

除3 2016年试卷. 其余全看正面

华东师范大学计算机科学与软件工程学院
2015-2016 学年

研究生课程《算法与复杂性初阶》期末考试试题

考试时间：2016年1月19日 下午 2:00-4:30

姓名：李昕

学号：51151560105

#	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
Score										

1. 请判断以下论述正确与否：（标明“是”或“否”即可）（5 × 4%）

- (a) 对于稳定匹配问题的 Gale-Shapley 算法，具体实现时不论是全部由男士主导求婚还是全部由女士主导求婚，其运行结果都是一样的。
- (b) 给定平面上的 n 个点，为了寻找其中距离最近或者最远的两个点，必须计算大约 $n^2/2$ 个点对的距离，所以不存在时间复杂度为 $o(n^2)$ 的算法。
- (c) 在基于比较的排序算法中，就最坏时间复杂度而言，快速排序 (Quick sort) n^2 要比合并排序 (Merge sort) 更优。 $n \lg n$
- (d) 给定流网络 G ，其中源点 s 、终点 t ，每条边 e 的正整数带宽值为 c_e ；令 (A, B) 为 G 中的最小 $s-t$ 割，如果对 G 中每条边的带宽值减少 1 成为流网络 G' ，那么 (A, B) 还是 G' 中的最小 $s-t$ 割。
- (e) 给定无向图 $G = (V, E)$ ，其每条边都有权重 w_e ，这些权重值可能存在重复。假设有一棵生成树 $T \subseteq E$ ，其中每条边 e 都属于 G 的某棵最小生成树，那么 T 本身一定也是 G 的一棵最小生成树。

2. 请简要回答以下问题：（4 × 5%）

- (a) 请将下面几个函数按趋向于无穷大的速度升序排列： $2^{\lg n} < \lg n < n < n \lg n < (\lg n)! < \sqrt{n}$
- (b) 请简单描述 $PSPACE, P, NP, EXPTIME$ 这四个复杂性类之间的关系。
- (c) 求解递归式 $T(n) = 9T(n/3) + n^2 \lg n$ 。
- (d) 关于图中的两个顶点之间最短路径的计算问题，比较著名的算法有 Dijkstra 算法和 Bellman-Ford 算法，请简述二者在算法思路和适应范围等方面的区别。

3. 【贪心法】工兵使用条形炸弹在长为 L 米的街道上排雷，假设一个条形炸弹能够排除前后 t 长度内的炸弹，而已经探明前方地雷的位置为 $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ （单位为米），请设计算法求最少所需的炸弹数并证明其正确性。（10%）

4. 【分治法】给定 n 个数的序列 a_1, a_2, \dots, a_n ，假定所有的数都不相同；我们定义一个明显逆序为一对 $i < j$ 使得 $a_i > a_j + 5$ ，请设计一个 $O(n \lg n)$ 的算法计算在一个序列中的明显逆序个数。（请说明主要思想，写出递归式及伪代码，并分析算法时间复杂度）（10%）

5. 【动态规划】小明要向一家云服务公司租用计算资源，收费方式有三种：（1），按每小时的计算任务个数收费，每个任务收 x 元；（2）按天收费，即每连续 24 小时收费 y 元；（3）按周收费，即每连续 24×7 小时收费 z 元；这三种收费方式可以任意分段收取。假设小明接下来一段时间（至少一个月）的计算任务数目都已经按小时储存在一个数组 $J[1:n]$ 里头，其中 $J[i]$ 表示第 i 个小时的计算任务个数，请为小明设计算法寻找一种最优付费方法。（请写出递归式，说明主要思想及算法复杂度）（15%）

6. 【网络流】给定有向图 $G = (V, E)$ ，源点 s 、终点 t 、每条边 e 的正整数容量值为 c_e ； f 为 G 中的一个最大 $s-t$ 流，其在每条边 e 上的流值由 f_e 所确定。流 f 是无圈的：即在 G 中没有圈使得它所有的边都携带正的流。现任取 G 中某条边 e' 并将其容量值减少 1，请设计算法在 $O(m+n)$ 时间找到变换后图中的一个最大流，其中 n 和 m 分别是 G 中点和边的数目。（10%）

7. 【复杂性】

课程安排问题 (CAP)：某培训机构在一个学期中计划开设多门课程，但只有一间教室。每门课指定多个授课时段，教室在同一时段只能上一门课。现在给定 n 门备选课程，学期中该教室所有可能的授课时段集为 S ，每门课程 i 有详细的授课时段集 $C_i \subseteq S$ ，对给定的正整数 k ，请问是否能够开设至少 k 门课程并且任何两门课程都没有时间冲突？请证明课程安排问题是 NP -完全的。（15%，提示：可以通过三维匹配问题或者独立集问题）

三维匹配问题 (3DM)：任给不相交的集合 X, Y 和 Z ，以及有序三元组集合 $T \subseteq X \times Y \times Z$ ，其中 X, Y 和 Z 的大小均为 n ，问 T 中有 n 个有序三元组使得 X, Y, Z 的每一个元素都恰好包含在这些有序三元组的一个中吗？

独立集问题 (IS)：给定一个图 $G = (V, E)$ ，我们说一个结点集合 $S \subseteq V$ 是独立的，如果在 S 中没有两个结点与同一条边相交。对给定的正整数 k ，请问 G 中是否存在一个大小不低于 k 的独立集？

8. 【附加题】最大子串和问题定义如下：给定整数数组 $A[1..n]$ ，找出子串首尾下标 i, j ($1 \leq i \leq j \leq n$) 使得 $\sum_{k=i}^j A[k]$ 最大。请设计求解算法并分析其时间复杂度。（10%）