יום רביעי 19 אוגוסט 2020 19:32

תכונות של עצים בינאריים

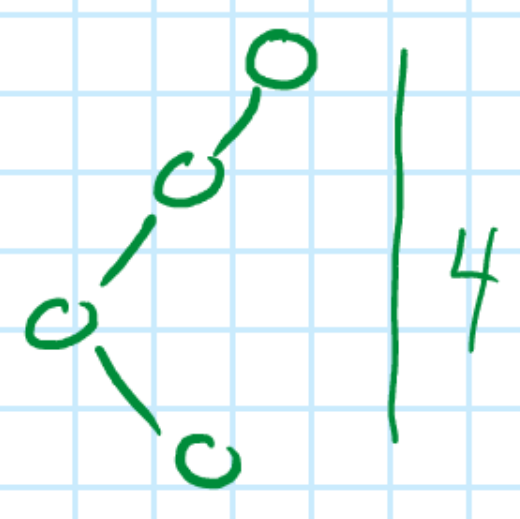
1. מה העומק* של עץ בינארי? (*אורך מסלול הכי ארוך משורש לעלה)

תלוי בצורה של העץ

א. מה העומק המקסימלי של עץ בינארי עם n צמתים? n

עץ מנוון, לכל צומת יש בדיוק בן אחד

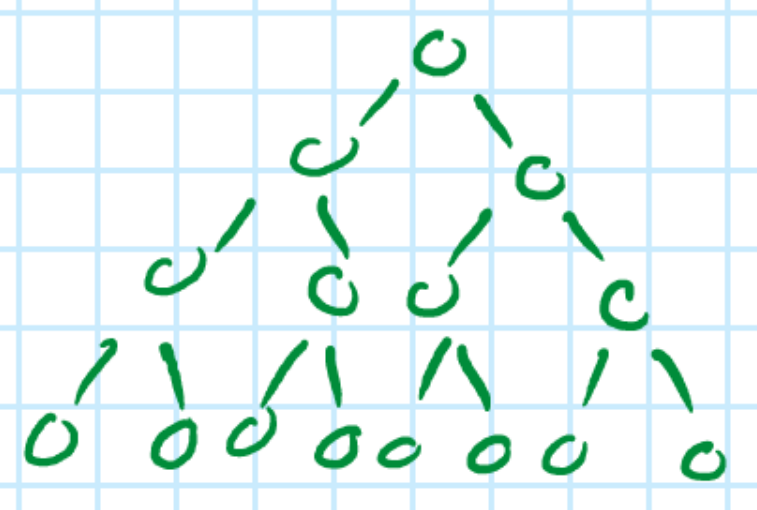
"שרוך".



ב. מה העומק המינימלי של עץ בינארי עם n צמתים? $\lceil \log n \rceil$

$\lfloor \log n \rfloor + 1$

עץ בינארי שלם



עץ בינארי שלם בגובה k מכיל 2^k-1 צמתים

$$n = 2^k-1$$

$$\log(n) = \log(2^k-1) < \log 2^k = k$$

$\log n < k$ קטן בקצת

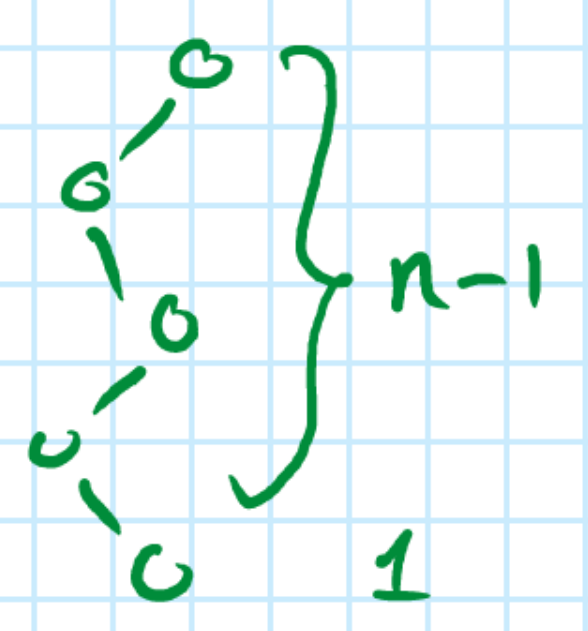
$k = \lceil \log n \rceil$

⇐ $\lg n <$ עומק עץ בינארי עם n צמתים $\leq n$

2. כמה עלים יש בעץ בינארי עם n צמתים?

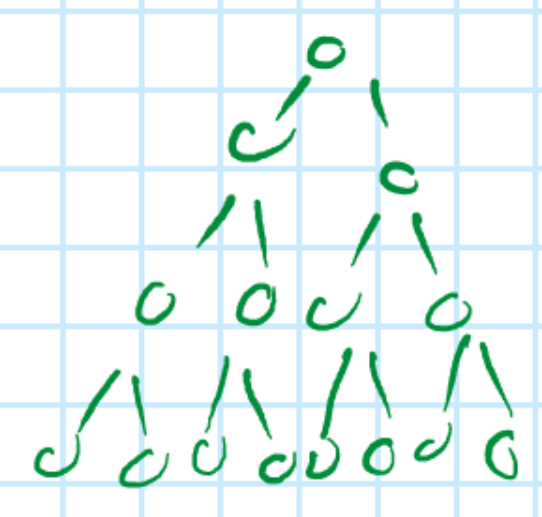
תלוי בצורה של העץ

א. מינימום: עלה 1. (בשרוך)



ב. מקסימום: $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = 2^{\lg n-1} = 2^{k-1}$ | k עומק העץ

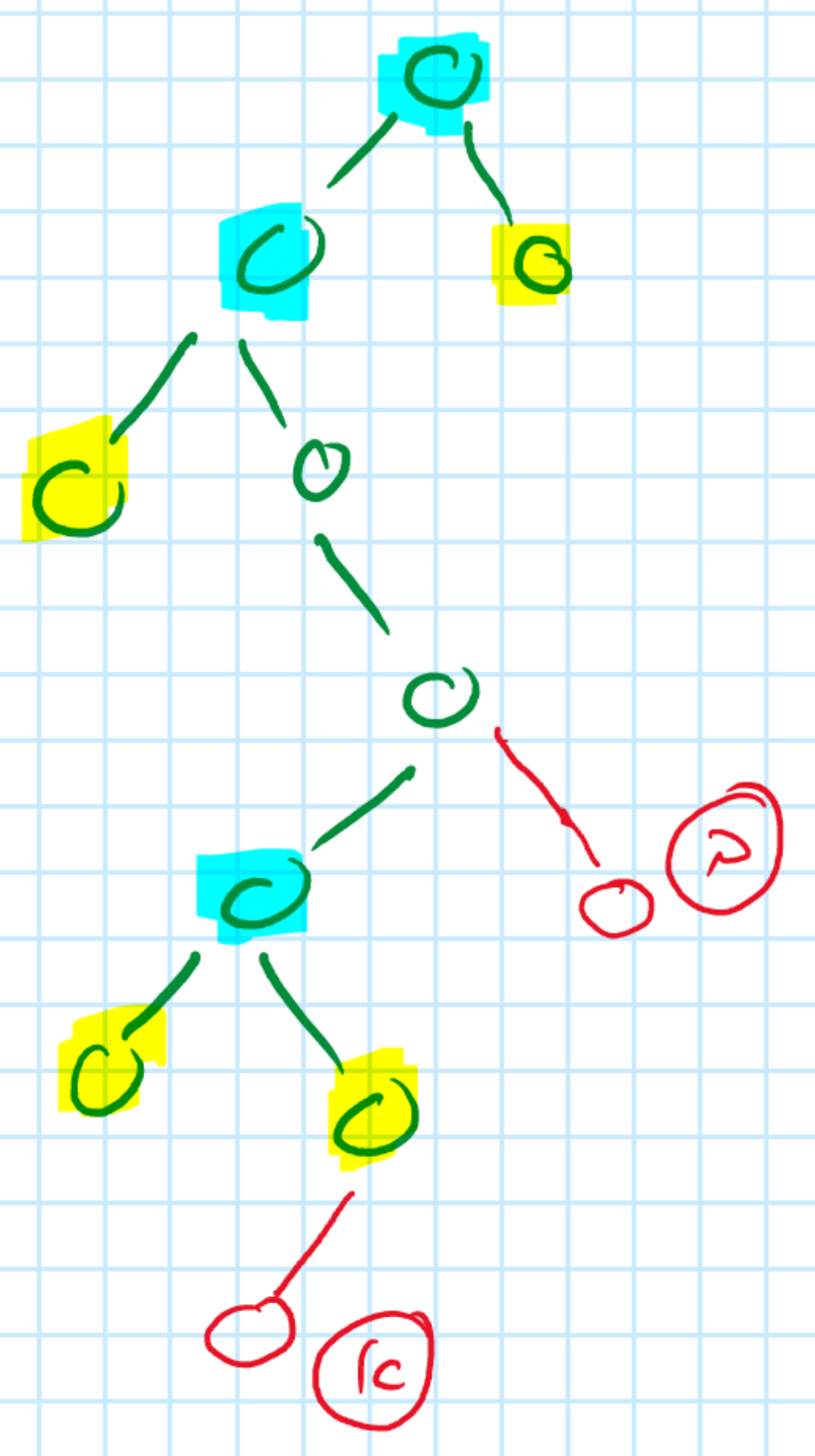
בעץ שלם $k = \lg n$



$1 \leq$ מספר העלים בעץ עם n צמתים $\leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

ג. מספר העלים בעץ בינארי =

מספר הצמתים עם שני ילדים + 1.



הוכחה (1) - אינדוקציה

נתחיל עם עץ שעומד בתנאי

⇐ נוסיף עוד צומת כעלה

נראה שהעץ החדש עומד בתנאי

א) בן של עלה

ב) בן של צומת עם ילד אחד

א) כאשר מוסיפים בן לעלה

- מה קורה למספר העלים? לא משתנה
- מה קורה למספר הצמתים עם שני ילדים? לא משתנה

⇐ התכונה נשארת בעינה.

ב) מוסיפים בן לצומת עם ילד אחד

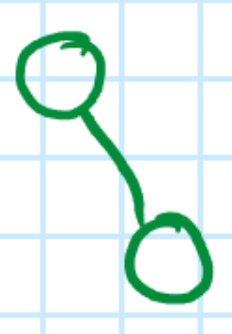
- מה קורה למספר העלים? עולה באחד
- מה קורה למספר הצמתים עם שני ילדים? עולה באחד

⇐ התכונה נשארת בעינה

בסיס האינדוקציה

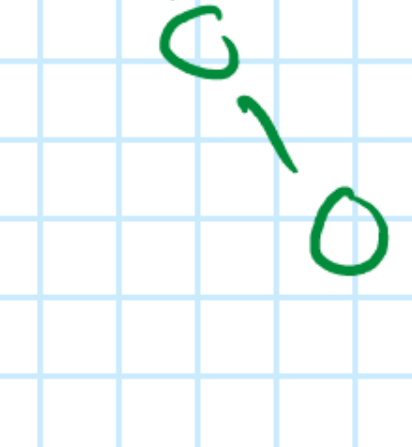
עלים 1

צמתים עם שני ילדים ∅



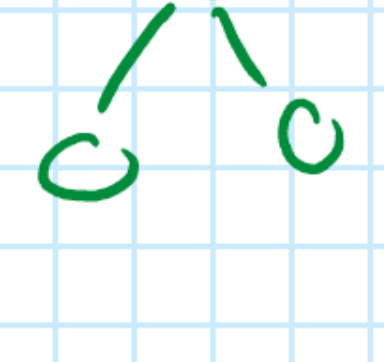
עלים 1

צמתים עם שני ילדים ∅



עלים 1

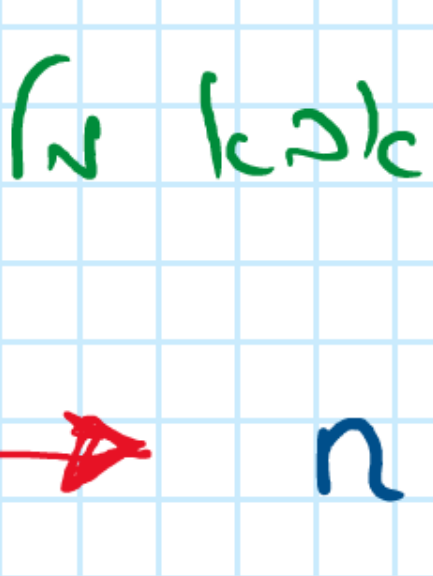
צמתים דרגה 2 ∅



עלים 2

צמתים דרגה 2 1

הוכחה (2)



בעץ יש n צמתים בכל העץ

a צמתים עם ילד אחד

b צמתים עם שני ילדים

l עלים

ספירה כלפי מעלה $x = n-1$ ענפים (לכל צומת יש קישור לאבא מלבד לשורש)

$$\xrightarrow{\quad} n = l + a + b$$

$$n = x + 1 = a + 2b + 1$$

ספירה כלפי מטה $x = \underline{a + 2b}$

$$l + a + b = a + 2b + 1 \quad /-a$$

$$l + b = 2b + 1 \quad /-b$$

$$\boxed{l = 2b - b + 1 = b + 1}$$

מ.ש.ל.