

Forze non costanti in modulo: $F(x)$, $F(v)$

- *Forze variabili nel tempo e/o nello spazio*
- *Forza elastica*
- *Attrito in un mezzo viscoso*
 - *velocità limite*

Forze non costanti in modulo: $F(x)$, $F(v)$

- *Forze variabili nel tempo e/o nello spazio*
- *Forza elastica*
- *Attrito in un mezzo viscoso*
 - *velocità limite*

Finora abbiamo sempre considerato **forze costanti**.

Ad esempio:

$$\vec{F}_{\text{peso}} = m\vec{g} = -mg\hat{j} \quad \vec{f}_d = -\mu_d N \hat{t}$$

$$\sum_i \vec{F}_i = \text{cost.} \Rightarrow \vec{a} = \frac{1}{m} \sum_i \vec{F}_i \Rightarrow \vec{a} = \text{cost.} \equiv \vec{a}_0$$

Questo tipo di moto è già stato risolto nel dettaglio (rettilineo o parabolico)

Se il moto è **bidimensionale** ($\vec{v}_0 \nparallel \vec{a}_0$)

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a}_0 t^2; \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}_0 t; \quad \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{v}_0 \cdot \vec{v}_0 = 2\vec{a}_0(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

Se il moto è **unidimensionale** ($\vec{v}_0 \parallel \vec{a}_0$)

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2; \quad v = v_0 + a_0 t$$

Se **la forza è non costante**, ma cambia nel tempo o nello spazio, cosa fare?

Per esempio $F(t) = f_0 + f_1 t + f_2 t^2 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = a = \frac{f_0 + f_1 t + f_2 t^2}{m}$

$$v = v_0 + \int_0^t a(t') dt' = v_0 + \frac{f_0}{m}t + \frac{f_1}{2m}t^2 + \frac{f_2}{3m}t^3$$

$$x = x_0 + \int_0^t v(t') dt' = x_0 + v_0 t + \frac{f_0}{2m}t^2 + \frac{f_1}{6m}t^3 + \frac{f_2}{12m}t^4$$

In generale, se l'accelerazione non è costante, bisogna risolvere un'**equazione differenziale**:

$$F(t) = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

→ a volte è difficile trovare $x(t)$

Se **la forza è non costante**, ma cambia nel tempo o nello spazio, cosa fare?

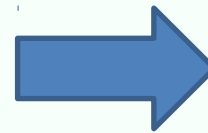
Per una forza elastica (vedi dopo), abbiamo: $F(x) = -k(x - x_0)$

equazione differenziale

$$-\frac{k}{m}(x - x_0) = \frac{F}{m} = a = \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}(x - x_0) = 0$$

condizioni iniziali

$$\begin{cases} x(t = 0) = x_0 \\ v(t = 0) = v_0 \end{cases}$$



$x(t)$

legge oraria

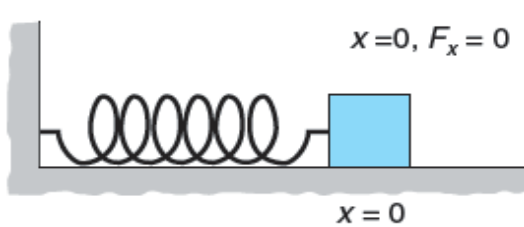
Forze non costanti in modulo: $F(x)$, $F(v)$

- *Forze variabili nel tempo e/o nello spazio*
- *Forza elastica*
- *Attrito in un mezzo viscoso*
 - *velocità limite*

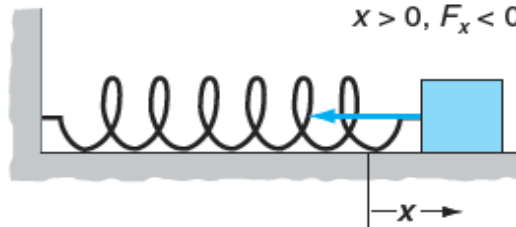
Forza elastica

Introduciamo una forza che dipende dalla posizione: la molla obbedisce alla **legge di Hooke** (forza proporzionale alla elongazione o alla compressione).

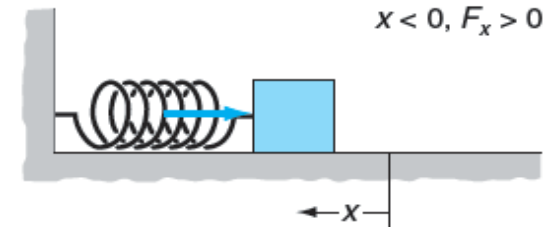
La forza elastica tende a riportare la molla in posizione di riposo. lunghezza a riposo: x_0
costante elastica: k



molla a riposo



molla estesa



molla compressa

$$\vec{F} = -k(\vec{x} - \vec{x}_0) = -k \Delta\vec{x}$$

componente
lungo x

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x = \frac{F}{m}$$

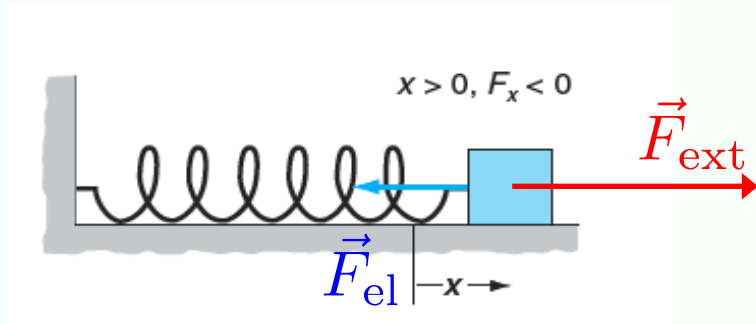
per semplicità supponiamo $x_0=0$

ne vedremo in seguito la risoluzione...

Forza elastica

La legge di Hooke ci dice che: $\vec{F}_{\text{el}} = -k(x - x_0) = -k \Delta x$

Calcoliamo la condizione di equilibrio con forze esterne applicate:



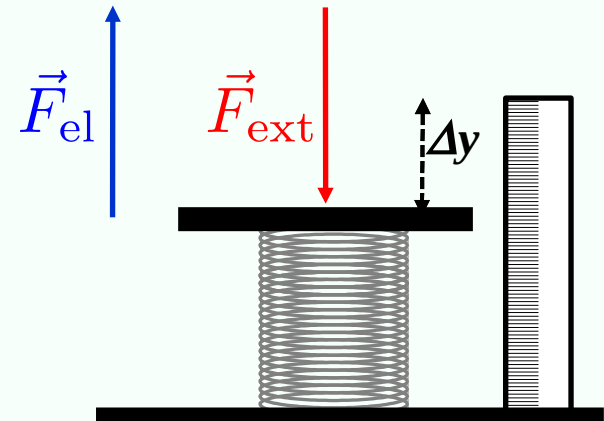
$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{\text{el}} + \vec{F}_{\text{ext}} = 0$$

Componenti lungo x :

$$\sum_i F_i = -k \Delta x + F_{\text{ext}} = 0 \Rightarrow \Delta x = \frac{F_{\text{ext}}}{k}$$

Dinamometro: permette di misurare l'intensità di una forza (es. forza peso) dall'allungamento Δy che è proporzionale alla forza stessa ($\Delta y \propto F$).

$$\sum_i F_i = -k \Delta y + F_{\text{ext}} = 0 \Rightarrow \Delta y = \frac{F_{\text{ext}}}{k}$$



Forze non costanti in modulo: $F(x)$, $F(v)$

- *Forze variabili nel tempo e/o nello spazio*
- *Forza elastica*
- *Attrito in un mezzo viscoso*
 - *velocità limite*

(facoltativo)

Gettys
Capitolo 6.2

Introduciamo una **forza che dipende dalla velocità**.

Resistenza dell'aria e, in generale, dei fluidi viscosi: è una forza che si oppone al moto di un corpo nel fluido.

Questo tipo di forze dipende dalla velocità del corpo:

- è sempre diretta in verso opposta alla velocità;
- il suo modulo ha due regimi, in base al tipo di mezzo viscoso e alla velocità:

A) Per ***v basse e mezzi viscosi***

$$\vec{F}_r(v) = -b_1 v \hat{v}$$

B) Per ***v alte e mezzi rarefatti*** (gravi in aria)

$$\vec{F}_r(v) = -b_2 v^2 \hat{v}$$

Il coefficiente b_1 (oppure b_2) dipende dalla forma, dalle dimensioni del corpo e dalla viscosità del mezzo.

A) Per ***v basse e mezzi viscosi***

$$\vec{F}_r(v) = -b_1 v \hat{v}$$

B) Per ***v alte e mezzi rarefatti*** (gravi in aria)

$$\vec{F}_r(v) = -b_2 v^2 \hat{v}$$

Il coefficiente b_1 (oppure b_2) dipende dalla forma, dalle dimensioni del corpo e dalla viscosità del mezzo.

- 1) Perché sulla terra corpi più pesanti lasciati liberi in condizioni di quiete arrivano al suolo con velocità più elevata dei corpi più leggeri, pur partendo dalla stessa quota?
- 2) Perché i moscerini non si schiantano al suolo e le persone sì?
- 3) Perché il paracadute fa cadere a velocità più bassa?



Forze non costanti in modulo: $F(x)$, $F(v)$

- *Forze variabili nel tempo e/o nello spazio*
- *Forza elastica*
- *Attrito in un mezzo viscoso*
 - *velocità limite*

(facoltativo)

Gettys
Capitolo 6.2

Esempio nel regime di tipo A)

Un corpo parte da fermo sotto l'azione della forza peso e della resistenza del fluido.

$$\vec{F}_r(v) = -b_1 v \hat{v}$$

$$\sum_i F_{iy} = -mg + b_1 v = ma_y = m \frac{dv}{dt}$$

[vedremo in seguito la risoluzione...]

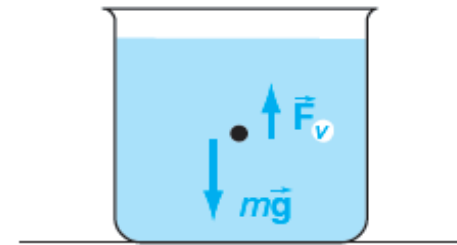
Analizziamo un caso limite.

Partendo da $v=0$, il moto dapprima è simile a quello di un grave, poi si equilibra ad una **velocità limite** per la quale le due forze si equilibrano:

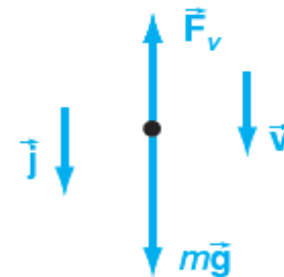
$$-mg + b_1 v_{\text{lim}} = 0 = ma_y \Rightarrow v_{\text{lim}} = \frac{mg}{b_1}$$

Corpi con **massa più grande** o che hanno un coefficiente di attrito viscoso più piccolo raggiungeranno **velocità limite più elevate**. Ecco perché martello e piuma sulla Terra cadono al suolo con velocità diverse (se è presente l'atmosfera). Invece seguono lo stesso moto se sono lasciati cadere in condizioni di vuoto.

→ Il **paracadute** garantisce un **b_1 maggiore**, riducendo la velocità limite.



(a)



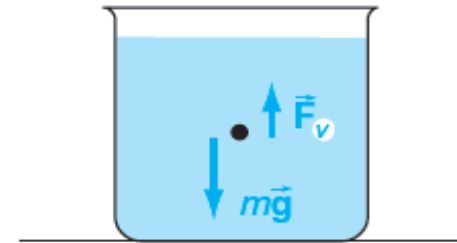
Esempio nel regime di tipo A)

Un corpo parte da fermo sotto l'azione della forza peso e della resistenza del fluido.

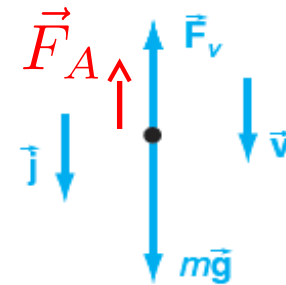
$$\sum_i F_{iy} = -mg + b_1 v = ma_y = m \frac{dv}{dt}$$

- all'inizio $v=0$ e il moto è come quello di un grave
- poi v aumenta finché c'è una **velocità limite** per la quale le due forze si equilibrano

$$-mg + b_1 v_{\text{lim}} = 0 = ma_y \Rightarrow v_{\text{lim}} = \frac{mg}{b_1}$$



(a)



$$\vec{F}_e = (-mg + F_A)\hat{j} = (-\rho_{\text{corpo}} V g + \rho_{\text{fluido}} V g)\hat{j}$$

In realtà non c'è solo la forza peso ma anche la **forza di Archimede**, diretta come la forza peso ma in verso opposto, e proporzionale ad essa.

Tuttavia ciò non cambia l'impostazione del problema: la somma di forza peso e la forza di Archimede si può esprimere come una **forza efficace**.

$$\vec{F}_e = -\rho_{\text{corpo}} V g \left(1 - \frac{\rho_{\text{fluido}}}{\rho_{\text{corpo}}} \right) \hat{j} = -mg \left(1 - \frac{\rho_{\text{fluido}}}{\rho_{\text{corpo}}} \right) \hat{j} = -m g_{\text{eff}} \hat{j}$$