Esercizi risolvibili dopo le prime 4 settimane di lezione (20 febbraio – 17 marzo 2017) [svolgimento incluso]

Esercizio.
Un furgoncino compie successivamente gli spostamenti di 1.37 km verso sudest, 0.85 km verso nord e 2.12 km in una direzione che forma con il nord un angolo di +17°. Si determinino il modulo e la direzione dello spostamento risultante.

Svolgimento.
Si nominano i tre vettori $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$.
I moduli sono quelli scritti nel testo. L'angolo con l'asse x (verso Est) che definisce la direzione è, rispettivamente: θ_A=-45°, θ_B=90°, θ_C=107° .

Il vettore risultante è $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$.
Componenti:
$R_x = A_x + B_x + C_x$= 1.37 km cos(-45°) + 0.85 km cos(90°) + 2.12 km cos(107°)
= 0.97km + 0 - 0.62km = 0.35 km
$R_y = A_y + B_y + C_y$= 1.37 km sin(-45°) + 0.85 km sin(90°) + 2.12 km sin(107°)
= -0.97km + 0.85km + 2.03km = 1.91 km

$$ModuloR = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{\left(A_x + B_x + C_x\right)^2 + \left(A_y + B_y + C_y\right)^2} = \sqrt{\left(0.35\right)^2 + \left(1.91\right)^2} = 1.94km$$

Direzione: θ = arctan[1.91/0.35] = 1.39 rad = 79.6°

Esercizio.
La velocità di volo di un avvoltoio è di 30 m/s rispetto all'aria. L'avvoltoio vuole volare dal picco di un monte ad un altro, distante 20 km, mentre soffia un vento a 15 m/s perpendicolare alla distanza tra i due picchi. Qual è il tempo minimo in cui l'avvoltoio può effettuare il volo?

Svolgimento.
L'avvoltoio vola in obliquo, in modo tale da avere in modulo $|v_A\sin(\theta)|=|v_{vento}|$ e avere componente della velocità efficace lungo la traiettoria utile (L=20 km) di $|v_A\cos(\theta)|$.
$|\sin(\theta)| = |v_{vento}|/|v_A|$ = 15/30 = 0.5; θ = 30°
T = $L/|v_A\cos(\theta)|$ = 20/(30*0.86) = 769.8 s

Esercizio.
Un punto si muove lungo una retta e, istante per istante, la sua posizione è data dall'espressione: $x = 16 + 7t + 2t^3 - 80\cos(0.5t)$, dove x è espresso in metri, t in secondi e l'argomento del coseno è in radianti. Quanto valgono la velocità e l'accelerazione del punto all'istante t = 10 s?
[v = 8.643 m/s ; a = 9.673 m/s^2]

Svolgimento.

Il punto si muove con legge oraria data $x = 16 + 7t + 2t^2 - 80\cos(0.5t)$

La velocità è la derivata: $v = \dfrac{dx}{dt} = 7 + 4t + 80 * 0.5 * \sin(0.5t)$.
L'accelerazione è: $a = \dfrac{dv}{dt} = 4 + 20\cos(0.5t)$.
Per trovare i valori richiesti basta sostituire a t 10 s

Esercizio.
Una palla viene lanciata a 50 gradi rispetto all'orizzontale, e raggiunge un'altezza massima di 10 metri. Qual era la velocità iniziale della palla?

Svolgimento.
La massima altezza si raggiunge quando la palla ha componente nulla della velocità. Siccome lungo la verticale la accelerazione è costante e vale –g, si può applicare la relazione che lega, per moti con accelerazione costante, le differenze di velocità e il tratto percorso:

$$v_{yf}^2 - v_{yi}^2 = 2a_y(y_f - y_i) \Rightarrow -v_{yi}^2 = -2gh_{\max} \Rightarrow v_{yi} = \sqrt{2gh_{\max}} = 14\frac{m}{s} \Rightarrow v_i = \frac{v_{yi}}{\sin(50°)} = 18.28\frac{m}{s}$$

Problema 1: In un tratto di fiume rettilineo largo 5.50 km la corrente scorre con una velocità di 4.40 m/s. Nel fiume vi è una barca che viaggia a una velocità di 9.50 m/s rispetto all'acqua. Calcolare:

1. il tempo minimo necessario alla barca per attraversare il fiume da una sponda all'altra perpendicolarmente alla direzione della corrente;

   t_1 [s] = ____ A 223 B 173 C 768 D 500 E 653

2. il tempo minimo necessario alla barca per andare da un punto A sulla sponda del fiume ad un qualunque punto B dell'altra sponda;

   t_2 [s] = ____ A 3410 B 959 C 579 D 11600 E 628

3. la distanza del punto B così raggiunto dal punto che si trova sulla stessa sponda di B di fronte ad A.

   d [m] = ____ A 2550 B 1260 C 2410 D 9550 E 16000

Svolgimento.
La velocità della barca $\vec{v}_b$ e quella della corrente $\vec{v}_c$ si compongono vettorialmente a dare la velocità della barca rispetto alla sponda del fiume $\vec{v}_{bs} = \vec{v}_b + \vec{v}_c$.

1) Se la barca viaggia perpendicolarmente al fiume, allora $\vec{v}_{bs}$ non deve avere componenti lungo la corrente del fiume, per cui $\vec{v}_b$ avrà una componente lungo il fiume uguale e contraria a $\vec{v}_c$ e quindi la componente perpendicolare al fiume sarà $v_{b\perp} = \sqrt{v_b^{\,2} - v_c^{\,2}}$ e il tempo sarà $L/v_{b\perp}$

2) In questo caso non interessa viaggiare in una direzione preordinata. Un punto sull'altra sponda vale un altro. Per cui orienterò $\vec{v}_b$ perpendicolarmente alla corrente del fiume e il tempo sarà L/v_b

3) La distanza del punto di arrivo di (2) dal punto di fronte ad A sulla stessa sponda è data dal tempo ottenuto in (2) moltiplicato per v_c; infatti la componente della velocità $\vec{v}_{bs}$ lungo il fiume è proprio $\vec{v}_c$.

Esercizio.

Un cubo di massa m_1 è in quiete su un piano orizzontale scabro. Il cubo è collegato tramite un filo ideale inestensibile ed una carrucola ideale di massa nulla ad un corpo di massa m_2 appeso verticalmente nel vuoto.

1) Determinare il valore minimo del coefficiente di attrito statico $\mu_{s,min}$ del piano scabro necessario per mantenere il sistema in equilibrio.

Se $\mu_s < \mu_{s,min}$ e il coefficiente di attrito dinamico è μ_d , determinare:

2) l'accelerazioine del corpo di massa m_2;

3) dopo quanto tempo il corpo di massa m_2 è sceso di un tratto h;

4) la sua velocità in questo stesso istante;

Svolgimento

1) Siccome il sistema è in equilibrio, sia la risultante delle forze applicate al corpo di massa m_1 che quella delle forze applicate al corpo di massa m_2 devono essere nulle. Da cui si ottiene per il corpo 1

$$f_s = T, \qquad m_1 g = N$$

dove f_s e N sono, rispettivamente, la forza di attrito statico e la reazione normale del piano orizzontale mentre T rappresenta la tensione del filo; per il corpo 2

$$m_2 g = T$$

Da queste equazioni ricordando che $f_s \leq \mu_s N$, si ottiene il valore minimo del coefficiente di attrito statico $\mu_{s,min}$ necessario per mantenere l'equilibrio

$$\mu_{s,min} \geq \frac{m_2}{m_1}$$

2) Se $\mu_s < \mu_{s,min}$ i due corpi non possono rimanere in equilibrio, per determinare l'accelerazione con cui si muovono basta applicare la seconda legge di Newton. Prendendo l'asse x parallelo al piano orizzontale e orientato nel senso del moto del corpo 1 e l'asse y verticale e orientato verso il basso, si ottiene per il corpo 1:

$$T - f_d = m_1 a_1, \qquad m_1 g = N$$

dove f_d è la forza di attrito dinamico; mentre per il corpo 2:

$$m_2 g - T = m_2 a_2$$

Inoltre dall'inestensibilità del filo segue che $a_1 = a_2$. Da queste relazioni, ricordando che $f_d = \mu_d N$ si ottiene l'accelerazione con cui si muovono i due corpi

$$a = g\frac{m_2 - \mu_d m_1}{m_1 + m_2}$$

3) Il corpo 2 si muove di moto uniformemente accelerato, quindi il tempo impiegato a scendere di un tratto h è semplicemente

$$t_h = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{2h\frac{m_1 + m_2}{g(m_2 - \mu_d m_1)}}$$

4) la velocità del corpo 2 dopo uno spostamento h dalla posizione iniziale si ottiene, analogamente al punto precedente, applicando le leggi del moto rettilineo uniformemente accelerato

$$v_2 = a t_h = \sqrt{2ah} = \sqrt{2gh\frac{m_2 - \mu_d m_1}{m_1 + m_2}}$$

Problema 3: Un corpo di massa 42.0 kg si muove salendo una rampa inclinata scabra con un'inclinazione di 30° rispetto all'orizzontale. Il coefficiente di attrito dinamico tra il corpo e la rampa vale $\mu_d = 0.620$, quello di attrito statico μ_s =1.20. Al corpo è collegata l'estremità di una fune, inestensibile e di massa trascurabile, tesa parallelamente alla rampa, la cui altra estremità è collegata ad un motore che si trova alla sommità della rampa e fa salire il corpo ad una velocità costante di 7.20 m/s. Calcolare:

5. quanto vale, in modulo, la tensione della fune.

T [N] = ☐ A 1010 B 214 C 576 D 1870 E 427

Ad un certo punto la fune viene tagliata e il corpo rallenta fino a fermarsi. Calcolare:

6. la lunghezza del tratto di rampa percorso dal corpo dopo il taglio della fune prima di fermarsi.

L_r [m] = ☐ A 0.286 B 0.642 C 0.233 D 4.70 E 2.55

Svolgimento.

Lungo il piano inclinato con attrito, percorso in salita a velocità costate, le forze in gioco sono:

$$0 = ma_y = \left(\sum_i \vec{F}_i\right)_y = N - mg\cos\theta \ \Rightarrow\ N = mg\cos\theta$$
$$0 = ma_x = \left(\sum_i \vec{F}_i\right)_x = T - \mu_d N - mg\sin\theta = T - \mu_d mg\cos\theta - mg\sin\theta$$

Da cui, $T = mg\left(\sin\theta + \mu_d\cos\theta\right) = 427N$.

Una volta che la fune è tagliata, l'accelerazione nella direzione del moto è: $a_x = -g\left(\sin\theta + \mu_d\cos\theta\right)$

Sapendo il valore di una accelerazione costante, si può calcolare la variazione della velocità al quadrato in uno spazio percorso d: $v_f^2 - v_i^2 = 0 - v_i^2 = -v_A^2 = 2a_x d$

da cui si trova la distanza percorsa prima di fermarsi: $d = \dfrac{v_A^2}{2g\left[\sin\theta + \mu_d\cos\theta\right]} = 2.55m$.

Problema 3: Un corpo di massa 65.0 kg viene lanciato con velocità 7.10 m/s verso il basso lungo una rampa inclinata scabra con un'inclinazione di 30° rispetto all'orizzontale. Il coefficiente di attrito dinamico tra il corpo e la rampa vale $\mu_d = 1.10$. Calcolare:

5. dopo quanto tempo si ferma il corpo.

t_f [s] = ☐ A 0.417 B 0.463 C 1.60 D 0.388 E 0.299

A questo punto al corpo è collegata l'estremità di una fune, inestensibile e di massa trascurabile, tesa parallelamente alla rampa, la cui altra estremità è collegata ad un motore che si trova alla sommità della rampa e fa salire il corpo ad una velocità costante. Calcolare:

6. quanto vale, in modulo, la tensione della fune.

T [N] =

A $\boxed{1080}$ B $\boxed{926}$ C $\boxed{3040}$ D $\boxed{6740}$ E $\boxed{4650}$

Svolgimento.

Consideriamo per il corpo un asse x diretto giù lungo la rampa (verso positivo discendente). Applicando la seconda legge della dinamica al corpo (direzione y):

$$ma_y = 0 = N - mg\cos\theta \;\Rightarrow\; N = mg\cos\theta$$

e quindi lungo l'asse x: $ma_x = mg\sin\theta - \mu_d N \;\Rightarrow\; ma_x = mg\sin\theta - \mu_d mg\cos\theta.$

Perciò $a = g\sin\theta - \mu_d g\cos\theta$

Il corpo si ferma dopo il tempo $t_f = \dfrac{v_0}{g\sin\theta - \mu_d g\cos\theta}$

A corpo fermo, si collega la fune e si fa salire il corpo a velocità costante. Se l'asse è sempre diretto verso la discesa, abbiamo:

$$0 = ma = mg\sin\theta + \mu_d mg\cos\theta - T \;\Rightarrow\; T = mg\sin\theta + \mu_d mg\cos\theta$$

Problema 3: La rampa finale del trampolino per il salto con gli sci può essere schematizzata come un piano inclinato lungo 7.90 m che forma un angolo di 30° con l'orizzontale. Se uno sciatore di massa 68.0 kg ha una velocità di 28.0 m/s all'inizio del piano inclinato, calcolare:

6. la velocità dello sciatore alla sommità del piano inclinato.

v_{out} [m/s] =

A $\boxed{28.3}$ B $\boxed{18.5}$ C $\boxed{41.1}$ D $\boxed{26.6}$ E $\boxed{44.4}$

A questo punto lo sciatore lascia la rampa di lancio e prosegue nel vuoto. Trascurando l'attrito dell'aria, sapendo che la sommità della rampa si trova ad un'altezza 45.0 m dal suolo, calcolare:

7. la quota massima raggiunta dallo sciatore rispetto al punto di distacco;

h [m] =

A $\boxed{7.95}$ B $\boxed{1.29}$ C $\boxed{15.5}$ D $\boxed{9.00}$ E $\boxed{16.8}$

8. la distanza tra il punto di impatto al suolo dello sciatore ed il piede della perpendicolare al terreno passante per la fine della rampa.

d [m] =

A $\boxed{54.4}$ B $\boxed{3.56}$ C $\boxed{66.8}$ D $\boxed{108}$ E $\boxed{16.1}$

Svolgimento.

L'accelerazione (costante) lungo il piano inclinato è $ma = -mg\sin \;\Rightarrow\; a = -g\sin\theta.$

Da cui: $v_s^2 - v_0^2 = -2gL_p\sin\theta \;\Rightarrow\; v_s = \sqrt{v_0^2 - 2gL_p\sin\theta}$

dove Lp è la lunghezza della rampa e θ=30°.

7) A questo punto lo sciatore lascia la rampa con la velocità v_s trovata al punto (6) e con inclinazione θ=30°; il suo moto da qua in poi è quello di un grave, cioè parabolico (simile a quello di un proiettile, etc.). La domanda (7) chiede la altezza massima rispetto al punto di salto. Considerando il moto lungo la verticale, la velocità iniziale è $v_s\sin\theta$. Per trovare l'altezza massima possiamo usare la relazione fra velocità e spazio percorso in un moto ad accelerazione costante, troveremo che $h_{max}=(v_s\sin\theta)^2/(2g)$.

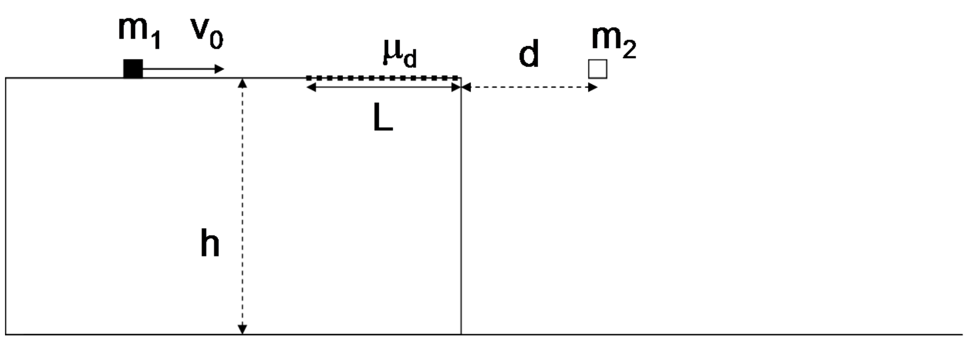
8) Si chiede la distanza del punto di impatto al suolo dal piede della perpendicolare al terreno passante per la fine della rampa. Conosciamo l'altezza dal suolo della sommità della rampa Hr.
L'equazione del moto lungo y è $y=Hr+(v_s\sin\theta)t-(1/2)gt^2$. L'istante di impatto è una delle due soluzioni dell'equazione $0=-Hr-(v_s\sin\theta)t_i+(1/2)gt_i^2$. Data la v_s trovata al punto (6),

$$t_i = \frac{v_s \sin\theta + \sqrt{(v_s \sin\theta)^2 + 2gHr}}{g}$$

La distanza $d=(v_s\cos\theta)t_i$, cioè il prodotto fra il tempo di volo e la componente orizzontale, che è costante, della velocità.

Esercizio.
Un corpo di massa m_1 = 5 kg sta scivolando senza attrito lungo un piano orizzontale sopraelevato che si trova ad un'altezza h = 50 m rispetto al suolo (vedi figura) con velocità v_0 =20 m/s e incontra lungo il suo cammino un tratto scabro di lunghezza L = 10 m nel quale il coefficiente di attrito dinamico corpo/piano è μ_d = 0.1. Si assuma g = 9.81 m/s^2 e si supponga che la resistenza dell'aria sia trascurabile.
A] Si calcoli (prima con una formula algebrica e poi numericamente) la velocità del corpo alla fine del tratto scabro.

Al termine del tratto scabro il corpo continua il suo moto in caduta libera. Nello stesso istante in cui il corpo di massa m_1 lascia il piano orizzontale un corpo di massa identica (m_2 = 5 kg) situato alla stessa altezza h dal suolo e ad una distanza d = 40 m dalla fine del piano viene lasciato libero in condizione di quiete.
B] Si calcoli (prima con una formula algebrica e poi numericamente) l'altezza rispetto al suolo del punto di impatto fra i due corpi.



Svolgimento.

A]
Lungo il tratto scabro di lunghezza L sul corpo agisce una forza di attrito dinamico fd opposta al moto, di intensità:

$$f_d = -\mu_d N = -\mu_d m_1 g$$

Essendo la risultante delle forze una costante, l'accelerazione a=f_d/m_1 è costante. La velocita v_1 del corpo alla fine del tratto scabro deriva quindi dalla relazione v_1^2 -v_0^2=2a(L) e quindi:

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2\mu_d g L}$$

Il corpo prosegue il suo moto in caduta libera partendo dall'altezza *h* con una velocità iniziale v_1 diretta lungo l'orizzontale. Lungo l'asse verticale il suo moto è quello di un grave che viene lasciato in condizioni iniziali di quiete:

$$y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$$

La stessa equazione vale per il secondo corpo, che si trova a distanza *d* lungo l'orizzontale: i due corpi hanno quindi la stessa quota per qualunque istante si consideri. Data la velocità iniziale del primo corpo, i due si scontrano al tempo t_u corrispondente all'istante in cui l'ascissa del corpo 1 raggiunge il valore *d*:

$$t_u = \frac{d}{v_1}$$

B]

$$y_u = h - \frac{1}{2}gt_u^2 = h - \frac{1}{2}g\left(\frac{d}{v_1}\right)^2$$

-

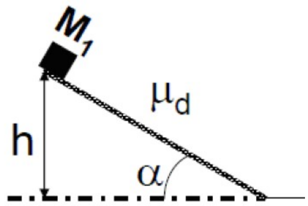
Esercizio.

Su una rampa, rappresentabile come un piano inclinato scabro inclinato di un angolo $\alpha = 30°$ rispetto all'orizzontale, è appoggiato un corpo di massa M_1. Fra il corpo e la rampa vi sono un coefficiente di attrito dinamico μ_d e un coefficiente di attrito statico μ_s. All'istante iniziale il corpo si trova in quiete ad una quota h lungo la verticale rispetto all'estremità inferiore della rampa.

Domanda n. 1: Trovare μ_s^*, il valore minimo del coefficiente di attrito statico, per il quale il corpo permane nello stato di quiete.

Se il coefficiente di attrito statico è inferiore al valore limite μ_s^* trovato, il corpo inizierà a scivolare verso il basso.

Domanda n. 2: Si calcoli (in funzione di α , M_1, μ_d e h) con quale velocità v^* il corpo giunge alla fine della rampa.



Svolgimento

La forza normale esercitata dal vincolo è $N = M_1 g \cos\alpha$, la componente della forza peso lungo il piano inclinato è $F_p = M_1 g \sin\alpha$, la forza di attrito statica è al massimo $-\mu_s N = -\mu_s M_1 g \cos\alpha$.

Risposta alla domanda n. 1: La condizione di quiete è raggiunta in condizioni limite quando

$$M_1 g \sin\alpha - \mu_s^* M_1 g \cos\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad \mu_s^* = \tan\alpha$$

Risposta alla domanda n.2

La componente della forza totale in direzione della rampa è uguale alla massa per l'accelerazione lungo la rampa:

$$ma = mg\sin\alpha - \mu_d N = mg\sin\alpha - \mu_d mg\cos\alpha \ \Rightarrow \ a = g\sin\alpha\left(1 - \frac{\mu_d}{\tan\alpha}\right)$$

$$v_*^2 - v_0^2 = 2aL = 2a\frac{h}{\sin\alpha} \;\Rightarrow\; v_*^2 = 2\frac{h}{\sin\alpha}g\sin\alpha\left(1-\frac{\mu_d}{\tan\alpha}\right) = 2gh\left(1-\frac{\mu_d}{\tan\alpha}\right)$$

$$v_* = \sqrt{2gh\left(1-\frac{\mu_d}{\tan\alpha}\right)}$$

Il corpo, una volta giunto sul piano orizzontale liscio, continua a muoversi con velocità v*.
