



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Διδάσκοντες: Δημήτρης Φωτάκης, Δώρα Σούλιου

2η Σειρά Προγραμματιστικών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 5/1/2020

Άσκηση 1: Social Credits

Τα τελευταία χρόνια κυκλοφορεί έντονα η φήμη ότι η κυβέρνηση της Κίνας ετοιμάζει ένα σύστημα αξιολόγησης των κατοίκων της, το οποίο προορίζεται να τεθεί σε εφαρμογή μέσα στην επόμενη δεκαετία (δείτε π.χ., εδώ). Σύμφωνα με αυτό το σύστημα, κάθε κάτοικος της χώρας θα έχει ένα social credit. Ανάλογα με την τιμή του social credit, θα παρέχονται στους κατοίκους κάποια προνόμια ή θα επιβάλλονται ορισμένες κυρώσεις. Το social credit ενός ατόμου υπολογίζεται ανάλογα με την συμπεριφορά του ίδιου, αλλά και ανάλογα με το social credit των ατόμων με τα οποία συναναστρέφεται.

Ενδιαφέρεστε να επεκτείνετε τις εμπορικές σας δραστηριότητες στην Κίνα, και θέλετε να είστε προετοιμασμένος(η) για το νέο σύστημα αξιολόγησης. Έχετε δημιουργήσει ήδη έναν μακρύ κατάλογο με N άτομα που μπορείτε να συναντήσετε. Οι μεγάλες αποστάσεις υπαγορεύουν μια πολύ συγκεκριμένη σειρά με την οποία μπορούν να γίνουν αυτές οι συναντήσεις. Έτσι έχετε οργανώσει τον κατάλόγό σας με βάση αυτή τη σειρά. Μετά από προσεκτική έρευνα, έχετε υπολογίσει το social credit s_i κάθε ατόμου i στον κατάλόγό σας. Στην προσπάθεια να μεγιστοποιήσετε το δικό σας social credit, καταλήγεται ότι η καλύτερη στρατηγική είναι να συναντιέστε με κάποιο άτομο που έχει αυστηρά μεγαλύτερο social credit από το προηγούμενο άτομο που συναντήσατε. Μπορείτε να κάνετε μέχρι K εξαιρέσεις χωρίς να βλάψετε το social credit σας, αλλά όχι περισσότερες.

Πριν επισκεφθείτε την Κίνα, θέλετε να φτιάξετε ένα αποδοτικό πρόγραμμα που θα υπολογίζει το μέγιστο πλήθος ατόμων που μπορείτε να συναντήσετε με βάση τη συγκεκριμένη στρατηγική.

Λεδομένα Εισόδου: Αρχικά, το πρόγραμμα θα διαβάζει από το standard input δύο θετικούς ακέραιους N και K , τον συνολικό αριθμό των ατόμων με τα οποία μπορείτε να συναντηθείτε και το μέγιστο πλήθος εξαιρέσεων που μπορείτε να κάνετε. Στην επόμενη γραμμή, θα υπάρχουν N φυσικοί αριθμοί (χωρισμένοι με κενό), που αντιστοιχούν στο social credit των ατόμων με τα οποία μπορείτε να συναντηθείτε. Τα social credits θα δίνονται με τη σειρά που μπορούν να γίνουν οι συναντήσεις.

Λεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμά σας πρέπει να τυπώνει στο standard output (στην πρώτη γραμμή) τον μέγιστο αριθμό ατόμων που μπορείτε να συναντηθείτε, ώστε κάθε άτομο που θα συναντήσετε, με K το πολύ εξαιρέσεις, να έχει social credit αυστηρά μεγαλύτερο από το άτομο που συναντήσατε προηγουμένως.

Περιορισμοί:

Παραδείγματα Εισόδου:

Παραδείγματα Εξόδου:

$$3 \leq N \leq 10^5$$

9 1

7

$$1 \leq K \leq \max\{N - 1, 2000\}$$

3 9 4 5 8 6 1 3 7

$$1 \leq s_i \leq 10^7$$

Όριο χρόνου εκτέλεσης: 3 sec.

11 2

8

Όριο μνήμης: 64 MB.

5 6 4 7 3 9 2 5 1 8 7

Για το 80% της βαθμολογίας, θα είναι $K = 1$. Για το υπόλοιπο 20% της βαθμολογίας, θα είναι $5000 \leq N \leq 7000$ και $20 \leq K \leq 50$. Θα υπάρχουν bonus test cases με $10^4 \leq N \leq 10^5$ και $40 \leq K \leq 200$, και extra bonus test cases με $50000 \leq N \leq 10^5$ και $1000 \leq K \leq 2000$.

Άσκηση 2: Χριστουγεννιάτικος Φωτισμός

Η χώρα των Αλγορίθμων προετοιμάζεται εντατικά για τον εορτασμό των Χριστουγέννων και της Νέας Χρονιάς. Όλες οι πόλεις θα φωταγωγηθούν, ώστε οι κάτοικοι να μπουν στο πνεύμα των εορτών. Η οικολογική συνείδηση των κατοίκων, αλλά και κάποιες μικρές οικονομικές δυσκολίες, επιβάλουν ο φωτισμός να γίνει φέτος με τον πλέον οικονομικό (και οικολογικό) τρόπο. Με κάποια μικρή καθυστέρηση, είναι αλήθεια, ο Πρόεδρος της χώρας των Αλγορίθμων ζήτησε τη βοήθειά σας για αυτό τον σκοπό.

Είναι γνωστό ότι στη χώρα των Αλγορίθμων, το οδικό δίκτυο των πόλεων έχει δενδρική δομή. Μια τυπική πόλη έχει N διασταυρώσεις και $N - 1$ δρόμους που προσπίπτουν σε αυτές. Οι μελέτες σας έδειξαν ότι η εγκατάσταση φωτιστικού σώματος σε μία διασταύρωση επαρκεί για τον φωτισμό όλων των δρόμων που προσπίπτουν σε αυτή. Για τις μεγάλες πόλεις, όπου θα φωταγωγηθούν όλοι δρόμοι, η αποστολή σας είναι εύκολη. Δεδομένου του οδικού δικτύου μιας πόλης (που, όπως είπαμε, έχει δενδρική δομή), πρέπει να υπολογίσετε το ελάχιστο πλήθος φωτιστικών σωμάτων που χρειάζεται να τοποθετηθούν στις διασταυρώσεις της πόλης, ώστε όλοι οι δρόμοι να φωταγωγηθούν.

Ο πραγματικός πονοκέφαλος είναι οι μικρές πόλεις! Το Δημοτικό Συμβούλιο κάθε μικρής πόλης έχει αποφασίσει το ελάχιστο πλήθος δρόμων K που πρέπει να φωταγωγηθούν. Για λόγους οικονομίας, το K μπορεί να είναι μικρότερο του $N - 1$. Πρέπει λοιπόν, και για τις μικρές πόλεις, να υπολογίσετε το ελάχιστο πλήθος φωτιστικών σωμάτων που χρειάζεται να τοποθετηθούν στις διασταυρώσεις, ώστε τουλάχιστον K δρόμοι να φωταγωγηθούν.

Δεδομένα Εισόδου: Το πρόγραμμα θα διαβάζει από το standard input, στην πρώτη γραμμή, δύο θετικούς ακέραιους N και K , το συνολικό πλήθος των διασταυρώσεων της πόλης και το ελάχιστο πλήθος των δρόμων που πρέπει να φωταγωγηθούν. Σε καθεμία από τις επόμενες $N - 1$ γραμμές, θα υπάρχουν δύο θετικοί φυσικοί αριθμοί v_i και u_i (χωρισμένοι με κενό, θα είναι $1 \leq v_i < u_i \leq N$) που δηλώνουν ότι ο i -οστός δρόμος της πόλης προσπίπτει στις διασταυρώσεις v_i και u_i .

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμά σας πρέπει να τυπώνει στο standard output (στην πρώτη γραμμή) τον ελάχιστο πλήθος διασταυρώσεων που πρέπει να καλυφθούν με φωτιστικό σώμα ώστε τουλάχιστον K δρόμοι της πόλης να φωταγωγηθούν.

Περιορισμοί:	Παράδειγμα Εισόδου:	Παράδειγμα Εξόδου:
$3 \leq N \leq 2 \cdot 10^5$	9 6	2
$2 \leq K \leq N - 1$	1 2	
$1 \leq v_i < u_i \leq N$	1 3	
Όριο χρόνου εκτέλεσης: 2 sec.	1 4	
Όριο μνήμης: 128 MB.	2 5	
	2 6	
	3 7	
	4 8	
	4 9	

Η είσοδος θα αντιστοιχεί πάντα σε ένα δέντρο με N κορυφές και $N - 1$ ακμές. Για το 60% της βαθμολογίας, θα είναι $3 \leq N \leq 2 \cdot 10^5$ και $K = N - 1$. Για το υπόλοιπο 60% της βαθμολογίας (θα υπάρχει bonus 20%), θα είναι $3 \leq N \leq 4 \cdot 10^3$ και $2 \leq K < N - 2$.