

Aufgabe 1.

Betrachten Sie den Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathbb{P}) mit der Zufallsvariable X gegeben durch:

$$\begin{aligned}\Omega &= \{0, 1\}^3 \\ \mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) &\rightarrow [0, 1], \\ \mathbb{P}(A) &= \frac{|A|}{8} \\ X : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}, \\ X((a_i)_{i=1}^3) &= \sum_{i=1}^3 a_i\end{aligned}$$

Bestimmen Sie Folgendes:

- $\mathbb{P}(X = 0)$
- $\mathbb{E}[X]$
- $\text{Var}[X]$

Lösung.

Erstens gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 0) &= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 0\}) \\ &= \mathbb{P}(\{(a_i)_{i=1}^3 \in \{0, 1\}^3 \mid X((a_i)_{i=1}^3) = 0\}) \\ &= \mathbb{P}\left(\left\{(a_i)_{i=1}^3 \in \{0, 1\}^3 \mid \sum_{i=1}^3 a_i = 0\right\}\right) \\ &= \mathbb{P}(\{(a_i)_{i=1}^3 \in \{0, 1\}^3 \mid \forall i \in \{1, 2, 3\} : a_i = 0\}) \\ &= \mathbb{P}(\{(0, 0, 0)\}) \\ &= \frac{|\{(0, 0, 0)\}|}{8} \\ &= \frac{1}{8}\end{aligned}$$

Zweitens gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) X(\omega) \\ &= \sum_{(a_i)_{i=1}^3 \in \{0, 1\}^3} p((a_i)_{i=1}^3) X((a_i)_{i=1}^3) \\ &= \sum_{(a_i)_{i=1}^3 \in \{0, 1\}^3} \frac{1}{8} X((a_i)_{i=1}^3) \\ &= \frac{1}{8} \sum_{(a_i)_{i=1}^3 \in \{0, 1\}^3} X((a_i)_{i=1}^3) \\ &= \frac{1}{8} \sum_{(a_i)_{i=1}^3 \in \{0, 1\}^3} \sum_{i=1}^3 a_i \\ &= \frac{1}{8} \sum_{(a_i)_{i=1}^3 \in \{0, 1\}^3} (a_1 + a_2 + a_3) \\ &= \frac{1}{8} \sum_{(a_i)_{i=1}^3 \in \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}} (a_1 + a_2 + a_3) \\ &= \frac{1}{8} (0 + 1 + 1 + 2 + 1 + 2 + 2 + 3) \\ &= \frac{1}{8} 12 \\ &= \frac{12}{8} \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Weiterhin haben wir:

$$X^2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

$$X^2 \left((a_i)_{i=1}^3 \right) = \left(X \left((a_i)_{i=1}^3 \right) \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^3 a_i \right)^2$$

Also haben wir:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [X^2] &= \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) X^2(\omega) \\ &= \sum_{(a_i)_{i=1}^3 \in \{0,1\}^3} p \left((a_i)_{i=1}^3 \right) X^2 \left((a_i)_{i=1}^3 \right) \\ &= \sum_{(a_i)_{i=1}^3 \in \{0,1\}^3} \frac{1}{8} X^2 \left((a_i)_{i=1}^3 \right) \\ &= \frac{1}{8} \sum_{(a_i)_{i=1}^3 \in \{0,1\}^3} X^2 \left((a_i)_{i=1}^3 \right) \\ &= \frac{1}{8} \sum_{(a_i)_{i=1}^3 \in \{0,1\}^3} \left(\sum_{i=1}^3 a_i \right)^2 \\ &= \frac{1}{8} \sum_{(a_i)_{i=1}^3 \in \{0,1\}^3} (a_1 + a_2 + a_3)^2 \\ &= \frac{1}{8} \sum_{(a_i)_{i=1}^3 \in \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}} (a_1 + a_2 + a_3)^2 \\ &= \frac{1}{8} (0 + 1 + 1 + 4 + 1 + 4 + 4 + 9) \\ &= \frac{1}{8} 24 \\ &= \frac{24}{8} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Damit gilt drittens:

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E} [X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = 3 - \left(\frac{3}{2} \right)^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{12}{4} - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

Aufgabe 2.

Betrachten Sie den Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathbb{P}) mit der Zufallsvariable X gegeben durch:

$$\Omega = \{0, 2\}^3$$

$$\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1],$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{8}$$

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

$$X((a_i)_{i=1}^3) = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} a_i$$

Bestimmen Sie Folgendes:

- $\mathbb{P}(X = 0)$
- $\mathbb{E}[X]$
- $\text{Var}[X]$

Lösung.

-

Aufgabe 3.

Betrachten Sie den Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathbb{P}) mit der Zufallsvariable X gegeben durch:

$$\Omega = \{1, 2\}^3$$

$$\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1],$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{8}$$

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

$$X((a_i)_{i=1}^3) = \sum_{i=1}^3 (a_i - 1)$$

Bestimmen Sie Folgendes:

- $\mathbb{P}(X = 0)$
- $\mathbb{E}[X]$
- $\text{Var}[X]$

Lösung.

-

Aufgabe 4.

Betrachten Sie den Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathbb{P}) mit der Zufallsvariable X gegeben durch:

$$\Omega = \{x_1, x_2\}^3$$

$$\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1],$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{8}$$

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

$$X((a_i)_{i=1}^3) = \sum_{i=1}^3 \begin{cases} 0, & a_i = x_1 \\ 1, & a_i = x_2 \end{cases}$$

Bestimmen Sie Folgendes:

- $\mathbb{P}(X = 0)$
- $\mathbb{E}[X]$
- $\text{Var}[X]$

Lösung.

-

Aufgabe 5.

Betrachten Sie den Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathbb{P}) mit der Zufallsvariable X gegeben durch:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1],$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{8}$$

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

$$X(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega = 1 \\ 1, & \omega = 2 \\ 1, & \omega = 3 \\ 2, & \omega = 4 \\ 1, & \omega = 5 \\ 2, & \omega = 6 \\ 2, & \omega = 7 \\ 3, & \omega = 8 \end{cases}$$

Bestimmen Sie Folgendes:

- $\mathbb{P}(X = 0)$
- $\mathbb{E}[X]$
- $\text{Var}[X]$

Lösung.

-

Aufgabe 6.

Eine Münze wird dreimal unabhängig voneinander geworfen. Modellieren Sie dieses Experiment in einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathbb{P}) . Geben Sie eine Zufallsvariable $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ an, die angibt, wie oft “Kopf” geworfen wurde.

Bestimmen Sie Folgendes:

- $\mathbb{P}(X = 0)$
- $\mathbb{E}[X]$
- $\text{Var}[X]$

Lösung.

-

Aufgabe 7.

Sei (Ω, \mathbb{P}) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit $X \sim \text{Bin}\left(3, \frac{1}{2}\right)$.

Bestimmen Sie Folgendes:

- $\mathbb{P}(X = 0)$
- $\mathbb{E}[X]$
- $\text{Var}[X]$

Lösung.

-

Aufgabe 8.

Betrachten Sie den Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathbb{P}) mit der Zufallsvariable X gegeben durch:

$$\Omega = \{*\}$$

$$\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1],$$

$$\mathbb{P}(A) = |A|$$

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

$$X(*) = 1$$

Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X]$ und $\text{Var}[X]$.

Lösung.

-

Aufgabe 9.

1. Geben Sie die Definition eines Wahrscheinlichkeitsraums (Ω, \mathbb{P}) an.
2. Geben Sie eine Abbildung $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0, 1]$ an, sodass (\mathbb{N}, \mathbb{P}) ein Wahrscheinlichkeitsraum ist.
3. Geben Sie eine Abbildung $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0, 1]$ an, sodass (\mathbb{N}, \mathbb{P}) ein Wahrscheinlichkeitsraum ist und weiterhin gilt: $\forall n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(\{n\}) \neq 0$.
4. Betrachten Sie den Wahrscheinlichkeitsraum (\mathbb{N}, \mathbb{P}) gegeben durch:

$$\mathbb{P} : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0, 1],$$
$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{2^n}$$

- (a) Geben Sie ein Beispiel einer Zufallsvariable $X : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\mathbb{E}[X] < \infty$ und $\text{Var}[X] < \infty$.
- (b) Geben Sie ein Beispiel einer Zufallsvariable $Y : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\mathbb{E}[Y] < \infty$ aber $\text{Var}[Y] = \infty$.
- (c) Geben Sie ein Beispiel einer Zufallsvariable $Z : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\mathbb{E}[Z] = \infty$ und $\text{Var}[Z] = \infty$.

Lösung.

-

Aufgabe 10.

Ein Mathematiker arbeitet an einer neuen Forschungsarbeit. Mit Wahrscheinlichkeit 75% bekommt er Hilfe von einem anderen Mathematiker. Wenn er Hilfe bekommt, schaffen Sie es mit Wahrscheinlichkeit 90%, einen neuen Satz zu beweisen. Wenn er keine Hilfe bekommt, schafft er es mit Wahrscheinlichkeit 10%, einen neuen Satz zu beweisen.

Wir bezeichnen das Ereignis, dass der Mathematiker Hilfe bekommt, mit H . Dementsprechend bezeichnen wir das Ereignis, dass der Mathematiker keine Hilfe bekommt, mit H^C .

Außerdem bezeichnen wir das Ereignis, dass der Mathematiker es schafft, einen neuen Satz zu beweisen, mit S . Dementsprechend bezeichnen wir das Ereignis, dass der Mathematiker es nicht schafft, einen neuen Satz zu beweisen, mit S^C .

1. Was ist $\mathbb{P}(H)$?
2. Was ist $\mathbb{P}(S \mid H)$?
3. Was ist $\mathbb{P}(S \mid H^C)$?
4. Berechnen Sie $\mathbb{P}(S \cap H)$.
5. Berechnen Sie $\mathbb{P}(H^C)$.
6. Berechnen Sie $\mathbb{P}(S \cap H^C)$.
7. Berechnen Sie $\mathbb{P}(S)$. Tipp: $S = (S \cap H) \sqcup (S \cap H^C)$ ist eine disjunkte Zerlegung.
8. Berechnen Sie $\mathbb{P}(H \mid S)$, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass der Mathematiker Hilfe bekommen hat, unter der Bedingung, dass er es geschafft hat, einen neuen Satz zu beweisen.

Lösung.

-

Aufgabe 11.

Sei (Ω, \mathbb{P}) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \subseteq \Omega$ Ereignisse mit $\mathbb{P}(A) \neq 0$ und $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

1. Geben Sie eine Formel für $\mathbb{P}(A \cap B)$ in Abhängigkeit von $\mathbb{P}(A | B)$ und $\mathbb{P}(B)$ an.
2. Geben Sie eine Formel für $\mathbb{P}(B^C)$ in Abhängigkeit von $\mathbb{P}(B)$ an.
3. Geben Sie eine Formel für $\mathbb{P}(A \cap B^C)$ in Abhängigkeit von $\mathbb{P}(A | B^C)$ und $\mathbb{P}(B)$ an.
4. Geben Sie eine Formel für $\mathbb{P}(A)$ in Abhängigkeit von $\mathbb{P}(A | B)$, $\mathbb{P}(A | B^C)$ und $\mathbb{P}(B)$ an.
5. Geben Sie eine Formel für $\mathbb{P}(B | A)$ in Abhängigkeit von $\mathbb{P}(A | B)$, $\mathbb{P}(A | B^C)$ und $\mathbb{P}(B)$ an.

Lösung.

1. Per Definition gilt

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A | B) \cdot \mathbb{P}(B)$$

2. Es gilt

$$\mathbb{P}(B^C) = 1 - \mathbb{P}(B)$$

3. Per Definition gilt

$$\mathbb{P}(A \cap B^C) = \mathbb{P}(A | B^C) \cdot \mathbb{P}(B^C) = \mathbb{P}(A | B^C) \cdot (1 - \mathbb{P}(B))$$

4. Da $A = (A \cap B) \sqcup (A \cap B^C)$ eine disjunkte Zerlegung ist, gilt

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B^C) = \mathbb{P}(A | B) \cdot \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A | B^C) \cdot (1 - \mathbb{P}(B))$$

5. Per Definition gilt

$$\mathbb{P}(B | A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A | B) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A | B) \cdot \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A | B^C) \cdot (1 - \mathbb{P}(B))}$$