Capítulo 4

Projeto de Sistemas de Controle Ótimo

4-1 INTRODUÇÃO

Este capítulo lida com o controle ótimo tanto de sistemas contínuos quanto discretos no tempo. Em primeiro lugar, será considerado o controle quadrático ótimo dos sistemas contínuos no tempo. Em seguida, será discutido o controle quadrático ótimo dos sistemas discretos, dos quais serão considerados tanto os problemas de horizonte finito quanto infinito (regime estacionário).

Uma vantagem de se usar o controle quadrático ótimo é que o sistema será estável, exceto em casos muito especiais. Ao se projetarem sistemas de controle baseados na minimização de índices quadráticos de desempenho, é necessário resolver as equações de Riccati. O MATLAB possui o comando lqr que fornece a solução da equação de Riccati para sistemas contínuos e determina a matriz de ganho de retroação de valor ótimo. Neste capítulo serão projetados, sistemas de controle usando índices quadráticos de desempenho através do MATLAB, tanto para a solução analítica quanto para a solução numérica.

Um caso especial de controle ótimo, o controle de energia mínima, também é tratado neste capítulo. As pseudoinversas de matrizes desempenham um importante papel na resolução de problemas de controle de energia mínima e por isso serão revistas no âmbito deste capítulo.

Resumo do capítulo

A Seção 4-1 apresenta material introdutório. A Seção 4-2 discute o controle quadrático ótimo de sistemas de controle contínuos no tempo. A Seção 4-3 lida com o controle quadrático ótimo de sistemas de controle discretos, para os quais o horizonte de observação é finito; enquanto a Seção 4-4 trata do controle quadrático ótimo em estado estacionário, quando o horizonte de observação é infinito. A Seção 4-5 lida com o controle de energia mínima de sistemas de controle discretos. Uma revisão das pseudoinversas é incluída nesta seção.

4-2 CONTROLE QUADRÁTICO ÓTIMO DE SISTEMAS DE CONTROLE CONTÍNUOS NO TEMPO

Nesta seção será considerado o projeto de sistemas de controle estáveis baseados em índices quadráticos de desempenho. O sistema de controle que se vai considerar aqui pode ser definido por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{4-1}$$

onde $\mathbf{x}$ = vetor de estado (vetor n)
$\mathbf{u}$ = vetor de controle (vetor r)
$\mathbf{A}$ = matriz constante $n \times n$
$\mathbf{B}$ = matriz constante $n \times r$

Os sistemas de controle considerados nesta seção são principalmente sistemas reguladores.

No projeto de sistemas de controle, há interesse, freqüentemente, em escolher o vetor de controle $\mathbf{u}(t)$ tal que um dado índice de desempenho seja minimizado. Pode-se provar que um índice quadrático de desempenho, onde os limites de integração são 0 e ∞, tal como

$$J = \int_0^\infty L(\mathbf{x}, \mathbf{u})\, dt$$

onde $L(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ é uma função quadrática ou hermitiana de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{u}$, irá produzir leis de controle lineares, isto é,

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$$

onde $\mathbf{K}$ é uma matriz $r \times n$, ou

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{r1} & k_{r2} & \cdots & k_{rn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Por conseguinte, o projeto de sistemas de controle ótimos e sistemas reguladores ótimos baseados em índices quadráticos de desempenho se reduz à determinação dos elementos da matriz $\mathbf{K}$.

No que se segue, será considerado o problema de determinar o vetor ótimo de controle $\mathbf{u}(t)$ para o sistema descrito pela Eq. (4-1) e o índice de desempenho dado por

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}'\mathbf{R}\mathbf{u})\, dt$$

onde $\mathbf{Q}$ é uma matriz hermitiana positiva definida (ou positiva semidefinida) ou real simétrica, $\mathbf{R}$ é uma matriz hermitiana positiva definida ou simétrica real e $\mathbf{u}$ não possui restrição de valores. Um sistema de controle ótimo consiste na minimização do índice de desempenho. Dentre as muitas e diferentes abordagens para a solução deste tipo de problema, apresenta-se aqui uma que está baseada no segundo método de Liapunov.

Otimização de sistemas de controle através do segundo método de Liapunov

Classicamente, um sistema de controle é primeiramente projetado e, em seguida, testada a sua estabilidade. Numa abordagem diferente, as condições de estabilidade são primeiro formuladas e, então, o sistema é projetado com essas limitações. Se o segundo método de Liapunov for utilizado para formar a base do projeto de um controlador ótimo, tem-se assegurado que o sistema irá funcionar; ou seja, a saída do sistema será continuamente dirigida para o valor desejado. Em conseqüência, o sistema projetado possui uma configuração com características de estabilidade imanentes.

Para uma ampla classe de sistemas de controle, uma relação direta pode ser exibida entre as funções de Liapunov e os índices quadráticos de desempenho usados na síntese de sistemas de controle ótimos.

O problema do controle quadrático ótimo

Considere-se agora o problema do controle quadrático ótimo: dada uma equação de sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{4-2}$$

determinar a matriz $\mathbf{K}$ do vetor de controle ótimo

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \tag{4-3}$$

de forma a minimizar o índice de desempenho

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}'\mathbf{R}\mathbf{u})\, dt \tag{4-4}$$

onde $\mathbf{Q}$ é uma matriz hermitiana positiva definida (ou positiva semidefinida) ou real simétrica e $\mathbf{R}$ é uma matriz hermitiana positiva definida ou simétrica real. Note-se que o segundo termo do lado direito da Eq. (4-4) contabiliza

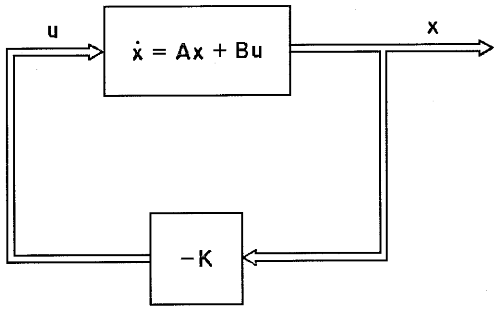

Fig. 4.1

o dispêndio de energia dos sinais de controle. As matrizes **Q** e **R** determinam a importância relativa do erro e o dispêndio dessa energia. Neste problema, admite-se que o vetor de controle $\mathbf{u}(t)$ não esteja sujeito a restrições.

Como será visto mais tarde, a lei de controle linear dada pela Eq. (4-3) é a lei de controle ótimo. Por conseguinte, se os elementos desconhecidos da matriz **K** são determinados de forma a minimizar o índice de desempenho, $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$ será ótimo para qualquer estado inicial $\mathbf{x}(0)$. O diagrama de blocos com a configuração ótima é mostrado na Fig. 4-1.

Será resolvido agora o problema da otimização. Substituindo a Eq. (4-3) na Eq. (4-2), obtém-se

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}$$

Nas deduções seguintes, admite-se que a matriz $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ seja estável ou que os autovalores de $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ tenham partes reais negativas.

A substituição da Eq. (4-3) na Eq. (4-4) produz

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{x}'\mathbf{K}'\mathbf{R}\mathbf{K}\mathbf{x})\,dt$$
$$= \int_0^\infty \mathbf{x}'(\mathbf{Q} + \mathbf{K}'\mathbf{R}\mathbf{K})\mathbf{x}\,dt$$

Será usada a abordagem de Liapunov para resolver este problema de otimização. Considera-se que para qualquer **x**

$$\mathbf{x}'(\mathbf{Q} + \mathbf{K}'\mathbf{R}\mathbf{K})\mathbf{x} = -\frac{d}{dt}(\mathbf{x}'\mathbf{P}\mathbf{x})$$

onde **P** é uma matriz hermitiana positiva definida ou real simétrica. Por conseguinte, obtém-se

$$\mathbf{x}'(\mathbf{Q} + \mathbf{K}'\mathbf{R}\mathbf{K})\mathbf{x} = -\dot{\mathbf{x}}'\mathbf{P}\mathbf{x} - \mathbf{x}'\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{x}'[(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})'\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})]\mathbf{x}$$

Pelo segundo método de Liapunov, sabe-se que, para uma dada matriz positiva definida (ou, sob certas condições, positiva semidefinida) $\mathbf{Q} + \mathbf{K}'\mathbf{R}\mathbf{K}$, existe uma matriz **P** positiva definida, se a matriz $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ for estável, tal que

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})'\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) = -(\mathbf{Q} + \mathbf{K}'\mathbf{R}\mathbf{K}) \tag{4-5}$$

Por conseguinte, o procedimento deve determinar os elementos de **P** para esta equação e verificar se é positiva definida. (Note-se que mais de uma matriz **P** pode satisfazer esta equação. Se o sistema é estável, existe sempre uma matriz positiva definida **P** para satisfazer esta equação. Isto significa que, se for resolvida esta equação e encontrada uma matriz positiva definida **P**, o sistema é estável. Outras matrizes **P** que satisfaçam esta equação e não sejam positivas definidas devem ser descartadas.)

O índice de desempenho J pode ser avaliado como

$$J = \int_0^\infty \mathbf{x}'(\mathbf{Q} + \mathbf{K}'\mathbf{R}\mathbf{K})\mathbf{x}\,dt = -\mathbf{x}'\mathbf{P}\mathbf{x}\Big|_0^\infty = -\mathbf{x}'(\infty)\mathbf{P}\mathbf{x}(\infty) + \mathbf{x}'(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0)$$

Como é suposto que todos os autovalores de $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ possuem partes reais negativas, tem-se $\mathbf{x}(\infty) \to \mathbf{0}$. Por conseguinte, obtém-se

$$J = \mathbf{x}'(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0) \tag{4-6}$$

Conseqüentemente, o índice de desempenho J pode ser obtido em termos da condição inicial $\mathbf{x}(0)$ e de $\mathbf{P}$.

Solução para o problema de controle quadrático ótimo

Para obter a solução do problema de controle quadrático ótimo, procede-se de acordo com o seguinte: como foi suposto que $\mathbf{R}$ seja uma matriz hermitiana positiva definida ou real simétrica, pode-se escrever

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}'\mathbf{T}$$

onde $\mathbf{T}$ é uma matriz não-singular. A Eq. (4-5) pode ser escrita como

$$(\mathbf{A}' - \mathbf{K}'\mathbf{B}')\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) + \mathbf{Q} + \mathbf{K}'\mathbf{T}'\mathbf{TK} = \mathbf{0}$$

que pode ser reescrita como

$$\mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{PA} + [\mathbf{TK} - (\mathbf{T}')^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{P}]'[\mathbf{TK} - (\mathbf{T}')^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{P}] - \mathbf{PBR}^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}$$

A minimização de J com respeito a $\mathbf{K}$ requer a minimização de

$$\mathbf{x}'[\mathbf{TK} - (\mathbf{T}')^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{P}]'[\mathbf{TK} - (\mathbf{T}')^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{P}]\mathbf{x}$$

com relação a $\mathbf{K}$. (Para uma prova dessa afirmativa, por exemplo, o leitor é remetido à Referência 4, listada ao final deste livro.) Como a última expressão é não-negativa, o mínimo ocorre quando a mesma for zero, ou quando

$$\mathbf{TK} = (\mathbf{T}')^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{P}$$

Por conseguinte,

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{T}')^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{P} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{P} \tag{4-7}$$

A Eq. (4-7) fornece a matriz ótima $\mathbf{K}$. Por conseguinte, a lei ótima para o problema do sistema de controle quadrático ótimo, quando o índice de desempenho é dado pela Eq. (4-4), é linear e é dada por

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{Kx}(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{Px}(t)$$

A matriz $\mathbf{P}$ na Eq. (4-7) precisa satisfazer a Eq. (4-5) ou a equação reduzida seguinte

$$\mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{PA} - \mathbf{PBR}^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \tag{4-8}$$

A Eq. (4-8) é chamada de *equação de Riccati da matriz reduzida*. As etapas de projeto podem ser especificadas como a seguir:

1. Resolver a Eq. (4-8), a equação da matriz reduzida de Riccati, para a matriz $\mathbf{P}$. [Se uma matriz positiva definida $\mathbf{P}$ existir (certos sistemas podem não ter uma matriz positiva definida $\mathbf{P}$), o sistema é estável ou a matriz $\mathbf{A} - \mathbf{KB}$ é estável.]
2. Substituir esta matriz $\mathbf{P}$ na Eq. (4-7). A matriz resultante $\mathbf{K}$ é a solução ótima.

Solução MATLAB para o problema do controle quadrático ótimo

No MATLAB, o comando

lqr(A,B,Q,R)

resolve o problema do regulador quadrático linear contínuo no tempo e a equação de Riccati associada. O comando calcula a matriz ótima de ganho de retroação $\mathbf{K}$ tal que a lei de controle

$$u = -\mathbf{Kx}$$

minimize o índice de desempenho

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}'\mathbf{R}\mathbf{u})\,dt$$

sujeito à equação de restrição

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

Um outro comando

[K,P,E] = lqr(A,B,Q,R)

também retorna a matriz **P**, a solução única positiva definida para a equação de Riccati da matriz associada:

$$\mathbf{0} = \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}'\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}\mathbf{B}'\mathbf{P} + \mathbf{Q}$$

Se a matriz **A** – **BK** for estável, uma solução positiva definida para **P** sempre existe. Os pólos a malha fechada ou autovalores de **A** – **BK** são também obtidos através deste comando.

É importante notar que, para certos sistemas, a matriz **A** – **BK** não pode ser feita estável, seja lá qual for a matriz **K** escolhida. Em tais casos, não existe uma matriz positiva definida **P** para a equação de Riccati da matriz. Para esse caso, os comandos

K = lqr(A,B,Q,R)
[K,P,E] = lqr(A,B,Q,R)

não fornecem a solução. Ver o Programa MATLAB 4-1.

EXEMPLO 4.1

Seja considerado o sistema definido por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Mostrar que o sistema não pode ser estabilizado pelo esquema de controle de retroação de estado

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$$

qualquer que seja a matriz **K** escolhida.

Definindo-se

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2]$$

Então,

$$\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2] = \begin{bmatrix} -1 - k_1 & 1 - k_2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Por conseguinte, a equação característica se torna

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}| = \begin{vmatrix} s + 1 + k_1 & -1 + k_2 \\ 0 & s - 2 \end{vmatrix} = (s + 1 + k_1)(s - 2) = 0$$

Os pólos em malha fechada estão localizados em

$$s = -1 - k_1, \qquad s = 2$$

Como o pólo em $s = 2$ está na metade direita do plano s, o sistema é instável, seja qual for a matriz **K** escolhida. Por conseguinte, as técnicas de controle quadrático ótimo não podem ser aplicadas a este sistema.

Será admitido que as matrizes **Q** e **R** no índice quadrático de desempenho sejam dadas por

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad R = [1]$$

e que se escreva o programa MATLAB 4-1. A solução MATLAB resultante é

K = [NaN NaN]

(NaN significa "não é um número".) Sempre que a solução para um problema de controle quadrático ótimo não existe, o MATLAB informa que a matriz **KI** consiste em um "não-numérico" (NaN).

Programa MATLAB 4-1

```
% ---------- Projeto de um sistema regulador quadrático ótimo ----------

% ***** Determinação da matriz de ganho de retroação K
% para o controle quadrático ótimo *****

% ***** Entrar com a matriz de estado A e a matriz de controle B *****

A = [-1  1;0  2];
B = [1;0];

% ***** Entrar com as matrizes Q e R do índice quadrático de
% desempenho *****

Q = [1  0;0  1];
R = [1];

% ***** Para obter a matriz de ganho de retroação ótima K,
% entrar com o seguinte comando *****

K = lqr(A,B,Q,R)

Warning: Matrix is singular to working precision.

K =

   NaN   NaN

% ***** Se for digitado o comando [K,P,E] = lqr(A,B,Q,R), então *****

[K,P,E] = lqr(A,B,Q,R)

Warning: Matrix is singular to working precision.

K =

   NaN   NaN
```

```
P =

    -/  -/
    -/  -/


E =

    -2.0000
    -1.4142
```

T **Warning** (...) **precision** significa Atenção: A matriz é singular para a precisão que está sendo usada.

EXEMPLO 4.2

Considere-se o sistema descrito por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

O índice de desempenho J é dado por

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x} + u'Ru)\, dt$$

onde

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = [1]$$

Admita-se que o seguinte controle u seja usado.

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$$

Determinar a matriz de ganho de retroação ótimo **K**.

A matriz de ganho de retroação ótimo **K** pode ser obtida solucionando a seguinte equação de Riccati para uma matriz positiva definida **P**:

$$\mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}$$

O resultado é

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A substituição da matriz **P** na equação seguinte fornece a matriz ótima **K**:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= R^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{P} \\ &= [1][0 \quad 1]\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad 1] \end{aligned}$$

Por conseguinte, o sinal de controle ótimo é dado por

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} = -x_1 - x_2$$

O Programa MATLAB 4-2 produz a solução para este problema.

Programa MATLAB 4-2

```
% ---------- Projeto de um sistema regulador quadrático ótimo ----------

% ***** Determinação da matriz de ganho de retroação K
% para o controle quadrático ótimo *****

% ***** Entrar com a matriz de estado A e a matriz de controle B *****

A = [0  1;0  -1];
B = [0;1];

% ***** Entrar com as matrizes Q e R do índice quadrático
% de desempenho *****

Q = [1  0;0  1];
R = [1];

% ***** A matriz de ganho de retroação ótima K (se tal matriz existir)
% pode ser obtida entrando-se com o seguinte comando  *****

K = lqr(A,B,Q,R)

K =

    1.0000      1.0000
```

EXEMPLO 4.3

Seja considerado o sistema dado por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -35 & -27 & -9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

O índice de desempenho J é dado por

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x} + u'Ru)\,dt$$

onde

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad R = [1]$$

Obter a matriz solução positiva definida **P** da equação de Riccati, a matriz ótima de ganho de retroação **K** e os autovalores da matriz **A** – **BK**.

O Programa MATLAB 4-3, fornecido a seguir, resolve este problema.

Programa MATLAB 4-3

```
% ---------- Projeto de um sistema regulador quadrático ótimo ----------

% ***** Determinação da matriz de ganho de retroação K para
% o controle quadrático ótimo *****

% ***** Entrar com a matriz de estado A e a matriz de controle B *****

A = [0  1  0;0  0  1;-35  -27  -9];
B = [0;0;1];

% ***** Entrar com as matrizes Q e R do índice quadrático
% de desempenho*****

Q = [1  0  0;0  1  0;0  0  1];
R = [1];

% ***** A matriz de ganho de retroação ótima K, a solução
% P da equação de Riccati e os pólos em malha fechada (isto
% é, os autovalores de A - BK) podem ser obtidos entrando-se
% com o comando seguinte *****

[K,P,E] = lqr(A,B,Q,R)

K =

    0.0143    0.1107    0.0676


P =

    4.2625    2.4957    0.0143
    2.4957    2.8150    0.1107
    0.0143    0.1107    0.0676


E =

  -5.0958
  -1.9859 + 1.7110i
  -1.9859 - 1.7110i
```

EXEMPLO 4.4

Considere-se o sistema definido pelas seguintes equações no espaço de estados:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + Du$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0], \quad D = [0]$$

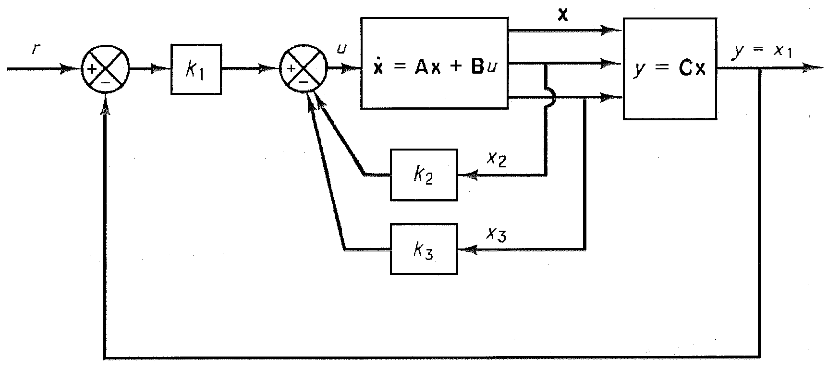

Fig. 4.2

Admita-se que o sinal de controle u seja dado por

$$u = k_1(r - x_1) - (k_2x_2 + k_3x_3) = k_1 r - (k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3)$$

como mostrado na Fig. 4-2. Na determinação da lei de controle ótimo, supõe-se que a saída seja zero, ou $r = 0$.

Vai-se determinar a matriz de ganho de retroação de estado $\mathbf{K}$, onde

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$$

tal que seja minimizado o seguinte índice de desempenho

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x} + u'Ru)\,dt$$

onde

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & q_{33} \end{bmatrix}, \qquad R = 1, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \end{bmatrix}$$

Para se obter uma resposta rápida, q_{11} precisa ser suficientemente grande quando comparado com q_{22}, q_{33} e R. Neste problema, escolhe-se

$$q_{11} = 100, \qquad q_{22} = q_{33} = 1, \qquad R = 0{,}01$$

Para resolver este problema com o MATLAB, usa-se o comando

K = lqr(A,B,Q,R)

O Programa MATLAB 4-4 produz a solução para este problema.

Programa MATLAB 4-4

```
% ---------- Projeto do sistema de controle quadrático ótimo ----------

% ***** Deve-se determinar a matriz ótima de ganho de retroação
% K que minimize o índice de desempenho J *****

% ***** Entrar com a matriz de estado A e a matriz de controle B *****

A = [0  1  0;0  0  1;0  -2  -3];
B = [0;0;1];

% ***** Entrar com as matrizes Q e R do índice quadrático
% de desempenho J *****
```

```
Q = [100  0  0;0  1  0;0  0  1];
R = [0.01];

% ***** Para obter a matriz de ganho de retroação de
% estado K, entrar com o seguinte comando *****

K = lqr(A,B,Q,R)

K =

   100.0000    53.1200    11.6711

k1 = K(1), k2 = K(2), k3 = K(3)

k1 =

   100.0000


k2 =

   53.1200


k3 =

   11.6711
```

Em seguida, será investigada a característica da resposta em degrau do sistema projetado usando a matriz **K** então determinada. A equação de estado para o sistema projetado é

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{B}u \\ &= \mathbf{Ax} + \mathbf{B}(-\mathbf{Kx} + k_1 r) \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{B}k_1 r\end{aligned}$$

e a equação de saída é

$$y = \mathbf{Cx} = [1 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Para obter a resposta em degrau unitário, usa-se o seguinte comando:

```
[y,x,t] = step(AA,BB,CC,DD)
```

onde

$$\text{AA} = \mathbf{A} - \mathbf{BK}, \qquad \text{BB} = \mathbf{B}k_1, \qquad \text{CC} = \mathbf{C}, \qquad \text{DD} = D$$

O Programa MATLAB 4-5 fornece a resposta em degrau unitário do sistema projetado. A Fig. 4-3 mostra a saída y *versus* o tempo t. A Fig. 4-4 mostra as curvas de resposta x_1, x_2 e x_3 *versus* t em um diagrama. A Fig. 4-5 ilustra a resposta x_2 *versus* t e a Fig. 4-6 mostra a resposta x_3 *versus* t.

Programa MATLAB 4-5

```
% ---------- Resposta ao degrau unitário do sistema proposto ----------

% ***** Usando-se a matriz de ganho de retroação ótima K
% determinada no programa precedente, obtém-se a resposta
% em degrau unitário do sistema projetado *****

% ***** A equação de estado para o sistema projetado
% é xdot = (A - BK)x + Bk1r e a equação de saída
% é y + Cx + Du, onde as matrizes C e D são dadas por *****

C = [1   0   0];
D = [0];

% ***** Definir a matriz de estado, a matriz de controle, a
% matriz de saída e a matriz de transmissão direta do sistema
% projetado como AA, BB, CC e DD *****

AA = A - B*K;
BB = B*k1;
CC = C;
DD = D;

% ***** Para obter a resposta em degrau unitário, entrar
% com seguinte comando *****

[y,x,t] = step(AA,BB,CC,DD);

% ***** Para plotar a curva de resposta em degrau unitário
% y(=x1) contra t, entrar com o comando seguinte *****

plot(t,y)
grid
title ('Resposta em Degrau Unitário do Sistema de Controle
Quadrático Ótimo')
xlabel ('Segundos')
ylabel ('Saída y = x1')

% ***** Para plotar as curvas x1, x2, x3 versus t em um diagrama
% entrar com o seguinte comando *****

plot(t,x)
grid
title ('Curvas de Resposta x1, x2, x3 versus t')
xlabel ('Segundos')
ylabel('x1, x2, x3')
text(1.6,1.2,'x1')
text(0.7,1.2,'x2')
text(0.35,3.2,'x3')

% ***** Para plotar a curva x2 versus e, entrar com o seguinte comando *****

x2 = [0   1   0]*x'; plot(t,x2)
grid
title ('Resposta x2 versus t')
xlabel ('Segundos')
ylabel('x2')
```

```
% *****  Para plotar a curva x3 versus t, entrar com o comando seguinte  *****

x3 = [0  0  1]*x'; plot(t,x3)
grid
title ('Resposta x3 versus t')
xlabel ('Segundos')
ylabel('x3')
```

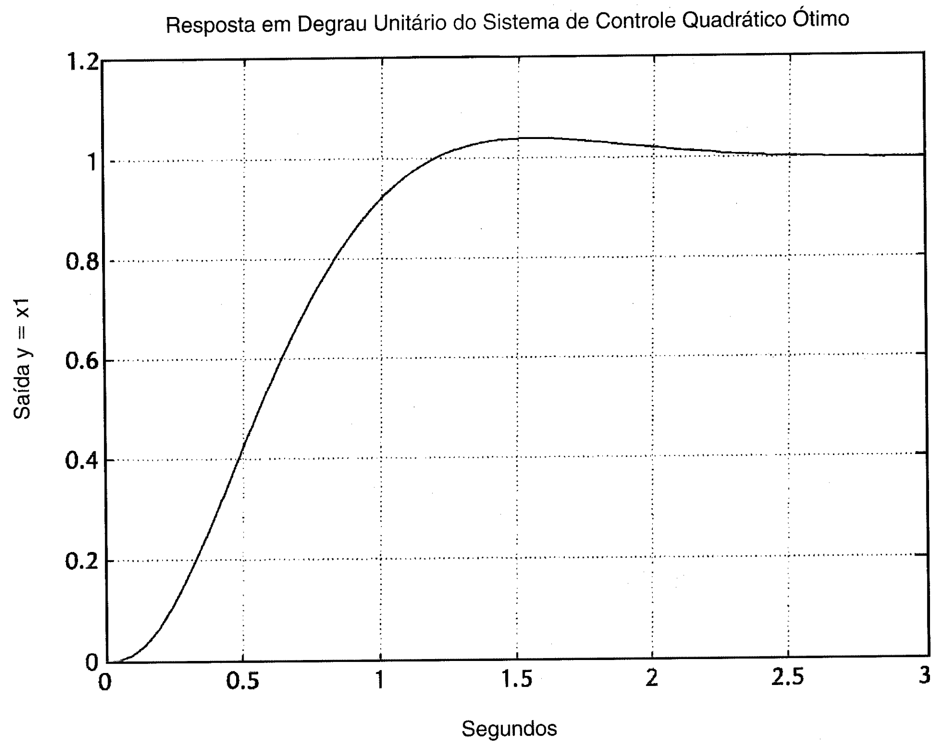

Fig. 4.3

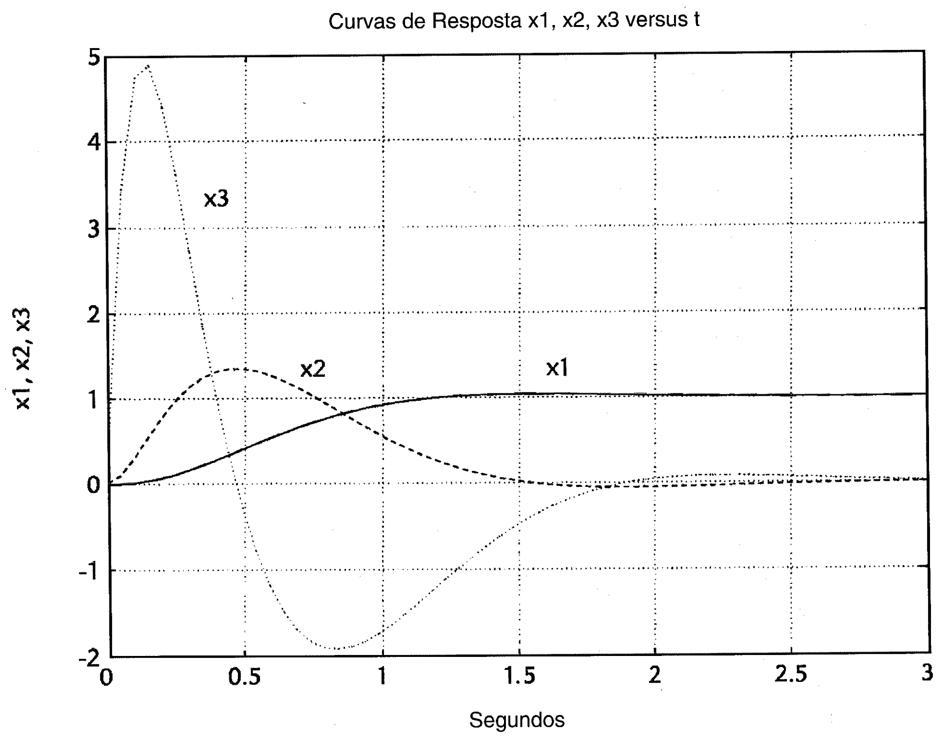

Fig. 4.4

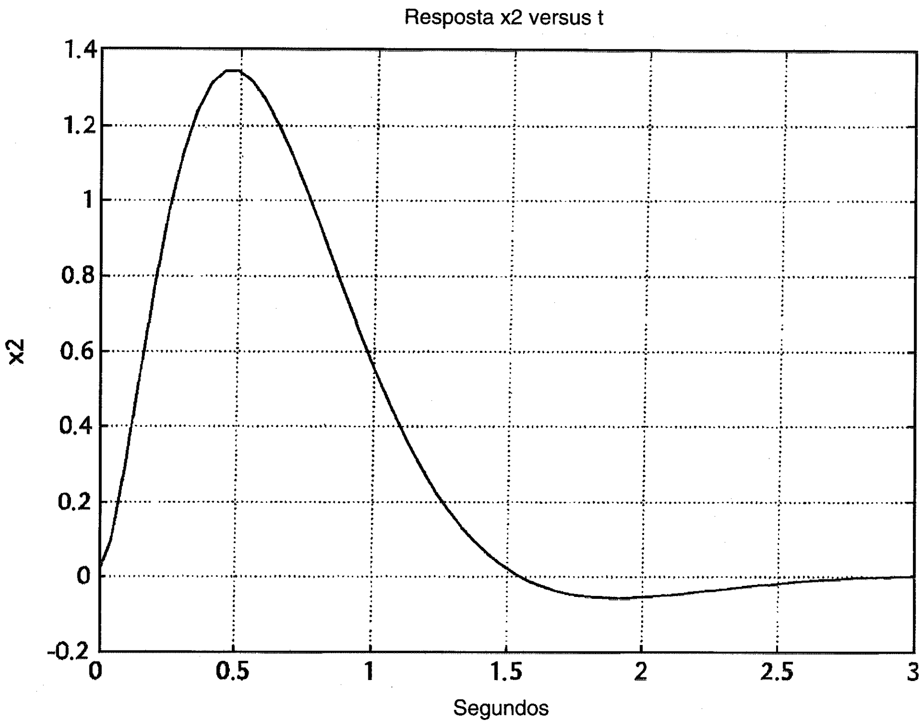
Resposta x2 versus t
x2
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
Segundos

Fig. 4.5

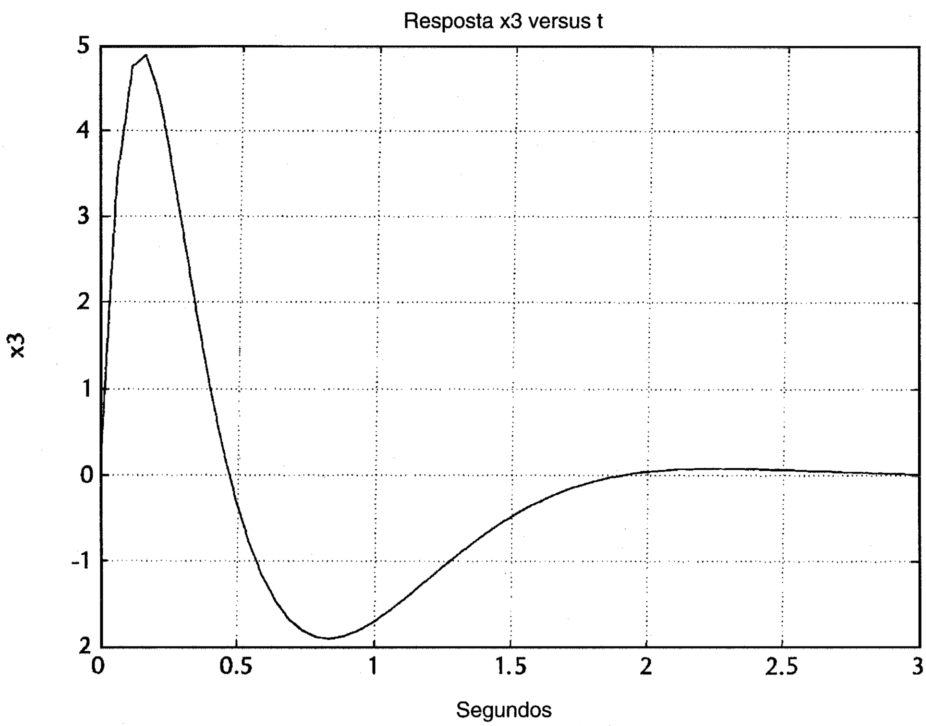
Resposta x3 versus t
x3
5
4
3
2
1
0
-1
2
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
Segundos

Fig. 4.6

4-3 CONTROLE QUADRÁTICO ÓTIMO DE SISTEMAS DISCRETOS NO TEMPO

Nesta seção, serão discutidos primeiro a análise matemática do controle quadrático ótimo dos sistemas discretos e dedução das equações básicas necessárias para a solução em computador com o uso do MATLAB. Em seguida, são apresentados programas MATLAB para resolver problemas de controle quadrático ótimo envolvendo sistemas discretos no tempo.

O problema do controle quadrático ótimo

O problema do controle quadrático ótimo pode ser enunciado da seguinte forma: dado um sistema de controle linear discreto no tempo

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{c} \tag{4-9}$$

que é suposto ser totalmente controlável e onde

$\mathbf{x}(k)$ = vetor de estado (vetor de dimensão n)
$\mathbf{u}(k)$ = vetor de controle (vetor de dimensão r)
$\mathbf{G}$ = matriz não-singular $n \times n$
$\mathbf{H}$ = matriz $n \times r$

encontrar a seqüência de controle ótima $\mathbf{u}(0)$, $\mathbf{u}(1)$, $\mathbf{u}(2)$,..., $\mathbf{u}(N-1)$ que minimize um índice quadrático de desempenho. Um exemplo de índice quadrático de desempenho para um processo em tempo finito ($0 \le k \le N$) é

$$J = \frac{1}{2}\mathbf{x}'(N)\mathbf{S}\mathbf{x}(N) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}[\mathbf{x}'(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}'(k)\mathbf{R}\mathbf{u}(k)] \tag{4-10}$$

onde $\mathbf{Q}$ = matriz hermitiana $n \times n$, positiva definida ou positiva semidefinida (ou matriz real simétrica).
$\mathbf{R}$ = matriz hermitiana $r \times r$, positiva definida (ou matriz real simétrica).
$\mathbf{S}$ = matriz hermitiana $n \times n$ positiva definida ou positiva semidefinida (ou matriz real simétrica).

As matrizes $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ e $\mathbf{S}$ são selecionadas de forma a ponderar a importância relativa das medições de desempenho causadas pelo vetor de estado $\mathbf{x}(k)$ ($k = 0, 1, 2,..., N-1$), a importância relativa do vetor $\mathbf{u}(k)$ ($k = 0, 1, 2, ..., N-1$) e do estado final $\mathbf{x}(N)$, respectivamente.

O estado inicial do sistema está em algum estado arbitrário $\mathbf{x}(0) = \mathbf{c}$. O estado final $\mathbf{x}(N)$ pode ser fixado, caso em que o termo $1/2\ \mathbf{x}'(N)\mathbf{S}\mathbf{x}(N)$ é removido do índice de desempenho da Eq. (4-10) e, em lugar, a condição terminal $\mathbf{x}(N) = \mathbf{x}_f$ é imposta, onde $\mathbf{x}_f$ é o estado terminal fixado. Se o estado terminal $\mathbf{x}(N)$ não é fixado, o primeiro termo na Eq. (4-10) representa o peso na medição do desempenho devido ao estado final. Note-se que, no problema de minimização, a inclusão do termo $1/2\ \mathbf{x}'(N)\mathbf{S}\mathbf{x}(N)$ no índice de desempenho J implica que se deseja que o estado final $\mathbf{x}(N)$ seja tão próximo da origem quanto possível.

Solução através do método da minimização convencional usando os multiplicadores de Lagrange

O problema do controle quadrático ótimo é um problema de minimização envolvendo uma função de diversas variáveis. Por conseguinte, pode ser resolvido pelo método de minimização convencional. O problema de minimização sujeita a restrições de igualdade pode ser resolvido atrelando-se as restrições à função a ser minimizada através do uso dos multiplicadores de Lagrange.

No presente problema de otimização, minimiza-se J da forma como dado pela Eq. (4-10), repetida aqui,

$$J = \frac{1}{2}\mathbf{x}'(N)\mathbf{S}\mathbf{x}(N) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}[\mathbf{x}'(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}'(k)\mathbf{R}\mathbf{u}(k)] \tag{4-11}$$

quando sujeito à restrição especificada na Eq. (4-9),

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \tag{4-12}$$

onde $k = 0, 1, 2,..., N-1$, e onde a condição inicial do vetor de estado é especificada como

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{c} \tag{4-13}$$

Agora, usando o conjunto de multiplicadores de Lagrange $\lambda(1), \lambda(2),\dots, \lambda(N)$, define-se um novo índice de desempenho L como a seguir:

$$L = \frac{1}{2}\mathbf{x}'(N)\mathbf{S}\mathbf{x}(N) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\Big\{[\mathbf{x}'(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}'(k)\mathbf{R}\mathbf{u}(k)] + \boldsymbol{\lambda}'(k+1)[\mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) - \mathbf{x}(k+1)] + [\mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) - \mathbf{x}(k+1)]'\boldsymbol{\lambda}(k+1)\Big\} \tag{4-14}$$

A razão para se escrever os termos que envolvem o multiplicador de Lagrange na forma mostrada na Eq. (4-14) é assegurar que $L = L'$. (L é uma quantidade escalar real.) Note-se que

$$\boldsymbol{\lambda}'(0)[\mathbf{c} - \mathbf{x}(0)] + [\mathbf{c} - \mathbf{x}(0)]'\boldsymbol{\lambda}(0)$$

pode ser adicionado ao índice de desempenho L. No entanto, isto não será feito, a fim de simplificar a apresentação. É um fato bem conhecido que a minimização da função L definida pela Eq. (4-14) é equivalente à minimização de J, como definido pela Eq. (4-11), quando sujeito à restrição de igualdade definida pela Eq. (4-12).

Para minimizar a função L, é preciso derivar L com respeito a cada um dos componentes dos vetores $\mathbf{x}(k)$, $\mathbf{u}(k)$ e $\lambda(k)$ e fazer os resultados iguais a zero. Do ponto de vista computacional, entretanto, é conveniente derivar L com respeito a $\bar{x}_i(k), \bar{u}_i(k)$, e $\bar{\lambda}_i(k)$ onde $\bar{x}_i(k), \bar{u}_i(k)$, e $\bar{\lambda}_i(k)$ são, respectivamente, os conjugados complexos de $x_i(k)$, $u_i(k)$ e $\lambda_i(k)$. (Note-se que o sinal e seu conjugado complexo possuem as mesmas informações matemáticas.) Por conseguinte,

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{x}_i(k)} = 0, \qquad i = 1,2,\dots,n; k = 1,2,\dots,N$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{u}_i(k)} = 0, \qquad i = 1,2,\dots,r; k = 0,1,\dots,N-1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\lambda}_i(k)} = 0, \qquad i = 1,2,\dots,n; k = 1,2,\dots,N$$

Essas equações são condições necessárias para que L tenha um mínimo. Note-se que as expressões simplificadas para as equações diferenciais parciais precedentes são

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\mathbf{x}}(k)} = \mathbf{0}, \qquad k = 1,2,\dots,N \tag{4-15}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\mathbf{u}}(k)} = \mathbf{0}, \qquad k = 0,1,\dots,N-1 \tag{4-16}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\boldsymbol{\lambda}}(k)} = \mathbf{0}, \qquad k = 1,2,\dots,N \tag{4-17}$$

Usando as relações

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{x}}}\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{x}}}\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y}$$

As Eqs. (4-15), (4-16) e (4-17) podem ser reescritas como a seguir:

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\mathbf{x}}(k)} = \mathbf{0}: \quad \mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}'\boldsymbol{\lambda}(k+1) - \boldsymbol{\lambda}(k) = \mathbf{0}, \quad k = 1,2,\dots,N-1 \tag{4-18}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\mathbf{x}}(N)} = \mathbf{0}: \quad \mathbf{S}\mathbf{x}(N) - \boldsymbol{\lambda}(N) = \mathbf{0}, \tag{4-19}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\mathbf{u}}(k)} = \mathbf{0}: \quad \mathbf{R}\mathbf{u}(k) + \mathbf{H}'\boldsymbol{\lambda}(k+1) = \mathbf{0}, \quad k = 0,1,\dots,N-1 \tag{4-20}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\boldsymbol{\lambda}}(k)} = \mathbf{0}: \quad \mathbf{G}\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k-1) - \mathbf{x}(k) = \mathbf{0}, \quad k = 1,2,\dots,N \tag{4-21}$$

A Eq. (4-21) é simplesmente a equação de estado do sistema. A Eq. (4-19) especifica o valor final do multiplicador de Lagrange. Note-se que o multiplicador de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}(k)$ é freqüentemente chamado de um *covetor* ou *vetor adjunto*.

Agora serão simplificadas as equações recém-obtidas. Note-se que, da Eq. (4-18), tem-se

$$\boldsymbol{\lambda}(k) = \mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}'\boldsymbol{\lambda}(k+1), \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, N-1 \tag{4-22}$$

com a condição final $\boldsymbol{\lambda}(N) = \mathbf{S}\mathbf{x}(N)$. Resolvendo a Eq. (4-20) para $\mathbf{u}(k)$ e notando que $\mathbf{R}^{-1}$ existe, obtém-se

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}'\boldsymbol{\lambda}(k+1), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1 \tag{4-23}$$

A Eq. (4-21) pode ser reescrita como

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1 \tag{4-24}$$

que é simplesmente a equação de estado. A substituição da Eq. (4-23) na Eq. (4-24) resulta em

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) - \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}'\boldsymbol{\lambda}(k+1) \tag{4-25}$$

com a condição inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{c}$.

Para obter a solução para o problema de minimização, necessita-se resolver as Eqs. (4-22) e (4-25) simultaneamente. Note-se que, para a equação do sistema (Eq. 4-24), a condição inicial $\mathbf{x}(0)$ é especificada, enquanto que, para a equação do multiplicador de Lagrange (Eq. 4-22), a condição final $\boldsymbol{\lambda}(N)$ é especificada. Por conseguinte, o problema aqui se transforma num problema de valor limite para dois pontos.

Se o problema de valor limite para dois pontos for resolvido, os valores ótimos para o vetor de estado e para o vetor de multiplicadores de Lagrange podem ser determinados e o vetor de controle ótimo $\mathbf{u}(k)$ pode ser obtido em malha aberta. No entanto, se for empregada a transformação de Riccati, o vetor ótimo de controle $\mathbf{u}(t)$ pode ser obtido sob a forma de controle a malha fechada:

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}(k)\mathbf{x}(k)$$

onde $\mathbf{K}(k)$ é a matriz de retroação $r \times n$.

No seguimento, obtém-se o vetor de controle ótimo $\mathbf{u}(k)$, sob a forma de controle a malha fechada, determinando, primeiro, a equação de Riccati. Admite-se que $\boldsymbol{\lambda}(k)$ possa ser escrito sob a forma:

$$\boldsymbol{\lambda}(k) = \mathbf{P}(k)\mathbf{x}(k) \tag{4-26}$$

onde $\mathbf{P}(k)$ é a matriz hermitiana $n \times n$ (ou uma matriz real simétrica). A substituição da Eq. (4-26) na Eq. (4-22) resulta em

$$\mathbf{P}(k)\mathbf{x}(k) = \mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}'\mathbf{P}(k+1)\mathbf{x}(k+1) \tag{4-27}$$

e a substituição da Eq. (4-26) na Eq. (4-25) produz

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) - \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{P}(k+1)\mathbf{x}(k+1) \tag{4-28}$$

Note-se que as Eqs. (4-27) e (4-28) não envolvem $\boldsymbol{\lambda}(k)$ e, dessa forma, termina-se por eliminar $\boldsymbol{\lambda}(k)$. O processo de transformação empregado aqui é chamado de *transformação de Riccati*. É de extrema importância na resolução de problemas de valor limite para dois pontos.

A partir da Eq. (4-28), tem-se

$$[\mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{P}(k+1)]\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) \tag{4-29}$$

Para um sistema completamente controlável, pode ser mostrado que $\mathbf{P}(k+1)$ é positiva definida ou positiva semidefinida. Para uma matriz pelo menos positiva semidefinida $\mathbf{P}(k+1)$, tem-se

$$\begin{aligned} |\mathbf{I}_n + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{P}(k+1)| &= |\mathbf{I}_r + \mathbf{H}'\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}| = |\mathbf{I}_r + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}| \\ &= |\mathbf{R}^{-1}|\,|\mathbf{R} + \mathbf{H}'\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}| \neq 0 \end{aligned}$$

onde se usa a relação

$$|\mathbf{I}_n + \mathbf{A}\mathbf{B}| = |\mathbf{I}_r + \mathbf{B}\mathbf{A}|, \qquad \mathbf{A} = \text{ matriz } n \times r, \qquad \mathbf{B} = \text{matriz } r \times n$$

Por conseguinte, a inversa de $\mathbf{I} + \mathbf{HR}^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{P}(k+1)$ existe. Conseqüentemente, a Eq. (4-29) pode ser escrita como a seguir:

$$\mathbf{x}(k+1) = [\mathbf{I} + \mathbf{HR}^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{P}(k+1)]^{-1}\mathbf{Gx}(k) \tag{4-30}$$

Substituindo a Eq. (4-30) na Eq. (4-27), obtém-se

$$\mathbf{P}(k)\mathbf{x}(k) = \mathbf{Qx}(k) + \mathbf{G}'\mathbf{P}(k+1)[\mathbf{I} + \mathbf{HR}^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{P}(k+1)]^{-1}\mathbf{Gx}(k)$$

ou

$$\{\mathbf{P}(k) - \mathbf{Q} - \mathbf{G}'\mathbf{P}(k+1)[\mathbf{I} + \mathbf{HR}^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{P}(k+1)]^{-1}\mathbf{G}\}\mathbf{x}(k) = \mathbf{0}$$

Esta última equação tem que ser válida para todos os valores $\mathbf{x}(k)$. Conseqüentemente, deve-se ter

$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{Q} + \mathbf{G}'\mathbf{P}(k+1)[\mathbf{I} + \mathbf{HR}^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{P}(k+1)]^{-1}\mathbf{G} \tag{4-31}$$

A Eq. (4-31) pode ser modificada. Usando o lema da inversão da matriz

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BD})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{I} + \mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{DA}^{-1}$$

e fazendo as substituições

$$\mathbf{A} = \mathbf{I}, \qquad \mathbf{B} = \mathbf{HR}^{-1}, \qquad \mathbf{D} = \mathbf{H}'\mathbf{P}(k+1)$$

obtém-se

$$\begin{aligned}[\mathbf{I} + \mathbf{HR}^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{P}(k+1)]^{-1} &= \mathbf{I} - \mathbf{HR}^{-1}[\mathbf{I} + \mathbf{H}'\mathbf{P}(k+1)\mathbf{HR}^{-1}]^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{P}(k+1)\\ &= \mathbf{I} - \mathbf{H}[\mathbf{R} + \mathbf{H}'\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{P}(k+1)\end{aligned}$$

Por conseguinte, a Eq. (4-31) pode ser modificada para

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(k) = {} & \mathbf{Q} + \mathbf{G}'\mathbf{P}(k+1)\mathbf{G}\\ & - \mathbf{G}'\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}[\mathbf{R} + \mathbf{H}'\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{P}(k+1)\mathbf{G}\end{aligned} \tag{4-32}$$

A Eq. (4-32) é chamada de *Equação de Riccati*. Tomando as Eqs. (4-19) e (4-26) como referência, note-se que em $k = N$, tem-se

$$\mathbf{P}(N)\mathbf{x}(N) = \boldsymbol{\lambda}(N) = \mathbf{Sx}(N)$$

ou

$$\mathbf{P}(N) = \mathbf{S} \tag{4-33}$$

Por conseguinte, a Eq. (4-31), ou (4-32), pode ser resolvida unicamente caminhado-se para trás, variando k de N até 0. Isto é, pode-se obter $\mathbf{P}(N)$, $\mathbf{P}(N-1)$,..., $\mathbf{P}(0)$, começando por $\mathbf{P}(N)$, que é conhecido.

Tomando como referência as Eqs. (4-22) e (4-26), o vetor de controle ótimo $\mathbf{u}(k)$, dado pela Eq. (4-23), se torna agora

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(k) &= -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}'\boldsymbol{\lambda}(k+1) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}'(\mathbf{G}')^{-1}[\boldsymbol{\lambda}(k) - \mathbf{Qx}(k)]\\ &= -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}'(\mathbf{G}')^{-1}[\mathbf{P}(k) - \mathbf{Q}]\mathbf{x}(k) = -\mathbf{K}(k)\mathbf{x}(k)\end{aligned} \tag{4-34}$$

onde

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}'(\mathbf{G}')^{-1}[\mathbf{P}(k) - \mathbf{Q}] \tag{4-35}$$

A Eq. (4-34) fornece a forma em malha fechada, ou forma com retroação, para o vetor de controle ótimo $\mathbf{u}(k)$. Note-se que o vetor de controle ótimo é proporcional ao vetor de estado.

Note-se que o vetor de controle ótimo $\mathbf{u}(k)$ pode ser obtido de umas poucas formas diferentes. Tomando as Eqs. (4-26) e (4-30) como referência, $\mathbf{u}(k)$ pode ser obtido através de

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(k) &= -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}'\boldsymbol{\lambda}(k+1) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{P}(k+1)\mathbf{x}(k+1) \\ &= -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{P}(k+1)[\mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{P}(k+1)]^{-1}\mathbf{G}\mathbf{x}(k) \\ &= -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}'[\mathbf{P}^{-1}(k+1) + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}']^{-1}\mathbf{G}\mathbf{x}(k) \\ &= -\mathbf{K}(k)\mathbf{x}(k)\end{aligned} \tag{4-36}$$

onde

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}'[\mathbf{P}^{-1}(k+1) + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}']^{-1}\mathbf{G} \tag{4-37}$$

Uma forma ligeiramente distinta do vetor de controle ótimo $\mathbf{u}(k)$ pode também ser dada por

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(k) &= -[\mathbf{R} + \mathbf{H}'\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{P}(k+1)\mathbf{G}\mathbf{x}(k) \\ &= -\mathbf{K}(k)\mathbf{x}(k)\end{aligned} \tag{4-38}$$

onde

$$\mathbf{K}(k) = [\mathbf{R} + \mathbf{H}'\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{P}(k+1)\mathbf{G} \tag{4-39}$$

A Eq. (4-39) pode ser deduzida como a seguir. Uma vez que

$$\begin{aligned}&[\mathbf{R} + \mathbf{H}'\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{P}(k+1)[\mathbf{P}^{-1}(k+1) + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}'] \\ &= [\mathbf{R} + \mathbf{H}'\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{H}'[\mathbf{I} + \mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}'] \\ &= [\mathbf{R} + \mathbf{H}'\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}]^{-1}[\mathbf{R} + \mathbf{H}'\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}]\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}' = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}'\end{aligned}$$

tem-se

$$\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}'[\mathbf{P}^{-1}(k+1) + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}']^{-1} = [\mathbf{R} + \mathbf{H}'\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{P}(k+1)$$

Como mostrado acima, as expressões para $\mathbf{K}(k)$, dadas pelas Eqs. (4-35), (4-37) e (4-39), são equivalentes. As Eqs. (4-34), (4-36) e (4-38) indicam claramente que a lei de controle ótimo requer retroação do vetor de estado, com ganho variante no tempo $\mathbf{K}(k)$.

Note-se que uma propriedade da matriz de ganho de retroação $\mathbf{K}(k)$ é que ela é quase constante, exceto próximo do fim do processo em $k = N$.

Avaliação do índice de desempenho mínimo

Avalia-se, em seguida, o valor mínimo do índice de desempenho:

$$\min J = \min\left\{\frac{1}{2}\mathbf{x}'(N)\mathbf{S}\mathbf{x}(N) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}[\mathbf{x}'(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}'(k)\mathbf{R}\mathbf{u}(k)]\right\}$$

Premultiplicando ambos os lados da Eq. (4-27) por $\mathbf{x}'(k)$, tem-se

$$\mathbf{x}'(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}'(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{x}'(k)\mathbf{G}'\mathbf{P}(k+1)\mathbf{x}(k+1)$$

Substituindo a Eq. (4-29) nesta última equação, obtém-se

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{x}(k) &= \mathbf{x}'(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{x}'(k+1)[\mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{P}(k+1)]'\mathbf{P}(k+1)\mathbf{x}(k+1) \\ &= \mathbf{x}'(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{x}'(k+1)[\mathbf{I} + \mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}']\mathbf{P}(k+1)\mathbf{x}(k+1)\end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) &= \mathbf{x}'(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}'(k+1)\mathbf{P}(k+1)\mathbf{x}(k+1) \\ &\quad - \mathbf{x}'(k+1)\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{P}(k+1)\mathbf{x}(k+1)\end{aligned} \tag{4-40}$$

Igualmente, a partir das Eqs. (4-23) e (4-26), tem-se

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{P}(k+1)\mathbf{x}(k+1)$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned}\mathbf{u}'(k)\mathbf{R}\mathbf{u}(k) &= [-\mathbf{x}'(k+1)\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}]\mathbf{R}[-\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{P}(k+1)\mathbf{x}(k+1)] \\ &= \mathbf{x}'(k+1)\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{P}(k+1)\mathbf{x}(k+1)\end{aligned} \tag{4-41}$$

Adicionando-se as Eqs. (4-40) e (4-41) obtém-se

$$\mathbf{x}'(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}'(k)\mathbf{R}\mathbf{u}(k) = \mathbf{x}'(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}'(k+1)\mathbf{P}(k+1)\mathbf{x}(k+1) \tag{4-42}$$

Substituindo a Eq. (4-42) na Eq. (4-11), obtém-se

$$\begin{aligned}J_{\min} &= \frac{1}{2}\mathbf{x}'(N)\mathbf{S}\mathbf{x}(N) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}[\mathbf{x}'(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}'(k+1)\mathbf{P}(k+1)\mathbf{x}(k+1)] \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{x}'(N)\mathbf{S}\mathbf{x}(N) + \frac{1}{2}[\mathbf{x}'(0)\mathbf{P}(0)\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}'(1)\mathbf{P}(1)\mathbf{x}(1) + \mathbf{x}'(1)\mathbf{P}(1)\mathbf{x}(1) \\ &\quad - \mathbf{x}'(2)\mathbf{P}(2)\mathbf{x}(2) + \cdots + \mathbf{x}'(N-1)\mathbf{P}(N-1)\mathbf{x}(N-1) \\ &\quad - \mathbf{x}'(N)\mathbf{P}(N)\mathbf{x}(N)] \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{x}'(N)\mathbf{S}\mathbf{x}(N) + \frac{1}{2}\mathbf{x}'(0)\mathbf{P}(0)\mathbf{x}(0) - \frac{1}{2}\mathbf{x}'(N)\mathbf{P}(N)\mathbf{x}(N)\end{aligned} \tag{4-43}$$

Note-se que, a partir da Eq. (4-33), tem-se $\mathbf{P}(N) = \mathbf{S}$. Então, a Eq. (4-43) se torna

$$J_{\min} = \frac{1}{2}\mathbf{x}'(0)\mathbf{P}(0)\mathbf{x}(0) \tag{4-44}$$

Por conseguinte, o valor mínimo do índice de desempenho J é dado pela Eq. (4-44). É uma função de $\mathbf{P}(0)$ e do estado inicial $\mathbf{x}(0)$.

EXEMPLO 4.5

Considere-se um sistema de controle discreto no tempo definido por

$$x(k+1) = 0{,}3679x(k) + 0{,}6321u(k), \qquad x(0) = 1$$

Determinar a lei de controle ótimo para minimizar o seguinte índice de desempenho:

$$J = \frac{1}{2}[x(10)]^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{9}[x^2(k) + u^2(k)]$$

Note-se que, neste exemplo, $S = 1$, $Q = 1$ e $R = 1$. Igualmente, determinar o valor mínimo do índice de desempenho J.

Usando a Eq. (4-31) como referência, obtém-se $P(k)$ como descrito a seguir:

$$P(k) = 1 + (0{,}3679)P(k+1)[1 + (0{,}6321)(1)(0{,}6321)P(k+1)]^{-1}(0{,}3679)$$

que pode ser simplificada para

$$P(k) = 1 + 0{,}1354P(k+1)[1 + 0{,}3996P(k+1)]^{-1}$$

A condição limite para $P(k)$ é especificada pela Eq. (4-33) e, neste exemplo,

$$P(N) = P(10) = S = 1$$

Calcula-se agora $P(k)$ de trás para a frente, de $k = 9$ até $k = 0$:

$$P(9) = 1 + 0{,}1354 \times 1(1 + 0{,}3996 \times 1)^{-1} = 1{,}0967$$
$$P(8) = 1 + 0{,}1354 \times 1{,}0967(1 + 0{,}3996 \times 1{,}0967)^{-1} = 1{,}1032$$
$$P(7) = 1 + 0{,}1354 \times 1{,}1032(1 + 0{,}3996 \times 1{,}1032)^{-1} = 1{,}1036$$
$$P(6) = 1 + 0{,}1354 \times 1{,}1036(1 + 0{,}3996 \times 1{,}1036)^{-1} = 1{,}1037$$
$$P(k) = 1{,}1037, \qquad k = 5, 4, 3, 2, 1, 0$$

Note-se que os valores de $P(k)$ rapidamente se aproximam do valor de estado estacionário. O valor de estado estacionário P_{ss} pode ser obtido a partir de

$$P_{ss} = 1 + 0{,}1354P_{ss}(1 + 0{,}3996P_{ss})^{-1}$$

ou

$$0{,}3996P_{ss}^2 + 0{,}4650P_{ss} - 1 = 0$$

Resolvendo esta última equação para P_{SS}, tem-se

$$P_{ss} = 1{,}1037 \qquad \text{ou} \qquad -2{,}2674$$

Como $P(k)$ tem que ser positivo, encontramos o valor de estado estacionário para $P(k)$ como sendo 1,1037.

O ganho de retroação $K(k)$ pode ser calculado a partir da Eq. (4-35):

$$K(k) = (1)(0{,}6321)(0{,}3679)^{-1}[P(k) - 1] = 1{,}7181[P(k) - 1]$$

Substituindo os valores de $P(k)$ obtidos, chega-se a

$$K(10) = 1{,}7181(1 - 1) = 0$$
$$K(9) = 1{,}7181(1{,}0967 - 1) = 0{,}1662$$
$$K(8) = 1{,}7181(1{,}1032 - 1) = 0{,}1773$$
$$K(7) = 1{,}7181(1{,}1036 - 1) = 0{,}1781$$
$$K(6) = K(5) = \cdots = K(0) = 0{,}1781$$

A lei de controle ótimo é dada por

$$u(k) = -K(k)x(k)$$

Como

$$x(k+1) = 0{,}3679x(k) + 0{,}6321u(k) = [0{,}3679 - 0{,}6321K(k)]x(k)$$

obtém-se

$$x(1) = [0{,}3679 - 0{,}6321K(0)]x(0)$$
$$= (0{,}3679 - 0{,}6321 \times 0{,}1781) \times 1 = 0{,}2553$$
$$x(2) = (0{,}3679 - 0{,}6321 \times 0{,}1781) \times 0{,}2553 = 0{,}0652$$
$$x(3) = (0{,}3679 - 0{,}6321 \times 0{,}1781) \times 0{,}0652 = 0{,}0166$$
$$x(4) = (0{,}3679 - 0{,}6321 \times 0{,}1781) \times 0{,}0166 = 0{,}00424$$

Os valores de $x(k)$ para $k = 5, 6,..., 10$ se aproximam de zero rapidamente.

A seqüência ótima de controle $u(k)$ é agora obtida como a seguir:

$$u(0) = -K(0)x(0) = -0{,}1781 \times 1 = -0{,}1781$$
$$u(1) = -K(1)x(1) = -0{,}1781 \times 0{,}2553 = -0{,}0455$$
$$u(2) = -K(2)x(2) = -0{,}1781 \times 0{,}0652 = -0{,}0116$$
$$u(3) = -K(3)x(3) = -0{,}1781 \times 0{,}0166 = -0{,}00296$$
$$u(4) = -K(4)x(4) = -0{,}1781 \times 0{,}00424 = -0{,}000756$$
$$u(k) \doteqdot 0, \qquad k = 5, 6, \ldots, 10$$

Finalmente, o valor mínimo do índice de desempenho J pode ser obtido a partir da Eq. (4-44):

$$J_{\min} = \frac{1}{2}x'(0)P(0)x(0) = \frac{1}{2}(1 \times 1{,}1037 \times 1) = 0{,}5518$$

O programa MATLAB 4-6 fornece a solução para o problema exemplo. Os valores de $P(k)$, $K(k)$, $x(k)$ e $u(k)$ são obtidos. Igualmente, o valor mínimo do índice de desempenho J é calculado e são obtidos os gráficos de $P(k)$ *versus* k e $K(k)$ *versus* k. A Fig. 4-7 mostra um gráfico de $P(k)$ *versus* k e na Fig. 4-8 está esboçado um gráfico de $K(k)$ *versus* k. Note-se que os valores de $P(k)$ e de $K(k)$ são quase constantes, exceto pelos poucos últimos estágios.

Programa MATLAB 4-6

```
% ---------- Controle Quadrático Ótimo ----------

% ***** Resolvendo a equação de Riccati e encontrando a matriz
% de ganho de retroação K*****

% ***** Entrar com as matrizes G, H, S, Q e R *****

G = [0.3679];
H = [0.6321];
S = [1];
Q = [1];
R = [1];

% ***** Entrar com a condição limite para P, com a equação para
% determinar a matriz K e com a equação de Riccati *****

P = [1]; P10 = P;
K = inv(R)*H'*inv(G')*(P - Q); K10 = K;
P = Q + G'*P*G - G'*P*H*inv(R + H'*P*H)*H'*P*G; P9 = P;

% ***** Entrar repetidamente com as equações referentes a K e P até K = K0
% e P = P0 *****

K = inv(R)*H'*inv(G')*(P - Q); K9 = K;
P = Q + G'*P*G - G'*P*H*inv(R + H'*P*H)*H'*P*G; P8 = P;
K = inv(R)*H'*inv(G')*(P - Q); K8 = K;
P = Q + G'*P*G - G'*P*H*inv(R + H'*P*H)*H'*P*G; P7 = P;
K = inv(R)*H'*inv(G')*(P - Q); K7 = K;
P = Q + G'*P*G - G'*P*H*inv(R + H'*P*H)*H'*P*G; P6 = P;
K = inv(R)*H'*inv(G')*(P - Q); K6 = K;
P = Q + G'*P*G - G'*P*H*inv(R + H'*P*H)*H'*P*G; P5 = P;
K = inv(R)*H'*inv(G')*(P - Q); K5 = K;
P = Q + G'*P*G - G'*P*H*inv(R + H'*P*H)*H'*P*G; P4 = P;
K = inv(R)*H'*inv(G')*(P - Q); K4 = K;
P = Q + G'*P*G - G'*P*H*inv(R + H'*P*H)*H'*P*G; P3 = P;
K = inv(R)*H'*inv(G')*(P - Q); K3 = K;
P = Q + G'*P*G - G'*P*H*inv(R + H'*P*H)*H'*P*G; P2 = P;
K = inv(R)*H'*inv(G')*(P - Q); K2 = K;
P = Q + G'*P*G - G'*P*H*inv(R + H'*P*H)*H'*P*G; P1 = P;
K = inv(R)*H'*inv(G')*(P - Q); K1 = K;
P = Q + G'*P*G - G'*P*H*inv(R + H'*P*H)*H'*P*G; P0 = P;
K = inv(R)*H'*inv(G')*(P - Q); K0 = K;
```

```
% ***** Impressão de P0, P1, P2, ..., P10 *****

P = [P0  P1  P2  P3  P4  P5  P6  P7  P8  P9  P10]'

P =

    1.1037
    1.1037
    1.1037
    1.1037
    1.1037
    1.1037
    1.1037
    1.1036
    1.1032
    1.0967
    1.0000

% ***** Impressão de K0, K1, K2, ..., K10  *****

K = [K0  K1  K2  K3  K4  K5  K6  K7  K8  K9  K10]'

K =

    0.1781
    0.1781
    0.1781
    0.1781
    0.1781
    0.1781
    0.1781
    0.1781
    0.1773
    0.1662
         0

% ***** Entrar com o estado inicial x(0) e controle inicial u(0) *****

x = [1]; x0 = x;
u = - K0*x; u0 = u;

% ***** Entrar com as equações de estado referentes a x1, x2, x3,
% ...., x10; entrar , também, com a equação de controle para
% u1, u2, u3, ..., u10 *****

x = G*x + H*u; x1 = x;
u = - K1*x; u1 = u;
x = G*x + H*u; x2 = x;
u = - K2*x; u2 = u;
x = G*x + H*u; x3 = x;
u = - K3*x; u3 = u;
x = G*x + H*u; x4 = x;
u = - K4*x; u4 = u;
x = G*x + H*u; x5 = x;
u = - K5*x; u5 = u;
x = G*x + H*u; x6 = x;
u = - K6*x; u6 = u;
```

```
x = G*x + H*u; x7 = x;
u = - K7*x; u7 = u;
x = G*x + H*u; x8 = x;
u = - K8*x; u8 = u;
x = G*x + H*u; x9 = x;
u = - K9*x; u9 = u;
x = G*x + H*u; x10 = x;
u = - K10*x; u10 = u;

% ***** Impressão de x0, x1, x2, ..., x10 *****

[x0  x1  x2  x3  x4  x5  x6  x7  x8  x9  x10]'

ans =

    1.0000
    0.2553
    0.0652
    0.0166
    0.0042
    0.0011
    0.0003
    0.0001
    0.0000
    0.0000
    0.0000

% ***** Impressão de u0, u1, u2, ..., u10 *****

[u0  u1  u2  u3  u4  u5  u6  u7  u8  u9  u10]'

ans =

   -0.1781
   -0.0455
   -0.0116
   -0.0030
   -0.0008
   -0.0002
   -0.0000
   -0.0000
   -0.0000
   -0.0000
         0

% ***** Cálculo do valor mínimo do índice de desempenho J *****

% ***** O valor mínimo de J é obtido a partir da
% equação seguinte *****

Jmin = 0.5*x0'*P0*x0

Jmin =

   0.5518
```

```
% *****  Para plotar P(k) versus k e K(k) versus K entrar com
% o seguinte programa *****

k = 0:10;
v = [0  10  0  1.2];
axis(v);
plot(k,P,'o')
grid
title ('Gráfico de P(k) versus k')
xlabel('k')
ylabel('P(k)')

v = [0  10  0  0.2];
axis(v);
plot(k,K,'o')
grid
title ('Gráfico de K(k)) versus k')
xlabel('k')
ylabel('K(k)')
```

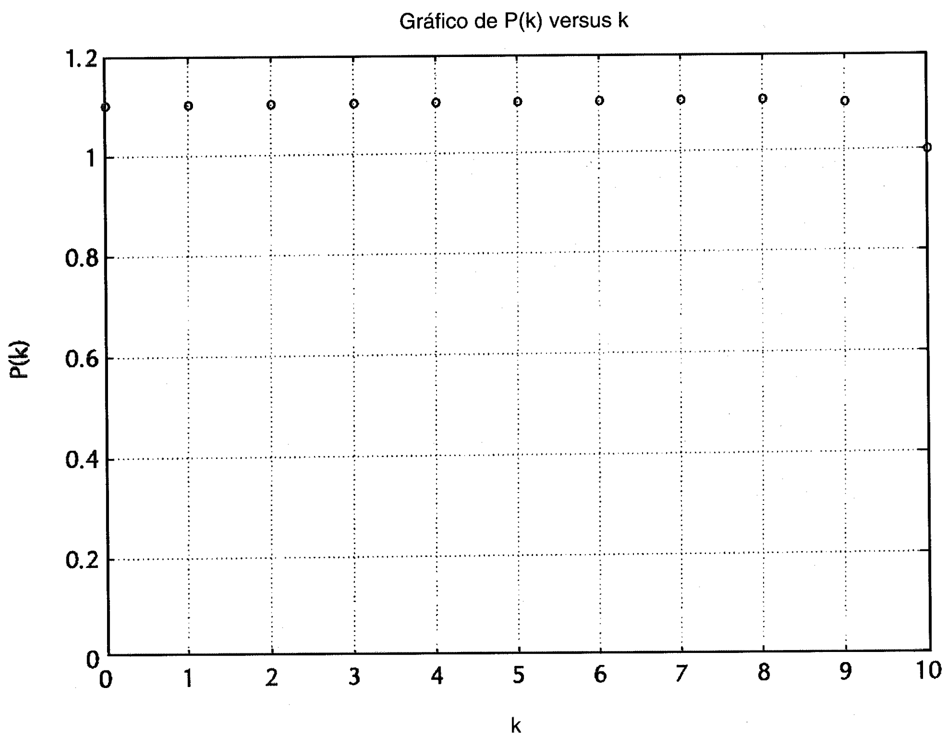

Fig. 4.7

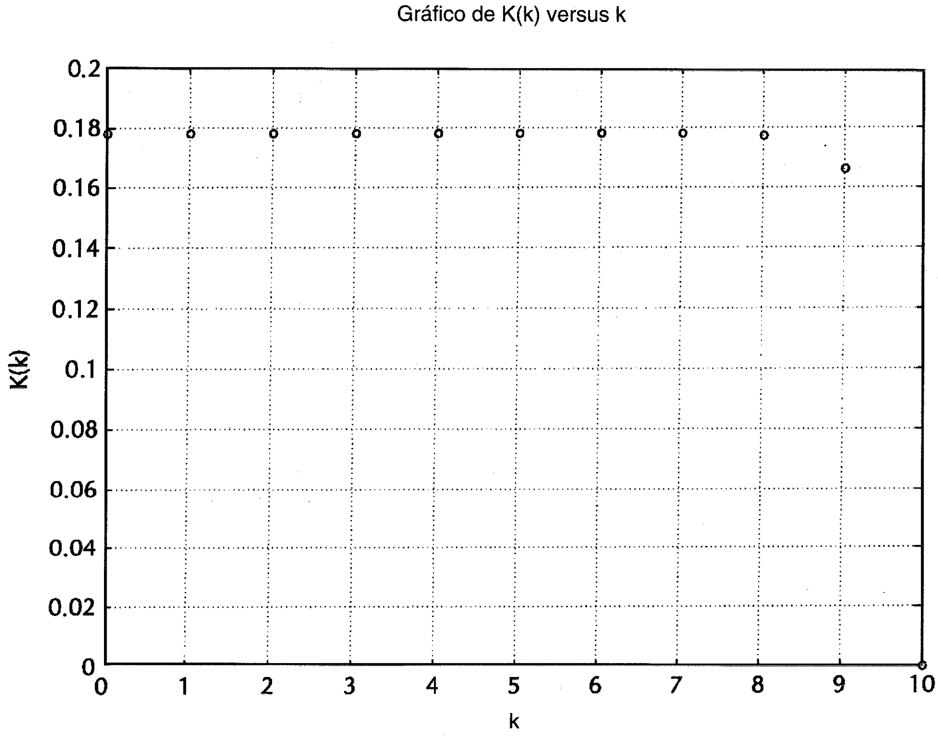

Fig. 4.8

Comentários sobre o Programa MATLAB 4-6

No Programa MATLAB 4-6 é apresentado um tipo de programa fácil de se rastrear. Se, no entanto, o número N de estágios for grande, terão que ser usados laços *for* para encurtá-lo. Discute-se, em seguida, um programa para resolver este problema através do uso de laços *for*. Veja o seguinte programa MATLAB.

```
G = 0.3679; H = 0.6321; Q = 1; R = 1; S = 1; x0 = 1;
N = 11; p(N) = S; x(1) = 1; Pnext = S;

for i = N-1:-1:1,
  P = Q+G'*Pnext*G-G'*Pnext*H*inv(R+H'*Pnext*H)*H'*Pnext*G;
  p(i) = P; Pnext = P;
end
for i = N:-1:1,
  K = inv(R)*H'*inv(G')*(p(i)-Q);
  k(i) = K;
end
for i = 1:N-1,
  xnext = (G-H*k(i))*x(i);
  x(i+1) =xnext;
end
for i = 1:N,
  u(i) = -k(i)*x(i);
end
```

É importante assinalar que se for definido

P = [p(1) p(2) p(3) p(4) p(5) p(6) p(7) p(8) p(9) p(10) p(11)]

então p(1) será o primeiro elemento de P, o qual é P0 no Programa MATLAB 4-6. p(11) é o último elemento de P, o qual é P10 no Programa MATLAB 4-6. Semelhantemente, k(1) = K0, k(2) = K1, ... ,k(11) = K10; x(1) = x0, x(2) = x1, ... ,x(11) = x10; u(1) = u0, u(2) = u1, ... ,u(11) = u10. (Note-se que se fez N = 11 em vez de N = 10 ao escrever os laços *for*.) Qualquer erro [tal como entrar N = 10, x(0) = 1 ou p(10) = 1 no programa] acarretará uma solução incorreta.

Para imprimir os valores de P0, P1, ... , P10 [que correspondem a p(1), p(2), ... ,p(11)], K0, K1, ... ,K10 [que correspondem a k(1), k(2), ... ,k(11)], x0, x1, ... , x10 [que correspondem a x(1), x(2), ... ,x(11)] e de u0, u1, ... ,u10 [que correspondem a u(1), u(2), ... ,u(11)], entra-se com o enunciado para saída impressa como a seguir.

```
% ***** Impressão de P, K, x e u *****

M = [p'  k'  x'  u']

M =

   1.1037   0.1781   1.0000  -0.1781
   1.1037   0.1781   0.2553  -0.0455
   1.1037   0.1781   0.0652  -0.0116
   1.1037   0.1781   0.0166  -0.0030
   1.1037   0.1781   0.0042  -0.0008
   1.1037   0.1781   0.0011  -0.0002
   1.1037   0.1781   0.0003  -0.0000
   1.1036   0.1781   0.0001  -0.0000
   1.1032   0.1773   0.0000  -0.0000
   1.0967   0.1662   0.0000  -0.0000
   1.0000        0   0.0000        0
```

A primeira coluna da matriz M fornece, de cima para baixo, os valores de P0, P1, ... , P10. De forma semelhante, a segunda, terceira e quarta colunas fornecem K0, K1, ... ,K10, x0, x1, ... ,x10 e u0, u1, ... , u10, respectivamente.

EXEMPLO 4.6

Considere-se o sistema de controle discreto no tempo definido por

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$

onde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Determinar a seqüência de controle ótima $u(k)$ que minimize o índice de desempenho

$$J = \frac{1}{2}\mathbf{x}'(8)\mathbf{S}\mathbf{x}(8) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{7}[\mathbf{x}'(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + u'(k)Ru(k)]$$

onde

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = 1, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tomando a Eq. (4-31) como referência, tem-se

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(k) &= \mathbf{Q} + \mathbf{G}'\mathbf{P}(k+1)[\mathbf{I} + \mathbf{H}R^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{P}(k+1)]^{-1}\mathbf{G} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11}(k+1) & p_{12}(k+1) \\ p_{12}(k+1) & p_{22}(k+1) \end{bmatrix} \\ &\quad \times \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11}(k+1) & p_{12}(k+1) \\ p_{12}(k+1) & p_{22}(k+1) \end{bmatrix}\right\}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

A condição limite para $\mathbf{P}(k)$ é especificada pela Eq. (4-33) e é dada por

$$\mathbf{P}(N) = \mathbf{P}(8) = \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora, se calcula $\mathbf{P}(k)$, de trás para a frente, de $\mathbf{P}(7)$ até $\mathbf{P}(0)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(7) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1{,}5 \end{bmatrix} \\ \mathbf{P}(6) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1{,}5 \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1{,}5 \end{bmatrix}\right\}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{24}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{6}{7} & \frac{12}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}4286 & 0{,}8571 \\ 0{,}8571 & 1{,}7143 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Semelhantemente, $\mathbf{P}(5)$, $\mathbf{P}(4)$, ... , $\mathbf{P}(0)$ podem ser calculados como mostrado na Tabela 4-1.

Em seguida, determina-se a matriz de ganho de retroação $\mathbf{K}(k)$. Tomando a Eq. (4-35) por referência, a matriz $\mathbf{K}(k)$ pode ser obtida como a seguir:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}(k) &= R^{-1}\mathbf{H}'(\mathbf{G}')^{-1}[\mathbf{P}(k) - \mathbf{Q}] \\ &= [1][1 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}[\mathbf{P}(k) - \mathbf{Q}] \\ &= [0 \quad 1]\begin{bmatrix} p_{11}(k) - 1 & p_{12}(k) \\ p_{12}(k) & p_{22}(k) - 1 \end{bmatrix} \\ &= [p_{12}(k) \quad p_{22}(k) - 1]\end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$\mathbf{K}(8) = [p_{12}(8) \quad p_{22}(8) - 1] = [0{,}0000 \quad 0{,}0000]$$

$$\mathbf{K}(7) = [p_{12}(7) \quad p_{22}(7) - 1] = [0{,}5000 \quad 0{,}5000]$$

Semelhantemente, $\mathbf{K}(6)$, $\mathbf{K}(5)$, ... ,$\mathbf{K}(0)$ podem ser calculados de forma a fornecer os valores mostrados na Tabela 4-1.

Em seguida, calcula-se $\mathbf{x}(k)$. Escreve-se

$$\mathbf{K}(k) = [K_1(k) \quad K_2(k)]$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) \\ &= [\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K}(k)]\mathbf{x}(k) \\ &= \begin{bmatrix} 1 - K_1(k) & 1 - K_2(k) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Tabela 4.1 $P(k)$, $K(k)$, $x(k)$ e $u(k)$ para $k = 0, 1, 2, ..., 8$, respectivamente, para o sistema considerado no exemplo 4-6

k	$\mathbf{P}(k)$	$\mathbf{K}(k)$	$\mathbf{x}(k)$	$u(k)$
0	$\begin{bmatrix} 3{,}7913 & 1{,}0000 \\ 1{,}0000 & 1{,}7913 \end{bmatrix}$	$[1{,}0000 \quad 0{,}7913]$	$\begin{bmatrix} 1{,}0000 \\ 0{,}0000 \end{bmatrix}$	$-1{,}0000$
1	$\begin{bmatrix} 3{,}7911 & 0{,}9999 \\ 0{,}9999 & 1{,}7913 \end{bmatrix}$	$[0{,}9999 \quad 0{,}7913]$	$\begin{bmatrix} 0{,}0000 \\ 1{,}0000 \end{bmatrix}$	$-0{,}7913$
2	$\begin{bmatrix} 3{,}7905 & 0{,}9997 \\ 0{,}9997 & 1{,}7911 \end{bmatrix}$	$[0{,}9997 \quad 0{,}7911]$	$\begin{bmatrix} 0{,}2087 \\ 0{,}0000 \end{bmatrix}$	$-0{,}2087$
3	$\begin{bmatrix} 3{,}7877 & 0{,}9986 \\ 0{,}9986 & 1{,}7905 \end{bmatrix}$	$[0{,}9986 \quad 0{,}7905]$	$\begin{bmatrix} 0{,}0001 \\ 0{,}2087 \end{bmatrix}$	$-0{,}1651$
4	$\begin{bmatrix} 3{,}7740 & 0{,}9932 \\ 0{,}9932 & 1{,}7877 \end{bmatrix}$	$[0{,}9932 \quad 0{,}7877]$	$\begin{bmatrix} 0{,}0437 \\ 0{,}0001 \end{bmatrix}$	$-0{,}0435$
5	$\begin{bmatrix} 3{,}7097 & 0{,}9677 \\ 0{,}9677 & 1{,}7742 \end{bmatrix}$	$[0{,}9677 \quad 0{,}7742]$	$\begin{bmatrix} 0{,}0003 \\ 0{,}0437 \end{bmatrix}$	$-0{,}0342$
6	$\begin{bmatrix} 3{,}4286 & 0{,}8571 \\ 0{,}8571 & 1{,}7143 \end{bmatrix}$	$[0{,}8571 \quad 0{,}7143]$	$\begin{bmatrix} 0{,}0099 \\ 0{,}0003 \end{bmatrix}$	$-0{,}0087$
7	$\begin{bmatrix} 2{,}5000 & 0{,}5000 \\ 0{,}5000 & 1{,}5000 \end{bmatrix}$	$[0{,}5000 \quad 0{,}5000]$	$\begin{bmatrix} 0{,}0015 \\ 0{,}0099 \end{bmatrix}$	$-0{,}0057$
8	$\begin{bmatrix} 1{,}0000 & 0{,}0000 \\ 0{,}0000 & 1{,}0000 \end{bmatrix}$	$[0{,}0000 \quad 0{,}0000]$	$\begin{bmatrix} 0{,}0057 \\ 0{,}0015 \end{bmatrix}$	$0{,}0000$

Como o estado inicial é

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{x}(k)$, onde $k = 1, 2, ..., 8$, pode ser obtido como a seguir

$$\mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 1 - 1 & 1 - 0{,}7913 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}0000 \\ 1{,}0000 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(2) = \begin{bmatrix} 1 - 0{,}9999 & 1 - 0{,}7913 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}0000 \\ 1{,}0000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}2087 \\ 0{,}0000 \end{bmatrix}$$

Semelhantemente $\mathbf{x}(3), \mathbf{x}(4), ..., \mathbf{x}(8)$ podem ser calculados. Os resultados estão mostrados na Tabela 4-1.

Finalmente, a seqüência de controle ótima $u(k)$ pode ser obtida a partir da Eq. (4-36):

$$u(k) = -\mathbf{K}(k)\mathbf{x}(k)$$

Isto é,

$$u(0) = -\mathbf{K}(0)\mathbf{x}(0) = -[1 \quad 0{,}7913] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -1{,}0000$$

$$u(1) = -\mathbf{K}(1)\mathbf{x}(1) = -[0{,}9999 \quad 0{,}7913] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -0{,}7913$$

Similarmente, $u(2), u(3), ..., u(8)$ podem ser calculados de forma a produzir os valores mostrados na Tabela 4-1.

Como mencionado anteriormente, a matriz de ganho de retroação $\mathbf{K}(k)$ é quase constante, exceto para os últimos valores de k. Por conseguinte, se o número de estágios não for 8, mas 100, $\mathbf{K}(0), \mathbf{K}(1), ..., \mathbf{K}(93)$ serão matrizes constantes e $\mathbf{K}(94)$,

$\mathbf{K}(95), \ldots, \mathbf{K}(100)$ irão variar. Este fato é importante porque, se o número de estágios N for suficientemente grande, a matriz de ganho de retroação se torna uma matriz constante e o projetista estará, então, habilitado a usar uma matriz de ganho de retroação constante como aproximação da matriz de ganho ótimo variante no tempo.

O valor mínimo de J é obtido a partir da Eq. (4-44) como se segue:

$$J_{\min} = \frac{1}{2}\mathbf{x}'(0)\mathbf{P}(0)\mathbf{x}(0) = \frac{1}{2}[1 \quad 0]\begin{bmatrix} 3{,}7913 & 1{,}0000 \\ 1{,}0000 & 1{,}7913 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$= 1{,}8956$$

O Programa MATLAB 4-7 pode ser usado para obter a solução deste problema de controle quadrático ótimo. Este programa MATLAB produz $\mathbf{P}(k)$, $\mathbf{K}(k)$, $\mathbf{x}(k)$ e $u(k)$ e o valor mínimo do índice de desempenho J.

Programa MATLAB 4-7

```
% ---------- Controle quadrático ótimo ----------

% ***** Resolução da equação de Riccati e obtenção da matriz
% de ganho de retroação ótima K *****

% ***** Entrar com as matrizes G, H, S, Q e R *****

G = [1  1;1  0];
H = [1;0];
S = [1  0;0  1];
Q = [1  0;0  1];
R = [1];

% ***** Entrar com a condição limite para P, a equação para
% determinar a matriz K e a equação de Riccati. Definir a
% matriz identidade 2x2 I *****

P = [1  0;0  1]; P8 = P;
K = inv(R)*H'*inv(G')*(P - Q); K8 = K;
I = [1  0;0  1];
P = Q + G'*P*inv(I+H*inv(R)*H'*P)*G; P7 = P;

% ***** Entrar repetidamente com equações para K e P
% até que K = K0 e P = P0 *****

K = inv(R)*H'*inv(G')*(P - Q); K7 = K;
P = Q + G'*P*inv(I+H*inv(R)*H'*P)*G; P6 = P;
K = inv(R)*H'*inv(G')*(P - Q); K6 = K;
P = Q + G'*P*inv(I+H*inv(R)*H'*P)*G; P5 = P;
K = inv(R)*H'*inv(G')*(P - Q); K5 = K;
P = Q + G'*P*inv(I+H*inv(R)*H'*P)*G; P4 = P;
K = inv(R)*H'*inv(G')*(P - Q); K4 = K;
P = Q + G'*P*inv(I+H*inv(R)*H'*P)*G; P3 = P;
K = inv(R)*H'*inv(G')*(P - Q); K3 = K;
P = Q + G'*P*inv(I+H*inv(R)*H'*P)*G; P2 = P;
K = inv(R)*H'*inv(G')*(P - Q); K2 = K;
P = Q + G'*P*inv(I+H*inv(R)*H'*P)*G; P1 = P;
K = inv(R)*H'*inv(G')*(P - Q); K1 = K;
P = Q + G'*P*inv(I+H*inv(R)*H'*P)*G; P0 = P;
K = inv(R)*H'*inv(G')*(P - Q); K0 = K;
```

```
% ***** Impressão de P0, P1, P2, ..., P8 *****

P0, P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8

P0 =

    3.7913    1.0000
    1.0000    1.7913

P1 =

    3.7911    0.9999
    0.9999    1.7913

P2 =

    3.7905    0.9997
    0.9997    1.7911

P3 =

    3.7877    0.9986
    0.9986    1.7905

P4 =

    3.7740    0.9932
    0.9932    1.7877

P5 =

    3.7097    0.9677
    0.9677    1.7742

P6 =

    3.4286    0.8571
    0.8571    1.7143

P7 =

    2.5000    0.5000
    0.5000    1.5000

P8 =

    1    0
    0    1
```

```
% ***** Impressão de K0, K1, K2, ..., K8 *****

K0, K1, K2, K3, K4, K5, K6, K7, K8

K0 =

    1.0000    0.7913


K1 =

    0.9999    0.7913


K2 =

    0.9997    0.7911


K3 =

    0.9986    0.7905


K4 =

    0.9932    0.7877


K5 =

    0.9677    0.7742


K6 =

    0.8571    0.7143

K7 =

    0.5000    0.5000


K8 =

     0     0

% ***** Entrar com o estado inicial x(0) e o controle inicial u(0) *****

x = [1;0]; x0 = x;
u = - K0*x; u0 = u;

% ***** Entrar com as equações de estado para x1, x2, x3, ..., x8
% entrar também com as equações de controle u1, u2, u3, ..., u8 *****

x = G*x + H*u; x1 = x;
u = - K1*x; u1 = u;
```

```
x = G*x + H*u; x2 = x;
u = - K2*x; u2 = u;
x = G*x + H*u; x3 = x;
u = - K3*x; u3 = u;
x = G*x + H*u; x4 = x;
u = - K4*x; u4 = u;
x = G*x + H*u; x5 = x;
u = - K5*x; u5 = u;
x = G*x + H*u; x6 = x;
u = - K6*x; u6 = u;
x = G*x + H*u; x7 = x;
u = - K7*x; u7 = u;
x = G*x + H*u; x8 = x;
u = - K8*x; u8 = u;

% ***** Impressão de x0, x1, x2, ..., x8 *****

x0, x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8

x0 =

    1
    0


x1 =

    0.0000
    1.0000


x2 =

    0.2087
    0.0000


x3 =

    0.0001
    0.2087


x4 =

    0.0437
    0.0001


x5 =

    0.0003
    0.0437
```

```
x6 =

    0.0099
    0.0003


x7 =

    0.0015
    0.0099


x8 =

    0.0057
    0.0015

% ***** Impressão de u0, u1, u2, ..., u8 *****

u0, u1, u2, u3, u4, u5, u6, u7, u8

u0 =

   -1.0000


u1 =

   -0.7913


u2 =

   -0.2087

u3 =

   -0.1651


u4 =

   -0.0435


u5 =

   -0.0342


u6 =

   -0.0087
```

```
u7 =

   -0.0057


u8 =

   0

% ***** Cálculo do valor mínimo do índice de desempenho J *****


% ***** O valor mínimo de J pode ser obtido a partir
% da seguinte equação *****

Jmin = 0.5*x0'*P0*x0

Jmin =

    1.8956
```

Comentários sobre o Programa MATLAB 4-7

Comentários semelhantes àqueles fornecidos ao Programa MATLAB 4-6 se aplicam ao Programa MATLAB 4-7. Este programa pode ser escrito como mostrado a seguir.

```
G = [1   1;1   0]; H = [1;0]; Q = [1   0;0   1]; R = 1; S = [1   0;0   1];
x0 = [1;0]; N = 9;
p11(N) = 1; p12(N) = 0; p22(N) = 1; x1(1) = 1; x2(1) = 0; Pnext = S;

for i = N-1:-1:1,
  P = Q+G'*Pnext*inv(eye(2)+H*inv(R)*H'*Pnext)*G;
  p11(i) = P(1,1); p12(i) = P(1,2); p22(i) = P(2,2); Pnext = P;
end
for i = N:-1:1,
  K = inv(R)*H'*inv(G')*([p11(i)   p12(i);p12(i)   p22(i)]-Q);
  k1(i) = K(1); k2(i) = K(2);
end
for i = 1:N-1,
  xnext = (G-H*[k1(i)   k2(i)])*[x1(i);x2(i)];
  x1(i+1) = xnext(1); x2(i+1) = xnext(2);
end
for i = 1:N,
  u(i) = -[k1(i)   k2(i)]*[x1(i);x2(i)];
end
```

Usando este programa, as matrizes P e K e os vetores x e u podem ser obtidos como mostrado a seguir.

```
% ***** Impressão de P, K, x e u *****

P = [p11;p12;p12;p22]

P =

 Columns 1 through 7

    3.7913    3.7911    3.7905    3.7877    3.7740    3.7097    3.4286
    1.0000    0.9999    0.9997    0.9986    0.9932    0.9677    0.8571
    1.0000    0.9999    0.9997    0.9986    0.9932    0.9677    0.8571
    1.7913    1.7913    1.7911    1.7905    1.7877    1.7742    1.7143

 Columns 8 through 9

    2.5000    1.0000
    0.5000         0
    0.5000         0
    1.5000    1.0000

K = [k1;k2]'

K =

    1.0000    0.7913
    0.9999    0.7913
    0.9997    0.7911
    0.9986    0.7905
    0.9932    0.7877
    0.9677    0.7742
    0.8571    0.7143
    0.5000    0.5000
         0         0

x = [x1;x2]

x =

 Columns 1 through 7

    1.0000    0.0000    0.2087    0.0001    0.0437    0.0003    0.0099
         0    1.0000    0.0000    0.2087    0.0001    0.0437    0.0003

 Columns 8 through 9

    0.0015    0.0057
    0.0099    0.0015

u = u'

u =

   -1.0000
   -0.7913
```

```
   -0.2087
   -0.1651
   -0.0435
   -0.0342
   -0.0087
   -0.0057
         0
```

[T] **Columns** 1 **through** 7 significa Colunas de 1 a 7 (e assim por diante).

Nesta saída, P0, P1, ..., P8 são dados como vetores coluna. A primeira coluna da matriz P fornece P0, a segunda P1 e assim por diante. Em cada coluna, a primeira linha fornece p11, a segunda e terceira fornecem p12 e a quarta p22. K0, K1, ..., K8 são fornecidos como vetores linha na matriz K. A primeira linha corresponde a K0 e a última linha corresponde a K8. x0, x1, ..., x8 são dados como colunas da matriz x. A primeira coluna corresponde a x0 e a última a x8. u0, u1, ..., u8 são dados como a primeira, segunda, ..., enésima linha do vetor u.

4-4 CONTROLE QUADRÁTICO ÓTIMO EM ESTADO ESTACIONÁRIO DE SISTEMAS DISCRETOS NO TEMPO

Consideremos o sistema de controle definido pela Eq. (4-19):

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \tag{4-45}$$

Foi visto que, quando o processo de controle é finito (quando N é finito), a matriz de ganho de retroação $\mathbf{K}(k)$ se torna uma matriz variante no tempo.

Vai-se considerar agora o problema do controle quadrático ótimo quando o processo continua sem limite, ou $N = \infty$ (isto é, o processo é de estágios infinitos). Na medida em que N se aproxima de infinito, a solução ótima de controle se torna uma solução de estado estacionário e a matriz de ganho variante no tempo $\mathbf{K}(k)$ se torna uma matriz de ganho constante. Uma tal matriz de ganho constante $\mathbf{K}(k)$ é chamada de matriz de ganho em estado (regime) estacionário e é escrita $\mathbf{K}$.

Para $N = \infty$, o índice de desempenho pode ser modificado para

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{x}'(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}'(k)\mathbf{R}\mathbf{u}(k)] \tag{4-46}$$

O termo $1/2\ \mathbf{x}'(N)\mathbf{S}\mathbf{x}(N)$, que apareceu na Eq. (4-10) não está incluído nesta representação de J. Isto é porque, se o sistema de controle ótimo é estável, de forma que o valor de J convirja para uma constante, $\mathbf{x}(\infty)$ se torna zero e $1/2\ \mathbf{x}'(\infty)\mathbf{S}\mathbf{x}(\infty) = 0$.

Vai-se agora definir a matriz $\mathbf{P}(k)$ como $\mathbf{P}$. Tomando a Eq. (4-31) como referência, a matriz $\mathbf{P}$ pode ser determinada como a seguir:

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \mathbf{Q} + \mathbf{G}'\mathbf{P}(\mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{P})^{-1}\mathbf{G} \\ &= \mathbf{Q} + \mathbf{G}'(\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}')^{-1}\mathbf{G}\end{aligned} \tag{4-47}$$

Claramente, a matriz $\mathbf{P}$ é determinada pelas matrizes $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$. Uma expressão ligeiramente diferente para $\mathbf{P}$ pode ser deduzida a partir da Eq. (4-32):

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \mathbf{G}'\mathbf{P}\mathbf{G} - \mathbf{G}'\mathbf{P}\mathbf{H}(\mathbf{R} + \mathbf{H}'\mathbf{P}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{P}\mathbf{G} \tag{4-48}$$

A matriz de ganho em regime estacionário $\mathbf{K}$ pode ser obtida em termos de $\mathbf{P}$ como se segue. A partir da Eq. (4-35),

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}'(\mathbf{G}')^{-1}(\mathbf{P} - \mathbf{Q}) \tag{4-49}$$

A partir da Eq. (4-37)

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}'(\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}')^{-1}\mathbf{G} \tag{4-50}$$

Ainda uma terceira expressão para **K** é possível. A partir da Eq. (4-39),

$$\mathbf{K} = (\mathbf{R} + \mathbf{H}'\mathbf{P}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{P}\mathbf{G} \tag{4-51}$$

Quaisquer das expressões dadas pelas Eqs. (4-49), (4-50) e (4-51) podem ser usadas para obter a matriz de ganho em estado estacionário **K**. (Todas as expressões produzem o mesmo resultado numérico.)

A lei de controle ótimo para a operação em regime estacionário é dada por

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$$

Se, por exemplo, a Eq. (4-51) for substituída nesta última equação, obtém-se

$$\mathbf{u}(k) = -(\mathbf{R} + \mathbf{H}'\mathbf{P}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{P}\mathbf{G}\mathbf{x}(k) \tag{4-52}$$

e o sistema de controle se torna um sistema regulador ótimo:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= [\mathbf{G} - \mathbf{H}(\mathbf{R} + \mathbf{H}'\mathbf{P}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{P}\mathbf{G}]\mathbf{x}(k) \\ &= (\mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{P})^{-1}\mathbf{G}\mathbf{x}(k)\end{aligned} \tag{4-53}$$

onde se usa o lema da inversão de matrizes

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{C})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{I} + \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}$$

com $\mathbf{A} = \mathbf{I}$, $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ e $\mathbf{C} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{P}$.

O índice de desempenho J associado à lei de controle ótimo em estado estacionário pode ser obtida a partir da Eq. (4-44), substituindo **P**(0) por **P**:

$$J_{\min} = \frac{1}{2}\mathbf{x}'(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0) \tag{4-54}$$

Em muitos sistemas que ocorrem na prática, em vez de usar uma matriz de ganho variante no tempo **K**(k), aproxima-se uma tal matriz de ganho através da matriz constante de ganho **K**. Os desvios do desempenho ótimo devidos a esta aproximação irão aparecer somente próximos do final do processo de controle.

Equação de Riccati para o estado estacionário

Ao implementar o controlador ótimo para o estado estacionário (ou invariante no tempo), precisa-se da solução de estado estacionário da equação de Riccati. Há várias formas de se obter a equação de estado estacionário.

Uma forma de resolver a equação de Riccati para o estado estacionário dada pela Eq. (4-48),

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \mathbf{G}'\mathbf{P}\mathbf{G} - \mathbf{G}'\mathbf{P}\mathbf{H}(\mathbf{R} + \mathbf{H}'\mathbf{P}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{P}\mathbf{G}$$

é começar com a seguinte equação de Riccati para o estado não estacionário, que foi dada pela Eq. (4-32):

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(k) = \mathbf{Q} &+ \mathbf{G}'\mathbf{P}(k+1)\mathbf{G} \\ &- \mathbf{G}'\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}[\mathbf{R} + \mathbf{H}'\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{P}(k+1)\mathbf{G}\end{aligned} \tag{4-55}$$

Revertendo a direção do tempo, pode-se modificar a Eq. (4-55) para ser lida como

$$\mathbf{P}(k+1) = \mathbf{Q} + \mathbf{G}'\mathbf{P}(k)\mathbf{G} - \mathbf{G}'\mathbf{P}(k)\mathbf{H}[\mathbf{R} + \mathbf{H}'\mathbf{P}(k)\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{P}(k)\mathbf{G} \tag{4-56}$$

começar a solução com **P**(0) = **0** e interar a equação até que uma solução estacionária seja atingida. Ao se calcular a solução numérica, é importante notar que a matriz **P** ou é hermitiana ou real simétrica e é positiva definida.

EXEMPLO 4.7

Considere o sistema

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$

onde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

O índice de desempenho J é dado por

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}[\mathbf{x}'(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + u'(k)Ru(k)]$$

onde

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}, \qquad R = 1$$

A lei de controle que minimiza J pode ser dada por

$$u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$$

Determinar a matriz de ganho em regime estacionário **K**.

O Programa MATLAB 4-8 determina a matriz de ganho em estado estacionário **K** para este problema. Neste programa é mostrado como a matriz **P** (a solução para a equação de Riccati em estado estacionário) se aproxima da matriz do estado estacionário começando com **P** = **0**. Através de várias interações, a matriz **P** atinge a matriz do estado estacionário. Usando esta matriz do estado estacionário **P**, a matriz do estado estacionário **K** pode ser determinada da forma dada pelo programa.

Programa MATLAB 4-8

```
% ---------- Controle quadrático ótimo para o estado estacionário ----------

% ***** Resolução da equação de Riccati para o estado estacionário
% e obtenção da matriz de ganho de retroação ótima K *****

% ***** Entrar com as matrizes G, H, Q e R *****

G = [0.2  0;0  0.4];
H = [1;1];
Q = [1  0;0  0.5];
R = [1];

% ***** Começar pela solução da equação de Riccati em
% estado estacionário com P = [0 0;0 0] *****

P = [0  0;0  0];
P = Q + G'*P*G - G'*P*H*inv(R+H'*P*H)*H'*P*G

P =

     1.0000          0
          0     0.5000

P = Q + G'*P*G - G'*P*H*inv(R+H'*P*H)*H'*P*G

P =

     1.0240    -0.0160
    -0.0160     0.5640
```

```
P = Q + G'*P*G - G'*P*H*inv(R+H'*P*H)*H'*P*G

P =

     1.0251    -0.0186
    -0.0186     0.5714

P = Q + G'*P*G - G'*P*H*inv(R+H'*P*H)*H'*P*G

P =

     1.0252    -0.0189
    -0.0189     0.5723

P = Q + G'*P*G - G'*P*H*inv(R+H'*P*H)*H'*P*G

P =

     1.0252    -0.0189
    -0.0189     0.5724

P = Q + G'*P*G - G'*P*H*inv(R+H'*P*H)*H'*P*G

P =

     1.0252    -0.0189
    -0.0189     0.5724

% ***** Quando a matriz P permanecer constante, o estado
% estacionário será alcançado. A matriz do estado estacionário P é *****

P

P =

     1.0252    -0.0189
    -0.0189     0.5724

% ***** A matriz de ganho de retroação é obtida a partir de *****

K = inv(R + H'*P*H)*H'*P*G

K =

     0.0786     0.0865
```

O Programa MATLAB 4-9 é uma versão melhorada do Programa MATLAB 4-8. Neste programa, a solução **P** da equação de Riccati para o estado estacionário é verificada a cada dez interações. Após essas primeiras 10 interações, obtém-se a matriz **P** como a seguir:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1{,}0252 & -0{,}0189 \\ -0{,}0189 & 0{,}5724 \end{bmatrix}$$

Para verificar se a matriz **P** é a solução de estado estacionário da equação de Riccati, fazem-se outras 10 (ou 20) interações. Se a matriz resultante **P** for exatamente a mesma que a matriz **P** previamente obtida, para-se o processo de interação. Utilizando a matriz do estado estacionário **P** obtida, calcula-se a matriz de estado estacionário **K**.

Programa MATLAB 4-9

```
% ---------- Controle quadrático ótimo em estado estacionário ----------

% ***** Resolução da equação de Riccati para o estado estacionário
% e obtenção da matriz de ganho de retroação ótima K  *****

% ***** Entrar com as matrizes G, H, Q e R  *****

G = [0.2  0;0  0.4];
H = [1;1];
Q = [1  0;0  0.5];
R = [1];

% ***** Começar com a solução da equação de Riccati para o estado
% estacionário com P = [0 0;0 0] *****

P = [0  0;0  0];
P = Q + G'*P*G - G'*P*H*inv(R+H'*P*H)*H'*P*G;

% ***** Verificar a solução P a cada 10 ou 20 passos de interação
% Parar a interação quando P se tornar e permanecer constante *****

for i = 1:10,
  P = Q + G'*P*G - G'*P*H*inv(R+H'*P*H)*H'*P*G;
end
P

P =

     1.0252    -0.0189
    -0.0189     0.5724

for i = 1:10,
  P = Q + G'*P*G - G'*P*H*inv(R+H'*P*H)*H'*P*G;
end
P

P =

     1.0252    -0.0189
    -0.0189     0.5724

% ***** A matriz P permanece constante. Então, o estado
% estacionário foi atingido. A matriz do estado estacionário P é *****

P

P =

     1.0252    -0.0189
    -0.0189     0.5724
```

```
% ***** A matriz K de ganho de retroação ótimo é obtida a partir de *****

K = inv(R + H'*P*H)*H'*P*G

K =

   0.0786    0.0865
```

EXEMPLO 4.8 Projeto de um Servossistema

Considere-se o projeto do servossistema mostrado na Fig. 4-9. O processo não envolve um integrador e, por conseguinte, um controlador integral é incluído na malha. O período de amostragem T é 0,1s.

A partir da Fig. 4-9 são obtidas as seguintes equações:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= 0{,}5x(k) + 2u(k) \\ u(k) &= k_1 v(k) - k_2 x(k) \\ v(k) &= r(k) - y(k) + v(k-1) \\ y(k) &= x(k) \end{aligned}$$

onde k_1 é a constante de ganho integral e k_2 é a constante de ganho de retroação. Neste problema de projeto, k_1 e k_2 são variáveis e precisam ser determinadas de forma que o sistema seja estável e exiba uma resposta transitória aceitável para a entrada em degrau unitário.

Como

$$\begin{aligned} v(k+1) &= r(k+1) - y(k+1) + v(k) \\ &= -0{,}5x(k) + v(k) - 2u(k) + r(k+1) \end{aligned}$$

obtém-se

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ v(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(k+1) \tag{4-57}$$

Para $k = \infty$, tem-se

$$\begin{bmatrix} x(\infty) \\ v(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(\infty) \\ v(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} u(\infty) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(\infty) \tag{4-58}$$

Para qualquer entrada em degrau, $r(k+1) = r(\infty) = r$. Defina-se

$$\begin{aligned} x_e(k) &= x(k) - x(\infty) \\ v_e(k) &= v(k) - v(\infty) \\ u_e(k) &= u(k) - u(\infty) \end{aligned}$$

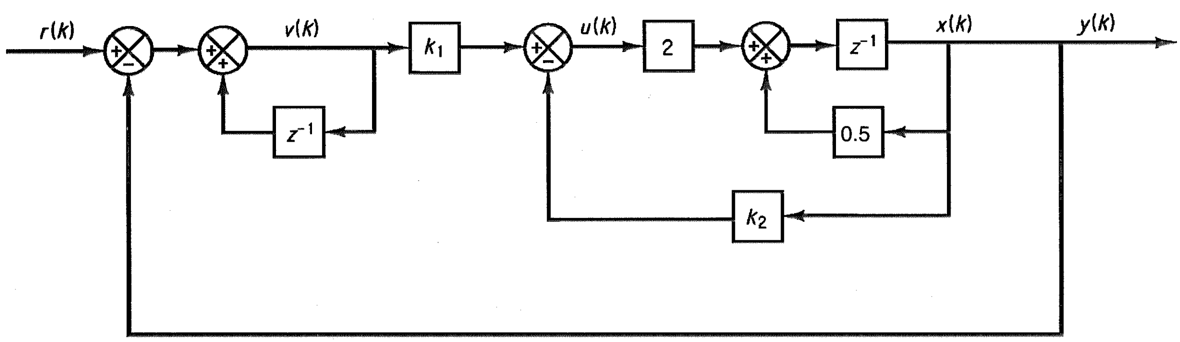

Fig. 4.9

Subtraindo a Eq. (4-58) da Eq. (4-57), obtém-se

$$\begin{bmatrix} x_e(k+1) \\ v_e(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} u_e(k) \qquad (4\text{-}59)$$

Note-se que

$$u_e(k) = k_1 v_e(k) - k_2 x_e(k)$$

Definindo

$$x_1(k) = x_e(k)$$
$$x_2(k) = v_e(k)$$
$$w(k) = u_e(k)$$

Então, a Eq. (4-59) pode ser escrita como a seguir:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} w(k)$$

onde

$$w(k) = -[k_2 \quad -k_1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Reescrevendo, tem-se

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}w(k)$$
$$w(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$$

onde

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = [k_2 \quad -k_1]$$

Para projetar um sistema estável e ter características de resposta em degrau razoáveis, deve-se usar o esquema de controle quadrático ótimo. (Note-se que, se for usado o esquema de controle quadrático ótimo, o sistema resultante será sempre estável.) Vai-se admitir o seguinte índice de desempenho:

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{x}(k)'\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + w(k)'Rw(k)]$$

Se $\mathbf{Q}$ e R forem escolhidos para serem positivas definidas, o sistema resultante é estável. Para este caso, se for escolhido

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad R = 1$$

Note-se que $\mathbf{Q}$ e R presentes são apenas um possível conjunto. Outras $\mathbf{Q}$ e R positivas definidas podem ser escolhidas. O sistema resultante é estável, mas diferente para cada conjunto distinto de $\mathbf{Q}$ e R.

O Programa MATLAB 4-10 pode ser usado para determinar a matriz **K**.

Programa MATLAB 4-10

```
% ---------- Projeto de um servossistema baseado na minimização de
% um índice quadrático de desempenho ----------

% ***** O programa seguinte resolve a equação de Riccati para o
% estado estacionário e fornece a matriz de ganho de retroação
% ótima K *****
```

```
% ***** Entrar com as matrizes G, H, Q e R *****

G = [0.5  0;-0.5  1];
H = [2;-2];
Q = [100  0;0  1];
R = [1];

% ***** Começar com a solução da equação de Riccati para o estado
% estacionário P = [0  0;0  0] *****

P = [0  0;0  0];
P = Q + G'*P*G - G'*P*H*inv(R+H'*P*H)*H'*P*G;

% ***** Verificar a solução P a cada 10 ou 20 passos de interação.
% Parar a interação quando P se tornar e permanecer constante *****

for i = 1:20,
  P = Q + G'*P*G - G'*P*H*inv(R+H'*P*H)*H'*P*G;
end
P

P =

  100.0624    -0.0115
    -0.0115   10.1892

for i = 1:20,
  P = Q + G'*P*G - G'*P*H*inv(R+H'*P*H)*H'*P*G;
end
P

P =

  100.0624    -0.0119
    -0.0119   10.5107

for i = 1:20,
  P = Q + G'*P*G - G'*P*H*inv(R+H'*P*H)*H'*P*G;
end
P

P =

  100.0624    -0.0119
    -0.0119   10.5167

for i = 1:20,
  P = Q + G'*P*G - G'*P*H*inv(R+H'*P*H)*H'*P*G;
end
P

P =

  100.0624    -0.0119
    -0.0119   10.5168
```

```
for i = 1:20,
  P = Q + G'*P*G - G'*P*H*inv(R+H'*P*H)*H'*P*G;
end
P

P =

   100.0624    -0.0119
    -0.0119    10.5168

% ***** A matriz P permanece constante. Por conseguinte, o estado
% estacionário foi alcançado. A matriz do estado estacionário é *****

P

P =

   100.0624    -0.0119
    -0.0119    10.5168

% ***** A matriz de ganho de retroação ótima K é obtida a partir de *****

K = inv(R + H'*P*H)*H'*P*G

K =

     0.2494    -0.0475

k1 = -K(2)

k1 =

      0.0475

k2 = K(1)

k2 =

      0.2494
```

Para obter a curva de resposta em degrau unitário [$y(k)$ *versus* k], deve-se proceder da seguinte forma [para uma entrada em degrau, $r(k)$ deve ser escrita r]: como

$$\begin{aligned} x(k+1) &= 0{,}5x(k) + 2u(k) \\ &= 0{,}5x(k) + 2[-k_2x(k) + k_1v(k)] \\ &= (0{,}5 - 2k_2)x(k) + 2k_1v(k) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} v(k+1) &= v(k) + r(k+1) - y(k+1) \\ &= v(k) + r - (0{,}5 - 2k_2)x(k) - 2k_1v(k) \\ &= (1 - 2k_1)v(k) + (-0{,}5 + 2k_2)x(k) + r \end{aligned}$$

obtém-se

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ v(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 - 2k_2 & 2k_1 \\ -0{,}5 + 2k_2 & 1 - 2k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \tag{4-60}$$

$$y(k) = x(k) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + [0] r \tag{4-61}$$

Para uma entrada em degrau unitário, $r = 1$.

A resposta em degrau unitário $y(k)$ *versus* k pode ser obtida convertendo-se, primeiro, as equações no espaço de estados [Eqs. (4-60) e (4-61)] na função de transferência discreta $Y(z)/R(z)$:

```
[num,den] = ss2tf(GG,HH,CC,DD)
```

onde

```
GG = [0.5 − 2k2   2k1 ; −0.5 + 2k2   1 − 2k1]
HH = [0;1]
CC = [1   0]
DD = [0]
```

e, então, usando o comando filter como a seguir:

```
y = filter(num,den,r)
```

onde r é uma função em degrau unitário.

Para obter a resposta $v(k)$, note-se primeiro que

$$v(k) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x(k) \\ v(k) \end{bmatrix} = \mathbf{FF} \begin{bmatrix} x(k) \\ v(k) \end{bmatrix}$$

onde **FF** = [0 1]. Usar, em seguida, o comando:

```
[numv,denv] = ss2tf(GG,HH,FF,DD)
v = filter(numv,denv,r)
```

O Programa MATLAB 4-11 produz a resposta $y(k)$ *versus* k e $v(k)$ *versus* k. A resposta em degrau unitário $y(k)$ *versus* k é mostrada na Fig. 4-10. A resposta $v(k)$ *versus* k é mostrada na Fig. 4-11.

Note-se que o sistema é estável e exibe resposta de características não oscilatórias. As características de resposta dependem dos conjuntos **Q** e R escolhidos no índice de desempenho J.

Programa MATLAB 4-11

```
% ---------- Resposta em degrau unitário do sistema projetado ----------

% ***** Este programa calcula a resposta do sistema quando submetido a
% uma entrada em degrau unitário. Os valores que são usados para k1
% e k2 são calculados no Programa MATLAB 4-10. A resposta é obtida
% usando-se o método da conversão das equações no espaço de
% estados em tempo discreto para a forma de função de transferência
% discreta. A resposta é, então, encontrada através do comando filter
% convencional. *****

% ***** Entrar com os valores de k1 e k2 *****

k1 = 0.0475; k2 = 0.2494;
```

```
% ***** Entrar com as matrizes GG, HH, CC, FF e DD *****

GG = [0.5-2*k2  2*k1;-0.5+2*k2  1-2*k1];
HH = [0;1];
CC = [1  0];
FF = [0  1];
DD = [0];

% ***** Para obter a resposta y(k), converter as equações no espaço de
% estados para a função de transferência discreta Y(z)/R(z) *****

[num,den] = ss2tf(GG,HH,CC,DD);

% ***** Entrar com o comando para obter a resposta em degrau unitário *****

r = ones(1,101);
axis([0  100  0  1.2]);
k = 0:100;
y = filter(num,den,r);
plot(k,y,'o',k,y,'-')
grid
title ('Saída y(k) para Entrada em Degrau Unitário')
xlabel('k')
ylabel('y(k)')

% ***** Para obter a resposta v(k), converter as equações no espaço de
% estados para a função de transferência discreta V(z)/R(z) *****

[numv,denv] = ss2tf(GG,HH,FF,DD);

% ***** Entrar com o comando para obter v(k) *****


axis([0  100  0  12]);
k = 0:100;
v = filter(numv,denv,r);
plot(k,v,'o',k,v,'-')
grid
title ('Saída v(k) do Integrador')
xlabel('k')
ylabel('v(k)')
```

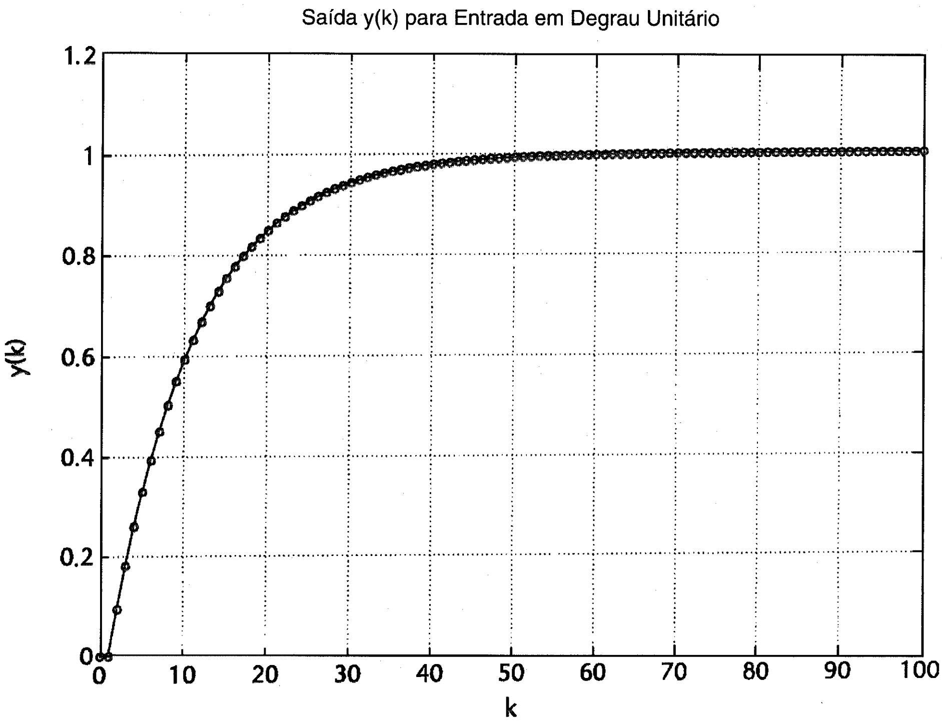

Fig. 4.10

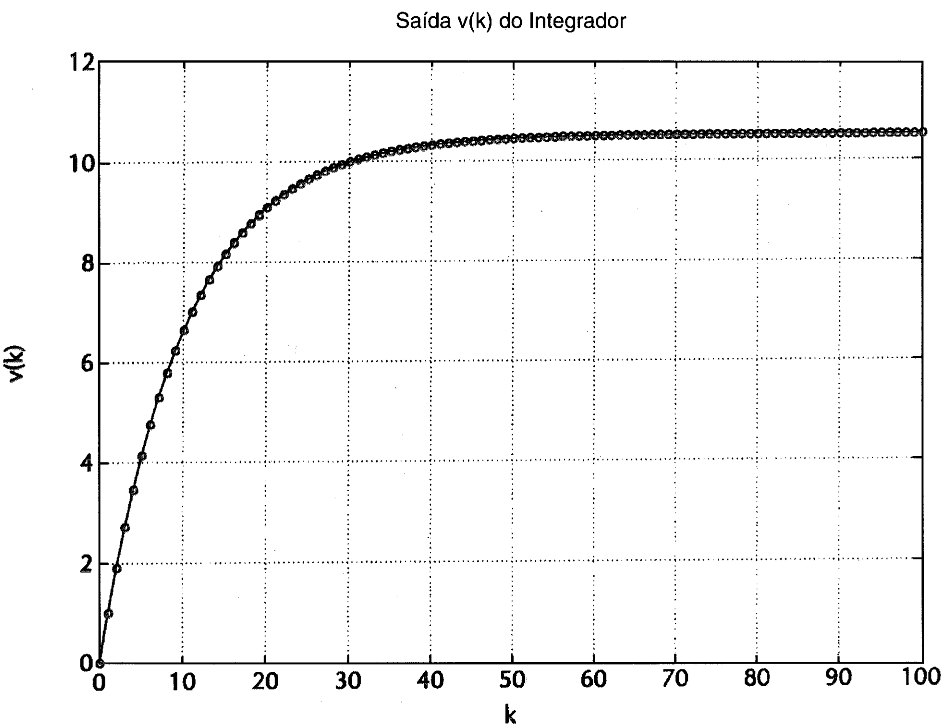

Fig. 4.11

EXEMPLO 4.9

Considere-se o sistema de pêndulo invertido mostrado na Fig. 4-12. (Este sistema é o mesmo que aquele discutido no Exemplo 3-3.) Projetar um controlador digital para este sistema de controle de pêndulo invertido. Como o processo a controlar (pêndulo invertido mais carro) não envolve um integrador, torna-se necessário incluir um controlador integral. Escolhe-se o período de amostragem T como sendo 0,1s. Se for implementado este sistema como um servossistema, o diagrama de blocos pode tomar a forma mostrada na Fig. 4-13. O controlador a ser projetado incluirá retroação de estado e um integrador na malha fechada.

Para projetar um controlador estável, o esquema quadrático ótimo de controle deve ser usado. (Note-se que o sistema projetado, baseado na minimização do índice quadrático de desempenho, será estável.) Neste exemplo, será demonstrada essa abordagem.

Definindo-se as variáveis de estado x_1, x_2, x_3 e x_4 como a seguir:

$$x_1 = \theta$$
$$x_2 = \dot{\theta}$$
$$x_3 = x$$
$$x_4 = \dot{x}$$

Admite-se para M, m e l os mesmos valores numéricos usados no Exemplo 3-3. (Isto é, $M = 2$ kg, $m = 0,1$ kg, e $l = 0,5$ m.) A equação discreta de estado do sistema e a equação de saída foram deduzidas no Exemplo 3-3. Usando aquelas equações deduzidas, tem-se

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$
$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + Du(k)$$

onde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1{,}1048 & 0{,}1035 & 0 & 0 \\ 2{,}1316 & 1{,}1048 & 0 & 0 \\ -0{,}0025 & -0{,}0001 & 1 & 0{,}1 \\ -0{,}0508 & -0{,}0025 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -0{,}0051 \\ -0{,}1035 \\ 0{,}0025 \\ 0{,}0501 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0], \qquad D = [0]$$

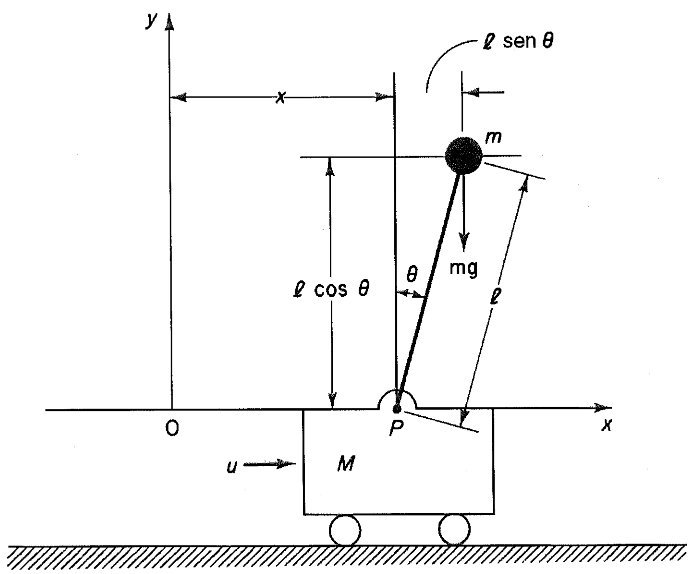

Fig. 4.12

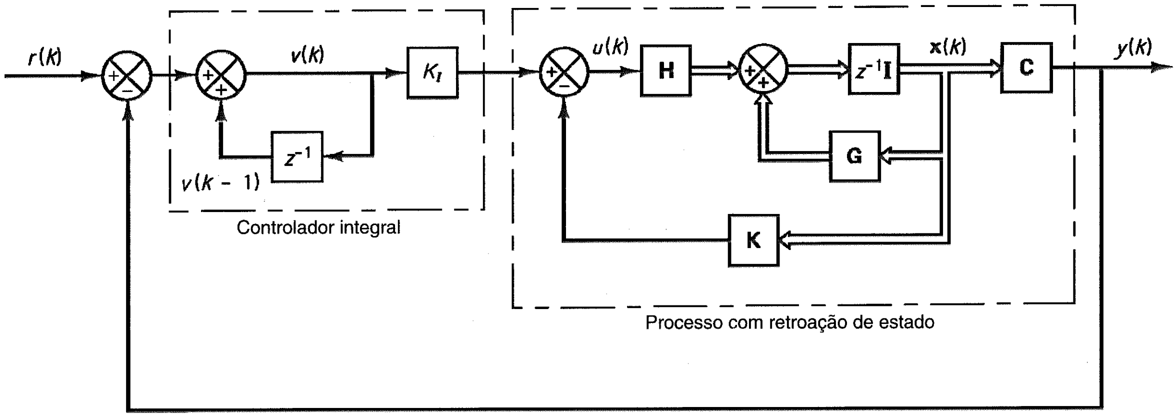

Fig. 4.13

A representação no espaço de estados para todo o sistema de controle é dada por

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$
$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$$
$$v(k) = v(k-1) + r(k) - y(k)$$
$$u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k) + K_I v(k)$$

onde

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4]$$

Como

$$\begin{aligned} v(k+1) &= v(k) + r(k+1) - y(k+1) \\ &= v(k) + r(k+1) - \mathbf{C}[\mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)] \\ &= -\mathbf{CG}\mathbf{x}(k) + v(k) - \mathbf{CH}u(k) + r(k+1) \end{aligned}$$

tem-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ v(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{CG} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ -\mathbf{CH} \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r(k+1)$$

Admite-se que a entrada r seja uma função em degrau, ou

$$r(k) = r(k+1) = r$$

Então, na medida em que k se aproxime de infinito

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(\infty) \\ v(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{CG} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(\infty) \\ v(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ -\mathbf{CH} \end{bmatrix} u(\infty) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r(\infty)$$

Defina-se

$$\mathbf{x}_e(k) = \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(\infty)$$
$$v_e(k) = v(k) - v(\infty)$$

A equação de erro, então, se torna

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k+1) \\ v_e(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{CG} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ -\mathbf{CH} \end{bmatrix} u_e(k)$$

Note-se que

$$u_e(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}_e(k) + K_I v_e(k) = -[\mathbf{K} \quad -K_I]\begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix}$$

Defina-se agora

$$\hat{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{CG} & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ -\mathbf{CH} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{K}} = [\mathbf{K} \quad -K_I], \quad w(k) = u_e(k)$$

$$\boldsymbol{\xi}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1e}(k) \\ x_{2e}(k) \\ x_{3e}(k) \\ x_{4e}(k) \\ x_{5e}(k) \end{bmatrix}$$

onde $x_{5e}(k) = v_e(k)$. Tem-se, então,

$$\boldsymbol{\xi}(k+1) = \hat{\mathbf{G}}\boldsymbol{\xi}(k) + \hat{\mathbf{H}}w(k)$$
$$w(k) = -\hat{\mathbf{K}}\boldsymbol{\xi}(k)$$

O problema se torna o de determinar a matriz $\hat{\mathbf{K}}$ tal que o índice quadrático de desempenho seguinte seja minimizado:

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} [\boldsymbol{\xi}'\mathbf{Q}\boldsymbol{\xi} + w'Rw]$$

onde $\mathbf{Q}$ e R devem ser escolhidos apropriadamente, de forma que a resposta do sistema seja aceitável. (O propósito de se usar um índice de desempenho quadrático é o de assegurar a estabilidade do sistema.)

$\mathbf{Q}$ e R serão escolhidos como a seguir:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = [1]$$

A ênfase está nas variáveis de estado x_{3e} e x_{1e}. (Note-se que muitos diferentes conjuntos de $\mathbf{Q}$ e R podem ser usados.) No programa MATLAB para resolver este problema, usam-se as notações

$$\text{G1} = \hat{\mathbf{G}}, \qquad \text{H1} = \hat{\mathbf{H}}, \qquad \text{KK} = \hat{\mathbf{K}}$$

O Programa MATLAB 4-12 produz a solução $\mathbf{P}$ da equação de Riccati para o estado estacionário e para a matriz de ganho $\mathbf{K}$ e a constante de ganho integral K_I.

Programa MATLAB 4-12

```
% ---------- Projeto de um sistema de controle para um pêndulo invertido
% baseado na minimização de um índice quadrático de desempenho ----------

% ***** O programa seguinte resolve a equação de Riccati para o estado
% estacionário e fornece a matriz de ganho de retroação ótima K *****

% ***** Entrar com as matrizes G, H, C e D *****

G = [1.1048   0.1035   0   0
     2.1316   1.1048   0   0
    -0.0025  -0.0001   1   0.1
    -0.0508  -0.0025   0   1];
```

```
H = [-0.0051
     -0.1035
      0.0025
      0.0501];
C = [0  0  1  0];
D = [0];

% ***** Entrar com as matrizes G1, H1, Q e R  *****

G1 = [G  zeros(4,1);-C*G  1];
H1 = [H;-C*H];
Q = [10  0    0  0  0
      0  1    0  0  0
      0  0  100  0  0
      0  0    1  0  0
      0  0    0  0  1];
R = [1];

% ***** Iniciar resolvendo a equação de Riccati para o estado
% estacionário para P com P = diag(0,4) *****

P = diag(0,4);
P = Q + G1'*P*G1 - G1'*P*H1*inv(R+H1'*P*H1)*H1'*P*G1;

% ***** Verificar a solução para P a cada 20 passos de interação
% Parar a interação quando P se tornar e permanecer constante *****

for i = 1:20,
  P = Q + G1'*P*G1 - G1'*P*H1*inv(R+H1'*P*H1)*H1'*P*G1;
end
P

P =

  1.0e + 003 *

   9.6887    2.1677    3.4319    2.4341   -0.1741
   2.1677    0.4876    0.7743    0.5490   -0.0393
   3.4319    0.7743    2.2988    1.1788   -0.1312
   2.4341    0.5490    1.1788    0.7824   -0.0625
  -0.1741   -0.0393   -0.1312   -0.0625    0.0185


for i = 1:20,
  P = Q + G1'*P*G1 - G1'*P*H1*inv(R+H1'*P*H1)*H1'*P*G1;
end
P

P =

  1.0e + 004 *

   1.0707    0.2397    0.3996    0.2772   -0.0220
   0.2397    0.0539    0.0902    0.0625   -0.0050
   0.3996    0.0902    0.2617    0.1367   -0.0158
   0.2772    0.0625    0.1367    0.0895   -0.0078
  -0.0220   -0.0050   -0.0158   -0.0078    0.0021
```

```
for i = 1:20,
 P = Q + G1'*P*G1 - G1'*P*H1*inv(R+H1'*P*H1)*H1'*P*G1;
end
P

P =

  1.0e + 004 *

    1.0724    0.2401    0.4006    0.2778   -0.0221
    0.2401    0.0540    0.0904    0.0627   -0.0050
    0.4006    0.0904    0.2623    0.1371   -0.0158
    0.2778    0.0627    0.1371    0.0897   -0.0078
   -0.0221   -0.0050   -0.0158   -0.0078    0.0021

for i = 1:20,
 P = Q + G1'*P*G1 - G1'*P*H1*inv(R+H1'*P*H1)*H1'*P*G1;
end
P

P =

  1.0e + 004 *

    1.0724    0.2401    0.4006    0.2778   -0.0221
    0.2401    0.0540    0.0904    0.0627   -0.0050
    0.4006    0.0904    0.2623    0.1371   -0.0158
    0.2778    0.0627    0.1371    0.0897   -0.0078
   -0.0221   -0.0050   -0.0158   -0.0078    0.0021

% ***** A matriz P se mantém constante. Por conseguinte, o estado
% estável foi alcançado. A matriz do estado estável; P é *****

P

P =

  1.0e + 004 *

    1.0724    0.2401    0.4006    0.2778   -0.0221
    0.2401    0.0540    0.0904    0.0627   -0.0050
    0.4006    0.0904    0.2623    0.1371   -0.0158
    0.2778    0.0627    0.1371    0.0897   -0.0078
   -0.0221   -0.0050   -0.0158   -0.0078    0.0021

% ***** A matriz de ganho ótimo de retroação KK é obtida a partir de *****

KK = inv(R + H1'*P*H1)*H1'*P*G1

KK =

   -64.9346  -14.4819  -10.8475   -9.2871    0.5189

K = [KK(1)  KK(2)  KK(3)  KK(4)]
```

```
K =

   -64.9346  -14.4819  -10.8475  -9.2871

KI = -KK(5)

KI =

   -0.5189
```

Características de resposta transitória do sistema projetado. Para verificar as características de resposta transitória do sistema projetado, examina-se a resposta em degrau unitário do sistema. Para obter a resposta em degrau unitário, procede-se da seguinte maneira: como

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}[-\mathbf{K}\mathbf{x}(k) + K_I v(k)] \\ &= (\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K})\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}K_I v(k)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v(k+1) &= v(k) + r(k+1) - y(k+1) \\ &= v(k) + r(k+1) - \mathbf{C}[\mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)] \\ &= (-\mathbf{C}\mathbf{G} + \mathbf{C}\mathbf{H}\mathbf{K})\mathbf{x}(k) + (1 - \mathbf{C}\mathbf{H}K_I)v(k) + r\end{aligned}$$

obtém-se

$$\begin{bmatrix}\mathbf{x}(k+1)\\ v(k+1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K} & \mathbf{H}K_I \\ -\mathbf{C}\mathbf{G} + \mathbf{C}\mathbf{H}\mathbf{K} & 1 - \mathbf{C}\mathbf{H}K_I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(k)\\ v(k)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ 1\end{bmatrix}r \tag{4-62}$$

$$y(k) = [\mathbf{C} \quad 0]\begin{bmatrix}\mathbf{x}(k)\\ v(k)\end{bmatrix} + [0]r \tag{4-63}$$

onde $r = 1$. Para se determinar a resposta em degrau unitário $y(k)$ (a posição do carrinho), defina-se primeiro

$$\mathbf{GG} = \begin{bmatrix}\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K} & \mathbf{H}K_I \\ -\mathbf{C}\mathbf{G} + \mathbf{C}\mathbf{H}\mathbf{K} & 1 - \mathbf{C}\mathbf{H}K_I\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{HH} = \begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{CC} = [\mathbf{C} \quad 0] = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

$$DD = [D] = [0]$$

e, em seguida, convertam-se as equações no espaço de estados [Eqs. (4-62) e (4-63)] na função de transferência discreta $Y(z)/R(z)$, usando o seguinte comando MATLAB:

```
[num,den] = ss2tf(GG,HH,CC,DD)
```

Seja usado, então, o comando *filter*:

```
y = filter(num,den,r)
```

onde r = entrada em degrau unitário.

Para obter a resposta $x_1(k)$, note-se que

$$x_1(k) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix}\mathbf{x}(k)\\ v(k)\end{bmatrix}$$

Defina-se

$$\mathbf{FF} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Então,

$$x_1(k) = \mathbf{FF}\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ v(k) \end{bmatrix} \tag{4-64}$$

Convertam-se as equações no espaço de estados [Eqs. (4-62) e (4-64)] para a função de transferência discreta $X_1(z)/R(z)$ usando o comando

```
[num1,den1] = ss2tf(GG,HH,FF,DD)
```

Use-se, então, o comando *filter*

```
x1 = filter(num1,den1,r)
```

Semelhantemente, para a resposta $x_2(k)$ ser obtida, note-se que

$$x_2(k) = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ v(k) \end{bmatrix} \tag{4-65}$$

Defina-se

$$\mathbf{JJ} = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Em seguida, convertam-se as equações no espaço de estados [Eqs. (4-62) e (4-65)] na junção de transferência discreta $X_2(z)/R(z)$, usando-se o comando

```
[num2,den2] = ss2tf(GG,HH,JJ,DD)
```

Em seguida, use-se o comando de filtragem

```
x2 = filter(num2,den2,r)
```

Similarmente, definindo

$$\mathbf{LL} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$
$$\mathbf{MM} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

as respostas $x_4(k)$ e $x_5(k) = v(k)$ podem ser obtidas usando os comandos

```
[num4,den4] = ss2tf(GG,HH,LL,DD)
x4 = filter(num4,den4,r)
```

e

```
[num5,den5] = ss2tf(GG,HH,MM,DD)
x5 = filter(num5,den5,r)
```

O Programa MATLAB 4-13 produz $y(k)$, $x_1(k)$, $x_2(k)$, $x_4(k)$ e $x_5(k)$ quando a entrada em degrau unitário ($r = 1$) é fornecida.

Programa MATLAB 4-13

```
% ---------- Resposta em degrau do sistema projetado ----------

% ***** Este programa calcula a resposta do sistema quando sujeito a uma
% entrada em degrau unitário. Os valores que são usados para K e KI
% são calculados no Programa MATLAB 4-12. A resposta é obtida
% usando o método de converter as equações no espaço de estados para a
% forma de função de transferência discreta. A resposta é, então, encontrada
% através do comando convencional filter *****
```

```
% ***** Entrar com as matrizes K, KI, GG, HH, CC, FF, JJ, LL, MM, DD *****

K = [-64.9346  -14.4819  -10.8475  -9.2871];
KI = -0.5189;
GG = [G-H*K  H*KI;-C*G+C*H*K  1-C*H*KI];
HH = [0;0;0;0;1];
CC = [0  0  1  0  0];
FF  = [1  0  0  0  0];
JJ  = [0  1  0  0  0];
LL  = [0  0  0  1  0];
MM = [0  0  0  0  1];
DD = [0];

% ***** Para obter y(k), converter as equações no espaço de estados para
% a função de transferência discreta X3(z)/R(z) *****

[num,den] = ss2tf(GG,HH,CC,DD);

% ***** Entre com o comando para obter a resposta em degrau unitário *****

r = ones(1,101);
axis([0  100  -0.2  1.2]);
k = 0:100;
y = filter(num,den,r);
plot(k,y,'o',k,y,'-')
grid
title('Posição do carro: y(k) = x3(k)')
xlabel('k')
ylabel('y(k) = x3(k)')

% ***** Para obter x1(k) converter as equações no espaço de estados para
% a função de transferência discreta X1(z)/R(z) *****

[num1,den1] = ss2tf(GG,HH,FF,DD);

% ***** Entrar com o comando para obter a resposta em degrau unitário *****

axis([0  100  -0.1  0.2]);
x1 = filter(num1,den1,r);
plot(k,x1,'o',k,x1,'-')
grid
title('Deslocamento Angular Teta: x1(k)')
xlabel('k')
ylabel('x1(k)')

% ***** Para obter x2(k), converter as equações no espaço de estados para
% a função de transferência discreta X2(z)/R(z) *****

[num2,den2] = ss2tf(GG,HH,JJ,DD);

% ***** Entrar com o comando para obter a resposta em degrau unitário *****

axis([0  100  -0.5  0.5]);
x2 = filter(num2,den2,r);
plot(k,x2,'o',k,x2,'-')
grid
```

```
title('Velocidade Angular Teta Ponto: x2(K)')
xlabel('k')
ylabel('x2(k)')

% ***** Para obter x4(k), converter as equações no espaço de estados para
% a função de transferência discreta X4(z)/R(z)*****

[num4,den4] = ss2tf(GG,HH,LL,DD);

% ***** Entre com o comando para obter a resposta em degrau unitário*****

axis([0  100  -0.5  1]);
x4 = filter(num4,den4,r);
plot(k,x4,'o',k,x4,'-')
grid
title ('Velocidade do carro: x4(k)')
xlabel('k')
ylabel('x4(k)')

% ***** Para obter x5(k), converter as equações no espaço de estados
% para a função de transferência discreta X5(z)/R(z) *****

[num5,den5] = ss2tf(GG,HH,MM,DD);

% ***** Entrar com o comando para obter a resposta em degrau unitário *****

axis([0  100  -5  30]);
x5 = filter(num5,den5,r);
plot(k,x5,'o',k,x5,'-')
grid
title ('Saída do Integrador: x5(k) = v(k)')
xlabel('k')
ylabel('x5(k) = v(k)')
```

Baseado nos cálculos do MATLAB, a posição do carro [$y(k)$ *versus* k] pode ser obtida como mostrado na Fig. 4-14. (Note-se que o movimento inicial do carro é na direção negativa.) A Fig. 4-15 mostra o deslocamento angular do pêndulo, $x1(k) = \theta(k)$ plotada *versus* k. A Fig. 4-16 mostra a velocidade angular do pêndulo, $x2(k)$ plotada *versus* k. A Fig. 4-17 mostra a velocidade do carro, $x4(k)$ plotada *versus* k. A saída do integrador, $v(k)$ *versus* k é mostrada na Fig. 4-18. Como no presente sistema o período de amostragem T é 0,1 s, um intervalo de 6s transcorre até se atingir o regime estacionário. (Compare-se este sistema com aquele projetado no Exemplo 3-3.)

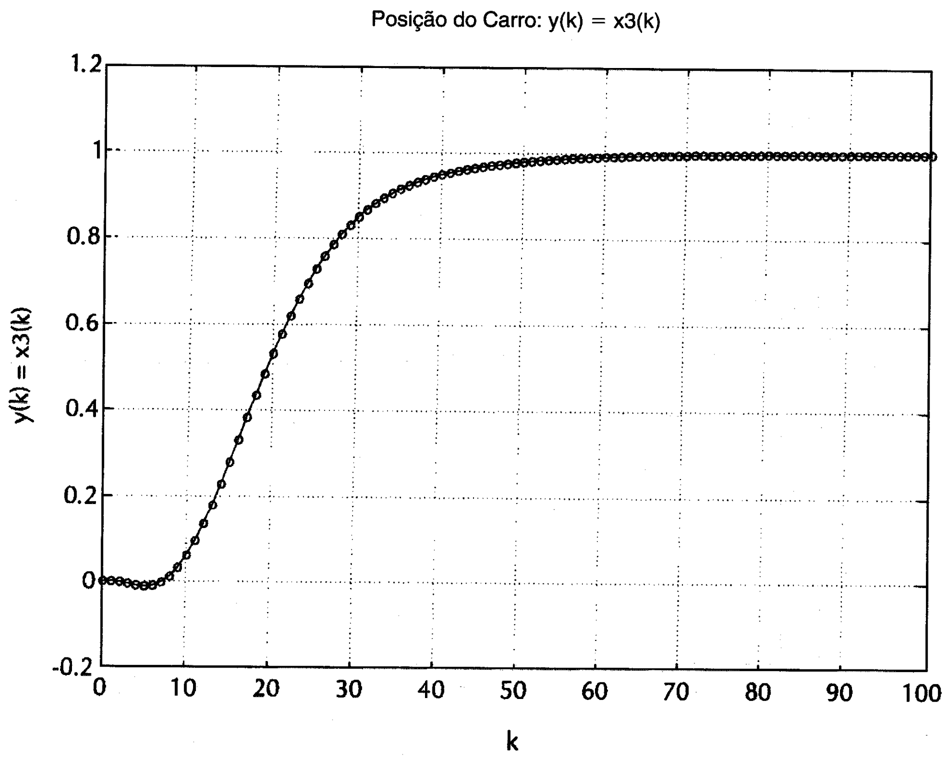

Fig. 4.14

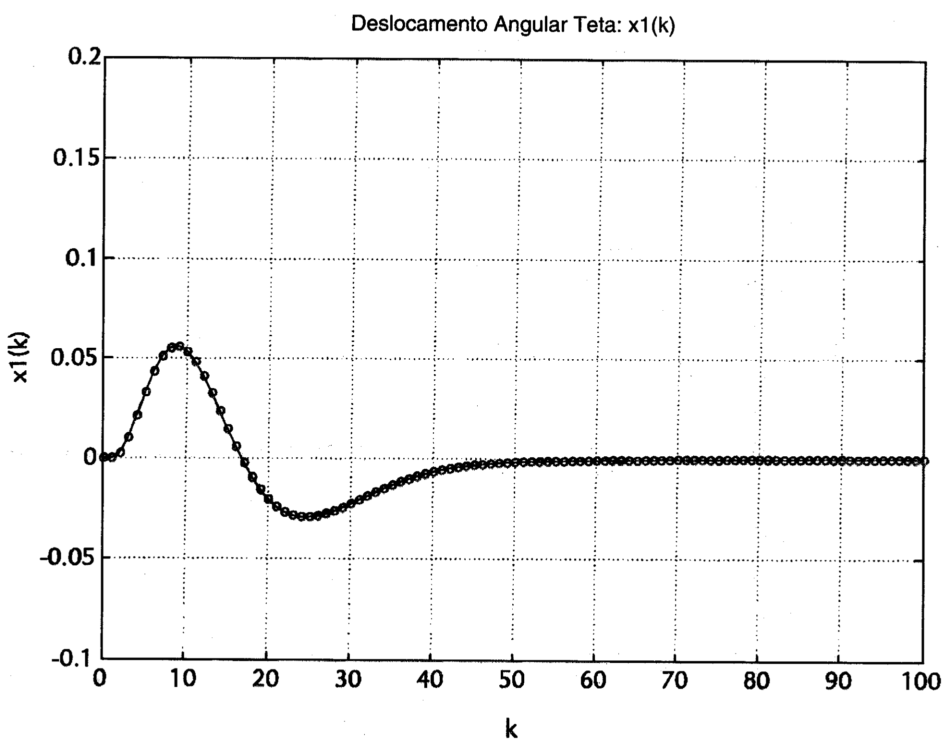

Fig. 4.15

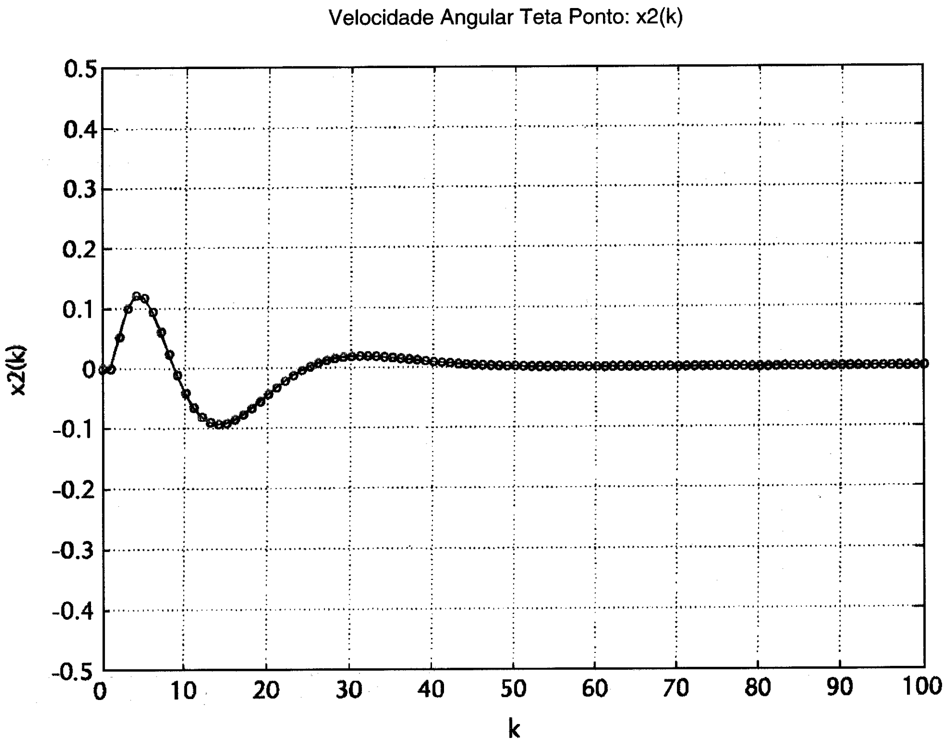

Fig. 4.16

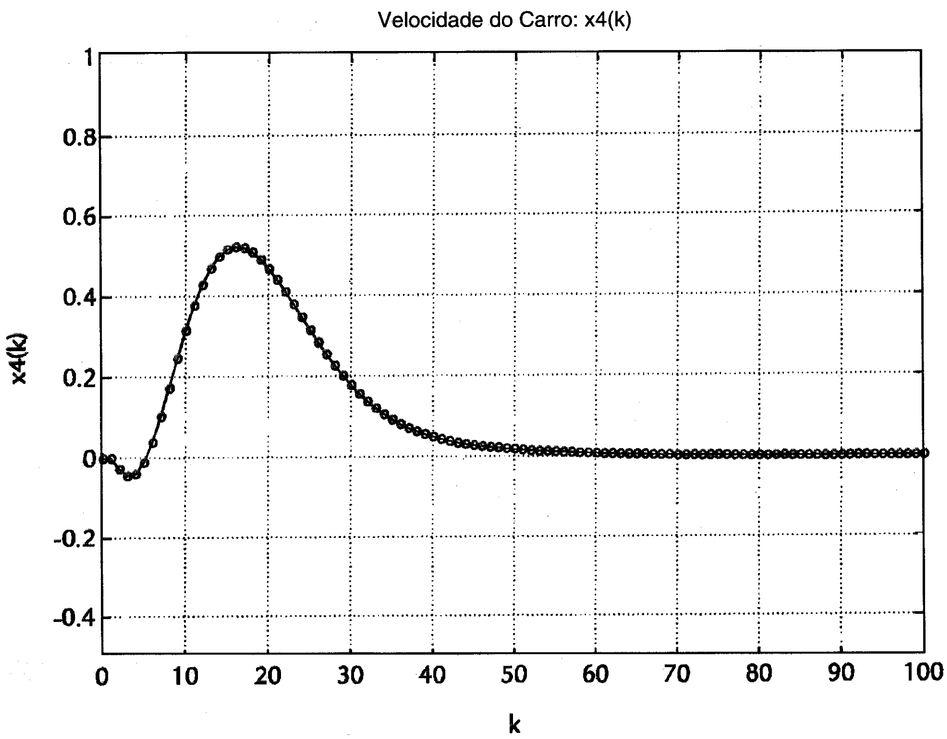

Fig. 4.17

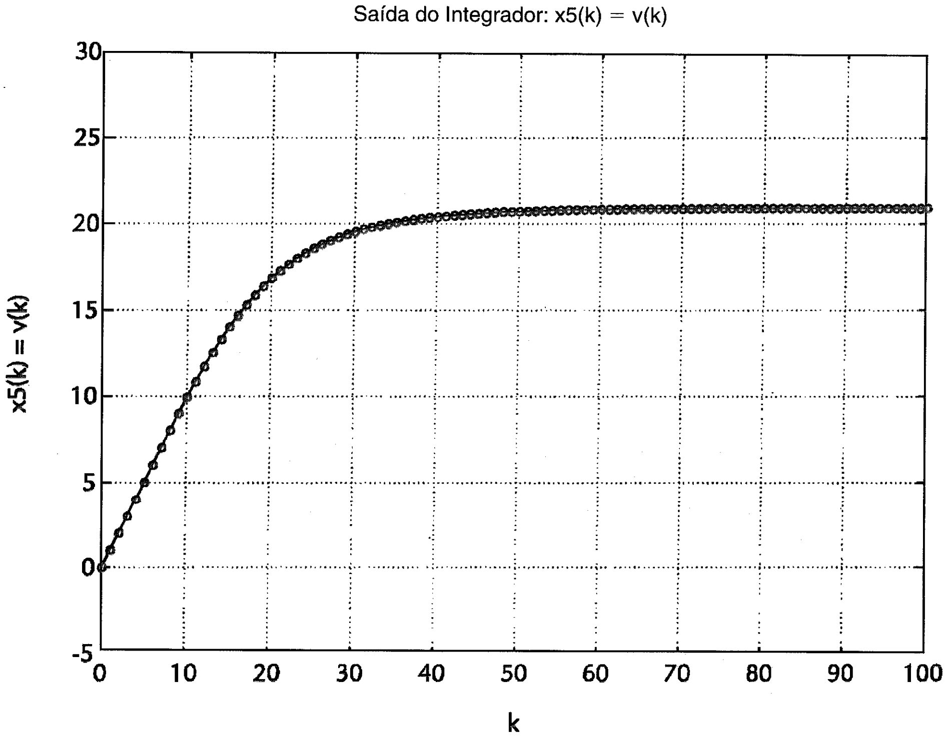

Fig. 4.18

4-5 O PROBLEMA DE CONTROLE DE ENERGIA MÍNIMA

Na discussão dos sistemas de controle de energia mínima, as pseudoinversas desempenham um importante papel. Nesta seção, será feita uma revisão das pseudoinversas e, então, resolvido um problema de controle de energia mínima.

Pseudoinversas

O conceito da pseudoinversa de uma matriz é uma generalização da noção de uma inversa. É útil para encontrar uma 'solução' para um conjunto de equações algébricas nas quais o número de variáveis desconhecidas e o número de equações linearmente independentes não são iguais.

Na seqüência, serão consideradas as pseudoinversas que permitem determinar as soluções de norma mínima.

Solução de norma mínima que minimiza $\|\mathbf{x}\|$

Considere-se uma equação linear algébrica

$$x_1 + 5x_2 = 1$$

Como se têm duas variáveis e somente uma equação, nenhuma solução única existe. Por outro lado, há um número infinito de soluções. Graficamente, qualquer ponto na linha $x_1 + 5x_2 = 1$, como mostrado na Fig. 4-19, é uma possível solução. No entanto, se for decidido pinçar o ponto que seja o mais próximo da origem, a solução se torna única.

Considere-se a equação matricial

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{4-66}$$

onde $\mathbf{A}$ é uma matriz $n \times m$, $\mathbf{x}$ é um vetor m e $\mathbf{b}$ é um vetor n. Admite-se que $m > n$ (isto é, o número de variáveis desconhecidas seja maior do que o número de equações) e que a equação possua um número infinito de soluções. Busca-se encontrar a solução única $\mathbf{x}$ que esteja localizada mais próxima da origem ou que possua a norma mínima $\|\mathbf{x}\|$.

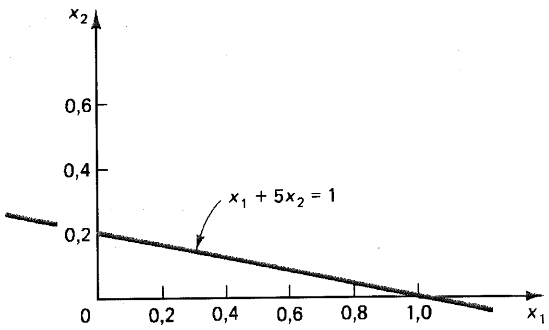

Fig. 4.19

Será definida a solução de norma mínima como $\mathbf{x}^o$. Isto é, $\mathbf{x}^o$ satisfaz a condição $\mathbf{Ax}^o = \mathbf{b}$ e $\|\mathbf{x}^o\| \leq \|\mathbf{x}\|$ para todo $\mathbf{x}$ que satisfizer $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Isto significa que o ponto de solução $\mathbf{x}^o$ está mais próximo da origem do espaço m dimensional dentre todas as possíveis soluções da Eq. (4-66). Obtém-se uma tal solução de norma mínima no seguimento deste capítulo.

Matriz pseudoinversa direita

Para uma equação matricial

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

onde $\mathbf{A}$ é uma matriz $n \times m$ tendo posto (rank) n, $\mathbf{x}$ é um vetor m e $\mathbf{b}$ é um vetor n, a solução que minimiza a norma $\|\mathbf{x}\|$ é dada por

$$\mathbf{x}^o = \mathbf{A}^{RM}\mathbf{b}$$

onde $\mathbf{A}^{RM} = \mathbf{A}'(\mathbf{AA}')^{-1}$, desde que a inversa exista.

Isto pode ser provado como se segue. Primeiro, note-se que a norma $\|\mathbf{x}\|$ pode ser escrita como

$$\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^o + \mathbf{x}^o\| = \|\mathbf{x}^o\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^o\| + 2(\mathbf{x}^o)'(\mathbf{x} - \mathbf{x}^o)$$

Pode ser mostrado que o último termo, $2(\mathbf{x}^o)'(\mathbf{x} - \mathbf{x}^o)$, é igual a zero, uma vez que

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x}^o)'(\mathbf{x} - \mathbf{x}^o) &= [\mathbf{A}'(\mathbf{AA}')^{-1}\mathbf{b}]'[\mathbf{x} - \mathbf{A}'(\mathbf{AA}')^{-1}\mathbf{b}] \\
&= \mathbf{b}'(\mathbf{AA}')^{-1}\mathbf{A}[\mathbf{x} - \mathbf{A}'(\mathbf{AA}')^{-1}\mathbf{b}] \\
&= \mathbf{b}'(\mathbf{AA}')^{-1}[\mathbf{Ax} - (\mathbf{AA}')(\mathbf{AA}')^{-1}\mathbf{b}] \\
&= \mathbf{b}'(\mathbf{AA}')^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{b}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}^o\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^o\|$$

que pode ser reescrita como

$$\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{x}^o\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^o\|$$

Como $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^o\| \geq 0$, obtém-se

$$\|\mathbf{x}\| \geq \|\mathbf{x}^o\|$$

Por conseguinte, mostra-se que $\mathbf{x}^o$ é a solução que fornece a norma mínima $\|\mathbf{x}\|$.

A matriz $\mathbf{A}^{RM} = \mathbf{A}'(\mathbf{AA}')^{-1}$ que produz a solução de norma mínima ($\|\mathbf{x}^o\|$ = mínimo) é chamada de *pseudoinversa direita* ou *inversa direita mínima* de $\mathbf{A}$.

Como mostrado nas discussões precedentes, a pseudoinversa direita $\mathbf{A}^{RM}$ fornece a solução $\mathbf{x}^o = \mathbf{A}^{RM}\mathbf{b}$ que minimiza a norma ou fornece $\|\mathbf{x}^o\|$ = mínimo. Note-se que a pseudoinversa direita $\mathbf{A}^{RM}$ é uma matriz $m \times n$, uma vez que $\mathbf{A}$ é uma matriz $n \times m$ e

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{RM} &= \mathbf{A}'(\mathbf{A}\mathbf{A}')^{-1}\\ &= (\text{matriz } m \times n)(\text{matriz } n \times n)^{-1}\\ &= \text{matriz } m \times n, \qquad m > n\end{aligned}$$

Note-se que a dimensão de $\mathbf{AA}'$ é menor do que a dimensão do vetor $\mathbf{x}$, que é m. Note-se também que a pseudoinversa direita $\mathbf{A}^{RM}$ possui a propriedade de ser, mesmo, uma 'inversa' matricial se premultiplicada por $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{AA}^{RM} = \mathbf{A}[\mathbf{A}'(\mathbf{AA}')^{-1}] = \mathbf{AA}'(\mathbf{AA}')^{-1} = \mathbf{I}_n$$

EXEMPLO 4-10: Pseudoinversa direita

Considere-se a equação matricial

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Como não existe uma solução única para esta equação, vai-se encontrar a solução de norma mínima que minimize $\|\mathbf{x}\|$. Tal solução é dada por

$$\mathbf{x}^o = \mathbf{A}^{RM}\mathbf{b}$$

onde

$$\mathbf{A}^{RM} = \mathbf{A}'(\mathbf{AA}')^{-1}$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^o = \mathbf{A}^{RM}\mathbf{b} &= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} -0{,}5556 \\ 1{,}1111 \\ 2{,}7778 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

O Programa MATLAB 4-14 resolve este problema.

Programa MATLAB 4-14

```
% ---------- Matriz pseudoinversa direita ----------

% ***** Neste programa, encontra-se a solução de norma mínima xopt para
% a equação Ax = b, onde o número de variáveis desconhecidas é
% maior do que o número de equações. A solução de norma mínima
% xopt minimiza a norma ||x||. Isto é, a solução de norma mínima
% xopt é a mais próxima da origem dentre todas as outras muitas
% soluções *****
```

```
% ***** Entrar com as matrizes A e b *****

A = [1  2  3;4  5  6];
b = [10;20];

% ***** A solução de norma mínima é dada por xopt = ARM*b *****

ARM = A'*inv(A*A')

ARM =

   -0.9444    0.4444
   -0.1111    0.1111
    0.7222   -0.2222

xopt = ARM*b

xopt =

   -0.5556
    1.1111
    2.7778

% ***** Note-se que A*ARM é uma matriz identidade 2x2 enquanto que
% ARM*A é uma matriz 3x3 *****

A*ARM

ans =

    1.0000         0
   -0.0000    1.0000

ARM*A

ans =

    0.8333    0.3333   -0.1667
    0.3333    0.3333    0.3333
   -0.1667    0.3333    0.8333
```

Solução que minimiza $\| AX-b \|$

Considere-se a equação matricial

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{4-67}$$

onde $\mathbf{A}$ é uma matriz $n \times m$, $\mathbf{x}$ é um vetor m e $\mathbf{b}$ é um vetor n. Aqui, se admite que $n > m$. Isto é, o número de variáveis desconhecidas é menor do que o número de equações. No sentido clássico, pode haver ou não solução.

Se não existir solução, pode-se desejar encontrar uma 'solução' única que minimize a norma $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|$. Defina-se uma 'solução' para a Eq. (4-67) que minimize $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|$ como $\mathbf{x}^o$. Em outras palavras, $\mathbf{x}^o$ satisfaz a condição

$$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\| \geq \|\mathbf{Ax}^o - \mathbf{b}\|, \quad \textbf{para todo } \mathbf{x}$$

Note-se que $\mathbf{x}^o$ não é uma solução no sentido clássico, uma vez que não satisfaz a equação matricial original $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Por conseguinte, pode-se chamar $\mathbf{x}^o$ de uma 'solução aproximada' no sentido de que a mesma minimiza a norma $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|$. Será obtida uma tal solução aproximada da forma que segue.

Pseudoinversa esquerda

Para uma equação matricial

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

onde $\mathbf{A}$ é uma matriz $n \times m$ de posto m, $\mathbf{x}$ é um vetor m e $\mathbf{b}$ é um vetor n, o vetor $\mathbf{x}^o$ que minimiza a norma $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|$ é dado por

$$\mathbf{x}^o = \mathbf{A}^{LM}\mathbf{b} = (\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{b}$$

onde $\mathbf{A}^{LM} = (\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'$, desde que a inversa indicada exista.

Para verificar isso, note-se primeiro que

$$\begin{aligned}\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\| &= \|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^o) + \mathbf{Ax}^o - \mathbf{b}\| \\ &= \|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^o)\| + \|\mathbf{Ax}^o - \mathbf{b}\| + 2[\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^o)]'(\mathbf{Ax}^o - \mathbf{b})\end{aligned}$$

Pode ser mostrado que o último termo é zero da seguinte forma:

$$\begin{aligned}[\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^o)]'(\mathbf{Ax}^o - \mathbf{b}) &= (\mathbf{x} - \mathbf{x}^o)'\mathbf{A}'[\mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}' - \mathbf{I}_n]\mathbf{b} \\ &= (\mathbf{x} - \mathbf{x}^o)'[(\mathbf{A}'\mathbf{A})(\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}' - \mathbf{A}']\mathbf{b} \\ &= (\mathbf{x} - \mathbf{x}^o)(\mathbf{A}' - \mathbf{A}')\mathbf{b} \\ &= 0\end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\| = \|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^o)\| + \|\mathbf{Ax}^o - \mathbf{b}\|$$

Notando-se que $\|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^o)\| \geq 0$, obtém-se

$$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\| - \|\mathbf{Ax}^o - \mathbf{b}\| = \|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^o)\| \geq 0$$

ou

$$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\| \geq \|\mathbf{Ax}^o - \mathbf{b}\|$$

Por conseguinte,

$$\mathbf{x}^o = \mathbf{A}^{LM}\mathbf{b} = (\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{b}$$

minimiza $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|$.

A matriz $\mathbf{A}^{LM} = (\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'$ é chamada de *pseudoinversa esquerda* ou matriz *inversa esquerda mínima* da matriz $\mathbf{A}$. Note-se que $\mathbf{A}^{LM}$ é de fato a matriz inversa de $\mathbf{A}$, na medida em que, se pós-multiplicada por $\mathbf{A}$, irá fornecer a matriz identidade $\mathbf{I}_m$:

$$\mathbf{A}^{LM}\mathbf{A} = (\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{A} = (\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}'\mathbf{A}) = \mathbf{I}_m$$

EXEMPLO 4.11

Considere-se a seguinte equação matricial:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Será obtida a solução de norma mínima que minimize $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|$. Tal solução de norma mínima é dada por

$$\mathbf{x}^\circ = \mathbf{A}^{LM}\mathbf{b}$$

onde

$$\mathbf{A}^{LM} = (\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^\circ &= (\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{b} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5000 \\ 0{,}6429 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

O Programa MATLAB 4-15 produz a solução para o problema discutido no Exemplo 4-11.

Programa MATLAB 4-15

```
% ---------- Matriz pseudoinversa esquerda ----------

% ***** Neste programa, encontra-se a solução de norma mínima xopt
% para a equação Ax = b, onde o número de variáveis
% desconhecidas é menor do que o número de equações.
% A solução de norma mínima xopt minimiza a norma ||Ax – b|| *****

% ***** Entrar com as matrizes A e b *****

A = [1  1;1  2;1  4];
b = [1;2;3];

% ***** A solução de norma mínima é dada por xopt = ALM*b *****

ALM = inv(A'*A)*A'

ALM =

     1.0000    0.5000   -0.5000
    -0.2857   -0.0714    0.3571

xopt = ALM*b

xopt =

    0.5000
    0.6429

% ***** Note-se que ALM*A é uma matriz identidade 2x2, enquanto que
% A*ALM é uma matriz 3x3 *****

ALM*A
```

```
ans =

    1.0000    0.0000
   -0.0000    1.0000

A*ALM

ans =

    0.7143    0.4286   -0.1429
    0.4286    0.3571    0.2143
   -0.1429    0.2143    0.9286
```

O problema do controle de energia mínima

Se um sistema de controle, de ordem n, linear, de uma entrada, uma saída e discreto no tempo é completamente controlável e se o sinal de controle for escolhido apropriadamente, necessita-se, no máximo, de n períodos de amostragem para trazer um estado inicial para o estado final desejado, uma vez providenciado que o vetor de controle não seja restringido. Por conseguinte, admitindo-se N períodos de amostragem (onde $N > n$), tem-se liberdade extra para satisfazer restrições adicionais.

A quantidade de energia de controle necessária depende do período de tempo (número de períodos de amostragem) permitido para o controle. Se o número de períodos de amostragem permitidos for n, isto é, a ordem do sistema, a seqüência de controle ótima no tempo $u(0)$, $u(1)$, ..., $u(n-1)$ é única. No entanto, se N períodos de amostragem ($N > n$) forem admitidos, mais de uma seqüência de controle será possível. Cada possível seqüência de controle requer uma certa quantidade de energia. Em muitas aplicações, se muitas seqüências de controle são possíveis, é desejável realizar as tarefas de controle usando a menor quantidade de energia de controle.

Aqui será tratado o problema de transferir o estado a partir de um estado arbitrário inicial para um desejado estado final (o qual se considera como sendo a origem do espaço de estados) em N períodos de amostragem e, ao mesmo tempo, usar a energia de controle mínima.

Considere-se o sistema de controle discreto no tempo definido por

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) \tag{4-68}$$

onde $\mathbf{x}(k)$ = vetor de estados (vetor n) ao k-ésimo instante de amostragem
$u(k)$ = sinal de controle (escalar) ao k-ésimo instante de amostragem
$\mathbf{G}$ = matriz não-singular $n \times n$
$\mathbf{H}$ = matriz $n \times 1$

Vai-se determinar a lei de controle que irá trazer o sistema a partir de um estado inicial arbitrário para a origem em N períodos de amostragem (onde $N > n$) usando uma quantidade de energia de controle mínima, onde a energia de controle é medida por

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} u^2(k)$$

Vai-se admitir que o sistema seja completamente controlável.

O estado $\mathbf{x}(N)$ da Eq. (4-68) pode ser dado por

$$\mathbf{x}(N) = \mathbf{G}^N\mathbf{x}(0) + \mathbf{G}^{N-1}\mathbf{H}u(0) + \mathbf{G}^{N-2}\mathbf{H}u(1) + \cdots + \mathbf{G}\mathbf{H}u(N-2) + \mathbf{H}u(N-1)$$

Substituindo $\mathbf{x}(N)$ por $\mathbf{0}$ nesta última equação, obtém-se

$$\mathbf{x}(0) = -\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}u(0) - \mathbf{G}^{-2}\mathbf{H}u(1) - \cdots - \mathbf{G}^{-N+1}\mathbf{H}u(N-2) - \mathbf{G}^{-N}\mathbf{H}u(N-1) \tag{4-69}$$

Defina-se

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{G}^{-i}\mathbf{H}$$

A Eq. (4-69), então se torna

$$\mathbf{x}(0) = -\mathbf{f}_1 u(0) - \mathbf{f}_2 u(1) - \cdots - \mathbf{f}_{N-1} u(N-2) - \mathbf{f}_N u(N-1) \tag{4-70}$$

Como o sistema é completamente controlável, os vetores $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, ..., $\mathbf{f}_n$ são linearmente independentes. (Os $N - n$ vetores remanescentes podem ser expressos como combinações lineares desses n vetores linearmente independentes.) A Eq. (4-70) pode ser reescrita como

$$\mathbf{x}(0) = -\mathbf{F}\mathbf{U} \tag{4-71}$$

onde

$$\mathbf{F} = [\mathbf{f}_1 \vdots \mathbf{f}_2 \vdots \cdots \vdots \mathbf{f}_N], \qquad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(N-1) \end{bmatrix}$$

Vai-se agora encontrar a seqüência de controle que satisfaz a Eq. (4-71) e ao mesmo tempo minimiza a energia total de controle. Note-se que a matriz $\mathbf{F}$ é $n \times N$ e possui posto n. Como $\mathbf{F}$ não é uma matriz quadrada, sua inversa não é definida. Note-se que, como $N > n$, o número de sinais de controle desconhecidos $u(0)$, $u(1)$, ..., $u(N\text{-}1)$ na Eq. (4-71) é maior do que o número n de equações escalares componentes. Um conjunto de equações escalares numa tal situação é dito ser *subdeterminado* e possui um número infinito de soluções. No entanto, no caso presente, tem-se a restrição de que um conjunto de N variáveis desconhecidas $u(0)$, $u(1)$, ..., $u(N-1)$ dá a seguinte norma

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} u^2(k) = \text{mínimo}$$

Então, existe uma solução única. Tal solução única fornece a seqüência de controle que traz um estado inicial arbitrário $\mathbf{x}(0)$ para a origem em N períodos de amostragem e, ao assim fazer, minimiza a energia total de controle.

A solução minimizante num problema deste tipo, para o qual o número de variáveis desconhecidas é maior do que o de equações, pode ser obtida em termos da pseudoinversa direita $\mathbf{F}^{RM}$, onde

$$\mathbf{F}^{RM} = \mathbf{F}'(\mathbf{F}\mathbf{F}')^{-1} \tag{4-72}$$

Fazendo-se uso da pseudoinversa direita, a seqüência de controle de energia mínima $u(0)$, $u(1)$, ..., $u(N-1)$, que transfere um estado arbitrário inicial $\mathbf{x}(0)$ para a origem, pode ser dada por

$$\mathbf{U} = -\mathbf{F}^{RM}\mathbf{x}(0) = -\mathbf{F}'(\mathbf{F}\mathbf{F}')^{-1}\mathbf{x}(0) \tag{4-73}$$

Note-se que $\mathbf{F}'(\mathbf{F}\mathbf{F}')^{-1}$ é uma matriz $N \times n$. Por conseguinte, $\mathbf{F}'(\mathbf{F}\mathbf{F}')^{-1}$ pós-multiplicada por $\mathbf{x}(0)$ é uma matriz $N \times 1$. A Eq. (4-73) pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(N-1) \end{bmatrix} = -\mathbf{F}'(\mathbf{F}\mathbf{F}')^{-1}\mathbf{x}(0) \tag{4-74}$$

A seqüência de controle dada pela Eq. (4-74) irá trazer um estado inicial arbitrário para a origem em N períodos de amostragem e irá demandar energia de controle mínima dentre todas as possíveis seqüências de controle requerendo N períodos de amostragem.

EXEMPLO 4.12

Considere-se o sistema

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) \tag{4-75}$$

onde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}6321 \\ 0 & 0{,}3679 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0{,}3679 \\ 0{,}6321 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix}$$

É desejado trazer o estado inicial para a origem em três períodos de amostragem. (O período de amostragem é suposto ser igual a 1s.) Dentre as infinitas escolhas possíveis para a seqüência de controle, determinar a seqüência de controle ótima que irá minimizar a energia de controle, ou irá minimizar o índice de desempenho:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2} u^2(k)$$

A partir da Eq. (4-70), o estado inicial $\mathbf{x}(0)$ pode ser escrito como

$$\mathbf{x}(0) = -\mathbf{f}_1 u(0) - \mathbf{f}_2 u(1) - \mathbf{f}_3 u(2)$$

onde

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -0{,}7181 \\ 1{,}7181 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}_2 = \mathbf{G}^{-2}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -3{,}6701 \\ 4{,}6701 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}_3 = \mathbf{G}^{-3}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -11{,}6939 \\ 12{,}6939 \end{bmatrix}$$

Por conseguinte,

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -0{,}7181 \\ 1{,}7181 \end{bmatrix} u(0) - \begin{bmatrix} -3{,}6701 \\ 4{,}6701 \end{bmatrix} u(1) - \begin{bmatrix} -11{,}6939 \\ 12{,}6939 \end{bmatrix} u(2)$$

ou

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -0{,}7181 & -3{,}6701 & -11{,}6939 \\ 1{,}7181 & 4{,}6701 & 12{,}6939 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \end{bmatrix} \tag{4-76}$$

Fazendo uso da pseudoinversa direita, pode-se dar como solução de norma mínima para a Eq. (4-76)

$$\begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \end{bmatrix} = -\mathbf{F}^{RM}\mathbf{x}(0) = -\mathbf{F}'(\mathbf{F}\mathbf{F}')^{-1} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

onde

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -0{,}7181 & -3{,}6701 & -11{,}6939 \\ 1{,}7181 & 4{,}6701 & 12{,}6939 \end{bmatrix}$$

A pseudoinversa direita $\mathbf{F}^{RM}$ é determinada como a seguir:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{RM} = \mathbf{F}'(\mathbf{F}\mathbf{F}')^{-1} &= \begin{bmatrix} -0{,}7181 & 1{,}7181 \\ -3{,}6701 & 4{,}6701 \\ -11{,}6939 & 12{,}6939 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 150{,}7326 & -166{,}8147 \\ -166{,}8147 & 185{,}8968 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0{,}7910 & 0{,}7191 \\ 0{,}5000 & 0{,}4738 \\ -0{,}2910 & -0{,}1929 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0{,}7910 & 0{,}7191 \\ 0{,}5000 & 0{,}4738 \\ -0{,}2910 & -0{,}1929 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}3598 \\ -0{,}1310 \\ 0{,}4908 \end{bmatrix} \tag{4-77}$$

A seqüência de controle dada pela Eq. (4-77) irá trazer o estado para a origem em três períodos de amostragem e, também, minimizar a energia total de controle.

Usando-se a seqüência de controle ótima dada pela Eq. (4-77), o estado pode ser transferido como se segue:

$$\begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}6321 \\ 0 & 0{,}3679 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}3679 \\ 0{,}6321 \end{bmatrix}[-0{,}3598] = \begin{bmatrix} 1{,}7071 \\ -2{,}0669 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}6321 \\ 0 & 0{,}3679 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1{,}7071 \\ -2{,}0669 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}3679 \\ 0{,}6321 \end{bmatrix}[-0{,}1310] = \begin{bmatrix} 0{,}3524 \\ -0{,}8432 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(3) \\ x_2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}6321 \\ 0 & 0{,}3679 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}3524 \\ -0{,}8432 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}3679 \\ 0{,}6321 \end{bmatrix}[0{,}4908] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A energia mínima requerida para este controle é

$$\begin{aligned} J_{\min} &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2} u^2(k) = \frac{1}{2}[u^2(0) + u^2(1) + u^2(2)] = \frac{1}{2}[(-0{,}3598)^2 + (-0{,}1310)^2 + (0{,}4908)^2] \\ &= 0{,}1937 \end{aligned}$$

O Programa MATLAB 4-16 resolve este problema de controle de energia mínima.

Programa MATLAB 4-16

```
% ---------- Problema de controle de energia mínima ----------

% ***** Solução do problema de controle de energia mínima, onde
% o número de variáveis desconhecidas é maior do que o de
% equações, obtida através do uso de pseudoinversas *****

% ***** Entrar com as matrizes G, H e x0 *****

G = [1  0.6321;0  0.3679];
H = [0.3679;0.6321];
x0 = [5;-5];

% ***** Entrar com as matrizes f1, f2 e f3 *****

f1 = inv(G)*H;
f2 = inv(G)^2*H;
f3 = inv(G)^3*H;

% ***** Entrar com a matriz F = [f1 f2 f3] e calcular a pseudoinversa
% direta FRM = F'*inv(F*F') *****

F = [f1  f2  f3];
FRM = F'*inv(F*F')
FRM =

    0.7910     0.7191
    0.5000     0.4738
   -0.2910    -0.1929

% ***** O controle ótimo uopt pode ser dado por *****

uopt = - FRM*x0
```

```
uopt =

     -0.3598
     -0.1310
      0.4908

u0 = uopt(1), u1 = uopt(2), u2 = uopt(3)

u0 =

   -0.3598

u1 =

     -0.1310

u2 =

      0.4908

% ***** O valor mínimo do índice de desempenho J pode ser
% dado por *****

Jmin = 0.5*uopt'*uopt

Jmin =

      0.1937

% ***** Para verificar que o estado atinge a origem em três
% períodos de amostragem, entrar com as seguintes equações
% e calcular x3 *****

x1 = G*x0 + H*u0

x1 =

      1.7071
     -2.0669

x2 = G*x1 + H*u1

x2 =

      0.3524
     -0.8432

x3 = G*x2 + H*u2

x3 =

   1.0e - 014 *

     -0.7105
      0.3053
```