Esame di Fisica per Informatica, Corsi A + B - Appello scritto del 12/02/2016

L'esame consiste nello svolgimento di entrambi gli esercizi (1) e (2). Ogni esercizio contiene 5 domande. Ogni risposta esatta vale 3 punti. Due esercizi completi senza errori = 30 punti (30/30). Solo chi ottiene un voto uguale o superiore a 18/30 è ammesso all'orale.

Nota: *Gli esercizi devono essere svolti per esteso usando relazioni algebriche e giustificando i vari passaggi. Si consiglia di effettuare i calcoli numerici solo alla fine, una volta trovata l'espressione algebrica del risultato.*

Esercizio 1

Un corpo di massa **M**=5.0 kg viene lasciato libero in condizioni di quiete alla sommità di una guida liscia a forma di quarto di cerchio come indicato in Fig.1. La guida ha un raggio ***h***=2.0 m. Il corpo scivola lungo la guida e continua il suo moto lungo una guida orizzontale liscia. Si trascuri ogni forma di attrito.

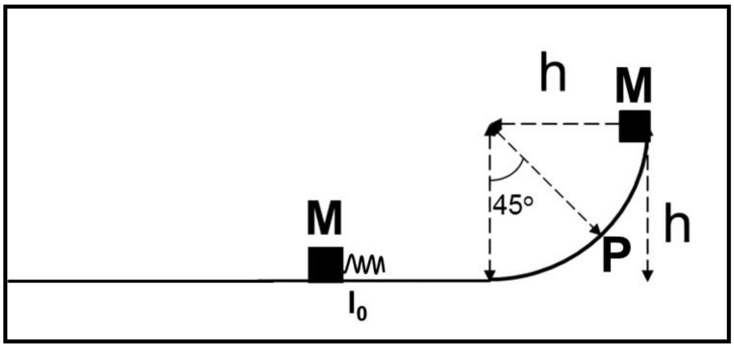

Figura 1

1. Calcolare il modulo della forza normale vincolare che agisce sul corpo quando passa dal punto P a 45° rispetto alla verticale (si veda Fig.1).

Sulla guida orizzontale si trova in quiete un secondo corpo con la stessa massa **M** al quale è fissata, sul lato rivolto alla guida circolare, una delle estremità di una molla ideale di costante elastica ***k***=200 N/m e lunghezza a riposo l_0= 1.0 m. Al contatto con il primo corpo la molla si comprime gradualmente e il secondo corpo si mette in moto. Si calcoli:

2. la massima compressione Δl della molla durante l'interazione fra i due corpi;

3. il modulo della velocità dei due corpi nell'istante di massima compressione della molla.

Se la seconda estremità della molla si stacca dal primo corpo quando essa è non è più compressa, calcolare:

4. la velocità del secondo corpo una volta finita l'interazione con il primo corpo;

Se invece la seconda estremità della molla rimane attaccata al primo corpo anche quando è elongata, descrivere:

5. qualitativamente e quantitativamente la legge oraria del moto di ciascun corpo (suggerimento: provare a scrivere l'equazione per la variabile $\Delta x(t)=x_1(t)-x_2(t)$ distanza relativa fra i due corpi).

Esercizio 2

Due cariche positive e due cariche negative (di eguale valore assoluto, ***q***) sono fissate ai vertici di un quadrato di lato pari a ***L***=10 cm, in modo che su vertici adiacenti ci siano cariche opposte. L'energia elettrostatica complessiva del sistema vale U_{ele}= -4.0·10^{-5} J. Si trascuri attrito e gravità. Si ricorda che la costante di Coulomb k_e=9·10^{9} N m^2 C^{-2}. Determinare:

1. il valore delle cariche ***q***;

2. il lavoro che viene compiuto per spostare una delle cariche positive dalla posizione iniziale al centro del quadrato, mentre le altre cariche sono fissate;

3. l'energia elettrostatica del sistema in questa nuova configurazione;

4. la risultante delle forze che agiscono sulla carica positiva al centro del quadrato;

5. la velocità minima con cui la carica positiva, partendo dal centro, riesce ad arrivare a distanza infinita, sapendo che la sua massa è ***m***=1 μg e che le altre cariche sono fissate.

Svolgimento Esercizio 1

Il corpo di massa **M**=5.0 kg scende senza attrito lungo la guida circolare. La forza peso è conservativa per cui vale la conservazione dell'energia per qualunque punto della traiettoria, indicata con l'angolo θ rispetto alla verticale:

$$Mgh = Mgh(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}Mv^2 \Rightarrow 2gh\cos\theta = v^2$$

In ogni punto della traiettoria, considerando la somma delle forze e la loro componente radiale (per convenzione il verso che punta verso il centro è preso positivo), è possibile calcolare il valore della forza normale ***N*** applicando il secondo principio della dinamica:

$$N - Mg\cos\theta = \left(\sum_i \vec{F}_i\right)_r = Ma_r = M\frac{v^2}{h} \Rightarrow N = Mg\cos\theta + M\frac{v^2}{h} = 3Mg\cos\theta$$

(1.1) Nel caso del punto P θ=45° rispetto alla verticale avremo $N = Mg\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Quando arriva sul piano orizzontale la velocità del primo corpo è:

$$v_h = \sqrt{2gh\cos 0} = \sqrt{2gh}$$

Il primo corpo scivola sul piano orizzontale a velocità costante fino ad arrivare al secondo corpo, che ha una molla attaccata a suo lato destro. La molla inizia a comprimersi, spingendo a sinistra il secondo corpo (che così viene accelerato) e a destra il primo (che così viene decelerato).

Si può dire che il sistema costituito dai due corpi e dalla molla è un sistema isolato: almeno per quanto riguarda la componente orizzontale infatti la risultante delle forze esterne lungo x è nulla. Si può quindi dire che la quantità di moto si conserva. Anche l'energia meccanica (data da energia della molla e energia cinetica dei due corpi) si conserva.

Applicando il terzo principio e scrivendo le posizioni dei due corpi come $x_1(t)$ e $x_2(t)$ (l'asse x positivo è orientato verso destra), abbiamo :

forza che corpo 1 esercita su 2: $F_{12}= k(x_1-x_2-l_0)$;

forza che corpo 2 esercita su 1: $F_{21}=- k(x_1-x_2-l_0)$;

$U_{elastica}= 0.5*k(x_1-x_2-l_0)^2$

$P_1+P_2=\text{cost}= Mv_1+Mv_2= Mv_h$

$K_1+K_2+ U_{elastica} =\text{cost}$

Via via che il corpo 1 si avvicina al corpo v_1 diminuisce e v_2 aumenta. La minima vicinanza (e quindi la massima compressione) ci sarà quando i due corpi vanno alla stessa velocità. Dopo di che $v_2>v_1$ e quindi la distanza relativa aumenterà fino a superare la lunghezza a riposo l_0. Nel punto di massima compressione avremo $v_1=v_2$ e quindi:

$P_1+P_2=\text{cost}= Mv_1+Mv_2=2\, Mv_1= Mv_h \Rightarrow v_1=v_h/2$

$1/2*Mv_h^2=K_1+K_2+ U_{elastica} =(1/2*Mv_1^2)+ (1/2*Mv_2^2)+0.5*k(\Delta l)^2=(1/4*Mv_h^2)$

$\Rightarrow 1/4*Mv_h^2=0.5*k(\Delta l)^2 \Rightarrow \Delta l = \sqrt{\frac{M}{2k}}v_h$ (1.2)

La velocità è (1.3) $v_1=v_h/2$ $v_1 = v_2 = \frac{v_h}{2} = \frac{\sqrt{2gh}}{2}$

Se i due corpi si staccano, valgono tutte le relazioni precedenti ma le forze sono nulle (quindi la velocità sarà costante) e l'energia potenziale sarà zero. Avremo quindi, indicando con $\boldsymbol{v_{1f}}$ e $\boldsymbol{v_{2f}}$) le due velocità finali:

$\boldsymbol{Mv_h} = \boldsymbol{Mv_{1f}} + \boldsymbol{Mv_{2f}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v_h} - \boldsymbol{v_{1f}} = \boldsymbol{v_{2f}}$

$1/2 * \boldsymbol{Mv_h^2} = (1/2 * \boldsymbol{Mv_{1f}^2}) + (1/2 * \boldsymbol{Mv_{2f}^2}) \Rightarrow \quad \boldsymbol{v_h^2} - \boldsymbol{v_{1f}^2} = \boldsymbol{v_{2f}} \Rightarrow \boldsymbol{v_h} + \boldsymbol{v_{1f}} = \boldsymbol{v_{2f}}$

Da cui $\boldsymbol{v_{1f}} = 0$ e $\boldsymbol{v_{2f}} = \boldsymbol{v_h}$

Per cui il primo corpo si ferma e il secondo continua con la velocità che aveva il primo corpo (1.4).

Se invece la seconda estremità della molla rimane attaccata al primo corpo anche quando è elongata, la forza

$\boldsymbol{F_{12}} = \boldsymbol{k}(x_1 - x_2 - \boldsymbol{l_0})$ e $\boldsymbol{F_{21}} = -\boldsymbol{k}(x_1 - x_2 - \boldsymbol{l_0})$ rimangono attive. Il centro di massa del sistema si muoverà a velocità costante, in modo che la quantità di moto totale si conservi. Ma la posizione dei due corpi oscillerà intorno al centro di massa sotto l'azione della forza armonica.

In particolare, scrivendo il secondo principio della dinamica per ciascun corpo avremo:

$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{1}{m_1} F_{21}$ e $\frac{d^2 x_2}{dt^2} = \frac{1}{m_2} F_{12}$

Calcolandosi l'equazione della distanza relativa $\Delta x(t) = x_1(t) - x_2(t)$:

$$\frac{d^2(\Delta x)}{dt^2} = \frac{d^2 x_1}{dt^2} - \frac{d^2 x_2}{dt^2} = \frac{1}{m_1} F_{21} - \frac{1}{m_2} F_{12} = \frac{1}{m_1} F_{21} + \frac{1}{m_2} F_{21} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) F_{21}$$

Ma $\boldsymbol{F_{21}} = -\boldsymbol{k}(x_1 - x_2 - \boldsymbol{l_0})$ e $\boldsymbol{m_1} = \boldsymbol{m_2} = \boldsymbol{M}$

$$\frac{d^2(\Delta x)}{dt^2} = -k \frac{2}{M} (\Delta x - l_0) \Rightarrow \frac{d^2(\Delta x)}{dt^2} + k \frac{2}{M} \Delta x = \frac{2kl_0}{M} \Rightarrow \frac{d^2(\Delta x)}{dt^2} + \omega_0^2 \Delta x = \frac{2kl_0}{M}$$

(1.5): Il moto è quello di un oscillatore armonico con ampiezza uguale alla massima compressione calcolata al punto (1.2) e periodo $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{M}{2k}}$

Svolgimento Esercizio 2

Due cariche positive e due cariche negative (di eguale valore assoluto, $\boldsymbol{q}$) sono fissate ai vertici di un quadrato di lato pari a $\boldsymbol{L}$=10 cm, in modo che su vertici adiacenti ci siano cariche opposte. L'energia elettrostatica complessiva del sistema vale $\boldsymbol{U_{ele}} = -4.0 \cdot 10^{-5}$ J. Si trascuri attrito e gravità.

In questa configurazione l'energia complessiva del sistema la si ottiene considerando il lavoro per portare una ad una le cariche dall'infinito nella configurazione finale. Essendo la forza elettrica conservativa non importa il percorso fatto né l'ordine con cui si posizionano le cariche. Alla fine ci sarà un termine per ciascuna interazione. Se indichiamo le cariche con un indice da 1 a 4, ci saranno 6 termini, due dei quali positivi (interazione fra cariche con stesso segno) e 4 negativi (interazione fra cariche di segno opposto).

La distanza fra cariche adiacenti è L, quella fra cariche opposte è $\sqrt{2}L$

Nella configurazione di cui al punto 1 abbiamo quindi:

$$U_1 = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{4} k_e \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{k_e q^2}{L} \left(-4 + \sqrt{2} \right) \text{ da cui } q = \sqrt{\frac{U_1 L}{k_e \left(-4 + \sqrt{2} \right)}} \quad (2.1)$$

Nella nuova configurazione l'energia elettrostatica ha sempre 6 termini, tre dei quali, relativi alle interazioni fra cariche che non si sono mosse, sono uguali a prima.

$$U_2 = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{4} k_e \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{k_e q^2}{L}\left(-2 + \frac{2}{2\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \frac{k_e q^2}{L}\left(-2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Il lavoro effettuato sarà $L = U_2 - U_1 = \frac{k_e q^2}{L}\left(2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ (2.2-2.3)

Nella nuova configurazione è facile calcolarsi la risultante delle forze che agiscono sulla carica positiva al centro del quadrato, in quanto le forze esercitate dalle due cariche negative sono uguali e opposte e quindi conta solo la forza repulsiva esercitata dalla carica positiva sulla carica positiva

$$F = \frac{k_e q^2}{r^2} = \frac{2k_e q^2}{L^2} \quad (2.4)$$

Infine, per il punto (2.5) è sufficiente calcolarsi il potenziale della carica al centro del quadrato e applicare la conservazione dell'energia. La velocità minima da fornire alla carica sarà tale che essa possa arirvare all'infinito con velocità non nulla. Quindi:

$$\frac{1}{2}mv_i^2 + qV_i = \frac{1}{2}mv_f^2 + qV_\infty = 0 + 0 \Rightarrow v_i = \sqrt{\frac{-2qV_i}{m}}$$

E per calcolarsi il potenziale applichiamo il principio di sovrapposizione, sommando il potenziale che la carica in esame ha nel campo delle altre tre cariche:

$$V_i = \frac{k_e q}{L}\left(-2\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{2}}\frac{k_e q}{L}$$