



APRENDIZADO DOS FUNDAMENTOS DE SISTEMAS DINÂMICOS USANDO O SOFTWARE MAPLE

Leandro dos Santos Coelho

Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Laboratório de Automação e Sistemas, PUCPR/CCET/LAS
Rua Imaculada Conceição, 1155, Prado Velho, 80215-030 – Curitiba – PR
e-mail: lscoelho@rla01.pucpr.br

Resumo. *Este artigo visa tratar alguns aspectos da utilização do software Maple para o estudo de fundamentos de sistemas dinâmicos. Dois estudos de caso de sistemas dinâmicos lineares de ordem reduzida são abordados: (i) um sistema elétrico de 1ª ordem, composto de um resistor e de um capacitor, conectados em paralelo, e (ii) um sistema mecânico de 2ª ordem, constituído de um pêndulo de torção. Um conjunto de lições dos estudos de caso com as respectivas implementações no software Maple são apresentados. Estas lições são ferramentas úteis para o aprimoramento de aulas relativas a sistemas dinâmicos, sendo estas ministradas, principalmente, por docentes das áreas de Engenharias de Controle e Automação, Elétrica, Mecânica e Computação.*

Palavras-chave: *Maple, Modelagem de sistemas dinâmicos, Metodologias de ensino, Novas Tecnologias e Metodologias no Ensino de Engenharia.*

1. INTRODUÇÃO

As simulações usando ambientes computacionais têm sido muito utilizadas para diversas tarefas de ensino e treinamento de engenheiros. As simulações, em um ambiente de ensino ou treinamento, trazem diversos benefícios, pois o usuário está em contato direto com o modelo matemático do sistema dinâmico de interesse.

Os desenvolvimentos de *hardware* e *software*, nos últimos anos, proporcionaram muitas mudanças na forma das pessoas resolverem problemas. Os profissionais das engenharias têm obtido benefícios de novas ferramentas para a resolução de problemas nas áreas de processamento de sinais, modelagem de sistemas dinâmicos, identificação e controle de sistemas dinâmicos. Nestas áreas destacam-se alguns ambientes computacionais interativos de simulação que permitem a exploração de conexões entre o modelo e o comportamento real do sistema, tais como: Matlab/Simulink, MathCAD, Mathematica e Maple.

O *software* Maple, da Waterloo Maple Inc, consiste de um ambiente computacional utilizado, geralmente, em problemas de processamento algébrico, cálculos polinomiais, visualização gráfica, simulação e otimização de sistemas.

Neste artigo, o conteúdo de um tópico da disciplina de Processos em Engenharia é abordado. Esta disciplina é ministrada para os discentes no 5º semestre, do curso de Engenharia Mecatrônica (Controle e Automação), da Pontifícia Universidade Católica do Paraná. De acordo com a ementa da disciplina, alguns estudos podem ser incluídos visando-se a utilização do ambiente computacional Maple, este para a realização de simulações em modelagem, identificação e controle de sistemas dinâmicos. No artigo são apresentados dois estudos de caso, através de lições que exploram as potencialidades do Maple (versão V, atualização 4) para o ensino de fundamentos relevantes de sistemas dinâmicos, na área de engenharia elétrica e mecânica.

A contribuição deste artigo é propor lições relativas aos fundamentos de sistemas dinâmicos lineares invariantes no tempo. As lições são ministradas visando motivar os estudantes ao aproveitamento das potencialidades do *software* Maple. Estas lições são ferramentas úteis ao aprimoramento de tópicos de aula sobre sistemas dinâmicos, sendo estas ministradas por professores que atuam, principalmente, nas áreas de Engenharias de Controle e Automação, Elétrica, Mecânica e Computação.

O artigo é organizado da seguinte forma. Na seção 2 são apresentados dois estudos de caso analisados com o Maple. Na seção 3, os exemplos da aplicação do Maple para o ensino de sistemas dinâmicos são tratados. Na seção 4, as conclusões e as perspectivas de trabalhos futuros são discutidas.

2. ESTUDOS DE CASO DE SISTEMAS DINÂMICOS DE ORDEM REDUZIDA

Neste artigo as lições são baseadas em dois estudos de caso: (i) um sistema dinâmico de 1ª ordem, que representa um circuito elétrico constituído por um resistor e um capacitor (*RC*) conectados em paralelo, e (ii) um sistema dinâmico de 2ª ordem, este um problema clássico à análise de sistemas mecânicos denominado pêndulo de torção. A seguir os dois estudos de caso são descritos.

2.1. Estudo de caso 1 (sistema dinâmico de 1ª ordem): Circuito elétrico *RC*

O circuito elétrico é composto de um resistor de $1\text{ M}\Omega$ e um capacitor de $1\text{ }\mu\text{F}$ ligados em paralelo. A representação deste sistema dinâmico, no domínio da frequência, é dada pela equação:

$$X(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \quad (1)$$

onde τ é a constante de tempo do sistema dada por $\tau = RC = (1 \times 10^6)(1 \times 10^{-6}) = 1\text{ s}$. O valor de K é o valor do ganho do sistema (neste caso, $K=5$).

2.2. Estudo de caso 2 (sistema dinâmico de 2ª ordem): Pêndulo de torção

O pêndulo de torção [1] caracteriza um sistema mecânico de rotação, conforme apresentado na figura 1. As usuais aplicações deste tipo de pêndulo são em relógios colocados em cúpulas de vidro. Neste estudo de caso, o momento de inércia do cilindro é representado por J , enquanto B indica o atrito entre o cilindro e o ar, e K representa a elasticidade da suspensão metálica. Por simplificação, assume-se que o torque é aplicado ao cilindro do pêndulo, enquanto em um relógio o torque é aplicado por um complexo mecanismo de mola. Somando-se os torques na esfera obtém-se

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = \tau(t) - B \frac{d\theta}{dt} - K\theta(t) \quad (2)$$

A função de transferência é obtida pela utilização da propriedade da diferenciação da transformada de Laplace, tal que:

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Js^2 + Bs + K} \quad (3)$$

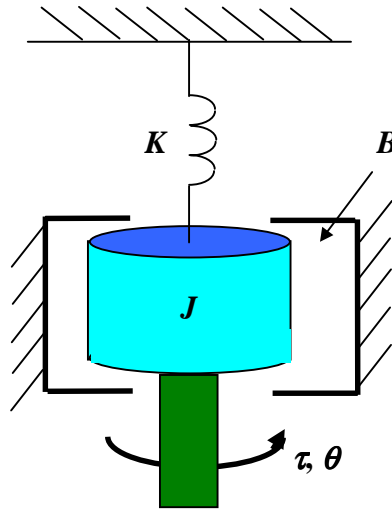


Figura 1. Pêndulo de torção.

3. DETERMINAÇÃO DE CARACTERÍSTICAS DE SISTEMAS DINÂMICOS USANDO MAPLE

3.1. Determinação da função de transferência usando a transformada de Laplace

A transformada de Laplace é uma ferramenta matemática para análise de sistemas dinâmicos lineares invariantes no tempo (sistemas *LTI*), no domínio da frequência. Os sistemas *LTI* são relevantes em estudos de processos elétricos, mecânicos, eletromecânicos, químicos, entre outros, pois apresentam coeficientes constantes associados as suas respectivas equações dinâmicas. A definição da transformada de Laplace unilateral é dada pela equação:

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (4)$$

onde $X(s)$ é o sinal no domínio da frequência, t é a variável independente tempo, $x(t)$ é o sinal no domínio do tempo, $s = \sigma + j\omega$ é um número complexo com parte real (σ) e parte imaginária (ω). A seguir são mencionados alguns exemplos da aplicação da transformada de Laplace à análise dos sistemas dinâmicos dos estudos de caso 1 e 2.

- ***Lição 1: Análise do sistema dinâmico no domínio da frequência***

Estudo de caso 1: Circuito RC

a) Cálculo da transformada de Laplace do circuito RC com ganho 5 e condição inicial $x(0) = 5$:

```
> with(inttrans):
> X:=laplace(5*exp(-1*t), t, s);
```

$$X = \frac{5}{s + 1}$$

b) Determinação dos pólos (raízes do polinômio do denominador) e zeros (raízes do polinômio do numerador) do circuito RC:

```
> polos := roots(s+1);
```

```
polos := [[-1, 1]]
```

```
> zeros := roots(5);
```

```
zeros := []
```

A partir do cálculo dos pólos e zeros do sistema dinâmico pode-se obter algumas características do circuito RC. O circuito RC possui um zero no infinito e um pólo em -1 com multiplicidade 1. A posição do pólo no semi-plano esquerdo do plano dos números complexos, $s = \sigma + j\omega$, caracteriza um sistema dinâmico estável em malha aberta (isto é, sem a presença de um controlador). Um elemento essencial para a caracterização do circuito RC é a constante de tempo, $\tau = 1$, e o ganho, $K = 5$, pois a função de transferência deste sistema dinâmico de 1ª ordem é dada por

$$X(s) = \frac{K}{\tau s + 1} = \frac{5}{s + 1}.$$

c) Cálculo da transformada inversa de Laplace $\{X(s) \rightarrow x(t)\}$ e traçado do gráfico (conforme apresentado na figura 2) do sinal no domínio do tempo:

```
> x:=invlaplace(5/(s+1),s,t);
```

```
x := 5 exp(-t)
```

```
> plot(x(t),t=0..8);
```

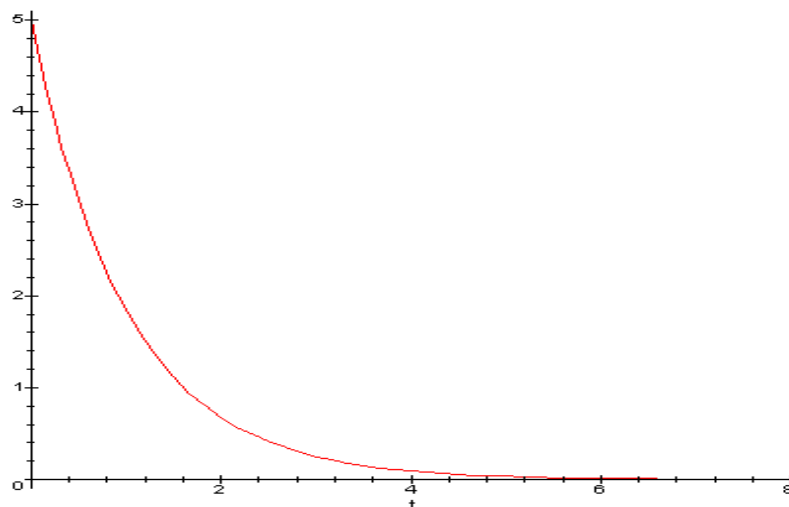


Figura 2. Comportamento dinâmico no domínio do tempo do circuito RC.

Estudo de caso 2: Pêndulo de torção

Cálculo da transformada de Laplace do sistema dinâmico para $J=2$ e $K=8$. O coeficiente de atrito tem o seu valor modificado, pois $B=4$, 8 ou 12. A partir da modificação do valor de B pode-se verificar os diversos comportamentos possíveis do pêndulo de torção, no domínio do tempo.

Usando o Maple tem-se:

```
> J := 2;
> K := 8;
> for B from 4 by 4 to 12 do
>   with(inttrans): x:=invlaplace(1/(J*s^2+B*s+K), s, t);
>   plot(x(t), t=0..10);
> od;
```

Nota-se a partir dos gráficos de $x(t)$, apresentados na figura 3, que o pêndulo de torção apresenta comportamento diferenciado de acordo com o valor de B . A taxa de amortecimento, ξ , deste sistema dinâmico é calculada pela equação:

$$\xi = \frac{B}{2\sqrt{KJ}} \quad (5)$$

Observa-se que para $B=4$, o sistema apresenta um comportamento subamortecido, ($0 < \xi < 1$), para $B=8$; um comportamento criticamente amortecido ($\xi = 1$); e para $B=12$, o comportamento é sobreamortecido ($\xi > 1$).

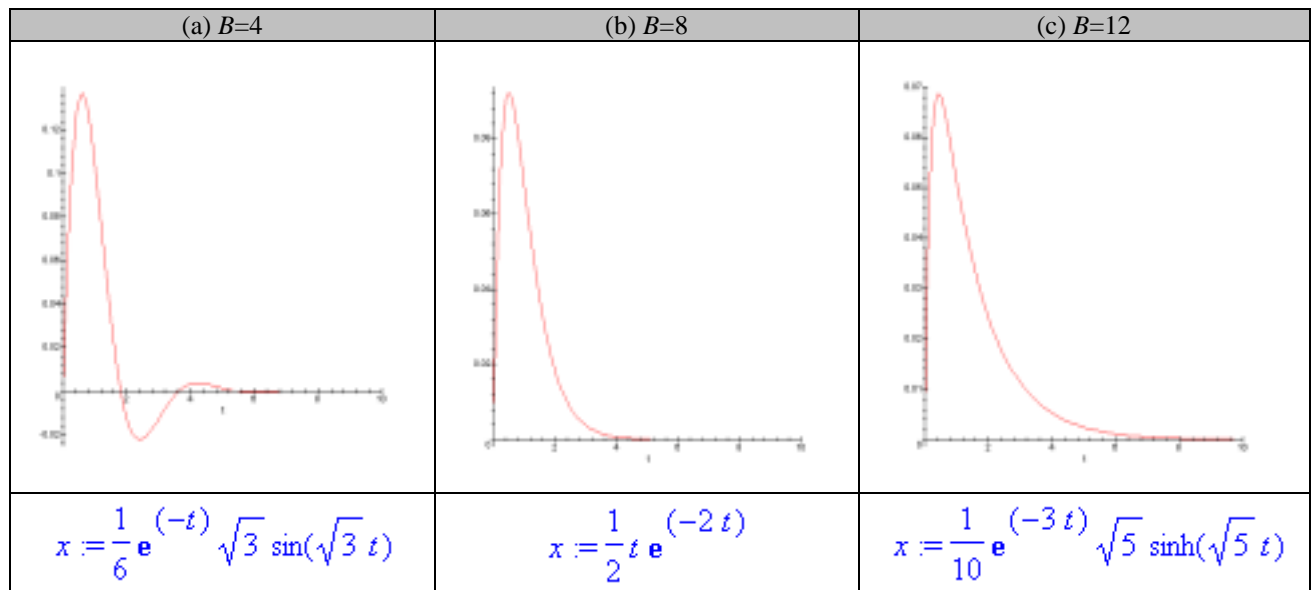


Figura 3. Comportamento do pêndulo de torção no domínio do tempo.

• Lição 2: Análise da resposta dos sistemas dinâmicos a um sinal degrau unitário

A resposta de um sistema de controle é usualmente dividida em duas partes: a resposta em regime transiente e a resposta em regime permanente (*steady-state*), ou seja,

$$y(t) = y_{\text{resposta_em_regime_transiente}}(t) + y_{\text{resposta_em_regime_permanente}}(t) \quad (6)$$

Em um sistema de controle de sistemas dinâmicos, a resposta em regime transiente é definida como a parte da resposta no tempo que vai para zero quando o tempo é grande, ou seja, $\lim_{t \rightarrow \infty} y_{\text{resposta_transiente}}(t) = 0$ [2]. A resposta em

regime permanente é simplesmente a parte da resposta total que é mantida depois que a resposta transiente termina. A resposta em regime pode manter-se variando em um padrão fixo, de forma similar a uma onda senoidal, ou uma função rampa que aumenta com o tempo.

Estudo de caso 1: Circuito RC

A seguir é apresentada a resposta do circuito RC a um sinal degrau unitário. Neste caso, a resposta ao degrau no domínio da frequência (ver figura 4) caracteriza uma operação de convolução entre o sistema dinâmico, $X(s) = 5/(s+1)$, e um sinal de entrada degrau $1/s$ (sinal no domínio de frequência). O teste de resposta ao sinal degrau é um procedimento importante na análise de sistemas dinâmicos, sendo este utilizado para verificação das propriedades de sistemas LTI, tais como: adição, mudança de escala, deslocamento no tempo e superposição.

Usando o Maple obtém-se:

```
> resposta_degrau1:=(5/(s+1))*(1/s);
```

$$\text{resposta_degrau1} := \frac{5}{(s+1)s}$$

```
> x := invlaplace(resposta_degrau1,s,t);
```

$$x := -5*\exp(-t)+5$$

```
> plot(x(t),t=0..10);
```

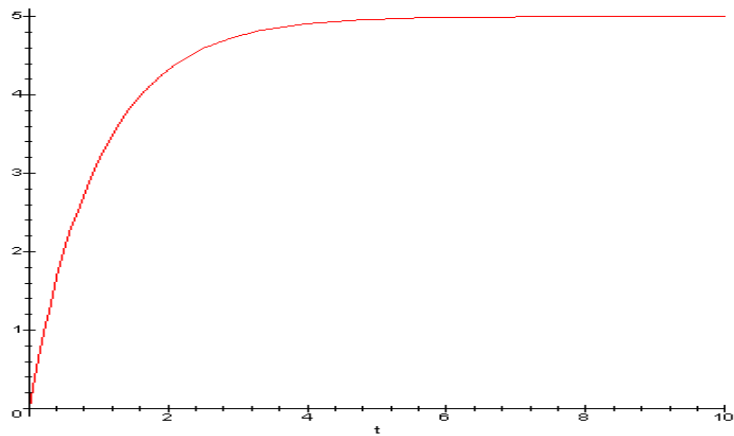


Figura 4. Resposta a um sinal degrau unitário do circuito RC.

A partir do resultado apresentado na figura 4, conclui-se que a resposta em regime permanente do sistema dinâmico para um sinal degrau unitário é $x(\infty) = 5$. Este resultado é confirmado pela aplicação do teorema do valor final da transformada de Laplace, $x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$, ou seja,

```
> limit(5/(s+1), s=0);
```

$$5$$

Estudo de caso 2: Pêndulo de torção

A seguir na figura 5 é apresentada a resposta ao sinal degrau unitário para o pêndulo de torção. Os valores utilizados são os mesmos da lição 1, isto é, $B=4$, 8 ou 12, $J=2$ e $K=8$.

```
> J := 2;
> K := 8;
> for B from 4 by 4 to 12 do
>   with(intrans): x:=invlaplace((1/(J*s^2+B*s+K))*(1/s), s, t);
>   plot(x(t), t=0..10);
>   limit(1/(J*s^2+B*s+K),s=0);
> od;
```

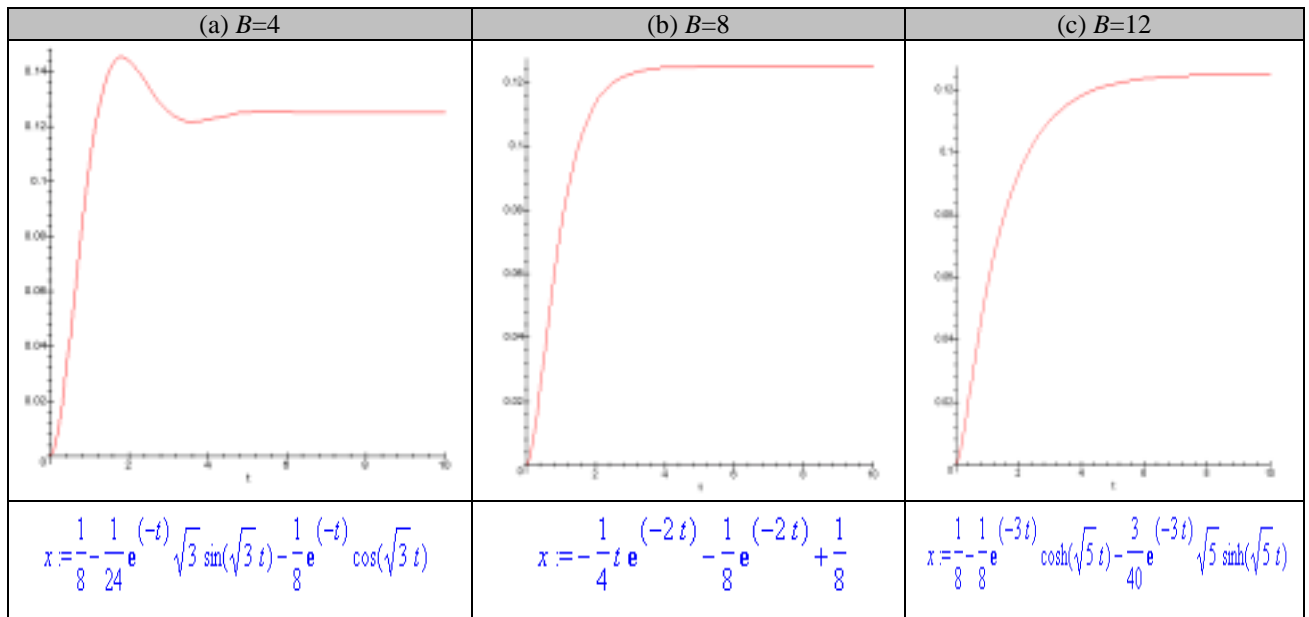


Figura 5. Resposta a um sinal degrau unitário do pêndulo de torção.

Através dos resultados apresentados na figura 5 conclui-se que a resposta em regime permanente do sistema dinâmico a um sinal degrau unitário é $x(\infty) = \frac{1}{8} = 0,125$. Este resultado pode ser verificado pela aplicação do teorema do valor final da transformada de Laplace, $x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$.

- **Lição 3: Determinação da curva estática de sistemas dinâmicos**

A curva estática de um sistema dinâmico constitui-se de um gráfico $y(\infty)xu(t)$. A curva pode ser obtida através do gráfico de diversas respostas ao degrau, $\alpha u(t)$, fazendo-se mudanças de escala, isto é, mudando-se o valor de $\alpha \in [\alpha_{\text{mínimo}}, \alpha_{\text{máximo}}]$. O valor de $y(\infty)$ armazenado é o valor de $y(t)$ em regime permanente.

Estudo de caso 1: Circuito RC

```
with(plots): pointplot({seq([alfa,limit((5*alfa)/(s+1), s=0)],alfa=0..5)},style=line);
```

A partir do gráfico da figura 6(a) da análise apresentada pode-se verificar que o circuito RC é linear para todas as faixas de operação.

Estudo de caso 2: Pêndulo de torção (para $B=12$, caso de comportamento sobreamortecido)

```
with(plots): pointplot({seq([alfa,limit((5*alfa)/(2*s^2+8*s+8), s=0)],alfa=0..5)},style=line);
```

A partir do gráfico da figura 6(b) da análise apresentada pode-se verificar que o pêndulo de torção é linear para todas as faixas de operação, de forma análoga ao circuito RC.

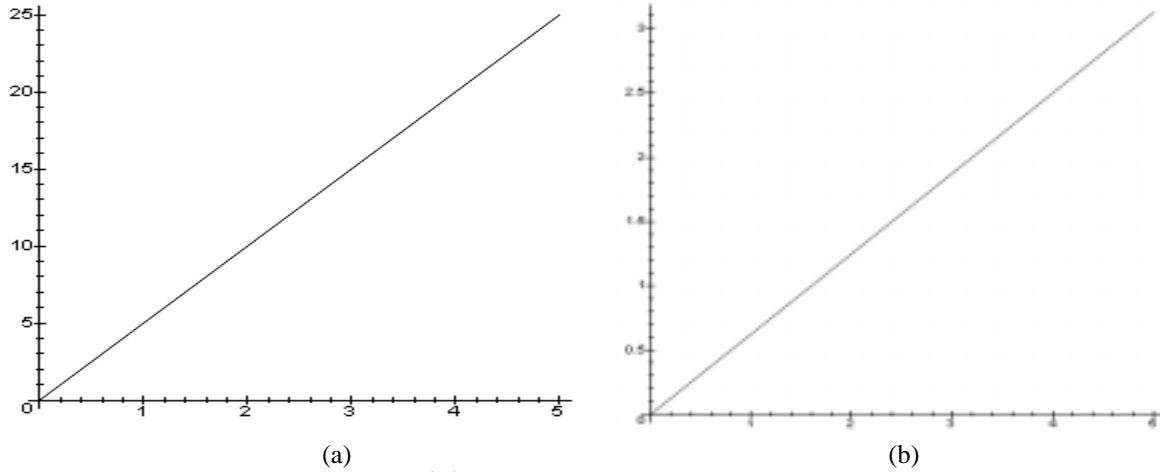


Figura 6. Curva estática $y(\infty) x u(t)$: (a) para o circuito RC; (b) para o pêndulo de torção.

• **Lição 4: Sintonia de parâmetros de um controlador proporcional, integral e derivativo (PID)**

Quando se tem um modelo matemático do processo, é possível aplicar várias técnicas visando a determinação dos parâmetros de um controlador *PID* que atendam às especificações de regimes transitório e estacionário do sistema dinâmico em malha fechada [3]. A função de transferência do controlador *PID* clássico, no domínio da frequência, é:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left\{ 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right\} = K_p + \frac{K_p}{T_i s} + K_p T_d s = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s} \quad (7)$$

📖 **Estudo de caso 1: Circuito RC**

O procedimento de seleção dos parâmetros do controlador de modo a serem atendidas as especificações de desempenho é conhecido como sintonia do controlador. Ziegler e Nichols [4] propuseram regras para a sintonia de controladores *PID* (significando o ajuste dos valores de K_p , T_i e T_d) baseadas na resposta experimental a um sinal degrau ou no valor de K_p que resulta em estabilidade marginal quando se utiliza unicamente a ação de controle proporcional [3].

No primeiro método de Ziegler e Nichols [4] se obtém experimentalmente a resposta do circuito RC a um sinal degrau unitário (apresentada na lição 1, figura 4). Quando o processo a controlar não envolver integradores nem pólos dominantes complexos conjugados, a curva de resposta ao degrau unitário pode se assemelhar a uma *curva em forma de S*. A curva em forma de *S* pode se caracterizar por duas constantes, o tempo de atraso L e a constante de tempo T . O tempo de retardo e a constante de tempo podem ser determinadas traçando-se à curva em forma de *S* no ponto de inflexão e determinando-se as interseções com o eixo dos tempos e com a reta $c(t)=K$, conforme assinalado na figura 7. A função de transferência da saída do sistema dinâmico em relação ao sinal de entrada, $Y(s)/U(s)$, pode ser aproximada à de um sistema dinâmico de primeira ordem com atraso de transporte, ou seja,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K e^{-Ls}}{Ts + 1} \quad (8)$$

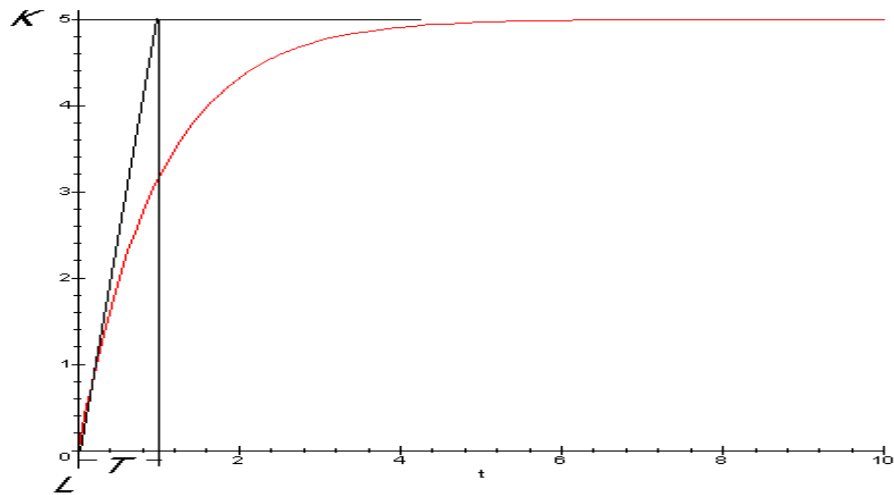


Figura 7. Resposta a um sinal degrau unitário do circuito *RC* para a sintonia do controlador *P*, *PI* ou *PID*.

Neste caso, os valores obtidos são de aproximadamente: $K = 5$, $L = 0,1$ e $T = 1$. Conseqüentemente, os ganhos de controladores *P*, *PI* e *PID* são calculados pelos valores apresentados na tabela 1.

Tabela 1. Regra de sintonia de Ziegler e Nichols baseada na resposta do processo a um sinal degrau.

| ação | K_p | T_i | T_d |
|------------|--|--|---------------|
| <i>P</i> | $\frac{T}{L} = \frac{1}{0,1} = 10$ | ∞ | 0 |
| <i>PI</i> | $0,9 \frac{T}{L} = 0,9 \frac{1}{0,1} = 9$ | $\frac{L}{0,3} = \frac{0,1}{0,3} = 0,33$ | 0 |
| <i>PID</i> | $1,2 \frac{T}{L} = 1,2 \frac{1}{0,1} = 12$ | $2L = 2 \times 0,1 = 0,20$ | $0,5L = 0,05$ |

Na figura 8 é apresentado o projeto de controle *PID* (resposta em malha fechada) para o estudo de caso do circuito *RC*. Neste caso, o seguinte programa em Maple foi implementado:

Controle *PID* do circuito *RC*

```
> Kp := 12;
> Ti := 0.20;
> Td := 0.05;
> Ki := Kp/Ti;
> G1 := Kp * (1 + (1/(Ti*s)) + (Td*s));
> G2 := 5/(s+1);
> H := 1;
> f_transf_mf := simplify((G1*G2)/(1+(G1*G2*H)));
> resposta_sistema := simplify(f_transf_mf*(1/s));
> with(inttrans):x_t:=invlaplace(resposta_sistema,s,t);
> plot(x_t, t=0..1);
```

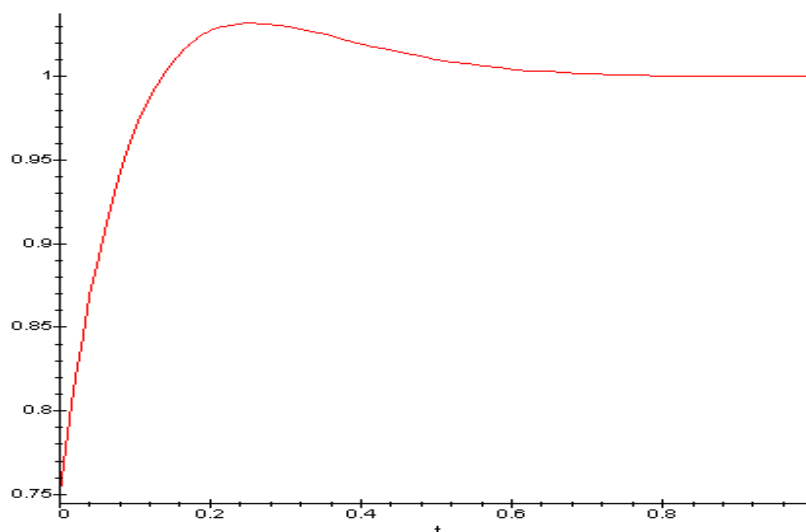


Figura 8. Resposta da saída em malha fechada do circuito RC sob ação de um controlador PID .

4. CONCLUSÕES E FUTUROS TRABALHOS

Este artigo apresentou um breve estudo de alguns fundamentos de sistemas dinâmicos a partir da utilização do software Maple. O estudo apresentado tem a finalidade de servir de motivação aos professores que ministram disciplinas que abordam sistemas dinâmicos a adotarem o *software* Maple (e outros *softwares*) como uma ferramenta de auxílio a aulas teóricas. Foram apresentados dois estudos de caso clássicos de sistemas dinâmicos: (i) um sistema elétrico de 1ª ordem, composto de um resistor e de um capacitor conectados em paralelo, e (ii) um sistema mecânico de 2ª ordem, constituído de um pêndulo de torção. Um conjunto de lições dos estudos de caso com as respectivas implementações no *software* Maple também foram tratados neste artigo.

Este é um estudo preliminar visando um futuro curso completo de sistemas dinâmicos usando o *software* Maple. Outras lições relevantes que podem ser tratadas, em trabalhos futuros, são relativas a aspectos de modelagem, identificação e controle de sistemas dinâmicos, tais como: (i) avaliação de sistemas dinâmicos de ordem superior e a determinação de sistemas de ordem reduzida; (ii) resposta dos sistemas dinâmicos a sinais tipo impulso, ruído branco e *PRBS* (*Pseudo Random Binary Sequence*), além da verificação das propriedades estatísticas destes sinais; (iii) verificação de atraso de transporte através da aproximação de Padé; (iv) determinação dos zeros do sistema dinâmico para análise de sistemas de fase mínima ou não-mínima; (v) análise de métodos de modelagem e identificação de sistemas dinâmicos; (vi) conversão de sistemas dinâmicos contínuos, discretos e em espaço de estados; (vii) testes de verificação de não-linearidades em sistemas dinâmicos; (viii) análise de sistemas multivariáveis e/ou não-lineares e/ou variantes no tempo; (ix) implementação de sistemas de controle, dentre os quais alguns algoritmos de controle clássico (alocação de pólos) e controladores avançados (adaptativos, preditivos e inteligentes).

5. REFERÊNCIAS

- [1] C.L. Phillips and R.D. Harbor, *Sistemas de controle e realimentação*, Makron Books, 1997.
- [2] B. Kuo, *Automatic Control Systems*, 5th edition, Prentice Hall, 1987.
- [3] K. Ogata, *Engenharia de Controle Moderno*, 3a. edição, Prentice-Hall do Brasil, 1997.
- [4] J. G. Ziegler and N. B. Nichols, "Optimum settings for automatic controllers," *Trans. ASME*, 64, 1942, pp. 759-768.