Отчет по моделированию движения подводной лодки

1. Постановка задачи

Рассматривается движение подводной лодки, находящейся в начальный момент времени $t = 0$ на глубине H и движущейся с постоянной горизонтальной скоростью v. В момент времени $t = 0$ подводная лодка получает команду на всплытие. В результате заполнения балластных цистерн воздухом средняя плотность лодки становится меньше плотности воды, и на лодку начинает действовать выталкивающая сила Архимеда.

Целью работы является построение математической модели движения подводной лодки, приведение модели к безразмерному виду, разработка численного алгоритма решения и проведение вычислительного эксперимента.

---

2. Физическая модель

По закону Архимеда на подводную лодку действует выталкивающая сила

$$F = gV\rho_0,$$

где g — ускорение свободного падения, V — объем лодки, ρ_0 — плотность воды.

Сила тяжести равна

$$P = gV\rho_1,$$

где ρ_1 — средняя плотность подводной лодки.

С учетом линейного сопротивления воды, пропорционального вертикальной скорости, уравнение движения в вертикальном направлении по второму закону Ньютона имеет вид

$$\frac{d^2h}{dt^2} = \frac{g(\rho_0 - \rho_1)}{\rho_1} - \frac{k}{\rho_1}\frac{dh}{dt},$$

где k — коэффициент сопротивления воды.

Горизонтальное движение считается равномерным:

$$\frac{dl}{dt} = v = \text{const}.$$

---

3. Безразмеризация уравнений

Введем безразмерные переменные

$$h = H\tilde{h}, \qquad t = T\tilde{t},$$

где характерное время выбирается в виде

$$T = \sqrt{\frac{H\rho_1}{g(\rho_0 - \rho_1)}}.$$

После подстановки в уравнение движения получаем безразмерное уравнение

$$T = \sqrt{\frac{H\rho_1}{g(\rho_0 - \rho_1)}}.$$

После подстановки в уравнение движения получаем безразмерное уравнение

$$\frac{d^2\tilde{h}}{d\tilde{t}^2} = 1 - \beta\frac{d\tilde{h}}{d\tilde{t}},$$

где безразмерный коэффициент сопротивления

$$\beta = \frac{k}{\rho_1}T.$$

---

4. Система уравнений первого порядка

Введем безразмерную вертикальную скорость

$$u = \frac{d\tilde{h}}{d\tilde{t}}.$$

Тогда система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{h}}{d\tilde{t}} = u, \ \frac{du}{d\tilde{t}} = 1 - \beta u. \end{cases}$$

Начальные условия:

$$\tilde{h}(0) = 0, \qquad u(0) = 0.$$

---

5. Численный метод

Для численного решения системы дифференциальных уравнений используется явная разностная схема Эйлера. Пусть Δt — шаг по безразмерному времени. Тогда разностные уравнения имеют вид

$$\tilde{h}^{n+1} = \tilde{h}^n + \Delta t, u^n,$$

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t(1 - \beta u^n).$$

Расчет продолжается до достижения условия всплытия

$$\tilde{h} \geq 1.$$

---

6. Реализация алгоритма

Численный алгоритм реализован на языке программирования Python с использованием библиотек NumPy и Matplotlib. В ходе вычислений определяются зависимости глубины и вертикальной скорости от времени, а также траектория движения подводной лодки.

---

7. Вычислительный эксперимент

Для проведения вычислительного эксперимента были выбраны следующие параметры:

- начальная глубина $H = 100$ м;
- ускорение свободного падения $g = 9.81$ м/с^2;
- плотность воды $\rho_0 = 1025$ кг/м^3;
- средняя плотность подводной лодки $\rho_1 = 900$ кг/м^3;
- коэффициент сопротивления воды $k = 150$ кг/с;

- плотность воды $\rho_0 = 1025$ кг/м^3;
- средняя плотность подводной лодки $\rho_1 = 900$ кг/м^3;
- коэффициент сопротивления воды $k = 150$ кг/с;
- горизонтальная скорость $v = 5$ м/с.

Численное решение выполнялось методом Эйлера с шагом $\Delta t = 0.01$.

В результате расчета получены следующие характеристики процесса всплытия:

- время всплытия до поверхности $t \approx 18.0$ с;
- горизонтальное смещение $l \approx 90$ м;
- предельная вертикальная скорость $v_{h,\infty} \approx 8.17$ м/с.

По результатам расчета построены графики зависимостей $h(t)$, $v_h(t)$ и траектория движения $h(l)$.

Графики представлены в папке /photos

---

8. Выводы

В работе построена математическая модель всплытия подводной лодки с учетом сопротивления воды. Выполнена безразмеризация уравнений движения, разработан численный алгоритм и проведен вычислительный эксперимент. Полученные результаты демонстрируют влияние сопротивления среды на характер движения и подтверждают корректность построенной модели.