Departamento de Engenharia Elétrica
Faculdade de Tecnologia
Universidade de Brasília

ENE/FT/UnB

Prof. Adolfo Bauchspiess
adolfo@ene.unb.br
http://www.ene.unb.br/adolfo/CDig

Quinta-Feira, 27 de abril de 2004, 8^{00} - 10^{00}

Nome:____Matrícula:______________

RESOLUÇÃO 1ª PROVA – 164887 CONTROLE DIGITAL - 1°/2004

1ª Questão: 2Pts Utilize a transformada-***Z*** para resolver a seguinte equação a diferenças:

$$y(k) - 1{,}5y(k-1) + 0{,}5y(k-2) = 2u(k-1) - 2u(k-2)$$

$$u(k) = \begin{cases} k, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

$$y(k) = 0, \qquad k < 0.$$

Tabela de Transformadas -***Z***

$\frac{1}{s}$	$1(kT)$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	kT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-akT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	kTe^{-akT}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$

Função de Transferência Discreta:

$$Y(z)(1-1{,}5z^{-1}+0{,}5z^{-2}) = U(z)(2z^{-1}-2z^{-2})$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{(2z^{-1}-2z^{-2})}{(1-1{,}5z^{-1}+0{,}5z^{-2})} = \frac{2z-2}{z^2-1{,}5z+0{,}5} = \frac{2(z-1)}{(z-1)(z-0{,}5)} = \frac{2}{z-0{,}5}$$

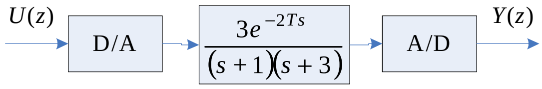
Resposta à rampa:

$$Y(z) = \frac{2}{(z-0{,}5)}\frac{z}{(z-1)^2} = \frac{A}{(z-1)} + \frac{B}{(z-1)^2} + \frac{C}{(z-0{,}5)}$$

$$Y(z) = \frac{-4}{(z-1)} + \frac{4}{(z-1)^2} + \frac{4}{(z-0{,}5)} = z^{-1}\left\{\frac{-4z}{(z-1)} + \frac{4z}{(z-1)^2} + \frac{4z}{(z-0{,}5)}\right\}$$

$$\boxed{y(k) = 4(-1+(k-1)+0{,}5^{k-1})1(k-1)}$$

2ª ***Questão***: 5 Pts. Considere o seguinte sistema, com taxa de amostragem T:



a) Obtenha a função de transferência discreta correspondente à $G(z)=\dfrac{Y(z)}{U(z)}$.

b) Obtenha o modelo discreto equivalente ($U(z)\rightarrow Y(z)$) no espaço de estados na forma canônica controlável.

c) Calcule a resposta do sistema discreto a uma entrada pulso unitário (6 primeiros valores).

d) Para um degrau unitário de entrada, qual o valor final de $y(k)$?

e) Considerando $u(k)=2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\mathrm{T}k\right)1(k)$, obtenha $y(k)$ em regime permanente.

---

a) Função de Transferência Discreta:

$$G(z)=z^{-2}(1-z^{-1})Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

$$\frac{G(s)}{s}=\frac{3}{s(s+1)(s+3)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{s+3}=\frac{1}{s}-\frac{1{,}5}{s+1}+\frac{0{,}5}{s+3}$$

$$Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}=\frac{z}{z-1}-1{,}5\frac{z}{z-e^{-T}}+0{,}5\frac{z}{z-e^{-3T}}$$

$$G(z)=z^{-2}(1-z^{-1})\left\{\frac{z}{z-1}-1{,}5\frac{z}{z-e^{-T}}+0{,}5\frac{z}{z-e^{-3T}}\right\}=z^{-2}\frac{(z-e^{-T})(z-e^{-3T})-1{,}5(z-1)(z-e^{-3T})+0{,}5(z-1)(z-e^{-T})}{(z-e^{-T})(z-e^{-3T})}$$

$$\boxed{G(z)=z^{-2}\frac{(1-1{,}5e^{-T}+0{,}5e^{-3T})z+0{,}5e^{-T}-1{,}5e^{-3T}+e^{-4T}}{z^2-(e^{-T}+e^{-3T})z+e^{-4T}}=\frac{b_1z^{-3}+b_2z^{-4}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}}$$

com

$a_1=-e^{-T}-e^{-3T}$, $a_2=e^{-4T}$, $b_1=1-1{,}5e^{-T}+0{,}5e^{-3T}$ e $b_2=0{,}5e^{-T}-1{,}5e^{-3T}+e^{-4T}$.

b) Considerando a forma canônica controlável:

$$x[k+1]=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&-a_2&-a_1\end{bmatrix}x[k]+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y[k]=\begin{bmatrix}b_2&b_1&0&0\end{bmatrix}x[k]$$

c) Resposta ao pulso, considerando a equação a diferenças

$$y(k)=-a_1y(k-1)-a_2y(k-2)+b_1u(k-3)+b_2u(k-4)$$

$k=0$ $u(k-3)=0,\ u(k-4)=0\rightarrow$ $y(0)=0$

$k=1$ $u(k-3)=0,\ u(k-4)=0\rightarrow$ $y(1)=0$

$k=2$ $u(k-3)=0,\ u(k-4)=0\rightarrow$ $y(2)=0$

$k=3$ $u(k-3)=1,\ u(k-4)=0\rightarrow$ $y(3)=b_1$

$k=4$ $u(k-3)=0,\ u(k-4)=1\rightarrow$ $y(4)=b_2-a_1b_1$

$k=5$ $u(k-3)=0,\ u(k-4)=0\rightarrow$ $y(5)=-a_1(b_2-a_1b_1)-a_2b_1$

d) Valor final para um degrau unitário: $Y(z) = \frac{z}{z-1} G(z)$

Teorema do Valor Final:

$$\lim_{k \to \infty} y(k) = \lim_{z \to 1} (z-1) \frac{z}{z-1} z^{-2} \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{b_1 + b_2}{1 + a_1 + a_2}$$

$$y(k \to \infty) = \frac{1 - e^{-T} - e^{-3T} + e^{-4T}}{1 - e^{-T} - e^{-3T} + e^{-4T}}$$

$$\boxed{y(k \to \infty) = 1}$$

Este resultado pode ser confirmado pelo Teorema do Valor Final aplicado ao sistema contínuo.

e) O sinal de entrada corresponde a $z = \pm j$. A resposta em regime permanente a sinais senoidais depende apenas do módulo e fase da função de transferência.

$$G(z) = z^{-2} \frac{b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2}$$

$$G(j) = -1 \frac{b_1 j + b_2}{-1 + a_1 j + a_2} = -\frac{b_2 + b_1 j}{-1 + a_2 + a_1 j} = A e^{j\beta}$$

$$A = \frac{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}{\sqrt{a_1^2 + (1 - a_2)^2}}, \qquad \beta = \tan^{-1} \frac{b_1}{b_2} - \tan^{-1} \frac{a_1}{a_2 - 1}$$

Em regime permanente $\boxed{y(k) = 2\mathrm{A}\cos\left(\frac{\pi}{2} \mathrm{T}k + \beta\right)}$

3ª Questão: 3Pts. Recomenda-se uma alimentação independente para que os chaveamentos digitais não perturbem a conversão A/D. Se uma única fonte alimentação é utilizada, a variação da tensão de alimentação também gera erro de medida.

Considere que para uma certa fonte, utilizada para alimentar um PIC18F252, admite, em função da variação de carga, fornecer a tensão nominal de 5V variando entre 4,5V e 5,5V.

(2pts) a) Considere o sensor LM35 conectado diretamente ao PIC (A/D de 10 bits, PCFG<3:0> = 0010). Qual o erro de leitura, em graus Celsius, causado pela variação admitida da tensão de alimentação?

(1pts) b) Visando tornar a conversão A/D imune às variações de alimentação do PIC e maximizar a resolução da leitura de temperaturas entre 10°C e 60°C, deverão ser gerados sinais adequados V_{REF+} e V_{REF-}. Quais estes valores e qual a programação correspondente de PCFG<3:0> ?

---

a) Para a ligação direta
0V-5V $\rightarrow$ 0 – 1023 (A/D de 10 bits). Assim 1023 seria interpretado como "500°C".

Para V_{DD} = 4,5V a temperatura de "450°C" produz 1023 o que seria interpretado como "500°C" pelo programa. Com V_{DD} = 5,5V "550°C" seria interpretado como "500°C". Assim o erro é de ± 10 %.

b) 10°C e 60°C $\rightarrow$ V_{REF-} =100mV e V_{REF+}=600mV.
PCFG = 1100 (3 entradas analógicas e 2 referências). Como o PIC18F252 tem 5 canais analógicos, 1101 e 1111 também seriam possíveis (correspondendo a 2 e 1 entrada analógica).

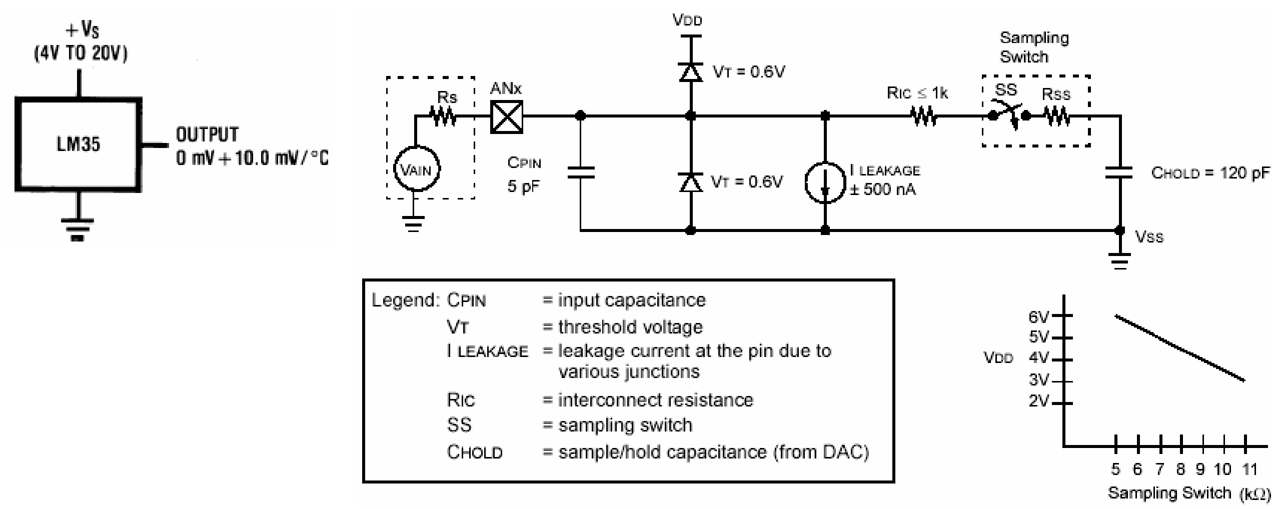
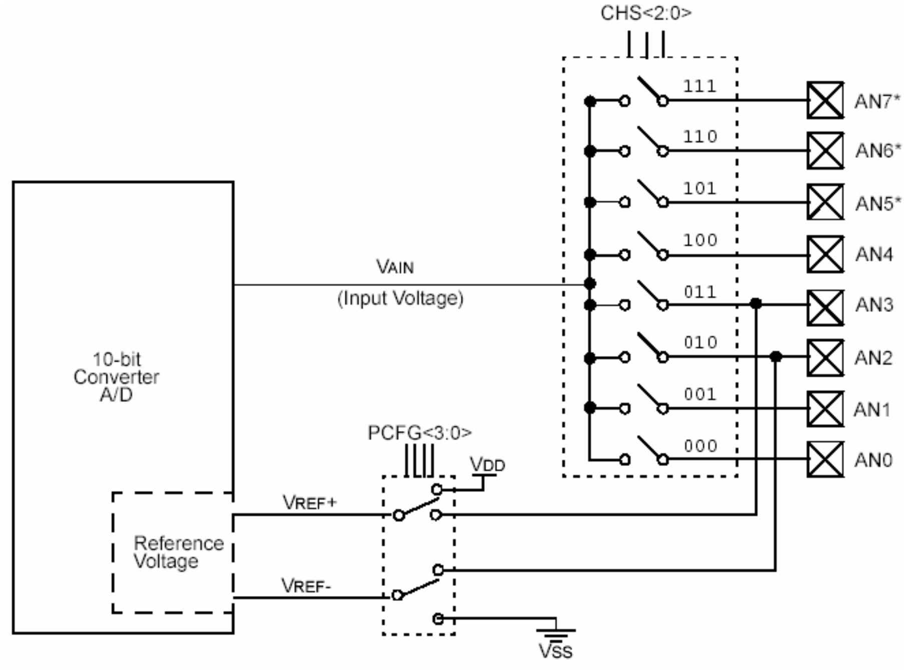


Figura 1 – Pinagem do LM35 e Modelo da Entrada Analógica do PIC18F252.



REGISTER 17-2: ADCON1 REGISTER

R/W-0	R/W-0	U-0	U-0	R/W-0	R/W-0	R/W-0	R/W-0
ADFM	ADCS2	—	—	PCFG3	PCFG2	PCFG1	PCFG0
bit 7							bit 0

bit 3-0 **PCFG3:PCFG0:** A/D Port Configuration Control bits

PCFG <3:0>	AN7	AN6	AN5	AN4	AN3	AN2	AN1	AN0	VREF+	VREF-	C / R
0000	A	A	A	A	A	A	A	A	VDD	VSS	8 / 0
0001	A	A	A	A	VREF+	A	A	A	AN3	VSS	7 / 1
0010	D	D	D	A	A	A	A	A	VDD	VSS	5 / 0
0011	D	D	D	A	VREF+	A	A	A	AN3	VSS	4 / 1
0100	D	D	D	D	A	D	A	A	VDD	VSS	3 / 0
0101	D	D	D	D	VREF+	D	A	A	AN3	VSS	2 / 1
011x	D	D	D	D	D	D	D	D	—	—	0 / 0
1000	A	A	A	A	VREF+	VREF-	A	A	AN3	AN2	6 / 2
1001	D	D	A	A	A	A	A	A	VDD	VSS	6 / 0
1010	D	D	A	A	VREF+	A	A	A	AN3	VSS	5 / 1
1011	D	D	A	A	VREF+	VREF-	A	A	AN3	AN2	4 / 2
1100	D	D	D	A	VREF+	VREF-	A	A	AN3	AN2	3 / 2
1101	D	D	D	D	VREF+	VREF-	A	A	AN3	AN2	2 / 2
1110	D	D	D	D	D	D	D	A	VDD	VSS	1 / 0
1111	D	D	D	D	VREF+	VREF-	D	A	AN3	AN2	1 / 2

A = Analog input D = Digital I/O
C/R = # of analog input channels / # of A/D voltage references

Legend:			
R = Readable bit	W = Writable bit	U = Unimplemented bit, read as '0'	
- n = Value at POR	'1' = Bit is set	'0' = Bit is cleared	x = Bit is unknown