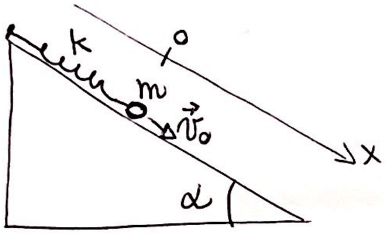
ESERCIZIO 1



Il corpo parte da una configurazione in cui la molla è a riposo ($\Delta x = 0$) e le sue condizioni iniziali sono: $x(t=0)=0$; $v(t=0) = v_0$

• All'inizio l'energia del sistema è tutta energia potenziale gravitazionale ed energia cinetica (v_0).
Nel punto di massima elongazione si ha solo energia potenziale elastica
(supponiamo di indicare solo l'energia potenziale gravitazionale riferita all'altezza $h=0$ nel punto più basso raggiunto)

$\Rightarrow$ per la legge di conservazione dell'energia meccanica si ha quindi:

$$mgh + \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} K x^2$$

x: massima distanza dall'origine
h: altezza relativa al punto di massima elongazione ($h = x \cdot \sin\alpha$)

$$\hookrightarrow \frac{1}{2} Kx^2 - mgx\sin\alpha - \frac{1}{2} m v_0^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{K}\left[mg \cdot \sin\alpha + \sqrt{m^2 g^2 \sin^2\alpha + Km v_0^2}\right] \quad \text{(A)}$$

• Scriviamo la soluzione generale di un moto armonico:

$$x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) + x_p \quad ; \quad v(t) = \frac{dx}{dt} = -C_1 \omega \sin(\omega t) + C_2 \omega \cos(\omega t)$$

condizioni iniziali: $\begin{cases} x(0) = 0 \\ v(0) = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = C_1 + x_p \\ v_0 = C_2 \omega \end{cases}$ da cui $C_1 = -x_p$; $C_2 = v_0/\omega$

La pulsazione del moto è: $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$

Il punto di equilibrio x_p è dato da: $mg\sin\alpha = Kx_p \Rightarrow x_p = \frac{mg\sin\alpha}{K}$

Perciò $x(t) = -x_p \cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\,t\right) + \frac{v_0}{\omega}\sin\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\,t\right) + \frac{mg\sin\alpha}{K}$

$v(t) = x_p \omega \sin(\omega t) + v_0 \cos(\omega t)$

→ ad un quarto di periodo $\tilde{t} = \frac{T}{4} = \frac{1}{4}\frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2\omega}$ $\Rightarrow v\left(\frac{T}{4}\right) = x_p \cdot \omega = \sqrt{\frac{m}{K}}\, g \sin\alpha$

quindi l'energia cinetica è: $K_{\tilde{t}} = \frac{1}{2} m \left[v\left(\frac{T}{4}\right)\right]^2 = \frac{1}{2K} m^2 g^2 \sin^2\alpha \quad \text{(B)}$

ESERCIZIO 2

La pallina al primo urto tocca terra ad una velocità di $v_1 = \sqrt{2gh}$
Dopo il rimbalzo, raggiunge una quota massima pari ad $h/2$ (dimezzata)
dunque la velocità immediatamente dopo il contatto a terra è di $v_2 = \sqrt{2g(h/2)}$
$\vec{v}_2$ ha verso opposto a $\vec{v}_1$

$$\vec{p}_{in} = m\vec{v}_1 = m\sqrt{2gh}\,(-\hat{j})$$
$$\vec{p}_{fin} = m\vec{v}_2 = m\sqrt{gh}\,(\hat{j})$$

$$|\vec{F}| = \frac{|\Delta\vec{p}|}{\Delta t} = \frac{m\left(\sqrt{2gh}+\sqrt{gh}\right)}{\Delta t} \quad (A)$$

Al secondo rimbalzo abbiamo: $\vec{p}_{in}^{(2)} = m\sqrt{gh}\,(-\hat{j})$; $\vec{p}_{fin}^{(2)} = m\sqrt{gh/2}\,(\hat{j})$
perciò $|\Delta\vec{p}^{(2)}| = m\left(\sqrt{gh}+\sqrt{gh/2}\right)$ (B)

ESERCIZIO 3

Il campo elettrico generato dal piano è uniforme in tutto lo spazio e vale: $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

- Sulla carica si esercita dunque una forza $F_e = ma = qE = q\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$
  da cui: $\sigma = \frac{2\varepsilon_0 m a}{q}$ (A)

- Nel secondo caso bisogna equiparare l'energia cinetica acquisita alla differenza di energia potenziale elettrica in seguito allo spostamento del corpo carico.
  $\frac{1}{2} m v^2 = K = qEd$ dove E è il campo generato dal piano
  $\Rightarrow K = q\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}d \Rightarrow \sigma = \frac{2\varepsilon_0 K}{qd}$ (B)

ESERCIZIO 4

- Perchè il camp all'esterno del guscio sia nullo, la carica presente sul guscio deve essere uguale a quella sulla sfera. (teorema di Gauss)

$$Q_{SFERA} = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = Q_{GUSCIO} = \sigma \cdot 4\pi (2R)^2$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{\cancel{4}\cancel{\pi} R^{\cancel{3}} \rho}{3 \cdot 4\cancel{\pi} \cdot \cancel{4} \cancel{R^2}} \Rightarrow \sigma = \frac{1}{12}\rho \cdot R \quad A$$

- L'energia cinetica acquisita è pari alla differenza di potenziale elettrico tra il punto sul guscio e quello sulla superficie della sfera.

Fuori dal guscio non c'è camp, dunque $V = cost.$

Dentro il guscio conta solo il potenziale generato dalla sfera (Considerazioni legate al teorema di Gauss)

Il potenziale elettrico generato da una sfera carica piena, al di fuori della sfera, va come: $\Delta V = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$

Imponendo $r_A \equiv r_{in} = 2R$ e $r_B = r_{fin} = R$ si ha:

$$\Delta V = \frac{\rho \cdot \cancel{4}/3\, \cancel{\pi} R^3}{\cancel{4}\cancel{\pi}\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2R}\right) = \frac{\rho R^{\cancel{3}2}}{3\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{2\cancel{R}} = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}R^2$$

Perciò $K = q \cdot \Delta V = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}R^2 \cdot q \quad B$

ESERCIZIO 5

- Per un satellite in orbita attorno alla Terra si ha: $G\frac{M_T \cancel{m}}{R^2} = \cancel{m}\frac{v^2}{R} \overset{(*)}{=} \cancel{m}\frac{4\pi^2 R}{T^2}$ $\left(v = \frac{2\pi R}{T}\right)$

forza gravitazionale = forza centripeta

$$\begin{cases} \text{SATELLITE 1: } G\frac{M_T}{R_1^2} = \frac{4\pi^2 R_1}{T_1^2} \\ \text{SATELLITE 2: } G\frac{M_T}{R_2^2} = \frac{4\pi^2 R_2}{T_2^2} \end{cases} \rightarrow \text{dividendo membro a membro: } \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = \frac{R_1}{R_2}\cdot\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3 = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2$$

oppure:

$$\begin{cases} G\frac{M_T}{R_1^{\cancel{2}}} = \frac{v_1^2}{\cancel{R_1}} \\ G\frac{M_T}{R_2^{\cancel{2}}} = \frac{v_2^2}{\cancel{R_2}} \end{cases} \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 \quad A$$

Il periodo T si calcola dalla formula sopra (*)

$$G\frac{M_T}{R^2} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{G M_T}} \quad B$$