

Séance 5

Solutions - Bode II

Exercice 1

1. On note V_x la tension au noeud central du circuit, comme représenté à la Figure 5.1. Sous l'hypothèse que l'amplificateur opérationnel est idéal, on considère que la borne d'entrée négative de l'amplificateur se trouve à la masse. On écrit ensuite des lois des courants de Kirchhoff (KCL)

- Au noeud V_x :

$$\frac{V_{in} - V_x}{R_1} = j\omega C_1(V_x - V_{out}) + j\omega C_2 V_x + \frac{V_x}{R_3}.$$

- A la borne d'entrée négative de l'amplificateur opérationnel :

$$j\omega C_2 V_x = -\frac{V_{out}}{R_2}.$$

Sur base de la seconde équation, on déduit la relation entre V_x et V_{out}

$$V_x = \frac{-V_{out}}{j\omega R_2 C_2}.$$

En substituant maintenant V_x dans la première équation, il est possible de faire apparaître le gain en tension du montage

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{-j\omega \frac{R_2 C_2}{1+R_1/R_3}}{1 + j\omega \frac{R_1(C_1+C_2)}{1+R_1/R_3} + (j\omega)^2 \frac{R_1 C_1 R_2 C_2}{1+R_1/R_3}}.$$

On peut écrire cette fonction de transfert sous la forme canonique

$$H(j\omega) = \frac{-j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}.$$

avec les paramètres

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1 + R_1/R_3}{R_1 C_1 R_2 C_2}}, \quad \zeta = \frac{\omega_0 R_1 (C_1 + C_2)}{2(1 + R_1/R_3)}, \quad \omega_1 = \frac{1 + R_1/R_3}{R_2 C_2}.$$

2. Les valeurs des différents composants du circuit nous donnent :

$$\omega_0 = 5.48 \text{ krad s}^{-1}, \quad \zeta = 0.183, \quad \omega_1 = 3 \text{ krad s}^{-1}.$$

Le diagramme de Bode du circuit est donné à la Figure 5.2. Etant donné que le facteur d'amortissement ζ est inférieur à 1, un dépassement peut être observé à la fréquence ω_0 du dénominateur. Ce diagramme de Bode met par ailleurs en évidence le filtrage passe-bande de second ordre réalisé par ce circuit.

3. Le facteur de qualité et la bande passante pour des circuits résonnants sont donnés par

$$Q = \frac{1}{2\zeta} = 2.74, \quad \Delta\omega \simeq \frac{\omega_0}{Q} = 2\zeta\omega_0 = 2 \text{ krad s}^{-1}.$$

On fait ici l'hypothèse que la bande passante du filtre est la même que la bande passante liée à la résonance du dénominateur. En effet, cette formule n'est valable que pour un filtre caractérisé par une fonction de transfert canonique du second ordre. Pour être tout à fait correct, il faudrait trouver le point maximum de la fonction de transfert totale (ici autour de 13.9dB), trouver les fréquences des points à -3dB (autour de 10.9dB) de part et d'autre de ce maximum, et faire la différence de ces fréquences afin de trouver la bande. On notera que les points à -3dB sont un choix qui correspond à une puissance divisée par 2 par rapport au point maximum, et donc à une amplitude de sortie divisée par $\sqrt{2}$ par rapport à ce même point.

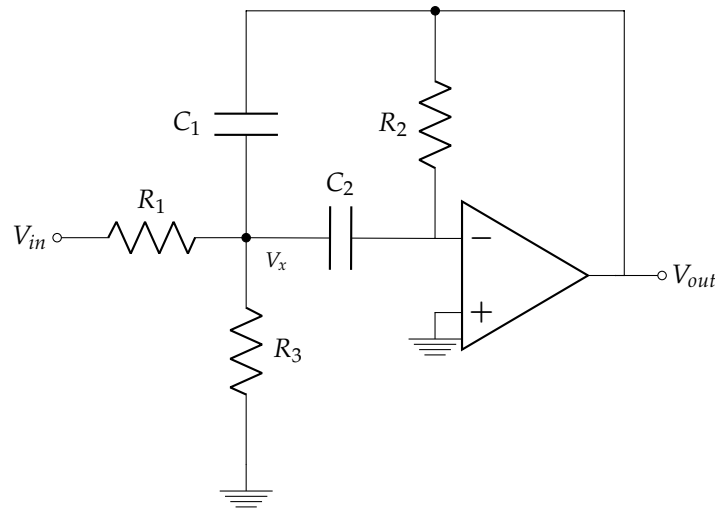


Fig. 5.1 – Schéma du filtre de Rauch.

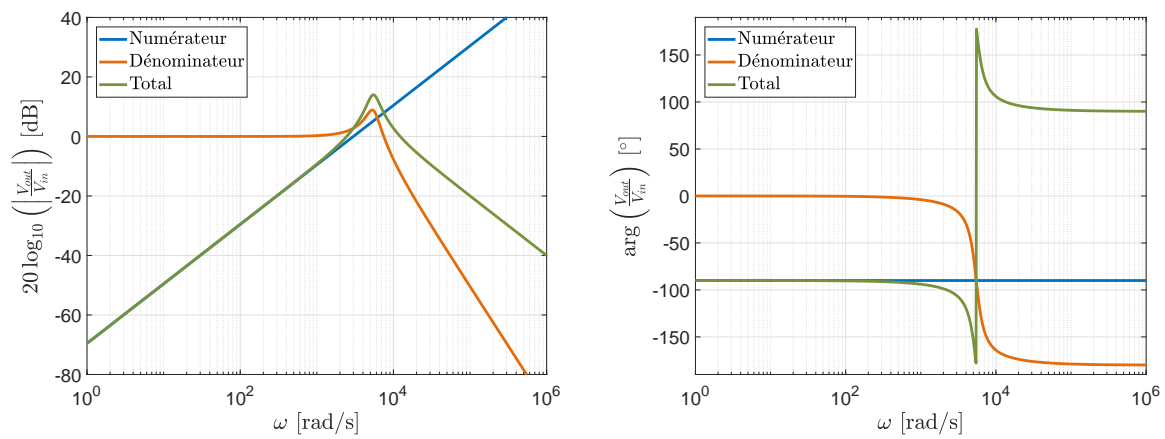


Fig. 5.2 – Diagramme de Bode.

Exercice 2

1. En redessinant le circuit, il est possible de mettre en évidence le fait que la tension de sortie V_{out} est prise entre deux diviseurs de tension auxquels est appliquée la tension d'entrée V_{in} . Pour la borne de sortie positive, nous obtenons

$$V_{out,+} = \frac{V_{in}}{2},$$

et pour la borne de sortie négative

$$V_{out,-} = \frac{j\omega R_2 C}{1 + j\omega R_2 C} V_i.$$

Finalement, sur base de ces 2 résultats, on obtient la fonction de transfert du filtre

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{V_{out,+} - V_{out,-}}{V_{in}} = \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{j\omega}{\omega_0}}{1 + \frac{j\omega}{\omega_0}}.$$

où la fréquence de coupure est donnée par $\omega_0 = \frac{1}{R_2 C}$. Sur base de cette fonction de transfert, on constate que la norme vaudra toujours $\frac{1}{2}$ et ce peu importe la fréquence. Cela correspond à un amortissement de -6dB sur le diagramme de Bode.

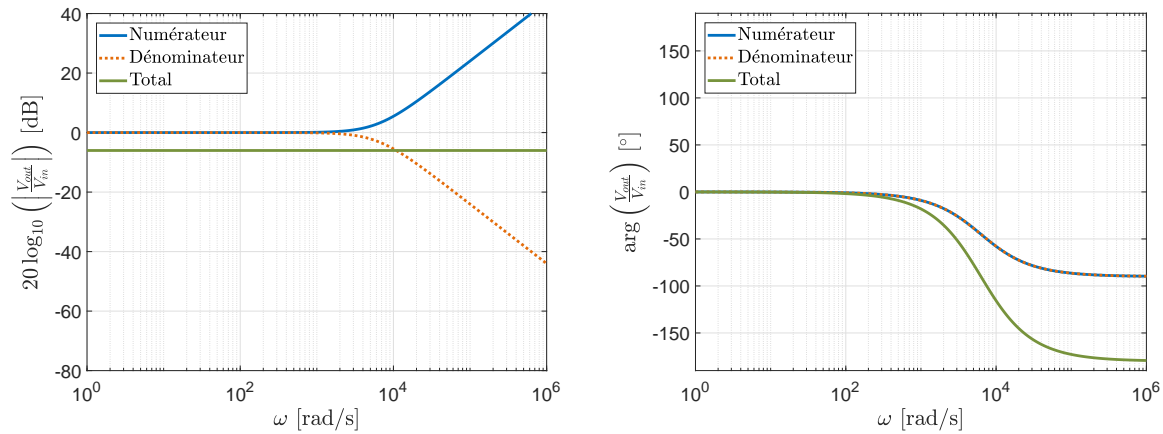


Fig. 5.3 – Diagramme de Bode.

2. Ce filtre est un passe-tout qui permet de déphaser le signal de sortie de 180° par rapport à l'entrée au-delà de la fréquence de coupure de $f_0 = 1\text{kHz}$, puisque les déphasages de -90° introduits par le numérateur et le dénominateur s'additionnent.

Exercice 3

1. Plusieurs pistes de résolution sont possibles pour cet exercice. Si on utilise les lois de Kirchhoff sur le courant en chaque nœud du circuit, on peut trouver l'expression de V_{out} par rapport à V_{in} .

KCL au nœud supérieur, noté V_1 :

$$\frac{V_{in} - V_1}{R} = j\omega 2CV_1 + \frac{V_1 - V_{out}}{R}.$$

KCL au nœud inférieur, noté V_2 :

$$j\omega C(V_{in} - V_2) = \frac{V_2}{R/2} + j\omega C(V_2 - V_{out}).$$

KCL au nœud de sortie V_{out} :

$$\frac{V_1 - V_{out}}{R} = j\omega C(V_{out} - V_2).$$

Pour résoudre ce système d'équations, on trouve les expressions de V_1 et V_2 et fonction de V_{in} et V_{out} sur base des 2 premières équations. On substitue ensuite dans la dernière équation et on obtient la fonction de transfert du filtre

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1 + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + 4\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

avec $\omega_0 = \frac{1}{RC}$. Certains pourraient être tentés d'écrire une loi des courants au nœud central du circuit, connecté à la masse, égalant ce faisant le courant venant du nœud supérieur V_1 au courant partant vers le nœud inférieur V_2 . Ce raisonnement est toutefois **incorrect** car un courant non nul part également vers la masse. En effet, pour autant que l'on mette une source de tension à l'entrée V_i du circuit et que l'on laisse sa sortie V_o en circuit ouvert, le courant qui part à la masse sera égal au courant dans la source de tension en entrée du circuit.

Sur base de la fonction de transfert trouvée précédemment, on peut maintenant identifier le numérateur et le dénominateur avec des formes canoniques du second ordre, ce qui donne :

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{1 + j2\zeta_1 \frac{\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + j2\zeta_0 \frac{\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

avec $\zeta_0 = 2$ et $\zeta_1 = 0$.

Intéressons-nous d'abord au numérateur de la fonction de transfert. La fonction du second ordre correspondant à l'inverse du numérateur présenterait un overshoot à l'infini positif puisque le coefficient d'atténuation est nul. Dans notre cas, puisque cette fonction du second ordre se trouve au numérateur, cela correspond à une annulation du numérateur, résultant en pic vers l'infini négatif dans le diagramme de Bode. La fonction du second ordre au dénominateur correspond, quant à elle, au cas où $\zeta > 1$, ce qui veut dire qu'il y a deux racines réelles distinctes au polynôme. La fonction peut alors s'écrire avec deux pôles comme

$$1 + j2\zeta_0 \frac{\omega}{\omega_0} + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_1}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_2}\right)$$

où ω_1 et ω_2 sont donnés par

$$\omega_{1,2} = \zeta_0 \omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{\zeta_0^2 - 1} = (2 \pm \sqrt{3}) \omega_0$$

Le diagramme de Bode du circuit est représenté à la Figure 5.4. On observe que les pentes à ± 40 dB/dec et les déphasages de $\pm 180^\circ$ associés aux fonctions du second ordre s'annulent lorsqu'on s'éloigne de la fréquence de coupure.

2. C'est un filtre coupe-bande, dit "notch", qui permet de supprimer une fréquence particulière, ici, la fréquence $f_0 = 1\text{kHz}$.

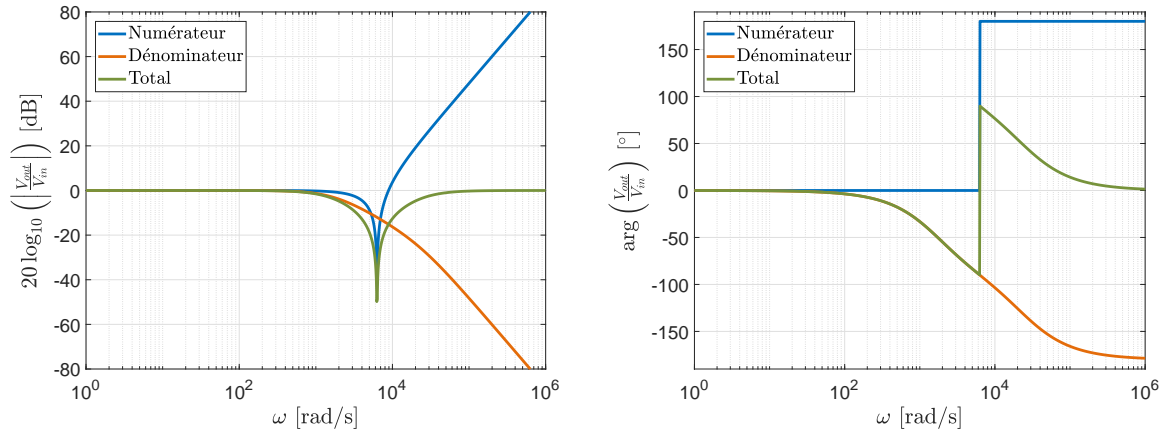


Fig. 5.4 – Diagramme de Bode.

Exercice Spice

Le filtre de Rauch est dessiné dans LTSpice en suivant l'architecture de l'exercice 1, comme illustré à la Figure 5.5. Afin d'obtenir les valeurs des éléments du filtre de Rauch permettant de respecter les spécifications requises, il est utile d'établir un inventaire des données et inconnues à notre disposition. Le circuit est composé de 5 éléments, soit 5 inconnues. Ensuite, en étudiant la fonction de transfert, 3 contraintes peuvent être imposées au maximum : la norme du gain en tension à la fréquence de résonance, noté H_0 , la fréquence caractéristique/de résonance ω_0 et le facteur d'amortissement ζ . Donc, 3

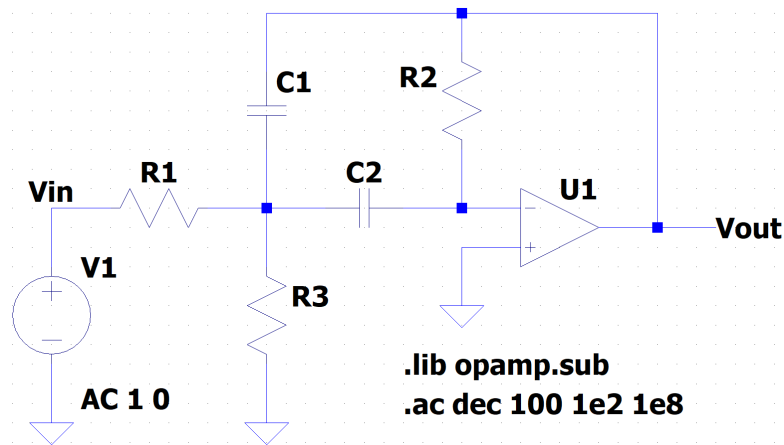


Fig. 5.5 – Exercice Spice - Filtre de Rauch dessiné dans LTSpice.

équations à 5 inconnues. Pour obtenir une solution unique à ce système, les valeurs de capacités C_1 et C_2 sont considérées comme des degrés de liberté et peuvent être choisies pour des raisons secondaires (minimisation du bruit, valeurs réalistes des autres composants, etc). Nous considérerons donc simplement ici que nous imposons ces valeurs.

En inversant les expressions des contraintes, déterminées à l'exercice 1, nous obtenons des expressions générales pour les valeurs des résistances à utiliser,

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 = Q\omega_0 \frac{R_2 C_2}{1 + \frac{R_1}{R_3}}, \\ \xi = \frac{\omega_0 R_1 (C_1 + C_2)}{2 \left(1 + \frac{R_1}{R_3}\right)}, \\ \omega_0^2 = \frac{1 + \frac{R_1}{R_3}}{R_1 R_2 C_1 C_2}. \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R_1 = \frac{Q}{\omega_0 H_0 C_1}, \\ R_2 = \frac{Q}{\omega_0} \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}, \\ R_3 = \frac{1}{Q\omega_0 (C_1 + C_2) - \frac{\omega_0 H_0 C_1}{Q}}. \end{array} \right.$$

On considère à présent les différents filtres demandés, dimensionnés à l'aide d'un code Matlab.

1. En injectant les contraintes $f_0 = 1\text{MHz}$, $Q = \frac{1}{2\xi} = 5$ et $H_0 = 10$ dans l'algorithme de dimensionnement et en choisissant des valeurs de capacité $C_1 = C_2 = 100\text{pF}$, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 = 796\Omega, \\ R_2 = 15.9\text{k}\Omega, \\ R_3 = 199\Omega. \end{array} \right.$$

Si l'on avait employé des valeurs de capacité plus grandes, la valeur de R_3 aurait davantage diminué et atteint la limite du raisonnable en comparaison des résistances parasites présentes dans le circuit réel. La Figure 5.6 compare le diagramme de Bode prédit avec Matlab et celui obtenu via LTSpice, après injection des valeurs.

À haute fréquence, nous observons un pôle parasite supplémentaire dans le circuit, dû à la fréquence de coupure de l'amplificateur opérationnel. Ce pôle étant aux alentours de 10MHz, il impacte quelque peu le diagramme de Bode résultant du filtre, en diminuant notamment l'amplitude en 1MHz.

2. La même méthodologie est employée pour résoudre le second cas, en utilisant à présent des capacités de valeur 1nF. Les valeurs des résistances à employer sont les suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 = 159.2\text{k}\Omega, \\ R_2 = 31.8\text{M}\Omega, \\ R_3 = 32\Omega. \end{array} \right.$$

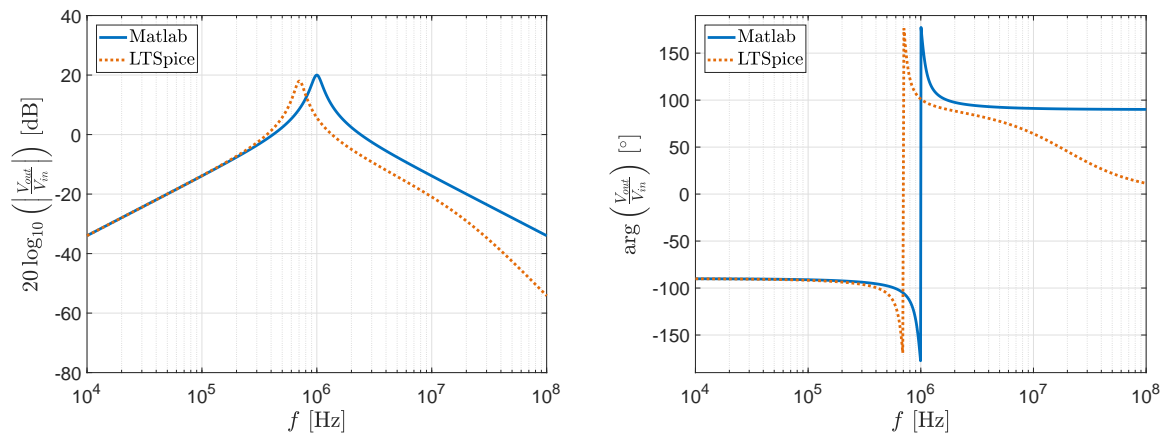


Fig. 5.6 – Exercice Spice 1 - Comparaison des diagrammes de Bode Matlab et LTSpice.

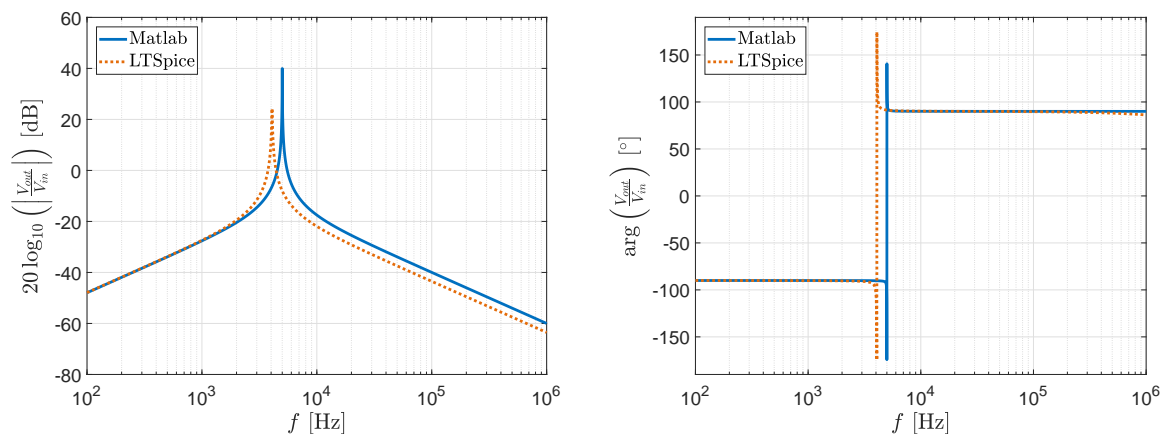


Fig. 5.7 – Exercice Spice 2 - Comparaison des diagrammes de Bode Matlab et LTSpice.

Remarquez à la Figure 5.7 le gain moins important ainsi que l'étalement moins prononcé du pic de résonance, vraisemblablement dus à une valeur plus faible du facteur d'amortissement.

L'amplificateur étant quasiment idéal pour les basses fréquences, aucun impact notable n'a lieu sur la fonction de transfert nominale. Les imprécisions observées proviennent de la valeur inexacte des composants employés dans LTSpice.

- En étudiant attentivement le dénominateur de la fonction de transfert, nous observons que tous les coefficients polynomiaux sont positifs. Dès lors, la somme des racines $x_0 + x_1 = -2\zeta\omega_0$ étant toujours positive, au moins une des valeurs des composants sera négative, ce qui n'est pas physiquement possible pour les composants considérés. Dès lors, l'architecture de Rauch pour les filtres passe-bande du second ordre ne permet pas d'obtenir des réponses fréquentielles à bande passante *flat*.