Aufgabe 1.

Betrachten Sie den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ mit der Zufallsvariable X gegeben durch:

$$\begin{aligned}
&\Omega = \{0,1\}^3\\
&\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1],\\
&\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{8}\\
&X : \Omega \to \mathbb{R},\\
&X\left((a_i)_{i=1}^3\right) = \sum_{i=1}^{3} a_i
\end{aligned}$$

Bestimmen Sie Folgendes:

- $\mathbb{P}(X = 0)$
- $\mathbb{E}[X]$
- $\mathrm{Var}[X]$

Lösung.

Erstens gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=0) &= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 0\})\\
&= \mathbb{P}\left(\left\{(a_i)_{i=1}^3 \in \{0,1\}^3 \mid X\left((a_i)_{i=1}^3\right) = 0\right\}\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\left\{(a_i)_{i=1}^3 \in \{0,1\}^3 \;\middle|\; \sum_{i=1}^{3} a_i = 0\right\}\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\left\{(a_i)_{i=1}^3 \in \{0,1\}^3 \mid \forall i \in \{1,2,3\} : a_i = 0\right\}\right)\\
&= \mathbb{P}(\{(0,0,0)\})\\
&= \frac{|\{(0,0,0)\}|}{8}\\
&= \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

Zweitens gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) X(\omega)\\
&= \sum_{(a_i)_{i=1}^3 \in \{0,1\}^3} p\left((a_i)_{i=1}^3\right) X\left((a_i)_{i=1}^3\right)\\
&= \sum_{(a_i)_{i=1}^3 \in \{0,1\}^3} \frac{1}{8} X\left((a_i)_{i=1}^3\right)\\
&= \frac{1}{8} \sum_{(a_i)_{i=1}^3 \in \{0,1\}^3} X\left((a_i)_{i=1}^3\right)\\
&= \frac{1}{8} \sum_{(a_i)_{i=1}^3 \in \{0,1\}^3} \sum_{i=1}^{3} a_i\\
&= \frac{1}{8} \sum_{(a_i)_{i=1}^3 \in \{0,1\}^3} (a_1 + a_2 + a_3)\\
&= \frac{1}{8} \sum_{(a_i)_{i=1}^3 \in \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}} (a_1 + a_2 + a_3)\\
&= \frac{1}{8}(0+1+1+2+1+2+2+3)\\
&= \frac{1}{8} 12\\
&= \frac{12}{8}\\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Weiterhin haben wir:

$$\begin{aligned}
&X^2 : \Omega \to \mathbb{R}, \\
&X^2\left((a_i)_{i=1}^3\right) = \left(X\left((a_i)_{i=1}^3\right)\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^3 a_i\right)^2
\end{aligned}$$

Also haben wir:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X^2\right] &= \sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)X^2(\omega) \\
&= \sum_{(a_i)_{i=1}^3\in\{0,1\}^3} p\left((a_i)_{i=1}^3\right) X^2\left((a_i)_{i=1}^3\right) \\
&= \sum_{(a_i)_{i=1}^3\in\{0,1\}^3} \frac{1}{8}X^2\left((a_i)_{i=1}^3\right) \\
&= \frac{1}{8}\sum_{(a_i)_{i=1}^3\in\{0,1\}^3} X^2\left((a_i)_{i=1}^3\right) \\
&= \frac{1}{8}\sum_{(a_i)_{i=1}^3\in\{0,1\}^3} \left(\sum_{i=1}^3 a_i\right)^2 \\
&= \frac{1}{8}\sum_{(a_i)_{i=1}^3\in\{0,1\}^3} (a_1+a_2+a_3)^2 \\
&= \frac{1}{8}\sum_{(a_i)_{i=1}^3\in\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}} (a_1+a_2+a_3)^2 \\
&= \frac{1}{8}(0+1+1+4+1+4+4+9) \\
&= \frac{1}{8}24 \\
&= \frac{24}{8} \\
&= 3
\end{aligned}$$

Damit gilt drittens:

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{12}{4} - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

Aufgabe 2.

Betrachten Sie den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ mit der Zufallsvariable X gegeben durch:

$$\begin{aligned}
&\Omega = \{0, 2\}^3 \\
&\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1], \\
&\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{8} \\
&X : \Omega \to \mathbb{R}, \\
&X\left((a_i)_{i=1}^3\right) = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} a_i
\end{aligned}$$

Bestimmen Sie Folgendes:

- $\mathbb{P}(X = 0)$
- $\mathbb{E}[X]$
- $\mathrm{Var}[X]$

Lösung.

-

Aufgabe 3.

Betrachten Sie den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ mit der Zufallsvariable X gegeben durch:

$$
\begin{aligned}
&\Omega = \{1,2\}^3 \\
&\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1], \\
&\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{8} \\
&X : \Omega \to \mathbb{R}, \\
&X\left((a_i)_{i=1}^3\right) = \sum_{i=1}^{3} (a_i - 1)
\end{aligned}
$$

Bestimmen Sie Folgendes:

- $\mathbb{P}(X = 0)$
- $\mathbb{E}[X]$
- $\mathrm{Var}[X]$

Lösung.

-

Aufgabe 4.

Betrachten Sie den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ mit der Zufallsvariable X gegeben durch:

$$\begin{aligned}
&\Omega = \{x_1, x_2\}^3 \\
&\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1], \\
&\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{8} \\
&X : \Omega \to \mathbb{R}, \\
&X\left((a_i)_{i=1}^3\right) = \sum_{i=1}^{3} \begin{cases} 0, & a_i = x_1 \\ 1, & a_i = x_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Bestimmen Sie Folgendes:

- $\mathbb{P}(X = 0)$
- $\mathbb{E}[X]$
- $\mathrm{Var}[X]$

Lösung.

-

Aufgabe 5.

Betrachten Sie den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ mit der Zufallsvariable X gegeben durch:

$$
\begin{aligned}
&\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8\} \\
&\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1], \\
&\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{8} \\
&X : \Omega \to \mathbb{R}, \\
&X(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega = 1 \\ 1, & \omega = 2 \\ 1, & \omega = 3 \\ 2, & \omega = 4 \\ 1, & \omega = 5 \\ 2, & \omega = 6 \\ 2, & \omega = 7 \\ 3, & \omega = 8 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Bestimmen Sie Folgendes:

- $\mathbb{P}(X = 0)$
- $\mathbb{E}[X]$
- $\mathrm{Var}[X]$

Lösung.

-

Aufgabe 6.

Eine Münze wird dreimal unabhängig voneinander geworfen. Modellieren Sie dieses Experiment in einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$. Geben Sie eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ an, die angibt, wie oft "Kopf" geworfen wurde.

Bestimmen Sie Folgendes:

- $\mathbb{P}(X = 0)$
- $\mathbb{E}[X]$
- $\mathrm{Var}[X]$

Lösung.

-

Aufgabe 7.

Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit $X \sim \mathrm{Bin}\left(3, \frac{1}{2}\right)$.

Bestimmen Sie Folgendes:

- $\mathbb{P}(X = 0)$
- $\mathbb{E}[X]$
- $\mathrm{Var}[X]$

Lösung.

-

Aufgabe 8.

Betrachten Sie den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ mit der Zufallsvariable X gegeben durch:

$$\begin{aligned}
&\Omega = \{*\} \\
&\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1], \\
&\mathbb{P}(A) = |A| \\
&X : \Omega \to \mathbb{R}, \\
&X(*) = 1
\end{aligned}$$

Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X]$ und $\mathrm{Var}[X]$.

Lösung.

-

Aufgabe 9.

1. Geben Sie die Definition eines Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega, \mathbb{P})$ an.
2. Geben Sie eine Abbildung $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, 1]$ an, sodass $(\mathbb{N}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum ist.
3. Geben Sie eine Abbildung $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, 1]$ an, sodass $(\mathbb{N}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum ist und weiterhin gilt: $\forall n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(\{n\}) \neq 0$.
4. Betrachten Sie den Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{N}, \mathbb{P})$ gegeben durch:

$$\begin{aligned}&\mathbb{P} : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, 1],\\ &\mathbb{P}(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{2^n}\end{aligned}$$

   (a) Geben Sie ein Beispiel einer Zufallsvariable $X : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\mathbb{E}[X] < \infty$ und $\mathrm{Var}[X] < \infty$.

   (b) Geben Sie ein Beispiel einer Zufallsvariable $Y : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\mathbb{E}[Y] < \infty$ aber $\mathrm{Var}[Y] = \infty$.

   (c) Geben Sie ein Beispiel einer Zufallsvariable $Z : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\mathbb{E}[Z] = \infty$ und $\mathrm{Var}[Z] = \infty$.

Lösung.

-