

Introduzione e motivazioni

In occasione del secondo Congresso internazionale dei matematici a Parigi, tenutosi nel 1900, David Hilbert propose una conferenza dal titolo “Mathematische Probleme” durante la quale presentò un elenco di 23 problemi all’epoca irrisolti. Hilbert intendeva fare il punto dello stato dell’arte della matematica ed elencare quelle che, secondo lui, sarebbero state le domande più importanti del secolo.

Chi di noi – iniziò Hilbert – non vorrebbe sollevare il velo sotto cui sta nascosto il futuro, per gettare uno sguardo sui prossimi progressi della nostra scienza e sui segreti del suo sviluppo durante i secoli venturi? Quali saranno gli speciali obiettivi a cui mireranno le più insigni menti matematiche delle generazioni future? Quali nuovi metodi e quali nuovi risultati scopriranno i nuovi secoli, nell’ampio e ricco campo del pensiero umano?

Il diciottesimo problema di Hilbert chiedeva

Esiste un poliedro non-regolare che può tassellare lo spazio?
Qual è il più denso impacchettamento di sfere?

In risposta alla prima domanda, negli anni fra il 1910 ed il 1912, Bieberbach dimostrò quelli che sono adesso conosciuti come i tre teoremi di Bieberbach sui gruppi cristallografici. I gruppi cristallografici sono particolari sottogruppi del gruppo delle isometrie; il primo teorema di Bieberbach assicura che i gruppi cristallografici n -dimensionali contengono n traslazioni linearmente indipendenti, mentre il secondo dice che esistono un numero finito di gruppi cristallografici di una data dimensione.

La dimostrazione di Bieberbach si basa sul lavoro di Minkowski sulle approssimazioni razionali simultanee, ma risulta complessa da seguire; pochi anni dopo Frobenius diede una dimostrazione semplificata, ma sempre a carattere fortemente algebrico. La dimostrazione data da Frobenius è diventata lo standard nella pratica matematica e viene utilizzata nella maggior parte dei testi.

Nella prima parte di questo elaborato (capitoli 1 - 3) si propone una dimostrazione alternativa dei primi due teoremi data da Paul Buser in un articolo del 1985 intitolato "A geometric proof of Bieberbach's theorems on crystallographic groups". Buser dimostra i primi due teoremi di Bieberbach attraverso un procedimento estremamente elementare che utilizza approcci prettamente geometrici.

Nell’ultimo capitolo si espone invece una semplice classificazione dei gruppi cristallografici in dimensione 2, chiamati in letteratura "wallpaper patterns", come data da Schwarzenberger nel suo articolo "The 17 plane symmetry groups".

Capitolo 1

Risultati preliminari

In questo capitolo enunciamo alcune definizioni e risultati fondamentali per approcciare la dimostrazione geometrica dei primi due teoremi di Bieberbach.

Nella prima sezione riprendiamo la definizione di spazio euclideo n -dimensionale e del suo gruppo di isometrie, descriviamo una loro rappresentazione come composizione dell'applicazione di una matrice ortogonale e di una traslazione; definiamo poi il coniugio di due isometrie.

La lunghezza e la direzione del vettore traslazione di una data isometria danno immediatamente informazioni su come questa agisce sui punti di \mathbb{R}^n ; più complicato è invece capire, data una matrice ortogonale, come questa trasformi lo spazio.

Nella seconda sezione viene definita una funzione che funge da misura di quanto una matrice ortogonale si discosta dalla matrice identità; viene poi definita attraverso essa una scomposizione dello spazio in due spazi ortogonali; infine si dimostra un teorema che stima la "misura" del commutatore di due matrici a partire dalle loro "misure".

1.1 Spazio euclideo \mathbb{E}^n ed isometrie

Consideriamo lo spazio vettoriale n -dimensionale \mathbb{R}^n con il prodotto scalare dato da

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

e la norma ad esso associata

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Imponiamo sullo spazio la distanza associata al prodotto scalare

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

Imponendo questa metrica sullo spazio vettoriale \mathbb{R}^n otteniamo lo spazio euclideo \mathbb{E}^n .

Definizione 1.1.1. *Dati $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ sia $\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ l'angolo fra di essi*

$$\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \arccos\left(\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}\right) \in [0, \pi]$$

È noto che gli automorfismi di \mathbb{R}^n (ovvero le applicazioni lineari biettive da \mathbb{R}^n in se stesso) formano un gruppo con l'operazione di composizione di applicazioni lineari; questo è isomorfo a $GL(n, \mathbb{R})$, il gruppo delle matrici quadrate n -dimensionali con determinante non nullo. Se si considerano invece le mappe affini da \mathbb{R}^n in se stesso con il prodotto dato dalla composizione, si ottiene il gruppo affine $Aff(n, \mathbb{R})$; esso può essere rappresentato come il prodotto semidiretto

$$\mathbb{R}^n \rtimes GL(n, \mathbb{R})$$

con l'operazione di composizione data da

$$(\mathbf{A}, \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{B}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a} + \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{AB}) \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in GL(n, \mathbb{R}) \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n.$$

I teoremi di Bieberbach trattano in particolare i gruppi cristallografici, che sono dei particolari tipi di sottogruppi del gruppo delle isometrie.

Definizione 1.1.2. Un'isometria di \mathbb{E}^n è una funzione $\alpha : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vale

$$d(\alpha(\mathbf{x}), \alpha(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

Indichiamo con $O(n)$ il gruppo delle matrici ortogonali n -dimensionali, in particolare

$$O(n) = \{\mathbf{A} \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{id}\}$$

È noto che le matrici ortogonali hanno la proprietà

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\| \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad \forall \mathbf{A} \in O(n)$$

Il seguente teorema è enunciato senza dimostrazione in quanto si tratta di un risultato classico.

Teorema 1.1.1. Data un'isometria di \mathbb{E}^n , questa può essere scritta in modo unico come composizione di un'applicazione di una matrice ortogonale e di una traslazione rispetto alla base standard di \mathbb{R}^n

$$\alpha : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{x} \longmapsto \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{a}$$

dove $\mathbf{A} = \text{rot}(\alpha) \in O(n)$ è detta componente di rotazione di α
e $\mathbf{a} = \text{trans}(\alpha) \in \mathbb{R}^n$ è detta componente di traslazione di α .

In questa trattazione indicheremo spesso le isometrie secondo la rappresentazione fornita dal teorema precedente scrivendo $\alpha = (\mathbf{A}, \mathbf{a})$.

Indichiamo l'insieme delle isometrie di \mathbb{E}^n come $\text{Isom}(n)$

Lemma 1.1.2. $\text{Isom}(n)$ è un gruppo con operazione di composizione di applicazioni; in particolare è un sottogruppo del gruppo affine e come tale può essere scritto come prodotto semidiretto nella forma

$$\text{Isom}(n) \cong O(n) \rtimes \mathbb{R}^n < GL(n, \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}^n$$

All'interno di ogni gruppo è definito il commutatore di due elementi, in particolare è definito in $\text{Isom}(n)$.

Lemma 1.1.3. Comunque prese $\alpha = (\mathbf{A}, \mathbf{a}), \beta = (\mathbf{B}, \mathbf{b}) \in \text{Isom}(n)$
il loro commutatore è $[\alpha, \beta] = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$.

Valgono le due seguenti uguaglianze:

$$\text{rot}([\alpha, \beta]) = [\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1} \quad (1.1)$$

$$\text{trans}([\alpha, \beta]) = (\mathbf{A} - \mathbf{id})\mathbf{b} + (\mathbf{id} - [\mathbf{A}, \mathbf{B}])\mathbf{b} + \mathbf{A}(\mathbf{id} - \mathbf{B})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a} \quad (1.2)$$

Dimostrazione. $[\alpha, \beta](\mathbf{x}) = (\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1})(\mathbf{x})$.

Dato che $\alpha : \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{a}$, allora sicuramente $\alpha^{-1} : \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a})$.

Allo stesso modo, dato che $\beta : \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, allora $\beta^{-1} : \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{b})$.

$$\begin{aligned} [\alpha, \beta](\mathbf{x}) &= (\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1})(\mathbf{x}) = (\alpha\beta\alpha^{-1})(\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{b})) = \\ &= (\alpha\beta\alpha^{-1})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}) = \\ &= (\alpha\beta)(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{a})) = \\ &= (\alpha\beta)(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}) = \\ &= (\alpha)(\mathbf{B}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}) + \mathbf{b}) = \\ &= (\alpha)(\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{a} = \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{a} = \\ &= \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a} + \mathbf{A}\mathbf{b} + \mathbf{a} \end{aligned}$$

Quindi $rot([\alpha, \beta]) = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$ e

$$\begin{aligned}
 trans([\alpha, \beta]) &= -\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a} + \mathbf{A}\mathbf{b} + \mathbf{a} = \\
 &= \mathbf{A}\mathbf{b} + \mathbf{a} - \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a} = \\
 &= (\mathbf{A} - \text{id})\mathbf{b} + \mathbf{b} + \mathbf{a} - \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a} = \\
 &= (\mathbf{A} - \text{id})\mathbf{b} + (\text{id} - [\mathbf{A}, \mathbf{B}])\mathbf{b} + \mathbf{a} - \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a} = \\
 &= (\mathbf{A} - \text{id})\mathbf{b} + (\text{id} - [\mathbf{A}, \mathbf{B}])\mathbf{b} + (\text{id} - \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1})\mathbf{a} = \\
 &= (\mathbf{A} - \text{id})\mathbf{b} + (\text{id} - [\mathbf{A}, \mathbf{B}])\mathbf{b} + \mathbf{A}(\text{id} - \mathbf{B})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}
 \end{aligned}$$

□

1.2 "Misura" della componente di rotazione

Definizione 1.2.1. *Comunque preso $\mathbf{A} \in O(n)$ definiamo*

$$m(\mathbf{A}) = \max \left\{ \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \mathbf{0} \right\}$$

Questa funzione stima quanto una data matrice ortogonale si comporta in modo diverso dalla matrice identità; descrive infatti quanto al massimo un vettore unitario viene "spostato" dall'azione di tale matrice.

Lemma 1.2.1. *La precedente è una buona definizione e inoltre vale*

$$m(\mathbf{A}) = \max \left\{ \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}\| \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \|\mathbf{x}\| = 1 \right\}$$

Dimostrazione. Scelto comunque $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \mathbf{0}$ definiamo il suo normalizzato $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \in \mathbb{R}^n - \mathbf{0}$; ovviamente \mathbf{y} ha norma unitaria.

$$\frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\|\mathbf{A}\|\mathbf{x}\|\mathbf{y} - \|\mathbf{x}\|\mathbf{y}\|}{\|\|\mathbf{x}\|\mathbf{y}\|} = \frac{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{A}\mathbf{y} - \mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|} = \|\mathbf{A}\mathbf{y} - \mathbf{y}\|$$

L'insieme $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \wedge \|\mathbf{y}\| = 1$ è un compatto in \mathbb{R}^n ; la funzione che associa \mathbf{y} a $\|\mathbf{A}\mathbf{y} - \mathbf{y}\|$ è continua in quanto composizione di funzioni continue; quindi possiamo applicare il teorema di Weierstrass e concludere che esiste una $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| = 1$ che verifica la condizione di massimo. □

Lemma 1.2.2. *Comunque preso $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vale*

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}\| \leq m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}\|$$

Dimostrazione. Infatti vale $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \mathbf{0}$ e vale anche per $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ □

Una volta definita la funzione m , possiamo definire il sottoinsieme di \mathbb{R}^n che contiene tutti e soli i vettori che realizzano il massimo nella definizione 1.2.1.

Definizione 1.2.2.

$$E_{\mathbf{A}} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}\| = m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}\|\}$$

Lemma 1.2.3. *$E_{\mathbf{A}}$ è un sottospazio di \mathbb{R}^n non banale ed \mathbf{A} -invariante*

Dimostrazione. • $\mathbf{0} \in E_{\mathbf{A}}$

- $\forall \mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
 $\mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}} \implies \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}\| = m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}\| \implies \|\mathbf{A}\lambda\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}\| \implies \lambda\mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}}$

- $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E_{\mathbf{A}}$ vogliamo verificare che $\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \in E_{\mathbf{A}}$
 $\mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}} \implies \|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\| = m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}\|$
 $\mathbf{y} \in E_{\mathbf{A}} \implies \|\mathbf{Ay} - \mathbf{y}\| = m(\mathbf{A})\|\mathbf{y}\|$

$$\begin{aligned}
& \|\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - (\mathbf{x} + \mathbf{y})\|^2 + \|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - (\mathbf{x} - \mathbf{y})\|^2 = \\
& = \|\mathbf{Ax} - \mathbf{x} + \mathbf{Ay} - \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{Ax} - \mathbf{x} - (\mathbf{Ay} - \mathbf{y})\|^2 = \\
& = 2\|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{Ay} - \mathbf{y}\|^2 = 2(\|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{Ay} - \mathbf{y}\|^2) = \\
& = 2m(\mathbf{A})^2(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2)
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Dalla catena di uguaglianze in 1.3 segue

$$\begin{aligned}
2m(\mathbf{A})^2(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2) & = \|\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - (\mathbf{x} + \mathbf{y})\|^2 + \|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - (\mathbf{x} - \mathbf{y})\|^2 \leq \\
& \leq m(\mathbf{A})^2(\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2) = \\
& = 2m(\mathbf{A})^2(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2)
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Quindi il segno di disuguaglianza in 1.4 è un'uguaglianza, in particolare

$$\|\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - (\mathbf{x} + \mathbf{y})\|^2 + \|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - (\mathbf{x} - \mathbf{y})\|^2 = m(\mathbf{A})^2(\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2)$$

Spostando i termini da parte a parte otteniamo

$$\|\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - (\mathbf{x} + \mathbf{y})\|^2 - m(\mathbf{A})^2\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = m(\mathbf{A})^2\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - (\mathbf{x} - \mathbf{y})\|^2$$

È possibile poi scomporre le differenze di quadrati a sinistra e destra dell'uguaglianza ottenendo

$$\begin{aligned}
& (\|\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - (\mathbf{x} + \mathbf{y})\| + m(\mathbf{A})\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|)(\|\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - (\mathbf{x} + \mathbf{y})\| - m(\mathbf{A})\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|) = \\
& - (\|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - (\mathbf{x} - \mathbf{y})\| + m(\mathbf{A})\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)(\|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - (\mathbf{x} - \mathbf{y})\| - m(\mathbf{A})\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|).
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Distinguiamo alcuni casi:

- Se $\mathbf{A} = \mathbf{id} \implies m(\mathbf{A}) = 0 \implies E_{\mathbf{A}} = \mathbb{R}^n$ ed in quel caso la dimostrazione è conclusa.
- Se $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ o $\mathbf{x} = -\mathbf{y}$ la dimostrazione è conclusa per il punto precedente (rispettivamente con $\lambda = +1$ e $\lambda = -1$).
- Nei restanti casi si osserva che nell'equazione (5) il primo fattore a sinistra dell'uguaglianza è strettamente positivo, mentre il secondo fattore è ≤ 0 . Allo stesso modo a destra dell'uguaglianza è presente un meno che modifica il segno del prodotto; il primo fattore è strettamente positivo ed il secondo è ≤ 0 .

L'uguaglianza in (5) deve quindi per forza coincidere con $0 = 0$ e questo implica

$$\begin{cases} \|\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - (\mathbf{x} + \mathbf{y})\| = m(\mathbf{A})\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \\ \|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - (\mathbf{x} - \mathbf{y})\| = m(\mathbf{A})\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \end{cases}$$

$$\implies \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \in E_{\mathbf{A}}$$

La dimostrazione del fatto che $E_{\mathbf{A}}$ è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n è così conclusa.

- Mostriamo che $E_{\mathbf{A}}$ è non banale.
L'insieme degli $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \|\mathbf{x}\| = 1$ è un compatto; l'applicazione $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\|$ è continua in quanto composizione di funzioni continue, quindi sicuramente esiste un $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \|\mathbf{x}\| = 1$ che verifica il massimo.
In particolare $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (perché ha norma 1) e

$$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\| = m(\mathbf{A}) = m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}\| \implies \mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}}$$

- Mostriamo che $E_{\mathbf{A}}$ è \mathbf{A} -invariante, ovvero che $\forall \mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}} \implies \mathbf{Ax} \in E_{\mathbf{A}}$
 $\mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}} \implies \|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\| = m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}\|$
 Dato che $\mathbf{A} \in O(n)$ vale la seguente catena di uguaglianze:
 $\|\mathbf{A}(\mathbf{Ax}) - \mathbf{Ax}\| = \|\mathbf{A}(\mathbf{Ax} - \mathbf{x})\| = \|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\| = m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}\| = m(\mathbf{A})\|\mathbf{Ax}\| \implies \mathbf{Ax} \in E_{\mathbf{A}}$

□

Abbiamo dimostrato che $E_{\mathbf{A}}$ è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n non banale: è possibile quindi, grazie alla teoria sulle scomposizioni ortogonali di spazi vettoriali, definire il suo complemento ortogonale $E_{\mathbf{A}}^{\perp} \neq \mathbb{R}^n$; in particolare, dato che $E_{\mathbf{A}}$ è \mathbf{A} -invariante, anche $E_{\mathbf{A}}^{\perp}$ risulta \mathbf{A} -invariante.

Definizione 1.2.3.

$$m^{\perp}(\mathbf{A}) = \begin{cases} \max \left\{ \frac{\|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \mid \mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}}^{\perp} - \mathbf{0} \right\} & \text{se } E_{\mathbf{A}}^{\perp} \neq \mathbf{0} \\ 0 & \text{se } E_{\mathbf{A}}^{\perp} = \mathbf{0} \end{cases}$$

Lemma 1.2.4.

$$\begin{aligned} m^{\perp}(\mathbf{A}) &< m(\mathbf{A}) && \text{se } \mathbf{A} \neq \mathbf{id} \\ m^{\perp}(\mathbf{A}) &= m(\mathbf{A}) = 0 && \text{se } \mathbf{A} = \mathbf{id} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Dimostrazione. • Se $\mathbf{A} = \mathbf{id} \implies m(\mathbf{A}) = 0 \wedge E_{\mathbf{A}} = \mathbb{R}^n \implies E_{\mathbf{A}}^{\perp} = \mathbf{0} \implies m^{\perp}(\mathbf{A}) = 0$

- Se $\mathbf{A} \neq \mathbf{id}$

$$m(\mathbf{A}) = \max \left\{ \frac{\|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \mathbf{0} \right\} \geq \max \left\{ \frac{\|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \mid \mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}}^{\perp} - \mathbf{0} \right\} = m^{\perp}(\mathbf{A})$$

Se valesse $m(\mathbf{A}) = m^{\perp}(\mathbf{A}) \implies \exists \mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}}^{\perp} - \mathbf{0} : \|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\| = m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}\| \implies \mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}}$ ma questo implica $\mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}} \cap E_{\mathbf{A}}^{\perp} = \mathbf{0} \implies \mathbf{x} = \mathbf{0}$;
 questo è però assurdo perché l'insieme su cui stiamo calcolando il massimo non contiene il vettore $\mathbf{0}$.

□

Lemma 1.2.5. Ogni \mathbf{x} in \mathbb{R}^n può essere scritto in modo unico in decomposizione ortogonale.

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^E + \mathbf{x}^{\perp} \text{ dove } \mathbf{x}^E \in E_{\mathbf{A}} \text{ e } \mathbf{x}^{\perp} \in E_{\mathbf{A}}^{\perp}$$

È inoltre immediato verificare le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{Ax}^E - \mathbf{x}^E\| &= m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}^E\| \\ \|\mathbf{Ax}^{\perp} - \mathbf{x}^{\perp}\| &\leq m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}^{\perp}\| \end{aligned}$$

Il seguente risultato ci permette di stimare la "misura" del commutatore di due matrici a partire dalla misura delle stesse.

Lemma 1.2.6. Comunque scelti $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in O(n)$ vale la disuguaglianza

$$m([\mathbf{A}, \mathbf{B}]) \leq 2m(\mathbf{A})m(\mathbf{B})$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}, \mathbf{B}] - \mathbf{id} &= \mathbf{ABA}^{-1}\mathbf{B}^{-1} - \mathbf{id} = \\ &= (\mathbf{AB} - \mathbf{BA})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1} = \\ &= [(\mathbf{A} - \mathbf{id})(\mathbf{B} - \mathbf{id}) - (\mathbf{B} - \mathbf{id})(\mathbf{A} - \mathbf{id})]\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1} \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{id})(\mathbf{B} - \mathbf{id})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1} - (\mathbf{B} - \mathbf{id})(\mathbf{A} - \mathbf{id})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1} \end{aligned}$$

Dalla precedente catena di uguaglianze segue, scelto comunque $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \|([\mathbf{A}, \mathbf{B}] - \mathbf{id})\mathbf{x}\| &\leq \|(\mathbf{A} - \mathbf{id})(\mathbf{B} - \mathbf{id})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}\| + \|(\mathbf{B} - \mathbf{id})(\mathbf{A} - \mathbf{id})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}\| \leq \\ &\leq m(\mathbf{A})\|(\mathbf{B} - \mathbf{id})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}\| + m(\mathbf{B})\|(\mathbf{A} - \mathbf{id})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}\| \leq \\ &\leq m(\mathbf{A})m(\mathbf{B})\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}\| + m(\mathbf{B})m(\mathbf{A})\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}\| \end{aligned}$$

Dato che $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in O(n)$, allora $\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$, quindi

$$\|([\mathbf{A}, \mathbf{B}] - \mathbf{id})\mathbf{x}\| \leq 2m(\mathbf{A})m(\mathbf{B})\|\mathbf{x}\|$$

Da questo segue immediatamente la tesi. □

Capitolo 2

Primo teorema di Bieberbach

In questo capitolo viene dimostrato il primo teorema di Bieberbach.

Nella prima sezione si dà la definizione precisa di gruppo cristallografico e viene esplicitato il contenuto del teorema nella forma in cui verrà dimostrato.

Nella seconda sezione sono presentati e dimostrati alcuni risultati che concorrono alla dimostrazione del primo teorema di Bieberbach.

Infine nella sezione finale le varie proposizioni verranno connesse in una dimostrazione del teorema vero e proprio.

2.1 Enunciati

In questo elaborato utilizzo la seguente definizione di gruppo cristallografico:

Definizione 2.1.1. *Sia Γ un sottogruppo di $Isom(n)$, dico che è un gruppo cristallografico n -dimensionale se valgono le seguenti condizioni:*

1. $\forall t \in \mathbb{R} : t > 0$ esistono solo un numero finito di $\alpha = (\mathbf{A}, \mathbf{a}) \in \Gamma$ tali che $\|\mathbf{a}\| \leq t$
2. $\exists d \in \mathbb{R} : \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \exists \alpha = (\mathbf{A}, \mathbf{a}) \in \Gamma : \|\mathbf{a} - \mathbf{x}\| \leq d$

La condizione 1. implica che il gruppo agisce in modo propriamente discontinuo sullo spazio topologico dato da \mathbb{R}^n con la topologia euclidea, mentre la condizione 2. significa che l'azione di Γ ha dominio fondamentale limitato. Ricordiamo che, dato uno spazio topologico X ed un gruppo G che agisce su di esso, chiamiamo dominio fondamentale stretto un sottoinsieme misurabile di X che contiene uno ed un solo punto di ogni orbita dell'azione; il dominio fondamentale è un sovrainsieme del dominio fondamentale in senso stretto che contiene anche eventuali ulteriori punti di frontiera.

Teorema 2.1.1. *Ogni gruppo cristallografico n -dimensionale contiene n traslazioni linearmente indipendenti*

2.2 Mini Bieberbach e caratterizzazione delle translazioni

Teorema 2.2.1. *Mini Bieberbach.* Sia Γ un gruppo cristallografico di \mathbb{E}^n . Comunque scelto $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$: $\|\mathbf{u}\| = 1$,
 $\forall \epsilon, \delta > 0 \exists \alpha = (\mathbf{A}, \mathbf{a}) \in \Gamma$ che soddisfa

1. $\mathbf{a} \neq 0$
2. $\angle(\mathbf{u}, \mathbf{a}) \leq \delta$
3. $m(\mathbf{A}) \leq \epsilon$

Dimostrazione. Per la seconda proprietà dei gruppi cristallografici sappiamo che $\exists d \in \mathbb{R} : \forall k \in \mathbb{N} \exists \beta_k = (\mathbf{B}_k, \mathbf{b}_k) \in \Gamma$ tale che

$$\|\mathbf{b}_k - k\mathbf{u}\| \leq d$$

Se $k \rightarrow \infty$ allora sicuramente $\|\mathbf{b}_k\| \rightarrow \infty$. Infatti $\|k\mathbf{u}\| \rightarrow \infty$ e $\|\mathbf{b}_k\| \geq \|k\mathbf{u}\| - d$.

Consideriamo ora la successione degli angoli fra i vettori \mathbf{u} e \mathbf{b}_k , vogliamo mostrare che la loro ampiezza tende a 0.

$$\angle(\mathbf{u}, \mathbf{b}_k) = \angle(k\mathbf{u}, \mathbf{b}_k) =: \theta_k$$

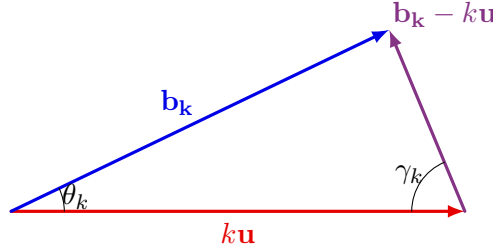


Figura 2.1: I vettori $k\mathbf{u}$, \mathbf{b}_k e $\mathbf{b}_k - k\mathbf{u}$ formano un triangolo.
 Chiamo γ_k l'angolo contenuto fra $k\mathbf{u}$ e $\mathbf{b}_k - k\mathbf{u}$

Possiamo applicare il teorema dei seni al triangolo in figura 2.1

$$\frac{\|\mathbf{b}_k\|}{\sin(\gamma_k)} = \frac{\|\mathbf{b}_k - k\mathbf{u}\|}{\sin(\theta_k)} \leq \frac{d}{\sin(\theta_k)}$$

Si può ora riscrivere la disequazione in modo da ottenere

$$\sin(\theta_k) \leq \frac{\sin(\gamma_k)d}{\|\mathbf{b}_k\|} \rightarrow 0 \implies \theta_k \rightarrow 0$$

$O(n)$ è compatto quindi, per il teorema di Bolzano-Weierstrass la successione $\{\mathbf{B}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ in $O(n)$ ammette almeno un punto di accumulazione. Possiamo quindi, a meno di estrarne una sottosuccessione convergente, supporre che $\{\mathbf{B}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converga a $\mathbf{B} \in O(n)$.

La funzione $m : O(n) \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, come lo sono anche la moltiplicazione fra matrici e l'inversa di una matrice, quindi se facciamo tendere i, j ad infinito, sicuramente $m(\mathbf{B}_j \mathbf{B}_i^{-1}) \rightarrow m(\mathbf{B} \mathbf{B}^{-1}) = m(\mathbf{id}) = 0$

Associata alla successione $\{\mathbf{B}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ abbiamo una sottosuccessione di isometrie $\{\beta_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \{(\mathbf{B}_k, \mathbf{b}_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$. A questo punto abbiamo dimostrato che esiste una successione di isometrie in Γ tale che la norma delle componenti translazionali tende ad infinito, l'angolo fra gli elementi della successione ed il vettore unitario fissato nell'ipotesi tende a zero e $m(\mathbf{B}_j \mathbf{B}_i^{-1}) \rightarrow m(\mathbf{id}) = 0$; è immediato verificare che $\exists i, j \in \mathbb{N}$ tali che $i < j$ e che valgano contemporaneamente

$$\begin{aligned} \|\mathbf{b}_i\| &\leq \frac{\delta}{4} \|\mathbf{b}_j\| \\ \angle(u, \mathbf{b}_j) &\leq \frac{\delta}{2} \\ m(\mathbf{B}_j \mathbf{B}_i^{-1}) &\leq \epsilon \end{aligned} \tag{2.1}$$

Considero l'isometria $\alpha \in \Gamma$ data da

$$\alpha := (\mathbf{A}, \mathbf{a}) : x \mapsto \beta_j \beta_i^{-1} \mathbf{x} = \mathbf{B}_j \mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{x} + \mathbf{b}_j - \mathbf{B}_j \mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{b}_i$$

Questa isometria verifica tutte le proprietà richieste dalla tesi

- Verifichiamo $\mathbf{a} = \mathbf{b}_j - \mathbf{B}_j \mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{b}_i \neq 0$

$$\left\| \mathbf{b}_j - \mathbf{B}_j \mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{b}_i \right\| \geq \left| \left\| \mathbf{b}_j \right\| - \left\| \mathbf{B}_j \mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{b}_i \right\| \right| \geq \left| \left\| \mathbf{b}_j \right\| + \left\| \mathbf{b}_i \right\| \right| \geq \left\| \mathbf{b}_i \right\| \left| \frac{4}{\delta} - 1 \right|$$

$$\left\| \mathbf{b}_i \right\| \neq 0 \implies \mathbf{a} \neq 0$$

- Verifichiamo $\angle(\mathbf{u}, \mathbf{a}) = \angle(\mathbf{u}, \mathbf{b}_j - \mathbf{B}_j \mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{b}_i) \leq \delta$.

Applicando la disuguaglianza triangolare sugli angoli otteniamo

$$\angle(\mathbf{u}, \mathbf{b}_j - \mathbf{B}_j \mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{b}_i) \leq \angle(\mathbf{u}, \mathbf{b}_j) + \angle(\mathbf{b}_j, \mathbf{b}_j - \mathbf{B}_j \mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{b}_i) \quad (2.2)$$

Sappiamo già che $\angle(\mathbf{u}, \mathbf{b}_j) \leq \frac{\delta}{2}$, vogliamo mostrare che $\angle(\mathbf{b}_j, \mathbf{b}_j - \mathbf{B}_j \mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{b}_i) \leq \frac{\delta}{2}$. Dato che

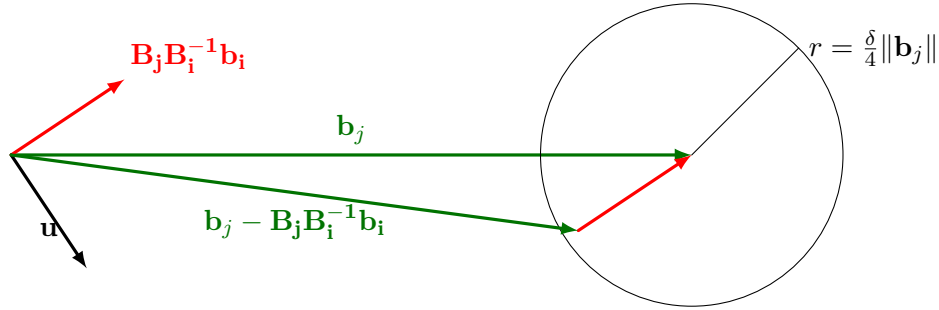


Figura 2.2: Rappresentazione schematica delle relazioni fra i vettori

$\left\| \mathbf{b}_i \right\| \leq \frac{\delta}{4} \left\| \mathbf{b}_j \right\|$ e $\left\| \mathbf{B}_j \mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{b}_i \right\| = \left\| \mathbf{b}_i \right\|$, allora la norma del vettore $\mathbf{b}_j - \mathbf{B}_j \mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{b}_i$ è maggiorata da $\frac{\delta}{4} \left\| \mathbf{b}_j \right\|$, come da figura 2.2.

Per semplificare la fruibilità della sezione seguente di questa dimostrazione utilizziamo la notazione di geometria sintetica riportata in figura 2.3. Comunque venga scelto un punto P all'interno

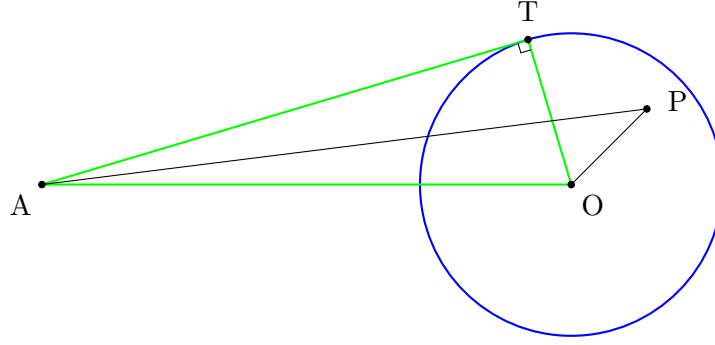


Figura 2.3: Si tracci una circonferenza di centro O e si considerino due punti, uno esterno alla circonferenza A ed uno interno P. Si tracci poi la tangente alla circonferenza dal punto A e si chiami il punto di tangenza T

della circonferenza si ottiene ovviamente

$$\widehat{PAO} \leq \widehat{TAO}$$

Applicando il teorema dei seni al triangolo TAO si ottiene

$$\frac{\overline{TO}}{\sin(\widehat{TAO})} = \frac{\overline{AO}}{\sin(\widehat{ATO})}$$

Che può essere riscritta come

$$\sin(\widehat{PAO}) \leq \sin(\widehat{TAO}) = \frac{\overline{TO}}{\overline{AO}} \quad (2.3)$$

Trasponendo questo risultato nel caso di 2.2 ed usando 2.1, si ottiene

$$\sin(\angle(\mathbf{b}_j, \mathbf{b}_j - \mathbf{B}_j \mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{b}_i)) \leq \frac{\delta}{4} \implies \angle(\mathbf{b}_j, \mathbf{b}_j - \mathbf{B}_j \mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{b}_i) \leq \frac{\delta}{4} + o\left(\frac{\delta^2}{16}\right) \leq \frac{\delta}{2} \quad (2.4)$$

Osserviamo che $\arcsin\left(\frac{\delta}{4}\right) \leq \frac{\delta}{2}$ quando $0 \leq \delta \leq 1$, Mettendo insieme 2.2 con 2.4 e 2.1 otteniamo

$$\angle(\mathbf{u}, \mathbf{a}) \leq \delta$$

□

Teorema 2.2.2. *Comunque scelta $\alpha = (\mathbf{A}, \mathbf{a}) \in \Gamma$: $x \mapsto \mathbf{A}x + \mathbf{a}$ tale per cui $m(\mathbf{A}) \leq \frac{1}{2}$, questa isometria è una traslazione pura, ovvero $\mathbf{A} = \mathbf{id}$*

Dimostrazione. Se $m(\mathbf{A}) = 0 \implies \mathbf{A} = \mathbf{id} \implies \alpha$ è una traslazione pura.

Fra le isometrie in Γ che soddisfano la condizione $0 < m(\mathbf{A}) \leq \frac{1}{2}$ è possibile scegliere quella che ha $\|\mathbf{a}\|$ minimo (questo perché vale la condizione (1) sugli elementi di un gruppo cristallografico).

È noto da 1.6 che $m(\mathbf{A}) > m^\perp(\mathbf{A})$ se $\mathbf{A} \neq \mathbf{id}$; è quindi possibile scegliere $\epsilon := \frac{1}{8} \left(m(\mathbf{A}) - m^\perp(\mathbf{A}) \right) > 0$.

$E_{\mathbf{A}}$ è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n , quindi contiene sicuramente un vettore unitario; chiamiamo tale vettore \mathbf{u} . ed applichiamo ad esso il teorema Mini Bieberbach con un $\delta > 0$, l' $\epsilon > 0$ scelto in precedenza.

$$\exists \beta = (\mathbf{B}, \mathbf{b}) \in \Gamma : m(\mathbf{B}) \leq \epsilon; \mathbf{b} \neq 0; \angle(\mathbf{u}, \mathbf{b}) \leq \delta$$

Sia $E = E_{\mathbf{A}}$, $\forall x \in E$ scrivo $x = x^E + x^\perp$. Se $x = x^E$ dico che x appartiene a E , se $x = x^\perp$ dico che $x \in E^\perp$.

Vogliamo scegliere δ in modo da avere $\|\mathbf{b}^\perp\| \leq \|\mathbf{b}^E\|$. Procediamo come illustrato in 2.4. Comunque scelto un punto in \mathbb{R}^n sono ben definite le distanze di tale punto rispettivamente dal sottospazio $E_{\mathbf{A}}$ e di $E_{\mathbf{A}}^\perp$, in quanto questi sono sottospazi convessi, le chiamiamo d_E e d_\perp . Consideriamo la sezione di \mathbb{R}^n con la proprietà che i punti contenuti in essa siano più vicini a $E_{\mathbf{A}}$.

$$F := \{x \in \mathbb{R}^n : d_E(x) \leq d_\perp\}$$

I punti contenuti in F sono ovviamente tali che $\|\mathbf{x}^\perp\| \leq \|\mathbf{x}^E\|$; $\mathbf{u} \in F$ perché è in $E_{\mathbf{A}}$. Basta quindi scegliere un δ abbastanza piccolo che il cono di vettori che formano un angolo $\leq \delta$ con \mathbf{u} sia completamente contenuto in F ; possiamo farlo come dall'esempio in figura.

Fra questi $\beta = (\mathbf{B}, \mathbf{b})$ scegliamo quello per cui $\|\mathbf{b}\|$ è minimo ($\neq 0$, posso farlo per la prima proprietà

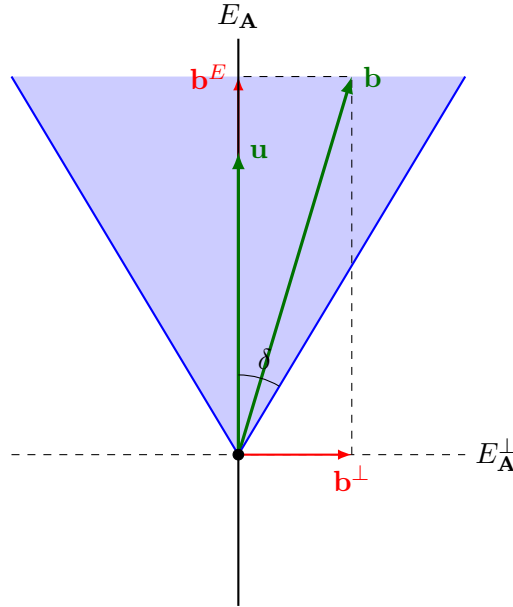


Figura 2.4

dei gruppi cristallografici).

Osserviamo che, se β non è una traslazione, allora $\|\mathbf{b}\| \geq \|\mathbf{a}\|$, questo perché $m(\mathbf{B}) \leq \frac{1}{8}m(\mathbf{A}) \leq \frac{1}{4}$ e α è stato scelto fra le isometrie in Γ con $m \leq \frac{1}{2}$ in modo da minimizzare il modulo della componente traslatoria). Definiamo una nuova isometria $\tilde{\beta} := [\alpha, \beta] = (\tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{b}}) \in \Gamma$

Si possono ora utilizzare i lemmi 1.1.3 e 1.2.6 per scrivere

$$m(\tilde{\beta}) = m[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \leq 2m(\mathbf{A})m(\mathbf{B}) \leq 2\frac{1}{2}m(\mathbf{B}) = m(\mathbf{B})$$

$$\text{trans}(\tilde{\beta}) = (\mathbf{A} - \text{id})\mathbf{b} + (\text{id} - [\mathbf{A}, \mathbf{B}])\mathbf{b} + \mathbf{A}(\text{id} - \mathbf{B})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a} = (\mathbf{A} - \text{id})\mathbf{b} + \mathbf{r}$$

Con $\mathbf{r} = (\text{id} - \tilde{\mathbf{B}})\mathbf{b} + \mathbf{A}(\text{id} - \mathbf{B})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}$.

- Se β è una traslazione $\implies \mathbf{B} = \text{id} = \tilde{\mathbf{B}} \implies \mathbf{r} = 0$.
- Se β non è una traslazione $\implies \|\mathbf{b}\| \geq \|\mathbf{a}\|$ e quindi

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}\| &\leq m(\tilde{\mathbf{B}})\|\mathbf{b}\| + m(\mathbf{B})\|\mathbf{a}\| \leq (m(\tilde{\mathbf{B}}) + m(\mathbf{B}))\|\mathbf{b}\| \leq \\ &\leq 2m(\mathbf{B})(\|\mathbf{b}^E + \mathbf{b}^\perp\|) < 4m(\mathbf{B})\|\mathbf{b}^E\| \leq \frac{1}{2}(m(\mathbf{A}) - m^\perp(\mathbf{A}))\|\mathbf{b}^E\| \end{aligned} \quad (2.5)$$

In entrambi risulta

$$\|\mathbf{r}\| < \frac{1}{2}(m(\mathbf{A}) - m^\perp(\mathbf{A}))\|\mathbf{b}^E\| \quad (2.6)$$

Per dare una stima della norma di $\tilde{\mathbf{b}}^\perp$, consideriamo le componenti del vettore $\tilde{\mathbf{b}}$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{b}}^E &= (\mathbf{A} - \mathbf{id})\mathbf{b}^E + \mathbf{r}^E \\ \tilde{\mathbf{b}}^\perp &= (\mathbf{A} - \mathbf{id})\mathbf{b}^\perp + \mathbf{r}^\perp\end{aligned}\tag{2.7}$$

Usando la caratterizzazione $\|\mathbf{b}^\perp\| \leq \|\mathbf{b}^E\|$ e la stima 2.6 si ottiene

$$\|\tilde{\mathbf{b}}^\perp\| \leq m^\perp(\mathbf{A})\|\mathbf{b}^\perp\| + \|\mathbf{r}^\perp\| < m^\perp(\mathbf{A})\|\mathbf{b}^E\| + \frac{1}{2}(m(\mathbf{A}) - m(\mathbf{A}^\perp))\|\mathbf{b}^E\|$$

Ovvero

$$\|\tilde{\mathbf{b}}^\perp\| < \frac{1}{2}(m(\mathbf{A}) + m(\mathbf{A}^\perp))$$

D'altro canto, utilizzando la disuguaglianza triangolare inversa, 2.7 e 2.6, otteniamo

$$\begin{aligned}\|\tilde{\mathbf{b}}^E\| &= \|(\mathbf{A} - \mathbf{id})\mathbf{b}^E + \mathbf{r}^E\| \geq \left| m(\mathbf{A})\|\mathbf{b}^E\| - \|\mathbf{r}\| \right| > \\ &> m(\mathbf{A})\|\mathbf{b}^E\| - \frac{1}{2}\left(m(\mathbf{A}) - m^\perp(\mathbf{A})\right)\|\mathbf{b}^E\| = \\ &= \frac{1}{2}(m(\mathbf{A}) + m(\mathbf{A}^\perp))\end{aligned}\tag{2.8}$$

In particolare quindi

$$\|\tilde{\mathbf{b}}^E\| > \|\tilde{\mathbf{b}}^\perp\|$$

Stimando la norma di $\tilde{\mathbf{b}}$ si ottiene

$$\|\tilde{\mathbf{b}}\| \leq m(\mathbf{A})\|\mathbf{b}\| + \|\mathbf{r}\| < m(\mathbf{A})\|\mathbf{b}\| + \frac{1}{2}(m(\mathbf{A}) - m^\perp(\mathbf{A}))\|\mathbf{b}^E\| \leq \|\mathbf{b}\|\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) < \|\mathbf{b}\|$$

Ma questo è assurdo perché β era stato scelto fra tutte le isometrie in Γ che soddisfavano le condizioni, che vengono soddisfatte anche da $\tilde{\beta}$ in modo da minimizzare la norma di \mathbf{b} . \square

2.3 Dimostrazione del primo teorema di Bieberbach

Dimostrazione. Sia Γ un gruppo cristallografico n -dimensionale, vogliamo mostrare che contiene n traslazioni linearmente indipendenti, ovvero che i vettori associati a queste isometrie formano una base di \mathbb{R}^n .

Essere una base di vettori di \mathbb{R}^n è una condizione aperta, questo significa che, dati ad esempio i vettori della base standard $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, è possibile trovare un $\delta > 0$ tale che, comunque scelti n vettori di \mathbb{R}^n $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ tali che $\angle(\mathbf{e}_i, \mathbf{x}_i) \leq \delta \ \forall i = 1, \dots, n$, questi $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1, \dots, n}$ formano ancora una base di \mathbb{R}^n .

Scegliamo quindi in questo modo un $\delta > 0$; fissiamo $\epsilon = \frac{1}{2}$ e con questi valori applichiamo ad ogni elemento \mathbf{e}_i della base standard il teorema Mini Bieberbach 2.2.1; otteniamo così n isometrie in $\alpha_i = (\mathbf{A}_i, \mathbf{a}_i)\Gamma$ tali che $\forall i = 1, \dots, n$

$$\begin{cases} \mathbf{a}_i \neq 0 \\ \angle(\mathbf{e}_i, \mathbf{a}_i) \leq \delta \\ m(\mathbf{A}_i) \leq \frac{1}{2} \end{cases}\tag{2.9}$$

Grazie al lemma 2.2.2 sappiamo che $m(\mathbf{A}_i) \leq \frac{1}{2}$ implica che α_i è una traslazione, ovvero $\mathbf{A}_i = \mathbf{id}$. Per come abbiamo scelto δ , le condizioni $\angle(\mathbf{e}_i, \mathbf{a}_i) \leq \delta$ per ogni $i = 1, \dots, n$ implicano che $\{\mathbf{a}_i\}_{i=1, \dots, n}$ è una base di \mathbb{R}^n ed in particolare sono linearmente indipendenti. \square

Capitolo 3

Secondo teorema di Bieberbach

Teorema 3.0.1 (Secondo teorema di Bieberbach). *Esistono solo un numero finito di classi di isomorfismo di gruppi cristallografici in una data dimensione.*

Per dimostrare tale teorema è necessario prima di tutto introdurre la definizione di reticolo ed alcune proprietà di questa particolare classe di gruppi cristallografici; faremo questo nella prima sezione. Nella seconda sezione daremo la definizione di gruppo cristallografico normale e dimostreremo che ogni gruppo cristallografico è isomorfo ad un gruppo cristallografico normale.

Nella terza sezione mostreremo che ogni gruppo cristallografico normale può essere rappresentato in modo univoco tramite una tabella di gruppo e che esistono solo un numero finito di tali tabelle in ogni data dimensione. Tutti i risultati verranno poi combinati per ottenere una dimostrazione del secondo teorema di Bieberbach.

3.1 Reticoli

Definizione 3.1.1. *Un reticolo L è un gruppo cristallografico che contiene solo traslazioni.*

Gli elementi di un reticolo n -dimensionale possono essere identificati con i vettori di \mathbb{R}^n corrispondenti alla loro componente di traslazione e vengono chiamati punti di reticolo.

Dato un elemento $\omega \in L$, per abuso di notazione scriveremo $\omega = (\mathbf{id}, \mathbf{w}) = \mathbf{w}$. Il seguente risultato è enunciato senza dimostrazione

Lemma 3.1.1. *Ogni reticolo L n -dimensionale è isomorfo a \mathbb{Z}^n . Di conseguenza L è abeliano (in quanto isomorfo ad un gruppo abeliano).*

La distanza minima fra due punti di reticolo coincide con la lunghezza del minimo vettore non nullo in L .

I gruppi cristallografici agiscono in modo propriamente discreto, questo lascia intuire intuitivamente che i reticoli siano fatti in modo da non aver a loro volta dei punti di accumulazione.

Lemma 3.1.2. *Sia L un reticolo n -dimensionale i cui vettori abbiano distanza a coppie ≥ 1 . Sia $\rho > 0$, chiamo $P(\rho)$ il numero di punti di reticolo in L con distanza dall'origine $\leq \rho$.*

$$P(\rho) \leq (2\rho + 1)^n$$

Dimostrazione. Per ogni punto di reticolo a distanza inferiore o uguale di ρ dall'origine si consideri una palla n -dimensionale centrata nel punto e di raggio $\frac{1}{2}$. Queste palle sono sicuramente disgiunte in quanto la distanza fra due punti del reticolo è superiore al doppio dei raggi; sono inoltre tutte completamente contenute nella palla n -dimensionale centrata nell'origine di raggio $\rho + \frac{1}{2}$. Il volume della palla centrata nell'origine è quindi sicuramente superiore alla somma dei volumi delle singole palle di raggio $\frac{1}{2}$; confrontando i volumi si ottiene

$$P(\rho) \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \left(\rho + \frac{1}{2}\right)^n$$

Ovvero

$$P(\rho) \leq (2\rho + 1)^n$$

□

Lemma 3.1.3. *Sia $\{w_i\}_{i=1,\dots,n}$ una base di \mathbb{R}^n . Comunque scelto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, esistono $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$ tali che*

$$\left\| \mathbf{x} - \sum_{i=1}^n k_i \mathbf{w}_i \right\| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \|\mathbf{w}_i\|$$

Dimostrazione. Dato che $\{w_i\}_{i=1,\dots,n}$ è base, $\exists a_i \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{w}_i$$

Scegliamo per ogni $i = 1, \dots, n$ un intero

$$k_i := \begin{cases} \lfloor a_i \rfloor & \text{se } a_i - \lfloor a_i \rfloor \leq \frac{1}{2} \\ \lceil a_i \rceil & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In questo modo

$$\left\| \mathbf{x} - \sum_{i=1}^n k_i \mathbf{w}_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n (a_i - k_i) \mathbf{w}_i \right\| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \|\mathbf{w}_i\|$$

□

Lemma 3.1.4. *Sia L un reticolo n -dimensionale i cui vettori abbiano distanza a coppie ≥ 1 .*

Consideriamo un sottospazio lineare E di \mathbb{R}^n generato da k vettori $\mathbf{w}_i \in L$ con $i = 1, \dots, k$.

Se un punto di reticolo $\mathbf{w} \in L$ non è contenuto in E , allora la sua componete in E^\perp è tale che

$$\|\mathbf{w}^\perp\| \geq \left(3 + \sum_{i=1}^k \|\mathbf{w}_i\| \right)^{-n}$$

Dimostrazione. Sia

$$N := \left\lfloor \left(3 + \sum_{i=1}^k \|\mathbf{w}_i\| \right)^n \right\rfloor$$

Si supponga per assurdo che $0 < \|\mathbf{w}^\perp\| < \frac{1}{N}$.

In questa situazione i vettori $j\mathbf{w}$ con $j = 0, \dots, N$ hanno distanze da E inferiori a 1.

Aggiungendo ad ognuno di questi una combinazione lineare di $\{\mathbf{w}_i\}_{1 \leq i \leq k}$ posso modificarne la componete in E senza andare a toccare la componente perpendicolare; i vettori così ottenuti rimangono all'interno del reticolo.

In particolare, grazie al lemma 3.1.3, è possibile scegliere $\forall j = 0, \dots, N$ la combinazione in modo che

$$j\mathbf{w}^E \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^k \|\mathbf{w}_i\| \right)$$

Si ottengono in questo modo $N + 1$ punti di reticolo ad una distanza dall'origine inferiore alla somma delle loro distanze da E ed E^\perp , in quanto l'origine appartiene ad entrambi i sottospazi.

$$d(j\mathbf{w}, 0) \leq 1 + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^k \|\mathbf{w}_i\| \right)$$

Questa è una contraddizione al lemma 3.1.2 in quanto

$$N + 1 \leq P \left(1 + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^k \|\mathbf{w}_i\| \right) \right) \leq \left(3 + \sum_{i=1}^k \|\mathbf{w}_i\| \right)^{-n} \leq \frac{1}{N}$$

Pertanto non esistono $N \in \mathbb{N}$ che soddisfano questa disequazione.

□

Definizione 3.1.2. Sia Γ un gruppo cristallografico n -dimensionale, definisco $L(\Gamma) < G$ come il sottogruppo che contiene tutte e sole le traslazioni in Γ .

La precedente è una buona definizione in quanto la composizione di due traslazioni è una traslazione.

Lemma 3.1.5. Comunque scelte $\alpha = (\mathbf{A}, \mathbf{a}) \in \Gamma$ e $\mathbf{w} \in L(\Gamma) \implies \mathbf{A}\mathbf{w} \in L(\Gamma)$

Dimostrazione. $w = \text{trans}(\omega)$ con $\omega = (\text{id}, \mathbf{w}) \in L(\Gamma)$. Consideriamo $\alpha\omega\alpha^{-1} \in \Gamma$;

$$\begin{aligned} (\alpha\omega\alpha^{-1})(\mathbf{x}) &= (\alpha\omega)(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a})) = \\ &= (\alpha)(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \mathbf{w}) = \\ &= \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \mathbf{A}\mathbf{w} + \mathbf{a} = \mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{w} \end{aligned}$$

Questa è una traslazione di vettore $\mathbf{A}\mathbf{w}$, quindi $\mathbf{A}\mathbf{w} \in L(\Gamma)$ □

3.2 Gruppi cristallografici normali

Definizione 3.2.1. Un gruppo cristallografico n -dimensionale Γ è detto normale se:

1. i vettori contenuti in $L(\Gamma)$ hanno distanze a coppie ≥ 1
2. $L(\Gamma)$ contiene n vettori unitari linearmente indipendenti

Teorema 3.2.1. Ogni gruppo cristallografico n -dimensionale Γ è isomorfo ad un gruppo cristallografico normale n -dimensionale.

Dimostrazione. Per la proprietà di discretezza dei gruppi cristallografici esiste un vettore in $L(\Gamma)$ di lunghezza minima. Scaliamo per omotetia (che è un isomorfismo) Γ in modo da avere tale vettore di norma 1.

Supponiamo per induzione su k che $L(\Gamma)$ soddisfi la condizione (1) della tesi e che $\exists \mathbf{w}_i \in L(\Gamma)$ con $1 \leq i \leq k < n$ linearmente indipendenti tali che $\|\mathbf{w}_i\| = 1$. Chiamiamo E_k il sottospazio vettoriale di dimensione k di \mathbb{R}^n generato da essi.

Vogliamo dimostrare che esiste un gruppo $\Gamma' \cong \Gamma$ tale che $L(\Gamma')$ soddisfi la condizione (1) e che contenga $k+1$ vettori linearmente indipendenti.

- Se $\exists \alpha = (\mathbf{A}, \mathbf{a}) \in \Gamma$ e $1 \leq i \leq k : \mathbf{A}\mathbf{w}_i \notin E_k$ allora, grazie al lemma 3.1.5 so che $\mathbf{A}\mathbf{w}_i \in L(\Gamma)$, inoltre $\|\mathbf{A}\mathbf{w}_i\| = 1$ dato che $A \in O(n)$, quindi $\mathbf{A}\mathbf{w}_i$ è già il $k+1$ -esimo vettore cercato.
- Se, al contrario, tutte le componenti di rotazione delle isometrie in Γ lasciano E invariato, allora queste lasciano invariato anche E^\perp .
Definisco la trasformazione affine data da

$$\Phi_\nu(\mathbf{x}^E + \mathbf{x}^\perp) = \mathbf{x}^E + \nu\mathbf{x}^\perp, \quad \nu > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Scelto comunque $\alpha = (\mathbf{A}, \mathbf{a}) \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ vale

$$(\Phi_\nu \circ \mathbf{A})(\mathbf{x}) = \Phi_\nu(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \Phi_\nu(\mathbf{A}\mathbf{x}^E + \mathbf{A}\mathbf{x}^\perp) = \mathbf{A}\mathbf{x}^E + \nu\mathbf{A}\mathbf{x}^\perp = \mathbf{A}\mathbf{x}^E + \mathbf{A}(\nu\mathbf{x}^\perp) = \mathbf{A}(\mathbf{x}^E + \nu\mathbf{x}^\perp) = (\mathbf{A} \circ \Phi_\nu)(\mathbf{x})$$

Quindi la funzione affine Φ_ν commuta con la parte rotazionale delle isometrie.

Definiamo il gruppo $\Gamma_\nu := \Phi_\nu \Gamma \Phi_\nu^{-1} < \text{Aff}(\mathbb{R}^n)$. Questo è coniugato a Γ nel gruppo affine (ed è quindi isomorfo a Γ), ma è effettivamente anche un gruppo di isometrie in quanto

$$\forall \alpha_\nu \in \Gamma_\nu \exists \alpha \in \Gamma : \alpha_\nu = \Phi_\nu \alpha \Phi_\nu^{-1}$$

$$\text{rot}(\alpha_\nu) = \text{rot}(\Phi_\nu \alpha \Phi_\nu^{-1}) = \text{rot}(\alpha) \in O(n)$$

Se $\beta_\nu \in L(\Gamma_\nu)$ con $\beta_\nu = \Phi_\nu \beta \Phi_\nu^{-1}$ e $\beta = (\mathbf{B}, \mathbf{b}) \implies \text{rot}(\beta_\nu) = \text{rot}(\Phi_\nu \beta \Phi_\nu^{-1}) = \text{rot}(\beta) = \mathbf{id} \implies \beta \in L(\Gamma)$.

$$\beta_\nu \mathbf{x} = (\Phi_\nu \beta \Phi_\nu^{-1})(\mathbf{x}) = (\Phi_\nu \beta \Phi_\nu^{-1})(\mathbf{x}^E + \mathbf{x}^\perp) = (\Phi_\nu \beta)(\mathbf{x}^E + \frac{1}{\nu} \mathbf{x}^\perp) = \Phi_\nu(\mathbf{x}^E + \frac{1}{\nu} \mathbf{x}^\perp + \mathbf{b}) = \mathbf{x}^E + \mathbf{x}^\perp + \Phi_\nu(\mathbf{b})$$

Quindi $L(\Gamma_\nu) = L(\Phi_\nu \Gamma \Phi_\nu^{-1}) = \Phi_\nu(L(\Gamma))$.

A questo punto supponiamo per assurdo che $\forall \nu > 0$ i vettori in $L(\Gamma_\nu)$ abbiano distanze a coppie ≤ 1 . Possiamo applicare il lemma 3.1.4 utilizzando il sottospazio E_k . Otteniamo che, $\forall \mathbf{w}_\nu \in L(\Gamma_\nu)$ tale che $\mathbf{w}_\nu^\perp \neq \mathbf{0}$, vale

$$\|\mathbf{w}_\nu^\perp\| \geq (3+k)^{-n}$$

É inoltre noto che $\exists \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{w}_\nu = \Phi_\nu(\mathbf{w})$, quindi posso scrivere

$$\|\mathbf{w}_\nu^\perp\| = \|\Phi_\nu(\mathbf{w})^\perp\| = \|(\mathbf{w}^E + \nu \mathbf{w}^\perp)^\perp\| = \|\nu \mathbf{w}^\perp\| = \nu \|\mathbf{w}^\perp\| \geq \frac{1}{(3+k)^n} \quad (3.1)$$

Se si sceglie ν molto piccolo, la disuguaglianza 3.1 non vale; di conseguenza non è vero che i vettori in $L(\Gamma_\nu)$ hanno distanze a coppie $\leq 1 \forall \nu > 0$. Se invece $\nu = 1$, sicuramente vale la condizione (1) perché in quel caso $L(\Gamma_\nu) = L(\Gamma)$. Definiamo

$$\nu' := \inf\{\nu > 0 \mid \text{la condizione 1 vale in } L(\Gamma_\nu)\}$$

Sicuramente $0 < \nu' \leq 1$. Fissato $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\Phi_\nu(\mathbf{x})$ è una funzione continua in ν .

Dato che per ogni $\nu > \nu'$ vale

$$\|\Phi_\nu(\mathbf{x})\| \geq 1$$

Allora vale anche

$$\|\Phi_{\nu'}(\mathbf{x})\| \geq 1$$

Ed in particolare vale la condizione (1) su $L(\Gamma_{\nu'})$.

Sia ora \mathbf{w}_0 il vettore più corto contenuto in $L(\Gamma_{\nu'}) - E_k$, vogliamo mostrare che è un vettore unitario. Supponiamo per assurdo che $\|\mathbf{w}_0\| > 1$; si nota immediatamente che

$$\forall \mathbf{w} \in L(\Gamma_{\nu'}) - E_k \quad \|\mathbf{w}^E\|^2 + \|\mathbf{w}^\perp\|^2 \geq \|\mathbf{w}_0^E\|^2 + \|\mathbf{w}_0^\perp\|^2$$

Scegliamo $\nu := \|\mathbf{w}_0\|^{-1}$ e consideriamo l'azione di Φ_ν su $L(\Gamma_{\nu'})$; in questo modo, utilizzando le proprietà di perpendicolarità e la disuguaglianza appena mostrata si ottiene $\forall w \in L(\Gamma_{\nu'}) - E_k$

$$\begin{aligned} \|\Phi_\nu(\mathbf{w})\| &= \|\mathbf{w}^E + \nu' \mathbf{w}^\perp\|^2 = \\ &= \|\mathbf{w}^E\|^2 + \nu'^2 \|\mathbf{w}^\perp\|^2 \geq \\ &\geq \|\mathbf{w}^E\|^2 + \nu'^2 (\|\mathbf{w}_0^E\|^2 + \|\mathbf{w}_0^\perp\|^2 - \|\mathbf{w}^E\|^2) = \\ &= \|\mathbf{w}^E\|^2 (1 - \nu'^2) + \nu'^2 \|\mathbf{w}_0\|^2 \geq \\ &\geq \nu'^2 \|\mathbf{w}_0\|^2 = 1 \end{aligned}$$

Dato che i vettori in $E_k \cap L(\Gamma_{\nu'})$ sono rimasti uguali alle loro copie in $L(\Gamma)$ e per loro vale la condizione (1) prima, allora sicuramente adesso $L(\Gamma_{\nu\nu'})$ gode anche lui della proprietà (1). Tuttavia $\nu\nu' < \nu'$ e questa è una contraddizione per la scelta minimale di ν' . In particolare quindi vale $\|\mathbf{w}_0\| = 1$.

Quindi $\Gamma_{\nu'} \cong \Gamma$ contiene $k+1$ vettori unitari linearmente indipendenti e $\Gamma_{\nu'}$ è un gruppo cristallografico normale. La dimostrazione si conclude per induzione su k . \square

3.3 Caratterizzazione gruppi cristallografici normali

Teorema 3.3.1. *Ogni gruppo cristallografico normale è unicamente caratterizzato da una tabella di gruppo*

Dimostrazione. Sia Γ un gruppo cristallografico n -dimensionale normale; applicando il primo teorema di Bieberbach siano fissati n vettori $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n \in L(\Gamma)$ linearmente indipendenti ed unitari. Consideriamo il sottoreticolo di $L(\Gamma)$ dato da

$$L = \left\{ \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{w}_i \mid m_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, n \right\}$$

L è ovviamente un sottogruppo commutativo di Γ , consideriamo l'insieme delle classi laterali destre di Γ rispetto a L ; grazie al lemma 3.1.3 è possibile scegliere in ognuna delle classi laterali un rappresentante ω la cui componente traslazionale \mathbf{w} sia tale che

$$\|\mathbf{w}\| \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \|\mathbf{w}_i\| \right) = \frac{n}{2}$$

Per la prima proprietà dei gruppi cristallografici esistono solo un numero finito di questi rappresentanti, li chiamo $\omega_{n+1}, \dots, \omega_N$.

Adesso $\forall \alpha \in \Gamma$, questo può essere scritto come

$$\alpha = \left(\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{w}_i \right) \omega_\nu \quad n+1 \leq \nu \leq N$$

Se considero $\omega_i \in \Gamma$ con $i = 1, \dots, n$ come le traslazioni di vettori w_i $i = 1, \dots, n$, posso caratterizzare unicamente la struttura di gruppo di Γ a meno di isomorfismo come

$$\omega_j \omega_k = \left(\sum_{i=1}^n m_{ijk} \mathbf{w}_i \right) \omega_{\nu(j,k)} \quad \forall j, k = 1, \dots, N \quad (3.2)$$

Γ è quindi unicamente determinato (a meno di isomorfismo) da $N, \omega_{\nu(j,k)}$ e $m_{ijk} \in \mathbb{Z}$. \square

Lemma 3.3.2. *I valori assoluti di $N, \nu(j,k)$ e m_{ijk} sono maggiorati da un intero che dipende solo dalla dimensione n dello spazio \mathbb{E}^n .*

Dimostrazione. E' immediato affermare che $\nu(j,k) \leq N$.

Per ottenere una stima dei moduli di m_{ijk} è necessario distinguere il caso in cui $n = 1$ dal caso in cui $n > 1$, questo risulta necessario in quanto, se $n \geq 2$, allora $1 \leq \frac{n}{2}$, mentre se $n = 1$ vale $1 > \frac{1}{2}$.

- Se $n = 1$, allora la tabella di gruppo 3.2 si può in realtà scrivere come

$$\omega_j \omega_k = m_{1jk} \mathbf{w}_1 \omega_{\nu(j,k)} \quad \forall j, k = 1, \dots, N$$

Il vettore \mathbf{w}_1 è unitario per definizione e $\|trans(\omega_{\nu(j,k)})\| \leq \frac{1}{2}$.

Se considero l'isometria data da $\omega_j \omega_k \omega_{\nu(j,k)}^{-1}$, questa è una traslazione in quanto composizione di tre traslazioni ed è caratterizzata da un vettore in \mathbb{R} di norma inferiore alla somma delle norme dei tre vettori di partenza, quindi in particolare $\leq \frac{5}{2}$. Vale quindi

$$\|m_{1jk} \mathbf{w}_1\| = \|m_{1jk}\| \leq \frac{5}{2}$$

- Se $n > 1$, consideriamo l'isometria data da

$$\omega_j \omega_k \omega_{\nu(j,k)}^{-1} = \left(\sum_{i=1}^n m_{ijk} \mathbf{w}_i \right) \quad \forall j, k = 1, \dots, N$$

Questa è una translazione ed il vettore associato ha lunghezza minore di $\frac{3n}{2}$ in quanto le componenti di translazione di ω_j e ω_k hanno modulo unitario, mentre il vettore $trans(\omega_{\nu(j,k)}^{-1})$ ha norma $\leq \frac{1}{2}$ per com'è stato scelto. Si consideri adesso, $\forall i = 1, \dots, n$ il sottospazio vettoriale E_i generato da $\{\mathbf{w}_j\}_{j \neq i}$. Otteniamo quindi

$$\|m_{ijk}\mathbf{w}_i^\perp\| \leq \frac{3n}{2} \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (3.3)$$

Applicando il lemma 3.1.4 al sottospazio E_i e combinando con la disequazione precedente si ottiene

$$\|m_{ijk}\| \leq \frac{3n}{2}(n+2)^n \quad (3.4)$$

Concentriamoci adesso sulla stima di N .

Dato che i vettori \mathbf{w}_i con $i = 1, \dots, n$ sono base unitaria di \mathbb{R}^n ; $\forall \alpha = (\mathbf{A}, \mathbf{a}) \in \Gamma$, A è unicamente determinata da i vettori $A\mathbf{w}_i$ con $i = 1, \dots, n$. Grazie al lemma 3.1.5 sappiamo che ognuna di queste immagini $A\mathbf{w}_i$ è un vettore unitario in $L(\Gamma)$; è possibile applicare il lemma 3.1.2 con $\rho = 1$ e si ottiene che esistono al più 3^n translazioni in $L(\Gamma)$ di vettore di norma ≤ 1 . È quindi possibile concludere che esistono al più $(3^n)^n$ differenti A possibili componenti di rotazione delle isometrie in Γ .

Consideriamo il caso in cui $\omega_s = (S, s)$ e $\omega_t = (T, t)$ scelti fra gli $\omega_{n+1}, \dots, \omega_N$ siano tali che $S = T$; allora l'isometria $\omega_s \omega_t^{-1}$ è una translazione di vettore di norma $\leq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$ (in particolare è un elemento di $L(\Gamma)$); si può quindi applicare nuovamente il lemma 3.1.2 con $\rho = n$ e si ottiene che questo vettore è uno fra al più $(2n+1)^n$ candidati.

Abbiamo in questo modo ottenuto concluso la dimostrazione in quanto

$$N \leq n + (3^n)^n(2n+1)^n$$

□

3.4 Dimostrazione del secondo teorema di Bieberbach

Dimostrazione. Si fissi $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \neq 0$.

Comunque scelto un gruppo cristallografico n -dimensionale Γ questo è isomorfo ad un gruppo cristallografico normale Γ' grazie al teorema 3.2.1; ovviamente Γ' è unico a meno di isomorfismo.

Grazie al teorema 3.3.1 sappiamo che Γ' è caratterizzato da una tabella di gruppo che associa ad ogni coppia di elementi il loro prodotto. È noto che due gruppi che hanno la stessa tabella di gruppo sono isomorfi in modo canonico tramite un'applicazione definita a partire dalla tabella stessa; grazie al risultato 3.3.2 sappiamo che le tabelle di gruppo in dimensione n sono in numero finito, quindi si può concludere che esiste solo un numero finito di classi di isomorfismo di gruppi cristallografici. □

Capitolo 4

Classificazione dei gruppi cristallografici in dimensione 2

In questo capitolo ci concentriamo sulla classificazione dei gruppi cristallografici 2-dimensionali. Nella prima sezione descriveremo gli invarianti che ci permetteranno di caratterizzare le diverse classi di isomorfismo dei gruppi e alcune loro proprietà, mentre nella seconda procederemo con l'effettiva classificazione attraverso alcuni teoremi di caratterizzazione.

4.1 Invarianti dei gruppi cristallografici

Consideriamo lo spazio vettoriale \mathbb{R}^2 dotato della base canonica

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

In particolare in questo capitolo considereremo il piano cartesiano xOy . Sia Γ un gruppo cristallografico 2-dimensionale. Grazie al teorema 3.2.1 possiamo considerare Γ un gruppo cristallografico normale, a meno di isomorfismo.

Il primo invariante da considerare è il reticolo di Γ , $L(\Gamma)$; le sue proprietà fondamentali sono illustrate nella prima sezione del capitolo 2.

Teorema 4.1.1. *Dato Γ gruppo cristallografico normale 2-dimensionale, $L(\Gamma)$ è della forma*

$$L(\Gamma) = \{n_1 \mathbf{t}_1 + n_2 \mathbf{t}_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$$

Dove $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ sono vettori unitari in $L(\Gamma)$

Dimostrazione. Dato che $L(\Gamma)$ è un gruppo, $\{n_1 \mathbf{t}_1 + n_2 \mathbf{t}_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\} \subseteq L(\Gamma)$.

Vogliamo ora verificare l'altra inclusione. Dato che Γ è un gruppo cristallografico normale sappiamo che $\exists \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ vettori unitari linearmente indipendenti in $L(\Gamma)$. Dato che $\{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2\}$ è una base di \mathbb{R}^2 , allora $\exists n_1, n_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbf{x} = n_1 \mathbf{t}_1 + n_2 \mathbf{t}_2$$

Vogliamo mostrare che in particolare $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. Grazie al lemma 3.1.3 sappiamo che $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tali che

$$\|\mathbf{x} - k_1 \mathbf{t}_1 - k_2 \mathbf{t}_2\| \leq \frac{1}{2} 2 = 1$$

D'altro canto, dato che Γ gruppo cristallografico normale e $k_1 \mathbf{t}_1 + k_2 \mathbf{t}_2 \in L(\Gamma)$, allora, se per assurdo avessimo $(k_1, k_2) \neq (n_1, n_2)$, varrebbe la disuguaglianza opposta

$$\|\mathbf{x} - k_1 \mathbf{t}_1 - k_2 \mathbf{t}_2\| \geq 1$$

E quindi in particolare

$$1 = \|(n_1 - k_1)\mathbf{t}_1 + (n_2 - k_2)\mathbf{t}_2\| = \sqrt{(n_1 - k_1)^2\|\mathbf{t}_1\|^2 + (n_2 - k_2)^2\|\mathbf{t}_2\|^2} = \sqrt{(n_1 - k_1)^2 + (n_2 - k_2)^2}$$

Per come sono stati scelti k_1, k_2 nella dimostrazione del teorema 3.2.1, sappiamo che $n_1 - k_1 \leq \frac{1}{2}$ e $n_2 - k_2 \leq \frac{1}{2}$, quindi vale

$$1 = \sqrt{(n_1 - k_1)^2 + (n_2 - k_2)^2} \leq \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

E questo è un assurdo. Di conseguenza possiamo concludere che $k_1 = n_1$ e $k_2 = n_2$.

Abbiamo quindi verificato che

$$L(\Gamma) = \{n_1\mathbf{t}_1 + n_2\mathbf{t}_2 | n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$$

□

Lemma 4.1.2. *Dati $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ vettori in $L(\Gamma)$ di lunghezza minima, l'angolo contenuto fra essi $\angle(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$ è ampio almeno $\frac{\pi}{3}$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $\angle(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) < \frac{\pi}{3}$, in questa situazione il vettore $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 \in L(\Gamma)$ risulta di lunghezza inferiore alla lunghezza dei vettori di partenza, quindi viene negata l'ipotesi del teorema. □

Il secondo invariante che consideriamo è il gruppo delle matrici che compaiono in Γ .

Definizione 4.1.1. *Sia Γ un gruppo cristallografico, definisco il gruppo puntuale di Γ H_Γ come*

$$H_\Gamma := \{\mathbf{A} \in O(n) | \exists \alpha = (\mathbf{A}, \mathbf{a}) \in \Gamma\}$$

La verifica che H_Γ è un gruppo è immediata se si considera che questo è la proiezione sul primo fattore di $\Gamma < Isom(2) = O(2) \rtimes \mathbb{R}^2$.

Definizione 4.1.2. *Definiamo l'azione di H_Γ su $L(\Gamma)$ come l'omomorfismo che, scelta comunque $\mathbf{A} \in H_\Gamma$ associa ogni elemento $\mathbf{w} \in L(\Gamma)$ a \mathbf{Aw} .*

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbf{A}} : L(\Gamma) &\longrightarrow L(\Gamma) \\ \mathbf{w} &\longmapsto \mathbf{Aw} \end{aligned}$$

Enunciamo il seguente risultato senza dimostrarlo.

Lemma 4.1.3. *Scelta comunque una matrice $A \in O(2)$, questa è una rotazione o una riflessione*

- *Se \mathbf{A} è una rotazione, allora si può scrivere come*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

In particolare \mathbf{A} agisce sui punti di \mathbb{R}^2 rotandoli intorno all'origine di un angolo θ in senso antiorario. Le matrici di rotazione in $O(2)$ hanno determinante uguale ad 1.

- *Se \mathbf{A} è una riflessione, allora si può scrivere come*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

In particolare \mathbf{A} agisce sui punti di \mathbb{R}^2 come una riflessione rispetto alla retta l passante per l'origine che forma un angolo θ con la direzione positiva dell'asse delle x . Le matrici di questa forma hanno determinante uguale a -1 .

Definizione 4.1.3. Chiamiamo H_Γ^0 il sottogruppo di H_Γ formato dalle rotazioni.

$$H_\Gamma^0 := \{\mathbf{A} \in H_\Gamma | \det(\mathbf{A}) = 1\}$$

Lemma 4.1.4. Comunque scelta una matrice \mathbf{A} in H_Γ esiste $q \in \mathbb{N}$ tale che $\mathbf{A}^q = \mathbf{id}$. In particolare H_Γ contiene solo elementi di ordine finito e H_Γ^0 è ciclico.

Dimostrazione. È immediato verificare che, data una riflessione $\mathbf{A} \in H_\Gamma$, $\mathbf{A}^2 = \mathbf{id}$. Scelta invece una rotazione \mathbf{A} in H_Γ^0 , sappiamo che questa può essere scritta come

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Supponiamo adesso $\mathbf{A} \neq \mathbf{id}$ (altrimenti la dimostrazione è conclusa); vogliamo mostrare che $\theta = \frac{2\pi p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{N}$ $q \neq 0$ coprimi. È noto dallo studio degli autovalori che le uniche rotazioni di $O(2)$ con autovalori reali sono quelle che ruotano il piano di un multiplo razionale di 2π ; se \mathbf{A} non avesse autovalori reali, scelta \mathbf{t}_1 di norma 1, questa verrebbe mandata in infiniti vettori diversi di norma 1 contenuti in $L(\Gamma)$ dall'azione di \mathbf{A} applicata ricorsivamente e questo violerebbe la prima condizione della definizione dei gruppi cristallografici. Scegliamo quindi come esponente proprio q ; è immediato verificare che $\mathbf{A}^q = \mathbf{id}$.

Abbiamo mostrato che tutti gli elementi di H_Γ^0 sono di ordine finito e sono rotazioni intorno all'origine di angoli del tipo $\theta = \frac{2\pi}{q}$ oppure l'identità; per la discretezza del gruppo cristallografico, quindi anche di H_Γ^0 , esisterà un elemento $\theta = \frac{2\pi}{q}$ per cui q sia il massimo possibile. Voglio dimostrare che H_Γ^0 è generato da θ .

Sia infatti $A \in H_\Gamma^0$ una rotazione di angolo $\theta j + \phi$ con $j \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq \phi < \theta$, se $\phi \neq 0$ allora nel gruppo è contenuta anche una rotazione di angolo $\phi = \frac{2\pi}{r}$, con $r > q$, ma questo è assurdo in quanto abbiamo scelto q in modo che fosse il massimo. Quindi sicuramente $\forall A \in H_\Gamma^0$ questa è una rotazione di angolo θj con $j \in \mathbb{Z}$ ed il gruppo è quindi generato dalla matrice di rotazione di angolo θ . \square

Teorema 4.1.5. Il sottogruppo $H_\Gamma^0 < H_\Gamma$ è di ordine $q = 1, 2, 3, 4$ o 6 . In particolare se $q = 3, 4, 6$, allora esiste un vettore $\mathbf{t} \in L(\Gamma)$ tale che

$$L(\Gamma) = \{n_1 \mathbf{t} + n_2 \mathbf{A} \mathbf{t} | n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$$

dove \mathbf{A} è una rotazione di angolo $\theta = \frac{2\pi}{q}$

Dimostrazione. Consideriamo un vettore $\mathbf{t} \in \Gamma$ non nullo e di lunghezza minima; sia inoltre $\theta = \frac{2\pi}{q}$ l'angolo la cui matrice di rotazione associata \mathbf{A} genera H_Γ^0 .

Distinguiamo adesso la dimostrazione in due casi

- Se q è dispari, $q = 2i + 1$ con $i \in \mathbb{N}$ possiamo considerare i vettori $-\mathbf{t}$ e $\mathbf{A}^i \mathbf{t}$, essi sono di lunghezza minima e sono in $L(\Gamma)$, quindi possiamo applicare il lemma 4.1.2. L'angolo fra essi è

$$\angle(-\mathbf{t}, \mathbf{A}^i \mathbf{t}) = \pi - i \frac{2\pi}{q} = \pi - i \frac{2\pi}{2i+1} = \frac{2\pi i + \pi - 2\pi i}{2i+1} = \frac{\pi}{2i+1} \geq \frac{\pi}{3}$$

Che implica $2i + 1 \leq 3$, ovvero $q \leq 3$.

- Se q è pari, $q = 2i$ con $i \in \mathbb{N}$ possiamo considerare i vettori \mathbf{t} e $\mathbf{A} \mathbf{t}$, essi sono di lunghezza minima e sono in $L(\Gamma)$, quindi grazie al lemma 4.1.2 l'angolo fra di essi è

$$\angle(\mathbf{t}, \mathbf{A} \mathbf{t}) = \frac{2\pi}{q} \geq \frac{\pi}{3}$$

Che implica $q \leq 6$.

Abbiamo quindi dimostrato che $q = 1, 2, 3, 4$ o 6 ; consideriamo adesso $q = 3, q = 4$ oppure $q = 6$.

In tutti e tre i casi si verifica immediatamente, per quanto appena detto, che $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, il vettore $n_1 \mathbf{t} + n_2 \mathbf{A} \mathbf{t}$ appartiene a $L(\Gamma)$. Vogliamo mostrare che tutti i vettori di $L(\Gamma)$ hanno questa forma; supponiamo per assurdo che esista un vettore nel reticolo che non si può scrivere in quella forma, a meno di sottrarre multipli interi di \mathbf{t} e $\mathbf{A} \mathbf{t}$ otteniamo un vettore

$$x_1 \mathbf{t} + x_2 \mathbf{A} \mathbf{t} \in L(\Gamma) \quad 0 < x_1, x_2 \leq \frac{1}{2}$$

Lavorando sulla norma di tale vettore, ricordando $q = 3, q = 4$ o $q = 6$, si ottiene

$$\begin{aligned} \|x_1 \mathbf{t} + x_2 \mathbf{A} \mathbf{t}\| &= \|\mathbf{t}\| \left(x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 \cos\left(\frac{2\pi}{q}\right) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \|\mathbf{t}\| \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{q}\right) \right)^{\frac{1}{2}} < \|\mathbf{t}\| = 1 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Questo è un assurdo perché Γ gruppo cristallografico normale. \square

A questo punto è necessario analizzare un ulteriore invariante: i vettori di shift. Sia $\mathbf{A} \in H_\Gamma$, grazie al lemma 4.1.4 sappiamo che $\exists q \in \mathbb{N}$ tale che $\mathbf{A}^q = \mathbf{id}$. In particolare dato che \mathbf{A} è un elemento di un gruppo, dico che è di ordine q . Sia $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ tale che $(\mathbf{A}, \mathbf{a}) \in \Gamma$

$$(\mathbf{A}, \mathbf{a})^q = (\mathbf{A}^q, \mathbf{a} + \mathbf{A} \mathbf{a} + \dots + \mathbf{A}^{q-1} \mathbf{a}) = (\mathbf{id}, \mathbf{b})$$

Dove $\mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{A} \mathbf{a} + \dots + \mathbf{A}^{q-1} \mathbf{a}$. Dico che un vettore \mathbf{b} ottenuto in questo modo è un vettore di shift di \mathbf{A} . Se esiste un altro \mathbf{a}' tale che $(\mathbf{A}, \mathbf{a}') \in \Gamma$, a questo corrisponderà \mathbf{b}' un altro vettore di shift di \mathbf{A}

$$(\mathbf{A}, \mathbf{a}')^q = (\mathbf{A}^q, \mathbf{a}' + \mathbf{A} \mathbf{a}' + \dots + \mathbf{A}^{q-1} \mathbf{a}') = (\mathbf{id}, \mathbf{b}')$$

In particolare se $(\mathbf{A}, \mathbf{a}), (\mathbf{A}, \mathbf{a}') \in \Gamma$, allora

$$(\mathbf{A}, \mathbf{a})(\mathbf{A}, \mathbf{a}')^{-1} = (\mathbf{A}, \mathbf{a})(\mathbf{A}^{-1}, -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{a}') = (\mathbf{id}, \mathbf{a} - \mathbf{a}')$$

ovvero, fissato $\mathbf{c} := \mathbf{a} - \mathbf{a}' \in L(\Gamma)$, si può scrivere

$$\mathbf{b}' = \mathbf{b} - (\mathbf{c} + \mathbf{A} \mathbf{c} + \dots + \mathbf{A}^{q-1} \mathbf{c})$$

Chiamiamo vettori di shift di \mathbf{A} tutti i $\mathbf{b}' \in L(\Gamma)$ che possono essere scritti in questo modo con $\mathbf{c} \in L(\Gamma)$

Lemma 4.1.6. *Sia $\mathbf{A} \in H_\Gamma$ una matrice $\mathbf{A} \neq \mathbf{id}$ e sia $\mathbf{b} \in L(\Gamma)$ vettore di shift di \mathbf{A} , allora*

- *Se \mathbf{A} è una rotazione, allora $\mathbf{b} = \mathbf{0}$*
- *Se \mathbf{A} è una riflessione lungo la retta l , allora $\mathbf{b} \in l$ ed ogni coppia di vettori di shift differisce di un vettore $\mathbf{t} + \mathbf{A} \mathbf{t}$ per qualche $\mathbf{t} \in L(\Gamma)$.*

Dimostrazione. La dimostrazione è immediata se si considera che i vettori di shift sono tali che $\mathbf{A} \mathbf{b} = \mathbf{b}$. Le uniche rotazioni che hanno come autovalore 1 sono quelle che hanno matrice associata uguale all'identità (quindi $\mathbf{A} \mathbf{b} = \mathbf{b}$ implica $\mathbf{b} = \mathbf{0}$); viceversa se \mathbf{A} è una riflessione lungo una retta l , l'autospazio rispetto all'autovalore 1 è la retta stessa. Se si considerano due vettori di shift di \mathbf{A} riflessione, questi stanno entrambi lungo la retta l , quindi differiscono di un vettore che sta a sua volta in l ; comunque scelto $\mathbf{t} \in L(\Gamma)$, dato che in questo caso $q = 2$, $\mathbf{t} + \mathbf{A} \mathbf{t} \in L(\Gamma)$ e, dato che $\mathbf{A}(\mathbf{t} + \mathbf{A} \mathbf{t}) = \mathbf{A} \mathbf{t} + \mathbf{A}^2 \mathbf{t} = \mathbf{A} \mathbf{t} + \mathbf{t}$ e quindi, per quanto appena dimostrato, $\mathbf{t} + \mathbf{A} \mathbf{t} \in l$. \square

Il seguente lemma viene enunciato senza dimostrazione in quanto si tratta di verifiche immediate.

Lemma 4.1.7. *Sia $\mathbf{A} \in H_\Gamma$ una matrice di riflessione lungo la retta l , si consideri un vettore $\mathbf{r} \in L(\Gamma) \cap l$ di lunghezza minima non nulla. Allora vale una delle seguenti condizioni*

1. \mathbf{r} è della forma $\mathbf{r} = \mathbf{t} + \mathbf{A}\mathbf{t}$ con $\mathbf{t} \in L(\Gamma)$. In questo caso ogni vettore $\mathbf{a} \in L(\Gamma) \cap l$ è un vettore di shift di \mathbf{A} .
2. \mathbf{r} non può essere scritto come $\mathbf{t} + \mathbf{A}\mathbf{t}$ con $\mathbf{t} \in L(\Gamma)$. In questo caso sicuramente $\mathbf{r} + \mathbf{A}\mathbf{r} = 2\mathbf{r}$, quindi ogni coppia di vettori di shift di \mathbf{A} differiscono per un multiplo pari di \mathbf{r} . Ci sono quindi due possibilità:
 - (a) $\mathbf{0}$ è un vettore di shift di \mathbf{A}
 - (b) \mathbf{r} è un vettore di shift di \mathbf{A}

4.2 Isomorfismi di gruppi cristallografici 2-dimensionali

In questa sezione saranno omesse le dimostrazioni dei lemmi in quanto si tratta di semplici verifiche.

Definizione 4.2.1. Due gruppi cristallografici 2-dimensionali sono equivalenti se esiste un isomorfismo che preserva i reticoli.

Omettiamo la dimostrazione del seguente lemma in quanto si tratta di semplici verifiche.

Lemma 4.2.1. Dati due gruppi cristallografici 2-dimensionali equivalenti Γ e Δ e l'isomorfismo $\phi: \Gamma \rightarrow \Delta$ valgono le seguenti proprietà

1. La restrizione dell'isomorfismo su i reticoli dà un isomorfismo $\lambda: L(\Gamma) \rightarrow L(\Delta)$.
2. Se $\phi(\mathbf{A}, \mathbf{a}) = \mathbf{A}', \mathbf{a}'$, allora

$$\phi(\mathbf{id}, \mathbf{A}\mathbf{t}) = \phi(\mathbf{A}, \mathbf{a})\phi(\mathbf{id}, \mathbf{t})\phi(\mathbf{A}, \mathbf{a})^{-1} = (\mathbf{A}', \mathbf{a}')(\mathbf{id}, \lambda\mathbf{t})(\mathbf{A}', \mathbf{a}')^{-1}$$

In particolare $\lambda\mathbf{A}\mathbf{t} = \mathbf{A}'\lambda\mathbf{t}$ per ogni $\mathbf{t} \in L(\Gamma)$; $\mathbf{A}' = \lambda\mathbf{A}\lambda^{-1}$

3. $H_\Delta = \lambda H_\Gamma \lambda^{-1}$ e $H_\Delta^0 = \lambda H_\Gamma^0 \lambda^{-1}$
4. Se $\mathbf{A} \in \Gamma$ è di ordine q , allora anche $\mathbf{A}' = \phi(\mathbf{A})$ è di ordine q ; inoltre se \mathbf{b} vettore di shift di \mathbf{A} , allora $\lambda\mathbf{b}$ è un vettore di shift di \mathbf{A}' .

4.3 Teoremi di classificazione

In questa sezione saranno enunciati e dimostrati i teoremi di classificazione dei gruppi cristallografici 2-dimensionali. Si tratta in sostanza di raccogliere i risultati fin ora dimostrati.

Teorema 4.3.1. Le classi di equivalenza di gruppi cristallografici il cui gruppo puntuale non contiene riflessioni sono 5.

Dimostrazione. Se il gruppo puntuale H_Γ non contiene riflessioni, allora $H_\Gamma = H_\Gamma^0$.

Il lemma 4.1.4 assicura che il gruppo puntuale è ciclico generato da una rotazione di angolo $\theta = \frac{2\pi}{q}$ ed il teorema 4.1.5 implica che $q \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$. I gruppi puntuali possibili sono quindi \mathbb{Z} , $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Siano Γ, Δ due gruppi cristallografici tali che $H_\Gamma \cong H_\Delta$, vogliamo costruire un isomorfismo $\lambda: L(\Gamma) \rightarrow L(\Delta)$ tale che $\mathbf{A}\lambda = \lambda\mathbf{A}$.

Se $q = 1, q = 2$ allora possiamo scegliere un isomorfismo qualunque; per $q = 3, q = 4$ e $q = 6$, sappiamo grazie al teorema 4.1.5 che

$$L(\Gamma) = \{n_1\mathbf{t} + n_2\mathbf{A}\mathbf{t} | n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$$

$$L(\Delta) = \{n_1\mathbf{t}' + n_2\mathbf{A}'\mathbf{t}' | n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$$

Scegliamo l'isomorfismo tale per cui $\lambda\mathbf{t} = \mathbf{t}'$ e $\lambda\mathbf{A}^i\mathbf{t} = \mathbf{A}'^i\mathbf{t}'$. In questo modo, per qualunque q , λ è un'applicazione lineare di \mathbb{R}^2 tale che $\lambda\mathbf{A}^i = \mathbf{A}'^i\lambda \quad \forall i = 0, 1, \dots, q-1$.

Scriviamo i due gruppi cristallografici come delle unioni

$$\Gamma = L(\Gamma)(\mathbf{id}, \mathbf{0}) \cup L(\Gamma)(\mathbf{A}, \mathbf{a}) \cup \dots \cup L(\Gamma)(\mathbf{A}, \mathbf{a})^{q-1}$$

$$\Delta = L(\Delta)(\mathbf{id}, \mathbf{0}) \cup L(\Delta)(\mathbf{A}, \mathbf{a}') \cup \dots \cup L(\Delta)(\mathbf{A}, \mathbf{a}')^{q-1}$$

Definiamo adesso l'isomorfismo $\phi : \Gamma \longrightarrow \Delta$ in modo che per ogni $i = 0, 1, \dots, q-1$ e per ogni $\mathbf{t} \in L(\Gamma)$ valga

$$\phi[(\mathbf{id}, \mathbf{t})(\mathbf{A}, \mathbf{a})^i] = (\mathbf{id}, \lambda \mathbf{t})(\mathbf{A}, \mathbf{v}')^i$$

Dobbiamo mostrare che ϕ così definito è effettivamente un omomorfismo

MANCA LA FINE DELLA DIMOSTRAZIONE DEL FATTO CHE è un isomorfismo

Abbiamo mostrato che ϕ è un omomorfismo; ϕ possiede un'inversa ed è ovvio che preserva i reticoli quindi Γ e Δ sono equivalenti. \square

Teorema 4.3.2. *Le classi di equivalenza di gruppi cristallografici il cui gruppo puntuale contiene solo una riflessione sono 3.*

Dimostrazione. Se il gruppo puntuale contiene una sola riflessione, allora ha ordine $q = 2$, ovvero $H_\Gamma = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Sia \mathbf{A} la riflessione in H_Γ rispetto alla retta per l'origine l . Scegliamo $\mathbf{r} \in L(\Gamma) \cap l$ come nel lemma 4.1.7. Osserviamo che $\forall \mathbf{t} \in L(\Gamma)$ il vettore $\mathbf{t} - \mathbf{A}\mathbf{t}$ è perpendicolare a l in quanto $\mathbf{A}(\mathbf{t} - \mathbf{A}\mathbf{t}) = \mathbf{A}\mathbf{t} - \mathbf{t} = -(\mathbf{t} - \mathbf{A}\mathbf{t})$, quindi per la prima proprietà dei gruppi cristallografici esisterà un vettore $\mathbf{s} \in L(\Gamma)$ perpendicolare a l e di lunghezza minima. Riprendiamo adesso le casistiche illustrate nel teorema 4.1.7

1. $\mathbf{r} = \mathbf{t} + \mathbf{A}\mathbf{t}$ con $\mathbf{t} \in L(\Gamma)$. Scegliamo $\mathbf{t} = \frac{1}{2}\mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{s}$, ovvero $\mathbf{t} - \mathbf{A}\mathbf{t} = \mathbf{s}$. In questo modo la coppia \mathbf{r}, \mathbf{t} risulta una base per il reticolo $L(\Gamma)$; un reticolo di questo tipo viene chiamato centrato rettangolare
2. \mathbf{r} ed \mathbf{s} in questo caso sono base $L(\Gamma)$; un reticolo di questo tipo viene chiamato primitivo rettangolare, in particolare le due situazioni seguenti generano due diverse classi di equivalenza di gruppi cristallografici

- Dato che $\mathbf{0}$ è un vettore di shift di \mathbf{A} , $\exists \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ tale che $(\mathbf{A}, \mathbf{v}) \in \Gamma$ e $\mathbf{a} = \mathbf{v} + \mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}$
- Dato che \mathbf{r} è un vettore di shift di \mathbf{A} , $\exists \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ tale che $(\mathbf{A}, \mathbf{v}) \in \Gamma$ e $\mathbf{a} = \mathbf{v} + \mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{r}$

Siano Γ, Δ due gruppi cristallografici tali che cadono nella stessa categoria fra le 3 precedenti, in particolare il gruppo puntuale H_Δ sia generato da \mathbf{A}' riflessione lungo la retta per l'origine l' . Si costruiscano $\mathbf{r}', \mathbf{s}', \mathbf{a}' \in L(\Delta)$ come illustrato precedentemente.

Definiamo l'applicazione lineare $\lambda : L(\Gamma) \longrightarrow L(\Delta)$ tale che $\lambda \mathbf{r} = \mathbf{r}'$ e $\lambda \mathbf{s} = \mathbf{s}'$. In questo modo è immediato verificare che $\mathbf{A}'\lambda = \lambda \mathbf{A}$ e $\mathbf{a}' = \lambda \mathbf{a}$.

Scriviamo i due gruppi cristallografici come delle unioni

$$\Gamma = L(\Gamma)(\mathbf{id}, \mathbf{0}) \cup L(\Gamma)(\mathbf{A}, \mathbf{v})$$

$$\Delta = L(\Delta)(\mathbf{id}, \mathbf{0}) \cup L(\Delta)(\mathbf{A}', \mathbf{v}')$$

Definiamo adesso l'isomorfismo $\phi : \Gamma \longrightarrow \Delta$ in modo che per ogni $i = 0, 1$ e per ogni $\mathbf{t} \in L(\Gamma)$

$$\phi[(\mathbf{id}, \mathbf{t})(\mathbf{A}, \mathbf{a})^i] = (\mathbf{id}, \lambda \mathbf{t})(\mathbf{A}', \mathbf{v}')^i$$

Dobbiamo mostrare che ϕ così definito è effettivamente un omomorfismo

MANCA LA FINE DELLA DIMOSTRAZIONE DEL FATTO CHE è un isomorfismo

Abbiamo mostrato che ϕ è un omomorfismo; ϕ possiede un'inversa ed è ovvio che preserva i reticoli quindi Γ e Δ sono equivalenti. \square

Teorema 4.3.3. *Le classi di equivalenza di gruppi cristallografici il cui gruppo puntuale contiene più di una riflessione sono 9*

Dimostrazione. Sia Γ un gruppo cristallografico 2-dimensionale tale che il gruppo puntuale H_Γ contenga due riflessioni \mathbf{A}, \mathbf{B} rispetto alle rette per l'origine l ed m ; allora anche $\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B} \in H_\Gamma$ e \mathbf{C} è una rotazione.

Possiamo scegliere \mathbf{A} e \mathbf{B} in modo che \mathbf{C} sia una rotazione di angolo $\theta = \frac{2\pi}{q}$ che genera H_Γ^0 . In questa

situazione le rette l ed m formano un angolo di $\frac{\pi}{q}$. Siano inoltre $\mathbf{a} = \mathbf{v} + \mathbf{A}\mathbf{v}$ un vettore di shift di \mathbf{A} su l e $\mathbf{b} = \mathbf{w} + \mathbf{A}\mathbf{w}$ un vettore di shift di \mathbf{B} su m .

Vogliamo dimostrare che ci sono 9 possibili combinazioni di gruppi puntuali e vettori di shift e che queste generano 9 diverse classi di equivalenza. \square