


Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων

## Εργασία 2

Εκτίμηση Άγνωστων Παραμέτρων - Μέθοδοι Πραγματικού  
Χρόνου

Ελένη Δασκάλου,   
*mail : elendask@ece.auth.gr*

Μάιος, 2024

## Θέμα 1

Θεωρήστε το σύστημα

$$\dot{x} = -ax + bu, \quad x(0) = 0 \quad (1)$$

όπου  $x$  είναι η κατάσταση του συστήματος,  $u$  είναι η είσοδος, και  $a > 0$ ,  $b > 0$  σταθερές αλλά άγνωστες παράμετροι. Σχεδιάστε έναν εκτιμητή πραγματικού χρόνου των άγνωστων παραμέτρων με τη μέθοδο κλίσης και προσομοιώστε τη λειτουργία του. Θεωρήστε ότι η είσοδος του συστήματος είναι:

i)  $u(t) = 5$

ii)  $u(t) = 5 \sin(2t)$ , για  $t \geq 0$

Δημιουργήστε τις γραφικές παραστάσεις των  $x(t)$ ,  $\hat{x}(t)$  και της διαφοράς  $x(t) - \hat{x}(t)$ , καθώς και των εκτιμήσεων  $\hat{a}(t)$ ,  $\hat{b}(t)$  των  $a$  και  $b$ , αντίστοιχα. Τι διαφορές παρατηρείτε μεταξύ των δύο περιπτώσεων; Θεωρήστε για τα πειράματά σας ότι  $a = 4$  και  $b = 1.5$ .

**Απάντηση:**

**Θεωρητική Ανάλυση:**

Δίνεται η εξίσωση δυναμικού συστήματος:

$$\dot{x} = -ax + bu, \quad x(0) = 0 \quad (1)$$

όπου  $x$  είναι η κατάσταση του συστήματος,  $u$  είναι η είσοδος και  $a, b$  είναι σταθερές, θετικές αλλά άγνωστες παράμετροι, τις οποίες θέλουμε να εκτιμήσουμε σε πραγματικό χρόνο με τη **μέθοδο κλίσης (Gradient)**. Η μέθοδος αυτή, εφαρμόζεται σε γραμμικά παραμετροποιημένα συστήματα. Γι' αυτό, πριν ξεκινήσουμε τη διαδικασία εκτίμησης των άγνωστων παραμέτρων, φέρνουμε το δοθέν σύστημα σε γραμμικά παραμετροποιημένη μορφή:

- Έστω,  $a_m > 0$ :

Προσθαφαιρούμε τον όρο  $a_mx$  στην εξίσωση (1)

$$\implies \dot{x} = a_mx - a_mx - ax + bu \implies$$

$$\implies \dot{x} + a_mx = (a_m - a)x + bu$$

Εφαρμόζουμε μετασχηματισμό *Laplace* στην παραπάνω σχέση, έχοντας μηδενικές αρχικές συνθήκες, οπότε:

$$sx + a_mx = (a_m - a)x + bu \implies$$

$$\implies x(s + a_m) = (a_m - a)x + bu \implies$$

$$\implies x = \frac{1}{s + a_m} [(a_m - a)x + bu] \quad (1)'$$

Έστω:

$$\theta^* = [a_m - a \quad b]^T = [\theta_1^* \quad \theta_2^*]^T \text{ και } \phi = \left[ \left( \frac{1}{s + a_m} \right) x \quad \left( \frac{1}{s + a_m} \right) u \right]^T = [\phi_1 \quad \phi_2]^T.$$

Άρα, η (1)', στην παραμετροποιημένη μορφή γράφεται ως:

$$y = x = \theta^{*T} \phi$$

- Φτιάχνουμε το σύστημα αναγνώρισης:

$$\hat{x} = \hat{\theta}^T \phi$$

- Υπολογίζουμε το σφάλμα μεταξύ του πραγματικού συστήματος και του μοντέλου:

$$e = x - \hat{x} = \theta^{*T} \phi - \hat{\theta}^T \phi = (\theta^* - \hat{\theta})^T \phi = -\tilde{\theta}^T \phi$$

όπου  $\tilde{\theta} = \theta^* - \hat{\theta}$ .

- Η μέθοδος κλίσης στηρίζεται για την εύρεση της αναδρομικής εκτίμησης  $\hat{\theta}$  του  $\theta^*$  στην ελαχιστοποίηση ως προς  $\hat{\theta}$  κατάλληλα ορισμένης συνάρτησης κόστους του  $e$ . Μια τυπική συνάρτηση κόστους είναι:

$$K(\hat{\theta}) = \frac{e^2}{2} = \left( \frac{x - \hat{\theta}^T \phi}{2} \right)^2 \quad (2)$$

Θέλουμε λοιπόν

$$\arg \min_{\hat{\theta}} K(\hat{\theta})$$

Επειδή η  $K(\hat{\theta})$  όπως ορίστηκε είναι κυρτή για κάθε  $t \geq 0$ , κάθε τοπικό ελάχιστο της  $K(\hat{\theta})$  θα είναι και ολικό και θα ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\nabla K(\hat{\theta}) \Big|_{\hat{\theta}=\theta} = 0$$

Έτσι, από την (2) προκύπτει:

$$\nabla K(\hat{\theta}) = -(x - \hat{\theta}^T \phi) \phi = -e \phi$$

- Εφαρμόζουμε τη μέθοδο κλίσης.  
Έτσι, η ζητούμενη ελαχιστοποίηση, σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο:

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma \nabla K(\hat{\theta}) \implies \dot{\hat{\theta}} = \gamma e \phi^T, \begin{bmatrix} \dot{\hat{\theta}}_1 & \dot{\hat{\theta}}_2 \end{bmatrix}^T = \gamma e \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix}^T \quad (3)$$

Έτσι από την σχέση (3) μπορούμε να καταλήξουμε στο εξής διαφορικό σύστημα στο πεδίο του χρόνου, το οποίο επιθυμούμε να λύσουμε:

$$\begin{cases} \phi_1 = \frac{1}{s+a_m} x \xrightarrow{I.L.T} \dot{\phi}_1 = -a_m \phi_1 + x, & \phi_1(0) = 0 \\ \phi_2 = \frac{1}{s+a_m} u \xrightarrow{I.L.T} \dot{\phi}_2 = -a_m \phi_2 + u, & \phi_2(0) = 0 \end{cases}$$

Άρα, οι εξισώσεις κατάστασης του διαφορικού συστήματος (ODE) που θα πάμε να υλοποιήσουμε είναι οι εξής:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \hat{\theta}_1 \\ x_3 = \hat{\theta}_2 \\ x_4 = \phi_1 \\ x_5 = \phi_2 \\ x_6 = \hat{x} \end{cases} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{x} = -ax_1 + bu \\ \dot{x}_2 = \dot{\hat{\theta}}_1 = \gamma e \phi_1 = \gamma e x_4 \\ \dot{x}_3 = \dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma e \phi_2 = \gamma e x_5 \\ \dot{x}_4 = \dot{\phi}_1 = -a_m \phi_1 + x = -a_m x_4 + x_1 \\ \dot{x}_5 = \dot{\phi}_2 = -a_m \phi_2 + u = -a_m x_5 + u \\ \dot{x}_6 = \dot{\hat{x}} = (\hat{\theta}_1 - a_m) \hat{x} + \hat{\theta}_2 u = (x_2 - a_m) x_6 + x_3 u \end{cases}$$

όπου  $e = x - \hat{x} = x_1 - x_6$ .

### Προσομοιώσεις.

- Για να βρούμε τις εκτιμήσεις των άγνωστων παραμέτρων  $\hat{a}(t)$  και  $\hat{b}(t)$  με τη βοήθεια της μεθόδου κλίσης αρκεί να λύσουμε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων με δοθείσα είσοδο συστήματος  $u = 5$ ,  $a = 4$  και  $b = 1.5$ . Μετά από πειραματισμό επιλέγουμε ως κατάλληλες παραμέτρους  $\gamma = 5$  και  $a_m = 5$ . Ακολουθούν οι γραφικές παραστάσεις μετά την προσομοίωση σε *MATLAB* των  $x(t)$ ,  $\hat{x}(t)$  και της διαφοράς τους  $x(t) - \hat{x}(t)$ , καθώς και των εκτιμήσεων  $\hat{a}(t)$ ,  $\hat{b}(t)$  των  $a$  και  $b$ , αντίστοιχα.

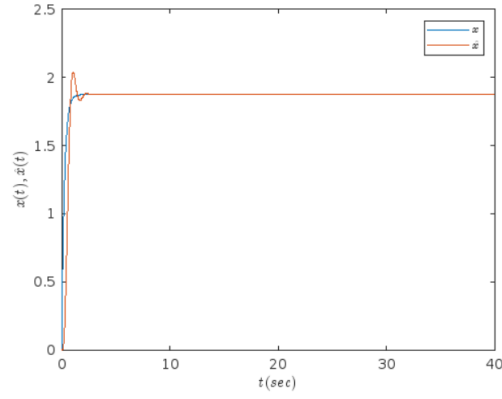


Figure 1: Πραγματική και Εκτιμώμενη Έξοδος του Συστήματος.

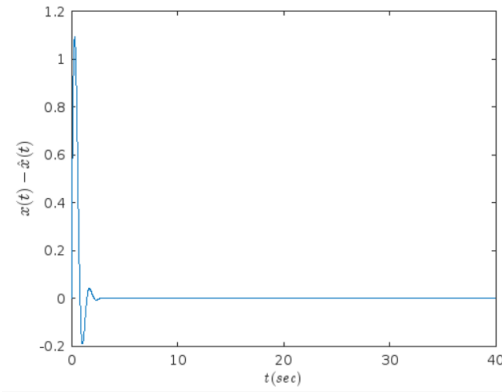


Figure 2: Διαφορά Πραγματικής και Εκτιμώμενης Εξόδου του Συστήματος.

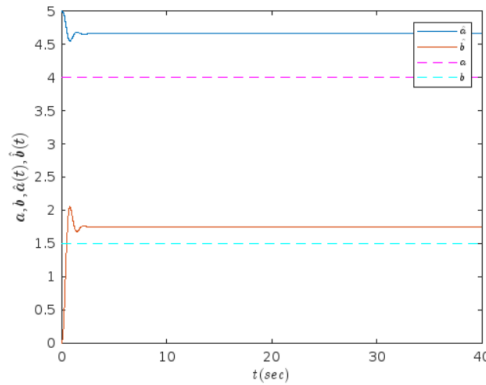


Figure 3: Πραγματικές και Εκτιμώμενες τιμές παραμέτρων.

Από τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις παρατηρούμε ότι στην περίπτωση της εφαρμογής σταθερής εισόδου η εκτίμηση της εξόδου  $\hat{y} = \hat{x}$  του μοντέλου τείνει να συγκλίνει την πραγματική έξοδο του συστήματος  $y = x$  (βλέπουμε και τη διαφορά τους να συγκλίνει πολύ γρήγορα στο μηδέν).

Όμως οι εκτιμώμενες τιμές των παραμέτρων  $\hat{a}(t)$  και  $\hat{b}(t)$  δεν φτάνουν τις πραγματικές τιμές παραμέτρων του συστήματος, όπως φαίνεται και στη γραφική παράσταση.

Αυτό συμβαίνει, διότι πρέπει να έχουμε διαφορετική είσοδο για να πετύχουμε ταυτόχρονη ικανοποίηση των συνθηκών σύγκλισης μεταξύ των παραμέτρων και σύγκλισης σφάλματος στο μηδέν.

Συγκεκριμένα, η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος από σχέση είναι  $H(s) = \frac{Y}{U} = \frac{b}{s+a}$  και συμπεραίνουμε ότι  $\det(H) \neq 0$  Άρα, χρειαζόμαστε είσοδο που δεν είναι απλά σταθερή τιμή, όπως της  $u = 5$ , αλλά να έχει μια διακριτή και μη μηδενική συχνότητα.

ii) Προσομοιώνουμε τον παραπάνω αλγόριθμο θέτοντας ως σταθερές  $a = 4, b = 1.5$  και είσοδο συστήματος  $u = 5\sin(2t)$  και με την επιλογή κατάλληλων παραμέτρων  $\gamma = 5$  και  $a_m = 5$  μετά από πειράματα. Ακολουθούν οι γραφικές παραστάσεις μετά την προσομοίωση σε *MATLAB* των  $x(t), \hat{x}(t)$  και της διαφοράς τους  $x(t) - \hat{x}(t)$ , καθώς και των εκτιμήσεων  $\hat{a}(t), \hat{b}(t)$  των  $a$  και  $b$ , αντίστοιχα.

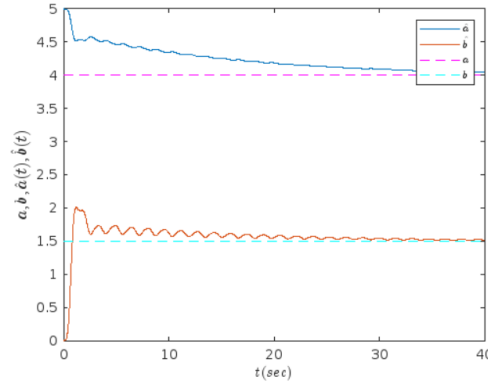


Figure 1: Πραγματική και Εκτιμώμενη Έξοδος του Συστήματος.

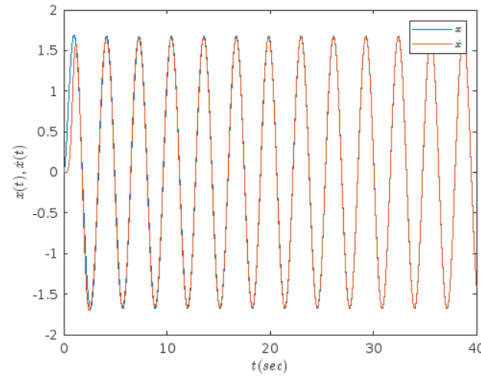


Figure 2: Διαφορά Πραγματικής και Εκτιμώμενης Εξόδου του Συστήματος.

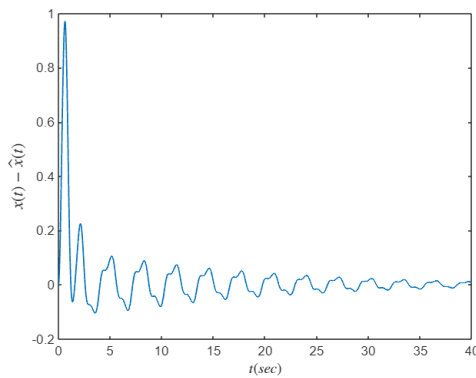


Figure 3: Πραγματικές και Εκτιμώμενες τιμές παραμέτρων.

Σε αυτήν την περίπτωση της εφαρμογής ημιτονοειδούς εισόδου παρατηρούμε ότι με το πέρασμα του χρόνου η εκτίμηση της εξόδου  $\hat{y} = \hat{x}$  του μοντέλου τείνει να συγκλίνει την πραγματική έξοδο του συστήματος και οι εκτιμώμενες τιμές  $\hat{a}(t), \hat{b}(t)$  των παραμέτρων  $a$  και  $b$ , συγκλίνουν στις πραγματικές τιμές παραμέτρων του συστήματος.

## Θέμα 2

Για το σύστημα (1) και με είσοδο  $u(t) = 5\sin(2t), \forall t \geq 0$ , να σχεδιάσετε εκτιμητή πραγματικού χρόνου των άγνωστων παραμέτρων *i*) παράλληλης δομής και *ii*) μεικτής δομής, βασισμένο στη μέθοδο *Lyapunov*, και να προσομοιώστε τη λειτουργία του όταν η έξοδος  $x$  του συστήματος μετρείται με θόρυβο  $\eta(t) = \eta_0 \sin(2\pi ft), \forall t \geq 0$ , με  $\eta_0 = 0.5$  και  $f = 40$ . Δημιουργήστε τις γραφικές παραστάσεις των  $x(t), \hat{x}(t)$  και της διαφοράς  $x(t) - \hat{x}(t)$ , καθώς και των εκτιμήσεων  $\hat{a}(t), \hat{b}(t)$  των  $a$  και  $b$ , αντίστοιχα. Να συγκριθούν οι δύο δομές. Τι παρατηρείτε καθώς αυξάνει το πλάτος  $\eta_0$  ή μεταβάλλεται η συχνότητα  $f$ . Θεωρήστε για τα πειράματά σας ότι  $a = 2$  και  $b = 5$ .

**Απάντηση:**

**Θεωρητική Ανάλυση:**

*i*) Παράλληλη Δομή:

Για το ακόλουθο δυναμικό σύστημα:

$$\dot{x} = -ax + bu, \quad x(0) = 0$$

$$\dot{x} = -\theta_1 x + \theta_2 u$$

$$y = x$$

θεωρούμε το σύστημα αναγνώρισης παράλληλης δομής το οποίο μας επιστρέφει την εκτίμηση της εξόδου:

$$\dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1 \hat{x} + \hat{\theta}_2 u, \quad \hat{x}(0) = 0$$

με  $\hat{\theta}_1 = \hat{a}, \hat{\theta}_2 = \hat{b}$ .

Για το σφάλμα εκτίμησης της παράλληλης δομής, έχουμε:

$$e = x - \hat{x} \xrightarrow{\frac{d}{dt}}$$

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}}$$

$$\dot{e} = -\theta^*_1 x + \theta^*_2 u + \hat{\theta}_1 \hat{x} - \hat{\theta}_2 u \pm \theta^*_1 x \xrightarrow[\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2 - \theta^*_2]{\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1 - \theta^*_1}$$

$$\dot{e} = -\theta^*_1 e + \tilde{\theta}_1 \hat{x} - \tilde{\theta}_2 u$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση *Lyapunov* για το σύστημα:

$$V(\hat{\theta}) = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2\gamma_1}\tilde{\theta}_1^2 + \frac{1}{2\gamma_2}\tilde{\theta}_2^2 \xrightarrow{\frac{d}{dt}}$$

$$\dot{V}(\hat{\theta}) = e\dot{e} + \frac{1}{\gamma_1}\tilde{\theta}_1\dot{\tilde{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_2}\tilde{\theta}_2\dot{\tilde{\theta}}_2 \implies$$

$$\dot{V}(\hat{\theta}) = -\theta^*_1 e^2 + \tilde{\theta}_1 \hat{x} \dot{e} - \tilde{\theta}_2 u \dot{e} + \frac{1}{\gamma_1}\tilde{\theta}_1\dot{\tilde{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_2}\tilde{\theta}_2\dot{\tilde{\theta}}_2$$

Για να συγκλίνει το μοντέλο εκτίμησης παράλληλης δομής προς το πραγματικό σύστημα, σύμφωνα με τα θεωρήματα *Barbalat* και *Lyapunov*, θέλουμε :

$$V(\hat{\theta}) \geq 0 \quad \text{και} \quad \dot{V}(\hat{\theta}) \leq 0$$

Για αυτά (με βάση τους συντελεστές αορίστου προσήμου), επιλέγουμε:

$$\dot{\tilde{\theta}}_1 = -\gamma_1 \hat{x} e$$

$$\dot{\tilde{\theta}}_2 = -\gamma_2 u e$$

Έτσι, λαμβάνουμε τις παρακάτω εξισώσεις κατάστασης του συνολικού συστήματος (*ODE*), λαμβάνοντας υπόψιν ότι το σήμα  $x$  περιλαμβάνει θόρυβο  $\eta(t)$ :

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \hat{x} \\ x_3 = \hat{\theta}_1 \\ x_4 = \hat{\theta}_2 \end{cases} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{x} = -ax_1 + bu \\ \dot{x}_2 = \dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1 \hat{x} + \hat{\theta}_2 u = -x_3 x_2 + x_4 u \\ \dot{x}_3 = \dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 e \hat{x} = \gamma_1 e x_2 \\ \dot{x}_4 = \dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2 e u \end{cases}$$

όπου, το σφάλμα πρόβλεψης όταν το  $x$  λαμβάνεται με θόρυβο είναι:

$$e = x + \eta - \hat{x} = x_1 - x_2 + \eta.$$

### Προσομοιώσεις.

ι) Προσομοιώνουμε σε *MATLAB* τον αλγόριθμο *Lyapunov* με παράλληλη δομή εκτιμή-  
τη θέτοντας ως σταθερές  $a = 2$ ,  $b = 5$ , είσοδο συστήματος  $u = 5\sin(2t)$ , θόρυβο  
 $\eta(t) = \eta_0 \sin(2\pi ft)$  και την επιλογή κατάλληλων παραμέτρων  $\gamma_1 = 15$  και  $\gamma_2 = 25$  βάσει  
πειραμάτων.

Ακολουθούν οι γραφικές παραστάσεις των:  $x(t)$ ,  $\hat{x}(t)$  και της διαφοράς  $x(t) - \hat{x}(t)$ , καθώς  
και των εκτιμήσεων  $\hat{a}(t)$ ,  $\hat{b}(t)$  των  $a$  και  $b$ , αντίστοιχα, με πλάτος θορύβου  $\eta_0 = 0.5$  και  
συχνότητα  $f = 40$ .

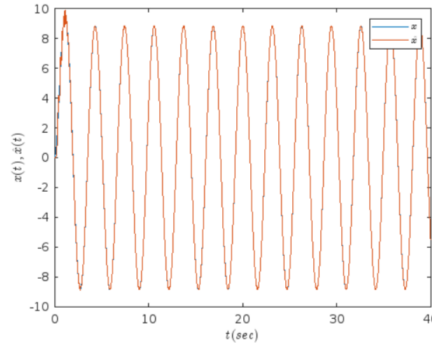


Figure 1: Πραγματική και Εκτιμώμενη Έξοδος του Συστήματος.

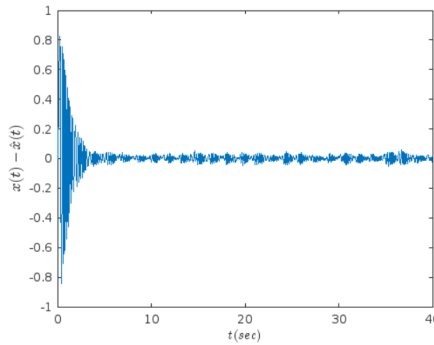


Figure 2: Διαφορά Πραγματικής και Εκτιμώμενης Εξόδου του Συστήματος.

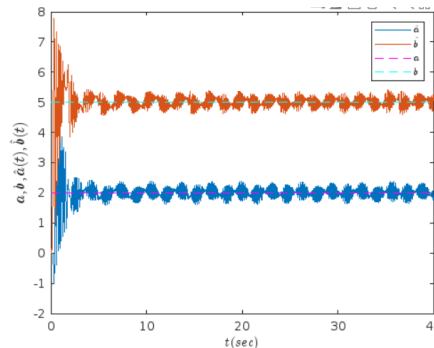


Figure 3: Πραγματικές και Εκτιμώμενες τιμές παραμέτρων.

Προσομοιώνουμε τον αλγόριθμο μεταβάλλοντας το πλάτος θορύβου, έστω  $\eta_0 = 0.1$ ,  $\eta_0 = 1$   
και  $\eta_0 = 10$ , διατηρώντας όλα τα υπόλοιπα δεδομένα ίδια με πριν. Τώρα, λαμβάνουμε τις  
ακόλουθες γραφικές παραστάσεις:

\*  $\eta_0 = 0.1$

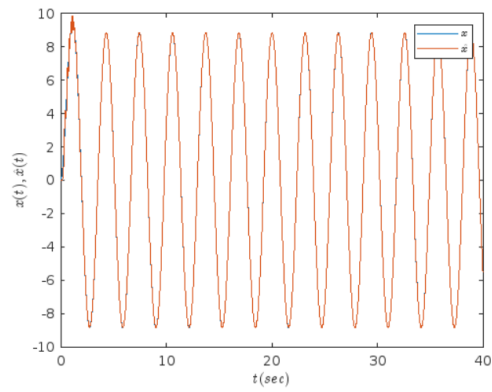


Figure 1: Πραγματική και Εκτιμώμενη Έξοδος του Συστήματος.

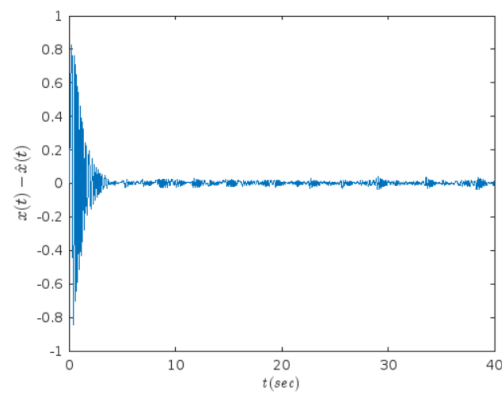


Figure 2: Διαφορά Πραγματικής και Εκτιμώμενης Εξόδου του Συστήματος.

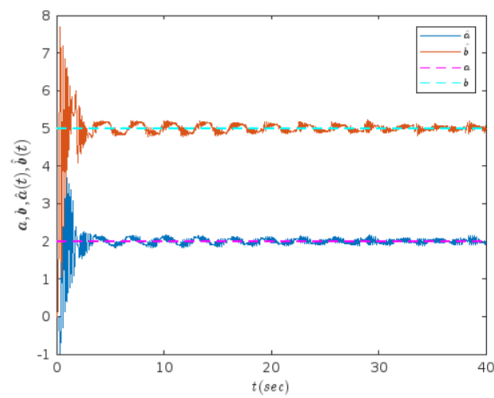


Figure 3: Πραγματικές και Εκτιμώμενες τιμές παραμέτρων.



\*  $\eta_0 = 1$

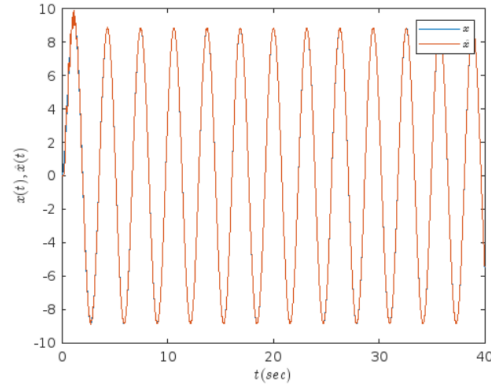


Figure 1: Πραγματική και Εκτιμώμενη Έξοδος του Συστήματος.

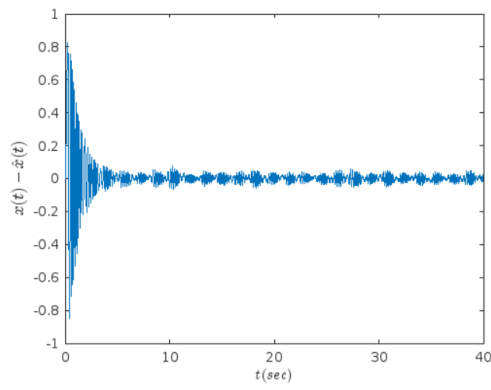


Figure 2: Διαφορά Πραγματικής και Εκτιμώμενης Εξόδου του Συστήματος.

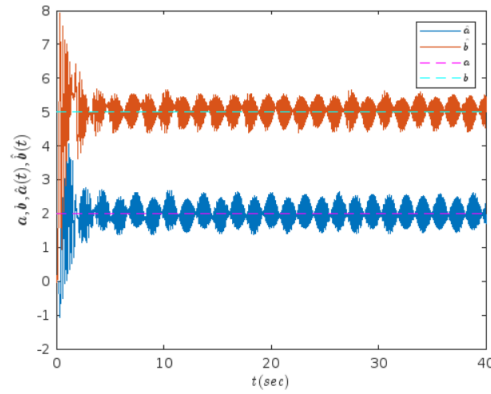


Figure 3: Πραγματικές και Εκτιμώμενες τιμές παραμέτρων.

\*  $\eta_0 = 10$

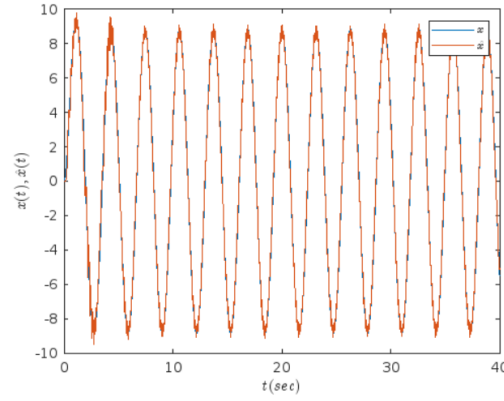


Figure 1: Πραγματική και Εκτιμώμενη Έξοδος του Συστήματος.

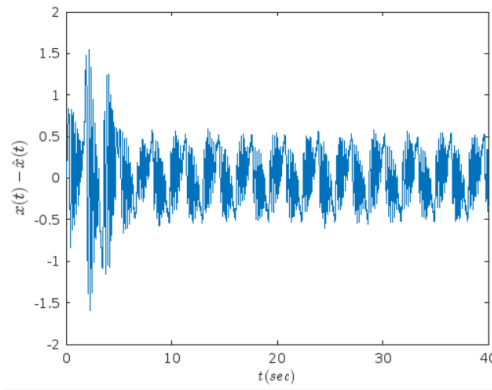


Figure 2: Διαφορά Πραγματικής και Εκτιμώμενης Εξόδου του Συστήματος.

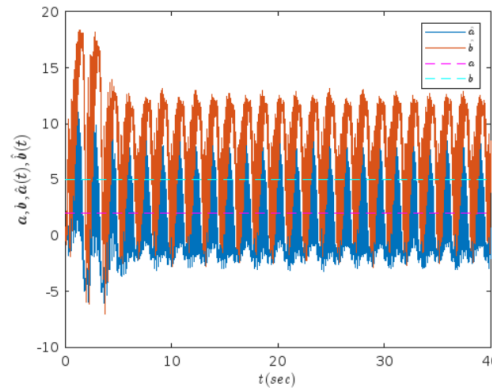


Figure 3: Πραγματικές και Εκτιμώμενες τιμές παραμέτρων.

Με την αύξηση του πλάτους του θορύβου παρατηρούμε πολύ μεγάλη απόκλιση των εκτιμήσεων των παραμέτρων καθώς και του σφάλματος από το μηδέν. Ειδικά σε τιμές μεγαλύτερες του 1 παρατηρούμε ότι όχι μόνο δε συγκλίνει στο μηδέν, αλλά αυξάνεται και η τιμή του μέσου απόλυτου σφάλματος. Αυτό βέβαια ήταν το αναμενόμενο, αφού ο θόρυβος επηρεάζει αρνητικά τις εκτιμήσεις από τις πραγματικές τιμές. Φαίνεται, επίσης, ότι όσο αυξάνουμε το πλάτος του θορύβου, θα ξεπεράσει μία τιμή κατωφλίου, οπότε δε θα ισχύει η αρχή επιμένουσας διέγερσης. Κάτι που φανερά βλέπουμε πως επηρεάζει τις εκτιμήσεις των παραμέτρων και αποκλίνουν σημαντικά από τις πραγματικές τιμές.

Προσμοιώνουμε, τώρα, τον αλγόριθμο μεταβάλλοντας τη συχνότητα  $f$ , έστω  $f = 5$ ,  $f = 300$  και  $f = 500Hz$ , διατηρώντας όλα τα υπόλοιπα δεδομένα ίδια με πριν. Τώρα, λαμβάνουμε τις ακόλουθες γραφικές παραστάσεις:

$$- f = 5Hz$$

/

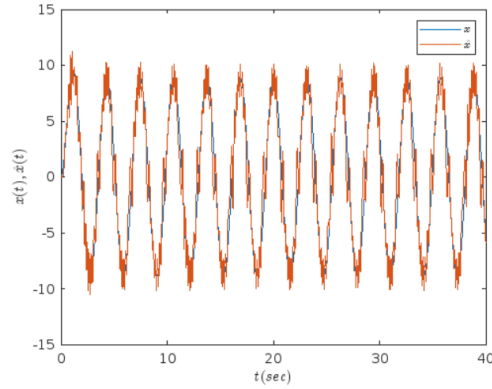


Figure 1: Πραγματική και Εκτιμώμενη Έξοδος του Συστήματος.

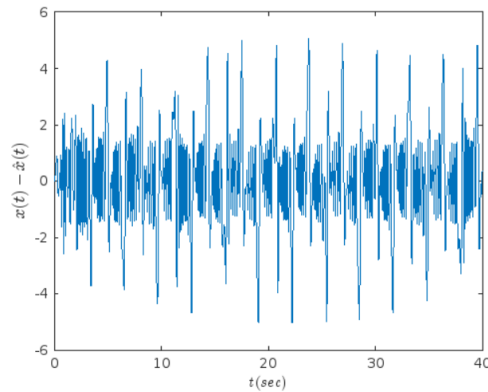


Figure 2: Διαφορά Πραγματικής και Εκτιμώμενης Εξόδου του Συστήματος.

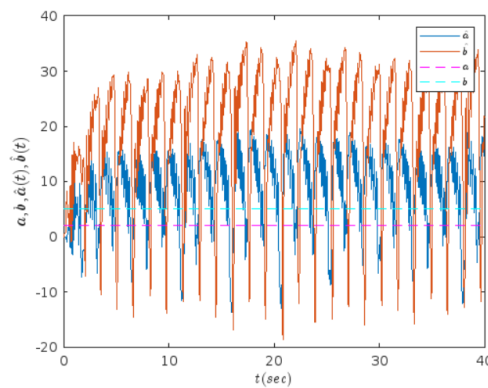


Figure 3: Πραγματικές και Εκτιμώμενες τιμές παραμέτρων.

$$- f = 300Hz$$

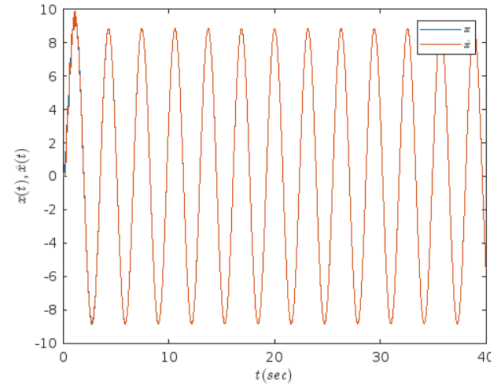


Figure 1: Πραγματική και Εκτιμώμενη Έξοδος του Συστήματος.

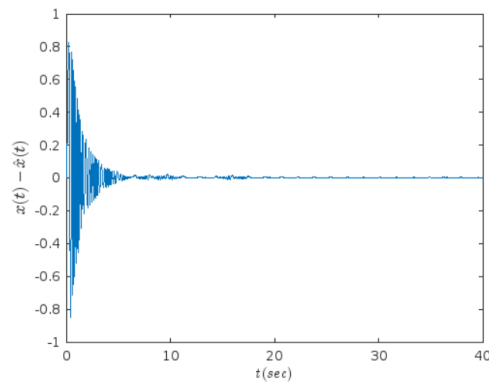


Figure 2: Διαφορά Πραγματικής και Εκτιμώμενης Εξόδου του Συστήματος.

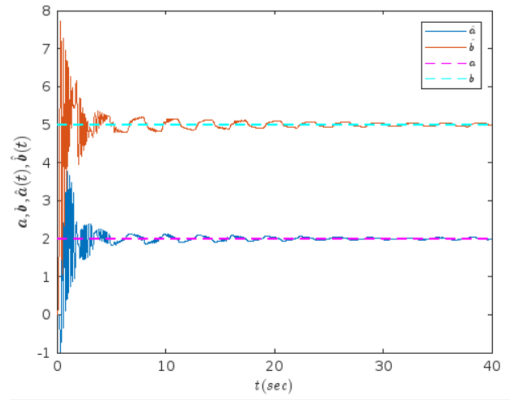


Figure 3: Πραγματικές και Εκτιμώμενες τιμές παραμέτρων.

–  $f = 500Hz$

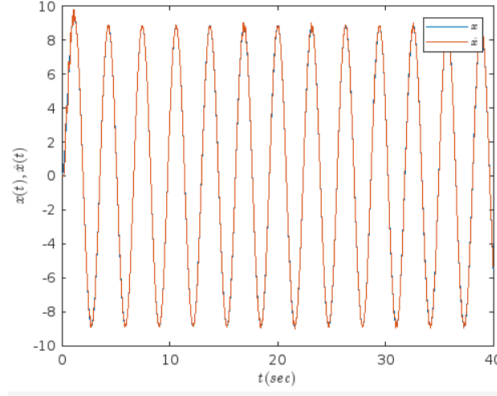


Figure 1: Πραγματική και Εκτιμώμενη Έξοδος του Συστήματος.

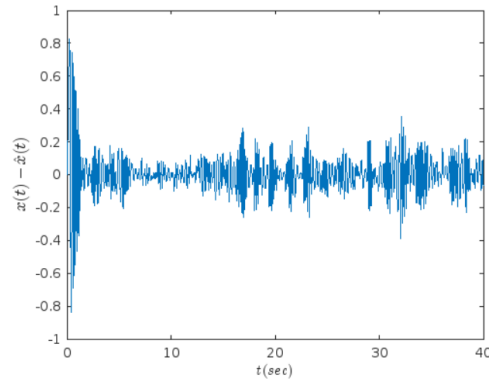


Figure 2: Διαφορά Πραγματικής και Εκτιμώμενης Εξόδου του Συστήματος.

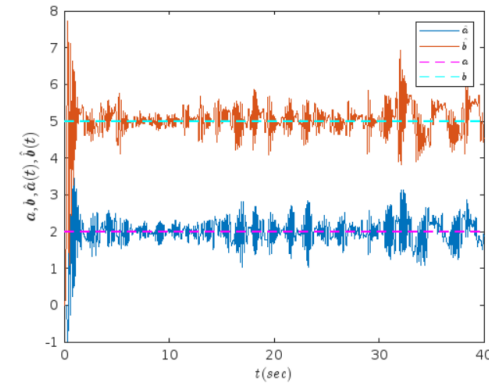


Figure 3: Πραγματικές και Εκτιμώμενες τιμές παραμέτρων.

Παρατηρούμε ότι, η αλλαγή στη συχνότητα έχει μεγάλη επίδραση τόσο στο σφάλμα όσο και στις εκτιμήσεις των παραμέτρων  $\hat{a}$  και  $\hat{b}$ . Συγκεκριμένα, για χαμηλές τιμές τις συχνότητας, στο σφάλμα παρατηρούνται ταλαντώσεις μεγάλου πλάτους γύρω από το μηδέν καθώς και στις εκτιμήσεις των παραμέτρων γύρω από τις πραγματικές τους τιμές.

Με την αύξηση της συχνότητας στα  $300Hz$ , έχουμε πάρα πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα. Η διαφορά της πραγματικής τιμής της εξόδου και τις εκτιμώμενης τιμής της συγκλίνει γρήγορα στο μηδέν και οι εκτιμήσεις των παραμέτρων συγκλίνουν στις πραγματικές τιμές σχεδόν με απόλυτη ακρίβεια.

Ωστόσο, φαίνεται να υπάρχει ένα κατώφλι και στην αύξηση της συχνότητας, αφού για  $f = 500Hz$  τα αποτελέσματα της προσομοίωσης αποκλίνουν και πάλι από τα επιθυμητά.

Γενικά ύστερα από πειράματα συμπεραίνουμε ότι παρουσία θορύβου αν είναι υψηλός στο πλάτος,

πολύ χαμηλός ή πάρα πολύ υψηλός στη συχνότητα έχουμε μη ικανοποιητική εκτίμηση του συστήματος.

ii) Μεικτή Δομή:

Για το ακόλουθο δυναμικό σύστημα:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -ax + bu, & x(0) &= 0 \\ \dot{x} &= -\theta_1 x + \theta_2 u \\ y &= x\end{aligned}$$

με  $\theta_1 = a$ ,  $\theta_2 = b$ .

Θεωρούμε το σύστημα αναγνώρισης μεικτής δομής το οποίο μας επιστρέφει την εκτίμηση της εξόδου:

$$\begin{aligned}y &= x \\ \dot{x} &= -\hat{\theta}_1 x + \hat{\theta}_2 u + \theta_m e\end{aligned}$$

με  $\hat{\theta}_1 = \hat{a}$ ,  $\hat{\theta}_2 = \hat{b}$  και  $\theta_m = ct > 0$ .

Για το σφάλμα εκτίμησης της μεικτής δομής, έχουμε:

$$\begin{aligned}e &= x - \hat{x} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \\ \dot{e} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} \\ \dot{e} &= -\theta^*_1 x + \theta^*_2 u + \hat{\theta}_1 \hat{x} - \hat{\theta}_2 u - \theta_m e \xrightarrow[\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2 - \theta^*_2]{\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1 - \theta^*_1} \\ \dot{e} &= -\theta_m e + \tilde{\theta}_1 \hat{x} - \tilde{\theta}_2 u\end{aligned}$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση *Lyapunov* για το σύστημα:

$$\begin{aligned}V(\hat{\theta}) &= \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2\gamma_1}\tilde{\theta}_1^2 + \frac{1}{2\gamma_2}\tilde{\theta}_2^2 \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \\ \dot{V}(\hat{\theta}) &= e\dot{e} + \frac{1}{\gamma_1}\tilde{\theta}_1\dot{\tilde{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_2}\tilde{\theta}_2\dot{\tilde{\theta}}_2 \implies \\ \dot{V}(\hat{\theta}) &= -\theta_m e^2 + \tilde{\theta}_1 \hat{x} \dot{e} - \tilde{\theta}_2 u \dot{e} + \frac{1}{\gamma_1}\tilde{\theta}_1\dot{\tilde{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_2}\tilde{\theta}_2\dot{\tilde{\theta}}_2\end{aligned}$$

Για να συγκλίνει το μοντέλο εκτίμησης μεικτής δομής προς το πραγματικό σύστημα, σύμφωνα με τα θεωρήματα *Barbalat* και *Lyapunov*, θέλουμε :

$$V(\hat{\theta}) \geq 0 \quad \text{και} \quad \dot{V}(\hat{\theta}) \leq 0$$

Για αυτά (με βάση τους συντελεστές αορίστου προσήμου), επιλέγουμε:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\theta}}_1 &= -\gamma_1 x e \\ \dot{\tilde{\theta}}_2 &= -\gamma_2 u e\end{aligned}$$

Έτσι, λαμβάνουμε τις παρακάτω εξισώσεις κατάστασης του συνολικού συστήματος (*ODE*), λαμβάνοντας υπόψη ότι το σήμα  $x$  περιλαμβάνει θόρυβο  $\eta(t)$ :

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \hat{x} \\ x_3 = \hat{\theta}_1 \\ x_4 = \hat{\theta}_2 \end{cases} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{x} = -ax_1 + bu \\ \dot{x}_2 = \dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1 \hat{x} + \hat{\theta}_2 u + \theta_m e = -x_3 x_2 + x_4 u \\ \dot{x}_3 = \dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 e x_{in} = \gamma_1 e(x + \eta) \\ \dot{x}_4 = \dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2 e u \end{cases}$$

όπου, το σφάλμα πρόβλεψης όταν το  $x$  λαμβάνεται με θόρυβο είναι:

$$e = x + \eta - \hat{x} = x_1 - x_2 + \eta.$$

- ii) Προσομοιώνουμε σε *MATLAB* τον αλγόριθμο *Lyapunov* με μικτή δομή εκτιμητή θέτοντας ως σταθερές  $a = 2$ ,  $b = 5$ , είσοδο συστήματος  $u = 5\sin(2t)$ , θόρυβο  $\eta(t) = \eta_0 \sin(2\pi ft)$  και την επιλογή κατάλληλων παραμέτρων  $\gamma_1 = 15$  και  $\gamma_2 = 25$  βάσει πειραμάτων. Ακολουθούν οι γραφικές παραστάσεις των:  $x(t)$ ,  $\hat{x}(t)$  και της διαφοράς  $x(t) - \hat{x}(t)$ , καθώς και των εκτιμήσεων  $\hat{a}(t)$ ,  $\hat{b}(t)$  των  $a$  και  $b$ , αντίστοιχα, με πλάτος θορύβου  $\eta_0 = 0.5$  και συχνότητα  $f = 40$ .

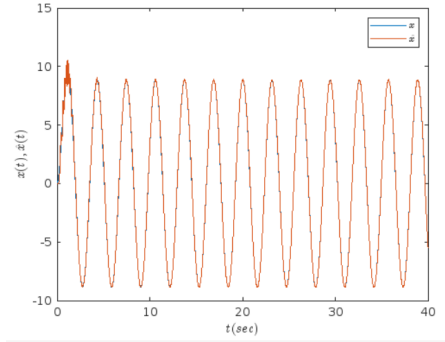


Figure 1: Πραγματική και Εκτιμώμενη Έξοδος του Συστήματος.

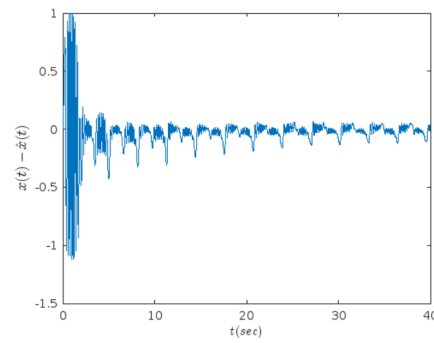


Figure 2: Διαφορά Πραγματικής και Εκτιμώμενης Εξόδου του Συστήματος.

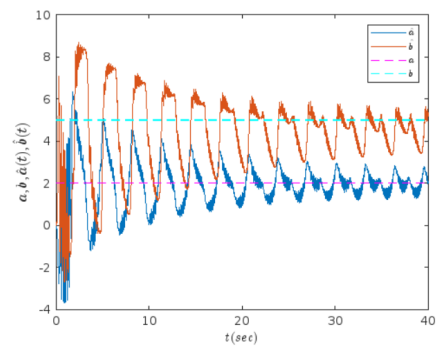


Figure 3: Πραγματικές και Εκτιμώμενες τιμές παραμέτρων.

Προσμοιώνουμε τον αλγόριθμο μεταβάλλοντας το πλάτος θορύβου, έστω  $\eta_0 = 0.1$ , διατηρώντας όλα τα υπόλοιπα δεδομένα ίδια με πριν. Τώρα, λαμβάνουμε τις ακόλουθες γραφικές παραστάσεις:

–  $\eta_0 = 0.1$

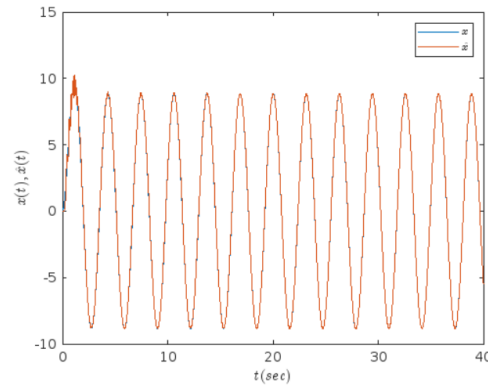


Figure 1: Πραγματική και Εκτιμώμενη Έξοδος του Συστήματος.

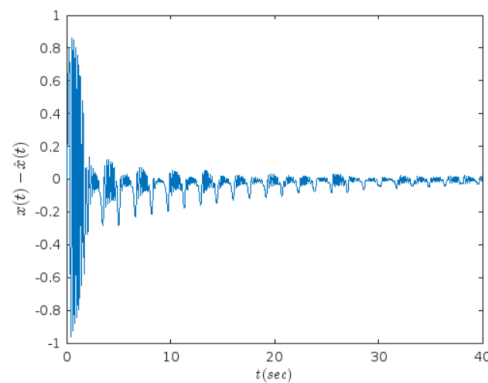


Figure 2: Διαφορά Πραγματικής και Εκτιμώμενης Εξόδου του Συστήματος.

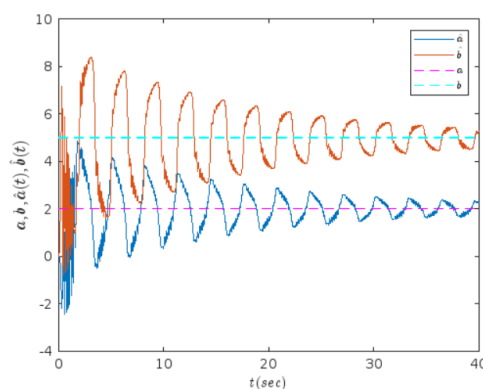


Figure 3: Πραγματικές και Εκτιμώμενες τιμές παραμέτρων.

Παρατηρούμε ότι ακόμη και με μείωση του πλάτους του θορύβου τα αποτελέσματα δεν είναι καθόλου ικανοποιητική με τη μέθοδο μικτής δομής. Συγκεκριμένα, ειδικά για μεγαλύτερα πλάτη θορύβου, στις εκτιμήσεις των παραμέτρων παρατηρούνται ταλαντώσεις μεγάλου πλάτους γύρω από τις πραγματικές τιμές αυτών. Η διαφορά της πραγματικής τιμής της εξόδου και της εκτιμώμενης δεν συγκλίνει ακριβώς στο μηδέν αλλά ταλαντώνεται γύρω από αυτό, με μικρό βέβαια πλάτος ταλαντώσεις με το πέρασμα του χρόνου.



Προσμοιώνουμε, τώρα, τον αλγόριθμο μεταβάλλοντας τη συχνότητα  $f$ , έστω  $f = 5$  και  $f = 500Hz$ , διατηρώντας όλα τα υπόλοιπα δεδομένα ίδια με πριν. Τώρα, λαμβάνουμε τις ακόλουθες γραφικές παραστάσεις:

- $f = 5Hz$

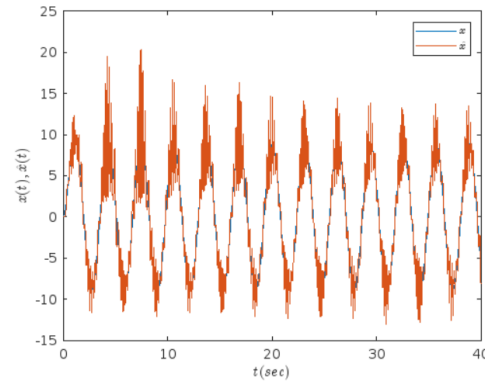


Figure 1: Πραγματική και Εκτιμώμενη Έξοδος του Συστήματος.

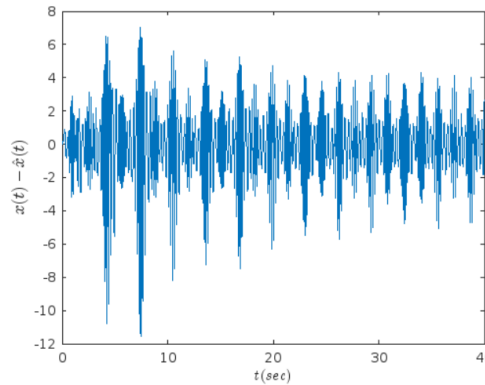


Figure 2: Διαφορά Πραγματικής και Εκτιμώμενης Εξόδου του Συστήματος.

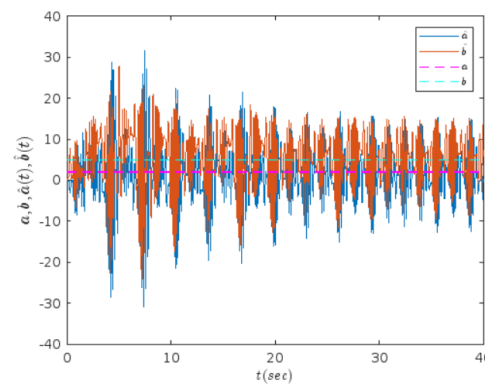


Figure 3: Πραγματικές και Εκτιμώμενες τιμές παραμέτρων.

- $f = 300Hz$

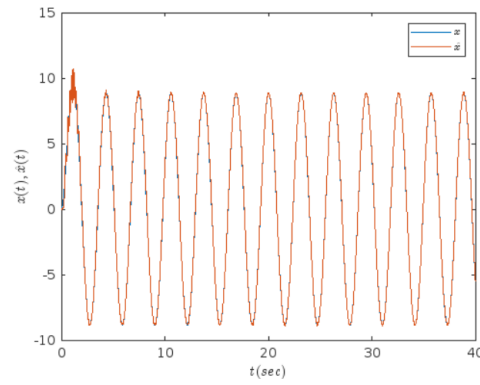


Figure 1: Πραγματική και Εκτιμώμενη Έξοδος του Συστήματος.

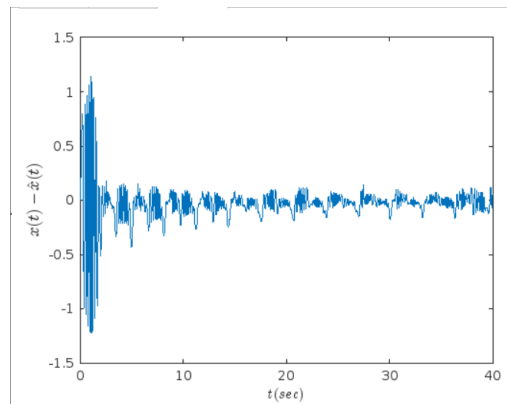


Figure 2: Διαφορά Πραγματικής και Εκτιμώμενης Εξόδου του Συστήματος.

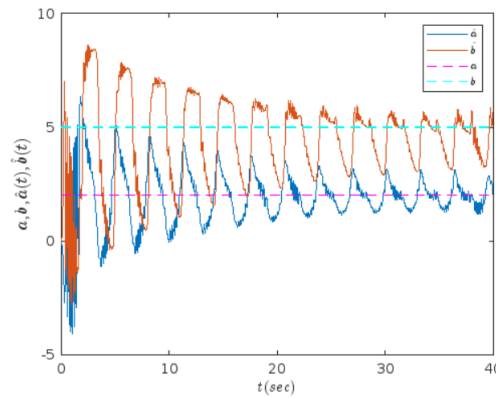


Figure 3: Πραγματικές και Εκτιμώμενες τιμές παραμέτρων.

Ξανά, παρατηρούμε ότι με μείωση της συχνότητας του θορύβου οι εκτιμώμενες τιμές των παραμέτρων ταλαντώνονται με σημαντικά μεγάλο πλάτος γύρω από τις πραγματικές τους τιμές και η διαφορά πραγματικής και εκτιμώμενης τιμής της εξόδου γύρω από το μηδέν.

Σύγκριση παράλληλης και μικτής δομής:

Αν και παρατηρείται και στις δύο περιπτώσεις ότι η αύξηση του πλάτους και η μείωση της συχνότητας του θόρυβου επηρεάζουν αρνητικά την έξοδο του συστήματος και τις εκτιμήσεις των παραμέτρων, φαίνεται στη μικτή δομή να επηρεάζει περισσότερο. Αυτό οφείλεται στην εξίσωση κατάστασης για την σύγκλιση των παραμέτρων όταν χρησιμοποιούμε παράλληλη και μικτή δομή. Συγκεκριμένα:

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 \hat{x}e = -\gamma_1 x \hat{x} + \gamma_1 \hat{x}^2 \quad (\text{παράλληλη δομή})$$

και

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 x e = +\gamma_1 \hat{x}x - \gamma_1 \hat{x}^2 \quad (\text{μικτή δομή})$$

όπου ο θόρυβος  $\eta(t)$  εμπλέκεται στο σήμα  $x$  και καθίσταται εμφανές ότι στην μικτή δομή ο θόρυβος είναι δεύτερης τάξης (στο τετράγωνο), ενώ στην παράλληλη δομή είναι πρώτης τάξης. Για αυτόν τον λόγο, ο θόρυβος κατά την μικτή δομή έχει πολύ μεγαλύτερη επιρροή στις εκτιμήσεις και την σύγκλιση αυτών στο πραγματικό σύστημα.

### Θέμα 3

Θεωρήστε το σύστημα

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, \quad (2)$$

όπου  $x = [x_1 x_2]^T$  είναι η κατάσταση του συστήματος,  $u(t) = 4\sin(\pi t) + 2\sin(8\pi t), \forall t \geq 0$ , είναι η είσοδος, και  $A \leq 0$ ,  $B$  σταθεροί αλλά άγνωστοι πίνακες. Να σχεδιαστεί εκτιμητής πραγματικού χρόνου των άγνωστων πινάκων βασισμένος στη μέθοδο *Lyapunov*, και να προσομοιωθεί η λειτουργία του. Δημιουργήστε τις γραφικές παραστάσεις των  $x(t), \hat{x}(t)$  και της διαφοράς  $x(t) - \hat{x}(t)$ , καθώς και των εκτιμήσεων  $\hat{A}(t), \hat{B}(t)$  των  $A$  και  $B$ , αντίστοιχα. Τι διαφορές παρατηρείτε μεταξύ των δύο περιπτώσεων; Θεωρήστε για τα πειράματά σας ότι  $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$  και  $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

#### Απάντηση:

Θεωρητική Ανάλυση:

Έχουμε το σύστημα δεύτερης τάξης:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x_0 = [0 \ 0]^T,$$

$$\text{όπου } A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Εκτιμητής **Μικτής Δομής** κατά μέθοδο *Lyapunov*:

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u - \Theta_m e,$$

$$\text{με } \Theta_m = \begin{bmatrix} \theta_{1,1} & \theta_{1,2} \\ \theta_{2,1} & \theta_{2,2} \end{bmatrix} \text{ ένας αυθαίρετος σταθερός πίνακας.}$$

Για το σφάλμα έχουμε:

$$\begin{aligned} e &= x - \hat{x} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \\ \dot{e} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} \iff \\ \dot{e} &= Ax + Bu - \hat{A}\hat{x} - \hat{B}u + \Theta_m e \xrightarrow[\hat{A}=\hat{A}-A]{\hat{B}=\hat{B}-B} \\ \dot{e} &= \Theta_m e - Ax - \hat{B}u \end{aligned}$$

Στην συνέχεια επιλέγουμε συνάρτηση *Lyapunov*  $V(e, \tilde{A}, B)$ , όπου  $P = P^T > 0$  είναι λύση της εξίσωσης *Lyapunov*:

$$\Theta_m^T P + P \Theta_m = -I$$

$$\begin{aligned}
V(e, \tilde{A}, \tilde{B}) &= e^T P e + tr(\frac{\tilde{A}^T P \tilde{A}}{\gamma_1}) + tr(\frac{\tilde{B}^T P \tilde{B}}{\gamma_2}) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \\
\dot{V} &= \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} + tr(\frac{\dot{\tilde{A}}^T P \tilde{A}}{\gamma_1} + \frac{\tilde{A}^T P \dot{\tilde{A}}}{\gamma_1}) + tr(\frac{\dot{\tilde{B}}^T P \tilde{B}}{\gamma_2} + \frac{\tilde{B}^T P \dot{\tilde{B}}}{\gamma_2}) \iff \\
\dot{V} &= \dot{e}^T (P \Theta_m + \Theta_m^T P) e - 2e^T P \tilde{A} x - 2e^T P \tilde{B} u + tr(2 \frac{\tilde{A}^T P \dot{\tilde{A}}}{\gamma_1}) + tr(2 \frac{\tilde{B}^T P \dot{\tilde{B}}}{\gamma_2}) \iff \\
& (e^T P \tilde{A} x = x^T \tilde{A}^T = tr(\tilde{A}^T P e x^T), e^T P \tilde{B} u = tr(\tilde{B}^T P e u^T)) \iff \\
\dot{V} &= -\dot{e}^T e + 2tr(\frac{\tilde{A}^T P \dot{\tilde{A}}}{\gamma_1} - \tilde{A}^T P e x^T + \frac{\tilde{B}^T P \dot{\tilde{B}}}{\gamma_2} - \tilde{B}^T P e u^T)
\end{aligned}$$

Για να συγκλίνει το μοντέλο εκτίμησης παράλληλης δομής προς το πραγματικό σύστημα, σύμφωνα με τα θεωρήματα *Barbalat* και *Lyapunov*, θέλουμε :

$$V \geq 0 \quad \kappa \alpha \iota \quad \dot{V} \leq 0$$

Για αυτά (με βάση τους συντελεστές αορίστου προσήμου), επιλέγουμε:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{A}} &= -\gamma_1 e x^T \\
\dot{\tilde{B}} &= -\gamma_2 e u^T
\end{aligned}$$

Έτσι, έχουμε:

$$V(e, \tilde{A}, \tilde{B}) \geq 0 \quad \kappa \alpha \iota \quad \dot{V}(e, \tilde{A}, \tilde{B}) = -\dot{e}^T e \leq 0$$

Κατά αυτόν τον τρόπο προκύπτει το εξής διαφορικό σύστημα εξισώσεων κατάστασης (*ODE*) και θεωρώντας  $x = [x_1 x_2]^T$  και σφάλμα  $e = x - \hat{x} \iff [e_1 \quad e_2]^T = [x_1 - \hat{x}_1 \quad x_2 - \hat{x}_2]^T$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = \hat{a}_{1,1} \\ y_4 = \hat{a}_{1,2} \\ y_5 = \hat{a}_{2,1} \\ y_6 = \hat{a}_{2,2} \\ y_7 = \hat{b}_1 \\ y_8 = \hat{b}_2 \\ y_9 = \hat{x}_1 \\ y_{10} = \hat{x}_2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_1 = \dot{x}_1 = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + b_1u \\ \dot{y}_2 = \dot{x}_2 = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + b_2u \\ \dot{y}_3 = \dot{\hat{a}}_{1,1} = \gamma_1 e_1 x_1 = \gamma_1 e_1 y_1 \\ \dot{y}_4 = \dot{\hat{a}}_{1,2} = \gamma_1 e_1 x_2 = \gamma_1 e_1 y_2 \\ \dot{y}_5 = \dot{\hat{a}}_{2,1} = \gamma_1 e_2 x_1 = \gamma_1 e_2 y_1 \\ \dot{y}_6 = \dot{\hat{a}}_{2,2} = \gamma_1 e_2 x_2 = \gamma_1 e_2 y_2 \\ \dot{y}_7 = \dot{\hat{b}}_1 = \gamma_2 e_1 u \\ \dot{y}_8 = \dot{\hat{b}}_2 = \gamma_2 e_2 u \\ \dot{y}_9 = \dot{\hat{x}}_1 = \hat{a}_{1,1}x_1 + \hat{a}_{1,2}x_2 + \hat{b}_1u - (\theta_{1,1}e_1 + \theta_{1,2}e_2) = y_3x_1 + y_4x_2 + y_7u - (\theta_{1,1}e_1 + \theta_{1,2}e_2) \\ \dot{y}_{10} = \dot{\hat{x}}_2 = \hat{a}_{2,1}x_1 + \hat{a}_{2,2}x_2 + \hat{b}_2u - (\theta_{2,1}e_1 + \theta_{2,2}e_2) = y_5x_1 + y_6x_2 + y_8u - (\theta_{2,1}e_1 + \theta_{2,2}e_2) \end{array} \right.$$

$$\mu \epsilon \quad e = [e_1 \quad e_2]^T = [x_1 - \hat{x}_1 \quad x_2 - \hat{x}_2]^T = [y_1 - y_9 \quad y_2 - y_{10}]^T$$

### Προσομοίωση

Προσομοιώνουμε σε *MATLAB* τον παραπάνω αλγόριθμο θέτοντας ως σταθερές πίνακα  $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$ , διάνυσμα  $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ , είσοδο συστήματος  $u = 4\sin(\pi t) + 2\sin(8\pi t)$ ,  $\gamma_1 = 15$ ,  $\gamma_2 = 25$  και  $\Theta_m = \begin{bmatrix} -20 & -13 \\ -20 & -18 \end{bmatrix}$  βάσει πειραμάτων.

Ακολουθούν οι γραφικές παραστάσεις των  $x(t)$ ,  $\hat{x}(t)$  (θα φανούν ξεχωριστά οι γραφικές των  $x_1(t)$ ,  $\hat{x}_1(t)$  και  $x_2(t)$ ,  $\hat{x}_2(t)$ ) και της διαφοράς  $x(t) - \hat{x}(t)$ , καθώς και των εκτιμήσεων  $\hat{A}(t)$ ,  $\hat{B}(t)$  των  $A$  και  $B$ , αντίστοιχα.

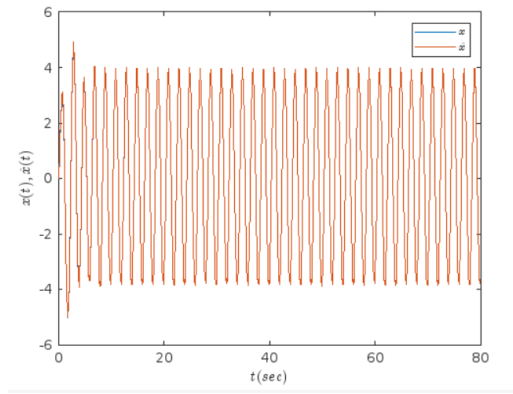


Figure 1: Πραγματική και Εκτιμώμενη Έξοδος του Συστήματος  $x_1(t)$ ,  $\hat{x}_1(t)$ .

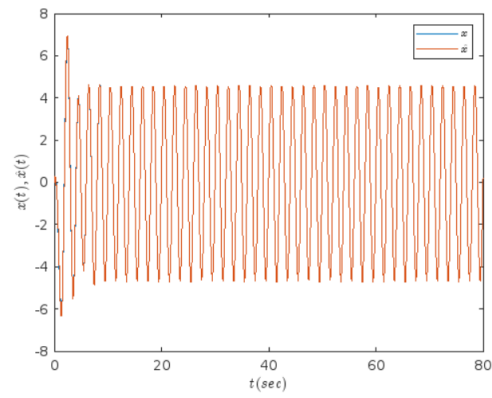


Figure 2: Πραγματική και Εκτιμώμενη Έξοδος του Συστήματος  $x_2(t)$ ,  $\hat{x}_2(t)$ .

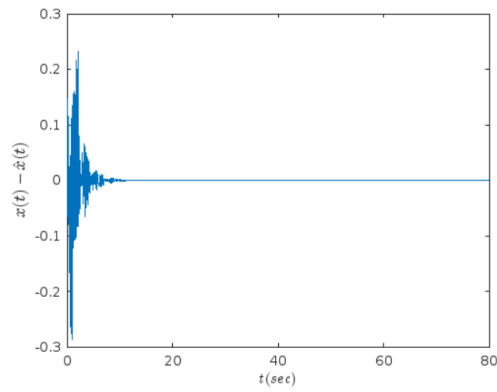


Figure 3: Διαφορά Πραγματικής και Εκτιμώμενης Εξόδου του Συστήματος.

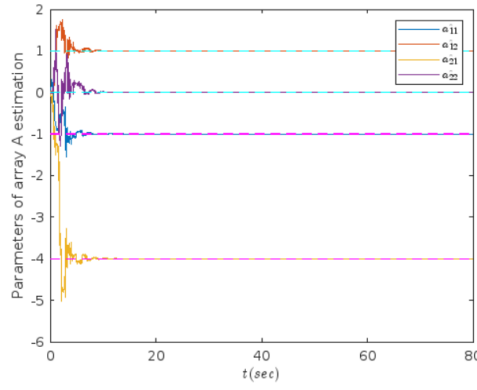


Figure 4: Πραγματικές και Εκτιμώμενες τιμές πίνακα  $A$ .

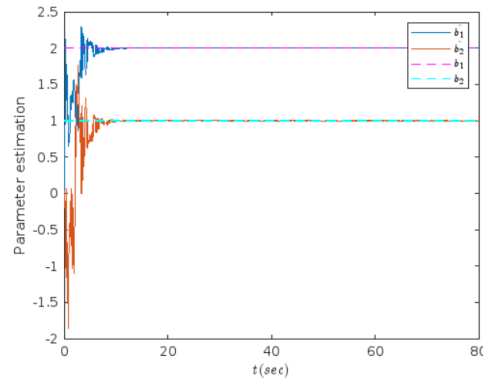


Figure 5: Πραγματικές και Εκτιμώμενες τιμές πίνακα  $B$ .

```
ans =  
-1.0000    1.0000   -4.0000   -0.0000    2.0000    1.0000
```

Πίνακας: Εκτιμώμενες τιμές των πινάκων.

Παρατηρούμε πως η εκτίμηση της εξόδου του συστήματος τείνει να συγκλίνει στην πραγματική έξοδο, με τη διαφορά τους να ναι πολύ μικρή στην αρχή και σύντομα να συγκλίνει στο μηδέν. Τέλος, οι εκτιμήσεις των παραμέτρων των πινάκων πολύ γρήγορα συγκλίνουν στις πραγματικές τιμές, και όπως φαίνεται από τον παραπάνω πίνακα, καταλήγουν να ταυτίζονται.

**Θέμα 4** Θεωρήστε το σύστημα

$$\dot{x} = -\theta_1^* f(x) + \theta_2^* u \quad x(0) = 0 \quad (3)$$

όπου  $\xi$  είναι η κατάσταση του συστήματος,  $u(t) = 1.5 \sin(2\pi t) e^{-3t}$ ,  $\forall t \geq 0$ , είναι η είσοδος, και  $\theta_1^* > 0, \theta_2^* > 0$  σταθερές αλλά άγνωστες παράμετροι. Θεωρήστε ότι *i*)  $f(x) = \frac{1}{2} \sin(x)x$  και *ii*)  $f(x) = -\frac{1}{4}x^2$ . Να σχεδιαστεί εκτιμητής πραγματικού χρόνου των άγνωστων παραμέτρων βασισμένος στη μέθοδο *Lyapunov* και να προσομοιωθεί η λειτουργία του. Δημιουργήστε τις γραφικές παραστάσεις των  $x(t)$ ,  $\hat{x}(t)$  και της διαφοράς  $x(t) - \hat{x}(t)$ , καθώς και των εκτιμήσεων  $\hat{\theta}_1(t)$ ,  $\hat{\theta}_2(t)$  των  $\theta_1^*$  και  $\theta_2^*$ , αντίστοιχα. Τι διαφορές παρατηρείτε μεταξύ των δύο περιπτώσεων. Θεωρήστε για τα πειράματά σας ότι  $\theta_1^* = 0.5$  και  $\theta_2^* = 2$ .

**Απάντηση:**

### Θεωρητική ανάλυση:

Όπως και προηγουμένως (Θέμα 2), επιθυμούμε την εύρεση αναδρομικών νόμων εκτίμησης των σταθερών αλλά άγνωστων παραμέτρων  $\theta_1^*, \theta_2^*$ .

Μας δίνεται το σύστημα:

$$\dot{x} = -\theta_1^* f(x) + \theta_2^* u \quad x(0) = 0 \quad (3)$$

Είναι μη γραμμικό σύστημα άρα μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο μεικτή τοπολογία, τουλάχιστον χωρίς επιπλέον απαιτήσεις για τη μη γραμμικότητα  $f$ .

Με όμοιο τρόπο όπως στο παραπάνω θέμα 2, προκύπτει το σύστημα αναγνώρισης:

$$\dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1 f(x) + \hat{\theta}_2 u + \theta_m (x - \hat{x}) \quad (3.1)$$

Στην (3.1),  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$  είναι οι εκτιμήσεις των  $\theta_1^*, \theta_2^*$  αντίστοιχα και  $\theta_m > 0$ . Το σφάλμα αναγνώρισης ορίζεται ως  $e = x - \hat{x}$ . Παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο το  $e$  κατά μήκος των λύσεων (3) και (3.1), προκύπτει η διαφορική εξίσωση του σφάλματος:

$$\dot{e} = -\theta_m e + \tilde{\theta}_1 f(x) - \tilde{\theta}_2 u \quad (3.2),$$

όπου  $\tilde{\theta}_1 = \hat{\theta}_1 - \theta_1^*$  και  $\tilde{\theta}_2 = \hat{\theta}_2 - \theta_2^*$ . Ορίζουμε τη συνάρτηση *Lyapunov*:

$$V = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2\gamma_1}\tilde{\theta}_1^2 + \frac{1}{2\gamma_2}\tilde{\theta}_2^2 \quad (3.3)$$

Παραγωγίζοντας την  $V$  ως προς τον χρόνο βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e\dot{e} + \frac{1}{\gamma_1}\tilde{\theta}_1\dot{\tilde{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_2}\tilde{\theta}_2\dot{\tilde{\theta}}_2 \\ &= -\theta_m e^2 + e\tilde{\theta}_1 f(x) - e\tilde{\theta}_2 u + \frac{1}{\gamma_1}\tilde{\theta}_1\dot{\tilde{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_2}\tilde{\theta}_2\dot{\tilde{\theta}}_2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Για να συγκλίνει το μοντέλο εκτίμησης μικτής δομής προς το πραγματικό σύστημα, σύμφωνα με τα θεωρήματα *Barbalat* και *Lyapunov*, θέλουμε :

$$V(\hat{\theta}) \geq 0 \quad \text{και} \quad \dot{V}(\hat{\theta}) \leq 0$$

Για αυτά (με βάση τους συντελεστές αορίστου προσήμου), επιλέγουμε:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\theta}}_1 &= -\gamma_1 e f(x) \\ \dot{\tilde{\theta}}_2 &= \gamma_2 e u \end{aligned}$$

Τότε, η (3.4) γίνεται:

$$\dot{V} = -\theta_m e^2 \leq 0 \quad (3.5)$$

Παρατηρούμε, ότι η (3.5) είναι της ίδιας μορφής με την περίπτωση του γραμμικού συστήματος που αναλύθηκε παραπάνω. Με την επιπλέον υπόθεση ότι  $f(x) \in L_\infty$  για  $x \in L_\infty$  τα αποτελέσματα του συμπεράσματος από το γραμμικό σύστημα εξακολουθούν να ισχύουν.

Τέλος, καταλήγουμε στις παρακάτω εξισώσεις κατάστασης (ODE):

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \hat{x} \\ x_3 = \tilde{\theta}_1 \\ x_4 = \tilde{\theta}_2 \end{cases} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{x} = -\theta_1^* f(x) + \theta_2^* u \\ \dot{x}_2 = \dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1 f(x) + \hat{\theta}_2 u + \theta_m e = -x_3 f(x) + x_4 u + \theta_m (x_1 - x_2) \\ \dot{x}_3 = \dot{\tilde{\theta}}_1 = -\gamma_1 e f(x) \\ \dot{x}_4 = \dot{\tilde{\theta}}_2 = \gamma_2 e u \end{cases}$$

Σφάλμα πρόβλεψης:

$$e = x - \hat{x} = x_1 - x_2.$$

## Προσομοιώσεις:

- i) Προσομοιώνουμε σε *MATLAB* τον αλγόριθμο *Lyapunov* με μικτή δομή εκτιμητή θέτοντας ως σταθερές  $\theta_1^* = 0.5$ ,  $\theta_2^* = 2$ , είσοδο συστήματος  $u = 1.5\sin(2\pi t)e^{-3t}$ , συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{2}\sin(x)x$  και την επιλογή κατάλληλων παραμέτρων  $\gamma_1 = 1150$ ,  $\gamma_2 = 83$  και  $\theta_m = 5$  βάσει πειραμάτων.

Ακολουθούν οι γραφικές παραστάσεις των:  $x(t)$ ,  $\hat{x}(t)$  και της διαφοράς  $x(t) - \hat{x}(t)$ , καθώς και των εκτιμήσεων  $\hat{\theta}_1(t)$ ,  $\hat{\theta}_2(t)$  των  $\theta_1^*$  και  $\theta_2^*$ , αντίστοιχα.

\*Χάριν ευκολίας στην προσομοίωση της εκτίμησης των παραμέτρων έχουν χρησιμοποιηθεί οι συμβολισμοί  $\hat{a}$  και  $\hat{b}$  αντί των  $\hat{\theta}_1(t)$  και  $\hat{\theta}_2(t)$ , αντίστοιχα.

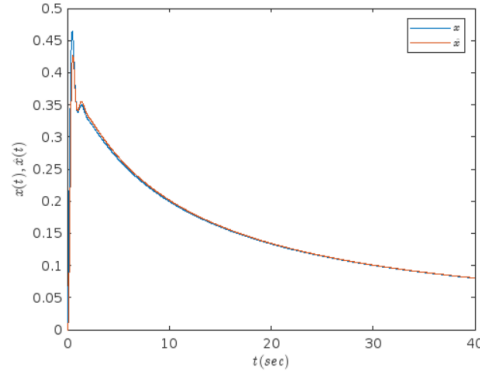


Figure 1: Πραγματική και Εκτιμώμενη Έξοδος του Συστήματος.

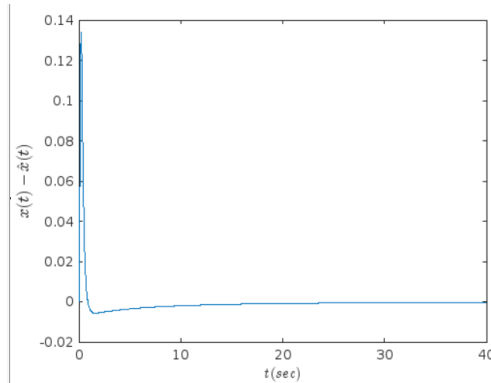


Figure 2: Διαφορά Πραγματικής και Εκτιμώμενης Εξόδου του Συστήματος.

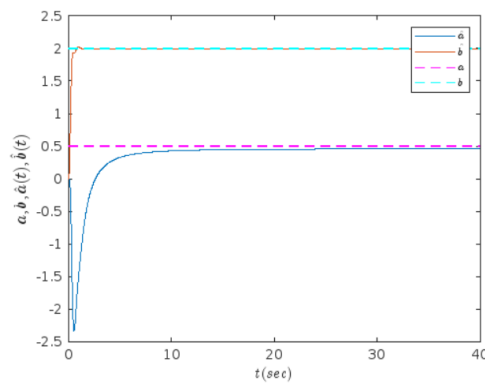


Figure 3: Πραγματικές και Εκτιμώμενες τιμές παραμέτρων.



- ii) Προσμοιώνουμε σε *MATLAB* τον αλγόριθμο *Lyapunov* με μικτή δομή εκτιμητή θέτοντας ως σταθερές  $\theta_1^* = 0.5$ ,  $\theta_2^* = 2$ , είσοδο συστήματος  $u = 1.5\sin(2\pi t)e^{-3t}$ , συνάρτηση  $f(x) = -\frac{1}{4}x^2$  και την επιλογή κατάλληλων παραμέτρων  $\gamma_1 = 318$ ,  $\gamma_2 = 89$  και  $\theta_m = 5$  βάσει πειραμάτων.

Ακολουθούν οι γραφικές παραστάσεις των:  $x(t)$ ,  $\hat{x}(t)$  και της διαφοράς  $x(t) - \hat{x}(t)$ , καθώς και των εκτιμήσεων  $\hat{\theta}_1(t)$ ,  $\hat{\theta}_2(t)$  των  $\theta_1^*$  και  $\theta_2^*$ , αντίστοιχα.

\*Χάριν ευκολίας στην προσομοίωση της εκτίμησης των παραμέτρων έχουν χρησιμοποιηθεί οι συμβολισμοί  $\hat{a}$  και  $\hat{b}$  αντί των  $\hat{\theta}_1(t)$  και  $\hat{\theta}_2(t)$ , αντίστοιχα.

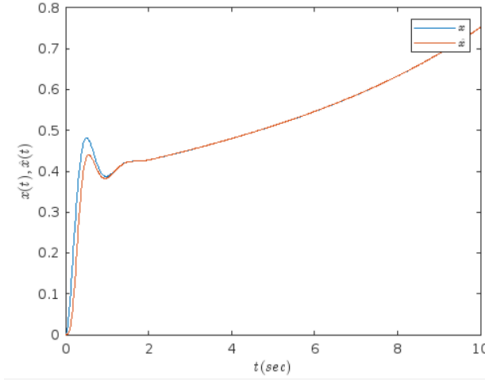


Figure 1: Πραγματική και Εκτιμώμενη Έξοδος του Συστήματος.

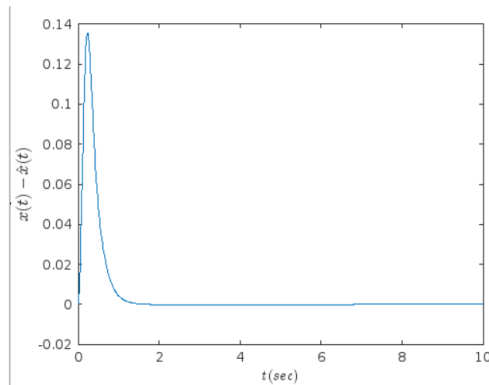


Figure 2: Διαφορά Πραγματικής και Εκτιμώμενης Εξόδου του Συστήματος.

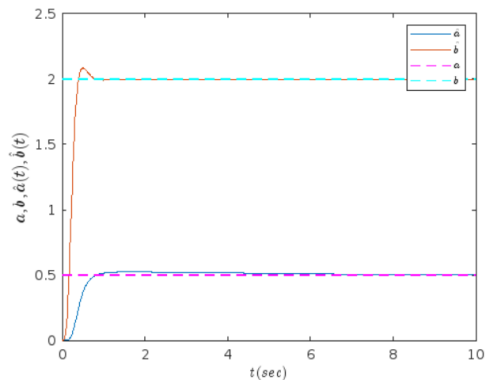


Figure 3: Πραγματικές και Εκτιμώμενες τιμές παραμέτρων.

Από τις προσομοιώσεις, παρατηρούμε ότι το σύστημα ανταποκρίνεται με τον επιθυμητό τρόπο και στις δύο περιπτώσεις, παρόλο που η συνάρτησή μας  $f(x)$  στην πρώτη περίπτωση παίρνει και θετικές και αρνητικές τιμές ενώ στη δεύτερη περίπτωση είναι καθαρά  $\leq 0$  και άρα  $\dot{\theta}_1 \geq 0$ .

Και στις δύο περιπτώσεις οι τιμές της πραγματικής εξόδου σχεδόν ταυτίζονται με τις τιμές της εκτιμώμενης εξόδου και η διαφορά  $x(t) - \hat{x}(t)$  είναι αρκετά μικρή από την αρχή και πολύ σύντομα συγκλίνει στο μηδέν.

Επιπλέον, οι εκτιμήσεις  $\hat{\theta}_1$  και  $\hat{\theta}_2$  των  $\theta_1^*$  και  $\theta_2^*$  αντίστοιχα, και στις δύο μοντέλα συγκλίνουν αρκετά γρήγορα στις πραγματικές τιμές 0.5 και 2. Στην πρώτη περίπτωση, όμως, βλέπουμε ότι για να συγκλίνει η εκτίμηση  $\hat{\theta}_1$  της  $\theta_1^*$  στην πραγματική τιμή χρειαζόμαστε πολύ μεγαλύτερη παράμετρο  $\gamma_1$  αλλιώς θα παραμένει σταθερά κοντά στο μηδέν. Επίσης, παρατηρείται απότομη πτώση της τιμής της εκτίμησης στην αρχή της προσωμοίωσης, πριν ξεκινήσει να αυξάνεται και να προσεγγίσει την επιθυμητή τιμή.

Τέλος, βλέπουμε στην πρώτη περίπτωση οι τιμές της εξόδου να μειώνονται με το πέρασμα του χρόνου, σε αντίθεση με την δεύτερη περίπτωση που αυξάνονται.