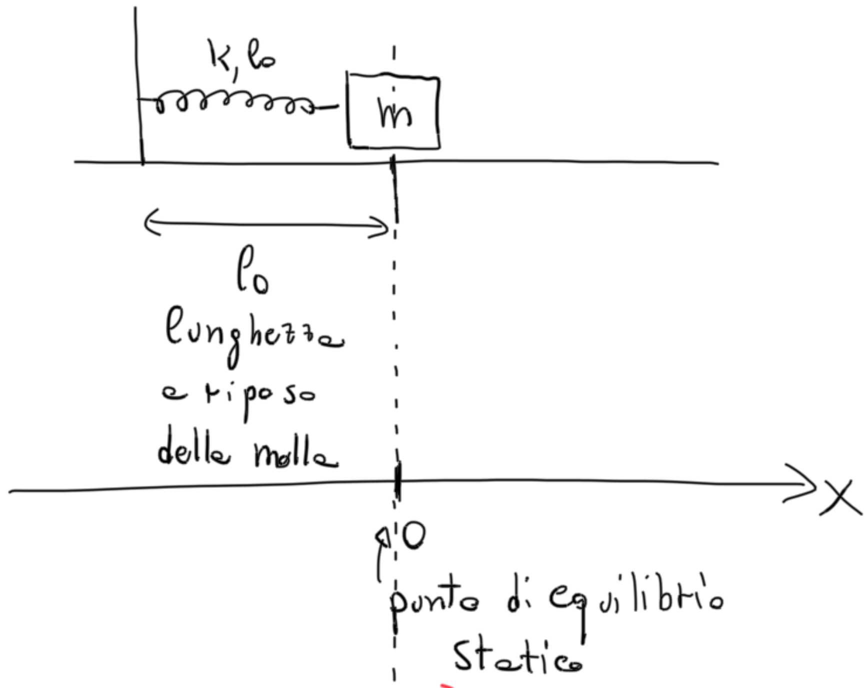
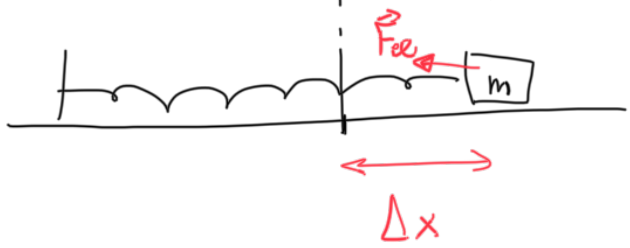
Oscillatore armonico





immagino di ALLUNGARE la molla

II legge di Newton:

$$ma = -k\,\Delta x$$

$$\Updownarrow$$

$$ma = -kx$$

(perché ho scelto lo O come il punto in cui la molla è a riposo)

è un'eq. differenziale! $x = x(t)$

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx}$$

lineare, II ordine

omogenea

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \qquad (f(t) = 0)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Quali sono quelle funzioni che, derivate due volte, danno se stesse con un segno meno?

R. $\sin(t)$ e $\cos(t)$

$$\frac{d\sin(t)}{dt} = \cos(t) \quad ; \quad \frac{d\cos(t)}{dt} = -\sin(t)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\sin(t)}{dt^2} = -\sin(t) \qquad \text{analogamente} \qquad \frac{d^2\cos(t)}{dt^2} = -\cos(t)$$

proviamo ad immaginare una soluzione di questo tipo:

$$\underline{x(t) = C_1\cos(\omega_0 t) + C_2\sin(\omega_0 t)}$$

$$\frac{dx}{dt} = -C_1\omega_0\sin(\omega_0 t) + C_2\omega_0\cos(\omega_0 t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -C_1\omega_0^2\cos(\omega_0 t) - C_2\omega_0^2\sin(\omega_0 t)$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \Rightarrow \quad m\left\{-C_1\omega_0^2\cos(\omega_0 t) - C_2\omega_0^2\sin(\omega_0 t)\right\} =$$

$$= -k\left\{ C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) \right\} \quad (*)$$

è vera, a patto che: $\boxed{m\,\omega_0^2 = k}$

$$(*) \quad -C_1 m \omega_0^2 \cos(\omega_0 t) - C_2 m \omega_0^2 \sin(\omega_0 t) = -C_1 k \cos(\omega_0 t) - C_2 k \sin(\omega_0 t)$$

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ pulsazione

$$\boxed{x(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)} \quad *1 \; (C_1, C_2)$$

C_1, C_2 si determinano dalle condizioni iniziali...

moto sinusoidale con periodo $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

→ MOTO ARMONICO

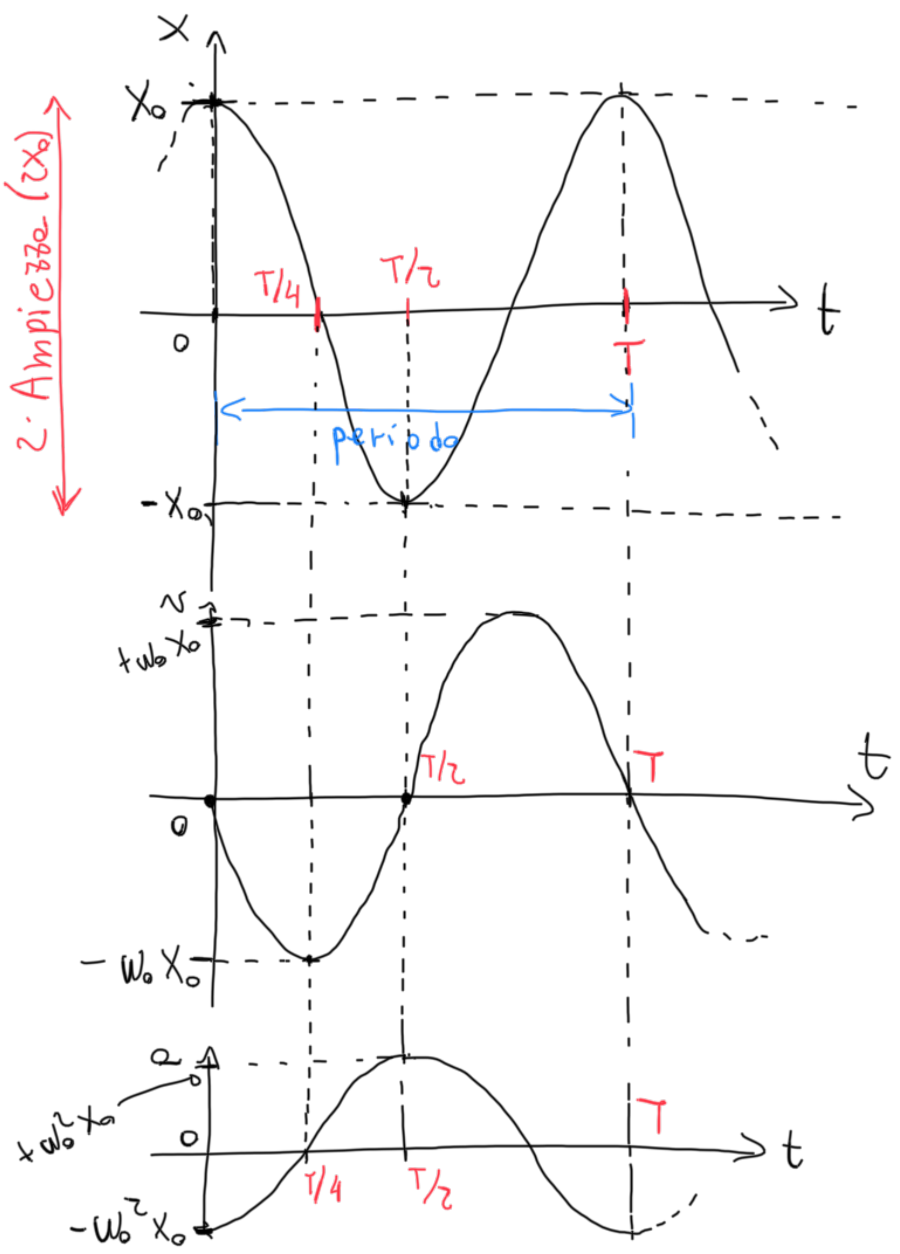
$$\boxed{x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)} \quad *2 \; (A, \phi)$$

$*1 = *2$ $\left(\hookrightarrow C_1^2 + C_2^2 = A^2\cos^2\phi + A^2 \sin^2\phi = A^2\right)$

$\Rightarrow C_1 = A\cos\phi$ e $C_2 = -A\sin\phi$

$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ e $\tan\phi = -\dfrac{C_2}{C_1}$

Usa le formule di addizione
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$



$x(t+T) = x(t)$

Condizioni iniziali:
$$\begin{cases} x(t=0) = x_0 \\ v(t=0) = v_0 \end{cases}$$

$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$

$\hookrightarrow x(0) = A\cos\phi = x_0$

$\dfrac{dx}{dt} = v(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi)$

$\hookrightarrow v_0 = -A\omega_0\sin\phi$

se uso le $*1$

$x_0 = C_1$

$v_0 = C_2\,\omega_0$

Supponiamo che $\boxed{\begin{matrix} x(t=0) = x_0 \\ v(t=0) = 0 \end{matrix}}$ (le masse m attaccate alle molle parte da ferma a $t=0$)

$$\begin{cases} A\cos\phi = x_0 \\ -A\,\omega_0 \sin\phi = 0 \end{cases} \longrightarrow \phi = 0 \quad (\text{perché } \sin 0 = 0)$$

$$\Rightarrow A \cdot \underbrace{\cos 0}_{1} = x_0 \quad \Rightarrow A = x_0$$

- $x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega_0 t)$ legge oraria

  x_0 è l'AMPIEZZA del moto armonico

- $v(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} = -x_0\,\omega_0 \sin(\omega_0 t)$ velocità

(uso $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$)

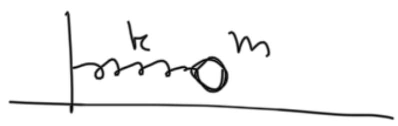
se $t=0 \Rightarrow v(t=0) = 0$

se $t = T/2 \Rightarrow v(t=T/2) = -x_0\,\omega_0 \sin\left(\omega_0 \cdot \frac{T}{2}\right) = -x_0\,\omega_0 \sin\left(\cancel{\omega_0} \cdot \frac{\pi}{\cancel{\omega_0}}\right) = 0$

se $t = T/4 \Rightarrow v(t=T/4) = -x_0\,\omega_0 \sin\left(\cancel{\omega_0} \cdot \frac{\pi}{2\cancel{\omega_0}}\right) = -x_0\omega_0$

- $a(t) = \dfrac{dv(t)}{dt} = -x_0\,\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) = -\omega_0^2 \cdot x(t)$

Energia
- → energia cinetica K
- → energia potenziale elastica U



$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(-x_0\,\omega_0 \sin(\omega_0 t)\right)^2 = \frac{1}{2} m x_0^2\, \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t) =$$

$$\omega_0^2 = \left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \cancel{m}\, x_0^2 \cdot \frac{k}{\cancel{m}} \sin^2(\omega_0 t)$$

$$\boxed{K = \frac{1}{2} k x_0^2 \sin^2(\omega_0 t)}$$

$$U = \frac{1}{2} k \underbrace{\Delta x^2}_{(\equiv x)} = \frac{1}{2} k \left(x_0 \cos(\omega_0 t)\right)^2 = \frac{1}{2} k x_0^2 \cos^2(\omega_0 t)$$

$$\boxed{U = \frac{1}{2} k x_0^2 \cos^2(\omega_0 t)}$$

- $K + U = \dfrac{1}{2} k x_0^2 \underbrace{\left(\sin^2(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t)\right)}_{1} \Rightarrow E_{TOT} = K + U = \dfrac{1}{2} k x_0^2$

perché $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\Downarrow$

l'energia totale NON dipende dal tempo, quindi è COSTANTE

K(t) cambia nel tempo

U(t) cambia nel tempo

(sistema conservativo)

ma la loro somma è costante

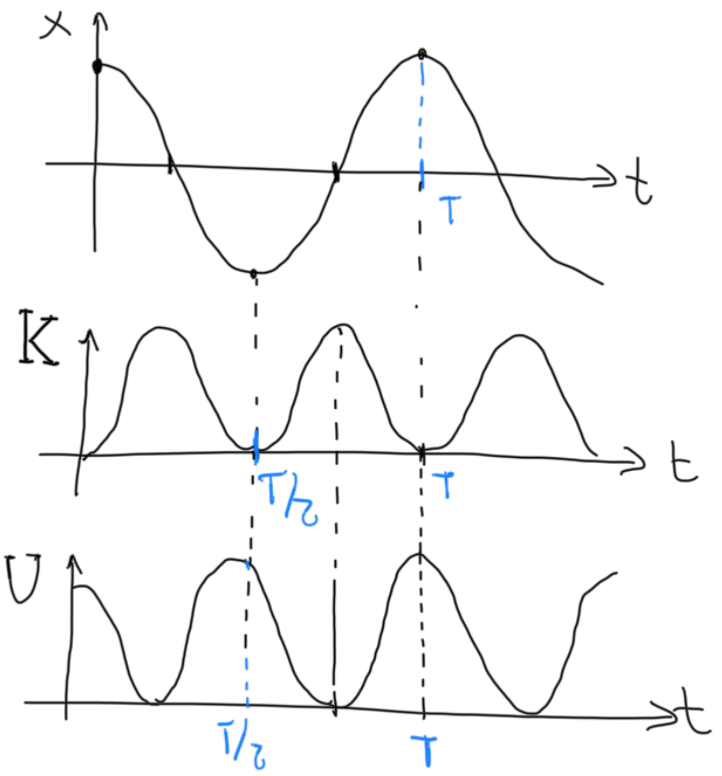
$$K(t)=\frac{1}{2}kx_0^2\sin^2(\omega_0 t)$$

Voglio trovare se questa funzione è periodica, e quanto vale il suo periodo

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2} \Rightarrow K(t)=\frac{1}{2}kx_0^2\left(\frac{1-\cos(2\omega_0 t)}{2}\right)$$

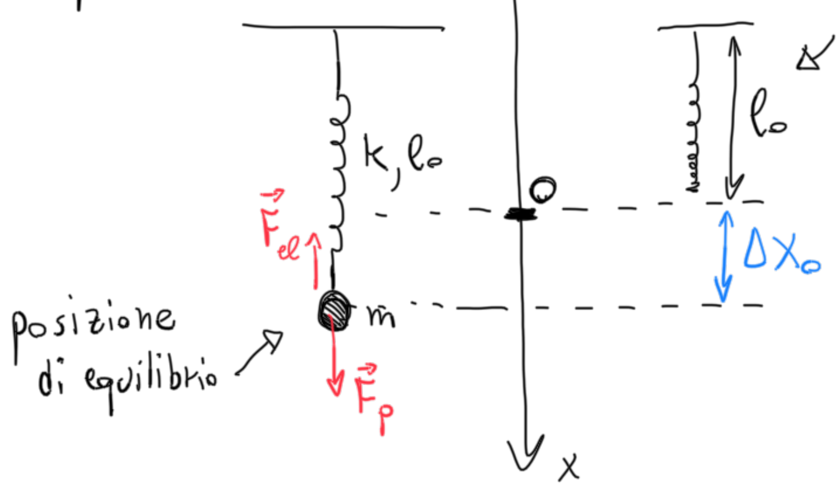
il periodo di questa funzione $\bar{T}=\frac{T}{2}$

$$\cos\left[2\omega_0(t+\bar{T})\right]=\cos\left[2\omega_0 t\right] \Rightarrow \cancel{2}\omega_0\bar{T}=\cancel{2}\pi \Rightarrow \bar{T}=\frac{\pi}{\omega_0}=\frac{\pi}{(2\pi/T)}=\frac{T}{2}$$



oscillano con periodo dimezzato rispetto a $x(t)$

• esempio: molla in verticale



posizione a riposo della molla

Δx_0 è l'allungamento della molla perché il sistema sia all'equilibrio

sistema all'equilibrio $\neq$ molla a riposo

$\downarrow$ $\ell_0+\Delta x_0$ $\qquad$ $\downarrow$ ℓ_0

$$|\vec{F}_p|=|\vec{F}_{el}|$$

$$\Rightarrow mg = k\Delta x_0$$

quindi $\boxed{\Delta x_0 = mg/k}$

Se io spingo la pallina più in basso di $(\ell_0+\Delta x_0)$, il sistema si metterà ad oscillare attorno alla posizione di equilibrio

$$\rightarrow \vec{F}_{TOT}=m\vec{a}$$

$$mg-kx=ma=m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=mg \Rightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2 x = 0}$$

questa è in più

$x(t)$

dt^2 $\qquad$ 0 $\qquad$ * $\boxed{dt^2 \quad g}$ $\qquad$ qui $f(t) = g$

l'eq. differenziale NON è omogenea!

la corrispondente omogenea è proprio quella di prima: $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$

- per trovare una sol. specifica dell'eq. differenziale completa *
mi basta cercarne una STAZIONARIA: $x(t) = \text{cost.}$ $\Rightarrow X_{staz.} = \frac{g}{\omega_0^2}$

$\Downarrow$

$X_{staz.} = g\frac{m}{k}$

sol. STAZIONARIA $\equiv$ sistema all'equilibrio

$X_{staz.} = \Delta X_0$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) + g\frac{m}{k}$$

il sistema oscilla attorno alla posizione di equilibrio esattamente come nel caso della molla in orizzontale

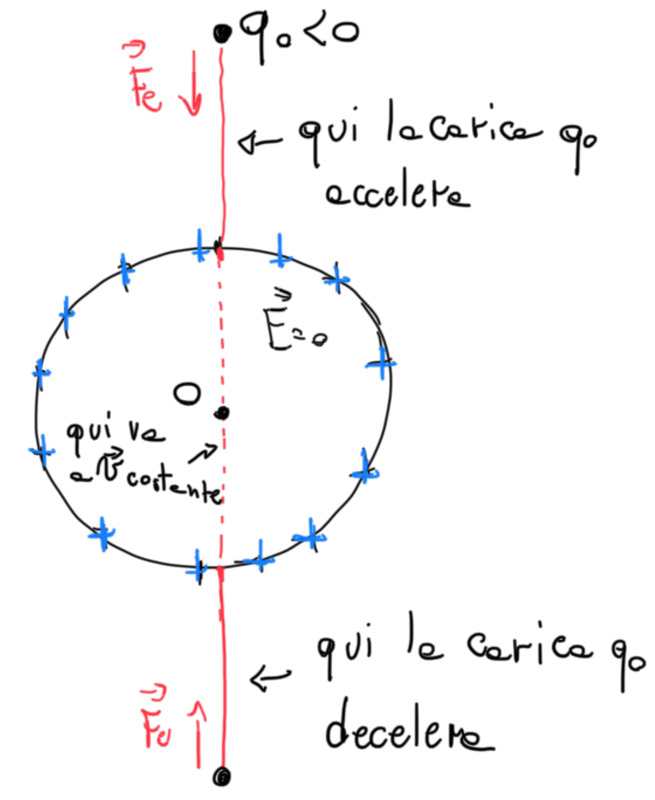
---

- NOTA BENE: non tutti i moti oscillatori sono armonici

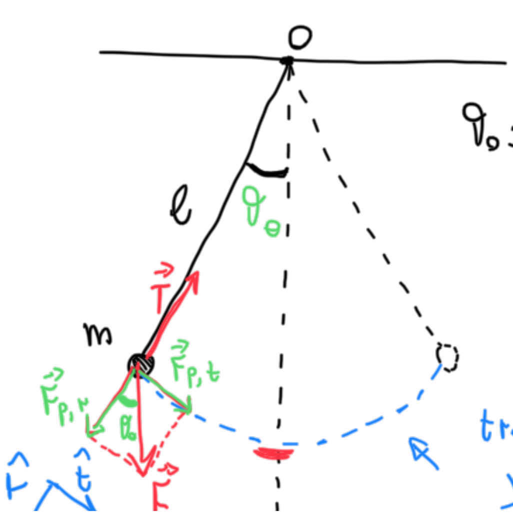
prendiamo ad esempio una carica $-q_0$ che si muove nel campo generato da un guscio sferico, caricato positivamente.

(immaginiamo che possa entrare e uscire dal guscio)

Il moto è OSCILLATORIO e PERIODICO, ma NON è armonico



- Pendolo semplice



θ_0: angolo iniziale

$\left[\begin{array}{l} \to \text{direzione radiale } \hat{r} \quad ① \\ \to \quad '' \quad \text{tangenziale } \hat{t} \quad ② \end{array}\right.$

① $F_{p,r} - T = -m a_c$ $\longrightarrow$ forza centripeta

tratto di moto circolare vario (accelerazione che varia)

$F_p = mg \quad \begin{cases} F_{p,r} = F_p \cos\theta_0 \\ F_{p,t} = F_p \sin\theta_0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} mg\cos\theta - T = -m\dfrac{v^2}{\ell} & ① \\ \underline{mg\sin\theta = m a_t} & ② \end{cases}$

② $F_{p,t} = m a_t$

arco percorso

$d(t) = \ell \cdot \theta(t)$

(distanza percorsa dalla pallina lungo il tratto di moto circolare)

$\Rightarrow a_t(t) = \ell \dfrac{d^2\theta}{dt^2} = \ell \cdot \underbrace{\alpha}_{\text{accelerazione angolare}}$

tangenziale, tempo, costante

$a_t = \dfrac{d^2}{dt^2}(\ell \cdot \theta(t)) = \ell \dfrac{d^2}{dt^2}\theta(t)$

$\cancel{m} g \sin\theta = -\cancel{m}\ell \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

la componente $F_{p,t}$ è analoga alla forza elastica

(Forza "DI RICHIAMO" verso il punto di equilibrio $\theta = 0$)

eq. differenziale NON lineare!

$\ell \dfrac{d^2\theta}{dt^2} + g\sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{g}{\ell}\sin\theta = 0}$

difficile da risolvere

molle	pendolo
(x)	$\rightarrow (\theta)$
$\left(\dfrac{k}{m}\right)$	$\rightarrow \left(\dfrac{g}{\ell}\right)$
x	$\sin\theta$

$\sin\theta \simeq \theta$

se θ è piccolo

$\Rightarrow \dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{g}{\ell}\theta = 0$

moto armonico

$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}}$ pulsazione

periodo del moto di un pendolo semplice, nell'approssimazione di piccoli angoli ($\theta \to 0$)

$T = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$

NOTA che NON dipende dalla massa!

$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$ come per la molla

A, ϕ sono determinate dalle condizioni iniziali

es. $\begin{cases} \theta(t=0) = \theta_0 \\ \dfrac{d\theta}{dt}(t=0) = 0 \end{cases}$: il pendolo parte da fermo, con un angolo θ_0

$\begin{cases} \theta_0 = A\cdot\cos(\phi) \\ \dfrac{d\theta}{dt}(t=0) = 0 = -\omega_0 A\sin(\phi) \end{cases}$

deve essere: $\phi = 0$ e $A = \theta_0$

$\Rightarrow \theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$

$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$

$\dfrac{d\theta}{dt} = A\cdot(-\sin(\omega_0 t + \phi))\cdot \underbrace{\dfrac{d(\omega_0 t + \phi)}{dt}}_{\omega_0} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi)$