Conservazione dell'energia

- *Legge di conservazione dell'energia*
  - → *forze conservative*
  - → *forze non conservative*
- *Energia potenziale*
  - → *teorema dell'energia generalizzato*
  - → *energia potenziale elastica*
  - → *energia potenziale gravitazionale*

Gettys

Capitolo 9

Conservazione dell'energia

- *Legge di conservazione dell'energia*
  - → *forze conservative*
  - → *forze non conservative*
- *Energia potenziale*
  - → *teorema dell'energia generalizzato*
  - → *energia potenziale elastica*
  - → *energia potenziale gravitazionale*

Gettys

Capitolo 9

Si dice che una grandezza **si conserva** quando il suo valore non varia nel tempo, cioè è una costante. Se in un sistema l'energia si conserva, la quantità totale di energia rimane costante, anche se può cambiare forma o tipo.

L'***energia meccanica*** si può dividere in due tipi:

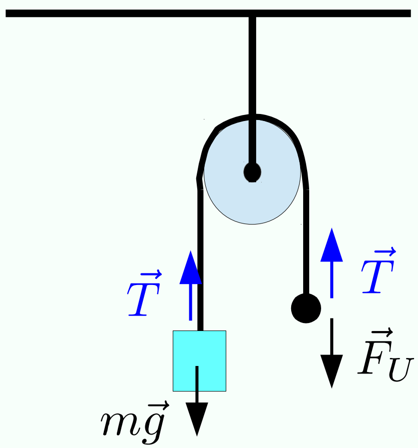
1) **Energia cinetica** (traslazionale o rotazionale);
2) **Energia potenziale**, immagazzinata in un campo di forze (elettromagnetiche, elastiche, gravitazionali) o in un sistema di interazioni.

Vi sono poi altre forme di energia (chimica, nucleare, termica – legata alle vibrazioni di molecole in un reticolo o alla velocità del centro di massa dei gas)

Esempio: quando un uomo solleva un grave a velocità costante con una carrucola, l'energia passa dall'uomo (energia chimica dei muscoli) ad energia potenziale gravitazionale:

$$L_T = \vec{T} \cdot \vec{s} = Th; \quad T - mg = 0 \Rightarrow L_{\text{peso}} = -mgh$$

$$L_U = L_T; \quad \boxed{L_U + L_{\text{peso}} = 0}$$



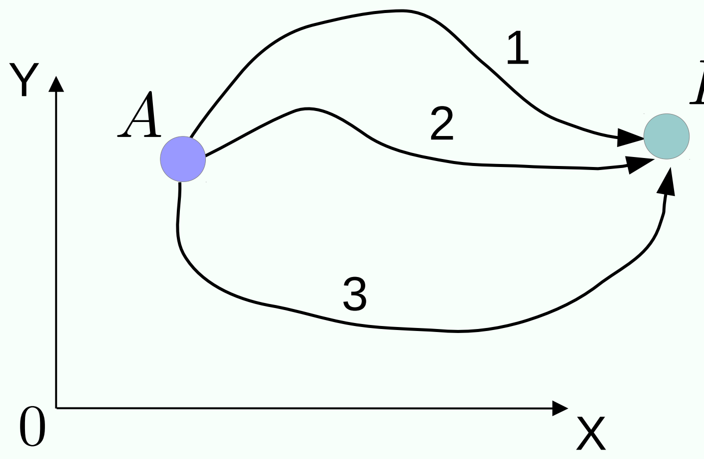
Conservazione dell’energia

- *Legge di conservazione dell’energia*
  - → *forze conservative*
  - → *forze non conservative*
- *Energia potenziale*
  - → *teorema dell’energia generalizzato*
  - → *energia potenziale elastica*
  - → *energia potenziale gravitazionale*

Gettys
Capitolo 9

Alcune forze presentano una caratteristica peculiare. Sono quelle per le quali *il lavoro non dipende dal percorso, ma **solo** dalla posizione iniziale e finale.*

In altri termini, per queste forze se il corpo percorre un cammino chiuso sotto l'azione della forza, allora il lavoro totale compiuto è ***nullo***.



$$L^{(1)}_{A\to B} = L^{(2)}_{A\to B} = L^{(3)}_{A\to B}$$

$$\boxed{L^{(1)}_{A\to B} + L^{(2)}_{B\to A} = 0}$$

→ il lavoro durante il percorso di andata è uguale e contrario a quello di ritorno

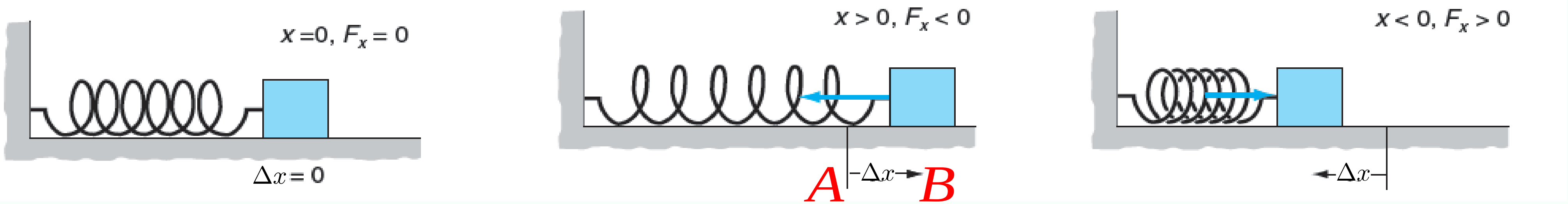
Queste forze si dicono ***conservative***.

Esempi: forze elastiche, forza di gravità, forze elettromagnetiche.

Esempi:

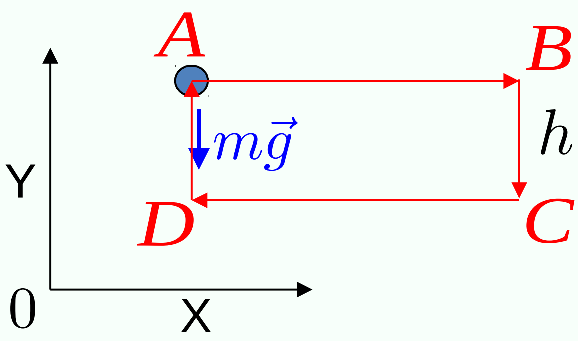
1) La forza elastica è *conservativa*:

$$L_{ABBA} = L_{AB} + L_{BA} = -\frac{1}{2}k\Delta x^2 + \frac{1}{2}k\Delta x^2 = 0$$



2) La forza peso è *conservativa*:

$$L_{\text{peso}} = -mg(y_f - y_i)$$



$$L_{ABCDA} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} + L_{DA} = 0 + mgh + 0 - mgh = 0$$

Conservazione dell’energia

- *Legge di conservazione dell’energia*
  - → *forze conservative*
  - → *forze non conservative*
- *Energia potenziale*
  - → *teorema dell’energia generalizzato*
  - → *energia potenziale elastica*
  - → *energia potenziale gravitazionale*

Gettys

Capitolo 9

3) La forza d'attrito ***non*** *è conservativa*:

$$L_{ABBA} = L_{AB} + L_{BA}$$
$$= -\mu_d mgd - \mu_d mgd = -2\mu_d mgd$$

L'energia dissipata dalla forza attrito tipicamente si trasforma in *energia termica*

(esempio: un corpo con velocità v_0 che si ferma per attrito)

$$L_{\text{attrito}} = -f_d\, d = -\mu_d mgd$$

$$\Delta K = 0 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -\mu_d mgd; \qquad \boxed{d = \frac{v_0^2}{2\mu_d g}}$$

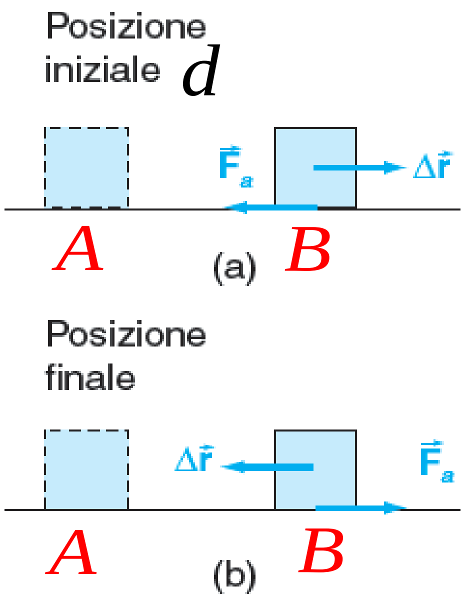


Figura 9.2
La forza d'attrito compie un lavoro negativo in entrambe le parti di un percorso di andata e ritorno. Il lavoro per l'intero percorso di andata e ritorno non è nullo.

Conservazione dell’energia

- *Legge di conservazione dell’energia*

  → *forze conservative*

  → *forze non conservative*

- *Energia potenziale*

  → *teorema dell’energia generalizzato*

  → *energia potenziale elastica*

  → *energia potenziale gravitazionale*

Gettys

Capitolo 9

Se su un corpo compiono lavoro ***solo*** forze conservative, il sistema (cioè tutto ciò con cui il corpo interagisce) è detto ***conservativo***.

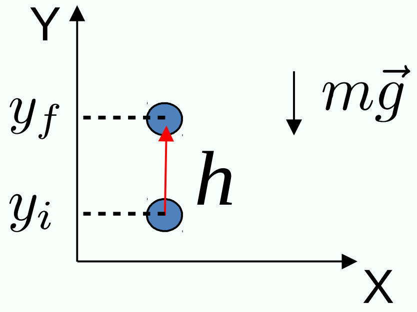
Si definisce l'energia potenziale *U* in un sistema di forze conservative:

la variazione di energia potenziale $\Delta U = U_f - U_i$ dovuta ad una forza conservativa è l'opposto del lavoro fatto dalla forza conservativa: $\boxed{\Delta U = -L_{\text{forze\_conservative}}}$

Esempi:

Forza in una dimensione: $\Delta U = -L = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x)\,dx$

Forza peso ed energia gravitazionale: è come se si immagazzinasse energia nell'alzare la quota



$$L_{\text{peso}} = -mg(y_f - y_i)$$

$$\Delta U = mg(y_f - y_i) = mgh$$

U è sempre definita a meno di una costante additiva.

Esempio: fissiamo $U = 0$ per $y = 0 \Rightarrow U = mgy$; $\Delta U = mgh$, dove h è la differenza di quota

Per una forza conservativa, se il corpo percorre un cammino chiuso sotto la sua azione, allora il lavoro totale compiuto è ***nullo***:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Definizione di energia potenziale data prima:

$$\boxed{\Delta U =} U_f - U_i = \boxed{-\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

$$\vec{F}(x,y,z)$$

$$\Updownarrow$$

$$U(x,y,z)$$

Percorso inverso:

la ***forza*** lungo una direzione è data dal ***gradiente*** (detto anche derivata direzionale) ***dell'energia potenziale***

$$\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla} U}$$

cioè: $F_x = -\dfrac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}; \; F_y = -\dfrac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}; \; F_z = -\dfrac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}$

Conservazione dell’energia

- *Legge di conservazione dell’energia*
  - → *forze conservative*
  - → *forze non conservative*
- *Energia potenziale*
  - → *teorema dell’energia generalizzato*
  - → *energia potenziale elastica*
  - → *energia potenziale gravitazionale*

Gettys

Capitolo 9

Conservazione dell’energia meccanica: In sistemi conservativi, la somma di energia cinetica ed energia potenziale (energia meccanica *E*) è una costante.

$$E = K + U = \text{cost.} \Longleftrightarrow \Delta E = 0$$

$$\Delta K + \Delta U = 0 \Longleftrightarrow \Delta K = -\Delta U = L_{\text{forze\_conservative}}$$

E è un’energia “buona”: può essere completamente trasformata in energia cinetica

---

Teorema dell’energia generalizzato: In un sistema dove sono presenti **forze conservative**, **vincoli** e **forze non conservative**, la variazione di energia meccanica è uguale al lavoro fatto dalle forze non conservative.

$$\Delta(U + K) = L_{FNC} + L_{vincoli} = L_{FNC}$$

Lavoro ed energia interna: L’energia totale di un sistema isolato (cioè in assenza di forze esterne) si conserva.

L’energia interna si può trasformare in energia meccanica.

Relazione generale
fra energia potenziale, lavoro e forza conservativa

$$\vec{F}(x,y,z) \iff U(x,y,z)$$

$$\Delta U = U_f - U_i = -L(\vec{r}_i, \vec{r}_f) = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U \qquad \left(F_x = -\frac{\partial U}{\partial x};\ F_y = -\frac{\partial U}{\partial y};\ F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \right)$$

Conservazione dell'energia

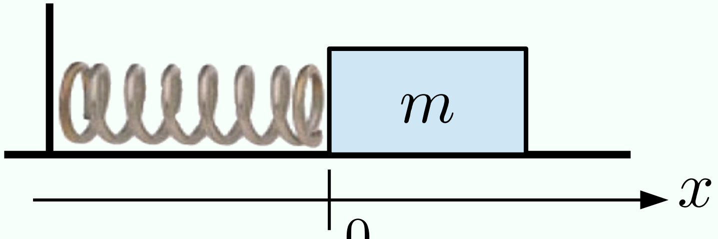
- *Legge di conservazione dell'energia*
  - → *forze conservative*
  - → *forze non conservative*
- *Energia potenziale*
  - → *teorema dell'energia generalizzato*
  - → *energia potenziale elastica*
  - → *energia potenziale gravitazionale*

Gettys

Capitolo 9

Energia potenziale elastica

Poniamo l'origine dell'asse x nella lunghezza a riposo della molla

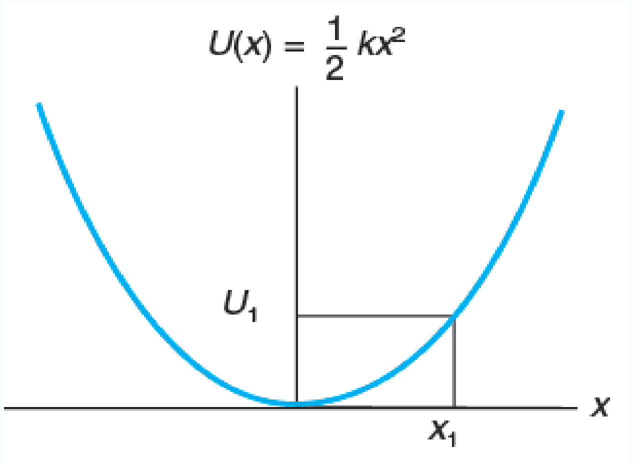


forza elastica: $F_x(x) = -kx$

lavoro: $L = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x)\,dx = -\frac{k}{2}(x_f^2 - x_i^2)$

energia potenziale: $U_f - U_i = -L = \frac{k}{2}(x_f^2 - x_i^2)$

fissiamo $U(0) = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{U(x) = \frac{1}{2}kx^2}$

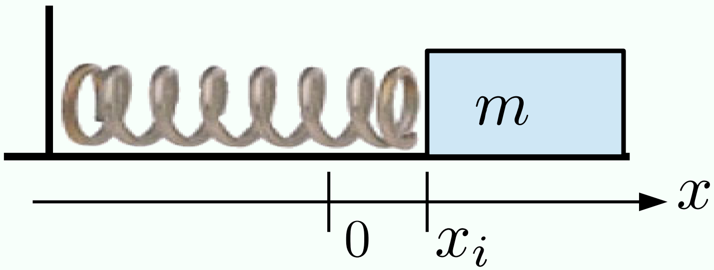


$$U + K = U_i + K_i = U_f + K_f = \text{cost.}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}kx_i^2 + \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}kx_f^2 + \frac{1}{2}mv_f^2$$

Conservazione dell'energia meccanica:

$$\tfrac{1}{2}kx_i^2 + \tfrac{1}{2}mv_i^2 = \tfrac{1}{2}kx_f^2 + \tfrac{1}{2}mv_f^2$$



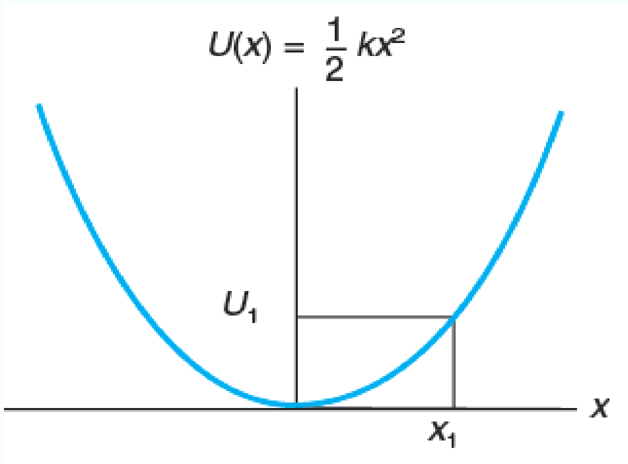
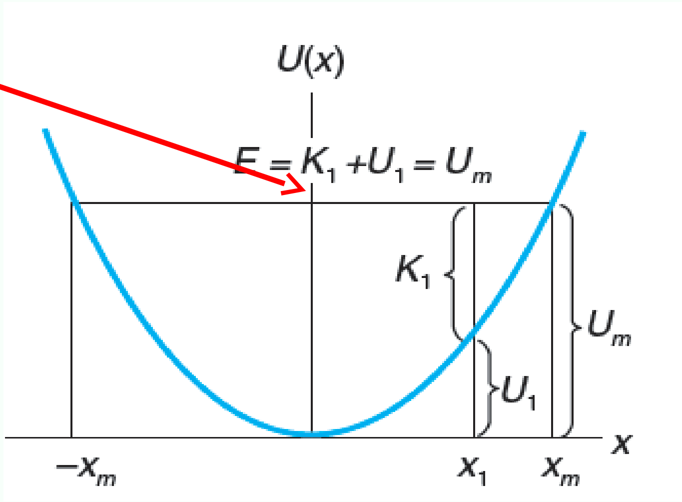


Diagramma energia: se la posizione iniziale da fermo è x_i
la molla si muoverà confinata in un intervallo [$-x_i$, $+x_i$].

L'energia cinetica si calcola così: $E = E_i = \tfrac{1}{2}kx_i^2 = \tfrac{1}{2}kx^2 + \tfrac{1}{2}mv^2$

$$\Rightarrow \quad E_i - \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}mv^2$$

ed è massima
nell'origine:

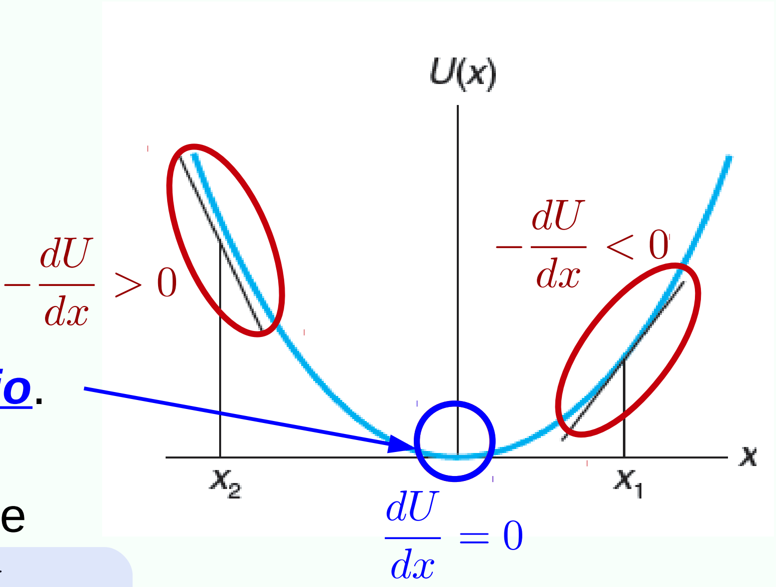


La velocità dipende dalla posizione:

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}\left(x_i^2 - x^2\right)}$$

Data la curva di energia potenziale e il diagramma di energia, è possibile ricavare informazioni utili sulla forza che agisce sul corpo.

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \;\Rightarrow\; F_x(x) = -\frac{dU}{dx} = -kx$$



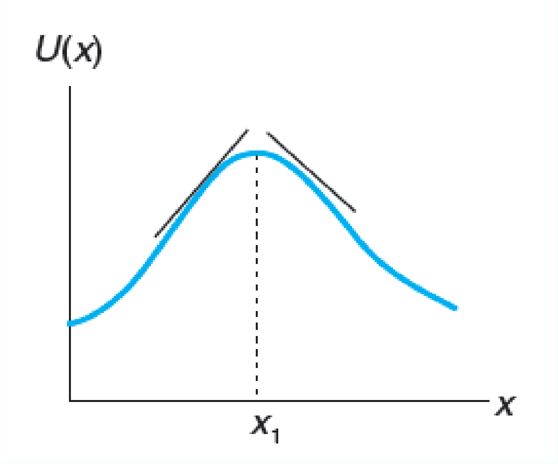
Quando la derivata è zero, c'è un ***punto di equilibrio***.

È equilibrio stabile se, allontanando il punto materiale dal punto di minimo, il corpo vi ritorna sotto l'azione della forza.

$$\frac{dU}{dx} = 0; \quad \frac{d^2U}{dx^2} > 0$$

instabile se il corpo si allontana

$$\frac{dU}{dx} = 0; \quad \frac{d^2U}{dx^2} < 0$$



indifferente se non vi è forza in tutto un intervallo

$$\frac{dU}{dx} = 0; \quad \frac{d^2U}{dx^2} = 0$$

Conservazione dell’energia

- *Legge di conservazione dell’energia*
  - → *forze conservative*
  - → *forze non conservative*
- *Energia potenziale*
  - → *teorema dell’energia generalizzato*
  - → *energia potenziale elastica*
  - → *energia potenziale gravitazionale*

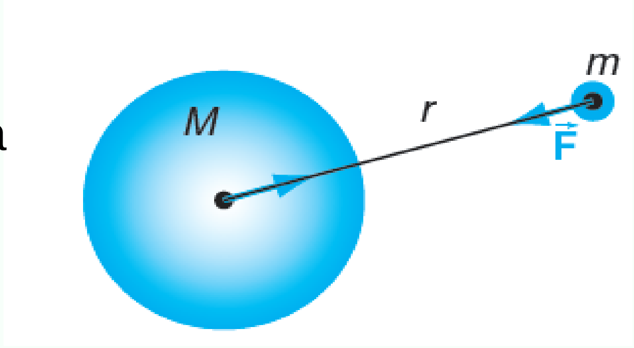
Gettys

Capitolo 9.8

Energia potenziale gravitazionale

Un corpo di massa *m* nel campo di forze gravitazionali esercitate dal corpo di massa *M*, è assogettato alla forza (*r* è la distanza dei due centri di massa):

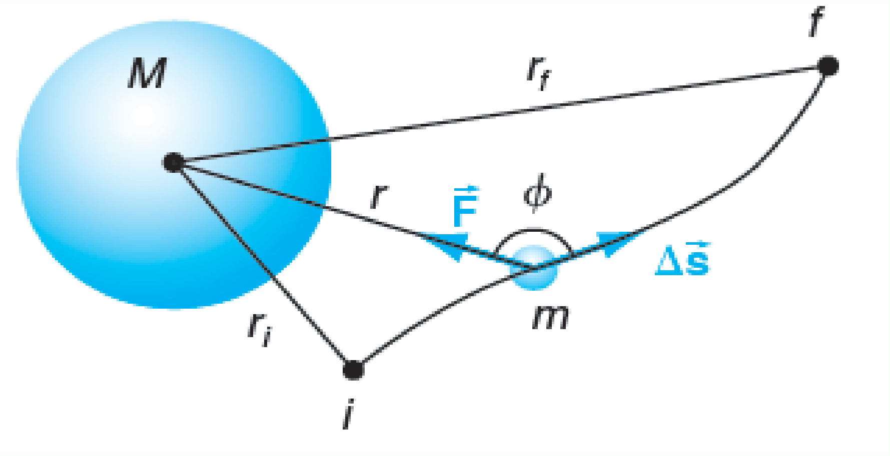
$$\vec{F}_g = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$



Consideriamo una traiettoria arbitraria che congiunge i punti $\vec{r}_i$ e $\vec{r}_f$: vediamo come cambia l'energia potenziale nel passare dal punto iniziale a quello finale.

$$\Delta U = U_f - U_i = -L_g$$

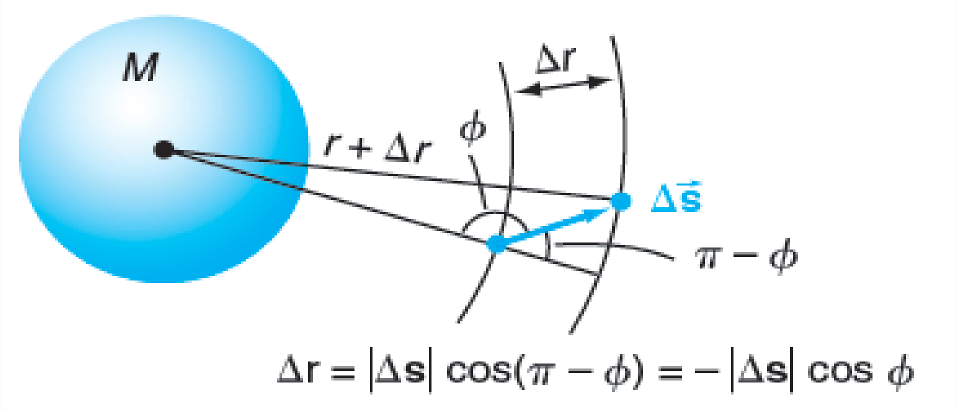
$$\Rightarrow \; U_f = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}_g \cdot d\vec{s} + U_i$$



$$\Delta U = U_f - U_i = -L_g \;\Rightarrow\; U_f = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}_g \cdot d\vec{s} + U_i$$

$\vec{F}_g$ è una forza radiale.

Dunque l'***unico*** lavoro non nullo è quello legato a spostamenti *lungo la direzione del raggio* $\hat{r}$.



É possibile arrivare in $\vec{r}_f$ muovendosi lungo il raggio, quindi lungo una circonferenza (lungo di essa la forza radiale non compie lavoro).

$$\hat{r} \cdot d\vec{s} = dr$$

$$\Delta U = U_f - U_i = -\int_{r_i}^{r_f} F_g(r)\, dr = GMm \int_{r_i}^{r_f} \frac{dr}{r^2} = GMm \left[-\frac{1}{r}\right]_{r_i}^{r_f}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta U = -GMm\left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right)}$$

Energia potenziale gravitazionale

L'energia potenziale è definita a meno di una costante.

Per convenzione, si pone il riferimento $U = 0$ a distanze molto grandi da *M*: $U(r \to \infty) = 0$

$$\boxed{U(r) = -\frac{GMm}{r}}$$

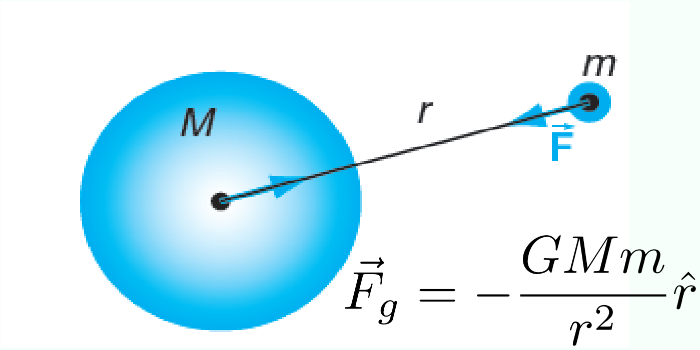
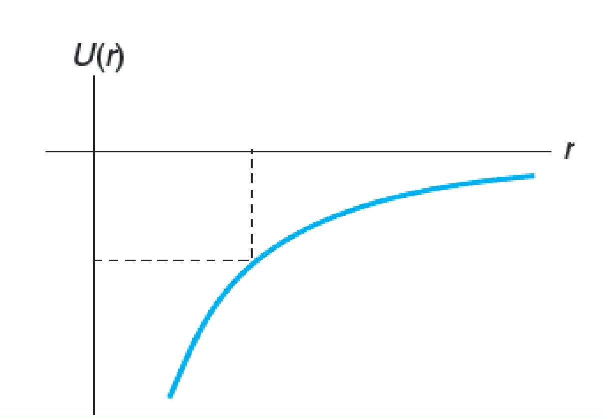


Diagramma energia:
L'energia potenziale è negativa.
Aumenta in valore assoluto al diminuire di *r*.
→ L'energia cinetica aumenta al diminuire di *r*.

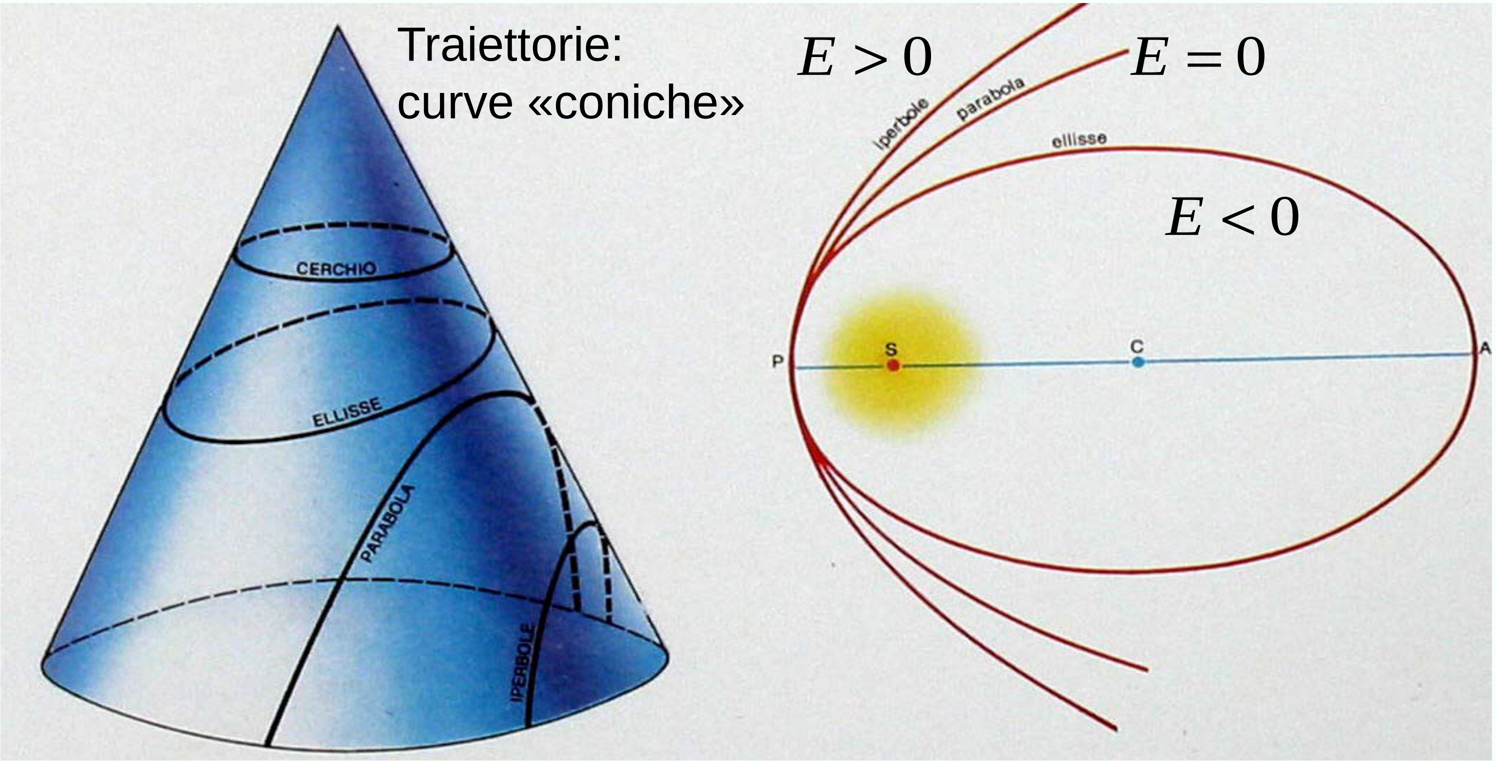


Se *E*>0, il corpo può andare all'infinito e la sua energia cinetica *K* non diventerà mai zero. Il moto ***non*** è confinato (traiettoria *iperbolica*). Lo stesso se *E*=0 (traiettoria *parabolica*).

Se *E*<0 ⇒ *U*+*K* < 0. Non si può arrivare a *r* → ∞, perché in tal caso K sarebbe negativa. Il moto è confinato (traiettoria *ellittica* o *circolare*).

Se $E > 0$, il corpo può andare all'infinito e la sua energia cinetica K non diventerà mai zero. Il moto ***non*** è confinato (traiettoria *iperbolica*). Lo stesso se $E = 0$ (traiettoria *parabolica*).

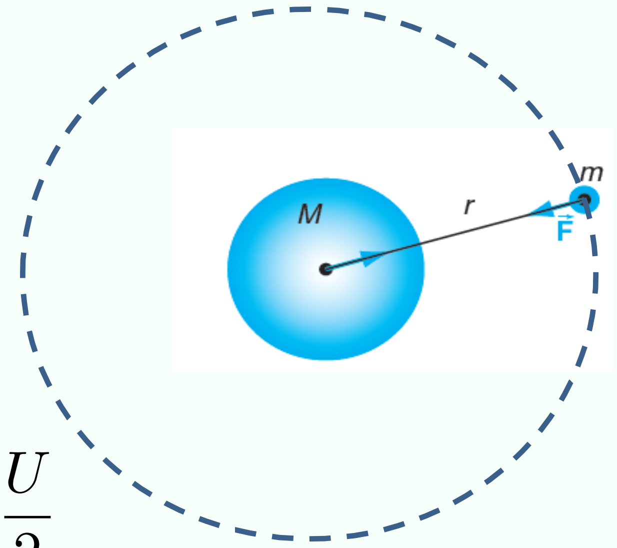
Se $E < 0 \Rightarrow U+K < 0$. Non si può arrivare a $r \to \infty$, perché in tal caso K sarebbe negativa. Il moto è confinato (traiettoria *ellittica* o *circolare*).



Dato il valore dell'energia meccanica ($E < 0$), si può calcolare la *distanza massima*

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \Rightarrow E = -\frac{GMm}{r_{\max}} \Rightarrow \boxed{r_{\max} = -\frac{GMm}{E}}$$

Orbita circolare



Moto circolare uniforme:
r costante ⇒ *U* non cambia ⇒ *K* non cambia ⇒ *v* costante

Deve comunque esserci l'accelerazione centripeta:

$$-\frac{mv^2}{r} = -\frac{GMm}{r^2} \;\Rightarrow\; K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{GMm}{r} = -\frac{U}{2}$$

L'energia cinetica del corpo in orbita è la **metà** del valore assoluto dell'energia potenziale.

L'energia meccanica di un corpo che orbita a *v* costante a distanza *R* è:

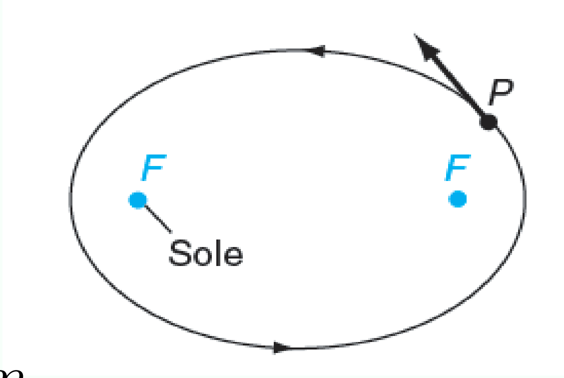
$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}\frac{GMm}{r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r}$$

Se il satellite parte dalla superificie terrestre, che energia cinetica deve avere per riuscire ad andare in un'orbita di raggio *R*, con la velocità giusta per orbitare?

$$E = -\frac{GMm}{2r} = E_{\text{in}} = K_{\text{in}} - \frac{GMm}{R_T} \;\Rightarrow\; \boxed{K_{\text{in}} = GMm\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r}\right)}$$

Si definisce l'**energia di legame** come quella che va donata al corpo per liberarlo dall'influsso del pianeta:

In un moto circolare: $\boxed{E = -\frac{GMm}{2r} = \frac{U}{2}}$



Si può dimostrare che, per un'orbita ellittica, l'energia di legame è:

$$E = -\frac{GMm}{2a}$$

(a è il semiasse maggiore)

Se si volesse mandare il corpo in orbita a distanza infinita $(U_f = 0)$, l'energia totale deve essere *almeno uguale a zero*.

Tale condizione determina l'energia meccanica minima da fornire al corpo per poter sfuggire all'influenza del corpo di massa maggiore.

Esempio, se all'inizio il corpo è a distanza r_i, qual è la velocità v_i necessaria per sfuggire?

$$E_i = \frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{GMm}{r_i} = 0 \Rightarrow \boxed{v_i = \sqrt{\frac{2GM}{r_i}}}$$

Per sfuggire dalla Terra, un razzo deve avere una velocità iniziale tale che $E_i \geq 0$.

Se invece vuole arrivare ad r_{max}: $(r_i = R_T;\ v_i)$ $(r_f = r_{\max};\ v_f = 0)$

$$U_i + K_i = U_f + K_f \ \Rightarrow\ \frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{GM_T m}{R_T} = -\frac{GM_T m}{r_{\max}}$$

perciò $$\boxed{v_i = \sqrt{2GM_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{r_{\max}}\right)}}$$

Velocità di fuga è quando $r_{max} \to \infty$: $$v_i = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = 11.2 Km/s$$

La velocità di fuga dipende solo dalla massa e dal raggio della Terra (pianeta)