Legge di Gauss

- *Premessa: simmetrie*
- *Flusso del campo elettrico*
- *Teorema di Gauss*
- *Applicazioni a campi diversi da quello elettrico*
- *Esempi:*
  - → *sfera carica cava*
  - → *sfera carica piena*
  - → *cilindro o filo carico*
  - → *piano infinito carico*
  - → *condensatore*

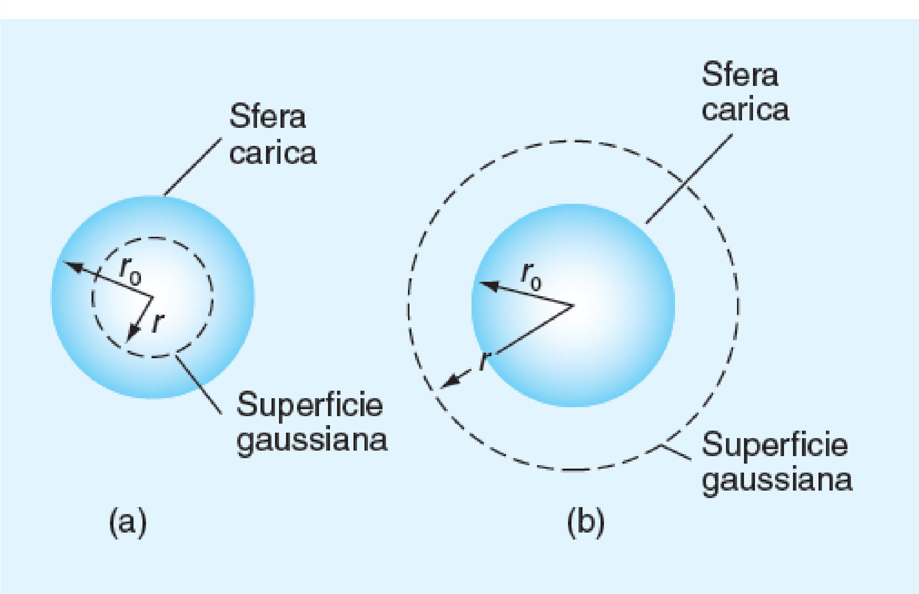
Gettys II

Capitolo 2

Sfera carica piena

Sia data una sfera carica isolante (sfera piena di raggio r_0).
La carica Q è distribuita uniformemente sull'intero volume.

Densità volumetrica di carica: $\rho = Q/V = Q/(4\pi r_0^3/3)$



Consideriamo una superficie gaussiana sferica concentrica con il guscio sferico.

Il campo elettrico è ***radiale***, per ragioni di **simmetria sferica** (se ci fosse una componente non radiale, un'operazione di simmetria muterebbe l'orientazione di tale componente).

Il campo è radiale e uguale in modulo per tutti i punti equidistanti dal centro.
Il flusso è allora di facile calcolo:

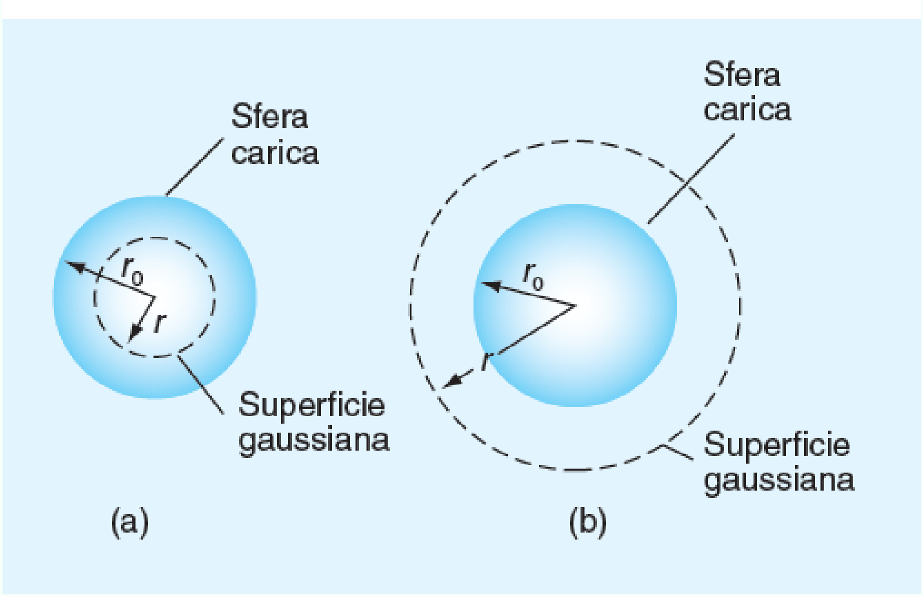
$$\frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_r \oint_S dS = E_r\, 4\pi r^2 \;\Rightarrow\; \boxed{E(r) = \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}}$$

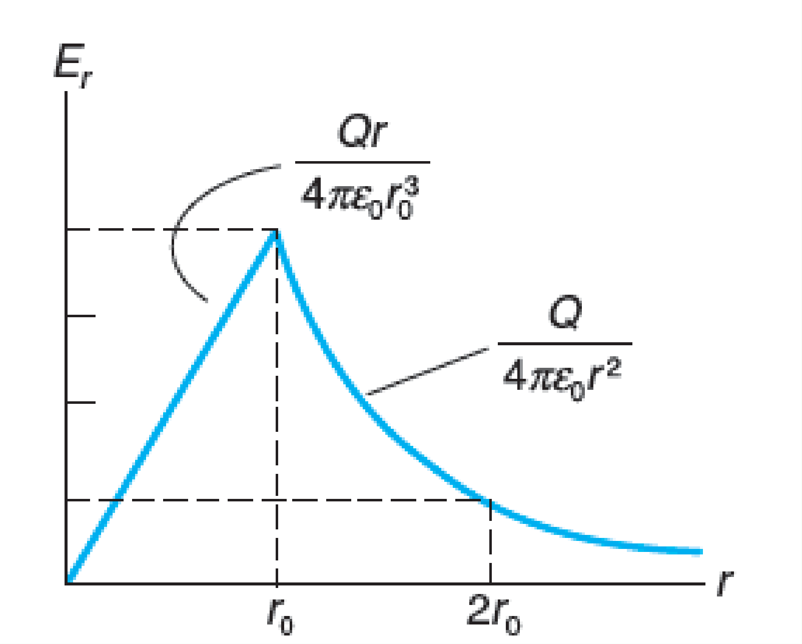
Sfera carica piena

Sia data una sfera carica isolante (sfera piena di raggio r_0).
La carica Q è distribuita uniformemente sull'intero volume.

Densità volumetrica di carica: $\rho = Q/V = Q/(4\pi r_0^3/3)$

$$E(r) = \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}$$

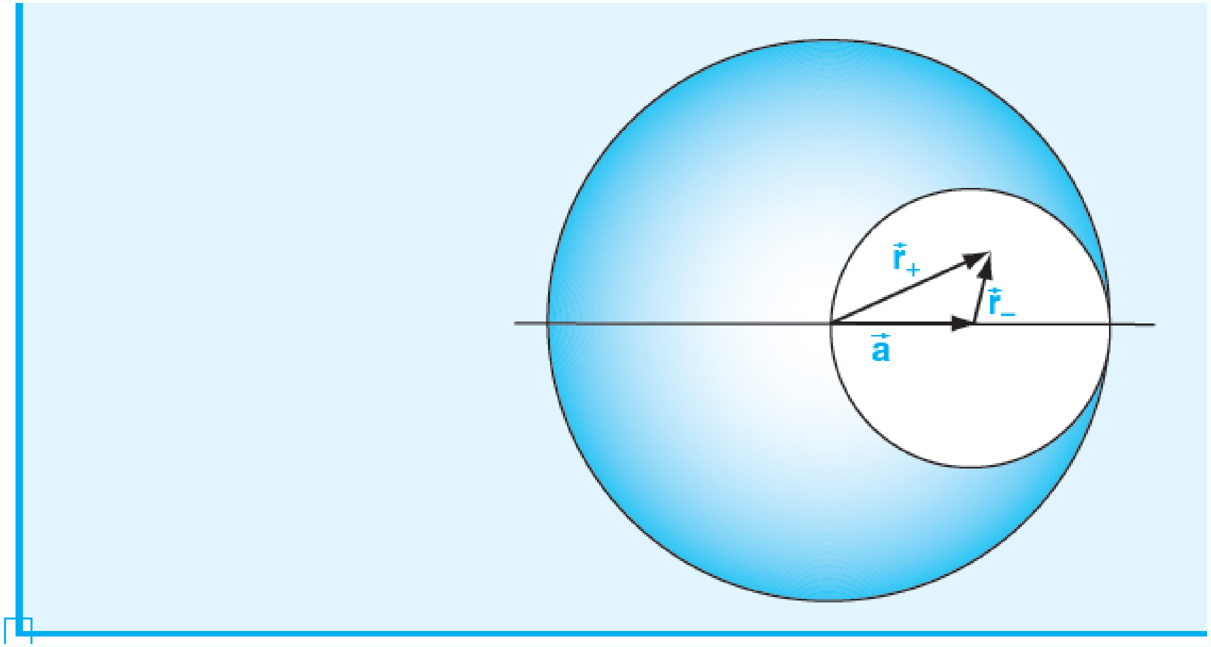




$$\begin{cases} r \geq r_0 \Rightarrow E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2} = \dfrac{k_e Q}{r^2} \\[2ex] r < r_0 \Rightarrow E = \dfrac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{4\pi\varepsilon_0\, r^2} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0} r = \dfrac{k_e Q}{r_0^3} r \end{cases}$$

Se abbiamo una sfera carica vuota dentro una sfera carica piena, consideriamo come se dentro una sfera carica con un segno ce ne stia una piena di segno opposto (principio di sovrapposizione).

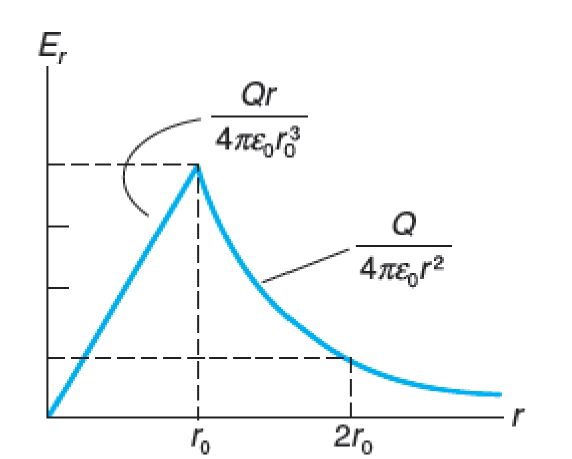
Figura 2.22
Esempio 2.7: sfera di raggio R avente densità di carica ρ, con cavità di raggio $R/2$ non concentrica.



$$r < r_{\text{grande}},\ r_{\text{piccola}} \ \Rightarrow \ \vec{E} = \frac{\rho_1}{3\varepsilon_0}\vec{r}_+ + \frac{\rho_2}{3\varepsilon_0}\vec{r}_-$$

Sfera carica piena: potenziale elettrico

Sia data una sfera carica isolante (sfera piena di raggio r_0).
La carica *Q* è distribuita uniformemente sull'intero volume.



$$\begin{cases} r \geq r_0 \Rightarrow E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2} = \dfrac{k_e Q}{r^2} \\[2ex] r < r_0 \Rightarrow E = \dfrac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{4\pi\varepsilon_0\, r^2} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0} r = \dfrac{k_e Q}{r_0^3} r \end{cases}$$

Se nel caso di varie cariche puntiforme si sommavano algebricamente i potenziali, qua si fa l'integrale: $V = k_e \int \dfrac{dq}{r}$

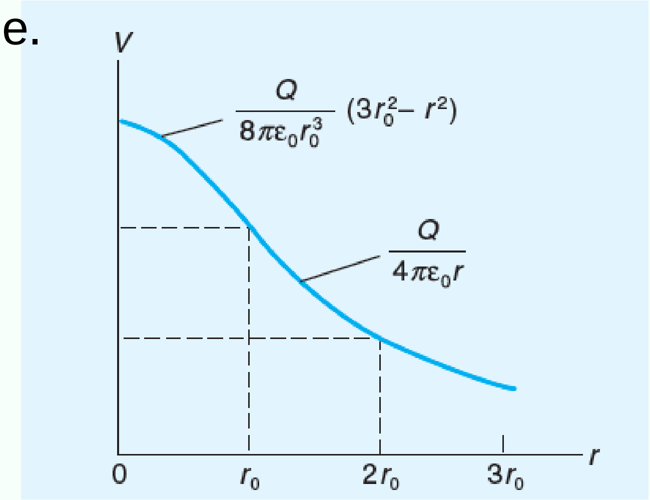
$$\Delta V = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\begin{cases} r \geq r_0 \;\Rightarrow\; \Delta V = -\displaystyle\int_{r_a}^{r_b} \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{r} \right) \cdot \hat{r}\, dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right) \\[3ex] r < r_0 \;\Rightarrow\; \Delta V = -\displaystyle\int_{r_a}^{r_b} \left(\frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 r_0^3} \hat{r} \right) \cdot \hat{r}\, dr = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 r_0^3} \left(r_a^2 - r_b^2 \right) \end{cases}$$

Sfera carica piena: potenziale elettrico

Sia data una sfera carica isolante (sfera piena di raggio r_0).
La carica Q è distribuita uniformemente sull'intero volume.

$$\begin{cases} r \geq r_0 \;\Rightarrow\; \Delta V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_b} - \dfrac{1}{r_a}\right) \\ r < r_0 \;\Rightarrow\; \Delta V = \dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0 r_0^3}\left(r_a^2 - r_b^2\right) \end{cases}$$



Supponiamo ora che: $V(r \to \infty) = V_\infty = 0$

$$\begin{cases} r \geq r_0 \;\Rightarrow\; V(r) \equiv \Delta V_{\infty\to r} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \\ r < r_0 \;\Rightarrow\; V(r) - V_0 \equiv \Delta V_{r_0\to r} = \dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0 r_0^3}\left(r_0^2 - r^2\right) \end{cases}$$

$$\boxed{V_0 = V(r_0) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_0}}$$

$$\boxed{V(r) = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 r_0^3}\left(3r_0^2 - r^2\right)}$$

Legge di Gauss

- *Premessa: simmetrie*
- *Flusso del campo elettrico*
- *Teorema di Gauss*
- *Applicazioni a campi diversi da quello elettrico*
- *Esempi:*
  - → *sfera carica cava*
  - → *sfera carica piena*
  - → *cilindro o filo carico*
  - → *piano infinito carico*
  - → *condensatore*

Gettys II

Capitolo 2

Cilindro o filo carico

Sia dato un filo carico di densità lineare λ = *Q* / h, o equivalentemente
un cilindro di raggio di raggio r_0 con carica *Q* distribuita uniformemente sull'intero volume.

Consideriamo una superficie gaussiana cilindrica di raggio *r* concentrica col filo (l'asse del cilindro).

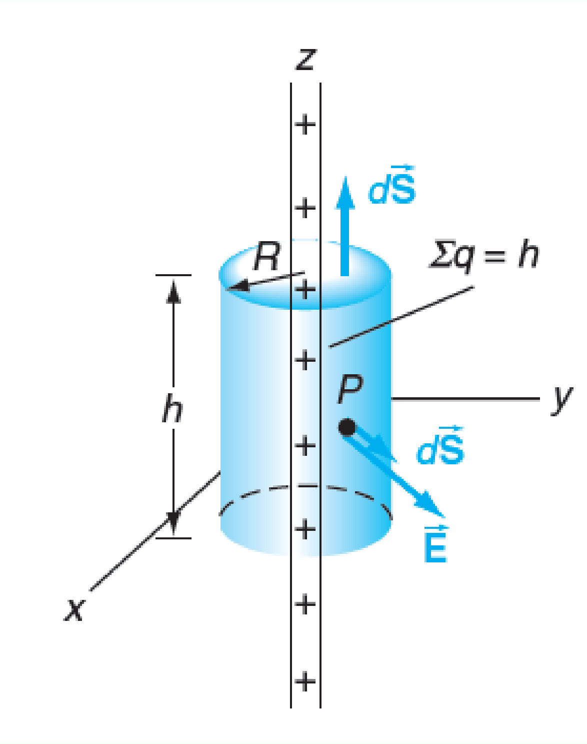
Il campo elettrico:

→ sta nel piano *perpendicolare all'asse* del filo (cilindro),

→ è ***radiale***,

→ ***non*** dipende dalla quota.

Ciò segue da ragioni di **simmetria cilindrica** (se ci fosse una componente non radiale, un'operazione di simmetria muterebbe l'orientazione di tale componente).



Il campo è radiale e uguale in modulo per tutti i punti equidistanti dal centro.
Il flusso è allora di facile calcolo:

$$\frac{Q_{\rm int}}{\varepsilon_0} = \Phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = E_r \oint_S dS = E_r\, 2\pi r h \;\Rightarrow\; \boxed{E(r) = \frac{Q_{\rm int}}{2\pi\varepsilon_0\, r h}}$$

Cilindro o filo carico

Sia dato un filo carico di densità lineare $\lambda = Q/h$, o equivalentemente
un cilindro di raggio di raggio r_0 con carica Q distribuita uniformemente sull'intero volume.

Il flusso è allora di facile calcolo:

→ lungo le facce piane il flusso è nullo;

→ lungo la superficie laterale il campo è costante e normale alla superficie.

$$\boxed{E(r) = \frac{Q_{\rm int}}{2\pi\varepsilon_0\, rh}}$$

$$\begin{cases} r \geq r_0 \Rightarrow E = \dfrac{\lambda h}{2\pi\varepsilon_0 rh} = \begin{cases} \nearrow \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = \dfrac{2k_e\lambda}{r} \\ \searrow \dfrac{\rho\pi r_0^2 h}{2\pi\varepsilon_0 rh} = \dfrac{\rho r_0^2}{2\varepsilon_0 r} \end{cases} \\ r < r_0 \Rightarrow E = \dfrac{\rho\pi r^2 h}{2\pi\varepsilon_0 rh} = \dfrac{k_e Q}{r_0^3} r \end{cases}$$

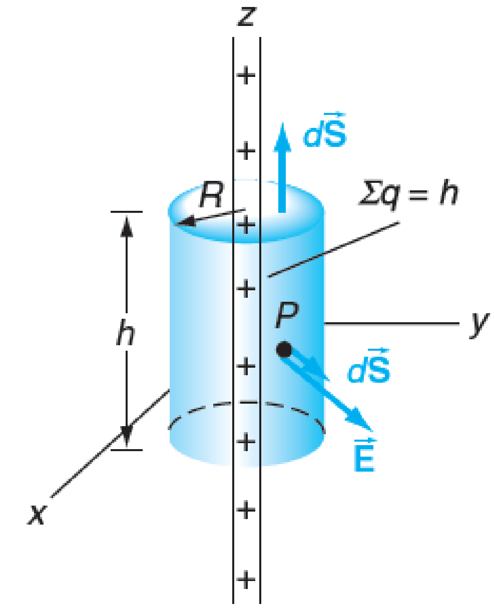


Figura 2.16
Esempio 2.3: Per determinare il campo in prossimità di una distribuzione lineare uniforme di carica e a grande distanza dai suoi estremi, si usa come superficie gaussiana un cilindro. La carica contenuta nel cilindro è $\Sigma q = \lambda h$.

Legge di Gauss

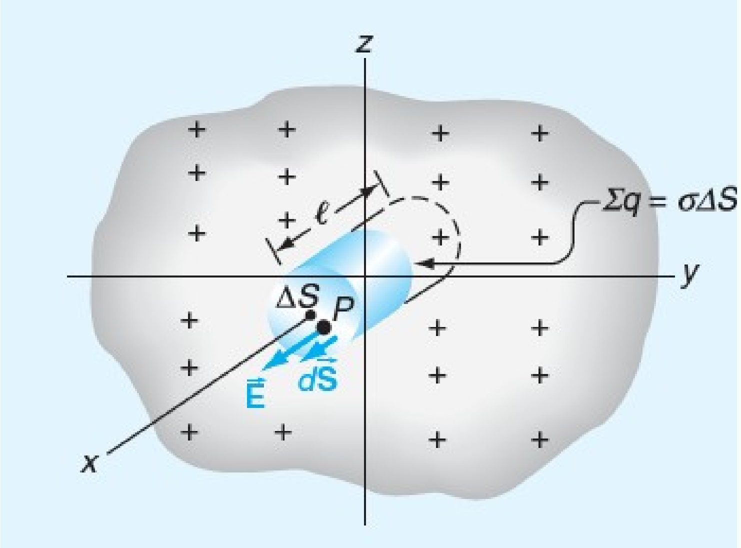
- *Premessa: simmetrie*
- *Flusso del campo elettrico*
- *Teorema di Gauss*
- *Applicazioni a campi diversi da quello elettrico*
- *Esempi:*
  - → *sfera carica cava*
  - → *sfera carica piena*
  - → *cilindro o filo carico*
  - → *piano infinito carico*
  - → *condensatore*

Gettys II

Capitolo 2

Piano infinito carico

Sia dato un piano isolante infinito di altezza trascurabile e densità superficiale di carica $\sigma = Q/A$ uniformememte distribuita.

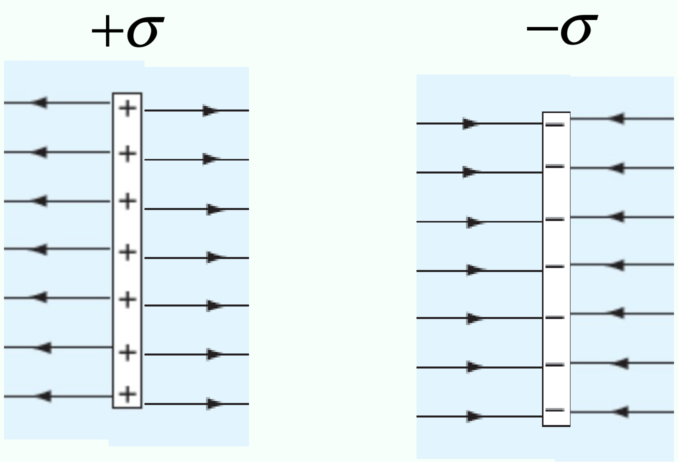


Consideriamo una superficie gaussiana cilindrica di sezione A equidisposta nei due piani.

Per ragioni di **simmetria** il campo elettrico ha direzione perpendicolare al piano:

→ sui due semispazi opposti il campo è uguale e opposto, per simmetria di riflessione;

→ il campo è uguale in modulo in tutti i punti dello spazio equidistanti dal piano, per simmetria di traslazione lungo il piano.



Il flusso è allora di facile calcolo:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2\,E(l)\,A = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

(lungo le facce ortogonali al piano il flusso è nullo)

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

il campo è uniforme: *costante e normale alla superficie in tutto lo spazio.*

Legge di Gauss

- *Premessa: simmetrie*
- *Flusso del campo elettrico*
- *Teorema di Gauss*
- *Applicazioni a campi diversi da quello elettrico*
- *Esempi:*
  - → *sfera carica cava*
  - → *sfera carica piena*
  - → *cilindro o filo carico*
  - → *piano infinito carico*
  - → *condensatore*

Gettys II

Capitolo 2

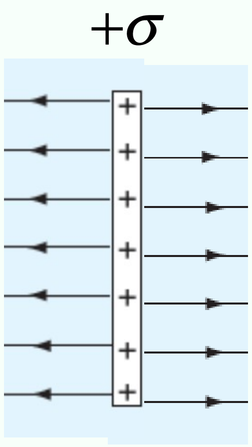
Distribuzione di carica uniforme su superfici piane

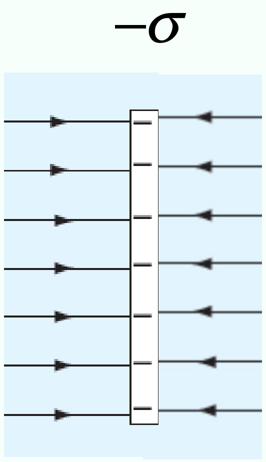
Il campo elettrico è:

→ perpendicolare al piano;

→ uniforme (costante in modulo);

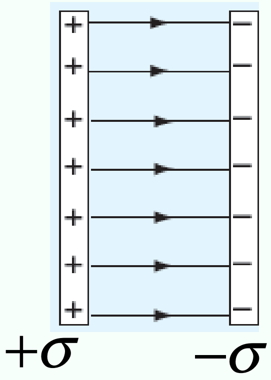
→ Uscente se superficie è carica positiva
(viceversa, entrante se è carica negativamente)





$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2\,E(l)\,A = \frac{Q_{\mathrm{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \;\Rightarrow\; \boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

Condensatore: due superfici piane con carica opposta



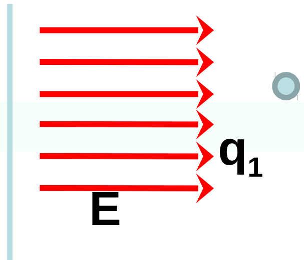
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$ in mezzo

$$E = 0$$ fuori

Esercizi vari

Si ha un piano (non conduttore) uniformemente carico positivamente, con densità superficiale di carica $\sigma = 10^{-6}$ C/m^2. Una pallina di massa 1 g e carica elettrica positiva $q = 10^{-5}$ C si trova inizialmente a distanza 2 m dal piano. Con quale velocità minima deve essere lanciata la pallina perchè raggiunga il piano?

-) v0 = 47.527 m/s



Si conserva l'energia.

$$\Delta E_{tot} = \Delta K + \Delta U = 0$$

L'energia potenziale della pallina la si ricava dal potenziale, che nel caso del piano infinito uniformemente carico vale:

$$\Delta V = -E(x_f - x_i) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(x_f - x_i)$$

Dove x è la distanza da piano (il piano lo posso pensare orientato verticalmente).

Applicando la conservazione dell'energia trovo:

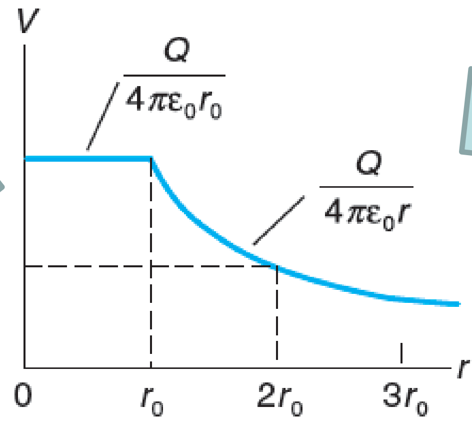
$$0 = \Delta K + \Delta U = \Delta K + q\Delta V = \left(\frac{1}{2}mv_f^{\,2} - \frac{1}{2}mv_0^{\,2}\right) + \left[-q\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(x_f - x_i)\right]$$

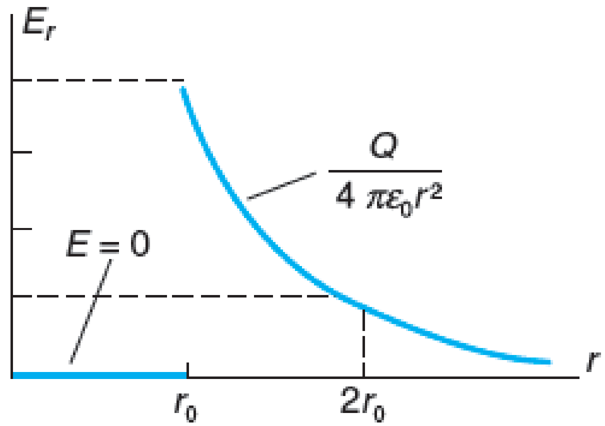
Nel caso in questione $x_f=0$, $x_i=2$ m, $v_f=0$ (si chiede la velocità minima perché raggiunga il piano quindi basta che lo raggiunga con velocità trascurabile), si ha:

$$0 = -\frac{1}{2}mv_0^{\,2} + \frac{q\sigma x_i}{2\varepsilon_0} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{q\sigma x_i}{m\varepsilon_0}} = 47.5275 m/s$$

Esercizio: Una carica $-q$ viene lasciata libera in condizioni di quiete a distanza d dal centro di un guscio sferico carico Q di raggio r_0.
Con che velocità arriva sulla superficie della sfera?

$$\Delta U = -q\Delta V$$





L'energia si conserva, perciò: $\Delta E_{\text{tot}} = \Delta K + \Delta U = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{-qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{r_0}\right)}_{-\Delta U} = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\Delta K} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{-qQ}{2\pi m\varepsilon_0}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{r_0}\right)}$$

Se la carica potesse penetrare nel guscio, la sua velocità dentro rimarrebbe invariata, perché il campo elettrico all'interno è nullo e la forza è zero.

Problema 4: Un guscio sferico isolante di raggio 2.80 m e carica complessiva + 7.90 μC viene fissato con il centro nell'origine degli assi. Nell'origine viene fissato anche il centro di una sfera isolante uniformemente carica, la cui carica totale è uguale e opposta a quella del guscio sferico. Il raggio della sfera uniformemente carica è la metà del raggio del guscio sferico. All'istante $t = 0$ una particella di massa 1.40 g e carica + 1.90 mC viene lanciata verso l'origine degli assi con velocità 47.0 m/s da una posizione distante 28.0 m dall'origine. Supponendo che la particella possa penetrare dentro il guscio sferico e dentro la sfera uniformemente carica senza subire attrito, si calcoli:

7. quanto vale, in modulo, la velocità della particella quando raggiunge il bordo esterno del guscio sferico;

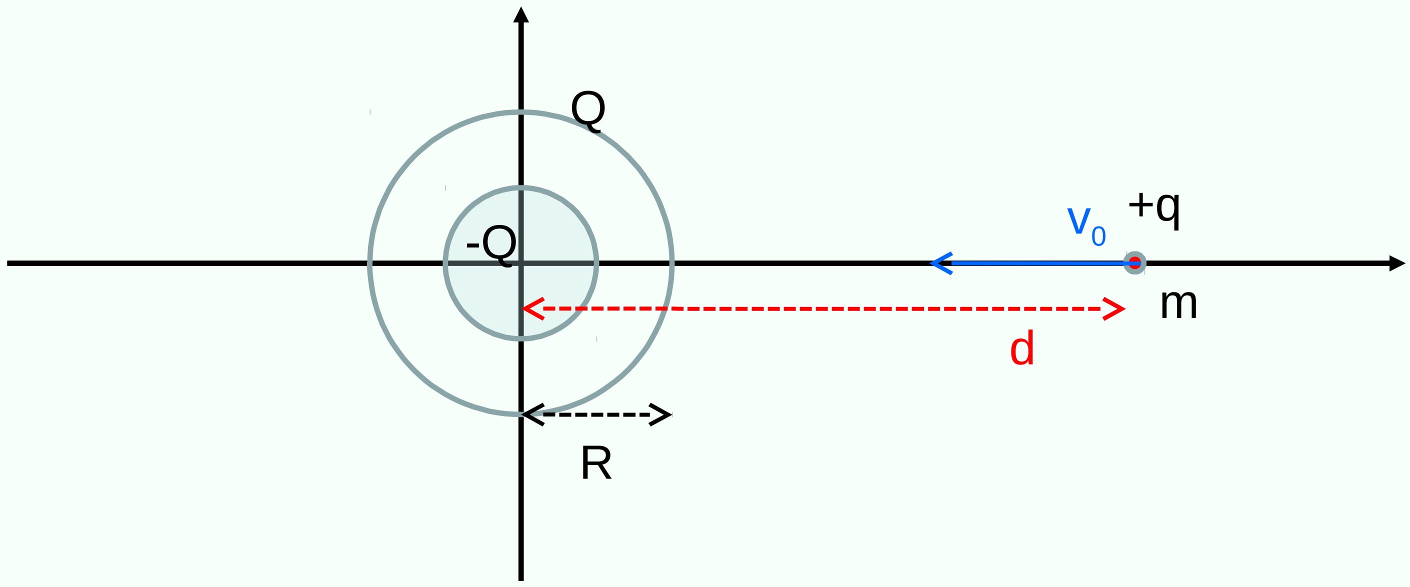
   v [m/s] =

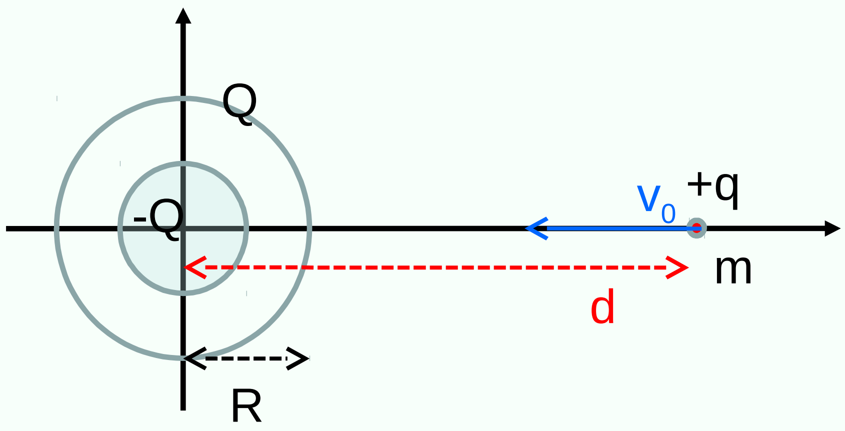
   A 87.8 B 40.4 C 55.9 D 59.0 E 47.0

8. quanto vale, in modulo, la velocità della particella quando raggiunge l'origine degli assi.

   v [m/s] =

   A 738 B 151 C 53.6 D 48.4 E 0.000





Soluzione: siccome le cariche distribuite sul guscio sferico e sulla sfera isolante sono uguali e opposte, il campo nella regione distante *r > R* dall'origine sarà zero. Di conseguenza, la forza che agisce sulla particella lanciata con velocità v_0 è nulla, quindi *il moto è rettilineo uniforme* (→ la velocità con cui si arriva sul guscio è v_0).

Per rispondere alla seconda domanda (velocità nell'origine degli assi) dobbiamo applicare la conservazione dell'energia, calcolando il potenziale globale generato dalle due distribuzioni di carica.

Il guscio sferico al suo interno ha potenziale costante: $V(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

La sfera uniformemente carica
(di raggio $r_0 = R/2$) ha potenziale al suo interno: $V(r) = \dfrac{-Q}{8\pi\varepsilon_0\left(\frac{R}{2}\right)^3}\left[3\left(\dfrac{R}{2}\right)^2 - r^2\right]$

Il potenziale globale è nullo fuori della sfera, e quello al centro degli assi è la somma dei due contributi: $V(0) = \dfrac{-Q}{8\pi\varepsilon_0\left(\frac{R}{2}\right)^3}\left[\dfrac{3R^2}{4}\right] + \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = -\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R}$

Infine, applicando la conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 - q\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow \boxed{v_f = \sqrt{v_0^2 + \frac{qQ}{\pi\varepsilon_0 R m}}}$$