

Appunti al corso di Modelli della Fisica

Fulvio Cornolti

26 aprile 2013

0.1 Indice

Introduzione: Modelli di sistemi dinamici “Fisici”: critica e limiti. Sistemi deterministici continui e discreti. Sistemi lineari: caso 1D omogeneo, equilibrio soluzioni, condizioni iniziali, stabilità esempi, soluzione numerica col metodo di Eulero, e significato, condizioni iniziali, stabilità su dt . sistemi 2D, spazio delle fasi, operatore di evoluzione, autovettori e autovalori, soluzione generale, classificazione delle stabilità, esempi, oscillatore armonico. Sistemi non omogenei 2D, risposta lineare. L'oscillatore forzato, risonanza: Uso e significato Potenza assorbita, trasmissione e riflessione applicazioni diagnostiche. oscillatori in serie, funzione di trasferimento: analisi in frequenza. Un' applicazione produzione del suono verbale, teoria di Helmholtz dell'orecchio. Un sistema ritardato. Sistemi non lineari: 1D equilibrio e stabilità lineare. Sistemi 2D, equilibrio, stab lin. Ciclo limite, Un esempio. Isteresi.

Capitolo 1

Introduzione

La capacità di predire la evoluzione di sistemi naturali (che chiameremo “fisici”) è di grande rilevanza sia sul piano conoscitivo sia per operare decisioni dagli esiti efficaci e utili.

La accezione del termine “fenomeno fisico” è qui molto ampia, e può andare dalla evoluzione di un sistema astrofisico (es. la sincronia tra il moto di rivoluzione e quello di rotazione della Luna), a quello di un sistema ecologico (equilibrio di un ecosistema di prede-predatori) al meccanismo di riscaldamento di un termometro a contatto (quello che si usa per sapere se abbiamo la febbre), all’andamento di un sistema economico (dinamica prezzi-occupazione, andamento delle borse), ai meccanismi di produzione dei suoni verbali e musicali e ai meccanismi psicofisici del loro riconoscimento, alla stabilità di un reattore nucleare, al funzionamento di un LASER, al moto periodico di un pendolo a quello delle pulsazioni cardiache o del ciclo mestruale o delle glaciazioni.

Costruire un **modello deterministico** di un fenomeno fisico richiede di individuare delle **grandezze caratteristiche** o **variabili** in numero “sufficiente” (per esempio in un sistema ecologico in cui convivono conigli e volpi, il numero di individui delle due specie, che chiameremo x e y nel nostro esempio) che si ipotizzano dipendenti dal tempo t in modo abbastanza regolare da giustificare l’uso della analisi matematica (derivate fino a un certo ordine).

Si devono poi individuare i **meccanismi fondamentali** che ne determinano il cambiamento nel tempo. Questi possono essere ritrovati in leggi fondamentali della fisica, in leggi empiriche, tramite la generalizzazioni di meccanismi noti in altro ambito ecc. (es. individui sani di conigli in abbondanza di cibo fanno figli con un certo ritmo noto. Questo ritmo è influenzato dalla quantità di cibo disponibile. La presenza di predatori introduce il fenomeno della caccia, cui corrisponde una diminuzione del ritmo di crescita della popolazione di conigli e un aumento di quello delle volpi, ecc.).

La intensità di questi meccanismi (detti anche **forze generalizzate** o **velocità** deve essere nota in termini delle grandezze caratteristiche e sono collegate alla evoluzione del sistema in forma di equazioni differenziali che mettono in relazione le derivate delle variabili con le variabili stesse.

Si capisce ora che cosa volevamo dire con la richiesta che le variabili fossero in numero “sufficiente”: le velocità devono essere espresse in funzione delle sole variabili dichiarate (e di parametri noti a priori): in altri termini in ogni istante i meccanismi di cambiamento del sistema devono essere calcolabili se si sa come il sistema è in quell’istante.

Si tratta a questo punto di studiare le soluzioni del problema, cioè come x e y dipendano da t . Spesso le soluzioni non sono ottenibili analiticamente ma è necessario una integrazione numerica.

Alcune osservazioni:

1- esistono molti altri modelli di evoluzione, es. quelli in cui le “velocità” sono stocastiche (processi stocastici), oppure quelli in cui i processi di evoluzione sono “a salti” nel tempo (processi discreti), oppure le velocità in un certo istante sono note in funzione dello stato del sistema in tempi passati (sistemi con memoria o ritardati), ecc.

2- La formulazione di un modello passa necessariamente attraverso un processo di semplificazione molto drastico, che porta a ignorare molti aspetti del problema. Per esempio ragionare in termini di popolazione di conigli $x(t)$ trascura il fatto che la velocità riproduttiva è diversa al variare della età: bisognerebbe introdurre parecchie variabili, ciascuna per ogni gruppo di età. Questo è possibile, ma ovviamente complica tremendamente l'analisi matematica del problema.

3- La scelta delle variabili “sufficienti” è pure una questione relativamente arbitraria. Per esempio la quantità di cibo può essere assegnata a priori come un parametro noto, ma è chiaro che in un ambiente definito essa potrebbe dipendere dal numero di conigli: se questi sono tanti, potrebbero portare a una alterazione della flora e modificare la quantità di cibo disponibile. Se ne potrebbe tener conto considerando la quantità di cibo come una variabile del sistema $z(t)$, una sorta di preda della preda, con le opportune leggi di velocità.

4- Le leggi di velocità a loro volta sono relativamente arbitrarie: a seconda del meccanismo base che si vuole mettere in evidenza si utilizzano leggi di velocità differenti.

5- Un'altra precisazione riguardo alla rappresentabilità di certi fenomeni con gli strumenti della analisi matematica: il numero di conigli è evidentemente un numero intero, che cambia per numeri interi, mentre x è utilizzata come variabile continua. Evidentemente $x(t)$ è in grado di rappresentare il numero di conigli solo con una certa approssimazione e solo entro certi limiti. Va interpretata come la dipendenza dal tempo del valore medio (in senso statistico) della popolazione. Ci si può attendere che il numero effettivo N abbia bassa probabilità di discostarsi molto da quello previsto matematicamente solo se la popolazione è grande, essendo l'errore percentuale $dN/N \approx 1/\sqrt{N}$.

Per riassumere, i modelli matematici di fenomeni fisici non hanno accuratezza infinita e hanno un certo grado di arbitrarietà: una certa cautela nel prendere per “scientifiche” le loro conclusioni è d'obbligo. (Questo è tanto più vero nei problemi di impatto sociale e ideologico rilevante, quali quelli di macroeconomia, di ecologia ecc.).

Il metodo di presentazione che seguiremo consiste nell'individuare di vari fenomeni fisici le variabili determinanti, i meccanismi fondamentali che ne determinano i cambiamenti, tradurre il tutto in equazioni differenziali, richiamare qualche conoscenza di analisi o geometria (senza velleità di completezza o di rigore) che ci permetta di discutere alcune proprietà delle soluzioni e di passare ad esempi successivi via via più complessi. Alcuni esempi ci daranno l'occasione per richiamare alcune leggi fondamentali della fisica.

Avvertenza Queste pagine sono poco più che un pro-memoria, una traccia dei temi affrontati nel corso di Modelli della Fisica della Laurea Specialistica in Informatica e della Laurea Specialistica in Tecnologie Informatiche dalla Università di Pisa. Il loro scopo è di permettere agli studenti di seguire le lezioni senza l'ossessione di prendere appunti, che oltretutto a volte risultano incompleti o poco chiari.

Il taglio che si è voluto dare è colloquiale, per così dire “dal vivo” e tutt'altro che sistematico, a riflettere la impostazione del corso che, lungi dall'essere la esposizione di una teoria, si volge come una successione di riflessioni su fenomeni e curiosità della “natura”.

Naturalmente questo resta un corso di fisica matematica e si pone il problema dei prerequisiti. Nell'attuale corso di studi lo spazio per la fisica tradizionale è ridotto al minimo e mi pare di non sbagliare di molto se dico che le conoscenze delle leggi fisiche da parte degli studenti della Laurea Specialistica consistono sostanzialmente in ciò che resta dagli studi delle medie superiori. Per la matematica le conoscenze teoriche sono migliori, ma l'attitudine a esercitare la teoria per descrivere fenomeni naturali è altrettanto scarsa. Per ovviare a queste carenze in questi appunti spesso vengono presentati contenuti della fisica tradizionale e della matematica di base in un modo che, pur sacrificando il rigore formale, ne sia facilitato l'aspetto descrittivo. Se il lettore troverà troppo elementare qualche argomentazione, non deve far altro che esserne contento e passare ad argomenti suggestivi.

Un'ultima precisazione va data: il corso prevede la realizzazione di un “progetto”, che significa lo studio di un fenomeno, la formulazione di un modello matematico, la discussione analitica di alcune sue

proprietà (tipicamente equilibrio e stabilità) e la soluzione numerica delle equazioni di moto. La parte numerica non è qui trattata: si rimanda a [?].

Capitolo 2

Sistemi lineari

2.1 Sistemi lineari unidimensionali

Cominciamo da un fenomeno ben noto: la crescita nel tempo del conto in banca. Supponiamo di depositare in banca 9000 euro con l'accordo che alla fine di ogni giornata venga aggiunto al conto come premio lo $0.1\% = 10^{-3}$ del capitale presente quel giorno stesso. In questa regola consiste la legge fondamentale della velocità di variazione del capitale. Ci si domanda quale sarà il capitale in tempi successivi.

La variabile $x(t)$ sarà evidentemente il capitale e il parametro libero t il tempo, che cominciamo a contare ($t = 0$) dal giorno del deposito e misuriamo in giorni.

Dopo t giorni il capitale sarà aumentato a un valore $x(t)$ (per ora incognito) e quella stessa sera sarà aumentato ulteriormente di $\Delta = 10^{-3}x(t)$ cioè sarà

$$x(t+1) = x(t) + \Delta = x(t) + 10^{-3}x(t) \quad (2.1)$$

o

$$\frac{x(t+1) - x(t)}{1} = 10^{-3}x(t) \quad (2.2)$$

Si tratta di un processo discreto (il conto viene aggiornato una volta al giorno) che approssimiamo con un processo continuo. La (2.2) dà il rapporto incrementale di x al variare di t in funzione di x stessa. Usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale (ci perdonino i matematici), possiamo scrivere la legge di velocità in questo modo

$$\frac{dx}{dt} = 10^{-3}x = \gamma x(t) \quad (2.3)$$

che dice che il capitale aumenta in ragione del capitale stesso (piove sul bagnato) (si è posto $\gamma = 10^{-3}$).

Il modello è stato formulato. Cerchiamo ora la soluzione in forma esponenziale cioè nella forma

$$x(t) = A e^{\lambda t} \quad (2.4)$$

Sostituendo si ottiene che deve essere $\lambda = \gamma$ ($= 10^{-3}$ nel nostro caso), mentre A non è determinabile dalla equazione costitutiva. Ciò significa che, fissata la legge fondamentale, esistono infinite soluzioni in forma esponenziale, tutte con lo stesso argomento che è determinato dalla struttura del sistema.

La soluzione effettiva del problema fisico, che richiede anche un preciso valore di A , si ottiene imponendo che per $t = 0$ la soluzione coincida col valore iniziale dell'incognita (problema di Cauchy) cioè imponendo

$$x(0) = 9000 = A e^{\gamma \cdot 0} = A e^{(0 \cdot 10^{-3})} \Rightarrow A = 9000 \quad (2.5)$$

concludendo

$$x(t) = 9000 e^{t/1000} \quad \text{euro} \quad (2.6)$$

La matematica è finita. Tornando alla fisica possiamo domandarci a quanto ammonterà il capitale dopo un anno e da qui calcolare, per esempio, il tasso di interesse annuo.

$$x(365) = 9000 e^{(10^{-3} \cdot 365)} = 9000 e^{0.365} = 12965 \quad \text{euro} \quad (2.7)$$

Il tasso di interesse annuo r espresso in % risulta

$$r = \frac{12965 - 9000}{9000} 100 = 44\% \quad (2.8)$$

(Domanda: perchè non risulta $r = 10^{-3} 365 \cdot 100 = 36\%$, cioè 365 volte il tasso giornaliero?).

Dal punto di vista matematico la (??) è una equazione differenziale ordinaria (non ha derivate parziali), lineare (la incognita x appare in modo lineare ovunque), del primo ordine (l'ordine massimo della derivata è 1), omogenea (non ci sono termini che non dipendano da x), a coefficienti costanti (γ non dipende dal tempo). Insieme con le condizioni iniziali ($x(0) = 9000$) si ha un semplice problema di Cauchy con soluzione esponenziale (vedi ??).

Esercizi: articolare e giustificare un modello di questo tipo per descrivere i seguenti fenomeni:

- 1- la scarica di un circuito RC;
- 2- lo svuotamento di un recipiente pieno di un liquido viscoso in presenza di gravità, con un rubinetto aperto sul fondo di resistenza viscosa R nota (la portata del rubinetto è proporzionale alla pressione sul fondo del recipiente e inversamente proporzionale a R ...);
- 3- la perdita del potere di acquisto per l'inflazione;
- 4- trovare altri esempi.

Studiamo ora il funzionamento di un termometro a contatto, come quello che si usa per “provare la febbre” (misurare la temperatura del corpo).

In questo caso ci vengono in aiuto alcune leggi ben note della fisica di base [?].

1- Il secondo principio della termodinamica ci dice che tra due corpi in contatto il calore Q fluisce spontaneamente dal più caldo al più freddo.

2- Il calore, entrando in un corpo, determina un aumento di temperatura ΔT (e uscendo una diminuzione) secondo la legge

$$\Delta Q = C \Delta T \quad (2.9)$$

dove ΔQ , che si può misurare in calorie, è la quantità di calore che fluisce tra i due corpi, C è un coefficiente caratteristico del corpo, detto capacità termica, che dipende dal materiale di cui è composto e dalla sua massa, ΔT è la variazione di temperatura (in C^0). (Attenzione ai segni: ΔQ si considera positivo se corrisponde a calore entrante, ΔT se la temperatura è aumentata).

3- La legge di Fouriér ci dice che tra due corpi in contatto termico a temperatura rispettivamente T_1 e T_2 (mantenute costanti con qualche meccanismo esterno) la quantità di calore che fluisce dal corpo 1 al corpo 2 in un intervallo di tempo Δt è

$$\Delta Q = D(T_2 - T_1) \Delta t \quad (2.10)$$

dove D è un coefficiente di trasporto del calore caratteristico del materiale interposto tra i due corpi (conducibilità termica) e della sua forma.

4- È implicita l'ipotesi che la quantità di calore che esce da un corpo vada a finire in ugual quantità nell'altro: è la teoria fluida del calore (“il calore non si crea e non si distrugge”), che sappiamo essere non completa (è completata dal primo principio della termodinamica), ma più che accettabile in questo caso.

La variabile del sistema sarà la temperatura del termometro $T(t)$, il cui valore iniziale sia noto $T(0) = 20C^0$, mentre la temperatura del malato (da misurare) sarà T_2 , costante durante la misura. Se riferiamo

i due fenomeni descritti in (?? e ??) a un generico istante t e a un piccolo intervallo di tempo dt intorno a t , si ha

$$C(T(t + \Delta t) - T(t)) = D(T_2 - T(t))\Delta t \quad (2.11)$$

da cui, passando al limite

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{D}{C}T + \frac{D}{C}T_2 = -\gamma T + \gamma T_2 \quad (2.12)$$

con ovvio significato dei simboli.

Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine non omogenea (c'è un termine non dipendente dalla incognita): l'insieme delle soluzioni si può scrivere come somma delle soluzioni omogenee, che sono esponenziali, più una soluzione particolare [?].

$$T = \alpha e^{-\gamma t} + T_2 \quad (2.13)$$

Imponendo la condizione iniziale si ottiene

$$T = (T(0) - T_2) e^{-\gamma t} + T_2 \quad (2.14)$$

La temperatura del termometro tende alla temperatura corporea, come deve, con un tempo caratteristico dato da $\tau = 1/\gamma$.

Esercizi:

- 1- discutere perché nella (??) T_2 si può assumere costante;
- 2- in una misurazione della temperatura si osserva che la temperatura finale è $37^\circ C$ mentre la temperatura segnata dopo un minuto è di $31^\circ C$. Calcolare γ e stimare quanto deve durare la misura perché il valore letto sia distante da quello vero per meno di $1/10$ di C . (È ovvio ma conviene ricordare che le soluzioni effettive di un problema dipendono dalle equazioni costitutive e dalle condizioni iniziali).
- 3- una fune passa intorno a un cilindro di raggio r , il contatto tra fune e cilindro è caratterizzato da un coefficiente d'attrito (statico) μ , a uno dei capi è applicata la tensione F : qual'è la massima tensione applicabile all'altro capo senza che la fune scivoli? (trascurare la gravità); il risultato dipende dal raggio del cilindro¹?
- 4- ricondurre a equazioni di questo tipo i seguenti problemi:
 - a- l'andamento nel tempo della lunghezza della coda alla mensa che vi sta davanti a partire dall'istante in cui arrivate nei due casi in cui non ci siano infiltrati o che gli infiltrati si infiltrino solo se trovano amici compiacenti.
 - b- l'andamento nel tempo della radioattività di un campione radioattivo i cui nuclei decadono con una probabilità per unità di tempo nota.
 - c- la evoluzione temporale della corrente in un circuito RC inizialmente carico.

2.1.1 Stabilità

Facciamo una fugace introduzione al concetto di stabilità. Tutti i sistemi incontrati fin'ora sono del tipo

$$\frac{dx}{dt} = ax + b \quad (2.15)$$

e hanno una particolare soluzione che non dipende dal tempo: per esempio nel caso del termometro, è chiaro che se la temperatura iniziale del termometro fosse stata uguale a quella del corpo da diagnosticare, T non sarebbe mai cambiata. Sostituendo in (??) otterremmo che $T(t) = T_2 = \text{costante}$ è una soluzione della (??).

¹in questo caso conviene scegliere come variabile dipendente la tensione F , mentre la variabile indipendente potrebbe essere l'arco di cerchio di contatto: si ottiene una "evoluzione" nello spazio invece che nel tempo...

Una soluzione siffatta si chiama **(soluzione di) equilibrio**: è ottenibile dalla (??) ponendo uguale a 0 la “velocità”. I sistemi lineari omogenei a coefficienti costanti hanno sempre un equilibrio in $x = 0$, quelli non omogenei in $x = b$.

Inoltre tutti i casi precedenti si possono suddividere in due classi ben caratterizzate: alcuni hanno soluzioni che divergono per $t \rightarrow \infty$, altri che tendono verso la soluzione di equilibrio. Questa proprietà è direttamente collegata all’equazione costitutiva, in particolare al segno di a .

Definiamo **stabili** i sistemi che convergono verso la soluzione di equilibrio, il che succede quando $a < 0$, **instabili** quelli che divergono ($a > 0$).

2.2 Sistemi lineari del secondo ordine

2.2.1 Il pendolo rovesciato

Consideriamo un piccolo disco posto in prossimità del punto più alto di un cilindro con l’asse parallelo al suolo (in presenza della gravità) come in figura ?? (questa configurazione si chiama a **pendolo rovesciato**. Sia l il raggio e x l’arco misurato dal punto più alto. Supponiamo che il disco possa scivolare senza attrito.

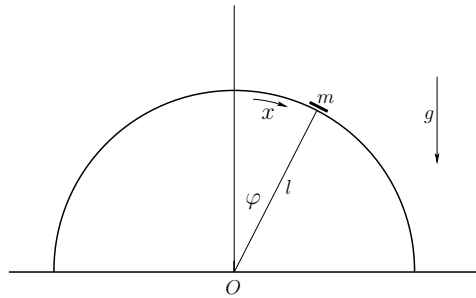


Figura 2.1: Il pendolo rovesciato

La componente della forza di gravità nella direzione del moto (tangente al cilindro) è $F = mg \sin \varphi$ (vedi figura ??): φ è l’angolo formato dal raggio che passa per il dischetto con la verticale, $\varphi = x/l$). Approssimando $\sin(x/l) \approx x/l$ (sviluppo di Taylor al secondo ordine intorno $x = 0$ e ricordando che la accelerazione tangenziale in un moto circolare vale $a = d^2x/dt^2$, la prima equazione cardinale della fisica ($\vec{F} = m\vec{a}$) dà ².

$$\frac{d^2x}{dt^2} \equiv \ddot{x} = \frac{g}{l}x \equiv \gamma^2 x \quad (2.16)$$

Si è introdotto $\gamma = \sqrt{g/l}$ per semplicità di notazione; il quadrato sta a sottolineare che si tratta di una grandezza essenzialmente positiva. Si osservi che γ è una caratteristica costitutiva del problema: ne descrive in questo caso le proprietà di forza e di inerzia (non dipende dalle condizioni al contorno o dal tempo).

Si tratta di un’equazione lineare omogenea del secondo ordine: al solito cerchiamo soluzioni nella forma generica $x = \alpha e^{\lambda t}$, cioè scegliamo una forma esponenziale di cui per ora non conosciamo l’argomento (λ) da determinare per sostituzione nella (??). Si ottiene

$$\lambda^2 = \gamma^2; \quad \text{le cui radici sono} \quad \lambda_{1,2} = \pm \gamma = \pm \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (2.17)$$

²per semplicità di notazioni indicheremo il simbolo di derivata con un punto messo sopra il simbolo della funzione da derivare, il simbolo di derivata seconda con il doppio punto ecc.

Ci sono due soluzioni per λ , che corrispondono ad una dipendenza dal tempo esponenziale rispettivamente positiva e negativa. Questo significa che abbiamo avuto successo nel cercare soluzioni esponenziali. La soluzione generale è data dalle combinazioni lineari delle due soluzioni

$$x = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} = \alpha_1 e^{\gamma t} + \alpha_2 e^{-\gamma t} \quad (2.18)$$

Al solito α_1 e α_2 sono da determinare imponendo le condizioni iniziali (problema di Cauchy) $x(0)$ e $\dot{x}(0)$, che sono rispettivamente la posizione e la velocità all'istante $t = 0$: x_0 e v_0 .

Una discussione dettagliata ci darà occasione per una osservazione importante. Imponendo le condizioni iniziali si ha:

$$\alpha_1 = \left(x_0 + \frac{v_0}{\gamma}\right) \frac{1}{2} = \left(x_0 + \frac{v_0}{\sqrt{g/l}}\right) \frac{1}{2} \quad (2.19)$$

$$\alpha_2 = \left(x_0 - \frac{v_0}{\gamma}\right) \frac{1}{2} = \left(x_0 - \frac{v_0}{\sqrt{g/l}}\right) \frac{1}{2} \quad (2.20)$$

Sostituendo in (??) si ha $x(t)$ e derivando rispetto al tempo si ha la velocità $v(t)$ in ogni istante.

$$v = \gamma \alpha_1 e^{\gamma t} - \gamma \alpha_2 e^{-\gamma t} \quad (2.21)$$

Entrambe le funzioni hanno una componente che tende esponenzialmente a 0 e un'altra che tende esponenzialmente a ∞ . (Il fatto che per tempi lunghi x e v crescano indefinitamente rappresenta il fatto che il dischetto tende ad allontanarsi sempre più rapidamente dal vertice. Naturalmente il modello matematico di (??) è valido solo finché $x/l \ll 1$ (è basato su una approssimazione al primo ordine) e diventa sempre meno aderente alla dinamica effettiva al crescere di x).

Importante: È possibile fissare delle particolari condizioni iniziali per cui una delle due componenti viene meno; infatti, fissato x_0 qualunque, se

$$v_0 = -x_0 \gamma \quad \rightarrow \quad \alpha_1 = 0 \quad (2.22)$$

Al contrario se

$$v_0 = +x_0 \gamma \quad \rightarrow \quad \alpha_2 = 0 \quad (2.23)$$

Il primo caso rappresenta dei moti particolarissimi: fissata una posizione iniziale qualunque $x(0)$, con una opportuna scelta della velocità iniziale (di segno opposto), la particella si avvicina sempre più al culmine del cilindro, progressivamente rallentando, ma non arriva mai a fermarsi del tutto e a invertire il moto. Entrambe le variabili dipendono dal tempo con un unico esponenziale di argomento negativo. **Esercizio:** mostrare che la condizione (??) corrisponde a imporre che la energia cinetica iniziale del sistema sia esattamente uguale alla energia minima che permette alla masserella m di raggiungere il punto più alto dell'appoggio semicircolare.

Il secondo caso presenta per entrambe le variabili x e v , che risultano concordi, una evoluzione temporale puramente esponenziale con argomento crescente nel tempo.

Queste due particolari configurazioni ³ sono caratterizzate da un andamento esponenziale puro di entrambe le variabili. Ne segue che il rapporto $x(t)/v(t)$ non dipende dal tempo (verificarlo e osservare che questo non è vero per la generica soluzione (??)).

Queste particolari configurazioni si chiamano **modi normali** e si selezionano con particolari scelte delle condizioni iniziali.

Un commento sulle proprietà di stabilità di questo sistema: le soluzioni (??) divergono per tempi lunghi a meno che le condizioni iniziali non coincidano con quelle del modo normale con esponente negativo. In altre parole nella configurazione speciale (??) il sistema si comporta come stabile ($x, v \rightarrow 0$), in tutti gli altri casi si comporta come instabile $x, v \rightarrow \infty$. Un comportamento di questo tipo si chiama **instabilità di sella**.

³ripetiamo che i moti che rientrano in ciascuna delle due configurazioni sono infiniti, perché la configurazione specifica un legame particolare tra x e v (?? e ??), ma il valore di x (o di v) è arbitrario.

2.2.2 L'oscillatore armonico

Un sistema dinamico di grandissimo interesse è costituito dal moto di un corpo di massa m collegato all'estremo di una molla con lunghezza a riposo l e costante elastica k . Il corpo si può muovere senza attrito su un piano orizzontale a un punto del quale mentre l'altro capo della molla è fissato in un punto P solidale col piano (vedi figura ??). Descriviamo la posizione del corpo con un sistema di assi cartesiani con origine nella posizione di riposo della massa O e con l'asse x orizzontale.

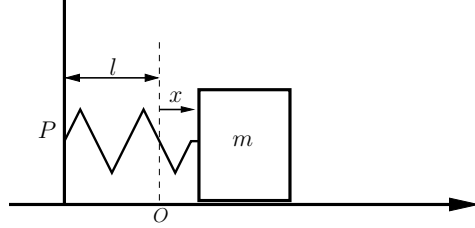


Figura 2.2: Un esempio di oscillatore armonico

Dato che la forza esercitata su m è $F = k\Delta l$ dove Δl è l'allungamento della molla, con direzione opposta ad esso, il secondo principio della dinamica ([?]) si può scrivere

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x \equiv -\omega_0^2 x \quad (2.24)$$

Qui $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ contiene la struttura del problema (forza e inerzia; al solito la forma quadratica $-\omega_0^2$ è introdotta per sottolineare che il coefficiente che moltiplica x è essenzialmente negativo).

Si tratta di trovare funzioni le cui derivate seconde sono proporzionale all'opposto delle funzioni stesse. Dal Liceo sappiamo che tali funzioni sono sin e cos. Cerchiamole nella forma $\cos(\omega t)$: ω è un parametro che si trova per sostituzione

$$\omega = \pm\sqrt{\omega_0^2} = \pm\sqrt{k/m} \quad (2.25)$$

Lo stesso risultato si ha se si usa come funzione $\sin(\omega t)$ ⁴. La soluzione generale è una combinazione lineare delle due:

$$x(t) = \alpha_1 \sin(\omega_0 t) + \alpha_2 \cos(\omega_0 t) \quad (2.26)$$

$$v(t) = \omega_0 \alpha_1 \cos(\omega_0 t) - \omega_0 \alpha_2 \sin(\omega_0 t) \quad (2.27)$$

Esercizio: trovare α_1 e α_2 supponendo note le condizioni iniziali x_0 e v_0 .

La evoluzione del sistema è caratterizzata da una oscillazione di ampiezza costante di periodo $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi/\sqrt{m/k}$.

È interessante cercare per la (??) una soluzione in forma esponenziale, cioè nella forma $x = \alpha e^{\lambda t}$. Sostituendo si trova

$$\lambda = \pm\sqrt{-\omega_0^2} \quad (2.28)$$

che non ha senso (nel campo reale). Questo si deve interpretare come una impossibilità a trovare soluzioni nella forma (??). (Infatti sappiamo già che le soluzioni sono nell'altra forma (??)). Sappiamo però che in campo complesso la (??) ha soluzioni

$$\lambda = \pm i\omega_0 = \pm i\sqrt{k/m} \quad (2.29)$$

⁴Sembra di aver trovato quattro soluzioni indipendenti, dato che per ognuna delle funzioni test si sono trovati due valori di ω ; in realtà, dato che $\sin(-\omega t) = -\sin(\omega t)$ e $\cos(-\omega t) = \cos(\omega t)$, le soluzioni indipendenti sono solo due.

i qui è la unità immaginaria ($i^2 = -1$).

Si può mantenere formalmente la soluzione della (??) nella forma (??) se anche $e^{\lambda t}$ viene interpretato in senso complesso [?] nel seguente modo: se ix è immaginario puro si definisce $e^{ix} \equiv \cos(x) + i \sin(x)$. In generale, ricordando che un generico numero complesso z può essere scritto come somma di un numero reale e di un numero immaginario puro $z = z_r + iz_i$, si estende la definizione dell'esponenziale ad argomento complesso z qualunque in questo modo:

$$e^z = e^{z_r + iz_i} \equiv e^{z_r} e^{iz_i} \equiv e^{z_r} (\cos(z_i) + i \sin(z_i)) \equiv e^{z_r} \cos(z_i) + ie^{z_r} \sin(z_i) \quad (2.30)$$

Anche nel caso di argomento complesso vale la relazione fondamentale

$$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2} \quad (2.31)$$

Inoltre le regole di derivazione degli esponenziali complessi sono formalmente identiche a quelle degli esponenziali reali [?], cioè

$$\frac{de^{\alpha z}}{dz} = \alpha e^{\alpha z} \quad (2.32)$$

Dalla soluzione in forma complessa si ottiene la soluzione che interessa estraendone la parte reale (?? o ??) ⁵ **Esercizi:**

1- ricondurre alla forma (??) il moto del pendolo semplice (l'altalena) e ottenere la legge del pendolo di Galileo $T = 2\pi\sqrt{l/g}$.

⁵Si può argomentare così: sia

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x \quad \text{con le condizioni iniziali :} \quad (2.33)$$

$$x(0) = x_0 \quad \text{e} \quad (2.34)$$

$$\dot{x}(0) = v_{x0} \quad (2.35)$$

la equazione da risolvere: qui tutto è reale. Consideriamo la stessa equazione per un'altra variabile:

$$\ddot{y} = -\omega_0^2 y \quad \text{con le condizioni iniziali :} \quad (2.36)$$

$$y(0) = y_0 \quad \text{e} \quad (2.37)$$

$$\dot{y}(0) = v_{y0} \quad (2.38)$$

e consideriamo la variabile complessa $z(t) = x(t) + iy(t)$. z è una funzione a valori complessi ma definita su valori reali di t , per cui la operazione di derivata rispetto a t non ha bisogno di commenti. Dato che le operazioni di derivata e di moltiplicazione per il numero i sono operazioni lineari, le (?? e ??) si possono comporre nella forma sintetica

$$\ddot{z} = -\omega_0^2 z \quad \text{con le condizioni iniziali :} \quad (2.39)$$

$$z(0) = z_0 = x_0 + iy_0 \quad (2.40)$$

$$\dot{z}(0) = w_0 = v_{x0} + iv_{y0} \quad (2.41)$$

la cui soluzione è

$$x = \alpha_1 e^{-i\omega_0 t} + \alpha_2 e^{i\omega_0 t} \quad (2.42)$$

$$w = -i\omega_0 \alpha_1 e^{-i\omega_0 t} + i\omega_0 \alpha_2 e^{i\omega_0 t} \quad (2.43)$$

La (??) è in effetti una coppia di equazioni: l'uguaglianza tra due numeri complessi richiede la uguaglianza sia della parte reale che della parte immaginaria. Dato che a noi interessa la sola soluzione reale, possiamo richiedere che la parte immaginaria sia nulla e che la parte reale rispetti le condizioni iniziali (??), il che richiede $\alpha_1 = \alpha_2^*$: Con semplici calcoli si ottiene $\alpha_1 = (x_0 + iv_{x0}/\omega_0)/2$ per cui la soluzione è

$$x = \frac{1}{2} \left(x_0 + i \frac{v_{x0}}{\omega_0} \right) e^{-i\omega_0 t} + \frac{1}{2} \left(x_0 - i \frac{v_{x0}}{\omega_0} \right) e^{i\omega_0 t} \quad (2.44)$$

che si può scrivere in una forma equivalente più familiare

$$x = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_{x0}}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \quad (2.45)$$

2- ricondurre alla forma (??) la legge di evoluzione della carica su un condensatore in un circuito LC in serie.

3- studiare il periodo delle oscillazioni verticali di un oggetto a forma di prisma retto (la forma delle scatole delle scarpe) galleggiante, usando la legge di Archimede (supporre che l'oggetto non ruoti).

4- come noto [?], per i sistemi meccanici in cui la energia è conservata, la equazione di moto $\vec{F} = m\vec{a}$ si può ottenere imponendo che la derivata della energia totale E sia nulla. Se la energia totale è espressa come somma dell' energia potenziale $U(x)$ e della energia cinetica $\frac{1}{2}mv^2$ dove x è una variabile che rappresenta la posizione del sistema (p.es. nel pendolo potrebbe esserere l'angolo al centro, che naturalmente sarà funzione del tempo; supponiamo che ci sia una sola di queste variabili) e $v = dx/dt$, il fatto che E sia costante nel tempo richiede che

$$\frac{dE}{dt} = 0 = mv \frac{dv}{dt} + \frac{dU}{dx} \frac{dx}{dt} \quad (2.46)$$

(derivazione di funzioni composte, [?]).

Dividendo per $v = dx/dt$ e ricordando che $dv/dt = a = \ddot{x}$ e che $\frac{dU}{dx} = -F$ [?] si ha

$$F = m\ddot{x} \quad (2.47)$$

Nota Come si vede dalla (??) il moto di un oscillatore armonico è caratterizzato da una ampiezza che né diminuisce né aumenta nel tempo. La soluzione di equilibrio è evidentemente $x = 0$; $v = 0$, ma la soluzione generale non converge ad essa né diverge nel tempo: questo sistema sfugge quindi alla classificazione di stabilità che abbiamo dato sopra. L'oscillatore armonico non è né stabile né instabile secondo la nostra definizione. Lo definiremo **conservativo**.

Un esercizio: le onde del mare. Consideriamo un sistema di vasi comunicanti costituito da un tubo ad U di sezione uniforme riempito di liquido (di densità nota ρ) e riempito fino ad un'altezza uguale alla distanza tra i rami verticali (vedi figura ?? in cui: $h = l$). La posizione di equilibrio è quella per cui il livello delle superfici libere del liquido è uguale (legge dei vasi comunicanti). Se si sposta il liquido dalla

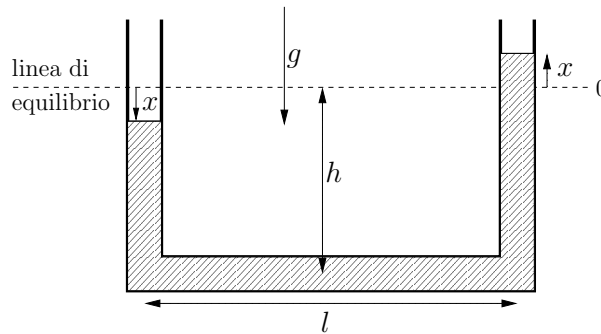


Figura 2.3: Esempio di oscillatore armonico: un modello delle onde del mare (“onde gravitazionali”). Un tubo a U di sezione costante è parzialmente riempito con un fluido pesante (area tratteggiata) che oscilla di una quantità $x(t)$. La lunghezza d’onda dell’onda corrisponde alla lunghezza l del modello. Caso $l = h$

posizione di equilibrio, per esempio applicando temporaneamente una pressione su uno dei due rami, il sistema si mette ad oscillare.

Si tratta di un sistema molto complesso da descrivere, perchè è costituito in realtà da un enorme numero di particelle che si muovono in modo diverso tra loro, sotto l’azione della gravità, delle forze dovute al contenitore, delle azioni reciproche tra le particelle stesse: un problema intrattabile.

Seguendo con un approccio da teoria dei modelli di sistemi complessi, facciamo l’ipotesi che le particelle non si rimescolino tra loro, ma tutte si muovano nello stesso modo e della stessa quantità, che chiamiamo

x . Questa grandezza diventa la incognita del nostro problema: una coordinata generalizzata che descrive (insieme con la sua derivata $v = dx/dt$) lo spostamento di ogni particella del fluido lungo il tubo in cui si trova, misurato a partire dalla posizione in cui si trova nella posizione di equilibrio (linea tratteggiata). Usando il metodo dell'energia sopra richiamato, si calcoli il periodo delle oscillazioni del fluido in funzione della distanza tra i due tubi verticali l assunto uguale ad h .

Questo semplice modello è in grado di dare conto di alcune caratteristiche del moto ondoso in mare, in particolare dà il legame tra il tempo di oscillazione T e la distanza tra le creste delle onde (detta "lunghezza d'onda"), che nel modello sono rappresentate dalla distanza l tra i tubi verticali che è assunta uguale alla altezza del liquido in movimento h : risulta

$$T \propto \sqrt{l} \quad (2.48)$$

Questo risultato è in accordo col fatto che nel mare le onde "lunghe" sono più "lente" di quelle "corte".

Un modello diverso si ottiene assumendo che $h \neq l$; in particolare si calcoli T come funzione di l nella ipotesi che h sia indipendente da l e assunto costante come illustrato in figura ??.

In questo caso si ha

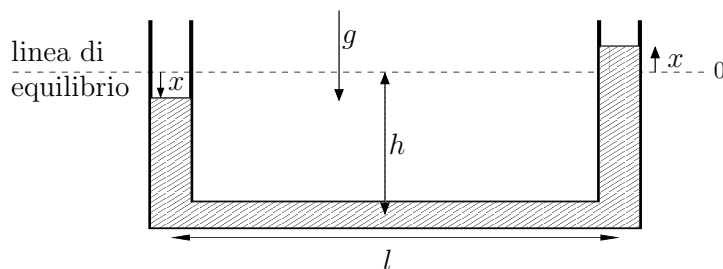


Figura 2.4: Un modello inappropriato delle onde del mare. La lunghezza d'onda dell'onda corrisponde alla lunghezza l del modello ma la profondità dell'acqua in movimento è diversa dalla lunghezza d'onda: $l \neq h$

$$T \propto \sqrt{l + 2h} \quad (2.49)$$

La espressione che risulta confermata dalle osservazioni sperimentali è la (??). Questo in qualche modo suggerisce che le onde "si estendano" fino a una profondità uguale alla loro lunghezza d'onda, in altre parole la profondità della zona d'acqua messa in oscillazione dal moto ondoso è profonda quanto la distanza tra le creste delle onde medesime. Questo è il motivo per cui il mare si intorbida di più quando le onde sono più "lunghe".

2.2.3 L'oscillatore smorzato

Come sappiamo da osservazioni quotidiane, i sistemi oscillanti tendono in realtà spesso a smorzarsi (a meno che una forza esterna non li rifornisca di energia: ne parleremo in seguito). Se prendiamo come esempio il moto di una altalena, schematizzabile come un pendolo, (vedi sopra) intuiamo che questo comportamento è dovuto all'attrito con l'aria che può essere descritto da una forza proporzionale alla velocità e ad essa contraria che si compone vettorialmente con le altre forze. Un' espressione per questa forza è $\vec{F} = -\gamma \vec{v} = -\gamma \dot{\vec{x}}$ [?]; γ dipende dal tipo di fluido e dalla forma del corpo oscillante. La equazione di moto risulta

$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - m\frac{g}{l}x \quad (2.50)$$

Si tratta di un'equazione lineare del secondo ordine che riscriviamo così

$$\ddot{x} + \nu \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2.51)$$

dove $\nu > 0$ è proporzionale al coefficiente di attrito, $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ è la velocità angolare del pendolo senza attrito (??). Esercitiemo le nostre recenti conoscenze sui numeri complessi per cercare nel modo abituale le soluzioni che ipotizziamo del tipo $e^{\lambda t}$ con λ eventualmente complesso da trovare per sostituzione. Eliminando l'esponenziale, si ottiene una equazione algebrica (che si chiama equazione algebrica associata [?]):

$$\lambda^2 + \nu \lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (2.52)$$

da cui

$$\lambda_{+,-} = \frac{-\nu \pm \sqrt{\nu^2 - 4\omega_0^2}}{2} \quad (2.53)$$

Se $\nu = 0$, $\lambda_{+,-} = \pm i\omega_0$ risulta immaginario puro e descrive una pura oscillazione conservativa che già conosciamo (??).

Per $\nu \neq 0$ si possono presentare due casi qualitativamente diversi:

primo caso: $\nu^2 > 4\omega_0^2$, si verifica se l'attrito è molto forte (pensiamo a un'altalena tale che la parte inferiore della oscillazione sia nell'acqua). L'argomento della radice quadrata risulta positivo, quindi si hanno valori reali per λ . È facile anche verificare che entrambi i valori di λ risultano negativi. Si può concludere che in questo caso la soluzione generale è una combinazione lineare di esponenziali del tempo del tipo

$$x = \alpha_+ \cdot e^{\lambda_+ t} + \alpha_- \cdot e^{\lambda_- t} \quad (2.54)$$

che tendono a 0 per $t \rightarrow +\infty$. Qualunque siano le condizioni iniziali il sistema si avvicina alla condizione di equilibrio ($x_{eq} = v_{eq} = 0$) senza compiere oscillazioni. (Si noti che questo non vuol dire che la coordinata tende monotonamente verso 0: per esercizio si mostri che per opportune scelte delle condizioni iniziali la oscillazione può superare il punto morto prima di smorzarsi definitivamente, ma lo può fare una sola volta). Un andamento tipico è riportato nella figura ??

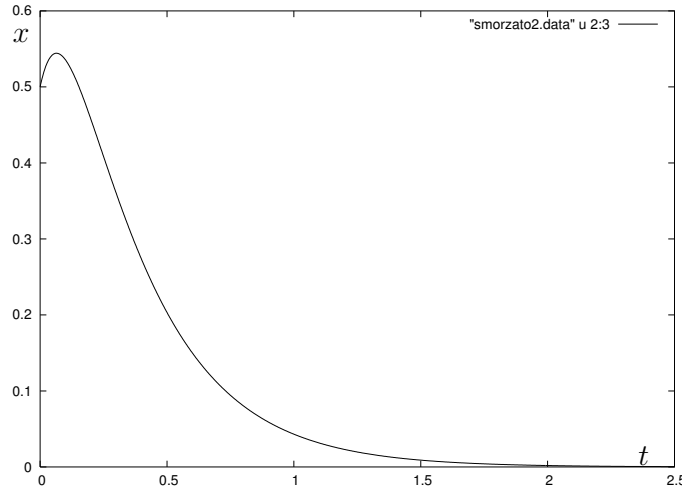


Figura 2.5: Evoluzione temporale di un oscillatore sovrasmorzato ($\nu^2 > 4\omega_0^2$). Si è posto: $\omega_0 = 1, \nu^2 = 5\omega_0^2$, $\alpha_+ = 1/2, \alpha_- = 1$

secondo caso: $\nu^2 < 4\omega_0^2$, (attrito piccolo), la radice quadrata dà un numero immaginario puro, per cui i λ risultano complessi; la parte reale è negativa ed uguale per entrambi, mentre la parte immaginaria ha

segno opposto $\lambda_{1,2} = \lambda_r + i\lambda_i = -\nu/2 \pm i\omega_1$ con $\omega_1 = \sqrt{-\nu^2/4 + \omega_0^2}$. La soluzione generale della (??) risulta

$$x = \alpha_+ e^{\lambda_+ t} + \alpha_- e^{\lambda_- t} = e^{-\frac{\nu}{2}t} (\alpha_+ e^{i\omega_1 t} + \alpha_- e^{-i\omega_1 t}) \quad (2.55)$$

La parte tra parentesi tonde si può trasformare nella solita combinazione di seni e coseni che descrive una oscillazione conservativa (??), mentre il fattore comune $e^{-\frac{\nu}{2}t}$ (reale) descrive uno smorzamento esponenziale nel tempo, così che il moto è una oscillazione di ampiezza decrescente verso la posizione di equilibrio, come riprodotto nella figura ??.

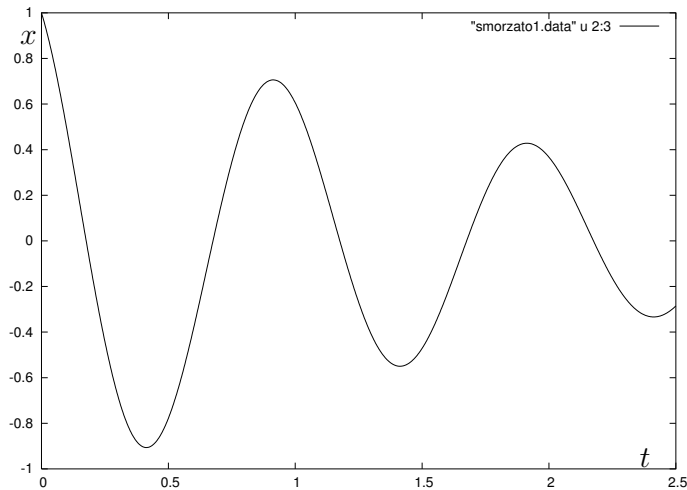


Figura 2.6: Evoluzione temporale di un oscillatore con smorzamento piccolo ($\nu^2 < 4\omega_0^2$). Si è posto: $\omega_0 = \sqrt{5} \cdot \pi$, $\nu = 4\pi$, $\alpha_+ = 1/2 + i/4$, $\alpha_- = 1/2 - i/4$

Osserviamo che per $\nu \ll \omega_0$ (al primo ordine perturbativo in ν/ω_0) la pulsazione delle oscillazioni smorzate ω_1 è praticamente uguale alla pulsazione del moto senza attrito ω_0 .

OSSERVAZIONE

Dal punto di vista della stabilità entrambi i casi sono classificati come stabili (perché il sistema evolve verso la posizione di equilibrio). Secondo una classificazione più fine il primo caso viene classificato come “stabilità nodale”, mentre il secondo come “stabilità focale”.

Esercizio:

1- mostrare che le equazioni di Kirchoff per un circuito *RLC* in serie possono essere messe nella forma (??). (Usare come incognita la carica sul condensatore).

2- mostrare che le caratteristiche fondamentali del pendolo rovesciato (in particolare la esistenza dei due modi normali rispettivamente crescenti e decrescenti nel tempo) non vengono alterate dalla presenza dell'attrito. In particolare l'attrito non è mai abbastanza forte da impedire al modo instabile di tendere all'infinito.

2.2.4 L'oscillatore instabile

È interessante considerare il caso $\nu < 0$. Prima di tutto vediamo se ci sono situazioni in cui questo si verifica: infatti un'attrito negativo, cioè una forza d'attrito che spinge nel verso del moto, non è intuitivo e non sembra comune (vedremo in seguito che varianti di questo sistema sono frequenti e importantissime in natura). Ci aiutiamo con una realizzazione un po' artificiale ma molto versatile e facile da approntare in laboratorio: un circuito elettrico con reazione positiva (vedi figura ??).

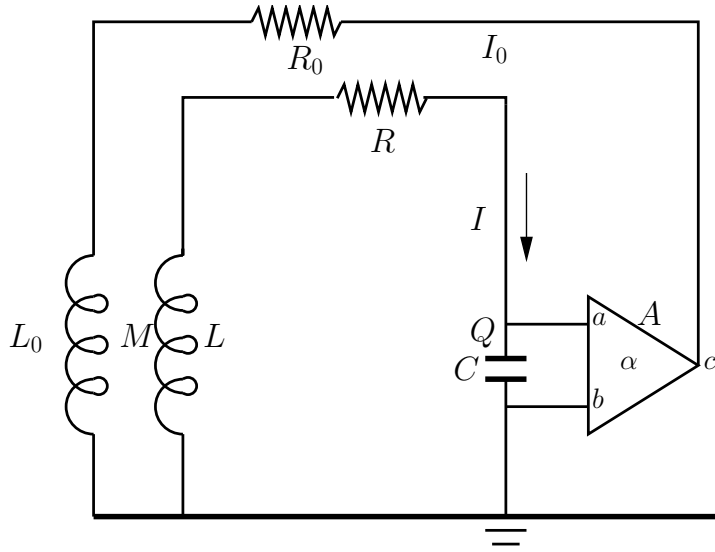


Figura 2.7: Un circuito elettrico reazionato che può comportarsi come un oscillatore instabile.

Si tratta di un circuito RLC ben noto con una importante modifica costituita dal circuito AR_0L_0 che funziona da circuito di reazione supersemplificato. Il triangolo contrassegnato con A è un amplificatore di cui ci limitiamo a dire che, data una differenza di potenziale V applicata ai suoi terminali di ingresso a e b , esso è capace di generare al suo terminale di uscita c una differenza di potenziale $\alpha \cdot V$, dove α è il guadagno in tensione (che può essere anche negativo).

Grossolanamente l'idea di base consiste nel prelevare dal circuito RLC la caduta di potenziale che si determina su un suo ramo (il condensatore C), applicarla come segnale di ingresso dell'amplificatore A e usare il voltaggio amplificato in uscita (V_c) per generare una corrente di reazione I_0 che, mediante il fenomeno della (mutua) induzione elettromagnetica, induca una forza elettromotrice aggiuntiva nel circuito primario RLC che compensi o addirittura rovesci l'effetto della caduta di potenziale su R . Se il circuito è opportunamente progettato, le equazioni del circuito primario RLC si possono approssimare come segue

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = fem \quad (2.56)$$

fem è la forza elettromotrice indotta sul circuito primario dall'accoppiamento induttivo col circuito di reazione, Q è la carica sul condensatore C .

Dalla legge di Faraday[?] si sa che

$$fem = -M \frac{dI_0}{dt} \quad (2.57)$$

dove M è il coefficiente di mutua induzione tra i due circuiti e I_0 è la corrente che scorre nel circuito di reazione AR_0L_0 .

Per trovare I_0 usiamo la legge delle maglie per il circuito di reazione:

$$\alpha V_{ab} + R_0 I_0 + L_0 \frac{dI_0}{dt} = 0 \quad (2.58)$$

$V_{ab} = Q/C$ è la differenza di potenziale agli estremi di C . Notiamo che nella (??) abbiamo trascurato il termine di mutua induzione $M \frac{dI}{dt}$ che supponiamo piccolo rispetto agli altri termini. Per semplificare

ulteriormente la matematica supponiamo anche che $R_0 I_0 \gg L_0 \frac{dI_0}{dt}$, così che in prima approssimazione possiamo assumere

$$I_0 = -\frac{\alpha}{CR_0}Q$$

Sostituendo in (??) e poi in(??) si ottiene

$$L\ddot{Q} + (R - \frac{\alpha M}{CR_0})\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = 0 \quad (2.59)$$

Tutti i coefficienti di questa equazione sono positivi eccetto M , il cui segno dipende da come sono avvolti i fili del trasformatore rappresentato dalle due bobine di coefficienti di autoinduzione L e L_0 , e α che dipende da come sono collegati i terminali di A . Per avere un oscillatore instabile bisogna che $M \cdot \alpha > 0$. Con queste precisazioni arriviamo a una versione compatta:

$$\ddot{Q} + (\gamma - \gamma_r)\dot{Q} + \omega_0^2 Q = 0 \quad (2.60)$$

dove tutti i coefficienti sono positivi eccetto γ_r che è regolabile perchè dipende tra l'altro dal guadagno α , che potrebbe anche essere negativo.

Se il guadagno α è nullo, la (??) risulta identica alla (??) e le soluzioni sono oscillazioni smorzate del tipo (??).

Se α è abbastanza grande, invece, si ha $\gamma < \gamma_r$ e la equazione assume la forma (??) ma con $\nu = -|\nu| < 0$. Formalmente le soluzioni sono ancora del tipo (??), ma il valore negativo di ν indica che, qualunque siano le condizioni iniziali, le soluzioni sono oscillazioni di ampiezza esponenzialmente crescente nel tempo. L'unica soluzione che non diverge è quella con condizioni iniziali $x = v = 0$.

Un simile comportamento caratterizza quelle che si chiamano “instabilità focali”.

Nota. I sistemi retti da equazioni del tipo (??) hanno una condizione di equilibrio ($x = v = 0$), ma basta un minimo disturbo (sempre presente nei sistemi fisici reali) che determini uno spostamento dalle condizioni di equilibrio, perché si inneschi una oscillazione, magari debolissima all'inizio, che in seguito cresce spontaneamente fino a grande ampiezza. (In generale poi succede che quando le oscillazioni sono molto grandi, meccanismi di attrito non descritti nella (??) attenuano questa crescita, ma di questo si vedrà in seguito). Anticipiamo che moltissimi fenomeni naturali rientrano, come prima approssimazione, in questa descrizione. Ecco alcuni esempi:

- 1- La formazione delle onde del mare in presenza di vento.
- 2- Le pulsazioni delle cellule cardiache. (È noto che il tessuto cardiaco e anche l'intero organo, spontaneamente pulsano anche se isolati dal resto del corpo, se vengono immersi “vivi” in una soluzione fisiologica).
- 3- Le oscillazione dell'aria all'interno degli strumenti musicali a fiato o nelle cavità orali quando si inietti un opportuno getto di aria (non oscillante). Queste oscillazioni, propagandosi attraverso l'aria, costituiscono i suoni verbali e musicali.

2.2.5 Un sistema del quarto ordine: due oscillatori accoppiati

2.3 Sistemi lineari e spazio delle fasi

In questa sezione estenderemo l'analisi a sistemi appena più complessi di quelli fin'ora studiati e introdurremo una descrizione nuova che permetterà una rappresentazione geometrica potente e intuitiva delle proprietà dei sistemi dinamici e sarà particolarmente illuminante nello studio dei sistemi non lineari che saranno studiati nell'ultima parte del corso. Al solito qui richiamiamo, semplificandoli al massimo, alcuni concetti di base. Per una formulazione più rigorosa si consiglia il bellissimo libro di Vladimir Arnold [?].

Cominciamo con una minima estensione di ciò che abbiamo imparato nei paragrafi precedenti. La equazione di moto di tutti i sistemi del secondo ordine studiati fin'ora si può mettere nella forma

$$\alpha\ddot{x} + \beta\dot{x} + \gamma x = 0 \quad (2.61)$$

se $\alpha \neq 0$ si può dividere per α ottenendo la forma generale

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0 \quad (2.62)$$

(il caso $\alpha = 0$ rientra nei sistemi del primo ordine che conosciamo già). Al variare del segno e della grandezza relativa dei coefficienti a e b si ottengono tutte le varianti fin'ora studiate. È possibile trasformare la equazione differenziale del secondo ordine (??) in un sistema di equazioni differenziali del primo ordine con un semplice trucco. Introducendo una nuova variabile incognita $v(t) = dx/dt$, la (??) diventa

$$\frac{dx}{dt} = v; \quad (2.63)$$

$$\frac{dv}{dt} = -av - bx \quad (2.64)$$

Osserviamo che nel caso dell'oscillatore x è la posizione e v è la velocità, ma negli altri casi il significato delle variabili è altro, per esempio, nel caso del circuito RLC , x è il valore della carica sul condensatore (Q), v indica il valore della corrente di maglia (I). Per questo conviene ribattezzare le variabili ponendo per esempio $x_1 \equiv x$ e $x_2 \equiv v$: si ottiene

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2; \quad (2.65)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -bx_1 - ax_2 \quad (2.66)$$

che è una formulazione più astratta, ma più generale e simmetrica e permette un'interpretazione vettoriale (nel senso degli Informatici e dei Matematici). Se si introduce infatti il "vettore" in due dimensioni

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$$

(cioè una coppia ordinata di funzioni del tempo: quando necessario indicheremo in grassetto le grandezze vettoriali) e la matrice

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

la (??) diventa

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{H}\mathbf{x} \quad (2.68)$$

Se dimentichiamo gli esempi concreti su cui abbiamo ragionato per arrivare alla (??), non avremo difficoltà ad ammettere che ci possano essere sistemi in cui H abbia la forma generica di una matrice 2×2 , (e saranno naturalmente possibili anche sistemi con dimensione maggiore di 2, cioè con un numero maggiore di incognite: ne faremo qualche esempio).

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{H}\mathbf{x} \quad (2.69)$$

Qui x_1 e x_2 non rappresentano necessariamente posizioni e velocità ma altre variabili significative di altri sistemi fisici.

Il teorema di Cauchy ancora ci garantisce che esiste una ed una sola soluzione (cioè una sola coppia di funzioni del tempo) che verifica le (??) e le relative condizioni iniziali $\mathbf{x}(0) = (x_1(0), x_2(0))$. Il futuro di

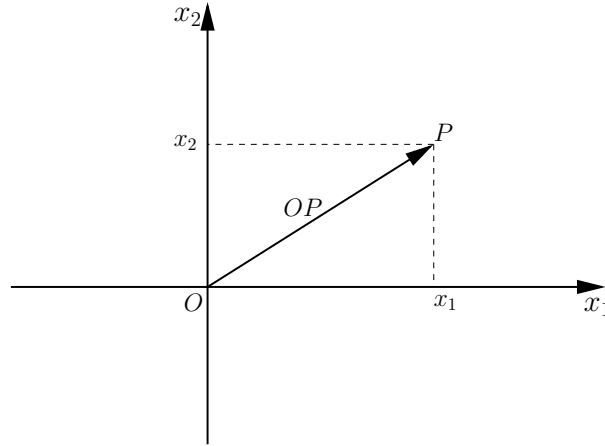


Figura 2.8: Spazio delle fasi: ad ogni punto P dello spazio corrispondono le due coordinate di fase (x_1, x_2) .

un simile sistema è univocamente determinato dallo stato del sistema stesso in un istante definito $t = 0$: per questo è detto **deterministico**.

L'insieme di tutti i possibili stati del sistema si chiama **spazio delle fasi**, che può naturalmente essere visualizzato in uno spazio cartesiano, in questo caso è il piano in due dimensioni di figura ???. In questo spazio ogni "punto" P è definito da una coppia di coordinate che sono rispettivamente i valori delle **variabili di stato** x_1 e x_2 che il sistema può assumere. C'è quindi una corrispondenza biunivoca tra i punti P dello spazio delle fasi e gli stati del sistema. Ad ogni punto P inoltre si può associare il vettore orientato \overrightarrow{OP} , dove O è l'origine delle coordinate: si introduce così il concetto di **vettore di stato**.

In due istanti diversi t^a e t^b , generalmente, le variabili x_1, x_2 avranno valori diversi e saranno diversi i corrispondenti punti rappresentativi P^a e P^b (vedi figura ???). Se le funzioni $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sono continue (noi considereremo solo casi in cui sono derivabili almeno una volta), al variare di t i punti P rappresentativi dello stato del sistema varieranno e la loro rappresentazione grafica nello spazio delle fasi sarà una curva continua (curva $P^a \rightarrow P^b$ in figura). Questa curva si chiama **traiettoria nello spazio delle fasi**: è l'insieme dei punti rappresentativi degli stati occupati nel tempo dal sistema.

Con questi concetti si può rinunciare il teorema di Cauchy nel seguente modo: per un sistema retto da una equazione differenziale del tipo (??), ogni punto P dello spazio delle fasi definisce una condizione iniziale del sistema. Da esso parte una e una sola traiettoria di evoluzione. Segue tra l'altro che le traiettorie non si possono mai incrociare (infatti, per assurdo, il punto di incrocio costituirebbe le condizioni iniziali identiche di due evoluzioni distinte.).

Lasciamo ai capitoli successivi, dove tratteremo sistemi dinamici non lineari, la illustrazione di qualche altra proprietà dello spazio delle fasi e torniamo alla interpretazione geometrica della (??). Interpretando la derivata come limite del rapporto incrementale, possiamo scrivere

$$\mathbf{x}(t + dt) \equiv \mathbf{x}(t) + \mathbf{H}\mathbf{x}(t)dt \quad (2.70)$$

che dice che se $\mathbf{x}(t)$ è lo stato del sistema nell'istante t , nell'istante $t + dt$ lo stato è dato dalla somma che compare a destra della (??), cioè le coordinate del punto rappresentativo si ottengono sommando componente per componente la piccola variazione $\mathbf{H}\mathbf{x}(t)dt$ ("piccola" in quanto la (??) è una approssimazione tanto più precisa quanto più dt è piccolo, vedi [?]: dt è da considerare quindi molto piccolo, in modo che la variazione di \mathbf{x} sia piccola rispetto a \mathbf{x} medesimo).

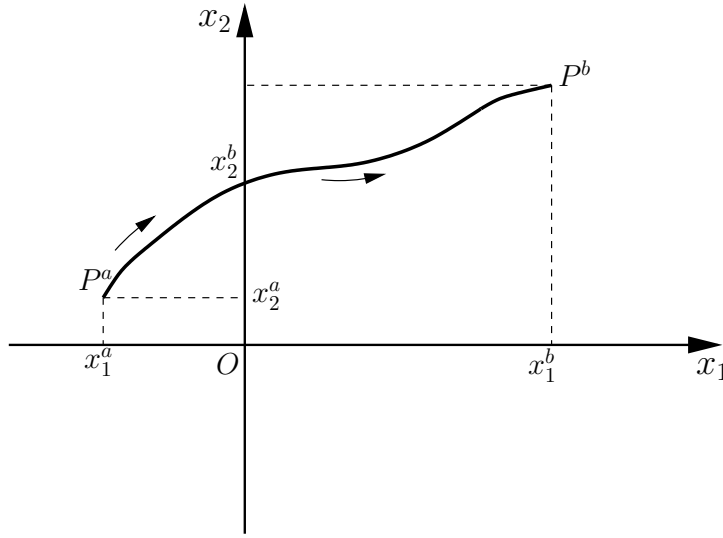


Figura 2.9: Traiettorie nello spazio delle fasi. P^a e P^b rappresentano lo stato del sistema in due istanti successivi t^a e t^b . La traiettoria è la linea $P^a \rightarrow P^b$ che passa attraverso tutti gli stati occupati nell'intervallo $[t^a, t^b]$.

Dal corso di matematica discreta [?] sappiamo che il prodotto di una matrice $n \times n$ per un vettore a n componenti dà un vettore e può essere interpretato come una funzione che associa ad ogni vettore \mathbf{z} il vettore $\mathbf{z}^1 = \mathbf{H}\mathbf{x}$. Se in questa espressione poniamo $\mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot dt$, la (??) ci dice che nello spazio delle fasi il vettore di stato del sistema nell'istante $t + dt$ si ottiene sommando al vettore di stato all'istante t la variazione $d\mathbf{x} = \mathbf{H}\mathbf{x}dt$. Naturalmente per somma si intende la somma vettoriale (componente per componente o, equivalentemente, la composizione con la regola del parallelogramma).

La figura ?? ci aiuta a dare una interpretazione geometrica di questi passaggi: in essa si è assunta per la matrice di evoluzione la forma

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

Per ogni stato P la matrice \mathbf{H} ci dice quale sarà lo stato nell'immediato futuro (per questa proprietà \mathbf{H} è detta **matrice di evoluzione**): esso sarà spostato nella direzione $\mathbf{H}\mathbf{x}$ di una quantità $d\mathbf{x}$ proporzionale a dt . Ne segue che in ogni punto $P(x, y)$ passa una traiettoria di evoluzione e $\mathbf{H}\mathbf{x}$ è un vettore ad essa tangente. Dalla (??) si vede che il modulo di $\mathbf{H}\mathbf{x}$ è uguale alla velocità con cui P si muove lungo la traiettoria: è così giustificata la espressione **campo di velocità** con cui si indica il termine che sta a destra della (??).

2.3.1 Autovalori e autovettori della matrice di evoluzione

Le proprietà di evoluzione e la stabilità dei sistemi dinamici lineari sono strettamente collegate con le caratteristiche degli autovalori e degli autovettori della matrice di evoluzione⁶.

Autovalori reali Cominceremo con lo studio del caso più semplice cioè del caso in cui gli autovalori λ_1 e λ_2 di \mathbf{H} siano reali e diversi. Siano \mathbf{e}_1 ed \mathbf{e}_2 i corrispondenti autovettori (indipendenti): essi costituiscono

⁶Ricordiamo che λ è autovalore di \mathbf{H} se $\det(\mathbf{H} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ e che \mathbf{e} è autovettore con autavalore λ se $\mathbf{H}\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}$ altrimenti detto se $\mathbf{H}\mathbf{e}$ è parallelo ad \mathbf{e} .

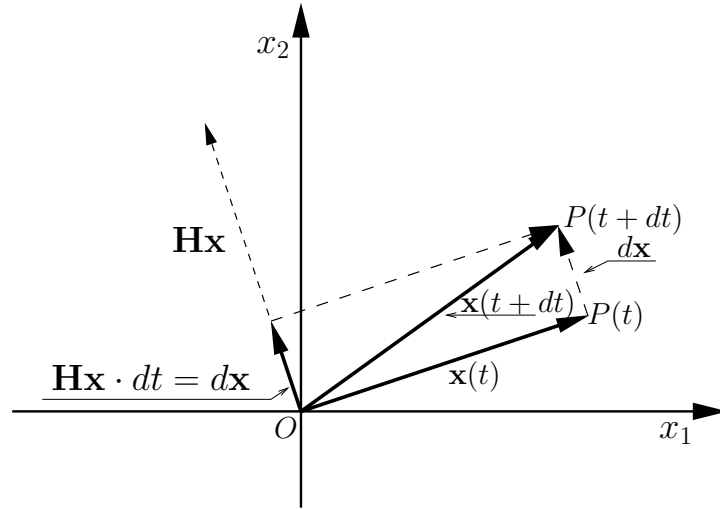


Figura 2.10: interpretazione geometrica nello spazio delle fasi della equazione di evoluzione.

una base completa per lo spazio delle fasi. In particolare ogni stato può essere decomposto in un unico modo come combinazione lineare di \mathbf{e}_1 ed \mathbf{e}_2 (vedi figura ??). Questa decomposizione vale sia per lo stato

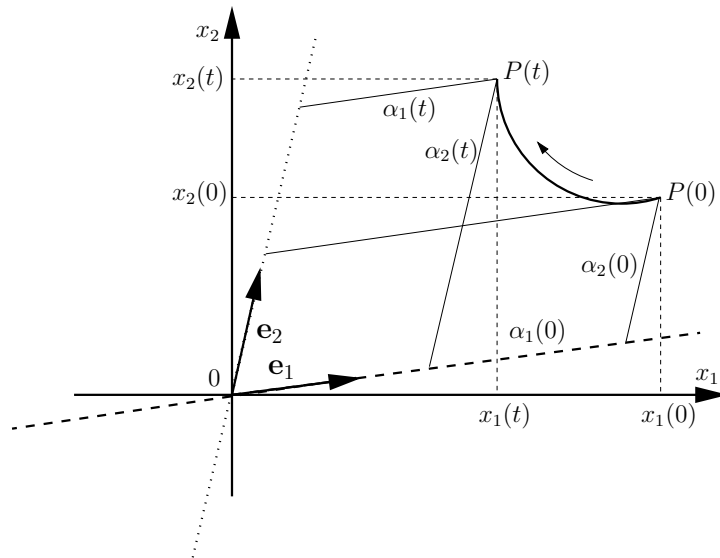


Figura 2.11: decomposizione dello stato in termini degli autovettori \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 (qui normalizzati) nei due istanti 0 e t . Le rette tratteggiate sovrapposte agli autovettori sono i corrispondenti sottospazi da essi generati: dividono lo spazio in quattro settori. La linea curva che congiunge i due stati $P(0)$ e $P(t)$ è la traiettoria di evoluzione.

iniziale $P(0) = \mathbf{x}(0) = (x_1(0), x_2(0))$ sia per ogni istante successivo, così che potremo scrivere

$$\mathbf{x}(t) = \alpha_1(t)\mathbf{e}_1 + \alpha_2(t)\mathbf{e}_2 \quad (2.72)$$

la dipendenza di \mathbf{x} dal tempo è contenuta interamente nella dipendenza dal tempo dei coefficienti α_i . Sostituendo nella (??) si ottiene

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \frac{d\alpha_1}{dt}\mathbf{e}_1 + \frac{d\alpha_2}{dt}\mathbf{e}_2 = \alpha_1\lambda_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\lambda_2\mathbf{e}_2 \quad (2.73)$$

Uguagliando termine a termine si ha

$$\frac{d\alpha_i(t)}{dt} = \lambda_i\alpha_i(t) \quad (2.74)$$

la cui soluzione è

$$\alpha_1(t) = \alpha_1(0)e^{\lambda_1 t} \quad (2.75)$$

$$\alpha_2(t) = \alpha_2(0)e^{\lambda_2 t} \quad (2.76)$$

Riassumendo: in ogni istante lo stato del sistema è una combinazione lineare degli autostati di \mathbf{H} ; i coefficienti di questa combinazione lineare dipendono dal tempo in modo esponenziale puro, con argomento dato dal rispettivo autovalore.

È importante notare che le $\alpha_i(t)$ contengono anche le condizioni iniziali rappresentate dai due valori di $\alpha_i(0)$, ma per ciascuna componente la sola condizione iniziale che conta è quella che si riferisce al corrispondente autovalore (cioè $\alpha_1(t)$ dipende da $\alpha_1(0)$ e non anche da $\alpha_2(0)$). Da questo segue un'altra proprietà importante. Consideriamo una condizione iniziale che coincida con un certo autovettore (ce ne sono ∞^1): per fissare le idee sia λ_1 l'autovalore. Ciò comporta che $\alpha_1(0) \neq 0$ e $\alpha_2(0) = 0$ da cui ancora

$$\mathbf{x}(t) = \alpha_1(t)\mathbf{e}_1 = \alpha_1(0)e^{\lambda_1 t}\mathbf{e}_1 \quad (2.77)$$

Tutti gli stati raggiunti nella evoluzione sono del tipo $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{e}_1$: un autovettore viene mandato dalla evoluzione in se stesso o, anche, la traiettoria che si diparte da un autovettore è una semiretta (o un segmento). Se $\lambda > 0$ la traiettoria viene percorsa verso ∞ , se $\lambda < 0$ il punto rappresentativo si avvicina esponenzialmente all'origine degli assi.

La rappresentazione grafica del sottospazio generato da ciascun autovettore è una retta passante per l'origine, e l'insieme dei due sottospazi corrispondenti ai due autovettori è rappresentato da due rette che si intersecano nell'origine e che dividono lo spazio in quattro settori.

Esercizi:

- 1- trovare coppie di autovettori che generano settori di 90° ;
- 2- trovare coppie di autovettori che generano rette rispettivamente parallele agli assi cartesiani;
- 3- dato un autovettore $(3, 0)$ determinare un secondo autovettore che generi con esso un settore di 45° e 30° .

Uno stato iniziale generico avrà componenti su ciascuno dei due autovettori. Ciascuna di queste componenti evolve col suo autovalore, in particolare se entrambi gli autovalori sono positivi entrambe le componenti divergono nel tempo (instabilità nodale), se entrambi gli autovalori sono negativi il punto rappresentativo converge verso l'origine (stabilità nodale), e infine se gli autivalori hanno segno opposto, una componente si riduce esponenzialmente e l'altra tende esponenzialmente verso ∞ .

Esercizi:

- 1- si mostri che in ciascuno dei casi precedenti le traiettorie non escono mai dal settore in cui si trova il punto iniziale.
- 2- si mostri anche che in tutti i casi la traiettoria tende asintoticamente ad essere tangente alla retta corrispondente all'autovalore più grande (vedi figura 13).
- 3- si calcoli la matrice di evoluzione del pendolo rovesciato (??) si calcolino autovalori e autovettori, si riconoscano in essi i modi normali e si dimostri che il sistema presenta instabilità di sella. Si rappresenti il tutto nello spazio delle fasi.

Autovalori immaginari Per quanto detto, il fatto che non ci siano autovalori reali e distinti (cioè che la equazione agli autovalori non abbia soluzioni reali) significa che nel piano delle fasi non esiste alcun vettore \mathbf{x} per cui l'incremento temporale infinitesimo $d\mathbf{x}$ sia ad esso parallelo: in altre parole la traiettoria ha sempre componenti trasversali rispetto al raggio. Ciò significa in particolare che non ci sono settori disgiunti e rette a cui le traiettorie sono asintoticamente parallele.

Per aiutarci nella interpretazione geometrica studiamo il caso dell'oscillatore armonico retto dalla equazione (??).

Con la solita corrispondenza $x \rightarrow x_1$ e $v \rightarrow x_2$ si ha

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

che non ha autovalori reali, per l'appunto. Se estendiamo la ricerca ad autovalori complessi si trova

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0 \quad (2.79)$$

con corrispondenti autovettori

$$\mathbf{e}_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 \\ \pm i\omega_0 \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

In completa analogia formale col caso reale, qualunque stato del sistema sarà rappresentabile in funzione del tempo come combinazione lineare degli autostati

$$\mathbf{z}(t) = \alpha_1 e^{i\omega_0 t} \begin{bmatrix} 1 \\ i\omega_0 \end{bmatrix} + \alpha_2 e^{-i\omega_0 t} \begin{bmatrix} 1 \\ -i\omega_0 \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

dove α_1 e α_2 sono fissate dalle condizioni iniziali.

Discutiamo in qualche dettaglio la interpretazione della estensione dello spazio delle fasi ai complessi.

Come abbiamo imparato sopra, risolvere un' equazione complessa significa risolvere due equazioni reali indipendenti; rappresentiamo il vettore complesso z nelle sue parti reale e immaginaria: $z = x + iy$, dove x e y sono vettori $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$.

In generale ci interessa una sola di queste componenti (per esempio quella corrispondente alla parte reale x). Per questo abbiamo completa arbitrarietà nella scelta delle condizioni iniziali per l'altra. Possiamo per esempio fissare uguali a 0 i valori iniziali di y , mentre siano

$$x_1(0) = x_0 \quad e \quad x_2(0) = v_0$$

le condizioni iniziali per la componente reale (x_0 è la posizione iniziale dell'oscillatore e v_0 la velocità iniziale). Con queste precisazioni possiamo calcolare le α_i

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ i\omega_0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -i\omega_0 \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

da cui si ha

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(x_0 + \frac{v_0}{i\omega_0}) \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}(x_0 - \frac{v_0}{i\omega_0}) \quad (2.83)$$

Sostituendo in (??), si ottengono $x_1(t)$ e $x_2(t)$ (che sono, lo ricordiamo, rispettivamente la posizione e la velocità del pendolo in funzione del tempo). Per esempio, ricordando che

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \quad e \quad \sin(\omega t) = \frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$$

si ha

$$x_1(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \quad (2.84)$$

che è uguale alla soluzione generale già trovata (??). Analogamente si trova

$$x_2(t) = \omega_0 x_0 \cos(\omega_0 t) - v_0 \sin(\omega_0 t) = v(t) \quad (2.85)$$

Alcune osservazioni sulla interpretazione della forma complessa dello spazio delle fasi.

Innanzitutto applicando la regola secondo cui solo la parte reale dei vettori di fase è significativa, scopriamo che i due autovettori indipendenti (??) rappresentano lo stesso stato fisico $x = 1$; $v = 0$, cioè, nello spazio reale, uno stesso punto P_0 che sta sull'asse degli stati a velocità nulla. Non solo: se consideriamo P_0 come lo stato iniziale di un sistema che evolve, scopriamo che la dipendenza dal tempo è

$$\mathbf{x}_+(t) = e^{i\omega_0 t} \begin{bmatrix} 1 \\ i\omega_0 \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

e

$$\mathbf{x}_-(t) = e^{-i\omega_0 t} \begin{bmatrix} 1 \\ -i\omega_0 \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

la cui parte reale è per entrambi

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos(\omega_0 t) \\ -\omega_0 \sin(\omega_0 t) \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

Si ottiene quindi che dal punto di vista fisico i due autovettori descrivono lo stesso stato iniziale e la stessa evoluzione: inoltre le due componenti x_1 e x_2 oscillano sinusoidalmente nel tempo, con uno sfasamento di $\pi/2$ (cioè quando una è massima o minima l'altra è nulla).

È facile verificare che se si moltiplicano i due autovettori per i , gli stati che si ottengono risultano diversi tra loro: gli stati iniziali sono posizionati sull'asse delle ordinate ($x_0 = 0$) ma con velocità opposte $\pm\omega_0$. Le evoluzioni temporali dei due stati sono date da seni e coseni del solito argomento $\omega_0 t$ come sopra e hanno in ogni istante le coordinate rispettivamente opposte. Risulta quindi che le diverse scelte degli autovettori descrivono moti identici se non per un ritardo temporale (ricordare che $\sin(\phi + \pi/2) = \cos(\phi) = -\sin(\phi + \pi)$). Questi moti sono caratterizzati da una continua oscillazione delle due coordinate x_1 e x_2 (che nel nostro caso sono la posizione e la velocità dell'oscillatore).

Esercizio:

1- si scriva esplicitamente la evoluzione temporale degli stati fisici descritti dagli autovettori e dagli autovettori moltiplicati per i e si disegnino le traiettorie nello spazio delle fasi che risultano essere curve chiuse percorse periodicamente con periodo $T = 2\pi/\omega_0$.

2- si mostri che esiste una particolare combinazione delle variabili

$$\omega_0^2 x_1^2 + x_2^2$$

che resta costante al variare del tempo, che chiamiamo $2U$ e che dipende dalle condizioni iniziali. Se ne deduce che nello spazio delle fasi le traiettorie sono ellissi di equazione

$$\omega_0^2 x_1^2 + x_2^2 = 2U \quad (2.89)$$

come in figura ???. Le ellissi hanno i semiassi sovrapposti agli assi cartesiani e risultano rispettivamente uguali a $\sqrt{2U}/\omega_0$ sull'asse delle x_1 e a $\sqrt{2U}$ sull'asse delle x_2 . Se ricordiamo che $\omega_0^2 = k/m$ si scopre che la (??) è equivalente al teorema di conservazione della energia meccanica E :

$$\frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = mU = E \quad (2.90)$$

Concludendo, nel caso che gli autovalori siano immaginari, gli autovettori non hanno più il significato grafico di indicare speciali direzioni dello spazio delle fasi che hanno la proprietà di evolvere in se stesse.

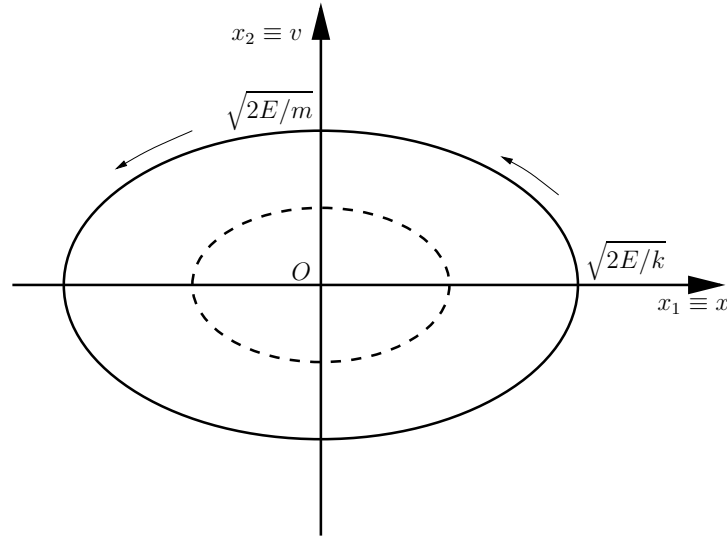


Figura 2.12: le traiettorie nello spazio delle fasi nel caso di autovalori immaginari sono ellissi la cui area dipende dalle condizioni iniziali, in particolare dalla energia E . Le curve in tratto continuo è ottenuta con energia 4 volte maggiore rispetto alla curva tratteggiata.

Le due direzioni \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 evolvono l'una nell'altra. Le traiettorie sono ellissi con dimensioni legate alla “energia meccanica”: infatti l'area della ellisse (ricordiamo la formula $A = \pi ab$, a e b essendo i semiassi)

$$A = 2\pi \frac{E}{k} \quad (2.91)$$

è proporzionale alla energia.

Autovalori complessi. Resta da estendere la nostra indagine al caso in cui gli autovalori di H siano complessi. Esempi sono forniti dall'oscillatore smorzato (??) o instabile (??) che formuliamo in forma vettoriale (al solito nel caso di sistemi meccanici $x_1 \rightarrow x$ e $x_2 \rightarrow v$).

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\nu \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{H}\mathbf{x} \quad (2.92)$$

ricordiamo che ν è il parametro che descrive l' “attrito”, positivo nei casi di effettivo smorzamento, negativo nei casi di oscillazioni instabili. Gli autovalori sono le radici della equazione associata

$$\lambda^2 - \lambda\nu - \omega_0^2 = 0 \quad (2.93)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\nu \pm i\sqrt{-\nu^2 + 4\omega_0^2}}{2} = \lambda_r \pm i\lambda_i; \quad \text{con} \quad \lambda_r = -\frac{\nu}{2}; \quad \lambda_i = \frac{\sqrt{-\nu^2 + 4\omega_0^2}}{2} \quad (2.94)$$

Discutiamo qui solo il caso $\nu^2 - 4\omega_0^2 > 0$: l'altro caso rientra nei sistemi ad autovalori reali già discusso.

Ci sono due autovalori con la stessa parte reale e con la parte immaginaria di segno opposto (questo è vero per ogni matrice a coefficienti reali per il teorema fondamentale dell'algebra). Due autovettori indipendenti sono

$$\mathbf{e}_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_r \pm i\lambda_i \end{bmatrix} \quad (2.95)$$

Se estraiamo la parte reale otteniamo per entrambi gli autovettori lo stesso punto nello spazio delle fasi, (P_A in figura 16), che si trova nel primo o quarto quadrante a seconda che λ_r sia positivo o negativo. Le leggi orarie per un sistema che evolve a partire da uno qualunque dei due autovettori sono:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda_r t} \begin{bmatrix} \cos(\lambda_i t) \\ -\lambda_i \sin(\lambda_i t) + \lambda_r \cos(\lambda_i t) \end{bmatrix} \quad (2.96)$$

Il confronto con la (??) mostra una differenza fondamentale: le oscillazioni sinusoidali che caratterizzano la evoluzione di entrambe le variabili sono moltiplicate per un fattore che dipende esponenzialmente dal tempo. In particolare se $\nu = -\lambda_r < 0$ (che è il normale caso dell'attrito) l'esponenziale tende a 0. Le variabili di fase quindi descrivono oscillazione di ampiezza esponenzialmente decrescente verso 0.

Viceversa nel caso $\lambda_r > 0$ le oscillazioni divergono in ampiezza esponenzialmente.

L'argomento dell'esponenziale è lo stesso per entrambi gli autovettori: se ne deduce che qualunque sia la combinazione degli autovettori adatta per rispettare le condizioni iniziali, le leggi orarie di entrambe le variabili contengono lo stesso fattore moltiplicativo (reale) $e^{\lambda_r t}$ e quindi la proprietà di tendere a 0 o a ∞ è comune alla evoluzione di ogni possibile stato iniziale.

Si lascia al lettore di mostrare che le traiettorie sono delle spirali esponenziali (la traiettoria interseca una fissata retta uscente dall'origine in punti che si allontanano o si avvicinano all'origine con un progresso geometrica) con fuoco nell'origine come in figura ???. Nella nostra terminologia potremo concludere

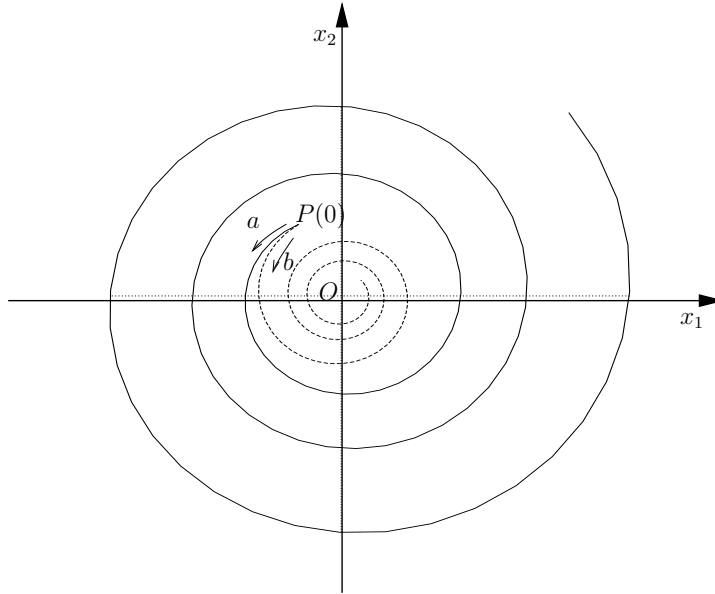


Figura 2.13: traiettorie di oscillatori con autovalori λ della matrice di evoluzione H complessi; la spirale crescente (a , linea continua) si ha per $\lambda_r > 0$, quella decrescente (b , linea tratteggiata) si ha per $\lambda_r < 0$. Per entrambi i grafici si è assunto lo stesso punto iniziale $P(0)$ e lo stesso valore di $\lambda_i = 1$, mentre per le parti immaginarie si è posto $\lambda_r = 0.06$ (caso a) e $\lambda_r = -0.06$ (caso b)

che un sistema caratterizzato da una matrice \mathbf{H} con autovalori complessi mostra un comportamento oscil-

lante, stabile o instabile a seconda del segno della parte reale degli autovalori: nel primo caso si parla di “stabilità focale” e nel secondo di “instabilità focale”.

Esercizi:

1- si calcolino α_1 e α_2 per le seguenti condizioni iniziali

a: $x_1(0) = 0$;

b: $x_2(0) = 0$;

c: $x_1(0)$ e $x_2(0)$ qualunque.

2- calcolare per ogni caso le leggi orarie.

Discutiamo brevemente il caso particolare in cui $|\nu| \ll \omega_0$ (caso di piccolo attrito o di piccola forzatura). Sviluppando in serie al primo ordine, [?], si ottiene

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\nu}{2} \pm i\omega_0 = \lambda_r \pm i\lambda_i; \quad \text{con} \quad \lambda_r = -\frac{\nu}{2}; \quad \lambda_i = \omega_0 \quad (2.97)$$

Confrontando con la (??) si ottiene che le leggi orarie sono praticamente identiche a quelle dell'oscillatore, a parte il fattore lentamente variabile nel tempo $e^{-\nu t}$. Le traiettorie nello spazio delle fasi risultano essere curve a forma di ellisse quasi chiusa, di area lentamente variabile, crescente o decrescente a seconda del segno di ν .

Dato che l'area è proporzionale alla energia, si può concludere che l'energia varia lentamente, e cresce esponenzialmente o decresce a seconda del segno di ν .

Esercizio:

mostrare che il coefficiente di variazione dell'energia è doppio di quello delle variabili di fase.

Conclusioni Resta da discutere il caso in cui la matrice di evoluzione \mathbf{H} sia arbitraria (naturalmente sempre a coefficienti reali). Anche se non troveremo comportamenti diversi dai casi sopra incontrati, avremo occasione di dare un riassunto del capitolo. Sia dunque

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{H}\mathbf{x} \quad (2.98)$$

la equazione di evoluzione. Gli autovalori sono le radici della equazione

$$\lambda^2 - \lambda(a + d) + (ad - cb) \equiv \lambda^2 - \lambda p + D = 0 \quad (2.99)$$

p e D sono rispettivamente la traccia e il determinante di \mathbf{H} .

$$\lambda_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4D}}{2} \quad (2.100)$$

Abbiamo ottenuto soluzioni che, al variare dei parametri, presentano tutte e sole le varianti che abbiamo incontrato sopra, che riassumiamo così:

Un sistema deterministico lineare in due dimensioni è caratterizzato dai suoi due autovalori e autovettori: infatti ogni stato \mathbf{x} è scomponibile in ogni istante t come combinazione lineare degli autovettori \mathbf{e}_1 ed \mathbf{e}_2 .

$$\mathbf{x}(t) = \alpha_1(t)\mathbf{e}_1 + \alpha_2(t)\mathbf{e}_2 \quad (2.101)$$

I coefficienti α_i dipendono dal tempo con esponenziali di argomento $\lambda_i t$

$$\alpha_i(t) = \alpha_i(0)e^{\lambda_i t} \quad (2.102)$$

dove gli $\alpha_i(0)$ si ottengono dalla scomposizione dello stato iniziale.

Se gli autovalori sono **reali** ($D < p^2/4$), i punti che stanno su ciascun autovettore (che risulta reale) evolvono rimanendo su di esso. Le traiettorie generiche evolvono avvicinandosi asintoticamente alla semiretta su cui sta l'autovettore con autovalore massimo senza mai attraversarla.

Se entrambi gli autovalori sono positivi ($p > 0$ e $0 < D < p^2/4$) il sistema presenta instabilità nodale; se entrambi negativi ($p < 0$ e $0 < D < p^2/4$) si ha stabilità nodale; se di segno opposto, ($D < 0$) instabilità di sella: in questo caso le traiettorie hanno forma di iperboli.

Se gli autovalori sono **complessi** ($D > p^2/4$) il sistema presenta oscillazioni che sono esponenzialmente crescenti se $p > 0$ (le traiettorie sono spirali con centro nell'origine e che vanno all'infinito) o smorzate se $p < 0$. Le traiettorie sono spirali che convergono verso l'origine degli assi.

Un caso speciale è quello in cui gli autovalori sono **immaginari puri** ($p = 0$, $D > 0$). In questo caso, come abbiamo visto sopra, il sistema oscilla indefinitamente e le traiettorie sono ellissi chiuse.

Questi risultati sono visualizzati nella figura ?? in cui i parametri p e D sono riportati sugli assi di un piano cartesiano. Il piano è diviso in settori dalle curve $p = 0$, $D = 0$, $D = p^2/4$. In ciascun settore

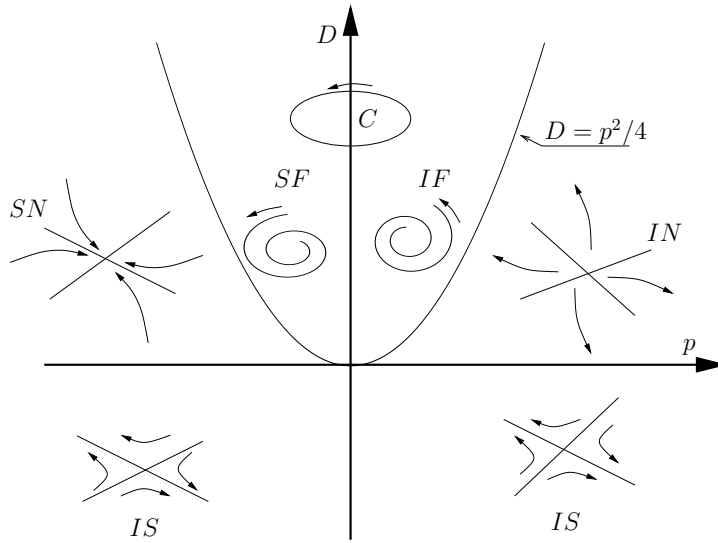


Figura 2.14: Quadro sinottico delle caratteristiche di stabilità dei sistemi lineari bidimensionali nella forma canonica (??) in funzione della traccia p e del discriminante D della matrice di evoluzione H : gli assi $p = 0$, $D = 0$ e la parabola $D = P^2/2$ dividono lo spazio dei parametri p e D in 6 regioni con proprietà di stabilità diverse simboleggiate dai diversi andamenti delle traiettorie nello spazio delle fasi. In queste rappresentazioni simboliche gli assi rappresentano gli autovettori reali quando ci sono. Nelle regioni a comportamento focale (autovalori complessi) questi assi non esistono. ($F = focale$, $N = nodale$, $S = stabile$ se in prima posizione, = *sella* se in seconda posizione, $I = instabile$)

i diversi comportamenti sono rappresentati dai diversi tipi di traiettorie. È buon esercizio ritrovare in questa figura riassuntiva tutti i comportamenti descritti fin'ora.

Capitolo 3

Cenni di teoria della risposta lineare

Limitando al minimo la matematica, introduciamo alcuni concetti elementari della teoria della risposta lineare che permette di inquadrare le proprietà di una estesissima varietà di fenomeni fisici della vita quotidiana, di macchine e di tecniche diagnostiche. Il pretesto e la occasione per illustrare alcuni aspetti di questa teoria li prendiamo dalla fenomenologia della produzione, percezione e riconoscimento dei suoni (linguistici e musicali). Un primo paragrafo ci introdurrà in alcuni aspetti fisici. Nei paragrafi successivi svilupperemo aspetti specifici e applicheremo metodi di teoria dei modelli per la loro descrizione

3.1 Il suono

3.1.1 Che cosa è il suono, come si produce

Il suono è una successione di impulsi di pressione che si trasmettono attraverso mezzi elastici. Per farsi un'idea del meccanismo si immagini che un fluido comprimibile sia sollecitato da un improvviso movimento di un piano mobile. Lo strato adiacente al piano subisce una diminuzione di volume che comporta un aumento di pressione. La differenza di pressione che si instaura tra questo strato compresso e il suo contiguo esercita a sua volta una forza su di questo che di conseguenza si muoverà comprimendo un terzo strato e così via, trasmettendo la pressione a zone sempre più lontane dal piano mobile. La percezione del suono è appunto attivata dall'azione di questa onda di pressione sul timpano dell'orecchio.

Si può mostrare che il moto di ciascuno strato è retto da leggi del tipo (??).

È importante osservare che in un fluido libero, diversamente che in un oscillatore normale, sono possibili moti oscillatori con frequenze angolari ω_0 qualunque. Da questo segue che il piano mobile sopra citato produce il fenomeno sonoro qualunque sia il suo periodo di oscillazione.

Immaginiamo ora che un tubo sia chiuso alla sua estremità da una membrana elastica in tensione, incollata su una parte del bordo e semplicemente trattenuta lungo la parte restante dalla sua stessa forza elastica. Se all'interno del tubo l'aria viene rapidamente portata a una pressione abbastanza maggiore di quella esterna, la membrana subisce una spinta e si sposterà lasciando uscire un po' di aria. Di conseguenza rapidamente la pressione interna al tubo diminuirà, mentre la membrana, per inerzia, continuerà ancora per un poco il movimento. In seguito, frenata dalla sua stessa forza elastica, la membrana invertirà il moto e tornerà nella posizione di chiusura iniziale. Di nuovo la pressione sulla faccia interna della membrana aumenterà e la successione di fenomeni si rinnoverà con un periodo caratteristico che dipende dalla massa, dalla dimensione, dalla tensione e dal coefficiente di elasticità della membrana.

Il movimento della membrana determinerà una compressione periodica degli strati d'aria esterni ad essa adiacenti: abbiamo descritto in modo rudimentale un dispositivo che produce suono. Se identifichiamo il tubo con il sistema polmoni-trachea, (in cui la compressione è mantenuta dai muscoli della cassa

toracica), la membrana con le corde vocali (in realtà le corde vocali sono costituite da due membrane, ciascuna delle quali chiude solo metà della trachea), abbiamo un modello della produzione della voce umana. In modo sostanzialmente analogo funzionano gli strumenti musicali ad ancia.

Riportando in grafico l'andamento temporale della pressione p di un suono vocale in un certo punto dello spazio avremo una successione di impulsi che si ripetono in modo regolare con un periodo che chiameremo T (vedi la figura ??). Il periodo dipende, come si è detto, dalla tensione delle corde vocali,

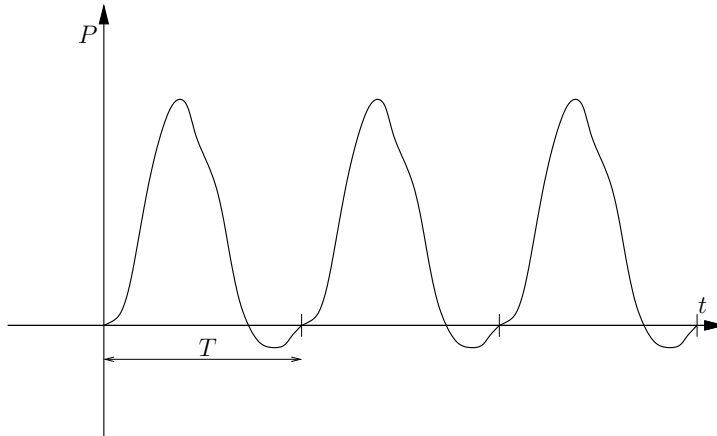


Figura 3.1: tipico andamento nel tempo della pressione di un suono vocale. P è lo scostamento della pressione dal suo valore medio $P_0 = 1 \text{ atm} \approx 10^5 \text{ Pascal}$. La compressione tipica di un suono verbale è $\approx 10^{-4} \text{ Pascal}$ mentre il periodo caratteristico è di qualche millesimo di secondo.

che è modificabile tramite la contrazione di appositi muscoli e tipicamente è di qualche millesimo di secondo. La forma degli impulsi è invece principalmente determinata dalle caratteristiche fisiche delle corde vocali (forma, ispessimenti ecc.) ed è diversa da un individuo all'altro.

3.1.2 Caratteristiche fisiche del suono: lo spettro acustico

Ci interessa qui individuare quali caratteristiche della forma degli impulsi siano correlate con le proprietà percettive dei suoni.

1-l'**altezza** o **tono**: è quella proprietà per cui distinguiamo tra suoni acuti e suoni gravi. Il suono appare tanto più acuto quanto più breve è il periodo di oscillazione T .

Ricordiamo a questo proposito che si dice **frequenza** f di un fenomeno periodico il numero delle sue oscillazioni complete che stanno in un secondo. In formule $f = 1/T$: f si misura in Hz (cicli al secondo) dal nome dello scienziato tedesco Hertz. I suoni più gravi percepiti dall'orecchio umano hanno $f = 20$ (cioè la pressione oscilla 20 volte in un secondo), i più acuti $f = 20000$. Le note musicali (do, re, mi ecc.) corrispondono a suoni di acutezza (cioè f) crescente. Tra il primo "do" della scala e il successivo la frequenza raddoppia. Il salto di altezza corrispondente si chiama **ottava**.

Le voci maschili si distinguono in prima battuta da quelle femminili per i diversi toni in cui operano; mediamente le voci femminili (e infantili) hanno frequenza doppia di quelle maschili (sono di una ottava più alte). (NB: essere "intonati" con un suono vuol dire produrre un suono con lo stesso tono del suono di riferimento).

2- la **intensità** dei suoni (cioè quella proprietà per cui distinguiamo tra suoni flebili e suoni intensi) è collegata con la pressione massima esercitata sul timpano: un suono è tanto più intenso quanto più la pressione è grande.

3- il **timbro** o **colore** è quella proprietà per cui distinguiamo il suono di due strumenti musicali (o di due persone) diversi quando producono la stessa nota. Vedremo che è anche ciò che permette di differenziare le vocali pronunciate dallo stesso individuo: questo ha un ruolo cruciale nell'uso della voce per la comunicazione linguistica.

Per capire la base fisica della sensazione di timbro bisogna però richiamare qualche ulteriore conoscenza.

Lo spettro di un suono Si è detto sopra che una oscillazione di pressione periodica è percepita come un suono con intonazione ben definita: l'altezza del tono che si percepisce dipende dalla frequenza della oscillazione f .

Un suono periodico interessante è quello in cui l'andamento nel tempo della pressione segue una legge puramente sinusoidale

$$p(t) = p_0 e^{i(\omega_0 t + \phi)} \quad (3.1)$$

Al solito solo la parte reale di p è di interesse per noi:

$$p_r(t) = p_0 \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (3.2)$$

(Ricordiamo che in un moto armonico $T = 2\pi/\omega_0$ da cui $f = \omega_0/2\pi$). ϕ è legato all'istante t_m in cui la funzione raggiunge il massimo: $t_m = -\phi/\omega_0$. L'andamento della pressione nel tempo di questo suono è rappresentatato dal grafico di figura ??:

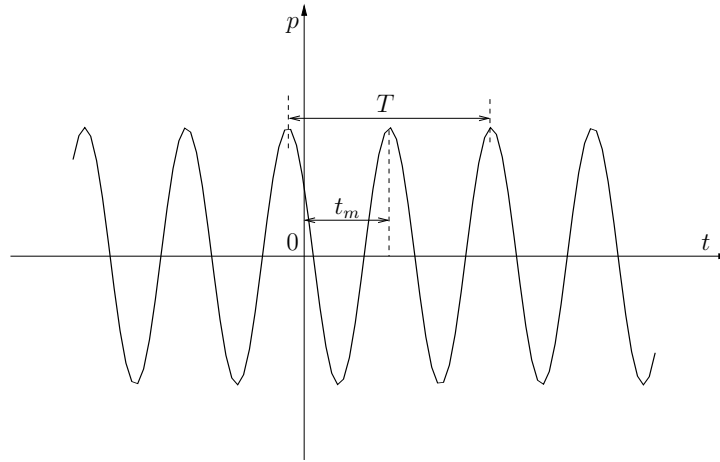


Figura 3.2: andamento nel tempo della pressione di un suono puro che segue una legge del tipo (??); t_m è lo sfasamento in unità di tempo.

questo tipo di suono è percepito come un **tono puro** e non ha alcuna “espressione” (così è per esempio il fischio emesso a volte dai canali RAI in orario notturno, quando sono sospese le trasmissioni: si tratta di un segnale di calibrazione con frequenza di poco superiore a 500 Hz).

Un suono vocale che abbia la legge oraria come rappresentato in figura ??, con lo stesso periodo fondamentale T della ??, ma andamento più complesso, viene percepito con lo stesso tono (la stessa nota) ma con **colore** diverso, per esempio potrebbe essere riconosciuto come la vocale “a”. È possibile mantenere la stessa nota (la stessa f) e cambiare la vocale, per esempio produrre una “e”. Registrando la pressione si otterrebbero un grafico leggermente diverso (??).

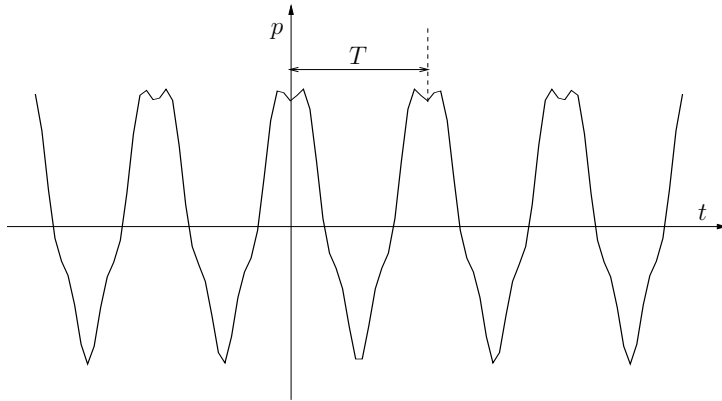


Figura 3.3: andamento nel tempo della pressione di un suono vocale. Il segnale è periodico ma non puro diversamente dalla figura ???. La percezione acustica potrebbe essere quella della lettera “a”.

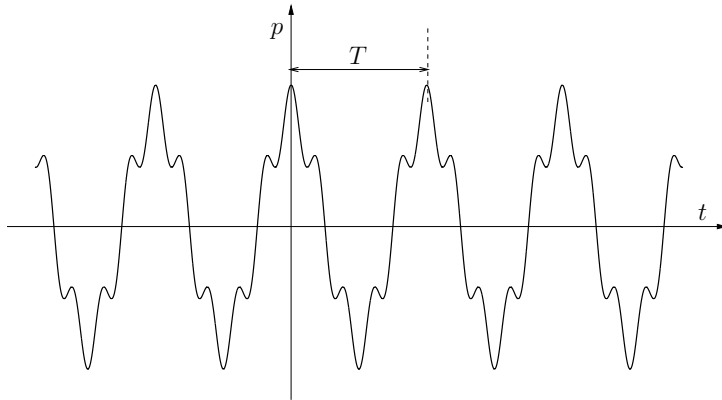


Figura 3.4: andamento nel tempo della pressione di un suono vocale percepito come “e”: ha la stessa frequenza f della vocale “a” la cui pressione è riportata in figura ??, ma una forma diversa.

Per analizzare questo fenomeno è utile ricorrere alla teoria della serie di Fourier, che si applica a tutte le funzioni periodiche (che siano integrabili su un periodo) e di cui noi qui riportiamo solo i risultati che useremo.

1- Una funzione periodica $p(t)$ di periodo T si può scomporre in una somma (eventualmente infinita) di funzioni armoniche (cioè di puri seni e coseni). In formule, supponendo che il periodo si estenda nell'intervallo $-T/2 < t < T/2$,

$$p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(2\pi k f_1 t) + b_k \sin(2\pi k_1 t) \right) \quad (3.3)$$

Dove si è posto $f_1 = 1/T$. Un suono periodico con frequenza di base f_1 è quindi scomponibile in una somma di suoni puri con frequenze f_k multiple della frequenza base: $f_k = k f_1$, $k = 0, 1, 2, \dots, \infty$. In termini musicali, ogni suono “tenuto” è la somma del corrispondente tono puro e di tutte le sue ottave superiori, dette anche **armoniche**.

Ricordiamo che spesso questa scomposizione viene scritta in termini delle “velocità angolari” ω_k invece che delle frequenze f_k : il legame tra le due è il seguente: $\omega_k = 2\pi f_k$: questo ha il solo scopo di abbreviare le formule (si elimina π).

I coefficienti a_k e b_k misurano il peso con cui le diverse armoniche entrano a far parte del suono complessivo. Più precisamente si mostra che la energia sonora contenuta nell’armonica k -esima è proporzionale a $a_k^2 + b_k^2$.

2- Per i più curiosi ricordiamo che i coefficienti a_k e b_k si possono calcolare con i seguenti integrali:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(2\pi k f_1 t) dt \quad (3.4)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(2\pi k f_1 t) dt \quad (3.5)$$

3- È chiaro che per un suono puro i coefficienti con $k \neq 1$ sono tutti nulli, e che quanto più la legge di pressione si diversifica da quella di un semplice seno (o coseno), essi diventano tanto più grandi e numerosi (naturalmente col vincolo che la energia totale deve essere costante cioè $\sum_0^\infty (a_k^2 + b_k^2) = 2/T \int_{-T/2}^{T/2} p(t)^2 dt$).

Esercizio: la scomposizione (??) si può ottenere anche usando come funzioni di base le funzioni complesse

$$p(t) = \sum_k c_k e^{i2\pi k f_1 t} \quad (3.6)$$

invece che con seni e coseni: esprimere i coefficienti c_k in termini di a_k e b_k .

La scomposizione (??) si chiama anche **scomposizione spettrale** e **spettro** si chiama la funzione che dà i coefficienti a_k , b_k o c_k in funzione di k ¹. Ad esempio lo spettro della pressione riportato alla figura ?? contiene la frequenza fondamentale con peso 1 e la terza armonica con peso 0.2 cioè

$$p(t) = \cos(2\pi f_1 t) + 0.2 \cos(6\pi f_1 t) \quad (3.7)$$

mentre lo spettro del suono di figura ?? contiene la fondamentale e la quinta armonica

$$p(t) = \cos(2\pi f_1 t) + 0.15 \cos(10\pi f_1 t) \quad (3.8)$$

Come il sistema uditivo umano estragga lo spettro dei suoni sarà studiato in seguito. Qui diamo qualche elemento di psicoacustica cioè descriviamo la correlazione tra lo spettro sonoro e ciò che percepiamo.

3.1.3 Cantare e parlare: curiosità di psicoacustica

Descriveremo in seguito i meccanismi fisici che permettono all’orecchio umano di estrarre lo spettro dei suoni. Per ora contentiamoci di dire che l’orecchio medio (timpano e ossicini) e l’orecchio interno (la coclea) costituiscono un sistema complesso che riceve come ingresso la pressione della onda sonora e dà come output un insieme di stimolazioni nervose che si accoppiano al nervo acustico che a sua volta li inoltra al cervello. Il nervo acustico è composto da circa 40000 fibre neuronali indipendenti.

La incredibile operazione che fa la coclea è quella di decomporre il suono nelle sue componenti spettrali in tempo reale: in pratica in meno di 0.1sec ne fa la analisi di Fourier, ottenendo tutti i valori dei coefficienti c_k che corrispondono alle frequenze udibili. Questi valori sono rappresentati in modo analogico

¹Nel seguito spesso rappresenteremo lo spettro di un suono con un grafico continuo, dimenticando che la nostra presentazione della funzione “spettro” la definisce solo per i valori discreti f_k . Per noi è solo una semplificazione grafica e di scrittura. In effetti se si estende la trattazione a suoni non periodici, si deve ricorrere alla trasformata di Fourier, che è definita in per ogni valore di f o (ω) ed è continua a tratti

in 40000 punti diversi della coclea, che coincidono con le terminazioni di altrettanti neuroni del nervo acustico. In altre parole alla terminazione di ogni neurone viene applicato in tempo reale un segnale in voltaggio proporzionale alla funzione spettrale del suono ad una specifica frequenza. Questo segnale (un “vettore” a 40000 componenti) è poi elaborato dal cervello.

Naturalmente non siamo in grado di descrivere i meccanismi che trasformano questo “spettro in tempo reale” in una sensazione acustica o addirittura in un contenuto linguistico; solo facciamo cenno a qualche proprietà degli esiti di questa trasformazione; saremo necessariamente molto qualitativi e ci limiteremo a ciò che è interpretabile con lo strumento matematico che abbiamo approntato (NB: classi intere di fenomeni ci sfuggono, per esempio quelli legati alla non linearità dei vari passaggi. Ricordiamo che tutta la matematica fin’ora sviluppata è lineare). Cominciamo dalla musica.

La musica Pizzicando la seconda corda (libera) di una chitarra acustica si produce una perturbazione sonora periodica; al cervello si presenta uno spettro che contiene la frequenza fondamentale f_1 e alcune sue armoniche f_i (frequenze multiple della fondamentale), con pesi $a_i = a(f_i)$ diversi, caratteristici di quello strumento musicale.

La sensazione immediatamente percepita è quella del tono fondamentale (che chiamiamo “la”), collegata con $a(\nu_1)$.

La presenza delle altre armoniche non viene percepita come la presenza di altri suoni indipendenti, ma ha l’effetto percettivo di “colorare” il suono producendo la sensazione di un suono unico con il “timbro” di quella particolare chitarra acustica. La stessa operazione fatta con una chitarra country accordata darebbe la stessa sensazione di tono “la” ma con un timbro metallico: il timbro è diverso perché è diverso il numero e il peso relativo delle diverse componenti armoniche a_i , $i \neq 1$; i rapporti tra le intensità delle diverse armoniche è caratteristico dello strumento che vibra. (Sergio Leone faceva dire al Buono: “Ogni pistola ha la sua voce”. Più precisamente avrebbe dovuto dire “ha il suo timbro”).

Se con opportuni filtri e amplificatori (ne parleremo dopo) si produce un suono che ha lo stesso spettro del precedente eccetto che per la assenza della componente armonica fondamentale, la percezione è quella di un “la” a un’ottava superiore, la stessa nota che si avrebbe se si pizzicasse la corda di cui sopra bloccandola esattamente a metà della sua lunghezza (al dodicesimo capotasto). (La frequenza fondamentale su cui oscillano corde identiche è inversamente proporzionale alla lunghezza della corda stessa).

Se vengono prodotti simultaneamente due suoni con fondamentali diverse (per esempio pizzicando simultaneamente due corde della chitarra, la prima e la seconda), al cervello arriva uno spettro che ha due serie di componenti: una è composta dalla fondamentale del “la” e da alcune sue armoniche, l’altra dalla fondamentale del “mi” e dalle sue armoniche. La sensazione che si ha in questo caso non è più quella di un suono unico, ma di due suoni diversi (per l’appunto un “la” e un “mi”, ciascuno col suo timbro).

La sensazione che si ha quando si ascolta un suono composto da suoni con fondamentali diverse è generalmente molto spiacevole: si percepisce una “stonatura”. Solo delle particolarissime combinazioni delle frequenze fondamentali suonano gradevoli: si chiamano “accordi”. A seconda delle combinazioni si hanno gli accordi “maggiori” (decisi e forti), “minori” (raccolti e sommessi), “di sesta”, particolarmente malinconici, tipici del blues, di “settima”, che preludono a un cambio di intonazione, “di settima+” rauchi e misteriosi, ecc. Aggiungiamo che la classificazione in accordi gradevoli e stonature non è universale. Indiani e Cinesi apprezzano combinazioni diverse di toni. L’accordo di sesta, del resto, è stato praticamente accettato nella cultura musicale occidentale solo dopo un secolo di musica afroamericana.

Vocali e formanti Per quanto riguarda il canto, non c’è niente di fondamentalmente diverso da quanto si è detto sugli strumenti musicali.

La voce però ha anche una funzione importantissima nella comunicazione umana. Qui tratteremo brevemente solo la fonetica e la psicoacustica delle vocali (a, é, è, i, o, ò, u, ecc.: a seconda delle lingue si possono individuare forse una dozzina di suoni diversi dal punto di vista semantico: l’informazione

contenuta in questa variabilità richiede al massimo parole di 4 bit). Le consonanti, infatti, sono piuttosto modi di passare da una vocale all'altra e di sospendere e modulare una vocale piuttosto che suoni indipendenti, come dice il loro stesso nome.

Abbiamo sopra spiegato come le corde vocali siano in grado di emettere suoni a diverse frequenze. La frequenza fondamentale (che dà la sensazione del tono) è controllata da in sistema di muscoli mediante la variazione della loro tensione (equivalente della costante elastica).

Le corde vocali hanno un moto piuttosto irregolare. Di conseguenza la forma del segnale sonoro è molto diversa da quella sinusoidale di un tono puro, essendo piuttosto simile a quello riportato in figura ???: questo comporta che il suono prodotto abbia uno spettro molto esteso, (ci sono molti c_k significativamente diversi da 0). Al variare della frequenza fondamentale, la forma generale dello spettro è piuttosto stabile per ciascun individuo, mentre è molto diversa tra individui diversi: questo particolare comportamento permette al cervello di caratterizzare e riconoscere le diverse "voci", indipendentemente dalla "nota" che stanno pronunciando. Naturalmente un piccolo ispessimento delle corde vocali, dovuto a una infiammazione o a un deposito mucoso, aumenta la massa m delle corde stesse e diminuisce la frequenza fondamentale, a parità di tensione (la frequenza di un oscillatore è data da $f = \sqrt{k/m}/2\pi$ (??) e ne risulterà modificato anche lo spettro armonico: questo spiega la voce grave e roca dei fumatori e di chi ha mal di gola.

Veniamo ora al suono vocale come veicolo di informazione linguistica.

Per prima cosa osserviamo che quando si parla, quasi sempre si fanno vibrare le corde vocali (sempre quando si pronunciano vocali; alcune consonanti invece sono pronunciate senza vibrazione, per esempio "f", "s" sorda, "z" sorda: questo si verifica facilmente appoggiando le dita sulla gola mentre si parla: quando si pronunciano le vocali e le consonanti sonore ("r", "v", "m" ecc) si percepisce una vibrazione, quando si pronunciano le altre, no; si percepisce anche che nelle plosive ("p", "t" ecc.) non c'è alcun suono, ma piuttosto una sua sospensione).

Ci si rende anche subito conto che la variazione di tono richiede una diversa tensione dei muscoli delle corde vocali (della trachea), come già sappiamo. Si faccia l'esperimento percorrendo la scala (do, re, mi ecc.) pronunciando sempre la stessa vocale, per esempio la "a": la tensione dei muscoli della gola aumenta al crescere della nota. Ma si noterà anche che le stesse note si possono eseguire pronunciando un'altra vocale. Per far questo si devono atteggiare diversamente non i muscoli della gola bensì quelli della lingua, delle labbra, delle guance ecc.: per pronunciare "a" la lingua deve essere abbastanza lontana dal palato e le labbra devono essere aperte, per la "u" le labbra devono formare una specie di tubo lungo, per la "i" la lingua deve essere molto vicina al palato ecc.

Se si confrontano gli spettri in tutte queste prove si osserva che il significato linguistico (cioè la possibilità di riconoscimento delle diverse vocali) è contenuto in una particolare caratteristica dello spettro che possiamo descrivere a grandi linee nel seguente modo. Dividiamo la parte udibile dello spettro in 4 regioni: la prima sia approssimativamente l'intervallo $150 \rightarrow 450 \text{ Hz}$, la seconda l'intervallo $450 \rightarrow 900 \text{ Hz}$ la terza l'intervallo $900 \rightarrow 1800 \text{ Hz}$ e la quarta l'intervallo $1800 \rightarrow 3600 \text{ Hz}$ (vedi figura ??). Per un suono vocale la frequenza fondamentale cade nel primo intervallo sia per voci femminili sia per voci maschili, praticamente qualunque sia la nota su cui si parli. Ciò che si osserva è che quando si pronunciano le diverse vocali, si produce una diversa distribuzione delle armoniche nei diversi intervalli di frequenza sopra elencati. Il risultato è che, a seconda della vocale pronunciata, qualcuno degli intervalli di cui sopra risulta praticamente vuoto di suono e qualche altro risulta particolarmente ricco. Schematicamente si può dire che la vocale "i" ha componenti sonore in ciascuno dei quattro intervalli, la "a" le ha nel primo e nel terzo, la "o" solo nei primi due, la "u" solo nel primo. Gli spettri corrispondenti sono riportati nelle seguenti figure.

Altri suoni vocali hanno, magari, ricco il primo e l'ultimo degli intervalli e spopolati i due intermedi (è il caso della "u" francese, non usata in Italia meridionale).

Anche se abbiamo molto semplificato la intera faccenda e in particolare gli spettri sopra illustrati hanno corrispondenze solo qualitative con la realtà, si può concludere che un modello per descrivere il "codice" linguistico dei suoni vocali è basato sulla capacità che ha il sistema fonatorio di classificarli in

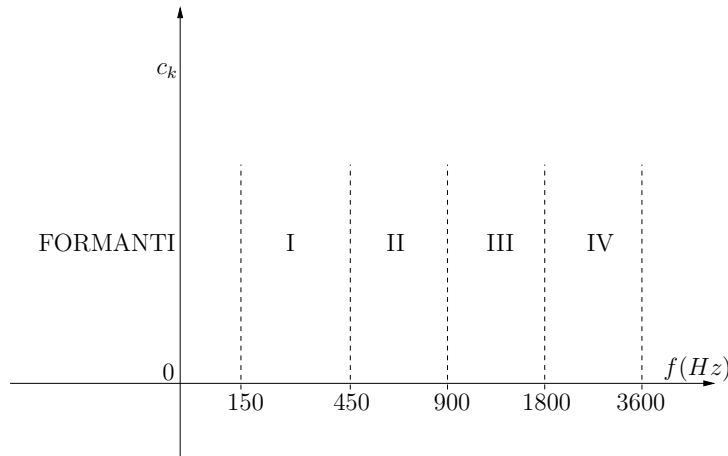


Figura 3.5: divisione dello spettro vocale nelle zone significative per il riconoscimento linguistico. Il sistema percettivo analizza il suono nelle sue componenti pure e valuta in quale di queste zone, dette “formanti” è presente qualcuna di queste componenti.

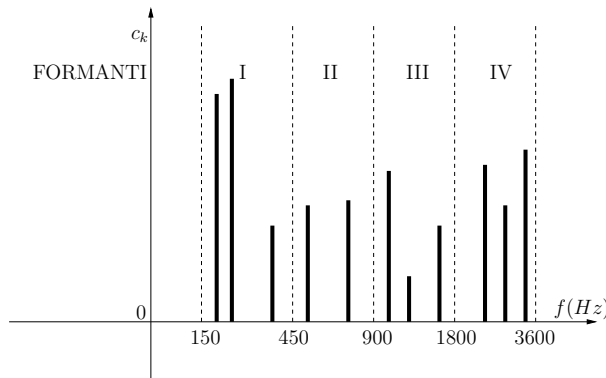


Figura 3.6: spettro qualitativo della vocale “i”. La posizione sull’asse orizzontale delle barre spesse corrisponde alla frequenza di uno dei toni puri che compongono il suono (vedi ??), mentre la altezza delle barre rappresenta la ampiezza c_k con cui tale tono puro entra a comporre il suono totale. Nel codice binario discusso nel testo abbiamo il suono (1, 1, 1, 1)

una specie di codice binario con 4 bit costituiti dai 4 intervalli dello spettro udibile, cui corrisponde la capacità dell’orecchio di analizzare lo spettro sonoro e la capacità del cervello di riconoscere lo stato di ciascun bit (cioè di capire per ciascun intervallo se ci sono o no componenti sonore abbastanza intense).

Negli studi di psicoacustica si chiamano “formanti” di una vocale gli intervalli di frequenze in cui sono presenti le sue armoniche; nella nostra grossolana descrizione le formanti sono i numeri d’ordine dei bit nello stato 1 (per esempio le formanti della “i” sono 1, 2, 3, 4, in codice binario “i” è rappresentato da 1, 1, 1, 1 le formanti della “a” sono 1, 2, in codice 1, 1, 0, 0 ecc.).

Naturalmente le cose sono più complicate, per esempio per il fatto che lo spettro sonoro che giunge all’orecchio varia molto al variare della persona che parla, della posizione, distanza, orientamento che essa assume; è alterato dalla sovrapposizione di altri suoni. Inoltre le formanti non sono uguali in tutte le

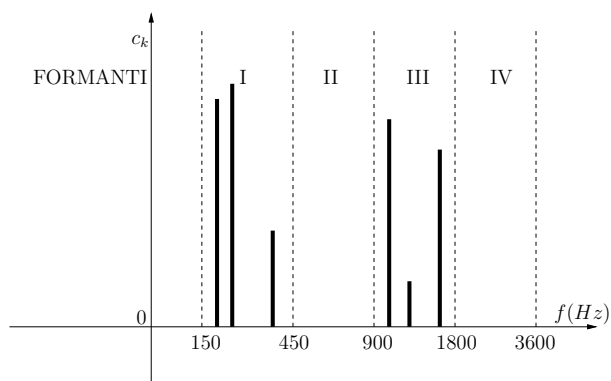


Figura 3.7: spettro qualitativo della vocale “a”. In codice binario (1,0,1,0)

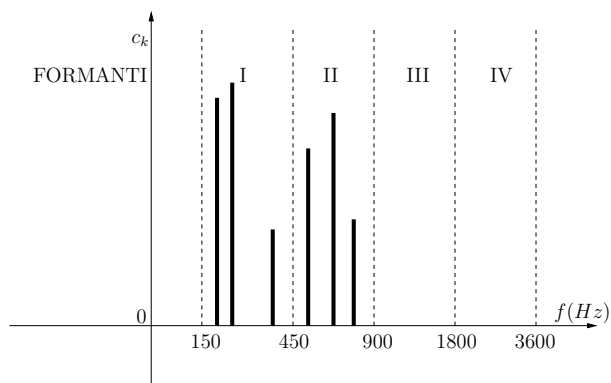


Figura 3.8: spettro qualitativo della vocale “o”. In codice binario (1,1,0,0)

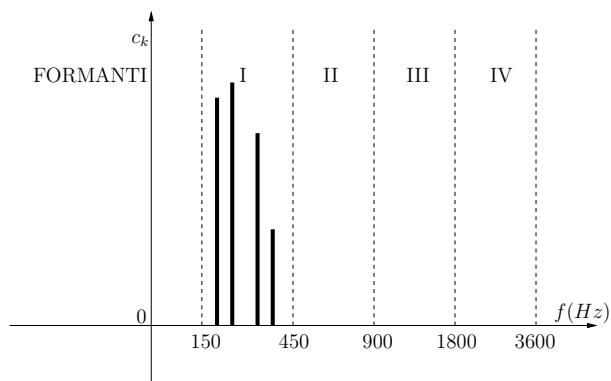


Figura 3.9: spettro qualitativo della vocale “u”. In codice binario (1,0,0,0)

lingue e dialetti e il codice in cui sono classificati i suoni sono pure diversi, se non altro per il fatto che i

suoni linguisticamente significativi sono diversi. Infine la codifica non è esattamente binaria, (cioè conta non solo la presenza di una frequenza ma anche quanto è intensa) e le formanti non sono disgiunte (cioè alcune frequenze a cavallo tra due intervalli possono essere conteggiate nell'uno o nell'altro a seconda delle caratteristiche globali del suono).

È ora il momento di apprestare gli strumenti che ci servono per descrivere come si modulano i suoni in modo che contengano le formanti desiderate e come l'orecchio interno estragga lo spettro dei suoni percepiti. Vedremo come il modello fisico che è in grado di spiegare tutti questi fenomeni è l'oscillatore armonico forzato che andiamo a sviluppare in qualche dettaglio.

3.2 L'oscillatore forzato, la funzione di risposta

Consideriamo un oscillatore armonico con attrito (un'altalena) e immaginiamolo sottoposto, oltre che alle sue forze interne, a una forza periodica applicata dall'esterno F (la spinta applicata all'altalena). La equazione di moto in forma complessa è

$$\ddot{x} + \nu \dot{x} + \omega_0^2 x = Ae^{i\omega t} \equiv F(t) \quad (3.9)$$

A è proporzionale alla intensità della forza applicata.

Si noti che la velocità angolare della forza applicata ω non è uguale alla velocità angolare del sistema ω_0 : mentre ω_0 è una proprietà interna del sistema (dipende, nel caso meccanico, da m e da k e descrive il moto spontaneo del sistema lasciato a se stesso (??)), ω descrive la periodicità di una forza applicata dall'esterno ed è arbitraria.

La (??) è una equazione lineare non omogenea di cui $Ae^{i\omega t}$ è il termine non omogeneo (o termine noto in quanto non dipende da x). Come si sa dalla analisi elementare [?], la soluzione richiede quattro passaggi:

1- trovare l'insieme delle soluzioni della equazione omogenea, che sappiamo essere della forma

$$x^{om} = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\frac{\nu t}{2}} (\alpha_1 e^{i\omega_1 t} + \alpha_2 e^{-i\omega_1 t}) \quad (3.10)$$

Fin qui la forza esterna non ha alcun ruolo. Naturalmente le soluzioni omogenee sono un insieme di dimensione pari all'ordine della equazione differenziale: nel nostro caso la dimensione è 2.

2- trovare una soluzione particolare. Lo facciamo per tentativi: supponiamo che la soluzione sia una oscillazione con frequenza identica a quella della forza applicata e di ampiezza H da determinare per sostituzione. Sia dunque $x^p(t) = He^{i\omega t}$ la funzione di prova. Sostituendo in (??) si ha

$$-\omega^2 He^{i\omega t} + i\omega\nu He^{i\omega t} + \omega_0^2 He^{i\omega t} = Ae^{i\omega t} \quad (3.11)$$

da cui si ha

$$H = \frac{A}{-\omega^2 + i\omega\nu + \omega_0^2} \quad (3.12)$$

$$x^p = \frac{A}{-\omega^2 + i\omega\nu + \omega_0^2} e^{i\omega t} = \frac{F(t)}{-\omega^2 + i\omega\nu + \omega_0^2} \quad (3.13)$$

Si osservi che la soluzione particolare è una funzione armonica **con velocità angolare uguale a quella della forza esterna ω e non con la frequenza propria del sistema imperturbato ω_0** .

3- esprimere la soluzione generale come somma delle soluzioni omogenee e della soluzione particolare

$$x^{gen} = x^{om} + x^{part} \quad (3.14)$$

4- scegliere la soluzione del problema fisico in esame, cioè determinare le α in modo che la soluzione rispetti le condizioni iniziali.

La soluzione a ogni problema ben condizionato è data da una funzione che si ottiene sommando una soluzione particolare a una opportuna soluzione omogenea, cioè sommando una oscillazione che ha la frequenza uguale a quella della forza esterna a una opportuna oscillazione smorzata con argomento uguale a quello del moto libero (senza forza esterna).

È importante notare che le condizioni iniziali entrano a determinare solo la componente omogenea, mentre la soluzione particolare è univocamente determinata dalla sola equazione di moto.

Considerando la componente omogenea si osserva che per gli oscillatori normali (cioè caratterizzati da forza d'attrito negativa: $\nu > 0$), quando $t \rightarrow +\infty$, x tende esponenzialmente a 0. Si conclude che per tempi lunghi (rispetto a $1/\nu$) la soluzione è praticamente data dalla sola soluzione particolare.

Il significato di questa proprietà è che per tempi lunghi, qualunque siano le condizioni iniziali, il sistema evolve in un modo ben preciso, determinato solo dalle sue caratteristiche interne e dalla forza esterna (e “si dimentica” delle condizioni iniziali). La evoluzione è data dalla (??) che riscriviamo nella forma

$$x^p = \frac{H}{A} \cdot f(t) = h \cdot f(t) \quad (3.15)$$

dove

$$h = \frac{1}{-\omega^2 + i\omega\nu + \omega_0^2} \quad (3.16)$$

h è detta **funzione di risposta** o **funzione di trasferimento** dell'oscillatore armonico.

Il risultato di questa analisi è che per un oscillatore armonico smorzato, forzato con una forza esterna oscillante, per tempi abbastanza lunghi, la coordinata $x(t)$ ha una dipendenza dal tempo assolutamente identica alla forza esterna eccetto che per un fattore numerico (non dipendente da t) che è per l'appunto la funzione di risposta: questa contiene, oltre alla pulsazione angolare della forza applicata, ω , solo i parametri interni del sistema (ν e ω_0 nel nostro caso).

Come si è detto, la (??) risolve il problema (??) solo se siamo interessati al comportamento del sistema per tempi lunghi (come si dice: **a regime**), ma questo è del tutto sufficiente in molti casi importanti.

È interessante considerare che succede se al nostro oscillatore viene applicata una forza esterna che oscilla con una diversa frequenza angolare ω_1 . Dal punto di vista matematico non cambia nulla se non che la “costante” h ha un nuovo valore, che si ottiene sostituendo nella (??) il nuovo valore di ω_1 al posto di ω .

Capiamo così perché la “costante” h è chiamata “funzione” di trasferimento: essa è in effetti costante rispetto alla variabile libera della equazione di moto t , ma è funzione della velocità angolare ω della forza esterna con cui facciamo l'esperimento.

La (??) e la (??) sono relazioni complesse che conviene considerare con attenzione. Come ogni numero complesso, h si può scrivere in rappresentazione polare

$$h = h_r + ih_i = |h|e^{i\varphi} = |h|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \quad (3.17)$$

dove h_r e h_i sono rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria di h , $|h| = \sqrt{h_r^2 + h_i^2}$ e

$$\varphi = -\arctan \frac{h_i}{h_r} \quad (3.18)$$

Sostituendo dalla espressione di h (??) si ha

$$\varphi = \arctan \frac{\omega\nu}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (3.19)$$

e

$$|h| = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \nu^2\omega^2}} \quad (3.20)$$

La fase φ misura la distanza temporale δt tra l'istante in cui la risposta $x(t)$ è massima e l'istante in cui è massima la forza applicata $F(t)$, più precisamente risulta

$$\delta t = \varphi/\omega$$

non sarà per noi molto importante. È invece importante la forma di $|h|$, che quindi studiamo in dettaglio.

La risonanza Come primo passo consideriamo il caso di assenza di attrito ($\nu = 0$). $|h|$ è pari in ω , sempre positiva, vale $1/\omega_0^2$ in $\omega = 0$ e tende a 0 quando $\omega \rightarrow \infty$. È discontinua per $\omega = \omega_0$, punto in cui $|h| \rightarrow +\infty$.

Per capire questo comportamento, ricordiamo che $|h(\omega)|$ dice quanto è ampia la oscillazione ($x(t)$) di un oscillatore qualora sia sottoposto a una forza esterna alla frequenza angolare ω . (Ripetiamo che qui stiamo studiando la oscillazione che si osserva dopo che il sistema, sotto l'azione della forza esterna $F(t)$ (??), si è stabilizzato: essa ha la frequenza della forza esterna ω e non la frequenza caratteristica dell'oscillatore, che è ω_0 , mentre la sua ampiezza è data dalla ??).

La divergenza di $|h|$ a $\omega = \omega_0$, detta **risonanza**, significa che se si sollecita un oscillatore con una forza che abbia la frequenza esattamente uguale a quella propria, le “spinte” si accumulano indefinitamente e la oscillazione diventa sempre più ampia: a rigore un simile sistema non si stabilizza mai (in questo caso speciale infatti la soluzione particolare ha forma $x^p(t) = \alpha t e^{i\omega t}$).

Allo stesso modo per $\omega \neq \omega_0$ le spinte si accumulano per alcuni cicli, ma in seguito le oscillazioni tendono a sfasarsi rispetto alle spinte, così che da un certo istante in poi il sistema non assorbe più energia netta dal lavoro della forza applicata per la mancanza di sincronismo tra il moto spontaneo e la spinta stessa. Questo “istante di saturazione” viene raggiunto tanto più presto quanto più grande è la differenza tra ω e ω_0 , e questo dà una spiegazione qualitativa del fatto che $|h|$ diminuisce al crescere di $|\omega - \omega_0|$.

Il comportamento per $\omega \rightarrow \infty$ si capisce se si considera che se si applica una forza con oscillazioni molto rapide, il sistema, “non fa in tempo” a mettersi in moto durante ciascuna spinta e la oscillazione risultante resta molto piccola ($h \rightarrow 0$).

Infine è interessante considerare il caso $\omega \rightarrow 0$ per cui $h \rightarrow 1/\omega_0^2$. Si lascia al lettore di mostrare che questo corrisponde a uno spostamento x dell'oscillatore tale che istante per istante la forza elastica kx annulla esattamente la forza esterna F .

Nel caso più generale di $\nu > 0$ (presenza di attrito), il comportamento per $\omega \rightarrow 0$ e per $\omega \rightarrow \infty$ è inalterato, mentre molto diverso è il comportamento intorno alla risonanza: $|h|$ non presenta divergenze ma un massimo per

$$\omega = \omega_{max} = \sqrt{\omega_0^2 - \nu^2/2} \quad (3.21)$$

e il valore massimo di $|h|$ è

$$|h|_{max} = \frac{1}{\nu\omega_0\sqrt{1 - \nu^2/4\omega_0^2}} \quad (3.22)$$

Se il coefficiente d'attrito è molto piccolo ($\nu/\omega_0 \ll 1$), le (?? e ??) si possono approssimare (al primo ordine in ν/ω_0): si ottiene

$$\omega_{max} = \omega_0 \quad (3.23)$$

e

$$|h|_{max} = 1/\nu\omega_0 \quad (3.24)$$

Dunque il grafico di $|h|$ ha la forma di una campana che ha il massimo in $\omega = \omega_0$ e il cui valore massimo è inversamente proporzionale a ν . È interessante calcolare la “larghezza” di questa campana, cioè la distanza $\Delta\omega$ tra i punti A e B in figura, definiti in modo che $|h(\omega_A)| = |h(\omega_B)| = 1/2|h_{max}|$. Risulta

$$\Delta\omega = \nu \quad (3.25)$$

La “campana”, quindi, fissato ω_0 , al crescere di ν risulta più bassa e larga. Nella figura ?? è riportato l'andamento di $|h(\omega)|$ per diversi valori dei parametri. Si noti come la posizione del massimo dipenda molto poco dal rapporto ν/ω_0 : si nota un leggero spostamento verso le basse frequenze.

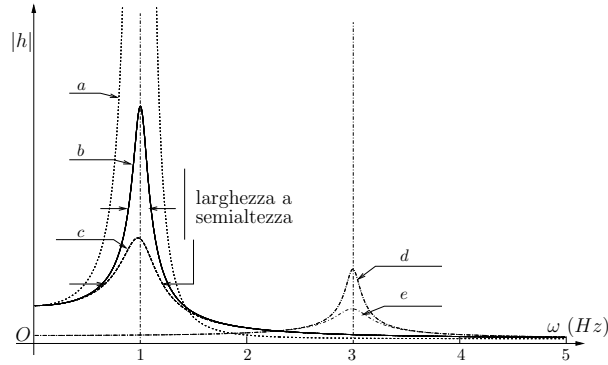


Figura 3.10: grafico di $|h(\omega)|$ per diversi valori di ω_0 e ν ; a): $\omega_0 = 1$, $\nu/\omega_0 = 0$; b): $\omega_0 = 1$, $\nu/\omega_0 = 1/3$; c): $\omega_0 = 1$, $\nu/\omega_0 = 1/7$; d): $\omega_0 = 3$, $\nu/\omega_0 = 1/3$; e): $\omega_0 = 3$, $\nu/\omega_0 = 1/7$

la produzione di suoni vocali Nei paragrafi precedenti abbiamo anticipato che le vocali si differenziano per la forma del loro spettro, cioè per la presenza di componenti sonore in zone di frequenze caratteristiche della vocale stessa (dette formanti). (Più precisamente contano i rapporti delle intensità sonore nelle diverse zone dello spettro: per intendersi la formante 4 viene considerata “presente” se la intensità dei suoni nella zona 4 supera, poniamo, lo 0.001% della intensità totale di tutto il suono).

Per capire come l'apparato fonatorio riesca a modulare gli spettri in modo da far comparire le formanti significative delle diverse vocali consideriamo che cosa succede quando un segnale che chiamiamo **ingresso** $In(t)$ viene applicato a due successivi oscillatori in serie A e B , ciascuno dei quali è caratterizzato dalla sua funzione di trasferimento

$$h_a = \frac{1}{-\omega^2 + i\omega\nu_a + \omega_a^2}; \quad h_b = \frac{1}{-\omega^2 + i\omega\nu_b + \omega_b^2} \quad (3.26)$$

ω_a , ω_b , ν_a e ν_b siano i rispettivi parametri caratteristici.

Con la espressione “in serie” intendiamo che il segnale In è applicato all'oscillatore “A” come forza esterna e provoca una sua risposta $Out_a(t)$; questo segnale di uscita viene poi utilizzato come forza esterna di ingresso per l'oscillatore B , (cioè $Out_a = In_b$). A sua volta B risponderà con una risposta Out_b che si può considerare come la risposta complessiva Out_{tot} del sistema composto $A * B$ sottoposto all'ingresso In .² Uno schema di collegamento illustrato in figura.

Per fissare le idee, supponiamo che il segnale di ingresso abbia uno spettro $In(\omega)$ come in figura ?? (la sua serie di Fourier contiene tutte le frequenze con peso circa equivalente, nella zona spettrale udibile).

Come sappiamo, il segnale $In(t)$ si può esprimere come composizione di tutte le sue componenti, cioè come combinazione lineare di una serie di oscillazioni pure, alle diverse frequenze armoniche ω_k , come specificato nella (??).

²In realtà quando si collegano due oscillatori in modo da utilizzare il segnale di “uscita” di uno per pilotare l'altro, generalmente si perturba il funzionamento di entrambi, così che le rispettive funzioni di trasferimento risultano più o meno alterate. Di questo fenomeno si può facilmente tener conto, ma qui ci limitiamo ad affermare che non influisce sulla sostanza della nostra discussione.

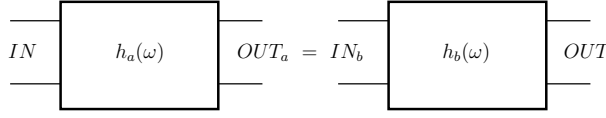


Figura 3.11: disposizione in serie di due oscillatori: il segnale IN è applicato al primo (A) e da esso modificato secondo la sua funzione di risposta h_a . Il segnale in uscita da A è inviato come segnale di ingresso al secondo oscillatore B , che ha funzione di trasferimento h_b . Il segnale risultante OUT risente moltiplicativamente di entrambe le funzioni di trasferimento.

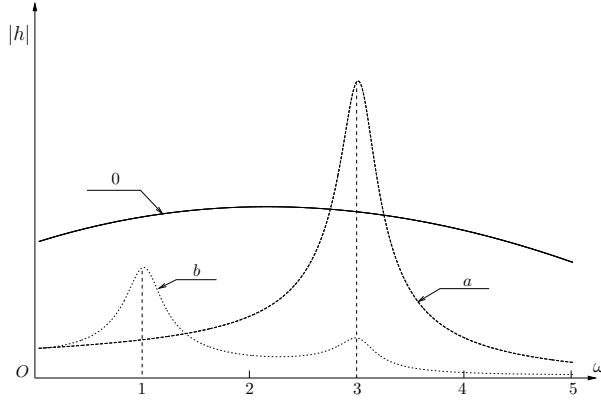


Figura 3.12: spettro del segnale all'ingresso (0), nel punto intermedio (a) e all'uscita (b) del circuito di figura ???. Nell'esempio per il primo oscillatore si è assunto $\omega_{0A} = 3$ e per il secondo $\omega_{0B} = 1$, mentre per entrambi si è preso $\nu/\omega_0 = 1/7$. Lo spettro di ingresso (0) ha tutte le frequenze con peso approssimativamente uguale, nel punto intermedio (a) lo spettro presenta un massimo pronunciato intorno alla frequenza $\omega = 3$ e in uscita (b) presenta due massimi in corrispondenza di $\omega = 1$ e $\omega = 3$.

La equazione di moto del primo oscillatore è data dalla (??) in cui $F(t) = In(t)$ è esplicitata in forma complessa:

$$\ddot{x} + \nu_a \dot{x} + \omega_a^2 x = In(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e^{i \frac{2k\pi t}{T}} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e^{i \omega_k t} \quad (3.27)$$

Ricordiamo che la soluzione particolare di un sistema lineare in cui la forza esterna è combinazione lineare di più termini (con coefficienti dati) è data dalla combinazione lineare (con gli stessi coefficienti) delle soluzioni particolari che si avrebbero se al sistema fossero applicate le singole forze esterne separatamente [?].

Ne segue che il primo oscillatore dà in uscita un segnale composto da tutte le componenti presenti in In , cioè da tutti i segnali puri alle frequenze ω_k , ma la ampiezza di ciascuna componente del segnale di uscita, a_k , è data dal prodotto della corrispondente ampiezza in ingresso moltiplicata per la funzione di risposta del primo oscillatore calcolata per ω uguale alla particolare frequenza considerata, cioè $a_k = h_a(\omega_k) \alpha(\omega_k)$.

Il segnale in uscita sarà quindi

$$Out_a(t) = \sum_{k=1}^{\infty} h_a \omega_k a_k e^{i \omega_k t} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{i \omega_k t} \quad (3.28)$$

Lo spettro del segnale di uscita di A contiene tutte le frequenze ω_k del segnale di ingresso con peso b_k che si ottiene moltiplicando il peso di ingresso a_k per la funzione di trasferimento $h_a(\omega_k)$ a quella frequenza. Dato che h_a ha un massimo pronunciato intorno alla frequenza di risonanza del primo oscillatore, che abbiamo indicato con ω_a , lo spettro $Out_a(\omega_k)$ sarà pure caratterizzato da un massimo pronunciato intorno a $\omega_k = \omega_a$ (fig 31).

Se il segnale $Out_a(t)$ così ottenuto viene a sua volta inviato come ingresso al secondo sistema oscillante, caratterizzato dalla funzione di risposta $h_b(\omega)$, analogamente si avrà in uscita un segnale composto da tutte le frequenze presenti in $Out_a \equiv In_b$, ma con ampiezze a loro volta moltiplicate per $h_b(\omega_k)$. Lo spettro del segnale di uscita finale Out_b sarà quindi caratterizzato da due massimi pronunciati in corrispondenza delle risonanze dei due oscillatori: ω_a e ω_b (vedi fig.32). In formule

$$Out_{tot}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} h_a(\omega_k) h_b(\omega_k) \alpha_k e^{i\omega_k t} \quad (3.29)$$

e

$$Out_{tot}(\omega_k) = h_a(\omega_k) h_b(\omega_k) \alpha_k = h_{tot}(\omega_k) \alpha_k \quad (3.30)$$

Riassumendo, ogni passaggio attraverso un sistema oscillante fa comparire, nello spettro finale, un massimo in coincidenza con la frequenza interna di quell'oscillatore.

Su questo meccanismo è basata sostanzialmente la capacità del sistema fonatorio di produrre dei suoni caratterizzati dalle frequenze significative dal punto di vista linguistico (le formanti).

Schematizzando si può dire che le diverse cavità dell'apparato fonatorio (per esempio la cavità che sta tra la lingua e il palato) funzionano come oscillatori. Ciò che oscilla è l'aria all'interno delle cavità, che può oscillare rimbalzando da una parete all'altra della cavità stessa. Ammassandosi l'aria contro una parete, si determina vicino a quella parete un aumento di pressione che costituisce la forza di richiamo elastica; questa respingerà l'aria verso la parete opposta, determinando la oscillazione. La frequenza di risonanza ω_0 di un tale sistema dipende dalla massa totale dell'aria in esso contenuta e dalla sua forma.³ Cambiando la forma della cavità, (che otteniamo con la contrazione o il rilassamento dei muscoli dell'apparato fonatorio quando pronunciamo le diverse vocali), cambia la frequenza di risonanza della cavità stessa.

La "forza esterna" che eccita questo sistema oscillante è costituita dai getti d'aria che provengono dalle corde vocali o da altre cavità e che sono iniettati attraverso opportune aperture di ingresso. Analoghe aperture inoltrano il segnale di uscita verso ulteriori cavità e infine all'aperto.

Per riassumere: le corde vocali modulano il segnale di pressione che attiva la intera catena. A questo stadio il segnale ha una periodicità ben definita che determina la frequenza fondamentale (abbiamo visto nelle pagine precedenti che questo aspetto ha grande importanza nel canto perchè è collegato alla intonazione). Ad essa si accompagnano parecchie armoniche con intensità non molto diverse tra loro (come è il caso dello spettro 0 di figura ?? o, più propriamente come per lo spettro della "i" di figura ??).

Questo segnale di pressione agisce come forza esterna su un primo oscillatore, costituito da una delle cavità della gola, che dà come uscita un suono in cui alcune frequenze sono rinforzate (quelle vicine alla frequenza propria della cavità che è determinata dalla sua forma) e altre attenuate (spettro a di figura ??). Passaggi attraverso cavità successive rinforzano o attenuano altri gruppi di frequenze fino a "formare" lo spettro desiderato (spettro b di figura ??).

È interessante osservare che le formanti significative per il riconoscimento linguistico delle vocali si collocano tutte in zone di frequenza più alte rispetto alle frequenze fondamentali del suono vocale, così che la percezione della acutezza del suono (che definisce la "intonazione", fondamentale per il canto) è indipendente dal riconoscimento linguistico. Questa descrizione del fenomeno acustico dà ragione di un curioso fenomeno di cui possiamo avere una facile esperienza diretta.

³NB: in effetti una cavità di una certa forma si comporta come un sistema di molti oscillatori che possono oscillare simultaneamente. Le frequenze di questi oscillatori dipendono dai dettagli della forma della cavità stessa. Per la sostanza della nostra discussione questo aspetto non è determinante

Per prima cosa dobbiamo renderci conto che quando parliamo abbiamo due modalità diverse di pronunciare le lettere dell'alfabeto: il modo "sordo" e quello "sonoro". Se prestiamo attenzione al suono che produciamo parlando normalmente, ci accorgiamo che nella parola "sorriso" la prima "s" è pronunciata senza vibrazioni delle corde vocali, diversamente dalla seconda. Ai due diversi suoni corrispondono tensioni diverse di alcuni muscoli della gola (sono quelli che tendono o rilassano le corde vocali). Si percepisce chiaramente la differenza "meccanica" tra i due "suoni" anche appoggiando le dita sulla gola: mentre si pronuncia la seconda "s" (quella "sonora") si avverte una vibrazione, che è del tutto assente nella prima. (Per esercizio si verifichi che tutte le vocali sono sonore, mentre non lo sono, per esempio, la "f", la "th" inglese, a volte la "s" e la "z" ecc.).

Dopo tutto quello che abbiamo detto sopra, ci aspetteremmo che tutti i suoni linguistici fossero "sonori": infatti sappiamo che la "vibrazione" delle corde vocali dà la periodicità della frequenza fondamentale. E la cosa non finisce qui. È facile infatti verificare che in realtà si può benissimo comunicare linguisticamente pronunciando tutti le lettere in modalità "sorda": anzi, questo modo è utilizzato nella via quotidiana, per esempio quando si susurra o quando si ha mal di gola. In questo modo la parlata risulta perfettamente intelligibile anche se solo a breve distanza (e richiede una grande quantità di fiato). Notiamo che in entrambe le modalità la pronuncia delle diverse vocali richiede i medesimi movimenti e tensioni di labbra, lingua, guance e mascella.

A 'sto punto non ci resta che fare una controprova. Proviamo a cantare un pezzo musicale in modalità "sonora": notiamo che per produrre le diverse note non è per niente necessario muovere le cavi della bocca. Se si canta senza attivare alcun muscolo della bocca, il brano musicale si riconosce con chiarezza (e ovviamente si perde completamente il testo). Se al contrario proviamo a "cantare" un'aria di una canzone in modo "sordo", uno sfortunato uditor capirà benissimo il testo ma non riuscirà a riconoscere una sola nota, nonostante i vostri sforzi (provare per credere).

Il nostro modellino dà ragione di questi fenomeni: il tono di un suono (e quindi l'aspetto musicale) esiste solo se c'è una vibrazione con una periodicità ben definita. Questa vibrazione, che ha generalmente la frequenza compresa tra 200 e 600 Hz , è prodotta dalle corde vocali quando si opera in modalità "sonora". La eventuale presenza e distribuzione di componenti sonore alle alte frequenze (a frequenze multiple della fondamentale e su cui operano le cavità orali quando si "pronuncia" un testo modulando le formanti) ha poca importanza musicale.

Al contrario in modalità "sorda" le corde vocali non vibrano e non si produce alcuna oscillazione periodica della pressione dell'aria. Il "suono" che si percepisce è il fruscio prodotto dal violento flusso di aria attraverso la strozzatura della gola. Questo flusso si rompe in piccoli vortici irregolari accompagnati da fluttuazioni di pressione molto disordinate, caratterizzate da uno spettro in cui sono presenti moltissime frequenze con intensità approssimativamente uguali (in gergo "spettro bianco"). Questo non permette la identificazione di alcuna "intonazione" musicale, perché tra 200 e 600 Hz sono presenti innumerevoli componenti sonore. Nella zona di alta frequenza di questo spettro disordinato e molto fitto di frequenze, in compenso, le cavità orali possono sovrapporre una modulazione che permette al sistema percettivo di riconoscere le formanti e quindi di rintracciare il significato linguistico.

Come ultima osservazione aggiungiamo che la "intonazione" ha un ruolo molto importante nella comunicazione umana. Oltre al contenuto linguistico in senso stretto (collegato con le lettere dell'alfabeto e con le parole della lingua usata), la voce veicola informazioni di natura emozionale, questa volta principalmente tramite la intonazione e il ritmo. Per esempio in italiano la attesa di una risposta è segnalata con lo spostarsi verso una intonazione leggermente più acuta della parte finale della domanda; un ordine o una frase aggressiva è di solito pronunciato con un tono più acuto (e con un suono più intenso); una intenzione accomodante o un complimento, con una accentuata modulazione della intonazione.

Una frase pronunciata senza intonazione dà una sensazione di assenza di emozione, di non "umanità" e di inquietudine, come ben sanno i registi dei film dell'orrore che fanno parlare con sibili o sotto voce (in modalità "sorda") zombi, mostri, alieni e "cattivi" di ogni genere (esempio: i Cavalieri Neri del "Signore degli Anelli").

3.3 Un esempio di sistema ritardato

Da scrivere.

Capitolo 4

Sistemi non lineari

Nota I sistemi deterministici non lineari hanno una varietà di comportamenti molto ampia e complessa, non riconducibile ad analisi generali e sistematiche. Per questo il nostro percorso si articolerà intorno ad alcuni esempi al solo scopo di introdurre ad un approccio riduzionista alla conoscenza della "natura" e di illustrare qualche aspetto caratteristico di significato generale. Ci interesseremo solo di sistemi del primo e del secondo ordine.

4.1 Sistemi del primo ordine

Un esempio: un sistema ecologico a una specie con portanza Consideriamo il sistema ecologico costituito da una sola specie in un ambiente limitato: per fissare le idee la popolazione di conigli selvatici della tenuta di San Rossore. Il modello più semplice di evoluzione prevede che il numero di conigli ($x(t)$) abbia una velocità di crescita proporzionale al numero di individui di quella specie: l'idea è che ogni individuo ha in media un figlio in un certo lasso di tempo (si trascurano gli effetti legati al sesso, alle classi di età, ecc.). La equazione di evoluzione è lineare e ben nota

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x \quad (4.1)$$

La soluzione è un esponenziale crescente con tempo caratteristico $\tau = 1/\alpha$ e α è il parametro che rappresenta la fertilità dei conigli espressa in numero di nati per unità di tempo e per individuo.

Evidentemente questa non è una soluzione accettabile per tempi lunghi (dato che $x \rightarrow +\infty$). Il fatto naturale non incluso nella (??) è la limitatezza delle risorse: se nell'ambiente in esame c'è a disposizione una quantità limitata di cibo, al crescere della popolazione x , la quantità di cibo disponibile per ogni individuo diminuisce e la fertilità effettiva si riduce (per esempio per il fatto che gli individui sottoalimentati sono più esposti a malattie e a predazione).

Possiamo tener conto di questo fenomeno supponendo che il parametro α non sia una costante (caratteristica della specie) ma diminuisca al crescere della popolazione, per esempio nella forma

$$\alpha = a(P - x(t)) \quad (4.2)$$

Secondo questa assunzione se il numero di conigli è molto basso ($x \ll P$) la fertilità risulta una costante: $\alpha \approx aP$ e si riottiene il caso precedente. Al crescere della popolazione, α diminuisce fino ad annullarsi quando $x = P$ e addirittura cambia di segno per $x > P$.

La significato fisico di questo comportamento è ben chiaro: se il cibo a disposizione di un individuo è scarso, la fertilità media diminuisce. Se poi il numero di individui si trova ad essere superiore ad un

certo valore massimo, il cibo è troppo scarso e la mortalità (per inedia e malattie) supera la natalità e ne consegue una fertilità effettiva negativa: la popolazione diminuirà.

Tentativamente assumeremo quindi come equazione di evoluzione del nostro semplicissimo sistema ecologico la equazione

$$\frac{dx}{dt} = a(P - x)x \equiv v(x) \quad (4.3)$$

Si tratta di una equazione del primo ordine con una sola variabile dipendente $x(t)$ con il termine di “velocità” non lineare in x : $v = a(P - x)x$. La esistenza e unicità della soluzione ci è garantita dal teorema di Cauchy, una volta assegnate le condizioni iniziali, in questo caso rappresentate dal numero di conigli in un certo istante iniziale: $x_0 = x(t = 0)$.

4.1.1 Equilibri multipli. Bacino di attrazione

Una prima sostanziale novità rispetto ai sistemi lineari si scopre nella ricerca del punto di equilibrio. Per individuarlo bisogna ricercare i valori di x per cui $v(x) = 0$: dato che la “velocità” è non lineare in x ci possono essere più valori di x_{eq} : nella possibilità di **equilibri multipli** consiste la prima importante diversità tra i sistemi lineari e i sistemi non lineari. Nel nostro caso i punti di equilibrio sono due: $x_{eq1} = 0$ e $x_{eq2} = P$.

La esistenza del primo punto di equilibrio è ovvia dal punto di vista fisico: ci dice che se in una regione chiusa in un certo istante non ci sono individui di una certa specie ($x_0 = 0$), non ce ne saranno mai e una soluzione risulta essere $X(t) = x_{eq1} = 0$.

Il secondo punto di equilibrio è più interessante: ci dice che, fissata una certa quantità di cibo, parametrizzata dalla costante P , c'è un particolare numero di animali, $x_{eq2} \neq 0$, che può convivere per un tempo indefinito senza variazioni in quell'ambiente: questo numero risulta uguale al parametro P e si chiama “portanza” del sistema. Esso rappresenta la quantità di cibo disponibile per unità di tempo, espresso in numero di animali che possono sopravvivere in quell'ambiente cibandosene.

È utile rappresentare questo sistema nello spazio delle fasi.

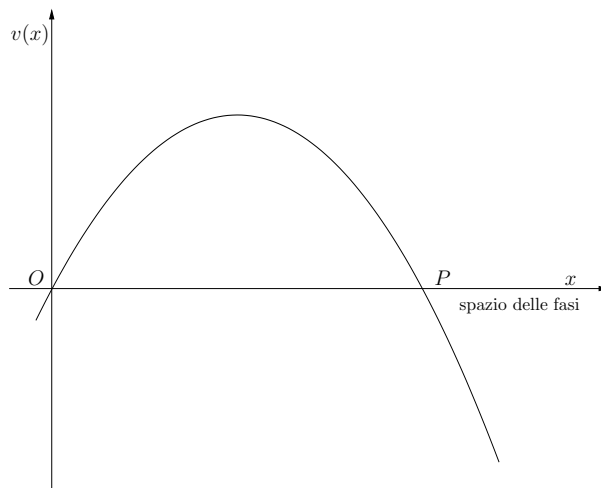


Figura 4.1: grafico della “velocità” del sistema ?? in funzione dello stato x del sistema. Al variare del tempo, il punto rappresentativo si muove sull’asse x che in questo caso è lo spazio delle fasi. La “velocità” si annulla nei due punti di equilibrio $x_{eq1} = 0$ e $x_{eq2} = P$.

Essendoci una sola variabile, lo spazio consiste in una semplice retta orientata su cui fissiamo uno 0; lo stato del sistema è rappresentato in ogni istante dal punto di coordinata $x(t)$. Al variare di t il punto rappresentativo si muove su un segmento della retta.

Dato che la “velocità” è una funzione di x , è possibile rappresentare su un piano cartesiano il suo grafico: sull’asse delle ascisse si riporta lo stato del sistema e sull’asse delle ordinate la sua “velocità”. Si ottiene una parabola con concavità verso il basso (abbiamo assunto $a, P > 0$). I punti di intersezione con l’asse x sono i punti di equilibrio in quanto per quel valore di x (in quello “stato” del sistema) la “velocità” (cioè la derivata temporale della variabile di stato) si annulla.

Queste due intersezioni separano lo spazio delle fasi (l’asse x) in intervalli all’interno dei quali il segno di v è costante: per $x_{eq1} < x < x_{eq2}$, cioè per $0 < x < P$, risulta $v > 0$; fuori da questo intervallo si ha $v < 0$.

Questa osservazione dà importanti indicazioni qualitative sul comportamento del sistema. Nell’intervallo interno ai punti di equilibrio il sistema ha $v > 0$, quindi x cresce nel tempo. Ciò comporta che se la posizione iniziale del sistema è all’interno di questo intervallo, il punto rappresentativo si sposta verso destra, allontanandosi da x_{eq1} e avvicinandosi a x_{eq2} da sinistra. Al contrario se la condizione iniziale è $x(0) > x_{eq2}$, risulta $v < 0$: il punto rappresentativo va verso sinistra, di nuovo avvicinandosi a x_{eq2} da destra. Infine se $x(0) < x_{eq1}$, di nuovo $v < 0$ e il punto rappresentativo si sposta verso sinistra e tende a $-\infty$.

In conclusione, il sistema non si avvicina mai al punto x_{eq1} e se in un certo istante gli sta vicino, tende ad allontanarsene. Viceversa se la condizione iniziale è nelle vicinanze di x_{eq2} , il sistema si avvicina ulteriormente ad esso. Intuitivamente questo ci permette di classificare come instabile l’equilibrio in $x = x_{eq1}$ e come stabile quello in $x = x_{eq2}$.

Osserviamo infine che tutti gli stati iniziali caratterizzati da $x(0) > 0$ (che sono gli unici fisicamente significativi nel nostro particolare esempio) evolvono avvicinandosi al punto di equilibrio stabile x_{eq2} , mentre gli stati con $x(0) < 0$ evolvono verso $-\infty$. Il punto $x = x_{eq2}$ si comporta quindi da **attrattore** o **centro di attrazione** per tutte le evoluzioni per cui $x(0) > 0$. Analogamente $x = -\infty$ si comporta da centro di attrazione per i punti $x(0) < 0$.

L’insieme dei punti da cui partono traiettorie che evolvono avvicinandosi a un certo attrattore definiscono il suo **bacino di attrazione**: nel nostro caso, per esempio, l’intervallo $x(0) > 0$ costituisce il bacino di attrazione di $x_{eq2} = P$.

Riassumendo in questo paragrafo abbiamo imparato che:

- 1- in un sistema non lineare ci possono essere più stati di equilibrio.
- 2- stati di equilibrio diversi hanno proprietà di stabilità diverse, e di conseguenza la proprietà di stabilità non è in generale una proprietà dell’intero sistema ma è una caratteristica da studiare separatamente per ciascuna posizione di equilibrio.
- 3- ogni equilibrio stabile funziona da “attrattore” per un insieme di condizioni iniziali che costituisce il suo “bacino di attrazione”.

Prima di passare ad altro argomento conviene ricordare che questi risultati si possono visualizzare anche riportando in grafico le leggi orarie in un piano cartesiano $x(t), t$, che si chiama **spazio delle fasi esteso**.

Identificando con l’istante $t = 0$ il tempo in cui le condizioni iniziali sono assegnate, gli stati iniziali del sistema sono rappresentati in questo grafico sull’asse delle ordinate (quattro esempi sono riportati nel grafico: x_a, x_b, x_c, x_d). Sullo stesso asse si possono anche riportare i valori delle coordinate di equilibrio.

Da ogni punto dell’asse $t = 0$ parte il grafico di una legge oraria (quattro esempi sono riportati nel grafico: a, b, c, d). Naturalmente i grafici delle leggi orarie che partono dai punti di equilibrio (x_{eq1} e x_{eq2} in figura) sono delle rette orizzontali. Per quanto discusso sopra, tutti i grafici che partono dalla semiretta $x > x_{eq2}$ hanno andamento decrescente nel tempo e si avvicinano asintoticamente alla soluzione di equilibrio $x = x_{eq2}$. I grafici che partono nell’intervallo $x_{eq1} < x < x_{eq2}$ hanno andamento crescente e pure essi tendono asintoticamente a x_{eq2} . Questo in accordo col fatto che tutta la semiretta $x_{eq1} < x$ fa

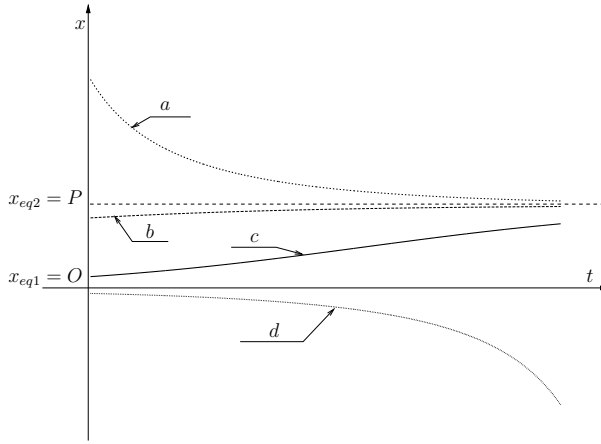


Figura 4.2: evoluzione del sistema regolato dalla ?? per diverse condizioni iniziali. Si è assunto $P = 1$. I valori iniziali della popolazione $x(0)$ sono: $x(0) = 2.5$ per la curva a), $x(0) = 0.85$ per la curva b), $x(0) = 0.15$ per la curva c) e $x(0) = -0.05$ per la curva d). x_{eq2} è un equilibrio stabile e attira tutte le condizioni iniziali $x(0) > 0$; x_{eq2} è instabile.

parte del bacino di attrazione di x_{eq2} . Per tutte le leggi orarie che partono dalla regione $x < x_{eq1}$, che è il bacino di attrazione di $-\infty$, l'andamento è sempre decrescente nel tempo e le traiettorie tendono a $-\infty$.

4.1.2 Stabilità lineare

In questo paragrafo riconduciamo lo studio della stabilità del sistema alla trattazione presentata nel capitolo a proposito dei sistemi lineari.

A questo scopo dobbiamo introdurre il concetto di “stabilità lineare”.

La prima precisazione da fare è che la **stabilità lineare** non è una proprietà globale del sistema ma riguarda un intorno di uno stato di equilibrio. In particolare le proprietà di stabilità possono essere diverse nei diversi punti di equilibrio e la analisi va ripetuta per ognuno di questi.

Diremo che un punto di equilibrio è **stabile** se esiste un suo intorno tale che tutte le traiettorie che hanno un punto interno come condizione iniziale (nel senso di Cauchy) tendono asintoticamente al punto di equilibrio stesso.

Il metodo più soddisfacente per discutere la stabilità sarebbe quello di trovare la soluzione analitica della equazione differenziale non lineare (?). Questo però non è immediato perchè per le equazioni non lineari non ci sono metodi di soluzione generali. Tuttavia, dato che siamo interessati al comportamento del sistema in intorni “piccoli” dei punti di equilibrio, possiamo approssimare la funzione $v(x)$ (nel nostro esempio $v(x) = ax(P - x)$) con lo sviluppo in serie di Taylor al primo ordine usando come centro di sviluppo proprio il punto di equilibrio (questo naturalmente richiede che v sia sufficientemente regolare).

Consideriamo per esempio il punto di equilibrio $x = x_{eq2} = P$ della (?). Lo sviluppo di Taylor al primo ordine dà

$$v(x - x_{eq2}) \approx v(x_{eq2}) + \frac{dv}{dx}|_{x_{eq2}} (x - x_{eq2}) \quad (4.4)$$

Osserviamo che il primo termine a destra è nullo qualunque sia la forma di $v(x)$, dato che per definizione ogni punto di equilibrio ha “velocità” nulla: $v(x_{eq2}) = 0$. Con la sostituzione $\epsilon = (x - x_{eq2})$, si ottiene

$$v(\epsilon) \approx \frac{dv}{dx}|_{x_{eq2}} \epsilon \quad (4.5)$$

Nel nostro esempio

$$v(\epsilon) \approx -aP\epsilon \quad (4.6)$$

Con questa approssimazione si è ottenuta per la velocità una espressione lineare in $\epsilon(t)$. ϵ rappresenta lo scostamento del sistema dalla posizione di equilibrio.

In conclusione la (??) diventa

$$\frac{d\epsilon}{dt} = v(\epsilon) \approx \frac{dv}{dx}|_{x_{eq2}} \epsilon = -aP\epsilon \quad (4.7)$$

Questa è l'equazione di un sistema lineare omogeneo del primo ordine di cui sappiamo classificare la stabilità. Essa dipende dal segno della costante $\frac{dv}{dx}|_{x_{eq2}}$ che nel nostro caso è $-aP < 0$. Si conclude quindi che l'equilibrio $x = x_{eq2} = P$ è stabile.

Per discutere la stabilità dell'altro punto di equilibrio ($x = x_{eq1} = 0$) si segue la stessa procedura con i parametri del nuovo punto. Si lascia l'esercizio al lettore. Si ottiene che l'equilibrio in $x = 0$ è instabile.

Il significato fisico di questi risultati è facilmente comprensibile: quando la popolazione è molto piccola non ci sono problemi di nutrizione, le condizioni di fertilità sono ottimali e c'è crescita esponenziale. Questo tra l'altro comporta che se una specie viene introdotta in questo ambiente anche tramite pochissimi esemplari, la popolazione cresce esponenzialmente (finché non intervengono la scarsità di cibo o altri fattori): come noto, qualcosa di simile è accaduto in Australia quando sono stati introdotti pochi esemplari di coniglio europeo.

Se invece la popolazione è prossima alla portanza P del sistema, la introduzione di alcuni esemplari provoca una carenza di risorse per tutta la popolazione, la mortalità aumenta e il numero di animali torna esponenzialmente ai valori di equilibrio.

Esercizio: si modifichi il modello in modo da tener conto di un prelievo costante di animali da parte dei cacciatori.

Esercizio: si discutano le conseguenze di un intervento dell'uomo che modifichi la fertilità α (per esempio distribuendo antibiotici che curino qualche malattia): cambia la popolazione di equilibrio, cambiano i tempi di assestamento, ecc.?

Un altro esempio: la temperatura sulla Terra Introduciamo ora un altro fenomeno che ci servirà come esemplificazione di quanto detto fin'ora ma che svilupperemo in più tappe per discutere nuove proprietà di stemi più complessi: l'evoluzione della temperatura della Terra.¹

Individuiamo come variabile del sistema una temperatura T che intenderemo come temperatura mediata su tutta la biosfera cioè su tutta la parte della Terra rilevante per la vita animale e vegetale. Essa comprende la parte superficiale della crosta terrestre e dei mari (immaginiamo per una profondità di 10 metri) e tutta l'aria (che dal punto di vista termico dà un contributo paragonabile). La variabile T del sistema è quindi funzione solo del tempo (e non della latitudine). Inoltre ci interessiamo di variazioni di T su tempi lunghi (trascuriamo variazioni diurne e stagionali ecc.).

Come primo passo cerchiamo un modello che ci dia ragione del fatto che la temperatura terrestre è (relativamente) stabile da centinaia di milioni di anni. Per chiarire questa affermazione ricordiamo che T (misurata in gradi Kelvin) ha un valore medio di circa $280K^0$ e che, al variare dei cicli delle glaciazioni, ha subito variazioni di poco più di una decina di gradi, cioè meno del 4%.

Il modello che adottiamo è quello del bilancio termico di un corpo soggetto a flussi di calore cui abbiamo accennato nel primo capitolo ².

$$C \frac{dT}{dt} = \Phi \quad (4.8)$$

¹Sia chiaro che qui non intendiamo dare modelli realistici del fenomeno. L'argomento ci serve solo come pretesto per illustrare alcune proprietà dei sistemi dinamici.

²In questo esercizio non useremo le unità di misura dell'energia che spesso si usano in termodinamica, bensì useremo le unità standard della meccanica. Così i flussi di energia saranno espressi in $watt/m^2$, il calore in $joule$, il calore specifico in $joule/(kgK^o)$ ecc. Ricordiamo che una caloria corrisponde a 4.18 $joule$.

C è la capacità termica della biosfera e Φ è il flusso di energia termica entrante nella biosfera.

Sicuramente tra i fattori che contribuiscono a Φ c'è l'irraggiamento solare: alla distanza media della Terra, una superficie di 1 m^2 esposta al Sole riceve la potenza di $\phi_s \approx 1370 \text{ watt}$. Naturalmente se la superficie non è orientata perpendicolarmente ai raggi solari la potenza incidente sarà $1370 \cos(\theta) \text{ watt}$ dove θ è l'angolo formato dalla normale alla superficie con i raggi solari.

Esercizio: calcolare il flusso totale di energia solare sulla superficie terrestre Φ_S , assumendo che il raggio terrestre sia $R = 6100 \text{ Km}$ ($\Phi_S = \pi R^2 \phi_s$). Stimare anche la capacità termica della biosfera C ricordando che $C = c_s m$ dove $c_s = 4000 \text{ joule/KgK}^\circ$ è il calore specifico della biosfera e m è la sua massa. A sua volta $m = \rho V$ dove $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ è la densità media della biosfera e V il suo volume.

Tenendo conto di questo flusso la equazione di evoluzione (??) dà un aumento costante della temperatura che è qualitativamente diverso da ciò che si osserva, cioè $T \approx 280 \text{K}^\circ = \text{costante}$.

Un modello molto più realistico si ottiene se si include un processo di raffreddamento. Dalla fine dell'800 si sa che un corpo posto nel vuoto perde energia sotto forma di radiazioni elettromagnetiche che si irradiano verso l'universo. La legge che descrive questo processo, che ha avuto un ruolo importantissimo nella formazione della teoria dei quanti di Plank e Einstein, è nota come **legge di emissione del corpo nero** o **legge di Stefan-Boltzmann** e dice che un corpo a temperatura T nel vuoto perde verso l'universo un flusso di energia per unità di tempo proporzionale alla sua area e alla quarta potenza della temperatura. In formula

$$\Phi_{SB} = -\sigma AT^4 \quad (4.9)$$

dove $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}$ (in unità MKS) è la **costante di Stefan-Boltzmann** e A è l'area del corpo. Nel nostro caso $A = 4\pi R^2$ (notare il 4 che manca nella formula per Φ_S : perché?).

Componendo i due effetti si ha

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{C} \Phi = \frac{1}{C} (\Phi_S + \Phi_{SB}) = \frac{\pi R^2}{C} (1370 - 4\sigma T^4) \quad (4.10)$$

In questa equazione Φ/C ha il ruolo della “velocità” della variabile T ; essa è data dalla differenza tra una costante (Φ_S) e una parabola di quarto grado (Φ_{SB}) come rappresentato in figura (??) (la regione $T < 0$ non è di interesse).

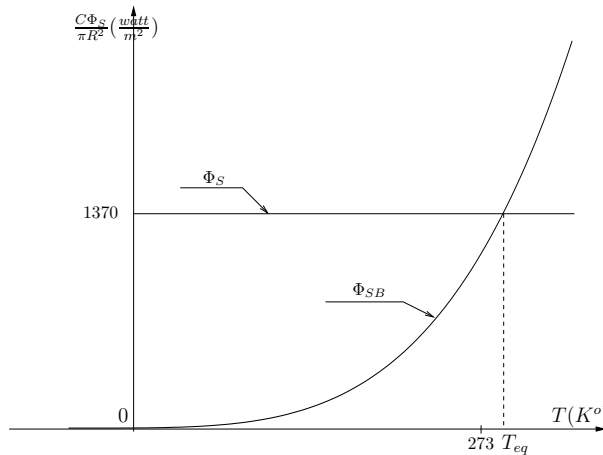


Figura 4.3: grafico dei flussi di calore entranti e uscenti in funzione della variabile di stato T per la equazione ??.

Il punto di equilibrio T_{eq} è unico ed è dato dalla intersezione tra le due curve, dove la “velocità” si annulla

$$T = T_{eq} = \left(\frac{1370}{4\sigma}\right)^{\frac{1}{4}} = 279 \text{ K}^o \quad (4.11)$$

Per quanto riguarda la stabilità, per quanto discusso nelle pagine precedenti basta valutare il segno di $\frac{dv}{dT}|_{T_{eq}}$

$$\frac{dv}{dT}(T_{eq}) = -16 \frac{\pi R^2}{C} \sigma T_{eq}^3 < 0 \quad (4.12)$$

che implica stabilità.

Questo modello predice quindi:

- 1- una temperatura di equilibrio non troppo diversa da quella reale
- 2- questo equilibrio è stabile.

La stabilità è legata al fatto che il termine di Boltzmann, che tende a raffreddare la Terra, cresce molto rapidamente al crescere della temperatura: se per qualche motivo la temperatura subisce una diminuzione (può accadere per esempio quando una eruzione vulcanica o una meteora producono una estesa nuvola di polveri che per qualche tempo ostacola il riscaldamento solare), il termine di raffreddamento di Boltzmann diminuisce e la temperatura torna esponenzialmente alla condizione di equilibrio.

Esercizio: supponiamo che una tempesta magnetica sul Sole determini la diminuzione dell' 1% del flusso di energia solare. Calcolare di quanto cambia la temperatura di equilibrio sulla Terra. Supponiamo che la temperatura si sia stabilizzata su questo nuovo equilibrio e che improvvisamente la tempesta magnetica sul Sole cessi. La temperatura comincerà ad aumentare per tornare all'equilibrio iniziale: calcolare in quanto tempo T raggiunge il valore intermedio tra i due equilibri.

Esercizio: si valuti il contributo al flusso calorico immesso nella biosfera dalle attività umane e se ne stimi l'effetto sulla T_{eq} .

Osservazione: Il fatto che la temperatura di equilibrio ottenuta dal modello sia così vicino a quello reale è una coincidenza. In effetti non tutta la energia solare resta sulla Terra e d'altra parte al riscaldamento della biosfera contribuisce anche il flusso termico dagli strati profondi della Terra (che sono tenuti caldi principalmente da reazioni nucleari dell'uranio e altri atomi radioattivi).

Ghiaccio e bistabilità Sappiamo che la temperatura terrestre ha subito variazioni nel passato. In particolare negli ultimi due milioni di anni sono stati identificati quattro lunghi periodi caratterizzati da temperatura alta che si sono alternati con periodi freddi detti glaciazioni. All'interno di ciascun periodo la temperatura è relativamente stabile (con fluttuazioni di un paio di gradi) per decine di migliaia di anni, mentre tra un periodo “caldo” e uno “freddo” ci sono differenze di temperatura anche di una decina di K^0 ; i tempi di passaggio da un periodo all'altro sono spesso piuttosto rapidi (poche migliaia di anni).

Osservazione: in effetti la temperatura terrestre è soggetta ad una dinamica molto complessa e la individuazione delle quattro glaciazioni è abbastanza convenzionale. Per esempio nel 17⁰ secolo c'è stato un lungo periodo decisamente freddo per cui è stato introdotto il nome di “piccola glaciazione”. Ricordiamo anche che l'ultima glaciazione (in cui si sono formati i laghi alpini e che ha determinato la orografia delle Prealpi) si è estesa fino a poche migliaia di anni fa.

Un modello che descrive qualche aspetto delle glaciazioni si ottiene modificando quello considerato in (??) in modo da tener conto del fatto che la superficie terrestre riflette una parte della energia che le arriva dal Sole.

Semplifichiamo al massimo la descrizione ipotizzando che le regioni coperte da ghiaccio (attualmente circa il 10%) riflettano l' 80% della energia solare, mentre le altre la assorbono totalmente. Per mettere in formule questo comportamento, assumiamo che la frazione di superficie libera dai ghiacci sia una funzione nota della temperatura: $P = P(T)$.

Cerchiamo con argomenti euristici una forma per $P(T)$. Ricordando che T è la temperatura mediata sulla superficie (cioè se $T = 273K^0$ circa metà della Terra ha temperatura maggiore della temperatura di

formazione del ghiaccio) assumiamo che P sia una funzione positiva, crescente in T , che sia $0 < P < 1$ e che $P(273) = 1/2$. Inoltre assumiamo che per $T > 303K^0$ sia $P \approx 1$ e che per $T < 243K^0$ $P \approx 0$. Una funzione che ha queste proprietà è

$$P = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{e^{\frac{T-273}{15}} - e^{-\frac{T-273}{15}}}{e^{\frac{T-273}{15}} + e^{-\frac{T-273}{15}}} \right) \quad (4.13)$$

il cui grafico è riportato in figura ???. In particolare osserviamo che per $T \rightarrow +\infty$ $P \rightarrow 1$ e per $T \rightarrow -\infty$

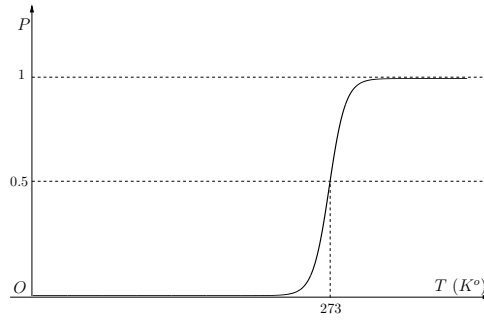


Figura 4.4: percentuale di superficie terrestre libera da ghiacci in funzione di T secondo la ??.

$P \rightarrow 0$

La equazione che tiene conto di tutti questi effetti è

$$\frac{dT}{dt} = v(T) = \frac{\pi R^2}{C} (1096 \cdot P(T) + 500) - \frac{4\pi R^2}{C} \sigma T^4 \equiv \phi_{in} - \phi_{out} \quad (4.14)$$

Si noti il termine 500: è il contributo dell'assorbimento della superficie ghiacciata (che sarebbe pari a 137 nel nostro modello sommato al termine di riscaldamento endogeno, cui si ha accennato sopra).

La discussione di questa equazione non si può fare con l'algebra elementare. Per questo ci limitiamo a una discussione qualitativa.

La “velocità”, come nel caso (??), è data dalla differenza di due termini, i cui grafici sono riportati in figura ??.

La forma a S di ϕ_{in} è dovuta a P . La temperatura di equilibrio è data dalla intersezione tra le due curve. Ci sono quindi tre punti di equilibrio (a , b e c , vedi figura ??) che sono difficili da individuare analiticamente, ma le cui proprietà di stabilità sono ottenibili con argomentazioni qualitative. Osserviamo infatti per i valori di T dove $\phi_{in} > \phi_{out}$ si ha $v > 0$, quindi T cresce nel tempo. Questo si verifica nei due intervalli $(0, a)$ e (b, c) . Viceversa quando T è negli intervalli (a, b) e $(c, +\infty)$ essa diminuisce. Da questo deduciamo che gli equilibri a e c sono stabili mentre b è instabile.

Anche questo sistema presenta quindi più punti di equilibrio: alcuni stabili e altri instabili. Gli intervalli $(0, a)$ e (a, b) costituiscono il bacino di attrazione del punto a e gli intervalli (b, c) e $(c, +\infty)$ quelli di c .

Per quanto riguarda il significato fisico di questo risultato, notiamo che questo sistema, pur rispettando la stessa equazione costitutiva (??), può stabilizzarsi su due stati di equilibrio diversi. Se il sistema è nella posizione c (alta temperatura), una eventuale perturbazione (dovuta per esempio a una meteora come si è accennato sopra) lo porta fuori dall'equilibrio. Se la perturbazione non è troppo grande, la fluttuazione sposta lo stato nel punto T_1 o T_2 che è nello stesso bacino di attrazione del punto di equilibrio precedente c e il sistema vi torna spontaneamente. Questo è ciò che accade abitualmente e torna con il fatto che la temperatura terrestre per lunghi periodi subisce piccole variazioni (intorno a T_c nel nostro esempio).

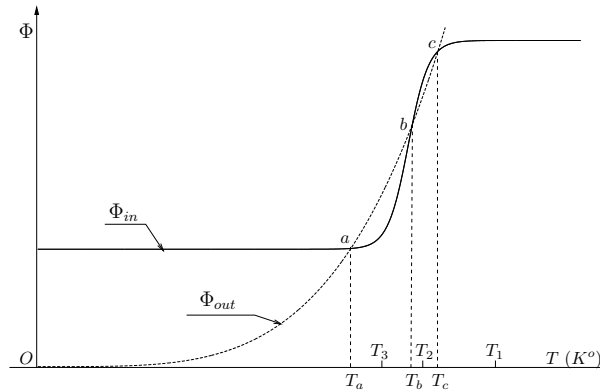


Figura 4.5: Flussi termici corrispondenti alla equazione di bilancio ???. Φ_{in} tiene conto della riflettività del ghiaccio e della radiazione proveniente dal centro della Terra; Φ_{out} descrive il termine di raffreddamento di Stefan-Boltzmann. I punti di intersezione tra le due curve danno le temperature di equilibrio del sistema: a) e c) sono stabili, b) è instabile.

Se però la fluttuazione è troppo grande (e negativa) il sistema viene trasportato nel punto T_3 che è nel bacino dell'equilibrio a verso cui viene successivamente attratto e la temperatura subisce un cambiamento importante in un lasso di tempo relativamente breve e si stabilizza su T_a : questo è da interpretare come l'inizio di una glaciazione.

Secondo questo modello quindi la temperatura della Terra fluttua intorno a due possibili valori di equilibrio e passa dall'uno all'altro quando un importante evento esterno introduce una perturbazione grande abbastanza da farle cambiare bacino di attrazione.

Esercizio:

- 1- si trovino numericamente i punti di equilibrio del sistema descritto da ?? e ??.
- 2- per lo stesso modello si supponga che una nube oscuri il sole completamente: si stimi dopo quanti giorni di buio il sistema ha subito un raffreddamento sufficiente a provocare la glaciazione.

4.1.3 Biforcazione, bistabilità e isteresi

Il sistema sopra trattato ha proprietà che si riscontrano in moltissimi casi e merita qualche altra considerazione.

Abbiamo visto che ci sono tre punti di equilibrio di cui due stabili e uno instabile. È interessante studiare come questi si comportano quando uno dei parametri delle funzioni delle equazioni costitutive assume un valore diverso. Per esempio immaginiamo di includere nel modello un effetto di schermaggio della luce solare dovuto a una nebulosa o una variazione del flusso endogeno: dal punto di vista matematico questo è equivalente a modificare il parametro 500 che compare nella Φ_{in} della(??) e che indicheremo con il simbolo P . (Attenzione: qui non si assume che P cambi nel tempo con una certa legge, ma si discutono le condizioni di equilibrio di sistemi che hanno valori di P diversi).

Consideriamo come si dispongono i punti di equilibrio quando P assume valori diversi, che contrassegniamo con un apice (P^k) ordinato in modo tale che se $h < k$, $P^h < P^k$. Fissato un valore P^0 (nel nostro caso potrebbe essere $P^0 = 500$, così che la situazione è quella rappresentata in figura ??) in generale avremo tre punti di equilibrio: $T = T_a^0$, $T = T_b^0$ e $T = T_c^0$ di cui T_a^0 e T_c^0 sono stabili e T_b^0 è instabile. Se il sistema è lasciato a se stesso con una temperatura iniziale diversa da una di equilibrio, si porta su uno dei punti stabili: su quale dei due dipende dalle condizioni iniziali (dal bacino di attrazione in cui si trova all'istante $t = 0$).

È utile aiutarsi in questa discussione con due diverse figure. In (figura ??) sono rappresentati i flussi

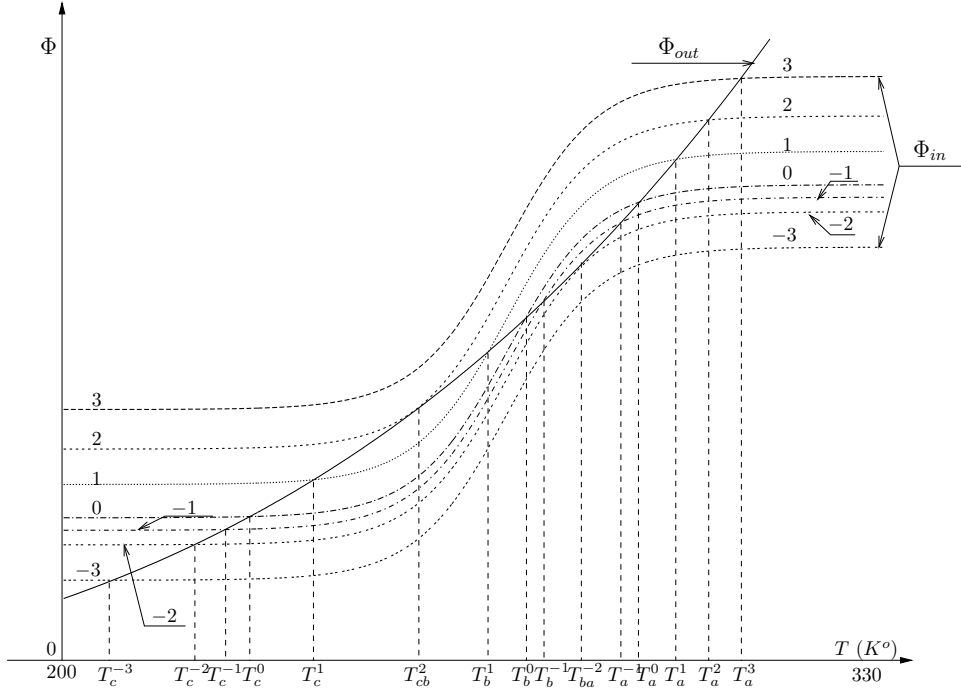


Figura 4.6: Flussi termici in uscita (Φ_{out}) e in ingresso (Φ_{in}) per diversi valori di P . Le curve Φ_{in} con indice $i = -3, -2, -1, \dots$ più alto corrispondono a valori di P maggiori. Per $i > 2$ c'è una sola temperatura di equilibrio T_a^3 nella zona delle alte T , per $-2 < i < 2$ ci sono tre punti di equilibrio, di cui due stabili (T_a e T_c) e uno instabile (T_b). Per $i < -2$ c'è un solo equilibrio, stabile e a bassa temperatura T_c^{-3} .

di calore Φ , entranti e uscenti, in funzione di T . Gli indici $(-3, -2, \dots, 3)$ che contrassegnano le diverse curve dei flussi entranti Φ_{in} corrispondono ai diversi valori di P . Le tre intersezioni di ciascuna curva Φ_{in} con Φ_{out} determinano i corrispondenti punti (e temperature) di equilibrio.

Nella figura ?? sono invece riportati i valori delle temperature di equilibrio in funzione di P . L'esistenza di tre punti di equilibrio per un certo P si traduce nel fatto che la funzione $T_{eq}(P)$ è a più valori. Naturalmente il sistema si troverà su uno di questi punti, ma quale esso sia dipende dal passato e non dalle leggi costitutive. Un sistema con questa proprietà si definisce **bistabile** ("bistabile" e non "tristabile" perché il punto T_b non va conteggiato in quanto instabile).

Supponiamo quindi che sia $P = P^0$ e che il sistema sia all'equilibrio in T_a^0 . Se modifichiamo improvvisamente P portandolo al valore $P = P^{-1} < P^0$, la curva Φ_{in} si trova spostato verso il basso e i nuovi punti di equilibrio risultano diversi: i punti T_a e T_c si spostano verso sinistra e T_b verso destra: $T_a^0 \rightarrow T_a^{-1}$ ecc.. Il sistema (che per continuità temporale si trova ancora in T_a^0) non è più all'equilibrio: trovandosi nel bacino di attrazione di a si muoverà verso il nuovo equilibrio T_a^1 . Questo assestamento è reso in figura ?? dalla freccia $0 \rightarrow A$.

Se ulteriormente diminuiamo P da P^{-1} a P^{-2} , T si sposterà verso T_{ba}^{-2} . (Ripetiamo che per ciascuno di questi valori di P sarebbe possibile un secondo equilibrio stabile (che segue la linea $T_c^0 \rightarrow T_c^{-1} \rightarrow T_c^{-2}$), che corrisponde alla linea $O' \rightarrow B$ della ??, ma la linea effettivamente seguita è quella delle alte temperature di indice a .)

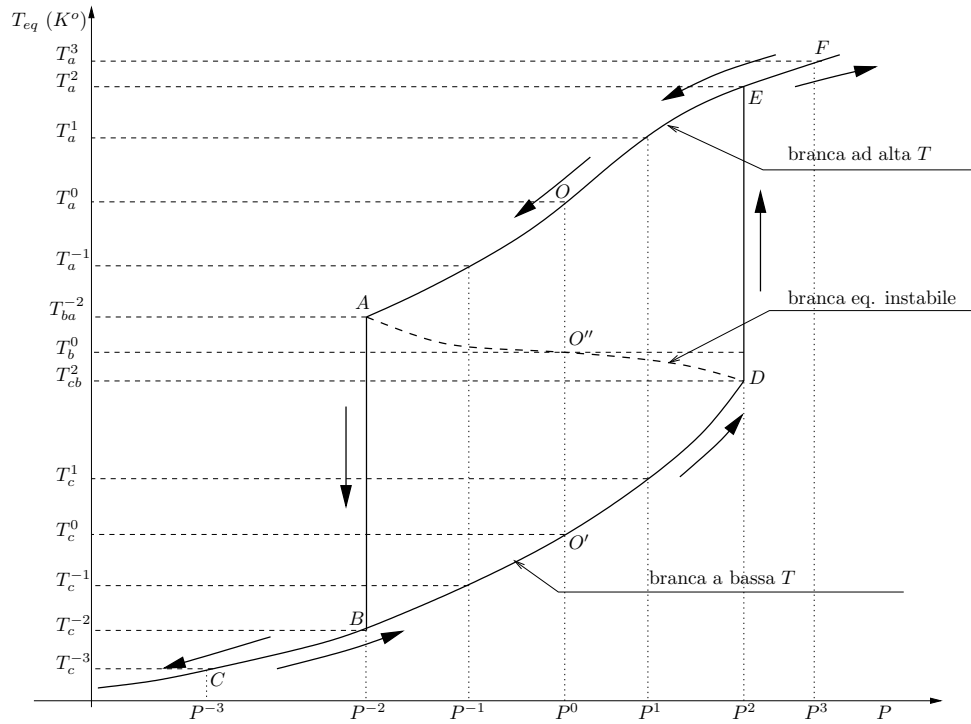


Figura 4.7: temperature di equilibrio T in funzione di P ottenuto rielaborando la figura ???. La curva superiore ($F \rightarrow A$) corrisponde agli equilibri ad alta T , quella inferiore ($C \rightarrow D$) agli equilibri a bassa T ; la linea tratteggiata ($A \rightarrow O'' \rightarrow D$) corrisponde agli equilibri instabili. Al variare di P , per esempio quando $P^0 \rightarrow P^{-1} \rightarrow P^{-2}$, T_{eq} si sposta lungo la linea $O \rightarrow A$ come indicato dalla freccia, il punto di equilibrio instabile pure si muove da $O'' \rightarrow A$. Per $P = P^{-2}$ i due punti coincidono in A . Se P viene ulteriormente diminuito ($P^{-2} \rightarrow P^{-3}$) i punti di equilibrio intorno ad A spariscono e il sistema evolve verso l'unico punto di equilibrio che sopravvive, in questo caso intorno al punto B .

Se si diminuisce di nuovo P fino a un valore appena minore di P^{-2} , la corrispondente curva di Φ_{in} è troppo spostata verso il basso e interseca Φ_{out} in un solo punto di temperatura prossima a T_c^{-2} (figura ??): mentre gli equilibri di tipo c continuano ad esistere, quelli di tipo a e b scompaiono. Questo significa tra l'altro che il sistema non è più bistabile. In questa condizione il sistema, che si trova con una temperatura molto vicina a T_{ba}^{-2} non ha altro punto di equilibrio che una temperatura molto vicina a T_c^{-2} e ci si porta rapidamente; nella figura ?? questo è descritto dal crollo verticale di T $A \rightarrow B$.

Un'ulteriore diminuzione di P comporta un assestamento a $T = T_c^{-3}$; in figura ?? questo corrisponde allo spostamento lungo la linea delle basse temperature $B \rightarrow C$.

Se ora aumentiamo P da $P^{-3} \rightarrow P^{-2}$ il processo si inverte e la temperatura riassume i valori precedenti seguendo la stessa linea a ritroso $C \rightarrow B$ di ???. Un ulteriore aumento di P da $P^{-2} \rightarrow P^1 \rightarrow P^0 \rightarrow P^1 \rightarrow P^2$ farà scorrere la temperatura lungo la branca delle basse temperature $T_c^{-2} \rightarrow T_c^{-1} \rightarrow T_c^0 \rightarrow T_c^1 \rightarrow T_c^2$ in cui il sistema è "imprigionato" per gli stessi motivi descritti sopra.

Se P viene ulteriormente aumentata $P^2 \rightarrow P^3$ si ripresenta il fenomeno che caratterizza il punto A (figura ??): il sistema si trova a non avere punti di equilibrio prossimi al suo stato attuale, perché la branca di bassa temperatura non esiste più; l'unico punto di equilibrio che sopravvive è prossimo a T_a^2 (vedi ??) che sta sulla branca delle alte temperature T_a . Il sistema subisce quindi una transizione rapida

rappresentata dal tratto verticale $D \rightarrow E$ di figura ???. Un ulteriore aumento di P farebbe spostare il sistema lungo il tratto $E \rightarrow F$, sulla branca delle alte T (figura ??).

Naturalmente nel processo fisico reale la transizione al nuovo equilibrio richiederà un tempo finito, ma ciò non modifica la figura ??, dove in ordinata sono rappresentati gli stati a equilibrio raggiunto.

Il passaggio (più o meno rapido) tra configurazioni di equilibrio diverse si chiama **transizione di fase** (nel nostro esempio corrisponderebbe all'inizio alla fine di un periodo glaciale).

Riassumendo: in un sistema bistabile che dipende da un parametro di controllo ci possono essere due posizioni di equilibrio stabile per lo stesso valore del parametro. Se il parametro varia all'interno dell'intervallo di bistabilità, i punti di equilibrio si dispongono quindi su due linee diverse dette **branche**: su quale delle due il sistema si trovi effettivamente dipende dalla storia del sistema.

Ai punti estremi dell'intervallo di bistabilità una delle due branche sparisce e l'altra si prolunga con continuità. Se il parametro di controllo viene fatto oscillare in un intervallo che include l'intervallo di bistabilità il punto di equilibrio si muove permanendo sulla branca su cui si trova fino a dove questa esiste. Quando il parametro esce dall'intervallo di bistabilità, il sistema salta in modo discontinuo sulla branca che sopravvive. Il risultato è un moto ciclico percorso in un verso (orario o antiorario) ben preciso, che dipende dalla struttura del problema. Tale ciclo si chiama **ciclo di isteresi**.

Esercizio: si scriva la equazione di moto di un oggetto che scorre su un piano orizzontale caratterizzato da un coefficiente di attrito dinamico μ_d minore del coefficiente di attrito statico μ_s , in presenza anche di un attrito viscoso ($F_{visc} = -\gamma v$) (v è la velocità del corpo) e di una forza esterna assegnata F_e . Considerando come variabile v e come parametro di controllo la forza F_e , si discuta la condizione di equilibrio (nel nostro caso imporre $\frac{dv}{dt} = 0$). Si mostri che si ottiene un ciclo di isteresi di forma triangolare.

Esercizio: sviluppare un codice numerico per calcolare il ciclo di isteresi della temperatura sulla Terra al variare del flusso di calore endogeno secondo il modello illustrato sopra.

4.2 Sistemi a due gradi di libertà

4.2.1 Un esempio dalla ecologia: un sistema preda-predatore.

Un esempio di sistema a due gradi di libertà semplice e istruttivo si ottiene introducendo in un sistema ecologico con portanza una specie predatrice. L'effetto della caccia è ovviamente di aumentare la mortalità delle prede. Sia x il numero di prede in un sistema limitato e y il numero di predatori.

Introduciamo la caccia con un modello elementare che rispetti queste proprietà:

- 1- ogni evento di caccia (riuscito) diminuisce x ,
- 2- cacciatori e prede si muovono come singoli individui tutti uguali: sono esclusi comportamenti di branco e comportamenti gregari. La probabilità di successo non dipende dalla età,
- 3- La caccia avviene per incontri casuali: il cacciatore perlustra la zona con una certa velocità u e percepisce la presenza della preda a una distanza l . Le prede sono distribuite in modo uniforme, così che la loro densità è $\sigma = x/A$ dove A è l'area della regione di interesse.

Potremo quindi calcolare il numero di eventi di caccia per unità di tempo v_{caccia}

$$v_{caccia} = ul \frac{x}{A} y \quad (4.15)$$

y è il numero dei predatori, ul è l'area perlustrata in una unità di tempo da un predatore. È implicita l'ipotesi che ogni volta che un predatore intercetta una preda, la cattura. Il termine y a moltiplicare descrive il fatto che ogni predatore si muove indipendentemente dagli altri.

Introducendo il parametro $b = ul/A$ la equazione di evoluzione per le prede risulta

$$\frac{dx}{dt} = a(P - x)x - bxy \equiv v_x \quad (4.16)$$

La “velocità” della variabile x dipende anche dal numero di predatori y . Dato che anche questo dipende dal tempo, serve una corrispondente equazione in cui includiamo che :

1- c'è una mortalità naturale dei predatori $v_{ynat} = -cy$: ogni predatore senza cibo ha una probabilità per unità di tempo di morire costante,

2- che N eventi di caccia producono cibo sufficiente per far crescere un nuovo predatore: $v_{ycaccia} = bxy/N \equiv dxy$.

Gli effetti si sommano: $v_y = v_{ynat} + v_{ycaccia}$.

Riassumendo

$$\frac{dx}{dt} = a(P - x)x - bxy \equiv v_x(x, y) \quad (4.17)$$

$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy \equiv v_y(x, y) \quad (4.18)$$

Si tratta di un sistema di due equazioni differenziali, accoppiate, non lineari, il cui studio ci permette di individuare alcune delle caratteristiche generali di questi sistemi.

4.2.2 Ricerca degli equilibri

Gli stati di equilibrio sono caratterizzati dall'annullarsi simultaneo delle due funzioni v_x e v_y . Al solito la discussione è facilitata dalla rappresentazione grafica delle velocità nello spazio delle fasi $(x; y)$ (vedi figura 100).

Nello spazio delle fasi le due equazioni $v_x(x, y) = 0$ e $v_y(x, y) = 0$ definiscono in modo implicito due famiglie di curve, rispettivamente $y_x = y_x(x)$ e $y_y = y_y(x)$ (che si possono ottenere tramite il teorema del Dini). Il pedice ci ricorda da quale delle due “velocità” derivi la equazione.

Nel nostro esempio la curva y_x è data dalla unione della retta inclinata e dalla retta $x = 0$, in grassetto della figura ??; la curva y_y è data dalla unione della retta verticale e dall'asse $y = 0$, tratteggiata in figura ??.

Le intersezioni tra questi due insiemi sono tre:

$$A = (0, 0) \quad (4.19)$$

$$B = (P, 0) \quad (4.20)$$

$$C = \left(\frac{c}{d}, \frac{a(Pd - c)}{bd} \right) \quad (4.21)$$

e quindi tre sono i punti di equilibrio di questo sistema.

La individuazione dei punti di equilibrio è un passaggio cruciale per lo studio di un sistema ecologico in quanto rappresentano un insieme di condizioni che possono permanere nel tempo. Gli equilibri in cui qualcuna delle variabili è nulla (punti A e B) possono essere di grande interesse: se si desidera la difesa della varietà delle specie questi equilibri saranno da evitare; al contrario se una delle specie è ritenuta dannosa (per esempio se y è popolazione di insetti dannosi o una colonia di batteri patogeni in un uomo), la soluzione con questa popolazione nulla sarà da ricercare.

Inoltre per il significato fisico che x e y hanno, non saranno interessanti gli equilibri in cui una delle variabili è negativa, anche se la loro caratterizzazione è importante per lo studio dell'intero sistema.

Da questo punto di vista è interessante osservare che la disposizione dei punti di equilibrio è influenzata dal valore dei parametri del sistema. Infatti nel caso $\frac{c}{d} > P$, il punto di equilibrio C si trova sull'asse $y = 0$ e il punto B si sposta in una zona a $y < 0$, che non è fisicamente significativa (vedi figura ??). Il significato pieno di questa osservazione si chiarirà nel paragrafo seguente.

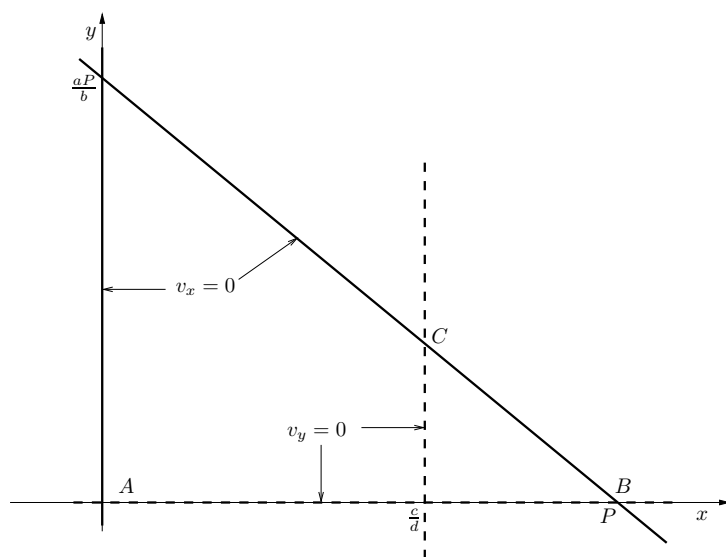


Figura 4.8: per la ricerca dei punti di equilibrio. Le linee in tratto continuo spesso sono, nello spazio delle fasi, il luogo dei punti per cui $v_x = 0$, le linee tratteggiate sono il luogo $v_y = 0$. I punti in cui i due luoghi si intersecano (A , B e C) sono i punti di equilibrio. In questo caso ($\frac{c}{d} < P$) i punti di equilibrio sono fisicamente accettabili (i valori delle coordinate sono non negativi)

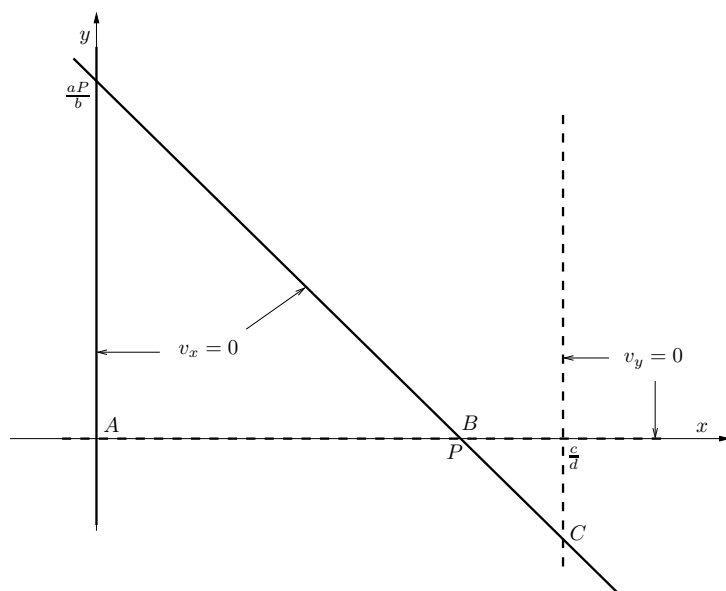


Figura 4.9: come nella figura ?? ma con $\frac{c}{d} > P$. In questo caso il punto di equilibrio C ha una coordinata negativa e non è fisicamente significativo.

4.2.3 Stabilità lineare e matrice jacobiana

Per completare l'analisi è naturalmente necessario studiare la stabilità dei punti di equilibrio. Come per il caso unidimensionale i diversi punti potranno avere proprietà locali diverse e devono essere studiati separatamente. Come nel caso unidimensionale è significativo studiare piccoli spostamenti dall'equilibrio, in modo che le funzioni v siano approssimabili con sviluppi in serie al primo ordine (stabilità lineare).

La novità sta qui nel fatto che le funzioni da approssimare sono due: v_x e v_y ; e due sono pure le variabili da cui esse dipendono. Sia quindi $P_{eq} = (x_{eq}, y_{eq})$ un punto di equilibrio. (Gli stati di equilibrio sono più di uno, ma per brevità dimentichiamoci degli indici che si riferiscono ai diversi punti, A , B , C nell'esempio di figura ?? e ??). Per gli altri si procede comunque nello stesso modo).

La espressione approssimata delle “velocità” si ottiene dalle formule dello sviluppo in serie di Taylor al primo ordine di funzioni di più variabili usando come centro il punto di equilibrio

$$v_x(x, y) = v_x(P_{eq}) + \frac{\partial v_x}{\partial x}(x - x_{eq}) + \frac{\partial v_x}{\partial y}(y - y_{eq}) \quad (4.22)$$

$$v_y(x, y) = v_y(P_{eq}) + \frac{\partial v_y}{\partial x}(x - x_{eq}) + \frac{\partial v_y}{\partial y}(y - y_{eq}) \quad (4.23)$$

I termini $v_x(P_{eq})$ e $v_y(P_{eq})$ si annullano per definizione di equilibrio. I termini $\frac{\partial v_x}{\partial x}$, $\frac{\partial v_x}{\partial y}$ ecc. sono da calcolare nel punto di equilibrio e sono quindi delle costanti. Secondo questa approssimazione quindi le “velocità” risultano in relazione lineare con lo scostamento del sistema dal punto di equilibrio. (Ricordiamo che questo vale per scostamenti piccoli).

Domanda: piccolo rispetto a che cosa?

Per semplicità notazionale e per ricollegarci alla trattazione presentata nel primo capitolo, introduciamo la notazione vettoriale

$$\mathbf{r}(t) = (r_1, r_2) = (x(t) - x_{eq}, y(t) - y_{eq}).$$

\mathbf{r} è il vettore che rappresenta, nello spazio delle fasi, lo spostamento tra lo stato del sistema e il punto di equilibrio. Si intende che $|\mathbf{r}|$ è piccolo.

Introducendo anche la matrice delle derivate parziali (detta “jacobiana”)

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

la (??) diventa

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = H\mathbf{r} \quad (4.25)$$

che ha la stessa struttura della (??). Lo studio della **stabilità lineare** di un sistema non lineare è così ricondotto allo studio del sistema lineare che lo approssima al primo ordine nello sviluppo in serie di Taylor e quindi allo studio del segno e delle realtà degli autovalori della matrice jacobiana nei punti di equilibrio.

Mentre si lascia al lettore di mostrare che il punto A di figura ?? è instabile e di capirne il significato fisico, discutiamo le proprietà degli altri due punti. La matrice jacobiana (??) in un punto generico (anche non di equilibrio) è

$$H = \begin{bmatrix} aP - 2ax - by & -bx \\ dy & -c + dx \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Specificata per il punto di equilibrio B essa risulta

$$H = \begin{bmatrix} -aP & -bP \\ 0 & -c + dP \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Essendo questa una matrice triangolare, gli autovalori coincidono con gli elementi diagonali. Mentre uno è sempre negativo, ($\lambda_1 = -aP$), il secondo ($\lambda_2 = dP - c$) è positivo per $P > \frac{c}{d}$ (che corrisponde alla figura ??), e in tal caso B presenta instabilità di sella; se invece la portanza è piccola ($P < \frac{c}{d}$) l'equilibrio B è stabile (questo corrisponde alla figura ??).

È interessante confrontare questo risultato con le proprietà dell'equilibrio C . La matrice jacobiana per questo punto è

$$H = \begin{bmatrix} -\frac{ac}{d} & -\frac{bc}{d} \\ \frac{(Pd-c)a}{b} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Con facili passaggi si ottengono gli autovalori

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(-\frac{ac}{d} \pm \sqrt{\frac{a^2 c^2}{d^2} - (4caP - 4\frac{ac^2}{d})} \right) \quad (4.29)$$

Ripercorrendo la discussione fatta alla fine del capitolo 2, si ottiene che se $(4caP - 4\frac{ac^2}{d}) > 0$, cioè se $P > c/d$, ci sono due autovalori negativi, cioè il sistema presenta stabilità nodale; invece per $P < c/d$ i due autovalori hanno segno diverso, il che comporta instabilità di sella.

È interessante osservare che quando B è stabile ($P < c/d$), C è instabile e viceversa. Il sistema ha quindi sempre un solo punto di equilibrio stabile.

Si noti anche che quando il punto stabile è B , C risulta non accettabile fisicamente, perchè comporterebbe un numero di prede negativo (?). In un ecosistema con questa proprietà, le prede e i predatori non possono convivere. Il motivo è che il numero di “prede” che riescono a vivere con la quantità di cibo P non possono fornire cibo sufficiente ai predatori.

Viceversa se $P > c/d$ le due specie possono convivere. Il sistema può stare sullo stato stazionario B se non ci sono predatori ($y = 0$), ma appena un predatore viene introdotto (una coppia in realtà), il loro numero comincia a crescere esponenzialmente fino ad arrivare a una coesistenza stabile in C (?).

Per completare l'analisi osserviamo infine che se la portanza è molto grande ($\frac{a^2 c^2}{d^2} - (4caP - 4\frac{ac^2}{d}) < 0$ cioè $P > \frac{4ac}{d^2} + \frac{c}{d}$), gli autovalori sono complessi e il punto P_3 ha stabilità focale.

Queste proprietà si possono visualizzare in modo molto efficace nello spazio delle fasi disegnando delle traiettorie tipiche come in figura ?? : nei punti di equilibrio nodali sono riportati gli autovettori e le linee sottili con la freccia richiamano i diversi tipi di stabilità (vedi figura ??).

Esercizio: riferendoci al sistema preda-predatore di cui sopra, si dia una stima dei parametri nel caso che si voglia descrivere la interazione di cervi e lupi in un ambiente delle dimensioni di San Rossore sapendo che: la superficie è un quadrato di $10Km$ di lato, per nutrire un cervo servono 0.5 ettari di terreno; cervi e lupi filiano una volta l'anno se ben nutriti.

Esercizio: con i parametri sopra individuati si studi la stabilità. Supponendo che il sistema stia all'equilibrio nel punto B di figura ?? a si calcoli l'andamento nel tempo delle popolazioni (per brevi intervalli di tempo: che vuol dire “brevi” in questo caso?) se viene introdotta una coppia di lupi. Si descriva lo stato del sistema nel tempo in termini degli autovettori.

4.2.4 Spazio delle fasi e curve critiche

Nel paragrafo precedente abbiamo studiato il comportamento del sistema per piccoli scostamenti dalle posizioni di equilibrio in approssimazione lineare: la evoluzione si può scrivere esplicitamente come una combinazione lineare dipendente dal tempo degli autovettori della matrice jacobiana calcolata nei corrispondenti punti di equilibrio. Dato che questo risultato è basato sulla approssimazione lineare (?), i risultati ottenuti sono tanto più imprecisi quanto più il sistema si allontana dai punti di equilibrio: valgono solo localmente.

È possibile e molto utile dare una descrizione globale, anche se qualitativa, studiando alcune proprietà delle funzioni “velocità”. Al solito sarà utile riferire le nostre considerazioni allo spazio delle fasi. Per semplicità prendiamo in considerazione solo spazi bidimensionali x, y .

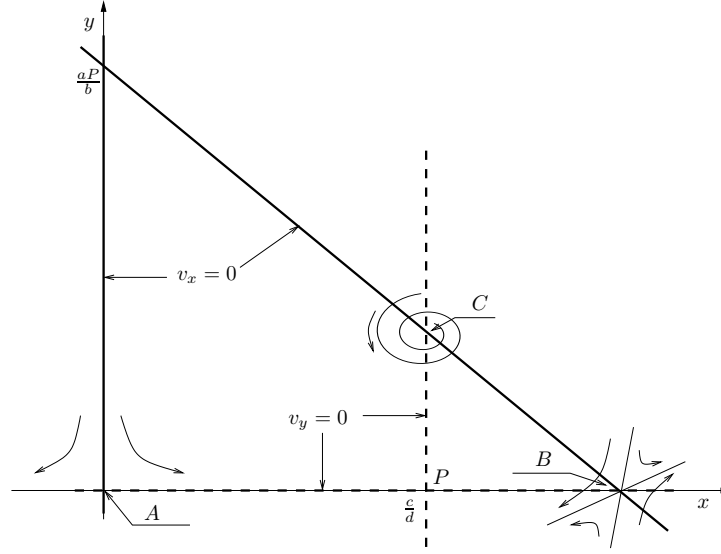


Figura 4.10: rappresentazione grafica della localizzazione e delle proprietà degli equilibri del sistema ?? con $P > c/d$. Le linee che si incrociano nei punti di equilibrio nodali (λ reali) rappresentano le direzioni degli autovettori della matrice jacobiana (punto B; per il punto A gli autovettori coincidono con gli assi x e y)

Siano quindi rispettivamente $v_x(x, y)$ e $v_y(x, y)$ le funzioni velocità. La equazione

$$v_x(x, y) = 0 \quad (4.30)$$

definisce in modo implicito una curva $y_x = y_x(x)$ nello spazio delle fasi, che si può trovare per esempio col teorema del Dini sulla invertibilità locale ([?]):

$$\frac{dy_x}{dx} = -\frac{\frac{\partial v_x}{\partial x}}{\frac{\partial v_x}{\partial y}} \quad (4.31)$$

Nell'esempio (??) la funzione $y_x(x)$ risulta composta di due branche che corrispondono alle due rette

$$x = 0 \quad (4.32)$$

(l'asse delle ascisse, contrassegnato col simbolo y_{x1}) e

$$y = \frac{a(P - x)}{b} \quad (4.33)$$

che è una la retta inclinata contrassegnata col simbolo y_{x2} , come rappresentato in figura ?? . È interessante studiare il comportamento qualitativo delle traiettorie del sistema quando toccano uno dei punti che stanno su una di queste branche: essendo queste il luogo degli stati dove $\frac{dx}{dt} = v_x = 0$, nel punto di contatto la x smette di crescere nel tempo. Eccetto il caso che nello stesso punto sia anche $v_y = 0$ (si verifica nei punti di equilibrio che discutiamo dopo), ciò vuol dire che y sta cambiando nel tempo e x no. Ma questo corrisponde a una traiettoria di evoluzione localmente verticale in quel punto.

Un modo per convincersene, che i matematici probabilmente considererebbero degno di compassione, è di considerare il rapporto

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (4.34)$$

dove Δx e Δy rappresentano rispettivamente il “piccolo” incremento che le variabili x e y subiscono in un “piccolo” intervallo di tempo Δt . Questi incrementi si possono valutare approssimandoli con il loro sviluppo in serie di Taylor al primo ordine:

$$\Delta x \cong v_x \Delta t \quad (4.35)$$

$$\Delta y \cong v_y \Delta t \quad (4.36)$$

In tutti e soli i punti in cui la traiettoria tocca il luogo $v_x = 0$ (in grassetto in figura ??), ovviamente si ha $v_x = 0$, quindi $\Delta x = 0$ mentre $\Delta y \neq 0$, da cui $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \infty$ che corrisponde a un tratto di traiettoria verticale nello spazio x, y .

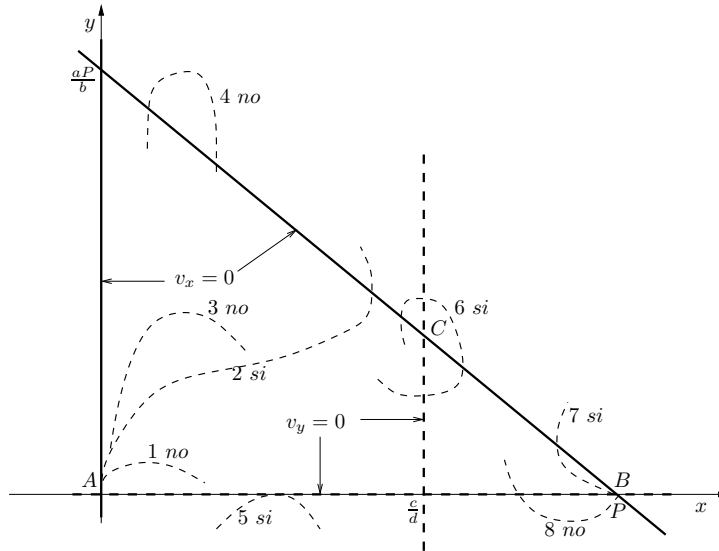


Figura 4.11: comportamento delle traiettorie nello spazio delle fasi in corrispondenza dei luoghi critici $v_x = 0$ (linee spesse continue) e $v_y = 0$ (linee spesse tratteggiate) per il sistema ?? : tutti e soli i punti in cui le traiettorie hanno tangente parallela all’asse x stanno sul luogo $v_y = 0$, (e viceversa per $v_x = 0$). Questo esclude per esempio le traiettorie 1, 3, 4, 8 e non vieta le traiettorie 2, 5, 6, 7. Analogamente per $v_x = 0$. Naturalmente non tutte le traiettorie non vietate da questi argomenti sono compatibili con altri aspetti delle equazioni costitutive.

Le traiettorie possibili sono quindi quelle che intersecano verticalmente le curve $v_x = 0$, mentre sono vietate le traiettorie che presentano una tangente verticale in un punto che non è su questo luogo. È come se le traiettorie avvicinandosi al luogo $v_x = 0$ subissero una “riflessione” da un piano verticale quando toccano le curve $v_x = 0$.

In modo del tutto analogo si ha che quando le traiettorie toccano il luogo dei punti in cui $v_y = 0$, si comportano come se subissero una “riflessione” da un piano orizzontale. Per il caso ?? tutto questo è simbolicamente rappresentato dalle curve a tratto discontinuo e leggero di figura ?? : accanto a ciascuna di esse è riportato se le traiettorie hanno proprietà qualitative compatibili (*si*) o incompatibili (*no*) con le osservazioni precedenti. Si lascia al lettore di analizzare queste conclusioni.

Naturalmente non dobbiamo dimenticare che nei punti di intersezione tra i due luoghi (i punti A, B, C in figura ??) queste considerazioni non valgono perché $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{0}$ è indefinito. In effetti questi sono i punti di equilibrio che abbiamo già studiato al paragrafo precedente.

Queste proprietà aiutano a farsi una idea di come possano essere le traiettorie: se ne estraggono informazioni **qualitative** ma **su tutto lo spazio delle fasi** (contariamente all'analisi della stabilità lineare che dà informazioni esatte sotto forma di equazioni di moto esplicite ma valide solo localmente). Nel caso nostro, per esempio potremo escludere alcuni tipi di traiettorie senza alcuna altra elaborazione matematica.

4.3 Sistemi spontaneamente oscillanti

Sistemi che oscillano spontaneamente e in modo permanente sono svariati e importantissimi in natura: si pensi al muscolo cardiaco (che notoriamente pulsa con una periodicità ben definita anche quando viene estratto dal corpo e immerso in una soluzione fisiologica), ai cicli della economia, alle macchie solari (che si ripresentano ogni undici anni), ai circuiti elettrici che pilotano le antenne dei sistemi di trasmissione, alle vibrazioni dell'aria in un flauto, ai cicli poliannuali delle popolazioni nei sistemi ecologici, alla alternanza della produzione di molti alberi da frutto, al ciclo della temperatura nelle glaciazioni.

Nei paragrafi che seguono prenderemo in esame alcuni di questi fenomeni cercando di individuare le proprietà strutturali che danno ragione di questo comportamento così interessante e generale.

Cominciamo col sottolineare le differenze qualitative tra questo fenomeno e la ben nota dinamica periodica degli oscillatori lineari di cui abbiamo parlato nella prima parte del corso. Prendiamo come esempi da confrontare un oscillatore armonico (una altalena lasciata libera di oscillare con definite condizioni iniziali) e un sistema con **oscillazioni spontanee** come il muscolo cardiaco. (Abbiamo precisato sopra che a scandire il ritmo del cuore non è il sistema nervoso: i fisiologi ci dicono che il sistema nervoso vagale e simpatico possono rallentare o accelerare il ritmo cardiaco, ma esso permane anche se il cuore viene isolato da ogni connessione nervosa).

Entrambi questi sistemi hanno un **periodo** ben definito T , e in questo sono identici.

Supponiamo quindi che il cuore e la altalena in un certo istante siano in oscillazione. Una prima differenza fondamentale consiste nel fatto che il moto della altalena più o meno lentamente si smorza (a causa dell'attrito), mentre quello del cuore continua (finché c'è nutrimento disponibile): la **ampiezza** della oscillazione in un caso diminuisce esponenzialmente, nell'altro è costante nel tempo.

Certo si può immaginare un'altalena con attrito piccolissimo: in questo caso la ampiezza cambia molto lentamente. Consideriamo questo caso limite. La ampiezza di oscillazione della altalena in ogni istante è determinata dalle condizioni iniziali, e può assumere ogni valore (sempre restando nel limite in cui valgono le approssimazioni lineari). Per il cuore invece la oscillazione ha ampiezza ben definita: non dipende né dalle condizioni iniziali né dal tempo.

Non solo: se partiamo da condizioni iniziali in cui la oscillazione è piccolissima (per il cuore questo accade quando si “perde un colpo”, in termini medici si verifica una “extrasistole”: il cuore si “ferma” per un breve intervallo di tempo in cui la ampiezza della sua pulsazione risulta quasi nulla): in queste condizioni la oscillazione della altalena non aumenta, mentre la oscillazione del cuore nel giro di un paio di periodi raggiunge il suo valore normale (il cuore “riparte” da solo. Quasi sempre...).

A suo tempo abbiamo incontrato anche il caso di un oscillatore la cui ampiezza cresce spontaneamente (l'oscillatore instabile). Ma anche questo modello non ha la caratteristica di un sistema come il cuore in quanto la ampiezza della oscillazione cresce indefinitamente nel tempo (in modo esponenziale).

Riassumendo, la caratteristica distintiva dei sistemi spontaneamente oscillanti è che, qualunque siano le condizioni iniziali, il sistema si assesta su una oscillazione di ampiezza e periodo ben definiti.

Esercizio: mostrare che i sistemi deterministici del primo ordine non possono esibire questa proprietà. Suggerimento: in un sistema 1D un moto periodico è impossibile perché in ogni stato del moto periodico la “velocità” dovrebbe assumere due valori diversi (e di segno opposto)...

Nei seguenti paragrafi illustreremo alcuni esempi di sistemi con oscillazioni spontanee, che sono anche detti “**sistemi ciclici**”. Al solito cercheremo esempi molto intuitivi, con modelli analitici che puntino alla semplificazione della matematica piuttosto che alla aderenza ai fenomeni realmente coinvolti.

4.3.1 Il ciclo limite in un sistema quasi lineare

Cominciamo con la discussione di un sistema artificiale ma che permette di illustrare il meccanismo di fondo che porta alle oscillazioni spontanee e di discuterne alcuni aspetti in modo quantitativo. Si tratta di una variante dell’oscillatore instabile discusso a sue tempo (vedi figura ?? e la ??). Abbiamo visto che quel sistema è stabile (la ampiezza delle oscillazioni diminuisce esponenzialmente nel tempo) o instabile (la ampiezza cresce esponenzialmente) a seconda di come si scelgono i parametri del circuito, per esempio il valore di α , che modifica il valore di γ_r nella

$$\ddot{Q} + (\gamma - \gamma_r)\dot{Q} + \omega_0^2 Q = 0 \quad (4.37)$$

con

$$\gamma_r = \frac{\alpha M}{C R_0} \quad (4.38)$$

Consideriamo quindi un valore di α per cui $\gamma < \gamma_r$: il sistema è instabile.

Se le condizioni iniziali in un certo istante siano prossime al punto di equilibrio $(0,0)$, nello spazio delle fasi $(x, y) \equiv (x, v) \equiv (Q, I)$ la traiettoria descrive una spirale “crescente”: finché il modello ?? è appropriato, la ampiezza delle oscillazioni cresce esponenzialmente come in figura ??. Quel che accade

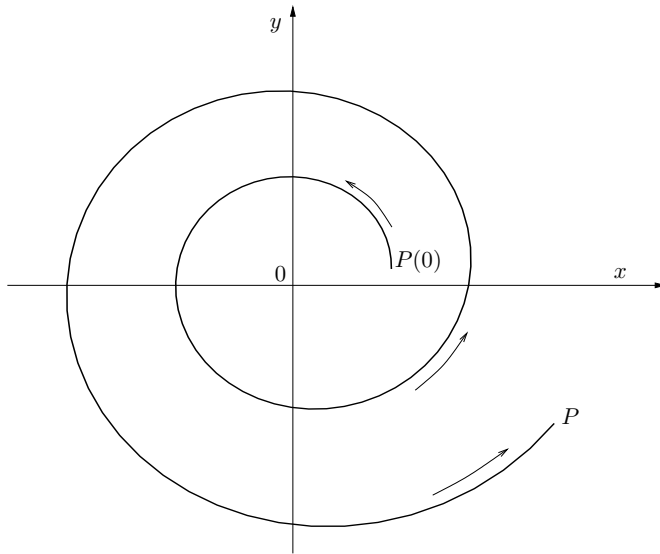


Figura 4.12: evoluzione nello spazio delle fasi del sistema lineare instabile descritti dalla ?? con $\gamma < \gamma_r$. $P(0)$ è lo stato iniziale: la traiettoria è una spirale esponenziale crescente.

in realtà è che a un certo punto le oscillazioni smettono di crescere. Uno dei motivi potrebbe essere che l’amplificatore di figura ?? comincia a saturare, cioè a dare in uscita (su c) un potenziale più piccolo di $\alpha \frac{Q}{C}$. Per semplificare la discussione immaginiamo che il potenziale in uscita, che per valori bassi del

potenziale di ingresso Q/C è dato da $V_c = \alpha \frac{Q}{C}$, cessi di seguire questa legge di proporzionalità quando $|Q|$ raggiunge un certo valore critico $|Q| = Q_{cr}$, così che V_c è dato da

$$V_c = \alpha \frac{Q(t)}{C} \quad \text{per } |Q| < Q_{cr} \quad \text{e} \quad (4.39)$$

$$V_c = \alpha \frac{Q_{cr}}{C} = \text{costante} \quad \text{per } |Q| > Q_{cr} \quad (4.40)$$

Per scrivere correttamente la equazione di evoluzione conviene rifarsi alla discussione che ha portato alla (??) nel paragrafo sull'oscillatore instabile. Dalla (??) (in cui si trascura, come allora, il termine $L_0 \frac{dI_0}{dt}$) e dalla(??) si ha

$$I_0 = -\alpha \frac{Q(t)}{CR_0} \quad \text{per } |Q| < Q_{cr} \quad \text{e} \quad (4.41)$$

$$I_0 = -\alpha \frac{Q_{cr}}{CR_0} = \text{costante} \quad \text{per } |Q| > Q_{cr} \quad (4.42)$$

Sostituendo in (??)

$$f_{em} = \frac{\alpha M}{CR_0} \dot{Q} \quad \text{per } |Q| < Q_{cr} \quad \text{e} \quad (4.43)$$

$$f_{em} = 0 \quad \text{per } |Q| > Q_{cr} \quad (4.44)$$

da questo segue

$$\gamma_r = \frac{\alpha M}{CR_0} \quad \text{per } |Q| < Q_{cr} \quad \text{e} \quad (4.45)$$

$$\gamma_r = 0 \quad \text{per } |Q| > Q_{cr} \quad (4.46)$$

La (??) diventa

$$\ddot{Q} + (\gamma - \gamma_r) \dot{Q} + \omega_0^2 Q = 0 \quad \text{per } |Q| < Q_{cr} \quad \text{e} \quad (4.47)$$

$$\ddot{Q} + \gamma \dot{Q} + \omega_0^2 Q = 0 \quad \text{per } |Q| > Q_{cr} \quad (4.48)$$

La equazione di moto quindi ha due espressioni diverse nelle due regioni $|Q| < Q_{cr}$ e $|Q| > Q_{cr}$, pur restando in ciascuna delle due regioni una relazione lineare.

Se assumiamo tutti i parametri positivi, nella regione $|Q| > Q_{cr}$ il sistema tende a smorzarsi, mostrando l'andamento tipico dei sistemi stabili ("regione stabile"). Nella regione $|Q| < Q_{cr}$ si possono verificare due casi diversi: se $\gamma > \frac{\alpha M}{CR_0}$ il sistema si smorza, anche se con tempo di smorzamento allungato. Se invece $\gamma < \frac{\alpha M}{CR_0}$ il sistema ha comportamento instabile. Questo perché la potenza iniettata dal circuito di reazione è più grande di quella dissipata per effetto Joule su R ("regione instabile"). Questo secondo caso è quello che dà origine a un ciclo spontaneo.

Diamo prima una spiegazione intuitiva di questo comportamento rimandando al seguito una discussione più dettagliata e una caratterizzazione matematica della oscillazione spontanea che si instaura.

Aiutiamoci nella discussione con la rappresentazione della evoluzione del sistema (??) nello spazio delle fasi $(Q(t), \dot{Q}(t))$ (figura ??): le rette verticali tratteggiate separano lo spazio in una regione interna dove $|Q| < Q_{cr}$, dove la ampiezza è crescente, e in due regioni esterne dove $|Q| > Q_{cr}$ e il sistema è smorzato. Supponiamo che per $t = 0$ il sistema si trovi nella regione interna, per esempio in P_0 . In questa regione il sistema segue la prima espressione della (??), si comporta come instabile e la traiettoria descrive una spirale di raggio crescente cioè compie oscillazioni di ampiezza crescente nel tempo. Questo continua finché la spirale non raggiunge la linea di separazione tra le due regioni $Q = -Q_{cr}$, nel punto A , all'istante t_1 .

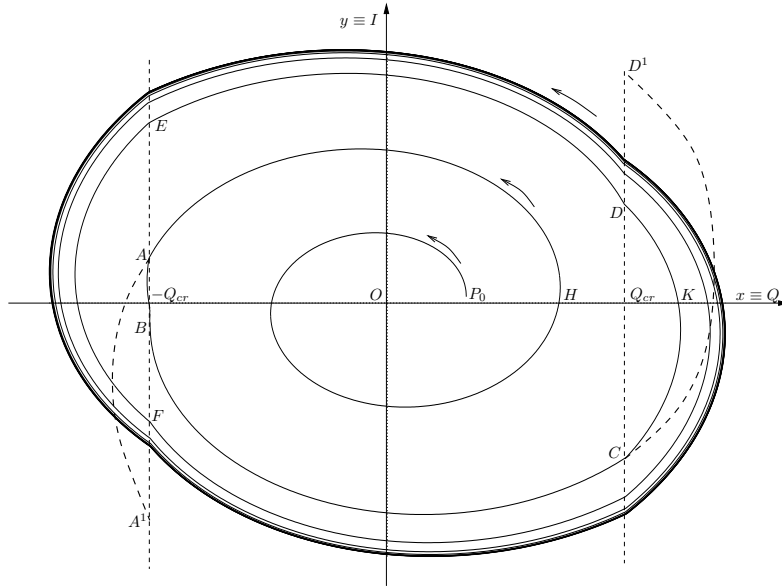


Figura 4.13: evoluzione nello spazio delle fasi del sistema oscillante con saturazione descritto dall'?? Nella zona compresa tra le due rette verticali tratteggiate la traiettoria è una spirale esponenziale crescente (tratti $P_0 \rightarrow A$, $B \rightarrow C$, $D \rightarrow E$ ecc.). Nella zona esterna il sistema segue una spirale smorzata (tratti $A \rightarrow B$, $C \rightarrow D$, $E \rightarrow F$). Le linee curve tratteggiate (tratti $A \rightarrow A^1$, $C \rightarrow D^1$ ecc.) descrivono la evoluzione che il sistema seguirebbe raggiungendo le linee di confine tra le due regioni se non ci fosse la saturazione.

Se il sistema continuasse con la stessa equazione, la traiettoria continuerebbe lungo la spirale crescente, cioè lungo il tratto di spirale tratteggiato $A \rightarrow A^1$ e attraverserebbe la retta di confine tra le due regioni nel punto A^1 più distante dall'asse delle ascisse di quanto non lo sia A (il che, come sappiamo, corrisponde ad un aumento di energia totale dell'oscillatore).

In realtà per $t > t_1$ la equazione che determina la evoluzione è la seconda delle (??), che corrisponde ad un moto smorzato. Questo comporta la diminuzione della energia totale che graficamente corrisponde ad una spirale di raggio decrescente, che raggiunge la linea di confine nel punto B nell'istante t_2 .

Per $t > t_2$ la equazione di moto appropriata torna ad essere la prima delle (??) e la traiettoria torna ad essere una spirale crescente che interseca la linea di separazione $Q = Q_{cr}$ in C nell'istante t_3 .

Esercizio: mostrare che la distanza di C dall'asse delle Q è maggiore di quella di A . Suggerimento: utilizzare il fatto che in due dimensioni le traiettorie nello spazio delle fasi non si possono mai incrociare e che per il sistema (??) le traiettorie che partono da punti opposti sono simmetriche per inversione rispetto all'origine cioè due traiettorie che hanno come condizioni iniziali due punti A e C con entrambe le coordinate uguali in modulo e di segno opposto ($Q_A = -Q_C$ e $\dot{Q}_A = -\dot{Q}_C$, hanno in ogni istante le coordinate uguali in modulo e di segno opposto).

Di nuovo per $t > t_3$ il sistema è smorzato e non segue la spirale crescente (la curva tratteggiata $C \rightarrow D^1$) ma finisce nel punto D dove ricomincia il comportamento ad ampiezza crescente $D \rightarrow E$ e così di seguito. Ripetendo il ragionamento dell'esercizio sopra proposto, si ottiene che E dista dall'asse delle ascisse più di A ; si capisce quindi che da A partirà un secondo "ciclo" simile al percorso $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$ ma ad esso esterno.

Riassumendo: il nostro oscillatore in una prima fase è caratterizzato dalla crescita della ampiezza come i sistemi instabili. Questa fase perdura finché il sistema resta nella "regione instabile" $|Q| < Q_{cr}$.

Quando però la traiettoria invade la “regione stabile” $|Q| > Q_{cr}$, la ampiezza diminuisce. La ampiezza ha quindi una dinamica intermittente: per una frazione del periodo di oscillazione essa cresce e per un'altra diminuisce.

A determinare se in un ciclo completo ($A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$) la ampiezza complessivamente aumenti o diminuisca sono da una parte i coefficienti γ e γ_r (che dicono quanto è efficiente il meccanismo di frenamento o di spinta), dall'altra il rapporto tra la durata della fase di “frenata” (gli intervalli $t_2 - t_1$ e $t_4 - t_3$) e della fase di “spinta” (gli intervalli $t_3 - t_2$ e $t_5 - t_4$).

Osserviamo che in un certo sistema i coefficienti γ e γ_r sono assegnati mentre gli intervalli di tempo dipendono dalla ampiezza del ciclo: quanto più il ciclo è ampio tanto più la durata della fase di frenata prevale sulla durata della fase di spinta, come si capisce subito dalla figura ??.

Su questa proprietà è basata la esistenza di un ciclo stabile. Supponiamo infatti che il sistema abbia una ampiezza tale per cui durante la fase di spinta entri più energia di quanto ne esca nella fase di frenata: gesto si realizza se la ampiezza è “piccola” cioè se la frazione del periodo del ciclo trascorsa nella fase di “frenata” (in cui il punto rappresentativo sta nella regione $|Q| > Q_{cr}$) è piccola o nulla. In tale condizione in un ciclo completo la energia totale risulterà aumentata e di conseguenza sarà aumentata complessivamente anche la ampiezza. Il ciclo successivo sarà di conseguenza più grande. Questo comporta che nel ciclo successivo lo sbilanciamento del flusso di energia risulterà magari ancora positivo, ma minore: di nuovo ci sarà un aumento dell' ampiezza, ma più piccolo che nel ciclo precedente. Il processo quindi sposta il sistema verso una condizione per cui le cause di variazioni risultano diminuite.

Questo comportamento è ben visualizzato in figura ?? : durante il primo ciclo $P_0 \rightarrow H$ la ampiezza della oscillazione raddoppia, nel secondo ciclo, $H \rightarrow K$ aumenta di circa il 40%, nel ciclo successivo aumenta di meno del 10% .

Naturalmete questo non vuol dire che il processo converga. Ma è facile convincersi che la ampiezza della oscillazione non tende a ∞ . Si capisce infatti che se il ciclo è molto ampio, la frazione di periodo in cui l'oscillazione è smorzata ($|Q| > Q_{cr}$) tende ad aumentare a sfavore della frazione in cui la oscillazione cresce ($|Q| < Q_{cr}$). Per ampiezze che tendono a ∞ questa frazione tende a 1, cioè il sistema è sempre in condizione di frenamento.

Il risultato di queste considerazioni è che se il ciclo è “troppo piccolo” tende a crescere, e se è “troppo grande” tende a diminuire.

Osserviamo infine che se in un certo istante il ciclo è in fase di ampiezza crescente, lo sarà per ogni periodo successivo. Se infatti la ampiezza invertisse la sua tendenza a crescere, la traiettoria dovrebbe intersecare un tratto della traiettoria già percorso precedentemente, e questo è in contraddizione col fatto che in sistemi deterministici le traiettorie non si possono intersecare (vedasi anche l'esercizio precedente). Lo stesso argomento vale anche se la traiettoria è in fase decrescente. Si ottiene quindi che se la ampiezza è “abbastanza piccola” cresce indefinitamente, e se è “abbastanza grande” decresce indefinitamente e che tutte le traiettorie che in un certo istante stanno nella fase “crescente”, non potranno mai raggiungere un punto che stia nella zona ad ampiezza decrescente.³

Dato che le successioni reali crescenti e limitate superiormente (e le successioni decrescenti e limitate inferiormente) hanno limite, si può concludere che per valori iniziali “piccoli” la ampiezza tende a un limite superiore l_1 e per valori grandi tende a un limite inferiore l_2 . Se i due limiti coincidono c'è da aspettarsi che qualunque siano le condizioni iniziali il ciclo tenda a stabilizzarsi su un particolare ciclo per cui $l = l_1 = l_2$ e per cui il bilancio della energia (cioè la differenza tra la energia che entra nella fase di spinta e quella che esce nella fase di frenata) è nullo: questo ciclo si chiama **ciclo limite**.

Queste caratteristiche sono visualizzate in figura ?? in cui è rappresentata con tratto continuo la evoluzione del sistema con una condizione iniziale (P_0) caratterizzata da una ampiezza “piccola” e con lina tratteggiata la evoluzione del sistema con una condizione iniziale (P_1) con ampiezza “grande”. Nel

³queste argomentazioni sono basate sulla assunzione che ad ogni “punto” dello spazio delle fasi corrisponda una “ampiezza” ben definita: definiamo in modo univoco la ampiezza associata a un punto generico dello spazio delle fasi come la ascissa del punto in cui la traiettoria che origina da esso interseca per la prima volta il semiasse positivo delle x . Riferendoci alla figura ?? la ampiezza associata a P_0 è la lunghezza del segmento OH , quella ssociata a D o a C è il segmento OK

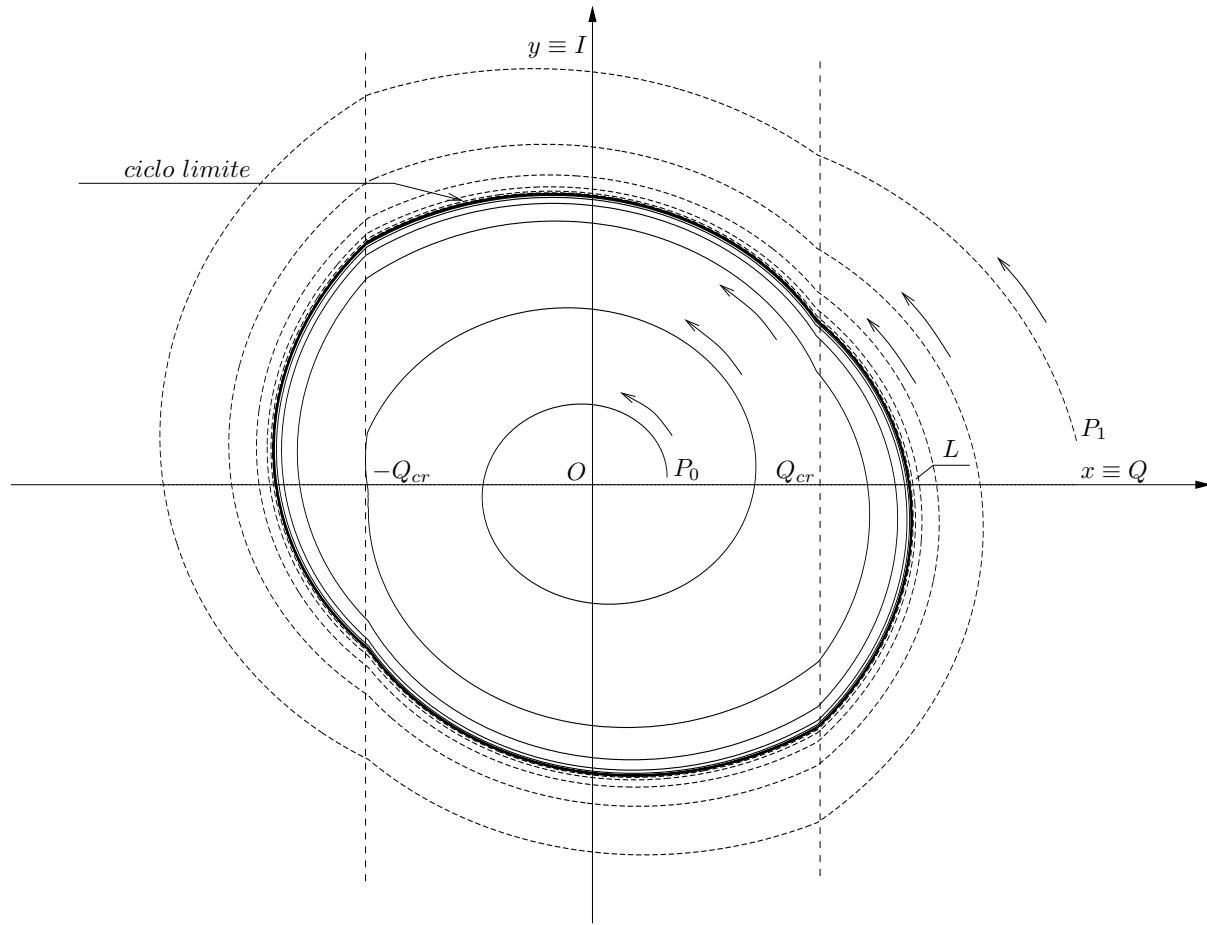


Figura 4.14: evoluzione nello spazio delle fasi del sistema oscillante con saturazione. Con linea continua è rappresentata la traiettoria con condizione iniziale P_0 di “piccola” ampiezza: la ampiezza cresce fino a un valore limite l_1 , che è dato dalla lunghezza del segmento OL . Con linea tratteggiata è rappresentata la traiettoria che parte dal punto P_1 , di ampiezza grande: la ampiezza decresce indefinitamente e raggiunge un valore limite l_2 che in questo caso coincide con l_1 . La traiettoria chiusa verso cui convergono i due tipi di traiettoria è il “ciclo limite” e appare in figura come la linea chiusa a tratto spesso.

paragrafo seguente metteremo in formule queste considerazioni.

Bilancio energetico e caratterizzazione del ciclo limite in un oscillatore quasi lineare Per discutere quantitativamente il meccanismo di raggiungimento del ciclo limite introduciamo una semplificazione: supponiamo che l’attrito sia “piccolo”. Dal punto di vista analitico questo significa che nella (??) assumiamo che

$$\gamma \ll \omega \cong \frac{\omega_0^2}{\omega} \quad \text{e} \quad (4.49)$$

$$|\gamma - \gamma_r| \ll \omega \cong \frac{\omega_0^2}{\omega} \quad (4.50)$$

Dal punto di vista fisico questo significa che la energia immessa nel (o persa dal) sistema durante un ciclo è molto minore della energia totale (elettrostatica + magnetica) presente in quel ciclo⁴.

Dal punto di vista del calcolo questo permette di introdurre un “calcolo perturbativo” che consiste in questa serie di passaggi:

1- In prima approssimazione si calcola la evoluzione del sistema per un intero periodo come se non ci fosse alcun attrito cioè ponendo $\gamma = \gamma_r = 0$ in (??). Con questa assunzione, la legge oraria del moto è data dalla soluzione generale (??) che possiamo scrivere, senza perdita di generalità,

$$Q(t) = Q_{max} \sin(\omega_0 t) \quad (4.54)$$

$$\dot{Q}(t) = \omega_0 Q_{max} \cos(\omega_0 t) \quad (4.55)$$

Q_{max} è la ampiezza della oscillazione: la soluzione è periodica e conserva esattamente la energia (alla fine del ciclo Q e con essa la energia assume gli stessi valori). È importante sottolineare che la (??) dà una espressione esplicita delle variabili del sistema in ogni istante una volta assegnata la ampiezza della oscillazione Q_{max} .

2- si introduce l'effetto di “attrito” calcolando la energia persa durante un ciclo “come se” questo non risentisse dell'attrito. Questo si ottiene dalla espressione della potenza dissipata per attrito w_{out} che è data dalla formula generale della meccanica

$$w_{out} = F_{at} \dot{x} \quad (4.56)$$

(ricordiamo che la potenza è il lavoro fatto nella unità di tempo, $w = \frac{dL}{dt}$ e che a sua volta il lavoro compiuto da una forza F che sposta il punto di applicazione di uno spazio dx è dato dal prodotto (scalare) $L = \mathbf{F}d\mathbf{x}$ da cui la (??). Si veda anche la nota a piè pagina).

Nel nostro caso

$$w_{out} = \gamma_{eff} \dot{Q} \dot{Q} = \gamma_{eff} (\dot{Q})^2 \quad (4.57)$$

γ_{eff} è il coefficiente di “attrito” effettivo che assume espressioni (e segno) diversi a seconda del valore di $Q(t)$ (vedi ??),

$$\gamma_{eff} = \gamma - \gamma_r < 0 \quad \text{per } |Q| < Q_{cr} \quad \text{e} \quad (4.58)$$

$$\gamma_{eff} = \gamma > 0 \quad \text{per } |Q| > Q_{cr} \quad (4.59)$$

In questo approccio perturbativo per calcolare la energia persa nel ciclo (L_{out}) dobbiamo integrare w_{out} su un intero periodo. Nella (??) per \dot{Q} va usata la espressione approssimata (??).

3- Infine il valore di L_{out} viene utilizzato per “aggiornare” il valore della energia totale del sistema alla fine del ciclo in esame

$$U_T = U_0 - L_{out} \quad (4.60)$$

⁴Richiamiamo qui il teorema della energia in una variante che useremo in seguito. Moltiplicando per \dot{Q} la (??) si ha

$$\dot{Q}\ddot{Q} + \gamma_{eff}(\dot{Q})^2 + \omega_0^2 Q \dot{Q} = 0 \quad (4.51)$$

da cui

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} (\dot{Q})^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 Q^2 \right) = -\gamma_{eff} \dot{Q} \dot{Q} \quad (4.52)$$

Nel termine che compare a sinistra si riconosce la derivata della energia totale del sistema in quanto somma della energia cinetica e della energia potenziale $U = \frac{1}{2} (\dot{Q})^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 Q^2$. Se $\gamma_{eff} = 0$, non c'è attrito, U è costante nel tempo, il che esprime il teorema di conservazione della energia. Se $\gamma_{eff} \neq 0$ c'è attrito, U non è costante e la sua variazione nell'unità di tempo è data dal lavoro fatto per unità di tempo dalle forze esterne (teorema dell'energia cinetica). Nel caso $\gamma_{eff} = 0$, la energia è costante, essa può essere calcolata in un istante qualunque, per esempio nell'istante in cui Q è massima. Ovviamente in tale istante $\dot{Q} = 0$ sicchè risulta

$$U = \frac{1}{2} \omega_0^2 Q_{max}^2 \quad (4.53)$$

dove Q_{max} è l'ampiezza della oscillazione di cui si sta parlando, di cui si è discusso alla nota precedente.

dove U_0 è la energia del sistema all'inizio del ciclo e U_T è l' energia alla fine dello stesso ciclo (ricordiamo che $T = 2\pi/\omega_0$).

Infine approssimando il rapporto incrementale con la derivata si ottiene:

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{L_{out}}{T} = -\frac{\omega_0 L_{out}}{2\pi} \quad (4.61)$$

Questo ultimo passaggio sfrutta l'ipotesi che la ampiezza della oscillazione cambi di poco in un singolo ciclo.

Il calcolo perturbativo della energia persa in un ciclo completo Il calcolo di L_{out} richiede due procedure diverse a seconda che Q_{max} sia minore o maggiore di Q_{cr} .

Se $Q_{max} < Q_{cr}$, per tutto il ciclo sarà $Q(t) < 0$ (vedi figura ??), da cui segue $\gamma_{eff} = \gamma - \gamma_r$. Si ha

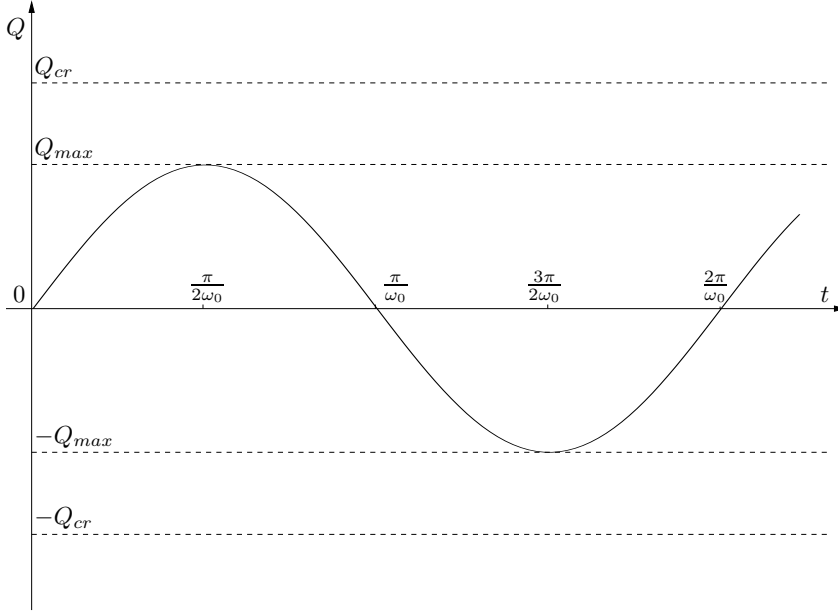


Figura 4.15: Per il calcolo approssimato della energia acquisita dal sistema in un ciclo nel caso $Q_{max} < Q_{cr}$. Il sistema è sempre in fase di amplificazione dato che $\gamma_{eff} = \gamma - \gamma_r < 0$

quindi

$$L_{out} = (\gamma - \gamma_r) \int_0^T (\dot{Q})^2 dt = (\gamma - \gamma_r) (\omega_0 Q_{max})^2 \int_0^T \cos^2(\omega_0 t) dt \quad (4.62)$$

Ricordando che il valore medio di $\cos^2(\phi t)$ è $1/2$ si ottiene

$$L_{out} = (\gamma - \gamma_r) \omega_0^2 Q_{max}^2 \frac{1}{2} T = \pi \frac{\gamma - \gamma_r}{\omega_0} Q_{max}^2 \quad (4.63)$$

Più laborioso è il caso $Q_{max} > Q_{cr}$. Riferendoci alla figura ??, si osserva che il ciclo completo $0 < t < T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ è suddiviso in sei intervalli con caratteristiche diverse: per $t_1 < t < t_2$ e per $t_3 < t < t_4$ si ha $Q(t) > Q_{cr}$ per cui $\gamma_{eff} = \gamma > 0$; negli altri quattro intervalli si ha $Q(t) < Q_{cr}$ per cui $\gamma_{eff} = \gamma - \gamma_r < 0$. Di questi diversi valori di γ_{eff} si deve tener conto nel calcolo di L_{out} .

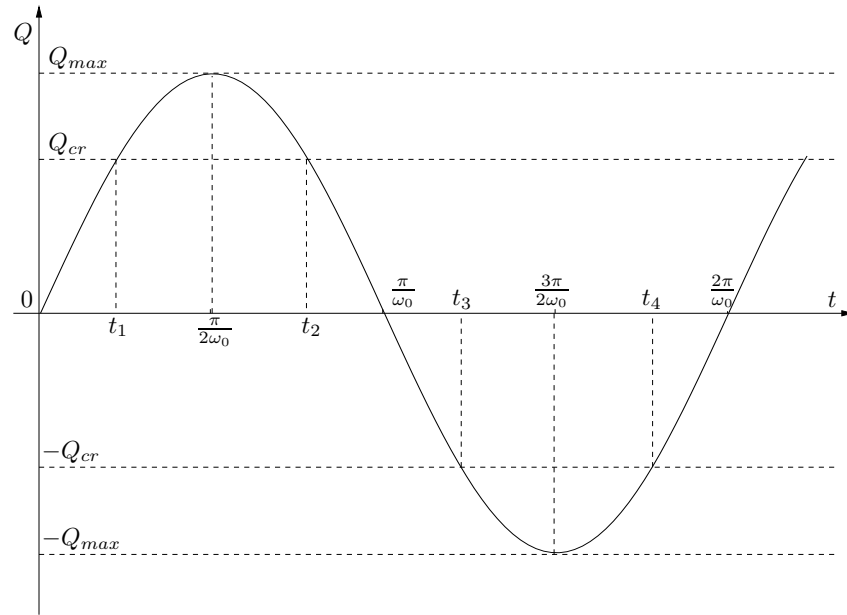


Figura 4.16: Per il calcolo dell'energia acquisita o persa in un ciclo nel caso $Q_{max} > Q_{cr}$. Negli intervalli in cui $|Q| > Q_{cr}$ ($t_1 < t < t_2$ e $t_3 < t < t_4$), il sistema perde energia dato che $\gamma_{eff} = \gamma > 0$ e viceversa negli altri intervalli

I tempi t_1, t_2, t_3, t_4 sono determinati dalla intersezione tra le rette $|Q| = Q_{cr}$ e la curva $Q = Q(t)$ cioè dalla relazione

$$Q_{max} \sin(\omega_0 t_i) = \pm Q_{cr} \quad (4.64)$$

da cui

$$t_1 = \frac{1}{\omega_0} \arcsin \frac{Q_{cr}}{Q_{max}} \quad (4.65)$$

Si osservi infine che l'intero periodo $0 < t < T$ è suddiviso in quattro intervalli uguali ($0 < t < T/4 = \pi/2\omega_0$ ecc.) in cui gli integrali della potenza dissipata risultano uguali. Potremo perciò scrivere:

$$L_{out} = 4(\gamma - \gamma_r)\omega_0^2 Q_{max}^2 \int_0^{t_1} \cos^2(\omega_0 t) dt + 4\gamma\omega_0^2 Q_{max}^2 \int_{t_1}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} \cos^2(\omega_0 t) dt \quad (4.66)$$

Col cambio di variabile $\tau = t\omega_0$ si ha

$$\int_0^{t_1} \cos^2(\omega_0 t) dt = \frac{1}{\omega_0} \int_0^{\tau_1} \cos^2(\tau) d\tau \quad (4.67)$$

dove

$$\tau_1 = \omega_0 t_1 = \arcsin \frac{Q_{cr}}{Q_{max}} \quad (4.68)$$

Infine, integrando per parti, si ha

$$\int_a^b \cos^2(\tau) d\tau = \frac{1}{2} (\sin x \cos x + 1) \Big|_a^b \quad (4.69)$$

Sostituendo in (??) si ottiene

$$L_{out} = 2(\gamma - \gamma_r)\omega_0 Q_{max}^2 (\sin(\tau_1) \cos(\tau_1) + \tau_1) + 2\gamma\omega_0 Q_{max}^2 (-\sin(\tau_1) \cos(\tau_1) - \tau_1 + \frac{\pi}{2}) \quad (4.70)$$

Questa espressione si può semplificare ricordando che

$$\sin(\arcsin x) = x \quad (4.71)$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2} \quad (4.72)$$

Si ottiene

$$L_{out} = 2\omega_0 Q_{max}^2 ((\gamma - \gamma_r) \left(\frac{Q_{cr}}{Q_{max}} \sqrt{1 - \left(\frac{Q_{cr}}{Q_{max}} \right)^2} + \tau_1 \right) + \gamma \left(-\frac{Q_{cr}}{Q_{max}} \sqrt{1 - \left(\frac{Q_{cr}}{Q_{max}} \right)^2} - \tau_1 + \frac{\pi}{2} \right)) \quad (4.73)$$

Si osservi che L_{out} è la somma di due termini che hanno segno opposto.

Caratterizzazione del ciclo limite Siamo ora in grado di discutere come varia nel tempo la ampiezza della oscillazione ⁵.

Sostituendo le espressioni per la energia (??) e per L_{out} (??) in (??) si ottiene

$$\frac{dQ_{max}}{dt} = -\frac{Q_{max}}{\pi} \left(\gamma \frac{\pi}{2} - \gamma_r \left(\frac{Q_{cr}}{Q_{max}} \sqrt{1 - \left(\frac{Q_{cr}}{Q_{max}} \right)^2} + \arcsin \frac{Q_{cr}}{Q_{max}} \right) \right) \quad \text{per } \frac{Q_{cr}}{Q_{max}} < 1 \quad (4.74)$$

$$= -(\gamma - \gamma_r) \frac{Q_{max}}{2} \quad \text{per } \frac{Q_{cr}}{Q_{max}} > 1 \quad (4.75)$$

Per discutere questa equazione un po' ostica conviene scriverla in una forma più "amichevole". Dividiamo entrambi i membri per Q_{cr} e sostituiamo $\frac{Q_{max}}{Q_{cr}}$ con $x(t)$ (che rappresenterà quindi il rapporto tra il valore della carica massima che si raggiunge nella oscillazione che sta a cavallo dell'istante t e il valore della carica nell'istante in cui l'amplificatore smette di amplificare: si ottiene

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{\pi} \left(\gamma \frac{\pi}{2} - \gamma_r \left(\frac{1}{x} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{x} \right)^2} + \arcsin \frac{1}{x} \right) \right) \quad \text{per } x > 1 \quad (4.76)$$

$$= -(\gamma - \gamma_r) \frac{x}{2} \quad \text{per } x < 1 \quad (4.77)$$

Questa è una equazione differenziale del primo ordine nella variabile x , non lineare, del tipo $\dot{x} = F(x)$ che abbiamo studiato all'inizio del capitolo 3. La non linearità dipende dalla dipendenza di t_1 da Q_{max} (vedi figura ??).

La prima proprietà che abbiamo imparato a studiare è l'equilibrio.

Dato che x è proporzionale alla ampiezza della oscillazione, **l'esistenza di una posizione di equilibrio** x_{eq} della (??) indicherà la esistenza di una ampiezza che, se raggiunta in un certo istante, non cambierà nei tempi successivi, cioè di una particolare oscillazione in cui i flussi di energia in entrata e in uscita si bilanciano e per cui la traiettoria nello spazio delle fasi si richiude dopo un periodo completo (vedi figura ??). In seguito il punto rappresentativo ripercorrerà indefinitamente la stessa orbita (questa è una proprietà generale dei sistemi deterministici). Questo individua un **ciclo**.

⁵A costo di annoiare riassumiamo il procedimento: se non ci fosse attrito il sistema oscillerebbe, ma la ampiezza delle oscillazioni Q_{max} resterebbe costante nel tempo, come la sua energia totale che è funzione di Q_{max} . Utilizzando come equazione per la velocità \dot{Q} quella che sarebbe valida in assenza di attrito (??), abbiamo valutato quanta energia il sistema perde o guadagna in un periodo per attrito (??). Se il processo di perdita di energia è lento rispetto al periodo, si può descrivere il processo con una equazione differenziale (??).

La seconda proprietà che siamo abituati a studiare è la **stabilità lineare**. In questo caso il significato fisico della stabilità è la seguente: se il sistema (??) è stabile e la ampiezza iniziale della oscillazione (che è proprio la x) è abbastanza vicina alla ampiezza di equilibrio (x_{eq}), allora la ampiezza x tende esponenzialmente alla ampiezza di equilibrio x_{eq} : si dice in questo caso che x_{eq} è un **attrattore**. Altrimenti detto se il sistema sta compiendo una oscillazione non troppo diversa dal “ciclo”, nei tempi successivi compirà oscillazioni sempre più vicine al ciclo stesso: per questo il ciclo si chiama **ciclo limite**.

Cominciamo col primo punto: l'esistenza dell'equilibrio. Si tratta di individuare se e quanti zeri abbia il termine di destra della ?? che chiamiamo $F(x)$, il cui grafico è riportato in figura ??. Osserviamo che

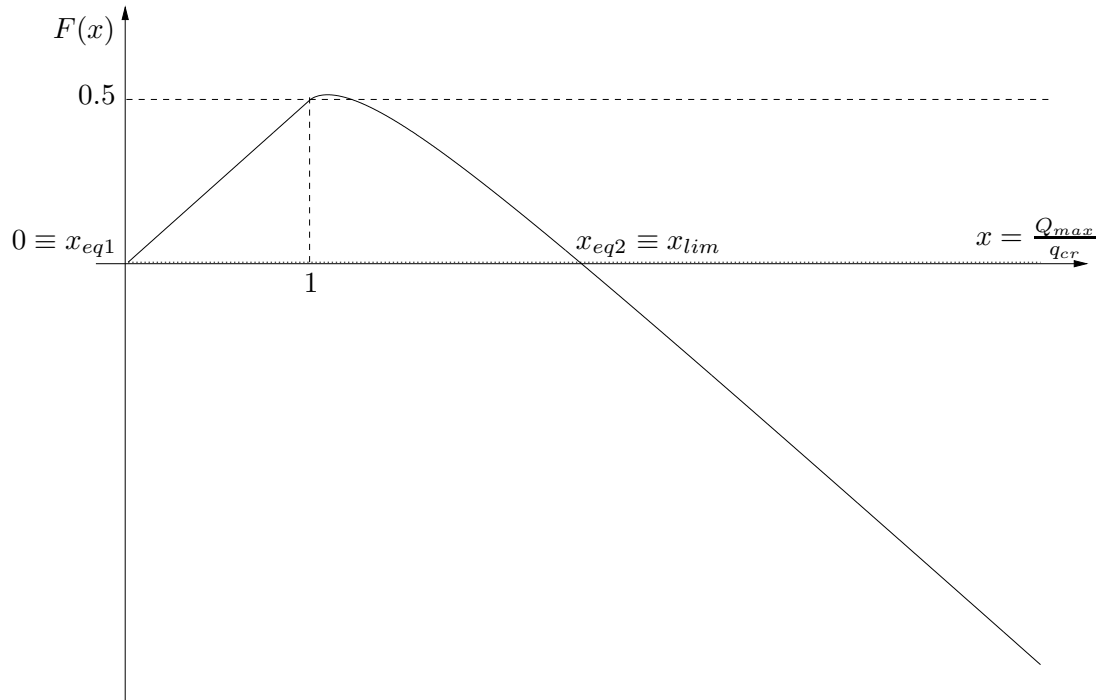


Figura 4.17: Grafico della $F(X)$ della ??. Si è assunto $\gamma = 1$ e $\gamma - r = 2$. I punti in cui $F(x) = 0$ sono i punti di equilibrio del sistema oscillante forzato: x_{eq1} è instabile, x_{eq2} è stabile e corrisponde al ciclo limite.

$F(0) = 0$, che $F(x)$ è regolare per $x \geq 0$, che per $0 < x < 1$ $F = (\gamma_r - \gamma)x/2$. Ne consegue:

- 1- $x = 0$ è un punto di equilibrio
- 2- questo è instabile se $\gamma_r > \gamma$, come già sapevamo: per piccole ampiezze il sistema cresce spontaneamente se $\gamma_r > \gamma$.

Notiamo poi che $\lim_{x \rightarrow +\infty} F = -\infty$.

Se $\gamma_r > \gamma$ ci aspettiamo quindi che ci sia almeno un massimo positivo per $1 < x < +\infty$ e quindi almeno uno zero diverso da $x = 0$ che chiamiamo x_{lim} : questo rappresenta la ampiezza di un ciclo di equilibrio. Per escludere la esistenza di altri cicli basta assicurarsi che ci sia per F un solo massimo, cioè mostrare che la \dot{F} si annulla in un solo punto o che la $\frac{d^2 F}{dx^2}$ non si annulla mai. Si lascia al lettore di verificare che per $x > 1$ questo è verificato. Il risultato di questa discussione è l'andamento qualitativo del grafico di F riportato in figura ??.

Il grafico dà anche motivo di pensare che l'equilibrio sia stabile, infatti la derivata di F in $x = x_{eq2} = x_{lim}$ risulta negativa.

Riassumendo, questa discussione mostra che per $\gamma_r > \gamma$:

- 1- il sistema comincia da solo a oscillare.
- 2- esiste una (unica) oscillazione di ampiezza invariabile $Q_{lim} = x_{lim} Q_{cr}$, quindi esiste un (solo) ciclo.
- 3- oscillazioni di ampiezza diversa da Q_{lim} non sono di equilibrio, ma evolvono avvicinandosi al ciclo, che quindi è chiamato **ciclo limite**.

Queste proprietà sono bene evidenziate dalle rappresentazioni nello spazio delle fasi delle traiettorie che hanno rispettivamente come condizioni iniziali gli stati P_0 e P_1 (vedi figura ??): come si vede le traiettorie descrivono oscillazioni che sono “attratte” dal ciclo limite.

4.3.2 Nota finale

La discussione della dinamica dell'oscillatore quasi lineare ci ha permesso di coniugare una descrizione intuitiva con una trattazione analitica del meccanismo che porta al ciclo limite.

Molti sistemi naturali non permettono una trattazione altrettanto semplice, ma i meccanismi di base restano sostanzialmente gli stessi (limitandoci sempre ai sistemi con due gradi di libertà). A un certo numero di questi si è accennato durante il corso, ma si lascia al lettore di approfondirne lo studio. È infatti parte integrante del corso il “progetto” che consiste nella formulazione da parte dello studente di un modello deterministico di un fenomeno “naturale”, la discussione delle sue proprietà tramite gli strumenti presentati in questi appunti e lo studio dettagliato con un programma di simulazione numerica: il tutto si conclude con una breve relazione finale.

Buon lavoro!

Bibliografia

- [1] Un qualunque libro di fisica per scuole medie superiori dovrebbe bastare. Per approfondire un testo universitario, per esempio: R.A.Serway, “Principi di Fisica” ed italiana a cura di Francesco Madonia, Edises s.r.l. Napoli (2001); H.C. Ohanian: “Fisica”, Zanichelli Editore s.p.a. Bologna (1996); P.Mazzoldi et al. “FISICA”, Edises s.r.l.Napoli (1994).
- [2] Un qualunque testo di analisi per l’Università, per esempio: P.Marcellini, C.Sbordone, “Analisi Matematica I”, ed. Liguori Napoli; E.Giusti, “Analisi Matematica I”, ed. Boringhieri Torino, E.Acerbi, G.Buttazzi, “Analisi Matematica I”, ed. Pitagora.
- [3] Un qualunque testo di analisi II per l’Università, per esempio: E.Giusti, “Analisi Matematica II”, ed Boringhieri, Torino; Prodi, “Analisi Matematica”, ed. Boringhieri, Torino
- [4] V.I.Arnold: “Equazioni differenziali ordinarie”, Edizioni Mir, Mosca.
- [5] Un qualunque testo di algebra lineare per l’Università, per esempio: M.Abate, “Algebra lineare”, ed Mc Graw Hill; L.Childs, “Algebra”, ed. ETS
- [6] Menchi?