

- 1→ Qual è la definizione di azione sinistra? → Dato un gruppo  $G$  e un insieme  $X$  definisco AZIONE DI  $X$  SU  $G$  un'applicazione  $A : G \times X \rightarrow X$  che soddisfa:

1.  $A(e, x) = x \ \forall x \in X$
2.  $A(g, A(h, x)) = A(gh, x) \ \forall g, h \in G, \ \forall x \in X$

Dico che  $G$  AGISCE SU  $X$ ,  $G \curvearrowright X$

- 3→ Fornisci un esempio di azione su uno spazio vettoriale  $V$  → È sufficiente prendere  $A : G \times V \rightarrow V : (g, v) \mapsto f(v)$
- 3.01→ Illustra come  $S_X$  agisce su  $X$  → L'azione è  $g \cdot x := g(x)$
- 4→ Enuncia il lemma di caratterizzazione delle azioni di gruppo come morfismi nel gruppo simmetrico → Data un'azione  $A : G \times X \rightarrow X : (g, x) \mapsto g \cdot x$ , posso definire un morfismo  $\alpha : G \rightarrow S_X$  ponendo  $\alpha(g)$  la funzione  $X \rightarrow X : x \mapsto A(g, x)$ . (Cioè quindi  $\alpha(g)(x) := A(g, x)$ ) (da dimostrare che  $\alpha$  è ben definita).  
Viceversa, dato  $\alpha : G \rightarrow S_X$  morfismo, posso definire un'azione  $A$  come segue:  $A(g, x) := \alpha(g)(x)$  (da dimostrare che è un'azione)
- 5→ Qual è la definizione di insieme  $G$ -invariante? → Se  $G \curvearrowright X$ , un sottoinsieme  $Y \subseteq X$  è INVARIANTE quando  $g \cdot y = y \ \forall y \in Y$
- 6→ Quali invarianti puoi trovare per  $SO(3) \curvearrowright \mathbb{R}^3$ ? → Le sfere sono  $G$ -invarianti
- 7→ Come si comportano i sottogruppi di un gruppo che agisce su un insieme? → Agiscono anche loro sullo stesso insieme con la restrizione dell'azione
- 8→ Qual è la definizione di  $G$ -ORBITA di  $x \in X$ ? → È  $Gx = \{g \cdot x \mid g \in G\}$
- 9→ La collezione delle orbite di un'azione come si rapporta all'insieme su cui agisce l'azione? → Data  $G \curvearrowright X$ , le sue orbite formano una partizione di  $X$
- 10→ Essere in nella stessa orbita è c1:: una relazione d'equivalenza → clz
- 11→ Qual è la definizione di  $X/G$ ? →  $X/G := X/\sim$ , con  $\sim$  relazione di equivalenza su  $X$  di appartenenza alla stessa orbita.
- 12→ Qual è la definizione di STABILIZZATORE di  $x \in X$ ? → È  $G_x := \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$
- 13→ Come sono in relazione gli stabilizzatori di due elementi sulla stessa orbita? → Se  $x$  e  $y$  sono sulla stessa orbita, allora  $G_x$  e  $G_y$  sono coniugati.
- 14→ Qual è la definizione di azione transitiva? →  $G \curvearrowright X$  è TRANSITIVA quando  $\forall x, y \in X \ \exists g \in G : g \cdot x = y$  (cioè ho un'unica orbita,  $Gx = X$ )
- 15→  $SO(3) \curvearrowright S^2$  è c1::transitiva → clz
- 16→ Qual è la definizione di spazio omogeneo? → Data  $G \curvearrowright X$  azione, se è transitiva dico che  $X$  è uno SPAZIO OMOGENEO per  $G$
- 17→ Esibisci un'azione di un gruppo sul quoziente per un sottogruppo → In generale: se  $H \leq G$ ,  $X := G/H$  ho che  $G \curvearrowright G/H : g \cdot aH := gaH$
- 18→ Qual è la definizione di un  $G$ -INSIEME? → è un insieme  $X$  su cui agisce  $G$
- 19→  $G/H$  è sempre c1:: omogeneo → clz
- 20→ Chi è lo stabilizzatore di un  $x \in G/H$ ? → È in generale un coniugato di  $H$
- 21→ Qual è la definizione di funzione equivariante? → È una  $f : X \rightarrow Y$  due  $G$ -insiemi t.c.  $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$

- 22 → Quando due insiemi sono ISOMORFI come  $G$ -insiemi? → Quando esiste una funzione biunivoca ed equivariante tra loro
- 23 → Enuncia il lemma di caratterizzazione degli spazi omogenei →  $G \curvearrowright X$  transitiva, preso  $x_0 \in X$  e posto  $H := G_{x_0}$  allora  $X \cong G/H$  come  $G$ -insieme
- 24 → La classe dei  $G$ -insiemi è una → Categoria,  $G$ -**insiemi** con  $\text{Obj}(G\text{-ins.}) = \{X \text{ insiemi con una fissata } G\text{-azione}\}$  e  $\forall X, Y \text{ } G\text{-ins.}: \text{Mor}(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y \text{ equivarianti}\}$
- 25 → Enuncia che relazione collega lo stabilizzatore di un elemento con la sua orbita →  $Gx \cong G/G_x$  come  $G$ -ins.
- 26 → Qual è la definizione di punto fisso di un'azione? → se  $G \curvearrowright X$ , un PUNTO FISSO dell'azione è un  $x \in X$  t.c.  $g \cdot x = x \forall g \in G$
- 27 →  $x$  è un punto fisso  $\Leftrightarrow \text{cl}::G_x = G \rightarrow \text{clz}$
- 28 → Qual è la definizione di azione fedele? → Posto  $\alpha : G \rightarrow S_X$  il morfismo associato a  $G \curvearrowright X$ , dico che l'azione è FEDELE quando  $\alpha$  è iniettivo
- 29 → Data un'azione  $\alpha : G \rightarrow S_X$  generica, costruisci un'azione fedele. → Dato che  $\alpha$  è un morfismo,  $\exists! \beta : G/\text{Ker}(\alpha) \rightarrow S_X$  iniettivo, che induce quindi un'azione fedele.
- 30 → Enuncia una caratterizzazione di azione fedele →  $G \curvearrowright X$  è fedele  $\Leftrightarrow \forall g \in G \setminus e \exists x \in X : g \cdot x \neq x$
- 31 → È  $GL(V) \curvearrowright \mathbb{P}(V)$  effettiva? → No perché  $f := x \rightarrow \lambda x$  è t.c.  $f \neq id_V$  e  $\alpha(f) = id_V$
- 32 → Se  $G \curvearrowright X$  qual è la definizione di punto fisso di un  $g \in G$ ? →  $G \curvearrowright X$ , dico che  $x \in X$  è PUNTO FISSO di  $g \in G$  quando  $g \cdot x = x$ .
- 33 → Qual è la definizione di azione libera? →  $G \curvearrowright X$  è LIBERA quando  $\forall g \in G, g \neq e$  vale che  $g$  non ha punti fissi
- 34 → Enuncia una caratterizzazione di azione fedele →  $G \curvearrowright X$  è LIBERA  $\Leftrightarrow \forall g \in G \setminus e, \forall x \in X : g \cdot x \neq x$
- 35 → Qual è la definizione di sistema di rappresentanti? →  $X$  insieme,  $\sim$  relazione di equivalenza su  $X$ , dico SISTEMA DI RAPPRESENTANTI un insieme  $S \subseteq X$  t.c.  $\pi|_S : S \rightarrow X/\sim$  (proiezione canonica) è biettiva.
- 36 → Enuncia l'equazione delle orbite →  $X, G$  finiti,  $G \curvearrowright X$ , sia  $S = x_1, \dots, x_k$  un sistema di rappresentanti per la relazione "essere nella stessa orbita", allora  $\#X = \sum_{i=1}^k \#G/\#G_{x_i}$
- 37 → Enuncia cosa è l'azione per traslazione → È l'azione  $G \curvearrowright G : g \cdot x := gx$
- 38 → Enuncia qual è l'azione per moltiplicazione a destra. → È l'azione  $G \curvearrowright G : g \cdot x := xg^{-1}$
- 39 → Qual è la definizione di azione destra? → È una funzione  $X \times G \rightarrow X : (x, g) \mapsto x \cdot g$  che verifica  $x \cdot e = x$ ;  $(x \cdot g_1) \cdot g_2 = x \cdot (g_1 g_2)$
- 40 → Come posso passare da un'azione destra ad un'azione sinistra (o viceversa?) → Se  $B : X \times G \rightarrow X$  è un'azione destra, allora  $A : G \times X \rightarrow X : A(g, x) := B(x, g^{-1})$  è un'azione sinistra
- 41 → Enuncia qual è l'azione di  $G \curvearrowright G$  per coniugio → È l'azione  $G \curvearrowright G : g \cdot x := gxg^{-1}$

- 42→ Qual è la definizione di automorfismo interno? → È un morfismo della forma: dato  $\text{inn}_g : G \rightarrow G : x \mapsto gxg^{-1}$  per un certo  $g \in G$
- 43→ Qual è il morfismo associato all'azione  $G \curvearrowright G$  per coniugio? → È  $\alpha : G \rightarrow S_G : \alpha(g) = \text{inn}_g$
- 44→ È l'azione per coniugio  $G \curvearrowright G$  libera? → No:  $\text{inn}_g(e) = e \forall g$ ,  $e$  è un punto fisso dell'azione
- 45→ Qual è la definizione di  $X^G$  se  $G \curvearrowright X$ ? →  $X^G := \text{Fix}_G(X) := \{x \in X \mid \forall g : g \cdot x = x\}$
- 46→ Se  $G \curvearrowright G$  per coniugio, chi è  $\text{Fix}_G(G)$ ? →  $\text{Fix}_G(G) = Z(G)$  il centro di  $G$
- 47→ Se  $G \curvearrowright G$  per coniugio, chi è  $G_x$ ? →  $G_x = Z_G(x)$  il centralizzante di  $x$
- 48→ Enuncia l'EQUAZIONE DELLE CLASSI → È  $|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^m [G : Z_G(x_i)]$  se  $x_1, \dots, x_k$  è un sistema di rappresentanti della relazione delle orbite, con  $x_1, \dots, x_m \notin Z(G)$
- 49→ Qual è la definizione di  $p$ -gruppo? → È un gruppo  $G$  con  $o(G) = p^\alpha$ ,  $p$  primo e  $\alpha \in \mathbb{N}^{>0}$
- 50→ Com'è il centralizzante di un  $p$  gruppo? → È banale,  $Z(G) = \{1\}$
- 51→ Puoi estendere un'azione su un insieme al suo insieme delle parti? → Sì, è facile vedere che se  $G \curvearrowright X$ , allora si ha anche che  $G \curvearrowright \mathcal{P}(X) : g \cdot E := \{g \cdot x \mid x \in E\} (= \alpha(g)(E))$
- 52→ Come puoi far agire un gruppo  $G$  sull'insieme dei suoi sottogruppi? → Sapendo che  $G \curvearrowright \mathcal{P}(G)$  per coniugio, ho che  $\mathcal{S}(G) := \{\text{sottogruppi di } G\}$  è un insieme invariante. Allora posso restringere l'azione sopra  $g \cdot H := gHg^{-1}$
- 53→ Presa l'azione  $G \curvearrowright S(G)$  per coniugio, e  $H \in S(G)$ , chi è  $G_H$ ? → È il NORMALIZZANTE di  $H$  in  $G$
- 54→ Presa l'azione  $G \curvearrowright S(G)$  per coniugio dai una caratterizzazione dell'orbita di  $H < G$  →  $GH = \{\text{coniugati di } H\}$ ,  $|GH| = |G|/|G_H| = \#\text{CONIUGATI DI } H = |G|/N_G(H)$
- 55→ che relazione c'è tra un sottogruppo  $H < G$  e il suo normalizzante? →  $H \triangleleft N_G(H)$  e  $H \triangleleft G \Leftrightarrow N_G(H) = G$
- 56→ Come puoi descrivere euristicamente il normalizzante di un sottogruppo  $H < G$ ? → È il "più grande sottogruppo di  $G$  in cui  $H$  è normale", cioè se  $H' < G$ ,  $H \subseteq H'$ ,  $H \triangleleft H' \Rightarrow H' \subseteq N_G(H)$
- 57→ Che rapporto c'è tra il centro di un elemento  $x \in G$  ed il normalizzante del suo gruppo generato? → Vale in generale  $Z_G(x) \subseteq N_G(\langle x \rangle)$ , non vale in generale l'uguaglianza
- 58→ Enuncia il teorema di Cayley nel contesto delle azioni → Ogni gruppo ha un'azione fedele su un qualche insieme
- 59→ Esibisci un Gruppo che non possiede sottogruppi di un determinato ordine che divide l'ordine del gruppo →  $G = A_4$  non possiede sottogruppi di ordine 6
- 60→ Qual è l'ordine di un generico elemento di un gruppo ciclico? → Se  $G = \langle g \rangle$ ,  $o(G) = n$ , allora  $o(g^s) = \frac{n}{(n,s)}$

- 61 → Quanti generatori ha un gruppo ciclico  $G = \langle g \rangle$   $o(G) = n$ ? → Sono tanti quanto i naturali  $\leq n$  che non dividono  $n$ , cioè  $\varphi(n)$
- 62 → Caratterizza i sottogruppi di ordine  $d|n$  di un gruppo ciclico  $G$  → Sono gli  $H < G$  t.c.  $H = \langle g^{n/d} \rangle$ , questo esiste ed unico  $\Leftrightarrow d|n$
- 63 → Enuncia la FORMULA DI GAUSS →  $\sum_{d:d|n} \varphi(d) = n$
- 64 → Dai una condizione sui sottogruppi di un gruppo  $G$  sufficiente affinché esso sia ciclico →  $G$  gruppo,  $o(G) = n$ , se  $\forall d|n$  esiste al più un sottogruppo di ordine  $d$ , allora  $G$  è ciclico
- 65 → Dai la definizione di  $G^d$  e una condizione su di esso affinché il gruppo  $G$  sia ciclico →  $G^d = \{x \in G \mid x^d = 1\}$ . Se  $\forall d|n : |G^d| \leq d \Rightarrow G$  è ciclico.
- 66 → Dai delle condizioni sufficienti per trovare dei sottogruppi di un gruppo abeliano →  $G$  gruppo abeliano,  $o(G) = n$ ,  $d|n \Rightarrow \exists H \leq G : o(H) = d$
- 67 → Cosa puoi dire dei sottogruppi di gruppi ciclici e abeliani? →
  1.  $G$  abeliano  $\Rightarrow \forall d|n \exists$  un sottogruppo di  $G$  di ordine  $n$
  2.  $G$  ciclico  $\Rightarrow \forall d|n \exists$  un sottogruppo di  $G$  di ordine  $n$
- 68 → Enuncia il teorema di Sylow → Dato un gruppo finito  $G$ , posto  $o(G) = p^\alpha m$ ,  $p$  primo,  $p \nmid m$ , allora
  1.  $\exists$  un  $p$ -syLOW in  $G$
  2. se  $H \leq G$  è un  $p$ -sottogruppo  $\Rightarrow H$  è contenuto in un  $p$ -syLOW
  3. tutti i  $p$ -syLOW sono coniugati
  4. Detto  $n_p = \#\{p\text{-syLOW}\} \Rightarrow n_p = [G : N_G(P)]$ , con  $P$  un  $p$ -syLOW.
  5.  $n_p \equiv 1 \pmod p$  e  $n_p | n$
- 69 → Enuncia il lemma che ti permette di trovare dei  $p$ -syLOW di un sottogruppo →  $G$  gruppo finito,  $H$  sottogruppo e  $P$   $p$ -syLOW  $\Rightarrow \exists x \in G : xPx^{-1} \cap H$  è un  $p$ -syLOW di  $H$
- 70 → Dati  $P, H < G$ , come può agire  $P \times H$  su  $G$ ? Di' chi è lo stabilizzatore di un elemento →  $P \times H \curvearrowright G : (a, h) \cdot x = axh^{-1}$ , e inoltre  $(P \times H)_x \cong (x^{-1}Px) \cap H$  tramite  $f : f(a, h) = h$  e  $f^{-1}(h) = (x^{-1}Px, h)$
- 71 → Enunciai il corollario del lemma sui  $p$ -syLOW dei sottogruppi →  $H \leq G$ ,  $G$  ha un  $p$ -syLOW  $\Rightarrow$  anche  $H$  ha un  $p$ -syLOW
- 72 → Dai un'idea di quale sia la strategia per dimostrare il teorema di Sylow → Esegui due passi:
  1. trovo una classe di gruppi con un  $p$ -syLOW banale, cioè  $GL(n, F_p)$ ,  $p$  primo e  $F_p = \mathbb{Z}/p$
  2. esibisco un morfismo iniettivo in  $GL(n, F_p)$  per un qualsiasi gruppo finito
- 73 → Qual è la cardinalità di  $GL(n, F_p)$  con  $p$  primo e  $F_p = \mathbb{Z}/p$ ? → È  $\prod_{i=0}^{n-1} (p^n - p^i)$
- 74 → Enuncia una caratterizzazione dei gruppi di ordine un quadrato di un primo →  $G$  gruppo,  $Z(G) \neq \{1\}$ ,  $\#G = p^2$ ,  $p$  primo  $\Rightarrow G \cong C_{p^2}$  oppure  $G \cong C_p \times C_p$

- 75 → Enuncia una condizione sufficiente su un gruppo affinché esso sia abeliano che va a guardare  $G/Z(G) \rightarrow G$  finit.  $G/Z(G)$  ciclico  $\Rightarrow G$  abeliano
- 76 → Esibisci il morfismo iniettivo da  $S_n \hookrightarrow GL(n, F_p) \rightarrow$  È il morfismo che manda  $\sigma \mapsto \varphi(\sigma) := (e_{\sigma(1)} | \dots | e_{\sigma(n)})$  cioè che manda un morfismo nella matrice identità con le colonne permutate.
- 77 → Descrivi il funtore dalla categoria degli insiemi alla categoria degli spazi vettoriali su un campo fissato  $\rightarrow$  È una mappa della forma  $\mathbf{Set} \xrightarrow{\alpha} \mathbf{Vec}(F) : \text{Mor}_{\mathbf{Set}}(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y\} \xrightarrow{\alpha} \{f^* : F^Y \rightarrow F^X\} = \text{Mor}_{\mathbf{Set}}(\alpha(X), \alpha(Y)) : f \mapsto f^*,$  con  $f^* : F^Y \rightarrow F^X : u \mapsto u \circ f$  È un funtore controvariante
- 78 → Descrivi il processo di linearizzazione di un'azione  $\rightarrow ???$
- 79 → Qual è la definizione di  $F$ -ALGEBRA ?  $\rightarrow$  È un anello  $A$  che è anche un  $F$ -spazio vettoriale, con la stessa struttura additiva e t.c.  $\forall a, b \in A \forall \lambda \in F : \lambda(ab) = a(\lambda b) = (\lambda a)b$
- 80 → Esibisci una  $F$ -algebra facile  $\rightarrow$  Dati  $X$  insieme e  $F$  campo,  $F^X$  è un'  $F$ -algebra commutativa con unità  $1 : X \rightarrow F : x \mapsto 1 \in F$
- 81 → Dato un  $p$ -gruppo, esibisci dei suoi sottogruppi  $\rightarrow \#G = p^\alpha, p$  primo  $\Rightarrow \forall i = 0, \dots, \alpha \exists H < G : \#H = p^i$
- 82 → Enuncia il lemma che caratterizza il prodotto  $NH$  di due sottogruppi  $N, H < G$ , data la funzione  $f : N \times H \rightarrow G, f(n, h) := nh \rightarrow$ 
  1.  $\text{Im}(f) = NH$
  2.  $nh \in \text{Im}(f)$  e  $f^{-1}(nh) = \{(nx, x^{-1}h) \mid x \in N \cap H\}$
  3.  $|NH| = |N||H|/|N \cap H|$
  4.  $N \triangleleft G \Rightarrow NH < G$
  5.  $N, H \triangleleft G \Rightarrow NH \triangleleft G$
  6. Se  $N, H \triangleleft G \Rightarrow [N, H] \subseteq N \cap H$
  7. Se  $H, N \triangleleft G, N \cap H = \{1\} \Rightarrow NG \cong N \times H$
- 83 → Enuncia la proposizione sull'equivalenza tra il prodotto diretto interno ed esterno  $\rightarrow H, G \triangleleft G, N \cap H = \{1\}, NH = G \Rightarrow N \cong N \times H$ .  
D'altro lato, se pongo  $N \times H =: K$  ho:  $\bar{N} := N \times \{1\} \triangleleft K, \bar{H} := \{1\} \times H \triangleleft K$  sono tali che  $\bar{N} \cap \bar{H} = \{(1, 1)\} e K = \bar{N} \bar{H}$
- 84 → Enuncia il lemma di caratterizzazione del prodotto di un numero finito arbitrario di gruppi  $\rightarrow G$  gruppo,  $N_1, \dots, N_k \triangleleft G$  tali che  $N_i \cap (N_1 \cdot \dots \cdot \hat{N}_i \cdot \dots \cdot N_k) = \{1\} \Rightarrow f : N_i \times \dots \times N_k \rightarrow N_1 \cdot \dots \cdot N_k : (n_1, \dots, n_k) \rightarrow n_1 \cdot \dots \cdot n_k$  è un isomorfismo
- 85 → Enuncia il teorema di Cauchy per gruppi  $\rightarrow G$  gruppo finito,  $p$  primo t.c.  $p | o(G) \Rightarrow G$  contiene un elemento di ordine  $p$
- 86 → Enuncia il teorema di caratterizzazione dei gruppi con  $p$ -syLOW unici  $\rightarrow G$  gruppo finito,  $o(G) = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}, p_i$  primi, se tutti i  $p$ -syLOW sono unici  $\Rightarrow$  posti  $P_1, \dots, P_k$  gli unici  $p$ -syLOW ho che  $G \cong P_1 \times \dots \times P_k$
- 87 → Cosa puoi dire su  $n_p$  se il  $p$ -syLOW è normale?  $\rightarrow$  Ho che  $P \triangleleft G \Leftrightarrow n_p = 1$
- 88 → Enuncia la proposizione di caratterizzazione dei gruppi con ordine un prodotto di

- primi  $\rightarrow G$  gruppo con  $o(G) = pq$ ,  $p, q$  primi,  $p < q$  e  $p \nmid q-1 \Rightarrow G \cong C_p \times C_q (\cong C_{pq})$
- 89  $\rightarrow$
  - 90  $\rightarrow$
  - 91  $\rightarrow$
  - 92  $\rightarrow$
  - 93  $\rightarrow$
  - 94  $\rightarrow$
  - 95  $\rightarrow$
  - 96  $\rightarrow$
  - 97  $\rightarrow$
  - 98  $\rightarrow$
  - 99  $\rightarrow$
  - 100  $\rightarrow$  Cos'è la caratteristica di un anello?  $\rightarrow$  Preso un anello  $A$  esiste sempre un morfismo  $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow A : n \mapsto \phi(n) = n \cdot 1_A$ . Essendo  $\mathbb{Z}$  un PID, il nucleo di  $\phi$  sarà principale, cioè esiste un  $n$  t.c.  $\ker \phi = (n)$ . Questo  $n$  è la CARATTERISTICA dell'anello  $A$ .
  - 101  $\rightarrow$  Come si comporta il prodotto in un campo di caratteristica  $n$ ?  $\rightarrow$  preso  $m \in \mathbb{Z}$  e  $x \in K^*$ ,  $m \cdot x = 0$  sse  $n|m$  con  $n = \text{car } K$
  - 102  $\rightarrow$  Qual è la definizione di campo primo?  $\rightarrow$  È il campo generato dall'immagine di  $\phi : n \mapsto n \cdot 1_A$
  - 103  $\rightarrow$  Qual è la definizione di estensione di campi?  $\rightarrow$  È un morfismo di anelli  $i : F \rightarrow E$  dove  $E, F$  sono campi. Si verifica che è automaticamente iniettiva.
  - 104  $\rightarrow$  Se  $E/F$  è un'estensione di campi,  $E$  è c1.: uno spazio vettoriale su  $F \rightarrow \text{clz}$
  - 105  $\rightarrow$  Dato un campo  $F$ , cos'è una  $F$ -algebra?  $\rightarrow$  È un anello  $A$  con una "moltiplicazione per scalare"  $F \times A \rightarrow A$  che rende  $A$  uno spazio vettoriale su  $F$ ; inoltre deve valere che

$$\lambda(ab) = a(\lambda b) = (\lambda a)b$$

- 106  $\rightarrow$  Qual è la definizione di grado di un'estensione  $E/F$ ? È il numero  $[E : F] = \dim_F E$ , dimensione come spazio vettoriale.
- 107  $\rightarrow$  Qual è la definizione di estensione finita?  $\rightarrow$  È un'estensione  $E/F$  per la quale  $[E : F] < \infty$
- 108  $\rightarrow$  Quando la mappa che manda un polinomio nella funzione indotta dal polinomio è iniettiva?  $\rightarrow$  Quando il campo è infinito
- 109  $\rightarrow$  Data un'estensione di campi  $E/F$ , qual è la definizione di campo intermedio?  $\rightarrow$  È un campo  $K$  tale che  $F \subseteq K \subseteq E$
- 110  $\rightarrow$  Qual è la definizione di campo generato da  $S \subseteq E$ ?  $\rightarrow$  È l'intersezione di tutti i campi intermedi che contengono  $S$
- 111  $\rightarrow$  Qual è la definizione di sistema di generatori di un'estensione  $E/F$ ? È un insieme  $S \subseteq E$  tale che  $E = F(S)$
- 112  $\rightarrow$  Qual è la definizione di estensione finitamente generata?  $\rightarrow$  È un'estensione  $E/F$  per cui esiste un insieme finito  $S$  tale che  $E = F(S)$

- 113→ Qual è la definizione di estensione semplice? → È un'estensione generata da un solo elemento
- 114→ Se  $E/F$  e  $F/K$  sono estensioni finite, allora  $[E : K] = ? \rightarrow = [E : F] \cdot [F : K]$
- 115→ Come costruisco un'estensione che contenga una radice di un polinomio irriducibile? →  $F$  campo,  $f$  irriducibile, allora la composizione  $F \hookrightarrow F[X] \rightarrow K := F[X]/(f)$  è un'estensione di grado  $[K : F] = \deg f$ . Se  $\pi$  è la proiezione canonica, allora  $\gamma := \pi(X) \in K$  è una radice di  $f$ , e  $K = F(\gamma)$
- 116→ Enuncia il procedimento di Kronecker → Sia  $F$  un campo e  $f$  un polinomio di grado  $d \geq 1$ . Allora c'è un'estensione finita di  $F$  in cui  $f$  possiede una radice. (Si prende la proposizione che richiede che  $f$  sia un polinomio irriducibile e la si applica ad un fattore irriducibile di  $f$ )
- 117→ Qual è la definizione di numero algebrico di un'estensione? → Data  $E/F$  dico che  $\alpha \in E$  è ALGEBRICO su  $F$  se esiste un polinomio  $p(X) \in F[X]$  tale che  $p(\alpha) \neq 0, p(\alpha) = 0$ . Un elemento non algebrico è TRASCENDENTE
- 118→ Data  $E/F$  estensione, qual è la definizione di polinomio minimo di  $\alpha \in E$ ? → È il "generatore monico dell'ideale  $\ker v_\alpha$ ", cioè un polinomio monico che divide ogni polinomio che ha soluzione  $\alpha$ . Si indica con  $m_{\alpha, F}$  o  $m_\alpha$
- 119→ Enuncia la proposizione sulla relazione tra  $F[x]/(f)$  e  $F(\alpha)$  dove  $E/F$  estensione  $f = m_\alpha$  e  $\alpha$  algebrico → Data  $E/F$  un'estensione,  $\alpha$  algebrico e  $f = m_\alpha$  polinomio minimo. Allora la valutazione induce un isomorfismo

$$\varphi_\alpha : F[X]/(f) \xrightarrow{\cong} F(\alpha) \quad \varphi_\alpha(g + (f)) = g(\alpha).$$

Inoltre  $[F(\alpha) : F] = \deg f =: d$  e  $\{1, \alpha, \dots, \alpha^{d-1}\}$  è una base di  $F(\alpha)$  su  $F$

- 120→ Per descrivere  $F(\alpha)$  bisogna per forza utilizzare le funzioni razionali? → No è sufficiente valutare i polinomi in quanto  $F(\alpha) = \text{im } \varphi_\alpha = v_\alpha(F[X])$
- 121→
- 122→
- 123→
- 124→
- 125→
- 126→
- 127→
- 128→
- 129→
- 130→
- 131→
- 132→
- 133→
- 134→
- 135→
- 136→

- 137→
- 138→
- 139→
- 140→
- 141→
- 142→
- 143→
- 144→
- 145→
- 146→
- 147→
- 148→
- 149→
- 150→
- 151→
- 152→
- 153→
- 154→
- 155→
- 156→
- 157→
- 158→
- 159→
- 160→
- 161→
- 162→
- 163→
- 164→
- 165→
- 166→
- 167→
- 168→
- 169→
- 170→
- 171→
- 172→
- 173→
- 174→
- 175→
- 176→
- 177→



- 178→
- 179→
- 180→
- 181→
- 182→
- 183→
- 184→
- 185→
- 186→
- 187→
- 188→
- 189→
- 190→
- 191→
- 192→
- 193→
- 194→
- 195→
- 196→
- 197→
- 198→
- 199→
- 200→