Модель Блека – Шоулса – Мертона не учитывает ряд существенных для ценообразования аспектов [2]:

1) Присутствие “скачков” в процессах цен;

2) Корреляция экстремальных значений между различными акциями;

3) Кластеризация волатильности (за большими изменениями цен следуют большие изменения, за малыми малые);

4) Корреляция между волатильностью и ценой.

Существуют ряд моделей, которые позволяют учитывать данные факторы, например $dS_t = \mu S_t dt + \sigma_t S_t dW_t$, где σ_t – случайный процесс (*стохастическая волатильность*). Разница в изменениях цены данных процессов представлена на рис. 2

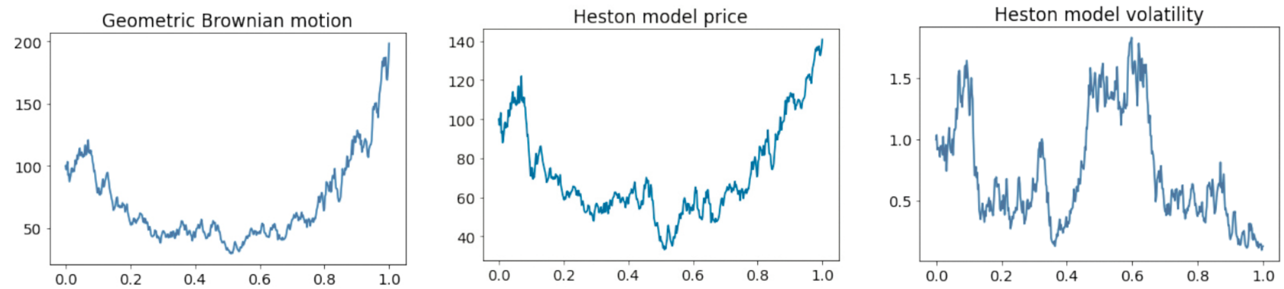

Рис. 1: Случайные процессы основанные на локальной и стохастчиеской волатильности [2]

Цены получаемые из модели Блека – Шоулса – Мертона не согласуются с будущими рыночными ценами. Поскольку нам известны S_t, T, K, r и $V(t, S_t)$ то решив не тривиальное уравнение: $V(t, S_t) = V(S_t, K, T, r, \sigma)$ относительно σ, мы найдем предполагаемую волатильность [2].

Предполагаемой волатильностью (*implied volatility*) называется решение σ^* уравнения $V(t, S_t) = V(S_t, K, T, r, \sigma^*)$

В модели Блека – Шоулса – Мертона значение σ^* было бы постоянным для всех торгуемых опционов на одну и ту же акцию (для всевозможных T, K). Но в реальности так не происходит. Сравнение предполагаемой волатильности опционов и их реальной стоимости на курс доллара к рублю представлен на рис.3.

Изменение волатильности важно учитывать потому что в данной модели деривативы можно хеджировать портфелем из акций и облигаций, так, чтобы: $d(-V(t, S_t) + g_t S_t + h_t B_t) = 0 \cdot dt + 0 \cdot dS_t$, где $V(t, S_t)$ –цена деривативa в модели (например, цена опциона). Данная стратегия называется $\delta-$хеджированием [5].

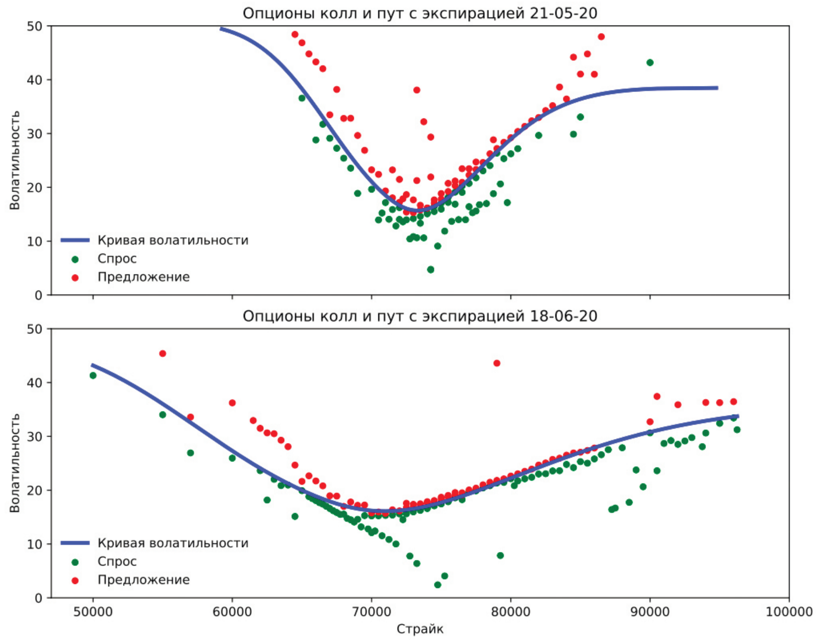

Рис. 2: Предполагаемая волатильность опционов на курс доллара. Дата: 14-05-20 [2]

Rama Cont [2] отмечает, что стоимость портфеля в данном случае не меняется при изменении цены S_t и с течением времени, но поскольку волатильность может меняться, то $V = V(t, S_t, \sigma_t)$ и $d(\text{-}V(t, S_t, \sigma_t) + g_t S_t + h_t B_t) = V_t d\sigma_t + ...$, где может быть $V_t \neq 0$. Следовательно, у портфеля возникает дополнительный источник риска из-за изменения волатильности.

Поверхность волатильности (*Volatility surface*) – это графическое отображение ожидаемого уровня волатильности по опционам с одинаковым базовым активом и разными страйками и временем исполнения [6]. Предполагаемая волатильность в опционах распределяется не равномерно – самая низкая волатильность наблюдается вблизи центрального страйка, чем страйк выше или ниже от текущей рыночной стоимости, тем волатильность больше. При фиксировании времени исполнения мы получаем срез, который называется **улыбкой волатильности** (*Volatility smile*). Пример поверхности волатильности и улыбки волатильности представлен на рис.4

Модели оценки стоимости опционов на основе стохастической волатильности:

Модель **локальной волатильности и формула Дюпира** – позволяет создать модель, которая воспроизводит поверхность волотильности. В данной модели цены опционов на рынке совпадают с ценами в модели [9]. Моделью локальной волатильности называется уравнение для цены актива (относительно мартингальной меры): $dS_t = rS_t dt + \sigma(t, S_t) S_t dw_t$

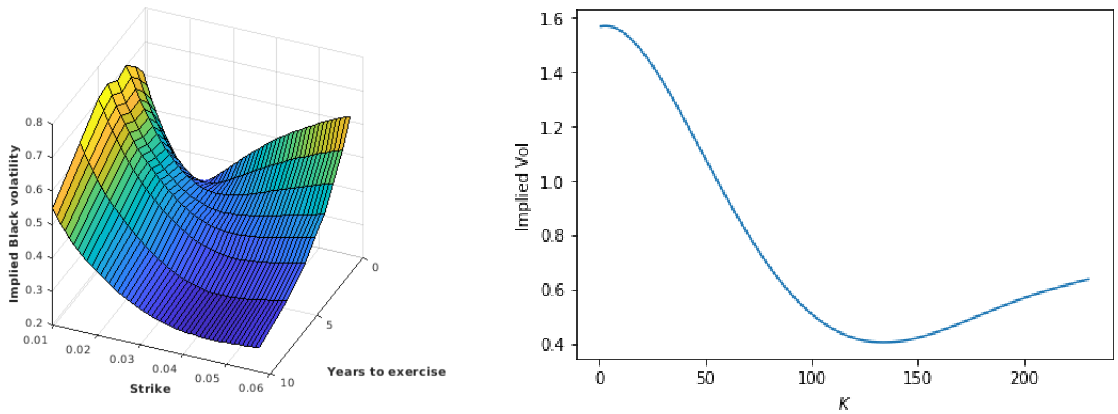

Рис. 3: Пример поверхности и улыбки волатильности [6]

при $S_0 > 0$ и функция $\sigma(t, S_t)$, такая что $C^*(T, K) = C(T, K) := e^{-rT}E(S_T - K)^+$, где C* цена опциона в модели, $T \in [0, T], K \in (0, +\infty)$.

Главное преимущество формулы Дюпира заключается в том, что она позволяет связать стохастическую и локальную волатильность между собой, но при этом не правильно отражает кривую локальной волатильности, о чем отмечает в своей статье Bruno Dupire [1].

В модели **CEV** (*constant elasticity of variance*) описанной в статье Linetsky Vadim and Mendoza Rafael [10] цена задается процессом $dS_t = rS_t dt + \sigma S_t^{\gamma} dW_t$ при $S_0 > 0$, $r > 0$, $\gamma > 0$ (при $\gamma = 1$ имеем геометрическое броуновское движение), тогда локальная волатильность $\sigma(s) = \sigma s^{\gamma - 1}$ и будет вычисляться по формуле:

$$\sigma^* = \frac{\sigma}{s^{\gamma-1}} \left(1 + \frac{(1-\gamma)(2+\gamma)}{24} \left(\frac{(s-K)}{s}\right)^2 + \frac{(1-\gamma)^2}{24} \frac{\sigma^2 T}{s^{2(1-\gamma)}} + ...\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_i e^{-y_i t_i} + FVe^{-y_n t_n} = PV$$

$$3e^{-y_1 t_1} + 3e^{-y_2 t_2} + 3e^{-y_3 t_3} + 3e^{-y_4 t_4} + 100e^{-y_4 t_4} = PV$$

C_i - величина купона, t_i - время до выплаты, y_i - ставка дисконтирования, FV - номинальная стоимость, PV - рыночная стоимость.

Модель **Хестона** – пусть на $(\Omega,\ F,\ (F_t)_t \in [0, T], P)$ заданы два коррелированных броуновских движения, $dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt$. Рассмотрим рынок с безрисковым активом $B_t = e^{rt}$ и акцией с ценой:

$$dS_t = rS_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t^1, S_0 > 0$$

$$dv_t = k(\theta - v_t)dt + \sigma \sqrt{V_t} dW_t^2, v_0 > 0$$

Параметры модели: $r > 0$, $K > 0$, $\theta > 0$, $\sigma > 0$, $\rho \in (-1, 1)$. Процесс $\sigma_t = \sqrt{v_t}$ представляет собой стохастическую волатильность [4]. Данная система уравнений имеет единственное сильное решение и решается численными методами [11].

Модель **SABR** (*stochastic alpha, beta, rho*) для цены форварда задается уравнениями

$$dF_t = \alpha_t F_t^{\beta} dW_t^1, F_0 = f > 0$$

$$d\alpha_t = v * \alpha_t dW_t^2, \alpha_0 = \alpha > 0$$

$$dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt$$

(определенными до момента достижения нуля одним из процессов). Эта модель популярна потому, что есть удобная приближенная формула для вычисления предполагаемой волатильности Блэка σ_B^* [7].

Модель **SVI** (*stochastic volatility inspired*) – это некоторая функция, которая используется для приближения кривой предполагаемой волатильности.

Модель **SVI в сырой параметризации** (*raw parametrization*) с параметрами a, b, ρ, m, σ (где $a \in R$, $b > 0$, $|\rho| < 1$, $m \in R$, $\sigma > 0$) имеет вид:

$$w(x) = a + b\left(\rho(x - m) + \sqrt{(x - m)^2 + \sigma^2}\right)$$

(T предполагается фиксированным). Каждый параметр отвечает за расположение кривой относительно предполагаемой волатильности [3].

Модель **SVI в естественной параметризации** (*natural parametrization*) с параметрами Δ, μ, ρ, ω, ζ ($\omega > 0$, Δ, $\mu \in R$, $|\rho| < 1$, $\zeta > 0$) имеет вид:

$$w(x) = \Delta + \frac{\omega}{2}(1 + \zeta\rho(x - \mu) + \sqrt{(\zeta(x - \mu) + \rho)^2 + 1 + \rho^2}$$

Представленные выше модели стохастической волатильности позволя.т рассчитывать предполагаемую и «справедливую» цену опциона в данный момент времени, эту информацию мы можем использовать для анализа рынка и построения торговых сигналов и стратегий. Одной из таких стратегий может быть торговля опционами, стоимость которых отличается от стоимости в модели – продажа переоцененных опционов, и покупка недооцененных.

Stochastic Differential Equation [8] содержит много теории о видах и свойствах случайных процессов, формуле и интеграле Ито, понятии мартингальной и риск - нейтральной меры, теореме Леви и многомерной теореме Гирсанова, понятии сильного и слабого решения и других важных теоретических аспектов.

Список литературы

[1] Dupire Bruno. “Pricing with a Smile”. В: (1994), с. 1—10.

[2] Rama Cont. “Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues”. В: *Quantitative Finance* 1 (2000), с. 233—236.

[3] Jacquier Antoine Gatheral Jim. “Arbitrage-free SVI volatility surfaces”. В: *Quantitative Finance* (2013), с. 1—27.

[4] Steven L. Heston. “A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options”. В: (2009).

[5] John C. Hull. “Options, Futures, and Other Derivatives (11th Edition)”. В: (2008).

[6] Gatheral Jim. “The Volatility Surface A Practitioner’s Guide”. В: (2006).

[7] Roger W. Lee. “The Moment Formula for Implied Volatility at Extreme Strikes”. В: (2003).

[8] Bernt Oksendal. “Stochastic Differential Equations”. В: (2000).

[9] Diana E. Woodward Patrick S. Hagan. “Equivalent Black Volatilities”. В: (1998).

[10] Rafael Mendoza Vadim Linetsky. “The Constant Elasticity of Variance Model”. В: (2009).

[11] Guido Germano Yiran Cui Sebastian del Baño Rollinb. “Full and fast calibration of the Heston stochastic volatility model”. В: *European Journal of Operational Research* 263 (2017), с. 625—638.