专业:______ 座位号:______ 考场号:______ 所在院校:______ 准考证号:______ 姓名:______

密封线 答题时不要超过此线

第十六届全国大学生数学竞赛决赛试卷参考答案

(非数学 A 类, 2025 年 4 月 12 日)

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
满分	30	10	12	12	12	12	12	100
得分								

注意:

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、(本题 30 分, 每小题 6 分)

(1) 设$a \neq 0$, 函数$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos\sqrt{3x}}{ax}, & x > 0, \\ b + 2\tan^5 x, & x \leqslant 0 \end{cases}$ 在点$x=0$处连续, 则$ab = \underline{\dfrac{3}{2}}$.

(2) 设数列 $\{a_n\}$满足 $a_1 = 2$, 且点 $(\sqrt{a_{n+1}}, \sqrt{a_n})$ $(n \geqslant 1)$ 都在直线 $x - y - \sqrt{2} = 0$ 上, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{(n+1)^2} = \underline{2}$.

(3) 函数 $f(x,y,z) = 2 - x^2 - y^2 + 2\arctan z$ 在点$P(1,2,-1)$处的所有方向导数中, 最大的方向导数值为$\underline{\sqrt{21}}$.

(4) 设 L 是由 $|x|^3 + 3|y| = 1$ 确定的封闭曲线. 第一型曲线积分 $\displaystyle\int_L |x|^3\, ds = \underline{\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)}$.

(5) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(1^{2025} + 2^{2025} + \cdots + n^{2025})^{2025}}{(1^{2024} + 2^{2024} + \cdots + n^{2024})^{2026}} = \underline{\dfrac{2025^{2026}}{2026^{2025}}}$.

得分	
评阅人	

二、(本题 10 分) 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+\sin^2 x)-6(\sqrt[3]{2-\cos x}-1)}{x^3}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

证明: $f(x)$在$x=0$处可导, 并求$f'(0)$.

解答. 根据导数的定义，有

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin^2 x)-6(\sqrt[3]{2-\cos x}-1)}{x^4}.$$

…………………………………………………………… (2 分)

利用Taylor公式, 得

$$\ln(1+\sin^2 x)=\sin^2 x-\frac{1}{2}\sin^4 x+o(x^4),$$
$$\sqrt[3]{2-\cos x}=\sqrt[3]{1+2\sin^2\frac{x}{2}}=1+\frac{2}{3}\sin^2\frac{x}{2}-\frac{4}{9}\sin^4\frac{x}{2}+o(x^4).$$

…………………………………………………………… (6 分)

代入上式并整理，并结合重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, 得

$$\begin{aligned}f'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-\frac{1}{2}\sin^4 x-4\sin^2\frac{x}{2}+\frac{16}{3}\sin^4\frac{x}{2}+o(x^4)}{x^4}\\&=-\frac{1}{12}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^4-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^4\\&=-\frac{7}{12}.\end{aligned}$$

因此, $f(x)$在$x=0$处可导，且$f'(0)=-\dfrac{7}{12}$.

…………………………………………………………… (10 分)

得分	
评阅人	

三、(本题 12 分) 求微分方程 $\dfrac{yy''-y'^2}{y^2}=\ln y$ 的通解.

解答. 方法1. 原方程变形为 $(\dfrac{y'}{y})'=\ln y$. 从而, $(\ln y)''=\ln y$. 令$z=\ln y$, 则

$$z''=z.$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (4 分)

令$z'=u$, 则$z''=u\frac{du}{dz}$. 代入方程, 得

$$u\frac{du}{dz}=z.$$

积分得

$$u^2=z^2+C_1.$$

于是,

$$z'=\pm\sqrt{z^2+C_1},$$

即

$$\frac{dz}{\sqrt{z^2+C_1}}=\pm dx.$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (8 分)

积分得

$$\ln|z+\sqrt{z^2+C_1}|=\pm x+C_2.$$

所以, 通解为

$$\ln|\ln y+\sqrt{\ln^2 y+C_1}|=\pm x+C_2,$$

其中C_1, C_2是任意常数. $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (12 分)

方法2. 原方程变形为 $(\dfrac{y'}{y})'=\ln y$. 从而, $(\ln y)''=\ln y$. 令$z=\ln y$, 则

$$z''=z.$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (4 分)

上述方程为二阶常系数齐次线性方程, 其通解为

$$z=C_1e^x+C_2e^{-x},$$

其中C_1, C_2是任意常数. .... (10 分)
将$z = \ln y$带入上式可得原方程的通解为

$$\ln y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

.... (12 分)

专业:______ 座位号:______ 考场号:______ 所在院校:______ 准考证号:______ 姓名:______

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

四、(本题 12 分) 设 a,b,c 是正数, S 是方向朝上的上半椭球面
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ (z\geqslant 0).$$
计算 $I=\iint\limits_S xy^2dydz+yz^2dzdx+zx^2dxdy$.

解答. 方法1 记 D 是 xy-平面上椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 围成的闭区域, 方向朝下. S 与 D 围成上半椭球体 V. 因为
$$\iint\limits_D xy^2\,dy\,dz+yz^2\,dz\,dx+zx^2\,dx\,dy=0,$$
所以根据 Gauss 公式
$$I=\iint\limits_{S+D} xy^2\,dy\,dz+yz^2\,dz\,dx+zx^2\,dx\,dy=\iiint\limits_V\left(x^2+y^2+z^2\right)\,dx\,dy\,dz.$$
$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (4 分)

作变换 $x=au,y=bv,z=cw$, 并记 $B^+:u^2+v^2+w^2\leqslant 1\ (w\geqslant 0)$, $B:u^2+v^2+w^2\leqslant 1$, 可得
$$\begin{aligned}\iiint\limits_V\left(x^2+y^2+z^2\right)\,dx\,dy\,dz&=abc\iiint\limits_{B^+}\left(a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2\right)\,du\,dv\,dw\\&=\frac{abc}{2}\iiint\limits_B\left(a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2\right)\,du\,dv\,dw.\end{aligned}$$
根据对称性，有
$$\iiint\limits_B u^2\,du\,dv\,dw=\iiint\limits_B v^2\,du\,dv\,dw=\iiint\limits_B w^2\,du\,dv\,dw.$$
$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (8分)

因此
$$\begin{aligned}I&=\frac{abc(a^2+b^2+c^2)}{6}\iiint\limits_B\left(u^2+v^2+w^2\right)\,du\,dv\,dw\\&=\frac{abc(a^2+b^2+c^2)}{6}\iiint\limits_{\substack{0\leqslant r\leqslant 1\\0\leqslant\theta\leqslant\pi\\0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi}} r^4\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi\\&=\frac{abc(a^2+b^2+c^2)}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot 2\cdot 2\pi\\&=\frac{2\pi}{15}abc(a^2+b^2+c^2).\end{aligned}$$

. . . . (12 分)

方法2

给定曲面 S 的参数方程:

$$x = a\sin\theta\cos\varphi, \quad y = b\sin\theta\sin\varphi, \quad z = c\cos\theta,$$

其中 $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$，$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. . . . . (2 分)

由此可得Jacobi行列式为:

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,\varphi)} = bc\sin^2\theta\cos\varphi,$$

$$\frac{\partial(z,x)}{\partial(\theta,\varphi)} = ca\sin^2\theta\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\varphi)} = ab\sin\theta\cos\theta.$$

. . . . (6 分)

首先计算 $\iint\limits_S xy^2\,dy\,dz$:

$$\begin{aligned}\iint\limits_S xy^2\,dy\,dz &= \iint\limits_{\substack{0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\\0\leqslant\varphi\leqslant2\pi}} (a\sin\theta\cos\varphi)(b\sin\theta\sin\varphi)^2(bc\sin^2\theta\cos\varphi)\,d\theta\,d\varphi\\ &= ab^3c\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi\\ &= ab^3c\cdot\frac{8}{15}\cdot\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{2}{15}ab^3c\pi.\end{aligned}$$

. . . . (10 分)

类似地, 可得:

$$\iint\limits_S yz^2\,dz\,dx = \frac{2}{15}abc^3\pi, \quad \iint\limits_S zx^2\,dx\,dy = \frac{2}{15}a^3bc\pi.$$

综上所述：

$$\iint\limits_S xy^2\,dy\,dz + yz^2\,dz\,dx + zx^2\,dx\,dy = \frac{2}{15}abc(a^2+b^2+c^2)\pi.$$

. . . . (12 分)

专业:________ 座位号:________ 考场号:________ 所在院校:________ 准考证号:________ 姓名:________

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

五、(本题 12 分) 设 A, B 均为 n 阶实对称矩阵，证明以下结论：

(1) 若 A 是正定矩阵, 则存在可逆矩阵 P, 使得 $P^T AP = I$ （单位矩阵）, $P^T BP = D$ （对角矩阵）;

(2) 设 A, B 均为正定矩阵, 则对任意的 $\alpha \in (0, 1)$, 有

$$\ln(|\alpha A + (1-\alpha)B|) \geqslant \alpha \ln|A| + (1-\alpha)\ln|B|.$$

证明. (1) 由 A 是正定矩阵, 则存在可逆矩阵 H，使得 $H^T AH = I$. 注意到 $H^T BH$ 仍是对称矩阵, 所以, 存在正交矩阵 Q, 使得

$$Q^T H^T BHQ = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\},$$

其中, $\lambda_i, i = 1, 2, \cdots, n$ 为矩阵 $H^T BH$ 的特征值. 此时, 若令 $P = HQ$ 即为所求. .... (4 分)

(2) 由(1)可知, 存在可逆矩阵 $S = P^{-1}$，使得 $A = S^T S$，$B = S^T DS$, 且 $\lambda_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$. 这样, $|\alpha A + (1-\alpha)B| = |S^T(\alpha I + (1-\alpha)D)S|$, 即

$$\begin{aligned}
\ln(|\alpha A + (1-\alpha)B|) &= \ln(|S^T S|) + \ln(|\alpha I + (1-\alpha)D|) \\
&= \ln(|S^T S|) + \sum_{i=1}^{n} \ln(\alpha + (1-\alpha)\lambda_i). \\
&\geqslant \ln(|S^T S|) + \sum_{i=1}^{n} (\alpha \ln 1 + (1-\alpha)\ln \lambda_i) \\
&= \ln(|S^T S|) + (1-\alpha)\sum_{i=1}^{n} \ln \lambda_i, \\
&= \ln(|S^T S|) + (1-\alpha)\ln\left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \\
&= \ln(|S^T S|) + (1-\alpha)\ln|D|.
\end{aligned}$$

.... (8 分)

$$\begin{aligned}
\alpha \ln|A| + (1-\alpha)\ln|B| &= \alpha \ln|A| + (1-\alpha)\ln(|S^T DS|) \\
&= \alpha \ln(|S^T S|) + (1-\alpha)\ln(|S^T S|) + (1-\alpha)\ln|D| \\
&= \ln(|S^T S|) + (1-\alpha)\ln|D|.
\end{aligned}$$

所以, $\ln(|\alpha A + (1-\alpha)B|) \geqslant \alpha \ln|A| + (1-\alpha)\ln|B|$. .... (12 分)

得分	
评阅人	

六、(本题 12 分) 设$f(x)$是$[-1,1]$上的二阶可导的奇函数，证明：存在$\xi \in (-1,1)$, 使得

$$f''(\xi) - f'(\xi) + f(1) = 0.$$

解答. 因为$f(x)$为奇函数, 所以$f(0)=0$，且$f'(x)$为偶函数. . . . . (2 分)

记$a = f(1)$, 考虑$F(x) = f(x) - ax$, 则$F(x)$在$[-1,1]$上可导, $F'(x) = f'(x) - a$, 且$F(0) = F(1) = 0$. 对$F(x)$在$[0,1]$上利用Rolle定理, 存在$x_0 \in (0,1)$, 使得$F'(x_0) = 0$, 即$f'(x_0) = a$. . . . . (6 分)

注意到$f'(x)$为偶函数，所以$f'(-x_0) = f'(x_0) = a$.

设$G(x) = \mathrm{e}^{-x}[f'(x) - a]$, 则$G'(x) = \mathrm{e}^{-x}[f''(x) - f'(x) + a]$, 且

$$\begin{aligned} G(-x_0) &= \mathrm{e}^{x_0}[f'(-x_0) - a] = 0, \\ G(x_0) &= \mathrm{e}^{-x_0}[f'(x_0) - a] = 0. \end{aligned}$$

对$G(x)$在$[-x_0, x_0]$上利用Rolle定理，存在$\xi \in (-x_0, x_0)$, 使得$G'(\xi) = 0$, 即

$$f''(\xi) - f'(\xi) + f(1) = 0.$$

. . . . (12 分)

专业:______ 座位号:______ 考场号:______ 所在院校:______ 准考证号:______ 姓名:______

密封线　答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

七、(本题 12 分) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2t-3$, 其中$t>0$ 且 $t \neq 1$,

$$a_{n+1} = \frac{3(t^{n+1}-1)(a_n+1) - 2(t^n+a_n) + (a_n+1)}{a_n + 2t^n - 1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

(1) 利用变换 $b_n = \frac{a_n+1}{t^n-1}$ 求数列 $\{a_n\}$ 的通项表达式;

(2) 令 $c_n = a_n - 1(n=1,2,\ldots)$, 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 的收敛性.

证明. (1) 由

$$a_{n+1} = \frac{3(t^{n+1}-1)(a_n+1) - 2(t^n+a_n) + (a_n+1)}{a_n + 2t^n - 1}$$

可得

$$a_{n+1} = \frac{3(t^{n+1}-1)(a_n+1)}{a_n+1+2(t^n-1)} - 1,$$

所以

$$\frac{a_{n+1}+1}{t^{n+1}-1} = \frac{3(a_n+1)}{a_n+1+2(t^n-1)}.$$

.... (4 分)

由变换 $b_n = \frac{a_n+1}{t^n-1}$可得$b_1 = \frac{a_1+1}{t-1} = 2$以及

$$b_{n+1} = \frac{3b_n}{b_n+2} \Rightarrow \frac{1}{b_{n+1}} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3b_n} \Rightarrow \frac{1}{b_{n+1}} - 1 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{b_n} - 1\right).$$

所以

$$\frac{1}{b_n} - 1 = -\frac{3}{2}\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] \Rightarrow \frac{1}{b_n} = 1 - \frac{3}{2}\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right],$$

因此, $a_n = b_n(t^n-1) - 1 = \left[1 - \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)\right](t^n-1) - 1$.

.... (8 分)

(2) 由(1)的结论可得 $c_n = a_n - 1 = b_n(t^n-1) - 2$. 由于

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{3}{2}\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]\right) = -\frac{1}{2},$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -2$. 因此当 $0<t<1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛; 当 $t>1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 发散. .... (12 分)