Dinamica di sistemi fisici

- *Introduzione*
- *Equazioni differenziali lineari*
- *Moto in un fluido viscoso*
- *Oscillatore armonico*
  - → *considerazioni energetiche*
  - → *pendolo semplice*
- *Soluzione di equazioni differenziali lineari (facoltativo)*
- *Oscillatore armonico smorzato e forzato (facoltativo)*

Dispense “Modelli della Fisica”

Prof. Cornolti

Leggi della dinamica ed equazioni differenziali

Nella descrizione della dinamica di un sistema, possiamo sfruttare i principi di conservazione (energia, quantità di moto, …), se applicabili, ma questo non ci darà mai la completa risoluzione della ***legge del moto***, cioè $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Si deve invece applicare la **seconda legge della dinamica** e quindi **risolvere l'equazione differenziale** che da essa deriva:

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_{\mathrm{ext},i}$$

Per esempio, in 1D: $ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}, a_i\right) \;\Rightarrow\; x(t)$

Esempi semplici (ma che descrivono i sistemi dinamici più comuni): sistemi la cui dinamica è descritta da *equazioni lineari a coefficienti costanti*

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -b\frac{dx}{dt} - kx + A \;\Rightarrow \boxed{a_2\frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 x = A} \Rightarrow\; x(t)$$

Equazioni differenziali in meccanica

Spesso la soluzione delle equazioni del moto si ottiene attraverso la risoluzione di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti.

L'uso delle equazioni differenziali è rilevante in meccanica, ma è spesso utile anche in altri campi, perché le stesse equazioni differenziali regolano l'evoluzione temporale in sistemi diversi.

Per esempio, le equazioni differenziali del ***primo ordine*** regolano:

→ il moto in un fluido viscoso;

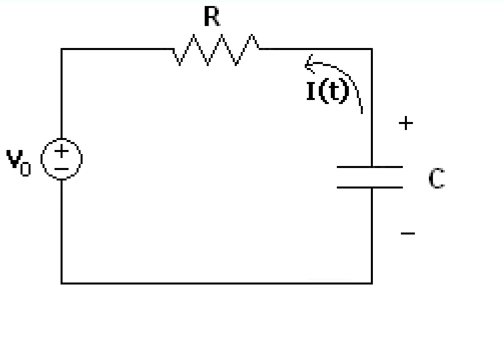
→ la carica e scarica di un condensatore;

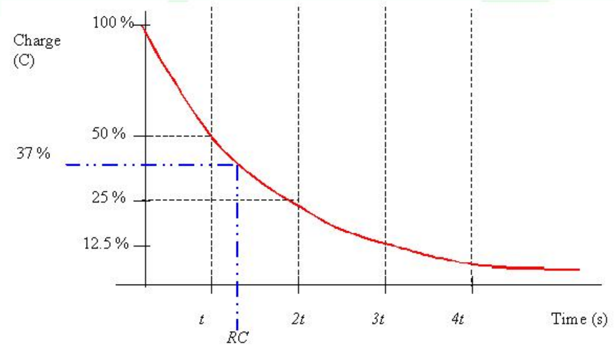
→ la crescita della popolazione di una colonia di batteri che interagiscono con una quantità limitata di cibo;

→ il decadimento radioattivo

→ etc …

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$





$$\frac{Q(t)}{C} + R\frac{dQ(t)}{dt} = 0$$

Equazioni differenziali in meccanica

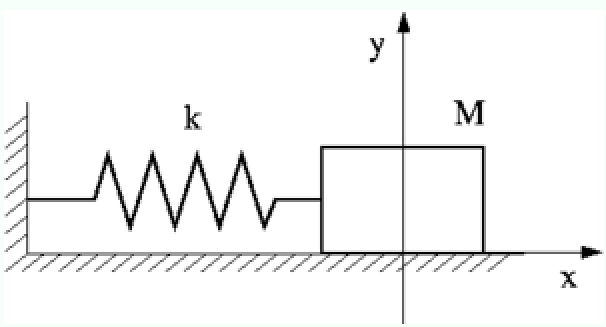
Le equazioni differenziali del ***secondo ordine*** regolano altri fenomeni, come ad esempio:

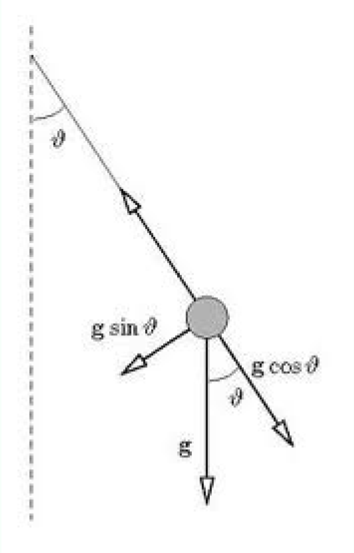
→ il moto di una massa legata ad una molla;

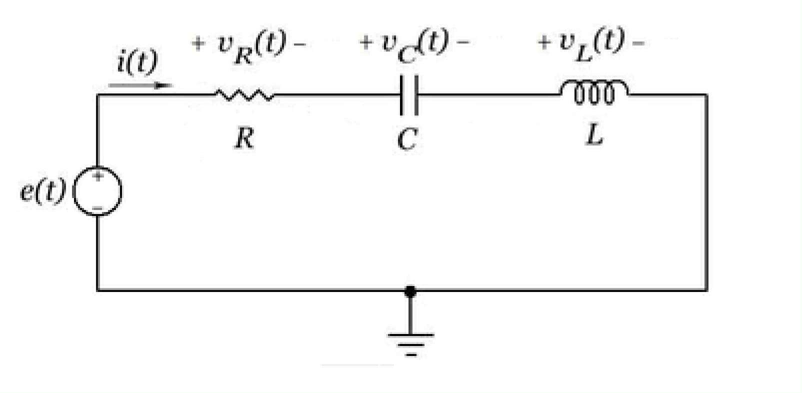
→ il moto del pendolo;

→ le oscillazioni delle cariche in un circuito risonante con capacità *C* e induttanza *L*,

→ etc …







$$M\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \qquad \frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\phi \qquad \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0$$

Dinamica di sistemi fisici

- *Introduzione*
- *Equazioni differenziali lineari*
- *Moto in un fluido viscoso*
- *Oscillatore armonico*
  - → *considerazioni energetiche*
  - → *pendolo semplice*
- *Soluzione di equazioni differenziali lineari (facoltativo)*
- *Oscillatore armonico smorzato e forzato (facoltativo)*

Dispense “Modelli della Fisica”

Prof. Cornolti

Equazioni differenziali in meccanica

In generale si definisce un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti:

$$(*) \quad a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)$$

(n è chiamato **ordine** dell'equazione differenziale)

associata a (*) c'è sempre l'equazione omogenea:

$$(**) \quad a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0$$

Se $x = u(t)$ è soluzione di (**), allora anche $A\, u(t)$ è soluzione (con A costante).

Se $x = u(t)$ e $x = v(t)$ sono soluzioni di (**), allora anche una *qualunque combinazione lineare* $w(t) = c_1 * u(t) + c_2 * v(t)$ è soluzione di (**) (dove c_1 e c_2 sono costanti).

Inoltre, se $x = u(t)$ è soluzione dell'equazione differenziale (*) e se anche $x = v(t)$ è soluzione di (*), allora $w(t) = u(t) - v(t)$ è soluzione dell'equazione omogenea (**).

Equazioni differenziali in meccanica

$$(*) \quad a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)$$

$$(**) \quad a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0$$

$u_f(t) + w(t)$ $\quad V$

$w(t)$ $\quad V_0$

Si può dimostrare che, se $w(t)$ è una qualsiasi soluzione di tutte le possibili soluzioni dell'equazione omogenea (**) (che costituiscono l'insieme V_0), e $u_f(t)$ è una soluzione particolare dell'equazione differenziale (*)

⇓

al variare di $w(t)$ all'interno di V_0, tutte le soluzioni di (*) sono date da $u(t) = u_f(t)+w(t)$.

Quindi basta trovare una qualunque soluzione particolare di (*) + tutte le soluzioni di (**) (impresa di solito più facile) per trovare tutte le soluzioni di (*).

Equazioni differenziali in meccanica

L'esempio più semplice di dinamica è il *moto uniformemente accelerato*.

L'equazione differenziale è: (1.*) $$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_0 \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F_0}{m}$$

dove F_0 è una forza costante.

L'omogenea associata è: (1.**) $$\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

Quali funzioni x(t) soddisfano la (1.**)?
Tutti e solo i polinomi di grado uguale o inferiore al primo.

E la soluzione particolare della (1.*)? Integrando si ottiene: $u_f(t) = \frac{F_0}{2m}t^2$

Quindi la <u>*soluzione generale*</u> dell'equazione differenziale (1.*) sarà:

$$\boxed{x(t) = \frac{F_0}{2m}t^2 + c_1 t + c_2}$$

Equazioni differenziali in meccanica

$$\boxed{x(t) = \frac{F_0}{2m}t^2 + c_1 t + c_2}$$

c_1 e c_2 sono costanti arbitrarie

2 per le equazioni differenziali del secondo ordine, 1 per quelle del primo ordine.

Tali costanti si trovano imponendo le ***condizioni iniziali***: $x(t=0)$, e $v(t=0)$ che dobbiamo conoscere per risolvere il problema.

Nell'esempio sopra menzionato, $x(0) = x_0 = c_2$ e $v(0) = v_0 = c_1$.

Ciò equivale alla legge del moto che abbiamo visto in passato:

$$a = \frac{F_0}{m}; \qquad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

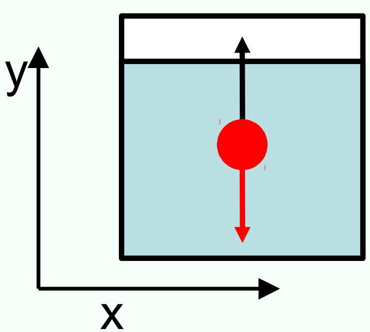
Dinamica di sistemi fisici

- *Introduzione*
- *Equazioni differenziali lineari*
- *Moto in un fluido viscoso*
- *Oscillatore armonico*
  - → *considerazioni energetiche*
  - → *pendolo semplice*
- *Soluzione di equazioni differenziali lineari (facoltativo)*
- *Oscillatore armonico smorzato e forzato (facoltativo)*

Dispense "Modelli della Fisica"

Prof. Cornolti

Corpo immerso in un mezzo viscoso in campo gravitazionale costante



$$\vec{F}_v = -\gamma \vec{v}$$ Forza di attrito viscoso

$$\vec{F}_P = -mg\,\hat{j}$$ Forza peso

Trascuriamo la spinta di Archimede (corpo puntiforme)

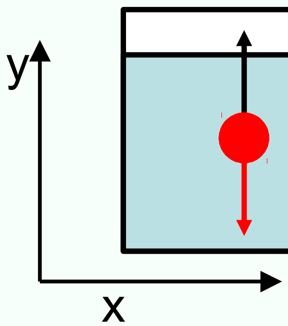
$$(m\vec{a})_y = \Big(\sum_i \vec{F}_i\Big)_y = -mg - \gamma v_y$$

$$ma = m\frac{dv}{dt} = -mg - \gamma v \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -g - \frac{\gamma}{m}v$$

$$m/\gamma = \tau; \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = -g}$$

È un'equazione differenziale del primo ordine (compare solo la derivata prima).

Corpo immerso in un mezzo viscoso in campo gravitazionale costante



$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = -g} \qquad (*)$$

Per risolvere la (*), bisogna prima trovare tutte le soluzioni dell'omogenea:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0 \qquad (**)$$

L'unica funzione la cui derivata è proporzionale a sé stessa, cambiata di segno, è l'esponenziale: $v(t) = Ae^{-t/\tau}$ con $\tau = m/\gamma$ ed A costante arbitraria.

Tutte le soluzioni dell'equazione differenziale (*) si trovano sommando le soluzioni dell'omogenea (**) e una soluzione particolare di (*).

Corpo immerso in un mezzo viscoso in campo gravitazionale costante

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = -g \qquad (*)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0 \qquad (**)$$

Una soluzione particolare della (*) la si trova pensando alla **velocità limite** che viene raggiunta a tempi lunghi: infatti da (*) emerge che, se il corpo parte da fermo (v=0), all'inizio la sua velocità aumenta, ma non la sua derivata che tende a diminuire.

Via via la derivata diminuisce fino a raggiungere lo zero. Quando la derivata della velocità è zero *l'accelerazione è nulla*. Questa condizione la si raggiunge quando:

$$0 = \frac{v}{\tau} + g = \frac{\gamma v}{m} + g \quad \Longrightarrow \quad v = v_{\lim} = -\frac{m}{\gamma} g = -\tau g$$

La velocità limite ha segno negativo, perché il corpo è diretto verso il basso.

Corpo immerso in un mezzo viscoso in campo gravitazionale costante

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = -g \quad (*)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0 \quad (**)$$

Tutte le soluzioni dell'equazione differenziale (*) si trovano sommando le soluzioni dell'omogenea (**) e una soluzione particolare di (*).

$$v(t) = v_{\mathrm{lim}} + Ae^{-t/\tau}$$

La costante arbitraria A si trova imponendo la condizione iniziale $v(t=0)=0$:

$$0 = v_{\mathrm{lim}} + Ae^{-0/\tau} = v_{\mathrm{lim}} + A \quad \text{da cui} \quad A = -v_{\mathrm{lim}}.$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v(t) = v_{\mathrm{lim}}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

Corpo immerso in un mezzo viscoso in campo gravitazionale costante

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = -g \quad (*)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0 \quad (**)$$

$$\Rightarrow \boxed{v(t) = v_{\text{lim}}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

Se invece la condizione iniziale fosse stata $v(0) = v_0$ con **v_0 maggiore di v_{lim}** (per esempio se il corpo viene scagliato dentro il fluido viscoso), allora:

$$v_0 = v_{\text{lim}} + Ae^{-0/\tau} = v_{\text{lim}} + A \text{ da cui } A = v_0 - v_{\text{lim}}.$$

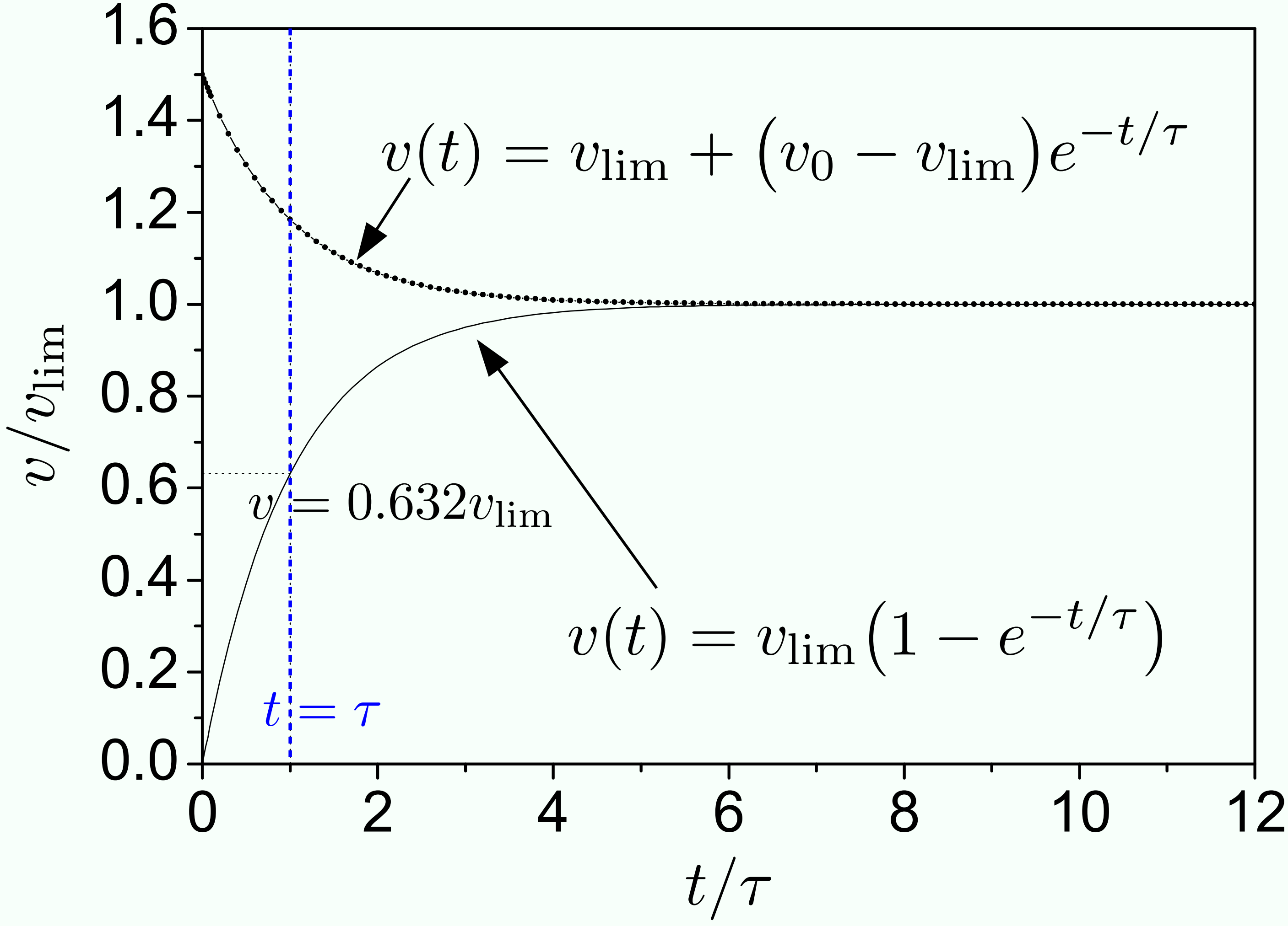
$$\Rightarrow \boxed{v(t) = v_{\text{lim}} + \left(v_0 - v_{\text{lim}}\right)e^{-t/\tau}}$$

Corpo immerso in un mezzo viscoso in campo gravitazionale costante

In un diagramma tempo-velocità, le funzioni viste prima hanno questo andamento, entrambe tendenti a v_{lim} per tempi grandi:

$$v_{\rm lim} = -\frac{m}{\gamma} g = -\tau g$$

$$\frac{m}{\gamma} = \tau$$



Il tempo caratteristico è dato dal rapporto del termine inerziale (massa) rispetto al termine dissipativo.

Tanto maggiore è la viscosità del liquido (o minore è la massa dell'oggetto), quanto prima viene raggiunta la velocità limite.

Dinamica di sistemi fisici

- *Introduzione*
- *Equazioni differenziali lineari*
- *Moto in un fluido viscoso*
- *Oscillatore armonico*
  - → *considerazioni energetiche*
  - → *pendolo semplice*
- *Soluzione di equazioni differenziali lineari (facoltativo)*
- *Oscillatore armonico smorzato e forzato (facoltativo)*

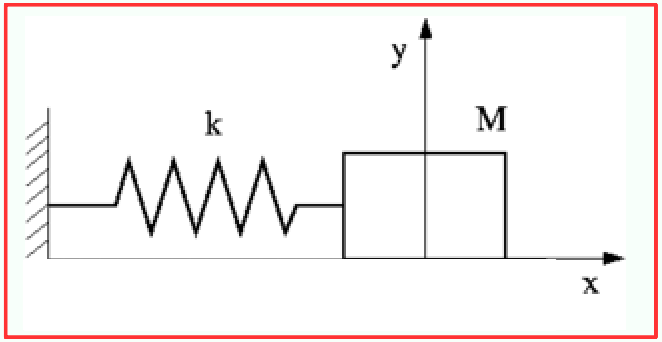
Dispense “Modelli della Fisica”

Gettys
Capitolo 14

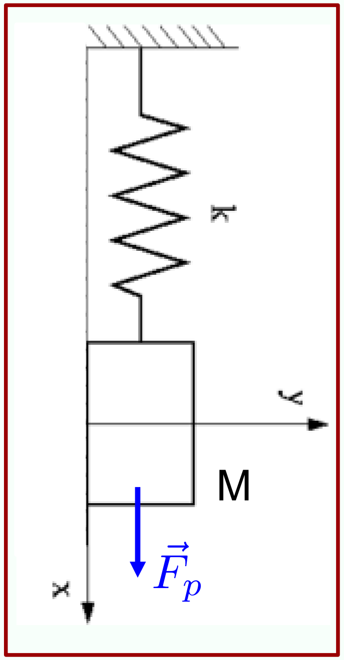
Oscillatore armonico

Un esempio di equazione differenziale di secondo grado che rappresenta molti sistemi fisici è quello dell'oscillatore armonico. Un oscillatore armonico può essere schematizzato mediante una ***molla*** di costante elastica *k*, con attaccato un corpo di massa *m*.

caso A: La molla può essere orizzontale e il corpo trovarsi su un piano orizzontale privo di attrito



caso B: oppure essere verticale con il corpo di massa m appeso.



Nel secondo caso la forza peso (costante) si aggiunge alla forza della molla.

Oscillatore armonico

I casi A e B sono esaustivi dell'oscillatore armonico:

B: equazione differenziale dell'oscillatore armonico con forza costante applicata F_0;

A: equazione omogenea associata.

(*) $$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F_0 \;\Rightarrow\; \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}}$$ (caso B)

(**) $$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \;\Rightarrow\; \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0}$$ (caso A)

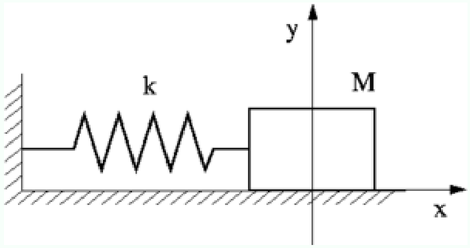
$$\text{dove } \omega_0^2 = \frac{k}{m} \;\Rightarrow\; \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Si noti che ω_0 ha le dimensioni dell'inverso di un tempo tempo, è ricavabile a partire da *k* ed *m* (costanti note del problema) e non dipende dall'ampiezza del moto.

Risolvendo la (**) (omogenea) si otterranno tutte le possibili soluzioni, a meno di due costanti arbitrarie determinate dalle condizioni iniziali di posizione e velocità.

Oscillatore armonico (caso A)

(**) $$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \;\Rightarrow\; \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0}$$



La soluzione deve essere tale che la sua derivata seconda sia uguale a sé stessa cambiata di segno. Le uniche funzioni capaci di ciò sono il ***seno*** ed il ***coseno***:

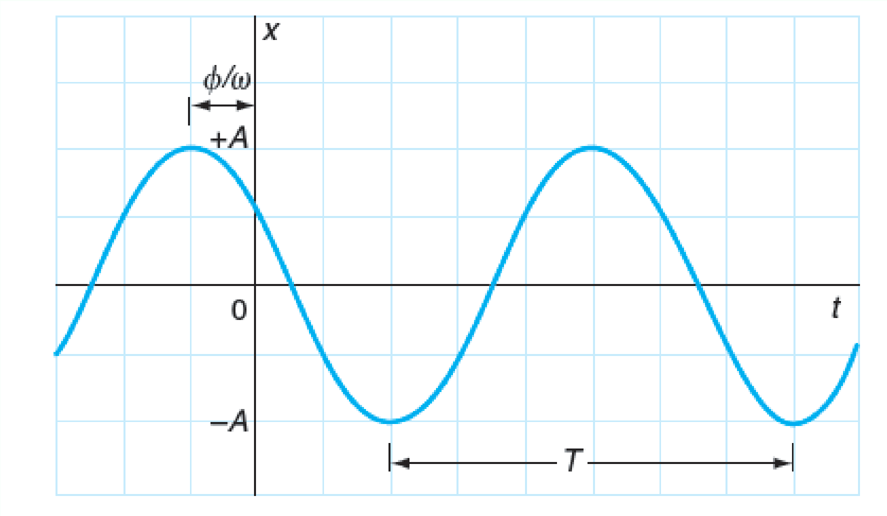
$$\frac{d^2}{dt^2}\left[\cos(\omega_0 t)\right] = -\omega_0^2\cos(\omega_0 t) \qquad \frac{d^2}{dt^2}\left[\sin(\omega_0 t)\right] = -\omega_0^2\sin(\omega_0 t)$$

Perciò tutte le possibili soluzioni di (**) sono combinazioni lineari di seno e coseno:

$$x(t) = c_1\cos(\omega_0 t) + c_2\sin(\omega_0 t)$$

oppure, passando attraverso le formule di addizione (trigonometria):

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$



con

$$c_1 = A\cos\varphi; \quad c_2 = -A\sin\varphi$$

$$\tan\varphi = -c_2/c_1; \quad A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$

Oscillatore armonico (caso A)

$$x(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) \quad \text{oppure} \quad x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

La velocità quindi è: $v(t) = \frac{dx}{dt} = -c_1\omega_0 \sin(\omega_0 t) + c_2\omega_0 \cos(\omega_0 t)$

e l'accelerazione: $a(t) = \frac{dv}{dt} = -c_1\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) - c_2\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) = -\omega_0^2\, x(t)$

Le coppie di costanti arbitrarie (c_1, c_2) oppure (A, ϕ) si determinano a partire dalle condizioni iniziali $x(t=0)$ e $v(t=0)$:

$$\begin{aligned} x(0) &= c_1 \\ v(0) &= c_2\omega_0 \end{aligned} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{aligned} x(0) &= A\cos(\varphi) \\ v(0) &= -A\omega\sin(\varphi) \end{aligned}$$

Una volta determinate c_1 e c_2, la soluzione generale della (**) è quindi data.
Il ***moto*** è di tipo ***oscillatorio sinusoidale in t, con pulsazione ω_0***. Poiché

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \;\Rightarrow\; f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \;\Rightarrow\; \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

la pulsazione ω_0 e il periodo $T = 2\pi/\omega_0$ sono determinati completamente dai valori della costante elastica *k* della molla e della massa *m* del corpo attaccato ad essa.

Oscillatore armonico (caso A)

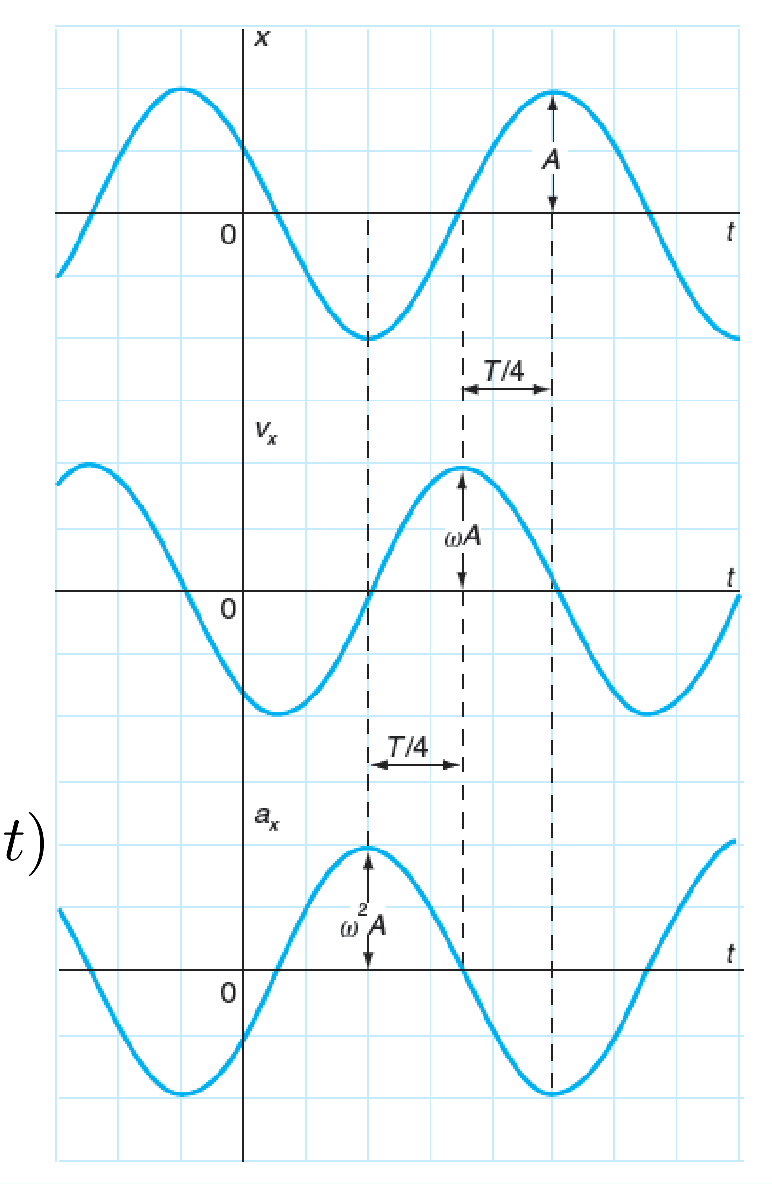
Considerando dunque le condizioni iniziali:

$$x(t) = x(0)\cos(\omega_0 t) + \frac{v(0)}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$$

$$v(t) = -x(0)\omega_0 \sin(\omega_0 t) + v(0)\cos(\omega_0 t)$$

$$\begin{aligned} a(t) &= -x(0)\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) - v(0)\omega_0 \sin(\omega_0 t) \\ &= -\omega_0^2\, x(t) \end{aligned}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$



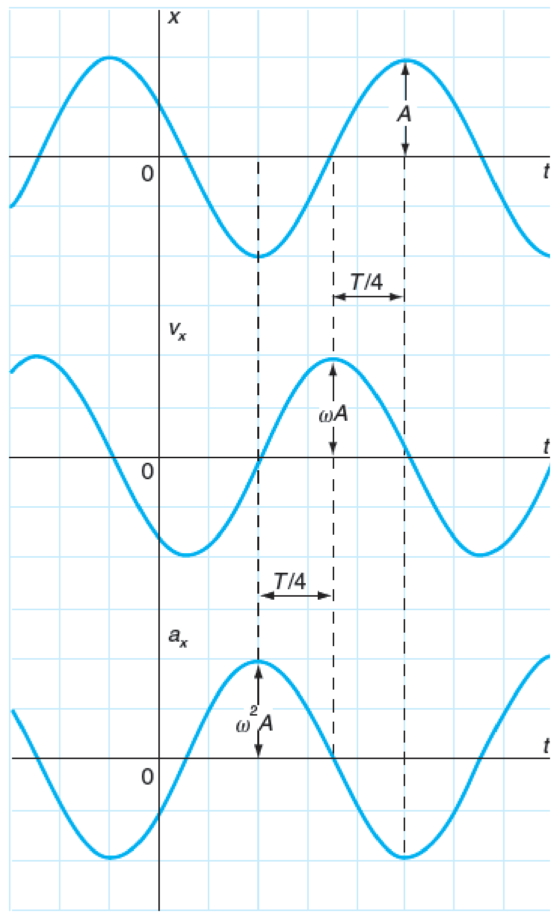
Oscillatore armonico (caso A)

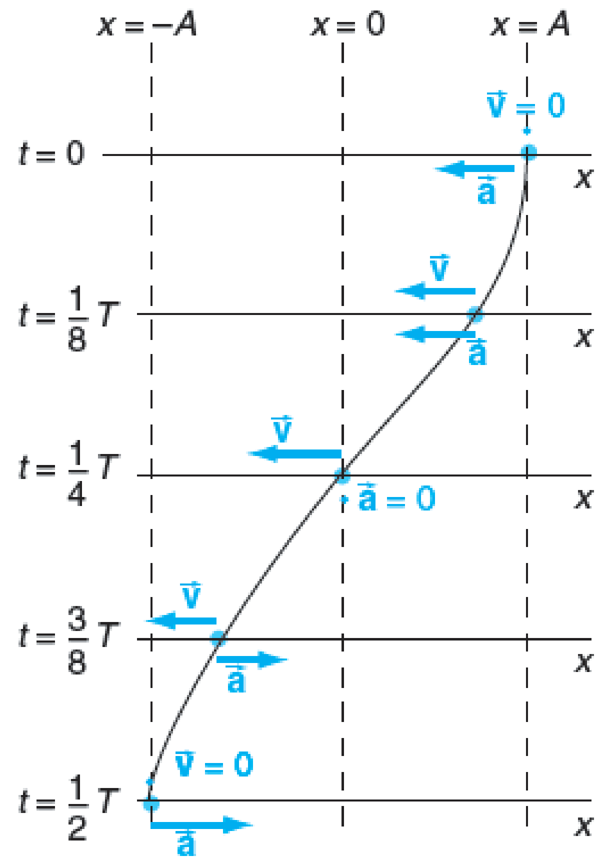
Usando la formula con ampiezza e fase:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$v(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$a(t) = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$





$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$ la relazione è soddisfatta per ogni *t*

Oscillatore armonico (caso B)

Che cosa succede se è presente la forza costante F_0?

(*) $$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F_0 \;\Rightarrow\; \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}}$$

La soluzione generale è la somma di tutte le possibili soluzioni dell'omogenea (che abbiamo appena visto) più una soluzione particolare della (*).

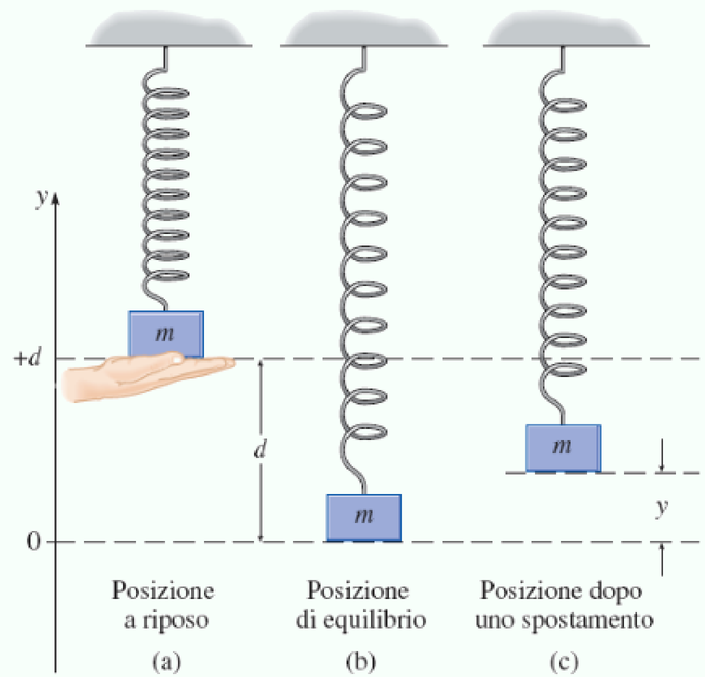
La più semplice soluzione particolare della (*) è: $x(t) = x_0 = F_0/k$

La soluzione generale sarà del tipo oscillante con pulsazione $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ rispetto ad un punto di equilibrio non nullo:

$$x(t) = x_0 + A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

potremmo ridefinire l'asse *x* in modo tale che *X* = x-x_0 e ritroveremmo il caso dell'omogenea.

La forza costante non cambia la fequenza di oscillazione, solo il punto intorno al quale oscilla.



Dinamica di sistemi fisici

- *Introduzione*
- *Equazioni differenziali lineari*
- *Moto in un fluido viscoso*
- *Oscillatore armonico*
  - → *considerazioni energetiche*
  - → *pendolo semplice*
- *Soluzione di equazioni differenziali lineari (facoltativo)*
- *Oscillatore armonico smorzato e forzato (facoltativo)*

Dispense “Modelli della Fisica”

Gettys
Capitolo 14

Considerazioni energetiche

La ***frequenza*** di oscillazione dell'oscillatore armonico è determinata dalla costante elastica della molla e dalla massa: $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Non varia al variare dell'***ampiezza*** di oscillazione, la quale invece è direttamente associata all'***energia*** del sistema.

Si ricordi che il sistema è conservativo (la forza elastica è conservativa).

(**) $$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \;\Rightarrow\; \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0}$$

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2\, x(t)$$

Considerazioni energetiche

Le soluzioni sono sinusoidali. Le funzioni trigonometriche oscillano fra -1 e 1.

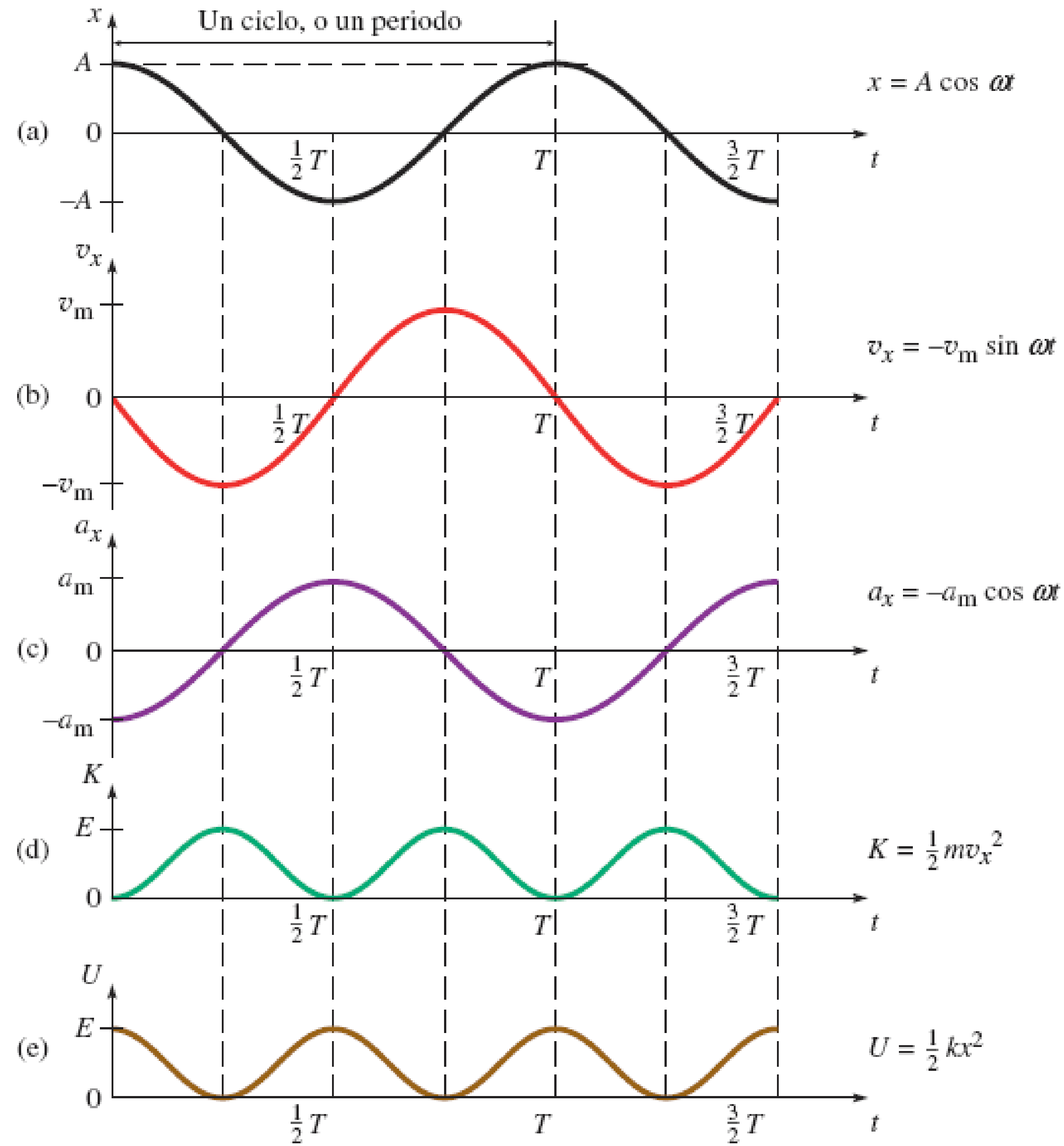
Ad ogni intervallo $\Delta t = T$ otteniamo la stessa posizione con la stessa velocità.

In modulo:

→ la massima estensione x_{max} si ha per $|x_{\max}| = A$;

→ la massima velocità v_{max} si ha per $|v_{\max}| = \omega_0 A$;

→ la massima accelerazione si ha per $|a_{\max}| = \omega_0^2 A$.



Considerazioni energetiche

Consideriamo ora come condizioni iniziali quelle in cui il corpo si trovi in $x = x_0$ con velocità nulla (massima estensione della molla).

Allora $x(0) = x_0 \;\text{ e }\; v(0) = 0$, e quindi

$$x(0) = A\cos\varphi = x_0 \qquad\qquad v(0) = -A\omega_0 \sin\varphi = 0$$

$$\boxed{\varphi = 0 \;\text{ e }\; A = x_0}$$

$$\begin{cases} x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \\ v(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \\ a(t) = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = x_0\cos(\omega_0 t) \\ v(t) = -x_0\omega_0 \sin(\omega_0 t) \\ a(t) = -x_0\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) \end{cases}$$

L'energia potenziale è data da: $U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_0^2\big[\cos(\omega_0 t)\big]^2$

L'energia cinetica è data da: $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_0^2\big[\sin(\omega_0 t)\big]^2$

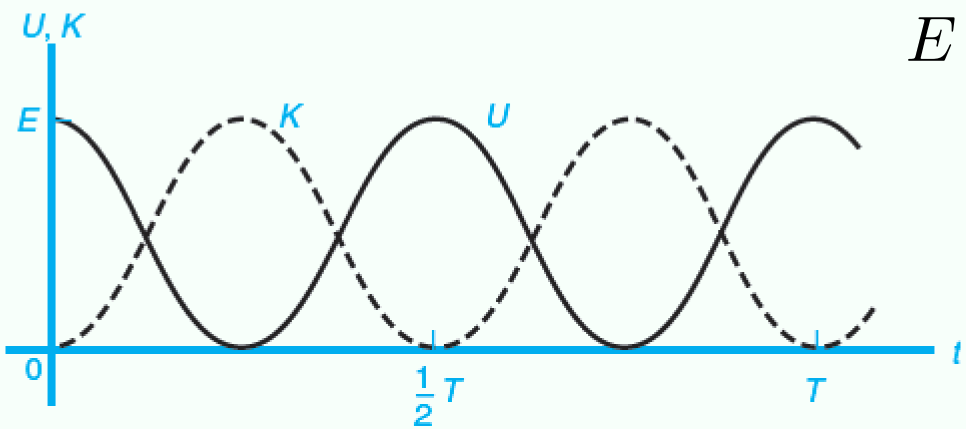
$$= \frac{1}{2}kx_0^2\big[\sin(\omega_0 t)\big]^2$$

Considerazioni energetiche

L'energia potenziale è data da: $U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_0^2\left[\cos(\omega_0 t)\right]^2$

L'energia cinetica è data da: $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx_0^2\left[\sin(\omega_0 t)\right]^2$

La somma di energia potenziale + cinetica deve essere una costante del moto (ricordiamo che ***la forza elastica è conservativa***):



$$E = U + K$$

$$= \frac{1}{2}kx_0^2\left[\cos(\omega_0 t) + \sin(\omega_0 t)\right]^2$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2}kx_0^2}$$

L'energia meccanica totale è costante ed è uguale all'energia potenziale posseduta all'istante iniziale + energia cinetica posseduta all'istante iniziale.

Nel tempo, un tipo di energia si trasforma nell'altra e viceversa

Considerazioni energetiche

L'energia potenziale è data da: $U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_0^2\left[\cos(\omega_0 t)\right]^2$

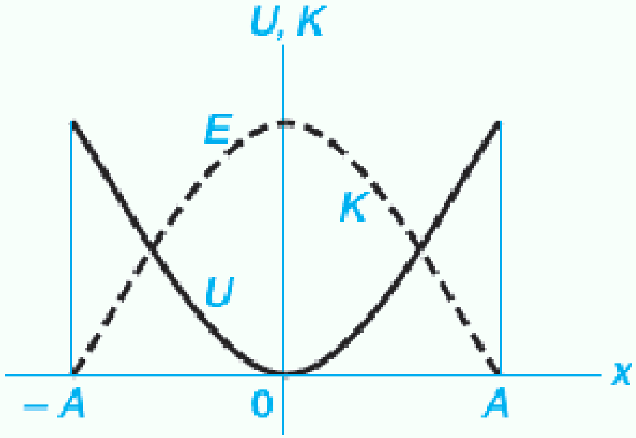
L'energia cinetica è data da: $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx_0^2\left[\sin(\omega_0 t)\right]^2$

La somma di energia potenziale + cinetica deve essere una costante del moto (***la forza elastica è conservativa***): $\Rightarrow$ $E = \frac{1}{2}kx_0^2$

Da sopra si vede che c'è un legame stretto fra l'energia del sistema e l'ampiezza di oscillazione x_0 (o massima ampiezza) del sistema.

$$K = E - U = \frac{1}{2}kx_0^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx_0^2 - \frac{1}{2}kx^2$$



Considerazioni energetiche

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_0^2\left[\cos(\omega_0 t)\right]^2$$

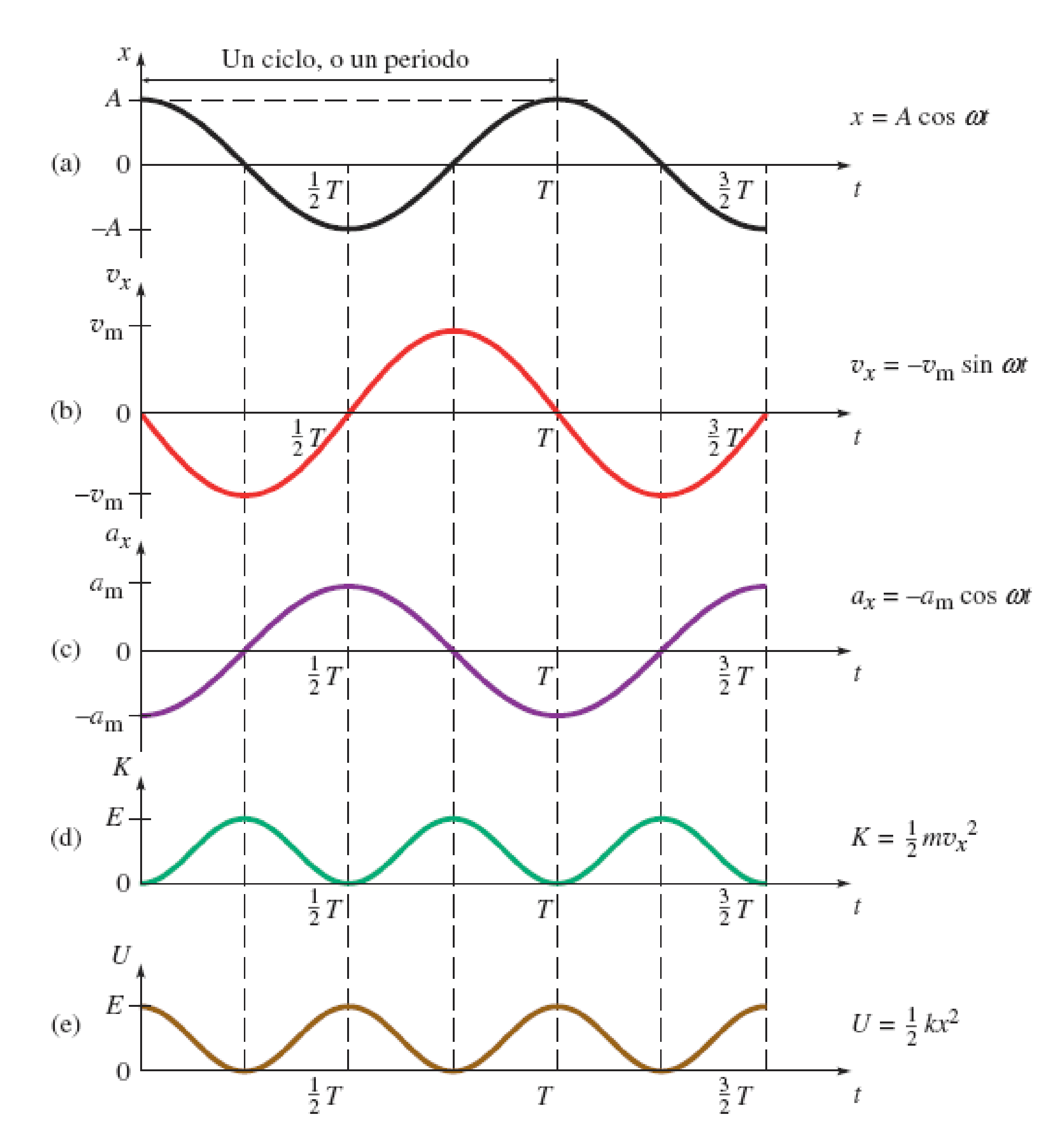
$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx_0^2\left[\sin(\omega_0 t)\right]^2$$

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$$

L'energia cinetica si annulla ogni qualvolta la posizione x raggiunge la ampiezza massima di oscillazione.

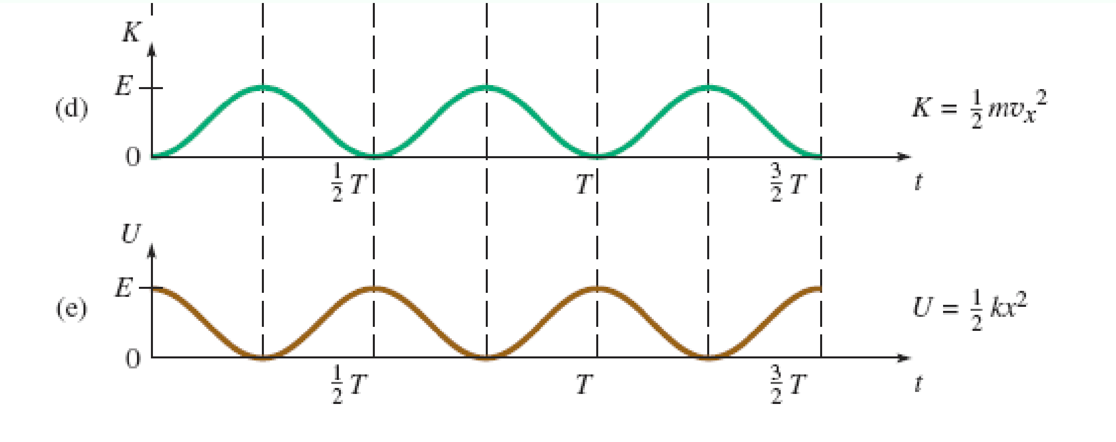
D'altra parte, quando il corpo passa per $x = 0$ dove l'energia potenziale è nulla (molla non estesa né compressa) l'energia cinetica è massima.

L'energia meccanica passa da una forma all'altra con un andamento periodico con periodo pari a π/ω_0 (la metà del periodo dello spostamento).



Considerazioni energetiche

L'energia meccanica passa da una forma all'altra con un andamento periodico con periodo pari a π/ω_0 (la ***metà*** del periodo dello spostamento).



$$E = \frac{1}{2}kx_0^2$$

infatti abbiamo che:

$$U = \frac{1}{2}kx_0^2\left[\cos(\omega_0 t)\right]^2 = \frac{1}{2}kx_0^2\left[\frac{1+\cos(2\omega_0 t)}{2}\right] = \frac{1}{4}kx_0^2\left[1+\cos(2\omega_0 t)\right]$$

$$K = \frac{1}{2}kx_0^2\left[\sin(\omega_0 t)\right]^2 = \frac{1}{2}kx_0^2\left[\frac{1-\cos(2\omega_0 t)}{2}\right] = \frac{1}{4}kx_0^2\left[1-\cos(2\omega_0 t)\right]$$

Considerazioni energetiche

Se le condizioni iniziali fossero invece state tali che il corpo si trovasse in $x = 0$ (molla non estesa) con una certa velocità non nulla v_0,

allora $x(0) = 0$ e $v(0) = v_0$, e quindi

$$x(0) = A\cos\varphi = 0 \qquad v(0) = -A\omega_0 \sin\varphi = v_0$$

$$\boxed{\varphi = -\frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad A = \frac{v_0}{\omega_0}}$$

$$\begin{cases} x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \\ v(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \\ a(t) = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) \\ v(t) = -v_0 \sin(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) \\ a(t) = -v_0\omega_0 \cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

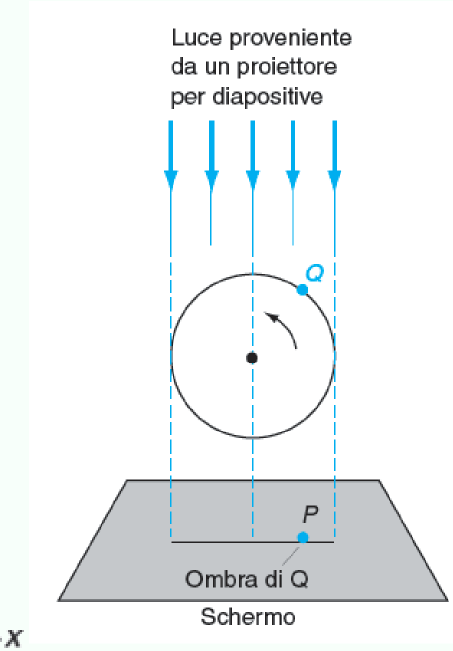
L'energia potenziale è data da: $U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_0^2\left[\cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2})\right]^2$; $\left[\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\right]$

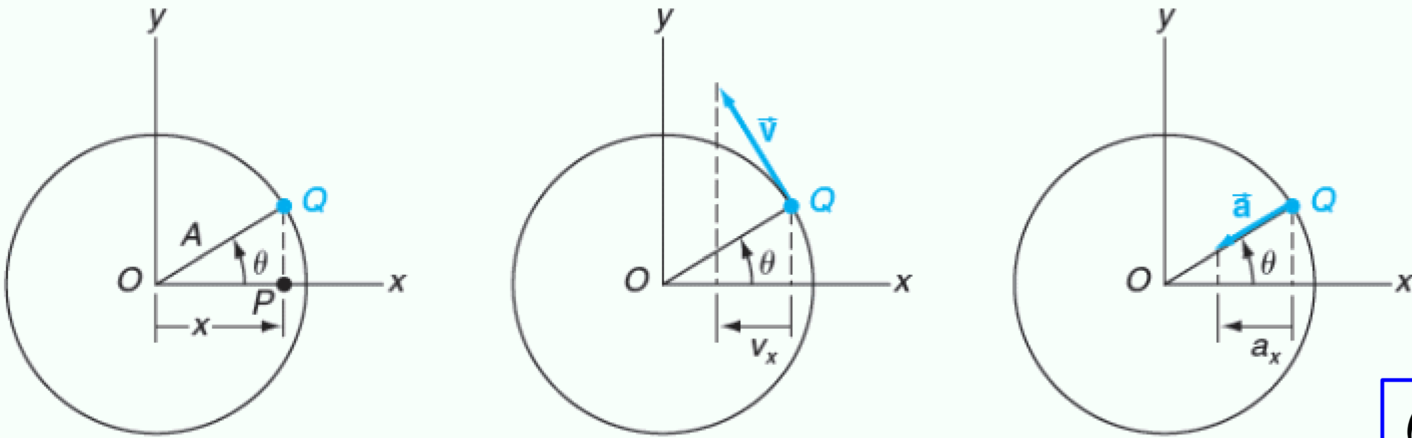
L'energia cinetica è data da: $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2\left[\sin(\omega_0 t - \frac{\pi}{2})\right]^2$

$$\Rightarrow \boxed{E = U + K = \frac{1}{2}mv_0^2}$$

Oscillatore armonico

Il moto armonico può anche essere visto come la proiezione in una componente di un moto circolare uniforme.





(a) (b) (c)

$$\boxed{\theta = \omega t + \phi}$$

$$x(t) = A\cos\theta = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$v_x(t) = v\cos(\theta + \pi/2) = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

$$a_x(t) = a\cos(\theta + \pi) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi)$$

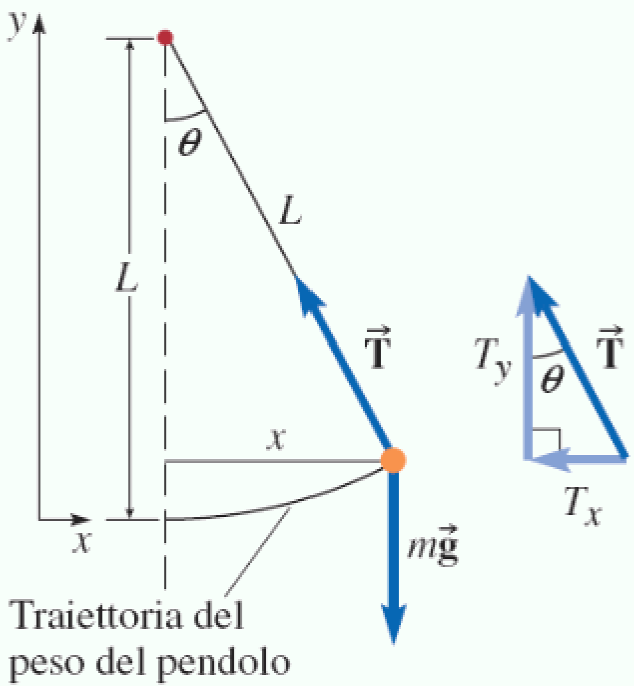
Dinamica di sistemi fisici

- *Introduzione*
- *Equazioni differenziali lineari*
- *Moto in un fluido viscoso*
- *Oscillatore armonico*
  - → *considerazioni energetiche*
  - → *pendolo semplice*
- *Soluzione di equazioni differenziali lineari (facoltativo)*
- *Oscillatore armonico smorzato e forzato (facoltativo)*

Dispense "Modelli della Fisica"

Gettys
Capitolo 14

Pendolo semplice



Un altro esempio la cui soluzione dell'equazione del moto è del tipo visto per l'oscillatore armonico è il **pendolo** nel *regime di piccole oscillazioni*:

Data una massa *m* legata ad una corda tesa inestensibile, di massa trascurabile e lunghezza *L*, l'equazione del moto si risolve notando che *il moto avviene lungo un arco di circonferenza*.

Le forze in gioco sono la tensione della corda e la forza peso. Occorrre scrivere lo spostamento in coordinate polari, $s = L\theta$, dove θ è l'angolo che la corda forma con la verticale.

Equazioni del moto:

$$\begin{cases} -T + mg\cos\theta = -m\dfrac{v^2}{L} & \text{componente radiale} \\ -mg\sin\theta = mL\dfrac{d^2\theta}{dt^2} & \text{componente tangenziale} \end{cases}$$

Pendolo semplice

Consideriamo la <u>*componente tangenziale*</u>: $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$

per *piccoli angoli* si può usare l'espansione in serie di Taylor al primo ordine

$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \ldots$ Già da 30° (0.52 rad) si ha che $\sin\theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \Omega^2\theta = 0} \quad \left[\text{con } \Omega = \sqrt{\frac{g}{L}}\right]$$

La soluzione per le piccole oscillazioni (cioè per $\sin\theta \approx \theta$) sarà del tipo:

$\boxed{\theta(t) = A\cos(\Omega t + \phi)}$ con pulsazione Ω e periodo $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

Si noti che il periodo <u>***non***</u> dipendente dalla massa *m* o dalle condizioni inziali, ma **solo** dalla lunghezza del pendolo**.**

Pendolo semplice

La soluzione per le piccole oscillazioni (cioè per $\sin\theta \approx \theta$) sarà del tipo:

$$\boxed{\theta(t) = A\cos(\Omega t + \phi)}$$

con pulsazione Ω e periodo $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$

La velocità angolare, istante per istante, è: $\dfrac{d\theta}{dt} = \omega(t) = -\Omega A\sin(\Omega t + \phi)$

Le costanti arbitrarie A e ϕ si determinano dalle **condizioni iniziali**:

1) partendo da fermo con una deflessione θ_0 rispetto alla verticale:

$$\begin{cases} \theta_0 = \theta(0) = A\cos\phi \\ 0 = \frac{d\theta(0)}{dt} = -\Omega A\sin\phi \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \theta_0 = A;\ \phi = 0 \ \Rightarrow\ \theta(t) = \theta_0\cos(\Omega t)$$

2) partendo dalla verticale, con velocità non nulla v_0:

$$\begin{cases} 0 = \theta(0) = A\cos\phi \\ \frac{v_0}{L} = \frac{d\theta(0)}{dt} = -\Omega A\sin\phi \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \phi = \frac{\pi}{2};\ A = -\frac{v_0}{\Omega L} \ \Rightarrow\ \theta(t) = \frac{v_0}{\Omega L}\sin(\Omega t)$$