DINAMICA DEI SISTEMI FISICI

- equazioni differenziali lineari (cenni)
- oscillazioni e moto armonico

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$ II legge di Newton

$$\boxed{\sum_i \vec{F}_i = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}}$$

eq. differenziale II ordine

domanda: qual è la legge oraria?
$\vec{r} = \vec{r}(t) = ?$

$$a_n\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \dots + a_2\frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 \cdot x = f(t) \qquad (1)$$

esempio di eq. differenziale lineare, a coefficienti costanti di ordine n

lineare: la funzione x entra solo nelle derivate ed eventualmente nel termine $a_0 x$ (NON possono esserci x^2, e^x, $\sin x$...)

coefficienti costanti: $a_0, a_1, \dots, a_n$ sono valori costanti (non dipendono da t né da x)

$x = x(t)$

scopo di tutto

→ $f(t)$ è una generica funzione della variabile t

- ora riscrivo tutto, mettendo $f(t) = 0$

$$a_n\frac{d^n x}{dt^n} + \dots + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 x = 0 \qquad (2)$$

eq. differenziale OMOGENEA, riferita a quella di partenza

A) Se $x = f(t)$ è soluzione di (2) ⇒ anche $\bar{x} = A \cdot f(t)$ risolve la (2)
A è una costante

B) Se $x_1 = f(t)$ e $x_2 = g(t)$ sono soluzioni di (2) ⇒ $x_3(t) = A f(t) + B g(t)$ è soluzione di (2)

c) se $x = F(t)$ è soluzione di (1)
e $x = G(t)$ è soluzione di (1) ⇒ $y(t) = F(t) - G(t)$ è soluzione di (2)

⟹ Si dimostra che se $w(t)$ è una qualsiasi di tutte le possibili soluzioni di (2), e $u(t)$ è una soluzione di (1) generica
⇒ tutte le soluzioni di (1) si possono scrivere come: $x(t) = w(t) + u(t)$

$\{w(t)\}$ classe di soluzioni di (2)]

$u(t)$ una specifica soluzione di ① $\Rightarrow$ TUTTE le soluzioni di ①

- Esempio: moto uniformemente accelerato $a = \text{cost.}$ (1D)

$F = \text{cost.} \Rightarrow F = ma \Rightarrow F = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$

$\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{F}{m}$ esempio di "eq. ①" con $f(t) = \dfrac{F}{m}$ ($f(t)$ in realtà non dipende da t)

$\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0$ esempio di "eq ②" omogenea associata a ①

Sol. ② sono tutti e soli i polinomi di I grado: $w(t) = c_1 t + c_2$

$\dfrac{dw}{dt} = c_1$; $\dfrac{d^2w}{dt^2} = 0$

Sol. particolare di ①

$u(t) = \dfrac{1}{2}\dfrac{F}{m} \cdot t^2$ $\left(\dfrac{du}{dt} = \dfrac{F}{m}t \; ; \; \dfrac{d^2u}{dt^2} = \dfrac{F}{m} \right)$

$\Rightarrow x(t) = \dfrac{1}{2}\dfrac{F}{m}t^2 + c_1 t + c_2 \Rightarrow \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{F}{m}t + c_1$

per trovare c_1 e c_2, si utilizzano le condizioni iniziali

$$\begin{cases} x(t=0) = x_0 \\ v(t=0) = v_0 \end{cases}$$

$x(0) = x_0 \Rightarrow x_0 = c_2$

$v(0) = v_0 \Rightarrow \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{F}{m} \cdot 0 + c_1 = v_0$

$\Rightarrow$ $c_2 = x_0$, $c_1 = v_0$

Soluzione: $x(t) = \dfrac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$

- Moto in un fluido viscoso

y

$\vec{F}_v = -\gamma \vec{v}$

$\vec{F}_g = m\vec{g}$

$\vec{F} = m\vec{a}$ $(\gamma > 0)$

$\Rightarrow -mg - \gamma v = ma = m\dfrac{dv}{dt}$

trovare $v = v(t)$

$m\dfrac{dv}{dt} + \gamma v = -mg$ ①

$(f(t) = -mg)$

$\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{\gamma}{m} v = -g$

$\dots \tau$ ($\frac{\ }{m}$ si misura in $\frac{1}{s}$)

$\tau = \frac{m}{\gamma}$ nuova variabile

$\rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = -g$

eq. omogenea: $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0$ (2) $\Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{v}{\tau}$

$\rightarrow \underline{v(t) = A e^{-t/\tau}}$

$\left(\frac{dv}{dt} = A\left(-\frac{1}{\tau}\right) e^{-t/\tau} = -\frac{1}{\tau} v \right)$

- sol. specifica di (1) è tale per cui essa non dipende dal tempo (soluzione stazionaria) → $v(t) = v_0$

(1) $\cancel{\frac{dv}{dt}} + \frac{v}{\tau} = -g$

$v_0 = -g\tau = -mg/\gamma$

v_0 è proprio la velocità limite $v_0 \equiv v_{lim}$

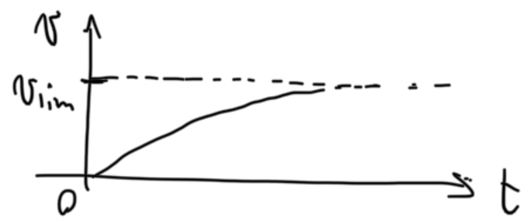
sol. generale della (1): $\underline{v(t) = v_{lim} + A e^{-t/\tau}}$

A posso determinarla dalle condizioni iniziali

$v(0) = v_{lim} + A \cdot \overset{1}{e^0} = 0 \Rightarrow A = -v_{lim}$

(per esempio: $v(t=0) = 0$ vale se lascio andare la pallina da ferma)

$\Rightarrow$ sol. della (1) imponendo che $v(t=0) = 0$ è: $v(t) = v_{lim}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$



altro esempio di condizione iniziale:

$v(t=0) = \bar{v}$ $\Rightarrow v(t=0) = v_{lim} + A = \bar{v} \Rightarrow A = \bar{v} - v_{lim}$

$\Rightarrow$ sol. della (1) è: $v(t) = v_{lim} + (\bar{v} - v_{lim}) e^{-t/\tau}$

(supponiamo che $\bar{v} > v_{lim}$)