Prova scritta di Algebra per Informatica, 14/7/2022 – prof. P. Papi

Nome, Cognome, Numero di Matricola: ....

1. *Non sono ammessi appunti, libri di testo, calcolatrici né l'uso del computer (al di fuori di exam.net)*
2. *Spiegare il procedimento ed i calcoli eseguiti, e* **giustificare ogni risposta**. *La valutazione terrà conto della* **presentazione***: leggibilità, grammatica, sintassi, ordine, chiarezza, capacità di sintesi.*
3. Una risposta giusta con giustificazione sbagliata viene valutata ≤ 0.
4. Per gli esercizi da 1 a 4, riportare la risposta sintetica nella colonna centrale della tabella sottostante.
5. Il tempo a disposizione è due ore.

Esercizio	*Risposta sintetica*	*Valutazione*
1.a		3
1.b		4.5
2.a		1
2.b		3
2.c		3.5
3.a		3
3.b		2.5
3.c		2
4.a		3
4.b		4.5

Esercizio 1.

a) *Si verifichi che la relazione binaria definita su* $\mathbb{Z}$ *da*

$$x \sim y \iff \frac{x-y}{2} \in \mathbb{Z} \text{ e } 3 \text{ divide } \frac{x-y}{2}.$$

è una relazione di equivalenza.

b) *Determinare, se esiste, un sottogruppo* N *di* $\mathbb{Z}$ *tale che*

$$\mathbb{Z}/N = \mathbb{Z}/\sim$$

($\mathbb{Z}/\sim$ *è l'insieme quoziente di* $\mathbb{Z}$ *modulo la relazione* $\sim$*).*

a) Verifichiamo le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

R: $x \sim x$ $\quad \frac{x-x}{2} = 0 \in \mathbb{Z}, \quad 3 \mid \frac{x-x}{2} = 0$

S: $x \sim y$ $\quad \frac{x-y}{2} = a, \quad a = 3k$

$\Rightarrow \quad \frac{y-x}{2} = -a \in \mathbb{Z}, \quad -a = 3(-k)$

$\Rightarrow \quad y \sim x$

T: $x \sim y, \; y \sim z$ $\quad \frac{x-y}{2} = a, \quad a = 3k$

$\frac{y-z}{2} = b, \quad b = 3h$

$\frac{x-z}{2} = a+b \in \mathbb{Z}, \quad a+b = 3(h+k) \Rightarrow x \sim z$

b) Osserviamo che se $x \sim y$, allora x, y hanno le stesse parità.

Diciamo che $\mathbb{Z}/\sim \; = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$; se $x \sim y$ e $x = 2a+1$, $y = 2b+1$ o $x = 2a$, $y = 2b$, $3 \mid a-b$ quindi $6 \mid 2(a-b) = x-y$, cioè $x \equiv y \bmod 6$.

Viceversa, se $x-y = 6h$, $\frac{x-y}{2} = 3h \in \mathbb{Z}$ e $3 \mid \frac{x-y}{2}$, cioè $x \sim y$

Esercizio 2. *Si consideri il gruppo U_{16} degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_{16}$.*

a) *Elencare gli elementi di U_{16}.*

b) *Determinare l'ordine di ogni elemento di U_{16}; stabilire se U_{16} è ciclico.*

c) *Stabilire se U_{16} è prodotto diretto di gruppi ciclici.*

a) $U_{16} = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{9}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{15}\}$

b) Ricordando che un elemento e il suo inverso hanno lo stesso ordine, si ha, per verifica diretta

$o(\bar{1}) = 1$

$o(\bar{3}) = o(\overline{11}) = 4$

$o(\bar{5}) = o(\overline{13}) = 4$

$o(\bar{7}) = 2$

$o(\bar{9}) = 2$

$o(\overline{15}) = o(\overline{-1}) = 2$

Non essendovi elementi di ordine 8, U_{16} non è ciclico

c) Ricordando che $\overline{15} = \overline{-1}$, e che $\langle \bar{3} \rangle = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{9}, \overline{11}\}$, è chiaro che

$$U_{16} = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{9}, \overline{11}\} \times \{\overline{1}, \overline{-1}\}$$

$$= \langle \overline{3} \rangle \times \langle \overline{15} \rangle$$

Esercizio 3. *Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di* $\mathbb{C}^3$

$$V_1 = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1 + z_2 + z_3 = 0\},$$
$$V_2 = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_2 + iz_3 = 0\}.$$

a) *Determinare basi di* V_1, V_2.

b) *Determinare una base di* $V_1 \cap V_2$.

c) *Stabilire, motivando la risposta, se ogni vettore di* $\mathbb{C}^3$ *si scrive in modo unico come somma di un vettore di* V_1 *e un vettore di* V_2.

a) In V_1 $\quad z_1 = -z_2 - z_3$, dunque

$$V_1 = \mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \oplus \mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

In V_2 $\quad z_2 = -i z_3$, dunque

$$V_2 = \mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \oplus \mathbb{C}\begin{pmatrix}0\\i\\-1\end{pmatrix}$$

b) Bisogna risolvere il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 0 \\ z_2 + i z_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-i \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix}$$

Dunque il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} z_1 = (i-1) z_3 \\ z_2 = -i z_3 \end{cases}$$

che ha per base di soluzioni $\begin{pmatrix} i-1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$

c) Se ogni vettore di $\mathbb{C}^3$ si scrivesse in modo unico come somma di un vettore di V_1 e di un vettore di V_2, risulterebbe $\mathbb{C}^3 = V_1 \oplus V_2$, in particolare $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.
Abbiamo visto in b) che ciò non accade.

Esercizio 4. *Sia*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

si consideri l'operatore lineare $F : \mathbb{M}_{3,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_{3,2}(\mathbb{R})$,

$$F(X) = XA$$

ove $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 \end{pmatrix}$.

a) *Scrivere la matrice di* F *rispetto alla base di* $M_{3,2}(\mathbb{R})$ *formata dalle matrici elementari* $\{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}, e_{31}, e_{32}\}$.

b) *Determinare una base di* $M_{3,2}(\mathbb{R})$ *formata da autovettori per* F.

a) Risulta

$$F\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 & x_1 + 2x_2 \\ 2x_3 + x_4 & x_3 + 2x_4 \\ 2x_5 + x_6 & x_5 + 2x_6 \end{pmatrix}$$

e la matrice richiesta, sia B, e'

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Il polinomio caratteristico di $\tilde{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

è $\begin{vmatrix} 2-t & 1 \\ 1 & 2-t \end{vmatrix} = (2-t)^2 - 1 = t^2 - 4t + 3$
$= (t-1)(t-3)$

Dunque il polinomio caratteristico di B è $(t-1)^3(t-3)^2$. Gli autospazi di $\tilde{B}$ relativi a $1, 3$ sono generati da $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispettivamente. Quindi quelli di B sono generati da

autovalore 1: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; autovalore 3: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

In definitiva, la base richiesta è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Esercizio 5.

1. *Dare la definizione di classe laterale sinistra di un elemento g di un gruppo G modulo un sottogruppo H. Ai fini della definizione, è necessario che H sia un sottogruppo normale ?*

2. *Enunciare e dimostrare il teorema di Lagrange.*

3. *Sia G in gruppo di ordine 56; stabilire se la seguente implicazione è vera o falsa*

$$g^{15} = 1 \implies g = 1$$

1. 2: si vedano testi e dispense

3. Dal teorema di Lagrange, se $g \in G$, G gruppo finito, $o(g) \mid |G|$.

La relazione $g^{15} = 1$ implica $o(g) = 1$, $o(g) = 5$ oppure $o(g) = 3$

Poiché $5 \nmid 56$, $3 \nmid 56$ segue $g = 1$.