5 Análise de sistemas no domínio da frequência

O termo *resposta na frequência* utiliza-se para designar a resposta de um sistema, em regime estacioário, a uma onda sinusoidal. Esta resposta, para o caso de um sistema linear, é também uma sinusóide, com a mesma frequência, mas com uma amplitude e um desfasamento que dependem da frequência da onda.

Neste capítulo estudaremos três tipos de traçados, de Bode, de Nyquist e de Nichols, e introduzir-se-á um critério para determinação de estabilidade no domínio da frequência.

5.1 Resposta em regime estacionário a uma onda sinusoidal

Seja $G(s)$ a função de transferência de um sistema, cuja entrada é $r(t) = R\sin(wt)$. Como $R(s) = \dfrac{w}{s^2 + w^2}$, a transformada de Laplace da saída é:

$$G(s) = \frac{G(jw)}{2j(s - jw)} - \frac{G(-jw)}{2j(s + jw)} + \text{termos da forma } \frac{k_i}{s - p_i} \tag{5.1}$$

Se aplicarmos a transformada de Laplace inversa, temos:

$$c(t) = \frac{G(jw)}{2j} e^{jwt} - \frac{G(-jw)}{2j} e^{-jwt} + \text{ termos da forma } k_i e^{-p_i t} \tag{5.2}$$

Se o sistema fôr estável, em regime estacionário os termos $k_i e^{-p_i t}$ tenderão para 0, isto é:

$$\begin{aligned} c_{ss}(t) &= \lim_{t \to \infty} c(t) = \frac{G(jw)}{2j} e^{jwt} - \frac{G(-jw)}{2j} e^{-jwt} = \\ &= \frac{\left|G(jw)\right|}{2j} e^{j\left(wt + \langle G(jw)\right)} - \frac{\left|G(jw)\right|}{2j} e^{-j\left(wt + \langle G(jw)\right)} = \quad , \\ &= \left|G(jw)\right| \sin\left(wt + \langle G(jw)\right) \end{aligned} \tag{5.3}$$

dado que:

$$G(jw) = \left|G(jw)\right| e^{j\left(\langle G(jw)\right)} \tag{5.4}$$

Vemos assim que, em regime estacionário, um sistema SLIT responde a uma onda sinusoidal com uma onda sinusoidal, com uma ganho $\left|G(jw)\right|$ e um desfasamento de $\langle G(jw)$. Se variarmos a frequência da onda de entrada, podemos verificar como o *ganho* e a o desfasamento (mais vulgarmente a *fase*) variam com a frequência, isto é, determinamos a resposta na frequência do sistema. Existem 3 tipos de traçados gráficos que são normalmente utilizados, e vamos começar com o diagrama de Bode.

5.2 Traçado logarítmico – Diagramas de Bode

Os diagramas de Bode, também conhecidos como traçados de canto ou logarítmicos, consistem em dois gráficos, o 1º representando o logaritmo do módulo e o 2º a fase, ambos em função do logaritmo da frequência.

Antes de apresentar este traçado, vamos introduzir alguns conceitos:

O logaritmo de um número complexo é também um número complexo, cuja parte real é o logaritmo do módulo, e a parte imaginária é proporcional ao argumento do número:

$$\text{Neperiano - } \ln\left(G(jw)\right) = \ln\left(\left|G(jw)\right| e^{j\langle G(jw)}\right) = \ln\left(\left|G(jw)\right|\right) + j\langle G(jw) \quad (5.5)$$

$$\text{Decimal - } \log\left(G(jw)\right) = \log\left(\left|G(jw)\right| e^{j\langle G(jw)}\right) = \log\left(\left|G(jw)\right|\right) + j0,434\langle G(jw) \quad (5.6)$$

O módulo, em *decibeis* (dB), é dado por $20\log\left|G(jw)\right| = Lm\left(G(jw)\right)$. Esta notação apresenta algumas vantagens, dado que os valores em dbs de dois números inversos diferen apenas no sinal, quando um número duplica o seu valor, em dbs sobe 6 dBs, e quando um número decuplica o seu valor sobe 20 dBs.

A banda de frequência entre f_1 e f_2 é denominada de *oitava* se $f_2 / f_1 = 2$, e é denominada de *década* se $f_2 / f_1 = 10$. O número de oitavas entre f_1 e f_2 genéricas é dada por:

$$\frac{f_2}{f_1} = 2^n \Leftrightarrow n = \frac{\log\left(f_2 / f_1\right)}{\log(2)} \quad (5.7)$$

O número de décadas entre f_1 e f_2 genéricas é dada por:

$$\frac{f_2}{f_1}=10^n \Leftrightarrow n=\log\left(f_2/f_1\right) \tag{5.8}$$

Tendo em mente estes conceitos, podemos agora apresentar o traçado de Bode. Vamos considerar que partimos duma função de transferência na seguinte forma (caso não esteja devemos converte-la para esta forma):

$$G(jw)=\frac{k\left(1+jwT_a\right)\left(1+jwT_b\right)^r\cdots}{\left(jw\right)^m\left(1+jwT_1\right)\left(1+jwT_b\right)^s\left[1+\frac{2\xi}{w_n}jw+\left(\frac{jw}{w_n}\right)^2\right]\cdots} \tag{5.9}$$

O módulo, em dBs de (5.9), é:

$$\begin{aligned} &Lm\left(G(jw)\right)=Lm(k)+Lm\left(1+jwT_a\right)+rLm\left(1+jwT_b\right)+\cdots \\ &-mLm\left(jw\right)-Lm\left(1+jwT_1\right)-sLm\left(1+jwT_b\right)-Lm\left[1+\frac{2\xi}{w_n}jw+\left(\frac{jw}{w_n}\right)^2\right]-\cdots \end{aligned}, \tag{5.10}$$

e a fase é:

$$\begin{aligned} &\angle\left(G(jw)\right)=\angle(k)+\angle\left(1+jwT_a\right)+r\angle\left(1+jwT_b\right)+\cdots \\ &-m\angle\left(jw\right)-\angle\left(1+jwT_1\right)-s\angle\left(1+jwT_b\right)-\angle\left[1+\frac{2\xi}{w_n}jw+\left(\frac{jw}{w_n}\right)^2\right]-\cdots \end{aligned}. \tag{5.11}$$

Esta última equação pode escrever-se como:

$$\begin{aligned} &\angle\left(G(jw)\right)=\angle(k)+\operatorname{atan}\left(wT_a\right)+r\operatorname{atan}\left(wT_b\right)+\cdots \\ &-m\pi-\operatorname{atan}\left(1+jwT_1\right)-s\operatorname{atan}\left(1+jwT_b\right)-\operatorname{atan}\left[1+\frac{2\xi}{w_n}jw+\left(\frac{jw}{w_n}\right)^2\right]-\cdots \end{aligned} \tag{5.12}$$

O traçado dos diagramas de Bode obtém-se através das equações (5.10) e (5.12). Como ambas as equações são uma soma de termos, vamos primeiramente abordar o traçado de cada um desses termos.

5.2.1 Diagramas de Bode para diferentes tipos de factores

Analisndo as equações (5.10) e (5.12), podemos ver que existem 4 tipos de factores:

$$k \tag{5.13}$$

$$\left(jw\right)^{\pm m} \tag{5.14}$$

$$\left(\frac{1}{1+jwT}\right)^{\pm r} \tag{5.15}$$

$$\left[1+\frac{2\xi}{w_n}jw+\left(\frac{jw}{w_n}\right)^2\right] \tag{5.16}$$

Vamos esboçar os traçados de Bode para cada tipo de factor, dado que o traçado completo é a soma, frequência a frequência, da contribuição indvidual de cada termo.

5.2.1.1 Ganho

Um valor de *k* maior que a unidade possui um valor em dB positivo, enquanto que se for menor o valor é negativo. Em termos de fase, ela será também constante, e igual a 0 ou a π, consoante *k* seja positivo ou negativo. A seguinte figura mostra o diagrama de Bode, para $k=10$.

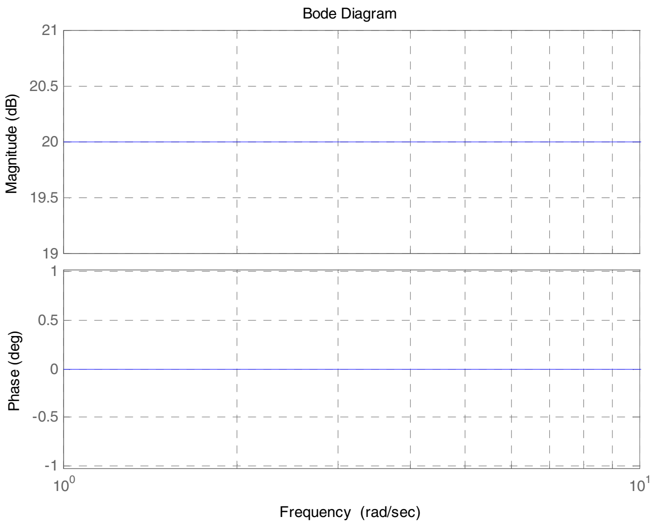


Figura 5.1 – Traçado de Bode para $k=10$

5.2.1.2 Factores integradores e derivativos

O módulo de $\frac{1}{jw}$, em dB, é dada por:

$$Lm\left(\frac{1}{jw}\right)=-20\log(w) \tag{5.17}$$

Numa escala semi-logarítmica, trata-se de uma recta com um declive de -20 dB/década. Do mesmo modo, um factor derivativo, jw, tem um módulo dado por (5.18), e trata-se de uma recta com um declive de 20 dB/década.

$$Lm(jw) = 20\log(w) \tag{5.18}$$

Caso a multiplicidade do pólo ou zero em *s* seja *m*, as rectas têm umm declive de 20*m* dB/década.

Em termos de fase, para um termo do tipo $(jw)^{\pm m}$, ela é dada por:

$$\left\langle\left((jw)^{\pm m}\right) = \pm m\pi \tag{5.19}$$

A figura seguinte ilustra o diagrama de Bode para $\dfrac{1}{jw}$.

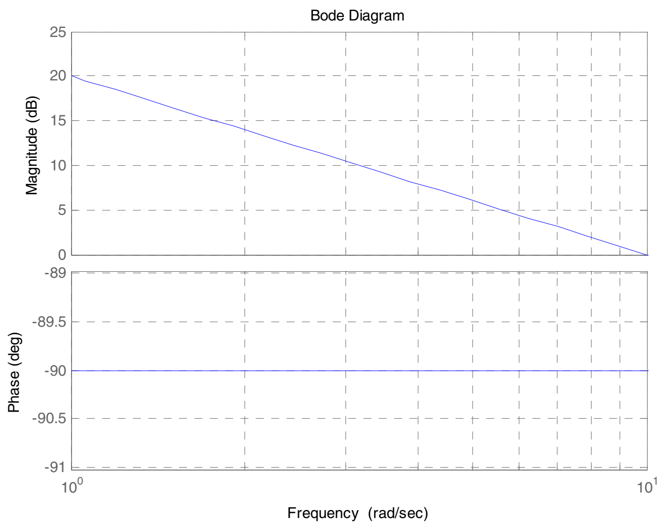


Figura 5.2 – Diagrama de Bode de $\dfrac{1}{jw}$

5.2.1.3 Factores de 1ª ordem

Vamos começar por $\dfrac{1}{1+jwT}$. O módulo, em dB, é dado por:

$$Lm\left(\frac{1}{1+jwT}\right) = -20\log\left(\sqrt{1+w^2T^2}\right) \tag{5.20}$$

Para $w \ll 1/T$, (5.20) pode ser aproximada por $-20\log(1)=0$ dB. Para $w \gg 1/T$, (5.20) pode ser aproximada por $-20\log(wT)$, que representa uma recta com um declive de -20 dB/década. Estas aproximações assintóticas, ou assíntotas, cruzam-se para $w_c = \frac{1}{T}$, frequência que se designa por frequência de canto. O erro entre a curva real e a aproximação assintótica é maximo para w_c, e vale $-20\log(\sqrt{2}) = -10\log(2) \approx -3dB$.

No que respeita `fase, é dada por:

$$\angle\left(\frac{1}{1+jwT}\right) = -\operatorname{atan}\left(jw\right) \tag{5.21}$$

Para a frequência de canto, a fase é de $-\pi/4$, e varia, à medida que *w* varia de 0 a ∞, de 0 a $-\pi/2$. A aproximção que se faz é considerar que a fase pode ser considerada como uma função linear por partes, dada por:

$$\angle\left(\frac{1}{1+jwT}\right) = \begin{cases} 0, & w < w_c \\ \frac{-\pi}{4}, & w = w_c \\ \frac{-\pi}{2}, & w > w_c \end{cases} \tag{5.22}$$

O traçado de zeros não oferece problemas de maior dado que:

$$Lm\left(1+jwT\right) = -Lm\left(\frac{1}{1+jwT}\right), \text{ e} \tag{5.23}$$

$$\angle\left(1+jwT\right) = -\angle\left(\frac{1}{1+jwT}\right). \tag{5.24}$$

Se considerarmos pólos ou zeros múltiplos, as equações anteriores transformam-se em:

$$Lm\left(1+jwT\right)^{\pm r} = \pm r Lm\left(1+jwT\right), \text{ e} \tag{5.25}$$

$$\angle\left(1+jwT\right)^{\pm r} = \pm r \angle\left(1+jwT\right). \tag{5.26}$$

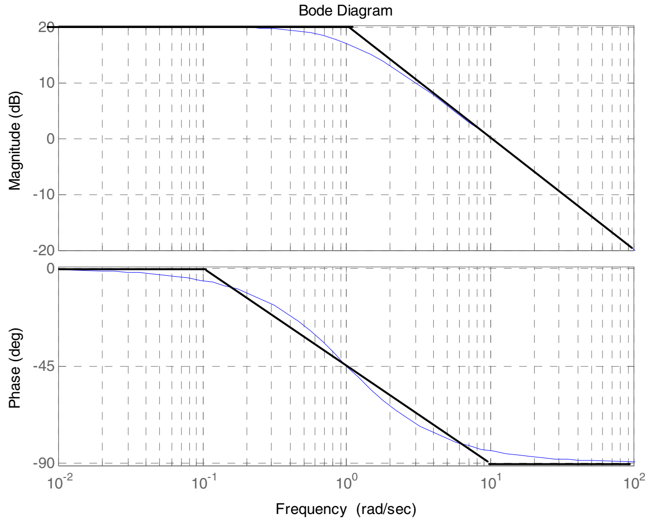


Figura 5.3 – Diagramas de Bode real e asintótico de $\dfrac{1}{1+jw}$

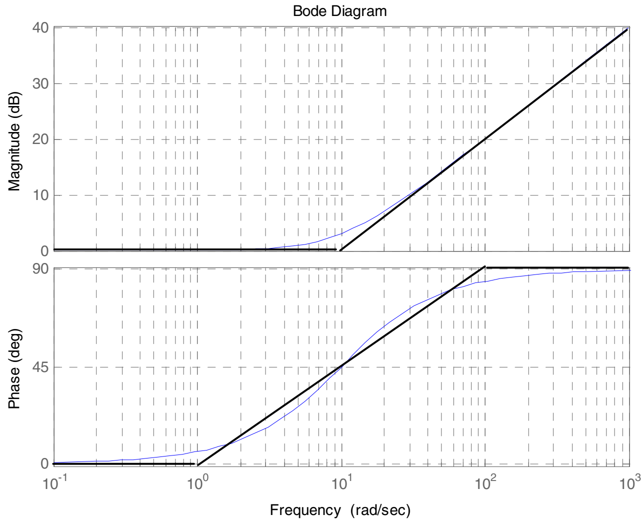


Figura 5.3 – Diagramas de Bode real e asintótico de $\left(1+\dfrac{jw}{10}\right)$

5.2.1.4 Factores quadráticos

Quando os pólos ou zeros são complexos conjugados, aparecem factores quadráticos, do tipo:

$$\frac{1}{\left[1+\frac{2\xi}{w_n}jw+\left(\frac{jw}{w_n}\right)^2\right]}, \tag{5.27}$$

para o caso de pólos. Estamos aqui a considerar que $\xi < 1$ pois, caso contrário, os pólos seriam reais e estariamos no caso anterior. O módulo, em dB, é dado por:

$$Lm\left(\frac{1}{\left[1+\frac{2\xi}{w_n}jw+\left(\frac{jw}{w_n}\right)^2\right]}\right) = -20\log\left(\sqrt{\left(\pi 1+\frac{2\xi}{w_n}jw+\left(\frac{jw}{w_n}\right)^2\right)^2}\right) = \tag{5.28}$$

$$= -20\log\left(\sqrt{\left(1-\left(\frac{w}{w_n}\right)^2\right)^2+\left(\frac{2\xi}{w_n}w\right)^2}\right)$$

e a sua fase como:

$$\angle\left(\frac{1}{\left[1+\frac{2\xi}{w_n}jw+\left(\frac{jw}{w_n}\right)^2\right]}\right) = -\operatorname{atan}\left(\frac{\frac{2\xi}{w_n}w}{1-\left(\frac{w}{w_n}\right)^2}\right) \tag{5.29}$$

Do mesmo modo que fizémos para factores de 1ª ordem, podemos ver que, para o módulo, quando $w \ll w_n$, (5.29) pode ser aproximada por $-20\log(1) = 0$ dB. Para $w \gg w_n$, (5.29) pode ser aproximada por $-40\log(\frac{w}{w_n})$, que representa uma recta com um declive de -40 dB/década. As 2 assíntotas cruzam-se em $w = w_n$, que é a frequência de canto. Já vimos que quando $\xi < 1$, a resposta a um degrau apresenta um pico. Do mesmo modo, quando $\xi < 1/\sqrt{2} = 0.707$ existe um pico na reposta em frequência. A frequência para a qual esse pico ocorre chama-se *frequência de ressonância*, e é dada por:

$$w_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-2\xi^2}}, \tag{5.30}$$

que depende apenas de ξ, e o valor do pico é dado por:

$$M_r = w_n\sqrt{1-2\xi^2} \qquad (5.31)$$

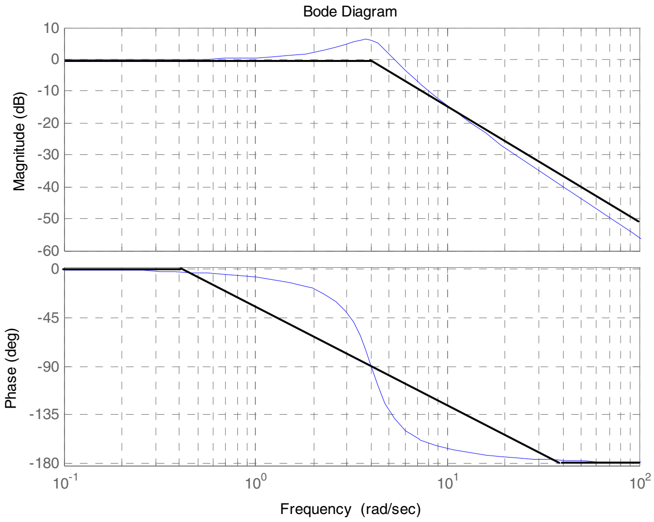


Figura 5.4 – Diagramas de Bode real e asintótico de $\dfrac{1}{\left[1+\dfrac{2\xi}{w_n}jw+\left(\dfrac{jw}{w_n}\right)^2\right]}$, com $\xi = 0.25$ e $w_n = 4$

Para o caso de pólos e zeros múltiplos, utilizam-se as equações:

$$Lm\left[1+\frac{2\xi}{w_n}jw+\left(\frac{jw}{w_n}\right)^2\right]^{\pm r} = \pm r Lm\left[1+\frac{2\xi}{w_n}jw+\left(\frac{jw}{w_n}\right)^2\right], \text{ e} \qquad (5.32)$$

$$\left\langle\left[1+\frac{2\xi}{w_n}jw+\left(\frac{jw}{w_n}\right)^2\right]^{\pm r} = \pm r\left[1+\frac{2\xi}{w_n}jw+\left(\frac{jw}{w_n}\right)^2\right]. \qquad (5.33)$$

5.2.2 Diagramas de Bode de uma função de transferência genérica

Para uma função de tranferência genérica somam-se as contribuições, ponto a ponto, dos vários factores. Utilzando os exemplos dados nas sub-secções anteriores, vamos considerar a função de transferência para a frente:

$$G(s) = \frac{20\left(1+\frac{jw}{10}\right)}{(jw)(1+jw)\left[1+\frac{1}{8}jw+\left(\frac{j}{4}\right)^2\right]} \tag{5.34}$$

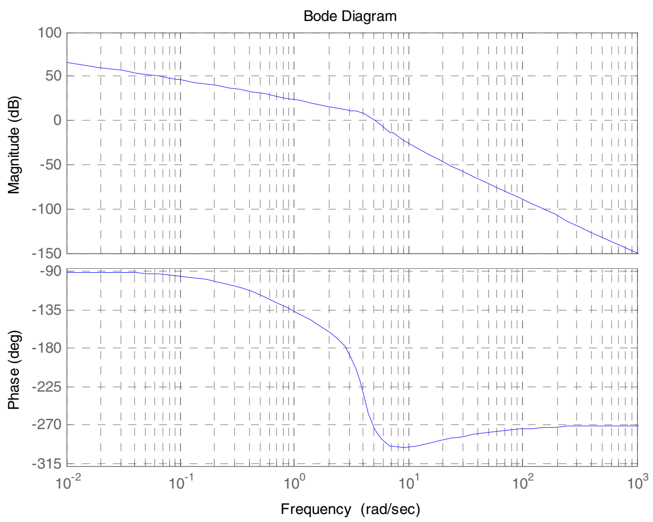
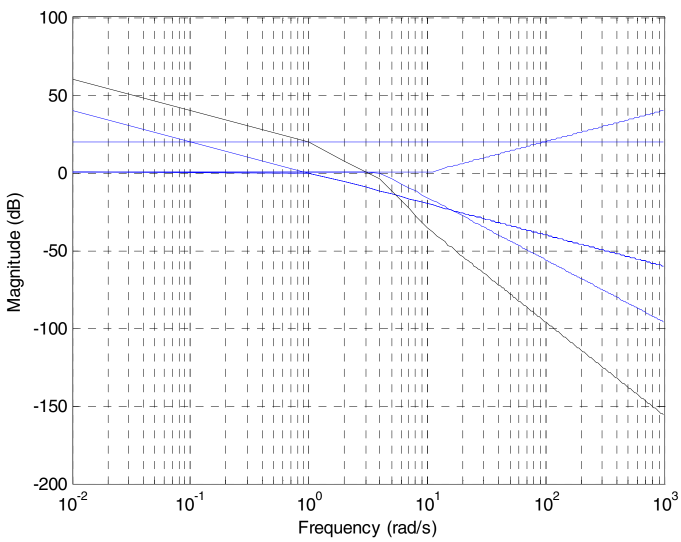


Figura 5.5 – Diagramas de Bode real de $G(s) = \frac{20\left(1+\frac{jw}{10}\right)}{(jw)(1+jw)\left[1+\frac{1}{8}jw+\left(\frac{j}{4}\right)^2\right]}$

Na fig. 5.5 apresentam-se os diagramas reais de Bode. Nas figura seguinte os assintóticos, onde, a preto, se apresentam os diagramas globais e a azul os individuais.



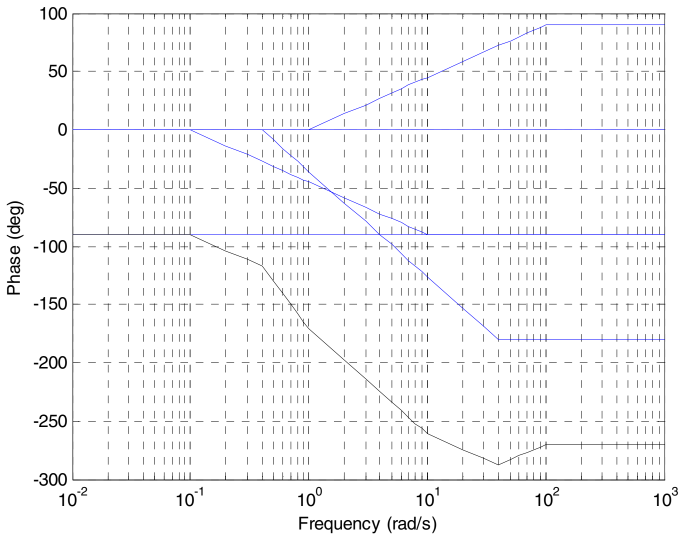


Figura 5.6 – Diagramas de Bode assintóticos de $G(s)=\dfrac{20\left(1+\dfrac{jw}{10}\right)}{(jw)(1+jw)\left[1+\dfrac{1}{8}jw+\left(\dfrac{j}{4}\right)^2\right]}$

5.2.3 Sistemas com fase mínima

As funções de transferência que não possuem singularidades (pólos e zeros) do lado direito do plano s são chamados de *sistemas de fase mínima*. Para esses sistemas o diagrama de fases pode-se obter directamente do digrama de amplitudes, e o diagrama de amplitudes pode-se obter do de fases, desde que se conheça a magnitude para uma frequência. Para os sistemas com fase mínima, o ângulo de fase para $w=\infty$ é obtido de $-90(n-m)$, sendo n o número de pólos e m o número de zeros. Para esses sistemas, a partir de um dos diagramas assintóticos é possível determinar a função de transferência do sistema através da análise do declive das rectas (no caso de se usar o diagrama de fase tem que se conheçer a magnitude para uma frequência, para se determinar o ganho). No caso de o sistema ser de fase não-mínima, a função de transferência pode também ser determinada, mas é necessário os dois diagramas simultaneamente.

5.3 Traçado polar - Diagramas de Nyquist

O *traçado polar*, ou *diagrama de Nyquist*, de uma função de transferência é o lugar geométrico descrito, em coordenadas polares, pelos pontos cujo módulo é $|G(jw)|$ e cuja fase é $\langle G(jw)$, quando w varia de 0 a ∞. Enquanto no traçado Bode existiam 2 gráficos (de módulo e de fase), toda a informação é condensada aqui num só gráfico. O gráfico polar de $G(jw)$ é chamado de traçado directo, enquanto que o gráfico de $[G(jw)]^{-1}$ é chamado de *traçado inverso*.

A obtenção de um diagrama de Nyquist detalhado pressupõe a utilização de um pacote CADSC, como Matlab. No entanto, ele pode ser esboçado através de técnicas que descreveremos de seguida.

Vamos considerar que utilzaremos funções de transferência descritas como:

$$G(s) = \frac{k\prod_{i=1}^{n_z}(s+z_i)}{s^m\prod_{j=1}^{n_p}\left(s+p_j\right)} \tag{5.35}$$

com ganho DC *k*, n_z zeros, n_p pólos fora da origem, e *m* pólos na origem. Sabemos que o módulo de (5.35) é dado por:

$$|G(jw)| = \frac{|k|\prod_{z=1}^{n_z}\sqrt{1+w^2T_z^2}}{w^m\prod_{p=1}^{n_p}\sqrt{1+w^2T_p^2}}, \tag{5.36}$$

e a sua fase por:

$$\langle G(jw) = \langle k + \sum_{z=1}^{n_z}\tan^{-1}\left(wT_z\right) - \frac{m\pi}{2} - \sum_{p=1}^{n_p}\tan^{-1}\left(wT_p\right) \tag{5.37}$$

Conforme iremos ver no capítulo seguinte, por vezes necessitamos de calcular o diagrama de Nyquist para frequências negativas. Tal não constitui problema, dado sabermos que:

$$G(jw) = \overline{G(jw)} \tag{5.38}$$

5.3.1 Diagramas de Nyquist para diferentes factores

Do mesmo modo que fizémos para o digrama de Bode, vamos determinar o diagrama de Nyquist para cada tipo de factores que aparecem nas funções de transferência.

5.3.1.1 Integradores e derivativos

O traçado polar para um factor integrador - $G(jw)=\dfrac{1}{jw}$ - coincide com o semi-eixo imaginário negativo, dado que:

$$G(jw)=\frac{1}{jw}=\frac{1}{w}e^{-j\frac{\pi}{2}} \tag{5.39}$$

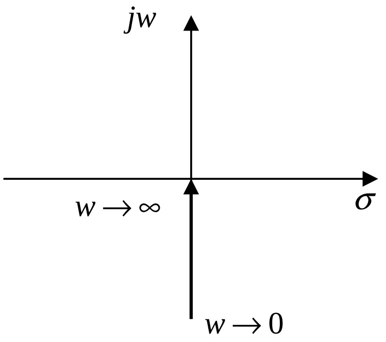


Figura 5.7 – Traçado polar de um factor integrador

Do mesmo modo, o traçado polar para um factor derivativo - $G(jw)=jw$ - coincide com o semi-eixo imaginário positivo, dado que:

$$G(jw)=jw=we^{j\frac{\pi}{2}} \tag{5.40}$$

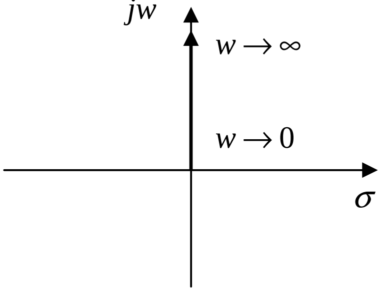


Figura 5.8 – Traçado polar de um factor derivativo

5.3.1.2 Factores de primeira ordem

Consideremos primeiramente pólos - $G(jw)=\dfrac{k}{1+jwT}$. Sabemos que pode ser expresso, na forma polar, por:

$$G(jw)=\frac{k}{\sqrt{1+w^2T^2}}e^{-j\tan(wT)} \tag{5.41}$$

Podemos representar esta função numa forma tabelar:

w	**0**	**1/T**	**w**	∞
$\lvert G(jw)\rvert$	k	$\dfrac{k}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{k}{\sqrt{1+w^2T^2}}$	0
$\langle G(jw)$	0	$-\dfrac{\pi}{4}$	$-\tan^{-1}(wT)$	$-\dfrac{\pi}{2}$

Este traçado corresponde a um semi-círculo. As partes reais e imaginárias de (5.41) são:

$$x=\frac{k}{1+w^2T^2};\quad y=-\frac{kTk}{1+w^2T^2} \tag{5.42}$$

e satisfazem a equação:

$$\left(x-\frac{k}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{k}{2}\right)^2 \tag{5.43}$$

Obviamente, esta é uma equação de uma circunferência centrada em $\left(\dfrac{k}{2},0\right)$ e com raio $\dfrac{k}{2}$. O diagrama polar está esboçado na figura seguinte.

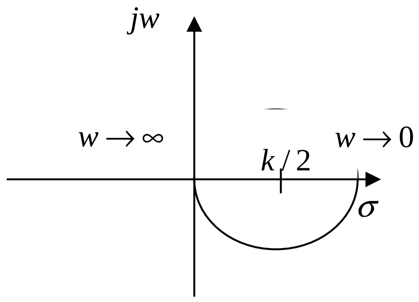


Figura 5.9 – Traçado polar de um factor de 1ª ordem (pólo)

Para um zero $-1+jwT$, é fácil de ver que o traçado é uma semi-recta paralela ao semi-eixo imaginário positivo, centrada em 1.

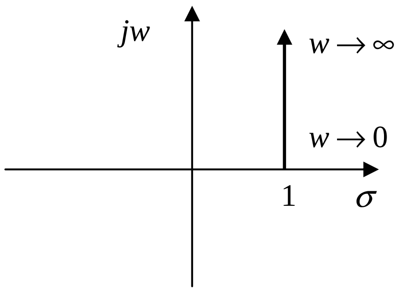


Figura 5.10 – Traçado polar de um factor de 1ª ordem (zero)

5.3.1.3 Factores quadráticos

Consideremos primeiro pólos - $G(jw)=\dfrac{1}{1+2\xi\left(j\dfrac{w}{w_n}\right)+\left(\dfrac{jw}{w_n}\right)^2}$. Construindo uma tabela conforme se fêz anteriormente, temos:

w	**0**	w_n	**w**	∞
$\lvert G(jw)\rvert$	1	$\dfrac{1}{2\xi}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\left(1-\dfrac{w^2}{w_n^2}\right)^2+\left(\dfrac{2\xi w}{w_n}\right)^2}}$	0
$\langle G(jw)$	0	$-\dfrac{\pi}{2}$	$-\tan^{-1}\left(\dfrac{\dfrac{2\xi w}{w_n}}{1-\dfrac{w^2}{w_n^2}}\right)$	$-\pi$

A forma exacta do traçado irá depender da razão de amortecimento. Independentemente disso, o traçado começa em $1\langle 0^{\circ}$ e termina em $\infty\langle -\pi$. Para sistemas com $0<\xi<0.7$, o ponto do traçado mais distanciado da origem corresponde à frequência de ressonância $w_r=w_n\sqrt{1-2\xi^2}$.

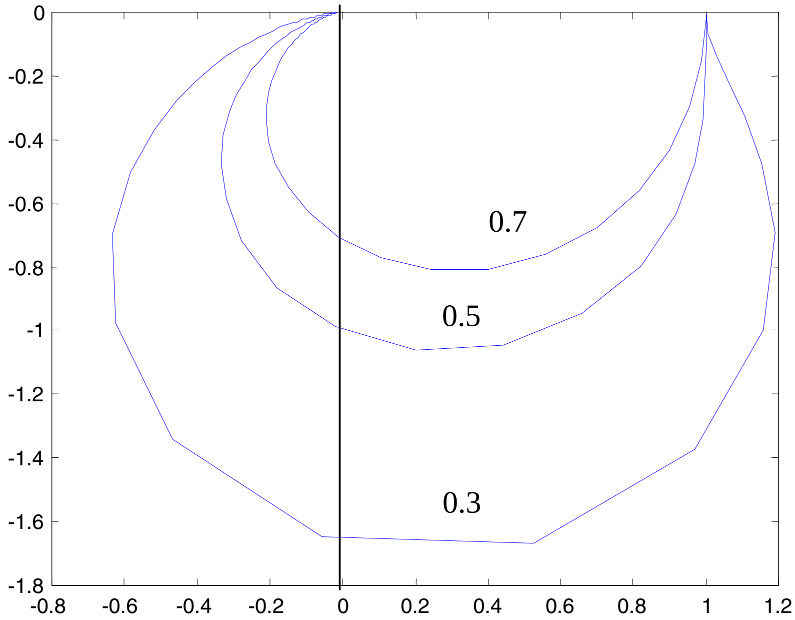


Figura 5.11 – Traçado polar de um termo quadrático (pólos)

Para os termos quadráticos correspondentes a zeros, o traçado começa em $1\langle 0^\circ$ e termina em $\infty\langle\pi$.

5.3.1.4 Factor de atraso

Para os termos $G(jw) = e^{-jwT}$, dado que:

$$G(jw) = e^{-jwT} = \cos(wT) - j\sin(wT) \qquad (5.44)$$

o traçado é uma circunferência centrada na origem e de raio unitário.

5.3.2 Diagramas de Nyquist para funções de transferência genéricas

O comportamento do traçado, quando $w \to 0$, depende apenas do número de singularidades na origem. Atendendo à nossa função de transferência genérica

$$G(s)=\frac{k\prod_{z=1}^{n_z}\left(1+sT_z\right)}{s^m\prod_{p=1}^{n_p}\left(1+sT_p\right)} \tag{5.45}$$

então:

$$\lim_{w\to 0}G(jw)=\lim_{w\to 0}\frac{k\prod_{z=1}^{n_z}\left(1+jwT_z\right)}{(jw)^m\prod_{p=1}^{n_p}\left(1+jwT_p\right)}=\lim_{w\to 0}\frac{k}{(jw)^m} \tag{5.46}$$

Assim, o diagrama provém do infinito quando m>0, com um ângulo de $-m\frac{\pi}{2}$. Quando m=0, provém do eixo real positivo, do ponto k. Quando m<0, provém da origem.

O comportamento do traçado, quando $w\to\infty$, depende da diferença entre os graus das polinomiais do denominador e do numerador. Para a função ser físicamente realizável, temos $w\to\infty$. Dividindo o numerador e o denominador por $\left(jw\right)^{n_z}$, temos:

$$\lim_{w\to\infty}G(jw)=\frac{a_{n_z}}{\left(jw\right)^l},\quad l=m+n_p-n_z \tag{5.47}$$

Quando l>o, o diagrama morre na origem, com um ângulo de $\left\langle -l\frac{\pi}{2}\right.$. Quando l=0, o traçado acaba no eixo real em a_{n_z} .

5.3.3 Traçado de Nyquist quando existem pólos no eixo imaginário

Se $G(s)$ possuir pólos no eixo imaginário, em $s=\pm jw_0$, então deveremos expandir $G(s)$ em fracções parciais.

$$G(s)=\frac{k_{w_0}}{\left(s-jw_0\right)^n}+\left\{outros\ termos\right\} \tag{5.48}$$

sendo

$$k_{w_0}=\lim_{w\to w_0}\left(s-jw_0\right)G(s) \tag{5.49}$$

Para valores de w na vizinhança de w_0, podemos considerar:

$$G(jw) \approx \frac{k_{w_0}}{\left(jw - jw_0\right)^n} = \frac{k_{w_0}}{j^n\left(w - w_0\right)^n} \tag{5.50}$$

A partir de (5.50), temos que:

$$\lim_{w \to w_0} \left|G(jw)\right| = \infty \, , \tag{5.51}$$

e

$$\lim_{w \to w_0} \langle G(jw) = \begin{cases} -n\dfrac{\pi}{2}, \quad n \ par \\ \begin{cases} -n\dfrac{\pi}{2}, \quad w > w_0 \\ -\left(n+2\right)\dfrac{\pi}{2}, \quad w < w_0 \end{cases}, \quad n \ impar \end{cases} \tag{5.52}$$

5.4 Traçado de Nichols

Neste tipo de traçado, à semelhança do diagrama de Nyquist, usa-se apenas um único gráfico, neste caso do logaritmo da amplitude, em dbs, versus a fase.

Para este tipo de traçado, os gráficos de $G(jw)$ e de $G^{-1}(jw)$ são anti-simétricos em relação à origem, dado que:

$$\left|G^{-1}(jw)\right|(db) = -\left|G(jw)\right|(db) \tag{5.53}$$

e

$$\langle G^{-1}(jw) = -\langle G^{-1}(jw) \tag{5.54}$$

Para estes traçados, uma variação de ganho traduz-se apenas numa translacção do gráfico. A seguir apresentam-se os traçados de Nichols para alguns termos usuais.

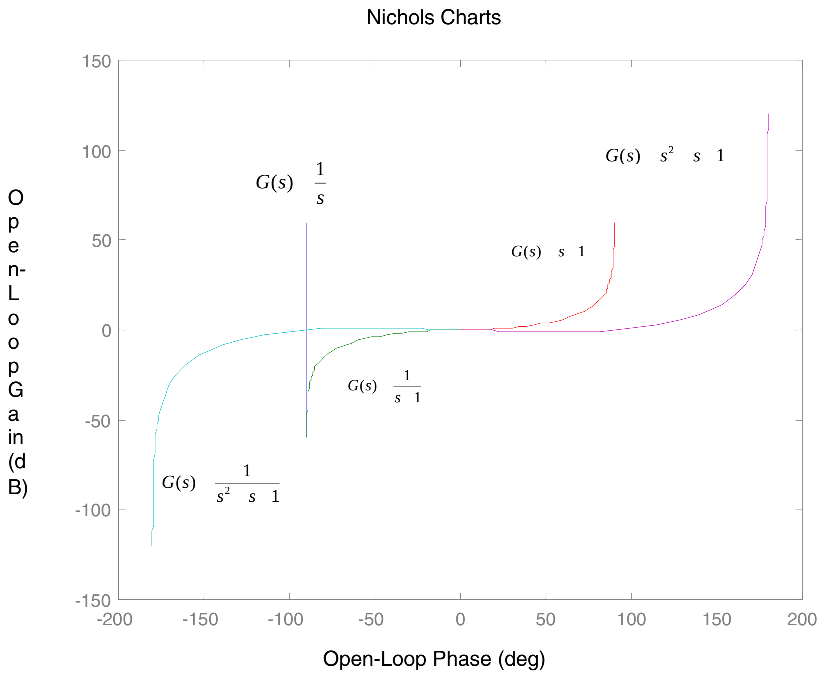
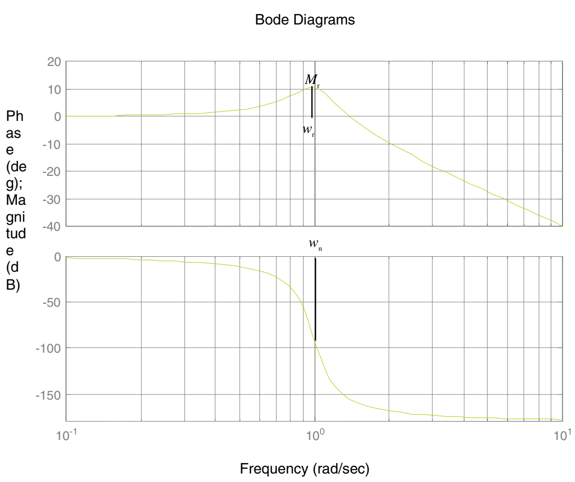


Figura 5.12 – Diagramas de Nichols para diferentes termos

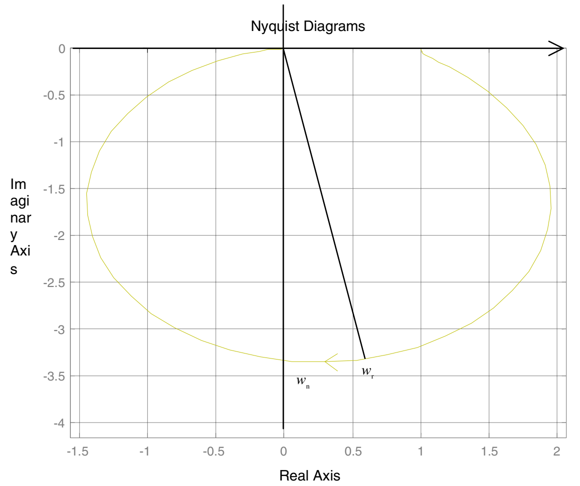
5.5 Comparação dos vários traçados

A figura seguinte compara os diferentes traçados para a função quadrática

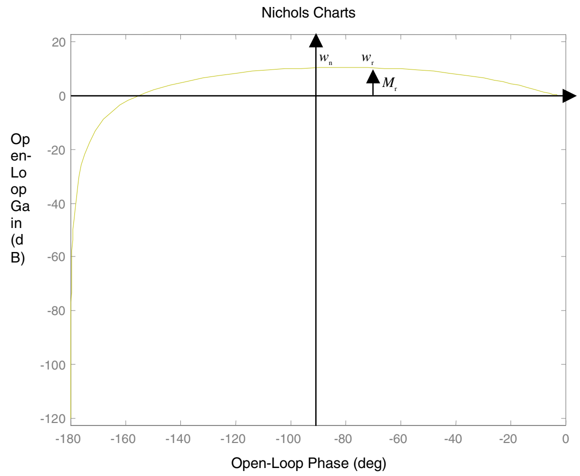
$$G(s)=\frac{1}{\left(\frac{s}{w_n}\right)^2+2\xi\frac{s}{w_n}+1}.$$



a) Bode



b) Nyquist



c) Nichols

Figura 5.13 – Diferentes traçados

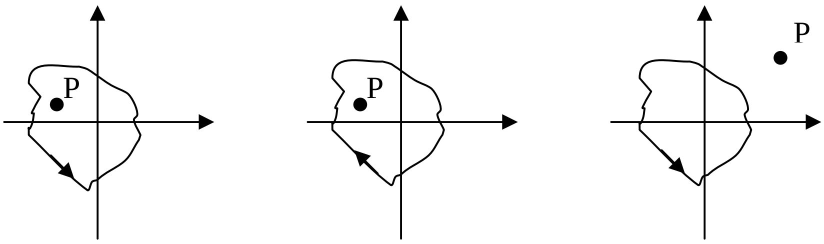
5.6 *Critério de estabilidade de Nyquist*

O critério de estabilidade de Nyquist baseia-se no teorema de Cauchy, e traduz-se na aplicação de uma transformação conforme de um contorno no plano *s* por uma determinada função. Estes conceitos foram introduzidos na disciplina de Matemática Aplicada.

Já foi referido que, para que um sistema em malha fechada seja estável, a sua polinomial característica $\Delta(s) = 1 + G(s)H(s)$ deve ter todas as raízes no semi-plano esquerdo. O critério de Nyquist vai determinar se isso é verdade ou não, mas no plano $G(s)H(s)$.

5.6.1 Bases matemáticas

Convém relembrar os conceitos de *rodeado* e *fechado*. Um ponto P diz-se rodeado pelo caminho Γ se este percurso involver P. A região situada à esquerda desse caminho, se este fôr percorrido no sentido da seta, diz-se que é *fechada* por Γ.



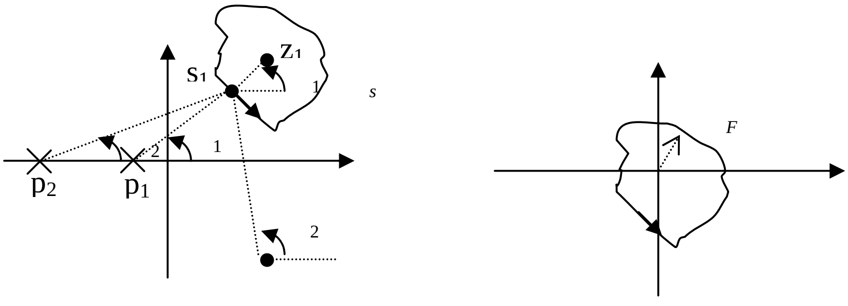
a) rodeado e fechado b) rodeado e não fechado c) fechado e não rodeado

Figura 5.14 – Noção de rodeado e fechado

Admitamos que a função *F(s)* é uma função analítica em todo o plano *s*, excepto num número finito de pontos, e escolha-se um contorno fechado Γ_s no plano *s* onde *F(s)* é analítica. Se fizermos a transformação conforme deste caminho pela função *F(s)* vamos obter no plano *F(s)* também um contorno fechado, que designaremos por $_F$.

O teorema de Cauchy diz-nos que, se Γ_s rodeia *Z* zeros e *P* pólos de *F(s)* no plano *s*, então a sua representação conforme no plano *F(s)* rodeia a origem *N* vezes, onde $N = Z - P$, no mesmo sentido em que Γ_s rodeia as singularidades no plano *s* se *N* é positivo, e em sentido contrário se *N* é negativo.

Este conceito é fácil de entender, se atentarmos na figura seguinte. Na fig. a) estão representados o contorno Γ_s e os pólos e zeros da função *F(s)*. Repare que quando nos movemos ao longo de Γ_s, a contribuição angular total de ϕ_1, ϕ_2 *e* Ψ_2 é nula. No entanto, a contribuição angular total de Ψ_1 é de 2π, positiva visto tratar-se de um zero. Portanto, a inspecção do mapeamento *F(s)* –uma rotação completa no mesmo sentido - demonstranos que estamos na presença de um zero dentro do contorno Γ_s, dado que o número de pólos dentro desse contorno é nulo.



a) Plano s b) Plano F(s)

Figura 5.15 – Exemplo

5.6.2 Aplicação para sistemas de controlo

Em controlo, estamos interessados em saber se os zeros de $\Delta(s) = 1 + G(s)H(s)$ estão todos no semi-plano esquerdo, ou não. Se considerarmos $F(s) = G(s)H(s)$, então podemos aplicar directamente os conceitos anteriores, com a diferença de que temos de inspeccionar quantas vezes o ponto $-1 = -1 + j0$ é rodeado. Se considerarmos Γ_s um contorno que feche todo o semi-plano direito, a aplicação directa do teorema de Cauchy diz-nos que a sua representação conforme no plano *F(s)* rodeia o ponto $-1 = -1 + j0$ N vezes, onde $N = Z - P$, no mesmo sentido em que Γ_s rodeia as singularidades no plano *s* se *N* é positivo, e em sentido contrário se *N* é negativo.

Como:

$$\Delta(s) = 1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{kN_{G(s)}N_{H(s)}}{D_{G(s)}D_{H(s)}} = \frac{D_{G(s)}D_{H(s)} + kN_{G(s)}N_{H(s)}}{D_{G(s)}D_{H(s)}} \qquad (5.55)$$

podemos saber os pólos da função, e os zeros são determinados através de $Z = N + P$. O sistema é estável se $Z = 0$, isto é, se $N = -P$.

O contorno Γ_s tem que fechar o semi-plano direito do plano *s*, mas a função deve ser analítica neste contorno. Caso *F(s)* possua pólos no eixo imaginário, o caminho deve contorná-los. Assim, admitindo esta situação, utilizaremos o seguinte contorno:

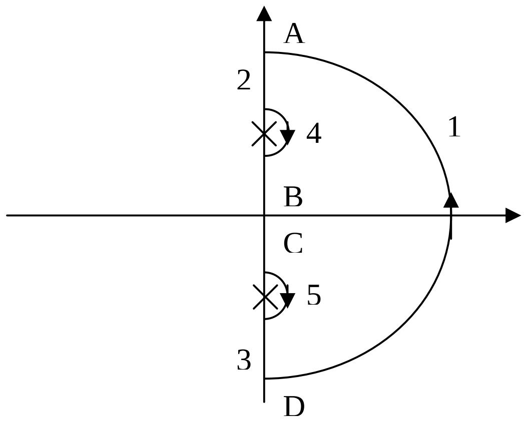


Figura 5.16 – Contorno no plano *s*

Podemos considerar este contorno dividido em 5 partes:

1. Neste caso temos uma semi-circunferência de raio infinito, cujo ângulo varia de $-\frac{\pi}{2}\ a\ \frac{\pi}{2}$. Portanto, para determinar a transformação conforme, calculamos

$$\lim_{R\to\infty} F(s)\Big|_{s=\mathrm{Re}^{j\theta}} \tag{5.56}$$

2. Para este caso, a transformação coincide com o diagrama de Nyquist, com a diferença de que *w* varia de ∞ a 0;
3. Trata-se do simétrico da transformação obtida no ponto anterior, dado que $F(-jw)=\overline{F(jw)}$
4. O contorno no plano s é uma semi-circunferência de raio infinitesimal, cujo ângulo varia de $\frac{\pi}{2}\ a\ -\frac{\pi}{2}$. Para determinar a transformação conforme, calculamos

$$\lim_{\varepsilon\to 0} F(s)\Big|_{s-jw_0=\varepsilon\,\mathrm{e}^{j\theta}} \tag{5.57}$$

5. A mesma coisa que o ponto anterior, com a diferença que a substituição é $s+jw_0=\varepsilon\,\mathrm{e}^{j\theta}$.

5.6.3 Exemplo de aplicação

Vamos determinar a estabilidade do sistema de controlo cuja função de transferência em malha aberta é $GH(s) = \dfrac{k}{s(sT_1+1)(sT_2+1)}$.

Primeiramente, vamos esboçar o diagrama de Nyquist, isto é, o mapeamento da semi-recta 2 da fig. 5.16 pela função $F(s) = G(s)H(s)$. Fazendo a tabela, temos:

w	**0**	**w**	∞
$\lvert F(jw)\rvert$	∞	$\dfrac{1}{w\sqrt{(1+w^2T_1^2)(1+w^2T_2^2)}}$	0
$\langle G(jw)$	$-\dfrac{1}{2}\pi$	$-\dfrac{\pi}{2}-\tan^{-1}(wT_1)-\tan^{-1}(wT_2)$	$-\dfrac{3}{2}\pi$

O diagrama de Nyquist está representado na figura seguinte (para k=2, T_1=10, T_2=1):

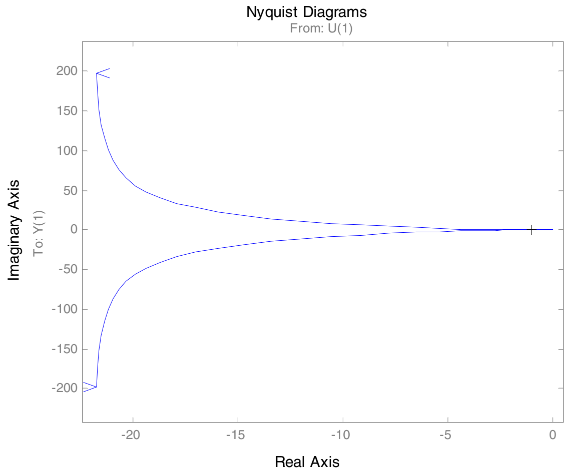


Figura 5.17 –Diagrama de Nyquist

O sistema possui um pólo em s=0. Corresponde ao mapeamento de um semi-circunferência de raio infinitesimal, do tipo 4 ou 5, centrada em 0. Temos assim:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} F(s)\Big|_{s=\varepsilon e^{j\theta}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{k}{\varepsilon e^{j\theta}\left(\varepsilon e^{j\theta}T_1+1\right)\left(\varepsilon e^{j\theta}T_2+1\right)} = \infty e^{-j\theta} \tag{5.58}$$

Como θ varia de $\frac{\pi}{2} \to -\frac{\pi}{2}$ então o ângulo de $F(s)$ varia de $-\frac{\pi}{2} \to +\frac{\pi}{2}$. A figura seguinte ilustra este facto.

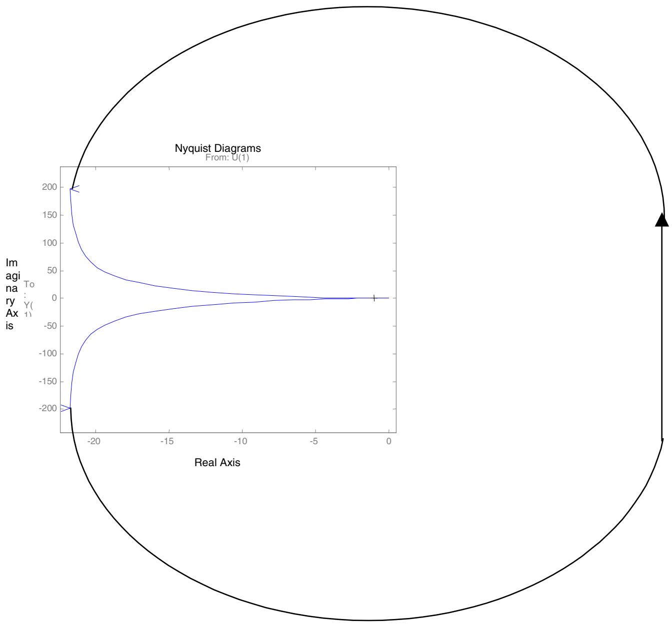


Figura 5.18 –Contorno no plano $F(s)$

Relativamente à semi-circunferência de raio infinito (tipo 1), teremos o seguinte mapeamento:

$$\lim_{\varepsilon \to \infty} F(s)\Big|_{s=\varepsilon e^{j\theta}} = \lim_{\varepsilon \to \infty} \frac{k}{\varepsilon e^{j\theta}\left(\varepsilon e^{j\theta}T_1+1\right)\left(\varepsilon e^{j\theta}T_2+1\right)} = 0e^{-j3\theta} \qquad (5.59)$$

Como θ varia de $-\frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2}$ então o ângulo de $F(s)$ varia de $\frac{3\pi}{2} \to -\frac{3\pi}{2}$. Este contorno não é representado no gráfico.

Embora não seja muito perceptível no gráfico, o ponto –1+j0 é rodeado 1 vez. Isto implica que, dado o número de pólos de $F(s)$ no semi-plano direito ser nulo, existe um zero de F(s) no semi-plano direito, isto é, o sistema é instável. A estabilidade do sistema genérico depende do ponto em que o traçado de Nyquist intersecta o semi-eixo real negativo de $F(s)$. Se intersectar antes de –1+j0, o sistema é instável; caso contrário é estável. Obviamente isto depende de uma relação entre o ganho e as constantes de tempo. Esta relação pode-se determinar de duas maneiras:

Vamos representar $F(s)$ em termos de parte real e imaginária. Temos então:

$$\begin{aligned} F(jw) &= \frac{k}{jw(jwT_1+1)(jwT_2+1)} = \frac{k}{jw\left(-w^2T_1T_2 + jw\left(T_1+T_2\right)+1\right)} = \\ &= \frac{k}{jw\left(1-w^2T_1T_2\right)-w^2\left(T_1+T_2\right)} = \frac{k\left[-w^2\left(T_1+T_2\right)-jw\left(1-w^2T_1T_2\right)\right]}{\left(w^2\left(T_1+T_2\right)\right)^2+w^2\left(1-w^2T_1T_2\right)^2} \end{aligned} \tag{5.60}$$

A parte imaginária é nula quando $\left(w=0\right)\vee\left(1-w^2T_1T_2=0\right)$. A 2ª igualdade corresponde a $w=\pm\frac{1}{\sqrt{T_1T_2}}$. Para essas frequências, a parte real vale $F(jw)=-\frac{k}{\frac{T_1+T_2}{T_1T_2}}$. Isto é, quando:

$$0<k<\frac{T_1+T_2}{T_1T_2} \tag{5.61}$$

o sistema é estável.

Outra maneira será aplicar a rede de Routh-Hurwitz. A polinomial característica é:

$$\Delta = s^3T_1T_2+s^2\left(T_1+T_2\right)+s+k \tag{5.62}$$

A rede de Routh-Hurwitz é então:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & T_1T_2 & 1 \\ s^2 & T_1+T_2 & \mathrm{k} \\ \hline s^1 & \dfrac{\left(T_1+T_2\right)-kT_1T_2}{T_1+T_2} & 0 \\ s^0 & k & \end{array}$$

O sistema é estável se $0<k<\frac{T_1+T_2}{T_1T_2}$. Formando a equação auxiliar, para $k=k_c$, temos $w=\pm\frac{1}{\sqrt{T_1T_2}}$.

5.6.4 Sistemas com tempo de atraso

Considere-se o sistema $G(s)e^{-s\tau}$, com $G(s)$ racional e só com pólos. Sabemos que o seu módulo é $\left|G(jw)e^{-jw\tau}\right|=\left|G(jw)\right|$ e $\angle G(jw)e^{-jw\tau}=\angle G(jw)-w\tau$. O seu diagrama de

Nyquist é então uma espiral decrescente Caso a fase seja maior que $-\pi$ quando o seu módulo é igual a 1, então o sistema é estável, dado que, quando a fase diminuir para $-\pi$, o seu módulo é menor que 1.

5.7 Margens de ganho e de fase

Conforme se viu, em sistemas que potencialmente podem ser instáveis, um aumento de ganho normalmente traduz-se numa variação do grau de estabilidade do sistema. Quanto mais perto o digrama de Nyquist passar do ponto –1+*j*0, mais rápida e oscilatória será a resposta do sistema. A *estabilidade relativa* pode então exprimir-se em função da distância mínima entre o traçado de Nyquist de *GH*(*s*) e o ponto –1+*j*0. Esta estabilidade relativa mede-se normalmente em termos de *margens de ganho* e de *margens de fase.*

A *margem de ganho* é o factor pelo qual é necessário multiplicar o ganho para que o sistema se torne marginalmente estável. Se w_c é a frequência (*frequência da margem de ganho*) para a qual a fase de *GH*(*jw*) é $-\pi$, então a margem de ganho, *a*, é definida como:

$$\left|G\left(jw_c\right)H\left(jw_c\right)\right|a=1 \tag{5.63}$$

A *margem de fase* é definida como o atraso adicional necessário para que o sistema se torne marginalmente estável. Se designarmos por w_ϕ a frequência (*frequência da margem de fase*) para a qual o módulo de *GH*(*jw*) é unitário, temos:

$$\gamma=\pi+\left\langle G\left(jw_\phi\right)H\left(jw_\phi\right)\right. \tag{5.64}$$

5.7.1 Exemplo

Vamos considerar a função de transferência $GH(s)=\dfrac{22.8}{(s+1)(s+2)(s+3)}$. Para determinar as margens de ganho e de fase, vamos separar $GH\left(jw\right)$ em partes real e imaginária. Então:

$$GH(s)=\frac{22.8}{(s+1)(s+2)(s+3)}=\frac{22.8}{s^3+6s^2+11s+6}$$

$$GH(jw)=\frac{22.8}{(jw)^3+6(jw)^2+11(jw)+6}=$$

$$=\frac{22.8}{\left(6-6w^2\right)+j\left(11w-w^3\right)}=\frac{22.8\left[\left(6-6w^2\right)-j\left(11w-w^3\right)\right]}{\left(6-6w^2\right)^2+\left(11w-w^3\right)^2}=$$

$$=\frac{22.8\left(6-6w^2\right)}{\left(6-6w^2\right)^2+\left(11w-w^3\right)^2}-\frac{j22.8\left(11w-w^3\right)}{\left(6-6w^2\right)^2+\left(11w-w^3\right)^2}$$

Para determinar a margem de ganho iguala-se a 0 a parte imaginária:

$$11w-w^3=0\Leftrightarrow(w_c=0)\vee\left(jw_c=\pm\sqrt{11}\right)$$

e o módulo correspondente a essa frequência, frequência da margem de ganho, é:

$$\left|GH(jw)\right|=\frac{22.8}{60}=\frac{1}{2.6}$$

Logo a margem de ganho é de 2.6, ou 8.4 dbs.

Para determinar a frequência da margem de fase, temos de determinar a frequência para a qual o ganho é unitário.

$$\left|GH(jw)\right|=\left|\frac{22.8}{\left(6-6w^2\right)+j\left(11w-w^3\right)}\right|=\frac{22.8}{\sqrt{x^2+y^2}}=1$$

$$x^2+y^2=22.8^2\Leftrightarrow\left(6-6w^2\right)^2+w^2\left(11-w^2\right)^2=22.8^2\Leftrightarrow$$

$$(6-6z)^2+z(11-z)^2=22.8^2\Leftrightarrow 36-72z+36z^2+121z-22z^2+z^3=22.8^2$$

$$z^3+14z^2+39z-484=0$$

Esta equação tem como soluções (empregando Matlab) $z=4.2\vee z=-9\pm5.7j$. Isto implica que, para $w=\pm2.05$ rad/s o módulo é unitário. Esta é a frequência da margem de fase.

A margem de fase própriamente dita é dada por:

$$\gamma=\pi-\tan^{-1}\left(\frac{2.05}{1}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{2.05}{2}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{2.05}{3}\right)=0.63rad=36^{\circ}.$$

A figura seguinte ilustra, com o diagrama de Bode, as margens de fase e de ganho obtidas em simulação.

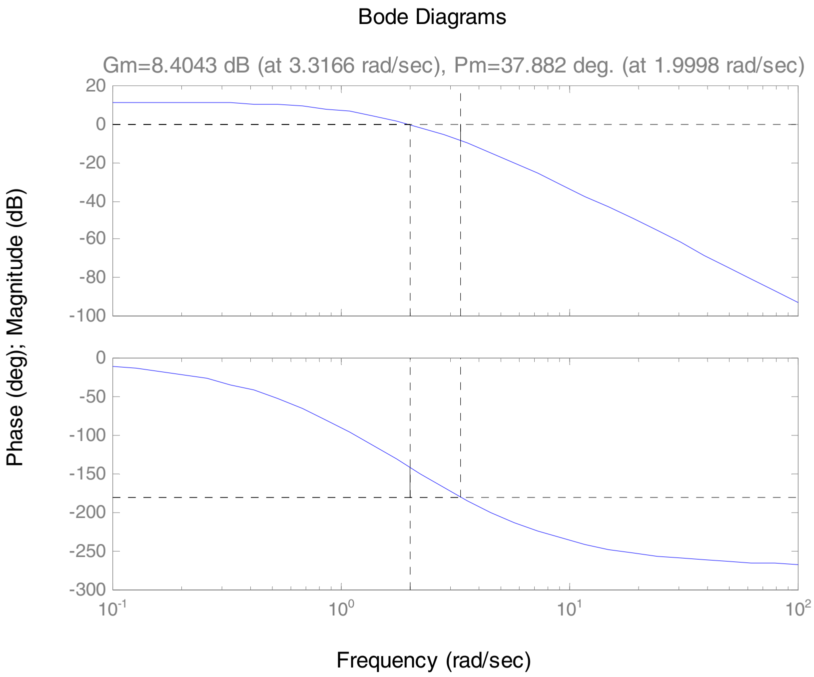


Figura 5.19 – Margens de fase e de ganho

5.8 Resposta em malha fechada

A partir da reposta na frequência de um sistema em malha aberta pode-se obter uma aproximação à resposta na frequência do sistema em malha fechada. Consideremos um sistema em malha fechada com realimentação. A sua função de transferência é:

$$\frac{G(jw)}{1+G(jw)} = M(w)e^{-j\phi(w)} \tag{5.65}$$

Se escrevermos a função de transferência em malha aberta em termos de parte real e imaginária, temos:

$$G(jw) = u(jw) + jv(jw) = u + jv \tag{5.66}$$

A amplitude vale:

$$M(w) = \left|\frac{G(w)}{1+G(w)}\right| = \frac{\sqrt{u^2+v^2}}{\sqrt{(1+u)^2+v^2}} \tag{5.67}$$

Se quadrarmos (5.67), ficamos com:

$$
\begin{aligned}
&u^2+v^2=M^2\left((1+u)^2+v^2\right)\\
&u^2\left(1-M^2\right)-2M^2u+v^2\left(1-M^2\right)=M^2\\
&u^2+v^2-\frac{2M^2u}{1-M^2}=\frac{M^2}{1-M^2}
\end{aligned}
\tag{5.68}
$$

Se adicionarmos $\left(\frac{M^2}{1-M^2}\right)^2$ a ambos os membros de (5.68), ficamos com um quadrado perfeito:

$$
\begin{aligned}
&u^2+v^2-\frac{2M^2u}{1-M^2}+\left(\frac{M^2}{1-M^2}\right)^2=\frac{M^2}{1-M^2}+\left(\frac{M^2}{1-M^2}\right)^2\\
&\left(u-\frac{M^2}{1-M^2}\right)^2+v^2=\frac{M^2}{\left(1-M^2\right)^2}
\end{aligned}
\tag{5.69}
$$

Esta última equação consitui a equação de uma circunferência com centro em $\left(\frac{M^2}{1-M^2},0\right)$ e raio $\frac{M}{\left(1-M^2\right)}$. Sobrepondo essas circunferências no diagrama de Nyquist, os pontos em que o diagrama intersecta cada circunferência dá-nos um par de valores $\left(w_i,M_i\right)$ que nos permitem traçar a curva da resposta da frequência em malha fechada.

Pegando nas equações (5.65) e (5.66) e utilizando o mesmo processo para a frequência, temos:

$$
-\phi=\operatorname{atan}\left(\frac{v}{u}\right)-\operatorname{atan}\left(\frac{v}{1+u}\right)=\operatorname{atan}\left(\frac{\frac{v}{u}-\frac{v}{1+u}}{1+\frac{v}{u}\frac{v}{1+u}}\right)=\operatorname{atan}\left(\frac{v}{u^2+u+v^2}\right)
\tag{5.70}
$$

Aplicando tangente a ambos os lados, temos:

$$
N(w)=\tan(-\phi)=\frac{v}{u^2+u+v^2}
\tag{5.71}
$$

Rearranjando, temos:

$$u^2 + u + v^2 = \frac{v}{N}$$

$$u^2 + u + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + v^2 - \frac{v}{N} + \left(\frac{1}{2N}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2N}\right)^2 \tag{5.72}$$

$$\left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(v - \frac{1}{2N}\right)^2 = \frac{N^2 + 1}{4N^2}$$

Esta equação consitui a equação de uma circunferência com centro em $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2N}\right)$ e raio $\frac{\sqrt{N^2+1}}{2N}$. Do mesmo modo que para a curva de magnitude, podemos sobrepôr as circunferências N num diagrama de Nyquist e esboçar a fase em malha fechada.

Na prática, é mais comum sobrepôr essas curvas num diagrama de Nichols. A figura seguinte ilustra esta aplicação para a o sistema em malha fechada, com realimentação unitária e função de transferência (5.34).

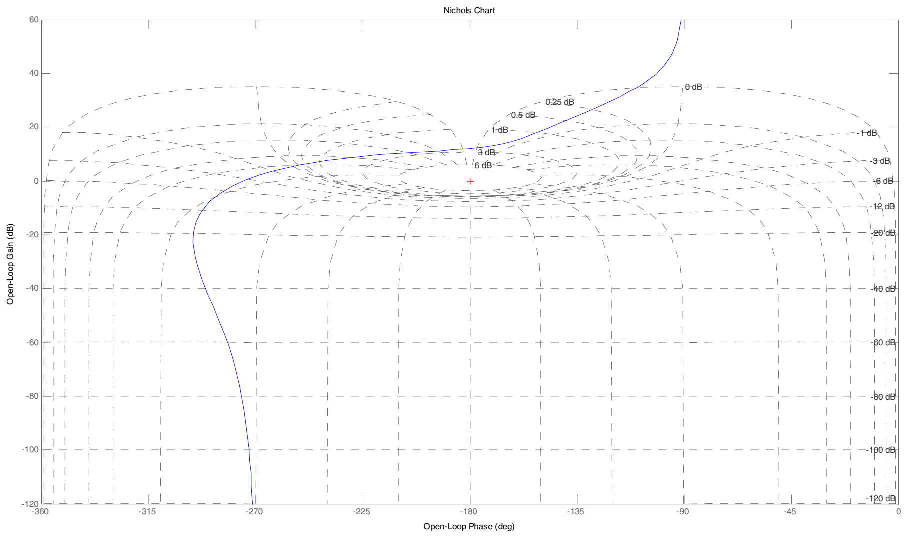


Figura 5.20 – Carta de Nichols, com círculos M e N