Aristotle University of Thessaloniki
Department of Electrical and Computer Engineering

Minimization of a Convex Function of One Variable within a Given Interval

Eleni Daskalou

An assignment submitted as part of the coursework for the Optimization Techniques course at *Aristotle University of Thessaloniki*

November 1, 2024

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή **1**

1.1 Περιγραφή του Προβλήματος και Μεθοδολογία 1

1.2 Στόχοι της Εργασίας 1

2 Υπόβαθρο **2**

2.1 Μέθοδοι Αναζήτησης Ελαχίστου Χωρίς την Χρήση Παραγώγων 2

2.1.1 Μέθοδος της Διχοτόμου 2

2.1.2 Μέθοδος του Χρυσού Τομέα 4

2.1.3 Μέθδος Fibonacci 7

2.2 Μέθοδοι Αναζήτησης Με Χρήση Παραγώγων 9

2.2.1 Μέθόδος της Διχοτόμου με Χρήση Παραγώγου 9

3 Προσομοιώσεις **12**

3.1 Θέμα 1 12

3.2 Θέμα 2 19

3.3 Θέμα 3 24

3.4 Θέμα 4 29

4 Σύγκριση Μεθόδων **34**

4.1 Πλεονεκτήματα και Μειονεκτήματα 35

Κατάλογος Σχημάτων

3.1 Graph of $f_1(x) = (x-2)^2 + x * \ln(x+3) = y$ . . . 13
3.2 Graph of $f_2(x) = e^{-2x} + (x-2)^2 = y$ . . . 13
3.3 Graph of $f_3(x) = e^x * (x^3 - 1) + (x-1) * \sin(x) = y$ . . . 13
3.4 Graph of calculations of the objective function $f_i(x), i = 1, 2, 3.$, const l . . . 14
3.5 Graph of calculations of the objective function $f_i(x), i = 1, 2, 3.$, const ϵ . . . 15
3.6 Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_1(x)$, $l = 0.005$ . . . 16
3.7 Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_2(x)$, $l = 0.005$ . . . 16
3.8 Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_3(x)$, $l = 0.005$ . . . 16
3.9 Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_1(x)$, $l = 0.01$ . . . 17
3.10 Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_2(x)$, $l = 0.01$ . . . 17
3.11 Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_3(x)$, $l = 0.01$ . . . 17
3.12 Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_1(x)$, $l = 0.1$ . . . 18
3.13 Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_2(x)$, $l = 0.1$ . . . 18
3.14 Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_3(x)$, $l = 0.1$ . . . 18
3.15 Graph of calculations of the objective function $f_i(x), i = 1, 2, 3.$ . . . 19
3.16 Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_1(x)$, $l = 0.001$ . . . 20
3.17 Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_2(x)$, $l = 0.001$ . . . 20
3.18 Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_3(x)$, $l = 0.001$ . . . 21
3.19 Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_1(x)$, $l = 0.05$ . . . 21
3.20 Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_2(x)$, $l = 0.05$ . . . 21
3.21 Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_3(x)$, $l = 0.05$ . . . 22
3.22 Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_1(x)$, $l = 0.1$ . . . 22
3.23 Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_2(x)$, $l = 0.1$ . . . 22
3.24 Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_3(x)$, $l = 0.1$ . . . 23
3.25 Graph of calculations of the objective function $f_i(x), i = 1, 2, 3.$ . . . 24
3.26 Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_1(x)$, $l = 0.001$ . . . 25
3.27 Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_2(x)$, $l = 0.001$ . . . 25
3.28 Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_3(x)$, $l = 0.001$ . . . 26
3.29 Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_1(x)$, $l = 0.05$ . . . 26
3.30 Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_2(x)$, $l = 0.05$ . . . 26
3.31 Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_3(x)$, $l = 0.05$ . . . 27
3.32 Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_1(x)$, $l = 0.1$ . . . 27
3.33 Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_2(x)$, $l = 0.1$ . . . 27
3.34 Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_3(x)$, $l = 0.1$ . . . 28
3.35 Graph of calculations of the objective function $f_i(x), i = 1, 2, 3.$ . . . 29
3.36 Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_1(x)$, $l = 0.001$ . . . 30
3.37 Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_2(x)$, $l = 0.001$ . . . 30
3.38 Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_3(x)$, $l = 0.001$ . . . 31

3.39 Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_1(x)$, $l = 0.05$ 31
3.40 Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_2(x)$, $l = 0.05$ 31
3.41 Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_3(x)$, $l = 0.05$ 32
3.42 Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_1(x)$, $l = 0.1$ 32
3.43 Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_2(x)$, $l = 0.1$ 32
3.44 Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_3(x)$, $l = 0.1$ 33

4.1 Graph for Every Method (Calc. of Obj. Func.) 34

List of Algorithms

1 Algorithm 1: Bisection Method for Minimization 3
2 Algorithm 2: Golden Section Search for Minimization 6
3 Algorithm 3: Fibonacci Method for Minimization 8
4 Algorithm 4: Bisection Method with Derivatives for Minimization 10

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η εργασία αυτή επικεντρώνεται στην ελαχιστοποίηση κυρτών συναρτήσεων σε δοσμένα διαστήματα, εξετάζοντας και εφαρμόζοντας διάφορους αλγορίθμους βελτιστοποίησης. Το πρόβλημα που μελετάται σχετίζεται με την αποδοτική εύρεση ελαχίστων τιμών συναρτήσεων χωρίς τη χρήση παραγώγων, καθώς και με την αξιολόγηση των αλγορίθμων με χρήση παραγώγων.

Το πλαίσιο της εργασίας αφορά τη σύγκριση και την αξιολόγηση διαφόρων αλγορίθμων, όπως η Μέθοδος της Διχοτόμησης, η Μέθοδος του Χρυσού Τομέα και η Μέθοδος *Fibonacci*. Αυτοί οι αλγόριθμοι εφαρμόζονται σε κυρτές συναρτήσεις για την εύρεση του ελάχιστου σημείου εντός ενός διαστήματος, κάτι που έχει ευρείες εφαρμογές σε Αυτή η λέξη τομείς όπως η βελτιστοποίηση σε πολλαπλές διαστάσεις, τα μαθηματικά της μηχανικής, η επιχειρησιακή έρευνα και η οικονομία.

1.1 Περιγραφή του Προβλήματος και Μεθοδολογία

Το πρόβλημα που διερευνάται αφορά την εύρεση του ελάχιστου σημείου κυρτών συναρτήσεων σε ένα διάστημα $[a, b]$. Η μεθοδολογία που υιοθετείται περιλαμβάνει την υλοποίηση αλγορίθμων βελτιστοποίησης στο λογισμικό *MATLAB* και την ανάλυση των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από τις διαφορετικές μεθόδους.

1.2 Στόχοι της Εργασίας

Ο κύριος στόχος της εργασίας είναι η ανάπτυξη και η υλοποίηση των μεθόδων βελτιστοποίησης σε κυρτές συναρτήσεις και η αξιολόγηση της απόδοσής τους σε σύγκριση με εναλλακτικούς αλγορίθμους αναζήτησης. Επιπλέον, η μελέτη στοχεύει στην αξιολόγηση της αποδοτικότητας κάθε μεθόδου με κριτήρια τη σταθερότητα, την ταχύτητα σύγκλισης και την ακρίβεια των αποτελεσμάτων.

Κεφάλαιο 2

Υπόβαθρο

2.1 Μέθοδοι Αναζήτησης Ελαχίστου Χωρίς την Χρήση Παραγώγων

2.1.1 Μέθοδος της Διχοτόμου

Στόχος

Η ελαχιστοποίηση μιας συνάρτησης $f(x)$ σε ένα δοσμένο διάστημα $[a, b]$.

Περιγραφή της Μεθόδου

Η μέθοδος της Διχοτόμου ανήκει στις μεθόδους βελτιστοποίησης χωρίς τη χρήση παραγώγων. Στόχος της είναι ο σταδιακός περιορισμός του διαστήματος αναζήτησης μέχρι να βρεθεί ένα μικρότερο διάστημα που περιέχει το σημείο ελαχίστου x^*. Η μέθοδος βασίζεται στη σύγκριση των τιμών της συνάρτησης $f(x)$ σε δύο συμμετρικά σημεία εντός του διαστήματος $[a, b]$.

Βασικά Βήματα της Μεθόδου

Ορισμός δύο συμμετρικών σημείων: Δεδομένου του διαστήματος $[a, b]$, ορίζουμε δύο σημεία:

$$x_1 = \frac{a+b}{2} - \epsilon \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{a+b}{2} + \epsilon,$$

όπου ϵ είναι ένα μικρό θετικό σταθερό μέγεθος.
Υπολογισμός των τιμών της συνάρτησης: Υπολογίζουμε τις τιμές $f(x_1)$ και $f(x_2)$.
Σύγκριση τιμών:

- Αν $f(x_1) < f(x_2)$, τότε το σημείο ελαχίστου βρίσκεται στο διάστημα $[a, x_2]$. Ορίζουμε το νέο διάστημα ως $[a, x_2]$.
- Αν $f(x_1) > f(x_2)$, τότε το σημείο ελαχίστου βρίσκεται στο διάστημα $[x_1, b]$. Ορίζουμε το νέο διάστημα ως $[x_1, b]$.
- Αν $f(x_1) = f(x_2)$, τότε το σημείο ελαχίστου βρίσκεται στη μέση του διαστήματος, και το νέο διάστημα γίνεται $[x_1, x_2]$.

Επανάληψη της διαδικασίας: Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 1-3 έως ότου το μήκος του διαστήματος $[a, b]$ γίνει μικρότερο από ένα προκαθορισμένο όριο l. Δηλαδή, η διαδικασία τερματίζεται όταν:

$$b - a \leq l.$$

Η μέθοδος της Διχοτόμου βασίζεται στην ιδιότητα της μονοτονίας για σχεδόν κυρτές συναρτήσεις. Δηλαδή, αν η $f(x)$ είναι αυστηρά κυρτή στο διάστημα $[a, b]$, τότε η ελάχιστη τιμή θα βρίσκεται ανάμεσα στα δύο συμμετρικά σημεία που ορίζονται.

Έτσι, η μέθοδος βασίζεται στην επαναληπτική μείωση του διαστήματος αναζήτησης με βάση τις τιμές $f(x_1)$ και $f(x_2)$. Σε κάθε επανάληψη, το νέο διάστημα που προκύπτει πλησιάζει όλο και περισσότερο στο σημείο ελαχίστου x^*.

Αλγόριθμος της Μεθόδου

1. Ορισμός του αρχικού διαστήματος $[a, b]$.
2. Ορισμός ενός μικρού θετικού αριθμού ϵ και μιας ακρίβειας l.
3. Υπολογισμός των συμμετρικών σημείων:
$$x_{1k} = \frac{a_k + b_k}{2} - \epsilon, \quad x_{2k} = \frac{a_k + b_k}{2} + \epsilon.$$
4. Σύγκριση των τιμών $f(x_1k)$ και $f(x_2k)$.
5. Ορισμός του νέου διαστήματος ανάλογα με τη σύγκριση των τιμών:
   - Αν $f(x_{1k}) < f(x_{2k})$, το νέο διάστημα είναι $[a_k, x_{2k}]$.
   - Αν $f(x_{1k}) > f(x_{2k})$, το νέο διάστημα είναι $[x_{1k}, b_k]$.
   - Αν $f(x_{1k}) = f(x_{2k})$, το νέο διάστημα είναι $[x_{1k}, x_{2k}]$.
6. Έλεγχος σύγκλισης: Αν $b_k - a_k \leq l$, τερματίζουμε τη διαδικασία.

Algorithm 1: Bisection Method for Minimization

```
Input: Objective function f(x), interval [a, b], tolerance l, small constant ϵ > 0
Output: Approximate minimizer x*
Initialize iterations ← 1
while b − a ≥ l do
    x_1k ← (a+b)/2 − ϵ
    x_2k ← (a+b)/2 + ϵ
    if f(x_1k) < f(x_2k) then
        b ← x_2k
    else
        a ← x_1k
    end if
    iterations ← iterations + 1
end while
return (a + b)/2
```

Συμπεράσματα

Η μέθοδος της Διχοτόμου είναι αποτελεσματική για την εύρεση του ελαχίστου σε ένα διάστημα χωρίς τη χρήση παραγώγων. Είναι ιδανική για περιπτώσεις όπου η συνάρτηση δεν είναι διαφορίσιμη ή η παράγωγός της δεν είναι διαθέσιμη.

2.1.2 Μέθοδος του Χρυσού Τομέα

Στόχος

Η μέθοδος του Χρυσού Τομέα χρησιμοποιείται για την εύρεση του ελαχίστου μιας συνάρτησης $f(x)$ σε ένα δοσμένο διάστημα $[a_k, b_k]$, όπου το k αναφέρεται στον αριθμό της επανάληψης. Η μέθοδος βασίζεται στη διαίρεση του διαστήματος σύμφωνα με τη χρυσή αναλογία, που είναι περίπου ίση με $\gamma = 0.618$.

Περιγραφή της Μεθόδου

Η μέθοδος του Χρυσού Τομέα ελαχιστοποιεί μια συνάρτηση $f(x)$ σε ένα διάστημα $[a_k, b_k]$ προσδιορίζοντας δύο σημεία x_{1k} και x_{2k} εντός του διαστήματος. Ο στόχος είναι να μειώνεται σταδιακά το μήκος του διαστήματος έτσι ώστε να προσεγγίζεται το σημείο ελαχίστου x^*.

Βασικά Βήματα της Μεθόδου

Αρχικός ορισμός δύο σημείων x_{1k} και x_{2k} με βάση τη χρυσή αναλογία γ:

$$x_{1k} = a_k + (1-\gamma)(b_k - a_k), \quad x_{2k} = a_k + \gamma(b_k - a_k),$$

όπου $\gamma \approx 0.618$.
Υπολογισμός των τιμών της συνάρτησης $f(x_{1k})$ και $f(x_{2k})$.
Σύγκριση τιμών:

- Αν $f(x_{1k}) < f(x_{2k})$, τότε το σημείο ελαχίστου βρίσκεται στο διάστημα $[a_k, x_{2k}]$. Το νέο διάστημα γίνεται $[a_k, x_{2k}]$. Στη συνέχεια, ορίζουμε $x_{1(k+1)} = x_{2k}$, και υπολογίζουμε $x_{2(k+1)}$ ως:

$$x_{2(k+1)} = a_k + (1-\gamma)(b_k - x_{1(k+1)}).$$

- Αν $f(x_{1k}) > f(x_{2k})$, τότε το σημείο ελαχίστου βρίσκεται στο διάστημα $[x_{1k}, b_k]$. Το νέο διάστημα γίνεται $[x_{1k}, b_k]$. Στη συνέχεια, ορίζουμε $x_{2(k+1)} = x_{1k}$, και υπολογίζουμε $x_{1(k+1)}$ ως:

$$x_{1(k+1)} = a_k + \gamma(b_k - a_k).$$

- Αν $f(x_{1k}) = f(x_{2k})$, τότε το σημείο ελαχίστου βρίσκεται μεταξύ των σημείων x_{1k} και x_{2k}, και το νέο διάστημα γίνεται $[x_{1k}, x_{2k}]$.

Επανάληψη της διαδικασίας: Επαναλαμβάνουμε τα βήματα έως ότου το μήκος του διαστήματος $[a_k, b_k]$ γίνει μικρότερο από το προκαθορισμένο όριο l.

Η μέθοδος του Χρυσού Τομέα αξιοποιεί τη σχέση της χρυσής αναλογίας για να προσδιορίσει τα δύο σημεία x_{1k} και x_{2k} και να συγκρίνει τις τιμές $f(x_{1k})$ και $f(x_{2k})$. Η βασική ιδέα είναι η διαίρεση του διαστήματος σε δύο υπο-διαστήματα, τέτοια ώστε το λόγος των μηκών να ικανοποιεί τη χρυσή αναλογία:

$$\frac{b_{k+1} - a_{k+1}}{b_k - a_k} = \gamma.$$

Έτσι, η μέθοδος βασίζεται στην επαναληπτική μείωση του διαστήματος αναζήτησης με βάση τη σχέση της χρυσής τομής και την αξιολόγηση των τιμών $f(x_{1k})$ και $f(x_{2k})$. Η διαδικασία αυτή πλησιάζει όλο και περισσότερο το σημείο ελαχίστου x^*.

Αλγόριθμος της Μεθόδου

1. Ορισμός του αρχικού διαστήματος $[a_1, b_1]$.
2. Ορισμός μιας ακρίβειας l.
3. Υπολογισμός των σημείων x_{1k} και x_{2k}:

$$x_{1k} = a_k + (1 - \gamma)(b_k - a_k), \quad x_{2k} = a_k + \gamma(b_k - a_k).$$

4. Σύγκριση των τιμών $f(x_{1k})$ και $f(x_{2k})$.
5. Ορισμός του νέου διαστήματος ανάλογα με τη σύγκριση των τιμών:
   - Αν $f(x_{1k}) < f(x_{2k})$, το νέο διάστημα είναι $[a_k, x_{2k}]$. Ορίζουμε $x_{1(k+1)} = x_{2k}$, και υπολογίζουμε $x_{2(k+1)}$ ως:

$$x_{2(k+1)} = a_k + (1 - \gamma)(b_k - x_{1(k+1)}).$$

   - Αν $f(x_{1k}) > f(x_{2k})$, το νέο διάστημα είναι $[x_{1k}, b_k]$. Ορίζουμε $x_{2(k+1)} = x_{1k}$, και υπολογίζουμε $x_{1(k+1)}$ ως:

$$x_{1(k+1)} = a_k + \gamma(b_k - a_k).$$

   - Αν $f(x_{1k}) = f(x_{2k})$, το νέο διάστημα είναι $[x_{1k}, x_{2k}]$.
6. Έλεγχος σύγκλισης: Αν $b_k - a_k \leq l$, τερματίζουμε τη διαδικασία.

Συμπεράσματα

Η μέθοδος του Χρυσού Τομέα είναι μια αριθμητική μέθοδος βελτιστοποίησης που αξιοποιεί τη χρυσή αναλογία για τον σταδιακό περιορισμό του διαστήματος αναζήτησης. Χρησιμοποιείται κυρίως σε περιπτώσεις όπου η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής και κυρτή, και η παράγωγός της δεν είναι διαθέσιμη. Είναι αποτελεσματική για την εύρεση ελαχίστου σημείου χωρίς την ανάγκη υπολογισμού παραγώγων.

Algorithm 2: Golden Section Search for Minimization

Input: Objective function $f(x)$, interval $[a, b]$, tolerance l, golden ratio $\gamma = 0.618$
Output: Approximate minimizer x^*
Initialize $iterations \leftarrow 1$
$x_{1k} \leftarrow a + (1 - \gamma) \cdot (b - a)$
$x_{2k} \leftarrow a + \gamma \cdot (b - a)$
$f(x_{1k}), f(x_{2k})$ ▷ Evaluate function at the points
while $b - a \geq l$ **do**
  if $f(x_{1k}) > f(x_{2k})$ **then**
    $a \leftarrow x_{1k}$
    $x_{1k} \leftarrow x_{2k}$
    $x_{2k} \leftarrow a + \gamma \cdot (b - a)$
    $f(x_{1k}) \leftarrow f(x_{2k})$, evaluate $f(x_{2k})$
  else
    $b \leftarrow x_{2k}$
    $x_{2k} \leftarrow x_{1k}$
    $x_{1k} \leftarrow a + (1 - \gamma) \cdot (b - a)$
    $f(x_{2k}) \leftarrow f(x_{1k})$, evaluate $f(x_{1k})$
  end if
  $iterations \leftarrow iterations + 1$
end while
return $(a + b)/2$

2.1.3 Μέθοδος Fibonacci

Στόχος

Η μέθοδος Fibonacci χρησιμοποιείται για την εύρεση του ελαχίστου μιας συνάρτησης $f(x)$ σε ένα δοσμένο διάστημα $[a_k, b_k]$, όπου το k αντιπροσωπεύει τον αριθμό της επανάληψης. Η μέθοδος βασίζεται στη χρήση της ακολουθίας Φιβοναςςι για τον προσδιορισμό των σημείων εντός του διαστήματος, μειώνοντας σταδιακά το μήκος του διαστήματος αναζήτησης.

Περιγραφή της Μεθόδου

Η μέθοδος Fibonacci χρησιμοποιεί μια ακολουθία αριθμών F_n για να προσδιορίσει δύο σημεία x_{1k} και x_{2k} εντός του διαστήματος $[a_k, b_k]$, όπου F_n είναι ο n-οστός αριθμός Fibonacci και n ο συνολικός αριθμός επαναλήψεων. Η ακολουθία Fibonacci έχει οριστεί ως:

$$F_0 = F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Ο στόχος είναι να μειώνεται το μήκος του διαστήματος αναζήτησης με κάθε επανάληψη, διατηρώντας μια σχέση που βασίζεται στους αριθμούς Fibonacci.

Βασικά Βήματα της Μεθόδου

1. **Αρχικός ορισμός δύο σημείων** x_{1k} και x_{2k} ως εξής:

$$x_{1k} = a_k + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k), \quad x_{2k} = a_k + \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k),$$

   όπου k είναι η τρέχουσα επανάληψη και n ο συνολικός αριθμός επαναλήψεων.

2. **Υπολογισμός των τιμών της συνάρτησης** $f(x_{1k})$ και $f(x_{2k})$.

3. **Σύγκριση τιμών**:
   - Αν $f(x_{1k}) < f(x_{2k})$, τότε το σημείο ελαχίστου βρίσκεται στο διάστημα $[a_k, x_{2k}]$. Ορίζουμε το νέο διάστημα ως $[a_k, x_{2k}]$ και συνεχίζουμε την επόμενη επανάληψη.
   - Αν $f(x_{1k}) > f(x_{2k})$, τότε το σημείο ελαχίστου βρίσκεται στο διάστημα $[x_{1k}, b_k]$. Ορίζουμε το νέο διάστημα ως $[x_{1k}, b_k]$ και συνεχίζουμε την επόμενη επανάληψη.
   - Αν $f(x_{1k}) = f(x_{2k})$, τότε το σημείο ελαχίστου βρίσκεται μεταξύ των σημείων x_{1k} και x_{2k}, και το νέο διάστημα γίνεται $[x_{1k}, x_{2k}]$.

4. **Επανάληψη της διαδικασίας**: Συνεχίζουμε τα βήματα έως ότου $k = n - 1$ ή το μήκος του διαστήματος $[a_k, b_k]$ γίνει μικρότερο από ένα προκαθορισμένο όριο l.

Μαθηματική Διατύπωση

Η μέθοδος Fibonacci βασίζεται στη χρήση των αριθμών Fibonacci για τον υπολογισμό των σημείων x_{1k} και x_{2k}. Η σχέση για τον υπολογισμό των σημείων διασφαλίζει ότι ο λόγος των διαστημάτων ικανοποιεί την αναλογία Fibonacci. Με κάθε επανάληψη, τα σημεία ενημερώνονται με βάση την ακολουθία Fibonacci, διασφαλίζοντας ότι το νέο διάστημα που προκύπτει είναι μικρότερο από το προηγούμενο.

Αλγόριθμος της Μεθόδου

1. Ορισμός του αρχικού διαστήματος $[a_1, b_1]$ και επιλογή του αριθμού επαναλήψεων n με βάση την επιθυμητή ακρίβεια l.
2. Υπολογισμός των σημείων x_{1k} και x_{2k} ως εξής:
$$x_{1k} = a_1 + \frac{F_{n-2}}{F_n}(b_1 - a_1), \quad x_{2k} = a_1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}(b_1 - a_1).$$
3. Σύγκριση των τιμών $f(x_{1k})$ και $f(x_{2k})$.
4. Εάν $f(x_{1k}) < f(x_{2k})$, το νέο διάστημα γίνεται $[a_1, x_{2k}]$. Επαναπροσδιορισμός των σημείων $x_{1(k+1)}$ και $x_{2(k+1)}$ για την επόμενη επανάληψη.
5. Εάν $f(x_{1k}) > f(x_{2k})$, το νέο διάστημα γίνεται $[x_{1k}, b_1]$. Επαναπροσδιορισμός των σημείων $x_{1(k+1)}$ και $x_{2(k+1)}$ για την επόμενη επανάληψη.
6. Επανάληψη της διαδικασίας έως ότου ικανοποιηθεί η συνθήκη $k = n-1$ ή $b_k - a_k \le l$.

Algorithm 3: Fibonacci Method for Minimization

Input: Objective function $f(x)$, interval $[a, b]$, tolerance l, small positive ϵ
Output: Approximate minimizer x^*
Compute n such that $F(n) \ge \frac{b-a}{l}$
$x_{1k} \leftarrow a + \frac{F(n-2)}{F(n)}(b-a)$
$x_{2k} \leftarrow a + \frac{F(n-1)}{F(n)}(b-a)$
$f(x_{1k}), f(x_{2k})$ ▷ Evaluate function at the points
for $k = 1$ to $n-2$ **do**
    if $f(x_{1k}) > f(x_{2k})$ **then**
        $a \leftarrow x_{1k}$
        $x_{1k} \leftarrow x_{2k}$
        $x_{2k} \leftarrow a + \frac{F(n-k-1)}{F(n-k)}(b-a)$
        $f(x_{1k}) \leftarrow f(x_{2k})$, evaluate $f(x_{2k})$
    else
        $b \leftarrow x_{2k}$
        $x_{2k} \leftarrow x_{1k}$
        $x_{1k} \leftarrow a + \frac{F(n-k-2)}{F(n-k)}(b-a)$
        $f(x_{2k}) \leftarrow f(x_{1k})$, evaluate $f(x_{1k})$
    end if
end for
if $f(x_{1k}) > f(x_{1k} + \epsilon)$ **then**
    $a \leftarrow x_{1k}$
else
    $b \leftarrow x_{1k} + \epsilon$
end if
return $(a+b)/2$

Συμπεράσματα

Η μέθοδος Fibonacci είναι αποτελεσματική για την εύρεση του ελαχίστου μιας συνάρτησης σε ένα διάστημα χωρίς τη χρήση παραγώγων. Η ακολουθία Fibonacci εξασφαλίζει μια ισορροπημένη διαίρεση του διαστήματος σε κάθε επανάληψη και είναι ιδιαίτερα χρήσιμη όταν η παράγωγος της συνάρτησης δεν είναι διαθέσιμη ή όταν η συνάρτηση δεν είναι διαφορίσιμη.

2.2 Μέθοδοι Αναζήτησης Με Χρήση Παραγώγων

2.2.1 Μέθόδος της Διχοτόμου με Χρήση Παραγώγου

Στόχος:

Η μέθοδος της Διχοτόμου με χρήση παραγώγου στοχεύει στην εύρεση του ελαχίστου μιας συνάρτησης $f(x)$ σε ένα δοσμένο διάστημα $[a_k, b_k]$. Βασίζεται στον υπολογισμό της παραγώγου της συνάρτησης

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_k},$$

με σκοπό την κατεύθυνση της αναζήτησης προς το σημείο ελαχίστου.

Περιγραφή της Μεθόδου:

Η μέθοδος αυτή αξιοποιεί την πληροφορία της παραγώγου $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_k}$ για να προσδιορίσει αν το σημείο ελαχίστου βρίσκεται εντός ενός υποδιαστήματος. Η βασική ιδέα είναι η αξιολόγηση των τιμών της παραγώγου στα σημεία του διαστήματος και η επαναληπτική μείωση του διαστήματος αναζήτησης.

Βασικά Βήματα της Μεθόδου:

1. **Αρχικός ορισμός του διαστήματος** $[a_k, b_k]$.
2. **Υπολογισμός σημείου** x_k εντός του διαστήματος $[a_k, b_k]$ ως το μέσο του διαστήματος:
$$x_k = \frac{a_k + b_k}{2}.$$
3. **Υπολογισμός της παραγώγου** $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_k}$.
4. **Σύγκριση των τιμών της παραγώγου**:
   (α′) Αν $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_k} = 0$, τότε το x_k είναι σημείο ελαχίστου.
   (β′) Αν $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_k} > 0$, τότε το σημείο ελαχίστου βρίσκεται αριστερά του x_k. Το νέο διάστημα γίνεται $[a_k, x_k]$.
   (γ′) Αν $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_k} < 0$, τότε το σημείο ελαχίστου βρίσκεται δεξιά του x_k. Το νέο διάστημα γίνεται $[x_k, b_k]$.
5. **Επανάληψη της διαδικασίας**: Συνεχίζουμε τα βήματα έως ότου το μήκος του διαστήματος $[a_k, b_k]$ γίνει μικρότερο από ένα προκαθορισμένο όριο l.

Μαθηματική Διατύπωση:

Η μέθοδος της Διχοτόμου με χρήση παραγώγου βασίζεται στον υπολογισμό της παραγώγου

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_k}$$

στα σημεία x_k. Η βασική ιδέα είναι να χρησιμοποιήσουμε την πληροφορία της παραγώγου για να κατευθύνουμε την αναζήτηση προς το σημείο όπου η παράγωγος μηδενίζεται, δηλαδή το σημείο ελαχίστου x^*.

Αλγόριθμος της Μεθόδου:

1. Ορισμός του αρχικού διαστήματος $[a_1, b_1]$.
2. Υπολογισμός του σημείου x_k ως:
$$x_k = \frac{a_k + b_k}{2}.$$
3. Υπολογισμός της παραγώγου $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_k}$.
4. Σύγκριση των τιμών της παραγώγου:
   (α′) Αν $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_k} = 0$, το x_k είναι το σημείο ελαχίστου.
   (β′) Αν $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_k} > 0$, το νέο διάστημα γίνεται $[a_k, x_k]$.
   (γ′) Αν $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_k} < 0$, το νέο διάστημα γίνεται $[x_k, b_k]$.
5. Επανάληψη της διαδικασίας έως ότου $b_k - a_k \leq l$.

Algorithm 4: Bisection Method with Derivatives for Minimization

Input: Objective function $f(x)$, derivative $f'(x)$, interval $[a, b]$, tolerance l
Output: Approximate minimizer x^*
while $b - a \geq l$ **do**
  $x_k \leftarrow \frac{a+b}{2}$
  Compute $f'(x_k)$ ▷ Evaluate the derivative at midpoint
  if $f'(x_k) > 0$ **then**
    $b \leftarrow x_k$
  else if $f'(x_k) < 0$ **then**
    $a \leftarrow x_k$
  else
    $a \leftarrow x_k$
    $b \leftarrow x_k$
  end if
end while
return $(a + b)/2$

Συμπεράσματα:

Η μέθοδος της Διχοτόμου με χρήση παραγώγου είναι αποτελεσματική για την εύρεση του ελαχίστου μιας συνάρτησης όταν η παράγωγός της

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_k}$$

είναι διαθέσιμη και μπορεί να υπολογιστεί με ακρίβεια. Η χρήση της παραγώγου επιτρέπει τον προσδιορισμό της κατεύθυνσης προς το σημείο ελαχίστου και την πιο γρήγορη σύγκλιση σε σχέση με μεθόδους που δεν χρησιμοποιούν πληροφορία παραγώγου.

Κεφάλαιο 3

Προσομοιώσεις

3.1 Θέμα 1

Εκφώνηση

Υλοποιήστε στο Matlab τη **μέθοδο της Διχοτόμου** και εφαρμόστε τη στις συναρτήσεις $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$, όπου

$$f_1(x) = (x-2)^2 + x * \ln(x+3),$$

$$f_2(x) = e^{-2x} + (x-2)^2,$$

$$f_3(x) = e^x * (x^3 - 1) + (x-1) * \sin(x)$$

Δοσμένου του αρχικού διαστήματος $[-1, 3]$.

- Κρατώντας σταθερό το τελικό εύρος αναζήτησης $l = 0.01$ μελετήστε τη μεταβολή των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης $f_i(x)$, $i = 1, 2, 3$ (δηλαδή τον συνολικό αριθμό που χρειάστηκε να υπολογιστεί η $f_i(x)$, για τις δεδομένες τιμές των l και ϵ, μέχρι να τερματίσει ο αλγόριθμος), καθώς μεταβάλλουμε τη σταθερά $\epsilon > 0$ (απόσταση από τη διχοτόμο). Δημιουργήστε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις από τις τιμές που προκύπτουν για τις τρεις συναρτήσεις.

- Κρατώντας σταθερό το $\epsilon = 0.001$ μελετήστε τη μεταβολή των υπολογισμών της $f_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, καθώς μεταβάλλουμε το l. Δημιουργήστε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις από τις τιμές που προκύπτουν για τις τρεις συναρτήσεις.

- Επιπλέον, σε τρία διαγράμματα, ένα για κάθε συνάρτηση, σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των άκρων του διαστήματος $[a_k, b_k]$ συναρτήσει του δείκτη επαναλήψεων k, δηλαδή (k, a_k) και (k, b_k), για διάφορες τιμές του τελικού εύρους αναζήτησης l.

Προσομοίωση Σε Matlab

Παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της προσομοίωσης του Θέματος 1, στο περιβάλλον *Matlab*, και για τις 3 δοθείσες συναρτήσεις.

Δημιουργώντας τις παρακάτω καμπύλες των συναρτήσεων, επιβεβαιώνουμε πως είναι όλες κυρτές στο δοθέν διάστημα που κάνουμε τη μελέτη.

Figure 3.1: Graph of $f_1(x) = (x-2)^2 + x * \ln(x+3) = y$

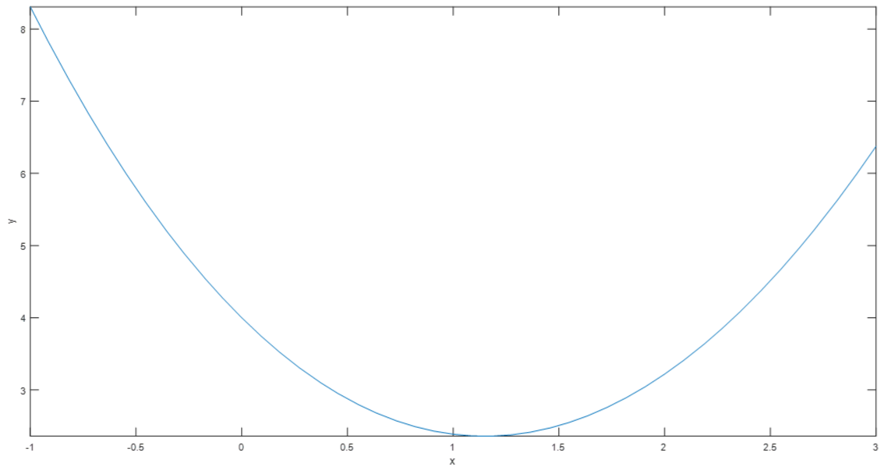


Figure 3.2: Graph of $f_2(x) = e^{-2x} + (x-2)^2 = y$

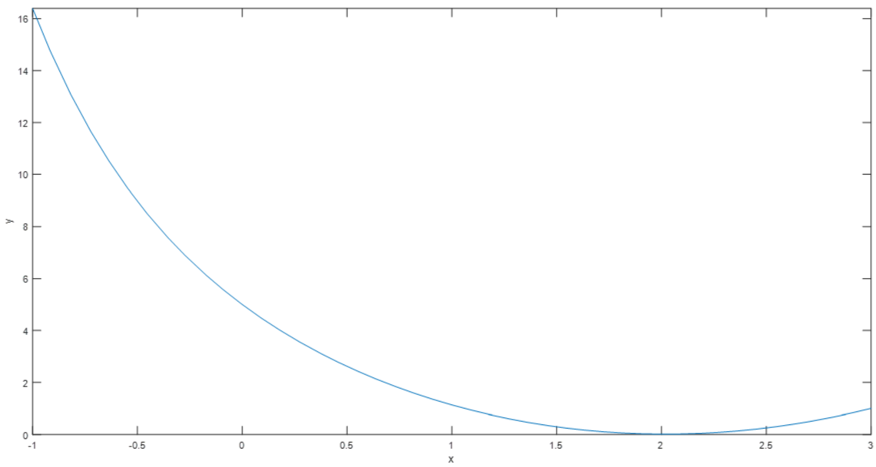
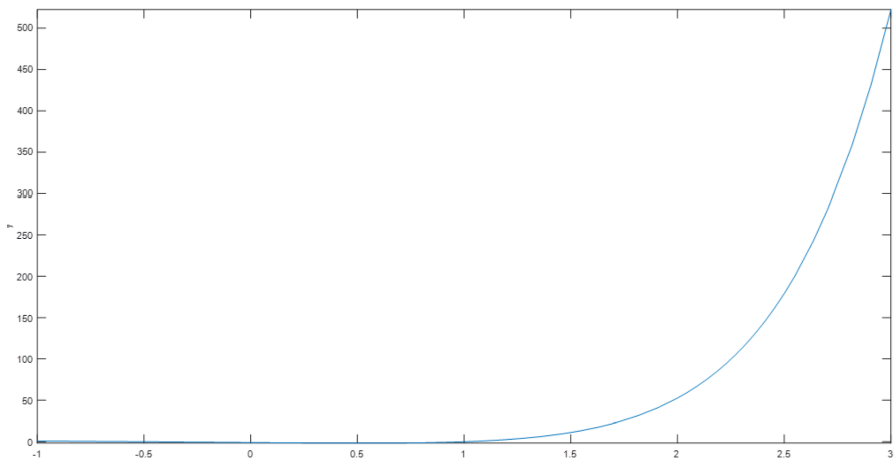


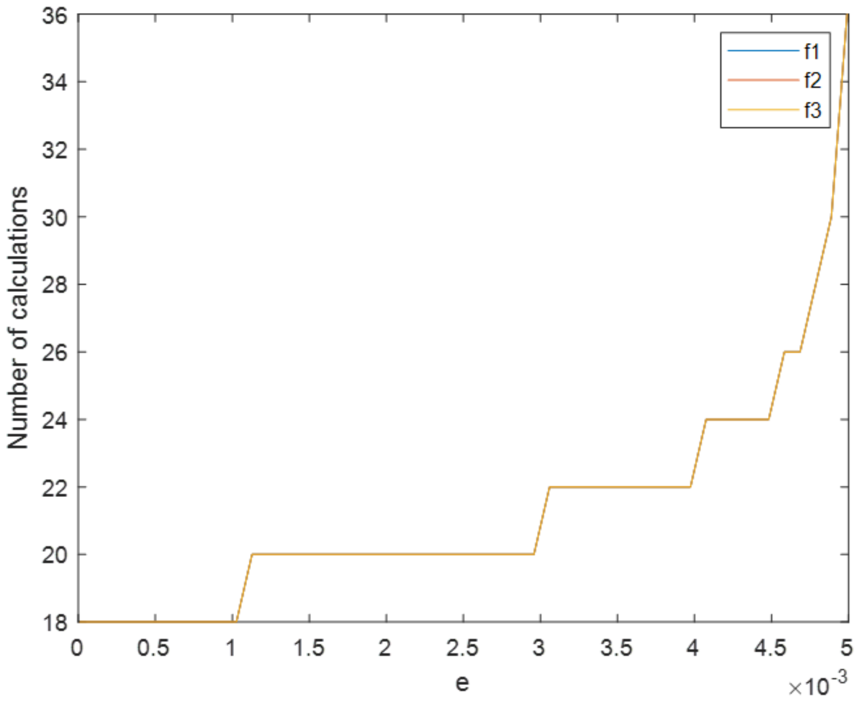
Figure 3.3: Graph of $f_3(x) = e^x * (x^3 - 1) + (x-1) * \sin(x) = y$



Για την μελέτη αυτή, έχει υλοποιηθεί ο αλγόριθμος της Μεθόδου της Διχοτόμου, όπως παρουσιάζεται θεωρητικά στο Κεφ. 2, ο κώδικας του οποίου περιέχεται στο αρχείο Alg_Of_Bisection.m.

Αρχικά εξετάζουμε την μεταβολή των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης για σταθερό εύρος αναζήτησης $l = 0.01$ καθώς μεταβάλλουμε τη σταθερά $\epsilon > 0$ (απόσταση από τη διχοτόμο). Στις παρακάτω γραφικές παραστάσεις το ϵ έχει οριστεί στο διάστημα $[0.00001, \frac{l}{2}] = [0.00001, 0.0049]$. Σημειώνεται, ότι για τιμές $\epsilon \geq \frac{l}{2}$ ο αλγόριθμος δεν τερματίζει.

Figure 3.4: Graph of calculations of the objective function $f_i(x), i = 1, 2, 3.$, const l



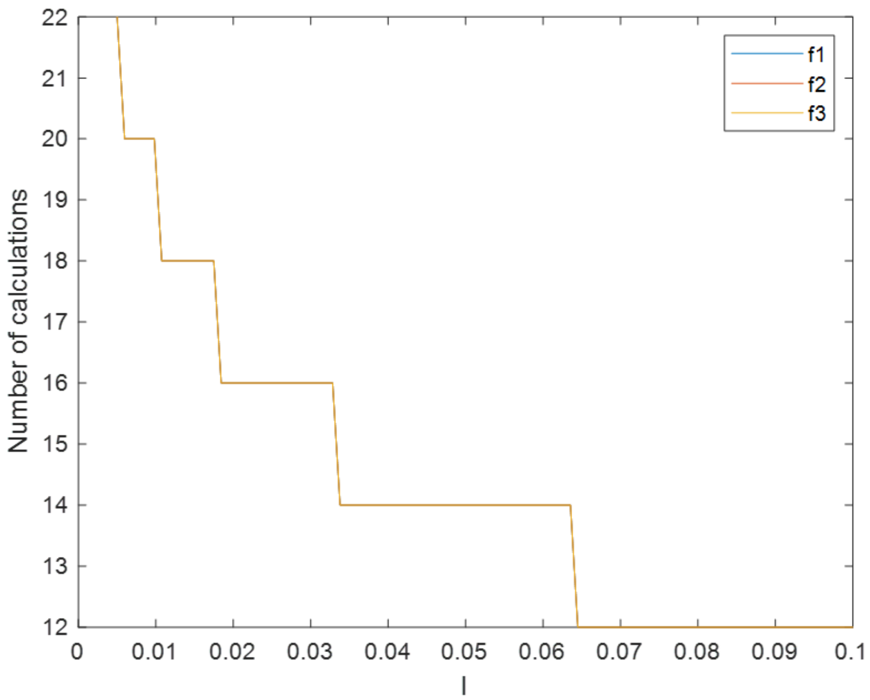
Παρατηρήσεις:

Παρατηρείται σημαντική αύξηση του αριθμού των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης καθώς αυξάνεται η απόσταση από τη διχοτόμο ϵ. Επιβεβαιώνεται, δηλαδή, η θεωρητική ανάλυση της μεθόδου στην οποία αναφέρεται πως για να συγκλίνει η μέθοδος της διχοτόμου θα πρέπει να έχουμε $\epsilon \leq \frac{l}{2}$. Οι ταλαντώσεις γύρω από το ελάχιστο $x*$ της συνάρτησης είναι εμφανείς καθώς το ϵ ξεκινά να αποκτά μεγαλύτερες τιμές, εώς ότου να έχουμε σύγκλιση.

Προφανώς οι γραφικές παραστάσεις και για τις τρεις συναρτήσεις ταυτίζονται, και το γράφημα φαίνεται ως ένα, αφού έχουμε ακριβώς ίδιες παραμέτρους που θα μπορούσαν να επηρεάσουν τους υπολογισμούς, δηλάδη έχουμε ίδιο διάστημα αναζήτησης, ίδιο l και ϵ, κάθε φορά.

Στο παρακάτω γράφημα παρουσιάζεται το γράφημα της μεταβολής των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης που προσομοιώθηκε για σταθερό $\epsilon = 0.001$ και μεταβαλλόμενο l, το οποίο βέβαια ανήκει στο διάστημα $[0.005, 0.1]$, τηρώντας έτσι τη συνθήκη σύγκλισης της μεθόδου που έχει ήδη αναφερθεί.

Figure 3.5: Graph of calculations of the objective function $f_i(x), i = 1, 2, 3.$, const ϵ



Παρατηρήσεις:

Επιλέγοντας $l = 0.05$ έχουμε $n = 14$ υπολογισμούς της αντικειμενικής συνάρτησης. Με απλή αριθμητική αντικατάσταση επιβεβαιώνεται ότι το n είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος που ικανοποιεί την σχέση $0.5^{\frac{n}{2}} \leq \frac{l}{b_1 - a_1}$ $(0.0078 < 0.0125$, ισχύει$)$.

Εν αντιθέσει με την προηγούμενη μελέτη, παρατηρείται σημαντική μείωση του αριθμού των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης καθώς αυξάνεται το εύρος του διαστήματος l, κάτι το οποίο ήταν αναμενόμενο καθώς αυξάνοντας το l μειώνουμε τους περιορισμούς της αναζήτησης που χρειάζεται να γίνει. Οι γραφικές παραστάσεις και για τις τρεις συναρτήσεις και πάλι ταυτίζονται, για τους ίδιους λόγους που αναφέρθηκαν προηγουμένως.

Στο τέλος της εξέτασης της συγκεκριμένης μεθόδου παρουσιάζονται, σε τρία διαγράμματα, ένα για κάθε συνάρτηση, γραφικές παραστάσεις των άκρων του διαστήματος συναρτήσει του δείκτη επαναλήψεων k, για διάφορες τιμές του τελικού εύρους αναζήτησης l.

Το l παίρνει τις τιμές $0.005, 0.01, 0.1$, (το ϵ παραμένει σταθερό στην τιμή 0.0001).

Είναι εφμανές ότι για μικρότερες τιμές του l, η σύγκλιση είναι γρηγορότερη.

Figure 3.6: Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_1(x)$, $l = 0.005$

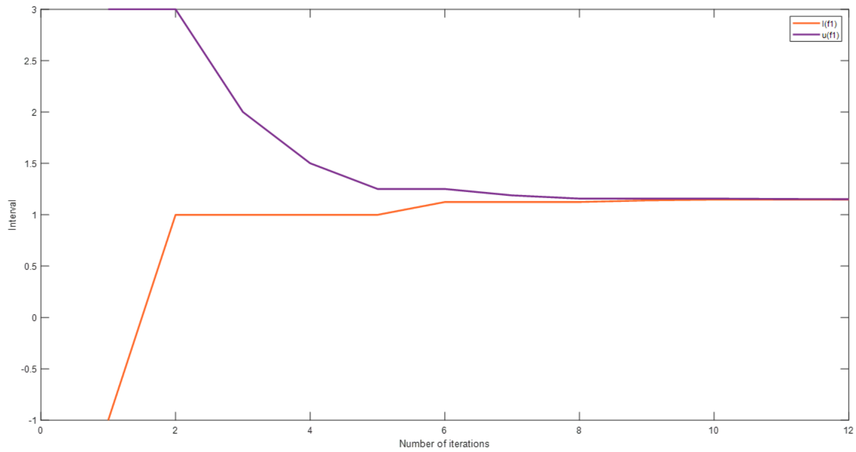


Figure 3.7: Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_2(x)$, $l = 0.005$

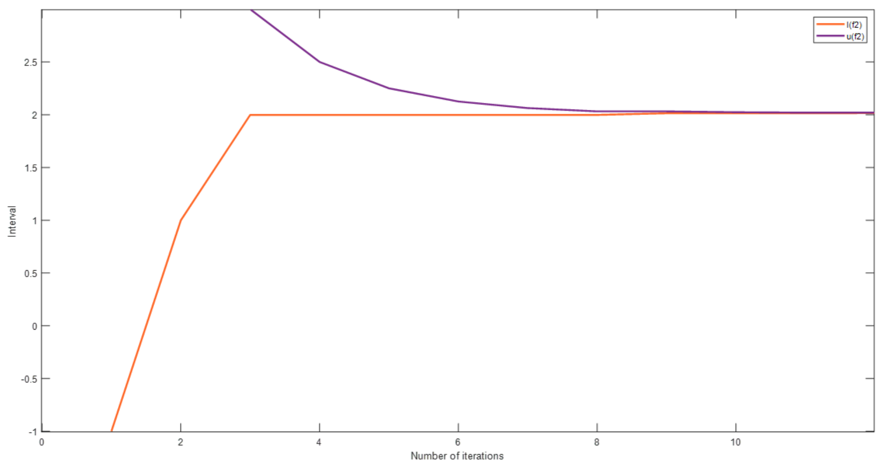


Figure 3.8: Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_3(x)$, $l = 0.005$

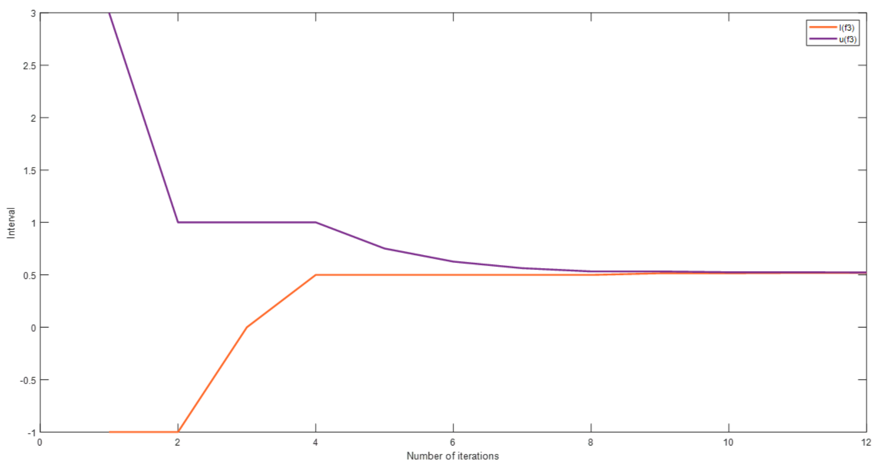


Figure 3.9: Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_1(x)$, $l = 0.01$

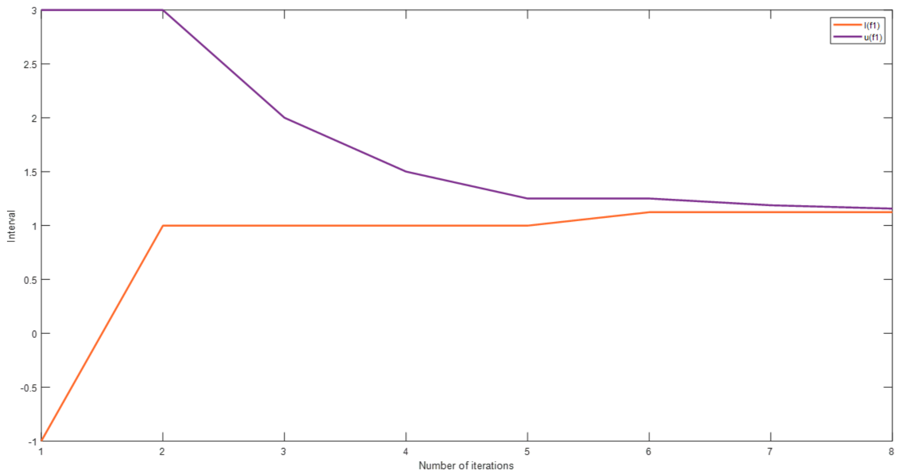


Figure 3.10: Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_2(x)$, $l = 0.01$

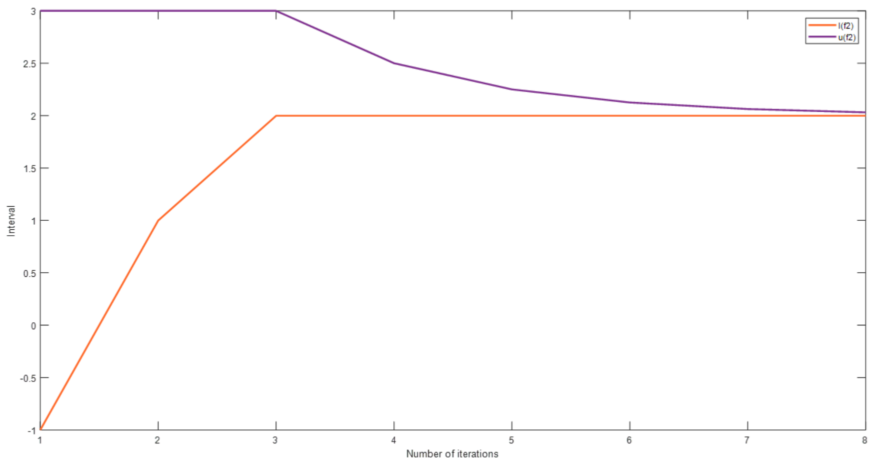


Figure 3.11: Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_3(x)$, $l = 0.01$

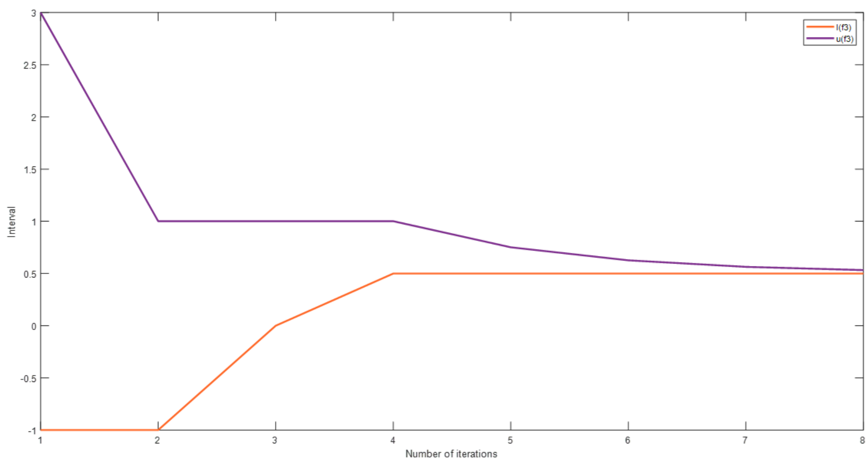


Figure 3.12: Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_1(x)$, $l = 0.1$

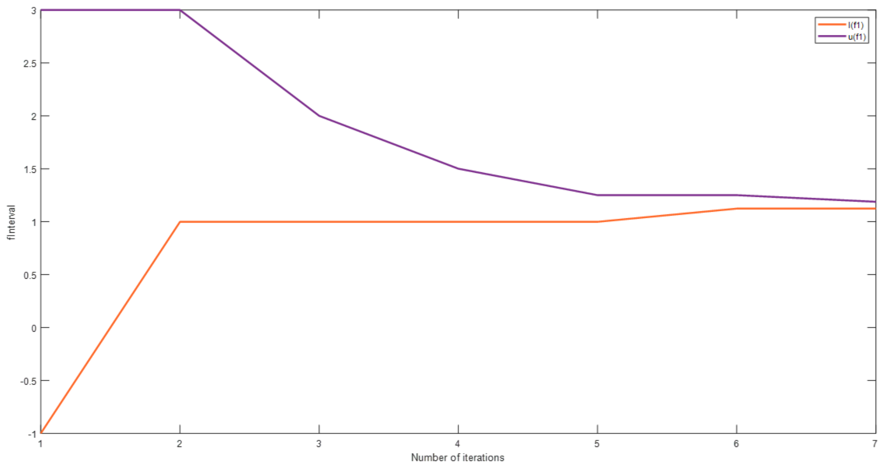


Figure 3.13: Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_2(x)$, $l = 0.1$

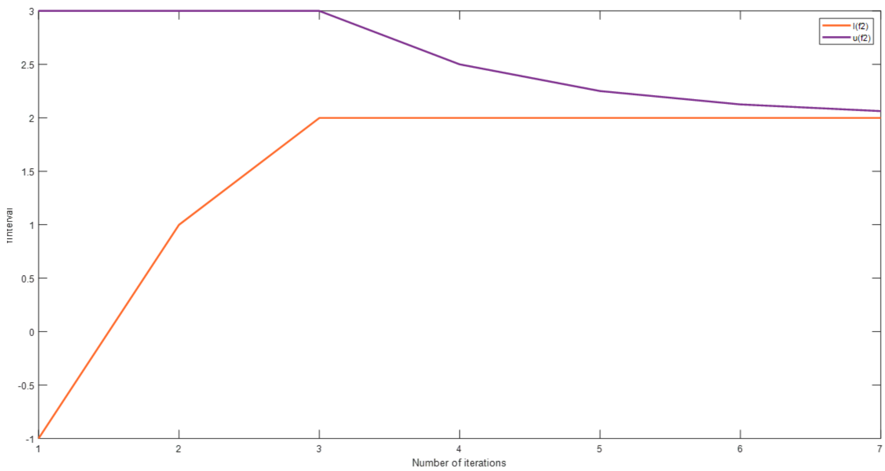
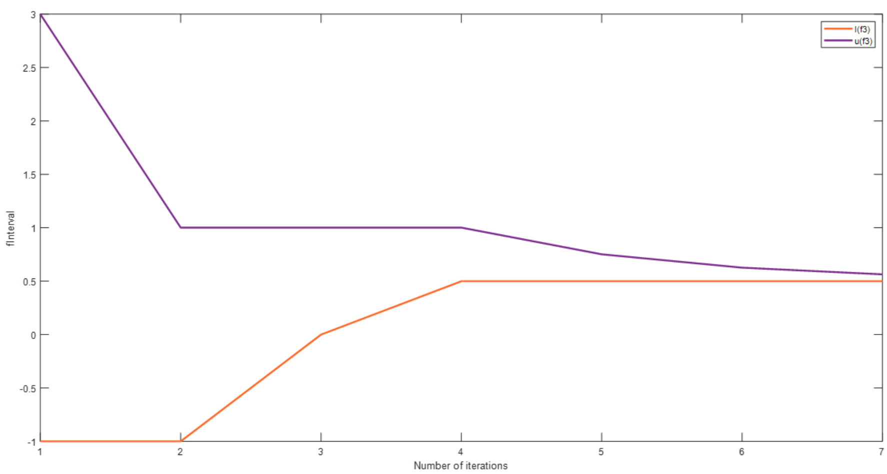


Figure 3.14: Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_3(x)$, $l = 0.1$



3.2 Θέμα 2

Εκφώνηση

Υλοποιήστε στο *Matlab* τη **μέθοδο του Χρυσού Τομέα** και εφαρμόστε τη στις συναρτήσεις $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, όπου

$$f_1(x) = (x-2)^2 + x * \ln(x+3),$$

$$f_2(x) = e^{-2x} + (x-2)^2,$$

$$f_3(x) = e^x * (x^3 - 1) + (x-1) * \sin(x)$$

- Μελετήστε τη μεταβολή των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης $f_i(x), i = 1, 2, 3$ (δηλαδή τον συνολικό αριθμό που πρέπει να υπολογιστεί η $f_i(x)$ μέχρι να τερματίσει ο αλγόριθμος), καθώς μεταβάλλουμε το τελικό εύρος αναζήτησης l. Δημιουργήστε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις από τις τιμές που προκύπτουν για τις τρεις συναρτήσεις.

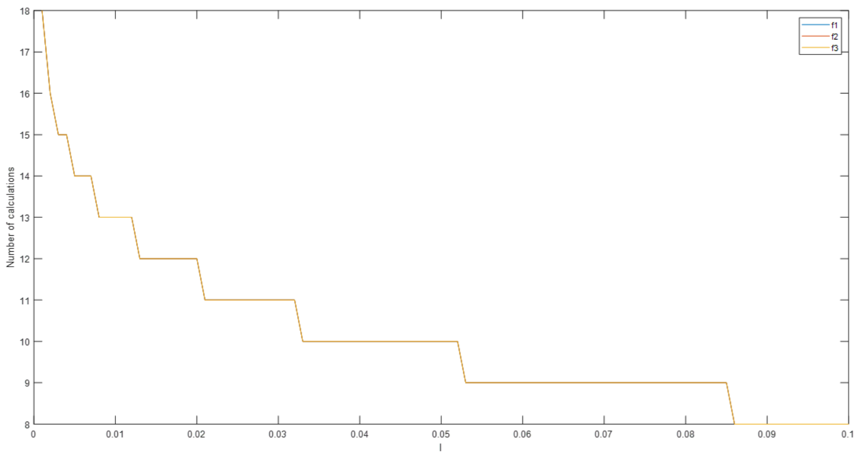
- Επιπλέον, σε τρία διαγράμματα, ένα για κάθε συνάρτηση, σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των άκρων του διαστήματος $[a_k, b_k]$ συναρτήσει του δείκτη επαναλήψεων k, δηλαδή (k, a_k) και (k, b_k), για διάφορες τιμές του τελικού εύρους αναζήτησης l.

Προσομοίωση Σε Matlab

Για την μελέτη αυτή, έχει υλοποιηθεί ο αλγόριθμος της Μεθόδου του Χρυσού Τομέα, όπως παρουσιάζεται θεωρητικά στο Κεφ. 2, ο κώδικας του οποίου περιέχεται στο αρχείο Alg_Of_Golden_Section.m.

Αρχικά εξετάζουμε την μεταβολή των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης καθώς μεταβάλλουμε το τελικό εύρος αναζήτησης l. Ισχύει ότι $\gamma = 0.618$, και επιλέγουμε $l \in [0.001, 0.1]$.

Figure 3.15: Graph of calculations of the objective function $f_i(x), i = 1, 2, 3$.



Παρατηρήσεις:

Επιλέγοντας $l = 0.05$ έχουμε $n = 10$ υπολογισμούς της αντικειμενικής συνάρτησης. Με απλή αριθμητική αντικατάσταση επιβεβαιώνεται ότι το n είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος που ικανοποιεί την σχέση $0.618^{n-1} \leq \frac{l}{b_1 - a_1}$ $(0.0125 < 0.0131$, ισχύει$)$.

Παρατηρείται σημαντική μείωση του αριθμού των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης καθώς αυξάνεται το εύρος του διαστήματος l, κάτι το οποίο ήταν αναμενόμενο καθώς αυξάνοντας το l μειώνουμε τους περιορισμούς της αναζήτησης που χρειάζεται να γίνει. Οι γραφικές παραστάσεις και για τις τρεις συναρτήσεις και πάλι ταυτίζονται, για τους ίδιους λόγους που αναφέρθηκαν προηγουμένως.

Στο τέλος της εξέτασης της συγκεκριμένης μεθόδου παρουσιάζονται, σε τρία διαγράμματα, ένα για κάθε συνάρτηση, γραφικές παραστάσεις των άκρων του διαστήματος συναρτήσει του δείκτη επαναλήψεων k, για διάφορες τιμές του τελικού εύρους αναζήτησης l.

Το l παίρνει τις τιμές $0.001, 0.05, 0.1$.

Figure 3.16: Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_1(x)$, $l = 0.001$

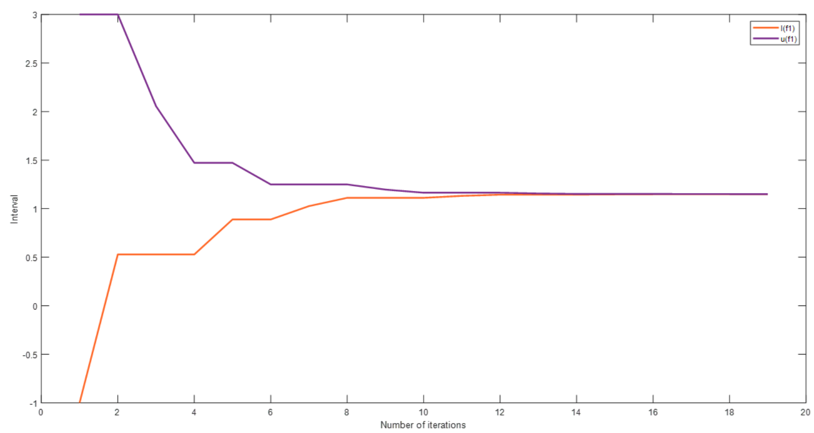


Figure 3.17: Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_2(x)$, $l = 0.001$

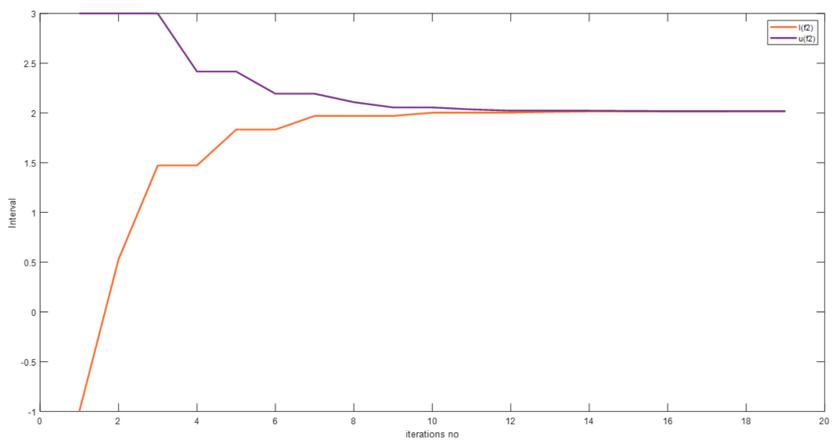


Figure 3.18: Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_3(x)$, $l = 0.001$

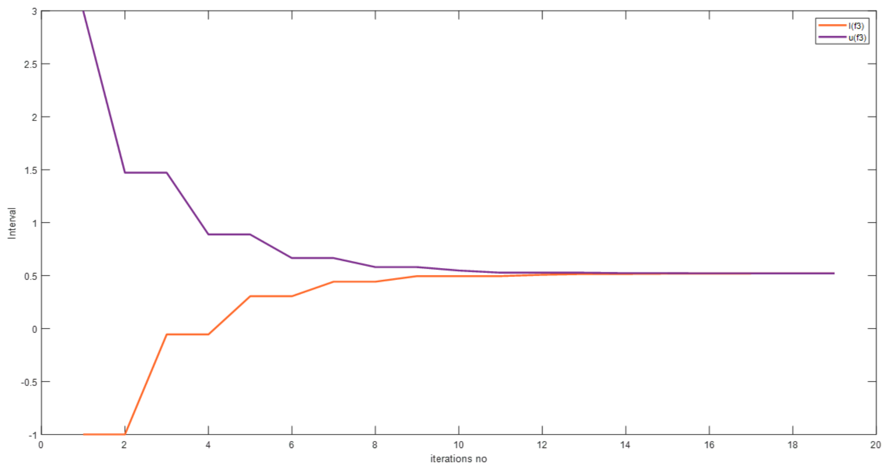


Figure 3.19: Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_1(x)$, $l = 0.05$

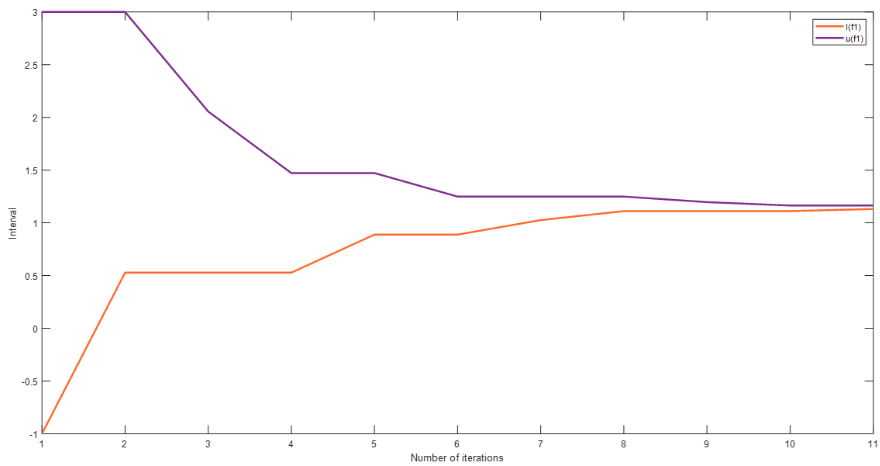


Figure 3.20: Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_2(x)$, $l = 0.05$

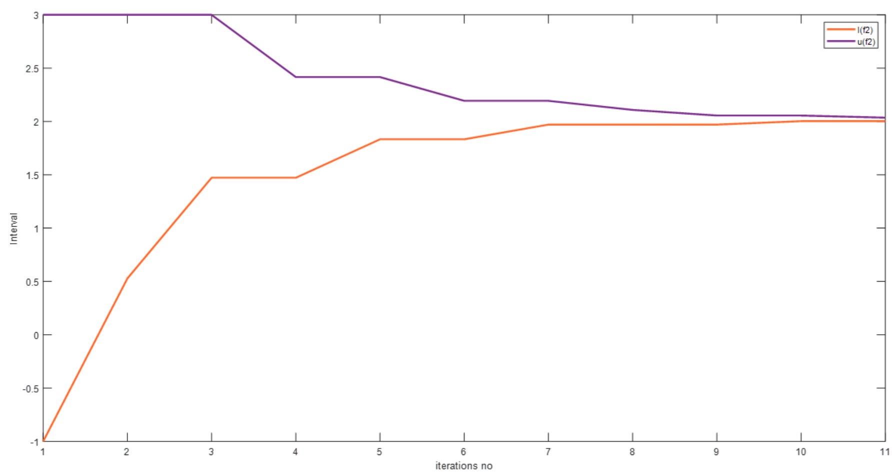


Figure 3.21: Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_3(x)$, $l = 0.05$

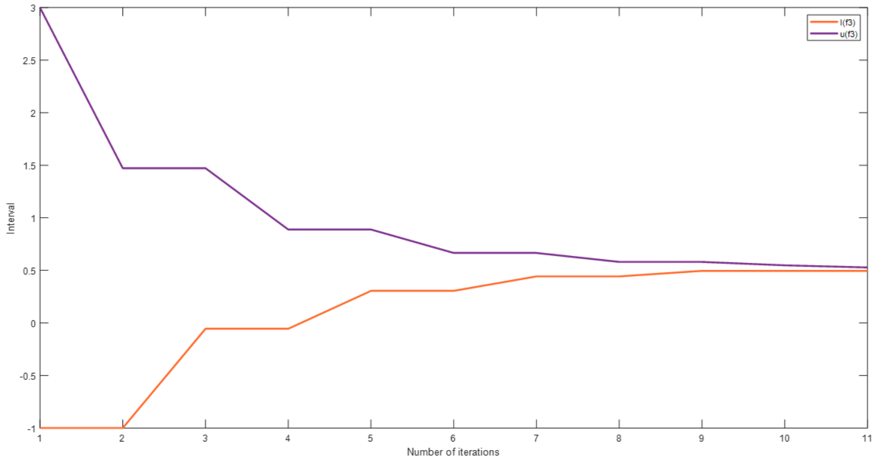


Figure 3.22: Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_1(x)$, $l = 0.1$

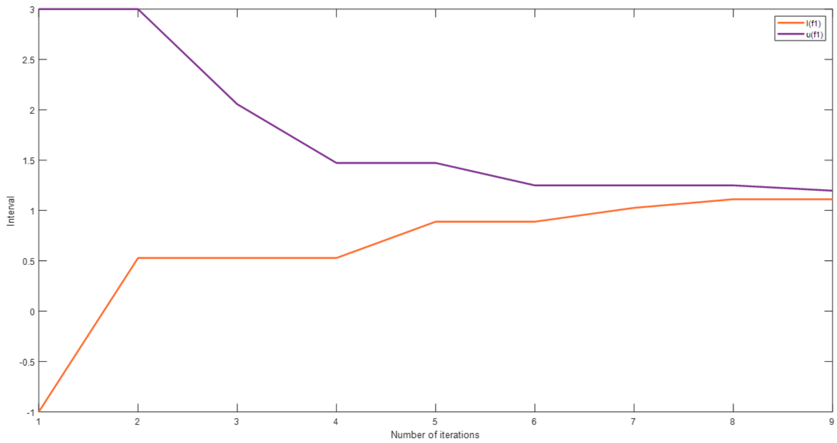


Figure 3.23: Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_2(x)$, $l = 0.1$

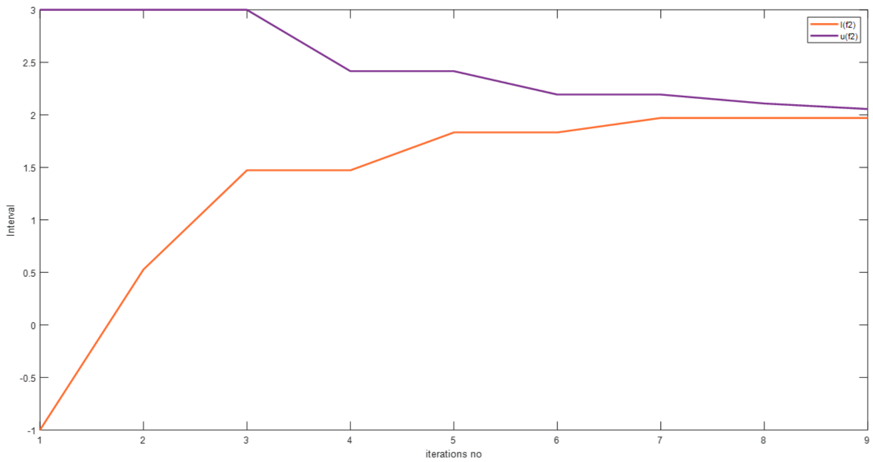
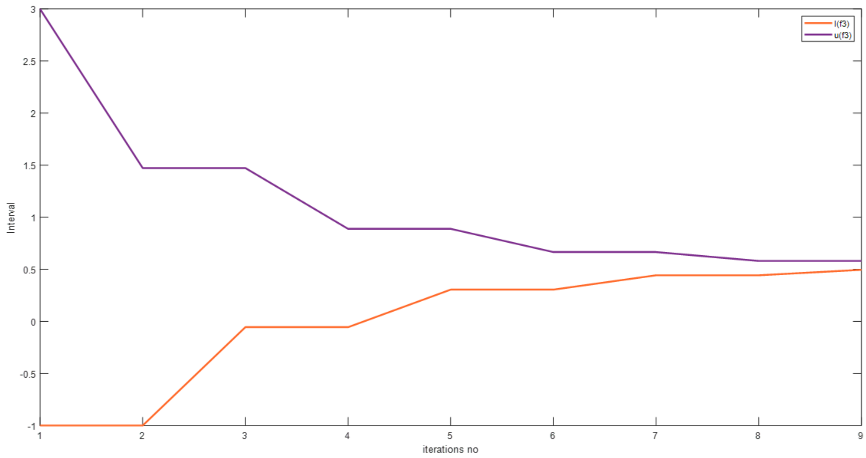


Figure 3.24: Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_3(x)$, $l = 0.1$



3.3 Θέμα 3

Εκφώνηση

Υλοποιήστε στο *Matlab* τη **μέθοδο Fibonacci** και εφαρμόστε τη στις συναρτήσεις $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, όπου,

$$f_1(x) = (x-2)^2 + x * \ln(x+3),$$

$$f_2(x) = e^{-2x} + (x-2)^2,$$

$$f_3(x) = e^x * (x^3 - 1) + (x-1) * \sin(x)$$

- Μελετήστε τη μεταβολή των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης $f_i(x)$, $i = 1, 2, 3$ (δηλαδή τον συνολικό αριθμό που πρέπει να υπολογιστεί η $f_i(x)$ μέχρι να τερματίσει ο αλγόριθμος), καθώς μεταβάλλουμε το τελικό εύρος αναζήτησης l. Δημιουργήστε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις από τις τιμές που προκύπτουν για τις τρεις συναρτήσεις.

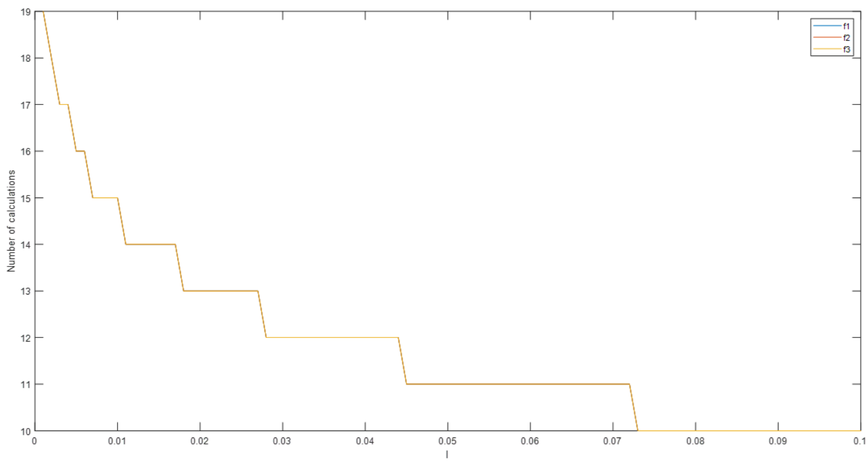
- Επιπλέον, σε τρία διαγράμματα, ένα για κάθε συνάρτηση, σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των άκρων του διαστήματος $[a_k, b_k]$ συναρτήσει του δείκτη επαναλήψεων k, δηλαδή (k, a_k) και (k, b_k), για διάφορες τιμές του τελικού εύρους αναζήτησης l.

Προσομοίωση Σε Matlab

Για την μελέτη αυτή, έχει υλοποιηθεί ο αλγόριθμος της Μεθόδου Fibonacci, όπως παρουσιάζεται θεωρητικά στο Κεφ. 2, ο κώδικας του οποίου περιέχεται στο αρχείο Alg_Of_Fibonacci.m.

Αρχικά εξετάζουμε την μεταβολή των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης καθώς μεταβάλλουμε το τελικό εύρος αναζήτησης l. Επιλέγουμε $l \in [0.001, 0.1]$.

Figure 3.25: Graph of calculations of the objective function $f_i(x)$, $i = 1, 2, 3$.



Παρατηρήσεις:

Επιλέγοντας $l = 0.04$ έχουμε $n = 12$ υπολογισμούς της αντικειμενικής συνάρτησης. Με απλή αριθμητική αντικατάσταση επιβεβαιώνεται ότι το n είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος που ικανοποιεί την σχέση $F_n \geq \frac{b_1 - a_1}{l}$ $(144 > 100$, ισχύει$)$.

Παρατηρείται σημαντική μείωση του αριθμού των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης καθώς αυξάνεται το εύρος του διαστήματος l, κάτι το οποίο ήταν αναμενόμενο καθώς αυξάνοντας το l μειώνουμε τους περιορισμούς της αναζήτησης που χρειάζεται να γίνει. Οι γραφικές παραστάσεις και για τις τρεις συναρτήσεις και πάλι ταυτίζονται, για τους ίδιους λόγους που αναφέρθηκαν προηγουμένως.

Στο τέλος της εξέτασης της συγκεκριμένης μεθόδου παρουσιάζονται, σε τρία διαγράμματα, ένα για κάθε συνάρτηση, γραφικές παραστάσεις των άκρων του διαστήματος συναρτήσει του δείκτη επαναλήψεων k, για διάφορες τιμές του τελικού εύρους αναζήτησης l.

Το l παίρνει τις τιμές $0.001, 0.05, 0.1$.

Figure 3.26: Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_1(x)$, $l = 0.001$

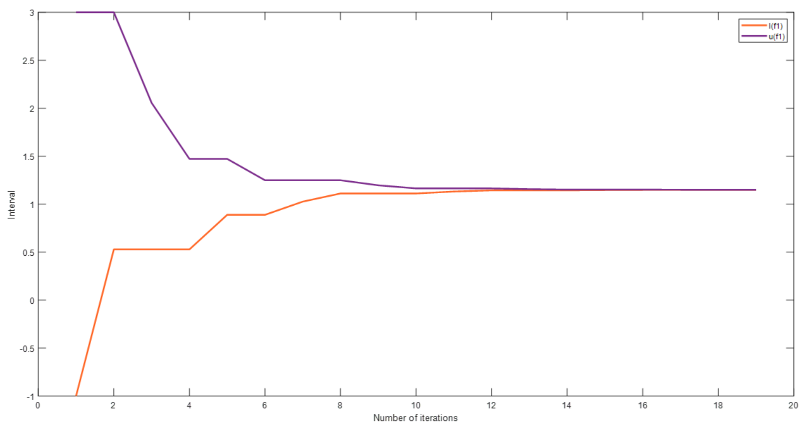


Figure 3.27: Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_2(x)$, $l = 0.001$

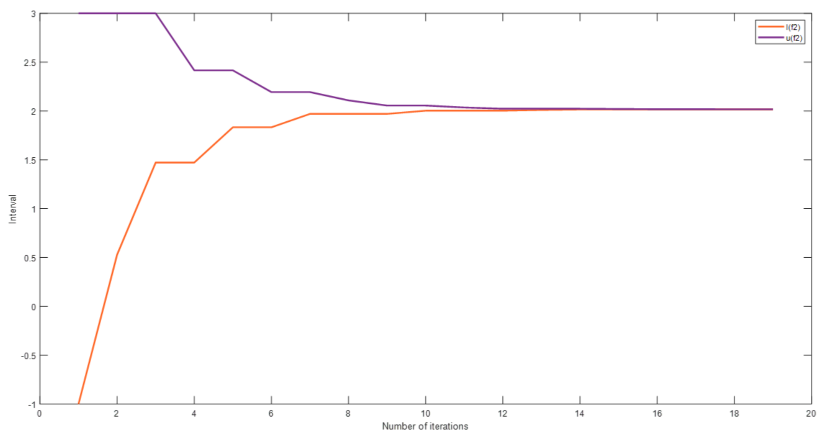


Figure 3.28: Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_3(x)$, $l = 0.001$

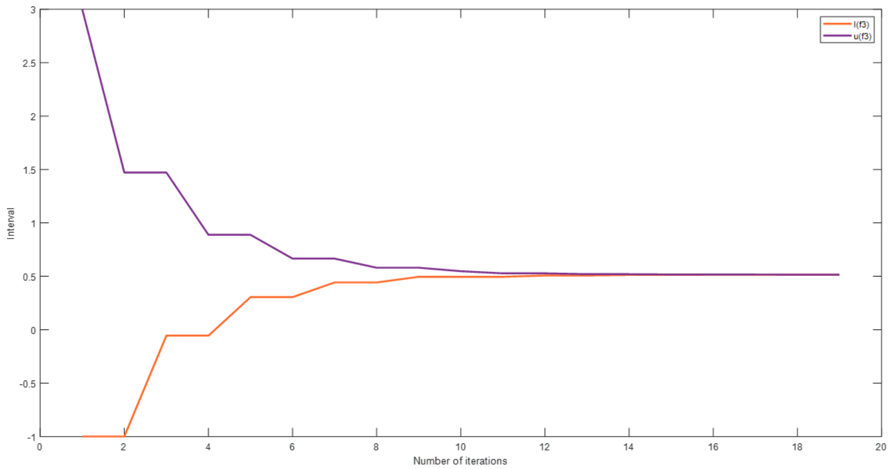


Figure 3.29: Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_1(x)$, $l = 0.05$

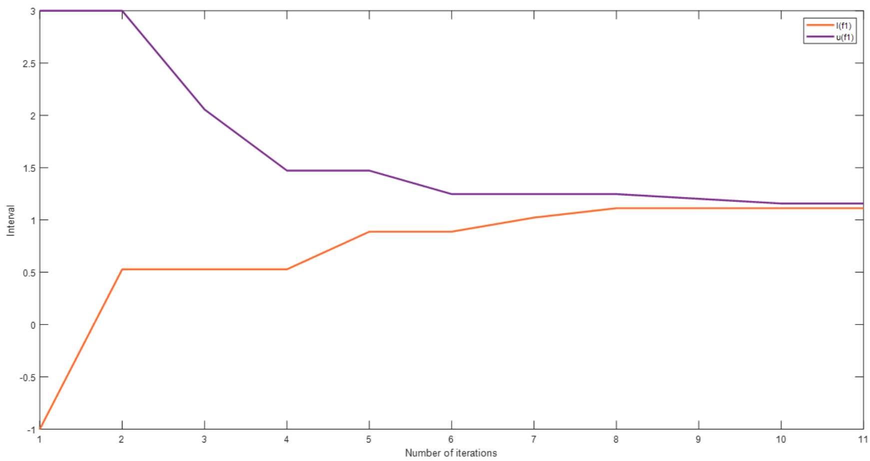


Figure 3.30: Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_2(x)$, $l = 0.05$

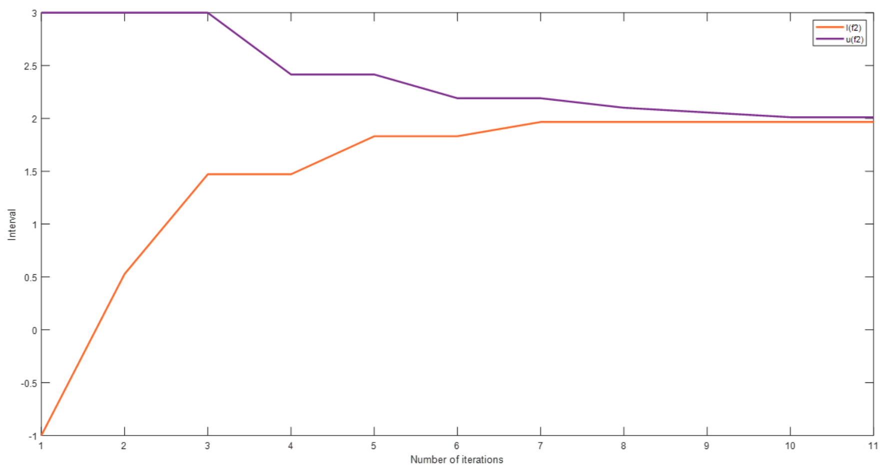


Figure 3.31: Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_3(x)$, $l = 0.05$

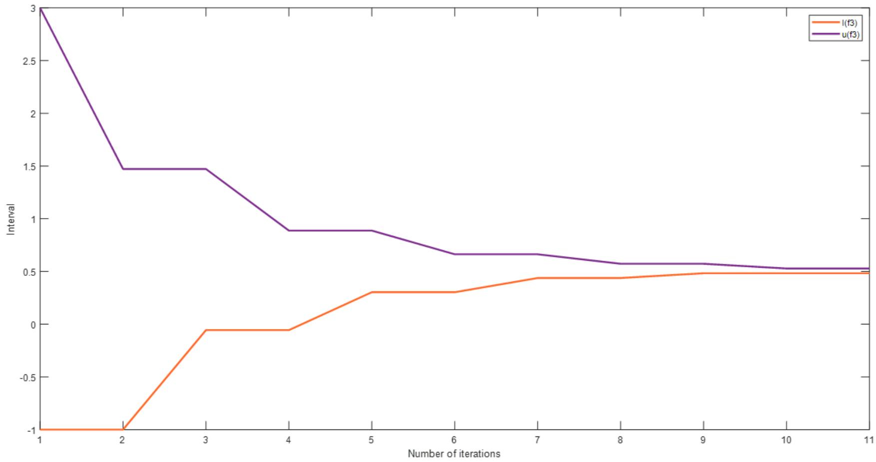


Figure 3.32: Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_1(x)$, $l = 0.1$

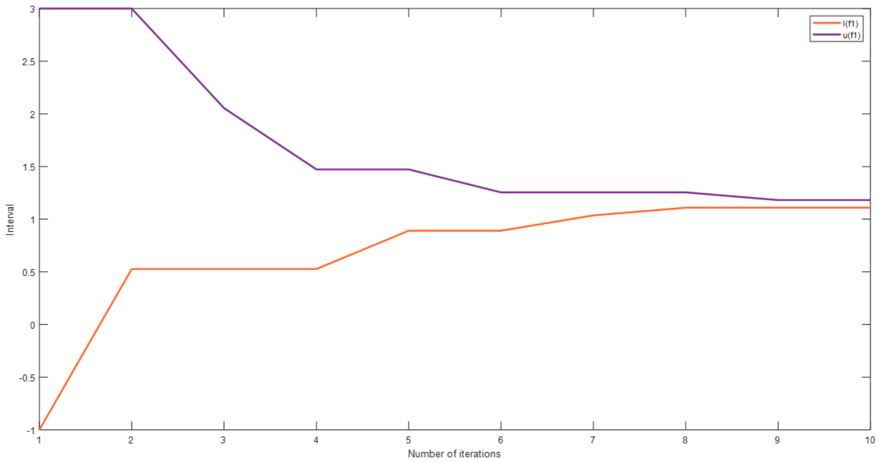


Figure 3.33: Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_2(x)$, $l = 0.1$

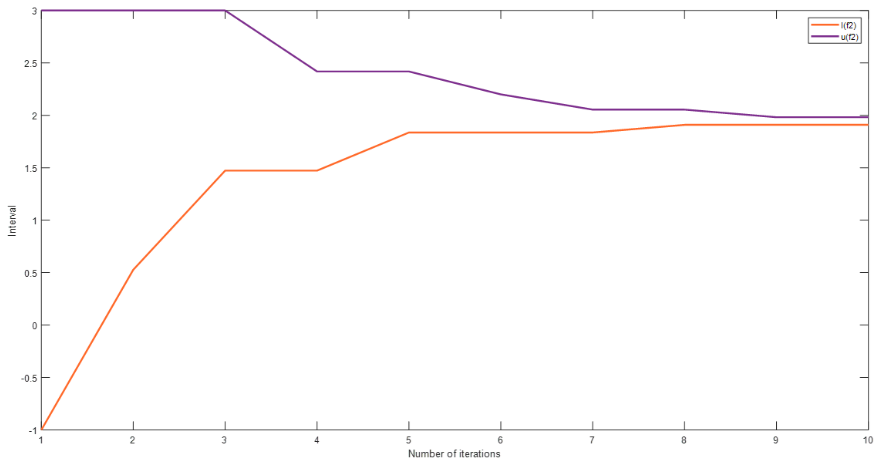
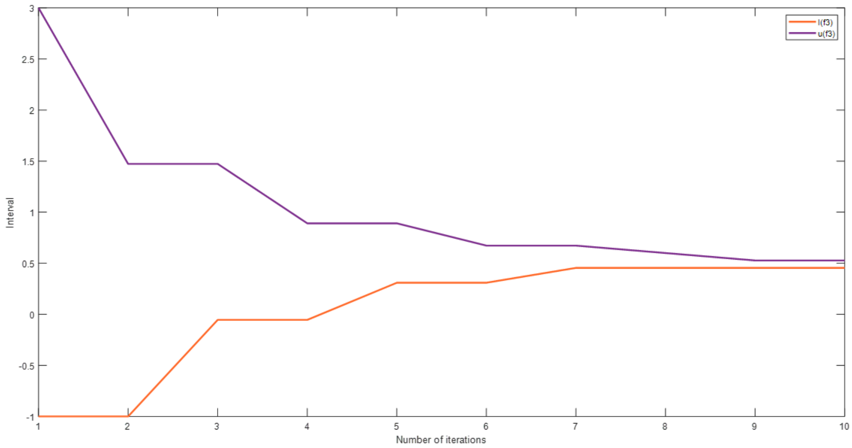


Figure 3.34: Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_3(x)$, $l = 0.1$



3.4 Θέμα 4

Εκφώνηση

Υλοποιήστε στο *Matlab* τη **Μέθοδο της Διχοτόμου Με Χρήση Παραγώγων** και εφαρμόστε τη στις συναρτήσεις $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$, όπου,

$$f_1(x) = (x-2)^2 + x * \ln(x+3),$$

$$f_2(x) = e^{-2x} + (x-2)^2,$$

$$f_3(x) = e^x * (x^3 - 1) + (x-1) * \sin(x)$$

- Μελετήστε τη μεταβολή των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης $f_i(x), i = 1, 2, 3$ (δηλαδή τον συνολικό αριθμό που πρέπει να υπολογιστεί η $f_i(x)$ μέχρι να τερματίσει ο αλγόριθμος), καθώς μεταβάλλουμε το τελικό εύρος αναζήτησης l. Δημιουργήστε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις από τις τιμές που προκύπτουν για τις τρεις συναρτήσεις.

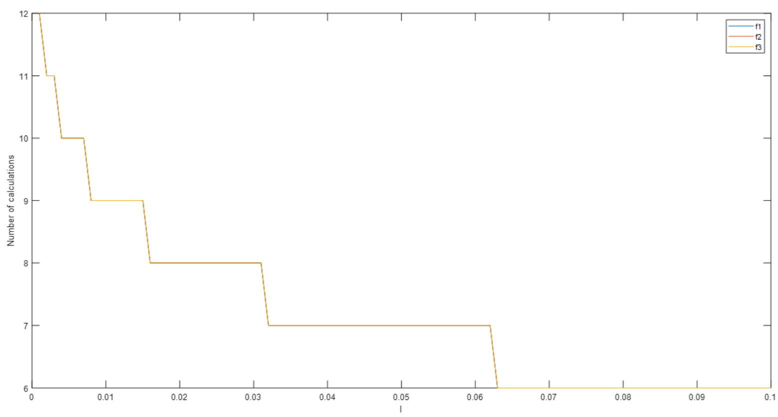
- Επιπλέον, σε τρία διαγράμματα, ένα για κάθε συνάρτηση, σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των άκρων του διαστήματος $[a_k, b_k]$ συναρτήσει του δείκτη επαναλήψεων k, δηλαδή (k, a_k) και (k, b_k), για διάφορες τιμές του τελικού εύρους αναζήτησης l.

Προσομοίωση Σε Matlab

Για την μελέτη αυτή, έχει υλοποιηθεί ο αλγόριθμος της Μεθόδου της Διχοτόμου Με Χρήση Παραγώγων, όπως παρουσιάζεται θεωρητικά στο Κεφ. 2, ο κώδικας του οποίου περιέχεται στο αρχείο Alg_Of_Bisection_Der.m.Στην συγκεκριμένη μέθοδο η αντικειμενική συνάρτηση είναι η παράγωγος συνάρτηση της συνάρτησης προς ελαχιστοποίηση.

Αρχικά εξετάζουμε την μεταβολή των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης καθώς μεταβάλλουμε το τελικό εύρος αναζήτησης l. Επιλέγουμε $l \in [0.001, 0.1]$.

Figure 3.35: Graph of calculations of the objective function $f_i(x), i = 1, 2, 3$.



Παρατηρήσεις:

Επιλέγοντας $l = 0.05$ έχουμε $n = 7$ υπολογισμούς της αντικειμενικής συνάρτησης. Με απλή αριθμητική αντικατάσταση επιβεβαιώνεται ότι το n είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος που ικανοποιεί την σχέση $0.5^n \leq \frac{l}{b_1 - a_1}$ $(0.0078 < 0.0125$, ισχύει).

Παρατηρείται σημαντική μείωση του αριθμού των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης καθώς αυξάνεται το εύρος του διαστήματος l, κάτι το οποίο ήταν αναμενόμενο καθώς αυξάνοντας το l μειώνουμε τους περιορισμούς της αναζήτησης που χρειάζεται να γίνει. Οι γραφικές παραστάσεις και για τις τρεις συναρτήσεις και πάλι ταυτίζονται, για τους ίδιους λόγους που αναφέρθηκαν προηγουμένως.

Στο τέλος της εξέτασης της συγκεκριμένης μεθόδου παρουσιάζονται, σε τρία διαγράμματα, ένα για κάθε συνάρτηση, γραφικές παραστάσεις των άκρων του διαστήματος συναρτήσει του δείκτη επαναλήψεων k, για διάφορες τιμές του τελικού εύρους αναζήτησης l.

Το l παίρνει τις τιμές $0.001, 0.05, 0.1$.

Figure 3.36: Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_1(x)$, $l = 0.001$

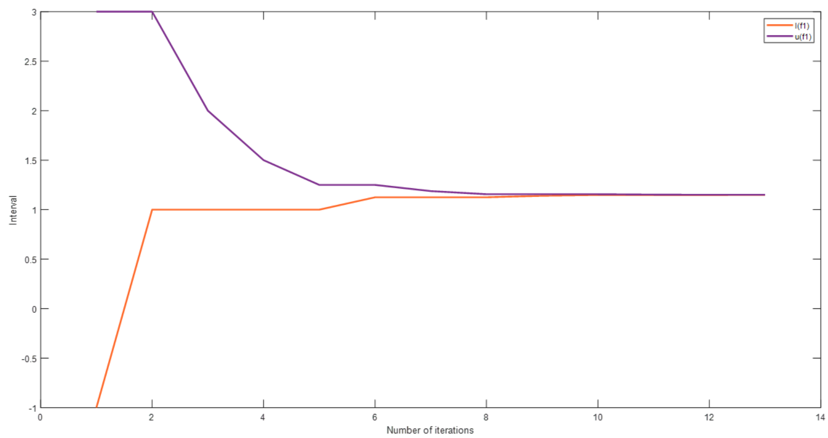


Figure 3.37: Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_2(x)$, $l = 0.001$

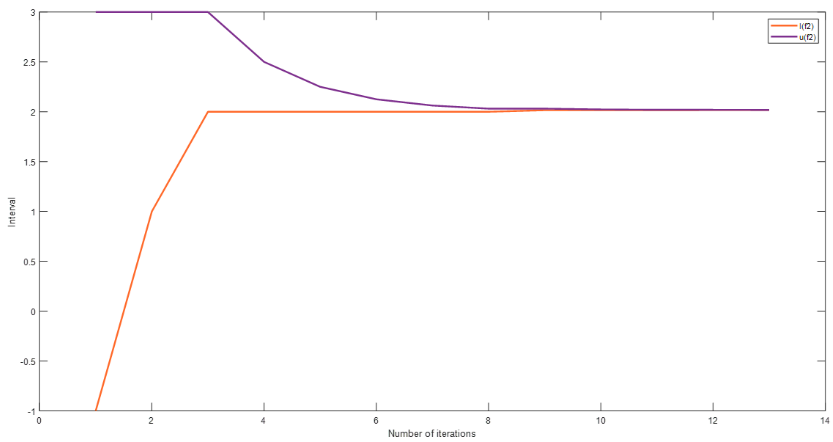


Figure 3.38: Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_3(x)$, $l = 0.001$

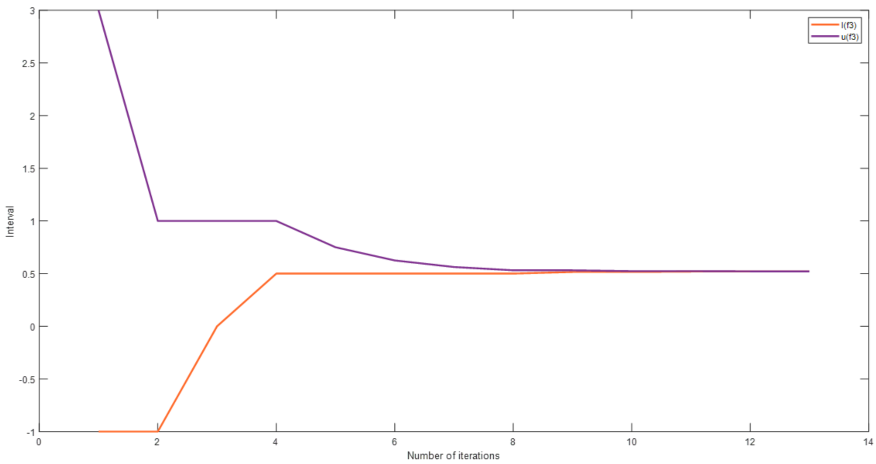


Figure 3.39: Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_1(x)$, $l = 0.05$

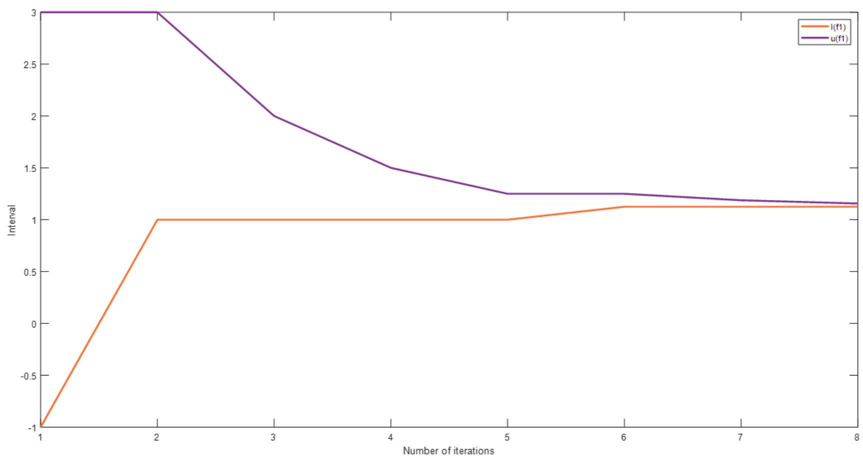


Figure 3.40: Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_2(x)$, $l = 0.05$

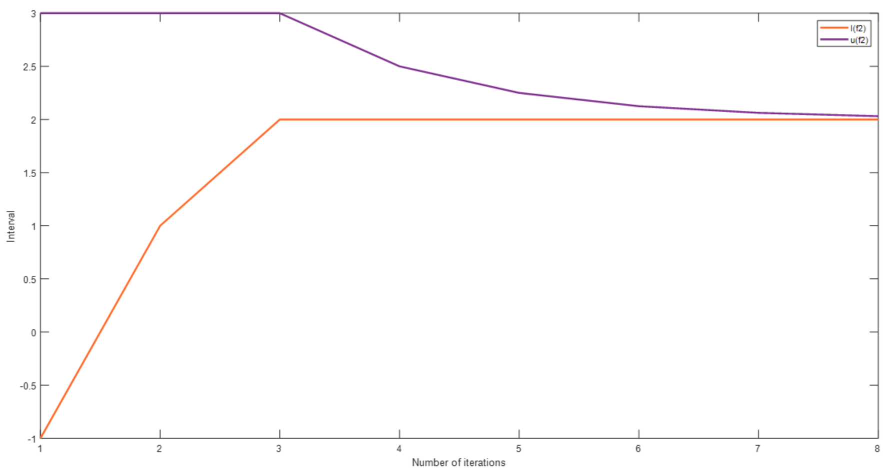


Figure 3.41: Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_3(x)$, $l = 0.05$

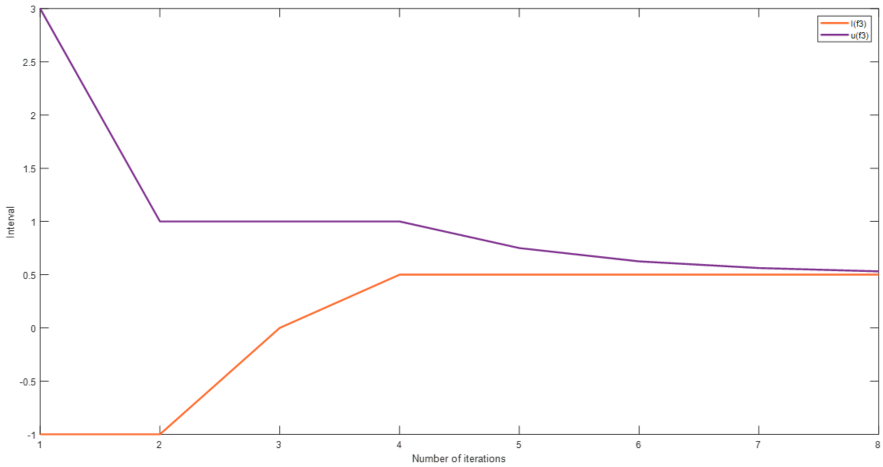


Figure 3.42: Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_1(x)$, $l = 0.1$

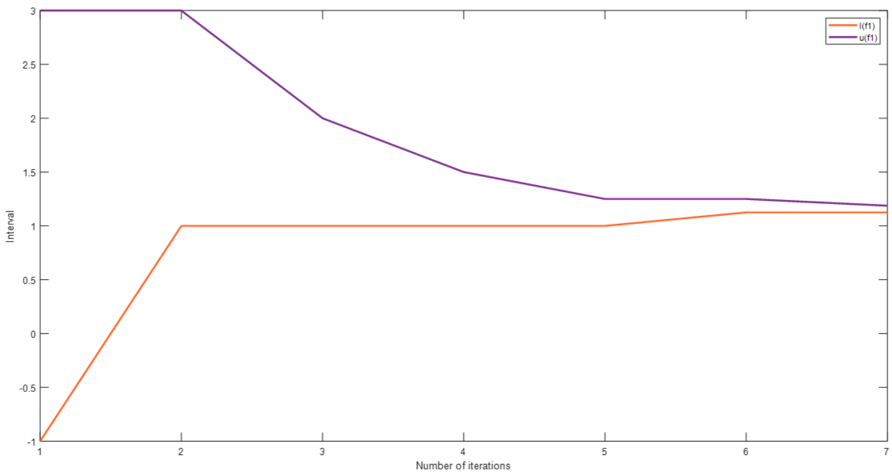


Figure 3.43: Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_2(x)$, $l = 0.1$

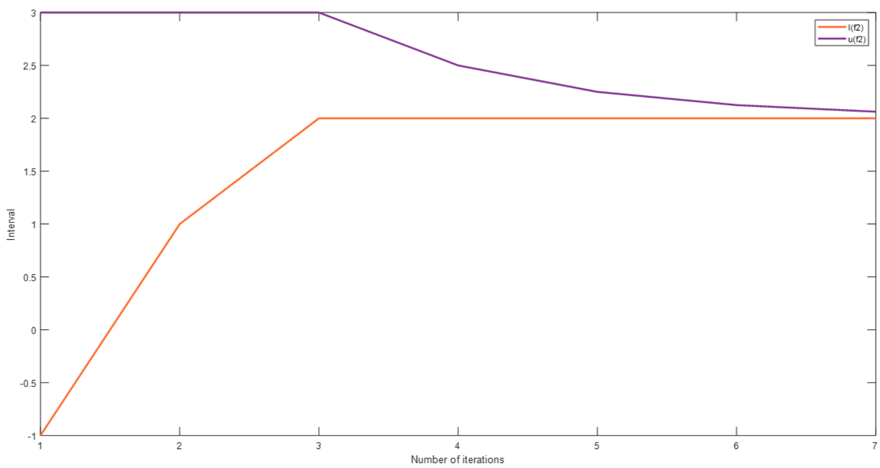
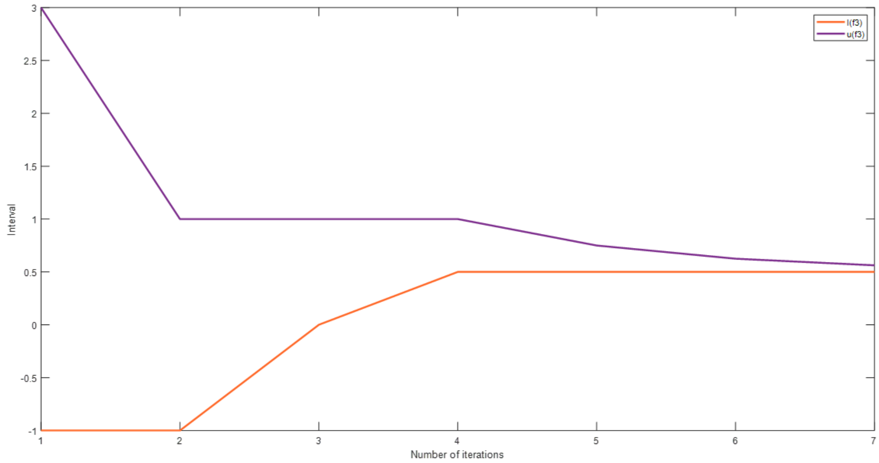


Figure 3.44: Graphs of the Interval Boundaries, Function $f_3(x)$, $l = 0.1$

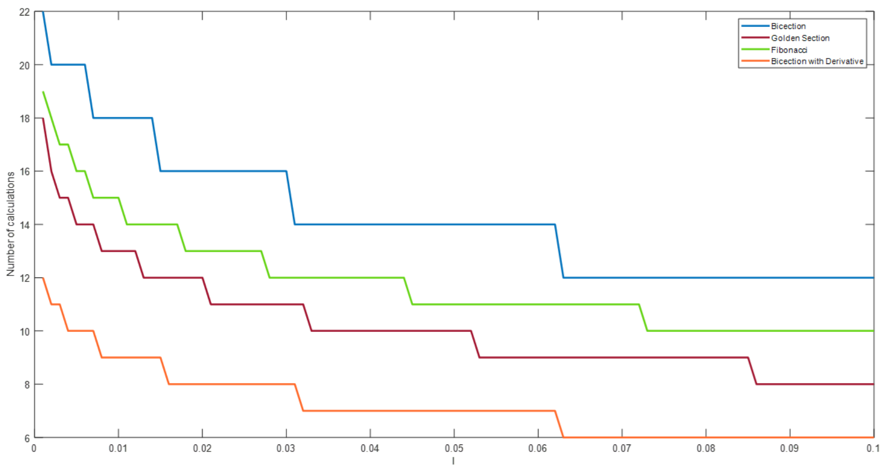


Κεφάλαιο 4

Σύγκριση Μεθόδων

Για τον συγκριτικό σχολιασμό πάνω στην αποδοτικότητα των υπό μελέτη μεθόδων για τις τρεις συναρτήσεις τρέχουμε τους προηγούμενους αλγορίθμους των μεθόδων για τα ίδια δεδομένα και δημιουργούμε ένα γράφημα που περιέχει τους υπολογισμούς των αντικειμενικών συναρτήσεων για κάθε μέθοδο. Η σύγκριση των μεθόδων γίνεται στο αρχείο Comparison.m. Ακολουθεί το γράφημα με τα αποτελέσματα:

Figure 4.1: Graph for Every Method (Calc. of Obj. Func.)



Συμπεράσματα:

- Η Μέθοδος Διχοτόμου **με** Χρήση Παραγώγων είναι η πιο αποδοτική από τις εξεταζόμενες, ειδικά για μικρότερα τελικά εύρη αναζήτησης, εξασφαλίζοντας ταχύτερη σύγκλιση.
- Η Μέθοδος Διχοτόμου **χωρίς** τη Χρήση Παραγώγων απαιτεί περισσότερους υπολογισμούς και είναι η λιγότερο αποδοτική.
- Οι Μέθοδοι Χρυσού Τομέα και Fibonacci είναι κοντά σε αποτελεσματικότητα, αλλά παρουσιάζουν διαφορές ανάλογα με το εύρος αναζήτησης. Παρατηρούμε, ότι όσο το n μεγαλώνει (μικρό l), η μέθοδος του χρυσού τομέα τείνει ασυμπτωτικά να ταυτιστεί από πάνω με την μέθοδο Fibonacci, όσον αφορά τον αριθμό υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης.

Παρατηρούμε, επίσης, ότι η σειρά αποδοτικότητας των μεθόδων χωρίς την χρήση παραγώγων (μέθοδος της διχοτόμου, μέθοδος του χρυσού τομέα και μέθοδος Fibonacci) πειραματικά επιβεβαιώνει την θεωρία (από την λιγότερο προς περισσότερο αποδοτική: διχοτόμος, χρυσός τομέας, Fibonacci).

4.1 Πλεονεκτήματα και Μειονεκτήματα

- Μέθοδος Διχοτόμου
  - Πλεονεκτήματα
    1. Απλότητα: Είναι εύκολη στην κατανόηση και την υλοποίηση.
    2. Εγγύηση σύγκλισης: Συγκλίνει πάντα για συνεχείς και κυρτές συναρτήσεις.
    3. Χωρίς χρήση παραγώγων: Δεν απαιτεί τη γνώση της παραγώγου της συνάρτησης.
  - Μειονεκτήματα
    1. Αργή σύγκλιση: Χρειάζεται αρκετούς υπολογισμούς για να φτάσει σε ικανοποιητικό αποτέλεσμα.
    2. Περιορισμένη αποδοτικότητα: Συγκριτικά με άλλες μεθόδους, είναι λιγότερο αποδοτική από άποψη αριθμού επαναλήψεων.
- Μέθοδος Χρυσού Τομέα
  - Πλεονεκτήματα
    1. Αποδοτικότητα: Προσφέρει καλύτερη απόδοση σε σχέση με τη Διχοτόμο, απαιτώντας λιγότερους υπολογισμούς.
    2. Σταθερή απόδοση: Η απόδοσή της είναι σταθερή ανεξαρτήτως του εύρους αναζήτησης.
    3. Χωρίς χρήση παραγώγων: Εφαρμόζεται σε συναρτήσεις που δεν απαιτούν παραγώγους.
  - Μειονεκτήματα
    1. Μέτρια σύγκλιση: Αν και πιο αποδοτική από τη Διχοτόμο, δεν είναι τόσο γρήγορη όσο η μέθοδος με χρήση παραγώγων.
    2. Σταθερή αναλογία: Το ποσοστό μείωσης του διαστήματος είναι σταθερό, κάτι που δεν επιτρέπει βελτιστοποίηση της απόδοσης ανά περίπτωση.
- Μέθοδος Fibonacci
  - Πλεονεκτήματα
    1. Ελαχιστοποίηση υπολογισμών: Χρησιμοποιεί τη σειρά Φιβονασσι για τη βελτίωση της σύγκλισης, μειώνοντας τον αριθμό των επαναλήψεων.
    2. Αποτελεσματικότητα: Είναι πολύ αποδοτική για συγκεκριμένα προβλήματα όπου η ακρίβεια έχει σημασία.
    3. Χωρίς χρήση παραγώγων: Όπως και η Χρυσή Τομή, δεν απαιτεί παραγώγους.
  - Μειονεκτήματα
    1. Αυξημένη πολυπλοκότητα: Η υλοποίηση είναι πιο σύνθετη από τη Διχοτόμο ή τη Χρυσή Τομή.

2. Προσαρμογή: Η μεθοδολογία της βασίζεται στη σειρά Φιβοναςςι, κάτι που μπορεί να μην είναι πάντα βέλτιστο.

- Μέθοδος Διχοτόμου με Χρήση Παραγώγων
  - Πλεονεκτήματα
    1. Γρήγορη σύγκλιση: Απαιτεί τον μικρότερο αριθμό επαναλήψεων για τη σύγκλιση, καθιστώντας την πολύ αποδοτική.
    2. Ακρίβεια: Η χρήση της παραγώγου επιτρέπει μεγαλύτερη ακρίβεια στον προσδιορισμό του ελαχίστου.
    3. Αποδοτικότητα: Καλή απόδοση για προβλήματα όπου η παράγωγος είναι διαθέσιμη.
  - Μειονεκτήματα
    1. Πολυπλοκότητα: Η υλοποίηση απαιτεί την εύρεση και χρήση της παραγώγου, κάτι που μπορεί να είναι δύσκολο ή χρονοβόρο για πολύπλοκες συναρτήσεις.

Βιβλιογραφία

Γεώργιος Α. Ροβιθάκης. *Τεχνικές Βελτιστοποίησης*. Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ, 2007.