

---

Практика № 5  
9.10.23

---

## 1 Лемма из лекции

Докажите Лемму 1 из лекции: для любого линейного бинарного кода  $C$  справедливо

$$\sum_{c \in C} (-1)^{\alpha c} = \begin{cases} |C|, & \alpha \in C^\perp \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

## 2 Обобщенный код Хэмминга

Напомним, что обобщённый код Хэмминга  $\text{Ham}_r$  с параметрами  $[2^r - 1, 2^r - r - 1, 3]_2$  задаётся проверочной матрицей  $r \times 2^r - 1$ , столбцами которой являются все ненулевые строки длины  $r$ . Пусть  $W_i$  – количество кодовых слов веса  $i$  в  $\text{Ham}_r$ .

1. Пусть  $c \in \text{Ham}_r$  – кодовое слово веса  $t$ . Для каждого из следующих  $i$ , найдите число слов из  $\{0, 1\}^n$  веса  $i$ , которые будут декодированы к  $c$ :

1.  $i = t - 1$
2.  $i = t + 1$
3.  $i = t$ .

2. Докажите, что

$$(i+1)W_{i+1} + W_i + (n-i+1)W_{i-1} = \binom{n}{i},$$

где  $W_1 = 0, W_0 = 1$ .

3. Вычислите  $W_3$ .

## 3 Минимальное расстояние совершенного кода

Докажите, что минимальное расстояние совершенного кода обязательно нечётно. Напоминание:  $q$ -арный код  $C$  длины  $n$  называется совершенным, если  $|C| = \frac{q^n}{\sum_{i=0}^{\lfloor (d-1)/2 \rfloor} \binom{n}{i} (q-1)^i}$ .