Prova scritta di Algebra per Informatica, 16/9/2022 – prof. P. Papi

Nome, Cognome, Numero di Matricola: ....

1. *Non sono ammessi appunti, libri di testo, calcolatrici né l'uso del computer (al di fuori di exam.net)*
2. *Spiegare il procedimento ed i calcoli eseguiti, e* **giustificare ogni risposta**. *La valutazione terrà conto della* **presentazione***: leggibilità, grammatica, sintassi, ordine, chiarezza, capacità di sintesi.*
3. Una risposta giusta con giustificazione sbagliata viene valutata ≤ 0.
4. Per gli esercizi da 1 a 4, riportare la risposta sintetica nella colonna centrale della tabella sottostante.
5. Il tempo a disposizione è due ore. e mezzo.

Esercizio	*Risposta sintetica*	*Valutazione*
1.a		5
1.b		3
2.a		4
2.b		4
3.a		2
3.b		3
3.c		3
4.a		2
4.b		6

32

Esercizio 1.

a) *Sia p un primo e*

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & -a & b \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, \in \mathbb{Z}_p \right\}$$

Dimostrare che G è un gruppo abeliano (rispetto al prodotto di matrici).

b) *Stabilire l'ordine di G e, nel caso $p = 2$, identificare G a meno di isomorfismo.*

a) Se $A \in G$, $\det A \neq 0$, quindi $G \leq GL(\mathbb{Z}_p)$.

Pertanto basta verificare che se $g, g' \in G$ allora $gg' \in G$, $g^{-1} \in G$, $gg' = g'g$.

Se $g = \begin{pmatrix} 1 & a & -a & b \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $g' = \begin{pmatrix} 1 & a' & -a' & b' \\ 0 & 1 & 0 & b' \\ 0 & 0 & 1 & b' \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$gg' = \begin{pmatrix} 1 & a+a' & -(a+a') & b+b' \\ 0 & 1 & 0 & b+b' \\ 0 & 0 & 1 & b+b' \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = g'g \in G.$$

Inoltre dalla formula precedente segue che

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & a & -b \\ 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G.$$

b) dato $g \in G$ come sopra, ci sono p scelte per a e p scelte per b, dunque

$$|G| = p^2$$

Se $p = 2$, $G = \left\{ Id, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Poiché ogni elemento non identico ha ordine 2, risulta $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

Esercizio 2. *Sia*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 6 & 5 & 8 & 9 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) *Calcolare decompoiszione in cicli disgiunti, ordine e parità di* σ *e* σ^{-1}.

b) *Determinare i sottogruppi di* $\langle\sigma\rangle$ *e per ciascuno di essi trovare esplicitamente un generatore e determinare il numero di tutti i generatori.*

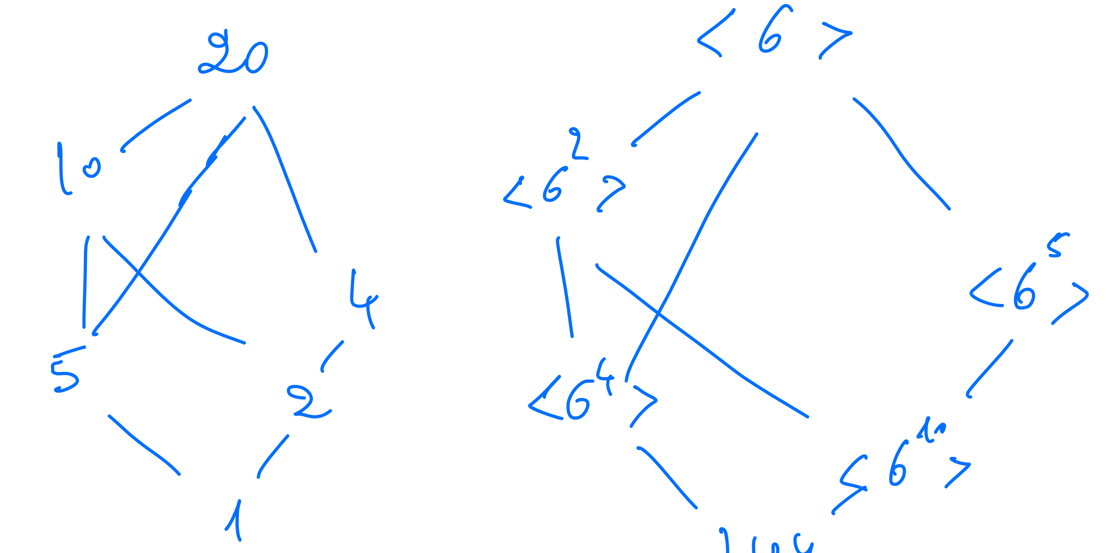
a) $\sigma = (1\,7\,3\,5\,9)(2\,6\,4\,8)$

$o(\sigma) = 5 \cdot 4 = 20$, σ dispari

$\sigma^{-1} = (1\,9\,5\,3\,7)(2\,8\,4\,6)$

$o(\sigma) = o(\sigma^{-1}) = 20$, σ^{-1} dispari

b) Il reticolo dei sottogruppi di $\langle\sigma\rangle \cong \mathbb{Z}_{20}$ è isomorfo a quello dei divisori di 20



$\sigma^2 = (1\,5\,7\,9\,3)(2\,4)(6\,8)$ $\quad \sigma^4 = (1\,7\,3\,5\,9)$

$\sigma^5 = (2\,8\,4\,6)$ $\quad \sigma^{10} = (2\,4)(6\,8)$

Esercizio 3. *Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di equazione cartesiana $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$.*

a) *Verificare che* $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ *è una base di W.*

b) *Sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'operatore lineare definito da*

$$F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 \\ x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}$$

Verificare che $F(W) \subseteq W$.

c) *Per il punto (b) possiamo considerare F come un operatore lineare su W. Determinarne la matrice rispetto alla base B presa come base di partenza e arrivo in W.*

Posto $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, sostituendo le coordinate di v_1, v_2, v_3 nell'equazione cartesiana deduciamo che v_1, v_2, v_3 verificano tale equazione, quindi $v_1, v_2, v_3 \in W$. Poiché $\dim W = 3$, basta verificare che v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti; questo segue dal fatto che

$$rg \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= rg \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

b) Risulta

$$F\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\-2\\-1\end{pmatrix} \in W$$

$$F\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\1\\-2\end{pmatrix} \in W$$

$$F\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\1\\0\end{pmatrix} \in W$$

Dunque $F(W) \subseteq W$. Poiché

$$\begin{pmatrix}-2\\-1\\-2\\-1\end{pmatrix} = v_1 - 2v_2 - v_3,$$

$$\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\-2\end{pmatrix} = -v_1 + v_2 - 2v_3, \qquad \begin{pmatrix}-1\\2\\1\\0\end{pmatrix} = -2v_1 + v_2,$$

la matrice cercata è

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\-2 & 1 & 1\\-1 & -2 & 0\end{pmatrix}$$

Esercizio 4. *Sia V lo spazio vettoriale della matrici reali antisimmetriche 3×3 e sia*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) *Si dimostri che se $X \in V$, allora $T(X) = AX + XA \in V$.*

b) *Studiare la diagonalizzabilità di T e scrivere, se possibile, una base di V formata da autovettori per* T.

a) Se $X = -X^t$, dobbiamo verificare che

$$T(X)^t = -T(X)$$

$$T(X)^t = (AX+XA)^t = X^tA^t + A^tX =$$

$$= -XA - AX = -(AX+XA) = -T(X)$$

(Abbiamo usato il fatto che $A = A^t$)

b) Se $X = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 \\ -x_1 & 0 & x_3 \\ -x_2 & -x_3 & 0 \end{pmatrix}$, risulta

$$T(X) = \begin{pmatrix} 0 & x_2+x_3 & x_1+x_3 \\ -x_2-x_3 & 0 & x_1+x_2 \\ -x_1-x_3 & -x_1-x_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque, fissata $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

come base di V, la matrice di T rispetto a tale base è

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di C è

$$\begin{vmatrix} t & -1 & -1 \\ -1 & t & -1 \\ -1 & -1 & t \end{vmatrix} = (t+1)^2(t-2)$$

Gli autovalori sono quindi $t=-1$ e $t=2$.

L'autospazio relativo a $t=-1$ ha equazione $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ e una sua base può essere

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

L'autospazio relativo a $t = 2$ ha equazioni

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

e una base può essere $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Dunque $B_1 \cup B_2$ è una base di V formata da autovettori per T

Esercizio 5.

1. *Definire nucleo e immagine di una applicazione lineare $G : V \to W$ tra spazi vettoriali e dimostrare che tali sottoinsiemi sono sottospazi.*

2. *Enunciare il teorema di "nullità più rango".*

3. *Esistono matrici $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ con $A \neq B$ tali che $AX = BX$ per ogni $X \in \mathbb{R}^n$?*

1.2. Si vedano testi e dispense

3. Se $AX = BX \ \forall X$, allora

$$(A - B)X = 0 \quad \forall X$$

Prendendo per X gli elementi di una base di $\mathbb{R}^n$

segue che $A - B = 0$, ovvero $A = B$,

dunque la risposta alla domanda è no.