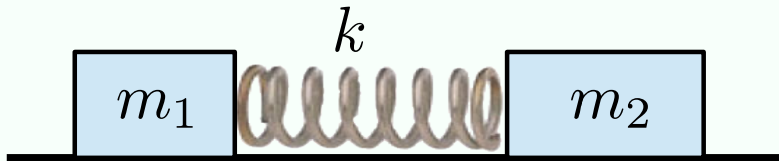


Problemi risolti con la legge di conservazione della quantità di moto

Due masse m_1 e m_2 sono collegate da una molla ideale di costante k e lunghezza a riposo l_0 e sono appoggiate su un piano orizzontale liscio. Descrivere il moto del sistema quando le masse vengono allontanate tra di loro, in modo da spostare la lunghezza della molla dalla posizione a riposo a $l_0 + \Delta l$.



$$x_{2i} = x_{1i} + l_0 + \Delta l$$

$$x_{\text{CM}} = (m_1 x_1 + m_2 x_2) / M$$

$$v_{\text{CM}} = (m_1 v_1 + m_2 v_2) / M$$

$$a_{\text{CM}} = (m_1 a_1 + m_2 a_2) / M$$

nessuna \vec{F}_{ext} lungo x \Rightarrow la quantità di moto
nessun attrito \Rightarrow si conserva lungo x

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \Rightarrow \vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}$$

La molla esercita forze uguali e contrarie sui due corpi: $a_{\text{CM}} = \frac{F_{12} + F_{21}}{M} = 0$

$$\Rightarrow v_{\text{CM}} = \text{cost.} = 0 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{M} \Rightarrow v_1 = -\frac{m_2}{m_1} v_2$$

Il **centro di massa mantiene lo stato iniziale**, anche se le due masse si allontanano e si avvicinano con moto oscillatorio.

In generale, **se la velocità del centro di massa v_{CM} è costante**, un sistema di riferimento inerziale “comodo” può essere quello che si trova solidale con il centro di massa.

Sia OCM il **sistema di riferimento nel centro di massa**:

$$\begin{array}{lll} x_{1,OCM} = x_1 - x_{CM} & \longrightarrow & v_{1,OCM} = v_1 - v_{CM} & \longrightarrow & a_{1,OCM} = a_1 - a_{CM} \\ x_{2,OCM} = x_2 - x_{CM} & & v_{2,OCM} = v_2 - v_{CM} & & a_{2,OCM} = a_2 - a_{CM} \end{array}$$

$$v_{1,OCM} = v_1 - \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{M} = \frac{v_1(\cancel{m_1} + m_2) - \cancel{m_1} v_1 - m_2 v_2}{M} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)$$

$$v_{2,OCM} = v_2 - \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{M} = \frac{v_2(m_1 + \cancel{m_2}) - m_1 v_1 - \cancel{m_2} v_2}{M} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} (v_2 - v_1)$$

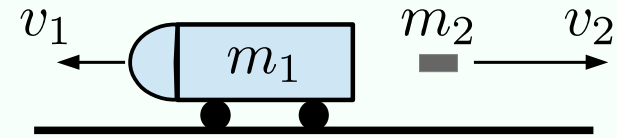
$$\longrightarrow v_{1,OCM} = -\frac{m_2}{m_1} v_{2,OCM}$$

Un cannone su una rotaia liscia spara un proiettile e ne subisce il rinculo. Il cannone ha massa $m_1 = 100$ kg, mentre il proiettile ha massa $m_2 = 0.1$ kg.

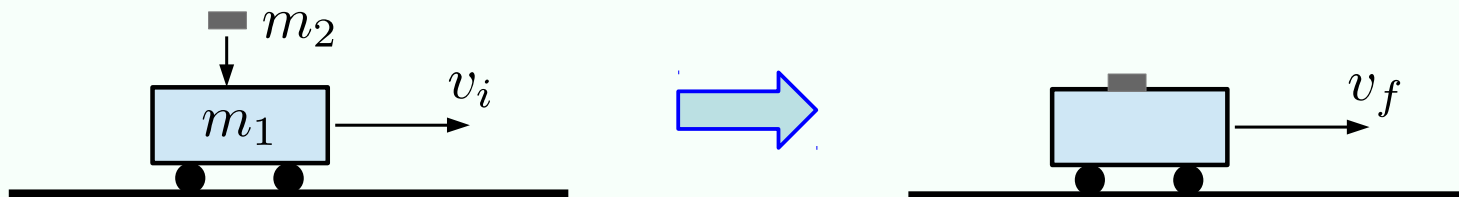
Se $v_2 = 30$ m/s, quanto vale v_1 dopo lo sparo?

$$\frac{dP_x}{dt} = \sum_i \left(\vec{F}_{\text{ext},i} \right)_i = 0$$

$$\Rightarrow m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = 0 \Rightarrow v_{1f} = -\frac{m_2}{m_1} v_{2f} = -0.03 \text{ m/s}$$



Un carrello di massa m_1 scivola su una rotaia liscia orizzontale. Un corpo m_2 cade sopra m_1 dalla verticale e si appiccica. Quanto vale la velocità finale del carrello?

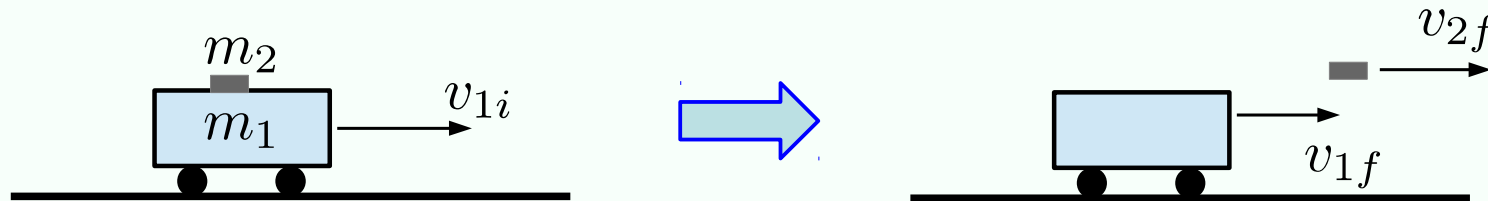


$$\sum_i \left(\vec{F}_{\text{ext},i} \right)_i = 0 \Rightarrow P_x = \text{cost.} \Rightarrow P_{ix} = P_{fx}$$

$$\Rightarrow m_1 v_i = (m_1 + m_2) v_f \Rightarrow v_f = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_i$$

Un corpo di massa m_2 viaggia in un carrello su una rotaia liscia orizzontale con velocità v_1 . Il corpo viene quindi gettato con velocità $v_{2f} - v_{1f} = \Delta v$.

Quanto vale la velocità finale v_1 del carrello?



$$\sum_i \left(\vec{F}_{\text{ext},i} \right)_x = 0 \Rightarrow P_x = \text{cost.} \Rightarrow P_{ix} = P_{fx}$$

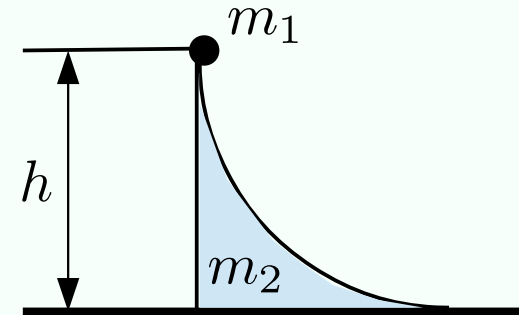
$$\Rightarrow m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = m_1 v_{1f} + m_2 (v_{1f} + \Delta v)$$

$$\Rightarrow (m_1 + m_2) v_{1i} = (m_1 + m_2) v_{1f} + m_2 \Delta v$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{1f} = v_{1i} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \Delta v & \text{gettando il corpo avanti } (\Delta v > 0) \\ & \rightarrow v_{1f} < v_{1i} \\ v_{2f} = v_{1f} + \Delta v = v_{1i} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \Delta v & \text{gettando il corpo indietro } (\Delta v < 0) \\ & \rightarrow v_{1f} > v_{1i} \end{cases}$$

(l'effetto è più grande se m_2 è più grande)

Un corpo di massa m_1 , inizialmente fermo, viene sospinto da un'altezza h lungo una rampa curva (di massa m_2) a forma di arco di cerchio, uscendone tangente al piano orizzontale. Supponendo che le superfici siano lisce, trovare le velocità finali v_1 e v_2 del corpo e della rampa sul piano orizzontale.



Il moto può essere molto difficile da descrivere.

Tuttavia si conservano due grandezze:

1) **energia meccanica** (l'energia potenziale interna non cambia)

⇒ il lavoro delle forze esterne (forza peso) fa cambiare l'energia cinetica del sistema;

$$m_1gh = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

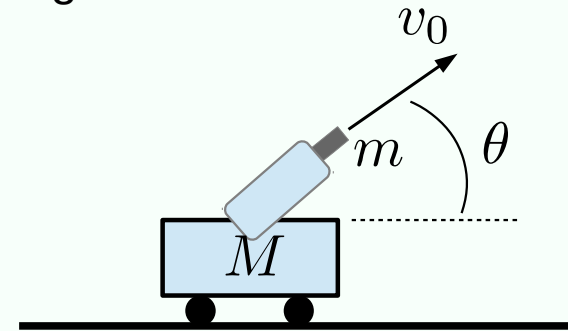
2) **quantità di moto lungo x** (la risultante delle forze esterne è nulla lungo x).

Si noti invece che lungo y la quantità di moto non è costante.

$$P_x = \text{cost.} \Rightarrow 0 = m_1v_1 + m_2v_2 \Rightarrow v_2 = -(m_1/m_2)v_1$$

$$\Rightarrow gh = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) v_1^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v_1 = \sqrt{\frac{2m_2gh}{m_1 + m_2}} \\ v_2 = -\sqrt{\frac{2m_1^2gh}{(m_1 + m_2)m_2}} \end{cases}$$

Un vagone si trova in quiete su una rotaia liscia, e sopra di esso vi è un cannone. Sia M la massa del totale del cannone + vagone. Supponiamo di sparare un proiettile di massa m con velocità iniziale v_0 , con un angolo θ rispetto all'orizzontale. Calcolare la velocità v_c di rinculo del vagone.



Nel momento in cui il cannone spara, la forza normale $N > mg$, quindi:
$$\sum_i \left(\vec{F}_{\text{ext},i} \right) \neq 0$$

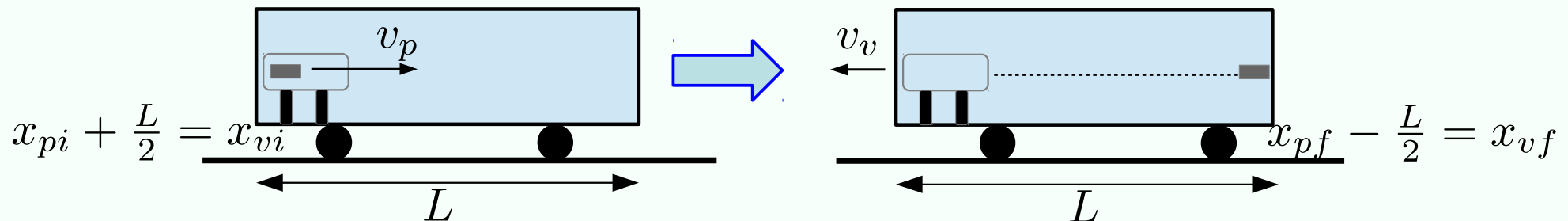
Tuttavia lungo x la componente della risultante delle forze è nulla!

Perciò:
$$\sum_i \left(\vec{F}_{\text{ext},i} \right)_x = 0 \Rightarrow P_x = \text{cost.} \Rightarrow P_{ix} = P_{fx} = 0$$

$$0 = P_x = mv_0 \cos \theta + Mv_c \Rightarrow v_c = -\frac{mv_0 \cos \theta}{M}$$

Un vagone si trova in quiete su una rotaia liscia, e all'interno di esso vi è un cannone. Sia M la massa del totale del cannone + vagone. Il cannone è fissato al pavimento ad un estremo. Supponiamo di sparare un proiettile di massa m orizzontalmente e che esso si conficchi in un bersaglio all'altra estremità.

Come varia la velocità del centro di massa? E la coordinata del centro di massa?



$$\sum_i \left(\vec{F}_{\text{ext},i} \right)_x = 0 \Rightarrow P_x = 0 = P_{ix} = P_{fx} \quad \text{quindi} \quad mv_p + Mv_v = 0$$

La coordinata (e dunque la velocità) del *centro di massa del sistema* non cambia.

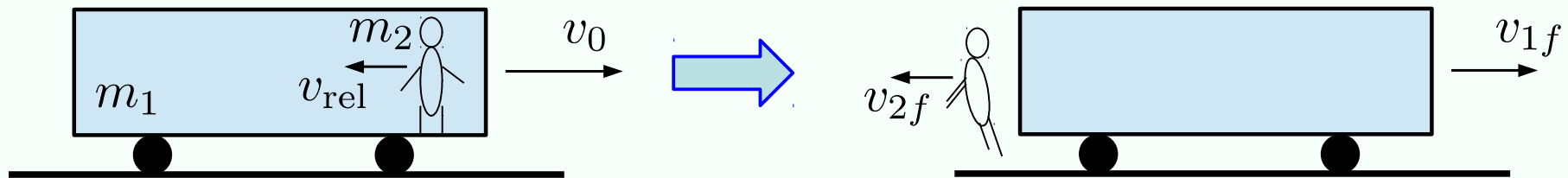
Dopo aver sparato, il proiettile si muove verso destra e il vagone verso sinistra.

Sia x_v la coordinata del centro di massa del vagone. Abbiamo che:

$$\begin{aligned} \text{i) istante iniziale} \quad x_{\text{CM}} &= \frac{mx_{pi} + Mx_{vi}}{M + m} \\ \text{f) istante finale} \quad x_{\text{CM}} &= \frac{mx_{pf} + Mx_{vf}}{M + m} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 0 &= m(x_{pf} - x_{pi}) + M(x_{vf} - x_{vi}) \\ &= m(x_{vf} - x_{vi} + L) + M(x_{vf} - x_{vi}) \end{aligned}$$

$$\text{Da cui perciò: } m(\Delta x_v + L) + M\Delta x_v = 0 \Rightarrow \Delta x_v = -\frac{m}{M + m}L$$

Un vagone si trova in quiete su una rotaia liscia, e sopra di esso c'è un uomo. All'inizio tutti hanno velocità vettoriale uguale \mathbf{v}_0 . Poi l'uomo inizia a correre con velocità relativa \mathbf{v}_{rel} verso il retro del vagone, e alla fine spicca un salto nel vuoto allontanandosi dal vagone. Calcolare le velocità finali di vagone e uomo.



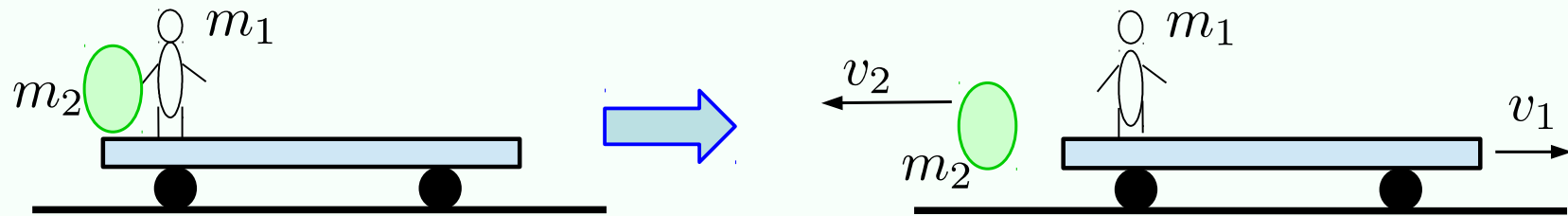
Siccome non c'è attrito, si ha che: $\sum_i \left(\vec{F}_{\text{ext},i} \right)_x = 0 \Rightarrow P_{ix} = P_{fx}$

$$v_{2f} = v_{1f} + v_{\text{rel}}$$

$$(m_1 + m_2)v_0 = m_1v_{1f} + m_2v_{2f} = (m_1 + m_2)v_{1f} + m_2v_{\text{rel}}$$

$$\Rightarrow v_{1f} = v_0 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}v_{\text{rel}} \qquad v_{2f} = v_0 + \frac{m_1}{m_1 + m_2}v_{\text{rel}}$$

Un uomo di massa m_1 spinge un sacco di massa m_2 fuori dalla slitta (inizialmente ferma e di massa trascurabile) con velocità v_2 rispetto al suolo ghiacciato. Trascurando gli attriti, calcolare: 1) la velocità finale della slitta; 2) il lavoro totale fatto per spingere fuori il sacco.



$$\sum_i \left(\vec{F}_{\text{ext},i} \right)_x = 0 \Rightarrow P_x = \text{cost.}$$

$$0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \Rightarrow v_1 = -\frac{m_2}{m_1} v_2$$

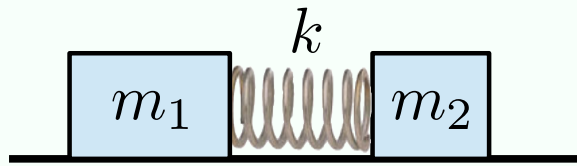
Per trovare il lavoro fatto dall'uomo, bisogna osservare che **il lavoro delle forze esterne è nullo**. Siccome il sistema è **conservativo**, l'energia si conserva:

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{\text{int}} = L_{F_{\text{ext}}} = 0 \Rightarrow -\Delta E_{\text{int}} = \Delta K > 0$$

L'energia interna è diminuita, essendo stata spesa nel lavoro per spingere via il sacco.

$$\Delta K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{m_2}{m_1} + 1 \right) m_2 v_2^2$$

Due masse a riposo su un piano orizzontale liscio vengono messe a contatto con una molla compressa di una lunghezza Δl (di massa trascurabile). Al tempo $t=0$ la molla viene lasciata libera di espandersi, spinge via le masse e si stacca da esse. Sapendo che la velocità finale del corpo 2 è v_2 , calcolare v_1 , l'energia potenziale della molla all'inizio, e la costante elastica k della molla.



$$\sum_i \left(\vec{F}_{\text{ext},i} \right)_x = 0 \Rightarrow P_i = P_f = 0 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$\Rightarrow v_1 = -\frac{m_2}{m_1} v_2$$

$$0 = L_{F_{\text{ext}}} = \Delta K + \Delta U$$

$$-\Delta U = \Delta K > 0$$

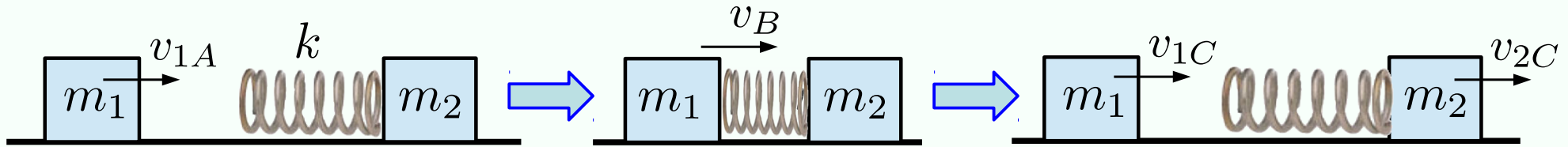
Variazione dell' energia
potenziale della molla

$$\Delta K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - 0 = \frac{1}{2} \left(\frac{m_2}{m_1} + 1 \right) m_2 v_2^2$$

$$\Delta K = -\Delta U = \frac{1}{2} k \Delta l^2$$

$$\Rightarrow k = m_2 \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \frac{v_2^2}{\Delta l^2}$$

Due corpi scivolano su un piano orizzontale liscio. Inizialmente il primo si muove con velocità v_{1A} , il secondo è in quiete e ha attaccata una molla (A). Il sistema è isolato (si conservano quantità di moto e energia meccanica). Trovare: la massima compressione della molla, di costante elastica k , quando i due corpi hanno la stessa velocità (B), e le velocità v_{1C} e v_{2C} dopo che si sono separati (C).



$$(P_{\text{tot}})_x = \text{cost.} = m_1 v_{1A} = (m_1 + m_2) v_B \Rightarrow v_B = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1A}$$

$$E_A = E_B \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_{1A}^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_B^2 + \frac{1}{2} k \Delta x^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_{1A}^2 = \frac{m_1^2}{2(m_1 + m_2)} v_{1A}^2 + \frac{1}{2} k \Delta x^2 \Rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2) k}} v_{1A}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1A}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1C}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2C}^2 \Rightarrow m_1 (v_{1A}^2 - v_{1C}^2) = m_2 v_{2C}^2$$

$$m_1 v_{1A} = m_1 v_{1C} + m_2 v_{2C} \Rightarrow m_1 (v_{1A} - v_{1C}) = m_2 v_{2C}$$

$$\Rightarrow v_{1A} + v_{1C} = v_{2C}; \quad v_{1C} = v_{1A} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$$