UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea Triennale

Teoria di Morse

Relatore:

Paolo Lisca

Candidato:

Giorgio Gatti

ANNO ACCADEMICO 2021/2022

La Teoria di Morse è un insieme di Teoremi di Topologia Differenziale sviluppati dall'omonimo matematico nella prima metà del Novecento che stabiliscono una connessione fra la topologia di una varietà e le sue funzioni differenziabili. Vederemo che permettono di descrivere l'omotopia di una varietà e di sue particolari sottovarietà attraverso l'indice dei punti critici di funzioni senza punti critici degeneri, che chiameremo funzioni di Morse. Nell'esposizione dei contenuti e nelle dimostrazioni seguiremo il primo capitolo del libro *Morse Theory* di J. Milnor.

Nel Capitolo 1 daremo alcune definizioni necessarie per lo sviluppo degli argomenti successivi, la più importante è quella dell'Hessiano H_f nei punti critici di una funzione reale f, perché la useremo per definire gli elementi fondamentali della teoria di Morse: punto critico non degenere, indice di un punto critico e funzione di Morse.

I risultati principali sono il Lemma di Morse ed i Teoremi (2.3) e (2.4) e saranno esposti nel Capitolo 2. Il primo descrive completamente il comportamento di una funzione intorno ad un suo punto punto usando solo il suo indice, mentre gli altri due legano i cambiamenti dell'omotopia di insiemi di livello M^a alla presenza di punti critici.

Il Capitolo 3 sarà quasi interemante dedicato a dimostrare che esistono su varietà qualsiasi funzioni di Morse con particolari proprietà che permettono l'utilizzo dei Teoremi (2.3), (2.4). Una conseguenza di questo risultato a cui accenneremo è che il Teorema di Whitehead è valido per qualsiasi varietà liscia.

Ulteriori applicazioni della Teoria di Morse, che esporremo nel Capitolo 4, sono le Disuguaglianze di Morse, il Teorema di Reeb e una dimostrazione del Teorema di Poincaré-Hopf, inoltre ha importanti applicazioni, che non vedremo, in Analisi Globale e Fisica Matematica.

Indice

1 Definizioni Preliminari **1**

2 Teoremi Principali **7**

3 Esistenza di funzioni di Morse **15**

4 Applicazioni **21**

4.1 Teorema di Reeb 21

4.2 Le Disuguaglianze di Morse 22

Capitolo 1

Definizioni Preliminari

Daremo per noti concetti di base come varietà, spazio tangente ad una varietà in un suo punto, parametrizzazioni e mappe locali, differenziale di una funzione fra varietà, punti critici di funzioni fra varietà, campi vettoriali. Per chi non avesse familiarità con gli argomenti elencati o desiderasse riguardarli consigliamo [Milnor1965, p. 1–7,] e [Lee2013, p. 1–72, 174-177]. Nel seguito di questa tesi, a meno che sia indicato diversamente, il termine varietà sarà usato col significato di varietà liscia e le funzioni presenti saranno C^∞. Useremo inoltre la seguente notazione: M sarà una varietà generica, n la sua dimensione, f una funzione a valori reali definita su M ed M^a l'insieme di livello $f^{-1}((-\infty, a])$.

1.1 Definizione. Una k-cella e^k è uno spazio topologico omeomorfo al sottospazio
$\{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| \leq 1\}$, dove $\| \, \|$ indica la classica norma euclidea.
Il suo bordo $\dot{e}^k$ sarà indicato da S^{k-1}.

Dati uno spazio topologico X, una k-cella e^k e una mappa continua $g : S^{k-1} \to X$, prendiamo l'insieme $X \cup e^k$ con la topologia di unione disgiunta e ne prendiamo il quoziente topologico ottenuto identificando ogni punto $y \in S^{k-1}$ con la sua immagine $g(y) \in X$. Lo spazio così ottenuto lo chiameremo $X \overset{g}{\cup} e^k$ o $X \cup e^k$ nel caso la mappa di "incollamento" g non sia rilevante. Il processo può essere ripetuto per ottenere uno spazio della forma $X \cup e^{k_1} \cup \ldots \cup e^{k_l}$. Costruzioni di questo tipo sono fondamentali nella Teoria di Morse, infatti il Teorema (2.4) ne fa uso per descrivere i cambiamenti del tipo di omotopia fra diversi insiemi di livello M^a e M^b. In particolare, nel Capitolo 3 vedremo come una varietà compatta abbia lo stesso tipo di omotopia di uno spazio $e^{k_1} \cup e^{k_2} \cup \ldots \cup e^{k_l}$.

1.2 Definizione. Sia p un punto critico di f, l'Hessiano di f in p è una funzione

$$H_f : TM_p \times TM_p \to \mathbb{R}$$
$$H_f(v,w) = \tilde{v}_p(\tilde{w}(f))$$

Dove $\tilde{v}$, $\tilde{w}$ sono estensioni locali di v, w come campi vettoriali e $\tilde{v}_p = v$.

1.3 Teorema. *H_f è ben definito, bilineare e simmetrico.*

Dimostrazione. La bilinearità di H_f è ovvia dalla sua definizione. Date i campi vettoriali $\tilde{v}$, $\tilde{w}$ possiamo calcolare in p la parentesi di Poisson $[\tilde{v},\tilde{w}]_p(f)$, che è nulla in quanto p è un punto critico di f. Tramite l'identità

$$\tilde{v}_p(\tilde{w}(f)) - \tilde{w}_p(\tilde{v}(f)) = [\tilde{v},\tilde{w}]_p(f)$$

concludiamo che H_f è simmetrica. Abbiamo

$$H_f = \tilde{v}_p(\tilde{w}(f)) = \tilde{w}_p(\tilde{v}(f))$$

dove il secondo termine non dipende dall'estensione $\tilde{v}$ ed il terzo da $\tilde{w}$, allora H_f è ben definito dato che non dipende dalle estensioni scelte. □

In un sistema di coordinate locali $(x_1,\dots,x_n)$ due vettori $v,w \in TM_p$ possono essere scritti come $v = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}|_p$, $w = \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial}{\partial x_j}|_p$. Prendiamo $\tilde{w} = \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ come estensione di w e calcoliamo H_f:

$$H_f(v,w) = v(\tilde{w}(f)) = v(\textstyle\sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial f}{\partial x_j}) = \displaystyle\sum_{i,j=1}^n a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)$$

La matrice $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right)$ rappresenta l'applicazione bilineare H_f rispetto alla base $\frac{\partial}{\partial x_1}|_p,\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}|_p$ di TM_p indotta dalla scelta di coordinate.

1.4 Definizione. La nullità di H_f in p è la dimensione del sottospazio

$$\{v \in TM_p \mid H_f(v,w) = 0 \quad \forall w \in TM_p\}$$

Un punto critico è non degenere se la nullità di H_f è zero.
L'indice di f in p è la dimensione del sottospazio

$$\{v \in TM_p \mid H_f(v,v) < 0\}$$

1.5 Definizione. Una funzione di Morse di M è una sua funzione a valori reali i cui punti critici sono tutti non degeneri.

Come suggerisce il nome, le funzioni di Morse saranno usate spesso nei prossimi capitoli, in particolare impiegheremo il Capitolo 3 per dimostrare l'esistenza di una particolare classe di funzioni di Morse su varietà qualsiasi.

I prossimi concetti non sono necessari per gli argomenti di questa tesi, ma li enunceremo perché utilizzati nella dimostrazione del Teorema (2.3).

1.6 Definizione. Un gruppo a un parametro di diffeomorfismi su M è una mappa

$$\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$$

tale che $\forall t \in \mathbb{R}$ $\varphi_t(q) = \varphi(t, q)$ è un diffeomorfismo di M in sé e dati $t, s \in \mathbb{R}$ vale la regola di composizione $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$.

Ad ogni gruppo a un parametro φ può essere assegnato un campo vettoriale X su M definito dalla seguente formula

$$X_q(f) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\varphi_h(q)) - f(q)}{h}$$

dove q è un punto di M ed f una sua funzione a valori reali.
Il campo vettoriale X è chiamato *generatore* di φ.

1.7 Lemma. *Un campo vettoriale liscio X su M che è nullo al di fuori di un sottoinsieme compatto K genera un unico gruppo a un parametro di diffeomorfismi su M.*

Dimostrazione. Data una curva liscia $\gamma : t \to \gamma(t) \in M$, il suo vettore velocità $\frac{dc}{dt}$ è definito dall'identità

$$\frac{d\gamma}{dt}(f) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\gamma(t+h)) - f(\gamma(t))}{h}$$

dove f è una funzione reale definita su M. Se φ è un gruppo a un parametro generato da X, allora per ogni $q \in M$ fissato la curva $\varphi_t(q)$ soddisfa l'equazione differenziale

$$\frac{d\varphi_t(q)}{dt} = X_{\varphi_t(q)}$$

con condizioni iniziali $\varphi_0(q) = q$. Infatti

$$\frac{d\varphi_t(q)}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\varphi_{t+h}(q)) - f(\varphi_t(q))}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\varphi_h(p)) - f(p)}{h} = X_p(f)$$

dove $p = \varphi_t(q)$. Un'equazione differenziale di questo tipo ha sempre un'unica soluzione che dipende in modo C^∞ dalle condizioni iniziali. Quindi per ogni punto $p \in M$ esiste un suo intorno U_p e un numero $\varepsilon_p > 0$ tali che

$$\frac{d\xi_t(q)}{dt} = X_{\xi_t(q)}, \qquad \varphi_0(q) = q \tag{1.1}$$

ha un'unica soluzione ξ_t^p per $q \in U_p$, $|t| < \varepsilon_p$. Per compattezza, possiamo ricoprire K con un numero finito di intorni $\{U_{p_i}\}_{i=1}^m$ come sopra e prendere il più piccolo degli ε_{p_i} a loro associato, chiamiamolo ε_0. Ponendo $\varphi_t(q) = \xi_t^{p_i}(q)$ se $q \in U_{p_i}$ e $\varphi_t(q) = 0$ se $q \notin K$, abbiamo una funzione C^∞ in entrambe le variabili che risolve l'equazione differenziale (1.1) per ogni $q \in M$ e per $|t| < \epsilon_0$. Inoltre è chiaro che $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ se $|t|, |s|, |t+s| < \varepsilon_0$, da cui segue che, per ogni $|t| < \varepsilon_0$ fissato , φ_t è un diffeomorfismo di M in sé. Per $|t| \geq \epsilon_0$ possiamo scrivere $t = k(\varepsilon_0/2) + r$ con k intero e $|r| < \varepsilon_0/2$. Poniamo

$$\varphi_t = \begin{cases} \overbrace{\varphi_{\varepsilon_0/2} \circ \varphi_{\varepsilon_0/2} \circ \ldots \circ \varphi_{\varepsilon_0/2}}^{k \ volte} \circ \varphi_r & \text{se } k \geq 0 \\ \\ \underbrace{\varphi_{-\varepsilon_0/2} \circ \varphi_{-\varepsilon_0/2} \circ \ldots \circ \varphi_{-\varepsilon_0/2}}_{k \ volte} \circ \varphi_r & \text{se } k < 0 \end{cases}$$

Non è difficile verificare che φ_t è un gruppo ad un parametro generato da X.

□

1.8 Definizione. Una metrica Riemanniana su M è una collezione $\{\langle \ , \ \rangle_p\}_{p \in M}$ di prodotti scalari $\langle \ , \ \rangle_p : TM_p \times TM_p \to \mathbb{R}$ definiti positivi.
Richiediamo inoltre la seguente proprietà di regolarità:
dati due campi vettoriali $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$, la funzione $q \to \langle \tilde{X}_q, \tilde{Y}_q \rangle_q$ è C^∞.

Ci servirà il seguente risultato

1.9 Teorema. *Esiste una metrica Riemanniana su ogni varietà liscia.*

Dimostrazione. Sia M una varietà liscia e $\{(U_\alpha, \varphi^\alpha)\}$ il suo atlante. Prendiamo una partizione dell'unità $\{\rho_\alpha\}$ subordinata al ricoprimento $\{U_\alpha\}$ e poniamo

$$\langle u, v \rangle_p = \sum_\alpha \rho_\alpha(p)(d\varphi_p^\alpha(u) \cdot d\varphi_p^\alpha(v)) \qquad \forall u, v \in TM_p$$

dove $\cdot$ indica il prodotto scalare euclideo su $\mathbb{R}^n$. Solo un numero finito di ρ_α non sono nulle in un punto p, quindi $\langle\ ,\ \rangle_p$ è una ben definita funzione bilinerare e simmetrica. Poiché è una somma di termini non negativi, $\langle u, u\rangle_p \geq 0$ per ogni u in TM_p, inoltre esiste almeno un α per cui $\rho_\alpha(p) > 0$, quindi $\langle u, u\rangle_p = 0$ implica $d\varphi_p^\alpha(u) \cdot d\varphi_p^\alpha(u) = \underline{0}$. Questo è possibile se e solo se $d\varphi_p^\alpha(u) = \underline{0}$, cioè se e solo se $u = 0$ visto che $d\varphi_p^\alpha$ è iniettiva, quindi $\langle\ ,\ \rangle_p$ è definito positivo per ogni p. Siano $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ due campi vettoriali su M, la funzione

$$q \to \langle \tilde{X}_q, \tilde{Y}_q\rangle_q = \sum_\alpha \rho_\alpha(q)(d\varphi_q^\alpha(\tilde{X}_q) \cdot d\varphi_q^\alpha(\tilde{Y}_q))$$

è chiaramente C^∞ perché composizione di funzioni C^∞, questo conclude la dimostrazione.

$\square$

Fissata una metrica Riemanniana su M, possiamo assegnare ad ogni funzione a valori reali f un campo vettoriale $grad(f)$ definito dalla proprietà

$$\langle X, grad(f)\rangle = X(f)$$

per ogni campo vettoriale X.

Capitolo 2

Teoremi Principali

In questo capitolo M indicherà una n-varietà, f una funzione a valori reali definita su M e $M^a = f^{-1}((-\infty, a])$.

<u>**Lemma di Morse**</u>
Sia $p \in M$ un punto critico non degenere di f, allora esiste un sistema di coordinate locali

$$\phi : U \to \mathbb{R}^n \tag{2.1}$$

$$\phi(x) = (y_1, \ldots, y_n) \tag{2.2}$$

su un intorno U di p tale che $\phi(p) = 0$ e

$$f(x) = f(p) - \sum_{i=1}^{\lambda} y_i^2 + \sum_{i=\lambda+1}^{n} y_i^2 \quad \forall x \in U \tag{2.3}$$

dove $\phi(x) = (y_1, \ldots, y_n)$ e λ è l'indice di f in p.

Il Lemma di Morse mostra che intorno ad un suo punto critico non degenere il comportamento di f dipende solamente dall'indice e che in un opportuno sistema di coordinate ha un'espressione "semplice". Un immediato e importante Corollario è il seguente

2.1 Corollario. *I punti critici non degeneri di f sono isolati.*

Nel caso di varietà compatte questo implica che le sue funzioni di Morse hanno un numero finito di punti critici, proprietà di cui faremo uso nel Capitolo 4.

Per dimostrare il Lemma di Morse è necessario un altro Lemma

2.2 Lemma. *Sia f una funzione C^∞ definita in un intorno convesso V dell'origine di $\mathbb{R}^n$ per cui $f(0) = 0$, allora esistono su V funzioni C^∞ $g_1, \ldots, g_n$ tali che*

$$f(x_1, \ldots, x_n) \;=\; \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x_1, \ldots x_n) \quad \text{e} \quad g_i \;=\; \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$$

Dimostrazione.

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \int_0^1 \frac{df(tx_1, \ldots, tx_n)}{dt} dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \ldots, tx_n) \cdot x_i \; dt$$

Prendiamo quindi $g_i(x_1, \ldots x_n) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \ldots, tx_n)$. □

Iniziamo ora la dimostrazione del Lemma di Morse

Dimostrazione. Mostriamo prima che, se esiste un'espressione per f del tipo (2.3), allora λ è uguale all'indice di f in p. Sia dunque $(z_1, \ldots, z_n)$ un sistema di coordinate locali tale che

$$f(x) = f(p) - \sum_{i=1}^{\lambda} z_i(x)^2 + \sum_{i=\lambda+1}^{n} z_i(x)^2$$

allora derivando nelle coordinate z_i due volte si vede che l'Hessiano di f è rappresentato rispetto alla base $\left(\frac{\partial}{\partial z_i}|_p\right)$ dalla matrice

$$\begin{pmatrix} -2 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -2 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 2 \end{pmatrix}$$

Quindi esiste un sottospazio di TM_p di dimensione λ su cui l'Hessiano è definito negativo ed un sottospazio di dimensione $n - \lambda$ su cui è definito positivo, per cui λ è uguale all'indice di f in p.
Costruiamo adesso un sistema di coordinate con le proprietà cercate. Senza

perdita di generalità, possiamo supporre $M = \mathbb{R}^n$, $p = \underline{0}$ e $f(p) = 0$, mettendoci nelle giuste ipotesi per applicare il Lemma (2.2):

$$f(x_1, \ldots, x_n) \; = \; \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x_1, \ldots, x_n)$$

in un intorno di p. Per ipotesi p è un punto critico di f, quindi $0 = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = g_i(0)$ e possiamo riutilizzare il Lemma (2.2) su ognuna delle g_i ottenendo:

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j h_{ij}(x_1, \ldots, x_n) \tag{2.4}$$

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j h_{ij}(x_1, \ldots, x_n) \tag{2.5}$$

Posto $\hat{h}_{ij} = \frac{1}{2}(h_{ij} + h_{ji})$, abbiamo $\hat{h}_{ij} = \hat{h}_{ji}$ e $f = \sum x_i x_j \hat{h}_{ij}$, inoltre

$$\left(\; \hat{h}_{ij}(0) \; \right) = \left(\; \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \; \right)$$

quindi la matrice di sinistra non è singolare.
Del resto della dimostrazione sarà data solo un'idea, in quanto laboriosa e poco rilevante per il resto degli argomenti di questa tesi.
Per concludere rimane da modificare le funzioni $\hat{h}_{ij}$ in modo da ottenre un'espressione equivalente che contiene solo termini diagonali. Per farlo si utilizza il metodo di diagonalizzazione usato nel caso delle forme quadratiche.

$\square$

I prossimi due Teoremi sono il cuore della Teoria di Morse, infatti permettono di conoscere il tipo di omotopia di una varietà M e delle sue sottovarietà studiando i punti critici di opportune funzioni su M. Il capitolo 4 contiene alcuni importanti risultati classici che possono essere dimostrati usando i Teoremi (2.3) e (2.4) per dare prova della loro utilità.

2.3 Teorema. *Siano $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ e supponiamo che $f^{-1}([a, b]) \in M$ sia compatto e non contenga alcun punto critico di f. Allora esiste un diffeomorfismo fra M^a ed M^b, M^a è un retratto per deformazione di M^b e la mappa di inclusione è un'equivalenza omotopica.*

Dimostrazione. Scegliamo una metrica Riemanniana su M e indichiamo con $\langle X, Y \rangle$ il prodotto di interno di due vettori tangenti dato dalla metrica.
Sia $c : \mathbb{R} \to M$ una curva e $\frac{dc}{dt}$ il suo vettore velocità.
Dalla definizione di $grad(f)$ segue l'uguaglianza $\langle grad(f), \frac{dc}{dt} \rangle = \frac{d(f \circ c)}{dt}$.
Sia ora $\rho : M \to \mathbb{R}$ una funzione C^∞ a supporto compatto e uguale a $\langle grad(f), grad(f) \rangle$ sull'insieme compatto $f^{-1}([a, b])$. Il campo vettoriale X definito come

$$X_q = \rho(q)(grad(f))_q$$

rispetta tutte le ipotesi del Lemma (1.7), quindi X genera un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi $\varphi_t : M \to M$. Fissiamo $q \in M$ e consideriamo la funzione $t \to f(\varphi_t(q))$. Se $\varphi_t(q)$ giace in $f^{-1}([a, b])$ valgono le uguaglianze:

$$\frac{df(\varphi_t(q))}{dt} = \Big\langle\ grad(f), \frac{d\varphi_t(q)}{dt}\ \Big\rangle = \Big\langle\ grad(f), X\ \Big\rangle = 1$$

per cui, finché $f(\varphi_t(q)) \in [a, b]$, la funzione $t \to f(\varphi_t(q)$ è lineare con derivata $+1$. Ne segue che il diffeomorfismo $\varphi_{b-a} : M \to M$ è un diffeomorfismo fra M^a ed M^b. Per concludere la dimostrazione esibiamo una retrazione per deformazione di M^b su M^a:

$$r_t : M^b \to M^b \qquad r_t(q) = \begin{cases} q & \text{se } f(q) \leq a \\ \varphi_{t(a-f(q))}(q) & \text{se } a \leq f(q) \leq b \end{cases}$$

□

2.4 Teorema. *Sia c un valore critico per f con un numero finito di punti critici $p_1, \ldots, p_n$, tutti non degeneri, e supponiamo che esista $\varepsilon > 0$ tale che $f^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ sia compatto e non contenga ulteriori punti critici di f. Allora $M^{c+\varepsilon}$ è omotopicamente equivalente a $M^{c-\varepsilon} \cup e^{\lambda_1} \cup \ldots \cup e^{\lambda_k}$, dove $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sono gli indici di $p_1, \ldots, p_k$.*

Dimostrazione. Ci limiteremo a dimostrare il caso $k = 1$, usando il fatto che i punti critici non degeneri sono isolati si può facilmente modificare la dimostrazione per il caso k qualsiasi. Sia p il punto critico di f relativo al valore critico c e λ il suo indice, possiamo applicare il Lemma di Morse su un intorno U per ottenere il sistema di coordinate locali $u = (u_1, \ldots, u_n)$ in cui $u(p) = \underline{0}$ e vale l'uguaglianza

$$f = c - \sum_{i=1}^{\lambda} u_i^2 + \sum_{i=\lambda+1}^{n} u_i^2$$

definiamo $\xi = \sum_{i=1}^{\lambda} u_i^2$ e $\nu = \sum_{i=\lambda+1}^{n} u_i^2$, allora su U

$$f = c - \xi + \nu$$

Prendiamo ora $\varepsilon > 0$ in modo che $\{(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum u_i^2 \leq 2\varepsilon\}$ sia contenuto nell'immagine di U data dal sistema di coordinate e che $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$ sia compatto.

Chiamiamo e^λ l'insieme $\{q \in U \mid \xi(q) \leq \varepsilon \text{ e } \nu(q) = 0\}$, chiaramente diffeomorfo ad una palla λ-dimensionale. L'intersezione fra $M^{c-\varepsilon}$ e e^λ è precisamente $\dot{e}^\lambda$, quindi $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$ è ben definito, dimostriamo ora che è un retratto per deformazione di $M^{c+\varepsilon}$. Costruiamo su M una nuova funzione

$$F(q) = \begin{cases} f(q) - \mu(\xi(q) + 2\nu(q)) & q \in M \\ f(q) & q \notin M \end{cases}$$

dove μ è una funzione reale C^∞ tale che

$$\mu(0) > \varepsilon$$
$$\mu(r) = 0 \quad \text{se } r \geq 2\varepsilon$$
$$-1 < \mu'(r) \leq 0 \quad \forall r \in \mathbb{R}$$

Con rapidi calcoli si verifica che $F^{-1}((-\infty, c+\varepsilon]) = f^{-1}((-\infty, c+\varepsilon]) = M^{c+\varepsilon}$ e che i punti critici di F sono gli stessi di f. Per costruzione $F \leq f$, quindi $F^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ è contenuto in $f^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$. Per le ipotesi su ε il secondo insieme è compatto, quindi anche il primo lo è. L'unico punto critico di F che può appartenere a $F^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ è p, ma p non può appartenere perché $F(p) = f(p) - \mu(0) < c - \varepsilon$. Possiamo dunque applicare il Teorema (2.3) agli insiemi di livello $F^{-1}((-\infty, c-\varepsilon])$ e $F^{-1}((-\infty, c+\varepsilon])$, ottenendo che $F^{-1}((-\infty, c-\varepsilon])$ è un retratto per deformazione di $M^{c+\varepsilon}$. Rimane da dimostrare che $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$ è un retratto per deformazione di $F^{-1}((-\infty, c-\varepsilon])$. Poiché $M^{c-\varepsilon} \subset F^{-1}((-\infty, c-\varepsilon])$, possiamo scrivere $F^{-1}((-\infty, c-\varepsilon]) = M^{c-\varepsilon} \cup H$, dove $H = \overline{F^{-1}((-\infty, c-\varepsilon]) \setminus M^{c-\varepsilon}}$.
L'insieme e^λ è contenuto in H, per cui l'idea dietro la retrazione r_t che costruiremo sarà di "schiacciare" H lungo e^λ, lasciando fermo $M^{c-\varepsilon}$.
Una possibile retrazione $r_t : M^{c-\varepsilon} \cup H \to M^{c-\varepsilon} \cup H$ è la seguente: poniamo $r_t(q) = q$ al di fuori di U, su U identifichiamo ogni punto q con le sue

coordinate $u(q) = (u_1, \ldots, u_n)$ e poniamo

$$r_t(u_1, \ldots, u_n) = \begin{cases} (u_1, \ldots, u_\lambda, tu_{\lambda+1}, tu_n) & \text{se } \xi(q) \leq \varepsilon \\ (u_1, \ldots, u_\lambda, s_t u_{\lambda+1}, s_t u_n) & \text{se } \varepsilon \leq \xi(q) \leq \varepsilon + \nu(q) \\ (u_1, \ldots, u_n) & \text{se } \nu(q) + \varepsilon \leq \xi(q) \end{cases}$$

$$s_t(u_1, \ldots, u_n) = t + (1-t)((\xi(q) - \varepsilon)/\nu(q))^{1/2} \ \in [0,1]$$

Questo completa la dimostrazione del Teorema (2.4).

$\square$

Capitolo 3

Esistenza di funzioni di Morse

Finora abbiamo nominato spesso funzioni di Morse definite su varietà M, però al momento non abbiamo motivo di credere che tali funzioni esistano.
In questo capitolo dimostreremo che esistono infinite funzioni di Morse su una qualsiasi varietà.
La strategia utilizzata è di mostrare prima che ciò è vero per varietà $M \subset \mathbb{R}^n$ di dimensione minore di n, per poi concludere attraverso il seguente risultato

3.1 Teorema. ***(Whitney embedding theorem)***
Ogni n-varietà liscia M ammette un'immersione differenziabile come sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Esamineremo funzioni del tipo

$$L_{\vec{p}} : M \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \vec{p} \in \mathbb{R}^n$$
$$_{\vec{p}}(q) = \|p - q\|^2$$

e risulterà che, per quasi ogni p, L_p ha solo punti critici non degeneri e $M^a = L_{\vec{p}}^{-1}((-\infty, a])$ è compatto per ogni valore di a.
Sia $M \subset \mathbb{R}^n$ una k-varietà, con k<n, immersa differenziabilmente in $\mathbb{R}^n$.
Possiamo costruire una n-varietà $N \subset M \times \mathbb{R}^n$ nel seguente modo:

$$N = \{(q, v)|\ q \in M,\ v \in TM_p^{\perp}\}$$

dove $TM_p^{\perp}$ è il complemento ortogonale in $\mathbb{R}^n$ dell'identificazione canonica di TM_p indotta dalla mappa di immersione.
Consideriamo la funzione

$$E : N \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$E(q, v) = q + v$$

detta *endpoint map.*

3.2 Definizione. Un punto $e \in \mathbb{R}^n$ è detto focale per (M, q) con molteplicità μ se $e = q + v$ e il Jacobiano di E calcolato in (q, v) ha nullità μ . Un punto e è detto focale per M se esiste un $q \in M$ tale che e sia focale per (M, q) .

Osserviamo che e è focale per M se e solo se è un valore critico di E. Applicando il Teorema di Sard è immediato il seguente

3.3 Corollario. *L'insieme dei punti e focali per M ha misura nulla in $\mathbb{R}^n$.*

Per poter sfruttare il concetto di **punto focale** introdurremo, solo in un sistema di coordinate locali fisso, **Prima Forma Fondamentale** e **Seconda Forma Fondamentale** di una varietà immersa in uno spazio euclideo.
Siano $u_1, \ldots, u_k$ le nostre coordinate locali su un aperto $U \subset M$, allora la mappa di inclusione in $\mathbb{R}^n$ determina n funzioni lisce

$$x_1(u_1, \ldots, u_k),\ \ldots\ , x_n(u_1, \ldots, u_k)$$

Indicheremo con $\vec{x}$ il vettore $(x_1, \ldots, x_n)$ e con $\vec{q}$ un punto di M.
Con questa notazione, la **Prima Forma Fondamentale** è definita come la matrice simmetrica di funzioni a valori reali che ha entrate

$$\left(g_{ij} \right) = \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_j} \right) \qquad i, j = 1, \ldots, k$$

La **Seconda Forma Fondamentale** è definita come la matrice simmetrica di funzioni a valori vettoriali le cui entrate $(\vec{l}_{ij})$ soddisfano la seguente proprietà:

Dato $\vec{q} \in U,\ \forall \vec{v} \in TM_{\vec{q}}^{\perp}$

$$\left(\vec{v} \cdot \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u_i \partial u_j}(\ \vec{q}\ ) \right) = \left(\vec{v} \cdot \vec{l}_{i,j}(\ \vec{q}\ ) \right) \qquad i, j = 1, \ldots, k$$

In altre parole, $\vec{l}_{i,j}$ è la componente normale a M di $\frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u_i \partial u_j}$.

D'ora in avanti per semplicità assumeremo che le coordinate $u_1, \ldots, u_k$ siano state scelte in modo che la Prima Forma fondamentale sia rappresentata dalla matrice identità I_n su U, visto che una tale scelta è sempre possibile.

3.4 Definizione. In un sistema di coordinate come sopra, gli autovalori $K_1, \ldots, K_k$ della matrice reale $(\vec{v} \cdot \vec{l}_{i,j}(\ \vec{q}\ ))$ sono chiamati le **Curvature Principali** di M in $\vec{q}$ nella direzione $\vec{v}$, con $\vec{v} \in TM_{\vec{q}}^{\perp}$.
I loro reciproci $K_1^{-1}, \ldots, K_k^{-1}$, se definiti, sono chiamati **Raggi Principali di Curvatura**.

Consideriamo ora la retta l di equazione $\vec{q} + t\vec{v}$, dove t è un parametro in $\mathbb{R}$ e $\vec{q}$, $\vec{v}$ sono fissi.

3.5 Lemma. *I punti focali di $(M, \vec{q})$ che giacciono su l sono esattamente i punti della forma $\vec{q} + K_i^{-1}\vec{v}$, $K_i \neq 0$. Quindi esistono al più k punti focali di $(M, \vec{q})$, ognuno contato con la corretta molteplicità.*

Dimostrazione. Definiamo su U, il solito intorno di $\vec{q}$, $n-k$ campi vettoriali $\vec{w}_1(u_1, \ldots, u_k), \ldots, \vec{w}_{n-k}(u_1, \ldots, u_k)$ in modo che $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_{n-k}$ siano vettori unitari e ortogonali l'uno con l'altro, quindi formano una base ortonormale per lo spazio $TM_{\vec{p}}^{\perp}$, dove $\vec{p} = \vec{x}(u_1, \ldots, u_k) \in U$. Possiamo ora introdurre coordinate locali $(u_1, \ldots, u_k, t_1, \ldots, t_{n-k})$ sulla varietà $N' = U \times \mathbb{R}^n \cap N$ tramite la mappa

$$(u_1, \ldots, u_k, t_1, \ldots, t_{n-k}) \to \Big(\vec{x}(u_1, \ldots, u_k), \sum_{\alpha=1}^{n-k} t_\alpha \vec{w}_\alpha(u_1, \ldots, u_k)\Big) \in N'$$

Componendo con la funzione E ottienamo la corrispondenza $\vec{e}$

$$(u_1, \ldots, u_k, t_1, \ldots, t_{n-k}) \xrightarrow{\vec{e}} \vec{x}(u_1, \ldots, u_k) + \sum_{\alpha=1}^{n-k} t_\alpha \vec{w}_\alpha(u_1, \ldots, u_k)$$

le cui derivate parziali sono

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{e}}{\partial u_i} = \dfrac{\partial \vec{x}}{\partial u_i} + \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{n-k} t_\alpha \frac{\partial \vec{w}_\alpha}{\partial u_i} \\ \dfrac{\partial \vec{e}}{\partial t_\beta} = \vec{w}_\beta \end{cases}$$

Prendendo il prodotto scalare euclideo di questi n-vettori con i vettori linearmente indipendenti $\frac{\partial \vec{x}}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_k}, \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_{n-k}$ otteniamo una matrice $n \times n$ il cui rango in $(u_1, \ldots, u_k, t_1, \ldots, t_{n-k})$ è uguale al rango del Jacobiano di E nel punto corrispondente. Questa matrice ha forma

$$\begin{pmatrix} \Big(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial \vec{x}}{\partial u_j}+\sum_{\alpha=1}^{n-k} t_\alpha \frac{\partial \vec{w}_\alpha}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial \vec{x}}{\partial u_j}\Big) & \sum_{\alpha=1}^{n-k} t_\alpha \frac{\partial \vec{w}_\alpha}{\partial u_i}\cdot \vec{w}_\beta\Big) \\ & \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}$$

quindi il suo rango dipende solo dal blocco in alto a sinistra.
Usando l'identità

$$0=\frac{\partial}{\partial u_i}\Big(\vec{w}_\alpha\cdot\frac{\partial \vec{x}}{\partial u_i}\Big)=\frac{\partial \vec{w}_\alpha}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial \vec{x}}{\partial u_j}+\vec{w}_\alpha\cdot\frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u_i \partial u_j}$$

risulta chiaramente che il blocco in alto a sinistra è uguale alla matrice

$$\Big(\ g_{ij}\ -\ \sum_{\alpha=1}^{n-k} t_\alpha \vec{w}_\alpha\cdot\vec{l}_{ij}\ \Big)$$

Di conseguenza $\vec{q}+t\vec{v}$ è un punto focale per $(M,\vec{q})$ con molteplicità μ se e solo se la matrice $(\ g_{ij}\ -\ t\vec{v}\cdot\vec{l}_{ij}\ )$ è singolare, con nullità μ. Per la scelta delle coordinate su U la matrice $(\ g_{ij}\ )$ è la matrice identità I_k, allora $(\ g_{ij}-t\vec{v}\cdot\vec{l}_{ij}\ )$ è singolare se e solo se $\frac{1}{t}$ è un autovalore di $(\ \vec{v}\cdot l_{ij}\ )$ e la molteplicità di μ come punto focale è uguale alla molteplicità di $\frac{1}{t}$ come autovalore.

$\square$

Torniamo adesso alle funzioni $L_{\vec{p}}$, con $\vec{p} \in U$. Sfruttando le coordinate possiamo scrivere

$$L_{\vec{p}}(\ \vec{x}\ ) = \|\ \vec{x}(u_1, \ldots, u_n) - \vec{p}\ \|^2 = \ \vec{x} \cdot \vec{x}\ -\ 2\vec{x} \cdot \vec{p}\ +\ \vec{p} \cdot \vec{p}$$

e calcolare le derivate parziali

$$\frac{\partial L_{\vec{p}}}{\partial u_i} = 2\frac{\partial \vec{x}}{\partial u_i} \cdot (\vec{x} - \vec{p})$$

Quindi $L_{\vec{p}}$ ha un punto critico in $\vec{q}$ se e solo se $\vec{q} - \vec{p} \in TM^{\perp}_{\vec{q}}$. Le derivate seconde calcolate in un punto critico sono

$$\frac{\partial^2 L_{\vec{p}}}{\partial u_i \partial u_j}\ =\ 2\Big(\ \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_j} + \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u_i \partial u_j} \cdot (\ \vec{x} - \vec{p}\ )\Big)$$

Poiché $\vec{q}$ è un punto critico, $\vec{p}$ si può esprimere nella forma $\vec{q} + \vec{v}$ e riscrivere le derivate seconde come

$$\frac{\partial^2 L_{\vec{p}}}{\partial u_i \partial u_j}\ =\ (\ g_{ij}\ -\ t\vec{v} \cdot \vec{l}_{ij}\ )$$

usando la stessa notazione del Lemma 3.5.

3.6 Lemma. *Il punto $\vec{q} \in M$ è un punto critico degenere di $L_{\vec{p}}$ se e solo se $\vec{p}$ è un punto focale di $(M, \vec{q})$. La nullità dell'Hessiano di $L_{\vec{p}}$ in $\vec{q}$ è uguale alla molteplicità di $\vec{p}$ come punto focale.*

Combinando questo Lemma con il Corollario 3.3 otteniamo il risultato principale di questo capitolo;

3.7 Teorema. *Per quasi ogni $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$ la funzione $L_{\vec{p}}$ è una funzione di Morse.*

3.8 Teorema. *Data una varietà M esiste una funzione di Morse $f : M \to \mathbb{R}$ tale che $f^{-1}([a, b])$ è compatto $\forall a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, a < b$.*

Dimostrazione. Sia n la dimensione di M, per il Teorema 3.1 M ammette un'immersione $i : M \to \mathbb{R}^{2n+1}$ tale che $i(M)$ è chiuso in $\mathbb{R}^{2n+1}$. Per il Teorema 3.7 esiste una funzione di Morse $L_{\vec{p}}$ definita su $i(M)$, la composizione $L_{\vec{p}} \circ i = f : M \to \mathbb{R}$ continua ad essere una funzione di Morse.

$M^a = f^{-1}((-\infty, a]) = i^{-1}(i(M)^a)$ e poiché $L_{\vec{p}}$ è non negativa $i(M)^a = L_{\vec{p}}^{-1}([0, a])$, sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^{2n+1}$. Poiché $i(M)$ è un sottospazio chiuso di $\mathbb{R}^{2n+1}$, $i(M)^a$ è compatto anche in $i(M)$ e M^a è compatto in M in quanto immagine di un compatto tramite la funzione continua i^{-1}. Allo stesso modo, $f^{-1}([a, b]) = M^a \cap M^b$ compatto in $i(M)$, dunque anche in M.

□

Come conseguenza del precedente Teorema è possibile descrivere completamente il tipo di omotopia di una varietà conoscendo solo gli indici dei punti critici di una opportuna funzione. Infatti rende possibile applicare il Teorema (3.9) a qualsiasi varietà

3.9 Teorema. *Sia f una funzione di Morse su M per cui ogni M^a è compatto, allora M ha lo stesso tipo di omotopia di un Complesso-CW formato da una λ-cella per ogni punto critico di indice λ.*

Una dimostrazione di questo risultato si può trovare in [Milnor1963, p. 21-24].

Per poter conoscere il tipo di omotopia è necessario poter calcolare l'indice di punti critici non degeneri, dunque concludiamo il capitolo con un risultato che si occupa di questo problema per le funzioni $L_{\vec{p}}$:

3.10 Lemma. *L'indice della funzione $L_{\vec{p}}$ in un punto critico non degenere $\vec{q} \in M$ è uguale al numero di punti focali per $(M, \vec{q})$ che giacciono sul segmento $\overline{pq}$, ognuno contato con la propria molteplicità.*

Dimostrazione. Sappiamo che

$$\left(\frac{\partial^2 L_{\vec{p}}}{\partial u_i \partial u_j} \right) = 2\left(g_{ij} - t\vec{v} \cdot \vec{l}_{ij} \right) \tag{3.1}$$

e l'indice della matrice di destra è uguale al numero dei suoi autovalori negativi. Scegliendo le coordinate locali in modo che $\left(g_{ij} \right) = I_k$, gli autovalori negativi della matrice (3.1) sono in corrispondenza con gli autovalori $\geq \frac{1}{t}$ di $\left(\vec{v} \cdot \vec{l}_{ij} \right)$. Applicando il Lemma 3.5 si ha la tesi.

□

Capitolo 4

Applicazioni

Nell'ultimo capitolo vediamo due applicazioni classiche dei risultati ottenuti nei capitoli precedenti: il Teorema di Reeb e le Disuguaglianze di Morse.

4.1 Teorema di Reeb

4.1 Teorema. *Sia M una n-varietà compatta, se esiste $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione derivabile con esattamente due punti critici, entrambi non degeneri, allora M è omeomorfa a S^n.*

Dimostrazione. Dalla compattezza di M segue che i due punti critici, N e S, sono rispettivamente punto di massimo e di minimo per f); senza perdita di generalità possiamo supporre $f(N) = 1,\ f(S) = 0$. Per il Lemma di Morse si hanno un intorno aperto U_N di N, un aperto $V_n \subset \mathbb{R}$, intorno dell'origine, e un diffeomorfismo $\phi : V_N \longrightarrow U_N$ tali che

$$f(\phi(x_1, \dots, x_n)) = 1 - \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \qquad \forall (x_1, \dots, x_n) \in V_n$$

infatti l'hessiano di f è definito negativo perché N è un punto di massimo non degenere. V_N è un intorno dell'origine in $\mathbb{R}^n$, quindi esiste $\varepsilon_N > 0$ tale che $B_{\varepsilon_N} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R} | \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \leq \varepsilon_N\} \subset V_N$, allora la restrizione di ϕ è un omeomorfismo fra B_{ε_N} e $f^{-1}([1-\varepsilon_N, 1])$, inoltre il primo è chiaramente omeomorfo a una n-cella chiusa. Allo stesso modo si trova ε_S tale che $f^{-1}([0, \varepsilon_S])$ sia omeomorfo a una n-cella, prendiamo $\varepsilon = \min\{\varepsilon_N, \varepsilon_S\}$. Per il Teorema2.3, $f^{-1}([0, \varepsilon])$ è omeomorfo a $f^{-1}([0, 1 - \varepsilon])$, quindi M è formato dall'unione di due sottovarietà, $f^{-1}([0, 1 - \varepsilon])$ e $f^{-1}([1 - \varepsilon, 1])$, omeomorfe a n-celle e unite lungo il bordo. Dal momento che anche S^n ammette una scomposizione di questo tipo si può facilmente costruire l'omeomorfismo con M cercato.

□

Il risultato rimane vero rimuovendo l'ipotesi che i punti critici non siano degeneri, ma la dimostrazione diventa molto più complicata.

4.2 Le Disuguaglianze di Morse

I teoremi sviluppati nei capitoli precedenti permettono di descrivere relazione fra la topologia di una varietà M e i punti critici di una sua funzione di Morse tramite alcune disuguaglianze, le disuguaglianze di Morse.

4.2 Definizione. Siano X,Y insiemi e $S(X, Y)$ una funzione a valori interi. S si dice **Subadditiva** se $\forall Z \subset Y \subset X$ vale $S(X, Z) \leq S(X, Y) + S(Y, Z)$.
Se vale sempre l'uguaglianza S si dice additiva.

4.2.1 Esempio. Presi X, Y spazi topologici, $Y \subset X$, consideriamo la funzione

$$R_k(X, Y) = \text{k-esimo numero di Betti di } (X, Y) = \text{Grado su } F \text{ di } H_k(X, Y; F)$$

dove F è un gruppo di coefficienti e R_k è definita su coppie (X, Y) per cui ha valore finito. La funzione R_k è subadditiva.
Invece la caratteristica di Eulero $\chi(X, Y) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k R_k(X, Y)$, è additiva.

Per chiarimenti e definizioni dettagliate sulle precedenti funzioni si rimanda all'Appendice. Otterremo le disuguaglianze di Morse in forma debole facendo uso dei Teoremi (2.3) e (2.4) insieme al seguente Lemma:

4.3 Lemma. *Sia S una funzione subadditiva e siano dati gli insiemi $X_0 \subset \ldots \subset X_n$. Allora $S(X_n, X_0) \leq \sum_{i=1}^{n} S(X_i, X_{i-1})$. Se S è additiva vale l'uguaglianza.*

Dimostrazione. Per induzione su n.

Il caso n=1 è banalmente vero.

Se il lemma è vero per $n-1$, allora $S(X_{n-1}, X_0) \leq \sum_{i=1}^{n-1} S(X_i, X_{i-1})$.

Per subadditività $S(X_n, X_0) \leq S(X_n, X_{n-1}) + S(X_{n-1}, X_0)$

Combinando, $S(X_n, X_0) \leq S(X_n, X_{n-1}) + \sum_{i=1}^{n-1} S(X_i, X_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} S(X_i, X_{i-1})$.

Questo conclude la dimostrazione per il caso S subadditiva.
Il caso S additiva si dimostra allo stesso modo. □

4.4 Corollario. *Definendo $S(X, \emptyset) = S(X)$, vale*

$$S(X_n) \leq \sum_{i=1}^{n} S(X_i, X_{i-1}) \tag{4.1}$$

con l'uguaglianza se S è additiva.

Disuguaglianze deboli di Morse
Sia M una varietà compatta e C_k il numero di punti critici di indice k di una funzione di Morse definita su M, allora valgono le seguenti relazioni

$$R_k(M) \leq C_k \tag{4.2}$$

$$\chi_M = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_k \tag{4.3}$$

Per la dimostrazione assumeremo vero il seguente Teorema:

4.5 Teorema. ***(Excision Theorem)*** *Sia X uno spazio topologico e A, U suoi sottospazi tali che U è anche sottospazio di A e $\overline{U} \subset \mathring{A}$. Allora*

$$H_k(X \setminus U, A \setminus U) \cong H_k(X, A) \tag{4.4}$$

Dimostrazione di 1.5. Per la compattezza di M, qualsiasi sua funzione di Morse f ha solo un numero finito di punti critici, tutti non degeneri, $x_1, \ldots, x_n$. A meno di modificare leggermente la funzione, possiamo supporre che $f(x_i) \neq f(x_j)$ se $i \neq j$. Indichiamo con λ_i l'indice del punto x_i e $M^a = f^{-1}([-\infty, a])$.

Prendiamo $a_1 < \ldots < a_n$ in modo che $\{x_1, \ldots, x_i\} \subset M^{a_i}$ e $M^{a_n} = M$. Allora

$$\begin{aligned}
H_k(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) &= H_k(M^{a_{i-1}} \cup e^{\lambda_i}, M^{a_{i-1}}) \quad \text{Per il Teorema 2.4} && (4.5)\\
&\cong H_k(e^{\lambda_i}, \dot{e}^{\lambda_i}) \quad \text{per il Teorema 4.5} && (4.6)\\
&= \begin{cases} \text{Gruppo dei coefficienti} & \lambda_i = k, \\ 0 & \lambda_i \neq k, \end{cases} && (4.7)
\end{aligned}$$

Applicando la disuguaglianza (4.1) con $S = R_k$ e $\emptyset = M^{a_0} \subset \cdots \subset M^{a_n} = M$ si ottiene la (4.2)

$$R_k \leq \sum_{i=1}^{n} R_k(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) = C_k$$

Dove C_k indica il numero di punti critici di indice k.
Applicando 4.1 al caso $S = \chi$ insieme ai risultati appena ottenuti si ricava la (4.3)

$$\chi_M = \sum_{i=1}^{n} \chi(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) = C_0 - C_1 + C_2 - \ldots \pm C_m$$

dove m è la dimensione di M. □

Come prima applicazione delle Disuguaglianze, dimostreremo un importante Teorema di topologia differenziale:

Teorema di Poincaré-Hopf
Sia M una n-varietà compatta, $v : M \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale liscio i cui zeri sono tutti isolati, allora

$$\chi(M) \ = \ \sum_s \ i_s$$

dove i_s è l'indice di v nel suo punto critico s.

Dimostrazione. Per il Teorema 3.8 del capitolo precedente, esiste f funzione di Morse definita su M, consideriamo quindi il campo vettoriale $grad(f)$. I punti critici di f sono isolati per definizione, quindi anche gli zeri di $grad(f)$. Usando la relazione $i_s = (-1)^k$, in cui s è un punto critico di f con indice k, possiamo scrivere

$$\sum_s i_s \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_k$$

e poiché M è compatto vale l'uguaglianza (4.3) e si ha

$$\sum_s i_s \ = \ \chi(M)$$

La somma degli indici di un campo vettoriale w con solo zeri isolati è un invariante topologico di M, quindi si ha la tesi. $\square$

Le disuguaglianze (4.2) si possono migliorare facendo uso del seguente Lemma

4.6 Lemma. *La funzione S_k è subadditiva, dove*

$$S_k(X,Y) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} R_i(X,Y)$$

Dimostrazione. Data una sequenza esatta

$$A \xrightarrow{f_1} B \xrightarrow{f_2} C \xrightarrow{f_3} \ldots \xrightarrow{f_n} D \xrightarrow{0} 0$$

fra spazi vettoriali, la somma fra il rango di f_1 e il rango di f_2 è uguale alla dimensione di B come spazio vettoriale. Si può quindi scrivere la seguente serie di uguaglianze

$$\begin{aligned} rank(f_1) &= dim(B) - rank(f_2) \quad &(4.8)\\ &= dim(B) - dim(C) + rank(f_3) \quad &(4.9)\\ &\ldots \quad &(4.10)\\ &= dim(B) - dim(C) + \ldots \pm dim(D) \quad &(4.11) \end{aligned}$$

In particolare l'ultima espressione è ≥ 0.
Consideriamo ora la sequenza esatta di omologia della tripla $X \supset Y \supset Z$. Se applichiamo le precedenti manipolazioni prendendo come f_1 il seguente omeomorfismo

$$H_{k+1}(X,Y) \xrightarrow{\partial} H_k(X,Y)$$

si ottiene

$$rank(\partial) = R_k(Y,Z) - R_k(X,Z) + R_k(X,Y) - R_{K-1}(Y,Z) + \ldots \geq 0$$

e dopo aver riordinato diventa

$$rank(\partial) = S_k(Y,Z) - S_k(X,Z) + S(X,Y) \geq 0$$

che è la definizione di subadditività. □

Possiamo applicare le funzioni S_k sulla sequenza di spazi

$$\emptyset \subset M^{a_1} \subset M^{a_2} \subset \ldots \subset M^{a_n} = M$$

definita nella dimostrazione delle disuguaglianze deboli di Morse, si ottengono

Disuguaglianze di Morse

$$S_k(M) \leq \sum_{i=1}^{n} S_k(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} C_i \tag{4.12}$$

o equivalentemente

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} R_i(M) \leq \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} C_i \tag{4.13}$$

Queste disequazioni sono più accurate delle precedenti, infatti sommando

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} R_i(M) \leq \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} C_i \quad \text{e} \quad \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k-1-i} R_i(M) \leq \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k-1-i} C_i$$

si ottiene $R_k(M) \leq C_k$, cioè la disuguaglianza (4.2). Una semplice applicazione delle disuguaglianze di Morse è il seguente

4.7 Corollario. *Se* $C_{k+1} = C_{k-1} = 0$ *allora* $R_k = C_k$ *e* $R_{k+1} = R_{k-1} = 0$

Dimostrazione. Per le disuguaglianze 4.2 $0 \leq R_{k+1} \leq C_{k+1} = 0$,
$0 \leq R_{k-1} \leq C_{k-1} = 0$. Considero

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} R_i(M) \leq \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} C_i \quad \text{e} \quad \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^{k+1-i} R_i(M) \leq \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^{k+1-i} C_i$$

sostituendo $R_{k+1} = 0$ e cambiando segno ai termini dell'espressione di destra si ottiene

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} R_i(M) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} C_i \tag{4.14}$$

Ripetiamo ora questo procedimento sostituendo $k-1$ a $k+1$ e $k-2$ a k, nuovamente si ottiene

$$\sum_{i=0}^{k-2} (-1)^{k-i-2} R_i(M) = \sum_{i=0}^{k-2} (-1)^{k-i-2} C_i \tag{4.15}$$

Sottraendo (4.15) a (4.14) e ricordando che $R_{k-1} = C_{k-1} = 0$ si ha

$$R_k = C_k$$

□

Bibliografia

[Milnor1963] J. Milnor, *Morse Theory*, 1963

[Milnor1965] J. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, 1965

[Lee2013] J. M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, 2013