# IV Variables aléatoires :

## 1) Définition :

Définition : Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. On appelle variable aléatoire une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} X : \Omega &\to \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto X(\omega) \end{aligned}$$

Définition : Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. On appelle variable aléatoire une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} X : \Omega &\to \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto X(\omega) \end{aligned}$$

Si l'ensemble des images $X(\Omega)$ est dénombrable, la variable aléatoire est **discrète**.

Définition : Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. On appelle variable aléatoire une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} X : \Omega &\to \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto X(\omega) \end{aligned}$$

Si l'ensemble des images $X(\Omega)$ est dénombrable, la variable aléatoire est **discrète**.
Si l'ensemble des images $X(\Omega)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, la variable aléatoire est **continue**.

## 2) Loi de probabilité :

Définition :

Soit $X$ une variable alétoire discrète à valeurs dans $\{x_1; x_2; \ldots\}$. Définir la loi de probabilité de $X$, c'est associer à chaque valeur de $x_k$ la probabilité $P(X = x_k)$.

Lorsque la variable aléatoire est finie, on peut présenter les résultats sous la forme d'un tableau :

| $x_k$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_k)$ | $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_n$ |

Exemple : Une urne contient 10 jetons numérotés de 1 à 10. Si on obtient les numéros 1 ou 2, on gagne 1 euro, si on obtient les numéros 3, 4 ou 5, on gagne 2 euros, si on obtient les numéros 6, 7, 8 ou 9, on gagne 5 euros, si on obtient le numéro 10, on perd 30 euros.

Exemple : Une urne contient 10 jetons numérotés de 1 à 10. Si on obtient les numéros 1 ou 2, on gagne 1 euro, si on obtient les numéros 3, 4 ou 5, on gagne 2 euros, si on obtient les numéros 6, 7, 8 ou 9, on gagne 5 euros, si on obtient le numéro 10, on perd 30 euros.
Soit $X$ la variabe aléatoire qui donne le gain à ce jeu.

Exemple : Une urne contient 10 jetons numérotés de 1 à 10. Si on obtient les numéros 1 ou 2, on gagne 1 euro, si on obtient les numéros 3, 4 ou 5, on gagne 2 euros, si on obtient les numéros 6, 7, 8 ou 9, on gagne 5 euros, si on obtient le numéro 10, on perd 30 euros.
Soit $X$ la variabe aléatoire qui donne le gain à ce jeu.
La loi de probabilté de $X$ est :

| $x_k$ | $-30$ | 1 | 2 | 5 | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_k)$ | $0,1$ | $0,2$ | $0,3$ | $0,4$ | 1 |

Une autre manière de définir la loi de probabilité d'une variable aléatoire est de considérer sa fonction de répartition.

Définition : Soit X une variable aléatoire sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, la fonction de répartition de $X$ est la fonction $F$ définie par :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\to [0;1] \\ t &\mapsto P(X \leq t) \end{aligned}$$

Exemple : Avec les données précédentes, on obtient que la loi de probabilté de $X$ est :

| $x_k$ | $-30$ | $1$ | $2$ | $5$ | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_k)$ | $0,1$ | $0,2$ | $0,3$ | $0,4$ | $1$ |

La fonction de répartion $F$ de $X$ est définie par :

| $t$ | $-30$ | $1$ | $2$ | $5$ |
|---|---|---|---|---|
| $F(t) = P(X \leq t)$ | $0,1$ | $0,3$ | $0,6$ | $1$ |

## 3) Espérance, variance et écart-type :

Définition :

Soit $X$ une variable alétoire discrète prenant les valeurs $x_1$, $x_2$, ....

L'espérance de $X$, note $E(X)$ est définie par :

$E(X) = P(X = x_1)x_1 + P(X = x_2)x_2 + \ldots.$

ou plus précisément

$$E(X) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} P(X = x_k)x_k$$

Exemple : Avec les données précédentes, on obtient que la loi de probabilté de $X$ est :

| $x_k$ | $-30$ | $1$ | $2$ | $5$ | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_k)$ | $0,1$ | $0,2$ | $0,3$ | $0,4$ | $1$ |

Exemple : Avec les données précédentes, on obtient que la loi de probabilté de $X$ est :

| $x_k$ | $-30$ | 1 | 2 | 5 | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_k)$ | $0,1$ | $0,2$ | $0,3$ | $0,4$ | 1 |

$E(X) = 0,1 \times (-30) + 0,2 \times 1 + 0,3 \times 2 + 0,4 \times 5 =$

Exemple : Avec les données précédentes, on obtient que la loi de probabilté de $X$ est :

| $x_k$ | $-30$ | $1$ | $2$ | $5$ | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_k)$ | $0,1$ | $0,2$ | $0,3$ | $0,4$ | $1$ |

$E(X) = 0,1 \times (-30) + 0,2 \times 1 + 0,3 \times 2 + 0,4 \times 5 = \ -0,2$

Propriété :

Soient $X$, $Y$ des variables aléatoires et $a$, $b$ des nombres réels. On a :

- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(aX+b) = aE(X) + b$

Propriété :

Soient $X$, $Y$ des variables aléatoires et $a$, $b$ des nombres réels. On a :

- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(aX+b) = aE(X) + b$

Remarque : Attention, pour deux variables aléatoires quelconques, en général on a $E(XY) \neq E(X)E(Y)$

<u>Définition :</u> Soit $X$ une variable alétoire discrète d'espérance $E(X) = \mu$.

• La variance de $X$, notée $\text{Var}(X)$, est définie par

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= E\left(X - \mu)\right)^2 \\ &= \sum_{x_k \in X(\Omega)} \left(x_k - \mu\right)^2 P(X = x_k)\end{aligned}$$

Définition : Soit $X$ une variable alétoire discrète d'espérance $E(X) = \mu$.

- La variance de $X$, notée $\operatorname{Var}(X)$, est définie par
$$\operatorname{Var}(X) = E\left(X - \mu)\right)^2 = \sum_{x_k \in X(\Omega)} \left(x_k - \mu\right)^2 P(X = x_k)$$

- L'écart-type de $X$, noté $\sigma(X)$, est défini par :
$$\sigma(X) = \sqrt{\operatorname{Var}(X)}$$

Exemple : Avec les données précédentes, l'espérance de $X$ est $E(X) = -0,2$ et la loi de probabilté de $X$ est :

| $x_k$ | $-30$ | $1$ | $2$ | $5$ | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_k)$ | $0,1$ | $0,2$ | $0,3$ | $0,4$ | $1$ |

$$\mathrm{Var}(X) = 0,1\,(-30-(-0,2))^2 + 0,2\,(1-(-0,2))^2 + 0,3\,(2-(-0,2))^2 + 0,4\,(5-(-0,2))^2 = 101,3$$

Exemple : Avec les données précédentes, l'espérance de $X$ est $E(X) = -0,2$ et la loi de probabilté de $X$ est :

| $x_k$ | $-30$ | $1$ | $2$ | $5$ | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_k)$ | $0,1$ | $0,2$ | $0,3$ | $0,4$ | $1$ |

$$\mathrm{Var}(X) = 0,1\,(-30-(-0,2))^2 + 0,2\,(1-(-0,2))^2 + 0,3\,(2-(-0,2))^2 + 0,4\,(5-(-0,2))^2 = 101,3$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} =$$

Exemple : Avec les données précédentes, l'espérance de $X$ est $E(X) = -0,2$ et la loi de probabilté de $X$ est :

| $x_k$ | $-30$ | $1$ | $2$ | $5$ | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_k)$ | $0,1$ | $0,2$ | $0,3$ | $0,4$ | $1$ |

$$\mathrm{Var}(X) = 0,1\,(-30-(-0,2))^2 + 0,2\,(1-(-0,2))^2 + 0,3\,(2-(-0,2))^2 + 0,4\,(5-(-0,2))^2 = 101,3$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{101,3} \approx 10,07$$

Propriété :

Soient $X$ une variable alétoire, et $a$ et $b$ deux réels.

- $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$ *(Formule de Koening)*
- $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\mathrm{Var}(X)$ et $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$.

Remarque : Attention, pour deux variables aléatoires quelconques, en général on a $\mathrm{Var}(X+Y) \neq \mathrm{Var}(X) + Var(Y)$