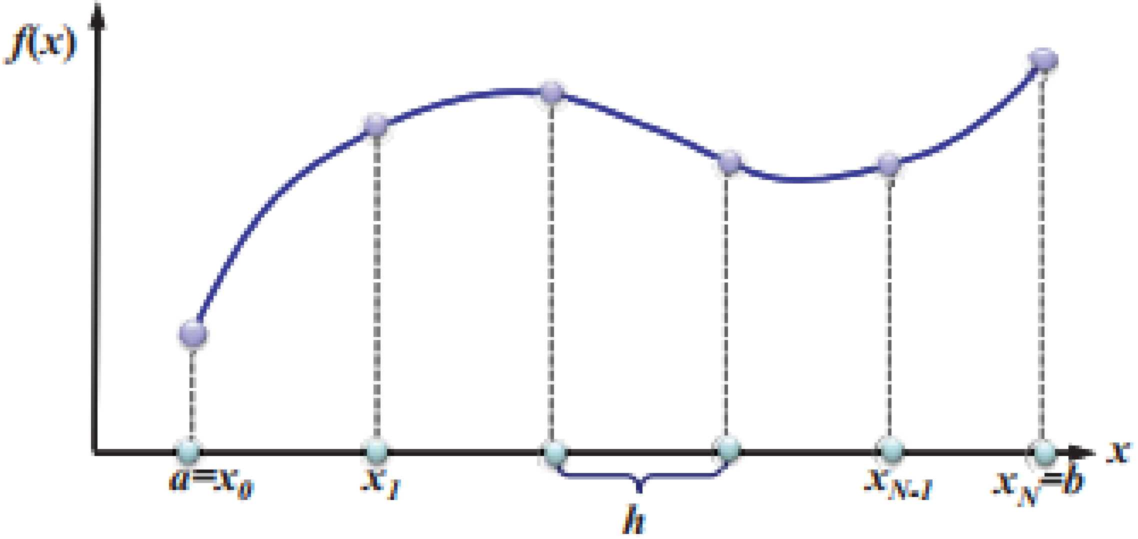
Skaitinio integravimo pagrindai

$a = x_0, \quad x_1, \cdots, b = x_N$ – integravimo mazgai.

$h = \dfrac{b-a}{N}, \quad h = x_{i+1} - x_i$ – integravimo žingsnis.

Pakeičiame funkcijos $f(x)$ integralą jo skaitiniu artiniu:

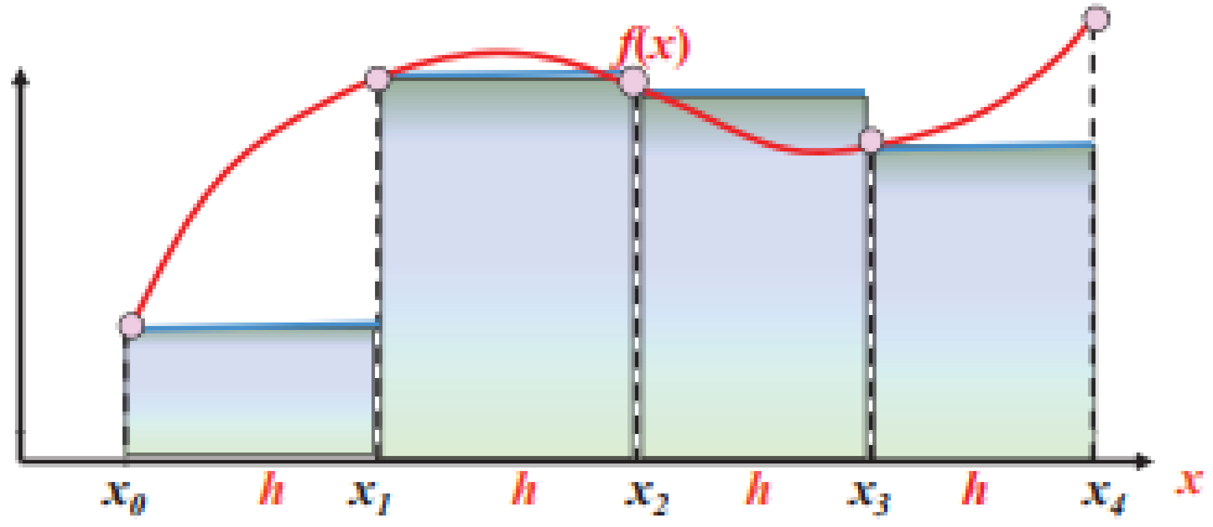
$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} \approx \sum_{i=0}^{N} c_i f(x_i).$$



Sudėtinė kairiųjų stačiakampių formulė

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx K_N = \sum_{i=1}^{N} f(x_{i-1})h.$$

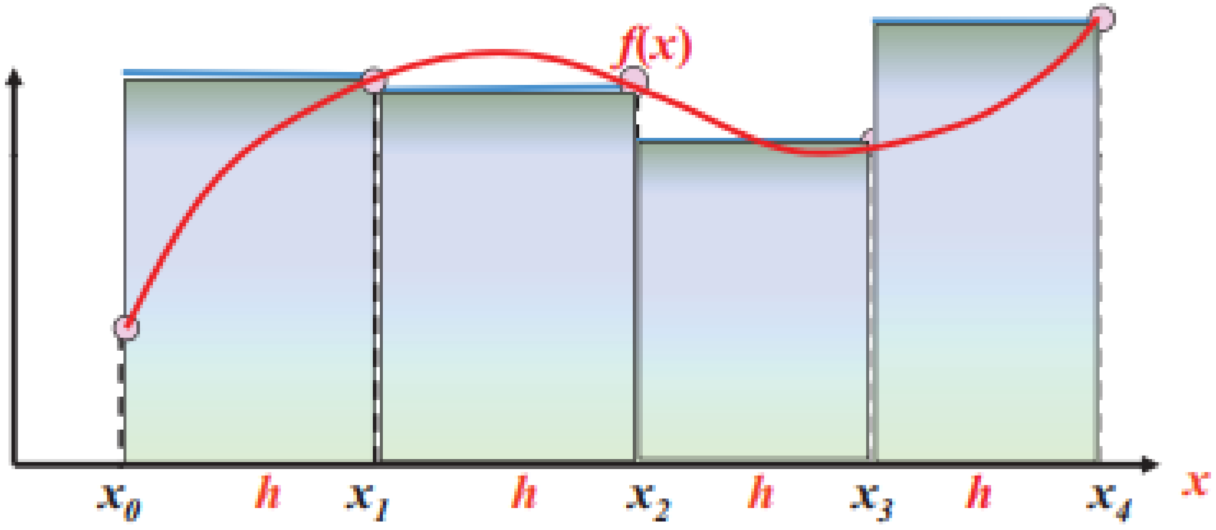
$$h = \frac{b-a}{N}$$



Sudėtinė dešiniųjų stačiakampių formulė

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx D_N = \sum_{i=1}^{N} f(x_i)h.$$

$$h = \frac{b-a}{N}$$



Sudėtinės dešiniųjų stačiakampių formulės paklaida

Sudėtinė dešiniųjų stačiakampių formulė

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx D_N = \sum_{i=1}^{N} f(x_i)h.$$

$h = \frac{b-a}{N}$

Teorema.

Jei $\exists f'(x) \in C(a,b)$ ir $|f'(x)| < M_1$, tai paklaida įvertinama nelygybe:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - D_N \right| \leqslant M_1 \frac{b-a}{2} h.$$

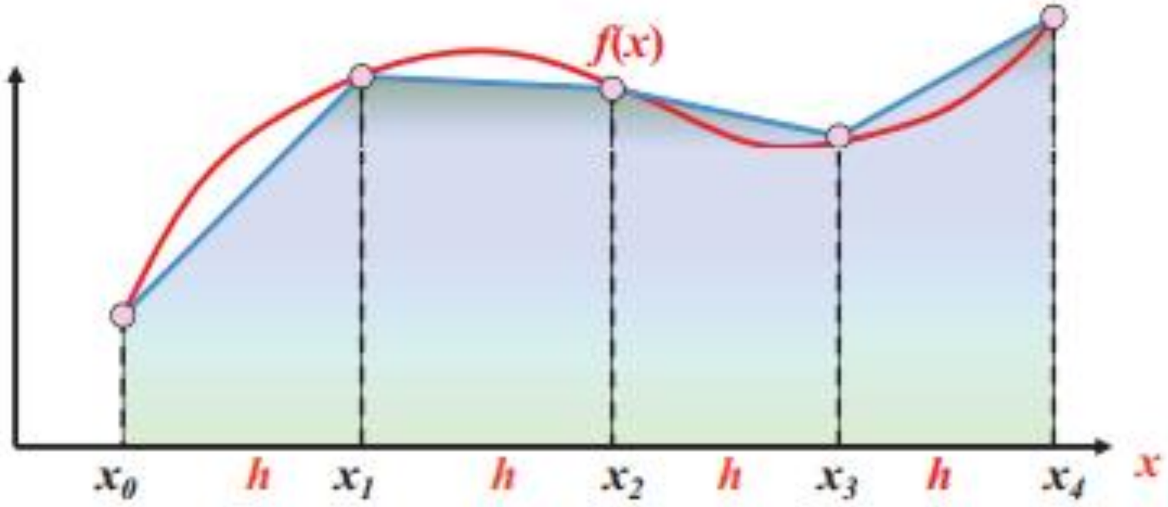
Taip pat kaip ir kairiųjų stačiakampių formulės.

Sudėtinė trapecijų formulė

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx T_N = \sum_{i=1}^{N} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} h_i$$

$$T_N = \frac{h}{2}\big(f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{N-1}) + f(x_N)\big)$$

$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad h = \frac{b-a}{N}$



Sudėtinės trapecijų formulės paklaida

Sudėtinė trapecijų formulė

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx T_N = \sum_{i=1}^{N} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} h_i.$$

$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad h = \frac{b-a}{N}.$

Teorema.

Jei $\exists f''(x) \in C(a,b)$ ir $|f''(x)| \leqslant M_2$, tai paklaida įvertinama nelygybe:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - T_N \right| \leqslant M_2 \frac{b-a}{12} h^2.$$

Tikslesnė nei kairiųjų ir dešiniųjų stačiakampių formulės.

Sudėtinės trapecijų formulės paklaida

Sudėtinė trapecijų formulė

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx T_N = \sum_{i=1}^{N} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} h_i.$$

$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad h = \frac{b-a}{N}.$

Teorema.

Jei $\exists f''(x) \in C(a,b)$ ir $|f''(x)| \leqslant M_2$, tai paklaida įvertinama nelygybe:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - T_N \right| \leqslant M_2 \frac{b-a}{12} h^2.$$

Tikslesnė nei kairiųjų ir dešiniųjų stačiakampių formulės.

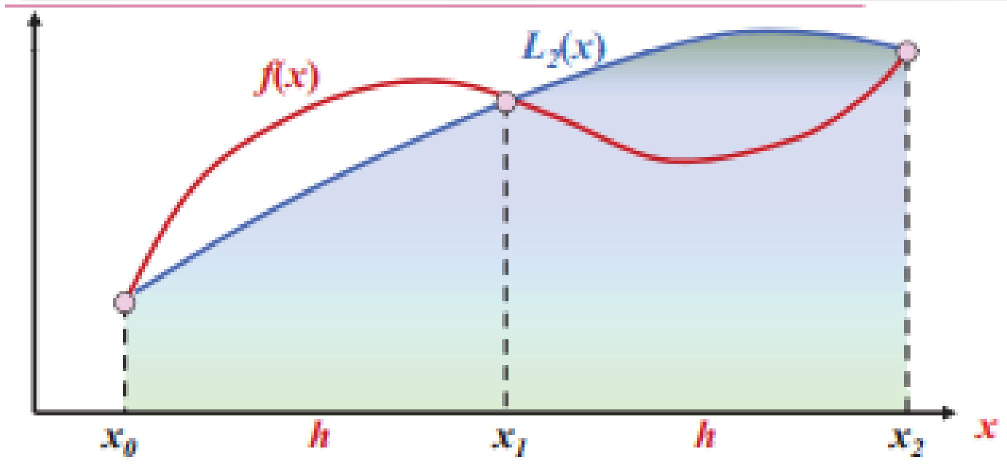
Simpsono formulė

$$\int_a^b f(x)dx \approx c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2),$$

čia $x_0 = a, \quad x_1 = \frac{b+a}{2}, \quad x_2 = b.$

Simpsono formulė

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_N = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right)$$



Sudėtinė Simpsono formulė

Taikoma, kai yra lyginis skaičius dalinių intervalų.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{N-2}}^{x_N} f(x)dx$$

Kiekvienam daliniam integralui taikoma Simpsono formulė $(h_i = h = const)$.

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{N/2-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx \approx S_N = \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{N-2} (f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})).$$

Arba

$$S_N = \frac{b-a}{3N} (f(x_0) + 4 \sum_{i=1,3,5}^{N-1} f(x_i) + 2 \sum_{j=2,4,6}^{N-2} f(x_j) + f(x_N)).$$

Sudėtinės Simpsono formulės paklaida

Kai yra lyginis skaičius dalinių intervalų.
$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad h = \frac{b-a}{N}.$

Teorema.

Jei $\exists f^{(4)}(x) \in C(a,b)$ ir $|f^{(4)}(x)| \leqslant M_4$, tai paklaida įvertinama nelygybe:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - S_N \right| \leqslant M_4 \frac{b-a}{180} h^4.$$

Pastaba. Tiksliai integruoja tiesines, kvadratines ir kubines funkcijas, nes $f^{(4)} = 0$.

Skaitinio integravimo paklaidos įvertinimas - pavyzdys

Nustatykime pakankamą mazgų skaičių, norint integralą $\int_0^1 \sin 2x dx$ apskaičiuoti 0,0001 tikslumu stačiakampių, trapecijų ir Simpsono metodais.

Stačiakampių formulės paklaida

$$\varepsilon_N \leqslant M_1 \frac{b-a}{2} h.$$

$f'(x) = 2\cos 2x \Rightarrow M_1 = 2$

$$M_1 \frac{b-a}{2} h = 0,0001 \Rightarrow h = 0,0001$$

$$h = \frac{b-a}{N} \Rightarrow N = 10000 \quad \text{(stačiakampių formulė).}$$

$N = 10000$ - intervalų skaičius $\Rightarrow$ reikia 10001 taškų.

Adaptyvieji integravimo metodai

- Adaptyvus integravimo žingsnio parinkimas staigių pakitimų srityse. Vertinamos paklaidos.
- Automatiškai reguliuojamas žingsnio dydis: staigių pakitimų srityse integruojama su mažu žingsniu, kitur skaičiuojama su didesniu žingsniu.
- MATLAB funkcijos: quad, quadl.

ε tikslumo artinys:

$$\int_a^b f(x)dx \approx I(a,b,\varepsilon), \quad \left|\int_a^b f(x)dx - I(a,b,\varepsilon)\right| < \varepsilon.$$

1-asis adaptyvusis integravimo algoritmas

Pavyzdys. Trapecijos formule apskaičiuojame du integralo artinius su $N = 1$ ir $N = 2$,

$$T_1(a,b) = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a), \quad T_2(a,b) = \left(\frac{f(a)}{2}+f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f(b)}{2}\right)\frac{(b-a)}{2}.$$

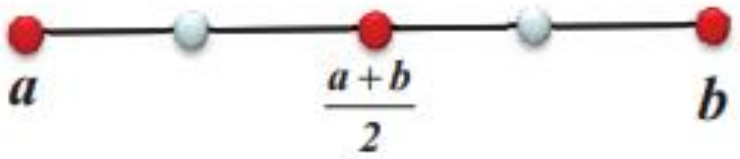
Rungės taisyklė: jei

$$\frac{|T_1(a,b) - T_2(a,b)|}{3} \leqslant \varepsilon \Rightarrow \left| \int_a^b f(x)dx - T_2(a,b)\right| \leqslant \varepsilon,$$

Jei $|T_1(a,b) - T_2(a,b)| \leqslant 3\varepsilon \Rightarrow \left| \int_a^b f(x)dx - T_2(a,b)\right| \leqslant \varepsilon, I(a,b,\varepsilon) = T_2(a,b).$

Jei $|T_1(a,b) - T_2(a,b)| > 3\varepsilon \Rightarrow \quad I(a,b,\varepsilon) = I(a, \frac{a+b}{2}, \frac{\varepsilon}{2}) + I(\frac{a+b}{2}, b, \frac{\varepsilon}{2}),$

t.y. $\frac{\varepsilon}{2}$ tikslumu apskaičiuosime integralus $\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx$ ir $\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx$.



Neapibrėžtinių koeficientų metodas

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_N(f) = \sum_{i=0}^{N} c_i f(x_i),$$

čia $x_i = a + ih, \quad h = \frac{b-a}{N}.$

c_i - nežinomi koeficientai (parenkami taip, kad tiksliai integruotųsi tam tikros klasės funkcijos).

Integravimo paklaida

$$\varepsilon(f) = \int_a^b f(x)dx - S_N(f).$$

Tiksliai integruojami daugianariai

$$\varepsilon(1) = 0, \quad \varepsilon(x) = 0, \quad \varepsilon(x^2) = 0, \cdots, \varepsilon(x^N) = 0.$$

Gauso kvadratūrinės formulės

- Atsisakysime fiksuotų integravimo mazgų. Vietoj trapecijų formulės su fiksuotais intervalo galais gausime naują formulę

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2).$$

- 4 nežinomieji - x_1, x_2, c_1, c_2.
- Reikalausime, kad tiksliai integruotųsi konstanta, tiesinė (kaip ir trapecijų formulėje), kvadratinė, kubinė funkcijos $\Rightarrow$ turime 4 lygtis.