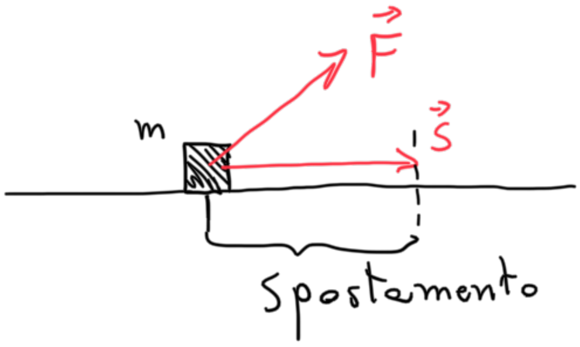
$\boxed{\text{LAVORO}}$ di una forza $\vec{F}$

- supponiamo che $\vec{F}$ sia costante e che sia applicata a un corpo che si sposta lungo una linea retta (in orizzontale)



$$\boxed{L = \vec{F} \cdot \vec{s}}$$

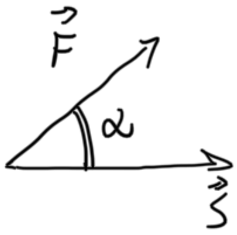
"situazione più semplice"

$\Downarrow$

L è uno scalare

L si misura in N m (Newton x metro)

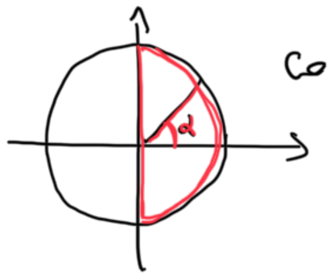
$Nm \equiv$ Joule (S.I.)



$L = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos\alpha$ (def. di prodotto scalare)

$= F_x s_x + F_y s_y + F_z s_z$

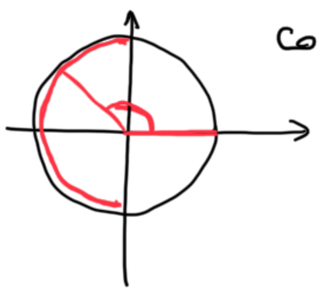
$L > 0$ se



$\cos\alpha > 0$

$(L > 0)$

$L < 0$ se

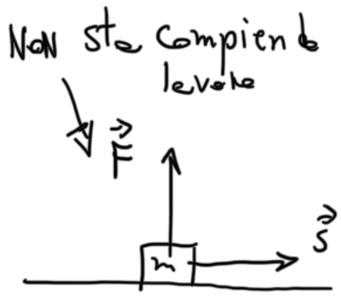


$\cos\alpha < 0$

$(L < 0)$

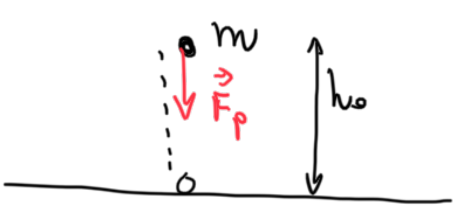
$L = 0$ se $\cos\alpha = 0$ cioè se $\alpha = 90°$ (o $270°$)

↳ se $\vec{F}$ è ortogonale a $\vec{s}$



$(L = 0)$

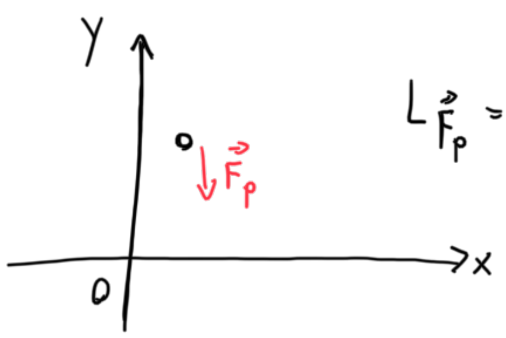
- esempio



caduta di un grave

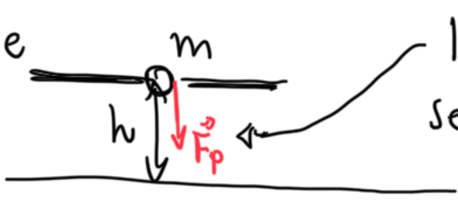
$$L_{\vec{F}_p} = \vec{F}_p \cdot \vec{s} = (mg)(h_0) \cdot \overbrace{(\cos 0)}^{= 1}$$

$$= m g h_0$$

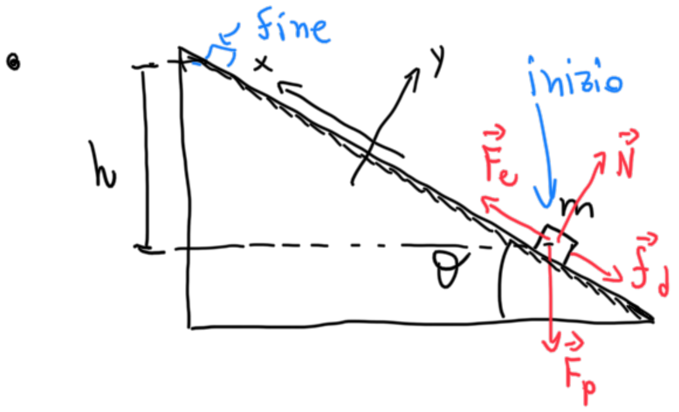


$$L_{\vec{F}_p} = \vec{F}_p \cdot \vec{s} = -mg\,(y_f - y_i) = \begin{cases} \text{negativo} & y_f > y_i \\ \text{positivo} & y_f < y_i \\ 0 & y_f = y_i \end{cases}$$

- se



la $\vec{F}_p$ NON compie lavoro se la pallina si muove in orizzontale (indipendentemente dalla presenza di altre forze) di altre forze)



la massa m risale il piano inclinato

Supponiamo per ipotesi che risalga a $\vec{v}$ COSTANTE

$\Rightarrow \vec{a}=0 \Rightarrow \vec{F}_{TOT}=\vec{F}_p+\vec{N}+\vec{F}_e+\vec{f}_d=0$

(I principio)

→ Proviamo a calcolare il lavoro compiuto da ognuna di queste forze

lungo y: $\begin{cases} N-F_p\cos\theta=0 \Rightarrow N=mg\cos\theta \\ -\mu_d N - F_p\sin\theta+F_e=0 \Rightarrow F_e=mg\sin\theta+\mu_d N = \end{cases}$ lungo x

$$= mg(\sin\theta+\mu_d\cos\theta)$$

$$L_{\vec{F}_p}=m\vec{g}\cdot\vec{s}=-mgh \quad (*)$$

$$(h=d\sin\theta)$$

$$L_{\vec{N}}=\vec{N}\cdot\vec{s}=0 \quad (\vec{N}\perp\vec{s})$$

$$L_{attrito}=\vec{f}_d\cdot\vec{s}=-|\vec{f}_d|\,|\vec{s}|=\mu_d N\cdot d=-\mu_d N\frac{h}{\sin\theta}=-\mu_d mg\cos\theta\frac{h}{\sin\theta}=$$

$$=-\frac{\mu_d mgh}{\tan\theta}$$

$$L_{\vec{F}_e}=\vec{F}_e\cdot\vec{s}=+|\vec{F}_e|\cdot|\vec{s}|=$$

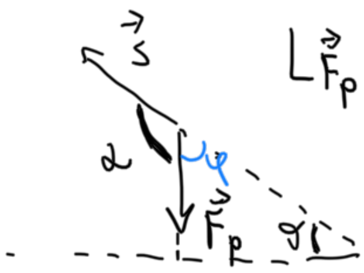
$$=mg(\sin\theta+\mu_d\cos\theta)\,d=$$

$$=mg(\sin\theta+\mu_d\cos\theta)\frac{h}{\sin\theta}=mgh\left(1+\frac{\mu_d}{\tan\theta}\right)$$

$$L_{TOT}=L_{\vec{F}_p}+L_{\vec{N}}+L_{attrito}+L_{\vec{F}_e}=0$$

provate a sommare tutti i pezzi

(*)



$$L_{\vec{F}_p}=F_p\,s\cos\alpha=$$

$$=mg\,d\cos\alpha=mg\frac{h}{\sin\theta}\cos\alpha=mg\frac{h}{\sin\theta}(-\sin\theta)$$

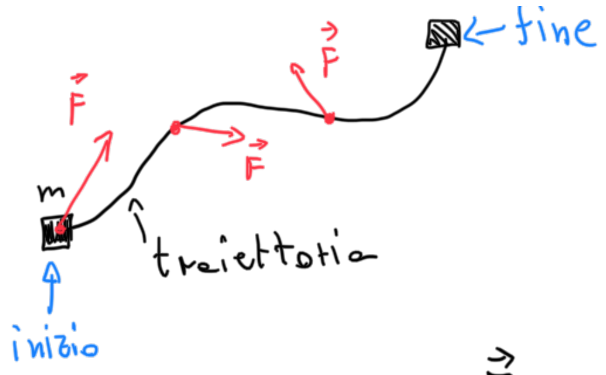
$$=-mgh$$

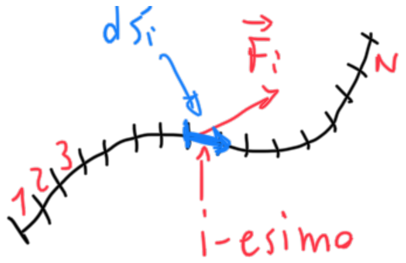
$$\begin{cases}\alpha+\varphi=\pi\\ \varphi+\theta=\frac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow \alpha=\pi-\varphi=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\pi}{2}+\theta$$

$$\cos\underbrace{\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}_{\alpha}=-\sin\theta$$

se $\vec{F}$ NON è costante? e/o lo spostamento non è rettilineo?

⇒ il Lavoro si definisce così





$\vec{F}_i$ è circa costante nel tratto i
$\Rightarrow$ nel tratto i $\quad L_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{s}_i$

il lavoro TOTALE della forza $\vec{F}$ è la somma:

$$L_{\vec{F}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot d\vec{s}_i \longrightarrow \boxed{L_{\vec{F}} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{s}}$$

DEFINIZIONE GENERALE DI LAVORO DI UNA FORZA $\vec{F}$ (lungo uno spostamento)

(in 1D: $\quad L_F = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\, dx \approx \sum_i F_i\, dx_i$

in 2D: $\quad L_{\vec{F}} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \approx \sum_i \{ (F_i)_x\, dx_i + (F_i)_y\, dy_i \}$)

esempio di forza NON costante: forza elastica (legge di Hooke)

$F_e = -k(x - x_0)$

k: cost. elastica; x_0: posizione a riposo

posso supporre $x_0 = 0$
se metto l'origine in x_0
$\Rightarrow F_e = -kx$

$$L_{F_e} = \int_{x_i}^{x_f} F_e\, dx = \int_{x_i}^{x_f} -kx\, dx = -k \int_{x_i}^{x_f} x\, dx = -k \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{x_i}^{x_f} = \frac{1}{2} k (x_i^2 - x_f^2)$$

$\boxed{\text{ENERGIA}}$ quantifica la capacità di compiere lavoro.

ENERGIA CINETICA (TRASLAZIONALE)

$$\boxed{K = \frac{1}{2} m v^2}$$

è uno scalare ≥ 0
(si misura in Joule come il lavoro)

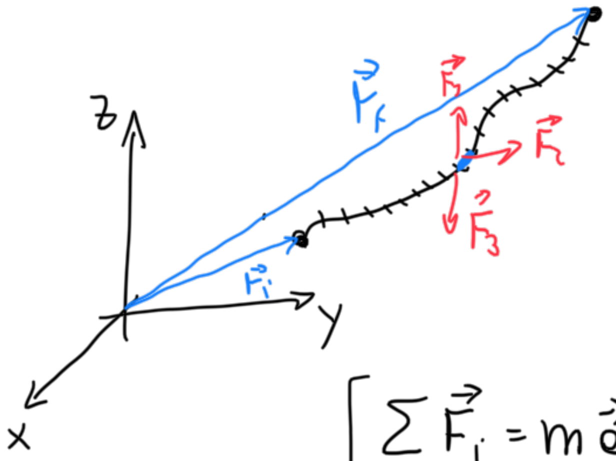
Teorema dell'energia cinetica: (o Teorema delle "forze vive")

[il lavoro TOTALE eseguito su un corpo è UGUALE alla variazione della sua energia cinetica]

$$L_{TOT} = \sum_i L_{\vec{F}_i} = \sum_i \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}_i \cdot d\vec{s} = \Delta K = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2)$$

ri

$$L_{TOT} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \left(\sum_i \vec{F}_i \right) \cdot d\vec{s} =$$



$$\left(\begin{array}{c}\text{II legge}\\ \text{di Newton}\end{array}\right) = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} m \underbrace{\vec{a} \cdot d\vec{s}}$$

$$\left[\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a} \right]$$

$$\vec{a} \cdot d\vec{s} = \underbrace{a_x dx} + a_y dy + a_z dz$$

$$a_x dx = \left(\frac{dv_x}{dt} \right) (v_x dt) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v_x^2 \right) dt \qquad \left(\frac{dv_x^2}{dt} = 2v_x \frac{dv_x}{dt} \right)$$

qui ho usato: $a_x = \dfrac{dv_x}{dt}$; $v_x = \dfrac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v_x \, dt$

$$\frac{df(g(t))}{dt} = f' \cdot g'(t) \qquad \left[\begin{array}{l} f \equiv v^2 \\ g \equiv v(t) \end{array} \right]$$

$$\vec{a} \cdot d\vec{s} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v_x^2 + \frac{1}{2} v_y^2 + \frac{1}{2} v_z^2 \right) dt$$

$$m\vec{a} \cdot d\vec{s} = \frac{d}{dt} \underbrace{\left(\frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} m v_y^2 + \frac{1}{2} m v_z^2 \right)}_{K = \frac{1}{2} m v^2} dt$$

siccome $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$

$$\Rightarrow L_{TOT} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} m \vec{a} \cdot d\vec{s} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \frac{d}{dt}(K) \, dt = K \Big|_{\text{inizio}}^{\text{fine}} = \frac{1}{2} m \left(v_f^2 - v_i^2 \right) = \Delta K$$

$$\int f'(x) dx = f(x)$$

$\square$

- esempio: in 1D una pallina sottoposta a F costante

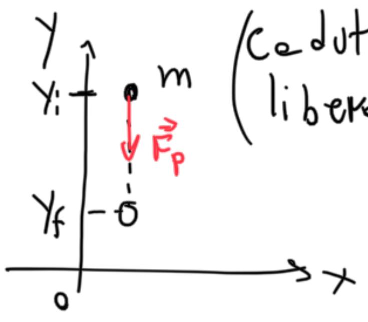
$F = ma \Rightarrow a$ costante $\Rightarrow$ moto rettilineo unif. accelerato

$$L_F = F \Delta x = (ma)(x_f - x_i) = \Delta K = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2)$$

$$\Rightarrow \cancel{m} a (x_f - x_i) = \frac{1}{2} \cancel{m} (v_f^2 - v_i^2)$$

$$\Rightarrow v_f^2 = 2a(x_f - x_i) + v_i^2 \quad \Rightarrow v_f^2 - v_i^2 = 2a(x_f - x_i)$$

$$\left(v(t)^2 = v_i^2 + 2a(x(t) - x_i) \right)$$

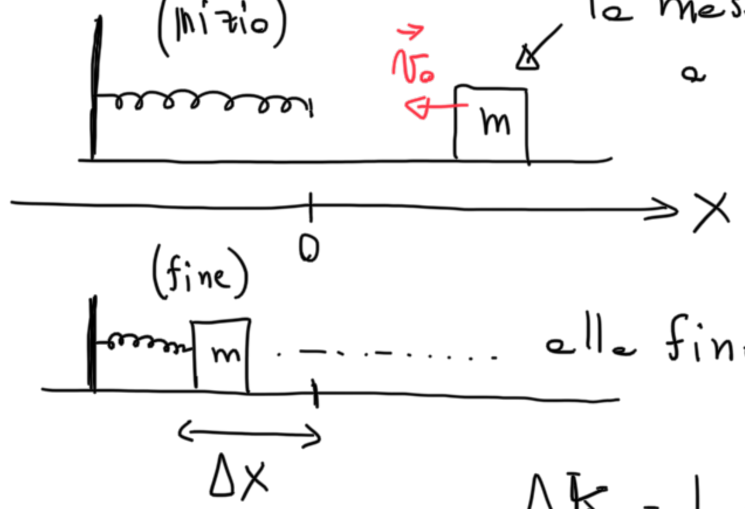
- 

(caduta libera)

$$L_{\vec{F}_p} = -mg(y_f - y_i) = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2)$$

$$\cancel{m} g (y_i - y_f) = \frac{1}{2} \cancel{m} (v_f^2 - v_i^2)$$

se $v_i = 0 \Rightarrow v_f^2 = 2g\underbrace{(y_i - y_f)}_{\Delta h} \Rightarrow v_f = \sqrt{2g\Delta h}$



la massa m viene lanciata contro la molla a velocità costante

Di quanto si comprime la molla?

alla fine la massa m si ferma ($v_f = 0$)

$$\Delta K = L_{\vec F_e} \Rightarrow \frac{1}{2} m(\cancel{v_f^2} - \underbrace{v_i^2}_{v_0^2}) = \frac{1}{2} k(\cancel{x_i^2} - x_f^2)$$

all'inizio la molla è in $x=0$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{1}{2}} m(-v_0^2) = \cancel{\frac{1}{2}} k(-\Delta x^2)$$

$$\Rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{m}{k}}\, v_0$$

POTENZA

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{dL}{dt}$$

dL → lavoro

dt → tempo

potenza istantanea

quantifica il lavoro prodotto nell'unità di tempo

(potenza media: $\langle P \rangle = \frac{\Delta L}{\Delta t}$)

$$\langle P \rangle = \frac{\Delta L}{\Delta t} \simeq \frac{\vec F \cdot \Delta \vec s}{\Delta t} = \vec F \cdot \frac{\Delta \vec s}{\Delta t} = \vec F \cdot \langle \vec v \rangle$$

$\vec F \approx$ costante nel tempo Δt

Ciò significa che $\xrightarrow{\lim_{\Delta t \to 0}}$

$$P = \vec F \cdot \vec v$$

Potenza istantanea ($\vec F, \vec v$ istantanee)

Si misura in $\frac{\text{Joule}}{\text{secondo}}$ = Watt (W) $\qquad 1\,W = 1\,\frac{J}{s}$

(1 Wattora = 1 Watt × ora = $\left(1\,\frac{J}{s}\right)(1\,h) = \left(1\,\frac{J}{s}\right)(3600\,s) = 3600\,J$)

misura energia