

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ № 2
Опубликовано 07.10.19, Срок сдачи: 22.10.19 (23:59)

1 Код Голея

Порождающая матрица *расширенного кода Голея* (обозначается G_{24}) имеет вид $G = [I_{12} \mid A] \in \mathbb{F}_2^{12 \times 24}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Каковы длина и размерность кода?
2. Покажите, что G_{24} – самодуальный код, т.е. $G_{24} = G_{24}^\perp$
3. Покажите, что вес Хэмминга любого кодового слова G_{24} делится на 4
4. Покажите, что в G_{24} нет кодового слова веса 4, и что $d(G_{24}) = 8$.

Порождающая матрица *кода Голея* $\hat{G} \in \mathbb{F}_2^{12 \times 23}$ получается удалением из матрицы G последнего столбца. Покажите, что

1. полученный код, кода Голея, является $[23, 12, 7]$ – бинарным кодом
2. кода Голея является совершенным кодом, т.е. для него выполняется граница упаковки шаров $|C| = \frac{2^n}{\text{Vol}_2^{23}(3)}$.

2 Совершенный код

Формуляр заполнения ставок на футбольные матчи содержит в себе таблицу, составленную из списка 13 игр, где каждой из них сопоставлены три выбора, описывающие все возможные исходы игры: *Выигрыш команды №1*, *Выигрыш команды №2*, *Ничья*. Для заполнения формуляра нужно выбрать один из исходов напротив каждого матча.

Опишите стратегию заполнения минимального количества формуляров так, чтобы хотя бы один из этих формуляров содержал как минимум 12 верных ставок. Какое число формуляров необходимо заполнить при этой стратегии?

Подсказка: существует совершенный код длины 13 с минимальным расстоянием 3 над \mathbb{F}_3 .