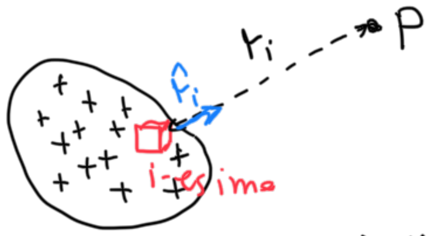
distribuzioni continue di carica



$$\vec{E}_p = ?$$

$$\vec{E} = \sum_i k_e \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

Se il cubetto è piccolissimo (di volume ΔV_i) $\Rightarrow$ anche la carica sarà piccola Δq_i

$$\vec{E}_p = k_e \int \frac{dq}{r^2} \hat{r} = $$

$$= k_e \int \frac{\rho(\vec{r})}{r^2} \hat{r} \, dV$$

$$(dV = dx\,dy\,dz)$$

- densità volumetrica di carica:

$$\rho(\vec{r}) = \frac{dq}{dV}$$

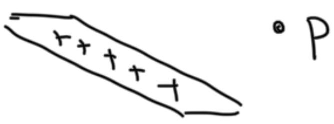
dq → carica infinitesima nel cubetto che sta in $\vec{r}$

dV → volume infinitesimo del cubetto

$$dq = \rho(\vec{r})\, dV$$

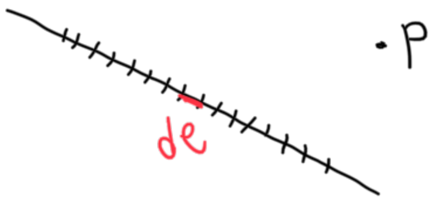
(ρ si misura in $\frac{C}{m^3}$)

- densità superficiale di carica: $\sigma(\vec{r}) = \frac{dq}{dS}$ (σ si misura in $\frac{C}{m^2}$)

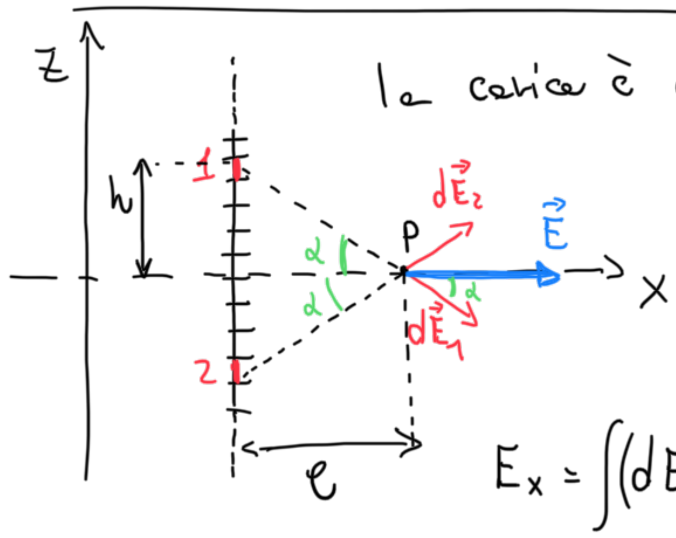


$$\vec{E}_p = k_e \int \frac{dq}{r^2} \hat{r} = k_e \int \frac{\sigma(\vec{r})}{r^2} \hat{r}\, dS \qquad (dS = dx\,dy)$$

- densità lineare di carica: $\lambda(\vec{r}) = \frac{dq}{d\ell}$ (λ si misura in $\frac{C}{m}$)



$$\vec{E}_p = k_e \int \frac{\lambda(\vec{r})}{r^2} \hat{r}\, d\ell$$



la carica è distribuita omogeneamente sul filo (+)

$$\lambda = \frac{dq}{dh}$$

$$d\vec{E}_1 = \left(|d\vec{E}_1| \cos\alpha\right)\hat{x} + \left(-|d\vec{E}_1| \sin\alpha\right)\hat{z}$$

$$d\vec{E}_2 = \left(\quad '' \quad\right)\hat{x} + \left(+ \quad\right)\hat{z}$$

$$|d\vec{E}_i| = k_e \frac{dq}{h^2+\ell^2}\ ; \quad \cos\alpha = \frac{\ell}{\sqrt{h^2+\ell^2}}$$

$$dq = \lambda\, dh$$

$$E_x = \int (dE_i)_x =$$

$$= \int k_e \frac{dq}{h^2+\ell^2} \cdot \frac{\ell}{\sqrt{h^2+\ell^2}} =$$

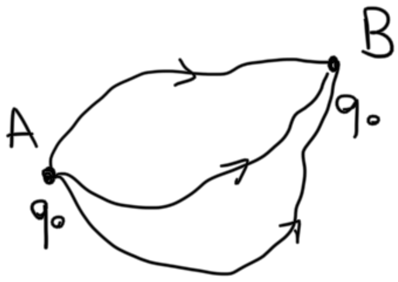
se il filo è "infinito" (molto lungo) lunghezza $\gg \ell$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} k_e \frac{\lambda\, dh}{(h^2+\ell^2)^{3/2}} \ell = k_e \lambda \ell \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dh}{(h^2+\ell^2)^{3/2}} \simeq \frac{2 k_e \lambda}{R}$$

si trova facendo l'integrale

La forza elettrica è conservativa

(si dice che anche il campo elettrico è conservativo)



$L_{A\to B}(\vec{F}_{elettrica})$ non dipende dal percorso

$\Rightarrow$ possiamo definire una energia potenziale elettrica U_e

$$\Delta U_e = U_B - U_A = -L_{A\to B} = -\int_A^B \vec{F}_e \cdot d\vec{s}$$ (formula generale)

forza elettrica $\longleftrightarrow$ forza gravitazionale

$\vec{F}_e = k_e \dfrac{q_1 q_0}{r^2}\hat{r}$ (tra cariche puntiformi)

$\vec{F}_g = -G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}$ (tra due pianeti)

$k_e \leftrightarrow G$
segno $-$
$q \leftrightarrow m$

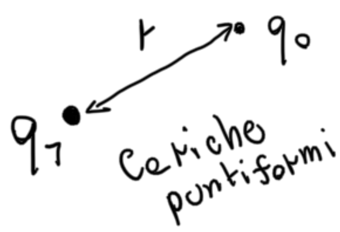
$$\Delta U = U_f - U_i = k_e q_1 q_0 \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right) \equiv \underbrace{U_e(r_f)}_{U_f} - \underbrace{U_e(r_i)}_{U_i}$$

$$\boxed{U_e(r) = k_e \frac{q_1 q_0}{r}}$$

presuppone che $U_e(r\to+\infty) = 0$

energia potenziale elettrica di una carica q_0 che sta a distanza r da q_1 (le cariche q_0 e q_1 sono puntiformi)

(nell'analogia col campo gravitazionale (o forza) $1 \equiv$ pianeta Terra, $2 \equiv$ satellite che si muove)



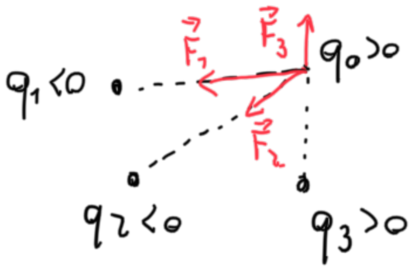
$U_e = k_e \dfrac{q_1 q_0}{r}$

se q_1 e q_0 hanno lo stesso segno $\Rightarrow U > 0$

se q_1 e q_0 hanno segno opposto $\Rightarrow U < 0$

- immaginiamo ora di avere TANTE cariche $q_1, q_2, q_3, \dots$ puntiformi che generano un campo $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3, \dots$ $\quad \vec{E}_{TOT} = \sum_i \vec{E}_i$ (principio di sovrapposizione)

e abbiamo una carica q_0 che si muove sotto l'azione del campo elettrico $\vec{E}_{TOT}$



$$\vec{F}_{q_0} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i q_0 \vec{E}_i$$

$$\Delta U_{q_0} = -\int \vec{F}_{q_0}\cdot d\vec{s} = -\int \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{s} = -\sum_i \underbrace{\int \vec{F}_i \cdot d\vec{s}}_{-\Delta U_i}$$

posizione nello spazio

$$\Delta U_0 = \sum \Delta U_i$$

delle carica q_0

$$\boxed{U(r) = \sum_i k_e \frac{q_i q_0}{r_i}} = \sum_i U_i(r_i) \quad \text{dove} \quad U_i(r) = k_e \frac{q_i q_0}{r_i}$$ (Cariche puntiformi)

somma di quantità scalari (perché $U(r)$ è una quantità scalare a differenza di $\vec{E}$ e di $\vec{F}$)

→ definisco il POTENZIALE ELETTRICO V come: $V = \frac{U}{q_0}$

V è una quantità scalare, come U

V si misura in $\frac{\text{Joule}}{\text{Coulomb}}$ $\left(\frac{J}{C}\right)$ o anche detto Volt (V)

$$\left[1\,V = 1\,\frac{J}{C}\right]$$

q_0 è quella che viene comunemente detta "carica di prova" e serve a "misurare" l'effetto delle altre cariche $q_1, q_2, q_3 \dots$ nello spazio

V serve per introdurre una quantità legata all'energia, ma indipendente dalla carica di prova q_0

$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{\cancel{q_0}} \sum_i k_e \frac{q_i \cancel{q_0}}{r_i} = \sum_i k_e \frac{q_i}{r_i}$$

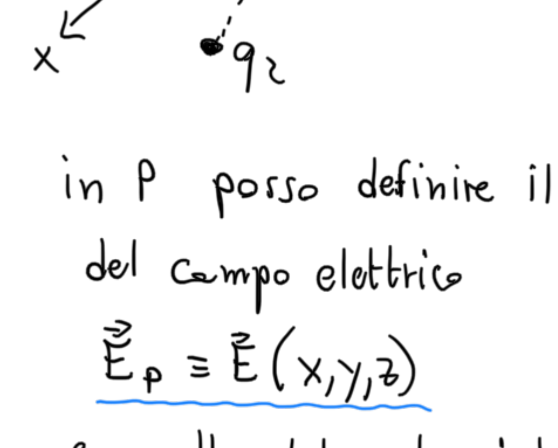
(per cariche puntiformi)

potenziale elettrico generato da un insieme di cariche puntiformi $q_1, q_2, q_3, \dots$

(alla fine NON dipende da q_0)

Forza elettrica → Campo elettrico $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$

Energia potenziale elettrica → potenziale elettrico $V = \frac{U}{q_0}$



Cosa succede se le cariche NON sono puntiformi?

$$\Delta U = -\int_i^f \vec{F}_e \cdot d\vec{s} = -\int_i^f q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

→ $\Delta V = -\int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$ → NON dipende dal percorso!

($\Delta V = V_f - V_i$)

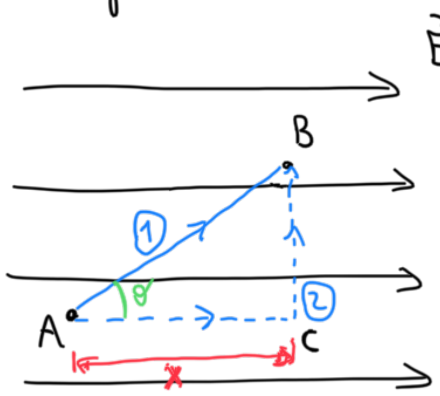
in P posso definire il valore del campo elettrico

$$\vec{E}_P \equiv \vec{E}(x,y,z)$$

e quello del potenziale elettrico

$$V_P \equiv V(x,y,z)$$

Immaginiamo di avere un campo elettrico uniforme nello spazio.

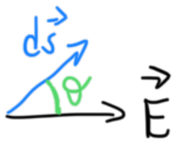


Voglio andare da A a B

quanto vale $\Delta V \equiv V_B - V_A$?

$$\Delta V \overset{1}{=} -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -E \int_A^B ds \cdot \cos\theta = -E d \cos\theta$$

$d(AB) = d$



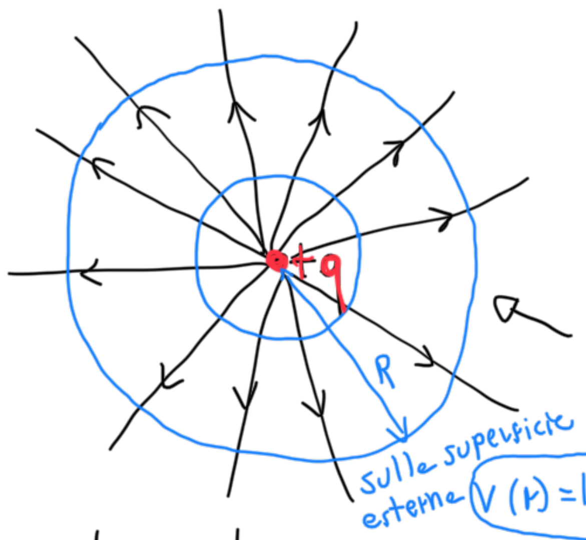
$$\Delta V = -Ex$$

$$\Delta V \overset{2}{=} \underbrace{-\int_A^C \vec{E} \cdot d\vec{s}}_{\text{qui } \vec{E} \parallel d\vec{s}} - \underbrace{\cancel{\int_C^B \vec{E} \cdot d\vec{s}}}_{\text{qui } \vec{E} \perp d\vec{s}} = -Ex$$

$$= -E\, d(AC) = -Ex$$

la linea $\overline{BC}$ è $\perp$ ad $\vec{E}$
ed è tale che $\Delta V_{BC} = 0$

$\Rightarrow$ Le superfici perpendicolari al campo elettrico sono equipotenziali (hanno lo stesso potenziale elettrico)



$\boxed{V(r) = k_e \frac{q}{R}}$

$\rightarrow$ linee di campo elettrico

sono tra di loro ortogonali

calotte sferiche

$\hookrightarrow$ superfici equipotenziali

questo vale per una carica puntiforme