Forze di contatto

- *Tipologie*
- *Forze di contatto superficiali*
  - → *piano inclinato*
  - → *forze di attrito*
- *Forze vincolari unidimensionali*
  - → *funi, carrucole, guide (tensioni)*
  - → *vincoli 1D in moto*

Gettys
capitolo 6

Forze di contatto

- *Tipologie*
- *Forze di contatto superficiali*
  - → *piano inclinato*
  - → *forze di attrito*
- *Forze vincolari unidimensionali*
  - → *funi, carrucole, guide (tensioni)*
  - → *vincoli 1D in moto*

Gettys
capitolo 6

Quando due corpi macroscopici sono **a contatto**, di solito agiscono delle forze che derivano da interazioni elettromagnetiche microscopiche fra atomi e molecole costituenti la materia.

Forze di contatto legate a **vincoli**:

→ **Vincoli di superfici** (es. forze di attrito, forze normali)

→ **Vincoli unidimensionali** (es. tensioni di corde, funi, fili)

Nota bene:

Le forze vincolari ***non*** vanno confuse col principio di azione e reazione!

tale principio coinvolge forze applicate su corpi diversi:

→ non si combinano in una forza risultante

→ non si elidono a vicenda

Forze di contatto

- *Tipologie*
- *Forze di contatto superficiali*
  - → *piano inclinato*
  - → *forze di attrito*
- *Forze vincolari unidimensionali*
  - → *funi, carrucole, guide (tensioni)*
  - → *vincoli 1D in moto*

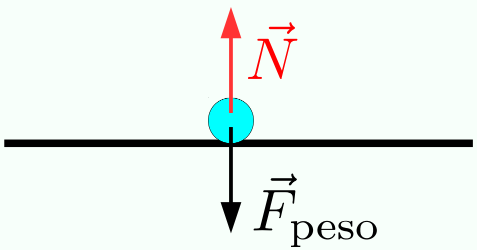
Gettys

capitolo 6

Le forze legate a ***contatti superficiali*** si dividono in:

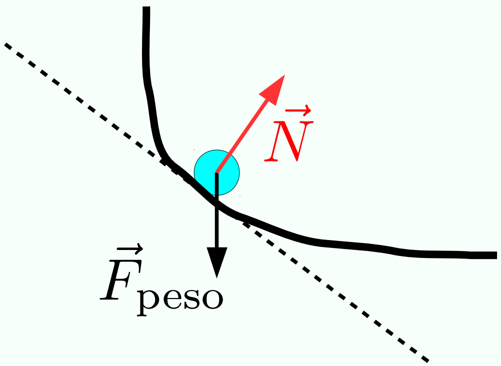
Forze di attrito (statico o dinamico): *parallele alla superficie* di contatto e opposte al moto relativo dei due corpi

Forze normali: *perpendicolari alla superficie* di contatto (impediscono ai corpi di compenetrarsi)



Se la superficie è piana, anche l'accelerazione perpendicolare è nulla, quindi la componente normale della risultante delle forze che agiscono sul corpo è nulla.

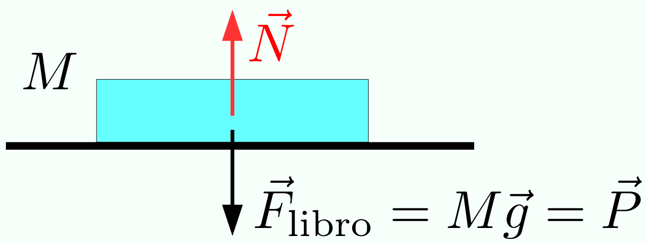
$$\left(\sum_i \vec{F}_i\right)_\perp = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_\perp = 0$$



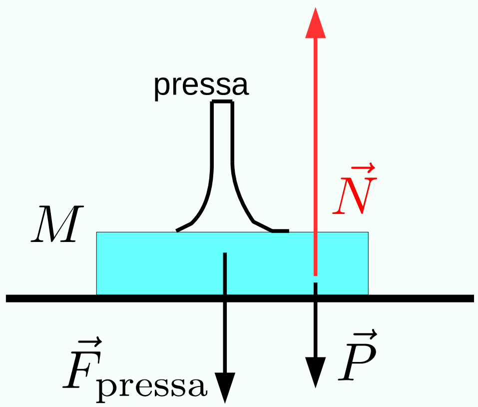
Se la superficie non è piana, l'accelerazione perpendicolare non è più nulla e il moto avviene in due dimensioni.

$$\left(\sum_i \vec{F}_i\right)_\perp \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_\perp \neq 0$$

Consideriamo un oggetto di massa *M* (libro) in quiete su una superficie: *P* forza peso



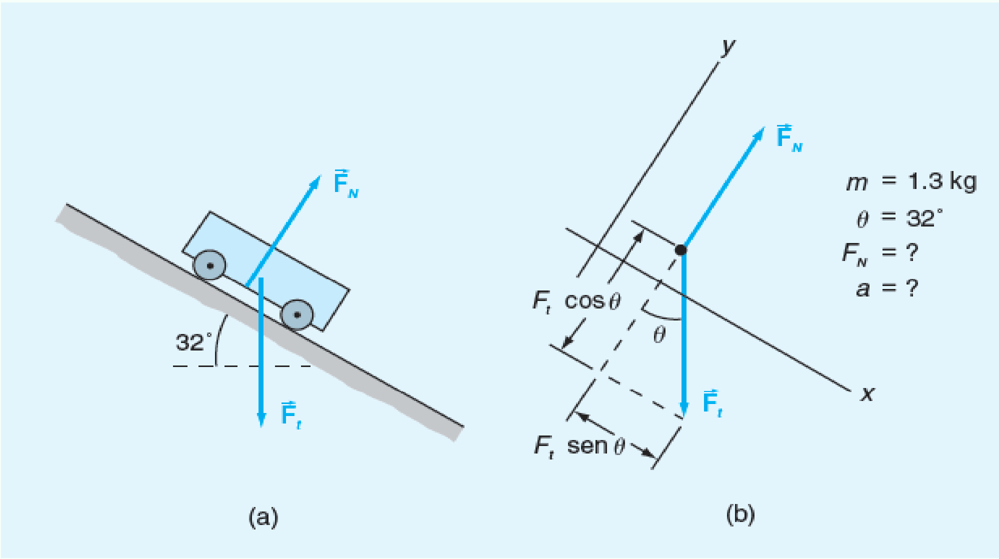
$$\left(\sum_i \vec{F}_i\right) = \vec{P} + \vec{N} = 0 \;\Rightarrow |\vec{N}| = |\vec{P}|$$



Aggiungiamo ora la forza della pressa sul libro…

$$\left(\sum_i \vec{F}_i\right) = \vec{P} + \vec{F}_{\text{pressa}} + \vec{N} = 0$$

$$\Rightarrow |\vec{N}| = |\vec{P}| + |\vec{F}_{\text{pressa}}|$$



Auto in sosta su una salita: quanto è F_N?

$$(F_N - mg\cos\theta)\,\hat{j} = 0$$

Forze di contatto

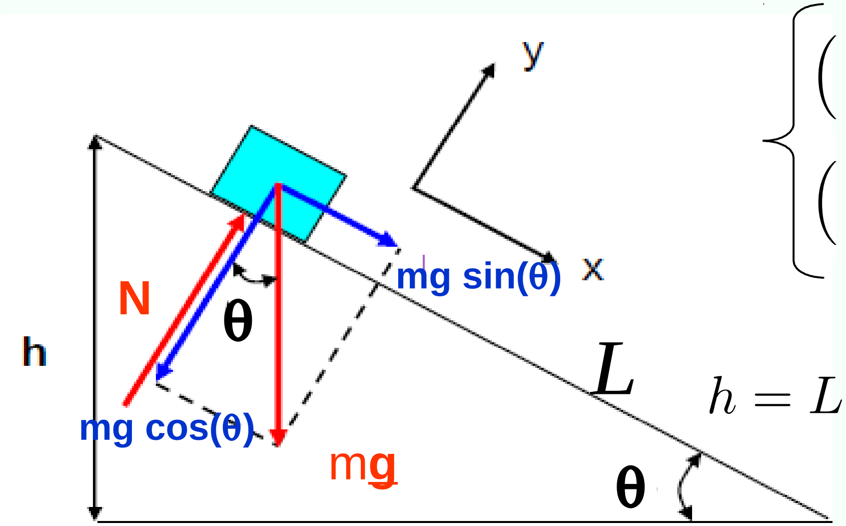
- *Tipologie*
- *Forze di contatto superficiali*
  - → *piano inclinato*
  - → *forze di attrito*
- *Forze vincolari unidimensionali*
  - → *funi, carrucole, guide (tensioni)*
  - → *vincoli 1D in moto*

Gettys

capitolo 6

Piano inclinato liscio

Forze in gioco: forza peso e forza normale del piano.
Scegliamo l'asse x lungo il piano inclinato.



$$\begin{cases} \left(\sum_i \vec{F}_i\right)_x = mg\sin\theta = ma_x \Rightarrow a_x = g\sin\theta = a_0 \\ \left(\sum_i \vec{F}_i\right)_y = N - mg\cos\theta = ma_y = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta \end{cases}$$

$$h = L\sin\theta$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_0 t^2; \quad v = v_0 + a_0 t;$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a_0\left(x - x_0\right)$$

Supponendo $x_0 = 0$, possiamo calcolare la velocità alla fine della rampa e il tempo che impiega ad arrivare alla fine della rampa:

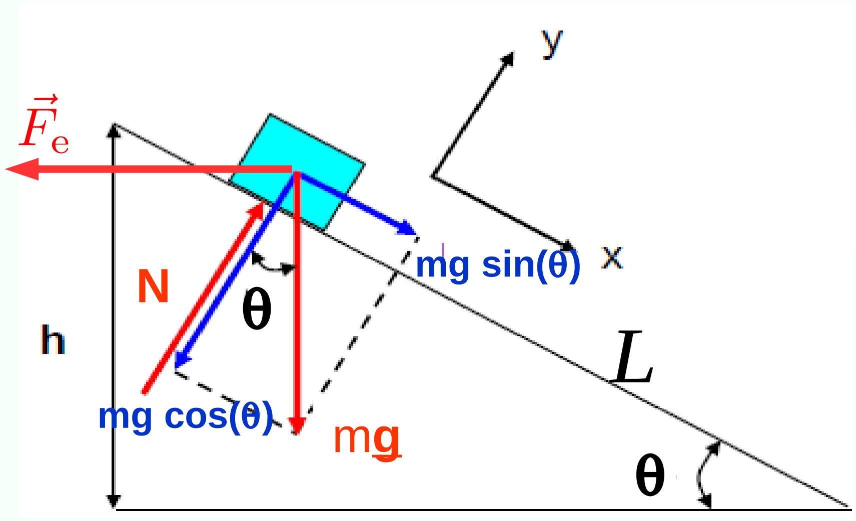
$$L = v_0 t_f + \tfrac{1}{2}a_0 t_f^2; \quad v_f = v_0 + a_0 t_f; \quad v_f^2 - v_0^2 = 2a_0(L - 0)$$

Se il corpo parte da fermo, $v_0 = 0$, si ottiene semplicemente:

$$t_f = \sqrt{\frac{2L}{a_0}} = \sqrt{\frac{2h}{\sin(\theta) g \sin(\theta)}} = \frac{1}{\sin(\theta)}\sqrt{\frac{2h}{g}};$$

$$v_f = g\sin(\theta) t_f = \sqrt{2gh}; \quad v_f^2 = 2a_0 L = 2g\sin(\theta)\frac{h}{\sin(\theta)} = 2gh$$

Esercizio: piano inclinato liscio e forza orizzontale



Un corpo è spinto su per una salita da una forza esterna orizzontale costante. La velocità è costante.

Quanto vale la forza orizzontale?
Quanto vale *N*?

$$\begin{cases} (\Sigma_i F_i)_x = mg\sin\theta - F_e\cos\theta \\ (\Sigma_i F_i)_y = N - mg\cos\theta - F_e\sin\theta \end{cases}$$

siccome per ipotesi il corpo si muove a velocità costante:

$$\Sigma_i \vec{F}_i = 0$$

$$\begin{cases} F_e\cos\theta = mg\,\sin\theta \;\Rightarrow\; \boxed{F_e = mg\,\tan\theta} \\ N - mg\,\cos\theta - mg\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta} = 0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{N = mg\,\cos\theta(1+\tan^2\theta)} \end{cases}$$

Forze di contatto

- *Tipologie*
- *Forze di contatto superficiali*
  - → *piano inclinato*
  - → $\boxed{\textit{forze di attrito}}$
- *Forze vincolari unidimensionali*
  - → *funi, carrucole, guide (tensioni)*
  - → *vincoli 1D in moto*

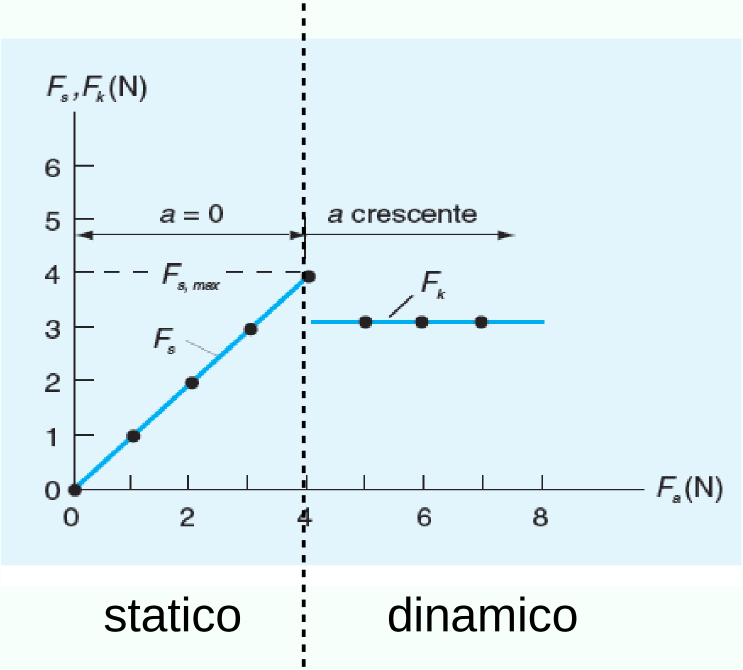
Gettys

capitolo 6

Forze di attrito

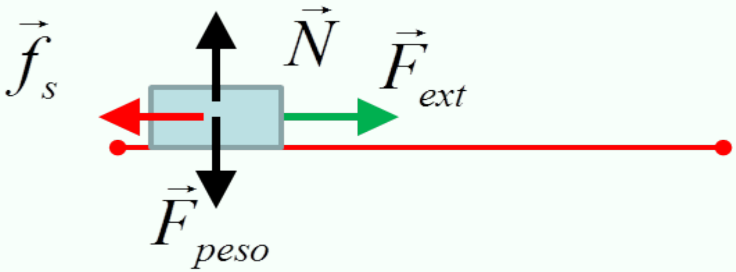
Le forze di attrito sono esercitate *parallelamente alla superficie di contatto*.
Dovute a interazioni elettromagnetiche e legami chimico-fisici microscopici fra le superfici di contatto

Resistono (attrito statico) fino a una certa soglia, poi vi è rottura e scivolamento (attrito dinamico).



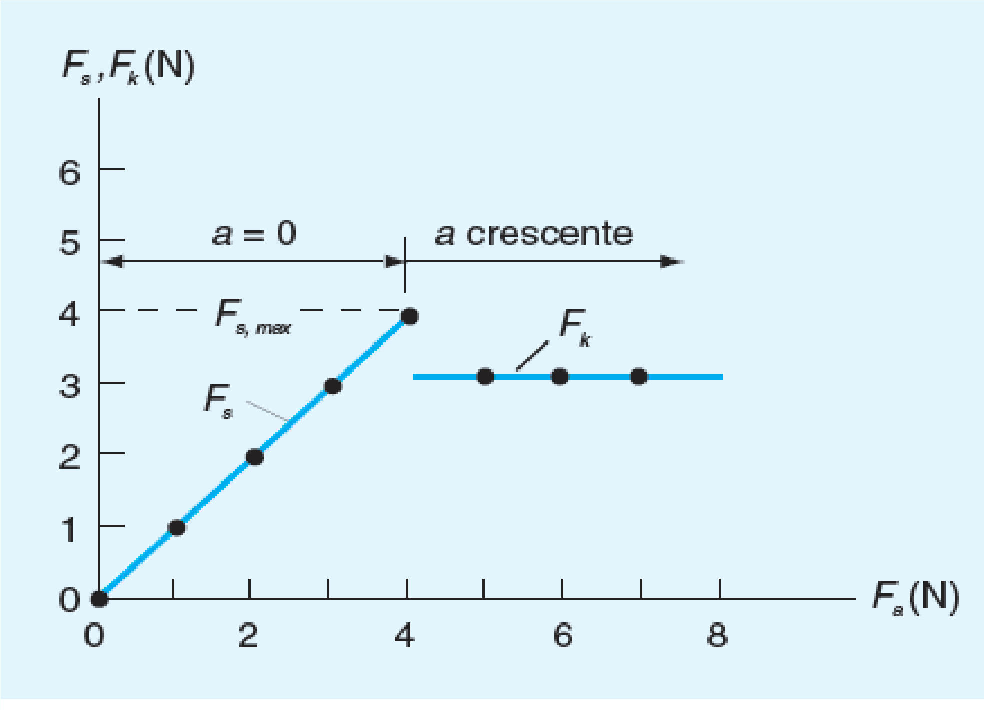
→ Essendo minori le interazioni nel caso dinamico, l'attrito dinamico è inferiore

Esempi di attrito statico:
- auto parcheggiata in salita (attrito statico asfalto/gomme),
- valigia su nastro trasportatore.



L'**attrito statico** si oppone al moto, e ha un'intensità tale che l'accelerazione è nulla: $a_x = 0 \Rightarrow F_{ext} - f_s = 0$

L'attrito è *tangenziale alla superficie*, indipendentemente dalla superficie di contatto, e ha *verso opposto alla forza applicata*.



finchè sta fermo vale $|\vec{f}_s| = |\vec{F}_{\text{ext}}|$

Al massimo può valere: $|\vec{f}_s| \leq \mu_s N$

dove μ_s è il **coefficiente di attrito statico**

Se si supera il valore massimo, il corpo si mette in moto e l'attrito permane come **attrito dinamico**, che ha direzione del moto, verso opposto e modulo:

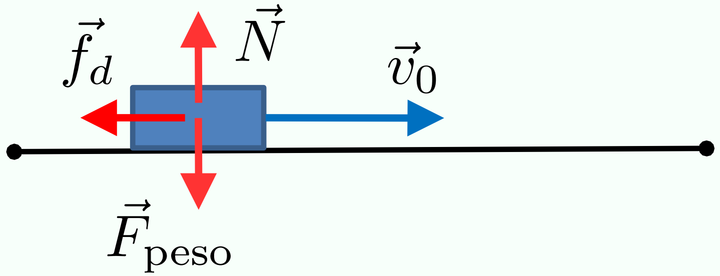
$$|\vec{f}_d| = \mu_d N$$

dove μ_d è il **coefficiente di attrito dinamico.**

$$\boxed{\mu_d \leq \mu_s}$$

Esercizio

Un corpo è lanciato con velocità $\vec{v}_0$ lungo un piano scabro con attrito dinamico μ_d.



Dopo quanto tempo si ferma?
Che tratto percorre prima di fermarsi?

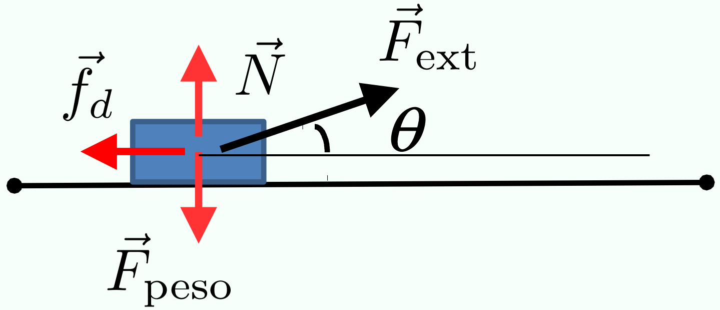
$$\begin{cases} \left(\sum_i \vec{F}_i\right)_y = 0 \;\Rightarrow\; (N - mg) = 0 \;\Rightarrow\; N = mg \\ m\,a_x = \left(\sum_i \vec{F}_i\right)_x = -f_d = -\mu_d N = -\mu_d\, mg \;\Rightarrow\; a_x = -\mu_d\, g \end{cases}$$

$$t_f = \frac{v_0}{-a_x} = \frac{v_0}{\mu_d\, g}$$

$$0 - v_0^2 = 2a_x(x - x_0) = -2\mu_d\, gL \;\Rightarrow\; L = \frac{v_0^2}{2\mu_d\, g}$$

Esercizio

Se volessi mantenere il corpo a velocità costante, che forza esterna dovrei fornire?



Ci vuole meno forza a tirare verso l'alto ($\theta > 0$) o a spingere contro il pavimento ($\theta < 0$)?

$$\begin{cases} \left(\sum_i \vec{F}_i\right)_y = 0 \;\Rightarrow\; (N - mg + F_{\text{ext}}\sin\theta) = 0 \;\Rightarrow\; N = mg - F_{\text{ext}}\sin\theta \\ 0 = \left(\sum_i \vec{F}_i\right)_x = -f_d + F_{\text{ext}}\cos\theta = -\mu_d N + F_{\text{ext}}\cos\theta \end{cases}$$

$$= -\mu_d\, mg + F_{\text{ext}}(\cos\theta + \mu_d \sin\theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{F_{\text{ext}} = \frac{\mu_d mg}{\cos\theta + \mu_d \sin\theta}}$$

Conviene tirare verso l'alto, invece che spingere contro il pavimento.

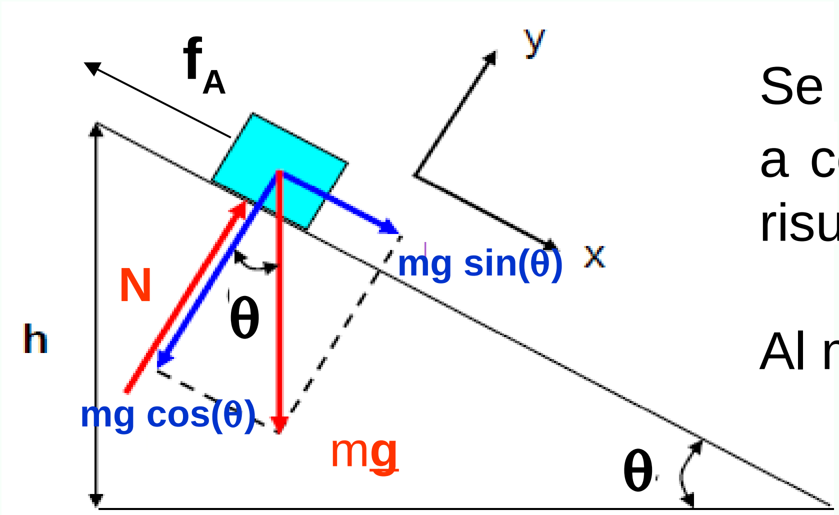
Forze di contatto

- *Tipologie*
- *Forze di contatto superficiali*
  - → *piano inclinato*
  - → *forze di attrito*
- *Forze vincolari unidimensionali*
  - → *funi, carrucole, guide (tensioni)*
  - → *vincoli 1D in moto*

Gettys

capitolo 6

Esempio: piano inclinato con attrito



Se il corpo **non si muove**, significa che $\vec{f}_A$ riesce a controbilanciare le altre forze, in modo che la risultante lungo x sia nulla.

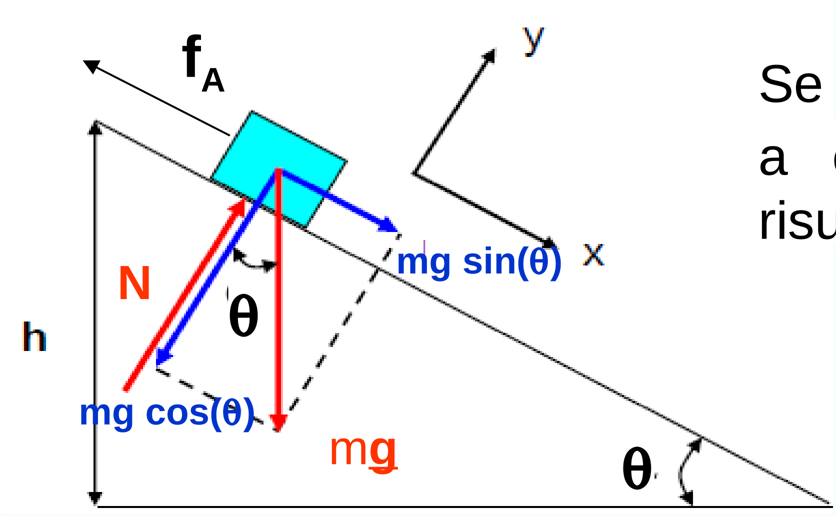
Al massimo: $f_A^{\max} = \mu_s \, N$

$$\begin{cases} 0 = m\,a_y = \left(\sum_i \vec{F}_i\right)_y = N - mg\,\cos\theta \;\Rightarrow\; N = mg\cos\theta \\ 0 = m\,a_x = \left(\sum_i \vec{F}_i\right)_x = -f_A + mg\,\sin\theta \;\Rightarrow\; f_A = mg\sin\theta \end{cases}$$

<u>La pendenza critica</u> θ_c è quell'angolo oltre il quale la forza di attrito statica non riesce a controbilanciare la forza di gravità, quindi quando $\theta > \theta_c$:

$$\left.\begin{aligned} f_A^{\max} &= \mu_s\,N = \mu_s\,mg\,\cos\theta_c \\ f_A^{\max} &= mg\,\sin\theta_c \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu_s = \tan\theta_c}$$

Esempio: piano inclinato con attrito



Se il corpo **si muove**, significa che $\vec{f}_A$ *non* riesce a controbilanciare le altre forze, perciò la risultante lungo x *non* è nulla.

Con attrito dinamico, $f_A = \mu_d N$ ed è diretta in senso contrario al moto, per una discesa :

$$\begin{cases} 0 = m\,a_y = \left(\sum_i \vec{F}_i\right)_y = N - mg\,\cos\theta \;\Rightarrow\; N = mg\cos\theta \\ m\,a_x = \left(\sum_i \vec{F}_i\right)_x = -\mu_d\,N + mg\,\sin\theta = -\mu_d\,mg\,\cos\theta + mg\,\sin\theta \end{cases}$$

$$\boxed{a_x = g(\sin\theta - \mu_d\cos\theta)}$$

Con che velocità arriva alla fine della rampa?
Applico la relazione fra spazio percorso e velocità: $v_f^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$

$$v_f^2 = v_0^2 + 2gh\left[\frac{\sin\theta - \mu_d\cos\theta}{\sin\theta}\right] = v_0^2 + 2gh\left[1 - \frac{\mu_d}{\tan\theta}\right]$$

Dopo quanto tempo arriva a fine rampa?

$$L = v_0 t_f + \tfrac{1}{2}a_0 t_f^2 \;\Rightarrow\; v_0 t_f + \tfrac{1}{2}a_0 t_f^2 - L = 0 = v_0 t_f + \tfrac{1}{2}a_0 t_f^2 - (h/\sin\theta)$$

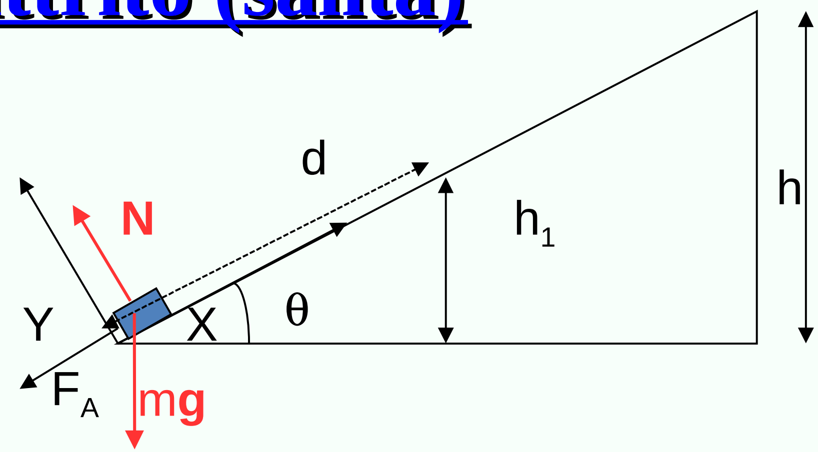
$$t_f = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + \frac{2ha_0}{\sin\theta}}}{a_0} = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2hg\left[1 - \frac{\mu_d}{\tan\theta}\right]}}{g(\sin\theta - \mu_d\cos\theta)}$$

Se parte da fermo ($v_0 = 0$):

$$t_f = \frac{1}{a_0}\sqrt{\frac{2ha_0}{\sin\theta}} = \sqrt{\frac{2L}{g(\sin\theta - \mu_d\cos\theta)}}$$

Esercizio: piano inclinato con attrito (salita)

La situazione è analoga al caso precedente, ma in questo caso le componenti lungo x della forza peso e dell'attrito sono concordi.



$$\begin{cases} 0 = m\,a_y = \left(\sum_i \vec{F}_i\right)_y = N - mg\,\cos\theta \;\Rightarrow\; N = mg\cos\theta \\ m\,a_x = \left(\sum_i \vec{F}_i\right)_x = -\mu_d\,N - mg\,\sin\theta = -\mu_d\,mg\,\cos\theta - mg\,\sin\theta \end{cases}$$

$$\boxed{a_x = -g(\sin\theta + \mu_d\cos\theta)}$$

Sempre applicando le relazioni del moto con accelerazione costante, si può trovare la distanza *d* massima percorsa, la quota h_1 massima raggiunta e l'istante t_f in cui la velocità si annulla. Poi il moto continuerà verso il basso, se $\theta > \theta_c$.

$$0 - v_0^2 = 2a_0 d = \frac{2a_0 h_1}{\sin\theta} \;\Rightarrow\; h_1 = \frac{v_0^2\sin\theta}{2g(\sin\theta + \mu_d\cos\theta)} = \frac{v_0^2}{2g\left[1 + \frac{\mu_d}{\tan\theta}\right]}$$

Esercizio: rampa (senza attrito) + moto parabolico

Il problema si divide in due.

1) Prima si risolve il moto sulla rampa di lunghezza L e altezza h_0, trovando la velocità alla fine della rampa. Alla fine della rampa (punto A) il corpo lascia il piano e continua nel vuoto.

2) a quel punto si risolve il problema considerando il moto sotto l'azione della sola forza peso (moto parabolico) partendo da una quota h_0 e con una velocità iniziale v_A in modulo e diretta con angolo θ.

(1)
$$\begin{cases} ma_y = N - mg\cos\theta = 0 \\ ma_x = -mg\sin\theta \Rightarrow a_x = -g\sin\theta \end{cases}$$

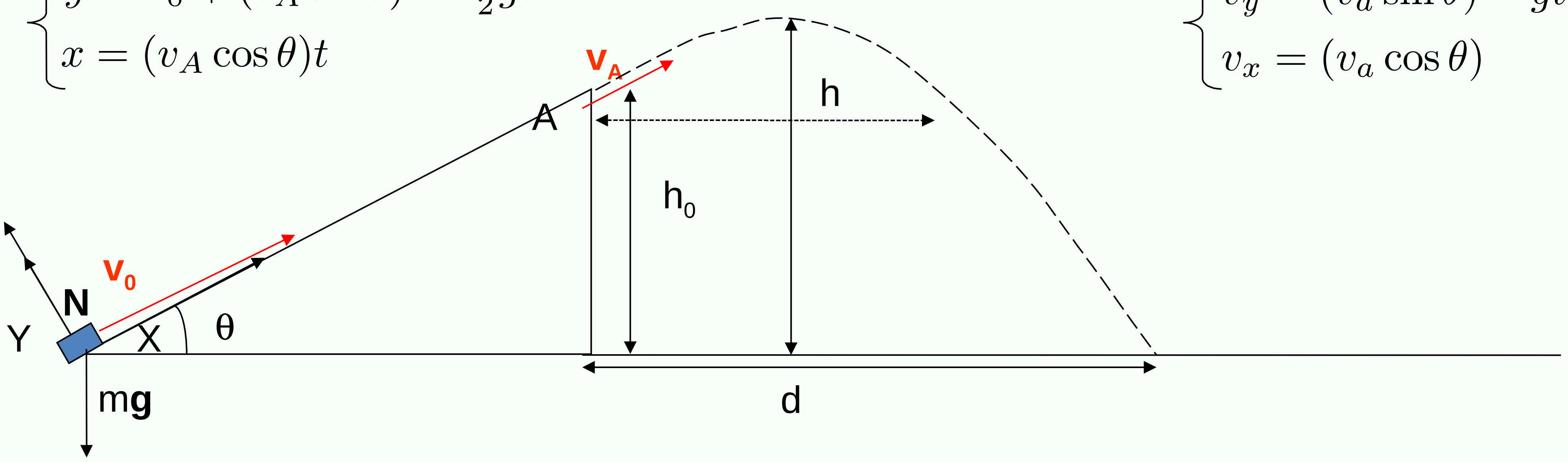
$$v_A^2 - v_0^2 = 2(-g\sin\theta)L$$

$$v_A = \sqrt{v_0^2 - 2gL\sin\theta} = \sqrt{v_0^2 - 2gh_0}$$

$$(h_0 = L\sin\theta)$$

(2)
$$\begin{cases} y = h_0 + (v_A\sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \\ x = (v_A\cos\theta)t \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_y = (v_a\sin\theta) - gt \\ v_x = (v_a\cos\theta) \end{cases}$$



Punto più alto (y max) $$0 = v_y(t_h) = v_A \sin\theta - g t_h \;\Rightarrow\; t_h = \frac{v_A \sin\theta}{g}$$

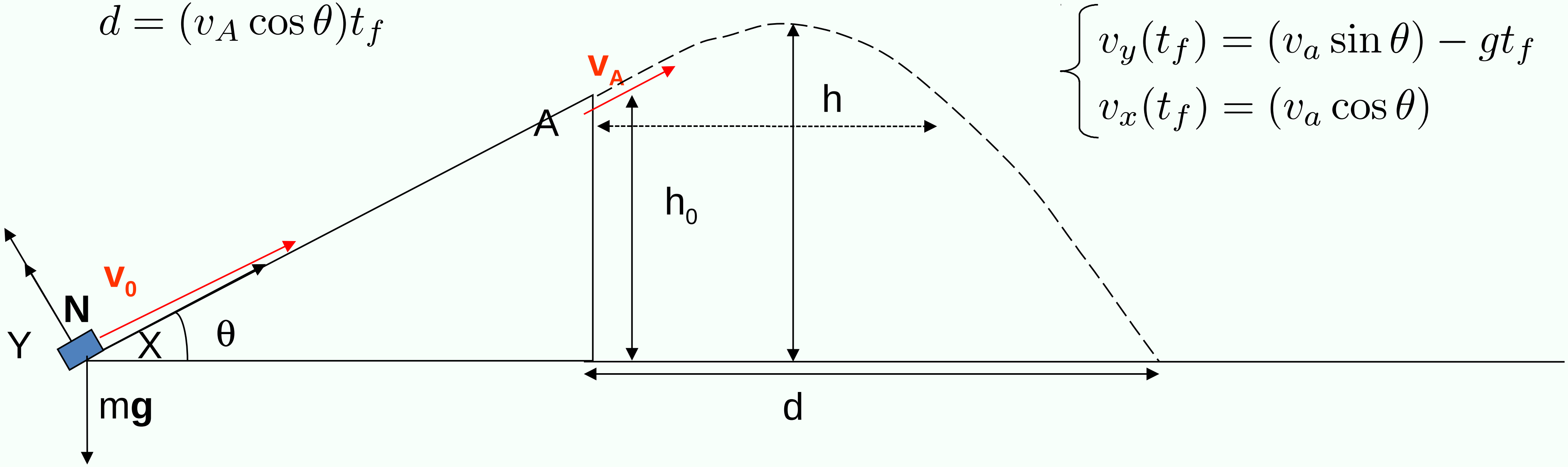
$$y(t_h) = h_0 + \frac{(v_A \sin\theta)^2}{2g}$$

La distanza del punto di impatto dal piede della perpendicolare della fine della rampa (distanza *d* in figura) si calcola considerando l’intersezione della traiettoria *y*(t) con l’asse x (*y*=0), da cui si ottiene il tempo d’impatto t_f. La componente orizzontale della velocità è costante. Per calcolare *d* basta moltiplicare il tempo di impatto per la componente orizzontale della velocità.

$$y(t_f) = h_0 + (v_A \sin\theta) t_f - \tfrac{1}{2} g t_f^2 \;\Rightarrow\; t_f = \frac{v_A \sin\theta + \sqrt{(v_A \sin\theta)^2 + 2 g h_0}}{g}$$

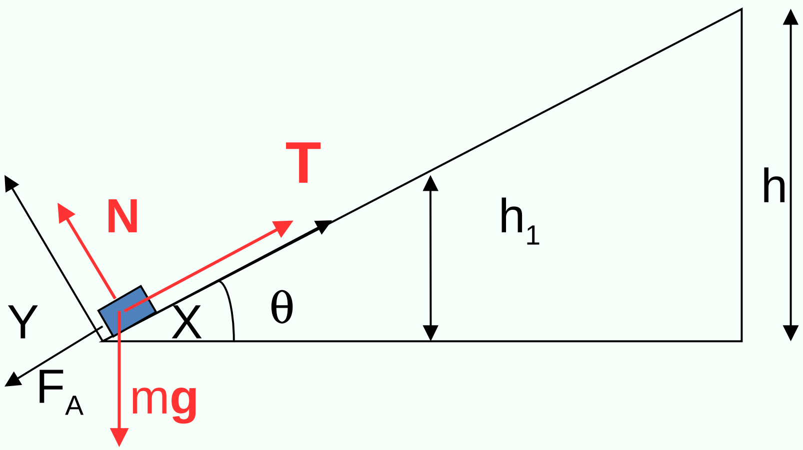
$$d = (v_A \cos\theta) t_f$$

$$\begin{cases} v_y(t_f) = (v_a \sin\theta) - g t_f \\ v_x(t_f) = (v_a \cos\theta) \end{cases}$$



Esercizio: piano inclinato con attrito (salita) + traino

Se su un piano inclinato scabro, un corpo è trascinato con una fune parallela al piano inclinato, a cui è applicata una tensione *T*.
Il corpo risale lungo il piano con un'accelerazione che può essere maggiore o minore di zero.



Il problema è una semplificazione di come funziona uno ***ski-lift***, dove di solito si procede a velocità costante. In questo caso la risultante delle forze deve fare zero.

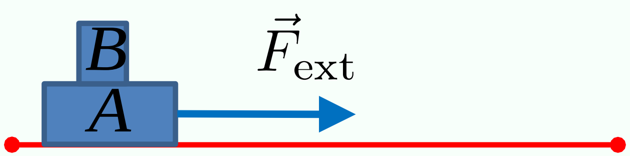
Vediamo qual è la tensione della forza in questo caso.

$$
\begin{cases}
ma_y = \left(\sum_i \vec{F}_i\right)_y = 0 = N - mg\,\cos\theta \\
ma_x = \left(\sum_i \vec{F}_i\right)_x = T - mg\,\sin\theta - \mu_d N = T - mg(\sin\theta + \mu_d\cos\theta)
\end{cases}
$$

$$a_x = 0 \;\Rightarrow\; T = mg(\sin\theta + \mu_d\,\cos\theta)$$

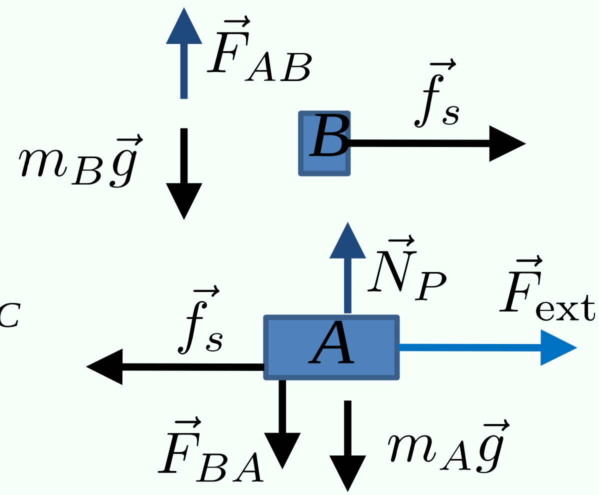
Esercizio: corpi accoppiati con attrito

Il corpo B è appoggiato sopra il corpo A.
Supponiamo che vi sia attrito fra i due corpi, ma **non** fra A e il piano (piano liscio)
Quanto deve valere $\vec{F}_{\text{ext}}$ perché B non scivoli su A?



$$F_{AB} = -F_{BA} = N_C$$

$$f_s \leq \mu_s N_C$$



BLOCCO **A**

$$\begin{cases} 0 = m_A a_y = \left(\sum_i \vec{F}_i\right)_y = -F_{BA} + N_P - m_A\, g \;\Rightarrow\; -N_C + N_P - m_A\, g = 0 \\ m_A a_x = \left(\sum_i \vec{F}_i\right)_x = -f_s + F_{\text{ext}} \;\Rightarrow\; -f_s + F_{\text{ext}} = m_A a_x \end{cases}$$

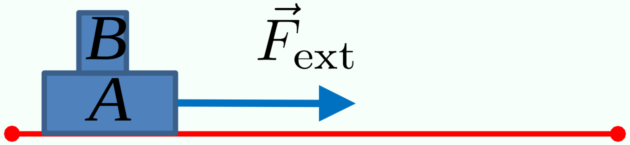
BLOCCO **B**

$$\begin{cases} 0 = m_B a_y = \left(\sum_i \vec{F}_i\right)_y = F_{AB} - m_B g \;\Rightarrow\; N_C = m_B g \\ m_B a_x = \left(\sum_i \vec{F}_i\right)_x = +f_s \;\Rightarrow\; f_s = m_B a_x \end{cases}$$

Esercizio: corpi accoppiati con attrito

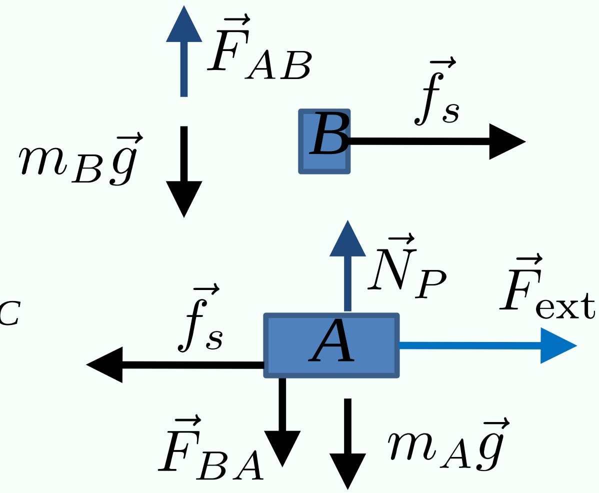
Il corpo B è appoggiato sopra il corpo A.
Supponiamo che vi sia attrito fra i due corpi, ma **non** fra A e il piano (piano liscio)

Quanto deve valere $\vec{F}_{\mathrm{ext}}$ perché B non scivoli su A?



$$F_{AB} = -F_{BA} = N_C$$

$$f_s \le \mu_s N_C$$



BLOCCO **A**

$$\begin{cases} -N_C + N_P - m_A\, g = 0 \\ -f_s + F_{\mathrm{ext}} = m_A a_x \end{cases}$$

$$-m_B g + N_P - m_A g = 0 \;\Rightarrow\; N_P = (m_A + m_B) g$$

$$m_A a_x = -m_B a_x + F_{\mathrm{ext}} \;\Rightarrow\; F_{\mathrm{ext}} = (m_A + m_B) a_x$$

BLOCCO **B**

$$\begin{cases} N_c = m_B g \\ f_s = m_B a_x \end{cases}$$

Affinché il BLOCCO **B** non cada, deve essere: $f_s \le \mu_s m_B\, g$

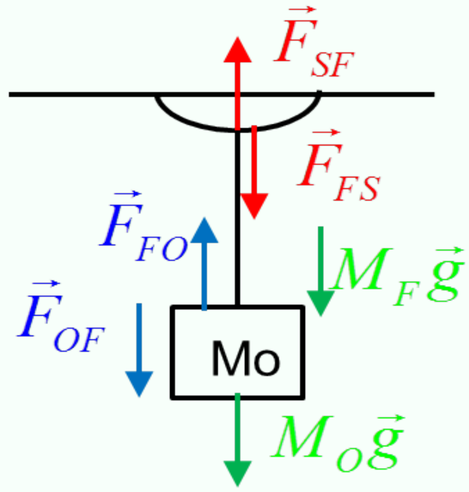
da cui $m_B a_x \le \mu_s m_B g \;\Rightarrow\; \boxed{a_x \le \mu_s g}$

Forze di contatto

- *Tipologie*
- *Forze di contatto superficiali*
  - → *piano inclinato*
  - → *forze di attrito*
- *Forze vincolari unidimensionali*
  - → *funi, carrucole, guide (tensioni)*
  - → *vincoli 1D in moto*

Gettys
capitolo 6

Funi, fili, corde: tensioni



Il soffitto esercita sul filo la stessa forza del corpo appeso.
Da cosa lo si deduce?
Applicando il terzo principio, e le seguenti equazioni:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{OF} + \vec{F}_{SF} + M_F\vec{g} = M_F\vec{a}_F$$ Forze sulla fune

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{FO} + M_O\vec{g} = M_O\vec{a}_O$$ Forze sull'oggetto

Se il filo è "*ideale*", ha massa trascurabile ($M_F \to 0$) ed è inestensibile (la lunghezza è costante, dunque l'accelerazione ai due capi è la stessa: $a_O = a_F$)

Per il 3° principio $$|\vec{F}_{FO}| = |\vec{F}_{OF}|; \quad |\vec{F}_{FS}| = |\vec{F}_{SF}|$$

Forze sulla fune: $$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{OF} + \vec{F}_{SF} = 0 \; \Rightarrow \; |\vec{F}_{OF}| = |\vec{F}_{SF}| = T$$

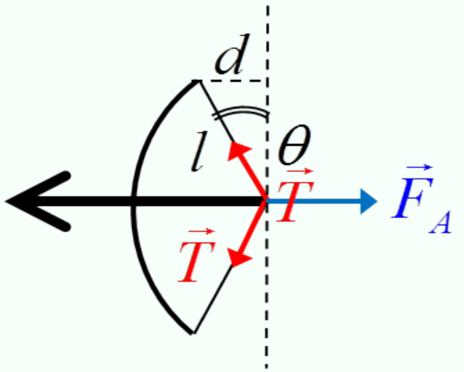
Forze sull'oggetto: $$\sum_i \vec{F}_i = (T - M_O g)\hat{j} = M_O a_O \hat{j}$$

perciò: $a_O = 0 \; \Rightarrow \; T = M_O g$

Quando non ci sono altre forze applicate in una sua qualsiasi parte, una fune (filo, corda, catena, cioè un vincolo rigido unidimensionale) ***ideale*** (cioè *inestensibile e di massa trascurabile*) esercita sui corpi fissati ai suoi estremi due forze che hanno la **direzione della fune**, **stessa intensità** e **versi opposti**.

Esempio: tiro con l'arco e tensione *T*, forza arciere F_A, freccia ferma

$$\sin\theta = \frac{d}{l} \qquad\qquad \sum_i \vec{F}_i = 0$$



Si può calcolare la relazione fra tensione e forza dell'arciere

$$0 = \left(\sum_i F_i\right)_x = F_A - 2T\sin\theta$$

$$\Rightarrow \; T = \frac{F_A}{2\sin\theta} = \frac{F_A l}{2d}$$

$$\theta = 0^\circ \Rightarrow T = 0$$

$$\theta = 90^\circ \Rightarrow T = F_A/2$$

Forze di contatto

- *Tipologie*
- *Forze di contatto superficiali*
  - → *piano inclinato*
  - → *forze di attrito*
- *Forze vincolari unidimensionali*
  - → *funi, carrucole, guide (tensioni)*
  - → *vincoli 1D in moto*

Gettys

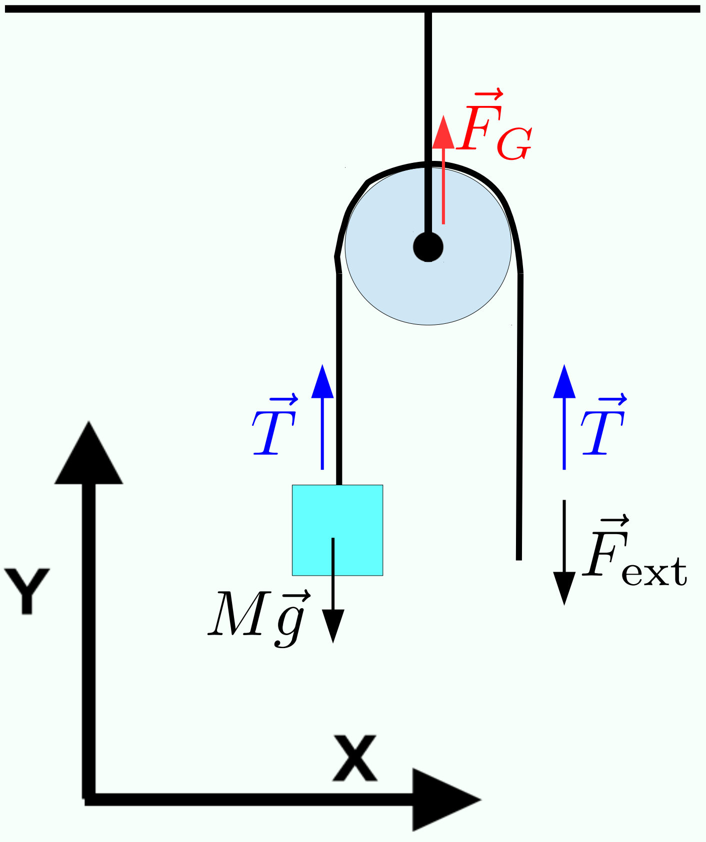
capitolo 6

Carrucole o guide

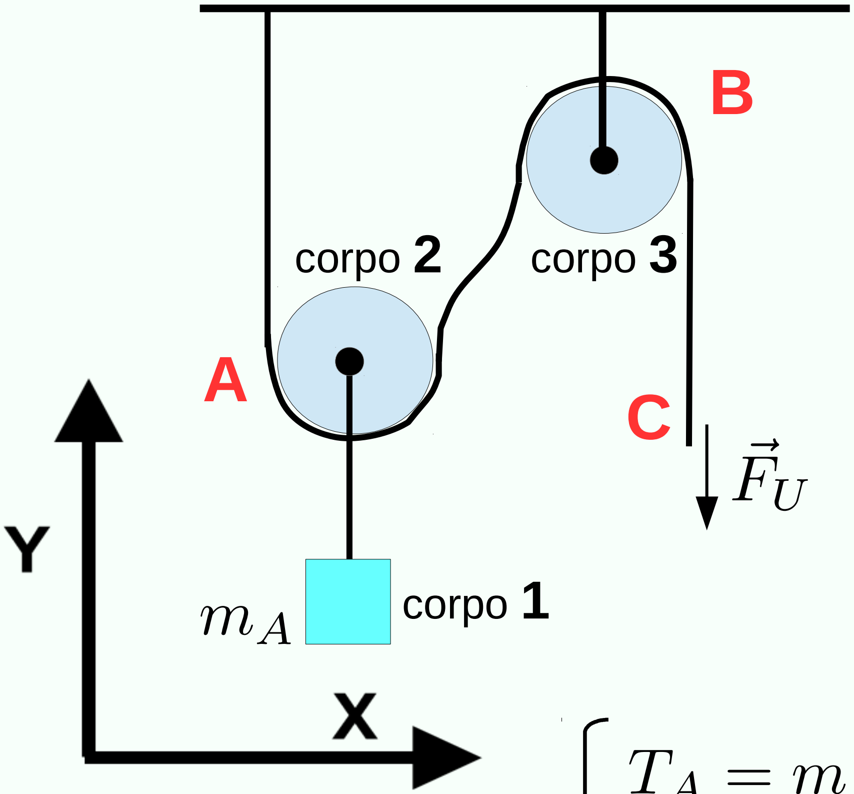
Sono macchine che permettono di cambiare la direzione e/o il verso della forza esercitata da una fune in tensione. La carrucola è "***ideale***" se

1) ha massa trascurabile (la forza peso e quella di inerzia sono trascurabili);
2) ruota senza attrito;
3) le forze che esercita sono sempre perpendicolari alla fune.

$$\begin{cases} F_G - 2T = 0 \\ T - F_{\text{ext}} = 0 \\ T - Mg = Ma \;\Rightarrow\; F_{\text{ext}} - Mg = Ma \end{cases}$$



Sistemi di carrucole in quiete (trazione ortopedica)



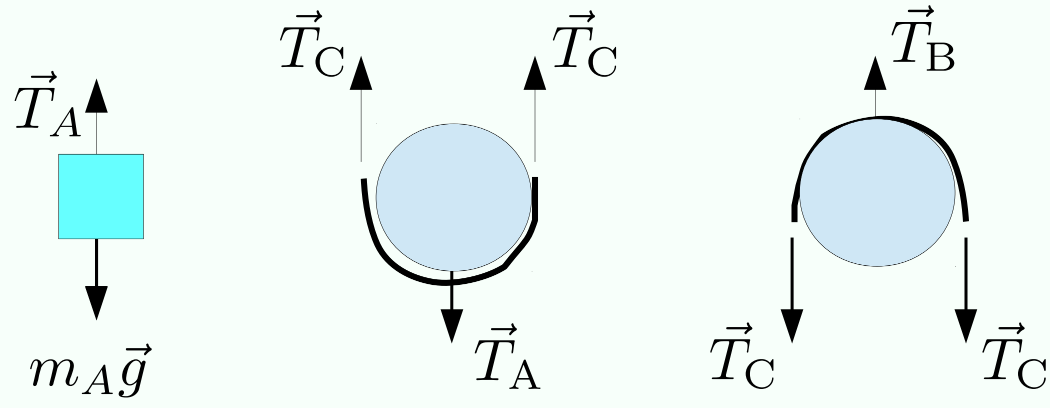


Diagramma delle forze agenti sui tre corpi

$$\begin{cases} T_A = m_A g \\ 2T_C = T_A \;\Rightarrow\; T_C = \frac{1}{2}T_A = \frac{1}{2}m_A g \\ T_B = 2T_C = T_A = m_A g \\ F_U = T_C = \frac{1}{2}m_A g \end{cases}$$

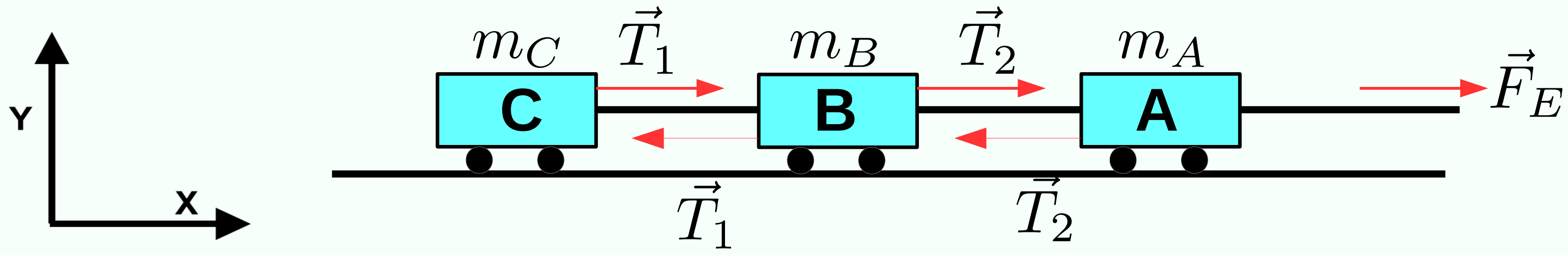
Forze di contatto

- *Tipologie*
- *Forze di contatto superficiali*
  - → *piano inclinato*
  - → *forze di attrito*
- *Forze vincolari unidimensionali*
  - → *funi, carrucole, guide (tensioni)*
  - → *vincoli 1D in moto*

Gettys

capitolo 6

Treno



$$\begin{cases} m_C\, a_x = T_1 \\ m_B\, a_x = -T_1 + T_2 \\ m_A\, a_x = -T_2 + F_E \end{cases}$$

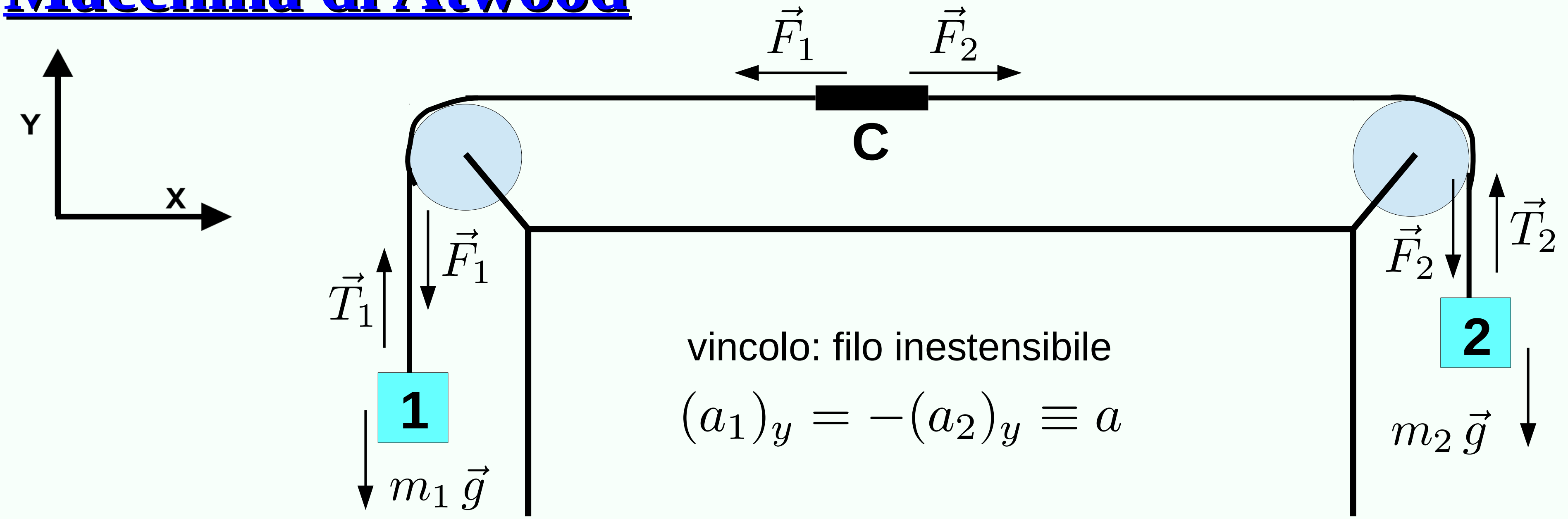
$$(a_C)_x = (a_B)_x = (a_A)_x \equiv a_x$$

$$F_E = (m_A + m_B + m_C) a_x = m_{\text{tot}}\, a_x \;\Rightarrow\; a_x = \frac{F_E}{m_{\text{tot}}}$$

$$T_1 = \frac{m_C}{m_{\text{tot}}} F_E$$

$$T_2 = \frac{m_B}{m_{\text{tot}}} F_E + \frac{m_C}{m_{\text{tot}}} F_E = \frac{m_B + m_C}{m_{\text{tot}}} F_E$$

Macchina di Atwood



vincolo: filo inestensibile

$$(a_1)_y = -(a_2)_y \equiv a$$

T_1 tensione filo su m_1; F_1 forza che m_1 esercita sulla corda

$$\begin{cases} \text{corda} & \sum_i F_i = -F_1 + F_2 = m_C\,a \to 0 \\ \text{corpo 1} & \sum_i F_i = -m_1\,g + T_1 = m_1(a_1)_y \\ \text{corpo 2} & \sum_i F_i = -m_2\,g + T_2 = m_2(a_2)_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_1 = -F_1 = -F_2 = T_2 \\ (a_1)_y = -g + \dfrac{T_1}{m_1} \\ (a_2)_y = -g + \dfrac{T_2}{m_2} \end{cases}$$

Macchina di Atwood

$$(T = T_1 = T_2)$$

$$\begin{cases} -m_1\, g + T = m_1\, (a_1)_y = m_1\, a & (1) \\ -m_2\, g + T = m_2\, (a_2)_y = -m_2\, a & (2) \end{cases}$$

sottraiamo (2) da (1):

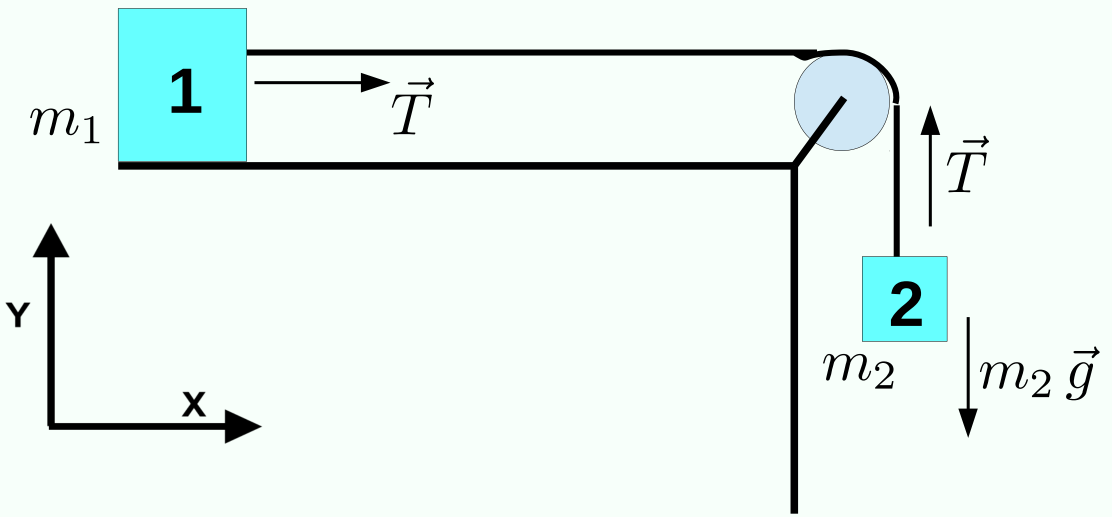
$$(m_2 - m_1)g = (m_1 + m_2)a$$

$$a = g\left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)$$

$$T = m_1(a + g) = g\, \frac{2m_1\, m_2}{(m_1 + m_2)}$$

Esercizio:

Si considerino i seguenti due corpi legati da un filo ideale, uno sul piano e uno nel vuoto. Trovare l'accelerazione e la tensione del filo.



vincolo: filo inestensibile

$$(a_1)_x = -(a_2)_y \equiv a$$

$$\textbf{(1)}\quad \left(\sum_i F_i^{(1)}\right)_x = T = m_1 (a_1)_x = m_1 a$$

$$\textbf{(2)}\quad \left(\sum_i F_i^{(2)}\right)_y = T - m_2\, g = m_2 (a_2)_y = -m_2 a$$

$$m_1\, a - m_2\, g = -m_2\, a$$

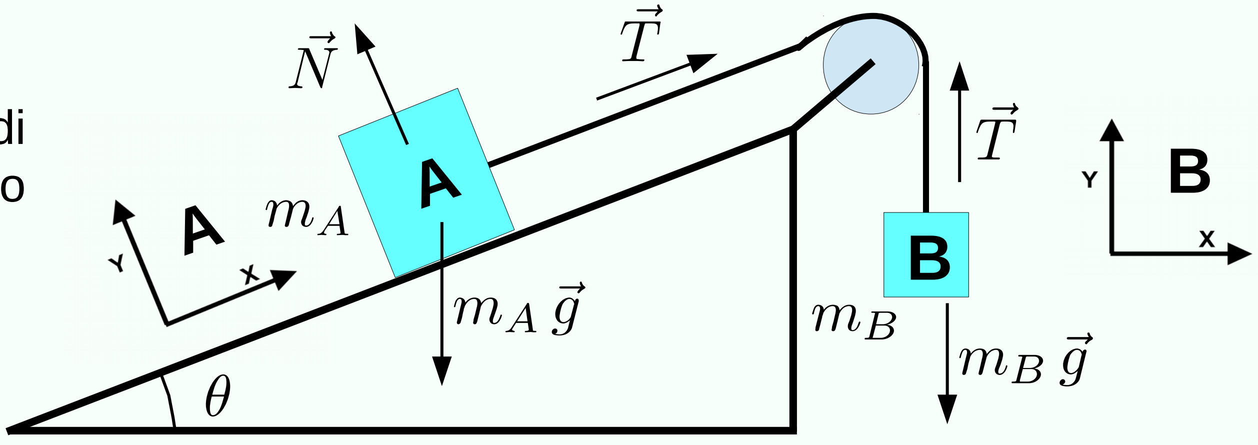
$$\Rightarrow a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g$$

$$\Rightarrow T = \frac{m_1\, m_2}{m_1 + m_2} g$$

Esercizio:

Si considerino due corpi legati da un filo ideale, uno su una rampa inclinata liscia, l'altro appeso in verticale. Trovare l'accelerazione dei corpi e la tensione.

Conviene usare 2 sistemi di riferimento orientati in modo diverso per A e per B:



Filo inestensibile $\Rightarrow$ la tensione *T* è la stessa ai capi del filo. $(a_A)_x = -(a_B)_y \equiv a$

$$\begin{cases} \text{(A)} \quad \left(\sum_i F_i^{(A)}\right)_x = T - m_A\, g \sin\theta = m_A (a_A)_x = m_A\, a \\ \text{(B)} \quad \left(\sum_i F_i^{(B)}\right)_y = T - m_B\, g = m_B (a_B)_y = -m_B a \end{cases}$$

Esercizio:

$$
\begin{cases}
\textbf{(A)}\quad \Sigma_i F_{ix}^{(A)} = T - m_A\, g \sin\theta = m_A (a_A)_x = m_A\, a \\
\textbf{(B)}\quad \Sigma_i F_{i_y}^{(B)} = T - m_B\, g = m_B (a_B)_y = -m_B a
\end{cases}
$$

sottraggo **(B)** da **(A)**, membro a membro

$$(T - m_A\, g \sin\theta) - (T - m_B\, g) = m_A\, a - (-m_B\, a)$$

$$-m_A\, g \sin\theta + m_B\, g = m_A\, a + m_B\, a$$

$$a = g \frac{m_B - m_A \sin\theta}{m_A + m_B}$$

sostituisco l'espressione trovata al posto di a nella seconda equazione (quella di **B**)

$$T = m_B\, g - m_B\, a = m_B (g - a) = m_B\, g \left[1 - \frac{m_B - m_A \sin\theta}{m_A + m_B}\right]$$

$$= m_B\, g \left[\frac{m_A + m_B - m_B + m_A \sin\theta}{m_A + m_B}\right] = g \frac{m_A\, m_B (1 + \sin\theta)}{m_A + m_B}$$