Supporto alla didattica
29/05/2017

Quantità di moto e urti

QUANTITÀ DI MOTO: corpo di massa "m" che si muove nello spazio a velocità "$\vec{v}$", la quantità di moto di questo corpo è definita come:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

SECONDA LEGGE DI NEWTON:

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

Questo che ci dice? Se la risultante delle forze (ESTERNE) è nulla la quantità di moto è conservata.

➔ Insieme con l'energia, la quantità di moto è un'altra candidata al ruolo di costante del moto, cioè una quantità conservata durante l'evoluzione temporale del sistema.

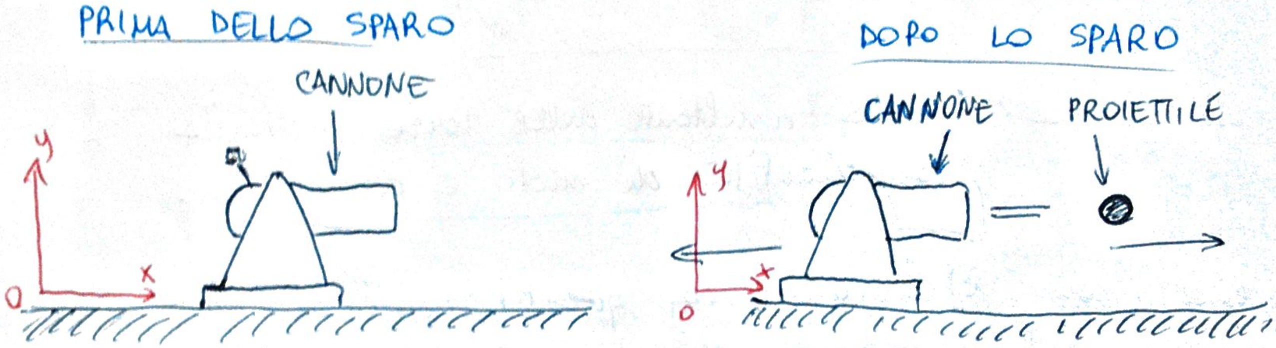
PROBLEMA 1

Un cannone di massa "M" spara un proiettile di massa "m" con una velocità di uscita rispetto al cannone "v"$_{PRO}$.

(1) Subito dopo lo sparo qual è la velocità V_{can} del cannone rispetto al suolo? Quanto vale la velocità del proiettile rispetto al suolo?

(2) Quant'è l'energia liberata dalle polveri da sparo? (Considerare i due oggetti come punti materiali)

Analisi punto 1



· Prima dello sparo il sistema cannone + proiettile è fermo.

· Questo cosa significa? Rispetto al suolo:

$$\boxed{\vec{P}_{TOT} = \vec{P}_{CAN.} + \vec{P}_{PROIETTILE} = \vec{0}} = M\vec{V}_{CAN.} + m\vec{V}_{PROIETTILE}, \text{ con } \vec{V}_{CAN} = \vec{V}_{PR} = \vec{0}.$$

Visto che la risultante delle forze esterne è zero, la quantità di moto totale $\vec{P}_{TOT} = \vec{P}_{TOT}(t) = \vec{P}_{TOT}(0)$ è costante ed il suo valore è zero.

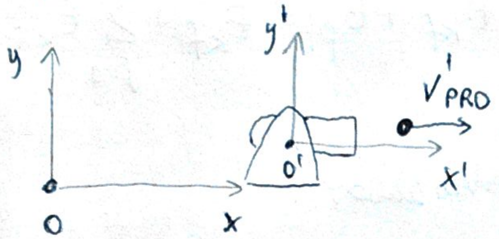
Questo significa che dopo lo sparo:

$$\begin{matrix} \vec{V}_{CAN.} \neq \vec{0} \\ \vec{V}_{PRO.} \neq \vec{0} \end{matrix} \quad e \quad \vec{P}_{TOT} = M\vec{V}_{CAN} + m\vec{V}_{PRO.} = \vec{0}$$

Dalla conservazione della quantità di moto, otteniamo che:

$$\boxed{M\vec{V}_{CAN} + m\vec{v}_{PRO} = \vec{0}} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{PRO} = -\frac{M\vec{V}_{CAN}}{m}}$$

· Come determiniamo $\vec{V}_{CAN}$ e $\vec{v}_{PRO}$? Visto che conosciamo v'_{PRO} = (velocità del proiettile nel sistema solidale al cannone) abbiamo che (vedi figura)



$$\vec{r}_{PRO} = \vec{r}_{OO'} + \vec{r}'_{PRO}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\vec{V}_{PRO} = \vec{V}_{OO'} + \vec{V}'_{PRO}}$$

dove $\vec{V}_{OO'} = \vec{V}_{CAN}$! Abbiamo quindi:

$$\vec{V}_{PRO} = -\frac{M}{m}\vec{V}_{CAN} = \vec{V}_{CAN} + \vec{V}' \Rightarrow \boxed{\vec{V}_{CAN} = -\frac{m\vec{V}'}{m+M}}$$

Risposta quesito 1: le velocità rispetto al suolo sono:

$$\begin{cases} \vec{V}_{CAN} = -\frac{m}{m+M}\vec{v}' \\ \vec{V}_{PRO} = \frac{M}{(m+M)}\vec{v}' \end{cases}$$

CONTROLLO!

$$\vec{P}_{TOT} = \vec{0} = M\vec{V}_{CAN} + m\vec{V}_{PRO} =$$

$$= -\frac{Mm\vec{V}'}{(m+M)} + \frac{mM}{(m+M)}\vec{V}_{PRO} = 0 \Rightarrow ok!$$

Analisi punto 2

- Per lo stato iniziale abbiamo che l'energia cinetica è zero mentre abbiamo un contributo di "Energia potenziale" (dovuta alle polveri da sparo) che è non nullo.
- Nello stato finale, cannone e proiettile sono in moto mentre tutta la polvere è stata bruciata:

STATO INIZIALE

$$E_i = E_{ki} + E_{pi} = E_{pi}$$

STATO FINALE

$$E_f = E_{kf} + E_{pf} = E_{kf} = \sum_{j=1}^{2} E_{ki}$$

Comparando queste due espressioni abbiamo.

Risposta quesito 2

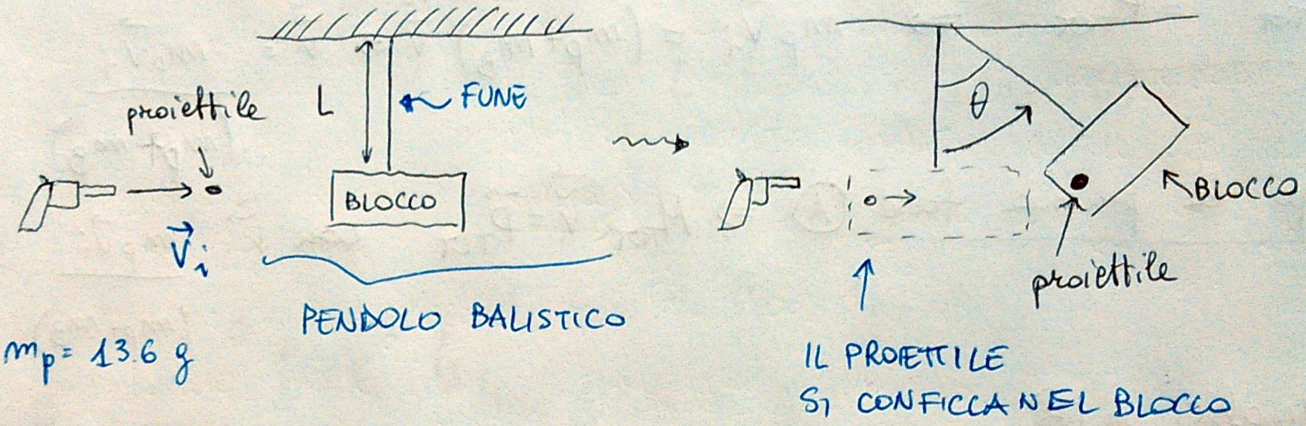
$$\boxed{E_{pi}} = E_{K\,CAN.} + E_{K\,PROIETTILE} = \frac{1}{2}M(\vec{v}_{CAN})^2 + \frac{1}{2}m(\vec{v}_{PRO})^2 =$$

$$= \frac{1}{2}M\left(\frac{m}{m+M}\vec{v}'\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{M\vec{v}'}{m+M}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{Mm}{(m+M)^2}(m+M)(\vec{v}')^2 =$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\frac{Mm}{(m+M)}\vec{v}'^2}$$

PROBLEMA 2 La velocità con cui un proiettile esce dalla bocca del fucile viene chiamata velocità iniziale.
Il pendolo balistico è un dispositivo che misura tale velocità.



$m_p = 13.6\ g$

$m_b = 5.42\ Kg$

$L = 372\ mm$

1 Sapendo che $\theta = 26.7°$, stabilire il valore di $\vec{V}_i$.

Dividiamo il problema in due sotto-problemi:

A URTO PROIETTILE-BLOCCO

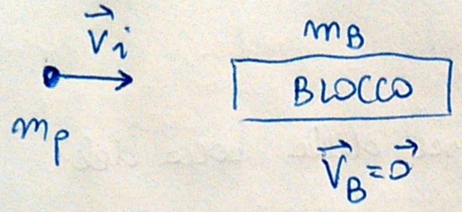
B DINAMICA DEL SISTEMA PROIETTILE ⊕ BLOCCO

Analisi di A

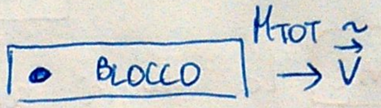
L'urto fra il proiettile ed il blocco è totalmente anelastico (questo perché il proiettile si è conficcato nel blocco di legno).

→ CONSERVIAMO LA QUANTITÀ DI MOTO TOTALE MA NON L'ENERGIA.

STATO INIZIALE



STATO FINALE



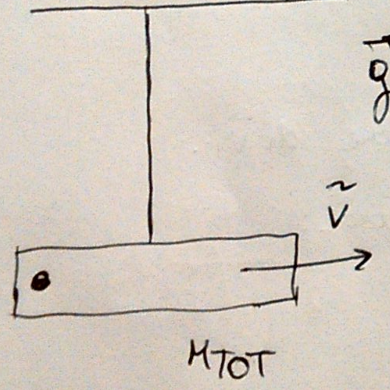
$(M_{TOT} = m_p + m_B)$

$$\boxed{\vec{P}_{TOT}^{(i)} = \vec{P}_{TOT}^{(f)}} \Rightarrow m_p \vec{v}_i = (m_p + m_B)\,\vec{\tilde{v}} \Rightarrow \vec{\tilde{v}} = \frac{m_p \vec{v}_i}{(m_p + m_B)}$$

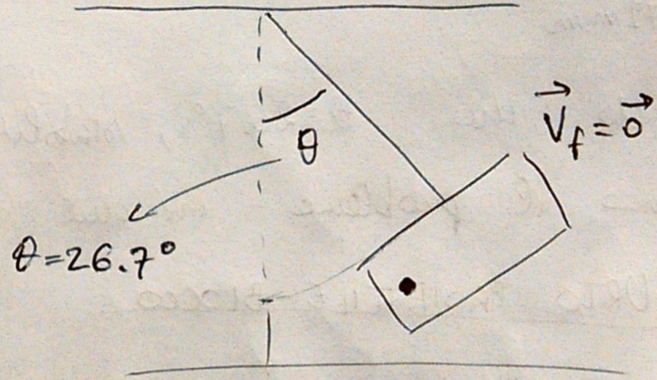
Dopo la prima fase (A) $\Rightarrow M_{TOT}\,\vec{\tilde{v}} = \vec{P}_{TOT}$ con $\vec{\tilde{v}} = \dfrac{m_p \vec{v}_i}{(m_p + m_B)}$

Analisi di (B)

STATO INIZIALE



STATO FINALE

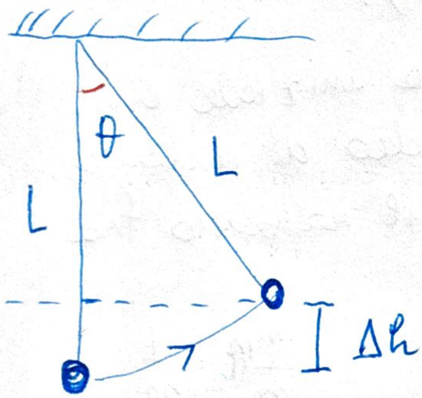


Visto che nel passare fra lo stato iniziale e finale di (B) le uniche forze sono di tipo conservativo, usiamo la conservazione dell'energia.

$$\boxed{E_i = E_{Ki} + E_{pi} = E_f = E_{Kf} + E_{pf}}$$

Supporto alla didattica
29/05/2017

$$\begin{cases} E_{Ki} = \frac{1}{2} M_{TOT} \tilde{v}^2 , \quad E_{Kf} = \frac{1}{2} M_{TOT} \vec{v}_f^{\,2} = 0 \\ E_{pf} - E_{pi} = M_{TOT}\, g\, \Delta h \end{cases}$$



$$\Rightarrow \Delta h = L - L\cos(\theta) = L(1-\cos\theta)$$

Conservo l'energia!

$$E_{pf} - E_{pi} = E_{Ki} - E_{Kf} ;$$

$$\cancel{M_{TOT}}\, g\, \Delta h = \frac{1}{2} \cancel{M_{TOT}}\, \tilde{v}^2 .$$

Da cui segue che

$$\tilde{v}^2 = g \Delta h 2 \Rightarrow \tilde{v} = \sqrt{g \Delta h 2}$$

Sfruttiamo che $\tilde{v}$ è legata a v_i:

$$\tilde{v} = \frac{m_p v_i}{(m_p + m_B)} = \sqrt{g \Delta h 2} \Rightarrow \boxed{v_i = \left(\frac{m_p + m_B}{m_p}\right) \sqrt{g \Delta h 2}}$$

NUMERELLI

- $\sqrt{2 g \Delta h} = \sqrt{2 \cdot 9.80 \frac{m}{s^2} \cdot (0.0397)\, m} = 0.882 \frac{m}{s}$

- $\left(\frac{m_p}{m_p + m_B}\right) \simeq 2.50 \times 10^{-3}$

$$\Rightarrow \boxed{v_i = \frac{0{,}882 \frac{m}{s}}{2.50 \times 10^{-3}} \simeq 350 \frac{m}{s}}$$

PROBLEMA 3

In un reattore nucleare, un neutrone liberato da un evento di fissione deve essere rallentato perché abbia una ragionevole probabilità di provocare la fissione di un altro nucleo.

I neutroni vengono rallentati elasticamente usando elementi chiamati moderatori (tipicamente idrogeno o carbonio).

(1) Di quale frazione si riduce l'energia iniziale del neutrone in un urto con un nucleo di carbonio e di idrogeno? (Si supponga che il rapporto fra m_n, m_H ed m_C sia : $\frac{m_n}{m_H} = 1$ $\frac{m_n}{m_C} = \frac{1}{12}$)

SVOLGIMENTO

Consideriamo il neutrone e uno degli altri due elementi come punti materiali di masse m_n e m_B ($B = H, C$). Visto che l'urto è elastico, oltre alla quantità di moto, possiamo conservare l'energia:

QUANTITÀ DI MOTO

- $\vec{P}_{TOT}^{(i)} = m_n \vec{V}_n^i + m_B \vec{V}_B^i = m_n \vec{V}_n^f + m_B \vec{V}_B^f = \vec{P}_{TOT}^{(f)}$

ENERGIA

- $E_K^{(i)} = \frac{1}{2} m_n (\vec{V}_n^i)^2 + \frac{1}{2} m_B (\vec{V}_B^i)^2 = \frac{1}{2} m_n (\vec{V}_n^f)^2 + \frac{1}{2} m_B (\vec{V}_B^f)^2 = E_K^{(f)}$

PAGINA 5

Supporto alla didattica
29/05/2017

Nel sistema di riferimento in cui $\vec{v}_B = \vec{0}$, abbiamo che:

$$\begin{cases} \vec{P}_{TOT}^{(i)} = m_n \vec{v}_n^{\,i} = m_n \vec{v}_n^{\,f} + m_B \vec{v}_B^{\,f} = \vec{P}_{TOT}^{(f)} \\ E_K^{(i)} = \frac{1}{2} m_n (\vec{v}_n^{\,i})^2 = \frac{1}{2} m_n (\vec{v}_n^{\,f})^2 + \frac{1}{2} m_B (\vec{v}_B^{\,f})^2 = E_K^{(f)} \end{cases}$$

DUE EQUAZIONI IN DUE INCOGNITE!

1) $v_n^{(i)} = v_n^{(f)} + \frac{m_B}{m_n} v_B^{(f)} \Rightarrow \boxed{v_n^{(f)} = v_n^{(i)} - \frac{m_B}{m_n} v_B^{(f)}}$

2) $\frac{1}{2} m_n (v_n^i)^2 = \frac{1}{2} m_n (v_n^f)^2 + \frac{1}{2} m_B (v_B^f)^2 =$

$$= \frac{1}{2} m_n \left(v_n^{(i)} - \frac{m_B}{m_n} v_B^{(f)} \right)^2 + \frac{1}{2} m_B (v_B^{(f)})^2;$$

$$0 = \frac{1}{2} m_B (v_B^{(f)})^2 + \frac{1}{2} \frac{m_B^2}{m_n} (v_B^{(f)})^2 - m_B v_n^i (v_B^f);$$

$$0 = \frac{1}{2} m_B (v_B^f)^2 \left(1 + \frac{m_B}{m_n} \right) - m_B v_n^i v_B^{(f)};$$

$$0 = v_B^{(f)} m_B \left(\frac{1}{2} v_B^{(f)} \left(1 + \frac{m_B}{m_n} \right) - v_n^{(i)} \right)$$

Scartando $v_B^{(f)} = 0$, $\boxed{v_B^{(f)} = \frac{2 v_n^{(i)} m_n}{(m_n + m_B)}}$

Da questo segue che

$$v_n^{(f)} = v_n^{(i)} - \frac{m_B}{m_n} \left(\frac{2 v_n^{(i)} m_n}{m_n + m_B} \right) =$$

$$= \frac{(m_n + m_B)\, V_n^{(i)} - 2\, m_B\, V_n^{(i)}}{(m_n + m_B)} = \left(\frac{m_n - m_B}{m_n + m_B} \right) V_n^{(i)}$$

Ora che abbiamo la velocità finale cioè

$$V_n^{(f)} = \left(\frac{m_n - m_B}{m_n + m_B} \right) V_n^{(i)}$$

possiamo calcolare la variazione di energia cinetica o meglio la frazione di cui l'energia cinetica iniziale si riduce:

$$\boxed{E_{Kf} = \frac{1}{2} m_n (V_n^{f})^2 = \frac{1}{2} m_n \left(\frac{m_n - m_B}{m_n + m_B} \right)^2 (V_n^{(i)})^2 = \left(\frac{m_n - m_B}{m_n + m_B} \right)^2 E_{Ki}}$$

- Se il bersaglio è idrogeno: $\frac{m_n}{m_B} = 1 \Rightarrow \boxed{m_n - m_B = 0}$

$\Rightarrow$ il neutrone a causa dell'urto viene fermato

- se il bersaglio è carbonio: $\frac{m_n}{m_B} = \frac{1}{12}$ quindi

$$\left(\frac{m_n - m_B}{m_n + m_B} \right)^2 = \left(\frac{m_B}{m_B}\right)^2 \left(\frac{1 - \frac{1}{12}}{1 + \frac{1}{12}} \right)^2 = \left(\frac{\frac{11}{12}}{\frac{13}{12}} \right)^2 = \left(\frac{11}{13} \right)^2 \simeq 0.72$$

$$E_{Kf} = 0.72\, E_{Kin}$$

Supporto alla didattica 29/05/2017

PROBLEMA 4 Si considerino due corpi di masse m_1 e m_2 che scendono lungo un piano inclinato liscio con velocità iniziali $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. A $t=0$ i corpi sono a distanza "d" e le loro velocità sono tali che $|\vec{v}_1| > |\vec{v}_2|$.

① Si determini l'istante t^* a cui avviene l'urto.

② Si determini la velocità del corpo $m_1 + m_2$ subito dopo l'urto assumendo che questo sia totalmente anelastico.

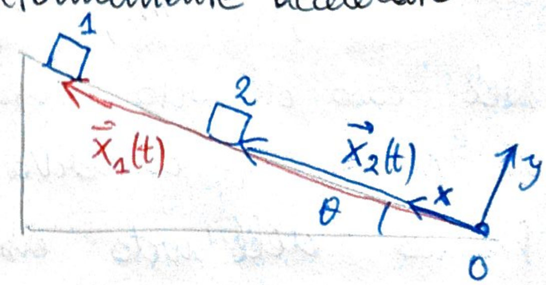
Svolgimento

① Sia θ l'angolo di inclinazione del piano inclinato. L'accelerazione lungo il piano è $\alpha = g \sin\theta$.

Dalla cinematica sappiamo che:

$$\vec{v}_j(t) = \vec{v}_j(0) + \vec{\alpha}\, t \Rightarrow \text{Moto uniformemente accelerato}$$

a cui corrisponde la legge oraria



$$\vec{x}_j(t) = \vec{x}_j(t=0) + \vec{v}_j(0)\, t + \frac{1}{2}\vec{\alpha}\, t^2$$

I due corpi si toccano (istante in cui avviene l'urto) quando $\vec{x}_1(t^*) = \vec{x}_2(t^*)$.

Da questo segue che:

$$\vec{x}_1(t^*) - \vec{x}_2(t^*) = 0 = \left(\vec{x}_1(t=0) - \vec{x}_2(t=0)\right) + \left(\vec{v}_1^{\,0} t^* - \vec{v}_2^{\,0} t^*\right)$$

Per ipotesi, $|\vec{x}_2(t=0) - \vec{x}_1(t=0)| = d$. Da questo ricavo t^*:

$$|\vec{x}_2(t=0) - \vec{x}_1(t=0)| = d = |\vec{v}_1(t=0) - \vec{v}_2(t=0)|\, t^* \;;$$

$$\boxed{t^* = \frac{d}{|\vec{v}_1(t=0) - \vec{v}_2(t=0)|}}$$

Risposta al quesito 1

L'istante a cui avviene l'urto è:

$$t^* = \frac{d}{|\vec{v}_1(t=0) - \vec{v}_2(t=0)|}$$

Quesito 2

Da $t=0$ a t^* le due masse accelerano con accelerazione costante $\alpha = g \sin\theta$. Questo significa che la loro quantità di moto aumenta nel tempo secondo la legge

$$\vec{P}_j(t) = m_j \vec{v}_j(t) = m_j (\vec{v}_j(t=0) + \vec{\alpha}\, t)$$

Nel caso di urto totalmente anelastico solo la quantità di moto si conserva.

Prima dell'urto abbiamo

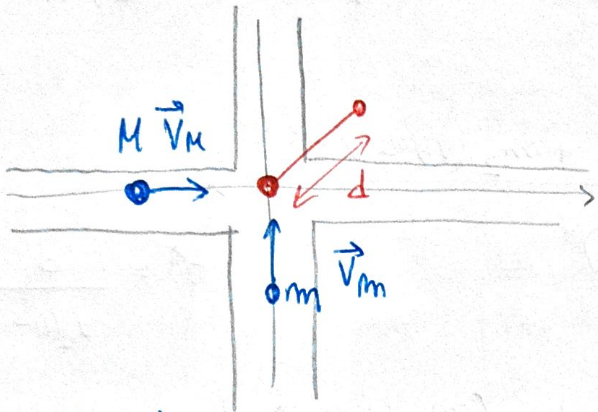
$$\vec{P}_{TOT}(t^*) = m_1 \vec{v}_1(t^*) + m_2 \vec{v}_2(t^*).$$

Dopo l'urto:

$$\vec{P}_{TOT}(t^*) = (m_1 + m_2)\, \vec{V}(t^*)$$

PROBLEMAS

Un camion di massa M ed un'automobile di massa m fanno un incidente. La situazione è descritta in figura.



Il camion procede con velocità nota $\vec{V}_M$ diretta verso EST.

L'auto procede verso Nord con velocità $\vec{V}_m$ (INCOGNITA).

Dopo l'urto le carcasse rimangono attaccate.

① Sapendo che il sistema "camion + auto" si ferma dopo aver percorso una distanza nota "d" lungo la direzione Nord-EST e che il coefficiente di attrito dinamico è μ_d, stabilire $\vec{V}_m$ e μ_d.

SVOLGIMENTO

Dividiamo il problema in 2 parti:

Ⓐ Conservazione della quantità di moto

Ⓑ Conservazione dell'energia.

Ⓐ $\vec{P}_{TOT}^{(i)} = \vec{P}_{CAMION} + \vec{P}_{AUTO} = M\vec{V}_M + m\vec{V}_m = \vec{P}_{TOT}^{(f)} =$

$= (m+M)\vec{V}$

Supporto alla didattica 29/05/2017

Passo in componenti:

$$\begin{cases} \left(\vec{P}^{\,i}_{TOT}\right)\cdot\hat{x} = M v_M = (m+M)\dfrac{|\vec{V}|}{\sqrt{2}} = \left(\vec{P}^{(f)}_{TOT}\right)\cdot\hat{x} \\ \vec{P}^{(i)}_{TOT}\cdot\hat{y} = m v_m = (m+M)\dfrac{|\vec{V}|}{\sqrt{2}} = \left(\vec{P}^{(f)}_{TOT}\right)\cdot\hat{y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{M v_M}{m v_m} = 1 \Rightarrow \boxed{v_m = \frac{M}{m} v_M}$$

Quindi $\vec{v}_m = \dfrac{M}{m} v_M \, \hat{y}$.

Per quanto riguarda il calcolo di μ_d usiamo la conservazione dell'energia cinetica:

$$\Delta E_k = E_{kf} - E_{ki} = \mathcal{L}_{ATTRITO} \text{ (stato "i" } \rightarrow \text{ stato "f")}$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{ATTRITO} = -\mu_d (M+m) g d \\ E_{ki} = \dfrac{1}{2}(M+m) v^2 = \dfrac{1}{2}(M+m)\left(\dfrac{\sqrt{2}\,\vec{V}_M M}{m+M}\right)^2 = \dfrac{V_M^2 M^2}{(m+M)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{M^2 V_M^2}{(m+M)} = \mu_d (M+m) g d \Rightarrow \boxed{\mu_d = \frac{M^2 v_M^2}{(m+M)^2 g d}}$$