

Análise de Sistemas no Domínio do Tempo

4.1 Introdução

A resposta no tempo de um sistema de controlo é importante dado que é neste domínio que os sistemas operam. O método clássico da análise da resposta no tempo investiga o comportamento do sistema a entradas padrão, como sejam o degrau, a rampa e a parábola.

Table 4.1 - Sinais de entrada padrão

Tipo de sinal	$r(t)$	$R(s)$
Degrau	$r(t) = \begin{cases} k, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	$R(s) = \frac{k}{s}$
Rampa	$r(t) = \begin{cases} kt, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	$R(s) = \frac{k}{s^2}$
Parábola	$r(t) = \begin{cases} kt^2, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	$R(s) = \frac{2k}{s^3}$

Como se admite que o sistema é linear, podemos desta maneira estudar a resposta a uma entrada arbitrária, composta por sinais deste tipo, deslocados no tempo.

Quando analisamos a resposta de um sistema no tempo, as principais características a estudar são: a estabilidade do sistema, a sua resposta transitória, e a resposta em regime estacionário.

4.2 Resposta transitória

A resposta transitória de um sistema é regida pelo integral geral da sua equação diferencial. Considerando o sistema em malha fechada da fig. 3.4, é fácil de ver, tanto em termos do erro, como da saída, a resposta transitória de um sistema depende da sua equação característica, $\Delta(s)$:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{G(s)}{\Delta(s)} \quad (4.1)$$

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1}{\Delta(s)} \quad (4.2)$$

$$\Delta(s) = 1 + G(s)H(s) \quad (4.3)$$

Os zeros da equação característica são os pólos das funções de transferência (4.2) e (4.3). Se definirmos as funções de transferência para a frente e de realimentação como:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}, \quad (4.4)$$

a equação característica fica:

$$\Delta(s) = 1 + \frac{N(s)P(s)}{D(s)Q(s)} = \frac{D(s)Q(s) + N(s)P(s)}{D(s)Q(s)}. \quad (4.5)$$

A polinomial $D(s)Q(s) + N(s)P(s)$ chama-se polinomial característica do sistema e as suas raízes vão definir a resposta transitória do sistema.

4.2.1 Resposta transitória em função da localização dos pólos no plano s

Utilizando (4.5) e (4.4) em (4.1), a função de transferência entre a entrada e a saída é dada por:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{N(s)Q(s)}{D(s)Q(s) + N(s)P(s)} \quad (4.6)$$

Para que o sistema seja causal, o grau da polinomial (n) do numerador tem que ser menor ou igual á do denominador (m). Se expandirmos em fracções parciais (4.6), e considerando um degrau unitário à entrada, $R(s) = 1/s$, teremos:

$$Y(s) = \frac{k_0}{s} + \sum_{c=1}^q \frac{k_c}{s + s_c} + \sum_{c=1}^q \frac{\bar{k}_c}{s + \bar{s}_c} + \sum_{i=1}^{n-q} \frac{k_i}{s + s_i} \quad (4.7)$$

Na última equação admite-se, por simplicidade, que não existem pólos múltiplos (com o mesmo valor), e que existem q pares de pólos complexos conjugados. O símbolo \bar{x} denota o complexo conjugado de x .

Os valores dos numeradores de cada fracção parcial são dados por:

$$k_0 = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) \quad (4.8)$$

$$k_c = \lim_{s \rightarrow -s_c} (s + s_c)Y(s) \quad (4.9)$$

$$k_i = \lim_{s \rightarrow -s_i} (s + s_i)Y(s) \quad (4.10)$$

Se passarmos agora (4.7) para o domínio do tempo, e lembrando-nos que $s = \sigma + j\omega$, temos:

$$\begin{aligned} y(t) &= k_0 + \sum_{c=1}^q k_c e^{-(\sigma_c + j\omega_c)t} + \sum_{c=1}^q \bar{k}_c e^{-(\sigma_c - j\omega_c)t} + \sum_{i=1}^{n-q} k_i e^{-s_i t} \\ &= k_0 + 2 \sum_{c=1}^q |k_c| e^{-\sigma_c t} \cos(\omega_c t + \phi_c) + \sum_{i=1}^{n-q} k_i e^{-s_i t} \end{aligned} \quad (4.11)$$

No caso de $Y(s)$ possuir um pólo real em $-s_a$ com multiplicidade m , a sua expansão em fracções parciais conterá m termos, $\sum_{k=1}^m \frac{k_k}{(s + s_a)^k}$. A sua transformada de Laplace inversa é:

$$\sum_{k=1}^m \frac{k_k t^{k-1} e^{-s_a t}}{k!}, \quad (4.12)$$

onde:

$$k_m = \lim_{s \rightarrow -s_a} \frac{1}{m-k!} \frac{d^{(m-k)}}{ds^{(m-k)}} [(s + s_a)^m Y(s)]. \quad (4.13)$$

Analisando as equações (4.11) e (4.13) e a fig. 4.1, vemos que a resposta transitória é função da localização dos pólos da função de transferência, ou seja das raízes da equação característica.

No caso de termos correspondentes a pólos reais, a resposta temporal é uma exponencial, que diminui ou aumenta consoante o pólo esteja à esquerda ou à direita do eixo imaginário. Um par de pólos complexos tem uma resposta oscilatória, que decai ou aumenta com o tempo consoante a parte real do pólo se encontra à esquerda ou à direita do eixo imaginário. A frequência de oscilação aumenta ou diminui consoante a parte imaginária esteja mais longe ou mais perto do eixo real.

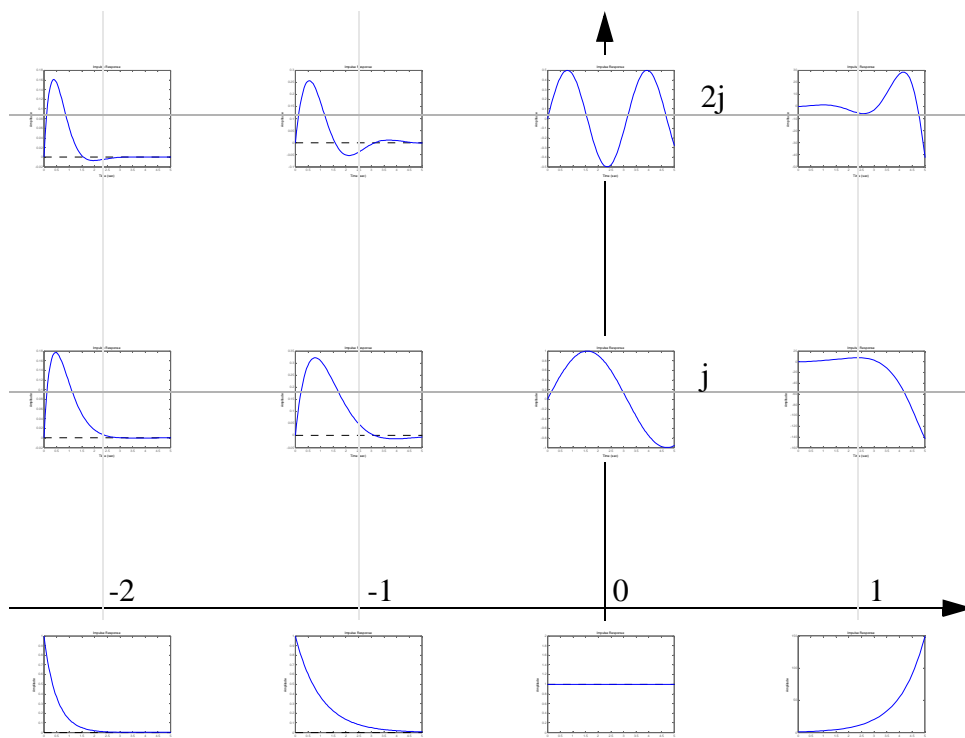


FIGURE 4.1 - Respostas transitórias em função da localização dos pólos

4.2.2 Constantes de tempo de um sistema e especificações da resposta

A resposta transitória de um sistema é assim uma soma de termos exponenciais do tipo e^{-st} . Ao instante de tempo em que o expoente é unitário, isto é $st = 1$, dá-se o nome de constante de tempo, $\tau = 1/s$.

Um sistema de controlo é normalmente desenhado para cumprir determinadas especificações. Muitas dessas especificações dizem respeito à resposta do sistema a um degrau e, nomeadamente à sua resposta transitória. Importa assim definir algumas dessas características:

- Tempo de crescimento - *rise time* (t_r) - é o intervalo de tempo que a resposta demora a crescer de 0.1 a 0.9 do seu valor em regime estacionário;
- Tempo de atraso - *delay time* (t_d) - é o intervalo de tempo que a resposta demora a atingir 0.5 do seu valor em regime estacionário;
- Tempo de estabelecimento - *settling time* (t_s) - é o tempo necessário para a resposta entrar (sem sair mais) numa banda pré-definida em torno do seu valor em regime estacionário. Normalmente são considerados 2% ou 5%.

Para respostas do tipo do gráfico à esquerda da fig. 4.2, é ainda normal definir-se:

- Tempo de pico - *peak time* (t_p) - é o instante de tempo correspondente ao valor máximo da saída;
- Valor de pico - *peak value* (M_p) - é o valor máximo da saída;
- percentagem de sobrelevação - *percentage of overshoot* (PO) - é a razão entre o valor de pico e o valor da saída em regime estacionário.

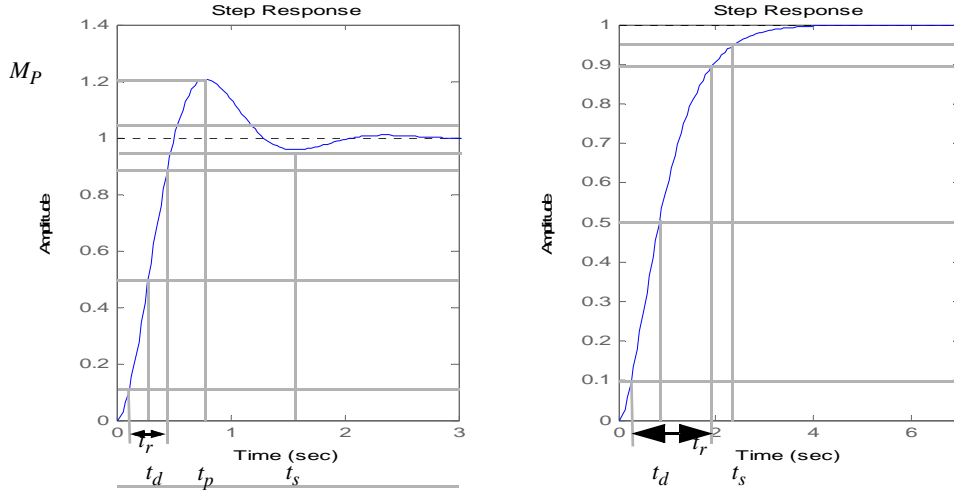


FIGURE 4.2 - Especificações da resposta transitória

4.2.3 Sistemas de 2ª ordem e regimes da resposta transitória

As funções de transferência de 2ª ordem são as mais habitualmente encontradas, oferecendo a vantagem de podermos determinar as características da resposta transitória a partir dos coeficientes da função de transferência. Consideremos um sistema em malha fechada, com realimentação unitária (ver fig. 3.4), cujo função de transferência para a frente é

$G(s) = \frac{k}{s(As + B)}$. A função de transferência em malha fechada é:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{\frac{k}{s(As + B)}}{1 + \frac{k}{s(As + B)}} = \frac{k}{As^2 + Bs + k} \quad (4.14)$$

As raízes da polinomial característica são:

$$s_{1,2} = -\frac{B}{2A} \pm j \sqrt{\frac{4kA - B^2}{4A^2}} = \sigma \pm jw_d \quad (4.15)$$

A parte real das raízes é σ e w_d é denominada de frequência natural amortecida. B representa o amortecimento efectivo do sistema. Consoante o valor de B , poderemos ter diversos tipos de resposta:

- Se $B=0$ o sistema não tem amortecimento as raízes estão sobre o eixo imaginário -

$s_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{k}{A}} = \pm jw_n$, onde w_n é denominada frequência natural não amortecida. A resposta a um degrau unitário é dada por $y(t) = 1 - \cos(w_n t)$;

- se $B = 2\sqrt{Ak}$, a parte imaginária é nula e as duas raízes são reais e iguais -

$s_{1,2} = -\frac{B}{2A} = -\frac{2\sqrt{Ak}}{2A} = -\sqrt{\frac{k}{A}} = -w_n$. A resposta a um degrau unitário é dada por $y(t) = 1 - e^{-w_n t}(1 + w_n t)$ e é representada no lado direito da fig. 4.2. $B = 2\sqrt{Ak}$ é denotado como amortecimento crítico. A razão entre o amortecimento efectivo e o amortecimento crítico é chamada de razão de amortecimento $\xi = \frac{B}{2\sqrt{Ak}}$. Note-se que, em termos de ξ e de w_n , a eq. (4.14) pode ser dada como:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k}{As^2 + Bs + k} = \frac{1}{\frac{A}{k}s^2 + \frac{B}{k}s + 1} = \frac{1}{\frac{s^2}{w_n^2} + \frac{2\xi}{w_n}s + 1} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}; \quad (4.16)$$

- se $B > 2\sqrt{Ak}$ ou, equivalentemente, $\xi > 1$, as raízes são reais e diferentes -

$s_1 = \sigma_1$ $s_2 = \sigma_2$. A resposta chama-se sobreamortecida, e é dada por

$$y(t) = 1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_2 - \sigma_1} e^{-\sigma_1 t} + \frac{\sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1} e^{-\sigma_2 t};$$

- se $0 < B < 2\sqrt{Ak}$ ou, equivalentemente, $0 < \xi < 1$, as raízes são complexas conjugadas -

$s_{1,2} = -\xi w_n \pm jw_n \sqrt{1 - \xi^2}$. A resposta a um degrau unitário é dada por

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\xi w_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(w_d t + \phi), \text{ sendo } w_d = w_n \sqrt{1 - \xi^2} \text{ e } \phi = \text{atan}\left(\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}\right).$$

A resposta chama-se subamortecida e é representada no lado esquerdo da fig. 4.2.

Estes três regimes de resposta, sobreamortecido, de amortecimento crítico e subamortecido, podem ser vistos na, em função de ξ .

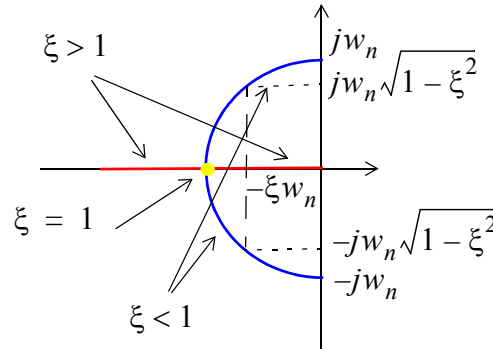


FIGURE 4.3 - Localização dos pólos, em função de ξ , w_n constante

Para um regime subamortecido ($\xi < 1$) e constante, quando w_n varia, os pólos estão localizados ao longo de duas semi-rectas partindo da origem.

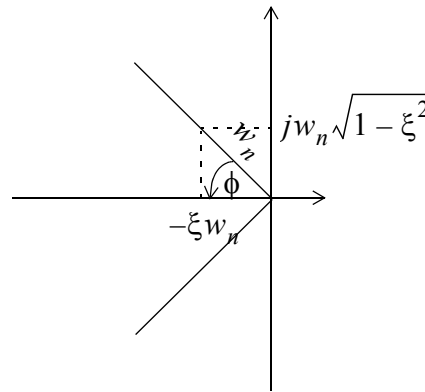


FIGURE 4.4 - Localização dos pólos, em função de w_n , ξ constante

Da fig. 4.4, pode-se facilmente verificar que:

$$\phi = \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right) = \operatorname{acos}(\xi) \quad (4.17)$$

Num regime subamortecido, o tempo de pico (t_p) pode ser calculado igualando a derivada da saída relativamente ao tempo a 0.

A expressão da saída a um degrau unitário é então:

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\xi w_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(w_d t + \phi) \quad (4.18)$$

Derivando e igualando a 0, temos

$$\frac{d}{dt}y(t) = \frac{\xi w_n e^{-\xi w_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(w_d t + \phi) - \frac{w_d e^{-\xi w_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cos(w_d t + \phi) = 0 \quad (4.19)$$

$$\tan(w_d t + \phi) = \frac{w_d}{\xi w_n} = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} = \tan(\phi) \quad (4.20)$$

Esta equação é verdadeira para

$$w_d t = 0, \pi, 2\pi, \dots \quad (4.21)$$

O 1º pico ocorre então para

$$t_p = \frac{\pi}{w_d} = \frac{\pi}{w_n \sqrt{1-\xi^2}} \quad (4.22)$$

Inserindo esta expressão em (4.18), temos o valor de pico:

$$M_p = 1 + e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}. \quad (4.23)$$

A percentagem de sobrelevação é assim dada por:

$$PO = 100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (4.24)$$

A figura seguinte ilustra a resposta a um degrau de um sistema de 2ª ordem, com $w_n = 1$ e com diferentes valores de ξ .

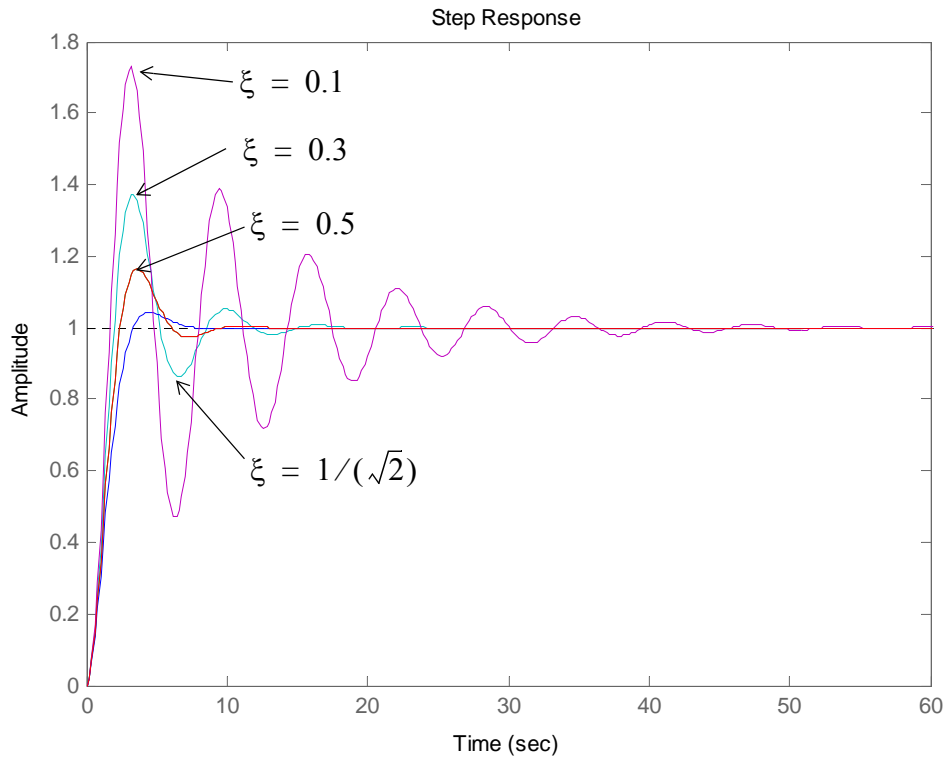


FIGURE 4.5 - Resposta a um degrau de um sistema de 2ª ordem, com $w_n = 1$ e com diferentes valores de ξ

Conforme se pode observar, à medida que ξ diminui, o valor de pico aumenta (e consequentemente a percentagem da sobrelevação), o tempo de pico, tempo de subida e tempo de crescimento diminuem, e o tempo de estabelecimento aumenta.

O tempo de estabelecimento está inversamente relacionado com a parte real dos pólos (neste caso $\sigma = -\xi w_n = -\xi$) e directamente com a constante de tempo $\tau = -1/\sigma$, sendo para um critério de 2% aproximadamente igual a 4τ e para um critério de 5% aproximadamente igual a 3τ .

4.3 Resposta em regime estacionário

Quando o regime transitório acaba, entramos no regime estacionário. Nestas condições, importa determinar qual é o valor do erro que se obtém, considerando aqui o erro a diferença

entre o sinal de entrada e o sinal de saída. Na análise seguinte vamos considerar um sistema com realimentação unitária.

Sabemos, pelo teorema do valor final, que:

$$e_{ss}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)} \quad (4.25)$$

Vamos exprimir a função de transferência em malha aberta em termos de pólos e zeros:

$$G(s) = \frac{k \prod_{i=1}^n (s + z_i)}{s^z \prod_{j=1}^m (s - p_j)} \quad (4.26)$$

O comportamento do limite em (4.25) vai depender do tipo de entrada e do número de pólos em $s=0$, z . Este número é normalmente denotado como o tipo do sistema.

4.3.1 Tipos de sistema e constantes de erro em regime estacionário

Vamos considerar primeiramente uma entrada em degrau. Neste caso $R(s) = \frac{A}{s}$ e

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \frac{A}{s}}{1 + G(s)} = \frac{A}{1 + G(0)} \quad (4.27)$$

No caso de um sistema de tipo 0 (isto é, sem pólos na origem),

$$G(0) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \frac{k \prod_{i=1}^n z_i}{\prod_{j=1}^m p_j} = k_p \quad (4.28)$$

k_p é chamado de constante de erro de posição. Verifica-se assim que um sistema de tipo 0 responde a um degrau com um erro em regime estacionário dado por:

$$e_{ss} = \frac{A}{1 + k_p} \quad (4.29)$$

Se o sistema for de tipo 1 ou superior, $G(0) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \infty$. Deste modo, o erro em regime estacionário é nulo.

Se considerarmos uma entrada em rampa, temos $R(s) = \frac{A}{s^2}$. Neste caso:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \frac{A}{s^2}}{1 + G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{sG(s)}. \quad (4.30)$$

No caso de o sistema ser do tipo 0, $\lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = 0$ e $e_{ss} = \infty$.

No caso de o sistema ser do tipo 1, $\lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \frac{i=1}{n-z} = k_v$ e $e_{ss} = A/k_v$, isto é, um sistema do tipo 1 responde a uma rampa com um erro finito.

No caso de o sistema ser do tipo 2 ou superior, $\lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \infty$ e $e_{ss} = 0$.

Se considerarmos agora uma parábola de entrada, temos $R(s) = \frac{2A}{s^3}$. Neste caso:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \frac{2A}{s^3}}{1 + G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2A}{s^2 G(s)}. \quad (4.31)$$

No caso de o sistema ser do tipo 0 ou 1, $\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = 0$ e $e_{ss} = \infty$.

No caso de o sistema ser do tipo 2, $\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = \frac{i=1}{n-z} = k_a$ e $e_{ss} = 2A/k_a$, isto é, um sistema do tipo 2 responde a uma parábola com um erro finito.

No caso de o sistema ser do tipo 3 ou superior, $\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = \infty$ e $e_{ss} = 0$.

Estes resultados podem ser sumariados na seguinte tabela:

Table 4.2 - Erro em regime estacionário

Entradas				Degrau	Rampa	Parábola
Tipo de Sistema	Constantes de erro			$r(t) = A$	$r(t) = At$	$r(t) = At^2$
	k_p	k_v	k_a	$R(s) = \frac{A}{s}$	$R(s) = \frac{A}{s^2}$	$R(s) = \frac{2A}{s^3}$
0	F	0	0	$e_{ss} = \frac{A}{1+k_p}$	$e_{ss} = \infty$	$e_{ss} = \infty$
1	∞	F	0	$e_{ss} = 0$	$e_{ss} = \frac{A}{k_v}$	$e_{ss} = \infty$
2	∞	∞	F	$e_{ss} = 0$	$e_{ss} = 0$	$e_{ss} = \frac{2A}{k_a}$
3	∞	∞	∞	$e_{ss} = 0$	$e_{ss} = 0$	$e_{ss} = 0$

4.4 Estabilidade

A 3ª característica associada à resposta no tempo é a estabilidade do sistema. Por estabilidade, queremos aqui significar que a qualquer entrada limitada em amplitude, o sistema deve responder com uma saída limitada em amplitude. Esta é a definição de estabilidade, no sentido entrada-saída, devendo ser notado que existem outras definições de estabilidade.

Vamos considerar que estamos em presença de sinais e sistemas causais, isto é, que $(r(t) = c(t) = 0), t < 0$. Se considerarmos que a saída, no domínio de Laplace, a uma entrada limitada em amplitude é dada por:

$$C(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{s^n + b_{n-1} s^{n-1} + b_1 s + b_0}, \quad (4.32)$$

expandindo $C(s)$ em fracções parciais, temos:

$$C(s) = d_{m-n} s^{m-n} + \dots + d_0 + \sum_{c=1}^q \frac{k_c}{(s + s_p)^c} + \sum_{i=1}^{n-q} \frac{k_i}{s + s_i}, \quad (4.33)$$

onde admitimos, por simplicidade, que o pólo em $s = -p_c$ tem multiplicidade q , e que os restantes $n-q$ pólos têm multiplicidade 1.

Aplicando a transformada inversa de Laplace, temos:

$$c(t) = d_{m-n}\delta^{(m-n)}(t) + \dots + d_0\delta(t) + \sum_{c=1}^q \frac{k_c t^{c-1} e^{-s_p t}}{c!} + \sum_{i=1}^{n-q} k_i e^{-s_i t} \quad (4.34)$$

Para que a saída seja limitada os termos envolvendo $\delta(t)$ não podem aparecer. Assim, é condição necessária para $G(s)$ ser estável que o grau do denominador seja pelo menos igual ao de numerador. Analisando agora os outros termos, os pólos da função de transferência devem estar todos localizados no semi-plano esquerdo pois, caso contrário, teríamos exponenciais crescentes com o tempo. Os pólos também não podem estar localizados no eixo imaginário visto podermos sempre utilizar uma entrada limitada com esses pólos (um degrau ou um seno), que implicaria um pólo duplo ou um par de pólos conjugados duplo, implicando que a saída tivesse como termo uma rampa.

Assim sendo, pode-se sempre determinar se um sistema é estável ou não através do cálculo das raízes da sua polinomial característica. Contudo, se a ordem do sistema for grande, as raízes só podem ser determinadas com métodos numéricos. A situação agrava-se mais se algum(s) coeficiente(s) forem função de um ou mais parâmetros variáveis. Um método expedito de determinar se um sistema é estável ou não é o critério de estabilidade de Routh-Hurwitz.

4.4.1 Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz

Seja a polinomial característica de um sistema dada por:

$$\Delta(s) = b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + b_1 s + b_0 \quad (4.35)$$

Factorizando-a, temos:

$$\Delta(s) = b_n (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n) \quad (4.36)$$

Se multiplicarmos os factores, temos:

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= b_n s^n - b_n (p_1 + p_2 + \dots + p_n) s^{n-1} \\ &+ b_n (p_1 p_2 + \dots + p_1 p_n + \dots + p_{n-1} p_n) s^{n-2} \\ &+ \dots \\ &+ b_n (-1)^n p_1 p_2 \dots p_n \end{aligned} \quad (4.37)$$

Se analisarmos a equação anterior, verificamos que todos os coeficientes da polinomial devem ter o mesmo sinal para todos os pólos estarem localizados no semi-plano esquerdo. Se isso acontecer, também não pode haver nenhum coeficiente nulo. Estas duas condições, que se podem verificar facilmente apenas por inspecção da polinomial, são apenas necessárias para que o sistema seja estável, isto é, não garantem que o sistema seja estável.

O critério de Routh-Hurwitz permite, através da construção de uma rede de números, determinar inequivocamente se um sistema é estável ou não. Para aplicarmos este critério construímos a seguinte rede:

Table 4.3 - Rede de Routh-Hurwitz

s^n	b_n	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	...
s^{n-1}	b_{n-1}	b_{n-3}	b_{n-5}	b_{n-7}	...
s^{n-2}	c_1	c_2	c_3	...	0
s^{n-3}	d_1	d_2	d_3	...	0
.	0	0
.	...	0	0	0	0
s^0	g_1				

onde:

$$c_1 = -\frac{\begin{vmatrix} b_n & b_{n-2} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix}}{b_{n-1}} \quad c_2 = -\frac{\begin{vmatrix} b_n & b_{n-4} \\ b_{n-1} & b_{n-5} \end{vmatrix}}{b_{n-1}} \quad c_3 = -\frac{\begin{vmatrix} b_n & b_{n-6} \\ b_{n-1} & b_{n-7} \end{vmatrix}}{b_{n-1}} \quad \dots \quad (4.38)$$

$$d_1 = -\frac{\begin{vmatrix} b_{n-1} & b_{n-3} \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}{c_1} \quad d_2 = -\frac{\begin{vmatrix} b_{n-1} & b_{n-5} \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}}{c_1} \quad \dots \quad (4.39)$$

$$e_1 = -\frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}}{d_1} \quad e_2 = -\frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ d_1 & d_3 \end{vmatrix}}{d_1} \quad \dots \quad (4.40)$$

Como vemos, as primeiras duas linhas são construídas utilizando directamente os coeficientes da polinomial. Todos os outros são calculados como se indica. Uma vez calculada a rede, o critério de Routh-Hurwitz diz que o número de raízes com parte real positiva é igual ao número de mudanças de sinal dos elementos da 1ª coluna da rede. Para um sistema ser estável é assim necessário que não sejam observadas mudanças de sinal.

Na prática podem aparecer, ao longo dos cálculos, 2 casos que merecem uma atenção especial. Estes são:

- a)** O aparecimento de um zero numa 1ª coluna de uma linha onde existem elementos não nulos. Neste caso podemos aplicar 3 métodos para continuar o cálculo da rede:

1. Substitui-se o 0 por um número positivo pequeno que se faz tender para 0 depois de concluída a rede;
 2. Substitui-se s por $1/x$ na polinomial característica, e construa-se a rede para essa nova polinomial;
 3. Multiplica-se a polinomial por um termo $(s+1)$, introduzindo-se assim uma nova raiz. A rede é construída para essa nova polinomial.
- b) O aparecimento de uma linha com todos os elementos nulos. Isto significa a existência de raízes simétricas relativamente à origem, do tipo $(s-p)$ e $(s+p)$, ou $(s-jw)$ e $(s+jw)$, ou 4 raízes complexas. Para se resolver este problema recorre-se à polinomial correspondente à linha imediatamente superior, que é sempre de ordem par, e cuja solução nos dá as raízes simétricas relativamente à origem. A linha de zeros é substituída pelos coeficientes obtidos derivando essa polinomial.

4.5 Método do lugar das raízes

Mencionámos anteriormente que, no caso de os coeficientes da polinomial característica serem função de um ou mais parâmetros, ser muito trabalhoso determinar analiticamente as raízes da polinomial característica do sistema em malha fechada. A rede de Routh-Hurwitz, introduzida na secção 4.4.1, apenas permite determinar se um sistema é estável ou não.

O método do lugar das raízes, introduzido por Evans em 1948, é um método gráfico que permite esboçar a trajectória dos pólos de um sistema em malha fechada, em função do ganho de um sistema. Nesta secção vamos introduzir este método, fazendo no entanto notar que o lugar das raízes pode ser calculado directamente em Matlab através da função *rlocus*.

4.5.1 Trajectórias das raízes da polinomial característica: exemplo de um sistema de 2ª ordem

Vamos admitir que a função de transferência para a frente de um sistema em malha fechada com realimentação unitária é dada por:

$$G(s) = \frac{k}{s(s+2)} \quad (4.41)$$

A função de transferência em malha fechada é:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k}{s^2 + 2s + k} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}. \quad (4.42)$$

As raízes da polinomial característica são:

$$s_{1,2} = -\xi w_n \pm w_n \sqrt{\xi^2 - 1} = -1 \pm \sqrt{1-k} \quad (4.43)$$

Se $k=0$, as duas raízes estão localizadas em $s=0$ e $s=-2$, os pólos do sistema em malha aberta. Entre $0 < k < 1$ as duas raízes vão-se juntando até que, em $k=1$, temos duas raízes iguais, localizadas em $s_{1,2} = -1$. Se $k>1$, as raízes tornam-se complexas conjugadas, cuja parte real é constante e igual a -1 . A trajectória das raízes, quando k , positivo, varia, está representado na fig. 4.6.

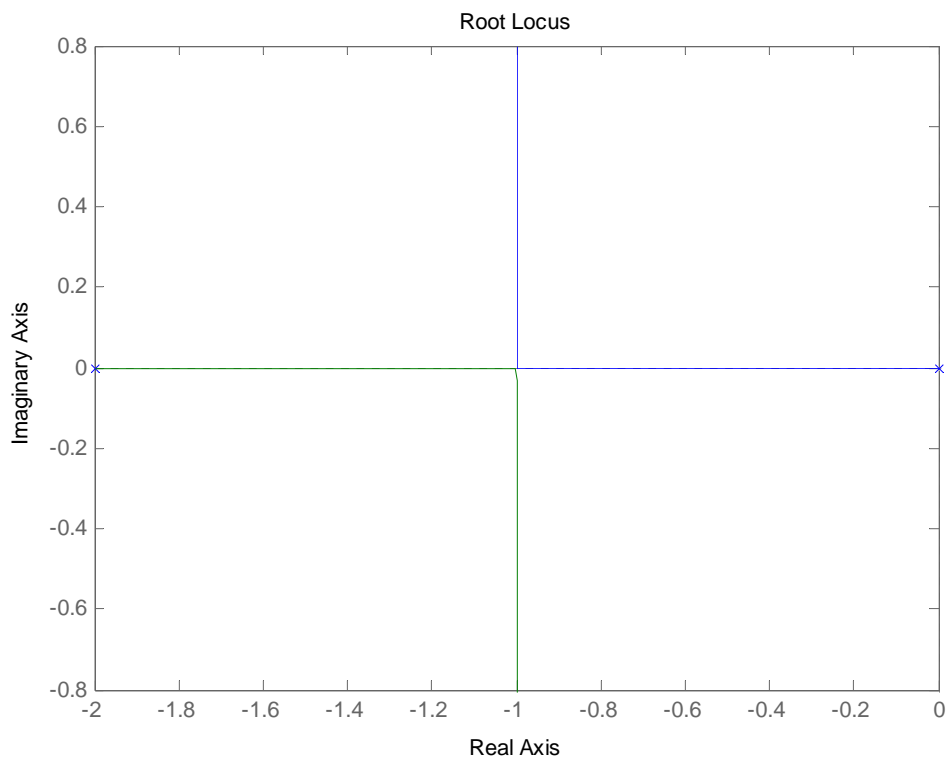


FIGURE 4.6 - Lugar das raízes

Para $k = \infty$, ambas as raízes estarão em ∞ . O sistema é sempre estável para qualquer valor de $k > 0$.

4.5.2 Condição da amplitude e dos ângulos

No caso anterior (sistema em malha fechada de 2ª ordem) foi possível determinar analiticamente a trajectória das raízes (ou o lugar das raízes) mas em sistemas de maior ordem tal tratamento analítico não é possível.

O método proposto por Evans permite esboçar o lugar das raízes de um sistema em malha fechada em função das singularidades da função de transferência em malha aberta, e de um ganho.

Exprimindo a função de transferência em malha aberta, $G(s)H(s)$ na seguinte forma:

$$G(s)H(s) = \frac{k \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)}, \quad (4.44)$$

onde o ganho, k , se designa por sensibilidade em loop estático, Como s é uma variável complexa, $G(s)H(s)$ também o é. Para qualquer valor de k positivo, a seguinte relação deve ser satisfeita:

$$G(s)H(s) = -1 = 1e^{j(1+2x)\pi} \quad x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.45)$$

Podemos separar esta equação em termos de módulos e argumentos:

$$|G(s)H(s)| = 1 \quad (4.46)$$

$$\angle G(s)H(s) = (1 + 2x)\pi \quad x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.47)$$

As equações (4.46) e (4.47) são conhecidas como condição das amplitudes e condição dos ângulos, respectivamente.

Caso k seja negativo, a condição das amplitudes mantém-se, mas a condição dos ângulos muda:

$$\angle G(s)H(s) = (2x)\pi \quad x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.48)$$

Atendendo à forma da função de transferência em malha aberta apresentada na eq. (4.44), as duas condições de ângulos expressas em (4.47) e (4.48) podem ser expressas como:

$$\angle k + \angle(s + z_1) + \dots + \angle(s + z_m) - \angle(s + p_1) - \dots - \angle(s + p_n) = \begin{cases} (1 + 2x)\pi & k > 0 \\ 2x\pi & k < 0 \end{cases} \quad (4.49)$$

De igual modo, a condição das amplitudes pode-se escrever como:

$$|k| = \frac{\prod_{j=1}^n |s + p_j|}{\prod_{i=1}^m |s + z_i|} \quad (4.50)$$

Vamos dar um exemplo da aplicação destas regras. Tomemos o exemplo, para $k > 0$:

$$GH(s) = \frac{k(1 + 0, 2s)}{s(1 + 0, 5s)(1 + 0, 1s)} \quad (4.51)$$

A figura seguinte mostra o lugar das raízes para este exemplo:

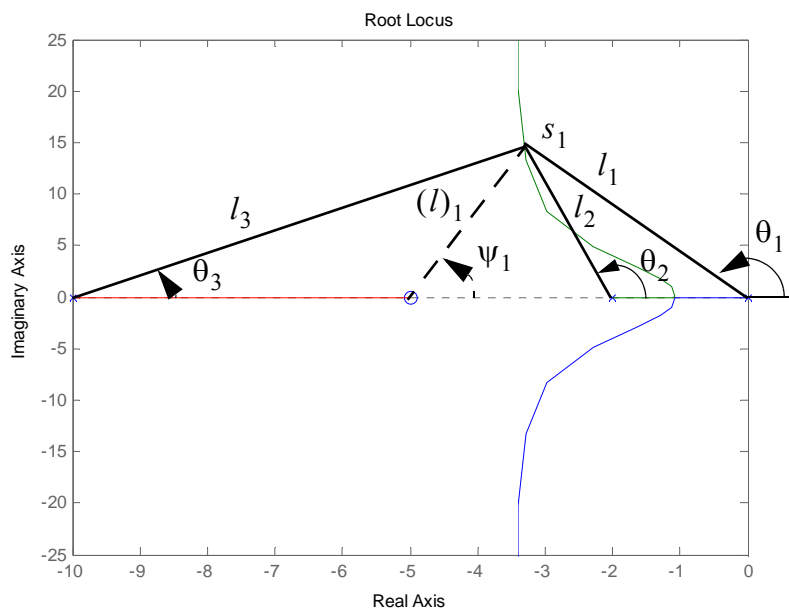


FIGURE 4.7 - Lugar das raízes de (4.51)

Primeiramente devemos exprimir (4.51) na forma expressa em (4.44):

$$GH(s) = \frac{2 \times 10 \times k}{5} \frac{s + 5}{s(s + 2)(s + 10)} = \frac{K(s + 5)}{s(s + 2)(s + 10)} \quad (4.52)$$

O ponto s_1 pertence ao lugar de raízes porque:

$$\psi_1 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 = (1 + 2x)\pi \quad (4.53)$$

Esta é a condição que nos diz se um ponto pertence ou não ao lugar das raízes. Caso pertença, o ganho K é dado por:

$$K = \frac{l_1 l_2 l_3}{(l)_1} \quad (4.54)$$

4.5.3 Regras de construção manual do lugar das raízes

A obtenção do lugar das raízes através da condição de ângulos é o método utilizado para obtenção automática do lugar das raízes. Não é no entanto possível utilizá-la para cálculo manual. Existe no entanto um conjunto de regras que podem ser utilizadas para esboçar manualmente o lugar das raízes. Neste documento não se vão expor todas as regras mas só as mais importantes para um esboço manual. O conjunto de regras completo pode ser consultado em qualquer dos livros recomendados na bibliografia da disciplina.

4.5.3.1 Número de ramos

O número de ramos do lugar das raízes é igual ao número de pólos da função de transferência em malha aberta (n).

4.5.3.2 Simetria

Como as raízes complexas do lugar das raízes aparecem aos pares conjugados, existe uma simetria do lugar das raízes relativamente ao eixo real. Por esta razão só é preciso determinar para o semi-plano superior ou inferior.

4.5.3.3 Início

O lugar das raízes inicia-se nos pontos onde $k=0$. De acordo com (4.50), esses pontos são os pólos de $GH(s)$.

4.5.3.4 Términos

De acordo com (4.50), $k = \infty$ nos zeros da função de transferência em malha aberta. Como pode haver menos zeros do que pólos, $n - m$ ramos irão terminar em $s = \infty$.

4.5.3.5 Lugar das raízes sobre o eixo real

Um par de pólos ou zeros complexos não influencia o lugar das raízes sobre o eixo real dado que a sua contribuição angular total é de 360° . Só as singularidades da função de transferência em malha aberta são importantes para este caso. Nesta perspectiva analisemos a fig. 4.7, considerando $k > 0$.

Para qualquer ponto com $\sigma > 0$, a contribuição angular para qualquer das 4 singularidades é 0° . Como a condição de ângulos nos diz que a contribuição total deverá ser $(1 + 2x)\pi$, então nenhum ponto no eixo real positivo pertence ao lugar das raízes para $k > 0$.

Entre $-2 < \sigma < 0$, só 1 singularidade, o pólo em $s = 0$ tem uma contribuição não nula, neste caso de $-\pi$. Note que os ângulos são positivos se forem no sentido contrário aos ponteiros do relógio (neste caso a contribuição angular é de π , mas como se trata de um pólo a sua contribuição é negativa, de acordo com (4.49).

Entre $-5 < \sigma < -2$ os dois pólos em $s = 0$ e $s = -2$ têm uma contribuição não nula. A contribuição total é de -2π , e portanto nenhum ponto deste segmento de recta pertence ao lugar das raízes.

Entre $-10 < \sigma < -5$ os dois pólos em $s = 0$ e $s = -2$ e o zero em $s = -5$ têm uma contribuição não nula. A contribuição total é de $-\pi - \pi + \pi = -\pi$, e portanto os pontos dentro desse segmento de recta pertencem ao lugar das raízes.

Finalmente entre $-\infty < \sigma < -10$, todas as singularidades têm uma contribuição não nula. Ela é de: $-\pi - \pi + \pi - \pi = 0$ e por consequência não pertencem ao lugar das raízes.

Se considerássemos $k < 0$ o lugar das raízes sobre o eixo real seria o complementar ao atrás deduzido.

Assim esta regra pode ser formalizada do seguinte modo: um ponto sobre o eixo real pertence ao lugar das raízes se existir à sua direita um número ímpar de singularidades (pólos ou zeros) para $k > 0$, ou um número par para $k < 0$.

4.5.3.6 Assíntotas quando $s \rightarrow \infty$

Já vimos na regra de termos do lugar das raízes (secção 4.5.3.4) que quando o número de pólos excede o número de zeros, a diferença $n - m$ vai morrer em ∞ . Esta regra vai-nos explicitar as assíntotas para esses ramos.

Tomando o limite de (4.44), temos

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{k \prod_{i=1}^n (s + z_i)}{\prod_{j=1}^m (s + p_j)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{k}{s^{n-m}} = -1. \quad (4.55)$$

Utilizando agora a condição de amplitudes e de ângulos para (4.55), temos:

$$|-k| = |s^{n-m}| \quad (4.56)$$

$$\angle(-k) = \angle(s^{n-m}) = \begin{cases} (1 + 2x)\pi & k > 0 \\ 2x\pi & k < 0 \end{cases} \quad (4.57)$$

Escrevendo (4.57) de outra forma temos:

$$\varphi = \begin{cases} \frac{(1 + 2x)\pi}{n - m} & k > 0 \\ \frac{2x\pi}{n - m} & k < 0 \end{cases} \quad (4.58)$$

Há assim um número de assíntotas que é igual à diferença entre o número de pólos e de zeros, e para k suficientemente grande, tangentes aos ângulos dados por (4.58). Quanto ao ponto em que estas assíntotas cruzam o eixo real, ele é dado por:

$$\sigma_0 = \frac{\sum_{j=1}^n (-p_j) - \sum_{i=1}^m (-z_i)}{n - m}. \quad (4.59)$$

4.5.3.7 Pontos de saída ou entrada no eixo real

Já vimos que o lugar das raízes se inicia nos pólos e termina nos zeros da função de transferência em malha aberta, ou em ∞ . Se tivermos uma situação em que existem 2 pólos ou zeros consecutivos no eixo real, isto implica que a trajectória do lugar das raízes tem que sair ou chegar ao eixo real, respectivamente. Esta situação é retratada em a) e b) da fig. 4.8.

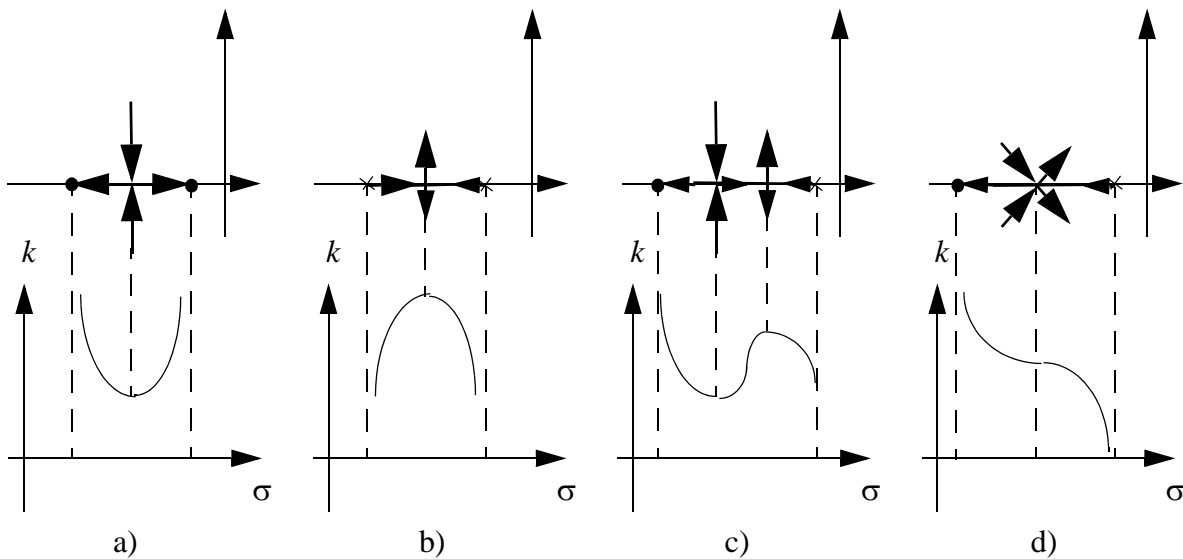


FIGURE 4.8 - Pontos de saída e chegada ao eixo real

Conforme se pode ver na figura estas situações reflectem-se em pontos de mínimos ou máximos do ganho. Para se determinarem estes pontos, podemos exprimir (4.45) da seguinte forma:

$$-k = W(s) = \frac{\prod_{j=1}^n (s + p_j)}{\prod_{i=1}^m (s + z_i)} \quad (4.60)$$

Os máximos ou mínimos podem ser determinados através da solução da equação (4.61):

$$\frac{d}{ds} W(s) = 0 \quad (4.61)$$

Deve ser salientado que a solução desta última equação dá-nos as soluções para $k > 0$ e para $k < 0$ simultaneamente, bem como os pontos de saída como de chegada ao eixo real. Compete

ao utilizador, de acordo com o resultado da regra de lugar de raízes sobre o eixo real, identificar as várias soluções.

Os troços do lugar de raízes sobre o eixo real nem sempre coincidem com um único ramo, conforme é ilustrado em c) e d) da fig. 4.8. O último caso pode ser facilmente confirmado pois, para o ponto de saída, as 3 primeiras derivadas (no caso geral as $r-1$, sendo r o número de ramos) de $W(s)$ são nulas para esse ponto.

4.5.3.8 Intersecção do lugar das raízes com o eixo imaginário

Caso o sistema possa ser instável para uma gama de valores de k , esta situação acontece quando um ramo sobre o eixo real cruza o eixo imaginário, ou quando um par de ramos cruza o eixo imaginário. A 1ª situação é identificada através do lugar das raízes sobre o eixo real, enquanto a 2ª é identificada através do aparecimento de uma linha de zeros na rede de Routh Hurwitz (ver secção 4.4.1). Conforme indicado nessa secção, os pontos de cruzamento podem ser obtidos pela solução da equação auxiliar.

4.5.3.9 Conservação da soma do lugar das raízes

Partindo de

$$G(s)H(s) = \frac{k \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)}, \quad (4.62)$$

a equação característica tem a forma:

$$1 + G(s)H(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (s + r_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)}, \quad (4.63)$$

Se substituirmos (4.62) em (4.63), ficamos com:

$$\prod_{j=1}^n (s + p_j) + k \prod_{i=1}^m (s + z_i) = \prod_{k=1}^n (s + r_k) \quad (4.64)$$

Se agora expandirmos cada um dos termos (ver (4.37)), ficamos com:

$$\left(s^n - s^{n-1} \sum_{j=1}^n p_j + \dots \right) + k \left(s^m - s^{m-1} \sum_{i=1}^m z_i + \dots \right) = \left(s^n - s^{n-1} \sum_{k=1}^n r_k + \dots \right) \quad (4.65)$$

Se agora $n \geq m + 2$, isto é, se a função de transferência em malha aberta tiver pelo menos mais dois pólos que zeros, como o 2º termo do lado esquerdo de (4.65) só vai ter influência para os coeficientes relacionados com os últimos m termos, podemos escrever para o termo de ordem $n-1$:

$$\sum_{j=1}^n p_j = \sum_{k=1}^n r_k \quad (4.66)$$

Esta última equação, conhecida pela regra de Grant, diz-nos que, no caso de $n \geq m + 2$, a soma dos pólos em malha aberta é igual à soma dos pólos em malha fechada.