RADNA VERZIJA

Matematička analiza

Od izvoda do integrala

Luka Jevtović
luka.jevtovic9@gmail.com
2022.

Disklejmer

Ova skripta je i dalje u radnoj verziji. Skoro sigurno postoje nepravilnosti, a potpuno sigurno postoje delovi koji će biti menjani u budućnosti. Stoga, ako primetiš bilo šta što ti je čudno, nejasno, ili zaista netačno, specijalno vezano za numeraciju slika i jednačina u tekstu (da li se negde pozivam na pogrešan broj jednačine ili slike), molim te da mi to javiš na mejl luka.jevtovic9@gmail.com.

Isto važi, naravno, i ako imaš bilo koje pitanje vezano generalno za tematiku ove skripte (a i matematike/fizike generalno).

Sadržaj

1 Uvod

Matematička analiza je oblast matematike koja se razvila iz potrebe fizike da opiše evoluciju sistema na formalan način. Kroz ovu skriptu, a i predavanja iz mehanike i gravitacije (i ostalih kroz koja ćeš prolaziti), videćeš kako potreba za postojanjem izvoda ili integrala jako prirodno iskače kada pokušamo da opišemo prirodu. Kao takva, analiza predstavlja centralni i neizbežni alat za bilo kakvo bavljenje (astro)fizikom. Pred tobom se nalazi jedna relativno kratka skripta koja će ti pružiti uvid u neke osnovne pojmove matematičke analize, kao što su limes, izvod i integral, i omogućiti ti da budeš operativna/an u praktičnom korišćenju tih koncepata.

U ovoj skripti nećeš naći nešto preterano mnogo računa, jer se uglavnom samo definišu i opisuju stvari. Ipak, kroz ono malo izvođenja kog ima, bilo bi dobro da prođeš i razumeš svaki korak. Na kraju svake celine, biće skup od nekoliko zadataka, od kojih bi bilo dobro da uradiš bar nekoliko (po sopstvenoj proceni, dok ne misliš da si skapirala/o ono što se u njima koristi). Svoja rešenja uvek možeš proveriti odlaskom na Wolfram Alpha sajt, koji će za svaki limes, izvod, ili integral da ti ispiše tačno rešenje (samo pazi da ga ukucaš kako treba).

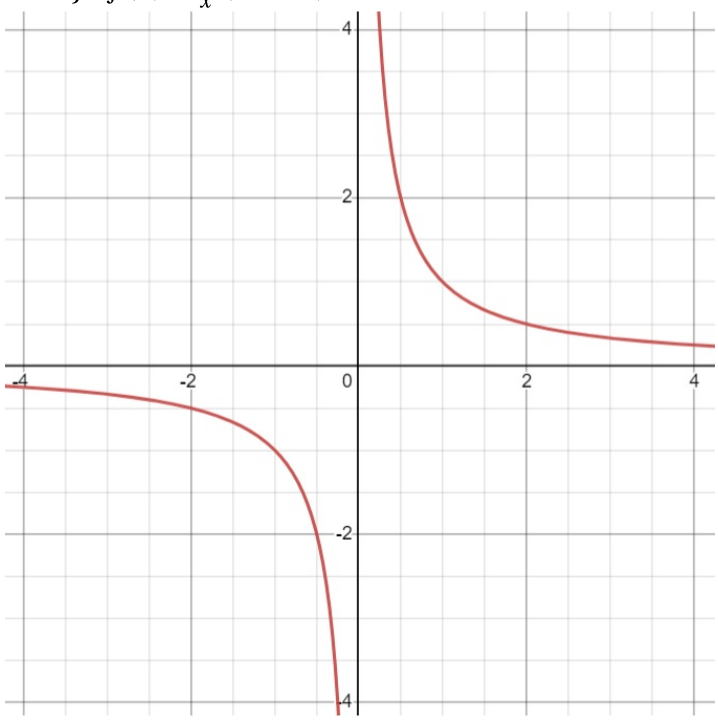
Konačno, neki od naslova biće obeleženi sa zvezdicom (*). To znači da je u pitanju neki dodatak na trenutno objašnjavanu temu kroz koji možeš da prođeš ako te zanima, ali koji nije krucijalno bitan za dalje praćenje, i okej je ako kroz njega ne prođeš ili ga ne razumeš do kraja.

2 Diferencijalni račun

Za početak ćemo se pozabaviti izvodima, no, pre toga, biće nam korisno za kasnije da uvedemo pojam limesa i da istražimo šta on zapravo znači.

2.1 Limesi

Posmatrajmo funkciju $f(x) = \frac{1}{x}$ (Slika 1).



Slika 1: Grafik funkcije $f(x) = 1/x$

Fokusirajmo se za sada samo na njen pozitivan deo. Ova funkcija nije definisana u tački $x = 0$, jer bismo tu imali deljenje sa nulom. Međutim, možemo posmatrati šta se dešava kada uzimamo sve manje i manje vrednosti x. Nekoliko primera je prikazano u tabeli 1.

Vidimo da što više smanjujemo x to funkcija f(x) sve više raste, i na taj način možemo zaključiti da će, kada se približimo jako blizu nuli (praktično beskonačno blizu), vrednost funkcije $f(x \to 0) = \infty$.

x	f(x)
1	1
0.1	10
0.01	100
0.001	1000
0.0001	10000
0.00001	100000
0.000001	1000000

Tabela 1: Vrednosti funkcije 1/x za različite male vrednosti x

Ovo što sam napisao u zagradi nije ništa drugo nego limes, i drugačije se može zapisati kao:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty \tag{1}$$

Ovo nije ništa novo, već smo samo formalno matematički zapisali ono što nam je intuitivno bilo jasno prostim gledanjem u grafik funkcije $\frac{1}{x}$ - da ako smanjujemo x ka nuli, funkcija ide u beskonačno. Jednačina (1) se čita kao ´limes od 1 kroz x kada x teži nuli jednak je beskonačnosti´. Ovaj isti postupak možemo uopštiti na sledeći način:

$$\lim_{x \to a} f(x) \tag{2}$$

U ovom zapisu, pustili smo da limes može težiti i nekoj drugoj konstanti a, koja ne mora nužno biti nula, a može biti i beskonačno. Na primer, istom analizom ponašanja funkcije $\frac{1}{x}$ kada $x \to \infty$ se može doći do zaključka da je taj limes jednak nuli - funkcija teži nuli kada x teži beskonačnosti (ovo se takođe lepo vidi i na grafiku).

Evo još jednog trivijalnog primera, šta bi bila vrednost limesa $\lim_{x \to 5} x^2 =$? Ovde opet, slično tabeli 1, možemo uzimati vrednosti x sve bliže i bliže 5 (dakle 4.9, pa 4.99, pa 4.999 itd), ali nam ništa ne brani da se zaista potpuno beskonačno približimo vrednosti 5, tj. da samo stavimo x=5 i kažemo da je vrednost tog limesa $5^2 = 25$. Ovo nismo mogli da uradimo malopre jer za egzaktnu vrednost x=0 funkcija uopšte nije bila definisana.

Ovde se vidi korisnost limesa. Za neke ove proste i dobro definisane funkcije (poput x^2) uzimanje limesa se prosto svodi na ubacivanje date vrednosti x kojoj teži u funkciju. Međutim, limes možemo uzimati čak i za one vrednosti za koje funkcija nije dobro definisana, kao što je bila 0 za funkciju $1/x$.

2.1.1 Još par primera

Kao i sve ostalo u matematici, i limese je najlakše razumeti kada se prođe kroz nekoliko primera. Evo za početak nekoliko trivijalnih:

$$\lim_{x\to 2} x^3 = ?, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = ?, \qquad \lim_{x\to\pi} sin(x) = ?$$

Prvi i treći primer možemo lako rešiti tako što samo ubacimo datu vrednost za x kojoj on teži, kao što smo u prethodnom odeljku uradili sa funkcijom x^2 kad je x težilo petici. U prvom primeru ćemo imati $2^3 = 8$, a u trećem $sin(\pi) = 0$. Srednji primer je nešto komplikovaniji jer, opet, ne možemo samo da ubacimo beskonačnost u račun tek tako. Međutim, potpuno analognim rezonom kao za funkciju $1/x$ malopre, možemo posmatrati šta se dešava sa funkcijom $1/x^2$ kada uzimamo jako velike vrednosti za x. Ilustrujmo to još jednom tabelom:

x	$f(x) = 1/x^2$
1000	0.000001
10000	0.00000001
100000	0.0000000001
1000000	0.000000000001
10000000	0.00000000000001

Dakle, kako puštamo x da bude sve veće i veće, funkcija $1/x^2$ postaje sve manja i manja, i odatle možemo zaključiti da će vrednost limesa kada x pustimo da ide u beskonačno biti nula.

Evo jednog malo komplikovanijeg primera:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3 + 2x}{x^3 - x} \tag{3}$$

Ako bismo ovde samo ubacili beskonačno, dobili bismo oblik ∞/∞, koji nije ništa definisano. Međutim, možemo se poigrati sa ovim članovima u razlomku. Konkretno, ako oba razlomka podelimo sa x^3, što možemo da uradimo pre nego što 'pustimo limes', tj. pre nego što postavimo pitanje šta se dešava kada x teži beskonačnosti, dobijamo sledeći izraz:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4 + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} \tag{4}$$

Vidimo da već dobijamo nešto gde otprilike znamo šta da radimo sa svakim od članova. U brojiocu, za član $2\frac{1}{x^2}$ znamo iz prethodnih par primera da će težiti nuli kada x teži beskonačnosti, i isto to znamo i za član u brojiocu. Ta dva člana će postajati beskonačno mala kako povećavamo x, i kada napokon pustimo limes u beskonačnost otići će u nulu, što nas ostavlja samo sa:

$$\frac{4+0}{1-0} = 4 \tag{5}$$

Dobili smo neki vrlo konkretan broj umesto ∞/∞ džumbusa iz kog smo krenuli. Ovde se već nazire moć limesa, tj. njihova mogućnost da iz nekih nedefinisanih izraza opišu kako se neke funkcije ponašaju u njihovoj okolini. Pre nego što se pozabavimo konkretnim primerima iz fizike, proširimo ovaj kojim smo se sad pozabavili još malo. Recimo da sada, umesto da u imeniocu imamo x^3, stavimo x^4, tj. da računamo $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3+2x^2}{x^4-x}$.

Ako sada podelimo i brojilac i imenilac sa x^3, u brojiocu će opet ostati sve isto kao što smo dobili i u jednačini (4), međutim u imeniocu ćemo sada imati nešto drugačiji izraz:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4+\frac{2}{x^2}}{x-\frac{1}{x^2}} \tag{6}$$

Sve je isto, ali sad nam je preživelo ovo jedno x u imeniocu. Šta će se sada desiti kada pustimo limes?

Pa, svi ovi razlomci u kojima delimo sa x će otići u nulu, isto kao i u jednačini (5), i ostaće nam izraz:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4+0}{x-0} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{x} = 0 \tag{7}$$

Ništa alarmantno, izračunali smo limes. Mogli smo do ovog rezultata doći i ako bismo sve podelili sa x^4, i tada bismo imali:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4}{x}+\frac{2}{x^3}}{1-\frac{1}{x^3}} = \frac{0+0}{1-0} = 0 \tag{8}$$

Generalno se ovakvom tipu limesa pristupa tako što se brojilac i imenilac podele najvišim stepenom promenljive, ili iz brojioca ili iz imenioca. Druga varijacija ovog problema jeste da se posmatra limes razlomka u kome u brojiocu imamo polinom višeg stepena:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+2x^2}{x^3-x} \tag{9}$$

Ako opet ponovimo ovaj postupak, dobićemo oblik:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+0}{0-0} = \infty \tag{10}$$

dakle ovaj razlomak teži beskonačnosti kada x teži beskonačnosti. Generalno, funkcija u brojiocu i funkcija u imeniocu se na sličan način mogu 'uporediti' za bilo koje dve funkcije. Ako rastu ili opadaju sa x na isti način, što je bio slučaj u (3), limes njihovog količnika će biti konačan. Ako funkcija u imeniocu raste brže od funkcije u brojiocu, što je bio slučaj u (6), onda će ceo izraz otići u nulu. Konačno, ako imamo funkciju u brojiocu koja brže raste od funkcije u imeniocu, kao npr u (9), ona će biti dominantna i ceo limes će otići u beskonačno. Analogno, samo obrnuto, važi i ako tražimo limes kada x teži nuli.

Okej, ovo je dosta primera! Hajde da vidimo kako se ti limesi koriste u fizici.

2.1.2 Limesi u (astro)fizici

Cilj fizike je da opiše realnost. To znači da, ako imamo neku veličinu, recimo položaj nekog tela u svemiru $\boldsymbol{r}$, i znamo da ta veličina zavisi od nekih drugih, recimo vremena t, hoćemo da nam fizika kaže kakva je zavisnost $\boldsymbol{r}(t)$. Ove zavisnosti ne moraju uvek za promenljivu imati vreme (iako to najčešće jeste slučaj, u kom slučaju kažemo da nas zanima **evolucija** sistema), već možemo, recimo, posmatrati zavisnost temperature zvezde T od udaljenosti od njenog centra r, tj. $T(r)$. Možda gledamo i zavisnost fluksa zvezde od njene temperature i površine, tj udaljenosti od njenog centra $F(T,r)$. Primera svakako ima mnogo, no, vratimo se na zavisnost položaja od vremena, kao najintuitivniji.

Recimo da znamo položaj svih nebeskih tela u nekom sistemu, na primer u nekoj galaksiji. To znači da znamo funkcije $\boldsymbol{r}_1(t), \boldsymbol{r}_2(t), ...\boldsymbol{r}_N(t)$, gde je N broj tela u toj galaksiji, i svaka od ovih funkcija nam govori kako se svako od tih tela kreće u nekom koordinatnom sistemu koji smo mi postavili. Njega najčešće postavljamo tako da bude centriran u centar mase galaksije. Šta sad možemo da radimo sa tom informacijom?

Pa, jedna od zanimljivih i korisnih informacija je da znamo da li je ta struktura (galaksija, jato, molekulski oblak, štagod) 'stabilna'. Kako bismo opisali stabilnost? Pa, možda je lakše da definišemo nestabilnost prvo. Galaksija će biti nestabilna ako se sve njene zvezde i planete 'raspu' u nekom trenutku, to jest pobegnu jedna od druge. Onda to baš i ne bi bila neka galaksija, zar ne?

To 'rasipanje' možemo vrlo lepo da definišemo preko ovih funkcija položaja. Reći ćemo da nam je neka zvezda, recimo n-ta zvezda, pobegla iz galaksije ako njena funkcija $\boldsymbol{r}_n(t)$ postane beskonačno u bilo kom trenutku t. To bi značilo da se ona udaljila na neke ogromne udaljenosti od ostatka galaksije, što sigurno znači da više nije gravitaciono vezana za nju. Ako dobijemo da veliki broj ovih funkcija postane beskonačno u **nekom trenutku**, onda znamo da nam galaksija nije stabilna.

Termin 'nekom trenutku' koji je malopre boldovan je vrlo bitan. Šta znači taj neki trenutak?

Pa, ako kažemo da je nešto stabilno, očekujemo da će biti stabilno u bilo kom trenutku, odnosno zauvek. Nećemo da nam galaksija bude kao stabilna prvih milijardu godina i onda opa, sve se raspalo.

A šta znači zauvek u kontekstu parametra t? Upravo tako, znači da hoćemo da pustimo da t teži beskonačnosti, tj. hoćemo da vidimo da li dobijamo da nam neki od limesa

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{r}_n(t)$$

postaje beskonačno, što znači da nam ta čestica beži iz sistema. Vidimo, vrlo prirodno, odakle proističe potreba za limesima u fizici. Ovo, konkretno, je nešto što se formalno zove **dugovremenski limes**, i najčešće je vezan upravo za ispitivanje nekog oblika stabilnosti sistema. Analogno možemo definisati i **kratkovremenski limes**, gde bi nam $t \to 0$, ili bilo koji drugi, ali u njihove detalje nećemo zalaziti ovde. Primera ima jako mnogo, i susrešćete se sa njima prirodno kako budete pratili dalja predavanja.

2.1.3 (*)Kavijat: Limes nije uvek moguće izračunati

Do sada smo pominjali i bavili se funkcijama koje imaju lepo definisane limese (ako je limes beskonačno, to je i dalje lepo definisan limes). Međutim, to nije uvek slučaj. Jedan od prostijih primera je da posmatramo šta bi bio limes $\lim_{x\to\infty} sin(x)$. Sinus znamo da nam ide 'gore-dole' između 1 i -1, pa šta bi onda bila neka konkretna vrednost kada nam x ide u neke ogromne vrednosti? Odgovora nema, taj limes sinusa nije definisan. Najbliže što možemo da definišemo je nešto što se zove gornji i donji limes, a koji predstavljaju maksimalnu i minimalnu vrednost funkcije u datom limesu (ako one postoje). U ovom slučaju gornji limes bi bio 1, a donji -1.

Drugi primer je upravo onaj od kog smo počeli, a to je funkcija $1/x$. Da se nismo ograničili na analizu samo njenog pozitivnog dela, njen limes u nuli ne bi bio tačno definisan, i to se može videti ako posmatrate funkciju kako x teži nuli od negativnih i pozitivnih vrednosti. Kada prilazimo nuli od negativnih vrednosti (ovo se formalno zove levi limes), funkcija teži ka $-\infty$, a kada prilazimo od pozitivnih vrednosti (desni limes), funkcija teži ka $+\infty$. Dakle, limes ima prekid u nuli, tj. skače od minus do plus beskonačno, pa samim tim i nije dobro definisan.

Ovakvih funkcija ima puno, međutim, vrlo se retko srećemo sa njima u praksi. Prosto, ako neka funkcija nema dobro definisan neki limes, taj limes nas najčešće i ne zanima (ili nas zanima neka verzija limesa, na primer levi ili desni, koji jeste dobro definisan).

2.1.4 Zadaci

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^4+x+x^2}{2x^4-x^3}$
2. $\lim_{x\to 0} lnx$
3. $\lim_{x\to -\infty} e^x$

2.2 Izvodi

Sada kada smo skapirali šta su limesi, kako se koriste i šta znače, vrlo lako ćemo uvesti i pojam izvoda jer, kao što ćemo videti, izvod nije ništa drugo nego specifično definisan limes.

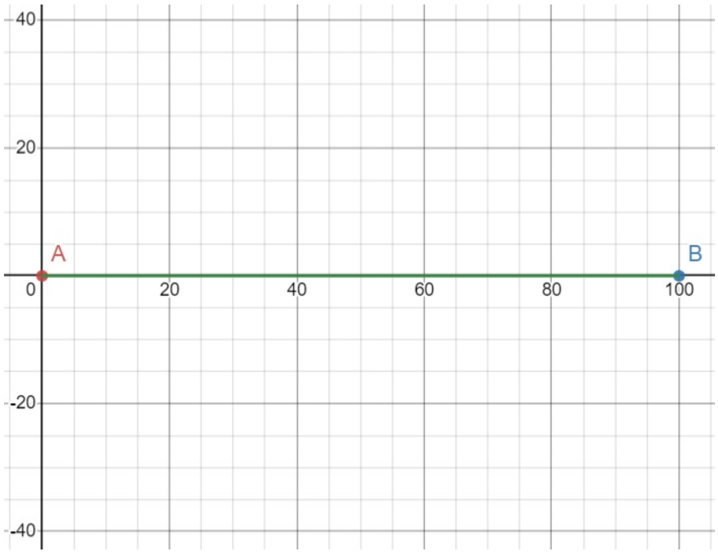
2.2.1 Problem brzine

Pojam izvoda ćemo uvesti onako kako se i istorijski motivisao, a to je pri pokušaju preciznog opisa kretanja tela. Recimo da posmatramo kretanje nekog tela, na primer nekog Luke u kolima, koji hoće da se vozi iz grada A do grada B. Znamo kolika je najkraća udaljenost od A do B, tj. dužina duži AB, i ona je 100km. Luka uključi štopericu na telefonu kada upali kola u A, i isključi je kada stigne do B, kada ona pokazuje da je prošao tačno 1 sat. Znamo koliki je put Luka prešao i znamo koliko mu je vremena trebalo da pređe taj put, dakle znamo i njegovu brzinu, i ona je 100km/h. Jel da? Well, yes, but actually no.

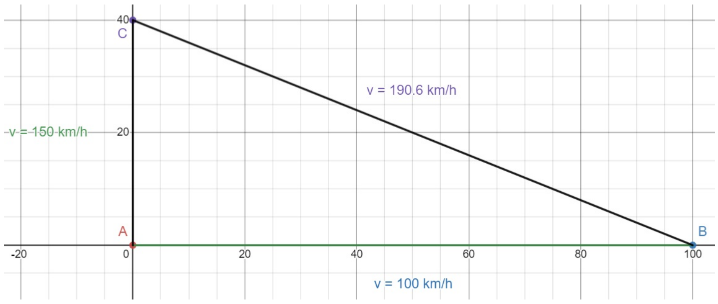
Naime, ono što znamo je samo njegova **srednja** brzina tokom vožnje, ali njegova **trenutna** brzina u svakom trenutku, odnosno funkcija $v(t)$, nam nije poznata. Luka je možda zaista seo u auto, krenuo da vozi brzinom od 100km/h bez prekida, i tako stigao iz A u B (prikazano na slici 2), ali možda i nije.

Na primer, Luka je mogao da sedne u auto, vozi se brzinom od 150km/h do grada C, gde zna da su mnogo dobre gumene bombone, tamo se najede, udari ga šećer, pa odrema 10 minuta, i onda nastavi od C do B brzinom od 190.6 km/h (Slika 3). Ono što možemo zaključiti, osim toga da Luka nije baš odgovoran učesnik u saobraćaju, je da mu je sve ukupno opet trebalo tačno sat vremena za ceo put. Ali vidimo da smo ovde opisali potpuno drugačiji proces.

Možemo smisliti i beskonačno drugih načina na koje je Luka mogao da stigne od A do B za sat vremena. Možda je išao tačno trajektorijom kao na slici 2, ali na putu je bila gužva, pa je malo kočio, malo ubrzavao, malo preticao, malo stajao u koloni... Drugim rečima, jednačina koju ste učili u osnovnoj i srednjoj školi da je brzina jednaka ukupnom pređenom putu za ukupno vreme



Slika 2: Trajektorija Lukinog kretanja ako bi sve vreme išao konstantnom brzinom kao dobar dečak



Slika 3: Trajektorija Lukinog kretanja i njegove brzine ako prvo ide po gumene bombone pa onda vozi kao manijak

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{11}$$

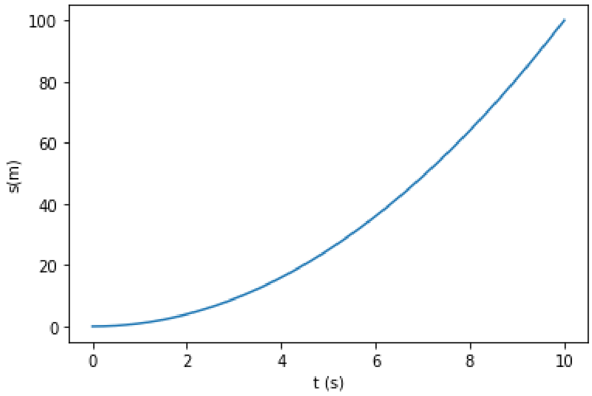
nije adekvatna za opis većine sistema. Štaviše, ona će biti adekvatna samo i jedino ako je brzina kretanja konstantna (kao što bi bio slučaj da je Luka išao brzinom 100km/h bez stajanja i menjanja brzine). Ali, kao što smo napominjali u 2.1.2, nas u fizici zanima tačna informacija o poziciji nekog tela u svakom trenutku vremena, i isto važi i za njegovu brzinu. Očigledno da jednačinu (11) želimo nekako da uopštimo za jako male segmente Δt, što nam nagoveštava da ćemo koristiti neke limese. Hajde da vidimo koje tačno.

2.2.2 Rešenje problema brzine

U prethodnom odeljku smo, u jednačini (11), videli da se srednja brzina definiše kao ukupan pređeni put po ukupno prošlom vremenu. Ako malo raspišemo tu jednačinu, možemo je napisati kao:

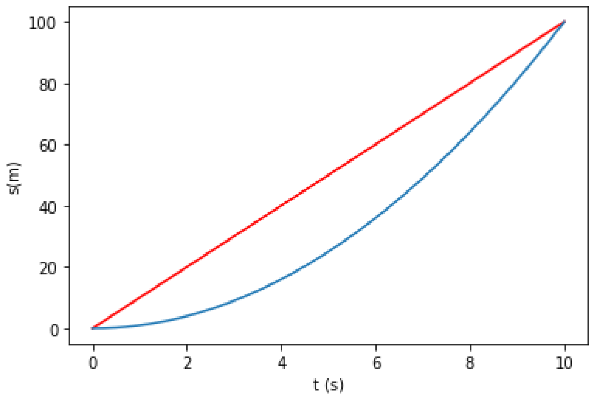
$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} \tag{12}$$

Ovaj koncept sada hoćemo da uopštimo i na trenutnu brzinu. Recimo da imamo poznatu funkciju $s(t)$, i recimo, radi jednostavnosti, da je ona $s(t) = t^2$. Grafik zavisnosti pređenog puta po vremenu, za prvih 10 sekundi kretanja, bi izgledao kao na slici 4.



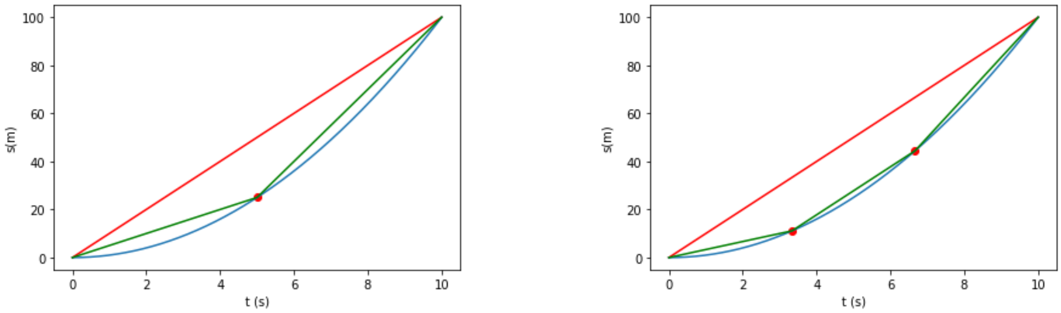
Slika 4: Zavisnost $s(t) = t^2$

Ako bismo, po formuli (11), izračunali ukupnu srednju brzinu za ceo period kretanja, imali bismo $v = \frac{100m-0m}{10s-0s} = 10m/s$. Ako pretpostavimo da smo se sve vreme kretali tom brzinom (što očigledno nije slučaj, ali hajde da pokušamo), onda bismo mogli da izrazimo funkciju pređenog puta kao $s(t) = vt$. U tom slučaju bismo dobili linearnu funkciju koja se sa pravom preklapa samo u prvoj i poslednjoj tački (slika 5).



Slika 5: Realna zavisnost s(t) (plavo) i aproksimativna dobijena iz srednje brzine za ceo period kretanja (crveno)

Potvrđujemo, gledanjem u grafik, da nam se ovakav opis ne poklapa sa realnim. Međutim, nama niko ne brani da računamo srednju brzinu i za kraće vremenske intervale. Šta bi se onda desilo? Hajde za početak da podelimo vremenski period na pola, tj. da računamo jednu srednju brzinu za prvih pet sekundi kretanja, a onda drugu srednju brzinu za drugih pet sekundi. Opet, prateći formulu (12) i zatim plotujući pređeni put kao $v_{sr}t$ za ove dve vrednosti v_{sr}, dobićemo nešto kao na slici 6.a.



(a) $\Delta t = 5s$ **(b)** $\Delta t = 3.333...s$

Slika 6: Realna zavisnost s(t) (plavo), zavisnost dobijena iz srednje brzine za ceo period (crveno), i zavisnosti dobijene različite manje podele vremena (zeleno)

Ovde vidimo da zelena linija, iako očigledno ne opisuje plavu baš najbolje, je i dalje bolji pokušaj nego crvena. Ovo nas motiviše da probamo isto sa još kraćim periodom vremena, neka sada bude trećina perioda od 10 sekundi (Slika 6.b).

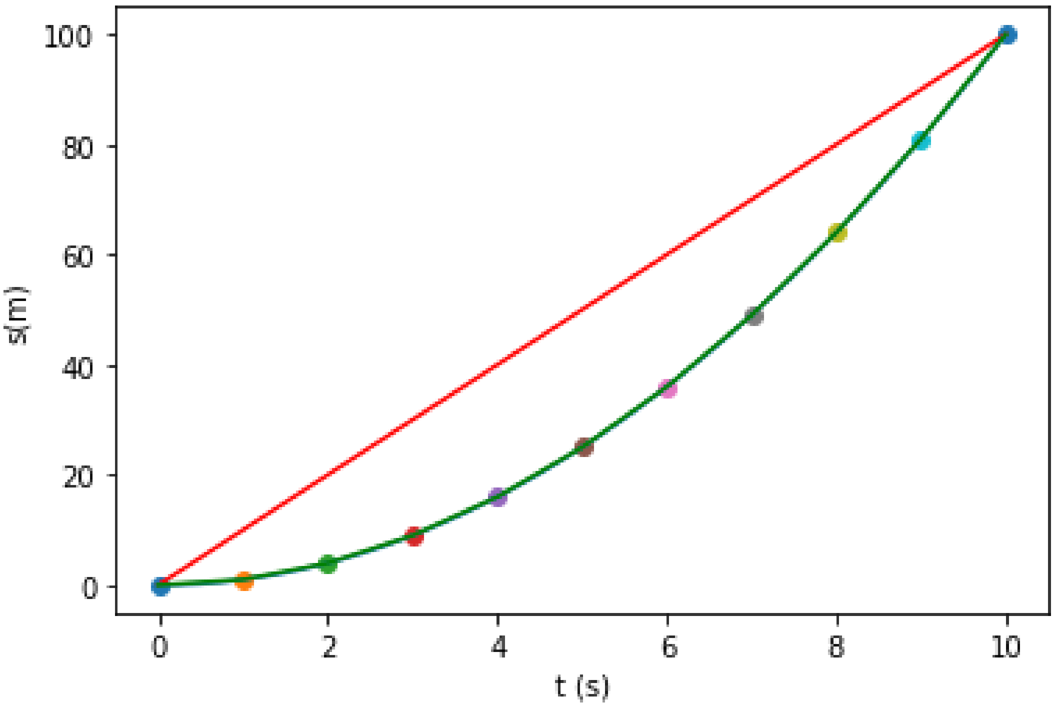
Ide nam sve bolje i bolje. Na slici 7 je prikazano šta se dobije ako postavimo da nam $\Delta t = 1s$, samo jedna desetina ukupnog vremena. Ovo je i dalje izuzetno gruba skala, ali opet, na slici ne možemo da razlučimo razliku između plave i zelene linije (na ovoj skali su praktično preklopljene). Tek ako zumiramo ceo grafik 100 puta, tako da posmatramo samo na skali od [0,1]x[0,1], kao na slici 8, možemo videti razliku između ove dve funkcije.

A šta nam dalje brani da dodatno smanjujemo Δt, recimo na 0.1s?[1] Ako smo podelom na 10 delova dobili tako dobro preklapanje kao na slici 7, sad kad delimo na 100 delova dobićemo još bolje preklapanje. Ovo dalje ni nema više smisla crtati jer bismo morali pod mikroskopom da gledamo da bismo našli razliku. Ali nećemo se tu zaustaviti, mi hoćemo da dobijemo beskonačno preciznu vrednost za trenutnu brzinu, to jest, hoćemo beskonačno da smanjujemo period vremena. Dame i gospodo, upravo smo definisali izvod.

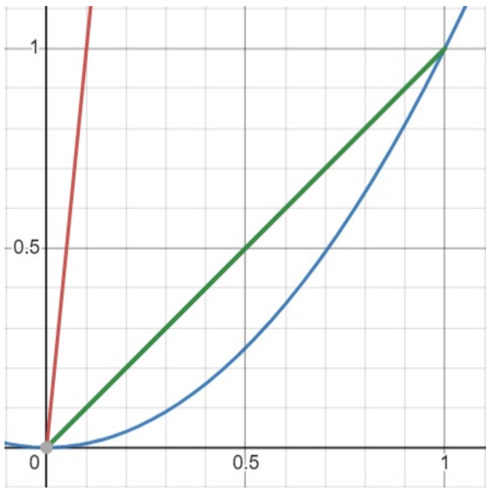
2.2.3 Izvod, definicija

Hajde formalno da zapišemo zaključak do kog smo došli u prethodnom odeljku. Dakle, krenuli smo od definicije srednje brzine u jednačini (12), i zatim smo krenuli da smanjujemo Δt na sve manje i manje vrednosti, da bismo na kraju došli do zaključka da ako pustimo da Δt postane beskonačno malo, zaista dobijamo nešto što bismo mogli da nazovemo trenutnom

[1]Ništa. Ovo je slobodna zemlja.



Slika 7: Realna zavisnost s(t) (plavo), aproksimativna dobijena iz srednje brzine za ceo period kretanja (crveno), i aproksimativna dobijena uz srednjih brzina za deset perioda od po 1s (zeleno)



Slika 8: Realna zavisnost s(t) (plavo), aproksimativna dobijena iz srednje brzine za ceo period kretanja (crveno), i aproksimativna dobijena uz srednjih brzina za deset perioda od po 1s (zeleno). Grafik zumiran 100 puta

brzinom. Ako te ovo ‘puštamo da postane beskonačno malo‘ ne asocira na limes, verovatno bi trebalo ponovo da pročitaš pređašnje odeljke. U kontekstu onoga što smo tamo naučili o limesima, jednačinu (12) bismo sad redefinisali za trenutnu brzinu tako što bismo zahtevali sledeće:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s(t)}{\Delta t} \tag{13}$$

Ako samo malo raspišemo brojilac, dobijamo ni manje ni više nego zvaničnu formalnu definiciju izvoda pređenog puta po vremenu:

$$\boxed{v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}} \tag{14}$$

Izraz ds/dt je samo skraćeni zapis limesa sa leve. Slovo d ispred neke veličine označava nešto što se zove diferencijal a što, apropo prethodnog odeljka, nije ništa drugo nego beskonačno mala promena te veličine. Tako je, u limesu $\Delta t \to 0$, razlika pređenih puteva postala $\Delta s \to ds$, i promene vremena $\Delta t \to dt$. Ako pogledate svoje sveske iz fizike iz srednje škole, videćete brdo formula u kojima se pojavljuje Δf, gde je f neka fizička veličina. Svaka od tih delti je zapravo d, i kada se pozabavite fizikom na nekom malo višem nivou, videćete da sve jednačine koje ispisujete zapravo imaju oblik u kom umesto Δ pišete svuda d. Ovakve jednačine se, iz očiglednih razloga, zovu diferencijalne jednačine.

Mi smo u dosadašnjem pristupu koristili konkretno brzinu kao izvod pređenog puta po vremenu jer je to opipljivi fizički problem oko kog imamo izgrađenu nekakvu intuiciju. Međutim, potpuno identičan postupak se može izvršiti nad bilo kojom funkcijom po bilo kojoj promenljivoj, što nas dovodi do najgeneralnije definicije izvoda:

$$\boxed{\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}} \tag{15}$$

za bilo koju funkciju f i promenljivu x.

2.2.4 (*) Različite notacije izvoda

U jednačinama (14) i (15) koristili smo nešto što se zove Lajbnicova notacija izvoda, a koja podrazumeva da izvod funkcije $f(x)$ po promenljivoj x pišemo kao df/dx. Ova notacija se najčešće koristi u fizici jer je najlakša za razumevanje, i, kako ćemo videti nadalje u ovoj skripti, ima dosta pogodnih osobina. Međutim, ona nije jedina.

U fizici jako često radimo sa funkcijama koje zavise od vremena. Ovo je delom nagovešteno u 2.1.2. To znači da jako često kada tražimo izvode, tražimo izvode neke funkcije po vremenu. Da bismo skratili zapis, izmislili smo novu notaciju specifično za izvode po vremenu. Ona se zove Njutnova notacija po kojoj se izvod funkcije po vremenu zapisuje kao ta funkcija sa malom tačkom iznad:

$$\frac{df(t)}{dt} = \dot{f}(t) \tag{16}$$

Još jedan način zapisa koji se vrlo retko koristi u fizici a najčešće u matematici je sledeći:

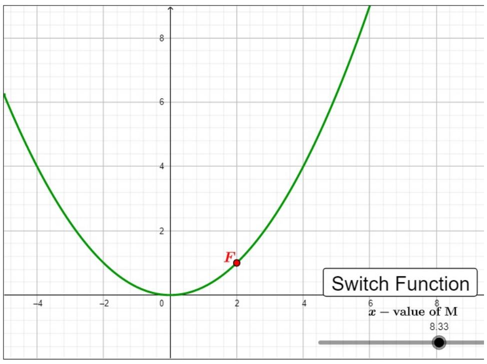
$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) \tag{17}$$

gde se primovima označavaju izvodi po promenljivoj te funkcije.

Sve tri notacije označavaju suštinski istu stvar (do na to da je tačka samo izvod po vremenu a ne nekoj drugoj promenljivoj), tako da, nemojte se zbunjivati ako na njih naiđete u literaturi ili drugim predavanjima!

2.2.5 Izvod, geometrijski

U 2.2.2 i 2.2.3 smo definisali izvod puta po vremenu kao beskonačni niz 'srednjih' brzina na beskonačno malim vremenskim intervalima. Fokusirajmo se za sada samo na jednu tačku funkcije $s(t)$, koju ćemo obeležiti sa F kao na slici 9:

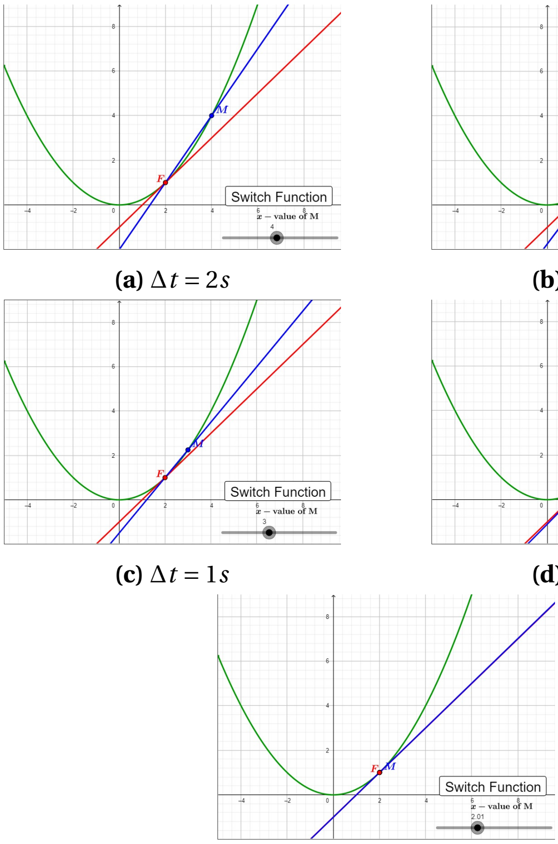


Slika 9: Zavisnost s(t) i uočena neka tačka F na njemu

Uradimo sada postupak koji smo radili za svaku od srednjih brzina u prethodnim poglavljima, odnosno uočimo neku drugu tačku M koja je od F po t-osi (x-osi) udaljena za neko $\Delta t = 2s$ (Slika 10.a). Funkcija srednje brzine ovde je prikazana kao plava linija. Približavajmo sada tačku M tački F (to znači da smanjujemo Δt), i uporedimo plavu liniju sa crvenom koja predstavlja tangentu funkcije u tački F.

Pozivam svakog čitaoca koji ima pristup internetu tokom čitanja ove skripte da poseti ovaj sajt i samostalno se poigra parametrom udaljenosti tačke M od F.

Vidimo iz slika 10.a-10.e, da nam izvod, kada pustimo da $\Delta t \to 0$ daje pravu koja se poklapa sa tangentom funkcije u toj tački. Štaviše, izvod izračunat u tački *i jeste* tangenta na



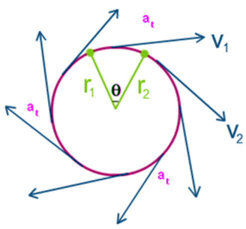
(a) $\Delta t = 2s$ **(b)** $\Delta t = 1.5s$

(c) $\Delta t = 1s$ **(d)** $\Delta t = 0.2s$

(e) $\Delta t = 0.1s$

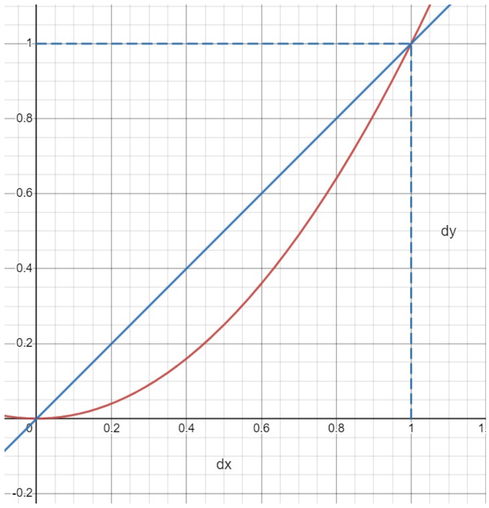
Slika 10: Realna zavisnost s(t) (plavo), zavisnost dobijena iz srednje brzine za ceo period (crveno), i zavisnosti dobijene različite manje podele vremena (zeleno)

funkciju u toj tački. Možemo se setiti skica tangencijalne brzine pri kružnom kretanju koje upravo potvrđuju ovaj koncept da brzina, kao izvod pređenog puta, zaista i jeste tangentna na trajektoriju.



Slika 11: Skica tangencijalnih brzina kao tangenti na trajektoriju u različitim tačkama

Da bismo razumeli tačno koja je veza izvoda i linearne funkcije koja predstavlja tangentu na funkciju čiji izvod tražimo, pogledajmo sliku 12, na kojoj je prikazana vrlo ogrubljena skica linearne funkcije izvoda u nekoj tački, sa istaknutim parametrima $dy = df(x)$ i dx, koji zajedno čine definiciju izvoda kao količnika te dve veličine.[2]



Slika 12: Skica parametara dy i dx koji figurišu u izvodu kao dy/dx

Uočimo sada trougao koji čine tačke (0,0), (1,0) i (0,1). Uočimo zatim ugao koji linearna funkcija zaklapa sa x-osom, i označimo ga sa α. Ako se sada setimo predavanja iz trigonometrije, vidimo da odnos $\frac{dy}{dx}$ u ovom trouglu predstavlja tangens tog ugla, odnosno:

$$\frac{df}{dx}(x) = tan(\alpha) \tag{18}$$

Ako se dalje još malo podsetimo elementarne matematike, setićemo se da ako imamo linearnu funkciju $y = kx + n$, koeficijent pravca je upravo zadat kao $k = tan(\alpha)$, gde je α ugao koji funkcija zaklapa sa x-osom.

Dakle, vrednost izvoda **u tački** nam vraća koeficijent pravca tangente na funkciju **u toj tački**.

Boldovani termini su jako bitni jer nas uvode u naredni deo analize izvoda. Naime, vidimo da izvod možemo da računamo u bilo kojoj tački funkcije. Možemo ga računati u tački F onako kako je definisana na slikama 10.a-e, ali tačku F smo mogli da pomerimo bilo gde duž zelene funkcije za koju računamo izvod. Drugim rečima, izvod, sam po sebi, je takođe funkcija.

[2]Ovde bi tehnički trebalo da piše Δy i Δx, pošto su očigledno u pitanju konačne vrednosti, i takođe vidimo da nam izvod ne daje tangentu baš zbog toga. Međutim, njih ćemo vrlo brzo pustiti da teže nuli i zaista dobiti tangentu, pa je zbog jednostavnosti korišćena već uvedena oznaka za diferencijal.

2.2.6 Izvod, kao funkcija

Podsetimo se nekih osnovnih stvari vezanih za funkcije sa elementarnih matematika. Pre svega to šta je funkcija. Funkciju smo predstavljali kao neku crnu kutiju u koju ubacimo jedan broj, x, a ona nešto uradi sa njim i izbaci nam neki drugi broj, y. Ovo znači da, u opštem slučaju, možemo uzeti svako x koje postoji (celu x-osu), za svako odrediti njegov par y, i dobiti beskonačno (x,y) parova brojeva. Tih beskonačno parova brojeva nam je dovoljno da nacrtamo funkciju na grafiku.

Sada, delovali smo izvodom $\frac{d}{dx}$ na neku funkciju $f(x)$, i, kako smo videli u prethodnom odeljku, dobili smo neku drugu funkciju koja nam sad za svako x, umesto y, vraća k, koeficijent pravca tangente na funkciju f(x). Međutim, to je opet neka druga crna kutija, u koju ubacimo x, ona uradi nešto, i izbaci nam $k = \frac{df}{dx}(x)$. Drugim rečima, delovanjem izvodom na funkciju dobili smo drugu funkciju

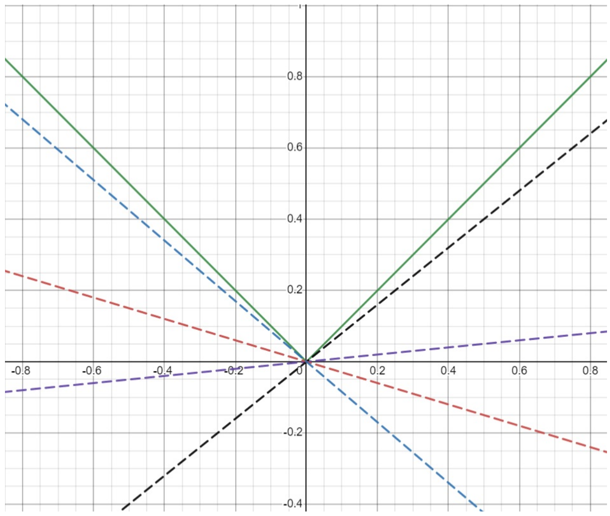
$$\frac{df}{dx}(x) = g(x) \tag{19}$$

Za ovakve matematičke objekte, koji uzmu jednu crnu kutiju $(f(x))$, i nju transformišu u neku drugu crnu kutiju $(g(x) = \frac{df}{dx}(x))$, kažemo da su *operatori*. Vrlo slično kao što smo za funkcije mogli uvek da postavimo pitanje šta bi bila inverzna funkcija koja bi nam, kada u nju ubacimo f(x) vratila x, možemo i sada postaviti analogno pitanje toga šta bi bio inverzan operator izvodu, tako da kada u njega ubacimo df/dx, on nama vrati $f(x)$. Zapamti ovo pitanje, na njega ćemo se vratiti vrlo brzo, jer se ispostavlja da je taj operator upravo integral. No, pre toga, hajde da nam ovi izvodi zapravo prođu kroz ruke malo.

2.2.7 (*)Kavijat: Ni izvode nije uvek moguće izračunati

Baš kao i u delu vezanom za limese, i ovde smo implicitno podrazumevali da za svaku tačku svake od funkcija koje analiziramo zapravo možemo da definišemo izvod. Međutim, opet se ispostavlja da ima gomila funkcija kod kojih to nije moguće. Pre svega, postoje funkcije kod kojih izvod uopšte nije definisan, par njih ćemo pomenuti kad budemo računali konkretne izvode.

Ovde možemo da navedemo jedan tipičan primer, a to je da postavimo pitanje šta bi bio izvod funkcije $f(x) = |x|$, i to baš u tački $x = 0$. Pogledajmo sliku 13, na kojoj je zelenom bojom prikazana ova funkcija. Vidimo da kroz tačku (0,0) možemo provući razne (zapravo, beskonačno mnogo) funkcije koje će 'tangirati' f(x) samo u toj tački i nigde drugde. Svaka od njih bi bio neki 'kandidat' za izvod, a, kako ih ima beskonačno mnogo, kažemo da izvod te funkcije u toj tački nije dobro definisan.



Slika 13: Funkcija $y = |x|$ (zeleno), i moguće tangente na nju u tački x=0 (isprekidane linije)

To ne znači da nigde nije definisan. Analogno kao što je funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ definisana za svako x osim za x=0, tako je i izvod $\frac{d|x|}{dx}$ definisan u svakoj tački (i jednak jedinici, kao što ćemo uskoro videti), osim za tačku x=0.

2.3 Računanje izvoda

Pomučismo se toliko da izvedemo formulu (15), red bi bio sad i da je primenimo.

2.3.1 Tablica izvoda, izvođenje

Hajde samo pre toga da prokomentarišemo par bitnih stvari. Prve svega, kao neki sanity check onoga što budemo računali dalje, valja imati na umu 'fizičarsku' intuiciju o tome šta izvod predstavlja.

Izvod je, kao što smo videli na primeru brzine, **stepen promene (rate of change)** neke veličine. Brzina je stepen promene puta po vremenu. Izvod nam, dakle, kao tangenta na funkciju govori o tome **koja je lokalna tendencija te funkcije da se menja**. Ako je izvod pozitivan, znači da će koeficijent pravca tangente biti pozitivan, znači da će dy biti pozitivno, dakle promena funkcije će biti pozitivna - ona će rasti. Drugim rečima, razlomak $dy/dx = g(x)$, gde je g(x) funkcija koju dobijemo kao izvod, nam upravo to i govori - ako promenim x za neko malo dx, kako će mi se promeniti dy.

Pogledajmo u tom kontekstu par trivijalnih primera. Bez korišćenja (15) možemo zaključiti šta će biti izvod funkcije oblika $f(x) = C$, gde je C neka konstanta. Konstanta se, jelte, ne menja, a kako je izvod stepen promene funkcije, ako promene nema, i izvod će biti nula. Alternativno, geometrijski možemo reći, tangenta na funkciju $y = C$ je upravo sama ta funkcija, koja je paralelna sa x osom, odnosno $y = kx + n = C \implies k = 0 = df/dx$. Dakle, izvod konstante je nula. Izvedimo to i eksplicitno iz (15)[3]

$$\frac{dC}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C - C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0 \tag{20}$$

Hajde da krenemo da gradimo jednu tablicu, gde ćemo zapisivati izvode raznih funkcija:

f(x)	df/dx
C	0

Šta bi dalje bilo prvo sledeće usložnjenje funkcije. Pa hajde umesto da bude konstanta, da bude jednaka x. Opet možemo geometrijski skratiti muke i reći da će tangenta na pravu liniju biti ta prava linija, tj. da će koeficijent pravca za funkciju $y = x$ biti 1, pa i da je to vrednost izvoda. Bićemo u pravu, ali hajde i eksplicitno to da izvedemo:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 \tag{21}$$

A šta ako nam je funkcija $f(x) = x^2$? Preskačući prvi korak iz (21) koji je samo definicija izvoda, analogno računamo sada:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \tag{22}$$

član Δx u brojiocu i imeniocu sad možemo da skratimo, i onda da pustimo limes, što će nam ubiti i ono Δx u zagradi. Time nam ostaje

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x = 2x$$

Zadržimo se za sekund na ovom rezultatu. Ono što smo njime dobili, u vrlo opštem obliku, je da je izvod kvadratne funkcije linearna funkcija. Vratimo se sada na rešenje problema brzine i pogledajmo šta smo tamo uradili. Definisali smo beskonačan niz beskonačno mnogo linearnih funkcija koje smo povezali tako da nam, kad ih pomnožimo sa Δt, što bliže opisuju funkciju $s(t)$. Ono što smo sad dobili je tačno kako se koeficijent pravca tih beskonačno linearnih funkcija (tangenti na krivu s(t)) menja sa t. Dakle koeficijent pravca će linearno rasti, odnosno tangente će imati sve veći nagib, što i ima smisla ako pogledamo grafike u tom odeljku.

Sada smo eksplicitno izveli da, za $s(t) = t^2$, izvod zaista jeste linearna funkcija, što i očekujemo. Postupak iz (22) naravno možemo da proširimo i na polinom bilo kog stepena,

[3]Ko nema u glavi ima u nogama

tako ćemo za x^3 dobiti izvod $3x^2$, od x^4 izvod $4x^3$ itd. Praktično induktivno možemo da zaključimo onda šta će biti izvod funkcije oblika x^n, i on će biti nx^{n-1}. Dodajmo to u tablicu

f(x)	df/dx
C	0
x^n	nx^{n-1}

Vrlo slično kao što smo do sada izveli ova dva člana u tabeli, samo uz komplikovaniji račun i više formalnosti oko računanja limesa koji nisu uvek tako jasni u oblicima u kojima se pojavljuju, ova tabela se može proširiti za praktično sve elementarne funkcije. Puna tabela izvoda je data u Apendiksu A, i lako je takođe možeš naći prostim guglanjem termina 'table of derivatives' ili slično.

Ono što je ovde bitno je da razumeš sve prethodno objašnjeno, a najpre ovu fizičarsku intuiciju oko izvoda koju sam malopre pominjao. Ostatak se svodi na nekakav račun, od kog smo deo već prošli u (21) i (22), i koji nam daje tablične vrednosti za sve nama relevantne funkcije u fizici kojom ćemo se baviti.

2.3.2 Pravila izvoda

Opet, bez zalaženja u neke preterano tehničke detalje, u ovom odeljku ćemo navesti neka glavna pravila pri računanju izvoda, i neka od njih i motivisati. Pre svega, izvod zbira biće jednak zbiru izvoda. Razlog za to je to što je razlika zbira funkcija jednaka zbiru razlike funkcija, odnosno

$$\Delta(f(x)+g(x)) = (f+g)(x+\Delta x)-(f+g)(x) = f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)-f(x)-g(x) = \Delta f(x)+\Delta g(x) \tag{23}$$

Pri računanju izvoda, ovo praktično znači sledeće:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = \frac{df(x)}{dx}+\frac{dg(x)}{dx}} \tag{24}$$

jer izvodi nisu ništa drugo nego količnik izraza zapisanog u (23), i Δx, kada Δx teži nuli. Analogno se može pokazati da, ako imamo neku konstantu λ koja nam množi funkciju od koje tražimo izvod, ona će samo iskočiti ispred izvoda:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\lambda f(x)) = \lambda\frac{df(x)}{dx}} \tag{25}$$

Iako izvod lepo prolazi kroz zbir i množenje konstantom, isti slučaj nije sa proizvodom i količnikom, već tu, uz malo komplikovaniji račun u koji nećemo zalaziti, možemo da pokažemo sledeća pravila za izvod proizvoda i količnika:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dx}(fg) &= \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx} \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{\frac{df}{dx}g - f\frac{dg}{dx}}{g^2} \end{aligned}} \tag{26}$$

U jednačini (25) sam izostavio argument (x), jer se on samo ponavlja pored svakog f ili g, čisto radi lepšeg prikaza (inače se podrazumeva da su sve funkcije od x).

Sada smo skoro potpuno opremljeni da izračunamo izvod skoro bilo koje funkcije na koju naiđemo. Problem bi nam pravile samo funkcije oblika f(g(x)). Ovakve funkcije možemo da nacrtamo na grafiku kao zavisnost funkcije f od njenog argumenta g(x), i isto bismo mogli da definišemo izvod te funkcije po njenom argumentu kao $\frac{df(g(x))}{dg(x)}$. Ali nas ne zanima izvod po nekoj drugoj funkciji, nego po nezavisnoj promenljivoj x. Dakle, hoćemo da razlomak $\frac{df(g(x))}{dg(x)}$ pomnožimo nečime tako da dobijemo da je jednak sa $\frac{df(g(x))}{dx}$. Iz osnovne algebre sledi da to nešto mora biti razlomak $\frac{dg(x)}{dx}$, tako da se ovaj problematični član $dg(x)$ skrati i zaista dobijemo razlomak koji nas zanima. Sve ukupno, ovo možemo zapisati kao sledeće pravilo:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(f(g(x)) = \frac{df(g(x))}{dg(x)}\frac{dg(x)}{dx}} \tag{27}$$

koje se još naziva i pravilo **izvod složene funkcije**, iz očiglednih razloga[4]. Drugo ime za ovo pravilo na koje ćete možda naići je i takozvano lančano pravilo (chain rule). Standardni primer za njega je funkcija $sin(x^2)$. Mi znamo šta je izvod od $sin(x)$, i znamo šta je izvod od x^2, ali sada moramo da iskombinujemo te dve stvari kako bismo našli izvod tražene funkcije. Koristeći (26) računamo:

$$\frac{d}{dx}sin(x^2) = \frac{dsin(x^2)}{d(x^2)}\frac{dx^2}{dx} = cos(x^2)2x \tag{28}$$

I to je to. Ostaje da provežbaš računanje izvoda na brdu primera, što ćeš svakako delom uraditi kroz ostala predavanja, i sada zvanično znaš diferencijalni račun.

2.3.3 Izvodi u fizici - ekstremumi funkcija

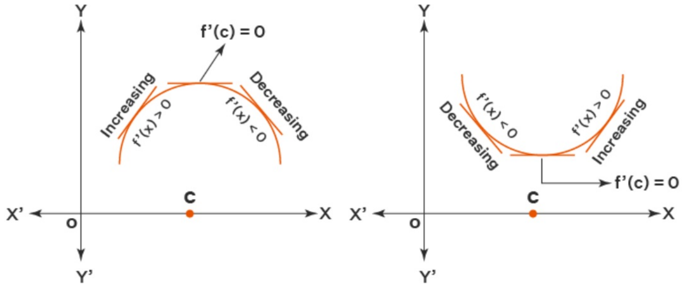
Videli smo da izvodi, kao objekti koji opisuju stepen promene različitih fizičkih veličina, jesu centralna stvar u fizici. Sada ćemo se osvrnuti na još jednu bitnu osobinu izvoda.

[4]jer tražimo izvod složene funkcije, jelte

U fizici nas jako često zanimaju ekstremalne vrednosti funkcija - minimumi i maksimumi. Nekada hoćemo da nađemo stanje minimalne energije, nekad poziciju maksimalne entropije ili temperature, nekad nas zanima u kom trenutku će na telo delovati maksimalna sila... U svakom od ovih slučajeva zanima nas gde neka funkcija ima maksimum ili minimum.

Ispostavlja se da izvodi nose svu informaciju koja nam treba da bismo našli maksimume ili minimume. Ovde bi valjalo osvrnuti se na jednu osobinu koju sam usputno već pomenuo, a to je da znak izvoda u nekoj tački govori da li originalna funkcija u bliskoj okolini te tačke raste ili opada. Da bismo ovo videli, dovoljno je da posmatramo sam izvod kao razlomak dy/dx. I dy i dx predstavljaju beskonačno male promene y i x, s tim što je dx po definiciji veće od nule (dx mi 'biramo kako fiksiramo', i tek onda gledamo na osnovu te naše promene koju namećemo kako funkcija reaguje na nju kroz dy). Dakle, ako je ceo izvod manji od nule, to znači da je dy manje od nule, a dy nije ništa drugo nego razlika vrednosti funkcije u dve bliske tačke jedna od druge. Ako je ta razlika manja od nule znači da je 'desna' tačka manja od 'leve', odnosno da funkcija opada. Analogno, ako je 'desna tačka veća od 'leve, onda će i $dy \approx y_2 - y_1$ biti pozitivno.

Ekstremum funkcije možemo lako definisati u kontekstu rasta/opadanja iste. Naime, znamo da u nekoj tački imamo ekstremum ako jako blizu nje sa jedne strane funkcija raste (ili opada), a jako blizu sa druge strane opada (ili raste). Postoji teorema, u koju nećemo zalaziti, a koja tvrdi da u tom slučaju sigurno postoji tačka između dela gde funkcija raste (/opada) i dela gde funkcija opada (/raste), u kojoj ima ekstremum. U toj tački, funkcija će imati maksimum, baš kao na sledećoj slici



Dakle, kada nas zanima da nađemo ekstremum funkcije, onda tražimo tačke u kojima izvod te funkcije ima vrednost nula. Kada nađemo te tačke, doduše, i dalje nećemo znati da li je u pitanju konkretno maksimum ili minimum. Ovo možemo da razlučimo na dva načina. Možemo da bukvalno ubacimo nađene vrednosti x nazad u funkciju i vidimo gde je funkcija veća (to je onda maksimum) odnosno manja (to je minimum). Formalniji način je da nađemo koji je znak drugog izvoda funkcije u toj tački. Ako je drugi izvod veći od nule, znači da je u pitanju minimum, a ako je manji, znači da je maksimum.

Ovi detalji nisu toliko sada bitni koliko da razumeš da nam izvod govori o tome da li funkcija raste ili opada, kao i da možemo naći minimume i maksimume koristeći uslov da je izvod jednak nuli.

2.4 Final touches

Ostaje samo još par sitnijih stvari koje ovde valja napomenuti pre nego što pređemo na integralni račun.

2.4.1 Drugi i viši izvodi

Kako smo već napomenuli, izvod funkcije nam daje neku novu funkciju. Znači da i na tu novu funkciju opet možemo da delujemo izvodom. Taj izvod od izvoda funkcije zovemo drugim izvodom i obeležavamo sa

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}(x)\right) = \frac{d^2f(x)}{dx^2} \tag{29}$$

Ovde nismo ništa pametno rekli, samo kompaktnije zapisali ono što smo već znali. Recimo da je $f(x) = 2x^5$. Prvi izvod bi bio $df/dx = 2(5x^4) = 10x^4$ (gledamo tablicu izvoda). Sada od toga tražimo još jedan izvod $\frac{d}{dx}(10x^4) = 10(4x^3) = 40x^3 = \frac{d^2f}{dx^2}$.

U fizičkom kontekstu, drugi izvod, recimo, pređenog puta o kom je bilo reči, će biti prvi izvod brzine, a to je ubrzanje.

Ovu priču možemo dalje da guramo i da računamo i treći izvod, gde bismo dobili $\frac{d^3f}{dx^3} = 120x^2$, i isto tako i četvrti, peti... n-ti izvod.

U Lajbnicovoj notaciji n-ti izvod po vremenu se predstavlja sa n tačaka iznad funkcije. Vrlo retko ćemo raditi sa više od dve, a one predstavljaju baš drugi izvod po vremenu:

$$\frac{d^2f}{dt^2} = \ddot{f}(t) \tag{30}$$

U trećoj, 'matematičarskoj' notaciji koju smo naveli u 2.2.4, n-ti izvod se označava sa $f^{(n)}(x)$

2.4.2 Parcijalni izvodi

U fizici jako često radimo sa funkcijama više promenljivih. Recimo, temperatura nekog gasa će zavisiti od toga gde je merimo, tj. položaja $\boldsymbol{r}$, ali i od trenutka u vremenu u kom merimo (ako se gas aktivno zagreva ili hladi npr). Dakle temperatura će biti funkcija dve promenljive $T = T(\boldsymbol{r}, t)$. Međutim, nas možda zanima samo vremenska evolucija temperature, a ne i prostorna. U tom slučaju ćemo računati nešto što se zove parcijalni izvod, u ovom slučaju po vremenu. On se zapisuje kao:

$$\frac{\partial T}{\partial t} \tag{31}$$

I znači da tražimo izvod T po t, gde pritom sve ostale promenljive (u ovom slučaju samo r), posmatramo kao konstante. Evo primera - gledajmo funkciju $f(x, y) = 5x^2+2xy$ i izračunajmo njene parcijalne izvode. Prvo ćemo računati parcijalni po x, gde gde y gledamo kao konstantu (u kontekstu jednačine (25)).

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5(2x) + 2y = 10x + 2y \tag{32}$$

a onda i parcijalni po y, gde sad x gledamo kao konstantu (npr izvod prvog člana po y će biti nula, jer se y uopšte ne pojavljuje):

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 + 2x = 2x \tag{33}$$

Priču iz prethodnog odeljka možemo primeniti i ovde i definisati više parcijalne izvode kao $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ i slično, ali u ove detalje nećemo dalje zalaziti.

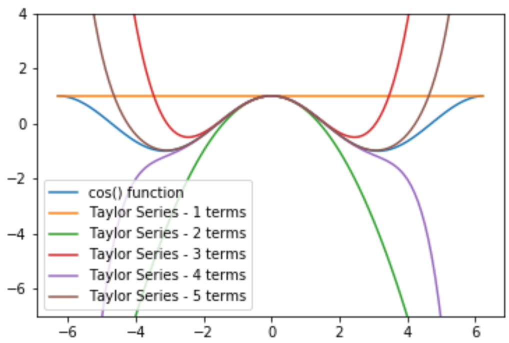
2.4.3 (*)Tejlorov razvoj

Kako sam već formulisao u ranijim odeljcima, izvodi nam govore o ‘lokalnoj tendenciji funkcije da se menja‘. Termin lokalno ovde znači u beskonačno maloj okolini tačke u kojoj računamo izvod. Međutim u nekoj aproksimaciji, to jest uz uključenje greške nekog reda (koju najčešće čuvamo da bude zanemarljivo mala), možemo iz informacija o izvodu funkcije da saznamo kako se ona ponaša u okolini neke tačke.

Ovo je dato u poznatoj Tejlorovoj formuli. Recimo da posmatramo funkciju f(x), za koju ne znamo tačno kako zavisi od x (vrlo čest slučaj u fizici), ali znamo kako se njeni izvodi ponašaju (znamo, recimo, brzinu ili ubrzanje, ali ne znamo pređeni put), i znamo da funkcija u nekom trenutku ima neku konkretnu vrednost f(a), za neko a. Samo iz tih informacija, koliko je f(a) i kako izgledaju izvodi te funkcije, možemo rekonstruisati celu funkciju u nekoj okolini tačke a:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + ... \tag{34}$$

Očigledno, ne možemo uzeti svih beskonačno izvoda (ako ih ima) i uvrstiti ih u sumu u prethodnoj jednačini. Ako bismo to mogli da uradimo, zaista bismo u okolini a beskonačno precizno potrefili funkciju f(x). Umesto toga, mi isečemo sumu posle nekog člana (recimo, prvog, jer znamo samo prvi izvod funkcije npr). Ovo će nam dati dobru aproksimaciju funkcije, ali samo u bliskoj okolini tačke a. Ako uzmemo i neke više članove, recimo prva tri, to će nam dati bolju aproksimaciju na širem opsegu x-eva oko tačke a. Ovo je lepo ilustrovano na sledećoj slici:



Slika 14: Prava funkcija (plavo) i aproksimacije Tejlorovim razvojem do različitog broja članova (ostale boje)

Tejlorov razvoj nam, na primer, omogućava da se oslobodimo funkcija kao što su logaritam ili sinus, i da umesto njih koristimo polinome koji su daleko zahvalniji za baratanje, sve dok analiziramo neki sistem dovoljno blizu tačke oko koje vršimo razvoj.

Videćete kroz buduće seminare i predavanje da je Tejlorov razvoj jedna izuzetno korisna alatka, a koja se potpuno oslanja na koncept izvoda koji smo upravo uveli.

2.5 Zadaci

1. Formalno pokaži da će izvod od x^3 biti $3x^2$.

2. $\frac{d}{dx}(5x^2 - 2x)$

3. $\frac{d}{dx}cos(x^2)$

4. Nađi minimum funkcije $f(x) = 5x^2 + 8x - 2$ i uporedi rezultat sa Vijetovom formulom za minimum kvadratne funkcije koji si učila/o u školi (ako jesi).

5. Data je funkcija $f(x) = -2x^2 + 5x + 6$. Analizirajući samo njen izvod, nađi na kojim segmentima ona raste a na kojim opada.

6. $\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x + x^2}{x}\right)$

7. $\frac{d}{dx}(x^2 e^{2x})$

3 INTEGRALNI RAČUN

Kako smo nagovestili u trenutku kada smo definisali izvod kao operator, integrali iskaču prirodno kao inverzan operator izvodu. Ako si skapirala/o prethodna dva dela lepo, ovde se nećeš upoznati sa preterano stranim konceptima - opet ćemo gledati neke funkcije, i opet ćemo ih seckati na neke sitne komadiće, puštati neke limese, i videti šta dobijamo.

3.1 Neodređeni integral

3.1.1 Anti-izvod

Operator inverzan izvodu, odnosno crnu kutiju u koju kada ubacimo $\frac{df}{dx} = g(x)$ ona nam ispljune nazad $f(x)$, zovemo neodređeni integral. Još jedno ime za njega je i anti-izvod (antiderivative), iz istih razloga. Ovde ćemo uvesti određeni standardni zapis za neodređeni integral, prodiskutovaćemo tablicu neodređenih integrala i neke njegove osobine, ali trebalo bi da imaš na umu da ovde pričamo o relativno apstraktnom konceptu inerznog operatora. Međutim, kroz naredna poglavlja, videćeš vrlo opipljive i fizičke interpretacije integrala, i određenog i neodređenog, koje će ti pojasniti zašto se koristi takav zapis i zašto integrali imaju takve osobine. Na kraju ćemo se vratiti i na neodređeni integral i pričati još malo o njemu u novom kontekstu. Za sada, zadržimo se na ovom potpuno apstraktnom uvođenju neodređenog integrala kao anti-izvoda.

Recimo da krenemo od neke funkcije $F(x)$. Uzmemo i izračunamo njen izvod, i dobijemo izvod kao neku drugu funkciju $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$. Sada definišemo anti-izvod ovog izvoda. Šta to znači - znači da će anti-izvod od f(x) po x biti jednako F(x). Podvučena rečenica je bitna. Prođimo kroz nju, reč po reč. 'Anti-izvod' iliti neodređeni integral obeležavamo vijugavim simbolom $\int$. 'Od f(x)' znači da taj vijugavi simbol deluje na f(x), odnosno imamo $\int f(x)$. 'Po x' se označava tako što stavimo diferencijal one promenljive po kojoj integralimo u integral, $\int f(x)dx$. Videćemo otkud taj diferencijal i šta on znači nešto kasnije, za sada ga shvati prosto kao zapis da znamo da integralimo funkciju po toj promenljivoj (isto kao što dx u imeniocu razlomka za izvod znači da radimo izvod po toj promenljivoj). Konačno, na kraju podvučene rečenice smo rekli da će ovaj objekat koji smo sad izgradili biti jednak F(x), odnosno:

$$\int f(x)dx = F(x) \tag{35}$$

I, to je to, definisali smo anti-izvod, zar ne? Pa, još malo i jesmo. Svakako, ako sada uzmemo i delujemo izvodom na obe strane jednačine (35), sa leve strane imaćemo izvod od anti-izvoda od f(x), to je po definiciji f(x), a sa desne imamo izvod $\frac{dF(x)}{dx}$ - sve izgleda sasvim okej. Međutim, šta će se desiti ako ja dodam neku konstantu, recimo pored F(x), tako da sa desne strane (35) imam $F(x)+C$. Ako pogledamo tablicu izvoda, videćemo da je izvod zbira jednak zbiru izvoda, kao i da je izvod konstante nula. Dakle, ako opet napadnem tu modifikovanu funkciju sa tom konstantom izvodom, ponovo ću dobiti $\frac{dF(x)}{dx}$. To mogu da uradim za bilo koju konstantu C.

Došli smo do jedne interesantne osobine neodređenog integrala, a to je da je definisan do na konstantu. Razlog za to je taj što izvod ubija sve konstante koje stoje same za sebe, što znači da, nakon što uzmemo izvod, gubimo sve informacije o konstantama koje smo imali pre toga. Dakle, kada uzimamo anti-izvod, odosno hoćemo da se vratimo na tu originalnu funkciju sa sve konstantama koje je ona imala, moramo tu nepoznatu konstantu nekako da uključimo u definiciju anti-izvoda. To radimo tako što redefinišemo (35) da uključimo i tu nepoznatu konstantu:

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x)+C} \tag{36}$$

Definisali smo neodređeni integral, odnosno anti-izvod. Nije bilo strašno, zar ne? Biće sve manje strašno kako dalje budeš čitala/o, jer ćemo od narednog poglavlja izgraditi dublju fizičku intuiciju oko integrala.

Podsetimo se, krenuli smo od vrlo fizičkog problema računanja brzine iz pređenog puta, razvili ceo formalizam računanja izvoda, i onda uveli neodređeni integral kao inverzan operator izvodu. Sada ćemo krenuti sa suprotne strane, pokušati da istim pristupom rešimo problem računanja pređenog puta iz brzine, odakle ćemo definisati određeni integral, zatim njega uopštiti maksimalno, i vratiti se nazad do neodređenog integrala, čime ćemo u potpunosti zaokružiti celu priču, od izvoda do integrala.

3.2 Određeni integral

3.2.1 Problem pređenog puta

Ako se setimo kako smo u problemu brzine modelovali tu brzinu, ciljali smo na to da, kada izdelimo vreme na delove, brzina pomnožena sa tim intervalom vremena nama može da rekonstruiše nazad funkciju pređenog puta koju znamo. Ovo potiče iz one osnovnoškolske definicije brzine koju smo naveli u (11)[5], a koju smo hteli da smanjimo na jako male vremenske intervale da bismo bili što precizniji. Međutim, ako razmislimo malo, to znači da smo isto to

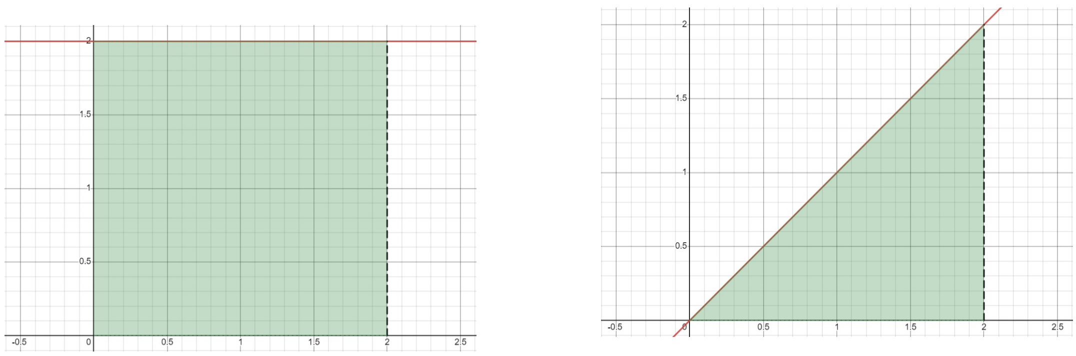
[5]gde smo je samo pomnožili sa Δt

mogli da uradimo i *bez* toga da znamo koja je naša realna funkcija pređenog puta od vremena. Tada nam je ona bila neophodna da bismo mogli da uporedimo našu definiciju brzine preko izvoda koji smo uvodili kao novi objekat. Pokazali smo da izvodi zaista rade posao, što znači da sada čak i ako ne znamo realnu vrednost s(t) možemo da je rekonstruišemo iz brzine, ako za svaki mali vremenski interval dt pomnožimo brzinu u tom trenutku sa tim vremenskim intervalom $v(t)dt$ i time dobijemo pređeni put tokom tog intervala $ds(t) = v(t)dt$. Ali šta je, čisto geometrijski, veličina $v(t)dt$? Pa to je jedan mali uzan pravougaonik širine dt, a visine $v(t)$. Ako nas zanima ukupna zavisnost s(t) na nekom konačnom intervalu vremena, hoćemo da saberemo sve te površinice malih pravougaonika kako bismo našli ukupan pređeni put.

Drugim rečima, svodimo problem nalaženja pređenog puta iz poznate brzine na problem računanja površine. Hajde da ga definišemo i rešimo u opštem slučaju.

3.2.2 Problem površine

Računanje površine je nešto što hoćemo da radimo jako često i van prethodno uvedenog problema pređenog puta. Prosto u raznim problemima, od izgradnje kuća i mostova, pa do rešavanja vrlo kompleksnih problema u fizici, jako često imamo potrebu da izračunamo kolika je površina 'nečega'. To 'nešto' možemo uvek da matematizujemo preko neke funkcije. Na primer, ako nas zanima površina kvadrata stranice a=2 (centimetra, metra, kilometra, čega god), to možemo predstaviti kao na slici 15.a. Ako nas, sa druge strane, zanima površina nekog trougla, pa tu površinu opet možemo parametrizovati kao površinu ispod neke linearne funkcije (Slika 15.b kao jedan od mogućih primera).



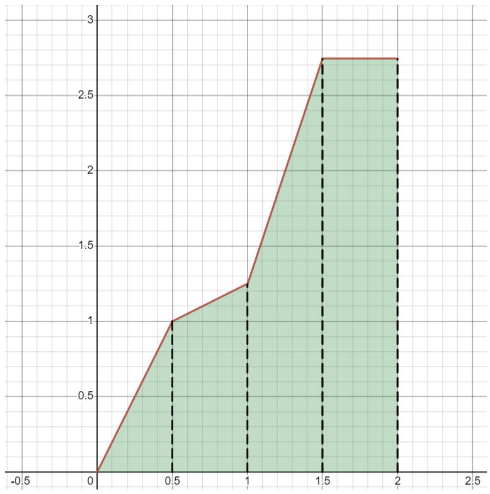
(a) Funkcija y=2 (crveno), i površina kvadrata 2x2 ispod te funkcije od 0 do 2 (osenčeno zeleno)

(b) Funkcija y=x (crveno), i površina jednakokrakog trougla stranica 2 ispod te funkcije, od 0 do 2 (osenčeno zeleno)

Slika 15: Površine kvadrata (levo) i trougla (desno) definisane kao površine ispod konstantne, odnosno linearne funkcije

U oba ova slučaja, mi znamo iz osnovne geometrije kako da izračunamo te površine. Za kvadrat stranice 2 to će biti $P = a^2 = 2 \cdot 2 = 4$, a površinu trougla možemo posmatrati kao polovinu površine kvadrata (ili pravougaonika, ako trougao nije jednakokraki), i onda možemo da izračunamo $P = \frac{1}{2}a^2 = \frac{2\cdot 2}{2} = 2$.

Čak i za neke malo komplikovanije funkcije, kao na primer kombinacija od nekoliko linearnih kao na slici 16, mi i dalje možemo da se dovijamo i da računamo površinu ispod te funkcije kao zbir površina pojedinačnih trapeza, trouglova ili pravougaonika.



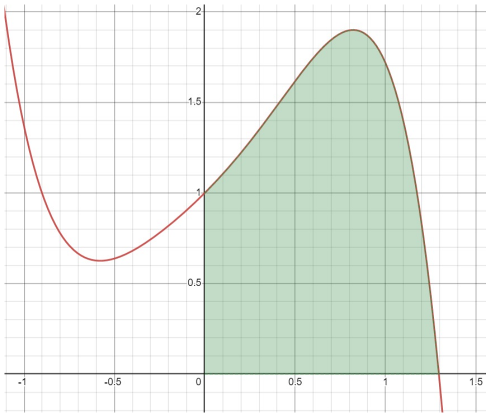
Slika 16: Niz nekoliko linearnih funkcija na različitim segmentima (crveno), površina ispod njih (osenčeno zeleno), i uočeni geometrijski oblici sa poznatim površinama (isprekidano crno)

Međutim, šta da radimo ako u nekom fizičkom problemu dođemo do toga da nas zanima površina ispod neke krive kao na slici 17[6]? Ovde nemamo neke jasno podeljene segmente pojedinačnih geometrijskih oblika kao što su trapezi ili pravougaonici, pa da možemo da se snađemo kao malopre.

Što je još gore po nas, ispostavlja se da ovakvih krivolinijskih funkcija koje ne možemo da podelimo na geometrijske oblike poznatih površina ima daleko, daleko više nego onih koje možemo, tako da se u fizici skoro uvek susrećemo sa njima.

Ovo očigledno predstavlja problem. Slično kao što smo u drugom odeljku naišli na to da neka ogrubljena ideja brzine ne može lepo da nam opiše kretanje tela u svakom trenutku vremena, tako ovde nailazimo na to da neka ogrubljena ideja površine ne može lepo da nam opiše površine ispod većine funkcija. Rešenje, videćemo, se krije upravo u integralima, i do njih ćemo doći jako sličnim rezonom kao što smo i do izvoda.

[6] U prethodno navedenom problemu pređenog puta, možemo zamisliti da nam je ta funkcija zavisnost brzine od vremena i da hoćemo da izračunamo koliki je pređeni put, odnosno površina ispod te krive, na naznačenom intervalu



Slika 17: Funkcija $y = e^x - x^5$ (crveno) i zeleno osenčena površina ispod nje na segmentu od 0 do oko 1.3

3.2.3 Rešenje problema površine

Poučeni pristupom kojim smo uspeli da rešimo problem brzine u drugom odeljku, hajde sada da probamo na sličan način da rešimo i ovaj problem računanja površine. Mi, očigledno, ne umemo da računamo površine ispod nekih čudno zakrivljenih linija, već samo ispod nečeg što je lepo i ravno, kao pravougaonik. Hajde onda, vrlo nalik onome što smo uradili na slici 16, da probamo ovu funkciju da izdelimo na nekoliko pravougaonika i da vidimo koliko ćemo omašiti zelenu površinu ako to uradimo. Za početak, možemo da probamo da podelimo x-osu približno na tri dela (Slika 18.a). Na prvom segmentu, od 0 do 0.5, uzmemo vrednost funkcije u 'desnom' kraju ovog intervala, i povučemo pravougaonik kome će jedna stranica biti ta vrednost funkcije, a druga dužina segmenta na x-osi. To onda uradimo i na segmentu od 0.5 do 1, i saberemo te dve površine (osenčeno crveno na slici). Tako bismo dobili neki izraz:

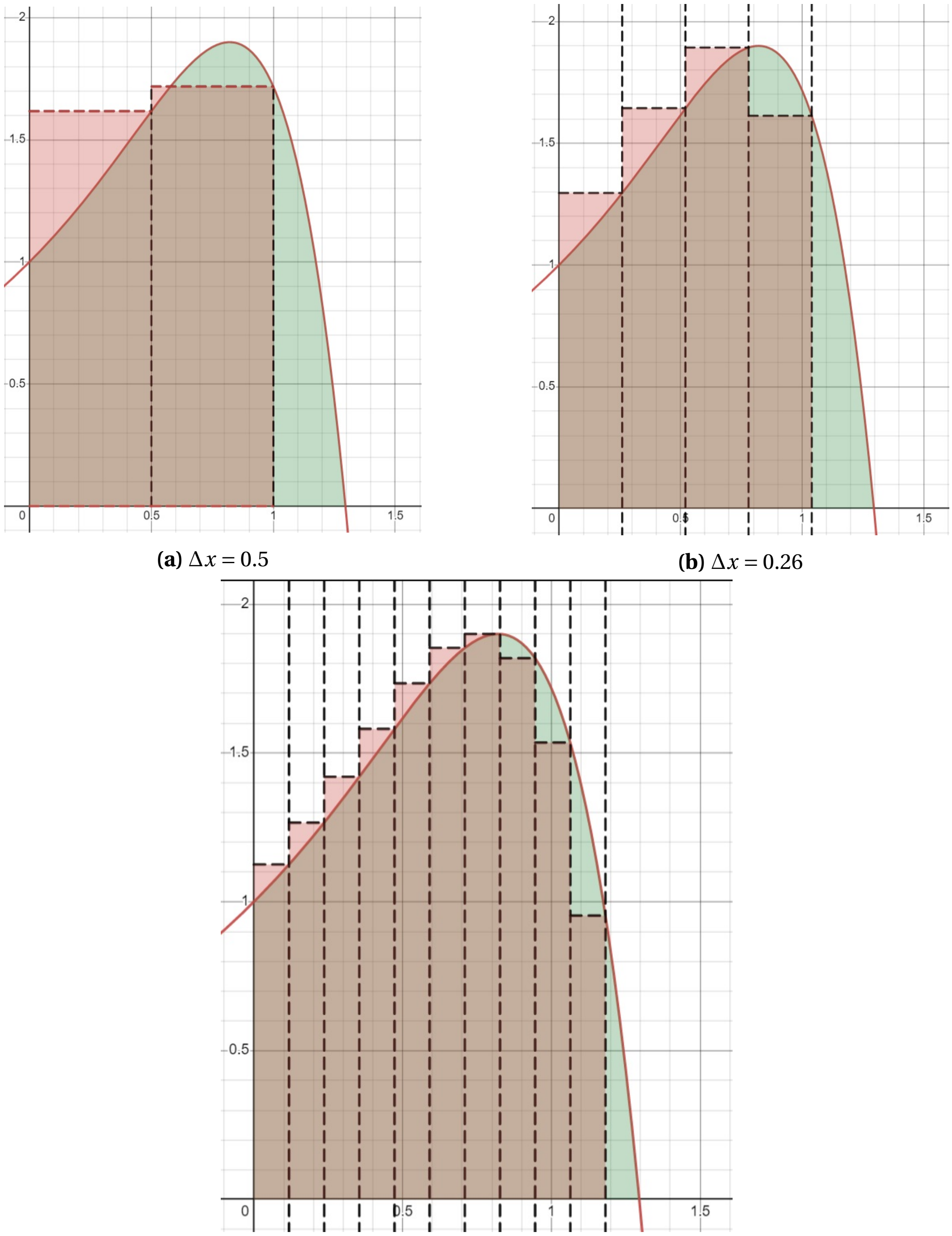
$$P \approx f(0.5)(0.5-0) + f(1)(1-0.5) = f(0.5)0.5 + f(1)0.5 = \Delta x(f(0.5) + f(1)) \tag{37}$$

Vidimo, jasno, da nismo baš nabolje poklopili crvenu sa zelenom površinom. Ali, ako se setimo priče o rešenju problema brzine, i pogledamo grafik na slici 6.a, videćemo vrlo jasnu paralelu ove dve situacije. Pa hajde da dodatno profinimo podelu x ose i da vidimo da li možda, baš kao i kod problema brzine, ovako možemo bolje da aproksimiramo površinu.

U tom slučaju bismo površinu računali kao:

$$P \approx \sum_{k=1}^{4} f(k\Delta x)\Delta x \tag{38}$$

gde smo uveli novu notaciju za sumu sa kojom ste se možda sreli ranije, ali koja u suštini



(a) $\Delta x = 0.5$ **(b)** $\Delta x = 0.26$

(c) $\Delta x = 0.118$

Slika 18: Aproksimacije površine ispod funkcije (zeleno) različito finim podelama na pravougaonike (crveno)

kaže: ‘ubaci k koje piše dole u izraz desno, pa ga saberi sa izrazom desno za k+1, pa saberi sa izrazom desno za k+2 i tako dalje dok k ne postane broj gore‘. U ovom slučaju k ide od 1 do 4, odnosno imamo 4 sabirka, za svaki od četri pravougaonika.

Ako pogledamo sliku 18.b, vidimo da je ovo definitivno bolji pokušaj da opišemo zelenu površinu, i vidimo da smo vrlo verovatno na tragu nečega čim imamo toliko analognu priču kao i kod problema brzine. Nastavimo onda i povećamo na 10 segmenata i dobijemo sliku 18.c. Tu je površina

$$P \approx \sum_{k=1}^{10} f(k\Delta x)\Delta x \tag{39}$$

Priča postaje jasna - hoćemo da delimo x-osu na što manje delove, odnosno da puštamo opet da nam Δx teži nuli (neki limesi opet, nešto, a?). Time će nam gornja granica suma iz jednačina (38) i (39) težiti beskonačnosti, jer sada pravimo beskonačno podela, a znak $\approx$ će zaista postati znak jednakosti jer sada računamo sa beskonačno sitnom podelom (analogno priči o izvodima). Zapišimo to sada formalno:

$$P = \lim_{\Delta x \to 0} \lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} f(k\Delta x)\Delta x \tag{40}$$

Ova dva limesa ne bi trebalo da te plaše, jer zapravo jedan od njih podrazumeva ovaj drugi, tako da čak ni ne moraju oba da se pišu. Naime, ako Δx ne bi težilo nuli, kada sabiramo beskonačno članova koji se množe tim Δx ne bismo računali površinu od 0 do 1.3, kao što hoćemo, nego bismo pokrili nešto što teži beskonačnosti. Alternativno, ako $\Delta x \to 0$, a N ne teži beskonačnosti, dobili bismo neki izraz koji teži nuli, i sa konačno mnogo beskonačno malih članova onda ne bismo uspeli da pokrijemo ceo segment od 0 do 1.3.

Šta će se desiti u jednačini (40) kada pustimo ove limese? Δx će, naravno, preći u dx. Argument funkcije $k\Delta x$, koji je do sada bio tzv. tekuća promenljiva, u smislu da kako povećavamo k ona klizi po x-osi i vraća nam vrednosti funkcije u nekim diskretnim tačkama, sada će zaista proći kroz svih beskonačno mnogo vrednosti x sa x ose u opsegu od 0 do 1.3, tako da slobodno možemo da napišemo i samo x umesto nje. A sama suma, pogađate, u limesu će preći u integral:

$$P = \lim_{\Delta x \to 0} \lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} f(k\Delta x)\Delta x = \int_0^{1.3} f(x)dx \tag{41}$$

Činjenica da x u funkciji treba da 'klizi' od 0 do 1.3, sačuvano je u ovim brojevima koje smo natakli na dno i vrh simbola za integral.

Na ovaj način, uspeli smo da definišemo nešto što zovemo **određeni integral**, a koji predstavlja površinu ispod funkcije na nekom segmentu. Vidimo da se razlikuje od neodređenog po tome što ima ove brojeve koji definišu granice unutar kojih integralimo da bismo našli površinu. Uskoro ćemo se vratiti na funkciju $y = e^x - x^5$ i izračunati joj površinu kako bismo joj se osvetili što nas je naterala da napravimo integrale samo zbog nje. Pre toga, samo, bi bilo dobro da prethodno razvijenu priču i definiciju integrala malo proširimo, vidimo neke osobine integrala, i onda povežemo određeni i neodređeni integral.

3.2.4 (*)Zašto smo baš tako definisali pravougaonike

Možda, gledajući u sliku 18, se pitaš zašto smo baš tako specifično definisali pravougaonike. Zašto, na primer, uzimamo da nam visina pravougaonika bude vrednost funkcije u desnoj od dve tačke svakog intervala, a ne u levoj. Sasvim legitimno pitanje.

Ono što sam ja uveo kao definiciju integrala je nešto što se zove gornja Darbuova suma (gornja, jer se uzima desna vrednost funkcije). Potpuno analogno smo mogli da uzimamo leve vrednosti funkcije, i u tom slučaju bismo definisali ono što se formalno zove donja Darbuova suma. I sa jednom i sa drugom bismo u nekim integralima podbacili površinu, a u nekim prebacili, ali, ako je funkcija iole normalna (odnosno ima definisan integral), kada pustimo limes ove dve sume moraju da teže ka jednoj istoj vrednosti - vrednosti površine.

Gornja i donja Darbuova suma nisu čak ni jedini načini na koje smo mogli da postavimo pravougaonike. Mogli smo uzeti i srednju vrednost funkcije na tom intervalu kao visinu pravougaonika (ovo bi bila tzv. Rimanova suma srednje tačke - midpoint Riemann sum). Mogli smo da postavljamo trapeze (trapezoidal Riemann sum) itd itd...

Srž ideje ostaje ista, i sve te razne sume, koliko god bile čudne, će u limesu postati jedna ista stvar. Različiti načini ovog sumiranja su korisni u oblastima numeričke analize gde se na ovaj način aproksimiraju neki jako teški integrali koje ne možemo analitički da izračunamo, i onda moramo da pustimo kompjuter da zaista uradi postupak sa slike 18, ali sa konačno mnogo koraka.

3.2.5 Funkcija površine

Malopre smo, rezonom sličnim kao kod problema brzine, uspeli da razvijemo koncept određenog integrala za koji smo videli, kao što sam i naglasio ranije, da nije ništa drugo nego jedna fensi suma, definisana preko onih limesa. Mi smo konkretno rešili problem površine funkcije u opsegu od 0 do 1.3.

Recimo sada, da ja ne znam do koje gornje granice hoću da integralim neku funkciju. Prosto, čekam da uradim neki eksperiment ili da mi neki moj kolega javi šta je dobio u svom računu da bih znao dokle treba da integralim. Sve što znam jeste koju funkciju ću integraliti, i da ću je integraliti od nule do neke vrednosti x. Pa ja sigurno neću da čekam skrštenih ruku, nego ću da kažem ‘okej, ja ne znam dokle ću integraliti, ali znam sigurno da **za svaku gornju granicu** ja mogu da izračunam šta će biti površina‘. Za svaku gornju granicu x, meni će integral vratiti neki *broj P* koji predstavlja površinu ispod te funkcije od 0 do x.

Ovo te možda podseća, sa razlogom, na trenutak u poglavlju 2.2.5, kada smo shvatili da nam izvod vraća takođe nekakav broj u svakoj tački x. Taj broj je tada bio tangenta na funkciju u toj tački, a ovde je površina ispod nje od nule do te tačke. Drugim rečima, potpuno analogno ovde vidimo da je i određeni integral, sa promenljivom gornjom granicom x, zapravo neka funkcija, označićemo je sa F(x), isto kao i kod neodređenog integrala, i da ta funkcija govori kolika je površina ispod f(x), od 0 do x. Zapišimo to formalno:

$$\int_0^x f(x)dx = F(x) \tag{42}$$

U ovoj jednačini samo nailazimo na jedan tehnički problem - vrednost x u argumentu funkcije i x u gornjoj granici nisu ista stvar. Argument funkcije je nešto što će se ‘šetati‘ od 0 do x tokom računanja integrala, dok je x fiksirana gornja granica koju smemo da menjamo samo pre nego što krenemo da računamo integral. Zbog toga moramo da uvedemo drugo ime za argument funkcije, i ono je najčešće x' ili t. Da ne bismo brkali sa vremenom, koristićemo x'. Uz ovu prepravku, prethodna jednačina postaje:

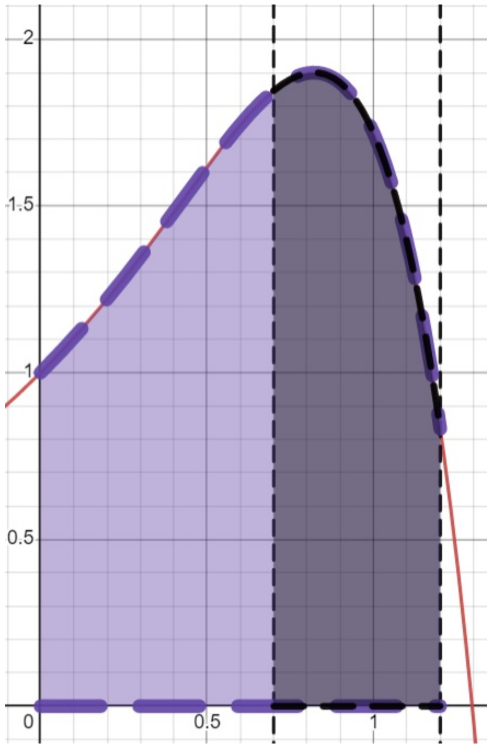
$$\boxed{\int_0^x f(x')dx' = F(x)} \tag{43}$$

Zaustavimo se sada na sekund da se divimo našoj tvorevini i bolje je razumemo. Upravo smo definisali tzv. **primitivnu funkciju**, odnosno funkciju površine F(x), koja predstavlja rezultat računanja integrala, odnosno površine neke funkcije f(x), na opsegu od 0 do datog x.

Ako nas dalje zanima površina ispod funkcije u nekom specifičnom opsegu, recimo od nekog a do nekog b, sve što treba da uradimo je da izračunamo površinu od 0 do b, i od nje oduzmemo površinu od 0 do a.

Ovako stižemo do nečega što se zove **Njutn-Lajbnicova formula**, takođe poznata i kao centralna teorema analize. Ona kaže sledeće, ako nam je poznata primitivna funkcija (funkcija površine) F(x), onda je bilo koji određeni integral:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)} \tag{44}$$



Slika 19: Tamno ljubičasti segment površine biće jednak ukupno osenčenoj površini (uokvireno isprekidano ljubičasto) koja je jednaka F(b) minus površina svetlo ljubičastog dela, F(a)

3.2.6 Veza određenog i neodređenog integrala

Vratimo se na jednačinu (43) kao definiciju primitivne funkcije (funkcije površine). Do nje smo došli tako što smo pustili da nam se gornja granica određenog integrala menja. Šta će se desiti, ako pustimo da se i donja menja, recimo da bude neko a umesto 0? Pa, vrednost integrala će se promeniti za plus ili minus vrednost površine od 0 do a, što je svakako neka konstanta C. A ono što smo sad dobili je integral sa neodređenom gornjom, i neodređenom donjom granicom - jasno je sada zašto se to zove neodređeni integral. Drugim rečima, neodređeni integral nosi istu informaciju kao i primitivna funkcija (43), uz dodatnu slobodu toga da možemo da ga računamo od bilo koje donje granice, uz to da to uračunamo kroz integracionu konstantu C.

Dakle, dok je određeni integral uvek neki konkretan broj (površina), odnosno konkretna vrednost primitivne funkcije za neko konkretno x, neodređeni integral predstavlja upravo celu primitivnu funkciju F(x) (43), do na konstantu. A, pošto je primitivna funkcija ništa drugo nego određeni integral sa kliznom gornjom granicom, to znači da sva pravila koja ćemo u narednom odeljku izvesti uglavnom za određene integrale, takođe važe i za neodređene.

3.3 Računanje integrala

U prethodnim odeljcima uveli smo pojmove neodređenog i određenog integrala, to šta oni znače, uveli smo i neku fizičarsku intuiciju oko njih. Ali nijedan nismo sračunali. Sada ćemo pogledati koje osobine integral, kao fensi suma i ništa više, ima, i kako možemo da ih upotrebimo, uz vezu određenog i neodređenog integrala, kako bismo sastavili tablicu integrala analognu tablici izvoda koju smo delom izveli u 2.3.1.

3.3.1 Osobine integrala

Ponavljam još jednom, integral je samo suma. Ako ja u sumi svaki njen član pomnožim nekom konstantom λ, odnosno ako imam zbir nekih članova koji su svi pomnoženi sa λ, ja mogu samo da izvučem to λ, tako da ono izađe ispred sume, odnosno integrala. Eto prvog pravila:

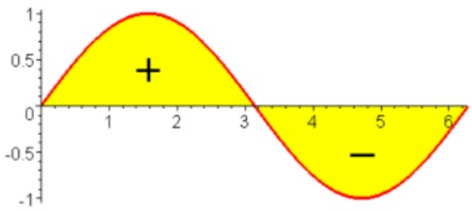
$$\boxed{\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx = \lambda F(x) + C} \tag{45}$$

Posmatrajmo dalje šta bi bio integral zbira dve funkcije. Opet, ako gledamo integral kao jedan veliki zbir, što i jeste, možemo da zaključimo da će suma zbira biti zbir suma $\sum(x_i + y_i) = \sum x_i + \sum y_i$, odakle sledi:

$$\boxed{\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx} \tag{46}$$

drugo pravilo.

Može se, dalje, postaviti pitanje šta bi bila vrednost integrala ako funkcija postaje negativna, odnosno vrednost 'površine' ispod x-ose do funkcije, kao na slici:



Slika 20: Površina je pozitivna tamo gde je funkcija pozitivna, i negativna tamo gde je funkcija negativna

Na slici je već implicirano, da će ta površina imati negativnu vrednost. Možda ti koncept negativne površine zvuči pogrešno, ali možeš ga lako motivisati pogledom na definiciju integrala kao sume. Kada sabiraš vrednosti f(x), koje su na tom delu manje od nule, pomnožene sa vrednošću Δx, koja je veća od nule, dobijaćeš negativne članove, odnosno i ta površina će imati negativan znak.

Postoji još par pravila, poput parcijalne integracije (nešto nalik izvodu proizvoda) koja je navedena u apendiksu B, ali, za početak, ova dva su najbitnija za razumevanje, a u ostala ćeš zalaziti kroz naredne iteracije ovog predavanja na starijim seminarima. Hajde sada da napokon sračunamo par članova tablice integrala, slično kao što smo i za izvode.

3.3.2 Tablica integrala, računanje

Sada zapravo uopšte ne moramo mnogo da računamo, jer smo već izračunali sve što nam treba u izvodima. Krenimo od prvog primera, a to je bio da je izvod konstante nula $\frac{dC}{dx} = 0$, gde je C neka konstanta. Šta će onda biti anti-izvod nule? Ovom pitanju možemo pristupiti sa dve strane. Prvo možemo da pitamo šta će biti primitivna funkcija, odnosno funkcija površine, za funkciju koja je svuda jednaka nuli? Intuitivno očekujemo nulu, i to ćemo baš i dobiti. Delujmo anti-izvodom na ovu jednačinu:

$$\int (\frac{dC}{dx}) dx = \int 0 dx \tag{47}$$

Sa leve strane imamo anti-izvod od izvoda od konstante, to nam po definiciji vraća tu konstantu, pa odatle dobijamo:

$$C = \int 0 dx \implies \int 0 dx = C \tag{48}$$

Uporedimo desni deo (48) sa (36) i pokušajmo da nađemo šta nam je tu F(x). Očigledno, možemo napisati $C = 0 + C$, u kom slučaju direktno vidimo da je $F(x) = 0$. Dakle, integral od nule je nula (plus konstanta). Upišimo to u novu tabelu:

f(x)	$\int f(x) dx$
0	0 + C

Konstanta C, naravno, može biti i nula. Tada bismo imali da je izvod nule jednak nuli, pa samim tim je i anti-izvod od nule jednak nuli. Idemo dalje. Izveli smo da je izvod od x^n jednak nx^{n-1}, odnosno $\frac{d(x^n}{dx} = nx^{n-1}$. Ponovimo isti proces kao malopre, tj. delujmo anti-izvodom na obe strane jednačine. Sa leve strane, opet, imamo anti-izvod izvoda, što nam daje samo funkciju x^n, a sa desne imamo $\int nx^{n-1} = n \int x^{n-1}$, znači sve ukupno:

$$n \int x^{n-1} = x^n \implies \int x^{n-1} = \frac{x^n}{n} + C \tag{49}$$

E sad, ovde nam se malo ne sviđa ovo da imamo pod integralom u eksponentu (n-1), jer hoćemo, baš kao i za izvode, da saznamo šta je integral od x^n. Zbog toga ćemo uraditi ništa mnogo pametno, samo ćemo povećati brojač n za 1:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \tag{50}$$

Pre nego što ovo upišemo u tablicu, hajde da vidimo kako bismo se snašli za integral $\int dx = ?$. Ovaj integral zapravo možemo da svedemo na formulu (50) ako ga posmatramo kao:

$$\int dx = \int 1 dx = \int x^0 dx = (50) = \frac{x^{0+1}}{0+1} + C = x + C \tag{51}$$

Upišimo sada ova dva rezultata u tabelu

f(x)	$\int f(x)dx$
0	0 + C
dx	x + C
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$

Zaustavimo se sada ovde, kao što smo i sa izvodima. Svi ostali članovi tablice integrala, koje možeš videti u Apendiksu B, su vrlo slično izvedeni, samo uz više komplikovanog računa.

Ono što je bitno da razumeš jeste pojam neodređenog integrala kao anti-izvoda, pojam određenog integrala kao površine ispod funkcije, primitivnu funkciju i to kako ona spaja određeni i neodređeni integral. Sve dalje je čist račun i tehnička stvar.

3.3.3 Vreme je za osvetu

Hajde sada da napokon izračunamo onu površinu one proklete funkcije sa slike 17, naoružani celim ovim formalizmom koji smo razvli dovde. Dakle, zanima nas da nađemo primitivnu funkciju od $f(x) = e^x - x^5$, na intervalu od 0 do 1.3.

Izračunajmo određeni integral:

$$\int_0^{1.3} (e^x - x^5) dx = \tag{52}$$

Koristimo pravilo (46) i razdvajamo ovo na dva integrala

$$= \int_0^{1.3} e^x dx - \int_0^{1.3} x^5 dx =$$

Primitivna funkcija za e^x (konsultujemo tablicu) je upravo sama $F_1(x) = e^x$, a primitivna funkcija za x^5 (tablica) će biti $F_2(x) = \frac{x^6}{6}$.

Koristeći se Njutn-Lajbnicovim pravilom (44), sada računamo oba ova određena integrala

$$= F_1(1.3) - F_1(0) - (F_2(1.3) - F_2(0)) = e^{1.3} - e^0 - \frac{1.3^6}{6} + \frac{0^6}{6} =$$

sve što nam ovde ostaje je da ubacimo ove vrednosti u kalkulator, ako te mrzi, možeš mi slobodno verovati na reč da se na kraju dobije

$$= 3.47376483429$$

neki random broj. Malo antiklimaktično, ali hej, bar smo izračunali neki integral. Broj koji smo dobili predstavlja površinu ispod te funkcije. Možda se pitaš u kojim jedinicama se dobijaju rezultati integracije (ili izvoda), i to jeste odlično pitanje. Za izvode, ako ih gledamo kao razlomak, lako vidimo da će jedinice biti količnik jedinica f(x) i x. Recimo, ako imamo izvod puta po vremenu, jedinice tog izvoda, odnosno jedinice brzine, biće jedinice puta (metri) kroz jedinice vremena (sekunde). Dakle, metri po sekundi.

Ako računamo integral brzine, i ako integral gledamo kao sumu u kojoj se množi f(x) za različite vrednosti x (što ima jedinice funkcije f(x)) sa Δx (što ima jedinice x), onda će suma njihovih proizvoda za jedinice imati proizvod jedinica funkcije i promenljive po kojoj se integrali. Ako bismo, na primer, integralili brzinu po vremenu, na y-osi bi bila brzina u jedinicama m/s, a na x-osi vreme u jedinicama s. Kada pomnožimo te dve stvari dobićemo rezultat u jedinicama metara, što se poklapa sa time da je anti-izvod od izvoda puta po vremenu, samo put. To ćemo malo detaljnije sada istražiti u narednom poglavlju.

3.4 Integrali iz fizičke perspektive

Pre nego što zatvorimo ovaj deo priče vezan za matematiku, hajde da pogledamo kako se integrali koriste, konkretno na primeru neuniformnog kretanja od kog smo počeli kad smo uveli izvode. Tamo nam je bila poznata funkcija s(t), a hteli smo da nađemo $v(t)$ kao njen izvod. Hajde sada da pretpostavimo obrnuto, da nam je poznato $v(t)$ a zanima nas kakvo je $s(t)$. Recimo da onaj Luka koji ide po gumene bombone umesto da snima vreme telefonom snima svoj brzinomer, tako da znamo kakva je njegova brzina u svakom trenutku, ali ne znamo koliki je put prešao u svakom trenutku. To hoćemo da nađemo.

Hajde da lupimo neku funkciju kao poznatu zavisnost brzine od vremena, recimo

$$v(t) = 2t^3 \tag{53}$$

Znamo da je brzina izvod pređenog puta, a hoćemo baš da nađemo pređeni put. Napadamo anti-izvodom prethodnu jednačinu sa obe strane. Anti-izvod od izvoda pređenog puta (brzine) biće upravo pređeni put, a sa desne strane imamo integral:

$$s(t) = \int 2t^3 dt \tag{54}$$

Ovde nam sve zavisi od vremena, pa i integralimo po vremenu (x u prethodnim izvođenjima može biti bilo šta, i vreme i pozicija i naelektrisanje i štagod). U desnom integralu, po pravilu (45) nam iskače 2 ispred integrala, i onda primenjujemo tablicu da ga izračunamo:

$$\int 2t^3 dt = 2\int t^3 dt = 2\frac{t^4}{4} + C = \frac{t^4}{2} + C \tag{55}$$

Dobili smo sada zavisnost s(t), ali tu imamo ovu čudnu misterioznu konstantu koja nam potiče od toga što je neodređeni integral... pa, neodređen, odnosno što smo pustili da ima neodređenu donju granicu. Kako ćemo se otarasiti te konstante?

To možemo uraditi ako, recimo, znamo da je Luka krenuo iz pozicije s(t=0) = 0m, odnosno da pre nego što smo krenuli da analiziramo ovaj problem nije prešao nikakav put. Onda, za tu konkretnu vrednost imamo

$$s(t = 0) = 0 = \frac{0^4}{2} + C = C \tag{56}$$

odnosno $C = 0$. Da je početna pozicija bila neka druga u trenutku $t = 0$, dobili bismo da je $C = s_0$ početni položaj. Generalno, u fizici, videćeš da su ove integracione konstante ništa drugo nego početni uslovi ovakvog tipa. No, više reči o ovome na predavanjima iz mehanike i gravitacije.

3.5 Zadaci

1. $\int (x^4 + x)dx$
2. $\int_2^5 2x^2 dx$
3. $\int 10e^x dx$
4. $\int_0^5 (e^x - 3sin(x))dx$
5. Nađi površinu ispod funkcije $f(x) = sin(x) + cos(x)$, na intervalu od 0 do π.

4 REZIME

U nastavku će taksativno biti pobrojene najvažnije ideje i koncepti koje bi trebalo da razumeš i zapamtiš iz cele ove oblasti.

4.1 Limesi

- $\lim_{x \to a} f(x) = b$ znači da funkcija f(x) teži ka broju b, kada njen argument x teži broju a. Što se x više približava a, to funkcija postaje bliža b.
- I a i b mogu biti beskonačno, i to i dalje smatramo dobro definisanim limesom.
- Moguće je ispitati funkciju limesom čak i u okolini tačke za koju ta funkcija ne postoji (recimo nula za funkciju 1/x)

4.2 Izvodi

- Izvod funkcije f(x) predstavljamo kao $\frac{df}{dx}(x)$ (kao i na razne druge manje češte načine)
- Izvod predstavlja stepen promene neke funkcije.
- U tom kontekstu izvod pređenog puta je brzina, a izvod brzine ubrzanje.
- Geometrijski, izvod predstavlja tangentu na funkciju u nekoj tački, odnosno njen koeficijent pravca.
- Izvod funkcije je i sam funkcija koja u svakoj tački x daje vrednost koeficijenta pravca k.
- Tablica izvoda.
- Drugi izvod je samo izvod od izvoda.
- Parcijalni izvod po nekoj promenljivoj x je običan izvod kod kog sve ostale promenljive (ako ih ima) smatramo konstantnim.
- Izvod je jednak nuli u nekoj tački ako funkcija u toj tački ima minimum ili maksimum.
- Možemo koristiti izvode da aproksimiramo funkciju oko neke tačke (Tejlorov razvoj).

4.3 Integrali

- Neodređeni integral, ili anti-izvod (antiderivative), je inverzan operator izvodu. Izvod integrala, odnosno integral izvoda neke funkcije, vratiće samo tu funkciju.
- Neodređeni integral definisan je do na konstantu, jer je izvod konstante nula.
- Određeni integral predstavlja površinu ispod funkcije na nekom segmentu.
- Primitivna funkcija, ili funkcija površine, F(x), predstavlja vrednost određenog integrala od nule do proizvoljne gornje granice x
- Ako pustimo i donju granicu da šeta, promenićemo vrednost integrala za neku proizvoljnu konstantu, i dobiti neodređeni integral.
- Njutn-Lajbnicova formula.
- Tablica integrala.
- Analogno kao za izvode, integral ubrzanja biće brzina, a integral brzine pređeni put (do na konstantu koja ima veze sa početnim uslovima).

5 Dalje čitanje/učenje

1. Matejina skripta po kojoj je ranije držan ovaj kurs. Ovo je malo opširnija skripta koja prolazi kroz više stvari i na malo dublji način. Pored toga, ima unikatan pristup u objašnjavanju matematičke analize, gde se prvo uvode integrali pa tek onda izvodi. Ako te zanima drugačiji pristup temama koje smo obradili, a i ako hoćeš da naučiš nešto više o matematici, a i mehanici i fizici generalno, preporučujem da prođeš kroz nju.
2. Essence of Calculus, niz kratkih videa na Jutjubu koji su odlični za bolju vizuelizaciju svega što smo prošli (mrtav papir i slike na njemu ne mogu prikazati isto što i jako dobre animacije na videu).
3. To be continued...

A TABLICA IZVODA

f(x)	df/dx
C	0
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
lnx	$1/x$
$sinx$	$cosx$
$cosx$	$-sinx$
$tanx$	$\frac{1}{cos^2 x}$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\lambda f(x)) = \lambda \frac{df(x)}{dx}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = \frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \tfrac{d}{dx}(fg) &= \tfrac{df}{dx}g + f\tfrac{dg}{dx} \\ \tfrac{d}{dx}\left(\tfrac{f}{g}\right) &= \frac{\frac{df}{dx}g - f\frac{dg}{dx}}{g^2} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(f(g(x)) = \frac{df(g(x))}{dg(x)} \frac{dg(x)}{dx}}$$

$$\boxed{f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots}$$

Napomena: Nisam hteo da natrpavam tablicu izvoda stvarima kao što su arkusi trigonometrijskih funkcija ili hiperboličke funkcije i slično. Sa time su izuzetno male šanse da ćete se susreti na seminaru, a, i ako se susretnete, koristite Gugl.

B TABLICA INTEGRALA

f(x)	$\int f(x)dx$
0	0 + C
1	x + C
x^n	$x^{n+1}/(n+1)+C$
e^x	e^x+C
$1/x$	$lnx+C$
$cosx$	$sinx+C$
$sinx$	$-cosx+C$
$tanx$	$ln\|cosx\|+C$

$$\boxed{\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx = \lambda F(x) + C}$$

$$\boxed{\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx}$$

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

Napomena: isto kao i za tablicu izvoda. Ovde je dodata i formula parcijalne integracije, za slučaj da se ona pređe na predavanjima ili bude potrebna u nekom delu računa.