ESERCIZI SUPPORTO ALLA DIDATTICA 13/03/2017

• ESERCIZIO SULLA CINEMATICA IN 2D (PROBLEMA NUMERO 3, 1ª prova in Itinere Aprile 2016)

PROBLEMA 1

Il vettore posizione che descrive il moto di un punto materiale nel piano (x, y) varia nel tempo ed è descritto dalla seguente espressione ($\hat{i}$ e $\hat{j}$ sono i versori degli assi coordinati):

$$\vec{r}(t) = \left[\left(2 + 10\frac{t}{s} - \frac{t^2}{s^2}\right)m\right]\hat{i} + \left[\left(7.10\frac{t}{s}\right)m\right]\hat{j}$$

Calcolare per $t_f = 4.40\,s$

(DOMANDA 1) Modulo della velocità $|\vec{v}(t_f)|$

(DOMANDA 2) Angolo in radianti che il vettore velocità forma con l'asse delle x.

SVOLGIMENTO

Nel precedente incontro abbiamo visto che data la legge oraria (cioè la relazione fra vettore posizione e tempo) associata al moto di un punto materiale nello spazio, possiamo ricavare tutte le informazioni che ci interessano.

Sappiamo infatti che, data la legge $\vec{r}(t)$, per ottenere il vettore velocità $\vec{v}(t)$ o il vettore accelerazione $\vec{a}(t)$, è sufficiente calcolare una o più derivate rispetto al tempo t:

$$\begin{cases} \vec{v}(t) = \dfrac{d}{dt}\vec{r}(t) \\ \vec{a}(t) = \dfrac{d^2}{dt^2}\vec{r}(t) \end{cases}$$

Nel caso in questione abbiamo che:

$$\begin{cases} \vec{V}(t) = \frac{d}{dt}\left[\left[2+\frac{10}{s}t-\frac{t^2}{s^2}\right)m\,\hat{i} + \left[\left(7{,}10\frac{t}{s}\right)m\right]\hat{j}\right] = \\ = \frac{d}{dt}\left[\left(2+\frac{10}{s}t-\frac{t^2}{s^2}\right)m\,\hat{i}\right] + \frac{d}{dt}\left[\left(7{,}10\frac{t}{s}\right)m\,\hat{j}\right] \\ = \left[\left(\frac{10}{s}-\frac{2t}{s^2}\right)m\,\hat{i}\right] + \left[7{,}10\frac{m}{s}\,\hat{j}\right] \\ \vec{a}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\left\{\left(2+\frac{10}{s}t-\frac{t^2}{s^2}\right)m\,\hat{i} + \left[\left(7{,}10\frac{t}{s}\right)m\,\hat{j}\right]\right\} \\ = -\frac{2}{s^2}m\,\hat{i} \end{cases}$$

Queste espressioni ci permettono di capire nella pratica quale sia la tipologia di moto a cui è soggetta una particella con legge oraria data da $\vec{r}(t)$.

NOTA: $\vec{V}(t=0) = \frac{10}{s}m\,\hat{i} + 7{,}10\frac{m}{s}\,\hat{j} \neq \vec{0}$

$\vec{a}(t=0) = \vec{a}(t\neq 0) = \vec{a} = -2\frac{m}{s^2}\,\hat{i}$ $\Rightarrow$ MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO!

$\Downarrow$

$\boxed{\vec{V}(t>0) \neq \vec{V}(t=0)}$

Per rispondere alle domande del problema dobbiamo prendere l'espressione per $\vec{V}(t)$, valutarla in $t=t_f$, applicare i metodi descritti nel primo incontro di supporto alla didattica.

Valuto $\vec{V}(t=t_f) \rightarrow$ sostituisco $t_f = 4.40\,s$ nell'espressione per $\vec{V}(t)$.

$$\Rightarrow \vec{V}(t=t_f) = \left[\left(\frac{10}{s} - \frac{2\cdot 4{,}40\,s}{s^2}\right)m\right]\hat{i} + \left[7{,}10\,\frac{m}{s}\right]\hat{j} =$$

$$= \left[\left(\frac{10-8{,}80}{s}\right)m\right]\hat{i} + \left[7{,}10\,\frac{m}{s}\right]\hat{j} =$$

$$= \left(1{,}20\,\frac{m}{s}\right)\hat{i} + \left(7{,}10\,\frac{m}{s}\right)\hat{j}$$

A questo punto calcolo le componenti del vettore $\vec{V}(t_f)$ usando la definizione di componente tramite prodotto scalare:

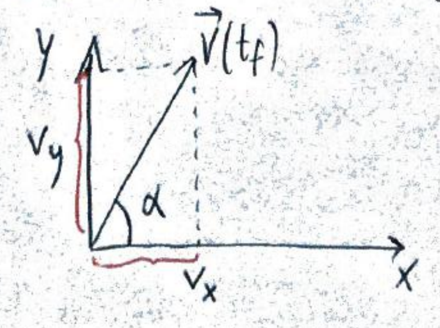
$(\hat{i} = \hat{x})$

$(\hat{j} = \hat{y})$

$$\begin{cases} V_x = \vec{V}(t_f)\cdot\hat{i} = |\vec{V}(t_f)|\,|\hat{i}|\cos\alpha = \\ \quad = \left[\left(1{,}20\,\frac{m}{s}\right)\hat{i} + \left(7{,}10\,\frac{m}{s}\right)\hat{j}\right]\cdot\hat{i} = \\ \quad = 1{,}20\,\frac{m}{s} \\ V_y = \vec{V}(t_f)\cdot\hat{j} = |\vec{V}(t_f)|\,|\hat{j}|\sin(\alpha) = \\ \quad = \left[\left(1{,}20\,\frac{m}{s}\right)\hat{i} + \left(7{,}10\,\frac{m}{s}\right)\hat{j}\right]\cdot\hat{j} = \\ \quad = 7{,}10\,\frac{m}{s} \end{cases}$$

il versore $\hat{j}$ è ortogonale ad $\hat{i}$
$\hat{j}\cdot\hat{i} = \hat{i}\cdot\hat{j} = 0$

dove α è l'angolo che il vettore $\vec{V}(t_f)$ forma con l'asse delle x (cioè con la direzione $\hat{i}$).



Usando il teorema di Pitagora abbiamo che:

$$|\vec{V}(t_f)|^2 = V_x^2 + V_y^2 \underset{\uparrow}{=} (1,20)^2 \frac{m^2}{s^2} + (7,10)^2 \frac{m^2}{s^2} =$$

uso le espressioni numeriche per V_x e V_y della pagina prima

$$= (1,44 + 50,41) \frac{m^2}{s^2} = 51.85 \frac{m^2}{s^2} \Rightarrow |\vec{V}(t_f)| = \sqrt{51,85}\ \frac{m}{s} =$$

$$= 7,20 \frac{m}{s}$$

Risposta alla domanda 1

Il modulo del vettore $\vec{v}(t_f)$ è $7,20 \frac{m}{s}$.

Calcoliamo ora quale sia l'angolo che $\vec{V}(t_f)$ forma con l'asse delle x. Per fare questo usiamo che:

$$\frac{V_y}{V_x} \underset{\uparrow}{=} \frac{|\vec{V}(t_f)| \sin\alpha}{|\vec{V}(t_f)| \cos\alpha} = \frac{7,10}{1,20} \Rightarrow \frac{V_y}{V_x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha = 5,92$$

Vedi pagina prima

Allora

$$\alpha = \tan^{-1}(5,92) = 1,40 \text{ rad}$$

Risposta alla domanda 2

L'angolo che $\vec{V}(t_f)$ forma con la direzione $\hat{i}$ è $\approx 1,40$ rad.

• ESERCIZIO SULLA CINEMATICA IN 2D (Problema ~~1~~ Recupero 1ª prova in Itinere Giugno 2016)

PROBLEMA 2

Guglielmo Tell vuole colpire con una freccia scoccata dalla sua balestra una mela posizionata sulla testa di suo figlio. Per allenarsi (e non uccidere il figliolo) fa delle prove con una sagoma di legno posta a 17 m da lui. Scoccando la freccia mantenendo la balestra parallela al terreno (quota $h_0 = 1{,}70\,m$) colpisce la Sagoma 85 cm più in basso.

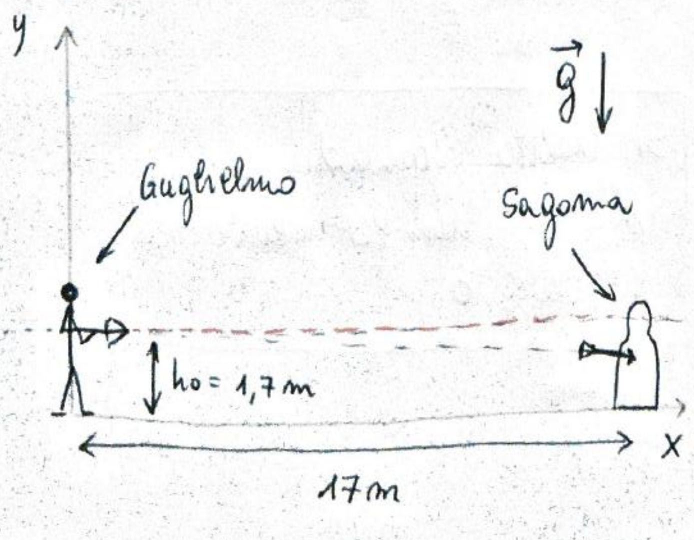
DOMANDA 1 A che velocità vengono scoccate le frecce dalla balestra?

DOMANDA 2 La sagoma viene sostituita con il figlio.
Con che angolo deve sparare le frecce per colpire la mela e non suo figlio?

(Si trascuri ogni forma di attrito con l'aria)

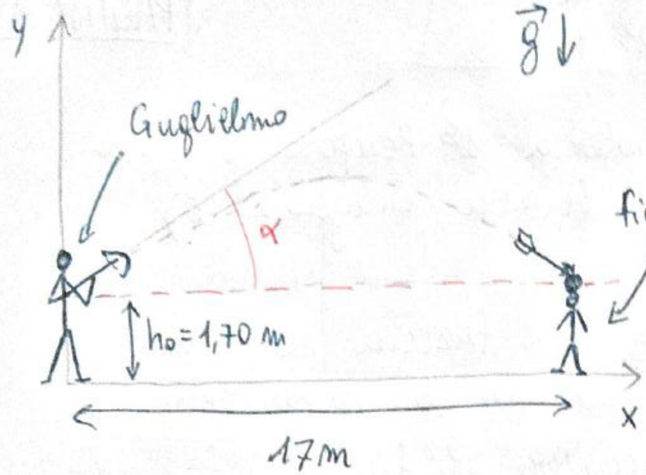
SVOLGIMENTO

La situazione descritta nel testo è rappresentata schematicamente nelle due figure che seguono:



PRIMO CASO:

Guglielmo spara una freccia mantenendo la balestra orizzontale (uccide il figlio)



SECONDO CASO:

Guglielmo spara la freccia tenendola inclinata di α rispetto all'orizzontale (non uccide il figlio)

La balestra scocca le frecce con una velocità che è costante in modulo. Chiamiamo $V_B(t) = |\vec{V}(t)|$ cioè il modulo del vettore velocità con cui si muove la freccia al tempo "t". $V_B(t=0) = |\vec{V}(t=0)|$ è il modulo della velocità con cui la balestra scocca le frecce. Dimentichiamoci di Guglielmo e di suo figlio e analizziamo il problema schematizzando il problema usando la cinematica.

PRIMO CASO: la freccia (punto materiale) parte da quota $h_0 = 1,7\ m$ con una velocità incognita di modulo $V_B(t=0)$ parallela all'asse delle x e dopo aver percorso 17 m si trova ad una quota $h_1 = h_0 - 0.85\,m$ (a causa della gravità).

CONDIZIONI INIZIALI

$$\begin{cases} \vec{r}(t=0) = (0, h_0) \\ \vec{V}(t=0) = (V_B(t=0), 0) \\ \vec{a} = (0, -g) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{Si tratta quindi di un moto uniformemente accelerato.}}$$

$\Downarrow$

SCRIVO LA LEGGE ORARIA

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}(t=0) + \vec{V}(t=0)\,t + \frac{1}{2}\vec{a}\,t^2}$$ LEGGE ORARIA

Nel dettaglio, analizziamo separatamente le due componenti della legge oraria:

$$\begin{cases} r_x(t) = \vec{r}(t)\cdot\hat{x} = \vec{r}(t=0)\cdot\hat{x} + \vec{V}(t=0)\cdot\hat{x}\,t + \frac{1}{2}\vec{a}\cdot\hat{x}\,t^2 = \\ \quad \underset{\uparrow}{=} t\,|\vec{V}(t=0)|\,\hat{x}\cdot\hat{x} = |\vec{V}(t=0)|\,t = V_B(t=0)\,t \\ \quad \vec{r}(t=0)\cdot\hat{x} = 0 \\ \quad \vec{a}\cdot\hat{x} = 0 \\ \\ r_y(t) = \vec{r}(t)\cdot\hat{y} = \vec{r}(t=0)\cdot\hat{y} + \vec{V}(t=0)\cdot\hat{y}\,t + \frac{1}{2}\vec{a}\cdot\hat{y}\,t^2 = \\ \quad = h_0 - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

[Il moto lungo $\hat{x}$ è rettilineo uniforme]

(moto uniformemente accelerato)

Nell'istante t^* in cui la freccia tocca la sagoma abbiamo che

1) lungo x la freccia ha percorso 17 m

2) lungo y la freccia è a quota $h_1 = h_0 - 0.85$ m

1) $\Rightarrow$ $r_x(t^*) = 17\,m = |\vec{V}(t=0)|\,t^* = V_B(t=0)\,t$

2) $r_y(t^*) = h_1 = h_0 - 0{,}85\,m = h_0 - \frac{1}{2} g (t^*)^2$

Da queste 2 equazioni ricaviamo prima t^* e poi $V_B(t=0)$

$2) \Rightarrow \quad 0{,}85 = \frac{1}{2} g (t^*)^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{2 \cdot 0.85}{9.81} s^2} = t^* = 0.42\ s$

$1) \Rightarrow \quad 17\,m = V_B(t=0) \cdot 0{,}42\,s \Rightarrow V_B(t=0) = \frac{17\ m}{0{,}42\ s} = 40{,}48\ \frac{m}{s}$

RISPOSTA ALLA DOMANDA 1

La balestra scocca le frecce a $40{,}48\ \frac{m}{s}$.

Ora che sappiamo a che velocità ~~ko~~ meglio quale sia il modulo della velocità con cui vengono scoccate le frecce possiamo passare al punto 2 del problema.

Nel secondo caso, visto che la freccia viene scoccata tenendo la balestra inclinata di α rispetto al suolo, abbiamo nuove condizioni iniziali per la nostra legge oraria:

CONDIZIONI INIZIALI

$$\begin{cases} \vec{r}(t=0) = (0, h_0) \\ \vec{v}(t=0) = (V_B(t=0)\cos\alpha, V_B(t=0)\sin\alpha) \\ \vec{a} = (0, -g) \end{cases} \Rightarrow \text{MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO}$$

$\Downarrow$

Scrivo la legge oraria (passo direttamente in componenti)

$$\begin{cases} r_x(t) = V_B(t=0)\cos\alpha \cdot t \\ r_y(t) = h_0 + V_B(t=0)\sin\alpha\, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Visto che $\sin\alpha$ e $\cos\alpha$ ~~qu~~ sono dipendenti l'uno dall'altro abbiamo 2 equazioni in due incognite $\Rightarrow$ Sistema risolvibile

Chiamo $\bar{t}$ l'istante in cui la freccia colpisce la mela sulla testa del figlio di Guglielmo f. In questo tempo, trascurando le dimensioni della mela e considerando un figlio di altezza h_0 abbiamo che:

① $r_x(\bar{t}) = 17\,m = V_B(t=0)\cos\alpha\,\bar{t}$

② $r_y(\bar{t}) = h_0 = h_0 + v_B(t=0)\sin\alpha\,\bar{t} - \frac{1}{2}g(\bar{t})^2$

Allora

② $\Rightarrow$ $0 = \left(V_B(t=0)\sin\alpha - \frac{1}{2}g\bar{t}\right)\bar{t}$ $\nearrow$ $\bar{t} = 0$ (istante iniziale) $\searrow$ $\boxed{\bar{t} = \frac{2V_B(t=0)\sin\alpha}{g}}$

① + Espressione di $\bar{t} \Rightarrow$ $17\,m = \frac{2V_B^2(t=0)}{g}\cos\alpha\sin\alpha$

Ora usiamo che: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha\sin\alpha = \frac{\sin(2\alpha)}{2}$

$\Rightarrow \frac{17\,m\cdot g}{V_B^2(t=0)} = \sin(2\alpha) \simeq 0{,}10$

$\Rightarrow 2\alpha = \sin^{-1}(0{,}10) \simeq 0.10\,rad \Rightarrow \boxed{\alpha = 0{,}05\ rad}$

Risposta alla domanda 2

Guglielmo deve scoccare la freccia inclinanando la balestra di un angolo α pari a 0.05 rad.

ESERCIZI SULLA DINAMICA

Leggi che regolano la dinamica sono le leggi di Newton:

1ª Ciascun corpo persevera nel proprio stato di quiete o di moto rettilineo uniforme eccetto che sia costretto a mutare quello stato da forze impresse.

PRINCIPIO DI INERZIA

↳ TRADUZIONE: Se la forza risultante che agisce su un corpo è nulla ($\sum \vec{F} = \vec{0}$), l'accelerazione del corpo è nulla ($\vec{a} = \vec{0}$)

2ª L'accelerazione di un corpo è proporzionale alla forza risultante esercitata sul corpo

↳ TRADUZIONE: $\vec{F}_{RISULTANTE} = \underbrace{\sum \vec{F}}_{\text{(forze applicate sul corpo di massa "m")}} = m\vec{a}$

3ª Ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria: ossia, le mutue azioni di due corpi sono uguali fra loro e dirette verso parti opposte.

↳ TRADUZIONE: dati due corpi "A" e "B" mutuamente interagenti, sia $\vec{F}_{AB}$ la forza che il corpo "A" esercita sul corpo "B" e sia $\vec{F}_{BA}$ la forza che il corpo "B" esercita sul corpo "A". Queste forze non sono indipendenti:

$$\boxed{\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}}$$

(Sono uguali in modulo e direzione, ma sono opposte in verso.)

→ PER IL MOMENTO QUESTE SONO TUTTE LE LEGGI CHE DOBBIAMO RICORDARCI PER ANALIZZARE PROBLEMI DI DINAMICA

COME APPROCCIARE UN PROBLEMA SULLA DINAMICA DEI CORPI

1) Fare uno schizzo del sistema (1 corpo o più corpi) a cui si vuole applicare la 2ª legge di Newton.
In questa fase è anche utile evidenziare quali siano le grandezze incognite del problema.

2) Disegnare uno o più diagrammi di corpo libero (diagrammi delle forze) comprendenti gli assi coordinati.
(Non esiste un unico modo per costruire il diagramma di corpo libero, però esistono modi in cui risolvere il problema è meno "contorso")

3) Usando il diagramma di corpo libero, scrivere le componenti della seconda legge di Newton in termini delle grandezze note ed incognite.

UNITÀ DI MISURA

PROBLEMA 1 - DINAMICA Il Titanic era al suo tempo l'oggetto mobile di massa più elevata che fosse mai stato costruito dall'uomo, avendo una massa pari a 6.0×10^7 Kg.

DOMANDA Quale sarebbe stata l'intensità della forza risultante necessaria per imprimere al Titanic un'accelerazione di modulo pari a $0.1 \, m/s^2$?

Risposta Usiamo la seconda legge della dinamica.

Sia $\vec{F}_{TOT} = \sum_i \vec{F}_i$ la forza risultante agente sul Titanic.

2ª legge della Dinamica $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{F}_{TOT} = m_{TITANIC} \, \vec{a}}$

Visto che siamo interessati all'intensità della forza, calcolo il modulo a destra e sinistra

$$\boxed{|\vec{F}_{TOT}| = m_{TITANIC} |\vec{a}| = Kg \, 6 \cdot 10^7 \times 0.1 \frac{m}{s^2} = 6 \times 10^6 \, N}$$

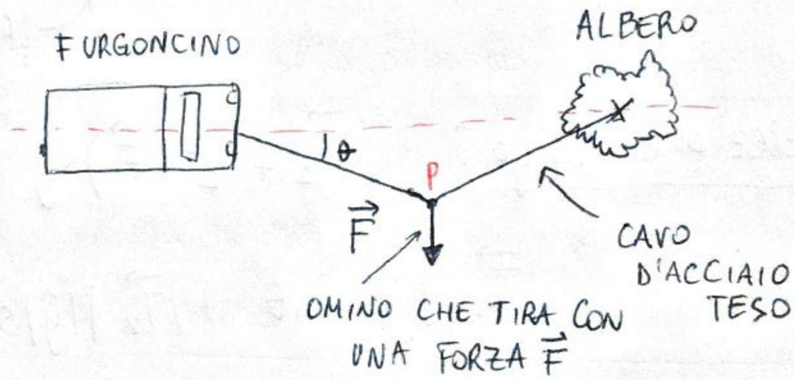
PROBLEMA 3-DINAMICA Un piccolo furgone è impantanato. L'autista, per toglierlo dal fango, tende un cavo d'acciaio fra il furgoncino e un albero posto esattamente di fronte. Dopodiché tira lateralmente con una forza F nel punto di mezzo del cavo fino ad estrarre il furgone dal fango.

DOMANDA Se la forza F è di circa 400 N, quale forza esercita il cavo sul furgone se l'angolo θ del cavo rispetto alla direzione furgone-albero è di 10°?

SVOLGIMENTO

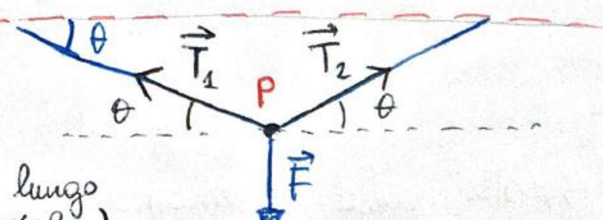
- Per prima cosa rappresentiamo schematicamente il sistema in analisi:

→ PASSO 1: Rappresentazione schematica del problema



- A questo punto costruiamo il diagramma delle forze:

Visto che il filo è teso, esso esercita una forza chiamata forza di tensione (diretta lungo il vincolo).



NOTA → Nel caso di fili/funi/cavi inestensibili questa forza ha la stessa intensità in ogni punto del filo $(|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2|)$.

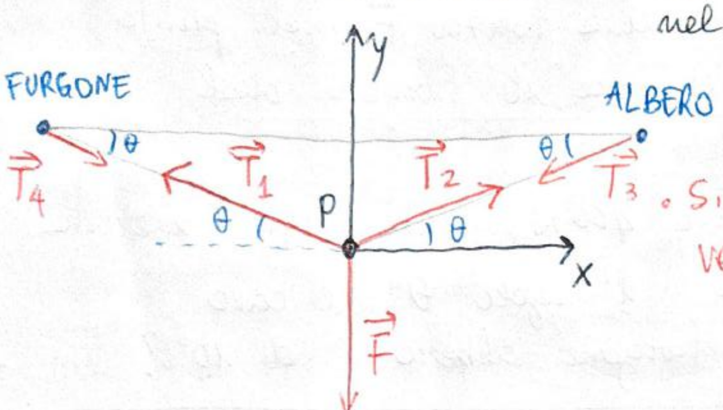
→ PASSO 2: Costruzione del diagramma delle forze.

Un istante prima che il furgone inizi a muoversi, ci troviamo in una situazione di equilibrio:

- Cosa significa che ci troviamo all'equilibrio?

$\sum \vec{F} = \vec{0}$ la risultante delle forze presenti nel sistema è nulla. Considero la risultante delle forze nel punto P:

$$\boxed{\sum_P \vec{F} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{F} = \vec{0}}$$



- Si tratta di un'equazione vettoriale $\Rightarrow$ Passo in componenti:

Proiezione lungo $\hat{x}$: $\vec{T}_1 \cdot \hat{x} + \vec{T}_2 \cdot \hat{x} + \vec{F} \cdot \hat{x} = -|\vec{T}_1||\hat{x}| \cos\theta +$
$+ |\vec{T}_2||\hat{x}| \cos\theta = 0$

ovvio perché $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2|$

Proiezione lungo $\hat{y}$: $(\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{F}) \cdot \hat{y} = \vec{T}_1 \cdot \hat{y} + \vec{T}_2 \cdot \hat{y} + \vec{F} \cdot \hat{y} =$

$$= |\vec{T}_1||\hat{y}| \sin\theta + |\vec{T}_2||\hat{y}| \sin\theta - |\vec{F}||\hat{y}| = 0$$

$$\Rightarrow |\vec{T}_1| \equiv |\vec{T}| = \frac{|\vec{F}|}{2\sin\theta} = 1150 \text{ N} \quad \gg |\vec{F}| = 400 \text{ N}$$

$$\begin{cases} |\vec{F}| = 400 \text{ N} \\ \theta = 10° \end{cases}$$

Risposta alla domanda 1

Il cavo esercita una forza di tensione che in modulo è pari a $|\vec{T}| = 1150$ N.

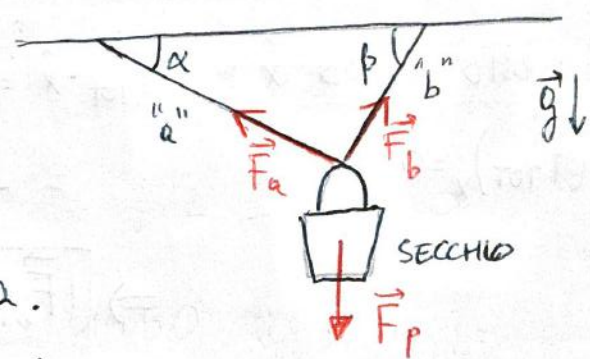
PROBLEMA 2 - DINAMICA Un secchio di massa $m = 8,4\,Kg$ è appeso a due corde leggere "a" e "b". [Per corda leggera si intende una corda la cui massa sia sufficientemente piccola perchè il suo peso sia molto minore della forza che esse può esercitare. In questa approssimazione, si può considerare la corda non incurvata.]

Quando una corda (o un fil o una fune o un cavo) è legata a un corpo, l'intensità della forza esercitata dalla corda viene chiamata tensione.

DOMANDA 1

- Determinare le tensioni delle corde "a" e "b" all'equilibrio.

Il sistema è rappresentato schematicamente di seguito:

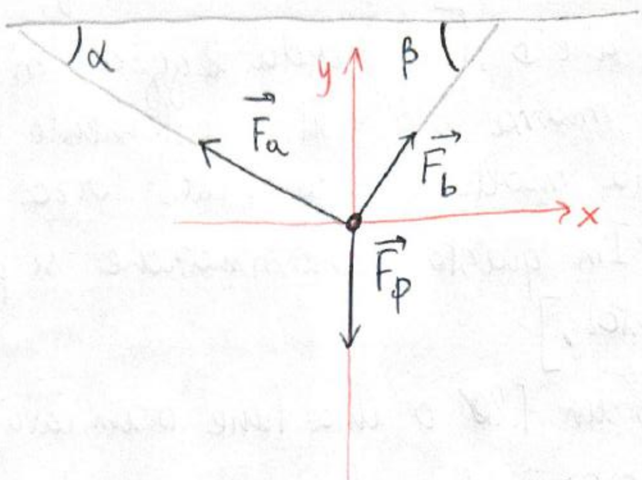


- Il sistema si trova in una condizione di equilibrio. Questo significa che la risultante delle forze agenti sul secchio è nulla.
- Le forze a cui è soggetto il secchio sono di due tipi:

→ Forza peso $\vec{F}_p$ (il secchio ha una massa quindi è soggetto alla gravità)

→ Forze di tensione (il secchio è all'equilibrio perchè le corde esercitano delle forze di reazione)

Supponiamo di conoscere gli angoli α e β ($\alpha = 27°$ e $\beta = 55°$).
Costruiamo il diagramma delle forze:



Visto che il secchio è all'equilibrio la risultante delle forze agenti sul secchio è nulla:

$$\boxed{\vec{F}_{TOT} = \sum \vec{F} = \vec{F}_a + \vec{F}_b + \vec{F}_p = \vec{0}}$$

Si tratta di un'equazione vettoriale ⇒ passo in componenti!

- Proietto lungo $\hat{x}$: $\vec{F}_{TOT} \cdot \hat{x} = (\vec{F}_a + \vec{F}_b + \vec{F}_p) \cdot \hat{x} =$

$(\vec{F}_{TOT})_x = 0$

$$= -|\vec{F}_a||\hat{x}|\cos\alpha + |\vec{F}_b||\hat{x}|\cos\beta = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{|\vec{F}_b| = |\vec{F}_a| \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}}$$

- Proietto lungo $\hat{y}$: $\vec{F}_{TOT} \cdot \hat{y} = (\vec{F}_a + \vec{F}_b + \vec{F}_p) \cdot \hat{y} =$

$(\vec{F}_{TOT})_y = 0$

$$= |\vec{F}_a||\hat{y}|\sin\alpha + |\vec{F}_b||\hat{y}|\sin\beta - m\,g = 0$$

A questo punto uso che $|\vec{F}_b| = |\vec{F}_a| \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ nella seconda equazione

$$|\vec{F_a}| \sin\alpha + |\vec{F_a}| \sin\beta \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = mg \,;$$

$$|\vec{F_a}| \left(\sin\alpha + \cos\alpha \tan\beta \right) = mg \Rightarrow \boxed{|\vec{F_a}| = \frac{mg}{\sin\alpha + \cos\alpha \tan\beta}}$$

- Uso nuovamente che: $|\vec{F_b}| = |\vec{F_a}| \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$

$$\Rightarrow \boxed{|\vec{F_b}| = \frac{mg}{(\sin\alpha + \cos\alpha \tan\beta)} \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{mg}{(\tan\alpha \cos\beta + \sin\beta)}}$$

Usando che:

Risposta alla domanda 1

$$\begin{cases} g = 9.81 \ m/s^2 \\ m = 8,4 \ Kg \\ \alpha = 27° \\ \beta = 55° \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{F_a}| = 48 \ N \\ |\vec{F_b}| = 74 \ N \end{cases}$$

PROBLEMA 4 - DINAMICA

Un carrello con le ruote piccole e i supporti ben lubrificati è inizialmente in quiete e, all'istante $t=0$, viene lasciato libero su un piano inclinato (si veda la figura sotto).
La massa del carrello è 1,3 Kg.

DOMANDA 1 Determinare la forza o meglio l'intensità della forza esercitata dalla superficie del piano inclinato sul carrello.

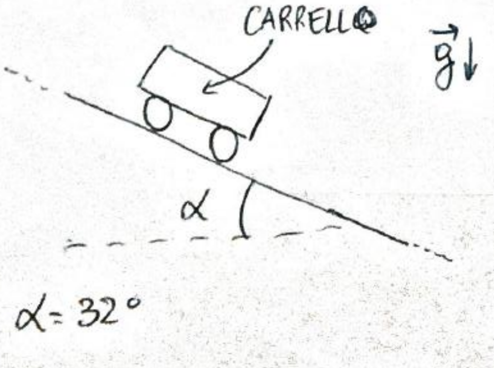
DOMANDA 2 Determinare il modulo dell'accelerazione del carrello.

Per $t = 1,5\ s$

DOMANDA 3 determinare il modulo della velocità del carrello

DOMANDA 4 determinare la distanza percorsa.

SVOLGIMENTO: Il sistema è rappresentato in figura:



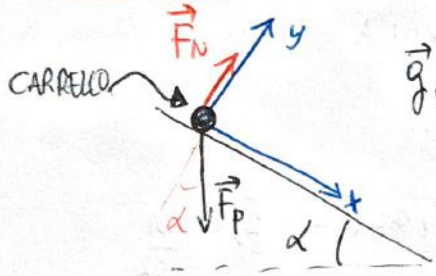
A questo livello trascuriamo ogni forma di attrito ed il fatto che le ruote stiano ruotando (a tutti gli effetti il nostro carrello è equivalente ad una scatola che striscia giù dal piano inclinato senza attrito).

I piani inclinati sono un altro esempio di vincolo spesso utilizzato in fisica.

- La forza di reazione esercitata da un vincolo come un piano inclinato è ORTOGONALE ALLA SUPERFICIE DEL VINCOLO.

- Costruiamo il diagramma delle forze associato al nostro sistema. Come detto in precedenza NON ESISTE un modo univoco per costruire il diagramma delle forze, però esistono casi in cui scegliere con astuzia la disposizione degli assi riduce notevolmente i conti da fare per risolvere il problema.

CASO 1 : Scelta degli assi che tiene conto del vincolo



$\vec{g}\downarrow$ $\vec{F}_N$ = Reazione vincolare

$\vec{F}_p$ = forza peso

Visto che il carrello scivola sul piano inclinato prendo un asse parallelo alla superficie del piano inclinato e uno ortogonale ad essa.

Prima che il carrello parta abbiamo che la risultante delle forze che agisce sul carrello è:

$$\vec{F}_{TOT} = \vec{F}_p + \vec{F}_N$$

Passiamo in componenti:

$$\begin{cases} (\vec{F}_{TOT})_x = \vec{F}_{TOT} \cdot \hat{x} = \vec{F}_p \cdot \hat{x} + \vec{F}_N \cdot \hat{x} = \vec{F}_p \cdot \hat{x} = |\vec{F}_P||\hat{x}| \sin\alpha \\ (\vec{F}_{TOT})_y = \vec{F}_{TOT} \cdot \hat{y} = \vec{F}_P \cdot \hat{y} + \vec{F}_N \cdot \hat{y} = -|\vec{F}_P||\hat{y}| \cos\alpha + |\vec{F}_N| \end{cases}$$

A questo punto usiamo la seconda legge di Newton:

$$\vec{F}_{TOT} = m\,\vec{a} \xRightarrow{\text{Passo in componenti}} \begin{cases} (\vec{F}_{TOT})_x = m(\vec{a})_x \\ (\vec{F}_{TOT})_y = m(\vec{a})_y \end{cases}$$

Il moto è vincolato su $x \Rightarrow m(\vec{a})_y = 0 = (\vec{F}_{TOT})_y$.

Da questo segue che: Risposta alla domanda 1

$$-|\vec{F}_p|\cos\alpha + |\vec{F}_N| = 0 \Rightarrow \boxed{|\vec{F}_N| = |\vec{F}_p|\cos\alpha = mg\cos\alpha = 11\,N}$$

Ora che abbiamo $|\vec{F}_N|$ passiamo al punto 2.

Per la componente x della $\vec{F}_{TOT}$ abbiamo che:

$$(\vec{F}_{TOT})_x = \vec{F}_{TOT}\cdot\hat{x} = |\vec{F}_p|\sin\alpha \underset{\substack{\uparrow \\ 2^a \text{ legge di Newton}}}{=} m(\vec{a})_x = m\,a_x$$

$$\Rightarrow a_x = \frac{|\vec{F}_p|\sin\alpha}{m} = \frac{m\,g\sin\alpha}{m} = g\sin\alpha = 5{,}2\,\frac{m}{s^2}$$

Visto che $a_y = 0$, il modulo del vettore accelerazione $|\vec{a}|$ è uguale al modulo della sua componente a_x

Risposta alla domanda 2

$$\boxed{|\vec{a}| = |a_x| = 5{,}2\,\frac{m}{s^2}}$$

A $t=0$ il carrello parte da fermo ed è vincolato a muoversi solo lungo x:

$$\begin{cases} \vec{r}(t)\cdot\hat{x} = r_x(t) = r_x(t=0) + v_x(t=0)\,t + \frac{1}{2}a_x t^2 = \\ \qquad = \frac{1}{2}a_x t^2 \\ \vec{r}(t)\cdot\hat{y} = r_y(t) = r_y(t=0) + v_y(t=0)\,t + \frac{1}{2}a_y t^2 = 0 \end{cases}$$

Sebbene il moto avvenga in 2D con la scelta furba degli assi si riduce ad un moto unidimensionale uniformemente accelerato (che abbiamo già affrontato)

Risposta alla DOMANDA 3

La velocità del carrello in corrispondenza dell'istante $t = 1.5\,s$ è: $\boxed{v_x = a_x t \Big|_{t=1,5\,s} = 7,8\ m/s}$

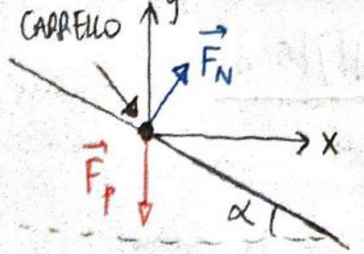
Risposta alla DOMANDA 4

La distanza percorsa dal carrello dopo $t = 1,5\ s$ è data da

$$\boxed{r_x(t=1,5s) = \frac{1}{2} a_x t^2 = 5,8\ m}$$

Abbiamo visto che con questa scelta degli assi il problema da 2D si riduce ad 1D. Che succede se facciamo un'altra scelta di sistema di Riferimento?

→ Supponiamo di prendere gli assi come nella figura di seguito con origine nel punto in cui si trova il carrello a $t=0$.



Scriviamo le componenti della forza risultante $\vec{F}_{TOT}$ in questo nuovo sistema di Riferimento:

$$\begin{cases} (\vec{F}_{TOT})_x = \vec{F}_{TOT} \cdot \hat{x} = \vec{F}_N \cdot \hat{x} = |\vec{F}_N||\hat{x}| \sin\alpha \\ (\vec{F}_{TOT})_y = \vec{F}_{TOT} \cdot \hat{y} = \vec{F}_P \cdot \hat{y} + \vec{F}_N \cdot \hat{y} = -|\vec{F}_P||\hat{y}| + |\vec{F}_N||\hat{y}| \cos\alpha \end{cases}$$

Per la seconda legge di Newton abbiamo che:

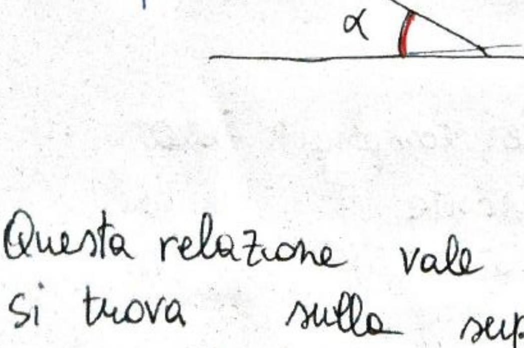
$$\begin{cases} (\vec{F}_{TOT})_x = m a_x = |\vec{F}_N| \sin\alpha \neq 0 \\ (\vec{F}_{TOT})_y = m a_y = -|\vec{F}_P| + |\vec{F}_N| \cos\alpha \neq 0 \end{cases}$$

Vediamo subito che con questa scelta di sistema di riferimento il problema è più complicato a livello di conti perché:

1. Abbiamo due equazioni accoppiate;
2. Non abbiamo ancora specificato il vincolo, cioè il fatto che il moto avvenisse parallelamente alla superficie del piano inclinato.

Come facciamo ad "esprimere" il vincolo?

Consideriamo un punto P che sta sulla superficie del piano inclinato con $x_P > 0$ e $y_P < 0$ (si veda la figura sotto). Rispetto al nostro sistema di coordinate il punto P è individuato da un vettore posizione $\vec{r}_P$ (di componenti x_P e y_P) tale che



$$\boxed{\frac{(\vec{r}_P)_y}{(\vec{r}_P)_x} = \frac{-|\vec{r}_P||\hat{y}|\sin\alpha}{|\vec{r}_P||\hat{x}|\cos\alpha} = -\tan\alpha}$$

Questa relazione vale per ciascuno dei punti che si trova sulla superficie del piano inclinato, in particolare questa relazione vale per tutti i punti che seguono la legge oraria del nostro carrello.

In base alla seconda legge di Newton abbiamo che

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{|\vec{F}_N| \sin\alpha}{m} \\ a_y = \dfrac{-|\vec{F}_P| + |\vec{F}_N| \cos\alpha}{m} \end{cases}$$

← Ci servono per scrivere la legge oraria

A "t=0" il carrello è fermo nell'origine degli assi:

$$\underbrace{\begin{cases} r_x(t=0) = 0 \\ r_y(t=0) = 0 \end{cases}}_{\text{essere nell'origine degli assi}} \qquad \underbrace{\begin{matrix} v_x(t=0) = 0 \\ v_y(t=0) = 0 \end{matrix}}_{\text{è fermo}}$$

Ne consegue che:

$$\begin{cases} r_x(t) = r_x(t=0) + v_x(t=0)t + \frac{1}{2} a_x t^2 = \frac{1}{2} a_x t^2 \\ r_y(t) = r_y(t=0) + v_y(t=0)t + \frac{1}{2} a_y t^2 = \frac{1}{2} a_y t^2 \end{cases}$$

Faccio il rapporto membro a membro e uso che

$$\frac{r_y(t)}{r_x(t)} = -\tan\alpha \Rightarrow -\tan\alpha = \frac{\frac{1}{2} a_y t^2}{\frac{1}{2} a_x t^2} = \frac{a_y}{a_x} =$$

$$= \frac{-|\vec{F}_P| + |\vec{F}_N| \cos\alpha}{\cancel{m}} \cdot \frac{\cancel{m}}{|\vec{F}_N| \sin\alpha}, \text{ da cui}$$

$$-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-|\vec{F}_P| + |\vec{F}_N| \cos\alpha}{|\vec{F}_N| \sin\alpha} \Rightarrow -|\vec{F}_N| \sin^2\alpha = -|\vec{F}_P| \cos\alpha + |\vec{F}_N| \cos^2\alpha$$

da cui $\boxed{|\vec{F}_N| (\underbrace{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}_{1}) = |\vec{F}_P| \cos\alpha}$

Vediamo quindi che come nel caso precedente

$$\boxed{|\vec{F}_N| = |\vec{F}_p| \cos\alpha = m g \cos\alpha = 11\,N}$$ Risposta alla domanda 1

Per quanto riguarda il punto 2, ora entrambe le componenti dell'accelerazione sono diverse da zero. Nel dettaglio abbiamo:

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{|\vec{F}_N| \sin\alpha}{m} = mg\dfrac{\cos\alpha \sin\alpha}{m} = g \cos\alpha \sin\alpha \\ a_y = \dfrac{|\vec{F}_N| \cos\alpha - |\vec{F}_p|}{m} = \dfrac{mg\cos^2\alpha - mg}{m} = g(\cos^2\alpha - 1) = \\ \qquad = -g\sin^2\alpha \end{cases}$$

Ne consegue che $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} =$

$$= \sqrt{g^2 \cos^2\alpha \sin^2\alpha + g^2 \sin^4\alpha} =$$

$$= \sqrt{g^2(1-\sin^2\alpha)\sin^2\alpha + g^2 \sin^4\alpha} =$$

$$= \sqrt{g^2\sin^2\alpha + \cancel{g^2\sin^4\alpha} - \cancel{g^2\sin^4\alpha}} \underset{\frac{\pi}{2} > \alpha > 0}{=} g\sin\alpha =$$

$$= 5{,}2\,\frac{m}{s^2}$$ (come per il caso precedente)

Ovviamente lo stesso vale per i rimanenti due punti del problema (per ESERCIZIO)

(3) Al solito: data la legge oraria $\vec{r}(t) \Rightarrow \vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t)$

↳ Calcolo la derivata;

↳ Calcolo le componenti del vettore velocità al tempo $t = 1{,}5\,s$;

↳ Applico Pitagora per calcolare $|\vec{v}(t=1{,}5\,s)|$.

(4) → Valuto le componenti del vettore posizione al tempo $t = 1{,}5\,s$

→ Applico Pitagora per calcolare $|\vec{r}(t=1{,}5\,s)|$.