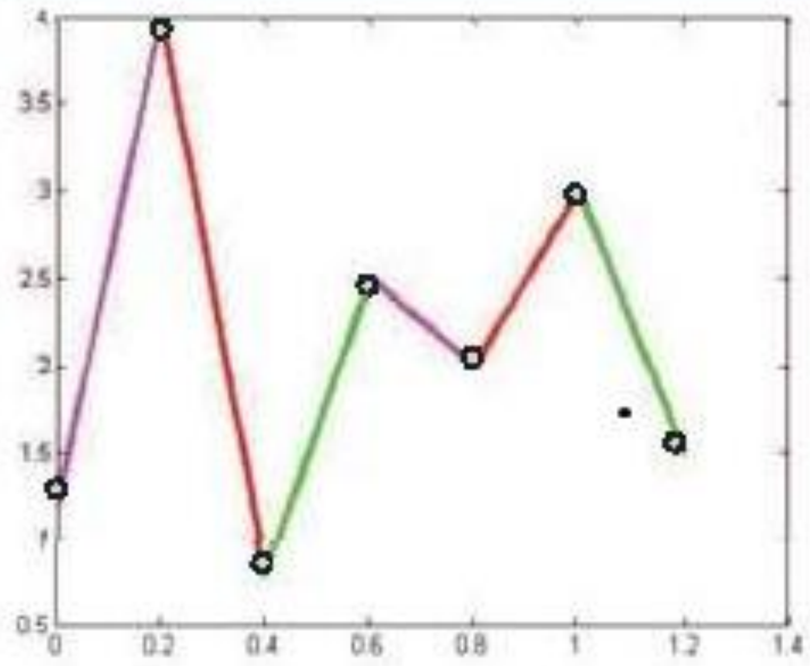
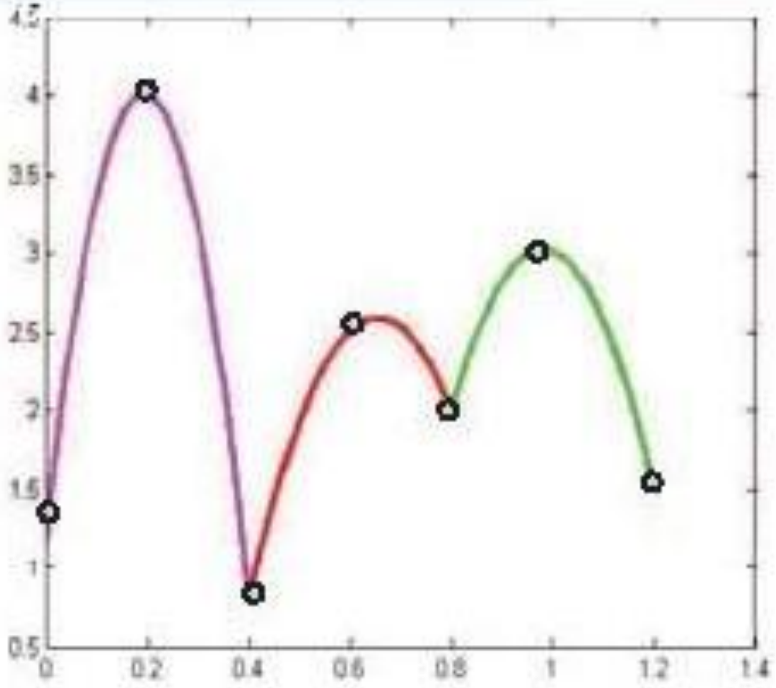
Funkcijos, apibrėžtos reikšmių lentele, interpoliacinė funkcija

x_i	$0,0$	$0,2$	$0,4$	$0,6$	$0,8$	$1,0$	$1,2$
y_i	$1,2$	$4,0$	$0,8$	$2,5$	$2,0$	$3,0$	$1,5$



Dalimis tiesinė



Dalimis kvadratinė

Dalimis daugianarė interpoliacinė funkcija

- Tolydi visame intervale.
- Nėra diferencijuojama interpoliavimo mazguose.

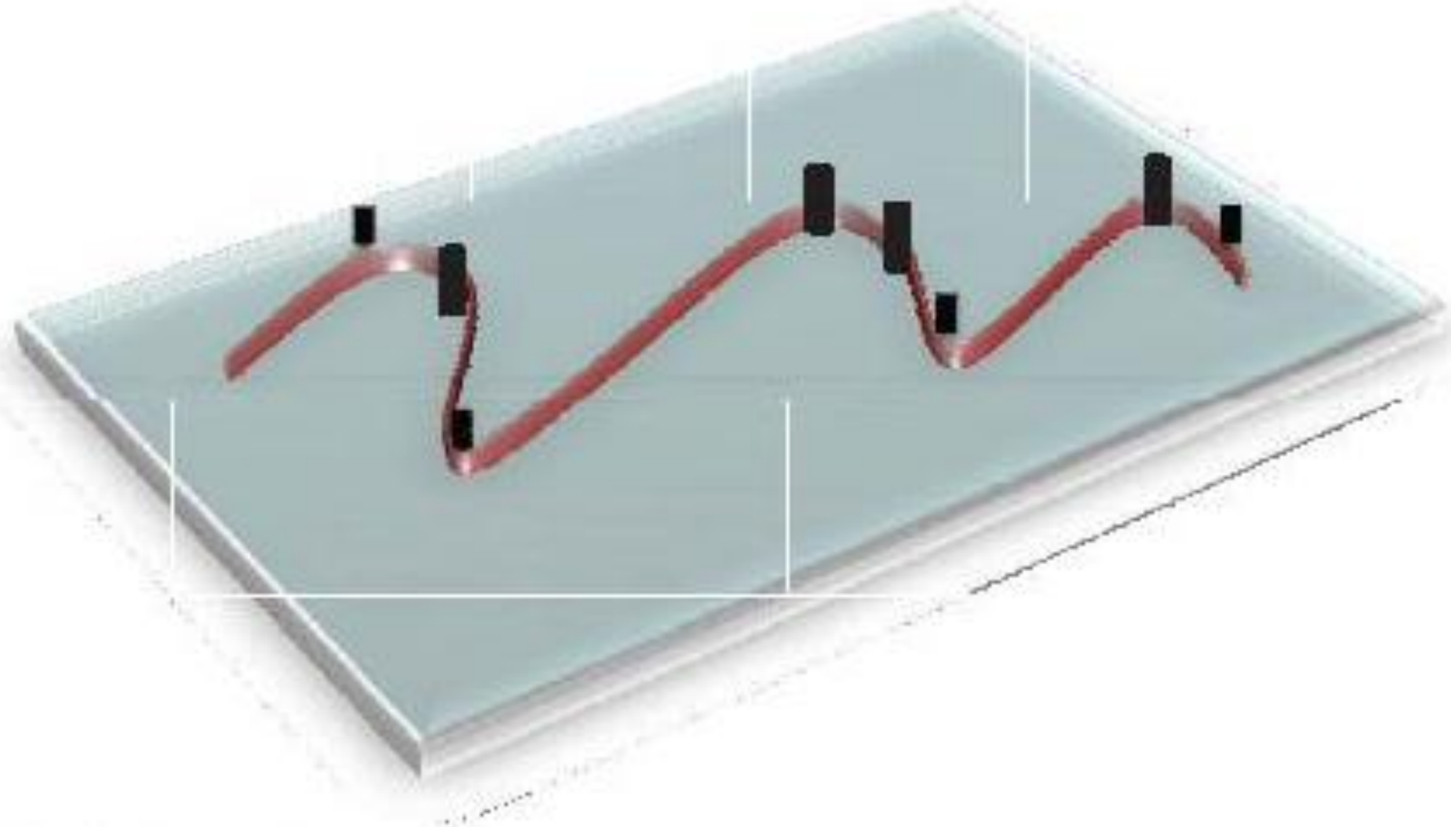
Splainų panaudojimo idėja:

Interpoliavimas splainais

- Nedidelio laipsnio daugianariai jungia duotuosius taškus.
- Funkcija glodi visame intervale (t.y. ir vidiniuose interpoliavimo mazguose).
- Nedidelio laipsnio daugianariai neleidžia atsirasti osciliacijoms.

Splainai

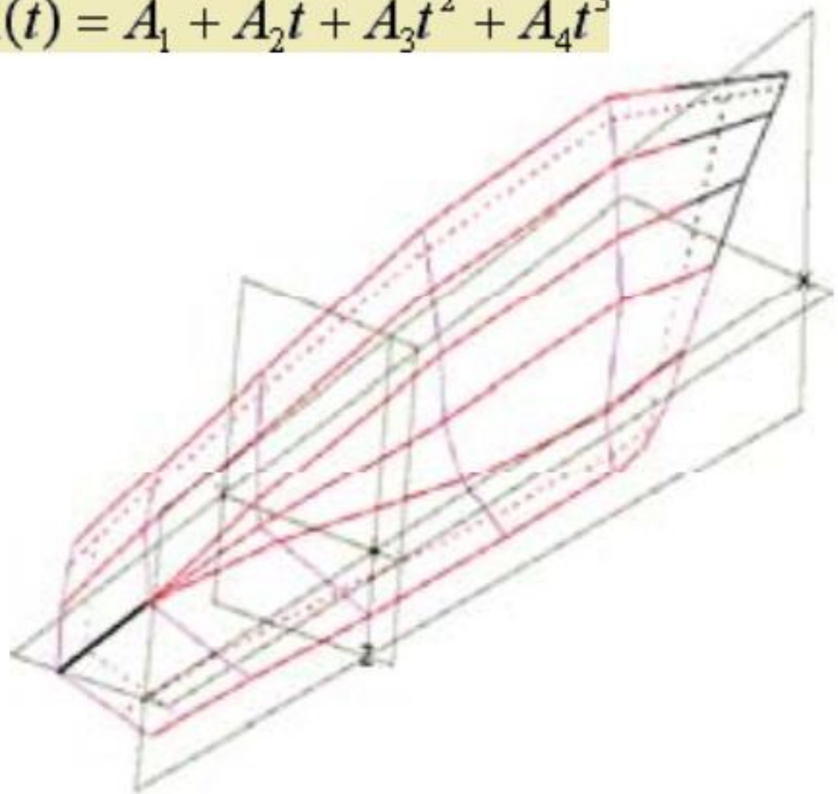
spline (angl.)– lazdelė
Standi lazdelė



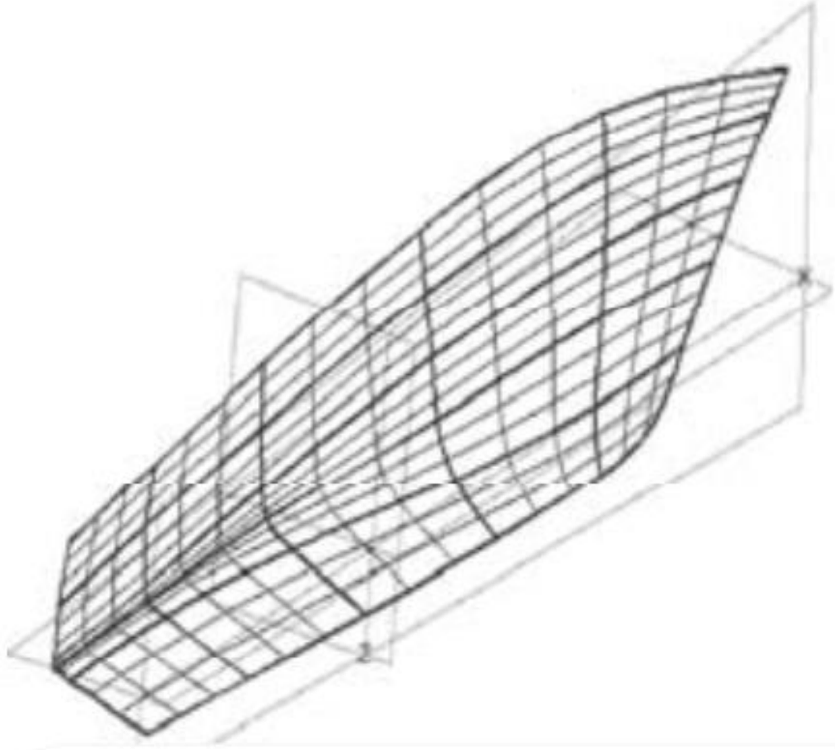
Nulinis kreivis galuose

Splainų taikymas

$$\vec{R}(t) = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 t + \vec{A}_3 t^2 + \vec{A}_4 t^3$$

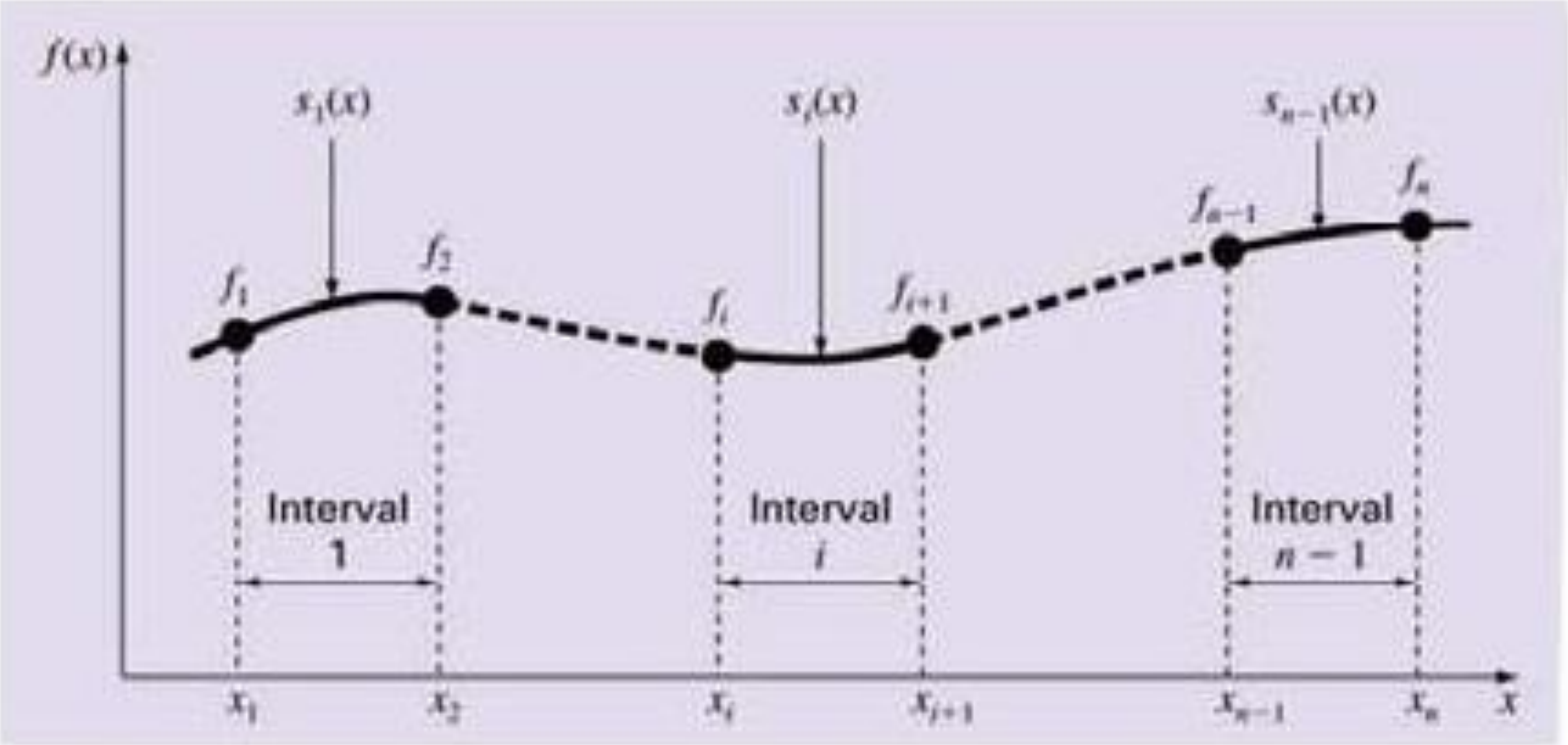


Laivo paviršiaus valdymo tinklas



Realaus laivo korpuso paviršiaus aproksimacija splainais (FastShip V, firmos Proteus paketas 1997)

Splainai



- N intervalų ir $N+1$ taškų.
- $S_i(x)$ neaukštos eilės daugianaris i-ajame intervale.

Splaino apibrėžimas

- Funkcija $y = f(x)$ apibrėžta reikšmių lentele $(x_i, y_i), \ \ i = 0, 1, \cdots N$:

x_0	x_1	$\cdots$	x_N
y_0	y_1	$\cdots$	y_N

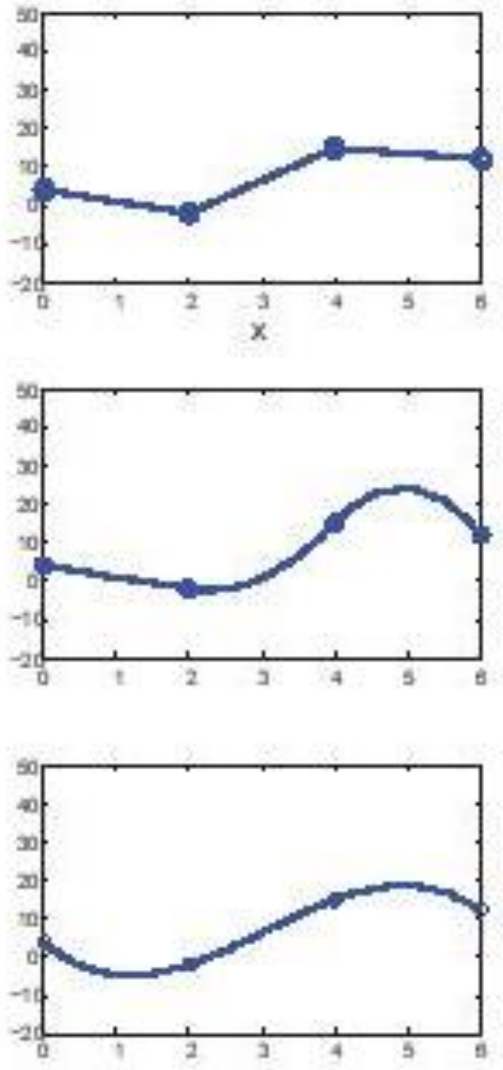
- Kiekviename daliniame intervale $[x_i, x_{i+1}]$ funkcija $y = f(x)$ aproksimuojama m-ojo laipsnio daugianarių

$$S_i^m(x) = a_{i0}x^m + a_{i1}x^{m-1} + \cdots + a_{im-1}x + a_{im}.$$

- Funkcija ir visos jos išvestinės iki $(m - 1)$ eilės yra tolydžios kiekviename intervalo $[x_0, x_N]$ taške.
- **Tokia interpoliacinė funkcija vadinama m-tosios eilės splainu**

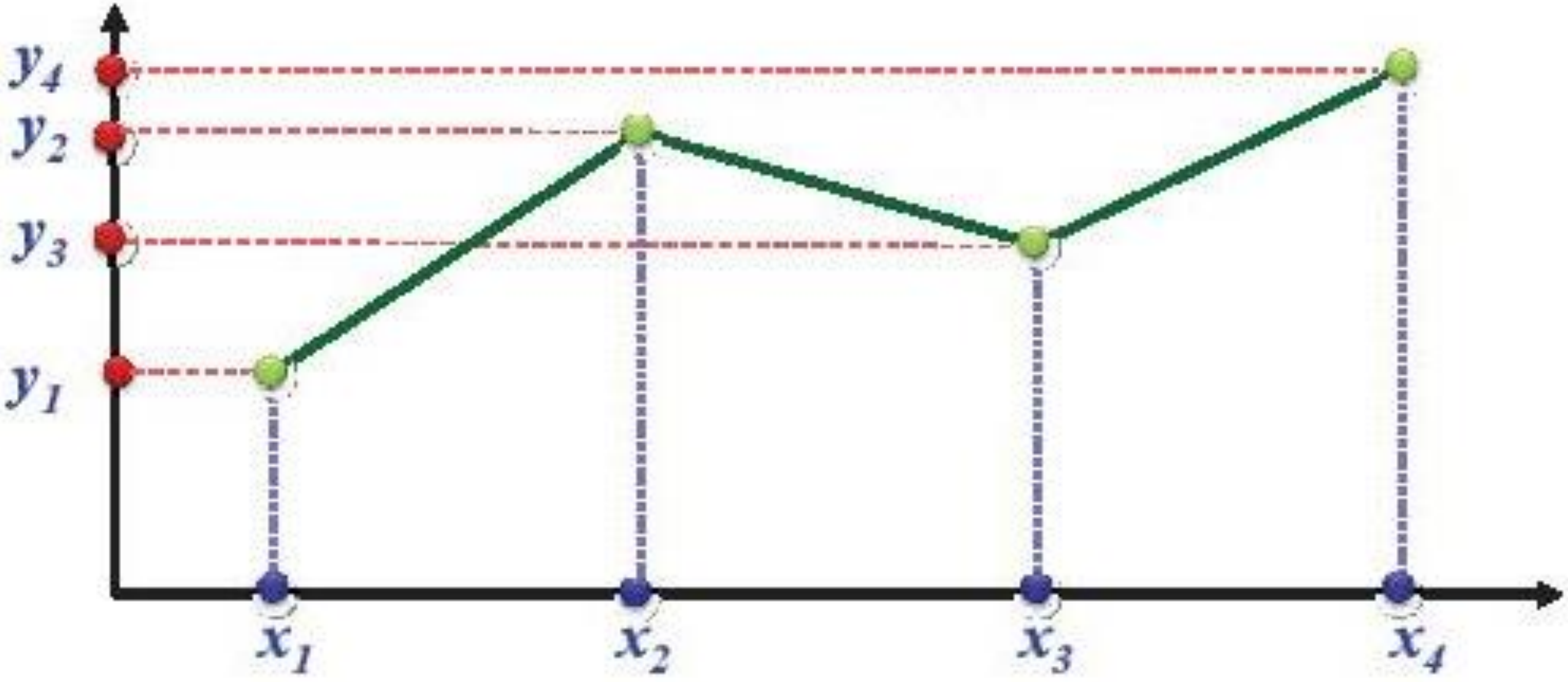
Dažniausiai naudojami splainai

1. Tiesinis splainas;
2. Kvadratinis splainas;
3. Kubinis splainas.



Tiesinis splainas: $S_i^1(x) = a_i x + b_i$

Duoti taškai: $(x_0, y_0), \quad \ldots, \quad (x_N, y_N).$
Intervalai: $I_0 = [x_0, x_1], \quad \ldots, \quad I_{N-1} = [x_{N-1}, x_N].$



Tiesinis splainas

- Du gretimi taškai jungiami atkarpa.
- Tolydumo reikalavimas yra ekvivalentus splaino tolydumui $(m = 1 \Rightarrow m - 1 = 0)$:

$$S^1_{i-1}(x_i) = S^1_i(x_i) = y_i, \quad i = 1, \cdots N - 1.$$

- Jungiančios taškus atkarpos gaunamos iš interpoliavimo sąlygos:

$$a_i x_i + b_i = y_i, \; i = 0, \cdots, N - 1;$$
$$a_i x_{i+1} + b_i = y_{i+1}.$$

$2N$ nežinomųjų a_i, b_i;
$2N$ lygčių.

Tiesinis splainas

Duoti taškai: $(x_0, y_0), \quad \dots, \quad (x_N, y_N).$

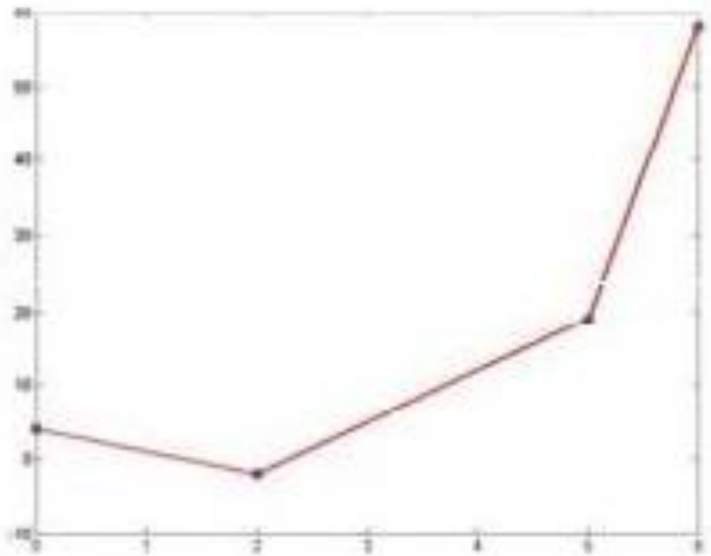
Intervalai: $I_0 = [x_0, x_1], \quad \dots, \quad I_{N-1} = [x_{N-1}, x_N].$

$$S^1(x) = \begin{cases} f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0), & x_0 \leqslant x \leqslant x_1; \\ f(x_1) + f(x_1, x_2)(x - x_1), & x_1 \leqslant x \leqslant x_2; \\ \vdots & \vdots \\ f(x_{N-1}) + f(x_{N-1}, x_N)(x - x_{N-1}), & x_{N-1} \leqslant x \leqslant x_N. \end{cases}$$

Sutampa su dalimis tiesine interpoliacine funkcija.

Pavyzdys:

x_i	0		2		5		6
$f(x_i)$	4		-2		19		58
$f(x_i, x_{i+1})$		-3		7		39	



$$S_0 = 4 - 3x \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2;$$
$$S_1 = -2 + 7(x-2) \qquad 2 \leqslant x \leqslant 5;$$
$$S_2 = 19 + 39(x-5) \qquad 5 \leqslant x \leqslant 6.$$

Tiesinis splainas sutampa su dalimis tiesine interpoliacine funkcija!

Tiesinio splaino trūkumas - nėra glodumo interpoliavimo mazguose (pirmoji išvestinė netolydi).

Tolydžiosios išvestinės gaunamos taikant aukštesnės eilės splainus.

- Vidiniuose mazguose splainas yra tolydi funkcija :
  $S_{i-1}(x_i) = S_i(x_i), \quad i = 1, \cdots, N-1.$
- Vidiniuose mazguose išvestinė tolydi:
  $S_{i-1}^{(k)}(x_i) = S_i^{(k)}(x_i), \quad i = 1, \cdots, N-1, \quad k = 1, \cdots, m-1.$

Kvadratinis splainas

Kvadratinis splainas - tolydi pirma išvestinė.
Bet antra išvestinė gali būti netolydi.
Kaip gauti formules

$$S_i^2(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i?$$

$N+1$ taškas ($i = 0, \ldots, N$);
N intervalų $\Rightarrow 3N$ nežinomųjų koeficientų

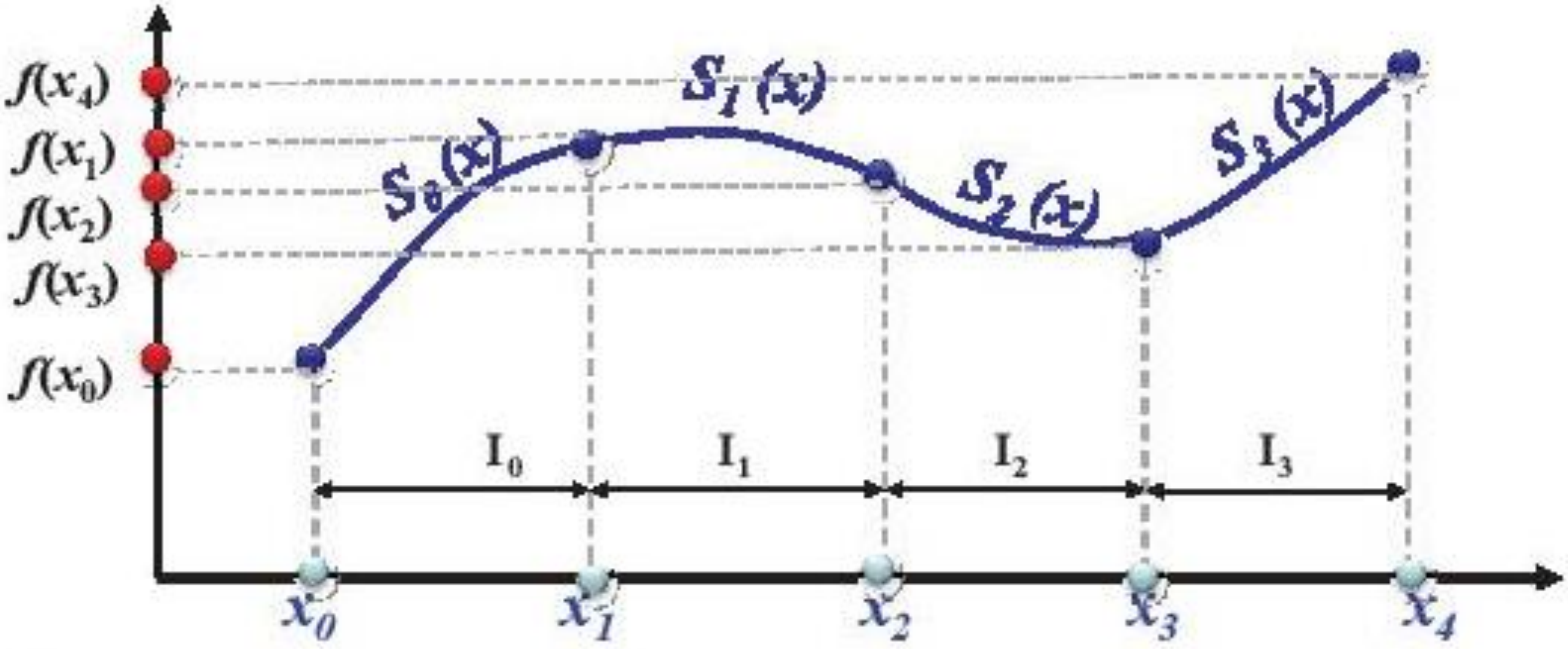
$$(a_i, b_i, c_i) \quad i = 0, \ldots, N-1.$$

$\Downarrow$

Reikia 3N lygčių.

Kvadratinis splainas: $S_i^2(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$

Duoti taškai:	(x_0, y_0),	$\ldots$,	(x_N, y_N).
Intervalai:	$I_0 = [x_0, x_1]$,	$\ldots$,	$I_{N-1} = [x_{N-1}, x_N]$.



$3N$ nežinomųjų koeficientų.

Kvadratinis splainas

1. Interpoliavimo ir tolydumo sąlygos
   $2N$ lygčių:

$$S_i(x_i) = y_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, N-1$$
$$S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}, \qquad i = 0, 1, \ldots, N-1.$$

2. Išvestinių tolydumo sąlygos (vidiniuose taškuose)
   $N-1$ lygtis:

$$S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i), \quad i = 1, \ldots, N-1.$$

3. Papildoma sąlyga (duota išvestinė viename iš kraštinių taškų
   - $e_0 = 0$ natūralioji kraštinė sąlyga)
   1 lygtis

$\mathbf{2N + (N-1) + 1 = 3N} \quad \Rightarrow \quad$ **$3N$ lygčių su $3N$ nežinomųjų.**

Kvadratiniai splainai

1. Interpoliavimo ir tolydumo sąlygos
   $2N$ lygčių:

$$a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i = y_i, \qquad i = 0, 1, ..., N-1$$
$$a_i x_{i+1}^2 + b_i x_{i+1} + c_i = y_{i+1}, \qquad i = 0, 1, ..., N-1.$$

2. Išvestinių tolydumo sąlygos
   $N-1$ lygtis:

$$2a_{i-1}x_i + b_{i-1} = 2a_i x_i + b_i, \quad i = 1, ..., N-1.$$

3. Papildoma sąlyga (duota išvestinė viename iš kraštinių taškų
   - $e_0 = 0$ natūralioji kraštinė sąlyga)

$$2a_0 x_0 + b_0 = e_0.$$

Kvadratinis splainas

$$
\begin{pmatrix}
x_0^2 & x_0 & 1 & & & & & & & & & \\
x_1^2 & x_1 & 1 & & & & & & & & & \\
2x_0 & 1 & 0 & & & & & & & & & \\
 & & & x_1^2 & x_1 & 1 & & & & & & \\
 & & & x_2^2 & x_2 & 1 & & & & & & \\
-2x_0 & -1 & 0 & 2x_1 & 1 & 0 & & & & & & \\
 & & & & & & \ddots & & & & & \\
 & & & & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & & & & & x_{N-1}^2 & x_{N-1} & 1 \\
 & & & & & & & & & x_N^2 & x_N & 1 \\
 & & & & & & -2x_{N-2} & -1 & 0 & 2x_{N-1} & 1 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{N-1} \\ b_{N-1} \\ c_{N-1}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
y_0 \\ y_1 \\ e_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \\ 0
\end{pmatrix}
$$

Kvadratinis splainas - algoritmas

1. e_0 duotas, sprendžiame

$$\begin{pmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \\ 2x_0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ e_0 \end{pmatrix}$$

2. $e_1 = 2a_1x_1 + b_1$ iš suderinamumo sąlygu:

$$S_0'(x_1) = S_1'(x_1) \Rightarrow 2a_0x_1 + b_0 = 2a_1x_1 + b_1 = e_1.$$

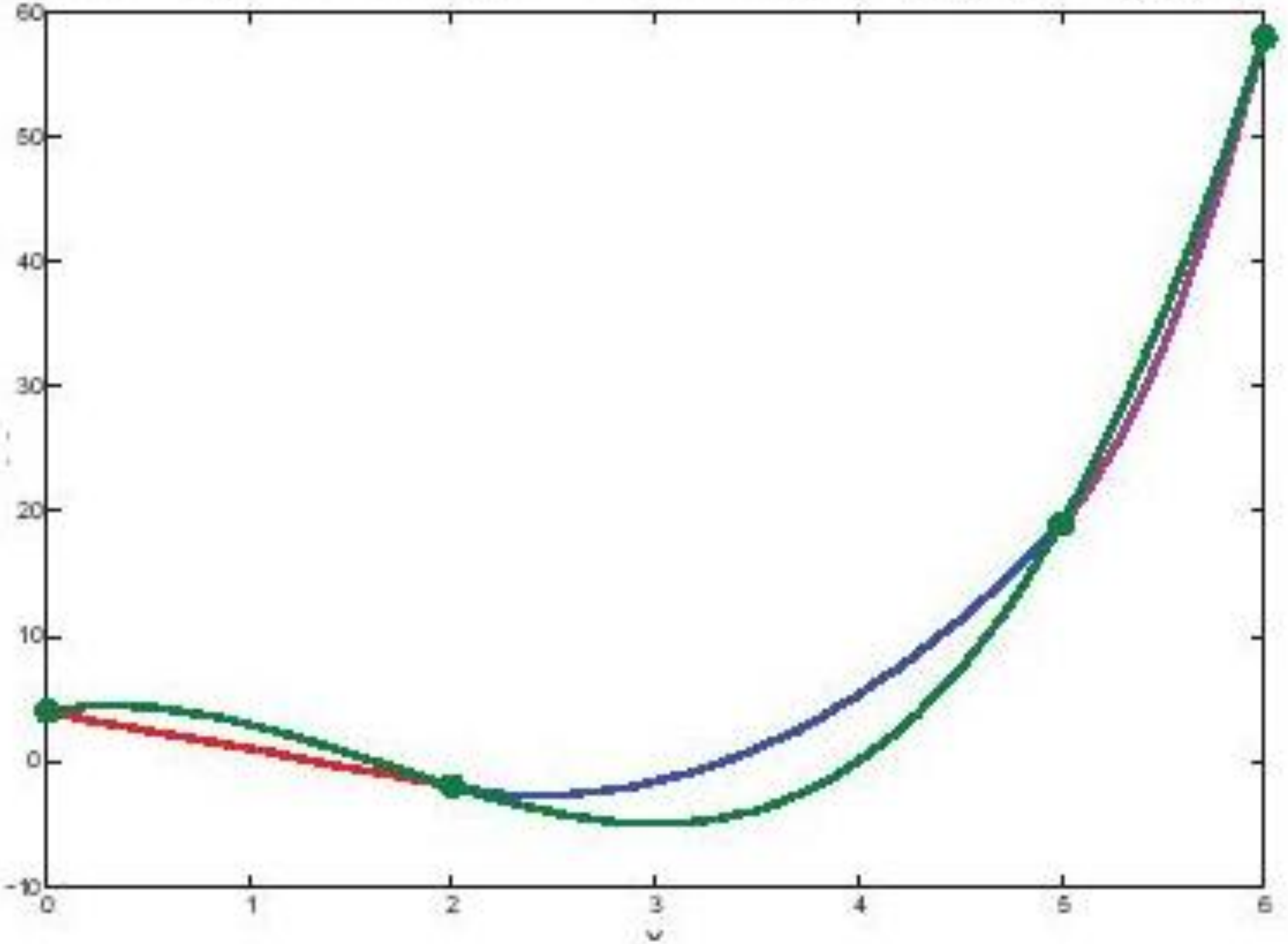
   sprendžiame

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ 2x_1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ e_1 \end{pmatrix}$$

3. ir t.t.

Kvadratinis splainas. Pavyzdys

Funkcijos $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 4$ aproksimavimas kvadratinių splainų, nauduojant taškus $(0;4)$, $(2;-2)$, $(5;19)$, $(6;58)$.



Kubinis splainas

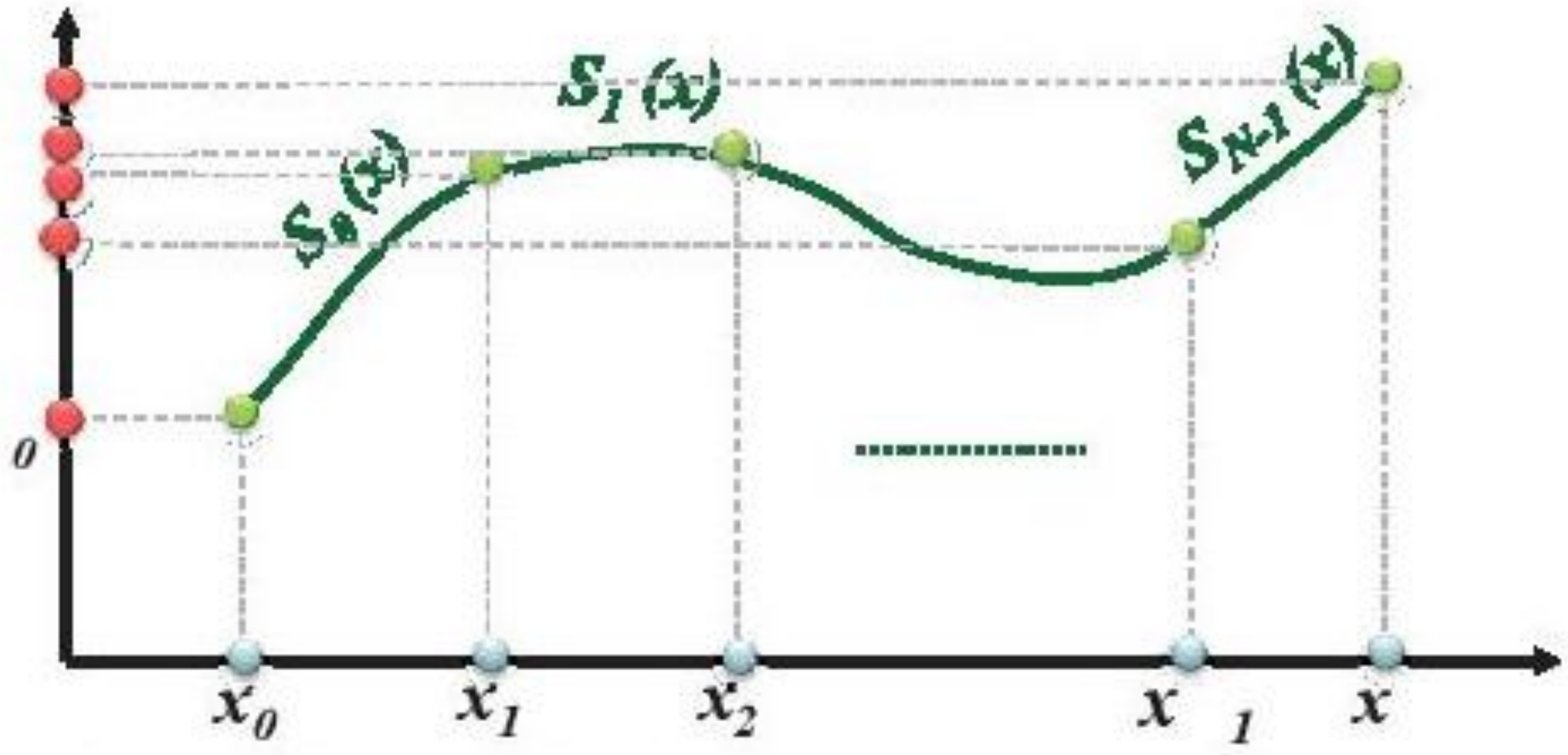
$$S_i^3(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i, \quad x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}.$$

Kaip ir kvadratiniam splainui gaunama $4N$ koeficientų $4N$ lygčių sistema.

- Vidiniuose mazguose tolydumas.
- Intervalo galai fiksuoti.
- Vidiniuose mazguose išvestinės tolydžios.
- Papildomos sąlygos antrosios eilės išvestinėms intervalo galuose.

Kubinis splainas: $S_i^3(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$

Duoti taškai: $(x_0, y_0), \quad \ldots, \quad (x_N, y_N).$
Intervalai: $I_0 = [x_0, x_1], \quad \ldots, \quad I_{N-1} = [x_{N-1}, x_N].$



4N nežinomųjų koeficientų.

Kubinis splainas

1. Interpoliavimo ir tolydumo sąlygos
   2N lygčių:

$$S_i(x_i) = y_i, \qquad i = 0, 1, ..., N-1$$
$$S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}, \qquad i = 0, 1, ..., N-1.$$

2. Išvestinių tolydumo sąlygos
   $2(N-1)$ lygtis:

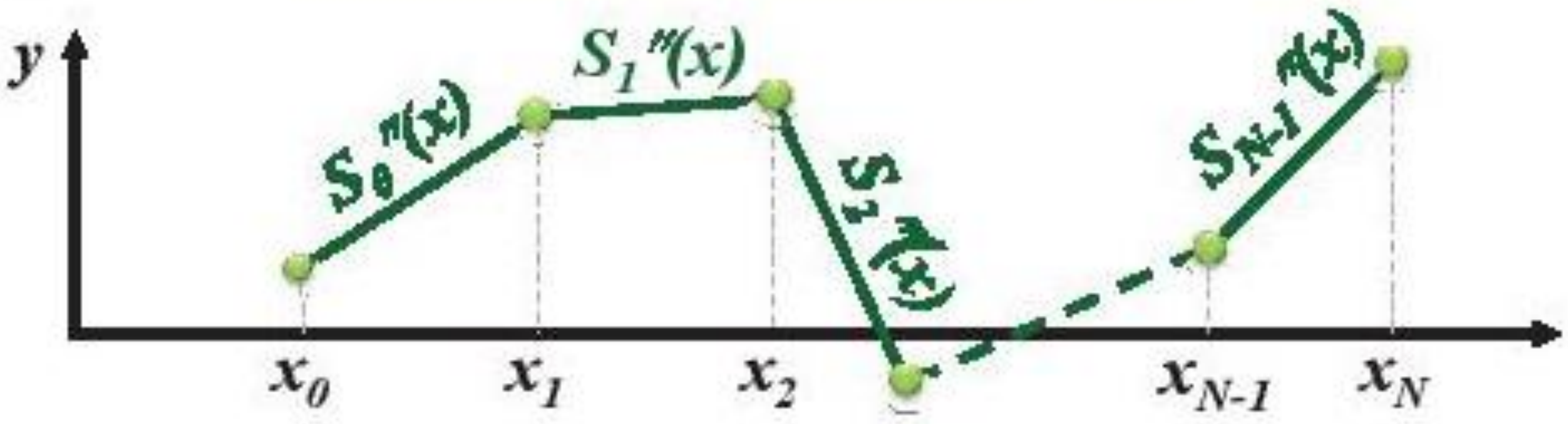
$$S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i), \qquad i = 1, ..., N-1$$
$$S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i), \qquad i = 1, ..., N-1.$$

3. Papildomos sąlygos (natūraliosios kraštinės sąlygos)
   2 lygtys

$$S''_0(x_0) = 0, \quad S''_{N-1}(x_N) = 0.$$

Kubiniai splainai: $S_i^3(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$

Duoti taškai: $(x_0, y_0), \quad \ldots, \quad (x_N, y_N).$
Intervalai: $I_1 = [x_0, x_1], \quad \ldots, \quad I_N = [x_{N-1}, x_N].$



$S_i(x)$ – gabalais kubinis daugianaris;
$S_i'(x)$ - gabalais kvadratinis daugianaris;
$S_i''(x)$) - gabalais tiesinis daugianaris.
Suvedama į N lygčių sistemą su N nežinomųjų.

Kubiniai splainai

Pažymėkime $g_i = S_i''(x_i)$, $\quad h_i = x_{i+1} - x_i$, $\quad i = 1, \cdots, N-1.$
$g_0 = S_0''(x_0) = 0, \quad g_N = S_{N-1}''(x_N) = 0.$

$$\text{Tiesinis splainas:} \quad S_i''(x) = g_i + \frac{g_{i+1} - g_i}{h_i}(x - x_i). \tag{1}$$

$$\int_{x_i}^{x} (1): \quad S_i'(x) - S_i'(x_i) = g_i(x - x_i) + \frac{g_{i+1} - g_i}{2h_i}(x - x_i)^2$$

$$\text{Pažymėkime } e_i = S_i'(x_i) \; S_i'(x) = e_i + g_i(x - x_i) + \frac{g_{i+1} - g_i}{2h_i}(x - x_i)^2 \tag{2}$$

$$(2)\Big|_{x=x_{i+1}} :\Rightarrow \quad e_{i+1} = e_i + \frac{g_{i+1} + g_i}{2} h_i. \tag{3}$$

$$\int_{x_i}^{x} (2):$$

Kubinis splainas

$$S_i(x) = y_i + e_i(x - x_i) + \frac{g_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{g_{i+1} - g_i}{6h_i}(x - x_i)^3. \tag{4}$$

$$(4)\Big|_{x=x_{i+1}} :\Rightarrow \quad y_{i+1} = y_i + e_i h_i + \frac{g_i}{2} h_i^2 + \frac{g_{i+1} - g_i}{6} h_i^2. \tag{5}$$

$$\Rightarrow \quad e_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{g_{i+1}}{6} h_i - \frac{g_i}{3} h_i. \tag{6}$$

Kubiniai splainai

$$e_{i+1} = e_i + \frac{g_{i+1} + g_i}{2} h_i. \qquad (3)$$

$$e_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{g_{i+1}}{6} h_i - \frac{g_i}{3} h_i. \qquad (6)$$

(3) perrašykime i-ajame taške įstatant į ją (6) $(i-1)$-ajame taške :

$$e_i = e_{i-1} + \frac{g_i + g_{i-1}}{2} h_{i-1} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{g_i}{6} h_{i-1} - \frac{g_{i-1}}{3} h_{i-1} + \frac{g_i + g_{i-1}}{2} h_{i-1}.$$

$$\Rightarrow \; e_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{g_i}{3} h_{i-1} + \frac{g_{i-1}}{6} h_{i-1}. \qquad (7)$$

$$(7) = (6) \; \Rightarrow \; \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{g_i}{3} h_{i-1} + \frac{g_{i-1}}{6} h_{i-1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{g_{i+1}}{6} h_i - \frac{g_i}{3} h_i.$$

Trijstrižainė lygčių sistema

$$h_{i-1} g_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i) g_i + h_i g_{i+1} = 6\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right),$$

$$g_0 = 0, \quad g_N = 0, \qquad i = 1, \dots, N-1.$$

Kubinis splainas

Trijstrižainė lygčių sistema

$$h_{i-1}g_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)g_i + h_i g_{i+1} = 6\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right),$$
$$g_0 = 0, \quad g_N = 0, \qquad\qquad i = 1, ..., N-1.$$

arba

Trijstrižainė lygčių sistema

$$\frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i} g_{i-1} + 2g_i + \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i} g_{i+1} = 6f(y_{i-1}, y_i, y_{i+1}),$$
$$g_0 = 0, \quad g_N = 0, \qquad\qquad i = 1, ..., N-1.$$

Lygčiu sistema su trijstrižaine matrica

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & & & & & \\
\frac{h_0}{h_0+h_1} & 2 & \frac{h_1}{h_0+h_1} & & & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & & \frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i} & 2 & \frac{h_i}{h_{i-1}+h_i} & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & & \frac{h_{N-2}}{h_{N-2}+h_{N-1}} & 2 & \frac{h_{N-1}}{h_{N-2}+h_{N-1}} \\
 & & & & & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_i \\ \vdots \\ g_{N-1} \\ g_N
\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
0 \\ f(y_0, y_1, y_2) \\ \vdots \\ f(y_{i-1}, y_i, y_{i+1}) \\ \vdots \\ f(y_{N-2}, y_{N-1}, y_N) \\ 0
\end{pmatrix}
$$

Kubinio splaino lygtis:

$$S_i^3(x) = y_i + e_i(x - x_i) + G_i(x - x_i)^2 + H_i(x - x_i)^3, \quad i = 0, 1, \ldots, N-1.$$

$$e_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - g_{i+1}\frac{h_i}{6} - g_i\frac{h_i}{3},$$

$$G_i = \frac{g_i}{2},$$

$$H_i = \frac{g_{i+1} - g_i}{6h_i}.$$

Kubinis splainas. Pavyzdys su duomenimis

Duoti taškai:

x_i	0	2	5	6
y_i	4	-2	19	58

Raskite $f(4)$.

Tikslus sprendinys: $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 4, f(4) = 0.$

$S^{3''}(0) = S^{3''}(3) = 0$ (natūralusis splainas)

$$h_0 = 2 - 0 = 2 \qquad f(x_0, x_1) = \frac{y_1 - y_0}{h_0} = \frac{-2 - 4}{2} = -3$$

$$h_1 = 5 - 2 = 3 \qquad f(x_1, x_2) = \frac{y_2 - y_1}{h_1} = \frac{19 + 2}{3} = 7$$

$$h_2 = 6 - 5 = 1 \qquad f(x_2, x_3) = \frac{y_3 - y_2}{h_2} = \frac{58 - 19}{1} = 39.$$

Trijstrižainė lygčių sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ h_0 & 2(h_1+h_0) & h_1 & \\ & h_1 & 2(h_2+h_1) & h_2 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6\left(\dfrac{y_2-y_1}{h_1} - \dfrac{y_1-y_0}{h_0}\right) \\ 6\left(\dfrac{y_3-y_2}{h_2} - \dfrac{y_2-y_1}{h_1}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & 10 & 3 & \\ & 3 & 8 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6(7-(-3)) \\ 6(39-7) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 192 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Naturaliosios kraštinės sąlygos: $\mathbf{g_0 = 0, \quad g_3 = 0.}$

$$\begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 192 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,35211 \\ 24,50704 \end{pmatrix}.$$

Kubinis splainas: 2 pavyzdys

$$S_i^3(x) = y_i + e_i(x - x_i) + G_i(x - x_i)^2 + H_i(x - x_i)^3, \ \ i = 0, \dots, N-1.$$

$$e_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - g_{i+1}\frac{h_i}{6} - g_i\frac{h_i}{3}, \ \ G_i = \frac{g_i}{2}, \ \ H_i = \frac{g_{i+1} - g_i}{6h_i}.$$

$$\boldsymbol{g_0 = 0; \quad g_1 = -1,35211; \quad g_2 = 24,50704; \quad g_3 = 0.}$$

Splaino koeficientai:

$i = 0 : e_0 = 2,549296; \ \ G_0 = 0; \ \ H_0 = -0,112676.$

$S_0^3(x) = 4 - 2,549296x - 0,112676x^3, \ \ 0 \leqslant x \leqslant 2;$

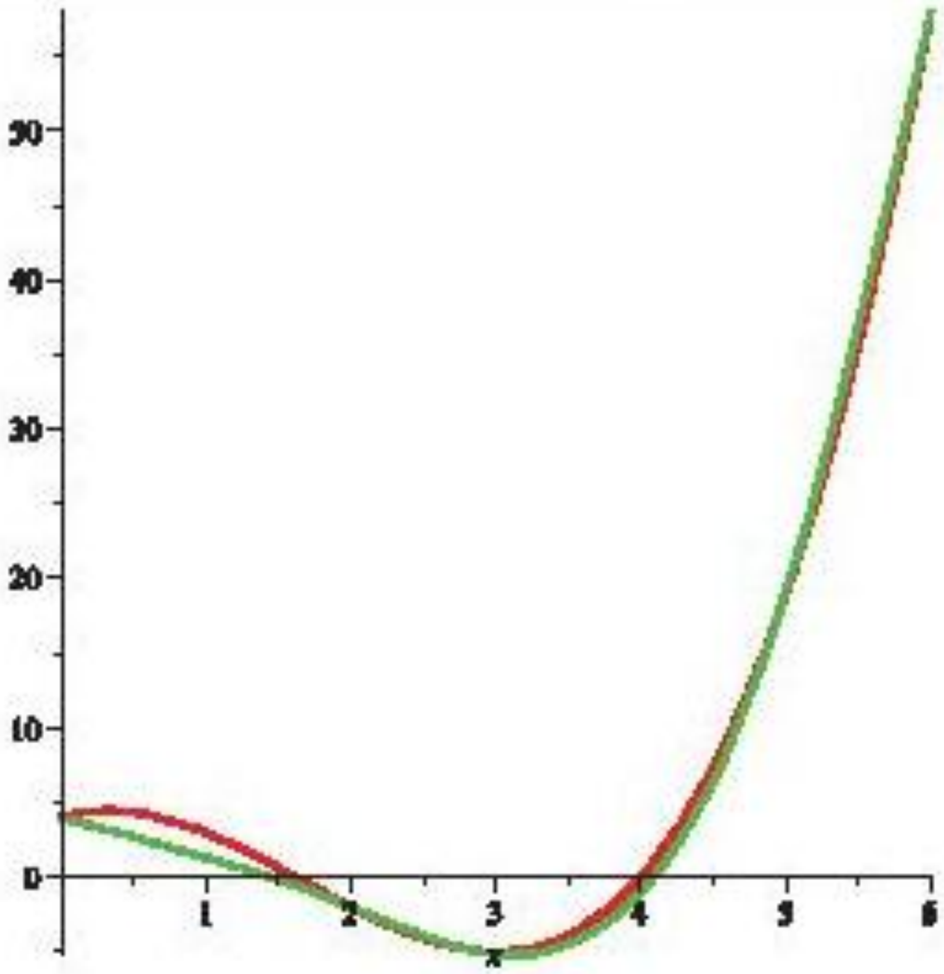
$i = 1 : e_1 = -3,901408; \ \ G_1 = -0,676056; \ \ H_1 = 1,4366197.$

$S_1^3(x) = -2 - 3,901408(x-2) - 0,676056(x-2)^2 + 1,4366197(x-2)^3, \ \ 2 \leqslant x \leqslant 5;$

$i = 2 : e_2 = 30,830986; \ \ G_2 = 12,253521; \ \ H_2 = -4,0845070.$

$S_2^3(x) = 19 + 30,830986(x-5) + 12,253521(x-5)^2 - 4,0845070(x-5)^3, \ \ 5 \leqslant x \leqslant 6.$

Tikslus sprendinys: $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 4, f(4) = 0.$

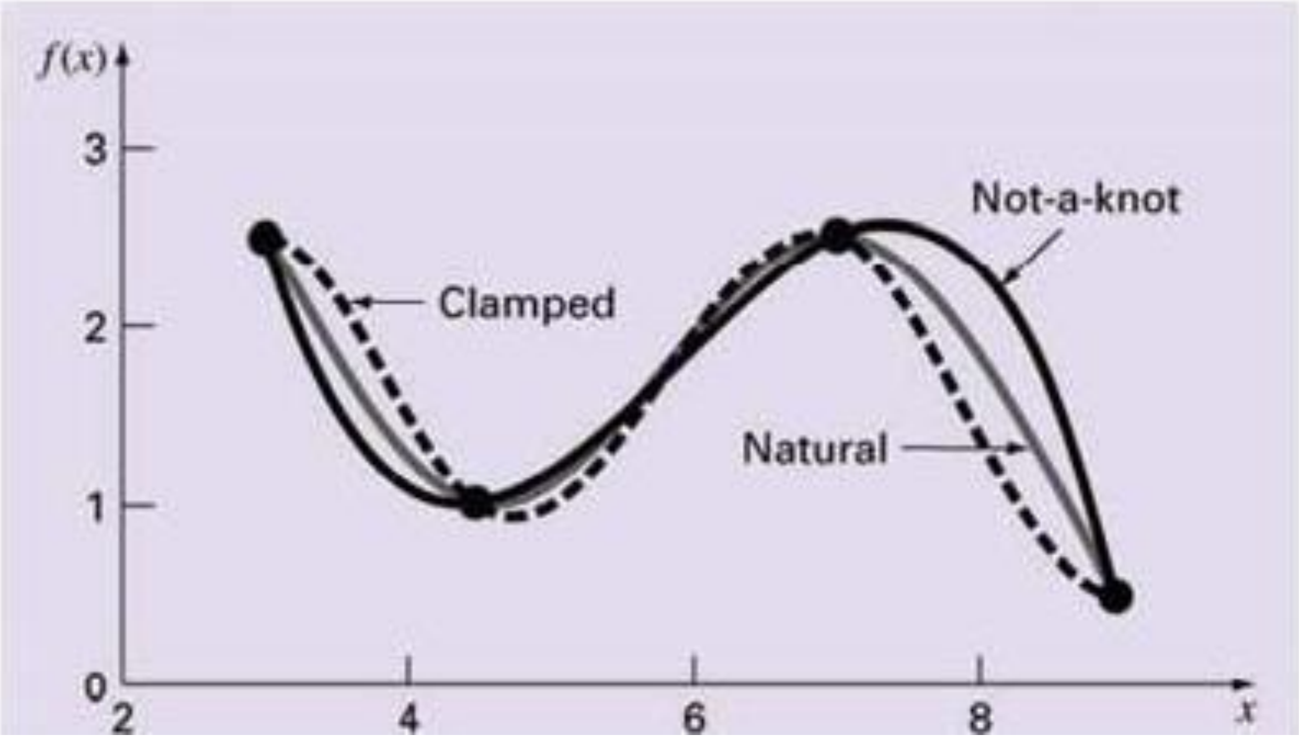


Tikslus sprendinys: $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 4, f(4) = 0.$
Kubinis splainas $f(4) = S_2^3(4) = -1,0141.$

- Tikslus sprendinys yra kubinė funkcija.
- Kodėl kubinis splainas nesutampa su tiksliu sprendiniu?
- Dėl skirtingų kraštinių sąlygų!
- Bendruoju atveju $f''(x_0) \neq 0$ ir $f''(x_N) \neq 0.$

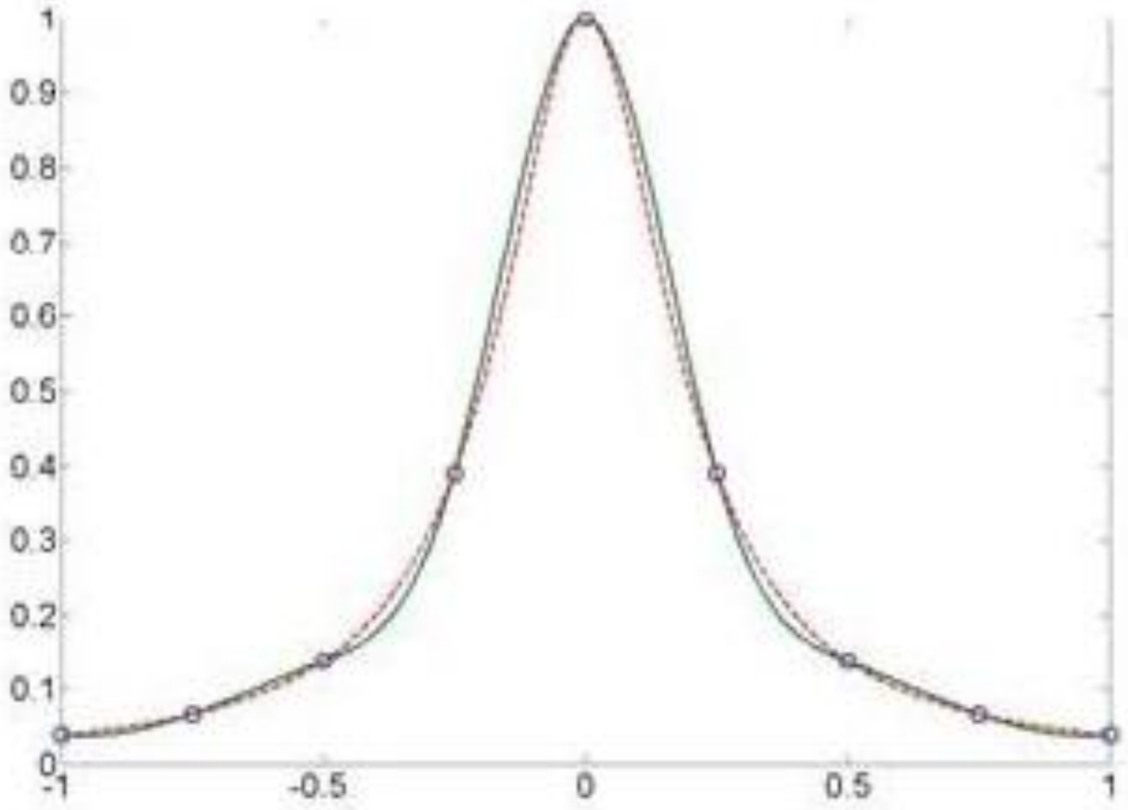
Kubinio splaino kraštinės sąlygos

- Natūralusis: Antra išvestinė lygi nuliui intervalo galuose.
- Clamped(suvaržytas): nurodytos pirmos išvestinės intervalo galuose.
- Not-a-Knot(nesurištas): Tolydi trečia išvestinė taškuose x_1 ir x_{N-1}.



Rungės funkcijos ir not-a-knot splaino palyginimas

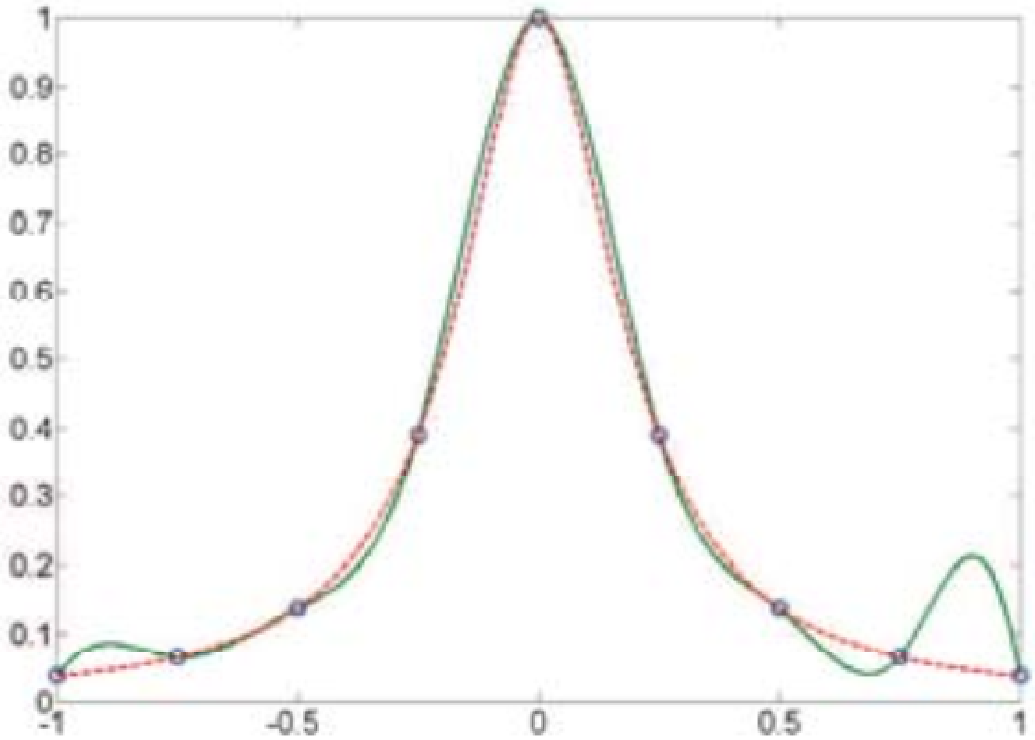
Rungės funkcija (raudonas punktyras)
9-taškų not-a-knot splainas (žalia)



Tolydžiosios treciosios išvestinės taškuose x_1 ir x_{N-1}.

Rungės funkcijos ir suvaržyto (Clamped End) splaino palyginimas

Rungės funkcija (raudonas punktyras)
9-taškų suvaržytas (Clamped End) splainas (žalia)



Kraštiniuose taškuose užduotos pirmųjų išvestinių reikšmės:
$f'(-1) = 1$ ir $f'(1) = -4$.

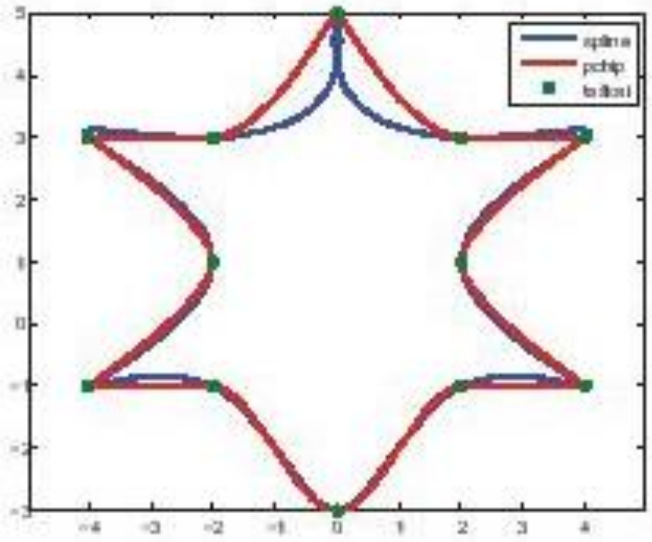
Kitos splainų rūšys ir taikymai

Parametrinis interpoliavimas splainais

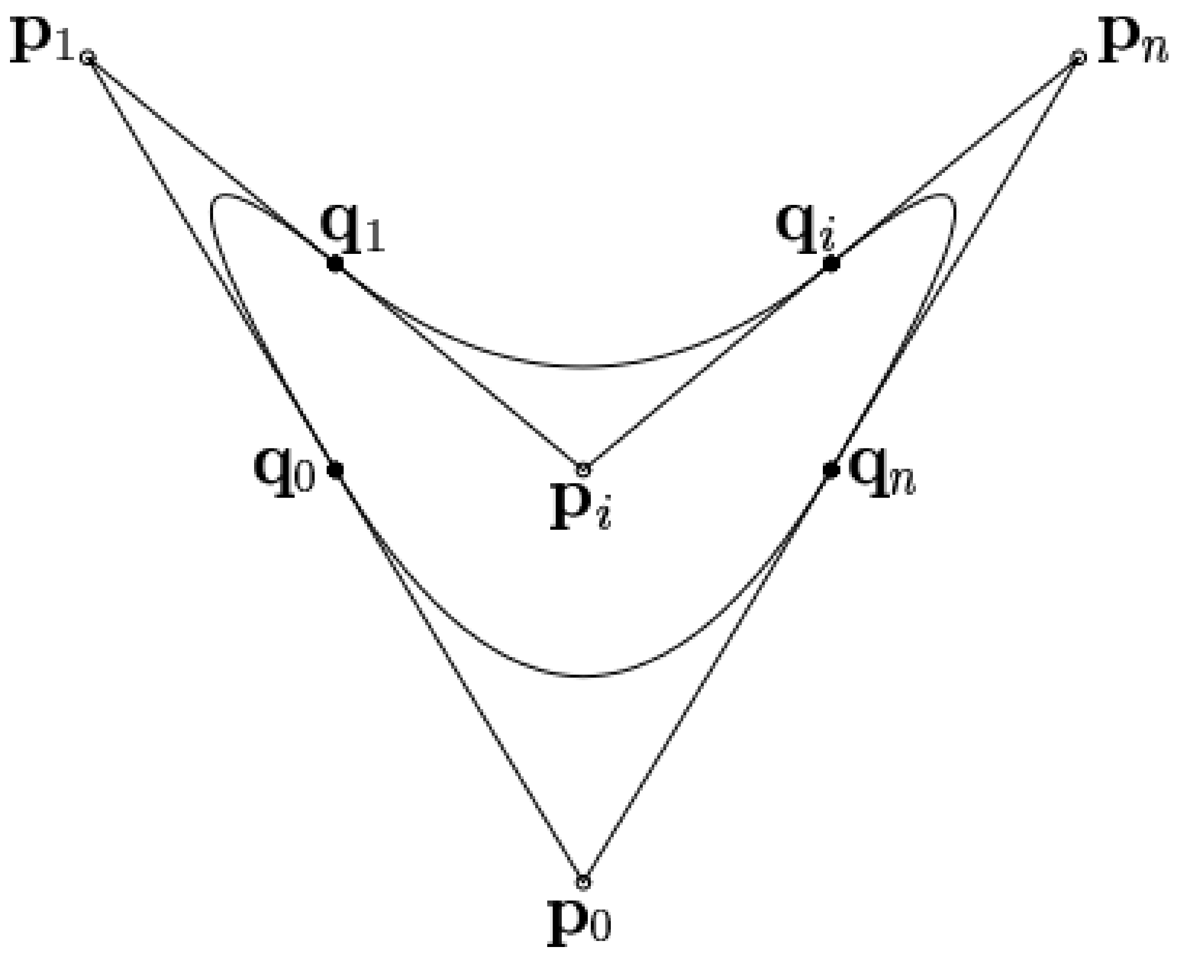
Duoti taškai (x_i, y_i).

- Taškų parametrizacija (t_i, x_i), (t_i, y_i), $t_i = 0, 1, \cdots, N$;
- Kubiniai splainai $x = S_x^3(t)$, $y = S_y^3(t)$;
- Braižomas grafikas $y = f(x)$.

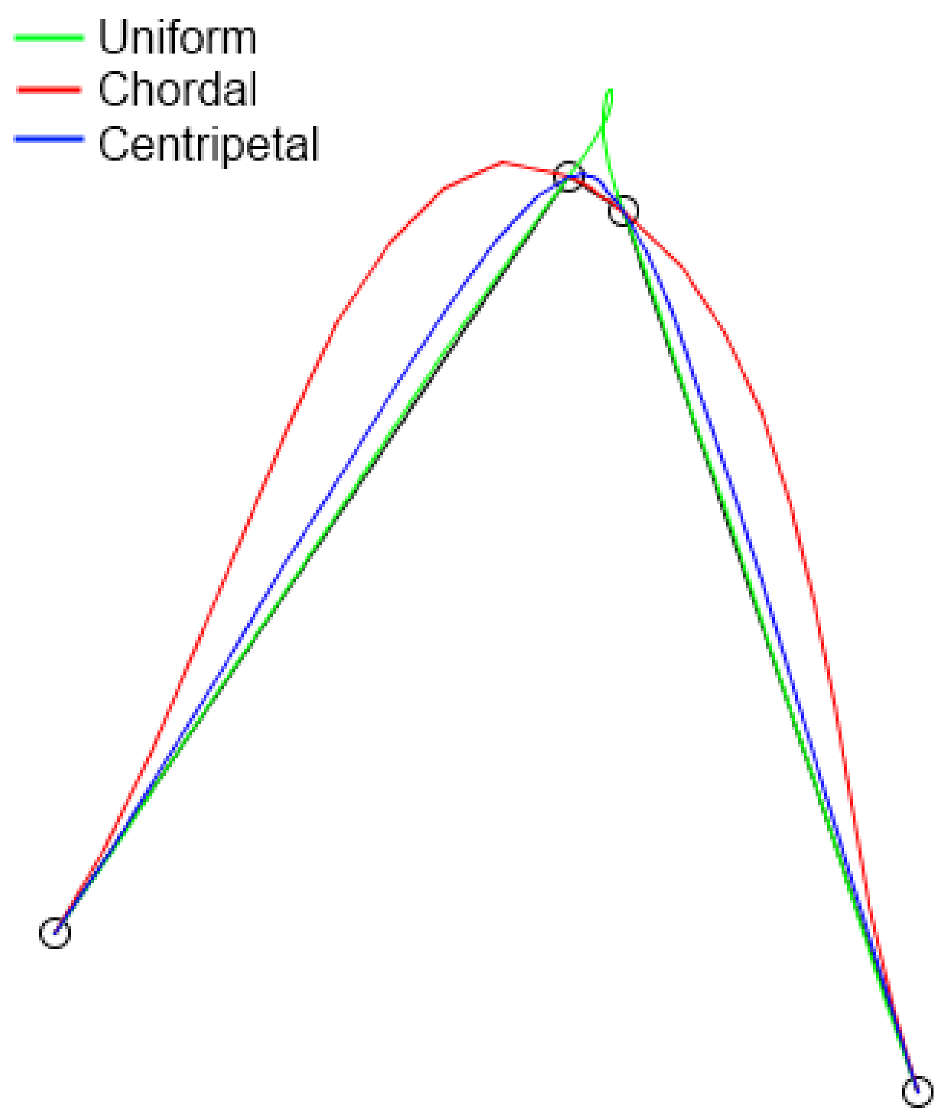
$x = [0\ 2\ 4\ 2\ 4\ 2\ 0\ -2\ -4\ -2\ -4\ -2\ 0]$,
$y = [5\ 3\ 3\ 1\ -1\ -1\ -3\ -1\ -1\ 1\ 3\ 3\ 5]$, $t = 0, \cdots, 12$.



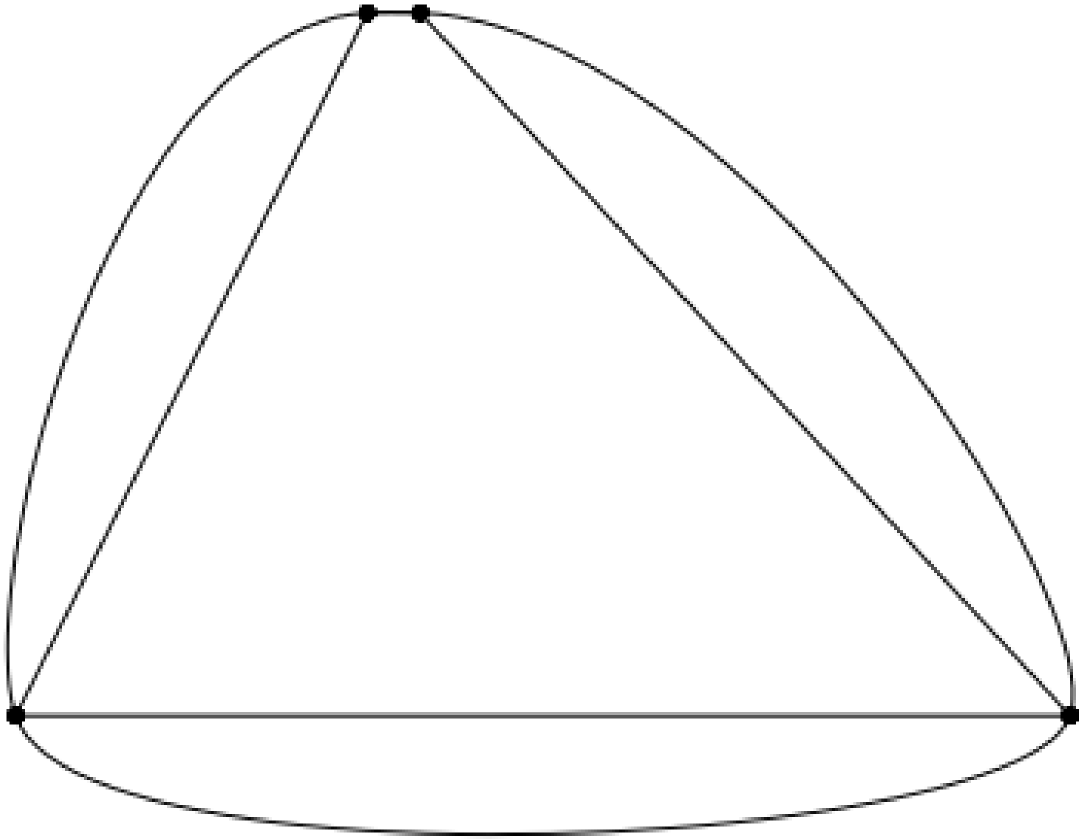
Matlab funkcijos:
spline(kubinis splainas);
pchip(dalimis kubinis Hermito interpoliavimas), išlaiko duomenų monotoniškumą ir formą.



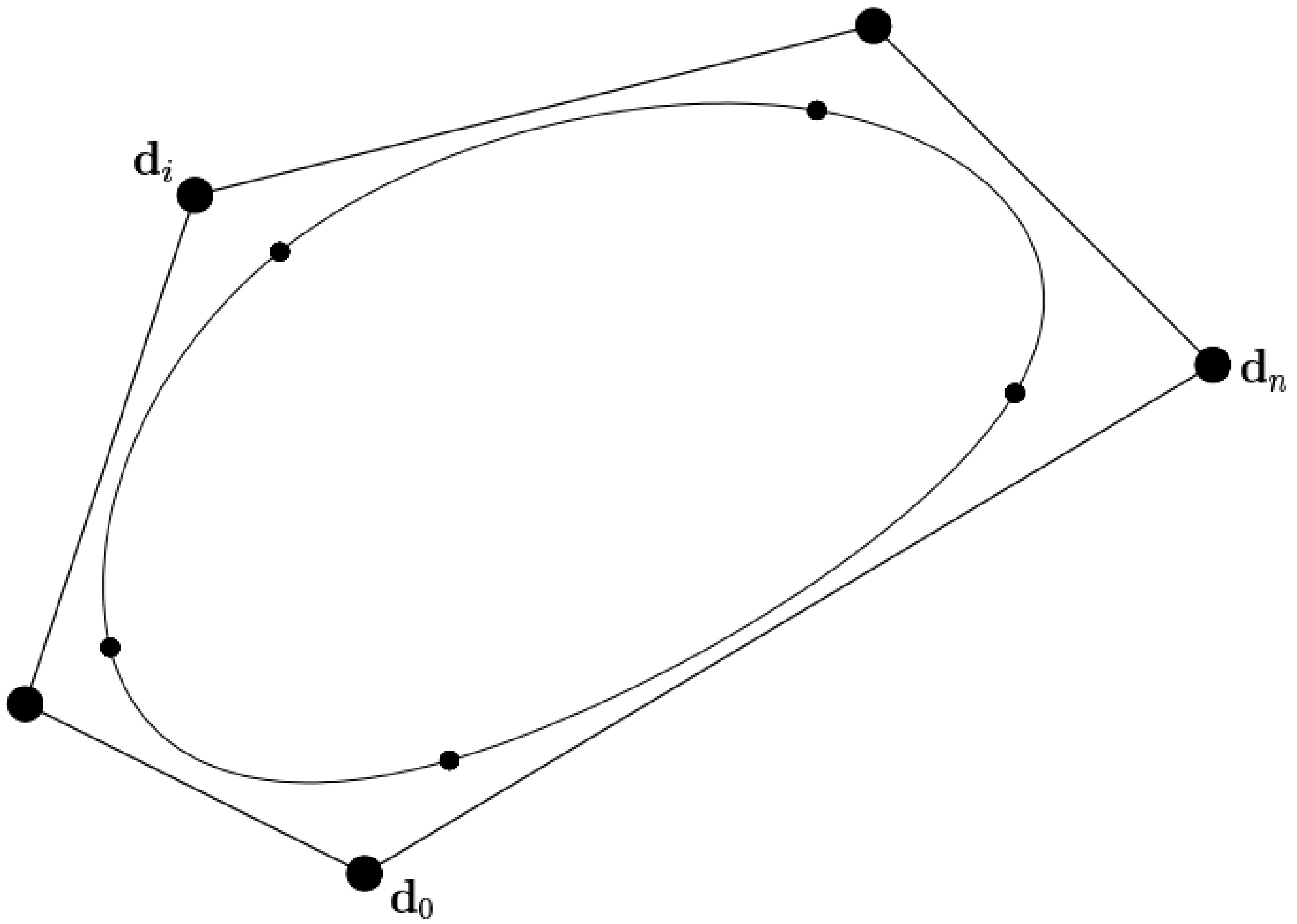
Uždaras aproksimacinis antrojo laipsnio splainas.



Kilpos susiformavimas naudojant tolygius splainus



Catmull-Rom (Bessel-Overhauser) interpoliacinis splainas



Uždaras kubinis C^2 splainas.

Paviršių aproksimavimas ir interpoliavimas splainais