

1 Introduzione

Devo dire che è una dim geometrica

Devo dire che uso la dim di Buser e faccio solo i primi due teoremi di Bieb

Devo enunciare i teoremi di Bieb

2 Considerazioni preliminari

In questa sezione vengono enunciati e dimostrati gli strumenti fondamentali necessari per dare una dimostrazione geometria dei primi due teoremi di Bieberbach.

Considero lo spazio vettoriale n -dimensionale \mathbb{R}^n con il prodotto scalare definito $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ da

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

e la norma associata

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$$

Definisco la distanza fra due vettori e l'angolo fra essi.

$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

$$\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \arccos\left(\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}\right) \in [0, \pi]$$

Imponendo una metrica sullo spazio vettoriale \mathbb{R}^n ottengo lo spazio euclideo \mathbb{E}^n .

Definizione 2.1. Un'isometria di \mathbb{E}^n è un funzione $\alpha : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vale

$$d(\alpha(\mathbf{x}), \alpha(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

Il seguente teorema è enunciato senza dimostrazione in quanto si tratta di un risultato classico dell'algebra lineare.

Teorema 2.1. Data un'isometria di \mathbb{E}^n , questa può essere scritta in modo unico come composizione di una rotazione e di una traslazione

$$\alpha : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{x} \longmapsto \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{a}$$

dove $\mathbf{A} = \text{rot}(\alpha) \in O(n)$ è la componente di rotazione di α

e $\mathbf{a} = \text{trans}(\alpha) \in \mathbb{R}^n$ è la componente di traslazione dell'isometria.

Lemma 2.2. L'insieme delle isometrie di \mathbb{E}^n è un gruppo rispetto all'operazione di composizione di applicazioni lineari. Lo chiamiamo $\text{Isom}(n)$.

Definizione 2.2. Comunque prese $\alpha, \beta \in \text{Isom}(n)$ posso scriverle come $\alpha : \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{a}$ e $\beta : \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{b}$. Definisco il loro commutatore come $[\alpha, \beta] = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$.

Lemma 2.3. Comunque prese $\alpha, \beta \in \text{Isom}(n)$ valgono le due seguenti uguaglianze:

$$\text{rot}([\alpha, \beta]) = [\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1} \quad (1)$$

$$\text{trans}([\alpha, \beta]) = (\mathbf{A} - \text{id})\mathbf{b} + (\text{id} - [\mathbf{A}, \mathbf{B}])\mathbf{b} + \mathbf{A}(\text{id} - \mathbf{B})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a} \quad (2)$$

Dimostrazione. $[\alpha, \beta](\mathbf{x}) = (\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1})(\mathbf{x})$.

Dato che $\alpha : \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{a}$, allora sicuramente $\alpha^{-1} : \mathbf{y} \longmapsto \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{a})$.

Allo stesso modo, dato che $\beta : \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, so che $\beta^{-1} : \mathbf{y} \longmapsto \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{b})$.

$$\begin{aligned}
[\alpha, \beta](\mathbf{x}) &= (\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1})(\mathbf{x}) = (\alpha\beta\alpha^{-1})(\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{b})) = \\
&= (\alpha\beta\alpha^{-1})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}) = \\
&= (\alpha\beta)(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{a})) = \\
&= (\alpha\beta)(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}) = \\
&= (\alpha)(\mathbf{B}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}) + \mathbf{b}) = \\
&= (\alpha)(\mathbf{BA}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{BA}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{BA}^{-1}\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \\
&= \mathbf{A}(\mathbf{BA}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{BA}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{BA}^{-1}\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{a} = \\
&= \mathbf{A}(\mathbf{BA}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{BA}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{BA}^{-1}\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{a} = \\
&= \mathbf{ABA}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{ABA}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{ABA}^{-1}\mathbf{a} + \mathbf{Ab} + \mathbf{a}
\end{aligned}$$

Quindi ho che $rot([\alpha, \beta]) = \mathbf{ABA}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$ e

$$\begin{aligned}
trans([\alpha, \beta]) &= -\mathbf{ABA}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{ABA}^{-1}\mathbf{a} + \mathbf{Ab} + \mathbf{a} = \\
&= \mathbf{Ab} + \mathbf{a} - \mathbf{ABA}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{ABA}^{-1}\mathbf{a} = \\
&= (\mathbf{A} - \mathbf{id})\mathbf{b} + \mathbf{b} + \mathbf{a} - \mathbf{ABA}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{ABA}^{-1}\mathbf{a} = \\
&= (\mathbf{A} - \mathbf{id})\mathbf{b} + (\mathbf{id} - [\mathbf{A}, \mathbf{B}])\mathbf{b} + \mathbf{a} - \mathbf{ABA}^{-1}\mathbf{a} = \\
&= (\mathbf{A} - \mathbf{id})\mathbf{b} + (\mathbf{id} - [\mathbf{A}, \mathbf{B}])\mathbf{b} + (\mathbf{id} - \mathbf{ABA}^{-1})\mathbf{a} = \\
&= (\mathbf{A} - \mathbf{id})\mathbf{b} + (\mathbf{id} - [\mathbf{A}, \mathbf{B}])\mathbf{b} + \mathbf{A}(\mathbf{id} - \mathbf{B})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}
\end{aligned}$$

□

Definizione 2.3. Comunque preso $\mathbf{A} \in O(n)$ definisco

$$m(\mathbf{A}) = \max \left\{ \frac{\|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \mathbf{0} \right\}$$

Lemma 2.4. La precedente è una buona definizione e inoltre vale la seguente uguaglianza:

$$m(\mathbf{A}) = \max \left\{ \|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\| \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \|\mathbf{x}\| = 1 \right\}$$

Dimostrazione. $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \mathbf{0} \exists \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n - \mathbf{0}$ tale che $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}, \lambda \in \mathbb{R} \wedge \|\mathbf{y}\| = 1$.

$$\frac{\|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\|\mathbf{A}\lambda \mathbf{y} - \lambda \mathbf{y}\|}{\|\lambda \mathbf{y}\|} = \frac{|\lambda| \|\mathbf{Ay} - \mathbf{y}\|}{|\lambda| \|\mathbf{y}\|} = \|\mathbf{Ay} - \mathbf{y}\|$$

$$m(\mathbf{A}) = \max \left\{ \|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\| \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \|\mathbf{x}\| = 1 \right\}$$

L'insieme $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \|\mathbf{x}\| = 1$ è un compatto in \mathbb{R}^n , quindi per il teorema di Weierstrass esiste una $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \|\mathbf{x}\| = 1$ che mi verifica il max. □

Lemma 2.5. Comunque preso $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vale

$$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\| \leq m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}\|$$

Dimostrazione. Infatti vale $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \mathbf{0}$ e vale anche per $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ □

Definizione 2.4.

$$E_{\mathbf{A}} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\| = m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}\|\}$$

Lemma 2.6. $E_{\mathbf{A}}$ è un sottospazio di \mathbb{R}^n non banale ed \mathbf{A} -invariante

Dimostrazione. • $\mathbf{0} \in E_{\mathbf{A}}$

- $\forall \mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
 $\mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}} \implies \|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\| = m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}\| \implies \|\mathbf{A}\lambda \mathbf{x} - \lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}\| \implies \lambda \mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}}$

- $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E_{\mathbf{A}}$ voglio verificare che $\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \in E_{\mathbf{A}}$
 $\mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}} \implies \|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\| = m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}\|$
 $\mathbf{y} \in E_{\mathbf{A}} \implies \|\mathbf{Ay} - \mathbf{y}\| = m(\mathbf{A})\|\mathbf{y}\|$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - (\mathbf{x} + \mathbf{y})\|^2 + \|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - (\mathbf{x} - \mathbf{y})\|^2 &= \|\mathbf{Ax} - \mathbf{x} + \mathbf{Ay} - \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{Ax} - \mathbf{x} - (\mathbf{Ay} - \mathbf{y})\|^2 = \\ &= 2\|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{Ay} - \mathbf{y}\|^2 = 2(\|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{Ay} - \mathbf{y}\|^2) = 2m(\mathbf{A})^2(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2) \end{aligned} \quad (3)$$

Da (3) segue

$$\begin{aligned} 2m(\mathbf{A})^2(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2) &= \|\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - (\mathbf{x} + \mathbf{y})\|^2 + \|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - (\mathbf{x} - \mathbf{y})\|^2 \leq m(\mathbf{A})^2(\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2) \\ &= m(\mathbf{A})^2(\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2) = 2m(\mathbf{A})^2(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2) \end{aligned} \quad (4)$$

Quindi il segno di disuguaglianza in (4) è un'uguaglianza, in particolare

$$\|\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - (\mathbf{x} + \mathbf{y})\|^2 + \|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - (\mathbf{x} - \mathbf{y})\|^2 = m(\mathbf{A})^2(\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2)$$

Spostando i termini da parte a parte ottengo

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - (\mathbf{x} + \mathbf{y})\|^2 - m(\mathbf{A})^2\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= m(\mathbf{A})^2\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - (\mathbf{x} - \mathbf{y})\|^2 \\ \left(\|\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - (\mathbf{x} + \mathbf{y})\| + m(\mathbf{A})\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \right) \left(\|\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - (\mathbf{x} + \mathbf{y})\| - m(\mathbf{A})\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \right) &= \\ - \left(\|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - (\mathbf{x} - \mathbf{y})\| + m(\mathbf{A})\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \right) \left(\|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - (\mathbf{x} - \mathbf{y})\| - m(\mathbf{A})\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \right) \end{aligned} \quad (5)$$

Distinguiamo alcuni casi:

- Se $\mathbf{A} = \mathbf{id} \implies m(\mathbf{A}) = 0 \implies E_{\mathbf{A}} = \mathbb{R}^n$ ed in quel caso ho chiuso la dimostrazione.
- Se $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ o $\mathbf{x} = -\mathbf{y}$ ho già chiuso la dimostrazione per il punto precedente (rispettivamente con $\lambda = +1$ e $\lambda = -1$).
- Nei restanti casi posso osservare che nell'equazione (5) il primo fattore a sinistra dell'uguaglianza è strettamente positivo, mentre il secondo fattore è ≤ 0 . Allo stesso modo a destra dell'uguaglianza ho un meno che mi modifica il segno del prodotto; il primo fattore è strettamente positivo ed il secondo è ≤ 0 .

L'uguaglianza in (5) deve quindi per forza coincidere con $0 = 0$ e questo mi implica

$$\begin{cases} \|\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - (\mathbf{x} + \mathbf{y})\| = m(\mathbf{A})\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \\ \|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - (\mathbf{x} - \mathbf{y})\| = m(\mathbf{A})\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \end{cases}$$

$$\implies \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \in E_{\mathbf{A}}$$

Ho concluso la dimostrazione del fatto che $E_{\mathbf{A}}$ è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n

- Mostro che $E_{\mathbf{A}}$ è non banale.

$$m(\mathbf{A}) = \max \left\{ \|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\| \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \|\mathbf{x}\| = 1 \right\}$$

L'insieme degli $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \|\mathbf{x}\| = 1$ è un compatto; l'applicazione $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\|$ è continua in quanto composizione di funzioni continue, quindi sicuramente esiste un $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \|\mathbf{x}\| = 1$ che mi verifica il massimo. In particolare $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (perché ha norma 1) e

$$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\| = m(\mathbf{A}) = m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}\| \implies \mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}}$$

- Mostro che $E_{\mathbf{A}}$ è \mathbf{A} -invariante.

$\forall \mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}}$ voglio mostrare che $\mathbf{Ax} \in E_{\mathbf{A}}$

$$\mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}} \implies \|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\| = m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}\|$$

Dato che $\mathbf{A} \in O(n)$ ho la seguente catena di uguaglianze:

$$\|\mathbf{A}(\mathbf{Ax}) - \mathbf{Ax}\| = \|\mathbf{A}(\mathbf{Ax} - \mathbf{x})\| = \|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\| = m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}\| = m(\mathbf{A})\|\mathbf{Ax}\| \implies \mathbf{Ax} \in E_{\mathbf{A}}$$

□

Lemma 2.7. $E_{\mathbf{A}}$ sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n non banale, quindi posso definire il suo complemento ortogonale $E_{\mathbf{A}}^{\perp} \neq \mathbb{R}^n$ ed anche questo è \mathbf{A} -invariante.

Definizione 2.5.

$$m^{\perp}(\mathbf{A}) = \begin{cases} \max \left\{ \frac{\|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \mid \mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}}^{\perp} - \mathbf{0} \right\} & \text{se } E_{\mathbf{A}}^{\perp} \neq \mathbf{0} \\ 0 & \text{se } E_{\mathbf{A}}^{\perp} = \mathbf{0} \end{cases}$$

Lemma 2.8. $m^{\perp}(\mathbf{A}) < m(\mathbf{A})$ se $\mathbf{A} \neq \text{id}$

$m^{\perp}(\mathbf{A}) = m(\mathbf{A}) = 0$ se $\mathbf{A} = \text{id}$

Dimostrazione. • Se $\mathbf{A} = \text{id} \implies m(\mathbf{A}) = 0 \wedge E_{\mathbf{A}} = \mathbb{R}^n$. Quindi $E_{\mathbf{A}}^{\perp} = \mathbf{0} \implies m^{\perp}(\mathbf{A}) = 0$

• Se $\mathbf{A} \neq \text{id}$

$$m(\mathbf{A}) = \max \left\{ \frac{\|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \mathbf{0} \right\} \geq \max \left\{ \frac{\|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \mid \mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}}^{\perp} - \mathbf{0} \right\} = m^{\perp}(\mathbf{A})$$

Se valesse $m(\mathbf{A}) = m^{\perp}(\mathbf{A}) \implies \exists \mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}}^{\perp} - \mathbf{0} : \|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\| = m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}\| \implies \mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}}$ ma questo implica $\mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}} \cap E_{\mathbf{A}}^{\perp} = \mathbf{0} \implies \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ma questo è assurdo perché ho imposto che $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

□

Lemma 2.9. $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ posso scrivere \mathbf{x} in modo unico in decomposizione ortogonale.

$\mathbf{x} = \mathbf{x}^E + \mathbf{x}^{\perp}$ dove $\mathbf{x}^E \in E_{\mathbf{A}}$ e $\mathbf{x}^{\perp} \in E_{\mathbf{A}}^{\perp}$

Valgono inoltre le proprietà:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{Ax}^E - \mathbf{x}\| &= m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}^E\| \\ \|\mathbf{Ax}^{\perp} - \mathbf{x}\| &\leq m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}^{\perp}\| \end{aligned}$$

Lemma 2.10. $\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in O(n)$ vale la disuguaglianza $m([\mathbf{A}, \mathbf{B}]) \leq 2m(\mathbf{A})m(\mathbf{B})$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}, \mathbf{B}] - \text{id} &= \mathbf{ABA}^{-1}\mathbf{B}^{-1} - \text{id} = (\mathbf{AB} - \mathbf{BA})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1} = [(\mathbf{A} - \text{id})(\mathbf{B} - \text{id}) - (\mathbf{B} - \text{id})(\mathbf{A} - \text{id})]\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1} = \\ &= (\mathbf{A} - \text{id})(\mathbf{B} - \text{id})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1} - (\mathbf{B} - \text{id})(\mathbf{A} - \text{id})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|([\mathbf{A}, \mathbf{B}] - \text{id})\mathbf{x}\| &\leq \|(\mathbf{A} - \text{id})(\mathbf{B} - \text{id})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}\| + \|(\mathbf{B} - \text{id})(\mathbf{A} - \text{id})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}\| \leq \\ &\leq m(\mathbf{A})\|(\mathbf{B} - \text{id})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}\| + m(\mathbf{B})\|(\mathbf{A} - \text{id})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}\| \leq \\ &\leq m(\mathbf{A})m(\mathbf{B})\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}\| + m(\mathbf{B})m(\mathbf{A})\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}\| \end{aligned} \quad (6)$$

Dato che $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in O(n)$ posso scrivere $\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$, quindi

$$\|([\mathbf{A}, \mathbf{B}] - \text{id})\mathbf{x}\| \leq 2m(\mathbf{A})m(\mathbf{B})\|\mathbf{x}\| \quad (7)$$

Quindi segue immediatamete la tesi. □

Si richiede, di solito, quando si parla di gruppi cristallografici, che abbiano un dominio fondamentale discreto e compatto. In particolare in questo caso utilizziamo la seguente definizione:

Definizione 2.6. Un gruppo Γ di isometrie in \mathbb{R}^n è detto cristallografico se valgono le seguenti condizioni:

- $\forall t \in \mathbb{R} : t > 0$ esistono solo un numero finito di $\alpha \in \Gamma$ tali che $|\alpha| \leq t$
- $\exists d \in \mathbb{R} : \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \exists \alpha \in \Gamma : \|\mathbf{a} - \mathbf{x}\| \leq d$

Sia ora Γ un gruppo cristallografico in \mathbb{R}^n

Teorema 2.11. Mini Bieberbach $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{u}\| = 1, \forall \epsilon, \delta > 0 \exists \beta \in \Gamma$ che soddisfa

- $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$
- $\angle(\mathbf{u}, \mathbf{b}) \leq \delta$
- $m(\mathbf{B}) \leq \epsilon$

Dimostrazione. • Per la seconda proprietà dei gruppi cristallografici so che $\exists d \in \mathbb{R} : \forall k \in \mathbb{N} \exists \beta_k \in \Gamma :$

$$\beta_k \mathbf{x} = \mathbf{B}_k \mathbf{x} + \mathbf{b}_k$$

$$\|\mathbf{b}_k - k\mathbf{u}\| \leq d$$

Se $k \rightarrow \infty$ allora sicuramente $\|\mathbf{b}_k\| \rightarrow \infty$.

Infatti se, per assurdo, questo non fosse vero $\exists M \in \mathbb{R} : \|\mathbf{b}_k\| \leq M \forall k \in \mathbb{N}$

$$d \geq \|\mathbf{b}_k - k\mathbf{u}\| \geq \|\mathbf{b}_k\| - k$$

Nella disequazione precedente, se la successione è limitata allora l'ultimo termine diverge ma questo è assurdo perché è maggiorato da d .

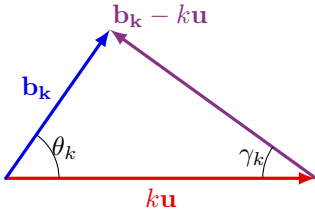
- Ho definito la successione $\{\beta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ con $\beta_k \mathbf{x} = \mathbf{B}_k \mathbf{x} + \mathbf{b}_k$ $\beta_k \in \Gamma \implies \mathbf{B}_k \in O(n)$
 $O(n)$ è compatto e $\{\mathbf{B}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ successione in $O(n)$ ammette quindi almeno un punto di accumulazione per il teorema di Bolzano-Weierstrass.
 Estraggo da $\{\mathbf{B}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sottosuccessione $\{\mathbf{A}_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \{\mathbf{B}_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ convergente.
 La funzione $m : O(n) \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in quanto composizione di funzioni continue ($\mathbf{A} \mapsto \max \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}\|$), quindi con $i, j \in \mathbb{B} \rightarrow \infty$ sicuramente $m(\mathbf{C}_j \mathbf{C}_i^{-1}) \rightarrow m(\mathbf{id}) = 0$
- Considero ora

$$\angle(\mathbf{u}, \mathbf{b}_k) = \angle(k\mathbf{u}, \mathbf{b}_k) =: \theta_k$$

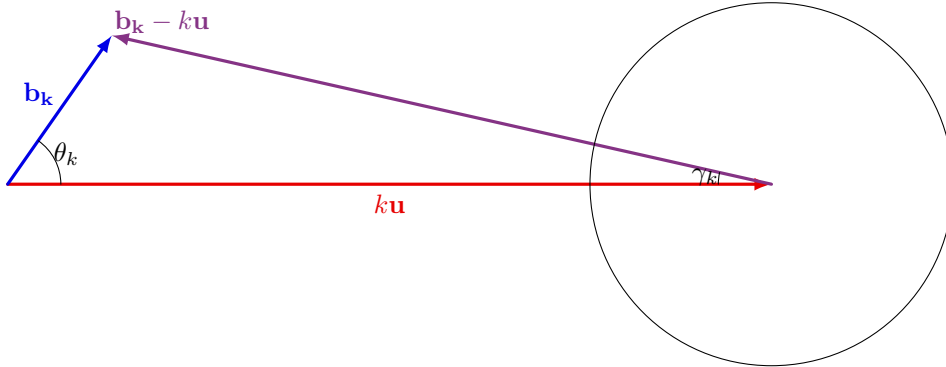
$$\frac{\|\mathbf{b}_k\|}{\sin(\gamma_k)} = \frac{\|\mathbf{b}_k - k\mathbf{u}\|}{\sin(\theta_k)} \leq \frac{d}{\sin(\theta_k)}$$

$$\sin(\theta_k) \leq \frac{\sin(\gamma_k)d}{\|\mathbf{b}_k\|} \rightarrow 0 \implies \theta_k \rightarrow 0$$

[vector,myred] (O) – (A) node[midway,below] $k\mathbf{u}$; [vector,myblue] (O) – (B) node[midway,above left=-2] \mathbf{b}_k ;
 [vector,mypurple] (A) – (B) node[above right=-3] $\mathbf{b}_k - k\mathbf{u}$; [draw," θ_k ",angle radius=20,angle eccentricity=1.25] angle=A–O–B;
 [draw," γ_k ",angle radius=20,angle eccentricity=1.25] angle=B–A–O;



$$\implies \exists i, j \in \mathbb{N} : \angle(u, \mathbf{b}_j) \leq \frac{\delta}{4}$$



□