

Критерии согласия

Критерии согласия – критерии о законе распределения случайной величины на основании экспериментальных данных.

χ^2 критерий Пирсона

Критерий χ^2 отвечает на вопрос о том, с одинаковой ли частотой встречаются разные значения признака в эмпирическом и теоретическом (или двух эмпирических распределениях).

Ограничения критерия

1. Объем выборки должен быть достаточно большим: $n \geq 30$.
2. Теоретическая частота для каждой ячейки таблицы не должна быть меньше 5: $f_{теор} > 5$.

χ^2 критерий Пирсона

Сопоставление эмпирического распределения с теоретическим:

H_0 : Полученное эмпирическое распределение признака не отличается от теоретического распределения.

H_1 : Полученное эмпирическое распределение признака отличается от теоретического распределения.

$\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ - выборка из некоторой генеральной совокупности X .

1. Построим вариационный ряд и посчитаем эмпирические частоты $f_{эм}$.
2. Вычислим теоретические частоты $f_{теор}$ — сколько раз должно было встретиться каждое значение вариационного ряда при условии выполнения основной гипотезы.
3. Эмпирическое значение критерия:

$$\chi^2_{эм} = \sum_{i=1}^m \frac{(f_{эм} - f_{теор})^2}{f_{теор}}.$$

χ^2 критерий Пирсона

Сопоставление эмпирического распределения с теоретическим:

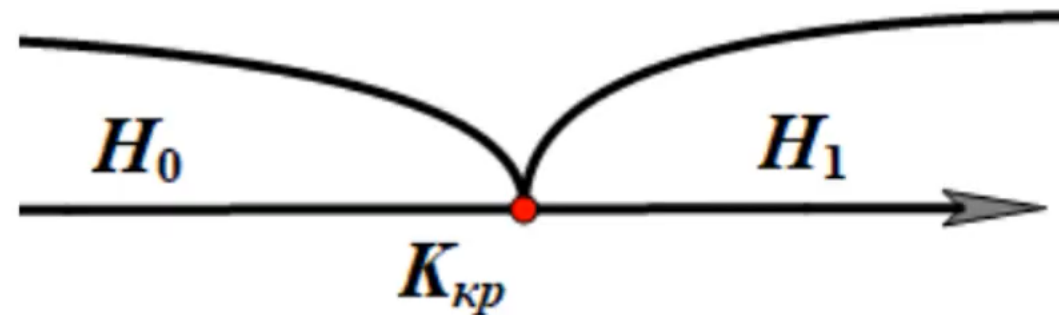
H_0 : Полученное эмпирическое распределение признака не отличается от теоретического распределения.

H_1 : Полученное эмпирическое распределение признака отличается от теоретического распределения.

4. По таблицам распределения χ^2 находим критическое значение $\chi_{кр}^2$ с заданным уровнем значимости.

5. Вывод: Гипотеза H_0 о согласии экспериментальных данных с распределением принимается, если $\chi_{эм}^2 < \chi_{кр}^2$.

Правосторонняя критическая область:



Задача 1.

Среди младших подростков был проведён тест для выявления самооценки. Баллы теста были переведены в три уровня: высокий, средний, низкий. Частоты распределились следующим образом:

Высокий - 27 чел.

Средний - 12 чел.

Низкий - 11 чел.

Проверить на уровне доверия $\gamma = 0,99$ гипотезы:

H_0 : Количество детей с каждым уровнем самооценки примерно одинаково.

H_1 : Количество детей с каждым уровнем самооценки существенно отличается.

H_0 : Количество детей с каждым уровнем самооценки примерно одинаково.

H_1 : Количество детей с каждым уровнем самооценки существенно отличается.

	Высокий	Средний	Низкий
$f_{\text{эмп}}$	27 чел.	12 чел.	11 чел.
$f_{\text{теор}}$	50/3	50/3	50/3
$\frac{(f_{\text{эмп}} - f_{\text{теор}})^2}{f_{\text{теор}}}$	$\frac{\left(27 - \frac{50}{3}\right)^2}{\frac{50}{3}} \approx 6,41$	$\frac{\left(12 - \frac{50}{3}\right)^2}{\frac{50}{3}} \approx 1,31$	$\frac{\left(11 - \frac{50}{3}\right)^2}{\frac{50}{3}} \approx 1,93$

Выборка объема 50

$\chi^2_{\text{эмп}} = 6,41 + 1,31 + 1,93 = 9,65$ – эмпирическое значение критерия

$$\chi^2_{\text{эмп}} = \sum_{i=1}^m \frac{(f_{\text{эмп}} - f_{\text{теор}})^2}{f_{\text{теор}}}$$

H_0 : Количество детей с каждым уровнем самооценки примерно одинаково.

H_1 : Количество детей с каждым уровнем самооценки существенно отличается.

Найдем критическую точку.

Уровень значимости –
ошибка первого рода

$$\alpha = 1 - \gamma, \text{ где } \gamma = 0,99$$

$$\alpha = 0,01$$

Число степеней свободы =
=число элементов
вариационного ряда-1

$$\nu = 2$$

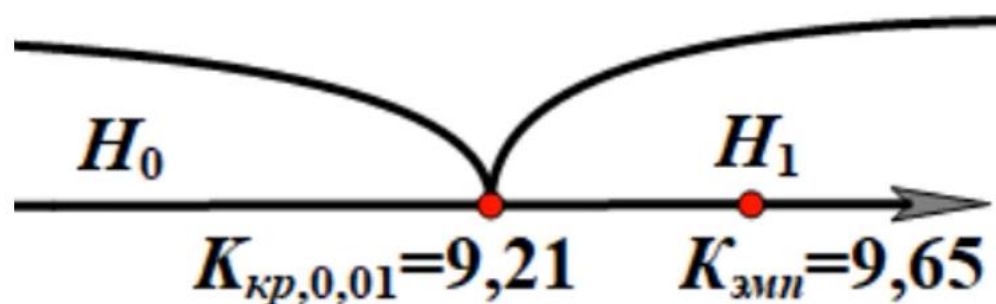
число	уровень доверия γ							
степеней	0,01	0,025	0,05	0,1	0,9	0,95	0,975	0,99
свободы	уровень значимости α							
ν	0,99	0,975	0,95	0,9	0,1	0,05	0,025	0,01
1	0,00	0,00	0,00	0,02	2,71	3,84	5,02	6,63
2	0,02	0,05	0,10	0,21	4,61	5,99	7,38	9,21
3	0,11	0,22	0,35	0,58	6,25	7,81	9,35	11,34
4	0,30	0,48	0,71	1,06	7,78	9,49	11,14	13,28
5	0,55	0,83	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09
6	0,87	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81

H_0 : Количество детей с каждым уровнем самооценки примерно одинаково.

H_1 : Количество детей с каждым уровнем самооценки существенно отличается.

$\chi^2_{\text{эмп}} = 6,41 + 1,31 + 1,93 = 9,65$ – эмпирическое значение критерия

$$\chi^2_{\text{кр}, 0,01} = 9,21$$



принимая альтернативную гипотезу:

H_1 : Количество детей с каждым уровнем самооценки существенно отличается.

Задача 2.

Среди младших подростков был проведён тест для выявления самооценки. Баллы теста были переведены в три уровня: высокий, средний, низкий. Частоты распределились следующим образом:

Высокий - 27 чел.

Средний - 12 чел.

Низкий - 11 чел.

Проверить на уровне доверия $\gamma = 0,99$ гипотезы:

H_0 : Количество детей с высоким уровнем самооценки примерно в два раза больше, чем со средним уровнем и низким уровнем соответственно. (Пропорции примерно 2:1:1)

H_1 : Пропорции существенно отличаются от 2:1:1.

H_0 : Количество детей с высоким уровнем самооценки примерно в два раза больше, чем со средним уровнем и низким уровнем соответственно. (Пропорции примерно 2:1:1)

H_1 : Пропорции существенно отличаются от 2:1:1.

	Высокий	Средний	Низкий
$f_{\text{эмп}}$	27 чел.	12 чел.	11 чел.
$f_{\text{теор}}$	25	12,5	12,5
$\frac{(f_{\text{эмп}} - f_{\text{теор}})^2}{f_{\text{теор}}}$	$\frac{(27 - 25)^2}{25} = 0,16$	$\frac{(12 - 12,5)^2}{12,5} = 0,02$	$\frac{(11 - 12,5)^2}{12,5} = 0,18$

$$\chi^2_{\text{эмп}} = 0,16 + 0,02 + 0,18 = 0,36$$

$$\chi^2_{\text{эмп}} = \sum_{i=1}^m \frac{(f_{\text{эмп}} - f_{\text{теор}})^2}{f_{\text{теор}}}$$

H_0 : Количество детей с высоким уровнем самооценки примерно в два раза больше, чем со средним уровнем и низким уровнем соответственно. (Пропорции примерно 2:1:1)

H_1 : Пропорции существенно отличаются от 2:1:1.

Найдем критическую точку.

число	уровень доверия						γ	
степеней	0,01	0,025	0,05	0,1	0,9	0,95	0,975	0,99
свободы	уровень значимости						α	
ν	0,99	0,975	0,95	0,9	0,1	0,05	0,025	0,01
1	0,00	0,00	0,00	0,02	2,71	3,84	5,02	6,63
2	0,02	0,05	0,10	0,21	4,61	5,99	7,38	9,21
3	0,11	0,22	0,35	0,58	6,25	7,81	9,35	11,34
4	0,30	0,48	0,71	1,06	7,78	9,49	11,14	13,28
5	0,55	0,83	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09
6	0,87	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81

Уровень значимости –
ошибка первого рода

$$\alpha = 0,01$$

Число степеней свободы =
=число элементов
вариационного ряда-1

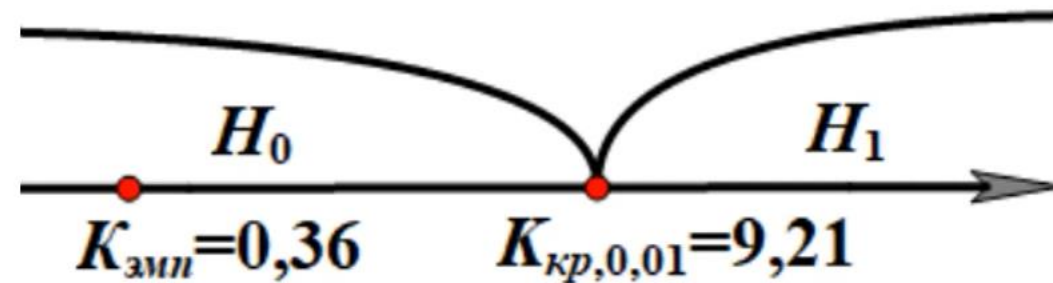
$$\nu = 2$$

H_0 : Количество детей с высоким уровнем самооценки примерно в два раза больше, чем со средним уровнем и низким уровнем соответственно. (Пропорции примерно 2:1:1)

H_1 : Пропорции существенно отличаются от 2:1:1.

$$\chi^2_{\text{эм}} = 0,16 + 0,02 + 0,18 = 0,36$$

$$\chi^2_{\text{кр}, 0,01} = 9,21$$



$$\chi^2_{\text{эм}} < \chi^2_{\text{кр}}$$

принимаем основную гипотезу:

H_0 : Количество детей с высоким уровнем самооценки примерно в два раза больше, чем со средним уровнем и низким уровнем соответственно.

χ^2 критерий Пирсона

Сопоставление двух эмпирических распределений:

Выдвинем следующие гипотезы:

H_0 : Различия между двумя распределениями недостоверны.

H_1 : Различия между двумя распределениями достоверны.

Задача 3. Каждого из 100 студентов просили назвать любимый вид спорта. Результаты представлены в таблице:

спорт пол	Футбол	Баскетбол	Плавание	Бег	Теннис	Всего
Мужской	21	5	9	12	13	60
Женский	9	3	1	15	12	40
Всего	30	8	10	27	25	100

Требуется проверить гипотезу о том, зависят ли предпочтения тех или иных видов спорта от пола опрашиваемых. Принять уровень доверия равным $\gamma = 0,95$.

H_0 : Выбор вида спорта не зависит от пола (распределения существенно не отличаются)

H_1 : Выбор вида спорта зависит от пола (распределения отличаются существенно)

спорт пол	Футбол	Баскетбол	Плавание	Бег	Теннис	Всего
Мужской	21	5	9	12	13	60
Женский	9	3	1	15	12	40
Всего	30	8	10	27	25	100

Теоретически мы ожидаем, что частоты распределятся пропорционально по каждому виду спорта между юношами и девушками. Вычислим теоретические частоты по формуле:

$$f_{\text{теор}} = \frac{\left(\begin{array}{c} \text{сумма частот по} \\ \text{соответствующей строке} \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} \text{сумма частот по} \\ \text{соответствующему столбцу} \end{array} \right)}{\left(\text{общее количество наблюдений} \right)}$$

спорт пол	Футбол	Баскетбол	Плавание	Бег	Теннис
Мужской	$\frac{30 \cdot 60}{100} = 18$	$\frac{8 \cdot 60}{100} = 4,8$	$\frac{10 \cdot 60}{100} = 6$	$\frac{27 \cdot 60}{100} = 16,2$	$\frac{25 \cdot 60}{100} = 15$
Женский					

спорт пол	Футбол	Баскетбол	Плавание	Бег	Теннис	Всего
Мужской	21	5	9	12	13	60
Женский	9	3	1	15	12	40
Всего	30	8	10	27	25	100

Теоретически мы ожидаем, что частоты распределятся пропорционально по каждому виду спорта между юношами и девушками. Вычислим теоретические частоты по формуле:

$$f_{\text{теор}} = \frac{\left(\begin{array}{c} \text{сумма частот по} \\ \text{соответствующей строке} \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} \text{сумма частот по} \\ \text{соответствующему столбцу} \end{array} \right)}{\left(\begin{array}{c} \text{общее количество наблюдений} \end{array} \right)}$$

спорт пол	Футбол	Баскетбол	Плавание	Бег	Теннис
Мужской	$\frac{30 \cdot 60}{100} = 18$	$\frac{8 \cdot 60}{100} = 4,8$	$\frac{10 \cdot 60}{100} = 6$	$\frac{27 \cdot 60}{100} = 16,2$	$\frac{25 \cdot 60}{100} = 15$
Женский	$\frac{30 \cdot 40}{100} = 12$	$\frac{8 \cdot 40}{100} = 3,2$	$\frac{10 \cdot 40}{100} = 4$	$\frac{27 \cdot 40}{100} = 10,8$	$\frac{25 \cdot 40}{100} = 10$

Итоговая таблица для вычислений будет выглядеть так:

Пол	Вид спорта	$f_{эмт}$	$f_{теор}$	$\frac{(f_{эмт} - f_{теор})^2}{f_{теор}}$
Мужской	Футбол	21	18	$\frac{(21-18)^2}{18} = 0,5$
	Баскетбол	5	4,8	$\frac{(5-4,8)^2}{4,8} = 0,01$
	Плавание	9	6	$\frac{(9-6)^2}{6} = 1,5$
	Бег	12	16,2	$\frac{(12-16,2)^2}{16,2} = 1,09$
	Теннис	13	15	$\frac{(13-15)^2}{15} = 0,27$

$$\chi^2_{эмт} = \sum_{i=1}^m \frac{(f_{эмт} - f_{теор})^2}{f_{теор}}$$

Пол	Вид спорта	$f_{эмт}$	$f_{теор}$	$\frac{(f_{эмт} - f_{теор})^2}{f_{теор}}$
Женский	Футбол	9	12	$\frac{(9-12)^2}{12} = 0,75$
	Баскетбол	3	3,2	$\frac{(3-3,2)^2}{3,2} = 0,01$
	Плавание	1	4	$\frac{(1-4)^2}{4} = 2,25$
	Бег	15	10,8	$\frac{(15-10,8)^2}{10,8} = 1,63$
	Теннис	12	10	$\frac{(12-10)^2}{10} = 0,4$

$$\chi^2_{эмт} = 0,5 + 0,01 + 1,5 + 1,09 + 0,27 + 0,75 + 0,01 + 2,25 + 1,63 + 0,4 = 8,41$$

H_0 : Выбор вида спорта не зависит от пола (распределения существенно не отличаются)

H_1 : Выбор вида спорта зависит от пола (распределения отличаются существенно)

Найдем критическую точку.

число	уровень доверия γ							
степеней	0,01	0,025	0,05	0,1	0,9	0,95	0,975	0,99
свободы	уровень значимости α							
ν	0,99	0,975	0,95	0,9	0,1	0,05	0,025	0,01
1	0,00	0,00	0,00	0,02	2,71	3,84	5,02	6,63
2	0,02	0,05	0,10	0,21	4,61	5,99	7,38	9,21
3	0,11	0,22	0,35	0,58	6,25	7,81	9,35	11,34
4	0,30	0,48	0,71	1,06	7,78	9,49	11,14	13,28
5	0,55	0,83	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09
6	0,87	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81

Уровень значимости –
ошибка первого рода

$$\alpha = 0,05$$

Число степеней свободы:

$$\nu = (n-1)(c-1)$$

n - количество строк,

c - количество столбцов

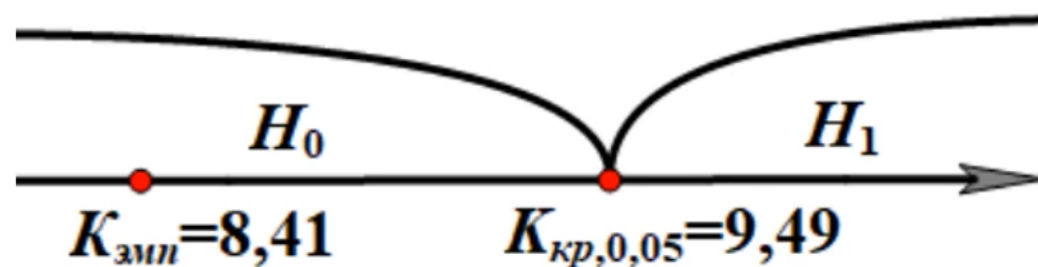
$$\nu = (2-1)(5-1) = 4$$

H_0 : Выбор вида спорта не зависит от пола (распределения существенно не отличаются)

H_1 : Выбор вида спорта зависит от пола (распределения отличаются существенно)

$$\chi^2_{эм} = 8,41$$

$$\chi^2_{кр, 0,05} = 9,49$$



$$\chi^2_{эм} < \chi^2_{кр, 0,05}$$

принимаем основную гипотезу:

H_0 : Выбор вида спорта не зависит от пола (распределения существенно не отличаются).