



Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de  
Computadores (LEEC)

Departamento de Engenharia Electrotécnica e de  
Computadores (DEEC)

# CONTROLO

## 3<sup>o</sup> ano – 1<sup>o</sup> semestre – 2004/2005

Transparências de apoio às aulas teóricas

### Cap. 6 – Parte II

### Projecto apoiado no Root Locus

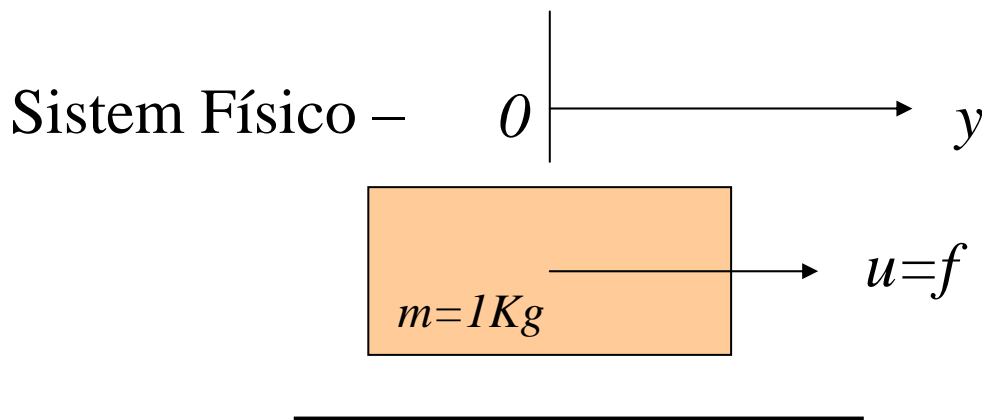
Maria Isabel Ribeiro  
António Pascoal  
Eduardo Morgado

Novembro de 2001  
Revistas em Outubro de 2003 e  
Outubro de 2004

**Todos os direitos reservados**

Estas notas não podem ser usadas para fins distintos daqueles para que foram  
elaboradas (leccionação no Instituto Superior Técnico) sem autorização dos autores

## “Root Locus” – Exemplo de Projecto



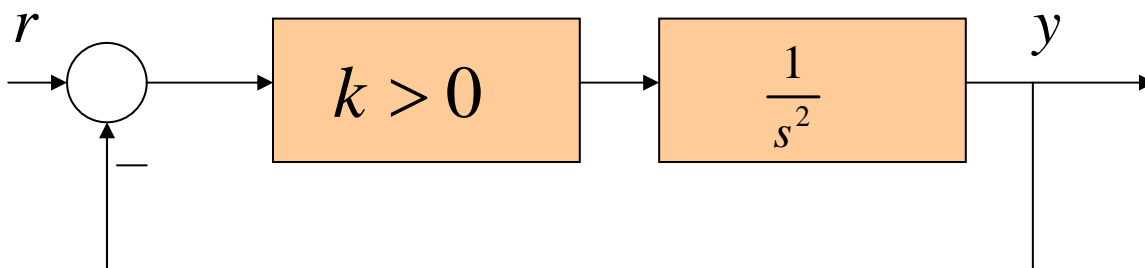
*Massa que se desloca sem atrito ao longo da coordenada  $y$  (inércia pura).*

$$f = u = \frac{d^2(y)}{dt^2} \Rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2}$$

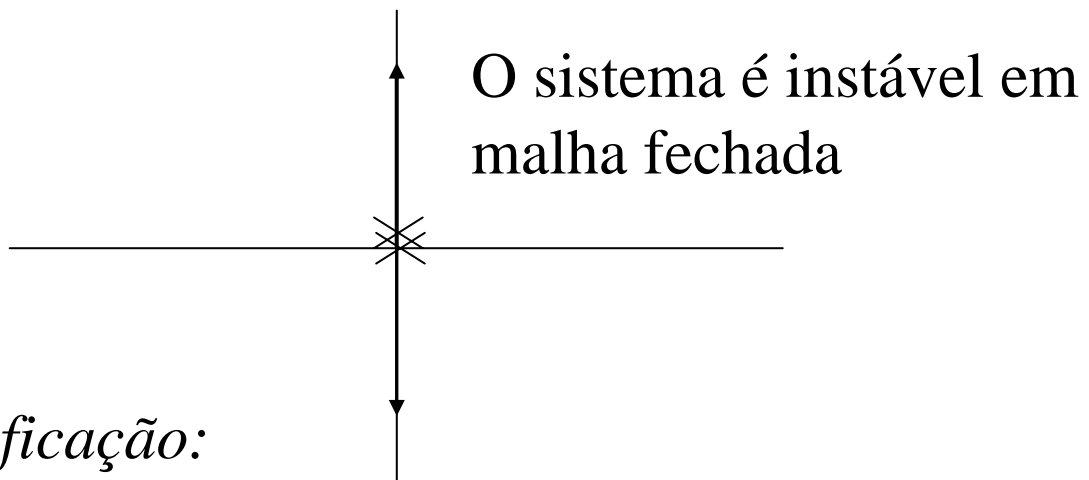
Sistema instável em malha aberta

**Objectivo:** projectar um sistema de controlo em malha fechada para estabilização em posição.

Tentativa #1 – Ganho Proporcional



# Traçado do “Root-Locus”



*Verificação:*

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{s^2} & \longrightarrow m=0 \quad n=2 \text{ ramos} \\ & \longrightarrow n=2 \quad n-m=2 \text{ assímtotas} \end{array}$$

## Centro das assímtotas

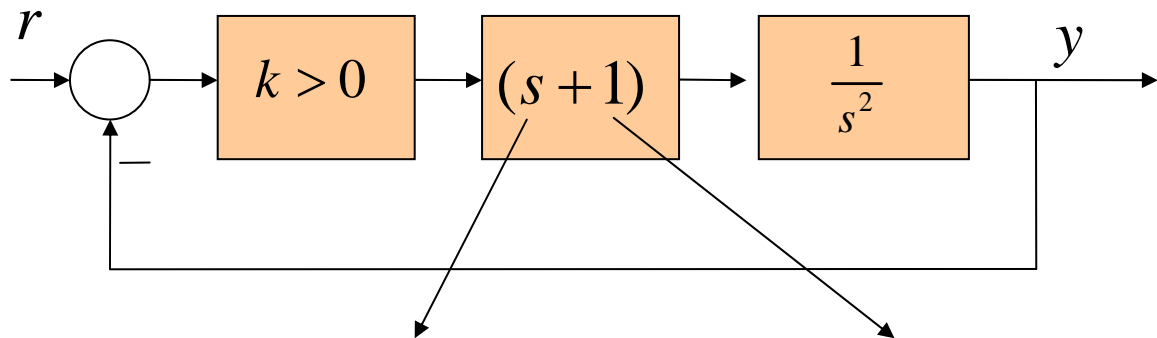
$$\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_j}{n - m} = 0$$

## Ângulos das assímtotas

$$\phi_k = \frac{(2k+1)}{n-m} \pi = 0; k = 0,1 \longrightarrow 90^\circ, -90^\circ$$

Não existem porções do diagrama no eixo Real (excepto o ponto 0, quando k=0)

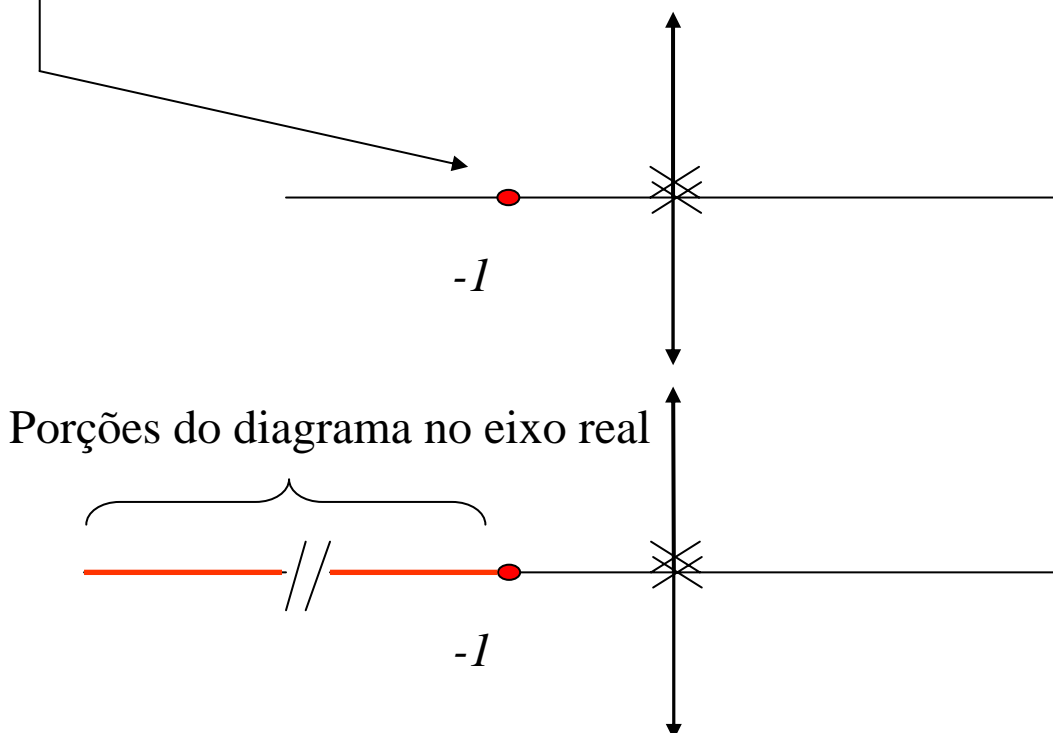
## Tentativa #2 – Acção Proporcional e Derivativa



*Acção derivativa*

*Acção proporcional*

(inclusão de um zero em  $s = -1 \text{ rad/s}$ , no semi-plano complexo esquerdo, para “atrair” o diagrama para a zona de “estabilidade”) – *esquecer por enquanto o facto de que o controlador não é causal.*



## Traçado das Assíntotas

$$\frac{(s+1)}{s^2} \longrightarrow \begin{array}{l} n=2 \text{ ramos} \\ n-m=1 \text{ assíntota} \\ (1 \text{ zero em infinito}) \end{array}$$

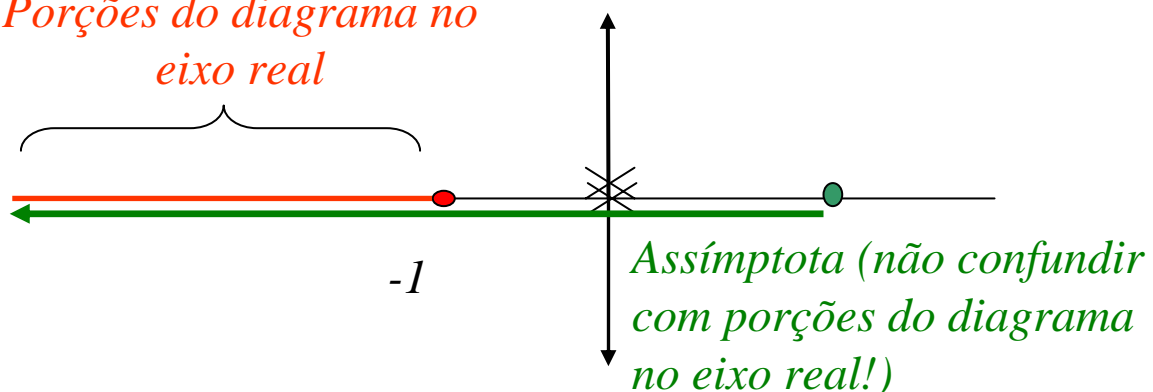
## Centro das assíntotas

$$\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_j}{n - m} = 0 + 0 - (-1) = +1$$

## Ângulos das assíntotas

$$\phi_k = \frac{(2k+1)}{n-m} \pi = 0; k=0 \longrightarrow 180^\circ$$

*Porções do diagrama no eixo real*



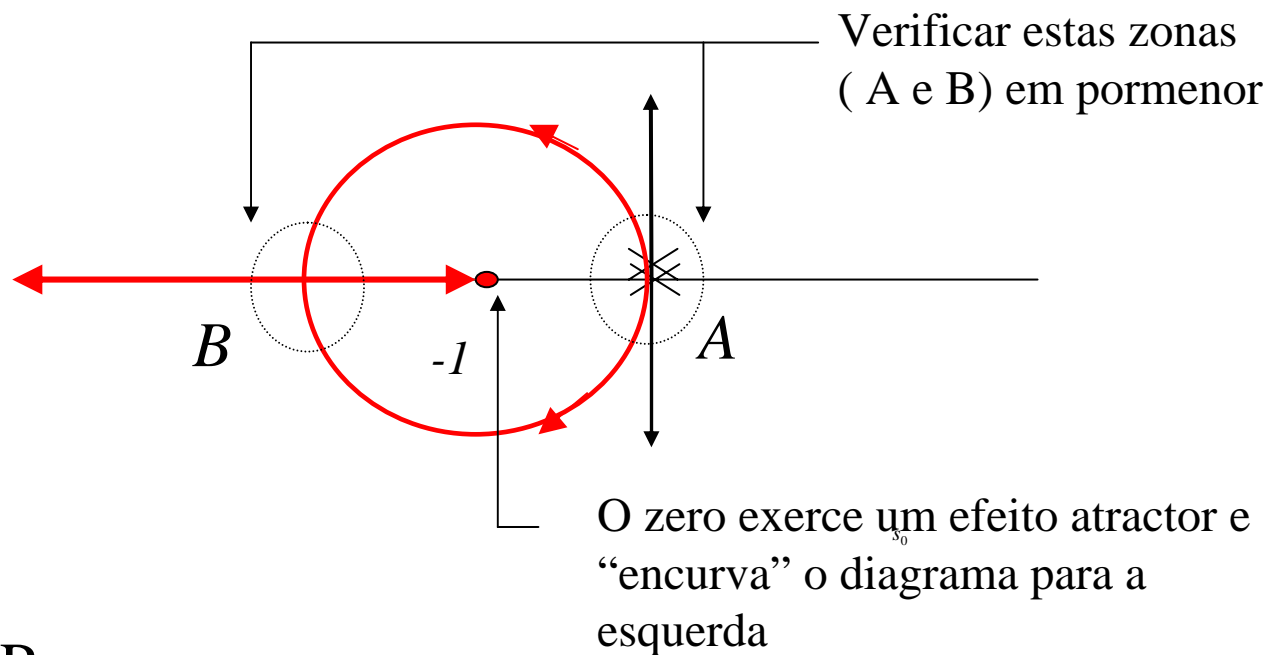
Comportamento geral do diagrama:

*Quando  $k$  tende para 0,*

polos em malha fechada  $\longrightarrow$  polos em malha aberta

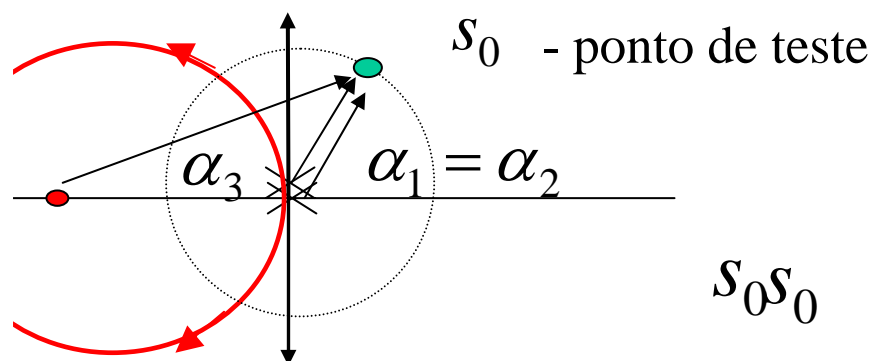
*Quando  $k$  tende para infinito,*

polos em malha fechada  $\longrightarrow$  zeros em malha aberta, incluindo os zeros em infinito.



Pormenores

A – ângulos de saída dos polos



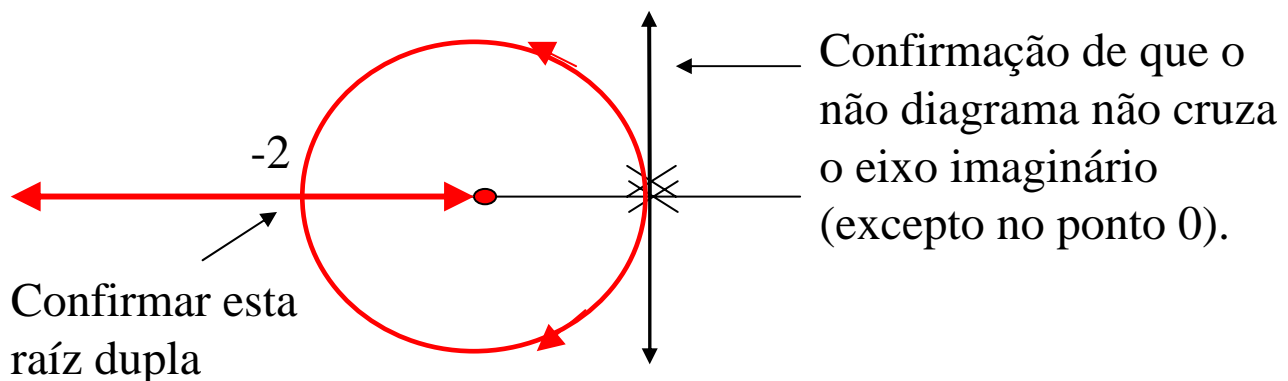
Condição de argumento -

$$\arg((s + 1) / s^2) = \alpha_3 - \alpha_2 - \alpha_1 = (2k + 1)\pi; k \in \mathbb{Z}$$

Quando  $s_0 \rightarrow 0$ ,  $\alpha_3 \cong 0$

$$\rightarrow -2\alpha_1 = (2k + 1)\pi; k \in \mathbb{Z} \rightarrow \alpha_1 = \pm\pi / 2$$

O diagrama sai dos polos na “vertical”.



Polinómio característico:  $1 + k \frac{s+1}{s^2} = 0$

$$\rightarrow s^2 + ks + k = 0$$

*Seja  $\omega$ :  $j\omega$  é uma raiz no eixo imaginário*

$$\rightarrow -\omega^2 + jk\omega + k = 0$$

$$\rightarrow \omega = k = 0 \quad (\text{n\~ao existem intersec\c{c}\~oes n\~ao triviais com o eixo imagin\~ario})$$

Ponto de entrada no eixo real (“Breakin”)

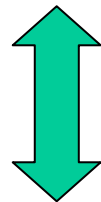
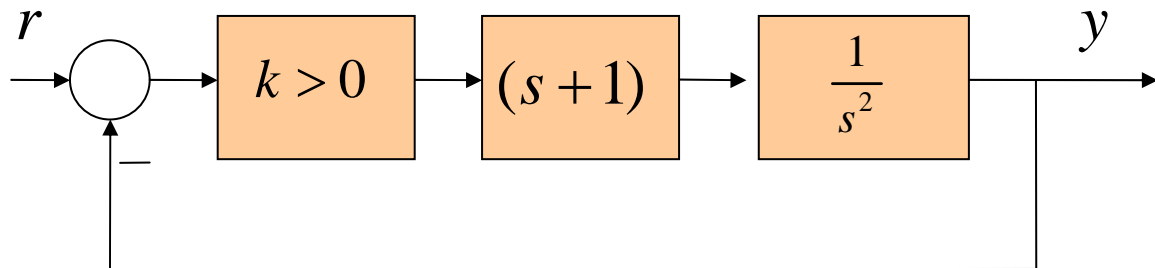
$$k \frac{s+1}{s^2} = -1 \rightarrow k = -\frac{s^2}{s+1}$$

$$\rightarrow s^2 + ks + k = 0$$

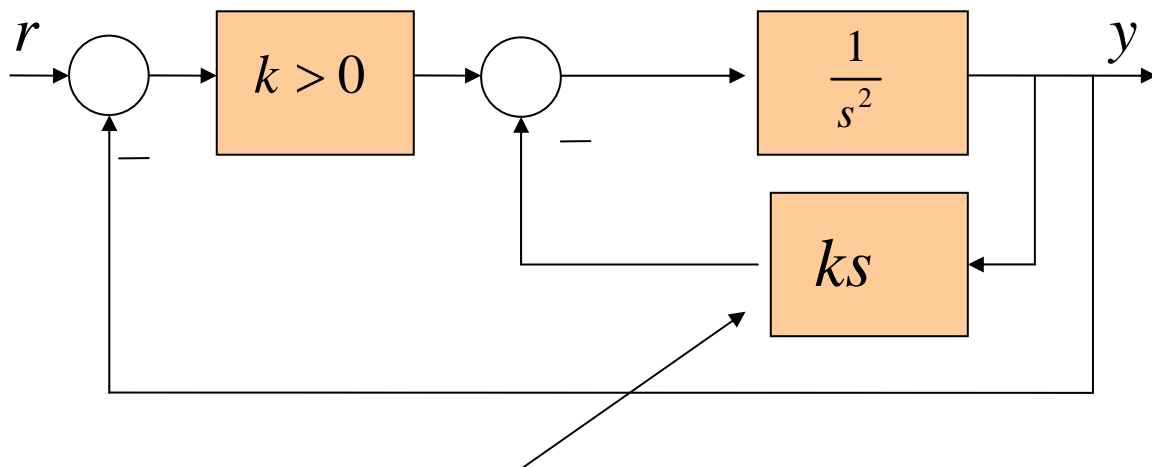
$$\frac{dk}{ds} = -\frac{2s(s+1) - s^2}{(s+1)^2} = 0 \rightarrow s(s+2) = 0$$

Raízes possíveis: 0 (trivial), -2

# Interpretação física do efeito estabilizador da acção derivativa



(sistemas equivalentes sob o ponto de vista de estabilidade)



Retroacção local de velocidade  
(termo dissipativo artificial, semelhante ao efeito de um amortecedor)

Nos dois casos, o denominador de  $Y(s)/R(s)$  é

$$s^2 + ks + k = 0$$

Termo estabilizante, fruto da retroacção local de velocidade

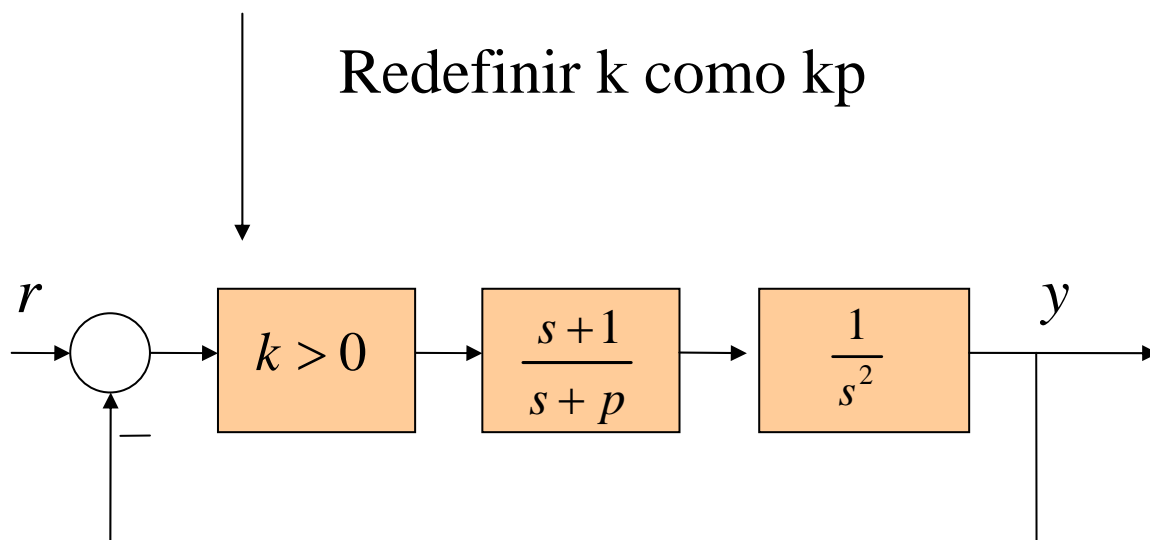


Mas ... existe uma restrição prática.  
Não é possível realizar diferenciadores puros!

Estratégia: substituir o termo  $(s+1)$  por

$$(s+1) \boxed{\frac{p}{s+p}}; \quad p \gg 1$$

Sistema causal, passa-baixo, com largura de banda “muito superior” a 1 rad/s.



Para valores possíveis de  $p$ , ver o exercício a seguir

## Exemplo de projecto mais realista

Objectivos: dado o sistema a controlar  $P(s) = \frac{1}{s^2}$

Projectar um controlador  $K(s)$  tal que:

- a. O sistema em malha fechada é estável
- b. O sistema em malha fechada exhibe comportamento (dominante) de segunda ordem com
  - b.1. Sobrelevação  $S \geq 20.5\%$
  - b.2. Tempo de estabelecimento  $t_s(5\%) \leq 0.75s$

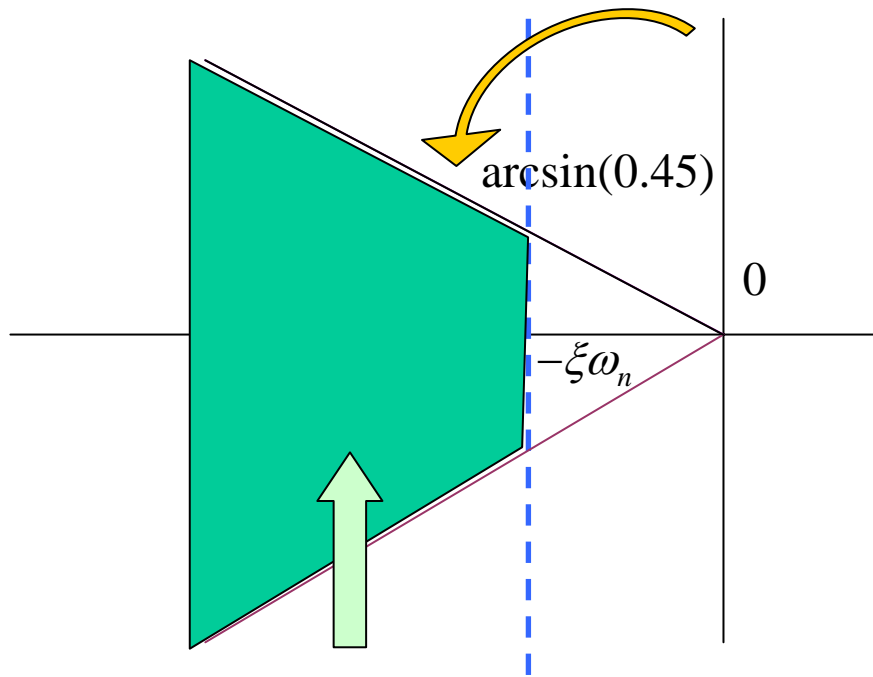
Resolução:

$$\text{b.1} \quad S = \exp(-\xi\pi / \sqrt{1-\xi^2}) \leq 20.5\% \Rightarrow \xi \geq 0.45$$

b.2

$$t_s(5\%) = \frac{|\ln 0.05|}{\xi\omega_n} \cong \frac{3}{\xi\omega_n} \leq 0.75 \Rightarrow \xi\omega_n \geq 4$$

## Exemplo de projecto mais realista

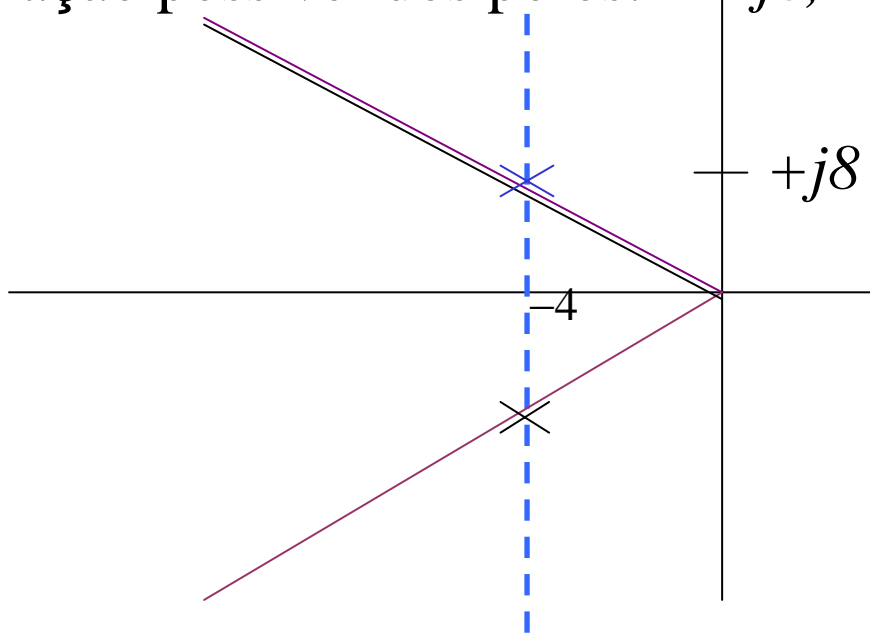


Zona desejada para os polos dominantes em malha fechada

$$\xi\omega_n \geq 4 ; \xi \geq 0.45 \Rightarrow \omega_n = 8.89 \text{ rads}^{-1}$$

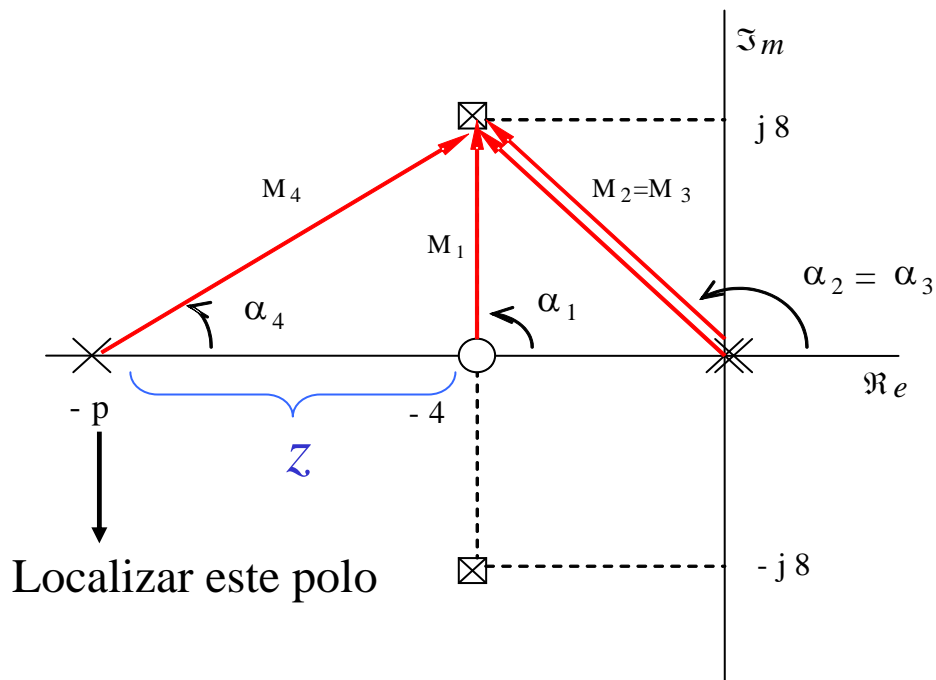
$$\Rightarrow \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = 7.94 \text{ rads}^{-1} \approx 8 \text{ rads}^{-1}$$

Localização possível dos polos:  $-4 + j8$ ,  $-4 - j8$



Tipo de controlador:  $K(s) = \frac{s + z}{s + p}$

Tentativa: fazer  $z=4$  rad/s e determinar  $p$  tal que se cumpram (caso seja possível!) as especificações.



Utilizando a **condição do argumento**:

$$\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 = \pm(2k + 1)180^\circ$$

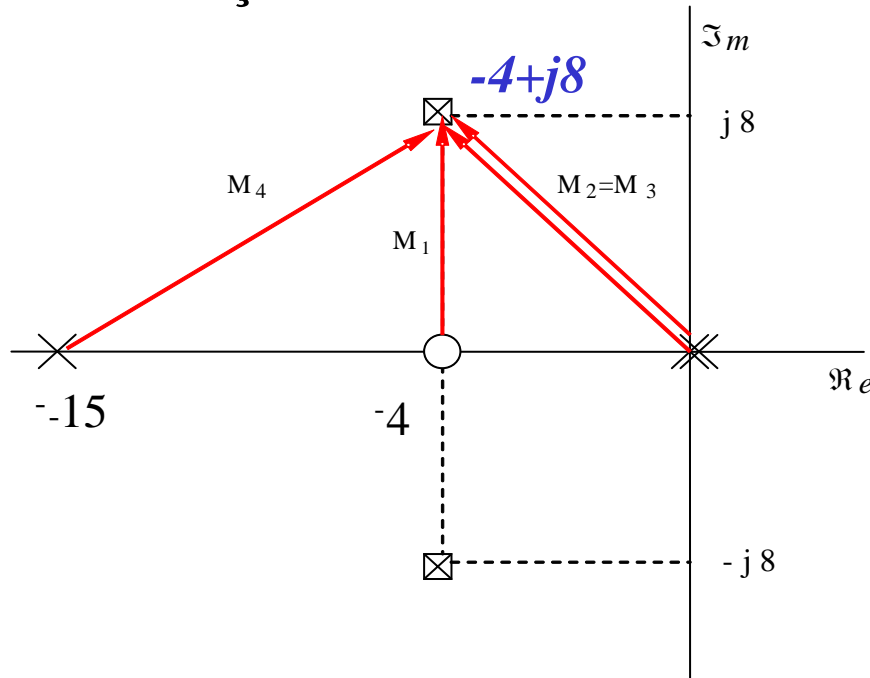
$$\alpha_1 = 90^\circ ; \alpha_2 = \alpha_3 = 180^\circ - \tan^{-1}(2) \approx 117^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha_4 = 36^\circ$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{8}{z}\right) = 36^\circ$$

$$\Rightarrow z \approx 11^\circ ; \quad p = 11 + 4 = 15 \text{ rad/s}^{-1}$$

Para calcular o valor de ganho necessário, utilizar a **condição do módulo**:



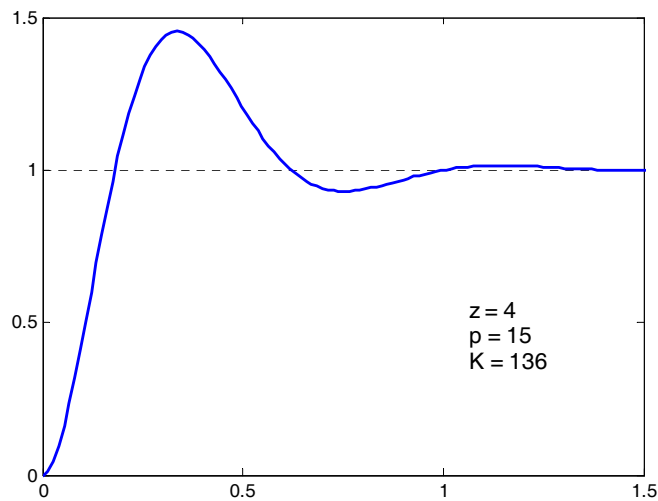
$$1 + K(s)G(s)|_{s=-4+j8} = 0$$

$$\Rightarrow k \left[ \frac{|s+4|}{|s+15|} \cdot \frac{1}{|s|^2} \right]_{s=-4+j8} = 1$$

$$\Rightarrow k = \left[ \frac{|s+15||s|^2}{|s+4|} \right]_{s=-4+j8}$$

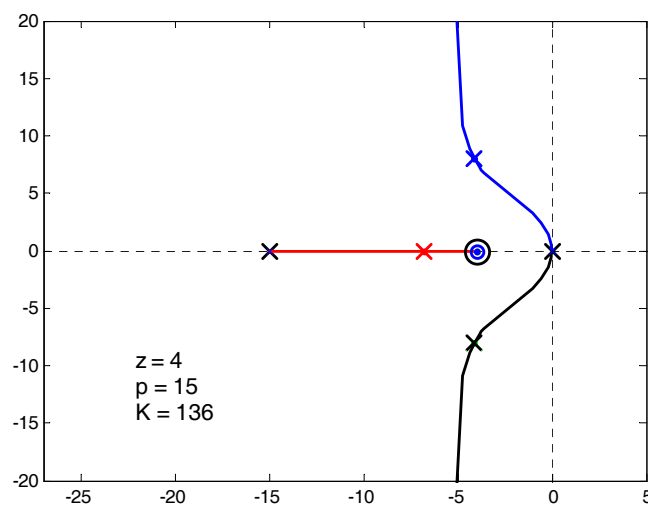
$$\Rightarrow k = \frac{M_4 \cdot M_3 \cdot M_2}{M_1} = 136.$$

**Resposta ao escalão unitário**  $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K(s+z)}{(s+p)s^2 + K(s+z)} = \dots = \frac{136s+544}{s^3+15s^2+136s+544}$



*Sobreelevação  $\approx 45\%$  !! >> 20% desejada*

**Root locus:** f. t malha aberta:  $K \frac{(s+4)}{s^2(s+15)}$



Mapa polos-zeros da malha fechada para K = 136:

zeros:  $s = -4$

polos:  $s_{1,2} \approx -4 \pm j 8$   $s_3 \approx -7$

**! Efeitos de polos e zeros adicionais (além dos projectados  $s_{1,2} = -4 \pm j 8$ ) !**

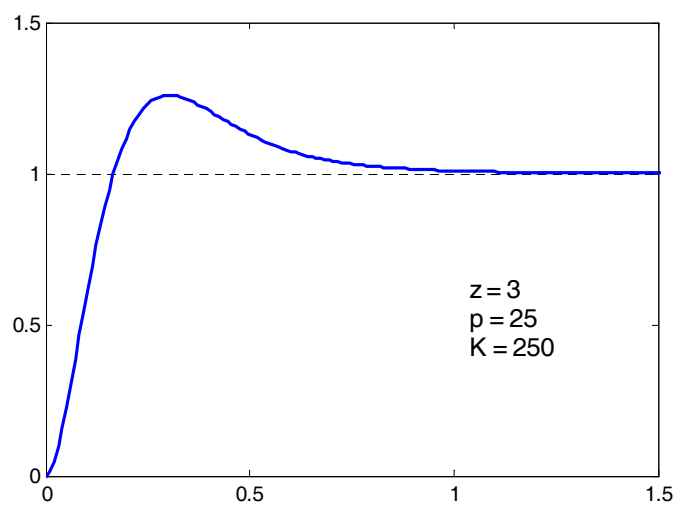
**! Polos projectados não são dominantes !**

## Considerações adicionais

**Para diminuir S** → “fechar” mais os ramos principais do root-locus ⇒ deslocar o polo do controlador para a esquerda ou/e deslocar o zero do controlador para a direita  
 Variação consistente do ganho (polos da malha fechada deslocam-se sobre o root-locus)

Tentativas ... → :       $z = 3$        $p = 25$        $K = 250$

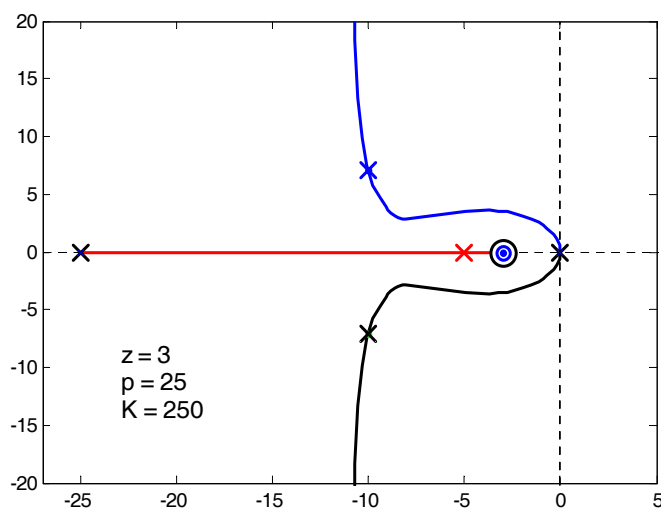
**Resposta ao escalão unitário:**  $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K(s+z)}{(s+p)s^2 + K(s+z)} = \dots = \frac{250s+750}{s^3 + 25s^2 + 250s + 750}$



Sobreelevação  $\approx 25\%$

Tempo de estabelecimento (5%)  $\approx 0,75$  s

**Root locus:** f. t malha aberta:  $K \frac{(s+3)}{s^2(s+25)}$



Mapa polos-zeros da malha fechada para  $K = 250$ :

zeros:  $s = -3$

polos:  $s_{1,2} \approx -10 \pm j7$

$s_3 \approx -5$

Haverá, *com este controlador*, um conjunto de valores de parâmetros mais conveniente ? (tente ...)

*Se o resultado não satisfaz → ensaiar outro controlador (com diferente estrutura)*

Compromisso entre desempenho, complexidade, robustez, ...

## Dimensionamento por via puramente algébrica

### IV)- Dimensionamento do Controlador por via algébrica (*alternativa a II*)

Equação característica:  $1 + K \frac{(s+4)}{(s+p)} \cdot \frac{1}{s^2} = 0 \rightarrow s^3 + p.s^2 + K.s + 4K = 0$

Polinómio característico como função dos parâmetros do controlador:

$$s^3 + p.s^2 + K.s + 4K$$

Polinómio característico desejado:

$$[s - (-4 - j8)][s - (-4 + j8)](s + x) = \dots = s^3 + s^2(8 + x) + s(80 + 8x) + 80x$$

(o polinómio característico é do 3º grau → além dos polos projectados de 2ª ordem existe um terceiro polo da malha fechada em  $s = -x$ )

por *identificação* dos polinómios característicos assim formados, obtém-se:

$$\begin{cases} 8 + x = p \\ 80 + 8x = K \\ 80x = 4K \end{cases} \rightarrow \dots \begin{cases} K = 133,33 \\ x = 6,66 \\ p = 14,66 \end{cases}$$

**Este procedimento, aplicável a casos simples, não dispensa a etapa posterior de ajuste de parâmetros, guiada pelo root-locus!**



**PROJECTO APOIADO NO ROOT-LOCUS - Síntese**

*Dados:*

Função de transferência do sistema  $G(s)$  (e dos sensores  $H(s)$  )

Especificações de regime permanente  $\rightarrow$  tipo

Especificações dinâmicas  $\rightarrow$  polos desejados da malha fechada (polos de 2ª ordem supostos dominantes)



*Projecto:*



Estrutura do Controlador  $C(s)$  (sugerida p/ *root-locus*)



Dimensionamento do Controlador



via algébrica



apoiado no root-locus: *condições de argumento* e de *módulo*



*simulação* e comparação com o desempenho desejado



ajuste dos parâmetros de  $C(s)$  (ajuste guiado pelo root-locus)



simulação

