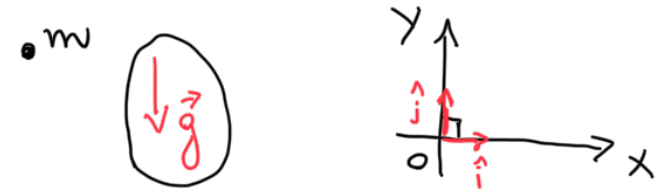
CINEMATICA DEL PUNTO MATERIALE (II)



accelerazione di gravità

$$\vec{g} = g(-\hat{j})$$

$$g = 9.81 \frac{m}{s^2}$$

$\rightarrow$ moto ad accelerazione COSTANTE (NON necessariamente rettilineo)

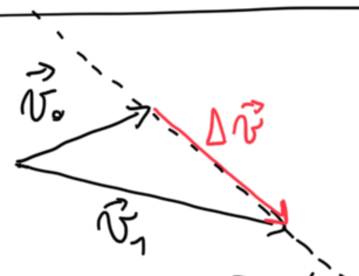
$\vec{a} \equiv \vec{a}_0$ costante

2 casi:

i) $\rightarrow$ moto unidimensionale (1D) se $\vec{a}_0 // \vec{v}_0$ (su una linea retta SE $\vec{a}_0$ è parallela alla velocità iniziale)

o anche se $\vec{v}_0 = 0$ (il corpo parte da fermo)

ii) $\rightarrow$ moto bidimensionale se $\vec{a}_0 \not\parallel \vec{v}_0$ (se $\vec{a}_0$ NON è parallela alla velocità iniziale)



$\vec{a}_0$ è costante $\Rightarrow \vec{a}_0 = \langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$

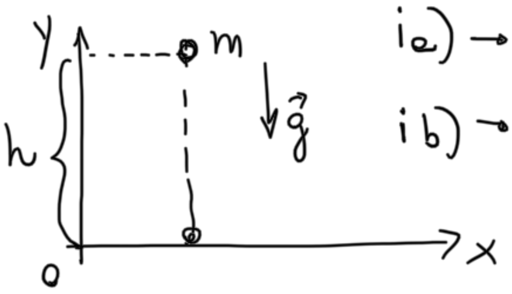
$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_0 = \vec{a}_0 \cdot (t_1 - t_0)$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \vec{a}_0 \cdot \Delta t$$

$\Delta\vec{v}$ deve avere sempre la stessa direzione

$\boxed{\text{CASO i)}}$ moto rettilineo uniformemente accelerato

$$v = v_0 + a_0 t \quad \rightarrow \quad s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$$



ia) $\rightarrow$ • se $v_0 = 0 \Rightarrow$ caduta libera

ib) $\rightarrow$ • se $v_0 \neq 0$ e $\vec{v}_0 = v_0 \hat{j}$, v_0 è la componente di $\vec{v}_0$ lungo l'asse y

$$a_0 = g = 9.81 \frac{m}{s^2}$$

$$\boxed{y(t) = h + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2}$$

$$v(t) = v_0 - g t$$

è dovuto al fatto che $\vec{g}$ è diretta verso il basso

se siamo in caduta libera (ia)

$\Rightarrow y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$, quindi la pallina cade a terra quando $y = 0 \Rightarrow$ il tempo di caduta è t^* tale che $y(t^*) = 0$

$$y(t^*) = 0 = h - \frac{1}{2} g (t^*)^2 \Rightarrow t^* = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

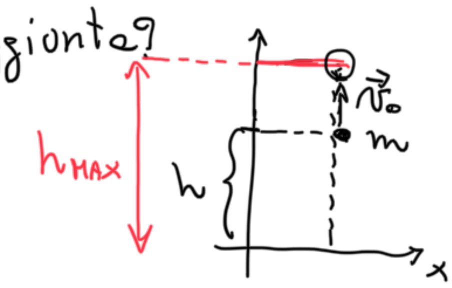
Quanto vale la velocità quando tocca terra?

$$v(t^*) = -g t^* = -g \sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh}$$

se la velocità iniziale è non nulla e, ad esempio, è rivolta verso l'alto (ib)

$$\Rightarrow y(t) = h + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

qual è l'altezza massima raggiunta?



la pallina sarà alla massima altezza

quando $v(\bar{t}) = 0$

$$v(t) = v_0 - g t \Rightarrow v(\bar{t}) = 0 = v_0 - g\bar{t}$$

$\bar{t} = \dfrac{v_0}{g}$ è il tempo passato per arrivare all'altezza max.

$$h_{MAX} = y(\bar{t}) = h + v_0 \bar{t} - \frac{1}{2} g \bar{t}^2 = h + v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} \cancel{g} \frac{v_0^2}{g^{\cancel{2}}} = h + \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}$$

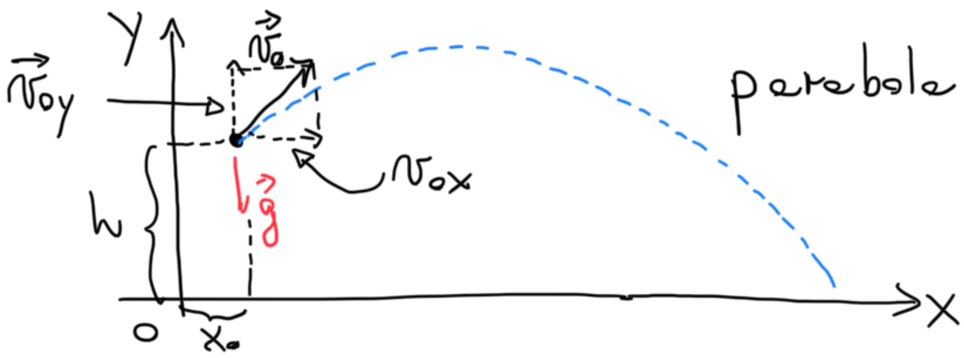
$$\Rightarrow h_{MAX} = h + \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} \qquad \text{cioè} \qquad h_{MAX} - h = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}$$

$\boxed{\text{CASO ii)}}$ moto bidimensionale

$\vec{a}_0$ non è parallelo a $\vec{v}_0$

$\vec{v}_0$ DEVE essere diverso da 0

nel caso di una pallina sottoposta alla forza peso $\vec{a}_0 = \vec{g} = -g\hat{j}$



parabola (?) $y = y(x)$

$\vec{a}_0 = \vec{g}$ diretta lungo y e con verso opposto a $\hat{j}$

$$\boxed{\vec{a}_0 \to \vec{v} \to \vec{s}(t)}$$

→ Scomposizione del moto lungo l'asse x e l'asse y

$$\begin{aligned} (\text{asse } y)&: \begin{cases} y(t) = h + v_{0,y} t - \frac{1}{2} g t^2 \\ x(t) = x_0 + v_{0,x} t \end{cases} \\ (\text{asse } x)&: \end{aligned}$$

moto rettilineo (lungo y) uniformemente accelerato $(-g\hat{j})$

moto rettilineo uniforme (lungo x) non c'è accelerazione lungo x

$$t = \frac{x - x_0}{v_{0,x}} \rightarrow y = h + v_{0,y} \cdot \frac{x - x_0}{v_{0,x}} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x - x_0}{v_{0x}}\right)^2 =$$

$$= h + \frac{v_{oy}}{v_{ox}} x - \frac{v_{oy}}{v_{ox}} x_0 - \frac{1}{2}\frac{g}{v_{ox}^2}\left(x^2 + x_0^2 - 2 x x_0\right)$$

$$= \left(h - \frac{v_{oy}}{v_{ox}} x_0 - \frac{1}{2}\frac{g}{v_{ox}^2} x_0^2\right) + x\left(\frac{v_{oy}}{v_{ox}} - \frac{1}{\cancel{2}}\frac{g}{v_{ox}^2}(-\cancel{2}x_0)\right) - \frac{g}{2 v_{ox}^2} x^2$$

Equazione di II grado

$$y = a + bx + cx^2 \quad \text{(parabola)}$$

$$+ \frac{g x_0}{v_{0x}^2}$$

Concavità verso il basso

Caso in cui il proiettile parte da altezza zero

$h = 0 ; x_0 = 0$

$$\begin{cases} y(t) = v_{0,y}\, t - \frac{1}{2} g t^2 \\ x(t) = v_{0,x}\, t \end{cases}$$

$v_{0x} = v_0 \cos\theta$

$v_{0,y} = v_0 \sin\theta$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(t) = (v_0 \sin\theta)\, t - \frac{1}{2} g t^2 \\ x(t) = (v_0 \cos\theta)\, t \end{cases}$$

- come variano le componenti x e y della velocità?

$$\begin{cases} v_y(t) = \dfrac{dy}{dt} = v_0 \sin\theta - g t \\ v_x(t) = \dfrac{dx}{dt} = v_0 \cos\theta \end{cases}$$

$\rightarrow$ la componente della velocità lungo x NON varia nel tempo (costante)

- quanto vale h_{MAX}?

$\underline{v_y(t_{MAX}) = 0}$ dove t_{MAX} è il tempo che ci mette per arrivare a h_{MAX}

$$0 = v_0 \sin\theta - g\, t_{MAX} \Rightarrow t_{MAX} = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$

$$\underline{h_{MAX} = y(t_{MAX})} \Rightarrow h_{MAX} = (v_0 \sin\theta)\, t_{MAX} - \frac{1}{2} g\, t_{MAX}^2 =$$

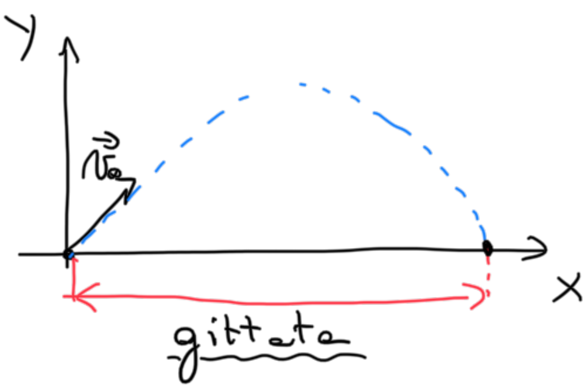
$$= (v_0 \sin\theta) \frac{v_0 \sin\theta}{g} - \frac{1}{2} \cancel{g} \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g^{\cancel{2}}} =$$

$$= \frac{(v_0 \sin\theta)^2}{g} - \frac{1}{2} \frac{(v_0 \sin\theta)^2}{g} = \frac{1}{2} \frac{(v_0 \sin\theta)^2}{g}$$

h_{MAX} è massima se $\theta = \pi/2$ (90°)
(fissato $|\vec{v}_0|$)

- quanto vale la gittata?

se chiamo T il tempo totale di volo $\underline{y(T) = 0}$



$$y(T) = (v_0 \sin\theta)\, T - \frac{1}{2} g T^2 = 0$$

$$\Rightarrow T \left(v_0 \sin\theta - \frac{1}{2} g T \right) = 0 \quad \text{2 sol.} \quad \begin{cases} T = 0 \\ T = \dfrac{2 v_0 \sin\theta}{g} \end{cases}$$

gittata $= x(T)$

$$x(T) = (v_0 \cos\theta)\, T = v_0 \cos\theta \, \frac{2 v_0 \sin\theta}{g} = \frac{2 v_0^2}{g} \cos\theta \sin\theta$$

$$2 \cos\theta \sin\theta = \sin(2\theta) \qquad \Rightarrow \underbrace{x(T) = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta)}$$

la gittata è massima (fissato v_0)

se $\sin(2\theta) = 1 \Rightarrow 2\theta = \pi/2 \Rightarrow \theta = \pi/4$ (45°)

$$\left.\begin{aligned} \theta_1 &= \theta \\ \theta_2 &= \frac{\pi}{2} - \theta \end{aligned}\right\}$$ danno la stessa gittata (a parità di v_0)

$$\sin\left(2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right) = \sin(\pi - 2\theta) = \sin(2\theta)$$