UNIVERSITATEA „ALEXANDRU IOAN CUZA” din IAŞI

FACULTATEA DE INFORMATICĂ

LUCRARE DE LICENȚĂ

Corelații matematico-muzicale, relevate în mediul Matlab

Elena Vizitiu

Sesiunea: februarie, 2020

Coordonator ştiintific:

Lect. Dr. Florin Iacob

UNIVERSITATEA „ALEXANDRU IOAN CUZA” din IAŞI

FACULTATEA DE INFORMATICĂ

Corelații matematico-muzicale, relevate în mediul Matlab

Elena Vizitiu

Sesiunea: februarie, 2020

Coordonator ştiintific:

Lect. Dr. Florin Iacob

Cuprins

Introducere

Temă aleasă exprimă pasiunea autoarei pentru muzică, dar şi pentru matematică în acelaşi timp, din ciclul primar. Înclinaţia pentru muzică a existat dintotdeauna, iar talentul vocal a fost descoperit în clasele primare. O continuare pe drumul frumos al muzicii s-a manifestat şi în gimnaziu, prin participarea activă în cadrul unui cenaclu de muzică folk. În aceeaşi perioadă de timp, a gimnaziului, este de menţionat prezenţa activă în tabere de muzică. Acolo a fost posibilă învăţarea interpretării la diferite instrumente, printre care şi chitară, violoncel, flaut, clarinet, clopoţei clasici şi instrumente de percuţie (xilofon). În perioada liceului, prin înscrierea la Palatul Copiilor, s-a optat pentru activarea într-o trupă de muzică pop, grupare cu care a fost posibilă participarea (încununată de lauri) la numeroase concursuri si festivaluri muzicale. În ceea ce priveşte matematica, apetenţa pentru această disciplină a apărut şi s-a vădit tot încă din clasele primare. În acest sens este de subliniat participarea şi obţinerea de premii la diverse concursuri şi olimpiade de matematică, atât în perioada gimnaziului, cât şi a liceului. Explicabil apare astfel, îmbinarea celor două tipuri de pasiuni în cadrul prezentei teze de licenţă.

Lucrarea de față se referă la modul în care elementele de bază ale muzicii sunt corelate cu elemente ale matematicii. În primul rând, notele, intervalele, scalele şi armoniile muzicale sunt legate de proporții și relații numerice adecvate. În al doilea rând, conceptele matematice sunt prezente în melodie și ritm. Notația muzicală include concepte de timp (lungime de note), ritm (gruparea notelor în tempo), ton (frecvența sunetului) și dinamică (forța intensității), toate în cercul spațiului muzical (geometria muzicii). Aceste elemente sunt în legătură cu anumite operații aritmetice (diviziune, multiplicare, adunare și logaritmare), trigonometrie și geometrie.

De-a lungul timpului, noțiunea de "muzică" a fost definită atât prin exprimări poetice, subiective, cât și prin teorii științifice cu un caracter obiectiv. Din punct de vedere poetic, muzica își are rădăcinile în natură, fiind caracterizată de zgomotul continuu, ușor și monoton, produs de unele fenomene ale naturii (curgerea apei, foșnetul frunzelor etc.). Din punct de vedere științific, muzica este o mulţime de sunete, de zgomote controlate, mai exact de vibrații sonore formate prin suflare, ciupire, lovire, frecare etc. Deși cele două definiții ale muzicii par diferite, ele au un element comun și anume importanța care i se acordă materiei în transmiterea sunetelor. Materia este indispensabilă în transmiterea de sunete. Așa se explică faptul că sunetele se aud prin obiecte, dar nu pot străbate un spațiu vidat.

Muzica îmbunătățește dezvoltarea capacității mentale și ne ajută să ne îmbunătățim abilitățile de manifestare în alte discipline, cum ar fi lectura și matematica. Aproape orice entitate matematică poate fi transpusă în domeniul muzicii şi reciproc, orice entitate muzicală putând fi analizată prin instrumente matematice. De la cele mai simple la cele mai complexe, conceptele matematice se regăsesc în lumea muzicii. Astfel, este posibil să se stabilească o corelație pozitivă între performanța în domeniile muzicii (compoziție, interpretare etc.) și dezvoltarea cognitivă în matematică. În majoritatea studiilor, s-a constatat că relațiile semnificative sunt între muzică și matematică sau, mai precis, între muzică și raționamentul spațio-temporal (important în conceptele matematice și muzică). Ipoteza se bazează pe un grup de studii care explorează efectele abilității de interpretare instrumentală şi/sau vocală, sugerând că stăpânirea respectivului instrument muzical sau a vocii ajută la dezvoltarea înțelegerii a unor aspecte ale matematicii. Mai mult, s-au efectuat cercetări științifice asupra situaţiilor în care se asociază anumite tipuri de practică muzicală cu dezvoltarea inteligenţei umane.

Matematica și muzica au fost îmbinate încă de pe vremea lui Pitagora. De-a lungul istoriei muzicii, mulți compozitori au folosit modele matematice ca sursă pentru creații compoziționale. Sylvester zicea: “Nu s-ar putea oare reprezenta muzica drept matematică a simţurilor şi matematica drept muzică a raţiunii? Căci muzicianul simte matematica, iar matematicianul concepe muzica. Muzica-i vis, matematica viaţă practică” ! Muzica este arta ce exprimă sentimentele și stările psihice prin sunete, care sunt combinate melodios şi armonic spre a fi plăcute auzului.

Pe parcursul acestei lucrări, se va vorbi despre relația dintre muzică și matematică, punându-se în evidenţă importanţa celeia din urmă în dezvoltarea celei dintâi. Prima parte a lucrării prezintă cadrul teoretic relativ la această temă. Primul capitol se referă la evoluţia muzicii de-a lungul timpului (de la unison la partituri mai complexe, la care s-au introdus şi instrumentele muzicale), la elemente teoretice, analiza sunetelor si modalitatea prin care acestea ajung la urechea umană, dar și la tipurile de instrumente muzicale și modul de producere a sunetelor emise de acestea.

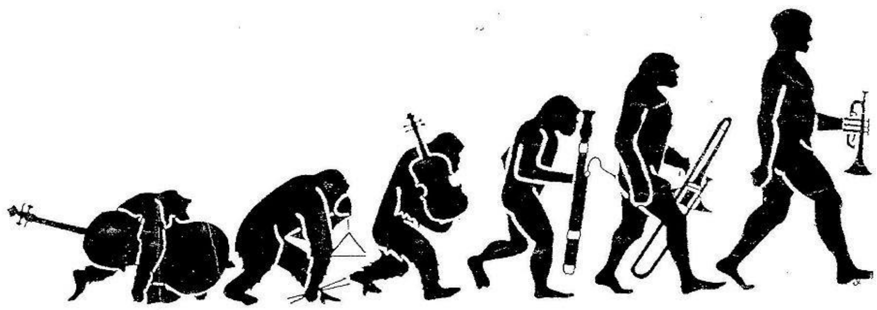
Al doilea capitol se ocupă de descrierea unor modele matematice relative la prezenta temă. In primul său paragraf, este prezentat modelul undelor sinusoidale percepute de urechea umană în vederea accesării la sunetele în cauză. In cel de-al doilea paragraf, este descris modelul corzilor vibrante, corzi cu ajutorul cărora instrumentele pot emite sunetele. Cel de-al treilea paragraf se referă la modelul ecuaţiei de undă tridimensională, caracteristic membrane şi corpurilor vibrante. Un asemenea model este folosit în studiul mai multor instrumente muzicale cum ar fi: instrumente de percuţie, instrumente de suflat etc.

Ultimul capitol expune implementarea în mediul Matlab a unora dintre modelele matematice descrise în capitolul al doilea. Se urmăresc mai multe direcţii de implementare, între care cea numerică, cea simbolică şi aceea grafică sunt prioritare. Prin fiecare din tipurile de implementare practicate, se urmăreşte punerea în evidenţă a utilităţii mediului Matlab în stabilirea unor aspecte numerice, funcţionale sau grafice ale modelelor vizate. Rezultatele obţinute îşi dovedesc utilitatea în contextul interpretării potrivite în raport cu necesităţile cazului studiat. Matlab-ul oferă largi posibilităţi de utilizare a instrumentelor sale în vederea analizării computerizate şi validării diverselor modele subsidiare temei. Implementările realizate fac, în plus, dovada unor note de originalitate în tratarea temei curente.

Lucrarea prezentă dispune şi de o secţiune dedicată unor binevenite concluzii. În final este dată o utilă listă bibliografică a celor mai importante materiale utilizate în documentarea pentru elaborarea tezei de faţă.

I. Elemente teoretice ale muzicii

1. Începuturile muzicii

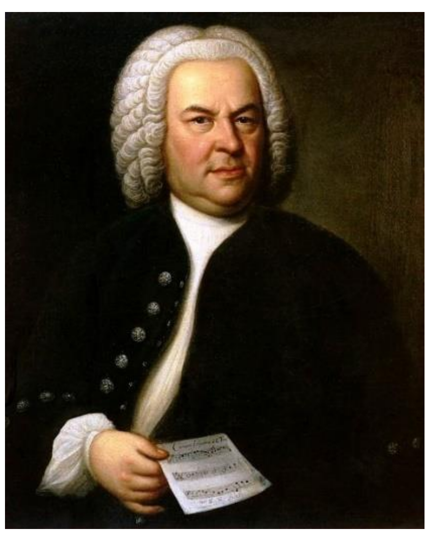


Studiul istoriei muzicii universale și românești este considerat fundamental în însușirea și înțelegerea principalelor stiluri muzicale, în crearea și îmbogățirea culturii artistice teoretice și practice a oamenilor. Alături de celelalte discipline muzicale, studiul istoriei muzicii are un caracter informativ – de acumulare de cunoștințe, dar mai ales formativ. Originile artei muzicale trebuie căutate în îndepartata istorie a omenirii. Ca artă sonoră poate fi considerată abia în momentul în care sunetele sunt conştient organizate, reflectând un anumit grad de evoluție în spiritualitatea omului primitiv. Astfel, omul devine creator de artă în momentul în care ajunge să stăpânească gândirea și vorbirea articulată. Primele practici de natură artistică sunt legate de procesul muncii, în colectiv, când apar comenzi ritmate, strigăte sau chemări, îngânări sau îmbărbătări etc., mai apoi ca forme evoluate de magie, ritualuri, când elementul melodico-ritmat este alăturat dansului și cuvântului, formând astfel o artă ce s-a desfășurat pe o lungă perioadă de timp.

Despre muzica europeană a evului mediu timpuriu putem vorbi cu mai multă certitudine. Muzica pe care o ascundeau neumele (notele) medievale reprezentă partea cântată a ceremoniilor religioase ortodoxe și catolice. În perioada timpurie a evului mediu ea consta dintr-o unică și firavă linie melodică, adică o monodie (o singură voce, un cânt religios), destinată intonării de către un cântăreț sau un grup. Desfășurându-se pe un spațiu melodic (ambitus) restrâns, această cântare putea totuși îmbrăca forme diferite, de la psalmodia ce repeta un singur sunet, intercalând pe alocuri scurte formule melodice, până la cântul propriu-zis, bogat în melisme. Cântările liturgice ortodoxe au fost organizate în secolul al VIII-lea de Ioan Damaschinul într-o carte numită octoih. Cele mai vechi cântări care s-au păstrat datează din secolul al IX-lea. Cântările liturgice catolice au căpătat denumirea de gregoriene după papa Grigore I, despre care se crede că le-a unificat și codificat în jurul anului 600. Cele mai vechi cântări gregoriene care s-au păstrat datează din secolul al X-lea.

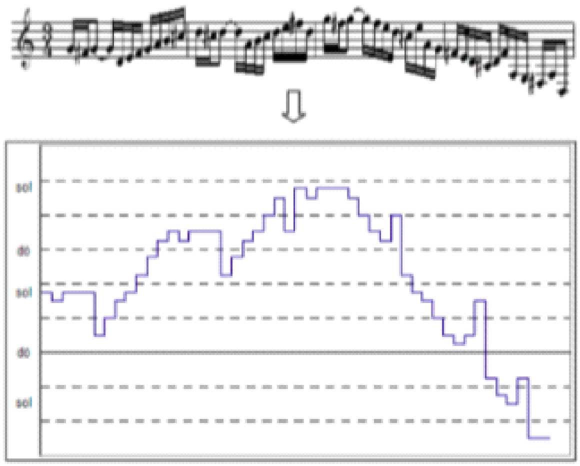
Un impact major asupra istoricii muzicii îl reprezintă apariția Barocului. În ceea ce privește tehnicile de compoziție anterioare perioadei barocului, muzica era limitată la modurile antice grecești, adaptate în timpurile medievale pentru cântece sacre. Sunetele erau în mare parte unison, cu variații rare și ușoare. Barocul a apărut ca o opoziție, introducând ideea de polifonie, armonie, acorduri, teme care se asociază, se transformă și se completează. Caracteristicile barocului presupun: înlocuirea muzicii vocale cu cea instrumentală, grija de a crea sunete mai perfecționiste. În domeniul instrumentației apar noi instrumente muzicale cum ar fi cele de percuție, noi instrumente de suflat,etc.

2. Personalităţi din domeniul muzicii

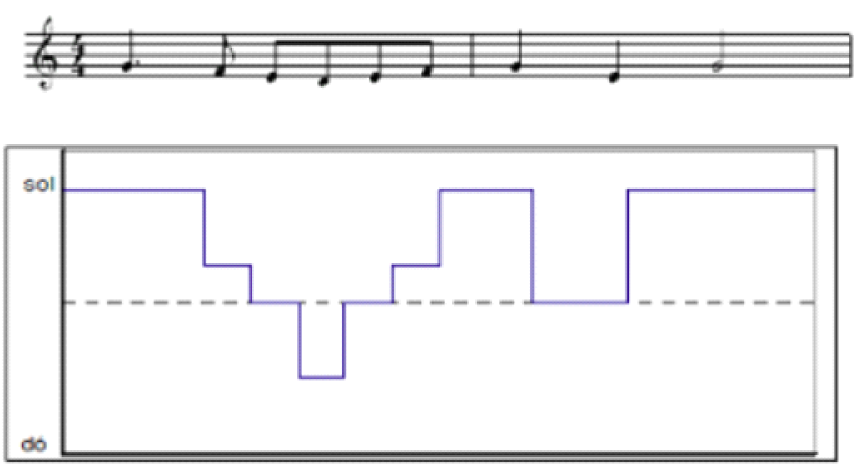


Johann Sebastian Bach a fost un compozitor german și organist din perioada barocă, considerat în mod unanim ca unul dintre cei mai mari muzicieni ai lumii. Operele sale sunt apreciate pentru profunzimea intelectuală, stăpânirea mijloacelor tehnice și expresive și pentru frumusețea lor artistică. Creația sa instrumentală este importantă pentru sinteza artistică realizată, căci îmbină arta claveciniștilor francezi cu cea a violoniștilor italieni și a organiștilor germani. Pentru dezvoltarea ulterioară a muzicii instrumentale, creația sa este nu numai încoronarea artei vechi, ci și o prefigurare a viitorului stil clasic. El este primul compozitor care utilizează clavecinul ca solist, fapt ce duce la lărgirea paletei expresive, iar instrumentele monodice, ca vioara sau flautul, se limitează la melodii cantabile și pasaje de virtuozitate. Prin atribuirea de rol solistic clavecinului, acesta va putea diversifica expresia prin resursele sale polifonice și armonice. Dacă până la Bach orchestra avea doar un rol de acompaniament în concertele grossi, în cele șase Concerte brandenburgice orchestra realizează un dialog cu grupul concertino. În Concertul nr. 1, grupul concertino se contopește aproape integral cu ripieni, iar în Concertul nr. 3 dispare cu totul masa orchestrală, fiind alcătuită din trei grupuri: viori, viole și violoncele, fiecare având trei voci care dialoghează sau se unesc într-un ansamblu viguros. În aceste concerte Bach îmbogățește paleta timbrală, căci pe lângă grupul instrumentelor cu coarde el le folosește și pe cele de suflat cu rol solistic. În Concertul nr. 5 în Re major flautul, împreună cu vioara, alcătuiesc grupul solistic. Concertino-ul primului concert conține și el instrumente de suflat: oboi, fagot, corn. În creația sa, orchestra capătă o expresivitate proprie.

Pentru a stabili o metodă de reprezentare a unei melodii particulare care codifică o analiză matematică coerentă, Bach folosește un plan cu un sistem de coordonate cartezian-xy. Fiecare notă din scara muzicală utilizată în compoziții are proprietăți care o identifică. Două dintre aceste proprietăți sunt tonul sau "frecvența de oscilație a sunetului" și durata acestuia sau "perioada de timp în care este rulat sunetul". Se poate realiza acest lucru într-o manieră matematică prin intermediul unei funcții discrete f (t) care se referă la fiecare notă a unei valori întregi; de exemplu: C (do) = 0, C # (do #) = 1, D (re) = 2, D # (re #) =3....ca în figura:



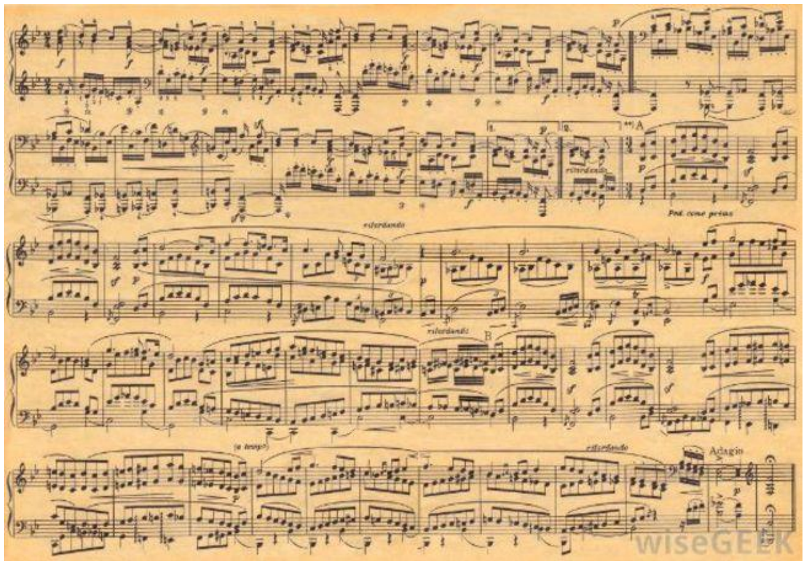
În graficul anterior, axa y prezintă informațiile referitoare la ton, setând ca referință mijlocul C (do), cu o frecvență de 261 Hz. Cu alte cuvinte, cu cât o notă este mai înaltă în raport cu mijlocul, reprezentarea acesteia în grafic va fi deplasată superior în comparație cu reprezentarea centrală C. De asemenea, cu cât o notă inferioară este mai joasă în raport cu mijlocul, reprezentarea acesteia în grafic este deplasată inferior în raport cu o reprezentare a mijlocului C. Durata notei, care indică timpul la care ar trebui să continue, este asociată cu lungimea fiecărui segment orizontal din convenția grafică adoptată. Prin urmare, dacă avem o versiune matematică (geometrică) a scorului muzical, este posibilă rescrierea acestui cântec cu simbolurile obișnuite doar prin identificarea valorii y și a distanței dintre două puncte finale ale unui segment. Aceste date numerice vor descrie dimensiunea și durata notei specifice.



În zilele noastre, unul dintre cei mai mari artişti ai momentului îl reprezintă violonistul David Garett. Născut pe 4 septembrie 1980, în Aachen, Germania, acesta este fiul balerinei Dove Garett şi a avocatului Georg Bongarty, care s-au întâlnit la un concert din Frankfurt unde ea venise pentru a susţine un concer. Ca în cazul marilor muzicieni ai lumii, David a început să cânte la vioară de la vârsta de 4 ani, diferenţa făcând-o însă motivul. Cu doi ani mai mare, fratele său, Alexander, începuse la insistenţele părinţilor, lecţiile de vioară, iar David voia să aibă tot ceea ce avea fratele său. Ulterior, părinţii au realizat că fiul cel mic avea un real talent, aşa că tatăl său, care era la acea vreme deţinătorul singurei case de licitaţii pentru instrumente cu coarde din Europa, i-a devenit primul profesor. Încă de la vârsta de cinci ani, părinţii au început să îl ducă, în fiecare weekend, în Olanda, pentru a studia. Doi ani mai târziu, destinaţia s-a schimbat: mergea la Lubeck, pentru a studia conservatorul de acolo. Restul educaţiei a primit-o acasă, cu un învăţator particular. La vârsta de opt ani, tânărul musician avea deja solo-uri alături de unele dintre cele mai celebre orchestra ale lumii, precum London Phiharmonic, Los Ageles Philarmonic sau Russian National Orchestra. La vârsta de 11 ani a primit prima sa vioară Stradivarius, după amabilitatea preşedintelui german Richard von Weizsäcker, după ce a cântat pentru el, această vioară numărându-se printre cele mai bune instrumente din „perioada de aur” a lui Antonio Stradivari. La 12 ani, David Garett începuse sa lucreze cu celebra violonistă poloneză, Ida Haendel, călătorind în diverse oraşe europene pentru a o putea întâlni. Prin intermediul acesteia, Garett a ajuns să cunoască şi muzica lui George Enescu, căci aceasta îi fusese elevă. Artistul a cântat pentru prima data Enescu în public, în 2015, la Bucureşti, la festivalul care îi poartă numele. Pe când avea 13 ani, artistul înregistra deja doua cd-uri şi apărea la televiziunea olandeză şi cea germană. La aceeaşi vârstă, Garett devenea cel mai tânăr solist, semnând un contract cu casa de producţie Deutsche Grammophp. În aprilie 1997, la vârsta de 16 ani, Garett a cântat cu Orchestra Filarmonică din München, sub conducerea lui Zubin Mehta, la Delhi și Mumbai, în concerte care marchează 50 de ani de la independența Indiei. Albumul Encore din Garrett din 2008 urmărește un scop de a stârni interesul tinerilor pentru muzica clasică. Lansarea conține compoziții și aranjamente proprii de piese și melodii care l-au însoțit până acum în viața sa. Împreună cu trupa sa, formată din claviatură, chitară și tobe, el oferă concerte care includ sonate clasice (însoțite de un pian grandios de concert), aranjamente și compoziții, precum și cântece rock și teme de film. El s-a alăturat celei de-a noua ediții anuale a Independent Music Awards, pentru a ajuta cariera muzicienilor independenți. El a jucat rolul principal în filmul din 2013 The Devil's Violinist, după cum a remarcat violonistul din secolul al XIX-lea Niccolò Paganini. În același an și-a lansat albumul Garrett vs Paganini.

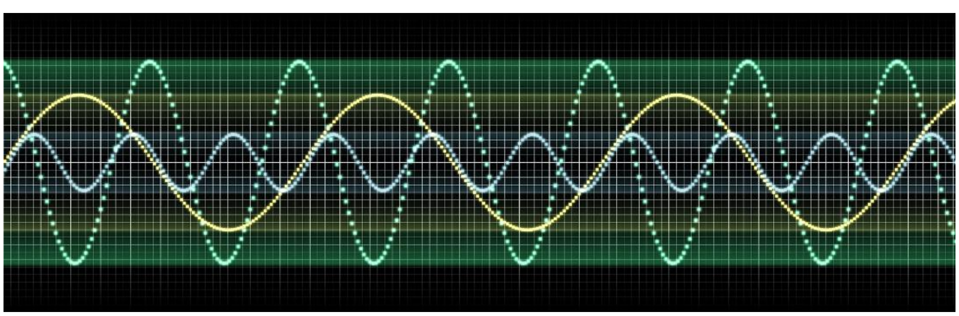
Celebru în întreaga lume pentru tehnica rapidă, dar mai ales pentru concertele crossover pe care le susţine, în cadrul cărora estompează liniile de demarcaţie pentru muzica clasică şi cea rock sau pop, Garett este unul dintre cele mai carismatice personaje ale scenei muzicale mondiale. De la Metallica la Eminem, David Garett a adaptat pentru vioară unele dintre cele mai populare melodii ale tuturor timpurilor, atrăgând un public numeros, de toate vârstele. Este considerat un artist aparte datorită stilului său, atât muzical, cât şi vestimentar, atipic pentru un violonist, căci nu suportă să poarte ţinute elegante, fiind unul dintre cei mai rapizi violonişti ai lumii, calitate pentru care a deţinut recordul mondial, în 2010.

3. Aspecte teoretice

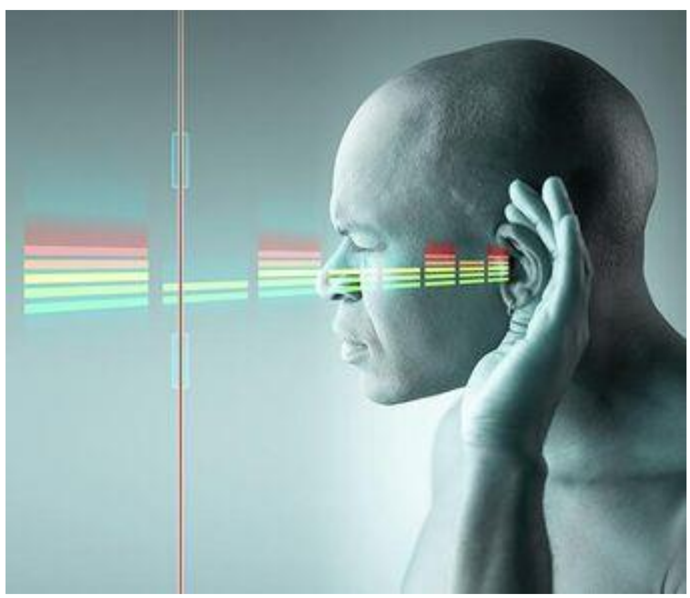


Noțiunea de sunet este de natură fiziologică, acestuia corespunzandu-i, din punct de vedere fizic vibrațiilor corpului. Acestea, cu ajutorul mediului înconjurător, ajung la urechea umană și, implicit, la timpan. Organul transmite excitația mai departe nervului acustic, care o comunică apoi creierului, unde se transformă în senzația sonoră denumită sunet. Sunetul, ca fenomen fizic, este produsul vibrațiilor repezi ale corpurilor elastice, fie ele solide (metalul, lemnul, sticla, diferite membrane), fie lichide (apa) sau gazoase (coloanele de aer). Vibrația sau mișcarea vibratorie, care stă la baza oricărui sunet, trebuie înțeleasă ca o oscilație pe care un corp sonor, datorită elasticității, o execută în jurul poziției sale de repaus. Vibrațiile produse de un corp sonor oarecare se propagă (se transmit) în atmosferă în toate direcțiile, punând în mișcare moleculele de aer vecine. Acestea, la rândul lor produc mai departe fenomenul, făcând să vibreze alte și alte molecule de aer. În acest fel se formează o serie de straturi de aer alternativ, condensate și rarefiate, care se numesc unde. Propagandu-se în mediul înconjurător, acesta transmite vibrațiile sub formă de unde sonore până la organul nostru auditiv. Acest mediu este de obicei gazos (aer) dar el poate fi și lichid (apa) sau solid (pământul, lemnul, metalul etc.). Propagarea sunetelor se face cu atât mai bine cu cât mediul prin care se transmit undele sonore este mai dens. Vibrațiile sonore se propaga în aer cu o viteză de 340m/s, în apă cu o viteză de 1440m/s, iar în mediul solid cu o viteză de 3000-5000m/s.

Undele sonore sunt oscilații mecanice ale mediilor elastice percepute de organul auditiv al omului. Urechea omenească este un receptor remarcabil, capabil să analizeze sunetul perceput, la fel ca un aparat spectral, descompunându-l în spectrul oscilațiilor armonice simple. Urechea este capabilă să culeagă unde sonore, pe care le transformă în vibrații ale lanțului osicular și apoi în unde mobile în fluid și în cele din urmă în impulsuri nervoase care pot fi interpretate de către creier. Chiar și cea mai mică disfuncție a acestui sistem complex poate compromite abilitatea auditivă. Undele sonore se propagă, din aproape în aproape, până în dreptul pavilionului urechii. Perturbațiile mediului aerian, produse de cauze diverse, se propagă în mediul pe care-l străbat sub forma unor variații de presiune. Aceste fluctuații de presiune constituie undele acustice. Pentru anumite valori ale frecvențelor și presiunilor, undele acustice pot fi detectate de urechea umană sub forma sunetelor. Intervalul de frecvențe la care este sensibilă urechea umană este situat între aproximativ 16 - 20.000 Hz, iar undele acustice situate în acest domeniu se numesc și unde sonore. Omul percepe sunete cu o frecvență între 16 și 20000 vibrații pe secundă și cu o intensitate între 0 și 120 db (de 10 000 000 000 000 ori peste pragul minim). Zgomotul produs de o convorbire se situeaza între limitele de 30 și 60 db. În momentul în care un instrument este utilizat, acesta vibrează și un semnal este trimis la ureche. Vibrațiile călătoresc prin aer și acestea ajung la timpane, astfel vibrând și acestea. Aceste vibrații sunt oscilații rapide ale presiunii aerului, pe care urechea le detectează ca sunet. Cel mai simplu model de sunet muzical este o undă sinusoidală. Despre acest model vom discuta mai în detaliu în capitolul următor, când vom analiza mai în detaliu modelul corzilor vibrante.

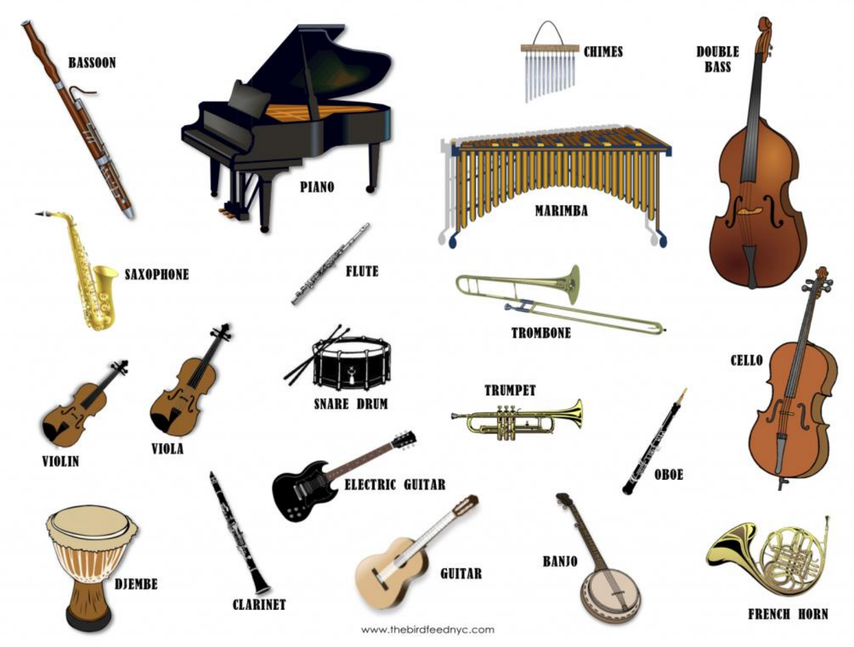


Sunetul muzical are patru calități: înălțime, durată, intensitate și timbru. Calitatea sunetului de a fi mai acut sau mai grav, în scara sonoră, se numește înălțime. Ea se datoreaza frecvenței vibrațiilor, adică numărului de vibrații produs într-o secundă. Cu cât frecvența este mai mare, cu atât sunetul este mai acut , iar cu cât frecvența este mai mică, cu atât sunetul este mai grav. Calitatea sunetului de a se produce într-o fracțiune mai mare sau mai mică de timp se numește durată. Ea depinde de continuitatea vibrațiilor, adică de fragmentul de timp care trece din momentul producerii unui sunet și până la completa sa dispariție. Calitatea sunetului de a fi mai tare sau mai slab, ca rezultat al unui volum de energie mai mare sau mai mic ce însoțește vibrațiile se numește intensitate. Această însușire de natură fizică a sunetului își are corespondentul fiziologic în senzația de forță pe care un sunet o produce asupra noastră și care se numește tărie. Calitatea sau însușirea prin care să se distingă un sunet după sursa care l-a produs se numește timbru. Datorită acestei însușiri, sunetele se deosebesc unul de altul chiar daca sunt de aceeași înălțime, durată și intensitate. Fiecare instrument sau agent sonor își are timbrul său propriu, la voce, el fiind evident chiar și în vorbire. Varietatea de timbru a diferitelor corpuri sonore, care la început se rezuma numai la cea dată de vocile omenești, a dus la inventarea și perfecționarea a numeroase instrumente muzicale.



Sunetele diverse realizate de instrumentele din fiecare secțiune a unei orchestre se datorează armonicii. Acestea sunt sunete mai înalte și mai liniștite, care sunt amestecate cu nota principală. Nu se aud separat, dar se adaugă tonului sunetului. Notele muzicale sunt măsurate în mod convențional pe o scară de la A-G, cu mijlocul C, de obicei fiind utilizate ca notă de referință. Scara se repetă peste toate cele 88 de taste de la un pian, toate cele 6 corzi de chitară etc. Distanța de la „C” la următorul „C” se numește octavă și în fiecare octavă C-ul superior are o frecvență care este de două ori mai mare decât cea inferioară a C. Aceasta arată că există o formulă științifică în spatele a ceea ce găsim în mod natural plăcut la urechile noastre.

4. Instrumente muzicale



Muzica pe care o ascultăm este produsă, transformată și stocată digital. Acest lucru a dat naștere dezvoltării unei cantități mari de instrumente muzicale noi care nu se mai bazează pe mișcarea pieselor muzicale, ci mai degrabă pe generarea directă a sunetului dorit. Pe de o parte, există dorința de a obține o reproducere fidelă a sunetului instrumentelor tradiționale; pe de altă parte, tehnologia oferă acum noi metode de creație artistică. Ambele tendințe au nevoie de modele matematice și computationale pentru generarea și transformarea sunetului.

Instrumentele muzicale sunt de obicei clasificate în patru mari grupe tradiționale: cu corzi (chitară, vioară, pian, drâmbă), suflători din lemn (fluier, flaut, cimpoi), suflători din alamă (trompetă, trombon, bucium) și instrumente de percuție (tobă, xilofon, tamburină), la care se adaugă suflători cu structură complexă (orgă, muzicuţă, acordeon) și instrumentele electronice (chitară electrică, metronom, sintetizator). Drâmba (numit uneori drâng) este un instrument muzical idiofon în formă de potcoavă, prevăzut cu o lamă care se ciupește cu degetul în timp ce potcoava se ține în gură. Instrumentul este de obicei din oțel, dar există și drâmbe din bambus, de exemplu. Muzicienii folosesc o mare varietate de instrumente pentru a crea sunete și a interpreta o compoziție muzicală. Unele instrumente sunt simple obiecte de lemn măiestrit lucrate, altele utilizează tehnologii avansate. Instrumentele muzicale au caracteristici variate, iar popularitatea lor diferă de la o regiune la alta.

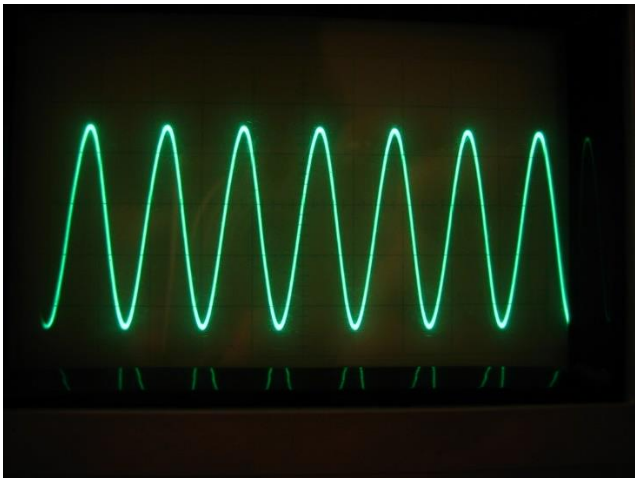
O vibrație într-o coardă este o undă. Rezonanța face ca o coardă să producă un sunet cu frecvență constantă, adică un pas constant. Dacă lungimea sau tensiunea corzii este corect ajustată, sunetul produs este un ton muzical. Pentru ca sunetul să apară avem nevoie de o sursă vibrantă și un mediu, iar pentru a-l detecta, avem nevoie de un receptor. Pentru a ajunge la receptor, vibrațiile au nevoie de un mediu de transmisie, cum ar fi aerul sau apa. Vibrațiile de la sursa de sunet perturbă moleculele din mediu. Moleculele se mișcă în același ritm cu sursa de sunet. Pe măsură ce vibrația călătorește prin mediu, fiecare moleculă atinge o alta și revine la poziția inițială. Variația presiunii în mediu este sesizată de un receptor cum ar fi urechea umană sau dispozitivul de înregistrare și se numește undă sonoră. Sunetul călătorește în același mod, indiferent dacă este muzică sau zgomot. Diferența dintre muzică și zgomot este că sunetele muzicale sunt organizate în tipare care au tonuri și ritm, în timp ce zgomotul reprezinta doar sunete aleatoare, dezorganizate. Urechea umană poate detecta o serie de frecvențe. Există frecvențe prea mici pentru a fi detectate, dar pot fi auzite și de alte creaturi, cum ar fi balenele, și există frecvențe prea mari pentru a fi auzite, cum ar fi cele produse de lilieci. Înălțimea este gradul de creştere sau de scădere a unei note muzicale. Sunetele sunt date de vibrațiile coardelor (produse cu un arcuș, prin ciupire sau prin lovire). Frecvența de oscilație a unei coarde, care determină înalțimea sunetului, este dat de trei factori: lungimea coardei, greutatea coardei pe unitatea de lungime și tensiunea din coarde. Se consideră o coardă de lungime l, fixată la ambele capete. Daca ea este ciupită, se vor propaga vibrații transversale de-a lungul corzii; aceste perturbații se reflectă pe capetele fixe și se formează astfel o undă staționară. Modurile proprii de vibrații ale corzii sunt astfel excitate și aceste vibrații dau naștere unor unde longitudinale în aerul înconjurător care le transmite până la urechile noastre ca un sunet muzical. Tonul unui instrument cu coarde depinde de tensiune și lungimea corzii. În majoritatea instrumentelor cu coarde, tonul devine mai mare atunci când jucătorul își apropie mâna de partea inferioară a coardei, ceea ce face ca zona vibratoră să fie mai scurtă. Instrumentele de suflat funcționează folosind coloane vibrante de aer care amplifică un sunet inițial. Sunetul unui instrument de percuție provine din lovirea a două lucruri împreună. Ele pot fi cel mai simplu tip de instrument, deoarece de obicei sunt necesare foarte puține părți pentru a produce un sunet amplificat. Oamenii de știință au făcut niște tobe din butoaie vechi. Când a fost lovit, pielea tamburului a vibrat și a fost apoi amplificată de butoi pentru a scoate un sunet.

Instrumentele muzicale pot fi acustice, când sunetele sunt direct generate, sau electrice, când sunt folosite cu un amplificator de sunet. Într-un instrument muzical tradițional, sunetul este produs de vibrația părților sale mecanice. Într-un instrument virtual, vibrația este descrisă prin funcții în timp, cunoscute ca semnale, care exprimă variația timpului de presiune acustică. Pentru a construi un instrument muzical tradițional, este suficient să construim un instrument care să exploateze unul din multele mecanisme fizice pentru producerea vibrațiilor. În cazul instrumentelor muzicale virtuale, în schimb, obiectivul este de a utiliza calcule adecvate pentru a genera o funcție de timp mai abstractă, reprezentând semnalul acustic. Pentru a face acest lucru, este necesar să se determine o reprezentare simplificată, abstractă a modului de producere a sunetului, cunoscut sub numele de model de sunet. Modelul de sunet descrie deci o clasă de sunete prin ecuații matematice care pot fi apoi transformate într-o procedură care generează sunete printr-un algoritm de programare. Prin modificarea parametrilor modelului, se obțin toate sunetele posibile ale clasei identificate de model. .

Fiecare instrument produce o anumită vibrație caracteristică. Vibrațiile călătoresc prin aer sub forma undelor sonore care ajung la urechile noastre, dandu-ne posibilitatea să identificăm instrumentul chiar și dacă nu îl vedem. Un diapazon scoate un sunet pur, vibrând regulat într-o formă curbată. O vioară generează un sunet voios și o unda sonoră cu forme ascuțite. Flautul produce un sunet tandru, adevărat, și o formă relativ curbată. Diapazonul, vioara, și flautul, cantă toate aceeași notă, de aceea, distanța dintre punctele înalte ale undei este aceeași pentru fiecare undă. Un gong nu vibrează într-un șablon obișnuit ca celelalte trei instrumente. Forma undei este ascuțită și liberă, iar înălțimea sa nu este, în general, recunoscută.

II. Modele matematice

1. Modelul undelor sinusoidale



Este relevantă proprietatea matematică a unei unde sinusoidale pure, aceasta fiind soluția generală a ecuației diferențiale de ordinul doi pentru o mișcare armonică simplă. Orice obiect care este supus unei forțe de întoarcere proporțional cu deplasarea sa dintr-o anumită locație vibrează ca o undă sinusoidală. Frecvența este determinată de constanta proporționalității. Revenind la urechea umană, membrana bazilară din interiorul cohleei din ureche este elastic, deci orice punct dat poate fi descris prin această ecuație diferențială de ordinul doi, cu o constantă de proporționalitate care depinde de locația de-a lungul membranei. Rezultatul este că urechea acționează ca un analizator armonic. Dacă un sunet de intrare poate fi reprezentat ca o sumă a anumitor unde sinusoidale, atunci punctele corespunzătoare de pe membrana bazilară vor vibra, iar asta se va traduce într-un stimul trimis la creier.

Ecuaţie:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -ku$$

Vom rezolva această ecuație înmulțind totul cu dt^2, apoi vom trece totul în partea stângă, rezultând următoarea ecuație:

$$u'' + ku = 0$$

$$(\boldsymbol{Ecuatie\ diferentiala\ de\ ordin\ 2, superior\ liniara\ cu\ coeficienti\ constanti})$$

Vom nota u' = λ şi va rezulta : $\lambda^2 + k = 0$, $k > 0 \Rightarrow \lambda = \pm i\sqrt{k}$ cu soluțiile:

$$y_1(t) = \cos t\sqrt{k}$$
$$y_2(t) = -\sin t\sqrt{k}$$

De unde: $u(t; A, B) = A\cos t\sqrt{k} + B\sin t\sqrt{k}$

Notam $\frac{A}{B} = \text{tg}\,\emptyset = \frac{\sin\emptyset}{\cos\emptyset}$

⇨ $u(t; A, B) = \frac{B}{\cos\emptyset}(\sin\emptyset\cos t\sqrt{k} + \cos\emptyset\sin t\sqrt{k} = \frac{B}{\cos\emptyset}\sin(t\sqrt{k} + \emptyset)$

Ecuația diferențială de mai sus reprezintă ceea ce se întâmplă atunci când un obiect este supus unei forțe către o poziție de echilibru, mărimea forței fiind proporțională cu distanța de echilibru. În cazul urechii umane, ecuația diferențială de mai sus poate fi luată ca o apropiere strânsă la ecuația de mișcare a unui anumit punct de pe membrana bazilară sau de oriunde de-a lungul lanțului de transmisie între aerul exterior și cohlee. Dacă un sunet de intrare poate fi reprezentat ca o sumă a anumitor unde sinusoidale, atunci punctele corespunzătoare de pe membrana bazilară vor vibra, iar asta se va traduce într-un stimul trimis la creier.

Mişcarea armonică

Ecuaţie:

$$F = -ku$$

Aici, k este doar constanta proporționalității. Legile de mişcare ale lui Newton ne dau ecuația:

$$F = ma,$$

unde $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{d^2y}}{\boldsymbol{dt^2}}$ este accelerația particulei și t reprezintă timpul. Combinând aceste ecuații, obținem ecuația diferențială de ordinul doi

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{ku}{m} = 0$$

Cum $\frac{d^2y}{dt^2} = y'' \Rightarrow y'' + \frac{ky}{m} = 0$

$$(\boldsymbol{Ecuatie\ diferentiala\ de\ ordin\ 2, superior\ liniara\ cu\ coeficienti\ constanti})$$

Vom nota $u' = \lambda \Rightarrow \lambda^2 + \frac{k}{m} = 0, k > 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$

- $u_1(t) = cost\sqrt{\frac{k}{m}}$
- $u_2(t) = -\sin t\sqrt{\frac{k}{m}}$

$$u(t; A, B) = Acost\sqrt{\frac{k}{m}} + Bsint\sqrt{\frac{k}{m}}$$

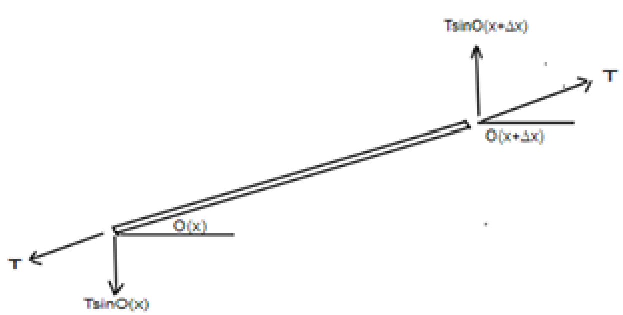
Notam $\frac{A}{B} = tg\emptyset = \frac{\sin\emptyset}{\cos\emptyset}$

$$u(t; A, B) = \frac{B}{\cos\emptyset}(\sin\emptyset\cos t\sqrt{\frac{k}{m}} + \cos\emptyset\sin t\sqrt{\frac{k}{m}}) = \sin t\sqrt{\frac{k}{m}} + \emptyset$$

Faptul că acestea sunt soluțiile acestei ecuații diferențiale este explicația de ce unda sinusoidală, și nu o altă undă care oscilează periodic, stă la baza analizei armonice a undelor periodice. Căci aceasta este ecuația diferențială care guvernează mişcarea oricărui punct particular al membranei bazilare din cohleă şi deci guvernează percepția umană a sunetului.

2. Modelul ecuaţiei de undă pentru corzi vibrante

În această secțiune, luăm în considerare relevanța seriei Fourier pentru vibrația unei coarde închisa la ambele capete. Pentru a face o analiză mai precisă, trebuie să considerăm deplasarea u ca o funcție atât a timpului t, cât și a poziției x de-a lungul șirului. Deoarece u este considerată ca o funcție a două variabile, ecuațiile corespunzătoare sunt scrise în termeni de derivate parțiale. Ecuația care descrie vibrația unei corzi se numește ecuația de undă într-o singură dimensiune, pe care o dezvoltăm acum. Această ecuație presupune că deplasarea corzii se face astfel încât panta sa în orice punct de-a lungul lungimii sale în orice moment este mică.



T – tensiunea corzii (măsurată în newtoni , kg m/s^2)

ρ − densitatea liniară a corzii

În poziția x de-a lungul șirului, unghiul θ(x) dintre coardă și orizontal va satisface tg θ (x) = ∂u∂x. Pe un segment mic de coardă de la x la x + Δx, componenta verticală de forță la capătul stâng va fi −Tsinθ(x), iar la capătul drept va fi Tsinθ(x + Δx). Cu condiția ca θ(x) să fie mic, sinθ(x) și tgθ(x) sunt aproximativ egale. Deci, diferența de componente verticale de forță între cele două capete ale segmentului va fi aproximativ:

$$Ttg\theta(x+\Delta x) - Ttg\theta(x) = T\left(\frac{\partial u(x+\Delta x)}{\partial x} - \frac{\partial u(x)}{\partial x}\right) =$$

$$= T\Delta x \frac{\frac{\partial u(x+\Delta x)}{\partial x} - \frac{\partial u(x)}{\partial x}}{\Delta x} \approx T\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Masa segmentului de coardă va fi de aproximativ ρΔx. Deci, legea lui Newton (F = ma) pentru accelerare $a = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ dă:

$$T\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx (\rho\Delta x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad /: \Delta x \neq 0$$

$$T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Cu alte cuvinte, atâta timp cât θ (x) nu devine niciodată mare, mișcarea coardei este determinată în esență de ecuația de undă:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ , c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}\ (1)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ , c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

$$Not\breve{a}m\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Delta u(x,t)$$

$$=> \ -c^2\Delta u(x,t) + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0, c \neq 0, x \subseteq \Omega$$

$$\begin{cases} u(x,0) = \alpha(x), \forall x \in \Omega \\ u(x,t_0) = \beta(x), \forall x \in \Omega \\ u(x,t) = \gamma(x,t), \forall x \in \partial\Omega, t \in [0,t_0] \end{cases}$$

$$\gamma(x,t) = \varphi(x,t) = \frac{\beta(x)t}{t_0} + \frac{\alpha(x)(t_0 - t)}{t_0}, x \in \partial\Omega, \forall t \in [0,t_0]$$

$$u -> \ u - \varphi = \tilde{\upsilon}$$

$$-c^2\Delta\tilde{\upsilon}(x,t) + \frac{\partial^2\tilde{\upsilon}}{\partial t^2} + f(x,t) = 0$$

$$c^2\Delta\tilde{\upsilon}(x,t) - \frac{\partial^2\tilde{\upsilon}}{\partial t^2} = f(x,t)$$

$$\begin{cases} \tilde{\upsilon}(x,0) = 0, x \in \Omega \\ \tilde{\upsilon}(x,t_0) = 0, x \in \Omega \\ \tilde{\upsilon}(x,t) = \tilde{v}(x.t), x \in \partial\Omega, \forall t \in [0,t_0] \end{cases}$$

$$\tilde{\upsilon}(x,t) = u_0(x,t) + \hat{u}(x,t)$$

$$c^2\Delta u_0(x,t) - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = 0$$

$$\begin{cases} u_0(x,0) = 0, \forall x \in \Omega, \forall x \in \partial\Omega, t \in [0,t_0] \\ u_0(x,t_0) = 0, \forall x \in \Omega, \forall x \in \partial\Omega, t \in [0,t_0] \\ u_0(x,t) = 0 \end{cases}$$

$$u_0(x,t) = X(x)W(t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = XW'', \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''W$$

$$\frac{1}{c^2}XW'' = X''W \ /: XW \neq 0 => \ \frac{1}{c^2}\frac{W''}{W} = \frac{X''}{X}$$

$$T'' = \frac{d^2T}{dt^2}, X'' = \frac{d^2X}{dx^2}$$

$$\frac{1}{c^2T}\frac{d^2T}{dt^2} = \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}$$

$$Notăm\ \frac{d^2T}{dt^2}\frac{1}{T} = -\omega^2 \Rightarrow \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} = -p^2$$

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -p^2 / * X \Rightarrow \frac{d^2X}{dx^2} = -p^2X \Rightarrow X'' = -p^2X$$

$$\lambda^2 + p^2 = 0\ (Cazul\ rădăcinii\ complexe\ simple)$$

$$\lambda_{1,2} = \pm pi \Rightarrow X(x, C_1; C_2) = C_1cos(px) + C_2sin(px)$$

$$W'' + \omega^2W = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -\omega^2 \Rightarrow W(t, C_7, C_8) = C_3cos(\omega t) + C_4sin(\omega t) \Rightarrow$$

$$u_0(x,t) = \{C_1cos(px) + C_2sin(px)\}\{C_3cos(\omega t) + C_4sin(\omega t)\}$$

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{kn}X_k(x)W_n(t)$$

$$c^2\Delta\hat{u} - \frac{\partial^2\hat{u}}{\partial t^2} = f(x,t)$$

$$\begin{cases} \hat{u}(x,0) = 0, \forall x \in \Omega \\ \hat{u}(x,t_0) = 0, \forall x \in \Omega \\ \hat{u}(x,t) = \tilde{v}(x,t), \forall x \in \partial\Omega, t \in [0,t_0] \end{cases}$$

$$\hat{u}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} b_{kn}(t)X_k(x)W_n(t)$$

$$Notăm\ X_k(x) = g_k(x)$$

Înlocuind în ecuație obținem:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c^2b_{kn}(t)\Delta g_k(x)W_n(t) - \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} g_k(x)(b_{kn}(t)W(t))'' = f$$

$$\begin{aligned}(b_{kn}(t)W_l''(t)) &= (b'_{kn}(t)\,W_l(t) + b_{kn}(t)W_l'(t))' \\ &= b_{kn}''(t)_{kn}\,W_l(t) + b'_{kn}(t)\,W_l'(t) + b'_{kn}(t)\,W_l'(t)) + b_{kn}(t)W_l''(t) \\ &= b''_{kn}(t)\,W_l(t)) + 2b'_{kn}(t)\,W_l'(t) + b_{kn}(t)W_l''(t)\end{aligned}$$

$$Cum\ \Delta\hat{u} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial t^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c^2b_{kn}(t)\Delta g_k(x)W_l(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} b_{kn}(t)g_k(x)W_l''(t)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(b_{kn}(t)g_k(x)W_l''(t)) - \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} g_k(x)(b''_{kn}\,(t)W_l(t) + 2b'_{kn}(t)W_l{}'(t)$$
$$+\, b_{kn}(t)W''{}_l(t)) = f(x,t)$$

$$=> -\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} g_k(x)(b''_{kn}(t)\,W_l(t) + 2b'_{kn}(t)W_l'(t)) = f(x,t)$$

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(f_{kn}(t)g_k(x)W_l(t))$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} g_k(x)(b''_{kn}(t)\,W_l(t)\ -\ 2b'_{kn}(t)W_l'(t)) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(f_{kn}(t)g_k(x)W_l(t))$$

$$=> g_k(x)(b''_{kn}(t)\,W_l(t)\ -\ 2b'_{kn}(t)W_l'(t)) = f_{kn}(t)g_k(x)W_l(t)$$

$$=> b''_{kn}(t)\,W_l(t)\ -\ 2b'_{kn}(t)W_l'(t) = f_{kn}(t)W_l(t)\ /\!:W_l(t)$$

$$b''_{kn}(t)\ -\ 2b'_{kn}(t)\frac{W_l'(t)}{W_l(t)} = f_{kn}(t)$$

$$Notăm\ b'_{kn}(t) = h_{kn}(t) =>\ h'_{kn}(t)\ -\ 2h_{kn}(t)W_l{}'(t) = f_{kn}(t)\ /\!:W_l(t) \neq 0$$

$$h'_{kn}(t) = \frac{W_l'(t)}{W_l(t)}h_{kn}(t) + f_{kn}(t)$$

$$f_{kn}(t)\ = \frac{1}{2}\int_0^a \int_0^{t_0}((f(x)X_k(x)W_l(t))dt)dx$$

$$f(x,t) = -c^2\Delta\varphi + \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{\beta(x)t}{t_0} + \frac{\alpha(x)(t_0 -\ t)}{t_0}$$

$$f_{kn}(t)\ = \frac{1}{2}\int_0^a \int_0^{t0}((\frac{1}{t_0}\beta(x,y,z)t + \alpha(x,y,z)(t_0\ -\ t))C_1cos(px) + C_2sin(px))(C_3cos(\omega t)$$
$$+\, C_4sin(\omega t))dt)dx$$

Pentru a determina $u(x,t)$ am apelat la Matlab, care dispune de o multitudine de funcţii menite să calculeze ecuaţii mai complexe, ca şi exemplul de faţă.

Am folosit următorul cod pentru rezolvarea ecuaţiei corespunătoare lui u, în interiorul căruia am definit variabilele, funcţiile α *şi* β, am aflat constantele C1, C2 pentru funcţia X(x) şi constantele C3, C4 pentru funcţia W(t) cu ajutorul funcţiei solve folosind condiţiile iniţiale ale ecuaţiilor, apoi, cu ajutorul funcţiei subs am introdus valorile C1, C2, C3 şi C4 în ecuaţiile corespunzătoare. Am utilizat funcţia int din Matlab (funcţie specifică pentru calculul integralelor) pentru a determina $f_{kn}(t) = \frac{1}{2}\int_0^a \int_0^{t_0}((f(x)X_k(x)W_l(t))dt)dx$. Expresia obţinută în simbolic este foarte mare pentru a fi pusă în documentaţie. Rezultatul functiei fkn(t) va fi înlocuit în ecuaţia $h'_{kn}(t) = \frac{W_l'(t)}{W_l(t)} h_{kn}(t) + f_{kn}(t)$ şi va fi calculat $h'_{kn}(t)$ aplicând formula pentru ecuaţii de forma: $x' = p(t) * x + q(t), cu\ x(t;C) = e^{\int p(t)dt}(C + \int q(t)e^{-\int p(t)dt}dt)$. Pentru a putea afla $b_{kn}(t)$ se va mai integra odată. Această integrală este una mai complexă. Funcţiile $b_{kn}(t)$, $X_k(x)$ *şi* $W_n(t)$ fiind cunoscute, vor putea fi înlocuite în ecuaţia $\hat{u}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} b_{kn}(t)X_k(x)W_n(t)$ şi astfel va fi calculat $\hat{u}(x,t)$. Căutând u_0 şi impunând condiţiile vor fi determinaţi coeficienţii C_{kn}, apoi înlocuiţi în formula $u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{kn}X_k(x)W_n(t)$ va fi calculat $u_0(x,t)$. Cum $\tilde{u}(x,t) = u_0(x,t) + \hat{u}(x,t)$ şi $u(x,t) = \frac{\beta(x)t}{t_0} + \frac{\alpha(x)(t_0-t)}{t_0} + \tilde{u}(x,t)$, poate fi determinat $u(x,t)$.

```
syms x t C1 C2 C3 C4 X(x) W(t) k n coef hkn(t) C bkn(t)
coefIntegralaSimplificata = zeros(4,4);
coefFuncW = sym(zeros(1,4));
coefFuncX = sym(zeros(1,4));
b = sym(zeros(1,4));
t0 = 5;
a = 2;
alfa = exp(x);
beta = x^2;
rezF = beta*t/t0 + alfa*(t0-t)/t0;
```

```
X(x) = C1*cos(k*x) + C2*sin(k*x);
Dx = diff(X);
rezX = solve([X(x), X(0)== 1, Dx(0)== 1], [x, C1, C2]);
C1solX = rezX.C1;
C2solX = rezX.C2;
funcX = subs(subs(X(x), C1, C1solX), C2, C2solX);

W(t) = C3*cos(n*t) + C4*sin(n*t);
Dt = diff(W);
rezW = solve([W(t), W(0)== 1, Dt(0)== 1], [t, C3, C4]);
C3solW = rezW.C3;
C4solW = rezW.C4;
funcW = subs(subs(W(t), C3, C3solW), C4, C4solW);
display(funcW);

inmultXW = rezF.*funcX.*funcW;
calculIntegrala = (int(int(inmultXW,t,0,t0),x,0,a));
integralaSimplificata = simplify(calculIntegrala);

for i = 1:4
   for j = 1:4
      auxIntegralaSimplificata = round(double(simplify(subs(integralaSimplificata,{k,n}, {i,
j}))),2);
      coefIntegralaSimplificata(i,j) = auxIntegralaSimplificata(1,1);
   end
end
display(coefIntegralaSimplificata(1,1));
for j = 1:4
    auxFuncW = simplify(subs(funcW,n,j));
    coefFuncW(j) = auxFuncW(j);
```

```
end
for i = 1:4
    auxFuncX = simplify(subs(funcX,k,i));
    coefFuncX(i) = auxFuncX(i);
end
sumU2 = 0;
for i = 1:4
   for j = 1:4
       hkn(t) = exp(2*int(diff(coefFuncW(1,j))/coefFuncW(1,j)))*(C +
int(coefIntegralaSimplificata(1,j)*exp(int(-diff(coefFuncW(1,j))/coefFuncW(1,j)))));
       hkn(t) = subs(hkn(t),C,2);
       display(hkn);
       bkn(t) = int(hkn(t));
       b(i,j) = bkn(t);
   end
end
display(b);
```

3. Modelul ecuaţiei de undă tridimensională

Acest model este caracteristic membranei şi corpurilor vibrante.

O membrană plană este un corp elastic bidimensional, de forma unei suprafeţe plane în stare nedeformată, delimitată de o curbă plană închisă numită contur, care poate prelua numai eforturi de întindere.

Soluțiile ecuației de undă cu condiții de delimitare au multe aplicații practice în inginerie și fizică. Paradigma acestor probleme de manual este aceea care descrie vibrațiile unei membrane circulare (forma unui tambur) care necesită soluții ale ecuației de undă într-un mediu tridimensional.

Ecuaţie:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2})$$

$$Notăm\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u(x,y,z,t)$$

$$-c^2\Delta u(x,y,z,t) + \frac{\partial^2 u}{\partial t} = 0\ , c \neq 0\ , (x,y,z) \in \Omega \subseteq R^3, t \in [0, t_0]$$

$$\begin{cases} u(x,y,z,0) = \alpha(x,y,z), \forall (x,y,z) \in \Omega \\ u(x,y,z,t_0) = \beta(x,y,z), \forall (x,y,z) \in \Omega \\ u(x,y,z,t) = \gamma(x,y,z,t), \forall (x,y,z,t), \forall (x,y,z) \in \Omega, t \in [0, t_0] \end{cases}$$

u(x,y,z,t) = v(x,y,z)w(t)

$$-c^2\Delta v(x,y,z)w(t) + v(x,y,z)w'(t) = 0\ /\!:\ v(x,y,z)w(t) \neq 0$$

$$-c^2\frac{\Delta v}{v}(x,y,z) + \frac{w''(t)}{w(t)} = 0$$

$$\frac{w''(t)}{w(t)} = c^2\frac{\Delta v(x,y,z)}{v(x,y,z)}\ =\ -a^2, \forall t \in (0, t_0), \forall (x,y,z) \in \Omega$$

$$\frac{w''(t)}{w(t)} = a^2 => \ w''(t) + a^2 w(t) = 0, \forall t \in (0, t_0)$$

$$\begin{cases} u(x,y,z,0) = \alpha(x,y,z), \forall(x,y,z) \in \Omega \\ u(x,y,z,t_0) = \beta(x,y,z), \forall(x,y,z) \in \Omega \\ u(x,y,z,t) = \gamma(x,y,z,t), \forall(x,y,z,t), \forall(x,y,z) \in \Omega, t \in [0,t_0] \end{cases}$$

$$\text{Luăm } \varphi(x,y,z,t) = \frac{\alpha(x,y,z)(t_{0-t})}{t_0}(t_0 - t) + \frac{\beta(x,y,z)t}{t_0}, \forall(x,y,z) \in \Omega, \forall t \in [0,t_0]$$

$$\gamma(x,y,z,t) = \varphi(x,y,z,t) = \frac{\alpha(x,y,z)(t_0 - t)}{t_0} + \frac{\beta(x,y,z)t}{t_0}$$

$$u -> \ u - \varphi = \tilde{\upsilon} => u = \varphi + \tilde{\upsilon} = -c^2\Delta\tilde{\upsilon}(x,y,z,t) + \frac{\partial^2\tilde{\upsilon}}{\partial t^2} - c^2\Delta\varphi(x,y,z,t) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$

$$Notăm\ c^2\Delta\varphi(x,y,z,t) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = f(x,y,z,t)$$

$$-c^2\Delta\tilde{\upsilon}(x,y,z,t) + \frac{\partial^2\tilde{\upsilon}}{\partial t^2} + f(x,y,z,t) = 0$$

$$c^2\Delta\tilde{\upsilon}(x,y,z,t) - \frac{\partial^2\tilde{\upsilon}}{\partial t^2} = f(x,y,z,t)$$

$$\begin{cases} \tilde{\upsilon}(x,y,z,0) = 0, \forall(x,y,z) \in \Omega \\ \tilde{\upsilon}(x,y,z,t_0) = 0 \\ \tilde{\upsilon}(x,y,z,t) = \tilde{v}(x,y,z,t), \forall(x,y,z) \in \partial\Omega, \forall t \in [0,t_0] \end{cases}$$

$$\tilde{\upsilon}(x,y,z,t) = u_0(x,y,z,t) + \hat{u}(x,y,z,t)$$

$$c^2\Delta u_0 - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = 0$$

$$\begin{cases} u_0(x,y,z,0) = 0, \forall(x,y,z) \in \Omega, \forall(x,y,z) \in \partial\Omega, t \in [0,t_0] \\ u_0(x,y,z,t_0) = 0, \forall(x,y,z) \in \Omega, \forall(x,y,z) \in \partial\Omega, t \in [0,t_0] \\ u_0(x,y,z,t) = 0 \end{cases}$$

$$u_0(x,y,z,t) = v(x,y,z)T(t) = X(x)Y(y)Z(z)W(t)$$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2}\right) /: c^2 \ (1.1)$$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = XYZW'', \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = X''YZW, \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = XY''ZW, \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = XYZ''W$$

$$(1.1) \ => \ \frac{1}{c^2}XYZW' = X''YZW + XY''ZW + XYZ''W \ /: XYZW$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{W''}{W} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z}$$

$$W'' = \frac{d^2W}{dt^2}, X'' = \frac{d^2X}{dx^2}, Y'' = \frac{d^2Y}{dy^2}, Z'' = \frac{d^2Z}{dz^2} \ => \ \frac{1}{c^2W}\frac{d^2W}{dt^2} = \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}$$

$$Notăm \ \frac{d^2W}{Wdt^2} => \ \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = -\frac{\omega^2}{c^2}$$

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = \ -\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} - \frac{\omega^2}{c^2} = -n^2 \ (1.2)$$

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} - n^2 = -p^2 \Rightarrow \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = p^2 - n^2 \Rightarrow \frac{d^2Y}{dy^2} = Y(p^2 - n^2)$$

$$=> \ \frac{d^2Y}{dy^2} + Y(n^2 - p^2) = 0 => \ \frac{d^2Y}{dy^2} + q^2Y \ (n^2 - p^2 = q^2)$$

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -p^2 \ \ => \ \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + p^2 = 0 \ /* X \ \ => \ \frac{d^2X}{dx^2} + p^2X$$

$$(1.2) => \frac{d^2Z}{dz^2} = Z(n^2 - \frac{\omega^2}{c^2}) => \frac{d^2Z}{dz^2} + (\frac{\omega^2}{c^2} - n^2)Z = 0 => \frac{d^2Z}{dz^2} + r^2Z = 0(r^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - n^2)$$

$$n^2 - p^2 = q^2, r^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - n^2 => p^2 + q^2 + r^2 = 0$$

$$\frac{d^2X}{dx^2} = -p^2 \ /* X => \frac{d^2X}{dx^2} = -p^2X => X'' = -p^2X$$

$$\lambda^2 + p^2 = 0 \ (Cazul \ rădăcinii \ complexe \ simple)$$

$$\lambda_{1,2} = \pm pi => X(x, C_1; C_2) = C_1cos(px) + C_2sin(px)$$

$$Analog \ Y(y, C_3, C_4) = C_3cos(qy) + C_4sin(qy), Z(z, C_5, C_6) = C_5cos(rz) + C_6sin(rz)$$

$$W'' + \omega^2W = 0 => \lambda^2 = -\omega^2 => W(t, C_7, C_8) = C_7cos(\omega t) + C_8sin(\omega t) \ \ =>$$

$$u_0(x,y,z,t) = \{C_1 cos(px) + C_2 sin(px)\}\{C_3 cos(qy) + C_4 sin(qy)\}\{C_5 cos(rz) + C_6 sin(rz)\}\{C_7 cos(\omega t) + C_8 sin(\omega t)\}$$

$$u_0(x,y,z,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} C_{knml} X_k(x) Y_n(y) Z_m(z) W_l(t)$$

$$c^2 \Delta \hat{u} - \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} = f(x,y,z,t)$$

$$\begin{cases} \hat{u}(x,y,z,0) = 0, \forall (x,y,z) \in \Omega \\ \hat{u}(x,y,z,t_0) = 0, \forall (x,y,z) \in \Omega \\ \hat{u}(x,y,z,t) = \tilde{v}(x,y,z,t), \forall (x,y,z,) \in \partial\Omega, t \in [0,t_0] \end{cases}$$

$$\hat{u}(x,y,z,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} (b_{knml}(t) X_k(x) Y_n(y) Z_m(z) W_l(t))$$

$$Not\breve{a}m\ X_k(x) Y_n(y) Z_m(z) = g(x,y,z)$$

$$\hat{I}nlocuind\ \hat{i}n\ ecua\c{t}ie\ ob\c{t}inem:$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} (c^2 b_{knml}(t) \Delta g_{knm}(x,y,z) W_l(t)) - \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} (g_{knm}(x,y,z)(b_{knml} W_l(t))'') = f$$

$$\begin{aligned} (b_{knml}(t) W_l(t))'' &= (b'_{knml}(t) W_l(t) + b_{knml}(t) W_l{}'(t))' \\ &= b''_{knml}(t) W_l(t) + b'_{knml}(t) W_l{}'(t) + b'_{knml}(t)\, W_l{}'(t)) + b_{knml}(t) W_l{}''(t) \\ &= b''_{knml}(t)\, W_l(t)) + 2b'_{knml}(t)\, W_l{}'(t) + b_{knml} W_l{}''(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cum\ \Delta\hat{u} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} c^2 b_{knml}(t) \Delta g_{knm}(x,y,z) W_l(t) \\ = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} b_{knml}(t) g_{knm}(x,y,z) W_l''(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} (b_{knml}(t) g_{knm}(x,y,z) W_l''(t)) \\ &\quad - \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} g_{knm}(x,y,z)(b''_{knml}\ (t) W_l(t) + 2b'_{knml}(t) W_l{}'(t) \\ &\quad + b_{knml}(t) W''{}_l(t)) = f(x,y,z,t) \end{aligned}$$

$$=> -\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} g_{knm}(x,y,z)(b''_{knml}(t)\, W_l(t) + 2b'_{knml}(t)W_l'(t)) = f(x,y,z,t)$$

$$f(x,y,z,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}(f_{knml}(t)g_{knm}(x,y,z)W_l(t))$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} g_{knm}(x,y,z)(b''_{knml}(t)\, W_l(t) \; - \; 2b'_{knml}(t)W_l'(t))$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}(f_{knml}(t)g_{knm}(x,y,z)W_l(t))$$

$$=> g_{knm}(x,y,z)(b''_{knml}(t)\, W_l(t) \; - \; 2b'_{knml}(t)W'_l(t)) = f_{knml}(t)g_{knm}(x,y,z)W_l(t)$$

$$=> b''_{knml}(t)\, W_l(t) \; - \; 2b'_{knml}(t)W'_l(t) = f_{knml}(t)W_l(t) \;/\!: W_l(t)$$

$$b''_{knml}(t) \; - \; 2b'_{knml}(t)\frac{W_l'(t)}{W_l(t)} = f_{knml}(t)$$

$$Not\breve{a}m\; b'_{knml}(t) = h_{knml}(t) => \; h'_{knml}(t) \; - \; 2h_{knml}(t)W_l{}'(t) = f_{knml}(t) \;/\!: W_l(t) \neq 0$$

$$h'_{knml}(t) = \frac{W_l'(t)}{W_l(t)}h_{knml}(t) + f_{knml}(t)$$

$$f_{knml}(t) \; = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b\int_0^c\int_0^{t_0}((((f(x,y,z,t)X_k(x)Y_n(y)Z_m(z)W_l(t))dt)dz)dy)dx$$

$$f(x,y,z,t) = -c^2\Delta\varphi + \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{\beta(x,y,z)t}{t_0} + \frac{\alpha(x,y,z)(t_0 - \; t)}{t_0}$$

$$\begin{aligned} f_{knml}(t) \; = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b\int_0^c\int_0^{t_0}((((\frac{1}{t_0}\beta(x,y,z)t + \alpha(x,y,z)(t_0 \; - \; t))C_1 cos(px) \\ + C_2 sin(px))(C_3 cos(qy) + C_4 sin(qy))(C_5 cos(rz) + C_6 sin(rz))(C_7 cos(\omega t) \\ + C_8 sin(\omega t))dt)dz)dy)dx \end{aligned}$$

Pentru a determina $u(x,t)$, am apelat la Matlab, care dispune de o multitudine de funcţii menite să calculeze ecuaţii mai complexe, ca şi exemplul de faţă.

Am folosit următorul cod pentru rezolvarea ecuaţiei corespunătoare lui u , în interiorul căruia am definit variabilele, funcţiile α *şi* β, am aflat constantele C1, C2 pentru funcţia X(x), constantele C3, C4 pentru funcţia Y(y), constantele C5, C6 pentru funcţia Z(z) şi constantele C7,C8 pentru funcţia W(t) cu ajutorul funcţiei solve folosind condiţiile iniţiale ale ecuaţiilor, apoi, cu ajutorul funcţiei subs am introdus valorile C1, C2, C3 şi C4 în ecuaţiile corespunzătoare. Am utilizat funcţia int din Matlab (funcţie specifică pentru calculul integralelor) pentru a determina $f_{knml}(t) \ = \frac{1}{2}\int_0^a \int_0^b \int_0^c \int_0^{t_0}((((f(x,y,z,t)X_k(x)Y_n(y)Z_m(z)W_l(t))dt)dz)dy)dx.$

Expresia obţinută în simbolic este foarte mare pentru a fi pusă în documentaţie. Rezultatul functiei fknml(t) va fi înlocuit în ecuaţia $h'_{knml}(t) = \frac{W_l'(t)}{W_l(t)}h_{knml}(t) + f_{knml}(t)$ şi astfel va putea fi calculat $h'_{knml}(t)$ aplicând formula pentru ecuaţii de forma: $x' = p(t) * x + q(t), cu\ x(t;C) = e^{\int p(t)dt}(C + \int q(t)e^{-\int p(t)dt}dt)$. Pentru a afla $b_{knml}(t)$ vom mai integra odată. Această integrală este una mai complexă.

Funcţiile $b_{knml}(t),\ X_k(x), Y_n(y), Z_m(z)\ și\ W_l(t)$ fiind cunoscute, vor putea fi înlocuite în ecuaţia $\hat{u}(x,y,z,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}(b_{knml}(t)X_k(x)Y_n(y)Z_m(z)W_l(t))$ şi astfel va putea fi calculat $\hat{u}(x,y,z,t)$. Căutând u_0 şi impunând condiţiile pot fi determinaţi coeficienţii C_{knml}, apoi înlocuiţi în formula $u_0(x,y,z,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} C_{knml}X_k(x)Y_n(y)Z_m(z)W_l(t)$ va fi aflat $u_0(x,y,z,t)$. Cum $\tilde{u}(x,y,z,t) = u_0(x,y,z,t) + \hat{u}(x,y,z,t)$ şi $u(x,y,z,t) = \frac{\beta(x,y,z)t}{t_0} + \frac{\alpha(x,y,z)(t_0-t)}{t_0} + \tilde{u}(x,y,z,t)$, poate fi determinat $u(x,y,z,t)$.

```
syms x y z t C1 C2 C3 C4 C5 C6 C7 C8 X(x) Y(y) Z(z) W(t) k n m l t coef hknml(t) C bknml(t) b
coefIntegralaSimplificata = zeros(4,4,4,4);
coefFuncW = sym(zeros(1,4));
coefFuncX = sym(zeros(1,4));
coefFuncY = sym(zeros(1,4));
coefFuncZ = sym(zeros(1,4));
bVal = sym(zeros(1,4,4,4));
t0 = 5;
```

```
a = 2;
b = 1;
c = 3;
alfa = exp(x) + 2*y + 2*z;
beta = x^2 + 3*y + 2*z;
rezF = beta*t/t0 + alfa*(t0-t)/t0;

X(x) = C1*cos(k*x) + C2*sin(k*x);
Dx = diff(X);
rezX = solve([X(x), X(0)== 1, Dx(0)== 1], [x, C1, C2]);
C1solX = rezX.C1;
C2solX = rezX.C2;
funcX = subs(subs(X(x), C1, C1solX), C2, C2solX);

Y(y) = C3*cos(n*y) + C4*sin(n*y);
Dy = diff(Y);
rezY = solve([Y(y), Y(0)== 1, Dy(0)== 1], [y, C3, C4]);
C3solY = rezY.C3;
C4solY = rezY.C4;
funcY = subs(subs(Y(y), C3, C3solY), C4, C4solY);



Z(z) = C5*cos(m*z) + C6*sin(m*z);
Dz = diff(Z);
rezZ = solve([Z(z), Z(0)== 1, Dz(0)== 1], [z, C5, C6]);
C5solZ = rezZ.C5;
C6solZ = rezZ.C6;
funcZ = subs(subs(Z(z), C5, C5solZ), C6, C6solZ);

W(t) = C7*cos(l*t) + C8*sin(l*t);
Dt = diff(W);
```

```
rezW = solve([W(t), W(0)== 1, Dt(0)== 1], [t, C7, C8]);
C7solW = rezW.C7;
C8solW = rezW.C8;
funcW = subs(subs(W(t), C7, C7solW), C8, C8solW);
inmultXYZW = rezF.*funcX.*funcY.*funcZ.*funcW;
calculIntegrala = (int(int(int(int(inmultXYZW,t,0,t0),z,0,c),y,0,b),x,0,a));
integralaSimplificata = simplify(calculIntegrala);

for i = 1:4
   for j = 1:4
      for s = 1:4
         for q = 1:4
            auxIntegralaSimplificata  =round(double(simplify(subs(integralaSimplificata,{k,n,m,l},
{i, j, s, q}))),2);
            coefIntegralaSimplificata(i,j,a,b) = auxIntegralaSimplificata(1,1,1,1);
         end
      end
   end
end
display(coefIntegralaSimplificata);

for i = 1:4
    auxFuncX = simplify(subs(funcX,k,i));
    coefFuncX(i) = auxFuncX(i);
end
for i = 1:4
    auxFuncY = simplify(subs(funcY,n,i));
    coefFuncY(i) = auxFuncY(i);
end

for i = 1:4
```

```
    auxFuncZ = simplify(subs(funcZ,m,i));
    coefFuncZ(i) = auxFuncZ(i);
end
for i = 1:4
    auxFuncW = simplify(subs(funcW,l,i));
    coefFuncW(i) = auxFuncW(i);
end
for i = 1:4
   for j = 1:4
      for s = 1:4
         for q = 1:4
            hknml(t)                =                exp(2*int(diff(coefFuncW(1,q))/coefFuncW(1,q)))*(C+
int(coefIntegralaSimplificata(1,q)*exp(int(-diff(coefFuncW(1,q))/coefFuncW(1,q)))));
            hknml(t) = subs(hknml(t),C,2);
            display(hknml);
            bknml(t) = int(hknml(t));
            bVal(i,j,s,q) = bknml(t);
         end
      end
   end
end
display(bVal);
```

III. Implementarea modelelor matematice în Matlab

1. Implementarea ecuaţiei undelor sinusoidale

Implementarea ecuaţiei undelor sinusoidale am realizat-o în Matlab în următorii paşi:

1. Definirea funcţiei u, care depinde de t
2. Definirea ecuaţiei ce urmează a fi rezolvată

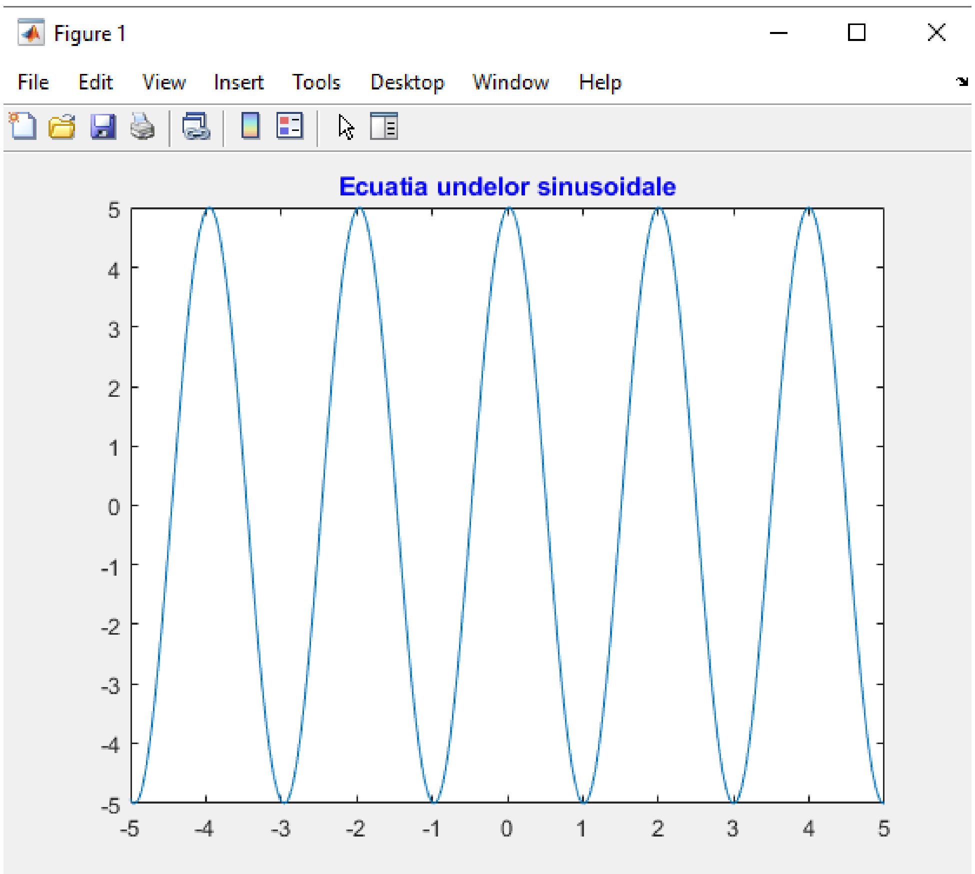
3. Definirea condiţiilor iniţiale utilizate în rezolvarea ecuaţiei: u(0)=5, Du(0)=1
4. Utilizarea funcţiei dsolve pentru rezolvarea ecuaţiei, care foloseşte condiţiile iniţiale descrise mai sus
5. Reprezentarea grafică a rezultatului funcţiei

Cod MATLAB:

```
clc
close all;
clear all;
figure
%declararea variabilelor

%rezultatul ecuatiei u, care depinde de t
syms u(t)
%variabila utilizata pentru conditiile initiale
syms b
%k constanta ecuatiei
k = 10;
b = 10;
%ecuatia ce trebuie rezolvata
%d^2u/dt^2 = -k*u, with k = 10
eqn = diff(u,t,2) == -k*u;
%ecuatia diferentiala du/dt
Du = diff(u,t);
%conditiile initiale ale ecuatiei
cond = [u(0)==b, Du(0)==1];
%rezolvarea equatiei
uSol(t) = dsolve(eqn,cond);
%uSol(t) = C1*cos(t*sqrt(k)+C2*sin(t*sqrt(k)), with
clf;
```

```
%reprezentarea grafica a rezultatelor ecuatiei
fplot(uSol);
title('Ecuatia undelor sinusoidale','Color', 'b');
shg;
pause(0.01);
shg;
```



2. Implementarea ecuaţiei de undă într-o dimensiune

În ecuația de undă dimensională, există o singură variabilă independentă în spațiu. În acest caz, presupunem că x este variabila independentă în spațiu în direcția orizontală. În plus, ecuația de undă depinde și de timpul t. Deplasarea u = u (t, x) este soluția ecuației de undă și are o singură componentă care depinde de poziția x și de timp. În acest caz, presupunem că mișcarea (deplasarea) are loc de-a lungul direcției verticale. Putem vizualiza această soluție ca o coardă care se mișcă în sus și în jos.

Ecuația de undă într-o dimensiune spațială poate fi scrisă astfel:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ (ec. 1)$$

Unde c este viteza cu care se propagă unda. Pentru acest caz, presupunem că lungimea corzii este 1, adică: $0 \leq x \leq 1$. Pentru a găsi o soluție unică, trebuie să impunem condiții inițiale și condiții la limită.

Condiţii iniţiale

Pentru a impune condiții inițiale, definim soluția u la momentul inițial t = 0 pentru fiecare poziție x. Deoarece ecuația de undă are 2 derivate parțiale în timp, trebuie să definim nu numai deplasarea, ci și derivata acesteia cu privire la timp. În acest caz, presupunem că atât deplasarea, cât și derivata ei, în ceea ce privește timpul, sunt zero la t = 0 pentru fiecare poziție x

$$\begin{cases} u = 0, t = 0, 0 \leq x \leq 1 \ (ec. 2a) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0, t = 0, 0 \leq x \leq 1 \ (ec. 2b) \end{cases}$$

De asemenea, trebuie să definim condiții la limită, ceea ce înseamnă că soluția sau derivata sa trebuie să fie cunoscută la granițele domeniului pentru o perioadă mai mare decât zero. În acest caz limitele sunt capetele corzii, la stânga x = 0 și la dreapta x = 1. Pentru acest caz, definim deplasarea la ambele capete ale corzii. Pentru capătul stâng, x = 0, definim soluția ca o funcție care variază în timp, iar pentru capătul drept, x = 1, presupunem că acest capăt este fix și nu se mișcă pentru nici o perioadă mai mare de zero:

$$u = 3sin(2\pi f t)e^{-t}, t > 0, x = 0(ec. 3a)u = 0, t > 0, x = 1ec. 3b$$

Discretizarea ecuației de undă: diferența finită

Ecuația de undă este o PDE analitică continuă, în care x poate lua valori infinite între 0 și 1, în mod similar, poate lua valori infinite mai mari decât zero. Pentru a rezolva ecuația de undă prin metode numerice, în acest caz diferența finită, trebuie să luăm valori discrete ale lui x și t:

De exemplu, putem lua nx puncte pentru puncte x și nt puncte pentru t, unde nx și nt sunt numere întregi pozitive. Atunci valorile pe care le iau x și t sunt:

$$x = \{0, \Delta x, 2\Delta x, \ldots\ldots, (nx-1)\Delta x\}$$

$$t = \{0, \Delta t, 2\Delta t, \ldots\ldots, (nt-1)\Delta t\}$$

$$unde\ \Delta x = L(nx\ -\ 1)\ și\ \Delta t = T(nt\ -\ 1).$$

Pentru acest caz L = 1 și T este timpul total de simulare. Atunci când rezolvăm ecuația de undă, rezolvăm doar pentru punctele definite x și t. Pentru a aproxima ecuația de undă, vom folosi expansiunea seriei Taylor. Seria Taylor este o modalitate de aproximare a valorii unei funcții la un moment dat, folosind valoarea pe care o ia într-un punct din apropiere.

Discretizare spațială:

În acest caz, folosim seria Taylor pentru a aproxima deplasarea u la x +/- Δx știind valoarea acesteia la x. Presupunând că $\Delta x \geq 0$, seria Taylor pentru expansiunile anterior și posterior pentru un timp dat sunt:

$$u^i(x+\Delta x) = u^i(x) + \frac{\partial u^i(x)}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u^i(x)}{\partial x^2}\Delta x^2 + O(\Delta x^3)$$

$$u^i(x\ -\ \Delta x) = u^i(x) + \frac{\partial u^i(x)}{\partial x}(-\ \Delta x) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u^i(x)}{\partial x^2}(-\ \Delta x^2) + O(\Delta x^3)$$

Însumăm cele două ecuaţii şi îl găsim pe $\frac{\partial u^i(x)}{\partial x^2}$:

$$\frac{\partial^2 u^i(x)}{\partial x^2} = \frac{u^i(x+\Delta x)\ -\ 2u^i(x) + u^i(x\ -\ \Delta x)}{\Delta x^2}$$

Pentru a simplifica nomenclatura, înlocuim x cu contorul j, apoi x + Δx devine j + 1, adică poziția următoare și x - Δx devine j - 1, adică poziția anterioară. Atunci formula de mai sus poate fi exprimată ca:

$$\frac{\partial^2 {u^i}_j}{\partial x^2} = \frac{{u^i}_{j+1}\ -\ 2{u^i}_j + {u^i}_{j-1}}{\Delta x^2}\ (ec.4)$$

Discretizarea timpului:

În mod similar, folosim expansiunea din seria Taylor anterior și posterior pentru a găsi a doua derivată cu privire la timpul t pentru o anumită poziție j:

$$\frac{\partial^2 u_j(t)}{\partial t^2} = \frac{u_j(t+\Delta t) - 2u_j(t) + u_j(t - \Delta t)}{\Delta t^2}$$

Înlocuim t cu contorul i, apoi t + Δt devine i + 1, adică timpul următor și t - Δt devine i - 1, adică timpul anterior. Atunci formula de mai sus poate fi exprimată ca:

$$\frac{\partial^2 u^i{}_j}{\partial t^2} = \frac{u^{i+1}{}_j - 2u^i{}_j + u^{i-1}{}_j}{\Delta t^2} \ (ec.5)$$

Înlocuind ambele discretizări în relaţia noastră obţinem:

$$\frac{u^{i+1}{}_j - 2u^i{}_j + u^{i-1}{}_j}{\Delta t^2} = \frac{u^i{}_{j+1} - 2u^i{}_j + u^i{}_{j-1}}{\Delta x^2} \ (ec.6)$$

În acest caz, folosim o metodă explicită pentru a rezolva u la un pas nou i + 1, cunoscând soluția pentru etapa anterioară i. Apoi, putem scrie ecuaţia ca:

$$u^{i+1}{}_j = 2u^i{}_j - u^{i-1}{}_j + r(u^i{}_{j+1} - 2u^i{}_j + u^i{}_{j-1}) \ (ec.7), r = (c\frac{\Delta t}{\Delta x})^2$$

Condiții inițiale discrete

Doar condiţiile iniţiale care corespund derivatului u în ceea ce privește timpul trebuie discretizat. Folosim seria Taylor anterior și posterior după cum urmează:

$$u_j(t+\Delta t) = u(t) + \frac{\partial u_j(t)}{\partial t}\Delta t$$

$$u_j(t - \Delta t) = u(t) + \frac{\partial u_j(t)}{\partial t}(-\Delta t)$$

Scăzând termenii de mai sus, obținem că:

$$\frac{\partial u_j(t)}{\partial t} = \frac{u_j(t+\Delta t) - u_j(t - \Delta t)}{2\Delta t}$$

Conform ec. 2 b când t = 0 această condiţie iniţială este egală cu zero, atunci:

$$\frac{\partial u_j(t)}{\partial t} = \frac{u_j(t+\Delta t) - u_j(t - \Delta t)}{2\Delta t} = 0 \ => \ u_j(t+\Delta t) = u_j(t - \Delta t)$$

Și folosind contorul i + 1 pentru a înlocui t + Δt și i-1 pentru a înlocui t-Δt putem scrie ecuația de mai sus ca:

$$u_j{}^{i-1} = u_j{}^{i+1} \ (ec.8)$$

Un exemplu concret pentru această ecuaţie o reprezintă instrumentul muzical drâmba, ce are un capăt fix si celălalt lăsat să vibreze.

Implementarea în MATLAB

Scopul general este de a găsi soluția u. Strategia propusă este de a defini u ca o matrice cu atâtea coloane cât pozițiile discrete și atâtea rânduri cât timpurile discrete și să găsim soluțiile corespunzătoare.

Exemplu: Să definim dx ca pas de poziție și dt ca pas de timp. Să definim, de asemenea, nt ca numărul total de linii și nx ca număr total de coloane, apoi:

linia 1 va corespunde soluției la t = 0,

linia 2 la t = dt,

linia 3 la t = 2dt

...

linia i la t = (i-1) dt

...

și linia nt la t = (nt-1) dt;

Similar:

coloana 1 va corespunde soluției la x = 0,

coloana 2 la x = dx,

coloana 3 la x = 2dx,

...

coloana j la x = (j-1) dx

...

și coloana nx la x = (nx-1) dx;

Pentru a calcula soluția pentru fiecare timp și poziție discretă, vom folosi o versiune modificată a ecuației 7.

$u(i,j) = 2u(i-1,j) - u(i-2,j) + r[u(i-1,j+1) - 2u(i-1,j) + u(i-1,j-1)]\ (ec. 9)$,

$unde\ \ r = (c\frac{\Delta t}{\Delta x})^2$.

Condiţii la limită (frontieră)

Condițiile la limită sunt definite la ambele capete ale corzii:

- Capătul drept

Conform (ec. 3b), la x = 1, pentru orice t > 0, u = 0. Soluția pentru x = 1 corespunde ultimei coloane a matricei noastre de soluții u. Pentru a pune în aplicare această condiţie, trebuie să setăm toate liniile acestei ultime coloane la zero, cu excepția primei linii, deoarece prima coloană corespunde cu t = 0. Totuși, acest pas a fost deja făcut când am inițializat matricea u cu zerouri.

- Capătul stâng

Conform (ec. 3a), la x = 0 pentru orice t > 0, deplasarea este egală cu o funcție dependentă de timp u = 3sin (2πft)e^{-t}. În matricea noastră u, trebuie să setăm soluția pentru prima coloană, deoarece această coloană corespunde lui x = 0. Mai mult, această soluție variază în timp, ceea ce înseamnă că valoarea lui u va fi diferită pe fiecare linie. Nu vom seta nicio valoare pentru primul rând, deoarece acest rând corespunde lui t = 0. Aceasă condiţie la limită poate fi setată folosind o buclă for care începe de la linia 2 până la ultima linie a matricei u. Pentru fiecare linie, trebuie să calculăm timpul discret corespunzător t și apoi să evaluăm soluția folosind (ec. 3a).

Condiţii iniţiale

Avem 2 condiţii iniţiale. Conform (ec. 2a), soluția la t = 0 pentru orice x este u = 0. Aceasta înseamnă că prima linie a matricei u ar trebui să fie setată la zero. Totuși, acest pas a fost deja făcut când am definit matricea soluției și am inițializat-o cu zerouri. A doua condiţie iniţială (ec. 2b) va fi implementată direct în prima etapă. Soluția pentru prima etapă, t = dt, corespunde celei de-a doua linii a matricei u, i = 2. Apoi folosind (ec. 9) obținem:

$$u(2,j) = 2u(1,j)\ -\ u(0,j) + r[u(1,j+1)\ -\ 2u(1,j) + u(1,j-1)]\ (ec. 10)$$

Observăm că în ecuația de mai sus avem termenul u (0, j) în partea dreaptă. Cu toate acestea, contorul i din MATLAB este definit de la 1 nu 0. Pentru a rezolva această problemă, vom folosi (ec. 8). Această ecuație este valabilă la t = 0, corespunzând primei linii a matricii u, i = 1. Apoi (ec. 8) devine:

$$u(0, j) = u(2, j)\ (ec. 11)$$

În final, înlocuind (ec. 11) în (ec. 10) obținem:

$$u(2, j) = u(1, j) + \frac{1}{2}r[u(1, j + 1) - 2u(1, j) + u(1, j - 1)]\ (ec. 12)$$

Cod Matlab

```
% lungimea corzii
L = 1;
% viteza undelor
c = 1;
% frecventa undei de intrare
f = 5;
pi = 3.14;
% timpul total de simulare
time = 4;
% pas în pozitie
dx = 0.005;
% pasul de timp
dt = 0.005;
% numarul total de coloane
nx = ceil(L/dx)+1;
% numarul total de linii
nt = ceil(time/dt)+1;
% initializarea matricii u cu zerouri
u = zeros(nt,nx);
r = (c*dt/dx)^2;
```

```
% implementarea conditiilor la limita pentru x = 1
for i = 2:nt
  u(i,1) = 3*sin(2*pi*f*(i-1)*dt)*exp((i-1)*dt);
end

% implementarea ec. 12
for j = 2:nx-1
   %solutie pentru prima etapa
  u(2,j) = u(1,j)+1/2*r*(u(1,j+1) - 2*u(1,j)+ u(1,j-1));
end

% popularea solutiilor matricii(implementarea ec. 9)
for i = 3:nt-1
    for j= 2:nx-1
     u(i,j) = 2*u(i-1,j)-u(i-2,j)+r*((u(i-1,j+1) - 2*u(i-1,j)+ u(i-1,j-1)));
    end
end

% reprezentarea grafica
[nt,nx] = size(u);
figure
hold on;
for i = 3 : nt
    plot(u(i,:));
    title('Ecuatia de unda unidimensionala','Color', 'b');
    axis([0 nx -5 5]);
    pause(0.0100);
    hold off;
end
```

Reprezentare grafică

De notat este faptul că, pe măsură ce coarda este apăsată mai tare, undele sonore încep să fie mai puternice, astfel sunetul este mai proeminent. Acest lucru poate fi observat în figurile următoare. Prima figură reprezintă începerea interpretării la instrumentul muzical analizat.

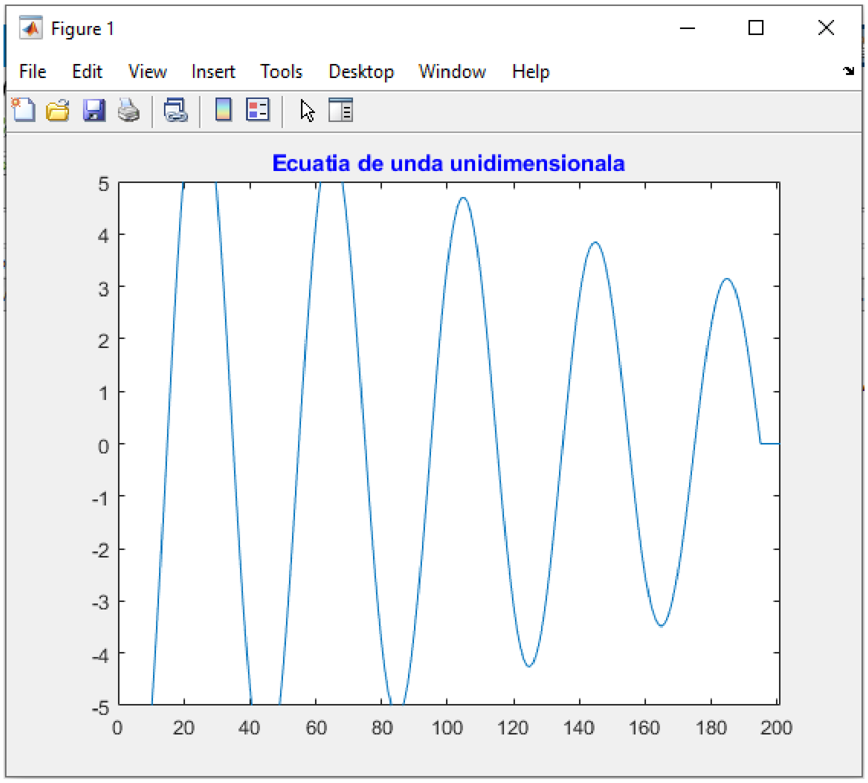


Figura de mai jos prezintă creşterea intensităţii sunetului.

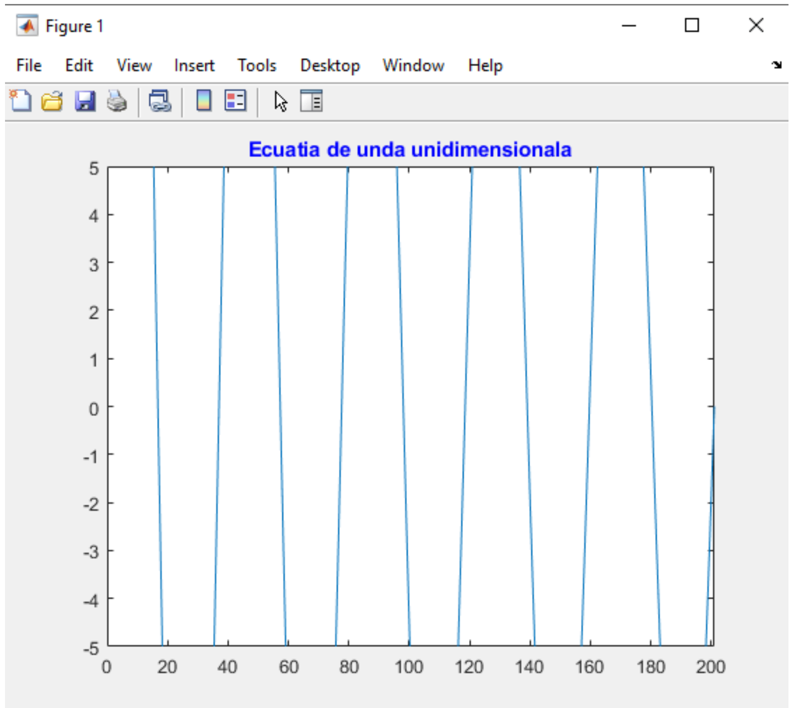
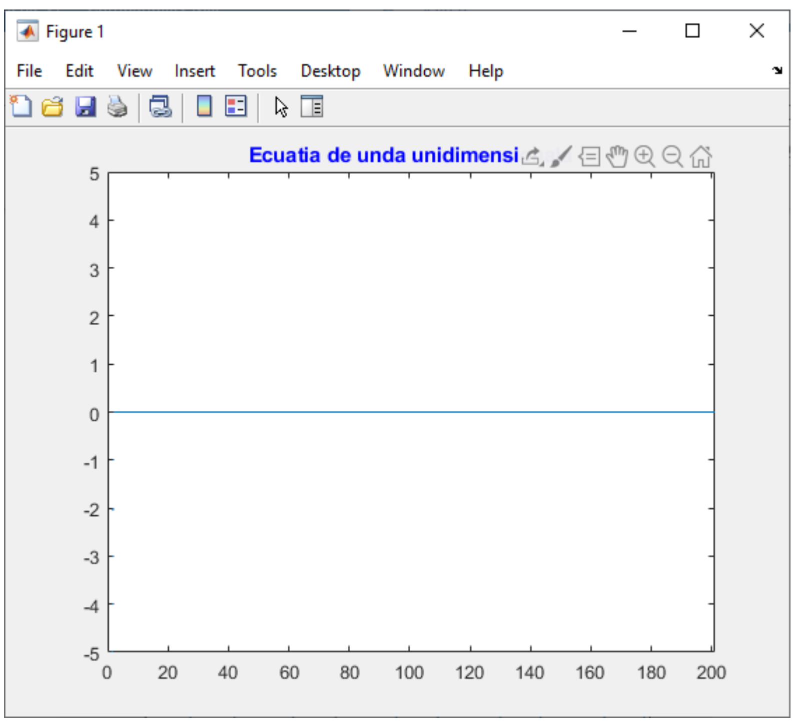


Figura de mai jos reprezintă momentul în care instrumentistul se opreşte din cântat şi se poate observa că undele sonore revin la forma inițială.



Concluzii

Această temă a fost abordată, într-un mod teoretic, atât prin descrierea elementelor relative la sunete şi a modelelor implementate, cât şi prin rezolvarea matematică a ecuaţiilor corespunzătoare fiecărui model descris în parte, dar şi din punct de vedere practice, prin implementarea în mediul Matlab a modelelor prezentate.

Din punct de vedere al informaticianului, contează foarte mult mediul de programare în care se face implementarea. Lucrarea de faţă pune în evidenţă faptul că Matlab este un mediu potrivit în acest sens.

În ceea ce priveşte sunetele emise de instrumente muzicale, perceperea lor este posibilă graţie vibraţiilor produse de aerul din preajma respectivelor instrumente, prin rezonanța acustică. Aceasta din urmă se realizează fie prin vibrația unor corzi (frecate, lovite sau ciupite), fie prin antrenarea unor coloane de aer, ori prin vibrația unor elemente instrumentale supuse percuției. Astfel se produce un fenomen fizico-acustic sau electro-acustic. Iată de ce, este foarte important studiul acusticii diverselor instrumente muzicale care au la bază vibrarea unor componente precum: corzi, membrane, corpuri bune propagatoare de sunete. Fără un asemenea studiu, calitatea instrumentelor muzicale nu ar putea fi stabilită. Ca atare, lucrarea de faţă face o analiză a sunetelor produse de instrumentele muzicale pe bază de corzi, membrane sau corpuri vibrante, precum şi a modului de percepere a respectivelor sunete de către urechea umană, folosind prioritar mediul Matlab.

Lucrarea subliniază faptul că este posibilă şi absolut necesară o colaborare fructuoasă între un instrumentist interpret şi un informatician. Exemplar în acest sens este cazul unui violonist care doreşte să-şi achiziţioneze o vioară performantă şi care întrevede posibilitatea colaborării cu un specialist în matematică şi informatică. Instrumentistul în cauză poate fi ajutat de către informatician să facă alegerea potrivită a instrumentului dorit, prin realizarea unei analize ştiinţifice a sunetelor produse de respectivul instrument în mediul în care va fi utilizat.

Dată fiind importanţa prezentei lucrări, este de netăgăduit faptul că tema ar merita continuată şi în cadrul unui program de masterat, dacă nu cumva chiar de doctorat.

Bibliografie

[1] G. Assayag, H. G. Feichtinger, and J. F. Rodrigues (eds.), Mathematics and music, a Diderot mathematical forum, Springer-Verlag, Berlin/New York, 2002. 288 pages, in print. ISBN 3540437274.

[2] John Backus, The acoustical foundations of music, W. W. Norton & Co., 1969.Reprinted 1977. 384 pages, in print. ISBN 0393090965.

[3] Scott Beall, Functional melodies: finding mathematical relationships in music, Key Curriculum Press, 2000. 170 pages, in print. ISBN 1559533781.

[4] Arthur H. Benade, Fundamentals of musical acoustics, Oxford Univ. Press, 1976. Reprinted by Dover, 1990. 596 pages, in print. ISBN 048626484X.

[5] Richard E. Berg and David G. Stork, The physics of sound, Prentice-Hall, 1982. Second edition, 1995. 416 pages, in print. ISBN 0131830473.

[6] Murray Campbell and Clive Greated, The musician's guide to acoustics, OUP, 1986, reprinted 1998. 613 pages, in print. ISBN 0198165056.

[7] David Colton, Partial differential equations, an introduction, Random House, 1988. 308 pages. ISBN 0394358279.

[8] Perry R. Cook (ed.), Music, cognition, and computerized sound. An introduction to psychoacoustics, MIT Press, 1999. 392 pages, in print. ISBN 0262032562.

[9] David H. Cope, New directions in music, Wm. C. Brown Publishers, Dubuque, Iowa, Fifth edition, 1989. Sixth edition, Waveland Press, 1998. 439 pages, in print. ISBN 0697033422.

[10] Malcolm J. Crocker (ed.), Handbook of acoustics, Wiley Interscience, 1998. 1461 pages, large format, in print. ISBN 047125293X.

[11] Diana Deutsch (ed.), The psychology of music, Academic Press, 1982; 2nd ed., 1999. 807 pages, in print. ISBN 0122135652 (pbk), 0122135644 (hbk).

[12] William C. Elmore and Mark A. Heald, Physics of waves, McGraw-Hill, 1969. Reprinted by Dover, 1985. 477 pages, in print. ISBN 0486649261.

[13] Thomas Donahue, A guide to musical temperament, The Scarecrow Press, Inc., 2005. 229 pages, in print. ISBN 0810854384.

[14] William C. Elmore and Mark A. Heald, Physics of waves, McGraw-Hill, 1969. Reprinted by Dover, 1985. 477 pages, in print. ISBN 0486649261.

[15] Neville H. Fletcher and Thomas D. Rossing, The physics of musical instruments, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1991. Second edition (hbk only), 1999. 775 pages, in print. ISBN 3540941517 (pbk), 0387983740 (hbk).

[16] *** Dave Benson_Music_A Mathematical Offering

[17] *** Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, 10th Edition

[18] *** Fourier Series, https://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_series, 2019.

[19] *** Giovanni DePoli_Mathematical Models of the Sound of Music

[20] *** Gustavo_Diaz_Jerez_DMA_Thesis_Algoritmhmic Music

[21] *** Matlab documentation https://www.mathworks.com/

[22] *** Musical instruments https://en.wikipedia.org/wiki/Musical_instrument

[23] *** Wave equation in 1D https://wiki.seg.org/wiki/Solving_the_wave_equation_in_1D