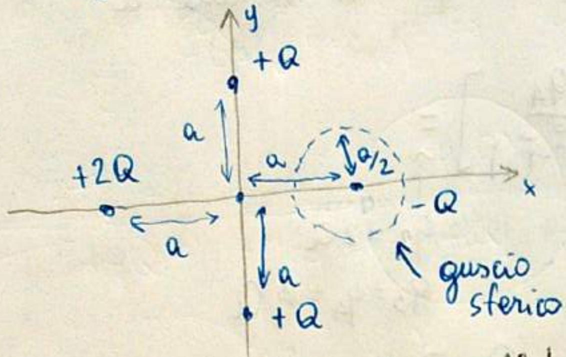
Supporto alla didattica
22/05/2017

PROBLEMA 2 SUPPORTO 15/05/2017

La configurazione considerata è la seguente:



① Calcolare il potenziale nell'origine degli assi.

Nel nostro sistema sono presenti 4 sorgenti: 3 cariche puntiformi ed un guscio sferico.

- Le 4 sorgenti sono disposte nei punti:

$$\begin{cases} \vec{P}_1 = (a, 0) \Rightarrow \text{GUSCIO } (-Q) \\ \vec{P}_2 = (-a, 0) \Rightarrow \text{CARICA PUNTIFORME } (2Q) \\ \vec{P}_3 = (0, a) \Rightarrow \text{"} \quad (+Q) \\ \vec{P}_4 = (0, -a) \Rightarrow \text{"} \quad (+Q) \end{cases}$$

- Visto che le interazioni elettrostatiche sono lineari il contributo di ciascuna sorgente va sommato al contributo delle altre. Facendo questo otteniamo il potenziale totale generato dalla configurazione di cariche in figura.

$$U_{TOT}(\vec{r}) = U_1(\vec{r}) + U_2(\vec{r}) + U_3(\vec{r}) + U_4(\vec{r})$$

dove $\vec{r}$ è un generico punto nel piano (x, y).

Per una carica puntiforme sappiamo che:

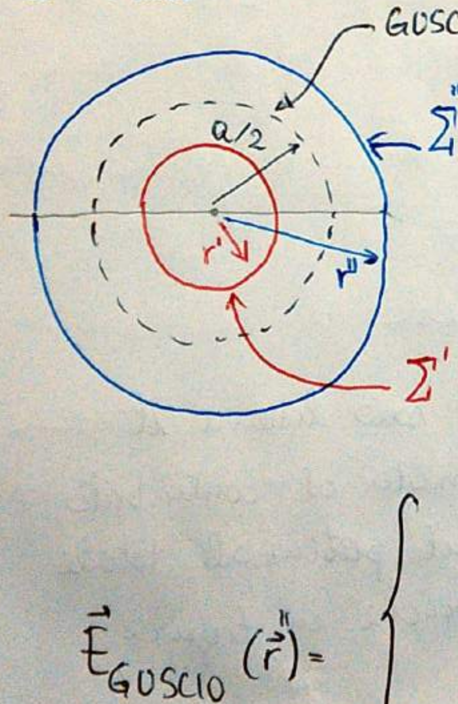
$$U_j(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_j}{|\vec{r}-\vec{r}_j|}$$

La somma $U_2(\vec{r}) + U_3(\vec{r}) + U_4(\vec{r})$ è quindi uguale a

$$\sum_{j=2}^{4} U_j(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|} + \frac{q_3}{|\vec{r}-\vec{r}_3|} + \frac{q_4}{|\vec{r}-\vec{r}_4|}\right] \underset{\substack{q_2 = 2Q \\ q_3 = q_4 = Q}}{=}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2Q}{|\vec{r}-\vec{r}_2|} + \frac{Q}{|\vec{r}-\vec{r}_3|} + \frac{Q}{|\vec{r}-\vec{r}_4|}\right]$$

Il potenziale generato dal guscio si trova usando il teorema di Gauss.



$$\begin{cases} \Phi_{\Sigma''}(\vec{E}_{GUSCIO}(\vec{r}'')) = -\frac{Q}{\varepsilon_0} \\ \\ \Phi_{\Sigma'}(\vec{E}_{GUSCIO}(\vec{r}')) = 0 \end{cases}$$

(<u>non</u> ho carica nel volume delimitato da Σ')

$$\vec{E}_{GUSCIO}(\vec{r}'') = \begin{cases} -\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}''|^2}\,\hat{r}'' & \text{se } |\vec{r}''| > \dfrac{a}{2} \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Supporto alla didattica
22/05/2017

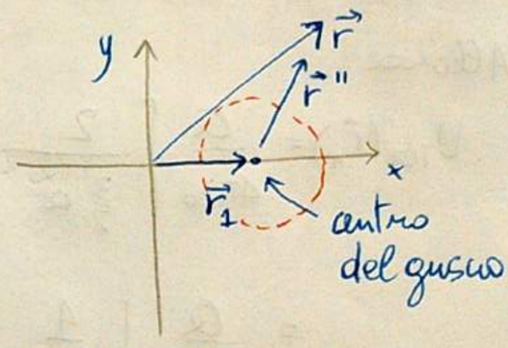
Per trovare il potenziale integriamo il campo da r all'infinito:

$$\begin{cases} U_{GUSCIO}(\vec{r}) = \int_r^{+\infty} -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r''^2}\, dr'' = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad (\text{se } r > \frac{a}{2}) \\ U_{GUSCIO}(\vec{r}) = \int_R^{\infty} -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r''^2}\, dr'' + \int_r^R \vec{E}^{\,INTERNO}_{GUSCIO}(\vec{r}'')\cdot d\vec{r}'' = \int_R^{\infty} -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r''^2}\, dr'' = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \end{cases}$$

$(\text{se } r \le \frac{a}{2})$

In particolare il potenziale fuori dal guscio è $(\vec{r}'' = \vec{r} - \vec{r}_1)$

$$U_1(\vec{r}) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}_1|}$$



Il potenziale totale è quindi:

$$U_{TOT}(\vec{r}) = U_1(\vec{r}) + \sum_{j=2}^{4} U_j(\vec{r}) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q \left[\frac{2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|} + \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_3|} + \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_4|} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} \right]$$

Allora

$$U_{TOT}(\vec{0}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q \left[\frac{2}{|\vec{r}_1|} + \frac{1}{|\vec{r}_3|} + \frac{1}{|\vec{r}_4|} - \frac{1}{|\vec{r}_1|} \right]$$

però sappiamo che $a = |\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| = |\vec{r}_3| = |\vec{r}_4|$ quindi $U_{TOT}(\vec{0})$ vale $U_{TOT}(\vec{0}) = \frac{3}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a}$ ⇒ Risposta 1 : $\boxed{U_{TOT}(\vec{0}) = \frac{3}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a}}$

② Potenziale in $A = (\frac{a}{2}, 0)$

Visto che $U_{TOT}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|} + \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_3|} + \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_4|} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}\right]$

dobbiamo solo valutare (posto $\vec{r}_A = (\frac{a}{2}, 0)$)

$$\begin{cases} |\vec{r}_A - \vec{r}_2| = \sqrt{(\frac{a}{2}+a)^2 + (0-0)^2} = \frac{3}{2}a \\ |\vec{r}_A - \vec{r}_3| = \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + a^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a \\ |\vec{r}_A - \vec{r}_4| = \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + (-a)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a \\ |\vec{r}_A - \vec{r}_1| = \sqrt{(\frac{a}{2}-a)^2 + 0} = \frac{a}{2} \end{cases}$$

Allora

$$U_{TOT}(\vec{r}_A) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2}{\frac{3}{2}a} + \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}a} + \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}a} - \frac{1}{\frac{a}{2}}\right] =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{4}{3a} + \frac{4}{\sqrt{5}a} - \frac{2}{a}\right] =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{4(\sqrt{5}+3) - 6\sqrt{5}}{3\sqrt{5}a}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{12-2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}}\right)$$

$$\boxed{\text{Risposta ②} \quad U_{TOT}(\vec{r}_A) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{12-2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}}\right)}$$

③ Componenti cartesiane del campo elettrico nell'origine

Per una sorgente puntiforme posta in $\vec{r}_0$, il campo generato in $\vec{r}$ è dato da

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}_0|^3}(\vec{r}-\vec{r}_0)$$, dove Q è la carica

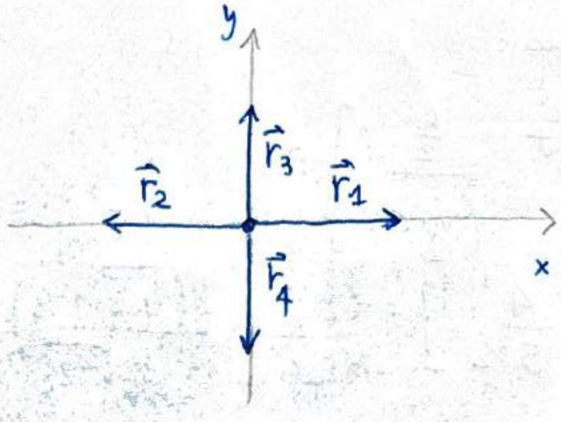
della sorgente in $\vec{r}_0$.

Per il nostro sistema, visto che un guscio al suo esterno genera un campo elettrico equivalente a quello di una carica puntiforme, abbiamo che:

$$\vec{E}_{TOT}(\vec{r}) = \sum_{j=1}^{4} \vec{E}_j(\vec{r}) \xRightarrow{\vec{r}=\vec{0}} \vec{E}_{TOT}(\vec{0}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-Q}{|\vec{r}_1|^3}(-\vec{r}_1) + \frac{Q}{|\vec{r}_3|^3}(-\vec{r}_3) + \frac{Q}{|\vec{r}_4|^3}(-\vec{r}_4)\right.$$

$$\left. + \frac{2Q}{|\vec{r}_2|^3}(-\vec{r}_2)\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q \left[\frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|^3} - \frac{\vec{r}_3}{|\vec{r}_3|^3} - \frac{\vec{r}_4}{|\vec{r}_4|^3} - 2\frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|^3}\right]$$

I vettori $\vec{r}_j$ sono rappresentati in figura:



$\vec{r}_1 \cdot \hat{y} = \vec{r}_2 \cdot \hat{y} = 0$

$$\vec{E}_{TOT}(\vec{0}) \cdot \hat{y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q \left(-\frac{\vec{r}_3}{|\vec{r}_3|^3} - \frac{\vec{r}_4}{|\vec{r}_4|^3}\right)\cdot \hat{y} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q \left(-\frac{|\vec{r}_3|}{|\vec{r}_3|^3} + \frac{|\vec{r}_4|}{|\vec{r}_4|^3}\right) \underset{|\vec{r}_3| = |\vec{r}_4|}{=} 0$$

$\vec{r}_3 \cdot \hat{x} = \vec{r}_4 \cdot \hat{x} = 0$

$$\vec{E}_{TOT}(\vec{0}) \cdot \hat{x} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|^3} - 2\frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|^3}\right)\cdot \hat{x} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{|\vec{r}_1|}{|\vec{r}_1|^3} + \frac{2|\vec{r}_2|}{|\vec{r}_2|^3}\right) \underset{|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| = a}{=} \frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$$

Risposta ③ : $\vec{E}_{TOT}(\vec{0}) = \left(\frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}, 0 \right)$

④ componenti cartesiane del campo elettrico nel punto $A = \left(\frac{a}{2}, 0\right)$, trascurando il contributo del guscio.

Per rispondere a questo quesito consideriamo solo le sorgenti "2", "3" e "4". Ciascuna è una carica puntiforme quindi il campo che queste sorgenti generano nel punto $\vec{r}$ è:

$$\tilde{\vec{E}}_{TOT}(\vec{r}) = \sum_{j=2}^{4} \vec{E}_j(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2Q}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3}(\vec{r}-\vec{r}_2) + \frac{Q}{|\vec{r}-\vec{r}_3|^3}(\vec{r}-\vec{r}_3) + \frac{Q}{|\vec{r}-\vec{r}_4|^3}(\vec{r}-\vec{r}_4) \right]$$

Quando valutiamo $\vec{r}$ in $\vec{r}_A = \left(\frac{a}{2}, 0\right)$, abbiamo che $\tilde{\vec{E}}_{TOT}(\vec{r}_A)$ dipende da:

$$\begin{cases} \vec{r}_A - \vec{r}_2 = \left(\frac{3}{2}a, 0\right) \Rightarrow |\vec{r}_A - \vec{r}_2| = \frac{3}{2}a \\ \vec{r}_A - \vec{r}_3 = \left(\frac{a}{2}, -a\right) \Rightarrow |\vec{r}_A - \vec{r}_3| = \frac{\sqrt{5}}{2}a \\ \vec{r}_A - \vec{r}_4 = \left(\frac{a}{2}, a\right) \Rightarrow |\vec{r}_A - \vec{r}_4| = \frac{\sqrt{5}}{2}a \end{cases}$$

Le componenti del campo $\tilde{\vec{E}}_{TOT}(\vec{r}_A)$ sono:

$$\begin{cases} \tilde{\vec{E}}_{TOT}(\vec{r}_A)\cdot\hat{x} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2\cdot\frac{3}{2}a}{\left(\frac{3}{2}a\right)^3} + \frac{\frac{a}{2}}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}a\right)^3} + \frac{\frac{a}{2}}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}a\right)^3} \right] = \\ \quad = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left[\frac{8}{9} + \frac{4}{5^{3/2}} + \frac{4}{5^{3/2}} \right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left[\frac{8(\sqrt{125}+9)}{9\sqrt{125}} \right]; \\ \tilde{\vec{E}}_{TOT}(\vec{r}_A)\cdot\hat{y} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[0 - \frac{a}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}a\right)^3} + \frac{a}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}a\right)^3} \right] = 0 \end{cases}$$

Risposta al quesito ④ $\vec{\tilde{E}}_{TOT}(\vec{r}_A) = \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \left[\frac{8(\sqrt{125}+9)}{9\sqrt{125}} \right), 0 \right).$

⑤ Calcolare, nell'ipotesi in cui il guscio sia attraversabile, il modulo della velocità che una carica q, posta inizialmente in quiete in $\vec{r}=\vec{0}$, raggiunge quando $|\vec{r}| \to \infty$.

Per rispondere a questo quesito sfruttiamo la conservazione dell'energia.

STATO iniziale: $\vec{r}=\vec{0}$, $\vec{v}=\vec{0}$.

$$E_i = E_{Ki} + E_{Pi} \underset{\uparrow}{=} q\, U_{TOT}(\vec{r}=\vec{0}) \quad \text{(vedi risultato punto ①)}$$

$$\begin{cases} \vec{v}=\vec{0} \Rightarrow E_{Ki}=0 \\ \vec{r}=0 \Rightarrow E_{Pi} = q\, U_{TOT}(\vec{0}) \end{cases}$$

STATO finale: $|\vec{r}| \mapsto \infty$, $\vec{v} = \vec{v}_\infty \neq \vec{0}$

$$E_f = E_{Kf} + E_{pf} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2} m |\vec{v}_\infty|^2$$

$$\begin{cases} |\vec{r}| \to \infty \\ \vec{v} \neq \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E_{Kf} \neq 0 \\ E_{pf} \to 0 \end{matrix}$$

$$\Downarrow$$

$E_i = E_f \Rightarrow q\, U_{TOT}(\vec{r}=0) = \frac{1}{2} m |\vec{v}_\infty|^2$. Da questa usando la risposta del quesito ① otteniamo

$$|\vec{v}_\infty|^2 = \frac{2q}{m} U_{TOT}(\vec{r}=\vec{0}) = \frac{3}{2\pi\varepsilon_0} \frac{qQ}{ma} \Rightarrow |\vec{v}_\infty| = \sqrt{\frac{3}{2\pi\varepsilon_0} \frac{qQ}{ma}}$$

Risposta al quesito ⑤: $\boxed{|\vec{v}_\infty| = \sqrt{\frac{3}{2\pi\varepsilon_0} \frac{qQ}{ma}}}$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

(LINEARI)

DEF Un' equazione differenziale è un'equazione che lega una funzione incognita alle sue derivate.

Nota: per i casi che considereremo noi le derivate sono sempre intese come derivate rispetto al tempo.

DEF. Un'equazione differenziale lineare è un'equazione differenziale tale che combinazioni lineari delle sue soluzioni possono essere usate per determinare altre soluzioni.

Questi oggetti sono estremamente importanti in fisica e trovano applicazioni in diversi campi.

Durante il corso abbiamo avuto a che fare numerose volte con le equazioni differenziali, ad esempio quando abbiamo parlato di cinematica e di dinamica.

In entrambi i casi il nostro scopo è stato quello di determinare il moto di un corpo (cioè la sua legge oraria $\vec{x}(t)$), partendo da un certo insieme di condizioni iniziali (ad esempio $\vec{x}(t=0)=\vec{x}_0$, $\vec{v}(t=0)=\frac{d\vec{x}}{dt}(t=0)=\vec{v}_0$).

- La seconda legge di Newton ci dice che per un corpo di massa M sul quale agisce una forza totale $\vec{F}_{TOT}$ e il cui moto avviene ad accelerazione con accelerazione $\vec{a}$ abbiamo che

$$\boxed{\vec{F}_{TOT} = M\vec{a}}$$

- La 2ª legge di Newton è un'equazione differenziale.
- Se identifichiamo $\vec{a} = \frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2}$ abbiamo che

$$(*) \quad \boxed{\frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2} = \frac{\vec{F}_{TOT}}{M}}$$

← La particolare forma di questa equazione dipende da $\vec{F}_{TOT}$!

$\vec{F}_{TOT}$ potrebbe essere costante nel tempo e nello spazio come ad esempio nel caso in cui $\vec{F}_{TOT} = \vec{F}_P = M\vec{g}$, potrebbe dipendere dalla posizione $\vec{x}(t)$ come nel caso delle forze elastiche $\vec{F}_{el} = -k\,\vec{x}(t)$, etc.

In ciascuno dei casi menzionati l'equazione (*) è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine (ordine ~ grado massimo di derivazione nel tempo).

$$\frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2} = \dots$$

⇐ secondo ordine perché ho la derivata seconda.

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \dots$$

⇐ Equazione differenziale del primo ordine

NOTA

L'ordine dell'equazione ci dice quante funzioni ci servono per determinare una qualsiasi soluzione dell'equazione differenziale una volta che fissiamo l'insieme delle condizioni iniziali.

ESEMPIO BASE: Moto unidimensionale uniforme

(*) $\boxed{\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = 0}$

- Che equazione differenziale è?
  - ↳ secondo ordine
  - ↳ lineare omogenea ⇒ Esistono due funzioni $x_1(t)$ ed $x_2(t)$ con cui si possono generare tutte le soluzioni dell'equazione.

- Cos'è una soluzione?

$x_1(t)$ (o $x_2(t)$) è soluzione se e solo se $\frac{d^2}{dt^2} x_1(t) = 0$

oppure $\frac{d^2}{dt^2} x_2(t) = 0$

- Perchè è lineare? Se considero una qualsiasi $\tilde{x}(t) \doteq \alpha\, x_1(t) + \beta\, x_2(t)$, $\tilde{x}(t)$ è soluzione dell'equazione differenziale! Infatti:

$$\boxed{\frac{d^2}{dt^2}\tilde{x}(t)} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\alpha\, x_1(t) + \beta\, x_2(t)\right) = \alpha \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + \beta \frac{d^2}{dt^2} x_2(t) \boxed{= 0}$$

↑ $x_j(t)$ è soluzione

- Chi possono essere due "buone" soluzioni di (*)?

$$\begin{cases} x_1(t) = \text{costante} = \beta \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}\beta = 0 \\ x_2(t) = \alpha t \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}(\alpha t) = \frac{d}{dt}\alpha = 0 \end{cases}$$

Questo perchè la derivata seconda di $x(t)$ deve essere nulla e una funzione $f(t) = \alpha t^n$ con $n > 1$ <u>non</u> può essere soluzione di (*)

Una qualsiasi soluzione di (*) è della forma $\tilde{x}(t) = A x_1(t) + B x_2(t)$

A questo livello il problema fisico <u>non</u> è ancora definito...

Ci mancano le condizioni iniziali!

(A livello fisico (*) ci dice che la risultante delle forze è nulla. Questo implica che il corpo il cui moto è descritto da $x(t)$ può essere:

→ in quiete $x(t) =$ costante (vedi $x_1(t)$)

→ in moto rettilineo $\frac{dx(t)}{dt} \neq 0$ (vedi $x_2(t)$))

Le condizioni iniziali ci servono per determinare i coefficienti A e B che definiscono $\tilde{x}(t)$.

Prendiamo (*) con le condizioni iniziali $x(t=0) = x_0$ e $\left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0} = v_0$. Proviamo una soluzione

$$\tilde{x}(t) = A x_1(t) + B x_2(t) = A\beta + B\alpha t \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Rinominiamo} \\ \text{i coefficienti}}}{=}$$

$$= \tilde{A} + \tilde{B} t$$

$\tilde{x}(t) = \tilde{A} + \tilde{B} t$ risolve (*) con le condizioni $x(t=0) = x_0$ e $\left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0} = v_0$ se e solo se

$$\tilde{x}(t=0) = \tilde{A} = x(t=0) = x_0 \Leftrightarrow \tilde{A} = x_0$$

$$\left.\frac{d\tilde{x}(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}(\tilde{A} + \tilde{B} t)\right|_{t=0} = \tilde{B} = \left.\frac{d}{dt}x(t)\right|_{t=0} = v_0 \Leftrightarrow \tilde{B} = v_0$$

Da cui $\boxed{\tilde{x}(t) = x_0 + v_0 t}$ (Legge oraria per il moto rettilineo uniforme)

ESEMPIO BASE: Moto uniformemente accelerato

$\boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2} = a_0} =$ costante $\Rightarrow$ Equazione differenziale lineare del secondo ordine non omogenea.

Per risolvere questa equazione dobbiamo considerare

$\rightarrow x_1(t)$ Soluzione dell'equazione omogenea cioè di $\frac{d^2}{dt^2}x(t) = 0 \Rightarrow x_1(t) = \tilde{A} + \tilde{B}t$

$\rightarrow x_2(t) \equiv x_p(t) =$ soluzione particolare del problema non omogeneo cioè di

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = a_0 \Rightarrow x_p(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2$$

Una soluzione $\tilde{x}(t)$ dell'equazione:

$\frac{d^2\tilde{x}(t)}{dt^2} = a_0$ è scrivibile nella forma

$$\boxed{\tilde{x}(t) = C x_1(t) + x_p(t)}$$

È diverso da quanto fatto per l'omogenea!
Per l'omogenea:

$$\tilde{x}(t) = C x_1(t) + D x_2(t)$$

$\tilde{x}(t) = C x_1(t) + x_p(t)$ è soluzione: $\quad x_p(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2$

$$\frac{d^2}{dt^2}\tilde{x}(t) = \underbrace{\frac{d^2}{dt^2}\left(C x_1(t)\right)}_{0} + \frac{d}{dt^2} x_p(t) = \frac{d}{dt^2} x_p(t) = a_0$$

Preso un insieme di condizioni iniziali $x(t)\big|_{t=0} = x_0$

$\frac{dx(t)}{dt}\Big|_{t=0} = v_0$, questo fissa univocamente $\tilde{x}(t)$ e ovviamente

$\tilde{x}(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$ rappresenta la legge oraria

del moto uniformemente accelerato.

ESEMPIO BASE: Moto armonico

$$\boxed{\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \frac{F_{el}}{m} = -\frac{k}{m} x(t)}$$

$\Rightarrow$ Equazione differenziale lineare del secondo ordine.

Porto $x(t)$ a primo membro:

$$\boxed{\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{k}{m} x(t) = 0}$$

$\Rightarrow$ è omogenea!

Lo spazio delle soluzioni è generato dalle combinazioni lineari di due soluzioni $x_1(t)$ ed $x_2(t)$.

Per questa tipologia di equazioni esistono due insiemi di soluzioni:

INSIEME STANDARD: $\{x_1(t) = \cos(\lambda t),\ x_2(t) = \sin(\lambda t)\}$

INSIEME MENO STANDARD: $\{x_1(t) = e^{\lambda t},\ x_2(t) = e^{-\lambda t}\}$

INSIEME STANDARD:

$x_1(t) = \cos(\lambda t) \Rightarrow \frac{d}{dt}\cos(\lambda t) = -\lambda \sin(\lambda t) \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}\cos(\lambda t) = -\lambda^2 \cos(\lambda t)$

$x_2(t) = \sin(\lambda t) \Rightarrow \frac{d}{dt}\sin(\lambda t) = \lambda \cos(\lambda t) \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} = -\lambda^2 \sin(\lambda t)$

Quindi $x_1(t)$ o $x_2(t)$ soddisfano

$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{k}{m}x(t) = 0$ se λ assume "un" particolare valore

Sostituisco $x_1(t)$: $\left(-\lambda^2 + \frac{k}{m}\right)\cos(\lambda t) = 0 \quad \forall t \Leftrightarrow \boxed{\lambda = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}}$

(stessa cosa per $x_2(t)$)

Nota: il segno "$\pm$" è ininfluente perchè a noi interessano le loro combinazioni lineari

e $\begin{cases} \cos(-\lambda t) = \cos(\lambda t) \\ \sin(-\lambda t) = -\sin(\lambda t) \end{cases}$

Insieme meno standard: $\{x_1(t) = e^{\lambda t}, x_2(t) = e^{-\lambda t}\}$

$\begin{cases} x_1(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow \frac{d}{dt}e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t} \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}e^{\lambda t} = \lambda^2 e^{\lambda t} \\ x_2(t) = e^{-\lambda t} \Rightarrow \frac{d}{dt}e^{-\lambda t} = -\lambda e^{-\lambda t} \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}e^{-\lambda t} = \lambda^2 e^{-\lambda t} \end{cases}$

Quindi $x_1(t)$ o $x_2(t)$ soddisfano

$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{k}{m}x(t) = 0 \Leftrightarrow \left(\lambda^2 + \frac{k}{m}\right)e^{\pm\lambda t} = 0 \ \forall t \Leftrightarrow \boxed{\lambda = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}}}$

In questo caso λ è un numero immaginario!

$\boxed{\lambda = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}} \quad (i^2 = -1)$

Supporto alla didattica
22/05/2017

Nota: i due insiemi sono equivalenti!

Identità: $e^{i\lambda t} = \cos(\lambda t) + i \sin(\lambda t)$

quindi $\{\cos(\lambda t), \sin(\lambda t)\}$ e $\{e^{i\lambda t}, e^{-i\lambda t}\}$ generano le stesse combinazioni lineari (quindi le stesse soluzioni).

Prima di passare al caso non omogeneo per l'oscillatore armonico, riassumiamo!

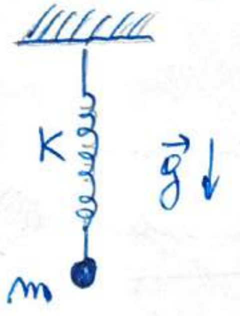
EQUAZIONE DIFFERENZIALI LINEARI DEL SECONDO ORDINE

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + C\,x(t) = \text{termine noto} = T$$

costante

$\boxed{C=0}$	$\boxed{C\neq 0}$
$x_1(t)$ ed $x_2(t)$ hanno a che fare con i polinomi	$x_1(t)$ ed $x_2(t)$ hanno a che fare con seni e coseni oppure esponenziali
$\boxed{T=0} \Rightarrow$ Moto non accelerato	$\boxed{T=0} \Rightarrow$ Moto Armonico
$\boxed{T\neq 0} \Rightarrow$ Moto accelerato	$\boxed{T\neq 0} \Rightarrow$ PROBLEMA 1!

PROBLEMA 1 Un punto materiale di massa "m" è appeso a una molla di costante elastica K ed è soggetto alla forza di gravità.



Trascurando la lunghezza a riposo della molla:

① Determinare la distanza x_S dal soffitto in cui la massa è all'equilibrio

② Supponendo di portare la massa tirandola verso il basso fino ad una distanza pari a $2x_S$ e che a $t=0$ si lasci il sistema libero di oscillare, determinare la legge oraria $x(t)$

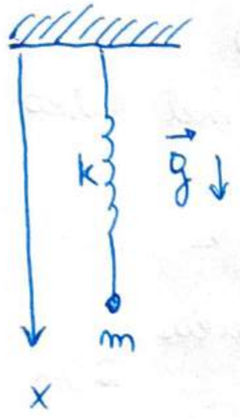
③ Determinare l'energia cinetica della massa "m" per $t = \frac{T}{4}$, dove T è il periodo del moto oscillatorio.

Risoluzione ①

Il primo punto ci richiede di determinare la distanza x_S in cui il sistema si trova in equilibrio. In corrispondenza di x_S dobbiamo avere che il corpo è soggetto ad una forza totale nulla cioè $\vec{F}_{TOT} = \vec{F}_{elastica} + \vec{F}_p = \vec{0}$.

Prendiamo lo zero per l'asse $\hat{x}$ in corrispondenza del soffitto e prendiamo la direzione $\hat{x}$ concorde con $\vec{g}$ (vedi dopo).

Supporto alla didattica
22/05/2017



$$\begin{cases} \vec{F}_{TOT} \cdot \hat{x} = mg - Kx & \text{(componente della forza lungo la verticale)} \\ \underbrace{\vec{F}_{TOT} \cdot \hat{x} = 0}_{\text{equilibrio}} \iff mg - kx = 0 \iff \boxed{x_S = \frac{mg}{K}} \end{cases}$$

Risposta quesito 1 : $\boxed{x_S = \frac{mg}{k}}$

Quesito ②

Questo quesito ci chiede di risolvere un'equazione differenziale per la posizione $x(t)$ che ha condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x(t=0) = 2x_S \\ \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

2ª Legge di Newton : $\vec{F}_{TOT} = m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2}$

Al punto precedente abbiamo calcolato $\vec{F}_{TOT}$ $(\vec{F}_{TOT} = F_x\hat{x})$, quindi dobbiamo risolvere:

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = F_x = mg - Kx(t) \quad \text{ovvero}$$

$$\boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{K}{m}x(t) = g}$$

EQUAZIONE DIFF. LINEARE
DEL SECONDO ORDINE
NON OMOGENEA

Fissate le condizioni iniziali, la soluzione è unica.
Visto che l'equazione dipende da $x(t)$ $(C \neq 0)$
ed è presente un termine noto $g \neq 0$ $(T \neq 0)$
e costante dobbiamo procedere come fatto nel retro della pagina 6:

↳ $x_1(t)$ ⇝ combinazione lineare delle soluzioni dell'omogenea (qui seni e coseni)

↳ $x_p(t)$ ⇝ soluzione particolare che tiene conto di g

↳ prendo $\tilde{x}(t) = \alpha\, x_1(t) + x_p(t)$ e uso le condizioni iniziali per determinare i coefficienti.

- Equazione omogenea

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{K}{m}x(t) = 0 \Rightarrow \boxed{x_1(t) = A\cos(\lambda t) + B\sin(\lambda t)}$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

- Soluzione particolare

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{K}{m}x(t) = g \Rightarrow$$

Il termine noto è una costante. Visto che la derivata nel tempo "uccide" le costanti, provo una $x_p(t) = \gamma$ = costante

$$x_p(t) = \gamma \; \Big\downarrow$$

$$\frac{d^2}{dt^2}x_p(t) + \frac{K}{m}x_p(t) = g;$$

$$\frac{K}{m}\gamma = g \Rightarrow \gamma = \frac{mg}{K} = x_s \text{ (vedi punto prima)}$$

Supporto alla didattica
22/05/2017

La soluzione particolare di questa equazione è

$$x_p(t) = x_s = \frac{mg}{k}$$

• Cerco una soluzione nella forma

$\tilde{x}(t) = \tilde{A}\cos(\lambda t) + \tilde{B}\sin(\lambda t) + \frac{mg}{k}$ e applico le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} \left.\frac{d}{dt}\tilde{x}(t)\right|_{t=0} = \left.\left[-\lambda\tilde{A}\sin(\lambda t) + \tilde{B}\lambda\cos(\lambda t)\right]\right|_{t=0} = \tilde{B}\lambda \underset{\uparrow\, v(t=0)=0}{=} 0 \Leftrightarrow \boxed{\tilde{B} = 0} \\ \tilde{x}(t=0) = \tilde{A} + \frac{mg}{k} \underset{\uparrow\, x(t=0)=2x_s}{=} 2x_s \Leftrightarrow \boxed{\tilde{A} = x_s} \end{cases}$$

Abbiamo quindi che:

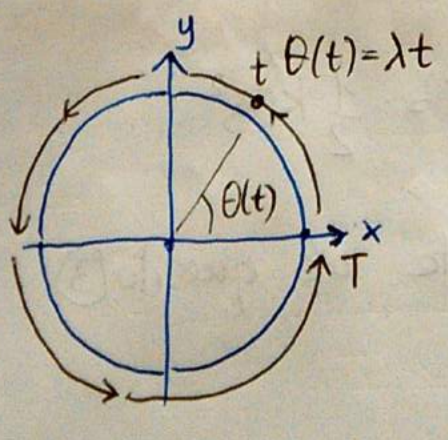
$$\boxed{\tilde{x}(t) = x_s\cos(\lambda t) + x_s}$$

Risposta al quesito 2

Quesito 3

Per prima cosa determiniamo il periodo T di $\tilde{x}(t)$.
T è quell'istante di tempo per cui $\lambda T = 2\pi$ (vedi sotto):

$$T = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$



$$\Rightarrow \boxed{\frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

Per calcolare l'energia cinetica possiamo procedere in due modi:

1. Conservazione dell'energia / Teorema dell'energia cinetica

2. Sfruttare la legge oraria $\tilde{x}(t)$ per determinare $\tilde{v}(t) = \frac{d\tilde{x}}{dt}(t)$ e sfruttare $E_k^{(t)} = \frac{1}{2} m \tilde{v}_{(t)}^2$

(1) $\Delta E_k = \mathcal{L}$ (stato iniziale $\rightarrow$ stato finale)

$$\lambda \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} \text{Stato iniziale}: \tilde{x}(t=0) = 2x_s \\ \text{Stato finale}: \tilde{x}(t=\frac{T}{4}) = x_s\left(1 + \cos\left(\lambda \frac{T}{4}\right)\right) = x_s \end{cases}$$

$$\Delta E_k = \int_{2x_s}^{x_s} -Kx\,dx + \int_{2x_s}^{x_s} mg\,dx = -\frac{1}{2}kx^2\Big|_{2x_s}^{x_s} + mg(x_s - 2x_s)$$

$$= \frac{1}{2}k\left[4x_s^2 - x_s^2\right] - mgx_s =$$

$$= \frac{3}{2}kx_s^2 - mgx_s \underset{x_s = \frac{mg}{k}}{=} \frac{3}{2}\left[mgx_s\right] - mgx_s = \frac{1}{2}kx_s^2$$

Usando che

$$E_{k_i} = 0 \Rightarrow \Delta E_k = E_{Kf} = \frac{1}{2}m\left|\tilde{v}\left(\frac{T}{4}\right)\right|^2 = \frac{1}{2}kx_s^2$$

da cui otteniamo la risposta al quesito 3

Supporto alla didattica
22/05/2017

Nota

Per scrupolo calcoliamo $\tilde{v}(t)$ e vediamo se otteniamo lo stesso risultato:

→ $\tilde{x}(t) = x_S(1+\cos(\lambda t)) \Rightarrow \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = \tilde{v}(t) = -x_S \lambda \sin(\lambda t)$

→ usiamo $\lambda \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tilde{v}\left(\frac{T}{4}\right) = -x_S\lambda = -x_S\sqrt{\frac{k}{m}}$

→ $E_{k_f} = \frac{1}{2} m \left|\tilde{v}\left(\frac{T}{4}\right)\right|^2 = \frac{1}{2}\cancel{m}\, x_S^2 \frac{k}{\cancel{m}} = \frac{1}{2} k x_S^2$ · (La fisica è coerente a questo livello)

Schematicamente...

$$\boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2} + C x(t) = T = \text{costante}}$$

$\boxed{C=0}$

$x_1(t), x_2(t)$ → fra i polinomi

$\boxed{T=0}$ CASO OMOGENEO:

$x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$

$\boxed{T\neq 0}$ CASO NON OMOGENEO:

$x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) + x_p(t)$

$\boxed{C\neq 0}$

$x_1(t), x_2(t)$ → seni/coseni o esponenziali

$\boxed{T=0}$ CASO OMOGENEO

$\boxed{T\neq 0}$ CASO NON OMOGENEO

→ I casi considerati fino a questo momento sono casi particolari ←

EQUAZIONE DIFFERENZIALE LINEARE DEL SECONDO ORDINE

$$\boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2} + B\frac{dx(t)}{dt} + C\, x(t) = T} \quad (*)$$

- Se $\boxed{B = C = 0}$ provo con un polinomio

- Altrimenti provo una soluzione per l'omogenea $(T=0)$ della forma $x(t) = e^{\lambda t}$:

$$(*) \Rightarrow \boxed{\lambda^2 + B\lambda + C = 0}$$

$$\boxed{\lambda_\pm = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4C}}{2}}$$

$$\begin{cases} \text{Se } B^2 - 4C \neq 0 \ (\lambda_+ \neq \lambda_-) \Rightarrow x(t) = \alpha_1 e^{\lambda_+ t} + \alpha_2 e^{\lambda_- t} \\ \text{Se } B^2 - 4C = 0 \Rightarrow x(t) = (\alpha_1 + \alpha_2 t)e^{-\frac{B}{2}t} \end{cases}$$

A queste devo poi associare se $T \neq 0$ una soluzione particolare.

Supporto alla didattica
22/05/2017

PROBLEMA 2 — Studio dell'oscillatore armonico smorzato da una forza viscosa.

Consideriamo un punto materiale di massa "m" soggetto a due tipologie di forze:

$$\rightarrow \vec{F}_{elastica} = -k\vec{x}$$

$$\rightarrow \vec{F}_{viscosa} = -\lambda \vec{v}$$ (È diversa dalla forza di attrito dinamico)

① Trovare le soluzioni dell'equazione omogenea al variare dei parametri (λ, k ; m fissata).

Il secondo principio di Newton ci dice che:

$$\vec{F}_{TOT} = m\vec{a} \Rightarrow m\vec{a} = \vec{F}_{ela.} + \vec{F}_{viscosa} = -k\vec{x} - \lambda\vec{v}$$

Usiamo la relazione fra velocità e vettore posizione cioè:

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{x}(t)$$

In questo caso abbiamo quindi che

$$m\frac{d^2}{dt^2}\vec{x}(t) = -k\vec{x}(t) - \lambda\frac{d}{dt}\vec{x}(t) ;$$

$$\boxed{m\frac{d^2}{dt^2}\vec{x}(t) + \lambda\frac{d}{dt}\vec{x}(t) + k\vec{x}(t) = 0}$$

EQUAZIONE DIFF. LINEARE DEL SECONDO ORDINE OMOGENEA

Riscalo i parametri con m:

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{x}(t) + \frac{\lambda}{m}\frac{d}{dt}\vec{x}(t) + \frac{k}{m}\vec{x}(t) = 0$$

$$\begin{cases} B = \frac{\lambda}{m} \\ C = \frac{k}{m} \end{cases} \Rightarrow$$ Provo come soluzione una $\vec{x}(t) = \vec{A}e^{\beta t}$!

- Per semplicità supponiamo che il moto sia unidimensionale:

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \frac{\lambda}{m}\frac{d}{dt}x(t) + \frac{K}{m}x(t) = 0$$

$$\bar{x}(t) = a\,e^{\beta t} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}(a e^{\beta t}) = a\beta e^{\beta t} \\ \frac{d^2}{dt^2}(a e^{\beta t}) = a\beta^2 e^{\beta t} \end{cases}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\bar{x}(t) + \frac{\lambda}{m}\frac{d}{dt}\bar{x}(t) + \frac{K}{m}\bar{x}(t) = 0 \Rightarrow a\underbrace{\left(\beta^2 + \frac{\lambda}{m}\beta + \frac{K}{m}\right)}e^{\beta t} = 0 \quad \forall t$$

$$\hookrightarrow \boxed{\beta^2 + \frac{\lambda}{m}\beta + \frac{K}{m} = 0}$$

Dobbiamo risolvere questa equazione

$$\beta^2 + \frac{\lambda}{m}\beta + \frac{K}{m} = 0 \Rightarrow \boxed{\beta_\pm = \frac{-\frac{\lambda}{m} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{m^2} - 4\frac{K}{m}}}{2}}$$

- Se $\frac{\lambda^2}{m^2} - 4\frac{K}{m} = 0 \Rightarrow \bar{x}(t) = (\alpha_1 + \alpha_2 t)e^{\beta_+ t} = (\alpha_1 + \alpha_2 t)e^{-\frac{\lambda}{2m}t}$

$\bar{x}(t)$ in questo caso <u>non</u> contiene termini oscillatori.

Il sistema è completamente smorzato

- Se $\frac{\lambda^2}{m^2} - 4\frac{K}{m} \neq 0$ ho due casi

$$\begin{cases} \frac{\lambda^2}{m^2} - 4\frac{K}{m} > 0 \xrightarrow{\text{due autovalori reali}} \bar{x}(t) = \alpha_1 e^{\beta_+ t} + \alpha_2 e^{\beta_- t} \\ \frac{\lambda^2}{m^2} - 4\frac{K}{m} < 0 \xrightarrow{\text{due autovalori complessi}} \bar{x}(t) = \alpha_1 e^{\tilde{\beta}_+} + \alpha_2 e^{\tilde{\beta}_- t} \end{cases}$$

Supporto alla didattica
22/05/2017

$$\frac{\lambda^2}{m^2} - \frac{4}{m}k > 0 \Rightarrow \beta_+ = \frac{-\frac{\lambda}{m} + \sqrt{\frac{\lambda^2}{m^2} - 4\frac{k}{m}}}{2} \Rightarrow -\frac{\lambda}{2m} < \beta_+ < 0$$

$$\beta_- = \frac{-\frac{\lambda}{m} - \sqrt{\frac{\lambda^2}{m^2} - \frac{4k}{m}}}{2} \Rightarrow \beta_- < -\frac{\lambda}{2m}$$

$$\frac{\lambda^2}{m^2} - \frac{4}{m}k < 0 \Rightarrow \tilde{\beta}_+ = \frac{-\frac{\lambda}{m} + \sqrt{-\left(\frac{4k}{m} - \frac{\lambda^2}{m^2}\right)}}{2} = -\frac{\lambda}{2m} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{4k}{m} - \frac{\lambda^2}{m^2}}$$

$$\tilde{\beta}_- = \frac{-\frac{\lambda}{m} - \sqrt{-\left(\frac{4k}{m} - \frac{k^2}{m^2}\right)}}{2} = -\frac{\lambda}{2m} - \frac{i}{2}\sqrt{\frac{4k}{m} - \frac{k^2}{m^2}}$$