Esercizi risolvibili dopo le prime 6 settimane di lezione (20 febbraio – 31 marzo 2017) [svolgimento incluso]

__Esercizio.__

Un corpo di massa m = 3 kg è legato ad un filo inestensibile lungo 10 m, la cui altra estremità è fissata all'origine di un sistema di coordinate xy. All'istante t = 0 il corpo ha coordinate (x=10 m, y=0) e descrive un moto circolare uniforme in verso antiorario, con velocità lineare 60 m/s. Quale sarà la componente x della velocità a t = 4 s? [v_x = 54.33 m/s]

__Svolgimento.__

Si deve scrivere la legge oraria in coordinate polari e poi derivare. La velocità, in modulo, è costante e vale v=60 m/s, il corpo di massa m=3 kg percorre la traiettoria circolare con il centro nell'origine degli assi e raggio pari alla lunghezza del filo R=10 m. A t=0 il corpo si trova in x(0)=10 m, y(0)=0.

$\begin{cases} x = R\cos(\omega t + \phi) \\ y = R\sin(\omega t + \phi) \end{cases}$ dove $v = \omega R$, considerando le condizioni iniziali,

R=10 m e ϕ=0 ⇒ $\begin{cases} x = R\cos(\frac{v}{R}t) \\ y = R\sin(\frac{v}{R}t) \end{cases}$

Da qui le componenti della velocità si ricavano derivando:

$$\begin{cases} v_x = -R\dfrac{v}{R}\sin\left(\dfrac{v}{R}t\right) = -v\sin\left(\dfrac{v}{R}r\right) \\ v_y = R\dfrac{v}{R}\cos\left(\dfrac{v}{R}t\right) = v\cos\left(\dfrac{v}{R}t\right) \end{cases}$$

e per t=4 s troviamo che: $v_x(t^* = 4s) = -v\sin\left(\dfrac{v}{R}t^*\right) = -60\sin(24)\dfrac{m}{s} = 54.33\dfrac{m}{s}$

__Esercizio.__

Un blocco scivola a velocità costante lungo un piano che forma un angolo θ_k con l'orizzontale.

1) Dimostrare che il coefficiente di attrito cinetico (altrimenti detto attrito dinamico) tra il blocco e il piano è $\mu_k = \tan\theta_k$.

2) Che valore ha μ_k tra un piano inclinato e un blocco se θ_k =29°?

__Svolgimento.__

1) Il blocco scivola con velocità costante lungo il piano inclinato. Le forze in gioco sono la forza normale espletata dal vicolo (superficie piana inclinata) e la forza peso.

Fissiamo l'asse x lungo il piano di moto, l'asse y perpendicolare a esso, e scriviamo la seconda legge della dinamica in componenti. L'accelerazione lungo x e quella lungo y saranno entrambe zero, visto che il corpo non può sprofondare all'interno del piano e lungo x si sta muovendo a velocità costante.

$$\left(\sum_i \vec{F}_i\right)_y = N - mg\cos\theta_k = ma_y = 0$$

$$\left(\sum_i \vec{F}_i\right)_x = mg\sin\theta_k - f_d = mg\sin\theta_k - \mu_k N = ma_x = 0.$$

Dalle equazioni precedenti si ricava: $N = mg\cos\theta_k; \quad mg\sin\theta_k = \mu_k N = \mu_k mg\cos\theta_k.$

Dall'ultima equazione si ricava che: $\mu_k = \tan\theta_k = \tan(29°) \approx 0.5543.$

Esercizio.
Un corpo di massa m = 8.70 kg si muove di moto circolare uniforme in senso antiorario su di un piano xy. Il periodo di rotazione è T = 8.50 s. Il moto è imposto da un filo inestensibile lungo L = 9.00 m, legato per una estremità al corpo e con l'altra estremità fissata all'origine delle coordinate. All'istante t = 0 il corpo si trova nel punto di coordinate (x = 0, y = L).
4) Calcolare il valore della componente x della velocità al tempo t = 7.40 s. [R. -4.57 m/s]
5) Calcolare la tensione del filo [R. 42.8 N]

Svolgimento.
Problema 2
Il problema riguarda un moto cirolare uniforme. Dato il periodo di rotazione T, la velocità angolare è ω=2π/T e v=ωL (il modulo è costante).
4) Conviene fissare un sistema di coordinate polari nell'origine. In generale si può sempre scrivere
$\begin{cases} x = L\cos(\omega t + \varphi) \\ y = Lsen(\omega t + \varphi) \end{cases}$ dove lo sfasamento φ è determinato dalle condizioni iniziali.
Infatti a t=0 $\begin{cases} x = L\cos(\varphi) \\ y = Lsen(\varphi) \end{cases}$;
date le condizioni iniziali del problema (x=0, y=L) φ=π/2
Per la velocità, derivando la legge oraria:
$\begin{cases} v_x = -\omega Lsen(\omega t + \varphi) \\ v_y = \omega L\cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$;
basta sostituire il tempo t* e si ottiene la risposta (4) $v_x(t^*) = -\omega Lsen(\omega t^* + \pi/2)$
5) La tensione τ è l'unica forza che agisce sul corpo L'accelerazione è solo radiale e vale in modulo v^2/L (moto circolare uniforme). Dalla seconda legge della dinamica, $F = ma$, abbiamo perciò $\tau = mv^2/L = m\omega^2 L$.

Esercizio.
Un punto materiale percorre nel piano xy una traiettoria detta "cicloide". La legge del moto è: $x = r[\omega t - \sin(\omega t)]$; $y = r[1 - \cos(\omega t)]$, con r = 0.870 m e ω = 4.40 rad/s. Determinare quanto vale, in modulo, l'accelerazione al tempo t = 10 s.

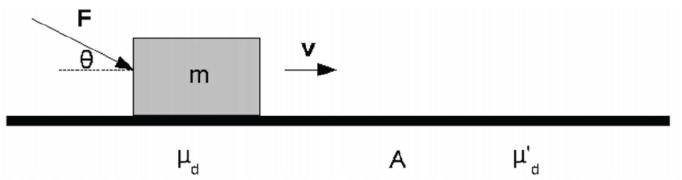
Svolgimento.
Data la legge oraria, le componenti della velocità si trovano con la derivata prima: $v_x = dx/dt = r[\omega - \omega\cos(\omega t)]$, $v_y = dy/dt = r[\omega\sin(\omega t)]$.
Quelle dell'accelerazione si ricavano derivando ulteriormente: $a_x = dv_x/dt = r\omega^2 sin(\omega t)$, $a_y = dv_y/dt = r\omega^2\cos(\omega t)$.
Il modulo dell'accelerazione è: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = r\omega^2\sqrt{\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)} = r\omega^2$ uguale ad ogni istante. Nel caso in questione $a = r\omega^2 = 16.84 m/s^2$.

Esercizio.
Un satellite artificiale descrive un'orbita circolare con raggio $2.60 \times 10^7\, m$ attorno al centro della Terra. La massa della Terra è: $M_T = 5.97 \times 10^{24}\, kg$. Quanto vale il periodo dell'orbita?

Svolgimento.
Abbiamo un moto circolare uniforme, vale quindi la seguente relazione per l'accelerazione centripeta: $m_{\text{sat}}\dfrac{v^2}{R} = \dfrac{GM_T m_{\text{sat}}}{R^2} \Rightarrow v^2 = \dfrac{GM_T}{R} \Rightarrow T = \dfrac{2\pi R}{v} = 2\pi\sqrt{\dfrac{R^3}{GM_T}}$.

Esercizio.

Un corpo di massa m si muove su una guida rettilinea orizzontale scabra (coefficiente di attrito dinamico μ_d) con velocità costante $\mathbf{v}$. Sul corpo è applicata una forza costante $\mathbf{F}$ di modulo incognito e inclinata di un angolo θ come mostrato in figura.



Tenendo conto della presenza del campo gravitazionale, determinare:

Domanda n. 1: il modulo della forza $\mathbf{F}$ in funzione di θ, μ_d, g e m;

Domanda n. 2: il lavoro totale fatto sul corpo in un tratto L e il lavoro compiuto dalla forza $\mathbf{F}$ nello stesso tratto. A partire dal punto A mostrato in figura il corpo entra in una regione caratterizzata da un attrito dinamico $\mu_d' = 2\mu_d$. La forza $\mathbf{F}$, che rimane invariata, nelle domande seguenti può essere considerata nota.

Determinare:

Domanda n. 3: l'accelerazione (modulo, direzione e verso) del corpo, specificando chiaramente se il verso dell'accelerazione è concorde o discorde con quello della velocità iniziale $\mathbf{v}$;

Domanda n. 4: la distanza d percorsa prima di fermarsi a partire dal punto A;

Svolgimento.

Risposta alla domanda n. 1: Poichè il corpo si muove di moto rettilineo uniforme, la risultante delle forze applicate su di esso deve essere nulla. Quindi:

$$mg + F\sin\theta = N, \qquad F\cos\theta = \mu_d N$$

da cui segue che il modulo della forza è

$$F = \frac{\mu_d mg}{\cos\theta - \mu_d \sin\theta}$$

Risposta alla domanda n. 2: l'energia cinetica del corpo è costante quindi per il teorema delle forze vive il lavoro totale fatto sul corpo stesso è nullo. Il lavoro fatto dalla forza costante $\mathbf{F}$ nel tratto L è invece

$$W_F = \mathbf{F}\cdot\mathbf{L} = \frac{\mu_d mgL\cos\theta}{\cos\theta - \mu_d\sin\theta}$$

Risposta alla domanda n. 3: Applicando la seconda legge di Newton si ottiene

$$mg + F\sin\theta = N, \qquad F\cos\theta - \mu_d' N = ma$$

da cui

$$\mathbf{a} = \frac{F\left(\cos\theta - 2\mu_d\sin\theta\right) - 2\mu_d mg}{m}\widehat{\mathbf{x}} = -\frac{\cos\theta}{\cos\theta - \mu_d\sin\theta}\mu_d g\widehat{\mathbf{x}}$$

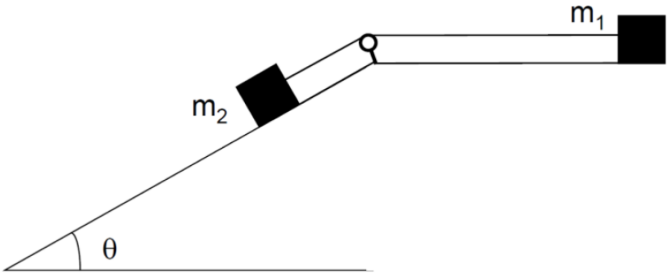
dove $\widehat{\mathbf{x}}$ indica direzione e verso della velocità iniziale $\mathbf{v}$.

Risposta alla domanda n. 4: applicando le leggi che descrivono il moto uniformemente accelerato si ottiene immediatamente che il corpo si ferma dopo un tratto d a partire dal punto A lungo:

$$d = \frac{v^2}{2a} = \frac{v^2}{2}\frac{\cos\theta - \mu_d\sin\theta}{\mu_d g\cos\theta}$$

Esercizio.

Un corpo di massa $m_1 = 1\ kg$ e uno di massa $m_2 = 3\ kg$ sono collegati da una fune ideale tesa come in figura. Il piano inclinato ha una inclinazione $\theta = 30^o$ e tra le masse ed il piano vi è attrito con un coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.21$ e uno di attrito statico $\mu_s = 0.5$. Al tempo $t = 0$, il sistema ha una velocità $v_0 = 11\ m/s$ che provoca la discesa della massa m_2 lungo il piano inclinato.



Domanda 1) Si disegni il diagramma delle forze per ciascuna massa.

Domanda 2) Si risolvano le equazioni del moto (la corda è sufficientemente lunga per cui la massa m_1 non scende sul piano inclinato) e si determinino forze di contatto e tensione della fune.

Domanda 3) Calcolare l'angolo critico per cui la massa m_2 potrebbe scivolare lungo il piano, se fosse sola.

Domanda 4) Con la presenza anche di m_1, con masse generiche $m_1$ed m_2, calcolare il valore di m_1 per cui il sistema ha accelerazione nulla nel caso che si parta a velocità v_0.

Svolgimento.

Consideriamo per il corpo 1 un asse x sul piano orizzontale con l verso positivo verso sinistra e per il corpo 2 un asse diretto giù lungo la rampa (verso positivo discendente). Questa la seconda legge della dinamica applicata ai due corpi (T è la tensione della fune):

$$m_1 a_{1x} = T - \mu_d N_1; \quad m_1 a_{1y} = 0 = N_1 - m_1 g \qquad \Rightarrow\ N_1 = m_1 g;\ T - \mu_d m_1 g = m_1 a;$$

$$m_2 a_{2x} = -T + m_2 g \sin\theta - \mu_d N_2; \quad m_2 a_{2y} = 0 = N_2 - m_2 g \cos\theta$$

$$\Rightarrow\ N_2 = m_2 g \cos\theta; \quad -T + m_2 g \sin\theta - \mu_d m_2 g \cos\theta = m_2 a_{2x} = m_2 a.$$

$T = m_1 a + \mu_d m_1 g = -m_2 a - \mu_d m_2 g \cos\theta + m_2 g \sin\theta$ perciò si ottiene:

$$,(m_1 + m_2)a = g(-\mu_d m_1 - \mu_d m_2 \cos\theta + m_2 \sin\theta) \ \Rightarrow\ a = g\frac{m_2 \sin\theta - \mu_d m_1 - \mu_d m_2 \cos\theta}{m_1 + m_2}$$

da cui: $T = \mu_d m_1 g + m_1 g \dfrac{m_2 \sin\theta - \mu_d m_1 - \mu_d m_2 \cos\theta}{m_1 + m_2}$.

Se la massa m_2 fosse sola, potrebbe scivolare per angoli maggiori di θ_c , dove:

$$m_2 a_2 = 0 = m_2 g \sin\theta_c - \mu_s m_2 g \cos\theta_c \ \Rightarrow\ \tan\theta_c = \mu_s \ \Rightarrow\ \theta_c = \arctan\mu_s.$$

Se c'e anche m_1 attaccata e il sistema si muove, allora:

$T - \mu_d m_1 g = m_1 a; \quad -T + m_2 g \sin\theta - \mu_d m_2 g \cos\theta = m_2 a$, dunque:

$$T = m_1 a + \mu_d m_1 g = -m_2 a - \mu_d m_2 g \cos\theta + m_2 g \sin\theta$$
$$\Rightarrow\ (m_1 + m_2)a = g(-\mu_d m_1 - \mu_d m_2 \cos\theta + m_2 \sin\theta)$$
$$\Rightarrow\ a = g\frac{m_2 \sin\theta - \mu_d m_1 - \mu_d m_2 \cos\theta}{m_1 + m_2}.$$

Quindi: $a = 0 \ \Rightarrow\ m_2 \sin\theta - \mu_d m_1 - \mu_d m_2 \cos\theta = 0 \ \Rightarrow\ m_1 = m_2 \left(\dfrac{\sin\theta}{\mu_d} - \cos\theta\right).$

Esercizio.

Problema 2: Un oggetto di massa 8.70 kg è appeso, per mezzo di un filo inestensibile e di massa trascurabile, al soffitto all'interno di un vagone di un treno. Durante una fase di accelerazione costante del treno, un osservatore all'interno vede che il filo a cui è sospeso l'oggetto in equilibrio risulta inclinato rispetto alla verticale di un angolo $\theta = 18.0°$ (per convenzione il verso positivo dell'angolo è scelto per deflessioni dalla verticale verso la direzione del fondo del vagone, negativo per deflessioni verso la testa). Calcolare:

3. l'accelerazione del vagone rispetto ad un sistema di riferimento solidale con i binari (con l'asse X nel verso del moto).

a [ms^{-2}] = ______ A 3.19 B -3.16 C -1.18 D -0.137 E -0.170

Lo stesso osservatore, quando il treno è fermo, appoggia sul pavimento del vagone un oggetto di massa 17.0 kg. Il coefficiente di attrito statico tra il corpo e il pavimento è $\mu_s = 0.430$. Quando il treno si rimette in marcia, ad un certo istante il corpo si muove relativamente al pavimento. Calcolare, in quell'istante:

4. il modulo dell'accelerazione del vagone rispetto ad un sistema di riferimento solidale con i binari.

a [ms^{-2}] = ______ A 9.85 B 4.22 C 0.974 D 6.58 E 9.45

Svolgimento.

Abbiamo un sistema in moto non inerziale, S', quello solidale con il vagone. E abbiamo il sistema inerziale S che è il sistema solidale con i binari. La accelerazione del punto P dove si trova l'oggetto nei due sistemi è: $\vec{a}_{PS} = \vec{a}_{PS'} + \vec{a}_{S'S}$, dove $a_{S'S} = a_0$ è diretta verso l'asse x, è costante, e vale il valore richiesto dalla domanda.

Applicando la seconda legge della dinamica nel sistema inerziale (S) si ottiene:

$$m(\vec{a}_{PS})_x = ma_0 = \left(\sum_i \vec{F}_i\right)_x = T_x = T\sin\theta$$

$$m(\vec{a}_{PS})_y = 0 = \left(\sum_i \vec{F}_i\right)_y = T_y - mg = T\cos\theta - mg \;\Rightarrow\; T = \frac{mg}{\cos\theta}.$$

Da cui: $a_0 = \dfrac{T\sin\theta}{m} = \dfrac{mg}{\cos\theta}\dfrac{\sin\theta}{m} = g\tan\theta = 3.19\, m/s^2.$

Lo stesso ragionamento lo si può fare per la domanda successiva, dove il corpo è fermo e sottoposto ad una forza di attrito:

$$m(\vec{a}_{PS})_x = ma_0 = \left(\sum_i \vec{F}_i\right)_x = f_s \le \mu_s N = \mu_s mg$$

$$m(\vec{a}_{PS})_y = 0 = \left(\sum_i \vec{F}_i\right)_y = N - mg.$$

Da cui infine: $a_0 = \dfrac{f_s}{m} \le \mu_s g = 4.22\, m/s^2.$

Esercizio.

Problema 3: Un oggetto di massa 63.0 kg si trova appeso al soffitto per mezzo di un filo ideale all'interno di un vagone di un treno. Durante una fase di accelerazione costante del treno, un osservatore che si trova all'interno del treno registra che l'oggetto appare in equilibrio e il filo a cui è sospeso l'oggetto è inclinato verso la direzione del fondo del vagone, formando un angolo $\theta = 29.0°$ rispetto alla verticale. Calcolare:

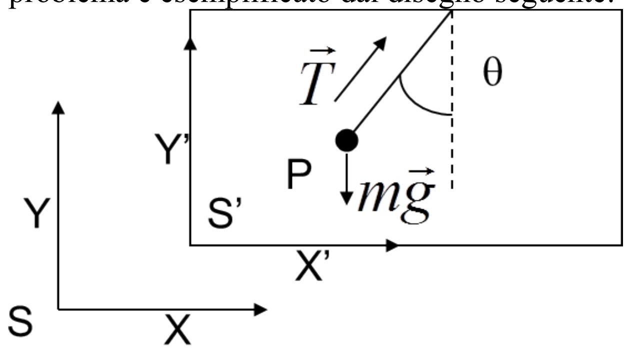
5. l'accelerazione del vagone rispetto ad un sistema di riferimento solidale con i binari.

a [ms^{-2}] = ______ A 15.6 B 5.44 C 20.3 D -7.46 E 50.7

Svolgimento.

Si chiede di calcolare l'accelerazione di un vagone rispetto ad un sistema di riferimento solidale con i binari, quando ad un osservatore all'interno del vagone un oggetto di massa *m*=63.0 kg appeso al soffitto per mezzo di un filo ideale appare in equilibrio con una inclinazione del filo verso la direzione del fondo del vagone di θ=29° rispetto alla verticale.

Il problema è esemplificato dal disegno seguente:



Dove S è il sistema solidale con i binari e S' quello solidale con il vagone. L'accelerazione del punto P nei due sistemi è: $\vec{a}_{PS} = \vec{a}_{PS'} + \vec{a}_{S'S}$, dove $a_{S'S} = a_0$ è diretta verso l'asse *x*, è costante, e vale il valore richiesto dalla domanda 5.

Applicando la seconda legge della dinamica nel sistema inerziale (S) si ottiene:

$$m\left(\vec{a}_{PS}\right)_x = ma_0 = \left(\sum_i \vec{F}_i\right)_x = T_x = T\sin\theta$$

$$m\left(\vec{a}_{PS}\right)_y = 0 = \left(\sum_i \vec{F}_i\right)_y = T_y - mg = T\cos\theta - mg \Rightarrow T = \frac{mg}{\cos\theta}$$

$$a_0 = \frac{T\sin\theta}{m} = \frac{mg}{\cos\theta}\frac{\sin\theta}{m} = g\cdot tg\,\theta = 5.4377\,ms^{-2}$$

La soluzione giusta quindi è quella contrassegnata dalla casella 5 B.

Esercizio.

Problema 5: Un corpo di massa 13.0 kg si muove su un piano orizzontale privo di attrito descrivendo una traiettoria circolare. Il corpo è vincolato al centro da un filo inestensibile e di massa trascurabile di lunghezza 9.10 m ed è spinto da un razzo che gli impone un'accelerazione tangenziale costante di 1.10 ms^{-2}. Considerando che il corpo parte da fermo al tempo t=0 e che la tensione di rottura del filo è di 89.0 N, calcolare:

10. dopo quanto tempo si spezza il filo.

t [s] =

A	B	C	D	E
1.14	0.317	7.18	2.01	1.35

Nel momento in cui il filo si spezza, il motore del razzo si spegne. Il corpo procede lungo il piano orizzontale liscio. Considerando un sistema cartesiano con l'origine nel centro della traiettoria circolare e l'asse X passante per la posizione del corpo a t=0, calcolare:

11. la coordinata X della posizione del corpo quando sono passati 10 s dalla rottura del filo.

x_f [m] =

A	B	C	D	E
-116	-51.4	-17.9	-11.4	158

c. Quesito: che tipo di traiettoria descrive il corpo dopo il distacco del filo e in che relazione è rispetto alla traiettoria circolare?

Svolgimento.

Supponiamo che il corpo parta da fermo in un punto di coordinate (L,0), in un sistema di riferimento di assi cartesiani xy. Istante per istante, l'angolo che il raggio vettore fa rispetto all'asse x è $\theta(t) = \alpha t^2/2$, la sua velocità angolare è $\omega(t)=d\theta/dt=\alpha t$, mentre $\alpha= a_t/L$.

Si può scrivere la seconda legge della dinamica e guardare la componente radiale:

$$\vec{F}=m\vec{a};$$

$$T=\frac{mv^2}{L}=m\omega^2 L=m\frac{(a_t t)^2}{L}$$

Sapendo che il filo si rompe per T_{max}=89 N, l'istante di rottura sarà: $t^* = \sqrt{\frac{T_{\max}L}{m}\frac{1}{a_t}} = 7.176\,s.$

La soluzione è quella contrassegnata dalla casella 10 C.

Prima della rottura del filo, il corpo descrive una legge del moto che in ogni istante descritta dalle equazioni:

$$x=L\cos(\theta(t))=L\cos\left(\frac{a_t t^2}{2L}\right)$$

$$y=L\cos(\theta(t))=L\sin\left(\frac{a_t t^2}{2L}\right)$$

Dopo la rottura del filo, si spengono immediatamente i motori del razzo e il corpo continua di moto rettilineo uniforme con direzione tangente alla traiettoria circolare nel punto di rottura e velocità in modulo uguale a quella che aveva nel punto di rottura.

Per conoscere la coordinata x della posizione del corpo quando sono passati 10 s dalla rottura del filo (domanda 11), basta scrivere l'equazione del moto dopo la rottura del filo e considerare la componente lungo x: $\vec{r} = \vec{r}_r + \vec{v}_r t \;\Rightarrow\; x = x_r + v_{rx}t.$

$$x_r = L\cos(\theta(t^*)) = L\cos\left(\frac{a_t t^{*2}}{2L}\right) = -9.0953\,m$$

$$v_{rx} = v_x(t^*) \;\Rightarrow\; v_x(t) = -L\sin(\theta(t^*))\frac{d\theta(t)}{dt} = -a_t t\sin\left(\frac{a_t t^2}{2L}\right) = -0.2309\,m/s$$

$$x_f = x_r + v_{rx}\times 10\,s = -9.0953\,m - 2.309m = -11.404\,m.$$

La soluzione è quella contrassegnata dalla casella 11 D.

Esercizio.

Un paracadutista acrobatico di massa M=70 kg cade verticalmente nell'aria a velocità costante di v_0=140 km/h. Qual è il lavoro compiuto in un intervallo di tempo Δt=120 s (a) dalla forza risultante, (b) dalla forza di gravità, (c) dalla resistenza dell'aria?

Svolgimento.

Se consideriamo le forze in gioco e disegniamo il diagramma delle forze, vedremo che sul corpo agiscono due forze, la forza peso, diretta verso il basso, e la resistenza dell'aria, che dipende dalla velocità del corpo, ed è sempre diretta in senso contrario al moto. Chiamo f_v il modulo della forza viscosa dovuta alla resistenza dell'aria.

Siccome il paracadutista sta cadendo a velocità costante, l'accelerazione sarà nulla. Scrivendo la seconda legge di Newton nella componente verticale si ha:

$$\left(\sum_i \vec{F}_i\right)_y = -mg + f_v = ma_y = 0 \;\Rightarrow\; f_v = mg.$$

Il punto (a) chiede il lavoro fatto nell'intervallo Δt dalla forza risultante. La forza risultante è zero e quindi il lavoro è nullo.

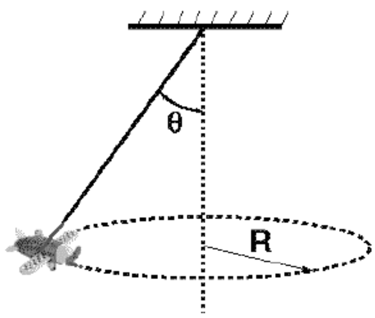
Il punto (b) chiede il lavoro fatto nell'intervallo Δt dalla forza di gravità.
Va richiamato il concetto di potenza, cioè lavoro nell'unità di tempo, e ricordarsi che la potenza è anche legata alla velocità: $W = \vec{F} \cdot \vec{v} = mgv_0$.
Abbiamo quindi che: $L = W\,\Delta t = mgv_0 \Delta t = 3.2 \times 10^6\, J$.

Il punto (c) chiede il lavoro fatto dalla resistenza dell'aria. Siccome la forza legata alla resistenza dell'aria è, in questo caso uguale e opposta alla forza peso, il lavoro sarà uguale a quello della forza peso ma con il segno cambiato: $L_{fv} = -L_{\text{peso}} = -3.2 \times 10^6\, J$.

Oppure, seguendo il procedimento usato per la forza peso $W = \vec{F} \cdot \vec{v} = -f_v v_0 = -mgv_0$, abbiamo che: $L = W\,\Delta t = -mgv_0 \Delta t$.

Esercizio.

Un aeroplano giocattolo (di massa complessiva m_a) ha un motore che gli permette di muoversi con una velocità costante di modulo v_a.
Viene legato al soffitto con una corda di lunghezza L e il suo motore viene avviato. In queste condizioni, sotto l'azione della forza di gravità, si muove su una traiettoria piana circolare orizzontale, con la corda che forma un angolo θ con la verticale.
Domanda n. 1: Calcolare la relazione che esprime la tensione T della corda in funzione di m_a e θ.
Domanda n. 2: Calcolare la relazione che esprime la dipendenza dell'angolo θ da v_a e L.
Domanda n. 3: Utilizzando i valori numerici $v_a = 2.4\ m/s$ e $L = 1.46\ m$, calcolare l'angolo θ.
Domanda n. 4: Calcolare (nelle stesse condizioni) la tensione della corda, supponendo $m_a = 0.75\ kg$.
Domanda n. 5: Se la tensione massima che la corda può esercitare sull'aeroplano è 10 volte quella trovata al punto precedente, calcolare l'angolo massimo che l'aeroplano può arrivare ad avere, e qual è la velocità necessaria.



Svolgimento.

Le forze agenti sull'aeroplano sono la forza peso mg (diretta verso il basso) e la tensione T, che forma un angolo θ con la verticale.

Risposta alla domanda n. 1: La componente verticale di T equilibra la forza peso, per cui:

$$T\cos\theta = m_a g$$

Risposta alla domanda n. 2: La traiettoria seguita dall'aeroplano richiede una accelerazione centripeta di modulo

$$a_c = \frac{v^2}{L\sin\theta}$$

che deriva dalla componente orizzontale di T. Si ha pertanto:

$$\begin{aligned} g\tan\theta &= \frac{v^2}{L\sin\theta} \\ \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} &= \frac{v^2}{gL} \end{aligned}$$

Ponendo

$$x = \frac{v^2}{gL}$$

si ottiene

$$\cos^2\theta + x\cos\theta - 1 = 0$$

che può essere risolta facilmente; la soluzione fisica valida è:

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\sqrt{x^2+4}-x}{2} \\ \theta &= \arccos\left[\frac{\sqrt{x^2+4}-x}{2}\right] \end{aligned}$$

Risposta alla domanda n. 3: Sostituendo i valori dati si ha:

$$\theta = 0.611\ rad = 35°$$

Risposta alla domanda n. 4:

$$T = 8.98\ N$$

Risposta alla domanda n. 5:

$$\begin{aligned} \theta_n &= 1.49\ rad = 85.3° \\ v_n &= 13.2\ m/s \end{aligned}$$

Esercizio.

Una navicella spaziale di massa $m = 200\ kg$ si muove su un'orbita circolare attorno alla Terra con velocità $v_1 = 6200\,m/s$. Sapendo che la massa e il raggio della Terra sono, rispettivamente, $M_T = 5.98 \times 10^{24}\ kg$ e $R_T = 6.37 \times 10^6\ m$, determinare:

1) a quale quota h_1 dalla superficie terrestre orbita la navicella spaziale;

2) il periodo orbitale T_1.

Ad un certo istante la navicella spaziale accende i razzi e si sposta su un'altra orbita circolare, tale che il nuovo periodo orbitale sia $T_2 = 8T_1$. Calcolare:

3) il raggio della nuova orbita R_2;

4) il modulo della velocità v_2 nella nuova orbita;

5) il lavoro compiuto dai razzi per spostare la navicella dall'orbita iniziale a quella finale.

Svolgimento.

Risposta alla domanda n. 1: Dato che la navicella si muove di moto circolare uniforme, applicando la seconda legge di Newton si ottiene

$$\frac{GM_T m}{(R_T + h_1)^2} = m\frac{v_1^2}{R_T + h_1}$$

da cui segue la quota h_1

$$h_1 = \frac{GM_T}{v_1^2} - R_T = 4.006 \times 10^6 m$$

Risposta alla domanda n. 2: Il periodo orbitale è:

$$T_1 = \frac{2\pi(R_T + h_1)}{v_1} = \frac{2\pi GM_T}{v_1^3} = 10516s$$

Risposta alla domanda n. 3: Dalla terza legge di Keplero segue che

$$R_2 = \left(\frac{GM_T T_2^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

da cui

$$R_2 = (R_T + h_1)\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{2/3} = 4(R_T + h_1) = 4.15 \times 10^7 \; m$$
$$h_2 = 3R_T + 4h_1 = 3.51 \times 10^7 \; m$$

Risposta alla domanda n. 4: Per la velocità si ha:

$$v_2^2 = \frac{GM_T}{R_2} = \frac{GM_T}{4(R_T + h_1)}$$
$$v_2 = \frac{v_1}{2} = 3100 \; m/s$$

Risposta alla domanda n. 5: Il lavoro compiuto dai razzi è uguale alla variazione di energia meccanica della navicella nel passare dall'orbita di raggio $R_T + h_1$ a quella di raggio R_2:

$$W = E_2 - E_1 = \left(\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GM_T m}{R_2}\right) - \left(\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GM_T m}{R_T + h_1}\right) = 2.883 \times 10^9 \; J$$