TP de dynamique sédimentaire
Practical of sediment dynamics

2021/2022

I/ Forçages – construction d'un modèle 1DV
Forcing - Set up of a 1DV model

Rappel de l'équation de départ : *[reminding momentum equation in 2DV frame]*

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u^2}{\partial x}+\frac{\partial uw}{\partial z}=\frac{-1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

où u est la composante horizontale de la vitesse instantanée (dans le sens de l'écoulement), w la vitesse verticale, ν la viscosité moléculaire.
where u and w are horizontal and vertical components of instantaneous velocity, and ν the molecular viscosity.

Dans le cadre d'un écoulement 2D uniforme, après décomposition de Reynolds (u=U+u'), l'équation ci-dessus devient :
In case of uniform (along x) 2D flow, after Reynolds splitting (u=U+u') and neglecting the average vertical velocity, the equation writes :

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}=\frac{-1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

ou *or* :

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{-1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\frac{\partial U}{\partial z}-\overline{u'w'}\right)$$

Selon l'hypothèse de Boussinesq *[according to Boussinesq assumption]:*

$$-\overline{u'w'}=K_{turb}\frac{\partial U}{\partial z}$$

$_{turb}$ est une viscosité turbulente qu'il convient de relier aux autres inconnues du système, ici les vitesses : question de la fermeture turbulente.
$_{turb}$ is a turbulent viscosity that should be linked to other unknowns of the system, e.g. velocities : this is the turbulence closure.

Dans ce cas simple d'écoulement près d'une paroi, on peut utiliser une fermeture turbulence à 0 équation, dite de "longueur de mélange" (inspirée de la théorie de Prandtl) telle que :

In the simple case of flow along a wall, a "0 equation" turbulence closure, the so-called mixing length closure, inspired by Prandtl theory, can be used :

$$|u'| \approx |w'|$$

et *and*:

$$u' = l_{gm} \frac{\partial U}{\partial z}$$

$$l_{gm} = \kappa z \sqrt{1 - \frac{z}{h}}$$

h: hauteur d'eau*/water height*

$$-\overline{u'w'} = l_{gm}{}^{2} \left| \frac{\partial U}{\partial z} \right| \frac{\partial U}{\partial z}$$

et *and:*

$$Kturb = l_{gm}{}^{2} \left| \frac{\partial U}{\partial z} \right|$$

On cherche donc à résoudre, en 1DV (∂P/∂x est notre forçage, donné):
The equation to be solved, in 1DV frame (∂P/∂x is our forcing, given):

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial U}{\partial z} + l_{gm}{}^{2} \left| \frac{\partial U}{\partial z} \right| \frac{\partial U}{\partial z} \right) = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial U}{\partial z}}$$

Longueur de rugosité et gradient de pression constituent le forçage du modèle.
Roughness length and pressure gradient constitute the model forcing.

Noter que le pas de temps est un paramètre important. Pour un schéma de diffusion explicite, il faut respecter le critère de stabilité suivant :
It should be noted that the time step is an important parameter. For an explicit diffusion scheme, the stability criterium should be respected:

$$K_z < 0.25 \frac{(\Delta z)^2}{\Delta t}$$

II/ Dynamique sédimentaire : l'équation d'advection-dispersion

On rappelle ici l'équation d'advection /dispersion, en unidimensionnel vertical (hypothèse de gradients horizontaux nuls)
Hereafter the equation for advection/dispersion of any tracer with concentration C, within a 1DV frame (horizontal gradients are assumed zero)

$$\frac{\partial C}{\partial t}=\frac{\partial W_s C}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_z\frac{\partial C}{\partial z}\right)$$

Avec la condition limite suivante/with the following boundary condition:

$$K_z\frac{\partial C}{\partial z}\bigg|_{z=0}=-E+D$$

Soit (C_k est calculé au centre des mailles, avec un schéma décentré amont pour l'advection) :
If C_k is computed in centers of grid cells, using upwind scheme for advection:

$$\frac{C_k^t-C_k^{t-1}}{\Delta t}=\left(\frac{W_s\left(C_{k+1}^{t-1}\right)-W_s\left(C_k^{t-1}\right)}{\Delta z}\right)$$
$$\frac{+1}{\Delta z}¿$$

K_z peut être pris constant (par exemple $K_z^+=K_z^-=10^{-5}$ m^2s^{-1}) ou égal à la viscosité cinématique.
K_z may be assumed constant (for instance $K_z^+=K_z^-=10^{-5}$ m^2s^{-1}) or equal to the $_z$ used in the momentum equation

Le terme d'érosion est calculé à partir de la relation de Partheniades :
Erosion is deduced from the Partheniades law:

$$E=\begin{cases} E0\left(\frac{\tau_c}{\tau_{ce}}-1\right)^\alpha si/if\ \tau_c>\tau_{ce} \\ 0\,sinon/if_{not} \end{cases}$$

où E est le flux d'érosion en kg.m^{-2}.s^{-1} ; E_0 le taux d'érosion en kg.m^{-2}.s^{-1}, $_c$ la contrainte de cisaillement au fond due au courant (N.m^{-2}), $_{ce}$ la contrainte critique d'érosion (N.m^{-2}), un paramètre, ici pris égal à 1.
E is the erosion flux (kg.m^{-2}.s^{-1}),E_0 the erosion rate (kg.m^{-2}.s^{-1}), $_c$ the bottom shear stress (N.m^{-2}), $_{ce}$ the critical shear stress for erosion (N.m^{-2}) and a parameter (here = 1).

Le dépôt est calculé par la relation de Krone :

Deposition is computed from the Krone relationship:

$$D=\begin{cases} W_s C_1 \left(1-\frac{\tau_c}{\tau_{cd}}\right) si/if\ \tau_c<\tau_{cd} \\ 0\, sinon/if_{not} \end{cases}$$

où D est le flux de dépôt en $kg.m^{-2}.s^{-1}$, W_s la vitesse de chute, C_1 la concentration dans la première maille au dessus du fond. La contrainte critique de dépôt $_{cd}$ est prise égale à une valeur de 0.1 - 1 $N.m^{-2}$ pour les particules vaseuses lorsque le processus de consolidation n'est pas pris en compte, ou une valeur infinie pour les sables ou encore pour les vases lorsque la consolidation est explicitement traitée. Attention aux unités, et au fait que les flux d'érosion et de dépôt arrivent/partent dans une couche ayant une certaine épaisseur dz(1).
D is the deposition flux in $kg.m^{-2}.s^{-1}$, W_s the settling velocity, C_1 the concentration in the 1st cell above bottom. The critical shear stress for deposition $_{cd}$ is chosen in the range 0.1 - 1 $N.m^{-2}$ for muddy sediment when the consolidation process is not accounted for explicitly, or assessed ∞ (a very large value) for sand or mud when consolidation is considered. Pay attention to units, and to the fact that erosion/deposition fluxes initially concern a layer with a given thickness dz(1).

Les suspensions chutant de la première maille de fond sont transférées dans le compartiment sédimentaire, qui possède une certaine épaisseur h_{sed} qui évolue au cours du temps et possède dans un premier temps une concentration constante dans le temps de $500g.l^{-1}$ (on ignore la consolidation).
Suspensions settling from the bottom cell are transferred in the sediment compartment, which thickness h_{sed} varies (a steady concentration of 1000 $kg.m^{-3}$ is assumed, ignoring consolidation).

Attention : en plus du critère hydrodynamique, un critère de stabilité est requis pour l'advection verticale du sediment et doit être ajouté:

°t=min(°t,°z/max(Ws))

où max(Ws) représente la vitesse de chute maximale calculé sur la colonne d'eau pour un pas de temps donné

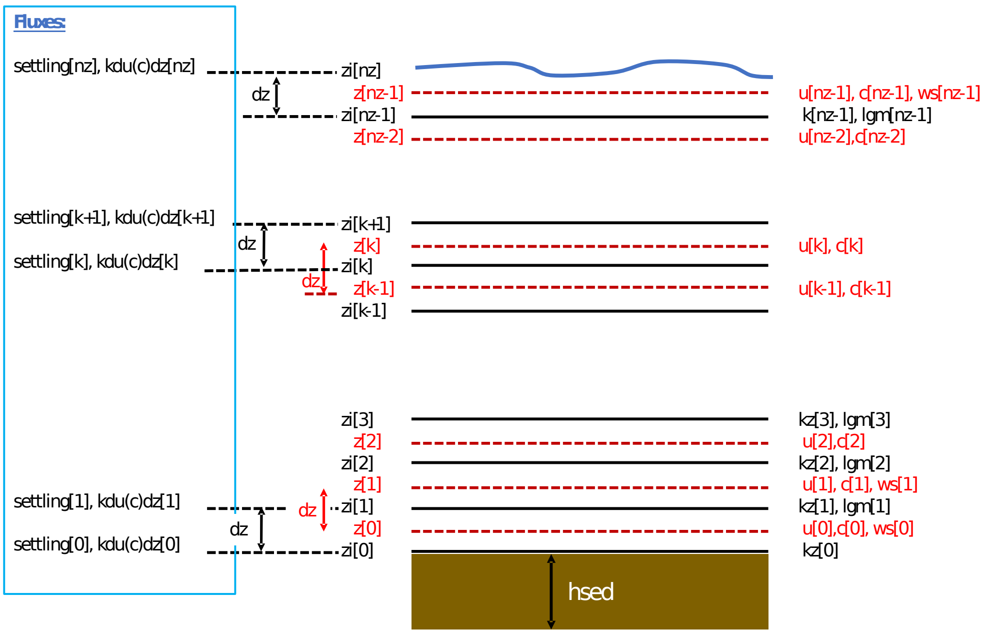
Attention : in complement to the CFL criteria for hydrodynamics, a stability criteria is also required for the vertical advection of sediment and must be accounted for:

°t=min(°t,°z/max(Ws))

where max(Ws) represents the maximum settling velocity calculated over the water column for a given time step.

III/ Grille de calcul pour un modèle hydro-sédimentaire à une dimension verticale (1DV)

Computational grid for hydrodynamics and sediment dynamics in a 1 vertical dimension frame



IV/ Equation discrétisée de la quantité de mouvement

Discretized momentum equation

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{-1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\frac{\partial U}{\partial z}+l_{gm}{}^{2}\left|\frac{\partial U}{\partial z}\right|\frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}=forcing+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_z\frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

Avec/ with

$$K_z=\nu+\left(\kappa z\,(1-\frac{z}{h})^{0.5}\right)^2\left|\frac{\partial U}{\partial z}\right|$$

$$\boxed{\frac{U_k^t-U_k^{t-1}}{\Delta t}=forcing+\frac{1}{\Delta z}\left[\left\{\nu+\kappa^2 . zi_{k+1}^2 . \left(1-\frac{zi_{k+1}}{h}\right) . \frac{\left|U_{k+1}^{t-1}-U_k^{t-1}\right|}{\Delta z}\right\}\frac{U_{k+1}^{t-1}-U_k^{t-1}}{\Delta z} - \left\{\nu+\kappa^2 . zi_k^2 . \left(1-\frac{zi_k}{h}\right) . \frac{\left|U_k^{t-1}-U_{k-1}^{t-1}\right|}{\Delta z}\right\}\frac{U_k^{t-1}-U_{k-1}^{t-1}}{\Delta z}\right]}$$