

---

## Capítulo 2

# Alocação de Pólos e Projeto de Observadores de Estado para Sistemas Contínuos no Tempo

---

### 2-1 INTRODUÇÃO\*

Neste capítulo será primeiro apresentada a técnica de alocação de pólos para o projeto de sistemas de controle a malha fechada. Em seguida, será discutido o projeto de observadores de estado. Este capítulo está relacionado somente aos sistemas contínuos no tempo. Os sistemas de controle discretos no tempo são tratados separadamente no Cap. 3.

#### Projeto através da alocação de pólos

Na abordagem convencional para o projeto de sistemas de controle com uma entrada e uma saída, projeta-se o controlador (compensador) de modo que os pólos dominantes a malha fechada apresentem um determinado coeficiente de amortecimento  $\zeta$  e uma freqüência natural não amortecida  $\omega_n$ , fixados antecipadamente. Nessa abordagem, a ordem do sistema pode ser aumentada em 1 ou 2 graus, a menos que ocorra um cancelamento de pólos e zeros. Note-se que esta abordagem considera que os efeitos nas respostas devidos aos pólos não-dominantes a malha fechada sejam negligíveis.

Em vez de especificar somente os pólos dominantes a malha fechada (abordagem de projeto convencional), a técnica da alocação de pólos especifica todos os pólos a malha fechada. Os pólos a malha fechada desejados são determinados baseando-se nas exigências do regime transitório da resposta e/ou na resposta em freqüência. Através da escolha de uma matriz de ganho apropriada para a retroação de estado, é possível forçar o sistema a ter pólos a malha fechada nas localizações desejadas. Existe, no entanto, um custo associado à alocação de todos os pólos a malha fechada, uma vez que tal colocação requer a possibilidade de medição de todas as variáveis de estado ou, então, a inclusão de um observador de estado no sistema. Há também uma exigência relacionada com o sistema para que os pólos a malha fechada possam ser situados em localizações arbitrariamente escolhidas. A exigência é a de que o sistema seja completamente controlável.\*\*

---

\*Na tradução de programas serão utilizados livremente, nos comentários, caracteres “especiais”, tais como ã, à, á, é etc. Ao se implementar o programa com os comentários no MATLAB, deve-se ter o cuidado em trocar tais símbolos para os caracteres correspondentes em língua inglesa. Como exemplo, o ç deve ser escrito como c. A opção de usar os caracteres acentuados objetiva aumentar a legibilidade dos programas. (N. do T.)

\*\**State controllable.* (N. do T.)

Na abordagem da alocação de pólos para o projeto dos sistemas de controle, admite-se que todas as variáveis de estado estejam disponíveis para realimentação. Na prática, no entanto, não é sempre assim. Por conseguinte, precisa-se estimar as variáveis de estado indisponíveis. É importante notar que se deve evitar diferenciar uma variável de estado para gerar uma outra. A derivação de um sinal sempre diminui a relação sinal/ruído\* porque o ruído geralmente varia mais rapidamente do que o sinal de comando. Em algumas situações, a relação sinal/ruído pode ser bastante atenuada em um único processo de derivação. Existem métodos disponíveis para estimar as variáveis de estado não-mensuráveis, sem envolver um processo de derivação. A estimativa das variáveis de estado não-mensuráveis é comumente denominada de *observação*. Um dispositivo (ou um programa de computador) que estime ou observe as variáveis de estado é chamado de um *observador de estado*, ou, simplesmente, um *observador*. Se o observador de estado observa todas as variáveis de estado do sistema, independentemente de algumas variáveis de estado estarem disponíveis para medição direta, ele é chamado de um *observador de estado de ordem total*. Há situações em que isso não será preciso, pois somente será necessária a observação das variáveis de estado não-mensuráveis, mas não daquelas que sejam diretamente acessíveis para medida. Por exemplo, como as variáveis de saída são observáveis e estão linearmente relacionadas às variáveis de estado, não há necessidade de observar todas as variáveis de estado, mas somente  $n - m$  delas, onde  $n$  é a dimensão do vetor de estado e  $m$  é a dimensão do vetor de saída. O observador de estado que observa somente o número mínimo de variáveis de estado é chamado *observador de estado de ordem mínima* ou, simplesmente, *observador de ordem mínima*. Neste capítulo serão discutidos tanto o observador de ordem total quanto o de ordem mínima.

Note-se que os observadores de estado podem ser projetados se e somente se a condição de observabilidade for satisfeita. Em muitos casos práticos, o vetor de estado observado é usado na retroação do estado para gerar o vetor de controle desejado.

Na abordagem da alocação de pólos, o projetista deseja examinar vários conjuntos diferentes de pólos a malha fechada e determinar as matrizes  $\mathbf{K}$ , correspondentes, de ganho da retroação de estado. Após realizar, em computador, as simulações do sistema e examinar as curvas de resposta, escolhe-se a matriz  $\mathbf{K}$  que forneça o melhor desempenho global do sistema. O critério de melhor desempenho global depende da situação particular, incluindo considerações econômicas. Comentários semelhantes se aplicam ao projeto dos observadores de estado.

### Estrutura do capítulo

A estrutura deste capítulo é a seguinte: a Seção 2-1 apresentou material introdutório. A Seção 2-2 discute a técnica da alocação de pólos. São deduzidas as equações para a determinação da matriz de ganho da retroação de estado  $\mathbf{K}$ . A Seção 2-3 apresenta o estudo de casos relacionados ao projeto de servossistemas tipo 1. A Seção 2-4 trata dos observadores de estado de ordem total. São dadas as equações para a determinação da matriz de ganho  $\mathbf{K}_e$  para observadores de estado de ordem total. Finalmente, a Seção 2-5 discute o observador de estado de ordem mínima; lá, são deduzidas as equações para a matriz de ganho  $\mathbf{K}_e$  relativa a observadores de estado de ordem mínima. São apresentados programas MATLAB para solucionar problemas de alocação de pólos e projetar observadores de estado. Todos os programas MATLAB são escritos de forma que o leitor possa acompanhar facilmente cada passo.

## 2-2 ALOCAÇÃO DE PÓLOS

Considere-se um sistema de controle

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (2-1)$$

onde  $\mathbf{x}$  = vetor de estado (vetor de ordem  $n$ )

$u$  = sinal de controle (escalar)

$\mathbf{A}$  = matriz constante  $n \times n$

$\mathbf{B}$  = matriz constante  $n \times 1$

Escolhe-se o sinal de controle como sendo

$$u = -\mathbf{Kx} \quad (2-2)$$

Isto significa que o sinal de controle é determinado pelo valor instantâneo do estado. Um tal esquema é chamado retroação de estado. A matriz  $\mathbf{K}$ ,  $1 \times n$ , é chamada de matriz de ganho da retroação de estado. Na análise seguinte, admite-se a inexistência de restrições sobre o valor de  $u$ .

---

\* *Signal-to-noise ratio.* (N. do T.)

Substituindo a Eq. (2-2) na Eq. (2-1), tem-se:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t)$$

A solução desta equação é dada por

$$\mathbf{x}(t) = e^{(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})t} \mathbf{x}(0) \quad (2-3)$$

onde  $\mathbf{x}(0)$  é o estado inicial provocado por perturbações externas. As características da estabilidade e do regime transitório da resposta são determinadas pelos autovalores da matriz  $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ . Se a matriz  $\mathbf{K}$  for escolhida adequadamente, a matriz  $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$  pode ser tornada uma matriz assintoticamente estável e, para qualquer  $\mathbf{x}(0) \neq \mathbf{0}$ , é possível fazer  $\mathbf{x}(t)$  se aproximar de  $\mathbf{0}$  à medida que o valor de  $t$  tenda para infinito. Os autovalores da matriz  $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$  são chamados os pólos do regulador. Se esses pólos estiverem situados no semiplano da esquerda do plano  $s$ ,  $\mathbf{x}(t)$  se aproxima de  $\mathbf{0}$  à medida que  $t$  se aproxima do infinito. O problema de posicionar os pólos em localizações desejadas é o problema da alocação de pólos.

A Fig. 2-1(a) mostra o sistema definido pela Eq. (2-1). É um sistema de controle a malha aberta, porque o estado  $\mathbf{x}$  não retorna para o sinal de controle  $u$ . A Fig. 2-1(b) mostra um sistema com retroação de estado. É um sistema de controle a malha fechada porque o estado  $\mathbf{x}$  retorna para o sinal de controle  $u$ .

É possível provar que a alocação arbitrária de pólos para um dado sistema é possível se e somente se o sistema for totalmente controlável.

### Embasamento teórico

Serão apresentadas duas abordagens para obter a matriz de ganho da retroação de estado  $\mathbf{K}$ . A primeira consiste em usar uma matriz de transformação  $\mathbf{T}$  para passar a equação de estado para a forma canônica controlável e comparar a equação característica desejada e a equação característica, envolvendo o ganho  $\mathbf{K}$ . Igualando-se os coeficientes dos termos correspondentes das duas equações, a matriz de ganho da retroação de estado  $\mathbf{K}$  pode ser determinada.

A segunda abordagem está baseada no teorema de Cayley-Hamilton, que estabelece que a matriz  $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} = \hat{\mathbf{A}}$  satisfaz sua própria equação característica. Modificando-se o polinômio característico matricial  $\phi(\hat{\mathbf{A}})$ , é possível deduzir uma equação para a matriz de ganho  $\mathbf{K}$ . A equação obtida com base nessa abordagem é comumente chamada de fórmula de Ackermann.

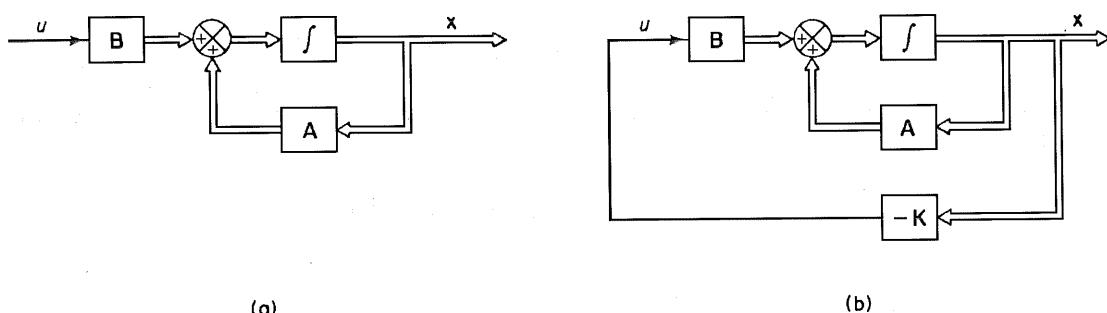
No que se segue, serão apresentados os detalhes de dedução da matriz de ganho de retroação de estado  $\mathbf{K}$ , uma vez que um bom conhecimento dessa dedução é necessário para compreender os programas MATLAB deste capítulo.

Nas discussões que se seguem, admite-se que o sistema é completamente controlável. Esta é a condição necessária e suficiente para a alocação arbitrária de pólos em sistemas lineares e invariantes no tempo. Para uma demonstração, ver, por exemplo, a Referência 4 listada no final deste livro.

#### Método baseado na passagem para uma forma canônica controlável

A equação de sistema e a equação de controle com que se lida são dadas pelas Eqs. (2-1) e (2-2), respectivamente. Defina-se uma matriz de transformação  $\mathbf{T}$  por

$$\mathbf{T} = \mathbf{MW} \quad (2-4)$$



**Fig. 2.1**

onde  $\mathbf{M}$  é a matriz de controlabilidade

$$\mathbf{M} = [\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \cdots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (2-5)$$

e  $\mathbf{W}$  é dada por

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-6)$$

onde os  $a_i$ 's são coeficientes do polinômio característico\*

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$$

Defina-se um novo vetor de estado  $\hat{\mathbf{x}}$  por

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}$$

Uma vez que o sistema é suposto ser completamente controlável, o posto (rank)\*\* da matriz de controlabilidade  $\mathbf{M}$  é  $n$ . Por conseguinte, a inversa da matriz  $\mathbf{T}$  existe e a equação (2-1) pode ser modificada para

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{Bu} \quad (2-7)$$

onde

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \quad (2-8)$$

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2-9)$$

Seja escolhido um conjunto de autovalores desejáveis  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ . A equação característica desejada se torna

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_n) = s^n + \alpha_1s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n \quad (2-10)$$

Seja

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{KT} = [\delta_n \quad \delta_{n-1} \quad \cdots \quad \delta_1] \quad (2-11)$$

Quando  $u = -\hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{Kt}\hat{\mathbf{x}}$  é usado para controlar o sistema descrito pela Eq. (2-7), a equação do sistema se torna

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{BKT}\hat{\mathbf{x}}$$

\*O termo *polinomial característica* também é usado na literatura. (N. do T.)

\*\*O termo *posto* também é usado na literatura. (N. do T.)

A equação característica é

$$|sI - T^{-1}AT + T^{-1}BKT| = 0$$

Esta equação característica é a mesma que a equação característica para o sistema definido pela Eq. (2-1), quando  $u = -Kx$  é usado como sinal de controle. Isto pode ser visto como se segue: Tendo em vista que

$$\dot{x} = Ax + Bu = (A - BK)x$$

a equação característica para este sistema é

$$|sI - A + BK| = |T^{-1}(sI - A + BK)T| = |sI - T^{-1}AT + T^{-1}BKT|$$

Simplifique-se, agora, a equação característica do sistema sob a forma canônica controlável. Usando as Eqs. (2-8), (2-9) e (2-11), tem-se:

$$\begin{aligned} & |sI - T^{-1}AT + T^{-1}BKT| \\ &= \left| sI - \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [\delta_n & \delta_{n-1} & \cdots & \delta_1] \right| \\ &= \left| \begin{array}{cccc} s & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & s & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n + \delta_n & a_{n-1} + \delta_{n-1} & \cdots & s + a_1 + \delta_1 \end{array} \right| \\ &= s^n + (a_1 + \delta_1)s^{n-1} + \cdots + (a_{n-1} + \delta_{n-1})s + (a_n + \delta_n) = 0 \end{aligned} \quad (2-12)$$

Esta é a equação característica para o sistema com retroação de estado. Por conseguinte, tem que ser igual à Eq. (2-10), a equação característica desejada. Igualando os coeficientes das potências iguais de  $s$ , obtém-se:

$$a_1 + \delta_1 = \alpha_1$$

$$a_2 + \delta_2 = \alpha_2$$

⋮

$$a_n + \delta_n = \alpha_n$$

Resolvendo as equações precedentes para os  $\delta_i$ 's e substituindo-os na Eq. (2-11) resulta

$$\begin{aligned} K &= \hat{K}T^{-1} = [\delta_n & \delta_{n-1} & \cdots & \delta_1]T^{-1} \\ &= [\alpha_n - a_n : \alpha_{n-1} - a_{n-1} : \cdots : \alpha_2 - a_2 : \alpha_1 - a_1]T^{-1} \end{aligned} \quad (2-13)$$

Por conseguinte, se o sistema é completamente controlável, todos os autovalores podem ser alocados nas posições desejadas escolhendo-se a matriz  $K$  de acordo com a Eq. (2-13).

Com base nas deduções acima para a matriz  $K$ , os passos para o projeto com alocação de pólos podem ser especificados como se segue:

*Passo 1:* Verificar a matriz de controlabilidade. O posto (rank) da matriz de controlabilidade deve ser  $n$ . Caso contrário, a Eq. (2-13) não poderá ser usada.

*Passo 2:* A partir do polinômio característico da matriz  $A$ ,

$$|sI - A| = s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$$

determinar os valores de  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

*Passo 3:* Determinar a matriz de transformação  $\mathbf{T}$  que transforma a equação de estado do sistema numa forma canônica controlável. (Se a dada equação do sistema já estiver sob a forma canônica controlável,  $\mathbf{T} = \mathbf{I}$ ) não é necessário escrever a equação de estado do sistema sob a forma canônica controlável. Tudo do que se precisa aqui é encontrar a matriz  $\mathbf{T}$ . A matriz de transformação  $\mathbf{T}$  é dada pela Eq. (2-4), ou

$$\mathbf{T} = \mathbf{MW}$$

onde  $\mathbf{M}$  é dada pela Eq. (2-5) e  $\mathbf{W}$  é dada pela Eq. (2-6).

*Passo 4:* Usando os autovalores desejados (pólos a malha fechada desejados), escrever o polinômio característico desejado:

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n$$

e determinar os valores de  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ .

*Passo 5:* A matriz de ganho da retroação de estado  $\mathbf{K}$  requerida pode ser determinada pela seguinte equação:

$$\mathbf{K} = [\alpha_n - a_n : \alpha_{n-1} - a_{n-1} : \cdots : \alpha_2 - a_2 : \alpha_1 - a_1] \mathbf{T}^{-1}$$

*Fórmula de Ackermann*

A equação do sistema e a equação de controle consideradas aqui são dadas pelas Eqs. (2-1) e (2-2), respectivamente. Substituindo a Eq. (2-2) na Eq. (2-1), obtém-se:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}$$

Defina-se:

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{BK}$$

A equação característica desejada é

$$\begin{aligned} |s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}| &= |s\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}| = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_n) \\ &= s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0 \end{aligned}$$

Defina-se:

$$\phi(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n$$

Então,

$$\phi(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + \alpha_1 \mathbf{A}^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} \mathbf{A} + \alpha_n \mathbf{I} \quad (2-14)$$

Uma vez que o Teorema de Cayley-Hamilton estabelece que  $\hat{\mathbf{A}}$  satisfaz a sua própria equação característica, tem-se:

$$\phi(\hat{\mathbf{A}}) = \hat{\mathbf{A}}^n + \alpha_1 \hat{\mathbf{A}}^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} \hat{\mathbf{A}} + \alpha_n \mathbf{I} = \mathbf{0} \quad (2-15)$$

Será utilizada a Eq. (2-15) para deduzir a fórmula de Ackermann. Para simplificar a dedução, será considerado o caso particular onde  $n = 3$ . (Para qualquer outro inteiro positivo  $n$ , a dedução seguinte pode ser facilmente estendida.)

Considere as seguintes identidades:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}$$

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{BK}$$

$$\hat{\mathbf{A}}^2 = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})^2 = \mathbf{A}^2 - \mathbf{ABK} - \mathbf{BKA}$$

$$\hat{\mathbf{A}}^3 = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})^3 = \mathbf{A}^3 - \mathbf{A}^2 \mathbf{BK} - \mathbf{ABKA} - \mathbf{BKA}^2$$

Multiplicando em ordem as equações precedentes por  $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_0$  (onde  $\alpha_0 = 1$ ), respectivamente, e adicionando os resultados, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 & \alpha_3 \mathbf{I} + \alpha_2 \hat{\mathbf{A}} + \alpha_1 \hat{\mathbf{A}}^2 + \hat{\mathbf{A}}^3 \\
 &= \alpha_3 \mathbf{I} + \alpha_2(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) + \alpha_1(\mathbf{A}^2 - \mathbf{ABK} - \mathbf{BK}\hat{\mathbf{A}}) + \mathbf{A}^3 - \mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{K} \\
 &\quad - \mathbf{ABK}\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{BK}\hat{\mathbf{A}}^2 \\
 &= \alpha_3 \mathbf{I} + \alpha_2 \mathbf{A} + \alpha_1 \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 - \alpha_2 \mathbf{BK} - \alpha_1 \mathbf{ABK} - \alpha_1 \mathbf{BK}\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{K} \\
 &\quad - \mathbf{ABK}\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{BK}\hat{\mathbf{A}}^2
 \end{aligned} \tag{2-16}$$

Referindo à Eq. (2-15), resulta:

$$\alpha_3 \mathbf{I} + \alpha_2 \hat{\mathbf{A}} + \alpha_1 \hat{\mathbf{A}}^2 + \hat{\mathbf{A}}^3 = \phi(\hat{\mathbf{A}}) = \mathbf{0}$$

Igualmente, também se tem

$$\alpha_3 \mathbf{I} + \alpha_2 \mathbf{A} + \alpha_1 \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 = \phi(\mathbf{A}) \neq \mathbf{0}$$

Substituindo as duas últimas equações na Eq. (2-16), obtém-se

$$\phi(\hat{\mathbf{A}}) = \phi(\mathbf{A}) - \alpha_2 \mathbf{BK} - \alpha_1 \mathbf{BK}\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{BK}\hat{\mathbf{A}}^2 - \alpha_1 \mathbf{ABK} - \mathbf{ABK}\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{K}$$

Como  $\phi(\hat{\mathbf{A}}) = \mathbf{0}$ , obtemos

$$\begin{aligned}
 \phi(\mathbf{A}) &= \mathbf{B}(\alpha_2 \mathbf{K} + \alpha_1 \mathbf{K}\hat{\mathbf{A}} + \mathbf{K}\hat{\mathbf{A}}^2) + \mathbf{AB}(\alpha_1 \mathbf{K} + \mathbf{K}\hat{\mathbf{A}}) + \mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{K} \\
 &= [\mathbf{B} : \mathbf{AB} : \mathbf{A}^2\mathbf{B}] \begin{bmatrix} \alpha_2 \mathbf{K} + \alpha_1 \mathbf{K}\hat{\mathbf{A}} + \mathbf{K}\hat{\mathbf{A}}^2 \\ \alpha_1 \mathbf{K} + \mathbf{K}\hat{\mathbf{A}} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2-17}$$

Como o sistema é totalmente controlável, o inverso da matriz de controlabilidade

$$[\mathbf{B} : \mathbf{AB} : \mathbf{A}^2\mathbf{B}]$$

existe. Premultiplicando o inverso da matriz de controlabilidade em ambos os lados da Eq. (2-17), obtém-se

$$[\mathbf{B} : \mathbf{AB} : \mathbf{A}^2\mathbf{B}]^{-1} \phi(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \alpha_2 \mathbf{K} + \alpha_1 \mathbf{K}\hat{\mathbf{A}} + \mathbf{K}\hat{\mathbf{A}}^2 \\ \alpha_1 \mathbf{K} + \mathbf{K}\hat{\mathbf{A}} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix}$$

Premultiplicando ambos os lados desta última equação por  $[0 \ 0 \ 1]$ , resulta

$$[0 \ 0 \ 1][\mathbf{B} : \mathbf{AB} : \mathbf{A}^2\mathbf{B}]^{-1} \phi(\mathbf{A}) = [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} \alpha_2 \mathbf{K} + \alpha_1 \mathbf{K}\hat{\mathbf{A}} + \mathbf{K}\hat{\mathbf{A}}^2 \\ \alpha_1 \mathbf{K} + \mathbf{K}\hat{\mathbf{A}} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} = \mathbf{K}$$

que pode ser reescrita como

$$\mathbf{K} = [0 \ 0 \ 1][\mathbf{B} : \mathbf{AB} : \mathbf{A}^2\mathbf{B}]^{-1} \phi(\mathbf{A})$$

Esta última equação fornece a matriz de ganho da retroação de estado  $\mathbf{K}$ .

Para um inteiro positivo arbitrário  $n$ , vem:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K} &= [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1][\mathbf{B} : \mathbf{AB} : \cdots : \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]^{-1} \phi(\mathbf{A}) \\
 &= [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1]\mathbf{M}^{-1} \phi(\mathbf{A})
 \end{aligned} \tag{2-18}$$

onde

$$\mathbf{M} = [\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \cdots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

A equação (2-18) é conhecida como a fórmula de Ackermann para a determinação da matriz de ganho de retroação de estado  $\mathbf{K}$ .

---

#### EXEMPLO 2-1

Um sistema regulador possui um processo definido por

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Definem-se as variáveis de estado como

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{x}_1$$

$$x_3 = \dot{x}_2$$

Pelo uso do controle da retroação de estado  $u = -\mathbf{Kx}$ , é desejado colocar os pólos de malha fechada em  $s = \mu_i (i = 1, 2, 3)$ , onde

$$\mu_1 = -2 + j2\sqrt{3}, \quad \mu_2 = -2 - j2\sqrt{3}, \quad \mu_3 = -10$$

Determine a matriz de ganho de retroação de estado necessária  $\mathbf{K}$ .

As equações de estado para o sistema são

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 0u$$

Por conseguinte,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0], \quad \mathbf{D} = [0]$$

Defina-se a matriz de controlabilidade como  $\mathbf{M}$ .

$$\mathbf{M} = [\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \mathbf{A}^2\mathbf{B}]$$

O primeiro passo no projeto é encontrar o posto (rank) da matriz  $\mathbf{M}$ . Neste caso

$$\text{rank } \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & -60 \\ 10 & -60 & 250 \end{bmatrix} = 3$$

O próximo passo é encontrar os coeficientes  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$  da equação característica  $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$ . Isto pode ser feito entrando-se no computador com o comando:

$$\mathbf{P} = \text{poly}(\mathbf{A})$$

Os coeficientes irão aparecer na tela como se segue:

$$A = [0 \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ 1; -6 \ -11 \ -6];$$

$$P = \text{poly}(A)$$

$$P =$$

$$1.0000 \quad 6.0000 \quad 11.0000 \quad 6.0000$$

Por conseguinte,  $a_1 = a1 = P2$ ,  $a_2 = a2 = P3$  e  $a_3 = a3 = P4$ .

Defina-se a matriz  $W$ , onde

$$W = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Em seguida, multipliquem-se  $M$  e  $W$ , o que pode ser realizado facilmente com o MATLAB.

$$T = MW$$

Obtenha-se, agora, a equação característica desejada. Isto pode ser feito primeiro definindo a matriz  $J$  tal que

$$J = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + j2\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -2 - j2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

e então usando o comando *poly(J)*, como se segue:

$$J = [-2+2*\sqrt(3)*i \ 0 \ 0; 0 \ -2-2*\sqrt(3)*i \ 0; 0 \ 0 \ -10];$$

$$Q = \text{poly}(J)$$

$$Q =$$

$$1.0000 \quad 14.0000 \quad 56.0000 \quad 160.0000$$

Por conseguinte tem-se:

$$\alpha_1 = aa1 = Q2, \quad \alpha_2 = aa2 = Q3, \quad \alpha_3 = aa3 = Q4$$

(Usa-se  $\alpha_i$  em lugar de  $\alpha_{i,i}$ )

A matriz de ganho de retroação de estado  $K$  pode ser determinada a partir de

$$K = [\alpha_3 - a_3 \ \alpha_2 - a_2 \ \alpha_1 - a_1]T^{-1}$$

$$= [aa3 - a3 \ aa2 - a2 \ aa1 - a1]T^{-1}$$

Dois programas MATLAB para resolver este exemplo são fornecidos. O Programa MATLAB 2-1 utiliza a matriz de transformação  $T$  e o Programa MATLAB 2-2 está baseado na fórmula de Ackermann.

### Programa MATLAB 2-1

```
% ----- Alocação de pólos -----
```

```
% ***** Determinação da matriz de ganho da retroação de estado
% através do uso da matriz de transformação T *****

```

```
% ***** Dar entrada às matrizes A e B *****

```

```
A = [0 1 0; 0 1;-6 -11 -6];
B = [0;0;10];
```

```
% ***** Obter os coeficientes do polinômio característico
% |s| - A|. listo pode ser feito através do comando
% poly(A) *****
```

```
JA = poly(A)
```

```
JJA =
```

```
1.0000 6.0000 11.0000 6.0000
```

```
a1= JA(2); a2 = JA(3); a3 = JA(4);
```

```
% ***** Definir a matriz de controlabilidade M *****
```

```
M = [B A*B A^2*B];
```

```
% ***** Verificar o posto (rank) da matriz M *****
```

```
rank(M)
```

```
ans =
```

```
3
```

```
% ***** Como o posto (rank) da matriz é 3, a alocação arbitrária
% de pólos é possível *****
```

```
% ***** Definir as matrizes W e I como abaixo *****
```

```
W = [a2 a1 1;a1 1 0;1 0 0];
T = M*W;
```

```
% ***** Obter o polinômio característico desejado pela
% definição da seguinte matriz J e digitando-se o comando
% poly(J) *****
```

```
J = [-2+2*sqrt(3)*i 0 0
      0 -2-2*sqrt(3)*i 0
      0 0 -10];
```

```
JJ = poly(J)
```

```
JJ =
1.0000 14.0000 56.0000 160.0000
```

```
aa1 = JJ(2); aa2 = JJ(3); aa3 = JJ(4);
```

```
% ***** A matriz de ganho da retroação de estado pode ser dada por *****
```

```
K = [aa3-a3 aa2-a2 aa1-a1]*(inv(T))
```

```

K =
15.4000 4.5000 0.8000
% ***** Então, k1, k2 e k3 são dados por *****
k1 = K(1), k2 = K(2), k3 = K(3)
k1 =
15.4000
k2 =
4.5000
k3 =
0.8000

```

Determina-se agora a matriz de ganho de retroação de estado **K** pelo uso da fórmula de Ackermann. Esta fórmula requer o cômputo do polinômio característico matricial  $\phi(\mathbf{A})$  dado pela Eq. (2-14), onde, para este sistema,

$$\phi(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^3 + \alpha_1 \mathbf{A}^2 + \alpha_2 \mathbf{A} + \alpha_3 \mathbf{I}$$

Em MATLAB, polyvalm computa o polinômio matricial  $\phi(\mathbf{A})$ . Para o dado **J**, poly(**J**) calcula os coeficientes do polinômio característico, como se segue:

```

J =
-2.0000 + 3.4641i 0 0
0 -2.0000 - 3.4641i 0
0 0 -10.0000
poly(J)
ans =
1.0000 14.0000 56.0000 160.0000

```

Para

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

o comando polyvalm(poly(**J**),**A**) calcula o seguinte  $\phi(\mathbf{A})$ :

$$\phi(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^3 + 14\mathbf{A}^2 + 56\mathbf{A} + 160\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 154 & 45 & 8 \\ -48 & 66 & -3 \\ 18 & -15 & 84 \end{bmatrix}$$

Com efeito,

```
polyvalm(poly(J),A)
ans =
154.0000    45.0000    8.0000
-48.0000    66.0000   -3.0000
18.0000   -15.0000    84.0000
```

#### Programa MATLAB 2-2

```
% ----- Alocação de pólos -----
% ***** Determinação da matriz de ganho de retroação de estado K
% através do uso da fórmula de Ackermann *****
% ***** Entrar com as matrizes A e B *****
A = [0 1 0;0 0 1;-6 -11 -6];
B = [0;0;10];
% ***** Definir a matriz de controlabilidade M *****
M = [B A*B A^2*B];
% ***** Verificar o posto (rank) da matriz M *****
rank(M)
ans =
3
% ***** Como o posto da matriz M é 3, o sistema é
% totalmente controlável. Por conseguinte, a alocação
% arbitrária de pólos é possível *****
% ***** Obter o polinômio característico através
% da definição da seguinte matriz J e do comando
% poly(J) *****
J = [-2+2*sqrt(3)*i    0    0
      0    -2-2*sqrt(3)*i    0
      0            0   -10];
poly(J)
ans =
1.0000    14.0000    56.0000   160.0000
% ***** Computar o polinômio característico Phi
% = polyvalm(poly (J),A) *****
```

```

Phi = polyvalm(poly(J),A);

% ***** A matriz de ganho de retroação de estado K é dada por *****
K = [0 0 1] * (inv(M)) * Phi

K =

15.4000    4.5000    0.8000

% ***** Por conseguinte, k1, k2 e k3 são dados por *****
k1 = K(1), k2 = K(2), k3 = K(3)

k1 =

15.4000

k2 =

4.5000

k3 =

0.8000

```

## 2-3 ESTUDO DE CASOS: PROJETO DE SERVOSSISTEMAS TIPO 1

Nesta seção, será discutido em detalhe o problema de se projetar um servomecanismo tipo 1. Será considerado primeiro o projeto de um servomecanismo tipo 1 no qual o sistema a controlar possui um integrador. Em seguida, será discutido o projeto de um servomecanismo tipo 1 no qual o processo a controlar não possui integrador.

### Servomecanismo tipo 1 dotado de integrador

Admita-se que a instalação seja definida por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (2-19)$$

$$y = \mathbf{Cx} \quad (2-20)$$

onde  $\mathbf{x}$  = vetor de estado para a instalação (vetor de ordem  $n$ )

$u$  = sinal de controle (escalar)

$y$  = sinal de saída (escalar)

$\mathbf{A}$  = matriz constante  $n \times n$

$\mathbf{B}$  = matriz constante  $n \times 1$

$\mathbf{C}$  = matriz constante  $1 \times n$

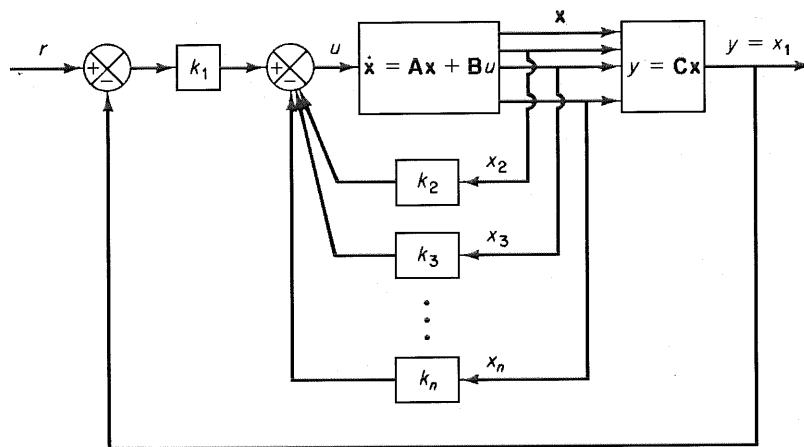


Fig. 2.2

Considera-se que tanto o sinal de controle  $u$  quanto o sinal de saída  $y$  sejam escalares. Através da escolha apropriada de um conjunto de variáveis de estado, é possível escolher a saída de forma que seja igual a uma das variáveis de estado.

A Fig. 2-2 mostra a configuração geral de um servomecanismo no qual o processo a controlar possui um integrador. Admite-se aqui que  $y = x_1$ . Na presente análise, supõe-se que a entrada de referência  $r$  seja uma função degrau. Neste sistema, usa-se o seguinte esquema de controle de retroação de estado:

$$\begin{aligned} u &= -[0 \quad k_2 \quad k_3 \quad \cdots \quad k_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + k_1(r - x_1) \\ &= -\mathbf{Kx} + k_1 r \end{aligned} \quad (2-21)$$

onde

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_n] \quad (2-22)$$

Considere-se que a entrada de referência (função degrau) seja aplicada em  $t = 0$ ; então, para  $t > 0$ , a dinâmica do sistema pode ser descrita pelas Eqs. (2-19) e (2-21), ou

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{Bk}_1 r \quad (2-23)$$

Será projetado um servomecanismo tipo 1 tal que os pólos a malha fechada sejam localizados em posições desejadas. O sistema projetado será assintoticamente estável e  $y(\infty)$  irá se aproximar de um valor constante  $r$  enquanto que  $u(\infty)$  se aproximará de zero.

Note-se que em regime estacionário tem-se:

$$\dot{\mathbf{x}}(\infty) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(\infty) + \mathbf{Bk}_1 r(\infty) \quad (2-24)$$

Considerando que  $r(t)$  é uma entrada em degrau, tem-se que  $r(\infty) = r(t) = r$  (constante) para  $t > 0$ . Subtraindo a Eq. (2-24) da Eq. (2-23), obtém-se

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\mathbf{x}}(\infty) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})[\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(\infty)] \quad (2-25)$$

Defina-se

$$\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(\infty) = \mathbf{e}(t)$$

Então, a Eq. (2-25) se torna

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{e} \quad (2-26)$$

A Eq. (2-26) descreve a dinâmica do erro.

O projeto de servomecanismos tipo 1 aqui é convertido ao projeto de um regulador assintoticamente estável tal que  $e(t)$  se aproxime de zero, dada qualquer condição inicial  $e(0)$ . Se o sistema definido pela Eq. (2-19) é completamente controlável, então, através da especificação dos autovalores desejados  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  para a matriz  $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ , a matriz  $\mathbf{K}$  pode ser determinada pela técnica da alocação de pólos apresentada na Seção 2-2.

Os valores de regime estacionário de  $\mathbf{x}(t)$  e  $u(t)$  podem ser encontrados como se segue. Em regime estacionário ( $t = \infty$ ), tem-se, da Eq. (2-23),

$$\dot{\mathbf{x}}(\infty) = \mathbf{0} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(\infty) + \mathbf{Bk}_1 r$$

Como os autovalores desejados de  $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$  estão todos na metade esquerda do plano  $s$ , o inverso da matriz  $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$  existe. Conseqüentemente,  $\mathbf{x}(\infty)$  pode ser determinado como

$$\mathbf{x}(\infty) = -(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{Bk}_1 r \quad (2-27)$$

Igualmente,  $u(\infty)$  pode ser obtido por

$$u(\infty) = -\mathbf{Kx}(\infty) + k_1 r = 0$$

(Ver Exemplo 2-2 para verificar esta última equação.)

### EXEMPLO 2-2

Considere o projeto de um sistema de servomecanismo tipo 1 no qual a função de transferência do processo a controlar possua um integrador

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(s + 1)(s + 2)}$$

É desejado projetar um sistema tal que os pólos a malha fechada estejam em  $-2 \pm j2\sqrt{3}$  e  $-10$ . Admita-se que a configuração do sistema seja a mesma que a mostrada na Fig. 2-2 e que a entrada de referência  $r$  seja uma função degrau.

Definam-se as variáveis de estado  $x_1, x_2$  e  $x_3$  como se segue

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{x}_1$$

$$x_3 = \dot{x}_2$$

Então, a representação do sistema no espaço de estados se torna

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (2-28)$$

$$y = \mathbf{Cx} \quad (2-29)$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0]$$

Referindo-se à Fig. 2-2 e notando-se que  $n = 3$ , o sinal de controle  $u$  é dado por

$$u = -(k_2 x_2 + k_3 x_3) + k_1(r - x_1) = -\mathbf{Kx} + k_1 r \quad (2-30)$$

onde

$$\mathbf{K} = [k_1 \ k_2 \ k_3]$$

O problema aqui é determinar a matriz de ganho da retroação de estado  $\mathbf{K}$  através da abordagem da alocação de pólos.

Examine-se a matriz de controlabilidade do sistema. O posto de

$$\mathbf{M} = [\mathbf{B} \ \mathbf{AB} \ \mathbf{A}^2\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

é 3. Por conseguinte, o processo é totalmente controlável. A equação característica para o sistema é

$$\begin{aligned}|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 2 & s+3 \end{vmatrix} \\ &= s^3 + 3s^2 + 2s \\ &= s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3 = 0\end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 0$$

Como os autovalores desejados de  $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$  são

$$\mu_1 = -2 + j2\sqrt{3}, \quad \mu_2 = -2 - j2\sqrt{3}, \quad \mu_3 = -10$$

tem-se a equação característica desejada como se segue:

$$\begin{aligned}(s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3) &= (s + 2 - j2\sqrt{3})(s + 2 + j2\sqrt{3})(s + 10) \\ &= s^3 + 14s^2 + 56s + 160 \\ &= s^3 + \alpha_1s^2 + \alpha_2s + \alpha_3 = 0\end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$\alpha_1 = 14, \quad \alpha_2 = 56, \quad \alpha_3 = 160$$

Para a determinação da matriz  $\mathbf{K}$  através da abordagem da alocação de pólos, pode-se usar a Eq. (2-13), reescrita como

$$\mathbf{K} = [\alpha_3 - a_3 : \alpha_2 - a_2 : \alpha_1 - a_1]\mathbf{T}^{-1} \quad (2-31)$$

Como a equação de estado para o sistema, Eq. (2-28), já está sob a forma canônica controlável, tem-se que  $\mathbf{T} = \mathbf{I}$ .

Conseqüentemente, a matriz de ganho de retroação de estado  $\mathbf{K}$  é dada por

$$\begin{aligned}\mathbf{K} &= [\alpha_3 - a_3 : \alpha_2 - a_2 : \alpha_1 - a_1]\mathbf{T}^{-1} \\ &= [160 - 0 : 56 - 2 : 14 - 3]\mathbf{I} \\ &= [160 \quad 54 \quad 11]\end{aligned}$$

Utilizando a fórmula de Ackermann, é possível referir-se à Eq. (2-18). Como se tem

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 7 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\phi(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^3 + 14\mathbf{A}^2 + 56\mathbf{A} + 160\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 160 & 54 & 11 \\ 0 & 138 & 21 \\ 0 & -42 & 75 \end{bmatrix}$$

obtém-se

$$\mathbf{K} = [0 \quad 0 \quad 1]\mathbf{M}^{-1}\phi(\mathbf{A}) = [160 \quad 54 \quad 11]$$

Agora será projetado o servomecanismo tipo 1 discutido no Exemplo 2-2 usando o Programa MATLAB 2-3. Aqui, é empregada a fórmula de Ackermann para a alocação de pólos.

## Programa MATLAB 2-3

```
% ----- Projeto de um servossistema tipo 1 -----

% ***** Neste programa, usa-se a fórmula de Ackermann para
% a alocação de pólos *****
% ***** Entrar com a matriz de estado A, matriz de controle B,
% matriz de saída C e matriz de transmissão direta D *****
A = [0 1 0; 0 0 1; 0 -2 -3];
B = [0; 0; 1];
C = [1 0 0];
D = [0];

% ***** Definir a matriz de controlabilidade M *****
M = [B A*B A^2*B];

% ***** Verificar o posto (rank) da matriz M *****
rank(M)

ans =
3

% ***** Como o posto de M é 3, o sistema é
% completamente controlável. Por conseguinte, a
% alocação arbitrária de pólos é possível *****
% ***** Obter o polinômio característico desejado através
% da definição da matriz seguinte J e entrando-se com o comando
% poly(J) *****
J = [-2+2*sqrt(3)*i 0 0
      0 -2-2*sqrt(3)*i 0
      0 0 -10];
poly(J)

ans =
1.0000 14.0000 56.0000 160.0000

% ***** Computar o polinômio característico
% Phi = polyvalm(poly(J),A) *****
Phi = polyvalm(poly(J),A);

% ***** Baseado na fórmula de Ackermann para a colocação de pólos,
% a matriz de ganho de retroação de estado K pode ser dada por *****
K = [0 0 1]*(inv(M))*Phi
K =
160.0000 54.0000 11.0000
```

$k_1 = K(1), k_2 = K(2), k_3 = K(3)$
--------------------------------------

$k_1 =$
---------

160.0000
----------

$k_2 =$
---------

54
----

$k_3 =$
---------

11
----

**Características de resposta ao degrau do sistema projetado.** Em seguida, serão investigadas as características da resposta ao degrau do sistema projetado. Como

$$\mathbf{A} - \mathbf{BK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [160 \quad 54 \quad 11] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -160 & -56 & -14 \end{bmatrix}$$

a equação de estado do sistema projetado é

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -160 & -56 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 160 \end{bmatrix} r$$

e a equação de saída é

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Como

$$(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -160 & -56 & -14 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{20} & -\frac{7}{80} & -\frac{1}{160} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

referenciando a Eq. (2-27) tem-se

$$\mathbf{x}(\infty) = -(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1} \mathbf{B} k_1 r = - \begin{bmatrix} -\frac{7}{20} & -\frac{7}{80} & -\frac{1}{160} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (160)r$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{160} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (160)r = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Claramente,  $x_1(\infty) = y(\infty) = r$ . Não existe erro de regime estacionário na resposta ao degrau.

Note-se que, como

$$u(\infty) = -\mathbf{Kx}(\infty) + k_1 r(\infty) = -\mathbf{Kx}(\infty) + k_1 r$$

tem-se

$$\begin{aligned} u(\infty) &= -[160 \quad 54 \quad 11] \begin{bmatrix} x_1(\infty) \\ x_2(\infty) \\ x_3(\infty) \end{bmatrix} + 160r \\ &= -[160 \quad 54 \quad 11] \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 160r \\ &= -160r + 160r = 0 \end{aligned}$$

No regime estacionário, o sinal de controle  $u$  se torna igual a zero.

O Programa MATLAB 2-4 pode ser usado para obter a resposta ao degrau unitário do sistema projetado.

A Fig. 2-3 mostra a curva de resposta ao degrau unitário  $y$  versus  $t$  (onde  $y = x_1$ ). A saída  $y$  se aproxima da unidade. A Fig. 2-4 mostra um gráfico das curvas  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  versus  $t$  em um diagrama. A Fig. 2-5 mostra a curva  $x_2$  versus  $t$  ( $x_2$  é a velocidade de saída  $\dot{y}$ ). A Fig. 2-6 fornece um gráfico de  $x_3$  versus  $t$ . ( $x_3$  corresponde à aceleração  $\ddot{y}$ .)

#### Programa MATLAB 2-4

```
% ----- Resposta ao degrau unitário -----
% ***** Encontrando a resposta ao degrau unitário do sistema projetado *****
%
% ***** A matriz de ganho de retroação de estado K foi obtida
% no Programa MATLAB 2-3 (As matrizes A, B, C e D são fornecidas
% pelo Programa MATLAB 2-3) *****
%
% ***** A equação de estado para o sistema de retroação
% projetado é xdot = Ax + B(-Kx + k1r) = (A - BK)x + Bk1r *****
%
A - B*K
ans =
0    1.0000      0
0      0    1.0000
-160.0000 -56.0000 -14.0000
B*k1
ans =
0
0
160.0000
%
% ***** Definir AA = A -BK, BB = BK1, CC = C e DD = D *****
%
AA = A - B*K;
BB = B*k1;
CC = C;
DD = D;
%
% ***** Para obter a resposta ao degrau unitário, entre com o seguinte
% comando *****
[y,x,t] = step(AA,BB,CC,DD);
%
% ***** Para plotar y(t) versus t, entre com o comando seguinte *****

```

```

plot(t,y)
grid
title ('Resposta ao degrau unitário do servossistema projetado')
xlabel ('Seg')
ylabel ('Saída y')

% ***** Para plotar as curvas x1, x2, x3 versus t num único diagrama
% entre com o seguinte comando *****
plot(t,x)
grid
title ('Curvas de Resposta em degrau para x1,x2,x3')
xlabel ('Seg')
ylabel ('x1, x2, x3')
text(1.2,1.25,'x1')
text(0.45,2,'x2')
text(0.25,6,'x3')

% ***** Para plotar a curva x2 versus t, entre com o seguinte
% comando *****
x2 = [0 1 0]*x'; plot(t,x2)
grid
title ('Resposta x2 versus t')
xlabel ('Seg')
ylabel('x2')

% ***** Para plotar a curva x3 versus t, entre com o seguinte
% comando *****
x3 = [0 0 1]*x'; plot(t,x3)
grid
title ('Resposta x3 versus t')
xlabel ('Seg')
ylabel('x3')

```

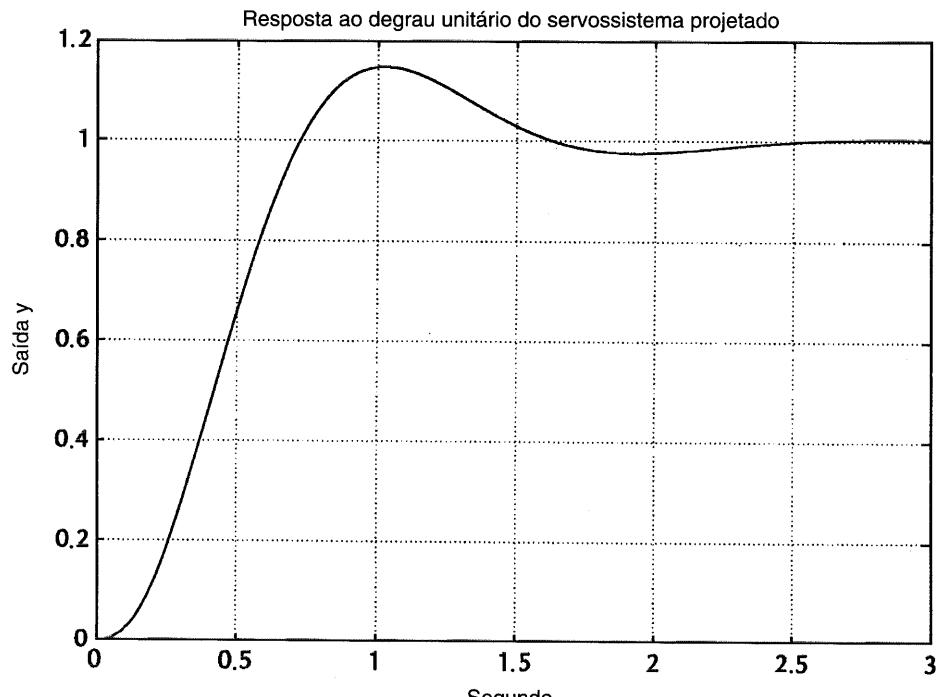


Fig. 2.3

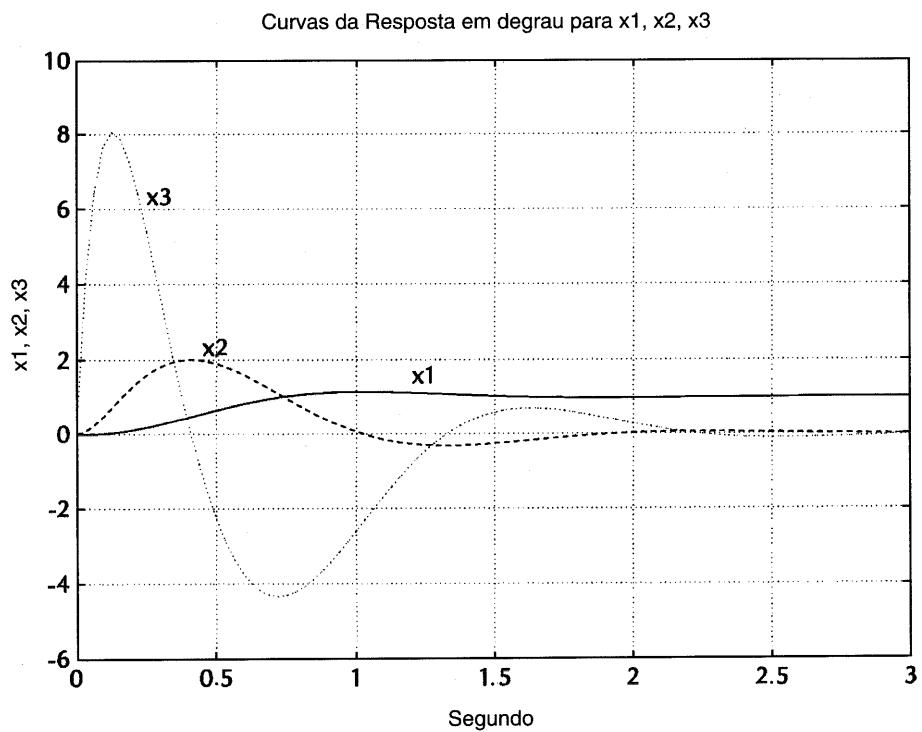


Fig. 2.4

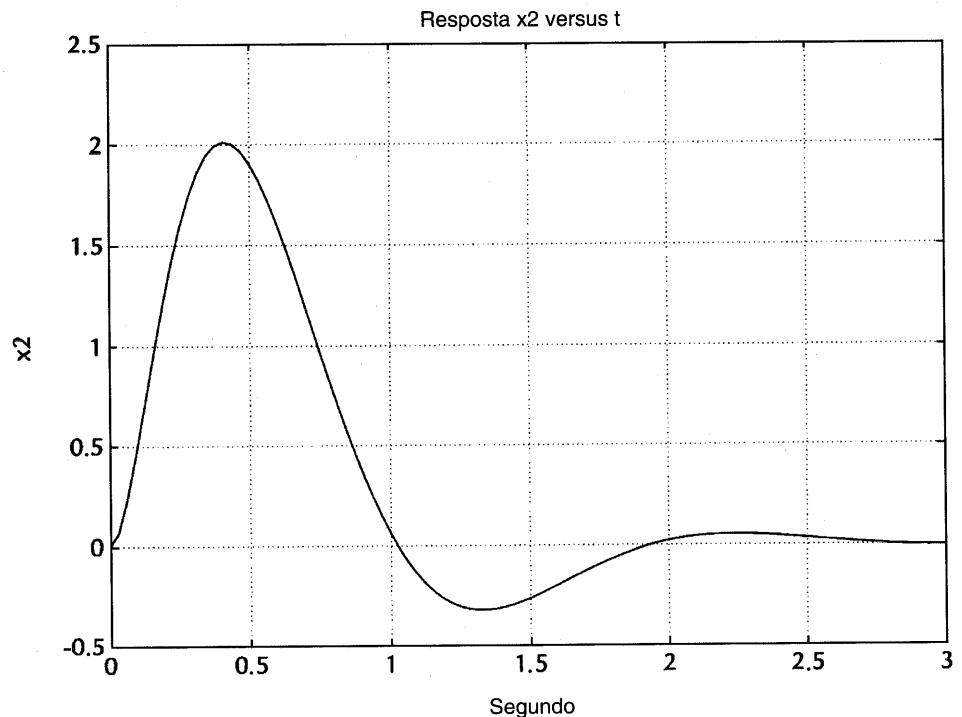


Fig. 2.5

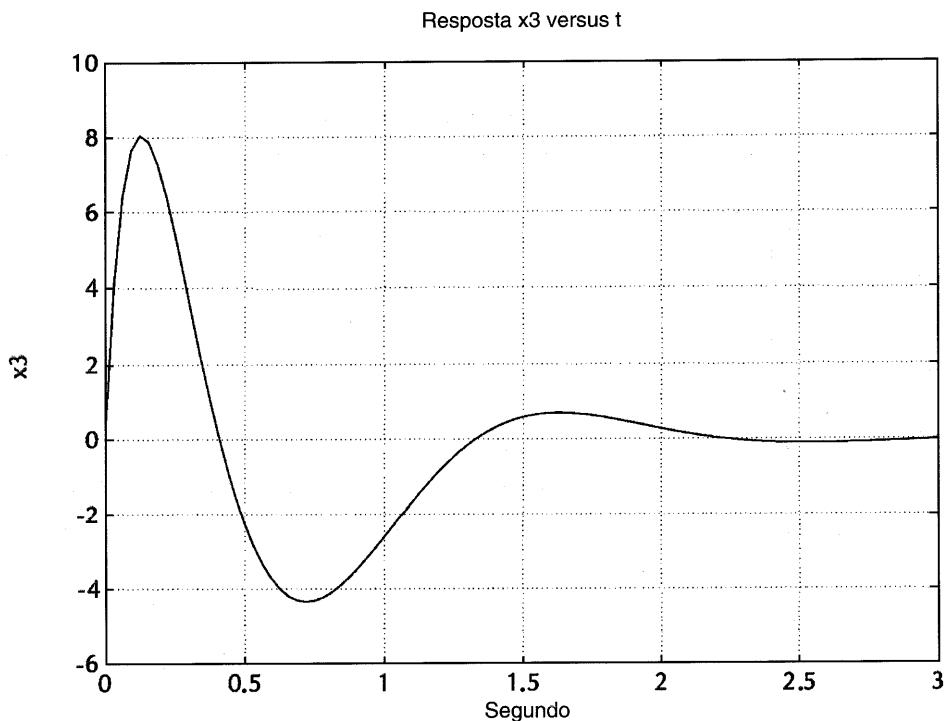


Fig. 2.6

### Servomecanismo no qual o processo a controlar é desprovido de integrador

Uma vez que a instalação não tenha integrador (instalação tipo 0), o princípio básico para o projeto de um servossistema é inserir um integrador no percurso direto de alimentação\* entre o comparador de erros e o processo a controlar, como mostrado na Fig. 2-7. (O diagrama de blocos da Fig. 2-7 é uma forma básica de servossistemas tipo 1 nos quais o processo é desprovido de integrador.) A partir do diagrama, obtém-se

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (2-32)$$

$$y = \mathbf{Cx} \quad (2-33)$$

$$u = -\mathbf{Kx} + k_I \xi \quad (2-34)$$

$$\xi = r - y = r - \mathbf{Cx} \quad (2-35)$$

onde  $\mathbf{x}$  = vetor de estado da instalação (vetor de ordem  $n$ )

$u$  = sinal de controle (escalar)

$y$  = sinal de saída (escalar)

$\xi$  = saída do integrador (variável de estado do sistema, escalar)

$r$  = sinal de referência de entrada (função degrau, escalar)

$\mathbf{A}$  = matriz constante  $n \times n$

$\mathbf{B}$  = matriz constante  $n \times 1$

$\mathbf{C}$  = matriz constante  $1 \times n$

Admite-se que o sistema definido pela Eq. (2-32) é completamente controlável. A função de transferência do processo pode ser dada por

$$G_p(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

\*Do original *feedforward*. Este tem sido traduzido também por *ações de antecipação*. (N. do T.)

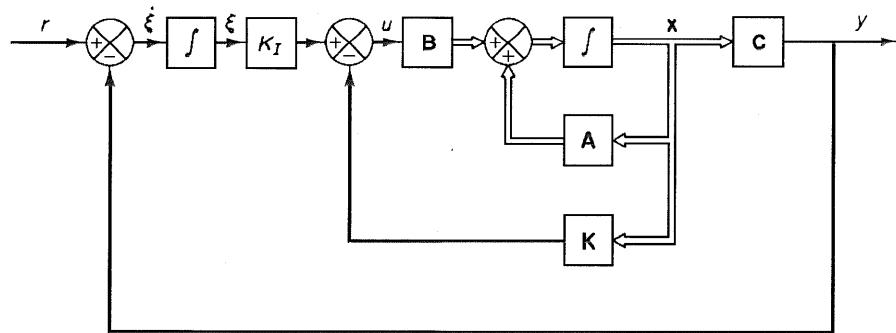


Fig. 2.7

Considera-se que não há cancelamento do integrador inserido por algum zero da função de transferência do processo.

Admita-se que a entrada de referência (função de degrau) seja aplicada em  $t = 0$ . Para  $t > 0$ , a dinâmica do sistema pode ser descrita por uma equação que é uma combinação das Eqs. (2-32) e (2-35):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \quad (2-36)$$

Será projetado um sistema assintoticamente estável tal que  $x(\infty)$ ,  $\xi(\infty)$  e  $u(\infty)$  se aproximem de valores constantes, respectivamente. Por conseguinte, no regime estacionário  $\dot{\xi}(\infty) = 0$  e obtemos  $y(\infty) = r$ .

Note-se que em regime estacionário, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(\infty) \\ \dot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(\infty) \\ \xi(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(\infty) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(\infty) \quad (2-37)$$

Notando que  $r(t)$  é uma entrada em degrau, tem-se  $r(\infty) = r$  ( $t = r$  constante) para  $t > 0$ . Subtraindo a Eq. (2-37) da Eq. (2-36), obtém-se

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) - \dot{x}(\infty) \\ \dot{\xi}(t) - \dot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) - x(\infty) \\ \xi(t) - \xi(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} [u(t) - u(\infty)] \quad (2-38)$$

Seja,

$$x_e(t) = x(t) - x(\infty)$$

$$\xi_e(t) = \xi(t) - \xi(\infty)$$

$$u_e(t) = u(t) - u(\infty)$$

A Eq. (2-38) pode, então, ser escrita como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e(t) \\ \dot{\xi}_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u_e(t) \quad (2-39)$$

onde

$$u_e(t) = -K x_e(t) + K_I \xi_e(t) \quad (2-40)$$

Definindo um novo vetor de erro  $e(t)$  de ordem  $(n+1)$  por

$$e(t) = \begin{bmatrix} x_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix} = \text{vetor de dimensão } (n+1)$$

A Eq. (2-39) se torna, então,

$$\dot{e} = \hat{A}e + \hat{B}u_e \quad (2-41)$$

onde

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix}$$

e a Eq. (2-40) se torna

$$u_e = -\hat{\mathbf{K}}\mathbf{e} \quad (2-42)$$

onde

$$\hat{\mathbf{K}} = [\mathbf{K} \vdots -K_I]$$

A idéia básica ao se projetar um servossistema tipo 1, aqui, é a de projetar um sistema regulador estável de ordem  $n + 1$  que irá trazer o novo vetor de erro  $\mathbf{e}(t)$  para zero a partir de qualquer condição inicial  $\mathbf{e}(0)$ .

As Eqs. (2-41) e (2-42) descrevem a dinâmica do sistema regulador de ordem  $(n + 1)$ . Se o sistema definido pela Eq. (2-41) for completamente controlável, através da especificação da equação característica desejada para o sistema, a matriz  $\hat{\mathbf{K}}$  pode ser determinada pela técnica da alocação de pólos apresentada na Seção 2-2.

Os valores de regime estacionário para  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\xi(t)$  e  $u(t)$  podem ser encontrados como segue: no regime estacionário ( $t = \infty$ ), a partir das Eqs. (2-32) e (2-35), tem-se

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(\infty) &= \mathbf{0} = \mathbf{A}\mathbf{x}(\infty) + \mathbf{B}u(\infty) \\ \dot{\xi}(\infty) &= 0 = r - \mathbf{C}\mathbf{x}(\infty) \end{aligned}$$

que podem ser combinadas numa única equação matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\infty) \\ u(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ r \end{bmatrix}$$

Se a matriz  $\mathbf{P}$ , definida por

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \quad (2-43)$$

tem posto  $n + 1$ , então a sua inversa existe e

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(\infty) \\ u(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -r \end{bmatrix}$$

Igualmente, da Eq. (2-34) tem-se

$$u(\infty) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(\infty) + K_I\xi(\infty)$$

e, por conseguinte, resulta

$$\xi(\infty) = \frac{1}{K_I}[u(\infty) + \mathbf{K}\mathbf{x}(\infty)]$$

Deve ser notado que, se a matriz  $\mathbf{P}$ , dada pela Eq. (2-43) possui posto  $n + 1$ , o sistema definido pela Eq. (2-41) se torna completamente controlável. Por conseguinte, se o posto da matriz  $\mathbf{P}$  for  $n + 1$ , a solução para este problema pode ser obtida através da abordagem da alocação de pólos.

A equação de estado de erro pode ser obtida substituindo-se a Eq. (2-42) na Eq. (2-41).

$$\dot{\mathbf{e}} = (\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{K}})\mathbf{e} \quad (2-44)$$

Se os autovalores desejados da matriz  $\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{K}}$  (isto é, os pólos desejados a malha fechada) forem especificados como  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n+1}$ , então a matriz de ganho da retroação de estado  $\mathbf{K}$  e a constante de ganho integral  $K_I$  podem ser determinadas. Na implementação do projeto real, é necessário considerar várias matrizes diferentes  $\mathbf{K}$  (que correspondem a vários diferentes conjuntos de autovalores desejados) e realizar simulações em computador para

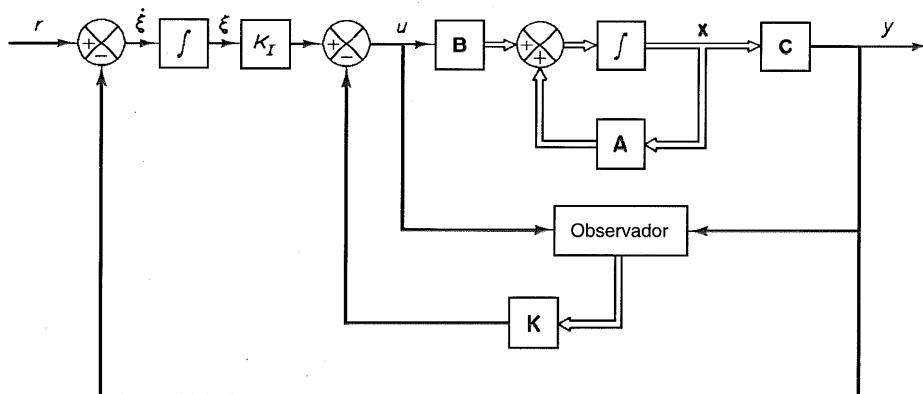


Fig. 2.8

encontrar aquela que produza o melhor desempenho global do sistema. Em seguida, escolhe-se a melhor como a matriz  $\hat{K}$ .

Como é usual, nem todas as variáveis de estado podem ser diretamente mensuráveis. Se este for o caso, precisa-se usar um observador de estado. A Fig. 2-8 mostra um diagrama de blocos de um servossistema tipo 1 com um observador de estado.

### EXEMPLO 2-3

Neste exemplo, será considerado o projeto de um sistema de controle para um pêndulo invertido. Primeiro será deduzido um modelo matemático do sistema pêndulo invertido. Em seguida, será projetado um controlador para manter o pêndulo erguido, em regime estacionário, após os efeitos transitórios (devidos à entrada ou a perturbações) terem se esgotado.

Considere-se o pêndulo invertido montado num carrinho movido a motor, como mostrado na Fig. 2-9. Este é um modelo do controle de atitude de um propulsor espacial na decolagem. (O objetivo do sistema de controle de atitude é o de manter o propulsor numa posição vertical.) O pêndulo invertido é instável na medida em que cairá em qualquer direção, a menos que uma força adequada seja aplicada. Considera-se aqui o problema bidimensional, no qual o pêndulo se move somente no plano da página. Admite-se que a massa do pêndulo está concentrada ao final da haste, como mostrado na figura. (A haste é sem massa.) A força de controle  $u$  é aplicada ao carro.

Defina-se o ângulo da haste com a linha vertical como  $\theta$ . (Uma vez que se deseja manter o pêndulo invertido na vertical, o ângulo  $\theta$  é suposto ser pequeno.) Definam-se, também, as coordenadas  $(x, y)$  do centro de gravidade da massa como  $(x_G, y_G)$ . Então,

$$x_G = x + l \sin \theta$$

$$y_G = l \cos \theta$$

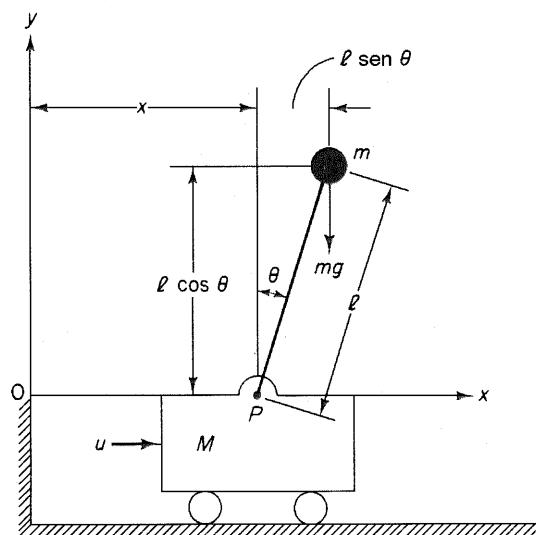


Fig. 2.9

A aplicação da segunda Lei de Newton na direção  $x$  do movimento produz

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + m \frac{d^2 x_G}{dt^2} = u$$

ou

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + m \frac{d^2}{dt^2}(x + l \sin \theta) = u \quad (2-45)$$

Notando-se que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sin \theta &= (\cos \theta) \dot{\theta} \\ \frac{d^2}{dt^2} \sin \theta &= -(\sin \theta) \dot{\theta}^2 + (\cos \theta) \ddot{\theta} \\ \frac{d}{dt} \cos \theta &= -(\sin \theta) \dot{\theta} \\ \frac{d^2}{dt^2} \cos \theta &= -(\cos \theta) \dot{\theta}^2 - (\sin \theta) \ddot{\theta} \end{aligned}$$

a Eq. (2-45) pode ser escrita como

$$(M + m) \ddot{x} - ml(\sin \theta) \dot{\theta}^2 + ml(\cos \theta) \ddot{\theta} = u \quad (2-46)$$

A equação de movimento da massa  $m$  na direção  $y$  não pode ser escrita sem considerar o movimento da massa  $m$  na direção  $x$ . Por conseguinte, em vez de considerar o movimento da massa  $m$  na direção  $y$ , considera-se o movimento de rotação da massa  $m$  em torno do ponto  $P$ . Aplicando a segunda Lei de Newton ao movimento de rotação, obtém-se

$$m \frac{d^2 x_G}{dt^2} l \cos \theta - m \frac{d^2 y_G}{dt^2} l \sin \theta = mgl \sin \theta$$

ou

$$\left[ m \frac{d^2}{dt^2}(x + l \sin \theta) \right] l \cos \theta - \left[ m \frac{d^2}{dt^2}(l \cos \theta) \right] l \sin \theta = mgl \sin \theta$$

que pode ser simplificada como se segue:

$$m[\ddot{x} - l(\sin \theta) \dot{\theta}^2 + l(\cos \theta) \ddot{\theta}]l \cos \theta - m[-l(\cos \theta) \dot{\theta}^2 - l(\sin \theta) \ddot{\theta}]l \sin \theta = mgl \sin \theta$$

Simplificações adicionais resultam em

$$m \ddot{x} \cos \theta + ml \ddot{\theta} = mg \sin \theta \quad (2-47)$$

Claramente, as Eqs. (2-46) e (2-47) são equações diferenciais não-lineares. Como se precisa manter o pêndulo invertido na vertical, pode-se supor que  $\theta(t)$  e  $\dot{\theta}(t)$  sejam quantidades pequenas tais que  $\sin \theta \approx \theta$ ,  $\cos \theta \approx 1$  e  $\theta \dot{\theta}^2 \approx 0$ . As Eqs. (2-46) e (2-47) podem ser linearizadas como se segue:

$$(M + m) \ddot{x} + ml \ddot{\theta} = u \quad (2-48)$$

$$m \ddot{x} + ml \ddot{\theta} = mg\theta \quad (2-49)$$

Essas equações linearizadas são válidas na medida em que  $\theta$  e  $\dot{\theta}$  sejam pequenos. As Eqs. (2-48) e (2-49) definem um modelo matemático do sistema pêndulo invertido.

As equações linearizadas do sistema, (2-48) e (2-49), podem ser modificadas para

$$Ml \ddot{\theta} = (M + m)g\theta - u \quad (2-50)$$

$$M \ddot{x} = u - mg\theta \quad (2-51)$$

A Eq. (2-50) foi obtida eliminando-se  $\ddot{x}$  das Eqs. (2-48) e (2-49). A Eq. (2-51) foi obtida eliminando-se  $\dot{\theta}$  das Eqs. (2-48) e (2-49). Definam-se as variáveis de estado  $x_1, x_2, x_3$  e  $x_4$  através de

$$x_1 = \theta$$

$$x_2 = \dot{\theta}$$

$$x_3 = x$$

$$x_4 = \dot{x}$$

Note-se que o ângulo  $\theta$  indica a rotação do pêndulo em torno do ponto  $P$ , e  $x$  é a localização do carrinho. Considera-se  $x$  como a saída do sistema, ou

$$y = x = x_3$$

Por conseguinte, a partir da definição das variáveis de estado e das Eqs. (2-50) e (2-51), obtém-se

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{M+m}{Ml}gx_1 - \frac{1}{Ml}u$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = -\frac{m}{M}gx_1 + \frac{1}{M}u$$

Em termos de equações matriciais, tem-se

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{M+m}{Ml}g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{m}{M}g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{Ml} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u \quad (2-52)$$

$$y = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (2-53)$$

As Eqs. (2-52) e (2-53) fornecem representações no espaço de estados do sistema pêndulo invertido. (Note-se que a representação no espaço de estados do sistema não é única. Existe um número infinito de tais representações.)

É desejado manter o sistema pêndulo invertido tão aprumado quanto possível e ainda controlar-se a posição do carrinho, por exemplo, movendo-o sob a forma de impulsos. Para controlar o carrinho, precisa-se construir um servossistema tipo 1. O sistema pêndulo invertido montado no carrinho não possui integrador. Por conseguinte, alimenta-se o sinal de posição  $y$  (que indica a posição do carrinho) de volta para a entrada e insere-se um integrador no percurso direto de alimentação, como mostrado na Fig. 2-10.

Neste exemplo, admitem-se os seguintes valores numéricos para  $M, m$  e  $l$ :

$$M = 2 \text{ kg}, \quad m = 0,1 \text{ kg}, \quad l = 0,5 \text{ m}$$

Substituindo esses valores, obtém-se

$$\frac{M+m}{Ml}g = 20,601, \quad \frac{m}{M}g = 0,4905, \quad \frac{1}{Ml} = 1, \quad \frac{1}{M} = 0,5$$

As Eqs. (2-52) e (2-53) podem ser escritas como

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

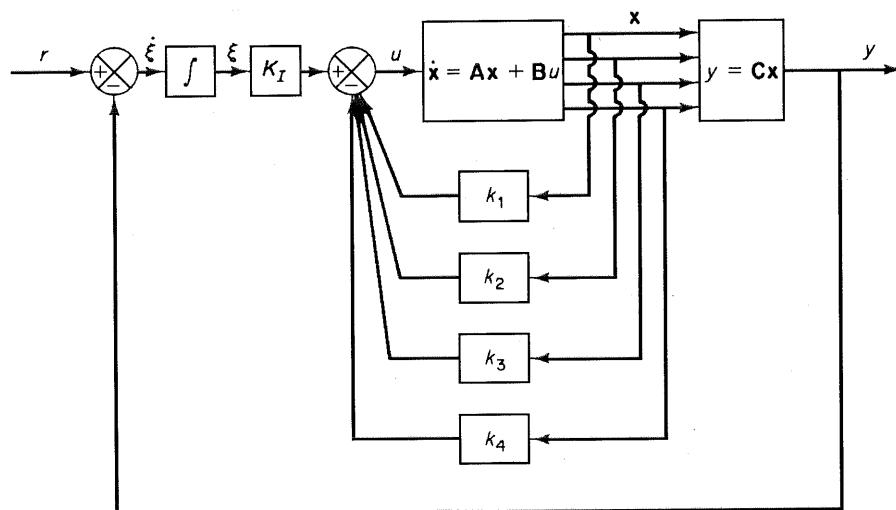


Fig. 2.10

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20,601 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0,4905 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0,5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [0 \ 0 \ 1 \ 0], \quad D = 0$$

Referindo à Fig. (2-10), as equações para o sistema de controle do pêndulo invertido são

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (2-54)$$

$$y = \mathbf{Cx} \quad (2-55)$$

$$u = -\mathbf{Kx} + K_I \xi \quad (2-56)$$

$$\dot{\xi} = r - y = r - \mathbf{Cx} \quad (2-57)$$

Para o servossistema tipo 1, tem-se a equação de estado de erro de acordo com a Eq. (2-41):

$$\dot{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{e} + \hat{\mathbf{B}}u_e \quad (2-58)$$

onde

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 20,601 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0,4905 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0,5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e \\ \xi_e \end{bmatrix}$$

e o sinal de controle dado pela Eq. (2-42):

$$u_e = -\hat{\mathbf{K}}\mathbf{e}$$

onde

$$\hat{\mathbf{K}} = [\mathbf{K} \ -K_I] = [k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4 \ -K_I]$$

Será determinada a matriz de ganho de retroação de estado  $\hat{\mathbf{K}}$  pelo uso da técnica da alocação de pólos. Primeiro será usada a Eq. (2-13) para obter a matriz de ganho  $\mathbf{K}$ . Em seguida, demonstra-se o uso da Eq. (2-18) para obter a mesma solução.

Antes de prosseguir, é preciso examinar o posto da matriz  $\mathbf{P}$ , onde

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz  $\mathbf{P}$  é dada por

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 20,601 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0,4905 & 0 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-59)$$

O posto da matriz é 5. Por conseguinte, o sistema definido pela Eq. (2-58) é completamente controlável e a alocação arbitrária de pólos é possível. Em seguida, pode-se obter a equação característica para o sistema dado pela Eq. (2-58).

$$\begin{aligned} |s\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}| &= \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -20,601 & s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 & 0 \\ 0,4905 & 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & s \end{bmatrix} \\ &= s^3(s^2 - 20,601) \\ &= s^5 - 20,601s^3 \\ &= s^5 + a_1s^4 + a_2s^3 + a_3s^2 + a_4s + a_5 = 0 \end{aligned}$$

Então,

$$a_1 = 0, \quad a_2 = -20,601, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = 0$$

Para obter uma velocidade e amortecimento razoáveis na resposta do sistema projetado (por exemplo, um tempo de assentamento\* de aproximadamente 4 a 5 segundos e uma ultrapassagem máxima (*overshoot*) de 15% a 16% na resposta em degrau do carrinho). Sejam os pólos em malha fechada desejados em  $s = \mu_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ), onde

$$\mu_1 = -1 + j\sqrt{3}, \quad \mu_2 = -1 - j\sqrt{3}, \quad \mu_3 = -5, \quad \mu_4 = -5, \quad \mu_5 = -5$$

(Este é um possível conjunto desejado de pólos a malha fechada. Outros conjuntos podem ser escolhidos.) Conseqüentemente, a equação característica desejada se torna

$$\begin{aligned} &(s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)(s - \mu_4)(s - \mu_5) \\ &= (s + 1 - j\sqrt{3})(s + 1 + j\sqrt{3})(s + 5)(s + 5)(s + 5) \\ &= s^5 + 17s^4 + 109s^3 + 335s^2 + 550s + 500 \\ &= s^5 + \alpha_1s^4 + \alpha_2s^3 + \alpha_3s^2 + \alpha_4s + \alpha_5 = 0 \end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$\alpha_1 = 17, \quad \alpha_2 = 109, \quad \alpha_3 = 335, \quad \alpha_4 = 550, \quad \alpha_5 = 500$$

O próximo passo é obter a matriz de transformação  $\mathbf{T}$  dada pela Eq. (2-4):

$$\mathbf{T} = \mathbf{M}\mathbf{W}$$

---

\*Do original em inglês *settling time*. (N. do T.)

onde  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{W}$  são dadas pelas Eqs. (2-5) e (2-6), respectivamente:

$$\mathbf{M} = [\hat{\mathbf{B}} \mid \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}} \mid \hat{\mathbf{A}}^2\hat{\mathbf{B}} \mid \hat{\mathbf{A}}^3\hat{\mathbf{B}} \mid \hat{\mathbf{A}}^4\hat{\mathbf{B}}]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -20,601 & 0 \\ -1 & 0 & -20,601 & 0 & -(20,601)^2 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,4905 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,4905 & 0 & 10,1048 \\ 0 & 0 & -0,5 & 0 & -0,4905 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -20,601 & 0 & 1 \\ 0 & -20,601 & 0 & 1 & 0 \\ -20,601 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Então,

$$\mathbf{T} = \mathbf{MW} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -9,81 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & -9,81 & 0 & 0,5 \\ 9,81 & 0 & -0,5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A inversa da matriz  $\mathbf{T}$  é

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{0,25}{(9,81)^2} & 0 & -\frac{0,5}{(9,81)^2} & \frac{1}{9,81} \\ -\frac{0,5}{9,81} & 0 & -\frac{1}{9,81} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{0,5}{9,81} & 0 & -\frac{1}{9,81} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Referindo à Eq. (2-13), a matriz  $\hat{\mathbf{K}}$  é dada por

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{K}} &= [a_5 - a_5 \mid a_4 - a_4 \mid a_3 - a_3 \mid a_2 - a_2 \mid a_1 - a_1] \mathbf{T}^{-1} \\ &= [500 - 0 \mid 550 - 0 \mid 335 - 0 \mid 109 + 20,601 \mid 17 - 0] \mathbf{T}^{-1} \\ &= [500 \mid 550 \mid 335 \mid 129,601 \mid 17] \mathbf{T}^{-1} \\ &= [-157,6336 \quad -35,3733 \quad -56,0652 \quad -36,7466 \quad 50,9684] \\ &= [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4 \quad -K_I] \end{aligned}$$

Por conseguinte, obtém-se

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4] = [-157,6336 \quad -35,3733 \quad -56,0652 \quad -36,7466] \quad (2-60)$$

e

$$K_I = -50,9684 \quad (2-61)$$

Um outro enfoque para obter  $\hat{\mathbf{K}}$  é usar a fórmula de Ackermann dada pela Eq. (2-18), reescrita como se segue:

$$\hat{\mathbf{K}} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \mathbf{M}^{-1} \phi(\hat{\mathbf{A}})$$

onde

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0,05 & 0 & 2,10 & 0 \\ 0,05 & 0 & 2,10 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0025 & 0 & 0,0051 & -2,1 \\ -0,051 & 0 & -0,1019 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0026 & 0 & -0,0052 & 0,1019 \end{bmatrix}$$

e

$$\phi(\hat{\mathbf{A}}) = \hat{\mathbf{A}}^5 + 17\hat{\mathbf{A}}^4 + 109\hat{\mathbf{A}}^3 + 335\hat{\mathbf{A}}^2 + 550\hat{\mathbf{A}} + 500\hat{\mathbf{I}}$$

$$= \begin{bmatrix} 14.616 & 3.220 & 0 & 0 & 0 \\ 66.333 & 14.616 & 0 & 0 & 0 \\ -336 & -64 & 500 & 550 & 0 \\ -1.579 & -336 & 0 & 500 & 0 \\ 64 & 8 & -550 & -335 & 500 \end{bmatrix}$$

Por conseguinte,

$$\hat{\mathbf{K}} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \mathbf{M}^{-1} \phi(\hat{\mathbf{A}})$$

$$= [-157,6336 \ -35,3733 \ -56,0652 \ -36,7466 \ 50,9684]$$

ou

$$\mathbf{K} = [k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4]$$

$$= [-157,6336 \ -35,3733 \ -56,0652 \ -36,7466]$$

$$K_I = -50,9684$$

O Programa MATLAB 2-5 pode ser usado para projetar o sistema de controle do pêndulo invertido em consideração. Note-se que no programa usam-se as notações A1, B1 e KK para  $\hat{\mathbf{A}}$ ,  $\hat{\mathbf{B}}$  e  $\hat{\mathbf{K}}$ , respectivamente. Isto é,

$$A1 = \hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad B1 = \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad KK = \hat{\mathbf{K}}$$

#### Programa MATLAB 2-5

```
% ----- Projeto de um sistema de controle para um pêndulo
% invertido -----
%
% ***** Neste programa usa-se a fórmula de Ackermann para
% a alocação de pólos *****
%
% ***** Este programa determina a matriz de ganho de retroação de
% estado K = [k1 k2 k3 k4] e a constante de ganho integral KI *****
%
% ***** Entrar com as matrizes A, B, C e D *****
%
A = [0 1 0 0
      20.601 0 0 0
      0 0 0 1
      -0.4905 0 0 0];
B = [0;-1;0;0.5];
C = [0 0 1 0];
D = [0];
%
% ***** Entrar com as matrizes A1 e B1 *****

```

```

A1 = [A zeros(4,1);-C 0];
B1 = [B;0];

% ***** Definir a matriz de controlabilidade M *****
M = [B1 A1*B1 A1^2*B1 A1^3*B1 A1^4*B1];

% ***** Verificar o posto da matriz M *****
rank(M)

ans =

5

% ***** Como o posto da matriz é 5, o sistema é
% completamente controlável. Por conseguinte, a alocação
% arbitrária de pólos é possível *****
% ***** Entrar com o polinômio característico, que
% pode ser obtido definindo-se a matriz seguinte J e
% emitindo-se o comando poly() *****
J = [-1+sqrt(3)*i 0 0 0 0
      0 -1-sqrt(3)*i 0 0 0
      0 0 -5 0 0
      0 0 0 -5 0
      0 0 0 0 -5];
JJ = poly(J)

JJ =
1.0000 17.0000 109.0000 335.0000 550.0000 500.0000

% ***** Entrar com o polinômio característico *****
Phi = polyvalm(poly(J),A1);

% ***** A matriz de ganho de retroação de estado K e a constante
% de ganho integral KI podem ser determinadas a partir de *****
KK = [0 0 0 0 1]*(inv(M))*Phi

KK =
-157.6336 -35.3733 -56.0652 -36.7466 50.9684

k1 = KK(1), k2 = KK(2), k3 = KK(3), k4 = KK(4), KI = -KK(5)

k1 =
-157.6336

```

$$k_2 = \\ -35.3733$$

$$k_3 = \\ -56.0652$$

$$k_4 = \\ -36.7466$$

$$K_I = \\ -50.9684$$

**Características da resposta do sistema proposto ao degrau unitário.** Uma vez que se tenha determinado a matriz de ganho de retroação  $\mathbf{K}$  e a constante de ganho integral  $K_I$ , a resposta ao degrau da posição do carrinho pode ser obtida resolvendo a seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (2-62)$$

Como

$$u = -\mathbf{Kx} + K_I \xi$$

a Eq. (2-62) pode ser escrita como se segue:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK}_I \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (2-63)$$

A saída do sistema é  $x_3(t)$ , ou

$$y = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \xi \end{bmatrix} + [0] r \quad (2-64)$$

Definam-se a matriz de estado, a matriz de controle, a matriz de saída e a matriz de transmissão direta do sistema, dadas pelas Eqs. (2-63) e (2-64), como AA, BB, CC e DD, respectivamente. As matrizes AA, BB, CC e DD são obtidas como se segue:

$$AA = [\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} \ \mathbf{B}\mathbf{K}_I; -\mathbf{C} \ \mathbf{0}]$$

$$AA =$$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ -137.0326 & -35.3733 & -56.0652 & -36.7466 & 50.9684 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 78.3263 & 17.6867 & 28.0326 & 18.3733 & -25.4842 \\ 0 & 0 & -1.0000 & 0 & 0 \end{array}$$

$$BB = [0; 0; 0; 0; 1]$$

BB =
0
0
0
0
1
CC = [0 0 1 0 0]
CC =
0 0 1 0 0
DD = [0]
DD =
0

O programa MATLAB 2-6 pode ser usado para obter as curvas de resposta ao degrau do sistema projetado. Note-se que, para obter a resposta ao degrau unitário, utiliza-se o comando

[y, x, t] = step(AA,BB,CC,DD)

#### Programa MATLAB 2-6

```
% ----- Resposta em degrau do sistema projetado -----

% ***** O programa seguinte obtém a resposta em degrau
% do sistema de pêndulo invertido projetado *****

% ***** Entrar com as matrizes necessárias *****

A = [0      1    0    0
      20.601  0    0    0
      0      0    0    1
      -0.4905 0    0    0];
B = [0;-1;0;0.5];
C = [0 0 1 0];
D = [0];
K = [-157.6336 -35.3733 -56.0652 -36.7466];
KI = -50.9684;
AA = [A-B*K  B*KI;-C  0];
BB = [0;0;0;0;1];
CC = [C  0];
DD = [0];

% ***** Entrar com os intervalos para os eixos x e y *****
v = [0 5 -0.4 1.4];
axis(v);

% ***** Em seguida, entrar com o comando seguinte *****
[y,x,t] = step(AA,BB,CC,DD);
```

```

% ***** Para obter a curva de saída y versus t entre
% com o comando seguinte *****
plot(t,y)

grid
title ('Saída y versus Tempo t')
xlabel ('Seg')
ylabel ('Saída y = x3')

% ***** Para obter as curvas de resposta x1, x2, x3, x4, x5 versus t
% em um diagrama, entre com o comando seguinte *****
plot(t,x,'-g')
grid
title ('Curvas de Resposta x1, x2, x3, x4, x5 versus Tempo t')
xlabel ('Seg')
ylabel('x1, x2, x3, x4, x5')
text(1.2,0.02,'x1')
text(1.2,-0.38,'x2')
text(1.2,0.3,'x3')
text(2.2,0.25,'x4')
text(1.5,1.25,'x5')

% ***** Para obter x1 versus t, entre com o seguinte comando *****
x1 = [1 0 0 0 0]*x';
plot(t,x1)
grid
title ('Resposta x1 versus t')
xlabel ('Seg')
ylabel('x1')

% ***** Para obter x2 versus t, entre com o seguinte comando *****
x2 = [0 1 0 0 0]*x';
plot(t,x2)
grid
title ('Resposta x2 versus t')
xlabel ('Seg')
ylabel('x2')

% ***** Para obter x4 versus t, entre com o seguinte comando *****
x4 = [0 0 0 1 0]*x';
plot(t,x4)
grid
title ('Resposta x4 versus t')
xlabel ('Seg')
ylabel('x4')

% ***** Para obter x5 versus t, entre com o seguinte comando *****
x5 = [0 0 0 0 1]*x';
plot(t,x5)
grid
title ('Resposta x5 versus t')
xlabel ('Seg')
ylabel('x5')

```

É importante notar que se não for especificada a região (do plano)  $x - y$  (o intervalo dos eixos  $x$  e  $y$ ) ao entrar com o comando

`plot(y)`

o computador irá gerar o gráfico mostrado na Fig. 2-11. A abscissa não é tempo, mas pontos de computação (152 pontos = 5 segundos). Para plotar uma curva  $y(t)$  vs.  $t$ , é preciso entrar com o comando

`plot(t,y)`

No Programa MATLAB 2-6, a região  $x - y$  é especificada como

`v = [0 5 -0.4 1.4]; axis(v)`

A curva de saída  $y$  vs.  $x$  é obtida entrando-se com o comando `plot(t,y)`. Veja a Fig. 2-12. Note-se que  $y = x^3 = x$ .

A saída  $y$  mostra um tempo de assentamento de aproximadamente 4,5 segundos e um pico de ultrapassagem de aproximadamente 14,8%. Um ponto interessante na curva de posição é que o carrinho se move para trás durante os primeiros 0,6 segundo, ou então para fazer o pêndulo se inclinar para a frente. Em seguida, o carrinho se acelera para se mover na direção positiva.

Para plotar as curvas  $x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)$  e  $\xi(t)$  versus  $t$  em um diagrama, deve-se entrar com o seguinte comando:

`plot(t, x)`

O gráfico resultante é mostrado na Fig. 2-13.

As Figs. 2-14, 2-15, 2-16 e 2-17 mostram as curvas  $x_1$  versus  $t$ ,  $x_2$  versus  $t$ ,  $x_4$  versus  $t$  e  $x_5$  versus  $t$ , respectivamente. A curva de resposta  $x_3 (= y)$  versus  $t$  mostra que  $x_3(\infty)$  se aproxima de  $r$ . Igualmente,  $x_1(\infty) = 0$ ,  $x_2(\infty) = 0$ ,  $x_4(\infty) = 0$  e  $\xi(\infty) = x_5(\infty) = 1,1$ . Esse resultado pode ser verificado pela abordagem analítica desenvolvida em seguida.

No estado estacionário ou permanente, tem-se

$$\dot{\mathbf{x}}(\infty) = \mathbf{0} = \mathbf{A}\mathbf{x}(\infty) + \mathbf{B}\mathbf{u}(\infty)$$

$$\dot{\xi}(\infty) = 0 = r - \mathbf{C}\mathbf{x}(\infty)$$

que podem ser combinadas em

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\infty) \\ \mathbf{u}(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix}$$

Curva de resposta  $y$  versus Pontos de Computação

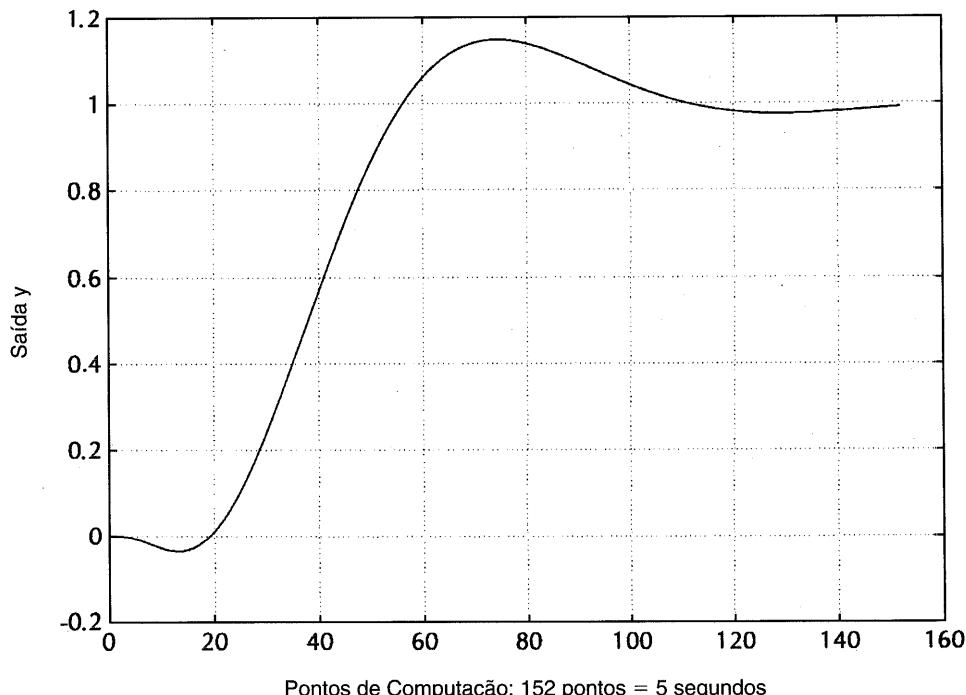


Fig. 2.11

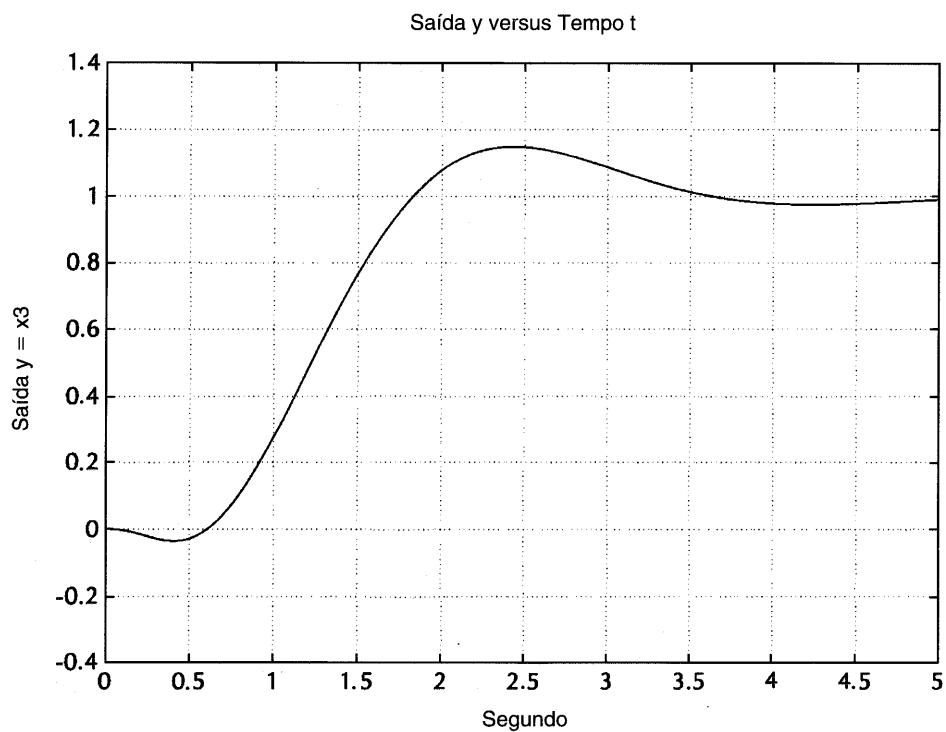


Fig. 2.12

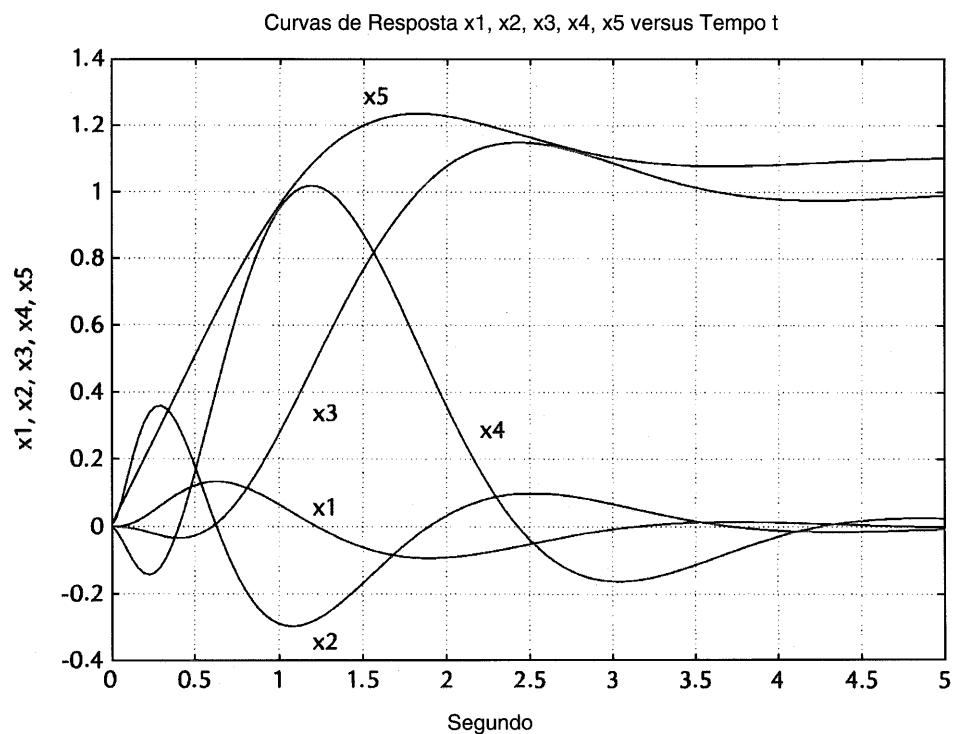


Fig. 2.13

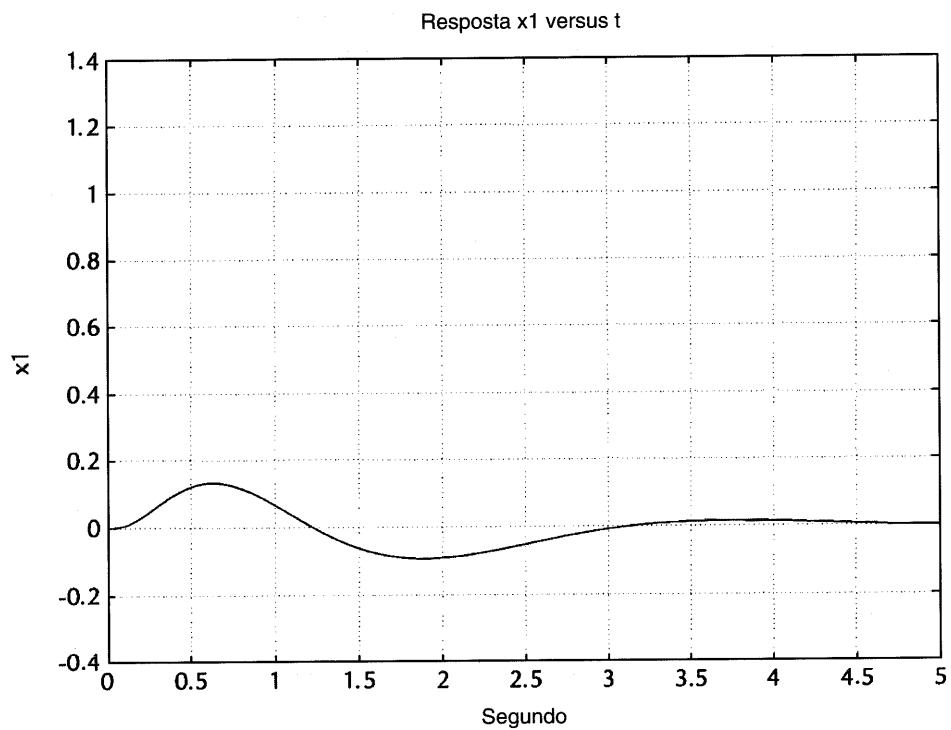


Fig. 2.14

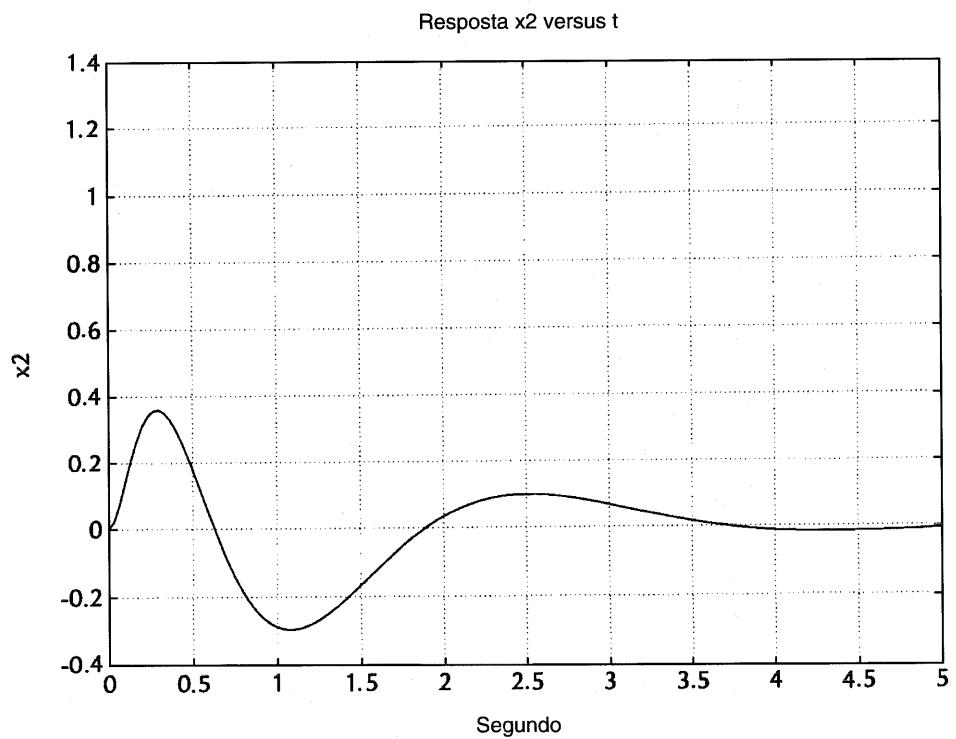


Fig. 2.15

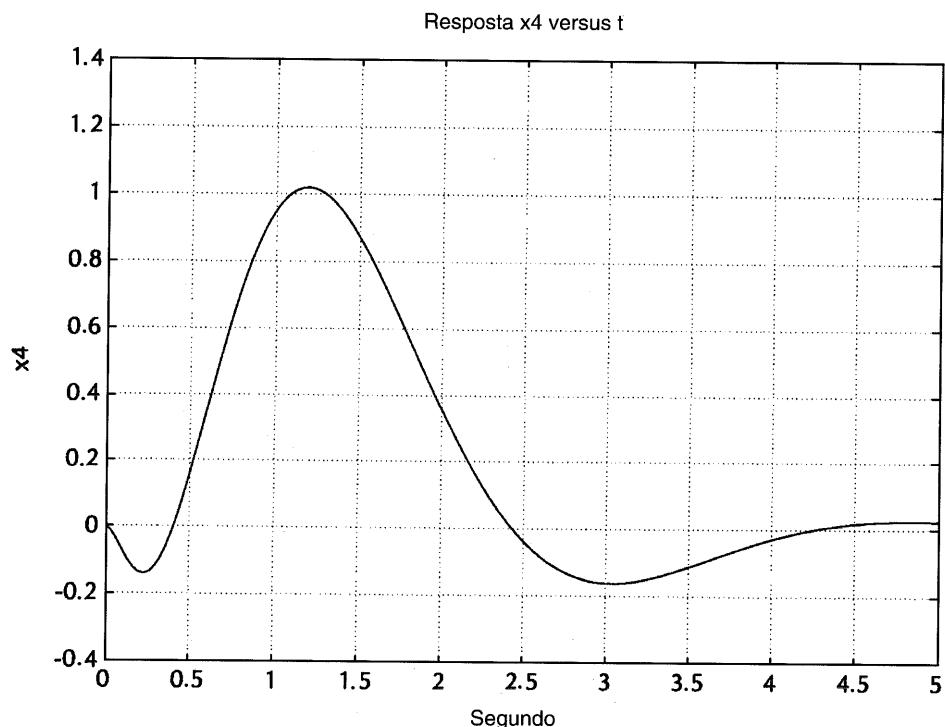


Fig. 2.16

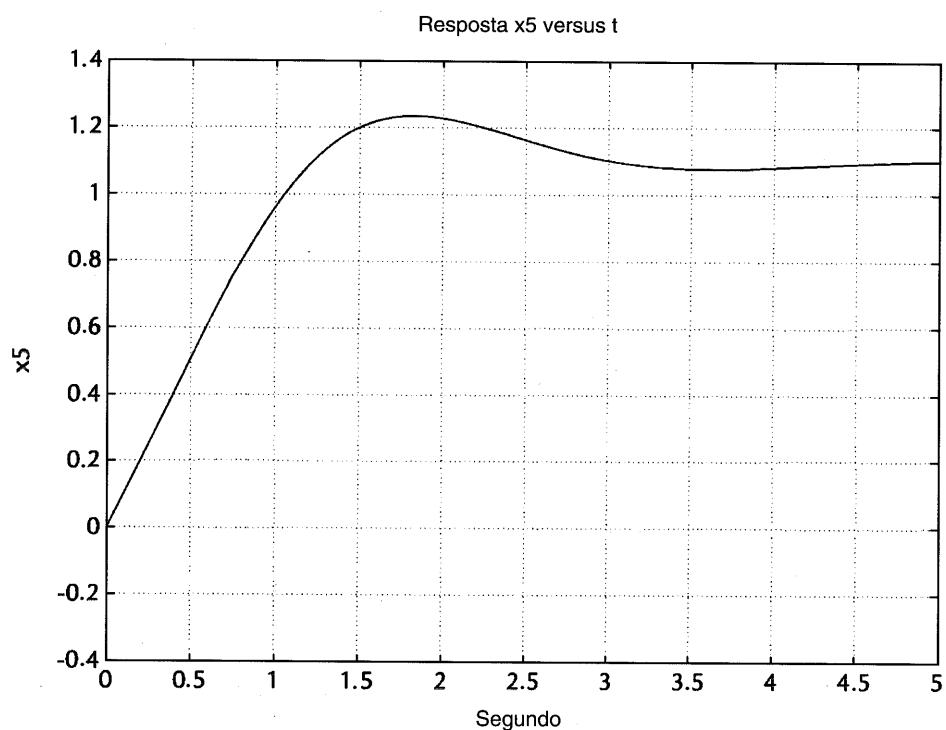


Fig. 2.17

Como foi encontrado anteriormente que o posto da matriz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}$$

é 5, a mesma possui inversa. Por conseguinte,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(\infty) \\ u(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -r \end{bmatrix}$$

Referindo à Eq. (2-59), tem-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{0,5}{9,81} & 0 & \frac{1}{9,81} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,05 & 0 & 2,1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por conseguinte,

$$\begin{bmatrix} x_1(\infty) \\ x_2(\infty) \\ x_3(\infty) \\ x_4(\infty) \\ u(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{0,5}{9,81} & 0 & \frac{1}{9,81} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,05 & 0 & 2,1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Conseqüentemente,

$$y(\infty) = \mathbf{Cx}(\infty) = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(\infty) \\ x_2(\infty) \\ x_3(\infty) \\ x_4(\infty) \end{bmatrix} = x_3(\infty) = r$$

Como

$$\dot{\mathbf{x}}(\infty) = \mathbf{0} = \mathbf{Ax}(\infty) + \mathbf{Bu}(\infty)$$

ou

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20,601 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0,4905 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0,5 \end{bmatrix} u(\infty)$$

obtém-se

$$u(\infty) = 0$$

Como  $u(\infty) = 0$ , tem-se, pela Eq. (2-56),

$$u(\infty) = 0 = -\mathbf{Kx}(\infty) + K_I \xi(\infty)$$

e, então,

$$\xi(\infty) = \frac{1}{K_I} [\mathbf{Kx}(\infty)] = \frac{1}{K_I} k_3 x_3(\infty) = \frac{-56,0652}{-50,9684} r = 1,1r$$

Por conseguinte, para  $r = 1$ , resulta

$$\xi(\infty) = 1,1$$

(Veja a Fig. 2-17, onde  $x_5 = \xi$ ).

Concluindo esse exemplo, deve ser notado que, como em qualquer problema de projeto, se a velocidade e o amortecimento não forem satisfatórios, é preciso modificar a equação característica desejada e determinar uma nova matriz  $\hat{\mathbf{K}}$ . As soluções MATLAB precisam ser repetidas até que um resultado satisfatório seja obtido.

## 2-4 PROJETO DE OBSERVADORES DE ESTADO DE ORDEM TOTAL

Esta seção lida com o projeto de observadores de estado. Primeiro, será revisada uma análise teórica e, em seguida, serão apresentados programas MATLAB para projetar observadores de estado. Os observadores de estado de ordem total serão tratados nesta seção e os observadores de ordem mínima na Seção 2-5.

### Projeto de observadores de estado de ordem total

Considere-se o sistema definido por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (2-65)$$

$$y = \mathbf{Cx} \quad (2-66)$$

onde  $\mathbf{x}$  = vetor de estados (vetor  $n$ )

$u$  = sinal de controle (escalar)

$y$  = sinal de saída (escalar)

$\mathbf{A}$  = matriz constante  $n \times n$

$\mathbf{B}$  = matriz constante  $n \times 1$

$\mathbf{C}$  = matriz constante  $1 \times n$

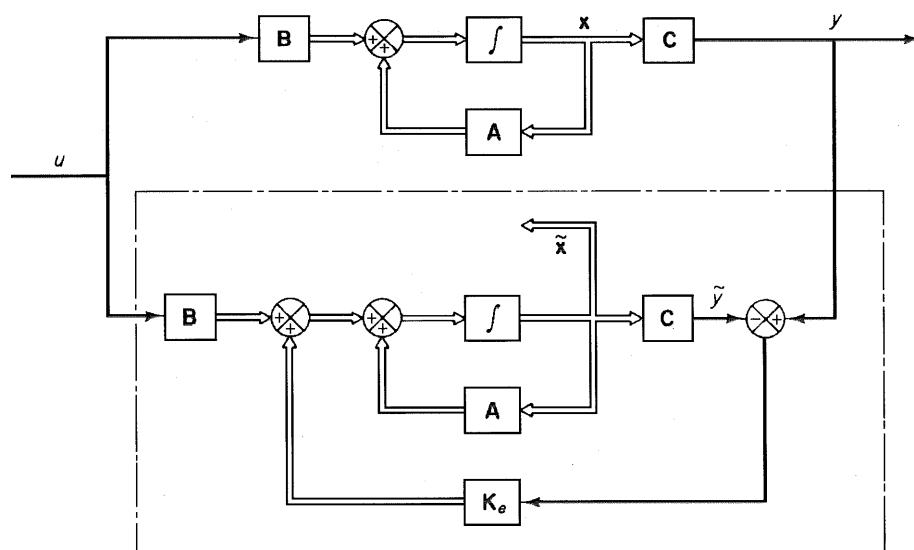
Admite-se que o sistema é completamente observável. Considera-se, ainda, que a configuração do sistema é a mesma que a mostrada na Fig. 2-18.

Ao se projetar um observador de estado de ordem total, é conveniente passar o sistema de equações dado pelas Eqs. (2-65) e (2-66) para a forma canônica observável. Isto pode ser feito como a seguir: Define-se uma matriz de transformação  $\mathbf{Q}$  através de

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{WN}')^{-1} \quad (2-67)$$

onde  $\mathbf{N}$  é a matriz de observabilidade

$$\mathbf{N} = [\mathbf{C}' \mid \mathbf{A}'\mathbf{C}' \mid \cdots \mid (\mathbf{A}')^{n-1}\mathbf{C}'] \quad (2-68)$$



Observador de ordem total

Fig. 2.18

e  $\mathbf{W}$  é definida pela Eq. (2-6), reescrita como

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  são os coeficientes na equação característica da equação de estado original dada pela Eq. (2-65):

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

(Como foi suposto que o sistema é completamente observável, a inversa da matriz  $\mathbf{WN}'$  existe.)

Define-se um novo vetor de estado (vetor de ordem  $n$ )  $\xi$  através de

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}\xi \quad (2-69)$$

Tem-se, então, pelas Eqs. (2-65) e (2-66)

$$\dot{\xi} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}\xi + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}u \quad (2-70)$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{Q}\xi \quad (2-71)$$

onde

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \quad (2-72)$$

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} \quad (2-73)$$

$$\mathbf{C}\mathbf{Q} = [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1] \quad (2-74)$$

As Equações (2-70) e (2-71) estão na forma canônica observável. Por conseguinte, dadas uma equação de estado e uma equação de saída, é possível passá-las para a forma canônica observável se o sistema for completamente observável e se o vetor original de estado  $\mathbf{x}$  for transformado num novo vetor de estado  $\xi$  através do uso da transformação dada pela Eq. (2-69). Note que se a matriz  $\mathbf{A}$  já estiver na forma canônica observável, então  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ .

Da Fig. (2-18), a dinâmica do observador de estado é dada por

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{K}_e(y - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}) \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{K}_e\mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \quad (2-75)$$

Defina-se agora

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}\xi \quad (2-76)$$

Através da substituição da Eq. (2-76) na Eq. (2-75), obtém-se

$$\dot{\xi} = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\mathbf{Q}\xi + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}u + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{K}_e\mathbf{C}\mathbf{Q}\xi \quad (2-77)$$

Subtraindo a Eq. (2-77) da Eq. (2-70), resulta

$$\xi - \dot{\xi} = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\mathbf{Q}(\xi - \tilde{\xi}) \quad (2-78)$$

Defina-se

$$\epsilon = \xi - \tilde{\xi}$$

A Eq. (2-78) se torna

$$\dot{\epsilon} = Q^{-1}(A - K_e C)Q\epsilon \quad (2-79)$$

Necessita-se que a dinâmica de erro seja assintoticamente estável e que  $\epsilon(t)$  atinja zero com velocidade suficiente. O procedimento para determinar a matriz  $K_e$  é primeiro selecionar os pólos observadores desejados (os autovalores de  $A - K_e C$ ) e então determinar a matriz  $K_e$  e assim obter os pólos observadores desejados. Notando que  $Q^{-1} = WN^t$ , tem-se

$$Q^{-1}K_e = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-2} \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_{n-1} \\ k_n \end{bmatrix}$$

onde

$$K_e = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$$

Como  $Q^{-1}K_e$  é um vetor de ordem  $n$ , pode-se escrever

$$Q^{-1}K_e = \begin{bmatrix} \delta_n \\ \delta_{n-1} \\ \vdots \\ \delta_1 \end{bmatrix} \quad (2-80)$$

Então, referindo à Eq. (2-74), tem-se

$$Q^{-1}K_e C Q = \begin{bmatrix} \delta_n \\ \delta_{n-1} \\ \vdots \\ \delta_1 \end{bmatrix} [0 \ 0 \ \cdots \ 1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \delta_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \delta_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \delta_1 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} Q^{-1}(A - K_e C)Q &= Q^{-1}AQ - Q^{-1}K_e CQ \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n - \delta_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} - \delta_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} - \delta_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 - \delta_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A equação característica

$$|sI - Q^{-1}(A - K_e C)Q| = 0$$

se torna

$$\begin{bmatrix} s & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n + \delta_n \\ -1 & s & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} + \delta_{n-1} \\ 0 & -1 & s & \cdots & 0 & a_{n-2} + \delta_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & s + a_1 + \delta_1 \end{bmatrix} = 0$$

ou

$$s^n + (a_1 + \delta_1)s^{n-1} + (a_2 + \delta_2)s^{n-2} + \cdots + (a_n + \delta_n) = 0 \quad (2-81)$$

Pode ser visto que cada um dos  $\delta_n, \delta_{n-1}, \dots, \delta_1$  está associado a somente um dos coeficientes da equação característica.

Suponha-se que a equação característica desejada para a dinâmica do erro seja

$$\begin{aligned} & (s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_n) \\ &= s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0 \end{aligned} \quad (2-82)$$

(Note-se que os autovalores desejados  $\mu_i$  determinam quanto rapidamente o estado observado converge para o estado atual do sistema.) Comparando-se os coeficientes dos termos de potências iguais de  $s$  nas Eqs. (2-81) e (2-82), obtém-se

$$a_1 + \delta_1 = \alpha_1$$

$$a_2 + \delta_2 = \alpha_2$$

⋮

$$a_n + \delta_n = \alpha_n$$

a partir do que resulta

$$\delta_1 = \alpha_1 - a_1$$

$$\delta_2 = \alpha_2 - a_2$$

⋮

$$\delta_n = \alpha_n - a_n$$

Então, a partir da Eq. (2-80), tem-se

$$\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \delta_n \\ \delta_{n-1} \\ \vdots \\ \delta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix}$$

Por conseguinte,

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} = (\mathbf{W}\mathbf{N}')^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} \quad (2-83)$$

A Equação (2-83) especifica a matriz de ganho do observador de estado  $\mathbf{K}_e$  necessária.

### Obtendo a matriz de ganho do observador de estado $\mathbf{K}_e$ a partir da matriz de ganho de retroação de estado $\mathbf{K}$ para o sistema dual

É um fato bem conhecido que a Eq. (2-83) pode também ser obtida a partir da Eq. (2-13) através da consideração do problema dual. Isto é, considera-se o problema da alocação de pólos para o sistema dual e obtém-se a matriz de ganho de retroação de estado  $\mathbf{K}$  para o mesmo. Então, a matriz de ganho do observador de estado  $\mathbf{K}_e$  pode ser dada por  $\mathbf{K}'$ .

### Fórmula de Ackermann

Considere-se o sistema definido por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (2-84)$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (2-85)$$

Na Seção 2-2, foi deduzida a fórmula de Ackermann para a alocação de pólos relativa ao sistema definido pela Eq. (2-84). O resultado foi dado pela Eq. (2-18), reescrita como

$$\mathbf{K} = [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1][\mathbf{B} : \mathbf{AB} : \cdots : \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]^{-1}\phi(\mathbf{A})$$

Para o sistema dual definido pelas Eqs. (2-84) e (2-85),

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}'\mathbf{z} + \mathbf{C}'\nu$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{B}'\mathbf{z}$$

a fórmula de Ackermann precedente para a alocação de pólos é modificada para

$$\mathbf{K} = [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1][\mathbf{C}' : \mathbf{A}'\mathbf{C}' : \cdots : (\mathbf{A}')^{n-1}\mathbf{C}']^{-1}\phi(\mathbf{A}') \quad (2-86)$$

Como estabelecido anteriormente, a matriz de ganho do observador de estado  $\mathbf{K}_e$  é dada por  $\mathbf{K}'$ , onde  $\mathbf{K}$  é dada pela Eq. (2-86). Por conseguinte,

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{K}' = \phi(\mathbf{A}')' \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-2} \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \phi(\mathbf{A}) \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-2} \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2-87)$$

onde  $\phi(s)$  é o polinômio característico desejado para o observador de estado, ou

$$\phi(s) = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_n)$$

onde  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  são os autovalores desejados. A Eq. (2-87) é chamada de Fórmula de Ackermann para a determinação da matriz de ganho  $\mathbf{K}_e$  de um observador.

### Comentários sobre a seleção da melhor $\mathbf{K}_e$

Recorde-se que a matriz de ganho de um observador  $\mathbf{K}_e$  depende da equação característica desejada

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_n) = 0$$

A escolha de um conjunto  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ , em muitas instâncias, não é única. Os desejados autovalores ou a equação característica deveriam ser escolhidos de forma que o observador de estado responda pelo menos de duas a cinco vezes mais rapidamente do que o sistema a malha fechada considerado.

Se várias possíveis matrizes de ganho do observador  $\mathbf{K}_e$  são determinadas baseando-se em várias equações características desejadas distintas, então, para cada uma dessas matrizes  $\mathbf{K}_e$ , precisarão ser executados testes de simulação a fim de avaliar o desempenho resultante do sistema. Seleciona-se, então, a melhor  $\mathbf{K}_e$  a partir do ponto de vista do desempenho global do sistema. Em muitos casos práticos, a seleção da melhor matriz  $\mathbf{K}_e$  se vê reduzida a uma solução de compromisso entre uma resposta rápida e a sensibilidade a perturbações e ruídos.

#### EXEMPLO 2-4

Considere-se o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

$$y = \mathbf{Cx}$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0]$$

Projetar um observador de ordem total, supondo que a configuração do sistema seja idêntica àquela mostrada na Fig. 2-18. Admite-se que os autovalores desejados para a matriz do observador sejam

$$\mu_1 = -2 + j2\sqrt{3}, \quad \mu_2 = -2 - j2\sqrt{3}, \quad \mu_3 = -5$$

A matriz de observabilidade será examinada. O posto de

$$N = [C' \mid A'C' \mid (A')^2 C'] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é 3. Por conseguinte, o sistema é completamente observável e a determinação da matriz de ganho do observador  $K_e$  é possível. Como a equação característica do sistema dado é

$$\begin{aligned} |sI - A| &= \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 6 & 11 & s+6 \end{vmatrix} \\ &= s^3 + 6s^2 + 11s + 6 \\ &= s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0 \end{aligned}$$

tem-se

$$a_1 = 6, \quad a_2 = 11, \quad a_3 = 6$$

A equação característica desejada é

$$\begin{aligned} (s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3) &= (s + 2 - j2\sqrt{3})(s + 2 + j2\sqrt{3})(s + 5) \\ &= s^3 + 9s^2 + 36s + 80 \\ &= s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3 = 0 \end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$\alpha_1 = 9, \quad \alpha_2 = 36, \quad \alpha_3 = 80$$

1. Este problema será resolvido através do uso da Eq. (2-83):

$$K_e = (WN')^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_3 - a_3 \\ \alpha_2 - a_2 \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix}$$

Notando-se que

$$N' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 11 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tem-se

$$(WN')^{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} 11 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 25 \end{bmatrix}$$

Conseqüentemente,

$$K_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 80 - 6 \\ 36 - 11 \\ 9 - 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2. Em seguida, obtém-se a matriz de ganho do observador  $\mathbf{K}_e$  através do uso da fórmula de Ackermann. Referindo-se à Eq. (2-87), tem-se

$$\mathbf{K}_e = \phi(\mathbf{A}) \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como o polinômio característico desejado é

$$\phi(s) = s^3 + 9s^2 + 36s + 80$$

tem-se

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{A}) &= \mathbf{A}^3 + 9\mathbf{A}^2 + 36\mathbf{A} + 80\mathbf{I} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}^3 + 9 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}^2 \\ &\quad + 36 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} + 80 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 74 & 25 & 3 \\ -18 & 41 & 7 \\ -42 & -95 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Igualmente,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por conseguinte,

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} 74 & 25 & 3 \\ -18 & 41 & 7 \\ -42 & -95 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

É fornecido o Programa MATLAB para projetar a matriz de ganho do observador  $\mathbf{K}_e$  usando a matriz de transformação  $\mathbf{Q}$ . O Programa MATLAB 2-8 é baseado na fórmula de Ackermann.

#### Programa MATLAB 2-7

```
% ----- Projeto de um observador de ordem total -----
%
% ***** Este programa determina a matriz de ganho do observador, Ke,
% através do uso da matriz de transformação Q *****
%
% ***** Entrar com as matrizes A e C *****
%
A = [0 1 0
      0 0 1
      -6 -11 -6];
C = [1 0 0];
%
% ***** Entrar com a matriz de observabilidade N e verificar o seu posto *****
%
```

```
N = [C' A'*C' (A')^2*C'];
rank(N)
```

```
ans =
```

```
3
```

% \*\*\*\*\* Como o posto (rank) da matriz de observabilidade é 3,  
% o projeto de um observador é possível \*\*\*\*\*

% \*\*\*\*\* Determinar a1, a2, a3 na equação característica  
% entrando-se com o enunciado poly(A) \*\*\*\*\*

```
p = poly(A)
```

```
p =
```

```
1.0000 6.0000 11.0000 6.0000
```

```
a1 = p(2); a2 = p(3); a3 = p(4);
```

% \*\*\*\*\* Entrar com o polinômio característico desejado definindo-se  
% a matriz seguinte J e entrando com o enunciado poly(J) \*\*\*\*\*

```
J = [-2+2*sqrt(3)*i 0 0
      0 -2-2*sqrt(3)*i 0
      0 0 -5];
```

```
JJ = poly(J)
```

```
JJ =
```

```
1.0000 9.0000 36.0000 80.0000
```

```
aa1 = JJ(2); aa2 = JJ(3); aa3 = JJ(4);
```

% \*\*\*\*\* Computar a matriz W \*\*\*\*\*

```
W = [a2 a1 1;a1 1 0;1 0 0];
```

% \*\*\*\*\* A matriz de ganho do observador, Ke, é obtida a partir de \*\*\*\*\*

```
Ke = inv(W*N')*[aa3-a3;aa2-a2;aa1-a1]
```

```
Ke =
```

```
3.0000
7.0000
-1.0000
```

## Programa MATLAB 2-8

```
% ----- Projeto de um observador de estado de ordem total -----
% ***** Este programa determina a matriz de ganho do observador, Ke,
% baseado na fórmula de Ackermann *****
% ***** Entrar com as matrizes A e C *****
A = [0 1 0
      0 0 1
     -6 -11 -6];
C = [1 0 0];
% ***** Entrar com a matriz de observabilidade M e verificar seu posto *****
N = [C' A'*C' (A')^2*C'];
rank(N)
ans =
3
% ***** Com o posto da matriz de observabilidade é 3,
% o projeto de um observador de estado é possível *****
% ***** Entrar com o polinômio característico desejado definindo
% a matriz seguinte J e emitindo o enunciado poly(J) *****
J = [-2+2*sqrt(3)*i 0 0
      0 -2-2*sqrt(3)*i 0
      0 0 -5];
JJ = poly(J)
JJ =
1.0000    9.0000   36.0000   80.0000
% ***** Entrar com o polinômio característico Phi *****
Phi = polyvalm(poly(J),A);
% ***** A matriz de ganho do observador, Ke, é obtida a partir de *****
Ke = Phi*(inv(N'))*[0;0;1]
Ke =
3.0000
7.0000
-1.0000
```

**EXEMPLO 2-5**

Considere o projeto de um sistema regulador para o seguinte processo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (2-88)$$

$$y = \mathbf{Cx} \quad (2-89)$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20,6 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \ 0]$$

Suponha-se a utilização da abordagem da alocação de pólos para o projeto do sistema em que os pólos a malha fechada desejados para o mesmo estejam em  $s = \mu_i$  ( $i = 1, 2$ ), onde  $\mu_1 = -1,8 + j2,4$  e  $\mu_2 = -1,8 - j2,4$ . A matriz de ganho de retroação de estado  $\mathbf{K}$  para este caso pode ser obtida como se segue

$$\mathbf{K} = [29,6 \ 3,6]$$

Usando-se esta matriz de ganho de retroação de estado  $\mathbf{K}$ , o sinal de controle  $u$  é dado por

$$u = -\mathbf{Kx} = -[29,6 \ 3,6] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Suponha-se que se utilize o controle de retroação de estado observado em vez do controle de retroação efetivo do estado, ou

$$u = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} = -[29,6 \ 3,6] \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}$$

onde se escolhem os autovalores da matriz de ganho do observador como sendo

$$\mu_1 = \mu_2 = -8$$

Obtenha-se a matriz de ganho do observador  $\mathbf{K}_e$  e seja esboçado um diagrama de blocos para o sistema de controle de retroação de estado observado.

Para o sistema definido pela Eq. (2-88), o polinômio característico é

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ -20,6 & s \end{vmatrix} = s^2 - 20,6 = s^2 + a_1s + a_2$$

Por conseguinte,

$$a_1 = 0, \quad a_2 = -20,6$$

O polinômio característico desejado para o observador é

$$\begin{aligned} (s - \mu_1)(s - \mu_2) &= (s + 8)(s + 8) = s^2 + 16s + 64 \\ &= s^2 + \alpha_1s + \alpha_2 \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\alpha_1 = 16, \quad \alpha_2 = 64$$

Para a determinação da matriz de ganho do observador, deve-se usar a Eq. (2-83), ou

$$\mathbf{K}_e = (\mathbf{WN}')^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_2 - a_2 \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix}$$

onde

$$\mathbf{N} = [\mathbf{C}' : \mathbf{A}'\mathbf{C}'] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_e &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 64 + 20,6 \\ 16 - 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 84,6 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 84,6 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2-90)$$

Se for usada a fórmula de Ackermann, Eq. (2-87), obtém-se

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_e &= \phi(\mathbf{A}) \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{A}^2 + 16\mathbf{A} + 64\mathbf{I}] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 16 \\ 84,6 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2-91)$$

A Equação (2-90) ou (2-91) fornece a matriz de ganho do observador  $\mathbf{K}_e$ . Referindo-se à Eq. (2-75), a equação do observador pode ser dada por

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e \mathbf{C}) \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B} u + \mathbf{K}_e y \quad (2-92)$$

Como

$$u = -\mathbf{K} \tilde{\mathbf{x}}$$

a Eq. (2-92) se transforma em

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e \mathbf{C} - \mathbf{B} \mathbf{K}) \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_e y$$

ou

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20,6 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 16 \\ 84,6 \end{bmatrix} [1 \ 0] - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [29,6 \ 3,6] \right\} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 \\ 84,6 \end{bmatrix} y \\ &= \begin{bmatrix} -16 & 1 \\ -93,6 & -3,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 \\ 84,6 \end{bmatrix} y\end{aligned}$$

O diagrama de bloco do sistema com a realimentação de estado observado é mostrado na Fig. 2-19.

A dinâmica do sistema de controle de realimentação de estado observado pode ser descrita através das seguintes equações: para o processo a controlar,

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20,6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ u &= -[29,6 \ 3,6] \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Para o observador,

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & 1 \\ -93,6 & -3,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 \\ 84,6 \end{bmatrix} y$$

O sistema, como um todo, é de ordem quatro. A equação característica para o sistema é

$$\begin{aligned}|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{K}||s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e \mathbf{C}| &= (s^2 + 3,6s + 9)(s^2 + 16s + 64) \\ &= s^4 + 19,6s^3 + 130,6s^2 + 374,4s + 576 = 0\end{aligned}$$

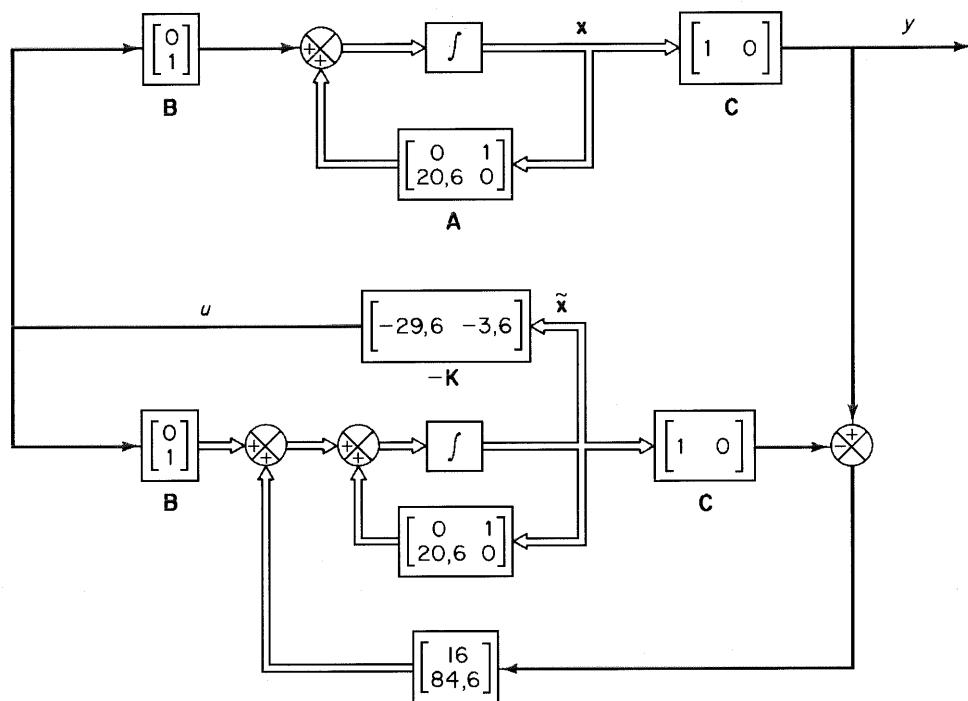


Fig. 2.19

(Para a dedução da equação característica para o sistema de realimentação de estado observado, veja-se, por exemplo, a Referência 4, listada ao final do livro.)

O Programa MATLAB 2-9 pode ser usado para determinar a matriz de ganho da retroação de estado  $\mathbf{K}$  e a matriz de ganho do observador  $\mathbf{K}_o$ , para o sistema considerado. O polinômio característico para o sistema projetado pode ser obtido a partir do Programa MATLAB 2-10.

#### Programa MATLAB 2-9

```
% ----- Alocação de pólos e projeto de observadores -----
% ***** Projeto de um sistema de controle usando a técnica
% da alocação de pólos e observadores de estado. Resolver,
% primeiro, o problema da alocação de pólos. *****
% ***** Entrar com as matrizes A, B, C e D *****
A = [0 1;20.6 0];
B = [0;1];
C = [1 0];
D = [0];
% ***** Verificar o posto da matriz de controlabilidade *****
M = [B A*B];
rank(M)
ans =
2
% ***** Como o posto da matriz de controlabilidade é 2,
% a alocação arbitrária de pólos é possível *****
```

% \*\*\*\*\* Entrar com o polinômio característico desejado  
% através da definição da matriz seguinte J e computando poly(J) \*\*\*\*\*

J = [-1.8+2.4\*i 0;0 -1.8-2.4\*i];

poly(J)

ans =

1.0000 3.6000 9.0000

% \*\*\*\*\* Entrar com o polinômio característico Phi \*\*\*\*\*

Phi = polyvalm(poly(J),A);

% \*\*\*\*\* A matriz de ganho de retroação de estado K pode ser dada por \*\*\*\*\*

K = [0 1]\*inv(M)\*Phi

K =

29.6000 3.6000

% \*\*\*\*\* O programa seguinte determina a matriz do observador Ke \*\*\*\*\*

% \*\*\*\*\* Entrar com a matriz de observabilidade N e verificar o seu posto \*\*\*\*\*

N = [C' A'\*C'];

rank(N)

ans =

2

% \*\*\*\*\* Como o posto da matriz de observabilidade é 2, o projeto  
% do observador é possível \*\*\*\*\*

% \*\*\*\*\* Entrar com o polinômio característico desejado definindo  
% a matriz J0 seguinte e entrando com o enunciado poly(J0) \*\*\*\*\*

J0 = [-8 0;0 -8];

poly(J0)

ans =

1 16 64

% \*\*\*\*\* Entrar com o polinômio característico Ph \*\*\*\*\*

Ph = polyvalm(poly(J0),A);

% \*\*\*\*\* A matriz de ganho do observador, Ke, é obtida a partir de \*\*\*\*\*

Ke = Ph\*(inv(N'))\*[0;1]

Ke =

16.0000  
84.6000

## Programa MATLAB 2-10

```
% ----- Polinômio característico -----
% ***** O polinômio característico para o sistema projetado
% é dado por |sI - A + BK||sI - A + KeC| *****
% ***** O polinômio característico pode ser obtido pela utilização
% dos autovalores de A-BK e A-KeC como se segue *****
X = [eig(A-B*K);eig(A-Ke*C)]
X =
-1.8000 + 2.4000i
-1.8000 - 2.4000i
-8.0000
-8.0000
poly(X)
ans =
1.0000 19.6000 130.6000 374.4000 576.0000
```

**2-5 PROJETO DE OBSERVADORES DE ORDEM MÍNIMA****Observador de estado de ordem mínima**

Os observadores discutidos até aqui foram projetados para reconstruir todas as variáveis de estado. Na prática, algumas variáveis de estado podem ser medidas com precisão. Tais variáveis de estado não precisam ser estimadas. Um observador que estime menos do que  $n$  variáveis de estado, onde  $n$  é a dimensão do vetor de estado, é chamado um observador de estado de ordem reduzida ou, simplesmente, um observador de ordem reduzida. Se a ordem do observador de ordem reduzida for a menor possível, o observador é chamado um observador de estado de ordem mínima ou um observador de ordem mínima.

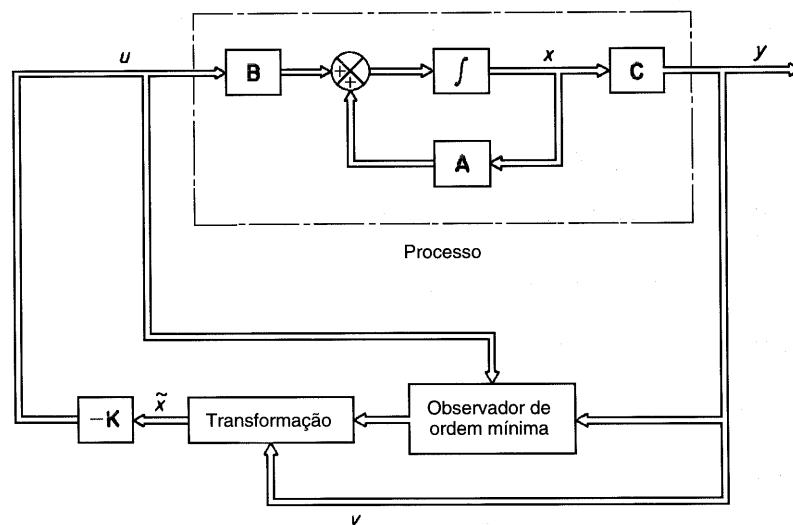


Fig. 2.20

Suponha-se que o vetor de estado  $\mathbf{x}$  seja um vetor de ordem  $n$  e que o vetor de saída  $y$  seja de ordem  $m$  e que possa ser medido. Como  $m$  variáveis de saída são combinações lineares das variáveis de estado,  $m$  variáveis de estado não precisam ser estimadas. Precisam ser estimadas somente  $n - m$  variáveis de estado. Por conseguinte o observador de ordem reduzida se torna um observador de  $(n - m)$ -ésima ordem. Um tal observador de  $(n - m)$ -ésima ordem é um observador de ordem mínima. A Fig. 2-20 mostra o diagrama de bloco de um sistema com um observador de ordem mínima.

É importante notar, no entanto, que se a medição das variáveis de saída envolver ruídos significativos e for relativamente imprecisa, o uso do observador de ordem total deve resultar num melhor desempenho do sistema.

Para apresentar a idéia básica do observador de ordem mínima, sem complicações matemáticas indevidas, será apresentado o caso onde a saída é um escalar (isto é,  $m = 1$ ) e será deduzida a equação de estado para o observador de ordem mínima. Considere-se o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

$$y = \mathbf{Cx}$$

onde o vetor de estado  $\mathbf{x}$  pode ser particionado em duas partes,  $x_a$  (um escalar) e  $\mathbf{x}_b$  (um vetor de ordem  $(n - 1)$ ). Aqui, a variável de estado  $x_a$  é igual à saída  $y$  e, por conseguinte, pode ser medida diretamente e  $\mathbf{x}_b$  é a porção não-mensurável do vetor de estado. Então, as equações do estado particionado e de saída se tornam

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{aa} & \mathbf{A}_{ab} \\ \mathbf{A}_{ba} & \mathbf{A}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_a \\ \mathbf{B}_b \end{bmatrix} u \quad (2-93)$$

$$y = [1 : \mathbf{0}] \begin{bmatrix} x_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} \quad (2-94)$$

onde  $\mathbf{A}_{aa}$  = escalar

$\mathbf{A}_{ab}$  = matriz  $1 \times (n - 1)$

$\mathbf{A}_{ba}$  = matriz  $(n - 1) \times 1$

$\mathbf{A}_{bb}$  = matriz  $(n - 1) \times (n - 1)$

$B_a$  = escalar

$\mathbf{B}_b$  = matriz  $(n - 1) \times 1$

A partir da Eq. (2-93), a equação para a parte não-mensurada do estado se torna

$$\dot{x}_a = \mathbf{A}_{aa}x_a + \mathbf{A}_{ab}\mathbf{x}_b + B_a u$$

ou

$$\dot{x}_a - \mathbf{A}_{aa}x_a - B_a u = \mathbf{A}_{ab}\mathbf{x}_b \quad (2-95)$$

Os termos do lado esquerdo da Eq. (2-95) podem ser mensurados. A Equação (2-95) atua como a equação de saída. Ao se projetar o observador de ordem mínima, considera-se o lado esquerdo da Eq. (2-95) como sendo quantidade conhecida. Por conseguinte, a Eq. (2-95) relaciona quantidades mensuráveis e não-mensuráveis do estado.

A partir da Eq. (2-93), a equação para a parte não-mensurada do estado se torna

$$\dot{\mathbf{x}}_b = \mathbf{A}_{ba}x_a + \mathbf{A}_{bb}\mathbf{x}_b + \mathbf{B}_b u \quad (2-96)$$

Notando-se que os termos  $\mathbf{A}_{ba}x_a$  e  $\mathbf{B}_b u$  são quantidades conhecidas, a Eq. (2-96) descreve a dinâmica da parte não-mensurada do estado.

No seguimento, será apresentado um método para projetar um observador de ordem mínima. O procedimento de projeto pode ser simplificado se for utilizada a técnica de projeto desenvolvida para o observador de ordem total.

Será comparada a equação de estado para o observador de ordem total com aquela para o de ordem mínima. A equação de estado para o observador de ordem total é

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

e a ‘equação de estado’ para o observador de ordem mínima é

$$\dot{\mathbf{x}}_b = \mathbf{A}_{bb}\mathbf{x}_b + \mathbf{A}_{ba}x_a + \mathbf{B}_b u$$

A equação de saída para o observador de ordem total é

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

e a ‘equação de saída’ para o observador de ordem mínima é

$$\dot{\mathbf{x}}_a - A_{aa}x_a - B_a u = \mathbf{A}_{ab}\mathbf{x}_b$$

O projeto do observador de ordem mínima pode ser conduzido como se segue: referindo-se à Eq. (2-75), a equação do observador para o observador de ordem total pode ser dada por

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e \mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{K}_e y \quad (2-97)$$

Então, fazendo as substituições a partir da Tabela 2-1 na Eq. (2-97), obtém-se

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_b = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab})\tilde{\mathbf{x}}_b + \mathbf{A}_{ba}x_a + \mathbf{B}_b u + \mathbf{K}_e(\dot{x}_a - A_{aa}x_a - B_a u) \quad (2-98)$$

onde a matriz de ganho do observador de estado  $\mathbf{K}_e$  é uma matriz  $(n - 1) \times 1$ . Na Eq. (2-98), note-se que para estimar  $\tilde{\mathbf{x}}_b$  precisamos da derivada de  $x_a$ . Isto é indesejável, e, então, é preciso modificar a Eq. (2-98).

A Eq. (2-98) será reescrita como se segue. Notando-se que  $x_a = y$ , tem-se

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_b - \mathbf{K}_e \dot{x}_a &= (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab})\tilde{\mathbf{x}}_b + (\mathbf{A}_{ba} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{aa})y + (\mathbf{B}_b - \mathbf{K}_e \mathbf{B}_a)u \\ &= (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab})(\tilde{\mathbf{x}}_b - \mathbf{K}_e y) \\ &\quad + [(\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab})\mathbf{K}_e + \mathbf{A}_{ba} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{aa}]y \\ &\quad + (\mathbf{B}_b - \mathbf{K}_e \mathbf{B}_a)u \end{aligned} \quad (2-99)$$

Defina-se

$$\mathbf{x}_b - \mathbf{K}_e y = \mathbf{x}_b - \mathbf{K}_e x_a = \boldsymbol{\eta}$$

e

$$\tilde{\mathbf{x}}_b - \mathbf{K}_e y = \tilde{\mathbf{x}}_b - \mathbf{K}_e x_a = \tilde{\boldsymbol{\eta}} \quad (2-100)$$

Então, a Eq. (2-99) se torna

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\boldsymbol{\eta}}} &= (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab})\tilde{\boldsymbol{\eta}} + [(\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab})\mathbf{K}_e \\ &\quad + \mathbf{A}_{ba} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{aa}]y + (\mathbf{B}_b - \mathbf{K}_e \mathbf{B}_a)u \end{aligned} \quad (2-101)$$

A Eq. (2-101), juntamente com a Eq. (2-100), define o observador de ordem mínima.

Em seguida, será deduzida a equação de erro do observador. Usando a Eq. (2-95), a Eq. (2-98) pode ser modificada para

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_b = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab})\tilde{\mathbf{x}}_b + \mathbf{A}_{ba}x_a + \mathbf{B}_b u + \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab} \mathbf{x}_b \quad (2-102)$$

**Tabela 2-1** LISTA DAS SUBSTITUIÇÕES NECESSÁRIAS PARA ESCREVER A EQUAÇÃO DO OBSERVADOR DE ESTADO DE ORDEM MÍNIMA

Observador de estado de ordem total	Observador de estado de ordem mínima
$\tilde{\mathbf{x}}$	$\tilde{\mathbf{x}}_b$
$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}_{bb}$
$\mathbf{B}u$	$\mathbf{A}_{ba}x_a + \mathbf{B}_b u$
$\mathbf{C}$	$\dot{x}_a - A_{aa}x_a - B_a u$
$\mathbf{K}_e$ (matriz $n \times 1$ )	$\mathbf{K}_e$ [matriz $(n - 1) \times 1$ ]

Subtraindo a Eq. (2-102) da Eq. (2-96), obtém-se

$$\dot{\mathbf{x}}_b - \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_b = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab})(\mathbf{x}_b - \tilde{\mathbf{x}}_b) \quad (2-103)$$

Definindo

$$\mathbf{e} = \mathbf{x}_b - \tilde{\mathbf{x}}_b = \boldsymbol{\eta} - \tilde{\boldsymbol{\eta}}$$

A Eq. (2-103), então, se torna

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab})\mathbf{e} \quad (104)$$

Esta é a equação de erro para o observador de ordem mínima. Note-se que  $\mathbf{e}$  é um vetor de ordem  $(n - 1)$ .

A dinâmica de erro pode ser escolhida como desejado pela seguinte técnica desenvolvida para o observador de ordem total, providenciado que o posto da matriz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{ab} \\ \mathbf{A}_{ab} \mathbf{A}_{bb} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{ab} \mathbf{A}_{bb}^{n-2} \end{bmatrix}$$

seja  $n - 1$ . (Esta é a condição de completa observabilidade aplicável ao observador de ordem mínima.)

A equação característica para o observador de ordem mínima é obtida a partir da Eq. (2-104), como se segue:

$$\begin{aligned} |s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{bb} + \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}| &= (s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_{n-1}) \\ &= s^{n-1} + \hat{\alpha}_1 s^{n-2} + \cdots + \hat{\alpha}_{n-2} s + \hat{\alpha}_{n-1} = 0 \end{aligned} \quad (2-105)$$

onde  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$  são os autovalores desejados para o observador de ordem mínima. A matriz de ganho do observador  $\mathbf{K}_e$  pode ser determinada escolhendo-se, primeiro, os autovalores desejados para o observador de ordem mínima [isto é, colocando-se as raízes da equação característica, Eq. (2-105), nas localizações desejadas] e, em seguida, usando-se o procedimento desenvolvido para o observador de ordem total com as modificações apropriadas. Por exemplo, se a fórmula para determinar a matriz  $\mathbf{K}_e$  dada pela Eq. (2-83) deve ser usada, deveria ser modificada para

$$\mathbf{K}_e = \hat{\mathbf{Q}} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{n-1} - \hat{\alpha}_{n-1} \\ \hat{\alpha}_{n-2} - \hat{\alpha}_{n-2} \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_1 \end{bmatrix} = (\hat{\mathbf{W}} \hat{\mathbf{N}}')^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{n-1} - \hat{\alpha}_{n-1} \\ \hat{\alpha}_{n-2} - \hat{\alpha}_{n-2} \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_1 \end{bmatrix} \quad (2-106)$$

onde  $\mathbf{K}_e$  é uma matriz  $(n - 1) \times 1$  e

$$\hat{\mathbf{N}} = [\mathbf{A}'_{ab} : \mathbf{A}'_{bb} \mathbf{A}'_{ab} : \cdots : (\mathbf{A}'_{bb})^{n-2} \mathbf{A}'_{ab}] = \text{matrix } (n - 1) \times (n - 1)$$

$$\hat{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{n-2} & \hat{\alpha}_{n-3} & \cdots & \hat{\alpha}_1 & 1 \\ \hat{\alpha}_{n-3} & \hat{\alpha}_{n-4} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \hat{\alpha}_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{matrix } (n - 1) \times (n - 1)$$

Note-se que  $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_{n-2}$  são os coeficientes da equação característica para a equação de estado

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{bb}| = s^{n-1} + \hat{\alpha}_1 s^{n-2} + \cdots + \hat{\alpha}_{n-2} s + \hat{\alpha}_{n-1} = 0$$

Igualmente, se a fórmula de Ackermann dada pela Eq. (2-87) deve ser usada, precisa ser modificada para

$$\mathbf{K}_e = \phi(\mathbf{A}_{bb}) \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{ab} \\ \mathbf{A}_{ab} \mathbf{A}_{bb} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{ab} \mathbf{A}_{bb}^{n-3} \\ \mathbf{A}_{ab} \mathbf{A}_{bb}^{n-2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2-107)$$

onde

$$\phi(\mathbf{A}_{bb}) = \mathbf{A}_{bb}^{n-1} + \hat{\alpha}_1 \mathbf{A}_{bb}^{n-2} + \cdots + \hat{\alpha}_{n-2} \mathbf{A}_{bb} + \hat{\alpha}_{n-1} \mathbf{I}$$


---

#### EXEMPLO 2-6

Considere-se o sistema definido por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

$$y = \mathbf{Cx}$$

onde

$$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{array} \right], \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 : 0 \ 0]$$

Suponha-se que a variável de estado  $x_1$  (que é igual a  $y$ ) seja mensurável e não precisa ser observada. Determinar a matriz de ganho do observador  $\mathbf{K}_e$ , para o observador de ordem mínima. Os autovalores desejados são

$$\mu_1 = -2 + j2\sqrt{3}, \quad \mu_2 = -2 - j2\sqrt{3}$$

A partir da matriz particionada obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{aa} &= 0, & \mathbf{A}_{ab} &= [1 \ 0] \\ \mathbf{A}_{ba} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \end{bmatrix}, & \mathbf{A}_{bb} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_a &= 0, & \mathbf{B}_b &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

O polinômio característico para a parte inobservada do sistema é

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{bb}| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 11 & s+6 \end{vmatrix} = s^2 + 6s + 11 = s^2 + \hat{\alpha}_1 s + \hat{\alpha}_2$$

Por conseguinte,

$$\hat{\alpha}_1 = 6, \quad \hat{\alpha}_2 = 11$$

Note-se que

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{N}} &= [\mathbf{A}'_{ab} : \mathbf{A}'_{bb} \mathbf{A}'_{ab}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \hat{\mathbf{W}} &= \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$\hat{\mathbf{Q}} = (\hat{\mathbf{W}} \hat{\mathbf{N}}')^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico desejado para o observador de ordem mínima é

$$\begin{aligned} |s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{bb} + \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}| &= (s - \mu_1)(s - \mu_2) \\ &= (s + 2 - j2\sqrt{3})(s + 2 + j2\sqrt{3}) \\ &= s^2 + 4s + 16 \end{aligned}$$

Então,

$$\hat{\alpha}_1 = 4, \quad \hat{\alpha}_2 = 16$$

Referindo à Eq. (2-106), tem-se

$$\mathbf{K}_e = \hat{\mathbf{Q}} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 - 11 \\ 4 - 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 17 \end{bmatrix}$$

No que se segue, o mesmo problema será resolvido usando a fórmula de Ackermann. Referindo-se à Eq. (2-107), tem-se

$$\mathbf{K}_e = \phi(\mathbf{A}_{bb}) \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{ab} \\ \mathbf{A}_{ab} \mathbf{A}_{bb} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2-108)$$

onde

$$\phi(\mathbf{A}_{bb}) = \mathbf{A}_{bb}^2 + \hat{\alpha}_1 \mathbf{A}_{bb} + \hat{\alpha}_2 \mathbf{I} = \mathbf{A}_{bb}^2 + 4\mathbf{A}_{bb} + 16\mathbf{I}$$

Como

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \left[ \begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{array} \right], \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{aa} &= 0, \quad \mathbf{A}_{ab} = [1 \ 0], \quad \mathbf{A}_{ba} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_{bb} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_a = 0, \quad \mathbf{B}_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A Eq. (2-108) agora se torna

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_e &= \left\{ \left[ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix}^2 + 4 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix} + 16 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 22 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 17 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Em seguida, será deduzida a equação para o observador de ordem mínima. Tomando as Eqs. (2-100) e (2-101) por referência, obtém-se

$$\dot{\tilde{\eta}} = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}) \tilde{\eta} + [(\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}) \mathbf{K}_e + \mathbf{A}_{ba} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{aa}] y + (\mathbf{B}_b - \mathbf{K}_e \mathbf{B}_a) u \quad (2-109)$$

onde

$$\tilde{\eta} = \tilde{\mathbf{x}}_b - \mathbf{K}_e y = \tilde{\mathbf{x}}_b - \mathbf{K}_e \mathbf{x}_a$$

Notando-se que

$$\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 17 \end{bmatrix} [1 \ 0] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -28 & -6 \end{bmatrix}$$

a equação para o observador de ordem mínima, Eq. (2-109), se torna

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\eta}}_2 \\ \dot{\tilde{\eta}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -28 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\eta}_2 \\ \tilde{\eta}_3 \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -28 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 17 \end{bmatrix} \right. \\ \left. + \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 17 \end{bmatrix} 0 \right\} y + \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 17 \end{bmatrix} 0 \right\} u$$

ou

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\eta}}_2 \\ \dot{\tilde{\eta}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -28 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\eta}_2 \\ \tilde{\eta}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 \\ -52 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Esta é a equação para o observador de ordem mínima.

### Exemplos de programas MATLAB para o projeto de um observador de ordem mínima

São apresentados, em seguida, dois programas para o projeto de observadores de ordem mínima, um usando a matriz de transformação  $\mathbf{Q}$  (Programa MATLAB 2-11), e o outro usando a fórmula de Ackermann (Programa MATLAB 2-12).

#### Programa MATLAB 2-11

```
% ----- Projeto de um observador de ordem mínima -----
% ***** Este programa usa a matriz de transformação Q *****
% ***** Entrar com as matrizes Aaa, Aab, Aba, Abb, Ba e Bb *****
Aaa = [0]; Aab = [1 0]; Aba = [0;-6]; Abb = [0 1;-11 -6];
Ba = [0]; Bb = [0;1];

% ***** Note-se que as matrizes de estado A e de controle B são *****
A = [Aaa Aab;Aba Abb], B = [Ba;Bb]

A =
0   1   0
0   0   1
-6  -11  -6

B =
0
0
1

% ***** Determinar a1 e a2 do polinômio característico
% para a parte inobservada do sistema *****
p = poly(Abb)

p =
1   6   11

a1 = p(2); a2 = p(3);
```

```

% ***** Entrar com a matriz de observabilidade reduzida NN *****
NN = [Aab' Abb'*Aab'];

% ***** Entrar com a matriz WW *****
WW = [a1 1;1 0];

% ***** Entrar com o polinômio característico desejado definido
% a seguinte matriz J e entrando com o enunciado poly(J) *****
J = [-2+2*sqrt(3)*i 0
      0 -2-2*sqrt(3)*i];

JJ = poly(J)

JJ =
1.0000    4.0000   16.0000

% ***** Determinar aa1 e aa2 do
% polinômio característico desejado *****
aa1 = JJ(2); aa2 = JJ(3);

% ***** A matriz de ganho do observador Ke
% para o observador de ordem mínima é dada por *****
Ke = inv(WW*NN')*[aa2-a2;aa1-a1]

Ke =
-2
17

```

#### Programa MATLAB 2-12

```

% ----- Projeto de um observador de ordem mínima -----
% ***** Este programa está baseado na fórmula de Ackermann *****
% ***** Entrar com as matrizes Aaa, Aab, Aba, Abb, Ba e Bb *****
Aaa = [0]; Aab = [1 0]; Aba = [0;-6]; Abb = [0 1;-11 -6];
Ba = [0]; Bb = [0;1];

% ***** Entrar com a matriz de observabilidade reduzida NN *****
NN = [Aab' Abb'*Aab'];

% ***** Entrar com o polinômio característico desejado definindo
% a seguinte matriz J e entrando com o comando poly(J) *****
J = [-2+2*sqrt(3)*i 0
      0 -2-2*sqrt(3)*i];

```

```
JJ = poly(J)
JJ =
    1.0000    4.0000   16.0000
% ***** Entre com o polinômio característico Phi *****
Phi = polyvalm(poly(J),Abb);
% ***** A matriz de ganho do observador Ke para o observador de ordem
% mínima é dada por *****
Ke = Phi*inv(NN')*[0;1]
Ke =
    -2
    17
```