

# Introduzione e motivazioni



# Capitolo 1

## Risultati preliminari

In questo capitolo enunciamo alcune definizioni e risultati fondamentali per approcciare la dimostrazione geometrica dei primi due teoremi di Bieberbach.

Nella prima sezione riprendiamo la definizione di spazio euclideo  $n$ -dimensionale e del suo gruppo di isometrie, descriviamo una loro rappresentazione come composizione dell'applicazione di una matrice ortogonale e di una traslazione; definiamo poi il coniugio di due isometrie. La lunghezza e la direzione del vettore traslazione di una data isometria danno immediatamente informazioni su come questa agisce sui punti di  $\mathbb{R}^n$ ; più complicato è invece capire, data una matrice ortogonale, come questa trasformi lo spazio.

Nella seconda sezione viene definita quindi una funzione che stima per eccesso di quanto ogni matrice ortogonale si discosta dalla matrice identità; viene poi definita attraverso essa una scomposizione dello spazio in due spazi ortogonali; infine si dimostra un teorema che stima la "misura" del commutatore di due matrici a partire dalle loro "misure".

### 1.1 Spazio euclideo $\mathbb{E}^n$ ed isometrie

Consideriamo lo spazio vettoriale  $n$ -dimensionale  $\mathbb{R}^n$  con il prodotto scalare dato da

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

e la norma ad esso associata

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Imponiamo sullo spazio la distanza associata al prodotto scalare

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

Imponendo questa metrica sullo spazio vettoriale  $\mathbb{R}^n$  ottengo lo spazio euclideo  $\mathbb{E}^n$ .

**Definizione 1.1.1.** *Dati  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  definisco l'angolo fra di essi  $\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  come*

$$\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \arccos\left(\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}\right) \in [0, \pi]$$

È noto che gli automorfismi di  $\mathbb{R}^n$  (ovvero le applicazioni lineari biettive da  $\mathbb{R}^n$  in sé stesso) formano un gruppo con l'operazione di composizione di applicazioni lineari isomorfo a  $GL(n, \mathbb{R})$ , il gruppo delle matrici quadrate  $n$ -dimensionali con determinante non nullo. Se si considerano

invece le mappe affini da  $\mathbb{R}^n$  in sé stesso con il prodotto dato dalla composizione, si ottiene il gruppo affine  $Aff(n, \mathbb{R})$ ; esso può essere rappresentato come il prodotto demidiretto

$$\mathbb{R}^n \rtimes GL(n, \mathbb{R})$$

con l'operazione di composizione data da

$$(\mathbf{A}, \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{B}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a} + \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{AB}) \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in GL(n, \mathbb{R}) \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n.$$

I teoremi di Bieberbach trattano in particolare i gruppi cristallograici, che sono dei particolari tipi di sottogruppi del gruppo delle isometrie.

**Definizione 1.1.2.** *Un'isometria di  $\mathbb{E}^n$  è un funzione  $\alpha : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  tale che  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  vale*

$$d(\alpha(\mathbf{x}), \alpha(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

Il seguente teorema è enunciato senza dimostrazione in quanto si tratta di un risultato classico.

**Teorema 1.1.1.** *Data un'isometria di  $\mathbb{E}^n$ , questa può essere scritta in modo unico come composizione di una rotazione e di una traslazione rispetto alla base standard di  $\mathbb{R}^n$*

$$\alpha : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{x} \longmapsto \mathbf{Ax} + \mathbf{a}$$

dove  $\mathbf{A} = \text{rot}(\alpha) \in O(n)$  è detta componente di rotazione di  $\alpha$  e  $\mathbf{a} = \text{trans}(\alpha) \in \mathbb{R}^n$  è detta componente di traslazione di  $\alpha$ .

In questa trattazione indicheremo spesso le isometrie secondo la rappresentazione fornita dal teorema precedente. In particolare scriveremo  $\alpha = (\mathbf{A}, \mathbf{a})$  per indicare che l'isometria  $\alpha$  ha come componente di rotazione la matrice  $\mathbf{A}$  e come componente di traslazione il vettore  $\mathbf{a}$ . Indichiamo l'insieme delle isometrie di  $\mathbb{E}^n$  come  $Isom(n)$

**Lemma 1.1.2.**  *$Isom(n)$  è un gruppo con operazione di composizione di applicazioni; in particolare è un sottogruppo del gruppo affine e come tale può essere scritto come prodotto semidiretto nella forma*

$$Isom(n) \cong O(n) \rtimes \mathbb{R}^n < GL(n, \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}^n$$

dove  $O(n)$  indica il gruppo delle matrici ortogonali  $n$ -dimensionali, in particolare

$$O(n) = \{\mathbf{A} \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \mathbf{AA}^T = \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{id}\}$$

È noto che le matrici ortogonali hanno la proprietà

$$\|\mathbf{Ax}\| = \|\mathbf{x}\| \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad \forall \mathbf{A} \in O(n)$$

All'interno di ogni gruppo è definito il commutatore di due elementi, posso quindi anche definirlo per  $Isom(n)$ .

**Lemma 1.1.3.** *Comunque prese  $\alpha = (\mathbf{A}, \mathbf{a}), \beta = (\mathbf{B}, \mathbf{b}) \in Isom(n)$  definisco il loro commutatore come  $[\alpha, \beta] = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ .*

*Valgono le due seguenti uguaglianze:*

$$\text{rot}([\alpha, \beta]) = [\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{ABA}^{-1}\mathbf{B}^{-1} \tag{1.1}$$

$$\text{trans}([\alpha, \beta]) = (\mathbf{A} - \mathbf{id})\mathbf{b} + (\mathbf{id} - [\mathbf{A}, \mathbf{B}])\mathbf{b} + \mathbf{A}(\mathbf{id} - \mathbf{B})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a} \tag{1.2}$$

*Dimostrazione.*  $[\alpha, \beta](\mathbf{x}) = (\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1})(\mathbf{x})$ .

Dato che  $\alpha : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax} + \mathbf{a}$ , allora sicuramente  $\alpha^{-1} : \mathbf{y} \mapsto \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{a})$ .

Allo stesso modo, dato che  $\beta : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{Bx} + \mathbf{b}$ , so che  $\beta^{-1} : \mathbf{y} \mapsto \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{b})$ .

$$\begin{aligned} [\alpha, \beta](\mathbf{x}) &= (\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1})(\mathbf{x}) = (\alpha\beta\alpha^{-1})(\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{b})) = \\ &= (\alpha\beta\alpha^{-1})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}) = \\ &= (\alpha\beta)(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{a})) = \\ &= (\alpha\beta)(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}) = \\ &= (\alpha)(\mathbf{B}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}) + \mathbf{b}) = \\ &= (\alpha)(\mathbf{BA}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{BA}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{BA}^{-1}\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{BA}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{BA}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{BA}^{-1}\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{a} = \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{BA}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{BA}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{BA}^{-1}\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{a} = \\ &= \mathbf{ABA}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{ABA}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{ABA}^{-1}\mathbf{a} + \mathbf{Ab} + \mathbf{a} \end{aligned}$$

Quindi  $rot([\alpha, \beta]) = \mathbf{ABA}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$  e

$$\begin{aligned} trans([\alpha, \beta]) &= -\mathbf{ABA}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{ABA}^{-1}\mathbf{a} + \mathbf{Ab} + \mathbf{a} = \\ &= \mathbf{Ab} + \mathbf{a} - \mathbf{ABA}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{ABA}^{-1}\mathbf{a} = \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{id})\mathbf{b} + \mathbf{b} + \mathbf{a} - \mathbf{ABA}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{ABA}^{-1}\mathbf{a} = \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{id})\mathbf{b} + (\mathbf{id} - [\mathbf{A}, \mathbf{B}])\mathbf{b} + \mathbf{a} - \mathbf{ABA}^{-1}\mathbf{a} = \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{id})\mathbf{b} + (\mathbf{id} - [\mathbf{A}, \mathbf{B}])\mathbf{b} + (\mathbf{id} - \mathbf{ABA}^{-1})\mathbf{a} = \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{id})\mathbf{b} + (\mathbf{id} - [\mathbf{A}, \mathbf{B}])\mathbf{b} + \mathbf{A}(\mathbf{id} - \mathbf{B})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a} \end{aligned}$$

□

## 1.2 "Misura" della componente di rotazione

**Definizione 1.2.1.** *Comunque preso  $\mathbf{A} \in O(n)$  definisco*

$$m(\mathbf{A}) = \max \left\{ \frac{\|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \mathbf{0} \right\}$$

Questa funzione stima quanto una data matrice ortogonale si comporta in modo diverso dalla matrice identità; descrive infatti quanto al massimo un vettore unitario viene "spostato" dall'azione di tale matrice.

**Lemma 1.2.1.** *La precedente è una buona definizione e inoltre vale*

$$m(\mathbf{A}) = \max \left\{ \|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\| \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \|\mathbf{x}\| = 1 \right\}$$

*Dimostrazione.*  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \mathbf{0} \exists \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n - \mathbf{0}$  tale che  $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}, \lambda \in \mathbb{R} \wedge \|\mathbf{y}\| = 1$ .

$$\frac{\|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\|\mathbf{A}\lambda \mathbf{y} - \lambda \mathbf{y}\|}{\|\lambda \mathbf{y}\|} = \frac{|\lambda| \|\mathbf{Ay} - \mathbf{y}\|}{|\lambda| \|\mathbf{y}\|} = \|\mathbf{Ay} - \mathbf{y}\|$$

L'insieme  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \|\mathbf{x}\| = 1$  è un compatto in  $\mathbb{R}^n$ , quindi per il teorema di Weierstrass esiste una  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| = 1$  che mi verifica il max. □

**Lemma 1.2.2.** *Comunque preso  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  vale*

$$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\| \leq m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}\|$$

*Dimostrazione.* Infatti vale  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \mathbf{0}$  e vale anche per  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  □

Una volta definta la funzione  $m$ , è possibile definire il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  che contiene tutti e soli i vettori che realizzano il massimo nella sua definizione.

**Definizione 1.2.2.**

$$E_{\mathbf{A}} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\| = m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}\|\}$$

**Lemma 1.2.3.**  $E_{\mathbf{A}}$  è un sottospazio di  $\mathbb{R}^n$  non banale ed  $\mathbf{A}$ -invariante

*Dimostrazione.* •  $\mathbf{0} \in E_{\mathbf{A}}$

- $\forall \mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$   
 $\mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}} \implies \|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\| = m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}\| \implies \|\mathbf{A}\lambda\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}\| \implies \lambda\mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}}$
- $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E_{\mathbf{A}}$  si vuole verificare che  $\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \in E_{\mathbf{A}}$   
 $\mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}} \implies \|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\| = m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}\|$   
 $\mathbf{y} \in E_{\mathbf{A}} \implies \|\mathbf{Ay} - \mathbf{y}\| = m(\mathbf{A})\|\mathbf{y}\|$

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - (\mathbf{x} + \mathbf{y})\|^2 + \|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - (\mathbf{x} - \mathbf{y})\|^2 = \\ & = \|\mathbf{Ax} - \mathbf{x} + \mathbf{Ay} - \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{Ax} - \mathbf{x} - (\mathbf{Ay} - \mathbf{y})\|^2 = \\ & = 2\|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{Ay} - \mathbf{y}\|^2 = 2(\|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{Ay} - \mathbf{y}\|^2) = \\ & = 2m(\mathbf{A})^2(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2) \end{aligned} \tag{1.3}$$

Dalla precedente catena di uguaglianze segue

$$\begin{aligned} 2m(\mathbf{A})^2(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2) &= \|\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - (\mathbf{x} + \mathbf{y})\|^2 + \|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - (\mathbf{x} - \mathbf{y})\|^2 \leq \\ &\leq m(\mathbf{A})^2(\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2) = \\ &= m(\mathbf{A})^2(\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2) = \\ &= 2m(\mathbf{A})^2(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Quindi il segno di disuguaglianza in (4) è un'uguaglianza, in particolare

$$\|\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - (\mathbf{x} + \mathbf{y})\|^2 + \|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - (\mathbf{x} - \mathbf{y})\|^2 = m(\mathbf{A})^2(\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2)$$

Spostando i termini da parte a parte ottengo

$$\|\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - (\mathbf{x} + \mathbf{y})\|^2 - m(\mathbf{A})^2\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = m(\mathbf{A})^2\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - (\mathbf{x} - \mathbf{y})\|^2$$

E' possibile poi scomporre le differenze di quadrati a sinistra e destra dell'uguaglianza ottenendo

$$\begin{aligned} & (\|\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - (\mathbf{x} + \mathbf{y})\| + m(\mathbf{A})\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|)(\|\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - (\mathbf{x} + \mathbf{y})\| - m(\mathbf{A})\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|) = \\ & - (\|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - (\mathbf{x} - \mathbf{y})\| + m(\mathbf{A})\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)(\|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - (\mathbf{x} - \mathbf{y})\| - m(\mathbf{A})\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Distinguiamo alcuni casi:

- Se  $\mathbf{A} = \mathbf{id} \implies m(\mathbf{A}) = 0 \implies E_{\mathbf{A}} = \mathbb{R}^n$  ed in quel caso la dimostrazione è conclusa.
- Se  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$  o  $\mathbf{x} = -\mathbf{y}$  la dimostrazione è conclusa per il punto precedente (rispettivamente con  $\lambda = +1$  e  $\lambda = -1$ ).

- Nei restanti casi si osserva che nell'equazione (5) il primo fattore a sinistra dell'uguaglianza è strettamente positivo, mentre il secondo fattore è  $\leq 0$ . Allo stesso modo a destra dell'uguaglianza è presente un meno che modifica il segno del prodotto; il primo fattore è strettamente positivo ed il secondo è  $\leq 0$ .  
L'uguaglianza in (5) deve quindi per forza coincidere con  $0 = 0$  e questo implica

$$\begin{cases} \|\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - (\mathbf{x} + \mathbf{y})\| = m(\mathbf{A})\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \\ \|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - (\mathbf{x} - \mathbf{y})\| = m(\mathbf{A})\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \end{cases}$$

$$\implies \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \in E_{\mathbf{A}}$$

La dimostrazione del fatto che  $E_{\mathbf{A}}$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^n$  è così conclusa.

- Mostriamo che  $E_{\mathbf{A}}$  è non banale.

L'insieme degli  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \|\mathbf{x}\| = 1$  è un compatto; l'applicazione  $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}\|$  è continua in quanto composizione di funzioni continue, quindi sicuramente esiste un  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \|\mathbf{x}\| = 1$  che verifica il massimo.

In particolare  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  (perché ha norma 1) e

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}\| = m(\mathbf{A}) = m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}\| \implies \mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}}$$

- Mostriamo che  $E_{\mathbf{A}}$  è  $\mathbf{A}$ -invariante, ovvero che  $\forall \mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}} \implies \mathbf{A}\mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}}$

$$\mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}} \implies \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}\| = m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}\|$$

Dato che  $\mathbf{A} \in O(n)$  vale la seguente catena di uguaglianze:

$$\|\mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{x}) - \mathbf{A}\mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x})\| = \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}\| = m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}\| = m(\mathbf{A})\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \implies \mathbf{A}\mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}} \quad \square$$

Il seguente lemma è un noto risultato relativo alle scomposizioni ortogonali di spazi vettoriali.

**Lemma 1.2.4.**  $E_{\mathbf{A}}$  sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^n$  non banale, è possibile quindi definire il suo complemento ortogonale  $E_{\mathbf{A}}^{\perp} \neq \mathbb{R}^n$  ed anche questo è  $\mathbf{A}$ -invariante.

**Definizione 1.2.3.**

$$m^{\perp}(\mathbf{A}) = \begin{cases} \max \left\{ \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \mid \mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}}^{\perp} - \mathbf{0} \right\} & \text{se } E_{\mathbf{A}}^{\perp} \neq \mathbf{0} \\ 0 & \text{se } E_{\mathbf{A}}^{\perp} = \mathbf{0} \end{cases}$$

**Lemma 1.2.5.**

$$\begin{aligned} m^{\perp}(\mathbf{A}) &< m(\mathbf{A}) && \text{se } \mathbf{A} \neq \mathbf{id} \\ m^{\perp}(\mathbf{A}) &= m(\mathbf{A}) = 0 && \text{se } \mathbf{A} = \mathbf{id} \end{aligned} \quad (1.6)$$

*Dimostrazione.* • Se  $\mathbf{A} = \mathbf{id} \implies m(\mathbf{A}) = 0 \wedge E_{\mathbf{A}} = \mathbb{R}^n \implies E_{\mathbf{A}}^{\perp} = \mathbf{0} \implies m^{\perp}(\mathbf{A}) = 0$

- Se  $\mathbf{A} \neq \mathbf{id}$

$$m(\mathbf{A}) = \max \left\{ \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \mathbf{0} \right\} \geq \max \left\{ \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \mid \mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}}^{\perp} - \mathbf{0} \right\} = m^{\perp}(\mathbf{A})$$

Se valesse  $m(\mathbf{A}) = m^{\perp}(\mathbf{A}) \implies \exists \mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}}^{\perp} - \mathbf{0} : \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}\| = m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}\| \implies \mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}}$  ma questo implica  $\mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}} \cap E_{\mathbf{A}}^{\perp} = \mathbf{0} \implies \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ;

questo è però assurdo perché abbiamo imposto che  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

$\square$

**Lemma 1.2.6.**  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  posso scrivere  $\mathbf{x}$  in modo unico in decomposizione ortogonale.

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^E + \mathbf{x}^\perp \text{ dove } \mathbf{x}^E \in E_{\mathbf{A}} \text{ e } \mathbf{x}^\perp \in E_{\mathbf{A}}^\perp$$

É inoltre immediato verificare le seguenti proprietà:

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}^E - \mathbf{x}^E\| = m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}^E\|$$

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}^\perp - \mathbf{x}^\perp\| \leq m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}^\perp\|$$

Il seguente risultato ci permette di stimare la "misura" del commutatore di due matrici a partire dalla misura delle stesse.

**Lemma 1.2.7.**  $\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in O(n)$  vale la disuguaglianza

$$m([\mathbf{A}, \mathbf{B}]) \leq 2m(\mathbf{A})m(\mathbf{B})$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}, \mathbf{B}] - \text{id} &= \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1} - \text{id} = \\ &= (\mathbf{A}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{A})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1} = \\ &= [(\mathbf{A} - \text{id})(\mathbf{B} - \text{id}) - (\mathbf{B} - \text{id})(\mathbf{A} - \text{id})]\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1} \\ &= (\mathbf{A} - \text{id})(\mathbf{B} - \text{id})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1} - (\mathbf{B} - \text{id})(\mathbf{A} - \text{id})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1} \end{aligned}$$

Dalla precedente catena di uguaglianze segue, scelto comunque  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \|([\mathbf{A}, \mathbf{B}] - \text{id})\mathbf{x}\| &\leq \|(\mathbf{A} - \text{id})(\mathbf{B} - \text{id})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}\| + \|(\mathbf{B} - \text{id})(\mathbf{A} - \text{id})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}\| \leq \\ &\leq m(\mathbf{A})\|(\mathbf{B} - \text{id})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}\| + m(\mathbf{B})\|(\mathbf{A} - \text{id})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}\| \leq \\ &\leq m(\mathbf{A})m(\mathbf{B})\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}\| + m(\mathbf{B})m(\mathbf{A})\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}\| \end{aligned}$$

Dato che  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in O(n)$  è possibile scrivere  $\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ , quindi

$$\|([\mathbf{A}, \mathbf{B}] - \text{id})\mathbf{x}\| \leq 2m(\mathbf{A})m(\mathbf{B})\|\mathbf{x}\|$$

Quindi segue immediatamente la tesi. □



# Capitolo 2

## Primo teorema di Bieberbach

In questo capitolo sezione viene dimostrato il primo teorema di Bieberbach.

Nella prima sezione si dà la definizione precisa di gruppo cristallografico e viene esplicitato il contenuto del teorema nella forma in cui verrà dimostrato.

Nella seconda sezione sono presentati e dimostrati alcuni sottoteoremi che concorrono alla dimostrazione del primo teorema di Bieberbach.

Infine nella sezione finale verranno connesse le varie proposizioni in una dimostrazione del teorema vero e proprio.

### 2.1 Enunciati

In questo elaborato utilizzo la seguente definizione di gruppo cristallografico:

**Definizione 2.1.1.** *Sia  $\Gamma$  un sottogruppo di  $Isom(n)$ , dico che è un gruppo cristallografico  $n$ -dimensionale se valgono le seguenti condizioni:*

1.  $\forall t \in \mathbb{R} : t > 0$  esistono solo un numero finito di  $\alpha = (\mathbf{A}, \mathbf{a}) \in \Gamma$  tali che  $\|\mathbf{a}\| \leq t$
2.  $\exists d \in \mathbb{R} : \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \exists \alpha = (\mathbf{A}, \mathbf{a}) \in \Gamma : \|\mathbf{a} - \mathbf{x}\| \leq d$

La condizione 1. implica che il gruppo agisce in modo propriamente discontinuo sullo spazio topologico dato da  $\mathbb{R}^n$  con la topologia euclidea, mentre la condizione 2. significa che l'azione di  $\Gamma$  ha dominio fondamentale limitato. Ricorriamo che, dato uno spazio topologico  $X$  ed un gruppo  $G$  che agisce su di esso, un dominio fondamentale è un sottoinsieme di  $X$  che contiene uno ed un solo punto di ogni orbita dell'azione.

**Teorema 2.1.1.** *Ogni gruppo cristallografico  $n$ -dimensionale contiene  $n$  traslazioni linearmente indipendenti*

## 2.2 Mini Bieberbach e caratterizzazione delle translazioni

**Teorema 2.2.1.** *Mini Bieberbach.*

Sia  $\Gamma$  un gruppo cristallografico di  $\mathbb{E}^n$ . Comunque scelto  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{u}\| = 1$ ,  $\forall \epsilon, \delta > 0 \exists \alpha = (\mathbf{A}, \mathbf{a}) \in \Gamma$  che soddisfa

1.  $\mathbf{a} \neq 0$
2.  $\angle(\mathbf{u}, \mathbf{a}) \leq \delta$
3.  $m(\mathbf{A}) \leq \epsilon$

*Dimostrazione.* Per la seconda proprietà dei gruppi cristallografici sappiamo che  $\exists d \in \mathbb{R} : \forall k \in \mathbb{N} \exists \beta_k = (\mathbf{B}_k, \mathbf{b}_k) \in \Gamma$  tale che

$$\|\mathbf{b}_k - k\mathbf{u}\| \leq d$$

Se  $k \rightarrow \infty$  allora sicuramente  $\|\mathbf{b}_k\| \rightarrow \infty$ .

Infatti se, per assurdo, questo non fosse vero  $\exists M \in \mathbb{R} : \|\mathbf{b}_k\| \leq M \forall k \in \mathbb{N}$

$$d \geq \|\mathbf{b}_k - k\mathbf{u}\| \geq |\|\mathbf{b}_k\| - k|$$

Nella disequazione precedente, se la successione è limitata allora l'ultimo termine diverge ma questo è assurdo perché è maggiorato da  $d$ .

Consideriamo ora la successione degli angoli fra i vettori  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{b}_k$ , vogliamo mostrare che l'ampiezza tende a 0.

$$\angle(\mathbf{u}, \mathbf{b}_k) = \angle(k\mathbf{u}, \mathbf{b}_k) =: \theta_k$$

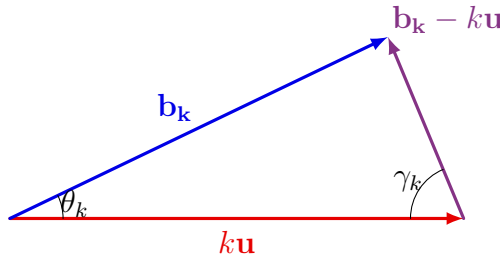


Figura 2.1: I vettori  $k\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{b}_k$  e  $\mathbf{b}_k - k\mathbf{u}$  formano un triangolo.  
Chiamo  $\gamma_k$  l'angolo contenuto fra  $k\mathbf{u}$  e  $\mathbf{b}_k - k\mathbf{u}$

Possiamo applicare il teorema dei seni al triangolo in figura ??

$$\frac{\|\mathbf{b}_k\|}{\sin(\gamma_k)} = \frac{\|\mathbf{b}_k - k\mathbf{u}\|}{\sin(\theta_k)} \leq \frac{d}{\sin(\theta_k)}$$

Si può ora riscrivere la disequazione in modo da ottenere

$$\sin(\theta_k) \leq \frac{\sin(\gamma_k)d}{\|\mathbf{b}_k\|} \rightarrow 0 \implies \theta_k \rightarrow 0$$

$O(n)$  è compatto e  $\{\mathbf{B}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  successione in  $O(n)$  ammette quindi almeno un punto di accumulazione per il teorema di Bolzano-Weierstrass. Si può quindi estrarre da  $\{\mathbf{B}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una sottosuccessione convergente:  $\{\mathbf{A}_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \{\mathbf{B}_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ .

La funzione  $m : O(n) \rightarrow \mathbb{R}$  è continua in quanto composizione di funzioni continue ( $\mathbf{A} \mapsto \max \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}\|$ ), quindi con  $i, j \in \mathbb{N} \rightarrow \infty$  sicuramente  $m(\mathbf{A}_j \mathbf{A}_i^{-1}) \rightarrow m(\mathbf{id}) = 0$ . Associata a questa sottosuccessione ho ovviamente una sottosuccessione di  $\{\beta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  che chiamo  $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \{(\mathbf{A}_k, \mathbf{a}_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ .

Dato che valgono tutte le proprietà appena dimostrate, è immediato verificare che  $\exists i, j \in \mathbb{N}$  tali che  $i < j$  e che valgano contemporaneamente

$$\begin{cases} \angle(u, \mathbf{a}_j) \leq \frac{\delta}{2} \\ \|\mathbf{a}_i\| \leq \frac{\delta}{4} \|\mathbf{a}_j\| \\ m(\mathbf{A}_j \mathbf{A}_i^{-1}) \leq \epsilon \end{cases}$$

Considero l'isometria definita da  $\alpha \in \Gamma$  come

$$\alpha = (\mathbf{A}, \mathbf{a}) : x \mapsto \alpha_j \alpha_i^{-1} \mathbf{x} = \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{x} + \mathbf{a}_j - \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{a}_i$$

Questa isometria verifica tutte le proprietà richieste dalla tesi

- $m(\mathbf{A}) = m(\mathbf{A}_j \mathbf{A}_i^{-1}) \leq \epsilon$  vero per precedente dimostrazione
- Verifichiamo  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_j - \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{a}_i \neq 0$

$$\|\mathbf{a}_j - \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{a}_i\| \geq \left| \|\mathbf{a}_j\| - \|\mathbf{A}_j \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{a}_i\| \right| \geq \left| \|\mathbf{a}_j\| + \|\mathbf{a}_i\| \right| \geq \|\mathbf{a}_i\| \left| \frac{4}{\delta} - 1 \right|$$

$$\|\mathbf{a}_i\| \neq 0 \implies \mathbf{a} \neq 0$$

- Verifichiamo  $\angle(\mathbf{u}, \mathbf{a}) = \angle(\mathbf{u}, \mathbf{a}_j - \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{a}_i) \leq \delta$ . Applicando la disuguaglianza triangolare sugli angoli si può scrivere

$$\angle(\mathbf{u}, \mathbf{a}_j - \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{a}_i) \leq \angle(\mathbf{u}, \mathbf{a}_j) + \angle(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_j - \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{a}_i) \quad (2.1)$$

Dato che  $\|\mathbf{a}_i\| \leq \frac{\delta}{4} \|\mathbf{a}_j\|$ , la punta del vettore  $\mathbf{a}_j - \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{a}_i$  cade all'interno di una palla n-dimensionale che ha come centro la punta di  $\mathbf{a}_j$  e raggio  $r = \frac{\delta}{4} \|\mathbf{a}_j\|$

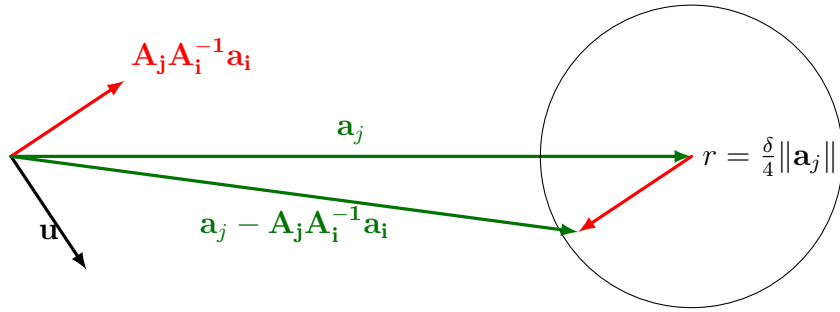


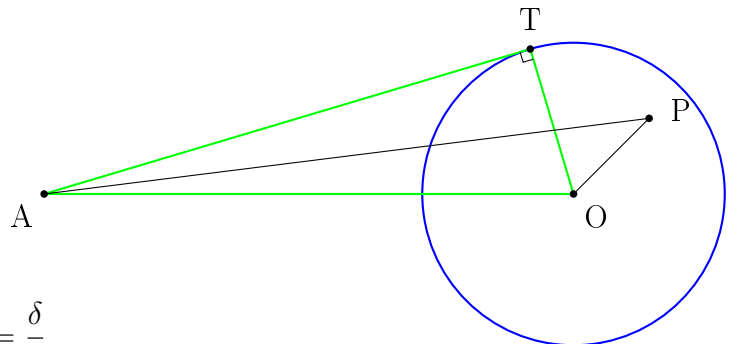
Figura 2.2: AGGIUNGERE UNA CAPTION SENSATA

$\forall P$  scelto all'interno della  
circonferenza  
 $\widehat{PAO} \leq \widehat{TAO}$

$$\frac{\overline{TO}}{\sin(\widehat{TAO})} = \frac{\overline{AO}}{\sin(\widehat{ATO})}$$

Quindi

$$\sin(\widehat{PAO}) \leq \sin(\widehat{TAO}) = \frac{\overline{TO}}{\overline{AO}} = \frac{\delta}{4}$$



So quindi che

$$\sin(\angle(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_j - \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{a}_i)) \leq \frac{\delta}{4} \implies \angle(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_j - \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{a}_i) \leq \frac{\delta}{4} + o\left(\frac{\delta^2}{16}\right) \leq \frac{\delta}{2} \quad (2.2)$$

E (9) insieme con (8) e  $\angle(\mathbf{u}, \mathbf{a}_j) \leq \frac{\delta}{2}$  implica che

$$\angle(\mathbf{u}, \mathbf{a}) \leq \delta$$

□

**Teorema 2.2.2.** *Comunque scelta  $\alpha \in \Gamma$ :  $x \mapsto \mathbf{A}x + \mathbf{a}$  tale per cui  $m(\mathbf{A}) \leq \frac{1}{2}$ , questa isometria è una traslazione pura*

*Dimostrazione.* Se  $m(\mathbf{A}) = 0 \implies A = id \implies \alpha$  è una traslazione pura.

Fra le isometrie in  $\Gamma$  che soddisfano la condizione  $0 < m(\mathbf{A}) \leq \frac{1}{2}$  scelgo quella che ha  $\|\mathbf{a}\|$  minimo (posso farlo perché vale la condizione (1) sugli elementi di un gruppo cristallografico).

So che  $m(\mathbf{A}) > m^\perp(\mathbf{A})$  se  $\mathbf{A} \neq id$ .

$\forall \mathbf{u} \in E_{\mathbf{A}}$  vettore unitario,

$$\epsilon := \frac{1}{8} (m(\mathbf{A}) - m^\perp(\mathbf{A}))$$

ed applico il teorema Mini Bieberbach.

$$\exists \beta \in \Gamma : m(\mathbf{B}) \leq \epsilon; \mathbf{b} \neq 0; \angle(\mathbf{u}, \mathbf{b}) \leq \delta$$

In particolare scelgo  $\delta$  in modo da avere  $\|\mathbf{b}^\perp\| \leq \|\mathbf{b}^E\|$ , posso farlo come da figura.

Fra questi  $\beta$  scelgo quello per cui  $\|\mathbf{b}\|$  è minimo ( $\neq 0$ , posso farlo per la prima proprietà dei gruppi cristallografici).

Osservo che, se  $\beta$  non è una traslazione, allora  $\|\mathbf{b}\| \geq \|\mathbf{a}\|$ , questo perché  $m(\mathbf{B}) \leq \frac{1}{8}m(\mathbf{A}) \leq \frac{1}{4}$  e  $\alpha$  è stato scelto fra le isometrie in  $\Gamma$  con in modo da minimizzare il modulo della componente traslatoria).

Definisco una nuova isometria  $\tilde{\beta} := [\alpha, \beta] \in \Gamma$

So dal lemma 1.3 e dal lemma 1.10 che

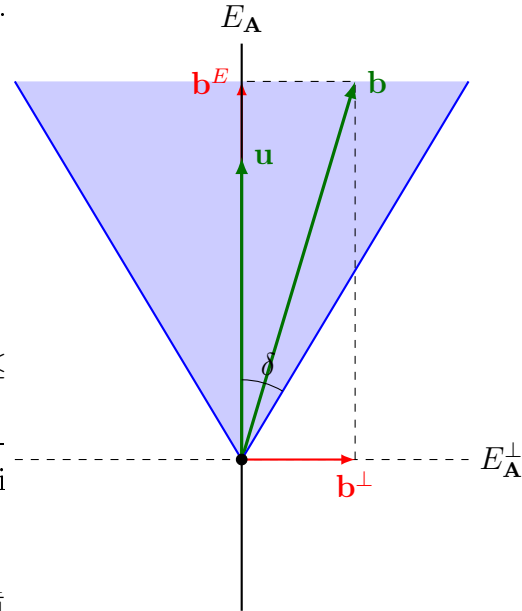
$$m(\tilde{\beta}) = m[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \leq 2m(\mathbf{A})m(\mathbf{B}) \leq 2\frac{1}{2}m(\mathbf{B}) = m(\mathbf{B})$$

$$\text{trans}(\tilde{\beta}) = (\mathbf{A} - id)\mathbf{b} + (id - [\mathbf{A}, \mathbf{B}])\mathbf{b} + \mathbf{A}(id - \mathbf{B})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a} = (\mathbf{A} - id)\mathbf{b} + \mathbf{r}$$

Con  $\mathbf{r} = (id - \tilde{\mathbf{B}})\mathbf{b} + \mathbf{A}(id - \mathbf{B})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}$  e  $\tilde{\mathbf{b}}^\perp = (\mathbf{A} - id)\mathbf{b}^\perp + \mathbf{r}$ .

- Se  $\beta$  è una traslazione  $\implies \mathbf{B} = id = \tilde{\mathbf{B}} \implies \mathbf{r} = 0$ .
- Se  $\beta$  non è una traslazione  $\implies \|\mathbf{b}\| \geq \|\mathbf{a}\|$  e quindi

$$\|\mathbf{r}\| \leq m(\tilde{\mathbf{B}})\|\mathbf{b}\| + m(\mathbf{B})\|\mathbf{a}\| \leq (m(\tilde{\mathbf{B}}) + m(\mathbf{B}))\|\mathbf{b}\| \leq 2m(\mathbf{B})(\mathbf{b}^E + \mathbf{b}^\perp) < 4m(\mathbf{B})\|\mathbf{b}^E\| \leq \frac{1}{2}(m(\mathbf{A}) - m(\mathbf{B}))\|\mathbf{b}^E\|$$



In entrambi i casi ho che  $\|\mathbf{r}\| < \frac{1}{2}(m(\mathbf{A}) - m^\perp(\mathbf{A}))\|\mathbf{b}^E\|$ .

Posso scrivere

$$\tilde{\mathbf{b}}^E - (\mathbf{A} - \mathbf{id})\mathbf{b}^E - \mathbf{r}^E = (\mathbf{A} - \mathbf{id})\mathbf{b}^\perp + \mathbf{r}^\perp - \tilde{\mathbf{b}}^\perp = 0$$

Usando la caratterizzazione  $\|\mathbf{b}^\perp\| \leq \|\mathbf{b}^E\|$  ottengo

$$\|\tilde{\mathbf{b}}^\perp\| \leq m^\perp(\mathbf{A})\|\mathbf{b}^\perp\| + \|\mathbf{r}^\perp\| < m^\perp(\mathbf{A})\|\mathbf{b}^E\| + \frac{1}{2}(m(\mathbf{A}) - m(\mathbf{A}^\perp))\|\mathbf{b}^E\|$$

Sommando a destra ottengo

$$\|\tilde{\mathbf{b}}^\perp\| < \frac{1}{2}(m(\mathbf{A}) + m(\mathbf{A}^\perp))$$

D'altro canto, utilizzando la disuguaglianza triangolare inversa, posso scrivere

$$\|\mathbf{b}^E\| = \|(\mathbf{A} - \mathbf{id})\mathbf{b}^E + \mathbf{r}^E\| \geq \left| m(\mathbf{A})\|\mathbf{b}^E\| - \|\mathbf{r}\| \right| > m(\mathbf{A})\|\mathbf{b}^E\| - \frac{1}{2}(m(\mathbf{A}) - m^\perp(\mathbf{A}))\|\mathbf{b}^E\| = \frac{1}{2}(m(\mathbf{A}) + m^\perp(\mathbf{A}))\|\mathbf{b}^E\|$$

In particolare quindi

$$\|\mathbf{b}^E\| > \|\mathbf{b}^\perp\|$$

So inoltre che

$$\|\tilde{\mathbf{b}}\| \leq m(\mathbf{A})\|\mathbf{b}\| + \|\mathbf{r}\| < m(\mathbf{A})\|\mathbf{b}\| + \frac{1}{2}(m(\mathbf{A}) - m^\perp(\mathbf{A}))\|\mathbf{b}^E\| \leq \|\mathbf{b}\|\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) < \|\mathbf{b}\|$$

Ho un assurdo perché  $\beta$  era stato scelto fra tutti quelli che soddisfavano le condizioni in modo da minimizzare la norma di  $\mathbf{b}$ .

□

## 2.3 Dimostrazione del primo teorema di Bieberbach

Posso quindi concludere la dimostrazione del primo teorema di Bieberbach.

*Dimostrazione.* Considero la base standard di  $\mathbb{R}^N$ ; se applico ad ognuno dei vettori di tale base il teorema Mini Bieberbach con  $\epsilon = \frac{1}{2}$  e  $\delta = 1/N \forall N \in \mathbb{N}$ , ottengo  $n$  successioni di elementi in  $\Gamma$  che sono traslazioni pure (per il teorema 6.2). Se passo al limite per  $N \rightarrow \infty$  so che ognuna di queste successioni converge ad un elemento in  $\Gamma$

(NON è VEROOOOOOOO!!! come faccio qui? devo far vedere che converge ad una direzione, ma non saprei come farlo. Inoltre come faccio a dire che se tot vettori distano ognuno meno di  $\delta$  da un vettore della base standard, allora questi sono linearmente indipendenti? posso fare il limite per  $n \rightarrow \infty$ ? non convergono necessariamente i moduli)

□



# Capitolo 3

## Secondo teorema di Bieberbach

**Definizione 3.0.1.** *Un reticolo  $L$  è un gruppo cristallografico che contiene solo traslazioni. Gli elementi di  $L$  possono essere identificati con i vettori di  $\mathbb{R}^n$  corrispondenti alla propria componente di traslazione e vengono chiamati punti di reticolo.*

Dato un elemento  $\omega \in L$ , per abuso di notazione scriveremo  $\omega = \text{trans}(\omega) = \mathbf{w}$ . Enuncio il seguente risultato senza dimostrarlo.

**Lemma 3.0.1.** *Ogni reticolo  $L$  di dimensione  $n$  è isomorfo a  $\mathbb{Z}^n$ .*

*Di conseguenza  $L$  è abeliano e la distanza minima fra due punti di reticolo coincide con la lunghezza del minimo vettore non nullo in  $L$ .*

**Lemma 3.0.2.** *Sia  $L$  un reticolo in  $\mathbb{E}^n$  i cui vettori abbiano distanza a coppie  $\geq 1$ .*

*Sia  $\rho > 0$ , chiamo  $P(\rho)$  il numero di punti di reticolo in  $L$  con distanza dall'origine  $\leq \rho$ .*

$$P(\rho) \leq (2\rho + 1)^n$$

*Dimostrazione.* Per ogni punto di reticolo a distanza inferiore o uguale di  $\rho$  dall'origine posso considerare una palla aperta  $n$ -dimensionale centrata in esso e di raggio  $\frac{1}{2}$ . Queste palle sono sicuramente disgiunte in quanto la distanza fra due punti del reticolo è superiore al doppio dei raggi; sono inoltre tutte contenute nella palla  $n$ -dimensionale centrata nell'origine di raggio  $\rho + \frac{1}{2}$ . Il volume della palla centrata nell'origine è sicuramente superiore alla somma dei volumi delle singole palle di raggio  $\frac{1}{2}$ , confrontando i volumi ottengo

$$P(\rho) \left(\frac{1}{2}\right) \leq \left(\rho + \frac{1}{2}\right)^n$$

$$P(\rho) \leq (2\rho + 1)^n$$

□

**Lemma 3.0.3.** *Sia  $L$  un reticolo in  $\mathbb{E}^n$  i cui vettori abbiano distanza a coppie  $\geq 1$ .*

*Consideriamo un sottospazio lineare di  $\mathbb{R}^n$  generato da  $k$  vettori  $\mathbf{w}_i \in L$  con  $i = 1, \dots, k$ .*

*Se un punto di reticolo  $\mathbf{w} \in L$  non è contenuto in  $E$ , allora la sua componente in  $E^\perp$  è tale che*

$$\|\mathbf{w}^\perp\| \geq \left(3 + \sum_{i=1}^k \|\mathbf{w}_i\|\right)^{-n}$$

*Dimostrazione.* Sia

$$N = \left\lfloor \left(3 + \sum_{i=1}^k \|\mathbf{w}_i\|\right)^n \right\rfloor$$

- Se  $\exists \alpha \in \Gamma$  e  $1 \leq i \leq k : \mathbf{Aw}_i \notin E$  allora, grazie al lemma 2.0.4 so che  $\mathbf{Aw}_i \in L(\Gamma)$ , inoltre  $\|\mathbf{Aw}_i\| = 1$  dato che  $A \in O(n)$ , quindi  $\mathbf{Aw}_i$  è già il  $k + 1$ -esimo vettore cercato.



- Se, al contrario, tutte le componenti di rotazione delle isometrie in  $\Gamma$  lasciano  $E$  invariato, allora queste lasciano invariato anche  $E^\perp$ .

Definisco la trasformazione affine

$$\Phi_\nu(x^E + x^\perp) = x^E + \nu x^\perp, \nu > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Scelto comunque  $\alpha$  con componente rotatoria  $\mathbf{A}$ , dato che le componenti rotatorie di  $\Gamma$  lasciano invariate  $E$  ed  $E^\perp$  vale

$$(\Phi_\nu \circ \mathbf{A})(\mathbf{x}) = \Phi_\nu(\mathbf{Ax}) = \Phi_\nu(\mathbf{Ax}^E + \mathbf{Ax}^\perp) = \mathbf{Ax}^E + \nu \mathbf{Ax}^\perp = \mathbf{Ax}^E + \mathbf{A}(\nu \mathbf{x}^\perp) = \mathbf{A}(\mathbf{x}^E + \nu \mathbf{x}^\perp) = (\mathbf{A} \circ \Phi_\nu)(\mathbf{x})$$

Quindi la funzione affine  $\Phi_\nu$  commuta con la parte rotazionale delle isometrie in  $\Gamma$ .

Definisco il gruppo  $\Gamma_\nu := \Phi_\nu \Gamma \Phi_\nu^{-1} < \text{Aff}(\mathbb{R}^n)$ . Questo è coniugato a  $\Gamma$  nel gruppo affine (ed è quindi isomorfo a  $\Gamma$ ), ma è effettivamente anche un gruppo di isometrie in quanto

$$\forall \alpha_\nu \in \Gamma_\nu \exists \alpha \in \Gamma : \alpha_\nu = \Phi_\nu \alpha \Phi_\nu^{-1}$$

$$\text{rot}(\alpha_\nu) = \text{rot}(\Phi_\nu \alpha \Phi_\nu^{-1}) = \text{rot}(\alpha) \in O(n)$$

Se  $\beta_\nu \in L(\Gamma_\nu)$  con  $\beta_\nu = \Phi_\nu \beta \Phi_\nu^{-1} \implies \text{rot}(\beta_\nu) = \text{rot}(\Phi_\nu \beta \Phi_\nu^{-1}) = \text{rot}(\beta) = \mathbf{id} \implies \beta \in L(\Gamma)$ .

Scrivo  $\beta \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{b}$ .

$$\beta_\nu \mathbf{x} = (\Phi_\nu \beta \Phi_\nu^{-1})(\mathbf{x}) = (\Phi_\nu \beta \Phi_\nu^{-1})(\mathbf{x}^E + \mathbf{x}^\perp) = (\Phi_\nu \beta)(\mathbf{x}^E + \frac{1}{\nu} \mathbf{x}^\perp) = \Phi_\nu(\mathbf{x}^E + \frac{1}{\nu} \mathbf{x}^\perp + \mathbf{b}) = \mathbf{x}^E + \mathbf{x}^\perp + \Phi_\nu(\mathbf{b})$$

Quindi  $L(\Gamma_\nu) = L(\Phi_\nu \Gamma \Phi_\nu^{-1}) = \Phi_\nu(L(\Gamma))$ .

A questo punto se io considero  $\nu > 0$  e suppongo che i vettori in  $L(\Gamma_\nu)$  abbiano distanze a coppie  $\geq 1$ , posso applicare il teorema 2.0.3 utilizzando il sottospazio  $E$ . So quindi che  $\forall \mathbf{w}_\nu \in L(\Gamma_\nu)$  tale che  $\mathbf{w}_\nu^\perp \neq \mathbf{0}$  vale

$$\|\mathbf{w}_\nu^\perp\| \geq (3+k)^{-n}$$

So inoltre che  $\exists \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{w}_\nu = \Phi_\nu(\mathbf{w})$ , quindi posso scrivere

$$\|\mathbf{w}_\nu^\perp\| = \|\Phi_\nu(\mathbf{w})^\perp\| = \|(\mathbf{w}^E + \nu \mathbf{w}^\perp)^\perp\| = \|\nu \mathbf{w}^\perp\| = \nu \|\mathbf{w}^\perp\| \geq \frac{1}{(3+k)^n}$$

Se scelgo  $\nu$  molto piccolo, la disuguaglianza precedente non vale più, e di conseguenza non è vero che i vettori in  $L(\Gamma_\nu)$  hanno distanze a coppie  $\geq 1$ . Esiste quindi un  $\nu' > 0$  minimo tale che la condizione (1) della definizione di gruppo cristallografico normale vale in  $\Gamma_{\nu'}$ .

Dato che la trasformazione affine  $\Phi_{\nu'}$  mantiene fissi tutti gli elementi  $E$ , il vettore più corto che si trova in  $L(\Gamma_{\nu'}) - E = \Phi_{\nu'}(L(\Gamma)) - E = \Phi_{\nu'}(L(\Gamma) - E)$  ha norma 1 (PERCHÉ?????????????????)

Quindi ho trovato  $\Gamma_{\nu'} \cong \Gamma$  che contiene  $k+1$  vettori unitari linearmente indipendenti ed ho mostrato che  $\Gamma_{\nu'}$  è un gruppo cristallografico normale.

La dimostrazione si conclude per induzione. □

**Teorema 3.0.6.** *Ogni gruppo cristallografico normale è unicamente caratterizzato da una tabella di gruppo*

*Dimostrazione.* Sia  $\Gamma$  il gruppo cristallografico normale, siano fissati  $n$  vettori  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n \in L(\Gamma)$  tali che siano linearmente indipendenti e  $\|\mathbf{w}_i\| = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n$ .

Considero il sottoreticolo di  $L(\Gamma)$

$$L = \left\{ \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{w}_i \mid m_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, n \right\}$$

$L$  è ovviamente un sottogruppo di  $\Gamma$ , faccio il quoziente  $\Gamma/L$ ; da ognuno degli elementi di questo quoziente scelgo un rappresentante  $\omega$  la cui componente traslazionale  $\mathbf{w}$  sia tale che

$$\|\mathbf{w}\| \leq \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n \|\mathbf{w}_i\| \right) = \frac{n}{2}$$

Per la prima proprietà dei gruppi cristallografici esistono solo un numero finito di questi rappresentanti, li chiamo  $\omega_{n+1}, \dots, \omega_N$ .

Adesso  $\forall \alpha \in \Gamma$ , questo può essere scritto come

$$\alpha = \left( \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{w}_i \right) \omega_\nu \quad n+1 \leq \nu \leq N$$

Se considero  $\omega_i \in \Gamma$  con  $i = 1, \dots, n$  come le traslazioni di vettori  $w_i \quad i = 1, \dots, n$ , posso caratterizzare unicamente la struttura di gruppo di  $\Gamma$  a meno di isomorfismo come

$$\omega_j \omega_k = \left( \sum_{i=1}^n m_{ijk} \mathbf{w}_i \right) \omega_{\nu(j,k)} \quad \forall j, k = 1, \dots, N \quad (3.1)$$

$\Gamma$  è quindi unicamente determinato (a meno di isomorfismo) da  $N, \omega_{\nu(j,k)}$  e  $m_{ijk} \in \mathbb{Z}$ .

□

**Teorema 3.0.7.** *I valori assoluti di  $N, \omega_{\nu(j,k)}$  e  $m_{ijk}$  sono maggiorati da un intero che dipende solo dalla dimensione  $n$  dello spazio euclideo.*