Tiesinė lygčių sistema

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\ldots \quad & \quad \ldots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n,
\end{aligned}
$$

Lygčių sistemą patogu užrašyti matriciniu pavidalu

$$
\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \text{arba} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} .
$$

Tiesinių lygčių sistemų (TLS) sprendimas

TLS $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ sprendimo metodų apžvalga

Tiesioginiai metodai

($< 10^4$ nežinomųjų)
Tikslus sprendinys gaunamas per baigtinį žingsnių skaičių.

- Gauso;
- Skaidos;
- Choleckio;
- Perkelties.

Iteraciniai metodai

($< 10^7$ nežinomųjų)
Randamas apytikslis sprendinys bet kokiu norimu tikslumu.

- Jakobio;
- Zeidelio;
- Relaksacijos;
- Mišrusis;

- Variaciniai metodai ($> 10^7$ nežinomųjų).

Gauso metodas

- Nuoseklus nežinomųjų šalinimas;
- Sistemos matricos pertvarkymas į viršutinę trikampę matricą

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \to \mathbf{U} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}.$$

- Sprendinys randamas iš pertvarkytosios sistemos.

Pirmoji lygtis yra pagrindine lygtis,
a_{11} yra pagrindinis elementas (iš jo dalijama visa lygtis) ir t.t. ($\tilde{a}_{ii}$)
Paprastas Gauso metodas: $\tilde{a}_{ii} \neq 0$.

Gauso metodo esmė

Tiesioginis metodas (nėra iteracijų).

Tiesioginė eiga:

1. Elementų po pagrindine įstrižaine nuoseklus šalinimas stulpeliuose;
2. Suvedimas į viršutinę trikampę matricą.

Atbulinė eiga:

Gaunamas sprendinys $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

Ekvivalentieji pertvarkiai:

- Lygtis dauginama iš skaičiaus, nelygaus nuliui;
- Dvi lygtys keičiamos vietomis;
- Lygtis, padauginta iš skaičiaus, pridedama prie kitos lygties.

Gauso metodo algoritmas

1. Tiesioginė eiga

   Su visais $j : j = 1, \ldots, n-1$

   su visais $k : k = j+1, \ldots, n$

   j-aji lygtis dauginama iš a_{kj}/a_{jj}

   ir atimama iš k-osios lygties

   Gauname viršutinę trikampę matricą.

2. Atbulinė eiga

   1) apskaičiuojame x_n:

   $$x_n = b_n^{(n-1)} / a_{nn}^{(n-1)}$$

   2) įstatome x_n į $(n-1)$-ąją lygtį ir randame x_{n-1};

   3) analogiškai kartojame 2) ir apskaičiuojame

   $x_{n-2}, x_{n-3}, \ldots x_1$.

Gauso metodo skaiciavimo apimtis

Išorinis ciklas j	Vidinis ciklas k	$+/-$ veiksmai	$*/\div$ veiksmai
1	$2, n$	$(n-1)n$	$(n-1)(n+1)$
2	$3, n$	$(n-2)(n-1)$	$(n-2)n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
j	$j+1, n$	$(n-j)(n-j+1)$	$(n-j)(n-j+2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	n, n	$1 \cdot 2$	$1 \cdot 3$

- Tiesiogines eigos bendroji skaiciavimo apimtis $= 2n^3/3 + O(n^2)$ aritmetiniu operaciju.
- Atbulines eigos bendroji skaiciavimo apimtis $= n^2 + O(n)$ aritmetiniu operaciju.

Pertvarkant k-ąją eilutę, randama kita lygtis, kurioje koeficientas prie x_k yra didžiausias;
pažymėkime šios lygties numerį m;
šiuo atveju pagrindinis elementas yra

$$|a_{mk}| = \max_{k \leqslant i \leqslant n} |a_{ik}|.$$

Šios dvi lygtys sukeičiamos vietomis, ir m-osios lygties koeficientas prie x_k tampa pagrindiniu elementu – iš jo dalijami eilutės elementai.

Pertvarkant k-ąją eilutę, didžiausias jos koeficientas (pažymėkime jo numerį m) yra

$$|a_{km}| = \max_{k \leqslant j \leqslant n} |a_{kj}|.$$

Radus pagrindinį elementą, pernumeruojami abu nežinomieji x_k ir x_m; įsimenama naujoji nežinomųjų tvarka.

Skaidos metodas

- Kitas tiesinių lygčių sistemų $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ sprendimo metodas.
- $\mathbf{LU}$ dekompozicija – matrica $\mathbf{A}$ išskaidome į sandauga.
- Egzistuoja tokios matricos $\mathbf{L}$ (apatinė trikampė) ir $\mathbf{U}$ (viršutinė trikampė), kad

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{LUx} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{Ld} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{Ux} = \mathbf{d}$$

Pranašumas: vieną kartą apskaičiavus $\mathbf{L}$ ir $\mathbf{U}$, galima spręsti sistemas su skirtingais $\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_\mathbf{m}$ nekartojant matricos $\mathbf{A}$ išskaidymo.

LU metodo algoritmas:

1)Išskaidymas

$[A] = [L][U]$ (N by N matrix)

Staring the first row of $[U]$, $u_{1,i} = a_{1,i}$, for $i = 1,2,......,N$;

then the first column of $[L]$, $l_{j,1} = a_{j,1} / u_{1,1}$, for $j = 2,......,N$;

Then alternatively determine the 2nd row of $[U]$,

$u_{2,i} = a_{2,i} - l_{2,1}u_{1,i}$ for $i = 2,3,......,N$;

and 2nd column of $[L]$;

$l_{j,2} = (a_{j,2} - l_{j,1}u_{1,2}) / u_{2,2}$, for $j = 3,......,N$; then ......

and nth row of $[U]$, $u_{n,i} = a_{n,i} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{n,k}u_{k,i}$ for $i = n,...,N$;

and nth column of $[L]$, $l_{j,n} = \left[a_{j,n} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{j,k}u_{k,n} \right] / u_{n,n}$,

for $j = n+1,...,N$; ....until N^{th} row of $[U]$.

LU metodo algoritmas: 2)-3)

2) Tiesioginė eiga (keitimas)

$$d_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} d_j \quad i = 1, \ldots, n$$

Gauname viršutinę trikampę matricą.
3) Atbulinė eiga (kaip ir Gauso metode):

$$x_n = d_n / a_{nn}$$

$$x_i = \frac{d_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j}{u_{ii}}, \quad i = n-1, \ldots, 2, 1.$$

Choleckio metodas

Jei matrica $\mathbf{A}$ yra simetrinė ir teigiamai apibrėžta patogu naudoti Choleckio dekompozicija

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T = \mathbf{U}^T\mathbf{U}$$

Kai matrica $\mathbf{A}$ yra simetrinė ir teigiamai apibrėžta (visos tikrinės reikšmės teigiamos) pagrindinio elemento parinkimas nereikalingas.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ u_{12} & u_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{1n} & u_{2n} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Matricos $\mathbf{L}$ elementus apskaičiuojame iš matricų lygybės $\mathbf{L}\mathbf{L}^T = \mathbf{A}$, prilygindami $\mathbf{L}\mathbf{L}^T$ ir $\mathbf{A}$ atitinkamus elementus.
Gauname lygčių sistemą

$$
\begin{aligned}
l_{11}^2 = a_{11}, \quad &\Rightarrow \quad l_{11} = \sqrt{a_{11}}, \\
l_{k1}l_{11} = a_{k1}, \quad &\Rightarrow \quad l_{k1} = a_{k1}/l_{11}, \quad k = 2, \dots, n, \\
l_{21}^2 + l_{22}^2 = a_{22}, \quad &\Rightarrow \quad l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2}, \\
l_{k1}l_{21} + l_{k2}l_{22} = a_{k2}, \quad &\Rightarrow \quad l_{k2} = (a_{k2} - l_{k1}l_{21})/l_{22}, \quad k = 3, \dots, n, \\
&\dots \\
\sum_{i=1}^{j-1} l_{ij}^2 + l_{jj}^2 = a_{jj}, \quad &\Rightarrow \quad l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{i=1}^{j-1} l_{ij}^2}, \\
\sum_{i=1}^{j-1} l_{ki}l_{ji} + l_{kj}l_{jj} = a_{kj}, \quad &\Rightarrow \quad l_{kj} = \frac{a_{kj} - \sum_{i=1}^{j-1} l_{ki}l_{ji}}{l_{jj}}, \quad k = j+1, \dots, n.
\end{aligned}
$$