Prova scritta di Algebra per Informatica, 24/3/2022 – canale M-Z, prof. P. Papi

Nome, Cognome, Numero di Matricola: ....

1. *Non sono ammessi appunti, libri di testo, calcolatrici né l'uso del computer (al di fuori di exam.net)*

2. *Spiegare il procedimento ed i calcoli eseguiti, e* **giustificare ogni risposta**. *La valutazione terrà conto della* **presentazione***: leggibilità, grammatica, sintassi, ordine, chiarezza, capacità di sintesi.*

3. Una risposta giusta con giustificazione sbagliata viene valutata ≤ 0.

4. Per gli esercizi da 1 a 4, riportare la risposta sintetica nella colonna centrale della tabella sottostante.

5. Il tempo a disposizione è due ore e mezzo.

6. **Per gli esami in presenza: consegnare i fogli da 1 a 12, ordinati secondo la numerazione naturale. Non scrivere sul retro dei fogli.**

7. **Per gli esami on-line**: assicurarsi di scannerizzare esclusivamente la bella copia, in formato verticale.

NOTA: l'esercizio 2 parte a conteneva un refuso nel testo che lo rendeva inesatto: Sono stati assegnati a tutti 4 punti per tale esercizio

Esercizio	*Risposta sintetica*	*Valutazione*
1.a		4
1.b		4
2.a	===========	4
2.b		4
3.a		4
3.b		1
3.c		3
4.a		4
4.b		2
4.c		3

Esercizio 1. *Si risolva il seguente sistema di congruenze lineari*

a)

$$\begin{cases} 39x \equiv 39 & \mod 40 \\ 38x \equiv 38 & \mod 190 \\ x \equiv 1 & \mod 5 \end{cases}$$

b) *Sia C_n il gruppo ciclico di ordine n generato da g. Si determini il reticolo dei sottogruppi di C_{75}. Sia H il sottogruppo di indice 5. Determinare i generatori di H e i possibili quozienti di H.*

a) Poiché $(39, 40) = 1$, la prima equazione è equivalente a $x \equiv 1 \mod 40$; la seconda a $x \equiv 1 \mod 5$, dunque il sistema si riduce a

$$\begin{cases} x \equiv 1 \mod 40 \\ x \equiv 1 \mod 5 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x \equiv \cancel{1} \mod 8 \\ x \equiv 1 \mod 5 \end{cases}$$

, che è in forma standard. Dunque $x = 1 + 8t$

$1 + 8t \equiv 1 \mod 5$ $\quad 8t \equiv 0 \mod 5$,

$t = 5h$, $\quad x = 1 + 40h$

b) Il reticolo dei sottogruppi di C_{75} è isomorfo a quello dei divisori di 75.

Poiché $75 = 3 \cdot 5^2$, si ha

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & 75 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
15 \arrow[d, dash] \arrow[drr, dash] & & 25 \arrow[d, dash] \\
3 \arrow[dr, dash] & & 5 \arrow[dl, dash] \\
 & 1 &
\end{tikzcd}$$

Il sottogruppo H deve avere cardinalità 15, dunque è generato da g^5, ed ha $\varphi(15) = \varphi(5) \cdot \varphi(3) = 4 \cdot 2 = 8$ generatori che sono

$(g^5)^i$, $i = 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14$.

I sottogruppi di H hanno ordine 1, 3, 5, 15, e sono ovviamente normali; quindi, detti H_1, H_2, H_3, H_4, tali sottogruppi, abbiamo quattro possibili quozienti

$$H/H_1 = H, \quad H/H_2, \quad H/H_3, \quad H/H_4 = \{e\}$$

di ordini 15, 5, 3, 1 rispettivamente

$(ab)^2 = a^2 b^2$

Esercizio 2.

a) *Dimostrare che un gruppo G è abeliano se e solo se* $\cancel{(ab)^2 = (ba)^2}$, $\forall a, b \in G$.

b) *Sia* $\sigma = (1964387)(1374862)(271) \in S_9$. *Calcolarne ordine, parità. Calcolare la cardinalità della classe di coniugio di* σ^3.

a) Se G è abeliano

$$(ab)^2 = abab = aa\,bb = a^2 b^2$$

Viceversa se $(ab)^2 = a^2 b^2 \quad \forall a, b \in G$

da $\quad abab = aa\,bb$

moltiplicando a sinistra per a^{-1} e a destra per b^{-1} otteniamo $\quad ba = ab \quad \forall a, b \in G$, quindi G è abeliano.

b) Risulta $\quad \sigma = (1,9,6,2,3)(4,7,8) =$

$$= (1,3)(1,2)(1,6)(1,9)(4,8)(4,7)$$

dunque σ ha ordine $\text{m.c.m}(5,3) = 15$ ed è pari.

Poi si ha $\sigma^3 = (1,2,9,3,6)$ e dobbiamo contare i 5-cicli in S_9:

bisogna scegliere una 5-uple ordinate di numeri in $\{1, \dots, 9\}$, ma tenendo conto che

$$(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5) = (i_2, i_3, \dots, i_1) = \text{etc} \dots$$

otteniamo $\dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{5} = 3024$ 5-cicli

Esercizio 3. *Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 3.*

a) *Dimostrare che esiste un'unico operatore lineare $F : \mathbb{R}^5 \to V$ tale che*

$$ker(F) \text{ ha equazioni cartesiane } \begin{cases} x_1 + x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$F(0,1,0,0,1) = 1 + t + t^2, \quad F(0,0,1,0,1) = 2t - t^3.$$

Scrivere la matrice di F rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^5$ presa come base di partenza in $\mathbb{R}^5$ e a $\{1, t, t^2, t^3\}$ presa come base di arrivo in V.

b) *Determinare un sottospazio U di $\mathbb{R}^5$ tale che $\mathbb{R}^5 = Ker(F) \oplus U$.*

c) *Determinare una base di $V/Im(F)$.*

a) Una base per le soluzioni del sistema è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

; poiché tali vettori, uniti a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ formano una base di $\mathbb{R}^5$, F esiste ed è unico, per il principio di estensione per linearità.

Risulta

$$F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= F\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 + t + t^2$$

$$F\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = F\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$= 2t - t^3 - (1 + t + t^3)$$

$$= -1 + t - t^2 - t^3$$

$$F\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = F\left(-\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right) =$$

$$= -1 + t - t^2 - t^3$$

$$F\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = F\left(-\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right) = F\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$= 1 + t + t^2$$

In definitiva $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Il sottospazio U cercato è quello che ha per base $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) Si ha $\operatorname{Im} F = \mathbb{R}(1+t+t^2) \oplus \mathbb{R}(2t-t^3)$

Se $W = \mathbb{R}t^2 \oplus \mathbb{R}t^3$, si ha

$$V = \operatorname{Im} F \oplus W$$

e dalla teoria è noto che

$$\{t^2 + \operatorname{Im} F,\ t^3 + \operatorname{Im} F\}$$

è una base di $V/\operatorname{Im} F$

Esercizio 4. *Si consideri l'operatore lineare* $L_{A_k}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3, L_{A_k}X=A_kX$*, ove*

$$A_k=\begin{pmatrix} k & 2 & -1\\ 1 & k+1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

a) *Determinare gli autovalori di* L_{A_k}.

b) *Se* $k=2$ *trovare una base di* $\mathbb{R}^3$ *formata da autovettori di* L_{A_k}.

c) *Studiare la diagonalizzabilità di* L_{A_k} *al variare di* k.

a) $\begin{vmatrix} t-k & -2 & 1\\ -1 & t-k-1 & 1\\ 0 & 0 & t-1\end{vmatrix} = (t-1)\begin{vmatrix} t-k & -2\\ -1 & t-k-1\end{vmatrix}$

$= (t-1)\left((t-k-1)(t-k)-2\right)$

$= (t-1)\left(t^2-(2k+1)t+k^2+k-2\right)$

$= (t-1)\left(t-(k+2)\right)\left(t-(k-1)\right)$

Gli autovalori sono pertanto 1, $k+2$, $k-1$

b) Se $k=2$ gli autovalori sono $4, 1$ con molteplicità algebrica $1, 2$ rispettivamente. Si ha

$$V_4=\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad V_1=\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\oplus\mathbb{R}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$$

c) Se gli autovalori sono distinti l'operatore è diagonalizzabile; ciò capita se

$k+2 \neq 1$

$k-1 \neq 1$ ovvero $k \neq -1$, $k \neq 2$

$k+2 \neq k-1$

Se $k = 2$ abbiamo già visto che l'operatore è diagonalizzabile;

se $k = -1$, si ha $V_{-2} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

e quindi l'operatore non è diagonalizzabile

Esercizio 5.

1. *Dare la definizione di indipendenza lineare per un insieme finito $\{v_1, \ldots, v_n\}$ di vettori in uno spazio vettoriale V su un campo F.*

2. *Dimostrare $v_1, \ldots, v_n$ che sono linearmente indipendenti e $F : V \to W$ è un'applicazione lineare iniettiva in uno spazio vettoriale W, allora $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ sono linearmente indipendenti.*

3. *Sia S lo spazio vettoriale delle matrici antrisimmetriche reali 4×4. Determinare l'insieme degli interi k per cui esiste un'applicazione lineare suriettiva $\mathbb{R}^k \to S$.*

1/2 si vedano testi o dispense

3. Sappiamo che $\dim S = 6$ (una base è data dalle matrici $E_{ij} - E_{ji}$, $1 \leq i < j \leq 4$); dal teorema del rango è necessario che $\dim \mathbb{R}^k \geq \dim S$, ovvero $k \geq 6$.

Tale condizione è anche sufficiente: per costruire tale applicazione basta definire $f(e_i) = v_i$ $1 \leq i \leq 6$, e ovunque $f(e_i)$ arbitrariamente per $6 < i \leq k$. ($\{v_1, \ldots, v_6\}$ denota una base di S).