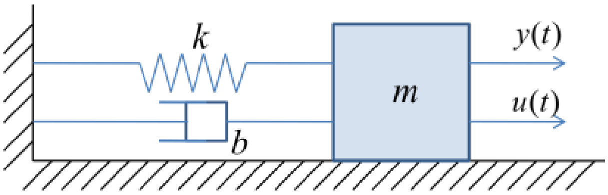
Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων

Εργασία 1

Γραμμική Παραμετροποίηση - Εκτίμηση Άγνωστων Παραμέτρων - Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων

Ελένη Δασκάλου, [redacted]
mail : *elendask@ece.auth.gr*

Απρίλιος, 2024



Σχήμα 1: Σύστημα μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα.

Θέμα 1

Θεωρήστε το σύστημα μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα που φαίνεται στο Σχήμα 1, όπου $b > 0$ είναι η σταθερά απόσβεσης, $k > 0$ είναι η σταθερά του ελατηρίου, $u(t)$ μία εξωτερική δύναμη και $y(t)$ η μετατόπιση της μάζας $m > 0$ εξαιτίας της δύναμης που εφαρμόζεται πάνω της.

1. Βρείτε το μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει τη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος και παραμοτροποιήστε το γραμμικά στη μορφή:

$$y = (\theta^*)^T \zeta,$$

όπου το σήμα ζ παράγεται από μετρήσεις της εξωτερικής δύναμης u και της μετατόπισης y.

Απάντηση:
Έστω ότι, φυσικό μήκος του ελατηρίου $l_0 = 0$.
Τότε, από τον 2_o νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$\Sigma F = m\ddot{y} \Leftrightarrow u - ky - b\dot{y} = m\ddot{y} \Leftrightarrow \ddot{y} = \frac{-b}{m}\dot{y} + \frac{-k}{m}y + \frac{u}{m}(1)$$

Το σύστημα περιγράφεται από την εξίσωση (1) και παραμετροποιείται γραμμικά ως εξής:

Συγκεντρώνοντας όλες τις παραμέτρους σε ένα διάνυσμα θ^* και όλα τα σήματα εισόδου-εξόδου σε ένα διάνυσμα Δ έχουμε:

$$\theta^* = \begin{bmatrix} \frac{b}{m} & \frac{k}{m} & \frac{1}{m} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \theta_1^* & \theta_2^* \end{bmatrix}^T \quad \text{και} \quad \Delta = \begin{bmatrix} -y & y & \dot{u} \end{bmatrix}^T$$

Άρα,

$$y = (\theta^*)^T \Delta(2),$$

Φιλτράροντας το σύστημα $y = (\theta^*)^T \Delta$, (2) με το ευσταθές φίλτρο $\Lambda(s)$, με

$$\Lambda(s) = (s + \lambda_1)(s + \lambda_2) = s^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)s + \lambda_1\lambda_2,$$

Τότε

$$y = {\theta_\lambda}^T \zeta,$$

όπου

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_1\lambda_2 \end{bmatrix}$$

ώστε,

$$\theta_\lambda = \left[\theta_1^{*T} - \lambda^T \theta_2^{*T}\right]^T \quad \Leftrightarrow \quad \theta_\lambda = \left[\frac{b}{m} - (\lambda_1 + \lambda_2) \;\; \frac{k}{m} - \lambda_1\lambda_2 \;\; \frac{1}{m}\right]^T$$

και

$$\zeta = \left[\frac{-\Delta_1^T(s)}{\Lambda(s)}y \quad \frac{\Delta_0^T(s)}{\Lambda(s)}u\right]^\top = \left[\frac{-[s\,1]^T}{\Lambda(s)}y \quad \frac{1}{\Lambda(s)}u\right]^\top = \left[\frac{-s}{\Lambda(s)}y \quad \frac{-1}{\Lambda(s)}y \quad \frac{1}{\Lambda(s)}u\right]^\top$$

2. Σχεδιάστε την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων για την εκτίμηση των άγνωστων παραμέτρων m, b και k, όταν μετρούμε μόνο την μετατόπιση και την εξωτερική δύναμη που εφαρμόζεται στη μάζα.

Απάντηση:

Εφόσον έχουμε ήδη παραμετροποιήσει γραμμικά το σύστημά μας στη μορφή $y = {\theta_\lambda}^T\zeta$ εφαρμόζουμε τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων για την εκτίμηση του $(\theta_0^*)^T$, συνεπώς και για τις άγνωστες παραμέτρους m, b και k.

Έστω

$$Y = \begin{bmatrix} y(1) & y(2) & \dots & y(N)\end{bmatrix}^\top$$

και

$$Z = \begin{bmatrix} \zeta_1(1) & \zeta_2(1) & \dots & \zeta_d(1) \\ \zeta_1(2) & \zeta_2(2) & \dots & \zeta_d(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \zeta_1(N) & \zeta_2(N) & \dots & \zeta_d(N) \end{bmatrix}$$

Για το σφάλμα έχουμε $e = Y - Z\theta^*$ και $V = \frac{|e^2|}{2} = \frac{|Y - Z\theta^*|^2}{2}$

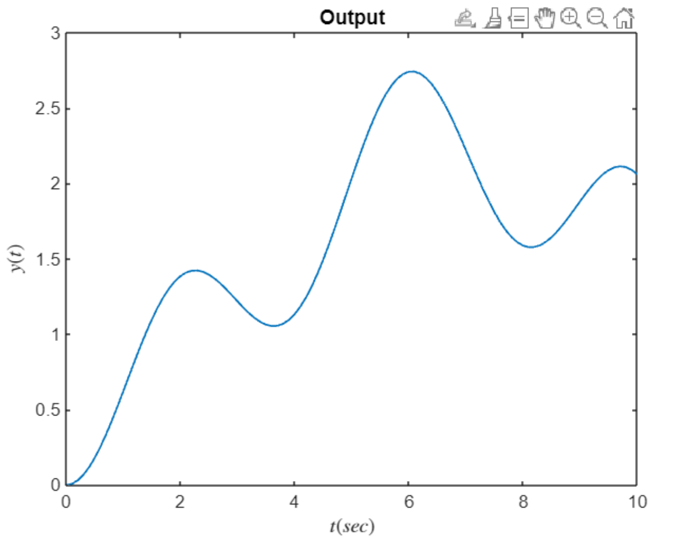
Ψάχνουμε το $\theta_0^* = \underset{\theta^*}{\operatorname{argmin}}(\frac{|e^2|}{2}) = \underset{\theta^*}{\operatorname{argmin}}(\frac{|e^T e|}{2})$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial \theta^*}\right|_{\theta^* = \theta_0^*} \Rightarrow (Y - Z\theta_0^*)^T(-Z) = 0$$
$$\Rightarrow -Y^T Z + (\theta_0^*)^T Z = 0 \Rightarrow (\theta_0^*)^T Z^T Z = Y^T Z$$

3. Προσομοιώστε το σύστημα στο $Matlab$ με την βοήθεια των συναρτήσεων οδε επιλέγοντας $m = 8.5[kg], b = 0.65[kg/s], k = 2[kg/s^2], \kappa\alpha\iota\;\; u(t) = 10cos(0.5\pi t) + 3[N]$ και θεωρώντας μηδενικές αρχικές συνθήκες για τις καταστάσεις του συστήματος. Χρησιμοποιήστε δείγματα ανά $0.1[s]$ από το διάστημα εκτέλεσης $[t_0 \;\; t_f] = [0 \;\; 10][s]$, και εφαρμόστε την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων βάσει των δεδομένων που καταγράψατε. Δημιουργήστε γραφικές παραστάσεις των $y(t), \hat{y}(t)$ και της διαφοράς τους $y(t) - \hat{y}(t)$. Σχολιάστε τα αποτελέσματα.

Απάντηση:

Για τα δεδομένα που μας δόθηκαν: $m = 8.5[kg], b = 0.65[kg/s], k = 2[kg/s^2], \kappa\alpha\iota\;\; u(t) = 10cos(0.5\pi t) + 3[N]$, μηδενικές αρχικές συνθήκες για τις καταστάσεις του συστήματος, η προσομοίωση στο $MATLAB$ δίνει τα παρακάτω αποτελέσματα:



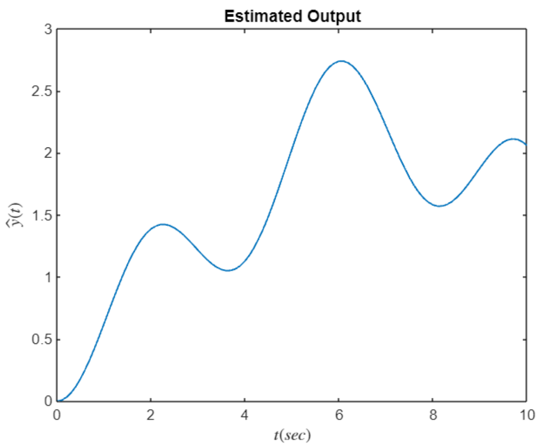
$Figure$ 1: Έξοδος του συστήματος.

Οι εκτιμώμενες τιμές των παραμέτρων, με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, υπολογίζονται ίσες με:

```
Estimated parameters:
    8.4753    0.6634    2.0001
```

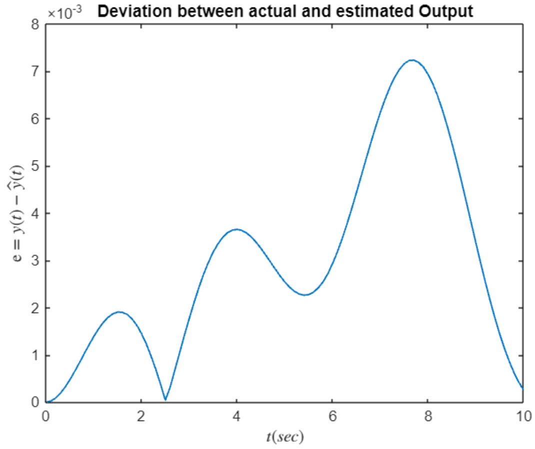
Πίνακας: Εκτιμήσεις παραμέτρων.

Συνεπώς, με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων προέκυψαν αρκούντως ακριβείς υπολογισμοί των παραμέτρων του συστήματος, m, b και k.
Άρα, θα πρέπει να ισχύει το ίδιο και για την εκτίμηση της εξόδου του συστήματος $\hat{y}(t)$. Μετά την προσομοίωση, το αποτέλεσμα που προέκυψε για την $\hat{y}(t)$ είναι:



$Figure$ 2: Εκτιμώμενη έξοδος του συστήματος.

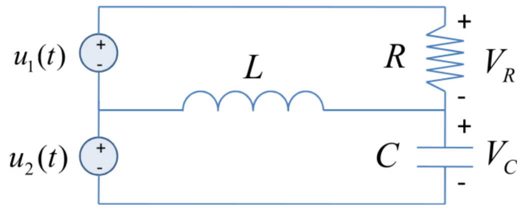
Είναι εμφανές ότι τα δύο γραφήματα δε διαφέρουν σημαντικά, και το ακριβές σφάλμα παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα.



$Figure$ 3: Σφάλμα πρόβλεψης.

Παρατηρούμε ότι το σφάλμα είναι της τάξης του $[0, 7.5] * 10^{-3}$, οπότε τα αποτελέσματα της προσομοίωσης του συστήματος και της θεωρητικής ανάλυσης δεν διαφέρουν αρκετά.

Θέμα 2



Σχήμα 2: Κύκλωμα RLC.

Θεωρήστε το κύκλωμα του Σχήματος 2, όπου $u_1(t) = 3sin(pit)[V]$ και $u_2(t) = 2.5[V]$. Επιπλέον, μπορούμε να μετρήσουμε μόνο τις τάσεις V_R και V_C στα άκρα της αντίστασης και του πυκνωτή αντίστοιχα.

1. Εκτιμήστε με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων τον πίνακα μεταφοράς του κυκλώματος. Οι τάσεις V_R, V_C παράγονται από το αρχείο $v.p$ καλώντας την συνάρτηση στο $Matlab$ ως εξής:

$$[V_R, V_C] = v(t), \quad t = t_i \;\; ή \;\; t = [t_1 \; t_2 \; \dots \; t_N].$$

Δημιουργήστε γραφικές παραστάσεις των $V_C(t), \hat{V}_C(t)$ και της διαφοράς τους $V_C(t) - \hat{V}_C(t)$. Αντιστοίχως για τα $V_R(t), \hat{V}_R(t)$.

Απάντηση:

Αναλύουμε το σύστημα κυκλώματος RLC και βρίσκουμε το μαθηματικό μοντέλο που το περιγράφει.

Από τη θεωρία κυκλωμάτων έχουμε:

- Για το πηνίο:

$$V = L\frac{di}{dt}$$

- Για τον πυκνωτή:

$$I = C\frac{dV}{dt}$$

Από τους νόμους του $Kirchoff$ για τους τρεις βρόχους, αντίστοιχα, έχουμε:

- Έστω I_1 το ρεύμα που διαρρέει τον κόμβο B_1(κόμβος που περιέχει την αντίσταση R), τότε:

$$B_1 : u_1(t) = V_R + L\dot{I}_1 - L\dot{I}_2 = V_R + L\frac{\dot{V}_R}{R} - LC\ddot{V}_C \iff$$

$$\iff u_1(t) = V_R + L(\frac{\dot{V}_R}{R} - C\ddot{V}_C)(1)$$

- Έστω I_2 το ρεύμα που διαρρέει τον κόμβο B_2(κόμβος που περιέχει τον πυκνωτή C), τότε:

$$B_2 : u_2(t) = V_C + L\dot{I}_2 - L\dot{I}_1 = V_C - L\frac{\dot{V}_R}{R} + LC\ddot{V}_C \iff$$

$$\iff u_2(t) = V_C - L(\frac{\dot{V}_R}{R} - C\ddot{V}_C)(2)$$

- $$B_3 : u_1(t) + u_2(t) = V_R + V_C(3)$$

Λύνουμε την (3) ως προς V_R και έχουμε:

$$V_R = u_1(t) + u_2(t) - V_C(3)'$$

Τώρα, η (1) λόγω της $(3)'$ γράφεται:

$$\ddot{V}_C + \frac{1}{RC}\dot{V}_C + \frac{1}{LC}V_C = \frac{1}{RC}\dot{u}_1(t) + \frac{1}{RC}\dot{u}_2(t) + \frac{1}{LC}u_2(t)(4)$$

Λύνουμε την (3) ως προς V_C και έχουμε:

$$V_C = u_1(t) + u_2(t) - V_R(3)''$$

Τώρα, η (1) λόγω της (3)' γράφεται:

$$\ddot{V}_R + \frac{1}{RC}\dot{V}_R + \frac{1}{LC}V_R = \ddot{u}_1(t) + \frac{1}{LC}u_1(t) + \ddot{u}_2(t)(5)$$

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό *Laplace* στη σχέση (4), υποθέτωντας μηδενικές αρχικές συνθήκες, έχουμε:

$$(4) \overset{\mathcal{L}}{\Longrightarrow} \mathcal{L}\left\{\ddot{V}_C + \frac{1}{RC}\dot{V}_C + \frac{1}{LC}V_C\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{RC}\dot{u}_1(t) + \frac{1}{RC}\dot{u}_2(t) + \frac{1}{LC}u_2(t)\right\} \iff$$

$$\iff s^2V_C(s) + s\frac{1}{RC}V_C(s) + \frac{1}{LC}V_C(s) = s\frac{1}{RC}u_1(s) + s\frac{1}{RC}u_2(s) + \frac{1}{LC}u_2(s) \iff$$

$$\iff V_C(s)\left(s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}\right) = s\frac{1}{RC}u_1(s) + u_2(s)\left(s\frac{1}{RC} + \frac{1}{LC}\right)/iff$$

$$\iff V_C(s) = u_1(s)\frac{\frac{s}{RC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} + u_2(s)\frac{\frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}(6)$$

Με τον ίδιο τρόπο, εφαρμόζοντας μετασχηματισμό *Laplace* στη σχέση (5), υποθέτωντας μηδενικές αρχικές συνθήκες, έχουμε:

$$(5) \overset{\mathcal{L}}{\Longrightarrow} \mathcal{L}\left\{\ddot{V}_R + \frac{R}{RC}\dot{V}_R + \frac{1}{LC}V_R\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{LC}u_1(t) + \ddot{u}_1(t) + \ddot{u}_2(t)\right\} \iff$$

$$\iff s^2V_R(s) + \frac{s}{RC}V_R(s) + \frac{1}{LC}V_R(s) = s^2u_1(s) + \frac{1}{LC}u_1(s) + s^2u_2(s) \iff$$

$$\iff V_R(s)\left(s^2+\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}\right)=u_1(s)\left(s^2+\frac{1}{LC}\right)+s^2u_2(s) \iff$$

$$\iff V_R(s)=u_1(s)\frac{s^2+\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}}+u_2(s)\frac{s^2}{s^2+\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}} \quad (7)$$

Γράφουμε τις σχέσεις (6) και (7) σε μορφή συστήματος πινάκων:

$$\begin{bmatrix} V_C(s) \\ V_R(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\frac{s}{RC}}{s^2+\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}} & \frac{\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}} \\ \frac{s^2+\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}} & \frac{s^2}{s^2+\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (8)$$

Αυτό μπορεί να γραφτεί και ως:

$$V(s)=G(s)U(s)$$

Αφού έχουμε καταλήξει στις παραπάνω δυναμικές σχέσεις, για να βρούμε τον πίνακα μεταφοράς υπολογίζοντας τις παραμέτρους R, C, L, ακολουθούμε παρόμοια διαδικασία με αυτή του θέματος 1. Θέλουμε να οδηγηθούμε σε γραμμικά παραμετροποιημένη μορφή και να εφαρμόσουμε τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων στη σχέση (4).

Σημειώνουμε ότι η σχέση (4) είναι η:

$$\ddot{V}_C+\frac{1}{RC}\dot{V}_C+\frac{1}{LC}V_C=\frac{1}{RC}\dot{u}_1(t)+\frac{1}{RC}\dot{u}_2(t)+\frac{1}{LC}u_2(t)$$

Άρα, γράφουμε το σύστημα στη μορφή

$$\ddot{V}_C=\theta^{*T}\Delta,$$

όπου διάνυσμα $\theta^{*T}=\begin{bmatrix}\frac{1}{RC} & \frac{1}{LC} & \frac{1}{RC} & 0 & \frac{1}{RC} & 0 & \frac{1}{RC} & \frac{1}{LC}\end{bmatrix}^\top$,

και διάνυσμα Δ που περιέχει όλα τα σήματα εισόδου και εξόδου

$$\Delta=\begin{bmatrix}-\dot{V}_C & -V_C & \dot{u}_1(t) & u_1(t) & \dot{u}_2(t) & u_2\end{bmatrix}^\top$$

Τώρα, φιλτράρουμε το παραπάνω σύστημα με το ευσταθές φίλτρο

$$\Lambda(s)=(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)=s^2+(\lambda_1+\lambda_2)s+\lambda_!\lambda_2$$

Τότε, θα έχουμε την τελική επιθυμητή μορφή $y=\theta_\lambda{}^T\zeta$, όπου λ= $\begin{bmatrix}\lambda_1+\lambda_2 & \lambda_1\lambda_2\end{bmatrix}$ τέτοιο ώστε:

$$\theta_T^\lambda=\begin{bmatrix}\theta_1^{*T} & -\lambda^T\theta_2^{*T}\end{bmatrix}^\top=\begin{bmatrix}\frac{1}{RC}-\lambda_1 & \frac{1}{LC}-\lambda_2 & \frac{1}{RC} & 0 & \frac{1}{RC} & \frac{1}{LC}\end{bmatrix}^\top$$

και

$$\zeta=\begin{bmatrix}-\frac{s}{\Lambda(s)}y & -\frac{1}{\Lambda(s)}y & \frac{s}{\Lambda(s)}u_1 & \frac{1}{\Lambda(s)}u_1 & \frac{s}{\Lambda(s)}u_2 & \frac{1}{\Lambda(s)}u_2\end{bmatrix}^\top$$

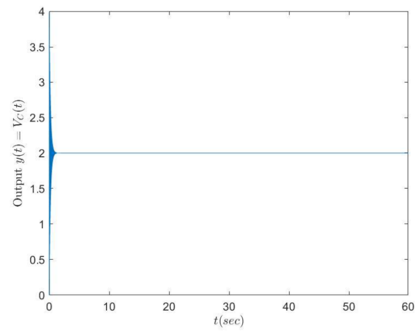
Αφού έχουμε φέρει το σύστημά μας στην παραπάνω μορφή μπορούμε να προσομοιώσουμε το σύτστημα στο $Matlab$, υπολογίζοντας τις παραμέτρους του μοντέλου με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

Θεωρούμε, $u_1(t)=3sin(\pi t)[V]$ και $u_2(t)=2.5[V]$ και μετρήσεις V_C, V_R από το αρχείο μετρήσεων $v.p$ γιΑ κάθε χρονική στιγμή $t\in[0,60]seconds$ και με περίδο δειγματοληψίας $T=10^{-5}$.

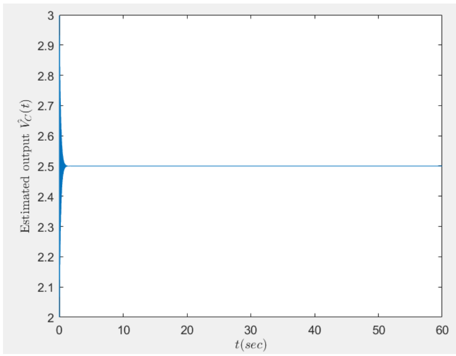
Παρόμοια με την προσέγγιση του θέματος 1, από τον τύπο $\theta_0^T\Phi^T\Phi={V_C}^T\Phi$, υπολογίζουμε το Φ και το θ_0.

Έπειτα υπολογίζω και το $\hat{V}_C=\theta_0^T\Phi^T$, δηλαδή τις εκτιμώμενες τιμές του V_C.

Επιλέγοντας μετά από δοκιμές ζευγάρι πόλων $\lambda_1=120$ και $\lambda_2=180$ με συνολικό σφάλμα εξόδου $e=0.5013$, προκύπτουν οι παρακάτω γραφικές της προσομοίωσης:



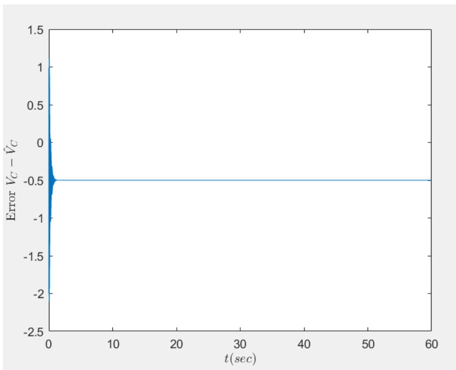
$Figure$ 1: Έξοδος συστήματος V_C.



$Figure$ 2:Εκτιμώμενη Έξοδος συστήματος $\hat{V}_C$.

Παρατηρούμε ότι οι δύο γρσφικές παραστάσεις είναι αρκετά όμοιες, και μετά από μια χρονική στιγμη ταυτίζονται.

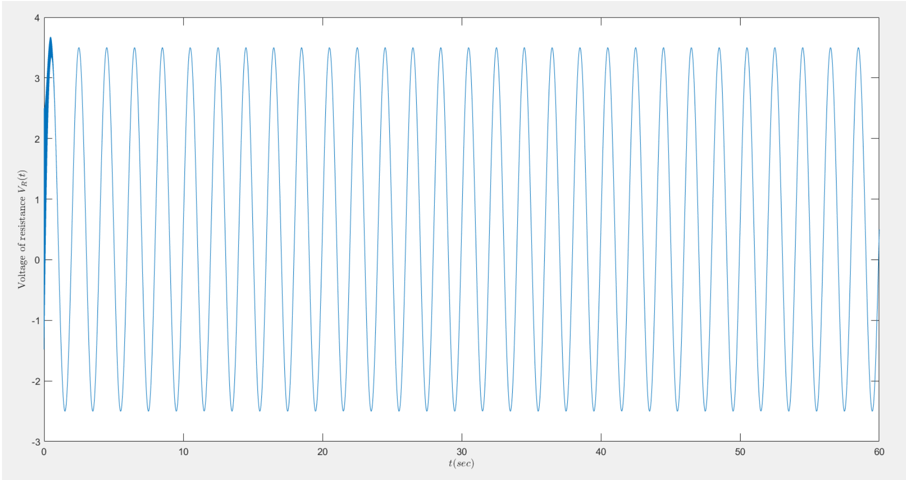
Έπειτα, υπολογίζουμε το σφάλμα $e = V_C - \hat{V}_C$. Με την προσομοίωση στο ΜΑΤΛΑΒ λαμβάνουμε την εξής γραφική παράσταση του σφάλματος:



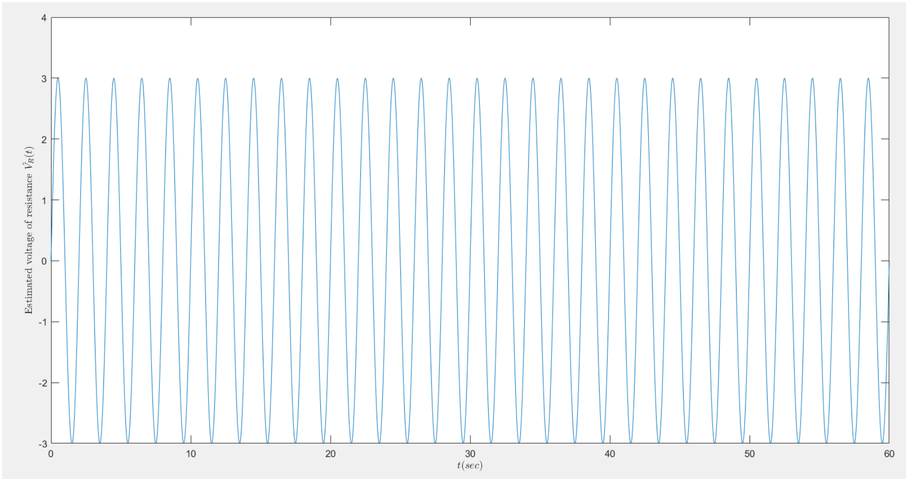
$Figure$ 3:Σφάλμα $V_C - \hat{V}_C$.

Αρχικά καταγράφεται ένα σημαντικό σφάλμα το οποίο όμως σύντομα μηδενίζεται και παραμένει στο μηδέν. Ίσως με μία διαφορετική επιλογή τιμών λ να μπορούσε να περιοριστεί ακόμη περισσότερο.

Τέλος έχουμε τις γραφικές παραστάσεις για την V_R και την εκτίμηση αυτής, $\hat{V}_R$.



$Figure$ 4: Μέτρηση V_R.



$Figure$ 5: Εκτίμηση V_R.

Και εδώ παρατηρούμε μία μικρή διαφορά μεταξύ τους στο πρωτο δευτερόλεπτο η οποία έπειτα εκμηδενίζεται.

Τέλος, λύνοντας το σύστημα εξισώσεων, υπολογίστηκαν οι παράμετροι του κυκλώματος ως εξής:

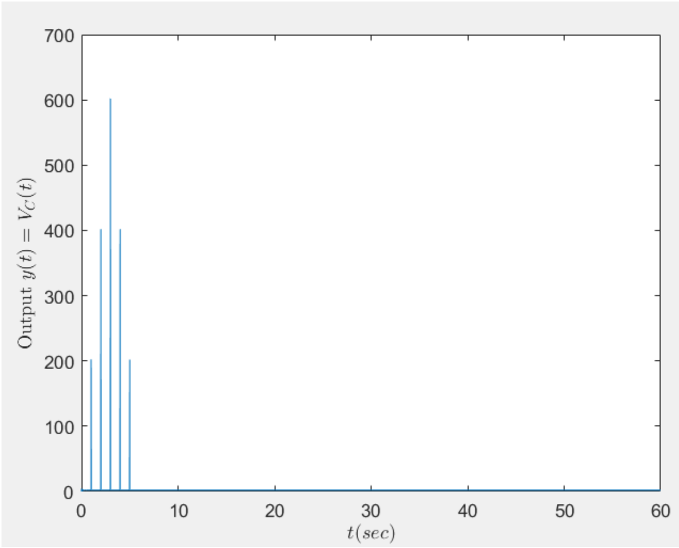
```
1/RC = 129.996639
1/LC = 9810960.647000
```

Πίνακας: Εκτίμηση παραμέτρων

2. Θεωρήστε ότι οι μετρήσεις $V_R(t_i), V_C(t_i)$ λαμβάνονται εσφαλμένα (π.χ. στα παραγόμενα σήματα $V_R(t), V_C(t)$ προσθέστε σε ορισμένες τυχαίες χρονικές στιγμές t_i τυχαίες τιμές $\eta_i(t_i)$ πολύ μεγαλύτερης τάξης μεγέθους από τις καταγεγραμμένες). Παρατηρήστε τι αντίκτυπο έχει αυτό το σφάλμα μέτρησης στις εκτιμήσεις των παραμέτρων μέσω της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων. Σχολιάστε τα αποτελέσματα.

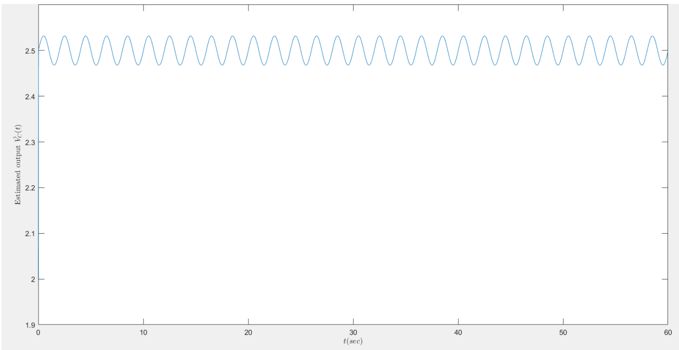
Προσθέτουμε έστω πέντε σφάλματα στις μετρήσεις του V_C από το αρχείό $v.p$ και έτσι επηρεάζεται και η V_R λόγω της σχέσης του βρόχου Β3. Γίνεται 100 φορές αύξηση στις θέσεις $1 * 10^5$ και $5 * 10^5$, 200 φορές αύξηση στις $2 * 10^5$ και $4 * 10^5$ και 300 φορές αύξηση στη θέση $3 * 10^5$.

Η έξοδος του συστήματος με τα τεχνητά σφάλματα γίνεται τώρα:



$Figure$ 1: Έξοδος συστήματος V_C με τεχνητά σφάλματα.

και η εκτίμσηση της εξόδου $\hat{V}_C$:



$Figure$ 1: Εκτιμώμενη έξοδος συστήματος V_C με τεχνητά σφάλματα.

Όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα, παρατηρούμε σημαντική μεταβολή στην εκτίμηση παραμέτρων του μοντέλου του συστήματος σε σχέση με τον προηγούμενο πίνακα, όπου δεν υπήρχαν τεχνητά σφάλματα. Συνεπώς, είναι εμφανές ότι πρέπει να γίνεται προσεκτική μελέτη για την αποφυγή τυχόν εσφαλμένων μετρήσεων που αποκλίνουν από την πραγματική συμπεριφορά του συστήματος, ώστε να οδηγηθούμε σε ένα πιο αντιπροσωπευτικό μοντέλο που θα προσεγγίσει το πραγματικό σύστημα. Να σημειωθεί ότι μια τόσο σημαντική απόκλιση στις παραμέτρους παρατηρήθηκε με τις προσθήκη μόλις πέντε σφαλμάτων.

1/RC = 387.625703

1/LC = 25282.492913

Πίνακας: Εκτίμηση παραμέτρων με τεχνητά σφάλματα.