Pagrindinės sąvokos

Apibrėžimas.

Paprastąja diferencialine lygtimi (PDL) vadinama lygybė, į kurią įeina nepriklausomas kintamasis x, ieškoma (nežinoma) funkcija $y(x)$ ir jos išvestinės:
$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$

Laikoma, kad $F(x, y, p_1, \ldots, p_n)$ yra tolydi visų savo argumentų atžvilgiu ir būtinai priklauso nuo argumento p_n.

Apibrėžimas.

DL yra užrašyta kanoniniu pavidalu, jei lygtis išspręsta aukščiausiosios eilės išvestinės atžvilgiu:
$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right).$

Pavyzdys.

DL $y''' + y'' - xe^x - 1 = 0$ kanoninis pavidalas yra $y''' = -y'' + xe^x + 1$.

Diferencialinės lygtys (DL)

- **Paprastoji diferencialinė lygtis** (PDL), angl. ODE (ordinary differential equation) –reikia rasti vieno kintamojo funkcija:

$$\frac{du}{dt} = g - \frac{c}{m}u^2, \text{ čia } \quad u(t);$$

- **DL dalinėmis išvestinėmis**, angl. PDE (partial differential equation) – reikia rasti kelių kintamųjų funkcija:

$$\frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} = c\frac{d^2u}{dx^2}, \text{ čia } \quad u(t,x);$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0, \text{ čia } \quad u(x,y,z).$$

Aukštesnės eilės PDL ir PDL sistemos

Koši uždavinys:

- n-osios eilės PDL

$$
\begin{aligned}
& y^{(n)} = f\left(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right), \\
& y(t_0) = a_1,\ y^{'}(t_0) = a_2, \cdots, y^{n-1}(t_0) = a_n.
\end{aligned}
$$

- pirmos eilės PDL sistemai

$$
\begin{array}{rclcrcl}
\frac{\partial y_1}{\partial t} & = & f_1(t, y_1, y_2, \cdots, y_n), & \qquad & y_1(t_0) & = & a_1, \\
\frac{\partial y_2}{\partial t} & = & f_2(t, y_1, y_2, \cdots, y_n), & & y_2(t_0) & = & a_2, \\
& \vdots & \vdots & & & & \vdots \\
\frac{\partial y_n}{\partial t} & = & f_n(t, y_1, y_2, \cdots, y_n), & & y_n(t_0) & = & a_n.
\end{array}
$$

Koši uždavinys (PDL + pradinės sąlygos)

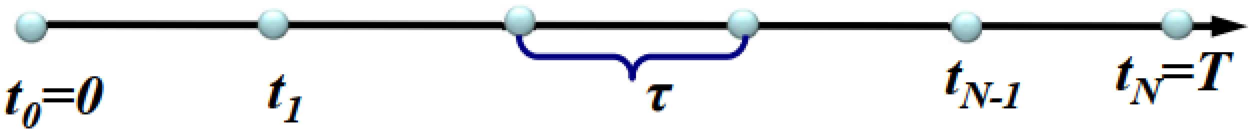
- Diferencialinis uždavinys

$$
\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= f(t,u), \quad 0 \le t \le T \\
u(0) &= u_0.
\end{aligned}
$$

$\boxed{u(t) \text{ - tikslusis sprendinys.}}$

Tolygusis diskretusis tinklas

$$\omega_\tau = \{t_n : t_n = n\tau, n = 0, \ldots, N, t_N = T\}, \quad \tau = \frac{T}{N} - \text{žingsnis.}$$



- Baigtinių skirtumų uždavinys (paprasčiausias atvejis)

$$
\begin{aligned}
\frac{U^{n+1}-U^n}{\tau} &= f(t_n, U^n) \\
U^0 &= u_0.
\end{aligned}
$$

$U^n = U(t_n)$ - PDL sprendinio diskretusis artinys.

Skaitinio sprendimo formulės

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}}: \qquad \frac{du}{dt} = f(t,u) \quad \Rightarrow \quad u(t_{n+1}) - u(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t,u)dt$$

- Kairiųjų stačiakampių formulė

$$U^{n+1} - U^n = \tau f(t_n, U^n)$$

Išreikštinis Eulerio metodas

- Dešiniųjų stačiakampių formulė

$$U^{n+1} - U^n = \tau f(t_{n+1}, U^{n+1})$$

Neišreikštinis Eulerio metodas

- Trapecijų formulė

$$U^{n+1} - U^n = \frac{\tau}{2}\left(f(t_n, U^n) + f(t_{n+1}, U^{n+1})\right)$$

Simetrinis Eulerio metodas

Išreikštinis Eulerio metodas - 1 pavyzdys

Analizinis sprendinys

$$\frac{du}{dt} = t\sqrt{u}, \; u_0 = 1, \; 0 \le t \le 1.$$

$$u = \left(1 + \frac{t^2}{4}\right)^2$$

Eulerio metodo aproksimacija: $U^{n+1} = U^n + \tau f_n, \quad f_n = t_n\sqrt{U^n}$

$\tau = 0,5$, $U^0 = 1$

$U^1 = U^0 + \tau f(0;1) = 1 + 0,5 \cdot 0 \cdot \sqrt{1} = 1$

$U^2 = U^1 + \tau f(0,5;1) = 1 + 0,5 \cdot 0,5 \cdot \sqrt{1} = 1,25$

$\tau = 0,25$, $U^0 = 1$

$U^1 = U^0 + \tau f(0;1) = 1 + 0,25 \cdot 0 \cdot \sqrt{1} = 1$

$U^2 = U^1 + \tau f(0,25;1) = 1 + 0,25 \cdot 0,25 \cdot \sqrt{1} = 1,0625$

$U^3 = U^2 + \tau f(0,5;1,0625) = 1,0625 + 0,25 \cdot 0,5 \cdot \sqrt{1,0625} = 1,191347$

$U^4 = U^3 + \tau f(0,75;1,191347) = 1,39600.$

Eulerio metodas - 2 pavyzdys

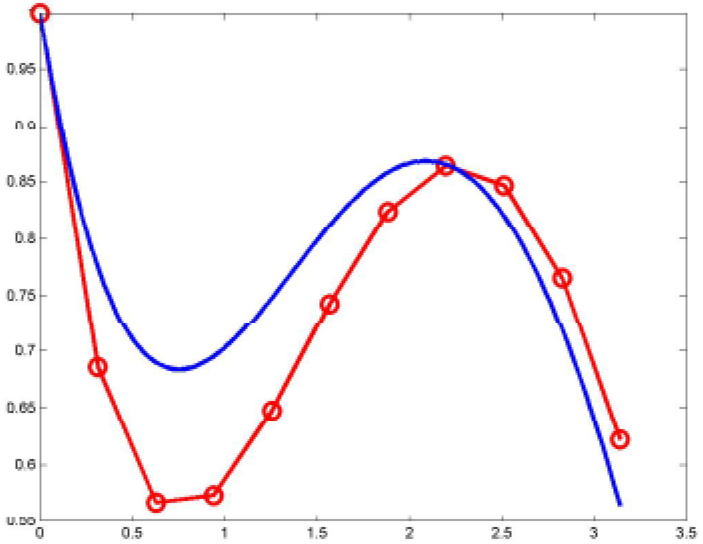
$$\frac{du}{dt} = -u + \sin t,\ u_0 = 1,$$

$0 \leq t \leq \pi$, žingsnis $\tau = 0,1\pi$.

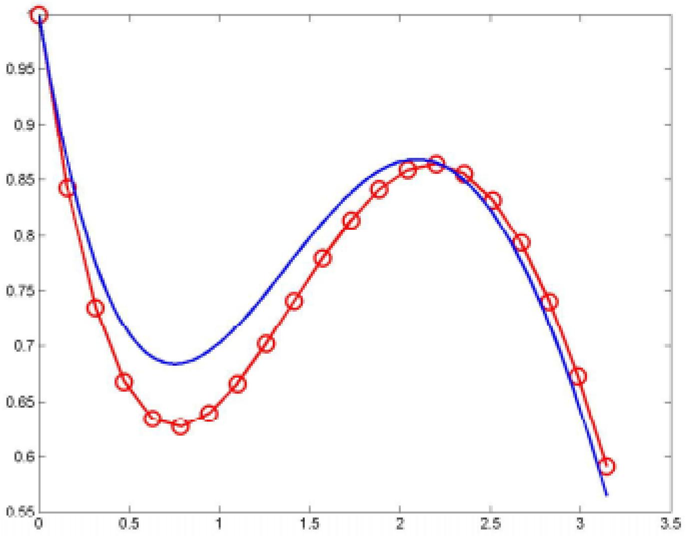
Tikslusis sprendinys (—)

$u = 1,5\exp^{-t} + 0,5\sin t - 0,5\cos t$.

step	t	y
1	0.0000000000	1.0000000000
2	0.3141592654	0.6858407346
3	0.6283185307	0.5674580652
4	0.9424777961	0.5738440394
5	1.2566370614	0.6477258022
6	1.5707963268	0.7430199565
7	1.8849555922	0.8237526182
8	2.1991148575	0.8637463173
9	2.5132741229	0.8465525934
10	2.8274333882	0.7652584356
11	3.1415926536	0.6219259596



$\tau = 0,1\pi$



$\tau = 0,05\pi$ (tik brėžinys)

Prediktoriaus-korektoriaus metodas

(angl. Heun's method). Eulerio metodo patobulinimas.

- Eulerio metodas- intervalo pradiniame taške apskaičiuota išvestinė naudojama visame intervale.
- Prediktoriaus-korektoriaus metode naudojamos suvidurkintos išvestinės intervalo viduje.
- Antros eilės Rungės ir Kuto metodas.

Prediktorius

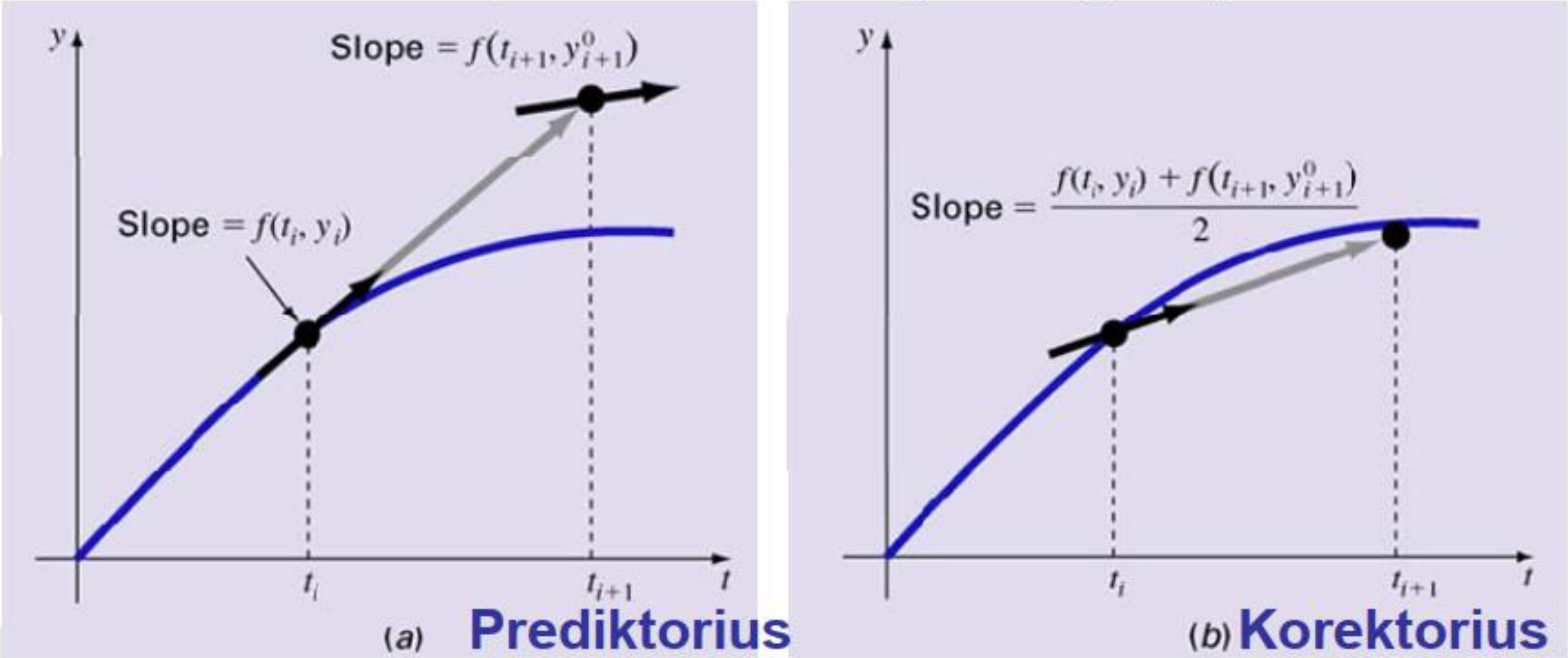
$$U_*^{n+1} = U^n + f(t_n, U^n)\tau$$

Korektorius (gali buti kelios iteracijos)

$$U^{n+1} = U^n + \frac{f(t_n, U^n) + f(t_{n+1}, U_*^{n+1})}{2}\tau$$

$$U^{n+1} = U^n + \frac{f(t_n, U^n) + f(t_{n+1}, U^n + f(t_n, U^n)\tau)}{2}\tau$$

Korektoriaus iteracijos leidžia rasti geresnį įvertį



$$y^j_{i+1} \longleftarrow y^m_i + \frac{f(t_i, y^m_i) + f(t_{i+1}, y^{j-1}_{i+1})}{2} h$$

Prediktoriaus-korektoriaus metodas - 1 pavyzdys

Tikslusis sprendinys

$$\frac{du}{dt} = t\sqrt{u},\ u_0 = 1,\ 0 \le t \le 1.$$

$$u = (1 + \frac{t^2}{4})^2$$

Prediktorius $U_*^{n+1} = U^n + f(t_n, U^n)\tau$

Korektorius $U^{n+1} = U^n + \frac{f(t_n,U^n)+f(t_{n+1},U_*^{n+1})}{2}\tau$

$\tau = 0,5$, $U^0 = 1$ 1 žingsnis

Prediktorius $U_0^1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{1}/2 = 1$

1 korektorius $U_1^1 = 1 + 0,5 \cdot (0 \cdot \sqrt{1} + 0,5 \cdot \sqrt{1})/2 = 1,125$

2 korektorius $U_2^1 = 1 + 0,5 \cdot (0 \cdot \sqrt{1} + 0,5 \cdot \sqrt{1,125})/2 = 1,1326$

3 korektorius $U_3^1 = 1 + 0,5 \cdot (0 \cdot \sqrt{1} + 0,5 \cdot \sqrt{1,1326})/2 = 1,1330$

4 korektorius $U_4^1 = 1 + 0,5 \cdot (0 \cdot \sqrt{1} + 0,5 \cdot \sqrt{1,1330})/2 = 1,1331$

5 korektorius $U_5^1 = 1 + 0,5 \cdot (0 \cdot \sqrt{1} + 0,5 \cdot \sqrt{1,1331})/2 = 1,1331$

m-pakopis išreikštinis Rungės ir Kutos metodas

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_n, U^n) \\
k_2 &= f(t_n + \tau_{n+1} a_2, U^n + \tau_{n+1} b_{21} k_1) \\
k_3 &= f\big(t_n + \tau_{n+1} a_3, U^n + \tau_{n+1}(b_{31} k_1 + b_{32} k_2)\big) \\
&\vdots \\
k_m &= f\Big(t_n + \tau_{n+1} a_m, U^n + \tau_{n+1} \textstyle\sum_{j=1}^{m} b_{mj} k_j\Big)
\end{aligned}$$

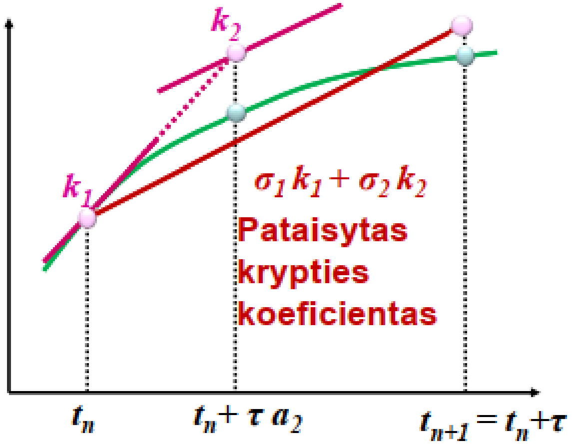
$$U^{n+1} = U^n + \tau_{n+1} \sum_{j=1}^{m} \sigma_j k_j \quad \text{(išreikštinė formulė)}$$

RK metodo matrica

$$\begin{array}{c|ccccc}
a_2 & b_{21} & & & & \\
a_3 & b_{31} & b_{32} & & & \\
\vdots & & & & & \\
a_m & b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{m,m-1} & \\
\hline
 & \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_{m-1} & \sigma_{m-1}
\end{array}$$

Dvipakopiai Rungės ir Kutos metodai (m=2)

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, U^n) \\ k_2 &= f(t_n + \tau a_2, U^n + \tau b_{21} k_1) \\ &\Downarrow \\ U^{n+1} &= U^n + \tau(\sigma_1 k_1 + \sigma_2 k_2) \end{aligned}$$



3 lygtys, 4 nežinomieji

$$\begin{aligned} \sigma_1 + \sigma_2 &= 1 \\ \sigma_2 a_2 &= \frac{1}{2} \\ \sigma_2 b_{21} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

parametras

$\sigma_2 = \sigma$

Bendroji schema

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2\sigma} & \frac{1}{2\sigma} & \\ \hline & 1-\sigma & \sigma \end{array}$$

Heun s method $\sigma = \frac{1}{2}$

$$\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Midpoint method $\sigma = 1$

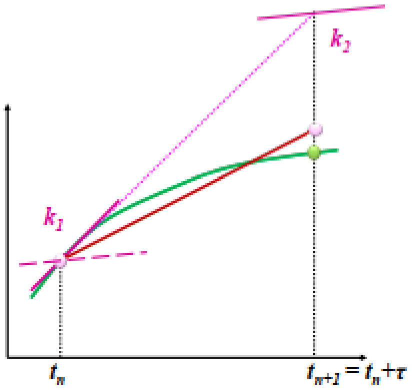
$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

Dvipakopiai Rungės ir Kutos metodai (m=2)

Heun s method

$\sigma = \frac{1}{2}$

$$\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

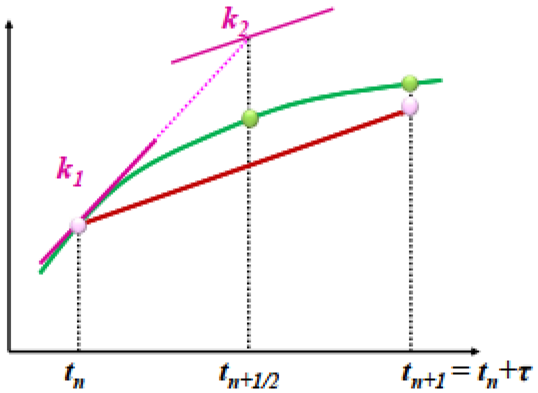


$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, U^n) \\ k_2 &= f(t_n + \tau, U^n + \tau k_1) \\ U^{n+1} &= U^n + \frac{\tau}{2}(k_1 + k_2) \end{aligned}$$

Midpoint method

$\sigma = 1$

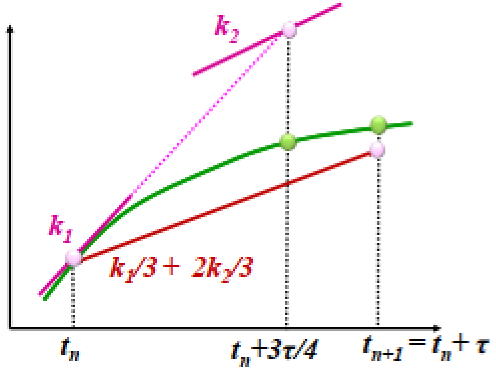
$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$



$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, U^n) \\ k_2 &= f(t_n + \frac{\tau}{2}, U^n + \frac{\tau}{2} k_1) \\ U^{n+1} &= U^n + \tau k_2 \end{aligned}$$

Ralston s Method

$$\begin{array}{c|cc} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \\ \hline & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}$$



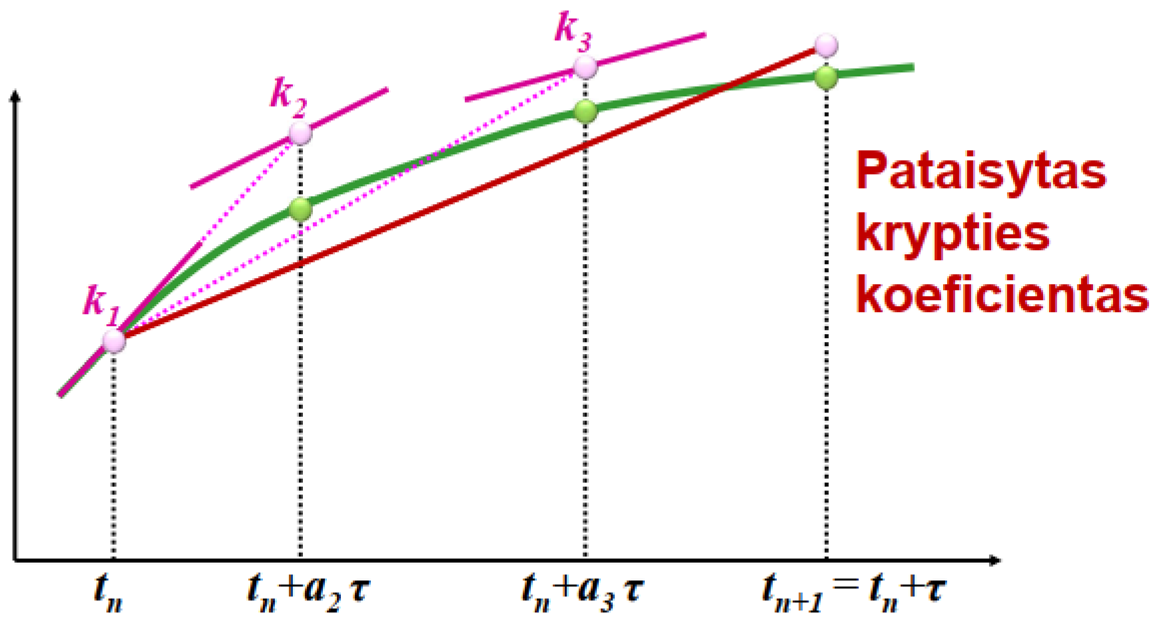
$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, U^n) \\ k_2 &= f(t_n + \frac{3}{4}\tau, U^n + \frac{3}{4}\tau k_1) \\ U^{n+1} &= U^n + \tau(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2) \end{aligned}$$

Tripakopiai Rungės ir Kutos metodai (m=3)

Bendroji schema

$$
\begin{array}{c|ccc}
a_2 & b_{21} & & \\
a_3 & b_{31} & b_{32} & \\
\hline
 & \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(t_n, U^n) \\
k_2 &= f(t_n + \tau a_2, U^n + \tau b_{21} k_1) \\
k_3 &= f\big(t_n + \tau a_3, U^n + \tau(b_{31} k_1 + b_{32} k_2)\big) \\
&\Downarrow \\
U^{n+1} &= U^n + \tau(\sigma_1 k_1 + \sigma_2 k_2 + \sigma_3 k_3)
\end{aligned}
$$



Tripakopiai Rungės ir Kutos metodai (m=3)

Klasikinis

$$
\begin{array}{c|ccc}
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\
1 & -1 & 2 & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6}
\end{array}
$$

Simpsono formulės analogas

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(t_n, U^n) \\
k_2 &= f(t_n + \tfrac{\tau}{2}, U^n + \tfrac{\tau}{2} k_1) \\
k_3 &= f\big(t_n + \tau, U^n + \tau(-k_1 + 2k_2)\big) \\
U^{n+1} &= U^n + \tfrac{\tau}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)
\end{aligned}
$$

PDL sistemos - Vektorinis pavidalas

Vektorinis pavidalas

$$\mathbf{y}' = \boldsymbol{f}(t, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y_0}$$

$\mathbf{x}$ - vektorius:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{f}(\mathbf{x})$ - vektorinė funkcija:

$$\boldsymbol{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \cdots, x_n) \\ f_2(x_1, \cdots, x_n) \\ \cdots \\ f_n(x_1, \cdots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Skaitiniai metodai 1-os eilės PDL sistemai

- Eulerio metodas

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \tau f(t_n, \mathbf{x}^n),$$

čia $t_n = t_0 + n\tau$.

- m-pakopis Rungės ir Kutos metodas

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \tau_{n+1} \sum_{j=1}^{m} \sigma_j \mathbf{k}_{nj},$$

čia

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_{n1} &= \mathbf{f}(t_n, \mathbf{x}^n) \\
\mathbf{k}_{n2} &= \mathbf{f}(t_n + \tau_{n+1} a_2, \mathbf{x}^n + \tau_{n+1} b_{21} \mathbf{k}_{n1}) \\
\mathbf{k}_{n3} &= \mathbf{f}\big(t_n + \tau_{n+1} a_3, \mathbf{x}^n + \tau_{n+1} (b_{31} \mathbf{k}_{n1} + b_{32} \mathbf{k}_{n2})\big) \\
&\vdots \\
\mathbf{k}_{nm} &= \mathbf{f}\Big(t_n + \tau_{n+1} a_m, \mathbf{x}^n + \tau_{n+1} \textstyle\sum_{j=1}^{m} b_{mj} \mathbf{k}_{nj}\Big)
\end{aligned}$$

Eulerio metodas 1-os eilės PDL sistemai

- Eulerio metodas vienai lygčiai

$$U^{n+1} = U^n + \tau f(t_n, U^n)$$

- Eulerio metodas dviejų lygčių PDL sistemai

$$\begin{aligned} U_1^{n+1} &= U_1^n + \tau f_1(t_n, U_1^n, U_2^n) \\ U_2^{n+1} &= U_2^n + \tau f_2(t_n, U_1^n, U_2^n) \end{aligned}$$