

---

## 2.1 Aproximação linear de sistemas físicos

Antes de podermos analisar um sistema de controlo toma-se necessário estabelecer o seu modelo matemático. Uma vez que os sistemas em consideração possuem uma natureza dinâmica, as equações que os descrevem são equações diferenciais.

O comportamento não linear dos sistemas reais é muitas vezes difícil de analisar. Normalmente podemos contudo construir modelos que são lineares ao longo de uma zona de operação satisfatória. Quando tal é possível ganhamos duas propriedades características da linearidade. A 1ª é a propriedade da *sobreposição*, que diz que um sistema linear, inicialmente em repouso, responde independentemente a entradas diferentes aplicadas simultaneamente, isto é, se  $r_1(t)$  e  $r_2(t)$  forem duas entradas aplicadas simultaneamente ao sistema e as respectivas saídas forem  $c_1(t)$  e  $c_2(t)$ :

$$r_1(t) \rightarrow c_1(t) \text{ e } r_2(t) \rightarrow c_2(t) \quad (2.1)$$

Se agora aplicarmos  $r_1(t)$  e  $r_2(t)$  simultaneamente, temos:

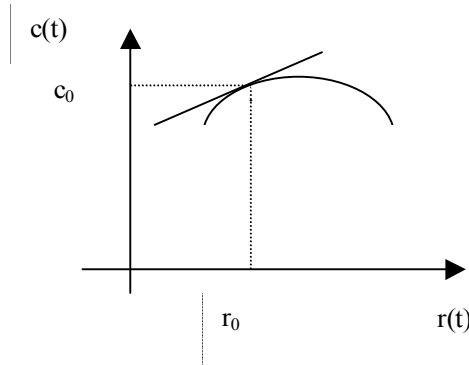
$$[r_1(t) + r_2(t)] \rightarrow [c_1(t) + c_2(t)] \quad (2.2)$$

A segunda propriedade da linearidade diz respeito à *resposta proporcional*. Esta diz que se uma entrada for multiplicada por uma constante  $k$ , então a saída aparece multiplicada pelo mesmo facto  $k$ . Estas duas propriedades podem juntar-se como:

$$[k_1 r_1(t) + k_2 r_2(t)] \rightarrow [k_1 c_1(t) + k_2 c_2(t)] \quad (2.3)$$

Embora muitos sistemas eléctricos e mecânicos se comportem de um modo linear ao longo de uma zona de funcionamento útil relativamente grande, os sistemas térmicos e fluídicos possuem mais frequentemente uma característica não linear.

Felizmente podemos contudo muitas vezes linearizar elementos não lineares supondo pequenas variações do sinal em torno de um ponto de funcionamento. Seja por exemplo um elemento genérico que a uma entrada  $r(t)$  responde com a saída  $c(t)=g[r(t)]$ :



**FIGURA 2.1 - Exemplo de uma não-linearidade**

Vamos supor que pretendemos que o sistema opere em torno do ponto  $r_0$ . Desenvolvendo  $g(r(t))$  em série de Taylor em torno deste ponto, obtemos:

$$c(t) = g(r(t)) = g(r_0) + (r - r_0) \left. \frac{dg}{dr} \right|_{r=r_0} + (r - r_0)^2 \left. \frac{d^2g}{dr^2} \right|_{r=r_0} + \dots \quad (2.4)$$

Se a recta de declive  $\left. \frac{dg}{dr} \right|_{r=r_0} = m$  se puder confundir com a curva  $c=g(r)$  na vizinhança de  $r_0$ , podemos desprezar as derivadas a partir da segunda ordem, e escrever:

$$c \approx c_0 + m(r - r_0), \text{ ou} \quad (2.5)$$

$$\Delta c = m \Delta r, \quad (2.6)$$

onde  $\Delta$  representa valores incrementais. Esta última equação satisfaz as condições de linearidade.

## 2.2 Equações diferenciais de sistemas físicos

As eq. diferenciais que descrevem o comportamento dos sistemas físicos obtêm-se utilizando as leis físicas dos processos. Esta aproximação aplica-se igualmente a sistemas mecânicos, eléctricos, fluidicos e térmicos. Dividindo as variáveis que caracterizam a dinâmica dos siste-

mas em *variáveis através dos elementos* e em *variáveis entre extremos*, podemos elaborar o quadro seguinte:

**Table 2.1 - Variáveis em diferentes sistemas físicos**

Sistema	Variáveis através de elementos	Variáveis entre elementos
Eléctrico	Corrente ( $i$ )	Tensão ( $v_{21}$ )
Mecânico Translaccional	Força ( $f$ )	Diferença de velocidades ( $v_{21}$ )
Mecânico Rotacional	Binário ( $T$ )	Diferença de velocidades angulares ( $w_{21}$ )
Fluídico	Taxa volumétrica de fluxo ( $q$ )	Diferença de pressões ( $P_{21}$ )
Térmico	Taxa de fluxo de calor ( $q$ )	Diferença de temperaturas ( $T_{21}$ )

Para cada sistema físico podemos ainda definir 3 tipos de elementos: de *armazenamento capacitivo*, de *armazenamento indutivo* e *dissipador de energia*. A cada um destes elementos corresponde uma equação diferencial que o descreve.

### 2.2.1 Sistemas eléctricos

As equações que representam o comportamento dos sistemas eléctricos podem obter-se aplicando as *leis de Kirchhoff*:

1. *Lei das malhas* - Ao longo de um caminho fechado, a soma das quedas de tensão é nula;
2. *Lei dos nós* - A soma algébrica das correntes que convergem ou divergem num nó é nula.

As fontes de voltagem (e de corrente) são *geradores*. A fonte de voltagem DC é uma bateria ou gerador DC. A variável através é a corrente, e a variável entre extremos é a voltagem. Nos sistemas eléctricos aparecem 3 elementos básicos:

- Resistências
- Bobinas (ou indutâncias)
- Condensadores

A queda de voltagem nos terminais de uma *resistência* é dada pela lei de Ohm:



$$V_R = RI_R \quad (2.7)$$

As resistências absorvem energia do sistema. São medidas em Ohms ( $\Omega$ ).

A queda de voltagem ao longo de uma *bobina* é dada pela lei de Faraday:



$$V_L = L \frac{dI_L}{dt} \quad (2.8)$$

A indutância é medida em Henrys ( $H$ ).

A queda de voltagem aos terminais de um *condensador* é dada por:



$$V_c = \frac{1}{C} \int_0^t I_c dt \quad (2.9)$$

A capacidade é medida em Faradays ( $F$ ).

### 2.2.2 Sistemas Mecânicos Translacionais

A lei fundamental a que estes sistemas obedecem é a *lei de Newton*, que estabelece que a soma das forças é igual a zero. Esta lei pode ser reformulada como: a soma das forças aplicadas deve ser igual à soma das forças de reacção.

Os 3 elementos que consideraremos num sistema mecânico translacional são: a *massa*, a *mola* e o *amortecedor*. Não são considerados termos de fricção (à excepção da viscosa), dado terem um comportamento não-linear. De um sistema mecânico esboçamos um circuito mecânico, que nos permite mais facilmente determinarmos as equações diferenciais correspondentes.

A *massa* é o elemento inercial. A força aplicada a uma massa produz uma aceleração. A força de reacção,  $f_M$ , é igual ao produto da massa pela aceleração e é oposta em direcção à força aplicada.

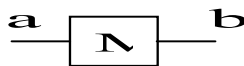


FIGURA 2.2 - Representação esquemática de uma massa

$$f_M = Ma = M \frac{dv}{dt} = M \frac{d^2x}{dt^2} \quad (2.10)$$

Para incorporar uma massa num circuito, um terminal é considerado como tendo o deslocamento da massa enquanto o outro é ligado à referência.

Uma *mola*, se for distendida, tende a contrair-se, e se for comprimida, tende a distender-se. A força de reacção, em cada uma das extremidades, é a mesma, e é igual ao produto do coeficiente de elasticidade pela deformação da mola.

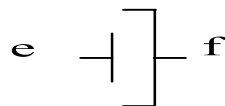


**FIGURA 2.3 - Representação esquemática de uma mola**

$$f_k = k(x_c - x_d) \quad (2.11)$$

Se uma das extremidades (seja ela  $d$ ) está estacionária, então  $x_d = 0$ . A força de reacção é normalmente não linear; todavia numa gama limitada de operação pode ser considerada como linear.

O amortecedor representa o efeito de fricção viscosa. A sua força de reacção é dada por:



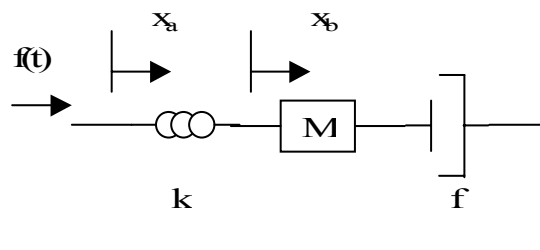
**FIGURA 2.4 - Representação esquemática de um amortecedor**

$$f_B = B(\dot{x}_e - \dot{x}_f) \quad (2.12)$$

Antes de determinarmos as equações diferenciais de um sistema mecânico, devemos desenhar o *circuito mecânico*. Este é obtido ligando os terminais dos elementos que experimentam o mesmo deslocamento. Seguidamente, a equação de forças é escrita para cada nó.

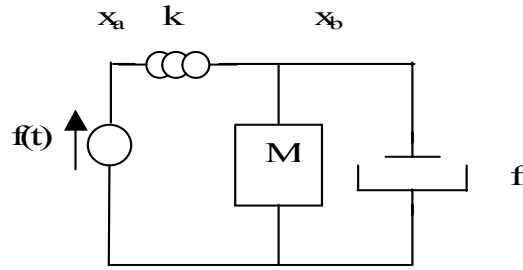
### Exemplo 2.1 - Sistema mecânico simples

Seja o sistema mecânico:



**FIGURA 2.5 - Sistema mecânico simples**

Há apenas 2 movimentos diferentes. O nosso circuito mecânico terá, então, apenas 2 nós.



**FIGURA 2.6 - Circuito mecânico correspondente à fig. 2.5**

As equações diferenciais são agora facilmente obtidas:

$$x(a) \rightarrow f(t) = k(x_a - x_b) \quad (2.13)$$

$$x_b \rightarrow 0 = M\ddot{x}_b + f\dot{x}_b + k(x_b - x_a) \quad (2.14)$$

### 2.2.2.1 Sistemas Análogos

*Circuitos análogos* representam sistemas diferentes cujas equações diferenciais são equivalentes.

A força  $f$ , equivalente à corrente  $i$  (ambas são variáveis através dos terminais) são variáveis análogas, enquanto que a tensão  $v$  é análoga à velocidade  $v$  (ambas são variáveis entre terminais). Se observarmos que:

$$\text{Massa} \rightarrow f = M\ddot{x} = M\dot{v} \Leftrightarrow i = C\dot{v}, \quad (2.15)$$

$$\text{Mola} \rightarrow f = k(x_1 - x_2) = k \int (v_1 - v_2) dt \Leftrightarrow i = \frac{\int (v_1 - v_2) dt}{L}, \quad (2.16)$$

$$\text{Amortecedor} \rightarrow f = f(v_1 - v_2) \Leftrightarrow i = \frac{(v_1 - v_2)}{R}, \quad (2.17)$$

vemos que os elementos análogos à massa, mola e amortecedor são, respectivamente, o condensador, a bobina e a resistência, com os seguintes valores:

$$M = C \quad (2.18)$$

$$K = \frac{1}{L}$$

$$f = \frac{1}{R}$$

O circuito análogo ao da fig. 2.6 é o seguinte:

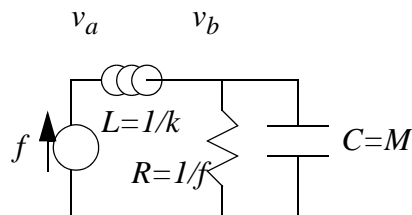


FIGURA 2.7 - Circuito eléctrico análogo ao circuito da fig. 2.6

### 2.2.3 Sistemas Mecânicos Rotacionais

As equações que caracterizam os sistemas mecânicos rotacionais são similares aos sistemas mecânicos translacionais. Escrever as equações das forças é equivalente a escrever as equações dos binários, para os sistemas rotacionais, onde os deslocamentos, velocidades e acelerações são aqui expressos em termos de quantidades angulares.

A lei fundamental é a de que o binário aplicado é igual à soma dos binários de reacção. Os elementos de um sistema rotacional são a *inércia*, a *mola* e o *amortecedor*.

O binário aplicado a um corpo com um *momento de inércia*  $J = mr$  produz uma aceleração angular. O binário de reacção  $T_J$  é oposto à direcção do binário aplicado, e é igual ao produto do momento de inércia e a aceleração:

$$T_J = J\alpha = J\dot{\omega} = J\ddot{\theta} \quad (2.19)$$

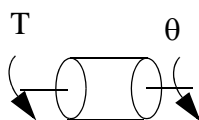


FIGURA 2.8 - Representação esquemática de uma inércia

Quando um binário é aplicado a uma mola, a mola é torcida de um determinado ângulo. O binário aplicado é transmitido através da mola. O binário de reacção,  $T_k$ , é igual ao produto do coeficiente de elasticidade,  $k$ , e do ângulo de torção:

$$T_k = k(\theta_c - \theta_d) \quad (2.20)$$

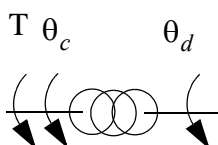
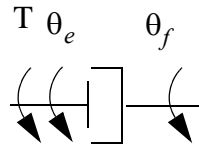


FIGURA 2.9 - Representação esquemática de uma mola

O amortecimento ocorre quando um corpo se move através de um fluido. O amortecedor é caracterizado por um coeficiente de amortecimento,  $f$ , e produz um binário de reacção igual ao produto do coeficiente de amortecimento e a velocidade angular relativa aos dois extremos do amortecedor:

$$T_f = f(w_e - w_f) = f(\dot{\theta}_e - \dot{\theta}_f) \quad (2.21)$$

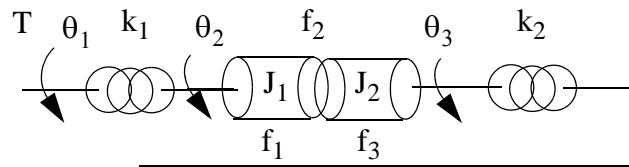


**FIGURA 2.10 - Representação esquemática de um amortecedor**

Os passos necessários para determinar as equações diferenciais de um sistema mecânico rotacional são em tudo semelhantes aos descritos para os sistemas mecânicos translacionais. Vamos ilustrá-los através de um exemplo.

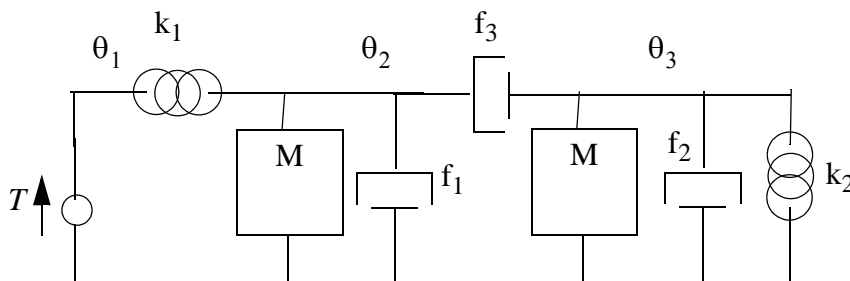
### Exemplo 2.2 - Sistema mecânico rotacional

Considere-se o seguinte sistema:



**FIGURA 2.11 - Sistema mecânico rotacional**

O sistema representado tem 2 discos, que têm um amortecimento entre eles, e entre cada um deles e o fixe. O circuito mecânico correspondente é:



**FIGURA 2.12 - Circuito mecânico**



As equações de binário são:

$$\theta_1 \rightarrow T(t) = k_1(\theta_1 - \theta_2) \quad (2.22)$$

$$\theta_2 \rightarrow 0 = k_1(\theta_2 - \theta_1) + J_1 \ddot{\theta}_2 + f_1 \dot{\theta}_2 + f_3(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \quad (2.23)$$

$$\theta_3 \rightarrow 0 = f_3(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2) + J_2 \ddot{\theta}_2 + f_2 \dot{\theta}_2 + k_2 \theta_2 \quad (2.24)$$

## 2.2.4 Sistemas Térmicos

Nestes sistemas a variável através é a *taxa de escoamento*, ou *fluxo de calor*,  $q$ , e a variável entre extremos é a *diferença de temperatura*,  $\Delta T$ .

Apenas um número limitado de sistemas físicos pode ser representado por equações diferenciais lineares.

O conceito fundamental utilizado para obtermos as equações térmicas de um sistema é que a diferença entre o calor que um corpo absorve e liberta é igual ao aumento da sua energia calorífica. Os elementos físicos utilizados são a capacidade térmica,  $C_T$ , e a resistência térmica,  $R_T$ .

A *resistência térmica* define-se como:

$$R_T = \frac{T_2 - T_1}{q} = \frac{\Delta T}{q} \quad (2.25)$$

A capacidade térmica é dada pelo produto da massa ( $M$ ) pelo calor específico ( $c$ ), e está relacionada com o fluxo de calor e com a variação de temperatura pela expressão:

$$q = Mc \frac{dT}{dt} = C_T \frac{dT}{dt} \quad (2.26)$$

### Exemplo 2.3 - Simples termómetro de mercúrio

Admita-se que o termómetro está a uma temperatura  $T_l$  e é mergulhado num líquido à temperatura  $T_0$  em  $t=0$ .

No caso mais simples, o termómetro pode ser caracterizado como possuindo uma capacidade térmica  $C_T$ , que armazena calor, e uma resistência térmica,  $R_T$ , que limita o fluxo de calor.

O fluxo de calor que entra no termómetro é:

$$q = \frac{T_0 - T_m}{R_T} \quad (2.27)$$

O calor que entra no termómetro é armazenado na sua capacidade térmica de acordo com a equação:

$$Q = \int q(t)dt = C_T(T_m - T_1) \quad (2.28)$$

Substituindo (2.27) em (2.28) temos:

$$\int \frac{T_0 - T_m}{R_T} dt = C_T(T_m - T_1) \quad (2.29)$$

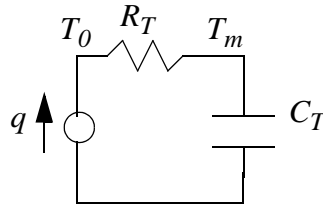
Diferenciando (2.29), temos:

$$\frac{T_0 - T_m}{R_T} = C_T \frac{dT_m}{dt} \quad (2.30)$$

Aplicando transformadas de Laplace, temos:

$$G(s) = \frac{T_m(s)}{T_0(s)} = \frac{1}{1 + sR_TC_T} \quad (2.31)$$

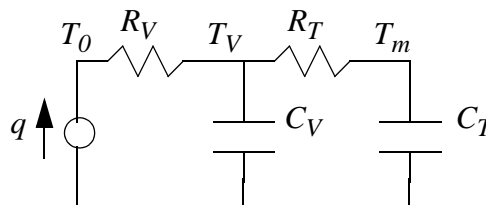
O circuito térmico é obtido, primeiramente, identificando os nós com diferentes temperaturas, e ligando os elementos entre si. Assim, temos:



**FIGURA 2.13 - Circuito térmico**

#### Exemplo 2.4 - Modelo mais completo de um termómetro de mercúrio

No exemplo anterior foi considerado que o vidro que reveste o mercúrio do termómetro tinha uma resistência e capacidade térmicas nulas. Esta simplificação é removida agora, considerando que o vidro tem uma temperatura  $T_v$ , caracterizada por uma resistência térmica  $R_v$  e por uma capacidade térmica  $C_v$ . O circuito térmico passará então a ser:



**FIGURA 2.14 - Circuito térmico mais completo**

### 2.2.5 Sistemas fluídicos

Nestes sistemas a variável através é a *taxa do fluxo líquido* ( $q$ ) e as variáveis entre extremos são as energias potenciais em cada tanque, dada por  $(\rho A h^2)/2$ , onde  $\rho$  é o coeficiente de densidade fluídica. É comum considerar, dado  $\rho$  e  $A$  serem constantes, as variáveis entre extremos os níveis do líquido,  $h$ . Os elementos do sistema são a *resistência do orifício* e a *área seccional* do tanques. Consideremos o seguinte sistema:

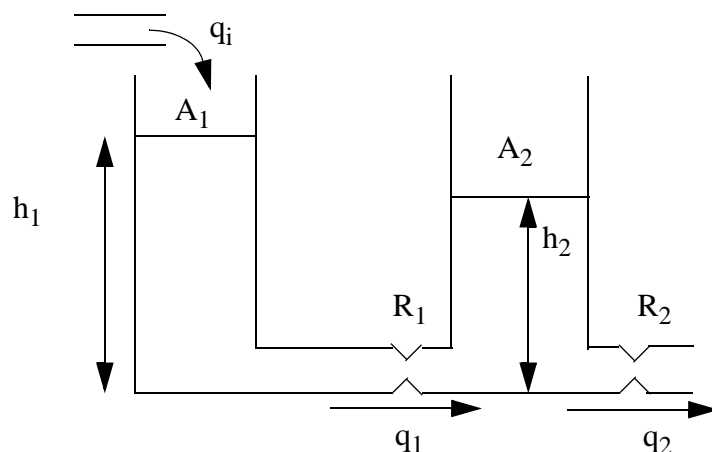


FIGURA 2.15 - Sistemas fluídicos

As equações básicas deste sistema são:

- Fluxo através do estrangulamento 1:

$$q_1 = \frac{h_1 - h_2}{R_1} \quad (2.32)$$

- Tanque 1:

$$q_i - q_1 = A_1 \frac{dh_1}{dt} \quad (2.33)$$

- Tanque 2:

$$q_1 - q_2 = A_2 \frac{dh_2}{dt} \quad (2.34)$$

- Fluxo através do estrangulamento 2:

$$q_2 = \frac{h_2}{R_2} \quad (2.35)$$

O circuito fluídico ficará então:

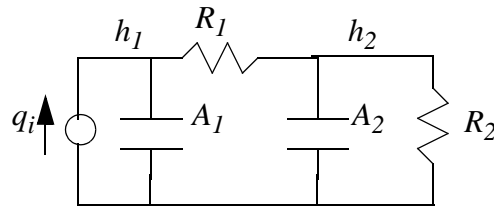


FIGURA 2.16 - Circuito fluídico

As equações diferenciais são:

$$h_1 \rightarrow q_i = A_1 \frac{dh_1}{dt} + \frac{h_1 - h_2}{R_1} \quad (2.36)$$

$$h_2 \rightarrow 0 = \frac{h_2 - h_1}{R_1} + A_2 \frac{dh_2}{dt} + \frac{h_2}{R_2} \quad (2.37)$$

## 2.3 Componentes de sistemas

A maior parte dos sistemas práticos são constituídos por uma combinação dos sistemas atrás descritos. Nesta secção vamos referir brevemente alguns componentes que permitem interligar os diferentes sistemas.

### 2.3.6 Potenciómetros

Os potenciómetros são elementos que fornecem uma tensão de saída proporcional a um deslocamento, linear ou angular. O potenciómetro mais vulgar é o potenciómetro de resistência, ilustrado na fig. seguinte na sua versão circular:

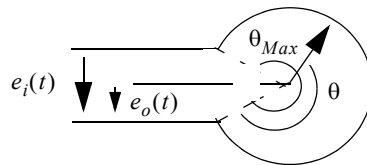


FIGURA 2.17 - Potenciómetro de resistência circular

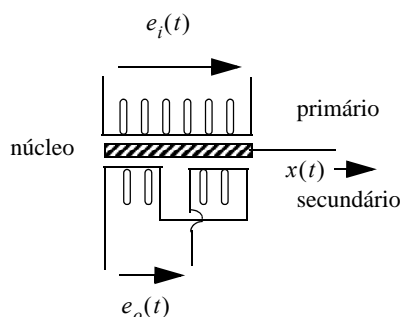
A função de transferência deste componente é:

$$G(s) = \frac{E_o(s)}{\theta(s)} = \frac{E_i}{\theta_{Max}} = k \quad (2.38)$$

Quando os potenciômetros são do tipo bobinado, a função de transferência é descontínua, apresentando um formato de uma escada.

### 2.3.7 Transformador diferencial linear variável

Este elemento é um sensor de deslocamento linear. É constituído por um enrolamento primário e dois enrolamentos secundários, ligados em oposição de fase.



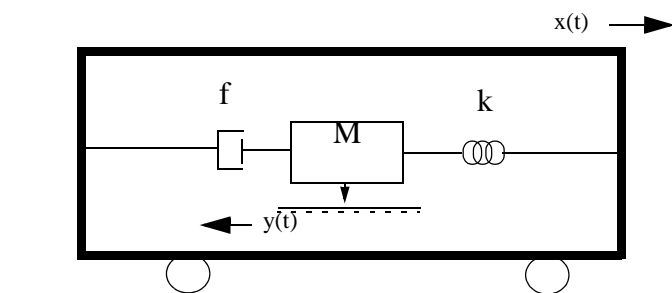
**FIGURA 2.18 - Transformador linear diferencial variável**

O enrolamento primário é alimentado por uma tensão AC ( $e_i(t)$ ), e está acoplado magneticamente aos secundários por um núcleo móvel. Quando o núcleo se encontra numa posição central dos dois enrolamentos secundários, a tensão de saída é nula. Movendo o núcleo a tensão de saída irá variar proporcionalmente com o deslocamento, de tal modo que:

$$G(s) = \frac{E_o(s)}{X(s)} = k \quad (2.39)$$

### 2.3.8 Acelerómetro

Este sensor mede a aceleração de um sistema.



**FIGURA 2.19 - Acelerómetro**

Observando a fig. 2.19 , vemos que o comportamento da mola e do amortecedor só dependem da variável  $y(t)$ , enquanto que a massa depende de  $x(t)-y(t)$  devido á sua inércia. A equação diferencial do sistema é assim:

$$-M \frac{d^2(x-y)}{dt^2} + f \frac{dy}{dt} + ky = 0 \quad (2.40)$$

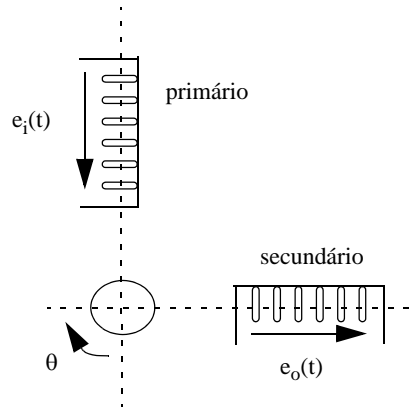
Aplicando transformadas de Laplace, temos:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{s^2 X(s)} = \frac{1}{s^2 + \frac{sf}{M} + \frac{k}{M}} \quad (2.41)$$

A saída do acelerómetro é normalmente medida com um potenciómetro linear, de modo a se obter uma tensão.

### 2.3.9 Taquímetros

Estes elementos medem a velocidade angular. Existem taquímetros AC e DC, sendo os primeiros mais precisos.



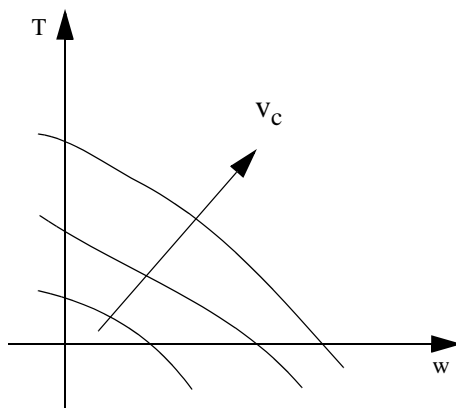
**FIGURA 2.20 - Taquímetro AC**

Uma tensão sinusoidal conhecida,  $e_i(t)$  é aplicada ao enrolamento primário. Como o enrolamento secundário se encontra a  $90^\circ$  com o primário, se o rotor estiver em repouso nenhuma tensão será induzida no secundário. Quando o rotor estiver em movimento, a tensão de saída será proporcional à velocidade angular do veio.

$$G(s) = \frac{E_o(s)}{W(s)} = k \quad (2.42)$$

### 2.3.10 Motores de controlo AC

Os motores de controlo, ou servomotores destinam-se a fornecer os binários necessários ao sistema. Um motor AC é semelhante a um taquímetro e é um motor de indução bifásico, com as fases separadas de um ângulo de  $90^\circ$ . A amplitude de uma das voltagens aplicadas é mantida constante (tensão de referência), enquanto a outra (de controlo) varia, variando assim a velocidade e o binário do motor. A relação entre a velocidade e o binário não é linear, e varia com a tensão de controlo. A figura seguinte mostra curvas características destes motores.



**FIGURA 2.21 - Curvas binário-velocidade de motores AC**

Se se fizer uma aproximação linear das curvas, o binário pode ser dado por:

$$T(t) = k_c v_c(t) + k_w w(t) \quad (2.43)$$

Note que, de acordo com a figura,  $k_c > 0$  e  $k_w < 0$ . Admitindo que a carga é constituída por uma inércia e um amortecedor, a equação diferencial do sistema é:

$$k_c v_c(t) + k_w w(t) = J\alpha(t) + fw(t) \quad (2.44)$$

Aplicando TL, a função de transferência obtida é:

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{v_c(s)} = \frac{k_c}{s(sJ + f - k_w)} \quad (2.45)$$

### 2.3.11 Motores de controlo DC

Consideremos o motor DC esquematizado na fig. 2.21 . O fluxo magnético ( $\Phi$ ) é proporcional à corrente indutora ( $i_f$ )

$$\Phi = k_f i_f \quad (2.46)$$

O binário produzido pelo motor é função do fluxo e da corrente do induzido ( $i_a$ )

$$T = k_a k_f i_a i_f = k i_a i_f \quad (2.47)$$

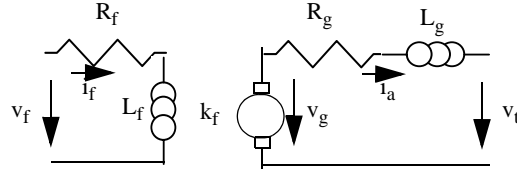


FIGURA 2.22 - Motor DC

Para que o motor tenha um comportamento linear, uma das correntes tem que permanecer constante.

### 2.3.11.2 Motor DC controlado pelo indutor

Neste caso temos

$$T(s) = k_m I_f(s) \quad (2.48)$$

A corrente do indutor pode-se obter da sua tensão através de

$$I_f(s) = \frac{V_f(s)}{sL_f + R_f} \quad (2.49)$$

Admitindo que a carga é constituída por uma inércia e um amortecedor, temos:

$$T(s) = s^2 J \theta(s) + s f \theta(s) \quad (2.50)$$

Utilizando as últimas 3 equações, é fácil concluir que:

$$\frac{\theta(s)}{V_f(s)} = \frac{k_m}{(sL_f + R_f)(s^2 J + s f)} \quad (2.51)$$

### 2.3.11.3 Motor DC controlado pelo induzido

Neste caso temos

$$T(s) = k_m I_a(s) \quad (2.52)$$

A corrente do induzido está relacionada com a tensão do induzido pela seguinte equação:

$$V_a(s) = (sL_a + R_a)I_a(s) + V_b(s), \quad (2.53)$$



onde  $V_b(s)$  é a força contra-electromotriz, proporcional à velocidade do motor:

$$V_b(s) = k_b W(s) \quad (2.54)$$

Substituindo (2.54) em (2.53), temos:

$$I_a(s) = \frac{V_a(s) - k_b W(s)}{sL_a + R_a} \quad (2.55)$$

Admitindo que a carga é constituída por uma inércia e um amortecedor, temos:

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{V_a(s)} = \frac{k_m}{s[(sL_a + R_a)(Js + f) + k_b k_m]} \quad (2.56)$$