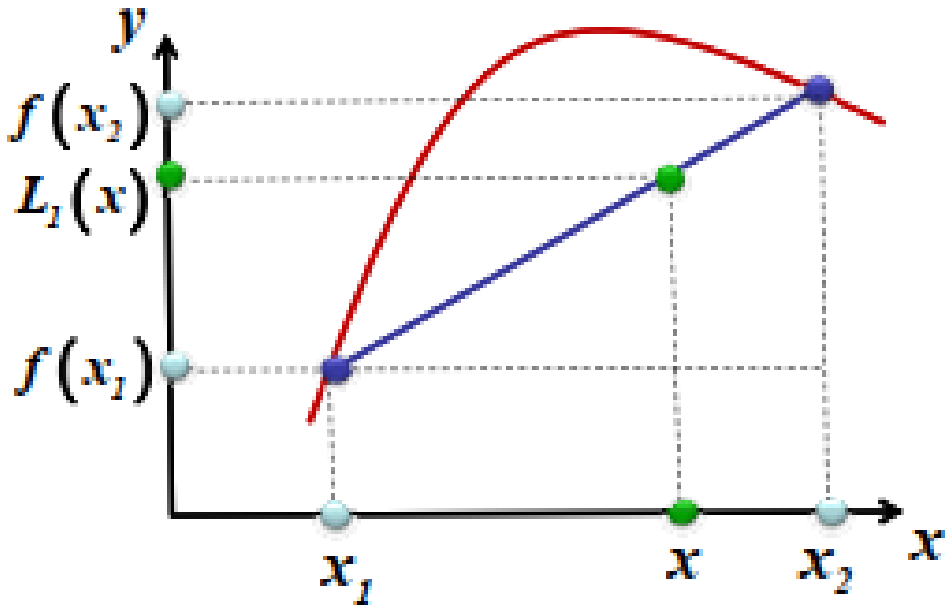
Tiesinis interpoliavimas

Tiesė, einanti per taškus $(x_1, f(x_1))$ ir $(x_2, f(x_2))$:

$$L_1(x) = b_1 + b_2(x - x_1).$$



Panašūs trikampiai $\Rightarrow$ tiesės lygtis

$$\frac{L_1(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Tiesinis interpoliacinis daugianaris

$$L_1(x) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Paklaidos įvertis

1 teorema.

Jei funkcijos $f(x)$ antroji išvestinė intervale $[x_i, x_{i+1}]$ yra aprėžta, t.y.

$$|f''(x)| \leqslant M_2, \text{ kai } x_i < x < x_{i+1},$$

tai tiesinio interpoliavimo paklaida įvertinama nelygybe

$$|f(x) - L_1(x)| \leqslant \frac{1}{2}M_2|(x - x_i)(x - x_{i+1})| \leqslant \frac{1}{2}M_2 h_i^2,$$
$$h_i = x_{i+1} - x_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}].$$

Pirmosios eilės skirtumų santykis

$$f(x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}.$$

Antrosios eilės skirtumų santykis

$$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}) - f(x_i, x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i}.$$

n-osios eilės skirtumų santykis

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \frac{f(x_1, \ldots, x_n) - f(x_0, \ldots, x_{n-1})}{x_n - x_0}.$$

Iteracinė procedūra:

1. Apskaičiuoti visus pirmosios eilės skirtumų santykius;
2. Apskaičiuoti visus antrosios eilės skirtumų santykius;

   ...

Skirtumų santykiai ir išvestinės

- $f(x)$ nėra žinoma $\Rightarrow$ tiksli konstanta M_2 įvertyje

$$|f''(x)| \leqslant M_2$$

  irgi nežinoma;
- $\Rightarrow$ paklaidos įverčio formulėje -apytikslis antrosios išvestinės rėžis:

$$f''(x) \approx 2f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}).$$

- Bendruoju atveju

$$f^{(n)}(x) \approx n! f(x_0, x_1, \cdots, x_n).$$

Kvadratinis interpoliavimas - pavyzdys

$$L_2(x) = f(x_1) + f(x_1, x_2)(x - x_1) + f(x_1, x_2, x_3)(x - x_1)(x - x_2).$$

Apskaičiuokime e^2 žinant e^1, e^3 ir e^5:

x_i	1	3	5
$f(x_i) = e^x$	2,7183	20,086	148,41

$$\begin{array}{ccccc}
1 & & 3 & & 5 \\
2{,}7183 & & 20{,}0855 & & 148{,}4132 \\
 & 8{,}6837 & & 64{,}1638 & \\
 & & 13{,}8700 & &
\end{array}$$

$$L_2(2) = 2{,}7183 + 8{,}6837(2-1) + 13{,}872 - 1)(2-3) = -2{,}4680.$$

Tiksliai $e^2 = 7{,}3891$.

Paklaidos įvertis

2 teorema.

Jei funkcijos $f(x)$ trečiosios eilės išvestinė intervale $[x_i, x_{i+2}]$ yra aprėžta, t.y.

$$|f'''(x)| \leqslant M_3, \text{kai} \quad x_i < x < x_{i+2},$$

tai kvadratinio interpoliavimo paklaida įvertinama nelygybe

$$|f(x) - L_2(x)| \leqslant \frac{1}{6} M_3 |(x - x_i)(x - x_{i+1})(x - x_{i+2})| \leqslant \frac{\sqrt{3}}{27} M_3 h^3,$$

$$h = x_{i+1} - x_i = x_{i+2} - x_{i+1}, \quad x \in [x_i, x_{i+2}].$$

Niutono interpoliacinis daugianaris

Niutono interpoliacinė formulė

$$L_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1)$$
$$+ \cdots + f(x_0, x_1, \cdots, x_n)(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

- Jei yra žinoma užtektinai funkcijos $f(x)$ reikšmių, šią formulę lengvai galima papildyti naujais nariais ir kartu padidinti jos "tikslumą".
- Interpoliavimo taškai x_i gali būti pasiskirstę kaip tolygiai, taip ir netolygiai, juos galima sunumeruoti bet kokia tvarka.

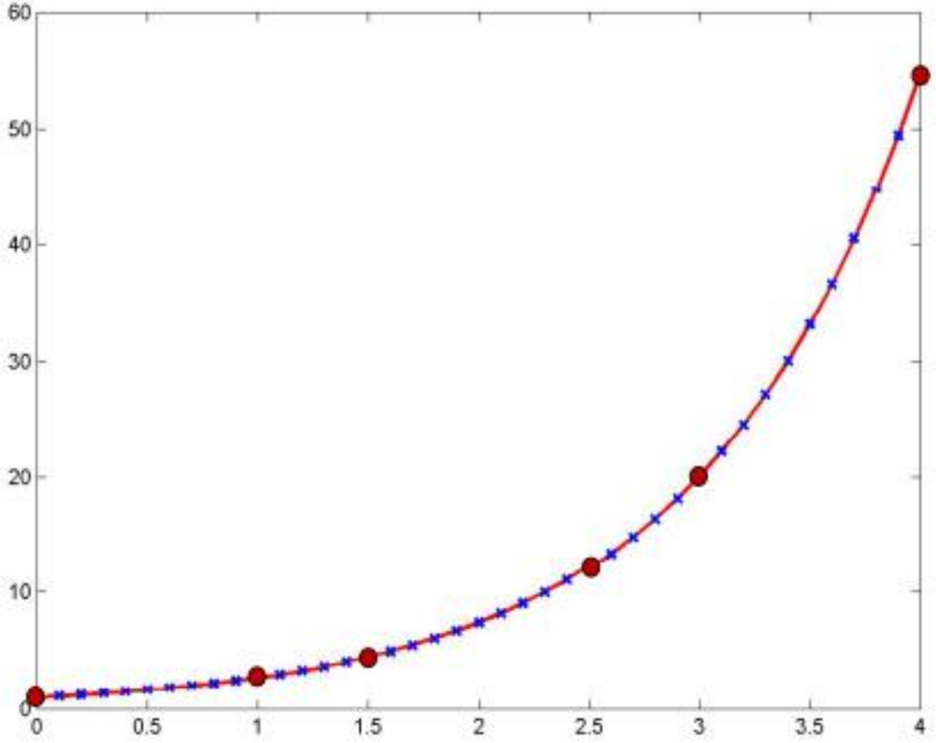
Niutono interpoliacinės formulės koeficientai

i	x_i	$y_i = f(x_i)$	$f(x_i, x_{i+1})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$	$f(x_i, \ldots, x_{i+3})$	$f(x_i, \ldots, x_{i+4})$
			1 eilės	2 eilės	3 eilės	4 eilės
0	x_0	$f(x_0)$				
			$f(x_0, x_1)$			
1	x_1	$f(x_1)$		$f(x_0, x_1, x_2)$		
			$f(x_1, x_2)$		$f(x_0, x_1, x_2, x_3)$	
2	x_2	$f(x_2)$		$f(x_1, x_2, x_3)$		$f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$
			$f(x_2, x_3)$		$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$	
3	x_3	$f(x_3)$		$f(x_2, x_3, x_4)$		
			$f(x_3, x_4)$			
4	x_4	$f(x_4)$				

Niutono interpoliacinis daugianaris

$$f(x) = e^x$$

Interpoliavimas žinant funkcijos reikšmes taškuose $[0; 1; 4; 3; 1,5; 2,5]$



Paklaidos įvertis

3 teorema.

Jei $(n+1)$-osios eilės funkcijos $f(x)$ išvestinė intervale $[x_0, x_n]$ yra aprėžta, t.y.

$$|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M_{n+1}, \text{kai} \quad x_0 < x < x_n,$$

tai Niutono interpoliacinės formulės interpoliavimo paklaida įvertinama nelygybe

$$|f(x) - L_n(x)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} M_{n+1} |(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)|,$$

$x \in [x_0, x_n]$.

Lagranžo interpoliacinis daugianaris

Sutampa su Niutono daugianariu

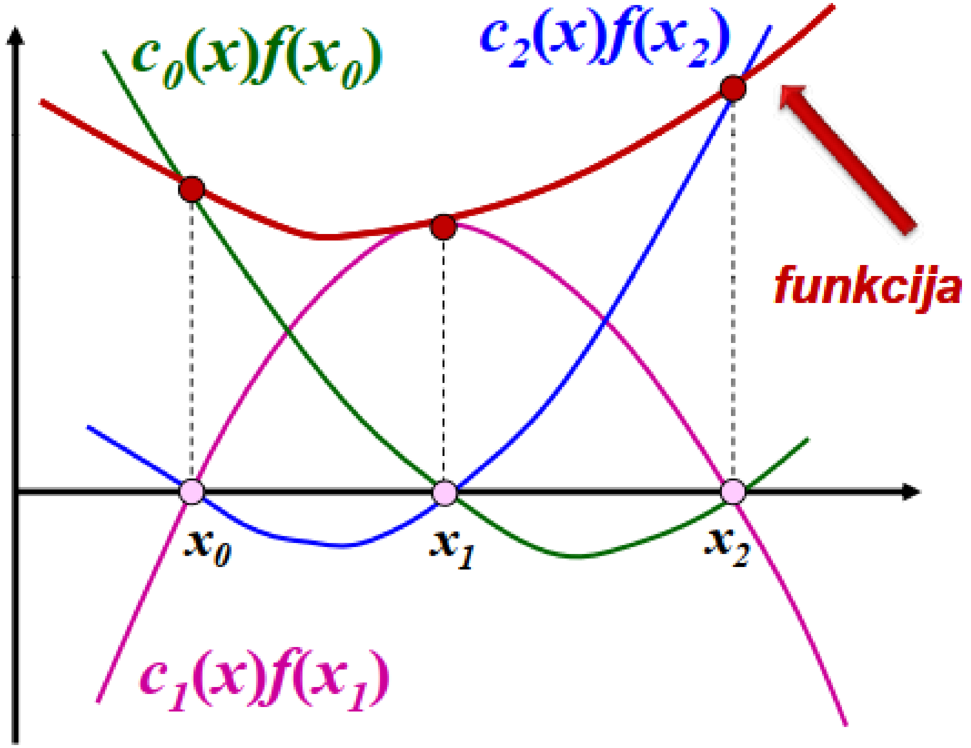
$$L_1(x) = c_0(x)f(x_0) + \cdots + c_n(x)f(x_n) = \sum_{i=0}^{n} c_i(x)f(x_i)$$

$$\begin{aligned} c_i(x) &= \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{P_i(x)}{P_i(x_i)} \\ &= \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} j = i & c_i(x_i) = 1 \\ j \neq i & c_i(x_j) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow c_i(x_j) = \delta_{ij}.$$

2 eilės Lagranžo interpoliacinis daugianaris

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$



Lagranžo interpoliavimas

- Labai patogus, jei skaičiuojama naudojant tuos pačius taškus x, su skirtingais y, (t.y., matavimai visada atliekami tuose pačiuose taškuose). Koeficientus $c_k(x)$ reikia apskaičiuoti tik vieną kartą.
- Bet mažiau patogus, jei atsiranda papildomi duomenys.

patogu

pradiniai taškai: $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$
nauji taškai: $(x_1, z_1), \cdots, (x_n, z_n)$

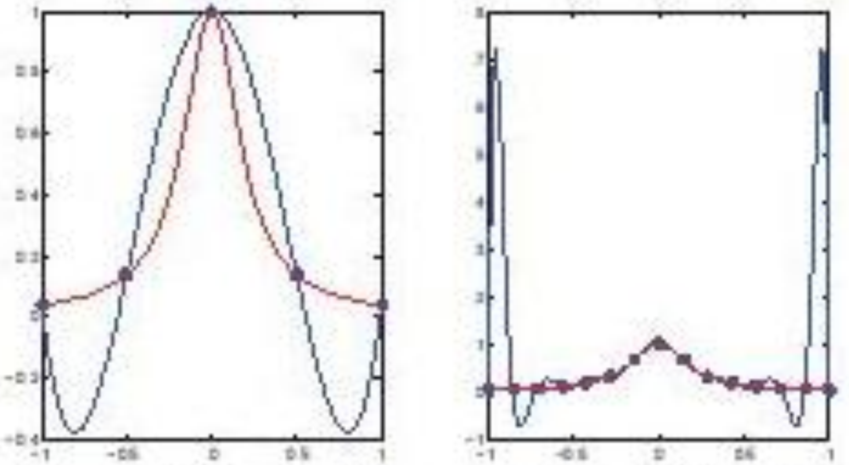
mažiau patogu

pradiniai taškai: $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$
nauji taškai: $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n), (x_{n+1}, y_{n+1})$

Interpoliavimas daugianariais netinka:

- Duomenys su dideliu gradientu (lygus grafikas su staigiu piku);
- Duomenys su triukšmu;
- Neglodus paviršius (netolydi išvestinė).

Nesutapimas su tikrosios funkcijos grafiku. Osciliacijos.



4-osios eilės ir 14 -osios eilės Niutono interpoliaciniai daugianariai.

1 pavyzdys:

Rungės funkcija

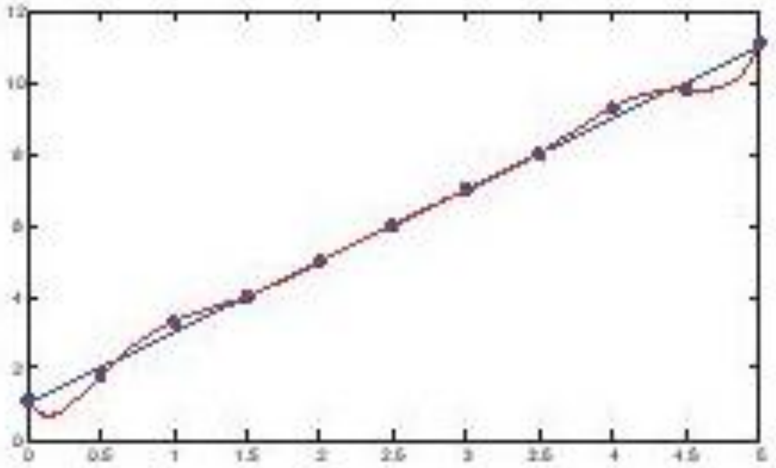
$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

Interpoliavimas daugianariais netinka:

2 pavyzdys: duomenys su triukšmu.

Tiesinis dėsnis:

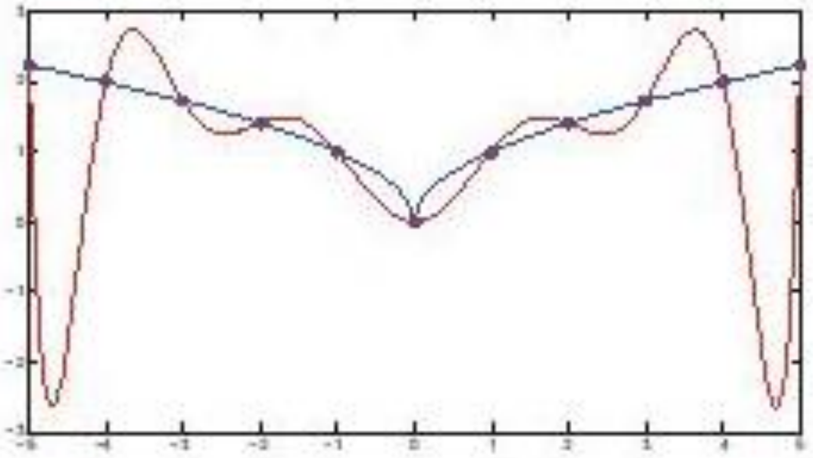
$$y = 2x + 1.$$



3 pavyzdys: netolydi išvestinė.

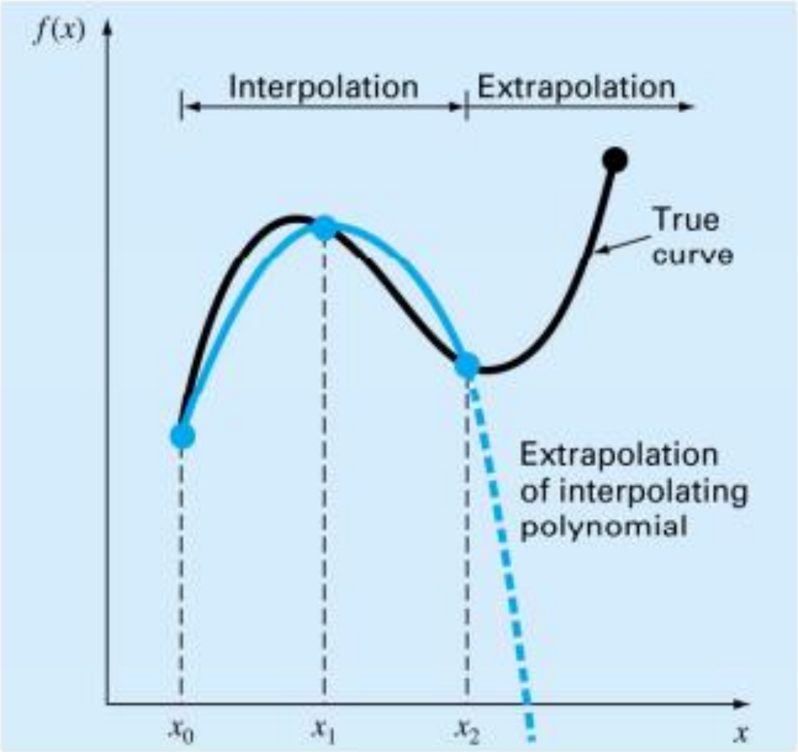
$f(x) = \sqrt{|x|}$

Interpoliavimas, kai $x =$
$-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$



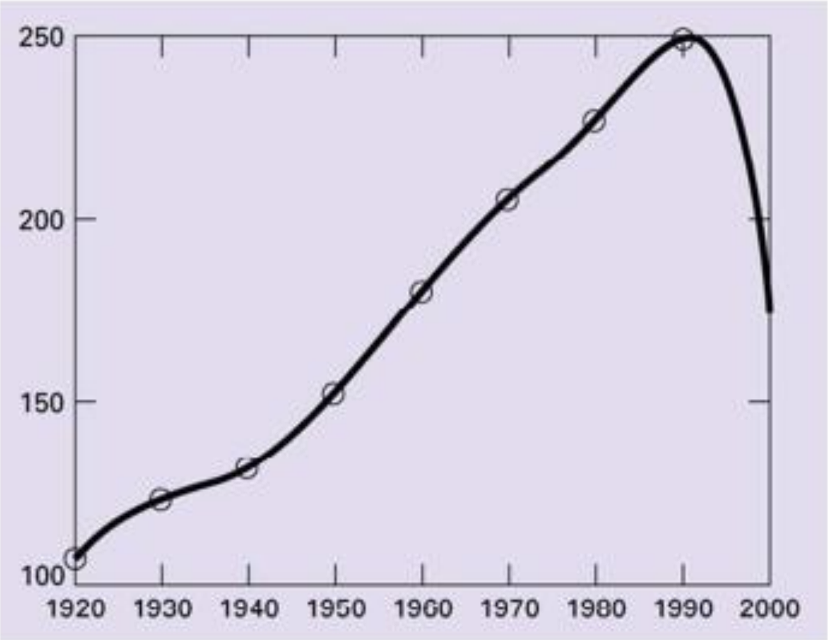
Ekstrapoliavimas

Ekstrapoliavimas – tai funkcijos nežinomų reikšmių nustatymas taške, nepriklausančiame žinomų taškų intervalui.



Ekstrapoliavimo trūkumai

- 7 laipsnio daugianaris sudarytas turint statistinius duomenis apie gyventojų skaičių JAV nuo 1920 iki 1990 (kas 10 metų).
- Taikykime jį JAV gyventojų skaičiui prognozuoti po 1990 metų.
- Ekstrapoliavimas nepagrįstas (skirtingai nuo interpoliavimo).



2006 m. JAV gyventojų skaičius perkopė 300 mln. žmonių.