Национальный исследовательский институт
«Высшая школа экономики»

Оптика

Отчёт о выполнении практической работы
«Дифракция Фраунгофера»

Выполнил:
Илюшкин Егор, БФ3224

Москва, 11.05.2024

Оглавление

1. Дифракция 3
   1.1. Явление дифракции 3
   1.2. Принцип Гюйгенса-Френеля 4
   1.3. Приближенные формулировки принципа Гюйгенса-Френеля 5
   1.4. Одномерный случай дифракции Фраунгофера 7
2. Дифракция Фраунгофера на щели 9
   2.1. Расчёт дифракционной картины 9
   2.2. Наблюдение дифракции света зелёного лазера на щели 10
   2.3. Определение ширины щели b 12
3. Дифракция Фраунгофера на двух щелях 15
   3.1. Расчёт дифракционной картины 15
   3.2. Наблюдение дифракции света красного лазера на двух щелях 16
   3.3. Определение параметров двухщелевого экрана d и b 17

1. Дифракция

1.1. Явление дифракции

Дифракция волн – явление огибания волнами препятствий, в широком смысле любое *отклонение от законов геометрической оптики* при распространении волн. Она представляет собой универсальное волновое явление и характеризуется одними и теми же законами при наблюдении волновых полей разной природы. Частный случай дифракции – огибание волной препятствия и её проникновение в область *геометрической тени*.

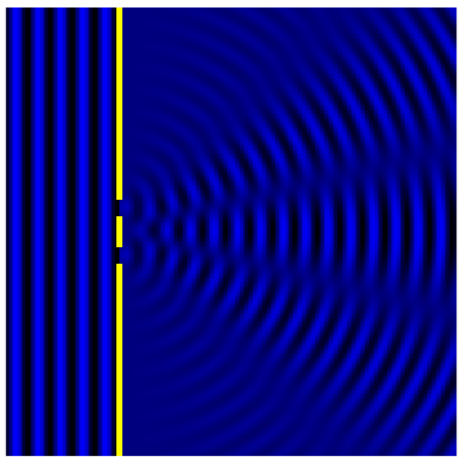

Рисунок 1. Колебания поля в пространстве при дифракции на двух щелях

Основными параметрами, существенно определяющими характер дифракционных явлений, являются *длина волны* λ, *размер отверстия* b и *расстояние до плоскости наблюдения* z. Характер дифракционных явлений определяется значением *волнового параметра* p.

$$\mathrm{p} = \frac{\sqrt{\lambda z}}{\mathrm{b}}$$

Область значений волнового параметра $\mathrm{p} \ll 1$ является областью применимости приближения *геометрической оптики*. Область значений $\mathrm{p} \gg 1$ называется областью *дифракции Фраунгофера* (или *дальней волновой зоной*). Промежуточная область $\mathrm{p} \sim 1$ – областью *дифракции Френеля* (или *ближней волновой зоной*).

1.2. Принцип Гюйгенса-Френеля

Рассмотрим задачу об электромагнитной волне, падающей на *непрозрачный экран* с *отверстием*. Определим оси x, y, лежащие в *плоскости наблюдения*, ξ, η, лежащие в плоскости экрана и ось z, расположенную перпендикулярно, другим осям.

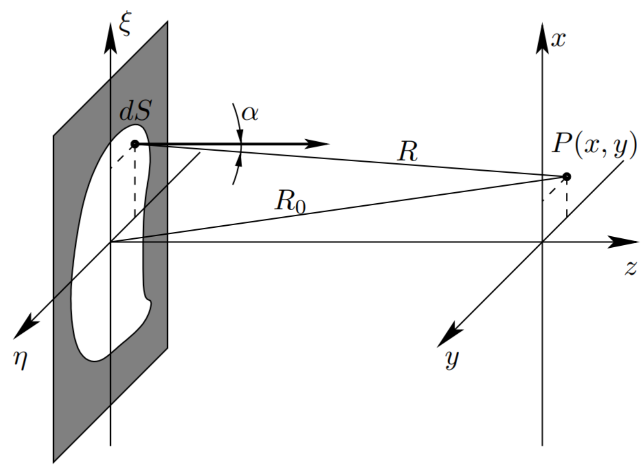

Рисунок 2. Геометрия задачи расчёта дифракционной картины в точке P

Определим *граничные условия* следующим образом: в той части плоскости $z = +0$, которая затенена экраном, граничное поле полагается равным нулю. На открытой части волнового фронта (т. е. в области отверстия) граничное поле полагается равным полю сторонних источников $\mathrm{E_s}(\xi, \eta)$[1]. Итак, граничное поле определяется следующим равенством:

$$\mathrm{E_0}(\xi, \eta) = \begin{cases} \mathrm{E_s}(\xi, \eta)\text{: в точках, принадлежащих отверстию;} \\ 0 \text{ в точках, затенённых экраном.} \end{cases}$$

Согласно *принципу Гюйгенса-Френеля*, каждая точка волнового фронта является *вторичным источником* сферических волн. Пусть волна света, пришедшая из области $z < 0$, достигла плоскости $z = 0$. Световое поле при $z = 0$ равно: $\mathrm{E_0}(\xi, \eta)$. В области $z > 0$ световое колебание рассматривается как результат *интерференции* вторичных волн.

[1] Здесь и далее $\mathrm{E}(\mathbf{r}) \in \mathbb{C}$ – пространственная норма комплексной амплитуды $\mathbf{E}(\mathbf{r}) \in \mathbb{C}^3$ стационарного волнового поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \mathrm{t}) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$. Временной множитель $e^{-i\omega t}$ не играет большой роли при рассмотрении явления интерференции волн и может быть опущен для удобства.

Рассмотрим *элементарную площадку* $\mathrm{ds}(\xi,\eta)$, лежащую в плоскости $\xi\eta$. Подобно точечному источнику, она излучает колеблющееся поле $\mathrm{E}_0(\xi,\eta)$. При вычислении вклада, который даёт это колебание в *точке наблюдения P*, нужно учесть *ослабление амплитуды* $1/\mathrm{R}$, *набег фазы* $\mathrm{e}^{i\mathrm{kR}}$ и *видимый размер площадки* $\mathrm{ds}(\xi,\eta)$ из точки наблюдения $\mathrm{ds}\cdot\cos\alpha$.

$$\mathrm{E}(x,y) = \mathrm{K}_0 \iint \mathrm{E}_0(\xi,\eta)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{ikR}}}{\mathrm{R}}\cos\alpha\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

Можно показать, что нормировочный коэффициент пропорциональности K_0 равен $1/i\lambda$. Таким образом, *количественная формулировка* принципа Гюйгенса-Френеля принимает вид:

$$\mathrm{E}(x,y) = \frac{1}{i\lambda}\iint \mathrm{E}_0(\xi,\eta)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{ikR}}}{\mathrm{R}}\cos\alpha\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta.$$

1.3. Приближенные формулировки принципа Гюйгенса-Френеля

При условии, что *размер отверстия мал по сравнению с расстоянием* R_0 до точки наблюдения, амплитудный множитель $1/\mathrm{R}$, учитывающий уменьшение амплитуды в сферической волне по мере удаления от вторичного источника ds, можно заменить постоянной величиной $1/\mathrm{R}_0$, а $\cos\alpha$ считать приближенно равным единице, в этом приближении:

$$\mathrm{E}(x,y) \approx \frac{1}{i\lambda\mathrm{R}_0}\iint \mathrm{E}_0(\xi,\eta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{ikR}}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta.$$

Точное выражение для расстояния $\mathrm{R} = \mathrm{R}(x,y,z,\xi,\eta)$ от вторичного источника $\mathrm{ds}(\xi,\eta)$ до точки наблюдения $\mathrm{P}(x,y,z)$ (см. рис. 2) равно:

$$\mathrm{R} = \sqrt{z^2+(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} = z\sqrt{1+\frac{(x-\xi)^2}{z}+\frac{(y-\eta)^2}{z}}.$$

Вычисляя величину R, входящую в фазовый множитель $\mathrm{e}^{i\mathrm{kR}}$, мы не можем довольствоваться грубой оценкой $\mathrm{R}\approx\mathrm{R}_0=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, поскольку ошибка при вычислении фазы колебаний kR должна быть мала по сравнению с π и, следовательно, ошибка в вычислении R должна быть мала по сравнению с $\lambda/2$. Точное выражение не подходит из-за сложности аналитического вычисления интеграла в выражении для $\mathrm{E}(x, y)$.

Для различных значений волнового параметра p можно использовать разные *приближения значения* R. Если предположить, что поправка $\frac{(x-\xi)^2}{z}+\frac{(y-\eta)^2}{z}$ под знаком радикала мала по сравнению с 1, можем воспользоваться формулой Тейлора, при этом оставим только два члена разложения в ряд. Такое приближение называется *френелевским*:

$$\mathrm{R}_{\text{Френель}} \approx z+\frac{(x-\xi)^2}{2z}+\frac{(y-\eta)^2}{2z}.$$

Предположение $\frac{(x-\xi)^2}{z}+\frac{(y-\eta)^2}{z} \ll 1$ соответствует $\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{\mathrm{b}^2+x^2+y^2}} \equiv \frac{\mathrm{p}}{\sqrt{\lambda}} \gg 1$, что само по себе ничего не говорит о характере дифракционной картины. Но если дополнительно предположить, что ширина отверстия $\mathrm{b} \sim \sqrt{\lambda z}$ и мы рассматриваем изображение на небольшом расстоянии от оси z, т.е. $\sqrt{x^2+y^2} \sim \mathrm{b}$, то $\mathrm{p} \sim 1$ и мы имеем дело с *дифракцией Френеля*. Принцип Гюйгенса-Френеля для этого случая будет иметь вид:

$$\mathrm{E}(x, y)=\frac{\mathrm{e}^{i\mathrm{k}\mathrm{z}}}{i\lambda\mathrm{z}} \iint \mathrm{E}_0(\xi, \eta)\, \mathrm{e}^{i\frac{\mathrm{k}}{2\mathrm{z}}\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right]}\, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta$$

Рассмотрим теперь приближение, всегда справедливое для дальней волновой зоны.

$$\mathrm{R}=\sqrt{z^2+(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}=\sqrt{\mathrm{R}_0-(2x\xi+2y\eta)+(\xi^2+\eta^2)}$$

Предположим, что поправка к R_0 под знаком радикала мала, получим приближение:

$$\mathrm{R} \approx \mathrm{R}_0-\frac{x\xi+y\eta}{\mathrm{R}_0}-\frac{\xi^2+\eta^2}{\mathrm{R}_0}.$$

Теперь допустим, что выполняется *условие Фраунгофера*:

$$\frac{\xi^2+\eta^2}{\mathrm{R}_0} \leq \frac{\mathrm{b}^2}{\mathrm{R}_0} \ll \lambda \;\Leftrightarrow\; \frac{\lambda z}{\mathrm{b}^2} \gg 1 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{p} \gg 1.$$

Тогда последним слагаемым в R можно пренебречь:

$$R_{\text{Фраунгофера}} \approx R_0 - \frac{x\xi}{R_0} - \frac{y\eta}{R_0}.$$

Принцип Гюйгенса-Френеля для *дифракции Фраунгофера* запишется в виде:

$$E(x,y) = \frac{e^{ikR_0}}{i\lambda R_0} \iint E_0(\xi,\eta)\, e^{-i\frac{k}{R_0}(x\xi + y\eta)}\, d\xi d\eta.$$

Введя переменные u, v, получим:

$$u = \frac{kx}{R_0}, \quad v = \frac{ky}{R_0},$$

$$E(u,v) = \frac{e^{ikR_0}}{i\lambda R_0} \iint E_0(\xi,\eta)\, e^{-i(u\xi + v\eta)}\, d\xi d\eta.$$

Эта формула показывает, что поле в плоскости наблюдения $E(u,v)$ есть (с точностью до постоянного множителя) двумерное преобразование Фурье граничного поля $E_0(\xi,\eta)$.

1.4. Одномерный случай дифракции Фраунгофера

Формула, полученная выше для $E(u,v)$ становится особенно наглядной, если граничное поле $E_0(\xi,\eta)$ описывается функцией одной переменной ξ: $E_0(\xi,\eta) \equiv E_0(\xi)$. Тогда с точностью до несущественного постоянного множителя

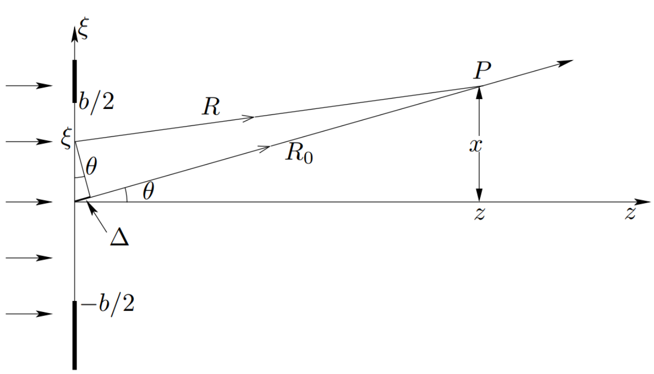

Рисунок 3. Одномерный случай дифракции Фраунгофера

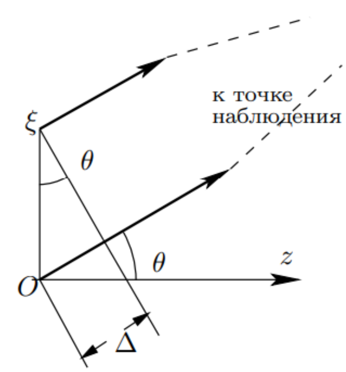

Рисунок 4. Разность хода

$$\mathrm{E}(u) \propto \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{E}_0(\xi)\,\mathrm{e}^{-iu\xi}\,\mathrm{d}\xi$$

Таким образом, в данном случае картина дифракции Фраунгофера $\mathrm{E}(u)$ представляет собой преобразование Фурье граничного поля $E_0(\xi)$.

Определим разность хода волн Δ, приходящих к удалённой точке наблюдения от двух вторичных источников, один из которых находится в точке с координатой ξ, а второй – в точке $\xi = 0$ (рис. 3). Удалённость точки P позволяет считать направления волн, идущих из этих точек практически параллельными (рис. 4), следовательно, разность их хода Δ равна:

$$\Delta = \xi \sin\theta,$$

где θ – направление на удалённую точку наблюдения, имеющую координату x. Соответственно, разность фаз колебаний φ равна:

$$\varphi = -\mathrm{k}\xi\sin\theta = -\mathrm{k}\xi\frac{x}{\mathrm{R}_0} = -u\xi.$$

Таким образом, $\mathrm{E} = \mathrm{E}(\theta)$, то есть дифракционная картина в общем зависит от направления на точку наблюдения θ, а не от расстояния x.

$$\mathrm{E}(\theta) \propto \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{E}_0(\xi)\,\mathrm{e}^{-i\mathrm{k}\sin\theta\,\xi}\,\mathrm{d}\xi$$

Полученные формулы для $\mathrm{E}(u)$, $\mathrm{E}(\theta)$ полностью аналогичны соотношению

$$\mathrm{C}(\omega) = \int f_0(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\mathrm{d}t$$

где $\mathrm{C}(\omega)$ – спектр (преобразование Фурье) процесса $f_0(t)$. Эта аналогия позволяет назвать величину $u = k\sin\theta$ *пространственной частотой* – аналог частоты ω в спектре $f_0(t)$.

Ещё раз подчеркнём, что положение точки наблюдения P при условии $\mathrm{b} \ll \sqrt{\lambda z}$ определяется углом θ. Если точка наблюдения смещается вдоль фиксированного направления, приближаясь или удаляясь, так что угол θ остаётся неизменным: $\sin\theta = x/z = \mathrm{const}$ (и при этом остаётся справедливо неравенство $b \ll \sqrt{\lambda z}$), то значение интеграла остаётся неизменным. В этом случае картину дифракции можно характеризовать распределением интенсивности света (потока энергии) по углам $\mathrm{I}(\theta)$:

$$\mathrm{I}(\theta) \propto |\mathrm{E}(\theta)|^2 \propto \left| \int \mathrm{E}_0(\xi) \mathrm{e}^{-i \mathrm{k} \sin\theta \xi} \mathrm{d}\xi \right|^2 .$$

Распределение $\mathrm{I}(\theta)$, заданное в полярных координатах, называют *диаграммой направленности* дифракционной картины.

2. Дифракция Фраунгофера на щели

2.1. Расчёт дифракционной картины

Пусть щель шириной b освещается слева плоской нормально падающей волной. Граничное поле $\mathrm{E}_0(x)$ имеет вид, изображённый на рисунке 5. Согласно полученной выше формуле для $\mathrm{E}(\theta)$, для нахождения картины фраунгоферовой дифракции необходимо найти преобразование Фурье этой функции (эта задача полностью аналогична нахождению спектра прямоугольного импульса – роль длительности импульса здесь играет ширина щели b, а роль частоты – пространственная частота $u = \mathrm{k} \sin\theta$). Мы получаем

$$\mathrm{E}(\theta) \propto \int_{-\mathrm{b}/2}^{+\mathrm{b}/2} e^{-i \mathrm{k} x \sin\theta} \mathrm{d}x \propto \frac{\sin\left(\frac{\mathrm{kb}}{2}\sin\theta\right)}{\frac{\mathrm{kb}}{2}\sin\theta}$$

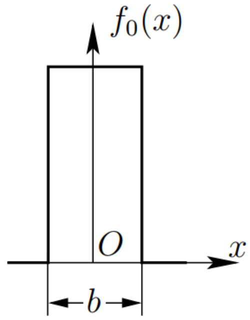

Рисунок 5. Поле на щели

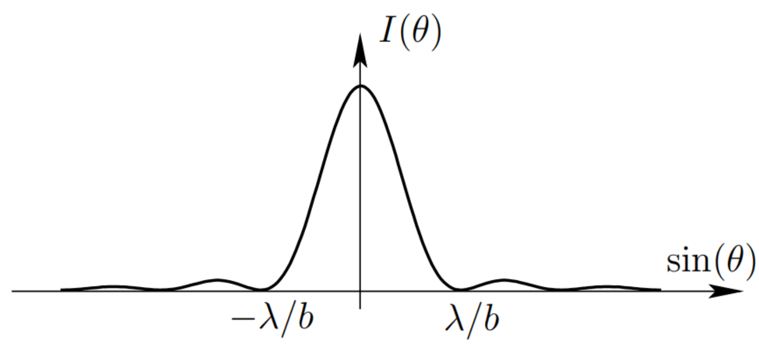

Рисунок 6. Диаграмма направленности $I(\theta)$ при дифракции Фраунгофера на одной щели

Распределение интенсивности $\mathrm{I}(\theta) \propto |\mathrm{E}(\theta)|^2$ показано на рисунке 6. Ближайшие к направлению $\theta = 0$ направления, в которых $\mathrm{I}(\theta)$ обращается в нуль, определяются условием $\frac{\mathrm{kb}}{2}\sin\theta = \pm\pi$, откуда находим

$$\sin\theta \equiv \frac{x}{\mathrm{R}_0} = \pm\frac{\lambda}{\mathrm{b}}$$

Как показывает анализ функции $|\mathrm{I}(\theta)|^2$, в угловом конусе $|\sin\theta| \leq \lambda/\mathrm{b}$ сосредоточена подавляющая величина потока энергии. Этот угловой конус (интервал углов от $-\lambda/\mathrm{b}$ до λ/b) называют *главным максимумом* дифракционной картины.

2.2. Наблюдение дифракции света зелёного лазера на щели

Прежде всего мы при помощи *стеклянных фильтров*, отсекающих лишнюю интенсивность, приходящуюся на главный максимум, убедились, что диаграмма направленности излучения $\mathrm{I}(\theta)$ по внешнему виду совпадает с ожидаемой (ожидаем увидеть картину, аналогичную рис. 6).

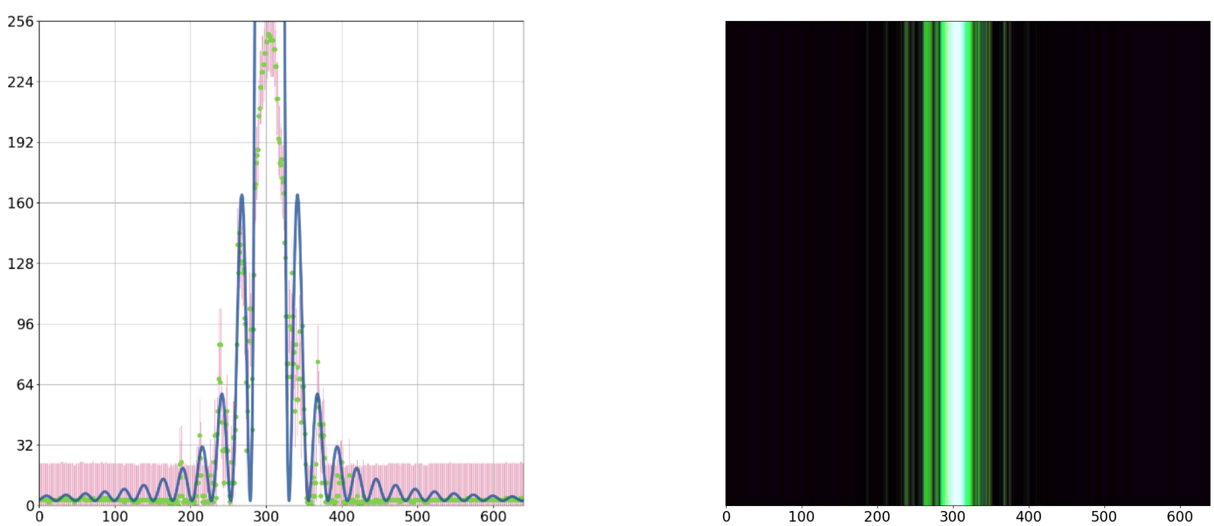

Рисунок 7. Диаграмма направленности ослабленного фильтром света

Как видно по графику, использование светофильтров для последующих наблюдений неоправданно, так как они, хотя и позволяют с большей детализацией зафиксировать второй и последующие максимумы, но также сильно рассеивают свет, в результате чего картина дифракции получается сильно зашумлённой и непригодной для детального анализа.

Мы произвели *серию наблюдений дифракции*, регистрируя интерференционную картину при помощи *цифровой камеры*. В серии мы варьировали параметр R_0 – расстояние между экраном с щелью и матрицей камеры. Дифрагирующий на щели свет лазерного источника считаем приближенно монохроматическим, когерентным; волновой фронт – плоским. Щель была расположена вертикально, следовательно развёртку интерференционной картины мы регистрировали в горизонтальной плоскости. Существенные параметры оборудования отмечены ниже:

Прибор	Характеристика	Величина
Цифровая окулярная камера **ToupCam SCMOS00350KPA**	Размер пикселя	5,6 мкм
	Отношение сигнал/шу	45 дБ
	Горизонтальное разрешение	640
	Разрядность датчика	256
	Рабочий спектральный диапазон	380-560 нм
Зелёный лазерный модуль **KLM-A532-1-5**	Длина волны излучения	532 нм
	Апертурный диаметр пучка	8 мм

Таблица 1. Характеристики оборудования при наблюдении дифракции на щели

В результате опыта мы получили несколько (20) массивов цифровых данных, отражающих горизонтальное распределение яркости I на матрице камеры. При этом абсолютная величина интенсивности света I нас не интересует, важен лишь характер распределения I вдоль оси наблюдения. Непосредственно в опыте измерялась зависимость *относительной интенсивности* $\mathcal{I}$[2] от порядкового номера пикселя матрицы, регистрирующего соответствующую интенсивность, p.

[2] Интенсивность $\mathcal{I}$, в отличие от I, не измеряется в абсолютных единицах. Это некоторая безразмерная величина в диапазоне $[0, 255]$, причём в результате автоматической настройки экспозиции камеры, нормировка этой величины разная в каждом отдельном наблюдении. Имеет смысл лишь характер распределения $\mathcal{I}(x) \propto \mathrm{I}(x)$.

2.3. Определение ширины щели b

Используя выражение, полученное выше для распределения $\mathrm{E}(\theta)$ при дифракции Фраунгофера на щели, получим в явном виде зависимость $\mathcal{J}(p)$:

$$\mathcal{J}(\theta) \propto \mathrm{I}(\theta) \propto |\mathrm{E}(\theta)|^2 \propto \left(\frac{\sin\left(\frac{\mathrm{kb}}{2}\sin\theta\right)}{\frac{\mathrm{kb}}{2}\sin\theta} \right)^2$$

$$\sin\theta \equiv \frac{x}{\mathrm{R}_0} = \frac{(p-p_0)\delta}{\mathrm{R}_0}, \qquad \mathrm{k} = \frac{2\pi}{\lambda}, \qquad \mathrm{R}_0 = z_0 + z_i$$

$$\mathcal{J}(p) = \mathcal{J}_0 \left(\frac{\sin\left(\frac{\mathrm{b}\pi}{\lambda}\frac{(p-p_0)\delta}{z_0+z_i}\right)}{\frac{\mathrm{b}\pi}{\lambda}\frac{(p-p_0)\delta}{z_0+z_i}} \right)^2 + \mathcal{J}_n$$

- δ [м] – пространственное горизонтальное разрешение датчика;
- λ [м] – длина волны света;
- z_0 [м] – расстояние между матрицей и экраном в нуле координат;
- z_i [м] – смещение камеры от начала координат вдоль оси z в измерении i;
- $\mathcal{J}_0$ – максимальная яркость при текущей экспозиции;
- $\mathcal{J}_n$ – яркость фоновых источников, рассеянного в объективе света;
- p_0 – порядковый номер пикселя, являющегося центром интерференционной картины;
- b [м] – ширина щели в экране.

Параметры δ, λ, z_0, $z_i, i \in \{1, 2, \dots, 20\}$ полагаем известными (все величины даны в мм):

$$\delta = 5{,}6 \cdot 10^{-3}, \qquad \lambda = 5{,}32 \cdot 10^{-4}, \qquad z_0 = 56, \qquad z_i \in \{20, 40, 60, \dots, 400\}$$

Параметры $\mathcal{J}_0$, $\mathcal{J}_n$, p_0, b подлежат определению. Параметр b представляет для нас особый интерес, так как представляет собой измеримую прямыми методами физическую величину. Во всех

20 наблюдениях ширина щели оставалось постоянной величиной, поэтому ожидаем, что параметр b_i должен совпасть для всех $\mathcal{I}_i = \mathcal{I}(p, z_i)$ в некоторых пределах погрешности.

Прежде чем приступать к оценке $\mathcal{I}_0$, $\mathcal{I}_n$, p_0, b необходимо преодолеть проблему, связанную с регулярной *засветкой матрицы* в области главного максимума дифракционной картины. Как упоминалось ранее (см. рисунок 6), в окрестности главного максимума дифракционной картины сосредоточена основная величина потока энергии, падающего на матрицу. Во втором максимуме интенсивность составляет лишь $4{,}7\%$ от интенсивности главного максимума, в третьем $1{,}6\%$ и так далее. Это создаёт проблему, так как при автоматической настройке экспозиции камера стремится подобрать яркость таким образом, чтобы второй и последующие максимумы были хорошо различимы, в результате чего в окрестности главного максимума формируется область из некорректных, заниженных, значений $\mathcal{I}$. Для исключения влияния этого дефекта в данных, мы искусственно «экранируем» область главного максимума, где значение датчика превышает пороговое значение $\mathcal{I}_t = 210$[3], обнулив значения эксперимента и предсказывающую его функцию $\mathcal{I}(p)$ в этом диапазоне. Если же значение $\mathcal{I}_t$ превышено в других максимумах функции, положим в их окрестностях $\mathcal{I}(p) = \mathcal{I}_t$. Иными словами, мы переопределим функцию $\mathcal{I}(p)$ таким образом:

$$\mathcal{I}(p) = \begin{cases} \mathcal{I}(p), & \text{если } \mathcal{I}(p) \le \mathcal{I}_t; \\ 0, & \text{если } \mathcal{I}(p) > \mathcal{I}_t,\ \ p \in \{\text{главный максимум}\}; \\ \mathcal{I}_t, & \text{если } \mathcal{I}(p) > \mathcal{I}_t,\ \ p \notin \{\text{главный максимум}\}. \end{cases}$$

Определим параметры $\mathcal{I}_0$, $\mathcal{I}_n$, p_0, b с помощью методов числовой оптимизации, задав диапазоны значений и приблизительные оценки параметров для каждого наблюдения, функции $\mathcal{I}(p)$ и $\operatorname{grad} \mathcal{I}(p)$. При помощи модуля scipy.optimize минимизируем семейство функций потерь L_i.

$$L_i = \frac{1}{2}\Big(\boldsymbol{\mathcal{I}}(\boldsymbol{p}, z_i) - \boldsymbol{\mathcal{I}}_{\mathbf{exp}}(\boldsymbol{p}, z_i)\Big)^2,$$

где $\boldsymbol{p} = (1, 2, 3, \dots, 640)$, $\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\mathbf{exp}}(\boldsymbol{p}, z_i)$ – массив экспериментальных данных.

В результате оптимизации мы получили семейство функций $\mathcal{I}_i(p)$ и соответствующие им параметры $\mathcal{I}_{0i}$, $\mathcal{I}_{ni}$, p_{0i}, b_i. Изобразим их графически, учтя цифровой шум.

[3] Значение выбрано таким образом, чтобы отсекать наибольшее число неправдоподобных точек.

Рисунок 8. Графики функций $\mathcal{I}_i(p)$ для каждого наблюдения.

Значения b_i, как и ожидалось, лежат в узком диапазоне ($\pm 3\%$). Наконец, можем дать оценку b:

$$\mathrm{b} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} \mathrm{b}_i = (191 \pm 3)\ \text{мкм}.$$

3. Дифракция Фраунгофера на двух щелях

3.1. Расчёт дифракционной картины

Пусть рядом со щелью шириной b расположена параллельно ещё одна щель равной ширины на расстоянии d от первой (рисунок 9). Поле первой щели в точке наблюдения P, как мы выяснили выше, описывается функцией

$$\mathrm{E}_1(\theta) \propto \frac{\sin\left(\frac{\mathrm{kb}}{2}\sin\theta\right)}{\frac{\mathrm{kb}}{2}\sin\theta}.$$

Расстояние от второй щели до точки наблюдения на величину $\Delta = \mathrm{d}\sin\theta$ меньше расстояния между первой щелью и этой точкой. Соответствующая волне от второй щели фаза колебания в P отличается на величину

$$\alpha = -\mathrm{k}\Delta = -\mathrm{kd}\sin\theta.$$

Поэтому амплитуда волны, созданной второй щелью в точке наблюдения, описывается функцией $\mathrm{E}_2(\theta) = \mathrm{E}_1(\theta)e^{i\alpha}$. Волны, посылаемые в точку наблюдения двумя щелями, интерферируют. Амплитуда суммарного колебательного процесса в точке наблюдения есть

$$\mathrm{E}(\theta) = \mathrm{E}_1(\theta) + \mathrm{E}_2(\theta) = \mathrm{E}_1(\theta)\cdot\left[1 + e^{i\alpha}\right] = 2\mathrm{E}_1(\theta)\cos(\alpha/2)\, e^{i\frac{\alpha}{2}},$$

а интенсивность, соответственно

$$\mathrm{I}(\theta) \propto |\mathrm{E}(\theta)|^2 = 4|\mathrm{E}_1(\theta)|^2\cos^2(\alpha/2) \propto \left(\frac{\sin\left(\frac{\mathrm{kb}}{2}\sin\theta\right)}{\frac{\mathrm{kb}}{2}\sin\theta}\right)^2 \cdot \cos^2\left(\frac{\mathrm{kd}}{2}\sin\theta\right).$$

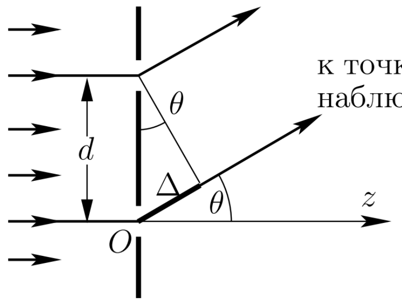

Рисунок 9. Разность хода при дифракции на двух щелях

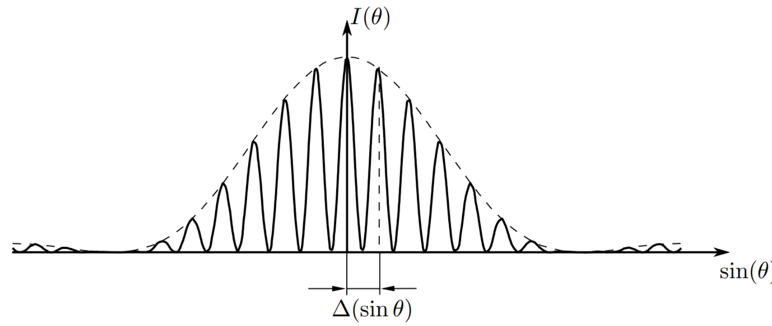

Рисунок 10. Диаграмма направленности $I(\theta)$ при дифракции Фраунгофера на двух щелях

Расстояние между максимумами $\Delta(\sin\theta)$ находим из условия $\mathrm{k}\mathrm{d}\sin\theta = 2\pi$, откуда

$$\Delta(\sin\theta) = \lambda/\mathrm{d}.$$

3.2. Наблюдение дифракции света красного лазера на двух щелях

Мы наблюдали дифракцию света красного лазера с длиной волны 632,8 нм на двух различных экранах с различными же параметрами $\mathrm{b}_{1,2}$ и $\mathrm{d}_{1,2}$. Для наблюдения экрана с бóльшим расстоянием между щелями d было выбрано заведомо большое расстояние $\mathrm{R}_0 \sim 10^3$ мм, так как угловое расстояние между максимумами обратно пропорционально d.

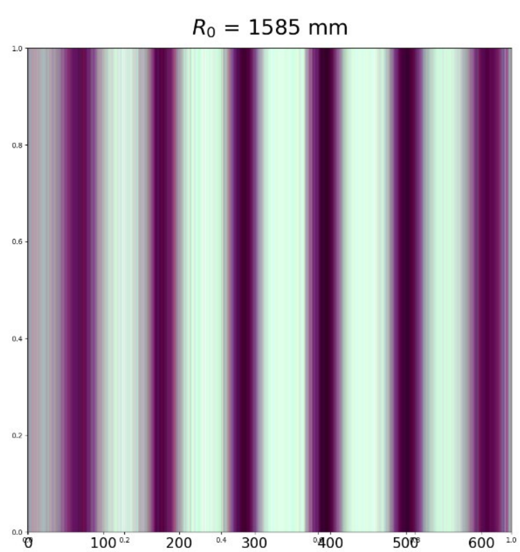

Рисунок 11. Дифракционная картина от экрана с широкими щелями (b_1, d_1) (виден только главный максимум компоненты $\propto |E_1(\theta)|^2$)

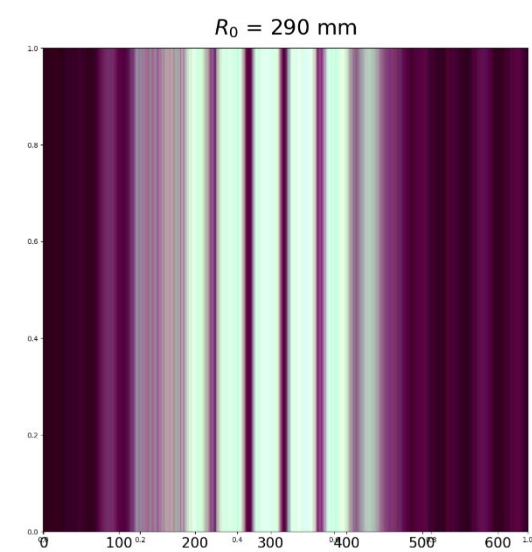

Рисунок 12. Дифракционая картина от экрана с узкими щелями (b_2, d_2) (виден первый вторичный max компоненты $\propto |E_1(\theta)|^2$)

3.3. Определение параметров двухщелевого экрана d и b

Используя выражение, полученное выше для распределения $\mathrm{I}(\theta)$ при дифракции Фраунгофера на двух щелях, получим в явном виде зависимость относительной интенсивности $\mathcal{I}(p)$:

$$\mathcal{I}(\theta) \propto \mathrm{I}(\theta) \propto \left(\frac{\sin\left(\frac{\mathrm{kb}}{2}\sin\theta\right)}{\frac{\mathrm{kb}}{2}\sin\theta} \right)^2 \cdot \cos^2\left(\frac{\mathrm{kd}}{2}\sin\theta\right)$$

$$\sin\theta \equiv \frac{x}{\mathrm{R}_0} = \frac{(p-p_0)\delta}{\mathrm{R}_0}, \qquad \mathrm{k} = \frac{2\pi}{\lambda}, \qquad \mathrm{R}_0 = z_0 + z_i$$

$$\mathcal{I}(p) = \mathcal{I}_0 \left(\frac{\sin\left(\frac{\mathrm{b}\pi}{\lambda}\frac{(p-p_0)\delta}{z_0+z_i}\right)}{\frac{\mathrm{b}\pi}{\lambda}\frac{(p-p_0)\delta}{z_0+z_i}} \right)^2 \cdot \cos^2\left(\frac{\mathrm{d}\pi}{\lambda}\frac{(p-p_0)\delta}{z_0+z_i}\right) + \mathcal{I}_n$$

Параметры δ, λ, z_0, $z_i, i \in \{1, 2\}$, $\mathcal{I}_0$, $\mathcal{I}_n$, p_0, b носят тот же смысл, что и ранее в случае с дифракцией на одной щели. Параметр d_i входит в число параметров оптимизации функций ошибок L_i. Параметр b_i, в отличие от дифракции на щели, различный для функций $\mathcal{I}_{1,2}$.

Для минимизации ущерба модели от засветки матрицы (подробнее см пункт 2.3) исключим из рассмотрения оптимизатора промежутки, на которых значение функции $\mathcal{I}(p) > \mathcal{I}_t$.

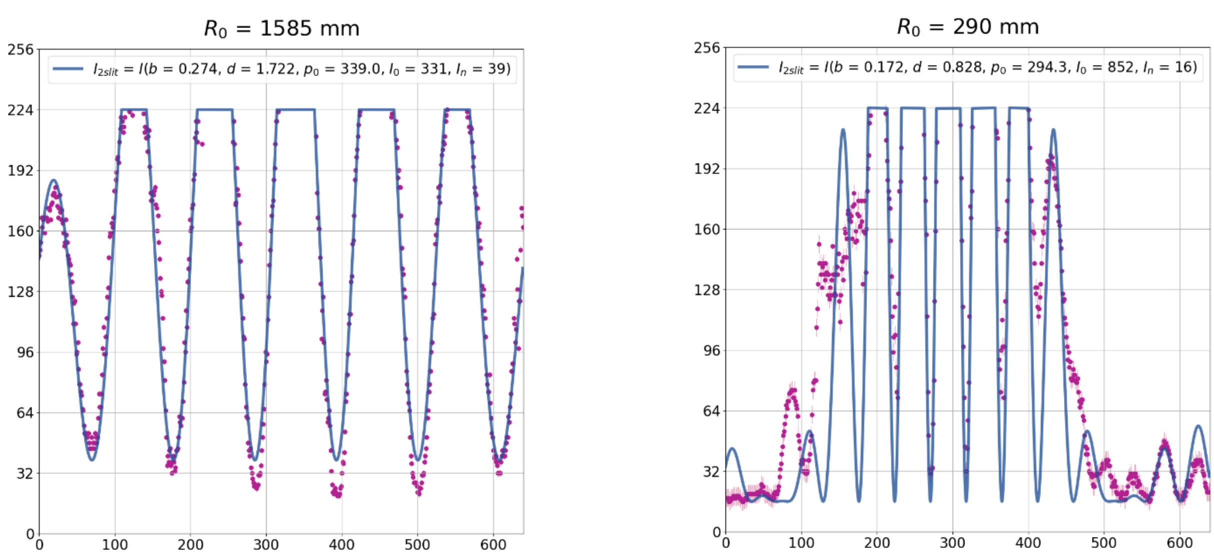

Рисунок 13. Оптимизированные функции $\mathcal{I}_{1,2}(p,\ z_{1,2})$