

# Introduzione e motivazioni

In occasione del secondo Congresso internazionale dei matematici a Parigi, tenutosi nel 1900, David Hilbert propose una conferenza dal titolo “Mathematische Probleme” in cui presentò un elenco di 23 problemi all’epoca irrisolti. Lo spirito della conferenza era quello di fare il punto dello stato dell’arte della matematica ed elencare quelle che, secondo il famoso matematico, sarebbero state le domande più importanti del secolo.

Chi di noi – iniziò Hilbert – non vorrebbe sollevare il velo sotto cui sta nascosto il futuro, per gettare uno sguardo sui prossimi progressi della nostra scienza e sui segreti del suo sviluppo durante i secoli venturi? Quali saranno gli speciali obiettivi a cui mireranno le più insigni menti matematiche delle generazioni future? Quali nuovi metodi e quali nuovi risultati scopriranno i nuovi secoli, nell’ampio e ricco campo del pensiero umano?

Il diciottesimo problema di Hilbert chiedeva

Esiste un poliedro non-regolare che può tassellare lo spazio?  
Qual è il più denso impacchettamento di sfere?

In risposta alla prima domanda, negli anni fra il 1910 ed il 1912, Bieberbach dimostrò quelli che sono adesso conosciuti come i tre teoremi di Bieberbach sui gruppi cristallografici.

La sua dimostrazione si basava sul lavoro di Minkowski sulle approssimazioni razionali simultanee, ma risulta complessa da seguire; pochi anni dopo Frobenius diede una dimostrazione semplificata, ma sempre a carattere fortemente algebrico. La dimostrazione data da Frobenius è diventata lo standard nella pratica matematica e viene utilizzata nella maggior parte dei testi.

Nella prima parte di questo elaborato (capitoli 1 - 3) si propone una dimostrazione alternativa dei primi due teoremi data da Paul Buser in un articolo del 1985 intitolato "A geometric proof of Bieberbach's theorems on crystallographic groups". Buser dimostra i primi due teoremi di Bieberbach attraverso un procedimento estremamente elementare che utilizza approcci prettamente geometrici, nello spirito della geometria dei numeri di Minkowski.

Nell’ultimo capitolo si espone invece una semplice classificazione dei gruppi cristallografici in dimensione 2, chiamati in letteratura "wallpaper patterns", come data da Schwarzenberger nel suo articolo "The 17 plane symmetry groups".



# Capitolo 1

## Risultati preliminari

In questo capitolo enunciamo alcune definizioni e risultati fondamentali per approcciare la dimostrazione geometrica dei primi due teoremi di Bieberbach.

Nella prima sezione riprendiamo la definizione di spazio euclideo  $n$ -dimensionale e del suo gruppo di isometrie, descriviamo una loro rappresentazione come composizione dell'applicazione di una matrice ortogonale e di una traslazione; definiamo poi il coniugio di due isometrie.

La lunghezza e la direzione del vettore traslazione di una data isometria danno immediatamente informazioni su come questa agisce sui punti di  $\mathbb{R}^n$ ; più complicato è invece capire, data una matrice ortogonale, come questa trasformi lo spazio.

Nella seconda sezione viene definita quindi una funzione che stima per eccesso di quanto ogni matrice ortogonale si discosta dalla matrice identità; viene poi definita attraverso essa una scomposizione dello spazio in due spazi ortogonali; infine si dimostra un teorema che stima la "misura" del commutatore di due matrici a partire dalle loro "misure".

### 1.1 Spazio euclideo $\mathbb{E}^n$ ed isometrie

Consideriamo lo spazio vettoriale  $n$ -dimensionale  $\mathbb{R}^n$  con il prodotto scalare dato da

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

e la norma ad esso associata

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Imponiamo sullo spazio la distanza associata al prodotto scalare

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

Imponendo questa metrica sullo spazio vettoriale  $\mathbb{R}^n$  ottengo lo spazio euclideo  $\mathbb{E}^n$ .

**Definizione 1.1.1.** *Dati  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  definisco l'angolo fra di essi  $\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  come*

$$\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \arccos\left(\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}\right) \in [0, \pi]$$

È noto che gli automorfismi di  $\mathbb{R}^n$  (ovvero le applicazioni lineari biettive da  $\mathbb{R}^n$  in se stesso) formano un gruppo con l'operazione di composizione di applicazioni lineari isomorfo a  $GL(n, \mathbb{R})$ , il gruppo delle matrici quadrate  $n$ -dimensionali con determinante non nullo. Se si considerano invece le mappe affini da  $\mathbb{R}^n$  in se stesso con il prodotto dato dalla composizione, si ottiene il gruppo affine  $Aff(n, \mathbb{R})$ ; esso può essere rappresentato come il prodotto semidiretto

$$\mathbb{R}^n \rtimes GL(n, \mathbb{R})$$

con l'operazione di composizione data da

$$(\mathbf{A}, \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{B}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a} + \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{AB}) \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in GL(n, \mathbb{R}) \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n.$$

I teoremi di Bieberbach trattano in particolare i gruppi cristallografici, che sono dei particolari tipi di sottogruppi del gruppo delle isometrie.

**Definizione 1.1.2.** Un'isometria di  $\mathbb{E}^n$  è un funzione  $\alpha : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  tale che  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  vale

$$d(\alpha(\mathbf{x}), \alpha(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

Il seguente teorema è enunciato senza dimostrazione in quanto si tratta di un risultato classico.

**Teorema 1.1.1.** Data un'isometria di  $\mathbb{E}^n$ , questa può essere scritta in modo unico come composizione di una rotazione e di una traslazione rispetto alla base standard di  $\mathbb{R}^n$

$$\alpha : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{x} \longmapsto \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{a}$$

dove  $\mathbf{A} = \text{rot}(\alpha) \in O(n)$  è detta componente di rotazione di  $\alpha$   
e  $\mathbf{a} = \text{trans}(\alpha) \in \mathbb{R}^n$  è detta componente di traslazione di  $\alpha$ .

In questa trattazione indicheremo spesso le isometrie secondo la rappresentazione fornita dal teorema precedente. In particolare scriveremo  $\alpha = (\mathbf{A}, \mathbf{a})$  per indicare che l'isometria  $\alpha$  ha come componente di rotazione la matrice  $\mathbf{A}$  e come componente di traslazione il vettore  $\mathbf{a}$ .

Indichiamo l'insieme delle isometrie di  $\mathbb{E}^n$  come  $\text{Isom}(n)$

**Lemma 1.1.2.**  $\text{Isom}(n)$  è un gruppo con operazione di composizione di applicazioni; in particolare è un sottogruppo del gruppo affine e come tale può essere scritto come prodotto semidiretto nella forma

$$\text{Isom}(n) \cong O(n) \rtimes \mathbb{R}^n < GL(n, \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}^n$$

dove  $O(n)$  indica il gruppo delle matrici ortogonali  $n$ -dimensionali, in particolare

$$O(n) = \{\mathbf{A} \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \text{id}\}$$

È noto che le matrici ortogonali hanno la proprietà

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\| \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad \forall \mathbf{A} \in O(n)$$

All'interno di ogni gruppo è definito il commutatore di due elementi, posso quindi anche definirlo per  $\text{Isom}(n)$ .

**Lemma 1.1.3.** Comunque prese  $\alpha = (\mathbf{A}, \mathbf{a}), \beta = (\mathbf{B}, \mathbf{b}) \in \text{Isom}(n)$

definisco il loro commutatore come  $[\alpha, \beta] = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ .

Valgono le due seguenti uguaglianze:

$$\text{rot}([\alpha, \beta]) = [\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1} \quad (1.1)$$

$$\text{trans}([\alpha, \beta]) = (\mathbf{A} - \text{id})\mathbf{b} + (\text{id} - [\mathbf{A}, \mathbf{B}])\mathbf{b} + \mathbf{A}(\text{id} - \mathbf{B})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a} \quad (1.2)$$

*Dimostrazione.*  $[\alpha, \beta](\mathbf{x}) = (\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1})(\mathbf{x})$ .

Dato che  $\alpha : \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{a}$ , allora sicuramente  $\alpha^{-1} : \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ .

Allo stesso modo, dato che  $\beta : \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ , so che  $\beta^{-1} : \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{b})$ .

$$\begin{aligned} [\alpha, \beta](\mathbf{x}) &= (\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1})(\mathbf{x}) = (\alpha\beta\alpha^{-1})(\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{b})) = \\ &= (\alpha\beta\alpha^{-1})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}) = \\ &= (\alpha\beta)(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{a})) = \\ &= (\alpha\beta)(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}) = \\ &= (\alpha)(\mathbf{B}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}) + \mathbf{b}) = \\ &= (\alpha)(\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{a} = \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{a} = \\ &= \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a} + \mathbf{A}\mathbf{b} + \mathbf{a} \end{aligned}$$

Quindi  $\text{rot}([\alpha, \beta]) = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$  e

$$\begin{aligned} \text{trans}([\alpha, \beta]) &= -\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a} + \mathbf{A}\mathbf{b} + \mathbf{a} = \\ &= \mathbf{A}\mathbf{b} + \mathbf{a} - \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a} = \\ &= (\mathbf{A} - \text{id})\mathbf{b} + \mathbf{b} + \mathbf{a} - \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a} = \\ &= (\mathbf{A} - \text{id})\mathbf{b} + (\text{id} - [\mathbf{A}, \mathbf{B}])\mathbf{b} + \mathbf{a} - \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a} = \\ &= (\mathbf{A} - \text{id})\mathbf{b} + (\text{id} - [\mathbf{A}, \mathbf{B}])\mathbf{b} + (\text{id} - \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1})\mathbf{a} = \\ &= (\mathbf{A} - \text{id})\mathbf{b} + (\text{id} - [\mathbf{A}, \mathbf{B}])\mathbf{b} + \mathbf{A}(\text{id} - \mathbf{B})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a} \end{aligned}$$

□

## 1.2 "Misura" della componente di rotazione

**Definizione 1.2.1.** *Comunque preso  $\mathbf{A} \in O(n)$  definisco*

$$m(\mathbf{A}) = \max \left\{ \frac{\|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \mathbf{0} \right\}$$

Questa funzione stima quanto una data matrice ortogonale si comporta in modo diverso dalla matrice identità; descrive infatti quanto al massimo un vettore unitario viene "spostato" dall'azione di tale matrice.

**Lemma 1.2.1.** *La precedente è una buona definizione e inoltre vale*

$$m(\mathbf{A}) = \max \left\{ \|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\| \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \|\mathbf{x}\| = 1 \right\}$$

*Dimostrazione.*  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \mathbf{0} \exists \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n - \mathbf{0}$  tale che  $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}, \lambda \in \mathbb{R} \wedge \|\mathbf{y}\| = 1$ .

$$\frac{\|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\|\mathbf{A}\lambda \mathbf{y} - \lambda \mathbf{y}\|}{\|\lambda \mathbf{y}\|} = \frac{|\lambda| \|\mathbf{Ay} - \mathbf{y}\|}{|\lambda| \|\mathbf{y}\|} = \|\mathbf{Ay} - \mathbf{y}\|$$

L'insieme  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \|\mathbf{x}\| = 1$  è un compatto in  $\mathbb{R}^n$ , quindi per il teorema di Weierstrass esiste una  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| = 1$  che mi verifica il max.  $\square$

**Lemma 1.2.2.** *Comunque preso  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  vale*

$$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\| \leq m(\mathbf{A}) \|\mathbf{x}\|$$

*Dimostrazione.* Infatti vale  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \mathbf{0}$  e vale anche per  $\mathbf{x} = 0$   $\square$

Una volta definita la funzione  $m$ , è possibile definire il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  che contiene tutti e soli i vettori che realizzano il massimo nella sua definizione.

**Definizione 1.2.2.**

$$E_{\mathbf{A}} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\| = m(\mathbf{A}) \|\mathbf{x}\|\}$$

**Lemma 1.2.3.**  $E_{\mathbf{A}}$  è un sottospazio di  $\mathbb{R}^n$  non banale ed  $A$ -invariante

*Dimostrazione.* •  $\mathbf{0} \in E_{\mathbf{A}}$

- $\forall \mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$   
 $\mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}} \implies \|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\| = m(\mathbf{A}) \|\mathbf{x}\| \implies \|\mathbf{A}\lambda \mathbf{x} - \lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| m(\mathbf{A}) \|\mathbf{x}\| \implies \lambda \mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}}$
- $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E_{\mathbf{A}}$  si vuole verificare che  $\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \in E_{\mathbf{A}}$   
 $\mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}} \implies \|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\| = m(\mathbf{A}) \|\mathbf{x}\|$   
 $\mathbf{y} \in E_{\mathbf{A}} \implies \|\mathbf{Ay} - \mathbf{y}\| = m(\mathbf{A}) \|\mathbf{y}\|$

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - (\mathbf{x} + \mathbf{y})\|^2 + \|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - (\mathbf{x} - \mathbf{y})\|^2 = \\ & = \|\mathbf{Ax} - \mathbf{x} + \mathbf{Ay} - \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{Ax} - \mathbf{x} - (\mathbf{Ay} - \mathbf{y})\|^2 = \\ & = 2\|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{Ay} - \mathbf{y}\|^2 = 2(\|\mathbf{Ax} - \mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{Ay} - \mathbf{y}\|^2) = \\ & = 2m(\mathbf{A})^2(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2) \end{aligned} \tag{1.3}$$

Dalla precedente catena di uguaglianze segue

$$\begin{aligned} 2m(\mathbf{A})^2(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2) &= \|\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - (\mathbf{x} + \mathbf{y})\|^2 + \|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - (\mathbf{x} - \mathbf{y})\|^2 \leq \\ &\leq m(\mathbf{A})^2(\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2) = \\ &= m(\mathbf{A})^2(\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2) = \\ &= 2m(\mathbf{A})^2(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Quindi il segno di disuguaglianza in (4) è un'uguaglianza, in particolare

$$\|\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - (\mathbf{x} + \mathbf{y})\|^2 + \|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - (\mathbf{x} - \mathbf{y})\|^2 = m(\mathbf{A})^2(\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2)$$

Spostando i termini da parte a parte ottengo

$$\|\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - (\mathbf{x} + \mathbf{y})\|^2 - m(\mathbf{A})^2 \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = m(\mathbf{A})^2 \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - (\mathbf{x} - \mathbf{y})\|^2$$

È possibile poi scomporre le differenze di quadrati a sinistra e destra dell'uguaglianza ottenendo

$$\begin{aligned} & (\|\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - (\mathbf{x} + \mathbf{y})\| + m(\mathbf{A})\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|)(\|\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - (\mathbf{x} + \mathbf{y})\| - m(\mathbf{A})\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|) = \\ & - (\|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - (\mathbf{x} - \mathbf{y})\| + m(\mathbf{A})\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)(\|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - (\mathbf{x} - \mathbf{y})\| - m(\mathbf{A})\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Distinguiamo alcuni casi:

- Se  $\mathbf{A} = \mathbf{id} \Rightarrow m(\mathbf{A}) = 0 \Rightarrow E_{\mathbf{A}} = \mathbb{R}^n$  ed in quel caso la dimostrazione è conclusa.
- Se  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$  o  $\mathbf{x} = -\mathbf{y}$  la dimostrazione è conclusa per il punto precedente (rispettivamente con  $\lambda = +1$  e  $\lambda = -1$ ).
- Nei restanti casi si osserva che nell'equazione (5) il primo fattore a sinistra dell'uguaglianza è strettamente positivo, mentre il secondo fattore è  $\leq 0$ . Allo stesso modo a destra dell'uguaglianza è presente un meno che modifica il segno del prodotto; il primo fattore è strettamente positivo ed il secondo è  $\leq 0$ .

L'uguaglianza in (5) deve quindi per forza coincidere con  $0 = 0$  e questo implica

$$\begin{cases} \|\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - (\mathbf{x} + \mathbf{y})\| = m(\mathbf{A})\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \\ \|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - (\mathbf{x} - \mathbf{y})\| = m(\mathbf{A})\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \end{cases}$$

$$\implies \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \in E_{\mathbf{A}}$$

La dimostrazione del fatto che  $E_{\mathbf{A}}$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^n$  è così conclusa.

- Mostriamo che  $E_{\mathbf{A}}$  è non banale.  
L'insieme degli  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \|\mathbf{x}\| = 1$  è un compatto; l'applicazione  $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}\|$  è continua in quanto composizione di funzioni continue, quindi sicuramente esiste un  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \|\mathbf{x}\| = 1$  che verifica il massimo.  
In particolare  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  (perché ha norma 1) e

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}\| = m(\mathbf{A}) = m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}\| \implies \mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}}$$

- Mostriamo che  $E_{\mathbf{A}}$  è  $\mathbf{A}$ -invariante, ovvero che  $\forall \mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}} \implies \mathbf{A}\mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}}$   
 $\mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}} \implies \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}\| = m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}\|$   
Dato che  $\mathbf{A} \in O(n)$  vale la seguente catena di uguaglianze:  
 $\|\mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{x}) - \mathbf{A}\mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x})\| = \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}\| = m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}\| = m(\mathbf{A})\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \implies \mathbf{A}\mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}}$

□

Il seguente lemma è un noto risultato relativo alle scomposizioni ortogonali di spazi vettoriali.

**Lemma 1.2.4.**  $E_{\mathbf{A}}$  sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^n$  non banale: è possibile quindi definire il suo complemento ortogonale  $E_{\mathbf{A}}^{\perp} \neq \mathbb{R}^n$  ed anche questo è  $\mathbf{A}$ -invariante.

**Definizione 1.2.3.**

$$m^{\perp}(\mathbf{A}) = \begin{cases} \max \left\{ \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \mid \mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}}^{\perp} - \mathbf{0} \right\} & \text{se } E_{\mathbf{A}}^{\perp} \neq \mathbf{0} \\ 0 & \text{se } E_{\mathbf{A}}^{\perp} = \mathbf{0} \end{cases}$$

**Lemma 1.2.5.**

$$\begin{aligned} m^{\perp}(\mathbf{A}) &< m(\mathbf{A}) && \text{se } \mathbf{A} \neq \mathbf{id} \\ m^{\perp}(\mathbf{A}) &= m(\mathbf{A}) = 0 && \text{se } \mathbf{A} = \mathbf{id} \end{aligned} \quad (1.6)$$

*Dimostrazione.* • Se  $\mathbf{A} = \mathbf{id} \implies m(\mathbf{A}) = 0 \wedge E_{\mathbf{A}} = \mathbb{R}^n \implies E_{\mathbf{A}}^{\perp} = \mathbf{0} \implies m^{\perp}(\mathbf{A}) = 0$

- Se  $\mathbf{A} \neq \mathbf{id}$

$$m(\mathbf{A}) = \max \left\{ \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \mathbf{0} \right\} \geq \max \left\{ \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \mid \mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}}^{\perp} - \mathbf{0} \right\} = m^{\perp}(\mathbf{A})$$

Se valesse  $m(\mathbf{A}) = m^{\perp}(\mathbf{A}) \implies \exists \mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}}^{\perp} - \mathbf{0} : \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}\| = m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}\| \implies \mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}}$  ma questo implica  $\mathbf{x} \in E_{\mathbf{A}} \cap E_{\mathbf{A}}^{\perp} = \mathbf{0} \implies \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ;

questo è però assurdo perché abbiamo imposto che  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

□

**Lemma 1.2.6.** *Ogni  $\mathbf{x}$  in  $\mathbb{R}^n$  può essere scritto in modo unico in decomposizione ortogonale.*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^E + \mathbf{x}^\perp \text{ dove } \mathbf{x}^E \in E_{\mathbf{A}} \text{ e } \mathbf{x}^\perp \in E_{\mathbf{A}}^\perp$$

È inoltre immediato verificare le seguenti proprietà:

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}^E - \mathbf{x}^E\| = m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}^E\|$$

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}^\perp - \mathbf{x}^\perp\| \leq m(\mathbf{A})\|\mathbf{x}^\perp\|$$

Il seguente risultato ci permette di stimare la "misura" del commutatore di due matrici a partire dalla misura delle stesse.

**Lemma 1.2.7.** *Comunque scelti  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in O(n)$  vale la disuguaglianza*

$$m([\mathbf{A}, \mathbf{B}]) \leq 2m(\mathbf{A})m(\mathbf{B})$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}, \mathbf{B}] - \text{id} &= \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1} - \text{id} = \\ &= (\mathbf{A}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{A})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1} = \\ &= [(\mathbf{A} - \text{id})(\mathbf{B} - \text{id}) - (\mathbf{B} - \text{id})(\mathbf{A} - \text{id})]\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1} \\ &= (\mathbf{A} - \text{id})(\mathbf{B} - \text{id})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1} - (\mathbf{B} - \text{id})(\mathbf{A} - \text{id})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1} \end{aligned}$$

Dalla precedente catena di uguaglianze segue, scelto comunque  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \|([\mathbf{A}, \mathbf{B}] - \text{id})\mathbf{x}\| &\leq \|(\mathbf{A} - \text{id})(\mathbf{B} - \text{id})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}\| + \|(\mathbf{B} - \text{id})(\mathbf{A} - \text{id})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}\| \leq \\ &\leq m(\mathbf{A})\|(\mathbf{B} - \text{id})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}\| + m(\mathbf{B})\|(\mathbf{A} - \text{id})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}\| \leq \\ &\leq m(\mathbf{A})m(\mathbf{B})\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}\| + m(\mathbf{B})m(\mathbf{A})\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}\| \end{aligned}$$

Dato che  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in O(n)$  è possibile scrivere  $\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ , quindi

$$\|([\mathbf{A}, \mathbf{B}] - \text{id})\mathbf{x}\| \leq 2m(\mathbf{A})m(\mathbf{B})\|\mathbf{x}\|$$

Quindi segue immediatamente la tesi. □





## Capitolo 2

# Primo teorema di Bieberbach

In questo capitolo viene dimostrato il primo teorema di Bieberbach.

Nella prima sezione si dà la definizione precisa di gruppo cristallografico e viene esplicitato il contenuto del teorema nella forma in cui verrà dimostrato.

Nella seconda sezione sono presentati e dimostrati alcuni sottoteoremi che concorrono alla dimostrazione del primo teorema di Bieberbach.

Infine nella sezione finale verranno connesse le varie proposizioni in una dimostrazione del teorema vero e proprio.

### 2.1 Enunciati

In questo elaborato utilizzo la seguente definizione di gruppo cristallografico:

**Definizione 2.1.1.** *Sia  $\Gamma$  un sottogruppo di  $Isom(n)$ , dico che è un gruppo cristallografico  $n$ -dimensionale se valgono le seguenti condizioni:*

1.  $\forall t \in \mathbb{R} : t > 0$  esistono solo un numero finito di  $\alpha = (\mathbf{A}, \mathbf{a}) \in \Gamma$  tali che  $\|\mathbf{a}\| \leq t$
2.  $\exists d \in \mathbb{R} : \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \exists \alpha = (\mathbf{A}, \mathbf{a}) \in \Gamma : \|\mathbf{a} - \mathbf{x}\| \leq d$

La condizione 1. implica che il gruppo agisce in modo propriamente discontinuo sullo spazio topologico dato da  $\mathbb{R}^n$  con la topologia euclidea, mentre la condizione 2. significa che l'azione di  $\Gamma$  ha dominio fondamentale limitato. Ricordiamo che, dato uno spazio topologico  $X$  ed un gruppo  $G$  che agisce su di esso, un dominio fondamentale è un sottoinsieme di  $X$  che contiene uno ed un solo punto di ogni orbita dell'azione.

**Teorema 2.1.1.** *Ogni gruppo cristallografico  $n$ -dimensionale contiene  $n$  traslazioni linearmente indipendenti*

## 2.2 Mini Bieberbach e caratterizzazione delle traslazioni

**Teorema 2.2.1.** *Mini Bieberbach.*

Sia  $\Gamma$  un gruppo cristallografico di  $\mathbb{E}^n$ . Comunque scelto  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{u}\| = 1$ ,  
 $\forall \epsilon, \delta > 0 \exists \alpha = (\mathbf{A}, \mathbf{a}) \in \Gamma$  che soddisfa

1.  $\mathbf{a} \neq 0$
2.  $\angle(\mathbf{u}, \mathbf{a}) \leq \delta$
3.  $m(\mathbf{A}) \leq \epsilon$

*Dimostrazione.* Per la seconda proprietà dei gruppi cristallografici sappiamo che  
 $\exists d \in \mathbb{R} : \forall k \in \mathbb{N} \exists \beta_k = (\mathbf{B}_k, \mathbf{b}_k) \in \Gamma$  tale che

$$\|\mathbf{b}_k - k\mathbf{u}\| \leq d$$

Se  $k \rightarrow \infty$  allora sicuramente  $\|\mathbf{b}_k\| \rightarrow \infty$ .

Infatti se, per assurdo, questo non fosse vero  $\exists M \in \mathbb{R} : \|\mathbf{b}_k\| \leq M \forall k \in \mathbb{N}$

$$d \geq \|\mathbf{b}_k - k\mathbf{u}\| \geq |\|\mathbf{b}_k\| - k|$$

Nella disequazione precedente, se la successione è limitata allora l'ultimo termine diverge ma questo è assurdo perché è maggiorato da  $d$ .

Consideriamo ora la successione degli angoli fra i vettori  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{b}_k$ , vogliamo mostrare che l'ampiezza tende a 0.

$$\angle(\mathbf{u}, \mathbf{b}_k) = \angle(k\mathbf{u}, \mathbf{b}_k) =: \theta_k$$

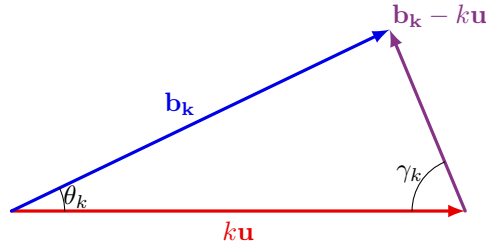


Figura 2.1: I vettori  $k\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{b}_k$  e  $\mathbf{b}_k - k\mathbf{u}$  formano un triangolo.  
 Chiamo  $\gamma_k$  l'angolo contenuto fra  $k\mathbf{u}$  e  $\mathbf{b}_k - k\mathbf{u}$

Possiamo applicare il teorema dei seni al triangolo in figura 2.1

$$\frac{\|\mathbf{b}_k\|}{\sin(\gamma_k)} = \frac{\|\mathbf{b}_k - k\mathbf{u}\|}{\sin(\theta_k)} \leq \frac{d}{\sin(\theta_k)}$$

Si può ora riscrivere la disequazione in modo da ottenere

$$\sin(\theta_k) \leq \frac{\sin(\gamma_k)d}{\|\mathbf{b}_k\|} \rightarrow 0 \implies \theta_k \rightarrow 0$$

$O(n)$  è compatto e  $\{\mathbf{B}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  successione in  $O(n)$  ammette quindi almeno un punto di accumulazione per il teorema di Bolzano-Weierstrass. Si può quindi estrarre da  $\{\mathbf{B}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una sottosuccessione convergente:  $\{\mathbf{A}_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \{\mathbf{B}_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ .

La funzione  $m : O(n) \rightarrow \mathbb{R}$  è continua in quanto composizione di funzioni continue ( $\mathbf{A} \mapsto \max \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}\|$ ), quindi con  $i, j \in \mathbb{R} \rightarrow \infty$  sicuramente  $m(\mathbf{A}_j \mathbf{A}_i^{-1}) \rightarrow m(\mathbf{id}) = 0$

Associata a questa sottosuccessione di matrici ho ovviamente una sottosuccessione di isometrie che chiamo  $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \{(\mathbf{A}_k, \mathbf{a}_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ .

A questo punto ho dimostrato che esiste una successione di isometrie in  $\Gamma$  tale che la norma delle componenti traslazionali tende ad infinito, l'angolo fra gli elementi della successione ed il vettore unitario fissato nell'ipotesi tende a zero e  $m(\mathbf{A}_j \mathbf{A}_i^{-1}) \rightarrow m(\mathbf{id}) = 0$ ; è immediato verificare che  $\exists i, j \in \mathbb{N}$  tali che  $i < j$  e che valgano contemporaneamente

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a}_i\| &\leq \frac{\delta}{4} \|\mathbf{a}_j\| \\ \angle(u, \mathbf{a}_j) &\leq \frac{\delta}{2} \\ m(\mathbf{A}_j \mathbf{A}_i^{-1}) &\leq \epsilon \end{aligned} \tag{2.1}$$

Considero l'isometria  $\alpha \in \Gamma$  data da

$$\alpha := (\mathbf{A}, \mathbf{a}) : x \mapsto \alpha_j \alpha_i^{-1} \mathbf{x} = \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{x} + \mathbf{a}_j - \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{a}_i$$

Questa isometria verifica tutte le proprietà richieste dalla tesi

- Verifichiamo  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_j - \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{a}_i \neq 0$

$$\|\mathbf{a}_j - \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{a}_i\| \geq \left| \|\mathbf{a}_j\| - \|\mathbf{A}_j \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{a}_i\| \right| \geq \left| \|\mathbf{a}_j\| + \|\mathbf{a}_i\| \right| \geq \|\mathbf{a}_i\| \left| \frac{4}{\delta} - 1 \right|$$

$$\|\mathbf{a}_i\| \neq 0 \implies \mathbf{a} \neq 0$$

- Verifichiamo  $\angle(u, \mathbf{a}) = \angle(u, \mathbf{a}_j - \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{a}_i) \leq \delta$ .

Applicando la disuguaglianza triangolare sugli angoli si può scrivere

$$\angle(u, \mathbf{a}_j - \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{a}_i) \leq \angle(u, \mathbf{a}_j) + \angle(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_j - \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{a}_i) \tag{2.2}$$

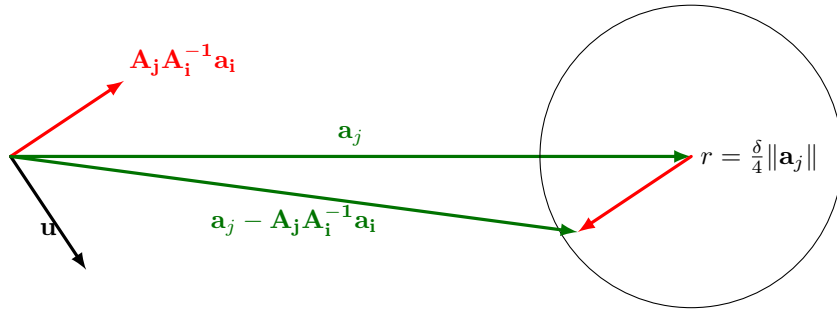


Figura 2.2: Rappresentazione schematica delle relazioni fra i vettori

Dato che  $\|\mathbf{a}_i\| \leq \frac{\delta}{4} \|\mathbf{a}_j\|$ , se posiziono la coda del vettore  $\mathbf{a}_j - \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{a}_i$  sulla punta del vettore  $\mathbf{a}_j$  cade all'interno di una palla n-dimensionale che ha come centro la punta di  $\mathbf{a}_j$  e raggio  $r = \frac{\delta}{4} \|\mathbf{a}_j\|$  come da figura 2.2

Per semplificare la fruibilità della sezione seguente di questa dimostrazione utilizziamo la notazione di geometria sintetica come riportato in figura 2.3.

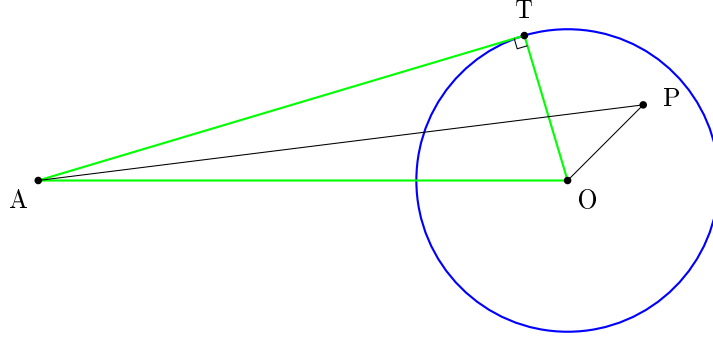


Figura 2.3: Si tracci una circonferenza di centro O e si considerino due punti, uno esterno alla circonferenza A ed uno interno P. Si tracci poi la tangente alla circonferenza dal punto A e si chiami il punto di tangenza T

Comunque venga scelto un punto P all'interno della circonferenza si ottiene ovviamente  $\widehat{PAO} \leq \widehat{TAO}$ . Applicando il teorema dei seni al triangolo TAO si ottiene

$$\frac{\overline{TO}}{\sin(\widehat{TAO})} = \frac{\overline{AO}}{\sin(\widehat{ATO})}$$

Che può essere riscritta come

$$\sin(\widehat{PAO}) \leq \sin(\widehat{TAO}) = \frac{\overline{TO}}{\overline{AO}} \quad (2.3)$$

Trasponendo questo risultato nel caso di 2.2 ed usando 2.1, si ottiene

$$\sin(\angle(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_j - \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{a}_i)) \leq \frac{\delta}{4} \implies \angle(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_j - \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{a}_i) \leq \frac{\delta}{4} + o\left(\frac{\delta^2}{16}\right) \leq \frac{\delta}{2} \quad (2.4)$$

Mettendo insieme 2.2 con 2.4 e 2.1 otteniamo

$$\angle(\mathbf{u}, \mathbf{a}) \leq \delta$$

□

**Teorema 2.2.2.** *Comunque scelta  $\alpha = (\mathbf{A}, \mathbf{a}) \in \Gamma: x \mapsto \mathbf{A}x + \mathbf{a}$  tale per cui  $m(\mathbf{A}) \leq \frac{1}{2}$ , questa isometria è una traslazione pura, ovvero  $\mathbf{A} = \text{id}$*

*Dimostrazione.* Se  $m(\mathbf{A}) = 0 \implies A = \text{id} \implies \alpha$  è una traslazione pura.

Fra le isometrie in  $\Gamma$  che soddisfano la condizione  $0 < m(\mathbf{A}) \leq \frac{1}{2}$  è possibile scegliere quella che ha  $\|\mathbf{a}\|$  minimo (questo perché vale la condizione (1) sugli elementi di un gruppo cristallografico).

È noto da 1.6 che  $m(\mathbf{A}) > m^\perp(\mathbf{A})$  se  $\mathbf{A} \neq \text{id}$ ; è quindi possibile scegliere  $\epsilon := \frac{1}{8} \left( m(\mathbf{A}) - m^\perp(\mathbf{A}) \right) > 0$ .  $E_{\mathbf{A}}$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^n$ , quindi contiene sicuramente un vettore unitario; chiamiamo tale vettore  $\mathbf{u}$ . ed applichiamo ad esso il teorema Mini Bieberbach con un  $\delta > 0$ , l' $\epsilon > 0$  scelto in precedenza.

$$\exists \beta = (\mathbf{B}, \mathbf{b}) \in \Gamma : m(\mathbf{B}) \leq \epsilon; \mathbf{b} \neq 0; \angle(\mathbf{u}, \mathbf{b}) \leq \delta$$

In particolare è possibile scegliere  $\delta$  in modo da avere  $\|\mathbf{b}^\perp\| \leq \|\mathbf{b}^E\|$  come mostrato in figura 2.4.

Fra questi  $\beta$  scegliamo quello per cui  $\|\mathbf{b}\|$  è minimo ( $\neq 0$ , posso farlo per la prima proprietà dei gruppi cristallografici).

Osserviamo che, se  $\beta$  non è una traslazione, allora  $\|\mathbf{b}\| \geq \|\mathbf{a}\|$ , questo perché  $m(\mathbf{B}) \leq \frac{1}{8}m(\mathbf{A}) \leq \frac{1}{4}$  e  $\alpha$  è stato scelto fra le isometrie in  $\Gamma$  con  $m \leq \frac{1}{2}$  in modo da minimizzare il modulo della componente traslatoria).

Definisco una nuova isometria  $\tilde{\beta} := [\alpha, \beta] = (\tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{b}}) \in \Gamma$

Si possono ora utilizzare i lemmi 1.1.3 e 1.2.7 per scrivere

$$m(\tilde{\mathbf{B}}) = m[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \leq 2m(\mathbf{A})m(\mathbf{B}) \leq 2\frac{1}{2}m(\mathbf{B}) = m(\mathbf{B})$$

$$\text{trans}(\tilde{\beta}) = (\mathbf{A} - \text{id})\mathbf{b} + (\text{id} - [\mathbf{A}, \mathbf{B}])\mathbf{b} + \mathbf{A}(\text{id} - \mathbf{B})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a} = (\mathbf{A} - \text{id})\mathbf{b} + \mathbf{r}$$

Con  $\mathbf{r} = (\text{id} - \tilde{\mathbf{B}})\mathbf{b} + \mathbf{A}(\text{id} - \mathbf{B})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}$ .

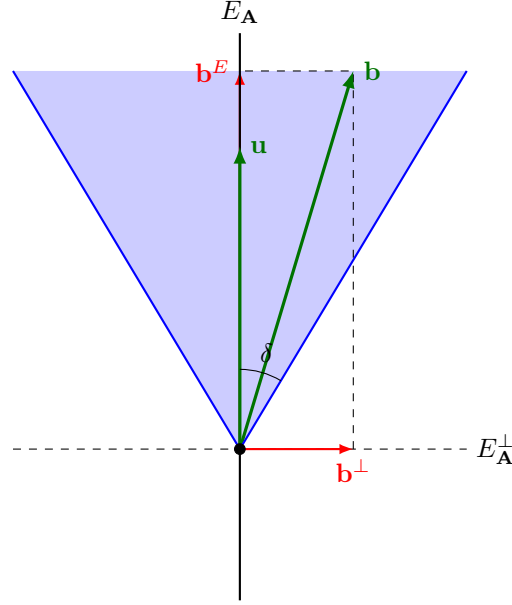


Figura 2.4: Comunque scelto un punto in  $\mathbb{R}^n$  sono ben definite le distanze di tale punto rispettivamente dal sottospazio  $E_{\mathbf{A}}$  e di  $E_{\mathbf{A}}^\perp$ , consideriamo la sezione di  $\mathbb{R}^n$  con la proprietà che i punti contenuti in essa siano più vicini a  $E_{\mathbf{A}}$ . I punti contenuti in questa zona hanno sicuramente  $\|\mathbf{b}^\perp\| \leq \|\mathbf{b}^E\|$ . Basta quindi scegliere un  $\delta$  in modo che il cono di vettori che formano un angolo  $\leq \delta$  con  $\mathbf{u}$  sia completamente contenuto in questa regione

- Se  $\beta$  è una translazione  $\implies \mathbf{B} = \text{id} = \tilde{\mathbf{B}} \implies \mathbf{r} = 0$ .
- Se  $\beta$  non è una translazione  $\implies \|\mathbf{b}\| \geq \|\mathbf{a}\|$  e quindi

$$\|\mathbf{r}\| \leq m(\tilde{\mathbf{B}})\|\mathbf{b}\| + m(\mathbf{B})\|\mathbf{a}\| \leq (m(\tilde{\mathbf{B}}) + m(\mathbf{B}))\|\mathbf{b}\| \leq 2m(\mathbf{B})(\|\mathbf{b}^E\| + \|\mathbf{b}^\perp\|) < 4m(\mathbf{B})\|\mathbf{b}^E\| \leq \frac{1}{2}(m(\mathbf{A}) - m^\perp(\mathbf{A}))\|\mathbf{b}^E\|$$

In entrambi risulta  $\|\mathbf{r}\| < \frac{1}{2}(m(\mathbf{A}) - m^\perp(\mathbf{A}))\|\mathbf{b}^E\|$ .

Per come sono definite le componenti ortogonali si può scrivere

$$\tilde{\mathbf{b}}^E - (\mathbf{A} - \text{id})\mathbf{b}^E - \mathbf{r}^E = (\mathbf{A} - \text{id})\mathbf{b}^\perp + \mathbf{r}^\perp - \tilde{\mathbf{b}}^\perp = 0$$

Usando la caratterizzazione  $\|\mathbf{b}^\perp\| \leq \|\mathbf{b}^E\|$  si ottiene

$$\|\tilde{\mathbf{b}}^\perp\| \leq m^\perp(\mathbf{A})\|\mathbf{b}^\perp\| + \|\mathbf{r}^\perp\| < m^\perp(\mathbf{A})\|\mathbf{b}^E\| + \frac{1}{2}(m(\mathbf{A}) - m(\mathbf{A}^\perp))\|\mathbf{b}^E\|$$

Sommando a destra risulta

$$\|\tilde{\mathbf{b}}^\perp\| < \frac{1}{2}(m(\mathbf{A}) + m(\mathbf{A}^\perp))$$

D'altro canto, utilizzando la disuguaglianza triangolare inversa e la stima sulla norma di  $\mathbf{r}$ , si può scrivere

$$\|\tilde{\mathbf{b}}^E\| = \|(\mathbf{A} - \text{id})\mathbf{b}^E + \mathbf{r}^E\| \geq \left| m(\mathbf{A})\|\mathbf{b}^E\| - \|\mathbf{r}\| \right| > m(\mathbf{A})\|\mathbf{b}^E\| - \frac{1}{2}(m(\mathbf{A}) - m^\perp(\mathbf{A}))\|\mathbf{b}^E\| = \frac{1}{2}(m(\mathbf{A}) + m(\mathbf{A}^\perp))$$

In particolare quindi

$$\|\tilde{\mathbf{b}}^E\| > \|\tilde{\mathbf{b}}^\perp\|$$

Stimando la norma di  $\tilde{\mathbf{b}}$  si ottiene

$$\|\tilde{\mathbf{b}}\| \leq m(\mathbf{A})\|\mathbf{b}\| + \|\mathbf{r}\| < m(\mathbf{A})\|\mathbf{b}\| + \frac{1}{2}(m(\mathbf{A}) - m^\perp(\mathbf{A}))\|\mathbf{b}^E\| \leq \|\mathbf{b}\| \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) < \|\mathbf{b}\|$$

Ma questo è assurdo perché  $\beta$  era stato scelto fra tutti quelli che soddisfavano le condizioni, che engono soddisfatte anche da  $\tilde{\beta}$  in modo da minimizzare la norma di  $\mathbf{b}$ .  $\square$

## 2.3 Dimostrazione del primo teorema di Bieberbach

*Dimostrazione.* Essere una base di vettori di  $\mathbb{R}^n$  è una condizione aperta, questo significa che, dati ad esempio i vettori della base standard  $e_1, \dots, e_n$ , posso trovare un  $\delta > 0$  che mi garantisce che, comunque scelti  $n$  vettori di  $\mathbb{R}^n$   $x_1, \dots, x_n$  tali che  $\angle(e_i, x_i) \leq \delta \quad \forall i = 1, \dots, n$ , questi  $\{x_i\}_{i=1, \dots, n}$  formano ancora una base di  $\mathbb{R}^n$ . Scegliamo quindi in questo modo un  $\delta > 0$ ; fissiamo  $\epsilon = \frac{1}{2}$  e con questi valori applichiamo ad ogni elemento della base standard il teorema Mini Bieberbach; otteniamo così  $n$  traslazioni in  $\Gamma$  linearmente indipendenti.  $\square$

## Capitolo 3

# Secondo teorema di Bieberbach

### 3.1 Reticoli

**Definizione 3.1.1.** *Un reticolo  $L$  è un gruppo cristallografico che contiene solo traslazioni.*

*Gli elementi di un reticolo  $n$ -dimensionale possono essere identificati con i vettori di  $\mathbb{R}^n$  corrispondenti alla loro componente di traslazione e vengono chiamati punti di reticolo.*

Dato un elemento  $\omega \in L$ , per abuso di notazione scriveremo  $\omega = (\mathbf{id}, \mathbf{w} = \mathbf{w})$ . Il seguente risultato è enunciato senza dimostrazione

**Lemma 3.1.1.** *Ogni reticolo  $L$   $n$ -dimensionale è isomorfo a  $\mathbb{Z}^n$ .*

*Di conseguenza  $L$  è abeliano e la distanza minima fra due punti di reticolo coincide con la lunghezza del minimo vettore non nullo in  $L$ .*

**Lemma 3.1.2.** *Sia  $L$  un reticolo  $n$ -dimensionale i cui vettori abbiano distanza a coppie  $\geq 1$ .*

*Sia  $\rho > 0$ , chiamo  $P(\rho)$  il numero di punti di reticolo in  $L$  con distanza dall'origine  $\leq \rho$ .*

$$P(\rho) \leq (2\rho + 1)^n$$

*Dimostrazione.* Per ogni punto di reticolo a distanza inferiore o uguale di  $\rho$  dall'origine si consideri una palla  $n$ -dimensionale centrata nel punto e di raggio  $\frac{1}{2}$ . Queste palle sono sicuramente disgiunte in quanto la distanza fra due punti del reticolo è superiore al doppio dei raggi; sono inoltre tutte completamente contenute nella palla  $n$ -dimensionale centrata nell'origine di raggio  $\rho + \frac{1}{2}$ . Il volume della palla centrata nell'origine è quindi sicuramente superiore alla somma dei volumi delle singole palle di raggio  $\frac{1}{2}$ ; confrontando i volumi si ottiene

$$P(\rho) \left( \frac{1}{2} \right)^n \leq \left( \rho + \frac{1}{2} \right)^n$$
$$P(\rho) \leq (2\rho + 1)^n$$

□

**Lemma 3.1.3.** *Sia  $\{w_i\}_{i=1,\dots,n}$  una base di  $\mathbb{R}^n$ . Comunque scelto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , esistono  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$  tali che*

$$\left\| \mathbf{x} - \sum_{i=1}^n k_i \mathbf{w}_i \right\| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \|\mathbf{w}_i\|$$

*Dimostrazione.* Dato che  $\{w_i\}_{i=1,\dots,n}$  è base,  $\exists a_i \in \mathbb{R}$  tali che

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{w}_i$$

Scegliamo per ogni  $i = 1, \dots, n$  un intero

$$k_i := \begin{cases} \lfloor a_i \rfloor & \text{se } a_i - \lfloor a_i \rfloor \leq \frac{1}{2} \\ \lceil a_i \rceil & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In questo modo

$$\left\| \mathbf{x} - \sum_{i=1}^n k_i \mathbf{w}_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n (a_i - k_i) \mathbf{w}_i \right\| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \|\mathbf{w}_i\|$$

□

**Lemma 3.1.4.** *Sia  $L$  un reticolo  $n$ -dimensionale i cui vettori abbiano distanza a coppie  $\geq 1$ . Consideriamo un sottospazio lineare di  $\mathbb{R}^n$  generato da  $k$  vettori  $\mathbf{w}_i \in L$  con  $i = 1, \dots, k$ . Se un punto di reticolo  $\mathbf{w} \in L$  non è contenuto in  $E$ , allora la sua componenete in  $E^\perp$  è tale che*

$$\|\mathbf{w}^\perp\| \geq \left(3 + \sum_{i=1}^k \|\mathbf{w}_i\|\right)^{-n}$$

*Dimostrazione.* Sia

$$N := \left\lfloor \left(3 + \sum_{i=1}^k \|\mathbf{w}_i\|\right)^n \right\rfloor$$

Si supponga per assurdo che  $0 < \|\mathbf{w}^\perp\| < \frac{1}{N}$ .

In questa situazione i vettori  $j\mathbf{w}$  con  $j = 0, \dots, N$  hanno distanze da  $E$  inferiori a 1.

Aggiungendo ad ognuno di questi una combinazione lineare di  $\{\mathbf{w}_i\}_{1 \leq i \leq k}$  posso modificarne la componenete in  $E$  senza andare a toccare la componente perpendicolare; i vettori così ottenuti rimangono all'interno del reticolo.

In particolare, grazie al lemma 3.1.3, è possibile scegliere  $\forall j = 0, \dots, N$  la combinazione in modo che

$$j\mathbf{w}^E \leq \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^k \|\mathbf{w}_i\| \right)$$

Si ottengono in questo modo  $N + 1$  punti di reticolo ad una distanza dall'origine inferiore a alla somma delle loro distanze da  $E$  ed  $E^\perp$ , in quanto l'origine appartiene ad entrambi i sottospazi.

$$d(j\mathbf{w}, \mathbf{0}) \leq 1 + \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^k \|\mathbf{w}_i\| \right)$$

Questa è una contraddizione al lemma 3.1.2 in quanto

$$N + 1 \leq P \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^k \|\mathbf{w}_i\| \right) \right) \leq \left( 3 + \sum_{i=1}^k \|\mathbf{w}_i\| \right)^{-n} \leq \frac{1}{N}$$

E non esistono  $N \in \mathbb{N}$  che soddisfano questa disequazione.  $\square$

**Definizione 3.1.2.** *Sia  $\Gamma$  un gruppo cristallografico  $n$ -dimensionale, definisco  $L(\Gamma) < G$  come il sottogruppo che contiene tutte e sole le traslazioni in  $\Gamma$ .*

La precedente è una buona definizione in quanto la composizione di due traslazioni è una traslazione.

**Lemma 3.1.5.** *Comunque scelte  $\alpha = (\mathbf{A}, \mathbf{a}) \in \Gamma$  e  $\mathbf{w} \in L(\Gamma) \implies \mathbf{A}\mathbf{w} \in L(\Gamma)$*

*Dimostrazione.*  $w = \text{trans}(\omega)$  con  $\omega = (\text{id}, \mathbf{w}) \in L(\Gamma)$ . Considero  $\alpha\omega\alpha^{-1} \in \Gamma$ ;

$$\begin{aligned} (\alpha\omega\alpha^{-1})(\mathbf{x}) &= (\alpha\omega)(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a})) = \\ &= (\alpha)(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \mathbf{w}) = \\ &= \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \mathbf{A}\mathbf{w} + \mathbf{a} = \mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{w} \end{aligned}$$

Questa è una traslazione di vettore  $\mathbf{A}\mathbf{w}$ , quindi  $\mathbf{A}\mathbf{w} \in L(\Gamma)$   $\square$

## 3.2 Gruppi cristallografici normali

**Definizione 3.2.1.** *Un gruppo cristallografico  $n$ -dimensionale  $\Gamma$  è detto normale se:*

1. *i vettori che sono contenuti in  $L(\Gamma)$  hanno distanze a coppie  $\geq 1$*
2.  *$L(\Gamma)$  contiene  $n$  vettori unitari linearmente indipendenti*

**Teorema 3.2.1.** *Ogni gruppo cristallografico  $n$ -dimensionale  $\Gamma$  è isomorfo ad un gruppo cristallografico normale  $n$ -dimensionale.*



*Dimostrazione.* Per la proprietà di discretezza dei gruppi cristallografici esiste un vettore in  $L(\Gamma)$  di lunghezza minima. Scaliamo per omotetia (che è un isomorfismo)  $\Gamma$  in modo da avere tale vettore di norma 1.

Suponiamo per induzione che  $L(\Gamma)$  soddisfi la condizione (1) della tesi e che  $\exists \mathbf{w}_i \in L(\Gamma)$  con  $1 \leq i \leq k < n$  linearmente indipendenti tali che  $\|\mathbf{w}_i\| = 1$ . Chiamiamo  $E_k$  il sottospazio vettoriale di dimensione  $k$  di  $\mathbb{R}^n$  generato da essi.

Vogliamo dimostrare che esiste un gruppo  $\Gamma' \cong \Gamma$  tale che  $L(\Gamma')$  soddisfi la condizione (1) e che contenga  $k+1$  vettori linearmente indipendenti.

- Se  $\exists \alpha = (\mathbf{A}, \mathbf{a}) \in \Gamma$  e  $1 \leq i \leq k : \mathbf{A}\mathbf{w}_i \notin E_k$  allora, grazie al lemma 3.1.5 so che  $\mathbf{A}\mathbf{w}_i \in L(\Gamma)$ , inoltre  $\|\mathbf{A}\mathbf{w}_i\| = 1$  dato che  $A \in O(n)$ , quindi  $\mathbf{A}\mathbf{w}_i$  è già il  $k+1$ -esimo vettore cercato.
- Se, al contrario, tutte le componenti di rotazione delle isometrie in  $\Gamma$  lasciano  $E$  invariato, allora queste lasciano invariato anche  $E^\perp$ .  
Definisco la trasformazione affine data da

$$\Phi_\nu(x^E + x^\perp) = x^E + \nu x^\perp, \quad \nu > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Scelto comunque  $\alpha = (\mathbf{A}, \mathbf{a}) \in Isom(\mathbb{R}^n)$  vale

$$(\Phi_\nu \circ \mathbf{A})(\mathbf{x}) = \Phi_\nu(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \Phi_\nu(\mathbf{A}\mathbf{x}^E + \mathbf{A}\mathbf{x}^\perp) = \mathbf{A}\mathbf{x}^E + \nu \mathbf{A}\mathbf{x}^\perp = \mathbf{A}\mathbf{x}^E + \mathbf{A}(\nu \mathbf{x}^\perp) = \mathbf{A}(\mathbf{x}^E + \nu \mathbf{x}^\perp) = (\mathbf{A} \circ \Phi_\nu)(\mathbf{x})$$

Quindi la funzione affine  $\Phi_\nu$  commuta con la parte rotazionale delle isometrie.

Definiamo il gruppo  $\Gamma_\nu := \Phi_\nu \Gamma \Phi_\nu^{-1} < Aff(\mathbb{R}^n)$ . Questo è coniugato a  $\Gamma$  nel gruppo affine (ed è quindi isomorfo a  $\Gamma$ ), ma è effettivamente anche un gruppo di isometrie in quanto

$$\forall \alpha_\nu \in \Gamma_\nu \exists \alpha \in \Gamma : \alpha_\nu = \Phi_\nu \alpha \Phi_\nu^{-1}$$

$$rot(\alpha_\nu) = rot(\Phi_\nu \alpha \Phi_\nu^{-1}) = rot(\alpha) \in O(n)$$

Se  $\beta_\nu \in L(\Gamma_\nu)$  con  $\beta_\nu = \Phi_\nu \beta \Phi_\nu^{-1}$  e  $\beta = (\mathbf{B}, \mathbf{b}) \implies rot(\beta_\nu) = rot(\Phi_\nu \beta \Phi_\nu^{-1}) = rot(\beta) = \mathbf{id} \implies \beta \in L(\Gamma)$ .

$$\beta_\nu \mathbf{x} = (\Phi_\nu \beta \Phi_\nu^{-1})(\mathbf{x}) = (\Phi_\nu \beta \Phi_\nu^{-1})(\mathbf{x}^E + \mathbf{x}^\perp) = (\Phi_\nu \beta)(\mathbf{x}^E + \frac{1}{\nu} \mathbf{x}^\perp) = \Phi_\nu(\mathbf{x}^E + \frac{1}{\nu} \mathbf{x}^\perp + \mathbf{b}) = \mathbf{x}^E + \mathbf{x}^\perp + \Phi_\nu(\mathbf{b})$$

Quindi  $L(\Gamma_\nu) = L(\Phi_\nu \Gamma \Phi_\nu^{-1}) = \Phi_\nu(L(\Gamma))$ .

A questo punto supponiamo per assurdo che  $\forall \nu > 0$  i vettori in  $L(\Gamma_\nu)$  abbiano distanze a coppie  $\leq 1$ . Possiamo applicare il lemma 3.1.4 utilizzando il sottospazio  $E_k$ . Otteniamo che,  $\forall \mathbf{w}_\nu \in L(\Gamma_\nu)$  tale che  $\mathbf{w}_\nu^\perp \neq \mathbf{0}$ , vale

$$\|\mathbf{w}_\nu^\perp\| \geq (3+k)^{-n}$$

È inoltre noto che  $\exists \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{w}_\nu = \Phi_\nu(\mathbf{w})$ , quindi posso scrivere

$$\|\mathbf{w}_\nu^\perp\| = \|\Phi_\nu(\mathbf{w})^\perp\| = \|(\mathbf{w}^E + \nu \mathbf{w}^\perp)^\perp\| = \|\nu \mathbf{w}^\perp\| = \nu \|\mathbf{w}^\perp\| \geq \frac{1}{(3+k)^n} \quad (3.1)$$

Se si sceglie  $\nu$  molto piccolo, la disuguaglianza 3.1 non vale; di conseguenza non è vero che i vettori in  $L(\Gamma_\nu)$  hanno distanze a coppie  $\leq 1 \forall \nu > 0$ . Se invece  $\nu = 1$ , sicuramente vale la condizione (1) perché in quel caso  $L(\Gamma_\nu) = L(\Gamma)$ . Definiamo

$$\nu' := \inf\{\nu > 0 \mid \text{la condizione 1 vale in } L(\Gamma_\nu)\}$$

Sicuramente  $0 < \nu' \leq 1$ . Fissato  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $Phi_\nu(\mathbf{x})$  è una funzione continua in  $\nu$ .

Esiste quindi un  $\nu' > 0$  minimo tale che la condizione (1) della definizione di gruppo cristallografico normale vale in  $\Gamma_{\nu'}$ .

Dato che la trasformazione affine  $\Phi_{\nu'}$  mantiene fissi tutti gli elementi  $E$ , il vettore più corto che si trova in  $L(\Gamma_{\nu'}) - E = \Phi_{\nu'}(L(\Gamma)) - E = \Phi_{\nu'}(L(\Gamma) - E)$  ha norma 1 (PERCHÉ????????????????)

Quindi ho trovato  $\Gamma_{\nu'} \cong \Gamma$  che contiene  $k+1$  vettori unitari linearmente indipendenti ed ho mostrato che  $\Gamma_{\nu'}$  è un gruppo cristallografico normale.

La dimostrazione si conclude per induzione. □