
Capítulo 3

Alocação de Pólos e o Projeto de Observadores de Estado para Sistemas Discretos no Tempo

3-1 INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta técnicas de alocação de pólos e de projeto de observadores de estado para sistemas discretos no tempo. As técnicas de alocação de pólos e de projeto de observadores são basicamente as mesmas, tanto para sistemas contínuos quanto para discretos. As equações para a determinação da matriz de ganho de retroação de estado \mathbf{K} e a matriz de ganho do observador \mathbf{K}_e são virtualmente as mesmas para ambos os tipos de sistema.

Estrutura deste capítulo

Para começar o capítulo, discutem-se, nesta seção, a discretização das equações de sistemas contínuos, representados no espaço de estados, e o cálculo da exponencial matricial. Em seguida, na Seção 3-2, discutem-se as técnicas de alocação de pólos nos sistemas de controle discretos. A Seção 3-3 apresenta, como estudo de caso, um problema de alocação de pólos. Finalmente, a Seção 3-4 trata do projeto de observadores de estado para sistemas de controle discretos no tempo.

Obtenção da equação de estados discreta a partir da equação de estados contínua

Para obter a equação discreta equivalente a partir de uma equação no espaço de estados do sistema contínuo, usa-se o seguinte comando:

$$[G,H] = c2d(A,B,T)$$

onde T é o período de amostragem do sistema. T deve ser especificado em segundos.

Se uma boa precisão for necessária na obtenção de \mathbf{G} e \mathbf{H} , deve-se usar o formato longo (*format long*). Se somente quatro casas decimais forem necessárias, deve-se usar o formato curto (*format short*). Se nenhum formato for especificado no programa, o MATLAB irá produzir \mathbf{G} e \mathbf{H} no formato curto.

Considere-se o seguinte exemplo: se o sistema contínuo for dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (3-1)$$

então, admitindo-se que o período de amostragem seja 0,05s e usando-se o formato longo, **G** e **H** são obtidos como se segue:

```
A = [0 1;-25 -4];
B = [0;1];
format long;
[G,H] = c2d(A,B,0.05)

G =

    0.97088325381929    0.04484704238264
   -1.12117605956599    0.79149508428874

H =

    0.00116466984723
    0.04484704238264
```

Se for usado o formato curto, **G** e **H** resultam como se segue:

```
A = [0 1;-25 -4];
B = [0;1];
format short;
[G,H] = c2d(A,B,0.05)

G =

    0.9709    0.0448
   -1.1212    0.7915

H =

    0.0012
    0.0448
```

Se não for especificado o formato, obtém-se a resposta em formato curto, como se segue:

```
A = [0 1;-25 -4];
B = [0;1];
[G,H] = c2d(A,B,0.05)

G =

    0.9709    0.0448
   -1.1212    0.7915

H =

    0.0012
    0.0448
```

Note-se que a matriz de estado \mathbf{G} e a matriz de controle \mathbf{H} da equação no espaço de estados

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$

dependem do período de amostragem T . Por exemplo, considere-se a discretização do sistema contínuo dado pela Eq. (3-1) com três diferentes períodos de amostragem: $T = 0,01\text{s}$, $T = 0,2\text{s}$ e $T = 1\text{s}$. Como é visível nas saídas MATLAB seguintes, o conjunto de matrizes \mathbf{G} e \mathbf{H} difere para períodos distintos de amostragem T .

```
A = [0 1;-25 -4];
B = [0;1];
[G,H] = c2d(A,B,0.01)

G =

    0.9988    0.0098
   -0.2450    0.9596

H =

    0.0000
    0.0098
```

```
A = [0 1;-25 -4];
B = [0;1];
[G,H] = c2d(A,B,0.2)

G =

    0.6401    0.1161
   -2.9017    0.1758

H =

    0.0144
    0.1161
```

```
A = [0 1;-25 -4];
B = [0;1];
[G,H] = c2d(A,B,1)

G =

   -0.0761   -0.0293
    0.7321    0.0410

H =

    0.0430
   -0.0293
```

Como um outro exemplo, considere-se o seguinte sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20,601 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0,4905 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0,5 \end{bmatrix}$$

Admitindo que o período de amostragem T seja 0,05s e sem especificar um formato, obtém-se a seguinte equação de estado do sistema discreto equivalente:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{Gx}(k) + \mathbf{Hu}(k)$$

onde as matrizes \mathbf{G} e \mathbf{H} podem ser encontradas na seguinte saída de computador:

```
A = [0      1  0  0
      20.601 0  0  0
      0      0  0  1
      -0.4905 0  0  0];
B = [0;-1;0;0.5];
[G,H] = c2d(A,B,0.05)

G =

    1.0259    0.0504         0         0
    1.0389    1.0259         0         0
   -0.0006   -0.0000    1.0000    0.0500
   -0.0247   -0.0006         0    1.0000

H =

   -0.0013
   -0.0504
    0.0006
    0.0250
```

Exponencial matricial

Ao se analisar ou projetar sistemas de controle (tanto contínuos quanto discretos no tempo), é preciso frequentemente calcular uma exponencial matricial. A discretização de sistemas de controle contínuos no tempo envolve o cálculo da exponencial matricial. O comando $[G,H] = c2d(A,B,T)$ realiza uma série de cálculos sobre matrizes incluindo exponenciais matriciais. Na sequência, será discutido como obter a exponencial matricial de uma matriz quadrada.

A exponencial matricial de uma matriz quadrada \mathbf{A} pode ser obtida facilmente através do uso do seguinte comando:

$$\text{expm}(\mathbf{A})$$

Considere-se a seguinte matriz \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -4 \end{bmatrix}$$

O comando

```
format long, expm(A)
```

fornecerá a exponencial matricial como se segue:

```
A = [0  1;-25  -4];
format long, expm(A)

ans =

-0.07608720775055  -0.02928409524696
 0.73210238117404   0.04104917323730
```

O comando

```
format short, expm(A)
```

irá produzir a seguinte saída:

```
A = [0  1;-25  -4];
format short, expm(A)

ans =

-0.0761  -0.0293
 0.7321   0.0410
```

Entrando-se simplesmente com esse comando

```
expm(A)
```

irá produzir-se a saída no formato curto, como a seguir:

```
A = [0  1;-25  -4];
expm(A)

ans =

-0.0761  -0.0293
 0.7321   0.0410
```

3-2 ALOCAÇÃO DE PÓLOS

Nesta seção, será tratado o projeto de sistemas de controle discretos usando a técnica da alocação de pólos. Admite-se que todas as variáveis de estado sejam mensuráveis e estejam disponíveis para retroação. Se o sistema considerado é completamente controlável, então os pólos para o sistema a malha fechada podem ser colocados nas localizações desejadas por meio da retroação de estado, através de uma matriz de ganho apropriada. (Para uma prova dessa afirmativa, ver, por exemplo, a Referência 3 no fim deste livro.)

A presente técnica de projeto começa pela determinação dos pólos em malha fechada desejados, baseando-se nos requisitos de resposta transitória e/ou da resposta em frequência. Admite-se que os pólos em malha fechada desejados devam ficar em $z = \mu_1, z = \mu_2, \dots, z = \mu_n$. (Deve-se exercitar cuidadosamente a escolha do período de amostragem a fim de que o sistema não requeira sinais de controle exclusivamente altos. Caso contrário, o fenômeno de saturação irá ocorrer no sistema. Se ocorrer uma saturação, o sistema se tornará não-linear e o método de projeto apresentado aqui não mais se aplica, uma vez que só é aplicável a sistemas lineares invariantes no tempo.)

Então, através da escolha de uma matriz apropriada de ganho para a retroação de estado, é possível forçar o sistema a ter pólos em malha fechada nas localizações desejadas, desde que o sistema original seja totalmente controlável.

Considerem-se o sistema de controle a malha aberta mostrado na Fig. 3-1(a). A equação de estado é

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) \quad (3-2)$$

onde $\mathbf{x}(k)$ = vetor de estado (de ordem n) no k -ésimo instante de amostragem

$u(k)$ = sinal de controle (escalar) no k -ésimo instante de amostragem

\mathbf{G} = matriz $n \times n$

\mathbf{H} = matriz $n \times 1$

Admite-se a inexistência de restrição sobre a magnitude do sinal de controle $u(k)$. Se o sinal de controle $u(k)$ for escolhido como

$$u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$$

onde \mathbf{K} é a matriz de ganho de retroação de estado (uma matriz $1 \times n$), o sistema se torna um sistema de controle a malha fechada, como mostrado na Fig. 3-1(b) e sua equação de estado se torna

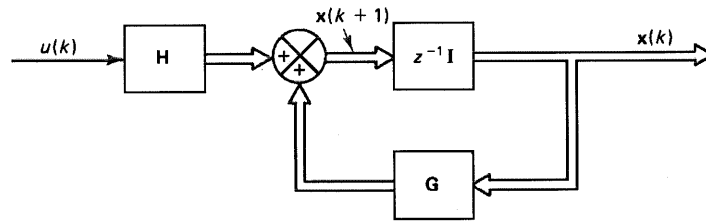
$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K})\mathbf{x}(k) \quad (3-3)$$

Note-se que os autovalores de $\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K}$ são os pólos desejados em malha fechada $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$. Uma condição necessária e suficiente para a alocação arbitrária de pólos é que o sistema seja completamente controlável.

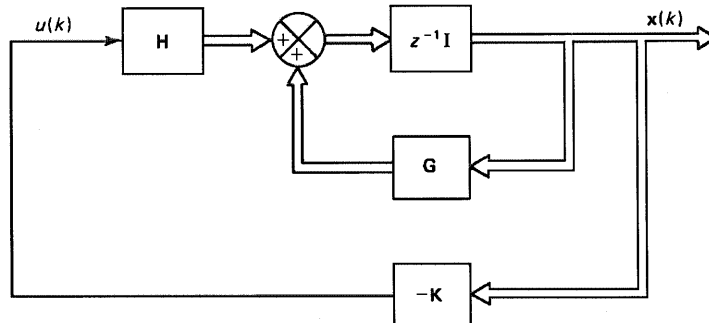
Os métodos para determinar a matriz de ganho de retroação de estado \mathbf{K} são os mesmos tanto para sistemas contínuos quanto para discretos. No que se segue, são fornecidos dois métodos para a determinação da matriz \mathbf{K} . Os dois métodos, que são os mesmos apresentados anteriormente para os sistemas contínuos, são sumariados em seguida.

1. Como discutido na Seção 2-2, a matriz de ganho de retroação de estado \mathbf{K} pode ser dada por

$$\mathbf{K} = [\alpha_n - a_n \quad \alpha_{n-1} - a_{n-1} \quad \dots \quad \alpha_1 - a_1] \mathbf{T}^{-1} \quad (3-4)$$



(a)



(b)

Fig. 3.1

onde os a_i 's são os coeficientes da equação característica do sistema original

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G}| = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

e os α_i 's são os coeficientes da equação característica desejada para o sistema de controle com retroação de estado; isto é,

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{H}\mathbf{K}| = \phi(z) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} z + \alpha_n = 0$$

a matriz \mathbf{T} é dada por

$$\mathbf{T} = \mathbf{M}\mathbf{W} \quad (3-5)$$

onde \mathbf{M} e \mathbf{W} são dadas por

$$\mathbf{M} = [\mathbf{H} : \mathbf{G}\mathbf{H} : \cdots : \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}]$$

e

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se a equação do sistema já estiver na forma canônica controlável, a determinação da matriz de ganho de retroação de estado \mathbf{K} pode ser tornada simples, porque a matriz de transformação \mathbf{T} se torna a matriz identidade. Neste caso, a matriz desejada \mathbf{K} é dada, simplesmente, como a seguir:

$$\mathbf{K} = [\alpha_n - a_n : \alpha_{n-1} - a_{n-1} : \cdots : \alpha_1 - a_1] \quad \text{quando } \mathbf{T} = \mathbf{I} \quad (3-6)$$

2. A matriz de ganho de retroação de estado \mathbf{K} pode ser dada pela fórmula de Ackermann:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1][\mathbf{H} : \mathbf{G}\mathbf{H} : \cdots : \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}]^{-1}\phi(\mathbf{G}) \\ &= [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1]\mathbf{M}^{-1}\phi(\mathbf{G}) \end{aligned} \quad (3-7)$$

onde

$$\mathbf{M} = [\mathbf{H} : \mathbf{G}\mathbf{H} : \cdots : \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}]$$

e

$$\phi(\mathbf{G}) = \mathbf{G}^n + \alpha_1 \mathbf{G}^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} \mathbf{G} + \alpha_n \mathbf{I}$$

Note-se que o polinômio característico desejado é

$$\phi(z) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} z + \alpha_n$$

Para a dedução das Eqs. (3-4) e (3-7), respectivamente, referir-se à Seção 2-2. As deduções dessas equações são idênticas às obtidas para os sistemas contínuos, exceto que s é substituído por z .

Comentários

A matriz de ganho de retroação de estado \mathbf{K} é determinada de tal forma que o erro (causado por perturbações) irá se reduzir a zero com velocidade suficiente. Note-se que a matriz \mathbf{K} não é única para um dado sistema, mas depende das localizações selecionadas para os pólos em malha fechada desejados (que determinam a velocidade de resposta). A seleção dos pólos em malha fechada desejados ou da equação característica desejada é uma solução de compromisso entre a rapidez da resposta do vetor de erro e a sensibilidade a perturbações e ruídos de medição. Ou seja, se for aumentada a velocidade da resposta de erro, os efeitos adversos de perturbações e ruídos de medi-

ção geralmente aumentam. Ao se determinar a matriz de ganho de retroação de estado \mathbf{K} para um dado sistema, é desejável examinar várias matrizes \mathbf{K} baseadas em várias equações características desejadas e, então, escolher aquela que forneça o melhor desempenho global do sistema.

Resposta deadbeat

Considere-se o sistema definido por

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$

Com a retroação de estado $u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$, a equação de estado se torna

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K})\mathbf{x}(k)$$

Note-se que a solução desta última equação é dada por

$$\mathbf{x}(k) = (\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K})^k \mathbf{x}(0) \quad (3-8)$$

Se os autovalores μ_i da matriz $\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K}$ recaem dentro do círculo unitário, o sistema é assintoticamente estável.

No que se segue, será mostrado que, através da escolha de todos os autovalores de $\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K}$ em zero, é possível obter a resposta deadbeat,

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{0}, \quad \text{para } k \geq q \quad (q \leq n)$$

Na discussão da resposta deadbeat, a matriz nulipotente*

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

desempenha um importante papel. Considere-se, por exemplo, a matriz nulipotente 4×4 :

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Note-se que

$$\mathbf{N}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Semelhantemente, para uma matriz nulipotente \mathbf{N} , $n \times n$, temos

$$\mathbf{N}^n = \mathbf{0}$$

Considere-se agora o sistema completamente controlável dado por

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) \quad (3-9)$$

*Nilpotent matrix. (N. do T.)

Seja a escolha em que as localizações de pólos desejadas estão na origem, isto é, em que os autovalores desejados são iguais a zero: $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n = 0$. Em seguida, será mostrado que a resposta para qualquer estado inicial $\mathbf{x}(0)$ é a resposta deadbeat. Como o polinômio característico com os autovalores desejados pode ser dado por

$$\begin{aligned} |z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{H}\mathbf{K}| &= (z - \mu_1)(z - \mu_2) \cdots (z - \mu_n) \\ &= z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} z + \alpha_n = z^n \end{aligned}$$

obtém-se

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

e a matriz \mathbf{K} , dada pela Eq. (3-4), pode ser simplificada para o seguinte:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= [\alpha_n - a_n \quad \alpha_{n-1} - a_{n-1} \quad \cdots \quad \alpha_1 - a_1] \mathbf{T}^{-1} \\ &= [-a_n \quad -a_{n-1} \quad \cdots \quad -a_1] \mathbf{T}^{-1} \end{aligned} \quad (3-10)$$

Fazendo uso da matriz de transformação \mathbf{T} , dada pela Eq. (3-5), defina-se

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}(k)$$

Defina-se igualmente

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T} = \hat{\mathbf{G}}, \quad \mathbf{T}^{-1}\mathbf{H} = \hat{\mathbf{H}}$$

A Eq. (3-9), por conseguinte, pode ser escrita como

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{H}u(k) = \hat{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{\mathbf{H}}u(k)$$

Se for usada a retroação de estado $u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k) = -\mathbf{K}\mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}(k)$, então esta última equação se torna

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{K}\mathbf{T})\hat{\mathbf{x}}(k)$$

Fazendo referência à Eq. (3-10), tem-se

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{K}\mathbf{T} &= \hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}[-a_n \quad -a_{n-1} \quad \cdots \quad -a_1] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [-a_n \quad -a_{n-1} \quad \cdots \quad -a_1] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por conseguinte, $\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{K}\mathbf{T}$ é uma matriz nulipotente. Consequentemente, tem-se

$$(\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{K}\mathbf{T})^n = \mathbf{0}$$

Em termos do estado original $\mathbf{x}(n)$, tem-se

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(n) &= (\mathbf{G} - \mathbf{HK})^n \mathbf{x}(0) = (\mathbf{T}\hat{\mathbf{G}}\mathbf{T}^{-1} - \mathbf{T}\hat{\mathbf{H}}\mathbf{K})^n \mathbf{x}(0) = [\mathbf{T}(\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{K})\mathbf{T}^{-1}]^n \mathbf{x}(0) \\ &= \mathbf{T}(\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{K})^n \mathbf{T}^{-1} \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}\end{aligned}$$

Por conseguinte, mostrou-se que se os autovalores desejados são todos iguais a zero, qualquer estado inicial $\mathbf{x}(0)$ pode ser trazido à origem em, no máximo, n períodos de amostragem e a resposta é deadbeat, desde que o sinal de controle $u(k)$ não esteja limitado em valor.

Comentários sobre o controle deadbeat

O conceito de resposta deadbeat é específico dos sistemas de controle discreto no tempo. Não existe nada semelhante à resposta deadbeat em sistemas contínuos. No controle deadbeat, qualquer vetor de erro diferente de zero será conduzido a zero em, no máximo, n períodos de amostragem, se a magnitude do controle escalar $u(k)$ não estiver limitada. O tempo de assentamento* depende do período de amostragem, uma vez que a resposta se estabelece em, no máximo, n períodos de amostragem. Se o período de amostragem T for muito pequeno, o tempo de assentamento será, também, muito pequeno, o que implica que o sinal de controle precisa ter uma magnitude extremamente alta. Caso contrário, não será possível trazer a resposta de erro a zero num curto intervalo de tempo.

No controle deadbeat, o período de amostragem é o único parâmetro de projeto. Por conseguinte, se a resposta deadbeat for desejada, o projetista precisa escolher o período de amostragem cuidadosamente, de forma que uma magnitude de controle extremamente alta não seja requerida na operação normal do sistema. Note-se que não é fisicamente possível aumentar a magnitude do sinal de controle sem limite. Se a magnitude for aumentada suficientemente, o fenômeno da saturação sempre terá lugar. Se a saturação ocorrer na magnitude do sinal de controle, a resposta não poderá ser mais deadbeat e o tempo de assentamento será superior a n períodos de amostragem. No projeto efetivo de sistemas de controle deadbeat, o projetista precisa levar em conta uma solução de compromisso entre a magnitude do sinal de controle e a velocidade de resposta.

EXEMPLO 3.1

Considere-se o sistema

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$

onde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,16 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Note-se que

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G}| = \begin{vmatrix} z & -1 \\ 0,16 & z+1 \end{vmatrix} = z^2 + z + 0,16 = z^2 + a_1z + a_2$$

Por conseguinte,

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 0,16$$

Determine-se uma matriz adequada de ganho de retroação de estado \mathbf{K} , tal que o sistema tenha os pólos a malha fechada em

$$z = 0,5 + j0,5, \quad z = 0,5 - j0,5$$

Deve-se examinar primeiro o posto (*rank*) da matriz de controlabilidade. O posto de

$$[\mathbf{H} : \mathbf{GH}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

*Settling time. (N. do T.)

é 2. Por conseguinte, o sistema é totalmente controlável e, então, a alocação arbitrária de pólos é possível. A equação característica para o sistema desejado é

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{H}\mathbf{K}| = (z - 0,5 - j0,5)(z - 0,5 + j0,5) = z^2 - z + 0,5 = 0$$

Então,

$$\alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = 0,5$$

Em seguida, este problema será resolvido através de dois métodos.

Método 1. A partir da Eq. (3-4), a matriz de ganho de retroação de estado \mathbf{K} é dada por

$$\mathbf{K} = [\alpha_2 - a_2 \quad \alpha_1 - a_1]\mathbf{T}^{-1}$$

Observe-se que o sistema original já se encontra na forma canônica controlável e, em consequência, a matriz de transformação \mathbf{T} se torna a matriz identidade \mathbf{I} :

$$\mathbf{T} = \mathbf{M}\mathbf{W} = [\mathbf{H} \quad \mathbf{G}\mathbf{H}] \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= [\alpha_2 - a_2 \quad \alpha_1 - a_1] = [0,5 - 0,16 \quad -1 - 1] \\ &= [0,34 \quad -2] \end{aligned}$$

Método 2. Tomando como referência a fórmula de Ackermann dada pela Eq. (3-7), tem-se:

$$\mathbf{K} = [0 \quad 1][\mathbf{H} \quad \mathbf{G}\mathbf{H}]^{-1}\phi(\mathbf{G})$$

onde

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{G}) &= \mathbf{G}^2 - \mathbf{G} + 0,5\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -0,16 & -1 \\ 0,16 & 0,84 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,16 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0,34 & -2 \\ 0,32 & 2,34 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0,34 & -2 \\ 0,32 & 2,34 \end{bmatrix} \\ &= [0,34 \quad -2] \end{aligned}$$

Programas MATLAB para a determinação da matriz \mathbf{K}

Os Programas MATLAB 3-1 e 3-2 podem ser usados para a determinação da matriz \mathbf{K} . O primeiro usa a matriz de transformação \mathbf{T} e o segundo está baseado na fórmula de Ackermann.

Programa MATLAB 3-1

```
% ----- Alocação de pólos no plano z -----

% ***** Este programa determina a matriz de ganho de retroação de estado K
% usando a matriz de transformação T *****

% ***** Entrar com a matriz de estado G e a matriz de controle H *****

G = [0 1;-0.16 -1];
H = [0;1];
```

```

% ***** Entrar com a matriz de controlabilidade M e checar
% seu posto *****

M = [H G*H];
rank(M)

ans =

    2

% ***** Como o posto da matriz de controlabilidade M é 2,
% a alocação arbitrária de pólos é possível *****

% ***** Obter os coeficientes do polinômio característico
% |zI -G|. Isto pode ser feito entrando-se com o comando poly(G) *****

p = poly(G)

p =

    1.0000    1.0000    0.1600

a1 = p(2); a2 = p(3);

% ***** Definir as matrizes W e T como a seguir *****

W = [a1  1; 1  0];
T = M*W;

% ***** Obter os coeficientes do polinômio característico desejado
% através da definição da matriz seguinte J e calculando
% poly(J) *****

J = [0.5+0.5*i  0; 0  0.5-0.5*i];

JJ = poly(J)

JJ =

    1.0000   -1.0000    0.5000

aa1 = JJ(2); aa2 = JJ(3);

% ***** A matriz de ganho de retroação de estado K pode ser determinada
% a partir de *****

K = [aa2-a2  aa1-a1]*(inv(T))

K =

    0.3400   -2.0000

% ***** Por conseguinte, k1 e k2 são dados por *****

k1 = K(1), k2 = K(2)

```

K1 =

0.3400

K2 =

-2

Programa MATLAB 3-2

```
% ----- Alocação de pólos no plano z -----

% ***** Este programa determina a matriz de ganho de retroação de estado K
% baseado na fórmula de Ackermann *****

% ***** Entrar com a matriz de estado G e a matriz de controle H *****

G = [0 1;-0.16 -1];
H = [0;1];

% ***** Entrar com a matriz de controlabilidade M e verificar
% seu posto *****

M = [H G*H];
rank(M)

ans =

    2

% ***** Como o posto da matriz de controlabilidade M é 2,
% a alocação arbitrária de pólos é possível *****

% ***** Entrar com o polinômio característico através
% da definição da matriz seguinte J e calculando poly(J) *****

J = [0.5+0.5*i 0;0 0.5-0.5*i];

JJ = poly(J)

JJ =

    1.0000    -1.0000     0.5000

% ***** Entrar com o polinômio característico Phi *****

Phi = polyvalm(poly(J),G);

% ***** A matriz de ganho de retroação de estado é dada por *****

K = [0 1]*inv(M)*Phi
```

```

K =

    0.3400    -2.0000

k1 = K(1), k2 = K(2)

k1 =

    0.3400

k2 =

   -2

```

EXEMPLO 3.2

Considere-se o sistema descrito por

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,16 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

Determinar a matriz de ganho de retroação de estado \mathbf{K} tal que quando o sinal de controle for dado por

$$u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$$

o sistema em malha fechada (sistema regulador) exiba a resposta deadbeat para um estado inicial $\mathbf{x}(0)$. É suposto que o sinal de controle $u(k)$ não seja limitado.

Para a resposta deadbeat, a equação característica desejada é

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{H}\mathbf{K}| = z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2 = z^2$$

onde $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = 0$. Tomando a Eq. (3-7) como referência para a resposta deadbeat, a matriz de ganho de retroação de estado \mathbf{K} é dada por

$$\mathbf{K} = [0 \ 1][\mathbf{H} \ \mathbf{G}\mathbf{H}]^{-1}\phi(\mathbf{G})$$

onde

$$\phi(\mathbf{G}) = \mathbf{G}^2$$

Um programa MATLAB para a determinação da matriz de ganho de retroação de estado \mathbf{K} é fornecido a seguir (Programa MATLAB 3-3)

Programa MATLAB 3-3
<pre> % ----- Alocação de pólos (Resposta deadbeat) ----- % ***** Este programa determina a matriz de ganho de retroação de estado % K para a resposta deadbeat usando a fórmula de Ackermann ***** % ***** Entrar com as matrizes G e H ***** G = [0 1;-0.16 -1]; H = [0;1]; % ***** Entrar com a matriz de controlabilidade M e verificar o % seu posto ***** </pre>

```

M = [H G*H];
rank(M)

ans =

    2

% ***** Como o posto de M é 2, o sistema é completamente
% controlável e a alocação arbitrária de pólos
% é possível *****

% ***** Para a resposta deadbeat, o polinômio característico
% desejado vem a ser Phi = G^2 *****

Phi = G^2;

% ***** A matriz de ganho de retroação de estado é dada por *****

K = [0 1]*inv(M)*Phi

K =

    -0.1600    -1.0000

k1 = K(1), k2 = K(2)

k1 =

    -0.1600

k2 =

    -1

```

3-3 ESTUDO DE CASO

Nesta seção considera-se o projeto de um controlador digital para um processo tipo 0. O controlador digital envolve retroação de estado e controle integral. Primeiro são deduzidas as equações para o sistema mostrado na Fig. 3.2, em que o processo não envolve um integrador. Em seguida, serão discutidos os detalhes de projeto de um controlador digital para o sistema pêndulo invertido.

Projeto de um servossistema no qual o processo não envolve um integrador

Considere-se o servossistema mostrado na Fig. 3-2 no qual o processo não envolve um integrador. Este sistema usa retroação de estado e controle integral.

Abordagem básica para o projeto de servossistemas

A partir da Fig. 3-2, a equação de estado do processo a controlar e a equação de saída são

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) \\ y(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k)\end{aligned}$$

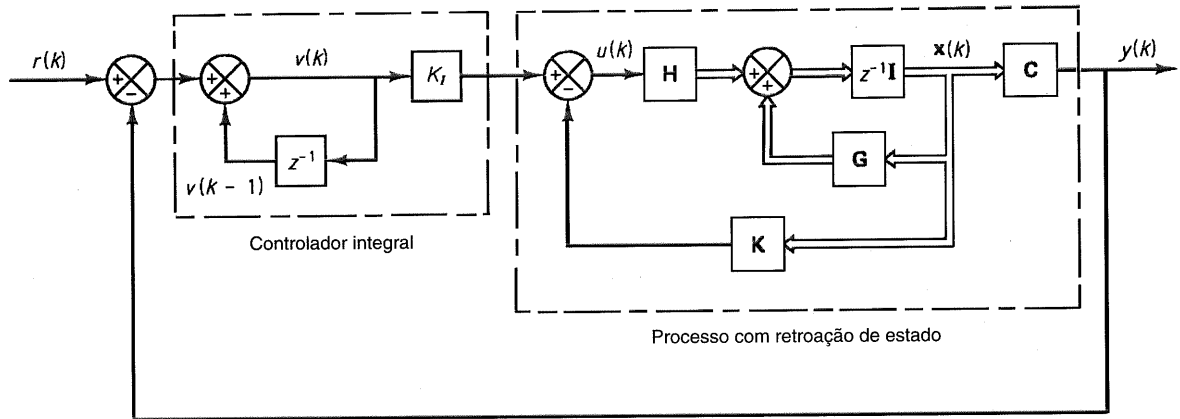


Fig. 3.2

A equação para o integrador é

$$v(k) = v(k-1) + r(k) - y(k)$$

Como

$$u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k) + K_I v(k)$$

tem-se

$$\begin{aligned} v(k+1) &= v(k) + r(k+1) - y(k+1) \\ &= v(k) + r(k+1) - \mathbf{C}[\mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)] \\ &= (1 - \mathbf{C}\mathbf{H}K_I)v(k) + (-\mathbf{C}\mathbf{G} + \mathbf{C}\mathbf{H}\mathbf{K})\mathbf{x}(k) + r(k+1) \end{aligned}$$

Notando-se que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}[-\mathbf{K}\mathbf{x}(k) + K_I v(k)] \\ &= (\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K})\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}K_I v(k) \end{aligned}$$

obtêm-se as seguintes equações de estado e de saída para todo o sistema a malha fechada:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ v(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K} & \mathbf{H}K_I \\ -\mathbf{C}\mathbf{G} + \mathbf{C}\mathbf{H}\mathbf{K} & 1 - \mathbf{C}\mathbf{H}K_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r(k+1) \\ y(k) &= [\mathbf{C} \quad 0] \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ v(k) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para uma entrada em degrau $r(k) = r$,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ v(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K} & \mathbf{H}K_I \\ -\mathbf{C}\mathbf{G} + \mathbf{C}\mathbf{H}\mathbf{K} & 1 - \mathbf{C}\mathbf{H}K_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ r \end{bmatrix} \quad (3-11)$$

Para uma entrada em degrau, à medida que k se aproxima de infinito, $\mathbf{x}(k)$, $u(k)$ e $v(k)$ se aproximam dos valores constantes $\mathbf{x}(\infty)$, $u(\infty)$ e $v(\infty)$, respectivamente. Da mesma forma,

$$v(\infty) = v(\infty) + r(\infty) - y(\infty)$$

ou

$$y(\infty) = r(\infty) = r$$

Não existe erro em regime estacionário. Substituindo-se $k = \infty$ na Eq. (3-11), obtém-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(\infty) \\ v(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} - \mathbf{HK} & \mathbf{HK}_I \\ -\mathbf{CG} + \mathbf{CHK} & 1 - \mathbf{CHK}_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\infty) \\ v(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ r \end{bmatrix}$$

Seja

$$\mathbf{x}_e(k) = \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(\infty)$$

$$v_e(k) = v(k) - v(\infty)$$

Tem-se, então,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k+1) \\ v_e(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{G} - \mathbf{HK} & \mathbf{HK}_I \\ -\mathbf{CG} + \mathbf{CHK} & 1 - \mathbf{CHK}_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{CG} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ -\mathbf{CH} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{K}_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-12)$$

Definindo-se

$$w(k) = \begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{K}_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix} \quad (3-13)$$

A Eq. (3-12), então, se torna

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k+1) \\ v_e(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{CG} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ -\mathbf{CH} \end{bmatrix} w(k) \quad (3-14)$$

As Eqs. (3-14) e (3-13) podem ser reescritas, respectivamente, como

$$\xi(k+1) = \hat{\mathbf{G}}\xi(k) + \hat{\mathbf{H}}w(k) \quad (3-15)$$

$$w(k) = -\hat{\mathbf{K}}\xi(k) \quad (3-16)$$

onde

$$\begin{aligned} \xi(k) &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix}, & \hat{\mathbf{G}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{CG} & 1 \end{bmatrix}, & \hat{\mathbf{H}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ -\mathbf{CH} \end{bmatrix} \\ \hat{\mathbf{K}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{K}_I \end{bmatrix} \end{aligned}$$

As Eqs. (3-15) e (3-16) representam equações padrões no espaço de estados. A matriz $\hat{\mathbf{K}}$ pode, então, ser determinada usando-se a abordagem da alocação de pólos, desde que o sistema representado pelas Eqs. (3-15) e (3-16) seja completamente controlável.

EXEMPLO 3.3: Projeto de Sistema de Controle para o Pêndulo Invertido

Considere-se o sistema pêndulo invertido mostrado na Fig. 3-3, onde um pêndulo invertido é montado sobre um pequeno carro movido a motor. Aqui, se considera somente o problema bidimensional, no qual o pêndulo se move no plano do papel. O sistema pêndulo invertido é instável na medida em que pode cair a qualquer instante, a menos que uma força de controle adequada seja aplicada. Admite-se que a massa do pêndulo está concentrada no final da haste, como mostrado na figura. (Considere-se que a haste não tenha massa.) A força de controle u é aplicada ao carrinho.

No diagrama, θ é o ângulo da haste com a vertical. Admite-se que o ângulo θ seja pequeno, de forma que se possa aproximar $\sin \theta$ por θ e $\cos \theta$ por 1, e também que $\dot{\theta}$ seja pequeno, de forma que $\dot{\theta}^2 \doteq 0$. (Sob essas condições, as equações não-lineares do sistema podem ser linearizadas.)

É desejável manter o pêndulo aprumado na vertical em resposta a mudanças em degrau na posição do carro. (A força de controle u é a força aplicada ao carro.) Esse sistema de pêndulo é o mesmo considerado na Seção 2-3. Projetar um controlador digital para o sistema pêndulo invertido.

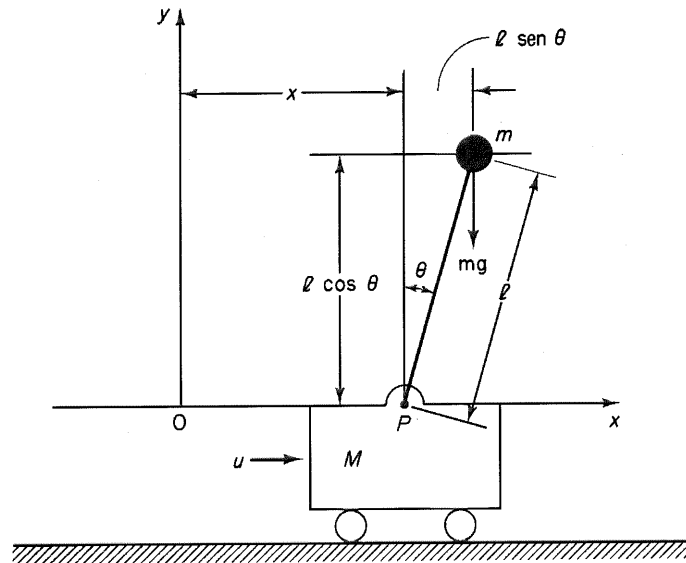


Fig. 3.3

Como o processo (o sistema pêndulo invertido) não envolve um integrador, há necessidade de incluir um controlador integral. Se este sistema for implementado como um servossistema, seu diagrama de blocos pode tomar a forma mostrada na Fig. 3-2. (Isto significa que o controlador a ser projetado irá incluir uma retroação de estado e um integrador em malha fechada.)

Como na Seção 2-3, defina as variáveis de estado x_1 , x_2 , x_3 e x_4 por

$$x_1 = \theta$$

$$x_2 = \dot{\theta}$$

$$x_3 = x$$

$$x_4 = \dot{x}$$

Admitem-se os mesmos valores numéricos para M , m e l , como foi feito na Seção 2-3. Isto é,

$$M = 2 \text{ kg}, \quad m = 0,1 \text{ kg}, \quad l = 0,5 \text{ m}$$

Neste sistema, deseja-se manter o ângulo θ tão pequeno quanto possível, na medida em que o carrinho seja movido “em saltos”. Considera-se o deslocamento do carrinho como sendo a saída do sistema. Por conseguinte, a equação de saída se torna

$$y = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Consequentemente, as equações de estado e de saída para o pêndulo invertido com o carrinho vêm a ser como se segue:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (3-17)$$

$$y = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \quad (3-18)$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20,601 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0,4905 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0,5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0], \quad \mathbf{D} = 0$$

Será utilizado o esquema de controle por retroação de estado

$$u = -\mathbf{Kx}$$

Como se deve projetar um sistema de controle digital, o primeiro passo é discretizar a equação de estado (3-17). A discretização pode ser realizada usando-se o seguinte comando MATLAB:

$$[G,H] = \text{c2d}(A,B,T)$$

onde T é o período de amostragem envolvido no sistema de controle discreto. Neste problema, admite-se que $T = 0,1\text{s}$. O comando

$$[G,H] = \text{c2d}(A,B,0.1)$$

irá transformar as equações de estado do sistema contínuo em equações de estado discretas no tempo. Observe-se o comando e a seguinte saída em MATLAB:

```
A = [0      1  0  0
      20.601 0  0  0
      0      0  0  1
      -0.4905 0  0  0];
B = [0;-1;0;0.5];

[G,H] = c2d(A,B,0.1)

G =

      1.1048      0.1035         0         0
      2.1316      1.1048         0         0
     -0.0025     -0.0001      1.0000     0.1000
     -0.0508     -0.0025         0      1.0000

H =

     -0.0051
     -0.1035
      0.0025
      0.0501
```

A representação no espaço de estados para o processo a controlar (pêndulo invertido com o carro) é agora dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) \\ y(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + Du(k) \\ v(k) &= v(k-1) + r(k) - y(k) \\ u(k) &= -\mathbf{K}\mathbf{x}(k) + K_I v(k) \end{aligned}$$

Para todo o sistema de controle, a equação de estado e a de saída podem ser dadas por

$$\begin{aligned} \xi(k+1) &= \hat{\mathbf{G}}\xi(k) + \hat{\mathbf{H}}w(k) \\ w(k) &= -\hat{\mathbf{K}}\xi(k) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \xi(k) &= \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \\ x_5(k) \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{G}} = \mathbf{G}\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}\mathbf{G} & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{H}} = \mathbf{H}\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ -\mathbf{C}\mathbf{H} \end{bmatrix} \\ \hat{\mathbf{K}} &= [\mathbf{K} \quad -K_I] = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4 \quad -K_I], \quad x_5(k) = v(k) \end{aligned}$$

O problema aqui é determinar a matriz $\hat{\mathbf{K}}$. Admita-se que os pólos desejados em malha fechada estejam localizados como a seguir:

$$\mu_1 = 0,9 + j0,25, \quad \mu_2 = 0,9 - j0,25, \quad \mu_3 = 0, \quad \mu_4 = 0, \quad \mu_5 = 0$$

Note-se que as matrizes $\mathbf{G1}$ e $\mathbf{H1}$ são, respectivamente, 5×5 e 5×1 , como mostrado em seguida.

$$\mathbf{G1} = [\mathbf{G} \quad \text{zeros}(4,1); -\mathbf{C}*\mathbf{G} \quad 1]$$

$$\mathbf{G1} =$$

1.1048	0.1035	0	0	0
2.1316	1.1048	0	0	0
-0.0025	-0.0001	1.0000	0.1000	0
-0.0508	-0.0025	0	1.0000	0
0.0025	0.0001	-1.0000	-0.1000	1.0000

$$\mathbf{H1} = [\mathbf{H}; -\mathbf{C}*\mathbf{H}]$$

$$\mathbf{H1} =$$

-0.0051
-0.1035
0.0025
0.0501
-0.0025

A matriz de controlabilidade para todo o sistema é

$$\mathbf{M} = [\mathbf{H1} \quad \mathbf{G1}*\mathbf{H1} \quad \mathbf{G1}^2*\mathbf{H1} \quad \mathbf{G1}^3*\mathbf{H1} \quad \mathbf{G1}^4*\mathbf{H1}]$$

$$\mathbf{M} =$$

-0.0051	-0.0163	-0.0310	-0.0521	-0.0842
-0.1035	-0.1252	-0.1731	-0.2572	-0.3953
0.0025	0.0075	0.0126	0.0179	0.0234
0.0501	0.0506	0.0517	0.0537	0.0570
-0.0025	-0.0100	-0.0227	-0.0406	-0.0640

O posto de \mathbf{M} é igual a 5. Por conseguinte, a alocação arbitrária de pólos é possível.

Em seguida, será apresentado o Programa MATLAB 3-4 para a determinação da matriz $\hat{\mathbf{K}}$, usando a fórmula de Ackermann. No Programa MATLAB 3-4, é usada a notação \mathbf{KK} em lugar de $\hat{\mathbf{K}}$.

Programa MATLAB 3-4

```
% ----- Projeto de um controlador digital -----
% ***** Projeto de um controlador digital para o sistema pêndulo invertido
% com carro *****
% ***** Este é o programa para calcular KK
% (a matriz K circunflexo). É uma matriz 1 x 5 onde as
% primeiras quatro colunas são a matriz de ganho de
% retroação de estado e a quinta coluna é a constante
% de ganho integral. A fórmula de Ackermann é utilizada
% na resolução para a matriz KK *****
```

```

% ***** Entrar com as matrizes G, H, C e D *****

G = [1.1048  0.1035  0    0
      2.1316  1.1048  0    0
      -0.0025 -0.0001  1   0.1
      -0.0508 -0.0025  0    1];
H = [-0.0051;-0.1035;0.0025;0.0501];
C = [0  0  1  0];
D = [0];

% ***** Entrar com as matrizes G1 e H1 *****

G1 = [G zeros(4,1);-C*G  1];
H1 = [H;-C*H];

% ***** Entrar com a matriz de controlabilidade M *****

M = [H1  G1*H1  G1^2*H1  G1^3*H1  G1^4*H1];

% ***** Verificar o posto da matriz *****

rank(M)

ans =

      5

% ***** Como o posto de M é 5,
% a alocação arbitrária de pólos é possível *****

% ***** Determinar o polinômio característico desejado
% entrando com a matriz seguinte J e calculando poly(J) *****

J = [0.9+0.25*i  0  0  0  0
      0  0.9-0.25*i  0  0  0
      0          0  0  0  0
      0          0  0  0  0
      0          0  0  0  0];

Jl = poly(J)

Jl =

      1.0000      -1.8000      0.8725      0      0      0

% ***** Entrar com o polinômio característico Phi *****

Phi = polyvalm(poly(J),G1);

% ***** A matriz KK é dada pela equação seguinte *****

KK = [0  0  0  0  1]*(inv(M))*Phi

KK =

     -371.1822    -103.7521    -236.7336    -168.5108      72.6484

```

$$k1 = KK(1), k2 = KK(2), k3 = KK(3), k4 = KK(4), kI = -KK(5)$$

$$k1 =$$

$$-371.1822$$

$$k2 =$$

$$-103.7521$$

$$k3 =$$

$$-236.7336$$

$$k4 =$$

$$-168.5108$$

$$kI =$$

$$-72.6484$$

Resposta em degrau do sistema projetado. Em seguida, será obtida a resposta em degrau do sistema projetado. Usando-se a Eq. (3-11) como referência, a resposta em degrau unitário é obtida a partir das seguintes equações:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ v(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} - \mathbf{HK} & \mathbf{HK}_I \\ -\mathbf{CG} + \mathbf{CHK} & 1 - \mathbf{CHK}_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (3-19)$$

$$y(k) = [\mathbf{C} \quad 0] \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ v(k) \end{bmatrix} \quad (3-20)$$

Seja a definição

$$\mathbf{GG} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} - \mathbf{HK} & \mathbf{HK}_I \\ -\mathbf{CG} + \mathbf{CHK} & 1 - \mathbf{CHK}_I \end{bmatrix}, \quad \mathbf{HH} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{CC} = [\mathbf{C} \quad 0], \quad \mathbf{DD} = [D]$$

As saídas MATLAB para \mathbf{GG} , \mathbf{HH} , \mathbf{CC} e \mathbf{DD} são mostradas em seguida.

$$\mathbf{GG} = [\mathbf{G} - \mathbf{H} * \mathbf{K} \quad \mathbf{H} * \mathbf{K}_I; -\mathbf{C} * \mathbf{G} + \mathbf{C} * \mathbf{H} * \mathbf{K} \quad 1 - \mathbf{C} * \mathbf{H} * \mathbf{K}_I]$$

$$\mathbf{GG} =$$

$$\begin{bmatrix} -0.7832 & -0.4243 & -1.2041 & -0.8571 & 0.3695 \\ -36.2743 & -9.6303 & -24.4946 & -17.4357 & 7.5169 \\ 0.9262 & 0.2595 & 1.5923 & 0.5216 & -0.1818 \\ 18.5390 & 5.1937 & 11.8562 & 9.4395 & -3.6384 \\ -0.9262 & -0.2595 & -1.5923 & -0.5216 & 1.1818 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{HH} = [0;0;0;0;1]$$

e usando o comando de filtro

$$x1 = \text{filter}(\text{num1}, \text{den1}, u)$$

Para obter a resposta $x_2(k)$, usa-se a seguinte equação de saída fictícia:

$$x_2(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \\ x_5(k) \end{bmatrix} = \mathbf{JJ} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ v(k) \end{bmatrix} \quad (3-22)$$

onde

$$\mathbf{JJ} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

As equações no espaço de estados [Eqs. (3-19) e (3-22)] são convertidas, então, na função de transferência discreta $X_2(z)/R(z)$ através do uso do comando

$$[\text{num2}, \text{den2}] = \text{ss2tf}(\text{GG}, \text{HH}, \mathbf{JJ}, \text{DD})$$

e, em seguida, usa-se o comando de filtro para obter a resposta em degrau unitário

$$x2 = \text{filter}(\text{num2}, \text{den2}, u)$$

Similarmente, para se obter as respostas $x_4(k)$ e $x_5(k)$, são usados os seguintes comandos:

$$[\text{num4}, \text{den4}] = \text{ss2tf}(\text{GG}, \text{HH}, \text{LL}, \text{DD})$$

$$x4 = \text{filter}(\text{num4}, \text{den4}, u)$$

e

$$[\text{num5}, \text{den5}] = \text{ss2tf}(\text{GG}, \text{HH}, \text{MM}, \text{DD})$$

$$x5 = \text{filter}(\text{num5}, \text{den5}, u)$$

onde

$$\text{LL} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{MM} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Usando o Programa MATLAB 3-5, é possível obter as respostas $y(k)$, $x_1(k)$, $x_2(k)$, $x_4(k)$ e $x_5(k)$ para a entrada em degrau unitário, $r = 1$.

Programa MATLAB 3-5

```
% ----- Resposta em degrau do sistema projetado -----

% ***** Este programa calcula a resposta do sistema quando
% submetido a uma entrada em degrau unitário. Os valores que
% são usados para K e KI são calculados em um outro programa
% (Programa MATLAB 3-4). A resposta em degrau é obtida
% usando-se um método para converter as equações de estado
% discretas para a forma de função de transferência.
% A resposta em degrau é obtida, então, através
% do comando filter convencional. *****

% ***** Entrar com as matrizes K, KI, GG, FF, JJ, LL, MM, DD *****

K = [KK(1) KK(2) KK(3) KK(4)];
KI = -KK(5);
```

```

HH =
    0
    0
    0
    0
    1

CC = [C 0]

CC =
    0 0 1 0 0

DD = [0]

DD =
    0

```

Para obter a resposta em degrau unitário $y(k)$ versus k , deve-se primeiro transformar as equações no espaço de estados [Eqs. (3-19) e (3-20)] na função de transferência discreta $Y(z)/R(z)$ através do uso do seguinte comando:

$$[\text{num}, \text{den}] = \text{ss2tf}(\text{GG}, \text{HH}, \text{CC}, \text{DD})$$

A saída do computador segue abaixo:

```

[num,den] = ss2tf(GG,HH,CC,DD)

num =
    0 -0.0000 -0.1818 0.2180 0.2180 -0.1818

den =
    1.0000 -1.8000 0.8725 0.0000 -0.0000 0.0000

```

Seja usado, em seguida, o comando de filtro, como abaixo:

$$y = \text{filter}(\text{num}, \text{den}, u)$$

onde u é a entrada em degrau unitário.

Para obter a resposta $x_1(k)$, será usada a seguinte equação fictícia de saída:

$$x_1(k) = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \\ x_5(k) \end{bmatrix} = \mathbf{FF} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ v(k) \end{bmatrix} \quad (3-21)$$

onde

$$\mathbf{FF} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

As equações no espaço de estados [Eqs. (3-19) e (3-21)] são convertidas, então, na função de transferência discreta $X_1(z)/R(z)$ através do comando

$$[\text{num1}, \text{den1}] = \text{ss2tf}(\text{GG}, \text{HH}, \mathbf{FF}, \text{DD})$$


```

GG = [G-H*K  H*KI;-C*G+C*H*K  1-C*H*KI];
HH = [0;0;0;0;1];
CC = [0  0  1  0  0];
FF = [1  0  0  0  0];
JJ = [0  1  0  0  0];
LL = [0  0  0  1  0];
MM = [0  0  0  0  1];
DD = [0];

[num,den] = ss2tf(GG,HH,CC,DD);

% ***** Digitar o comando para obter a resposta em degrau unitário *****

r = ones(1,101);
axis([0 100 -0.5 2]);
k = 0:100;
y = filter(num,den,r);
plot(k,y,'o',k,y,'-')
grid
title('Posição do carro:  $y(k) = x_3(k)$ ')
xlabel('k')
ylabel('y(k) = x3(k)')

% ***** Para obter x1(k), converter as equações no espaço de
% estados na função de transferência discreta X1(z)/R(z) *****

[num1,den1] = ss2tf(GG,HH,FF,DD);

% ***** Entrar com o comando para obter a resposta em degrau unitário *****

axis([0 100 -1 1]);
x1 = filter(num1,den1,r);
plot(k,x1,'o',k,x1,'-')
grid
title('Deslocamento Angular Teta: x1(k)')
xlabel('k')

ylabel('x1(k)')

% ***** Para obter x2(k), converter as equações no espaço de estados
% para a função de transferência discreta X2(z)/R(z) *****

[num2,den2] = ss2tf(GG,HH,JJ,DD);

% ***** Entrar com comando para obter a resposta em degrau unitário *****

axis([0 100 -5 10]);
x2 = filter(num2,den2,r);
plot(k,x2,'o',k,x2,'-')
grid
title('Velocidade Angular Teta Ponto: x2(k)')
xlabel('k')
ylabel('x2(k)')

% ***** Para obter x4(k) converter as equações no espaço de estados
% para a função de transferência discreta X4(z)/R(z) *****

```

```

[num4,den4] = ss2tf(GG,HH,LL,DD);

% ***** Entrar com o comando para obter a resposta em degrau unitário *****

axis([0 100 -5 5]);
x4 = filter(num4,den4,r);
plot(k,x4,'o',k,x4,'-')
grid
title('Velocidade do Carro: x4(k)')
xlabel('k')
ylabel('x4(k)')

% ***** Para obter x5(k) converter as equações no espaço de estados
% para a função de transferência discreta x5(z)/R(z) *****

[num5,den5] = ss2tf(GG,HH,MM,DD);

% ***** Entrar com o comando para obter a resposta em degrau unitário *****

axis([0 100 -2 8]);
x5 = filter(num5,den5,r);
plot(k,x5,'o',k,x5,'-')
grid
title('Saída do integrador: x5(k) = v(k)')
xlabel('k')
ylabel('x5(k) = v(k)')

```

A Fig. 3-4 mostra a posição do carro $y(k)$ quando o sistema é submetido a uma entrada em degrau unitário. Dessa figura pode ser visto que, quando uma entrada em degrau unitário é fornecida, o carro se move primeiro na direção oposta àquela da entrada por um pequeno período (aproximadamente 0,4s ou isso) e, em seguida, move-se na direção da entrada. Tal resposta é um comportamento típico de sistemas de fase não-mínima.* O fato de este sistema ser de fase não-mínima pode ser observado a partir da análise seguinte.

Anteriormente, foram obtidos o numerador e o denominador da função de transferência como se segue:

$$\begin{aligned} \frac{\text{num}}{\text{den}} &= \frac{-0,1818z^3 + 0,2180z^2 + 0,2180z - 0,1818}{z^5 - 1,8z^4 + 0,8725z^3} \\ &= \frac{-0,1818z^{-2} + 0,2180z^{-3} + 0,2180z^{-4} - 0,1818z^{-5}}{1 - 1,8z^{-1} + 0,8725z^{-2}} \end{aligned}$$

Como o coeficiente de termo z^{-2} no numerador é negativo, a resposta em degrau unitário começa de 0 até $-0,1818$ em três passos, como se segue

$$y(0) = 0$$

$$y(1) = 0$$

$$y(2) = -0,1818$$

A saída $y(\infty)$ na resposta em degrau unitário se aproxima de um, porque o valor final de $y(\infty)$ pode ser obtido como

$$\begin{aligned} y(\infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{-0,1818z^{-2} + 0,2180z^{-3} + 0,2180z^{-4} - 0,1818z^{-5}}{(1 - 1,8z^{-1} + 0,8725z^{-2})(1 - z^{-1})} \\ &= 1 \end{aligned}$$

*Nonminimum-phase system. (N. do T.)

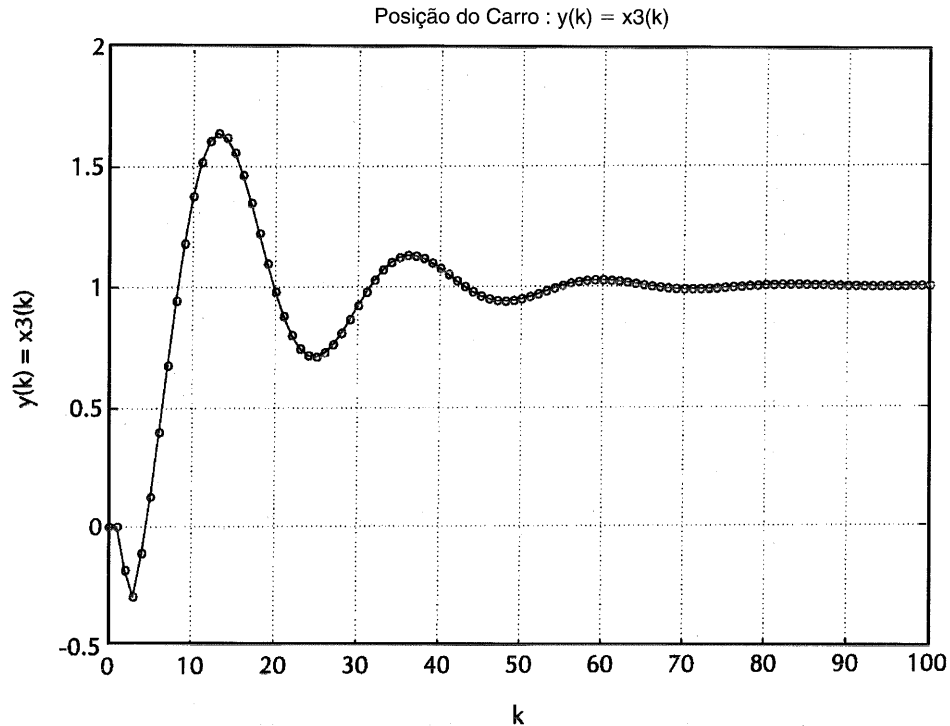


Fig. 3.4

Por conseguinte, apesar de a resposta começar na direção negativa e se manter na região negativa por um curto período, a resposta vem de volta para a região positiva e eventualmente se aproxima da unidade. Esta é uma resposta típica de sistemas de fase não-mínima.

A Fig. 3-5 mostra o deslocamento angular do pêndulo $x1(k)$ versus k . A Fig. 3-6 retrata a velocidade angular do pêndulo $x2(k)$ versus k . A Fig. 3-7 mostra a velocidade do carro $x4(k)$ versus k . A saída do integrador $v(k)$ versus k é mostrada na Fig. 3-8.

A partir das Figs. 3-4 até 3-8, vê-se que as variáveis de estado quase atingem o regime estacionário para $k > 70$. Como o período de amostragem T é 0,1s, o regime estacionário é atingido em aproximadamente sete segundos.

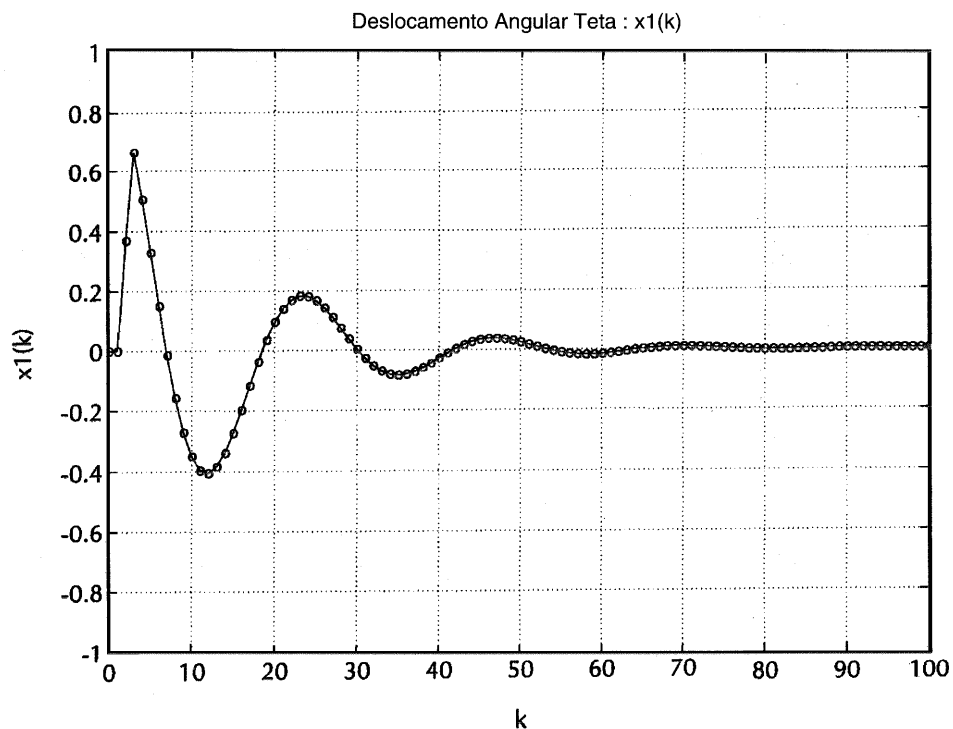


Fig. 3.5

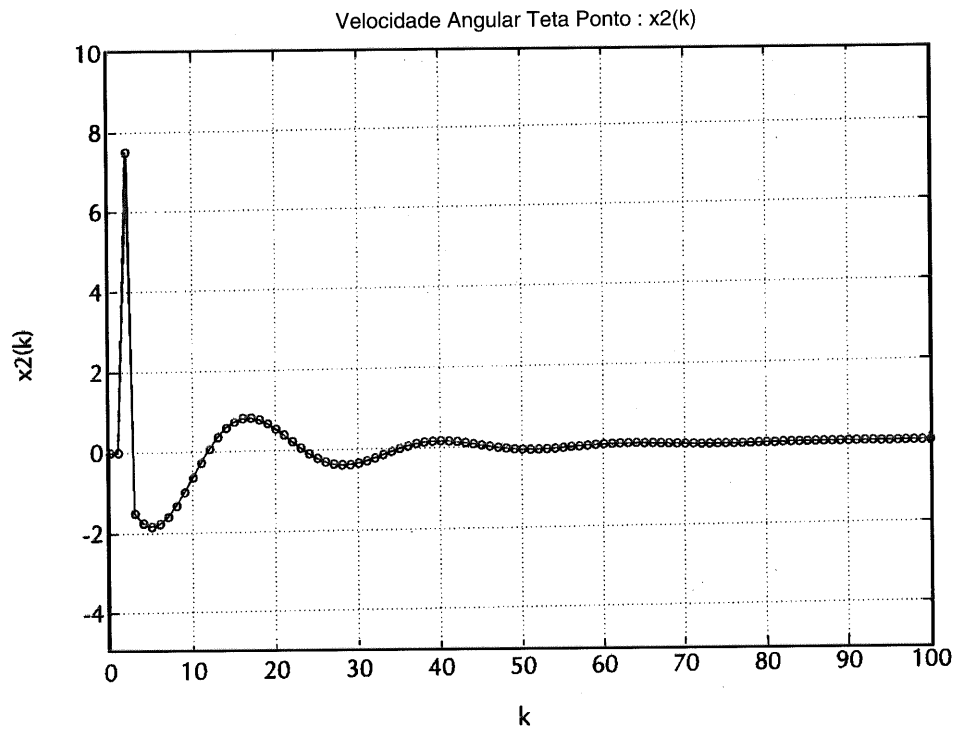


Fig. 3.6

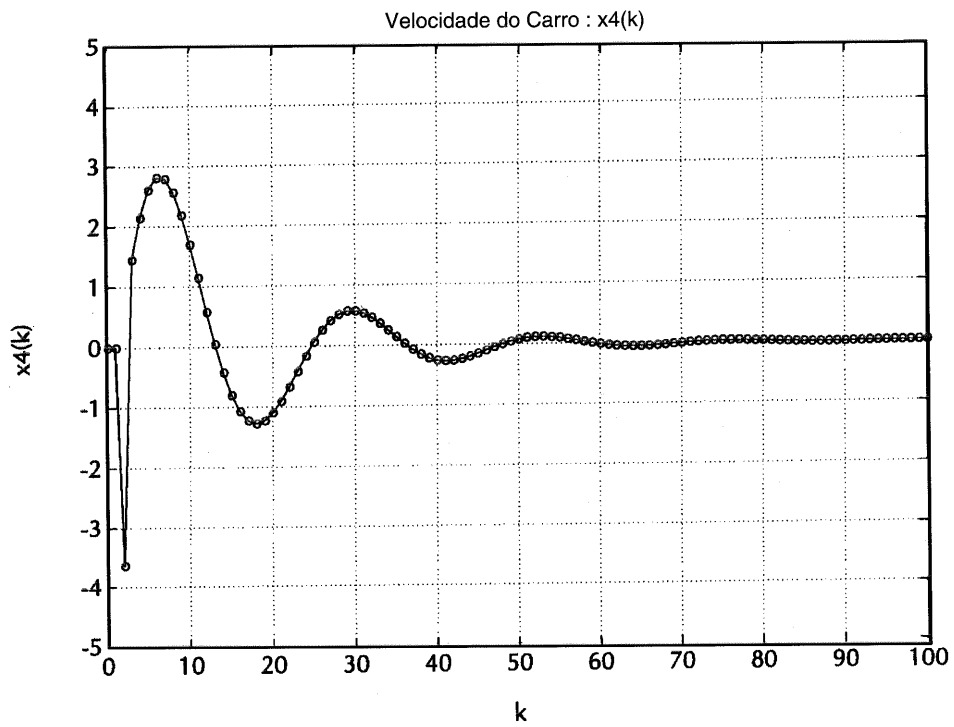


Fig. 3.7

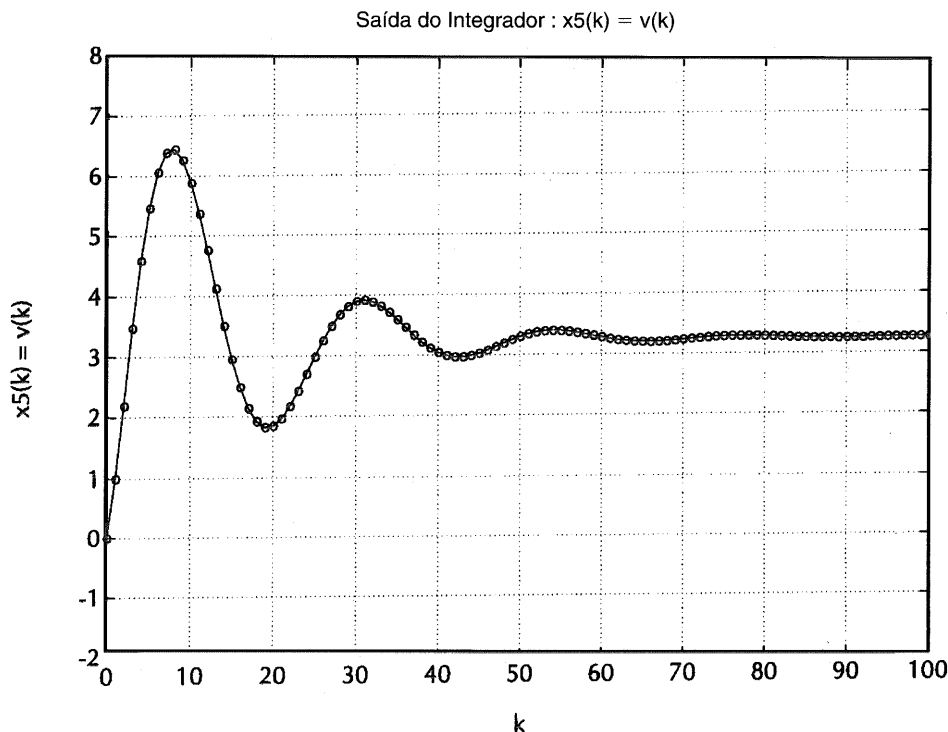


Fig. 3.8

3-4 PROJETO DE OBSERVADORES DE ESTADO

Nesta seção, discute-se, em primeiro lugar, o observador de estado de ordem total e, em seguida, o observador de estado de ordem mínima.

Observador de ordem total

A ordem do observador de estado que será discutido aqui possui o mesmo valor que a do sistema. Como afirmado anteriormente, um tal observador é chamado de observador de estado de ordem total ou, simplesmente, observador de ordem total.

Na análise que se segue, considera-se que o estado atual $\mathbf{x}(k)$ não possa ser medido diretamente. Se o estado $\mathbf{x}(k)$ deve ser estimado, é desejável que o estado observado ou estimado $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ seja tão próximo do estado efetivo quanto possível. Apesar de não ser necessário, é conveniente que o observador de estado possua as mesmas matrizes \mathbf{G} e \mathbf{H} do sistema original.

É importante notar que, na presente análise, o estado $\mathbf{x}(k)$ não está disponível para mensuração direta e, conseqüentemente, o estado observado $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ não pode ser comparado com o estado efetivo $\mathbf{x}(k)$. Como a saída $\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$ pode ser medida, no entanto, é possível comparar $\tilde{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(k)$ com $\mathbf{y}(k)$. O desempenho do modelo dinâmico pode ser melhorado se a diferença entre a saída medida $\mathbf{y}(k)$ e a saída estimada $\mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(k)$ for usada para monitorar o estado $\tilde{\mathbf{x}}(k)$.

Considere-se o sistema de controle com retroação de estado mostrado na Fig. 3-9. As equações do sistema são

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \quad (3-23)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \quad (3-24)$$

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$$

onde $\mathbf{x}(k)$ = vetor de estado (vetor- n)
 $\mathbf{u}(k)$ = vetor de controle (vetor- r)
 $\mathbf{y}(k)$ = vetor de saída (vetor- m)

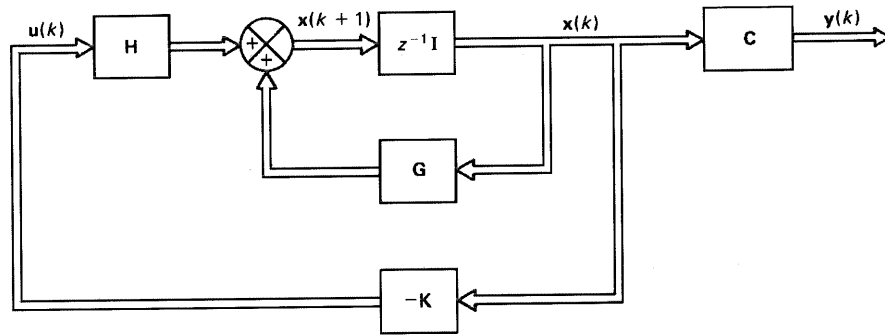


Fig. 3.9

\mathbf{G} = matriz não singular $n \times n$

\mathbf{H} = matriz $n \times r$

\mathbf{C} = matriz $m \times n$

\mathbf{K} = matriz de ganho de realimentação de estado (matriz $n \times r$)

Admita-se que o sistema seja completamente observável e, como estabelecido anteriormente, $\mathbf{x}(k)$ não esteja disponível para mensuração direta. A Fig. 3-10 mostra um observador de estado incorporado ao sistema da Fig. 3-9. O estado observado $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ é usado para formar o vetor de controle $\mathbf{u}(k)$, ou

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}(k) \quad (3-25)$$

A partir da Fig. 3-10, tem-se

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{G}\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) + \mathbf{K}_e[\mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k)] \quad (3-26)$$

onde \mathbf{K}_e é a matriz de ganho do observador (uma matriz $n \times m$). Esta última equação pode ser modificada para

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) + \mathbf{K}_e\mathbf{y}(k) \quad (3-27)$$

O observador de estado dado pela Eq. (3-27) é denominado um *observador preditivo*, uma vez que a estimativa $\tilde{\mathbf{x}}(k+1)$ está um período de amostragem adiante da medição $\mathbf{y}(k)$. Os autovalores de $\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$ são comumente chamados de *pólos do observador*.

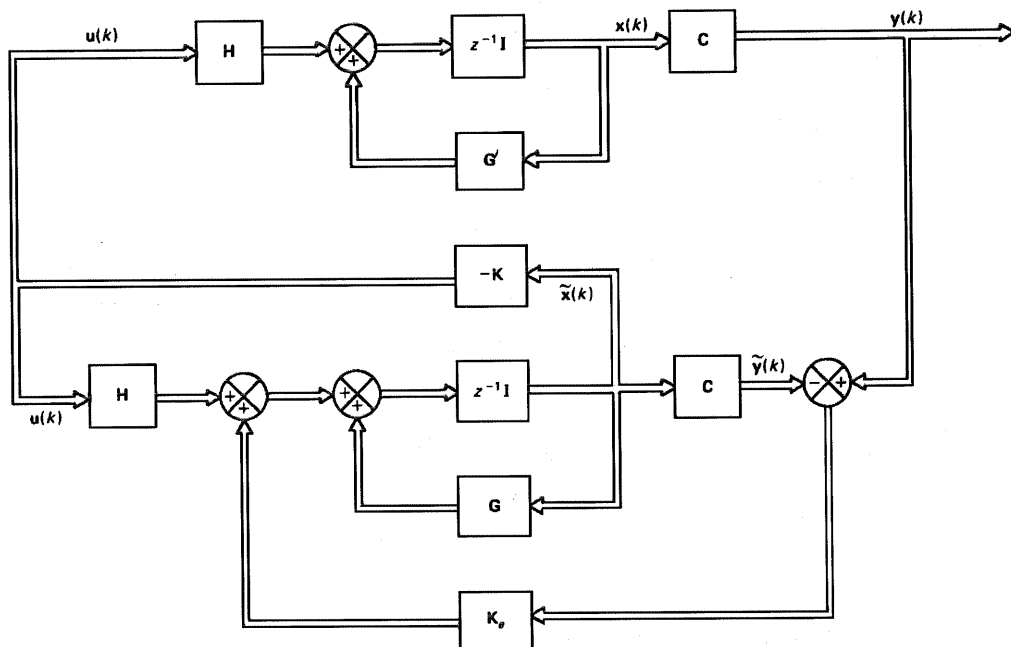


Fig. 3.10

Para obter a equação de erro do observador, subtrai-se a Eq. (3-27) da Eq. (3-23):

$$\mathbf{x}(k+1) - \tilde{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{G} - \mathbf{K}_e \mathbf{C})[\mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{x}}(k)] \quad (3-28)$$

Define-se agora a diferença entre $\mathbf{x}(k)$ e $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ como sendo o erro $\mathbf{e}(k)$:

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{x}}(k)$$

Por conseguinte, a Eq. (3-28) se torna

$$\mathbf{e}(k+1) = (\mathbf{G} - \mathbf{K}_e \mathbf{C})\mathbf{e}(k) \quad (3-29)$$

A partir da Eq. (3-29), vê-se que o comportamento dinâmico do sinal de erro é determinado pelos autovalores de $\mathbf{G} - \mathbf{K}_e \mathbf{C}$. Se a matriz $\mathbf{G} - \mathbf{K}_e \mathbf{C}$ for uma matriz estável, o vetor de erro irá convergir para zero para qualquer erro inicial $\mathbf{e}(0)$. Isto é, $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ irá convergir para $\mathbf{x}(k)$ independentemente dos valores de $\mathbf{x}(0)$ e de $\tilde{\mathbf{x}}(0)$. Se os autovalores de $\mathbf{G} - \mathbf{K}_e \mathbf{C}$ estão localizados de uma forma que o comportamento dinâmico do vetor de erro seja adequadamente rápido, então qualquer erro irá tender a zero com velocidade adequada. Uma forma de se obter uma resposta rápida é usar a resposta deadbeat. Isto pode ser conseguido se os autovalores de $\mathbf{G} - \mathbf{K}_e \mathbf{C}$ forem escolhidos próximos de zero.

Equações para a matriz de ganho do observador \mathbf{K}_e

Usando as mesmas abordagens da Seção 2-4, as equações para a determinação da matriz de ganho do observador podem ser deduzidas. Aqui será mostrado apenas o resultado.

A matriz de ganho do observador \mathbf{K}_e é dada por

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} = (\mathbf{W}\mathbf{N}')^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} \quad (3-30)$$

onde as matrizes \mathbf{N} e \mathbf{W} são definidas por

$$\mathbf{N} = [\mathbf{C}' : \mathbf{G}'\mathbf{C}' : \cdots : (\mathbf{G}')^{n-1}\mathbf{C}'] \quad (3-31)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-32)$$

e

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{W}\mathbf{N}')^{-1} \quad (3-33)$$

Os α_i 's são os coeficientes da equação característica desejada

$$z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} z + \alpha_n = 0$$

e os a_i 's são os coeficientes da equação característica da equação de estado original

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G}| = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

Note-se que, se o sistema já está na forma canônica observável, então a matriz \mathbf{K}_e pode ser determinada facilmente, porque a matriz $\mathbf{W}\mathbf{N}'$ se torna uma matriz identidade e, por conseguinte, $(\mathbf{W}\mathbf{N}')^{-1} = \mathbf{I}$.

Como, para a resposta deadbeat, todos os α_i 's são zero, a equação para \mathbf{K}_e pode ser simplificada como se segue:

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \delta_n \\ \delta_{n-1} \\ \vdots \\ \delta_1 \end{bmatrix} = (\mathbf{W}\mathbf{N}')^{-1} \begin{bmatrix} -a_n \\ -a_{n-1} \\ \vdots \\ -a_1 \end{bmatrix} \quad (\text{para a resposta deadbeat}) \quad (3-34)$$

A fórmula de Ackermann para a matriz de ganho do observador se torna

$$\mathbf{K}_e = \phi(\mathbf{G}) \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CG} \\ \vdots \\ \mathbf{CG}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3-35)$$

onde

$$\phi(\mathbf{G}) = \mathbf{G}^n + \alpha_1 \mathbf{G}^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{G} + \alpha_n \mathbf{I}$$

Para a resposta deadbeat, $\phi(\mathbf{G})$ se torna

$$\phi(\mathbf{G}) = \mathbf{G}^n$$

EXEMPLO 3.4

Considere-se o sistema

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) \\ y(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & -0,16 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [0 \quad 1]$$

O projeto do observador de estado de ordem total será feito admitindo-se que a configuração do sistema seja idêntica àquela mostrada na Fig. 3-10. Os autovalores desejados da matriz do observador são

$$z = 0,5 + j0,5, \quad z = 0,5 - j0,5$$

e, por conseguinte, a equação característica desejada é

$$(z - 0,5 - j0,5)(z - 0,5 + j0,5) = z^2 - z + 0,5 = 0$$

Como a configuração do observador de estado é especificada como mostrado na Fig. 3-10, o projeto do observador de estado se reduz à determinação de uma matriz de ganho de retroação do observador \mathbf{K}_e apropriada. Antes de prosseguir, será examinada a matriz de observabilidade. O posto de

$$[\mathbf{C}' : \mathbf{G}'\mathbf{C}'] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

é 2. Por conseguinte, o sistema é completamente observável e a determinação da matriz de ganho de retroação do observador é possível.

Tomando a Eq. (3-29) como referência,

$$\mathbf{e}(k+1) = (\mathbf{G} - \mathbf{K}_e \mathbf{C})\mathbf{e}(k)$$

onde

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)$$

a equação característica do observador se torna

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{K}_e \mathbf{C}| = 0$$

A matriz de ganho de retroação do observador \mathbf{K}_e será designada como a seguir:

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

A equação característica, então se torna

$$\left| z \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -0,16 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} z & 0,16 + k_1 \\ -1 & z + 1 + k_2 \end{bmatrix} \right| = 0$$

que se reduz a

$$z^2 + (1 + k_2)z + k_1 + 0,16 = 0 \quad (3-36)$$

Como a equação característica desejada é

$$z^2 - z + 0,5 = 0$$

através da comparação da Eq. (3-36) com esta última equação, obtém-se

$$k_1 = 0,34, \quad k_2 = -2$$

ou

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} 0,34 \\ -2 \end{bmatrix}$$

O programa MATLAB 3-6 resolve este problema.

Programa MATLAB 3-6

```
% ----- Projeto do observador de estado -----

% ***** Este programa determina a matriz de ganho do observador de
% estado Ke através do uso da fórmula de Ackermann *****

% ***** Entrar com as matrizes G e C *****

G = [0 -0.16;1 -1];
C = [0 1];

% ***** Entrar com a matriz de observabilidade N e verificar o seu posto *****

N = [C' G'*C'];
rank(N)

ans =

    2

% ***** Como o posto da matriz de observabilidade é 2
% o projeto do observador de estado é possível *****

% ***** Entrar com o polinômio característico desejado definindo
% a matriz seguinte J e entrando com o comando poly() *****

J = [0.5+0.5*i 0
     0 0.5-0.5*i];

Jl = poly(J)

Jl =

    1.0000   -1.0000    0.5000
```

```
% ***** Entrar com o polinômio característico Phi *****

Phi = polyvalm(poly(l),G);

% ***** A matriz de ganho do observador Ke é obtida a partir de *****

Ke = Phi*inv(N')*[0;1]

Ke =

    0.3400
   -2.0000
```

Observador de estado de ordem mínima

Os observadores discutidos até então são projetados para reconstruir todas as variáveis de estado. Na prática, algumas das variáveis de estado podem ser medidas de forma precisa. Tais variáveis de estado não precisam, por conseguinte, ser estimadas. Um observador que estime menos do que n variáveis de estado, onde n é a dimensão do vetor de estado, é um observador de estado de ordem reduzida (ou simplesmente um observador de ordem reduzida). Se a ordem do observador de ordem reduzida for a menor possível, o observador é um observador de estado de ordem mínima (ou um observador de ordem mínima).

Suponha-se que o vetor de estado $\mathbf{x}(k)$ seja um vetor de dimensão n e o vetor de saída $\mathbf{y}(k)$ seja um vetor de dimensão m que pode ser mensurado. Como m variáveis de saída são combinações lineares das variáveis de estado, m variáveis de estado não precisam ser estimadas. É necessário estimar somente $n - m$ variáveis de estado. O observador de ordem reduzida, então, se torna um observador de $(n - m)$ -ésima ordem. Tal observador é o observador de ordem mínima. A Fig. 3-11 mostra o diagrama de blocos de um sistema com um observador de ordem mínima.

É importante notar, entretanto, que, se a medição das variáveis de saída envolver ruídos significativos e for relativamente imprecisa, o uso do observador de ordem total deve resultar num melhor desempenho do sistema.

O observador de ordem mínima pode ser projetado particionando-se primeiro o vetor de estado $\mathbf{x}(k)$ em duas partes, como abaixo:

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a(k) \\ \mathbf{x}_b(k) \end{bmatrix}$$

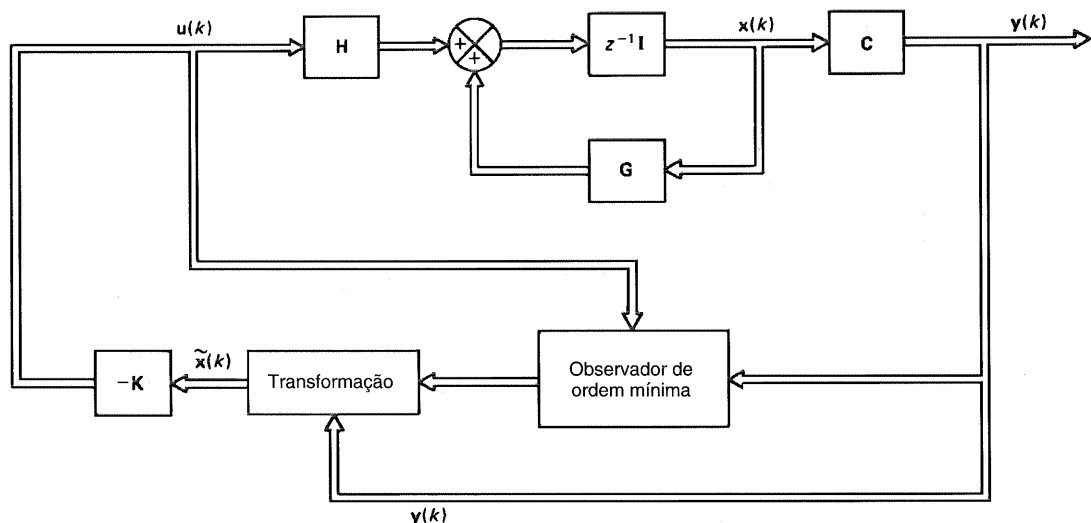


Fig. 3.11

onde $\mathbf{x}_a(k)$ é a parte do vetor de estado que pode ser diretamente mensurada [por conseguinte, $\mathbf{x}_a(k)$ é um vetor de dimensão m] e $\mathbf{x}_b(k)$ é a parte não-mensurável do vetor de estado [por conseguinte, $\mathbf{x}_b(k)$ é um vetor de dimensão $n-m$]. Então, a equação de estado particionada se torna

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_a(k+1) \\ \mathbf{x}_b(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{aa} & \mathbf{G}_{ab} \\ \mathbf{G}_{ba} & \mathbf{G}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a(k) \\ \mathbf{x}_b(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_a \\ \mathbf{H}_b \end{bmatrix} \mathbf{u}(k) \quad (3-37)$$

$$\mathbf{y}(k) = [\mathbf{I} : \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a(k) \\ \mathbf{x}_b(k) \end{bmatrix} \quad (3-38)$$

onde \mathbf{G}_{aa} = matriz $m \times m$
 \mathbf{G}_{ab} = matriz $m \times (n-m)$
 \mathbf{G}_{ba} = matriz $(n-m) \times m$
 \mathbf{G}_{bb} = matriz $(n-m) \times (n-m)$
 \mathbf{H}_a = matriz $m \times r$
 \mathbf{H}_b = matriz $(n-m) \times r$

Reescrevendo-se a Eq. (3-37), a equação para a parte mensurada do estado se torna

$$\mathbf{x}_a(k+1) = \mathbf{G}_{aa} \mathbf{x}_a(k) + \mathbf{G}_{ab} \mathbf{x}_b(k) + \mathbf{H}_a \mathbf{u}(k)$$

ou

$$\mathbf{x}_a(k+1) - \mathbf{G}_{aa} \mathbf{x}_a(k) - \mathbf{H}_a \mathbf{u}(k) = \mathbf{G}_{ab} \mathbf{x}_b(k) \quad (3-39)$$

onde os termos do lado esquerdo da equação podem ser mensurados. A Eq. (3-39) atua como a equação de saída. No projeto do observador de ordem mínima, considera-se o lado esquerdo da Eq. (3-39) como formado por quantidades conhecidas. De fato, a Eq. (3-39) relaciona quantidades mensuráveis e não-mensuráveis do estado.

A partir da Eq. (3-37), a equação da parte não-mensurável do estado se torna

$$\mathbf{x}_b(k+1) = \mathbf{G}_{ba} \mathbf{x}_a(k) + \mathbf{G}_{bb} \mathbf{x}_b(k) + \mathbf{H}_b \mathbf{u}(k) \quad (3-40)$$

A Eq. (3-40) descreve a dinâmica da parte não-mensurada do sistema. Note-se que os termos $\mathbf{G}_{ba} \mathbf{x}_a(k)$ e $\mathbf{H}_b \mathbf{u}(k)$ são quantidades conhecidas.

O projeto do observador de ordem mínima pode ser facilitado se for utilizada a técnica de projeto desenvolvida para o observador de ordem total. Vai-se agora comparar a equação de estado para o observador de ordem total com aquela do observador de ordem mínima. A equação de estado para o observador de ordem total é

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k)$$

e a “equação de estado” para o observador de ordem mínima é

$$\mathbf{x}_b(k+1) = \mathbf{G}_{bb} \mathbf{x}_b(k) + [\mathbf{G}_{ba} \mathbf{x}_a(k) + \mathbf{H}_b \mathbf{u}(k)]$$

A equação de saída para o observador de ordem total é

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$$

e a “equação de saída” para o observador de ordem mínima é

$$\mathbf{x}_a(k+1) - \mathbf{G}_{aa} \mathbf{x}_a(k) - \mathbf{H}_a \mathbf{u}(k) = \mathbf{G}_{ab} \mathbf{x}_b(k)$$

O projeto do observador de ordem mínima pode ser conduzido fazendo-se as substituições dadas na Tabela 3-1 na equação do observador de ordem total fornecido pela Eq. (3-27), a qual é repetida aqui:

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{G} - \mathbf{K}_e \mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) + \mathbf{K}_e \mathbf{y}(k) \quad (3-41)$$

Fazendo-se as substituições da Tabela 3-1, obtém-se

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_b(k+1) &= (\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab})\tilde{\mathbf{x}}_b(k) + \mathbf{G}_{ba} \mathbf{x}_a(k) + \mathbf{H}_b \mathbf{u}(k) \\ &\quad + \mathbf{K}_e [\mathbf{x}_a(k+1) - \mathbf{G}_{aa} \mathbf{x}_a(k) - \mathbf{H}_a \mathbf{u}(k)] \end{aligned} \quad (3-42)$$

Tabela 3-1 LISTA DAS SUBSTITUIÇÕES NECESSÁRIAS PARA ESCREVER A EQUAÇÃO DE UM OBSERVADOR DE ESTADO DE ORDEM MÍNIMA

Observador de ordem total	Observador de ordem mínima
$\tilde{\mathbf{x}}(k)$	$\tilde{\mathbf{x}}_b(k)$
\mathbf{G}	\mathbf{G}_{bb}
$\mathbf{H}\mathbf{u}(k)$	$\mathbf{G}_{ba}\mathbf{x}_a(k) + \mathbf{H}_b\mathbf{u}(k)$
$\mathbf{y}(k)$	$\mathbf{x}_a(k+1) - \mathbf{G}_{aa}\mathbf{x}_a(k) - \mathbf{H}_a\mathbf{u}(k)$
\mathbf{C}	\mathbf{G}_{ab}
\mathbf{K}_e (matriz $n \times m$)	\mathbf{K}_e [matriz $(n-m) \times m$]

onde a matriz de ganho de realimentação do observador \mathbf{K}_e é uma matriz $(n-m) \times m$. A Eq. (3-42) define um observador de ordem mínima.

Usando a Eq. (3-38) como referência, tem-se

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{x}_e(k) \quad (3-43)$$

Substituindo a Eq. (3-43) na Eq. (3-42), obtém-se

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_b(k+1) &= (\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab})\tilde{\mathbf{x}}_b(k) + \mathbf{K}_e \mathbf{y}(k+1) \\ &\quad + (\mathbf{G}_{ba} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{aa})\mathbf{y}(k) + (\mathbf{H}_b - \mathbf{K}_e \mathbf{H}_a)\mathbf{u}(k) \end{aligned} \quad (3-44)$$

Note-se que, para estimar $\tilde{\mathbf{x}}_b(k+1)$, necessita-se do valor medido de $\mathbf{y}(k+1)$. Isto é um inconveniente e, nesse caso, é desejável realizar algumas modificações. [No caso do observador de ordem total, $\tilde{\mathbf{x}}(k+1)$ pode ser estimada pelo uso da medição de $\mathbf{y}(k)$ e não há necessidade da medição de $\mathbf{y}(k+1)$. Ver a Eq. (3-27).] A Eq. (3-44) será reescrita como abaixo:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_b(k+1) - \mathbf{K}_e \mathbf{y}(k+1) &= (\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab})\tilde{\mathbf{x}}_b(k) + (\mathbf{G}_{ba} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{aa})\mathbf{y}(k) \\ &\quad + (\mathbf{H}_b - \mathbf{K}_e \mathbf{H}_a)\mathbf{u}(k) \\ &= (\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab})[\tilde{\mathbf{x}}_b(k) - \mathbf{K}_e \mathbf{y}(k)] \\ &\quad + (\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab})\mathbf{K}_e \mathbf{y}(k) \\ &\quad + (\mathbf{G}_{ba} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{aa})\mathbf{y}(k) + (\mathbf{H}_b - \mathbf{K}_e \mathbf{H}_a)\mathbf{u}(k) \\ &= (\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab})[\tilde{\mathbf{x}}_b(k) - \mathbf{K}_e \mathbf{y}(k)] \\ &\quad + [(\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab})\mathbf{K}_e \\ &\quad + \mathbf{G}_{ba} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{aa}]\mathbf{y}(k) + (\mathbf{H}_b - \mathbf{K}_e \mathbf{H}_a)\mathbf{u}(k) \end{aligned} \quad (3-45)$$

Definindo

$$\mathbf{x}_b(k) - \mathbf{K}_e \mathbf{y}(k) = \mathbf{x}_b(k) - \mathbf{K}_e \mathbf{x}_a(k) = \boldsymbol{\eta}(k) \quad (3-46)$$

e

$$\tilde{\mathbf{x}}_b(k) - \mathbf{K}_e \mathbf{y}(k) = \tilde{\mathbf{x}}_b(k) - \mathbf{K}_e \mathbf{x}_a(k) = \tilde{\boldsymbol{\eta}}(k) \quad (3-47)$$

Então, a Eq. (3-45) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\eta}}(k+1) &= (\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab})\tilde{\boldsymbol{\eta}}(k) + [(\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab})\mathbf{K}_e + \mathbf{G}_{ba} \\ &\quad - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{aa}]\mathbf{y}(k) + (\mathbf{H}_b - \mathbf{K}_e \mathbf{H}_a)\mathbf{u}(k) \end{aligned} \quad (3-48)$$

As Eqs. (3-47) e (3-48) definem a dinâmica do observador de ordem mínima. Note-se que, para obter $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(k+1)$, não há necessidade do valor mensurado de $\mathbf{y}(k+1)$.

Em seguida, será obtida a equação de erro do observador. Defina-se

$$\mathbf{e}(k) = \boldsymbol{\eta}(k) - \tilde{\boldsymbol{\eta}}(k) = \mathbf{x}_b(k) - \tilde{\mathbf{x}}_b(k) \quad (3-49)$$

Subtraindo a Eq. (3-42) da Eq. (3-40), obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_b(k+1) - \tilde{\mathbf{x}}_b(k+1) &= \mathbf{G}_{bb}[\mathbf{x}_b(k) - \tilde{\mathbf{x}}_b(k)] + \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab} \tilde{\mathbf{x}}_b(k) \\ &\quad - \mathbf{K}_e [\mathbf{x}_a(k+1) - \mathbf{G}_{aa} \mathbf{x}_a(k) - \mathbf{H}_a \mathbf{u}(k)] \end{aligned}$$

Substituindo a Eq. (3-39) nesta última equação, obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_b(k+1) - \tilde{\mathbf{x}}_b(k+1) &= \mathbf{G}_{bb}[\mathbf{x}_b(k) - \tilde{\mathbf{x}}_b(k)] + \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab} \tilde{\mathbf{x}}_b(k) - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab} \mathbf{x}_b(k) \\ &= (\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab})[\mathbf{x}_b(k) - \tilde{\mathbf{x}}_b(k)] \end{aligned}$$

Usando a Eq. (3-49) como referência, esta última equação pode ser escrita sob a forma

$$\mathbf{e}(k+1) = (\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab})\mathbf{e}(k) \quad (3-50)$$

Esta é a equação de erro do observador. Note-se que $\mathbf{e}(k)$ é um vetor $(n-m)$. A dinâmica do erro pode ser determinada como desejado pela seguinte técnica desenvolvida para o observador de ordem total, desde que o posto da matriz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{ab} \\ \mathbf{G}_{ab} \mathbf{G}_{bb} \\ \vdots \\ \mathbf{G}_{ab} \mathbf{G}_{bb}^{n-m-1} \end{bmatrix}$$

seja $n-m$. (Esta é a condição de observabilidade completa aplicada ao observador de ordem mínima.)

A equação característica para o observador de ordem mínima é obtida a partir da Eq. (3-50) como a seguir:

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G}_{bb} + \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab}| = 0 \quad (3-51)$$

A matriz de ganho de retroação do observador \mathbf{K}_e pode ser determinada a partir da Eq. (3-51) escolhendo-se primeiro as localizações dos pólos em malha fechada para o observador de ordem mínima [isto é, colocando-se as raízes da equação característica, Eq. (3-51), nas localizações desejadas] e em seguida usando o procedimento desenvolvido para o observador preditivo de ordem total.

Se, por exemplo, a saída $y(k)$ é um escalar, $x_a(k)$ é um escalar, \mathbf{G}_{ab} é uma matriz $1 \times (n-1)$ e \mathbf{G}_{bb} é uma matriz $(n-1) \times (n-1)$. Para este caso, a fórmula de Ackermann, como fornecida pela Eq. (3-35), pode ser modificada para

$$\mathbf{K}_e = \phi(\mathbf{G}_{bb}) \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{ab} \\ \mathbf{G}_{ab} \mathbf{G}_{bb} \\ \vdots \\ \mathbf{G}_{ab} \mathbf{G}_{bb}^{n-3} \\ \mathbf{G}_{ab} \mathbf{G}_{bb}^{n-2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3-52)$$

onde

$$\phi(\mathbf{G}_{bb}) = \mathbf{G}_{bb}^{n-1} + \alpha_1 \mathbf{G}_{bb}^{n-2} + \dots + \alpha_{n-2} \mathbf{G}_{bb} + \alpha_{n-1} \mathbf{I} \quad (3-53)$$

EXEMPLO 3.5

Seja considerado o sistema

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \\ y(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

onde $\mathbf{x}(k)$ = vetor de estado (dimensão 3)

$u(k)$ = sinal de controle (escalar)

$y(k)$ = sinal de saída (escalar)

e

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0,25 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0]$$

Admitindo-se que a saída $y(k)$ seja mensurável, projetar um observador de ordem mínima tal que a resposta para o erro inicial do observador seja deadbeat.

Para este sistema

$$\mathbf{G}_{aa} = 0, \quad \mathbf{G}_{ab} = [0 \quad -0,25], \quad \mathbf{G}_{ba} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_{bb} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_a = [1], \quad \mathbf{H}_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A matriz de observabilidade de ordem reduzida \mathbf{N} é

$$\mathbf{N} = [\mathbf{G}'_{ab} \vdots \mathbf{G}'_{bb} \mathbf{G}_{ab}] = \begin{bmatrix} 0 & -0,25 \\ -0,25 & -0,125 \end{bmatrix}$$

O posto da matriz \mathbf{N} é 2. Por conseguinte, o observador de ordem mínima pode ser projetado.

A equação característica desejada para a resposta deadbeat é

$$\phi(\mathbf{G}_{bb}) = \mathbf{G}_{bb}^2$$

A matriz de ganho \mathbf{K}_e para o observador de ordem mínima é obtida como

$$\mathbf{K}_e = \phi(\mathbf{G}_{bb}) \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{ab} \\ \mathbf{G}_{ab} \mathbf{G}_{bb} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (\mathbf{G}_{bb}^2)(\mathbf{N}')^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

O Programa MATLAB 3-7 projeta o observador de ordem mínima discutido neste exemplo.

Programa MATLAB 3-7

```
% ----- Projeto de um observador de ordem mínima -----

% ***** É projetado um observador de ordem mínima através
% do uso da fórmula de Ackermann *****

% ***** Entrar com as matrizes Gaa, Gab, Gba, Gbb, Ha e Hb *****

Gaa = [0]; Gab = [0 -0.25]; Gba = [1;0];
Gbb = [0 0;1 0.5]; Ha = [1]; Hb = [0;1];

% ***** Entrar com a matriz de observabilidade de ordem reduzida N
% e verificar o seu posto da mesma *****

N = [Gab' Gbb'*Gab'];
rank(N)

ans =

2

% ***** Como o posto de N é 2, o observador de ordem
% mínima (segunda ordem) pode ser projetado *****
```

```
% ***** A equação característica desejada para a
% resposta deadbeat é Phi = Gbb^2 *****

Phi = Gbb^2;

% ***** A matriz de ganho do observador de ordem mínima pode
% ser determinada a partir de *****

Ke = Phi*inv(N')*[0;1]

Ke =

    0
   -2
```

EXEMPLO 3.6

Considere-se o sistema

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$$

onde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0,16 & 2,16 \\ -0,16 & -1,16 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 1]$$

A saída $y(k)$ pode ser medida. Determinar a matriz de ganho de realimentação de estado \mathbf{K} tal que os pólos em malha fechada do sistema estejam localizados em

$$z_1 = 0,6 + j0,4, \quad z_2 = 0,6 - j0,4$$

Em seguida, projetar um observador de ordem mínima para o sistema. [Como $y(k)$ é uma combinação linear de $x_1(k)$ e de $x_2(k)$, é preciso observar somente uma variável de estado.] Para a dinâmica do erro, é desejado que a resposta para um erro inicial seja do tipo deadbeat.

Primeiro serão examinadas as condições de controlabilidade e observabilidade do sistema. O posto de cada uma das matrizes

$$[\mathbf{H} : \mathbf{GH}] = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{C}' : \mathbf{G}'\mathbf{C}'] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

é 2. Conseqüentemente, a colocação arbitrária de pólos e o projeto do observador são possíveis.

Para aplicar o método para projetar o observador de ordem mínima apresentado nesta seção é necessário transformar a matriz \mathbf{C} de $[1 \ 1]$ para $[1 \ 0]$. Para tanto, defina-se

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{P}\boldsymbol{\xi}(k) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\xi}(k)$$

A equação do sistema se torna

$$\boldsymbol{\xi}(k+1) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{P}\boldsymbol{\xi}(k) + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{H}u(k) = \hat{\mathbf{G}}\boldsymbol{\xi}(k) + \hat{\mathbf{H}}u(k)$$

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{P}\boldsymbol{\xi}(k) = \hat{\mathbf{C}}\boldsymbol{\xi}(k)$$

onde

$$\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,16 & 2,16 \\ -0,16 & -1,16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,16 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{P} = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad 0]$$

Por conseguinte, as equações do sistema nas novas variáveis de estado são

$$\begin{bmatrix} \xi_1(k+1) \\ \xi_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,16 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (3-54)$$

$$y(k) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \end{bmatrix} \quad (3-55)$$

onde $\xi_1(k)$ é a variável de estado mensurável e $\xi_2(k)$ é a variável de estado não-mensurável que precisa ser estimada. Note-se que as Eqs. (3-54) e (3-55) estão nas formas das Eqs. (3-37) e (3-38), respectivamente.

No projeto que se segue, serão usadas a equação de estado e a equação de saída dadas pelas Eqs. (3-54) e (3-55). O controle de retroação de estado é dado por

$$u(k) = -\mathbf{K}\xi(k)$$

Será projetada agora a matriz de ganho de retroação de estado \mathbf{K} . Como a equação característica para o sistema da Eq. (3-54) é

$$|z\mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}}| = \begin{vmatrix} z & -1 \\ 0,16 & z+1 \end{vmatrix} = z^2 + z + 0,16 = z^2 + a_1 z + a_2 = 0$$

tem-se

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 0,16$$

A equação característica desejada para o sistema é

$$\begin{aligned} |z\mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}} + \hat{\mathbf{H}}\mathbf{K}| &= (z - 0,6 - j0,4)(z - 0,6 + j0,4) = z^2 - 1,2z + 0,52 \\ &= z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2 = 0 \end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$\alpha_1 = -1,2, \quad \alpha_2 = 0,52$$

Como o sistema definido pelas Eqs. (3-54) e (3-55) está sob a forma canônica controlável, a matriz requerida \mathbf{K} pode ser dada pela Eq. (3-6):

$$\mathbf{K} = [\alpha_2 - a_2 \quad \alpha_1 - a_1] = [0,52 - 0,16 \quad -1,2 - 1] = [0,36 \quad -2,2]$$

Em seguida, será projetado o observador de estado de ordem mínima. Como o observador de ordem mínima é de primeira ordem, sabe-se que o polinômio característico deadbeat desejado é

$$\phi(z) = z$$

A partir das equações do sistema dado pelas Eqs. (3-54) e (3-55), tem-se

$$G_{aa} = 0, \quad G_{ab} = 1, \quad G_{ba} = -0,16, \quad G_{bb} = -1, \quad H_a = 0, \quad H_b = 1$$

Usando a fórmula de Ackermann dada pela Eq. (3-52) como referência, obtém-se

$$K_e = \phi(G_{bb})[G_{ab}]^{-1}[1] = (-1)(1)^{-1}(1) = -1$$

Então, tomando as Eqs. (3-49) e (3-50) por referência, a equação do observador se torna

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_2(k) &= \xi_2(k) - e(k) \\ e(k+1) &= (G_{bb} - K_e G_{ab})e(k) = (-1 + 1)e(k) = 0e(k) \end{aligned}$$

Por conseguinte, o erro cai a zero em, no máximo, um período de amostragem.

Em seguida, será obtida a equação para o observador de ordem mínima. Em termos de $\tilde{\eta}(k)$, tem-se, a partir da Eq. (3-48),

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(k+1) &= (G_{bb} - K_e G_{ab})\tilde{\eta}(k) + [(G_{bb} - K_e G_{ab})K_e + G_{ba} - K_e G_{aa}]y(k) \\ &\quad + (H_b - K_e H_a)u(k) \\ &= (-1 + 1 \times 1)\tilde{\eta}(k) + [(-1 + 1 \times 1)(-1) - 0,16 + 1 \times 0]y(k) \\ &\quad + (1 + 1 \times 0)u(k) \\ &= -0,16y(k) + u(k) \end{aligned}$$

Por conseguinte, a equação do observador de ordem mínima é

$$\tilde{\eta}(k) = -0,16y(k-1) + u(k-1)$$

O controle de retroação de estado observado $u(k)$ é dado por

$$\begin{aligned} u(k) &= -K\tilde{\xi}(k) = -[0,36 \quad -2,2] \begin{bmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \end{bmatrix} \\ &= -0,36\xi_1(k) + 2,2\xi_2(k) \\ &= -0,36y(k) + 2,2\tilde{\xi}_2(k) \end{aligned}$$

O Programa MATLAB 3-8 calcula a matriz de ganho de retroação de estado K e a matriz de ganho K_e para o observador de ordem mínima para o sistema considerado no presente problema-exemplo. (No presente exemplo, K_e é um escalar.)

Programa MATLAB 3-8

```
% ----- Projeto de um sistema de controle -----

% ***** Neste programa, determina-se a matriz de ganho de retroação
% de estado K e a matriz de ganho do observador de ordem
% mínima Ke *****

% ***** Começa-se com a determinação da matriz de ganho
% de retroação de estado K *****

% ***** Entrar com as matrizes G, H e C *****

G = [0.16  2.16;-0.16 -1.16];
H = [-1;1];
C = [1  1];

% ***** Entrar com a matriz de controlabilidade M e a matriz
% de observabilidade N *****

M = [H  G*H]; N = [C'  G'*C'];

% ***** Verificar os postos de M e N *****

rank(M)

ans =

    2

rank(N)

ans =

    2

% ***** Por conseguinte, a alocação arbitrária de pólos e
% o projeto do observador são possíveis *****

% ***** Para se aplicar o método de projeto para o
% observador de ordem mínima apresentado anteriormente,
% deve-se transformar a matriz C de [1 1] para [1 0] *****
```

```

% ***** Isto pode ser realizado definindo-se a matriz de
% transformação de estado P, onde *****

P = [1  -1;0  1];

% ***** Usando-se a matriz de transformação P, a matriz de estado G,
% a matriz de controle H e a matriz de saída C são modificadas
% para GG, HH e CC, respectivamente, onde *****

GG = inv(P)*G*P, HH = inv(P)*H, CC = C*P

GG =

      0      1.0000
 -0.1600  -1.0000

HH =

      0
      1

CC =

      1      0

% ***** Para determinar a matriz de ganho de retroação de estado K,
% entrar com o polinômio característico desejado definido a
% matriz seguinte J e calculando poly(J) *****

J = [0.6+0.4*i    0
      0    0.6-0.4*i];

poly(J)

ans =

      1.0000    -1.2000    0.5200

% ***** Entrar com o polinômio característico Phi *****

Phi = polyvalm(poly(J),GG);

% ***** Para o sistema transformado, a matriz de controlabilidade
% M é modificada para MM, onde *****

MM = [HH  GG*HH];

% ***** A matriz de ganho de retroação de estado pode ser
% determinada pela equação seguinte *****

K = [0  1]*inv(MM)*Phi

K =

      0.3600    -2.2000

```

```
% ***** Projeta-se, em seguida, um observador de ordem mínima
% que, neste caso, é um observador de primeira ordem *****

% ***** Fazendo referência a GG e HH, obtidas anteriormente,
% entrar com GGaa, GGab, GGba, GGbb, HHa e HHb *****

GGaa = 0; GGab = 1; GGba = -0.16; GGbb = -1; HHa = 0; HHb = 1;

% ***** Como a resposta deadbeat é desejada, o polinômio
% característico desejado se torna Ph = GGbb *****

Ph = GGbb;

% ***** A matriz de ganho do observador de ordem mínima Ke
% é dada por *****

Ke = Ph*inv(GGab)*[1]

Ke =

    -1
```

EXEMPLO 3.7

Seja considerado o sistema

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) \\ y(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -0,2 & -0,5 & 1,1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0]$$

Admita-se que a configuração do sistema seja a mesma que aquela mostrada na Fig. 3-11. Isto é, o sistema usa retroação de estado e observador de ordem mínima. Por conseguinte, o sinal de controle é dado por

$$u(k) = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}(k)$$

Determinar a matriz de ganho de realimentação de estado \mathbf{K} tal que o sistema venha a exibir uma resposta deadbeat para qualquer estado inicial. Admitindo-se que somente a saída $y(k)$ seja mensurável, projetar um observador de ordem mínima tal que a resposta para o erro do observador seja deadbeat.

Este problema será resolvido com o MATLAB. O Programa MATLAB 3-9 calcula a matriz de ganho de retroação de estado \mathbf{K} e a matriz de ganho \mathbf{K}_e para o observador de ordem mínima do sistema.

A matriz de ganho de retroação de estado \mathbf{K} obtida através do Programa MATLAB 3-9 é

$$\mathbf{K} = [-0,2 \quad -0,5 \quad 1,1]$$

Programa MATLAB 3-9

```
% ----- Projeto de um sistema de controle -----

% ***** Neste programa, determina-se a matriz de ganho de
% retroação de estado K e a matriz de ganho do observador
% de ordem mínima Ke *****
```

```

% ***** Determinar-se, primeiramente, a matriz de ganho de retroação
% de estado K *****

% ***** Entrar com as matrizes G, H e C *****

G = [0 0 1; 1 0 0; -0.2 -0.5 1.1];
H = [0; 0; 1];
C = [1 0 0];

% ***** Entrar com a matriz de controlabilidade M *****

M = [H G*H G^2*H];

% ***** Verificar o posto da matriz M *****

rank(M)

ans =

    3

% ***** Como o posto da matriz de controlabilidade M é 3,
% a alocação arbitrária de pólos é possível *****

% ***** Para determinar a matriz de ganho de retroação de estado K,
% entrar com o polinômio característico Phi, que é
% G^3 neste caso *****

Phi = G^3;

% ***** A matriz de ganho de retroação de estado K é dada por *****

K = [0 0 1]*inv(M)*Phi

K =

   -0.2000   -0.5000    1.1000

% ***** Em seguida, projeta-se um observador de ordem mínima,
% que, neste caso, é de segunda ordem *****

% ***** Entrar com Gaa, Gab, Gba, Gbb, Ha e Hb *****

Gaa = [G(1,1)];
Gab = [G(1,2) G(1,3)];
Gba = [G(2,1); G(3,1)];
Gbb = [G(2,2) G(2,3); G(3,2) G(3,3)];
Ha = [H(1,1)];
Hb = [H(2,1); H(3,1)];

% ***** Para ser possível o projeto de um observador de ordem mínima,
% o posto da matriz de observabilidade N = [C' G'*C' (G')^2*C']
% precisa ser 3, ou o posto da matriz de observabilidade de
% ordem reduzida NN = [Gab' Gbb'*Gab'] precisa ser 2 *****

% ***** Verificando o posto de NN = [Gab' Gbb'*Gab'] *****

```

```

NN = [Gab' Gbb'*Gab'];
rank(NN)

ans =

    2

% ***** Como o posto da matriz de observabilidade de
% ordem reduzida NN é 2, o projeto de um observador de ordem
% mínima é possível *****

% ***** Como a resposta deadbeat é desejada para o observador de
% ordem mínima, o polinômio característico vem a ser
% Ph = Gbb^2 *****

Ph = Gbb^2;

% ***** A matriz de ganho do observador de ordem mínima Ke é dada
% por *****

Ke = Ph*inv(NN')*[0;1]

Ke =

    0
    1.1000

```

A matriz de ganho do observador \mathbf{K}_e para o observador de ordem mínima é

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 1,1 \end{bmatrix}$$

Será verificado que a resposta do sistema projetado seja do tipo deadbeat para todas as condições iniciais. As equações para o sistema de controle com retroação de estado, com um observador de ordem mínima, são dadas por

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$$

$$u(k) = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}(k)$$

O vetor de estado $\mathbf{x}(k)$ e o vetor de estado estimado $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ podem ser escritos como

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \mathbf{x}_b(k) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{x}}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \tilde{x}_2(k) \\ \tilde{x}_3(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \tilde{\mathbf{x}}_b(k) \end{bmatrix}$$

onde

$$\mathbf{x}_b(k) = \begin{bmatrix} x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{x}}_b(k) = \begin{bmatrix} \tilde{x}_2(k) \\ \tilde{x}_3(k) \end{bmatrix}$$

Tem-se, então

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) - \mathbf{H}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}(k) \\ &= (\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K})\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{K}[\mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{x}}(k)] \end{aligned} \quad (3-56)$$

Note-se que

$$\mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{x}}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_b(k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \tilde{x}_b(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_b(k) - \tilde{x}_b(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{e}(k) \end{bmatrix}$$

onde

$$\mathbf{e}(k) = x_b(k) - \tilde{x}_b(k) = \begin{bmatrix} e_1(k) \\ e_2(k) \end{bmatrix} \quad (3-57)$$

Definindo-se

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Então

$$\mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{F}\mathbf{e}(k)$$

Por conseguinte, a Eq. (3-56) pode ser escrita como

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K})\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{K}\mathbf{F}\mathbf{e}(k) \quad (3-58)$$

A equação de erro do observador é dada pela Eq. (3-50), reescrita como

$$\mathbf{e}(k+1) = (\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab})\mathbf{e}(k) \quad (3-59)$$

onde $\mathbf{e}(k)$ é dado pela Eq. (3-57).

Combinando as Eqs. (3-58) e (3-59), a equação para o sistema de controle com realimentação de estado e observador de ordem mínima é dada por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{e}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K} & \mathbf{H}\mathbf{K}\mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{e}(k) \end{bmatrix} = \mathbf{G}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{e}(k) \end{bmatrix} \quad (3-60)$$

onde

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K} & \mathbf{H}\mathbf{K}\mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab} \end{bmatrix}$$

Note-se, a partir da Eq. (3-60), que se tem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{e}(k) \end{bmatrix} = \mathbf{G}_1^k \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{e}(0) \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Se o sistema projetado é realmente um sistema de resposta deadbeat, então, para qualquer condição inicial, o tempo de assentamento é no máximo cinco períodos de amostragem. Isto é, no máximo dois períodos de amostragem são necessários para que o vetor de erro se torne zero e, adicionalmente, no máximo três períodos de amostragem são necessários para que o vetor de estado se torne zero. O Programa MATLAB 3-10

Programa MATLAB 3-10

% ----- Cálculo de \mathbf{G}_1^k , onde $k = 1, 2, 3, 4, 5$ -----

% ***** As matrizes \mathbf{G} , \mathbf{H} , \mathbf{K} , \mathbf{G}_{ab} , \mathbf{G}_{bb} e \mathbf{K}_e são definidas
% no Programa MATLAB 3-9 *****

$\mathbf{F} = [0 \ 0; 1 \ 0; 0 \ 1];$

$\mathbf{G}_1 = [\mathbf{G} - \mathbf{H} * \mathbf{K} \quad \mathbf{H} * \mathbf{K} * \mathbf{F}; \text{zeros}(2,3) \quad \mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e * \mathbf{G}_{ab}]$

G1 =

0	0	1.0000	0	0
1.0000	0	0	0	0
0	0	0	-0.5000	1.1000
0	0	0	0	0
0	0	0	-0.5000	0

G1^2

ans =

0	0	0	-0.5000	1.1000
0	0	1.0000	0	0
0	0	0	-0.5500	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

G1^3

ans =

0	0	0	-0.5500	0
0	0	0	-0.5000	1.1000
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

G1^4

ans =

0	0	0	0	0
0	0	0	-0.5500	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

G1^5

ans =

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

mostra G_1 , G_1^2 , G_1^3 , G_1^4 e G_1^5 . Claramente, G_1^5 é uma matriz zero, 5×5 . Por conseguinte, para qualquer condição inicial,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{e}(0) \end{bmatrix}$$

a resposta

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{e}(k) \end{bmatrix}$$

se torna um vetor zero em, no máximo, cinco períodos de amostragem. A resposta é, por conseguinte, deadbeat, como especificado no enunciado do problema. O sistema projetado é satisfatório.