Esercizi svolti (tratti da compiti di esame) su pendoli, oscillatori, urti e sistemi dinamici (con conservazione di quantità di moto).

Per ulteriori esercizi su questi argomenti si vedano anche le slides delle lezioni svolte nelle ultime due settimane di corso (sostegno compreso).
Avvertenza: molti esercizi (es. D, E, F, H, M, O, P, R, U, V, ZZ) richiedono la padronanza degli argomenti di oscillazioni e, insieme, di quelle degli urti (o quantità di moto) insieme. In questi casi, si consiglia pertanto di svolgerli non appena si è studiato la parte sulla dinamica dei sistemi di punti materiali.

01)--evoluzione sistemi dinamici-------

La capacità di smaltimento di una coda alla biglietteria di un cinema è di 8 persone al minuto. In quell'ambiente vige anche la disdicevole abitudine di lasciare inserire nuovi arrivati che trovino un amico già in coda, nel qual caso si affiancano all'amico. Questo avviene in media una volta al minuto ogni 15 persone in coda.
Una certa persona P arriva all'istante t=0 e si mette regolarmente in coda trovando davanti a sé 100 persone (trattare il numero di persone come variabile continua del tempo).

1. In quanto tempo arriva a pagare il biglietto?

2. In quanto tempo arriverebbe a pagare il biglietto se nessuno si infilasse abusivamente?
3. C'è una soluzione di equilibrio alle equazioni del sistema? Si tratta di un sistema stabile?
4. Che succede se, restando tutto il resto immutato, la biglietteria rallenta al ritmo di 2 biglietti al minuto?

Svolgimento
Il problema va portato da variabili discrete (n. persone in fila) a variabili continue. Consideriamo che x(t) è la variabile che mi dice quanto l'onesto aspirante spettatore, chiamiamolo Mario, è lontano dalla biglietteria: x(t) è proporzionale al numero di persone che gli sono davanti. Sappiamo che la biglietteria smaltisce 8 persone al minuto, e definiamo la velocità di smaltimento (o *rate*) con r=8 persone/minuto. Sappiamo anche però che negli stessi istanti un numero di "abusivi" si infiltrano nella fila nella misura di a=1 persona/(15 persone in fila per minuto).
Volendo esprimere la velocità con cui Mario si allontana (>0) o avvicina (<0) alla biglietteria e considerando i due contributi di cui sopra abbiamo:

$$\frac{dx}{dt} = -r + ax$$

$$\frac{dx}{dt} - ax = -r$$

Questa è una equazione differenziale, e sappiamo anche la condizione iniziale x(0)=100 (Mario ha davanti 100 persone quando si mette in fila).

Per rispondere al quesito (1), qual è l'istante in cui Mario compra il biglietto, dobbiamo trovare tutte le soluzioni dell'omogenea associata $\frac{dx}{dt} - ax = 0 \Rightarrow x = A\exp(at)$
e una soluzione particolare della equazione differenziale, per esempio la soluzione di equilibrio, cioè quella per cui $x_{eq}(t)$=costante, cioè, detto in gergo, Mario non si "schioda" dalla posizione iniziale, perché per tanti spettatori che la biglietteria smaltisce, tanti "abusivi" si infiltrano.

$$-ax_{eq} = -r \Rightarrow x_{eq} = r/a = 8 \times 15 = 120$$

La famiglia di soluzioni dell'equazione differenziale è:

$$x(t) = x_{OMO}(t) + x_{eq} = A\exp(at) + r/a$$

Imponendo le condizioni iniziali otteniamo la legge con cui Mario si avvicina alla biglietteria:
$x(0)=100=A\exp(a0)+r/a=A+120 \Rightarrow A=-20 \Rightarrow x(t)=-20\exp(t/15)+120$

Quando arriva Mario a pagare?
t_p: $0=x(t_p)=-20\exp(t_p/15)+120 \Rightarrow \ln 6=t_p/15 \Rightarrow t_p=15\ln 6=26.9\,\mathrm{min}$

Quesito (2)

Si chiede quando paga Mario se non ci fossero abusivi, cioè se il parametro a=0.
Se così è dobbiamo riconsiderare l'equazione differenziale. Il sistema evolve in modo differente.

$$\frac{dx}{dt}=-r$$

Sappiamo anche la condizione iniziale x(0)=100.

Dobbiamo trovare tutte le soluzioni dell'omogenea associata $\frac{dx}{dt}=0 \Rightarrow x=A$

Dobbiamo anche trovare una soluzione particolare della equazione differenziale, cioè una funzione che derivata una volta dia –r. Un candidato buono è:

$$x_p=-rt$$

La famiglia di soluzioni dell'equazione differenziale è: $x(t)=x_{OMO}(t)+x_P=A-rt$

Imponendo le condizioni iniziali si ottiene la soluzione: $x(0)=100=A \Rightarrow x(t)=100-rt$

Quando arriva Mario a pagare?
t_p: $0=x(t_p)=100-rt_p \Rightarrow t_p=\frac{100}{r}=\frac{100}{8}=12.5\,\mathrm{min}$

Quesito (3)

Si chiede se esiste una condizione di equilibrio. Cioè una condizione iniziale che può permanere nel tempo senza mutare. Nel caso in cui non ci siano infiltrati si vede subito dall'equazione differenziale che non è così. Nel caso originario, la abbiamo già calcolata, è la posizione per la quale x_{eq}(t)=costante, per la quale Mario non si "schioda" dalla posizione iniziale, perché per tanti spettatori che la biglietteria smaltisce, tanti "abusivi" si infiltrano:

$$-ax_{eq}=-r \Rightarrow x_{eq}=r/a=8\times 15=120$$

Questa posizione non è di equilibrio stabile, infatti per $x<x_{eq}$ Mario si allontanerebbe dalla posizione di equilibrio avvicinandosi alla cassa, mentre per per $x>x_{eq}$ Mario si allontanerebbe dalla posizione di equilibrio allontanandosi dalla cassa in modo esponenziale.

Quesito (4)

Si chiede che succede se, nel caso iniziale, la biglietteria rallentasse al ritmo di r=2 biglietti al minuto. Il sistema dinamico è lo stesso, non cambia l'equazione differenziale, ma cambia il punto di equilibrio:

$$\frac{dx}{dt}-ax=-r$$

La condizione iniziale x(0)=100. La soluzione di equilibrio, cioè quella per cui x_{eq}(t)=costante, adesso è: $-ax_{eq}=-r \Rightarrow x_{eq}=r/a=2\times 15=30$

La famiglia di soluzioni dell'equazione differenziale è: $x(t)=x_{OMO}(t)+x_{eq}=A\exp(at)+r/a$

Imponendo le condizioni iniziali si trova la posizione nel tempo di Mario:
$x(0)=100=A\exp(a0)+r/a=A+30 \Rightarrow A=70 \Rightarrow x(t)=70\exp(t/15)+30$

Mario non arriverà mai a pagare, perché la sua distanza dalla biglietteria aumenta nel tempo, a causa degli infiltrati. Come lui, tutti quelli con x iniziale >30 non arriveranno mai a comprare il biglietto.

A)---
Un corpo di massa M=2 Kg scivola senza attrito su un piano orizzontale con velocità= 20m/s.
All' istante t=0 urta l'estremità di una molla orizzontale di costante elastica k= 1.76×10^4 N/m, la cui estremità è fissa.
Di quanto si comprime la molla?
-) $\Delta x=0.213$ m
In quale istante si ha la compressione massima?
-) t=0.0167 s

<u>Svolgimento</u>
Il problema si risolve applicando la conservazione dell'energia meccanica. Le forze in gioco o non fanno lavoro o sono conservative (F elastica).
Quindi $E = K + U = const$
All'istante inziale l'energia è tutta cinetica, mentre quando la molla è tutta compressa, la velocità del corpo è nulla, l'energia cinetica è zero e quella potenziale è massima. Uguagliando l'energia nelle due situazioni si ha:

$$E = K + U = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} k \Delta x^2$$

da cui $\Delta x = \sqrt{\frac{m}{k}} v = 0.0107 \times 20 ms^{-1} = 0.213 ms^{-1}$

In quale istante la compressione massima?

Il corpo in contatto con la molla si comporta come un oscillatore armonico con pulsazione $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Dal momento che inizia a comprimere la molla (si trova in x=0) al momento che la molla è tutta compressa, se il moto è quello di un oscillatore armonico, il tempo trascorso è pari a un quarto di periodo.
Quindi

$$t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} = 0.0167 s$$

B)---
Un pendolo semplice compie oscillazioni di 10 cm di ampiezza, ed il periodo di oscillazione vale 6.12 s. Quanto è lungo il filo?
-) l = 9.30 m
Qual è la velocità massima della pallina appesa al filo?
-) vmax = 0.103 m/s
<u>Svolgimento</u>
Il periodo del pendolo vale $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

Quindi $l = \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 g = 9.81 (0.974)^2 = 9.3071 m$

Se le oscillazioni sono di A=0.1 m di ampiezza,
il moto è del tipo x=Asen(ωt+ϕ).
La velocità è del tipo v=Aωcos(ωt+ϕ)

La velocità massima sarà $A\omega=A(2\pi/T)=0.1027$ m/s

C)--
Un corpo di massa M = 5 kg è attaccato ad una molla orizzontale. L'altra estremità della molla è fissa. Il corpo sta compiendo delle oscillazioni di ampiezza 9.66 cm (tra x = -9.66 cm e x = +9.66 cm rispetto alla posizione di equilibrio), e il modulo della sua velocità massima vale v_0 = 3 m/s. Calcolare la costante elastica della molla, il periodo di un'oscillazione completa e il modulo dell'accelerazione massima del corpo.
-) k = 4 822 N/m
-) T = 0.202 s
-) a_max = 93.17 m/s^2

Svolgimento

Il corpo sta compiendo delle oscillazioni in una dimensione, per es. lungo l'asse x. Fissiamo l'origine dell'asse x nel punto di equilibio della molla. Lo spostamento dalla posizione di equilibrio, Δx è quindi uguale alla coordinata x. Dalle equazioni dell'oscillatore armonico sappiamo che la legge del moto è del tipo:
$x(t)=A\text{sen}(\omega t+\phi)$
x oscilla quindi fra –A e A, e A è un dato del problema in quanto si dice che le oscillazioni hanno ampiezza A=9.66 cm.
Durante tutto il moto l'energia meccanica totale si conserva, essendo le forze in gioco conservative (forza elastica) o non compiendo lavoro perché perpendicolari allo spostamento (forza peso, forza normale del piano).
Quindi in ogni momento si può scrivere:

$$(*)\quad E_{tot}=\frac{1}{2}k(\Delta x)^2+\frac{1}{2}mv^2=const$$

Durante il moto vi sono dei momenti particolari, per esempio:

a) quando si raggiunge la massima ampiezza (cioè lo spostamento massimo), in corrispondenza della quale la velocità istantanea è nulla (massima energia potenziale e energia cinetica nulla);
b) oppure quando il corpo passa per la posizione di equilibrio della molla (x=0) e la velocità è massima (dal testo del problema v_0 = 3 m/s) in modulo (energia potenziale nulla e massima energia cinetica).

Per il principio di conservazione dell'energia (*) avremo:

$$(**)\quad E_{tot(a)}=\frac{1}{2}k(A)^2=E_{tot(b)}=\frac{1}{2}m(v_{\max})^2$$

v_{max}=3 m/s

Il problema chiede di calcolare la costante elastica della molla, il periodo di un'oscillazione completa e il modulo dell'accelerazione massima del corpo.
Dall'eq. (**) si può ricavare k:

$$(***)\quad k=m\left(\frac{v_{\max}}{A}\right)^2=5kg*\left(\frac{3m/s}{9.66*10^{-2}m}\right)^2=4822N/m$$

Il periodo si calcola sapendo che per un oscillatore armonico di costante elastica k e massa m la frequenza angolare (detta anche pulsazione) ω è data da:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T}$$

allora, da eq.(***), $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{A^2}{(v_{\max})^2}} = 2\pi\frac{A}{(v_{\max})} = 2\pi\frac{9.66*10^{-2}m}{(3m/s)} = 0.202s$

L'accelerazione massima del corpo può essere calcolata dalla formula della legge oraria, derivando due volte e calcolando l'ampiezza massima.
Se x(t)=Asen(ωt+ϕ), allora v(t) = Aωcos(ωt+ϕ) e a(t)= - Aω^2sen(ωt+ϕ). L'accelerazione massima in modulo è quindi

$$a_{\max} = A\omega^2 = A\frac{k}{m} = A\frac{(v_{\max})^2}{A^2} = \frac{(v_{\max})^2}{A} = \frac{(3m/s)^2}{9.66*10^{-2}m} = 93.17m/s^2$$

D)---

Una massa M = 2 kg è appoggiata su di un piano perfettamente liscio ed è attaccata ad una molla orizzontale di costante elastica k = 1000 N/m. L'altra estremità della molla è fissata. Ad un certo istante viene urtato da un secondo corpo massa m = 400 g che viaggia con velocità 9.91 m/s. L'urto è completamente anelastico. Calcolare la frequenza angolare (ω) e l'ampiezza massima di oscillazione.
-) ω = 20.41 rad/s
-) A = 0.0809 m

<u>Svolgimento</u>
Il problema non dice nulla esplicitamente delle condizioni iniziali del corpo di massa M. Si assuma come ulteriore ipotesi che inizialmente il corpo sia in quiete nella posizione di equilibrio della molla.
Il problema si risolve in due passi: prima si determina la velocità v_f dei due corpi immediatamente dopo l'urto anelasico, in un secondo tempo si considera il problema come quello di un oscillatore armonico di massa totale M_{tot}=(m+M) che parte dalle seguenti condizioni iniziali:
x(t=0)=0 (si parte dalla posizione di equilibrio della molla),
v(t=0)= v_f

Per un urto completamente anelastico in cui uno dei due corpi è in quiete prima dell'urto si ottiene, applicando il principio della conservazione della quantità di moto (che vale durante l'urto, poiché l'urto è istantaneo e il corpo su cui agisce la forza della molla subisce uno spostamento Δx trascurabile):

P_{tot}=mv_2= (M+m)v_f , da cui $v_f = \frac{m}{m+M}v_2$

Il problema chiede di calcolare la frequenza angolare (ω) e l'ampiezza massima di oscillazione.

Per un oscillatore armonico di costante elastica k e massa M_{tot} la frequenza angolare (detta anche pulsazione) ω è data da:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M_{tot}}} = \sqrt{\frac{k}{m+M}} = \sqrt{\frac{1000N/m}{2kg+0.4kg}} = 20.41rad/s$$

L'ampiezza massima di oscillazione A può essere calcolata applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica: infatti DOPO l'urto l'energia meccanica totale si conserva essendo le forze in gioco conservative (forza elastica) o non compiendo lavoro perché perpedicolari allo spostamento (forza peso, forza normale del piano).
In ogni punto posso scrivere:

$$E_{tot} = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 + \frac{1}{2}M_{tot}v^2 = const$$

Posso applicare questa relazione all'istante iniziale, quando i due corpi hanno velocità $v_f = \frac{m}{m+M}v_2$ e la molla si trova nella posizione di equilibrio $(\Delta x) = 0$: in questo istante l'energia potenziale è nulla e l'energia cinetica è massima. La stessa relazione posso calcolarla nel punto di massima oscillazione, quando l'energia potenziale è massima e l'energia cinetica è nulla.

$E_{tot} = \frac{1}{2}k(A)^2 = \frac{1}{2}(m+M)v_f^{\ 2}$ da cui:

$$A = \sqrt{\frac{(m+M)}{k}}v_f = \sqrt{\frac{(m+M)}{k}}\left(\frac{mv_2}{m+M}\right) = \frac{(mv_2)}{\sqrt{k(m+M)}} = \frac{(0.4kg * 9.91m/s)}{\sqrt{1000N/m * (2.4kg)}} = 0.0809m$$

E) ---

Una massa M = 1.5 kg è attaccata ad una molla orizzontale di costante elastica k = 1000 N/m. L'altra estremità della molla è fissata. M può muoversi sul piano orizzontale senza attrito. Un proiettile di massa m = 20 g viene sparato con velocità 200 m/s contro M. L'urto è completamente anelastico. Calcolare la frequenza angolare (ω) e l'ampiezza massima di oscillazione.
-) ω = 25.65 rad/s
-) A = 0.104 m

<u>Svolgimento</u>
Prima dell'urto il corpo M è in quiete e la compressione/elongazione della molla Δx=0. Nell'urto, che è totalmente anelastico, si conserva la quantità di moto. La velocità v_f con la quale procedono i due corpi dopo l'urto è quindi:

$mv_0 = (M+m)v_f$ da cui $v_f = \left(\frac{m}{M+m}\right)v_0$

Dopo l'urto il problema è analogo a quello di un oscillatore armonico di massa totale $M_{tot}=(m+M)$, che nell'istante iniziale (t=0) parte dalla posizione x=0 (elongazione nulla) con velocità v_f (sopra determinata).
La frequenza angolare (o pulsazione) ω di un oscillatore armonico di massa totale $M_{tot}=(m+M)$ è data da

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m+M}} = \sqrt{\frac{1000N/m}{(1.5+0.02)kg}} = 25.65\ \ rad/s$$

L'ampiezza massima di oscillazione si ha quando si ottiene la massima compressione (o elongazione), cioè quando la velocità istantanea è zero. Per l'oscillatore armonico l'energia meccanica si conserva durante il moto: l'energia iniziale (tutta cinetica, essendo l'elongazione nulla) sarà uguale alla energia meccanica alla massima compressione (tutta potenziale):

$$E = \frac{1}{2}(m+M)(v_f)^2 = \frac{1}{2}k(\Delta x_{\max})^2$$

essendo $v_f = \left(\frac{m}{M+m}\right)v_0 = 2.6316 m/s$ si trova che la massima compressione è:

$$\Delta x_{\max} = \sqrt{\frac{m+M}{k}}v_f = \frac{v_f}{\omega} = 0.1026m$$

F)---

Una massa M = 1 kg, inizialmente ferma, è attaccata ad una molla orizzontale di costante elastica k = 1000 N/m. L'altra estremità della molla è fissa. M può muoversi sul piano orizzontale senza attrito. Una pallina di massa m = 30 g viene lanciata con velocità 100 m/s contro M. L'urto è perfettamente elastico. Calcolare, con il segno corretto, la velocità della pallina subito dopo l'urto.

-) $v_{pallina}$ = -94.175 m/s

Calcolare l'ampiezza delle oscillazioni di M dopo l'urto.

-) A = 0.184 m

<u>Svolgimento</u>

Prima dell'urto il corpo M è in quiete e la compressione/elongazione della molla $\Delta x=0$. Nell'urto, che è perfettamente elastico, si conservano: (a) la quantità di moto e (b) l'energia cinetica. Note m ed M, la velocità iniziale v_0 della pallina e sapendo che la velocità iniziale del corpo di massa M è nulla, dobbiamo quindi risolvere 2 equazioni (che vengono dalle condizioni a+b) con 2 incognite, le velocità finali dopo l'urto.

Dato un corpo A di massa m con velocità iniziale v_0 che urta un corpo B di massa M inizialmente in quiete si può dimostrare che le due velocità dopo l'urto v_A e v_B sono:

$$v_A = \left(\frac{m-M}{m+M}\right)v_0 = \left(\frac{0.03-1}{0.03+1}\right)100m/s = -94.174m/s$$

$$v_B = \left(\frac{2m}{m+M}\right)v_0 = \left(\frac{0.06}{0.03+1}\right)100m/s = 5.825m/s$$

Dopo l'urto per il corpo B di massa M legato alla molla il problema è analogo a quello di un oscillatore armonico con molla di costante k e corpo di massa M, che nell'istante iniziale (t=0) parte dalla posizione x=0 (elongazione nulla) e con velocità v_B sopra determinata. Il moto sarà di tipo armonico $X(t)=A*\mathrm{sen}(\omega t+\phi)$.

La frequenza angolare (o pulsazione) ω sarà data da $\omega = \sqrt{k/M}$ (non è richiesta dal problema), mentre la sua ampiezza di oscillazione A si ottiene andando a calcolarsi la massima compressione della molla (cioè quando la velocità istantanea è zero). Per l'oscillatore armonico l'energia meccanica si conserva durante il moto: l'energia iniziale (tutta cinetica, essendo l'elongazione nulla) sarà uguale alla energia meccanica alla massima compressione (tutta potenziale):

$$E = \frac{1}{2}M(v_B)^2 = \frac{1}{2}k(A)^2$$

La massima compressione (e quindi l'ampiezza di oscillazione) è quindi:

$$A = \sqrt{\frac{M}{k}}v_B = \sqrt{\frac{1kg}{1000N/m}} \times 5.825m/s = 0.1842m$$

G)--

Due slitte uguali A e B, ognuna di massa 50 Kg, sono inizialmente in quiete su una lastra di ghiaccio orizzontale. Sulla slitta c'è un ragazzo di massa 60 Kg, che spinge la slitta B in modo da farla partire con una velocità orizzontale di 6 m/s rispetto al suolo.

Con quale velocità parte la slitta A (con su il ragazzo)?

-) V=2.727 m/s

Quanto lavoro ha fatto il ragazzo nel dare la spinta?

-) L=1309 J

Svolgimento

Il problema si risolve applicando la conservazione della quantità di moto essendo nulla la risultante delle forze esterne.

$$0 = Q_{tot} = (m_A + m_R)v_A + m_B v_B$$

se la slitta v_B parte (per es. verso sinistra) con velocità v_B=-6 m/s (il verso positivo orientato è verso destra), allora:

$$v_A = -\frac{m_B}{(m_A + m_R)} v_B = \frac{50}{50+60} 6 \quad ms^{-1} = 2.727 ms^{-1}$$

Quanto lavoro ha fatto il ragazzo? Quello che è servito a far cambiare l'energia cinetica!

$$L = \frac{1}{2}(m_A + m_R)v_A^{\ 2} + \frac{1}{2}(m_B)v_B^{\ 2} = 409.09 + 900 = 1309 J$$

H)--

Un corpo A di massa 7 kg si muove alla velocità di +10 m/s ed urta un corpo B fermo, di massa 8 kg. L'urto è perfettamente elastico. Calcolare, con il segno corretto, la velocità di A dopo l'urto.

-) V_A = -0.6667 m/s

Svolgimento

Nell'urto perfettamente elastico si conservano sia la quantità di moto totale che l'energia cinetica.

$$m_A v_{Ai} = m_A v_{Af} + m_B v_{Bf} \Rightarrow m_A (v_{Ai} - v_{Af}) = m_B v_{Bf}$$

$$\frac{1}{2} m_A v_{Ai}^{\ 2} = \frac{1}{2} m_A v_{Af}^{\ 2} + \frac{1}{2} m_B v_{Bf}^{\ 2} \Rightarrow m_A (v_{Ai}^{\ 2} - v_{Af}^{\ 2}) = m_B v_{Bf}^{\ 2}$$

Dividendo la seconda per la prima si ha:

$v_{Bf} = (v_{Ai} + v_{Af})$ e sostituendo nella prima

$$(m_A + m_B)v_{Af} = (m_A - m_B)v_{Ai} \text{ e quindi } v_{Af} = \frac{(m_A - m_B)}{(m_A + m_B)} v_{Ai} = \frac{(7-8)}{(7+8)} 10 m/s = -0.6667 m/s$$

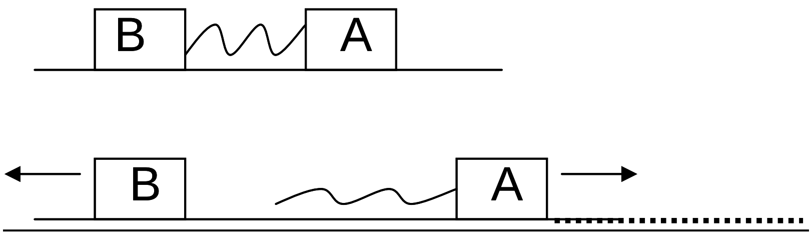
I)--

Un corpo A di massa 4 kg ed un corpo B di massa 7 kg sono inizialmente fermi su di un piano orizzontale. Tra loro è compressa una molla di massa trascurabile e costante elastica k = 1500 N/m. All'istante t = 0 viene liberata la molla, che era compressa di 10 cm. Calcolare la velocità di A quando la molla ha raggiunto la lunghezza a riposo.

-) v_A = 1.545 m/s

Il coefficiente di attrito tra A e il piano vale μd = 0.3. Dopo quanti metri si ferma A? (L'attrito non agisce durante l'espansione della molla).

-) d = 0.405 m



Svolgimento

Durante l'espansione della molla si conservano: (a) la quantità di moto totale e (b) l'energia meccanica totale.

(a) $0 = m_A v_A + m_B v_B \Rightarrow v_B = -\frac{m_A}{m_B} v_A$

(b) $\frac{1}{2}k\Delta x^2 = \frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 = \frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B\left(\frac{m_A}{m_B}\right)^2 v_A^2 = \frac{1}{2}m_A v_A^2\left(1+\frac{m_A}{m_B}\right)$

da cui $v_A = \sqrt{\frac{k}{m_A\left(1+\frac{m_A}{m_B}\right)}}\Delta x = 1.545 m/s$

Il lavoro fatto dalla forza di attrito F_a sarà pari alla energia cinetica che il corpo A ha acquistato quando la molla è tornata in condizioni di equilibrio:

$$\frac{1}{2}m_A v_A^2 = F_a l = \mu_d mgl \Rightarrow l = \frac{v_A^2}{2\mu_d g} = 0.4055m$$

J)---

Un corpo A di massa 10 kg ha velocità iniziale di +10 m/s. Ad un certo istante colpisce un corpo B, di massa 8 kg, che viaggia a 4.81 m/s. L'urto è completamente anelastico. Quanta energia viene persa nell'urto?

-) ΔE = 59.86 J

Svolgimento

Nell'urto completamente anelastico si conserva solo la quantità di moto totale.

$$m_A v_{Ai} + m_B v_{Bi} = (m_A + m_B)v_f \Rightarrow v_f = \frac{m_A v_{Ai} + m_B v_{Bi}}{(m_A + m_B)} = 7.6923 m/s$$

L'energia cinetica iniziale era

$$K_i = \frac{1}{2}m_A v_{Ai}^{\ 2} + \frac{1}{2}m_B v_{Bi}^{\ 2} = 592.54J$$

Quella finale è

$$K_f = \frac{1}{2}(m_A + m_B)v_f^{\ 2} = 532.22J$$

L'energia persa nell'urto è ΔE =K_i-K_f= 60.3 J

K) ---

Due masse, M_1 = 1 kg e M_2 incognita, sono appoggiate su di un piano perfettamente liscio, inizialmente in quiete, e tra di loro è compressa di 10 cm una molla di massa trascurabile. Dopo che la molla è tornata alla lunghezza di riposo e si è staccata dai corpi la massa M_1 acquisisce una velocità di 4 m/s e M_2 una velocità di -5 m/s. Quanto vale la massa M_2?

-) M_2 = 0.8 kg

Quanto vale la costante elastica della molla?

-) k = 3.6 x10^3 N/m

Svolgimento

Si conservano: a) la quantità di moto (la risultante delle forze esterne lungo x è nulla); b) l'energia meccanica totale (le forze in gioco sono tutte conservative: quindi l'energia cinetica acquistata dai due corpi alla fine della interazione è stata ottenuta trasformando l'energia potenziale interna, dovuta alla molla compressa). Si avrà quindi:

$$0 = M_2 v_2 + M_1 v_1 \Rightarrow M_2 = -\frac{M_1 v_1}{v_2} = -\frac{1kg \times 4m/s}{-5m/s} = 0.8kg$$

$$\frac{1}{2} M_1 {v_1}^2 + \frac{1}{2} M_2 {v_2}^2 = \frac{1}{2} k(\Delta x)^2 \Rightarrow k = \frac{M_1 {v_1}^2 + M_2 {v_2}^2}{(\Delta x)^2} = \frac{0.8 \times 25 + 1 \times 16}{(0.1)^2} = 3.6 \times 10^3 \ N/m$$

L) --

Tra due corpi di massa M_1 = 1 kg e M_2 = 5 kg è compressa una molla ideale di costante elastica k =4990 N/m. La molla è attaccata per una estremità ad uno dei due corpi, mentre l'altra estremità è solo appoggiata all'altro corpo. Il sistema è inizialmente in quiete su di un piano orizzontale. All'istante t = 0 viene liberata la molla, che era compressa di 10 cm. Qual è la velocità finale del corpo di massa M_1?

-) v_1 = 6.45 m/s

Se il corpo di massa M_1 si ferma dopo aver percorso 40 m, quanto vale il coefficiente di attrito dinamico tra corpo e piano (trascurare l'attrito durante l'espansione della molla)?

-) μ_d = 0.0531

Svolgimento

Possiamo considerare il problema come costituito da due diversi intervalli di tempo, nei quali le caratteristiche del moto sono diverse. Durante il primo intervallo (cioè durante l' espansione della molla) l'attrito non è presente. Quindi si conservano l'energia meccanica (forze tutte conservative) e la quantità di moto (essendo nulla la risultante delle forze esterne). Il sistema è inizialmente in quiete, quindi energia cinetica e quantità di moto totale sono nulle all'inizio.

$$0 = Q_{tot} = M_1 v_1 + M_2 v_2$$

da cui $v_2 = -\frac{M_1}{M_2} v_1$

Inoltre, poiché l'energia si conserva, l'energia cinetica del sistema presente alla fine dell'espansione è stata ottenuta a scapito della perdita della energia potenziale interna della molla.

$$\frac{1}{2} k \Delta x^2 = \frac{1}{2} M_1 {v_1}^2 + \frac{1}{2} M_2 {v_2}^2$$

sostituendo il valore di v_2 otteniamo:

$$\frac{1}{2} k \Delta x^2 = \frac{1}{2} M_1 {v_1}^2 + \frac{1}{2} M_2 \left(\frac{M_1}{M_2} \right)^2 {v_1}^2 = \frac{1}{2} M_1 {v_1}^2 \left(1 + \frac{M_1}{M_2} \right)$$

da cui:

$$v_1 = \sqrt{\frac{k}{M_1 \left(1 + \frac{M_1}{M_2} \right)}} \Delta x = \sqrt{\frac{4990}{1.2}} 0.1 = 6.45 ms^{-1}$$

Nella seconda parte del problema ci concentriamo sul moto del corpo di massa M_1 che si muove su una superficie con attrito dinamico μ_d. Il corpo si ferma dopo un percorso d=40 m. Applichiamo il teorema dell'energia cinetica: la variazione di K è uguale al lavoro fatto dalle forze di attrito:

$$L_A = -\mu_d (M_1 g) d = \Delta K = K_f - K_i = -\frac{1}{2} M_1 v_1^2$$

da cui:

$$\mu_d = \frac{v_1^2}{2dg} = \frac{(6.45)^2}{2 \times 9.81 \times 40} = 0.053$$

M) ---

Problema 1: Un corpo di massa 1.90 kg è appoggiato in quiete su di un piano orizzontale perfettamente liscio ed è attaccato ad una molla orizzontale di costante elastica 5.90 N/m e massa trascurabile. L'altra estremità della molla è fissata. La molla inizialmente si trova alla sua lunghezza di riposo. Ad un certo istante il corpo viene urtato da un secondo corpo di massa 1.40 kg che viaggia con velocità 7.40 m/s. L'urto è perfettamente anelastico. Calcolare:

1. il periodo delle oscillazioni dopo l'urto;

   T [s] = ______ A 2.62 B 23.5 C 4.70 D 2.32 E 22.5

2. l'ampiezza di oscillazione.

   x_0 [m] = ______ A 1.13 B 3.22 C 0.684 D 1.84 E 2.35

Svolgimento

Nell'urto si conserva la quantità di moto.

Dopo l'urto i due corpi rimangono attaccati e si muovono solidali con velocità v_f come un solo corpo di massa $M=m_1+m_2$.

$Mv_f = m_2 v_{2i}$; $v_f = m_2 v_{2i}/M$

I due corpi si muovono sotto l'azione della forza elastica. Il moto è quello dell'oscillatore armonico. Il periodo delle oscillazioni sarà:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}} = 4.70s$$

La soluzione è quella contrassegnata dalla casella 1.C.

Per l'ampiezza delle oscillazioni, vale la conservazione dell'energia: la massima ampiezza si avrà quando l'energia cinetica è zero (quando il corpo inverte la sua velocità):

$$\frac{1}{2}k\Delta x_{\max}^2 = U_{\max} = K_{\max} = \frac{1}{2}Mv_f^2$$

$$\Delta x_{\max} = \sqrt{\frac{M}{k}}v_f = \sqrt{\frac{1}{k(m_1+m_2)}}m_2 v_{2i} = 2.35m$$

La soluzione è quella contrassegnata dalla casella 2.E.

N) ---

Un corpo di massa M = 2 kg viene lasciato libero in condizioni di quiete alla sommità di una rampa senza attrito inclinata di 30° rispetto all'orizzontale. La rampa si raccorda ad un binario orizzontale senza attrito che si trova ad una quota h=10 m più in basso rispetto alla posizione iniziale del corpo. Il corpo scivola giù lungo la rampa inclinata.

Domanda 1) Calcolare la forza normale esercitata dalla rampa inclinata sul corpo;

Domanda 2) Calcolare la velocità del corpo una volta raggiunto il binario orizzontale.

Il corpo continua la sua traiettoria sul binario orizzontale e urta un corpo di massa identica che si trova in stato di quiete (si veda lo schema in Figura). L'altra estremità del binario termina con una guida cilindrica di raggio h=10 m. Si trascuri ogni forma di attrito. Se l'urto tra i due corpi è perfettamente elastico, determinare:

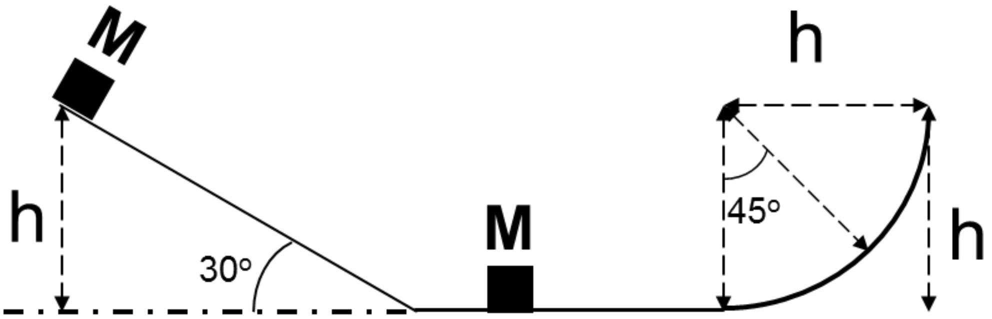
Domanda 3) la massima altezza raggiunta dal secondo corpo dopo l'urto;

Domanda 4) la forza normale esercitata dalla guida cilindrica sul corpo quando passa per il punto P che si trova sulla guida a 45° rispetto alla verticale.

Domanda 5) il moto del primo corpo dopo l'urto.

Se invece l'urto è completamente anelastico, calcolare:

Domanda 6) la massima altezza raggiunta dai due corpi uniti dopo l'urto.



Svolgimento

Il corpo scivola lungo la rampa inclinata senza attrito. Le uniche forze agenti su di esso sono la forza peso $M\mathbf{g}$ e la forza normale **N** esercitata dal vincolo della rampa. Fissando un sistema di riferimento cartesiano opportuno, con un asse (x) parallelo al piano della rampa e un asse (y) perpendicolare ad esso, si può scrivere la seconda legge della dinamica, in componenti:

$F_x=Mg\cdot\sin\theta=Ma_x$ (A.1)

$F_y=N- Mg\cdot\cos\theta= Ma_y=0$ (A.2)

Dalla eq.(A.2) si ricava che $N=Mg\cdot\cos\theta= Mg\sqrt{3}/2=17.0$ N (Risposta a Domanda 1).

Le forze in gioco sono conservative (forza peso) o non compiono comunque lavoro (forze esplicate dai vincoli). Si può quindi applicare il principio di conservazione dell'energia meccanica:

$Mgh=(Mv_A^2)/2$ (A.3)

Da (A.3), $v_A=(2gh)^{1/2}= 14.0$ m/s (Risposta a Domanda 2).

Consideriamo adesso il caso di urto perfettamente elastico e le velocità dopo l'urto dei due corpi v_{Af} e v_{Bf}. Si conservano energia cinetica e quantità di moto:

$M\,v_A= M\,v_{Af}+ M\,v_{Bf}$ (A.4)

$(Mv_A^2)/2=(Mv_{Af}^2)/2+(Mv_{Bf}^2)/2$ (A.5)

Semplificando e risolvendo il sistema si trova che

$v_{Bf} =v_A$ (A.6)

$v_{Af}=0$ (A.7)

Dopo l'urto il corpo B prosegue lungo il piano orizzontale e poi lungo la guida circolare. Essendo presenti solo forze conservative o a lavoro nullo, avremo che la massima quota rispetto al piano orizzontale (Risposta a Domanda 3) si trova con la seguente equazione:

$Mgh_{max}=(Mv_{Bf}^2)/2$ (A.8)

Però dalla (A.6) e (A.3) deriva che

$Mgh_{max}=(Mv_{Bf}^2)/2= (Mv_A^2)/2= Mgh$ (A.9)

e quindi la massima altezza è h=10 m.

La forza normale (Risposta a Domanda 4) esercitata dalla guida cilindrica sul corpo quando passa per il punto P che si trova sulla guida a 45° rispetto alla verticale deve essere tale che, sommata vettorialmente alla componente della forza peso, sia uguale a Ma_c, dove a_c è la accelerazione centripeta. Se in P la velocità del corpo è v_P avremo:

$(Mv_{Bf}^2)/2= (Mv_P^2)/2+Mgh_P = (Mv_P^2)/2+ Mgh(1\text{-}\cos 45^O)= (Mv_P^2)/2+Mgh(1\text{-}\sqrt{2}/2)$ (A.10)

$(v_P^2)=(v_{Bf}^2)\text{-} 2gh(1\text{-}\sqrt{2}/2)= (v_A^2)\text{-} 2gh(1\text{-}\sqrt{2}/2)= 2gh(\sqrt{2}/2)$ (A.11)

$Ma_c= M(v_P)^2/h=N\text{-} Mg\cdot\cos(45^o) \Rightarrow N= Mg(\sqrt{2}/2)+2Mg(\sqrt{2}/2)= Mg(3\sqrt{2}/2)$ (A.12)

La risposta alla Domanda 5, data la eq. (A.7), è che il primo corpo rimane immobile nel punto dell'urto.

In caso di urto completamente anelastico i due corpi rimangono attaccati ($v_{Af}=v_{Bf}$), l'energia cinetica non si conserva mentre la quantità di moto si conserva:

$M\,v_A= M\,v_{Af}+ M\,v_{Bf}=2\,M\,v_{Af} \qquad \Rightarrow v_{Af}= v_A /2$ (A.13)

La massima altezza raggiunta dai due corpi uniti si trova applicando il principio di conservazione dell'energia:

$(Mv_{Af}^2)/2 = Mgh_{max} \Rightarrow h_{max} = (v_{Af})^2/(2g) = (v_A)^2/(8g) = h/4$ (A.14)

O) --

Problema 2: Un corpo di massa 7.60 kg viaggia con velocità 1.60 m/s su un piano orizzontale perfettamente liscio. Ad un certo istante il corpo urta un secondo corpo di massa tripla rispetto a quella del primo corpo. Prima dell'urto il corpo più pesante si trova in quiete sul piano orizzontale ed è attaccato ad una molla orizzontale di costante elastica 5.10 N/m e massa trascurabile. L'altra estremità della molla è fissata. La molla inizialmente si trova alla sua lunghezza di riposo. L'urto è perfettamente elastico. Calcolare:

1. il periodo delle oscillazioni del corpo più pesante dopo l'urto;

   T [s] = ☐ A 0.709 B 4.93 C 0.571 D 13.3 E 2.33

2. l'ampiezza di oscillazione.

   x_0 [m] = ☐ A 0.433 B 1.69 C 1.35 D 2.33 E 2.93

Svolgimento

Il periodo delle oscillazioni sarà legato alla pulsazione ω secondo la relazione

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{3m_1}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{3*7.6}{5.10}} = 13.285s$$

L'ampiezza di oscillazione sarà legata alla velocità del corpo più pesante subito dopo l'urto elastico. Sappiamo che la velocità del secondo corpo, che era fermo inizialmente, sarà dopo l'urto (si vedano relazioni per urto elastico in 1 dimensione):

$$v_{2f} = v_{1i}\frac{2m_1}{m_1+m_2} = v_{1i}\frac{2m_1}{m_1+3m_1} = \frac{v_{1i}}{2}$$

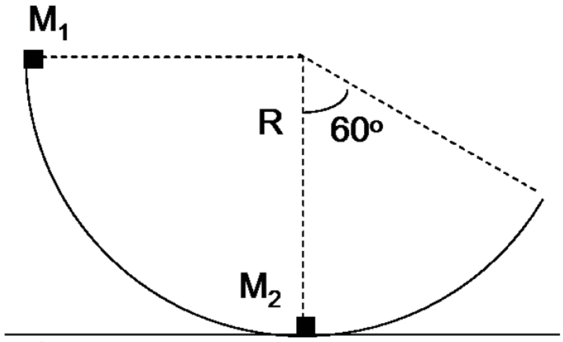
Applichiamo quindi la conservazione dell'energia, considerando che all'inizio l'energia potenziale è nulla (la molla è nella posizione di riposo) e quando invece la molla è tutta elongata o compressa (massima ampiezza) l'energia cinetica è nulla:

$$U_{2A} + K_{2A} = 0 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2 = \frac{3}{2}m_1\frac{v_{1i}^2}{4} = U_{2B} + K_{2B} = \frac{1}{2}kx_0^2$$

$$x_0 = \sqrt{\frac{3m_1}{k}}\frac{v_{1i}}{2} = \sqrt{\frac{3*7.60}{5.1}}\frac{1.6}{2} = 1.6915m$$

P) --

Una guida senza attrito a forma di settore cilindrico di raggio $R = 20\,m$ si estende intorno al suo asse lungo un arco di 150°, di cui 90° a sinistra della verticale (si veda la figura) e i restanti 60° a destra. La guida è fissata rigidamente al piano.



La guida è appoggiata su un piano orizzontale infinito. Al tempo iniziale un corpo di massa $M_1 = 4.5\,kg$ viene lasciato libero in stato di quiete all'interno di una guida alla sommità del bordo sinistro, e sul fondo della guida si trova in quiete un corpo di massa $M_2 = 5.5\,kg$.
Il corpo M_1 inizia a scivolare verso il basso e urta frontalmente in modo perfettamente elastico il corpo M_2. Il corpo di massa M_1 dopo l'urto rimane all'interno della guida e scivola avanti e indietro intorno alla posizione di minimo.
Dopo l'urto il corpo di massa M_2 inizia a scivolare lungo la parte destra della guida, per poi lasciarla e proseguire nel vuoto. L'attrito dell'aria è considerato trascurabile in tutto il problema. L'intensità del campo gravitazionale è $g = 9.81\,m/s^2$.
Si calcoli (prima con una formula algebrica e poi numericamente):
Domanda n. 1: il periodo delle piccole oscillazioni del corpo di massa M_1 dopo l'urto;
Domanda n. 2: l'ampiezza massima delle oscillazioni del corpo di massa M_1 dopo l'urto;
Domanda n. 3: la massima altezza rispetto al piano orizzontale raggiunta dal corpo di massa M_2 dopo l'urto;
Domanda n. 4: la distanza del punto di impatto del corpo di massa M_2 con il piano orizzontale dal punto di minimo della guida.

Svolgimento

Risposta alla domanda n. 1: Il corpo M_1 oscilla come un pendolo, quindi:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 9.0\,s$$

Risposta alla domanda n. 2: Il corpo M_1 arriva in prossimità del fondo della guida con una velocità calcolabile applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica:

$$v_1 = \sqrt{2gR} = 19.8\,m/s$$

Le velocità dopo l'urto elastico risultano quindi:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} v_1 = -1.98\,m/s \\ u_2 &= \frac{2M_1}{M_1 + M_2} v_1 = 17.8\,m/s \end{aligned}$$

L'ampiezza massima delle oscillazioni θ_{max} è ricavabile dal valore della velocità angolare $\dot{\theta}$, a sua volta ricavabile da u_1:

$$\begin{aligned} \theta_{max} &= \frac{\dot{\theta}}{\omega} = \frac{\frac{u_1}{R}}{\sqrt{\frac{g}{R}}} \\ \theta_{max} &= \frac{u_1}{\sqrt{gR}} = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}\frac{\sqrt{2gR}}{\sqrt{gR}} = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}\sqrt{2} \\ \theta_{max} &= 0.14\,rad = 8.1^\circ \\ x &\sim \theta_{max}\,R \sim 2.8\,m \end{aligned}$$

Risposta alla domanda n. 3: Dopo l'urto M_2 risale sino alla fine della guida, dove arriva con velocità v_2 calcolabile applicando il principio di conservazione del'energia meccanica:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}M_2u_2^2 &= \frac{1}{2}M_2v_2^2 + M_2g\frac{R}{2}\\ v_2 &= \sqrt{u_2^2 - gR} = 11\,m/s\end{aligned}$$

La direzione iniziale è data dalla tangente alla guida, quindi M_2 ha queste componenti orizzontale e verticale:

$$\begin{aligned}v_{2x} &= v_2\cos(60) = \frac{v_2}{2} = 5.5\,m/s\\ v_{2y} &= v_2\sin(60) = v_2\frac{\sqrt{3}}{2} = 9.6\,m/s\end{aligned}$$

L'altezza massima rispetto alla rampa che può raggiungere vale quindi:

$$h_{max} = \frac{R}{2} + \frac{v_{2y}^2}{2g} = 14.7\,m$$

Risposta alla domanda n. 4: La gittata di un corpo lanciato da una altezza iniziale Y_i (in questo caso uguale a $R/2$), con componenti della velocità v_{2x} e v_{2y}, risulta:

$$x_f = \frac{v_{2x}\left(v_{2y} + \sqrt{v_{2y}^2 + 2gY_i}\right)}{g} = 14.9\,m$$

Q) ---

Su un piano orizzontale una massa m_2 è ferma sotto il punto di sospensione di un pendolo semplice. Questo ha lunghezza l e massa $m_1 = \delta m_2$. Il pendolo viene portato nella posizione che forma un angolo α con la verticale, e poi viene lasciato libero (con velocità iniziale nulla). Quando il filo è verticale il pendolo urta elasticamente m_2, che inizia a muoversi nel piano orizzontale con velocità v_2.

Domanda n. 1: Scrivere l'espressione di v_2 in funzione di α e δ.

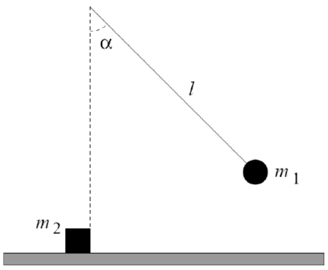
Dopo l'urto il pendolo continua a muoversi e arriva a fermarsi in una nuova posizione che forma con la verticale un angolo β.

Domanda n. 2: Scrivere l'espressione di $\cos\beta$ in funzione di α e δ.

Tra m_2 e il piano su cui si muove c'è un coefficiente di attrito dinamico μ_d, per cui il corpo si arresta dopo aver percorso uno spazio L.

Domanda n. 3: Scrivere l'espressione di L in funzione di v_2 e μ_d.

Domanda n. 4: Nelle espressioni trovate sopra per v_2, β e L, sostituire i valori numerici: $l = 1\ m$, $m_2 = 3\ kg$, $\delta = 6$, $\alpha = 45°$, e $\mu_d = 0.9$.



Svolgimento

Risposta alla domanda n. 1: Applicando la conservazione dell'energia meccanica si ottiene la velocità con cui il corpo m_1 colpisce m_2:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m_1v^2 &= m_1gl(1-\cos\alpha) \qquad (1)\\ v &= \sqrt{2gl(1-\cos\alpha)} \qquad (2)\end{aligned}$$

La conservazione della quantità di moto nell'urto tra le due masse permette di calcolarne le velocità dopo l'urto:

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v \tag{3}$$

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v \tag{4}$$

Esprimendo v in termini di α e utilizzando la relazione $m_1 = \delta m_2$ si ottiene:

$$v_2 = \frac{2\delta}{\delta + 1}\sqrt{2gl(1 - \cos\alpha)} \tag{5}$$

Risposta alla domanda n. 2: L'angolo β è ricavabile applicando nuovamente la conservazione dell'energia per il moto del pendolo:

$$m_1 gl(1 - \cos\beta) = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \tag{6}$$

$$\cos\beta = 1 - \frac{v_1^2}{2gl} \tag{7}$$

$$\cos\beta = 1 - \left(\frac{\delta - 1}{\delta + 1}\right)^2 (1 - \cos\alpha) \tag{8}$$

Risposta alla domanda n. 3: Applicando il teorema dell'energia cinetica, si ottiene lo spazio L percorso da m_2 prima dell'arresto:

$$\frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \mu_d m_2 g L \tag{9}$$

$$L = \frac{v_2^2}{2\mu_d g} \tag{10}$$

Risposta alla domanda n. 4:

$$v_2 = 4.1\ m/s \tag{11}$$

$$\cos\beta = 0.79 \qquad \beta = 37.7° \tag{12}$$

$$L = 0.96\ m \tag{13}$$

R) ---

Su una rampa, rappresentabile come un piano inclinato scabro inclinato di un angolo $\alpha = 30°$ rispetto all'orizzontale, è appoggiato un corpo di massa M_1. Fra il corpo e la rampa vi sono un coefficiente di attrito dinamico μ_d e un coefficiente di attrito statico μ_s. All'istante iniziale il corpo si trova in quiete ad una quota h lungo la verticale rispetto all'estremità inferiore della rampa.

Domanda n. 1: Trovare μ_s^*, il valore minimo del coefficiente di attrito statico, per il quale il corpo permane nello stato di quiete.

Se il coefficiente di attrito statico è inferiore al valore limite μ_s^* trovato, il corpo inizierà a scivolare verso il basso.

Domanda n. 2: Si calcoli (in funzione di α , M_1, μ_d e h) con quale velocità v^* il corpo giunge alla fine della rampa.

L'estremità inferiore della rampa è raccordata ad un piano orizzontale senza attrito. Il corpo continua a muoversi lungo il piano orizzontale finché non va ad urtare in modo completamente anelastico contro un corpo di massa $M_2 = 3M_1$, che si trova in quiete sul piano orizzontale senza attrito. Il corpo di massa M_2 è legato ad una molla orizzontale di costante elastica k inizialmente in posizione di equilibrio, che ha l'altra estremità fissata ad una parete. Si calcoli (in funzione di v^*, M_1, e k):

Domanda n. 3: il periodo T di oscillazione della molla dopo l'urto;
Domanda n. 4: l'ampiezza massima A di oscillazione della molla dopo l'urto.
Domanda n. 5: Sostituire i valori numerici $M_1 = 8\ kg$, $\mu_d = 0.29$, $h = 10\ m$, $k = 512\ N/m$, nelle espressioni trovate sopra e fornire i risultati numerici per μ_s, v^*, T e A.

Svolgimento

La forza normale esercitata dal vincolo è $N = M_1 g\cos\alpha$, la componente della forza peso lungo il piano inclinato è $F_p = M_1 g\sin\alpha$, la forza di attrito statica è al massimo $-\mu_s N = -\mu_s M_1 g\cos\alpha$.
Risposta alla domanda n. 1: La condizione di quiete è raggiunta in condizioni limite quando

$$M_1 g\sin\alpha - \mu_s^* M_1 g\cos\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad \mu_s^* = \tan\alpha$$

Risposta alla domanda n. 2: Applicando la conservazione dell'energia meccanica, e tenendo conto del lavoro svolto sul corpo dalla forza di attrito dinamico, si ottiene la velocità con cui il corpo M_1 giunge in fondo al piano:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}M_1 v^{*2} &= M_1 gh - \mu_d M_1 g\cos\alpha\frac{h}{\sin\alpha} \\ v^* &= \sqrt{2gh\left(1-\frac{\mu_d}{\tan\alpha}\right)} \end{aligned}$$

Il corpo, una volta giunto sul piano orizzontale liscio, continua a muoversi con velocità v^*.
Risposta alla domanda n. 3: Nell'urto totalmente anelastico i due corpi si uniscono, e il sistema (molla-massa) può oscillare con periodo dato dalla legge usuale:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M_{tot}}{k}} = 4\pi\sqrt{\frac{M_1}{k}}$$

Risposta alla domanda n. 4: Nell'urto si conserva la quantità di moto. La velocità con cui i due corpi (uniti) procedono dopo l'urto definisce l'energia totale del sistema, che corrisponde alla massima ampiezza A secondo le relazioni:

$$\begin{aligned} M_1 v^* &= M_{tot}\, v \quad \rightarrow \quad v = \frac{v^*}{4} \\ E &= \frac{1}{2}M_{tot}v^2 = \frac{1}{2}kA^2 \\ A &= \frac{v^*}{2}\sqrt{\frac{M_1}{k}} \end{aligned}$$

Risposta alla domanda n. 5:

$$\begin{aligned} \mu_s^* &= 0.577 \\ v^* &= 9.88\ m/s \\ T &= 1.57\ s \\ A &= 0.618\ m \end{aligned}$$

S) --

Un corpo di massa m_1 = 5 kg sta scivolando senza attrito lungo un piano orizzontale sopraelevato che si trova ad un'altezza h = 50 m rispetto al suolo (vedi figura) con velocità v_0 =20 m/s e incontra lungo il suo cammino un tratto scabro di lunghezza L = 10 m nel quale il coefficiente di attrito dinamico corpo/piano è μ_d = 0.1. Si assuma g = 9.81 m/s^2 e si supponga che la resistenza dell'aria sia trascurabile.

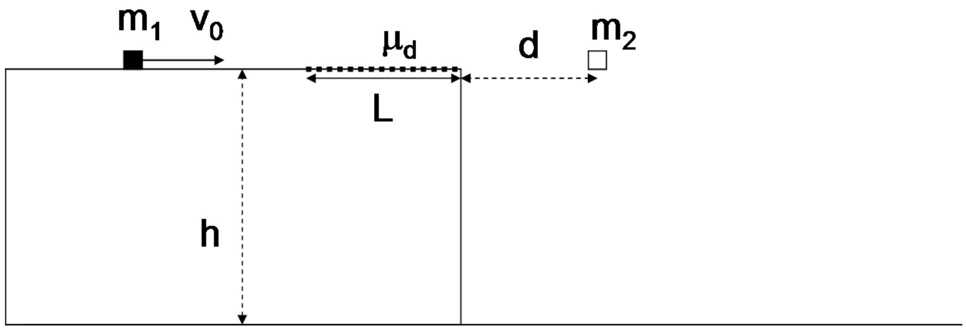
Domanda 1) Si calcoli (prima con una formula algebrica e poi numericamente) la velocità del corpo alla fine del tratto scabro.

Al termine del tratto scabro il corpo continua il suo moto in caduta libera. Nello stesso istante in cui il corpo di massa m_1 lascia il piano orizzontale un corpo di massa identica (m_2 = 5 kg) situato alla stessa altezza h dal suolo e ad una distanza d = 40 m dalla fine del piano viene lasciato libero in condizione di quiete.

Domanda 2) Si calcoli (prima con una formula algebrica e poi numericamente) l'altezza rispetto al suolo del punto di impatto fra i due corpi.

Domanda 3) Se l'urto fra i due corpi è di tipo completamente anelastico si calcoli (prima con una formula algebrica e poi numericamente) il modulo della velocità dei due corpi uniti immediatamente dopo l'urto anelastico.

Domanda 4) -5) Si calcoli il modulo della velocità dei due corpi al momento dell'impatto al suolo e la distanza del punto di impatto al suolo dal piede della perpendicolare corrispondente alla fine del tratto scabro orizzontale.



__Svolgimento__

Risposta alla domanda n. 1: Lungo il tratto scabro di lunghezza L sul corpo agisce una forza di attrito dinamico *fd* opposta al moto, di intensità:

$$f_d = -\mu_d N = -\mu_d m_1 g$$

La velocita v_1 del corpo alla fine del tratto scabro deriva quindi dal teorema della energia cinetica tenendo conto del lavoro fatto dalla forza di attrito:

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2\mu_d g L}$$

Il corpo prosegue il suo moto in caduta libera partendo dall'altezza h con una velocità iniziale v_1 diretta lungo l'orizzontale. Lungo l'asse verticale il suo moto `e quello di un grave che viene lasciato in condizioni iniziali di quiete:

$$y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$$

La stessa equazione vale per il secondo corpo, che si trova a distanza d lungo l'orizzontale: i due corpi hanno quindi la stessa quota per qualunque istante si consideri. Data la velocità iniziale del primo corpo, i due si scontrano al tempo t_u corrispondente all'istante in cui l'ascissa del corpo 1 raggiunge il valore d:

$$t_u = \frac{d}{v_1}$$

Risposta alla domanda n. 2:

$$y_u = h - \frac{1}{2}gt_u^2 = h - \frac{1}{2}g\left(\frac{d}{v_1}\right)^2$$

Risposta alla domanda n. 3: Se l'urto è completamente anelastico, i due corpi continuano uniti insieme; nell'urto si conserva la quantità di moto:

$$m_1\vec{v}_1(t_u) + m_2\vec{v}_2(t_u)$$

La conservazione vale separatamente per le componenti: tenendo conto che i due corpi hanno la stessa componente verticale, mentre solo il primo corpo ha una componente orizzontale, e indicando con v_{fx} e v_{fy} le componenti delle velocità dopo l'urto, si ottiene:

$$\begin{aligned} v_{fx} &= \frac{m_1 v_1 + 0}{m_1 + m_2} = \frac{v_1}{2} \\ v_{fy} &= -g\frac{d}{v_1} \\ |v_f| &= \sqrt{\left(\frac{v_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{gd}{v_1}\right)^2} \end{aligned}$$

Risposta alla domanda n. 4: Analogamente a quanto fatto per la domanda precedente, il modulo della velocità dei due corpi al momento dell'impatto al suolo vale:

$$|v_s| = \sqrt{\left(\frac{v_1}{2}\right)^2 + 2gh}$$

Risposta alla domanda n.5

Al momento immediatamente successivo dell'urto, il corpo finale, formato dall'unione dei due corpi, ha componenti della velocità v_{fx} e v_{fy} (sopra determinate). Se fissiamo l'origine degli assi nel piede della perpendicolare, le coordinate del corpo subito dopo l'urto sono (d, y_u). A questo punto basta impostare le equazioni del moto balistico e si trova

$$x_s = d + v_{fx}t_s ; 0 = y_u + v_{fy}t_s - \frac{1}{2}gt_s^2;$$

$$t_s = \frac{v_{fy} + \sqrt{{v_{fy}}^2 + 2gy_u}}{g}; x_s = d + v_{fx}t_s$$

T) --

Problema 2: Un corpo di massa 1.50 kg si muove lungo un piano orizzontale liscio con una velocità di 8.60 m/s. Lungo la sua traiettoria si trova un secondo corpo di massa 4.80 kg, inizialmente in quiete, alla cui estremità posteriore (quella più vicina al primo corpo) è fissata una molla orizzontale di costante elastica 72.0 N/m e massa trascurabile, in posizione di equilibrio. Dopo il contatto con il primo corpo, la molla inizia a comprimersi e il secondo corpo a muoversi. Attrito e resistenza dell'aria sono da considerarsi trascurabili. Calcolare:

3. La massima compressione della molla.

Δx [m] = ☐ A $\boxed{0.283}$ B $\boxed{0.314}$ C $\boxed{1.08}$ D $\boxed{0.263}$ E $\boxed{0.203}$

Una volta arrivata alla massima compressione, la molla si estende di nuovo fino a tornare alla sua posizione di equilibrio, i due corpi si separano e proseguono il loro moto ognuno per proprio conto con velocità costanti e distinte. Calcolare:

4. la velocità del primo corpo dopo il distacco dalla molla.

v [m/s] = ☐ A $\boxed{5.27}$ B $\boxed{-4.50}$ C $\boxed{-14.8}$ D $\boxed{-32.8}$ E $\boxed{-22.6}$

Svolgimento

Il corpo di massa m_1=1.5 kg e velocità iniziale v_{1i}=8.60 m/s incontra il secondo corpo di massa m2=4.80 kg: inizia a comprimere la molla di costante k=72.0 N/m e a muovere il secondo corpo.
Ci sarà un istante in cui la molla è compressa al massimo, dopo di che inizierà ad estendersi e i due corpi ad allontanarsi. Nell'istante di massima compressione i due corpi si muovono con la stessa velocità v*. Si conserva la quantità di moto e l'energia meccanica:

$$m_1 v_{1i} = (m_1 + m_2) v^*$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v^{*2} + \frac{1}{2} k \Delta x^2$$

la massima compressione è perciò

$$\Delta x = v_{1i} \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}} \quad (3)$$

Una volta che la molla si è estesa ed è tornata alla posizione di equilibrio (Δx=0) i due corpi si allontanano e continuano di moto rettilineo uniforme.
Si conserva l'energia (tutte le forze sono conservative) e la quantità di moto. Non solo, siccome Δx=0 sia prima che dopo, si conserva l'energia cinetica. Sono le stesse condizioni di un urto elastico. Quindi la velocità del primo corpo è:

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} \quad (4)$$

U) --

Problema 1: Un corpo di massa 1.90 kg è appoggiato in quiete su di un piano orizzontale perfettamente liscio ed è attaccato ad una molla orizzontale di costante elastica 5.90 N/m e massa trascurabile. L'altra estremità della molla è fissata. La molla inizialmente si trova alla sua lunghezza di riposo. Ad un certo istante il corpo viene urtato da un secondo corpo di massa 1.40 kg che viaggia con velocità 7.40 m/s. L'urto è perfettamente anelastico. Calcolare:

1. il periodo delle oscillazioni dopo l'urto;

   T [s] = ☐ A 2.62 B 23.5 C 4.70 D 2.32 E 22.5

2. l'ampiezza di oscillazione.

   x_0 [m] = ☐ A 1.13 B 3.22 C 0.684 D 1.84 E 2.35

Svolgimento

Nell'urto si conserva la quantità di moto.
Dopo l'urto i due corpi rimangono attaccati e si muovono solidali con velocità v_f come un solo corpo di massa $M=m_1+m_2$.
$Mv_f = m_2 v_{2i}$; $v_f = m_2 v_{2i}/M$

I due corpi si muovono sotto l'azione della forza elastica. Il moto è quello dell'oscillatore armonico.
Il periodo delle oscillazioni sarà:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} = 4.70 s$$

La soluzione è quella contrassegnata dalla casella 1.C.
Per l'ampiezza delle oscillazioni, vale la conservazione dell'energia: la massima ampiezza si avrà quando l'energia cinetica è zero (quando il corpo inverte la sua velocità):

$$\frac{1}{2} k \Delta x_{\max}^2 = U_{\max} = K_{\max} = \frac{1}{2} M v_f^2$$

$$\Delta x_{\max} = \sqrt{\frac{M}{k}} v_f = \sqrt{\frac{1}{k(m_1 + m_2)}} m_2 v_{2i} = 2.35 m$$

La soluzione è quella contrassegnata dalla casella 2.E.

V) ---

Un pendolo è costituito da un corpo di massa $M = 1\,kg$ appeso ad un filo inestensibile di lunghezza $L = 3\,m$, di massa trascurabile. Il pendolo inizialmente si trova in quiete lungo la verticale. Contro la massa del pendolo viene sparato, orizzontalmente, un proiettile di massa $m = 20\,g$ con velocità $v_0 = 80\,m/s$. L'urto è perfettamente anelastico.
Calcolare:
Domanda n. 1: il periodo delle piccole oscillazioni del pendolo;
Domanda n. 2: l'ampiezza di oscillazione (in gradi rispetto alla verticale).
Si supponga ora di poter variare a piacimento la velocità del proiettile:
Domanda n. 3: calcolare v_{min} il minimo valore della velocità del proiettile affinché il pendolo, dopo l'urto anelastico, possa fare un giro completo nel piano verticale;
Domanda n. 4: calcolare la tensione del filo immediatamente dopo l'urto, nel caso in cui la velocità del proiettile abbia il valore v_{min}.

Svolgimento

Risposta alla domanda n. 1: Il periodo T delle piccole oscillazioni di un pendolo appeso ad un filo inestensibile di lunghezza L è dato dalla relazione:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 3.47\ s$$

Risposta alla domanda n. 2: Applicando la conservazione della quantità di moto totale al sistema composto dalle due masse M e m, la velocità della massa del pendolo $M + m$ subito dopo l'urto anelastico risulta:

$$v_p = \frac{m}{M+m}v_0 = 1.57\ m/s$$

L'ampiezza delle oscillazioni è data dall'angolo massimo θ_{max} di deflessione del pendolo rispetto alla verticale, che viene raggiunto quando il pendolo arriva all'altezza massima h_{max} rispetto alla posizione iniziale. In corrispondenza di questa, il pendolo è fermo e quindi tutta l'energia cinetica posseduta dal pendolo nella posizione iniziale è trasformata in energia potenziale:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(M+m)v_p^2 &= (M+m)gh_{max} \\ h_{max} &= \frac{v_p^2}{2g} = \left(\frac{m}{M+m}\right)^2 \frac{v_0^2}{2g} = 0.125\,m \end{aligned}$$

Conoscendo l'altezza massima, per trovare l'angolo corrispondente basta servirsi delle relazioni trigonometriche:

$$\begin{aligned} h_{max} &= (1 - \cos\theta_{max})L \\ \theta_{max} &= \arccos\left(1 - \frac{h_{max}}{L}\right) = 16.6\,\text{gradi} \end{aligned}$$

Risposta alla domanda n. 3: Affinché la velocità del proiettile sia tale da far percorrere al pendolo un giro completo, l'energia cinetica del pendolo, subito dopo l'urto, deve essere sufficientemente grande da permettere al pendolo di arrivare nel punto più alto della traiettoria circolare con una velocità va sufficientemente alta da richiedere che la tensione N del filo sia diversa da zero. Quindi, applicando la seconda legge della dinamica, nel punto più alto della traiettoria si ottiene:

$$\begin{aligned}(M+m)a_z &= -N-(M+m)g\\ a_z &= -\frac{v^2}{L}\\ -(M+m)\frac{v^2}{L} &= -N-(M+m)g\end{aligned}$$

da cui si ricava la velocità minima per avere il filo teso:

$$v_a = \sqrt{gL}$$

Per la conservazione dell'energia avremo che:

$$\frac{1}{2}(M+m)v_p^2 = \frac{1}{2}(M+m)v_a^2 + 2(M+m)gL$$

da cui:

$$\begin{aligned}v_p^2 &= v_a^2 + 4gL\\ v_p &= \sqrt{5gL}\\ v_{min} &= \frac{M+m}{m}\sqrt{5gL} = 619\ m/s\end{aligned}$$

Risposta alla domanda n. 4: La tensione N del filo subito dopo l'urto può essere calcolata considerando la seconda legge delle dinamica:

$$\begin{aligned}(M+m)\frac{v_p^2}{L} &= N-(M+m)g\\ N &= (M+m)\left(\frac{v_p^2}{L}+g\right) = 6(M+m)g = 60.0\ N\end{aligned}$$

W)--

Un corpo di massa $M = 250\ g$ si muove su una guida liscia come nella figura, il raggio è $R = 4\ m$. Il corpo è inizialmente in quiete a contatto con una molla ideale di costante elastica $k = 2.5\ N/m$ compressa di $x = 2\ m$ rispetto alla lunghezza di riposo. Assumendo che tutti gli attriti siano trascurabili e che il campo gravitazionale possa essere considerato uniforme, determinare:

Domanda n. 1: l'altezza massima raggiunta dal corpo;

Domanda n. 2: la velocità minima v_{min} che il corpo deve avere quando arriva nel punto A affinché riesca a compiere un giro completo senza cadere dalla guida;

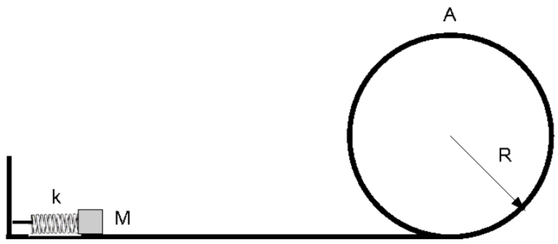
Domanda n. 3: la compressione minima x_{min} che deve avere la molla affinché il corpo riesca a compiere un giro completo senza cadere;

Domanda n. 4: se il valore di v_{min} e di x_{min} cambiano in presenza di attrito dinamico sulla guida (non è richiesto il calcolo esatto degli eventuali nuovi valori);

Domanda n. 5: il valore della massa m di un corpo che si trova nel tratto orizzontale della guida poco prima dell'ingresso nella zona circolare, a destra del corpo di massa M e inizialmente in quiete, affinché dopo un urto elastico con quest'ultimo raggiunga la stessa altezza massima trovata al punto 1, assumendo le stesse condizioni di partenza per M [1].

---

[1] Suggerimento: calcolare prima la velocità che deve avere il corpo di massa m per arrivare all'altezza del punto 1.



Svolgimento

Risposta alla domanda n. 1: Non essendoci attriti basta applicare la conservazione dell'energia meccanica

$$\frac{1}{2}kx^2 = Mgh$$

da cui segue che

$$h = \frac{1}{2}\frac{kx^2}{Mg} = 2m$$

Risposta alla domanda n. 2: La velocità minima v_{min} che il corpo deve avere nel punto A per non cadere è quella per cui la reazione vincolare in quel punto si annulla. Applicando la seconda legge di Newton al corpo che si muove di moto circolare sulla guida mostrata in figura e considerando solo la componente radiale nel punto A si ottiene:

$$M\frac{v^2}{R} = N + Mg$$

da cui

$$N = M\left(\frac{v^2}{R} - g\right), \qquad v_{min} = \sqrt{gR} = 6,3m/s$$

Risposta alla domanda n. 3: La compressione minima x_{min} che deve avere la molla affinché il corpo raggiunga il punto A con velocità v_{min} è quindi

$$\frac{1}{2}kx_{min}^2 = Mg(2R) + \frac{1}{2}Mv_{min}^2 = \frac{5}{2}MgR$$

da cui

$$x_{min} = \sqrt{\frac{5MgR}{k}} = 4.4m$$

Risposta alla domanda n. 4: In presenza di attrito dinamico la velocità minima v_{min} che il corpo deve avere nel punto A per non cadere è la stessa di prima, infatti l'attrito esercita una forza tangente alla circonferenza ma non una ortogonale e quindi lascia inalterata la relazione tra N e v trovata in precedenza. In questo caso però l'energia meccanica non si conserva poiché una parte è dissipata e quindi la compressione minima della molla deve essere maggiore di quella trovata nel punto precedente.

Risposta alla domanda n. 5: La velocità iniziale necessaria per raggiungere l'altezza h è $v_0 = \sqrt{2gh}$ e non dipende dalla massa. Quindi il corpo m dopo l'urto deve avere esattamente la stessa velocità del corpo M prima dell'urto. Scriviamo quindi le equazioni di conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica con questi valori delle velocità:

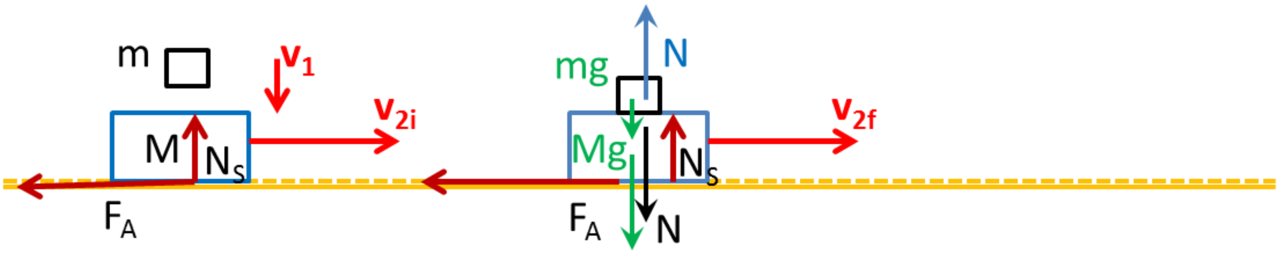
$$M\mathbf{v_0} = M\mathbf{v_{fin}} + m\mathbf{v_0}, \qquad \frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{1}{2}Mv_{fin}^2 + \frac{1}{2}mv_0^2$$

da cui segue che

$$2mv_0^2\,(m - M) = 0$$

e quindi $m = M$.

X)---



Un blocco di massa M scivola su un piano scabro (coefficiente attrito dinamico μ_d). All'istante t=0 un corpo di massa m impatta verticalmente con velocità v_1 sopra il blocco. L'urto avviene in un tempo infinitesimo ed è completamente anelastico (si "appiccica"). Il blocco, un attimo prima dell'impatto ha velocità orizzontale v_{2i}. Quanto è la velocità finale dopo l'urto?

Svolgimento

Prima che avvenga l'impatto, sul blocco agiscono 3 forze: la forza peso, la reazione normale del suolo N_S, la forza di attrito $F_A=\mu_d N_S$.

Al momento dell'impatto, sul corpo che cade agiscono la forza peso e la forza di contatta (normale) che esercita il blocco N: la somma delle forze deve essere uguale alla variazione della quantità di moto:

$$\sum_i \left(\vec{F}_{ext\_i}\right)_y = \frac{dP_y}{dt}$$

Considerando il tempo infinitesimo dell'impatto e l'impulso della forza:

$$\sum_i \left(\vec{F}_{ext\_i}\right)_y \Delta t = P_{yf} - P_{yi} \Rightarrow (N - mg)\Delta t = 0 + mv_1 \Rightarrow N = mg + \frac{mv_1}{\Delta t}$$

La forza che il corpo esercita sul blocco è uguale e contraria a quella che il corpo esercita sul blocco e vale, in modulo N.

Si può adesso applicare la relazione fra quantità di moto e forze, considerando il blocco:

$$\sum_i \left(\vec{F}_{ext\_i}\right)_y = N_S - N - Mg = \frac{dP_y}{dt} = 0 \Rightarrow N_S = N + Mg$$

$$\sum_i \left(\vec{F}_{ext\_i}\right)_x = -\mu_d N_S = \frac{dP_x}{dt}$$

Applicando all'ultima equazione il teorema dell'impulso, considerando il tempo infinitesimo dell'impatto:

$$P_{xf} - P_{xi} = -\mu_d N_S \Delta t \Rightarrow$$

$$(M+m)v_{2f} - Mv_{2i} = -\mu_d (N + Mg)\Delta t \Rightarrow$$

$$(M+m)v_{2f} - Mv_{2i} = -\mu_d \left(mg + \frac{mv_1}{\Delta t} + Mg\right)\Delta t = -\mu_d \left((m+M)g\Delta t + mv_1\right)$$

e, visto che $\Delta t \to 0$: $v_{2f} = \dfrac{Mv_{2i} - \mu_d m v_1}{M+m}$

Y) --

Un corpo di massa $\boldsymbol{M_1}$=2 kg si trova su una guida orizzontale liscia (si veda schema in Figura). Il corpo è connesso in modo indissolubile a sinistra a una molla ideale di costante elastica $\boldsymbol{k}$=32 N/m, il cui altro estremo è bloccato a una parete verticale.

Comprimiamo la molla di una distanza pari a Δx_0=1 m rispetto alla posizione di equilibrio ed all'istante inziale t=0 lasciamo il corpo libero di muoversi a partire dalla condizione di quiete. Calcolare:

1. Periodo **T** e ampiezza **A** del moto di oscillazione del corpo.

Ad un certo istante ***t**** dopo l'inizio del moto oscillatorio, il corpo di massa M_1, che sta oscillando con velocità $v_1(t^*)$, viene urtato a destra in modo totalmente anelastico da un corpo di massa M_2=6 kg che procede con velocità v_2=1 m/s sulla guida da destra verso sinistra. Trovare:

2. l'ampiezza di oscillazione dopo l'urto se l'istante dell'urto è ***t*=T/4**;

3. il nuovo periodo di oscillazione dopo l'urto.

<u>Svolgimento</u>

1. Il moto iniziale è quello di un oscillatore armonico. L'equazione differenziale è di tipo omogeneo. La soluzione è del tipo:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2 x=0; \quad \omega_0^2=\frac{k}{M_1}\Rightarrow x(t)=A\cos(\omega_0 t+\phi)\Rightarrow v(t)=-\omega_0 A\sin(\omega_0 t+\phi)$$

Il periodo è quindi $T=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{M_1}{k}}$

Per trovare ampiezza e fase basta imporre le condizioni iniziali:

$$0=v(t=0)=-\omega_0 A\sin(\phi)\Rightarrow\phi=\pi$$

$$-\Delta x_0=x(t=0)=A\cos(\phi)=-A\Rightarrow A=\Delta x_0$$

$$x(t)=\Delta x_0\cos(\omega_0 t+\pi)$$

2. L'urto è anelastico quindi si conserva solo la quantità di moto. Il corpo di massa M_1 subito prima dell'urto (t=t*) ha come velocità (componente sull'asse orizzontale):

$$v_1(t^*)=-\omega_0\Delta x_0\sin(\omega_0 t^*+\pi)$$

La quantità di moto totale è:

$$M_1 v_1(t^*)-M_2 v_2=-M_1\omega_0\Delta x_0\sin(\omega_0 t^*+\pi)-M_2 v_2=(M_1+M_2)v_f$$

Quindi la velocità v_f

$$v_f=\frac{-M_1\omega_0\Delta x_0\sin(\omega_0 t^*+\pi)-M_2 v_2}{(M_1+M_2)}$$

Dopo l'urto il corpo si muove come un oscillatore armonico, di massa totale somma delle masse. La nuova legge del moto è, a meno delle costanti arbitrarie:

$$\omega_f^2=\frac{k}{M_1+M_2}\Rightarrow x(t)=A_f\cos(\omega_f t+\phi_f)\Rightarrow v(t)=-\omega_f A_f\sin(\omega_f t+\phi_f)$$

La velocità subito dopo l'urto è quella segnalata sopra, cioè $v_f=\frac{-M_1\omega_0\Delta x_0\sin(\omega_0 t^*+\pi)-M_2 v_2}{(M_1+M_2)}$

mentre la posizione è $x(t^*)=\Delta x_0\cos(\omega_0 t^*+\pi)$.

Se l'istante dell'urto è ***t*=T/4***: $x\left(t^*\right)=\Delta x_0 \cos\left(\pi/2+\pi\right)=\Delta x_0 \cos\left(3\pi/2\right)=0$

$$v_f=\frac{-M_1\omega_0\Delta x_0 \sin\left(3\pi/2\right)-M_2 v_2}{\left(M_1+M_2\right)}=\frac{M_1\omega_0\Delta x_0-M_2 v_2}{\left(M_1+M_2\right)}=\frac{2*\sqrt{32/2}*1-6*1}{\left(2+6\right)}=\frac{8-6}{(8)}=\frac{1}{4}m/s$$

(M_1=2 kg; k=32 N/m; Δx_0=1 m; M_2=6 kg; v_2=1 m/s)

$$\omega_f^2=\frac{k}{M_1+M_2}\Rightarrow x\left(t\right)=A_f\cos\left(\omega_f t+\phi_f\right)\Rightarrow v\left(t\right)=-\omega_f A_f \sin\left(\omega_f t+\phi_f\right)$$

$$0=A_f\cos\left(\phi_f\right)\Rightarrow\phi_f=-\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{4}m/s=v\left(t=0\right)=-\omega_f A_f\sin\left(\phi_f\right)=\omega_f A_f\Rightarrow A_f=\frac{v\left(t=0\right)}{\omega_f}$$

3. il nuovo periodo di oscillazione dopo l'urto.

Il nuovo periodo è $T=\frac{2\pi}{\omega_f}=2\pi\sqrt{\frac{M_1+M_2}{k}}$

Z) ----forze elettrostatiche e oscillazioni--

Z.1)

Problema 2: Un pendolo è costituito da un corpo neutro di massa 0.250 kg sospeso nel vuoto attaccato ad un filo ideale di massa trascurabile e isolante, di lunghezza 2.40 m, in una regione di spazio dove è presente un campo elettrico uniforme di modulo 3.90 kV/m diretto verticalmente verso il basso. Il corpo viene leggermente spostato rispetto alla verticale e lasciato libero, in condizioni di quiete e con il filo teso, ad una quota 0.220 m rispetto al punto P, che identifica la posizione più bassa della traiettoria. Nel punto P si trova in quiete, appoggiato su un piano orizzontale, un corpo di massa 0.190 kg e carica + 2.70 mC con il quale il corpo neutro entra in collisione con un urto perfettamente anelastico al momento del passaggio del pendolo lungo la verticale. Si consideri l'effetto della forza peso e si trascuri quello di ogni forma di attrito. Calcolare:

3. il periodo delle piccole oscillazioni del pendolo dopo l'urto;

   T [s] = ☐ A 0.437 B 0.485 C 1.68 D 0.407 E 0.314

4. l'ampiezza (in gradi) delle piccole oscillazioni del pendolo dopo l'urto.

   θ_0 [gradi] = ☐ A 8.80 B 7.52 C 24.7 D 54.7 E 37.8

Svolgimento

Il moto è quello di un pendolo fino all'urto. Usando la conservazione dell'energia si può calcolare la velocità del primo corpo prima dell'urto: $v_{1i} = \sqrt{2gh_0}$

Nell'urto anelastico si conserva la quantità di moto, per cui i due corpi proseguono dopo l'urto con velocità v_f:

$$m_1 v_{1i} = (m_1 + m_2)v_f \Rightarrow v_f = \frac{m_1\sqrt{2gh_0}}{(m_1 + m_2)}$$

Dopo l'urto il corpo si muove sotto l'azione della tensione del filo e di una forza costante diretta verso il basso derivante dalla forza peso e dalla forza elettrica.

Il moto è vincolato a percorrere un arco di cerchio, di raggio L, lunghezza del filo. Definendo l'angolo θ quello fra la verticale e il filo isolante, la componente tangenziale dell'accelerazione è:

$$F_t = ma_t \Rightarrow -(mg + qE)\sin\theta = mL\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Il moto si risolve trovando la soluzione per $\theta(t)$.

$$mL\frac{d^2\theta}{dt^2} + (mg + qE)\sin\theta = 0 \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\left(g + \frac{qE}{m}\right)}{L}\sin\theta = 0 \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \Omega^2\sin\theta = 0; \Omega^2 = \frac{\left(g + \frac{qE}{m}\right)}{L}$$

Il moto è come quello di un pendolo, solo che invece del campo gravitazionale c'è come un valore efficace: $g_{eff} = g + \frac{qE}{m}$

Se le oscillazioni sono piccole, il seno può essere approssimato dall'angolo (in radianti):

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \Omega^2\theta = 0$$

L'equazione di cui sopra è quella dell'oscillatore armonico. Il moto sarà del tipo:

$$\theta(t) = A\cos(\Omega t + \phi) = \theta_0\cos(\Omega t) + \frac{\omega_0}{\Omega}\sin(\Omega t); \quad \Omega^2 = \frac{g_{eff}}{L}$$

Il periodo è:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_{eff}}}$$

La ampiezza delle piccole oscillazioni si può ricavare dalle condizioni iniziali: $\theta_0=0$ e $\omega_0=v_f/L$.
Date le condizioni iniziali, l'ampiezza è $\omega_0/\Omega=v_f/(L\Omega)$:

$$\Delta\theta = \frac{v_f}{\Omega L} = \frac{v_f}{\sqrt{L g_{eff}}}$$

Z.2)

Problema 2 Un pendolo è costituito da corpo di massa m=0.2 kg e carica q=+2.0 mC sospeso al soffitto tramite un filo ideale isolante di lunghezza L= 1.00 m. In tutta la regione di spazio circostante c'è un campo elettrico uniforme di modulo E=1.5 kV/m diretto verso il basso lungo la verticale. Il corpo è lasciato libero in condizione di quiete con il filo teso e inclinato rispetto alla verticale. Tale pendolo compie piccole oscillazioni. Fissando un riferimento alla posizione più bassa della traiettoria del pendolo, la quota di partenza è h_0=10.0 cm. Si trascuri ogni forma di attrito e si consideri sia l'effetto della forza peso sia della forza elettrostatica. Calcolare:

2.1 periodo delle piccole oscillazioni:

	A	B	C	D	E	
T [s] =	32.0	0.01	6.39	2.00	1.26	

Ad un certo punto un corpo di massa identica e carica opposta è posizionato in quiete lungo la verticale nel punto più basso della traiettoria; il pendolo lo urta in modo completamente anelastico. Calcolare:

2.2 massima quota raggiunta dal pendolo dopo l'urto:

	A	B	C	D	E	
h_{max} [cm] =	1.45	0.03	4.20	6.32	12.8	

Soluzione

Il problema si risolve come il caso classico delle piccole oscillazioni del pendolo in campo gravitazionale, soltanto che in questo caso oltre alla forza peso c'è un'altra forza costante, quella elettrica. Essendo il capo elettrico diretto verso il basso e nella stessa direzione del campo gravitazionale, la forza costante agente sul pendolo è:

$$\vec{F}_c = m\vec{g} + q\vec{E} = \left(-mg - qE\right)\hat{j}$$

Il corpo è vincolato su una traiettoria circolare di raggio L dal filo ideale. In ogni momento la risultante delle forze applicate avrà una componente radiale (quella che ci consente di calcolare l'accelerazione centripeta) e una tangenziale, che è quella che dice come cambia il modulo dalla velocità del corpo in ogni punto ed è importante per impostare l'equazione differenziale:

$$ma_T = mL\frac{d^2\theta}{dt^2} = F_c \sin\theta = -\left(mg + qE\right)\sin\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{g}{L} + \frac{qE}{mL}\right)\sin\theta \approx -\left(\frac{g}{L} + \frac{qE}{mL}\right)\theta$$

L'ultimo passaggio è giustificato che per piccoli angoli seno e angolo hanno valori molto prossimi. Riscrivendo l'equazione secondo il formalismo dell'oscillatore armonico avremo:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \Omega^2\theta = 0$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{g_{eff}}{L}};\, g_{eff} = \left(g + \frac{qE}{m}\right)$$

In questo modo il moto del corpo è come quello del pendolo classico con piccole oscillazioni, solo che la pulsazione è data da una g_{eff} che tiene conto anche dell'effetto della forza elastica.

Dovendo calcolare il periodo:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_{eff}}};\, g_{eff} = \left(g + \frac{qE}{m}\right)$$

Per la seconda domanda dobbiamo porci il problema dell'urto completamente anelastico, calcolare la velocità dopo l'urto e reimpostare il problema. Nell'urto anelastico si conserva la quantità di

moto, e, in questo caso, l'energia e la massa. Dopo l'urto il corpo attaccato al filo avrà massa doppia, velocità dimezzata e carica nulla. La forza costante che agisce dopo l'urto è solo la forza peso.
Calcoliamo la velocità immediatamente prima dell'urto, sfruttando la conservazione dell'energia: $\Delta K = -\Delta U$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_0 + qEh_0 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2g_{eff}h_0} = \sqrt{2h_0\left(g + \frac{qE}{m}\right)}$$

Dopo l'urto:

$$mv_1 = 2mv_f \Rightarrow v_f = \frac{v_1}{2} = \sqrt{\frac{g_{eff}h_0}{2}} = \sqrt{\frac{h_0}{2}\left(g + \frac{qE}{m}\right)}$$

La massima quota la calcoliamo di nuovo con la conservazione dell'energia, ricordandoci che l'unica forza che agisce adesso è la forza peso:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = mgh_{\max} \Rightarrow h_{\max} = \frac{v_f^2}{2g} = \frac{g_{eff}h_0}{4g} = \frac{h_0}{4}\left(1 + \frac{qE}{mg}\right)$$

Z.3)

Un elettrone (e = 1.602 $\times 10^{-19}$ C, $m_0 = 9.11\times10^{-31}$ kg) è libero di muoversi senza attrito all'interno di una sfera carica uniformemente con densità ρ = 7 $\times 10^6$ C/m^3. In quanto tempo l'elettrone percorre un'orbita circolare di 1 mm di raggio?

Soluzione

Sappiamo che per una sfera piena carica Q di raggio R il campo elettrico vale

$$E_r = \frac{k_e Q}{R^3} r; r \le R$$
$$E_r = \frac{k_e Q}{r^2}; r \ge R$$

Il campo all'interno varia linearmente con r.

Per una carica negativa come l'elettrone, la forza sperimentata è simile a quella di tipo elastico, –kr.

Se il moto è di tipo circolare uniforme e l'orbita ha raggio r allora deve valere

$$m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r = qE = \left| -e\frac{k_e Q}{R^3} r \right|$$

da cui:

$$\omega = \sqrt{\frac{e}{m}\frac{k_e Q}{R^3}} = \sqrt{\frac{e}{m}\frac{k_e\rho\left(\frac{4\pi}{3}R^3\right)}{R^3}} = \sqrt{\frac{e}{m}\frac{4\pi k_e\rho}{3}} = 2.15\times10^{14} \text{ rad/s}$$

e T=2π/ω

Z.4)

Un elettrone (carica -e, con e = 1.602×10^{-19} C, e massa $m_e = 9.11\times10^{-31}$ kg) è libero di muoversi senza attrito lungo il diametro di una sfera carica uniformemente con densità di carica ρ = 1 $\times 10^7$ C/m^3. Calcolare la frequenza angolare di oscillazione.

-) ω = 2.57 $\times 10^{14}$ rad/s

Soluzione

Sappiamo che per una sfera piena carica Q di raggio R il campo elettrico vale all'interno:

$$E_r = \frac{k_e Q}{R^3} r$$

Il campo all'interno varia linearmente con r.

Per una carica negativa come l'elettrone, la forza sperimentata è simile a quella di tipo elastico, –kr.

Abbiamo quindi un oscillatore armonico la cui costante elastica equivalente è

$$F_e = -\frac{k_e e Q}{R^3} r = -kr;$$

$$k = \frac{k_e e Q}{R^3} = \frac{k_e e}{R^3}\rho\frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\rho\frac{4\pi}{3} = \frac{e}{\varepsilon_0}\frac{\rho}{3}$$

La frequenza angolare di oscillazione sarà

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{e\rho}{3\varepsilon_0 m}} = 2.573\times 10^{14} rad/s$$

ZZ) ----------Corpi carichi e dinamica di sistemi (conservazione energia e quantità di moto)---

ZZ1)

Due particelle puntiformi hanno massa 1 g e carica rispettivamente 5×10^{-6} C e -5×10^{-6} C. Le due particelle si trovano inizialmente a 1 cm di distanza tra loro e vengono lanciate in direzione opposta con la stessa velocità (in modulo) v_0. Qual è la velocità minima per cui le particelle non tornano più indietro?

-) v_0 = 149.9 m/s

Svolgimento

Vale la conservazione dell'energia.

$\Delta E_{tot} = \Delta K + \Delta U = 0$

variazione dell'energia cinetica: $\Delta K = K_f - K_i$

variazione dell'energia potenziale: $\Delta U = U_f - U_i = q\Delta V$

Per un sistema di cariche l'energia potenziale è data dal termine

$U = q_1 V_2 = q_2 V_1 = \dfrac{k_e q_1 q_2}{r}$ dove r è la distanza fra le due cariche

Nel caso di questo problema: $U = -\dfrac{k_e q^2}{r}$

L'energia potenziale è negativa (infatti le cariche si attraggono).

Le particelle vengono lanciate in direzione opposta con la stessa velocità (in modulo) v_0. La velocità minima per cui le particelle non tornano più indietro è quella per cui l'energia totale (cinetica+potenziale) è positiva, in modo tale che, quando le particelle si trovano a grande distanza (U trascurabile) "resti disponibile un po' di energia" per l'energia cinetica (che è sempre positiva).

All'energia cinetica contribuiscono con un termine ciascuno le due particelle.

$$\Delta E_{tot} = \Delta K + \Delta U = \left(\frac{1}{2}mv_f^{\ 2} + \frac{1}{2}mv_f^{\ 2} - \frac{1}{2}mv_0^{\ 2} - \frac{1}{2}mv_0^{\ 2}\right) + \left[-k_e q^2\left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right)\right] = 0$$

Nel caso particolare, la distanza iniziale è 1 cm, quella finale è infinita, la velocità finale è zero e quindi abbiamo:

$\Delta E_{tot} = \Delta K + \Delta U = -mv_0^{\ 2} + \left[k_e q^2\left(\dfrac{1}{r_i}\right)\right] = 0$ da cui:

$$v_0 = \sqrt{\frac{k_e q^2}{m r_i}} = 149.8978 m/s$$

ZZ2)
Due particelle puntiformi hanno massa 0.1 g e carica 10−6 C. Le due particelle si trovano inizialmente a distanza molto grande tra loro e vengono lanciate una contro l'altra, ognuna con velocità iniziale 457 m/s. A quale distanza tra loro invertono il moto?
-) d = 4.304 ×10−4 m

Svolgimento
Vale la conservazione dell'energia: $\Delta E_{tot} = \Delta K + \Delta U = 0$
All'energia cinetica contribuiscono con un termine ciascuno le due particelle.
Nel caso di questo problema: $U = \frac{k_e q^2}{r}$
L'energia potenziale è positiva (infatti le cariche si respingono).
Le particelle vengono lanciate una verso l'altra con la stessa velocità (in modulo) v_0.
All'inizio la distanza r è molto grande, quindi la energia potenziale è trascurabile (U=0). Via via che si avvicinano l'energia potenziale aumenta a scapito della cinetica. Il punto in cui invertono il moto corrisponde all'istante di velocità nulla e di energia cinetica nulla (energia potenziale massima):

$$\Delta E_{tot} = \Delta K + \Delta U = \left(\frac{1}{2} m v_f^{\ 2} + \frac{1}{2} m v_f^{\ 2} - \frac{1}{2} m v_0^{\ 2} - \frac{1}{2} m v_0^{\ 2} \right) + \left[k_e q^2 \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right) \right] = 0$$

Nel caso particolare, la distanza iniziale è infinita, quella finale è l'incognita del problema e la velocità finale è zero. Quindi abbiamo:

$$\Delta E_{tot} = \Delta K + \Delta U = -m v_0^{\ 2} + \left[k_e q^2 \left(\frac{1}{r_f} \right) \right] = 0 \text{ da cui:}$$

$$r_f = \frac{k_e q^2}{m v_0^{\ 2}} = 4.3035 \times 10^{-4} m$$

ZZ3)

Problema 5: All'interno di una guida isolante orizzontale liscia e rettilinea sono vincolati a muoversi due corpi uno dei quali ha massa quattro volte l'altro. Il corpo più leggero ha massa 1.40 g. I corpi sono entrambi carichi positivamente con carica + 53.0 μC. Ad un certo istante i corpi vengono lasciati liberi in condizioni di quiete ad una distanza 0.180 m. Trascurando ogni forma di attrito, calcolare:

9. l'energia elettrostatica immagazzinata nella configurazione iniziale;

U [J] = $\boxed{\quad}$ A $\boxed{29.8}$ B $\boxed{33.8}$ C $\boxed{140}$ D $\boxed{788}$ E $\boxed{491}$

10. la velocità del corpo più leggero quando si trova a grande distanza dall'altro corpo.

v [m/s] = $\boxed{\quad}$ A $\boxed{105}$ B $\boxed{138}$ C $\boxed{298}$ D $\boxed{400}$ E $\boxed{366}$

<u>Svolgimento</u>

I due corpi sono vincolati a muoversi dentro la guida isolante orizzontale. L'energia elettrostatica immagazzinata si può trovare considerando il lavoro che si deve fare per portare una carica dall'infinito fino a distanza d=0.18 m:

$$U_0 = \frac{k_e q^2}{d}$$

Se consideriamo i due corpi come un sistema, la risultante delle forze esterne ha componente nulla lungo x, quindi la quantità di moto lungo x è costante:

$$0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1 + 4 m_1 v_2 \Rightarrow v_2 = -\frac{v_1}{4}$$

Inoltre l'energia si conserva, poiché la forza elettrica è conservativa e la forza peso e la forza normale esercitata dalla guida sono perpendicolari allo spostamento e quindi non fanno lavoro.

$$U_0 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \left(1 + \frac{4}{16}\right) = \frac{5}{8} m_1 v_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{8U_0}{5m_1}}$$