II Premières notions en probabilités

Définition : À toute expérience aléatoire on associe un **espace probabilisable** $(\Omega, \mathcal{T})$ constitué d' :

• un ensemble Ω contenant toutes les issues de l'experience et appelé **univers** de l'expérience ;

• un autre ensemble $\mathcal{T}$ dont les éléments sont appelés des **événements**. Si Ω est un ensemble fini ou dénombrable on peut toujours prendre $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, l'ensemble des parties de Ω.

Définition : Une probabilité P sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$ est une application qui vérifie :

• $P : \mathcal{T} \longrightarrow [0;1]$

• $P(\Omega) = 1$

• Pour toute suite d'événements $(A_n) \subset \mathcal{T}$ disjoints deux à deux (si $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$) on a :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = P(A_0) + P(A_1) + ... = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

$(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est appelé un **espace probabilisé**.

Remarque : La suite (A_n) peut être finie et composée de N événements. Dans ce cas, on a :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) =$$

$$P(A_0) + P(A_1) + ... + P(A_N) = \sum_{n=0}^{N} P(A_n).$$

<u>Propriété :</u> Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. Alors on a :

- $P(\emptyset) = 0$
- $\forall A \in T,\ P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $\forall A, B \in \mathcal{T},\ A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
- $\forall A, B \in \mathcal{T},$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Définition : Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé tel que Ω est fini ($\Omega = \{\omega_1; \omega_2; ...; \omega_n\}$). On dit que P est **l'équiprobabilité** sur Ω si :

$$\forall k = 1, 2, 3, ..., n, \; P(\omega_k) = \frac{1}{n}$$

Propriété : Soit $\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé où P est l'équiprobabilité sur l'univers Ω fini.
Alors :
$$\forall A \in \mathcal{T},\ P(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}.$$