1 Introduzione

Devo dire che è una dim geometrica
Devo dire che uso la dim di Buser e faccio solo i primi due teoremi di Bieb
Devo enunciare i teoremi di Bieb

2 Considerazioni preliminari

In questa sezione vengono enunciati e dimostrati gli strumenti fondamentali necessari per dare una dimostrazione geometria dei primi due teoremi di Bieberbach.
Considero lo spazio vettoriale n-dimensionale $\mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare definito $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ da

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

e la norma associata

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$$

Definisco la distanza fra due vettori e l'angolo fra essi.
$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

$$\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = arccos(\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}) \in [0, \pi]$$

Imponendo una metrica sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ ottengo lo spazio euclideo $\mathbb{E}^n$.

Definizione 2.1. *Un'isometria di $\mathbb{E}^n$ è un funzione $\alpha : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vale*

$$d(\alpha(\mathbf{x}), \alpha(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

Il seguente teorema è enunciato senza dimostraione in quanto si tratta di un risultato classico dell'algebra lineare.

Teorema 2.1. *Data un'isometria di $\mathbb{E}^n$, questa può essere scritta in modo unico come composizione di una rotazione e di una traslazione*

$$\alpha : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{x} \longmapsto \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{a}$$

dove $\mathbf{A} = rot(\alpha) \in O(n)$ è la componente di rotazione di α
e $\mathbf{a} = trans(\alpha) \in \mathbb{R}^n$ è la componente di traslazione dell'isometria.

Lemma 2.2. *L'insieme delle isometrie di $\mathbb{E}^n$ è un gruppo rispetto all'operazione di composizione di applicazioni lineari. Lo chiamiamo $Isom(n)$.*

Definizione 2.2. *Comunque prese $\alpha, \beta \in Isom(n)$ posso scriverle come $\alpha : \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{a}$ e $\beta : \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ Definisco il loro commutatore come $[\alpha, \beta] = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$.*

Lemma 2.3. *Comunque prese $\alpha, \beta \in Isom(n)$ valgono le due seguenti uguaglianze:*

$$rot([\alpha, \beta]) = [\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1} \tag{1}$$

$$trans([\alpha, \beta]) = (\mathbf{A} - \mathbf{id})\mathbf{b} + (\mathbf{id} - [\mathbf{A}, \mathbf{B}])\mathbf{b} + \mathbf{A}(\mathbf{id} - \mathbf{B})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a} \tag{2}$$

Dimostrazione. $[\alpha, \beta](\mathbf{x}) = (\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1})(\mathbf{x})$.
Dato che $\alpha : \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{a}$, allora sicuramente $\alpha^{-1} : \mathbf{y} \longmapsto \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{a})$.
Allo stesso modo, dato che $\beta : \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, so che $\beta^{-1} : \mathbf{y} \longmapsto \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{b})$.

$$
\begin{aligned}
[\alpha,\beta](\mathbf{x}) = (\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1})(\mathbf{x}) &= (\alpha\beta\alpha^{-1})(\mathbf{B^{-1}}(\mathbf{x}-\mathbf{b})) = \\
&= (\alpha\beta\alpha^{-1})(\mathbf{B^{-1}x}-\mathbf{B^{-1}b}) = \\
&= (\alpha\beta)(\mathbf{A^{-1}}(\mathbf{B^{-1}x}-\mathbf{B^{-1}b}-\mathbf{a})) = \\
&= (\alpha\beta)(\mathbf{A^{-1}B^{-1}x}-\mathbf{A^{-1}B^{-1}b}-\mathbf{A^{-1}a}) = \\
&= (\alpha)(\mathbf{B}(\mathbf{A^{-1}B^{-1}x}-\mathbf{A^{-1}B^{-1}b}-\mathbf{A^{-1}a})+\mathbf{b}) = \\
&= (\alpha)(\mathbf{BA^{-1}B^{-1}x}-\mathbf{BA^{-1}B^{-1}Suquestospaziodb}-\mathbf{BA^{-1}a}+\mathbf{b}) = \\
&= \mathbf{A}(\mathbf{BA^{-1}B^{-1}x}-\mathbf{BA^{-1}B^{-1}b}-\mathbf{BA^{-1}a}+\mathbf{b})+\mathbf{a} = \\
&= \mathbf{A}(\mathbf{BA^{-1}B^{-1}x}-\mathbf{BA^{-1}B^{-1}b}-\mathbf{BA^{-1}a}+\mathbf{b})+\mathbf{a} = \\
&= \mathbf{ABA^{-1}B^{-1}x}-\mathbf{ABA^{-1}B^{-1}b}-\mathbf{ABA^{-1}a}+\mathbf{Ab}+\mathbf{a}
\end{aligned}
$$

Quindi ho che $rot([\alpha,\beta]) = \mathbf{ABA^{-1}B^{-1}}$ e

$$
\begin{aligned}
trans([\alpha,\beta]) &= -\mathbf{ABA^{-1}B^{-1}b}-\mathbf{ABA^{-1}a}+\mathbf{Ab}+\mathbf{a} = \\
&= \mathbf{Ab}+\mathbf{a}-\mathbf{ABA^{-1}B^{-1}b}-\mathbf{ABA^{-1}a} = \\
&= (\mathbf{A}-\mathbf{id})\mathbf{b}+\mathbf{b}+\mathbf{a}-\mathbf{ABA^{-1}B^{-1}b}-\mathbf{ABA^{-1}a} = \\
&= (\mathbf{A}-\mathbf{id})\mathbf{b}+(\mathbf{id}-[\mathbf{A},\mathbf{B}])\mathbf{b}+\mathbf{a}-\mathbf{ABA^{-1}a} = \\
&= (\mathbf{A}-\mathbf{id})\mathbf{b}+(\mathbf{id}-[\mathbf{A},\mathbf{B}])\mathbf{b}+(\mathbf{id}-\mathbf{ABA^{-1}})\mathbf{a} = \\
&= (\mathbf{A}-\mathbf{id})\mathbf{b}+(\mathbf{id}-[\mathbf{A},\mathbf{B}])\mathbf{b}+\mathbf{A}(\mathbf{id}-\mathbf{B})\mathbf{A^{-1}a}
\end{aligned}
$$

□

Definizione 2.3. *Comunque preso* $\mathbf{A} \in O(n)$ *definisco*

$$m(\mathbf{A}) = \max\left\{\frac{\|\mathbf{Ax}-\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}\middle|\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \mathbf{0}\right\}$$

Lemma 2.4. *La precedente è una buona definizione e inoltre vale la seguente uguaglianza:*

$$m(\mathbf{A}) = \max\left\{\|\mathbf{Ax}-\mathbf{x}\|\middle|\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \|\mathbf{x}\| = 1\right\}$$

Dimostrazione. $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \mathbf{0}$ $\exists \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n - \mathbf{0}$ tale che
$\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y}, \lambda \in \mathbb{R} \wedge \|\mathbf{y}\| = 1$.

$$\frac{\|\mathbf{Ax}-\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\|\mathbf{A}\lambda\mathbf{y}-\lambda\mathbf{y}\|}{\|\lambda\mathbf{y}\|} = \frac{|\lambda|\|\mathbf{Ay}-\mathbf{y}\|}{|\lambda|\|\mathbf{y}\|} = \|\mathbf{Ay}-\mathbf{y}\|$$

$$m(\mathbf{A}) = \max\left\{\|\mathbf{Ax}-\mathbf{x}\|\middle|\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \|\mathbf{x}\| = 1\right\}$$

L'insime $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \|\mathbf{x}\| = 1$ è un compatto in $\mathbb{R}^n$, quindi per il teorema di Weierstrass esiste una $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \|\mathbf{x}\| = 1$ che mi verifica il max. □

Lemma 2.5. *Comunque preso* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *vale*

$$\|\mathbf{Ax}-\mathbf{x}\| \leq m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}\|$$

Dimostrazione. Infatti vale $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \mathbf{0}$ e vale anche per $\mathbf{x} = 0$ □

Definizione 2.4.

$$E_{\mathbf{A}} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{Ax}-\mathbf{x}\| = m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}\|\}$$

Lemma 2.6. E_A *è un sottospazio di* $\mathbb{R}^n$ *non banale ed A-invariante*

Dimostrazione.

- $\mathbf{0} \in E_{\mathbf{A}}$
- $\forall \mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
  $\mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}} \implies \|\mathbf{Ax}-\mathbf{x}\| = m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}\| \implies \|\mathbf{A}\lambda\mathbf{x}-\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}\| \implies \lambda\mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}}$

- $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E_{\mathbf{A}}$ voglio verificare che $\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}-\mathbf{y} \in E_{\mathbf{A}}$
  $\mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}} \Longrightarrow \|\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{x}\| = m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}\|$
  $\mathbf{y} \in E_{\mathbf{A}} \Longrightarrow \|\mathbf{A}\mathbf{y}-\mathbf{y}\| = m(\mathbf{A})\|\mathbf{y}\|$

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y})-(\mathbf{x}+\mathbf{y})\|^2+\|\mathbf{A}(\mathbf{x}-\mathbf{y})-(\mathbf{x}-\mathbf{y})\|^2=\|\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{x}+\mathbf{A}\mathbf{y}-\mathbf{y}\|^2+\|\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{x}-(\mathbf{A}\mathbf{y}-\mathbf{y})\|^2=\\&=2\|\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{x}\|^2+2\|\mathbf{A}\mathbf{y}-\mathbf{y}\|^2=2(\|\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{x}\|^2+\|\mathbf{A}\mathbf{y}-\mathbf{y}\|^2)=2m(\mathbf{A})^2(\|\mathbf{x}\|^2+\|\mathbf{y}\|^2)\end{aligned} \tag{3}$$

  Da (3) segue

$$\begin{aligned}2m(\mathbf{A})^2(\|\mathbf{x}\|^2+\|\mathbf{y}\|^2)&=\|\mathbf{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y})-(\mathbf{x}+\mathbf{y})\|^2+\|\mathbf{A}(\mathbf{x}-\mathbf{y})-(\mathbf{x}-\mathbf{y})\|^2\le m(\mathbf{A})^2(\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2+\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2)\\&=m(\mathbf{A})^2(\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2+\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2)=2m(\mathbf{A})^2(\|\mathbf{x}\|^2+\|\mathbf{y}\|^2)\end{aligned} \tag{4}$$

  Quindi il segno di disuguaglianza in (4) è un'uguaglianza, in particolare

$$\|\mathbf{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y})-(\mathbf{x}+\mathbf{y})\|^2+\|\mathbf{A}(\mathbf{x}-\mathbf{y})-(\mathbf{x}-\mathbf{y})\|^2=m(\mathbf{A})^2(\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2+\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2)$$

  Spostando i termini da parte a parte ottengo

$$\|\mathbf{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y})-(\mathbf{x}+\mathbf{y})\|^2-m(\mathbf{A})^2\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2=m(\mathbf{A})^2\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2-\|\mathbf{A}(\mathbf{x}-\mathbf{y})-(\mathbf{x}-\mathbf{y})\|^2$$

$$\begin{aligned}&\Big(\|\mathbf{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y})-(\mathbf{x}+\mathbf{y})\|+m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|\Big)\Big(\|\mathbf{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y})-(\mathbf{x}+\mathbf{y})\|-m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|\Big)=\\&\qquad-\Big(\|\mathbf{A}(\mathbf{x}-\mathbf{y})-(\mathbf{x}-\mathbf{y})\|+m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|\Big)\Big(\|\mathbf{A}(\mathbf{x}-\mathbf{y})-(\mathbf{x}-\mathbf{y})\|-m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|\Big)\end{aligned} \tag{5}$$

  Distinguiamo alcuni casi:

  - Se $\mathbf{A} = \mathbf{id} \Rightarrow m(\mathbf{A}) = 0 \Rightarrow E_{\mathbf{A}} = \mathbb{R}^n$ ed in quel caso ho chiuso la dimostrazione.
  - Se $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ o $\mathbf{x} = -\mathbf{y}$ ho già chiuso la dimostrazione per il punto precedente (rispettivamente con $\lambda = +1$ e $\lambda = -1$).
  - Nei restanti casi posso osservare che nell'equazione (5) il primo fattore a sinistra dell'uguaglianza è è strettamente positivo, mentre il secondo fattore è ≤ 0. Allo stesso modo a destra dell'uguaglianza ho un meno che mi modifica il segno del prodotto; il primo fattore è strettamente positivo ed il secondo è ≤ 0.
    L'uguaglianza in (5) deve quindi per forza coincidere con $0 = 0$ e questo mi implica

$$\begin{cases}\|\mathbf{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y})-(\mathbf{x}+\mathbf{y})\|=m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|\\\|\mathbf{A}(\mathbf{x}-\mathbf{y})-(\mathbf{x}-\mathbf{y})\|=m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|\end{cases}$$

    $\Longrightarrow \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}-\mathbf{y} \in E_{\mathbf{A}}$

  Ho concluso la dimostrazione del fatto che $E_{\mathbf{A}}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$

- Mostro che $E_{\mathbf{A}}$ è non banale.

$$m(\mathbf{A}) = \max\left\{\|\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{x}\| \,\middle|\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \|\mathbf{x}\| = 1\right\}$$

  L'insieme degli $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \|\mathbf{x}\| = 1$ è un compatto; l'applicazione $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{x}\|$ è continua in quanto composizione di funzioni continue, quindi sicuramente esiste un $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \|\mathbf{x}\| = 1$ che mi verifica il massimo. In particolare $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (perché ha norma 1) e

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{x}\| = m(\mathbf{A}) = m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}\| \Longrightarrow \mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}}$$

- Mostro che $E_{\mathbf{A}}$ è $\mathbf{A}$-invariante.
  $\forall \mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}}$ voglio mostrare che $\mathbf{A}\mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}}$
  $\mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}} \Longrightarrow \|\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{x}\| = m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}\|$
  Dato che $\mathbf{A} \in O(n)$ ho la seguente catena di uguaglianze:
  $\|\mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{x})-\mathbf{A}\mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{x})\| = \|\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{x}\| = m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}\| = m(\mathbf{A})\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \Longrightarrow \mathbf{A}\mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}}$

□

Lemma 2.7. *$E_{\mathbf{A}}$ sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ non banale, quindi posso definire il suo complemento ortogonale $E_{\mathbf{A}}^{\perp} \neq \mathbb{R}^n$ ed anche questo è $\mathbf{A}$-invariante.*

Definizione 2.5.

$$m^{\perp}(\mathbf{A}) = \begin{cases} \max \left\{ \frac{\|\mathbf{Ax}-\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \middle| \mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}}^{\perp} - \mathbf{0} \right\} & se E_{\mathbf{A}}^{\perp} \neq \mathbf{0} \\ 0 & se E_{\mathbf{A}}^{\perp} = \mathbf{0} \end{cases}$$

Lemma 2.8. *$m^{\perp}(\mathbf{A}) < m(\mathbf{A})$ se $\mathbf{A} \neq \mathbf{id}$*
$m^{\perp}(\mathbf{A}) = m(\mathbf{A}) = 0$ se $\mathbf{A} = \mathbf{id}$

Dimostrazione.

- Se $\mathbf{A} = \mathbf{id} \Longrightarrow m(\mathbf{A}) = 0 \wedge E_{\mathbf{A}} = \mathbb{R}^n$. Quindi $E_{\mathbf{A}}^{\perp} = 0 \Longrightarrow m^{\perp}(\mathbf{A}) = 0$
- Se $\mathbf{A} \neq \mathbf{id}$

$$m(\mathbf{A}) = \max \left\{ \frac{\|\mathbf{Ax}-\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \middle| \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \mathbf{0} \right\} \geq \max \left\{ \frac{\|\mathbf{Ax}-\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \middle| \mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}}^{\perp} - \mathbf{0} \right\} = m^{\perp}(\mathbf{A})$$

Se valesse $m(\mathbf{A}) = m^{\perp}(\mathbf{A}) \Longrightarrow \exists \mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}}^{\perp} - \mathbf{0} : \|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\| = m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}\| \Longrightarrow \mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}}$ ma questo implica $\mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}} \cap E_{\mathbf{E}}^{\perp} = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ma questo è assurdo perché ho imposto che $x \neq \mathbf{0}$

□

Lemma 2.9. *$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ posso scrivere $\mathbf{x}$ in modo unico in decomposizione ortogonale.*
$\mathbf{x} = \mathbf{x}^E + \mathbf{x}^{\perp}$ dove $\mathbf{x}^E \in E_{\mathbf{A}}$ e $\mathbf{x}^{\perp} \in E_{\mathbf{A}}^{\perp}$
Valgono inoltre le proprietà:

$$\left\|\mathbf{Ax}^E - \mathbf{x}\right\| = m(\mathbf{A})\left\|\mathbf{x}^E\right\|$$

$$\left\|\mathbf{Ax}^{\perp} - \mathbf{x}\right\| \leq m(\mathbf{A})\left\|\mathbf{x}^{\perp}\right\|$$

Lemma 2.10. *$\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in O(n)$ vale la disuguaglianza $m([\mathbf{A}, \mathbf{B}]) \leq 2m(\mathbf{A})m(\mathbf{B})$*

Dimostrazione.

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] - \mathbf{id} = \mathbf{ABA^{-1}B^{-1}} - \mathbf{id} = (\mathbf{AB} - \mathbf{BA})\mathbf{A^{-1}B^{-1}} = [(\mathbf{A} - \mathbf{id})(\mathbf{B} - \mathbf{id}) - (\mathbf{B} - \mathbf{id})(\mathbf{A} - \mathbf{id})]\mathbf{A^{-1}B^{-1}} =$$
$$= (\mathbf{A} - \mathbf{id})(\mathbf{B} - \mathbf{id})\mathbf{A^{-1}B^{-1}} - (\mathbf{B} - \mathbf{id})(\mathbf{A} - \mathbf{id})\mathbf{A^{-1}B^{-1}}$$

$$\begin{aligned} \|([\mathbf{A}, \mathbf{B}] - \mathbf{id})\mathbf{x}\| &\leq \left\|(\mathbf{A} - \mathbf{id})(\mathbf{B} - \mathbf{id})\mathbf{A^{-1}B^{-1}x}\right\| + \left\|(\mathbf{B} - \mathbf{id})(\mathbf{A} - \mathbf{id})\mathbf{A^{-1}B^{-1}x}\right\| \leq \\ &\leq m(\mathbf{A})\left\|(\mathbf{B} - \mathbf{id})\mathbf{A^{-1}B^{-1}x}\right\| + m(\mathbf{B})\left\|(\mathbf{A} - \mathbf{id})\mathbf{A^{-1}B^{-1}x}\right\| \leq \\ &\leq m(\mathbf{A})m(\mathbf{B})\left\|\mathbf{A^{-1}B^{-1}x}\right\| + m(\mathbf{B})m(\mathbf{A})\left\|\mathbf{A^{-1}B^{-1}x}\right\| \end{aligned} \tag{6}$$

Dato che $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in O(n)$ posso scrivere $\left\|\mathbf{A^{-1}B^{-1}x}\right\| = \|\mathbf{x}\|$, quindi

$$\|([\mathbf{A}, \mathbf{B}] - \mathbf{id})\mathbf{x}\| \leq 2m(\mathbf{A})m(\mathbf{B})\|\mathbf{x}\| \tag{7}$$

Quindi segue immediatametne la tesi. □

Si richiede, di solito, quando si parla di gruppi cristallografici, che abbiano un dominio fondamentale discreto e compatto. In particolare in questo caso utilizziamo la seguente definizione:

Definizione 2.6. *Un gruppo Γ di isometrie in $\mathbb{R}^n$ è detto cristallografico se valgono le seguenti condizioni:*

- *$\forall t \in \mathbb{R} : t > 0$ esistono solo un numero finito di $\alpha \in \Gamma$ tali che $|a| \leq t$*
- *$\exists d \in \mathbb{R} : \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \exists \alpha \in \Gamma : \|\mathbf{a} - \mathbf{x}\| \leq d$*

Sia ora Γ un gruppo cristallografico in $\mathbb{R}^n$

Teorema 2.11. *Mini Bieberbach $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{u}\| = 1, \forall \epsilon, \delta > 0 \; \exists \beta \in \Gamma$ che soddisfa*

- $\mathbf{a} \neq 0$
- $\angle(\mathbf{u}, \mathbf{a}) \leq \delta$
- $m(\mathbf{A}) \leq \epsilon$

Dimostrazione.

- Per la seconda proprietà dei gruppi cristallografici so che $\exists d \in \mathbb{R} : \forall k \in \mathbb{N}\ \exists \beta_k \in \Gamma :$

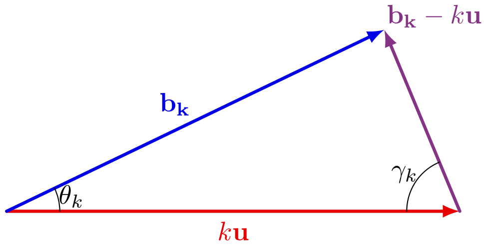
$$\beta_k \mathbf{x} = \mathbf{B_k x} + \mathbf{b_k}$$
$$\|\mathbf{b_k} - \mathbf{ku}\| \leq d$$

Se $k \longrightarrow \infty$ allora sicuramente $\|\mathbf{b_k}\| \longrightarrow \infty$.
Infatti se, per assurdo, questo non fosse vero $\exists M \in \mathbb{R} : \|\mathbf{b_k}\| \leq M\ \forall k \in \mathbb{N}$

$$d \geq \|\mathbf{b_k} - \mathbf{ku}\| \geq |\|\mathbf{b_k}\| - k|$$

Nella disequazione precedente, se la successione è limitata allora l'ultimo termine diverge ma questo è assurdo perché è maggiorato da d.

- Considero ora



$$\angle(\mathbf{u}, \mathbf{b_k}) = \angle(\mathbf{ku}, \mathbf{b_k}) =: \theta_k$$
$$\frac{\|\mathbf{b_k}\|}{sin(\gamma_k)} = \frac{\|\mathbf{b_k} - k\mathbf{u}\|}{sin(\theta_k)} \leq \frac{d}{sin(\theta_k)}$$
$$sin(\theta_k) \leq \frac{sin(\gamma_k)d}{\|\mathbf{b_k}\|} \longrightarrow 0 \Longrightarrow \theta_k \longrightarrow 0$$

- Ho definito la successione $\{\beta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ con $\beta_k \mathbf{x} = \mathbf{B}_k \mathbf{x} + \mathbf{b}_k$ $\beta_k \in \Gamma \Longrightarrow \mathbf{B}_k \in O(n)$
$O(n)$ è compatto e $\{\mathbf{B}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ successione in $O(n)$ ammette quindi almeno un punto di accumulazione per il teorema di Bolzano-Weierstrass.
Estraggo da $\{\mathbf{B}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sottosuccessione $\{\mathbf{A}_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \{\mathbf{B}_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ convergente.
La funzione $m : O(n) \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua in quanto composizione di funzioni continue ($\mathbf{A} \mapsto \max \|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\|$), quindi con $i, j \in \mathbb{B} \longrightarrow \infty$ sicuramente $m(\mathbf{A}_j \mathbf{A}_i^{-1}) \longrightarrow m(\mathbf{id}) = 0$
Associata a questa sottosuccessione ho ovviamente una sottosuccessione di $\{\beta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ che chiamo $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ con $\alpha_k \mathbf{x} = \mathbf{A}_k \mathbf{x} + \mathbf{a}_k$

- Dato che valgono tutte le proprietà di cui sopra, è immediato verificare che $\exists i, j \in \mathbb{N}$ tali che $i < j$ e che valgano contemporaneamente

$$\angle(u, \mathbf{a}_j) \leq \frac{\delta}{2}$$
$$\|\mathbf{a}_i\| \leq \frac{\delta}{4}\|\mathbf{a}_j\|$$
$$m(\mathbf{A}_j \mathbf{A}_i^{-1}) \leq \epsilon$$

Considero l'isometria definita da $\alpha \in \Gamma$ come

$$\alpha : x \longmapsto \alpha_j \alpha_i^{-1} \mathbf{x} = \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{x} + \mathbf{a}_j - \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{a}_i$$

Verifico che questa isometria verifica tutte le proprietà richieste dalla tesi

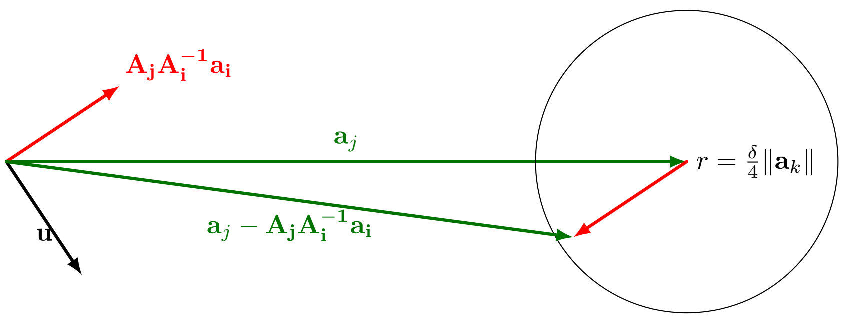
  - E' ovvio che $m(\mathbf{A}) = m(\mathbf{A}_j \mathbf{A}_i^{-1}) \leq \epsilon$
  - Verifico $\mathbf{a} = \mathbf{a}_j - \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{a}_i \neq 0$

$$\left\|\mathbf{a}_j - \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{a}_i\right\| \geq \left|\|\mathbf{a}_j\| - \left\|\mathbf{A}_j \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{a}_i\right\|\right| \geq \left|\|\mathbf{a}_j\| + \|\mathbf{a}_i\|\right| \geq \|\mathbf{a}_i\| \left|\frac{4}{\delta} - 1\right|$$

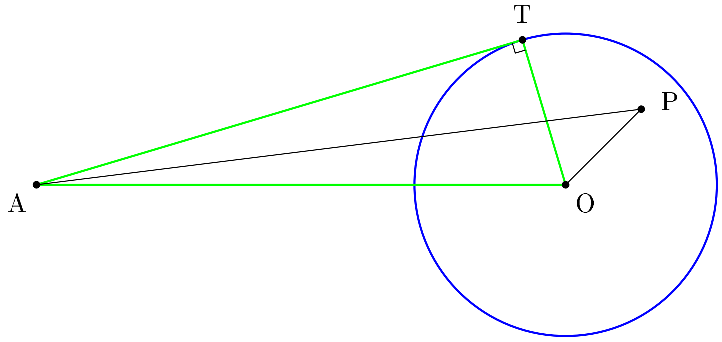
  $\|\mathbf{a}_i\| \neq 0 \Longrightarrow \mathbf{a} \neq 0$
  - Verifico $\angle(\mathbf{u}, \mathbf{a}) = \angle(\mathbf{u}, \mathbf{a_j} - \mathbf{A_j A_i^{-1} a_i}) \leq \delta$.

$$\angle(\mathbf{u}, \mathbf{a_j} - \mathbf{A_j A_i^{-1} a_i}) \leq \angle(\mathbf{u}, \mathbf{a_j}) + \angle(\mathbf{a_j}, \mathbf{a_j} - \mathbf{A_j A_i^{-1} a_i}) \tag{8}$$

Dato che $\|\mathbf{a}_i\| \leq \frac{\delta}{4}\|\mathbf{a}_k\|$ la punta del vettore $\mathbf{a}_j - \mathbf{A_j A_i^{-1} a_i}$ cade all'interno di un cerchio di centro la punta di $\mathbf{a}_j$ e di raggio $r = \frac{\delta}{4}\|\mathbf{a}_k\|$



Considero una situaizone come quella nel disegno precedente;



$\forall$P scelto all'interno della circonferenza $\widehat{PAO} \leq \widehat{TAO}$

$$\frac{\overline{TO}}{sin(\widehat{TAO})} = \frac{\overline{AO}}{sin(\widehat{ATO})}$$

Quindi

$$sin(\widehat{PAO}) \leq sin(\widehat{TAO}) = \frac{\overline{TO}}{\overline{AO}} = \frac{\delta}{4}$$

So quindi che

$$sin(\angle(\mathbf{a_j}, \mathbf{a_j} - \mathbf{A_j}\mathbf{A_i^{-1}}\mathbf{a_i})) \leq \frac{\delta}{4} \Longrightarrow \angle(\mathbf{a_j}, \mathbf{a_j} - \mathbf{A_j}\mathbf{A_i^{-1}}\mathbf{a_i}) \leq \frac{\delta}{4} + o\left(\frac{\delta^2}{16}\right) \leq \frac{\delta}{2} \tag{9}$$

E (9) insieme con (8) e $\angle(\mathbf{u}, \mathbf{a}_j) \leq \frac{\delta}{2}$ implica che

$$\angle(\mathbf{u}, \mathbf{a}) \leq \delta$$

$\square$

Teorema 2.12. *Comunque scelta $\alpha \in \Gamma$: $x \longmapsto \mathbf{Ax} + \mathbf{a}$ tale per cui $m(\mathbf{A}) \leq \frac{1}{2}$, allora questa ismoetria è una translazione pura*

Dimostrazione. Se $m(\mathbf{A}) = 0 \Longrightarrow A = id \Longrightarrow \alpha$ è una translazione pura.
Suppongo per assurdo che $0 < m(\mathbf{A}) \leq \frac{1}{2}$ $\square$