UFAM – UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
FT – FACULDADE DE TECNOLOGIA
FT-02 – ENGENHARIA ELÉTRICA

SISTEMA DE CONTROLE

PROJETO DE GRADUAÇÃO

DANIEL ROCHA DE SOUSA – 21000544

LUCIANO LOURENÇO F. DA SILVA – 20902459

RAPHAEL RODRIGUES COSTA – 20810597

MANAUS/AM

2013

UFAM – UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
FT – FACULDADE DE TECNOLOGIA
FT-02 – ENGENHARIA ELÉTRICA

DANIEL ROCHA DE SOUSA – 21000544

LUCIANO LOURENÇO F. DA SILVA – 20902459

RAPHAEL RODRIGUES COSTA – 20810597

SISTEMA DE CONTROLE

PROJETO DE GRADUAÇÃO

Trabalho referente à disciplina de Sistema de Controle, do sexto período de Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Amazonas, como requisito para obtenção da 3ª nota parcial da disciplina.

Orientador: Professor MsC. Valdir Sampaio

MANAUS

2013

PROJETO 1 - SISTEMA DE CONTROLE

CÁLCULO DOS VALORES DOS PARÂMETROS

$$p_i = \frac{\sum_{j=i}^{3} centena\ da\ matrícula\ do\ aluno\ j}{\sum_{j=i}^{3} dezena\ da\ matrícula\ do\ aluno\ j}$$

$$p_{ij} = \frac{Min(centena\ da\ matrícula\ dos\ alunos)}{Max(dezena\ da\ matrícula\ dos\ alunos)}$$

$$d_i = \frac{\sum_{j=i}^{3} dezena\ da\ matrícula\ do\ aluno\ j}{\sum_{j=i}^{3} unidade\ da\ matrícula\ do\ aluno\ j}$$

$$d_{ij} = \frac{Min(dezena\ da\ matrícula\ dos\ alunos)}{Max(dezena\ da\ matrícula\ dos\ alunos)}$$

Aluno 1: 20810597 – Raphael

Aluno 2: 20902459 – Luciano

Aluno 3: 21000544 – Daniel

$$p_1 = \frac{500 + 400 + 500}{90 + 50 + 40} = \frac{1400}{180} = 7{,}78$$

$$p_2 = \frac{400 + 500}{50 + 40} = 10$$

$$d_1 = \frac{90 + 50 + 40}{7 + 9 + 4} = \frac{180}{20} = 9$$

$$p_{12} = \frac{400}{90} = 4{,}44$$

$$d_{12} = \frac{40}{90} = 0{,}44$$

Opções:

1 – Pêndulo Invertido

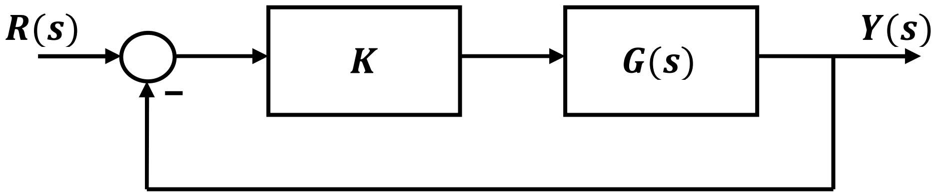
2 – Controle de nível em tanques acoplados

3 – Bola e beam

4 - Levitron

$$OPÇÃO = 1 + mod(90 + 50 + 40{,}3) = 1$$

1º) No diagrama de blocos abaixo $G(s) = \frac{K_1}{(s+p_{12})(s+p_1)(s+p_2)}$, onde $K_1 = p_1 p_2$.



Projete um controlador (P, PD, PI ou PID) para obter erro de regime ao degrau igual a zero, $\zeta = 0,707$ e $t_s < 3\ s$. Simule o sistema para $r(t) = \delta_{-1}(t)$. Comente os resultados.

<u>RESOLUÇÃO</u>

As especificações de projeto são as seguintes:

$$especificações \begin{cases} e_{ss} = 0\ (ao\ degrau) \\ \zeta = 0{,}707 \\ t_s < 3\ s \end{cases}$$

Substituindo os valores de P_1, P_2 e P_{12}, temos o seguinte sistema para controlar:

$$K_1 = p_1 p_2 = 7{,}78 \cdot 10 = 77{,}8$$

$$G(s) = \frac{K_1}{(s+p_{12})(s+p_1)(s+p_2)} = \frac{77{,}8}{(s+4{,}44)(s+7{,}78)(s+10)}$$

$$G(s) = \frac{77{,}8}{s^3 + 22{,}22\ s^2 + 156{,}74\ s + 345{,}43}$$

Utilizando um controlador PI para satisfazer as especificações:

$$K_1 + \frac{K_2}{s}$$

O diagrama de blocos fica o seguinte:

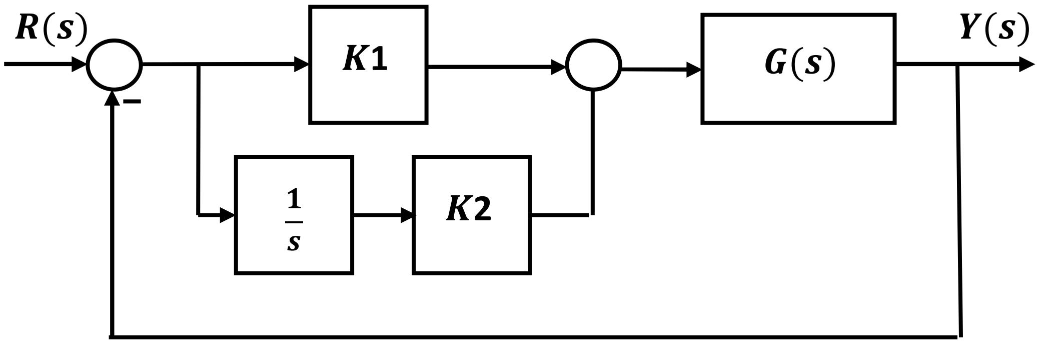


Figura 1 - Diagrama de blocos

Verificando o erro de regime permanente:

$$K_p = \lim_{s \to 0} \left(K_1 + \frac{K_2}{s}\right)\left(\frac{77{,}88}{(s+4{,}44)(s+7{,}78)(s+10)}\right)$$

$$K_p = \lim_{s \to 0} \left(\frac{sK_1 + K_2}{s}\right)\left(\frac{77{,}88}{(s+4{,}44)(s+7{,}78)(s+10)}\right)$$

$$K_p = \lim_{s \to 0} \left(\frac{K_2}{s}\right)\left(\frac{77{,}88}{(4{,}44)(7{,}78)(10)}\right)$$

$$K_p = \lim_{s \to 0} \frac{77{,}8 \cdot K_2}{345{,}432\ s}$$

$$K_p = \infty$$

$$e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{1+\infty}$$

$$\boxed{e_{ss} = 0}$$

Portanto, já é satisfeita a primeira condição.

Para a segunda condição ($\zeta = 0{,}707$), será necessário determinar os valores de K_1 e K_2, que satisfaçam o especificado, através dos respectivos rootlocus.

1º Rootlocus: $K_1 = livre \ e \ K_2 = 0$

O polinômio característico em malha fechada é o seguinte:

$$1 + K_1 G(s) = 0$$

$$1 + K_1 \left(\frac{77{,}88}{(s + 4{,}44)(s + 7{,}78)(s + 10)} \right) = 0$$

Traçando o rootlocus para $G(s)$, temos o seguinte gráfico:

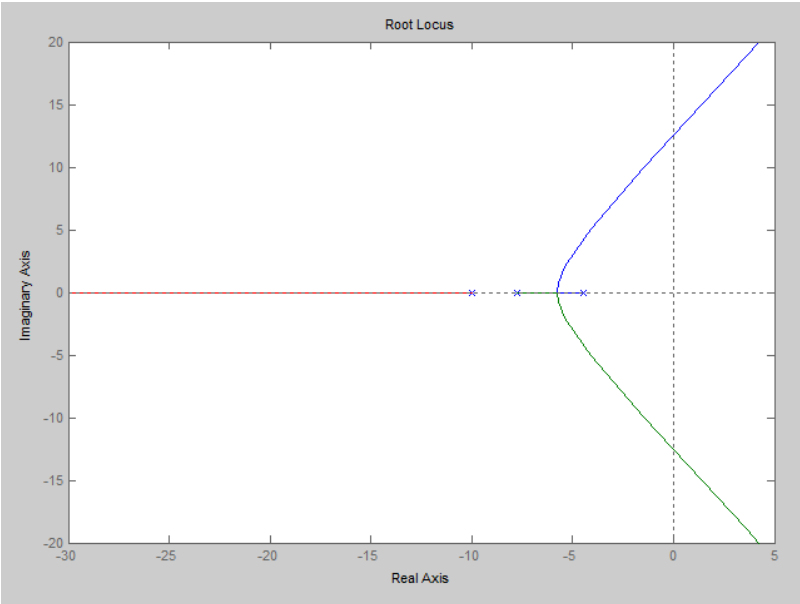


Figura 2 - 1º rootlocus

Colocando a reta de $\zeta = 0{,}707$

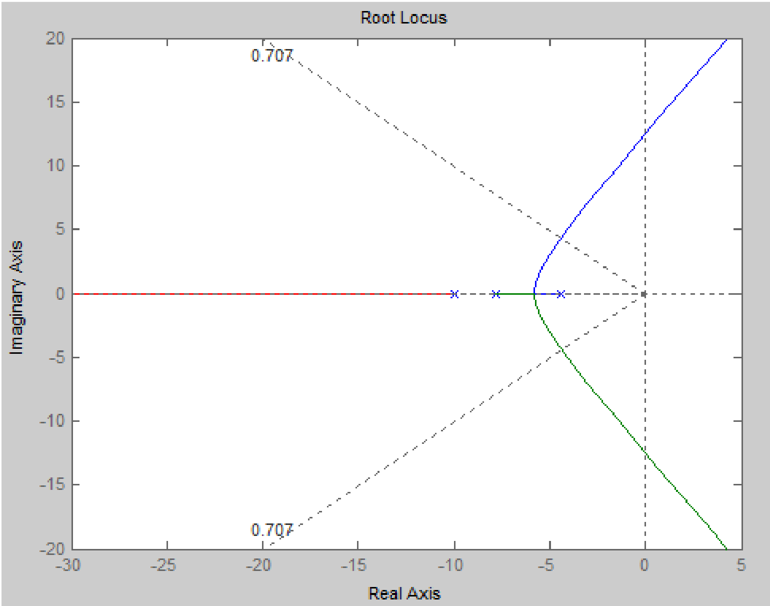


Figura 3 - 1º rootlocus com a reta ζ

Escolhemos um ponto que faça o segundo rootlocus cruzar com a reta de ζ. O ponto escolhido deve ser abaixo da reta de ζ, para que o segundo rootlocus cruze com a reta de ζ. Foram feitos testes com pontos acima da reta ζ, mas o segundo rootlocus não cruzava com a reta ζ, conforme a figura abaixo:

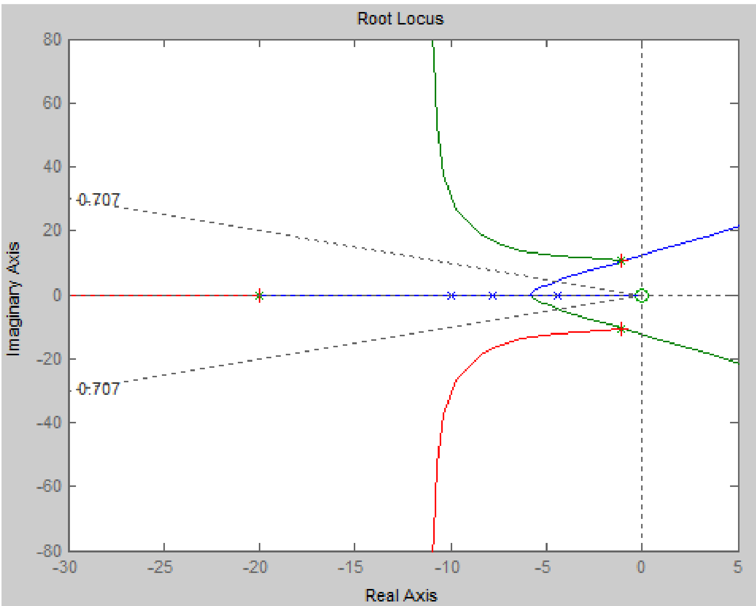


Figura 4 - 1º rootlocus com escolha errada de K1

O ponto escolhido corretamente, abaixo da reta ζ, nos dá $K_1 = 1{,}1449$.

2º Rootlocus: $K_1 \Rightarrow fixo\ \ e\ \ K_2 = livre$

$$1 + \left(K_1 + \frac{K_2}{s}\right)\frac{77{,}78}{s^3 + 22{,}22\,s^2 + 156{,}74\,s + 345{,}43} = 0$$

$$1 + \left(\frac{K_1 s + K_2}{s}\right)\frac{77{,}78}{s^3 + 22{,}22\,s^2 + 156{,}74\,s + 345{,}43} = 0$$

$$1 + \frac{77{,}78K_1 s + 77{,}78K_2}{s^4 + 22{,}22\,s^3 + 156{,}74\,s^2 + 345{,}43s} = 0$$

$$s^4 + 22{,}22\,s^3 + 156{,}74\,s^2 + (345{,}43 + 77{,}78K_1)s + 77{,}78K_2 = 0$$

$$\frac{s^4 + 22{,}22\,s^3 + 156{,}74\,s^2 + (345{,}43 + 77{,}78K_1)s}{s^4 + 22{,}22\,s^3 + 156{,}74\,s^2 + (345{,}43 + 77{,}78K_1)s} + \frac{77{,}782K_2}{s^4 + 22{,}22\,s^3 + 156{,}74\,s^2 + (345{,}43 + 77{,}78K_1)s} = 0$$

$$1 + K_2\frac{77{,}78}{s^4 + 22{,}22\,s^3 + 156{,}74\,s^2 + (345{,}43 + 77{,}78K_1)s} = 0$$

Traçando o rootlocus para o polinômio acima, temos o seguinte gráfico:

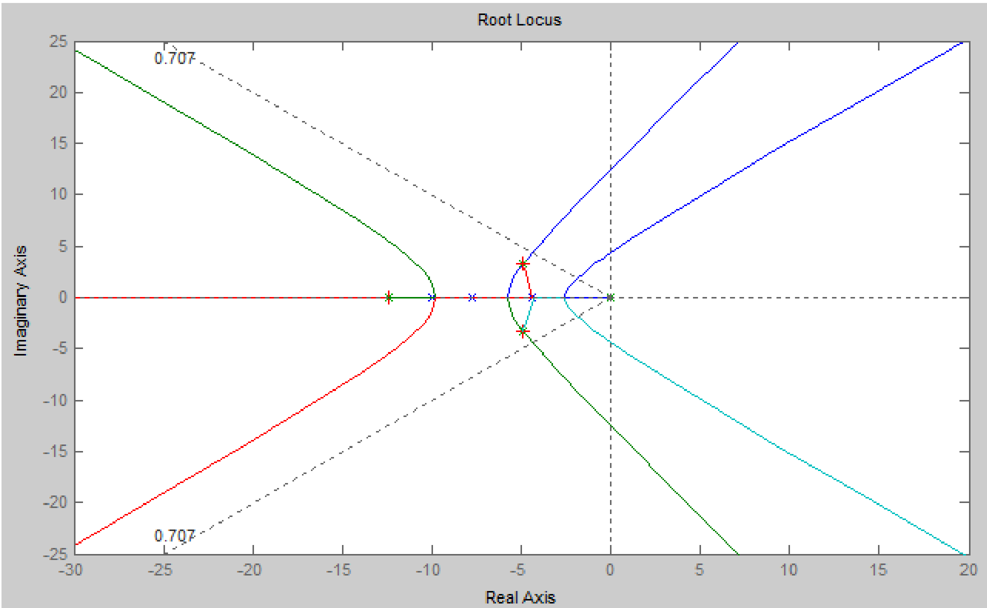


Figura 5- 2º rootlocus para K1=1,449

Escolhendo o ponto no cruzamento do 2º rootlocus com a reta ζ, temos $K_2 = 7{,}3164$. Portanto, é satisfeita a segunda condição.

Para calcularmos o tempo de acomodação t_s, usamos a seguinte fórmula:

$$t_s = \frac{4{,}5\zeta}{\omega_n} \qquad (\zeta > 6{,}9)$$

Para calcularmos o valor de ω_n, devemos saber qual o valor dos polos complexos para $K_2 = 7{,}3164$. Sabemos pelo MATLAB, quais são esses polos $(-1{,}9043 \pm j1{,}8803)$, portanto:

$$\omega_n = \sqrt{(-1{,}9043)^2 + (1{,}8803)^2}$$

$$\omega_n = 2{,}67\ rad/s$$

$$t_s = \frac{4{,}5(0{,}707)}{2{,}67} = 1{,}19\ s$$

Portanto, também é satisfeita a terceira condição. Monta-se a planta no simulink, onde colocamos os valores de K_1 e K_2 encontrados anteriormente:

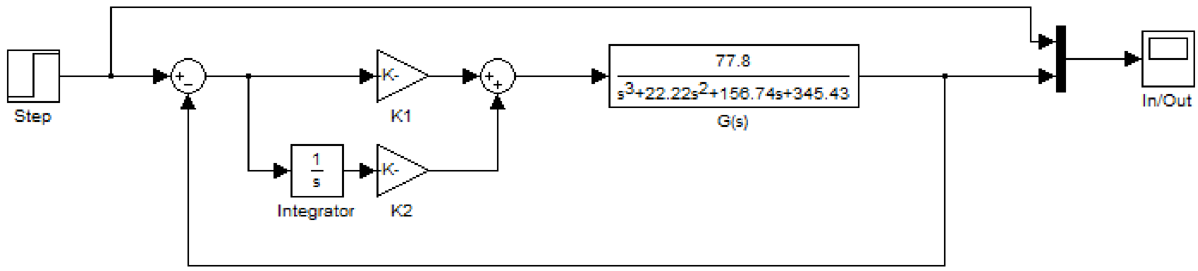


Figura 6 - Planta no Simulink

Verificando-se a saída, temos o seguinte gráfico, que é a resposta do sistema ao degrau:

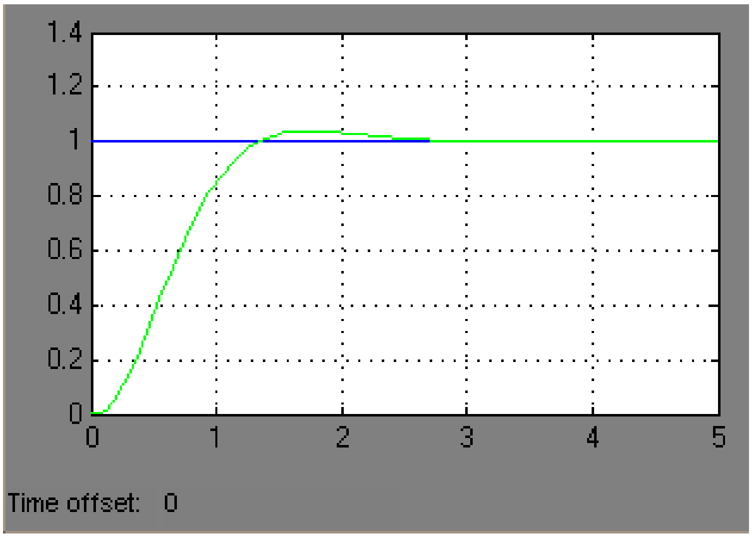


Figura 7 - Resposta ao degrau

Pode-se notar que as três especificações foram atendidas com o controlador PI ($K_1 + \frac{K_2}{s}$), com os valores de $K_1 = 1{,}1449\ e\ K_2 = 7{,}3164$.

COMANDOS DO MATLAB

```
>> g=zpk([],[-4.44 -10 -7.78],77.78)     % Declaração da Planta G
 Zero/pole/gain:
         77.78
------------------------
(s+4.44) (s+7.78) (s+10)
>> rlocus(g)                             % 1º rootlocus
>> sgrid(0.707,0)                        % reta de zeta
>> [k1 p]=rlocfind(g)                    % obter o ganho K1
Select a point in the graphics window
selected_point =
  -4.8542 + 3.2877i
k1 =
    1.1449
p =
 -12.4118
  -4.9041 + 3.3099i
  -4.9041 - 3.3099i

>> g1=tf([77.78],[1 22.22 156.74 345.43+77.78*k1 0])
                                   % Planta G1 para o 2º rootlocus
 Transfer function:
                77.78
------------------------------------
s^4 + 22.22 s^3 + 156.7 s^2 + 434.5 s
>> hold on
>> rlocus(g1)                            % 2º rootlocus
>> [k2 p]=rlocfind(g1)                   % obter o ganho K2
Select a point in the graphics window
selected_point =
  -1.8690 + 1.8591i
k2 =
    7.3164
p =
 -11.5054

  -6.9059
  -1.9043 + 1.8803i                      % polos complexos
  -1.9043 - 1.8803i
```

2º) Agora considere $G(s) = \frac{10(s+p_1)}{s(s^2+(p_1-p_2)s+p_{12})}$

Projete um controlador de avanço ou/e atraso de fase, tal que o erro de regime ao degrau seja igual a zero, e $\zeta = 0,5$.

RESOLUÇÃO:

- $p_1 = 7{,}78$
- $p_2 = 10$
- $p_{12} = 4{,}44$

Portanto, teremos a seguinte planta:

$$G(s) = \frac{10(s + 7.78)}{s(s^2 - 2.22s + 4.44)}$$

O lugar das raízes desta planta é traçado a seguir:

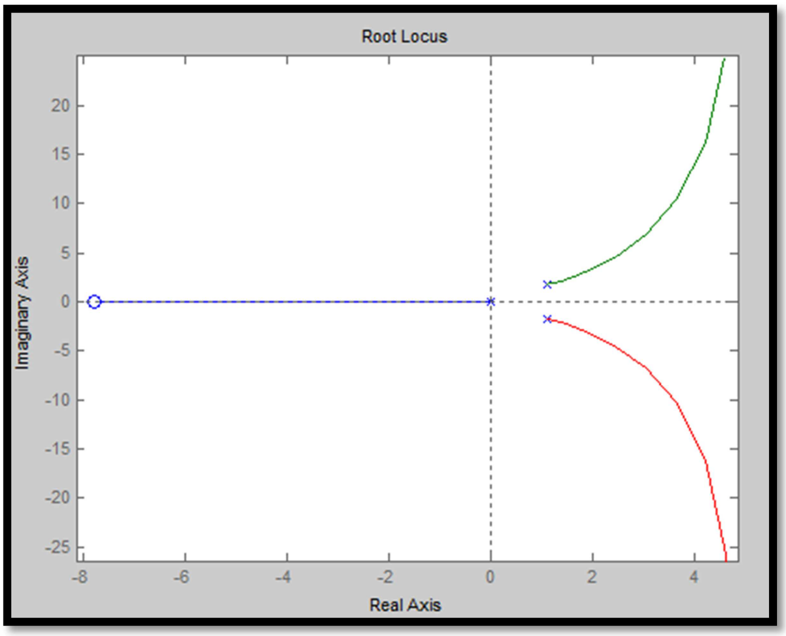


Figura 8 - Rootlocus de G(s)

Como podemos observar, existem dois ramos do lugar das raízes localizados no semiplano direito e, portanto, o sistema é instável para todo valor de $K > 0$.

A função de transferência de malha fechada deste sistema é dada a seguir:

$$G(s) = \left(10 * \frac{s + 7.78}{s^3 - 2.22s^2 + 14.44s + 77.8}\right)$$

Os polos de malha fechada do sistema não compensado são obtidos encontrando as raízes do denominador de G(s) e são dadas a seguir:

$$s = 2.4901 + 4.6889i$$

$$s = 2.4901 - 4.6889i$$

$$s = -2.7602$$

Para estabilizar o sistema, devemos fazer com que os polos de malha fechada estejam situados no semiplano esquerdo e passando pela curva de zeta ($\zeta = 0{,}5$). Devemos selecionar um ponto no semiplano esquerdo. Para isso, projeta-se o valor imaginário de um dos polos complexos de malha fechada do sistema não compensado sobre a curva de $\zeta = 0{,}5$ (zeta). Selecionamos o polo de malha fechada $s = 2.4901 + 4.6889i$. O valor imaginário do polo selecionado é aproximadamente 4.69. Projetando este valor sobre a curva de $\zeta = 0{,}5$ obtemos o valor real do ponto desejado, calculado a seguir:

$$\sigma = \frac{4.69}{tg\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = -2.708$$

Um dos polos de malha fechada do sistema a ser controlado deverá estar em

$$s = -2.708 + 4.69i$$

Para que este seja um dos polos de malha fechada do sistema, iremos projetar um **compensador por avanço de fase**. No sistema considerado, o ângulo de G(s) no polo de malha fechada desejado é dado a seguir:

$$\left(fase\ de\ G(s) = \left(\frac{10 * (s + 7.78)}{s * (s^2 - 2.22s + 4.44)}\right)\Big| s = -2.708 + 4.69i\right) = -340°$$

Assim, se for necessário forçar o lugar das raízes a passar pelo polo de malha fechada desejado, o compensador por avanço de fase deverá contribuir com $\theta = 160º$. Como a deficiência angular é de 160º, são necessários dois compensadores por avanço de fase, cada um contribuindo com 80º.

A equação do controlador por avanço de fase é dada a seguir:

$$Gc(s) = Kc * \frac{\left(s + \frac{1}{T}\right)}{s + \left(\frac{1}{\alpha T}\right)}$$

Onde: $0 < \alpha < 1$.

Escolhemos a localização dos polos duplos no eixo real como sendo $\sigma = -2$ e obtemos a localização dos zeros por manipulações algébricas como sendo $\sigma = -16.78$. Portanto:

$$\frac{1}{T} = 2$$

$$\frac{1}{\alpha T} = 7.78$$

$$\alpha = 0.257$$

A equação do controlador, até agora, é dada a seguir:

$$Gc(s) = Kc * \left(\frac{s + 2}{s + 16.78}\right)^2$$

O ganho Kc é obtido pelo critério de módulo com a função de transferência de malha aberta (já incluindo o controlador):

$$\left|Kc * \frac{10 * (s + 2)^2 * (s + 7.78)}{(s + 16.78)^2 * s * (s^2 - 2.22s + 4.44)}\right| (em\ s = -2.708 + 4.69i) = 1$$

$$Kc = 27.4$$

Obtemos o seguinte controlador por avanço de fase:

$$Gc(s) = 27.4 * \left(\frac{s + 2}{s + 16.78}\right)^2$$

O lugar das raízes do sistema compensado é traçado a seguir:

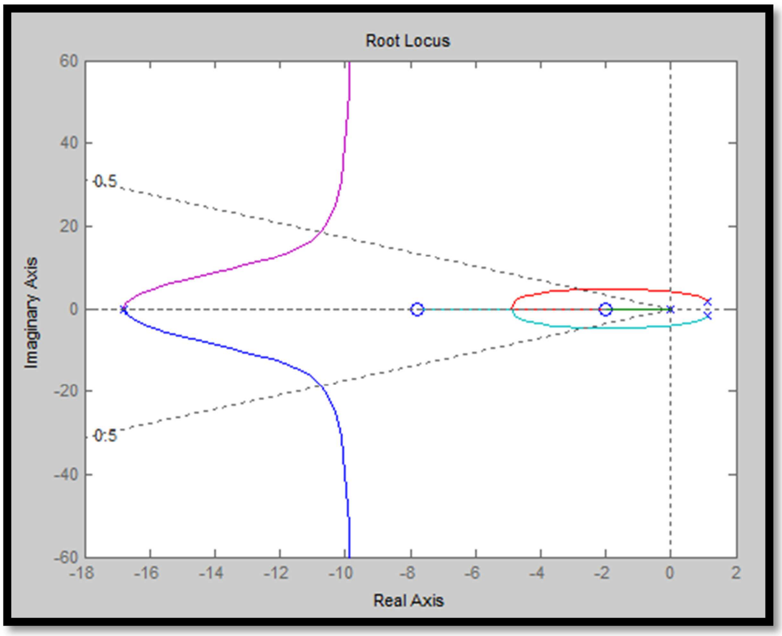


Figura 9 - Rootlocus do sistema compensado

Plotamos via MATLAB a saída do sistema compensado. O gráfico do comportamento da saída e a planta para obtermos esta curva podem ser vistos a seguir:

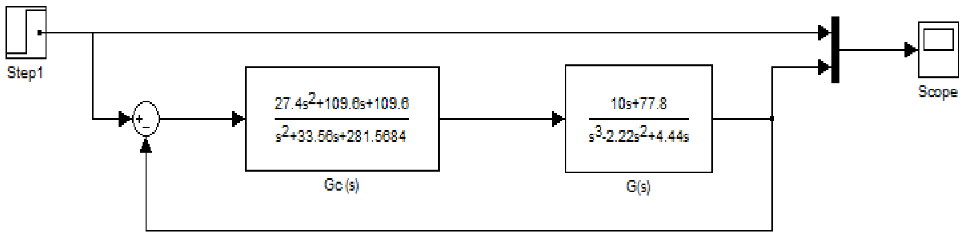


Figura 10 - Planta Simulink

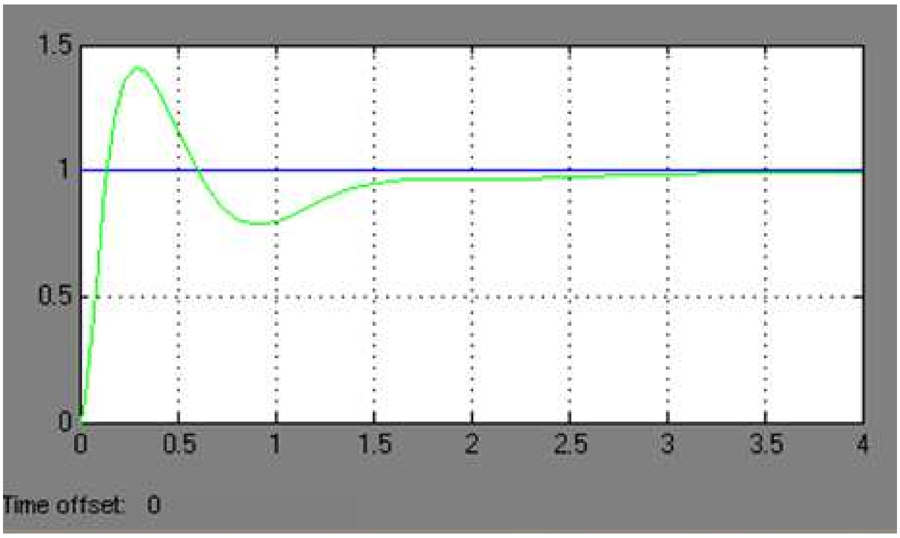


Figura 11 - Resposta ao degrau

3º) Projete um controlador por realimentação de estados para o sistema de modo que se tenha comportamento de um sistema de segunda ordem com $\boldsymbol{\zeta = 0,707}$ e $\boldsymbol{\omega_n = 5\ rad/s}$ e tenha erro de regime permanente ao degrau igual a zero.

$$\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-2} & \boldsymbol{p_2} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{p_1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})$$

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = [\boldsymbol{p_1} + \boldsymbol{p_2} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{0}]\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$$

- $p_1 = 7,78$
- $p_2 = 10$

<u>RESOLUÇÃO</u>

Para os valores de p_1 e p_2, temos o seguinte sistema, com as especificações dadas:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 10 & 1 \\ 7,78 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [17,78 \quad 1 \quad 0]x(t)$$

$$Especificações: \begin{cases} \zeta = 0,707 \\ \omega_n = 5 \\ e_{ss} = 0\ (ao\ degrau) \end{cases}$$

Para verificar se o sistema é controlável, olhamos para a matriz de controlabilidade V_c:

$$V_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

O posto de V_c é igual a 3, portanto o sistema é controlável. Prosseguindo, vamos encontrar a matriz Q, que leva o sistema para a forma canônica do controlador.

$$Q_1 = V_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Através do software MATLAB, encontramos o polinômio característico $\Delta(s)$. A matriz Q_2 é criada através dos coeficientes de $\Delta(s)$ da seguinte forma:

$$\Delta(s) = s^3 - 11s^2 + 12s - 9,78$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -11 & 12 \\ 0 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = Q_1 \cdot Q_2$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -10 & 2 \end{bmatrix}$$

Fazendo a transformação de similaridade, temos o sistema na forma canônica do controlador:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 11 & -12 & 9{,}78 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0 \quad 1 \quad 17{,}78] x(t)$$

Agora vamos encontrar o polinômio desejado Δd, usando os valores de ζ e ω dados na especificação:

$$\Delta d = (s - p_1)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n{}^2)$$

$$\Delta d = (s + 10)(s^2 + 7{,}07s + 25)$$

$$\Delta d = s^3 + 15{,}07s^2 + 81{,}56s + 200$$

Então, encontramos Δ_L pela fórmula:

$$\Delta_L = \Delta_d - \Delta$$

$$\Delta_L = [0 \;\; 26{,}07 \;\; 69{,}56 \;\; 209{,}78]$$

De Δ_L, tomamos $\bar{L}$ como as três últimas colunas de Δ_L:

$$\bar{L} = [26{,}07 \quad 69{,}56 \quad 209{,}78]$$

Para obtermos L, fazemos novamente a transformação:

$$L = \bar{L} \cdot Q^{-1}$$

$$\boxed{L = [157{,}64 \quad 330{,}26 \quad 26{,}07]}$$

Portanto, já está satisfeita as duas primeiras condições $\zeta = 0{,}707$ e $\omega_n = 5\, rad/s$. Para obtermos o valor de M, olhamos para a terceira condição: $e_{ss} = 0$. Logo:

$$Y_{ss} = 1 \text{ (ao degrau unitário)}$$

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

$$Y_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{sG(s)M}{s} = \lim_{s \to 0} G(s) \cdot M$$

$$\lim_{s \to 0} \frac{N(s)}{D(s)} M = 1$$

$$\lim_{s \to 0} \frac{(s + 17{,}78)M}{s^3 + 15{,}07s^2 + 81{,}56s + 200} = 1$$

$$\frac{17{,}78}{200} M = 1$$

$$\boxed{M = 11{,}24}$$

Monta-se a seguinte planta no Simulink, onde colocamos os valores de L e M encontrados anteriormente:

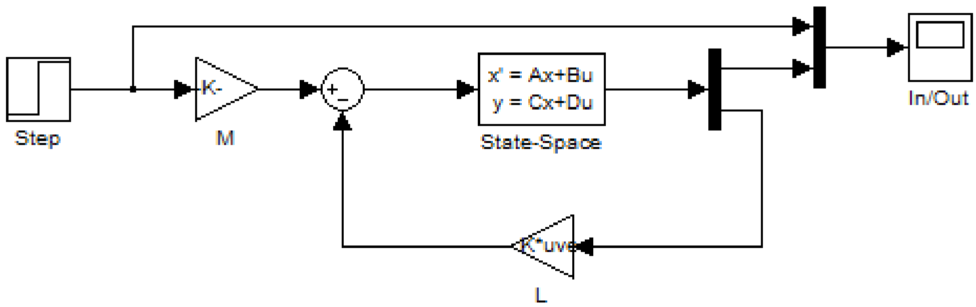


Figura 12 - Planta Simulink

A saída é mostrada a seguir:

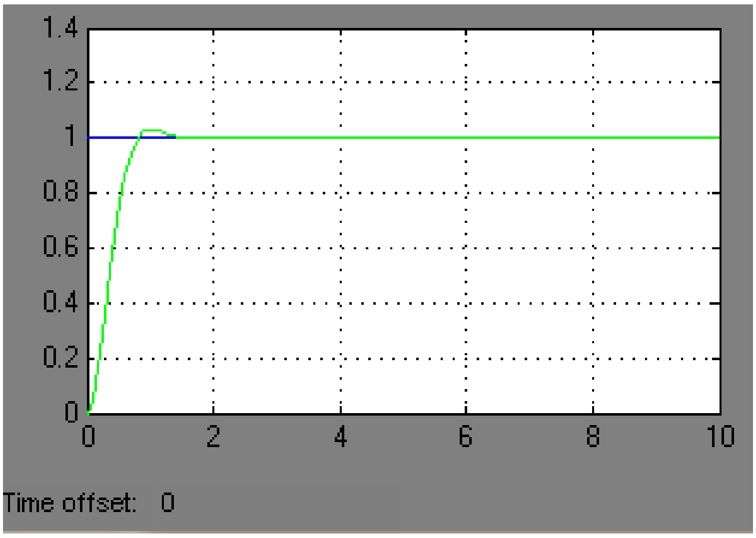


Figura 13 - Resposta ao degrau

Pode-se notar que as três especificações foram atendidas com o controlador por realimentação de estados, com os valores de $L = [157{,}64 \quad 330{,}26 \quad 26{,}07]$ e $M = 11{,}24$.

COMANDOS DO MATLAB

```
>> a=[0 1 0;-2 10 1;7.78 0 1]            % Declarando matriz A
>> b=[0;0;1]                             % Declarando matriz B
>> c=[17.78 1 0]                         % Declarando matriz c
>> p1=ss(a,b,c,0)       % Declarando o sistema em espaço de estados
a =
         x1     x2     x3
   x1     0      1      0
   x2    -2     10      1
   x3  7.78      0      1

b =
       u1
   x1   0
   x2   0
   x3   1

c =
          x1      x2      x3
   y1  17.78       1       0

d =
       u1
   y1   0

Continuous-time model.

>> vc=ctrb(p1)                           % Matriz de controlabilidade
>> rank(vc)                              % Posto da matriz Vc
>> q1=vc                                 % Matriz Q1
>> D=poly(a)                             % Polinômio característico
```

```
>> q2=[1 -11 12;0 1 -11 ;0 0 1]          % Matriz Q2
>> q=q1*q2                         % Matriz de transformação de base Q
>> p2=ss2ss(p1,q^-1)                     % Transformação de similaridade
a =                                      % Forma canônica do controlador
         x1    x2    x3
   x1    11   -12  9.78
   x2     1     0     0
   x3     0     1     0

b =
       u1
   x1   1
   x2   0
   x3   0

c =
          x1     x2     x3
   y1      0      1  17.78

d =
       u1
   y1   0

Continuous-time model.
>> Dd=conv([1 8],[1 7.07 25])           % Polinômio desejado
>> Dl=Dd-D
>> Lb=Dl(:,2:4)
>> L=Lb*q^-1                            % Ganho L
>> M=200/17.78                          % Ganho M
```

4º) Projete um controlador para que a planta $G(s) = \frac{10(s+d_1)}{((s+d_2)^2+p_2)(s+p_1+p_2)}$ tenha erro de regime permanente ao degrau igual < 5% e $\zeta = 0,5$.

- $p_1 = 7{,}78$
- $p_2 = 10$
- $d_1 = 9$
- $d_2 = 6{,}92$

<u>RESOLUÇÃO</u>

Substituindo os valores de P_1, P_2, D_1 e D_2, temos o seguinte sistema para controlar:

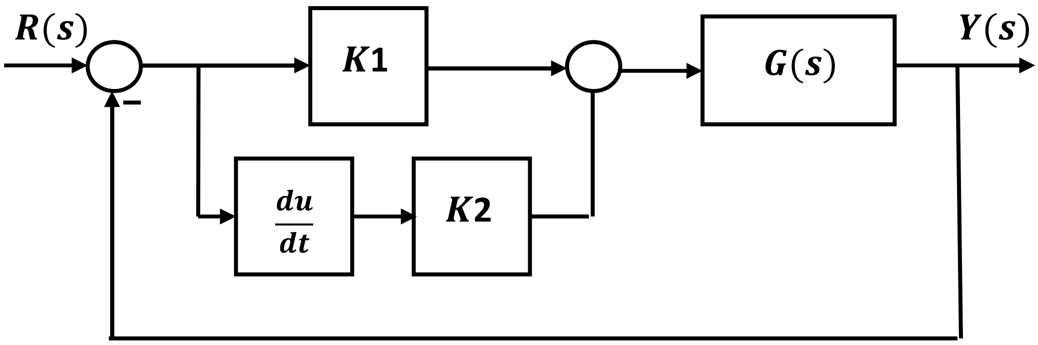
$$G(s) = \frac{10(s+9)}{((s+6{,}92)^2+10)(s+17{,}78)}$$

$$Especificações: \begin{cases} e_{ss} < 5\% \ \ (ao\ degrau) \\ \zeta = 0{,}5 \end{cases}$$

Utilizando um controlador PD para satisfazer as especificações:

$$K_1 + sK_2$$

O diagrama de blocos fica o seguinte:



Verificando o erro de regime permanente:

$$K_p = \lim_{s\to 0}(K_1 + sK_2)\left(\frac{10(s+9)}{((s+6{,}92)^2+10)(s+17{,}78)}\right)$$

$$K_p = K_1\left(\frac{10\cdot 9}{((6{,}92)^2+10)17{,}78}\right)$$

$$K_p = 0{,}0874K_1$$

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p} < 5\%$$

$$\frac{1}{1 + 0{,}0874K_1} < 0{,}05$$

$$K_1 > 217{,}39$$

Portanto, para termos um erro de regime permanente menor que 5%, o valor de K_1 deve ser maior que 217,39.

1º Rootlocus: $K_1 = livre$ e $K_2 = 0$.

$$1 + K_1\left(\frac{10(s + 9)}{((s + 6{,}92)^2 + 10)(s + 17{,}78)}\right) = 0$$

Traçando o rootlocus para $G(s)$, temos o seguinte gráfico:

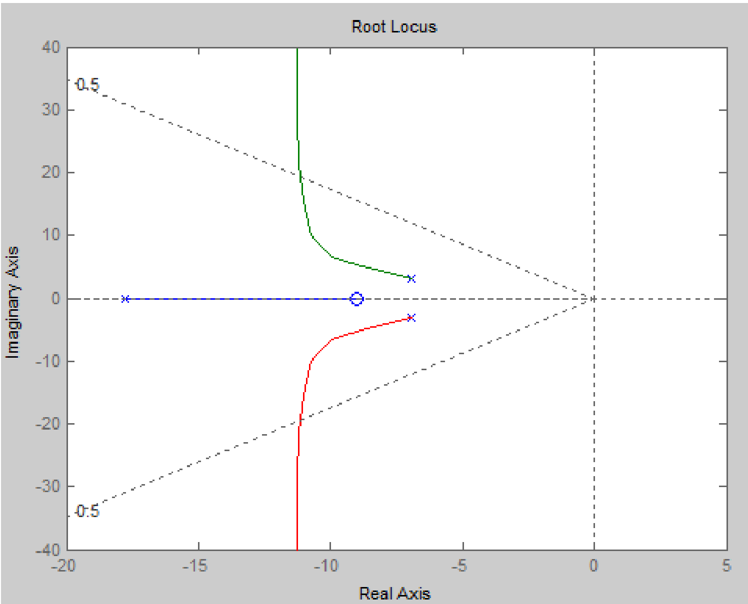


Figura 14 - 1º rootlocus

Escolhemos um ponto do rootlocus que tenha o ganho $K_1 > 217{,}39$. O ponto escolhido foi $K_1 = 230$.

2º Rootlocus: $K_1 = fixo$ e $K_2 = livre$.

$$1 + (K_1 + sK_2)\left(\frac{10(s+9)}{((s+6{,}92)^2+10)(s+17{,}78)}\right) = 0$$

$$s^3 + 31{,}62s^2 + 304s + 1029 + 10sK_1 + 90K_1 + 10s^2K_2 + 90sK_2 = 0$$

$$1 + K_2\frac{10s(s+9)}{s^3 + 31{,}02s^2 + (304 + 10K_1)s + 1029 + 90K_1} = 0$$

Traçando o rootlocus para o polinômio acima, temos o seguinte gráfico:

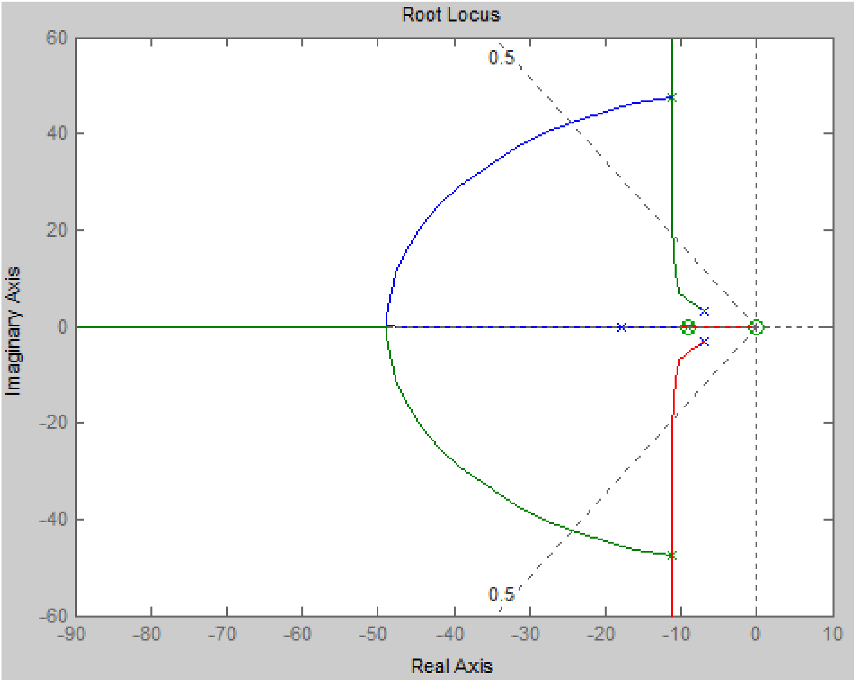


Figura 15 - 2º rootlocus

Escolhendo o ponto no cruzamento do 2º rootlocus com a reta ζ, temos $K_2 = 2.6295$. Portanto, é satisfeita a segunda condição.

Monta-se a planta no Simulink, onde colocamos os valores de K_1 e K_2 encontrados anteriormente:

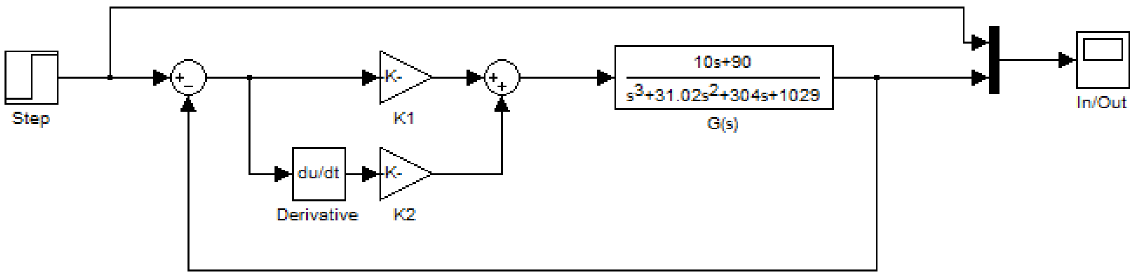


Figura 16 - Planta Simulink

Verificando-se a saída, temos o seguinte gráfico, que é a resposta do sistema ao degrau:

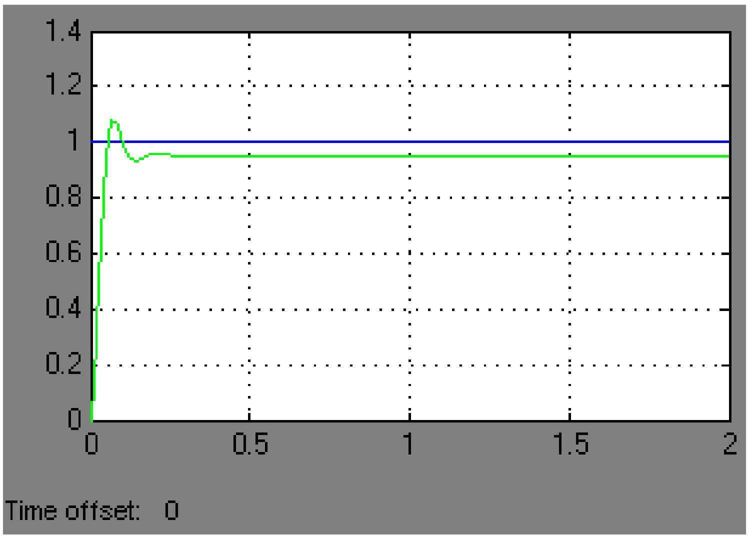


Figura 17 - Resposta ao degrau

Pode-se notar que as duas especificações foram atendidas com o controlador PD $(K_1 + sK_2)$, com os valores de $K_1 = 230\ e\ K_2 = 2.6295$.

COMANDOS DO MATLAB

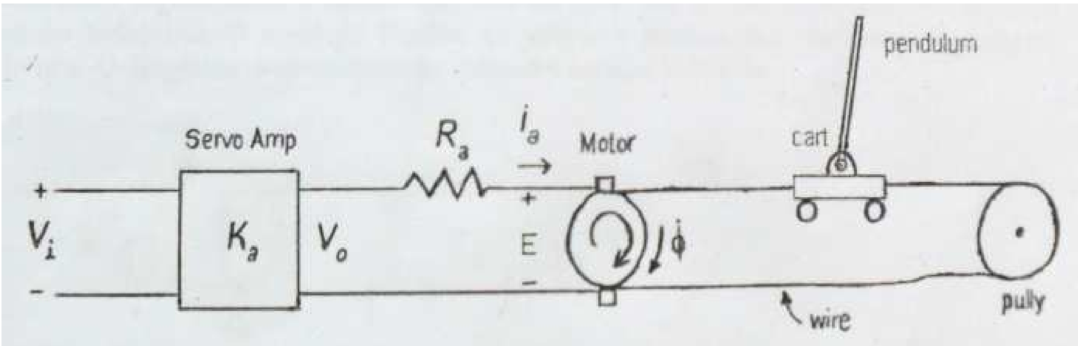
```
>> g=tf([10 90],[1 31.62 304 1029])      % Declaração da Planta G
Transfer function:
          10 s + 90
------------------------------
s^3 + 31.62 s^2 + 304 s + 1029
>> rlocus(g)                              % 1º rootlocus
>> sgrid(0.5,0)                           % reta de zeta
>> k1=230                           % valor escolhido do ganho k1
>> g1=tf([10 90 0],[1 31.62 304+10*k1 1029+90*k1])
                                    % Planta G1 para o 2º rootlocus
Transfer function:
         10 s^2 + 90 s
--------------------------------
s^3 + 31.62 s^2 + 2604 s + 21729
```

```
>> hold on
>> rlocus(g1)                              % 2º rootlocus
>> [k2 p]=rlocfind(g1)                     % obter o ganho K2
Select a point in the graphics window

selected_point =

 -24.4629 +42.5049i

k2 =

    2.6295

p =

 -24.4267 +42.4418i
 -24.4267 -42.4418i
  -9.0614
```

5º) Modele um sistema físico, linearize e projete um controlador para que a planta de modo que tenha erro de regime ao degrau igual a zero, $\zeta = 0,6$.

<u>Opção 1</u>

Um pêndulo invertido é preso sobre um carro que se desloca sobre um trilho sob a ação de uma força F, aplicada através de um mecanismo de transmissão de movimento constituído de polias e fios acionado por um motor DC. Veja figura. A articulação na base do pêndulo permite somente movimento planar de rotação em relação ao eixo da articulação fixo no carro. Considere que os fios do mecanismo de transmissão de movimento têm massa e constante de elasticidade desprezível.



M – massa do carro	*0,5 kg*
m – massa do pêndulo	*0,25 kg*
B – atrito viscoso do carro	*0,1 N/m/seg*
l – length to pendulum Center of mass	*0,4 m*
J – momento de inércia pêndulo	$0{,}005\ kg \cdot m^2$
F – força aplicada no carro	
x – posição do carro	
θ – pendulum angle from vertical	

<u>RESOLUÇÃO</u>

- Modelagem do motor DC:

$$V_t = V_0 = K_a \cdot V_i$$

$$V_t = E_a + I_a R_a$$

$$I_a = \frac{V_t - E_a}{R_a}$$

$$E_a I_a = T \cdot \omega_m \quad \Longrightarrow \quad E_a = \frac{T \cdot \omega_m}{I_a}$$

$$E_a = K \cdot \phi \cdot \omega_m$$

$$T = K \cdot \phi \cdot I_a$$

$$T = F \cdot \frac{D}{2}$$

$$F \cdot \frac{D}{2} = K \cdot \phi \cdot I_a = K \cdot \phi \cdot \left(\frac{K_a V_i - E_a}{R_a}\right)$$

$$\frac{F}{2} \cdot D = \frac{K \cdot \phi \cdot K_a}{R_a} \cdot V_i - \frac{K \cdot \phi}{R_a} \cdot E_a$$

$$\boxed{\frac{F}{V_i} = 2 \cdot \left(\frac{K \cdot \phi \cdot K_a}{D \cdot R_a}\right) \cdot \left(1 + \frac{K \cdot \phi}{R_a} \cdot \frac{\omega_m}{I_a}\right)^{-1}}$$

Obtemos a função de transferência da força F aplicada ao carrinho em relação à entrada Vi.

- Modelagem do carro e pêndulo:

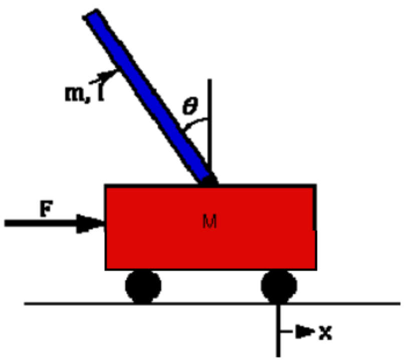


Figura 18 - Carro e Pêndulo

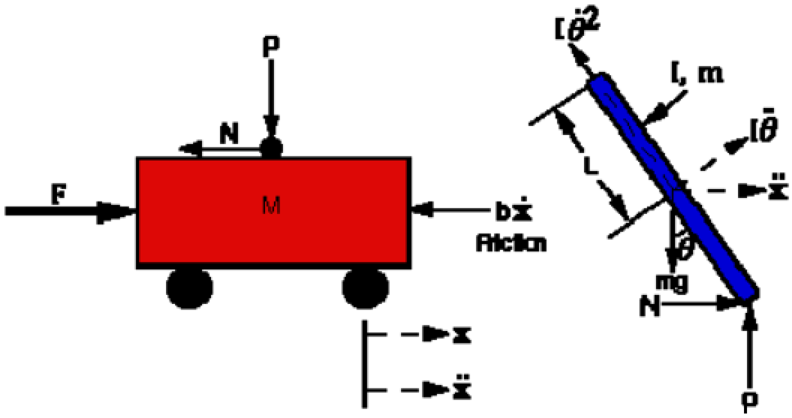


Figura 19 - Diagrama do corpo livre do carro e do pêndulo

Somando as forças no diagrama do corpo livre do carrinho na direção horizontal, obtém-se a seguinte equação do movimento:

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + N = F$$

Note que se pode também somar as forças na direção vertical, mas não seria ganha nenhuma informação útil.

Somando as forças no diagrama do corpo livre do pêndulo na direção horizontal, consegue-se uma equação para N:

$$N = m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta$$

Se substituir esta equação na primeira, tem-se a primeira equação de movimento para o sistema:

$$(M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + \; ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta - F$$

Para conseguir a segunda equação do movimento, somam-se as forças perpendiculares ao pêndulo. Resolvendo o sistema ao longo do eixo diminui bastante do algebrismo. Deve-se obter a seguinte equação:

$$P\sin\theta + N\cos\theta - mg\sin\theta = ml\ddot{\theta} + m\ddot{x}\cos\theta$$

Para eliminar os termos P e N da equação do movimento, somam-se os momentos ao redor do centroide do pêndulo para conseguir a próxima equação.

$$-Pl\sin\theta - Nl\cos\theta = I\ddot{\theta}$$

Combinando essas duas últimas equações, consegue-se a segunda equação dinâmica:

$$(J + ml^2)\ddot{\theta} + mgl\sin\theta - ml\ddot{x}\cos\theta$$

Uma vez que se utilizará de controle linear para tal sistema, este conjunto de equações deve ser linearizado sobre θ = π. Assumindo que θ = π + φ (φ representa um pequeno ângulo da vertical, para cima). Portanto, cos(θ) = -1, sin(θ) = -φ, e $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ = 0. Após a linearização as duas equações do movimento tornam-se (onde u representa a entrada):

$$(J + ml^2)\ddot{\varphi} - mgl\varphi - ml\ddot{x}$$

$$(M + m)\ddot{x} + b\dot{x} = ml\ddot{\varphi} = u$$

- Função de Transferência

Para obter a função de transferência das equações do sistema linearizado, analiticamente, deve-se primeiramente tomar a transformada de Laplace das equações do sistema. As transformadas de Laplace são:

$$(J + ml^2)\Phi(s)s^2 - mgl\Phi(s) - mlX(s)s^2$$

$$(M + m)X(s)S^2 + bX(s)s - ml\Phi(s)s^2 - U(s)$$

Desde que estará olhando o ângulo ϕ como saída de interesse, resolve-se a primeira equação X(s).

$$X(s) - \left[\frac{J + ml^2}{ml} - \frac{g}{s^1}\right]\Phi(s)$$

Então se substitui na segunda equação, e se rearranja. A função de transferência é:

$$\frac{\Phi(s)}{U(s)} = \frac{\frac{ml}{q}s^2}{s^4 + \frac{b(J + ml^2)}{q}s^3 - \frac{(M + m)mçj}{q}s^2 - \frac{bmgl}{q}s^1 \\ -}$$

Onde,

$$q = [(M+m)(J+ml^2) - (ml)^2]$$

Da função de transferência acima, pode-se ver que há um polo e um zero na origem. Esses podem ser cancelados e a função de transferência fica:

$$\frac{\Phi(s)}{U(s)} = \frac{\frac{ml}{q}s}{s^3 + \frac{b(J+ml^2)}{q}s^2 - \frac{(M+m)mgl}{q}s - \frac{bmgl}{q}}$$

- Controlador

Agora que temos a função de transferência do sistema, podemos projetar um controlador adequado. Substituindo os valores na equação acima, temos G(s):

$$G(s) = \frac{4.211s}{s^3 + \ 0.1895\,s^2 - \ 30.95\,s \ - \ 4.126}$$

Para controlar este sistema, usamos o controlador por realimentação de estados. Primeiramente, para não ocorrer problemas devido ao zero na origem deste sistema, é preciso adicionar um polo para neutralizar o efeito do zero. A planta G(s) que será usada para os cálculos é a seguinte, sem o zero da origem:

$$G(s) = \frac{4.211}{s^3 + \ 0.1895\,s^2 - \ 30.95\,s \ - \ 4.126}$$

Através do MATLAB, obtemos a função de transferência no sistema de espaço de estados:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -0{,}1895 & 3{,}868 & 0{,}5158 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0 \quad 0 \quad 0{,}5263]x(t)$$

$$Especificações: \begin{cases} \zeta = 0{,}6 \\ e_{ss} = 0\ (ao\ degrau) \end{cases}$$

Para verificar se o sistema é controlável, olhamos para a matriz de controlabilidade V_c:

$$V_c = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}1895 & 30{,}9833 \\ 0 & 8 & -1{,}5158 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

O posto de V_c é igual a 3, portanto o sistema é controlável. Prosseguindo, vamos encontrar a matriz Q, que leva o sistema para a forma canônica do controlador.

$$Q_1 = V_c = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}1895 & 30{,}9833 \\ 0 & 8 & -1{,}5158 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Através do software MATLAB, encontramos o polinômio característico $\Delta(s)$. A matriz Q_2 é criada através dos coeficientes de $\Delta(s)$ da seguinte forma:

$$\Delta(s) = s^3 + 0.1895s^2 - 30.95s - 4.128$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}1895 & -30{,}95 \\ 0 & 1 & 0{,}1895 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = Q_1 \cdot Q_2$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0{,}0026 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Fazendo a transformação de similaridade, temos o sistema na forma canônica do controlador:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -0{,}1895 & 30{,}95 & 4{,}128 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0 \quad 0 \quad 4{,}211]x(t)$$

Para criarmos o polinômio desejado Δ_d, escolhemos um pólo complexo com a parte real igual a -6. Calculamos o ω_n atavés da equação:

$$\omega_n = \frac{6}{\zeta} = \frac{6}{0{,}6} = 10$$

Agora vamos encontrar o polinômio desejado Δd, usando os valores de ζ e ω dados na encontrado:

$$\Delta d = (s - p_1)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n{}^2)$$

$$\Delta d = (s + 15)(s^2 + 12s + 100)$$

$$\Delta d = s^3 + 27s^2 + 280s + 1500$$

Então, encontramos Δ_L pela fórmula:

$$\Delta_L = \Delta_d - \Delta$$

$$\Delta_L = [0 \;\; 26{,}8 \;\; 310{,}9 \;\; 1504.1]$$

De Δ_L, tomamos $\bar{L}$ como as três últimas colunas de Δ_L:

$$\bar{\bar{L}} = [26{,}8 \;\; 310{,}9 \;\; 1504.1]$$

Para obtermos L, fazemos novamente a transformação:

$$L = \bar{L} \cdot Q^{-1}$$

$$\boxed{L = [26.8105 \quad 38{,}8683 \quad 188{,}0236]}$$

Portanto, já está satisfeita a primeira condição $\zeta = 0{,}6$. Para obtermos o valor de M, olhamos para a terceira condição: $e_{ss} = 0$. Logo:

$$Y_{ss} = 1 \text{ (ao degrau unitário)}$$

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

$$Y_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{sG(s)M}{s} = \lim_{s \to 0} G(s) \cdot M$$

$$\lim_{s \to 0} \frac{N(s)}{D(s)} M = 1$$

$$\lim_{s \to 0} \frac{(4{,}211)M}{s^3 + 27s^2 + 280s + 1500} = 1$$

$$\frac{4{,}211}{1500} M = 1$$

$$\boxed{M = 356{,}21}$$

Monta-se a seguinte planta no Simulink, onde colocamos os valores de L e M encontrados anteriormente. A função de transferência usada no bloco State-Space é a G(s) com o zero na origem. O bloco integrator cancela este zero:

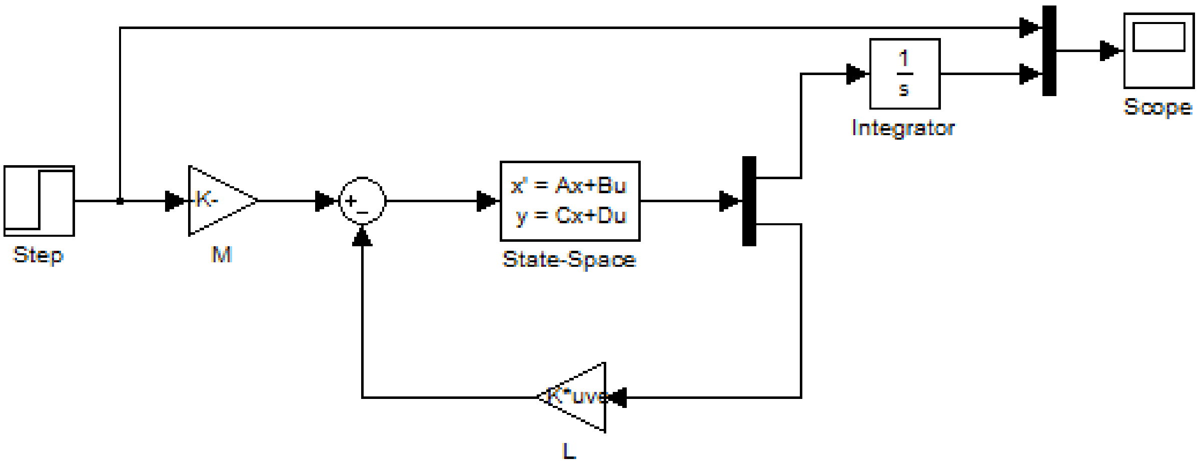


Figura 20 - Planta no Simulink

A saída é mostrada a seguir:

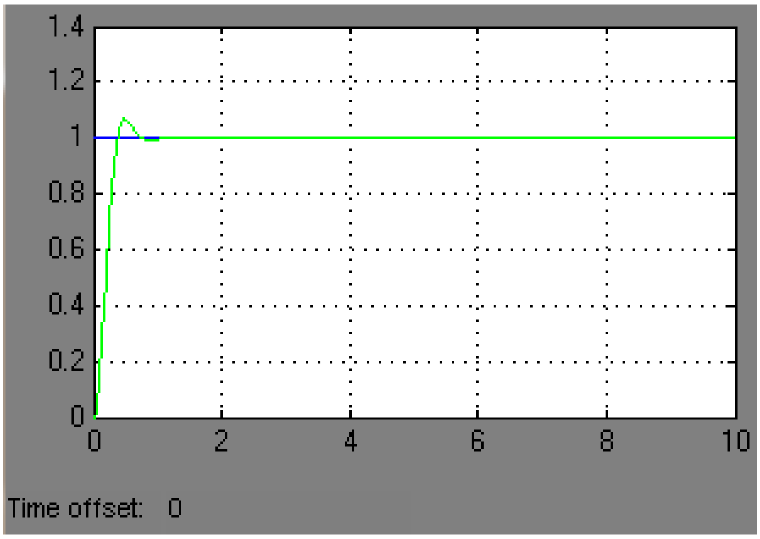


Figura 21 - Resposta ao degrau

Pode-se notar que as duas especificações foram atendidas com o controlador por realimentação de estados, com os valores de $L = [26.8105 \quad 38{,}8683 \quad 188{,}0236]$ e $M = 356{,}21$.

COMANDOS DO MATLAB

```
>> M=0.5                                    % massa do carro
>> m=0.25                                   % massa do pêndulo
>> B=0.1                                    % atrito viscoso do carro
>> l=0.4                        % distância ao centro de massa do pêndulo
```

```
>> J=0.005                            % momento de inércia do pêndulo
>> q=[(M+m)*(J+m*l^2)-(m*l)^2]
>> N=[(m*l)/q]                        % numerador da função trans.
>> D=[1 B*(J+m*l^2)/q -(M+m)*m*g*l/q -B*m*g*l/q]     % denominador
>> G=tf(N,D)                          % planta G(s) para cálculos

Transfer function:
              4.211
----------------------------------
s^3 + 0.1895 s^2 - 30.95 s - 4.126

>> p1=ss(G)                           % sistema em espaço de estados

a =
            x1       x2       x3
   x1  -0.1895    3.868   0.5158
   x2        8        0        0
   x3        0        1        0

b =
       u1
   x1   1
   x2   0
   x3   0

c =
           x1      x2      x3
   y1       0       0  0.5263

d =
       u1
   y1   0

Continuous-time model.
>> vc=ctrb(p1)                              % matriz de controlabilidade
>> rank(vc)                                 % posto da matriz Vc
>> q1=vc
>> q2=[1 0.1895 -30.95;0 1 0.1895;0 0 1]
>> Q=q1*q2                            % matriz de transformação de base
>> p2=ss2ss(p1,inv(Q))                % forma canônica do controlador

a =
               x1           x2           x3
   x1     -0.1895        30.95        4.128
   x2           1            0    -0.002637
   x3           0            1   2.632e-005

b =
       u1
   x1   1
   x2   0
   x3   0

c =
          x1     x2     x3
   y1      0      0  4.211

d =
       u1
   y1   0
```

```
Continuous-time model.
>>Dd=[1 27 280 1500]                        % Polinômio desejado
>> Dl=Dd-D
>> Lb=Dl(:,2:4)
>> L=Lb*Q^-1                                % ganho L
>> M=1500/4.211                             % ganho M
```