SUPPORTO ALLA DIDATTICA 06/03/2017
PER IL CORSO DI FISICA GENERALE
A INFORMATICA




- Responsabile dell'Attività di supporto: DAVIDE NIGRO (Dottorando in Fisica dell'Università di Pisa)

- Mail di Riferimento: davide.nigro.didattica@gmail.com


(Se avete suggerimenti contattatemi oppure comunicatelo direttamente ai Docenti titolari del corso)

$\longleftrightarrow$

- ARGOMENTI DEL SUPPORTO DI OGGI:
  - → Vettori e Scalari (parte "A")
  - → Cinematica unidimensionale (parte "B")

## PARTE "A": Vettori e Scalari

SCALARI : • oggetti matematici rappresentati univocamente specificando un valore numerico (ESEMPIO DI QUANTITÀ DESCRITTE TRAMITE UNO SCALARE: temperatura, massa di un corpo, volume di un oggetto)

↓

NUMERO REALE

↓

T, m, V...

• hanno un proprio insieme di regole matematiche (operazioni algebriche)

VETTORI: • oggetti matematici che sono più complessi rispetto agli scalari perchè trasportano più informazione; i vettori sono definiti specificando "DIREZIONE", "VERSO" e "MODULO" oppure specificando le "COORDINATE" del vettore in un particolare sistema di Riferimento.
(ESEMPIO DI QUANTITÀ ESPRESSE TRAMITE VETTORI: vettore posizione, vettore velocità, accelerazione ....)

↓

{DIREZIONE, VERSO, MODULO}

$\equiv$

{COORDINATE}

↓

$\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$

$$\boxed{\text{VETTORE} \neq \text{SCALARE}}$$

$$\begin{cases} \vec{r} = \text{vettore posizione (vettore)} \\ r = \text{modulo del vettore posizione (scalare)} \end{cases}$$

$\Downarrow$

RICORDATEVI LA FRECCIA SULLE LETTERE CHE INDICANO VETTORI

PARTE "A" : vettori e scalari

PROBLEMA 1: una formica passeggia sul tavolo della nostra cucina. All'istante $t=0$ si trova in corrispondenza di uno degli angoli del tavolo e ad un certo istante $t^*$ si ferma nel punto P perché ha trovato una briciola di pane.

- Fissato un sistema di riferimento cartesiano con origine ~~ne~~ in corrispondenza del punto da cui è partita la formica (punto "O"), chiamiamo $\vec{r}$ il vettore che localizza il punto P in cui si trova la formica.

DOMANDA 1: Sapendo che le coordinate del punto P in questo sistema di riferimento sono:

$$\begin{cases} x_P = 85 \text{ mm} \\ y_P = 45 \text{ mm} \end{cases} \quad \text{(Si veda la FIGURA 1.)}$$

determinare il modulo del vettore posizione $\vec{r}$.

DOMANDA 2: Determinare la direzione del vettore $\vec{r}$.

DOMANDA 1: il modulo di un vettore, date le sue componenti cartesiane si ottiene applicando il teorema di Pitagora.

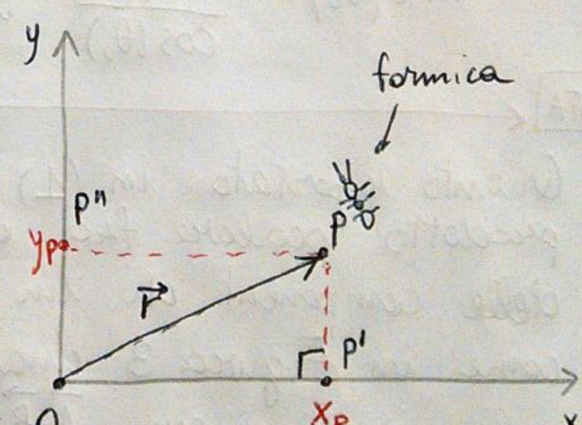


FIGURA 1

Sia P' il punto ottenuto proiettando P sull'asse delle x: per costruzione il triangolo $O\hat{P'}P$ è rettangolo, con cateti $\overline{OP'}$ e $\overline{P'P}$ di lunghezza rispettivamente $x_P = 85$ mm e $y_P = 45$ mm. ~~Ei~~ La lunghezza dell'ipotenusa $\overline{OP}$ corrisponde con il modulo del vettore $\vec{r}$. Abbiamo quindi che: $\boxed{|\vec{r}| = r = \sqrt{x_P^2 + y_P^2} \simeq 96 \text{ mm}}$

DOMANDA 2: per determinare la direzione del vettore posizione $\vec{r}$, è necessario calcolare l'angolo che questo vettore forma con l'asse delle X (è una convenzione).

Come possiamo calcolare questo angolo? Sfruttiamo le relazioni trigonometriche!

Disegnamo nuovamente il triangolo $O\overset{\Delta}{P'}P$ (Figura 2) e indichiamo con $\theta_0$ l'angolo che vogliamo calcolare.

La trigonometria ci insegna che dato $\theta_0$ come in figura:

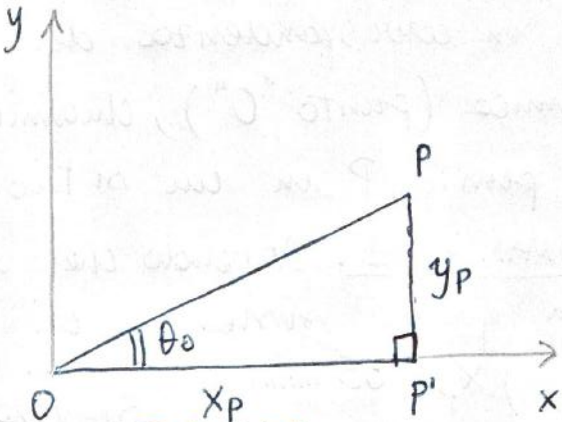


FIGURA 2

$$\begin{cases} |\vec{r}|\cos(\theta_0) = x_P \\ |\vec{r}|\sin\theta_0 = y_P \end{cases} \quad (1)$$

dove "cos" e "sin" sono le funzioni coseno e seno, da cui segue subito che

$$\tan(\theta_0) = \frac{\sin(\theta_0)}{\cos(\theta_0)} = \frac{y_P}{x_P} \Rightarrow \boxed{\theta_0 = \tan^{-1}\left[\frac{y_P}{x_P}\right]}$$

NOTA

Quanto riportato in (1) è coerente con il legame fra prodotto scalare fra due vettori e la definizione delle componenti di un vettore. Dati due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ come in Figura 3 chiamo prodotto scalare fra $\vec{A}$ e $\vec{B}$ e lo indico con $\vec{A}\cdot\vec{B}$:

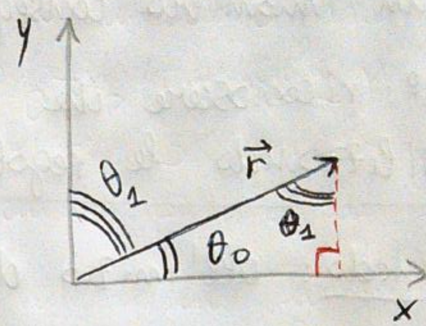
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos(\theta)$$

Figura 3

Le componenti di un vettore $\vec{A}$ rispetto a un sistema di assi cartesiani si ottengono calcolando il prodotto scalare fra il vettore $\vec{A}$ ed i versori degli assi coordinati

Torniamo all'esempio del problema 1 e indico con $\theta_0$ l'angolo che $\vec{r}$ forma con l'asse delle $\hat{x}$ e $\theta_1$ l'angolo che $\vec{r}$ forma con quello delle y (vedi Figura 4):

$$x_P = \vec{r} \cdot \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = \vec{r} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{versore dell'asse} \\ \text{delle } x}}{\hat{x}} = |\vec{r}||\hat{x}|\cos(\theta_0) \underset{\substack{\uparrow \\ |\hat{x}|=1}}{=} |\vec{r}|\cos(\theta_0)$$




$$y_P = \vec{r} \cdot \frac{\vec{y}}{|\vec{y}|} = \vec{r} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{versore} \\ \text{asse } y}}{\hat{y}} = |\vec{r}|\underset{\substack{\uparrow \\ |\hat{y}|=1}}{|\hat{y}|}\cos(\theta_1) \underset{\substack{\uparrow \\ \theta_1 = \frac{\pi}{2} - \theta_0 \Rightarrow \cos(\theta_1) = \sin(\theta_0)}}{=} |\vec{r}|\sin(\theta_0)$$

dove abbiamo usato che i versori hanno modulo unitario ed il fatto che $\theta_1 + \theta_0 = \frac{\pi}{2}$ (90°).

**PROBLEMA 2** Stiamo partecipando ad una caccia al tesoro e ad ognuno dei partecipanti viene consegnata una bussola ed un foglio con le istruzioni da seguire per raggiungere il luogo in cui è nascosta la nostra ricompensa. Le istruzioni che ci sono state consegnate sono le seguenti:

- istruzione 1 ($I_1$): procedere per 3 Km in direzione Nord
- istruzione 2 ($I_2$): procedere per 2 Km in direzione Est
- istruzione 3 ($I_3$): procedere per 1 Km in direzione 45° Sud-Est.

**DOMANDA:** possiamo stabilire dove sia sepolta la nostra ricompensa senza percorrere il cammino prescritto dalle istruzioni $I_1$, $I_2$ ed $I_3$?

La risposta a questa domanda è sì. Per arrivare al posto in cui è stato sepolto il tesoro possiamo procedere in 2 modi:

→ 1º: eseguire le istruzioni che ci sono state fornite in maniera consequenziale; (SIAMO PROPRIO SICURI?)

→ 2º: riconoscere che il percorso possa essere semplificato utilizzando le regole di somma fra vettori

**1º Metodo**: all'inizio della caccia ci troviamo nel punto "O". Costruiamo un sistema di assi cartesiani come in Figura 1 e iniziamo a seguire le istruzioni che ci sono state date. Alla fine ci ritroveremo in corrispondenza del punto P (vedi Figura 1) e avremo percorso 6 Km.

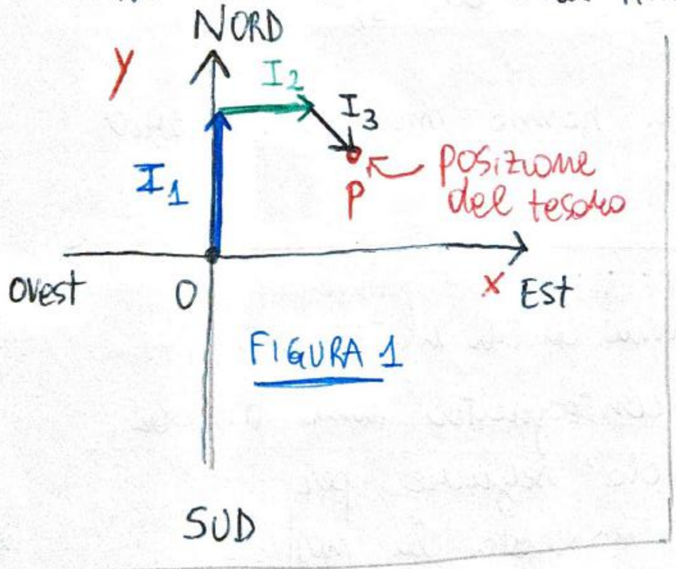



FIGURA 1

**2º Metodo**: riconosciamo subito che ciascuna delle istruzioni corrisponde con un particolare vettore (di cui sappiamo calcolare le coordinate), capiamo che eseguire in serie queste istruzioni equivale a sommare fra loro i vari vettori, quindi calcoliamo direttamente le coordinate del punto P e senza perdere tempo ci dirigiamo direttamente verso il luogo in cui è sepolto la nostra ricompensa.

Per le prime due istruzioni abbiamo che

$$I_1 \longrightarrow \vec{I}_1 = (0\,,\,3\,Km)$$

$$I_2 \longrightarrow \vec{I}_2 = (2\,Km\,,\,0)$$

$I_3 \longrightarrow \vec{I}_3 = (?,?)$. Per trovare le coordinate di questo vettore dobbiamo fare qualche conto. Il vettore $\vec{I}_3$ ha modulo 1 Km ed è inclinato di $45°\ (\frac{\pi}{4})$ sud rispetto all'asse OVEST - EST. La situazione è rappresentata in FIGURA 2. Sfruttiamo quanto riportato nel problema 1 e calcoliamo le coordinate del vettore $\vec{I}_3$:

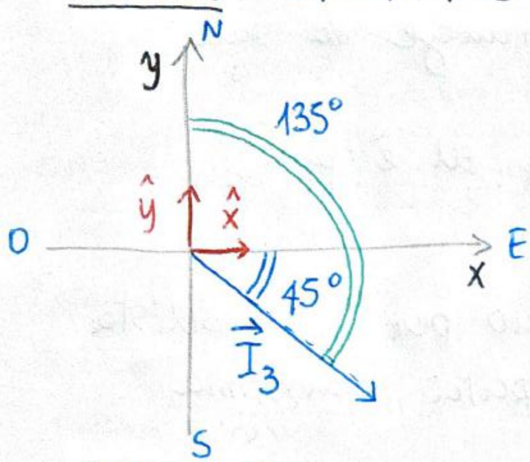


FIGURA 2

$$\begin{cases} (\vec{I}_3)_x \equiv \vec{I}_3 \cdot \hat{x} = |\vec{I}_3| \cdot |\hat{x}| \cos(45°) = |\vec{I}_3| \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ (\vec{I}_3)_y \equiv \vec{I}_3 \cdot \hat{y} = |\vec{I}_3|\,|\hat{y}| \cos(135°) = \\ \quad = |\vec{I}_3|\ 1 \cdot (-1) \cos(45°) = -\frac{|\vec{I}_3|}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Da quanto appena ricavato abbiamo che $(|\vec{I}_3| = 1\ \text{Km})$

$$\vec{I}_3 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{Km}\ ,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{Km} \right)$$

Il vettore $\vec{r}$ che localizza il punto P rispetto al punto di partenza per la caccia al tesoro è quindi:

$$\vec{r} = \left( \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3 \right)$$

di componenti date da

$$\begin{cases} r_x \equiv \vec{r} \cdot \hat{x} = \vec{I}_1 \cdot \hat{x} + \vec{I}_2 \cdot \hat{x} + \vec{I}_3 \cdot \hat{x} = 0 + 2\ \text{Km} + \frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{Km} \\ r_y \equiv \vec{r} \cdot \hat{y} = \vec{I}_1 \cdot \hat{y} + \vec{I}_2 \cdot \hat{y} + \vec{I}_3 \cdot \hat{y} = 3\ \text{Km} + 0 - \frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{Km} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{r} = \left( \frac{2\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\ \text{km},\ \frac{3\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\ \text{Km} \right)}$$

OSS

$|\vec{r}| \approx 3.5$ Km

→ si risparmia a saper sommare vettori!

## PARTE "B": cinematica unidimensionale del punto materiale

Per questa sezione dell'incontro ho preso in considerazione esercizi tratti direttamente dalle vecchie prove in itinere o che molto ci assomigliano.

$\longleftrightarrow$

**PROBLEMA 3** (Recupero 1ª prova in itinere Giugno 2016)

Un ~~(corridore)~~ podista parte da fermo e raggiunge la sua velocità massima di 1.40 m/s.
Se la sua accelerazione è costante ed è pari a 0.34 $m/s^2$,

DOMANDA 1: calcolare il tempo necessario per il podista per raggiungere la sua velocità massima

DOMANDA 2 stabilire quanto spazio abbia percorso dall'istante della sua partenza fino all'istante in cui raggiunge la sua velocità massima.

$\longleftrightarrow$

PRIMA DI FARE QUALSIASI ALTRA COSA

$\rightarrow$ Cosa abbiamo a disposizione? velocità massima

$\boxed{t=0}$ (istante della partenza) $\qquad |\vec{V}_{max}(t)| = 1.40\ m/s$

$$\begin{cases} \vec{x}(t=0) = \vec{0} & \longrightarrow \text{Parte dall'origine degli assi} \\ \vec{V}(t=0) = V(t=0)\,\hat{x} = \vec{0} & \longrightarrow \text{È fermo} \\ \vec{a}(t=0) = \vec{a}(t) = 0.34\,\frac{m}{s^2}\,\hat{x} & \longrightarrow \text{la sua accelerazione è costante} \end{cases}$$

Il fatto che a "t=0" ci siano queste condizioni iniziali determina univocamente la legge oraria per il nostro corridore, cioè la legge:

$$\vec{x}(t) = x(t)\,\hat{x} = \dots$$

Visto che le condizioni iniziali sono

$$\begin{cases} \vec{x}(t=0) = \vec{0} \\ \vec{v}(t=0) = \vec{0} \\ \vec{a}(t=0) = \vec{a}(t>0) = 0.34 \frac{m}{s^2} \hat{x} \end{cases} \Rightarrow$$

La legge oraria sarà quella di un moto uniformemente accelerato lungo la direzione $\hat{x}$

$$\vec{x}(t) = x(t)\hat{x} = \vec{x}(t=0) + \vec{v}(t=0)t + \frac{1}{2}\vec{a}(t)t^2 = \frac{1}{2}\vec{a}(t)t^2 = \frac{1}{2}|\vec{a}(t)|t^2\hat{x}$$

ovvero $\boxed{\vec{x}(t) = x(t)\hat{x} = \frac{1}{2}|\vec{a}(t)|t^2\hat{x}} = \frac{1}{2} \cdot 0.34 \frac{m}{s^2} \cdot t^2 \hat{x}$

Come avete visto a lezione, dalla legge oraria è possibile ricavare l'espressione sia per l'andamento del vettore velocità $\vec{v}(t)$ sia quello per il vettore accelerazione:

$$\begin{cases} \vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{x}(t) \\ \vec{a}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\vec{x}(t) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Questa è la chiave per rispondere alla DOMANDA 1!

DOMANDA 1 Per determinare l'istante $t^*$ a cui il podista raggiunge la sua velocità massima possiamo sfruttare l'equazione per la velocità $\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{x}(t)$ nella sua forma esplicita:

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \cdot 0.34 \frac{m}{s^2}\right)t^2\hat{x} = \frac{1}{2} \cdot 0.34 \frac{m}{s^2} \cdot 2t\hat{x} =$$

$$= 0.34 \frac{m}{s^2} t \hat{x}$$

$\Rightarrow$ Imponendo che $\vec{v}(t^*) = v_{max} \cdot \hat{x} = 0.34 \frac{m}{s^2} t^* \hat{x}$, otteniamo che:

$$1.40 \frac{m}{s} = 0.34 \frac{m}{s^2} t^* \Rightarrow \boxed{t^* = \frac{1.40}{0.34} s} = 4.12 s$$

$\boxed{\text{DOMANDA 2}}$ Il valore ottenuto per $t^*$ può essere usato ora per determinare lo spazio percorso dal podista. Sostituiamo $t^*$ nella legge oraria $\vec{x}(t)$ e proiettiamo sull'asse $\hat{x}$:

$$\vec{x}(t^*) = x(t^*)\hat{x} = \frac{1}{2}\vec{a}(t)(t^*)^2 = \frac{1}{2} \cdot 0.34 \frac{m}{s^2} \times (t^*)^2 \hat{x}$$

$$\Big\downarrow \text{ PROIETTO SU } \hat{x}$$

$$\vec{x}(t^*) \cdot \hat{x} = |\vec{x}(t^*)| = x(t^*) = \frac{1}{2} \cdot 0.34 \frac{m}{s^2} \cdot (4.12)^2 s^2 \underbrace{(\hat{x} \cdot \hat{x})}_{=1}$$

da cui

$$\boxed{x(t^*) = \text{spazio percorso} = 2.89 \text{ m}}$$

$\boxed{\text{PROBLEMA 4}}$ (1ª Prova in Itinere, 5 Aprile 2016)

All'istante in cui il semaforo diventa verde, un'auto parte da ferma con accelerazione costante pari a $3.80 \, m/s^2$. Nello stesso istante un autocarro che viaggia con velocità costante pari a $24 \, m/s$ raggiunge l'auto e la sorpassa.

Determinare:

1. A che distanza l'automobile raggiunge l'autocarro
2. Con quale velocità l'automobile viaggia quando raggiunge l'altro veicolo.

PRIMA DI FARE QUALSIASI ALTRA COSA:

Indichiamo con il pedice "H" le variabili che descrivono la cinematica dell'automobile e con il pedice "F" quelle dell'autocarro.

$\boxed{t=0}$

$$\begin{cases} \vec{x}_M(t=0)=\vec{0} \\ \vec{v}_M(t=0)=\vec{0} \\ \vec{a}_M(t=0)=\vec{a}_M(t>0)=3.80\,\frac{m}{s^2}\,\hat{x} \end{cases} \qquad \begin{aligned} &\vec{x}_F(t=0)=\vec{0} \\ &\vec{v}_F(t=0)=\vec{v}_F(t>0)=24\,\frac{m}{s}\cdot\hat{x} \\ &\vec{a}_F(t=0)=\vec{a}_F(t>0)=\vec{0} \end{aligned}$$

→ I DUE MEZZI SEGUONO DIFFERENTI LEGGI ORARIE

$$\begin{cases} \vec{x}_M(t)=\vec{x}_M(t=0)+\vec{v}_M(t=0)\,t+\frac{1}{2}\vec{a}_M(t)\,t^2=\frac{1}{2}\vec{a}_M(t)\,t^2 \\ \vec{x}_F(t)=\vec{x}_F(t=0)+\vec{v}_F(t=0)\,t+\frac{1}{2}\vec{a}_F(t)\,t^2=\vec{v}_F(t=0)\,t \end{cases}$$

$\Downarrow$

PROIETTO SULL'ASSE DELLE $\hat{x}$ (il moto avviene lungo $\hat{x}$)

$$\begin{cases} \vec{x}_M(t)\cdot\hat{x}=|\vec{x}_M(t)|=\frac{1}{2}\vec{a}_M\cdot\hat{x}\,t^2=\frac{1}{2}|\vec{a}_M|\,t^2 \\ \vec{x}_F(t)\cdot\hat{x}=|\vec{x}_F(t)|=|\vec{v}_F|\,t\,\hat{x}\cdot\hat{x}=|\vec{v}_F|\,t \end{cases}$$

$\boxed{1}$ L'istante $t^*$ a cui le due vetture si affiancano si trova imponendo che lo spazio percorso dai mezzi sia lo stesso cioè:

$$|\vec{x}_M(t^*)|=|\vec{x}_F(t^*)| \Rightarrow |\vec{v}_F|\,t^*=\frac{1}{2}|\vec{a}_M|(t^*)^2$$

Questa equazione ha due soluzioni $t^*_{1,2}$:

$$\begin{cases} t^*_1=0 \rightarrow \text{si incontrano al semaforo} \\ t^*_2\neq 0 \rightarrow \text{si incontrano dopo essere passati per l'incrocio.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{t^*_2=t^*=\frac{2\cdot 24}{3.80}\,s=12.63\,s}$$

2 Per determinare la velocità dell'automobile al tempo $t^*$ è sufficiente derivare una volta rispetto al tempo la legge oraria $\vec{x}_M(t)$:

$$\frac{d}{dt}\vec{x}_M(t) = \vec{v}_M(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\vec{a}_M t^2\right) = \frac{1}{2}\vec{a}_M \frac{d}{dt}t^2 = \vec{a}_M t$$

$$\Rightarrow \vec{v}_M(t^*)\cdot\hat{x} = |\vec{a}_M|\,\hat{x}\cdot\hat{x}\,t^* = |\vec{a}_M(t)|\,t^* \quad \text{ovvero}$$

$$\boxed{|\vec{v}_M(t^*)| = 3.80\,\frac{m}{s^2}\cdot 12.63\,s = 47.99\,\frac{m}{s}}$$

PROBLEMA 5 State saltando su un tappeto elastico e volete stabilire

1. la velocità con cui vi staccate dalla superficie del tappeto
2. Quanto in alto siete arrivati.

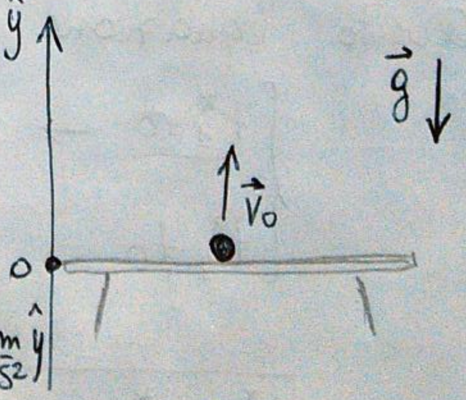
Sapendo che (in base alle vostre misure col cronometro del vostro orologio) impiegate un tempo pari a $t^* = 0.5\,s$ per raggiungere la quota massima.

PRIMA DI FARE QUALSIASI ALTRA COSA:

(Supponendo che il trampolino sia a livello del terreno)

$\boxed{t=0}$

$$\begin{cases} \vec{x}(t=0) = \vec{0} \\ \vec{v}(t=0) = v_0\,\hat{y}, \quad \text{con } v_0>0 \\ \vec{a}(t=0) = \vec{a}(t>0) = \vec{g} = -9.81\,\frac{m}{s^2}\,\hat{y} \end{cases}$$



La legge oraria che segue da queste condizioni iniziali è:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(t=0) + \vec{V}(t=0)t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 =$$ ← sostituisco i valori della pagina precedente

$$= V_0 \hat{y} t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot t^2 \hat{y}$$ (LEGGE ORARIA)

RISPOSTA ALLA DOMANDA 1:

Come per il problema precedente dobbiamo ricavare la relazione fra tempo e velocità:

- $\vec{V}(t) = \frac{d}{dt}\vec{x}(t) \xrightarrow{\text{proietto su } \hat{y}} V(t) = \vec{V}(t) \cdot \hat{y} = \left(\frac{d}{dt}\vec{x}(t)\right) \cdot \hat{y} =$

$$= \left(V_0 \hat{y} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot 2t\, \hat{y}\right) \cdot \hat{y} =$$

$$= V_0 - 9.81 \frac{m}{s^2} t \,.$$

- sfrutto il fatto che al raggiungimento della quota massima (che avviene per $t = t^*$), $\vec{V}(t^*) = \vec{0} \Rightarrow V(t^*) = 0 = V_0 - 9.81 \frac{m}{s^2} t^*$

da cui: $\boxed{V_0 = 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 0.5\, s \simeq 4.90 \frac{m}{s}}$

RISPOSTA ALLA DOMANDA 2:

Per calcolare la quota massima, valuto la legge oraria per $t = t^*$ e la proietto su $\hat{y}$:

$$\vec{x}(t=t^*) \cdot \hat{y} = \boxed{x(t^*)} = V_0 t^* - \frac{1}{2} 9.81 \frac{m}{s^2} (t^*)^2 =$$

$$= \boxed{1{,}22\ m}$$