

Домашнее задание № 1  
Опубликовано 08.09.19, Срок сдачи: 29.09.19 (23:59)

---

## 1 Код Адамара

Бинарный код Адамара,  $\text{Had}_r$  – это  $[2^r, r]_2$ -код с порождающей матрицей  $r \times 2^r$ , столбцы которой представляют всевозможные битовые строки длины  $r$ . Докажите, что минимальное расстояние кода  $\text{Had}_r$  равно  $2^{r-1}$ .

## 2 Линейные коды

Пусть  $C_1, C_2$  – линейные коды длины  $n$ , заданные над  $\mathbb{F}_q$  порождающими матрицами  $G_1, G_2$ . Определим следующие коды

- $C_3 = C_1 \cup C_2$
- $C_4 = C_1 \cap C_2$
- $C_5 = C_1 + C_2 = \{c_1 + c_2 : c_1 \in C_1, c_2 \in C_2\}$
- $C_6 = \{(c_1 | c_2) : c_1 \in C_1, c_2 \in C_2\}$ , где  $(\cdot | \cdot)$  обозначает конкатинацию слов.

Для  $i = 1, \dots, 6$  обозначим за  $k_i$  – размерность кода  $\log_q |C_i|$ , а за  $d_i$  – минимальное расстояние кода  $C_i$ . Положим  $k_1, k_2 > 0$ .

1. Докажите, что  $C_3$  – линейный тогда и только тогда, когда либо  $C_1 \subseteq C_2$ , либо  $C_2 \subseteq C_1$ .
2. Докажите, что коды  $C_4, C_5, C_6$  – линейные
3. Докажите, что если  $k_4 > 0$ , то  $d_4 \geq \max\{d_1, d_2\}$
4. Докажите, что  $k_5 \leq k_1 + k_2$ , и что равенство достигается тогда и только тогда, когда  $k_4 = 0$
5. Докажите, что  $d_5 \leq \min\{d_1, d_2\}$
6. Докажите, что

$$\begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix}$$

является порождающей матрицей для  $C_6$ , а следовательно,  $k_6 = k_1 + k_2$

7. Докажите, что  $d_6 = \min\{d_1, d_2\}$ .

## 3 Задание на программирование: расширенный код Хэмминга [15,11,3]

1. Кода Хэмминга [15,11,3] – обобщение изученного на лекции кода Хэмминга [7,4,3]. Отличное описание этого кода можно найти на  
<https://www.youtube.com/watch?v=X8jsijhllIA>  
[https://www.youtube.com/watch?v=b3NxrZOu\\_CE&t=472s](https://www.youtube.com/watch?v=b3NxrZOu_CE&t=472s)
2. Задача: реализовать алгоритм кодировать и декодирования для кода Хэмминга [15,11,3]. Названия функций и doctests можно найти по ссылке  
[https://crypto-kantiana.com/elenakirshanova/teaching/coding\\_2020/PA1.txt](https://crypto-kantiana.com/elenakirshanova/teaching/coding_2020/PA1.txt)