

# Численные и численно-аналитические методы в финансовой математике

Федоров Г.В.

21 марта 2023 г.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Методы Монте-Карло</b>	<b>5</b>
1.1	Введение в Монте-Карло . . . . .	6
1.2	Получение случайных величин . . . . .	7
1.2.1	Случайные числа и случайные цифры . . . . .	7
1.2.2	Таблицы случайных цифр . . . . .	8
1.2.3	Датчики случайных чисел . . . . .	9
1.2.4	Псевдослучайные числа . . . . .	9
1.2.5	Алгоритмы получения псевдослучайных чисел . . . . .	9
1.3	Разыгрывание случайной величины . . . . .	10
1.3.1	Дискретные случайные величины . . . . .	10
1.3.2	Непрерывные случайные величины . . . . .	10
1.3.3	Многомерные случайные величины . . . . .	11
1.4	Простейшие методы Монте-Карло . . . . .	14
1.4.1	Сходимость методов Монте-Карло . . . . .	14
1.4.2	Вычисление интеграла в $\mathbb{R}^n$ . . . . .	15
1.4.3	Геометрический метод Монте-Карло . . . . .	15
1.4.4	Оценка сходимости . . . . .	16
1.4.5	Сравнение трудоемкости . . . . .	17
1.4.6	Способы уменьшения дисперсии . . . . .	17
1.4.7	Симметризация подынтегральной функции . . . . .	19
1.5	Применение методов Монте-Карло для опционов . . . . .	22
1.5.1	Сравнение с квадратурными формулами . . . . .	22
1.5.2	Основные определения . . . . .	23
1.5.3	Расчет премии европейского колл опциона в рамках модели Блэка-Шоулза . . . . .	24

1.5.4	Расчет премии азиатского колл опциона в рамках модели Блэка-Шоулза . . . . .	26
1.6	Методы квази Монте-Карло . . . . .	29
1.6.1	Discrepancy . . . . .	30
1.6.2	Последовательности Ван дер Корпута . . . . .	31
1.6.3	Неравенство Koksma-Hlawka . . . . .	32
1.6.4	$(t, m, d)$ -сети и $(t, d)$ -последовательности . . . . .	34
1.6.5	Последовательности Halton and Hammersley . . . . .	34
1.6.6	Последовательность Faure . . . . .	36
1.6.7	Последовательность Соболев . . . . .	37
1.6.8	Коды Gray . . . . .	40
1.7	Задачи на метод Монте Карло . . . . .	42
<b>2</b>	<b>Сеточные численные методы</b>	<b>44</b>
2.1	Численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений . . . . .	45
2.1.1	Введение . . . . .	45
2.1.2	Метод Эйлера-Маруямы . . . . .	45
2.1.3	Интеграл в смысле Стратоновича . . . . .	46
2.1.4	Формула Ито . . . . .	46
2.1.5	Схема Эйлера-Бернштейна . . . . .	47
2.1.6	Диффузионное уравнение Блэка-Шоулза . . . . .	47
2.1.7	Метод Милштейна . . . . .	48
2.2	Численные методы обыкновенных дифференциальных уравнений . . . . .	49
2.2.1	Погрешность метода и вычислительная погрешность . . . . .	49
2.2.2	Пример неустойчивого алгоритма . . . . .	50
2.2.3	Устойчивость решений обыкновенного дифференциального уравнения . . . . .	50
2.2.4	Явный метод Эйлера для обыкновенного дифференциального уравнения . . . . .	51
2.2.5	Явные методы Рунге-Кутты . . . . .	52
2.2.6	Неявные одношаговые методы . . . . .	54
2.2.7	Многошаговые методы . . . . .	55
2.3	Алгебраическая интерполяция и аппроксимация . . . . .	57

2.3.1	Интерполяционный многочлен Лагранжа . . . . .	57
2.3.2	Разделенные разности и формула Ньютона . . . . .	58
2.3.3	Конечные разности . . . . .	60
2.3.4	Численное дифференцирование . . . . .	60
2.3.5	Формулы численного дифференцирования . . . . .	62
2.4	Сеточные методы решения параболических уравнений в частных про- изводных . . . . .	64
2.4.1	Разностные схемы для одномерного параболического уравнения	64
2.4.2	Анализ устойчивости . . . . .	66
2.4.3	Схемы с весами . . . . .	68
2.4.4	Анализ устойчивости схемы с весами в норме $L_{2,h}$ . . . . .	68
2.4.5	Метод конечных разностей для уравнения конвекции-диффузии	71
2.4.6	Метод конечных элементов для уравнения конвекции-диффузии	71
2.5	Методы решения разностных схем . . . . .	72
2.5.1	Метод прогонки . . . . .	72
2.5.2	Метод стрельбы . . . . .	73
2.5.3	Повышение порядков аппроксимации . . . . .	74
2.6	Приложение сеточных численных методов к финансовой математике .	75
2.6.1	Дифференциальное уравнение Блэка-Шоулза . . . . .	75
2.6.2	Модели волатильности с транзакционными издержками . . . . .	76
2.6.3	Граничные условия . . . . .	77
2.6.4	Замена переменных для европейского call опциона . . . . .	78
2.6.5	Замена переменных для американского call опциона . . . . .	79
2.7	Задачи на сеточные численные методы . . . . .	80

## Список обозначений

Мы часто в формулах будем опускать аргументы функций, когда это не приводит к недоразумению. Также мы не будем упоминать, какие промежутки пробегают индексы  $i$  и  $j$ , когда это легко восстанавливается из контекста.

- $\mathbb{N}$  — множество натуральных чисел;
- $\mathbb{Z}$  — кольцо целых чисел;
- $\mathbb{Q}$  — поле рациональных чисел;
- $\mathbb{C}$  — поле комплексных чисел;

# Глава 1

## Методы Монте-Карло

- Литература по §§1.1-1.4:

1. И.М. Соболев *Численные методы Монте-Карло* // М.: Наука, 1973.
2. H. Niederreiter *Random number generation and quasi-Monte Carlo methods*, 1992.

- Литература по §§1.5-1.6:

1. P. Glasserman *Monte-Carlo methods in financial engineering*, 2003.
2. H. Niederreiter *Random number generation and quasi-Monte Carlo methods*, 1992.

## 1.1 Введение в Монте-Карло

Важнейший прием методов Монте-Карло — сведение задачи к расчету математических ожиданий. Для того, чтобы вычислить некоторую величину  $a$ , нужно придумать такую случайную величину, что  $M\xi = a$ . Тогда вычислив  $n$  значений  $\xi_1, \dots, \xi_n$ , можно считать, что

$$a \approx \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n}.$$

**Пример 1.1.1.** Требуется оценить объем  $V_G$  некоторой ограниченной пространственной фигуры  $G$ .

Выберем параллелепипед  $P$ , содержащий  $G$ , объем которого  $V_P$  известен. Выберем  $n$  случайных точек, равномерно распределенных в  $P$ . Обозначим  $k$  количество точек, попавших в  $G$ . Если  $n$  велико, то, очевидно,  $k/n \approx V_G/V_P$ , откуда получаем оценку

$$V_G \approx \frac{k}{n} V_P.$$

В этом примере случайная величина  $\xi$  равна  $V_P$ , если случайная точка попадает в  $G$ , и  $\xi = 0$ , если случайная точка попадает в  $P \setminus G$ . Нетрудно проверить, что  $M\xi = V_G$ , и

$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} = \frac{k}{n} V_P.$$

Существует бесконечно много случайных величин  $\xi$  таких, что  $M\xi = a$ . Поэтому теория Монте-Карло должна дать ответы на два вопроса:

1. как выбрать удобную величину  $\xi$  для расчета той или иной задачи?
2. как находить значений  $\xi_1, \xi_2, \dots$  произвольной случайной величины  $\xi$ ?

## 1.2 Получение случайных величин

### 1.2.1 Случайные числа и случайные цифры

Как правило в качестве стандартной выбирают случайную величину  $\gamma$ , равномерно распределенную на  $(0, 1)$ . Обозначение  $\gamma \Rightarrow (0, 1)$  — *случайное число*. При  $0 < x < 1$  плотность  $p_\gamma(x) = 1$ ,  $M\gamma = 1/2$ ,  $D\gamma = 1/12$ .

Реже в качестве стандартной используют дискретную случайную величину  $\varepsilon$ , которая с одинаковой вероятностью 0,1 принимает одно из 10 значений  $0, 1, \dots, 9$ . Случайную величину  $\varepsilon$  называют *случайной цифрой*. Также случайные цифры рассматривают в двоичной системе счисления, принимающие значения 0 и 1 с вероятностью 0,5.

Связь между случайным числом и случайными цифрами устанавливается путем разложения  $\gamma$  в бесконечную десятичную дробь  $\gamma = 0, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_k \dots$ , или

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k 10^{-k}.$$

**Предложение 1.2.1.** *Десятичные цифры  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k, \dots$  случайного числа  $\gamma$  представляют собой независимые случайные цифры. Обратно, если  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k, \dots$  — независимые случайные цифры, то  $\gamma = 0, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_k \dots$  определяет случайное число.*

*Доказательство.* Пусть  $\gamma \Rightarrow (0, 1)$ . Имеем  $\varepsilon_k = i$  тогда и только тогда, когда

$$0, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{k-1} i \leq \gamma < 0, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{k-1} + 10^{-k}.$$

Следовательно,

$$P\{\varepsilon_k = i\} = \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{k-1}=0}^9 10^{-k} = 0,1.$$

Аналогично, при  $1 \leq s < k$  имеем

$$P\{\varepsilon_k = i, \varepsilon_s = j\} = \sum_{\varepsilon_1, \dots, \hat{\varepsilon}_s, \dots, \varepsilon_{k-1}=0}^9 10^{-k} = 0,01.$$

Обратно, если  $x = 0, a_1 a_2 \dots a_k \dots$ , то

$$P\{\gamma < x\} = \sum_{k=1}^{\infty} P\{\varepsilon_1 = a_1, \dots, \varepsilon_{k-1} = a_{k-1}, \varepsilon_k < a_k\} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k-1}} \frac{a_k}{10} = x.$$

□

**Предложение 1.2.2.** *Пусть  $N \in \mathbb{N}$  — произвольное число. Случайная величина  $\eta = \{N\gamma\}$  равномерно распределена в интервале  $(0, 1)$ .*



*Доказательство.* Если  $x \in (0, 1)$ , то

$$P\{\eta < x\} = \sum_{k=0}^{N-1} P\{k \leq N\gamma < k+x\} = \sum_{k=0}^{N-1} P\{kN^{-1} \leq \gamma < (k+x)N^{-1}\} = \sum_{k=0}^{N-1} xN^{-1} = x.$$

□

В вычислениях используются числа с конечным количеством знаков, поэтому вместо  $\gamma$  используется  $\tilde{\gamma} = 0, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_k$ . Никаких специальных исследований по этому поводу мы проводить не будем: мы считаем, что имеет место ошибка округления такая же, как при любых приближенных вычислениях.

В различных методах получения случайных чисел важны следующие характеристики:

- проверка (тесты на случайность);
- воспроизводимость;
- память;
- скорость получения;
- объем запаса чисел.

Тесты на случайность: критерий согласия Пирсона, критерий  $\omega^2$  и др.

### 1.2.2 Таблицы случайных цифр

Имея достаточно объемную таблицу случайных цифр можно формировать с определенной точностью случайные числа и использовать их в приближенных расчетах.

- Можно воспроизвести число повторно (для проверки корректности проведенного эксперимента).
- Изготовление “хорошей” таблицы случайных цифр — весьма сложное дело.
- “Незаконно” использовать многократно одну и ту же таблицу случайных цифр.
- В большой таблице случайных цифр найдутся “плохие участки” (например, в таблице из  $10^{100}$  цифр вполне вероятно найти 100 нулей подряд).
- Занимает память.
- Запас случайных чисел ограничен.

### 1.2.3 Датчики случайных чисел

Генераторами или датчиками случайных величин называют различные технические устройства, вырабатывающие случайные величины.

- Неограниченный запас случайных чисел.
- Быстрое получение случайных чисел.
- Не занимает память.
- Нельзя воспроизвести повторно (для проверки корректности проведенного эксперимента).
- Необходима периодическая проверка.

### 1.2.4 Псевдослучайные числа

- Однократная проверка на случайность.
- Можно воспроизвести число повторно (для проверки корректности проведенного эксперимента).
- Не занимает память (мало памяти).
- Быстрое получение.
- Запас случайных чисел ограничен.

### 1.2.5 Алгоритмы получения псевдослучайных чисел

Рекуррентные формулы первого порядка вида  $\gamma_{n+1} = \Phi(\gamma_n)$ .

График  $y = \Phi(x)$  должен достаточно плотно заполнять квадрат  $(0, 1)^2$ , поскольку точка  $(\gamma_n, \gamma_{n+1})$  принадлежит графику, а от случайной величины  $(\gamma, \eta)$  мы ожидаем равномерного распределения в  $(0, 1)^2$ .

Например, подходит  $y = \{Nx\}$  для очень больших значений  $N$ .

## 1.3 Разыгрывание случайной величины

Преобразования, позволяющие по случайному числу  $\gamma$  вычислять значения случайной величины  $\xi$  (с желаемым законом распределения), называются *моделированием* или *формированием реализации* или *разыгрыванием* случайной величины.

### 1.3.1 Дискретные случайные величины

Рассмотрим случайную величину  $\xi$  с законом распределения  $P\{\xi = x_i\} = p_i$ . Разделим интервал  $0 \leq y < 1$  на интервалы  $\Delta_i$  длины  $p_i$ .

**Предложение 1.3.1.** Случайная величина  $\xi$ , определенная формулой

$$\xi = x_i, \quad \text{когда } \gamma \in \Delta_i,$$

имеет распределение вероятностей  $P\{\xi = x_i\} = p_i$ .

*Доказательство.* Имеем  $P\{\xi = x_i\} = P\{\gamma \in \Delta_i\} = |\Delta_i| = p_i$ . □

### 1.3.2 Непрерывные случайные величины

Пусть  $\gamma \Rightarrow (0, 1)$ .

Пусть случайная величина  $\xi$  имеет на интервале  $a < x < b$  функцию распределения  $F(x)$ , равную

$$F(x) = \int_a^x p(u) du.$$

**Предложение 1.3.2.** Справедливы соотношения

- $F(\xi) = \gamma$ ;
- $F^{-1}(\gamma) = \xi$ , где  $F^{-1}(y) = \inf\{x \mid F(x) > y\}$ .

*Доказательство.* Имеем

$$P\{x < \xi < x + dx\} = P\{F(x) < \gamma < F(x + dx)\} = F(x + dx) - F(x) = p(x)dx.$$

□

**Пример 1.3.3.** Экспоненциальная случайная величина  $\xi$  при  $x_0 < x < \infty$  имеет

$$p(x) = ae^{-a(x-x_0)}, \quad F(x) = 1 - e^{-a(x-x_0)}.$$

Следовательно,  $1 - e^{-a(\xi-x_0)} = \gamma$ , откуда

$$\xi = x_0 - \frac{\ln(1 - \gamma)}{a}.$$

**Пример 1.3.4.** Для гауссовской (нормальной) случайной величины  $\xi$  с параметрами  $(0, 1)$  уравнение явным образом не решается:

$$\int_{-\infty}^{\xi} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}\gamma.$$

### 1.3.3 Многомерные случайные величины

Если координаты  $n$ -мерной случайной величины  $X = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  независимые,

$$F_X(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \cdot \dots \cdot F_n(x_n),$$

то в этом случае можно моделировать каждую величину  $\xi_j$  независимо,  $F_i(\xi_i) = \gamma_i$ .

В общем случае (когда координаты зависимы) справедливо представление

$$p_X(x_1, \dots, x_n) = p_1(x_1)p_2(x_2|x_1) \cdot \dots \cdot p_n(x_n|x_1, \dots, x_{n-1}),$$

где условные вероятности выражаются через совместную плотность

$$\begin{aligned} p_1(x_1) &= \int \dots \int p_X dx_2 \dots dx_n, \\ p_2(x_2|x_1) &= \frac{1}{p_1(x_1)} \int \dots \int p_X dx_3 \dots dx_n, \\ p_3(x_3|x_1, x_2) &= \frac{1}{p_1(x_1)p_2(x_2|x_1)} \int \dots \int p_X dx_4 \dots dx_n, \\ &\dots \\ p_n(x_n|x_1, \dots, x_{n-1}) &= \frac{p_X}{p_1(x_1) \dots p_{n-1}(x_{n-1}|x_1, \dots, x_{n-2})}. \end{aligned}$$

Положим

$$F_i(x_i|x_1, \dots, x_{i-1}) = \int_{-\infty}^{x_i} p_i(x|x_1, \dots, x_{i-1}) dx.$$

**Предложение 1.3.5.** Пусть  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  — независимые случайные числа. Совокупность случайных величин  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ , определенная из

$$F_1(\xi_1) = \gamma_1,$$

$$F_2(\xi_2|\xi_1) = \gamma_2,$$

...

$$F_n(\xi_n|\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = \gamma_n,$$

имеет совместную плотность распределения  $p_X(x_1, \dots, x_n)$ .

*Доказательство.* Имеем

$$P\{x_i < \xi_i < x_i + dx_i | x_1, \dots, x_{i-1}\} = p_i(x_i | x_1, \dots, x_{i-1}) dx_i.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 & P\{x_1 < \xi_1 < x_1 + dx_1, \dots, x_n < \xi_n < x_n + dx_n\} = \\
 & = P\{x_1 < \xi_1 < x_1 + dx_1\} \dots P\{x_n < \xi_n < x_n + dx_n \mid \xi_1 = x_1, \dots, \xi_{n-1} = x_{n-1}\} = \\
 & = p_1(x_1)p_2(x_2|x_1) \cdot \dots \cdot p_n(x_n|x_1, \dots, x_{n-1}) = p_X(x_1, \dots, x_n)dx_1 \dots dx_n.
 \end{aligned}$$

□

Порядок следования координат в представлении через условную плотность важен при разыгрывании случайных величин.

**Пример 1.3.6.** Рассмотрим случайную точку  $(\xi, \eta)$ , которая может принимать значения в треугольнике  $x + y < 1$ ,  $x > 0$ ,  $y > 0$  с плотностью  $p(x, y) = 6x$ .

а) Выберем в качестве первой величины  $\xi$ . Тогда

$$\begin{aligned}
 p_\xi(x) &= \int_0^{1-x} p(x, y) dy = 6x(1-x) \quad \text{при } 0 < x < 1; \\
 p_\eta(y|x) &= \frac{p(x, y)}{p_\xi(x)} = \frac{1}{1-x} \quad \text{при } 0 < y < 1-x.
 \end{aligned}$$

Соответствующие функции распределения

$$\begin{aligned}
 F_\xi(x) &= \int_0^x p_\xi(u) du = 3x^2 - 2x^3 \quad \text{при } 0 < x < 1; \\
 F_\eta(y|x) &= \int_0^y p_\eta(v|x) dv = \frac{y}{1-x} \quad \text{при } 0 < y < 1-x.
 \end{aligned}$$

Имеем уравнения для последовательного вычисления  $\xi$  и  $\eta$ :

$$3\xi^2 - 2\xi^3 = \gamma_1, \quad \eta = \gamma_2(1 - \xi).$$

б) Выберем теперь в качестве первой величины  $\eta$ . Тогда

$$\begin{aligned}
 p_\eta(y) &= \int_0^{1-y} p(x, y) dx = 3(1-y)^2 \quad \text{при } 0 < y < 1; \\
 p_\xi(x|y) &= \frac{p(x, y)}{p_\eta(y)} = \frac{2x}{(1-y)^2} \quad \text{при } 0 < x < 1-y.
 \end{aligned}$$

Соответствующие функции распределения

$$\begin{aligned}
 F_\eta(y) &= \int_0^y p_\eta(v) dv = 1 - (1-y)^3 \quad \text{при } 0 < y < 1; \\
 F_\xi(x|y) &= \int_0^x p_\xi(u|y) du = \frac{x^2}{(1-y)^2} \quad \text{при } 0 < x < 1-y.
 \end{aligned}$$

Используя  $\gamma_1$  вместо  $1 - \gamma_1$  имеем уравнения для последовательного вычисления  $\xi$  и  $\eta$ :

$$(1 - \eta)^3 = \gamma_1, \quad \xi^2 = \gamma_2(1 - \eta)^2.$$

- Задачи.**
1. Вывести приближенную формулу для расчета значений случайной величины  $\xi$  с функцией распределения  $F(x) = 1 - \frac{2e^{-x} + e^{-5x}}{3}$ ,  $0 < x < \infty$ . Представить распределение  $\xi$  визуально.
  2. Вывести явные формулы для расчета значений случайных точек, равномерно распределенных в плоском кольце  $R_1^2 < x^2 + y^2 < R_2^2$ .
  3. Вычислить плотность случайной величины  $\xi = \eta - \ln \gamma$ , если  $\eta$  имеет плотность  $p(x)$  при  $0 < x < \infty$ ,  $\eta$  и  $\gamma$  независимы.

## 1.4 Простейшие методы Монте-Карло

### 1.4.1 Сходимость методов Монте-Карло

Пусть  $\xi$  — случайная величина,  $M\xi = a$  — ее математическое ожидание. Напомним, что математическое ожидание существует тогда, когда существует  $M|\xi|$ . Выберем  $n$  независимых реализаций  $\xi: \xi_1, \dots, \xi_n$ . Вычислим  $\bar{\xi}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i$ . В соответствии с *законом больших чисел* имеем

$$\bar{\xi}_n \xrightarrow{P} a,$$

в соответствии с *усиленным законом больших чисел* имеем

$$\bar{\xi}_n \xrightarrow{\text{п.н.}} a.$$

В соответствии с *центральной предельной теоремой* имеем

$$\frac{1}{\sqrt{n D \xi}} \sum_{i=1}^n (\xi_i - a) \sim N(0, 1),$$

то есть для  $x_1 < x_2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ x_1 < \frac{1}{\sqrt{n D \xi}} \sum_{i=1}^n (\xi_i - a) < x_2 \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-t^2/2} dt,$$

откуда при  $x_2 = -x_1 = x$  получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\xi_i - a) \right| < x \sqrt{D \xi / n} \right\} = \Phi(x),$$

где  $\Phi(x)$  — *интеграл вероятностей*,

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt.$$

Если задать *коэффициент доверия*  $\beta$ , то существует корень  $x_\beta$  уравнения  $\Phi(x) = \beta$  — *квантиль*. Тогда для *доверительного интервала* справедливо

$$P \left\{ |\bar{\xi}_n - a| < x_\beta \sqrt{D \xi / n} \right\} = \beta.$$

Значению  $\beta = 0,997$  отвечает  $x_\beta = 3$ , значению  $\beta = 0,95$  отвечает  $x_\beta = 1,96$ .

При неизвестном значении дисперсии  $D \xi$  можно использовать несмещенную оценку

$$D \xi \approx \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n \xi_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n \xi_i \right)^2 \right).$$

### 1.4.2 Вычисление интеграла в $\mathbb{R}^n$

Пусть  $G \subset \mathbb{R}^n$  — некоторая область (ограниченная или неограниченная, связная или несвязная). Пусть  $f(x)$  — функция на  $G$ . Пусть в точках  $x \in G$  задана плотность  $p(x)$  и  $dx = dx_1 \dots dx_n$ ,

$$\int_G p(x) dx = 1.$$

Требуется найти

$$I = \int_G f(x)p(x) dx.$$

Если  $G$  — ограниченная область объема  $V_G$ , то при  $p(x) = V_G^{-1}$  задача сводится к вычислению  $I = \int_G f(x) dx$ .

Для вычисления интеграла  $I$  введем случайную величину — случайную точку  $Q = (x_1, \dots, x_n)$  — с плотностью  $p(x)$ . Введем скалярную случайную величину  $Z = f(Q)$ , математическое ожидание которой равно

$$M Z = \int_G f(x)p(x) dx = I.$$

Если  $Q_1, \dots, Q_N$  — независимые реализации случайной точки  $Q$ , и  $Z_i = f(Q_i)$ , то оценкой для  $I$  является  $\bar{Z}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Z_i$ . Если интеграл  $I$  сходится абсолютно, то  $\bar{Z}_N \xrightarrow{\text{п.н.}} I$ .

**Пример 1.4.1.** При  $k > 0$  требуется вычислить интеграл

$$I = \int_0^\infty f(x)e^{-kx} dx.$$

Выберем  $p(x) = ke^{-kx}$ ,  $f_1(x) = f(x)/k$ . Тогда оценка интеграла имеет вид

$$I_N^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_1(\xi_i) = \frac{1}{kN} \sum_{i=1}^N f(\xi_i).$$

Из результатов примера 1.3.3 имеем

$$I \approx \frac{1}{kN} \sum_{i=1}^N f(-k^{-1} \ln \gamma_i),$$

где  $\gamma_1, \dots, \gamma_N$  — независимые случайные числа,  $\gamma_i \Rightarrow (0, 1)$ .

### 1.4.3 Геометрический метод Монте-Карло

Пусть  $G \subset \mathbb{R}^n$  и дана функция  $f(x)$  на  $G$ ,  $0 \leq f(x) \leq c$ . Рассмотрим цилиндр  $\tilde{G} = G \times (0, c) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Рассмотрим случайную точку  $\tilde{Q} \in \tilde{G}$  с плотностью  $\tilde{p}(x, x_{n+1}) = \frac{p(x)}{c}$ . Возьмем  $N$  независимых реализаций  $\tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_N$  случайной точки  $\tilde{Q}$ . Пусть  $\nu$



— количество точек, оказавшихся ниже гиперповерхности  $x_{n+1} = f(x)$ . Тогда  $\nu$  — дискретная случайная величина с биномиальным распределением:

$$P\{\nu = m\} = C_N^m p^m (1-p)^{N-m}, \quad M\nu = Np, \quad D\nu = Np(1-p),$$

где  $p$  — вероятность, что  $\tilde{Q}$  окажется ниже гиперповерхности  $x_{n+1} = f(x)$ :

$$p = P\{x_{n+1} < f(x)\} = \int_G dx \int_0^{f(x)} \tilde{p}(x, x_{n+1}) dx_{n+1} = \frac{I}{c}.$$

Обозначим за  $\tilde{Z} = \tilde{Z}(\tilde{Q})$  случайную величину, принимающую значение  $c$ , если  $\tilde{Q}$  окажется ниже гиперповерхности  $x_{n+1} = f(x)$ , а иначе  $\tilde{Z}(\tilde{Q}) = 0$ . Составим оценку  $\tilde{I}_N^* = \frac{c\nu}{N}$ . Тогда  $M\tilde{I}_N^* = I$ . По теореме Бернулли о сходимости частот к вероятностям имеем

$$\tilde{I}_N^* \xrightarrow{\text{п.н.}} I.$$

#### 1.4.4 Оценка сходимости

Если дисперсия случайной величины  $Z = f(Q)$  существует, то есть существует интеграл

$$M(Z^2) = \int_G f^2(x)p(x)dx,$$

и дисперсия в простом методе Монте-Карло имеет вид

$$DZ = \int_G f^2(x)p(x)dx - I^2.$$

В геометрическом методе  $M(\tilde{Z}^2) = c^2 P\{x_{n+1} < f(x)\} = cI$ , откуда дисперсия имеет вид  $D\tilde{Z} = cI - I^2$

Сравним эти две дисперсии: если  $0 \leq f(x) \leq c$ , то

$$\int_G f^2(x)p(x)dx \leq c \int_G f(x)p(x)dx = cI,$$

следовательно,  $DZ \leq D\tilde{Z}$ , то есть простой метод Монте-Карло точнее геометрического. Отметим, что чем больше  $c$ , тем менее точен геометрический метод.

**Пример 1.4.2.** Требуется вычислить интеграл  $I = \int_0^1 e^x dx$ . Имеем простую и геометрическую оценки

$$I^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{\gamma_i}, \quad \tilde{I}^* = \frac{e\nu}{N},$$

где  $\nu$  — количество пар  $(\gamma_i, \gamma'_i)$  таких, что  $e\gamma'_i < e^{\gamma_i}$ . Вычислим дисперсию

$$DZ = \int_0^1 e^{2x} dx - I^2 = \frac{e^2 - 1}{2} - (e - 1)^2 = 0,2420\dots,$$

$$D\tilde{Z} = eI - I^2 = e - 1 = 1,7183\dots$$

### 1.4.5 Сравнение трудоемкости

Выберем  $\beta = 0,5$ , тогда квантиль нормального распределения  $x_\beta \approx 0,6745$ , и *вероятностная ошибка* равна  $r_N = 0,6745\sqrt{DZ/N}$ :

$$P\{|I_N^* - I| < r_N\} \approx 1/2 \approx P\{|I_N^* - I| > r_N\}.$$

Пусть  $t$  — время, затраченное на “расчет” одной случайной точки  $Q$ ,  $\tilde{t}$  — время, затраченное на “расчет” одной случайной точки  $\tilde{Q}$ . Под словом “расчет” подразумевается моделирование случайных точек  $Q$  и  $\tilde{Q} = (x, x_{n+1})$ , а также вычисление  $f(Q)$  и проверку неравенства  $f(x) < x_{n+1}$  соответственно.

Пусть дано  $\varepsilon > 0$ . Для достижения точности  $r_N = \varepsilon$  необходимо

- в обычном методе Монте-Карло —  $N = DZ(0,6745/\varepsilon)^2$  точек,
- в геометрическом методе Монте-Карло —  $\tilde{N} = D\tilde{Z}(0,6745/\varepsilon)^2$  точек.

Назовем *трудоемкостью* алгоритма Монте-Карло, соответственно,  $tDZ$  и  $\tilde{t}D\tilde{Z}$  для простого и геометрического метода.

По трудоемкости геометрический метод не всегда проигрывает простому методу Монте-Карло, так как явное вычисление  $f(Q)$  бывает иногда более сложным, чем проверка неравенства  $f(x) < x_{n+1}$ .

### 1.4.6 Способы уменьшения дисперсии

Вероятностная ошибка пропорциональна  $\sqrt{D\xi/N}$ , поэтому важно научиться выбирать для расчета интегралов такие схемы, для которых дисперсия  $D\xi$  по возможности мала.

1. *Проинтегрировать частично аналитически.* Например, иногда удастся выделить аналитически (или другим численным методом) *главную часть* интеграла, а остаток уже проинтегрировать методом Монте-Карло.

**Пример 1.4.3.** Требуется вычислить интеграл  $I = \int_0^1 e^x dx$ . Так как  $e^x = 1 + x + \dots$ , рассмотрим  $h(x) = x$  (постоянное слагаемое на дисперсию не влияет). Тогда

$$\hat{I}^* = \int_0^1 x dx + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (e^{\gamma_i} - \gamma_i).$$

Дисперсия случайной величины  $\hat{Z} = 1/2 + e^\gamma - \gamma$  равна

$$D\hat{Z} = \int_0^1 (e^x - x)^2 dx - (I - 1/2)^2 = \frac{(e-1)(5-e)}{2} - 23/12 = 0,0437\dots$$

Напомним, что ранее мы получили в простом методе  $D \tilde{Z} = 0,2420\dots$ , в геометрическом методе  $D \tilde{Z} = 1,7183\dots$ .

2. Разбить область на части.

3. Понизить размерность многомерного интеграла.

**Пример 1.4.4.** Вычислить интеграл  $I = \int_B f(x, y) \, dx dy$ , где  $f(x, y) = 1/y$ , по области  $B$  — треугольник, ограниченный прямыми  $y = 1$ ,  $x = 2$ ,  $y = x$ .

а) Рассмотрим случайную точку  $Q(x, y) = Q(\xi, \eta)$  с плотностью  $p(x, y) = V_B^{-1} =$

2. Так как  $f_1(x, y) = 1/y \cdot 1/p(x, y) = 1/(2y)$ , то  $Z = f_1(Q) = 1/(2y)$ . Дисперсия

$$D Z = \int_1^2 dx \int_1^x \frac{2}{(2y)^2} dy - I^2 = \frac{7 \ln 2 - 1}{2} - 4 \ln^2 2 = 0,0043\dots$$

Имеем  $p_\eta(y) = \int_y^2 p(x, y) dx = 2(2 - y)$ . Из уравнения

$$F_\eta(\eta) = \int_1^\eta p_\eta(y) dy = 1 - (2 - \eta)^2 = 1 - \gamma \Rightarrow (0, 1)$$

получим  $\eta = 2 - \sqrt{\gamma}$ . Уравнение  $F_\xi(x|y)|_{x=\xi, y=\eta} = \gamma' \Rightarrow (0, 1)$  решать не надо, так как уже найдено  $\eta$ , только от которого зависит функция  $f_1(Q)$ . Следовательно, с помощью случайной величины  $Z = f_1(Q)$  получаем оценку интеграла

$$I_N^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_1(Q_i) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2 - \sqrt{\gamma_i}}.$$

б) Проинтегрируем аналитически плотность и подынтегральную функцию по  $y$ :

$$p_1(x) = \int_1^x p(x, y) dy = \int_1^x 2 dy = 2(x - 1),$$

$$p_1(x)f_1(x) = \int_1^x f(x, y) dy = \int_1^x 1/y dy = \ln x.$$

В этом случае функция распределения  $\xi$  равна  $F_1(x) = (x - 1)^2$ . Из уравнения  $F_1(\xi) = \gamma \Rightarrow (0, 1)$  следует, что  $\xi = 1 + \sqrt{\gamma}$ . С помощью случайной величины  $Z_1 = f_1(\xi) = \frac{\ln \xi}{2(\xi - 1)}$  получаем оценку интеграла

$$\hat{I}_N^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_1(\xi_i) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \frac{\ln(1 + \sqrt{\gamma_i})}{\sqrt{\gamma_i}}.$$

Дисперсия в этом случае равна

$$D \hat{Z} = \int_1^2 p_1(x)f_1(x)^2 dx - I^2 = \int_1^2 \frac{\ln^2 x}{2(x - 1)} dx - I^2 = 0,0010\dots$$

в) (Упражнение) Смоделировать значения  $\gamma_i$ , сравнить значения оценок  $I_N^* - I$  и  $\hat{I}_N^* - I$  с вероятностными погрешностями  $r_N$  и  $\hat{r}_N$  при  $N = 10$ ,  $N = 100$ ,  $N = 1000$ .

#### 4. Метод существенной выборки.

Рассмотрим интеграл  $I = \int_G f(x) \, dx$  по области  $G$ , возможно неограниченной. Предположим, что не существует  $\int_G f(x)^2 \, dx$ , но существует  $\int_G |f(x)| \, dx$ , то есть интеграл сходится абсолютно. Метод существенной выборки заключается в введении дополнительной плотности  $p(x)$ , которая приближает значение  $f(x)$  на  $G$ . Положим  $G_0 = \{x \in G | f(x) = 0\}$ ,  $G^+ = G - G_0$ . Определим случайную величину  $Z_0(Q) = f(Q)/p(Q)$  на  $G^+$ , а иначе  $Z_0(Q) = 0$ .

**Предложение 1.4.5** (Без доказательства). *Минимальная дисперсия  $D Z_0$  реализуется в случае, когда плотность  $p(x)$  пропорциональна  $|f(x)|$  и равна*

$$D Z_0 = \left( \int_G |f(x)| \, dx \right)^2 - I^2.$$

**Пример 1.4.6.** *Требуется вычислить интеграл  $I = \int_0^1 e^x \, dx$ . Выберем  $p(x) = \frac{2}{3}(1+x)$ . Значение случайной величины  $\xi$  с плотностью  $p(x)$  вычисляется по формуле*

$$\xi = \sqrt{1 + 3\gamma} - 1.$$

*Получаем оценку интеграла*

$$I_N^* = \frac{3}{2N} \sum_{i=1}^N \frac{e^{\xi_i}}{1 + \xi_i}.$$

*Дисперсия случайной величины  $Z(\xi) = \frac{3}{2} \frac{e^\xi}{1+\xi}$  равна*

$$D Z = \frac{3}{2} \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+x} \, dx - I^2 = 0,0269...$$

### 1.4.7 Симметризация подынтегральной функции

Пусть требуется вычислить интеграл  $I = \int_a^b f(x) \, dx$  по конечному интервалу  $(a, b)$ . Рассмотрим случайную величину  $\xi$  равномерно распределенную на  $(a, b)$  и  $Z = (b-a)f(\xi)$ . Имеем  $M Z = I$  и простой метод Монте-Карло дает оценку

$$I_N^* = \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^N f(\xi_i).$$

Рассмотрим теперь симметризованную функцию

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{2} \left( f(x) + f(a+b-x) \right),$$

интеграл которой по-прежнему равен  $I$ . Положим  $Z^{(1)} = (b-a)f^{(1)}(\xi)$ , тогда  $M Z^{(1)} = I$  и получаем оценку

$$I_N^{(1)*} = \frac{b-a}{2N} \sum_{i=1}^N \left( f(\xi_i) + f(a+b-\xi_i) \right).$$

**Предложение 1.4.7.** Если кусочно-непрерывная функция  $f(x)$  монотонна при  $a \leq x \leq b$ , то

$$D Z^{(1)} \leq \frac{1}{2} D Z.$$

*Доказательство.* Пусть функция  $f(x)$  не убывает и  $f(b) > f(a)$ . Утверждение предложения равносильно неравенству

$$(b-a) \int_a^b f(x) f(a+b-x) dx \leq I^2.$$

Рассмотрим

$$v(x) = (b-a) \int_a^x f(a+b-t) dt - (x-a)I.$$

Имеем  $v(a) = v(b) = 0$ . Посчитаем производную

$$v'(x) = (b-a)f(a+b-x) - I.$$

Так как  $f(x)$  не убывает, то  $v'(x)$  не возрастает,  $v'(a) > 0$ ,  $v'(b) < 0$ . С учетом  $v(a) = v(b) = 0$  убеждаемся, что  $v(x) \geq 0$  на  $(a, b)$ . Из очевидного неравенства  $\int_a^b v(x) f'(x) dx \geq 0$  интегрированием по частям получаем  $\int_a^b v'(x) f(x) dx \leq 0$ . Подставляя значение  $v'(x)$ , получаем что и требовалось доказать.  $\square$

Отметим, что для вычисления  $f^{(1)}(\xi)$  требуется считать два значения функции  $f(x)$ . Последнее предложение показывает, что трудоемкость вычисления для интеграла с симметризованной функцией не хуже, чем трудоемкость вычисления изначального интеграла.

**Пример 1.4.8.** Требуется вычислить интеграл  $I = \int_0^1 e^x dx$ . Симметризованная функция  $f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{1-x})$  и соответствующая оценка

$$I_N^{(1)*} = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N (e^{\gamma_i} + e^{1-\gamma_i}).$$

*Дисперсия*

$$D Z^{(1)} = \frac{1}{4} (2e - (e-1)(3e-5)) = 0,00392...$$

**Задачи.** 1. Записать формулы для расчета методом Монте-Карло интеграла

$$I = \int \int \int_G f(x, y, z) dx dy dz$$

от произвольной функции  $f(x, y, z)$ . Область интегрирования  $G$  определяется неравенствами  $x^2 + y^2 < z < 2$ .

2. Построить оценку с конечной дисперсией для вычисления интеграла

$$\int_0^\infty x^{-5/2} f(x) dx$$

в случае, когда  $f(x) \sim x$  при  $x \rightarrow \infty$  и  $f(x) \sim x^2$  при  $x \rightarrow 0$ .

3. Записать формулы для расчета интеграла

$$\int_0^\infty f(x) e^{-kx} dx, \quad k > 0,$$

с помощью значений случайной величины  $\xi$ , плотность которой равна  $p(x) = \alpha e^{-\alpha x}$ . Доказать, что если  $f(x) \approx Ax^n$ , то дисперсия будет наименьшей при  $\alpha \approx \alpha_0 = k/(n+1)$ .

4. Условно сходящийся интеграл

$$I = \int_1^\infty \frac{\sin(2\pi x)}{x} dx$$

можно вычислить методом Монте-Карло с помощью оценки

$$I_N^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h(\gamma_i) \sin(\pi \gamma_i),$$

где

$$h(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(2k+x)(2k+1+x)}.$$

Доказать, что

$$M(h(\gamma) \sin(\pi \gamma)) = I, \quad D(h(\gamma) \sin(\pi \gamma)) \leq \frac{1}{2} h^2(0) - I^2.$$

5. Найти в  $\mathbb{R}^{20}$  объем 20-мерного шара радиуса 1 с относительной погрешностью менее  $1e-9$ .

6. Найти в  $\mathbb{R}^{20}$  объем 19-мерной сферы радиуса 1 с относительной погрешностью менее  $1e-9$ .

## 1.5 Применение методов Монте-Карло для опционов

### 1.5.1 Сравнение с квадратурными формулами

Напомним, что для вычисления интеграла

$$I = \int_0^1 f(x) \, dx,$$

мы представляем его как математическое ожидание некоторой случайной величины  $\gamma \Rightarrow (0, 1)$ , и получаем оценку

$$I_n^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\gamma_i).$$

По усиленному закону больших чисел:  $I_n^* \xrightarrow{\text{п.н.}} I$ .

Если  $f \in L_2[0, 1]$ , то

$$D Z = \sigma_f^2 = \int_0^1 (f(x) - I)^2 \, dx.$$

По центральной предельной теореме ошибка  $I_n^* - I$  имеет асимптотически нормальное распределение с параметрами  $(0, \sigma_f/\sqrt{n})$ . Как правило,  $\sigma_f$  неизвестно, но его можно оценить

$$\sigma_f^* = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (f(\xi_i) - I_n^*)^2}.$$

Центральной особенностью методов Монте-Карло является оценка ошибки через  $\sigma_f/\sqrt{n}$ . Таким образом, для увеличения точности на один знак после запятой, то это требует увеличение количества точек в 100 раз.

Скорость сходимости в стандартной квадратурной формуле трапеций

$$\hat{I}_n^* = \frac{f(0) + f(1)}{2n} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right)$$

равна  $O(n^{-2})$  для дважды непрерывно-дифференцируемых функций. Для вычисления кратных интегралов в  $\mathbb{R}^d$  скорость сходимости в квадратурных формулах оценивается  $O(n^{-2/d})$ , при этом оценка на скорость сходимости в методах Монте-Карло остается  $O(n^{-1/2})$ . Таким образом, если применение методов Монте-Карло обосновано в случае, когда размерность  $d \gg 1$  велика.

При оценках стоимости производных ценных бумаг размерность соответствующего пространства будет по крайней мере равна количеству временных шагов в моделировании. В таких случаях имеет смысл использовать методы Монте-Карло.

Асимптотический порядок сходимости в методах Монте-Карло улучшить не получается, но есть множество приемов, которые помогают уменьшить дисперсию, а

также неявную константу в асимптотической оценке скорости сходимости. Многие исследования посвящены этому вопросу.

### 1.5.2 Основные определения

- Опционы — это класс производных финансовых инструментов. Термин «производный» (derivative) означает, что выплата по такому контракту зависит от цены на некоторый базовый актив (underlying).
  - Колл опционы (call option).
  - Пут опционы (put option).
- Спот  $S = S(t)$  — рыночный курс на базовый актив в момент времени  $t$ .
- Страйк (strike)  $K$  — цена, по которой опцион дает право заключить сделку в будущем.
- Типы опционов по стилю исполнения контракта:
  - европейский опцион: его можно исполнить только по истечении срока контракта;
  - американский опцион: его можно исполнить в любой момент до истечения срока контракта;
  - квазиамериканский опцион: его владелец имеет право исполнить опцион только в заранее оговоренные в контракте даты в период до срока экспирации — окна. В договоре может быть прописано несколько окон, в которые можно исполнить опцион;
  - азиатский опцион: цена его исполнения определяется на основе средней цены базового актива за определенный период времени. Его также называют опционом средней цены или среднекурсовым. Он считается экзотическим опционом.
- Типы опционов по базовому активу:
  - товарный: чаще всего это опцион на фьючерс на биржевой товар, например нефть. То есть если исполнить такой контракт, вам передадут фьючерсы, а не конкретные товары;
  - фондовый: опцион на акции;



- валютный: опцион на валютный курс, который дает покупателю право приобрести или продать валюту по курсу, зафиксированному в день заключения договора;
  - на индекс: такой опцион может быть только расчетным, так как невозможно поставить индекс;
  - на фьючерс: фьючерсный контракт поставляется за несколько дней до истечения срока опциона, но иногда даты экспирации и поставки фьючерса совпадают. В последнем случае покупатель опциона сразу получает базовый актив фьючерса, например акции;
  - на процентную ставку или процентный опцион: опцион на финансовый инструмент с процентной ставкой, например кредит, вклад. Опцион cap устанавливает верхнюю границу ставки, применяется для инструментов с плавающей ставкой и защищает от ее повышения. Опцион floor устанавливает нижнюю границу ставки и защищает от ее снижения;
  - на наличные товары: процентный опцион на ценные бумаги с фиксированной доходностью.
- Время экспирации европейского опциона (expiry date)  $T$  — заранее оговоренное в контракте время, в которое опционом можно будет воспользоваться.
  - Премия  $\text{Payoff} = \max(0, S(T) - K)$  — выплата (прибыль) по европейскому колл опциону в момент экспирации.
  - Премия  $\text{Payoff} = \max(0, K - S(T))$  — выплата (прибыль) по европейскому пут опциону в момент экспирации.

Подробнее см., например:

- <https://habr.com/ru/company/dbtc/blog/510866/>
- <https://quote.rbc.ru/news/article/6268e5969a79475c24599cee>

### 1.5.3 Расчет премии европейского колл опциона в рамках модели Блэка-Шоулза

Пусть мы находимся в начальном моменте времени  $t = 0$ . Премия держателя опциона в момент времени  $T$  равна

$$(S(T) - K)^+ = \max(0, S(T) - K).$$

Чтобы получить дисконтированную стоимость этой премии, нужно ее умножить на  $e^{-rT}$ , где  $r$  — непрерывно начисляемая процентная ставка. Ожидаемая дисконтированная стоимость будет иметь вид

$$\mathbb{M}\left(e^{-rT}(S(T) - K)^+\right). \quad (1.1)$$

Чтобы математическое ожидание имело смысл, необходимо определить распределение случайной величины  $S(T)$ . Модель Блэка-Шоулза описывает эволюцию цены акции  $S(t)$  с помощью стохастического дифференциального уравнения

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = rdt + \sigma dW(t), \quad (1.2)$$

где  $W$  — стандартное геометрическое броуновское движение. Параметр  $\sigma$  определяет *волатильность* цены акции, а коэффициент при  $dt$  определяет среднюю норму доходности. Принимая норму доходности равной процентной ставке  $r$  мы неявно записываем риск-нейтральную динамику цены акции.

Решение уравнения (1.2) имеет вид

$$S(T) = S(0) \exp\left((r - \sigma^2/2)T + \sigma W(T)\right). \quad (1.3)$$

Текущую цену акции  $S(0)$  можно считать известной. Случайная величина  $W(T)$  имеет нормальное распределение с параметрами  $(0, T)$ :  $W(T) \sim \sqrt{T}Z$ , где  $Z \Rightarrow N(0, 1)$ . Следовательно, можно записать

$$S(T) = S(0) \exp\left((r - \sigma^2/2)T + \sigma\sqrt{T}Z\right). \quad (1.4)$$

Таким образом, цена акции имеет логнормальное распределение. Математическое ожидание (1.1) является интегралом относительно логнормальной случайной величины  $S(T)$ . Этот интеграл можно явно оценить через стандартную нормальную кумулятивную функцию распределения  $\Phi(x)$ :

$$\begin{aligned} & BS(S(0), \sigma, T, r, K) = \\ & = S(0)\Phi\left(\frac{\log(S(0)/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - e^{-rT}K\Phi\left(\frac{\log(S(0)/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Выражение (1.5) называется *формулой Блэка-Шоулза* для колл опциона.

В свете доступности формулы (1.5) нет необходимости использовать метод Монте-Карло для вычисления ожидаемой дисконтированной стоимости (1.1) колл опциона.

Более того, как было отмечено ранее, метод Монте-Карло не является конкурентоспособным методом для вычисления одномерных интегралов. Тем не менее, мы будем использовать этот пример, чтобы проиллюстрировать ключевые этапы метода Монте-Карло. Из (1.4) мы видим, что нам достаточно уметь моделировать независимую выборку  $Z_1, \dots, Z_n$  из стандартного нормального распределения  $N(0, 1)$ . Если считать доступным механизм генерации независимых значений  $Z_i$ , то для оценки (1.1) имеем следующий алгоритм:

**Алгоритм 1.5.1.**

1. *for*  $i = 1, \dots, n$
2.     *generate*  $Z_i$
3.     *set*  $S_i(T) = S(0) \exp\left((r - \sigma^2/2)T + \sigma\sqrt{T}Z_i\right)$
4.     *set*  $C_i = e^{-rT}(S_i(T) - K)^+$
5. *set*  $C_n^* = (C_1 + \dots + C_n)/n$

Оценка  $C_n^*$  является несмещенной

$$\mathbb{M} C_n^* = C = \mathbb{M}\left(e^{-rT}(S(T) - K)^+\right)$$

и состоятельной

$$C_n^* \xrightarrow{\text{п.н.}} C.$$

Для этой оценки можно построить доверительный интервал. Обозначим оценку на дисперсию

$$\sigma_n^* = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (C_i - C_n^*)^2}.$$

Пусть  $z_{\delta/2} = 1 - \delta/2$  квантиль нормального распределения  $N(0, 1)$ , то есть  $\Phi(z_{\delta/2}) = 1 - \delta/2$ . Тогда

$$\left(C_n^* - z_{\delta/2} \frac{\sigma_n^*}{\sqrt{n}}, C_n^* + z_{\delta/2} \frac{\sigma_n^*}{\sqrt{n}}\right)$$

асимптотический доверительный интервал с вероятностью  $1 - \delta/2$ .

**Задачи.** Реализовать алгоритм 1.5.1 для европейского колл опциона и сравнить результат с точной формулой (1.5).

## 1.5.4 Расчет премии азиатского колл опциона в рамках модели Блэка-Шоулза

При оценке более сложных производных ценных бумаг часто необходимо моделировать траектории на несколько промежуточных дат (зависимость от траектории

$S(t)$ ). Это может быть необходимо по двум соображениям

- payoff зависит от  $S(t)$  в нескольких промежуточных точках;
- мы не умеем считать  $S(T)$  явно только по значению  $S(0)$ , но можем численно посчитать через промежуточные точки.

Например, это может быть, когда волатильность  $\sigma = \sigma(S(t))$  зависит от цены  $S(t)$ .

В этом случае нет явного решения уравнения Блэка-Шоулза:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = rdt + \sigma(S(t))dW(t). \quad (1.6)$$

Воспользуемся аппроксимацией

$$S(t + \Delta t) = S(t) + rS(t)\Delta t + \sigma(S(t))S(t)\sqrt{\Delta t}Z,$$

примененной к фиксированным датам  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T$ . Задача сводится к расчету  $M(e^{-rT}(\bar{S}_m - K)^+)$ , где

$$\bar{S}_m = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m S(t_j).$$

По аналогии с (1.4) применяем формулу

$$S(t_{j+1}) = S(t_j) \exp\left((r - \sigma^2/2)(t_{j+1} - t_j) + \sigma\sqrt{t_{j+1} - t_j}Z_{j+1}\right), \quad (1.7)$$

где  $Z_1, \dots, Z_m$  — независимые случайные величины с распределением  $N(0, 1)$ . Пусть  $\{Z_{1j}, \dots, Z_{nj}\}$  — независимая выборка значений для случайной величины  $Z_i$ . Имеем следующий алгоритм расчета ожидаемой дисконтированной премии для азиатского колл опциона.

### Алгоритм 1.5.2.

1. *for*  $i = 1, \dots, n$
2.     *for*  $j = 1, \dots, m$
3.         generate  $Z_{ij}$
4.         set  $S(t_j) = S(t_{j-1}) \exp\left((r - \sigma^2/2)(t_j - t_{j-1}) + \sigma\sqrt{t_j - t_{j-1}}Z_{ij}\right)$
5.     set  $\bar{S}_m = (S_j(t_1) + \dots + S_j(t_m))/m$
6.     set  $C_i = e^{-rT}(\bar{S}_m - K)^+$
7. set  $C_n^* = (C_1 + \dots + C_n)/n$

**Задачи.** 1. Реализовать алгоритм 1.5.2 для азиатского колл опциона и сравнить результат с реализацией алгоритма 1.5.1, а также с точной формулой (1.5).

*2. Выписать оценки сходимости и доверительные интервалы для оценок из алгоритмов 1.5.1 и 1.5.2. Оценить трудоемкость алгоритмов 1.5.1 и 1.5.2.*

Дальнейшее развитие описанных методов может применяться, например, к портфелю из нескольких слабо коррелированных ценных бумаг. Этим вопросам будет посвящен курс “Гибридные и структурные финансовые инструменты” в 3 семестре.

## 1.6 Методы квази Монте-Карло

Методы квази Монте-Карло — методы с низким расхождением (*low-discrepancy methods*). Эти методы не пытаются моделировать случайность, а напротив стремятся повысить точность расчетов за счет слишком равномерного выбора точек. Потенциально методы квази Монте-Карло могут ускорить сходимость с  $O(1/\sqrt{n})$  до  $O(1/n^{1-\varepsilon})$  для любого  $\varepsilon > 0$ . При этом неявная константа в скорости сходимости будет зависеть от величины размерности задачи.

Этот раздел далее будут в основном посвящен различным способам построения наиболее равномерного множества точек на заданной области. Эти построения основаны на методах из теории чисел и абстрактной алгебры. Мы остановимся на поверхностном рассмотрении основных идей. Желаящие познакомиться с более полной картиной, включая доказательства и точные оценки, рекомендуем обратиться к книге Н. Niederreiter *Random number generation and quasi-Monte Carlo methods*, 1992.

В данном разделе и далее мы считаем, что основная область — единичный гиперкуб  $[0, 1)^d$ . Напомним, что простой метод Монте-Карло основан на приближении

$$\int_{[0,1]^d} f(x) \, dx \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i),$$

где точки  $x_i$  моделируются случайным образом с помощью преобразований случайных величин  $\gamma \Rightarrow [0, 1)$ . В методах квази Монте-Карло мы будем алгоритмически строить точки  $x_i$  с наиболее равномерным распределением, и сперва определим, что это значит.

Отметим некоторые особенности методов квази Монте-Карло:

- для  $f(x)$  не нужна явная формула, достаточно уметь ее вычислять в некоторых точках приближенно;
- граничные точки интервала  $[0, 1)$  не влияют на значение интеграла, но для алгоритмов генерации точек бывает удобно брать именно  $[0, 1)$ ;
- методы квази Монте-Карло можно применять только если есть оценка (или точное значение) на размерность  $d$ ;
- размерность может быть умеренно большая (обычно  $10 \leq d \leq 40$ , но есть исключения) из-за гипотетических оценок методов квази Монте-Карло  $O((\log n)^d/n)$ .

## 1.6.1 Discrepancy

Казалось бы, что для наибольшей равномерности естественно брать точки на сетке. Оказывается, такой выбор имеет ряд недостатков:

- количество точек  $n^d$  очень быстро растет;
- если функция разделима ( $f(x_1, \dots, x_d) = f_1(x_1) \cdot \dots \cdot f_n(x_n)$ ), то реально значимыми являются  $dn$  точек;
- нет возможности “непрерывно” увеличивать точность оценки, поскольку увеличение числа точек по одной размерности в сетке приводит к существенному увеличению числа узлов при больших размерностях.

Определим понятие отклонения от равномерности и понятие последовательности с низким отклонением (*low-discrepancy set*).

Пусть  $\mathcal{A}$  — совокупность измеримых по Лебегу подмножеств  $[0, 1)^d$ . *Дискрепансом* (невязкой или отклонением от равномерности) набора точек  $\{x_1, \dots, x_n\}$  относительно  $\mathcal{A}$  называется

$$\overline{D}(x_1, \dots, x_n; \mathcal{A}) = \sup_{A \in \mathcal{A}} \left| \frac{\#\{x_i \in A\}}{n} - \text{vol}(A) \right|. \quad (1.8)$$

Здесь  $\#\{x_i \in A\}$  — количество точек  $x_i$ , попадающих в  $A$ ,  $\text{vol}(A)$  — мера Лебега множества  $A$ .

*Обычный дискрепанс*  $D(x_1, \dots, x_n)$  — это дискрепанс относительно множества  $\mathcal{A}$ , состоящего из всех параллелепипедов вида

$$\prod_{j=1}^d [u_j, v_j), \quad 0 \leq u_j < v_j \leq 1.$$

*Дискрепанс звездочка* (звездный дискрепанс)  $D^*(x_1, \dots, x_n)$  — это дискрепанс относительно множества  $\mathcal{A}$ , состоящего из всех параллелепипедов вида

$$\prod_{j=1}^d [0, u_j), \quad 0 < u_j \leq 1.$$

*Изотропный дискрепанс*  $\hat{D}(x_1, \dots, x_n)$  — это дискрепанс относительно множества  $\mathcal{A}$ , состоящего из всех выпуклых подмножеств  $[0, 1)^d$ .

**Предложение 1.6.1** (Niederreiter, Proposition 2.4). *Справедливы оценки на простой и звездный дискрепанс*

$$D^*(x_1, \dots, x_n) \leq D(x_1, \dots, x_n) \leq 2^d D^*(x_1, \dots, x_n).$$

Таким образом, при фиксированном  $d$  они имеют одинаковый порядок.

**Предложение 1.6.2** (Niederreiter, pp. 23-24). При  $d = 1$  справедливы оценки

$$D^*(x_1, \dots, x_n) \geq \frac{1}{2n}, \quad D(x_1, \dots, x_n) \geq \frac{1}{n},$$

причем в обоих случаях минимум достигается при  $x_i = \frac{2i-1}{2n}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Последовательность  $x_i = \frac{2i-1}{2n}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , не продолжается, и для увеличения точности должна пересчитываться заново с большим значением  $n$ .

**Предложение 1.6.3** (Niederreiter, pp. 24). При  $d = 1$  для бесконечной последовательности точек  $\{x_i\} \subset [0, 1)$  справедливы оценки

$$D(x_1, \dots, x_n) \geq D^*(x_1, \dots, x_n) \geq \frac{c \log n}{n},$$

для бесконечно многих значений  $n$ .

Для размерностей  $d > 1$  доказанных результатов гораздо меньше.

**Гипотеза 1.6.4** (Niederreiter, p.32). 1. В  $[0, 1)^d$  для фиксированного множества  $\{x_1, \dots, x_n\}$ :

$$D^*(x_1, \dots, x_n) \geq \frac{c_d (\log n)^{d-1}}{n}.$$

2. В  $[0, 1)^d$  для бесконечного множества  $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ :

$$D^*(x_1, \dots, x_n) \geq \frac{C_d (\log n)^d}{n}.$$

Последовательность  $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$  называется *последовательностью с низким отклонением* (*low-discrepancy set*), если

$$D^*(x_1, \dots, x_n) = O\left(\frac{(\log n)^d}{n}\right) \quad \text{или} \quad D^*(x_1, \dots, x_n) = O\left(\frac{1}{n^{1-\varepsilon}}\right).$$

## 1.6.2 Последовательности Ван дер Корпута

Пусть дана база  $b \in \mathbb{N}$ ,  $b \geq 2$ . Запишем в  $b$ -ичной системе счисления число  $k \in \mathbb{N}$ :

$$k = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(k) b^j,$$

причем среди коэффициентов  $a_j(k)$  только конечное число не равных нулю. Определим *функцию обращения*

$$\psi_b(k) = 0, a_0 a_1 \dots, \quad \psi_b(k) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j(k)}{b^{j+1}}. \quad (1.9)$$

Тогда *последовательность Ван дер Корпута* с основанием  $b$  определяется как

$$0 = \psi_b(0), \psi_b(1), \psi_b(2), \dots, \psi_b(k), \dots$$



Таблица 1.1: Пример последовательности Ван дер Корпута,  $b = 2$ .

k	k binary	$\psi_2(k)$ binary	$\psi_2(k)$
1	1	0,1	1/2
2	10	0,01	1/4
3	11	0,11	3/4
4	100	0,001	1/8
5	101	0,101	5/8
6	110	0,011	3/8
7	111	0,111	7/8

**Предложение 1.6.5** (Niederreiter, Theorem 3.6). *Последовательность Ван дер Корпута с базой  $b$  low-discrepancy, то есть*

$$D^*(x_1, \dots, x_n) = O\left(\frac{\log n}{n}\right),$$

причем неявная константа зависит только от  $b$ .

**Задачи.** 1. Реализовать функцию, генерирующую последовательность Ван дер Корпута с базой  $b$ . Визуализировать для наглядной оценки на равномерность.

2. Реализовать функцию приближенного вычисления *star discrepancy*  $D^*(x_1, \dots, x_n)$ . Оценить *star discrepancy* для последовательности Ван дер Корпута.

### 1.6.3 Неравенство Koksma-Hlawka

Рассмотрим прямоугольник вида

$$J = [u_1^-, u_1^+] \times \dots \times [u_d^-, u_d^+], \quad 0 \leq u_1^- \leq u_1^+ \leq 1.$$

Обозначим  $\text{Odd}(J)$  и  $\text{Even}(J)$  соответственно множество вершин с нечетным и четным числом верхних индексов  $+$ . Положим

$$\Delta(f; J) = \sum_{u \in \text{Even}(J)} f(u) - \sum_{u \in \text{Odd}(J)} f(u).$$

Пусть  $[0, 1)^d$  разбит на параллелепипеды формы  $J$ , и  $\mathcal{P}$  — множество таких прямоугольников (разбиение). Тогда *вариация* определяется как

$$V^d(f) = \sup_{\mathcal{P}} \sum_{J \in \mathcal{P}} |\Delta(f; J)|.$$

**Предложение 1.6.6** (Niederreiter, p. 19). Пусть  $f \in C_d[0, 1]^d$ . Справедливо соотношение

$$V^d(f) = \int_0^1 \dots \int_0^1 \left| \frac{\partial^d f}{\partial u_1 \dots \partial u_d} \right| du_1 \dots du_d.$$

Определим  $V^k(f; i_1, \dots, i_k) - V^k(f)$  на координатах  $(u_{i_1}, \dots, u_{i_k}) \in [0, 1]^k$ , остальные  $u_j = 1$  при  $j \notin \{i_1, \dots, i_k\}$ . Считаем, что  $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq d$ ,  $k \leq d$ . Вариация Hardy-Krause определяется следующим образом

$$V(f) = \sum_{k=1}^d \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq d} V^k(f; i_1, \dots, i_k).$$

**Предложение 1.6.7** (Неравенство Koksma-Hlawka; Niederreiter, Theorem 2.12). Если функция  $f$  имеет конечную вариацию Hardy-Krause  $V(f)$ , то для любых  $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]^d$  справедливо неравенство

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) - \int_{[0,1]^d} f(u) du \right| \leq V(f) \cdot D^*(x_1, \dots, x_n).$$

Более того, неравенство Koksma-Hlawka является точным в том смысле, что существует функция  $f$ , для которой ошибка слева находится в границах справа, причем эту функцию можно выбрать бесконечно дифференцируемой.

Естественно сравнить неравенство Koksma-Hlawka и оценки погрешности в простом методе Монте Карло. Пусть  $U, U_j \Rightarrow [0, 1]^d$ ,  $\sigma_f^2 = D(f(U))$ . Тогда по центральной предельной теореме

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(i) - \int_{[0,1]^d} f(u) du \right| \leq z_{\delta/2} \frac{\sigma_f}{\sqrt{n}}$$

с вероятностью  $1 - \delta$ , где  $z_{\delta/2} - \delta/2$  квантиль  $N(0, 1)$ . По неравенству Чебышева имеем

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(i) - \int_{[0,1]^d} f(u) du \right| \leq \frac{\sigma_f}{\sqrt{\delta n}}.$$

Из сравнения оценок заключаем:

- неравенство Koksma-Hlawka дает точную оценку, а не вероятностную;
- величины  $V(f)$  и  $D^*(x_1, \dots, x_n)$  трудно вычислить, а  $\sigma_f$  находится или оценивается достаточно легко;
- когда величины  $V(f)$  и  $D^*(x_1, \dots, x_n)$  известны неравенство Koksma-Hlawka часто сильно завышает оценку, в то время как центральная предельная теорема дает надежную и информативную оценку ошибки;
- условие конечности  $V(f)$  в неравенстве Koksma-Hlawka дает дополнительные ограничения на применимость.

### 1.6.4 $(t, m, d)$ -сети и $(t, d)$ -последовательности

Были введены Нидерайтером и развиты Соболем для базы  $b = 2$ .

Определим в  $[0, 1)^d$   $b$ -ичные элементарные интервалы — интервалы вида

$$\prod_{i=1}^d \left[ \frac{a_i}{b^{j_i}}, \frac{a_i + 1}{b^{j_i}} \right), \dots, a_i \in \{0, 1, \dots, b^{j_i} - 1\}.$$

Объем  $b$ -ичного элементарного интервала равен  $1/b^{j_1+\dots+j_d}$ .

Для целых  $0 \leq t \leq m$ ,  $(t, m, d)$ -сетью по основанию  $b$  называется такое множество точек в  $[0, 1)^d$ , что ровно  $b^t$  точек этого множества попадают в каждый  $b$ -ичный элементарный интервал объема  $b^{t-m}$ .

Последовательность точек  $x_1, x_2, \dots \in [0, 1)^d$  называется  $(t, d)$ -последовательностью по основанию  $b$ , если для всех  $m > t$  каждый сегмент  $\{x_i : jb^m < i \leq (j+1)b^m\}$  является  $(t, m, d)$ -сетью.

Меньшие значения  $b$  более предпочтительны, поскольку для сохранения равномерности при больших  $b$  требуется все больше точек.

**Предложение 1.6.8** (Niederreiter, Theorem 4.17). *Если  $x_1, x_2, \dots \in [0, 1)^d$  является  $(t, d)$ -последовательностью по основанию  $b$ , то при  $n \geq 2$  справедливо неравенство*

$$D^*(x_1, \dots, x_n) \leq C(d, b) b^t \frac{(\log n)^d}{n} + O\left(b^t \frac{(\log n)^{d-1}}{n}\right).$$

Аналогичное неравенство (Niederreiter, Theorem 4.10) справедливо и для  $(t, m, d)$ -сетей, но степени  $\log n$  на 1 меньше.

Далее будут описаны несколько конструкций построения множества точек с низким расхождением (low-discrepancy). Простейшей конструкцией являются последовательности Halton and Hammersley, но они не являются ни  $(t, m, d)$ -сетью, ни  $(t, d)$ -последовательностью. Последовательности Faure являются  $(0, d)$ -последовательностью, но база  $b$  должна быть по крайней мере наименьшим простым числом, превосходящим  $d$ . Последовательности Соболя строятся по базе  $b = 2$ , но для нее параметр  $t$  растет вместе с размерностью  $d$ . Все построения основаны на последовательностях Ван дер Корпута.

### 1.6.5 Последовательности Halton and Hammersley

Пусть  $b_1, \dots, b_d$  — взаимно простые целые числа большие 1. Определим последовательность Halton

$$x_k = (\psi_{b_1}(k), \dots, \psi_{b_d}(k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $\psi_b$  — функция обращения Ван дер Корпута (1.9). Последовательность Hammersley длины  $n$  имеет вид

$$x_k = (k/n, \psi_{b_1}(k), \dots, \psi_{b_{d-1}}(k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

**Предложение 1.6.9** (Niederreiter, р. 44). *Для последовательности Halton справедливо неравенство*

$$D^*(x_0, \dots, x_{n-1}) \leq C_d(b_1, \dots, b_d) \frac{(\log n)^d}{n} + O\left(\frac{(\log n)^{d-1}}{n}\right).$$

*Для последовательности Hammersley справедливо неравенство*

$$D^*(x_0, \dots, x_{n-1}) \leq C_{d-1}(b_1, \dots, b_{d-1}) \frac{(\log n)^{d-1}}{n} + O\left(\frac{(\log n)^{d-2}}{n}\right).$$

*Для констант  $C_d$  справедливо соотношение*

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\log C_d}{d \log d} = 1.$$

Ухудшение последовательностей Halton и Hammersley в больших размерностях следует из поведения последовательности Ван дер Корпута с большой базой (см. рисунок 1.1).

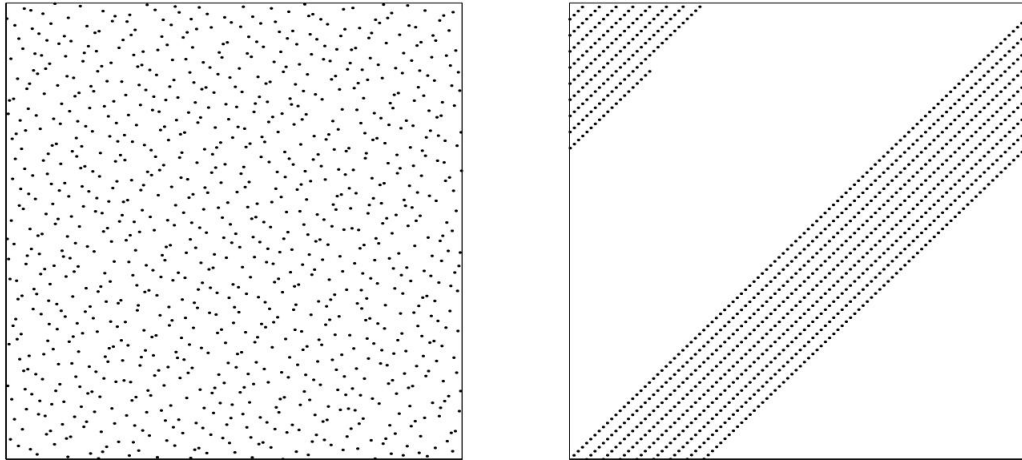


Рис. 1.1: Первые  $n = 1000$  точек последовательности Halton в размерности  $d = 30$ . Слева — проекция на первые две координаты (база  $b_1 = 2$ ,  $b_2 = 3$ ). Справа — проекция на две последние координаты (база  $b_1 = 109$ ,  $b_2 = 113$ ).

**Задачи.** 1. *Реализовать последовательности Halton и Hammersley с различными параметрами. Найти проекции с однородным распределением и неоднородным распределением (визуально).*

2. Оптимизировать реализацию функции  $\psi_b(k+1)$ , используя известное значение  $\psi_b(k)$ . Оптимизировать реализацию функции  $\psi_{b+1}(k)$ , используя известное значение  $\psi_b(k)$ .
3. Сравнить результаты предыдущей задачи с усовершенствованной последовательностью *Halton*

$$x_k = (\psi_{b_1}(kl), \dots, \psi_{b_d}(kl)), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $l$  взаимно просто с  $b_1, \dots, b_d$ .

### 1.6.6 Последовательность Faure

Пусть  $b$  — наименьшее простое,  $b \geq d$ . Тогда последовательность Faure  $\{x_k = (x_k^{(1)}, \dots, x_k^{(d)})\}$  задается следующим образом

$$x_k^{(i)} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_j^{(i)}(k)}{b^j}, \quad \text{где}$$

$$y_j^{(i)}(k) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l^{j-1} (i-1)^{l-j+1} a_j(k) \pmod{b}, \quad k = \sum_{l=0}^{\infty} a_l(k) b^l.$$

Считаем, что  $C_m^n = 0$  при  $n > m$ . Каждая сумма имеет только конечное число ненулевых слагаемых. Пусть  $k = \sum_{l=0}^{r-1} a_l(k) b^l$ , тогда

$$\bar{y}^{(i)}(k) = C^{(i-1)} \bar{a}(k) \pmod{b},$$

где матрица  $C^{(i-1)}(m, n) = C_{n-1}^{m-1} i^{n-m}$  для  $n \geq m$ , и ноль иначе. Справедливы рекуррентные соотношения  $C^{(i)} = C^{(1)} C^{(i-1)}$ .

Если  $k$  пробегает множество  $\{0, 1, \dots, b^r - 1\}$ , то  $\bar{a}(k) = (a_0(k), \dots, a_{r-1}(k))$  пробегает все наборы с координатами из  $0, 1, \dots, b-1$ . Матрица  $C^{(i)}$  перемешивает наборы  $\bar{a}(k)$ , то есть  $C^{(i)} \bar{a}(k) \pmod{b}$  пробегает то же множество наборов, что и  $\bar{a}(k)$ .

**Предложение 1.6.10 (Faure).** *Последовательность Faure является  $(0, d)$ -последовательность*

*Для последовательности Faure справедлива оценка*

$$D^*(x_0, \dots, x_{n-1}) \leq F_d \frac{(\log n)^d}{n} + O\left(\frac{(\log n)^{d-1}}{n}\right),$$

причем  $F_d \rightarrow 0$  при  $d \rightarrow \infty$ .

Из циклических свойств матриц  $C^{(i)}$  следует, что проекция на координаты  $(i, j)$  зависит только от разности  $j - i \pmod{b}$ . На рисунке 1.2 продемонстрирован этот

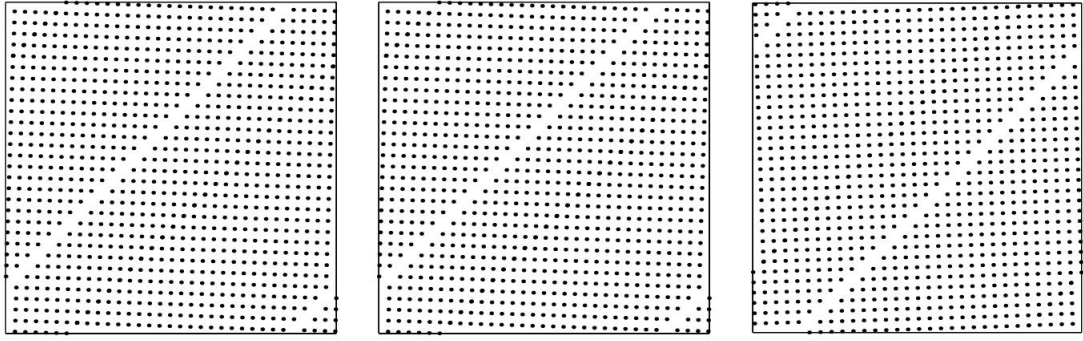


Рис. 1.2: Проекция  $n = 961$  точек последовательности Фаугре в размерности  $d = 31$  и базой  $b = 31$ . Слева направо показаны проекция на координаты  $(1, 2)$ ,  $(19, 20)$ ,  $(1, 31)$ .

эффект: проекции на координаты  $(1, 2)$  и  $(19, 20)$  совпадают, а проекция на  $(1, 31)$  отличается перестановкой координат.

Для улучшения однородности Фох рекомендует строить последовательность Фаугре, начиная с  $k = b^4 - 1$ .

Альтернативная конструкция для построения последовательности Фаугре основана на кодах Gray. Коды Gray позволяют заменить умножение вектора на матрицу сложением двух векторов, что существенно влияет на скорость исполнения.

**Задачи.** 1. Реализовать последовательности Фаугре с различными параметрами.

*Визуально проанализировать различные проекции.*

2. Реализовать проверку последовательности Фаугре, что она является  $(0, d)$ -последовательностью.

### 1.6.7 Последовательность Соболя

Последовательность Соболя —  $(t, d)$ -последовательность,  $b = 2$ ,  $t = t(d)$ . Каждая координата строится по своей матрице-генератору  $V$ . Матрица  $V$  строится по примитивному многочлену  $P(x)$ . Далее все рассуждения будут проводиться для одной координаты.

Пусть  $\bar{a}(k) = (a_0(k), \dots, a_{r-1}(k))^T$ , где  $k = a_0(k) + 2a_1(k) + \dots + 2^{r-1}a_{r-1}(k)$ , то есть  $k = (a_{r-1}(k) \dots a_0(k))_2$ . Положим  $\bar{y}(k) = V\bar{a}(k) \pmod{2}$ , где матрица  $V$  состоит из столбцов  $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_r$ . Тогда  $\bar{y}(k) = a_0(k)v_1 \oplus a_1(k)v_2 \oplus \dots \oplus a_{r-1}(k)v_r$ , где

$$0 \oplus 0 = 0, \quad 1 \oplus 0 = 0 \oplus 1 = 1, \quad 1 \oplus 1 = 0.$$

Положим  $x_k = 2^{-1}y_1(k) + \dots + 2^{-r}y_r(k)$ .

Многочлен  $P(x) = x^q + c_1x^{q-1} + \dots + c_{q-1}x + 1 \in Z_2[x]$  называется *примитивным многочленом*, если он неприводимый и минимальная степень  $p$ , для которой  $P(x) \mid x^p + 1$ , имеет вид  $p = 2^q - 1$ . Например, следующие многочлены примитивны:

$$x + 1, \quad x^2 + x + 1, \quad x^3 + x + 1, \quad x^3 + x^2 + 1,$$

причем это все примитивные многочлены степени не выше 3. Ниже представлены все примитивные многочлены степени не выше 8:

$$0 : \quad 1$$

$$1 : \quad 3 = x + 1$$

$$2 : \quad 7 = x^2 + x + 1$$

$$3 : \quad 11 = x^3 + x + 1, \quad 13 = x^3 + x^2 + 1$$

$$4 : \quad 19, 25$$

$$5 : \quad 37, 59, 47, 61, 55, 41$$

$$6 : \quad 67, 97, 91, 109, 103, 115$$

$$7 : \quad 131, 193, 137, 145, 143, 241, 157, 185, 167, 229, 171, 213, 191, 253, 203, 211, 239, 247$$

$$8 : \quad 285, 369, 299, 425, 301, 361, 333, 357, 351, 501, 355, 397, 391, 451, 463, 487$$

Примитивный многочлен  $P(x)$  определяет значения  $m_j$  рекуррентным образом

$$m_j = [(2c_1m_{j-1})_2 \oplus (2^2c_2m_{j-2})_2 \oplus \dots \oplus (2^{q-1}c_{q-1}m_{j-q+1})_2 \oplus (2^qm_{j-q})_2 \oplus (m_{j-q})_2]_{10}.$$

Если  $\deg P = 0$ , то  $m_j = 1$ . Положим  $v_j = (m_j/2^j)_2$ . Для того, чтобы корректно определить последовательность  $\{m_j\}$ , нужно определить  $m_1, \dots, m_q$ . Минимальное требование на зание этих начальных значений — они нечетны и не превосходят  $2^j$ . Тогда все следующие значения  $m_j$  будут нечетны и не превосходить  $2^j$ , откуда  $v_j \in (0, 1)$ .

**Пример 1.6.11.** Рассмотрим примитивный многочлен  $P(x) = x^3 + x^2 + 1$ ,  $\deg P = q = 3$ . Тогда

$$m_j = [(2m_{j-1})_2 \oplus (8m_{j-3})_2 \oplus (m_{j-3})_2],$$

и положим  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = 3$ ,  $m_3 = 3$ . Вычислим следующие 2 значения последовательности  $\{m_j\}$ :

$$m_4 = [(2 \cdot 3)_2 \oplus (8 \cdot 1)_2 \oplus (1)_2]_{10} = [0110 \oplus 1000 \oplus 0001]_{10} = [1111]_{10} = 15,$$

$$m_5 = [(2 \cdot 15)_2 \oplus (8 \cdot 3)_2 \oplus (3)_2]_{10} = [11110 \oplus 11000 \oplus 00011]_{10} = [00101]_{10} = 5.$$

Отсюда имеем

$$v_1 = 0.1, \quad v_2 = 0.11, \quad v_3 = 0.011, \quad v_4 = 0.1111, \quad v_5 = 0.00101,$$

и соответствующая порождающая матрица

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдем значения

$$\bar{y}(1) = V \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{y}(2) = V \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{y}(3) = V \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

которым соответствуют точки  $x_1 = 1/2$ ,  $x_2 = 3/4$ ,  $x_3 = 1/4$ . Найдем значения

$$\bar{y}(29) = V \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{y}(30) = V \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{y}(31) = V \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

которым соответствуют точки  $x_{29} = 7/32$ ,  $x_{30} = 15/32$ ,  $x_{31} = 31/32$ .

Таким образом, эта процедура реализует перестановку сегмента  $\psi_2(k)$ ,  $2^{r-1} \leq k < 2^k$ , последовательности Ван дер Корпута, когда матрица  $V$  имеет размер  $r \times r$ .

**Задачи.** 1. Реализовать последовательности Соболя с различными параметрами. Визуально проанализировать проекции на различные координаты.

2. Реализовать проверку последовательности Соболя, что она является  $(t, d)$ -последовательностью.

3. Реализовать вычисление стоимости европейского колл опциона с помощью квази Монте Карло.

4. Реализовать вычисление стоимости азиатского колл опциона с помощью квази Монте Карло.



### 1.6.8 Коды Gray

Коды Gray нужны для оптимизации реализации метода Соболя. В кодах Gray разложения чисел  $k$  и  $k + 1$  имеют одинаковые цифры кроме одной, что позволяет более эффективно рекурсивно строить значения  $x_k$ .

Сначала рассмотрим двоичные коды Gray.

Вместо обычного двоичного разложения числа  $k = \overline{a_{r-1}(k) \dots a_0(k)}_2$  рассмотрим сдвинутое представление  $(k)_2 + ([k/2])_2$ . Например, число 3 кодом Gray представляется  $011 \oplus 001 = 010$ . Тогда запись кодом Gray чисел  $k$  и  $k + 1$  отличается одним битом. Позиция этого бита — это позиция самого правого нуля в обычном двоичном представлении числа  $k$ .

Двоичное представление кодом Gray набора чисел  $0, 1, \dots, 2^r - 1$  является перестановкой обычного двоичного представления. Если в определении обратной функции  $\psi_2$  заменить обычные двоичные представления чисел  $\{a_j(k)\}$  коэффициентами кода Gray  $\{g_j(k)\}$ , то первые  $2^r - 1$  значений были бы перестановкой элементов последовательности Ван дер Корпута. Поэтому замена на код Gray не влияет на оценку  $D^*(x_0, \dots, x_{n-1})$ .

С заменой на код Gray имеем

$$x_k = g_0(k)v_1 \oplus g_1(k)v_2 \oplus \dots \oplus g_{r-1}(k)v_r.$$

Предположим, что представления кодом Gray чисел  $k$  и  $k + 1$  отличается в  $l$ -ом бите, тогда

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= g_0(k+1)v_1 \oplus g_1(k+1)v_2 \oplus \dots \oplus g_{r-1}(k+1)v_r = \\ &= g_0(k)v_1 \oplus g_1(k)v_2 \oplus \dots \oplus (g_l(k) \oplus 1) \oplus \dots \oplus g_{r-1}(k)v_r = x_k \oplus v_l. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим коды Gray с основанием  $b$ .

Положим  $k = \overline{a_r(k) \dots a_0(k)}_b$  и определим код Gray по основанию  $b$

$$\begin{pmatrix} g_0(k) \\ g_1(k) \\ \dots \\ g_{r-1}(k) \\ g_r(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ b-1 & 1 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & b-1 & 1 \\ & & & & b-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0(k) \\ a_1(k) \\ \dots \\ a_{r-1}(k) \\ a_r(k) \end{pmatrix} \pmod{b}.$$

Тогда снова запись кодом Gray по основанию  $b$  чисел  $k$  и  $k + 1$  отличается одним битом, номер  $l$  которого — наименьшее  $l$  такое, что  $a_l(k) \neq b - 1$ . Отличные биты удовлетворяют соотношению  $g_l(k+1) = g_l(k) + 1 \pmod{b}$ .

Коды Gray по основанию  $b$  упрощают реализацию последовательности Faure:

$$\begin{aligned} & (y_1^{(i)}(k+1), \dots, y_r^{(i)}(k+1)) = \\ & (y_1^{(i)}(k), \dots, y_r^{(i)}(k)) + (C^{(i)}(1, l), \dots, C^{(i)}(r, l)) \pmod{b}, \end{aligned}$$

где номер  $l$  определяется по разложению  $k = \overline{a_r(k) \dots a_0(k)}_b$ .

- Задачи.**
1. Доказать, что для кодов Gray с базой  $b \geq 2$  запись чисел  $k$  и  $k+1$  отличается одним битом. Найти номер и представление отличного бита.
  2. Реализовать последовательности Соболя с использованием кодов Gray с базой  $b = 2$ . Визуально проанализировать псевдослучайность полученных последовательностей при различных порождающих матрицах  $V$ .
  3. Реализовать последовательности Faure с использованием кодов Gray с соответствующими базами  $b_j$ . Визуально проанализировать проекции на различные координаты.

## 1.7 Задачи на метод Монте Карло

В задачах вычисления payoff опционов цена акции  $S(t)$  удовлетворяет модели Блэка-Шоулза

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = rdt + \sigma dW(t).$$

где  $\sigma$  — волатильность,  $r$  — средний ретурн, а  $W(t)$  — броуновское движение.

Задачи 1-4 теоретические, задачи 5-10 практические.

1. Вывести приближенные формулы для расчета значений случайной величины  $\xi$  с функцией распределения  $F(x) = 1 - \frac{2e^{-x} + e^{-5x}}{3}$ ,  $0 < x < \infty$ . Представить распределение  $\xi$  визуально.

2. Вывести точные формулы для расчета значений случайных точек, равномерно распределенных в плоском кольце  $R_1^2 < x^2 + y^2 < R_2^2$ .

3. Построить оценку с конечной дисперсией для вычисления интеграла

$$\int_0^\infty x^{-5/2} f(x) dx$$

в случае, когда  $f(x) \sim x$  при  $x \rightarrow \infty$  и  $f(x) \sim x^2$  при  $x \rightarrow 0$ .

4. Записать формулы для расчета интеграла

$$\int_0^\infty f(x) e^{-kx} dx, \quad k > 0,$$

с помощью значений случайной величины  $\xi$ , плотность которой равна  $p(x) = \alpha e^{-\alpha x}$ . Доказать, что если  $f(x) \approx Ax^n$ , то дисперсия будет наименьшей при  $\alpha \approx \alpha_0 = k/(n+1)$ .

5. Найти в  $\mathbb{R}^{20}$  объем 19-мерной сферы радиуса 1 с относительной погрешностью менее  $1e-9$ .
6. Вычислить методом Монте Карло payoff европейского колл опциона и сравнить с точной формулой Блэка-Шоулза. Волатильность  $\sigma$  постоянна.
7. Вычислить методом Монте Карло payoff азиатского колл опциона. Волатильность  $\sigma$  постоянна.
8. Вычислить методом Монте Карло payoff европейского колл опциона, если волатильность зависит от цены  $\sigma = \sigma(S(t))$ .

9. Численно проверить, что последовательность псевдослучайных чисел Faure является  $(0, d)$ -последовательностью, а последовательность псевдослучайных чисел Соболя —  $(t, d)$ -последовательностью. Численно оценить star discrepancy  $D^*(x_1, \dots, x_n)$  для последовательностей Faure и Соболя.
10. Использовать метод квази Монте Карло с последовательностью Faure и Соболя для вычисления payoff европейского и азиатского колл опциона. Волатильность  $\sigma$  постоянна. Сравнить результаты с использованием кодов Gray и без.

## Глава 2

# Сеточные численные методы

Литература:

1. Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков *Численные методы* // М.: Наука, 2006.
2. Ankudinova J., Ehrhardt M. *On the numerical solution of nonlinear Black-Scholes equations* // Computers and Mathematics with Applications. – 2008. – Т. 56. – №. 3. – С. 799-812.

## 2.1 Численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений

### 2.1.1 Введение

Методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений имеют схожую технику решения с обыкновенными дифференциальными уравнениями, но обобщены для обеспечения стохастической динамики.

В зависимости от характера решаемой задачи может представлять интерес приближенное *сильное* или *слабое* решение. В первом случае по заданной траектории винеровского процесса строится приближенная траектория процесса, описываемого стохастическим дифференциальным уравнением. При этом близость траекторий может пониматься в среднем квадратическом, по вероятности (равномерно или поточечно), в смысле сходимости приближений почти наверное и т.д. Существуют различные способы построения приближенного сильного решения, например, основанные на сведении к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения со случайной правой частью, полученной надлежащим сглаживанием винеровского шума. Наиболее распространенный и эффективный подход к потраекторному интегрированию стохастических дифференциальных уравнений основан на использовании разностных методов, то есть методов, основанных на сведении исходной задачи к численному решению стохастических разностных уравнений — разностных аналогов стохастических дифференциальных уравнений.

### 2.1.2 Метод Эйлера-Маруямы

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение в дифференциальной форме

$$dX_t = a(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad t \geq 0, \quad (2.1)$$

с заданным начальным условием  $X_0$  — случайной величиной, независимой с процессом  $W_t$ . Здесь  $W_t$  — винеровский процесс — непрерывный процесс с независимыми однородными приращениями, причем  $W_0 = 0$ , а распределение приращений  $W_{t+\Delta t} - W_t$  нормальное в нулевым средним и дисперсией  $\Delta t$ . В интегральной форме уравнение (2.1) имеет вид

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s. \quad (2.2)$$

Если второй интеграл в (2.2) понимать в смысле Ито, то решение уравнения (2.1) является пределом по вероятности решений стохастических разностных уравнений

$$X_{t_{k+1}} - X_{t_k} = a(t_k, X_{t_k})(t_{k+1} - t_k) + \sigma(t_k, X_{t_k})(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) \quad (2.3)$$

при неограниченном измельчении разбиений  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ . Каждая разность  $\Delta W_{k+1} = W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$  вычисляется как

$$\Delta W_k = \sqrt{\Delta t_k} Z_k, \quad Z_k \sim N(0, 1).$$

Вычисления по схеме (2.6) называются *методом Эйлера-Маруямы*, который в общем виде имеет порядок сходимости 0,5.

### 2.1.3 Интеграл в смысле Стратоновича

Если второй интеграл в (2.2) понимать в смысле Стратоновича, то решение уравнения (2.1) является пределом по вероятности решений стохастических разностных уравнений

$$X_{t_{k+1}} - X_{t_k} = a(t_k, X_{t_k})(t_{k+1} - t_k) + \sigma(t_k, X_{t_k}^*)(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}), \quad (2.4)$$

где  $X_{t_k}^* = (X_{t_k} + X_{t_{k+1}})/2$ .

Схема (2.6) является *явной*, поскольку она представляет собой явную зависимость  $X_{t_{k+1}}$  от предыдущих значений. Схема (2.4) *неявная*, но может быть превращена в явную путем дополнительного слагаемого  $\frac{1}{2}\sigma\partial_x\sigma$ :

$$dX_t = \left( a(t, X_t) + \frac{1}{2}\sigma(t, X_t)\partial_x\sigma(t, X_t) \right) dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad t \geq 0, \quad (2.5)$$

то есть при условии гладкости коэффициента  $\sigma(t, X_t)$  схемы (2.6) и (2.4) эквивалентны.

### 2.1.4 Формула Ито

Для аналитического решения стохастических дифференциальных уравнений необходимо ввести правило для стохастических дифференциалов, называемое *формулой Ито*. Пусть  $f(t, x)$  — достаточно гладкая функция, тогда

$$df(t, X_t) = \left( \partial_t f(t, X_t) + a(t, X_t)\partial_x f(t, X_t) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, X_t)\partial_{xx}^2 f(t, X_t) \right) dt + \sigma(t, X_t)\partial_x f(t, X_t)dW_t.$$

### 2.1.5 Схема Эйлера-Бернштейна

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение (2.1) в одномерном случае при  $t \in [0, T]$  и  $X_0 = x$ . Построим приближенное слабое решение на равномерной сетке по времени с шагом  $\Delta t = T/n$ . Пусть

$$Y_{k+1} - Y_k = a(t_k, Y_k)\Delta t + \sigma(t_k, Y_k)\sqrt{\Delta t}\xi_{k+1}, \quad Y_0 = x, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (2.6)$$

где  $\{\xi_k\}$  — последовательность независимых случайных величин распределенных по нормальному закону  $N(0, 1)$ . Определим процесс  $X^{(n)}$  посредством кусочно-линейной интерполяции по точкам  $t_k = k\Delta t$ ,  $X_{t_k} = Y_k$ ,  $k = 0, \dots, n$ . Тогда при существовании и единственности слабого решения, распределение процесса  $X^{(n)}$  слабо (поточечно) сходится в пространстве  $C[0, T]$  непрерывных на  $[0, T]$  функций к распределению (слабого) решения стохастического дифференциального уравнения (2.1) при  $t \in [0, T]$  и  $X_0 = x$ .

### 2.1.6 Диффузионное уравнение Блэка-Шоулза

Рассмотрим диффузионное уравнение Блэка-Шоулза

$$dX = \mu X dt + \sigma X dW_t, \quad X(0) = 0, \quad (2.7)$$

где  $\mu$  и  $\sigma$  постоянны. Найдем точное решение этого уравнения.

Запишем

$$X = f(t, Y) = X_0 e^Y, \quad \text{где } Y = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t.$$

По формуле Ито имеем

$$dX = X_0 e^Y dY + \frac{1}{2}e^Y dY dY.$$

Используя дифференциальное тождество формулы Ито  $dY dY = \sigma^2 dt$ , получим

$$\begin{aligned} dX &= X_0 e^Y \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + X_0 e^Y \sigma dW_t + \frac{1}{2}\sigma^2 e^Y dt = \\ &= X_0 e^Y \mu dt + X_0 e^Y \sigma dW_t = \mu X dt + \sigma X dW_t. \end{aligned}$$

Таким образом, решение имеет вид

$$X_t = X_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t \right\}. \quad (2.8)$$

Метод Эйлера-Маруяма, примененный к уравнению (2.7), дает следующую схему

$$X_{k+1} = X_k + r X_k (t_{k+1} - t_k) + \sigma X_k \sqrt{t_{k+1} - t_k} Z_k, \quad Z_k \sim N(0, 1). \quad (2.9)$$



### 2.1.7 Метод Милштейна

Рассмотрим схему для приближенного решения уравнения (2.1) при  $X_0 = 0$ :

$$X_{k+1} = X_k + a(X_k, t_k)\Delta t_k + \sigma(X_k, t_k)\Delta W_k + \frac{1}{2}\sigma(X_k, t_k)\partial_x\sigma(X_k, t_k)((\Delta W_k)^2 - \Delta t_k).$$

Это *метод Милштейна*, который имеет порядок сходимости 1.

Отметим, что метод Милштейна эквивалентен методу Эйлера-Маруямы, если диффузионная часть  $\sigma(X_t, t)$  не зависит от  $X_t$ .

Для того, чтобы добиться больших порядков сходимости применяют разложения Тейлора-Ито и Тейлора-Стратоновича решения в стохастический ряд, а также методы Рунге-Кутты, которые заменяют частные производные в разложении Тейлора-Ито функцией оценки исходного уравнения. Схемы более высоких порядков имеют все более сложный вид с возрастанием порядка. За точными формулами явных и неявных сильных методов порядков точности 1.0, 1.5, 2.0 и 2.5 рекомендуем читателю, например, монографию Кузнецов Д. Ф. Численное моделирование стохастических дифференциальных уравнений и стохастических интегралов. – Федеральное государственное унитарное предприятие "Академический научно-издательский, производственно-полиграфический и книгораспространительский центр "Наука" Обособленное подразделение "Санкт-Петербургская издательско-книготорговая фирма "Наука 1999.

## 2.2 Численные методы обыкновенных дифференциальных уравнений

### 2.2.1 Погрешность метода и вычислительная погрешность

Схема решения задачи численным методом:

- постановка задачи;
- приближенный метод решения;
- оценка погрешности (погрешность метода);
- оценка погрешности с учетом округлений (влияние вычислительной погрешности).

Если  $a^*$  приближенное значение величины  $a \neq 0$ , то *относительной погрешностью* называют величину

$$\left| \frac{a^* - a}{a} \right|.$$

Пусть требуется вычислить  $f'(x_0)$ . Воспользуемся приближенной формулой

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h},$$

где  $h$  — “достаточно малый” параметр.

Если  $f \in C^3$  в окрестности точки  $x_0$ , то

$$f(x_0 \pm h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) \pm \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x_{\pm}), \quad x_0 - h \leq x_{\pm} \leq x_0 + h.$$

Подстановка дает

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} - f'(x_0) = \frac{h^3(f^{(3)}(x_+) + f^{(3)}(x_-))}{6 \cdot 2h}.$$

По теореме о среднем получаем

$$\frac{h^3(f^{(3)}(x_+) + f^{(3)}(x_-))}{6 \cdot 2h} = \frac{h^2 f^{(3)}(\xi)}{6}, \quad x_0 - h \leq \xi \leq x_0 + h.$$

Величина в правой части оценивается  $h^2 M_3/6$ , где  $M_3 = \max_{[x_0-h, x_0+h]} |f^{(3)}(x)|$ .

Машинная погрешность — число  $\varepsilon > 0$  такое, что  $1 + \varepsilon = 1$  при вычислении на компьютере. Например, для типа float  $\varepsilon \approx 10^{-8}$ , для double  $\varepsilon \approx 10^{-16}$ .

Обозначим за  $f^*(x)$  приближенное значение функции  $f(x)$  в точке  $x$  и проанализируем погрешность с учетом приближения:

$$\left| \frac{f^*(x_0 + h) - f^*(x_0 - h)}{2h} - f'(x_0) \right| = \left| \left( \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} - f'(x_0) \right) + \frac{f^*(x_0 + h) - f(x_0 + h)}{2h} - \frac{f^*(x_0 - h) - f(x_0 - h)}{2h} \right| \leq \frac{h^2}{6} M_3 + \frac{\varepsilon}{h} M_0,$$

где  $M_0 = \max_{[x_0-h, x_0+h]} |f(x)|$ .

## 2.2.2 Пример неустойчивого алгоритма

Пусть требуется вычислить последовательность интегралов

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Для построения численного алгоритма проведем интегрирование по частям

$$I_n = x^n e^{x-1} \Big|_0^1 - \int_0^1 n x^{n-1} e^{x-1} dx = 1 - n I_{n-1}.$$

В результате получили рекуррентное соотношение, к которому необходимо добавить условие  $I_1 = 1/e$ . При отсутствии ошибок округления мы получили точный метод. Положим  $z_n = I_n - I_n^*$ , а также будем предполагать, что  $I_n^* = 1 - n I_{n-1}^*$ . Тогда  $z_n = -n z_{n-1} = n!(-1)^{n+1} z_1$ , то есть погрешность растет факториально! Очень скоро это приведет к искажению смысла и неверному результату в расчетах.

Алгоритмы такого рода называют *неустойчивыми*.

Можно ли исправить ситуацию? Если переписать рекуррентное соотношение в виде  $I_{n-1} = \frac{1-I_n}{n}$ , то его погрешность будет убывать. Но где взять начальное значение? Если, например, требуется найти последовательность для  $n \leq 500$ , то стартовать можно с  $I_{600}^* = 0$ .

## 2.2.3 Устойчивость решений обыкновенного дифференциального уравнения

Для изучения способов дискретизации по времени нестационарных задач наиболее удобной моделью является задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ):

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (2.10)$$

Рассмотрим два решения (2.10), порождаемые разными начальными данными:

$$\begin{aligned}y(x_0) = y_1 &\Rightarrow y_1(x), \\y(x_0) = y_2 &\Rightarrow y_2(x).\end{aligned}$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение называется *асимптотически устойчивым*, если  $\lim_{x \rightarrow \infty} |y_1(x) - y_2(x)| = 0$ .

**Пример 2.2.1.** Обыкновенное дифференциальное уравнение  $y' + Ay = 0$  имеет общее решение  $y(x) = Ce^{-Ax}$ , которое является асимптотически устойчивым при  $A > 0$ . При  $A < 0$  решение асимптотически неустойчиво.

**Пример 2.2.2.** Обыкновенное дифференциальное уравнение  $y' + Ay^3 = 0$ ,  $y(0) = y_0$ ,  $x \geq 0$ , имеет решение  $y(x) = (y_0^{-2} + 2Ax)^{-1/2}$ , которое при  $A > 0$  является равномерно ограниченным по  $x$  и асимптотически устойчивым. При  $A < 0$  в момент  $x^* = (-2Ay_0^2)^{-1}$  решение обращается в бесконечность. Про решения такого типа говорят, что оно имеет “взрывной характер” (*blow up*).

В дальнейшем будем рассматривать только гладкие асимптотически устойчивые решения.

## 2.2.4 Явный метод Эйлера для обыкновенного дифференциального уравнения

Рассмотрим задачу Коши (2.10). Пусть  $x_{n+1} = x_n + h$ , где  $h$  — постоянный шаг интегрирования. Обозначим  $y_n$  — приближенное значение точного решения  $y(x_n)$ . Тогда при заданном  $y_0$  метод Эйлера можно записать в виде

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad n \geq 0. \quad (2.11)$$

**Пример 2.2.3.** Проанализируем устойчивость метода на модельном примере  $f(x, y) = -Ay$ ,  $y(0) = y_0$ ,  $A > 0$ :

$$y_{n+1} = y_n - hAy_n = (1 - hA)y_n = (1 - hA)^{n+1}y_0.$$

Если  $h > 2/A$ , то величина  $1 - hA$  отрицательна, и по модулю больше 1. В этом случае приближенное решение  $y_n$  знакопеременно и возрастает по абсолютной величине. Точное же решение знакопостоянно и стремится к нулю. Это означает неустойчивость метода. Если мы хотим иметь  $|y_n| \rightarrow 0$ , то должны выбирать  $h < 2/A$ . Такую ситуацию называют условной устойчивостью метода.

Из последнего примера следует, что даже для устойчивого обыкновенного дифференциального уравнения метод может быть как устойчивым, так и не устойчивым в зависимости от величины шага интегрирования.

Рассмотрим структуру погрешности метода Эйлера, считая  $h$  достаточно малым.

Пусть точное решение  $y(x)$  имеет вторую непрерывную производную. Тогда

$$\begin{aligned} y(x_{n+1}) &= y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(\xi) = \\ &= y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_n), \end{aligned} \quad (2.12)$$

где  $x_n \leq \xi_n \leq x_{n+1}$ . Отсюда следует, что *локальная ошибка* (ошибка на шаге или *погрешность метода на шаге*) есть  $O(h^2)$ .

Вычитая из (2.12) выражение (2.11), имеем

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = y(x_n) - y_n + h(f(x_n, y(x_n)) - f(x_n, y_n)) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_n).$$

По формуле конечных приращений Лагранжа

$$f(x_n, y(x_n)) - f(x_n, y_n) = (y(x_n) - y_n)f_y(x_n, \tilde{y}_n),$$

где  $\tilde{y}_n$  находится между  $y(x_n)$  и  $y_n$ . Окончательно получаем выражение *глобальной* (полной) ошибки на конечном интервале интегрирования:

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = (1 + hf_y(x_n, \tilde{y}_n))(y(x_n) - y_n) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_n).$$

Таким образом, при построении метода решения задачи Коши необходимо учитывать два фактора: уменьшение локальной ошибки (как степени  $h$ ) и возрастание *распространяемой* ошибки, то есть  $|1 + hf_y(x_n, \tilde{y}_n)| \leq 1$ .

Итак, итоговая ошибка на конечном отрезке интегрирования, при учете, что мы должны сделать  $N = O(h^{-1})$  шагов, имеет вид  $NO(h^2) = O(h)$ , то есть метод Эйлера является *методом первого порядка* точности.

## 2.2.5 Явные методы Рунге-Кутты

Пусть в точке  $x$  считается известным значение  $y(x)$ . Требуется построить приближение к  $y(x+h)$ , где  $h$  — шаг интегрирования. Пусть для некоторого фиксированного  $q$  заданы параметры

$$\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_q, \quad p_1, p_2, \dots, p_q, \quad \beta_{i,j}, \quad 0 < j < i \leq q. \quad (2.13)$$

Будем последовательно вычислять

$$\begin{aligned}k_1 &= hf(x, y), \\k_2 &= hf(x + \alpha_2, y + \beta_{2,1}k_1), \\k_3 &= hf(x + \alpha_3, y + \beta_{3,1}k_1 + \beta_{3,2}k_2), \\&\dots \\k_q &= hf(x + \alpha_q, y + \beta_{q,1}k_1 + \dots + \beta_{q,q-1}k_{q-1}).\end{aligned}$$

В качестве приближения к  $y(x + h)$  возьмем величину  $z(h)$ :

$$y(x + h) \approx z(h) = y(h) + \sum_{i=1}^q p_i k_i.$$

Значения параметров (2.13) определяются из соображений минимизации по порядку величины локальной ошибки  $\phi(h) = y(x + h) - z(h)$ . Пусть функция  $f(x, y)$  имеет непрерывные производные до порядка  $s + 1$ , тогда параметры можно выбрать из условий

$$\phi(0) = \phi'(0) = \dots = \phi^{(s)}(0) = 0.$$

Из формулы Тейлора

$$\phi(h) = \sum_{i=1}^s \frac{h^i}{i!} \phi^{(i)}(0) + \frac{h^{s+1}}{(s+1)!} \phi^{(s+1)}(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq h,$$

получаем локальную ошибку порядка  $O(h^{s+1})$ .

**Задачи.** Выпить и решить систему уравнений на параметры (2.13) при  $q = 2$  и  $q = 3$ . Оценить порядок локальной ошибки.

Методы Рунге-Кутты имеют следующие достоинства:

- “одношаговость” — по значению функции в предыдущей точке находится значение функции в следующей точке;
- легко менять шаг интегрирования для достижения требуемой точности;
- вычисления ведутся по явным формулам, и не требуется решать какие-то вспомогательные задачи.

К недостатка методов Рунге-Кутты обычно относят трудоемкость и ограничения на устойчивость (ограничение на величину шага  $h$  для устойчивости).

**Задачи.** Доказать, что погрешность метода Рунге-Кутты на шаге  $\phi(h)$  имеет главный член, то есть справедливо представление вида:

$$\phi(h) = \psi(x, y)h^{s+1} + O(h^{s+2}).$$

## 2.2.6 Неявные одношаговые методы

Проинтегрируем уравнение  $y' = f(x, y)$  на отрезке  $[x_n, x_{n+1}]$ :

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + I, \quad \text{где } I = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) \, dx.$$

*Явный* метод Эйлера соответствует замене интеграла  $I$  на выражение  $(x_{n+1} - x_n)f(x_n, y(x_n))$ . Столь же равноправной является замена  $I$  на  $(x_{n+1} - x_n)f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))$ , приводящая к *неявной схеме*:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}).$$

Замена интеграла  $I$  на приближенное выражение по правилу трапеций приводит к *методу Кранка-Николсон*:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})).$$

**Задачи.** С помощью формулы Тейлора установить порядок точности  $s = 1$  для неявного метода Эйлера, и, соответственно,  $s = 2$  для метода Кранка-Николсон.

Реализация неявных методов не так проста из-за того, что в формулы входит неявным образом неизвестное значение  $y_{n+1}$ . Как правило, для решения таких уравнений используется *метод Ньютона* или *метод функциональной итерации*:

$$y_{n+1}^{(0)} = y_n, \quad y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

**Пример 2.2.4.** Проанализируем устойчивость этих методов на модельной задаче  $y' + Ay = 0$ ,  $A > 0$ . Для неявного метода Эйлера соотношение  $y_{n+1} = y_n - hAy_{n+1}$  дает

$$y_{n+1} = (1 + hA)^{-1}y_n = (1 + hA)^{-n-1}y_0.$$

Поскольку  $|1 + hA|^{-1} < 1$ , то ошибки накопленные на предыдущем шаге будут убывать, то есть неявный метод Эйлера абсолютно устойчив. Метод Кранка-Николсон приводит к соотношению

$$y_{n+1} = \frac{1 - hA/2}{1 + hA/2}y_n.$$

Легко проверить, что при  $A > 0$  этот метод также абсолютно устойчив.

## 2.2.7 Многошаговые методы

Основная идея многошаговых методов — для получения очередного приближения  $y_{n+1}$  использовать значения  $y_n, \dots, y_1, y_0$ , полученные на предыдущих итерациях:

$$y_{n+1} = \Phi(f; x_{n+1}, \dots, x_{n-k+1}, y_n, \dots, y_{n-k+1}), \quad x_n = x_0 + nh.$$

Например, при  $k = 3$  получаем *трехшаговый* метод

$$y_{n+1} = \alpha_1 y_n + \alpha_2 y_{n-1} + \alpha_3 y_{n-2} + h(\beta_0 f_{n+1} + \beta_1 f_n + \beta_2 f_{n-1} + \beta_3 f_{n-2}),$$

где  $f_n = f(x_n, y_n)$  и неизвестные коэффициенты определяются из условий наиболее высокого порядка точности при сохранении устойчивости. Главное преимущество такого подхода — в многошаговом методе  $s$ -го порядка точности для нахождения значения  $y_{n+1}$  требуется только одно новое вычисление правой части  $f(x, y)$ , в то время как в одношаговых методах требовалось  $s$  вычислений.

Рассмотрим построение алгоритмов интерполирования *методом неопределенных коэффициентов*.

**Пример 2.2.5.** В качестве примера получим метод Адамса ( $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ ), содержащий пять неизвестных величин  $\alpha_1, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ , которые определим из условия точности интегрирования (так, что  $y_n = y(x_n)$ ) пяти уравнений

$$y' = lx^{l-1} : \quad y(x) = x^l, \quad l = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Длина шага тут не важна, поэтому можем взять  $h = 1$ . Решение полученной системы есть

$$\alpha_1 = 1, \quad \beta_0 = \frac{9}{24}, \quad \beta_1 = \frac{19}{24}, \quad \beta_2 = -\frac{5}{24}, \quad \beta_3 = \frac{1}{24}.$$

Отсюда следует искомая формула

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}).$$

Для оценки погрешности возьмем очередное значение  $l = 5$ :

$$y' = 5x^4, y = x^5, 1 \neq 5(\beta_0 + \beta_2 + 16\beta_3),$$

откуда следует  $y(x_{n+1}) - y_{n+1} = Cy^{(5)}(\xi)h^5$ ,  $C \neq 0$ , то есть порядок точности  $s = 4$ .

Исследование устойчивости многошаговых методов основано на изучении корней характеристических многочленов уравнений и весьма громоздко. Известен следующий результат (Дальквист, 1963): никакой многошаговый метод не может быть абсолютно устойчивым (даже неявный), если его порядок выше второго.

Отметим трудности использования многошаговых методов:



- недостаточно значений для старта алгоритма (как правило их получают одношаговыми методами);
- смена шага интегрирования  $h$  приводит к изменению коэффициентов.

## 2.3 Алгебраическая интерполяция и аппроксимация

### 2.3.1 Интерполяционный многочлен Лагранжа

Пусть в точках  $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  известны значения функции  $f(x_j) = f_j$ . Требуется построить многочлен  $L_{n-1}(x)$  минимальной степени такой, что  $L_{n-1}(x_j) = f_j$ .

Рассмотрим вспомогательные многочлены

$$\Phi_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Запишем формулу

$$L_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^n f_i \Phi_i(x).$$

Существование и единственность многочлена степени  $n - 1$ , удовлетворяющего поставленным условиям, следует из отличия от нуля соответствующего определителя Вандермонда, поэтому найденный многочлен  $L_{n-1}(x)$  есть единственное решение сформулированной задачи.

Оценим погрешность. Рассмотрим функцию

$$\phi(t) = f(t) - L_{n-1}(t) - K\omega_n(t),$$

где  $K$  — постоянная,  $\omega_n(t) = (t - x_1) \dots (t - x_n)$ . Выберем  $K$  из условия  $\phi(x) = 0$ , где  $x \neq x_j$  — точка, в которой оценивается погрешность. Величина  $K$  при этом определена однозначно:

$$K = \frac{f(x) - L_{n-1}(x)}{\omega_n(x)}.$$

Получается, что функция  $\phi(t)$  обращается в нуль на  $[a, b]$  в  $n + 1$  точке:  $x, x_1, \dots, x_n$ . По теореме Ролля  $\phi'(t)$  обращается в нуль в  $n$  точках, а  $\phi^{(n)}(t)$  имеет по крайней мере один нуль на  $[a, b]$ , который обозначим  $\xi$ . Так как  $\phi^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - Kn!$ , то  $K = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$ . Получаем утверждение.

**Предложение 2.3.1.** Пусть  $f \in C^n[a, b]$ . Тогда существует точка  $\xi \in [a, b]$  такая, что

$$f(x) - L_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \omega_n(x), \quad \text{где } \omega_n(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i).$$

В качестве следствия можно записать оценку погрешности в равномерной норме:

$$\|f(x) - L_{n-1}(x)\| \leq \frac{\|f^{(n)}(x)\|}{n!} \|\omega_n(x)\|, \quad \text{где } \|g(x)\| = \sup_{x \in [a, b]} |g(x)|.$$

Отметим, что при фиксированном  $n$  погрешность будет иметь наименьшую оценку, если в качестве узлов интерполяции для функции  $f(x)$  выбрать нули *многочлена Чебышева*.

**Задачи.** 1. Доказать, что если узлы интерполяции расположены симметрично относительно некоторой точки  $s$ , а значения интерполируемой функции в симметричных узлах равны, то интерполяционный многочлен Лагранжа — функция, четная относительно точки  $s$ .

2. Показать, что интерполяционный многочлен Лагранжа может быть построен рекуррентным образом:

$$L_0(x) = f(x_1), \quad L_n(x) = L_{n-1}(x) + (f(x_{n+1}) - L_{n-1}(x_{n+1})) \frac{\omega_n(x)}{\omega_n(x_{n+1})}, \quad n \geq 1,$$

$$\text{где } \omega_1(x) = x - x_1, \quad \omega_{n+1} = \omega_n(x - x_{n+1}).$$

### 2.3.2 Разделенные разности и формула Ньютона

Обобщением понятия производной является понятие разделенной разности. Пусть дана функция  $f(x)$  и даны точки  $\{x_1, \dots, x_n\}$ ,  $x_i \neq x_j$ . Разделенной разностью нулевого порядка является  $f(x_i)$ . Разделенные разности первого и второго порядка определяются следующим образом:

$$f(x_i; x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}, \quad f(x_i; x_j; x_k) = \frac{f(x_j; x_k) - f(x_i; x_j)}{x_k - x_i},$$

разделенная разность  $k$ -го порядка определяются как:

$$f(x_1; \dots; x_{k+1}) = \frac{f(x_2; \dots; x_{k+1}) - f(x_1; \dots; x_k)}{x_{k+1} - x_1}.$$

**Предложение 2.3.2.** Справедливо равенство

$$f(x_1; \dots; x_{k+1}) = \sum_{j=1}^k \frac{f(x_j)}{\prod_{i \neq j} (x_j - x_i)}.$$

**Задачи.** 1. Доказать это предложение по индукции по  $k$ .

2. Доказать, что при фиксированных  $x_1, \dots, x_k$  разделенная разность является линейным функционалом от функции  $f$ :

$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(x_1; \dots; x_k) = \alpha_1 f_1(x_1; \dots; x_k) + \alpha_2 f_2(x_1; \dots; x_k).$$

3. Доказать, что разделенная разность есть симметрическая функция своих аргументов  $x_1, \dots, x_k$  (то есть не меняется при любой их перестановке).

При помощи разделенных разностей можно получить другую форму записи интерполяционного многочлена  $L_n(x)$ .

Справедливо равенство

$$\begin{aligned} f(x) - L_n(x) &= f(x) - \sum_{i=1}^j f(x_i) \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \\ &= \prod_{i=1}^n (x - x_i) \left( \frac{f(x)}{\prod_{i=1}^n (x - x_i)} + \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{(x - x_i) \prod_{j \neq i} x_i - x_j} \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$f(x) - L_n(x) = f(x; x_1; \dots; x_n) \omega_n(x), \quad \omega_n(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i).$$

Интерполяционный многочлен Лагранжа  $L_n(x)$  можно представить в виде

$$L_n(x) = L_1(x) + (L_2(x) - L_1(x)) + \dots + (L_n(x) - L_{n-1}(x)).$$

Разность  $L_m(x) - L_{m-1}(x)$  есть многочлен степени  $m - 1$ , обращающийся в нуль в точках  $x_1, \dots, x_{m-1}$ . Следовательно,

$$L_m(x) - L_{m-1}(x) = A_{m-1} \omega_{m-1}(x),$$

где  $A_{m-1}$  — некоторая постоянная. Полагая  $x = x_m$ , получаем

$$f(x_m; x_1; \dots; x_{m-1}) \omega_{m-1}(x_m) = f(x_m) - L_{m-1}(x_m) = A_{m-1} \omega_{m-1}(x_m),$$

откуда  $A_{m-1} = f(x_1; \dots; x_m)$ , и

$$L_n(x) = f(x_1) + f(x_1; x_2)(x - x_1) + \dots + f(x_1; \dots; x_n)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}). \quad (2.14)$$

Интерполяционный многочлен, записанный в форме (2.14), называется *интерполяционным многочленом Ньютона с разделенными разностями*.

Из предложения 2.3.1 следует, что

$$f(x; x_1; \dots; x_n) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}. \quad (2.15)$$

С небольшими изменениями можно построить интерполяционный многочлен с разделенными разностями в случае, когда в наборе  $\{x_1, \dots, x_n\}$  допустимы кратные точки (см., например, Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков *Численные методы* // М.: Наука, 2006, Глава 2, §6).

### 2.3.3 Конечные разности

Пусть узлы  $x_i$  расположены на равных расстояниях:  $x_i = x_0 + ih$ . Пусть известны значения  $f_i = f(x_i)$  и  $f_{i+1/2} = f(x_i + h/2)$ .

Разности  $f_{i+1} - f_i$  называются *разностями первого порядка*, причем  $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$  — *разность вперед*,  $\nabla f_{i+1} = f_{i+1} - f_i$  — *разность назад*, то есть

$$f_{i+1} - f_i = \Delta f_i = \nabla f_{i+1} = \delta f_{i+1/2} = f_{i+1/2}^1.$$

Разностями высшего порядка образуются при помощи рекуррентных соотношений

$$\Delta^m f_i = \Delta(\Delta^{m-1} f_i) = \Delta^{m-1} f_{i+1} - \Delta^{m-1} f_i,$$

$$\nabla^m f_i = \nabla(\nabla^{m-1} f_i) = \nabla^{m-1} f_i - \nabla^{m-1} f_{i-1},$$

$$\delta^m f_i = \delta(\delta^{m-1} f_i) = \delta^{m-1} f_{i+1/2} - \delta^{m-1} f_{i-1/2},$$

$$f_i^m = f_{i+1/2}^{m-1} - f_{i-1/2}^{m-1}.$$

**Предложение 2.3.3.** *Справедливо тождество*

$$\Delta^m f_i = \sum_{j=0}^m (-1)^j C_m^j f_{i+m-j}. \quad (2.16)$$

**Предложение 2.3.4.** *Справедливо тождество*

$$f(x_i; \dots; x_{i+m}) = \frac{f_{i+m/2}^m}{h^m \cdot m!}. \quad (2.17)$$

**Задачи.** 1. Доказать (2.16) по индукции.

2. Доказать (2.17) по индукции.

3. С использованием (2.15) доказать, что

$$\Delta^m f_i = \nabla^m f_{i+m} = \delta^m f_{i+m/2} = f_{i+m/2}^m = h^m f^{(m)}(\xi), \quad x_i \leq \xi \leq x_{i+m}.$$

### 2.3.4 Численное дифференцирование

Пусть известны значения функции  $f(x)$  в точках  $x_1, \dots, x_n$  и требуется вычислить производную  $f^{(k)}(x_0)$ . Построим интерполяционный многочлен  $L_n(x)$  и положим  $f^{(k)}(x_0) \approx L_n^{(k)}(x_0)$ .

Рассмотрим другой способ численного дифференцирования, основанный на методе неопределенных коэффициентов. Будем искать приближенное значение  $f^{(k)}(x_0)$  в следующем виде

$$f^{(k)}(x_0) \approx \sum_{i=1}^n c_i f(x_i),$$

где коэффициенты  $c_i$  будем выбирать из условия, чтобы последняя формула была точна для многочленов максимально высокой степени. Для это вместо  $f(x)$  будем подставлять многочлен степени  $m$  с неопределенными коэффициентами  $f(x) = \sum_{j=0}^m a_j x^j$ . В результате получим систему уравнений на неизвестные  $c_1, \dots, c_n$ :

$$j(j-1)\dots(j-k+1)x_0^{j-k} = \sum_{i=1}^n c_i x_i^j, \quad j = 0, \dots, m.$$

Если  $m = n - 1$ , то число уравнений равно числу неизвестных, а определитель системы является определителем Вандермонда, то есть отличен от нуля. Таким образом, всегда можно построит формулу численного дифференцирования с  $n$  узлами, точную для многочленов  $n - 1$  степени. При  $m = n - 1$  и определенном расположении узлов иногда оказывается, что приближенное равенство становится точным и для  $j = n$ . Как правило это будет так в случае, когда узлы расположены симметрично относительно точки  $x_0$ .

**Задачи.** 1. Пусть  $k$  четно. Доказать, что  $c_{n+1-j} = c_j$ ,  $1 \leq j \leq n/2$ . Доказать, что приближенная формула будет точна для любой нечетной функции. В частности, формула будет точна для  $f(x) = x^n$  при нечетном  $n$ , а следовательно, и для любого многочлена степени  $n$ .

2. Пусть  $k$  нечетно. Доказать, что  $c_{n+1-j} = -c_j$ ,  $1 \leq j \leq n/2$ . Доказать, что приближенная формула будет точна для любой четной функции. В частности, формула будет точна для  $f(x) = x^n$  при четном  $n$ , а следовательно, и для любого многочлена степени  $n$ .

Свойства симметрии формул численного дифференцирования используются для уменьшения числа уравнений, которые нужно решить при построении формулы. Для оценки погрешности введем обозначение

$$R_k(f) = f^{(k)}(x_0) - \sum_{i=1}^n c_i f(x_i) \quad (2.18)$$

**Пример 2.3.5.** Построить формулу численного дифференцирования

$$f'(0) \approx c_1 f(-h) + c_2 f(0) + c_3 f(h),$$

точную для многочленов второй степени. Подставляя вместо  $f(x)$  многочлены  $1, x, x^2$ , находим  $c_1 = -\frac{1}{2h}$ ,  $c_2 = 0$ ,  $c_3 = \frac{1}{2h}$ , то есть

$$f'(0) \approx \frac{f(h) - f(-h)}{2h}.$$

Оценим погрешность с помощью формул Тейлора

$$\begin{aligned} f(h) &= f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2}f''(0) + \frac{h^3}{6}f'''(\xi_+), \quad 0 \leq \xi_+ \leq h, \\ f(-h) &= f(0) - hf'(0) + \frac{h^2}{2}f''(0) - \frac{h^3}{6}f'''(\xi_-), \quad -h \leq \xi_- \leq 0. \end{aligned}$$

С учетом обозначений (2.18) имеем

$$R_1(f) = f'(0) - \frac{f(h) - f(-h)}{2h} = -\frac{h^2}{6}\alpha, \quad \alpha = \frac{f'''(\xi_+) + f'''(\xi_-)}{2},$$

причем  $\alpha$  лежит между  $f'''(\xi_+)$  и  $f'''(\xi_-)$ . Следовательно, найдется  $-h \leq \xi \leq h$  такое, что  $R_1(f) = -\frac{h^2}{6}f'''(\xi)$ .

**Пример 2.3.6.** Построить формулу численного дифференцирования

$$f''(0) \approx \frac{c_1 f(-h) + c_2 f(0) + c_3 f(h)}{h^2},$$

точную для многочленов второй степени. Подставляя вместо  $f(x)$  многочлены  $1, x, x^2$ , находим  $c_1 = c_3 = 1, c_2 = -2$ , то есть

$$f''(0) \approx \frac{f(-h) - 2f(0) + f(h)}{h^2},$$

Построенная формула оказывается точной для любого многочлена третьей степени. Аналогично предыдущему примеру находим

$$R_2(f) = f'(0) - \frac{f(-h) - 2f(0) + f(h)}{h^2} = -\frac{h}{6}(f'''(\xi_+) - f'''(\xi_-)).$$

Если  $f(x)$  — многочлен третьей степени, то  $R_2(f) = 0$ . По теореме Лагранжа  $f'''(\xi_+) - f'''(\xi_-) = (\xi_+ - \xi_-)f^{(4)}(\xi)$ ,  $-h \leq \xi_- \leq \xi \leq \xi_+ \leq h$ , следовательно,

$$R_2(f) = -\theta \frac{h^2}{6} f^{(4)}(\xi), \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

### 2.3.5 Формулы численного дифференцирования

Приведем ряд формул численного дифференцирования функций, заданных на сетке с постоянным шагом  $x_n = x_0 + nh$ :

$$\begin{aligned} f'(x_0) &\approx \frac{1}{h} \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{j} f_{j/2}^j, \quad R_1(f) = \frac{(-1)^n}{n+1} f^{(n+1)}(\xi) h^n; \\ f'(x_0) &\approx \frac{1}{h} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} f_{-j/2}^j, \quad R_1(f) = \frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(\xi) h^n. \end{aligned}$$

Это *односторонние* формулы численного дифференцирования. Например,

$$\begin{aligned} n = 1, \quad f'(x_0) &\approx \frac{f_{1/2}^1}{h} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h}; \\ n = 1, \quad f'(x_0) &\approx \frac{f_{-1/2}^1}{h} = \frac{f(x_0) - f(x_{-1})}{h}; \\ n = 2, \quad f'(x_0) &\approx \frac{2f_{1/2}^1 - f_1^2}{2h} = \frac{-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)}{h}; \\ n = 2, \quad f'(x_0) &\approx \frac{2f_{-1/2}^1 - f_{-1}^2}{2h} = \frac{3f(x_0) - 4f(x_{-1}) + f(x_{-2})}{h}. \end{aligned}$$

Примеры *симметричных* формул численного дифференцирования:

$$\begin{aligned} f' \left( x_0 + \frac{h}{2} \right) &\approx \frac{1}{h} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(-1)^j ((1 - 1/2)(2 - 1/2) \dots (j - 1/2))^2}{(2j + 1)!} f_{1/2}^{2j+1}, \\ R_1(f) &= (-1)^n \frac{((1 - 1/2)(2 - 1/2) \dots (n - 1/2))^2}{(2n + 1)!} f^{(2n+1)}(\xi) h^{2n}; \\ n = 1, \quad f' \left( x_0 + \frac{h}{2} \right) &\approx \frac{f_{1/2}^1}{h} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h}; \\ n = 2, \quad f' \left( \frac{h}{2} \right) &\approx \frac{24f_{1/2}^1 - f_{1/2}^3}{24h} = \frac{f(-h) - 27f(0) + 27f(h) - f(2h)}{24h}. \end{aligned}$$

Примеры формул численного дифференцирования *для второй производной*:

$$\begin{aligned} f''(x_0) &\approx \frac{1}{h^2} \sum_{j=1}^n \frac{2(-1)^{j-1} ((j - 1)!)^2}{(2j)!} f_0^{2j}, \\ R_2(f) &= (-1)^n \frac{2(n!)^2}{(2n + 2)!} f^{(2n+2)}(\xi) h^{2n}; \\ n = 1, \quad f''(0) &\approx \frac{f_0^2}{h^2} = \frac{f(-h) - 2f(0) + f(h)}{h^2}; \\ n = 2, \quad f''(0) &\approx \frac{12f_0^2 - f_0^4}{12h^2} = \frac{-f(-2h) + 16f(-h) - 30f(0) + 16f(h) - f(2h)}{12h^2}. \end{aligned}$$

Для *высших производных* наиболее употребительными являются

$$\begin{aligned} f^{(k)}(0) &\approx \frac{f_{k/2}^k}{h^k}, \quad f^{(k)}(0) \approx \frac{f_{-k/2}^k}{h^k}, \quad R_k(f) = O(h), \\ f^{(2k)}(0) &\approx \frac{f_0^{2k}}{h^{2k}}, \quad R_{2k}(f) = O(h^2), \quad f^{(2k+1)}(0) \approx \frac{f_{-1/2}^{2k+1} + f_{1/2}^{2k+1}}{2h^{2k+1}}, \quad R_{2k+1}(f) = O(h^2). \end{aligned}$$

**Задачи.** 1. Проверить все указанные выше формулы численного дифференцирования и соответствующие оценки погрешностей.



## 2.4 Сеточные методы решения параболических уравнений в частных производных

### 2.4.1 Разностные схемы для одномерного параболического уравнения

Требуется найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся решением уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (2.19)$$

в области  $Q = [0, X] \times [0, T]$  с начальными краевыми условиями

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(X, t) = \mu_2(t).$$

Всюду далее будем считать, что функции  $f$ ,  $\mu_i$ ,  $u_0$  таковы, что существует достаточно гладкое решение сформулированной задачи.

Разобьем область  $Q$  прямоугольной сеткой с шагами  $h = X/M$  и  $\tau = T/N$  соответственно по координатам  $x$  и  $t$ . Будем искать функцию  $\tilde{u}(mh, n\tau) = u_m^n$ , определенную в узлах  $(m, n)$  сетки  $Q_{h,\tau} = \{(mh, n\tau) : 0 \leq m \leq M, 0 \leq n \leq N\}$ , которая является приближением неизвестной функции  $u(x, t)$ .

В качестве разностной схемы рассмотрим две аппроксимации исходной задачи (2.19):

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2} + \phi_m^n, \quad m = 1, \dots, M-1, \quad n = 0, 1, \dots, N-1; \quad (2.20)$$

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{u_{m-1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m+1}^{n+1}}{h^2} + \phi_m^{n+1}, \quad m = 1, \dots, M-1, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.21)$$

где функция  $\phi(x, t)$  является аппроксимацией функции  $f(x, t)$  с соответствующими значениями в узлах сетки  $\phi_m^n = \phi(mh, n\tau)$ . Начальные и граничные условия аппроксимируем следующим образом:

$$u_m^0 = u_0(mh), \quad u_0^n = \mu_1(nh), \quad u_M^n = \mu_2(n\tau). \quad (2.22)$$

Найдем порядок погрешности аппроксимации разностной схемы (2.20), (2.22). Для этого, записывая разложение по формуле Тейлора

$$\begin{aligned} \frac{u(x, n\tau + \tau) - u(x, n\tau)}{\tau} &= \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{(x, n\tau)} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{(x, n\tau + \xi)}, \quad 0 \leq \xi \leq \tau, \\ \frac{u((m-1)h, t) - 2u(mh, t) + u((m+1)h, t)}{h^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{(mh, t)} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{(mh + \eta, t)}, \quad 0 \leq \eta \leq h, \end{aligned}$$

получим для задачи (2.19) равенство

$$\begin{aligned} & \frac{u(x, t + \tau) - u(x, t)}{\tau} - \frac{u(x - h, t) - 2u(x, t) + u(x + h, t))}{h^2} - \phi(x, t) = \\ & = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{(x, t+\xi)} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{(x+\eta, t)} - \phi(x, t) = f(x, t) - \phi(x, t) + O(h^2 + \tau). \end{aligned}$$

Если  $\phi_m^n = f(mh, n\tau)$ , то порядок аппроксимации погрешности разностной схемы (2.20), (2.22) равен  $O(h^2 + \tau)$ . Аналогичным образом устанавливается, что порядок аппроксимации погрешности разностной схемы (2.21), (2.22) тоже равен  $O(h^2 + \tau)$ .

Между схемами (2.20), (2.22) и (2.21), (2.22) есть принципиальная разница, суть которой изложена далее.

Из (2.20) имеем

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \frac{\tau}{h^2}(u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n) + \tau\phi_m^n, \quad u_0^m - \text{известно.} \quad (2.23)$$

Таким образом, очередное значение  $u_{n+1}^m$  находится явным образом по уже известным значениям. Такая схема называется *явной*.

Из (2.21) имеем

$$\begin{aligned} & -\frac{\tau}{h^2}u_{m-1}^{n+1} + \left(1 + \frac{2\tau}{h^2}\right)u_m^{n+1} - \frac{\tau}{h^2}u_{m+1}^{n+1} = u_m^n + \tau\phi_m^{n+1}, \quad m = 1, \dots, M-1, \\ & u_0^{n+1} = \mu_1^{n+1} = \mu_1((n+1)\tau), \quad u_M^{n+1} = \mu_2^{n+1} = \mu_2((n+1)\tau). \end{aligned} \quad (2.24)$$

При известных значениях  $u_m^n$ ,  $m = 1, \dots, M-1$ , соотношения (2.24) представляют собой систему линейных уравнений относительно неизвестных  $u_m^{n+1}$ ,  $m = 1, \dots, M-1$ .

Такая схема называется *неявной*.

Система уравнений (2.24) может быть записана в матричном виде  $A\bar{u}^{n+1} = \bar{b}^n$ , где

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{2\tau}{h^2} & -\frac{\tau}{h^2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{\tau}{h^2} & 1 + \frac{2\tau}{h^2} & -\frac{\tau}{h^2} & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{\tau}{h^2} & 1 + \frac{2\tau}{h^2} \end{pmatrix}, \quad \bar{u}^{n+1} = \begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \dots \\ u_{M-1}^{n+1} \end{pmatrix}, \\ b_k^n &= \begin{cases} u_1^n + \tau\phi_1^{n+1} + \frac{\tau}{h^2}\mu_1((n+1)\tau), & k = 1, \\ u_k^n + \tau\phi_k^{n+1}, & 2 \leq k \leq M-2, \\ u_{M-1}^n + \tau\phi_{M-1}^{n+1} + \frac{\tau}{h^2}\mu_2((n+1)\tau), & k = M-1. \end{cases} \end{aligned}$$

Для решения этой системы можно воспользоваться, например, *методом прогонки*, или *методом стрельбы* (см. §§2.5.1, 2.5.2).

## 2.4.2 Анализ устойчивости

Множество узлов  $\{(m, n) | m = 0, \dots, M\}$  назовем  $n$ -ым слоем. Обозначим  $u^n$  — сужение функции  $u^h$  на  $n$ -ый слой, а  $\phi^n$  — сужение правой части  $\phi^h$  на внутренние узлы  $n$ -го слоя. Введем нормы на слое

$$\|u^n\| = \max_{0 \leq m \leq M} |u_m^n|, \quad \|\phi^n\| = \max_{0 < m < M} |\phi_m^n|.$$

Разностную схему будем называть *устойчивой в сеточной норме пространства  $C$* , если существует постоянная  $c_1$ , не зависящая от шагов сетки  $h$  и  $\tau$ , такая, что имеет место оценка

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|u^n\| \leq c_1 \left( \max_{0 \leq n \leq N} \|\phi^n\| + \max \left\{ \max_{0 \leq n \leq N} |\mu_1^n|, \max_{0 \leq n \leq N} |\mu_2^n|, \|u^0\| \right\} \right). \quad (2.25)$$

**Теорема 2.4.1.** Пусть  $\tau \leq h^2/2$ . Тогда явная разностная схема (2.20), (2.22) устойчива в сеточной норме пространства  $C$ .

*Доказательство.* Обозначим  $\rho = \tau/h^2$ . Если  $\max_m |u_m^{n+1}|$  достигается во внутренней точке, то

$$\begin{aligned} \max_m |u_m^{n+1}| &= \max \left| (1 - 2\rho)u_m^n + \rho u_{m-1}^n + \rho u_{m+1}^n + \tau \phi_m^n \right| \leq \\ &= (1 - 2\rho)\|u^n\| + 2\rho\|u^n\| + \tau\|\phi^n\| = \|u^n\| + \tau\|\phi^n\|. \end{aligned}$$

В противном случае

$$\max_m |u_m^{n+1}| \leq \max (|\mu_1^{n+1}|, |\mu_2^{n+1}|).$$

Следовательно,

$$\|u^{n+1}\| \leq \max (|\mu_1^{n+1}|, |\mu_2^{n+1}|, \|u^n\| + \tau\|\phi^n\|).$$

Представим теперь решение задачи (2.20), (2.22) в виде  $u^h = y^h + v^h$ , где  $y^h$  — решение задачи (2.20), (2.22) с правой частью  $\phi^h = 0$ ,  $v^h$  — решение задачи (2.20), (2.22) с однородными граничными и начальными условиями. Имеем

$$\begin{aligned} \|y^{n+1}\| &\leq \max \left( \max_{0 \leq k \leq N} |\mu_1^k|, \max_{0 \leq k \leq N} |\mu_2^k|, \|y^n\| \right) \leq \dots \leq \\ &\leq \max \left( \max_{0 \leq k \leq N} |\mu_1^k|, \max_{0 \leq k \leq N} |\mu_2^k|, \|u^0\| \right); \\ \|v^{n+1}\| &\leq \|v^n\| + \tau\|\phi^n\| \leq \dots \leq \sum_{k=0}^n \tau\|\phi^k\| \leq T \max_{0 \leq k \leq N} \|\phi^k\|. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\|u^n\| \leq \|y^n\| + \|v^n\| \leq \max \left( \max_{0 \leq k \leq N} |\mu_1^k|, \max_{0 \leq k \leq N} |\mu_2^k|, \|u^0\| \right) + T \max_{0 \leq k \leq N} \|\phi^k\|.$$

Так как это неравенство справедливо при любом  $n$ ,  $0 \leq n \leq N$ , то это и означает устойчивость разностной схемы в сеточной норме пространства  $C$ .  $\square$

Если отношение  $\tau/h^2 = \kappa$  — постоянно, то условие  $\kappa \leq 1/2$  является необходимым и достаточным условием устойчивости.

**Задачи.** 1. Пусть  $\lim_{h,\tau \rightarrow 0} \frac{\tau/h^2 - 1/2}{\tau} = \infty$ . Доказать, что схема (2.20), (2.22) не устойчива.

*Указание.* Рассмотреть частные решения  $u_m^n = \lambda_q^n \sin \frac{\pi m h}{X} q$ .

Разностные схемы, которые обладают устойчивостью лишь при определенных соотношениях на шаги сетки, называются *условно устойчивыми*. Если же схема устойчива при любых соотношениях между шагами сетки, то такая схема называется *безусловно устойчивой*. Покажем, что схема (2.21), (2.22) относится к классу безусловно устойчивых.

**Теорема 2.4.2.** При любых  $h$  и  $\tau$  для решения задачи (2.21), (2.22) справедливы оценки (2.25).

*Доказательство.* Преобразуем (2.21) к виду

$$u_m^{n+1} + \rho(-u_{m-1}^{n+1} + 2u_m^{n+1} - u_{m+1}^{n+1}) = u_m^n + \tau \phi_m^{n+1}, \quad 1 \leq m \leq M-1.$$

Из всех значений  $u_m^{n+1}$ , по модулю равных  $\|u^{n+1}\|$ , возьмем то, у которого индекс  $m$  принимает наименьшее значение. Если  $m = 0$  или же  $m = M$ , то (2.25) выполнено. Пусть  $m$  отлично от 0 и  $M$ . Поскольку по определению числа  $m$  справедливо  $|u_m^{n+1}| > |u_{m-1}^{n+1}|$  и  $|u_m^{n+1}| \geq |u_{m+1}^{n+1}|$ , то  $|2u_m^{n+1}| > |u_{m-1}^{n+1}| + |u_{m+1}^{n+1}|$ . Значит,  $\text{sign}(2u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1} - u_{m+1}^{n+1}) = \text{sign} 2u_m^{n+1}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \|u^{n+1}\| &= |u_m^{n+1}| \leq |u_m^{n+1} + \rho(2u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1} - u_{m+1}^{n+1})| = \\ &= |u_m^n + \tau \phi_m^{n+1}| \leq \|u^n\| + \tau \|\phi_m^{n+1}\|, \end{aligned}$$

то есть для любых  $h$  и  $\tau$  выполнена оценка (2.25). Завершение доказательства совпадает с предыдущей теоремой.  $\square$

Таким образом, схема (2.21), (2.22) является безусловно устойчивой.

В неявной схеме при малом шаге по  $h$  для устойчивости необходимо брать  $\tau \leq h^2/2$ , что приводит к увеличению времени компьютерных расчетов. В неявной схеме в одномерном случае метод прогонки дает сложность  $O(M)$  на один слой, что совпадает с явной схемой.

### 2.4.3 Схемы с весами

Обозначим

$$\Lambda u_m = \frac{u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}}{h^2},$$

и рассмотрим *схему с весами* при  $0 \leq \delta \leq 1$ :

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \sigma \Lambda u_m^{n+1} + (1 - \sigma) \Lambda u_m^n + \phi_m^n, \quad m = 1, \dots, M - 1. \quad (2.26)$$

При  $\sigma = 0$  получается явная схема, а при  $\sigma = 1$  получается чисто неявная схема, рассмотренные в предыдущем параграфе.

Используя разложение в ряд Тейлора в точке  $(x, t + \tau/2) = (mh, n\tau + \tau/2)$ , имеем

$$\begin{aligned} \frac{u(x, t + \tau) - u(x, t)}{\tau} &= \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{(x, t+\tau/2)} + \frac{\tau^2}{24} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \Big|_{(x, t+\xi)}, \\ \Lambda u|_{(x, t+\tau/2 \pm \tau/2)} &= \Lambda u|_{(x, t+\tau/2)} \pm \frac{\tau}{2} \Lambda \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{(x, t+\tau/2)} + O(\tau^2) = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{(x, t+\tau/2)} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{(x, t+\tau/2)} \pm \frac{\tau}{2} \Lambda \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{(x, t+\tau/2)} + O(\tau^2 + h^4). \end{aligned}$$

Отсюда получаем оценку погрешности

$$\begin{aligned} r_m^n &= L_{h,\tau}^\sigma - \phi_m^n|_{m,n} = \\ &= f(x, t + \tau/2) - \phi_m^n + \tau(\sigma - 1/2) \Lambda \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{(x, t+\tau/2)} + O(\tau^2 + h^2). \end{aligned}$$

Таким образом, если  $\phi_m^n = f(x, t + \tau/2)$ , то погрешность оценивается как  $O(h^2 + \tau)$  при  $\sigma \neq 1/2$  и как  $O(h^2 + \tau^2)$  при  $\sigma = 1/2$ .

При  $\sigma = 1/2$  получаем *схему Кранка-Николсон*, она является абсолютно устойчивой (см. ниже) и имеет второй порядок точности как по пространственной переменной, так и по времени. Так как эта схема неявная, то для решения соответствующей трехдиагональной системы можно применять, например, метод прогонки (см. ниже).

### 2.4.4 Анализ устойчивости схемы с весами в норме $L_{2,h}$

Исследуем устойчивость схемы с весами по начальным данным, то есть “чувствительность” решения к возмущению начальных данных. Здесь будем считать, что  $\mu_k(t) = 0$ ,  $\phi^k = 0$ .

Обозначим

$$\|u^n\|_{L_{2,h}} = \left( \sum_{m=1}^{M-1} h(u_m^n)^2 \right)^{1/2}.$$

Назовем разностную схему *устойчивой по начальным данным в норме  $L_{2,h}$* , если существует постоянная  $c_1$ , не зависящая от шагов сетки  $h$  и  $\tau$ , такая, что для решения  $u^h$  задачи (2.26), (2.22) с условиями  $\mu_1 = \mu_2 = \phi_h = 0$ , справедлива оценка

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|u^n\|_{L_{2,h}} \leq c_1 \|u^0\|_{L_{2,h}}. \quad (2.27)$$

В теории разностных схем установилась традиция, когда не делают различия между матрицей и порождаемым ею линейным оператором.

Запишем (2.26) в виде  $u^{n+1} = Su^n$  при  $\mu_1 = \mu_2 = \phi_h = 0$ . Матрица  $S$  называется *матрицей перехода* от слоя к слою. Пусть  $\{\lambda_i\}$ ,  $i = 1, \dots, M-1$  — собственные числа матрицы  $S$ . Матрица  $S$  симметрична, поэтому  $\|S\|_2 = \max_i |\lambda_i|$ . Функция  $u_m^0$  может быть представлена в виде дискретной суммы Фурье

$$u_m^0 = \sum_{k=1}^{M-1} c_k \sin \frac{\pi kmh}{X}.$$

Из равенств

$$\Lambda \sin \frac{\pi kmh}{X} = -\nu_k \frac{\pi kmh}{X}, \quad \nu_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi kh}{2}$$

следует, что числа  $-\nu_k$  являются собственными значениями оператора  $\Lambda$ . Из (2.26) получаем

$$(E - \sigma\tau\Lambda)u^1 = (E + \tau(1 - \sigma)\Lambda)u^0, \\ S = (E - \sigma\tau\Lambda)^{-1}(E + \tau(1 - \sigma)\Lambda).$$

Поэтому

$$u_m^1 = S \left( \sum_{k=1}^{M-1} c_k \sin \frac{\pi kmh}{X} \right) = \sum_{k=1}^{M-1} \frac{1 - \tau(1 - \sigma)\nu_k}{1 + \tau\sigma\nu_k} c_k \sin \frac{\pi kmh}{X}.$$

Таким образом, собственные числа  $\lambda_k$  матрицы  $S$  имеют вид

$$\lambda_k = \frac{1 - \tau(1 - \sigma)\nu_k}{1 + \tau\sigma\nu_k}.$$

Выясним, когда выполнено условие  $|\lambda_k| \leq 1$ , что равносильно неравенствам

$$-1 - \tau\sigma\nu_k \leq 1 + \tau\sigma\nu_k = \tau\nu_k \leq 1 + \tau\sigma\nu_k.$$

Правое неравенство выполнено всегда, а левое — при  $\tau(1 - 2\sigma)\nu_k \leq 2$ . При  $\sigma \geq 1/2$  последнее неравенство выполнено при любых  $\tau > 0$ , а при  $\sigma < 1/2$  — при

$$\tau \leq \frac{X^2 h^2}{2(1 - 2\sigma)} \leq \frac{2}{(1 - 2\sigma) \max_k \nu_k} \leq \frac{h^2}{2(1 - 2\sigma)}. \quad (2.28)$$

Таким образом, нами получены достаточные условия устойчивости схемы (2.26), (2.22) по начальным данным. А именно, если  $\mu_1 = \mu_2 = \phi_h = 0$ , то при  $\sigma \geq 1/2$  схема безусловно устойчива, а при  $\sigma < 1/2$  схема условно устойчива, то есть устойчива только, если шаги  $h$  и  $\tau$  связаны соотношением (2.28).

Отметим, что такой метод исследования устойчивости неприменим, если бы в исходной задаче были непостоянные коэффициенты или более сложные граничные условия. В таких ситуациях используют более общий метод — *энергетический*, с которым можно ознакомиться, например, в §5.5 Главы 10 Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков *Численные методы* // М.: Наука, 2006.

**Задачи.** 1. При каких соотношениях  $\tau$  и  $h$  схема

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}$$

имеет порядок  $O(\tau^2 + h^4)$ ?

2. Определить порядок аппроксимации на решении схемы

$$\begin{aligned} & \frac{1}{12} \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m+1}^n}{\tau} + \frac{5}{6} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{1}{12} \frac{u_{m-1}^{n+1} - u_{m-1}^n}{\tau} = \\ & = \frac{1}{2} \left( \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} \right). \end{aligned}$$

3. Исследовать устойчивость схемы в равномерной норме

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\tau} = \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}, \quad 1 \leq m \leq M-1, \quad u_0^n = u_M^n = 0, \quad n \geq 0.$$

4. Однородное уравнение теплопроводности  $u_t = u_{xx}$  аппроксимируется схемой Дюфорта-Франкела (схема “ромб”)

$$\begin{aligned} & \frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\tau} = \frac{u_{m+1}^n - u_m^{n-1} - u_m^{n+1} + u_{m-1}^n}{h^2}, \\ & 1 \leq m \leq M-1, \quad u_0^n = u_M^n = 0, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Выяснить условия ее устойчивости по начальным данным в норме  $L_{2,h}$  и показать, что если  $h \rightarrow 0$ ,  $\tau \rightarrow 0$  так, что  $\tau/h = r \neq 0$ , то эта схема аппроксимирует гиперболическое уравнение  $u_t + r^2 u_{tt} = u_{xx}$ .

5. Исследовать устойчивость разностной схемы в норме  $L_{2,h}$

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\tau} = \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}, \quad 1 \leq m \leq M-1, \quad u_0^n = u_M^n = 0, \quad n \geq 1.$$

- 2.4.5 Метод конечных разностей для уравнения конвекции-диффузии
- 2.4.6 Метод конечных элементов для уравнения конвекции-диффузии



## 2.5 Методы решения разностных схем

### 2.5.1 Метод прогонки

Пусть дана трехдиагональная система линейных уравнений  $Ax = b$ , где  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  — числа на диагонали,  $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$  — числа над диагональю,  $\gamma_2, \dots, \gamma_n$  — числа под диагональю. Будем искать решение в виде рекуррентного соотношения  $x_{i-1} = A_i x_i + B_i$ . Здесь числа  $A_i, B_i$  называются *прогоночными коэффициентами*. Найдем формулы для  $A_i, B_i$ . Запишем систему

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 = b_1, \\ \dots \gamma_i x_{i-1} + \alpha_i x_i + \beta_i x_{i+1} = b_i, \dots \gamma_n x_{n-1} + \alpha_n x_n = b_n. \end{cases}$$

Перепишем общее уравнение через прогоночные коэффициенты

$$\gamma_i(A_i x_i + B_i) + \alpha_i x_i + \beta_i x_{i+1} = b_i.$$

В этом уравнении зависимость двух переменных  $x_i$  и  $x_{i+1}$ , что позволяет выразить

$$x_i = -\frac{\beta_i}{\gamma_i A_i + \alpha_i} x_{i+1} + \frac{b_i - \gamma_i B_i}{\gamma_i A_i + \alpha_i} = A_{i+1} x_{i+1} + B_{i+1}.$$

Таким образом, определяем новые прогоночные коэффициенты  $A_{i+1}, B_{i+1}$ .

Теперь перейдем непосредственно к описанию процедуры решения системы. Положим  $A_2 = -\frac{\beta_1}{\alpha_1}$ ,  $B_2 = \frac{b_1}{\alpha_1}$ . Вычислим последовательно остальные прогоночные коэффициенты (прямой ход прогонки):

$$A_{i+1} = -\frac{\beta_i}{\gamma_i A_i + \alpha_i}, \quad B_{i+1} = \frac{b_i - \gamma_i B_i}{\gamma_i A_i + \alpha_i}, \quad i = 2, \dots, n-1.$$

Составим систему на последние две переменные  $x_{n-1}, x_n$ :

$$\begin{cases} x_{n-1} = A_n x_n + B_n, \\ \gamma_n x_{n-1} + \alpha_n x_n = b_n, \end{cases}$$

откуда

$$x_n = -\frac{B_n - b_n/\gamma_n}{A_n + \alpha_n/\gamma_n}.$$

Остальные переменные вычисляем по формуле  $x_{i-1} = A_i x_i + B_i$  (обратный ход прогонки).

Сложность метода прогонки  $O(n)$ , или более точно, требуется  $8n$  операций.

Остается обосновать корректность метода.

**Предложение 2.5.1.** Пусть  $\alpha_1 = \alpha_n = 1$  (этого всегда можно добиться, если это не так изначально). Пусть имеется диагональное преобладание  $|\alpha_i| \geq |\gamma_i| + |\beta_i|$ , причем  $\gamma_i, \beta_i \neq 0$ . Пусть  $|\beta_1| + |\gamma_n| < 2$ . Тогда в алгоритме не возникает деления на ноль, и  $|A_i| < 1$ , то есть погрешности не будут расти.

*Доказательство.* Докажем по индукции. База:  $|A_2| = |\beta_1/\alpha_1|$ . Пусть доказано, что  $|A_i| \leq 1$ . Тогда

$$|A_i\gamma_i + \alpha_i| - |\beta_i| \geq |\alpha_i| - |A_i| \cdot |\gamma_i| - |\beta_i| \geq |\gamma_i|(1 - |A_i|) \geq 0.$$

Значит, знаменатель дробей не меньше числителя (по модулю), и потому дробь меньше 1.

Далее рассмотрим два случая.

1. Если  $|\beta_1| \leq 1$ , то  $|A_2| < 1$ , а потому предыдущее неравенство строгое, и все  $|A_i| < 1$ . Если  $|\beta_1| \geq 1$ , то по условию  $|\gamma_n| < 1$ . Поэтому  $\alpha_n/\gamma_n + A_n \neq 0$ .

2. Если  $|\beta_1| \geq 1$ , то по условию  $|\gamma_n| < 1$ . Опять неравенство строгое, и  $|\alpha_n/\gamma_n| < 1$ , а потому  $\alpha_n/\gamma_n + A_n \neq 0$ .  $\square$

## 2.5.2 Метод стрельбы

Обозначим  $\delta^2(z) = z_{n+1} - 2z_n + z_{n-1}$ . Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} \Delta y - py - f, \\ y(0) = a, y(X) = b. \end{cases}$$

*Метод стрельбы* заключается в следующем. Строим обычную разностную схему для исходного уравнения и для однородного уравнения (когда  $f = 0$ ), а именно

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 y}{h^2} - p_n y_n &= f_n, \\ \frac{\delta^2 z}{h^2} - p_n z_n &= 0. \end{aligned}$$

Зададим краевые условия:  $y_0 = a$ ,  $z_0 = 0$ . Зададим произвольным образом значение во втором узле:  $y_1 = q$ ,  $z_1 = r \neq 0$ . Из разностных уравнений, написанных выше, найдем все остальные  $y_i, z_i$ . Естественно ожидать, что краевое условие для  $y$  будет нарушено. Тогда по общей теории дифференциальных уравнений можно найти константу  $C$  из уравнения  $y_N + Cz_N = b$ . После этого лишь остается вычислить верное приближенное решение по формуле  $\tilde{y}_n = y_n + Cz_n$ .

В качестве произвольного задания значения во втором узле  $y_1, z_1$  рекомендуется выбирать  $y_1 = a + O(h), z_1 = b + O(h)$ .

### 2.5.3 Повышение порядков аппроксимации

Рассмотрим пример

$$\begin{cases} y'' - py - f, \\ y(0) = a, y(X) = b. \end{cases}$$

Легко видеть, что простейшая схема аппроксимации этой задачи, рассмотренная в предыдущем параграфе, имеет второй порядок. Построим схему 4-го порядка.

Имеем

$$y''(x_n) = \frac{\delta^2 y(x_n)}{h^2} + \frac{y^{(4)}(x_n)}{12} h^2 + O(h^4).$$

С другой стороны

$$y^{(4)}(x_n) = (p(x_n)y(x_n) + f(x_n))'' = \frac{\delta^2(p(x_n)y(x_n) + f(x_n))}{h^2} + O(h^2).$$

Отсюда

$$\frac{\delta^2 y_n}{h^2} - p_n y_n - \frac{1}{12} \delta^2 (p_n y_n + f_n) = f_n.$$

**Задачи.** Доказать, что полученная схема имеет 4-ый порядок точности.

Отметим, что матрица коэффициентов для полученной схемы имеет также трех-диагональный вид, поэтому сложность решения не увеличилась.

## 2.6 Приложение сеточных численных методов к финансовой математике

### 2.6.1 Дифференциальное уравнение Блэка-Шоулза

Обозначим payoff европейского опциона за  $V(S, T)$ , где  $S(t)$  — стоимость базового актива опциона,  $T$  — время экспирации. Например, для call опциона  $V(S, T) = (S - K)_+$ , для put опциона  $V(S, T) = (K - S)_+$ .

Классическая модель описывается *линейным дифференциальным уравнением Блэка-Шоулза* на payoff  $V(S, T)$  европейского опциона

$$V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S - rV = 0, \quad t \in (0, T), \quad (2.29)$$

в предположении следующих условий:

- цена базового актива опциона (или производного инструмента)  $S = S(t) > 0$  следует геометрическому броуновскому движению, то есть удовлетворяет следующему стохастическому дифференциальному уравнению:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t); \quad (2.30)$$

- тренд  $\mu$  (который отвечает за среднюю скорость роста цены актива), волатильность  $\sigma$  (которая отвечает за величину стандартного отклонения доходности) и безрисковая процентная ставка  $r$  постоянны при  $0 \leq t \leq T$ , а также дивиденды в этот промежуток времени не выплачиваются;
- на рынке нет “трений”, то есть отсутствуют транзакционные издержки (комиссии и налоги), процентные ставки по займам и кредитам равны, все стороны имеют немедленный доступ к любой информации, а все ценные бумаги и кредиты доступны в любое время и в любом количестве (в том числе это означает, что все переменные абсолютно делимы и могут принимать любые вещественные значения);
- отсутствуют возможности арбитража (то есть моментального получения безрисковой прибыли) и индивидуальная торговля не оказывает существенного влияния на рынок.

При таких условиях рынок является полным, а это означает, что любой актив может быть воспроизведен портфелем других активов на рынке.

Мы рассмотрим несколько моделей с непостоянной волатильностью  $\tilde{\sigma}^2 = \tilde{\sigma}^2(t, S, V_S, V_{SS})$ , для которых справедливо *нелинейное дифференциальное уравнение Блэка-Шоулза*

$$V_t + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2(t, S, V_S, V_{SS})S^2V_{SS} + rSV_S - rV = 0, \quad t \in (0, T). \quad (2.31)$$

Для америакнского call опциона в случае, когда волатильность постоянна и дивиденды не выплачиваются, payoff совпадает с европейским call опционом. В случае, когда для американского call опциона волатильность непостоянна и выплачиваются дивиденды в размере  $qSdt$  за временной шаг  $dt$  (величина  $q$  постоянна), payoff описывается дифференциальным уравнением

$$V_t + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2(t, S, V_S, V_{SS})S^2V_{SS} + (r - q)SV_S - rV = 0, \quad t \in (0, T). \quad (2.32)$$

## 2.6.2 Модели волатильности с транзакционными издержками

1. *Модель Leland* имеет вид

$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2(1 + \text{Le} \cdot \text{sign}(V_{SS})), \quad (2.33)$$

где *число Leland*

$$\text{Le} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\kappa}{\sigma\sqrt{\delta t}}$$

зависит от частоты транзакций  $\delta t$  (интервал между последовательными ревизиями портфеля), и  $\kappa$  — величины транзакционных издержек “туда и обратно” на единицу денег. Известно, что для европейского call и put опционов без транзакционных издержек  $V_{SS} > 0$ , поэтому предполагая, что это же неравенство выполнено и при наличии транзакционных издержек, уравнение (2.31) становится линейным с скорректированной постоянной волатильностью  $\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2(1 + \text{Le}) \geq \sigma^2$ .

2. *Модель Barles and Soner* при  $\kappa, \varepsilon \rightarrow 0$  имеет вид

$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 \left( 1 + \Psi(e^{r(T-t)} a^2 S^2 V_{SS}) \right), \quad (2.34)$$

где  $a = \kappa/\sqrt{\varepsilon}$  и  $\Psi(x)$  — решение следующего нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения

$$\Psi'(x) = \frac{\Psi(x) + 1}{2\sqrt{x\Psi(x) - x}}, \quad x \neq 0,$$

с начальным условием  $\Psi(0) = 0$ . Справедливы соотношения

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Psi(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \Psi(x) = -1,$$

откуда при больших значениях аргумента функции  $\Psi$  можно считать, что

$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 (1 + e^{r(T-t)} a^2 S^2 V_{SS}).$$

**3. Модель RAPM** (Risk Ajusted Pricing Methodology) имеет вид

$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 \left( 1 + 3 \left( \frac{C^2 M}{2\pi} S V_{SS} \right)^{1/3} \right), \quad (2.35)$$

где  $M \geq 0$  — мера транзакционных издержек,  $C$  — мера премии на риск.

### 2.6.3 Граничные условия

Мы будем рассматривать уравнения (2.29) и (2.31) с каждым из значений  $\tilde{\sigma}^2$ , заданным в (2.33), (2.34), (2.35).

**1.** Для европейского call опциона будем решать задачу (2.31) в области  $0 \leq S < \infty$ ,  $0 \leq t \leq T$  со следующими граничными условиями

$$\begin{cases} V(S, T) = (S(T) - K)_+, & 0 \leq S \leq \infty, \\ V(0, t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \\ V(S, t) \sim S - Ke^{-r(T-t)}, & S \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (2.36)$$

Поясним, откуда следует граничное условие  $V(S, t) \sim S - Ke^{-r(T-t)}$ , при  $S \rightarrow \infty$ . Для справедливой цены европейского call опциона  $V(t)$  при  $\mu = r$  справедлива формула

$$V(t) = M(V(T) | S(t)) e^{-r(T-t)}, \quad (2.37)$$

где payoff  $V(T) = (S(T) - K)_+$ . Из (2.30) следует, что

$$S(T) = S(t) \exp \{ (\mu - \sigma^2/2)(T-t) + \sigma(W(T) - W(t)) \},$$

значит (2.37) можно записать в следующем виде

$$V(t) = e^{-r(T-t)} M \left( S(t) \exp \{ (\mu - \sigma^2/2)(T-t) + \sigma(W(T) - W(t)) \} - K \right)_+.$$

При  $S(t) \rightarrow \infty$  можно считать, что  $S(T) - K$  почти всегда положительно, поэтому

$$V(t) \sim S - Ke^{-r(T-t)}.$$

**2.** Для американского call опциона область будет разделена свободной границей  $S_f(t)$  на две области: *область остановки*  $S_f(t) \leq S \leq \infty$ ,  $0 \leq t \leq T$ , где стоимость опциона вычисляется как  $V(S, t) = S - K$ , и *область продолжения*  $0 \leq S \leq S_f(t)$ ,

$0 \leq t \leq T$ , где опцион продолжает существование. Тогда граничные условия задачи (2.32) при волатильности (2.33), (2.34) или (2.35) имеют вид

$$\begin{cases} V(S, T) = (S(T) - K)_+, & 0 \leq S \leq S_f(T), \\ V(0, t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \\ V(S_f(t), t) = S_f(t) - K, & 0 \leq t \leq T, \\ V_S(S_f(t), t) = 1, & 0 \leq t \leq T, \\ S_f(T) = \max(K, rK/q). \end{cases} \quad (2.38)$$

#### 2.6.4 Замена переменных для европейского call опциона

Прежде, чем применять численные методы, упростим задачу (2.31) с граничными условиями (2.36) с помощью замены переменных

$$x = \ln \left( \frac{S}{K} \right), \quad \tau = \frac{1}{2} \sigma^2 (T - t), \quad u(x, \tau) = e^{-x} \frac{V(S, t)}{K}.$$

Тогда (2.31) примет вид

$$u_\tau - \frac{\tilde{\sigma}^2}{\sigma^2} (u_{xx} + u_x) - D u_x = 0, \quad D = 2r/\sigma^2, \quad (2.39)$$

в области  $x \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq \tau \leq \tilde{T} = \sigma^2 T/2$  с граничными условиями

$$\begin{cases} u(x, 0) = (1 - e^{-x})_+, & x \in \mathbb{R}, \\ u(x, \tau) = 0, & x \rightarrow -\infty, \\ u(x, \tau) \sim 1 - e^{-D\tau - x}, & x \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (2.40)$$

Значение цены опциона в новых переменных выражается следующим образом:

$$V(S, t) = S u(x, \tau) = S u \left( \ln \left( \frac{S}{K} \right), \frac{\sigma^2}{2} (T - t) \right). \quad (2.41)$$

**Задачи.** 1. Явно вывести (2.39) из (2.31).

2. Найти выражения для моделей волатильности (2.33), (2.34) и (2.35) в новых переменных.

3. Явно вывести (2.40) из (2.36).

4. Доказать (2.41).

### 2.6.5 Замена переменных для американского call опциона

Целью преобразования задачи (2.32) со свободной границей  $S_f(t)$  является минимизация погрешности, возникающей из-за разрыва  $V_{SS}$ . Сделаем замену переменных

$$x = \ln \left( \frac{\zeta(\tau)}{S} \right), \quad \zeta(\tau) = S_f(T - \tau), \quad \tau = T - t, \quad v(x, \tau) = V(S, t) - SV_S(S, t).$$

Тогда (2.32) примет вид

$$v_\tau + \left( \frac{\zeta'(\tau)}{\zeta(\tau)} + r - q - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \right) v_x - \frac{1}{2} \partial_x (\sigma^2 v_x) + rv = 0, \quad (2.42)$$

в области  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $0 \leq \tau \leq T$  с граничными условиями

$$\begin{cases} v(x, 0) = V(S, T) - SV_S(S, T) = \begin{cases} -K, & S > K, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \\ v(0, \tau) = -K, \quad 0 \leq \tau \leq T, \\ v(x, \tau) = 0, \quad x \rightarrow \infty, \\ \zeta(\tau) = \frac{1}{2q} \tilde{\sigma}^2 v_x(0, \tau) + \frac{rK}{q}, \quad \zeta(0) = \frac{rK}{q}, \end{cases} \quad (2.43)$$

в предположении, что  $r \geq q$ .

**Задачи.** 1. Явно вывести (2.42) из (2.32).

2. Найти выражения для моделей волатильности (2.33), (2.34) и (2.35) в новых переменных.

3. Явно вывести (2.43) из (2.38).



## 2.7 Задачи на сеточные численные методы

Дано дифференциальное уравнение Блэка-Шоулза для справедливой цены  $V(S, t)$  европейского колл опциона:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (2.44)$$

для непостоянной волатильности  $\tilde{\sigma}$ , цены актива  $S$ , непрерывной процентной ставки  $r$  и времени  $t$ . Страйк равен  $K$ , время экспирации —  $T$ . В области  $0 \leq S < \infty$ ,  $0 \leq t \leq T$  заданы граничные условия

$$\begin{cases} V(S, T) = (S(T) - K)_+, & 0 \leq S \leq \infty, \\ V(0, t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \\ V(S, t) \sim S - Ke^{-r(T-t)}, & S \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (2.45)$$

**Задачи.** 1. Сдeлать замену переменных в задаче (2.44), (2.45) (прямое преобразование)

$$x = \ln \left( \frac{S}{K} \right), \quad \tau = \frac{\sigma^2}{2} (T - t), \quad u(x, \tau) = \frac{V(S, t)}{S}. \quad (2.46)$$

Получить выражение для цены опциона  $V(S, t)$  через переменные (2.46) (обратное преобразование).

2. При постоянной волатильности реализовать явную схему (производная по времени аппроксимируется вперед) в полученной после замены задаче и сравнить ответ со значением, полученным по точной формуле цены опциона Блэка-Шоулза. Протестировать отдельно случаи  $\tau < \frac{h^2}{2}$  и  $\tau > \frac{h^2}{2}$ .
3. При постоянной волатильности реализовать неявную схему (производная по времени аппроксимируется назад) и сравнить ответ со значением, полученным по точной формуле цены опциона Блэка-Шоулза.
4. При постоянной волатильности реализовать схему Кранка-Николсон и сравнить ответ со значением, полученным по точной формуле цены опциона Блэка-Шоулза. Сравнить точности решений всех трех предложенных схем.
5. Для непостоянной волатильности (например, из модели RAPM) реализовать схему Кранка-Николсон или неявную схему и сравнить ответ со значением, полученным методом Монте-Карло для непостоянной волатильности.