TÉCNICAS DE LINEARIZAÇÃO

Para sistemas não-lineares, o que ocorre próximo ao ponto de equilíbrio é desconhecido. Uma análise que pode ser conduzida é a linearização em torno deste ponto, concluindo sobre a estabilidade em torno deste ponto com base no comportamento do sistema linear que o aproxima.

<u>Exemplo</u>: Equação de Van der Pol (não-linear!)

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (1-x^2)\frac{dx}{dt} x = 0$$

O primeiro passo é transformar esta equação de 2ª. ordem em um sistema de 2 equações de 1ª. ordem. Para tal, define-se:

$$y = \frac{dx}{dt}$$

assim:

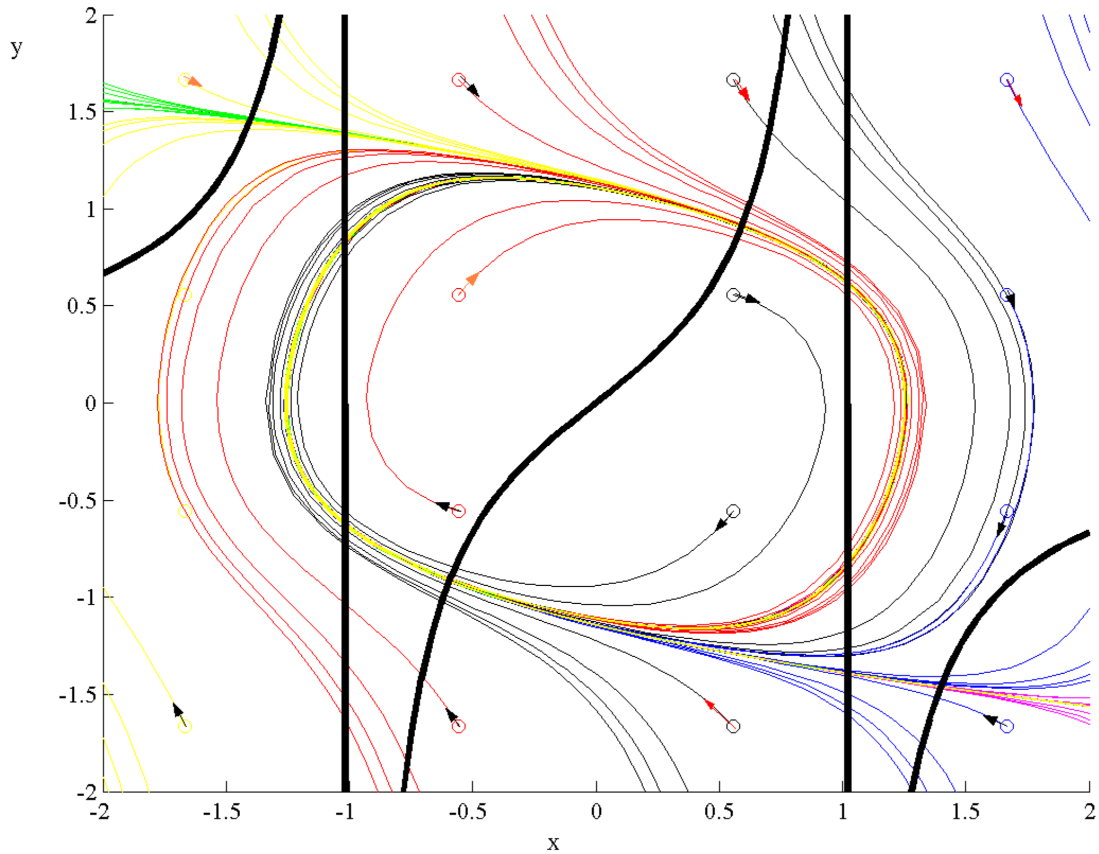
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = & y \\ \dfrac{dy}{dt} = & -x + (1-x^2)y \end{cases}$$

O ponto de equilíbrio é (0,0).

As linhas de derivadas nulas (isóclinas *dx/dt=0* e *dy/dt=0*) são:

$$\frac{dx}{dt} = y = 0 \text{ (eixo de } x\text{) (isóclina 1)}$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + (1-x^2)y = 0 \Rightarrow y = \frac{x}{1-x^2} \text{ (isóclina 2)}$$

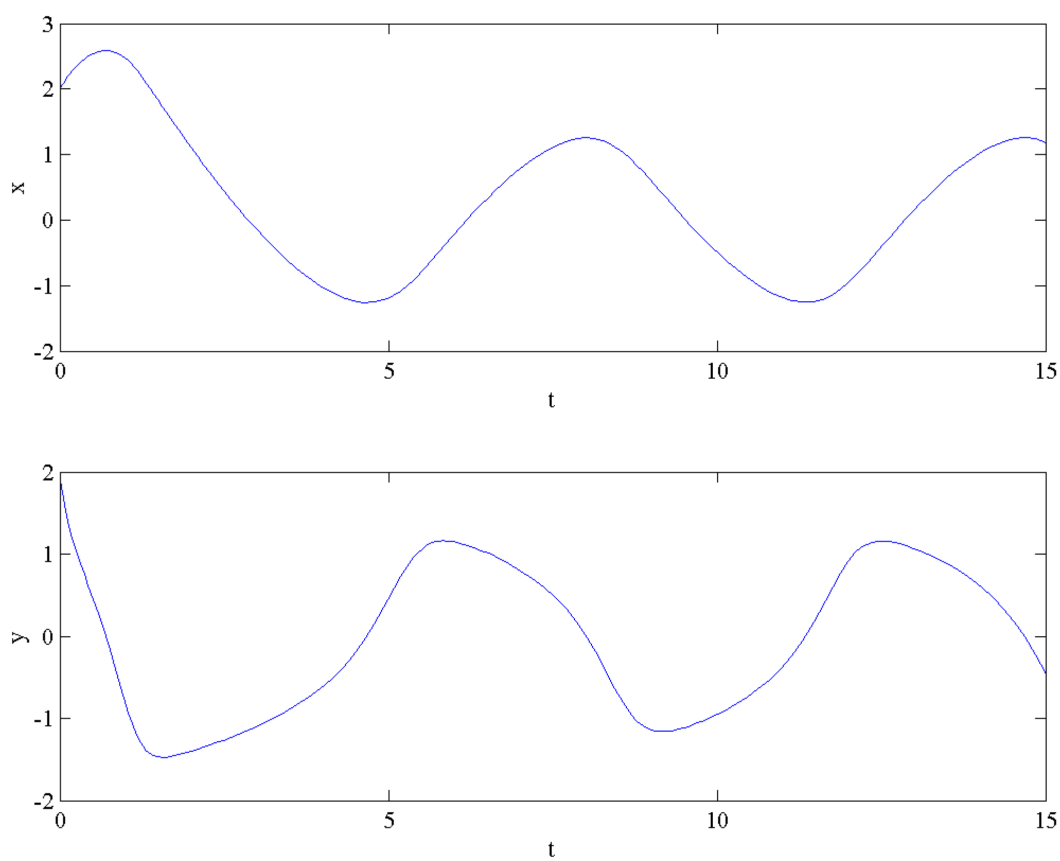


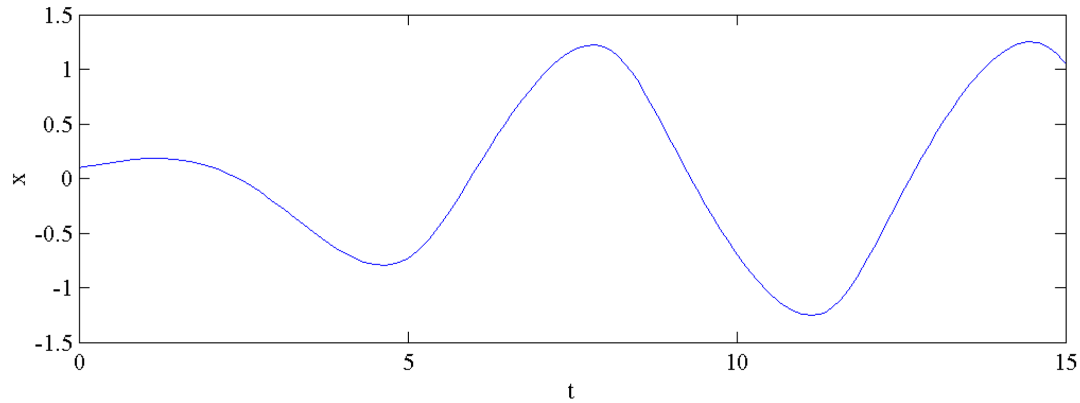

```
%Resolucao da Equacao de Van der Pol

tspan=[0 15];
hold on
z10=linspace(-5,5,10);    %x
z20=linspace(-5,5,10);    %y
cor=['b';'m';'g';'y';'r';'k';'b';'m';'g';'y';'r';'k'];

for i=1:length(z10)
   for j=1:length(z20)
     [t,z]=ode45('dvan',tspan',[z10(i) z20(j)]);
     plot(z(:,1),z(:,2),cor(i)),plot(z(1,1),z(1,2),[cor(i) 'o']);
   end
end
axis([-2 2 -2 2])


%isoclina dy/dt=0:
x=linspace(-2,2,100);
plot(x,x./(1-x.^2),'k')


%Trajetorias temporais
figure(2)
[t,z]=ode45('dvan',tspan',[2 2]);
```

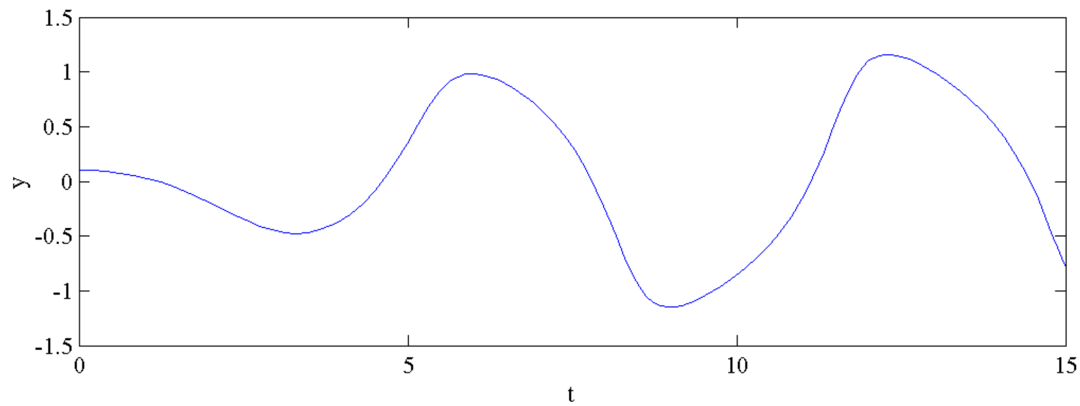
```
subplot(2,1,1),plot(t,z(:,1)),ylabel('x'),xlabel('t')
subplot(2,1,2),plot(t,z(:,2)),ylabel('y'),xlabel('t')

figure(3)
[t,z]=ode45('dvan',tspan',[0 0]);
subplot(2,1,1),plot(t,z(:,1)),ylabel('x'),xlabel('t')
subplot(2,1,2),plot(t,z(:,2)),ylabel('y'),xlabel('t')
```

```
function dv = dvan(t,z)

% x=z(1); y=z(2)

dv(1)=z(2);
dv(2)=-z(1)+(1-z(2)^2).*z(2);
dv=dv(:);
```

O gráfico da resposta transiente é:







Próximo ao ponto de equilíbrio, como antecipado, nada se pode afirmar sobre as trajetórias. Uma aproximação grosseira: quando x e y são próximos de zero, $-yx^2$ é aproximadamente nulo:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = & y \\ \dfrac{dy}{dt} = & -x + y \end{cases}$$

... um sistema linear, com a matriz de coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

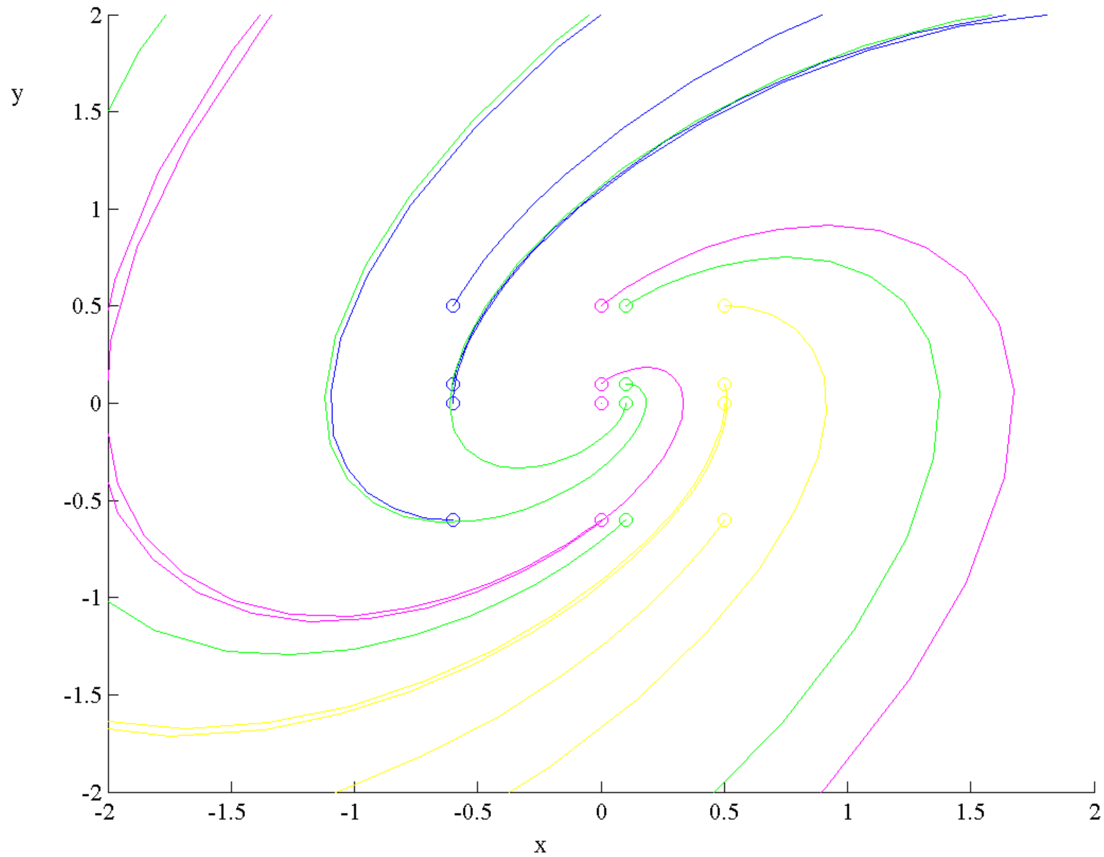
```
>> eig([0 1;-1,1])

ans =
```

```
   0.5000 + 0.8660i
   0.5000 - 0.8660i
```

Com autovalores imaginários, e parte real positiva, conclui-se que as trajetórias se afastam do ponto estacionário, em espiral.

```
%ponto de equilibrio

tspan=[0 10];
hold on
y10=[-0.5-0.1 0 0.1 0.5];
y20=[-0.5-0.1 0 0.1 0.5];
cor=['b';'m';'g';'y';'r';'k'];

for i=1:length(y10)
   for j=1:length(y20)
     [t,y]=ode45('dvanlin',tspan',[y10(i) y20(j)]);
     plot(y(:,1),y(:,2),cor(i)),plot(y(1,1),y(1,2),[cor(i) 'o']);
   end
end
axis([-2 2 -2 2])

figure(2)
subplot(2,1,1),plot(t,y(:,1)),ylabel('x'),xlabel('t')
subplot(2,1,2),plot(t,y(:,2)),ylabel('y'),xlabel('t')
```

```
function dz = dvanlin(t,z)

A=[0 1; -1 1];
dz=A*z;
```



A solução começou próxima ao ponto de equilíbrio e se afasta quando *t* aumenta.

Técnica de Linearização

Considere o sistema autônomo

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = & f(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = & g(x,y) \end{cases}$$

e assuma que (x_0, y_0) é um ponto de equilíbrio. A aproximação linear próxima ao ponto de equilíbrio é obtida por uma expansão em série de Taylor:

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} (x - x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} (y - y_0)$$

$$g(x,y) \approx g(x_0,y_0) + \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}(x-x_0) + \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}(y-y_0)$$

O sistema linear resultante tem matriz de coeficientes

$$\begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} & \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \\ \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} & \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \end{bmatrix}$$

A trajetória em torno do ponto x_0,y_0 é avaliada a partir dos autovalores desta matriz.