Prova scritta di Algebra per Informatica, 24/10/2022 – prof. P. Papi

Nome, Cognome, Numero di Matricola: ....

1. Non sono ammessi appunti, libri di testo, calcolatrici né l'uso del computer (al di fuori di exam.net)

2. Spiegare il procedimento ed i calcoli eseguiti, e **giustificare ogni risposta**. *La valutazione terrà conto della* **presentazione***: leggibilità, grammatica, sintassi, ordine, chiarezza, capacità di sintesi.*

3. Una risposta giusta con giustificazione sbagliata viene valutata ≤ 0.
4. Per gli esercizi da 1 a 4, riportare la risposta sintetica nella colonna centrale della tabella sottostante.
5. Il tempo a disposizione è due ore.

Esercizio	*Risposta sintetica*	*Valutazione*
1		
2.a		
2.b		
3.a		
3.b		
4.a		
4.b		

Esercizio 1.

Determinare tutti gli interi con esattamente tre cifre decimali che verificano il sistema di congruenze

$$\begin{cases} 5x \equiv 2 \mod 11 \\ 3x \equiv 2 \mod 7 \\ x \equiv 3 \mod 35 \end{cases}$$

Portiamo il sistema in forma standard

$$\begin{cases} x \equiv 7 \mod 11 \\ x \equiv 3 \mod 7 \\ x \equiv 3 \mod 7 \\ x \equiv 3 \mod 5 \end{cases}$$

, quindi il sistema

Ha soluzione unica mod 385

$x = 3 + 5k$

$3 + 5k \equiv 3 \mod 7$

$k \equiv 0 \mod 7 \qquad k = 7h$

$x = 3 + 35h \qquad 3 + 35h \equiv 7 \mod 11$

$2h \equiv 4 \mod 11 \qquad h \equiv 2 \mod 11$

$h = 2 + 11s \qquad x = 3 + 35h = 3 + 35(2 + 11s)$

$x = 73 + 385s$ Dunque $x = 458$ o $x = 843$

$x \in \{843, 458, -312, -697\}$

Esercizio 2.

2) **a)** *Esibire un isomorfismo tra il sottogruppo H del gruppo simmetrico S_9 generato da $(1\,3\,4\,7)$ e $(2\,5\,8)$ e $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$.*

1) **b)** *Dimostrare che H è ciclico, e calcolare il numero dei suoi generatori.*

a) Sia $\sigma = (1\,3\,4\,7)$, $\tau = (2\,5\,8)$.

Risulta $\sigma\tau = \tau\sigma$, $o(\tau) = 3$, $o(\sigma) = 4$.

Poiché $(o(\tau), o(\sigma)) = 1$, $o(\sigma\tau) = 12$.

e dunque $H = \langle \sigma\tau \rangle$.

Il numero di generatori di H è

$\varphi(12) = \varphi(4)\varphi(3) = (4-2)(3-1) = 4$

b) Siccome $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_{12}$, per il teorema cinese dei resti.

Allora la mappa $\sigma\tau \mapsto (\bar{1}, \bar{1})$ si estende in modo unico a un isomorfismo $H \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$

Esercizio 3. *Si consideri l'applicazione lineare* $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $L_A(X) = AX$ *ove:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

1. *Determinare una base per* $Ker\, L_A$ *e una base per* $Im\, L_A$.
2. *Determinare equazioni cartesiane per* $Im\, L_A$.

a. Una base di Ker L_A si ottiene risolvendo il sistema omogeneo $AX = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad Ker\, L_A = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Una base di Im L_A si ottiene determinando una base per lo spazio righe di A^t

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque $Im\, L_A = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) Equazioni cartesiane per la L_A si ottengono imponendo la condizione

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = 2$$

Bisogna quindi imporre l'annullamento di tutti i minori di ordine 3. Si ottengono due condizioni indipendenti, ad esempio

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 4. *L'applicazione lineare* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *soddisfa:*

- $\ker T$ *è generato dal vettore* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;
- $T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

1. *Scrivere la matrice A associata a T utilizzando le basi canoniche sia in partenza che in arrivo.*
2. *Dire se $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $S(X) = AA^tX$ è diagonalizzabile.*

1. I tre vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti, quindi T è univocamente definita

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dunque $$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Risulta $S = L_B$, con $B = AA^t$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Essendo B simmetrica, S e' diagonalizzabile.

In ogni caso

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & -4 \\ -4 & \lambda - 9 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 9) - 16 = 0$$

$$\lambda^2 - 11\lambda + 2 = 0 \qquad \lambda \in \left\{ \frac{11 \pm \sqrt{113}}{2} \right\}$$

Essendo gli autovalori reali e distinti, S e' diagonalizzabile

Esercizio 5.

1. *Dare la definizione di vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale di dimensione finita.*
2. *Dimostrare che un gruppo ciclico infinito è isomorfo a* $\mathbb{Z}$.
3. *Vero o falso ? Se vero dimostrare, altrimenti esibire un controesempio: sia* V *uno spazio vettoriale di dimensione finita e siano* W_1, W_2 *sottospazi di* V. *Se* $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ *sono basi di* W_1, W_2, *rispettivamente, allora* $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ *è una base di* $W_1 + W_2$.