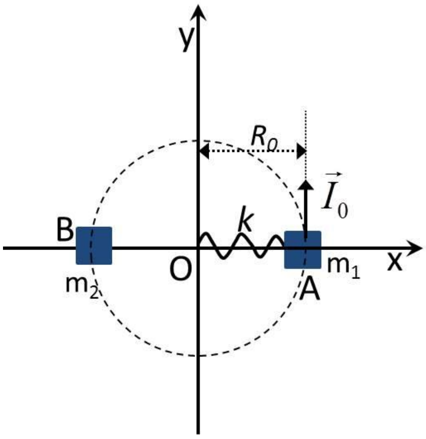
Esame di Fisica per Informatica, Corsi A + B - Appello scritto del 07/09/2016

L'esame consiste nello svolgimento di entrambi i problemi (1) e (2). Ogni esercizio contiene 5 domande. Ogni risposta esatta vale 3 punti. Due esercizi completi senza errori = 30 punti (30/30). Solo chi ottiene un voto uguale o superiore a 18/30 è ammesso all'orale.

Nota: *Gli esercizi devono essere svolti per esteso usando relazioni algebriche e giustificando i vari passaggi. Si consiglia di eseguire i calcoli numerici solo alla fine, una volta trovata l'espressione algebrica del risultato.*



Problema n. 1

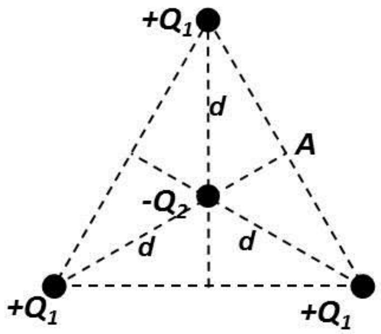
Un corpo A di massa m_1=20 kg è appoggiato su un piano orizzontale liscio. Sull'oggetto agisce una forza di tipo elastico $\vec{F} = -(kr)\hat{r}$ diretta verso l'origine degli assi cartesiani, posizionati sul piano orizzontale come in figura, dove r è la distanza dal centro, la costante elastica k vale 20 N/m e la lunghezza a riposo è nulla. Nell'istante iniziale il corpo A si trova in stato di quiete sull'asse x a distanza R_0=1 m dal centro, quando gli viene applicato un impulso I_0 diretto lungo l'asse Y positivo.

1. Calcolare quanto deve valere in modulo l'impulso I_0 da fornire al corpo affinché il suo moto successivo sia un moto circolare uniforme a raggio R_0=1 m.
2. Se la condizione al punto precedente è verificata, trovare il periodo di rotazione del corpo.
3. Si determini il modulo del momento angolare (rispetto al punto O) che possiede il corpo A durante la rotazione.

Ad un certo punto della rotazione si posiziona sull'asse negativo delle x, a distanza R_0=1 m dall'origine, un corpo B in quiete con massa $m_2 = m_1$. I due corpi si urtano.

4. In caso di urto perfettamente elastico, determinare il periodo del moto del corpo A dopo l'urto.
5. Se invece l'urto avviene in modo completamente anelastico, determinare il momento angolare rispetto al punto O dei due corpi uniti dopo l'urto.

Problema n. 2



Tre particelle cariche positive di carica $+Q_1$=1 nC sono poste ai vertici di un triangolo equilatero. Al centro del triangolo si trova una particella carica negativa di carica $-Q_2$. La distanza della carica negativa dalle positive è d=1 μm. Il lato del triangolo è $L = d\sqrt{3}$.

1. Ipotizzando che nessuna altra forza agisca sul sistema oltre a quelle elettrostatiche, trovare per quale valore della carica $-Q_2$, in relazione alla carica Q_1, il sistema è in equilibrio.

Se $Q_2 = -Q_1 = -1\ nC$ si calcoli:

2. l'energia potenziale elettrostatica complessiva del sistema;
3. il modulo del campo elettrico complessivo a metà del lato del triangolo equilatero (punto A in figura);
4. considerando una superficie sferica Σ di raggio R=2d centrata nella particella negativa, si trovi il flusso del campo elettrico totale attraverso la superficie Σ.

A questo punto ipotizziamo che la carica negativa venga rimossa e che le tre particelle cariche siano lasciate libere di muoversi: in assenza di altre forze si allontaneranno all'infinito. Sapendo che le tre particelle cariche hanno ciascuna una massa m=1 μg, si calcoli:

5. la velocità che raggiunge ciascuna particella all'infinito.

Svolgimento Problema n. 1

1.1 Se il corpo nel moto successivo all'impulso deve avere moto circolare uniforme, è importante calcolare la condizione per il moto circolare uniforme. Il moto avviene lungo un piano orizzontale liscio, l'unica forza è di tipo elastico con lunghezza a riposo nulla $\vec{F}=-(kr)\hat{r}$ diretta verso l'origine degli assi cartesiani. La velocità che prende il corpo A in seguito all'impulso dovrà essere tangenziale (cioè perpendicolare al raggio che unisce l'origine con il punto inziale) e avere un valore tale che sia verificata la condizione per l'accelerazione centripeta: $\vec{F}=-(kr)\hat{r}=-m\frac{v^2}{R_0}\hat{r}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{k}{m}}R_0=1 \quad m/s$

L'impulso da fornire al corpo A è uguale alla differenza di quantità di moto, e sapendo che la velocità iniziale è nulla e quella finale è quella appena calcolata nell'equazione precedente abbiamo che:

$$I=mv_f-mv_i=m\sqrt{\frac{k}{m}}R_0=20 \quad kgm/s$$

1.2 Se il moto è circolare uniforme il periodo è: $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi R_0}{v}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=6.28 \quad s$

1.3 Il momento angolare è definito come $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$. Nel caso specifico la direzione del momento angolare è perpendicolare al piano e in modulo vale:

$$L=R_0mv=R_0m\sqrt{\frac{k}{m}}R_0=R_0^2m\sqrt{\frac{k}{m}}=R_0^2m\omega=20 \quad kgm^2/s$$

1.4 Se l'urto avviene in moto perfettamente elastico, essendo le due masse uguali, la quantità di moto del corpo A si trasferisce interamente al corpo B che continua di moto rettilineo uniforme. Il corpo A subito dopo l'urto è fermo, poi inizia ad oscillare sotto l'azione della forza elastica. Il moto è quello di un oscillatore armonico, il cui periodo è dato da $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=6.28 \quad s$

1.5 Se invece l'urto è completamente anelastico i due corpi si fondono insieme. Nell'urto si conserva la quantità di moto e anche il momento angolare. Quest'ultimo si conserva anche in tutto il moto dopo l'urto, perché l'unica forza che agisce è la forza elastica che è una forza centrale e quindi non dà momento torcente. Quindi il momento angolare rispetto al punto O dei due corpi uniti dopo l'urto è uguale al momento angolare complessivo dei due prima dell'urto e, siccome B era fermo, era uguale a quello di A cioè $L=R_0mv=20 \quad kgm^2/s$. Da notare che subito dopo l'urto la velocità dei due corpi è dimezzata e la massa è raddoppiata e questo non consente più alla forza elastica di imporre l'accelerazione centripeta necessaria per un moto circolare uniforme. Il moto successivo sarà più complicato, con distanza dall'origine e velocità tangenziale variabili, ma con una costante del moto che è il momento angolare.

Svolgimento Problema n. 2

2.1 Il sistema è in equilibrio se su ciascuna delle quattro particelle cariche la sommatoria delle forze è nulla. Per quanto riguarda la carica negativa al centro, la sommatoria delle forze esercitate su di essa dalle tre particelle cariche positivamente è nulla per simmetria. Per quanto riguarda una delle tre cariche negative poste ai lati del triangolo dobbiamo calcolare la somma VETTORIALE delle forze che le altre due particelle cariche positivamente e la particella carica negativamente esercitano su di essa. Scegliamo, ad esempio, la carica posta al vertice superiore del triangolo. Su di essa agiscono due forze repulsive originate dalle altre cariche positive Q_1 posizionate a distanza L (le cui componenti lungo x si elidono a vicenda) e una forza attrattiva originata dalla carica $-Q_2$ a distanza d. La sommatoria delle forze ha quindi solo componente lungo y e vale: $F_y = 2\frac{k_e Q_1^2}{L^2}\cos 30° - \frac{k_e Q_1 Q_2}{d^2} = 2\frac{k_e Q_1^2}{3d^2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{k_e Q_1 Q_2}{d^2} = \frac{k_e Q_1}{d^2}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}Q_1 - Q_2\right)$

e quindi per avere l'equilibrio $Q_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}Q_1$

2.2 L'energia potenziale elettrostatica complessiva del sistema si calcola considerando l'energia potenziale dell'interazione di ogni coppia di cariche:
$$U_{tot} = 3\left(-\frac{k_e Q_1^2}{d}\right) + 3\left(\frac{k_e Q_1^2}{\sqrt{3}d}\right) = \frac{k_e Q_1^2}{d}\left(\sqrt{3} - 3\right)$$

2.3 Per calcolare il modulo del campo elettrico complessivo a metà del lato del triangolo equilatero si devono sommare VETTORIALMENTE tutti i campi originati dalle diverse cariche. Da considerazioni di simmetria però si vede subito che i campi originati dalle cariche posizionate ai vertici del lato considerato sono uguali e opposti e perciò si compensano. Rimangono quindi la carica positiva opposta e la negativa al centro: esse creano un campo diretto lungo la bisettrice del triangolo equilatero con segno opposto uno rispetto all'altro. Sapendo che la distanza della carica negativa da A è d*sin(30°)=d/2, in modulo avremo:
$$\left|\vec{E}(A)\right| = \left|\frac{k_e Q_1}{(3d/2)^2} - \frac{k_e Q_1}{(d/2)^2}\right| = \left|\frac{k_e Q_1}{d^2}\left(\frac{4}{9} - 4\right)\right| = \frac{k_e Q_1}{d^2}\left(\frac{32}{9}\right)$$

2.4 Considerando una superficie sferica Σ di raggio R=2*d* centrata nella particella negativa, il flusso del campo elettrico totale attraverso la superficie Σ si trova applicando il teorema di Gauss che dice che il flusso del campo elettrico è uguale alla somma delle cariche all'interno di Σ diviso la permettività del vuoto: $\Phi_E = \frac{\sum q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{3Q_1 - Q_1}{\varepsilon_0} = \frac{2Q_1}{\varepsilon_0}$

2.5 La carica negativa viene rimossa e le tre particelle cariche sono lasciate libere di muoversi. L'energia elettrostatica complessiva del sistema si calcola considerando l'energia potenziale dell'interazione di ogni coppia di cariche: $U_{tot} = 3\left(\frac{k_e Q_1^2}{\sqrt{3}d}\right) = \sqrt{3}\frac{k_e Q_1^2}{d}$

L'energia complessiva del sistema si conserva. All'infinito l'energia potenziale è nulla. Per simmetria, l'energia cinetica delle tre particelle sarà data da 3 volte l'energia cinetica della singola particella, avendo esse masse e velocità (in modulo) uguali:
$$\frac{3}{2}mv_f^2 + 0 = K_f + U_{tot\_f} = E_f = E_i = K_i + U_{tot\_i} = 0 + \sqrt{3}\frac{k_e Q_1^2}{d} \Rightarrow v_f = \sqrt{2\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{k_e Q_1^2}{md}}$$