Prova scritta di Algebra per Informatica, 30/5/2022 – canale M-Z, prof. P. Papi

Nome, Cognome, Numero di Matricola: ....

1. Non sono ammessi appunti, libri di testo, calcolatrici né l'uso del computer (al di fuori di exam.net)

2. Spiegare il procedimento ed i calcoli eseguiti, e **giustificare ogni risposta**. *La valutazione terrà conto della* **presentazione***: leggibilità, grammatica, sintassi, ordine, chiarezza, capacità di sintesi.*

3. Una risposta giusta con giustificazione sbagliata viene valutata ≤ 0.

4. Per gli esercizi da 1 a 4, riportare la risposta sintetica nella colonna centrale della tabella sottostante.

5. Il tempo a disposizione è due ore e mezzo.

6. **Per gli esami in presenza: consegnare i fogli da 1 a 13, ordinati secondo la numerazione naturale. Non scrivere sul retro dei fogli.**

7. **Per gli esami on-line**: assicurarsi di scannerizzare esclusivamente la bella copia, in formato verticale.

Esercizio	*Risposta sintetica*	*Valutazione*
1.a		4
1.b		4
2.a		2
2.b		3
2.c		3
3.a		2
3.b		1
3.c		3
4.a		3
4.b		5
4.c		

Esercizio 1. *Si trovino tutte le soluzioni della seguente equazione diofantea*

a) *Si trovino tutte le soluzioni della seguente equazione diofantea*

$$132x + 51y = 6,$$

b) *Determinare ordine e parità della permutazione*

$$\sigma = (1\,5\,7\,9)(2\,5\,8\,11)(6\,3\,2) \in S_{11}$$

Determinare la cardinalità della classe di coniugio di σ.

a) Risolvere l'equazione equivale a risolvere la congruenza

$$132x \equiv 6 \mod 51$$

ovvero

$$30x \equiv 6 \mod 51$$

$$10x \equiv 2 \mod 17$$

Poiché $\overline{10}^{-1} = \overline{12}$, risulta $x = 7 + 17k$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Risulta $\sigma = (1\,5\,8\,11\,2\,6\,3\,7\,9)$, quindi σ ha ordine 9 ed è pari.

I 9-cicli in S_{11} sono $\dfrac{11!}{9\;2!} = 2.217.600$

Esercizio 2. *Si consideri il gruppo U_{27} degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_{27}$.*

a) *Elencare gli elementi di U_{27}.*

b) *Dimostrare che U_{27} è ciclico.*

c) *Determinare tutti i generatori del sottogruppo di ordine 9 di U_{27}.*

a) $U_{27} = \{ \bar{a} \mid 1 \leq a < 27,\ (a, 27) = 1 \}$

$= \{ \bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{20}, \overline{22}, \overline{23}, \overline{25}, \overline{26} \}$

b) Si vede subito che $\bar{2}$ ha ordine 18.

In effetti basta vedere che $\bar{2}^9 \neq \bar{1}$, perché questo garantisce che $o(\bar{2}) > 9$ e quindi $o(\bar{2}) = 18$

c) Il sottogruppo H di ordine 9 è generato da $\bar{2}^2 = \bar{4}$; l'isomorfismo $H \longrightarrow (\mathbb{Z}_9, +)$ è quello ottenuto estendendo $\bar{4} \longmapsto \bar{1}$; i generatori sono $\{ \bar{4}^i \mid 1 \leq i < 9,\ (i, 9) = 1 \}$

$= \{ \bar{4}, \bar{4}^2, \bar{4}^4, \bar{4}^5, \bar{4}^7, \bar{4}^8 \} = \{ \bar{4}, \overline{16}, \overline{13}, \overline{25}, \overline{22}, \bar{7} \}$

Esercizio 3.

a) *Dimostrare che esiste un'unico operatore lineare* $F:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^4$ *tale che*

$$ker(F) \text{ ha equazioni cartesiane } \begin{cases} x_1+x_5=0\\ x_3+x_4=0\end{cases}$$

$$F(0,1,0,0,1)=(1,1,1,0),\quad F(0,0,1,0,1)=(0,2,0,-1).$$

Scrivere la matrice di F *rispetto alla base standard di* $\mathbb{R}^5$ *presa come base di partenza in* $\mathbb{R}^5$ *e a*lla base standard ~~$\mathcal{B}=\{(1,-1,0,0),(0,1,-1,0),(0,0,1,-1),(1,0,0,0)\}$~~

presa come base di arrivo in $\mathbb{R}^4$.

b) *Determinare un sottospazio* U *di* $\mathbb{R}^5$ *tale che* $\mathbb{R}^5=Ker(F)\oplus U$.

c) *Determinare una base di* $\mathbb{R}^4/Im(F)$.

a) Risolvendo il sistema si ottiene che

$$\ker F=\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\-1\end{pmatrix}\oplus\mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\oplus\mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\\0\end{pmatrix};$$ poiché

$$\begin{vmatrix}1&0&0&0&-1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&-1&0\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&1\end{vmatrix}\neq 0,$$ le condizioni imposte

determinano F su una base di $\mathbb{R}^5$ dunque per il principio di estensione per linearità F esiste ed è unico. Risulta

$$F\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=F\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right)=$$

$$=F\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$F\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = F\left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix}0\\2\\0\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$F\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = F\left(-\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$F\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = F\left(-\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right) = F\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

In definitiva la matrice richiesta è

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

b) Il sottospazio cercato è quello che ha per base

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Si ha $\operatorname{Im} F = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Se W è il sottospazio generato dai vettori e_3, e_4, della base canonica di $\mathbb{R}^4$, si ha $\mathbb{R}^4 = \operatorname{Im} F \oplus W$

e dalla teoria è noto che

$\mathbb{R}^4/\operatorname{Im} F$ ha per base

$$\{ e_3 + \operatorname{Im} F, \; e_4 + \operatorname{Im} F \}$$

Esercizio 4. *Data la matrice*

$$A_k = \begin{pmatrix} k-2 & 0 & 6 \\ -1 & 4 & k+3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

si consideri l'operatore lineare $L_{A_k} : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3, L_{A_k}(X) = A_k X$, *ove* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *e* $k \in \mathbb{K}$

a) *Determinare i valori di* k *per cui* L_{A_k} *non è invertibile.*

b) *Per tali valori decidere se* L_{A_k} *è diagonalizzabile su* $\mathbb{R}$ *o su* $\mathbb{C}$.

a) L_{A_k} è invertibile se e solo se $\det A_k \neq 0$. Poiché $\det A_k = 2k^2+6k-8$.

Dunque L_{A_k} non è invertibile quando $k \in \{-4, 1\}$.

b) Se $k=1$ il polinomio caratteristico di A_1 è t^3-4t^2+7t che ha radici complesse $t=0$, $t=2 \pm i\sqrt{3}$.

Dunque L_{A_1} non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ ed è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ perché ha autovalori distinti.

Se $k=-4$ il polinomio caratteristico

$p_{A_{-4}}$ è $28t - t^2 - t^3$, che ha tre radici reali e distinte 0, $\frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{113}\right)$,

quindi $L_{A_{-4}}$ è diagonalizzabile sia su $\mathbb{R}$ che su $\mathbb{C}$

Esercizio 5.

1. *Dare la definizione di indipendenza lineare per un insieme finito* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *di vettori in uno spazio vettoriale* V *su un campo* F.
2. *Definire la relazione di coniugio in un gruppo* G *e dimostrare che è una relazione di equivalenza*
3. *Dimostrare che due elementi coniugati di un gruppo hanno lo stesso ordine; è vero il viceversa ?*

1.2. Si vedano i testi consigliati

3. Siano x, $y = gxg^{-1}$ elementi coniugati. Se $o(x) = n$, allora

$$y^n = (gxg^{-1})^n = gxg^{-1}gxg^{-1} \cdots =$$

$$= g x^n g^{-1} = g g^{-1} = e,$$

quindi $o(y) \mid n$. Ma $x = g^{-1} y g$, per cui

$$e = x^{o(y)} = (g^{-1} y g)^{o(y)} = g^{-1} y^{o(y)} g = g^{-1} g = e$$

da cui $n \mid o(y)$ e quindi $o(y) = n = o(x)$.

Il viceversa è falso: in S_4 (12), $(12)(34)$ hanno ordine due e non sono coniugate