Muitas situações e decisões do dia a dia dependem do reconhecimento de uma relação entre duas grandezas e da análise de como a variação de uma delas influencia na variação da outra (Por exemplo, a distância percorrida e o tempo, a área de um polígono e o comprimento de seus lados, a absorção de um medicamento pelo organismo humano e o tempo desde a sua ingestão, valor da conta de energia elétrica e consumo, quantidade de vereadores e a população etc). O tema funções trata da relação entre grandezas, sendo uma ferramenta matemática importante para descrever, analisar e tomar decisões em diversas situações. Além disso, na Matemática como ciência, função é considerado um conceito fundamental e elementar para que outros conceitos e resultados da própria Matemática sejam estabelecidos. Objetivos do capítulo:

EM11MT06

Compreender função como uma relação de dependência entre duas variáveis, as ideias de domínio, contradomínio e imagem, e suas representações algébricas e gráficas e utilizá- las para analisar, interpretar e resolver problemas em contextos diversos, inclusive fenômenos naturais, sociais e de outras áreas.

Espera-se também que o estudante compreenda função como uma relação unívoca entre duas variáveis.

Destaca-se que, segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), no nono ano do Ensino Fundamental, é esperado que o estudante tenha alcançado a habilidade: (EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis. O foco nessa habilidade é retomado neste capítulo com os propósitos de revisão e de aprofundamento, visando aos objetivos indicados acima.

O capítulo tem início com a seção Explorando, que propõe três atividades que envolvem aspectos fundamentais da definição de função e algumas formas de representação. Serão tratadas a relação de dependência, a existência de correspondência e a univocidade. Essas atividades têm também o objetivo de resgatar conceitos já tratados no Ensino Fundamental, tais como reconhecimento de padrões, leitura e interpretação de gráficos. Na primeiro Organizando as Ideias desse capítulo, o conceito de função é formalizado e, em seguida, na seção Praticando, é explorado a partir de atividades variadas. A primeira parte do capítulo termina com uma seção de Aprofundando, na qual são propostos problemas e situações em que os conceitos e as ideias já tratados são explorados em contextos mais desafiadores. Na segunda parte, em uma nova seção Explorando, a representação gráfica de função é abordada. Algumas das atividades já apresentadas anteriormente são revisitadas, e são propostas outras nas quais discutem-se vantagens e desvantagens da representação gráfica quando comparada com tabelas, a localização de pontos no plano cartesiano a partir de situações reais e a representação gráfica para pares ordenados com coordenada não numérica. Em seguida, em um segundo Organizando as ideias, o conceito de representação gráfica é formalizado, para logo após ser explorado em outra seção Praticando. O capítulo encerra com um Aprofundamento, no qual são propostas duas atividades que relacionam os conceitos apreendidos com problemas de Modelagem Matemática, e uma proposta de Projeto Aplicado, em que os estudantes são estimulados a construírem uma caixa de volume máximo.

Algumas observações:

- O conceito de função é apresentado e explorado de maneira contextualizada e geral, isto é, não restrito apenas a conjuntos numéricos. Assim, busca-se ressaltar que a importância desse conceito transcende a Matemática alcançando outras áreas do conhecimento.
- Reconhecer a dependência, observando como a variação de uma ou mais grandezas afeta a variação de outras, é um objetivo. A partir dessse reconhecimento, sempre que possível, busca-se, usando linguagem matemática ou não, estabelecer uma maneira de descrever a relação observada.
- A univocidade como condição para que uma relação entre grandezas ou variáveis seja identificada como função é destacada desde as atividades iniciais.
  - As conversões entre representações algébrica e gráfica são de vital importância para a compreensão do conceito de função, amparando a análise e a interpretação das relações existentes entre as variáveis envolvidas.
- Incentive e conduza seus estudantes a expressarem seus raciocínios de maneira precisa, mesmo que seja apenas usando palavras, tanto de forma verbal como escrita.
- Ao criar suas próprias atividades, sugerimos que sejam evitadas as que envolvem cálculos algébricos exaustivos.
- Nas atividades extras que você venha a apresentar para seus estudantes, é importante estar atento para não reforçar a crença bastante comum de que relações entre grandezas são sempre proporcionais.

O que dizem as pesquisas sobre o tema?

A noção de função é considerada uma das mais importantes da matemática. Segundo Ponte [Ponte-1992], assim como o ponto, a reta e o plano são conceitos básicos da Geometria Euclidiana, o conceito de função tem um papel fundamental na Análise Matemática. Documentos oficiais como os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) e a (segunda versão da) Base Nacional Comum Curricular (BNCC) evidenciam a preocupação com tal conteúdo no Ensino Médio, trazendo inclusive sugestões no que diz respeito a sua abordagem.

Nessa etapa de escolaridade, merece especial destaque o estudo das funções por seu papel como modelo matemático para analisar e interpretar relações de dependência entre variáveis de duas grandezas em fenômenos do mundo natural ou social, incluindo os trabalhados em componentes de outras áreas de conhecimento[...] [BNCC-2016,p.576]_

O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. [PCNEM-2006, p.121]_

São muitos os relatos sobre as diversas dificuldades que os estudantes apresentam no processo de aprendizagem da noção de função. Sierpinska [Sierpinska-1992] chama atenção para alguns dos problemas mais comuns: fazer a ligação entre as diferentes representações (fórmulas, gráficos, diagramas, descrição por palavras); interpretar gráficos e manipular algebricamente, entre outros.

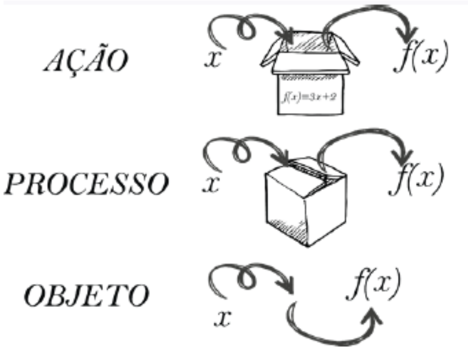
Neste ponto do desenvolvimento do seu aprendizado é muito comum o estudante fazer confusão entre os diferentes papéis que as variáveis (letras) representam nas expressões algébricas. Para Ursini [Ursini-et--al-2001], as distintas interpretações possíveis para a simbologia algébrica constituem aspectos que geram dificuldades adicionais a muitos estudantes.

Segundo Eisenberg [Eisenberg-1992], os estudantes têm uma forte tendência para pensar em funções algebricamente, em vez de visualmente, mesmo que a visualização possa ser extremamente útil. Se-

VER PÁGINA 102

gundo esse autor, os estudantes resistem às representações visuais porque o processamento visual requer habilidades de nível mais elevado do que o processamento analítico.

Jones [Jones-2006] chama atenção para três níveis de abstração nos quais é possível situar o entendimento do conceito de função: como ação, como processo e como objeto. O nível ação é aquele em que são conhecidas, todas as ações que devem ser tomadas para converter a variável independente x na sua imagem, por exemplo: tome x, primeiro eleve ao quadrado e então subtraia do seu dobro. Nesse nível de abstração, que é o mais simples entre os três, os procedimentos e algoritmos estão bem definidos. A ideia de função como processo está diretamente relacionada com o nível ação, no sentido de que a partir da variável x chega-se por um processo à variável y. Contudo nesse nível de abstração os procedimentos algorítmicos não são tão importantes como no nível anterior. Aqui as funções que não envolvem conjuntos numéricos fazem mais sentido, apoiadas pela ideia de correspondência entre conjuntos. Por exemplo, uma atividade que envolva uma tabela, sem especificar a expressão algébrica ou algoritmo que a gerou pode ser associada ao nível processo. Finalmente, o nível objeto é o mais abstrato dos três. Uma função nesse nível de abstração passa a ser considerada como parte de um universo de funções. Torna-se um elemento dentro de um conjunto. Nesse nível de compreensão, estão as operações com as funções: soma, produto, composição, derivada, integral etc.



Considerando essas pesquisas, procura-se, neste texto, não privilegiar o pensamento algébrico em detrimento da visualização, buscando alcançar os diferentes níveis de abstração indicados por Jones [Jones-2006].

Arranha-céu

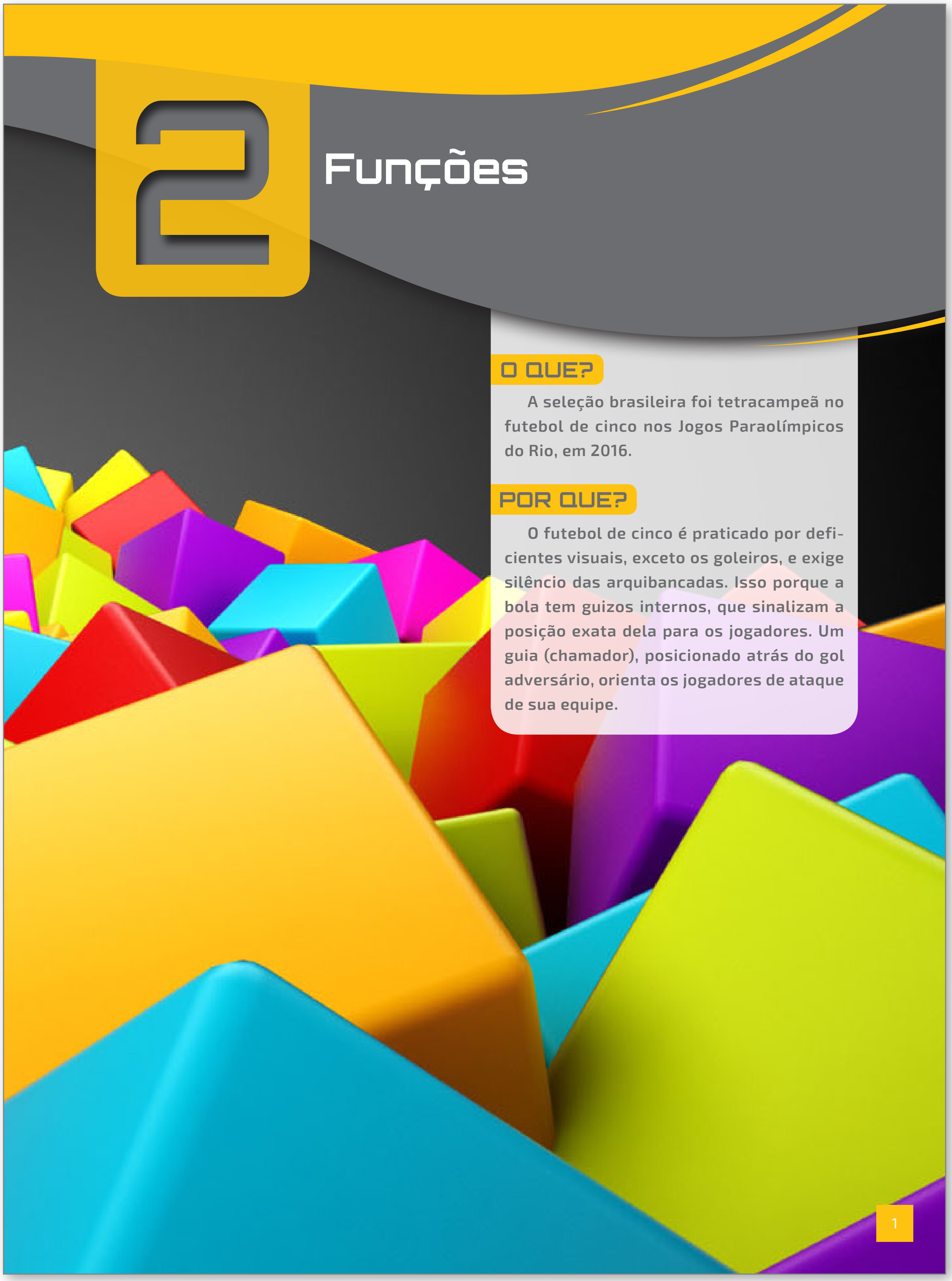
Objetivos específicos

Levar o estudante a:

- Reconhecer uma relação de dependência entre variáveis apresentada em forma de tabela.
- Interpretar tabela que representa relação de dependência entre variáveis.

Observações e recomendações

- Nível de abstração Processo.
- A escolha dessa atividade se apoia no fato de que os estudantes têm familiaridade com a noção de proporcionalidade,que é explorada, em álgebra e em geometria, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental.
- Deseja-se, entretanto, que os estudantes levem em conta o contexto do problema.



2 Funções

O QUE?

A seleção brasileira foi tetracampeã no futebol de cinco nos Jogos Paraolímpicos do Rio, em 2016.

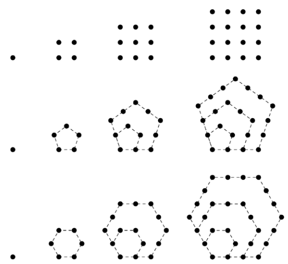
POR QUE?

O futebol de cinco é praticado por deficientes visuais, exceto os goleiros, e exige silêncio das arquibancadas. Isso porque a bola tem guizos internos, que sinalizam a posição exata dela para os jogadores. Um guia (chamador), posicionado atrás do gol adversário, orienta os jogadores de ataque de sua equipe.

1

EXERCÍCIOS

1 Assim como os números triangulares (ver *Atividade: Números triangulares*), fala-se nos números quadrados perfeitos, pentagonais, hexagonais, inspirados, respectivamente, pelas sequências abaixo:



a) Para cada uma destas sequências, represente as próximas duas figuras;

b) Escreva uma sequência de números que possa estar associada a cada sequência de figuras;

c) Descreva a regra de formação de cada uma dessas sequências de números.

2 Observe as duas sequências que se seguem:

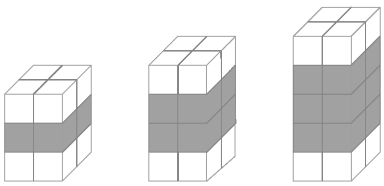
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, . . .

1000, 100, 10, . . .

a) Descreva, em palavras ou em linguagem simbólica, uma regra de formação que você percebe em cada uma das sequências apresentadas.

b) Baseado na regra que você identificou no item anterior, descubra qual é o 20º termo de cada uma das sequências anteriores.

3 Cada prisma obtém-se empilhando cubos do mesmo tamanho, brancos e cinzas, segundo uma regra sugerida na figura.



Prisma 1 Prisma 2 Prisma 3

a) Descreva, em palavras ou em linguagem simbólica, uma regra de formação sugerida pela figura.

b) Para construir o prisma 4 dessa sequência, segundo o padrão por você descrito, quantos cubos cinzas são necessários?

c) Justifique a afirmação: "O número total de cubos cinzas necessários para construir qualquer prisma desta sequência é par."

d) Segundo o padrão por você descrito, quantos cubos cinzas terá o prisma 200?

e) Explicite uma expressão numérica que permita determinar o número de cubos cinzas do Prisma *n* em função de *n*, isto é, uma expressão que de forma geral associe a ordem da figura à quantidade de cubos cinzas em sua composição.

f) Justifique novamente a afirmação do item (c), agora a partir da expressão que você explicitou no ítem anterior.

g) Se *x* representar o número total de cubos (brancos e cinzas) de um prisma desta sequência, qual das expressões seguintes representará o número de cubos cinzas desse prisma. Justifique sua escolha.

☐ $x - 8$ ☐ $x - 4$

☐ $2x - 4$ ☐ $4x$

4 Ao final de um treino para a prova de 100 metros rasos, uma corredora recebe de seu treinador a seguinte tabela com as marcas intermediárias da sua melhor corrida.

Tempo (s)	Distância (m)
5	25
10	50
15	75
20	100

Pluviometria no Sistema Cantareira

Objetivos específicos

Levar o estudante a:

- Interpretar representações gráficas de relações de dependência entre grandezas.
- Reconhecer uma relação de dependência entre grandezas a partir da sua representação gráfica.
- Reconhecer a univocidade em uma relação de dependência entre grandezas.

Observações e recomendações

- Nível de abstração Processo.
- Os valores apresentados no gráfico são estimativas. Na página http://www.nivelaguasaopaulo.com/ cantareira é possível ter acesso aos valores exatos para cada mês. No entanto, cabe observar que os dados do período apresentado na atividade (de 12/2013 a 11/2016) podem não estar mais disponíveis na página de referência. Você pode (e é interessante que o faça) modificar e adequar esta atividade usando dados atualizados do Sistema Cantareira ou substituindo esses dados por dados da região em que você leciona.
- No item (b), o objetivo é identificar o valor absoluto da diferença, não sendo importante se o valor é positivo ou negativo, ou seja, se choveu menos ou mais do que o esperado.

Respostas: Pluviometria no Sistema Cantareira

a) Há duas relações: uma envolvendo tempo e volume de chuva real e a outra tempo e o volume de chuva esperado.

b) De acordo com os dados apresentados no gráfico, a maior e a menor incidência de chuvas ocorreram em fevereiro de 2015 e em abril de 2016, respectivamente.

c) Em dezembro de 2013, janeiro e fevereiro de 2014, janeiro e fevereiro de 2015 e junho de 2016.

d) Sim, nos meses de abril e julho do ano de 2016.

e) Houve uma coincidência entre a quantidade de chuva esperada e a que realmente caiu sobre a região do Sistema Cantareira.

Números triangulares

Objetivos específicos

Levar o estudante a:

- Reconhecer a relação de dependência entre a ordem e os termos de uma sequência.
- Reconhecer, a partir de um padrão geométrico, os primeiros termos de uma sequência e ser capaz de, a partir do padrão identificado, inferir os próximos termos da sequência.
- Generalizar, ainda que em palavras, a determinação de um termo qualquer da sequência a partir da sua ordem, segundo um padrão identificado.

Observações e recomendações

- Nível de abstração Ação.
- Muito provavelmente os estudantes descreverão a sequência de formas diferentes, mas obtendo o mesmo resultado para o sexto, o sétimo e o oitavo números triangulares. Por exemplo, um estudante poderá dizer que, para identificar os números triangulares solicitados, "constrói" os triângulos "de cima para baixo". Já ouro pode argumentar que o faz "de baixo para cima". Outro ainda pode agumentar a partir da observação do padrão recursivo: "basta acrescentar uma linha ao último triângulo construído". Assim, como a resposta ao ítem (b) não é única, procure aproveitar e explorar as diferentes respostas na discussão com a turma: os resultados são os mesmos para essas diferentes formas de descrever a sequência? Por que? Por exemplo, "somar de cima para baixo" produz o mesmo resultado que "somar de baixo para cima", pois a adição é comutativa.
- Pela mesma razão apontada no ítem (b), a resposta do item (d) não é única.
- Não é objetivo, neste momento, que o estudante expresse a relação por meio da linguagem simbólica matemática, escrevendo, por exemplo, Tn = $T_{n-1} + n$, mas que seja matematicamente preciso em suas palavras, dizendo, por exemplo, que "o n-ésimo termo da sequência é obtido a partir do termo anterior acrescido de mais uma fileira com n" ou que "o n-ésimo triângulo da sequência é obtido a partir do triângulo anterior acrescido de mais uma fileira com n círculos, portanto, "o n-ésimo número triangular é obtido a partir do termo anterior acrescido de n".
- É possível que algum estudante descreva o n-ésimo número triangular como a soma dos primeiros n números naturais. Nesse caso, você pode mostrar que essa maneira de descrever o procedimento é equivalente à recursiva. Não apenas testando exemplos, mas sim fazendo uso da propriedade associativa da adição: seja qual for o n tem-se que

$$\begin{aligned} T_n &= 1 + 2 + ... + (n - 1) + n \\ &= [1 + 2 + ... + (n - 1)] + n \\ &= T_{n-1} + n. \end{aligned}$$

3 Funções

O QUE?

A seleção brasileira foi tetracampeã no futebol de cinco nos Jogos Paraolímpicos do Rio, em 2016.

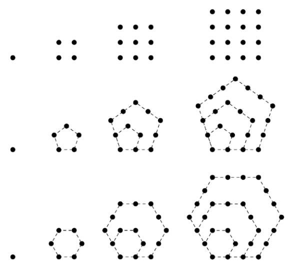
POR QUE?

O futebol de cinco é praticado por deficientes visuais, exceto os goleiros, e exige silêncio das arquibancadas. Isso porque a bola tem guizos internos, que sinalizam a posição exata dela para os jogadores. Um guia (chamador), posicionado atrás do gol adversário, orienta os jogadores de ataque de sua equipe.

1

EXERCÍCIOS

1 Assim como os números triangulares (ver *Atividade: Números triangulares*), fala-se nos números quadrados perfeitos, pentagonais, hexagonais, inspirados, respectivamente, pelas sequências abaixo:



a) Para cada uma destas sequências, represente as próximas duas figuras;

b) Escreva uma sequência de números que possa estar associada a cada sequência de figuras;

c) Descreva a regra de formação de cada uma dessas sequências de números.

2 Observe as duas sequências que se seguem:

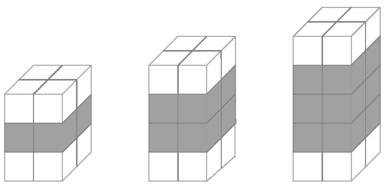
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, . . .

1000, 100, 10, . . .

a) Descreva, em palavras ou em linguagem simbólica, uma regra de formação que você percebe em cada uma das sequências apresentadas.

b) Baseado na regra que você identificou no item anterior, descubra qual é o 20º termo de cada uma das sequências anteriores.

3 Cada prisma obtém-se empilhando cubos do mesmo tamanho, brancos e cinzas, segundo uma regra sugerida na figura.



Prisma 1 Prisma 2 Prisma 3

a) Descreva, em palavras ou em linguagem simbólica, uma regra de formação sugerida pela figura.

b) Para construir o prisma 4 dessa sequência, segundo o padrão por você descrito, quantos cubos cinzas são necessários?

c) Justifique a afirmação: "O número total de cubos cinzas necessários para construir qualquer prisma desta sequência é par."

d) Segundo o padrão por você descrito, quantos cubos cinzas terá o prisma 200?

e) Explicite uma expressão numérica que permita determinar o número de cubos cinzas do Prisma *n* em função de *n*, isto é, uma expressão que de forma geral associe a ordem da figura à quantidade de cubos cinzas em sua composição.

f) Justifique novamente a afirmação do item (c), agora a partir da expressão que você explicitou no ítem anterior.

g) Se *x* representar o número total de cubos (brancos e cinzas) de um prisma desta sequência, qual das expressões seguintes representará o número de cubos cinzas desse prisma. Justifique sua escolha.

☐ x – 8 ☐ x – 4
☐ 2x – 4 ☐ 4x

4 Ao final de um treino para a prova de 100 metros rasos, uma corredora recebe de seu treinador a seguinte tabela com as marcas intermediárias da sua melhor corrida.

Tempo (s)	Distância (m)
5	25
10	50
15	75
20	100

Arranha-céu

Objetivos específicos

Levar o estudante a:

- Reconhecer uma relação de dependência entre variáveis apresentada em forma de tabela.
- Interpretar tabela que representa relação de dependência entre variáveis.

Observações e recomendações

- Nível de abstração Processo.
- A escolha dessa atividade se apoia no fato de que os estudantes têm familiaridade com a noção de proporcionalidade,que é explorada, em álgebra e em geometria, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental.
- Deseja-se, entretanto, que os estudantes levem em conta o contexto do problema.

Resposta: Arranha-céu

a) 4 metros.

b) 39 metros.

c) Significa que a garagem está abaixo do nível da rua.

d) 23 andar.

e) O 40 andar está localizado a 159 metros do solo, e como cada andar possui altura 4 metros, a altura total do prédio é 163 metros.

f) Andar e altura do andar.

g) A resposta depende do período em que a pesquisa for realizada. Em setembro de 2017 o maior arranhacéu brasileiro é o Millennium Palace, localizado em Balneário Camboriú, Santa Catarina, com 177 metros de altura e 46 andares.

Resposta: Números triangulares

a) 21, 28 e 36.

b) Uma resposta possível seria a partir de um raciocínio aditivo baseado em contagem: □6 é obtido adicionando 6 círculos a um dos lados do triângulo equilátero que corresponde a □5 e efetuando a soma dos círculos presentes nesse novo triângulo equilátero: □6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21. Outra maneira é a partir do raciocínio recursivo. Assim □6 é obtido adicionando 6 círculos ao total de círculos do triângulo equilátero que corresponde a □5: □6 = □5 + 6 = 15 + 6 = 21. Os números triângulares □7 e □8 podem ser obtidos de formas análogas.

c) □1000 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + ... + 1000 = 500500.

d) Uma resposta possível é: o número triangular é obtido somando □ ao número triangular anterior.

e) □ e □□.