

SVEUČILIŠTE U RIJECI

**TEHNIČKI FAKULTET**

Preddiplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

**AUTOREGRESIJSKI MODELI U OBRADI SIGNALA**

Rijeka, 13. rujna 2020.

Denis Mijolović  
0069066432

SVEUČILIŠTE U RIJECI

**TEHNIČKI FAKULTET**

Preddiplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

**AUTOREGRESIJSKI MODELI U OBRADI SIGNALA**

Mentor: doc. dr. sc. Ivan Dražić

Komentor: prof. dr. sc. Viktor Sučić

Rijeka, 13. rujna 2020.

Denis Mijolović  
0069066432

Rijeka, 8. ožujka 2019.

Zavod: **Zavod za matematiku fiziku, strane jezike i kineziologiju**  
Predmet: **Inženjerska matematika ET**

## ZADATAK ZA ZAVRŠNI RAD

Pristupnik: **Denis Mijolović (0069066432)**  
Studij: **Preddiplomski sveučilišni studij elektrotehnike**

Zadatak: **Autoregresijski modeli u obradi signala / Autoregressive models in signal processing**

### Opis zadatka:

U radu je potrebno precizno definirati autoregresijske modele u kontekstu slučajnih procesa pri čemu posebnu pažnju treba posvetiti AR, MA i ARMA modelima. Za svaki obrađeni model potrebno je opisati matematička i statistička svojstva te se osvrnuti na njihove prednosti i mane. Obrađene modele potrebno je staviti u kontekst primjene, a posebno se treba osvrnuti na primjere njihove implementacije u obradi signala.

Završni rad mora biti napisan prema Uputama za pisanje završnih radova koje su objavljene na mrežnim stranicama studija.

Polje znanstvenog područja: Elektrotehnika

Grana znanstvenog područja: Elektronika

Zadatak uručen pristupniku: 18. ožujka 2019.  
Rok za predaju rada: 19. svibnja 2020.

Mentor:



doc. dr. sc. Ivan Dražić



prof. dr. sc. Viktor Sučić (komentor)

Predsjednik povjerenstva za  
završni ispit:



prof. dr. sc. Viktor Sučić

Sveučilište u Rijeci  
TEHNIČKI FAKULTET  
Broj: 09-12/68.  
Rijeka, 05.03.2020.

Temeljem Članka 31. Statuta Tehničkog fakulteta, povodom zamolbe **Denisa Mijolovića** za produljenjem roka važenja **zadatka za završni rad** na preddiplomskom sveučilišnom studiju elektrotehnike Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci, donosim sljedeće

## RJEŠENJE

**Denisu Mijoloviću**, studentu preddiplomskog sveučilišnog studija elektrotehnike Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci, odobrava se produljenje roka važenja postojećeg zadatka za završni rad nakon svibnja ove godine. Student je dužan ovo rješenje uvezati u rad iza izvornika zadatka.

### Obrazloženje

Produljenje roka važenja zadatka za završni rad odobrava se studentu jer ima zadatak za završni rad s navedenim rokom važenja zadatka do svibnja tekuće godine.



Dekan

  
Prof. dr. sc. Duško Pavletić

Uputa o pravnom lijeku:

Protiv ovog rješenja nezadovoljna stranka može podnijeti, putem Službe studentske evidencije, žalbu dekanu Fakulteta, u roku od 7 dana od dana primitka rješenja

Co:

- Student
- Predsjednik Povjerenstva za završne ispite preddiplomskog sveučilišnog studija elektrotehnike prof. dr. sc. Viktor Sučić
- Služba studentske evidencije

## IZJAVA

Sukladno članku 8. Pravilnika o završnom radu, završnom ispitu i završetku prediplomskih sveučilišnih studija/stručnih studija Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci od 1. veljače 2020., izjavljujem da sam samostalno izradio završni rad prema zadatku preuzetom dana 18. ožujka 2019. godine.

Rijeka, 14. rujna 2020.



Denis Mijolović

*Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Mauris et ante a mauris consequat tempor. Donec vulputate, nulla pharetra finibus finibus, ipsum ante molestie mauris, in tincidunt libero augue sit amet arcu. In hac habitasse platea dictumst. Nulla sagittis ante ac augue volutpat cursus. Ut gravida odio malesuada, vestibulum mi at, dignissim leo. Morbi semper finibus est, id maximus mauris auctor eget.*

## Sadržaj

<b>1. Uvod</b>	<b>3</b>
1.1. Važnost prognoziranja u inženjerstvu . . . . .	5
<b>2. Teorijske osnove signala i sustava</b>	<b>8</b>
2.1. Vrste signala . . . . .	8
2.2. Vrste sustava . . . . .	9
2.2.1. Svojstvo kauzalnosti sustava . . . . .	10
<b>3. Opće metodologije prognoziranja</b>	<b>12</b>
3.1. Subjektivne prognoze . . . . .	12
3.2. Prognoze temeljene na statističkim modelima . . . . .	12
3.2.1. Procjena maksimalne vrijednosti . . . . .	13
3.2.2. Metoda najmanjih kvadrata . . . . .	15
<b>4. Osnovni pojmovi teorije vjerojatnosti i statistike pri obradi signala</b>	<b>18</b>
4.1. Slučajni događaj . . . . .	18
4.1.1. Slučajne varijable i distribucije vjerojatnosti . . . . .	20
4.1.2. Karakteristike distribucija vjerojatnosti . . . . .	25
4.2. Stohastički procesi . . . . .	28
4.2.1. Vremenski nizovi . . . . .	30
4.2.2. Autokovarijanca i autokorelacija . . . . .	32
<b>5. Autoregresivni modeli</b>	<b>37</b>
5.1. Autoregresijski model (AR) . . . . .	37
5.1.1. Dodatne pretpostavke . . . . .	40
5.1.2. Metode određivanja vrijednosti nepoznatih koeficijenata . . . . .	40
5.1.3. Autoregresijski model 1. reda . . . . .	41
5.1.4. Autoregresijski model 2. reda . . . . .	41
5.2. Pomična srednja vrijednost (MA) . . . . .	41
5.3. ARMA (p,q) proces . . . . .	41
<b>6. Pokus</b>	<b>42</b>
<b>7. Zaključak</b>	<b>43</b>

**Bibliografija****44**



## 1. Uvod

### **(Definicija podataka i informacija na zanimljiv način...ako je takvo što moguće)**

Vratimo li se u prošlost, važnost podataka i njihova interpretacija u svrhu stvaranja informacija bila je neminovna za civilizacijske strukture koje danas poznajemo. Od početka razvoja primitivnih tehnologija i njezinoga korištenja za optimizaciju životnih procesa, do razvoja trgovine i financijskih instrumenata; čovjek je sve efikasnije koračao prema evolucijskom vrhu uspješnom utilizacijom svoje okoline. Daljnjim razvojem, čovjek je nadišao barijeru vlastite memorije za obradu podataka, te se počeo približavati točki zasićenja - uslijed koje se javila potreba za stvaranjem boljšeg i efikasnijeg načina obrade podataka i njihove pretvorbe u sažetiju i jednako kvalitetnu informaciju.

Kao i kod većine velikih znanstvenih otkrića koja su obilježila svoje razdoblje kao preokretnice stoljeća u ratnim okolnostima, tako je i tijekom Drugog svjetskog rata otkriven novi izum kao odgovor na Enigmu - stroj koji je kodirao njemačke vojne i diplomatske poruke te čija se šifra smatrala nerješivom. Uzevši u obzir širenje nacističke Njemačke i prijetnju koja je prijetila ljudskim slobodama, javila se jasna potreba za stvaranjem rješenja koje će nadići čovjekova fizička i psihička ograničenja te biti u mogućnosti procesuirati veliku količinu podataka u vrlo kratkom vremenu – radeći neprestano i ne osjećajući umor te, konzekventno, ne stvarajući greške. Imajući to na umu, Englezi su tada izumili *Colossus* – uređaj koji je pomogao kriptanalitičarima da dešifriraju njemačke poruke i dao im stratešku prednost pri prognoziranju daljnjih koraka tijekom ratnog razdoblja. Taj uređaj se u današnje vrijeme smatra pretečom prvoga računala kakvim ga danas poznajemo.

Baš kao i tada, te kroz cijelu ljudsku povijest, ispravna interpretacija podataka u informaciju koju krajnji korisnik može iskoristiti u svrhu kvalitetnijeg donošenja važnih odluka, iskazala se kao značajan faktor u očuvanju civilizacijske i sveopće stabilnosti – stanja koje je najpotentnije za budući razvoj, a time i blagostanje. Kako je civilizacija težila ka tehnološkom društvu, tako je eksponencijalno rasla i količina podataka koju je bilo potrebno interpretirati; te se javila potreba za sve preciznijim prognoziranjem budućega ponašanja sustava kako ne bi došlo do destrukcije vitalnih procesa i porasta volatilnosti sustava - a samim time i povećanjem vjerojatnosti za njegovim urušavanjem.

Slijedno tome, važnost prognoziranja proizlazi iz dvije osnovne činjenice:

1. budućnost je nepredvidiva
2. poduzete akcije u vrijeme donošenja odluke vrlo često nemaju trenutne posljedice sve do određenoga trenutka u budućnosti

Imajući na umu prethodno navedene činjenice, slijedno je zaključiti da precizne prognoze budućih događaja pospješuju efikasnost postupka donošenja odluka. Štoviše, većina odluka od posebnog poslovnog ili političkog značaja imaju nužan uvjet pozitivnih prognostičkih indikatora prezentiranih kroz studije izvedivosti ili ispitivanja javnoga mnijenja – čija je zadaća što preciznije prognozirati buduću potražnju za proizvodima i uslugama koje su predmet proizvodnih, industrijskih ili inih procesa. U konkretnijem, mikroekonomskom smislu, dalo bi se konstatirati da je prognoziranje implementirano u gotovo sve odluke koje su dio naše svakodnevice: poduzeće će početi izgradnju nove proizvodne jedinice kako bi osiguralo rastuću potražnju na tržištu; zaposleni radnici početi će štedjeti kako bi si mogli priuštiti godišni odmor ili kupnju vrijednosnica s ciljem ostvarivanja prava na buduću kapitalnu dobit; rektor sveučilišta donesti će odluku o otvaranju novog studijskog programa kako bi povećao broj studenata i uskladio broj obrazovanih stručnjaka s budućim tržišnim potrebama. Ukratko, svaki od navedenih procesa zahtjeva inicijalnu percepciju utjecaja donešenih odluka na povećanje vjerojatnosti ostvarivanja zadanih ciljeva – i to prije donošenja samih odluka.

Ostanemo li na mikroekonomskoj razini, možemo reći da je poslovanje poduzeća zahvaćeno trima faktorima: makroekonomskim prilikama, industrijskim pokazateljima i samim uređenjem poduzeća. Obzirom da direktor takvoga poduzeća najčešće ima mogućnost direktnoga djelovanja jedino na poslijednja dva faktora, od iznimne je važnosti da bude što bolje informiran o vanjskim utjecajima i trendovima na koje ne može izravno djelovati – poput donošenja novih zakonskih regulativa ili razvoja globalne virusne pandemije. Važnost ispravnog prognoziranja čimbenika na koje se nema direktan utjecaj od iznimne je važnosti za većinu projekta iznimno velike vrijednosti. Tako, na primjer, projekti s velikim početnim ulaganjima poput izgradnje novih jedinica za opskrbu električnom energijom, mogu imati vrijeme izrade studije izvedivosti u trajanju od 10 ili više godina prije nego što li se započnu radovi. Budući da opskrba električnom energijom ovisi o stupnju razvijenosti regije ili područja, potrebno je izraditi valjane prognoze koje će pomoći u procjeni trenutne, kratkoročne i dugoročne isplativosti novih opskrbnih jedinica za opskrbljivača, ostale projektne partnere, te za lokalni i regijalni razvoj. U tom slučaju, prisutnost raznovrsnih rizika utječe na sve dionike projekta – od nacionalne, regionalne ili lokalne uprave ili samouprave; do svih industrijskih poduzeća koja se nalaze na tom području. Ti rizici mogu biti smanjenje likvidnosti tržišta, kreditni status<sup>1</sup>, kamatni rizik<sup>2</sup>, valutni rizik<sup>3</sup>, strateški rizik<sup>4</sup>, stanje tržišta rada i još mnogi drugi. Pritom je važno napomenuti važnost osjetljivosti modela prognoziranja na fluktuacije u svakoj stavci procjene ukupnoga rizika, tj. isti prognostički model se ne bi trebao koristiti za prognoziranje u različitim zakonskim i regulativnim okvirima – što pridonosi kompleksnosti izrade samoga modela i porastu troškova izrade kvalitetne studije.

<sup>1</sup>Usporedba potraživanja i dugovanja nekoga poduzeća koje se dalje koriste za utvrđivanje kreditnog rejtinga.

<sup>2</sup>Moguće smanjenje vrijednosti financijskih instrumenata javno dostupnoga poduzeća uslijed promjene razine kamatnih stopa na tržištu.

<sup>3</sup>Osjetljivost financijskih instrumenata na fluktuacije tečajeva stranih valuta. Značajno za multinacionalna poduzeća s viševalutnim potraživanjima i dugovanjima.

<sup>4</sup>Rizik za prihode ili kapital koji nastaje kao posljedica neadekvatnih poslovnih odluka ili nepravilnog vođenja poduzeća.

### 1.1. Važnost prognoziranja u inženjerstvu

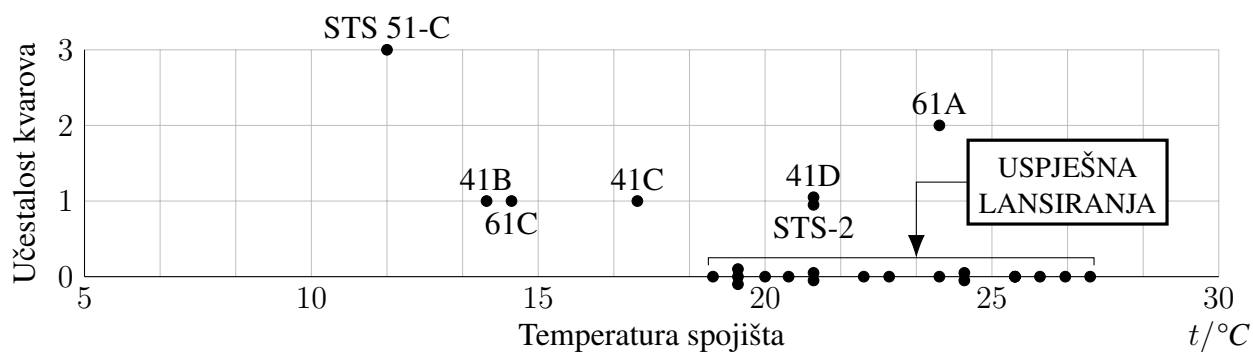
U navedenim primjerima nastojali smo nešto konkretnije opisati važnost prognoziranja kroz opće primjere iz prakse. Kako bismo zaokružili sadržaj ovoga poglavlja, osvrnuti ćemo se na stvarni primjer jedne od najutjecajnijih nesreća koje su obilježile prošlo stoljeće – no ovoga puta fokusirajući se na ispravnoj interpretaciji prognostičkih procesa i važnosti najnasumičnijeg čimbenika u cijelome procesu odlučivanja, tj. čovjeka.

28. siječnja 1986. godine, svemirska letjelica *Challenger* eksplodirala je otprilike 70 sekundi nakon polijetanja iz svemirskog centra John F. Kennedy u Floridi. Sedmero astronauta je poginulo, a svemirska letjelica u potpunosti je uništena. Uzrok nesreće bila je eksplozija spremnika za raketno gorivo, prouzrokovana zapaljenjem plina u pomoćnim raketama za uzlijetanje.

Pomoćne rakete za uzlijetanje bile su predmet zabrinutosti još pri samim počecima razvoja aeronautike. Proizvodnja istih realizira se spajanjem više manjih segmenata uz veliki broj spojišta koji moraju zadovoljavati niz projektom predodređenih uvjeta – među kojima je postizanje nepropusnosti spojišta brtvljenjem. U ovom konkretnom slučaju, korištene su meke profilne brtve s elastičnim deformacijama (također poznate kao o-prsteni) uz sloj ljepila. Prilikom zapaljenja raketnog motora, u sustavu se stvaraju visoke temperature i visoki tlak – što utječe na otapanje ljepila i posljedično habanje brtve, te propuštanja eksplozivnog medija.

Nakon eksplozije, istražni stožer objavio je izvješće u kojemu su navedene okolnosti koje su dovele do uzroka nesreće. Utvrđeno je kako je prethodne večeri, 27. siječnja, donesena odluka o lansiranju letjelice sljedećega dana usprkos nepovoljnoj prognozi temperaturnih uvjeta određenih radnom temperaturom deklariranom od strane proizvođača pomoćnih raketa. Protivno apelu inženjera za obustavom lansiranja, odluka uprave bila je da će se lansiranje ipak provesti, što je rezultiralo kobnim posljedicama.

Kako bi izradili model vjerojatnosti zakazivanja brtvi, koristiti ćemo podatke o učestalosti kvarova brtvi prilikom prethodnih lansiranja – budući da je lansiranje *Challenger*-a bilo 24. lansiranje aktualnog svemirskog programa. Budući da su za svaku pomoćnu raketu korištena tri o-prstena te da su za dotadašnja lansiranja korištene dvije pomoćne rakete po lansiranju, razmatrati ćemo korištenje 6 o-prstena po lansiranju. Uslijed zavisnosti karakteristika brtve o temperaturi, razmotriti ćemo ovisnost zakazivanja brtve o temperaturi koline prilikom lansiranja. Slika 1.1 prikazuje podatke o učestalosti kvarova brtvi pri određenim temperaturama prilikom testnih lansiranja. Iz navedene uočavamo veću učestalost kvarova pri nižim temperaturama – što odgovara svojstvu amorfnih materijala, koji na temperaturama nižim od temperature prelaska u staklo imaju veću tvrdoću i lomljivost.



Slika 1.1. Podaci o učestalosti kvarova brtvi prilikom testnih lansiranja koja su prethodila Challenger-u [6]

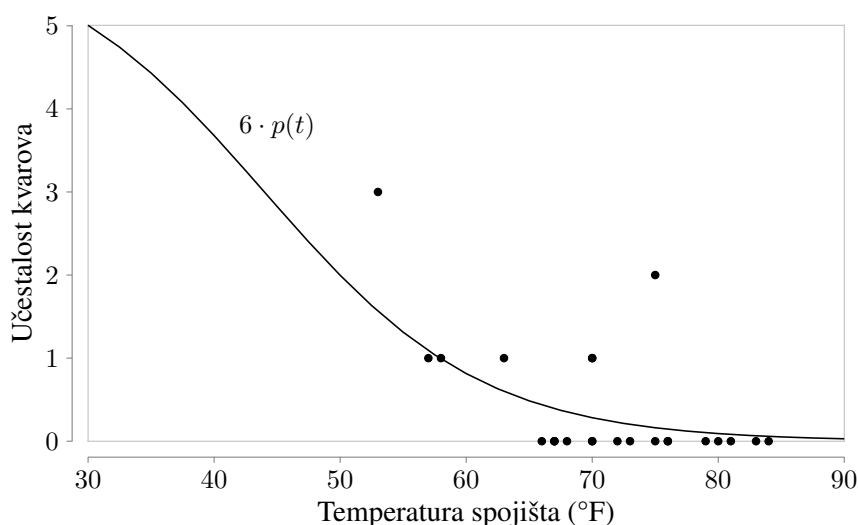
Model prikazan jednažbom (1.1) reprezentira vjerojatnost kvara  $p(t)$  pojedine brtve u ovisnosti o temperaturi spojišta  $t$  prilikom lansiranja.

$$p(t) = \frac{e^{a+b \cdot t}}{1 + e^{a+b \cdot t}} \quad (1.1)$$

gdje su:

- $t$  temperatura brtve izražena u  $^{\circ}F$
- $a, b$  konstante dobivene statističkim modeliranjem metodom procjene maksimalne vrijednosti

Vrijednost konstanti  $a$  i  $b$  određene su podacima, tj. odabirom vrijednosti  $a$  i  $b$  tako da dobijemo što točniju aproksimaciju u okolini podatkovnih točaka prikazanih na slici 1.1. Budući da sinteza navedenoga statističkoga modela ne obuhvaća temu ovoga rada, nećemo analizirati statistički izračun konstanti  $a$  i  $b$  za slučaj Celzijeve temperature, već ćemo koristiti postejeće konstante iz literature ( $a = 5.085$  i  $b = -0.1156$ )[4] u svrhu izrade grafičkog prikaza vjerojatnosti kvara brtvi pri određenim temperaturama – kao što je prikazano na slici 1.2.



Slika 1.2. Grafički prikaz modela (1.1) u odnosu na diskretne vrijednosti mjerenih podataka [4]

Valjano je, temeljem prethodnih primjera, zaključiti da uspješnost ispunjavanja zadanih ciljeva uveliko ovisi o mogućnostima glavnih aktera da što brže i točnije predvide posljedice kako bi se što bolje pripremili za daljnje korake. Pouzdane prognoze upravo to i omogućuju – da se donesu pravovremene odluke koje su temeljene na valjanim planovima. U poglavljima koja slijede, detaljnije ćemo definirati određene pojmove, pomoću kojih ćemo biti u mogućnosti lakše prevesti prognoziranje iz lingvističke apstrakcije u jezik matematike – najprecizniji i najrašireniji jezik koji čovjek poznaje.

## 2. Teorijske osnove signala i sustava

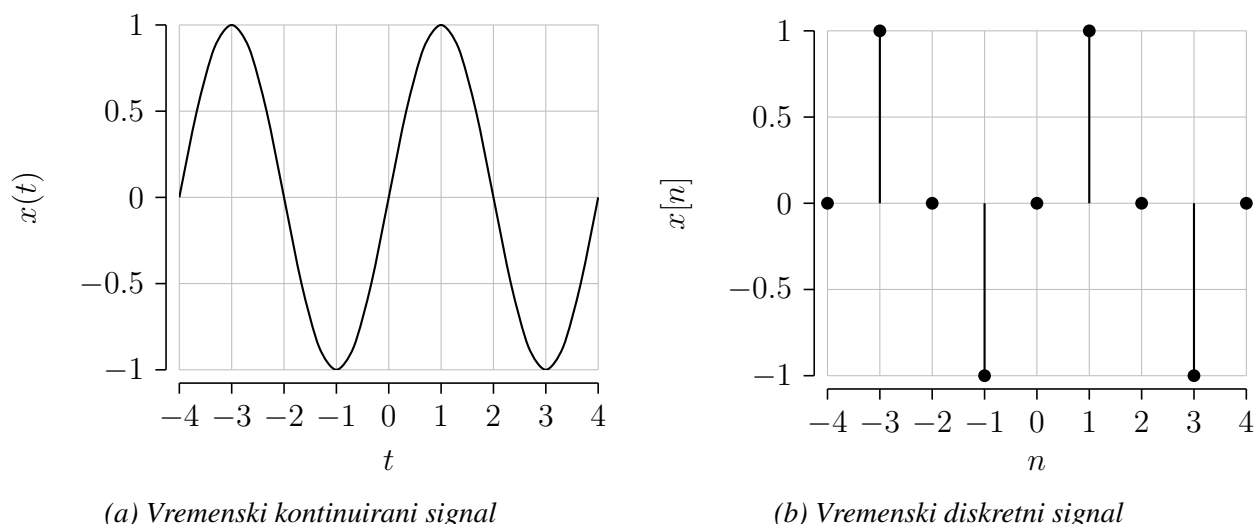
Prije matematičkoga opisa prognostičkih modela, potrebno je pobliže opisati pojam *signala* kao realnu ili kompleksnu funkciju vremena. U elektrotehnici je takav opis signala od iznimne važnosti, pritom posebnu pažnju pridodajemo sinusoidnim signalima zbog karakterističnih svojstva takvih signala. Ta karakteristična svojstva pokazala su se od iznimne koristi za modeliranje fizikalnih pojava pomoću aproksimacije praktičih rezultata dobivenih pripadajućim mjernim metodama. Osim u elektrotehnici, signali su sveprisutni u gotovo svim znanstvenim disciplinama i granama. U širem smislu, valjano je reći da je signal skup podataka ili informacija, pa tako možemo konstatirati da su neki od primjera signala struja i napon, sila i brzina, tlak i protok, govor, video ili burzovni indeksi. Usprkos svojoj sveprisutnosti, signali su u suštini zadržali svoju nominalnu jednostavnost – a to je činjenica da je signal u suštini funkcija jedne ili više nezavisnih varijabli koje opisuju ponašanje promatranih fenomena.

### 2.1. Vrste signala

Prema prirodi vremenske varijable, dvije najosnovnije vrste signala su:

1. *vremenski kontinuirani signali*:  $x(t), t \in \mathcal{R}$ ,
2. *vremenski diskretni signali*:  $x[n], n \in \mathcal{Z}$ .

U *vremenski kontinuiranim signalima* vremenska konstanta  $t$  je kontinuirana i njezina domena, što rezultira i kontinuiranim vrijednostima slike promatrane funkcije. Navedeno se može grafički predočiti pomoću glatke neprekidne linije kao što je prikazano na Slici 2.1a koja prikazuje vremenski kontinuirani signal  $x(t) = \sin(\frac{n\pi}{2})$ . Za razliku od vremenski kontinuiranih signala, u *vremenski diskretnim signalima* vremenska konstanta je definirana u točno određenim – diskretnim – vremenima. Posljedično, vrijednosti slike promatrane funkcije biti će poznate samo u prethodno definiranim diskretnim vremenima. Primjer vremenski diskretnog signala  $x[n] = \sin(\frac{n\pi}{2})$  grafički je prikazan na Slici 2.1b.



Slika 2.1. Prikaz vremenski kontinuiranoga i vremenski diskretnoga signala funkcije  $\sin(\frac{n\pi}{2})$

Neki od primjera vremenski kontinuiranih signala su brzina, pozicija vozila, govor ili zvuk iz audio sustava; dok su primjeri vremenski diskretnih signala mjesečne vrijednosti dionica, demografski pokazatelji poput nataliteta i sl..

Kao što smo već prethodno ustanovili, vremenski diskretni signali mogu reprezentirati bilo koje promatrani fenomen čije se vrijednosti mogu dobiti za točno određeni trenutak – što nas vodi do zaključka o postojanju mogućnosti prikazivanja vremenski kontinuiranih signala pomoću vremenski diskretnih signala. To je moguće sukcesivnim *uzorkovanjem* vremenski kontinuiranoga signala (engl. *sampling*), čime dolazimo do diskretnih vrijednosti signala. Rezolucijom uzorkovanog signala moguće je upravljati pomoću podešavanja frekvencije uzorkovanja (engl. *sampling rate*). Tako je prethodno navedeni diskretni signal prikazan na Slici 2.1b načinjen uzorkovanjem kontinuiranoga signala na Slici 2.1a. Navedena klasa signala vrlo je korisna prilikom digitalne obrade signala. Uzmemo li u obzir prethodno spomenutu prednost visoke brzine računalnog procesuiranja podatka, ali i postojeća ograničenja računalnih sustava radnom memorijom, procesorskim performansama, te digitaliziranom reprezentacijom podataka; važnost vremenski diskretnih signala i uzorkovanja je neminovna – što je dokazano širokom i ekonomičnom integracijom funkcionalnosti obrade signala u različita tehnološka i ina rješenja (npr. mogućnost mobilnih uređaja da prepoznaju glasovne naredbe). Naravno, operacija uzorkovanja signala nije toliko jednostavna kao što smo opisali jer kvalitetna izvedba zahtjeva dobro poznavanje spektralne analize – što uključuje znanja iz područja matematičkih transformacija do realnih ograničenja poput preklapanja signala ili prisutnosti šuma. Analogno vrijedi i za rekonstrukciju uzorkovanih signala u vremenski kontinuirane signale.

## 2.2. Vrste sustava

Uz signale se nerijetko veže i ideja *sustava*, te je stoga potrebno definirati koncept sustava kao sponu između ulaznoga i izlaznoga signala. Za razliku od jednostavnosti ideje signala, navedeno će

možda izazvati određene poteškoće – budući da je sustav u općem smislu shvaćen kao cjelokupno i dovršeno projektantsko rješenje (npr. sustav za prijenos električne energije), dok je matematička reprezentacija takvoga sustava predložena kao model sustava. Štoviše, opisujući sustav u užem smislu, i dalje dolazimo do vrlo širokoga polja istraživanja i unutar točno određenoga znanstvenoga područja. Zadržimo li se isključivo na području elektrotehnike, sustavi mogu biti određeni kao sustavi programske podrške, sustavi regulacije, elektronički sustavi, ugradbeni sustavi, mehanički sustavi, elektromehanički sustavi itd.. Valjano je zaključiti da je potrebno odrediti nužne granice idejnoga razmatranja sustava kako bi izbjegli neizbježnu apstrakciju beskonačne kvantizacije opisa sustava. Iz toga proizlazi ideja i potreba za prethodno spomenutim razmatranjem sustava kao poveznice između ulaznoga i izlaznoga signala, što se ispostavilo kao koristan alat inženjerima prilikom analize propagacije ulaznih signala u regulacijskim krugovima ili prilikom prognozirivanja ponašanja sustava na određene pobude tijekom projektiranja samoga sustava.

Matematički, sustavi predstavljaju modele koji reprezentiraju transformaciju ulaznog signala  $x(t)$  u izlazni signal  $y(t)$ . Navedeno se može opisati relacijom  $y(t) = Hx(t)$ , gdje  $H$  predstavlja matematički model transformacije signala – tj. sustav. Analogna relacija vrijedi i za slučaj transformacije vremenski diskretnoga signala  $x[n]$ , kao što je prikazano na Slici 2.2.

Kao i kod signala, dvije osnovne vrste sustava prema prirodi vremenske varijable su:

1. *Vremenski kontinuirani sustavi*: ulazni signal  $x(t)$  i izlazni signal  $y(t)$  sustava su vremenski kontinuirani,
2. *Vremenski diskretni sustavi*: ulazni signal  $x[n]$  i izlazni signal  $y[n]$  su vremenski diskretni.



Slika 2.2. Blokovski prikaz vremenski kontinuiranoga sustava (a) i vremenski diskretnoga sustava (b)

### 2.2.1. Svojstvo kauzalnosti sustava

Iako signali i sustavi imaju niz matematičkih svojstva koja se koriste u svakodnevnoj primjeni, u svrhu pojašnjenja budićih termina ukratko ćemo pojasniti pojam kauzalnosti sustava.

Sukladno definiciji, sustav je *kauzalan* ukoliko signal koji propagira kroz sustav ovisi isključivo o trenutnim ili prošlim vrijednostima ulaznoga signala. Drugim rječima, izlazni signal ne predviđa vrijednosti odziva na buduće vrijednosti ulaznoga signala. Konzekventno, sustav *nije kauzalan* ukoliko vrijednost izlaznoga signala ovisi o budućoj vrijednosti ulaznoga signala. Primjer



kauzalnog sustava je

$$y[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x[n-k] \quad (2.1)$$

dok je

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[n-k] \quad (2.2)$$

primjer sustava koji nije kauzalan.

Iako su kauzalni sustavi vrlo važni zbog prirode realnih rješenja koja aktuiraju temeljem prethodno očitanih vrijednosti, već sada možemo naslutiti važnost nekauzalnih sustava prilikom uočavanja kretanja trendova prilikom prognoziranja ili sinteze sustava regulacije s ciljem odstranjivanja šumova i sl..

### 3. Opće metodologije prognoziranja

Obzirom na sveprisutnost prognoziranja, baš kao i signala i sustava, klasificirati ćemo dvije osnovne vrste prognoza – subjektivne prognoze i prognoze temeljene na statističkim modelima.[5]

#### 3.1. Subjektivne prognoze

Subjektivne prognoze temelje se na pogađanjima, prethodnim iskustvima i intuiciji. Takve prognoze nemaju predodređena i utvrđena pravila procesuiranja informacija, već se svode na donošenje zaključaka temeljem osobnog mišljenja osobe koja iznosi prognozu. Na primjer, dva će ekonomska analitičara iznesti različite prognoze za ponašanje tržišta i vrijednosti financijskih instrumenata u slučaju kriznih situacija poput pandemije koronavirusa. Dok će jedan analitičar smatrati da će vrijednosti financijskih instrumenata imati negativan trend u nadolazećem kvartalu uslijed restriktivnih mjera koje imaju nepovoljan utjecaj na tržište, drugi će prognozirati rast temeljem povećanog priljeva kapitala od strane povećanog broja ulagača koji prvi puta ulaze na tržište kapitala uslijed straha neiskorištavanja volatilitnosti tržišta za ostvarivanje dugoročnih kapitalnih dobitaka (engl. *fear of missing-out*). Iako ovakve metode prognoziranja uistinu mogu rezultirati donekle točnim prognozama, kao što je to bilo u slučaju tzv. kratkih prodaja (engl. *short-sell*) prilikom kraha američkog tržišta nekretnina ili prilikom razotkrivanja prikrivanja neispravnih rezultata mjerenja dušičnih oksida dizelskih automobila Volkswagen grupe; one su dokazano manje točne od prognoza temeljenih na statističkim modelima.

#### 3.2. Prognoze temeljene na statističkim modelima

Za razliku od subjektivnih prognoza, prognoze koje su temeljene na statističkim modelima prate jasno određeni i sistematizirani kvantitativni obrazac definiran međudnosom utjecajnih varijabli. Navedeni modeli mogu se razvrstati na *kauzalne modele* i *nekauzalne modele*. [5]

Analogno prethodno spomenutim kauzalnim signalima, kauzalni prognostički modeli nastoje detaljno opisati matematičku genezu diskretnih mjernih podataka i pokušati pronaći relaciju koja opisuje determinirani način dobivanja vrijednosti zasebnih varijabli u svakoj točki prošloga vremena. Takvi modeli kreću od premise nužnosti što boljšeg poznavanja prošloga ponašanja kako bi se predvidjela budućnosti. Nadalje, kauzalne prognostičke signale možemo dalje podijeliti na *kvalitativne* – koji daju informaciju o tendenciji rasta ili pada budućih vrijednosti – te *kvantitativne*, koji daju informaciju o brojčanoj vrijednosti rasta ili pada budućih vrijednosti.

U odnosu na kauzalne prognostičke modele, nekauzalni prognostički modeli nastoje predvidjeti buduće iznose vrijednosti podataka bez dubljega razumjevanja geneze prethodno mjerenih podataka; već fokusirajući se na projekciju njihova međusobnog odnosa na budućnost. Takvi mo-

deli imaju prednost ekonomičnosti budući da se ne orijentiraju na detaljna istraživanja ponašanja svakog parametra, što je povoljno za prognoziranje trenda čimbenika niže važnosti. Navedena prednost može se gledati i kao nedostatak, budući da premisa o istovjetnosti ponašanja vrijednosti signala u prošlosti i budućnosti ne predviđa pojavu smetnji u sustavu – poput pojave prenapona mreže, kratkog spoja u visokonaponskim energetske sustavima ili pojave velike gospodarske krize.

Naravno, navedeno vrijedi u slučaju jednostavnih prognostičkih modela, te ćemo u nadolazećim poglavljima proučiti detalje kompleksnih nekauzalnih prognostičkih modela temeljenih na vremenskim nizovima. No, prije toga ćemo definirati dvije opće prognostičke metode koje će nam služiti kao osnova budućih razmatranja.

### 3.2.1. Procjena maksimalne vrijednosti

Procjena maksimalne vrijednosti jedna je od općih metoda prognoziranja koja služi za analizu kompleksnijih sustava koji nemaju jasno raznatljiv način određivanja koeficijenata procjene. Ova metoda čini temelj za razne ostale metode procjene vrijednosti, a najveća joj je prednost primjenjivost u bilo kojem problemu za koji je moguće odrediti zajedničku distribuciju vjerojatnosti temeljem promatranja, tj. mjerenja.

Pretpostavimo li analizu nasumičnog uzorka podataka s  $n$  uzorkovanja  $x_1, \dots, x_n$  koji je određen distribucijom vjerojatnosti kontinuirane varijable  $f(x, \theta)$  sa jednim nepoznatim parametrom  $\theta$ , izradom vektorske funkcije koja kao članove ima skup uzorkovanih podataka  $X = (x_1, \dots, x_n)$  možemo doći do izraza za zajedničku distribuciju vjerojatnosti [1]

$$f(x, \theta) = f(x_1, \theta)f(x_2, \theta) \dots f(x_n, \theta). \quad (3.1)$$

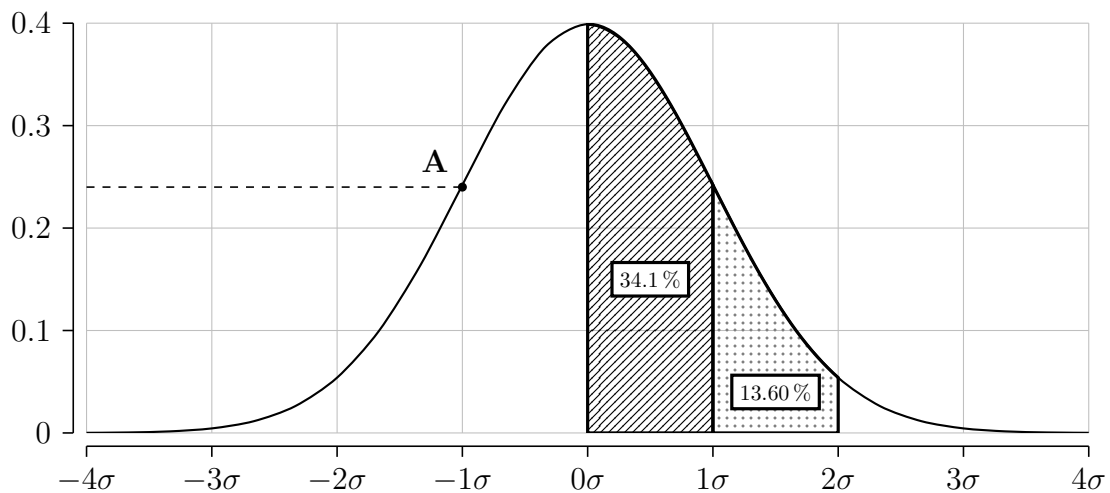
Iz navedenog izraza možemo zaključiti kako je zajednička distribucija vjerojatnosti rezultatni produkt distribucije vjerojatnosti za svakog pojedinog člana  $x_n$ . Izraz za zajedničku distribuciju vjerojatnosti  $f(x, \theta)$  iz jednadžbe (3.1) koristi se u teoriji vjerojatnosti za procjenu vrijednosti skupa  $X$  kada je poznata vrijednost parametra  $\theta$ . Ukoliko vrijedi

$$f(x_1, \theta) > f(x_2, \theta), \quad (3.2)$$

možemo konvencionalno konstatirati kako je veća vjerojatnost pojavljivanja člana  $x_1$  kao vrijednosti skupa  $X$  u nekom određenom trenutku promatranja kada vrijedi ta relacija. Iako navedena konstatacija vrijedi, u prognoziranju je puno učestalije razmatranje vrijednosti  $\theta$  obzirom na češću primjenu prilikom analize statističke interferencije – koja nastoji opisati ponašanje nepoznatog parametra  $\theta$  u ovisnosti o različitim ulaznim vrijednostima skupa  $X$  koje su nam poznate. Takva instanca funkcije zajedničke distribucije poznata je i kao funkcija vjerodostojnosti.

Kako bi lakše predočili razliku između vjerojatnosti i vjerodostojnosti, pretpostavimo zadani skup podataka s normalnom distribucijom kao što je prikazano na slici 3.1. Vjerojatnost možemo opisati kao površinu ispod krivulje normalne distribucije skupa  $X$ . Iz navedenoga, odaberemo li nasumičan član navedenoga skupa, vjerojatnost da je nasumični član skupa unutar granica  $\mu \pm 1\sigma$  iznosi 68.27 %.

Za razliku od vjerojatnosti, vjerodostojnost možemo opisati kao vrijednost ordinatnog položaja točke  $A$ . Kako bismo znali odrediti prethodno navedeni položaj, potrebno je poznavati srednju vrijednost  $\mu$  i standardnu devijaciju  $\sigma$  promatranog skupa – temeljem kojih možemo odrediti točku  $A$  kao sjecište pravca okomitog na apcisu u točki  $\mu \pm \sigma$  i krivulje normalne distribucije skupa  $X$ .



Slika 3.1. Prikaz normalne distribucije s naznačenom vjerojatnošću i vjerodostojnošću

Sada kada znamo osnovnu razliku između vjerojatnosti i vjerodostojnosti, promotrimo li funkciju vjerodostojnosti  $f(x, \theta)$  uz konstantnu izmjerenu vrijednost  $x$  uz relaciju

$$f(x, \theta_1) > f(x, \theta_2), \quad (3.3)$$

dolazimo do zaključka kako se veća vrijednost nepoznatog parametra  $\theta_2$  može pripisati kao vjerodostojnija, a samim time je i vjerojatnosti pojavljivanja izmjerenoga člana  $x$  kao vrijednosti skupa  $X$  veća. Takva razmatranja ne mogu se pripisati *a priori*, već se pretpostavljena vrijednost nepoznatog parametra  $\theta$  dodatno testira substitucijom u jednadžbu (3.1) – nakon čega se vrši usporedba dobivenih vrijednosti sa izmjerenim vrijednostima iz skupa  $X$  [3].

Konačno, slijedi osnovni postulat metode procjene maksimalne vrijednosti koji nalaže postupak procjenjivanja vrijednosti parametra  $\theta$  i odabir one vrijednosti koja će dati najvjerodostojniji rezultat. U praktičnoj primjeni, češće se koristi logaritamski oblik funkcije vjerodostojnosti

$$L = L(x, \theta) = \log_e \{f(x, \theta)\}. \quad (3.4)$$

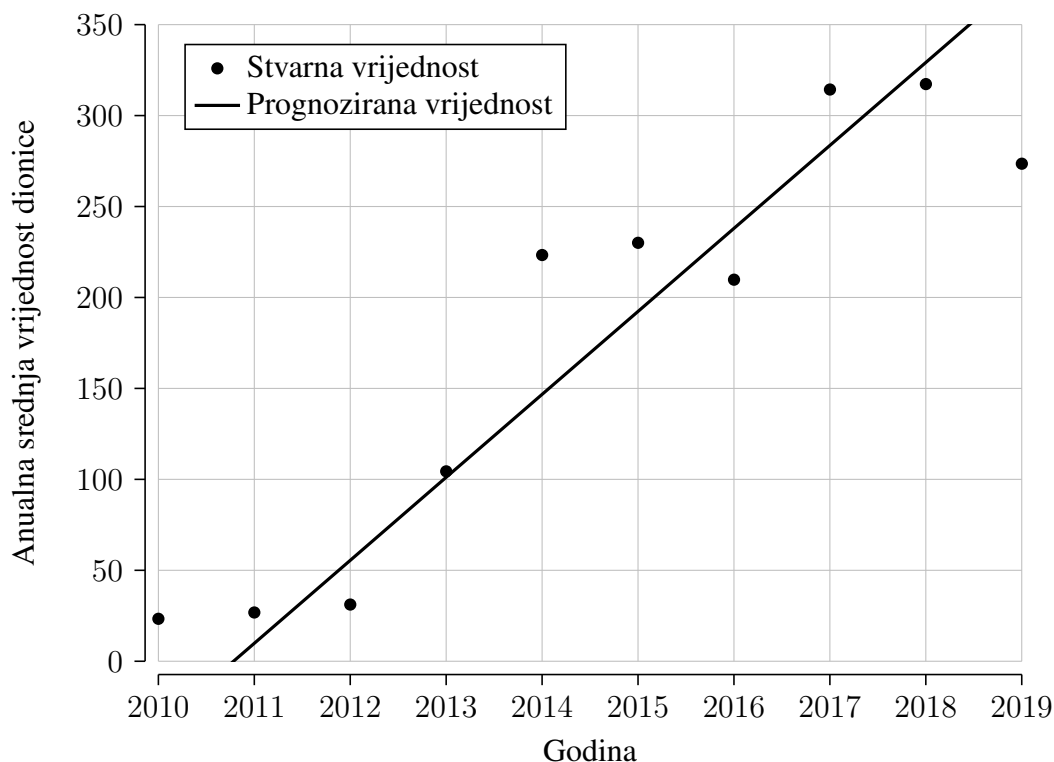
Prethodno stečenim matematičkim znanjem, možemo pretpostaviti proces dobivanja maksimuma funkcije vjerodostojnosti izračunavanjem izraza

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0. \quad (3.5)$$

Daljnji proračun nadilazi potrebna znanja za shvaćanje teme ovoga rada te ćemo krenuti s pojašnjenjem sljedeće opće metode prognoziranja – metode najmanjih kvadrata.

### 3.2.2. Metoda najmanjih kvadrata

Metoda najmanjih kvadrata je jedna od najranijih metoda prognoziranja, no njezina primjena zamjetna je i danas. Cilj korištenja metode najmanjih kvadrata je pronalazak pravca koji minimizira sumu svih kvadratnih grešaka koje nastaju rezultat korelacijskih jednadžbi, kao što je prikazano na slici 3.2. Važno je naglasiti kako prethodno somenuta teza vrijedi isključivo za linearnu metodu najmanjih kvadrata. Uz navedenu, postoji i nelinearna metoda najmanjih kvadrata koju nećemo promatrati.



Slika 3.2. Prikaz stvarne i prognozirane vrijednosti dionica poduzeća "Tesla, Inc."

Praktičnu primjenu navedene metode je najintuitivnije, poput prethodno spomenute metode procjene maksimalne vrijednosti, predložiti kroz primjenu u procesu investiranja. Uzmemo li primjer investitora koji nastoji donesti odluku o dugoročnom investiranju u poduzeće "Tesla, Inc." (\$TSLA) s naumom ostvarivanja dobiti kroz idućih 10 godina, korištenjem metode najmanjih kvadrata moguće je izraditi prognostički model koji će pobliže opisati i predložiti trend promjene

vrijednosti dionica poduzeća u odnosu na prethodno desetljeće. Rezultat navedene metode jest pravac prikazan na slici 3.2, iz kojega investitor može steći subjektivni dojam o trendu vrijednosti dionice, a koji će mu pomoći pri donošenju odluke o investiranju. Kao i kod otalih metoda, korištenje ove metode može samo približno opisati određeni trend u odnosu na referentni vremenski period ili neku drugu nezavisnu varijablu, no u našem konkretnom primjeru, zbog volatilnosti tržišta kapitala nastoji se izbjegavati donošenje konkretnih odluka temeljem metode najmanjih kvadrata uslijed preširokog vremenskog intervala koji može dati krive rezultate prilikom neočekivanih događaja. Kao što je bilo navedeno i kroz prethodni primjer, jedan od neočekivanih događanja može biti i pojava financijske krize – koja se otprilike ponavlja svakih 10 godina. Upravo zbog toga, izrada prognostičkih modela ima više čimbenika i indikatora temeljem kojih se može donesti sud o ispravnosti budućih odluka temeljem dubljih analiza na temelju različitih prognostičkih modela – za koje je nužna logička valjanost korelacije između zavisne i nezavisne varijable. U protivnom, obzirom na proizvoljan odabir zavisne i nezavisne varijable za koju ćemo vršiti promatranja, može doći do logičke neistovjetnosti korelacije i kauzaliteta.

Nakon usustavljivanja osnovne predodžbe metode najmanjih kvadrata, svojstva iste nastojati ćemo opisati kroz analizu nasumičnog mjerenje dostavljenih otpornika, čije rezultate možemo prikazati kao opći izraz

$$E(y) = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \dots + \theta_q x_q, \quad (3.6)$$

gdje su vrijednosti varijabli  $x_1, x_2, \dots, x_q$  poznalice (vrijednosti mjerenih otpora), a vrijednosti nepoznatog parametara  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$  nepoznanice. Nadalje, izraz (3.6) možemo razvesti kao

$$y = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \dots + \theta_q x_q + \epsilon, \quad (3.7)$$

za koji pretpostavljamo  $E(\epsilon) = 0$ . Nasumičnu varijablu  $\epsilon$  nazivamo mjernom pogreškom [1]. Mjerna pogreška ili odstupanje može nastati iz različitih razloga, od kojih su u elektrotehnici najčešći nesavršenosti mjerne opreme, neispravnost mjernog postupka, nevjerodostojno stanje mjernog objekta, vanjski utjecaji, itd.

Izraz (3.6) daje nam linearnu korelaciju vrijednosti  $y$  kao sume  $q$  članova poznatih vrijednosti  $x$ . Želimo li odrediti vrijednost  $y$  za točno određeni broj članova, izraz (3.6) možemo zapisati i kao

$$y_i = \theta_1 x_{1i} + \theta_2 x_{2i} + \dots + \theta_q x_{qi} + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.8)$$

uz analogno navedenu pretpostavku  $E(\epsilon_i) = 0$ , te vrijednosti  $\epsilon_i$  kao mjerne pogreške određenog mjerenja  $i$ . Uz sve navedene pretpostavke i poznate vrijednosti podataka, kao jedina nepoznanica nameće se vrijednost nepoznatog parametra  $\theta$ . "Princip najmanjih kvadrata" nalaže odabir

nepoznatih parametara  $\theta_1, \dots, \theta_q$  s pripadajućim vrijednostima  $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_q$  koje će minimizirati količinu članova [1]

$$Q(\theta_1, \dots, \theta_q) = \sum_{i=1}^n \{y_i - \theta_1 x_{1i} - \theta_2 x_{2i} - \dots - \theta_q x_{qi}\}^2. \quad (3.9)$$

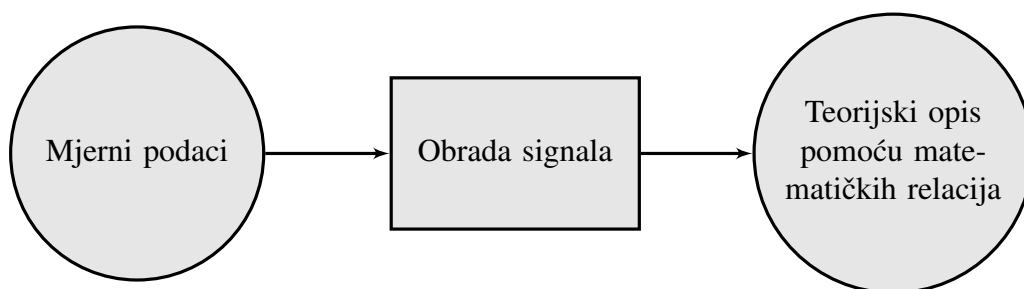
Korištenjem prethodno stečenih matematičkih znanja, možemo pretpostaviti daljnji pronalazak pripadajućih vrijednosti izračunom minimuma funkcije  $Q(\theta_1, \dots, \theta_q)$  parcijalnom derivacijom po svakom  $\theta_i$ , te izjednačavanjem te parcijalne derivacije s 0 kako slijedi:

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta_i} = (-2) \sum_{i=1}^n x_{ji} \{y_i - \theta_1 x_{1i} - \theta_2 x_{2i} - \dots - \theta_q x_{qi}\} = 0, \quad j = 1, \dots, q. \quad (3.10)$$

Jednadžbom (3.10) zaključujemo ovo poglavlje. U sljedećem poglavlju opisati ćemo osnovne statističke pokazatelje signala i vremenskih nizova koji čine osnovu svih statističkih modela, pa tako i onih navedenih u ovom potpoglavlju.

## 4. Osnovni pojmovi teorije vjerojatnosti i statistike pri obradi signala

Kroz prethodna poglavlja ustanovili smo osnovne značajke signala i sustava te prognostike kao discipline koja se bavi predikcijom ponašanja signala temeljem određenih metodologija. Navedene metodologije su kvalitetne koliko i njihova statistička reprezentativnost. Kako bi kvantitativno mogli utvrditi statističku reprezentativnost modela za prognoziranje ponašanja signala, potrebno je izvršiti detaljniju *analizu (obradu) signala*.



*Slika 4.1. Obrada signala čini poveznicu između akumuliranih podataka o nekom fenomenu i teorijskih pojašnjenja tog istog fenomena [3]*

U sklopu studijskog programa svučilišnih studija elektrotehnike, primat kroz više godine studija drži spektralna analiza signala, kojom se nastoji opisati frekvencijske karakteristike promatranog iznalog signala (poput amplitudno-frekvencijske karakteristike, fazno-frekvencijske karakteristike ili pojačanja sustava) Navedeno se najčešće realizira kroz određivanje prijenosnih i inih funkcija sustava koje su od značaja za ponašanje elektroničkih sustava čija su baza elektroničke komponente čije karakteristike nisu nužno konstantne pri određenim frekvencijskim pojavama – što omogućuje korištenje određenih elektroničkih sustava u svrhu niskopropusnoga ili visokopropusnoga filtriranja, te propusnoga filtriranja određenog frekvencijskog opsega.

Drugi pristup analizi signala je analiza ponašanja signala u ovisnosti o vremenu. Štoviše, poznavajući pojam rekonstrukcije vremenski kontinuiranih signala iz vremenski diskretnih signala, dolazimo do zaključka da ponašanje signala u vremenu možemo opisati pomoću beskonačno mnogo diskretnih vrijednosti u infinitezimalno malim vremenskim razmacima, što nas dalje vodi do uvođenja *vremenskih nizova* – koje ćemo detaljnije opisati kroz nadolazeća potpoglavlja.

### 4.1. Slučajni događaj

Predmet istraživanja teorije vjerojatnosti su eksperimenti koji promatraju fenomene za koje nije moguće predvidjeti ishode s neupitnom sigurnošću. Takve eksperimente nazivamo *slučajnim eksperimentima*  $\mathcal{E}$ , a definiramo ih kao postupke koje se može proizvoljan broj puta ponavljati, te koji završavaju sa dva ili više ishoda [2]. Iako ne možemo sa stopostotnom sigurnošću konstatirati



pojavu jednog od određenih ishoda, na temelju raznih parametara možemo pretpostaviti koji će od tih ishoda imati veću vjerojatnost pojavljivanja u odnosu na ostale ishode eksperimenta.

Skup svih rezultata slučajnog eksperimenta  $\mathcal{E}$  naziva se *prostor elementarnih događanja* ili *prostor uzorka* (engl. sample space) [2], kojeg označavamo s  $\Omega$ . Uzmemo li bacanje novčića kao najosnovniji primjer teorije vjerojatnosti, uz izuzetak mogućnosti pada na rub novčića, prostor uzorka eksperimenta ćemo onda definirati kao  $\Omega = \{G, P\}$  – gdje smo s  $G$  označili slučaj pada novčića s vidljivom stranom "glave", dok smo s  $P$  označili slučaj pada novčića s vidljivom stranom "pisma" [4]. Isto tako, vršimo li eksperiment kratkog spoja sinkronog stroja, iz prakse možemo konstatirati kako ćemo mjerenjem dobiti neku konačnu apsolutnu vrijednost struje kratkog spoja. No, teoretski apsolutna vrijednost struje kratkog spoja može zauzeti bilo koju vrijednost ovisno o konstrukcijskim karakteristikama samoga stroja. Shodno tome, statistički je točnije navesti kako prostor uzoraka za navedeni eksperiment iznosi  $\Omega = (0, \infty)$  budući da apsolutna vrijednost struje može teorijski iznositi bilo koji pozitivan broj.

Svaki podskup prostora uzorka  $\Omega$  je *slučajni događaj*  $E$ . Slučajni događaj ostvaruje se ukoliko se ostvari barem jedan od rezultata slučajnog eksperimenta koji su elemnt tog podskupa [2]. Uzmemo li primjer dimenzioniranja sabirnica elektroenergetskog postrojenja, izabrati ćemo jedan od ponuđenih presjeka sabirnica iz tablice 4.1.

Tablica 4.1. Dopuštena trajna opterećenja u A okruglih profila [7]

Promjer mm	Bakar		Aluminij	
	obojeni vodič	neobojeni vodič	obojeni vodič	neobojeni vodič
6	125	120	65	60
8	160	150	–	–
10	250	210	200	160
16	480	410	380	316
20	640	540	500	410
30	1100	900	870	680

Koristimo li analognu tezu iz prethodnog primjera za prostor uzorka vrijednosti struje  $\Omega = (0, \infty)$ , odaberemo li izvedbu bakrenih sabirnica okruglog profila s obojenjem i promjerom od 16mm iz tablice 4.1, slučajni događaj može poprimiti bilo koju vrijednost skupa  $A = (0, 480)$ . Točnije, moramo imati na umu da u bilo kojem trenutku normalnoga rada pogona struja kroz sabirnice ne nadmašuje 480 A. Nastane li slučajani događaji prilikom kojih očitamo vrijednosti  $B = \{100, 250, 300, 420, 550\}$ , presjekom skupova  $A \cap B$  možemo filtrirati ona mjerenja koja su

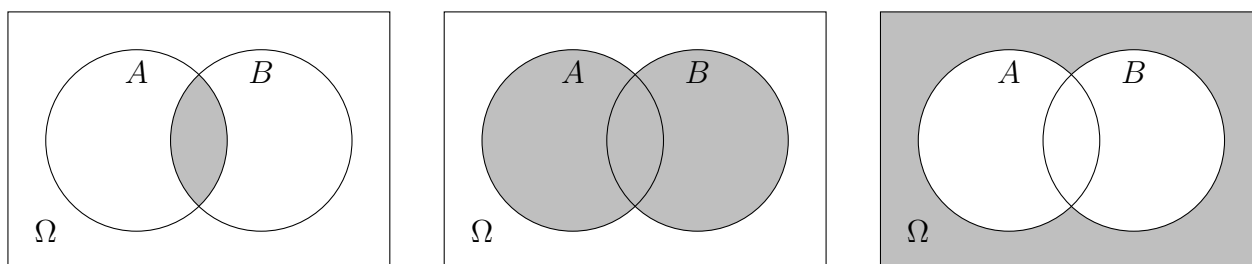
zadovoljila uvjet dimenziniranja sabirnice i čije vrijednosti ne premašuju dopuštenja naprezanja definirana u tablici 4.1.

Doduše, u praksi je proces dimenzioniranja sabirnice obrnut – vrši se proračun maksimalnih struja u normalnom pogonu za najnepovoljniji slučaj, po čemu se odabire profil sabirnice na način da se odabere profil sabirnice koji može podnijeti vrijednosti veće od maksimalne dobivene vrijednosti struje u normalnom pogonu. Gornji primjer smo naveli kao hipotetski za slučaj u kojem nisu poznate vrijednosti maksimalne vrijednosti struje u normalnom pogonu, ali u kojem smo imali mogućnost izvesti testna mjerenja uz poznavanje promjera sabirnice.

Slučajni se događaji označavaju velikim slovima abecede:  $A, B, C, \dots$ , a rezultati slučajnog eksperimenta nazivaju se *elementarni događaji*. U našem primjeru, elementarna događanja slučajnog događaja  $A$  su 100, 250, 300, 420, 550.

Na sve skupove možemo primijeniti osnovne skupovne operacije, pa ćemo tako do novih slučajnih događaja doći njihovom primjenom nad postojećim skupom slučajnih događaja [2]:

$$\begin{array}{ll} A \cup B \equiv A + B & \text{nastupio je događaj } A \text{ ili događaj } B, \\ A \cap B \equiv AB & \text{nastupio je događaj } A \text{ i događaj } B, \\ \bar{A} \text{ ili } A^c & \text{nije nastupio događaj } A. \bar{A} \text{ je suprotni događaj od } A \text{ ili } ne \ A. \end{array}$$



(a) Presjek  $A \cap B$

(b) Unija  $A \cup B$

(c) Komplement  $(A \cup B)^c$

Slika 4.2. Vennovi dijagrami presjeka, unije i komplementa unije

#### 4.1.1. Slučajne varijable i distribucije vjerojatnosti

Kada govorimo o slučajnim i elementarnim događajima, najčešće govorimo o grupiranju dobivenih rezultata u smislene cjeline koje su dio većeg skupa dobivenih podataka. Kako bismo mogli izvršiti detaljnu prognostičku analizu slučajnih događaja, potrebno je osmisliti način preslikavanja elementarnih događaja u prigodniji oblik za obradu podataka. Navedeno postizemo procesom *kvantifikacije*, tj. određivanjem realnih numeričkih vrijednosti kojima ćemo pripisati neka fizikalna svojstva. Na primjer, želimo li odraditi računalnu statističku analizu za prethodno navedeni pokus bacanja novčića, možemo kvantificirati elementarne događaje *pismo* i *glava* kao realne vrijednosti 0 i 1 – koje se pripisuju kao moguće rezultatne vrijednosti *slučajne varijable*

$$X = \begin{cases} 0 & \text{ako je rezultat } pismo \\ 1 & \text{ako je rezultat } glava \end{cases}$$

Iz navedenoga možemo zaključiti kako je domena slučajne varijable  $X$  prostor uzorka  $S$ , a područje vrijednosti je skup realnih brojeva  $R$  [2].

Naravno, potreba za preslikavanjem elementarnih događaja iz prostora uzorka postaje sve veća sa većim prostorom uzorka – što proizlazi iz kompleksnosti i slabe čitljivosti fizikalnog opisivanja velikih skupova podataka, ali i zbog manjka praktičnosti deskriptivnih ulaznih podataka prilikom računalne obrade podataka uslijed tehničke izvedbe samih računala i njihovih procesa.

Slučajne varijable možemo raspodijeliti u dvije kategorije: *diskretne slučajne varijable* i *kontinuirane slučajne varijable*.

Općenitije, diskretnu slučajnu varijablu formalno definiramo kao:

**Definicija 4.1** ([4, 2]). *Neka je  $\Omega$  prostor uzorka. Diskretna slučajna varijabla je funkcija  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  koja poprima konačno mnogo vrijednosti  $x_1, x_2, \dots, x_i$  s vjerojatnostima*

$$P(X = x_i) = p(x_i) \quad \text{za } -\infty < x_i < \infty, \quad (4.1)$$

*pri čemu vrijedi:*

$$p(x_i) \geq 0 \quad \wedge \quad \sum_i p(x_i) = 1$$

Funkcija  $p(x_i)$  iz definicije 4.1 svakoj vrijednosti slučajne varijable pridružuje određenu vjerojatnost, te se naziva *funkcija vjerojatnosti diskretne slučajne varijable*. Na primjer, ukoliko slučajna diskretna varijabla  $X$  može poprimiti vrijednosti  $x_1, x_2, \dots, x_i$ , onda temeljem definicije 4.1 vrijedi  $p(x_i) > 0$ ,  $p(x_1) + p(x_2) + \dots + p(x_i) = 1$ , dok za sve ostale vrijednosti  $x$  vrijedi  $p(x) = 0$ .

Funkcija vjerojatnosti diskretne varijable  $p(x_i)$  može biti zadana analitički, grafički ili tabelarno. Želimo li pronaći vjerojatnost poprivanja vrijednosti  $x \leq 5$ , primjenom definicije 4.1 to ćemo zapisati kao  $P[X \leq 5]$  – uz uvjet promatranja isključivo cjelobronih brojeva iz skupa realnih brojeva  $\mathbb{R}$ , tj. podskupa cijelih brojeva  $\mathbb{Z}$ . U protivnom, promatranjem skupa realnih brojeva  $\mathbb{R}$  bez odgovarajućih ograničenja mogli bismo doći do krivih zaključaka uslijed teoretske mogućnosti poprivanja infinitezimalno mnogo vrijednosti – što je kontradiktorno diskretnoj slučajnoj varijabli. Takav slučaj promatranja infinitezimalno mnogo vrijednosti pripisati ćemo svojstvima kontinuirane slučajne varijable, koju ćemo pravovremeno definirati.

Skup uređenih parova

$$\{(x_i, p(x_i)), \quad i \in \mathbb{N}\} \quad (4.2)$$

naziva se *distribucija vjerojatnosti diskretne slučajne varijable*. Svakoj slučajnoj varijabli može se pridružiti *funkcija distribucije vjerojatnosti* koja je definirana izrazom [2]:

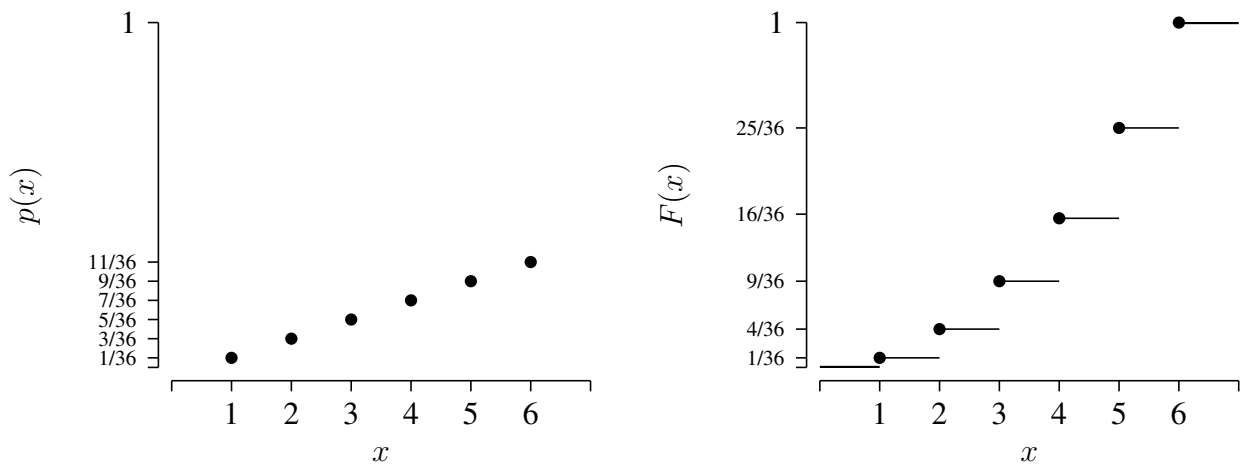
**Definicija 4.2** ([4]). *Funkcija distribucije vjerojatnosti  $F$  nasumične diskretne slučajne varijable  $X$  je funkcija  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  koja je definirana relacijom*

$$F(x) = P(X \leq x) \quad \text{za } -\infty < x < \infty. \quad (4.3)$$

Iako iz definicije 4.1 i definicije 4.2 uočavamo bitne razlike u svojstvima navedenih značajki, iz istih možemo zaključiti kako će odabir samo jedne od navedenih vjerojatnostnih značajki biti dovoljan za vjerojatnostni opis nasumičnih diskretnih varijabli. Štoviše, poveznicu između funkcije vjerojatnosti diskretne slučajne varijable i funkcije distribucije vjerojatnosti diskretne slučajne varijable možemo zapisati izrazom

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p(x_i). \quad (4.4)$$

Do navedenoga zaključka mogli smo doći analitički putem prethodno spomenutih definicija, ali do istoga smo mogli doći i grafički temeljem slike 4.3 – na kojoj možemo uočiti povećanje vrijednosti funkcije distribucije vjerojatnosti diskretne slučajne varijable  $X$  sa svakim sukcesivnim  $x_i$ , tj. zaključujemo kako impulsno povećanje vrijednosti  $F$  odgovara promjeni  $p(x_i)$ .



Slika 4.3. Funkcija vjerojatnosti i funkcija distribucije vjerojatnosti diskretne slučajne varijable  $X$ .

Kao što smo već prethodno konstatirali, diskretne slučajne varijable moramo ograničiti kako zabunom ne bismo došli do krivih zaključaka. Navedeno, baš kao i kod diskretnih i kontinuiranih signala, slijedi iz razlike u definiciji i prirodi diskretnih te kontinuiranih slučajnih varijabli.

Kontinuiranu slučajnu varijablu definiramo kao slučajnu varijablu koja poprima beskonačno mnogo vrijednosti. Naravno, i za njih vrijedi ograničenje na skup realnih brojeva  $\mathbb{R}$ , te ih možemo opisati temeljnim vjerojatnostnim značajkama. Općenito, kontinuirane slučajne varijable možemo definirati kao:

**Definicija 4.3** ([4]). *Nasumična varijabla  $X$  je kontinuirana za neku funkciju  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  i proizvoljno odabrane realne brojeve  $a$  i  $b$  za koje vrijedi  $a \leq b$ ,*

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx. \quad (4.5)$$

*Funkcija  $f$  mora zadovoljavati uvjet  $f(x) \geq 0$  za svaki  $x$ , te uvjet  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ . Funkcija  $f$  naziva se funkcija gustoće vjerojatnosti (engl. probability density function).*

Vjerojatnost da kontinuirana slučajna varijabla poprimi vrijednosti iz proizvoljnog intervala  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  proizlazi iz svojstva konvergencije sume i definicije integrala, tj. vjerojatnost možemo promatrati kao površinu ispod krivulje – kao što smo već konstatairali u potpoglavlju 3.2.1..

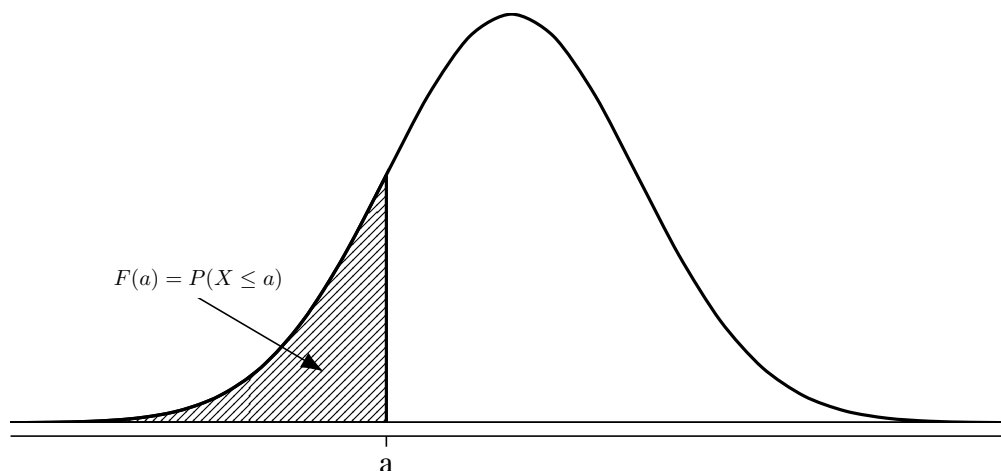
Važno je napomenuti kako funkcija gustoće vjerojatnosti  $f(x)$  nema značenje vjerojatnosti, već umnožak  $f(x)dx$  možemo smatrati relativnom mjerom koja opisuje hoće li slučajna varijabla  $X$  poprimiti vrijednosti u okolini proizvoljno odabrane točke  $x$ . Iz samog izraza  $f(x)dx$  možemo zaključiti kako za odabir točke (umjesto intervala) vrijedila konstatacija  $dx = 0$  – iz čega slijedi kako je vjerojatnost da kontinuirana slučajna varijabla poprimi vrijednosti u jednoj točki jednaka nuli, tj.

$$P(X = x_0) = 0. \quad (4.6)$$

Prisjetimo li se određenih integrala, izraz (4.5) možemo raspisati kao

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad (4.7)$$

gdje je  $F(x)$  funkcija distribucije kontinuirane slučajne varijable. Uzmemo li primjer pronalaska vrijednosti funkcije distribucije u točki  $x = a$ , temeljem novodobivenoga izraza zaključujemo kako ćemo istu dobiti kao površinu ispod krivulje funkcije gustoće na intervalu  $\langle -\infty, a]$  kao što je prikazano na slici 4.4.



Slika 4.4. Površina ispod funkcije gustoće vjerojatnosti na intervalu  $\langle -\infty, a \rangle$ .

### Višedimenzionalne distribucije vjerojatnosti

Iz prethodnih vjerojatnostnih opisa diskretnih i kontinuiranih slučajnih varijabli, možemo zaključiti kako diskretne slučajne varijable nemaju funkciju gustoće vjerojatnosti  $f(x)$ , dok kontinuirane nasumične varijable nemaju funkciju vjerojatnosti  $p(x_i)$ . Također, možemo zaključiti da obje vrste slučajnih varijabli imaju funkciju distribucije nasumične varijable  $F(x)$ . U praksi, vrlo često vršimo promatranja procesa s više od jedne slučajne varijable, te se nerijetko traži povezanost između dvaju ili više slučajnih varijabli. Poopćavanjem funkcije distribucije na  $n$  slučajnih varijabli, tj. poopćavanjem za slučaj  $n$ -dimenzionalnog vektora  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  u točki  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  dobivamo izraz:

$$F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x = (x_1, x_2, \dots, x_n)) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n) \quad (4.8)$$

Višedimenzionalne distribucije možemo dalje raspisati za konkretne slučajeve višedimenzionalnih diskretnih ili kontinuiranih slučajnih varijabli. Više o različitim vrstama distribucija vjerojatnosti slučajnih varijabli i njihovim pripadajućim definicijama može se saznati u referiranoj literaturi [2, 4].

Prije zaključivanja ovoga potpoglavlja, valja napomenuti kako za sve funkcije distribucije vjerojatnosti općenito vrijedi:

1. Za  $a \leq b$  vrijedi  $F(a) \leq F(b)$  temeljem opažanja iz kojega slijedi da je događaj  $\{X \leq a\}$  dio događaja  $X \leq b$ ,
2.  $F(x)$  predstavlja vjerojatnostnu značajku, te za njezine vrijednosti uvijek vrijedi  $0 \leq F(x) \leq 1$  za svaki  $x$ , tj.

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{a \rightarrow +\infty} P(X \leq x) = 1$$

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{a \rightarrow -\infty} P(X \leq x) = 0.$$

3.  $F(x)$  ne može poprimiti manju vrijednost od vrijednosti koju je imala za prethodni član. Točnije, za proizvoljni  $h \geq 0$  i za svaki  $x$  vrijedi:

$$F(x+h) \geq F(x). \quad (4.9)$$

4. Desni limes funkcije distribucije vjerojatnosti  $F(x)$  postoji za svaki  $x$ , tj. temeljem slike 4.4 vrijedi

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} F(x+\epsilon) = F(x). \quad (4.10)$$

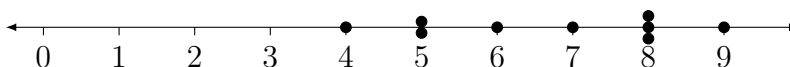
Samo i samo ako neka funkcija  $F$  zadovoljava sve prethodno navedene uvjete, za nju možemo konstatirati da je funkcija distribucije vjerojatnosti neke nasumične varijable.

Obzirom na važnost funkcija distribucije vjerojatnosti, za daljnja razmatranja prognostičkih modela potrebno je opisati određene karakteristike distribucija vjerojatnosti kako bismo lakše razumjeli koncept i svojstva navedenih prognostičkih modela.

#### 4.1.2. Karakteristike distribucija vjerojatnosti

Slučajne varijable u praksi sadrže vrlo mnogo podataka nekog pojedinog eksperimenta, te ih kao takve treba na praktičan način opisati. U prethodnom potpoglavlju smo saznali nešto više o različitim vjerojatnostim funkcijama kojima možemo opisati slučajne varijable, no želimo li sustav opisati analitički – a najčešće želimo – potrebno je u potpunosti poznavati analitičke izraze pripadajućih funkcija. Iako smo definirali svaku od navedenih pripadajućih vjerojatnostnih funkcija, nekada ih je za velike količine podataka praktičnije opisati pomoću *momenata slučajnih varijabli*.

Općenito, momenti u statistici predstavljaju kvantitativne karakteristike koji analitički opisuju graf neke proizvoljno promatrane funkcije. Promotrimo li proizvoljni skup podataka koji se sastoji od vrijednosti  $[4, 5, 5, 6, 7, 8, 8, 8, 9]$ , preslikavanjem vrijednosti skupa na brojevni pravac dobivamo vizualni dojam centralne tendencije i rasapa promatranog skupa podataka kao što je prikazano na slici 4.5.



Slika 4.5. Prikaz vrijednosti proizvoljnog skupa podataka na brojevnom pravcu

Temeljem slike 4.5 također možemo bolje pojasniti intuitivnost momenta funkcije. Želimo li analitički opisati proizvoljni skup podataka u svrhu predodžbe centralne tendencije u odnosu na referentnu vrijednost 0, riješiti ćemo izraz  $\frac{\sum x_i}{n}$ . Naravno, promatranjem stvarnih fizikalnih pojava trebamo odrediti neku referentnu vrijednost budući da vrijednost 0 nije nužno sadržana u rezultatima mjerenja ili nije praktična za korištenje. Iz tog razloga, prethodno navedeni izraz možemo općenitije opisati izrazom

$$\frac{1}{n} \sum_i (x_i - \mu), \quad (4.11)$$

gdje je  $\mu$  procjenitelj kojega odabiremo za referentnu vrijednost u prethodno promatranom slučaju.

Očekivana vrijednost je broj ili konstanta i prvi je moment oko nule slučajne varijable  $X$  [2]. Najčešće se označava s

$$E[X] = \mu, \quad (4.12)$$

gdje je vrijednost procjenitelja  $\mu$  moguće odrediti aritmetičkom sredinom promatranih podataka koja je definirana izrazom

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_i x_i \quad (4.13)$$

Kako bismo lakše razumjeli momente slučajne varijable, prvo ćemo opisati statističke značajke distribucija slučajnih varijabli. Promotrimo li slučajni eksperiment s  $n$  mjerenja, te pretpostavimo li ponavljanje određenih vrijednosti  $n_k$  puta tako da vrijedi  $(n_1 + n_2 + \dots + n_i) = n$ , aritmetičku sredinu diskretne slučajne varijable koja se pojavljuje u eksperimentu možemo definiramo izrazom

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i. \quad (4.14)$$

Aritmetičku sredinu diskretne slučajne varijable još nazivamo *srednjom vrijednosti uzorka*, a pokazuje centralnu tendenciju promatrane diskretne slučajne varijable. Uz centralnu tendenciju, u statističkim obradama podataka vrlo često se koriste i pokazatelji rasapa vrijednosti – točnije, za slučaj diskretne slučajne varijable koristi se pojam *varijance uzorka* koji je definiran izrazom

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2. \quad (4.15)$$

Varijanca slučajne varijable  $X$  je ujedno i drugi moment oko sredine definiran izrazom

$$\text{Var}(X) = E(X - E(X))^2 = E(X - \mu)^2. \quad (4.16)$$



Uvedemo li hipotetski slučaj promatranja eksperimenta s vrlo velikim brojem ponavljanja  $n$ , temeljem frekvencijskog pristupa vjerojatnosti pretpostaviti ćemo da vrijedi izraz [1]:

$$\frac{n_i}{n} \sim P[X = x_i] = p(x_i). \quad (4.17)$$

Zaključno, dolazimo do konačne definicije koja vrijedi za diskretne slučajne varijable:

**Definicija 4.4** ([1]). *Neka je  $X$  diskretna slučajna varijabla za koju vrijedi  $p(x_i) = P[X = x_i]$ ,  $i \in \mathbb{N}$ . Srednju vrijednost uzorka  $\mu$  i varijancu uzorka  $\sigma^2$  takve diskretne slučajne varijable definiramo izrazima*

$$\mu = \sum_i p(x_i)x_i. \quad (4.18)$$

$i$

$$\sigma^2 = \sum_i p_i(x_i)(x_i - \mu)^2. \quad (4.19)$$

Analogno definiciji 4.4 možemo dobiti izraze koji odgovaraju definiciji odgovarajućih statističkih pokazatelja kontinuiranih slučajnih varijabli. Srednju vrijednost uzorka i varijancu uzorka možemo dobiti na način da u jednadžbama definicije 4.4 zamijenimo simbol sume integralom s pripadajućim granicama  $\langle -\infty, +\infty \rangle$ .

**Definicija 4.5.** *Neka je  $X$  kontinuirana slučajna varijabla s pripadajućom funkcijom gustoće vjerojatnosti  $f(x)$ . Srednja vrijednost  $\mu$  i varijanca  $\sigma^2$  funkcije  $f(x)$  definirane su izrazima*

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \quad (4.20)$$

$i$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x)dx; \quad (4.21)$$

uz uvjet da integral u izrazu 4.5 konvergira.

Temeljem izraza (4.18) i izraza (4.20) možemo doći do izraza za očekivanu vrijednost slučajne varijable na način da ih uvrstimo u izraz (4.12) – iz čega slijedi:

$$E[X] = \begin{cases} \sum_i p(x_i)x_i & \text{za diskretnu slučajnu varijablu } X, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx & \text{za kontinuiranu slučajnu varijablu } X; \end{cases} \quad (4.22)$$

gdje vrijednosti slučajne varijable  $x_i$  možemo zamijeniti sa primadajućom jednoznačnom funkcijom slučajne varijable  $X$ .

Kao što smo već prethodno konstatirali, prilikom vršenja prognostičkih eksperimenata najčešće promatramo više od jedne slučajne varijable, te je u te svrhe potrebno definirati još jednu analitičku značajku višedimenzionalnih funkcija distribucije. Odnos među slučajnim varijablama  $X$  i  $Y$  opisuje *kovarijanca* [2] definirana izrazom

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y). \quad (4.23)$$

Temeljem izraza (4.23) možemo općenito konstatirati kako je kovarijanca mjera varijance između dviju promatranih varijabli. Štoviše, poznavanjem iznosa kovarijanca možemo ustanoviti međusobnu korelaciju promatranih slučajnih varijabli kako slijedi:

1. Pozitivna kovarijanca (*pozitivna korelacija*) – predstavlja tendenciju porasta dviju slučajnih varijabli u istom smjeru (npr. povećanje slučajne varijable  $X$  rezultira povećanjem slučajne varijable  $Y$ ),
2. Negativna kovarijanca (*negativna korelacija*) – predstavlja tendenciju porasta dviju slučajnih varijabli u međusobno suprotnim smjerovima (npr. povećanje slučajne varijable  $X$  rezultira smanjenjem slučajne varijable  $Y$ ).

U iznimnom slučaju kada vrijedi  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ , možemo zaključiti kako ne postoji korelacija između dviju promatranih slučajnih varijabli. Prikikom izrade financijskih analiza, korištenje principa kovarijanca i prethodno navedenoga iznimnoga slučaja značajno je za kvantitativnu analizu diverzifikacije sredstava u svrhu smanjenja različitih rizika koji ne proizlaze iz pogrešaka samoga sustava.

Prilikom promatranja prethodno navedenih statističkih značajki, od iznimne je važnosti razlikovati korištene termine *korelacije* i *nezavisnosti*. Uzmemo li primjer dviju nezavisnih varijabli, logički je za pretpostaviti kako nisu u korelaciji. No, uzmemo li primjer dviju varijabli koje nisu u korelaciji, valja logički uočiti kako navedene varijable *nisu nužno* međusobno nezavisne.

## 4.2. Stohastički procesi

Za razliku od nasumičnih varijabli opisanih u potpoglavlju 4.1.1., procese možemo konceptualizirati pomoću trivijaliziranog opisa signala kao nosioca informacije, tj. skupa podataka. Sto-

hastički (ili nasumični) proces  $X(t)$  je kronološki raspoređena familija slučajnih varijabli čiji su članovi pripisani pripadajućim vremenskim trenucima. Točnije, stohastički proces možemo formalnije opisati pomoću sljedećih definicija:

**Definicija 4.6** ([2]). *Slučajni (ili stohastički) proces  $X(t)$  je familija indeksiranih slučajnih varijabli definiranih nad prostorom događaja  $S$ .*

**Definicija 4.7** ([1]). *Ukoliko  $t$  poprima kontinuirane vrijednosti iz skupa realnih brojeva, pri čemu vrijedi odnos  $T \subseteq \mathbb{R}$ , proces  $X(t)$  nazivamo stohastičkim procesom s kontinuiranim parametrom. Ukoliko  $t$  poprima diskretne vrijednosti, proces  $X(t)$  nazivamo stohastičkim procesom s diskretnim parametrom.*

Pretpostavimo stohastički proces  $X(t)$  koji je rezultat provođenja nekog slučajnog eksperimenta kojega je moguće ponavljati u identičnim uvjetima. Provođenjem prvog kruga slučajnog eksperimenta doći ćemo do zapisa procesa  $X(t)$ , te je logično zaključiti kako ćemo – uslijed definicije slučajne varijable – u daljnim ponavljanjima slučajnog eksperimenta dobivati i drugačije vrijednosti, a samim time i drugačiji zapis, tj. skup vrijednosti procesa  $X(t)$ . Iz navedenoga intuitivno slijedi pojam *realizacije procesa* kao skupa vrijednosti procesa  $X(t)$  za točno određenu permutaciju slučajnog eksperimenta. Skup svih mogućih realizacija naziva se *ansambl* ili *populacija*.

Dvije osnovne vrste stohastičkih procesa obzirom na vjerojatnostna svojstva su:

1. *Stacionarni*: vjerojatnostna svojstva se ne mijenjaju s vremenom,
2. *Nestacionarni*: vjerojatnostna svojstva se mijenjaju s vremenom.

U sklopu ovoga rada značajni će biti stacionarni stohastički procesi, te ćemo ih detaljnije pojasniti u sklopu stacionarnih vremenskih nizova – koji čine najčešće korištenu realizaciju stohastičkog procesa u statističkoj analizi.

Iz navedenoga možemo pretpostaviti korisnost koncepta stohastičkog procesa u primjeni znans-tvene metode, pritom nastojeći odgovoriti na opća pitanja:

1. Postoji li i koja je korelacija među vrijednostima promatranih uzoraka stohastičkog procesa,
2. Je li moguće opisati dugoročno ponašanje promatranog uzorka stohastičkog procesa (uz primjenu određenih teorema poput zakona velikih brojeva i centralnog graničnog teorema),
3. Postoje li i koja su ograničenja promatranog stohastičkog procesa (npr. pojava anomalija, ekstremni uvjeti, financijske krize, i sl.).

#### 4.2.1. Vremenski nizovi

Vremenske nizove povezujemo uz bilo kakavu reprezentzaciju vrijednosti u ovisnosti o vremenskoj konstanti – neovisno radi li se o vrijednostima koje prate neko determinističko načelo ili načelo nasumičnosti. Drugim rječima, vremenske nizove možemo opisati kao stohastički signal s kronološki raspoređenim opažanjima uzorkovanim u redovitim vremenskim razmacima – točnije, iz opisa stohastičkog procesa slijedi zaključak kako se vremenski niz može tretirati kao konačna realizacija nekog stohastičkog procesa. Mogu se pojavljivati kao podaci o fizičkim veličinama, kao ekonomski ili financijski podaci, demografski podaci, itd.. Opažanja ili mjerenja navedenih podataka provedena su u proizvoljnim vremenskim intervalima – svake sekunde, svakoga sata, svakoga dana, svakoga mjeseca, i sl.. U analizi vremenskih nizova, takve skupove podataka uobičajeno reprezentiramo konačnim brojem mjerenja promatranog nasumičnog procesa  $X(t)$  za, primjerice,  $t = 1, 2, \dots, N$  [1]. Vremenske nizove možemo analitički zapisati na sljedeće načine:

$$X = \{X_1, X_2, \dots\} \quad (4.24)$$

ili

$$Y = \{Y_t : t \in T\}. \quad (4.25)$$

U daljnjim razmatranjima teme ovoga rada, prateći generalni konsenzus u nomenklaturi stručnih izvora, pod analizom vremenskih nizova smatrati ćemo principe i modele koji analiziraju promatrane vrijednosti nasumičnih procesa – koje ćemo detaljnije opisati u nadolazećim potpoglavljima.

Osnovni modeli vremenskih nizova koji se koriste čine osnovu statističke analize su [2]:

##### 1. *Aditivni model*

$$Y_t = T_t + C_t + S_t + e_t, \quad (4.26)$$

##### 2. *Multiplikativni model*

$$Y_t = T_t \cdot I_{C_t} \cdot I_{S_t} \cdot e_t, \quad (4.27)$$

gdje su

$T_t$  trend<sup>1</sup>,  
 $C_t$  ciklička komponenta<sup>2</sup>,  
 $S_t$  sezonska komponenta<sup>3</sup>,  
 $e_t$  slučajna komponenta<sup>4</sup>.

Modeli koji analiziraju ponašanje stohastičkih procesa u vremenskoj domeni poprimaju formu jednog od dvaju prethodno navedenih modela ili iz klase linearnih stohastičkih modela kojima se opisuju stacionarni procesi – koje ćemo dalje opisati.

### Stacionarni vremenski nizovi

Za stacionarni vremenski niz općenito moraju vrijediti sljedeće konstatacije:

- Vremenski niz ne sadrži trend komponentu,
- Vremenski niz nema prisutne striktno periodske varijacije,
- Varijanca vremenskoga niza ne ovisi o vremenu.

Prilikom provedbe detaljne statističke analize, stohastičke procese je ponekad lakše opisati nešto manje formalnom definicijom kao funkcijom distribucije u nekom vremenskom intervalu.

Odaberemo li proizvoljno prirodni broj  $n \in \mathbb{N}$  i svaki pomak  $k \in \mathbb{N}$ ,  $n$ -dimenzionalna funkcija distribucije zadovoljava jednadžbu [2]:

$$F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{X_{1+k}, X_{2+k}, \dots, X_{n+k}} \quad (4.28)$$

Proces za koji vrijedi izraz (4.28) za svaki  $n = 1, 2, \dots$  je *strikto stacionaran*, te su za takav proces funkcije distribucije jednake za sve  $t$ . Temeljem navedenoga, očekivana vrijednost procesa

$$E(X_t) = \mu, \quad \mu < \infty \quad (4.29)$$

je konstanta ako je  $E(|X_t|) < \infty$ . Analogno tome, varijanca procesa definirana je kao

$$\text{Var}(X_t) = E(X_t - E(X_t))^2 = E(X_t - \mu)^2 = \sigma^2. \quad (4.30)$$

uz uvjet da je  $E(|X_t^2|) < \infty$ .

---

<sup>1</sup>Dugoročna tendencija razvoja pojave u vremenu; Niz vrijednosti kroz koje bi promatrana pojava prolazila da nije bilo sezonskih ili slučajnih činbenika (vremenska razdoblja duža od 5 godina).

<sup>2</sup>Odnosi se na redovne fluktuacije oko trenda koja su sustavna (vremenska razdoblja od jedne i više godine).

<sup>3</sup>Očituje se u sustavnim kretanjima pojave unutar jedne godine.

<sup>4</sup>Izražava nesistematske utjecaje na razvoj pojave [2].

Primjer striktno stacionarnog procesa u praksi najčešće je *bijeli šum* (čisti slučajni proces). Iako ga se u istoj ne susreće kao poticajnu komponentu nekog stacionarnog vremenskog niza, učestalost njegova korištenja proizlazi iz pogodnosti korištenja istoga za opisivanje dinamike slučajne komponente. Štoviše, bijeli šum čini osnove regresijskog modela u kojemu su relacijske greške članovi bijelog šuma.

Takav proces definiran je kao niz nekoreliranih jednako distribuiranih slučajnih varijabli s konačnom vrijednošću očekivane vrijednosti.

Za potrebe ovoga rada, proces  $\epsilon_t, t = \pm 1, \pm 2, \dots$  je čisti slučajni proces ako za svaki promatranj  $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  vrijedi da je [2]:

- $E(\epsilon_t) = 0$ ,
- $\text{Var}(\epsilon_t) = \sigma^2$ ,
- $\text{Cov}(\epsilon_t, \epsilon_s) = 0$  za svaki  $t \neq s$ , gdje  $t$  i  $s$  predstavljaju bilo koje dvije točke u vremenu.

Kroz literaturu i ovaj rad koristiti ćemo skraćeni oblik navedenih svostava pomoću oznake  $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ .

Detaljna analiza bijelog šuma, tj. striktno stacionarnih procesa, detaljnije je pojašnjena u citiranoj literaturi [1][2]. U istoj je dodatno pojašnjena ovisnost kovarijance o vremenskom intervalu te neovisnost iste o položaju točaka na vremenskoj osi.

#### 4.2.2. Autokovarijanca i autokorelacija

*Funkcija autokovarijance* uz srednju vrijednost funkcije reprezentira sve nužne informacije koje su nužne za opis funkcije zajedničke distribucije vjerojatnosti nekog promatranog skupa podataka. Točnije, funkcija autokovarijance definira se kao kovarijanca između dviju promatranih vrijednosti  $X_t$  i  $X_{n+k}$  nekog stacionarnog stohastičkog procesa, tj. opisana je izrazom

$$r(k) = \text{cov}(x_t, x_{n+k}) = E[(x_t - \mu)(x_{n+k} - \mu)], \quad \text{gdje je } K \in \mathbb{Z}. \quad (4.31)$$

Iz izaza (4.31) možemo zaključiti kako je  $r(k)$  rezultat kovarijance svih proizvoljno odabranih parova vrijednosti međusobno razmaknutih za  $k$  – koji se standardizirano naziva *vremensko zaostajanje* ili *lag*.

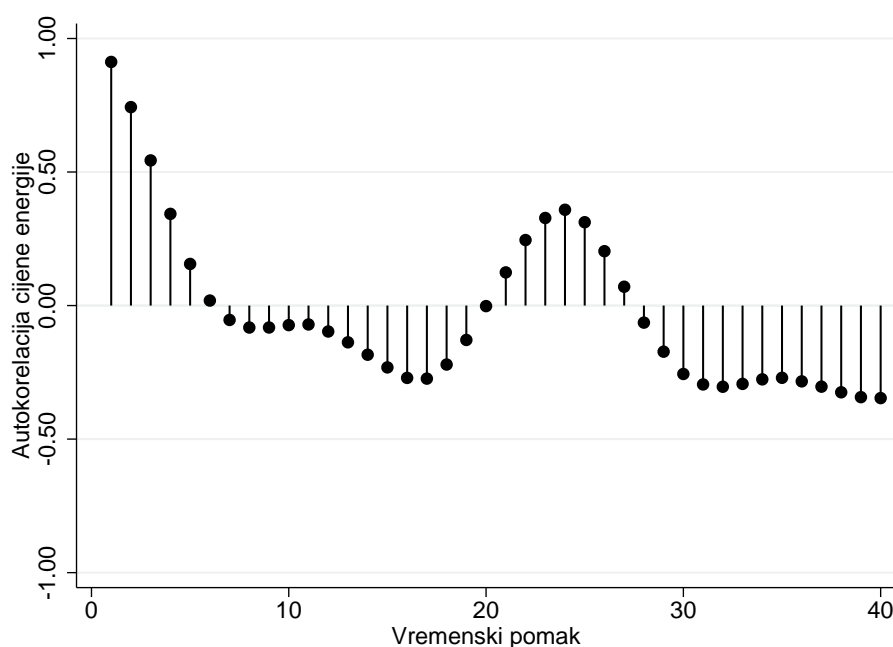
Već sada možemo intuitivno predočiti važnost funkcije autokorelaciju u prognoziranju budućih da nam daje informaciju o korelaciji između odabranih točki promatranja. Normiranu funkciju autokovarijance nazivamo *autokorelacija*, a definirana je izrazom

$$\rho(k) = \frac{r(k)}{r(0)} = \frac{r(k)}{E[(x_t - \mu)^2]} = \frac{r(k)}{\sigma^2}; \quad (4.32)$$

pri čemu za stacionarni proces vrijedi[2]:

1.  $\rho(0) = 1$ ,
2.  $-1 \leq \rho(k) \leq 1$ ,    svojstvo normiranosti,
3.  $\rho(k) = \rho(-k)$ ,    svojstvo simetričnosti,
4.  $\sum_i \sum_j \alpha_i \alpha_j \rho(i - j) \geq 0$ ,    svojstvo pozitivne semidefinitnosti.

Kako bi proizvoljna funkcija, koja zadovoljava uvjete (1)-(3) bila autokorelacijska funkcija stohastičkog procesa, nužan je uvjet pozitivne semidefinitnosti o kojem se može više saznati u stručnoj literaturi [1].



*Slika 4.6. Primjer funkcije autokorelacije stacionarnog vremenskog niza cijene solarne energije u Španjolskoj 2015. godine.*

Funkciju autokorelacije u trivijalnom smislu smatramo korelacijom signala s vlastitom pomaknutom kopijom, te ju to čini snažnim alatom za obradu signala u bilo kojoj sferi znanosti. Primjer korištenja iste je korekcija propagirajućeg položaja u GPS sustavima navigacije ili kardiovaskularne medicinske analize čije daljnje akcije nužno ovise o prethodnim pozicijskim vrijednostima; dok se istu može koristiti u glazbeno-produkcijske svrhe uslijed mogućnosti određivanja tempa, tj. eng. *Beats Per Minute* koji se koristi kao kvantitativni indikator koji pomaže pri odabiru pjesama koje će imati blažu tranziciju u tempu te time smanjiti psihološku neugodu koju grublje tranzicije izazivaju.

## Primjeri analize vremenskih nizova u elektrotehnici

Temeljem definicije vremenskog niza, prirodno se nameće korelacija i korištenje istih u ekonomiji i poslovnim sustavima, koji navedene koriste za prognostičko modeliranje u prije spomenute svrhe koje će polučiti konkretni rezultat koji će poslije biti predmet daljnjeg proučavanja.

Korištene metodologije u takvim procesima nisu samostalno svrsihodne u inženjerstvu, tj. nadopunjuju se tehničkom terminologijom i stručnim saznanjima o fenomenima, ograničenjima primjene i fizikalnim pojavama promatranih sustava. Iz toga proizlazi teza o korištenju analize vremenskih nizova kao jednog od alata za daljnje inženjerske analize.

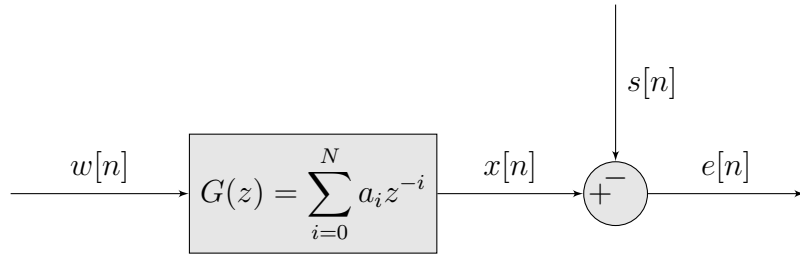
U uvodnom poglavlju naveli smo neke od temeljnih važnosti i značajki prognoiziranja u ostvarivanju tržišnih, strateških i sigurnosnih ciljeva – gdje smo čvrsto ustanovili sveprisutnost potrebe za statističkim modeliranjem, tj. prognoziranjem. Baš kao i u navedenim primjerima ekonomske i upravljačke prirode, prognoziranje i odgovarajuće metodologije od iznimne su koristi današnjim inženjerima pri analizi fizikalnih sustava.

Primjer korištenja istih može se uočiti na primjeru ranoga razvoja modernih vojnih rješenja za protuavionsku obranu. Navedena rješenja proizlašla su kao odgovor na postojeći problem brzorasućeg razvoja ofenzivnih oružja za vrijeme 2. svjetskog rata, što je dovelo do prirodne potrebe za odgovarajućim sustavima zaštite u svrhu očuvanja nacionalne sigurnosti. Razvoj protuavionskih obrambenih sustava temeljio se na pronalasku korelacije koja će s visokom uspješnošću predvidjeti poziciju neautoriziranih objekata u zračnom prostoru u odnosu na trenutnu poziciju obrambenog projektila u svrhu najučinkovitijega nahođenja koje će rezultirati terminacijom potencijalne prijetnje.

Iz procesa pronalaska navedenoga rješenja, proizašao je današnji *Wienerov filter*, koji ima široku primjenu u elektrotehnici i drugim inženjerskim granama – ponajviše prilikom obrade signala, digitalne obrade slike, sinteze sustava upravljanja, te u razvoju digitalnih komunikacija. U općem smislu, koristi je za identifikaciju sustava, dekonvoluciju, odšumljivanje i uočavanje signala.

Temeljem prethodno navedenoga povoda za razvojem Wienerova filtra možemo lakše shvatiti njegovu funkciju, a to je statistički proračun ponašanja nepoznatog signala pomoću referentnog ulaznog signala koji, propagacijom kroz filter, daje izlaznu (prognoziranu) vrijednost. Točnije, za kauzalne diskretne signale s konačnom vrijednošću Wienerov filter pronalazi optimalne koeficijente pomoću statističkog modeliranja pomoću poznatih prethodnih vrijednosti ulaznog i izlaznog signala – populirajući matricu ulaznih signala s prognoziranim vrijednostima autokorelacije ulaznog signala, dok vrši sličnu radnju populacijom matrice izlaznih signala s prognoziranim vrijednostima unakrsne korelacije između izlaznih i ulaznih signala.





Slika 4.7. Blokovski prikaz FIR Wiener filtra za diskretne signale.

Iz blokovskog prikaza FIR Wiener filtra sa slike 4.7, uočavamo propagaciju diskretnog ulaznog signala  $w[n]$  kroz Wienerov filter – kojim se modelira učestalost otipkavanja  $N$  i odabir koeficijenata  $a_0, \dots, a_N$ . Izlazni signal  $x[n]$  iz FIR Wienerova filtra zadan je izrazom

$$x[n] = \sum_{i=0}^N a_i w[n-i]. \quad (4.33)$$

Na temelju zadanoga izraza, možemo uočiti prethodno navedeno korištenje vremenskih nizova kao dio većeg "sustava alata" kojima se inženjeri koriste u svakodnevici. U konkretnom slučaju, FIR Wiener filtera prognozira vrijednosti signala  $x[n]$  temeljem prethodnih vrijednosti ulaznog signala  $w[n-i]$  uz ugođavanje autokorelacijskih koeficijenata  $a_i$  – pritom imajući na umu temeljne pretpostavke i uvjete. Jedan od tih uvjeta je minimizacija srednje kvadrane pogreške koja se koristi kao jedan od analitičkih faktora ocjene kvalitete sustava.

Kako bismo pronašli srednju kvadratnu pogrešku sustava  $E[e^2[n]]$ , potrebno je definirati signal pogreške  $e[n]$ . U slučaju blokovskog prikaza sa slike 4.7, signal pogreške definiramo kao razliku vrijednosti izlaznog signala iz FIR Wienerova filtra  $x[n]$  i vrijednosti referentnog signala  $s[n]$ , dolazimo do sljedećih izraza:

$$e[n] = x[n] - s[n], \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} E[e^2[n]] &= E[(x[n] - s[n])^2] \\ &= E[x^2[n]] - 2E[x[n]s[n]] + E[s^2[n]] \\ &= E\left[\left(\sum_{i=0}^N a_i w[n-i]\right)^2\right] - 2E\left[\sum_{i=0}^N a_i w[n-i]s[n]\right] + E[s^2[n]]. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Parcijalnim deriviranjem jednačbe (4.35) po autokorelacijskom koeficijentu  $a_i$ , možemo doći do konkretnog izraza za izračun minimuma funkcije srednje kvadratne pogreške  $\frac{\partial E[e^2[n]]}{\partial a_i}$ . Daljnji proračun tog izraza možemo intuitivno povezati s postupkom minimizacije funkcije metode najmanjih kvadrata opisanoj u potpoglavlju 3.2.2., te ga nije potrebno dalje analizirati.

Zaključno, u ovom potpoglavlju smo potvrdili tezu o korisnosti kroištenja statističke analize vremenskih nizova u elektrotehnici. Jedna od konkretnih primjena Wienerova filtra u elektrotehnici je uočavanje pojave neočekivanoga šuma u električnoj mreži i daljnja regulacija sustava temeljem vrijednosti signala pogreške koji nastaje uslijed pojave navedenoga šuma. Korištenje FIR Wienerova filtra i filtra sličnih funkcija od iznimne je koristi za pravovremenost regulacije sustava upravljanja. U slučaju izostanka pravovremene regulacije sustava upravljanja, može doći do oštećenja sustava i njegovih komponenti, pojave nestabilnosti u sustavu, te drugih nepoželjnih svojstva.

## 5. Autoregresivni modeli

Prilikom prognoziranja vrijednosti autokovarijančne funkcije s koeficijentima kašnjenja nailazi se na problem stalnog porasta količine članova funkcije koji su u direktnoj korelaciji s porastom učestalosti uzorkovanja. Takav prikaz za velike količine članova pokazivati će rezultate s velikom preciznošću, no zbog ograničenosti resursa navedeno rješenje nije svrsihodno. Budući da ne postoje konačna saznanja ili koncenzus o konačnom broju koji će reprezentirati najprecizniji prognostički model autokovarijančne funkcije s koeficijentima kašnjenja, u temi ovoga rada razmatrati ćemo prognostičke modele koji kao uvjet imaju neprestan dotok najnovijih podataka uz ograničenje ukupnog broja članova prognostičke funkcije.

Navedene prognostičke modele možemo opisati pomoću triju osnovnih modela stacionarnih stohastičkih procesa [3]:

1. Autoregresijski model (AR),
2. Model pomičnog prosjeka (MA),
3. Mješoviti modeli:
  - a) Autoregresijski model i model pomičnog prosjeka (ARMA),
  - b) Integrirani autoregresijski model i model pomičnog prosjeka (ARIMA).

Kroz nadolazeća potpoglavlja detaljnije ćemo opisati svojstva i način korištenja prethodno navedenih osnovnih modela na nekom skupu podataka – što će se u suštini sastojati od sljedećih postupaka:

1. Izrada procjene *parametara modela*,
2. Određivanje *reda modela*.

Intuitivniji redoslijed tih postupaka bio bi određivanje reda modela, po čemu bi slijedila procjena parametara modela navedenoga reda. Međutim, razvijene metode određivanja reda modela predodređene su inicijalnom izradom procjene parametara modela, te ćemo ih kao takve proučavati poštujući gore navedeni redoslijed postupaka. [1]

### 5.1. Autoregresijski model (AR)

Za neki određeni statistički model konstatiramo da je autoregresijski ukoliko prognozira buduće vrijednosti temeljem prethodno ostvarenih vrijednosti. Pri analizi financijskih tržišta, autoregresijski model koristi se za predviđanje buduće cijene vrijednosnih papira na temelju njihovih

vrijednosti iz prethodnog razdoblja. Već u samome početku možemo zaključiti da navedeni model ima jedan praktičan nedostatak, a to je određeni stupanj nepouzdanosti temeljem implikativne predodređenosti budućeg ponašanja sustava u ovisnosti o prošlom ponašanju – što je posebice izraženo prilikom nepredvidivih pojava u sustavu. Iako primjera za neočekivane pojave u svakodnevnim sustavima ne nedostaje, najintuitivniji su pojave financijskih kriza ili nagli razvoj određene industrije.

Primjerice, investitor koji koristi autoregresijski model za prognoziranje vrijednosti neke vrijednosnice, pretpostaviti će da su novi kupci i prodavači navedene vrijednosnice prilikom određivanja cijena akvizicije ili prodaje pod psihološki značajnim utjecajem nedavnih događanja na financijskim tržištima. Iako se navedeni model pokazao investitorima kao vjerodostojan, te im omogućio pozitivan priljev financijskih sredstava u godinama koje su prethodile 2008. godini, model se dokazao kao nepouzdan u slučaju kada većina investitora nije bila upoznata s rizikom koji su predstavljali vrijednosni papiri osigurani nekom vrstom hipoteke. Povećanje rizičnosti takvih vrijednosnih papira ponukan je sumnjom nekolicine iskusnih investitora u svjetski renomirane rejting agencije – čija je zadaća bila sa što većom preciznošću evaluirati i ocijeniti vrijednost nekretnina, pokretnina te financijskih sredstava pod hipotekom. Ne ulazeći dublje u praktičnu problematiku, navedena sumnja ispostavila se opravdanom, a dospijećem informacije o neispravnom postupanju prilikom ocijenjivanja uzrokovalo je krah financijskih tržišta i početak nove ekonomske krize 2008. godine. Ukoliko je u novonastalom razdoblju investitor bio predan korištenju autoregresijskog modela, na temelju današnjih saznanja možemo sa velikom sigurnošću konstatirati kako je otvario značajni negativni priljev financijskih sredstava – koji je potencijalno mogao rezultirati i proglašenjem osobnog bankrota. Također, važno je naglasiti snažan utjecaj kratkotrajnih neočekivanih pojava na sve buduće prognozirane vrijednosti autoregresijskog modela, što bi značilo da je navedena financijska kriza iz 2008. godine i dalje "prisutna" prilikom korištenja današnjeg korištenja autoregresijskog modela.

Sada kada smo ustanovili prednosti i mane korištenja autoregresijskog modela u praksi, možemo započeti sa dubinskom matematičkom analizom istoga.

Autoregresijski  $AR(p)$  modeli opisuju nasumične stacionarne procese čija izlazna vrijednost u trenutku  $x_t$  linearno ovisi o vlastitim vrijednostima koji su prethodili tom trenutku ( $x_{t-p}$ ). Navedeno opće načelo možemo definirati izrazom

$$\epsilon_t = x_t - \mu_x + \phi_1(x_{t-1} - \mu_x) + \phi_2(x_{t-2} - \mu_x) + \dots + \phi_p(x_{t-p} - \mu_x) + \theta_0, \quad (5.1)$$

gdje su:

$\epsilon_t$	bijeli šum; nasumični stacionarni proces s pripadajućim statističkim parametrima $\mu_x$ i $\sigma_x^2$
$x_t$	nezavisna varijabla promatranog skupa
$\mu_x$	očekivana vrijednost slučajne varijable
$\phi_p$	autoregresijski parametar
$\theta_0$	konstantni član
$p$	red autoregresijskog modela

Ukoliko iz izraza (5.1) želimo definirati vrijednost člana procesa  $x_n$ , dolazimo do izvedenice

$$(x_t - \mu_x) = \epsilon_t - \phi_1(x_{t-1} - \mu_x) - \phi_2(x_{t-2} - \mu_x) - \dots - \phi_p(x_{t-p} - \mu_x) + \theta_0. \quad (5.2)$$

Izraz (5.2) predstavlja opći eksplicitni prikaz autoregresijskog modela reda  $p$ .

Neke od općih pretpostavki kojima se ne gubi općenitost prethodno opisanih izraza, a koje će nam biti od u budućim raspisima, su:

- autoregresijski parametri zaprimaju isključivo ne-nulte vrijednosti ( $\phi_p \neq 0$ ),
- utjecaj konstantnog člana možemo zanemariti ( $\theta_0 = 0$ ),
- u budućim razmatranjima, vršiti ćemo analizu centriranog procesa opisanog jednadžbom:

$$Z_t = x_t - E(x_t) = x_t - \mu_x. \quad (5.3)$$

Ukoliko s  $B$  označimo *operator pomaka*, te primijenimo li pretpostavku definiranu jednadžbom (5.3), dolazimo do definicijskog izraza

$$\begin{aligned} BZ_t &= Z_{t-1}, \\ B^2Z_t &= B(BZ_t) = BZ_{t-1} = Z_{t-2}, \\ &\vdots \\ B^pZ_t &= Z_{t-p}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Daljnijim uvrštavanjem izraza (5.4) u izraz (5.1) dobivamo

$$\begin{aligned} \epsilon_t &= Z_t + \phi_1 BZ_t + \phi_2 B^2Z_t + \dots + \phi_p B^pZ_t, \\ \epsilon_t &= Z_t(1 + \phi_1 B + \phi_2 B^2 + \dots + \phi_p B^p). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Iz izraza (5.5) možemo definirati razvoj općeg polinoma koji opisuje autoregresijske parametre kako slijedi:

$$\phi(B) = 1 + \phi_1 B + \phi_2 B^2 + \dots + \phi_p B^p. \quad (5.6)$$

Zaključno, iz prethodnih izraza slijedi sažetiji opći oblik  $AR(p)$  modela:

$$\phi(B)Z_t = \epsilon_t. \quad (5.7)$$

#### 5.1.1. Dodatne pretpostavke

U svrhu lakšeg pronalaska vrijednosti autoregresijskih koeficijenata, potrebno je definirati dodatne pretpostavke koje će nam biti korisne u budućim razmatranjima. **Opisati zašto  $\mu_x = 0$  i važnost svojstva stacionarnosti te povezivanje sa MA(q)**

Detaljnija pojašnjenja spomenutih pretpostavki detaljnije ćemo opisati kroz primjere  $AR(1)$  i  $AR(2)$  u potpoglavljima 5.1.3. i 5.1.4..

**Dodati intro u sljedeća potpoglavlja s nastojanjem pojašnjenja konkretnih svojstava autoregresijskih modela na primjerneru modela nižeg reda**

#### 5.1.2. Metode određivanja vrijednosti nepoznatih koeficijenata

##### Metoda najmanjih kvadrata

Jedna od metoda dobivanja vrijednosti parametara **ovaj shit nadopuniti**. Prisjetimo li metode najmanjih kvadrata u potpoglavlju 3.2.2., njezinom direktnom primjenom slijedi odabir vrijednosti parametara  $\mu, \phi_1, \dots, \phi_p$  koji će zadovoljavati uvjet minimizacije funkcije srednje kvadratne greške

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mu, \phi_1, \dots, \phi_p) &= \sum_{t=p+1}^N \epsilon_t^2 \\ &= \sum_{t=p+1}^N \{x_t - \mu_x + \phi_1 (x_{t-1} - \mu_x) + \dots + \phi_p (x_{t-p} - \mu_x) + \omega_t\}^2. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Minimizacijom izraza (5.5) dolazimo do izraza

$$\sum_{t=p+1}^N \{x_t - \mu_x + \phi_1 (x_{t-1} - \mu_x) + \dots + \phi_p (x_{t-p} - \mu_x) + \omega_t\} = 0, \quad (5.9)$$

iz kojega konačno slijedi izraz

5.1.3. Autoregresijski model 1. reda

5.1.4. Autoregresijski model 2. reda

**5.2. Pomična srednja vrijednost (MA)**

**5.3. ARMA (p,q) proces**

## 6. Pokus

Mogući set podataka sa:

<https://academictorrents.com/details/bcad357813557c282527317a5a5cf593df8eb7a9> <https://www.physionet.org/content/plantar/1.0.0/> <https://www.physionet.org/content/butqdb/1.0.0/>  
<https://www.physionet.org/content/ecg-spider-clip/1.0.0/> <https://www.physionet.org/content/mimic3wdb/1.0.0/>  
<https://academictorrents.com/details/c5a49e46249fef6a3219919fef96fd0265da4d3a>



## 7. Zaključak

(Tu ide rezime core teme rada. Dodatno se može iskoristiti "Ken Holden, David A. Peel, John L. Thompson - Economic Forecasting: An Introduction-Cambridge University Press (1990)" kao outro; nadograditi vrlo dobrim dodatnim zaključcima koji su dati u konkretnom primjeru, ali poopćiti budući da nakon uvoda treba održati elektrotehniku dominantnom temom.) ...

Temeljem stečenih saznanja, zaključujemo da se konstrukcija modela i njihovo korištenje u prognostici može sažeti u sljedeće korake:

1. Odabir valjane teorije koja najbolje opisuje ponašanje promatranih podataka i relevantnih faktora – koje mogu biti klasificirani kao endogeni faktori, čije je ponašanje predmet konstruiranoga modela, ili egzogeni faktori, čije je ponašanje promatrano deterministički i neovisno o egzaktnom skupu parametara određenih konstruiranim modelom.
2. Matematički zapis korištene teorije, koji povezuje prethodno navedene faktore pomoću složene matematičke jednadžbe. Poseban naglasak pri određivanju međusobnog odnosa parametara ima rezultantni odnos prethođenja ili kašnjenja konstruiranoga modela spram varijable matematičkoga očekivanja i diskretnih mjernih podataka.
3. Pronalazak najreprezentativnijega skupa podataka, čije su vrijednosti u skladu s mjeriteljskim normama koje podržavaju korištenu opisnu teoriju.
4. Korištenje prikladnih kvantitativnih metoda za procjenu numeričkih vrijednosti nepoznatih parametara matematičke jednadžbe koji će najbolje aproksimirati vrijednosti u području korištenog skupa podataka.
5. Prognoziranje budućega ponašanja predmeta konstruiranoga modela temeljem prognoziranih vrijednosti kauzalnog modela egzogenih faktora – iz kojih nadalje proizlaze prognozirane vrijednosti endogenih faktora. Vjerodostojnost navedenoga postupka proizlazi iz poznavanja budućega ponašanja egzogenih faktora, što sprječava neželjeni efekt projekcije prošlih vrijednosti na budućnost.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

## **Bibliografija**

- [1] Priestley, M.B.: "Spectral Analysis and Time Series (Vols. 1 & 2)", Academic Press, London, 1981.
- [2] Bahovec, V.; Erjavec, N.: "Uvod u ekonometrijsku analizu", Element, Zagreb, 2009.
- [3] Broersen, Piet M.T.: "Automatic Autocorrelation and Spectral Analysis", Springer, London, 2006.
- [4] F.M. Dekking i dr.: "A Modern Introduction to Probability and Statistics: Understanding Why and How", Springer, London, 2006.
- [5] Holden, K.; Peel, D.A.; Thompson, J.L.: "Economic forecasting: an introduction", Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [6] Presidential Commission: "Report of the Presidential Commission on the Space Shuttle Challenger Accident", U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., 1986.
- [7] Požar, H.: "Visokonaponska rasklopna postrojenja", Tehnička knjiga, Zagreb, 1978.