1. Гипотеза о величине среднего значения.

а) Пусть $X \sim N\left(a, \sigma^2\right)$, $\sigma > 0$ известно.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ - выборка объема n.

Рассмотрим гипотезы:

$H_0:\ a = a_0$,

$H_1:\ a \neq a_0$ (двусторонняя критическая область)

или

$H_1:\ a > a_0$ (правосторонняя критическая область)

или

$H_1:\ a < a_0$ (левосторонняя критическая область)

Критерий: $\tau = \sqrt{n} \cdot \dfrac{\bar{X} - a_0}{\sigma} \sim N\left(0,1\right)$

б) Пусть $X \sim N\left(a, \sigma^2\right)$, $\sigma > 0$ неизвестно.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ - выборка объема n.

Рассмотрим гипотезы:

$H_0:\ a = a_0$,

$H_1:\ a \neq a_0$ (двусторонняя критическая область)

или

$H_1:\ a > a_0$ (правосторонняя критическая область)

или

$H_1:\ a < a_0$ (левосторонняя критическая область)

Критерий: $t = \sqrt{n} \cdot \dfrac{\bar{X} - a_0}{S_0} \sim T_{n-1}$

2. Гипотеза о числовом значении доли признака (вероятности).

Пусть X - признак, который может проявиться в одном испытании
с неизвестной вероятностью p.

Предположим, что проведено n независимых испытаний, признак X проявлен в m из них.

Рассмотрим гипотезы:

$H_0: \; p = p_0$,

$H_1: \; p \neq p_0$ (двусторонняя критическая область)

или

$H_1: \; p > p_0$ (правосторонняя критическая область)

или

$H_1: \; p < p_0$ (левосторонняя критическая область)

Критерий: $\tau = \sqrt{n} \cdot \dfrac{p^* - p_0}{\sqrt{p_0\left(1-p_0\right)}} \sim N\left(0,1\right)$,

где $p^* = \dfrac{m}{n}$.

3. Гипотеза о равенстве средних.

Пусть $X \sim N\left(a_1, \sigma_1^{\;2}\right)$, $Y \sim N\left(a_2, \sigma_2^{\;2}\right)$.

Пусть $X_1, X_2, ..., X_{n_1}$ - выборка объема n_1 ,

Пусть $Y_1, Y_2, ..., Y_{n_2}$ - выборка объема n_2 .

Рассмотрим гипотезы:

$H_0:\ a_1 = a_2$,

$H_1:\ a_1 \neq a_2$ (двусторонняя критическая область)

или

$H_1:\ a_1 > a_2$ (правосторонняя критическая область)

или

$H_1:\ a_1 < a_2$ (левосторонняя критическая область)

Критерий: $\tau = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^{\;2}}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^{\;2}}{n_2}}} \sim N(0,1)$

Критерий: $\tau = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{S_{0x}^{\;2}}{n_1} + \dfrac{S_{0y}^{\;2}}{n_2}}} \sim N(0,1)$

4. Гипотеза о равенстве долей признака.

Пусть X и Y - признаки, которые могут проявиться в одном испытании с неизвестными вероятностями p_1 и p_2.

Предположим, что проведено n_1 независимых испытаний, признак X проявлен в m_1 из них.

Предположим, что проведено n_2 независимых испытаний, признак Y проявлен в m_2 из них.

Рассмотрим гипотезы:

$H_0:\ p_1 = p_2$,

$H_1:\ p_1 \neq p_2$ (двусторонняя критическая область)

или

$H_1:\ p_1 > p_2$ (правосторонняя критическая область)

или

$H_1:\ p_1 < p_2$ (левосторонняя критическая область)

Критерий: $$\tau = \frac{p_1^* - p_2^*}{\sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} \sim N(0,1)$$

где $p = \frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}$, $p_1^* = \frac{m_1}{n_1}$, $p_2^* = \frac{m_2}{n_2}$.

5. Гипотеза о величине дисперсии.

Пусть $X \sim N\left(a, \sigma^2\right)$

Пусть $X_1, X_2, ..., X_n$ - выборка объема n

Рассмотрим гипотезы:

$H_0:\ \sigma^2 = \sigma_0^2$,

$H_1:\ \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ (двусторонняя критическая область)

или

$H_1:\ \sigma^2 > \sigma_0^2$ (правосторонняя критическая область)

или

$H_1:\ \sigma^2 < \sigma_0^2$ (левосторонняя критическая область)

Критерий: $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S_0^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_{n-1}^2$

Последовательность действий при проверке гипотез:

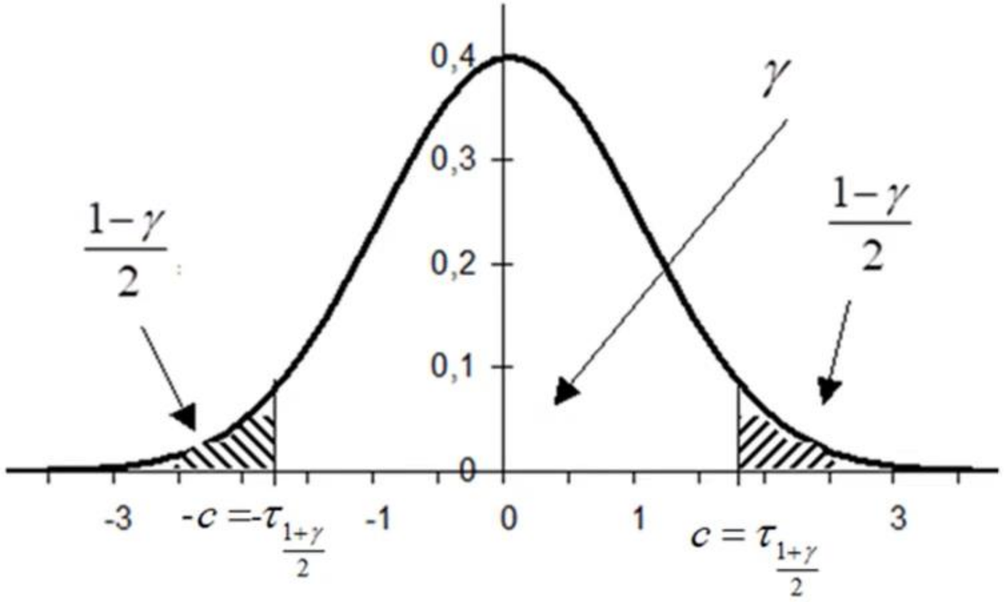
1. Выбрать нужный критерий (соответствующую случайную величину и понять, какое она имеет распределение).

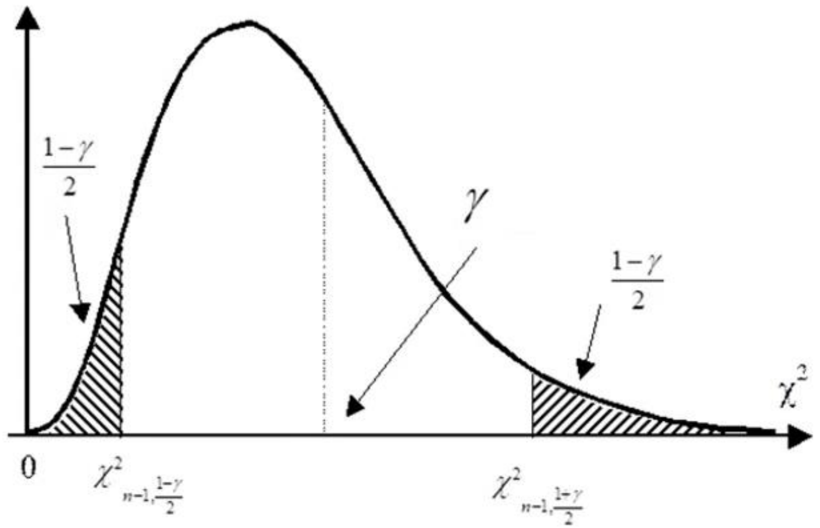
2. Вычислить эмпирическое значение критерия (подставить значения выборки в формулу).

Последовательность действий при проверке гипотез:

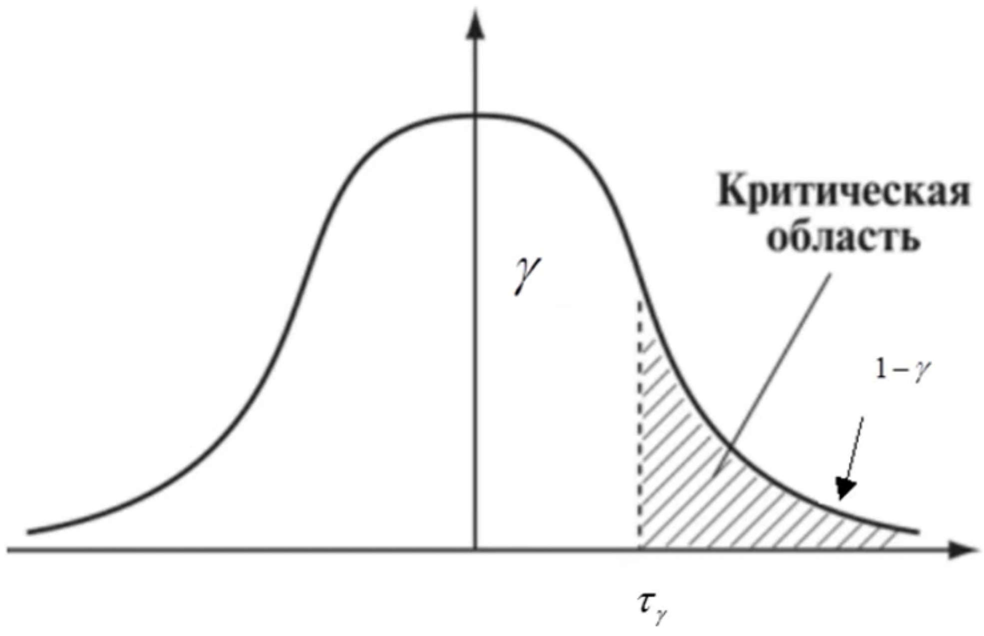
3. Понять, сколько критических точек будет, и вычислить их.

- Если гипотеза H_1 со знаком $\neq$ (двусторонняя гипотеза), значит, критических точек две. Для нормального распределения и распределения Стьюдента находим квантиль уровня $\tau_{\frac{1+\gamma}{2}}$ (или $t_{n-1,\frac{1+\gamma}{2}}$), критические точки $\pm\tau_{\frac{1+\gamma}{2}}$ (или $\pm t_{n-1,\frac{1+\gamma}{2}}$). Для распределения хи-квадрат находим квантили уровня $\chi^2_{n-1,\frac{1+\gamma}{2}}$ и $\chi^2_{n-1,\frac{1-\gamma}{2}}$, критические точки $\chi^2_{n-1,\frac{1+\gamma}{2}}$ и $\chi^2_{n-1,\frac{1-\gamma}{2}}$.

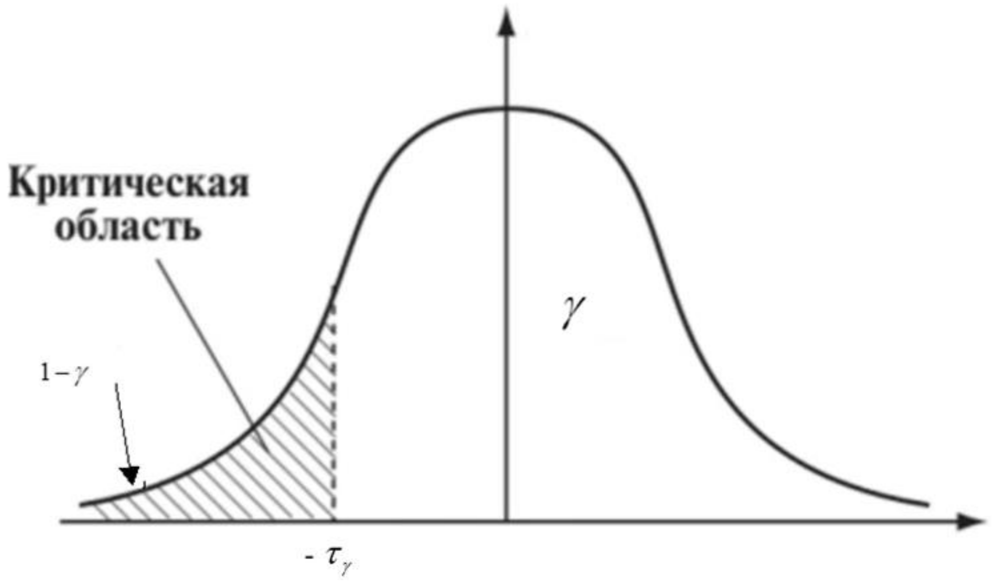


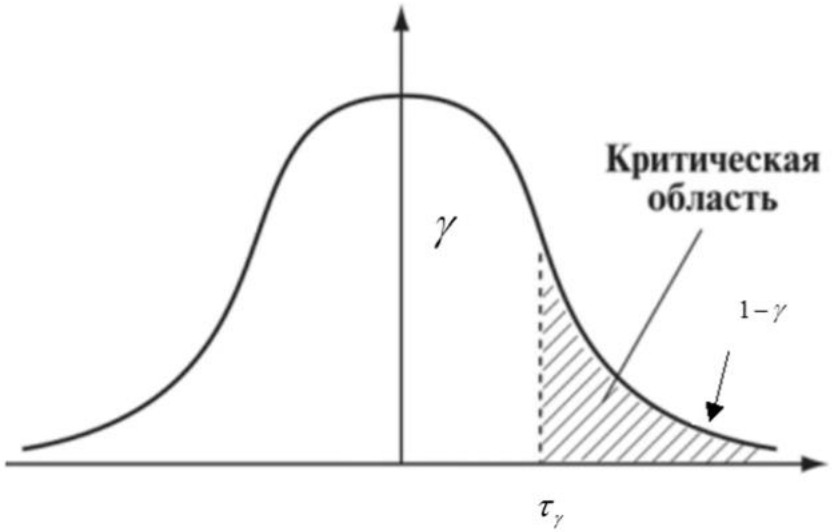


- Если гипотеза H_1 со знаком > (правосторонняя гипотеза), значит, критическая точка одна. Для нормального распределения и распределения Стьюдента находим квантиль уровня τ_γ (или $t_{n-1,\gamma}$), критическая точка τ_γ (или $t_{n-1,\gamma}$). Для распределения хи-квадрат находим квантиль уровня $\chi^2_{n-1,\gamma}$, критическая точка $\chi^2_{n-1,\gamma}$.



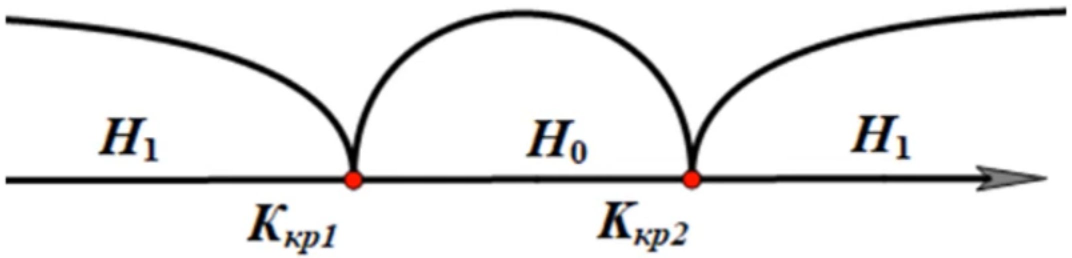
- Если гипотеза H_1 со знаком < (левосторонняя гипотеза), значит, критическая точка одна. Для нормального распределения и распределения Стьюдента находим квантиль уровня τ_γ (или $t_{n-1,\gamma}$), критическая точка $-\tau_\gamma$ (или $-t_{n-1,\gamma}$). Для распределения хи-квадрат находим квантиль уровня $\chi^2_{n-1,1-\gamma}$, критическая точка $\chi^2_{n-1,1-\gamma}$.



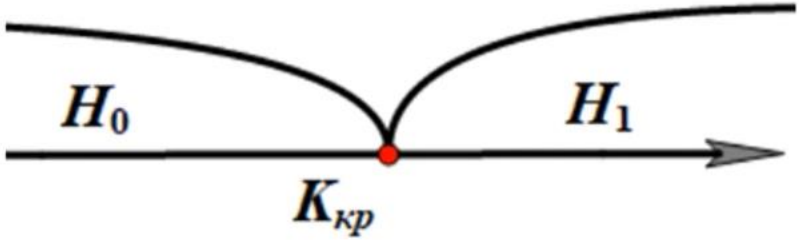


4. Нарисовать числовую прямую, на ней отметить критические точки и выделить критические области. Потом отметить эмпирическое значение критерия на прямой и определить, в какую область попадет это значение.

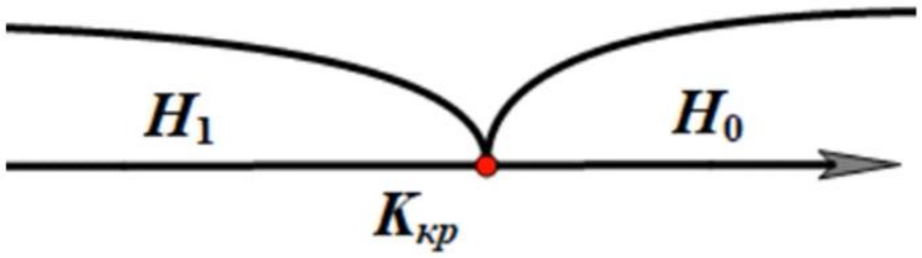
- Для двусторонней гипотезы критические области (те области, где принимается гипотеза H_1) находятся по краям, по середине область принятия гипотезы H_0 .



- Для правосторонней гипотезы критическая область (область, где принимается гипотеза H_1) находится справа.



- Для левосторонней гипотезы критическая область (область, где принимается гипотеза H_1) находится слева.



5. Сделать вывод о том, какая гипотеза будет принята.

Задача 1. По результатам 25 замеров установлено, что выборочное среднее время изготовления детали равно $\bar{X} = 48$ с. Предполагая, что время изготовления – нормально распределенная случайная величина с дисперсией $\sigma^2 = 9$, проверить предположение о том, что среднее время изготовления детали существенно не отличается от 49 с. Принять уровень доверия $\gamma = 0,95$.

а) $n = 25$

$\bar{X} = 48$

$\sigma^2 = 9$

$\gamma = 0,95$

$H_0: \ a = 49$

$H_1: \ a \neq 49$

1. Находим критерий – о значении среднего при известной дисперсии:

$$\tau = \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{X} - a_0}{\sigma} \sim N(0,1)$$

2. Находим эмпирическое значение критерия:

$$\tau_{эмп} = \sqrt{25} \cdot \frac{48 - 49}{3} = -1,66$$

3. Находим критические точки (в таблице стандартного нормального распределения или с помощью онлайн калькулятора):

Так как альтернативная гипотеза двусторонняя ($a \neq 49$), то ошибки делятся пополам, критических точек две:

$$\tau_{кр} = \pm\tau_{\frac{1+\gamma}{2}} = \pm\tau_{0,975} = \pm1,96$$

а) $n = 25$

$\bar{X} = 48$

$\sigma^2 = 9$

$\gamma = 0,95$

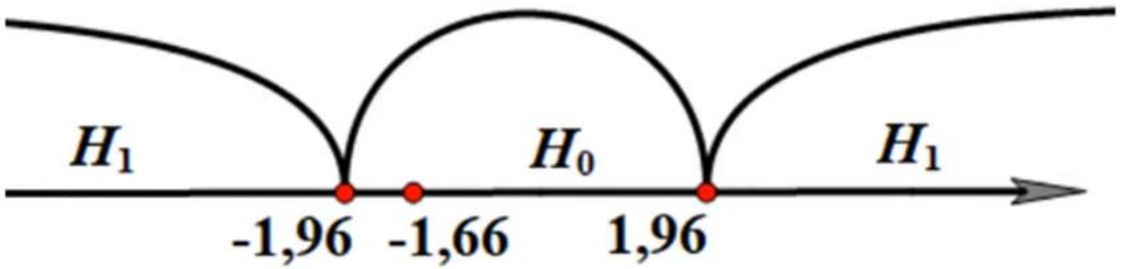
$H_0:\ a = 49$

$H_1:\ a \neq 49$

$$\tau_{эмп} = \sqrt{25} \cdot \frac{48-49}{3} = -1,66$$

$$\tau_{кр} = \pm\tau_{\frac{1+\gamma}{2}} = \pm 1,96$$

4. Наносим на числовую прямую критические точки, определяем области принятия гипотез:



5. Принимаем гипотезу $H_0:\ a = 49$ - на основании этих данных нельзя сделать вывод, что среднее время изготовления детали существенно отличается от 49.

б) $n = 25$

$\bar{X} = 48$

$\sigma^2 = 9$

$\gamma = 0,95$

$H_0:\ a = 49$

$H_1:\ a < 49$

1. Находим критерий – о значении среднего при известной дисперсии:

$$\tau = \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{X} - a_0}{\sigma} \sim N(0,1)$$

2. Находим эмпирическое значение критерия:

$$\tau_{эмп} = \sqrt{25} \cdot \frac{48 - 49}{3} = -1,66$$

3. Находим критические точки (в таблице стандартного нормального распределения или с помощью онлайн калькулятора):

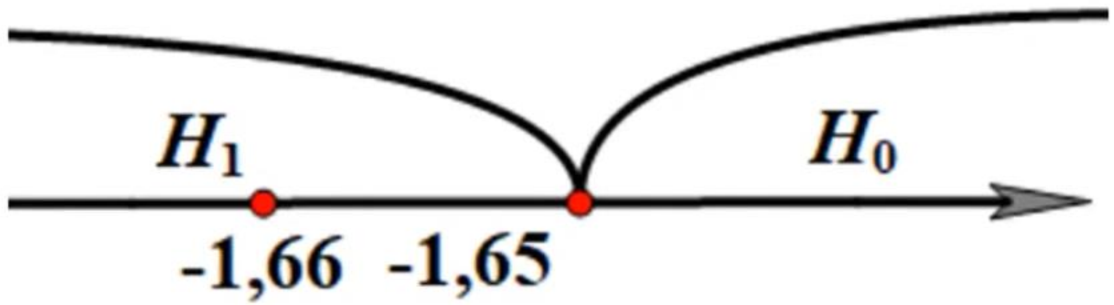
Так как альтернативная гипотеза левосторонняя ($a < 49$), то ошибки не делятся пополам, критическая точка одна:

$$\tau_{кр} = -\tau_{\gamma} = -\tau_{0,95} = -1,65$$

б) $n = 25$
$\bar{X} = 48$
$\sigma^2 = 9$
$\gamma = 0,95$
$H_0:\ a = 49$
$H_1:\ a < 49$

$$\tau_{эмп} = \sqrt{25} \cdot \frac{48 - 49}{3} = -1,66 \qquad \tau_{кр} = -\tau_{\gamma} = -1,65$$

4. Наносим на числовую прямую критическую точку, определяем области принятия гипотез:



5. Принимаем гипотезу H_1 - на основании этих данных можно сделать вывод, что среднее время изготовления детали существенно меньше 49 (при условии, что мы не допускаем возможности того, что среднее время изготовления детали может быть больше 49).

Задача 3. б) Монету кинули 100 раз, она упала одной стороной 60 раз. Можно ли на уровне доверия 0,9 говорить о ее нечестности?

$n=100$
$m=60$
$\gamma=0,9$
$H_0:\ p=1/2,$
$H_1:\ p\neq 1/2$

1. Находим критерий – о числовом значении доли признака:

$$\tau=\sqrt{n}\cdot\frac{p^*-p_0}{\sqrt{p_0\left(1-p_0\right)}}\sim N\left(0,1\right)$$

2. Находим эмпирическое значение критерия:

$p^*=60/100$

$$\tau_{эмп}=\sqrt{100}\cdot\frac{0,6-0,5}{\sqrt{0,5\left(1-0,5\right)}}=2$$

3. Находим критические точки (в таблице нормального распределения или с помощью онлайн калькулятора):
Так как альтернативная гипотеза двусторонняя ($p\neq 1/2$), то ошибки делятся пополам, критических точек две:

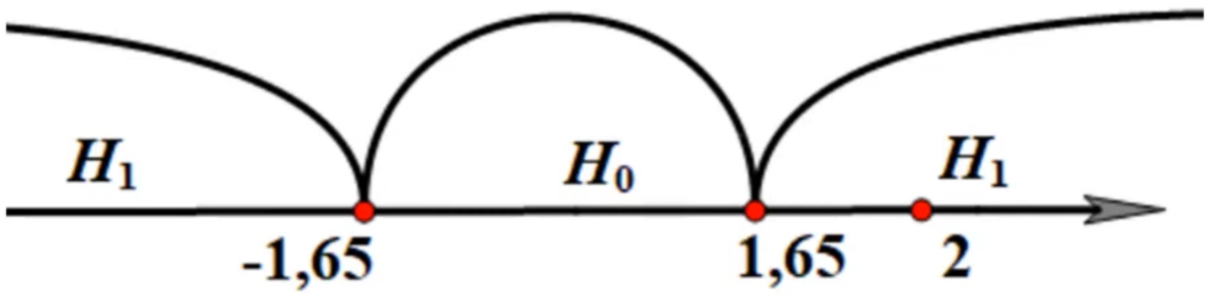
$\tau_{кр}=\pm\tau_{\frac{1+\gamma}{2}}=\pm\tau_{0,95}=\pm 1,65$.

$n = 100$
$m = 60$
$\gamma = 0,9$
$H_0: \ p = 1/2,$
$H_1: \ p \neq 1/2$

$$\tau_{эмп} = \sqrt{100} \cdot \frac{0,6 - 0,5}{\sqrt{0,5(1-0,5)}} = 2$$

$$\tau_{кр} = \pm 1,65$$

4. Наносим на числовую прямую критические точки, определяем области принятия гипотез:



5. Принимаем гипотезу $H_1: \ p \neq 1/2$ - на основании этих данных можно сделать вывод, что монета нечестная.

Задача 4. Было произведено 12 измерений диаметра вала. При этом оказалось, что выборочное среднее равно 10,2 мм, а стандартное отклонение $S_{01} = 0,05$ мм. Затем вал поместили в условия с высокой температурой и произвели еще 8 измерений диаметра его оси. Выборочное среднее на этот раз оказалось равным 10,3 мм, а стандартное отклонение $S_{02} = 0,06$ мм. Можно ли сделать вывод при уровне доверия 0,95, что диаметр вала существенно увеличивается при нагревании?

$n_1 = 12$

$\bar{X} = 10,2$

$S_{01} = 0,05$

$n_2 = 8$

$\bar{Y} = 10,3$

$S_{02} = 0,06$

$\gamma = 0,95$

$H_0: \ a_1 = a_2$,

$H_1: \ a_1 < a_2$

1. Находим критерий – о равенстве средних:

$$\tau = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{{S_{01}}^2}{n_1} + \frac{{S_{02}}^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

2. Находим эмпирическое значение критерия:

$$\tau_{эмп} = \frac{10,2 - 10,3}{\sqrt{\frac{0,05^2}{12} + \frac{0,06^2}{8}}} = -3,89$$

3. Находим критические точки (в таблице стандартного нормального распределения или с помощью онлайн калькулятора):

Так как альтернативная гипотеза левосторонняя ($a_1 < a_2$), то ошибки не делятся пополам, критическая точка одна:

$\tau_{кр} = -\tau_{\gamma} = -\tau_{0,95} = -1,65$.

$n_1 = 12$

$\bar{X} = 10,2$

$S_{01} = 0,05$

$n_2 = 8$

$\bar{Y} = 10,3$

$S_{02} = 0,06$

$\gamma = 0,95$

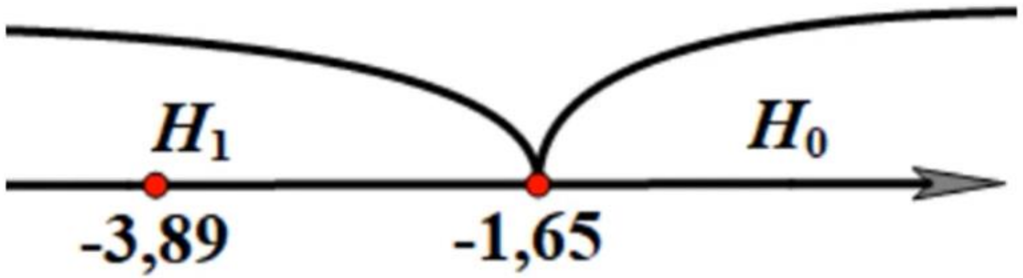
$H_0:\ a_1 = a_2$,

$H_1:\ a_1 < a_2$

$$\tau_{эмп} = \frac{10,2 - 10,3}{\sqrt{\frac{0,05^2}{12} + \frac{0,06^2}{8}}} = -3,89$$

$$\tau_{кр} = -\tau_{\gamma} = -\tau_{0,95} = -1,65$$

4. Наносим на числовую прямую критическую точку, определяем области принятия гипотез:



5. Принимаем гипотезу $H_1:\ a_1 < a_2$ - на основании этих данных можно сделать вывод, что диаметр вала существенно увеличивается при нагревании.

Задача 5. Контрольную работу по высшей математике выполняли студенты двух групп. В первой группе было предложено 100 задач, из которых были правильно решены 58, во второй группе из 120 задач верно решены 65. При уровне доверия 0,98 проверить гипотезу о том, что материал одинаково усвоен студентами обеих групп.

$n_1 = 100$

$m_1 = 58$

$n_2 = 120$

$m_2 = 65$

$\gamma = 0,98$

$H_0: \; p_1 = p_2$

$H_1: \; p_1 \neq p_2$

1. Находим критерий – о равенстве долей признака:

$$\tau = \frac{p_1^* - p_2^*}{\sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim N(0,1)$$

2. Находим эмпирическое значение критерия:

$$p_1^* = 58/100 = 0,58$$

$$p_2^* = 65/120 = 0,54$$

$$p = \frac{58+65}{100+120} = 0,56$$

$$\tau_{эмп} = \frac{0,58 - 0,54}{\sqrt{0,56(1-0,56)\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{120}\right)}} = 0,59$$

3. Находим критические точки:

Так как альтернативная гипотеза двусторонняя ($p \neq 1/2$), то ошибки делятся пополам, критических точек две:

$\tau_{кр} = \pm\tau_{\frac{1+\gamma}{2}} = \pm\tau_{0,99} = \pm 2,33$.

$n_1 = 100$

$m_1 = 58$

$n_2 = 120$

$m_2 = 65$

$\gamma = 0,98$

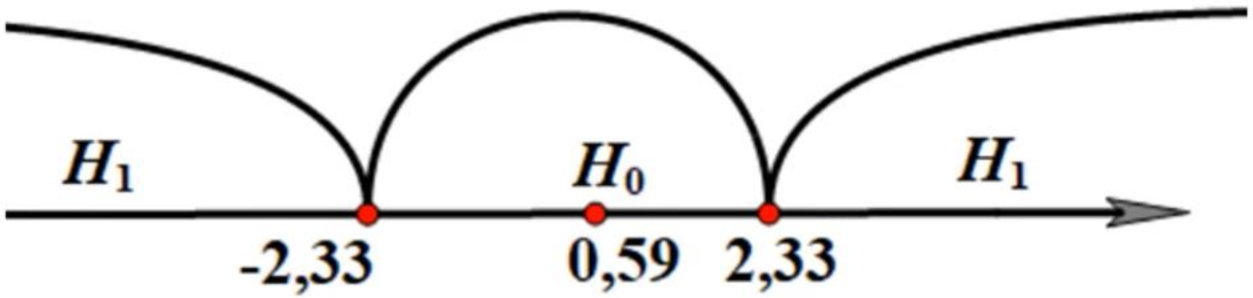
$H_0: \; p_1 = p_2$

$H_1: \; p_1 \neq p_2$

$$\tau_{эмп} = \frac{0,58 - 0,54}{\sqrt{0,56(1-0,56)\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{120}\right)}} = 0,59$$

$$\tau_{кр} = \pm\tau_{\frac{1+\gamma}{2}} = \pm\tau_{0,99} = \pm 2,33\,.$$

4. Наносим на числовую прямую критические точки, определяем области принятия гипотез:



5. Принимаем гипотезу $H_0: \; p_1 = p_2$ - на основании этих данных нельзя сделать вывод, что материал усвоен неодинаково.

Задача 6. Точность работы станка-автомата проверяется по дисперсии, которая не должна превышать значение $\sigma_0^2 = 0,15$. По 25 измерениям получена несмещенная выборочная дисперсия $S_0^2 = 0,25$. Обеспечивается ли точность работы станка автомата на уровне доверия 0,95?

$n = 25$

$\sigma_0^2 = 0,15$

$S_0^2 = 0,25$

$\gamma = 0,95$

$H_0:\ \sigma^2 = 0,15$

$H_1:\ \sigma^2 > 0,15$

1. Находим критерий – о величине дисперсии:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S_0^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

2. Находим эмпирическое значение критерия:

$$\chi^2_{эмп} = \frac{24 \cdot 0,25}{0,15} = 40$$

3. Находим критические точки (в таблице распределения хи-квадрат):

Так как альтернативная гипотеза правосторонняя ($\sigma^2 > 0,15$), то ошибки не делятся пополам, критическая точка одна:

$$\chi^2_{кр} = \chi^2_{n-1,\ \gamma} = \chi^2_{24,\ 0,95} = 36,4$$

$n = 25$

$\sigma_0^2 = 0{,}15$

$S_0^2 = 0{,}25$

$\gamma = 0{,}95$

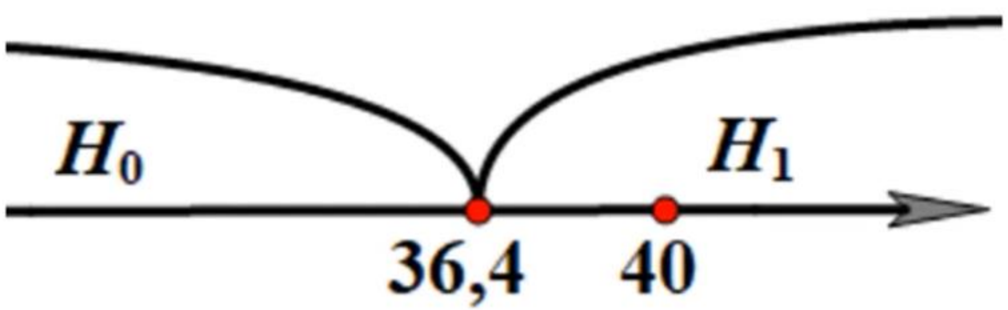
$H_0:\ \sigma^2 = 0{,}15$

$H_1:\ \sigma^2 > 0{,}15$

$$\chi^2_{\text{эмп}} = \frac{24 \cdot 0{,}25}{0{,}15} = 40$$

$$\chi^2_{кр} = \chi^2_{n-1,\ \gamma} = \chi^2_{24,\ 0{,}95} = 36{,}4$$

4. Наносим на числовую прямую критическую точку, определяем области принятия гипотез:



5. Принимаем гипотезу $H_1:\ \sigma^2 > 0{,}15$ - на основании этих данных можно сделать вывод, что автомат работает с недостаточной точностью.