2. Симплекс-метод.

2.1. Основные операции и теоремы линейного программирования

Определение 1: Набор чисел $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)^T$, удовлетворяющих ограничениям задачи линейного программирования, называется её **планом** (допустимым решением).

Определение 2: План, обращающий в максимум или минимум каноническую задачу линейного программирования, называется **оптимальным планом** или **решением** задачи линейного программирования.

Определение 3: Задача линейного программирования называется **допустимой**, если множество M - планов не пусто. ЗЛП называется **разрешимой**, если существует множество M* оптимальных планов задачи.

Определение 4: Оптимальное значение ЗЛП представляет значение целевой функции $f(x^*) = f^*$, соответствующее оптимальному плану.

Определение 5 : Алгебраическим аналогом в понятии вершины многогранной области является план опорной точки, или допустимое базисное решение (ДБР).

Пример 2.1:
найти min f(x) = -3x_1 - 2x_2

$$X = \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \\ -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_2 \le 2, \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Каноническая ЗЛП:
max f'(x) = 3x_1 + 2x_2

$$X' = \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 8, \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 1, \\ x_2 + x_6 = 2, \\ x_1 .. x_6 \ge 0 \end{cases}$$

Решение системы из 4-х уравнений с 6-ю переменными можно получить, приравнивая 2 любые переменные к 0 и решая уравнение относительно 4-х других переменных:

$$x_5 = x_6 = 0, \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 8, \\ -x_1 + x_2 = 1, \\ x_2 = 2, \\ x_1 .. x_6 \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = 1, \\ x_4 = 4 \end{cases}$$

Так как все $x_j \geq 0$, то данное базисное решение называется допустимым базисным решением (ДБР).

Переменные, приравненные к 0, называются свободными и не базисными.
(n-m)- количество не базисных переменных.
Остальные m переменных – базисные и образуют базис.
Оптимальное решение следует искать среди ДБР .

$$\frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} - ДБР \geq 0 \ (+). \qquad (2.1)$$

Таблица 2.1

N	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	ДБР>=0
1	0	0	6	8	1	2	+
2	0	3	0	5	-2	-1	
3	0	8	-10	0	-7	-6	
4	0	1	4	7	0	1	+
5	.	.	.	.	.	.	.
6	.	.	.	.	.	.	.
7	.	.	.	.	.	.	.
8	.	.	.	.	.	.	.
9	.	.	.	.	.	.	.
10	.	.	.	.	.	.	.
11	.	.	.	.	.	.	.
12	.	.	.	.	.	.	.
13	.	.	.	.	.	.	.
14	.	.	.	.	.	.	.
15	1	2	1	4	0	0	+

Пример 2.2:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 - 3x_2 \qquad - x_4 = -21, \\ 3x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 = 43, \\ 4x_1 - 3x_2 \qquad\qquad\qquad + x_6 = 44, \\ x_j \geq 0, \ j = \overline{1,6} \end{cases}$$ - каноническая форма записи ЗЛП

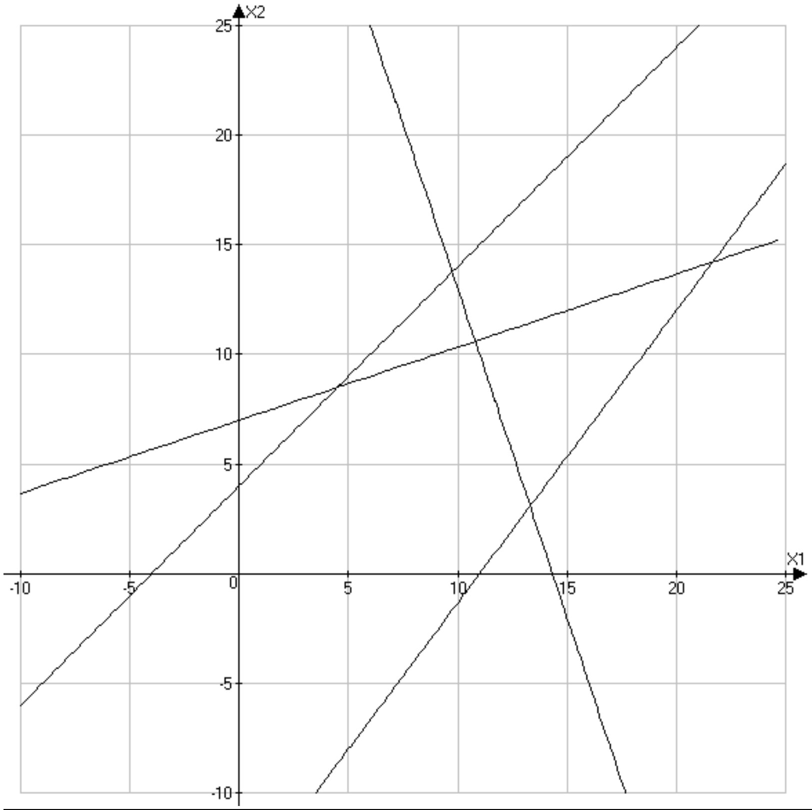


Рис. 2.1

Решение системы из четырех уравнений с шестью переменными можно получить, приравнивая две любые переменные к нулю и решая уравнение относительно четырех других переменных.

В приведенной ниже таблице записаны уже получившиеся решения 15 СЛАУ.

Допустимое базисное решение (ДБР) – это базисное решение при $x_j \geq 0$.

Таблица 2.2

N	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	ДБР≥0
1	0	0	4	21	43	44	+
2	0	4	0	9	39	56	+
3	0	7	-3	0	36	65	
4	0	43	-39	-108	0	173	
5	0	-14,6667	18,6667	65	57,6667	0	
6	-4	0	0	17	55	60	
7	-21	0	-17	0	106	128	
8	14,3333	0	18,3333	35,3333	0	-13,3333	
9	11	0	15	32	10	0	+
10	4,5	8,5	0	0	21	51,5	+
11	9,75	13,75	0	-10,5	0	46,25	
12	56	60	0	-103	-185	0	
13	10,8	10,6	4,2	0	0	32,6	+
14	21,6667	14,2222	11,4444	0	-36,2222	0	
15	13,3077	3,0769	14,2308	25,07696	0	0	+

Так как оптимальное решение следует искать среди ДБР, то необходимо найти значения целевой функции, соответствующие ДБР. Максимальное из этих значений и будет решением рассматриваемой ЗЛП.

1) $f(0;0) = 2 \cdot 0 + 0 = 0;$

2) $f(0;4) = 2 \cdot 0 + 4 = 4;$

3) $f(11;0) = 2 \cdot 11 + 0 = 22;$

4) $f(4{,}5;8{,}5) = 2 \cdot 4{,}5 + 8{,}5 = 17{,}5;$

5) $f(10{,}8;10{,}6) = 2 \cdot 10{,}8 + 10{,}6 = 32{,}2;$

6) $f(13{,}3077;3{,}0769) = 2 \cdot 13{,}3077 + 3{,}0769 = 29{,}6923;$

Наибольшее в заданной области значение, равное 32,2, рассматриваемая функция $f(x) = 2x_1 + x_2$ достигает в точке с координатами $(10{,}8;10{,}6)$.

Данное решение совпадает с найденным с помощью графоаналитического метода значением.

2.2. Понятие о симплекс-методе

Оптимальное решение задачи линейного программирования (ЗЛП) связаны с угловыми точками многогранника решений.

Угловых точек может быть много, если много ограничений. Количество угловых точек соответствует количеству базисных решений. Для каждого базисного решения однозначно определяется значение целевой функции.

Найти оптимальное решение (оптимальный план), беспорядочно перебирая все базисные решения, затруднительно.

В связи с этим необходим такой переход от одного базисного решения к другому (от одной угловой точки к другим точкам, начиная с угловой точки, отвечающей исходному базисному решению), в результате которого новое решение приносило бы большее значение целевой функции, причем максимально возможное увеличение.

Данный процесс решения задачи реализуется симплекс-методом (методом последовательного улучшения плана). Процесс решения задачи продолжается до получения оптимального плана, либо до установления факта, что решения нет. Переход от одного базисного решения к другому называется ***итерацией симплекс-метода.***

Для того чтобы ЗЛП была решаема (имела оптимальное решение), необходимо и достаточно, чтобы ограничения задачи были совместимыми, чтобы множество допустимых значений существовало, и целевая функция должна быть ограничена при поиске максимума - сверху и минимума - снизу.

Симплекс - метод может быть интерпретирован геометрически как движение по соседним угловым точкам многогранника решений (если они расположены на одном ребре - то соседние). Следовательно, количество итераций симплекс-метода зависит от выбора исходного базисного плана и количества угловых точек, встречающихся при движении от исходного к оптимальному плану.

Пример 2.3:

$f(x) = 12x_1 + 15x_2 \to \max$

$$X = \begin{cases} 6x_1 + 6x_2 \le 36, \\ 4x_1 + 2x_2 \le 20, \\ 4x_1 + 8x_2 \le 40, \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Приводим к канонической форме:

$$X = \begin{cases} 6x_1 + 6x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 36, \\ 4x_1 + 2x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 = 20, \\ 4x_1 + 8x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 = 40, \\ x_j \ge 0,\ i = \overline{1,5} \end{cases}$$

$f(x) = 12x_1 + 15x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$

Среди переменных задачи можно выделить базисные переменные x_3, x_4, x_5 и не базисные x_1, x_2.
Не базисные те, которые можно приравнять к 0, а остальные базисные.
Приравняв не базисные переменные к 0, получим исходный базисный план:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 36, \\ x_4 = 20, \\ x_5 = 40, \end{cases}$$

Значение целевой функции для этого плана f(x) = 0 (прибыль равна нулю)

Данная ситуация не может удовлетворить предприятие, и, тем более, не является оптимальной.
$f(x)= 0-(-12x_1-15x_2) \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_3 = 36-(6x_1+6x_2), \\ x_4 = 20-(4x_1+2x_2), \\ x_5 = 40-(4x_1+8x_2),^* \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Анализируя функцию f можно сделать вывод, что увеличение значения функции (дохода) может произойти только при возрастании значений x_1 и x_2, отсюда увеличение x_1 или x_2 равносильно переходу переменных в число базисных.

В первую очередь увеличиваем значение x_2 , так как единица продукции P_2 приносит больший доход. Значение x_1, по-прежнему, равно 0 , значение x_2 нельзя увеличивать бесконечно, то есть увеличиваем до тех пор, пока x_3, x_4 и $x_5 \geq 0$. Значит, необходимо определить значение x_2, до которого можно его увеличивать:

$$\begin{cases} 36-6x_2 \geq 0, \\ 20-2x_2 \geq 0, \\ 40-8x_2 \geq 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 \leq 6, \\ x_2 \leq 10, \\ x_2 \leq 5, \end{cases}$$

Для выполнения данных условий необходимо чтобы x_2=5, так как данное значение получилось из 3-го ограничения, то, выразив x_2 через x_1 и x_5, мы заменим (введем) переменную x_2 в число базисных вместо x_5.

$$4x_1+8x_2 = 40-x_5,$$

$$x_2 = 5-\left(\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{8}x_5\right)^*$$

Подставим выражение x_2 в целевую функцию и оставшиеся ограничения по x_3 и x_4:

$$f(x) = 75-\left(-\frac{9}{2}x_1+\frac{15}{8}x_5\right) \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_3 = 6-(3x_1-\frac{3}{4}x_5),^* \\ x_4 = 10-(3x_1-\frac{1}{4}x_5), \\ x_2 = 5-(\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{8}x_5), \end{cases}$$

В этом случае новый базисный план после первой итерации будет:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 5, \\ x_3 = 6, \\ x_4 = 10, \\ x_5 = 0, \end{cases}$$

f(x) = 75

На основании результатов можно сделать вывод, что полученный план не является оптимальным, так как значение целевой функции может быть увеличено за счет увеличения значения x_1 (x_5 мы не можем увеличивать, так как это приведет к снижению f).

Значение x_1 также нельзя увеличивать бесконечно, а только до такой величины, чтобы $x_3, x_4, x_2 \geq 0$:

$$\begin{cases} 6 - 3x_1 \geq 0, \\ 10 - 3x_1 \geq 0, \\ 5 - \frac{1}{2}x_1 \geq 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 \leq 2, \\ x_1 \leq \frac{10}{3}, \\ x_1 \leq 10, \end{cases}$$

$x_1 \leq 2$ - из первого ограничения.

x_1 выразим из 1-го ограничения:

$$3x_1 - \frac{3}{4}x_5 = 6 - x_3,$$

$$x_1 = 2 - \left(\frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{4}x_5\right),$$

$$f(x) = 84 - \left(\frac{3}{2}x_3 + \frac{3}{4}x_5\right).$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 - (\frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{4}x_5), \\ x_4 = 4 - (-x_3 - \frac{1}{2}x_5), \\ x_2 = 4 - (-\frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{4}x_5), \\ x_j \geq 0, \ j = \overline{1,5} \end{cases}$$

В этом случае новый базисный план после второй итерации будет:

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 4, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 4, \\ x_5 = 0, \end{cases}$$

f(x)=84

После анализа значения *f* следует, что данный план является оптимальным так как x_3 и $x_5 \geq 0$, то на основании оптимального плана ($f^* = 84$, $x_1^* = 2$ $x_2^* = 4$) делаем вывод, что предприятие для получения максимального дохода, равного 84 единицы должно выпускать из имеющегося количеств сырья 2 ед. продукции P_1 и 4 ед. продукции P_2.

Пример 2.4:

Найдем наибольшее значение функции в заданной области, т.е. решим задачу линейного программирования (максимизируем линейную функцию при линейных ограничениях).

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -4, \\ x_1 - 3x_2 \geq -21, \\ 3x_1 + x_2 \leq 43, \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 44, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Приводим к канонической форме:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 - 3x_2 \qquad - x_4 = -21, \\ 3x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 = 43, \\ 4x_1 - 3x_2 \qquad\qquad\qquad + x_6 = 44, \\ x_j \geq 0, \ j = \overline{1,6} \end{cases}$$

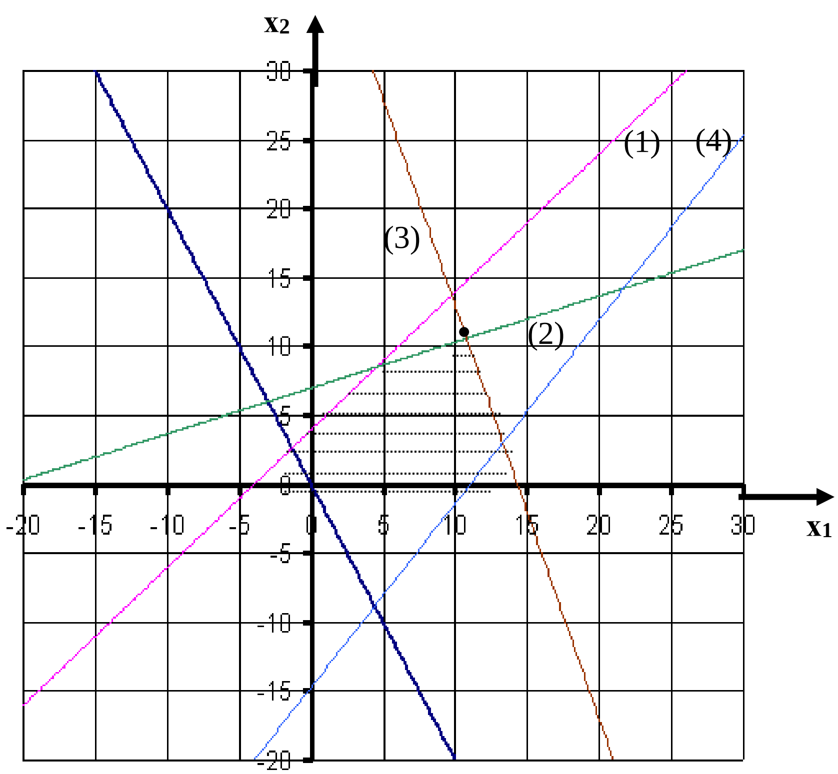


рис . 2.2

$f(x) = 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$.

1) Среди переменных задачи можно выделить базисные переменные x_3, x_4, x_5, x_6 и не базисные x_1, x_2.

Приравняв не базисные переменные к 0, получим исходный базисный план:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 4, \\ x_4 = 21, \\ x_5 = 43, \\ x_6 = 44, \end{cases}$$

$$f(x) = 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 2\cdot 0 + 1\cdot 0 + 0\cdot 4 + 0\cdot 21 + 0\cdot 43 + 0\cdot 44 = 0$$

$$f(x) = 0 - (-2x_1 - x_2) \to \max$$

$$\begin{cases} x_3 = 4 - (-x_1 + x_2), \\ x_4 = 21 - (-x_1 + 3x_2), \\ x_5 = 43 - (3x_1 + x_2), \\ x_6 = 44 - (4x_1 - 3x_2)^*, \end{cases}$$

В первую очередь увеличиваем значение x_1, т.к. единица продукции P_1 приносит больший доход. Значение x_2, по-прежнему, равно 0, однако значение x_1 нельзя увеличивать бесконечно, т.е. увеличиваем до тех пор, пока x_3, x_4, x_5 и $x_6 \geq 0$. Значит, необходимо определить значение x_1, до которого можно его увеличивать.

$$\begin{cases} 4 + x_1 \geq 0, \\ 21 + x_1 \geq 0, \\ 43 - 3x_1 \geq 0, \\ 44 - 4x_1 \geq 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 \geq -4, \\ x_1 \geq -21, \\ x_1 \leq 14\,{}^1\!/_3, \\ x_1 \leq 11, \end{cases}$$

Для выполнения данных условий необходимо чтобы x_1=11, т.к. данное значение получилось из четвертого ограничения, то, выразив x_1 через x_2 и x_6, мы введем переменную x_1 в число базисных вместо x_6.

$$4x_1 = 44 - (-3x_2 + x_6);$$

$$x_1 = 11 - (-{}^3\!/_4\, x_2 + {}^1\!/_4\, x_6).$$

Подставим выражение x_1 в целевую функцию и оставшиеся ограничения по x_3, x_4 и x_5.

$$f(x) = 22 - (-{}^5\!/_2\, x_2 + {}^1\!/_2\, x_6) \to \max$$

$$\begin{cases} x_3 = 15 - ({}^1\!/_4\, x_2 + {}^1\!/_4\, x_6), \\ x_4 = 32 - ({}^9\!/_4\, x_2 + {}^1\!/_4\, x_6), \\ x_5 = 10 - ({}^{13}\!/_4\, x_2 - {}^3\!/_4\, x_6)^*, \\ x_1 = 11 - (-{}^3\!/_4\, x_2 + {}^1\!/_4\, x_6). \end{cases}$$

2) В этом случае новый базисный план после первой итерации будет:

$$\begin{cases} x_1 = 11, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 15, \\ x_4 = 32, \\ x_5 = 10, \\ x_6 = 0, \end{cases} .$$

$$f(x) = 22$$

На основании результатов можно сделать вывод, что полученный план не является оптимальным, т.к. значение целевой функции может быть увеличено за счет увеличения значения x_2 (x_6 мы не можем увеличивать т.к. это приведет к снижению значения целевой функции).

Значение x_2 нельзя увеличивать бесконечно, т.е. увеличиваем до тех пор, пока x_3, x_4, x_5 и $x_1 \geq 0$.

$$\begin{cases} 15 - \frac{1}{4}x_2 \geq 0, \\ 32 - \frac{9}{4}x_2 \geq 0, \\ 10 - \frac{13}{4}x_2 \geq 0, \\ 11 + \frac{3}{4}x_2 \geq 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 \leq 60, \\ x_2 \leq 14\frac{2}{9}, \\ x_2 \leq 3\frac{1}{13}, \\ x_2 \geq -14\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Выразив x_2 через x_5 и x_6, мы введем переменную x_2 в число базисных вместо x_5.

$$\frac{13}{4}x_2 = 10 - (-\frac{3}{4}x_6 + x_5),$$

$$x_2 = 3\frac{1}{13} - (-\frac{3}{13}x_6 + \frac{4}{13}x_5).$$

Подставим выражение x_2 в целевую функцию и оставшиеся ограничения по x_3, x_4 и x_1.

$$f(x) = 29\frac{9}{13} - (\frac{10}{13}x_5 - \frac{1}{13}x_6) \to \max$$

$$\begin{cases} x_3 = 14\frac{3}{13} - (-\frac{1}{13}x_5 + \frac{4}{13}x_6), \\ x_4 = 25\frac{1}{13} - (-\frac{9}{13}x_5 + \frac{10}{13}x_6)^*, \\ x_2 = 3\frac{1}{13} - (\frac{4}{13}x_5 - \frac{3}{13}x_6), \\ x_1 = 13\frac{4}{13} - (\frac{3}{13}x_5 + \frac{1}{13}x_6). \end{cases}$$

3) В этом случае новый базисный план после второй итерации будет:

$$\begin{cases} x_1 = 13\frac{4}{13}, \\ x_2 = 3\frac{1}{13}, \\ x_3 = 14\frac{3}{13}, \\ x_4 = 25\frac{1}{13}, \\ x_5 = 0, \\ x_6 = 0, \end{cases}$$

$$f(x) = 29\frac{9}{13}.$$

Полученный план не является оптимальным, т.к. значение целевой функции может быть увеличено за счет увеличения значения x_6 (x_5 мы не можем увеличивать т.к. это приведет к снижению значения целевой функции).

Значение x_6 увеличиваем до тех пор, пока x_3, x_4, x_2 и $x_1 \geq 0$.

$$\begin{cases} 14\,3/13 - 4/13\,x_6 \geq 0, \\ 25\,1/13 - 10/13\,x_6 \geq 0, \\ 3\,1/13 + 3/13\,x_6 \geq 0, \\ 13\,4/13 - 1/13\,x_6 \geq 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_6 \leq 46{,}25; \\ x_6 \leq 32{,}6; \\ x_6 \geq -13\,1/3; \\ x_6 \leq 173. \end{cases}$$

Выразив x_6 через x_4 и x_5, мы введем переменную x_6 в число базисных вместо x_4.

$$10/13\,x_6 = 25\,1/13 - (-9/13\,x_5 + x_4),$$
$$x_6 = 32{,}6 - (-0{,}9x_5 + 1{,}3x_4),$$

Подставим выражение x_6 в целевую функцию и оставшиеся ограничения по x_3 , x_2 и x_1.

$$f(x) = 32{,}2 - (0{,}7x_5 + 0{,}1x_4) \to \max$$
$$\begin{cases} x_3 = 4{,}2 - (0{,}2x_5 - 0{,}4x_4), \\ x_6 = 32{,}6 - (-0{,}9x_5 + 1{,}3x_4), \\ x_2 = 10{,}6 - (0{,}1x_5 + 0{,}3x_4), \\ x_1 = 10{,}8 - (0{,}3x_5 - 0{,}1x_4). \end{cases}$$

4) В этом случае новый базисный план после третьей итерации будет:

$$\begin{cases} x_1 = 10{,}8; \\ x_2 = 10{,}6; \\ x_3 = 4{,}2; \\ x_4 = 0; \\ x_5 = 0; \\ x_6 = 32{,}6. \end{cases}$$
$$f(x) = 32{,}2.$$

После анализа значения f следует, что данный план является оптимальным т.к. все $x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$.

<u>Ответ</u>: $\max\limits_{D} f(x_1, x_2) = f(10{,}8;10{,}6) = 32{,}2$

2.3. Алгоритм симплекс-метода

Прежде чем решать ЗЛП симплекс-методом, её необходимо привести к канонической форме. После этого выделяют переменные, которые присутствуют только в одном уравнении и с коэффициентом «1», и принимают эти переменные в качестве базисных. Если в ограничении такую переменную выделить нельзя, то вводят искусственную базисную переменную. Затем определяется исходный базисный план и значение целевой функции для этого плана.

Шаги

1) Формирование начальной канонической формы и определение ДБР

2) Построение исходной симплекс-таблицы

№ итерации Таблица 2.3

базис	B	x_1	…	x_k	…	x_j	…	x_n
...	…				…			
x_i	b_i			a_{ik}		a_{ij}		
...								
x_r	b_r			a_{rk}	…	a_{rj}		
...	b_m				…			
$f(x)$	0					$-c_j = -\Delta_j$		

В столбце «базис» записываются базисные переменные.
В последней строке столбца «базис» указывается функция $f(x)$.
В столбце «В» фиксируются свободные члены ограничений b_i.
В на 1-м этапе равно 0 (никакой прибыли).

Пример 2.5:
Рассмотрим пример 2.3 из предыдущего пункта.

$$X = \begin{cases} 6x_1 + 6x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 36, \\ 4x_1 + 2x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 = 20, \\ 4x_1 + 8x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 = 40, \\ x_j \geq 0, i = \overline{1,5} \end{cases}$$

$f(x) = 12x_1+15x_2 +0x_3+0x_4+0x_5$

В столбцах x_j для не базисных переменных отражаются коэффициенты при не базисных переменных в ограничениях (6,4,4)(6,2,8)

В столбцах базисных переменных содержится только 0 и 1 на пересечении столбца с соответствующей строкой базисной переменной

Последняя строка:
в «В» - значение целевой функции;
в остальных клетках - значение $-c_j = -\Delta_j$ из функции $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

Таблица 2.4

базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	36	6	6	1	0	0
x_4	20	4	2	0	1	0
x_5	40	4	8	0	0	1
$f(x)$	0	-12	-15	0	0	0

3) Проверка полученного базисного плана на оптимальность по условию оптимальности:

Если при каком-либо ДБР в симплекс-таблице все коэффициенты строки с *f(x)* (то есть $-c_j$) не отрицательны, то данное ДБР оптимально.

Чтобы ДБР было оптимальным необходимо, чтобы среди базисных переменных не было искусственных

$$4x_1 + 2x_2 = 10,$$
$$4x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 10$$

x_5 - является искусственной переменной, при этом все переменные от x_1 до x_5 больше или равны нулю.

Если для всех j, не принадлежащим базисным, $\Delta_j \geq 0$, и среди базисных переменных есть искусственная, то задача неразрешима, так как её система ограничений несовместима.

Если $\Delta_j < 0$, то полученный базисный план не является оптимальным и необходимо переходить к другому базисному плану.

Если в оптимальном плане $\Delta_j = 0$ для не базисных переменных (x_1, x_2), то задача имеет бесконечное число планов.

4) Для перехода к новому базисному плану из числа небазисных переменных с отрицательными значениями Δ_j выбирается переменная, которая вводится в базис - x_k, это переменная которой соответствует наибольшая по абсолютной величине отрицательная оценка Δ_j:

$$|\Delta_k| = \max |\Delta_j| \text{, среди } \Delta_j < 0,$$
$$\Delta_k = \min \Delta_j$$

Столбец, отвечающий переменной x_k, называется главным, или ведущим. Элементы этого столбца обозначаются через a_{ik}.

Если окажется несколько одинаковых наибольших по абсолютной величине отрицательных оценок, то выбирается любая из соответственных переменных.

5) Выбираем переменную r - переменную, которая выводится из базиса. Данная переменная находится из соотношения

$$\frac{b_r}{a_{rk}} = \min_j \frac{b_i}{a_{ik}}, \qquad (2.2)$$
$$a_{ik} \geq 0$$

Таблица 2.5

		x_j
x_i	B_i	a_{ij}
$f(x)$		

Для элементов ведущего столбца, которые больше 0, находим соотношение $\frac{b_i}{a_{ik}}$ и выбираем минимальное соотношение.

Строка таблицы, в которой получено наименьшее отношение элемента столбца «B» к соответствующему положительному элементу главного столбца, является главной, или ведущей.

Элементы главной строки обозначаются через a_{rj}. Выбранная переменная x_r будет выводиться из базиса, то есть это исключаемая переменная.

Если окажется несколько одинаковых наименьших значений отношений, то выбирается любая из соответствующих им переменных.

Элемент, стоящий на пересечении главного столбца и строки называется главным, или ведущим, и обозначается a_{rk}

В случае отсутствия $a_{ik} > 0$ задача неразрешима, то есть её целевая функция не ограничена на множестве планов задачи.

В примере 2.5:

Так как в строке $f(x)$ минимальное значение -15, то вводимая переменная - x_2 и второй столбец является ведущим столбцом.

В столбце ищем элементы больше нуля, то есть 6, 2, 8, находим соотношения $\frac{b_i}{a_{ik}}$, то есть $\frac{36}{6}=6;\quad \frac{20}{2}=10;\quad \frac{40}{8}=5$ выбираем минимальное значение:

$\min\frac{b_i}{a_{ik}}$ соответствует третьей строке и переменной x_5.

Следовательно, третья строка является главной строкой. Ведущий элемент 8.

6) Для определения нового базисного плана проводится пересчет элементов таблицы, и результаты заносятся в новую симплекс-таблицу. Выбранные переменные среди базисных и не базисных, лежащих на главной строке и главном столбце, меняются местами, то есть x_2 меняется с x_5.

Процедура замены базиса осуществляется следующим образом:

а) элементы главной строки необходимо разделить на ведущий элемент

$$b_k=\frac{b_r}{a_{rk}};\quad a_{kj}=\frac{a_{rj}}{a_{rk}} \tag{2.3}$$

б) элементы полученной строки умножаются на - a_{ik}, и результаты складываются с i-той строкой, причем $i \neq k$.

$$\begin{aligned} a_{ij}^{'} &= a_{ij}-\frac{a_{rj}\cdot a_{ik}}{a_{rk}} \\ b_i^{'} &= b_i-\frac{b_r\cdot a_{ik}}{a_{rk}} \\ f^{'}(x) &= f(x)-\frac{b_r\cdot\Delta_k}{a_{rk}} \\ \Delta_j^{'} &= \Delta_j-\frac{a_{rj}\cdot\Delta_k}{a_{rk}} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Таблица 2.6

базис	ЗН	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	6	3	0	1	0	-3/4
x_4	10	3	0	0	1	-1/4
x_2	5	1/2	1	0	0	1/8
$f(x)$	75	-9/2	0	0	0	15/8

Строка при первой ведущей переменной получается из предыдущей строки делением на ведущий столбец, то есть на 8:

Строка с x_2 (ведущая): 40 : 8 = 5;
4 : 8 = 1/2;
8 : 8 = 1;
0 : 8 = 0;

$0 : 8 = 0;$
$1 : 8 = 1/8.$

Строка с x_3: $36 – 5 \cdot 6 = 6;$
$6 - 1/2 \cdot 6 = 3;$
$6 – 1 \cdot 6 = 0;$
$1 – 0 \cdot 6 =1;$
$0 – 0 \cdot 6 = 0;$
$0 – 1/8 \cdot 6 = -3/4.$

Строка с x_4: $20 – 5 \cdot 2 = 10;$
$4 - 1/2 \cdot 2 = 3;$
$2 – 1 \cdot 2 = 0;$
$0 – 0 \cdot 2 = 0;$
$1 – 0 \cdot 2 = 1;$
$0 – 1/8 \cdot 2 = -1/4$

$f(x) = 0 - 5 \cdot (-15) = 75,$ где 0 - предыдущее значение.

Коэффициенты целевой функции:

при $x_1 = -12 - \frac{1}{2} \cdot (-15) = -\frac{9}{2}$

при $x_2 = -15 - 1 \cdot (-15) = 0$

при $x_3 = 0 - 0 \cdot (-15) = 0$

при $x_4 = 0 - 0 \cdot (-15) = 0$

при $x_5 = 0 - \frac{1}{8} \cdot (-15) = \frac{15}{8}$

На следующей итерации выполняем аналогичные вычисления, и в результате получаем новую симплекс-таблицу

Таблица 2.7

базис	ЗН	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	2	1	0	1/3	0	-1/4
x_4	4	0	0	-1	1	1/2
x_2	4	0	1	-1/6	0	1/4
$f(x)$	84	0	0	3/2	0	3/4

Все коэффициенты в строке с $f(x)$ $(-c_j)$ $> 0,$ то есть это оптимальное значение.

Пример 2.6:

Рассмотрим пример 2.4 из предыдущего пункта.

Найдем наибольшее значение функции в заданной области, т.е. решим задачу линейного программирования (максимизируем линейную функцию при линейных ограничениях).

$f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -4, \\ x_1 - 3x_2 \ge -21, \\ 3x_1 + x_2 \le 43, \\ 4x_1 - 3x_2 \le 44, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Приведем к канонической форме:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 21, \\ 3x_1 + x_2 + x_5 = 43, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_6 = 44, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6} \end{cases}$$

Исходная симплекс - таблица

Итерация №0 Таблица 2.8

базис	**значение**	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**
x3	4	-1	1	1	0	0	0
x4	21	-1	3	0	1	0	0
x5	43	3	1	0	0	1	0
x6	44	4	-3	0	0	0	1
f (x)	0	-2	-1	0	0	0	0

Переменную x_1 вводим в число базисных вместо переменной x_6

Ведущий элемент равен 4.

Итерация №1 Таблица 2.9

базис	**значение**	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**
x3	15	0	1/4	1	0	0	1/4
x4	32	0	9/4	0	1	0	1/4
x5	10	0	13/4	0	0	1	-3/4
x1	11	1	-3/4	0	0	0	1/4
f (x)	22	0	-5/2	0	0	0	1/2

Переменную x_2 вводим в число базисных вместо переменной x_5

Ведущий элемент равен 13/4.

Итерация №2 Таблица 2.10

базис	**значение**	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**
x3	185/13	0	0	1	0	-1/13	4/13
x4	326/13	0	0	0	1	-9/13	10/13
x2	40/13	0	1	0	0	4/13	-3/13
x1	173/13	1	0	0	0	3/13	1/13
f (x)	386/13	0	0	0	0	10/13	-1/13

Переменную x_6 вводим в число базисных вместо переменной x_4

Ведущий элемент равен 10/13.

Итерация №3 Таблица 2.11

базис	**значение**	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**x_5**	**x_6**
x_3	4,2	0	0	1	-0,4	0,2	0
x_6	32,6	0	0	0	1,3	-0,9	1
x_2	10,6	0	1	0	0,3	0,1	0
x_1	10,8	1	0	0	-0,1	0,3	0
f (x)	32,2	0	0	0	0,1	0,7	0

Так как все значения $-c_j > 0$, оптимальное значение найдено.

Ответ: $\max\limits_D f(x_1, x_2) = f(10{,}8;10{,}6) = 32{,}2$

2.4. Вырожденность в задачах линейного программирования. Проблема зацикливания

2.4.1.Симплекс метод (метод последовательного улучшения плана)

Метод предназначен для решения общей задачи линейного программирования.
Пусть имеем следующую задачу:

$$Q(\bar{x}) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \ldots + c_n \cdot x_n \to \min, \tag{2.5}$$

с системой ограничений следующего вида:

$$\begin{cases} a_{1,1} \cdot x_1 + a_{1,2} \cdot x_2 + \ldots + a_{1,n} \cdot x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m,1} \cdot x_1 + a_{m,2} \cdot x_2 + \ldots + a_{m,n} \cdot x_n = b_m \end{cases}. \tag{2.6}$$

Разрешим эту систему относительно переменных x_1, ...,x_m:

$$\begin{cases} x_1 = a'_{1,m+1} \cdot x_{m+1} + \ldots + a'_{1,n} \cdot x_n + b'_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m = a'_{m,m+1} \cdot x_{m+1} + \ldots + a'_{m,n} \cdot x_n + b'_m \end{cases}. \tag{2.7}$$

Векторы условий, соответствующие x_1, ...,x_m, образуют базис. Переменные x_1, ...,x_m назовем **базисными переменными**. Остальные переменные задачи – небазисные.
Целевую функцию можно выразить через небазисные переменные:

$$Q(\bar{x}) = c'_{m+1} \cdot x_{m+1} + c'_{m+2} \cdot x_{m+2} \ldots + c'_n \cdot x_n + c'_0 \to \min. \tag{2.8}$$

Если приравнять небазисные переменные нулю: $x_{m+1} = 0$, $x_{m+2} = 0$, ..., $x_n = 0$,
то соответствующие базисные переменные примут значения: $x_1 = b'_1;\ x_2 = b'_2;\ \ldots;\ x_m = b'_m$.
Пусть коэффициенты а$_{11}$ -а$_{mn}$ образуют матрица А.

Вектор $\bar{x}$ с такими компонентами представляет собой угловую точку многогранника решений (допустимую) при условии, что $b'_i \geq 0$ (опорный план).
Теперь необходимо перейти к другой угловой точке с меньшим значением целевой функции. Для этого следует выбрать некоторую небазисную переменную и некоторую базисную так, чтобы после того, как мы “поменяем их местами”, значение целевой функции уменьшилось. Такой направленный перебор в конце концов приведет нас к решению задачи.

Пример 2.6:

Пусть $Q(\bar{x})=x_4-x_5 \to \min$

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_4-2x_5&=1\\ x_2-2x_4+x_5&=2\\ x_3+3x_4+x_5&=3\end{aligned}\right\}.$$

Выберем в качестве базисных следующие переменные $\{x_1, x_2, x_3\}$ и разрешим систему относительно этих переменных. Система ограничений примет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} x_1&=1-x_4+2x_5\\ x_2&=2+2x_4-x_5\\ x_3&=3-3x_4-x_5\end{aligned}\right\}.$$

Переменные $\{x_4, x_5\}$являются небазисными. Если взять $x_4 = 0$ и $x_5 = 0$, то получим угловую точку (опорный план): $\bar{x}^1=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, которому соответствует $Q(\bar{x}^1)=0$.

Значение целевой функции можно уменьшить за счет увеличения x_5. При увеличении x_5 величина x_1 также увеличивается, а x_2 и x_3 – уменьшаются. Причем величина x_2 раньше может стать отрицательной. Поэтому, вводя в базис переменную x_5, одновременно x_2 исключаем из базиса. В результате после очевидных преобразований получим следующие выражения для новой системы базисных переменных и целевой функции:

$$\left.\begin{aligned} x_5&=2-x_2+2x_4\\ x_1&=5-2x_2+3x_4\\ x_3&=1+x_2-5x_4\end{aligned}\right\}$$

$$Q(\bar{x})=-2-x_4+x_2 \to \min.$$

Соответствующий опорный план: $\bar{x}^2=\begin{bmatrix}5 & 0 & 1 & 0 & 2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ и $Q(\bar{x}^2)=-2$.

Целевую функцию можно уменьшить за счет увеличения x_4. Увеличение x_4 приводит к уменьшению только x_3. Поэтому вводим в базис переменную x_4, а x_3 исключаем из базиса. В результате получим следующие выражения для новой системы базисных переменных и целевой функции:

$$\left.\begin{aligned} x_4&=\frac{1}{5}+\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{5}x_3\\ x_1&=\frac{28}{5}-\frac{7}{5}x_2-\frac{3}{5}x_3\\ x_5&=\frac{12}{5}-\frac{3}{5}x_2-\frac{2}{3}x_3\end{aligned}\right\}$$

$$Q(\bar{x})=-\frac{11}{5}+\frac{4}{5}x_2+\frac{1}{5}x_3 \to \min.$$

Соответствующий опорный план: $\bar{x}^3=\begin{bmatrix}\frac{28}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{12}{5}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ и значение целевой функции: $Q(\bar{x}^3)=-\frac{11}{5}$. Так как все коэффициенты при небазисных переменных в целевой функции неотрицательны, то нельзя уменьшить целевую функцию за счет увеличения x_2 или x_3, следовательно, полученный план $\bar{x}^3$ является оптимальным.

Пример 2.7:
Пусть имеем задачу

$$Q(\bar{x}) = x_1 - x_2 \to \min$$

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= 1 + x_1 - x_2 \\ x_4 &= 2 - x_1 + 2x_2 \\ \bar{x} &\ge 0 \end{aligned}\right\}.$$

Переменные $\{x_3, x_4\}$- базисные, а $\{x_1, x_2\}$- небазисные переменные. Опорный план $\bar{x}^0 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 2]^T$, $Q(\bar{x}^0) = 0$.

Теперь вводим в базис переменную x_1, а x_4 исключаем из базиса. В результате получим следующие выражения для базисных переменных и целевой функции:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 2 + 2x_2 - x_4 \\ x_3 &= 3 + x_2 - x_4 \end{aligned}\right\}$$

$$Q(\bar{x}) = -2 - 3x_2 + x_4.$$

Опорный план: $\bar{x}^1 = [2 \quad 0 \quad 3 \quad 0]^T$, значение целевой функции: $Q(\bar{x}^1) = -2$.

Теперь можно заметить, что при увеличении x_2 значения переменных x_1 и x_3 также возрастают, то есть при $x_2 \to \infty$ в допустимой области $Q(\bar{x}) \to -\infty$ (задача не имеет решения).

Замечание

В процессе поиска допустимого плана может быть выявлена противоречивость системы ограничений.

2.4.2.Алгоритм симплекс метода

Формализованный алгоритм симплекс метода состоит из двух основных этапов:

1. построение опорного плана;
2. построение оптимального плана.

Пример 2.8:
Проиллюстрируем алгоритм на рассмотренном ранее примере:

$$Q(\bar{x}) = x_4 - x_5 \to \min$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_4 - 2x_5 &= 1 \\ x_2 - 2x_4 + x_5 &= 2 \\ x_3 + 3x_4 + x_5 &= 3 \end{aligned}\right\}.$$

$$\bar{x} \ge 0.$$

В случае базисных переменных $\{x_1, x_2, x_3\}$начальная симплексная таблица для данного примера будет выглядеть следующим образом:

Таблица 2.12

	$-x_4$	$-x_5$	1
$x_1=$	1	-2	1
$x_2=$	-2	1	2
$x_3=$	3	1	3
$Q(\bar{x})=$	-1	1	0

Она уже соответствует опорному плану $\bar{x}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ (столбец свободных членов).

2.4.3.Построение оптимального плана.

Для того чтобы опорный план был оптимален, при минимизации целевой функции необходимо, чтобы коэффициенты в строке целевой функции были неположительными (в случае максимизации – неотрицательными). Т.е. при поиске минимума мы должны освободиться от положительных коэффициентов в строке $Q(\bar{x})$.

Выбор разрешающего элемента. Если при поиске минимума в строке целевой функции есть коэффициенты больше нуля, то выбираем столбец с положительным коэффициентом в строке целевой функции в качестве разрешающего. Пусть это столбец с номером *l*.

Для выбора разрешающей строки (разрешающего элемента) среди положительных коэффициентов разрешающего столбца выбираем тот (строку), для которого отношение коэффициента в столбце свободных членов к коэффициенту в разрешающем столбце минимально:

$$\frac{b_r}{a_{rl}} = \min\left\{\frac{b_i}{a_{il}} \,\middle|\, a_{il} \geq 0\right\}. \tag{2.8}$$

a_{rl} – разрешающий (направляющий) элемент, строка r – разрешающая.

Для перехода к следующей симплексной таблице (следующему опорному плану с меньшим значением целевой функции) делается шаг модифицированного жорданова исключения с разрешающим элементом a_{rl}.

Если в разрешающем столбце нет положительных коэффициентов, то целевая функция неограничена снизу (при максимизации – неограничена сверху).

Шаг модифицированного жорданова исключения над симплексной таблицей. На месте разрешающего элемента ставится 1 и делится на разрешающий элемент.

Остальные элементы разрешающего столбца меняют знак на противоположный и делятся на разрешающий элемент.

Остальные элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент.

Все остальные элементы симплексной таблицы вычисляются по следующей формуле:

$$a_{ij} = \frac{a_{ij} \cdot a_{rl} - a_{rj} \cdot a_{il}}{a_{rl}} = a_{ij} - \frac{a_{rj} \cdot a_{il}}{a_{rl}}. \tag{2.9}$$

Таблица 2.13

	$-x_4$	$-x_5$	1
x_1	1	-2	1
x_2	-2	1	2
x_3	3	1	3
$Q(\bar{x})$	-1	1	0

	$-x_4$	$-x_2$	1
x_1	-3	2	5
x_5	-2	1	2
x_3	5	-1	1
$Q(\bar{x})$	1	-1	-2

	$-x_3$	$-x_2$	1
x_1	3/5	7/5	28/5
x_5	2/5	3/5	12/5
x_4	1/5	-1/5	1/5
$Q(\bar{x})$	-1/5	-4/5	-11/5

2.4.4.Построение опорного плана.

Пусть необходимо решить задачу:

$$Q(\bar{x}) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \ldots + c_n \cdot x_n \rightarrow \min(\max) \qquad (2.10)$$

$$\begin{cases} a_{1,1} \cdot x_1 + \ldots\ldots\ldots + a_{1,n} \cdot x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m,1} \cdot x_1 + \ldots\ldots\ldots + a_{m,n} \cdot x_n = b_m \\ a_{m+1,1} \cdot x_1 + \ldots + a_{m+1,n} \cdot x_n \le b_{m+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m+p,1} \cdot x_1 + \ldots\ldots + a_{m+p,n} \cdot x_n \le b_{m+p} \end{cases}. \qquad (2.11)$$

Введем дополнительные переменные, чтобы преобразовать ограничения-неравенства к равенствам. В ограничениях-равенствах дополнительные переменные должны быть нулевыми. Тогда система ограничений принимает вид:

$$\begin{cases} 0 = b_1 - a_{1,1} \cdot x_1 - \ldots\ldots\ldots - a_{1,n} \cdot x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = b_m - a_{m,1} \cdot x_1 - \ldots\ldots\ldots - a_{m,n} \cdot x_n \\ x_{n+1} = b_{m+1} - a_{m+1,1} \cdot x_1 - \ldots - a_{m+1,n} \cdot x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n+p} = b_{m+p} - a_{m+p,1} \cdot x_1 - \ldots - a_{m+p,n} \cdot x_n \end{cases}, \qquad (2.12)$$

где $x_{n+i} \ge 0$, $i = 1, \ldots, p$.

В качестве базисных переменных будем брать систему дополнительно введенных переменных. Тогда симплексная таблица для преобразованной задачи будет иметь следующий вид:

Таблица 2.14

	$-x_1$	$-x_2$	….	$-x_s$	….	$-x_n$	1
0	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	….	$a_{1,s}$	….	$a_{1,n}$	b_1
….	….	….	….	….	….	….	….
0	$a_{m,1}$	$a_{m,2}$	….	$a_{m,s}$	….	$a_{m,n}$	b_m
x_{m+1}	$a_{m+1,1}$	$a_{m+1,2}$	….	$a_{m+1,s}$	….	$a_{m+1,n}$	b_{m+1}
….	….	….	….	….	….	….	….
x_{m+p}	$a_{m+p,1}$	$a_{m+p,2}$	….	$a_{m+p,s}$	….	$a_{m+p,n}$	b_{m+p}
$Q(\bar{x})$	$-c_1$	$-c_2$	….	$-c_s$	….	$-c_n$	0

2.4.5Правила выбора разрешающего элемента при поиске опорного плана.

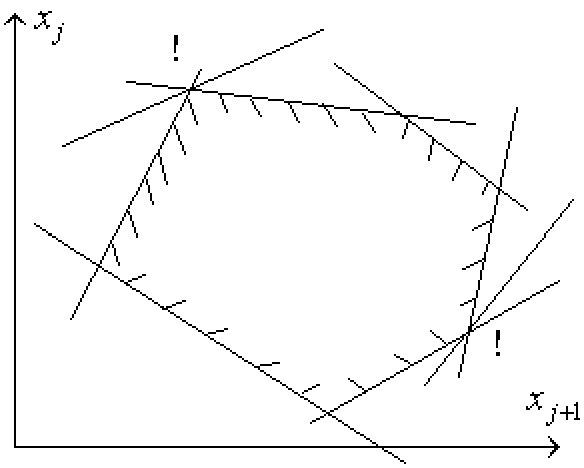
1. При условии отсутствия "0-строк" (ограничений-равенств) и "свободных" переменных (т.е. переменных, на которые не наложено требование неотрицательности).
   - Если в столбце свободных членов симплексной таблицы нет отрицательных элементов, то опорный план найден.
   - Есть отрицательные элементы в столбце свободных членов, например $b_i < 0$. В такой строке ищем отрицательный коэффициент a_{il}, и этим самым определяем разрешающий столбец l. Если не найдем отрицательный a_{il}, **то система ограничений несовместна** (противоречива).
   - В качестве разрешающей выбираем строку, которой соответствует минимальное отношение:

$$\frac{b_r}{a_{rl}} = \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{il}} \middle| \frac{b_i}{a_{il}} > 0 \right\}, \qquad (2.13)$$

   где r - номер разрешающей строки. Таким образом, a_{rl} - разрешающий элемент.
   - После того, как разрешающий элемент найден, делаем шаг модифицированного жорданова исключения с направляющим элементом a_{rl} и переходим к следующей симплексной таблице.
2. В случае присутствия ограничений-равенств и "свободных" переменных поступают следующим образом.
   - Выбирают разрешающий элемент в "0-строке" и делают шаг модифицированного жорданова исключения, после чего вычеркивают этот разрешающий столбец. Данную последовательность действий продолжают до тех пор, пока в симплексной таблице остается хотя бы одна "0-строка" (при этом таблица сокращается).
   - Если же присутствуют и свободные переменные, то необходимо данные переменные сделать базисными. И после того, как свободная переменная станет базисной, в процессе определения разрешающего элемента при поиске опорного и оптимального планов данная строка не учитывается (но преобразуется).

2.4.6.Вырожденность в задачах линейного программирования

Рассматривая симплекс-метод, мы предполагали, что задача линейного программирования является невырожденной, т.е. каждый опорный план содержит ровно m положительных компонент, где m – число



ограничений в задаче. В вырожденном опорном плане число положительных компонент оказывается меньше числа ограничений: некоторые базисные переменные, соответствующие данному опорному плану, принимают нулевые значения. Используя геометрическую интерпретацию для простейшего случая, когда $n - m = 2$ (число небазисных переменных равно 2), легко отличить вырожденную задачу от невырожденной. В вырожденной задаче в одной вершине многогранника условий пересекается более двух прямых, описываемых уравнениями вида $x_i = 0$. Это значит, что одна или несколько сторон многоугольника условий стягиваются в точку.

Рис. 2.3

Аналогично при $n - m = 3$ в вырожденной задаче в одной вершине пересекается более 3-х плоскостей $x_i = 0$.
В предположении о невырожденности задачи находилось только одно значение

$$\theta = \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{il}} \middle| \frac{b_i}{a_{il}} > 0 \right\}, \qquad (2.14)$$

по которому определялся индекс выводимого из базиса вектора условий (выводимой из числа базисных переменной). В вырожденной задаче

$$\min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{il}} \middle| \frac{b_i}{a_{il}} > 0 \right\} \qquad (2.15)$$

может достигаться на нескольких индексах сразу (для нескольких строк). В этом случае в находимом опорном плане несколько базисных переменных будут нулевыми.
Если задача линейного программирования оказывается вырожденной, то при плохом выборе вектора условий, выводимого из базиса, может возникнуть бесконечное движение по базисам одного и того же опорного плана. Так называемое, явление зацикливания. Хотя в практических задачах линейного программирования зацикливание явление крайне редкое, возможность его не исключена.
Задача называется невырожденной задачей, если ранг матрицы A равен m и любой опорный план является невырожденным планом. Если хотя бы один опорный план является вырожденным в задаче, то задача называется вырожденной. Поясним понятие вырожденности на примерах.

Пример 2.9:
. -5x1+ x2+ x3 -2x4- x5 -> min
2x1 +6x3 +4x4- 3x5 =2,
-x1+3x2+7x3 -2X5=1,
X1+ x2+ 2x3 +x4+ 2x5 =1,xi >= 0, i=l,..,5;

Пример 2.10:
. -x1-3x2-2 x3 -4x4- x5->min
-x1 +4x3 +3x4 =2,
2x1+3x2+ 3x3 +5x4 -x5=1,
x1+3x2+ x3 +2x4+ x5 =2, xi>0, 1=1,..,5; i=l,..,5;

Для задачи примера 2.9 опорным является, например, план x=(1/5, 2/5, O, 2/5, 0), поскольку столбцы $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ матрицы ограничений соответствующие положительным координатам вектора x, линейно

независимы. Этот опорный план невырожден, так как число положительных координат вектора x равно 3 – числу строк матрицы ограничений.
Для задачи примера 4.3 вектор x=(3/4, 0, 11/16, 0, 9/16) является невырожденным опорным планом, а план x=(0, 1/2, 1/2, 0, 0) вырожден.

Один из приемов борьбы с вырожденностью состоит в преобразовании задачи путем "незначительного" изменения вектора правых частей системы ограничений на величины ε_i, таким образом, чтобы задача стала невырожденной, и, в то же время, чтобы это изменение не повлияло реально на оптимальный план задачи.
Чаще реализуемые алгоритмы включают в себя некоторые простые правила, снижающие вероятность возникновения зацикливания или его преодоления.
Пусть переменную x_j необходимо сделать базисной. Рассмотрим множество индексов E_0, состоящее из тех i, для которых достигается

$$\theta_0 = \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{il}} \middle| \frac{b_i}{a_{il}} > 0 \right\}. \qquad (2.16)$$

Множество индексов i, для которых выполняется данное условие обозначим через E_0. Если E_0 состоит из одного элемента, то из базиса исключается вектор условий A_i (переменная x_i делается небазисной). Если E_0 состоит более чем из одного элемента, то составляется множество E_1, которое состоит из $i \in E_0$, на которых достигается

$$\theta_1 = \min_{i \in E_0} \left\{ \frac{a_{i1}}{a_{il}} \right\}. \qquad (2.17)$$

Если E_1 состоит из одного индекса k, то из базиса выводится переменная x_k. В противном случае составляется множество E_2 и т.д.
Практически правилом надо пользоваться, если зацикливание уже обнаружено.

2.5. Анализ линейных моделей на чувствительность. Двойственный симплекс-метод.

Опираясь на теорию двойственности ЗЛП (на взаимосвязь между исходной и двойственной моделью) был разработан двойственный симплекс-метод. Его главная особенность заключается в возможности в качестве начальной точки использовать недопустимое базисное решение, однако необходимо, чтобы все коэффициенты целевой функции при этом были не отрицательны. Процедура двойственного симплекс-метода аналогична процедуре обычного симплекс-метода и включает следующие основные шаги:

1) проверяют базисное решение на оптимальность. Признаком оптимальности является отсутствие в столбце базисных переменных отрицательных элементов. Если базис оптимален, вычисления прекращают. Иначе переходят ко второму шагу.

2) выбирают ведущую строку «k» по наибольшей абсолютной величине среди отрицательных базисных переменных,

$$\max |b_i|, \text{ среди всех } b_i < 0 \qquad (2.18)$$

3) выбираем ведущий столбец по условию:

$$\min \left| \frac{c_j}{a_{kj}} \right|, \text{ среди всех } a_{kj} < 0, \qquad (2.19)$$

4) пересчитываем симплекс-таблицу по правилам обычного симплекс-метода и вновь переходим к первому шагу.

Наиболее важная сфера применения двойственного симплекс-метода - это анализ линейных моделей на чувствительность, то есть он позволяет ответить на вопрос - как изменится оптимальное решение задачи, если изменятся некоторые условия задачи (появятся дополнительные ограничения).

Введение дополнительных ограничений может привести к следующим ситуациям:

1) дополнительное ограничение не влияет на найденное оптимальное решение. В этом случае мы пишем, что ограничение не активное, избыточное, не связанное.

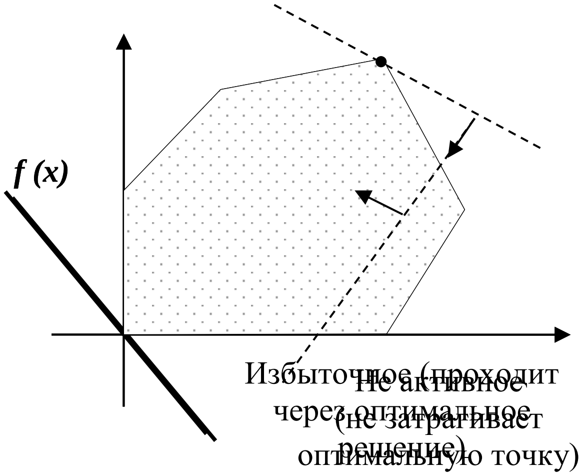
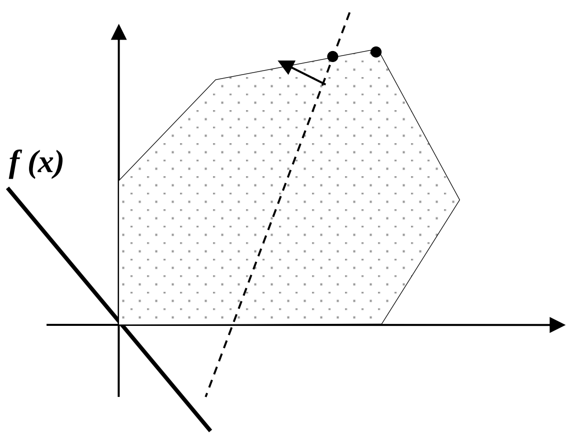


Рис. 2.4 Рис.2.4

2) Если дополнительное ограничение влияет на оптимальное решение, то имеем случай активного ограничения.



В этом случае, как правило, ухудшается оптимальное значение *f*(x)*

Рис. 2.6

Пример 2.11:

Есть симплекс-таблица Таблица 2.15

базис	ЗН	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	50/7	1	5/7	0	-5/7	10/7	0	1/7
x_6	325/7	0	-6/7	0	13/7	-6/7	1	4/7
x_3	55/7	0	2/7	1	12/7	-3/7	0	1/7
$f(x)$	695/7	0	3/7	0	11/7	13/7	0	5/7

После вводим дополнительное ограничение $x_1 + x_2 \leq 7$.

Это ограничение нам необходимо поместить в таблицу.

Представим в канонической форме: $x_1 + x_2 + x_8 = 7$.

Так как x_1 базисная переменная, ее необходимо исключить из уравнения то есть выразим x_1 из 1-й строки:

$$x_1 = \frac{50}{7} - \frac{5}{7}x_2 + \frac{5}{7}x_4 - \frac{10}{7}x_5 - \frac{1}{7}x_7$$

$$\frac{50}{7} + \frac{2}{7}x_2 + \frac{5}{7}x_4 - \frac{10}{7}x_5 - \frac{1}{7}x_7 + x_8 = 7$$

$$\frac{2}{7}x_2 + \frac{5}{7}x_4 - \frac{10}{7}x_5 - \frac{1}{7}x_7 + x_8 = -\frac{1}{7}$$

полученное уравнение вводим в симплекс-таблицу

Таблица 2.16

базис	ЗН	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	50/7	1	5/7	0	-5/7	10/7	0	1/7	0
x_6	325/7	0	-6/7	0	13/7	-6/7	1	4/7	0
x_3	55/7	0	2/7	1	12/7	-3/7	0	1/7	0
x_8	-1/7	0	2/7	0	5/7	-10/7	0	-1/7	1
$f(x)$	695/7	0	3/7	0	11/7	13/7	0	5/7	0

выбираем ведущую строку (x_8, т.к. у нее самый большой по модулю отрицательный элемент b_i).

выбираем столбец, у которого $\min\left|\frac{c_j}{a_{kj}}\right|$ и $a_{kj} < 0$:

$a_{kj} < 0$: $a_{85} = -\frac{10}{7}$, $a_{87} = -\frac{1}{7}$;

$$\left|\frac{c_j}{a_{kj}}\right| : \left|\frac{c_5}{a_{85}}\right| = \left|\frac{13}{7} : \left(-\frac{10}{7}\right)\right| = \left|-\frac{13 \cdot 7}{7 \cdot 10}\right| = |-1,3| = 1,3, \quad \left|\frac{c_7}{a_{87}}\right| = \left|\frac{5}{7} : \left(-\frac{1}{7}\right)\right| = \left|-\frac{5 \cdot 7}{7 \cdot 1}\right| = |-5| = 5$$

$\min\left|\frac{c_j}{a_{kj}}\right| = \min(1,3;5) = 1,3$ (столбец x_5 - ведущий)

Следовательно, вводим x_5 в число базисных переменных (смотреть предыдущий материал)

Таблица 2.17

базис	ЗН	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	7	1	1	0	0	0	0	0	1
x_6	473/10	0	-13/5	0	-5/2	0	1	-3/10	-6/10
x_3	79/10	0	1/5	1	3/2	0	0	1/10	-3/10
x_5	1/10	0	-1/5	0	-1/2	1	0	-1/10	-7/10
$f(x)$	991/10	0	4/5	0	5/2	0	0	9/10	13/10

$$f(x) = \frac{695}{7} - \frac{1}{10} \cdot \frac{13}{7} = \frac{991}{10}.$$

Значение целевой функции ухудшилось по сравнению с исходным оптимальным решением, значит дополнительное ограничение активно.

Пример 2.12

Исходными данными будет являться симплекс-таблица, определяющая оптимальное решение ЗЛП следующего вида:

$f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 21, \\ 3x_1 + x_2 + x_5 = 43, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_6 = 44, \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,6} \end{cases}$$

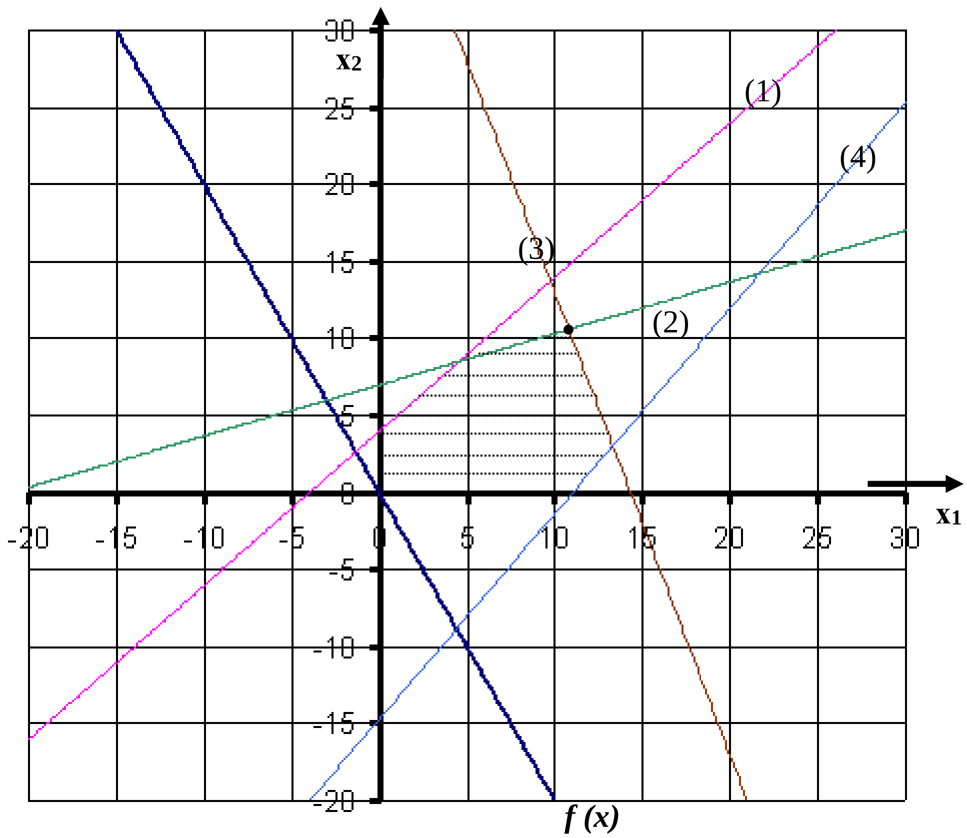


Рис. 2.7

$$\max_D f(x_1, x_2) = f(10{,}8; 10{,}6) = 32{,}2$$

Таблица 2.18

базис	значение	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	4,2	0	0	1	-0,4	0,2	0
x_6	32,6	0	0	0	1,3	-0,9	1
x_2	10,6	0	1	0	0,3	0,1	0
x_1	10,8	1	0	0	-0,1	0,3	0
f (x)	32,2	0	0	0	0,1	0,7	0

1) Введем дополнительно ограничение:

$x_1 - x_2 \leq 5$

В канонической форме: $x_1 - x_2 + x_7 = 5$

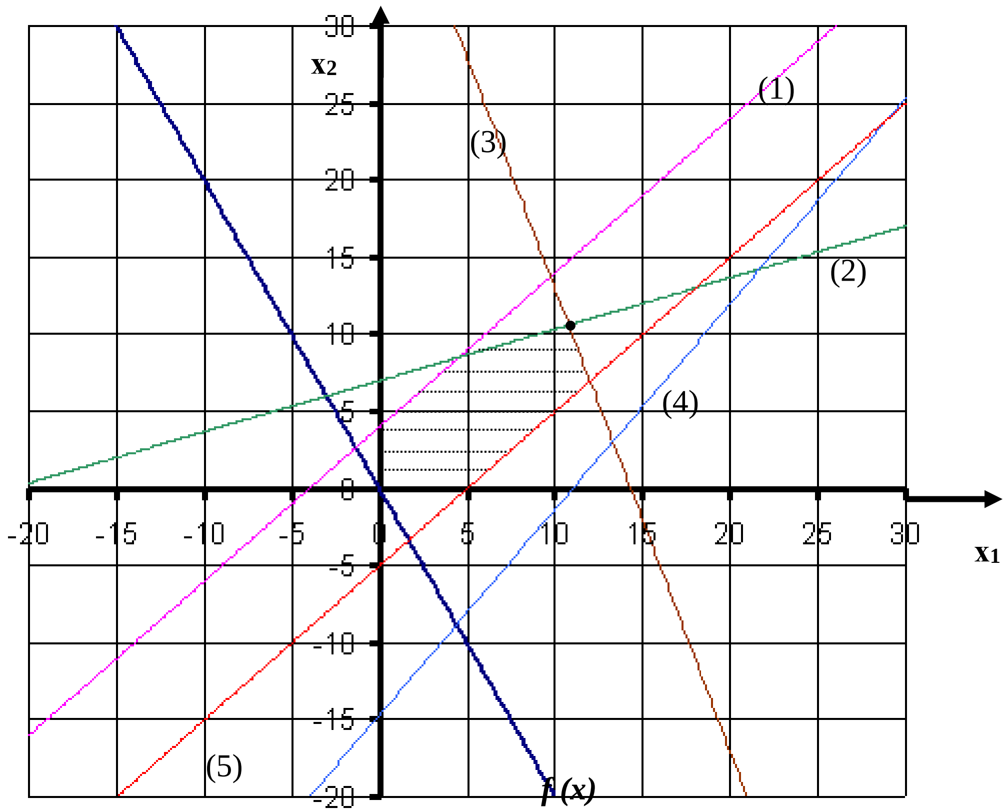


Рис.2.8

Так как переменные x_1 и x_2 базисные, их необходимо исключить из уравнения, т.е. выразим их из 3-ей и 4-ой строк:

$x_1 = 10{,}8 + 0{,}1x_4 - 0{,}3x_5$;

$x_2 = 10{,}6 - 0{,}3x_4 - 0{,}1x_5$.

Подставим в дополнительное ограничение, а затем полученное уравнение введем в симплекс-таблицу.

$10{,}8 + 0{,}1x_4 - 0{,}3x_5 - 10{,}6 + 0{,}3x_4 + 0{,}1x_5 + x_7 = 5$;

$0{,}4x_4 - 0{,}2x_5 + x_7 = 4{,}8$.

Итерация №0 Таблица 2.19

базис	**значение**	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**	**x7**
x3	4,2	0	0	1	-0,4	0,2	0	0
x6	32,6	0	0	0	1,3	-0,9	1	0
x2	10,6	0	1	0	0,3	0,1	0	0
x1	10,8	1	0	0	-0,1	0,3	0	0
x7	4,8	0	0	0	0,4	-0,2	0	1
f (x)	32,2	0	0	0	0,1	0,7	0	0

Так как в столбце значений базисных переменных отрицательных элементов нет, то базис оптимален. Дальнейшие вычисления прекращаются.

Ответ: $\max_D f(x_1, x_2) = f(10{,}8;10{,}6) = 32{,}2$.

Вывод: в связи с тем, что введенное дополнительное ограничение не ухудшило оптимальное значение, то оно не является активным.

С помощью графического и аналитического способов можно убедиться, что оптимальное решение не принадлежит прямой, являющейся дополнительным ограничением, следовательно, ограничение $x_1 - x_2 \le 5$ НЕАКТИВНОЕ.

2) Введем дополнительно ограничение:

$1{,}06x_1 + x_2 \le 22{,}048$

В канонической форме: $1{,}06x_1 + x_2 + x_7 = 22{,}048$

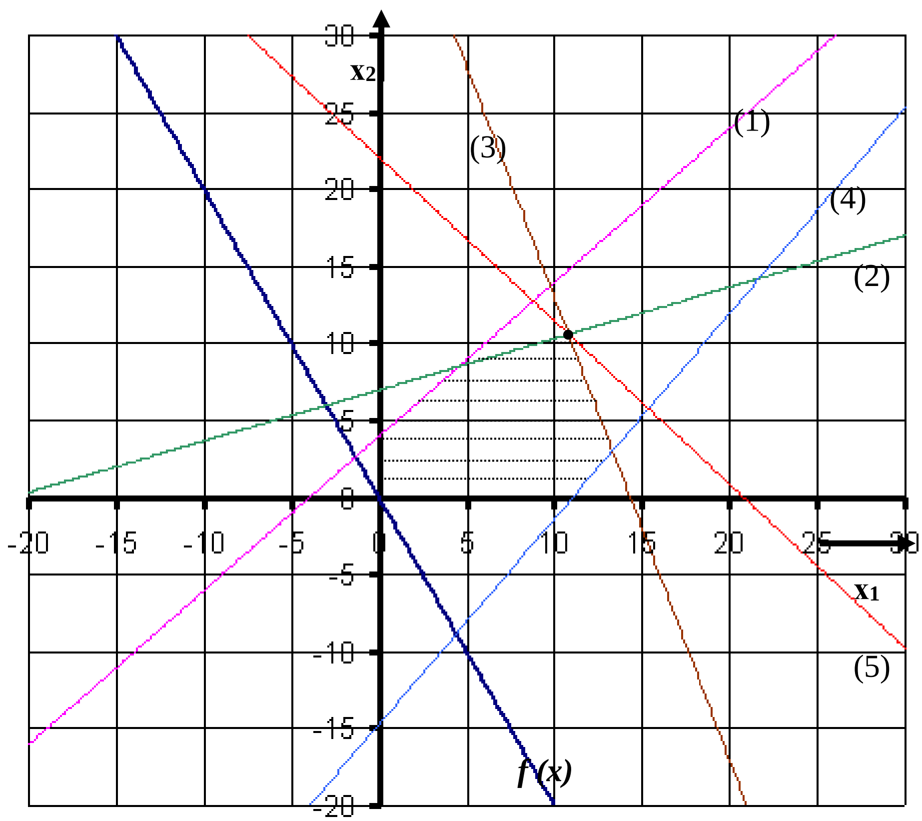


Рис. 2.9

Так как переменные x_1 и x_2 базисные, их необходимо исключить из уравнения, т.е. выразим их из 3-ей и 4-ой строк:

$x_1 = 10{,}8 + 0{,}1x_4 - 0{,}3x_5$;

$x_2 = 10{,}6 - 0{,}3x_4 - 0{,}1x_5$.

Подставим в дополнительное ограничение, а затем полученное уравнение введем в симплекс-таблицу.

$11{,}448 + 0{,}106x_4 - 0{,}318x_5 + 10{,}6 - 0{,}3x_4 - 0{,}1x_5 + x_7 = 22{,}048$;

$-0{,}194x_4 - 0{,}418x_5 + x_7 = 0$

Итерация №0 Таблица 2.20

базис	значение	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	4,2	0	0	1	-0,4	0,2	0	0
x_6	32,6	0	0	0	1,3	-0,9	1	0
x_2	10,6	0	1	0	0,3	0,1	0	0
x_1	10,8	1	0	0	-0,1	0,3	0	0
x_7	0	0	0	0	-0,194	-0,418	0	1
f (x)	32,2	0	0	0	0,1	0,7	0	0

Так как в столбце значений базисных переменных отрицательных элементов нет, то базис оптимален. Дальнейшие вычисления прекращаются.

Ответ: $\max\limits_D f(x_1, x_2) = f(10{,}8; 10{,}6) = 32{,}2$.

Вывод: в связи с тем, что введенное дополнительное ограничение не ухудшило оптимальное значение, то оно не является активным.

С помощью графического и аналитического способов можно убедиться, что прямая, являющаяся дополнительным ограничением, проходит через оптимальное решение, следовательно, ограничение $1{,}06x_1 + x_2 \le 22{,}048$ ИЗБЫТОЧНОЕ.

3) Введем дополнительно ограничение:

$3x_1 - x_2 \le 15$

В канонической форме: $3x_1 - x_2 + x_7 = 15$

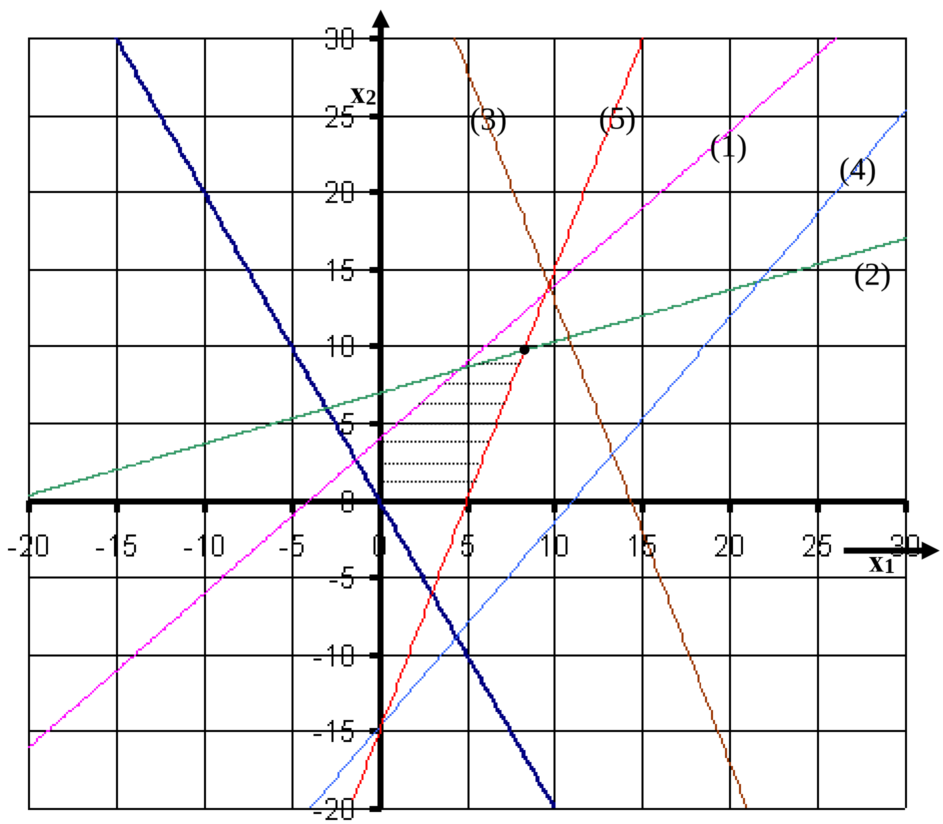


Рис. 2.10

Так как переменные x_1 и x_2 базисные, их необходимо исключить из уравнения, т.е. выразим их из 3-ей и 4-ой строк:

$x_1 = 10{,}8 + 0{,}1x_4 - 0{,}3x_5$;

$x_2 = 10{,}6 - 0{,}3x_4 - 0{,}1x_5$.

Подставим в дополнительное ограничение, а затем полученное уравнение введем в симплекс-таблицу.

$32{,}4 + 0{,}3x_4 - 0{,}9x_5 - 10{,}6 + 0{,}3x_4 + 0{,}1x_5 + x_7 = 15$;

$0{,}6x_4 - 0{,}8x_5 + x_7 = -6{,}8$

Итерация №0 Таблица 2.21

базис	значение	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	4,2	0	0	1	-0,4	0,2	0	0
x_6	32,6	0	0	0	1,3	-0,9	1	0
x_2	10,6	0	1	0	0,3	0,1	0	0
x_1	10,8	1	0	0	-0,1	0,3	0	0
x_7	-6,8	0	0	0	0,6	-0,8	0	1
f (x)	32,2	0	0	0	0,1	0,7	0	0

Выберем ведущую строку из условия $x_r = \max|b_i|$, где $b_i < 0$ - x_7

Выберем ведущий столбец из условия $x_k = \min\left|\frac{c_j}{a_{kj}}\right|$, где $a_{kj} < 0$ - x_5

Следовательно, ведущий элемент равен -0,8.

Дальнейшие вычисления производятся по алгоритму обычного симплекс-метода для одной итерации.
Вводим x_5 в число базисных переменных.
Элементы таблицы пересчитываются по следующим формулам:

$$b_k = \frac{b_r}{a_{rk}}, \quad a_{kj} = \frac{a_{rj}}{a_{rk}}$$

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{rj} \cdot a_{ik}}{a_{rk}}, \quad b'_i = b_i - \frac{b_r \cdot a_{ik}}{a_{rk}} \qquad (2.20)$$

$$f'(x) = f(x) - \frac{b_r \cdot \Delta_k}{a_{rk}}, \quad \Delta'_j = \Delta_j - \frac{a_{rj} \cdot \Delta_k}{a_{rk}}$$

Итерация №1 Таблица 2.22

базис	значение	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	2,5	0	0	1	-0,25	0	0	0,25
x_6	40,25	0	0	0	0,625	0	1	-1,125
x_2	9,75	0	1	0	0,375	0	0	0,125
x_1	8,25	1	0	0	0,125	0	0	0,375
x_5	8,5	0	0	0	-0,75	1	0	-1,25
f (x)	26,25	0	0	0	0,625	0	0	0,875

Так как в столбце значений базисных переменных отрицательных элементов нет, то базис оптимален.
Дальнейшие вычисления прекращаются.

Ответ: $\max_D f(x_1, x_2) = f(8{,}25; 9{,}75) = 26{,}25$.

Вывод: в связи с тем, что значение целевой функции ухудшилось по сравнению с исходным оптимальным решением, введенное дополнительное ограничение является АКТИВНЫМ.

2.6. Использование искусственной переменной в программировании симплекс-методом.

В ряде задач допустимое базисное решение не выявляет точку с нулевыми координатами или базисные переменные в соответствии с ограничениями получают отрицательные значения. Для решения таких задач вводится дополнительная неотрицательная искусственная переменная.

Пример 2.13:

$$f(x) = 20x_1 + 10x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \ge 10, \\ x_1 + 2x_2 \le 20, \end{cases}$$

В канонической форме:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 10, \\ x_1 + 2x_2 - x_5 = 20, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = 6, \\ x_4 = -10, \\ x_5 = 20, \end{cases}$$

Так как x_4 должно быть ≥ 0, то значит в задаче нет очевидного ДБР

Проблему создает ограничение $x_1 + x_2 \ge 10$.

Изменим данное ограничение. Введем в левую часть неотрицательную искусственную переменную x_6, тогда:

$$* \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 10, \\ x_1 + 2x_2 - x_5 = 20, \\ x_1, ..., x_6 \ge 0 \end{cases}$$

Данная система имеет следующий ДБР:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 6, \\ x_4 = 0, \\ x_5 = 20, \\ x_6 = 10, \end{cases}$$

Данная система имеет решение при $x_n \ne 0$, необходимо добиться обращения в 0 искусственной переменной x_6.

Это можно сделать, минимизируя симплекс-методом искусственную целевую функцию $\omega(x) = x_6$ при данных ограничениях (*).

При значении искусственной переменной равной 0, ограничения (*) равносильны исходным ограничениям.

Следовательно, ДБР, полученное при $\omega(x) = 0$, может быть использовано как исходное (начальное) ДБР для оптимизации значения функции $f(x)$, и, начиная с этого момента, дополнительная искусственная переменная игнорируется. Очевидно, что для минимизации $\omega(x)$ симплекс-методом необходимо выразить её через не базисные переменные.

Задача минимизации функции равносильна задаче максимизации функции, имеющей обратный знак: min ($\omega(x)$) = max (- $\omega(x)$)

В этом случае в симплекс-таблице вместо значения $\omega(x)$ ставится - $\omega(x)$.

$x_6 = 10 - x_1 - x_2 + x_4 \rightarrow$ min

$- x_6 = -10 – (- x_1 - x_2 + x_4) \rightarrow$ max

Следовательно, $-\omega(x) = - x_6 = -10 – (- x_1 - x_2 + x_4) \rightarrow$ max

Таблица 2.23

базис	ЗН	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	6	1	-1	1	0	0	0
x_6	10	1	1	0	1	0	1
x_5	20	1	2	0	0	1	0
$-\omega(x)$	-10	-1	-1	0	1	0	0

Таблица 2.24

базис	ЗН	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	6	1	-1	1	0	0	0
x_6	4	0	2	-1	-1	0	1
x_5	14	0	3	-1	0	1	0
$-\omega(x)$	-4	0	-2	1	1	0	0

Таблица 2.25

базис	ЗН	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	8	1	0	1/2	-1/2	0	1/2
x_2	2	0	1	-1/2	-1/2	0	1/2
x_5	8	0	0	1/2	3/2	1	3/2
$-\omega(x)$	0	0	0	0	0	0	1

$\omega(x) = 0$, следовательно, получены ограничения, соответствующие исходным ограничениям задачи.

Следовательно, x_6 можно исключить из симплекс-таблицы и получить новую симплекс-таблицу для вычисления максимального значения функции f(x).

$f(x) = 20x_1 + 10x_2$,

Так как x_1 и x_2 являются базисными переменными, необходимо их исключить из значения функции, выразив через другие переменные.

$x_1 = 8 - 0,5x_3 + 0,5x_4;$

$x_2 = 2 + 0,5x_3 + 0,5x_4;$

$f(x) = 160 - 10x_3 + 10x_4 + 20 + 5x_3 + 5x_4;$

$f(x) = 180 - 5x_3 + 15x_4$ (в строку с $-\omega(x)$)

$f(x) = 180 - (5x_3 - 15x_4)$

Таблица 2.26

базис	ЗН	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	8	1	0	1/2	-1/2	0
x_2	2	0	1	-1/2	-1/2	0
x_5	8	0	0	1/2	3/2	1
$f(x)$	180	0	0	5	-15	0

Таблица 2.27

базис	ЗН	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	32/2	1	0	2/3	0	1/3
x_2	14/3	0	1	-1/3	0	1/3
x_4	16/3	0	0	1/3	1	2/3
$f(x)$	240	0	0	10	0	10

Пример 2.14:

В исходную ЗЛП добавить новое ограничение таким образом, чтобы базисные переменные в соответствии с ограничениями на начальной итерации получили отрицательные значения. Затем найти решение поставленной ЗЛП 3 способами:

- Используя обычный симплекс-метод;
- Используя двойственный симплекс – метод;
- Ввести дополнительную неотрицательную искусственную переменную и найти решение с помощью симплекс-метода, пересчитывая на каждой итерации значение $f(x)$.

Исходная ЗЛП выглядит следующим образом:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 21, \\ 3x_1 + x_2 + x_5 = 43, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_6 = 44, \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,6} \end{cases}$$

Введем дополнительное ограничение:

$x_1 + x_2 \geq 5$.

В каноническом виде:

$-x_1 - x_2 + x_7 = -5$.

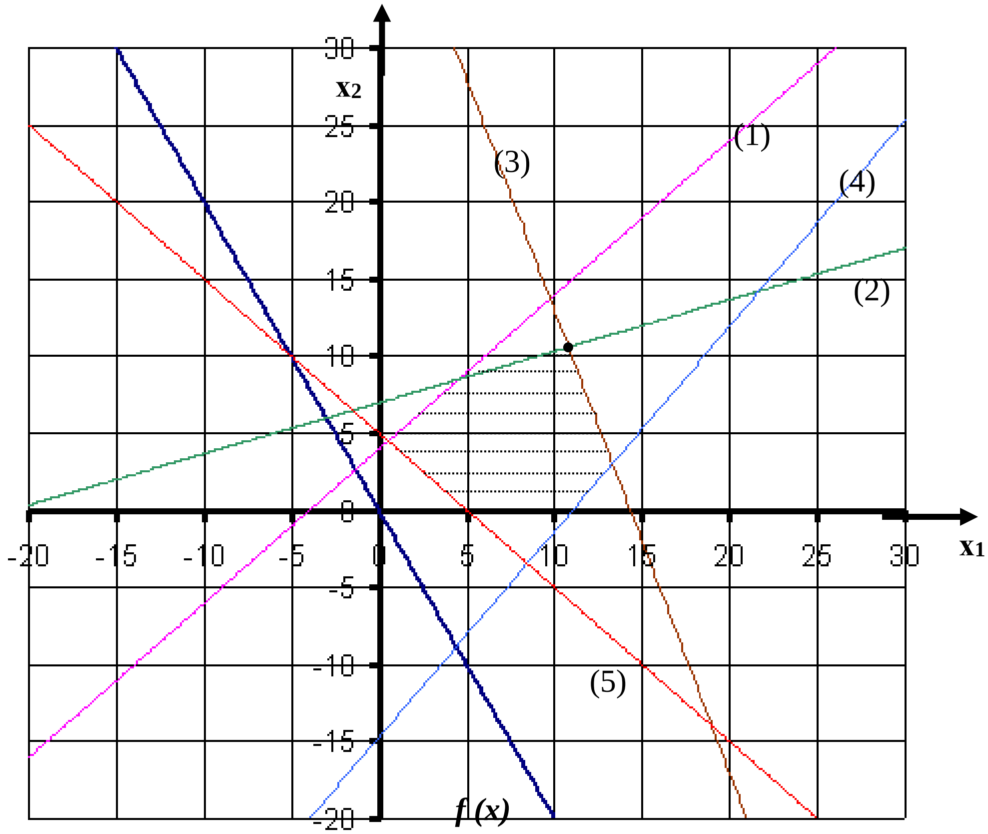


Рис. 2.11

1) Найдем решение с помощью **обычного симплекс-метода**:

Итерация №0 | Таблица 2.28

базис	значение	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	4	-1	1	1	0	0	0	0
x_4	21	-1	3	0	1	0	0	0
x_5	43	3	1	0	0	1	0	0
x_6	44	4	-3	0	0	0	1	0
x_7	-5	-1	-1	0	0	0	0	1
f (x)	0	-2	-1	0	0	0	0	0

Переменную x_1 вводим в число базисных вместо переменной x_6

Ведущий элемент равен 4.

Итерация №1 | Таблица 2.29

базис	значение	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	15	0	1/4	1	0	0	1/4	0
x_4	32	0	9/4	0	1	0	1/4	0
x_5	10	0	13/4	0	0	1	-3/4	0
x_1	11	1	-3/4	0	0	0	1/4	0
x_7	6	0	-7/4	0	0	0	1/4	1
f (x)	22	0	-5/2	0	0	0	1/2	0

Переменную x_2 вводим в число базисных вместо переменной x_5

Ведущий элемент равен 13/4.

Итерация №2 Таблица 2.30

базис	значение	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	185/13	0	0	1	0	-1/13	4/13	0
x_4	326/13	0	0	0	1	-9/13	10/13	0
x_2	40/13	0	1	0	0	4/13	-3/13	0
x_1	173/13	1	0	0	0	3/13	1/13	0
x_7	148/13	0	0	0	0	7/13	-2/13	1
f (x)	386/13	0	0	0	0	10/13	-1/13	0

Переменную x_6 вводим в число базисных вместо переменной x_4
Ведущий элемент равен 10/13.
Итерация №3 Таблица 2.31

базис	значение	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	4,2	0	0	1	-0,4	0,2	0	0
x_6	32,6	0	0	0	1,3	-0,9	1	0
x_2	10,6	0	1	0	0,3	0,1	0	0
x_1	10,8	1	0	0	-0,1	0,3	0	0
x_7	16,4	0	0	0	0,2	0,4	0	1
f (x)	32,2	0	0	0	0,1	0,7	0	0

Так как все значения $-\Delta_j > 0$, оптимальное значение найдено.

Ответ: $\max\limits_{D} f(x_1, x_2) = f(10{,}8;10{,}6) = 32{,}2$

2) Найдем решение с помощью **двойственного симплекс-метода**:

Исходными данными будет являться симплекс-таблица, составленная на начальном шаге поиска решения ЗЛП обычным симплекс-методом.

Итерация №0 Таблица 2.32

базис	значение	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	4	-1	1	1	0	0	0	0
x_4	21	-1	3	0	1	0	0	0
x_5	43	3	1	0	0	1	0	0
x_6	44	4	-3	0	0	0	1	0
x_7	-5	-1	-1	0	0	0	0	1
f (x)	0	-2	-1	0	0	0	0	0

Дальнейшие вычисления проведем по алгоритму двойственного симплекс-метода.

Выберем ведущую строку из условия $x_r = \max|b_i|$, где $b_i < 0$ - x_7

Выберем ведущий столбец из условия $x_k = \min\left|\frac{c_j}{a_{kj}}\right|$, где $a_{kj} < 0$ - x_2

Следовательно, ведущий элемент равен -1.

Дальнейшие вычисления производятся по алгоритму обычного симплекс-метода.

Вводим x_2 в число базисных переменных.

Элементы таблицы пересчитываются по следующим формулам:

$$b_k = \frac{b_r}{a_{rk}}, \quad a_{kj} = \frac{a_{rj}}{a_{rk}}$$

$$a_{ij}^{'} = a_{ij} - \frac{a_{rj} \cdot a_{ik}}{a_{rk}}, \quad b_i^{'} = b_i - \frac{b_r \cdot a_{ik}}{a_{rk}} \tag{2.21}$$

$$f^{'}(x) = f(x) - \frac{b_r \cdot \Delta_k}{a_{rk}}, \quad \Delta_j^{'} = \Delta_j - \frac{a_{rj} \cdot \Delta_k}{a_{rk}}$$

Итерация №1 Таблица 2.33

базис	значение	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	-1	-2	0	1	0	0	0	1
x_4	6	-4	0	0	1	0	0	3
x_5	38	2	0	0	0	1	0	1
x_6	59	7	0	0	0	0	1	-3
x_2	5	1	1	0	0	0	0	-1
f (x)	5	-1	0	0	0	0	0	-1

Ведущая строка – x_3

Ведущий столбец – x_1

Следовательно, ведущий элемент равен -2.

Вводим x_1 в число базисных переменных.

Итерация №2 Таблица 2.34

базис	значение	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	0,5	1	0	-0,5	0	0	0	-0,5
x_4	8	0	0	-2	1	0	0	1
x_5	37	0	0	1	0	1	0	2
x_6	55,5	0	0	3,5	0	0	1	0,5
x_2	4,5	0	1	0,5	0	0	0	-0,5
f (x)	5,5	0	0	-0,5	0	0	0	-1,5

Так как в столбце значений базисных переменных отрицательных элементов нет, то дальнейшие вычисления по алгоритму двойственного симплекс-метода прекращаются.

Продолжим поиск оптимального решения по алгоритму обычного симплекс-метода.

Ведущий столбец – x_7

Ведущая строка – x_4

Следовательно, ведущий элемент равен 1.

Вводим x_7 в число базисных переменных.

Итерация №3 Таблица 2.35

базис	значение	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	4,5	1	0	-1,5	0,5	0	0	0
x_7	8	0	0	-2	1	0	0	1
x_5	21	0	0	5	-2	1	0	0
x_6	51,5	0	0	4,5	-0,5	0	1	0
x_2	8,5	0	1	-0,5	0,5	0	0	0
f (x)	17,5	0	0	-3,5	1,5	0	0	0

Ведущий столбец – x_3

Ведущая строка – x_5

Следовательно, ведущий элемент равен 5.

Вводим x_3 в число базисных переменных.

Итерация №4 Таблица 2.36

базис	значение	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	10,8	1	0	0	-0,1	0,3	0	0
x_7	16,4	0	0	0	0,2	0,4	0	1
x_3	4,2	0	0	1	-0,4	0,2	0	0
x_6	32,6	0	0	0	1,3	-0,9	1	0
x_2	10,6	0	1	0	0,3	0,1	0	0
f (x)	32,2	0	0	0	0,1	0,7	0	0

Так как все значения $\Delta_j > 0$, оптимальное значение найдено.

Ответ: $\max\limits_D f(x_1,x_2) = f(10{,}8;10{,}6) = 32{,}2$.

3) Введем **дополнительную неотрицательную искусственную переменную** и найдем решение с помощью **симплекс-метода,** пересчитывая на каждой итерации значение $f(x)$.

$f(x_1,x_2) = 2x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 21, \\ 3x_1 + x_2 + x_5 = 43, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_6 = 44, \\ -x_1 - x_2 + x_7 = -5 \end{cases}$$ - запись в канонической форме

Среди переменных задачи можно выделить базисные переменные x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 и не базисные x_1, x_2.

Приравняв не базисные переменные к 0, получим исходный базисный план:

$$\begin{cases} x_3 = 4, \\ x_4 = 21, \\ x_5 = 43, \\ x_6 = 44, \\ x_7 = -5 \end{cases}$$

Так как x_7 должно быть ≥ 0, то, значит, в задаче нет очевидного ДБР.

Проблему создает ограничение $x_1 + x_2 \geq 5$.

Изменим данное ограничение, введем в левую часть неотрицательную искусственную переменную x_8, тогда:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 21, \\ 3x_1 + x_2 + x_5 = 43, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_6 = 44, \\ x_1 + x_2 - x_7 + x_8 = 5, \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1{,}8} \end{cases}$$

Дана система имеет следующее ДБР:

$$\begin{cases} x_3 = 4, \\ x_4 = 21, \\ x_5 = 43, \\ x_6 = 44, \\ x_8 = 5 \end{cases}$$

Необходимо добиться обращения в ноль искусственной переменной x_8.

Это можно сделать, минимизируя симплекс-методом искусственную целевую функцию $\omega(x) = x_8$ при полученных после введения искусственной переменной ограничениях.

При значении искусственной переменной, равным 0, полученные ограничения равносильны исходным ограничениям.

Задача минимизации функции равносильна задаче максимизации функции, имеющей обратный знак: $\min \omega(x) = \max(-\omega(x))$.

Выразим $\omega(x)$ через небазисные переменные:

$x_8 = 5 - (x_1 + x_2 - x_7)$

$-x_8 = -5 - (-x_1 - x_2 + x_7)$

Итерация №0 Таблица 2.37

базис	значение	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_3	4	-1	1	1	0	0	0	0	0
x_4	21	-1	3	0	1	0	0	0	0
x_5	43	3	1	0	0	1	0	0	0
x_6	44	4	-3	0	0	0	1	0	0
x_8	5	1	1	0	0	0	0	-1	1
- ω (x)	-5	-1	-1	0	0	0	0	1	0
f (x)	0	-2	-1	0	0	0	0	0	0

Переменную x_1 вводим в число базисных вместо переменной x_8
Ведущий элемент равен 1.
Итерация №1 Таблица 2.38

базис	значение	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_3	9	0	2	1	0	0	0	-1	1
x_4	26	0	4	0	1	0	0	-1	1
x_5	28	0	-2	0	0	0	0	3	-3
x_6	24	0	-7	0	0	0	1	4	-4
x_1	5	1	1	0	0	0	0	-1	1
- ω (x)	0	0	0	0	0	0	0	0	1
f (x)	10	0	1	0	0	0	0	-2	2

Так как ω (x) = 0, следовательно, получены ограничения, соответствующие исходным ограничениям задачи.

x_8 можно исключить из приведенной выше симплекс-таблицы, и получить новую таблицу для вычисления максимального значения функции $f(x)$.

Проверим правильность расчета функции $f(x)$ и значений $-\Delta_j$:

$f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$.

Так как x_1 является базисной переменной, необходимо исключить ее из значения функции, выразив через другие переменные.

$x_1 = 5 - (x_2 - x_7 + x_8)$;

$x_1 = 5 - x_2 + x_7 - x_8$;

$f(x) = 10 - 2x_2 + 2x_7 - 2x_8 + x_2$;

$f(x) = 10 - (x_2 - 2x_7 + 2x_8)$ - данные значения совпали с последней строкой симплекс-таблицы.

Итерация №0 Таблица 2.39

базис	значение	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	9	0	2	1	0	0	0	-1
x_4	26	0	4	0	1	0	0	-1
x_5	28	0	-2	0	0	0	0	3
x_6	24	0	-7	0	0	0	1	4
x_1	5	1	1	0	0	0	0	-1
f (x)	10	0	1	0	0	0	0	-2

Переменную x_7 вводим в число базисных вместо переменной x_6
Ведущий элемент равен 4.

Итерация №1 Таблица 2.40

базис	значение	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	15	0	1/4	1	0	0	1/4	0
x_4	32	0	9/4	0	1	0	1/4	0
x_5	10	0	13/4	0	0	0	-3/4	0
x_7	6	0	-7/4	0	0	0	1/4	1
x_1	11	1	-3/4	0	0	0	1/4	0
f (x)	22	0	-5/2	0	0	0	1/2	0

Переменную x_2 вводим в число базисных вместо переменной x_5
Ведущий элемент равен 13/4.

Итерация №2 Таблица 2.41

базис	значение	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	185/13	0	0	1	0	-1/13	4/13	0
x_4	326/13	0	0	0	1	-9/13	10/13	0
x_2	40/13	0	1	0	0	4/13	-3/13	0
x_7	148/13	0	0	0	0	7/13	-2/13	1
x_1	173/13	1	0	0	0	3/13	1/13	0
f (x)	386/13	0	0	0	0	10/13	-1/13	0

Переменную x_6 вводим в число базисных вместо переменной x_4
Ведущий элемент равен 10/13.

Итерация №3 Таблица 2.42

базис	значение	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	4,2	0	0	1	-0,4	0,2	0	0
x_6	32,6	0	0	0	1,3	-0,9	1	0
x_2	10,6	0	1	0	0,3	0,1	0	0
x_7	16,4	0	0	0	0,2	0,4	0	1
x_1	10,8	1	0	0	-0,1	0,3	0	0
f (x)	32,2	0	0	0	0,1	0,7	0	0

Так как все значения $-\Delta_j > 0$, оптимальное значение найдено.

Ответ: $\max\limits_D f(x_1, x_2) = f(10{,}8;10{,}6) = 32{,}2$

2.7. Модифицированный симплекс - метод

2.7.1. Теоретические сведения

Основная идея модифицированного симплекс-метода заключается в использовании текущей обратной матрицы B^{-1} (и исходных данных задачи) при выполнении вычислений, необходимых для определения включаемой и исключаемой переменных. Представление обратной матрицы в мультипликативной форме позволяет вычислять последовательность обратных матриц непосредственно по исходным данным без использования многократных операций обращения каждого базиса. Как и в обычном симплекс-методе, в данном случае исходный базис всегда представляет собой единичную матрицу I, обратной к которой является сама эта матрица. Поэтому, если $B_1^{-1}, B_2^{-1}, \ldots, B_i^{-1}$ - последовательность обратных матриц, соответствующих итерациям 1, 2,…, i, а $E_1, E_2, \ldots, E_i$ - последовательность соответствующих им матриц, то

$$B_1^{-1} = E_1 I,\ B_2^{-1} = E_2 B_1^{-1}, \ldots, B_i^{-1} = E_i B_{i-1}^{-1} \qquad (2.22)$$

Последовательность подстановок приводит к следующей формуле:

$$B_i^{-1} = E_i E_{i-1} \dots E_1 \qquad (2.23)$$

Следует подчеркнуть, что мультипликативное представление обратной матрицы не является необходимой процедурой для реализации вычислительной схемы модифицированного симплекс-метода, и на каждой итерации можно применять любой из способов обращения текущего базиса. При использовании модифицированного симплекс-метода важно то, что обратные матрицы вычисляются способом, позволяющим уменьшить влияние машинных ошибок округления.

Шаги алгоритма модифицированного симплекс-метода, по существу, такие же, как и в алгоритме обычного симплекс-метода. После нахождения начального базиса I определяется соответствующий ему вектор коэффициентов целевой функции C_B, элементы которого формируются в зависимости от того, являются ли начальные базисные переменные остаточными (избыточными) или искусственными.

2.7.2. Мультипликативное представление обратной матрицы

При мультипликативном представлении обратной матрицы используется операция алгебры матриц, позволяющая вычислять элементы матрицы, обратной к новой матрице базисных векторов, по известной обратной матрице предыдущего базиса при условии, что два рассматриваемых базиса отличаются только одним вектор-столбцом. Такой способ представления обратной матрицы удобно использовать именно в вычислительной схеме симплекс-метода, так как базисы, соответствующие каждым двум последовательным итерациям, отличаются лишь одним столбцом (в результате замены исключаемого вектор-столбца текущего базиса новым вектор-столбцом). Другими словами, текущая базисная матрица B и новая базисная матрица $B_{\text{íîâ}}$, соответствующая следующей итерации, отличаются только одним столбцом. При мультипликативном представлении обратной матрицы $B_{\text{íîâ}}^{-1}$, соответствующей новому базису, она вычисляется путём умножения слева обратной текущей матрицы B^{-1} на формируемую по определённым правилам матрицу E.

Определим единичную матрицу I_m следующим образом:

$$I_m = (e_1, e_2, \dots, e_m), \qquad (2.24)$$

где e_i - единичный вектор-столбец с i-м элементом, равным единице, и остальными элементами, равными нулю. Допустим, что известны матрицы B и B^{-1}, и вектор P_r матрицы B заменяется новым вектором P_j; как принято при описании симплекс-метода, вектор P_j определяется как включаемый в базис, а вектор P_r - как исключаемый из базиса. Для упрощения записи математических соотношений используем следующее определение $\alpha^j = B^{-1} P_j$, при этом α_k^i будет представлять собой k-й элемент α^j. Тогда новую обратную матрицу $B_{\text{íîâ}}^{-1}$ можно вычислить по следующей формуле:

$$B_{нов}^{-1} = EB^{-1}, \text{где}$$

$$E = (e_1, \dots, e_{r-1}, \xi, e_{r+1}, \dots, e_m),$$

$$\xi = \begin{pmatrix} -\dfrac{\alpha_1^j}{\alpha_r^j} \\ -\dfrac{\alpha_2^j}{\alpha_r^j} \\ \vdots \\ +\dfrac{1}{\alpha_r^j} \\ \vdots \\ -\dfrac{\alpha_m^j}{\alpha_r^j} \end{pmatrix} \leftarrow r - \text{й элемент} \qquad (2.25)$$

при условии, что $\alpha_r^j \neq 0$. Если $\alpha_r^j = 0$, матрицы $B_{íîâ}^{-1}$ не существует. Заметим, что матрица E получается из матрицы I_m путём замены её r-го вектор-столбца e_r столбцом ξ.

2.7.3.Алгоритм модифицированного симплекс-метода.

<u>Шаг 1</u>. Определение включаемого вектора P_j. Вычислить $Y = C_B B^{-1}$. Для каждого небазисного вектора P_j найти

$$z_j - c_j = YP_j - c_j \tag{2.26}$$

В задаче максимизации (минимизации) в качестве включаемого в базис вектора P_j выбирается тот, которому соответствует наибольшая по абсолютной величине отрицательная (положительная) величина $z_j - c_j$ (при наличии альтернатив выбор делается произвольно). Если $z_j - c_j \geq 0\,(\leq 0)$ для всех j, то полученное решение

$$X_B = B^{-1}b \quad è \quad z = C_B X_B \tag{2.27}$$

является оптимальным. В противном случае осуществляется переход к Шагу 2.

<u>Шаг 2</u>. Определение исключаемого вектора P_r. При известном исключаемом векторе P_j вычислить:

1) значения текущих базисных переменных, то есть $X_B = B^{-1}b$;
2) коэффициенты ограничений при включаемой в базис переменной, то есть $\alpha^j = B^{-1}P_j$. В качестве исключаемого вектора (как в задаче максимизации, так и в задаче минимизации) должен выбираться такой вектор P_r, которому соответствует

$$\theta = \min_k \left\{ \frac{(B^{-1}b)_k}{\alpha_k^j}, \alpha_k^j > 0 \right\}, \tag{2.28}$$

где $(B^{-1}b)_k$ и α_k^j - k-е элементы $B^{-1}b$ и α^j. Случай , когда все $\alpha_k^j \leq 0$, свидетельствует о неограниченности решения.

<u>Шаг 3</u>. Определение нового базиса. По известной обратной матрице B^{-1} текущего базиса найти обратную матрицу для нового базиса $B_{íîâ}^{-1}$, используя формулу $B_{íîâ}^{-1} = EB^{-1}$. Затем положить $B^{-1} = B_{íîâ}^{-1}$ и перейти к Шагу 1.

Таблица 2.43

Базисные переменные	x_1	x_2		x_j		x_n	Решение
z	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$		$z_j - c_j$		$z_n - c_n$	
X_B				$B^{-1}P_j$			$B^{-1}b$

На шаге 1 вычисляются коэффициенты z-строки и определяется включаемая в базис переменная x_j. Затем на Шаге 2 путём вычисления элементов правой части таблицы ($= B^{-1}b$) и коэффициентов ограничений при вводимой в базис переменной ($\alpha^j = B^{-1}P_j$) определяется исключаемая переменная.

<u>Замечание</u>. Проводя вычисления по схеме модифицированного симплекс-метода, сначала целесообразно записывать получаемые результаты на шагах 1 и 2 в таблице, аналогично приведённой выше.

Пример 2.15:

Максимизировать $z = 3x_1 + 2x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 8, \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 1, \\ x_2 + x_6 = 2, \\ x_1, x_2, \ldots, x_6 \geq 0. \end{cases}$$

Начальное решение

$$X_B = \left(x_3, x_4, x_5, x_6\right)^T,$$

$$C_B = \left(0, 0, 0, 0\right),$$

$$B = \left(P_3, P_4, P_5, P_6\right) = I,$$

$$B^{-1} = I.$$

<u>Первая итерация</u>

<u>Шаг 1. Вычисление $z_j - c_j$ для небазисных векторов P_1 и P_2.</u>

$$Y = C_B B^{-1} = \left(0, 0, 0, 0\right) I = \left(0, 0, 0, 0\right),$$

$$\left(z_1 - c_1, z_2 - c_2\right) = Y(P_1, P_2) - (c_1, c_2) = \left(0, 0, 0, 0\right) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - (3, 2) = (-3, -2).$$

В соответствии с правилами составления симплекс-таблиц результаты, выполненные на данной стадии вычислений, представляются в следующем виде:

Таблица 2.44

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Решение
z	-3	-2	0	0	0	0	

(Заметим, что $z_j - c_j$ автоматически обращаются в нуль для всех базисных переменных.) В соответствии с полученными результатами в качестве включаемого в базис вектора выбирается P_1.

<u>Шаг 2. Определение исключаемого вектора при условии введения в базис вектора P_1.</u>

$$X_B = B^{-1}b = Ib = b = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\alpha^1 = B^{-1}P_1 = IP_1 = P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Результаты вычислений на шагах 1 и 2 можно представить в виде следующей таблицы:

Таблица 2.45

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Решение
z	-3	-2	0	0	0	0	0
x_3	1						6
x_4	2						8
x_5	-1						1
x_6	0						2

Отсюда следует, что

$$\theta = \min\left\{\frac{6}{1}, \frac{8}{2}, -, -\right\} = 4$$

Соответствует переменной x_4. Таким образом, исключению из базиса подлежит вектор P_4.

Шаг 3. Определение обратной матрицы, соответствующей новому базису.

Так как вместо вектора P_4 в базис вводится вектор P_1 и $\alpha^1 = (1, 2, -1, 0)^T$, то

$$\xi = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ +\frac{1}{2} \\ -\left(-\frac{1}{2}\right) \\ \frac{0}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, B^{-1}_{íîâ} = EB^{-1} = EI = E = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Новому базису соответствуют векторы

$$X_B = (x_3, x_1, x_5, x_6)^T,$$
$$C_B = (0, 3, 0, 0).$$

Вторая итерация

Шаг 1. Вычисление $z_j - c_j$ *для небазисных векторов* P_2 *и* P_4.

$$C_B B^{-1} = (0, 3, 0, 0)\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(0, \frac{3}{2}, 0, 0\right),$$

$$(z_2 - c_2, z_4 - c_4) = \left(0, \frac{3}{2}, 0, 0\right) \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - (2, 0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

Следовательно, включению в базис подлежит вектор P_2.

Шаг 2. Определение исключаемого вектора при условии ввода в базис вектора P_2.

$$X_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\alpha^2 = B^{-1}P_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Результаты вычислений на шагах 1 и 2 алгоритма можно представить в виде следующей таблицы:

Таблица 2.46

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Решение
z	0	-1/2	0	3/2	0	0	
x_3		3/2					2
x_1		1/2					4
x_5		3/2					5
x_6		1					2

Отсюда следует, что

$$\theta = \min\left\{ \frac{2}{3/2}, \frac{4}{1/2}, \frac{5}{3/2}, \frac{2}{1} \right\} = \frac{4}{3}$$

Соответствует переменной x_3. Таким образом, исключению из базиса подлежит вектор P_3.

<u>*Шаг 3. Определение новой обратной матрицы.*</u>

Так как в базис вместо вектора P_3 вводится вектор P_2 и $\alpha^2 = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right)^T$, то

$$\xi = \begin{pmatrix} +\frac{1}{3/2} \\ -\frac{1/2}{3/2} \\ -\frac{3/2}{3/2} \\ -\frac{1}{3/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, B^{-1}_{íîâ} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Новому базису соответствуют векторы

$$X_B = \left(x_2, x_1, x_5, x_6\right)^T,$$
$$C_B = \left(2, 3, 0, 0\right).$$

<u>Третья итерация</u>

<u>Шаг 1. Вычисление $z_j - c_j$ для векторов P_3 и P_4.</u>

$$C_B B^{-1} = \left(2,3,0,0\right)\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 0, 0\right),$$

$$\left(z_3 - c_3, z_4 - c_4\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 0, 0\right) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \left(0, 0\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

Так как $z_j - c_j \geq 0$ для всех j, полученный базис соответствует оптимальному решению.

<u>Оптимальное решение</u>

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{10}{3} \\ 3 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \qquad z = C_B X_B = \left(2,3,0,0\right)\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{10}{3} \\ 3 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{38}{3}.$$

2.7.4.Выводы

При решении задач ЛП с помощью вычислительных машин модифицированный симплекс-метод во многих случаях позволяет

1) сократить объем вычислений;
2) более эффективно использовать память вычислительной машины.

Реализация модифицированного симплекс-метода требует меньшего объема вычислений по сравнению с обычным табличным методом решения в тех случаях, когда отношение числа нулевых элементов к числу ненулевых элементов матрицы А достаточно велико (такую матрицу называют *разреженной).* Это объясняется тем, что при использовании модифицированного симплекс-метода вычисления выполняются при постоянном обращении к исходным данным задачи, что позволяет построить вычислительную схему, в которой осуществляются арифметические операции лишь с ненулевыми элементами. В противоположность этому при табличном методе решения каждая последующая итерация предполагает использование результатов предыдущей итерации, то есть процесс вычислений осуществляется с постепенным «уплотнением» матрицы А.

Экономное использование памяти вычислительной машины при решении задач ЛП модифицированным симплекс-методом объясняется тем, что реализация этого метода требует хранения в памяти машины лишь элементов базисной матрицы, тогда как обычный табличный метод предполагает хранение всей симплекс-таблицы.

Часто отмечается существенный недостаток автоматизированных вычислений, связанный с накоплением машинных ошибок округления. Модифицированный симплекс-метод в этом отношении обладает определенными преимуществами. Разработаны схемы вычислений (отличные от схемы с мультипликативным представлением обратной матрицы), которые позволяют минимизировать влияние ошибок округления на точность вычислений матрицы B^{-1}, а, следовательно, всей совокупности вычислений, выполняемых при решении задач ЛП модифицированным симплекс-методом.

2.8. Целочисленное линейное программирование (ЗЦЛП)

ЗЦЛП формулируется так же как и ЗЛП, только добавляется требование (ограничение) целочисленности значений всех или некоторых переменных. Это требование затрудняет решение таких задач в силу дискретности множества допустимых решений.

ЗЦЛП можно решить, например, как ЗЛП без учета условий целочисленности переменных, а затем округлить полученное решение с избытком или недостатком, однако такое округление может привести к целочисленному решению, отличающемуся от оптимального. Кроме того, такой метод округления требует большого объема вычислений:

$x_1^* = 7,2;$

$x_2^* = 2,5$

Таблица 2.47

x_1^*	x_2^*
7	2
7	3
8	2
8	3

Целочисленное решение находим из 4-х вариантов, выбирая из них наилучший, т.е. ведущий к max $f(x)$ и удовлетворяющий ограничениям.

В общем случае ЗЦЛП может быть представлена следующим образом:

f = c₁x₁ + ... + cₙxₙ → max

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_j - \text{целые}, \quad j = \overline{1,n}\ , n_i \le n \end{cases} \tag{2.29}$$

или

$$\max f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.30}$$

$$X = \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = \overline{1,m}\ . \right. \tag{2.31}$$

В случае, когда задача имеет ограничение целочисленности для всех переменных ($n_i = n$), то есть значения всех переменных в оптимальном плане должны быть целыми числами, данная задача называется полностью целочисленной.

Если задача имеет ограничение целочисленности только для некоторых переменных, она называется частично целочисленной.

2.8.1. Методы решения ЗЦЛП

Методы решения ЗЦЛП делятся на две основные группы:

1 - методы отсечений

2 - комбинаторные методы.

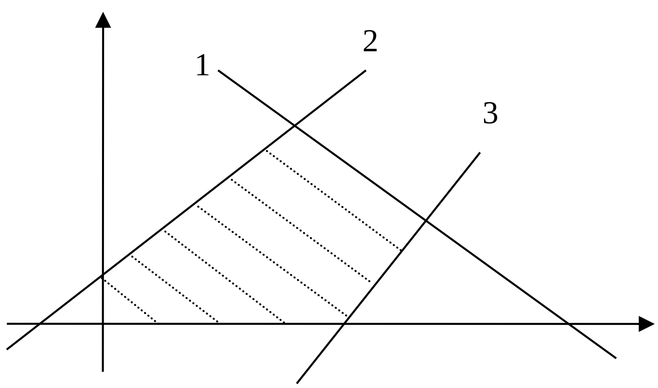
Суть первого метода заключается в том, что после решения ЗЛП без учета условий целочисленности в оптимальное решение добавляют новые ограничения.

$$* \sum_{j=1}^{n} -\alpha_{ij} x_j \le -\beta_i, \; i = \overline{1,m}, \qquad (2.32)$$

где α_{ij} - коэффициенты дополнительных ограничений,

β_i - правые части дополнительных ограничений

* Данное ограничение отсекает от допустимой области часть, бесперспективную для поиска решения задач ЦЛП.



1 и 2 - по условию задачи
3 – дополнительное ограничение

Рис. 2.12

После ввода дополнительного ограничения ЗЦЛП вновь решается методами линейного программирования.

Эти процедуры повторяются до тех пор, пока не будет получено целочисленное решение. Следовательно, дополнительных ограничений может быть несколько.

Наиболее распространенный среди методов отсечения - **метод Гомори**, который может быть применен как для частично целочисленных, так и для полностью целочисленных задач.

Коэффициенты α_{ij} и β_i в методе Гомори определяются так:

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= a_{ij} - [a_{ij}]; \\ \beta_i &= b_i - [b_i], \end{aligned} \qquad (2.33)$$

где $[a_{ij}], [b_i]$ это целые части a_{ij} и b_i.

Пример 2.16:

Найти max $f(x) = x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 2, \\ -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1, x_2 \ge 0, \quad x_1, x_2 - \text{целые}, \end{cases}$$

Итерация №0 Таблица 2.47

базис	ЗН	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	2	1	-2	1	0	0
x_4	2	-2	1	0	1	0
x_5	3	1	1	0	0	1
$f(x)$	0	-1	-2	0	0	0

Строка с x_3: 2 – 2 · (-2) = 6;
1 – (-2) · (-2) = -3;
-2 – 1 · (-2) = 0;
1 – 0 · (-2) = 1;
0 – 1 · (-2) = 2;
0 – 0 · (-2) = 0.

Строка с x_5: 3 – 2 · 1 = 1;
1 – (-2) · 1 = 3;
1 – 1 · 1 = 0;
0 – 0 · 1 = 0;
0 – 1 · 1 = -1;
1 – 0 · 1 = 1.

Строка с $f(x)$: 0 – 2 · (-2) = 4;
-1 – (-2) · (-2) = -5;
-2 – 1 · (-2) = 0;
0 – 0 · (-2) = 0;
0 – 1 · (-2) = 2;
0 – 0 · (-2) = 0.

Итерация №1 Таблица 2.48

базис	ЗН	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	6	-3	0	1	2	0
x_2	2	-2	1	0	1	0
x_5	1	3	0	0	-1	1
$f(x)$	4	-5	0	0	2	0

Строка с x_3: 6 – 1/3 · (-3) = 7;
-3 – 1 · (-3) = 0;
0 – 0 · (-3) = 0;
1 – 0 · (-3) = 1;
2 – (-1/3) · (-3) = 1;
0 – 1/3 · (-3) = 1.

Строка с x_2: 2 – 1/3 · (-2) = 8/3;
-2 – 1 · (-2) = 0;

$1 - 0 \cdot (-2) = 1;$
$0 - 0 \cdot (-2) = 0;$
$1 - (-1/3) \cdot (-2) = 1/3;$
$0 - 1/3 \cdot (-2) = 2/3.$

Строка с $f(x)$: $4 - 1/3 \cdot (-5) = 17/3;$
$-5 - 1 \cdot (-5) = 0;$
$0 - 0 \cdot (-5) = 0;$
$0 - 0 \cdot (-5) = 0;$
$2 - (-1/3) \cdot (-5) = 1/3;$
$0 - 1/3 \cdot (-5) = 5/3.$

Итерация №2 Таблица 2.49

базис	ЗН	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	7	0	0	1	1	1
x_2	8/3	0	1	0	1/3	2/3
x_1	1/3	1	0	0	-1/3	1/3
$f(x)$	17/3	0	0	0	1/3	5/3

$$\max f(x) = f\left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right) = \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{8}{3} = \frac{17}{3}.$$

В решении задачи не все базисные переменные целые. Дополнительное ограничение целесообразно составлять для строки, содержащей в столбце базисных переменных наибольшую дробную часть.

В нашем примере большая дробная часть по x_2 , значит выбираем вторую строку.

Определяем значение α_{ij} и β_i:

$$\beta_i = \frac{8}{3} - \left[\frac{8}{3}\right] = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3};$$

$$\alpha_{21} = 0 - [0] = 0;$$

$$\alpha_{22} = 1 - [1] = 0;$$

$$\alpha_{23} = 0 - [0] = 0;$$

$$\alpha_{24} = \frac{1}{3} - \left[\frac{1}{3}\right] = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3};$$

$$\alpha_{25} = \frac{2}{3} - \left[\frac{2}{3}\right] = \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3};$$

Дополнительное ограничение имеет вид:

$$-0x_1 - 0x_2 - 0x_3 - \frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5 \le -\frac{2}{3}$$

Приводим к канонической форме:

$$-\frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5 + x_6 = -\frac{2}{3}$$

Вводим выражение в симплекс-таблицу Таблица 2.50

базис	ЗН	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	7	0	0	1	1	1	0
x_2	8/3	0	1	0	1/3	2/3	0
x_1	1/3	1	0	0	-1/3	1/3	0
x_6	-2/3	0	0	0	-1/3	-2/3	1
$f(x)$	17/3	0	0	0	1/3	5/3	0

Так как базисная переменная x_6 имеет отрицательное значение, то данную задачу решаем двойственным симплекс-методом (x_6 меняем или на x_4)

Строка с x_3: $7 - 2 \cdot 1 = 5$;
$0 - 0 \cdot 1 = 0$;
$0 - 0 \cdot 1 = 0$;
$1 - 0 \cdot 1 = 1$;
$1 - 1 \cdot 1 = 0$;
$1 - 2 \cdot 1 = -1$;
$0 - (-3) \cdot 1 = 3$.

Строка с x_2: $8/3 - 2 \cdot 1/3 = 2$;
$0 - 0 \cdot 1/3 = 0$;
$1 - 0 \cdot 1/3 = 1$;
$0 - 0 \cdot 1/3 = 0$;
$1/3 - 1 \cdot 1/3 = 0$;
$2/3 - 2 \cdot 1/3 = 0$;
$0 - (-3) \cdot 1/3 = 1$.

Строка с x_1: $1/3 - 2 \cdot (-1/3) = 1$;
$1 - 0 \cdot (-1/3) = 1$;
$0 - 0 \cdot (-1/3) = 0$;
$0 - 0 \cdot (-1/3) = 0$;
$-1/3 - 1 \cdot (-1/3) = 0$;
$1/3 - 2 \cdot (-1/3) = 1$;
$0 - (-3) \cdot (-1/3) = -1$.

Строка с $f(x)$: $17/3 - 2 \cdot 1/3 = 5$;
$0 - 0 \cdot 1/3 = 0$;
$0 - 0 \cdot 1/3 = 0$;
$0 - 0 \cdot 1/3 = 0$;
$1/3 - 1 \cdot 1/3 = 0$;
$5/3 - 2 \cdot 1/3 = 1$;
$0 - (-3) \cdot 1/3 = 1$.

Таблица 2.51

базис	ЗН	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	5	0	0	1	0	-1	3
x_2	2	0	1	0	0	0	1
x_1	1	1	0	0	0	1	-1
x_4	2	0	0	0	1	2	-3
$f(x)$	5	0	0	0	0	1	1

$f(x) = 5$,

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = 5, \\ x_4 = 2. \end{cases}$$

Пример 2.17:

Найти решение ЗЦЛП методом Гомори.

ЗЛП имеет вид:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 21, \\ 3x_1 + x_2 + x_5 = 43, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_6 = 44, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6} \end{cases}$$ - канонический вид.

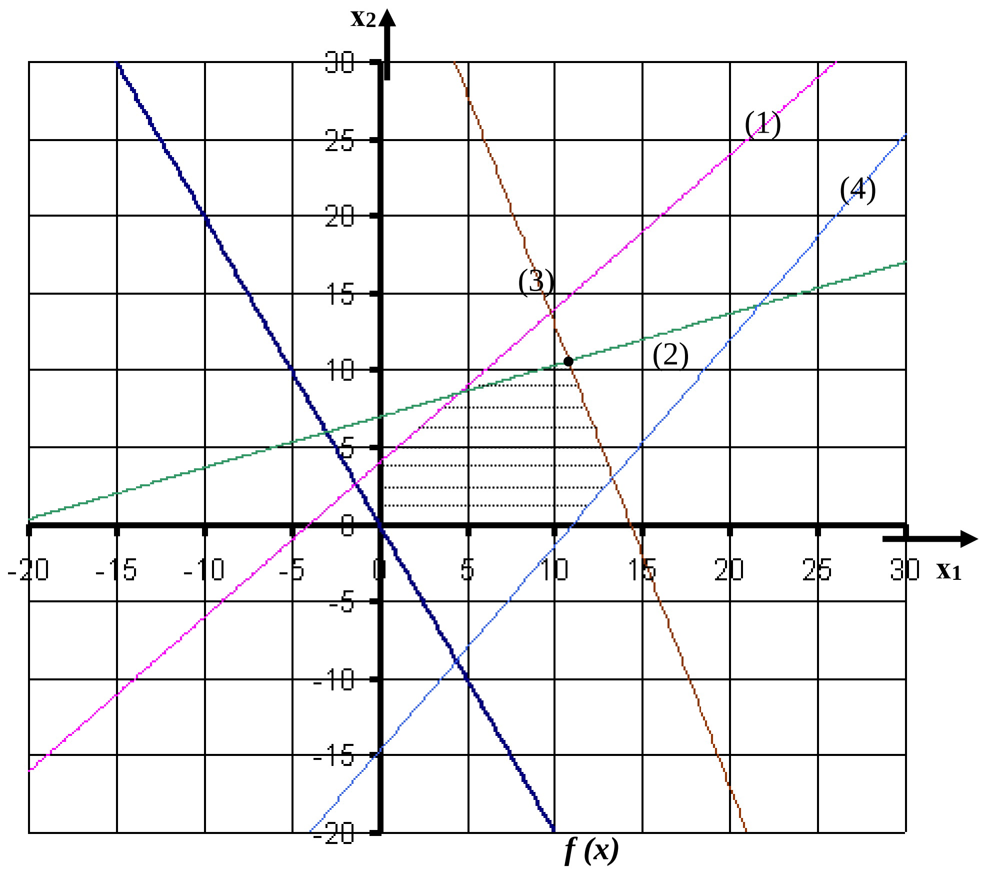


Рис. 2. 13

Таблица 2.52

базис	значение	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	4,2	0	0	1	-0,4	0,2	0
x_6	32,6	0	0	0	1,3	-0,9	1
x_2	10,6	0	1	0	0,3	0,1	0
x_1	10,8	1	0	0	-0,1	0,3	0
f (x)	32,2	0	0	0	0,1	0,7	0

Решение: $\max\limits_{D} f(x_1, x_2) = f(10{,}8;10{,}6) = 32{,}2$

В решении задачи базисные переменные нецелые. Дополнительное ограничение целесообразно составлять для строки, содержащей в столбце базисных переменных наибольшую дробную часть.

В данном случае наибольшая дробная часть у x_1.

Определяем значение α_{1j} и β_1 :

$\beta_1 = 10{,}8 - [10{,}8] = 0{,}8;$

$\alpha_{11} = 1 - [1] = 0;$

$\alpha_{12} = 0 - [0] = 0;$

$\alpha_{13} = 0 - [0] = 0;$

$\alpha_{14} = -0{,}1 - [-0{,}1] = 0{,}9;$

$\alpha_{15} = 0{,}3 - [0{,}3] = 0{,}3;$

$\alpha_{16} = 0 - [0] = 0.$

Дополнительное ограничение имеет вид:

$\sum -\alpha_{ij} x_j \le -\beta_i$;

$-0{,}9x_4 - 0{,}3x_5 \le -0{,}8;$

Приводим к канонической форме:

$-0{,}9x_4 - 0{,}3x_5 + x_7 = -0{,}8;$

Вводим выражение в симплекс – таблицу:

Итерация №0 Таблица 2.53

базис	значение	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	4,2	0	0	1	-0,4	0,2	0	0
x_6	32,6	0	0	0	1,3	-0,9	1	0
x_2	10,6	0	1	0	0,3	0,1	0	0
x_1	10,8	1	0	0	-0,1	0,3	0	0
x_7	-0,8	0	0	0	-0,9	-0,3	0	1
f (x)	32,2	0	0	0	0,1	0,7	0	0

Так как базисная переменная x_7 имеет отрицательное значение, то данную задачу решаем двойственным симплекс-методом.

Переменную x_4 вводим в число базисных вместо переменной x_7

Ведущий элемент равен -0,9.

Итерация №1 Таблица 2.54

базис	значение	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	41/9	0	0	1	0	1/3	0	-4/9
x_6	283/9	0	0	0	0	-4/3	1	13/9
x_2	31/3	0	1	0	0	0	0	1/3
x_1	98/9	1	0	0	0	1/3	0	-1/9
x_4	8/9	0	0	0	1	1/3	0	-10/9
f (x)	289/9	0	0	0	0	2/3	0	1/9

В решении задачи базисные переменные нецелые.

Наибольшая дробная часть у x_1 и x_4 . Выберем x_1.

Определяем значение α_{1j} и β_1 :

$\beta_1 = 98/9 - [98/9] = 8/9;$

$\alpha_{11} = 1 - [1] = 0;$

$\alpha_{12} = 0 - [0] = 0;$

$\alpha_{13} = 0 - [0] = 0;$

$\alpha_{14} = 0 - [0] = 0;$

$\alpha_{15} = 1/3 - [1/3] = 1/3;$

$\alpha_{16} = 0 - [0] = 0;$

$\alpha_{17} = -1/9 - [-1/9] = 8/9.$

Дополнительное ограничение имеет вид:

$$\sum -\alpha_{ij} x_j \le -\beta_i \ ;$$

$$-\frac{1}{3}x_5 - \frac{8}{9}x_7 \le -\frac{8}{9};$$

Приводим к канонической форме:

$$-\frac{1}{3}x_5 - \frac{8}{9}x_7 + x_8 = -\frac{8}{9};$$

Вводим выражение в симплекс – таблицу:

Итерация №0 Таблица 2.55

базис	значение	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_3	41/9	0	0	1	0	1/3	0	-4/9	0
x_6	283/9	0	0	0	0	-4/3	1	13/9	0
x_2	31/3	0	1	0	0	0	0	1/3	0
x_1	98/9	1	0	0	0	1/3	0	-1/9	0
x_4	8/9	0	0	0	1	1/3	0	-10/9	0
x_8	-8/9	0	0	0	0	-1/3	0	-8/9	1
f (x)	289/9	0	0	0	0	2/3	0	1/9	0

Так как базисная переменная x_8 имеет отрицательное значение, то данную задачу решаем двойственным симплекс-методом.

Переменную x_7 вводим в число базисных вместо переменной x_8

Ведущий элемент равен -8/9.

Итерация №1 Таблица 2.56

базис	значение	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_3	5	0	0	1	0	0,5	0	0	-0,5
x_6	30	0	0	0	0	-1,875	1	0	1,625
x_2	10	0	1	0	0	-0,125	0	0	0,375
x_1	11	1	0	0	0	0,375	0	0	-0,125
x_4	2	0	0	0	1	0,75	0	0	-1,25
x_7	1	0	0	0	0	0,375	0	1	-1,125
f (x)	32	0	0	0	0	0,625	0	0	0,125

Ответ: $\max\limits_{D} f(x_1, x_2) = f(11;10) = 32$

2.8.2. Метод ветвей и границ

Для иллюстрации основных принципов этого метода рассмотрим следующую задачу ЦЛП:

Пример 2.18:

Найти max $f(x) = 3x_1 + 2x_2$

$$X = \begin{cases} x_1 + x_2 \le 3,5, \\ x_1 \le 2, \\ x_2 \le 2, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1) Решим эту задачу, отбросив условие целочисленности, любым методом линейного программирования.

Обозначим эту задачу ЛП-1

$x_1^* = 2;$

$x_2^* = 1,5;$

$f^*(x) = 9.$

Так как x_2 – не целочисленно, решение не является решением исходной задачи, но $f^*(x)$ представляет собой верхнюю границу оптимального целочисленного решения, то есть при достижении целочисленности x_2 значения целевой функции может лишь ухудшиться.

Из условия не целочисленности x_2 переходим к следующему шагу, который состоит в просмотре целочисленных значений x_2, больших или меньших полученного оптимального значения, путем добавления к задаче ЛП-1 нового ограничения, полученного округлением не целочисленного оптимального значения в большую или меньшую сторону.

В нашем случае вводиться ограничение $x_2 \le 1$ или $x_2 \ge 2$.

Таким образом, из задачи ЛП-1 получается две задачи

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3,5, \\ x_1 \le 2, \\ x_2 \le 2, \\ x_2 \le 1, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases} \quad \text{ЗЛП-2}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3,5, \\ x_1 \le 2, \\ x_2 \le 2, \\ x_2 \ge 2, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases} \quad \text{ЗЛП-3}$$

Для ЗЛП-2 оптимальное решение:

$x_1^* = 2;$

$x_2^* = 1;$

$f^*(x) = 8.$

Для ЗЛП-3 оптимальное решение

$x_1^* = 1,5;$

$x_2^* = 2;$

$f^*(x) = 8,5.$

Оптимальное решение ЗЛП-3 больше, чем ЗЛП-2, однако условие целочисленности выполняется только во второй задаче, следовательно, оптимальное решение ЗЛП-2 можно считать нижней границей оптимального целочисленного решения.

То есть, если будут найдены другие целочисленные решения, значение функции которых будет меньше этой нижней границы (то есть $f^*(x)$ = 8), то такие решения не будут оптимальными, их необходимо исключать из дальнейшего рассмотрения.

Так как верхняя граница $f^*(x)$ = 9, а решение задачи ЛП-3 находится внутри диапазона от нижней до верхней границы, то нельзя утверждать, что ЛП-2 оптимальна для исходной задачи, следовательно, необходимо проанализировать задачу ЛП-3.

Так как в ЗЛП-3 x_1 имеет не целочисленное значение, то в ЗЛП-3 необходимо добавить ограничения

$x_1 \le 1$: ЗЛП-4

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3,5, \\ x_1 \le 2, \\ x_2 \le 2, \\ x_2 \ge 2, \\ x_1 \le 1, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$x_1 \ge 2$: ЗЛП-5

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3,5, \\ x_1 \le 2, \\ x_2 \le 2, \\ x_2 \ge 2, \\ x_1 \ge 2, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение ЗЛП-4:

$x_1^* = 1;$

$x_2^* = 2;$

$f^*(x) = 7.$

Полученное решение не превосходит нижней границы из ЛП-2 ($f^*(x)$ = 8), следовательно, дальнейшее исследование данной ветви прекращаем.

ЗЛП-5 не имеет допустимых решений, следовательно, решение задачи ЛП-2, то есть

$x_1^* = 2;$

$x_2^* = 1;$ - является оптимальным для исходной задачи.

$f^*(x) = 8.$

Последовательность задач ЛП, возникающих при использовании процедуры ветвей и границ удобно представить в виде дерева следующего вида:

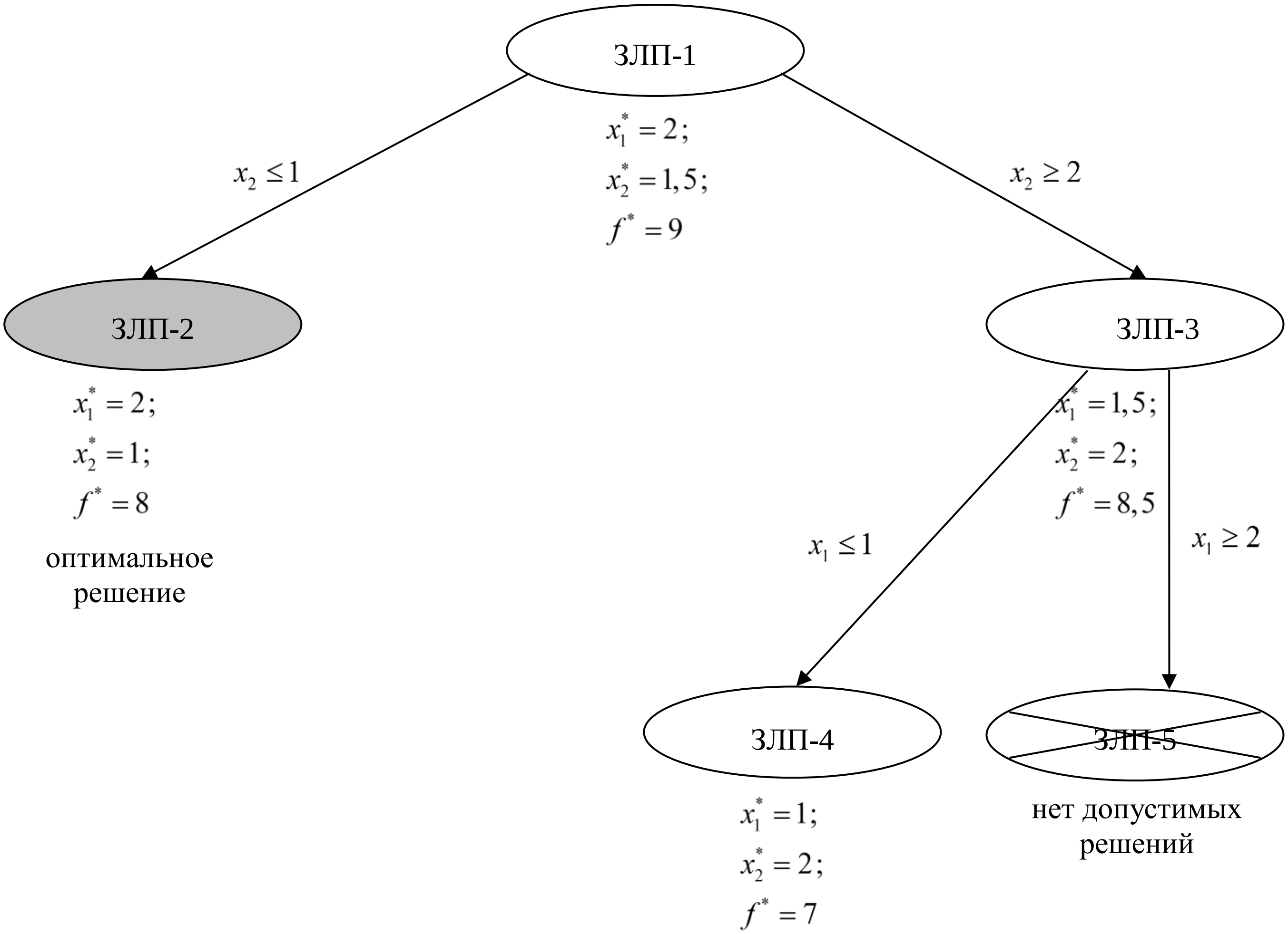


Рис. 2. 14

Пример 2.19:
Найти решение ЗЦЛП методом ветвей и границ.
Исходная ЗЛП выглядит следующим образом:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 21, \\ 3x_1 + x_2 + x_5 = 43, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_6 = 44, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6} \end{cases}$$ - канонический вид.

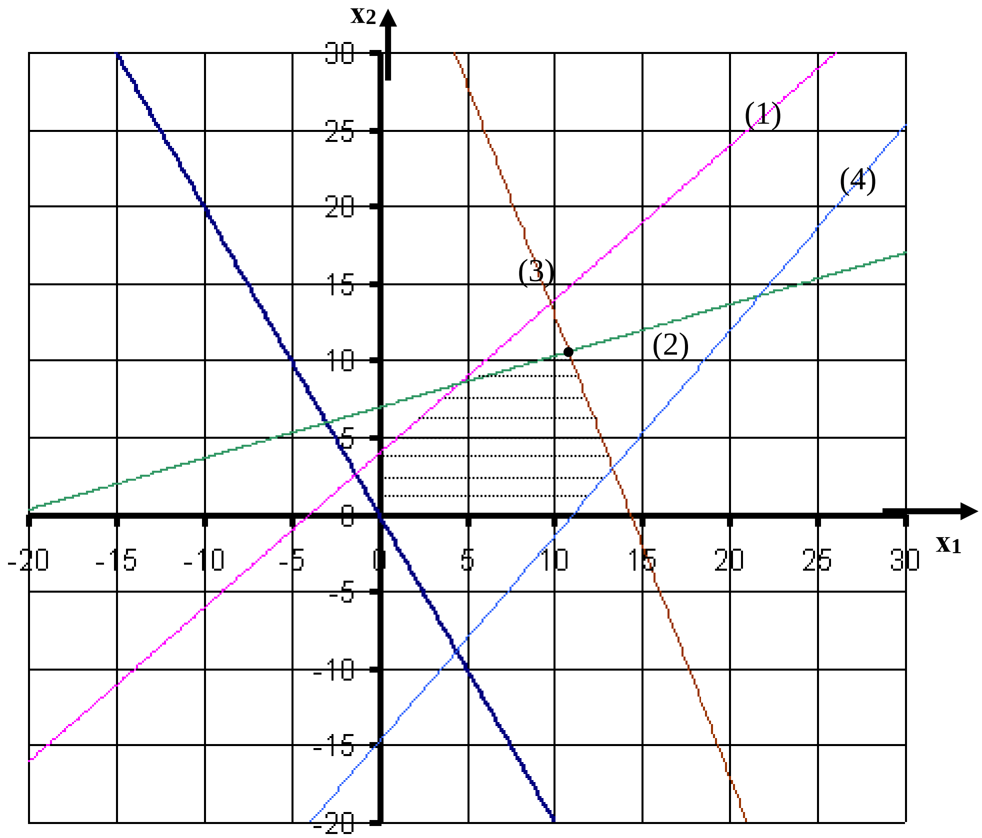


Рис. 2.16

Решение: $\max\limits_{D} f(x_1, x_2) = f(10{,}8;10{,}6) = 32{,}2$

Так как x_1 и x_2 - нецелые, данное решение не является решением исходной задачи.

Из условия нецелочисленности x_1 и x_2 переходим к следующему шагу, который состоит в просмотре целочисленных значений x_1 и x_2, больших или меньших полученного оптимального значения, путем добавления к задаче ЛП-1 нового ограничения, полученного округлением нецелочисленного оптимального значения в большую или меньшую сторону.

Таким образом, из задачи ЛП-1 получается четыре задачи.

Решим каждую из полученных ЗЛП обычным симплекс-методом (решение использовать данный метод основано на выводе из предыдущей работы: искусственную переменную при отрицательных значениях базисных переменных вводить не целесообразно, так как вычисления значительно усложняются, а правильное решение дает также и обычный симплекс – метод за более меньшее число итераций) .

1) Дополнительное ограничение: $x_1 \le 10$

В каноническом виде:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 21, \\ 3x_1 + x_2 + x_5 = 43, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_6 = 44, \\ x_1 + x_7 = 10, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,7} \end{cases}$$

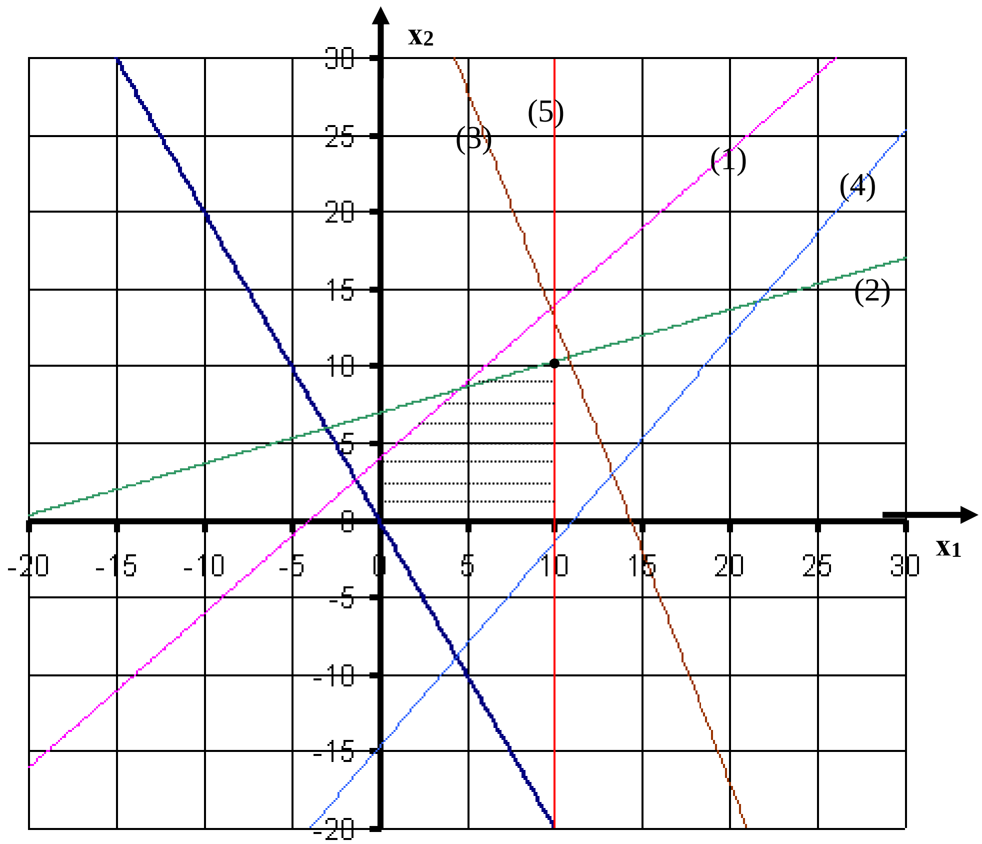


Рис. 2.17

Итерация №0 Таблица 2.57

базис	значение	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	4	-1	1	1	0	0	0	0
x_4	21	-1	3	0	1	0	0	0
x_5	43	3	1	0	0	1	0	0
x_6	44	4	-3	0	0	0	1	0
x_7	10	1	0	0	0	0	0	1
f (x)	0	-2	-1	0	0	0	0	0

Переменную x_1 вводим в число базисных вместо переменной x_7
Ведущий элемент равен 1.

Итерация №1 Таблица 2.58

базис	значение	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	14	0	1	1	0	0	0	1
x_4	31	0	3	0	1	0	0	1
x_5	13	0	1	0	0	1	0	-3
x_6	4	0	-3	0	0	0	1	-4
x_1	10	1	0	0	0	0	0	1
f (x)	20	0	-1	0	0	0	0	2

Переменную x_2 вводим в число базисных вместо переменной x_4

Ведущий элемент равен 3.

Итерация №2 Таблица 2.59

базис	значение	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	11/3	0	0	1	-1/3	0	0	2/3
x_2	31/3	0	1	0	1/3	0	0	1/3
x_5	8/3	0	0	0	-1/3	1	0	-10/3
x_6	35	0	0	0	1	0	1	-3
x_1	10	1	0	0	0	0	0	1
f (x)	91/3	0	0	0	1/3	0	0	7/3

Ответ: $\max\limits_{D} f(x_1, x_2) = f(10; \frac{31}{3}) = \frac{91}{3}$

2) Дополнительное ограничение: $x_1 \geq 11$

В каноническом виде: $f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 21, \\ 3x_1 + x_2 + x_5 = 43, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_6 = 44, \\ -x_1 + x_7 = -11, \\ x_j \geq 0, \ j = \overline{1,7} \end{cases}$$

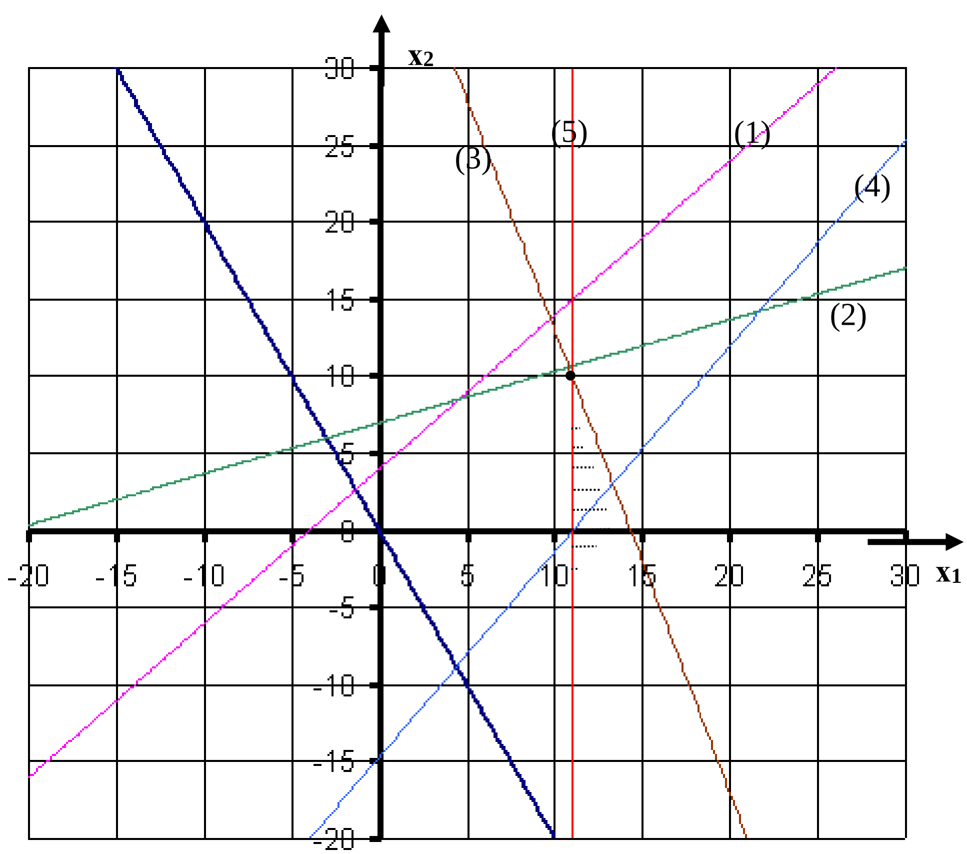


Рис. 2.18

Итерация №0 Таблица 2.60

базис	значение	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	4	-1	1	1	0	0	0	0
x_4	21	-1	3	0	1	0	0	0
x_5	43	3	1	0	0	1	0	0
x_6	44	4	-3	0	0	0	1	0
x_7	-11	-1	0	0	0	0	0	1
f (x)	0	-2	-1	0	0	0	0	0

Переменную x_1 вводим в число базисных вместо переменной x_6
Ведущий элемент равен 4.

Итерация №1 Таблица 2.61

базис	значение	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	15	0	1/4	1	0	0	1/4	0
x_4	32	0	9/4	0	1	0	1/4	0
x_5	10	0	13/4	0	0	1	-3/4	0
x_1	11	1	-3/4	0	0	0	1/4	0
x_7	0	0	-3/4	0	0	0	1/4	1
f (x)	22	0	-5/2	0	0	0	1/2	0

Переменную x_2 вводим в число базисных вместо переменной x_5
Ведущий элемент равен 13/4.

Итерация №3 Таблица 2.62

базис	значение	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	185/13	0	0	1	0	-1/13	4/13	0
x_4	326/13	0	0	0	1	-9/13	10/13	0
x_2	40/13	0	1	0	0	4/13	-3/13	0
x_1	173/13	1	0	0	0	3/13	1/13	0
x_7	30/13	0	0	0	0	3/13	1/13	1
f (x)	386/13	0	0	0	0	10/13	-1/13	0

Переменную x_6 вводим в число базисных вместо переменной x_7
Ведущий элемент равен 1/13.

Итерация №4 Таблица 2.63

базис	значение	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	5	0	0	1	0	-1	0	-4
x_4	2	0	0	0	1	-3	0	-10
x_2	10	0	1	0	0	1	0	3
x_1	11	1	0	0	0	0	0	0
x_6	30	0	0	0	0	3	1	13
f (x)	32	0	0	0	0	1	0	1

Ответ: $\max\limits_D f(x_1, x_2) = f(11;10) = 32$

3) Дополнительное ограничение: $x_2 \le 10$

В каноническом виде:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 21, \\ 3x_1 + x_2 + x_5 = 43, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_6 = 44, \\ x_2 + x_7 = 10, \\ x_j \ge 0, \ j = \overline{1,7} \end{cases}$$

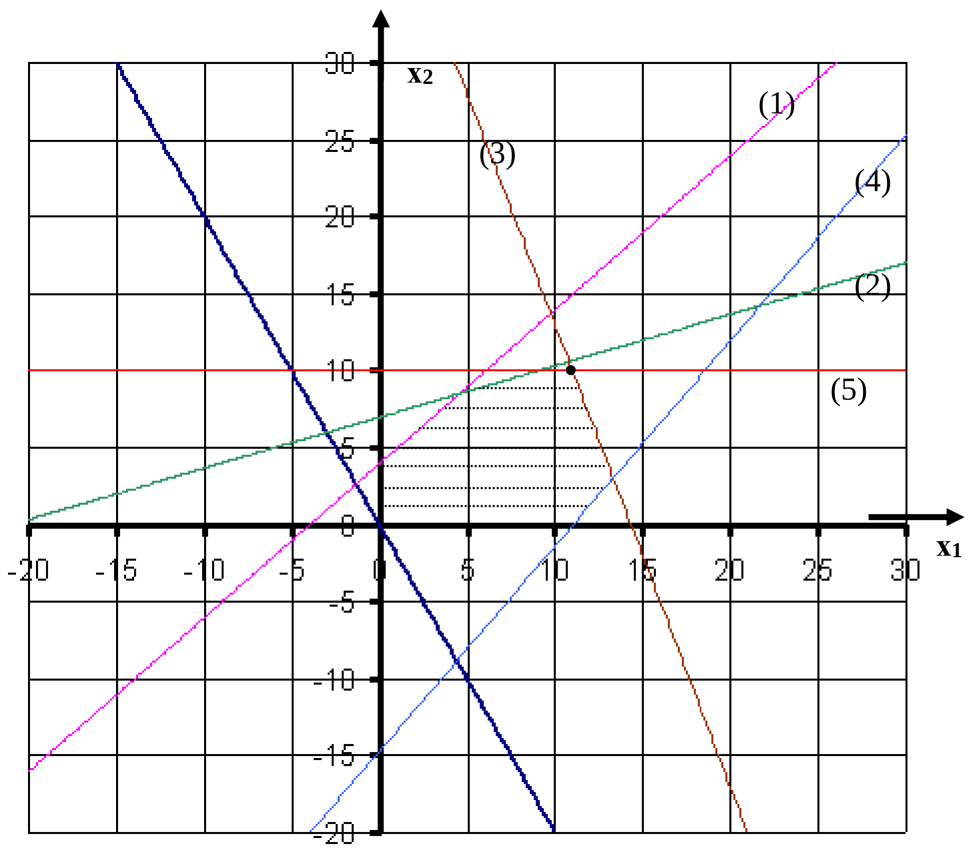


Рис. 2.19

Итерация №0 Таблица 2.64

базис	значение	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	4	-1	1	1	0	0	0	0
x_4	21	-1	3	0	1	0	0	0
x_5	43	3	1	0	0	1	0	0
x_6	44	4	-3	0	0	0	1	0
x_7	10	0	1	0	0	0	0	1
f (x)	0	-2	-1	0	0	0	0	0

Переменную x_1 вводим в число базисных вместо переменной x_6

Ведущий элемент равен 4.

Итерация №1 Таблица 2.65

базис	значение	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	15	0	1/4	1	0	0	1/4	0
x_4	32	0	9/4	0	1	0	1/4	0
x_5	10	0	13/4	0	0	1	-3/4	0
x_1	11	1	-3/4	0	0	0	1/4	0
x_7	10	0	1	0	0	0	0	1
f (x)	22	0	-5/2	0	0	0	1/2	0

Переменную x_2 вводим в число базисных вместо переменной x_5
Ведущий элемент равен 13/4.

Итерация №2 Таблица 2.66

базис	значение	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	185/13	0	0	1	0	-1/13	4/13	0
x_4	326/13	0	0	0	1	-9/13	10/13	0
x_2	40/13	0	1	0	0	4/13	-3/13	0
x_1	173/13	1	0	0	0	3/13	1/13	0
x_7	90/13	0	0	0	0	-4/13	3/13	1
f (x)	386/13	0	0	0	0	10/13	-1/13	0

Переменную x_6 вводим в число базисных вместо переменной x_7
Ведущий элемент равен 3/13.

Итерация №3 Таблица 2.67

базис	значение	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	5	0	0	1	0	1/3	0	-4/3
x_4	2	0	0	0	1	1/3	0	-10/3
x_2	10	0	1	0	0	0	0	1
x_1	11	1	0	0	0	1/3	0	-1/3
x_6	30	0	0	0	0	-4/3	1	13/3
f (x)	32	0	0	0	0	2/3	0	1/3

Ответ: $\max\limits_{D} f(x_1, x_2) = f(11;10) = 32$

4) Дополнительное ограничение: $x_2 \geq 11$

В каноническом виде:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 21, \\ 3x_1 + x_2 + x_5 = 43, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_6 = 44, \\ -x_2 + x_7 = -11, \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,7} \end{cases}$$

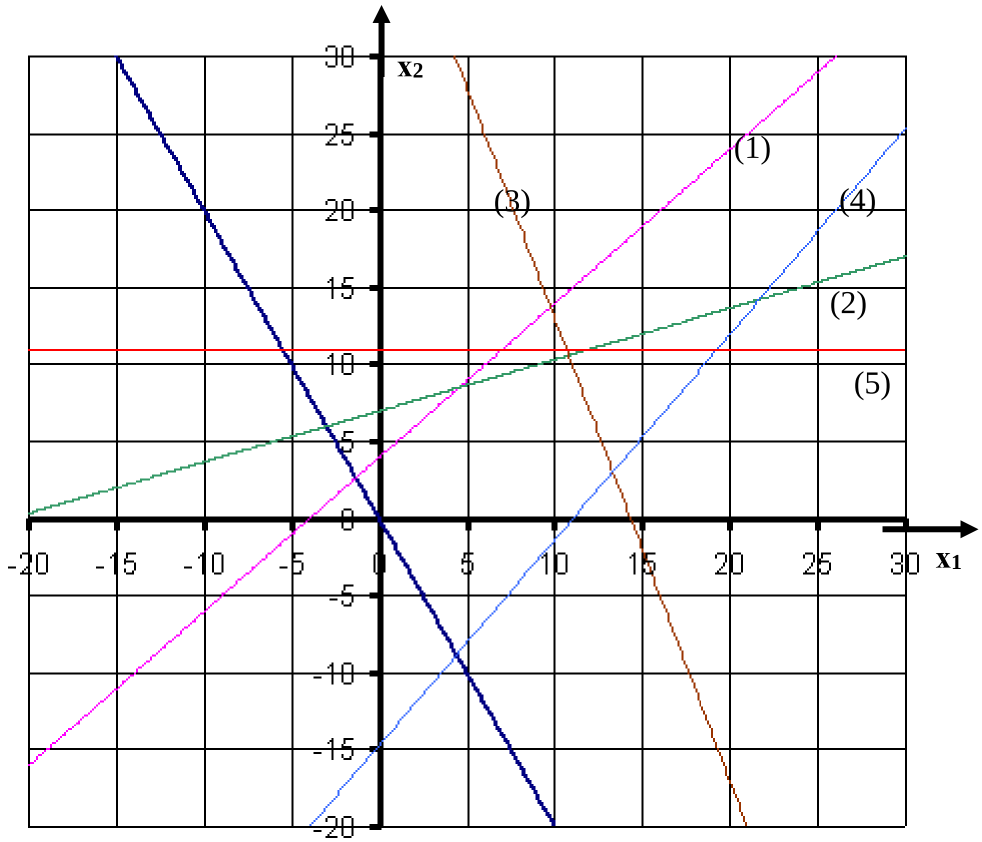


Рис. 2.20

<u>Ответ</u>: нет допустимых решений

Так как в решении ЗЛП-2 x_2 - нецелое, данное решение не является решением исходной задачи.

Из условия нецелочисленности x_2 переходим к следующему шагу, который состоит в просмотре целочисленных значений x_2, больших или меньших полученного оптимального значения, путем добавления к задаче ЛП-2 нового ограничения, полученного округлением нецелочисленного оптимального значения в большую или меньшую сторону.

Таким образом, из задачи ЛП-2 получается еще две задачи.

Решим каждую из полученных ЗЛП обычным симплекс-методом.

1.2) Дополнительное ограничение: $x_2 \le 10$

В каноническом виде:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 21, \\ 3x_1 + x_2 + x_5 = 43, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_6 = 44, \\ x_1 + x_7 = 10, \\ x_2 + x_8 = 10, \\ x_j \ge 0, \; j = \overline{1,8} \end{cases}$$

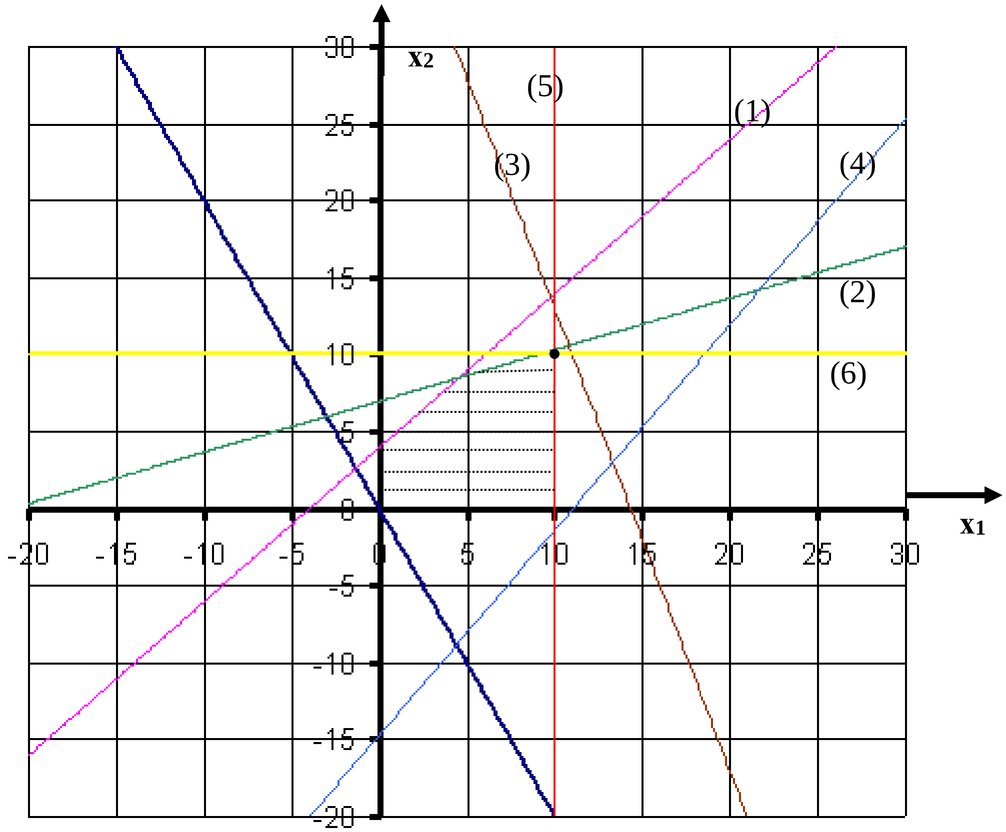


Рис. 2.21

Итерация №0 Таблица 2.68

базис	значение	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_3	4	-1	1	1	0	0	0	0	0
x_4	21	-1	3	0	1	0	0	0	0
x_5	43	3	1	0	0	1	0	0	0
x_6	44	4	-3	0	0	0	1	0	0
x_7	10	1	0	0	0	0	0	1	0
x_8	10	0	1	0	0	0	0	0	1
f (x)	0	-2	-1	0	0	0	0	0	0

Переменную x_1 вводим в число базисных вместо переменной x_7
Ведущий элемент равен 1.

Итерация №1 Таблица 2.69

базис	значение	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_3	14	0	1	1	0	0	0	1	0
x_4	31	0	3	0	1	0	0	1	0
x_5	13	0	1	0	0	1	0	-3	0
x_6	4	0	-3	0	0	0	1	-4	0
x_1	10	1	0	0	0	0	0	1	0
x_8	10	0	1	0	0	0	0	0	1
f (x)	20	0	-1	0	0	0	0	2	0

Переменную x_2 вводим в число базисных вместо переменной x_8
Ведущий элемент равен 1.

Итерация №2 Таблица 2.70

базис	значение	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_3	4	0	0	1	0	0	0	1	-1
x_4	1	0	0	0	1	0	0	1	-3
x_5	3	0	0	0	0	1	0	-3	-1
x_6	34	0	0	0	0	0	1	-4	3
x_1	10	1	0	0	0	0	0	1	0
x_2	10	0	1	0	0	0	0	0	1
f (x)	30	0	0	0	0	0	0	2	1

Ответ: $\max\limits_{D} f(x_1, x_2) = f(10;10) = 30$

1.2) Дополнительное ограничение: $x_2 \geq 11$

В каноническом виде:

$f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 21, \\ 3x_1 + x_2 + x_5 = 43, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_6 = 44, \\ x_1 + x_7 = 10, \\ -x_2 + x_8 = -11, \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,8} \end{cases}$$

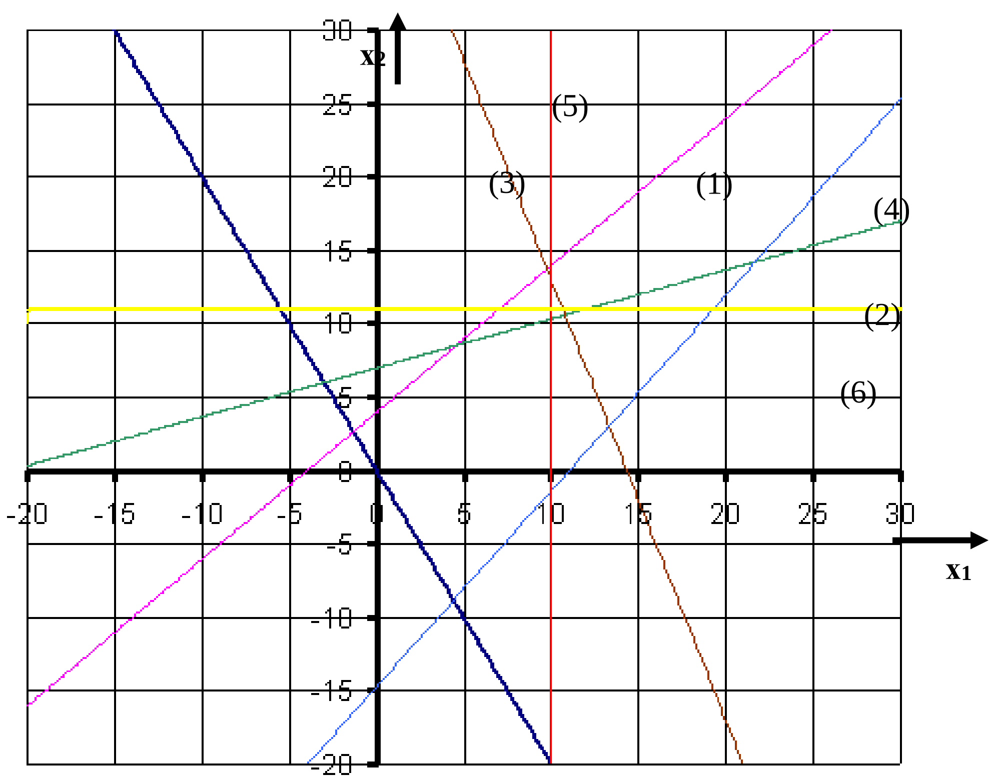


Рис. 2.22

Ответ: нет допустимых решений

Последовательность ЗЛП, возникающих при использовании метода ветвей и границ удобно представить в виде дерева:

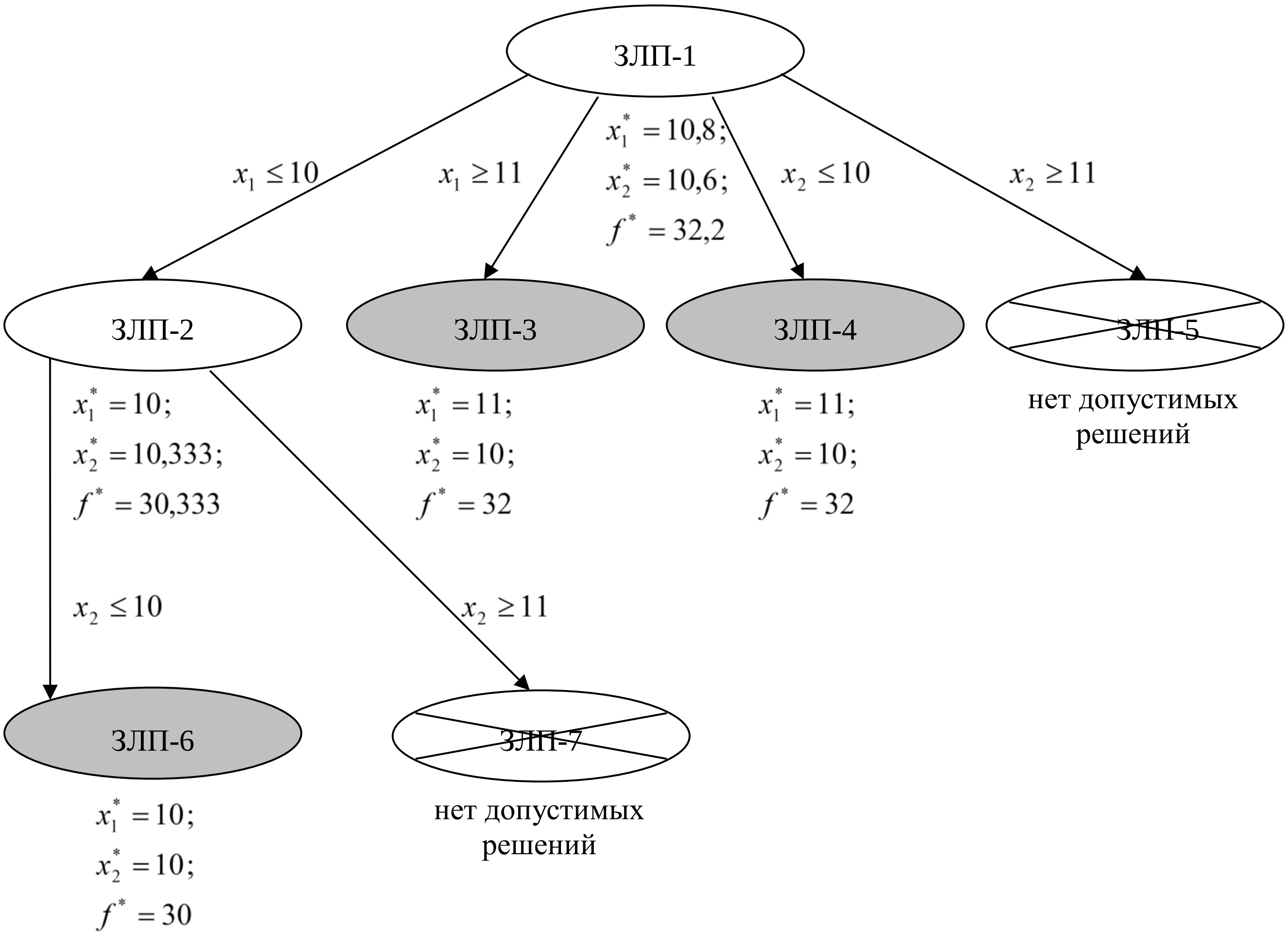


Рис. 2.23

Ответ (решение ЗЦЛП): $\max\limits_{D} f(x_1, x_2) = f(11;10) = 32$