1 Funções

O QUE?

A seleção brasileira foi tetracampeã no futebol de cinco nos Jogos Paraolímpicos do Rio, em 2016.

POR QUE?

O futebol de cinco é praticado por deficientes visuais, exceto os goleiros, e exige silêncio das arquibancadas. Isso porque a bola tem guizos internos, que sinalizam a posição exata dela para os jogadores. Um guia (chamador), posicionado atrás do gol adversário, orienta os jogadores de ataque de sua equipe.

EXPLORANDO

O que o nosso batimento cardíaco, um terremoto ou a variação das ações de uma empresa na bolsa de valores possuem em comum? Os batimentos cardíacos podem ser monitorados a partir de um sinal bioelétrico cujo gráfico é representado em um eletrocardiograma, as ondas sísmicas produzidas por um terremoto podem ser observadas a partir do registro de um sismógrafo e as variações dos valores das ações de uma empresa percebidas ao longo do tempo podem ser facilmente visualizadas em um gráfico.

Como nos fenômenos descritos acima, muitas situações e decisões do dia a dia dependem do reconhecimento de uma relação entre duas grandezas e da análise de como a variação de uma delas influencia na variação da outra (Por exemplo, a distância percorrida e o tempo transcorrido, a área de um polígono e o comprimento de seus lados, a absorção de um medicamento pelo organismo humano e o tempo desde a sua ingestão, valor da conta de energia elétrica e consumo, quantidade de vereadores e a população etc). O tema funções trata da relação entre grandezas, identificando um tipo especial de relação. Funções são uma ferramenta matemática importante para descrever, analisar e tomar decisões em diversas situações.

As funções, de maneira geral, conectam grandezas, medidas, conjuntos numéricos e até variáveis que não podem ser quantificadas, ou seja, não numéricas, como, por exemplo, as variáveis qualitativas estudadas pela Estatística (classe social, cor dos olhos, local de nascimento, gênero etc).

Função é um dos conceitos centrais da Matemática, e sua importância transcende os limites dessa ciência, sendo fundamental para descrever fenômenos em diversas áreas do conhecimento, não só nas mais próximas, como a Física, a Química, ou as Engenharias como também em Biologia, Geografia, Sociologia, e em situações cotidianas diversas, como será exemplificado nas atividades a seguir.

A noção de função não surgiu ao acaso. É um instrumento matemático indispensável para o estudo quantitativo dos fenômenos naturais, tendo sua origem nos estudos desenvolvidos por Kepler (1571-1630) e Galileu (1564-1642) sobre os movimentos dos planetas e a queda dos corpos pela ação da força da gravidade, respectivamente. Nesses estudos era preciso medir grandezas, identificar regularidades e obter relações que oferecessem uma descrição matemática simples.

A aplicação da Matemática nas mais diversas áreas é feita, na maioria das vezes, por meio da noção de modelo matemático. Um modelo matemático permite representar uma determinada situação ou fenômeno a partir de variáveis e de relações entre essas variáveis. Portanto, funções são fundamentais tanto na concepção e construção de um modelo matemático como no estudo desses modelos.

Pluviometria no Sistema Cantareira

Atividade

As chuvas são a principal fonte de água para os reservatórios que abastecem as grandes cidades. Com base em dados passados, constrói-se uma média mensal esperada de chuvas. Em períodos em que a chuva real é menor do que o esperado pode-se observar uma diminuição da quantidade de água armazenada no sistema.

O gráfico a seguir apresenta a variação pluviométrica (em milímetros) da chuva real e da chuva esperada no Sistema Cantareira, que abastece a região metropolitana de São Paulo, no período de dezembro de 2013 (2013-12) a novembro de 2016 (2016-11).

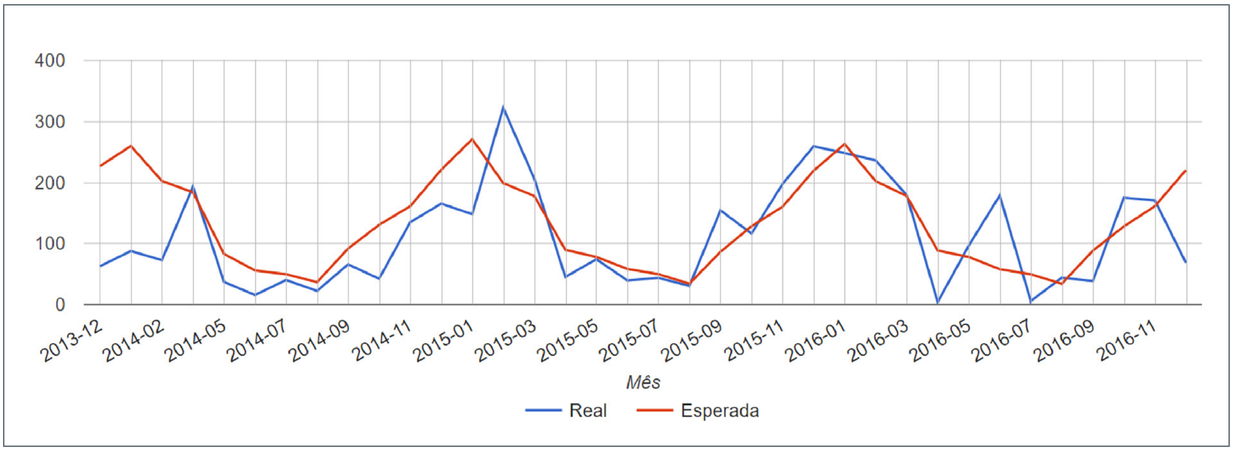


Figura 1.1 Volume de chuvas real e esperado no Sistema Cantareira.

De acordo com o gráfico acima:

a) Que grandezas estão sendo relacionadas?

b) Em que mês e ano houve a maior incidência de chuvas? E a menor?

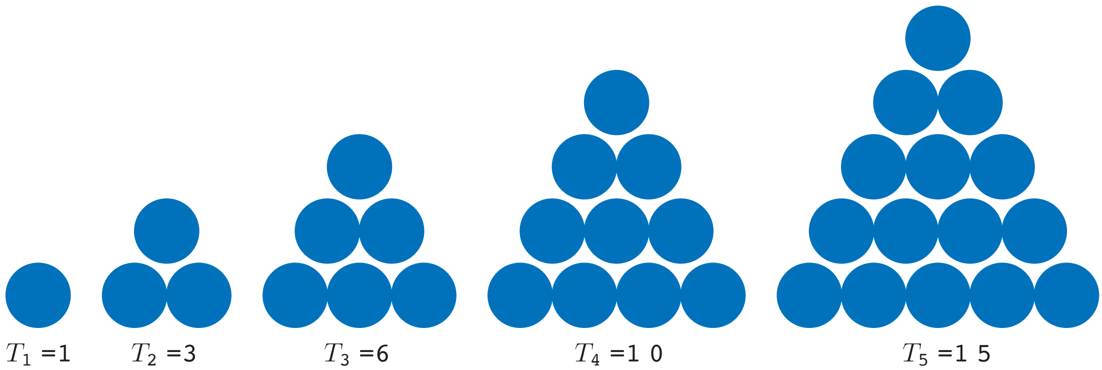
c) Em que período(s) a diferença entre a quantidade de chuva esperada e a quantidade real de chuva superou 100mm?

d) Houve algum mês em que não foi registrada chuva na região do Sistema Cantareira?

e) O que pode ser observado nos meses de agosto de 2015 e março de 2016?

Números triangulares

Atividade



Considere a sequência de números ilustrada acima. Ela é conhecida como a sequência dos *números triangulares*. O η-ésimo número triangular, T_η, é igual a quantidade total de círculos congruentes necessários para formar um triângulo equilátero cujo lado tem η círculos. Por exemplo, o quarto número triangular é $T_4=10$, porque são necessários 10 círculos congruentes para formar um triângulo cujo lado tem, 4 desses círculos.

a) Determine o 6º, o 7º e o 8º números triangulares.

b) Descreva o procedimento que você usou para determinar T_6, T_7 e T_8 no item anterior.

c) Determine o milésimo número triangular, T_{1000}.

d) Descreva um procedimento que permita determinar qualquer número triangular a partir da sua ordem na sequência? Explique.

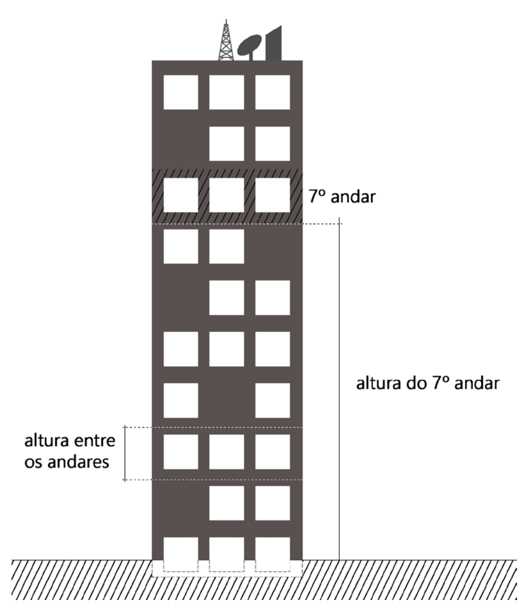
e) Quais são as variáveis relacionadas?

Arranha-céu

Atividade

Imagine um arranha-céu de 40 andares cujas diferentes alturas que correspondem a alguns andares estão representadas na tabela abaixo.

Número do Andar	Altura (metros)
Garagem (0)	-1
1	3
2	7
3	11
4	15
...	...
10	
...	...
	91



Considere que a altura de um andar é medida a partir do nível da rua até o piso desse andar e que a altura entre os andares seja sempre a mesma, conforme o esquema abaixo.

a) Qual a altura entre os andares?

b) Qual a altura do 10º andar?

c) O que significa o sinal negativo do andar da garagem?

d) A que andar corresponde a altura de 91 m?

e) Qual é a altura total desse prédio?

f) Realize uma pesquisa na internet e descubra o maior arranha-céu brasileiro atualmente. Dividindo a altura total desse arranha-céu pela quantidade de andares, determine a altura média de um andar.

ORGANIZANDO

Vamos identificar juntos quais são as características comuns presentes em cada uma das situações anteriores. Em todas elas há pelo menos dois conjuntos bem determinados cujos elementos estão sendo relacionados. Nessa relação, cada elemento de um desses conjuntos está associado a um único elemento do outro conjunto.

Na ***Atividade: Pluviometria no Sistema Cantareira***, um dos conjuntos se refere ao tempo e é determinado pelos meses do ano, no período de dezembro de 2015 a novembro de 2016. O outro é um conjunto numérico que deve conter todos os possíveis valores para o índice pluviométrico do Sistema Cantareira em milímetros. A relação representada no gráfico pela linha azul associa a cada ano-mês o índice de chuva real naquele período. Já a relação representada pela linha vermelha associa a cada mês-ano o índice de chuva esperada naquele período. Observe que, em ambos os casos, para cada mês-ano é associado um único índice pluviométrico.

Na ***Atividade: Números triangulares***, um dos conjuntos tem como elementos as ordens dos termos da sequência, indicadas de maneira geral por η. O outro conjunto deve conter todos os possíveis números triangulares $T\eta$. Assim, a cada ordem η está associado, sem ambiguidade, o número triangular $T\eta$.

Por fim, na *Atividade: Arranha-céu* temos cada andar do prédio sendo relacionado com sua altura até o nível da rua.

Nas três relações apresentadas, cada elemento de um conjunto A está associado a um único elemento de um conjunto B. Uma relação com essas propriedades é chamada **função**.

EXEMPLO

Dizemos que uma relação f entre os elementos de dois conjuntos não vazios, A e B, é uma função de A em B se todo elemento do conjunto A estiver relacionado a um único elemento do conjunto B.

Assim, para cada $x \in A$ deve existir um único elemento $y \in B$ que está associado a x pela função f. Esse elemento y é também denotado por $f(x)$:

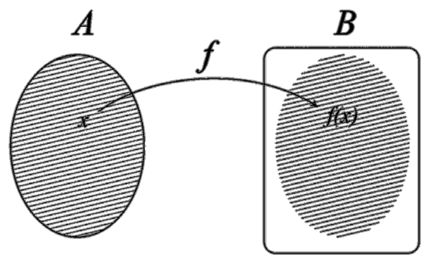
nome da função

$$y = f\,(x)$$

imagem de x

elemento do domínio

O conjunto A é chamado **domínio** da função f, o conjunto B é chamado contradomínio de f e o subconjunto de B formado pelas imagens de todos os elementos de A é chamado conjunto imagem da função f.



De maneira geral, escreve-se:

$$f : A \; f \longrightarrow B$$
$$x \longrightarrow f(x)$$

Por exemplo, na atividade "Pluviometria no Sistema Cantareira", se f é a função que associa a cada ano-mês o índice de chuva real naquele período, $f(2014 - 3) = 200$ nos informa que o índice de chuva real observada na região do sistema Cantareira no mês de março do ano de 2014 foi de 200 milímetros.

Em uma função f de A em B, a dependência estabelecida entre as variáveis $x \in A$ e $y \in B$ permite que y seja identificada como "variável dependente" e x como "variável independente", uma vez que os valores assumidos por y são determinados em função da variação de x no domínio. Na atividade "Arranha-céu" por exemplo, a variável independente é aquela que representa os andares e a variável dependente é a altura do andar.

A definição de uma função f de A em B exige que a cada elemento $x \in A$ corresponda uma imagem $y = f(x) \in B$ e que não haja ambiguidade na determinação dessa imagem, ou seja, que ela seja única. Asssim, nem toda relação de A em 'B é uma função. Por exemplo, a relação que associa a cada pessoa o número de seu telefone não é função, pois a imagem pode não ser única, ou seja, há ambiguidade: algumas pessoas têm mais de um número de telefone. E além disso, nem todas as pessoas têm telefone.

PARA REFLETIR

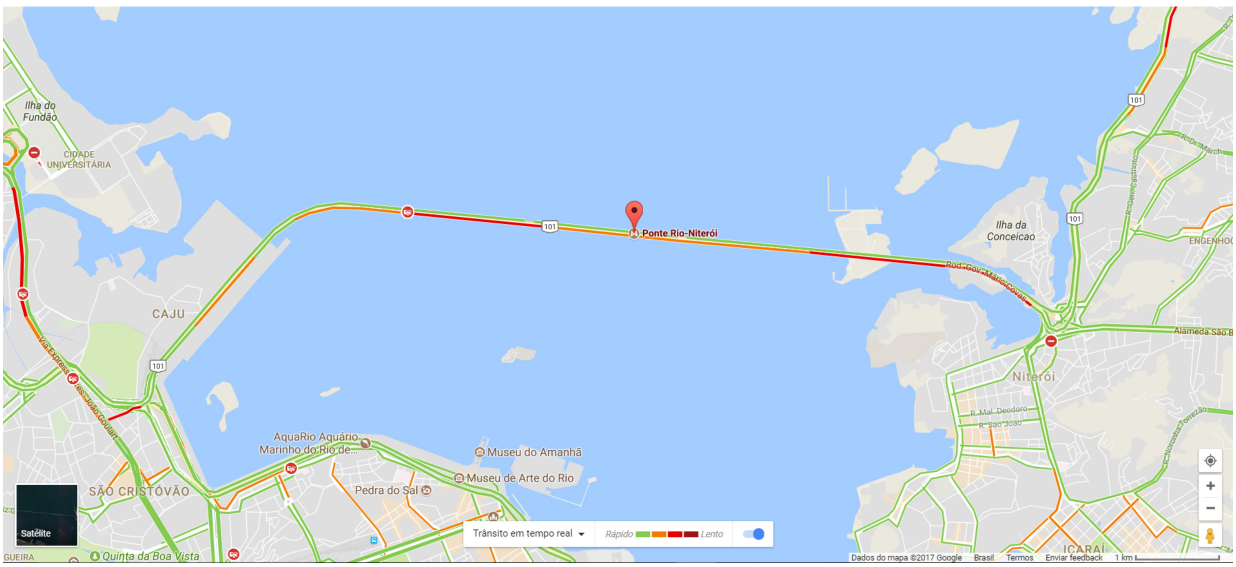
Junto com seus colegas, reflita sobre a definição que acabamos de ver. Vocês conseguem pensar em outros exemplos de relações do seu dia a dia que possam ser consideradas funções? Descrevam algumas delas e compartilhem com o restante da turma, destacando os conjuntos domínio e contradomínio dessas funções.

PRATICANDO

Colorindo o mapa

Atividade

A imagem a seguir, que foi retirada do aplicativo Google Maps®, exibe o trânsito na ponte Rio-Niterói e seus acessos em um determinado dia e hora. Várias informações podem ser observadas a partir dos elementos apresentados. Por exemplo, as cores nas vias informam a velocidade média dos veículos que trafegam por elas, conforme a legenda na parte inferior; a distância entre dois pontos quaisquer do mapa pode ser estimada usando a escala exibida no canto inferior direito. Gráficos como esse são produzidos a partir das relações entre diversas informações coletadas.



A tabela a seguir mostra os dados coletados sobre o tempo gasto pelos veículos (em média) para atravessar a ponte, ao longo de um dia.

Período do Dia	Tempo (min)	Cor	Velocidade Média (km/min)
5:00 - 7:00	13		
7:00 - 9:00	18		
9:00 - 11:00	15		
11:00 - 13:00	15		
13:00 - 15:00	16		
15:00 - 17:00	16		
17:00 - 19:00	23		
19:00 - 21:00	14		
21:00 - 23:00	13		

a) Tomando como referência a ilustração anterior e utilizando a escala de cores a seguir, complete a terceira coluna da tabela com a cor que a ponte deveria estar colorida em cada período do dia destacado. Descreva os critérios que você utilizou na escolha de cada uma das cores e compare com os critérios dos seus colegas.

Rápido	verde	amarelo	vermelho	vinho	Lento

b) Você precisou associar uma mesma cor para para períodos diferentes do dia. Por que?

c) Sabendo que a ponte Rio-Niterói tem aproximadamente 13 km de extensão complete a quarta coluna da tabela com a velocidade média registrada em cada um dos períodos do dia.

d) É possível que uma mesma velocidade média esteja associada a dois tempos de travessia diferentes? Por quê?

Na atividade anterior, observam-se diferentes relações entre os dados. Por exemplo, para cada tempo de travessia é possível associar uma única cor e uma única velocidade média. Da mesma maneira, a cada velocidade média está associada uma única cor e um único tempo de travessia. No entanto, a uma mesma cor é possível associar tempos diferentes e velocidades médias diferentes.

PARA SABER+

Por que não é função?

Atividade

Vimos que para que uma relação de *A* em *B* seja uma função não pode haver:

(I) Elementos no conjunto *A* sem correspondente em *B*; (II) Ambiguidade na determinação de correspondente em *B*.

Determine se cada uma das relações apresentadas a seguir é função. Justifique suas respostas a partir das condições (I) e (II).

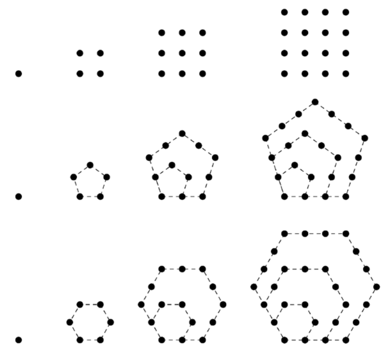
a) Seja *P* o conjunto de todas as pessoas e considere a relação de *P* em *P*, que a cada "pessoa" associa "irmão da pessoa".

b) Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e considere a relação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, que a cada "número real x" associa "raiz quadrada do número real x".

c) Sejam $\mathbb{R}+$ o conjunto dos números reais positivos e *T* o conjunto de todos os triângulos. Considere a relação de $\mathbb{R}+$ em *T* que a cada "número real positivo *x*" associa "triângulo de área *x*".

EXERCÍCIOS

1 Assim como os números triangulares (ver *Atividade: Números triangulares*), fala-se nos números quadrados perfeitos, pentagonais, hexagonais, inspirados, respectivamente, pelas sequências abaixo:



a) Para cada uma destas sequências, represente as próximas duas figuras;

b) Escreva uma sequência de números que possa estar associada a cada sequência de figuras;

c) Descreva a regra de formação de cada uma dessas sequências de números.

2 Observe as duas sequências que se seguem:

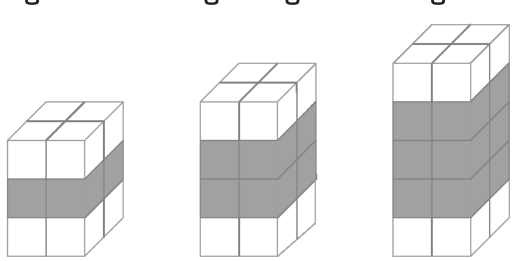
$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$$

$$1000, 100, 10, \ldots$$

a) Descreva, em palavras ou em linguagem simbólica, uma regra de formação que você percebe em cada uma das sequências apresentadas.

b) Baseado na regra que você identificou no item anterior, descubra qual é o 20º termo de cada uma das sequências anteriores.

3 Cada prisma obtém-se empilhando cubos do mesmo tamanho, brancos e cinzas, segundo uma regra sugerida na figura.



Prisma 1 Prisma 2 Prisma 3

a) Descreva, em palavras ou em linguagem simbólica, uma regra de formação sugerida pela figura.

b) Para construir o prisma 4 dessa sequência, segundo o padrão por você descrito, quantos cubos cinzas são necessários?

c) Justifique a afirmação: "O número total de cubos cinzas necessários para construir qualquer prisma desta sequência é par."

d) Segundo o padrão por você descrito, quantos cubos cinzas terá o prisma 200?

e) Explicite uma expressão numérica que permita determinar o número de cubos cinzas do Prisma *n* em função de *n*, isto é, uma expressão que de forma geral associe a ordem da figura à quantidade de cubos cinzas em sua composição.

f) Justifique novamente a afirmação do item (c), agora a partir da expressão que você explicitou no ítem anterior.

g) Se *x* representar o número total de cubos (brancos e cinzas) de um prisma desta sequência, qual das expressões seguintes representará o número de cubos cinzas desse prisma. Justifique sua escolha.

☐ $x - 8$ ☐ $x - 4$

☐ $2x - 4$ ☐ $4x$

4 Ao final de um treino para a prova de 100 metros rasos, uma corredora recebe de seu treinador a seguinte tabela com as marcas intermediárias da sua melhor corrida.

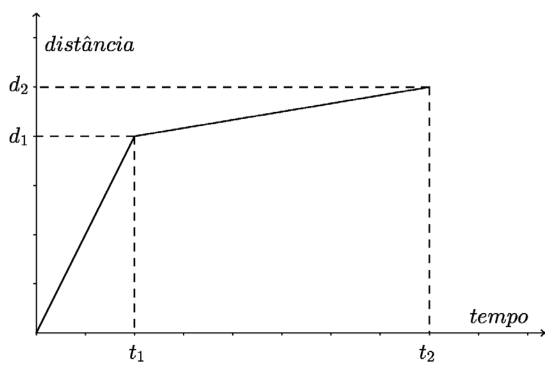
Tempo (s)	Distância (m)
5	25
10	50
15	75
20	100

Considerando que a velocidade da atleta é constante ao longo dos 100 metros responda as seguintes perguntas.

a) Quanto tempo ela gastou para percorrer os primeiros 30 metros?

b) Pensando em uma estratégia para melhorar a preformance da atleta, seu treinador resolve detalhar a tabela com os tempos correspondentes a cada 10 metros. Construa essa tabela.

5 Hoje de manhã a Ana saiu de casa e dirigiu-se para a escola. Fez uma parte do percurso andando e a outra parte correndo. O gráfico a seguir mostra a distância percorrida pela Ana, em função do tempo que decorreu desde o instante em que ela saiu de casa até ao instante em que chegou à escola.



Apresentam-se, a seguir, quatro afirmações. De acordo com o gráfico, apenas uma é verdadeira. Assinale-a com X, explicando por que motivo cada uma das demais opções é falsa.

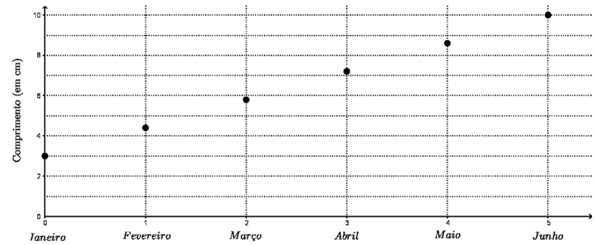
☐ A Ana percorreu metade da distância andando e a outra metade correndo.

☐ A Ana percorreu maior distância andando do que correndo.

☐ A Ana esteve mais tempo correndo do que andando.

☐ A Ana iniciou o percurso correndo e terminou-o andando.

6 Em Janeiro, o Vitor, depois de ter vindo do barbeiro, decidiu estudar o comprimento do seu cabelo, registando todos os meses a sua medida. O gráfico seguinte representa o crescimento do cabelo do Vitor, desde o mês de Janeiro (mês 0), até ao mês de Junho (mês 5).



Mês	Comprimento
Janeiro (0)	
Fevereiro (1)	4,4
Março (2)	5,8
Abril (3)	7,2
Maio (4)	8,6
Junho (5)	

a) A partir dos dados apresentados no gráfico, complete a tabela acima.

b) Em cada mês, quantos centímetros cresceu o cabelo do Vitor?

c) Escreva uma expressão geral que represente o Comprimento (C) do cabelo do Vitor, em função do número de meses (M) passados após o corte de cabelo inicial.

d) Considerando o comportamento indicado no gráfico, se o cabelo do Vitor crescer 19, 8 cm, se que haja cortes no período, quantos meses terão se passado desde o último corte de cabelo? Justifique.

7 Considere a função $g : \Omega \; \pi \; \Omega$ tal que $g(x) = 9 - x^2$.

a) Coloque em ordem crescente os números $g(\sqrt{2})$, $g(\sqrt{5})$ e $g(\sqrt{10})$.

b) Determine todos os possíveis valores de g do domínio que têm imagem igual a 8.

c) Existe algum $x \; ' \; \Omega$ cuja imagem é igual a 10? Por que?

d) Que condição deve satisfazer um número real b para que seja a imagem de algum número real x, isto é, $b = g(x)$?

8* Considere o processo que associa cada número natural à soma de seus algarismos.

a) Por meio do processo descrito acima o número natural 13717 será associado a que número?

b) Proponha um número cujo resultado do processo seja 22.

c) Quantos números entre 1 e 10000 nos levam ao resultado 3?

d) É possível obter qualquer número natural como resultado desse processo? Explique.

EXPLORANDO Gráfico

Segundo informações do **Big Data Business**, as palavras estimulam o lado esquerdo do cérebro e são um recurso essencial para a manutenção da memória. No entanto, as imagens são ainda mais eficazes, porque elas conseguem ativar os dois lados do cérebro simultaneamente e, assim, permitem o resgate de ideias e informações com maior precisão e agilidade. Especialmente quando se quer analisar grande quantidade de dados, apresentá-los em uma imagem ou em um gráfico, pode favorecer a comunicação.

Figura 1.3 Alguns exemplos de representações gráficas

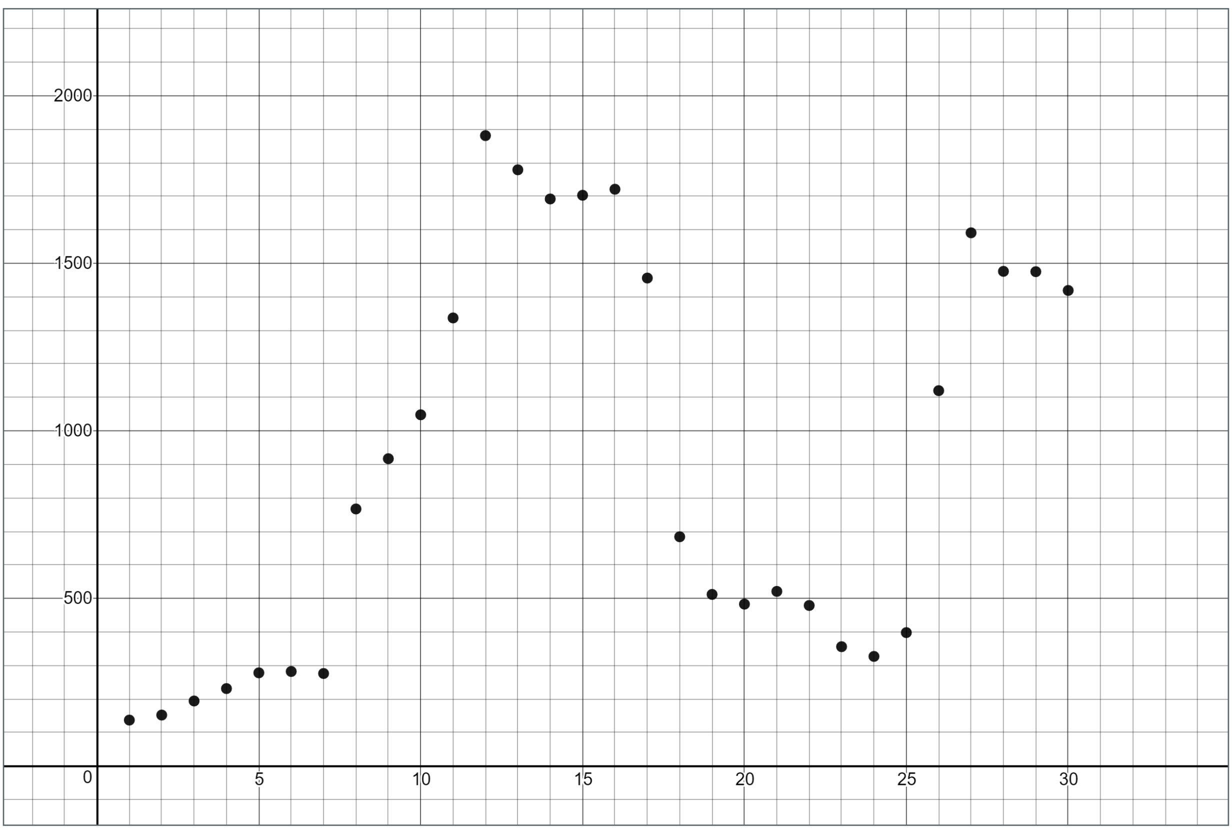
Representar graficamente conjuntos de dados e suas relações pode fazer toda a diferença para transmitir informações. Há vários tipos de gráficos, cada um tem a sua particularidade e serve para transmitir as informações de forma específica. Nesta seção iremos estudar a representação gráfica de funções. Vamos considerar a seguinte situação:

Ação promocional

Atividade

Uma empresa resolve lançar uma ação promocional na internet usando uma hashtag. Um mês após o lançamento, o presidente dessa empresa resolve analisar o impacto da ação na rede. Para isso ele pede a um de seus funcionários que prepare um relatório sobre o número de vezes que a *hashtag* foi mencionada nas redes sociais em cada dia durante aquele mês. O funcionário resolveu apresentar os dados das seguintes duas formas:

Dia	Quantidade	Dia	Quantidade
1	137	16	1721
2	152	17	1456
3	194	18	684
4	231	19	512
5	278	20	483
6	282	21	521
7	276	22	479
8	767	23	356
9	917	24	327
10	1048	25	398
11	1337	26	1120
12	1881	27	1591
13	1779	28	1476
14	1692	29	1475
15	1703	30	1419



a) Quantas vezes a *hashtag* foi mencionada mais de 1500 vezes em um dia?

b) Em que dia a *hashtag* foi mais citada?

c) Identifique todos os períodos em que houve crescimento no número de citações.

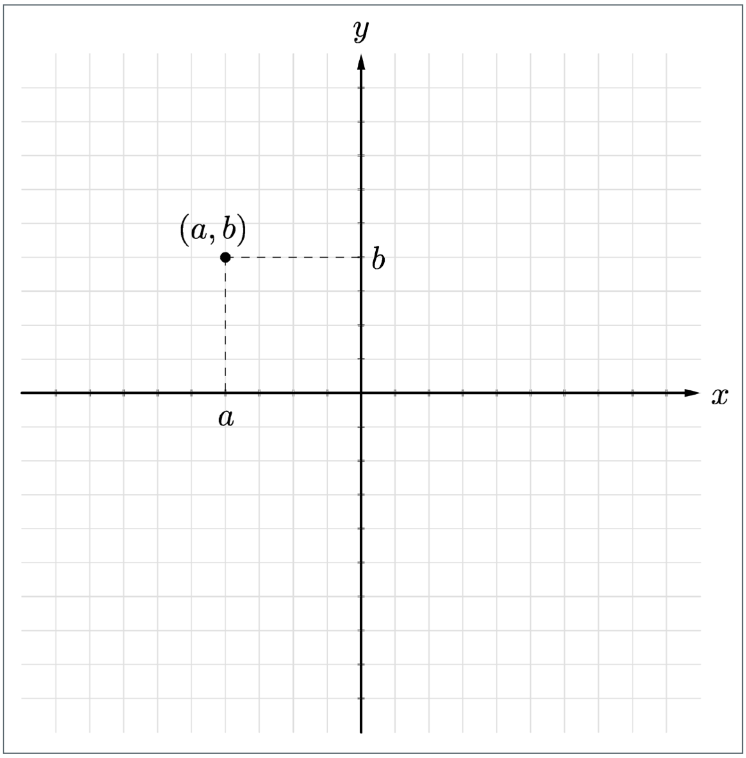
d) Faça o mesmo para o decrescimento.

e) Escreva um parágrafo explicando o comportamento global do gráfico, apontando possíveis causas para as variações observadas.

Uma função, essencialmente, relaciona duas ou mais grandezas ou variáveis, de forma que são obtidos pares (x, y), em que x pertence ao domínio da função e $y = f(x)$. Perceba que a ordem em que os termos que compõem o par são apresentados é importante. Em matemática, chamamos esse tipo de objeto de par ordenado, eles são objetos fundamentais para a compreensão do gráfico de uma função.

No caso de funções reais de variável real, isto é, cujos domínio e contradomínio são o conjunto dos números reais (ou subconjuntos dele) tanto x como y serão números reais.

A representação geométrica mais comum para esses pontos, e que você provavelmente já conhece, é no **plano cartesiano**. Essa representação tem como base duas retas perpendiculares que se interceptam em suas origens conforme a figura ao lado.



As retas que compõem um sistema cartesiano são chamadas de **eixos** do plano cartesiano. O eixo em que são registradas as primeiras coordenadas do par é chamado de **eixo das abscissas**. O outro eixo, em que são registradas as segundas coordenadas do par é chamado de **eixo das ordenadas**.

Já vimos alguns exemplos de funções em atividades anteriores, vamos explorá-los um pouco mais.

Do mapa para o gráfico

Atividade

a) A partir das colunas *Tempo de travessia* e *Cor* da ***Atividade: Colorindo o mapa***, escreva o conjunto de pares ordenados da forma (tempo, cor) respeitando o critério que você escolheu para a determinação das cores.

b) Represente graficamente este conjunto de pares ordenados.

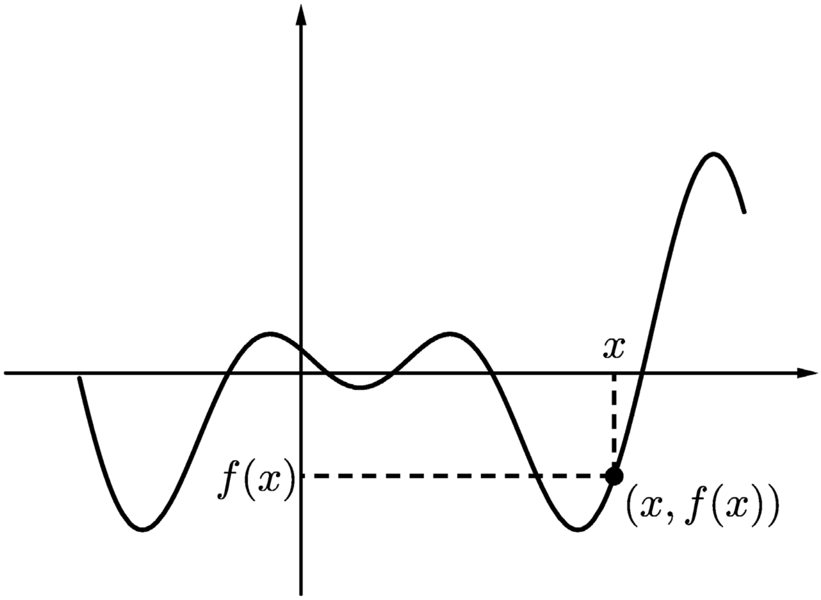
c) Para colorir as vias de todo o mapa, precisamos distribuir as cores para outros valores de tempo. Como você faria a distribuição para o intervalo de 0 a 25 minutos considerando um trecho qualquer de 13 km (a mesma extensão da ponte)?

d) Encontre outra maneira de representar graficamente a associação entre os tempos e as cores.

ORGANIZANDO

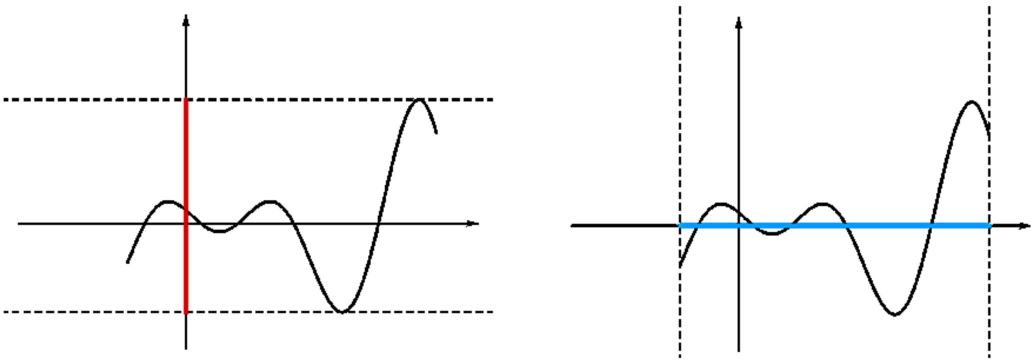
É hora de organizar as ideias sobre representação gráfica de uma função. Vimos que, para representar graficamente as funções, os pares ordenados são fundamentais. Cada par identifica as grandezas ou variáveis relacionadas e a ordem no par distingue o papel de cada uma delas: elemento do domínio, abscissa, e imagem, ordenada. Sendo assim, a representação gráfica de uma função exige: a identificação das variáveis do problema e a identificação da relação estabelecida entre as variáveis.

Para funções reais de variável real, isto é, funções cujo domínio é um subconjunto de R e o contradomínio é R, sua representação gráfica no plano cartesiano será o conjunto dos pares ordenados $(x, f(x))$ em que x pertence ao domínio da função.



PARA REFLETIR

Os conjuntos domínio e imagem ficam evidenciados na representação gráfica de uma função a partir dos eixos coordenados. Observe a representação gráfica a seguir, em que estão destacados os conjuntos sobre os eixos. Qual deles você identifica como domínio? A que conjunto corresponde o outro?

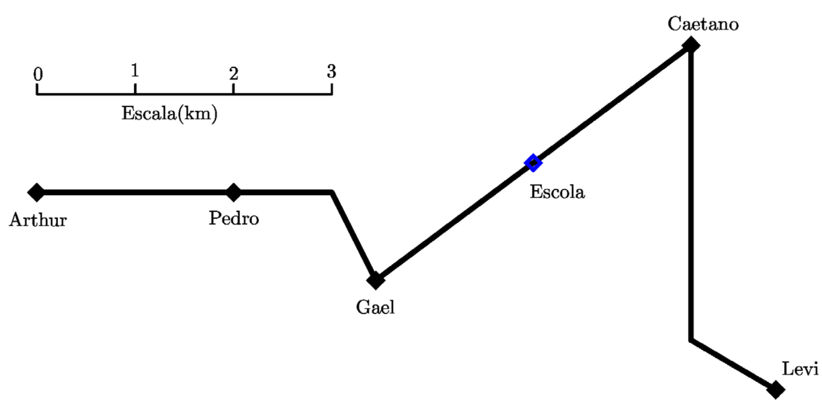


PRATICANDO

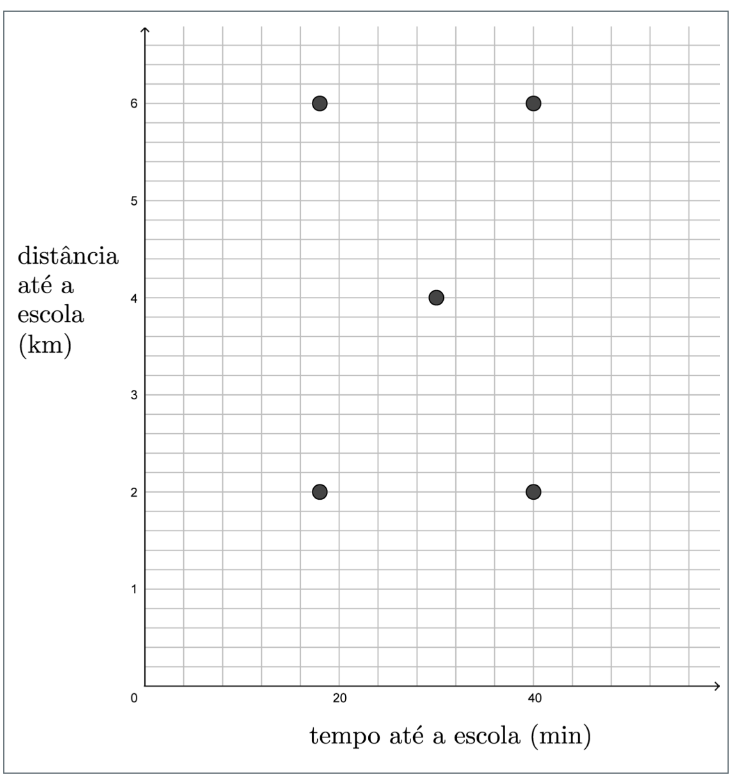
Indo para escola*

Atividade

Arthur, Caetano, Gael, Levi e Pedro utilizam a mesma avenida para ir à escola a cada manhã. Levi vai com seu pai de carro, Arthur de bicicleta e Gael caminhando. Os demais variam, a cada dia, a forma como percorrem o trajeto. O mapa a seguir mostra a posição da casa de cada um em relação à escola.



Os pontos marcados no plano cartesiano abaixo fornecem informações sobre a jornada de cada criança na última segunda-feira.



a) Associe cada ponto do gráfico com o nome da criança que ele representa.

b) Como Pedro e Caetano foram para a escola na última segunda-feira? Por que?

"Adaptado de *The Language of Functions and Graphs, Shell Centre for Mathematical Education Publications Ltd., 1985.

PARA SABER+

Todo mundo tem *Facebook*?

Atividade

A rede socail virtual *Facebook* é um grande sucesso. O *Facebook* criado por Mark Zuckerberg em outubro de 2003, com o nome de *Facemash*, quando ele era um estudante do segundo ano em Harvard. Inicialmente 450 visitantes geraram 22.000 visualizações de fotos em suas primeiras 4 horas online. Em fevereiro de 2004, agora com o nome de *Thefacebook*, ele já contava com a participação de mais da metade dos alunos de Harvard, e um mês depois, estudantes das Universidades de Stanford, Columbia, Yale, Boston, Nova Iorque e MIT tiveram acesso à rede social criada por Mark Zuckerberg. A partir de setembro de 2005, funcionários de várias empresas, dentre elas *Apple* e *Microsoft*, puderam ter acesso ao *Facebook* e no final de 2006 o serviço ficou disponível para qualquer pessoa maior de 13 anos e com um endereço válido de e-mail.

A tabela a seguir mostra o número de usuários ativos do Facebook em janeiro dos anos de 2004 a 2015.

Ano	Número de Usuários	Crescimento percentual
2004	5	–
2005	1.000.000	
2006	5.500.000	450%
2007	12.000.000	
2008	70.000.000	
2009	150.000.000	
2010	370.000.000	
2011	600.000.000	
2012	800.000.000	
2013	1.056.000.000	
2014	1.228.000.000	
2015	1.317.000.000	

Imagine que queremos investigar o crescimento anual do número de usuários. E, a partir da investigação formular um modelo que nos permita fazer previsões sobre a base de usuários para os próximos anos.

a) Vamos começar investigando o crescimento percentual, preenchendo as lacunas da terceira coluna da tabela acima.

b) Marque no plano cartesiano os pontos correspondentes aos dados fornecidos pelas duas primeiras colunas da tabela, usando a seguinte escala: no eixo das abscissas 1 cm corresponde a 1 ano e no eixo das ordenadas 1 cm corresponde a 200 milhões de usuários ativos.

c) Como você descreveria o crescimento do número de usuários ativos do Facebook? Você acha que o crescimento está com tendência a diminuir, a aumentar ou a permanecer estável?

d) Baseado no item c), faça uma previsão para o número de usuários para os anos de 2016 e 2017.

e) Usando os dados da tabela e a representação gráfica feita no item b), faça uma previsão para o futuro do Facebook. Você acha que os números continuarão a aumentar? Se sim, quando ele atingirá a marca de 2 bilhões de usuários? Explique seu raciocínio.

f) Um modelo matemático que fornece uma aproximação para a relação entre os dados das duas primeiras colunas da tabela é dado por uma função que tem a seguinte expressão ( ) = 980 0, 7 + 670 · 0, 45(+1) em que representa o tempo decorrido desde 2004, isto é, para 2010 tem-se = 6, e (6) é o valor em milhões de usuários ativos no Facebook naquele ano. Com a ajuda de uma calculadora científica, use a expressão acima para calcular a estimativa do número de usuários nos anos de 2013 e de 2014, e em seguida compare com a tabela.

g) Use a expressão anterior e calcule a estimativa para os anos de 2016 e 2017 e compare com as suas previsões do item (d).

Os dados reais para os meses de janeiro de 2016 e 2017 são 1.654.000.000 e 1.936.000.000, respectivamente. Isso significa que apesar do modelo descrever de forma satisfatória o comportamento do crescimento do número de usuários até o ano de 2015, para os anos seguintes ele não se mostra adequado. Existia de fato uma tendência para diminuição do crescimento, no entanto essa trajetória foi possivelmente modificada por ações que foram tomadas pela empresa ao perceber tal comportamento.

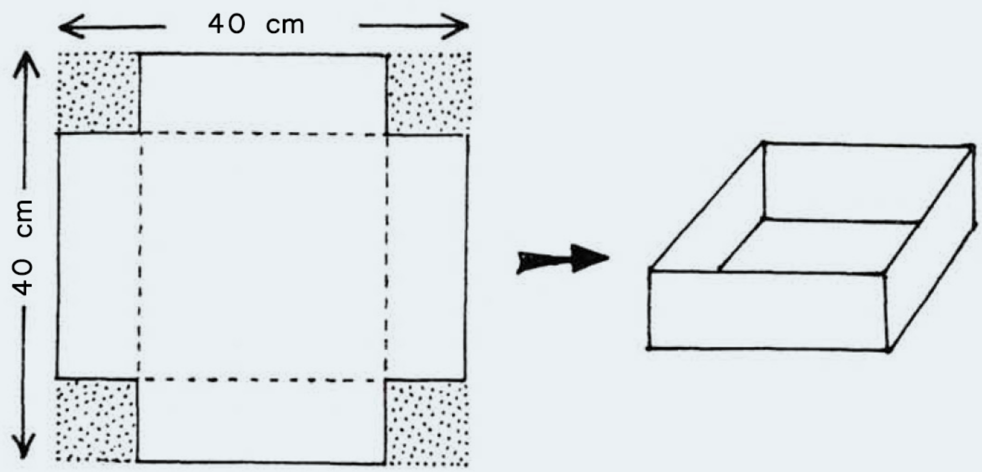
Situações como essa são bastante comuns em Modelagem Matemática. O modelo se mostra adequado sob certas condições, mas quando outras variáveis são consideradas (investimento em propaganda, alteração no algoritmo que escolhe as atualizações que serão exibidas para cada usuário, etc) ele pode perder sua acurácia, momento em que se fazem necessárias revisões.

PROJETO APLICADO

Como construir uma caixa de volume máximo?

Vamos utilizar uma folha de cartolina quadrada de lado 40 cm para construir uma caixa sem tampa. Para isso, cortamos quadrados nos quatro cantos da cartolina e dobramos as partes retangulares restantes, para formar os lados da caixa.

O objetivo é obter a caixa com o maior volume possível.



a Discuta com seus colegas de grupo a melhor estratégia para se obter a caixa de volume máximo. Em seguida construa a caixa e calcule o seu volume.

b Faça uma comparação com os volumes das caixas construídas pelos demais grupos. Organize os dados em uma tabela que relacione a medida do lado x do quadrado recortado com o volume $V(x)$ da caixa obtida.

x										
V(x)										

c Encontre a expressão que fornece o volume $V(x)$ da caixa em função do lado x do quadrado recortado.

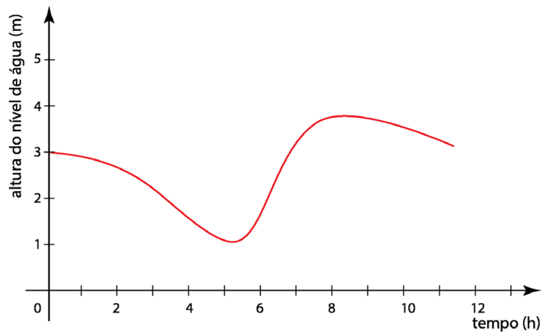
d No contexto do problema, em que intervalo real a variável independente x pode ser considerada?

e Baseado nos itens anteriores, faça uma conjectura sobre qual o valor de x fornece o volume máximo.

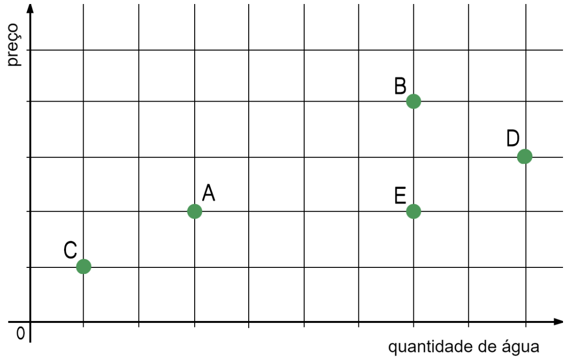
f Utilize um software ou uma calculadora gráfica para visualizar a representação gráfica da função $V(x)$. A partir dessa representação gráfica determine, aproximadamente, o valor de x que fornece o volume máximo.

EXERCÍCIOS

1 O gráfi co abaixo mostra a altura do nível de água em uma piscina com vazamento. Identifique as variáveis na situação descrita e representada a partir do gráfico. Observe a relação apresentada no gráfico e indique possíveis causas para o comportamento observado.



2 Garrafas de água potável são vendidas em vários tamanhos e preços. Cada ponto no gráfico abaixo representa uma garrafa de água.



a) Qual garrafa armazena a maior quantidade de água?

b) Qual garrafa é vendida pelo preço mais alto?

c) Identifique dois pontos que estejam sobre uma mesma reta paralela ao eixo das abscissas (reta horizontal) e interprete o que isso significa.

d) Identifique dois pontos que estejam sobre uma mesma reta paralela ao eixo das ordenadas (reta vertical) e interprete o que isso significa.

e) Entre as garrafas *A* e *E*, qual tem o melhor custo-benefício? Por que? E entre *B* e *E*? Por que?

2 Vetores no plano

O QUE?

A seleção brasileira foi tetracampeã no futebol de cinco nos Jogos Paraolímpicos do Rio, em 2016.

POR QUE?

O futebol de cinco é praticado por deficientes visuais, exceto os goleiros, e exige silêncio das arquibancadas. Isso porque a bola tem guizos internos, que sinalizam a posição exata dela para os jogadores. Um guia (chamador), posicionado atrás do gol adversário, orienta os jogadores de ataque de sua equipe.

Vetores posições relativas

Resgate na Antártida

Atividade

A figura a seguir exibe um mapa onde o ponto representa a localização de uma estação de pesquisa *A* na Antártida.

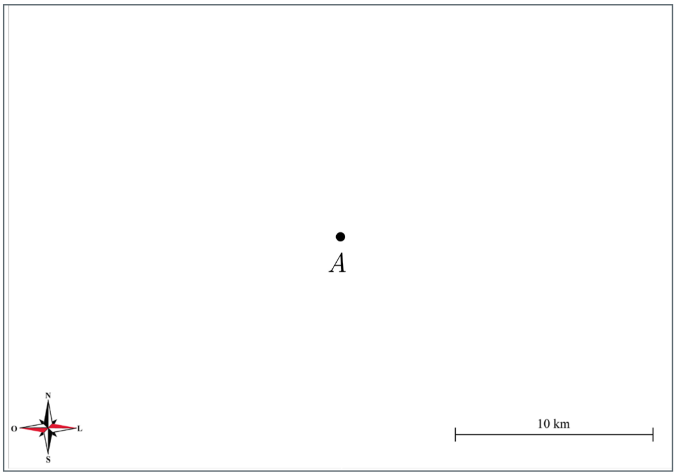


Figura 2.1 Um problema de localização.

Parte I

A estação de pesquisa *A* recebe um comunicado de um avião de reconhecimento informando que um grupo *P* de exploradores situado à 10 km de *A* necessita de socorro urgente.

a) É possível marcar no mapa a localização do grupo *P* de exploradores? Justifique sua resposta!

b) Se você marcasse no mapa todos os pontos onde o grupo *P* de exploradores poderia estar, que figura geométrica seria desenhada?

Parte II

Considere agora esta outra situação. A estação de pesquisa *A* recebe um comunicado de um avião de reconhecimento informando que um outro grupo *Q* de exploradores situado à nordeste de *A* necessita de socorro urgente.

a) É possível marcar no mapa a localização do grupo *Q* de exploradores? Justifique sua resposta!

b) Se você marcasse no mapa todos os pontos onde o grupo *Q* de exploradores poderia estar, que figura geométrica seria desenhada?

c) Se a estação de pesquisa *A* e os dois grupos de pesquisa *A* e *A* estiverem alinhados (isto é, pertencessem a uma reta), seria possível marcar a localização do grupo *A* de exploradores? Justifique sua resposta!

Parte III

O avião de reconhecimento atualizou as informações sobre o grupo *A* de exploradores: ele está situado à 10 km à nordeste de *A*.

a) É agora possível marcar no mapa a localização do grupo *A* de exploradores? Justifique sua resposta!

b) Nessa nova situação, se você marcasse no mapa todos os pontos onde o grupo *A* de exploradores poderia estar, que figura geométrica seria desenhada?

c) Caso a respostao ao Item a) seja afirmativa, com você descreveria a posição da base *A* com relação ao grupo *A* de pesquisadores?

Parte IV

Uma segunda estação de pesquisa *A* está situada à 10 km a noroeste de *A*.

a) Considerando os dados da Parte III, como você informaria a posição do grupo *A* de exploradores com relação à estação *A*?

b) Qual estação de pesquisa está mais próxima do grupo de exploradores? *A* ou *A*? Justifique sua resposta!

Grandezas escalares e vetoriais

Em Física, existem grandezas que ficam perfeitamente descritas por um número e uma unidade. Este é o caso, por exemplo, do tempo, da temperatura, da pressão e da massa. Grandezas deste tipo são denominadas grandezas escalares.

Por outro lado, como você deve ter percebido com a atividade anterior, um único número não basta para especificar completamente uma posição com relação a um ponto de referência. Além da distância entre o ponto de referência e a posição em questão (no caso da atividade, "10 km"), também é necessário ter uma orientação (no caso da atividade, "à nordeste"). Grandezas físicas deste tipo – as quais, para serem perfeitamente descritas, necessitam de um valor numérico, uma unidade e uma orientação – são denominadas grandezas vetoriais.

PARA REFLETIR

Quais outras grandezas físicas você conhece? Elas são grandezas escalares ou vetoriais?

Vetor posição relativa

A posição relativa (a exemplo de outras grandezas vetoriais que veremos neste capítulo) pode ser representada graficamente por uma flecha, isto é, um segmento de reta orientado o qual, a partir de agora, denominaremos vetor posição relativa. A figura a seguir exibe os vetores posições relativas do grupo de exploradores (marcado como *G* na figura) com relação às estações de pesquisa *A* e *B* da atividade anterior.

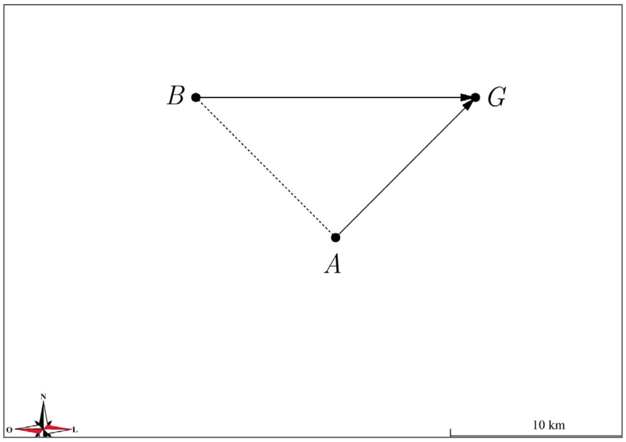


Figura 2.2 Vetores posições relativas do ponto *G* determinados pelos pontos de referência *A* e *B*.

PARA REFLETIR

Por que posições relativas não poderiam ser representadas apenas com segmentos de reta? Por que usar flechas é importante neste contexto?

Notações

Ao fazer referência a um vetor posição relativa, no lugar de uma descrição longa do tipo “vetor posição relativa do ponto *G* com relação ao ponto de referência *A*”, é costume introduzir notações que permitem referenciar o vetor posição relativa de forma mais curta (essa economia de escrita é uma prática comum na Matemática). Por exemplo, uma das notações adotada para representar o “vetor posição relativa do ponto *G* com relação ao ponto de referência *S*” é –AG. Nesta notação, ao lê-la da esquerda para direita, a primeira letra representa o ponto de referência (no caso, o ponto *S*) e a segunda letra representa a posição em consideração (no caso, o ponto *S*). A flecha sobre as duas letras é um recurso gráfico para lembrar que a notação está representando um vetor. Neste contexto, o ponto *G* é denominado extremidade inicial (ou simplesmente origem) e o ponto *S* é denominado extremidade final (ou simplesmente extremidade, quando não há perigo de confusão com a extremidade inicial) do vetor –AG. O comprimento do segmento de reta AG é denominado módulo do vetor –AG e será denotado por | – AG|. No caso do vetor –AG da figura seguinte (relacionada com a atividade proposta no início desta seção), tem-se | –AG| = 10 km.

Uma notação ainda mais curta é simplesmente dar um “nome” ao vetor, também como uma flecha em cima. Por exemplo, na figura a seguir, o vetor posição –AG é denotado por AG e o vetor posição –AG é representado por AG. Nesta notação mais curta, o módulo do vetor AG é denotado por |AG|. Assim, para o vetor AG da figura seguinte (relacionada com a atividade proposta no início desta seção), tem-se |AG| = 10 √ 2 km (por quê?).

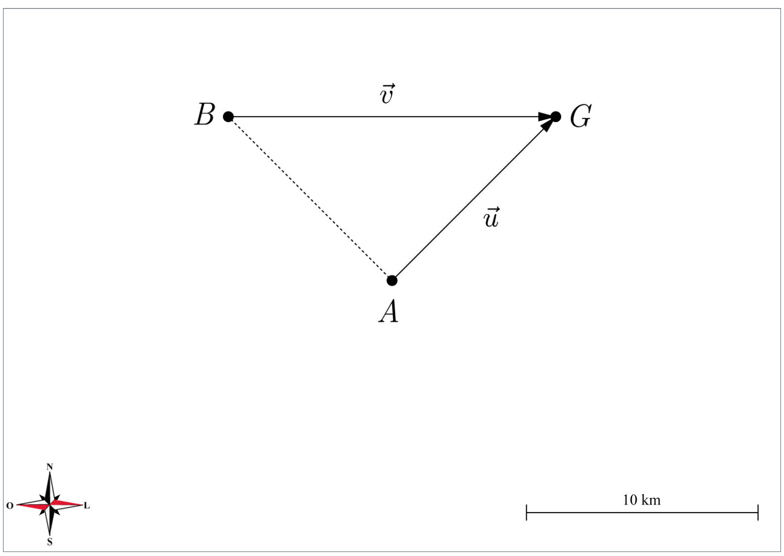


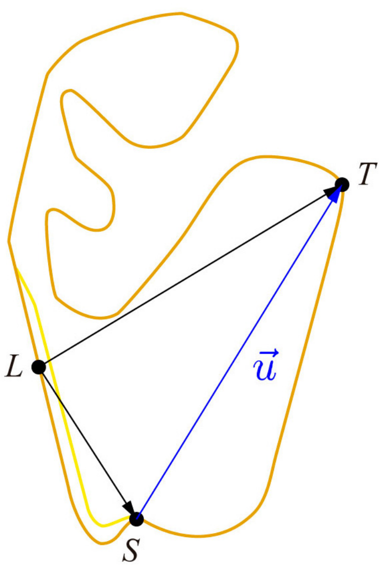
Figura 2.3 Notação para vetores.

- Alguns livros usam ainda um outro tipo de notação: grandezas vetoriais são representadas por letras em negrito e grandezas escalares por letras em itálico.
- Dependendo do autor e do contexto, o módulo de um vetor também pode ser chamado de magnitude, intensidade ou valor.

Antes de prosseguirmos, é importante destacar uma característica importante do vetor posição relativa: ele depende da escolha do ponto de referência. Veja, por exemplo, na situação ilustrada na figura anterior, que a posição G é representada por vetores diferentes quando pontos de referências diferentes (A e B) são escolhidos.

Vetores deslocamentos

Um dos objetivos da Física é estudar como certas grandezas variam no tempo. Um carro, por exemplo, ao percorrer a pista de Interlagos em São Paulo sem parar, ocupará posições diferentes em tempos diferentes, isto é, sua posição variará ao longo do tempo. Na figura a seguir, estão marcadas duas posições na pista: o ponto *T* que demarca a curva “S” do Sena (posição esta, digamos, ocupada pelo carro em um tempo inicial) e o ponto *T* que demarca o final do trecho da “reta oposta” (ocupada pelo carro em um tempo final). Também estão desenhados na figura os vetores posições relativas *LS* e *LT* (considerando-se, então, *L* como ponto de referência). Como representar matematicamente esta variação de posição de *S* para *T*? Isto também será feito por uma flecha que, neste contexto, será denominada vetor deslocamento. A flecha é desenhada com extremidade inicial na posição inicial (isto é, aquela associada ao tempo inicial) e extremidade final na posição final (isto é, aquela associado ao tempo final). As notações usadas para vetores deslocamentos são as mesmas usadas para vetores posições relativas. Assim, por exemplo, o vetor deslocamento azul na figura pode ser denotado por *ST* ou *u*.



L: largada
S: curva “S” do Sena
T: final do trecho da “reta oposta”

Figura 2.5 Deslocamentos de um carro na pista de Interlagos.

PARA REFLETIR

a) O deslocamento é uma grandeza escalar ou vetorial?

b) Na My fig 2.5, os vetores posições relativas foram desenhados tomando-se o ponto de largada L como ponto de referência. Se escolhêssemos um outro ponto de referência, o vetor deslocamento seria diferente? Por que sim? Por que não?

Um equívoco muito comum é achar que o vetor deslocamento dá a *trajetória* do objeto que se desloca, isto é, que o objeto se desloca seguindo o segmento de reta que vai do ponto inicial ao ponto final especificados pelo vetor deslocamento. Este pode não ser o caso! Por exemplo, na **My fig 2.5**, o carro não seguiu em linha reta de *S* para *T*. Ele seguiu pela pista, passando pela curva “S” do Sena, depois seguindo pelo trecho da “reta oposta” da pista. O que o vetor deslocamento faz é apenas especificar os pontos inicial e final do deslocamento!

Você pode ser estar se perguntando sobre o porquê de se considerar o vetor deslocamento e não a trajetória efetivamente percorrida. Uma resposta é que, para alguns conceitos da Física (o conceito de trabalho de uma força, por exemplo), apenas as posições inicial e final (representadas pelo vetor deslocamento) serão importantes, não importando a trajetória específica percorrida entre essas posições.

VOCÊ SABIA?

Vetores deslocamentos são usados em computação gráfica para compactação de vídeos.

Dado que um vídeo pode ser considerado como uma sequência de fotos digitais, uma pessoa que esteja abaixando sua cabeça no vídeo terá, por exemplo, o pixel que representa a posição da ponta do seu nariz deslocado para outro pixel em outra posição na foto digital seguinte. Esses deslocamentos são codificados por vetores, denominados motion vectors ou displacement vectors em Inglês. A compactação (economia no armazenamento de dados) vem, entre fatores, do fato de que (1) apenas os pixels que se deslocaram são armanezados (muitos pixels "ficam parados", como se pode observar na **My fig 2.2**) e (2) pixels próximos tendem a se deslocar na mesma orientação (se o nariz está se deslocando para baixo no vídeo, a boca muito provavelmente também será deslocada para baixo) e, ao se criar blocos de pixels com essa correlação, menos informação será necessária ser armazenada. Este vídeo <https://www.youtube.com/watch?v=Zsehy1Sbab8> exibe a técnica do *motion vectors* sendo visualizada em um trecho do filme Matrix.

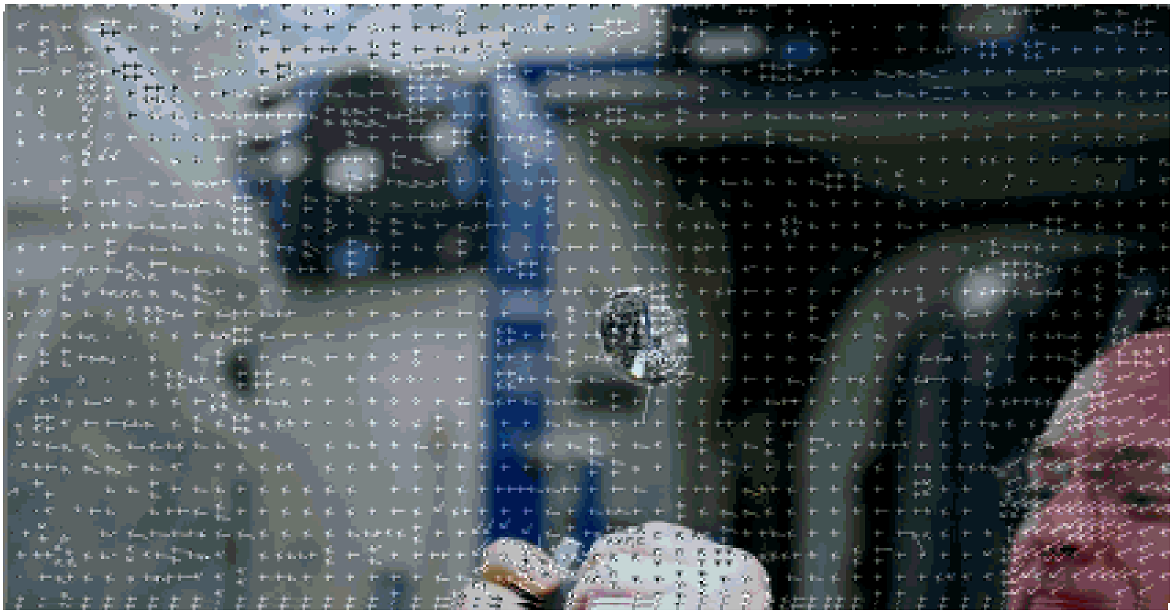


Figura 2.7 *Motion vectors* para um vídeo da NASA sobre líquidos em baixa gravidade.

PARA PESQUISAR

Dado que um vídeo pode ser considerado como uma sequência de fotos digitais, uma pessoa que esteja abaixando sua cabeça no vídeo terá, por exemplo, o pixel que representa a posição da ponta do seu nariz deslocado para outro pixel em outra posição na foto digital seguinte. Esses deslocamentos são codificados por vetores, denominados motion vectors ou displacement vectors em Inglês.

ORGANIZANDO Vetores do ponto de vista geométrico

Até aqui associamos vetor ao deslocamento de um objeto e o estudamos utilizando seu conceito proveniente da Física. A representação do vetor deslocamento foi feita por uma flecha, sendo as extremidades inicial e final da flecha as posições inicial e final da trajetória.

A partir de agora, estudaremos a geometria das flechas de um novo ponto de vista, sem considerar suas propriedades físicas (ligadas ao deslocamento). Na verdade, isso já foi feito de maneira superficial quando jogamos a Corrida de Vetores. Neste jogo, as flechas das cartas foram utilizadas para estabelecer a orientação e a distância a ser percorrida, sendo a extremidade inicial das flechas das cartas menos relevante. Pensando dessa forma, flechas são apenas representações gráficas de segmentos de reta orientados com módulo, direção e sentido. No que se segue, vamos tentar discutir um pouco melhor as características citadas dos segmentos de reta, e assim nos aprofundar nesse nosso estudo.

Para começar esta nova etapa, vamos relembrar que segmento de reta é um conjunto de pontos sobre uma reta delimitado por dois pontos chamados extremos. Na My fig 2.13 temos uma reta *r* e um segmento de reta que contém os pontos compreendidos entre *A* e *B*. Representamos este segmento de reta pelas duas letras que caracterizam seus pontos extremos, ou seja, o segmento de reta da figura é chamado *AB* ou *BA*. Neste caso, a ordem escolhida pelas letras não é importante, pois estamos interessados apenas em conhecer os pontos localizados entre os pontos extremos, sem estabelecer nenhuma relação de ordem. A reta *r*, da qual extraímos *AB*, é chamada de reta suporte de *AB*.

Figura 2.13: Segmento de reta *AB* o *BA*.

Considere agora um segmento de reta *BA*, sobre uma reta suporte *r*, na qual estabelecemos uma orientação. Na verdade, podemos perceber que existem duas possíveis orientações no segmento *AB*: de *A* para *B* e de *B* para *A*.

Para indicar essas possibilidades, ao desenhar tais segmentos, utilizaremos como recurso gráfico as flechas.

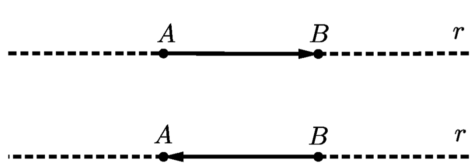


Figura 2.14: Segmento de reta orientados de *A* para *B* e de *B* para *A*.

Na My fig 2.14, a orientação escolhida para o primeiro segmento foi de *A* para *B*. Neste caso, denotaremos o segmento orientado por *AB*. Já na segunda reta, o mesmo segmento de reta foi orientado de *B* para *A*, e, então, escreveremos *BA*. Repare pelas notações adotadas para estes segmentos orientados que a ordem das letras que caracterizam os extremos fornecem a orientação adicionada ao segmento.

Como dissemos antes, a partir daqui as flechas serão representações de segmentos orientados que possuem as seguintes características: módulo, direção e sentido. A extremidade inicial da flecha coincidirá com a extremidade inicial do segmento orientado, assim como a extremidade final da flecha coincidirá com a extremidade final do segmento orientado. Dessa forma, fica fácil associar um segmento de reta orientado a uma flecha e uma flecha a um segmento de reta orientado. Usaremos os dois termos (flechas e segmentos orientados) no restante dessa seção significando a mesma coisa.

O *módulo da flecha* é o comprimento do segmento de reta que a define, ou seja, a distância entre seus pontos extremos. Portanto, módulo é sempre um número não negativo. Já a direção e sentido da flecha estão ligados à orientação do segmento. Em Matemática, uma reta define uma direção e segmentos herdam a direção de sua reta suporte. Por simplicidade, utilizaremos apenas a expressão direção do segmento em referência à direção do segmento proveniente de sua reta suporte.

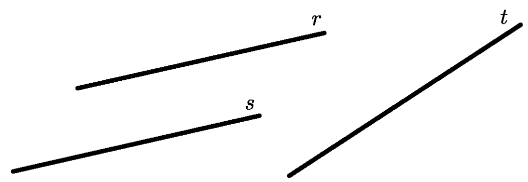


Figura 2.15: Direções definidas pelas retas r, s e t.

Diremos que dois segmentos possuem a mesma direção se eles forem colineares (sobre uma mesma reta suporte) ou paralelos (sobre retas suporte paralelas). O conceito de direção é comumente confundido com o conceito de sentido, mas o sentido é a orientação sobre uma direção. E repare que, sobre cada direção existem sempre dois possíveis sentidos. Por exemplo, sobre a direção horizontal temos o sentido da direita e o da esquerda.

Vetor

Na My fig 2.16, embora os segmentos orientados (flechas) tenham sido desenhadas em lugares diferentes, todas eles possuem as mesmas características: módulo, direção e sentido. A uma coleção de segmentos orientados com as mesmas características daremos o nome de vetor. Veja a próxima definição.

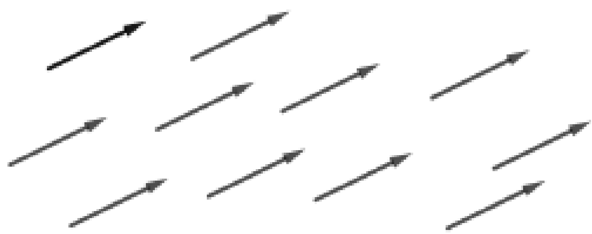


Figura 2.16: Segmentos orientados com mesmo módulo, direção e sentido.

> Vetor é uma coleção de segmentos orientados que possuem o mesmo módulo, direção e sentido.

Pela definição acima, um vetor fica determinado por uma infinidade de segmentos orientados com mesmo módulo, direção e sentido, que serão chamados representantes do vetor. As características de um vetor são as mesmas de seus representantes: módulo, direção e sentido.

Repare que qualquer segmento de reta orientado determina uma coleção de segmentos que é um vetor e qualquer outro segmento desta coleção representa o mesmo vetor. A qualquer representante de uma mesma coleção também daremos o nome de vetor, ou seja, vetor é toda a coleção ou então um representante da coleção, dependendo do contexto.

Podemos denotar um vetor de duas formas diferentes. A primeira delas é com uma letra minúscula e uma flecha, por exemplo v. E, a outra é usando as duas letras que caracterizam as extremidades inicial e final de um de seus representantes, por exemplo AB. Quando escrevemos $v = AB$ estamos considerando que o segmento de reta orientado AB é um representante do vetor v.

> Alguns autores definem segmentos equipolentes como sendo segmentos orientados que possuem o mesmo módulo, direção e sentido. Usando essa terminologia, é possível definir vetores de maneira análoga a definição dada anteriormente.

Para indicar o módulo do vetor v usaremos a notação $|v|$.

Vetores iguais

Em vista do que estudamos anteriormente, para comparar dois vetores é necessário comparar apenas o módulo, direção e sentido de seus representantes. Portanto:

EXEMPLO

O segmento de reta cujos extremos são pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado. Mostre que a medida deste segmento é metade da medida do terceiro lado do triângulo.

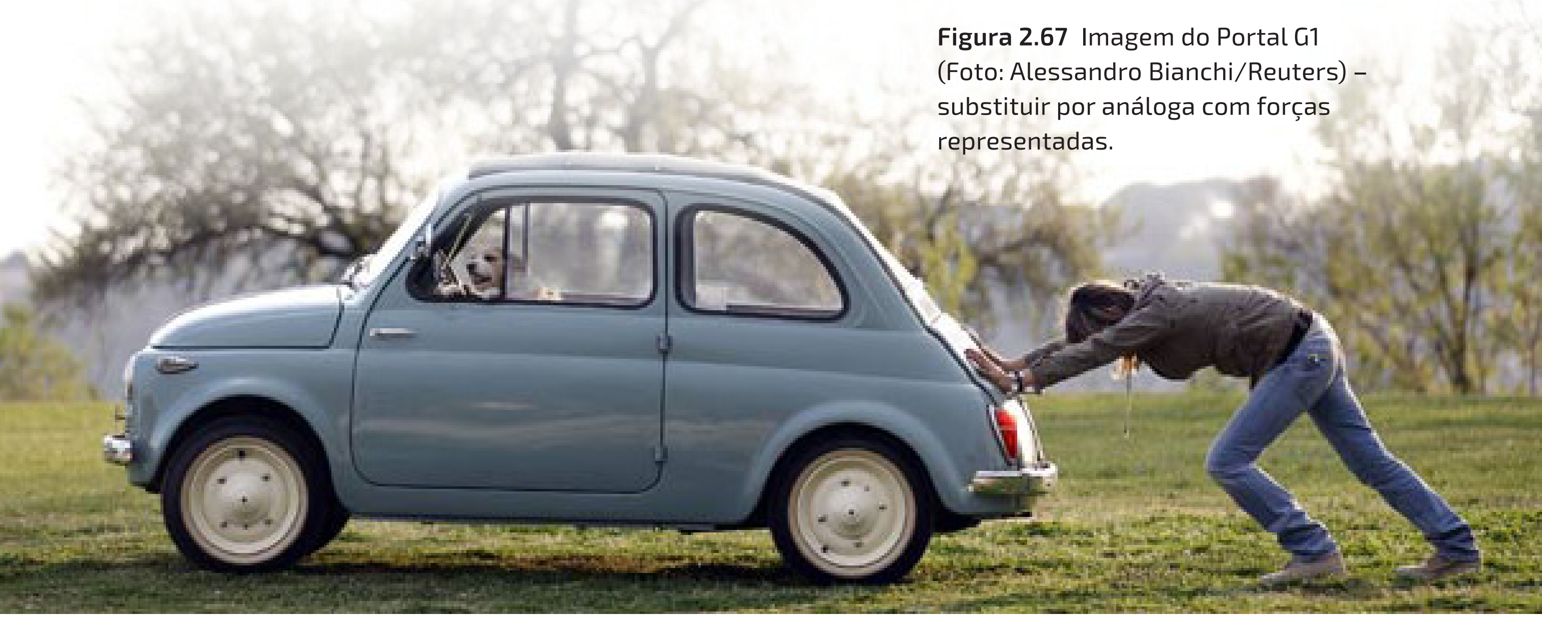
Vetores e Forças

A Primeira Lei de Newton, também conhecida como Princípio da Inércia, afirma que Primeira lei de Newton Um corpo permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme até que uma força atue sobre ele.

Precisamos de alguns esclarecimentos acerca dos termos usados na Primeira Lei de Newton: diz-se que um objeto está em repouso quando sua velocidade é constante igual a zero e que o corpo está em movimento retilíneo uniforme quando sua velocidade é constante e diferente de zero. Então o Princípio da Inércia diz que uma força é o que causa variação na velocidade e, portanto, esta também é uma grandeza vetorial. A unidade de força mais frequentemente utilizada é o Newton (N).

Quando alguém empurra um carro e ele não se move, isto não significa que o Princípio da Inércia esteja errado. Significa que existem forças de resistência que anulam a força do empurrão. Estas forças de resistência podem ser causadas pelo atrito do veículo com o chão e entre as peças do próprio automóvel. Por exemplo, se o freio de mão estiver acionado, a força de atrito entre as peças do carro será maior.

Figura 2.67 Imagem do Portal G1 (Foto: Alessandro Bianchi/Reuters) – substituir por análoga com forças representadas.



Uma maneira de expressar o Princípio da Inércia de modo a evitar confusões, como esta da situação do carro sendo empurrado, depende do conceito de força resultante.

Força resultante

A força resultante sobre uma partícula é a soma vetorial de todas as forças que atuam sobre ela.

Observações: a força resultante não é uma nova força que atua sobre o corpo, mas apenas uma força cujo efeito no corpo seria o mesmo que o de todas as outras forças juntas. Além disso, você deve tomar o cuidado de sempre posicionar as forças a partir da bolinha usada para representar o corpo e nunca apontando para ela. Esta é uma convenção que ajuda a evitar erros ao se somar vetores.

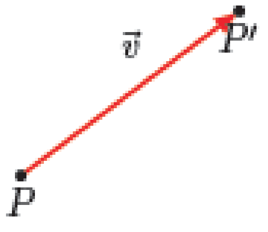


Figura 2.53 Translação do ponto P com relação ao vetor v

A Primeira Lei de Newton com esta linguagem fica: a força resultante sobre um corpo é zero se, e somente se, sua velocidade é constante.

Portanto, se quando empurramos um carro ele não se mexe é porque existem forças de resistência que atuam sobre o carro que anulam a força com que o empurramos.

EXEMPLO **Força peso**

Não é necessário contato com o corpo para que exista uma força atuando sobre ele. Imagine uma bola de tênis largada da mão do tenista a partir do repouso (velocidade zero). Ela cai sob efeito do campo gravitacional da Terra, sempre vertical para baixo (aponta para o centro da Terra). Se esta força não estivesse atuando sobre a bolinha, ela deveria ficar parada flutuando no local onde foi deixada pelo tenista.

Em contraposição, se o tenista larga a mesma bolinha sobre uma mesa horizontal, ela permanece parada, mesmo com a força da gravidade a puxando para baixo. Isso acontece porque a mesa exerce uma força de resistência na bola para que ela não altere a sua velocidade, esta é a força normal, geralmente representada por N, esta força é sempre perpendicular à superfície em contato com o corpo. Como a velocidade da bolinha é constante (igual a zero), a força resultante sobre ela também é zero. Portanto, nesta situação, a força normal anula com a força peso. **Atenção:** a força normal não é igual à força peso nesta última situação. Ela é simétrica à força peso, temos N= –F. Por isso a força resultante é zero.

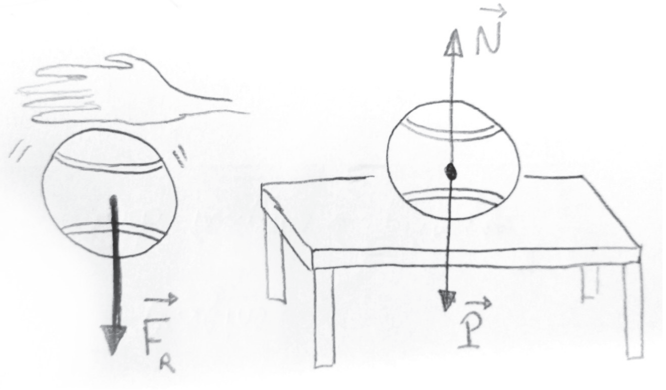


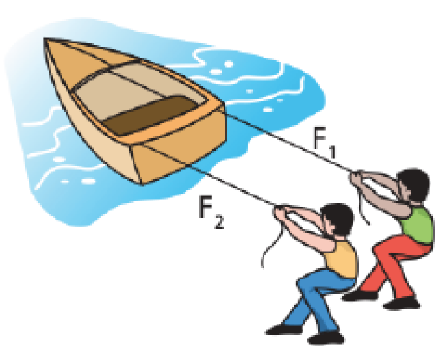
Figura 2.69 Força resultante diferente de zero na bola da esquerda e força resultante igual à zero na bola da direita.

Puxando o barco (modificado de PUC/SP)

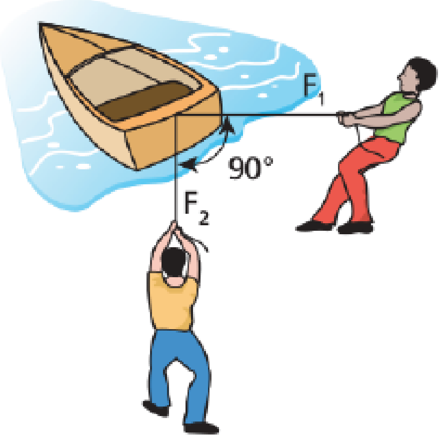
Atividade

Os esquemas seguintes mostram um barco sendo retirado de um rio por dois homens. Em (a), são usadas cordas que transmitem ao barco forças paralelas. Em (b), são usadas cordas inclinadas de 90º. Supondo que os homens fazem forças de intensidades iguais. Faça o que se pede.

a



b



Existem outras grandezas além das escalares e vetoriais?

Vetores foram motivados no início deste capítulo como o objeto matemático adequado para se representar grandezas que, para serem perfeitamente descritas, necessitam de um valor numérico e uma unidade – como as grandezas escalares – e, adicionalmente, necessitam também de uma orientação (uma direção e um sentido). Existem grandezas, contudo, que necessitam, além do valor numérico e da unidade, mais do que uma direção e um sentido. Elas são denominadas grandezas tensoriais. Como exemplo, imagine uma força agindo sobre uma superfície plana. O efeito total vai depender de duas coisas: (1) do módulo, direção e sentido da força e (2) da medida da área que também pode ser representada por um vetor perpendicular à superfície e cujo módulo é proporcional à área da superfície. Assim, o efeito da força sobre a superfície vai depender de dois vetores. Tensores são usados no estudo da relatividade, eletromagnetismo, tensão, elasticidade e deformação.

Para uma revisão rápida sobre o que aprendemos neste capítulo e uma pequena introdução aos tensores, recomendamos o vídeo TED-Ed "O que é um vetor?" elaborado por David Huynh, legendado em Português e com duração de 5 minutos aproximadamente.

Figura 2.74 Vídeo TED-Ed sobre vetores e tensores (<https://www.youtube.com/watch?v=ml4NSzCQobk>) com legendas em Português.

Campos vetoriais

Muitas leis naturais podem ser descritas por equações que envolvem vetores. Estudar estas equações permite entender os fenômenos associados. Neste contexto, o conceito de campo vetorial desempenha um papel fundamental. Basicamente, um campo vetorial é uma maneira de, a cada ponto do plano, atribuir um vetor. A My fig 2.30 e a My fig 2.31 exibem exemplos de campos vetoriais: a cada ponto do mapa estabelece-se um vetor que representa a velocidade do vento naquele ponto (em um dado instante).

Para saber um pouco mais sobre campos vetoriais e de como eles são usados para se criar equações que descrevem fenômenos, recomendamos a animação “CAOS II: CAMPO DE VETORES - A CORRIDA DOS LEGOS” <http://www.chaos-math.org/pt-br/caos-ii-campos-de-vetores> produzido por Jos Leys, Étienne Ghys e Aurélien Alvarez, com áudio em Português e duração de 13 minutos aproximadamente.

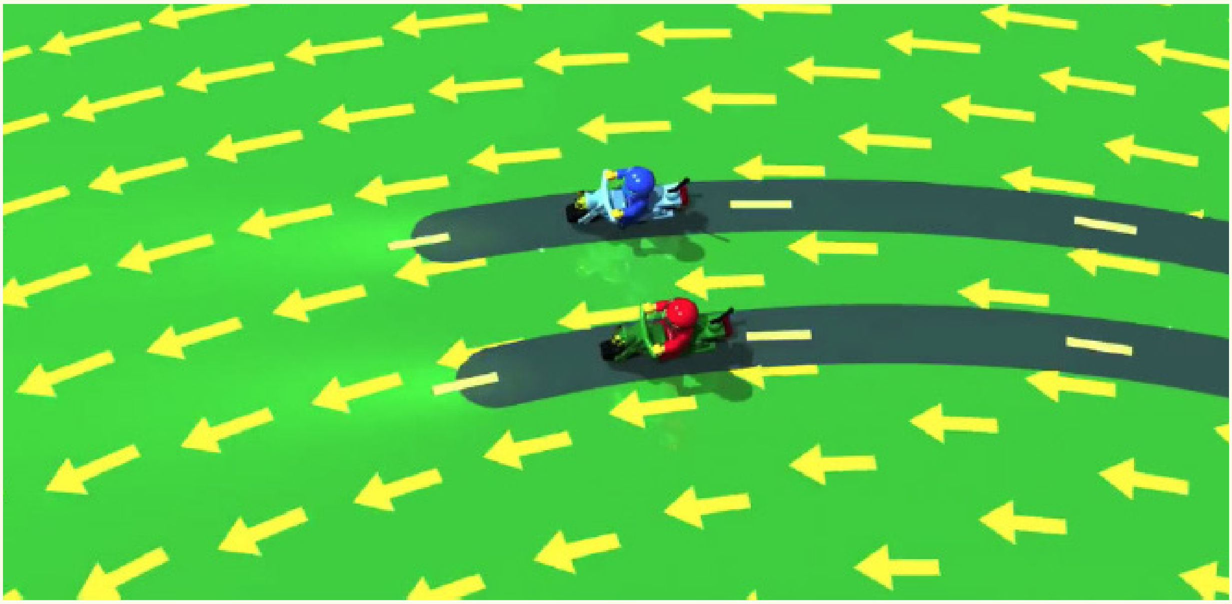


Figura 2.75 Entendendo campos vetoriais com LEGO (<http://www.chaos-math.org/pt-br/caos-ii-campos-de-vetores>).

Este vídeo é uma das nove animações que compõem o filme CAOS. Os tópicos tratados incluem sistemas dinâmicos, o efeito borboleta e a teoria do caos. O conteúdo é acessível ao público em geral e certamente você irá gostar e apreciar o uso e a importância de vetores nas várias questões abordadas nos vídeos.

Um pouco da história dos vetores

Ao contrário de muitos assuntos que você já estudou, a abordagem moderna de vetores como apresentada neste capítulo (e seus desdobramentos como vistos nos cursos universitários de cálculo vetorial) é relativamente recente. Dois nomes se destacam: Josiah Willard Gibbs (1839–1903) e Oliver Heaviside (1850–1925).

Gibbs foi um cientista americano que fez contribuições importantes para as áreas de Física, Química e Matemática.

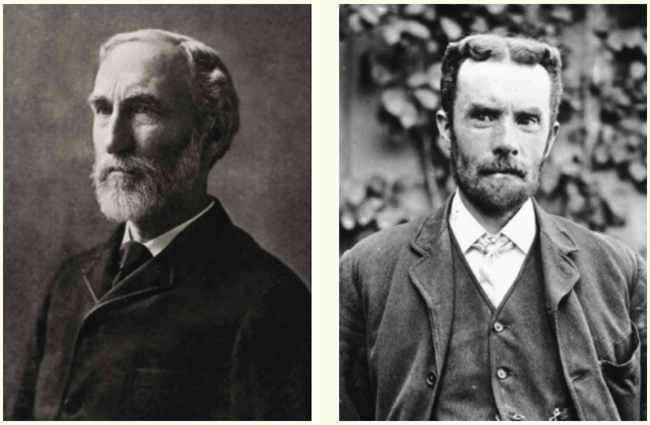


Figura 2.76: Gibbs e Heaviside (Fonte: Wikimedia Commons)

Em 1901, Gibbs ganhou a medalha Copley da Real Sociedade de Londres por ser o primeiro a aplicar a segunda lei da termodinâmica em uma discussão exaustiva da relação entre energia e capacidade térmica, elétrica e química para trabalho externo. Gibbs usou métodos vetoriais para determinar as órbitas de planetas e cometas. Heaviside foi um físico-matemático britânico autodidata com contribuições nas áreas de Matemática e Telecomunicações. Heaviside empregou seu cálculo vetorial para estudar eletromagnetismo e, em particular, simplificar as equações de Maxwell que fazem parte da função do eletromagnetismo clássico, da teoria quântica de campos, da ótica clássica e dos circuitos elétricos.

Algumas "ideias vetoriais" já eram conhecidas bem antes de Gibbs e Heaviside. Por exemplo, a regra do paralelogramo (das velocidades) já aparecia no tratado de Mecânica de Heron de Alexandria (c. 10 a.C.–c. 70 a.C.). Na sua obra Principia Mathematica (1687), Isaac Newton (1642-1727) trabalhou intensamente com grandezas hoje consideradas vetoriais tais como velocidade e força mas sem, contudo, usar o conceito de vetor.

Segundo o historiador Michael J. Crowe, o início da análise vetorial se deu com o matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855) que, em 1831, publicou uma justificativa geométrica para os números complexos. Entre Gauss e Gibbs/Heaviside, participaram da história dos vetores: William Rowan Hamilton (1805-1865) que introduziu a classificação de grandezas em escalares e vetoriais e inventou os quatérnios; Hermann Grassmann (1809-1877); Peter Guthrie Tait (1831-1901) e James Clerke Maxwell (1831–1879). Uma história mais completa dos vetores pode ser encontrada no livro A History of Vector Analysis: The Evolution of The Idea of A Vectorial System de Michael J. Crowe, publicado pela editora Dover em 1985.

Formigas do deserto, abelhas e vetores

Quando uma formiga típica procura comida, marca seu caminho com ferormônios. Ao encontrar alimento, ela se guia de volta para o formigueiro farejando a trilha que marcou. Mas e a formiga do deserto? Se um vento levar embora a areia marcada, será que ela fica perdida? Cientistas ([Wehner-et-al-1981]) descobriram que as formigas do deserto não ficam perdidas, pois elas se orientam por um método usado por marinheiros antigamente, o cálculo de posição. Esse método se baseia em um procedimento matemático chamado de integração por caminhos. O cérebro da formiga realiza naturalmente um cálculo que fornece para a formiga a direção, o sentido e a distância exata (um vetor) permitindo assim que a formiga volte em linha reta ao formigueiro. Integração por caminhos é um assunto que engenheiros e matemáticos estudam nas aulas de cálculo da faculdade. Parece que para aprender certas coisas não seria tão ruim ter cérebro de formiga!

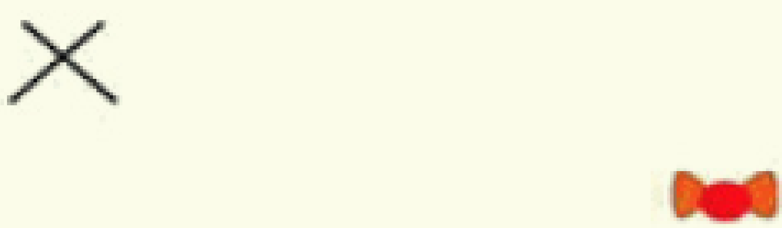


Figura 2.77 Texto e animação adaptados de [Gomes-2010].

E como as formigas sabem em que direção estão andando? Há evidências de que elas usam o sol como referência.

Outro pesquisador (Santchi) percebeu isso através de outra experiência interessante. Enquanto uma formiga do deserto seguia seu caminho, ele posicionou um anteparo de um dos lados da formiga impedindo que o sol batesse nela. Do outro lado da formiga, ele colocou um espelho de forma a refletir o sol na direção do inseto. Para a formiga era como se o sol houvesse "mudado de lado". Imediatamente a formiga fez meia volta e começou a caminhar na direção oposta.

Para mais informações sobre o tema, recomendamos [Gomes-2010] e as referências citadas.

Outros animais também "usam" vetores em suas vidas. Abelhas, por exemplo, fazem um tipo de dança para comunicar às companheiras uma fonte de alimentação. A direção e sentido da dança dá a direção e sentido da localização da fonte de alimento e a duração da dança especifica a distância. O documentário "A Dança das Abelhas" de Andrew Quitmeyer e Tucker Balch (com legendas em Português) dá mais detalhes sobre o assunto.

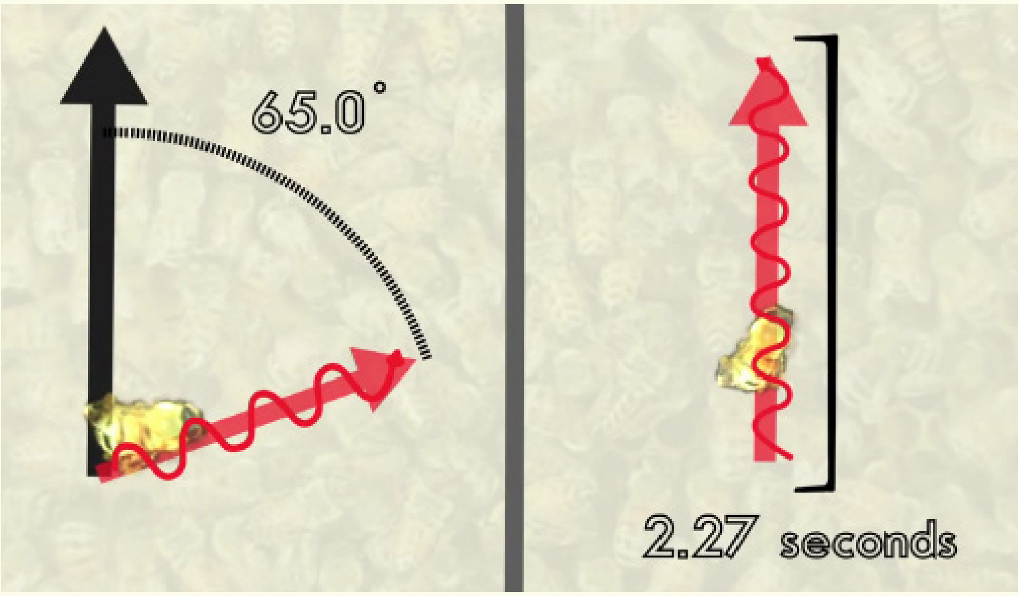


Figura 2.78 Vetores e abelhas <https://youtu.be/RGXyhqKsKQk>.

Vetores para além do plano

Enquanto que nosso estudo se concentrou nos vetores do plano (R2), o conceito de vetor pode ser estendido para o espaço (R3), para o hiperespaço (R) e muito mais além. A My fig 2.79, por exemplo, ilustra o vetor cujas extremidades são dois vértices de um cubo.

Como seus irmãos do plano, um vetor no espaço também representa direção, sentido e módulo.

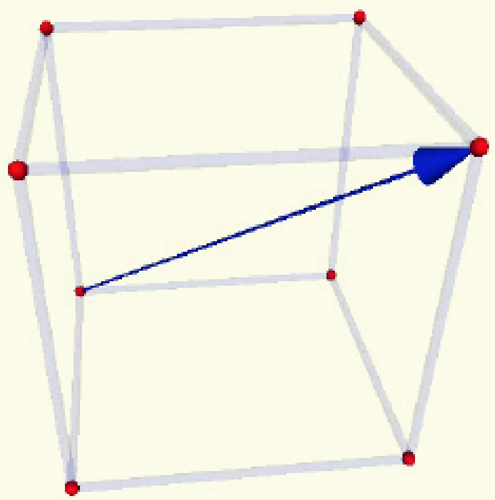


Figura 2.79 Um vetor no espaço R3.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BANCO Central do Brasil. Dinheiro no Brasil. Disponível em: <www .bcb.gov .br/htms /al bum /p27.asp>. Acesso em: 4 ago. 2014.GUSTAVSSON, Per. Contos desenhados. Ilustrações de Boel Werner. São Paulo: Callis, 2005.

FIRMINO, Teresa. Cientistas calculam tempo de vida dos dinossauros. Público, 15 jul. 2006. Disponível em: <https://www.publico.pt/ciencias/jornal/cientistas-calculam-tempo--de-vida-dos-dinossauros-88919>. Acesso em: 12 jun. 2017.

LALAU. Bem-te-vi e outras poesias. São Paulo: Companhia das Letrinhas, 1994.

LIMA, Thallita. Bolo de banana simples. Tudo Gostoso. Disponível em: <http://www.tudogostoso.com.br/receita/89939-bolo-de-banana-simples.html>. Acesso em: 12 jun. 2017.

MURRAY, Roseana. Receitas de olhar. São Paulo: FTD, 1999.

NAVA, William; SANTUCCI, Rodrigo M.; ANDRADE, Marco B. de. Você sabia que alguns dinossauros viveram em São Paulo?. Ciência Hoje das Crianças. Rio de Janeiro, n. 220, jan./fev. 2011.

PAMPLONA, Rosane. Era uma vez... três!: histórias de enrolar. São Paulo: Moderna, 2006.

ROCHA, Ruth. O patinho feio. São Paulo: Salamandra, 2010.

AUTO-AVALIAÇÃO

1 Hoje de manhã a Ana saiu de casa e dirigiu-se para a escola. Fez uma parte do percurso andando e a outra parte correndo. O gráfico a seguir mostra a distância percorrida pela Ana, em função do tempo que decorreu desde o instante em que ela saiu de casa até ao instante em que chegou à escola

- ☐ Explicite uma expressão numérica que permita determinar o número de cubos cinzas do Prisma *n* em função de *n*, isto é, uma expressão que de forma geral associe a ordem da figura à quantidade de cubos cinzas em sua composição.
- ☐ Justifique novamente a afirmação do item (c), agora a partir da expressão que você explicitou no ítem anterior.
- ☐ Se *x* representar o número total de cubos (brancos e cinzas) de um prisma desta sequência, qual das expressões seguintes representará o número de cubos cinzas desse prisma. Justifique sua escolha.

2 Ao final de um treino para a prova de 100 metros rasos, uma corredora recebe de seu treinador a seguinte tabela com as marcas intermediárias da sua melhor?

a) Quanto tempo ela gastou para percorrer os primeiros 30 metros?

b) Pensando em uma estratégia para melhorar a preformance da atleta, seu treinador resolve detalhar a tabela com os tempos correspondentes a cada 10 metros. Construa essa tabela.