Prova scritta di Algebra per Informatica, 27/01/2022 – canale M-Z, prof. P. Papi

Nome, Cognome, Numero di Matricola: ....

1. Non sono ammessi appunti, libri di testo, calcolatrici né l'uso del computer (al di fuori di exam.net)

2. Spiegare il procedimento ed i calcoli eseguiti, e **giustificare ogni risposta***. La valutazione terrà conto della* **presentazione***: leggibilità, grammatica, sintassi, ordine, chiarezza, capacità di sintesi.*

3. La **coerenza**, in matematica, conta più della correttezza: una risposta giusta con giustificazione sbagliata viene valutata ≤ 0 (< 0 se la risposta è incoerente con quanto asserito precedentemente).

4. Per gli esercizi da 1 a 5, riportare la risposta sintetica nella colonna centrale della tabella sottostante.

5. Il tempo a disposizione è due ore e mezzo.

Per gli esami on-line*: assicurarsi di scannerizzare esclusivamente la bella copia, in formato verticale.*

Esercizio	*Risposta sintetica*	*Valutazione*	
1.a		2	
1.b		3	8
1.c		1	
1.d		2	
2.a		3	
2.b		3	9
2.c		3	
3.a		4	
3.b		1	9
3.c		2	
3.d		2	
4.a		3	
4.b		3	8
4.c		2	

34/30

Esercizio 1. *Si consideri il gruppo simmetrico S_6.*

a) *Determinare le strutture cicliche degli elementi di ordine due e tre.*

b) *Determinare le cardinalità delle classi di coniugio degli elementi di ordine due.*

c) *Determinare, se esistono, due sottogruppi H_1, H_2 distinti di S_6 isomorfi al gruppo di Klein V. È possibile scegliere H_1, H_2 in modo tale che $H_1 \cap H_2 = \{Id\}$?.*

d) *Determinare, se esistono, sottogruppi K_1, K_2 di S_6 isomorfi a $\mathbb{Z}_9, \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, rispettivamente.*

a) Se $\tau = \tau_1 \dots \tau_k$ è una scrittura di $\tau \in S_6$ come prodotto di cicli disgiunti, risulta m.c.m.$(\ell(\tau_1), \dots, \ell(\tau_k))$ $= 2$ oppure 3.

Si hanno corrispondentemente le partizioni $2\,1^4$, $2^2 1^2$, 2^3 e 3^2, $3\,1^3$

b) Se τ è di tipo $2\,1^4$, è una trasposizione e quindi dobbiamo scegliere due elementi su sei, dunque $|C_2| = \binom{6}{2} = 15$

Se τ è di tipo $2^2 1^2$ allora dobbiamo scegliere due elementi su sei e poi due su quattro. In questo modo contiamo il doppio delle permutazioni cercate (perché ad esempio $(12)(34) = (34)(12)$).

Dunque $|C_2| = \dfrac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}}{2} = 15 \cdot 3 = 45$

Se infine τ è di tipo 2^3 si procede come nel caso 2 ma dobbiamo dividere per 6 $\big((12)(34)(56) = (12)(56)(34) = \text{etc} \dots\big)$

Dunque $|C_2| = \dfrac{\binom{6}{2}\binom{6}{4}}{6} = \dfrac{15 \cdot 6}{6} = 15$

c) Possiamo prendere

$H_1 = \{ Id, (12), (34), (12)(34) \}$

$H_2 = \{ Id, (13), (24), (13)(24) \}$

d) non è possibile avere elementi di ordine 9 in S_6, perché il m.c.m di sottoinsiemi di $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ non è mai 9.

Invece $\langle (123), (456) \rangle \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$

Esercizio 2. *Sia* $G = GL(2,\mathbb{R})$ *e* $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in G \mid ac \neq 0 \right\}$. *Provare che:*

a) *H è un sottogruppo non normale di G.*

b) *Sia* $N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}$. *Dimostrare che* $N \cong (\mathbb{R}, +)$.

c) *Dimostrare che* $H/N \cong \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, *ove* $\mathbb{R}^*$ *è il gruppo moltiplicativo dei numeri reali non nulli*

a) Consideriamo $A, B \in H$ e dimostriamo che $AB^{-1} \in H$. Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\alpha & -\beta/\alpha\gamma \\ & 1/\gamma \end{pmatrix}$$

$$AB^{-1} = \begin{pmatrix} a/\alpha & -\frac{a\beta}{\alpha\gamma} + \frac{b}{\gamma} \\ 0 & c/\gamma \end{pmatrix} \in H$$

H non è perché ad esempio se $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$G \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} G^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Consideriamo $\varphi : N \longrightarrow \mathbb{R}$,

$\varphi \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = b$; chiaramente φ è biiettiva; inoltre

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \beta\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \varphi\begin{pmatrix}1 & b+\beta\\ 0 & 1\end{pmatrix} =$$

$$= b+\beta = \varphi\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \varphi\begin{pmatrix}1 & \beta\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Dunque φ è un omomorfismo.

c) Consideriamo $\psi : H \longrightarrow \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$,

$$\psi\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & c\end{pmatrix} = (a, c).$$

Risulta

$$\psi\left(\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \gamma\end{pmatrix}\right) = \psi\begin{pmatrix}a\alpha & a\beta+b\gamma\\ 0 & c\gamma\end{pmatrix}$$

$$= (a\alpha, c\gamma) = (a, c)(\alpha, \gamma) =$$

$$= \psi\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & c\end{pmatrix}\psi\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \gamma\end{pmatrix}$$

Dunque ψ è un omomorfismo, chiaramente suriettivo. Poiché $\ker\psi = N$, dal teorema di omomorfismo deduciamo che $H/N \cong \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$

Esercizio 3. *Sia $f \in End(\mathbb{R}^4)$ l'operatore lineare*

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - 5x_3 \\ 2x_2 - x_4 \\ 2x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

a) *Determinare la matrice B di f rispetto a $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ presa come base di partenza e di arrivo in $\mathbb{R}^4$.*

b) *Determinare gli autovalori di B.*

c) *Discutere la diagonalizzabilità di L_B.*

d) *Determinare, se possibile, basi $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ di $\mathbb{R}^4$ rispetto alle quali la matrice di f è diagonale.*

a) La matrice di f rispetto alla base standard $\mathcal{E}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice di cambiamento di base è $N = {}_{\mathcal{E}}(Id_{\mathbb{R}^4})_{\mathcal{B}}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e la matrice cercata è $B = N^{-1}AN =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -3 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e) A e B sono simili, quindi hanno gli stessi autovalori; poiché A è triangolare superiore, gli autovalori sono gli elementi diagonali $1, 2$;

c) Si ha $m_a(1) = m_a(2) = 2$, ma $m_g(1) = 1$, quindi L_A e L_B non sono diagonalizzabili.

d) Se prendiamo come base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^4$ quella formata dalle colonne di A, è chiaro che $\mathcal{C}(f)_{\mathcal{E}} = I_4$.

Esercizio 4. *Nello spazio vettoriale V dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 3, si considerino i sottospazi*

$$U = \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \mid a_1 - a_3 = a_2 = a_0 = 0\}, \quad W = \langle t^2 + t, t^3 + 1 \rangle.$$

a) *Determinare basi per U, W.*

b) *Determinare una base per $U + W$ e specificare se $U + W = U \oplus W$.*

c) *Completare la base di $U + W$ trovata ad una base di V.*

a) Il sistema $\begin{cases} a_1 - a_3 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_0 = 0 \end{cases}$

ha per soluzioni $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, quindi

$U = \mathbb{R}(t+t^3)$; essendo non proporzionali, t^2+t, t^3+1 sono una base di W.

b) Poiché $t+t^3 \notin W$, $\mathcal{B} = \{t^2+t, t^3+1, t+t^3\}$ è una base di $U+W$ e la somma è diretta.

c) Poiché $1 \notin U+W$, il polinomio costante 1 completa $\mathcal{B}$ a una base di V

Esercizio 5.

1. *Dare la definizione di indipendenza lineare per un insieme finito* $\{t_1, \ldots, t_w\}$ *di vettori in uno spazio vettoriale* R *su un campo* F.

2. *Sia* V *uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo* K *e sia* $f \in End_K(V)$. *Dimostrare che autovettori per* f *relativi a autovalori distinti sono linearmente indipendenti.*

3. *Dimostrare che non esiste un operatore lineare su* $\mathbb{R}^3$ *per cui* $(1, 1, 1, 1), (2, -1, 6, 0)$ *siano autovettori di autovalore* 3 *e* $(3, 0, 7, 1)$ *siano autovettore di autovalore* -2.

1, 2. Si vedano i testi consigliati.

3. Se un tale operatore f esistesse, posto $v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (2,-1,6,0)$, $v_3 = (3,0,7,1)$, dal punto 2 $v_1 + v_2$ e v_3 dovrebbero essere linearmente indipendenti, ma $v_1 + v_2 = v_3$.