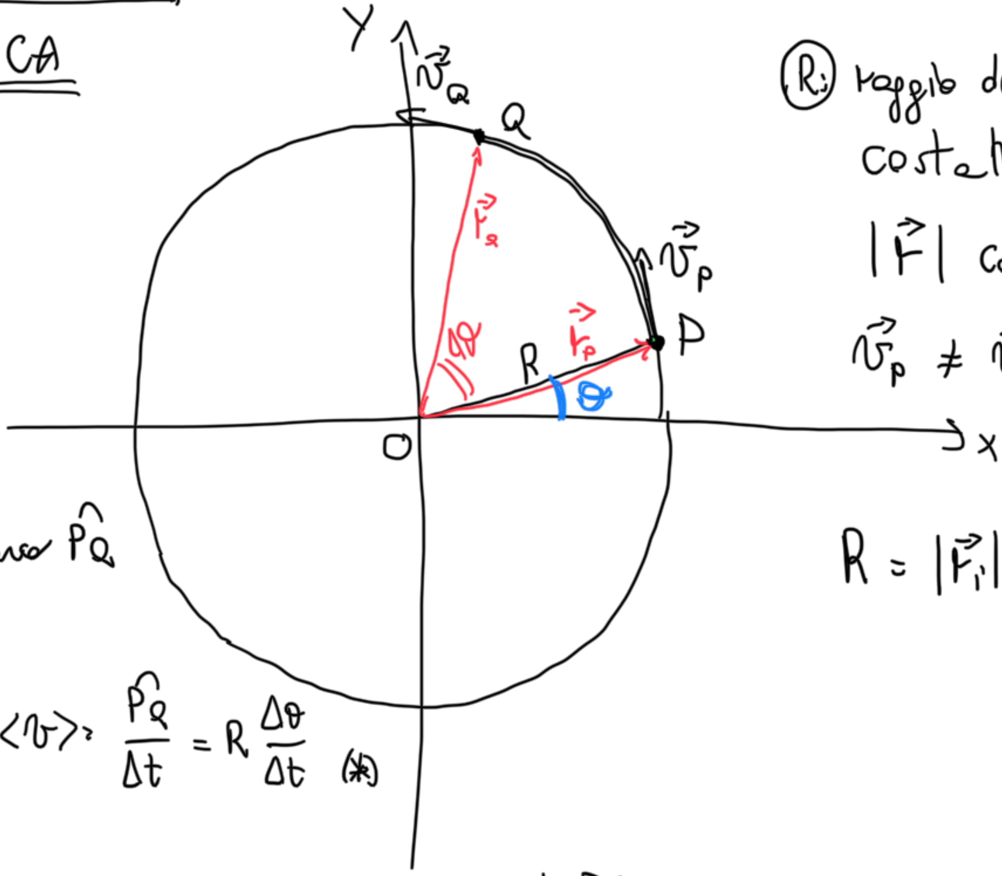
Moto Circolare

CINEMATICA



(R): raggio della circonferenza costante

$|\vec{r}|$ costante nel tempo

$\vec{v}_P \neq \vec{v}_Q \Rightarrow$ accelerazione è NON nulla!

$R = |\vec{r}_i| = |\vec{r}_f|$

l = lunghezza dell'arco $\widehat{PQ}$
$= R \cdot \Delta\theta$

$v = \dfrac{dl}{dt}$; $\langle v \rangle = \dfrac{\widehat{PQ}}{\Delta t} = R\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$ (*)

Moto circolare uniforme $|\vec{v}|$ NON cambia

Per un moto circolare si posso introdurre queste definizioni:

Velocità ANGOLARE (scalare) $\quad \omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ (istantanea)

$\langle \omega \rangle = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$ (mediata su un tempo Δt finito)

(*) : $v = R\dfrac{d\theta}{dt} = R\omega$

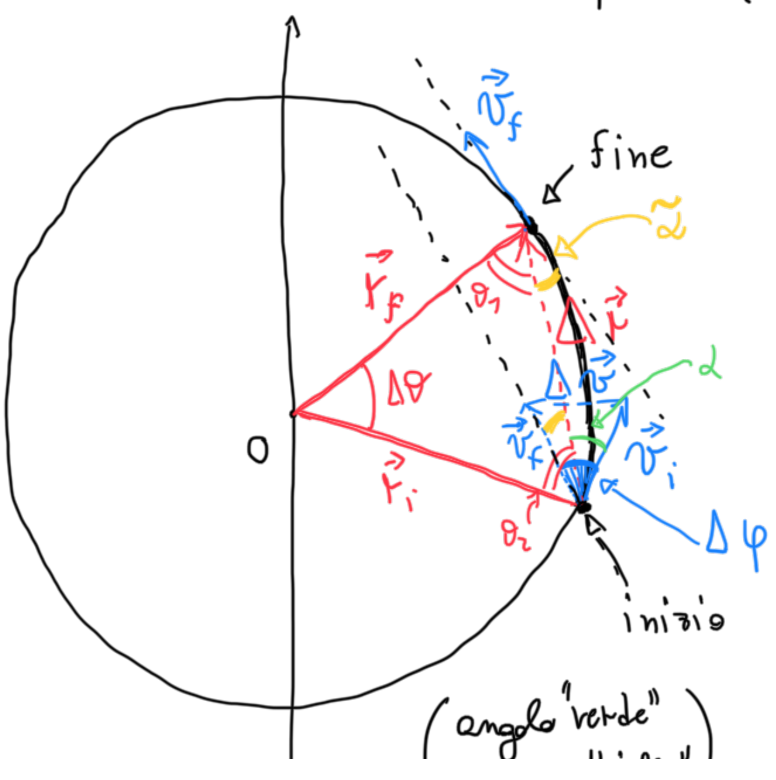
dunque $\quad \omega = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \langle \omega \rangle = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$

Accelerazione ANGOLARE $\quad \alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$ (istantanea)

$\dfrac{dv}{dt} = a = \dfrac{d(R\omega)}{dt} = R\dfrac{d\omega}{dt} = R\alpha$

$\langle \alpha \rangle = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$ (mediata su un tempo Δt finito)

dunque $\quad \alpha = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \langle \alpha \rangle = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$



moto circolare uniforme

$|\vec{v}_i| = |\vec{v}_f| \equiv v$

$\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$ vettore spostamento

$\Delta\vec{v} = \vec{v}_f - \vec{v}_i$

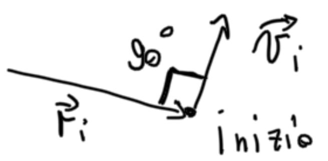
(= angolo "giallo")

→ ambedue i triangoli sono ISOSCELI
$|\vec{r}_i| = |\vec{r}_f|$ e $|\vec{v}_i| = |\vec{v}_f|$
→ mi rimane da mostrare che $\Delta\theta = \Delta\varphi$

→ Sono triangoli simili

la somma degli angoli interni di un triangolo è 180° (π)

$\Rightarrow \Delta\theta + \theta_1 + \theta_2 = \pi \qquad \theta_1 = \theta_2 \Rightarrow \Delta\theta + 2\theta_1 = \pi$



$\frac{\pi}{2} = \theta_2 + \alpha = \theta_1 + \alpha$

$\frac{\pi}{2} = \theta_1 + \tilde{\alpha} \Rightarrow \tilde{\alpha} = \alpha$

$$\begin{cases} \Delta\theta + 2\theta_1 = \pi \\ \theta_1 + \alpha = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha \Rightarrow \Delta\theta + 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \pi$

$\Rightarrow \Delta\theta + \cancel{\pi} - 2\alpha = \cancel{\pi}$

$\Rightarrow \Delta\theta = 2\alpha = \Delta\varphi$

i triangoli blu e rosso sono simili

$$\Rightarrow \boxed{\frac{|\Delta\vec{v}|}{v} = \frac{|\Delta\vec{r}|}{R}}$$

$v = |\vec{v}_i| = |\vec{v}_f|$ $\qquad$ v ed R sono costanti

- Calcoliamo l'accelerazione in un moto circolare uniforme:

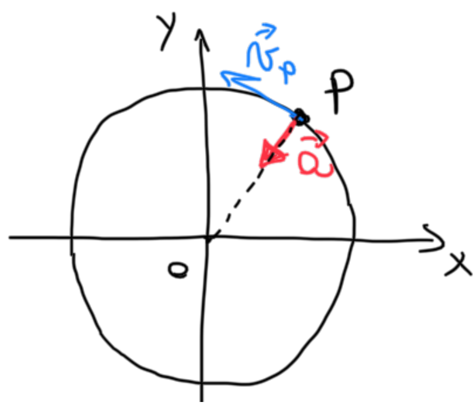
$$|\vec{a}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{|\Delta\vec{r}|}{R} \cdot v\right) \cdot \frac{1}{\Delta t} = \frac{v}{R} \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}}_{|\vec{v}| = v} = \frac{v^2}{R}$$

- abbiamo scoperto che $\boxed{|\vec{a}| = \frac{v^2}{R}}$ (moto circolare uniforme)

  $\vec{a}$ ha la direzione di $\Delta\vec{v}$ (nel limite $\Delta t \to 0$)

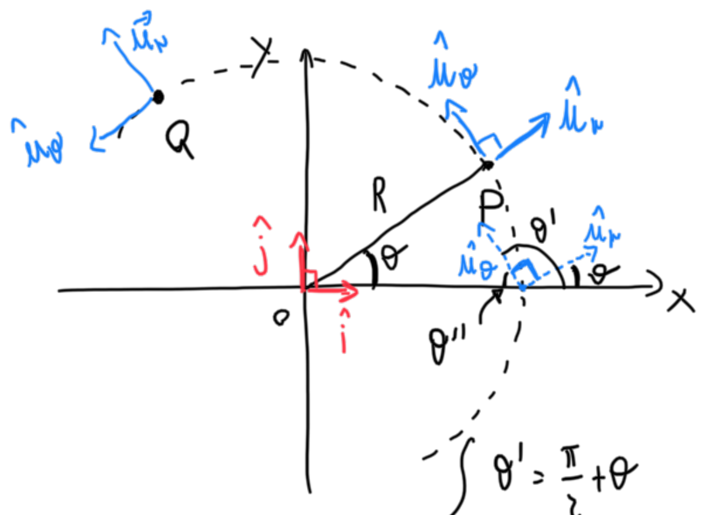
- l'accelerazione DEVE essere perpendicolare alla traiettoria perché se non lo fosse, vi sarebbe una componente di $\vec{a}$ parallela alla traiettoria, dunque cambierebbe $|\vec{v}|$ (questo perché $\vec{v}$ è sempre parallela alla traiettoria)

$$\boxed{\vec{a} \perp \vec{v} \quad e \quad \vec{a} \parallel \vec{r}}$$



$\vec{a}$ viene chiamata accelerazione CENTRIPETA

Moto circolare generico ($|\vec{v}|$ può cambiare)



Coordinate cartesiane
$\Rightarrow$ versori $\hat{i}, \hat{j}$

Coordinate polari
$\Rightarrow$ versori $\hat{u}_r, \hat{u}_\theta$

$$\begin{cases} \theta' = \frac{\pi}{2} + \theta \\ \theta' + \theta'' = \pi \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{2} + \theta + \theta'' = \pi$$

$$\Rightarrow \theta'' = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta'' = \sin\theta$$
$$\sin\theta'' = \cos\theta$$

Voglio scrivere $\hat{u}_r, \hat{u}_\theta$ in coordinate cartesiane

$$\hat{u}_r = (\cos\theta)\,\hat{i} + (\sin\theta)\,\hat{j}$$

$$\hat{u}_\theta = (-\cos\theta'')\,\hat{i} + (\sin\theta'')\,\hat{j}$$

$$= (-\sin\theta)\,\hat{i} + (\cos\theta)\,\hat{j}$$

$$\underbrace{\begin{cases} \hat{u}_r = (\cos\theta)\,\hat{i} + (\sin\theta)\,\hat{j} \\ \hat{u}_\theta = (-\sin\theta)\,\hat{i} + (\cos\theta)\,\hat{j} \end{cases}}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \vec{v} = v\,\hat{u}_\theta$$ ($\vec{v}$ è parallela alla traiettoria)

$$\vec{a} = \frac{d(v\,\hat{u}_\theta)}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_\theta + v\frac{d\hat{u}_\theta}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_\theta + v\left(-\underbrace{\frac{d\sin\theta(t)}{dt}}\cdot\hat{i} + \underbrace{\frac{d\cos\theta(t)}{dt}}_{*}\hat{j}\right) =$$

$$\frac{d\sin\theta(t)}{dt} = \frac{d\sin\theta}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \cos\theta\,\frac{d\theta}{dt}$$

$$* \quad \frac{d\cos\theta(t)}{dt} = \frac{d\cos\theta}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = -\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt}$$

$$= \frac{dv}{dt}\hat{u}_\theta + v\left(-\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\,\hat{i} - \sin\theta\frac{d\theta}{dt}\,\hat{j}\right) =$$

$$= \frac{dv}{dt}\hat{u}_\theta + v\cdot\frac{d\theta}{dt}\underbrace{\left(-\cos\theta\,\hat{i} - \sin\theta\,\hat{j}\right)}_{-\hat{u}_r}$$

$$= \frac{dv}{dt}\hat{u}_\theta + v\frac{d\theta}{dt}(-\hat{u}_r) = \frac{dv}{dt}\hat{u}_\theta + \frac{v^2}{R}(-\hat{u}_r)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \qquad \omega R = \frac{d\theta}{dt}R = v \quad \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{R}$$

per un moto circolare generico

$$\boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_\theta - \frac{v^2}{R}\hat{u}_r}$$

$\vec{a}_r$ c'è sempre per un moto circolare

$\vec{a}_t$ c'è solo se $|\vec{v}|$ cambia

due forme di accelerazione

$\rightarrow$ accelerazione lungo $\hat{u}_r$
RADIALE

$$\vec{a}_r = -\frac{v^2}{R}\hat{u}_r$$

(accelerazione CENTRIPETA)

$\rightarrow$ accelerazione lungo $\hat{u}_\theta$

TANGENZIALE

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt}\,\hat{u}_v$$

accelerazione radiale (o centripeta)

$$|\vec{a}_r| = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R$$