Moto circolare

- *Cinematica*
  - → *moto circolare uniforme*
  - → *moto circolare generico*
- *Dinamica*
  - → *esempi vari*
  - → *moto circolare e attrito*

Gettys

capitoli 4.4, 4.5 e 6.3

Moto circolare

- *Cinematica*
  - → $\boxed{\text{\textit{moto circolare uniforme}}}$
  - → *moto circolare generico*
- *Dinamica*
  - → *esempi vari*
  - → *moto circolare e attrito*

Gettys

capitolo 4.4

Moto circolare uniforme

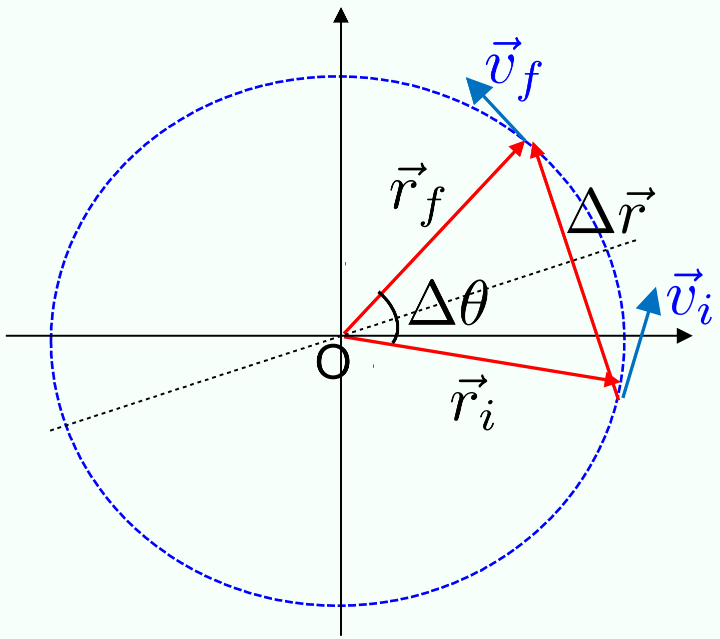
Moto su traiettoria circolare

$$|\vec{r}| = R = |\vec{r}_i| = |\vec{r}_f|$$

uniforme → *la velocità è costante in modulo*

$$|\vec{v}| = |\vec{v}_i| = |\vec{v}_f| = \text{cost.}$$

La velocità *però cambia direzione*: $\vec{a} \neq 0$



$$R\sin(\Delta\theta/2) = \frac{1}{2}|\Delta\vec{r}|$$

Sia θ = s/R l'angolo spazzato (in radianti);
s lo spazio percorso lungo la circonferenza

Nel tempo Δt si verificano i seguenti cambiamenti

$$\begin{cases} \Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i \\ \Delta\theta = \theta_f - \theta_i \\ \Delta s = R\,\Delta\theta \end{cases}$$

$$\boxed{R\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = v}$$

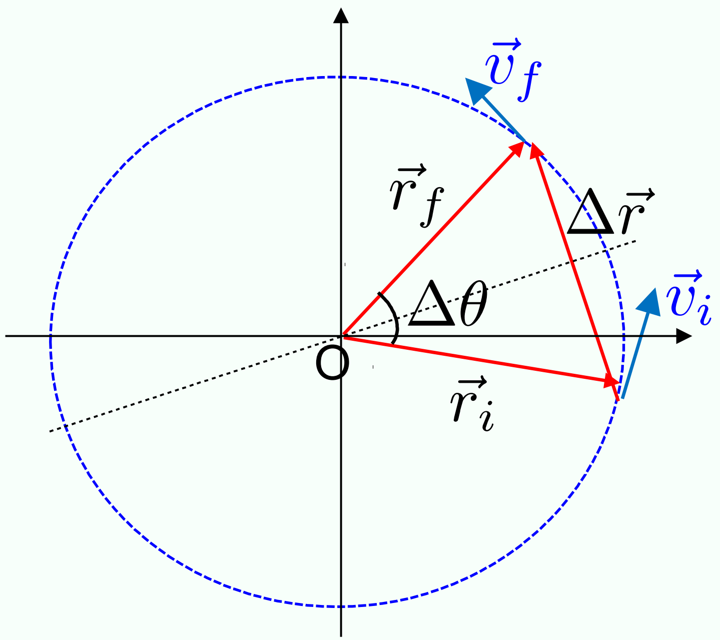
Velocità costante in modulo

Moto circolare uniforme

$$\begin{cases} \Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i \\ \Delta\theta = \theta_f - \theta_i \\ \Delta s = R\,\Delta\theta \end{cases}$$

$$R\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = v$$

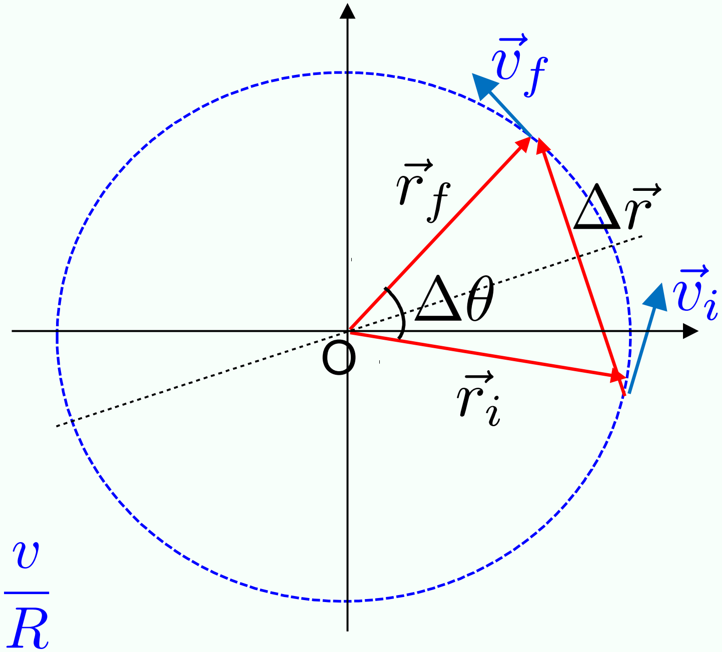
Velocità costante in modulo



DEFINIZIONI GENERALI:
grandezze del moto circolare (anche non uniforme)

Velocità angolare media $\langle\omega\rangle = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$	Velocità angolare $\omega = \lim_{\Delta t\to 0}\langle\omega\rangle = \dfrac{d\theta}{dt}$
Accelerazione angolare media $\langle\alpha\rangle = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$	Accelerazione angolare $\alpha = \lim_{\Delta t\to 0}\langle\alpha\rangle = \dfrac{d\omega}{dt}$

Moto circolare uniforme



Le *velocità vettoriali* $\vec{v}_i, \quad \vec{v}_f, \quad \Delta\vec{v}=\vec{v}_f-\vec{v}_i$ formano un *triangolo isoscele* ***simile*** a quello dei *raggi vettore* (la velocità è tangente in ogni punto alla traiettoria, quindi è perpendicolare al raggio).

$\Rightarrow$ stesso angolo $\Delta\theta$ (triangoli simili)

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{v} = \frac{|\Delta\vec{r}|}{R} = 2\sin(\Delta\theta/2) \;\Rightarrow\; |\Delta\vec{v}| = |\Delta\vec{r}|\frac{v}{R}$$

$$\langle\omega\rangle = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \text{cost.} = \frac{v}{R} \;\Rightarrow\; \Delta t = \frac{R\,\Delta\theta}{v}$$

Direzione dell'accelerazione:

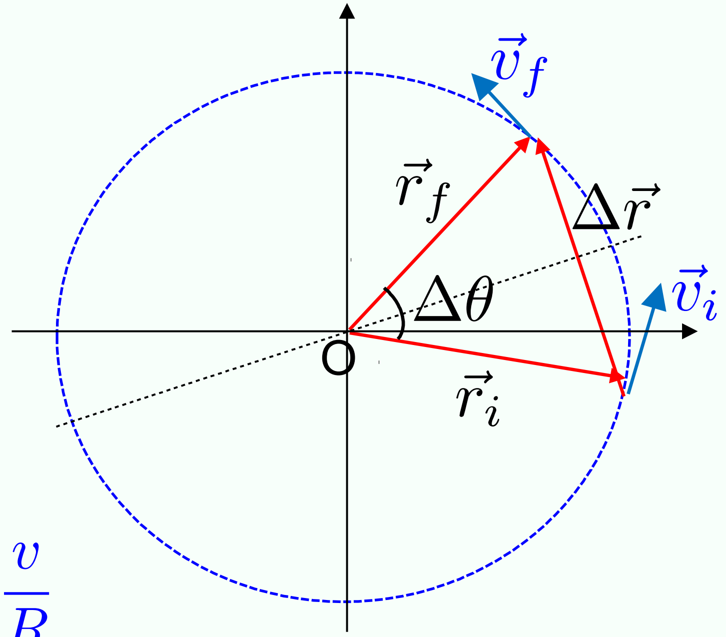
Se la velocità è costante in modulo, l'accelerazione è sempre *perpendicolare alla traiettoria*.
Se così non fosse, vi sarebbe una componente parallela a $\vec{v}$ e quindi $|\vec{v}|$ aumenterebbe.

$$\vec{a} \perp \vec{v} \;\Rightarrow\; \vec{a} \parallel \vec{r}$$

Moto circolare uniforme

Le *velocità vettoriali* $\vec{v}_i, \quad \vec{v}_f, \quad \Delta\vec{v} = \vec{v}_f - \vec{v}_i$ formano un *triangolo isoscele* ***simile*** a quello dei *raggi vettore* (la velocità è tangente in ogni punto alla traiettoria, quindi è perpendicolare al raggio).

$\Rightarrow$ stesso angolo $\Delta\theta$ (triangoli simili)



$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{v} = \frac{|\Delta\vec{r}|}{R} = 2\sin(\Delta\theta/2) \;\Rightarrow\; |\Delta\vec{v}| = |\Delta\vec{r}|\frac{v}{R}$$

$$\langle\omega\rangle = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \text{cost.} = \frac{v}{R} \;\Rightarrow\; \Delta t = \frac{R\,\Delta\theta}{v}$$

Modulo dell'accelerazione:

$$|\vec{a}| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v}{R}\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \frac{v}{R}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \frac{v^2}{R} \\ \displaystyle\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{v}{R}\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta\theta} = \frac{v}{R}\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{v\,|\Delta\vec{r}|}{R\,\Delta\theta} = \frac{v^2}{R}\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\sin(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2} = \frac{v^2}{R} \end{cases}$$

Due possibili vie

Moto circolare

- *Cinematica*
  - → *moto circolare uniforme*
  - → *moto circolare generico*
- *Dinamica*
  - → *esempi vari*
  - → *moto circolare e attrito*

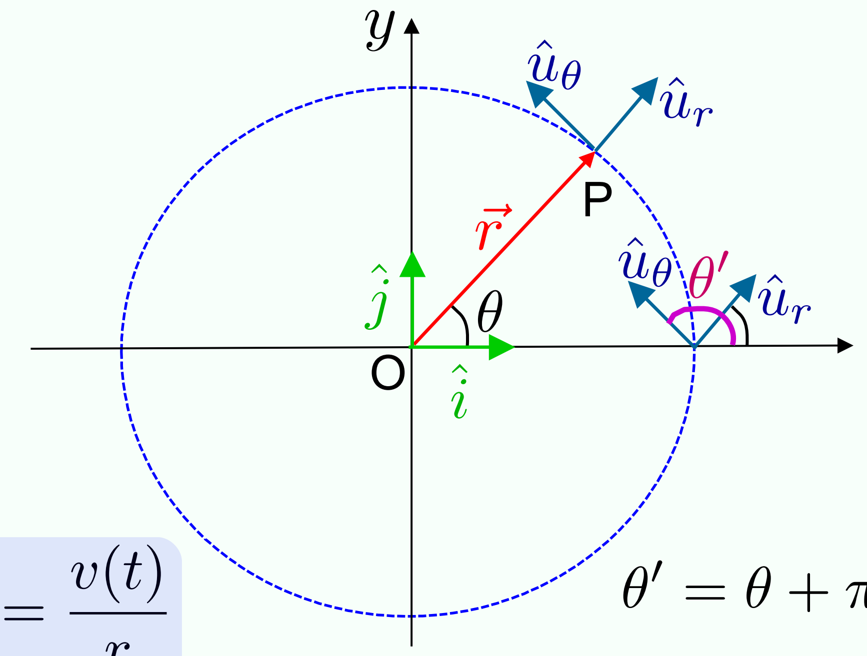
Gettys

capitolo 4.5

Moto circolare generico

la velocità può cambiare in modulo
⇨ meglio usare coordinate polari (r, θ)
[il raggio r rimane costante]

$$\begin{cases} \hat{u}_r = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j} \\ \hat{u}_\theta = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j} \end{cases}$$



$$\frac{d\theta}{dt} = \omega(t) = \frac{v(t)}{r}$$

$$\vec{v} = v\,\hat{u}_\theta \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = v\frac{d\hat{u}_\theta}{dt} + \hat{u}_\theta\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{d\hat{u}_\theta}{dt} = -\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\hat{i} - \sin\theta\frac{d\theta}{dt}\hat{j} = \frac{d\theta}{dt}(-\cos\theta\,\hat{i} - \sin\theta\,\hat{j}) = -\frac{v}{R}\hat{u}_r$$

$$\vec{a} = \boxed{-\frac{v^2}{r}\hat{u}_r} + \boxed{\frac{dv}{dt}\hat{u}_\theta}$$

Componente *radiale* a_r e *tangenziale* a_θ

Se il modulo è costante nel tempo, allora c'è solo componente radiale (moto circolare uniforme)

Es: auto in curva: accelerazione radiale centripeta $a_r \to \infty$ se $r \to 0$; accelerazione tangenziale dv/dt

Moto circolare

- *Cinematica*
  - → *moto circolare uniforme*
  - → *moto circolare generico*
  - → *moto lungo una traiettoria curva*
- *Dinamica*
  - → *esempi vari*
  - → *moto circolare e attrito*

Gettys

capitolo 6.3

Che tipo di forze devono agire perché si abbia un **moto circolare uniforme**?

Dalla seconda legge della dinamica cerchiamo di capire quali forze soddisfano la richiesta di avere un'*accelerazione centripeta* (cioè con la ***sola** componente radiale*).

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = m\vec{a} \qquad \vec{a} = -\frac{v^2}{r}\hat{u}_r; \; |\vec{a}| = \text{cost.}$$

$$\frac{1}{m}\sum_i \vec{F}_i = \vec{a} = -\frac{v^2}{r}\hat{u}_r$$

$$\Downarrow$$

Se c'è moto circolare uniforme, la risultante delle forze sarà costante in modulo e diretta sempre verso il centro.

Esempi:

- forze a distanza (forza di gravità → moto dei pianeti;
  forza di coulomb → modello classico dell'atomo di idrogeno)
- forze vincolari (tensioni → giostra)

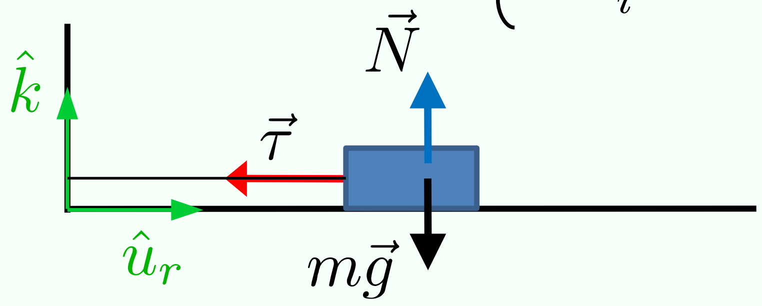
Esercizio (situazione tipica):

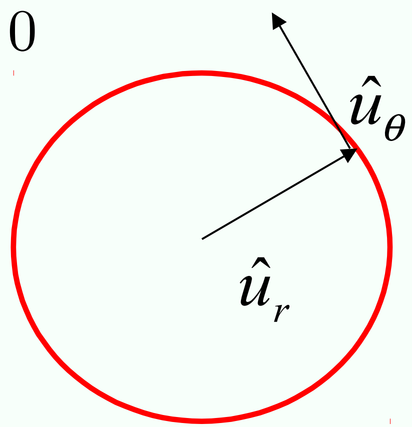
Un disco di massa m, legato ad un filo ideale (inestensibile e di massa trascurabile) di lunghezza *r* vincolato all'altro estremo, scivola senza attrito su un piano orizzontale liscio, percorrendo una traiettoria circolare di periodo $T = 2\pi r/v = 2\pi/\omega$.

Trovare la tensione $\vec{\tau}$ del filo.

Il moto avviene nel piano orizzontale → fissiamo gli assi verticale e radiale

$$\begin{cases} \left(\sum_i \vec{F}_i\right)_r = -\tau = m\,a_r = -m\dfrac{v^2}{r} = -mr\dfrac{4\pi^2}{T^2} \\ \left(\sum_i F_i\right)_z = N - mg = ma_z = 0 \end{cases}$$





Se il filo si spezzasse ⇒ τ = 0 ⇒ a = 0, quindi il disco continuerebbe con velocità vettoriale costante (in moto rettilineo uniforme), in direzione tangente alla traiettoria circolare nel momento di rottura del filo.

Moto circolare

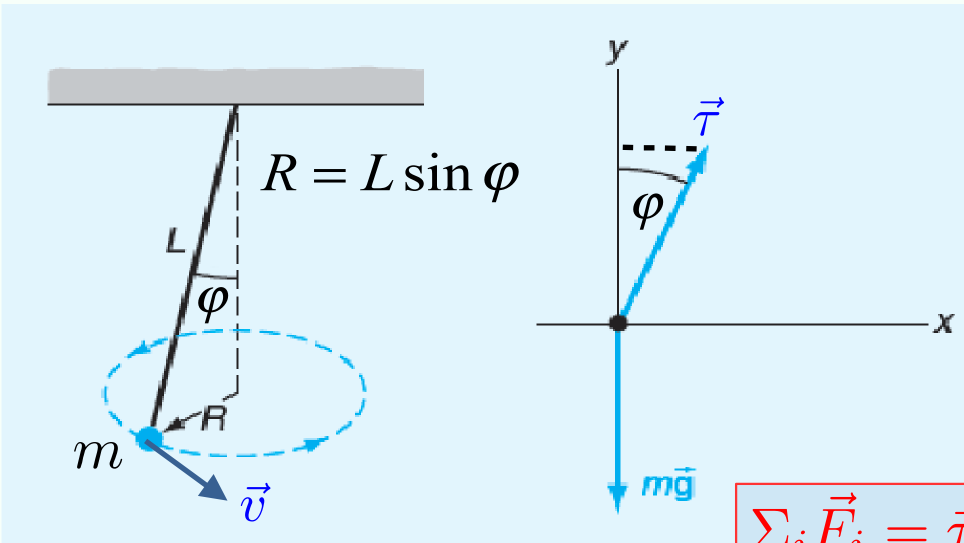
- *Cinematica*
  - → *moto circolare uniforme*
  - → *moto circolare generico*
  - → *moto lungo una traiettoria curva*
- *Dinamica*
  - → *esempi vari*
  - → *moto circolare e attrito*

Gettys

capitolo 6.3

Pendolo conico (giostra)

Una massa *m* appesa ad un filo ideale di lunghezza *L* percorre una traiettoria circolare a velocità costante nel piano orizzontale. L'attrito è trascurabile. Noti *L*, *m* e φ, quanto vale il periodo *T* del pendolo? E la velocità angolare ω? E la tensione τ?



$$\Sigma_i \vec{F}_i = \vec{\tau} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

$$\begin{cases} ma_z = 0 = \tau\cos\varphi - mg \quad \Rightarrow \quad \tau = \dfrac{mg}{\cos\varphi} \\ ma_r = -m\dfrac{v^2}{R} = -\tau\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad m\dfrac{v^2}{R} = m\omega^2 R = m\omega^2 L\sin\varphi = \tau\sin\varphi \end{cases}$$

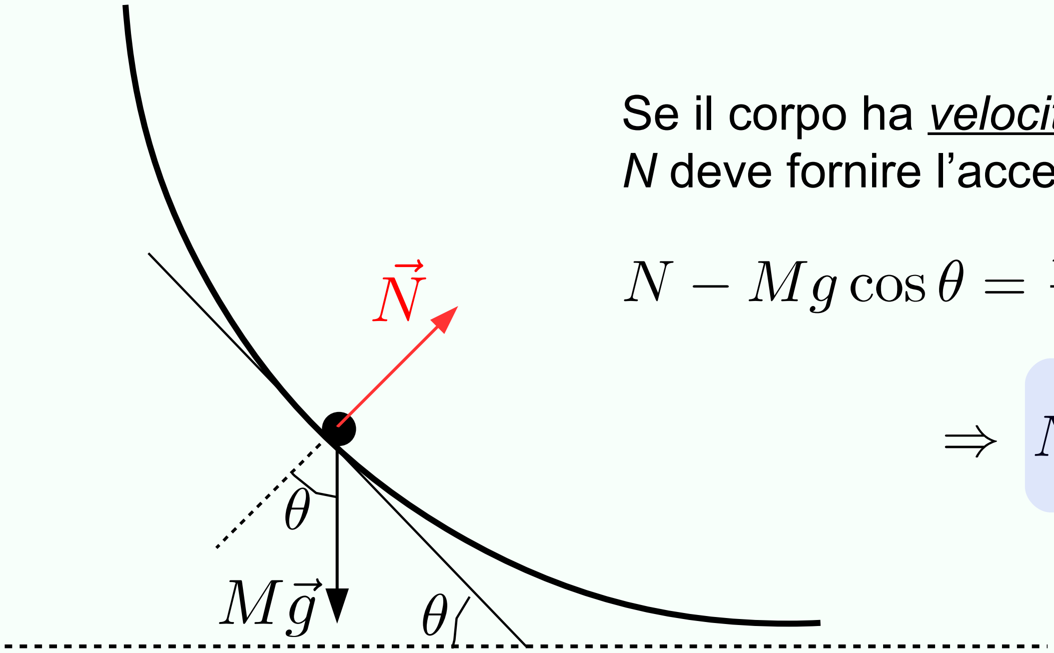
$$\tau = m\omega^2 L = \frac{mg}{\cos\varphi} \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{L\cos\varphi}} = \frac{2\pi}{T}$$

La forza normale è presente in qualunque superficie:

Punto per punto, $\vec{N}$ è $\perp$ alla superficie

Se il corpo è <u>fermo</u>:

$$N - Mg\cos\theta = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{N = Mg\cos\theta}$$



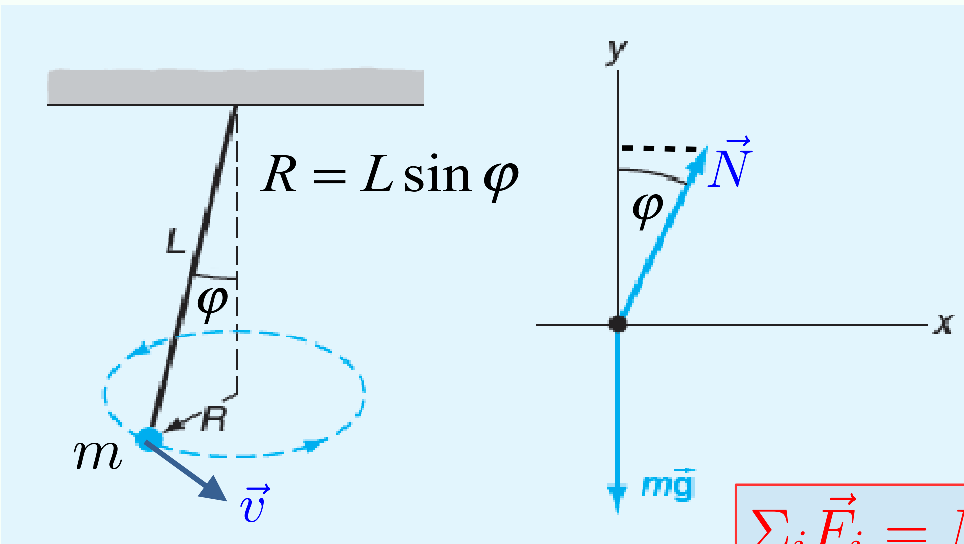
Se il corpo ha *velocità **v***,
N deve fornire l'accelerazione centripeta che manca:

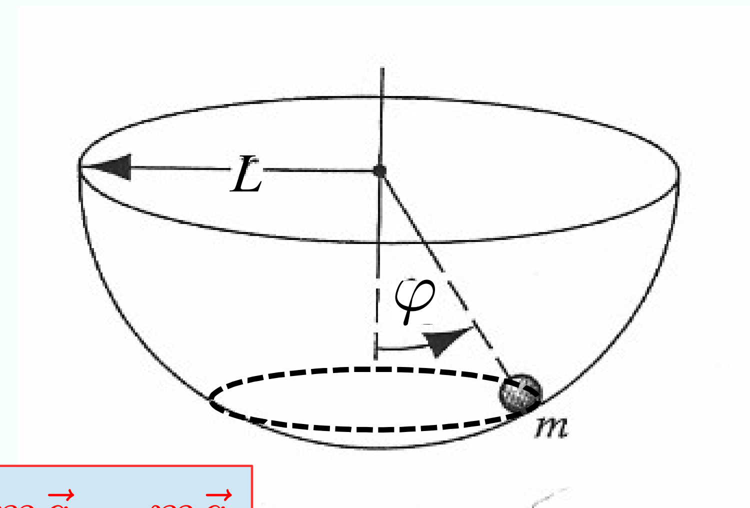
$$N - Mg\cos\theta = \frac{Mv^2}{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{N = Mg\cos\theta + \frac{Mv^2}{R}}$$

Scivolamento lungo una conca sferica

Una massa m scivola senza attrito lungo una traiettoria circolare a velocità costante di raggio *R* sopra una superficie sferica di raggio *L*. Noti *L*, *m* e φ (o *R*) quanto vale il periodo *T* del moto circolare? E la velocità angolare ω? E la forza normale *N*?





$$\boxed{\Sigma_i \vec{F}_i = \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}}$$

$$\begin{cases} ma_z = 0 = N\cos\varphi - mg & \Rightarrow \quad N = \dfrac{mg}{\cos\varphi} \\[2ex] ma_r = -m\dfrac{v^2}{R} = -N\sin\varphi & \Rightarrow \quad m\dfrac{v^2}{R} = m\omega^2 R = m\omega^2 L\sin\varphi = N\sin\varphi \end{cases}$$

$$N = m\omega^2 L = \frac{mg}{\cos\varphi} \qquad\qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{L\cos\varphi}} = \frac{2\pi}{T}$$

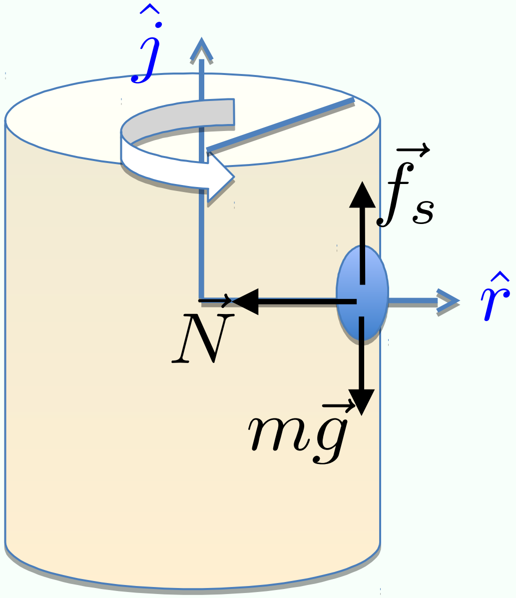
Moto circolare

- *Cinematica*
  - → *moto circolare uniforme*
  - → *moto circolare generico*
  - → *moto lungo una traiettoria curva*
- *Dinamica*
  - → *esempi vari*
  - → *moto circolare e attrito*

Gettys
capitolo 6.3

Giostra “rotore”

Questa giostra è costituita da un cilindro che ruota intorno al suo asse verticale. Le persone sono appoggiate alla parete della superficie laterale e, quando la velocità angolare supera un determinato limite, *rimangono attaccate alla parete* anche quando la pedana orizzontale sotto i loro piedi si abbassa. Osservando il moto di una persona attaccata alla parete da un sistema di riferimento inerziale (in quiete rispetto all’asse del cilindro), si capisce che si tratta di un **moto circolare uniforme**; *la forza normale è responsabile dell’accelerazione centripeta* e *la forza di attrito statica controbilancia la forza peso*.



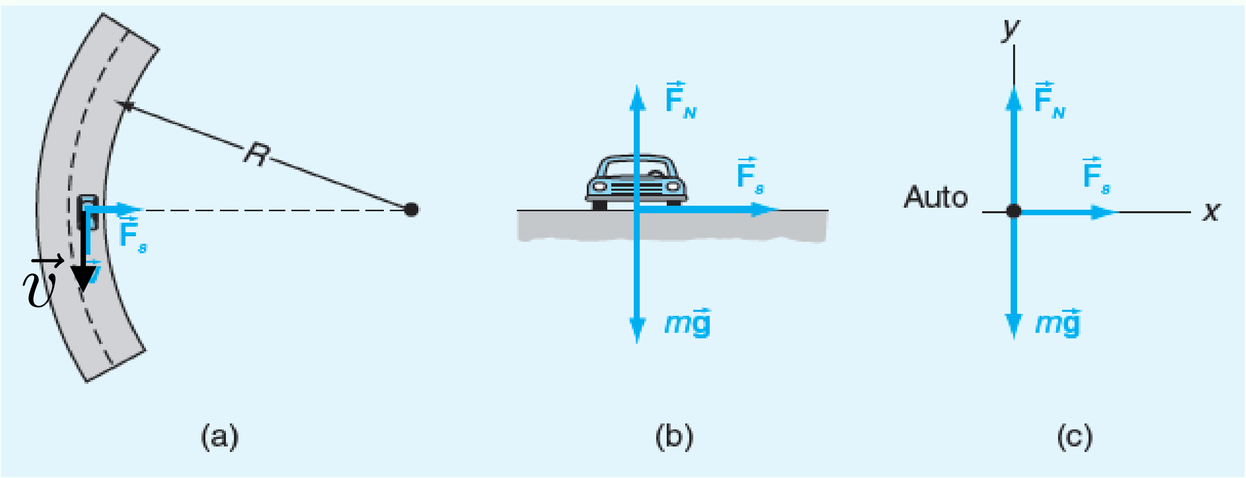
$$\begin{cases} 0 = ma_y = f_s - mg \\ ma_r = -m\dfrac{v^2}{R} = -N \end{cases}$$

$$f_s = mg \leq \mu_S N = \mu_S\, m\frac{v^2}{R} = \mu_S\, m\,\omega^2 R$$

$$mg \leq \mu_S\, m\omega^2 R \;\Rightarrow\; \omega \geq \boxed{\omega_{\min} = \sqrt{\frac{g}{\mu_S R}}}$$

Curva piana con attrito

Supponiamo che un'auto (o una slitta) percorra una curva piana, approssimabile con un arco di circonferenza, ad andatura costante. La traiettoria può essere mantenuta grazie alla forza di attrito statico, in direzione ⊥ al moto, dovuto ai pneumatici (o ai pattini). Si noti che la forza di attrito statico è diretta verso il centro, infatti in sua assenza si "sbanderebbe".



$$F_S = m a_R = m\frac{v^2}{R}$$

$$\Rightarrow \quad F_S = m\frac{v^2}{R}$$

$$F_S \leq F_S^{\max} = \mu_S\, F_N$$

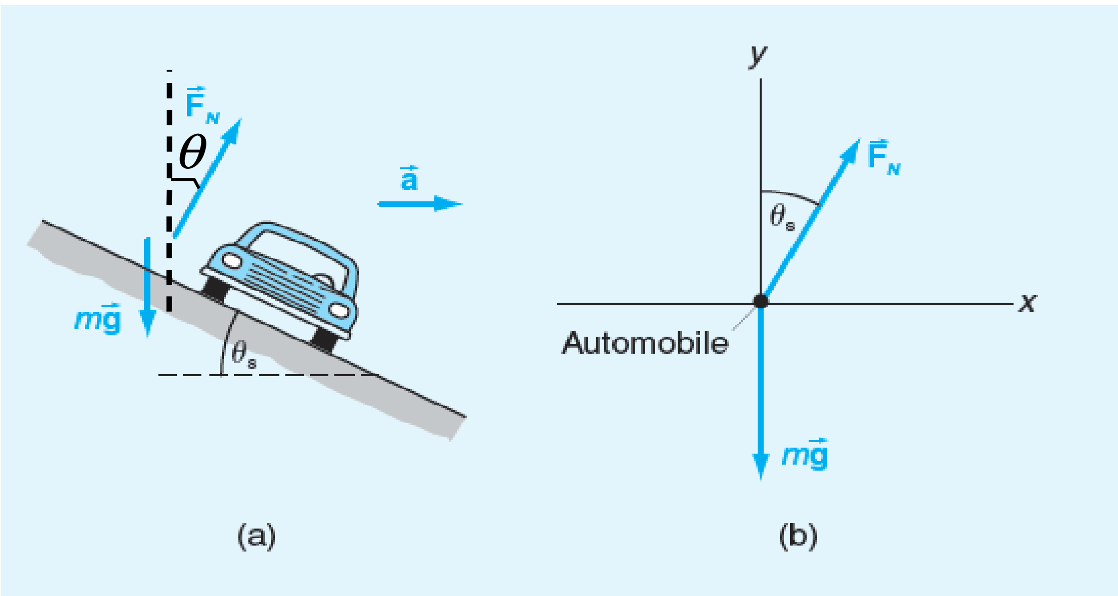
Se l'auto (slitta) percorre la curva senza sbandare deve essere soddisfatta la condizione

$$m\frac{v^2}{R} \leq \mu_S\, m g \quad \Longrightarrow \quad v \leq \boxed{v_{\max} = \sqrt{\mu_S\, g R}}$$

Se il raggio di curvatura è piccolo la v_{max} deve essere ridotta

Curva sopraelevata (I: senza attrito)

Un'auto (o una slitta) entra nella curva con una velocità v e la percorre ad andatura costante. L'accelerazione è diretta verso il centro. L'auto è mantenuta nella sua traiettoria dalla componente della forza normale.



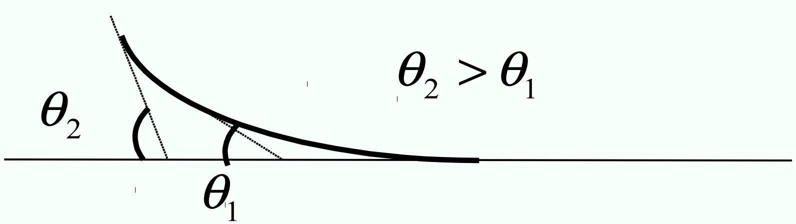
$$ma_y = 0 = N\cos\theta - mg$$

$$ma_r = m\frac{v^2}{R} = N\sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{N}\sin\theta}{\cancel{N}\cos\theta} = \frac{\cancel{m}v^2}{R\cancel{m}g}$$

perciò $\theta = \arctan\left(\frac{v^2}{Rg}\right)$

L'angolo giusto per non sbandare dipende dalla velocità; per questo nelle piste da slittino la pendenza varia in base alla velocità. Posizionandosi più in alto o più in basso, si trova la condizione giusta per la percorrenza.



Curva sopraelevata (II: con attrito)

Supponiamo ora che, nella curva sopraelevata, oltre alla componente della forza normale ci sia anche un attrito statico.

$$\begin{cases} \left(\sum_i \vec{F}_i\right)_y = ma_y = 0 = N\cos\theta - mg - f_S\sin\theta \\ \left(\sum_i \vec{F}_i\right)_r = ma_r = m\dfrac{v^2}{R} = f_S\cos\theta + N\sin\theta \end{cases}$$

$$f_S \le f_S^{\max} = \mu_S N$$

In condizioni limite $f_s = \mu_s N$: si possono trovare le condizioni che permettono di percorrere la curva alla velocità massima.

$$\begin{cases} mg = N(\cos\theta - \mu_S\sin\theta) \\ m\dfrac{v_{\max}^2}{R} = N(\sin\theta + \mu_S\cos\theta) \end{cases}$$

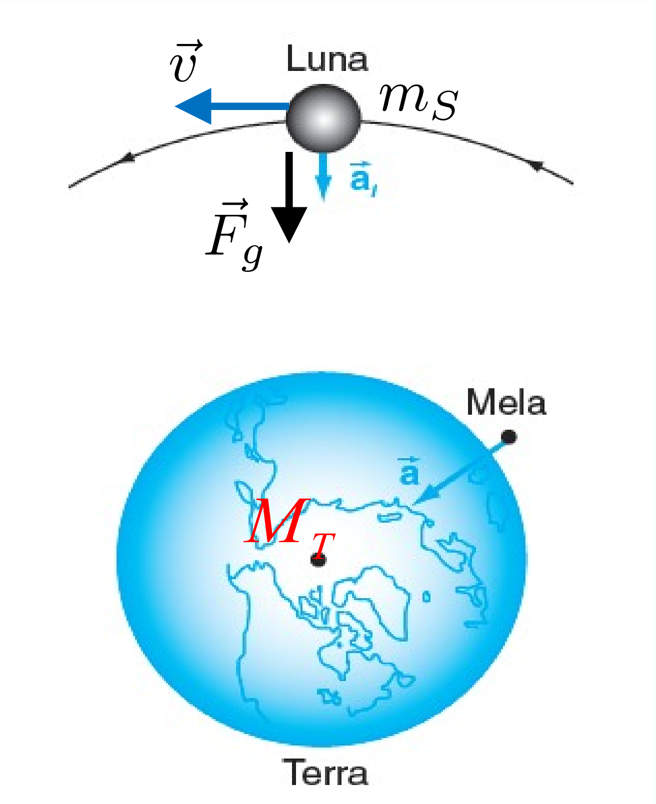
$$m\frac{v_{\max}^2}{R} = mg\frac{\sin\theta + \mu_S\cos\theta}{\cos\theta - \mu_S\sin\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{\max}^2 = gR\frac{\tan\theta + \mu_S}{1 - \mu_S\tan\theta}}$$

Dinamica del moto circolare

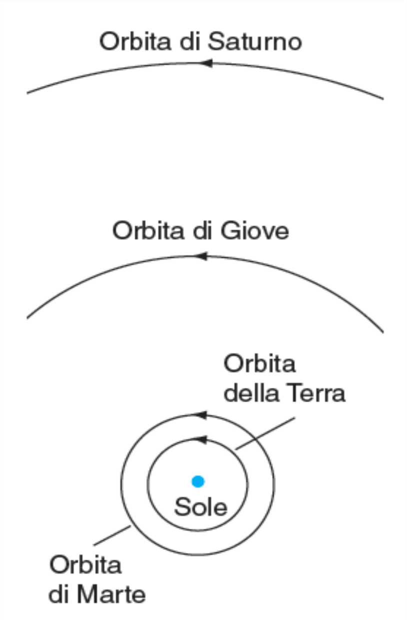
Studiamo il **moto dei pianeti** intorno al sole (oppure quello dei satelliti in orbita intorno alla terra, etc.)

$$|\vec{F}_g| = \frac{GM_T m_S}{R^2} = m_S \frac{v^2}{R} \qquad v = \frac{2\pi R}{T}$$



$$\frac{GM_T}{R^2} = \left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2 \frac{1}{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_T}\right) R^3} = K_S R^3$$



K_s è una costante che dipende dal corpo di massa maggiore che sta al centro della circonferenza.

3° legge di Keplero: il quadrato del periodo di rivoluzione di ogni pianeta è proporzionale al cubo del semiasse maggiore della sua orbita ellittica.

Dinamica del moto circolare

Studiamo il **moto dei pianeti** intorno al sole (oppure quello dei satelliti in orbita intorno alla terra, etc.)

$$|\vec{F}_g| = \frac{G M_T m_S}{R^2} = m_S \frac{v^2}{R}$$

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

$$\Rightarrow \; T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{G M_T}\right) R^3$$

Tabella 7.1 Dati relativi al sistema solare

Corpo	(1) Periodo T, 10^7 s	(2) Raggio orbitale medio R, 10^{11} m	(3) Accelerazione orbitale media $a_c = 4\pi^2 R/T^2$, 10^{-3} m/s²	(4) Accelerazione x raggio orbitale al quadrato $a_c R^2 = 4\pi^2 R^3/T^2$, 10^{20} m³/s²	(5) Massa 10^{24} kg
Sole					1 990 000
Mercurio	0.760	0.579	39.6	1.33	0.335
Venere	1.94	1.08	11.3	1.32	4.89
Terra	3.156	1.496	5.929	1.327	5.97
Marte	5.94	2.28	2.55	1.33	0.646
Giove	37.4	7.78	0.219	1.33	1900
Saturno	93.5	14.3	0.0646	1.32	569
Urano	264	28.7	0.0163	1.34	87.3
Nettuno	522	45.0	0.00652	1.32	103
Plutone	782	59.1	0.00382	1.33	5.4

Nel caso della terra M_T e di un satellite m_S , perché quest'ultima si posizioni su un'orbita geostazionaria (periodo 24 h), l'unico valore possibile per il raggio dell'orbita è data da:

$$R_{\mathrm{GEO}} = \sqrt[3]{\frac{G M_T}{4\pi^2}}\, T^{2/3}$$

$$R_{\mathrm{GEO}} \approx 4.22 \times 10^7\, m = 42200\, km$$

Dinamica del moto circolare non uniforme

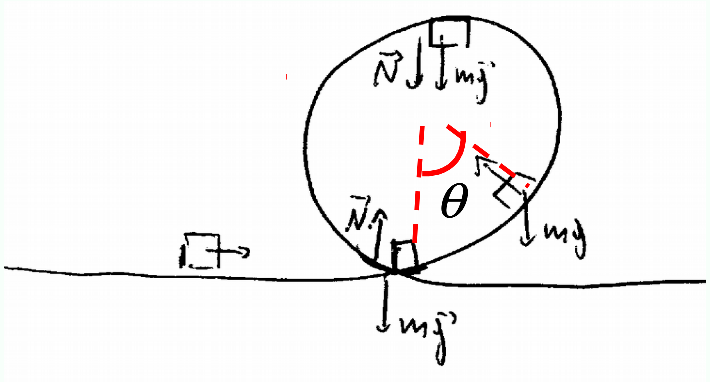
v velocità tangenziale lungo $\hat{u}_\theta$: $v = R\omega \qquad \frac{dv}{dt} = R\alpha \neq 0$

Se un corpo sta su traiettoria circolare, deve essere comunque vero che $\left(\sum_i \vec{F}_i\right)_r = ma_r = -m\frac{v^2}{R}$

Es.: carrello che compie il "giro della morte" su guida liscia.
Che velocità minima sulla sommità deve avere per non cadere?

- si seleziona un punto;
- si calcolano le forze agenti nel punto;
- si vedono le componenti radiali e tangenziali;
- si applica la seconda legge della dinamica:

$$ma_r = -N + mg\cos\theta = -m\frac{v^2}{R}$$

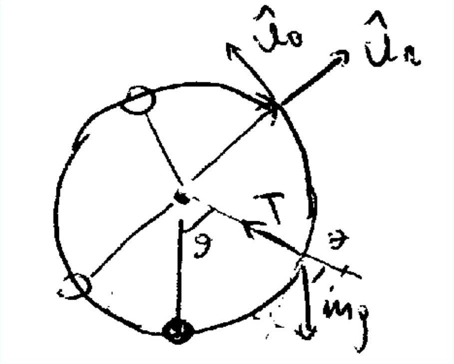


Sulla sommità abbiamo: $-N - mg = -m\frac{v_{\text{top}}^2}{R} \;\Rightarrow\; N = m\frac{v_{\text{top}}^2}{R} - mg$

Se il corpo rimane sempre in contatto con la rotaia, deve essere N ≥ 0, perciò: $m\frac{v_{\text{top}}^2}{R} - mg > 0 \;\Rightarrow\; \boxed{v_{\text{top}}^{\min} = \sqrt{gR}}$

Dinamica del moto circolare: variabili angolari e coordinate polari

Consideriamo un corpo legato ad un filo che descrive una circonferenza in un piano verticale. Come cambia la tensione T (in modulo)?



Componente radiale
Componente tangenziale

$$\begin{cases} \left(\sum_i \vec{F}_i\right)_r = -\tau + mg\cos[\theta(t)] = -m\dfrac{v^2}{r} \\ \left(\sum_i \vec{F}_i\right)_t = -mg\sin[\theta(t)] = m\dfrac{dv}{dt} \end{cases}$$

Qual è la velocità minima alla sommità affinché resti tesa la corda? Cioè T ≥ 0?

$$-\tau + mg\cos\theta = -m\frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad mg\cos\theta + m\frac{v^2}{R} \geq 0$$

Il coseno è minimo per θ = 180° cioè sulla verticale.

$$-mg + m\frac{v_{\min}^2}{R} = \tau_{\min} \geq 0 \;\Rightarrow\; \boxed{v_{\min} \geq \sqrt{Rg}}$$

$$\left(\sum_i \vec{F}_i\right)_t = -mg\sin[\theta(t)] = m\frac{dv}{dt} = mr\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad v(t) = r\frac{d\theta}{dt} = r\,\omega(t)$$