
No capítulo anterior foram introduzidos os conceitos de diagramas de blocos e de função de transferência sem todavia os formalizarmos. Vamos fazê-lo neste capítulo, bem como introduzir um outro método de representação, diagramas de fluxo de sinal.

3.1 Funções de transferência e diagramas de blocos

Vimos no capítulo anterior que um sistema linear, invariante no tempo, pode ser descrito por uma equação diferencial de coeficientes constantes. Considerando condições iniciais nulas (condição necessária para o sistema ser causal), se aplicarmos a transformada de Laplace unilateral, a função de transferência é a relação entre as transformadas do sinal de saída relativamente à entrada. Atendendo a que a transformada de Laplace de um Dirac é 1, a transformada de Laplace da resposta impulsional de um sistema é equivalente à função de transferência.

Esquematicamente, uma função de transferência pode ser representada como se indica na fig. 3.1.

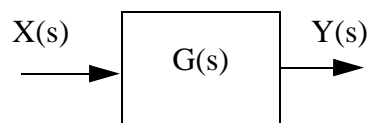


FIGURE 3.1 - Função de transferência

Um sistema tem, como vimos, várias componentes. Podemos assim representá-lo como uma interligação de várias funções de transferência, como mostra a fig. 3.2. Esta representação é denominada de diagrama de blocos.

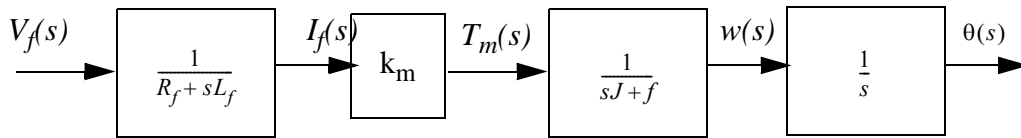


FIGURE 3.2 - Diagrama de blocos de um motor DC controlado pelo indutor

Para o caso do sistema anterior, temos apenas uma variável de entrada, $V_f(s)$, e uma variável de saída, $\theta(s)$ - sistema SISO (*single input, single output*). Num caso mais geral podemos ter várias variáveis de entrada (m), e várias variáveis de saída (n) - sistema MIMO (*multiple inputs, multiple outputs*).

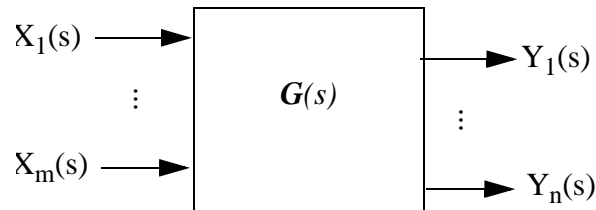


FIGURE 3.3 - Sistema multi-entrada-multi-saída

Neste caso, as saídas são dadas por:

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= G_{11}(s)X_1(s) + \dots + G_{1m}(s)X_m(s) \\ Y_i(s) &= G_{i1}(s)X_1(s) + \dots + G_{im}(s)X_m(s) \\ Y_n(s) &= G_{n1}(s)X_1(s) + \dots + G_{nm}(s)X_m(s) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Este sistema de equações pode também ser escrito na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ \dots \\ Y_i(s) \\ \dots \\ Y_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & \dots & G_{1j}(s) & \dots & G_{1m}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{i1}(s) & \dots & G_{ij}(s) & \dots & G_{im}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{n1}(s) & \dots & G_{nj}(s) & \dots & G_{nm}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ \dots \\ X_j(s) \\ \dots \\ X_m(s) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

3.2 Sistemas em malha fechada

A figura seguinte representa um sistema de controlo possuindo uma malha de realimentação negativa.

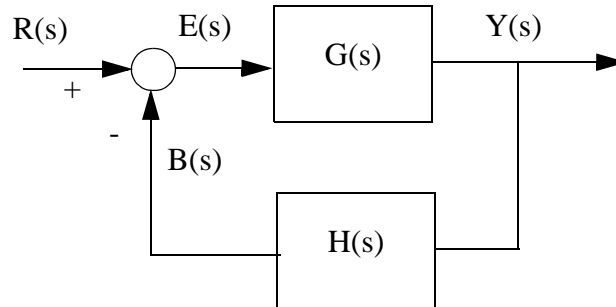


FIGURE 3.4 - Sistema de controlo em malha fechada

Este é o diagrama de blocos que será mais estudado nesta disciplina. Os sinais e blocos intervenientes na fig. 3.4 são:

- $R(s)$ - sinal de referência
- $B(s)$ - sinal de realimentação
- $E(s)$ - sinal de erro
- $Y(s)$ - sinal de saída
- $G(s)$ - processo a controlar (*plant*)
- $H(s)$ - bloco de realimentação

As equações que descrevem o sistema em malha fechada são:

$$E(s) = R(s) - B(s) \quad (3.3)$$

$$Y(s) = G(s)E(s) \quad (3.4)$$

$$B(s) = H(s)Y(s) \quad (3.5)$$

Substituindo (3.5) em (3.3), e (3.3) em (3.4), temos:

$$Y(s) = G(s)[R(s) - H(s)Y(s)] \quad (3.6)$$

Rearranjando, temos:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (3.7)$$

Esta equação é a função de transferência em malha fechada. Além desta função de transferência, é normal definir-se:

- função de transferência para a frente:

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = G(s) \quad (3.8)$$

- função de transferência em malha aberta:

$$G(s)H(s) \quad (3.9)$$

- equação característica do sistema:

$$\Delta(s) = 1 + G(s)H(s) \quad (3.10)$$

Em muitos sistemas $H(s) = 1$, dizendo-se assim que o sistema possui realimentação unitária.

3.3 Resolução de diagramas de blocos

Quando o diagrama de blocos se torna complicado, é aconselhável reduzi-lo a um diagrama mais simples. Para isto podem ser utilizadas as seguintes regras de redução de diagramas de blocos:

- Série ou cascata de blocos:

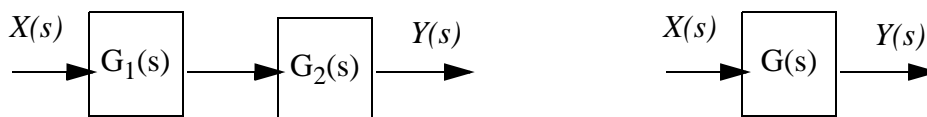


FIGURE 3.5 - Série de blocos

A função de transferência resultante é o produto das funções de transferência, ou seja:

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) \quad (3.11)$$

- Blocos em paralelo:

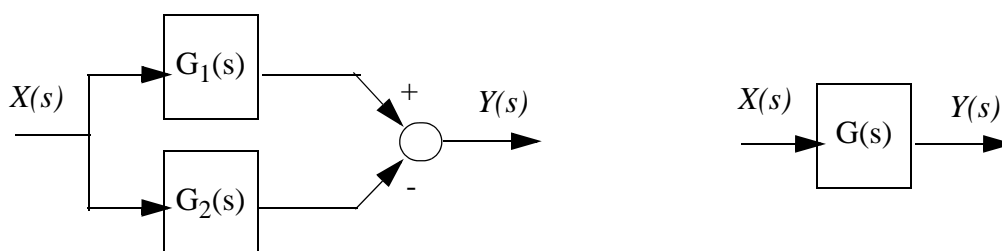


FIGURE 3.6 - Blocos em paralelo

A função de transferência resultante é a soma algébrica das funções de transferência, ou seja:

$$G(s) = G_1(s) - G_2(s) \quad (3.12)$$

- Movimentação de nós:



FIGURE 3.7 - Movimentação de nós

Movimentando um nó para depois de um bloco, podemos recuperar o sinal através da multiplicação pela função de transferência recíproca:

$$A(s) = \frac{Y(s)}{G(s)} = \frac{X(s)G(s)}{G(s)} = X(s) \quad (3.13)$$

- Movimentação de um ponto de soma:

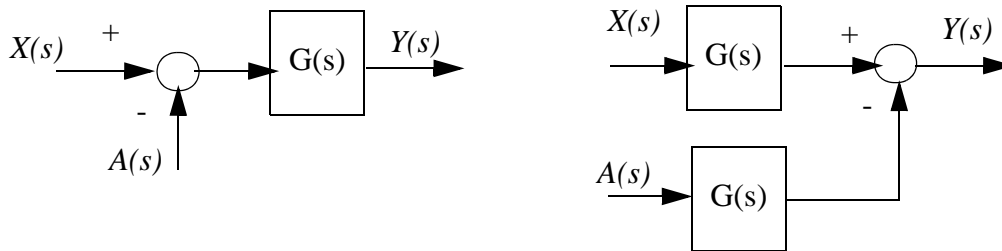


FIGURE 3.8 - Movimentação de um ponto de soma

É possível mudar um ponto de soma de atrás de um bloco para à frente de um bloco adicionando uma função de transferência. Analisando a fig. 3.8, à esquerda temos:

$$Y(s) = G(s)[X(s) - A(s)], \quad (3.14)$$

enquanto à direita:

$$Y(s) = G(s)X(s) - G(s)A(s) \quad (3.15)$$

3.4 Diagramas de fluxo de sinal

A utilização das regras atrás descritas a um diagrama de um sistema complexo, além de constituir uma tarefa trabalhosa, é ainda dificultada por não existir uma metodologia para aplicação dessas regras. Uma representação alternativa aos diagramas de blocos foi proposta por Mason, apresentando esta formulação a vantagem de existir um procedimento que permite obter a função de transferência global para qualquer sistema, independentemente da sua complexidade.

Um diagrama de fluxo de sinal é um grafo, constituído por nós (que representam os sinais), ligados por ramos orientados, que tem associado a função de transferência (na nomenclatura usada a transmitância ou ganho) existente entre os dois sinais. O sinal em cada nó é a soma dos sinais transmitidos pelos ramos que chegam a esse nó. Definem-se como nós fonte os nós donde só partem ramos (correspondem a variáveis independentes) e como nós poço os nós onde só chegam ramos. Os nós do diagrama que não são nem nós poço nem nós fonte são denominados nós mistos.

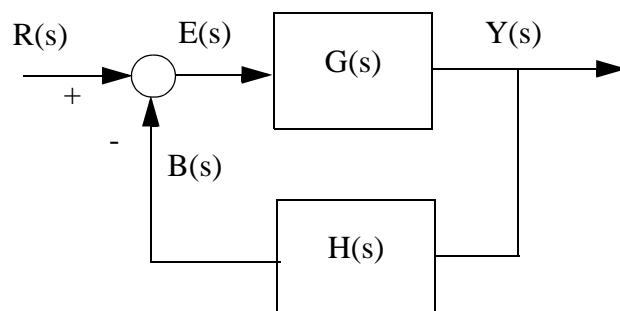


FIGURE 3.9 - Sistema em malha fechada - diagrama de blocos

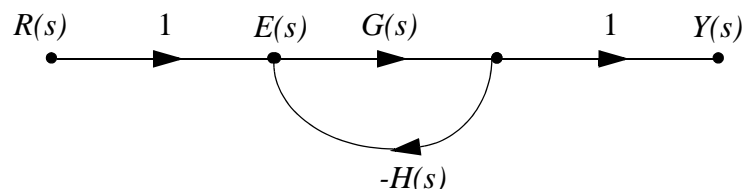


FIGURE 3.10 - Sistema em malha fechada - fluxo de sinal

As figuras anteriores representam um sistema de controlo em malha fechada, utilizando um diagrama de blocos e de fluxo de sinal. No segundo, a variável $B(s)$ foi absorvida, por não ser necessária. Se se quiser representá-la, pode-se adicionar um ramo com transmitância 1 na

malha de realimentação. Note também que foi adicionando um ramo de transmitância unitária à saída, para transformar $Y(s)$ num nó poço.

Para se construir um diagrama de fluxo de sinal a partir de um sistema, atribuímos a cada variável de interesse (correntes e tensões, para sistemas eléctricos, forças e posições ou velocidades para sistemas mecânicos, etc.) um nó no grafo. De seguida ligamo-los de acordo com a relação entre as variáveis.

3.5 Resolução de diagramas de fluxo de sinal

Conforme atrás dito, uma das vantagens desta representação é a existência de uma metodologia para determinar a função de transferência entre qualquer nó fonte e nó poço.

Antes de apresentar o que é conhecido como regra de Mason, vamos introduzir algumas definições:

- Caminho é uma sequência de ramos ligados cujas setas apontem no mesmo sentido;
- Caminho para a frente entre dois nós é um caminho que liga os dois nós passando apenas uma vez por qualquer nó existente ao longo do caminho;
- Caminho de realimentação é um caminho que começa e termina no mesmo nó.

Um diagrama de fluxo de sinal pode ser simplificado através da aplicação das seguintes regras:

- Caminho em série:

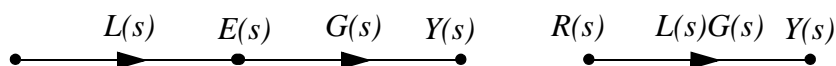


FIGURE 3.11 - Caminhos em série

- Caminhos em paralelo:

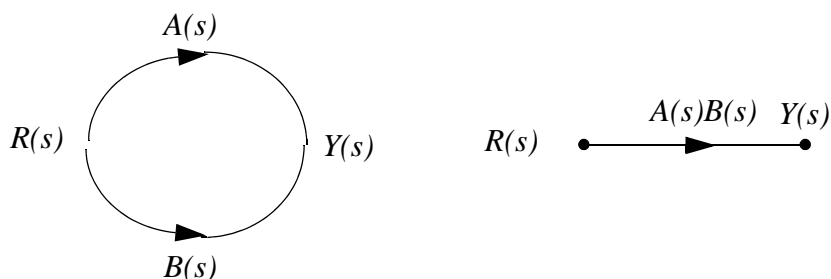


FIGURE 3.12 - Caminhos em paralelo

- Absorção de nós:

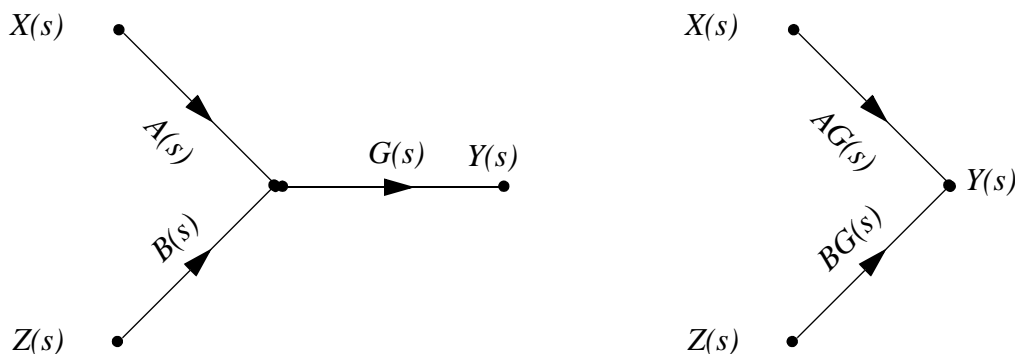


FIGURE 3.13 - Absorção de nós

Estas regras podem ser aplicadas arbitrariamente a um diagrama complexo, sendo o processo equivalente a uma redução de diagrama de blocos. A regra de Mason permite determinar a transmitância global entre qualquer nó fonte e qualquer nó poço. A transmitância é dada por:

$$T = \frac{\sum T_i \Delta_i}{\Delta}, \quad (3.16)$$

onde:

- T_i é a transmitância do i -ésimo caminho para a frente entre o nó fonte e o nó poço;
- Δ é o determinante do diagrama e é dado por:

$$\Delta = 1 - \sum L_{1i} + \sum L_{2j} - \sum L_{3k} + \dots \quad (3.17)$$

1. L_{1i} é a transmitância da i -ésima malha fechada do diagrama, sendo $\sum L_{1i}$ a soma das transmitâncias de todas as malhas fechadas
 2. L_{2j} é o produto das transmitâncias de duas malhas fechadas que não se toquem, isto é, que não tenham nenhum nó comum. $\sum L_{2j}$ é a soma das transmitâncias de todas as combinações possíveis de malhas fechadas que não se toquem, duas a duas;
 3. L_{3k} é o produto das transmitâncias de três malhas fechadas que não se toquem, isto é, que não tenham nenhum nó comum. $\sum L_{3k}$ é a soma das transmitâncias de todas as combinações possíveis de malhas fechadas que não se toquem, três a três.
- Δ_i é o cofactor do i -ésimo caminho para a frente. Obtém-se calculando o determinante (utilizando os passos anteriores) do diagrama que resta retirando o i -ésimo caminho para a frente, isto é, todos os nós e ramos que pertencem a esse caminho.