Aufgabe 1.

Betrachten Sie den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ mit der Zufallsvariable X gegeben durch:

$$\begin{aligned}
&\Omega = \{0,1\}^3 \\
&\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1], \\
&\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{8} \\
&X : \Omega \to \mathbb{R}, \\
&X\left((a_i)_{i=1}^3\right) = \sum_{i=1}^3 a_i
\end{aligned}$$

Bestimmen Sie Folgendes:

- $\mathbb{P}(X = 0)$
- $\mathbb{E}[X]$
- $\mathrm{Var}[X]$

Lösung.

Erstens gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 0) &= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 0\}) \\
&= \mathbb{P}\left(\left\{(a_i)_{i=1}^3 \in \{0,1\}^3 \mid X\left((a_i)_{i=1}^3\right) = 0\right\}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left\{(a_i)_{i=1}^3 \in \{0,1\}^3 \;\middle|\; \sum_{i=1}^3 a_i = 0\right\}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left\{(a_i)_{i=1}^3 \in \{0,1\}^3 \mid \forall i \in \{1,2,3\} : a_i = 0\right\}\right) \\
&= \mathbb{P}(\{(0,0,0)\}) \\
&= \frac{|\{(0,0,0)\}|}{8} \\
&= \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

Zweitens gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) X(\omega) \\
&= \sum_{(a_i)_{i=1}^3 \in \{0,1\}^3} p\left((a_i)_{i=1}^3\right) X\left((a_i)_{i=1}^3\right) \\
&= \sum_{(a_i)_{i=1}^3 \in \{0,1\}^3} \frac{1}{8} X\left((a_i)_{i=1}^3\right) \\
&= \frac{1}{8} \sum_{(a_i)_{i=1}^3 \in \{0,1\}^3} X\left((a_i)_{i=1}^3\right) \\
&= \frac{1}{8} \sum_{(a_i)_{i=1}^3 \in \{0,1\}^3} \sum_{i=1}^3 a_i \\
&= \frac{1}{8} \sum_{(a_i)_{i=1}^3 \in \{0,1\}^3} (a_1 + a_2 + a_3) \\
&= \frac{1}{8} \sum_{(a_i)_{i=1}^3 \in \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}} (a_1 + a_2 + a_3) \\
&= \frac{1}{8}(0 + 1 + 1 + 2 + 1 + 2 + 2 + 3) \\
&= \frac{1}{8} 12 \\
&= \frac{12}{8} \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Weiterhin haben wir:

$$
\begin{aligned}
&X^2 : \Omega \to \mathbb{R}, \\
&X^2\left((a_i)_{i=1}^3\right) = \left(X\left((a_i)_{i=1}^3\right)\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^3 a_i\right)^2
\end{aligned}
$$

Also haben wir:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X^2\right] &= \sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)X^2(\omega) \\
&= \sum_{(a_i)_{i=1}^3\in\{0,1\}^3} p\left((a_i)_{i=1}^3\right) X^2\left((a_i)_{i=1}^3\right) \\
&= \sum_{(a_i)_{i=1}^3\in\{0,1\}^3} \frac{1}{8}X^2\left((a_i)_{i=1}^3\right) \\
&= \frac{1}{8}\sum_{(a_i)_{i=1}^3\in\{0,1\}^3} X^2\left((a_i)_{i=1}^3\right) \\
&= \frac{1}{8}\sum_{(a_i)_{i=1}^3\in\{0,1\}^3} \left(\sum_{i=1}^3 a_i\right)^2 \\
&= \frac{1}{8}\sum_{(a_i)_{i=1}^3\in\{0,1\}^3} (a_1+a_2+a_3)^2 \\
&= \frac{1}{8}\sum_{(a_i)_{i=1}^3\in\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}} (a_1+a_2+a_3)^2 \\
&= \frac{1}{8}(0+1+1+4+1+4+4+9) \\
&= \frac{1}{8}24 \\
&= \frac{24}{8} \\
&= 3
\end{aligned}
$$

Damit gilt drittens:

$$
\operatorname{Var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{12}{4} - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}
$$

Aufgabe 2.

Betrachten Sie den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ mit der Zufallsvariable X gegeben durch:

$$\begin{aligned}
&\Omega = \{0,2\}^3 \\
&\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1], \\
&\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{8} \\
&X : \Omega \to \mathbb{R}, \\
&X\left((a_i)_{i=1}^3\right) = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} a_i
\end{aligned}$$

Bestimmen Sie Folgendes:

- $\mathbb{P}(X = 0)$
- $\mathbb{E}[X]$
- $\mathrm{Var}[X]$

Lösung.

-

Aufgabe 3.

Betrachten Sie den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ mit der Zufallsvariable X gegeben durch:

$$\begin{aligned}
&\Omega = \{1,2\}^3 \\
&\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1], \\
&\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{8} \\
&X : \Omega \to \mathbb{R}, \\
&X\left((a_i)_{i=1}^3\right) = \sum_{i=1}^{3} (a_i - 1)
\end{aligned}$$

Bestimmen Sie Folgendes:

- $\mathbb{P}(X = 0)$
- $\mathbb{E}[X]$
- $\mathrm{Var}[X]$

Lösung.

-

Aufgabe 4.

Betrachten Sie den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ mit der Zufallsvariable X gegeben durch:

$$
\begin{aligned}
&\Omega = \{x_1, x_2\}^3 \\
&\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1], \\
&\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{8} \\
&X : \Omega \to \mathbb{R}, \\
&X\left((a_i)_{i=1}^3\right) = \sum_{i=1}^{3} \begin{cases} 0, & a_i = x_1 \\ 1, & a_i = x_2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Bestimmen Sie Folgendes:

- $\mathbb{P}(X = 0)$
- $\mathbb{E}[X]$
- $\mathrm{Var}[X]$

Lösung.

-

Aufgabe 5.

Betrachten Sie den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ mit der Zufallsvariable X gegeben durch:

$$\begin{aligned}
&\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8\} \\
&\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1], \\
&\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{8} \\
&X : \Omega \to \mathbb{R}, \\
&X(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega = 1 \\ 1, & \omega = 2 \\ 1, & \omega = 3 \\ 2, & \omega = 4 \\ 1, & \omega = 5 \\ 2, & \omega = 6 \\ 2, & \omega = 7 \\ 3, & \omega = 8 \end{cases}
\end{aligned}$$

Bestimmen Sie Folgendes:

- $\mathbb{P}(X = 0)$
- $\mathbb{E}[X]$
- $\mathrm{Var}[X]$

Lösung.

-

Aufgabe 6.

Eine Münze wird dreimal unabhängig voneinander geworfen. Modellieren Sie dieses Experiment in einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$. Geben Sie eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ an, die angibt, wie oft "Kopf" geworfen wurde.

Bestimmen Sie Folgendes:

- $\mathbb{P}(X = 0)$
- $\mathbb{E}[X]$
- $\mathrm{Var}[X]$

Lösung.

-

Aufgabe 7.

Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit $X \sim \mathrm{Bin}\left(3, \frac{1}{2}\right)$.

Bestimmen Sie Folgendes:

- $\mathbb{P}(X = 0)$
- $\mathbb{E}[X]$
- $\mathrm{Var}[X]$

Lösung.

-

Aufgabe 8.

Betrachten Sie den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ mit der Zufallsvariable X gegeben durch:

$$\begin{aligned}
&\Omega = \{*\}\\
&\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1],\\
&\mathbb{P}(A) = |A|\\
&X : \Omega \to \mathbb{R},\\
&X(*) = 1
\end{aligned}$$

Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X]$ und $\mathrm{Var}[X]$.

Lösung.

-

Aufgabe 9.

1. Geben Sie die Definition eines Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega, \mathbb{P})$ an.
2. Geben Sie eine Abbildung $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,1]$ an, sodass $(\mathbb{N}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum ist.
3. Geben Sie eine Abbildung $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,1]$ an, sodass $(\mathbb{N}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum ist und weiterhin gilt: $\forall n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(\{n\}) \neq 0$.
4. Betrachten Sie den Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{N}, \mathbb{P})$ gegeben durch:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P} : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,1], \\ &\mathbb{P}(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

   (a) Geben Sie ein Beispiel einer Zufallsvariable $X : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\mathbb{E}[X] < \infty$ und $\mathrm{Var}[X] < \infty$.

   (b) Geben Sie ein Beispiel einer Zufallsvariable $Y : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\mathbb{E}[Y] < \infty$ aber $\mathrm{Var}[Y] = \infty$.

   (c) Geben Sie ein Beispiel einer Zufallsvariable $Z : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\mathbb{E}[Z] = \infty$ und $\mathrm{Var}[Z] = \infty$.

Lösung.

-

Aufgabe 10.

Ein Mathematiker arbeitet an einer neuen Forschungsarbeit. Mit Wahrscheinlichkeit 75% bekommt er Hilfe von einem anderen Mathematiker. Wenn er Hilfe bekommt, schaffen Sie es mit Wahrscheinlichkeit 90%, einen neuen Satz zu beweisen. Wenn er keine Hilfe bekommt, schafft er es mit Wahrscheinlichkeit 10%, einen neuen Satz zu beweisen.

Wir bezeichnen das Ereignis, dass der Mathematiker Hilfe bekommt, mit H. Dementsprechend bezeichnen wir das Ereignis, dass der Mathematiker keine Hilfe bekommt, mit H^C.

Außerdem bezeichnen wir das Ereignis, dass der Mathematiker es schafft, einen neuen Satz zu beweisen, mit S. Dementsprechend bezeichnen wir das Ereignis, dass der Mathematiker es nicht schafft, einen neuen Satz zu beweisen, mit S^C.

1. Was ist $\mathbb{P}(H)$?
2. Was ist $\mathbb{P}(S \mid H)$?
3. Was ist $\mathbb{P}(S \mid H^C)$?
4. Berechnen Sie $\mathbb{P}(S \cap H)$.
5. Berechnen Sie $\mathbb{P}(H^C)$.
6. Berechnen Sie $\mathbb{P}(S \cap H^C)$.
7. Berechnen Sie $\mathbb{P}(S)$. Tipp: $S = (S \cap H) \sqcup (S \cap H^C)$ ist eine disjunkte Zerlegung.
8. Berechnen Sie $\mathbb{P}(H \mid S)$, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass der Mathematiker Hilfe bekommen hat, unter der Bedingung, dass er es geschafft hat, einen neuen Satz zu beweisen.

Lösung.

1. Es gilt
$$\mathbb{P}(H) = 75\% = \frac{3}{4}$$
2. Es gilt
$$\mathbb{P}(S \mid H) = 90\% = \frac{9}{10}$$
3. Es gilt
$$\mathbb{P}(S \mid H^C) = 10\% = \frac{1}{10}$$
4. Per Definition gilt
$$\mathbb{P}(S \cap H) = \mathbb{P}(S \mid H) \cdot \mathbb{P}(H) = \frac{9}{10} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{40} = 67{,}5\%$$
5. Es gilt
$$\mathbb{P}(H^C) = 1 - \mathbb{P}(H) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} = 25\%$$
6. Per Definition gilt
$$\mathbb{P}(S \cap H^C) = \mathbb{P}(S \mid H^C) \cdot \mathbb{P}(H^C) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{40} = 2{,}5\%$$
7. Da $S = (S \cap H) \sqcup (S \cap H^C)$ eine disjunkte Zerlegung ist, gilt
$$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(S \cap H) + \mathbb{P}(S \cap H^C) = \frac{27}{40} + \frac{1}{40} = \frac{28}{40} = 70\%$$
8. Per Definition gilt
$$\mathbb{P}(H \mid S) = \frac{\mathbb{P}(S \cap H)}{\mathbb{P}(S)} = \frac{\frac{27}{40}}{\frac{28}{40}} = \frac{27}{28} \approx 96{,}429\%$$

Aufgabe 11.

Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \subseteq \Omega$ Ereignisse mit $\mathbb{P}(A) \neq 0$ und $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

1. Geben Sie eine Formel für $\mathbb{P}(A \cap B)$ in Abhängigkeit von $\mathbb{P}(A \mid B)$ und $\mathbb{P}(B)$ an.
2. Geben Sie eine Formel für $\mathbb{P}(B^C)$ in Abhängigkeit von $\mathbb{P}(B)$ an.
3. Geben Sie eine Formel für $\mathbb{P}(A \cap B^C)$ in Abhängigkeit von $\mathbb{P}(A \mid B^C)$ und $\mathbb{P}(B)$ an.
4. Geben Sie eine Formel für $\mathbb{P}(A)$ in Abhängigkeit von $\mathbb{P}(A \mid B)$, $\mathbb{P}(A \mid B^C)$ und $\mathbb{P}(B)$ an.
5. Geben Sie eine Formel für $\mathbb{P}(B \mid A)$ in Abhängigkeit von $\mathbb{P}(A \mid B)$, $\mathbb{P}(A \mid B^C)$ und $\mathbb{P}(B)$ an.

Lösung.

1. Per Definition gilt
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B) \cdot \mathbb{P}(B)$$
2. Es gilt
$$\mathbb{P}(B^C) = 1 - \mathbb{P}(B)$$
3. Per Definition gilt
$$\mathbb{P}(A \cap B^C) = \mathbb{P}(A \mid B^C) \cdot \mathbb{P}(B^C) = \mathbb{P}(A \mid B^C) \cdot (1 - \mathbb{P}(B))$$
4. Da $A = (A \cap B) \sqcup (A \cap B^C)$ eine disjunkte Zerlegung ist, gilt
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B^C) = \mathbb{P}(A \mid B) \cdot \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \mid B^C) \cdot (1 - \mathbb{P}(B))$$
5. Per Definition gilt
$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \mid B) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A \mid B) \cdot \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \mid B^C) \cdot (1 - \mathbb{P}(B))}$$