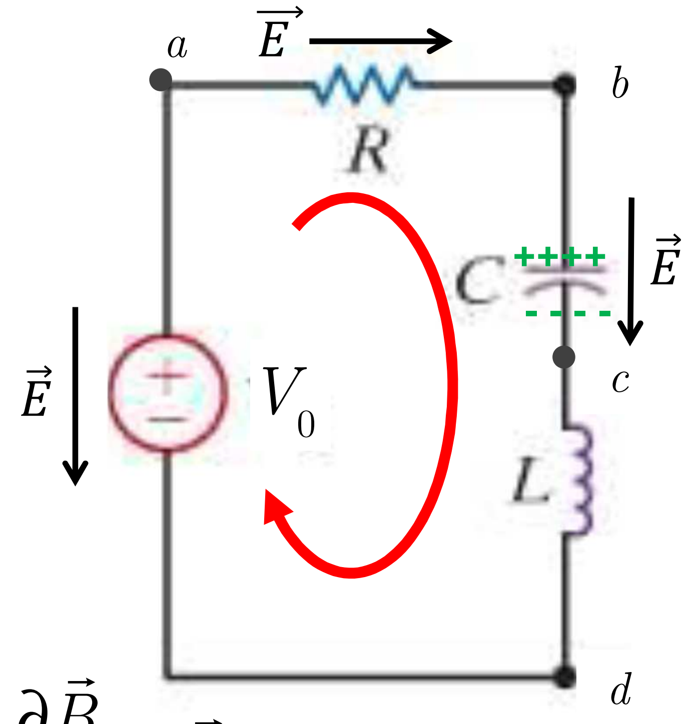
- **Au sein de la batterie**
  force électromotrice (créée par le processus chimique au sein de la batterie)
  champ électrostatique créé par les charges statiques dues à la fem E = -E_{mot}

- **Circulation de** E

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} + \underbrace{\int_c^d \vec{E}\cdot d\vec{l}}_{= -\,\mathrm{fem_{bat}}} = 0 \Rightarrow \int_a^b \frac{\vec{J}}{\sigma}\cdot d\vec{l} - V_0 = 0$$

- **Champ électromoteur:** $\mathrm{fem_{batt}} = V_0$ ➡ $\boxed{V_0 = -\int_c^d \vec{E}\cdot d\vec{l} = +\int_c^d \vec{E}_{mot}\cdot d\vec{l}}$

1. Equivalent EM des lemmes de Kirchhoff



Circuit RLC alimenté par une source de tension

➢ **Circulation de E (Lenz-Faraday)**

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_d^a \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\oint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$\vec{E}_C = -\nabla \phi_C$

conducteur parfait, contour le long de L

source de tension

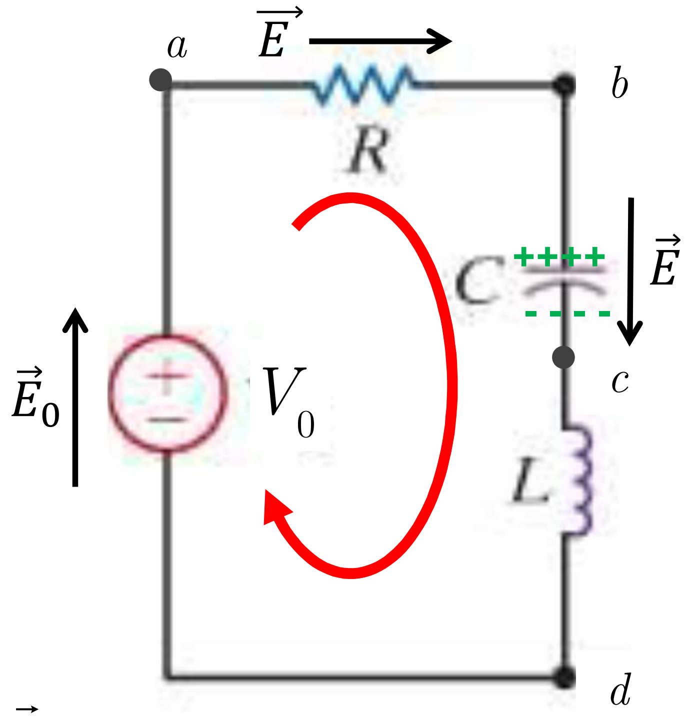
Stokes, $\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$

$$\int_a^b \frac{\vec{J}_R}{\sigma}\cdot d\vec{l} + \int_c^b \nabla \phi_C \cdot d\vec{l} + \underbrace{\int_c^d \vec{E}\cdot d\vec{l}}_{=0\ !!!} - V_0 = -\oint \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\cdot d\vec{l}$$

Loi des mailles

$$\Rightarrow \int_a^b \frac{\vec{J}_R}{\sigma}\cdot d\vec{l} + \int_c^b \nabla \phi_C \cdot d\vec{l} + \oint \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\cdot d\vec{l} = V_0 \overset{?}{\Leftrightarrow} RI + \frac{1}{C}\int I\, dt + L\frac{dI}{dt} = V_0$$

1. Equivalent EM des lemmes de Kirchhoff



Circuit RLC alimenté par une source de tension

- **Autre formulation**
  - **champ lié aux charges/courants** $\vec{E} = -\nabla\phi - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$
  - **champ (électromoteur) de source** $\vec{E}_0$

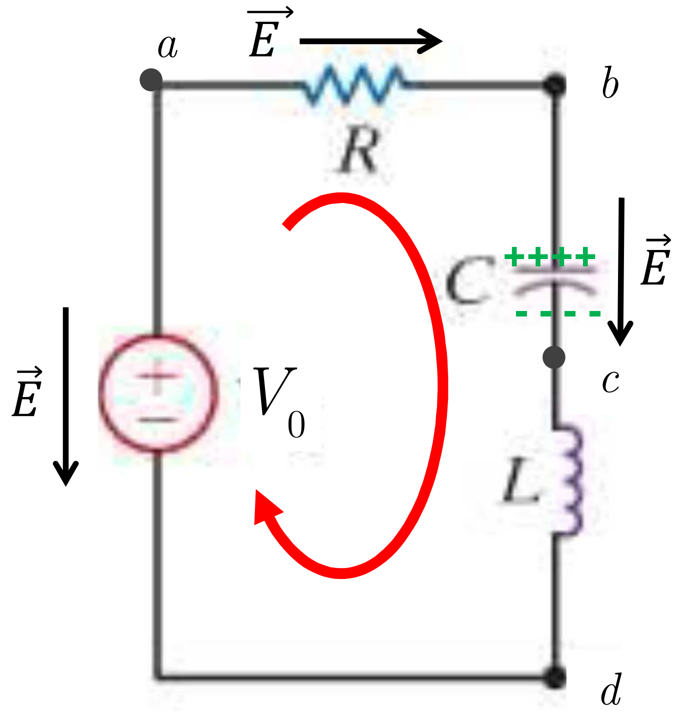
    (n'existe que dans la source, $V_0 = \int_d^a \vec{E}_0 \cdot d\vec{l}$ **)**

  - **champ total** $\vec{E}_t = \vec{E}_0 + \vec{E} = \dfrac{\vec{J}}{\sigma} \Rightarrow \vec{E}_0 = \dfrac{\vec{J}}{\sigma} - \vec{E}$

Loi des mailles (KVL)

$$\Rightarrow \vec{E}_0 = \frac{\vec{J}}{\sigma} + \nabla\phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \overset{?}{\Leftrightarrow} \quad V_0 = RI + \frac{1}{C}\int I\,dt + L\frac{dI}{dt}$$

1. Equivalent EM des lemmes de Kirchhoff



Circuit RLC alimenté par une source de tension

- **Conservation de la charge (pas de courant de surface)**

$$\vec{n}\cdot\left(\vec{J}_1-\vec{J}_2\right)+\frac{\partial\rho_S}{\partial t}=0 \Rightarrow -\vec{J}_R+\frac{\partial\rho_S}{\partial t}=0$$

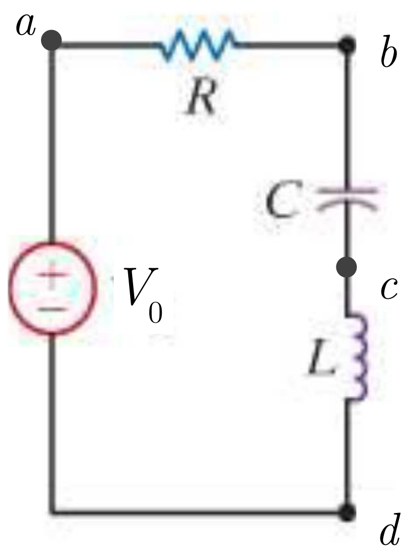
$$\Rightarrow \vec{J}_R=\frac{\partial\rho_S}{\partial t}=\frac{\partial(\vec{n}\cdot\vec{D})}{\partial t}\overset{?}{\Leftrightarrow} I=C\frac{dV_C}{dt}$$

Loi des noeuds (KCL)
aux point b (et c)

Les équivalences EM des lemmes de Kirchhoff permettent de définir les notions de résistance, capacité et inductance pour tout type de structure

2. Résistance

Définition

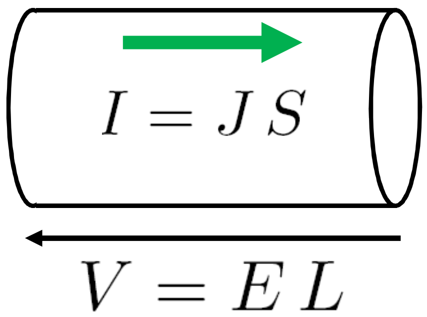


Courant de conduction et conductivité $\vec{J} = \sigma \vec{E}$

La conductivité σ

- **est indépendante du champ et du courant**
- **dépend de la température**
- **est isotrope dans les métaux**

Résistance



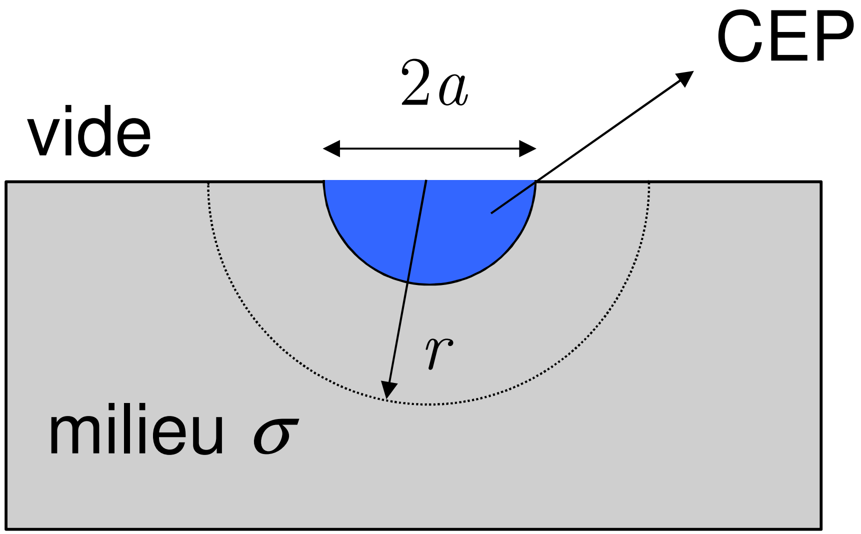
$$R = \frac{L}{\sigma\, S}$$ **(voir Physique 1)**

De manière générale

$$\Rightarrow \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_c^b \nabla\phi_C \cdot d\vec{l} + \oint \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\cdot d\vec{l} = V_0 \Leftrightarrow RI + \frac{1}{C}\int I\, dt + L\frac{dI}{dt} = V_0$$

$$RI = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = \frac{\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}}{\int_S \vec{J}\cdot d\vec{S}} = \frac{-\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{l}}{\int_S \sigma\vec{E}\cdot d\vec{S}} = \frac{\Delta V_R}{I}}$$

Exemple: résistance d'une électrode hémisphérique



$$r > a : \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

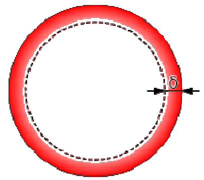
$$\Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 E_r\right) = 0 \Rightarrow E = \frac{E_0}{r^2}$$

$$R = \frac{-\int_\infty^a \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\int_S \sigma \vec{E} \cdot d\vec{S}} = \frac{-\int_\infty^a \left(E_0 / r^2\right) dr}{\sigma \left(E_0 / r^2\right) 2\pi r^2} = \frac{1}{\sigma} \int_a^\infty \frac{dr}{2\pi r^2} = \frac{1}{2\pi\sigma a}$$

- **pour σ = 1 S/m et a = 10 cm → R = 1.6 Ω**

Dans un bon conducteur en courant alternatif

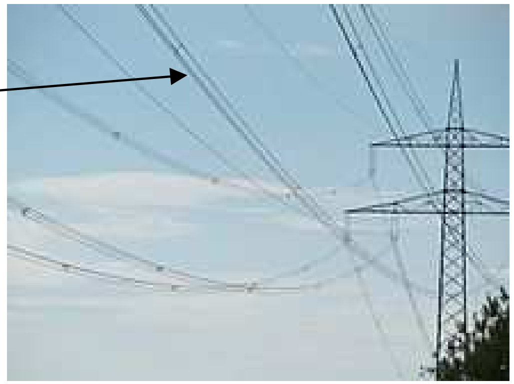
- **On peut montrer (cfr. CM3) que les champs EM sont rejetés à la surface, ils ne pénètrent pas au-delà de quelques « profondeurs de peau »**

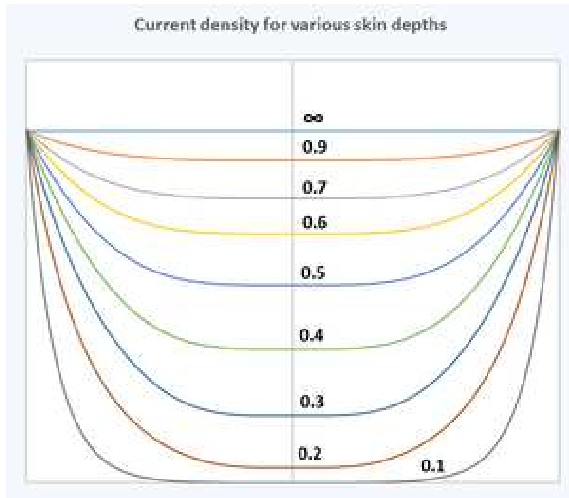


$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$$

- **Le coefficient δ représente la profondeur de peau, c'est-à-dire la profondeur à laquelle le champ a diminué de e^{-1} → à 5 profondeurs de peau, le champ est réduit à 1% du champ à la surface du métal**

Voilà pourquoi on met 3 fils au lieu d'un seul plus gros pour le transport d'électricité !





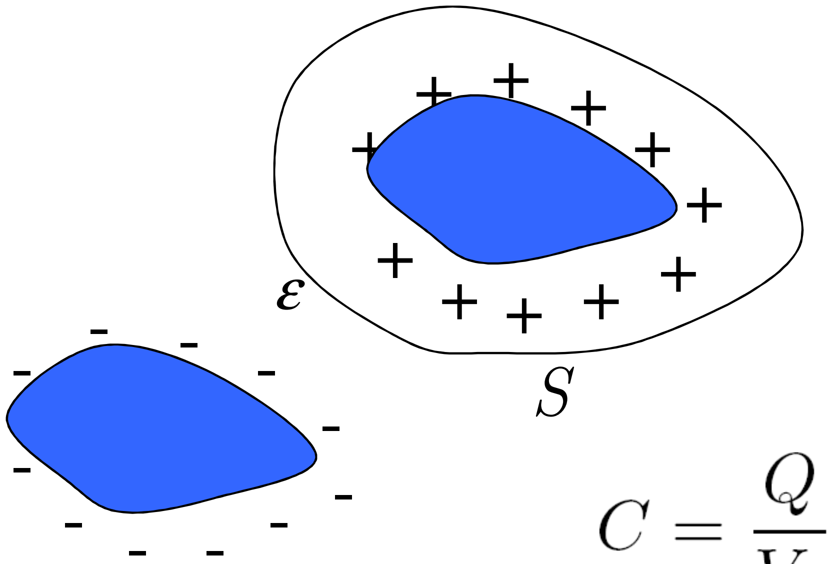
Répartition du courant dans un fil, pour différentes valeurs du rapport δ/a, a étant le rayon du fil (l'infini représente le courant DC)

Pour le cuivre, δ vaut 9 mm à 50 Hz,7 μm à 100 MHz et 0,7 μm à 10 GHz!

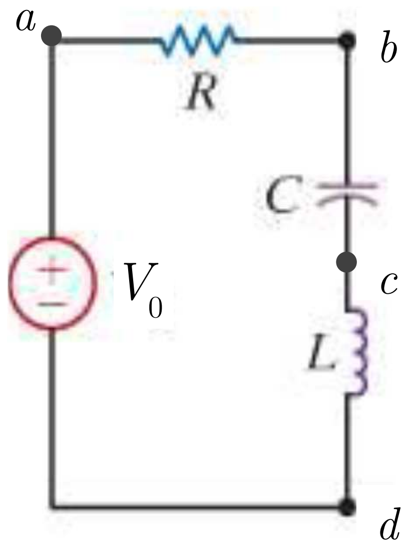
3. Capacité

Définition

Effet capacitif



$$C = \frac{Q}{V_0}$$



- **La capacité exprime le rapport entre la charge et la différence de potentiel**
- **Or, la charge est l'intégrale du courant**

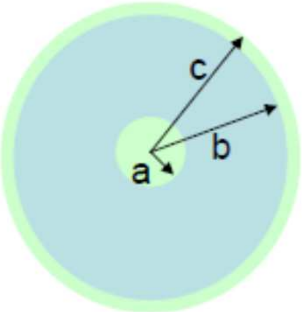
$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \Leftrightarrow I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, dv = -\frac{\partial Q}{\partial t} \Leftrightarrow Q = -\int I dt$$

$$\Rightarrow \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_c^b \nabla \phi_C \cdot d\vec{l} + \oint \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l} = V_0 \Leftrightarrow RI + \frac{1}{C}\int I\, dt + L\frac{dI}{dt} = V_0$$

$$\frac{1}{C}\int I\, dt = \int_c^b \nabla \phi_C \cdot d\vec{l} \quad \Rightarrow \boxed{C = -\frac{Q}{\int_c^b \nabla \phi_C \cdot d\vec{l}} = -\frac{\int_S \vec{D} \cdot d\vec{S}}{-\int_c^b \vec{E} \cdot d\vec{l}} = \frac{\int_S \varepsilon \vec{E} \cdot d\vec{S}}{\int_c^b \vec{E} \cdot d\vec{l}}}$$

Exemple 1: condensateur plan $C = \dfrac{Q}{V_0} = \dfrac{\epsilon\, S}{d}$

Exemple 2: capacité cylindrique (cable coaxial)



$$r > a : \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rE_r\right) = 0 \Rightarrow E = \frac{E_0}{r}$$

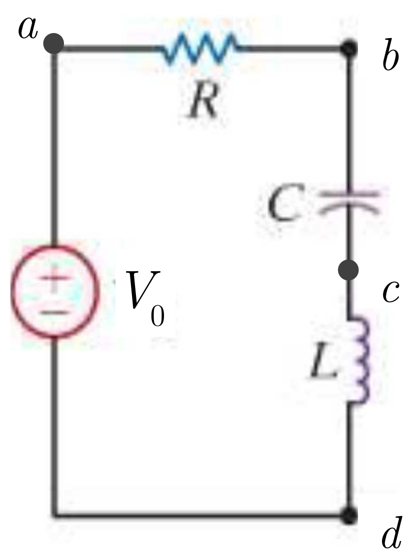
$$C = \frac{\int_S \varepsilon \cdot \left(E_0 / r\right) 2\pi r dz}{\int_a^b E_0 / r \, dr} = \frac{2\pi\varepsilon\ell}{\int_a^b 1/r \, dr} = \frac{2\pi\varepsilon\ell}{\ln\left(b/a\right)}$$

Exemple 3: capacité sphérique

$$C = \frac{\varepsilon \cdot \left(E_0 / r^2\right) 4\pi r^2}{\int_a^b E_0 / r^2 \, dr} = \frac{4\pi\varepsilon}{\int_a^b 1/r^2 \, dr} = \frac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

4. Inductance

Définition



$$\Rightarrow \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_c^b \nabla\phi_C \cdot d\vec{l} + \oint \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\cdot d\vec{l} = V_0$$

$$\Leftrightarrow RI + \frac{1}{C}\int I\,dt + L\frac{dI}{dt} = V_0$$

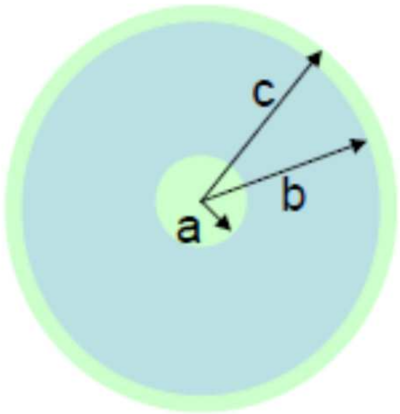
Si le chemin d'intégration ne varie pas dans le temps

$$\Rightarrow \quad \oint \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\cdot d\vec{l} = \frac{\partial}{\partial t}\oint \vec{A}\cdot d\vec{l} = L\frac{dI}{dt} \Leftrightarrow LI = \oint \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{S} = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad L = \frac{\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}}{I} = \frac{\Phi}{I} = \frac{\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}}{\oint H\cdot d\vec{l}}}$$

- **L'inductance exprime le rapport entre le flux magnétique et le courant qui a créé ce flux**

Exemple 1: cable coaxial



$$a < r < b : \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial \left(r H_\phi \right)}{\partial r} = 0 \Rightarrow H_\phi = \frac{I}{2\pi r}$$

$$L = \frac{\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}}{I} = \frac{\int_S \mu \cdot \left(I/2\pi r \right) drdz}{I} = \frac{\mu \ell}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu \ln \left(b/a \right) \ell}{2\pi}$$

Exemple 2: solénoïde et toroïde

$$L_{sol} = \frac{\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}}{I} = \frac{N\Phi}{I} = N^2\mu\frac{\pi a^2}{\ell}$$

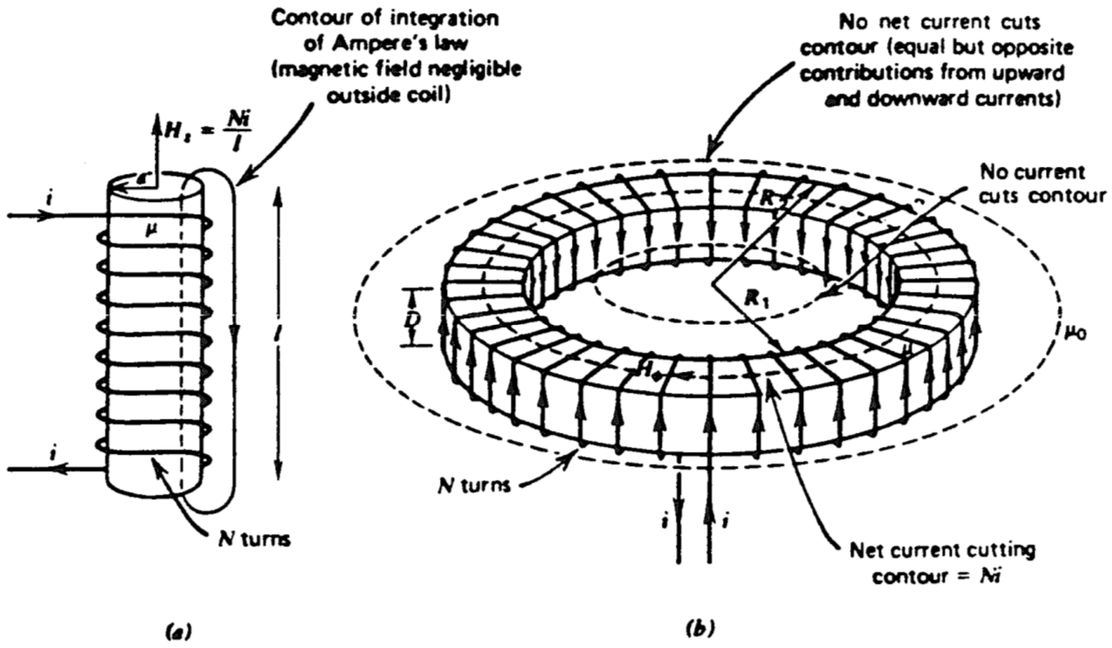


Figure 6-10 Inductances. (*a*) Solenoidal coil; (*b*) toroidal coil.

$$L_{tor} = \frac{\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}}{I} = N\frac{\int_S \mu\cdot\left(NI/2\pi r\right)D\,dr}{I}$$

$$= \frac{\mu N^2 D}{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r} = \frac{\mu N^2 D}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

4. Inductance

Inductance mutuelle

Rappel Physique 2

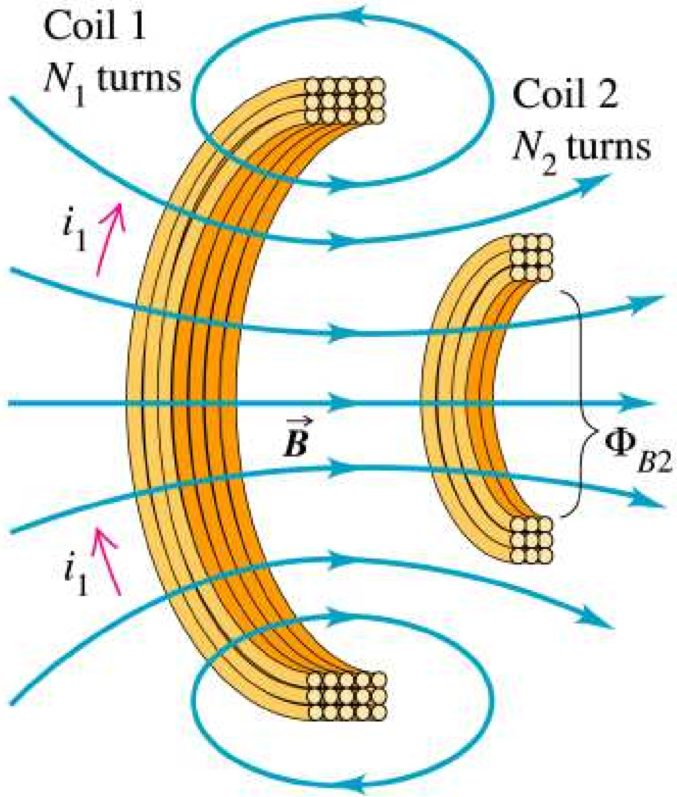
Bobine 1 intercepte $N_1\Phi_1(I_1) \Rightarrow L_1 = \dfrac{N_1\Phi_1(I_1)}{I_1}$

Bobine 2 intercepte $N_2\Phi_2(I_2) \Rightarrow L_2 = \dfrac{N_2\Phi_2(I_2)}{I_2}$

Bobine 2 intercepte aussi $N_2\Phi_1(I_1) \Rightarrow M_{21} = \dfrac{N_2\Phi_1(I_1)}{I_1}$

=

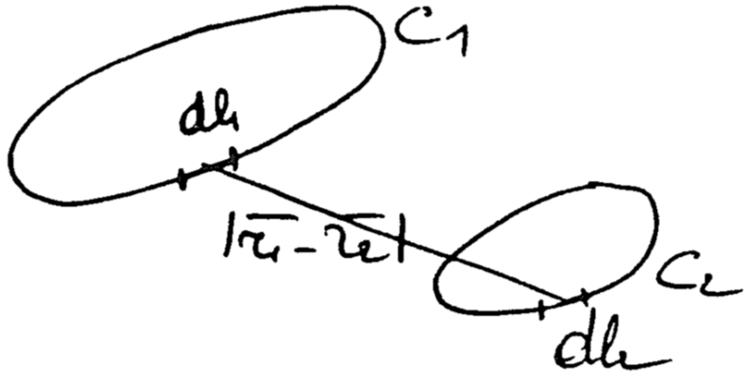
Bobine 1 intercepte aussi $N_1\Phi_2(I_2) \Rightarrow M_{12} = \dfrac{N_1\Phi_2(I_2)}{I_2}$



Copyright © Addison Wesley Longman, Inc.

Définition formelle

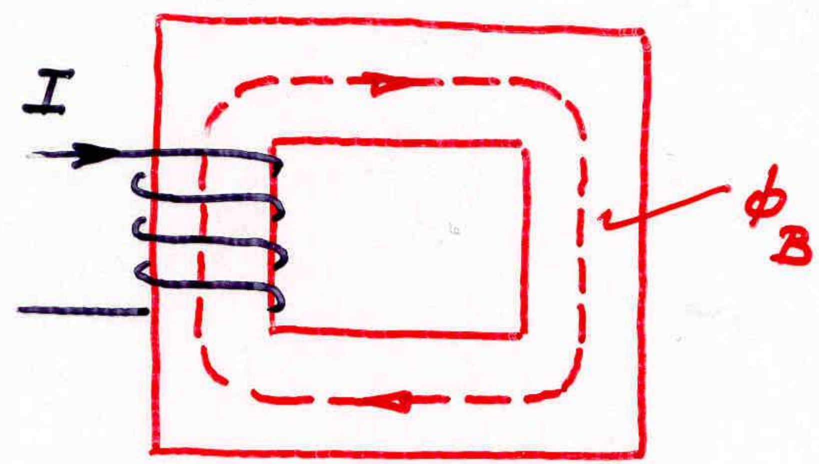
$$L_{12} = L_{21} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{C_1} \int_{C_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$



Circuit magnétique sans entrefer

➢ **Application de la loi d'Ampère**

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot \mathrm{d}\,\vec{l} \cong H.l = NI$$



→ **valable pour tout contour !**

$$H_e \cong H_i$$

dans le noyau $B_i = \mu_o \mu_r H_i$ $\Rightarrow$ si $\mu_r >> 1$ alors $B_i >> B_e$

à la surface (latérale) $B_e = \mu_o H_e$ **en dehors** $B_{ext} \cong 0$

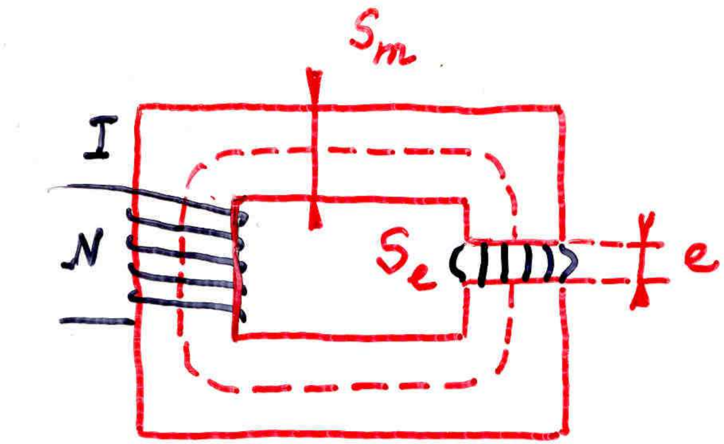
Circuit magnétique avec entrefer

➢ **Application de la loi d'Ampère**

conservation du flux

$$\Phi_B = \int_S \overrightarrow{B} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} \cong B.S$$

$$S_e \cong S_m \cong S \Rightarrow \quad B_e \cong B_m \cong B$$



loi d 'Ampère

$$\oint_\Gamma \overrightarrow{H} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{l} \cong H_m.L + H_e.e = NI$$

$$B_i = \mu_o \mu_r H_m$$

$$\text{Si } \mu_r \gg 1 \Rightarrow H_e \gg H_m$$

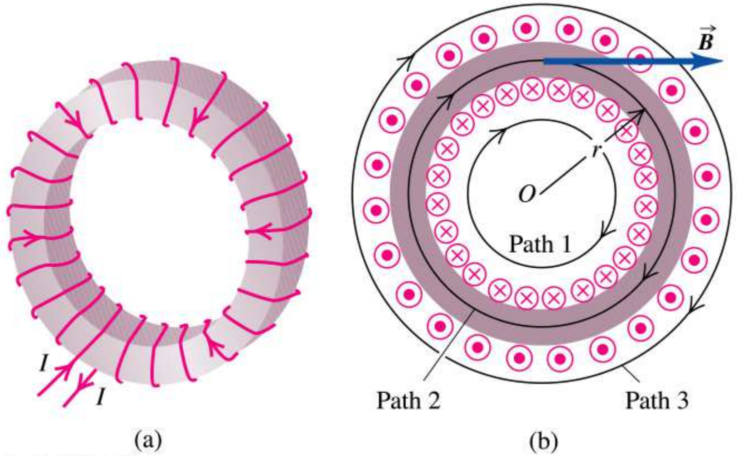
$$B_e = \mu_o H_e$$

Force magnétomotrice et réluctance

Force magnétomotrice ≡ circulation du champ magnétique [At]

- **Pour un tore circulaire (sans entrefer), on a dans le matériau**

$$B_\phi = \mu_r \mu_0 \frac{NI}{2\pi R} \qquad (a << R)$$



Copyright © Addison Wesley Longman, Inc.

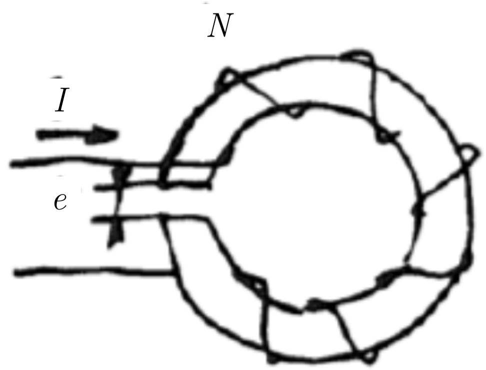
- **Avec un entrefer**

$$\Phi_B = \int_S \overrightarrow{B} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} \cong B.S$$

$$S_e \cong S_m \cong S \Rightarrow \; B_e \cong B_m \cong B$$

$$\oint_\Gamma \overrightarrow{H} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{l} \cong H_m.L + H_e.e = NI$$

$$B_\phi = \mu_r \mu_0 \frac{NI}{(2\pi R - e) + \mu_r e}$$



Force magnétomotrice et réluctance

On peut en déduire un schéma équivalent en écrivant la relation sous la forme

$$\phi = \frac{\mathcal{F}}{\frac{2\pi R - e}{\mu A} + \frac{e}{\mu_0 A}} = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}_m + \mathcal{R}_e}$$

- $\mathcal{R}_m$ **est la reluctance du noyau**
- $\mathcal{R}_e$ **est la reluctance de l'entrefer**
- $\mathcal{F} = NI$ **est la force *magnéto-motrice***

Loi d'Hopkinson

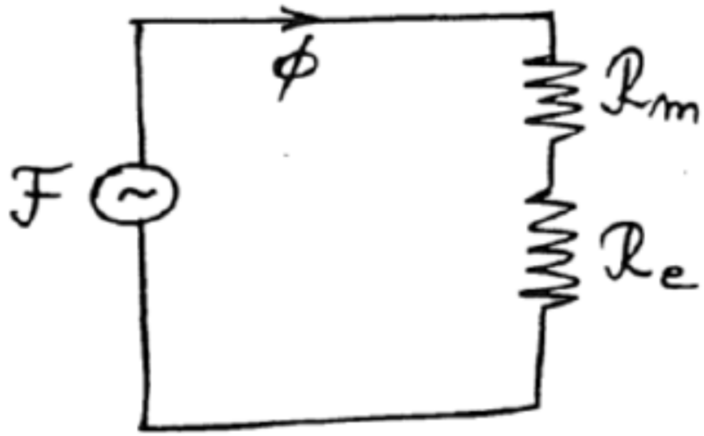
$$\mathcal{F} = \mathcal{R}\phi$$

- **Ressemble à la loi d'Ohm**

4. Inductance et reluctance

Circuit équivalent

$$\boxed{\mathcal{R} = \frac{\oint \vec{H} \cdot d\vec{l}}{\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}} = \frac{\ell}{\mu_o \mu_r A}}$$



- La réluctance de l'entrefer est généralement beaucoup plus grande que celle d'un noyau magnétique

- Lien entre reluctance et inductance d'un circuit magnétique

$$\mathcal{R} = \frac{NI}{\phi} \qquad L = \frac{N\phi}{I} \qquad \Rightarrow \mathcal{R} = \frac{N^2}{L}$$