UNICAMP – Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

EA-722 Laboratório de Controle e Servomecanismos
Experiência 7

Realimentação de Estados

14 de maio de 2008

Sumário

1 Introdução

O objetivo desta experiência é estudar a alocação dos pólos do sistema em malha fechada de acordo com valores especificados. A malha fechada é definida através de um vetor de ganhos de realimentação associados a cada uma das variáveis de estado do sistema. A alocação de pólos por realimentação de estados pressupõe dessa forma que as medidas de todas as variáveis de estado do sistema estejam disponíveis para controle.

1.1 Configurações adotadas

A configuração adotada para os sistemas são as seguintes:

Emulador: Discos de atuação e de carga conectados: $n_{pd} = 24$ e $n_{pl} = 36$, de tal forma que a relação total de engrenagens será de 4:1,

- 4 massas de 0.5 kg dispostas a 10.0 cm do centro do disco de carga; nenhuma massa sobre o disco de atuação.

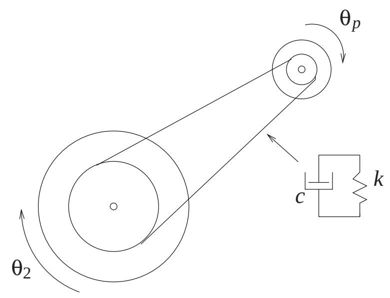

Figura 1: Sistema com correia flexível.

A conexão entre o dispositivo SR ('speed reduction') e o disco de carga é feita através de uma *correia flexível* conforme o esboço da Figura 1. A correia incorpora ao sistema efeitos de mola (k) e de amortecimento (c) torcionais, e que dá origem a um sistema de 4a. ordem. Desprezando-se o efeito de amortecimento da correia, as funções de transferências de malha aberta associadas à configuração podem ser escritas como:

$$\frac{\theta_1(s)}{T(s)} = k_{hw}\frac{N_1(s)}{D(s)}, \qquad \frac{\theta_2(s)}{T(s)} = k_{hw}\frac{N_2(s)}{D(s)},$$

onde θ_1 é o deslocamento angular do disco de atuação, θ_2 é o deslocamento angular do disco de carga, T é o torque aplicado ao disco #1, e

$$N_1(s) = J_\ell s^2 + c_2 s + k, \quad N_2(s) = k/g_r$$
$$D(s) = J_d^* J_\ell s^4 + (c_2 J_d^* + c_1 J_\ell)s^3 + [(J_d^* + J_\ell g_r^{-2})k + c_1 c_2]s^2 + (c_1 + c_2 g_r^{-2})ks.$$

Os parâmetros acima com os correspondentes valores numéricos são dados:

$J_d = 4.07\ 10^{-4}$ kg-m^2	momento de inércia do disco de atuação,
$J_{d\ell} = 6.25\ 10^{-3}$ kg-m^2	momento de inércia do disco de carga,
$m_{w\ell} = 4 \times 0.5$ kg	massa total sobre o disco de carga,
$r_{w\ell} = 0.1$ m	distância das massas ao centro do disco de carga,
$r_{mw} = 0.025$ m	raio das massas sobre o disco de carga,
$J_\ell = J_{d\ell} + m_{w\ell}(r_{w\ell}^2 + r_{mw}^2/2)$	momento de inércia total no disco de carga
$J_p = 7.8\ 10^{-5}$ kg-m^2	momento de inércia do pino SR
$g_r = 4,\ \ g_r' = 2$	relação de velocidades $4:1^\dagger$,
$k = 8.45$ N-rd	constante elástica da correia flexível,
$k_{hw} = 5.76$	ganho de hardware,
$c_1 = 7.38\ 10^{-4},\ \ c_2 = 5.0\ 10^{-2}$ N-m/rad	coeficientes de atrito viscoso nos discos,
$J_d^* = J_d + J_p(g_r')^{-2}$	inércia total no disco de atuação

† obtida com engrenagens com 24 dentes na atuação e 36 dentes na carga.

Note que $T(s)$ é o torque aplicado, mas está expresso em unidades apropriadas ao uso no ECP, em vista da constante k_{hw}.

Retilíneo A configuração do sistema é a mesma utilizada nas Experiências 4 e 5: dois carros conectados por uma mola de dureza média, com quatro pesos adicionais de 0.5 kg dispostos sobre cada carro (figura 2) As funções de transferência de malha aberta associadas à configuração são as seguintes:

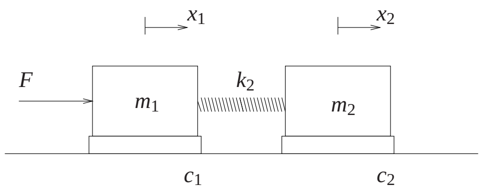

Figura 2: Configuração do sistema.

$$\frac{X_1(s)}{F(s)} = k_{hw}\frac{N_1(s)}{D(s)}, \qquad \frac{X_2(s)}{F(s)} = k_{hw}\frac{N_2(s)}{D(s)}$$

onde x_1 é o deslocamento linear do carro #1, x_2 é deslocamento linear do carro #2, F é a força aplicada ao carro #1, e

$$N_1(s) = m_2 s^2 + c_2 s + k, \quad N_2(s) = k$$
$$D(s) = m_1 m_2 s^4 + (c_1 m_2 + c_2 m_1)s^3 + [(m_1 + m_2)k + c_1 c_2]s^2 + (c_1 + c_2)ks$$

Os parâmetros acima com os correspondentes valores numéricos são dados:

$m_{c1} = 0.778$ kg, $\ m_{c2} = 0.582$ kg	massa dos carros,
$m_1 = m_{c1} + 2,\ \ m_2 = m_{c2} + 2$	(kg)
$c_1 = 3.91$ N/(m/s), $\ c_2 = 2.36$ N/(m/s)	coeficientes de atrito dos carros,
$k = 338$ N/m	constante de mola,
$k_{hw} = 14732$	ganho de hardware.

Note que $F(s)$ é a força aplicada, mas está expressa em unidades apropriadas ao uso no ECP, em vista da constante k_{hw}.

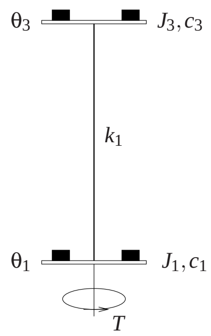

Figura 3: Configuração do sistema.

Torcional A configuração do sistema é a mesma utilizada nas Experiências 4 e 5: dois discos conectados pela mola torcional, com dois pesos adicionais de 0.5 kg dispostos sobre cada disco (figura 3) As funções de transferência de malha aberta associadas à configuração são as seguintes:

$$\frac{\theta_1(s)}{T(s)} = k_{hw}\frac{N_1(s)}{D(s)}, \qquad \frac{\theta_3(s)}{T(s)} = k_{hw}\frac{N_2(s)}{D(s)}$$

onde θ_1 é o deslocamento angular do disco #1, θ_3 é o deslocamento angular do disco #3, T é o torque aplicado ao disco inferior, e

$$N_1(s) = J_3 s^2 + c_3 s + k_1, \quad N_2(s) = k_1$$
$$D(s) = J_1 J_3 s^4 + (c_1 J_3 + c_3 J_1)s^3 + [(J_1 + J_3)k_1 + c_1 c_3]s^2 + (c_1 + c_3)k_1 s$$

Os parâmetros acima com os correspondentes valores numéricos são dados:

$J_{d1} = 2.38\ 10^{-3},\ \ J_{d3} = 1.87\ 10^{-3}$ kg-m^2	momento de inércia dos discos
$m_w = 1$ kg	massa total sobre os discos,
$r_w = 0.09$ m	distância das massas ao centro dos discos,
$r_{mw} = 0.025$ m	raio das massas sobre os discos,
$J_i = J_{di} + m_w(r_w^2 + r_{mw}^2/2)$	momento de inércia total no discos $i = 1$ ou $i = 3$,
$c_1 = 7.64\ 10^{-3},\ \ c_3 = 1.33\ 10^{-3}$ N-m/rad	coeficientes de atrito viscoso dos discos
$k_1 = 1.3$ N-rad	constante torcional da mola,
$k_{hw} = 17.6$ N-m/rad	ganho de hardware.

Note que $T(s)$ é o torque aplicado, mas está expresso em unidades apropriadas ao uso no ECP, em vista da constante k_{hw}.

Pêndulo A configuração do sistema é a mesma utilizada nas Experiências 4 e 5: pêndulo na posição instável, correspondente à Planta #2; os contra-pesos devem se situar a 7 cm da base de pivoteamento. As funções de transferência de malha aberta associadas à configuração são obtidas das equações diferenciais linearizadas que descrevem o comportamento do pêndulo:

$$\bar{J}(\ddot{x}(t) + \frac{c_1}{m_1}\dot{x}(t)) + m_1\ell_0 g x(t) - \frac{k_x}{k_a}(\bar{J} - m_2\ell_0\ell_c)g\theta(t) = k_f k_s k_x \frac{J^*}{m_1}F(t)$$
$$\bar{J}\ddot{\theta}(t) + c_r\dot{\theta}(t) - \frac{k_a}{k_x}m_1 g x(t) - m_2\ell_c g\theta(t) = -k_f k_s k_a \ell_0 F(t)$$

onde $\theta(t)$ é deslocamento angular do pêndulo, $x(t)$ é o deslocamento linear da haste e $F(t)$ é força aplicada à haste. Assim aplicando a transformada de Laplace nas equações diferenciais acima, obtem-se:

$$\begin{bmatrix} X(s) \\ \theta(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{J}(s^2 + \frac{c_1}{m_1}s) + m_1\ell_0 g & -(\bar{J} - m_2\ell_0\ell_c)g k_x/k_a \\ -m_1 g k_a/k_x & \bar{J}s^2 + c_r s - m_2\ell_c g \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} k_x J^*/m_1 \\ -k_a\ell_0 \end{bmatrix} k_f k_s F(s)$$
$$= \frac{1}{D(s)}\begin{bmatrix} N_1(s) \\ N_2(s) \end{bmatrix} F(s)$$

note que D(s) é o determinante da matriz que se toma a inversa e é de 4a. ordem. Os parâmetros utilizados nas expressões acima, com os correspondentes valores numéricos são dados por:

$m_1 = 0.238$ kg	massa da haste deslizante com os pesos circulares,
$m_{2o} = 0.785$ kg	massa da haste principal,
$m_{w2} = 1.0$ kg	massa do contrapeso,
$m_2 = m_{2o} + m_{w2}$	(kg)
$\ell_o = 0.330$ m	distância† do centro de massa da haste deslizante,
$\ell_{co} = 0.071$ m	distância† do centro de massa da haste principal,
$\ell_{w2} = -0.1059$ m	distância† do centro de massa do contrapeso ($\ell_t = 7$cm , instável),
$\ell_c = (m_{w2}\ell_{w2} + m_{2o}\ell_{co})/m_2$	(m)
$J_0^* = 0.0243$ kg-m^2	momento de inércia do pêndulo (s/ haste deslizante e contrapeso),
$J^* = J_0^* + m_1\ell_o^2 + m_{w2}\ell_{w2}^2$	momento de inércia total,
$\bar{J} = J^* - m_1\ell_o^2$	(kg-m^2)
$c_1 = 2.25\ 10^{-1}$ N/(m/s)	atrito viscoso da haste deslizante
$c_r = 1.44\ 10^{-2}$ N-m/rad	atrito viscoso da haste principal
$k_a = 2546$ counts/rd	ganho do encoder 1,
$k_x = 50200$ counts/m	ganho do encoder 2,
$k_f k_s = 0.0416$ N/counts	ganho combinado do conversor DA, motor e polias.

† distâncias orientadas a partir do pivô do pêndulo.

Observe que o modelo acima encontra-se descrito em unidades SI (m, kg, ...). Entretanto, com a introdução das constantes de hardware k_x, k_a, k_f e k_s nas equações diferenciais e funções de transferência, o modelo passa a ser expresso em unidades apropriadas ao uso no ECP.

Levitador Magnético A configuração do sistema é a mesma utilizada na Experiência 5: dois discos magnéticos de mesma massa, posicionados de forma a se repelirem, vide Fig. 4.

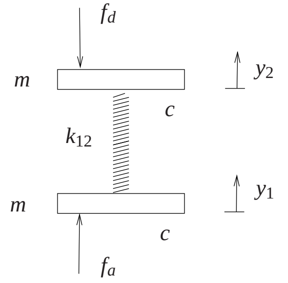

Figura 4: Sistema com dois graus de liberdade e compensação da força do atuador.

As funções de transferência de malha aberta associadas à configuração são as seguintes:

$$\frac{Y_1(s)}{F(s)} = k_{\text{sys}}\frac{N_1(s)}{D(s)}, \qquad \frac{Y_2(s)}{F(s)} = k_{\text{sys}}\frac{N_2(s)}{D(s)}$$

onde Y_1 é o deslocamento linear do disco #1, Y_2 é deslocamento linear do disco #2, F é a força aplicada ao disco #1, e onde

$$N_1(s) = ms^2 + cs + k_{12}, \quad N_2(s) = k_{12}$$
$$D(s) = m^2s^4 + 2cms^3 + (2mk_{12} + c^2)s^2 + 2ck_{12}s.$$

Note que $F(s)$ tem sentido de força aplicada, mas está expressa em unidades apropriadas ao uso no ECP, em vista da constante k_{sys}.

Os parâmetros acima com os correspondentes valores numéricos são dados:

$m = 0.123$ kg	massa dos discos,
$c = 0,45$ N/(m/s)	coeficientes de atrito dos discos,
$k_{12} = 44.1$ N/m	constante de mola,
$k_{\text{sys}} = 100$	ganho do sistema

Note que a constante da mola k_{12} é função da posição nominal dos discos #1 e #2, e estas posições nessa expêriencia são distintas da experiência anterior.

2 Representação de Estados

Expressando na forma padrão de variáveis de estado, temos a seguinte representação:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

onde para todos os casos apresentados, excluinod-se o levitador, a matriz A é de dimensão 4×4, B é de dimensão 4×1 e a matriz C é de dimensão 1×4. A matriz C é escolhida de forma a definir a variável de saída do sistema e $D=0$.

Para o levitador, B é de dimensão 4×2 e a matriz C é de dimensão 2×4 e D é matriz nula de dimensão 2×2.

Tomando a transformada de Laplace podemos escrever a partir da representação de estado com $D=0$ as expressões equivalentes

$$(sI-A)X(s)=BU(s),\quad Y(s)=CX(s)$$

onde I é a matriz identidade de dimensão 4×4. Portanto a saída $Y(s)$ é expressa como função da entrada $U(s)$ como

$$Y(s)=C(sI-A)^{-1}BU(s)=\frac{C\mathrm{adj}(sI-A)B}{\det(sI-A)}U(s)$$

e a função de transferência $Y(s)/U(s)$ é exatamente

$$G_p(s)=\frac{C\mathrm{adj}(sI-A)B}{\det(sI-A)}$$

Supondo que não haja nenhum divisor comum entre os polinomios[1] $C\mathrm{adj}(sI-A)B$ e $\det(sI-A)$, podemos identificar as variáveis de estado com as variáveis originais do sistema e concluir que $\det(sI-A)$ é o polinômio característico da função de transferência entre a entrada e a saída escolhida.

A descrição por variáveis de estado de cada sistema ECP é detalhada a seguir.

Emulador A entrada é dada por $u(t)=T(t)/k_{hw}$, e o vetor de estado é definido por

$$x=\begin{bmatrix}\theta_1\\ \dot\theta_1\\ \theta_2\\ \dot\theta_2\end{bmatrix}$$

e as matrizes do sistema, de controle e de saída são dadas por

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -kgr^{-2}/J_d^* & -c_1/J_d^* & kgr^{-1}/J_d^* & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ kgr^{-1}/J_\ell & 0 & -k/J_\ell & -c_2/J_\ell\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}0\\ k_{hw}/J_d^*\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\qquad D=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}$$

[1] Nos sistemas ECP nas configurações utilizadas, sabemos que não existem divisores comuns entre os polinômios $C\mathrm{adj}(sI-A)B$ e $\det(sI-A)$, pois o sistema é de 4a. ordem e $\det(sI-A)$ é um polinômio também de 4a. ordem.

Note que a matriz C define a variável posição do disco de carga θ_2 como variável de saída do sistema. Assim a equação polinomial $\det(\lambda I-A)=0$ tem 4 raízes que correspondem aos pólos da função de transferência $\theta_2(s)/T(s)$, e podemos identificar

$$\frac{\Theta_2(s)}{U(s)}=\frac{C\mathrm{adj}(sI-A)B}{\det(sI-A)}$$

Retilíneo A entrada é dada por $u(t)=F(t)/k_{hw}$, e o vetor de estado é definido por

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\ \dot x_1\\ x_2\\ \dot x_2\end{bmatrix}$$

e as matrizes do sistema, de controle e de saída são dadas por:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -k_2/m_1 & -c_{m1}/m_1 & k_2/m_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ k_2/m_2 & 0 & -k_2/m_2 & -c_{m2}/m_2\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}0\\ k_{hw}/m_1\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\qquad D=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}$$

Note que a matriz C define como variável principal de saída do sistema a variável de posição do 2o. carro x_2. A equação polinomial $\det(\lambda I-A)=0$ tem 4 raízes que correspondem aos pólos da função de transferência $X_2(s)/F(s)$, e podemos identificar:

$$\frac{X_2(s)}{U(s)}=\frac{k_{hw}N_2(s)}{D(s)}=\frac{C\mathrm{adj}(sI-A)B}{\det(sI-A)}$$

Torcional A entrada é dada por $u(t)=T(t)/k_{hw}$ e o vetor de estado é definido por

$$x=\begin{bmatrix}\theta_1\\ \dot\theta_1\\ \theta_3\\ \dot\theta_3\end{bmatrix}$$

e as matrizes do sistema, de controle e de saída são dadas por:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -k_1/J_1 & -c_1/J_1 & k_1/J_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ k_1/J_3 & 0 & -k_1/J_3 & -c_3/J_3\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}0\\ k_{hw}/J_1\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\qquad D=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}$$

Note que a matriz C define como variável de saída do sistema a posição do disco superior θ_3. Assim a equação polinomial $\det(\lambda I - A) = 0$ tem 4 raízes que correspondem aos pólos da função de transferência $\theta_3(s)/T(s)$, e podemos identificar:

$$\frac{\theta_3(s)}{U(s)} = \frac{k_{hw}N_2(s)}{D(s)} = \frac{C\mathrm{adj}(sI-A)B}{\det(sI-A)}$$

Pêndulo A entrada é dada por $u(t) = F(t)/k_f$ e o vetor de estado é definido por

$$z = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix}.$$

As matrizes do sistema (A), de controle (B) e de saída (C) são obtidas a partir das equações diferenciais descritas em termos das variáveis escaladas:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ m_2\ell_c g/\bar{J} & -c_r/\bar{J} & m_1 g k_a/\bar{J}k_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ (\bar{J} - m_2\ell_0\ell_c)gk_x/\bar{J}k_a & 0 & -m_1\ell_0 g/\bar{J} & -c1/m1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\ell_0 k_a k_s k_f/\bar{J} \\ 0 \\ J^* k_x k_s k_f/m_1\bar{J} \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Note que a matriz C define como a variável de saída posição angular do pêndulo θ. Assim a equação polinomial $\det(\lambda I - A) = 0$ tem 4 raízes que correspondem aos pólos do sistema e podemos identificar

$$\frac{\Theta(s)}{F(s)} = \frac{N_2(s)}{D(s)} = \frac{C\mathrm{adj}(sI-A)B}{\det(sI-A)}$$

Levitador As entradas são dadas por $u(t)' = [F_1(t)/k_{\mathrm{sys}} \quad F_2(t)/k_{\mathrm{sys}}]$ e o vetor de estado é definido por

$$z = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dot{y}_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix}.$$

e as matrizes do sistema, de controle e de saída são dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k_{12}/m & -c/m & k_{12}/m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_{12}/m & 0 & -k_{12}/m & -c/m \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_{\mathrm{sys}}/m & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & k_{\mathrm{sys}}/m \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A equação polinomial $\det(\lambda I - A) = 0$ tem 4 raízes que correspondem aos pólos do sistema.

3 Alocação de Pólos

A síntese de controladores por alocação de pólos utiliza o princípio de realimentação de estados, e deve contar com as medidas de cada um dos estados. A ação sobre o sistema é definida na forma de realimentação linear algébrica:

$$u(t) = -Kx(t)$$

com $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{bmatrix}$ um vetor de ganhos. Deseja-se determinar o vetor K, de forma a posicionar cada um dos pólos do sistema em malha fechada em pontos pré-especificados no semiplano esquerdo do plano s. A realimentação introduzida produz um sistema equivalente em malha fechada na forma

$$\dot{x} = (A - BK)x$$
$$y = Cx$$

como visto na seção 3 a equação característica do sistema neste caso é $\det(sI - A + BK)$, e o problema consiste em determinar K de forma que a identidade:

$$\det(sI - A + BK) = (s - p_0)(s - p_1)\dots(s - p_n) \tag{1}$$

seja satisfeita, onde p_i, $i = 1, \dots, n$ são os pólos desejados ($n = 4$ para o emulador industrial). Para que esse problema tenha solução é preciso que a escolha do vetor de ganho K permita alocar arbitrariamente todos os pólos. Para dar uma resposta adequada a essa questão o conceito de controlabilidade deve ser considerado.

Definição 1 *O sistema $\dot{x} = Ax + Bu$, $x \in \mathbb{R}^n$ é controlável se com $x(0) = 0 \in \mathbb{R}^n$ e dado qualquer estado $x_1 \in \mathbb{R}^n$, existe um instante finito t_1 e uma entrada $u(t)$, $0 \le t \le t_1$ tal que $x(t_1) = x_1$.*

Teorema 1 *O sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ com $x \in \mathbb{R}^n$ é controlável se e somente se a matriz de controlabilidade*

$$M = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

tem n colunas linearmente independentes.

Prova (esboço): Podemos expressar

$$
\begin{aligned}
x(t_1) &= e^{At_1}x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau \\
&= \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau \\
&= \int_0^{t_1} \left\{ I + A(t_1-\tau) + \frac{A^2}{2!}(t_1-\tau)^2 + \cdots \right\} Bu(\tau)\,d\tau \\
&= B\int_0^{t_1} u(\tau)\,d\tau + AB\int_0^{t_1}(t_1-\tau)u(\tau)\,d\tau + A^2B\int_0^{t_1}\frac{(t_1-\tau)^2}{2!}u(\tau)\,d\tau + \cdots \\
&= B\alpha_1 + AB\alpha_2 + A^2B\alpha_3 + \cdots
\end{aligned}
$$

portanto $x(t_1)$ pode ser visto como uma combinação linear de colunas das matrizes B, AB, $A^2B,\ldots$. Porém, um resultado de álgebra linear garante que qualquer potência A^kB com $k \geq n$ gera colunas que são linearmente dependentes das colunas da matriz M. Assim se M tiver somente ℓ colunas linearmente independentes com $\ell < n$, existe $x(t_1) \in \mathbb{R}^n$ que não pode ser escrito na forma da combinação linear acima, e portanto pela definição, o sistema não é controlável.

Retornemos a questão da alocação arbitrária de pólos. Se o sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ não for completamente controlável, então a matriz de controlabilidade M tem no máximo ℓ colunas linearmente independentes com $\ell < n$. Podemos construir uma matriz P, de dimensão $n \times n$, de forma que as ℓ primeiras colunas sejam as ℓ colunas linearmente independentes de M. As $n-\ell$ colunas restantes de P devem ser colunas arbitrárias de modo que P seja inversível, isto é, todas as suas colunas sejam linearmente independentes.

Para P construída desta forma, pode-se mostrar que as seguintes tranformações são verdadeiras:

$$
\widehat{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \widehat{B} = P^{-1}B = \begin{bmatrix} B_{11} \\ 0 \end{bmatrix}
$$

onde A_{11} tem dimensão $\ell \times \ell$ e as outras sub-matrizes são de dimensões compatíveis. Considerando que P é inversível, temos

$$
\begin{aligned}
&\det(sI - A + BK) = \\
&\det(P^{-1})\det(sI - A + BK)\det(P) = \det(sI - \widehat{A} + \widehat{B}KP) = \\
&\det\left(sI - \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{k}_1 & \widehat{k}_2 \end{bmatrix} \right) = \\
&\det\left(\begin{bmatrix} sI_\ell - A_{11} + B_{11}\widehat{k}_1 & -A_{12} + B_{11}\widehat{k}_2 \\ 0 & sI_{n-\ell} - A_{22} \end{bmatrix} \right) = \\
&\det(sI_\ell - A_{11} + B_{11}\widehat{k}_1)\det(sI_{n-\ell} - A_{22})
\end{aligned}
$$

onde $sI = sI_n = \begin{bmatrix} sI_\ell & 0 \\ 0 & sI_{n-\ell} \end{bmatrix}$. Note que os autovalores de A_{22} não serão alterados pela escolha do ganho de realimentação $\begin{bmatrix} \widehat{k}_1 & \widehat{k}_2 \end{bmatrix} = KP$, e portanto para alocar pólos livremente do sistema

em malha fechada é necessário que o sistema seja controlável. É possível mostrar também a implicação reversa, resultando no seguinte teorema.

Teorema 2 *Para que a equação (1) que define a alocação de pólos a partir da escolha do ganho K tenha solução para escolha arbitrária de pólos p_i, $i = 1,\ldots,n$ é necessário e suficiente que o sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ seja controlável.*

3.1 Cálculo do Ganho de Alocação de Pólos

Para um sistema controlável o ganho de realimentação que aloca pólos é dado pela expressão:

$$
K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}^{-1} \phi(A)
$$

onde $\phi(s) = (s-p_0)(s-p_1)\ldots(s-p_n)$ é o polinômio característico desejado e $\phi(A)$ é o polinômio matricial correspondente. Essa expressão é conhecida como fórmula de Ackermann; mais detalhes veja Ogata, seção 12-2 p.793.

No toolbox de controle do MATLAB, a subrotina `acker` calcula o ganho de alocação na forma:

```
K = acker(A,B,p)
```

onde p é um vetor contendo os pólos desejados em malha fechada.

Exemplo. Considere o sistema retilíneo com o carro #2 *travado*:

$$
\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k_2}{m_1} & -\dfrac{c_1}{m_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{k_{hw}}{m_1} \end{bmatrix} u(t)
$$

Solução via MATLAB:

```
k2=390; m1=2.77; c1=2.1; khw=12800;
A=[0, 1;-k2/m1, -c1/m1]
A =
         0    1.0000
 -140.7942   -0.7581

B=[0;khw/m1]
B =
   1.0e+03 *
         0
    4.6209                  % Obteve a representacao do sistema

CO=ctrb(A,B)                % Analise de  controlabilidade
CO =
   1.0e+03 *
         0    4.6209
    4.6209   -3.5032
```

```
rank(CO)
ans =
     2                        % rank(CO)=n=2: o sistema e' controlavel


p=[1 5.657 16]; P=roots(p)    % Polinomio desejado: p(s)=s^2+5.657s+16
P =
  -2.8285 + 2.8284i
  -2.8285 - 2.8284i

K=acker(A,B,P)                % Calculo do ganho K pela rotina "acker"
K =
   -0.0270    0.0011

eig(A-B*K)                    % Verificacao
ans =
  -2.8285 + 2.8284i
  -2.8285 - 2.8284i
```

- O procedimento de Ackermann (`acker`) operacionaliza a solução de sistemas de equações de ordens elevadas
- No caso geral, se o sistema é de ordem n, escolhe-se o par de pólos dominantes que produzirá a resposta desejada e os demais pólos *suficientemente* afastados dos dominantes

4 Procedimento Experimental

4.1 Emulador Industrial

(Q01) Verifique se o emulador industrial na configuração adotada é controlável. Consulte a rotina `ctrb` do toolbox de controle do MATLAB.

Na tabela a seguir estão indicados 5 casos de escolha dos pólos do sistema em malha fechada a serem considerados.

Tabela 1: Alocação baseada na minimização de J

Caso 1 ($r = 1000$)	-16.906+30.603i	-16.906-30.603i	-8.6365+6.2207i	-8.6365-6.2207i
Caso 2 ($r = 520$)	-17.975+16.99i	-17.975-16.99i	-16.24+7.0826i	-16.24-7.0826i
Caso 3 ($r = 200$)	-81.483	-10.895	-6.851+17.374i	-6.851-17.374i
Caso 4 ($r = 100$)	-126.75	-10.314	-4.8803+17.64i	-4.8803-17.64i
Caso 5 ($r = 1$)	-429.39	-9.9163	-2.7111+17.829i	-2.7111-17.829i

Os pólos foram obtidos de forma a minimizar um custo de operação na forma:

$$J = \int_0^\infty (z(t)'Qz(t) + r\left(\frac{T(t)}{k_{hw}}\right)^2)\,dt$$

O parâmetro $r > 0$ é o peso relativo do esfoço de controle frente aos desvios das variáveis de estado. Para a obtenção dos pólos em malha fechada na tabela utilizamos valores decrescentes do peso de esforço de controle conforme a tabela. Já a matriz Q de ponderação dos estados, foi escolhida como:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.011 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.011 \end{pmatrix}$$

(Q02) Plote no plano complexo os pólos escolhidos na tabela. Comente sobre as alocações da tabela, do ponto de vista do período transitório e do esforço de controle correspondentes. Comente a relação entre a escolha do peso r e a localização dos pólos.

(Q03) Utilize a rotina `acker` do toolbox de controle do Matlab para determinar cada ganho de realimentação correspondente às alocações sugeridas na tabela. Escolha uma das soluções que utilize valores de k_1 e k_3 menores do que 1, e k_2 e k_4 menores do que 0,12.

Implemente o controlador escolhido por meio da opção **State Feedback** do **Control Algorithm**. Para se obter erro de regime nulo à entrada degrau, faça o ganho do pré-filtro K_{pf} igual a $g_r k_1 + k_3$.

(Q04) Execute a resposta ao degrau para uma amplitude de 6000 counts e plote-a. Obtenha estimativas para máximo *overshoot*, tempo de subida, sobre-elevação e erro em regime do sistema em malha fechada.

(Q05) Faça uma tentativa própria de alocação de pólos que melhore pelo menos um dos aspectos da resposta transitória (máximo *overshoot*, tempo de subida, tempo de estabelecimento) em relação à anterior, sempre respeitando os limites de k_1 e k_3 menores do que 1, e k_2 e k_4 menores do que 0,12. Descreva e compare os resultados obtidos.

4.2 Sistema Retilíneo

(Q01) Verifique se o sistema retilíneo na configuração adotada é controlável. Consulte a rotina `ctrb` do toolbox de controle do MATLAB.

Na tabela a seguir estão indicados 5 casos de escolha dos pólos do sistema em malha fechada a serem considerados.

Os pólos foram obtidos de forma a minimizar um custo de operação na forma:

$$J = \int_0^\infty (z(t)'Qz(t) + r\left(\frac{F(t)}{k_{hw}}\right)^2)\,dt$$

O parâmetro $r > 0$ é o peso relativo do esfoço de controle frente aos desvios das variáveis de estado. Para a obtenção dos pólos em malha fechada na tabela utilizamos valores decrescentes

Tabela 2: Alocação baseada na minimização de J

Caso 1 ($r = 500$)	-6.3604+17.238i	-6.3604-17.238i	-9.409+4.8887i	-9.409-4.8887i
Caso 2 ($r = 100$)	-10.116+16.419i	-10.116-16.419i	-14.814+2.9579i	-14.814-2.9579i
Caso 3 ($r = 70$)	-10.635+15.738i	-10.635-15.738i	-20.892	-13.555
Caso 4 ($r = 10$)	-73.573	-10.65+14.0i	-10.65-14.0i	-11.781
Caso 5 ($r = 1$)	-241.66	-10.548+13.805i	-10.548-13.805i	-11.636

do peso de esforço de controle conforme a tabela. Já a matriz Q de ponderação dos estados, foi escolhida como:

$$Q = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0021 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.014 \end{pmatrix}$$

(Q02) Plote no plano complexo os pólos escolhidos na tabela. Comente sobre as alocações da tabela, do ponto de vista do período transitório e do esforço de controle correspondentes. Comente a relação entre a escolha do peso r e a localização dos pólos.

(Q03) Utilize a rotina `acker` do toolbox de controle do Matlab para determinar cada ganho de realimentação correspondente às alocações sugeridas na tabela. Escolha uma das soluções que utilize valores de K_1 e K_3 menores do que 0,75, e K_2 e K_4 menores do que 0,1.

Implemente o controlador escolhido por meio da opção **State Feedback** do **Control Algorithm**. Para se obter erro de regime nulo à entrada degrau faça o ganho do pré-filtro K_{pf} igual a $K_1 + K_3$.

Execute a resposta ao degrau para uma amplitude de 6000 counts e plote. **(Q04)** Compare tempo de subida, sobre-elevação e erro em regime com os valores obtidos nas experiências anteriores com os controles colocado e não colocado.

(Q05) Faça uma tentativa própria de alocação de pólos que melhore em pelo menos um dos aspectos da resposta transitória (overshoot, tempo de subida, tempo de estabelecimento) da solução escolhida na tabela, sempre respeitando os limites de K_1 e K_3 menores do que 0,75, e K_2 e K_4 menores do que 0,1. Descreva e compare os resultados obtidos.

4.3 Sistema Torcional

(Q01) Verifique se o sistema torcional na configuração adotada é controlável. Consulte a rotina `ctrb` do toolbox de controle do MATLAB.

Na tabela a seguir estão indicados 5 casos de escolha dos pólos do sistema em malha fechada a serem considerados.

Tabela 3: Alocação baseada na minimização de J

Caso 1 ($r = 1000$)	-2.287+16.443i	-2.287-16.443i	-4.6543+3.6957i	-4.6543-3.6957i
Caso 2 ($r = 100$)	-5.856+17.48i	-5.856-17.48i	-8.166+4.8883i	-8.166-4.8883i
Caso 3 ($r = 20$)	-10.335+17.753i	-10.335-17.753i	-11.626+5.2852i	-11.626-5.2852i
Caso 4 ($r = 10$)	-12.721+16.586i	-12.721-16.586i	-14.039+5.0677i	-14.039-5.0677i
Caso 5 ($r = 1$)	-75.402	-12.272+12.535i	-12.272-12.535i	-13.267

Os pólos foram obtidos de forma a minimizar um custo de operação na forma:

$$J = \int_0^\infty (z(t)'Qz(t) + r\left(\frac{T(t)}{k_{hw}}\right)^2)\, dt$$

O parâmetro $r > 0$ é o peso relativo do esfoço de controle frente aos desvios das variáveis de estado. Para a obtenção dos pólos em malha fechada na tabela utilizamos valores decrescentes do peso de esforço de controle conforme a tabela. Já a matriz Q de ponderação dos estados, foi escolhida como:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0024 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0024 \end{pmatrix}$$

(Q02) Plote no plano complexo os pólos escolhidos na tabela. Comente sobre as alocações da tabela, do ponto de vista do período transitório e do esforço de controle correspondentes. Comente a relação entre a escolha do peso r e a localização dos pólos.

(Q03) Utilize a rotina `acker` do toolbox de controle do Matlab para determinar cada ganho de realimentação correspondente às alocações sugeridas na tabela. Escolha uma das soluções que utilize valores de k_1 e k_3 menores do que 1, e k_2 e k_4 menores do que 0,12.

Implemente o controlador escolhido por meio da opção **State Feedback** do **Control Algorithm**. Para se obter erro de regime nulo à entrada degrau faça o ganho do pré-filtro K_{pf} igual a $k_1 + k_3$.

Execute a resposta ao degrau para uma amplitude de 6000 counts e plote. **(Q04)** Compare tempo de subida, sobre-elevação e erro em regime com os valores obtidos nas experiências anteriores com os controles colocado e não colocado.

(Q05) Faça uma tentativa própria de alocação de pólos que melhore em pelo menos um dos aspectos da resposta transitória (overshoot, tempo de subida, tempo de estabelecimento) da solução escolhida na tabela, sempre respeitando os limites de k_1 e k_3 menores do que 1, e k_2 e k_4 menores do que 0,12. Descreva e compare os resultados obtidos.

4.4 Pêndulo Invertido

(Q01) Verifique se o pêndulo invertido na configuração adotada é controlável. Consulte a rotina `ctrb` do toolbox de controle do MATLAB.

Na tabela a seguir estão indicados 5 casos de escolha dos pólos do sistema em malha fechada a serem considerados.

Tabela 4: Alocação baseada na minimização de J

Caso 1 ($r = 50$)	-6.90+10.31i	-6.90-10.31i	-5.10+0.64i	-5.10-0.64i
Caso 2 ($r = 20$)	-9.14+12.01i	-9.14-12.01i	-5.27+0.48i	-5.27-0.48i
Caso 3 ($r = 10$)	-11.22+13.70i	-11.22-13.70i	-5.35+0.36i	-5.35-0.36i
Caso 4 ($r = 5$)	-13.68+15.79i	-13.68-15.79i	-5.40+0.27i	-5.40-0.27i
Caso 5 ($r = 1$)	-21.22+22.65i	-21.22-22.65i	-5.43+0.123i	-5.43-0.1231i

Os pólos foram obtidos de forma a minimizar um custo de operação na forma:

$$J = \int_0^\infty (\theta(t)^2 + r\left(\frac{F(t)}{k_x k_s k_f}\right)^2) \, dt$$

O parâmetro $r > 0$ é o peso relativo do esfoço de controle frente aos desvios da variável de saída θ. Para a obtenção dos pólos em malha fechada na tabela utilizamos valores crescentes do peso de esforço de controle r conforme indicado. **(Q02)** Plote no plano complexo os pólos escolhidos na tabela. Comente sobre as alocações da tabela, do ponto de vista do período transitório e do esforço de controle correspondentes. Comente a relação entre a escolha do peso r e a localização dos pólos.

(Q03) Utilize a rotina `acker` do toolbox de controle do Matlab para determinar cada ganho de realimentação correspondente às alocações sugeridas na tabela.

Implemente o controlador correspondente a $r = 50$ através da opção **State Feedback** do **Control Algorithm**. Para se obter erro de regime nulo à entrada degrau, faça o ganho do pré-filtro K_{pf} igual a

$$k_{pf} = -m_1 g/(k_a k_s k_f) - k_3 k_x (m_1 \ell_0 + m_2 \ell_c)/(m_1 k_a) + k_1.$$

Escolha **Ts=0.00442 s** como período de amostragem e ao implementar o controlador certifique-se da estabilidade do sistema deslocando ligeiramente o pêndulo da posição de equilíbrio. Se o pêndulo estiver estabilizado, no menu **Data** selecione **Commanded Position, Encoder #1 & Encoder #2 Position** e **Control Effort**, com amostragem a cada **5 ciclos**. Selecione **Jog Position** no menu **Utility** e defina um *jog* de **-200 counts**. No menu **Command**, selecione **Step/Setup**. Escolha **Closed Loop Step** com amplitude **400 counts**, *dwell time* de **4000 ms** e **1** repetição. Execute a trajetória e plote (exporte) a resposta obtida.

(Q04) Faça uma tentativa própria de alocação de pólos que melhore pelo menos um dos aspectos da resposta transitória (máximo *overshoot*, tempo de subida, tempo de estabelecimento) em relação à anterior tomando como base as alocações de pólos da Tabela 1.

4.5 Sistema Levitador

(Q01) Verifique se o sistema levitador na configuração adotada é controlável. Consulte a rotina `ctrb` do toolbox de controle do MATLAB.

Na tabela a seguir estão indicados 4 casos de escolha dos pólos do sistema em malha fechada a serem considerados.

Tabela 5: Alocação baseada na minimização de J

Caso 1 ($r = 5$)	-14.879+11.764i	-14.879-11.764i	-11.389+18.311i	-11.389-18.311i
Caso 2 ($r = 1$)	-24.491+14.281i	-24.491-14.281i	-22.271+19.355i	-22.271-19.355i
Caso 3 ($r = 0.4$)	-32.118+17.344i	-32.118-17.344i	-33.512+12.115i	-33.512-12.115i
Caso 4 ($r = 0.1$)	-81.582+0.5053i	-81.582-0.5053i	-32.461	-30.777

Os pólos foram obtidos de forma a minimizar um custo de operação na forma:

$$J = \int_0^\infty (z(t)' Q z(t) + r\, u(t)' u(t)) \, dt$$

O parâmetro $r > 0$ é o peso relativo do esfoço de controle $u(t) = [u_1(t) \;\; u_2(t)]'$, frente aos desvios das variáveis de estado. Para a obtenção dos pólos em malha fechada na tabela utilizamos valores decrescentes do peso de esforço de controle conforme a tabela. Já a matriz Q de ponderação dos estados, foi escolhida como:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0012 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0012 \end{pmatrix}$$

(Q02) Plote no plano complexo os pólos escolhidos na tabela. Comente sobre as alocações da tabela, do ponto de vista do período transitório e do esforço de controle correspondentes. Comente a relação entre a escolha do peso r e a localização dos pólos.

(Q03) Utilize a rotina `place` do toolbox de controle do Matlab para determinar cada ganho de realimentação correspondente às alocações sugeridas na tabela.

Finalmente, para se obter erro em regime nulo para entradas em degrau, introduz-se nos programas dois "pré-filtros" às entradas #1 e #2, com os respectivos ganhos

$$K_{pf1} = k_{11} + k_{13}, \quad K_{pf2} = k_{21} + k_{23}$$

4.5.1 Implementação

1. Verifique se o sistema está de acordo com a configuração descrita nesta apostila, isto é, operando com dois discos;

Inicialização do Levitador

Este procedimento se refere ao experimento com dois discos magnéticos montados.

(a) No menu **File** carregue os parâmetros de calibração do sensor. Através da opção **Load Settings** carregue o arquivo `Cal.cfg` que se encontra na pasta `/ea722/programas`. Entre no menu **Setup**, **Sensor Calibration**, selecione a opção **Calibrate Sensor** $Y_{cal} = a/Y_{raw} + f/\mathbf{sqrt}(Y_{raw}) + g + h * Y_{raw}$ e habilite a opção **Apply Thermal Compensation**.

(b) Entre na caixa de diálogo **Control Algorithm** e verifique se **Ts=0.001768s**. Carregue o algoritmo `Cal_2d.alg` que se encontra na pasta `/ea722/programas` através da opção **Load from disk**. Em seguida selecione **Implement Algorithm**. O disco irá se mover para a altura de aproximadamente $1,0$ [cm] mantendo-se nesta posição;

(c) Verifique se o **Sensor 1 Pos** está indicando o valor de 10000 $\pm$500 [counts]. Caso isso não ocorra, entre no menu **Setup**, **Sensor Calibration**, selecione a opção **Calibrate Sensor** e ajuste o termo g da calibração para que a leitura do **Sensor 1 Pos** no fundo de tela seja próximo 10000 [counts];

(d) Idem para o **Sensor 2 Pos**, calibrando-o para 54000 ± 500 [counts];

(e) Selecione **Execute** no menu **Command** e em seguida **Trajectory #2 only**; depois plote as variáveis **Commanded Position**, **Variable Q10** e **Variable Q13**. Verifique se a trajetória das variáveis Q10 e Q13 apresentam pelo menos duas oscilações acima do valor de regime. Caso isso não ocorra, solicite a presença do professor.

Após a conclusão deste procedimento, clique no botão **Abort Control** no fundo de tela.

2. Ajuste a coleta dos dados de **Command Position 1 e 2**, **Control Effort 1 e 2**, **Q10** (posição relativa ao equilíbrio y_1) e **Q12** (posição relativa ao equilíbrio y_2) através da caixa de diálogo **Set-up Data Acquisition** do menu **Data**, e especifique uma amostragem de dados a cada 5 ciclos;

3. Entre no menu **Command**, vá para **Trajectory #1** e selecione **Step**. Ajuste um degrau com amplitude de **10000** counts, dwell time=**1000** ms e **2** (duas) repetições. Certifique-se que a opção **Unidirectional Move Only** esteja habilitada. Vá para **Trajectory #2** e selecione **Step**. Ajuste um degrau com amplitude de **15000** counts, dwell time=**1000** ms e **2** (duas) repetições. Certifique-se que a opção **Unidirectional Move Only** esteja habilitada;

4. Entre na caixa de diálogo **Control Algorithm** e defina **Ts=0.001768s**. Para realização dos ensaios carregue o algoritmo `exp7.alg` através da opção **Load from disk**. Selecione **Edit Algorithm** para introduzir os valores calculados dos ganhos de realimentação de estado para o caso $r = 5$. Observe que neste programa tem um pré-filtro para se obter erro de regime nulo na resposta ao degrau;

5. Na opção **Command**, menu **Execute**, selecione **Execute Trajectory #1 first then Trajectory #2 with delay**, e faça esse atraso ser de **500 ms**. Em seguida execute com o botão **Run**. Plote (exporte) os resultados e observe o comportamento de cada disco bem como o esforço de controle;

6. Entre novamente no programa `exp7.alg` e repita os passos 4 e 5 para os ajustes de ganhos obtidos para $r = 1$, e em seguida para o caso $r = 0.4$.

7. **(Q04)** Discuta os resultados obtidos para os três casos.

Referências

[1] Introdução aos Sistemas de Controle, Notas de aula do Prof. Paulo Valente, UNICAMP–FEEC, 1999.

[2] José C. Geromel, Álvaro G. B. Palhares - “Análise Linear de Sistemas Dinâmicos; Teoria, Ensaios Práticos e Exercícios”, Ed. Edgar Blücher, 2004.

[3] G.F. Franklin, J.D. Powell, A. Emami-Naeini ”Feedback Control of Dynamic Systems”, 3a. edição, Addison-Wesley, 1994.

[4] Ogata,K. - ”Engenharia de Controle Moderno”, 3a. Edição, Prentice Hall, 1997.

[5] *Manual for Model 505 - Inverted Pendulum*, ECP Educational Control Products, 1995.

[6] *Manual for Model 205/205a - Torcional Control System*, ECP Educational Control Products, 1995.

[7] *Manual for Model 210/210a - Rectilinear Control System*, ECP Educational Control Products, 1995.

[8] *Manual for Model 220 - Industrial Emulator/Servo Trainer*, ECP Educational Control Products, 1995.

[9] *Manual for Model 730 - Magnetic Levitation System*, ECP Educational Control Products, 1999.