

华东师范大学软件学院 2014-2015 学年

研究生课程《算法与复杂性初阶》期末考试试题

考试时间：2015 年 1 月 20 日 下午 2:00-4:30

1、请判断以下论述正确与否：(标明“是”或“否”即可) (5*4%)

(a) 给定一个简单无向图 $G=(V, E)$ 上待解问题，若 A 算法的时间复杂度为 $\Theta(|V| \cdot \lg|E|)$ ，B 算法的时间复杂度为 $\Theta(|V| \cdot \log|V|)$ ，那么 B 算法的时间复杂度渐进地 (Asymptotically) 优于 A 的。 ???

(b) 给定一个有向无环图 (Directed acyclic graph)，则其顶点的拓扑顺序 (Topological sort) 是唯一确定的。否

(c) 在基于比较的排序算法中，就最坏时间复杂而言，快速排序 (Quick sort) 要比插入排序 (Insert sort) 更优。否，相同，都是 $O(n^2)$

(d) 设简单无向图 G 包含 $2n$ 个结点，如果 G 中每个结点的度数至少为 n ，那么 G 是连通的。

(e) 在稳定匹配问题的 Gale-Shapley 算法中，由于缺省的男士发起寻求，最终结果男士都能够得到最佳有效伴侣，说明做事情积极主动一点比较好。是

2、请简要回答以下问题：(4*5%)

(a) 请将下面几个渐进函数按趋向于无穷大的速度升序排序： $(\lg n)!$, $n \lg n$, $\lg n^{\lg n}$, $2^{\sqrt{2 \lg n}}$, \sqrt{n} 。

(b) 请简单描述 P, NP, EXPTIME 这四个复杂性类之间的关系。

(c) 求解递归式 $T(n) = 5T(n/2) + n^3$

(d) 给定无向图 $G=(V, E)$ ，其每条边都有权重 C_e ，这些权重值存在重复，因此 G 的最小生成树可能不止一颗，现有一颗生成树 $T \subseteq E$ ，其中每条边 e 都属于 G 的某棵最小生成树，能否断言 T 本身一定也是 G 的一颗最小生成树？请简单证明或给出反例。

3、【贪心法】设有 n 个任务 $J_1, J_2, J_3, \dots, J_n$ ，每个人物 J_i 有起始时间 s_i 和终止时间 t_i ，现在要从中选择一个元素最少的代表任务集，使得每个任务都和某个代表有非零交叉时段。请设计算法实现并证明其正确性。举例：如果输入为 $\{J_1=[1,5], J_2=[3,6], J_3=[4,8], J_4=[6,10]\}$ ，那么输出为 $\{J_5\}$ 。(要求写出伪代码并证明正确性) (10%)

4、【分治法】给定一个按照升序排列的整数数组 A ，其元素的个数为 n 。请设计算法寻找 A 中是否存在大小刚好等于其下标 (即 $A[i]=i$) 的元素。(请说明主要思想，写出递归式及伪代码，并分析算法时间复杂度) (10%)

5、【动态规划】小明想利用假期打工，现在他有一系列短工 $\{J_1, J_2, J_3, \dots, J_n\}$ 可供选择。每个 J_i 有一个起始日期和结束日期 S_i, E_i ，以及酬劳 P_i 。整个假期可以做多份短工，但是同一时期只可以有一个兼职，小明想使自己的利润最大化，请设计一个算法帮他求解一个最优的方案。(说明主要思想，写出递归式，并分析算法时间复杂度) (10%)

6、【网络流】有向图 $G=(V, E)$ 中，任意结点的入边数等于其出边数，即 $|\{(u, v) : (u, v) \in E\}| = |\{(v, w) : (v, w) \in E\}|$ 。假设 G 中从节点 t 存在 k 条边不相交的路径，是否可以断定从 t 到 s 也存在 k 条不想关的路径？给出一个证明或反例。(10%)

7、【复杂性】已知三~~维~~匹配问题和独立集问题都是 NP 完全的，请分析：

多区间调度问题 (MISP)：某台处理机在给定的时间段（例如上午 8 点到下午 6 点）内可以运行作业，其在任一时间只能为一项作业工作。每个作业有一个时间片要求，可能包含多个分散的时间区段。比如一项作业 j 可能需要在上午 10 点到 11 点和下午 3 点到 4 点这两个区段占用处理机。如果接受 j ，它将分别在这两个小时内运行，剩下的时间段可以安排其他作业。现在给定 n 项作业及其各自的时间区段需求集合，还有正整数 k ，问题是能否接受至少 k 项作业并且不产生时间冲突？请证明多区间调度 NP 是完全的。(10%)

三~~维~~匹配问题 (3DM)：任给不相关的集合 X, Y 和 Z ，以及有序三元组集合 $T \subseteq X \times Y \times Z$ ，其中 X, Y 和 Z 的大小均为 n ，问 T 中是否有 n 个有序三元组使得 $XUYUZ$ 的每一个元素都恰好包含在这些有序三元组的某一个中？

独立集问题 (INDEPENDENT SET)：给定一个图 $G=(V, E)$ ，如果一个结点集合 $S \subseteq V$ 当中没有两个结点共享同一条边，我们就称集合 S 是独立的。设有正整数 k ，问 G 中是否有不少 k 个点的独立集？

8、【方法不限】最大子串问题定义如下：给定整数数组 $A[1 \cdots n]$ ，找出子串首尾下标 i, j ($1 \leq i \leq j \leq n$) 使得 $\sum_{i \text{ to } j} A[k]$ 最大。请设计求解算法并分析其时间复杂度。(10%)