

华东师范大学计算机科学与软件工程学院

2016-2017 学年研究生课程《算法与复杂性初阶》期末考试试卷

考试时间：2017 年 1 月 10 日 下午 2:00-5:00

姓名：_____ 学号：_____

#	1	2	3	4	5	6	7	8	9	总分
得分										

1. 请判断以下论述正确与否：（标明“是”或“否”即可）（5 × 4%）

- (a) 给定一个稳定匹配问题的 Gale-Shapley 算法程序，由于可能存在多个不同的稳定匹配方案，所以每次运行返回的解可能不一样。
- (b) 设简单无向图 G 包含 $2n$ 个结点且各点度数至少为 n ，则 G 是连通图。
- (c) 在基于比较的排序算法中，合并排序、堆排序和快速排序的最坏时间复杂度都是 $O(n \lg n)$ 。
- (d) 给定一个有向无环图 (Directed acyclic graph)，则其顶点的拓扑排序 (Topological sort) 是唯一确定的。
- (e) $P \subset NP \subset PSPACE$ 。

2. 请简要回答以下问题：（4 × 5%）

- (a) 请将下面几个渐进函数按趋向于无穷大的速度升序排列： $(\lg n)!$, $n \lg n$, \sqrt{n} , $2\sqrt{2 \lg n}$, n^2 。
- (b) 为什么基于比较的排序算法其最坏情况下的时间复杂度总是 $\Omega(n \lg n)$ ？
- (c) 求解递归式 $T(n) = 7T(n/3) + n^2$ 。
- (d) 给定无向图 $G = (V, E)$ ，其每条边都有权重 c_e ，这些权重值存在重复，因此 G 的最小生成树可能不止一棵。现有一棵生成树 $T \subseteq E$ ，其中每条边 e 都属于 G 的某棵最小生成树，能否断言 T 本身一定也是 G 的一棵最小生成树？请简单证明或给出反例。

3. 【贪心法】在一条长为 L 米的笔直大道边分散居住着 n 户人家，位置为 $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ （单位为米）。假设一个 4G 基站的通信半径为 3 公里，现在想要用最少的基站来覆盖这所有的 n 户人家，请设计算法求解并证明其正确性。（10%）

4. 【分治法】给定 n 个数的序列 a_1, a_2, \dots, a_n ，假定所有的数都不相同，我们定义一个夸张逆序为一对 $i < j$ 使得 $a_i > 2a_j$ ，请设计一个 $O(n \lg n)$ 的算法计算在一个序列中的逆序个数和夸张逆序个数。（请说明主要思想，并分析算法时间复杂度）（10%）
5. 【动态规划】考虑两个基因序列的比对问题，都表示为字母表 $\{A, C, G, T\}$ 上的串。一个比对方案的代价包括空隙罚分和错配罚分，每个空隙的罚分为正整数 δ ；每对字符 p, q 之间的错配罚分为 α_{pq} ，当 $p = q$ 时 $\alpha_{pq} = 0$ ，其他情况都为正整数。现在给定两个串 $A = a_1 a_2 \dots a_m$ 和 $B = b_1 b_2 \dots b_n$ 以及它们之间的一个比对方案，请给出一个 $O(mn)$ 时间的算法来确定其是否为 A 与 B 之间唯一的最小代价方案。（说明主要思想，并分析算法时间复杂度）（10%）
6. 【网络流】有向图 $G = (V, E)$ 中，任意结点 v 的入边数都等于其出边数，即 $|\{(u, v) : (u, v) \in E\}| = |\{(v, w) : (v, w) \in E\}|$ 。假设 G 中从节点 s 到节点 t 存在 k 条边不相交的路径，是否可以断定从 t 到 s 也存在 k 条边不相交的路径？给出一个证明或者反例。（10%）
7. 【复杂性】已知三维匹配问题和独立集问题都是 NP 完全的，请证明疗程调度问题也是 NP 完全的：
- 疗程调度问题 (TCSP)：某医院有若干台治疗器械，它们在给定时间段（例如上午 8 点到下午 8 点）内可以运行治疗作业，但一台器械在任一时间只能为一位患者工作。治疗以小时为单位，每个患者有一个治疗时间段需求，可能包含多个分散的时间区段，比如患者可能需要在上午 9 点到 11 点和下午 2 点到 3 点这两个区段占某器械。现在给定 n 个患者及其各自的治疗时间区段需求集合，以及正整数 k ，问是否能无冲突地治疗至少 k 个患者？（10%）
- 三维匹配问题 (3DM)：任给不相交的集合 X, Y 和 Z ，以及有序三元组集合 $T \subseteq X \times Y \times Z$ ，其中 X, Y 和 Z 的大小均为 n ，问 T 中是否有 n 个有序三元组使得 $X \cup Y \cup Z$ 的每一个元素都恰好包含在这些有序三元组的某一个中？
- 独立集问题 (INDEPENDENT SET)：给定一个图 $G = (V, E)$ ，如果一个结点集合 $S \subseteq V$ 当中没有两个结点共享同一条边，我们就称集合 S 是独立的。设有正整数 k ，问 G 中是否有不少于 k 个点的独立集？
8. 【方法不限】给定一只股票，设其在 n 个连续交易日中每天都有固定的成交价格 $p(i)$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ 。现在允许有一次买入操作和一次卖出操作，问该怎么样选择买入日期 j 和卖出日期 k 来最大化收益 $p(k) - p(j)$ ？（请说明主要步骤，并分析算法时间复杂度，10%）