LES PROBABILITÉS

I Rappels sur les ensembles

I Rappels sur les ensembles

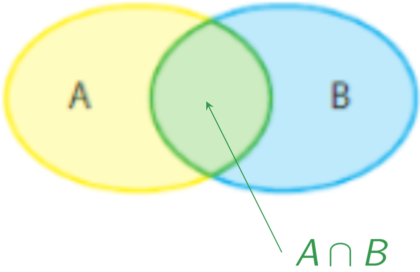
Définition :

L'intersection de deux ensembles A et B, notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments appartenant à A **et** à B.

I Rappels sur les ensembles

Définition :

L'intersection de deux ensembles A et B, notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments appartenant à A **et** à B.

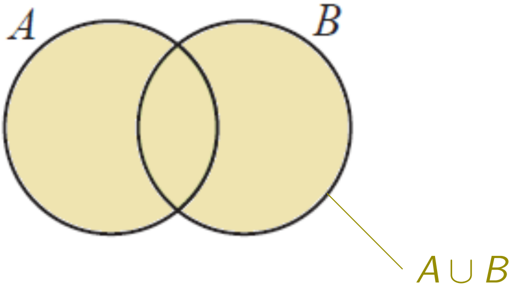


Définition :

La réunion de deux ensembles A et B, notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments appartenant à A **ou** à B.

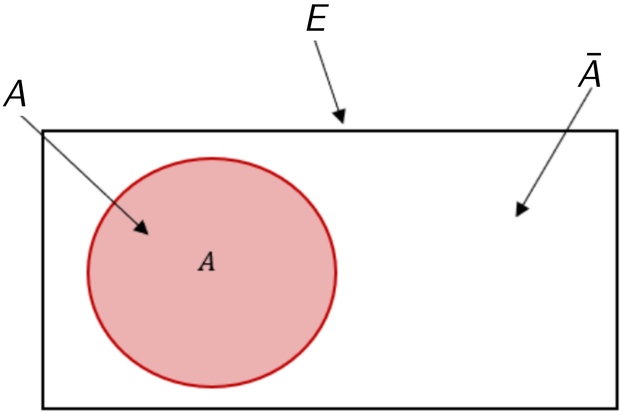
Définition :

La réunion de deux ensembles A et B, notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments appartenant à A **ou** à B.



Définition : Soit A un sous-ensemble d'un ensemble E. Le complémentaire de A dans E, note $\bar{A}$ ou $\complement_E A$, est l'ensemble constitué des éléments de E qui ne sont pas dans A.

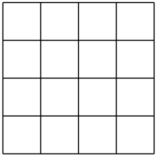
Définition : Soit A un sous-ensemble d'un ensemble E. Le complémentaire de A dans E, note $\bar{A}$ ou $\complement_E A$, est l'ensemble constitué des éléments de E qui ne sont pas dans A.



II Principe additif :

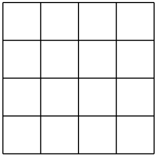
II Principe additif :

Exemple : Donner le nombre de carrés contenus dans la figure ci-dessous.



II Principe additif :

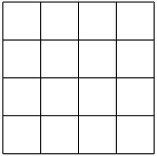
Exemple : Donner le nombre de carrés contenus dans la figure ci-dessous.



On compte les carrés en fonction de leur taille.

II Principe additif :

Exemple : Donner le nombre de carrés contenus dans la figure ci-dessous.

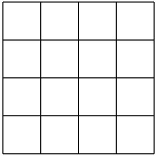


On compte les carrés en fonction de leur taille.

Il y a 16 carrés de coté 1, 9 carrés de coté 2, 4 carrés de coté 3, 1 carré de coté 4.

II Principe additif :

Exemple : Donner le nombre de carrés contenus dans la figure ci-dessous.



On compte les carrés en fonction de leur taille.

Il y a 16 carrés de coté 1, 9 carrés de coté 2, 4 carrés de coté 3, 1 carré de coté 4.

Il y a donc en tout $16 + 9 + 4 + 1 = 30$ carrés.

Définition :

Si A et B sont de ensembles disjoints (c'est à dire $A \cap B = \emptyset$), alors Card(A $\cup$ B) = Card(A) + Card(B).

Définition :

Si A et B sont de ensembles disjoints (c'est à dire $A \cap B = \emptyset$), alors Card(A ∪ B) = Card(A) + Card(B). De façon générale, si A_1, A_2, ..., A_n sont des ensembles disjoints, on a :

$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \ldots + \text{Card}(A_n)$.

Remarque : Dans le cas général, on a

$$\boxed{\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)}$$

III Pricipe multiplicatif :

III Pricipe multiplicatif :

Définition :

• Le produit cartésien de deux ensembles E et F, noté $E \times F$, est l'ensemble des **couples** $(e; f)$ où $e \in E$ et $f \in F$.

• Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times ... \times E_p$ est l'ensemble des $p-$**uplets** $(e_1; e_2; ...; e_p)$ où $e_1 \in E_1$, $e_2 \in E_2$, ..., $e_p \in E_p$.

III Pricipe multiplicatif :

Définition :

- Le produit cartésien de deux ensembles E et F, noté $E \times F$, est l'ensemble des **couples** $(e; f)$ où $e \in E$ et $f \in F$.
- Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times ... \times E_p$ est l'ensemble des $p-$**uplets** $(e_1; e_2; ...; e_p)$ où $e_1 \in E_1$, $e_2 \in E_2$, ..., $e_p \in E_p$.

Exemple : Si $E = \{a; b; c\}$ et $F = \{1; 2\}$ alors

$E \times F =$

III Pricipe multiplicatif :

Définition :

• Le produit cartésien de deux ensembles E et F, noté $E \times F$, est l'ensemble des **couples** $(e; f)$ où $e \in E$ et $f \in F$.

• Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times ... \times E_p$ est l'ensemble des $p-$**uplets** $(e_1; e_2; ...; e_p)$ où $e_1 \in E_1$, $e_2 \in E_2$, ..., $e_p \in E_p$.

Exemple : Si $E = \{a; b; c\}$ et $F = \{1; 2\}$ alors $E \times F = \{(a; 1); (a; 2); (b; 1); (b; 2); (c; 1); (c; 2)\}$.

Remarque : $\underbrace{E \times E \times \ldots \times E}_{p \text{ fois}}$ est note E^p.

Remarque : $\underbrace{E \times E \times ... \times E}_{p \text{ fois}}$ est note E^p.

Exemple : Si $E = \{a; b; c\}$ alors $E^2 = E \times E =$

Remarque : $\underbrace{E \times E \times ... \times E}_{p \text{ fois}}$ est note E^p.

Exemple : Si $E = \{a; b; c\}$ alors $E^2 = E \times E = \{(a; a); (a; b); (a; c); (b; a); (b; b); (b; c) ; (c; a); (c; b); (c; c)\}$.

Remarque : $\underbrace{E \times E \times ... \times E}_{p \text{ fois}}$ est note E^p.

Exemple : Si $E = \{a; b; c\}$ alors $E^2 = E \times E = \{(a; a); (a; b); (a; c); (b; a); (b; b); (b; c)\,;$
$(c; a); (c; b); (c; c)\}$.

Propriété : Si E_1, E_2, ..., E_p sont des ensemble finis alors $\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2) \times \ldots \times \text{Card}(E_p)$.

Exemple : Dans un restaurant, pour un menu, il y a 3 entrées possibles, 5 plats, et 10 desserts. Combien de menus peut-on choisir ?

Exemple : Dans un restaurant, pour un menu, il y a 3 entrées possibles, 5 plats, et 10 desserts. Combien de menus peut-on choisir ?
On cherche le nombre de triplets que l'on peut former avec E, ensemble des entrées, P, ensemble des plats et D, ensemble des desserts.

Exemple : Dans un restaurant, pour un menu, il y a 3 entrées possibles, 5 plats, et 10 desserts. Combien de menus peut-on choisir ?
On cherche le nombre de triplets que l'on peut former avec E, ensemble des entrées, P, ensemble des plats et D, ensemble des desserts.
Sachant que $\text{Card}(E) = 3$, $\text{Card}(P) = 5$ et $\text{Card}(D) = 10$, il y a donc $3 \times 5 \times 10 = 150$ menus possibles.

Exemple : Dans un restaurant, pour un menu, il y a 3 entrées possibles, 5 plats, et 10 desserts. Combien de menus peut-on choisir ?
On cherche le nombre de triplets que l'on peut former avec E, ensemble des entrées, P, ensemble des plats et D, ensemble des desserts.
Sachant que $\text{Card}(E) = 3$, $\text{Card}(P) = 5$ et $\text{Card}(D) = 10$, il y a donc $3 \times 5 \times 10 = 150$ menus possibles.

Remarque : Si E est un ensemble à n éléments alors $\text{Card}(E^p) = n^p$.

IV Permutations :

IV Permutations :

Définition : Soit E un ensemble à n éléments. Une permutation de E est une liste orodonnées de n éléments distincts de E.

IV Permutations :

Définition : Soit E un ensemble à n éléments. Une permutation de E est une liste orodonnées de n éléments distincts de E.

IV Permutations :

Définition : Soit E un ensemble à n éléments. Une permutation de E est une liste orodonnées de n éléments distincts de E.

Propriété : Le nombre de permutations de n éléments est $n! = 1 \times 2 \times ... \times n$

Exemple : De combien de façons différentes peut-on ranger 5 livres côte à côte sur une étagère ?
On a 5 choix pour le premier livre, 4 pour le second, 3 pour le troisième, 2 pour le quatrième et un seul choix pour le dernier. D'où
$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

Remarque : Par convention, $0! = 1$.

V Arrangements :

Définition :

Un arrangement A_n^p est le nombre de listes ordonnées à p éléments éléments distincts pris dans un ensemble à n éléments.

V Arrangements :

Définition :

Un arrangement A_n^p est le nombre de listes ordonnées à p éléments éléments distincts pris dans un ensemble à n éléments.

Propriété :

Si $0 \leq p \leq n$, alors

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)...(n-p+\mathbf{1}).$$

Exemple : Une course hippique oppose 17 chevaux. Combien de quintés (5 chevaux arrivés en tête, en tenant compte de l'odre d'arrivée) différents existe-t-il pour cette course ?

Exemple : Une course hippique oppose 17 chevaux. Combien de quintés (5 chevaux arrivés en tête, en tenant compte de l'odre d'arrivée) différents existe-t-il pour cette course ?

Il y a $A_{17}^{5} =$

Exemple : Une course hippique oppose 17 chevaux. Combien de quintés (5 chevaux arrivés en tête, en tenant compte de l'odre d'arrivée) différents existe-t-il pour cette course ?

Il y a $A_{17}^{5} = \dfrac{17!}{(17-5)!} = \dfrac{17!}{12!} =$

Exemple : Une course hippique oppose 17 chevaux. Combien de quintés (5 chevaux arrivés en tête, en tenant compte de l'odre d'arrivée) différents existe-t-il pour cette course ?

Il y a $A_{17}^5 = \dfrac{17!}{(17-5)!} = \dfrac{17!}{12!} =$ $17 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13 = 742\ 560$ quintés possibles.

VI Combinaisons :

Définition :

Soit E un ensemble à n éléments. Une combinaison de p éléments de E est un sous ensemble de E de cardinal p. (On ne tient donc pas compte de l'ordre).

Le nombre de combinaisons de p éléments de E est noté $\binom{n}{p}$ ou C_n^p.

VI Combinaisons :

Définition :

Soit E un ensemble à n éléments. Une combinaison de p éléments de E est un sous ensemble de E de cardinal p. (On ne tient donc pas compte de l'ordre).

Le nombre de combinaisons de p éléments de E est noté $\binom{n}{p}$ ou C_n^p.

Propriété :

Si $0 \leq p \leq n$, alors $\binom{n}{p} = C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Remarque : On a la formule

$$\binom{n}{p} = C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!}.$$

Exemple 1 : Reprenons l'ensemble $E = \{a, b, c, d\}$. Combien de combinaisons de 2 éléments peut-on faire à partir des éléments de E ?

Exemple 1 : Reprenons l'ensemble $E = \{a, b, c, d\}$.
Combien de combinaisons de 2 éléments peut-on faire à partir des éléments de E ?
Les combiniasons de deux éléments de E sont $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$. On en trouve donc 6,

Exemple 1 : Reprenons l'ensemble $E = \{a, b, c, d\}$. Combien de combinaisons de 2 éléments peut-on faire à partir des éléments de E ?
Les combiniasons de deux éléments de E sont $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$. On en trouve donc 6, et l'on retrouve
$$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{24}{4} = 6.$$

Exemple 1 : Reprenons l'ensemble $E = \{a, b, c, d\}$. Combien de combinaisons de 2 éléments peut-on faire à partir des éléments de E ?

Les combiniasons de deux éléments de E sont $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$. On en trouve donc 6, et l'on retrouve

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{24}{4} = 6.$$

Exemple 2 : Combien y a-t-il de grilles de loto sachant qu'on doit choisir 6 nombres parmi 49, l'ordre n'important pas.

Exemple 2 : Combien y a-t-il de grilles de loto sachant qu'on doit choisir 6 nombres parmi 49, l'ordre n'important pas.
Il y a $C_{49}^{6} = 13\ 983\ 816$ combinaisons possibles.

Propriété : Soient n et p deux entiers tels que $0 \leq p \leq n$.

- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{n-1} = n$

Propriété : Soient n et p deux entiers tels que $0 \leq p \leq n$.

- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{n-1} = n$
- Symétrie : $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
- Triangle de Pascal : $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$

Pour calculer les premiers coefficients binomiaux, on peut utiliser le triangle de Pascal, basé sur la formule

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}.$$

Triangle de Pascal :

		p					
		0	1	2	3	4	5
	1	1	1				
	2	1	2	1			
n	3	1	3	3	1		
	4	1	4	6	4	1	
	5	1	5	10	10	5	1