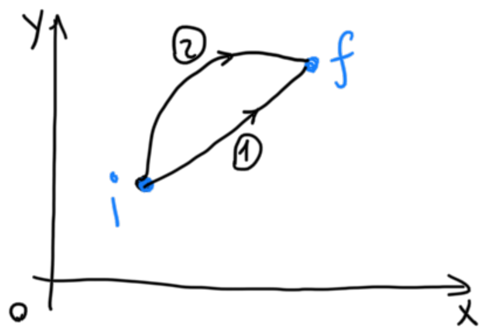
CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

nei sistemi "meccanici" ci sono due tipi di energie

→ energia CINETICA (K)

→ energia POTENZIALE (U)

Ci sono forze $\vec{F}$ il cui lavoro NON dipende dal percorso fatto!



$$L_{i\to f}^{(\text{percorso } 1)} = L_{i\to f}^{(\text{percorso } 2)}$$

$$L_{i\to f}^{(1)} - L_{i\to f}^{(2)} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$L_{i\to f}^{(1)} + L_{f\to i}^{(2)} = 0$$

$$L_{i\to f} = -L_{f\to i}$$

$$\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}\cdot d\vec{s} = -\int_{\vec{r}_f}^{\vec{r}_i} \vec{F}\cdot d\vec{s}$$

Forze CONSERVATIVE

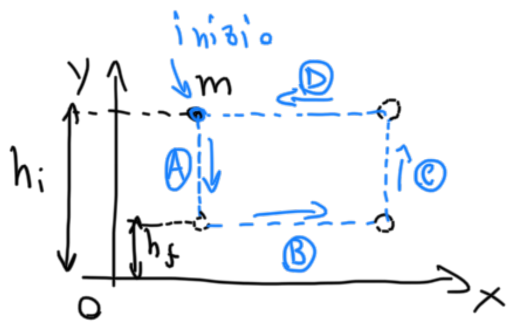
ad esse è associata una energia potenziale

$$\boxed{\Delta U = -L_{\vec{F}_{\text{conservativa}}}} \longrightarrow \left(L_{\vec{F}} = U_i - U_f\right)$$

$$\Delta U = U_f - U_i$$

è ben definita perché $L_{\vec{F}_{\text{conservativa}}}$
NON dipende dal percorso, ma solo dai punti (i) e (f)

• esempio: Forza peso ①



percorso A+B+C+D → chiuso

$$L_{\vec{F}_p}^{(A)} = mg\,(h_i - h_f) = \underbrace{(mg)}_{|\vec{F}_p|(\downarrow)}\underbrace{(h_i - h_f)}_{|\vec{s}|(\downarrow)}\cdot(+1)$$

$\vec{s}$ ha lo stesso verso di $\vec{F}_p$

$$L_{\vec{F}_p}^{(B)} = 0 \quad \text{perchè } \vec{F}_p \perp \vec{s}$$

anche $L_{\vec{F}_p}^{(D)} = 0$

$$L_{\vec{F}_p}^{(C)} = \underbrace{mg}_{|\vec{F}_p|(\downarrow)}\underbrace{(h_i - h_f)}_{|\vec{s}|(\uparrow)}\cdot(-1) = -mg\,(h_i - h_f)$$

$\vec{s}$ ha verso opposto a $\vec{F}_p$

$$L_{TOT} = L^{(A)} + L^{(B)} + L^{(C)} + L^{(D)} = 0$$

↳ Forza peso è conservativa!

$$\Delta U^{(A)} = -L_{\vec{F}_p}^{(A)} = -mg(h_i - h_f) \equiv U_f - U_i$$

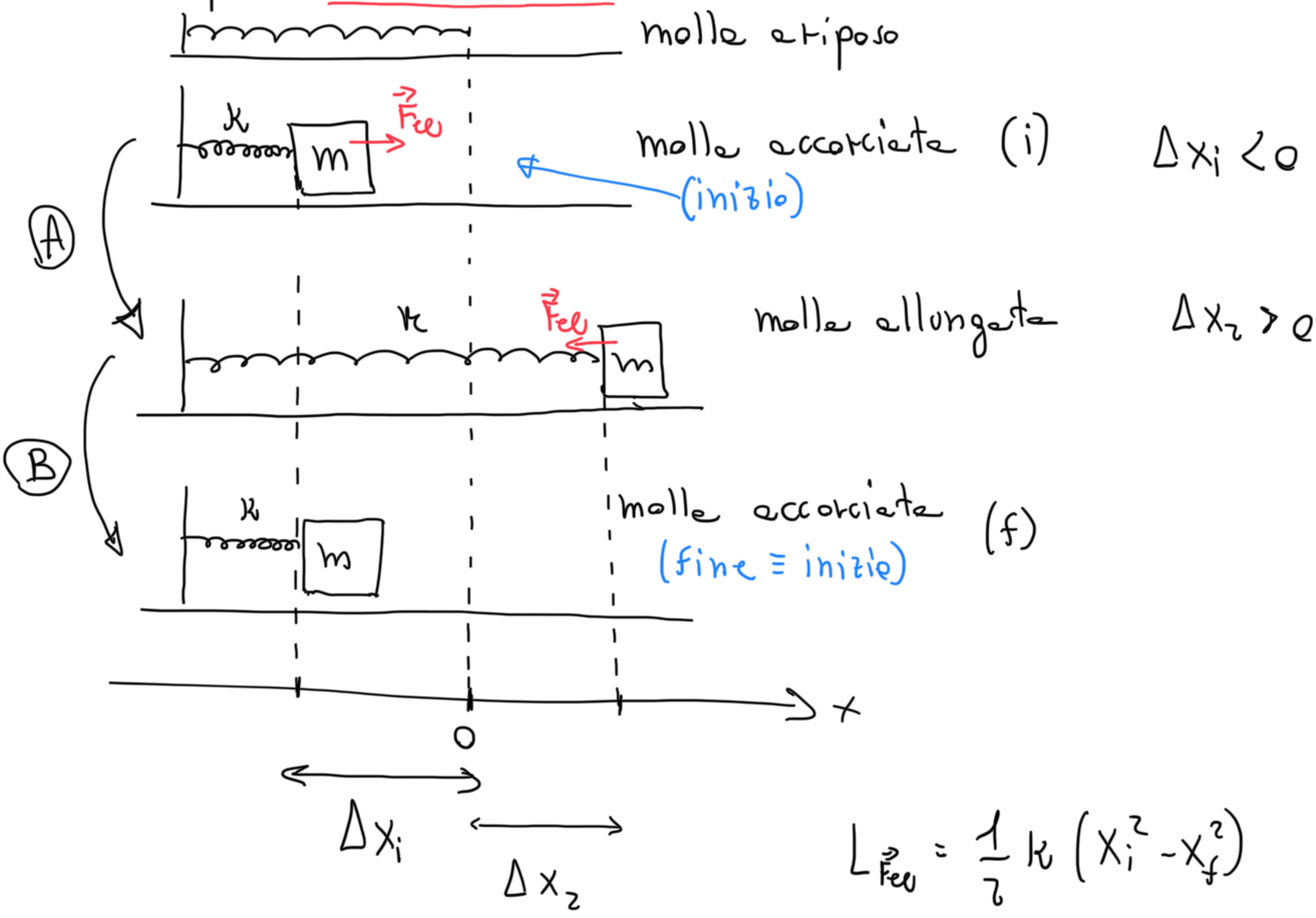
$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} U_f = mgh_f \\ U_i = mgh_i \end{cases}$$

$$U(h) = mgh$$

(è definita a meno di una costante)

• esempio: forza elastica ②



$$L_{\vec{F}_{el}} = \frac{1}{2} k \left(x_i^2 - x_f^2 \right)$$

lavoro fatto da una molla quando la massa passa da una posizione x_i a una x_f, assumendo che $x=0$ sia il punto a riposo della molla

$$L_{\vec{F}_{el}}^{(A \to B)} + L_{\vec{F}_{el}}^{(B \to A)} = ?$$

$$L_{\vec{F}_{el}}^{(A \to B)} = \frac{1}{2} k \left(\underset{\text{coord. iniziale}}{\Delta x_i^2} - \underset{\text{coord. finale}}{\Delta x_2^2} \right)$$

$$L_{\vec{F}_{el}}^{(B \to A)} = \frac{1}{2} k \left(\Delta x_2^2 - \Delta x_i^2 \right)$$

$$L_{\vec{F}_{el}}^{(A \to B)} + L_{\vec{F}_{el}}^{(B \to A)} = 0$$

↳ $\vec{F}$ elastica è conservativa!

$$\Delta U_{\vec{F}_{el}}^{(A \to B)} = - L_{\vec{F}_{el}}^{(A \to B)} \Rightarrow \underbrace{U_f - U_i}_{\Delta U} = -\frac{1}{2} k \left(x_i^2 - x_f^2 \right) = \frac{1}{2} k \left(x_f^2 - x_i^2 \right)$$

$$\begin{cases} U_i = \frac{1}{2} k x_i^2 \\ U_f = \frac{1}{2} k x_f^2 \end{cases}$$

energia potenziale elastica

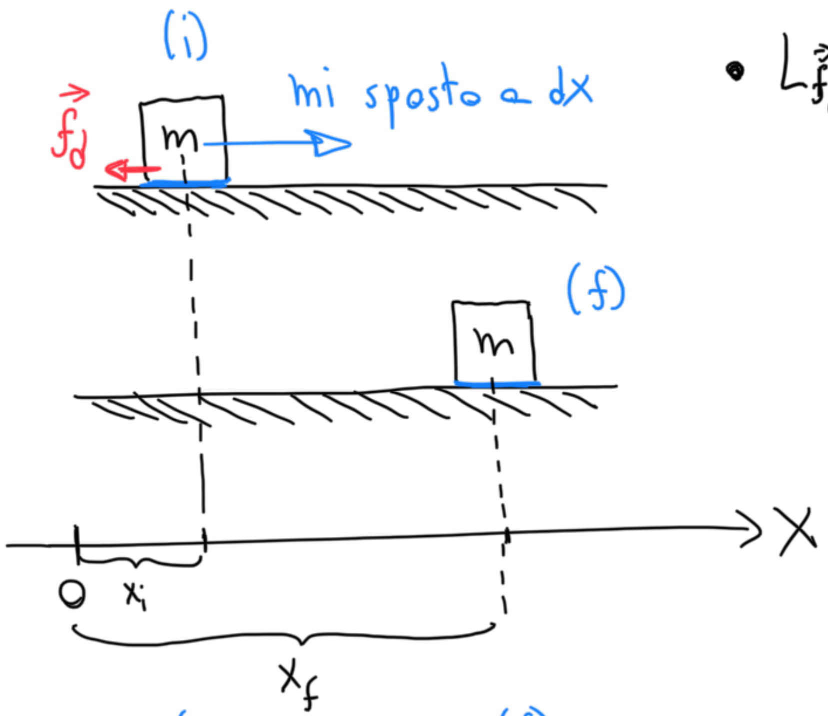
$$U(x) = \frac{1}{2} k x^2$$

($x=0$ coincide con la posizione a riposo della molla)

in generale: $U(x) = \frac{1}{2} k \Delta x^2$ ← qui non assumo che $x=0$ debba per forza essere la posizione a riposo

Δx è l'allungamento (o compressione) della molla, rispetto alla sua posizione a riposo

• Prendiamo ora l'ATTRITO (3) (dinamica)



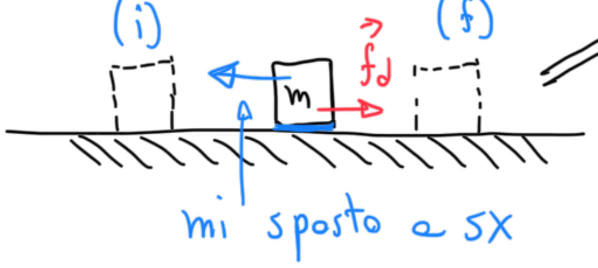
• $L_{\vec{f}_d}^{(i)\to(f)} = -\mu_d mg\,(x_f - x_i)$

$= (\mu_d mg)\,(x_f - x_i)\,(-1)$

$|\vec{f}_d| = \mu_d N = \mu_d mg$ (costante)

$\vec{f}_d$ ha verso opposto allo spostamento

supponiamo ora di tornare indietro (f) → (i)



• $L_{\vec{f}_d}^{(f)\to(i)} \overset{(*)}{=} \overbrace{(\mu_d mg)}^{|\vec{f}_d|} \cdot \overbrace{(x_f - x_i)}^{|\vec{s}|}\,(-1)$

$\vec{f}_d$ e $\vec{s}$ hanno versi opposti

$L_{\vec{f}_d}^{(i)\to(f)} = L_{\vec{f}_d}^{(f)\to(i)}$

$\Rightarrow L_{\vec{f}_d}^{(i)\to(f)} + L_{\vec{f}_d}^{(f)\to(i)} = -\mu_d mg\,(x_f - x_i) - \mu_d mg\,(x_f - x_i)$

$= -2\mu_d mg\,(x_f - x_i)$

Forza di attrito

NON è conservativa!

⇒ non possiamo definire una energia potenziale associata alla forza di attrito

(*) ho usato: $L_{\vec{f}_d} = |\vec{f}_d|\cdot|\vec{s}|\cos\vartheta$

$|\vec{f}_d|$ è positivo, $|\vec{s}|$ è positivo

Teorema dell'energia cinetica: $\Delta K = L_{TOT}$

$L_{TOT} = \sum_i L_{\vec{F}_i} = L_{\vec{F}_{conservative}} + L_{\vec{F}_{NON\ conservative}}$

divido le forze in due categorie

$\sum_i \vec{F}_i = \sum_{i,cons.} \vec{F}_{i,cons.} + \sum_{i,NON\ cons.} \vec{F}_{i,NON\ cons.}$

posso usare ΔU

$L_{\vec{F}_{i,cons.}} = -\Delta U_i$

$\Delta K = \overbrace{-\sum_{i\ cons.} \Delta U_i}^{= L_{\vec{F}_{conservative}}} + L_{\vec{F}_{NON\ conservative}}$

$$\Delta K + \sum_i \Delta U_i = L_{\vec{F}_{\text{NON cons.}}}$$

$$\boxed{\Delta(K + U_{TOT}) = L_{\vec{F}_{\text{NON cons.}}}}$$

U_{TOT} è la somma di tutte le energie potenziali legate alle forze conservative presenti nel sistema

$\Downarrow$

1) Se nel sistema NON ci sono $\vec{F}$ NON conservative (per noi: non c'è attrito)

$$\Delta(K + U_{TOT}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad K + U_{TOT} = \text{costante}$$

Conservazione dell'energia meccanica

2) se nel sistema ci sono $\vec{F}$ NON conservative (per noi: c'è attrito)

$$\Delta(K + U_{TOT}) = L_{\vec{F}_{\text{NON conservative}}}$$

teorema dell'energia generalizzato

Caso ①: sistema CONSERVATIVO

Caso ②: sistema NON CONSERVATIVO (o dissipativo)

Energia potenziale gravitazionale

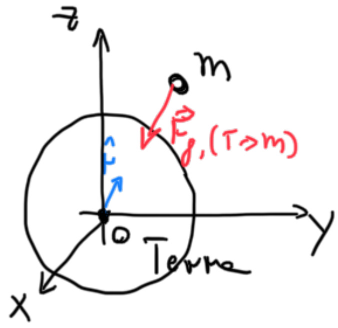
(forza gravitazionale)

$\Downarrow$ forza conservativa

(→ la $\vec{F}_{peso}$ è un "caso particolare")

$$\vec{F}_g = -G \frac{M_T m}{r^2} \hat{r}$$

$\hat{r}$ ↑ versore radiale



$M_T \gg m$ ← non ha rilevanza

$$\vec{F}_{g,(T\to m)} = -\vec{F}_{g(m\to T)}$$

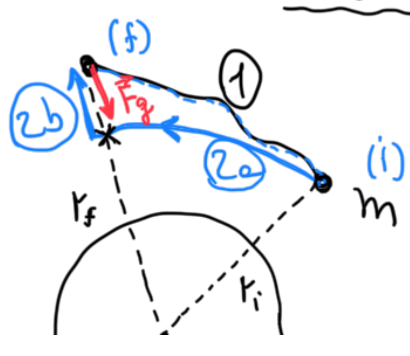
(III principio di Newton)

$$\Delta U = U_f - U_i = -L_{\vec{F}_g}$$

$$\hookrightarrow U_f = U_i - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}_g \cdot d\vec{s}$$

devo usare l'integrale perchè $\vec{F}_g$ NON è costante (dipende da $\vec{r}$)

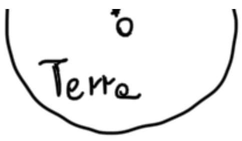
$\vec{F}_g$ è una forza RADIALE



percorso ① è quello in nero

percorso ② è scomposto in due parti:

2a: tengo costante la distanza



rispetto al centro della terra

2b: procedo in direzione radiale

lungo 2a $\vec{F}_g$ NON compie lavoro

2b $\vec{F}_g$ compie lavoro

$$L_{(i\to f)} = \cancel{L^{(2a)}} + L^{(2b)} =$$

$$= -\int_{r_i}^{r_f} |F_g(r)|\,dr = -\int_{r_i}^{r_f} G\frac{M_T m}{r^2}\,dr = -GM_T m\int_{r_i}^{r_f}\frac{dr}{r^2} =$$

$$= -GM_T m\left(-\frac{1}{r}\right)_{r_i}^{r_f} =$$

$$\boxed{\int r^\alpha dr = \frac{1}{\alpha+1}r^{\alpha+1} \quad (\alpha\neq 1) \quad \Downarrow \quad \int r^{-2}dr = -\frac{1}{r}}$$

$$= -GM_T m\left(-\frac{1}{r_f}+\frac{1}{r_i}\right) =$$

$$= GM_T m\left(\frac{1}{r_f}-\frac{1}{r_i}\right) = L_{(i)\to(f)}$$

$$\Delta U = U_f - U_i = -L_{(i)\to(f)} \Rightarrow U_f - U_i = -GM_T m\left(\frac{1}{r_f}-\frac{1}{r_i}\right)$$

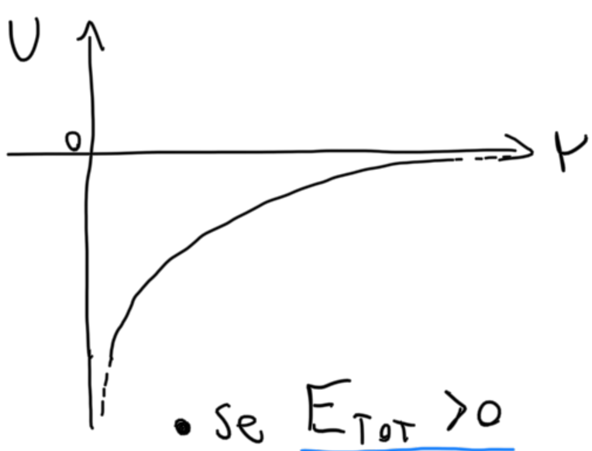
deduciamo che: (a meno di una costante)
$$\begin{cases} U_i = -\dfrac{GM_T m}{r_i} \\ U_f = -\dfrac{GM_T m}{r_f}\end{cases}$$

assumo per convenzione che $U(r\to+\infty)=0$

$\Downarrow$

la costante a cui mi riferivo la pongo uguale a zero

$$U(r) = -G\frac{M_T m}{r}$$

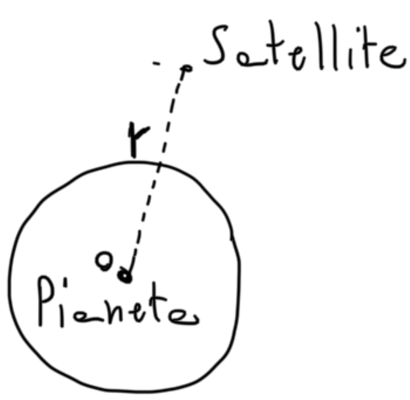


$$E_{TOT} = K + U$$

per il moto di un satellite attorno ad un pianeta E è costante!

- se $E_{TOT} > 0$

$\Rightarrow K+U>0$ il satellite può allontanarsi all'infinito $r\to+\infty$ quindi $U\to 0$ dunque $K(r\to\infty)>0$



dunque $K(r \to +\infty) > 0$

↳ il satellite avrà una velocità finita, maggiore di 0

il moto è di tipo iperbolico (moto NON confinato)

- se $E_{TOT} = 0$

  il moto è di tipo parabolico (moto NON confinato)

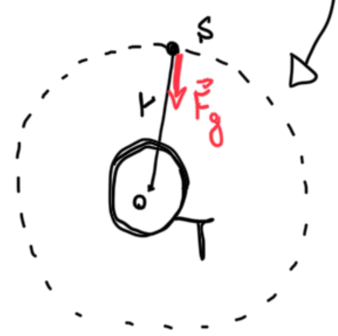
- se $E_{TOT} < 0$

  $\Rightarrow K + U < 0$ NON è possibile che il satellite vada infinitamente lontano dal pianeta (K deve essere ≥ 0)

  il moto è o circolare o ellittico (moto confinato)

  (Traiettorie "coniche")

noi vediamo orbite circolari $\Leftrightarrow M_T \gg m_S$ (la Terra per noi sta ferma)



$$U(r) = -G\frac{M_T m_S}{r} \quad \text{costante}$$

siccome $E_{TOT} = K + U = \text{costante}$ ($E_{TOT} < 0$)

$\Rightarrow$ anche K è costante

$\Rightarrow$ è costante il modulo della velocità di S

orbita è circolare $\Rightarrow$ forza centripeta, che è data da $\vec{F}_g$

$$\underbrace{G\frac{M_T \cancel{m_S}}{r^2}}_{|\vec{F}_g|} = \underbrace{\cancel{m_S}\frac{v^2}{r}}_{\text{forza centripeta}} \Rightarrow v^2 = G\frac{M_T}{r}$$

$$K = \frac{1}{2}m_S v^2 = \frac{1}{2}m_S G\frac{M_T}{r} = \frac{1}{2}G\frac{M_T m_S}{r}$$

$$K = -\frac{1}{2}U \qquad \begin{pmatrix} U<0 \\ K>0 \end{pmatrix}$$

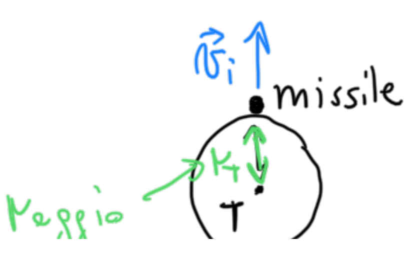
$$E_{TOT} = K + U = -\frac{U}{2} + U = \frac{U}{2}$$

$$E_{TOT} = -\frac{1}{2}G\frac{M_T m_S}{r} < 0$$

energia meccanica TOTALE di un corpo che orbita attorno a un altro corpo immobile, in moto circolare

---

- Esempio:



quanto deve essere il modulo della velocità iniziale v_i, perché il missile sfugga alla forza di gravità? (Velocità di fuga)

Terra

Uso la conservazione dell'energia:

E_{TOT} all'inizio = E_{TOT} quando il missile sarà infinitamente lontano

all'inizio

$U_i = -G \frac{M_T m_s}{r_T}$

$K_i = \frac{1}{2} m_s v_i^2$

alla fine

$U_f = 0$

$K_f = \frac{1}{2} m_s v_f^2 \geq 0$

v_f non può essere < 0

Se suppongo $v_f = 0$ $\Rightarrow$ trovo velocità di fuga uguagliando E_{TOT} all'inizio e alla fine

$U_i + K_i = \cancel{U_f} + K_f \Rightarrow K_i = -U_i$

"il missile va a $+\infty$"

$K_f = 0$: in questo modo trovo la K_i minima

$\frac{1}{2} \cancel{m_s} v_i^2 = G \frac{M_T \cancel{m_s}}{r_T} \Rightarrow v_i = \sqrt{\frac{2GM_T}{r_T}}$

Velocità di fuga

$v_{fuga} \simeq 11.2 \frac{km}{s}$

• ipotizziamo invece di arrivare a $d_{MAX} < +\infty$

$\Rightarrow U_i + K_i = U_f + K_f$, $K_f = 0$

$-G \frac{M_T \cancel{m_s}}{r_T} + \frac{1}{2} \cancel{m_s} v_i^2 = -G \frac{M_T \cancel{m_s}}{d_{MAX}}$

$\Rightarrow v_i = \sqrt{2 G M_T \left(\frac{1}{r_T} - \frac{1}{d_{MAX}} \right)}$

$d_{MAX} > r_T \Rightarrow \frac{1}{r_T} - \frac{1}{d_{MAX}} > 0$

a d_{MAX} il missile si ferma.