- 1→ Qual è la definizione di azione sinistra? → Dato un gruppo G e un insieme X definisco AZIONE DI X SU G un'applicazione $A : G \times X \to X$ che soddisfa:
  1. $A(e, x) = x \ \forall x \in X$
  2. $A(g, A(h, x)) = A(gh, x) \ \forall g, h \in G, \ \forall x \in X$

  Dico che G AGISCE SU X, $G \curvearrowright X$
- 3→ Fornisci un esempio di azione su uno spazio vettoriale V → È sufficiente prendere $A : G \times V \to V : (f, v) \mapsto f(v)$
- 3.01→ Illustra come S_X agisce su X → L'azione è $g \cdot x := g(x)$
- 4→ Enuncia il lemma di caratterizzazione delle azioni di gruppo come morfismi nel gruppo simmetrico → Data un'azione $A : G \times X \to X : (g, x) \mapsto g \cdot x$, posso definire un morfismo $\alpha : G \to S_X$ ponendo $\alpha(g)$ la funzione $X \to X : x \mapsto A(g, x)$. (Cioè quindi $\alpha(g)(x) := A(g, x)$) (da dimostrare che αè ben definita).
  Viceversa, dato $\alpha : G \to S_X$ morfismo, posso definire un'azione A come segue: $A(g, x) := \alpha(g)(x)$ (da dimostrare che è un'azione)
- 5→ Qual è la definizione di insieme G-invariante? → Se $G \curvearrowright X$, un sottoinsieme $Y \subseteq X$ è INVARIANTE quando $g \cdot y = y \ \forall y \in Y$
- 6→ Quali invarianti puoi trovare per $\mathrm{SO}(3) \curvearrowright \mathbb{R}^3$? → Le sfere sono G-invarianti
- 7→ Come si comportano i sottogruppi di un gruppo che agisce su un insieme? → Agiscono anche loro sullo stesso inseme con la restrizione dell'azione
- 8→ Qual è la definizione di G-ORBITA di $x \in X$? → È $Gx = \{g \cdot x \forall g \in G\}$
- 9→ La collezione delle orbite di un'azione come si rapporta all'insieme su cui agisce l'azione? → Data $G \curvearrowright X$, le sue orbite formano una partizione di X
- 10→ Essere in nella sessa orbita è c1:: una relazione d'equivalenza → clz
- 11→ Qual è la definizione di X/G ? → $X/G := X/\sim$, con $\sim$ relazione di equivalenza su X di appartenenza alla stessa orbita.
- 12→ Qual è la definizione di STABILIZZATORE di $x \in X$? → È $G_x := \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$
- 13→ Come sono in relazione gli stabilizzatori di due elementi sulla stessa orbita? → Se x e y sono sulla stessa orbita, allora G_x e G_y sono coniugati.
- 14→ Qual è la definizione di azione transitiva? → $G \curvearrowright X$ è TRANSITIVA quando $\forall x, y \in X \ \exists g \in G : \ g \cdot x = y$ (cioè ho un'unica orbita, $Gx = X$)
- 15→ $SO(3) \curvearrowright S^2$ è c1::transitiva → clz
- 16→ Qual è la definizione di spazio omogeneo? → Data $G \curvearrowright X$ azione, se è transitiva dico che X è uno SPAZIO OMOGENEO per G
- 17→ Esibisci un'azione di un gruppo sul quoziente per un sottogruppo → In generale: se $H \leq G, X := G/H$ ho che $G \curvearrowright G/H : \ g \cdot aH := gaH$
- 18→ Qual è la definizione di un G-INSIEME? → è un insieme X su cui agisce G
- 19→ G/H è sempre c1:: omogeneo → clz
- 20→ Chi è lo stabilizzatore di un $x \in G/H$? → È in generale un coniugato di H
- 21→ Qual è la definizione di funzione equivariante? → È una $f : X \to Y$ due G-insiemi t.c. $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$

- 22→ Quando due insiemi sono ISOMORFI come G-insiemi? → Quando esiste una funzione biunivoca ed equivariante tra loro
- 23→ Enuncia il lemma di caratterizzazione degli spazi omogenei → $G \curvearrowright X$ transitiva, preso $x_0 \in X$ e posto $H := G_{x_0}$ allora $X \cong G/H$ come G-insieme
- 24→ La classe dei G-insiemi è una → Categoria, G–**insiemi** con
  Obj(G $-ins.$) = $\{X$ insiemi con una fissata G-azione$\}$ e
  $\forall X, Y$ G-ins.: $\mathrm{Mor}(X, Y) = \{f : X \to Y$ equivarianti$\}$
- 25→ Enuncia che relazione collega lo stabilizzatore di un elemento con la sua orbita → $Gx \cong G/G_x$ come G-ins.
- 26→ Qual è la definizione di punto fisso di un'azione? → se $G \curvearrowright X$, un PUNTO FISSO dell'azione è un $x \in X$ t.c $g \cdot x = x \forall g \in G$
- 27→ x è un punto fisso ⇔ c1::$G_x = G$ → clz
- 28→ Qual è la definizione di azione fedele? → Posto $\alpha : G \to S_X$ il morfismo associato a $G \curvearrowright X$, dico che l'azione è FEDELE quando α è iniettivo
- 29→ Data un'azione $\alpha : G \to S_X$ generica, costruisci un'azione fedele. → Dato che α è un morfismo, $\exists! \beta : G/\operatorname{Ker}(\alpha) \to S_X$ iniettivo, che induce quindi un'azione fedele.
- 30→ Enuncia una caratterizzazione di azione fedele → $G \curvearrowright X$ è fedele ⇔ $\forall g \in G \setminus e$ $\exists x \in X : g \cdot x \neq x$
- 31→ È $GL(V) \curvearrowright \mathbb{P}(V)$ effettiva? → No perché $f := x \to \lambda x$ è t.c. $f \neq id_V$ e $\alpha(f) = id_V$
- 32→ Se $G \curvearrowright X$ qual è la definizione di punto io di un $g \in G$? → $G \curvearrowright X$, dico che $x \in X$ è PUNTO FISSO di $g \in G$ quando $g \cdot x = x$.
- 33→ Qual è la definizione di azione libera? → $G \curvearrowright X$ è LIBERA quando $\forall g \in G, g \neq e$ vale che g non ha punti fissi
- 34→ Enuncia una caratterizzazione di azione fedele → $G \curvearrowright X$ è LIBERA ⇔ $\forall g \in G \setminus e, \forall x \in X : g \cdot x \neq x$
- 35→ Qual è la definizione di sistema di rappresentanti? → X insieme, $\sim$ relazione di equivalenza su X, dico SISTEMA DI RAPPRESENTANTI un insieme $S \subseteq X$ t.c. $\pi_{|_S} : S \to X/\sim$ (proiezione canonica) è biettiva.
- 36→ Enuncia l'equazione delle orbite → X, G finiti, $G \curvearrowright X$, sia $S = x_1, ..., x_k$ un sistema di rappresentanti per la relazione "essere nella stessa orbita", allora $\#X = \sum_{i=1}^{k} \#G/\#G_{x_i}$
- 37→ Enuncia cosa è l'azione per traslazione → È l'azione $G \curvearrowright G :$ $g \cdot x := gx$
- 38→ Enuncia qual è l'azione per moltiplicazione a destra. → È l'azione $G \curvearrowright G : g \cdot x := xg^{-1}$
- 39→ Qual è la definizione di azione destra? → È una funzione $X \times G \to X : (x, g) \mapsto x \cdot g$ che verifica $x \cdot e = x;$ $(x \cdot g_1) \cdot g_2 = x \cdot (g_1 g_2)$
- 40→ Come posso passare da un'azione destra ad un'azione sinistra (o viceversa?) → Se $B : X \times G \to X$ è un'azione destra, allora $A : G \times X \to X : A(g, x) := B(x, g^{-1})$ è un'azione sinistra
- 41→ Enuncia qual è l'azione di $G \curvearrowright G$ per coniugio → È l'azione $G \curvearrowright G :$ $g \cdot x := gxg^{-1}$

- 42→ Qual è la definizione di automorfismo interno? → È un morfismo della forma: dato $\mathrm{inn}_g : G \to G : x \mapsto gxg^{-1}$ per un certo $g \in G$
- 43→ Qual è il morfismo associato all'azione $G \curvearrowright G$ per coniugio? → È $\alpha : G \to S_G : \alpha(g) = \mathrm{inn_g}$
- 44→ È l'azione per coniugio $G \curvearrowright G$ libera? → No: $\mathrm{inn}_g(e) = e \forall g$, e è un punto fisso dell'azione
- 45→ Qual è la definizione di X^G se $G \curvearrowright X$? → $X^G := \mathrm{Fix}_G(X) := \{x \in X \mid \forall g : g \cdot x = x\}$
- 46→ Se $G \curvearrowright G$ per coniugio, chi è $\mathrm{Fix}_G(G)$? → $\mathrm{Fix}_G(G) = Z(G)$ il centro di G
- 47→ Se $G \curvearrowright G$ per coniugio, chi è G_x? → $G_x = Z_G(x)$ il centralizzante di x
- 48→ Enuncia l'EQUAZIONE DELLE CLASSI → È $|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{m}[G : Z_G(x_i)]$ se $x_1, ..., x_k$ è un sistema di rappresentanti della relazione delle orbite, con $x_1, ..., x_m \notin Z(G)$
- 49→ Qual è la definizione di p-gruppo? → È un gruppo G con $o(G) = p^\alpha$, p primo e $\alpha \in \mathbb{N}^{>0}$
- 50→ Com'è il centralizzante di un p gruppo? → È banale, $Z(G) = \{1\}$
- 51→ Puoi estendere un'azione su un insieme al suo insieme delle parti? → Sì, è facile vedere che se $G \curvearrowright X$, allora si ha anche che $G \curvearrowright \mathcal{P}(X) : \ g \cdot E := \{g \cdot x \mid x \in E\}(= \alpha(g)(E))$
- 52→ Come puoi far agire un gruppo G sull'insieme dei suoi sottogruppi? → Sapendo che $G \curvearrowright \mathcal{P}(G)$ per coniugio, ho che $\mathcal{S}(G) := \{\text{sottogruppi di} G\}$ è un insieme invariante. Allora posso restringere l'azione sopra $g \cdot H := gHg^{-1}$
- 53→ Presa l'azione $G \curvearrowright S(G)$ per coniugio, e $H \in S(G)$, chi è G_H? → È il NORMALIZZANTE di H in G
- 54→ Presa l'azione $G \curvearrowright S(G)$ per coniugio dai una caratterizzazione dell'orbita di $H < G$ → $GH = \{\text{coniugati di } H\}$, $|GH| = |G|/|G_H| = \#\text{CONIUGATI DI } H = |G|/N_G(H)$
- 55→ che relazione c'è tra un sottogruppo $H < G$ e il suo normalizzante? → $H \lhd N_G(H)$ e $H \lhd G \Leftrightarrow N_G(H) = G$
- 56→ Come puoi descrivere euristicamente il normalizzante di un sottogruppo $H < G$? → È il "più grande sottogruppo di G in cui H è normale ", cioè se $H' < G, \ H \subseteq H', H \lhd H' \Rightarrow H' \subseteq N_G(H)$
- 57→ Che rapporto c'è tra il centro di un elemento $x \in G$ ed il normalizzante del suo gruppo generato? → Vale in generale $Z_G(x) \subseteq N_G(< x >)$, non vale in generale l'uguaglianza
- 58→ Enuncia il teorema di Cayley nel contesto delle azioni → Ogni gruppo ha un'azione fedele su un qualche insieme
- 59→ Esibisci un Gruppo che non possiede sottogruppi di un determinato ordine che divide l'ordine del gruppo → $G = A_4$ nonn possiede sottogruppi di ordine 6
- 60→ Qual è l'ordine di un generico elemento di un gruppo ciclico? → Se $G =< g >$, $o(G) = n$, allora $o(g^s) = \frac{n}{(n,s)}$

- 61$\rightarrow$ Quanti generatori ha un gruppo ciclico $G =< g > \ \ o(G) = n$? $\rightarrow$ Sono tanti quanto i naturali $\leq n$ che non dividono n, cioè $\varphi(n)$
- 62$\rightarrow$ Caratterizza i sottogruppi di ordine $d|n$ di un gruppo ciclico $G \rightarrow$ Sono gli $H < G$ t.c. $H =< g^{n/d} >$, questo esiste ed unico $\Leftrightarrow d|n$
- 63$\rightarrow$ Enuncia la FORMULA DI GAUSS $\rightarrow \sum\limits_{d:d|n} \varphi(d) = n$
- 64$\rightarrow$ Dai una condizione sui sottogruppi di un gruppo G sufficiente affinché esso sia ciclico $\rightarrow G$ gruppo, $o(G) = n$, se $\forall d|n$ esiste al più un sottogruppo di ordine d, allora G è ciclico
- 65$\rightarrow$ Dai la definizione di G^d e una condizione su di ess affinché il gruppo G sia ciclico $\rightarrow G^d = \{x \in G \mid x^d = 1\}$. Se $\forall d \mid n : \ |G^d| \leq d \Rightarrow \ G$ è ciclico.
- 66$\rightarrow$ Dai delle condizioni sufficienti per trovare dei sottogruppi di un gruppo abeliano $\rightarrow G$ gruppo *abeliano*, $o(G) = n, \ d|n \Rightarrow \ \exists H \leq G : \ o(H) = d$
- 67$\rightarrow$ Cosa puoi dire dei sottogruppi di gruppi ciclici e abeliani? $\rightarrow$
  1. G abeliano $\Rightarrow \ \forall d|n \ \exists$ un sottogruppo di G di ordine n
  2. G ciclico $\Rightarrow \ \forall d|n \ \exists$ un sottogruppo di G di ordine n
- 68$\rightarrow$ Enuncia il teorema di Sylow$\rightarrow$ Dato un gruppo finito G, posto $o(G) = p^\alpha m$, p primo, $p \nmid m$, allora
  1. $\exists$ un p-sylow in G
  2. se $H \leq G$ è un p-sottogruppo $\Rightarrow \ H$ è contenuto in un p-sylow
  3. tutti i p-sylow sono coniugati
  4. Detto $n_p = \#\{p - \text{sylow}\} \ \Rightarrow \ n_p = [G : N_G(P)]$, con P un p-sylow.
  5. $n_p \equiv 1 \mod p$ e $n_p \mid n$
- 69$\rightarrow$ Enuncia il lemma che ti permette di trovare dei p-sylow di un sottogruppo $\rightarrow G$ gruppo finito, H sottogruppo e Pp-sylow $\Rightarrow \ \exists x \in G : \ xPx^{-1} \cap H$ è un p-sylow di H
- 70$\rightarrow$ Dati $P, H < G$, come può agire $P \times H$ su G ? Di' chi è lo stabilizzatore di un elemento$\rightarrow P \times H \curvearrowright G : \ (a, h) \cdot x = axh^-1$, e inoltre $(P \times H)_x \cong (x^{-1}Px) \cap H$ tramite f: $f(a, h) = h$ e $f^{-1}(h) = (x^{-1}Px, h)$
- 71$\rightarrow$ Enunciai il corollario del lemma sui p-sylow dei sottogruppi $\rightarrow H \leq G$, G ha un p-sylow $\Rightarrow$ anche H ha un p-sylow
- 72$\rightarrow$ Dai un'idea di quale sia la strategia per dimostrare il teorema di Sylow $\rightarrow$ Eseguo due passi:
  1. trovo una classe di gruppi con un p-sylow banale, cioè $GL(n, F_p)$, p primo e $F_p = \mathbb{Z}/p$
  2. esibisco un morfismo iniettivo in $GL(n, F_p)$ per un qualsiasi gruppo finito
- 73$\rightarrow$ Qual è la cardinalità di $GL(n, F_p)$ con p primo e $F_p = \mathbb{Z}/p$? $\rightarrow$ È $\prod_{i=0}^{n-1}(p^n - p^i)$
- 74$\rightarrow$ Enuncia una caratterizzazione dei gruppi di ordine un quadrato di un primo $\rightarrow G$ gruppo, $Z(G) \neq \{1\}, \ \#G = p^2, \ p$ primo $\Rightarrow G \cong C_{p^2}$ oppure $G \cong C_p \times C_p$

- 75$\to$ Enuncia una condizione sufficiente su un gruppo affinché esso sia abeliano che va a guardare $G/Z(G) \to G$ finit. $G/Z(G)$ ciclico $\Rightarrow$ G abeliano
- 76$\to$ Esibisci il morfismo iniettivo da $S_n \hookrightarrow GL(n, F_p)$ $\to$ È il morfismo che manda $\sigma \mapsto \varphi(\sigma) := (e_{\sigma(1)}|...|e_{\sigma(n)})$ cioè che manda un morfismo nella matrice identità con le colonne permutate.
- 77$\to$ Descrivi il funtore dalla categoria degli insiemi alla categoria degli spazi vettoriali su un campo fissato $\to$ È una mappa della forma $\mathbf{Set} \overset{\alpha}{\to} \mathbf{Vec}(F) : \mathrm{Mor}_{\mathbf{Set}}(X, Y) = \{f : X \to Y\} \overset{\alpha}{\to} \{f^* : F^Y \to F^X\} = \mathrm{Mor}_{\mathbf{Set}}(\alpha(X), \alpha(Y)) : f \mapsto f^*$, con $f^* : F^Y \to F^X : u \mapsto u \circ f$ È un funtore controvariante
- 78$\to$ Descrivi il processo di linearizzazione di un'azione $\to$???
- 79$\to$ Qual è la definizione di F-ALGEBRA ? $\to$ È un anello A che è anche un F-spazio vettoriale, con la stessa struttura additiva e t.c. $\forall a, b \in A \forall \lambda \in F : \ \lambda(ab) = a(\lambda b) = (\lambda a)b$
- 80$\to$ Esibisci una F-algebra facile $\to$ Dati X insieme e F campo, F^X è un'F-algebra commutativa con unità $1 : X \to F : x \mapsto 1 \in F$
- 81$\to$ Dato un p-gruppo, esibisci dei suoi sottogruppi $\to$ $\#G = p^\alpha, \ p$ primo $\Rightarrow$ $\forall i = 0, ..., \alpha \ \exists H < G : \ \#H = p^i$
- 82$\to$ Enuncia il lemma che caratterizza il prodottoNH di due sottogruppi $N, H < G$, data la funzione $f : N \times H \to G, \ f(n, h) := nh$ $\to$
  1. $\mathrm{Im}(f) = NH$
  2. $nh \in \mathrm{Im}(f)$ e $f^{-1}(nh) = \{(nx, x^{-1}h) \mid x \in N \cap H\}$
  3. $|NH| = |N||H|/|N \cap H|$
  4. $N \lhd G \Rightarrow \ NH < G$
  5. $N, H \lhd G \Rightarrow \ NH \lhd G$
  6. Se $N, H \lhd G \Rightarrow \ [N, H] \subseteq N \cap H$
  7. Se $H, N \lhd G, N \cap H = \{1\} \ \Rightarrow \ NG \cong N \times H$
- 83$\to$ Enuncia la proposizione sull'equivalenza tra il prodotto diretto interno ed esterno $\to$ $H, G \lhd G, N \cap H = \{1\}, NH = G \Rightarrow \ N \cong N \times H$.
  D'altro lato, se pongo $N \times H =: K$ ho: $\bar{N} := N \times \{1\} \lhd K, \ \bar{H} := \{1\} \times H \lhd K$ sono tali che $\bar{N} \cap \bar{H} = \{(1, 1)\} e K = \bar{N}\bar{H}$
- 84$\to$ Enuncia il lemma di caratterizzazione del prodotto di un numero finito arbitrario di gruppi $\to$ G gruppo, $N_1, ..., N_k \lhd G$ tali che $N_i \cap (N_1 \cdot ... \cdot \hat{N_i} \cdot ... \cdot N_k) = \{1\} \ \Rightarrow \ f : N_i \times ... \times N_k \to N_1 \cdot ... \cdot N_k : (n_1, ..., n_k) \to n_1 \cdot ... \cdot n_k$ è un isomorfismo
- 85$\to$ Enuncia il teorema di Cauchy per gruppi $\to$ G gruppo finito, p primo t.c. $p|o(G) \Rightarrow$ G contiene un elemento di ordine p
- 86$\to$ Enuncia il teorema di caratterizzazione dei gruppi con p-sylow unici $\to$ G gruppo finito, $o(G) = p_1^{\alpha_1}...p_k^{\alpha_k}, \ \ p_i$ primi, se tutti i p-sylow sono unici $\Rightarrow$ posti $P_1, ..., P_k$ gli unici p-sylow ho che $G \cong P_1 \times ... \times P_k$
- 87$\to$ Cosa puoi dire su n_p se il p-sylow è normale? $\to$ Ho che $P \lhd G \ \Leftrightarrow \ n_p = 1$
- 88$\to$ Enuncia la proposizione di caratterizzazione dei gruppi con ordine un prodotto di

primi $\rightarrow$ G gruppo con $o(G) = pq$, p, q primi, $p < q$ e $p \nmid q-1 \;\Rightarrow\; G \cong C_p \times C_q (\cong C_{pq})$

- 89$\rightarrow$
- 90$\rightarrow$
- 91$\rightarrow$
- 92$\rightarrow$
- 93$\rightarrow$
- 94$\rightarrow$
- 95$\rightarrow$
- 96$\rightarrow$
- 97$\rightarrow$
- 98$\rightarrow$
- 99$\rightarrow$
- 100$\rightarrow$