Quantità di moto e urti

- *Modo dei sistemi: leggi di conservazione*
- *Quantità di moto*
  - → *impulso*
- *Urti*
  - → *urti (totalmente) elastici*
  - → *urti (totalmente) anelastici*
  - → *urti in due dimensioni*

Gettys I

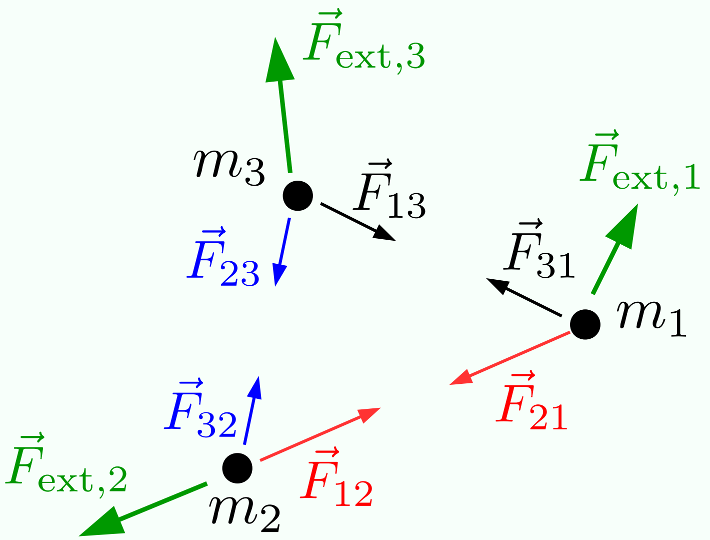
Capitolo 10

Quantità di moto e urti

- *Modo dei sistemi: leggi di conservazione*
- *Quantità di moto*
  → *impulso*
- *Urti*
  → *urti (totalmente) elastici*
  → *urti (totalmente) anelastici*
  → *urti in due dimensioni*

Gettys I
Capitolo 10

Per la *terza legge della dinamica*, le forze sono manifestazioni di interazioni che avvengono sempre fra coppie di corpi. Un **sistema di corpi interagenti** può essere descritto nella sua dinamica.



$$m_1\vec{a}_1 = \Sigma\,\vec{F}_1 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{\text{ext},1}$$

$$m_2\vec{a}_2 = \Sigma\,\vec{F}_2 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} + \vec{F}_{\text{ext},2}$$

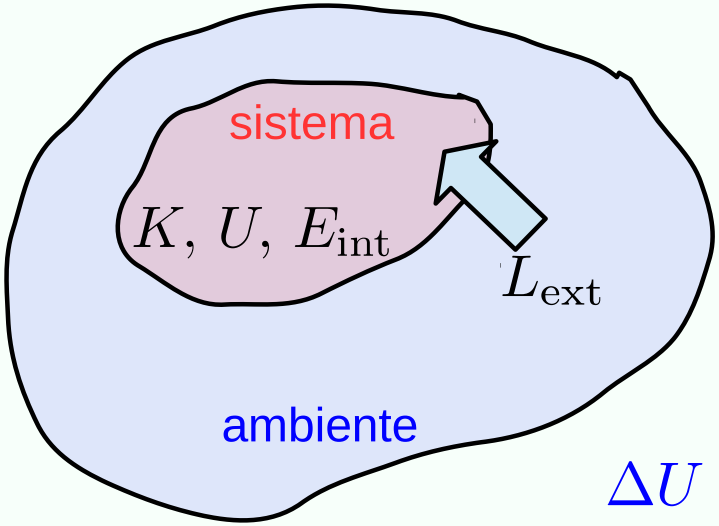
$$m_3\vec{a}_3 = \Sigma\,\vec{F}_3 = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{\text{ext},3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_i m_i\vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_{\text{ext},i}}$$

→ Le ***forze interne*** al sistema sono esercitate sulle particelle del sistema da altre particelle interne al sistema.
La risultante delle forze interne è nulla (3° principio della dinamica): $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$

→ Le ***forze esterne*** sono esercitate sulle particelle interne al sistema da parte di agenti esterni.

Consideriamo un sistema di corpi interagenti. Vale il principio di conservazione dell'energia: si tiene conto dell'energia del sistema e di quella trasferita al sistema dall'ambiente circostante e viceversa.



U = energia potenziale dovuta alle interazioni tra oggetti del sistema (legata alle posizioni relative)

E_{int} = energia interna delle particelle

K = energia cinetica totale

L_{ext} = lavoro dovuto alle interazioni con l'ambiente

$$\Delta U + \Delta K + \Delta E_{\mathrm{int}} = L_{\mathrm{ext}}$$

Il lavoro è *positivo* se viene fatto dall'ambiente sul sistema (l'energia del sistema aumenta).

In un sistema isolato l'energia totale si conserva.

Dinamica di sistemi di punti materiali o corpi estesi

Nei sistemi dinamici valgono **3 leggi di conservazione**
di grandezze fondamentali del sistema:

1) Conservazione dell'energia
se il lavoro delle forze esterne è zero

$$\boxed{L_{\text{ext}} = 0}$$

2) Conservazione della quantità di moto
se la risultante delle forze esterne è zero

$$\boxed{\sum_i \vec{F}_{\text{ext},i} = 0}$$

3) Conservazione del momento angolare
se il momento risultante delle forze esterne è zero

$$\sum_i \vec{\tau}_{\text{ext},i} = 0$$

$$\vec{\tau}_{\text{ext},i} \equiv \vec{r} \times \vec{F}_{\text{ext},i}$$

(*non trattato in questo corso*)

Quantità di moto e urti

- *Modo dei sistemi: leggi di conservazione*
- *Quantità di moto*
  → *impulso*
- *Urti*
  → *urti (totalmente) elastici*
  → *urti (totalmente) anelastici*
  → *urti in due dimensioni*

Gettys I

Capitolo 10.4 - 10.5

Quantità di moto

Per una **singola particella** è definita da: $\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$

È un *vettore*. Unità di misura (SI): kg*m/s

La quantità di moto può coincidere per oggetti *massivi lenti* o *veloci leggeri*.

p = 5000 kg * 1.3 km/h
= 1806 kg m s^{-1}

p = 80 kg * 80 km/h
= 1778 kg m s^{-1}

Riformulando la 2° legge di Newton, si ha che la variazione nell'unità di tempo della quantità di moto di una particella è uguale alla forza risultante agente sulla particella:

$$\boxed{\sum_i \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt}} = \underbrace{m\frac{d\vec{v}}{dt}}_{\text{termine usuale}} + \underbrace{\frac{dm}{dt}\vec{v}}_{\text{per } m \text{ non costante}}$$

Energia cinetica:

$$K = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 = \frac{p^2}{2m}$$

Quantità di moto

Per un **sistema di particelle** è definita da:

$$\boxed{\vec{P}_{\text{tot}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \ldots}$$

$$= \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

La variazione della quantità di moto totale rispetto al tempo è uguale alla somma delle forze esterne:

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i \vec{F}_{\text{ext},i}}$$

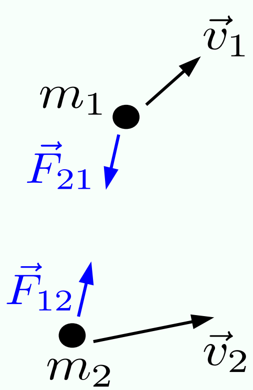
Se un sistema è ***isolato***, cioè la risultante delle forze esterne che agiscono su di esso è *nulla*, allora ***la quantità di moto totale si conserva***:

$$\sum_i \vec{F}_{\text{ext},i} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P}_i = \vec{P}_f$$

per il 3° principio della dinamica:

$$\boxed{\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}}$$

Esempio con 2 corpi:



$$\vec{F}_{21} = \frac{d\vec{p}_1}{dt}\ ; \quad \vec{F}_{12} = \frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0$$

Quantità di moto e urti

- *Modo dei sistemi: leggi di conservazione*
- *Quantità di moto*
  - → *impulso*
- *Urti*
  - → *urti (totalmente) elastici*
  - → *urti (totalmente) anelastici*
  - → *urti in due dimensioni*

Gettys I

Capitolo 10.6

Impulso

Forze che vengono esercitate per un tempo limitato sono chiamate ***forze impulsive***.

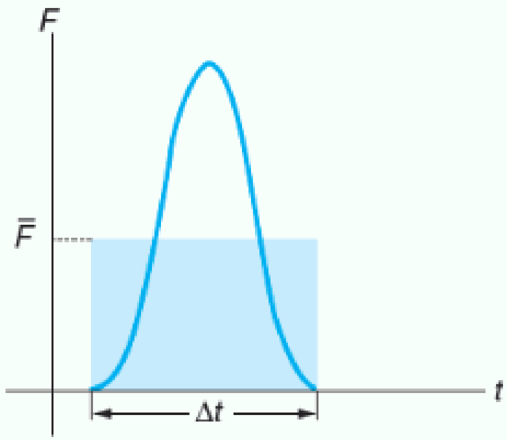
Spesso l'intensità di una forza impulsiva è così grande che il suo effetto si apprezza anche se di breve durata, mentre in tale lasso di tempo ogni altra forza è trascurabile. (esempi: racchetta su pallina, martello su chiodo, urti, impatti, etc…)

$$\sum_i \vec{F}_{\mathrm{ext},i} \approx \vec{F}_{\mathrm{impulso}} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow d\vec{p} = \vec{F}_{\mathrm{impulso}}\, dt$$

Integrando questa relazione, si ha il ***teorema dell'impulso.***

$$\Delta\vec{p} = \boxed{\vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{\mathrm{impulso}}\, dt} = \vec{J}$$

L'impulso totale della forza risultante su un corpo è uguale alla variazione della quantità di moto del corpo.



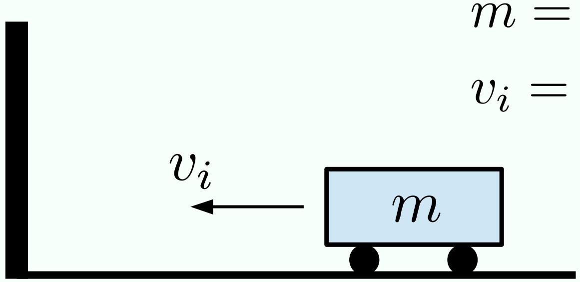
L'interazione con la forza impulsiva si può descrivere tramite l'impulso $\vec{J}$ (unità di misura SI: *N s*). A volte si conosce la quantità di moto di un corpo su cui ha agito la forza impulsiva, ma non *F*(t): si può allora calcolare la *forza media impulsiva* $\langle \vec{F}_{\mathrm{impulso}} \rangle$ che fornirebbe il medesimo impulso se agisse per lo stesso tempo Δ*t* della forza impulsiva:

$$\bar{F}\,\Delta t = \langle \vec{F}_{\mathrm{impulso}} \rangle\, \Delta t = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{\mathrm{impulso}}\, dt = \vec{J} = \Delta\vec{p}$$

Esempio 1: Auto contro un muro

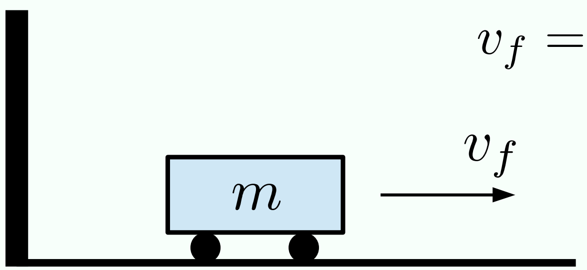
$m = 10^3\, kg$

$v_i = -15\, m/s$



$$P_i = mv_i = -1.5 \times 10^4\, kg\, m/s$$

$v_f = 2\, m/s$



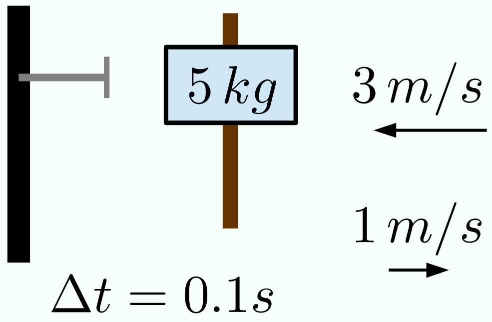
$$P_f = mv_f = 2 \times 10^3\, kg\, m/s$$

L'urto avviene in $\Delta t = 0.1\, s \qquad \Rightarrow \; J_x = P_f - P_i = 1.7 \times 10^4\, kg\, m/s$

$$|\vec{F}_{\text{esercitata}}| = \left| \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} \right| = \frac{1.7 \times 10^4}{0.1} N = 1.7 \times 10^5\, N$$

Se il tempo dell'urto fosse più lungo, la forza esercitata sarebbe minore
(→dunque l'urto sarebbe stato meno distruttivo!)

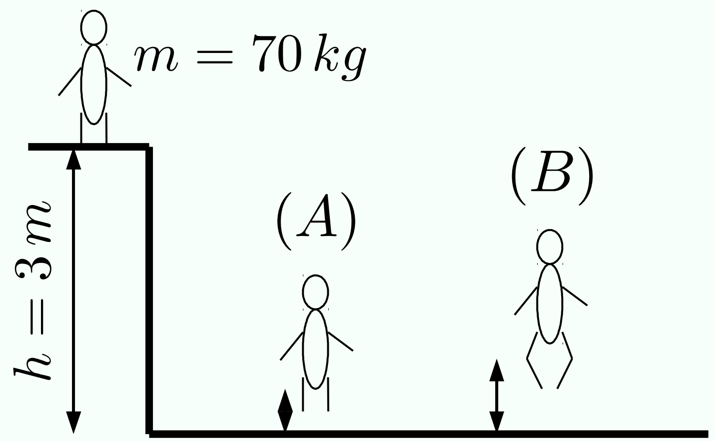
Esempio 2: Martello che batte un chiodo



$$\Delta P = P_{fx} - P_{ix} = -20\,kg\,m/s$$

$$|\vec{F}_{\text{esercitata}}| = \left|\frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t}\right| = \frac{20}{0.1} N = 200\,N$$

Esempio 3: Caduta da un muro



$$v_f = \sqrt{2gh} = 7.7\,m/s$$

$$F = -mg = -690\,N$$

$$F\,\Delta t = \Delta p = m\,\Delta v = (70\,kg)(7.7\,m/s)$$
$$= 540\,N s = J$$

(diretto verso l'alto)

Supponiamo che, nel cadere, l'impatto duri un tempo $\Delta t = d/v$ dove d = 1 cm (A) oppure d = 50 cm (B). Considerando una velocità media alla fine di $v \approx 7$ m/s, si ha:

$(A) \quad \Delta t = d/v = 1.4\,ms \;\Rightarrow\; F = J/\Delta t = 3.9 \times 10^5\,N \longrightarrow$ impatto più violento!

$(B) \quad \Delta t = d/v = 0.07\,s \;\Rightarrow\; F = J/\Delta t = 7.7 \times 10^3\,N$

Quantità di moto e urti

- *Modo dei sistemi: leggi di conservazione*
- *Quantità di moto*
  - → *impulso*
- *Urti*
  - → *urti (totalmente) elastici*
  - → *urti (totalmente) anelastici*
  - → *urti in due dimensioni*

Gettys I

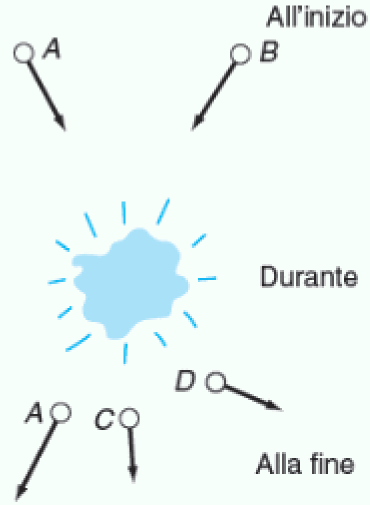
Capitolo 10.7

Urti

Gli urti sono interazioni fra corpi che avvengono ***in tempi brevissimi***.

Durante l'urto le forze esterne non cambiano la quantità di moto del sistema (l'interazione è rapidissima, $\Delta t \to 0$), quindi per il teorema dell'impulso $\Delta P = F\,\Delta t \to 0$.

- La ***quantità di moto*** $\vec{P}$ di un sistema isolato ***si conserva*** durante gli urti.
- L'***energia cinetica non sempre si conserva*** durante gli urti.



Vi sono ***due tipi di urti***, classificati in base a cosa accade durante l'urto:

A) **Urti anelastici**: ***K non* si conserva**, $\vec{P}$ si conserva;

B) **Urti elastici**: ***K* si conserva**, $\vec{P}$ si conserva
(si trasferisce energia cinetica da un corpo all'altro).

Quantità di moto e urti

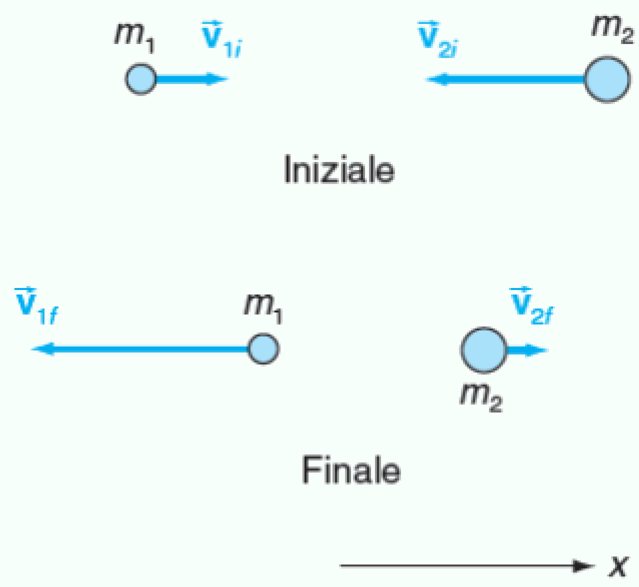
- *Modo dei sistemi: leggi di conservazione*
- *Quantità di moto*
  → *impulso*
- *Urti*
  → *urti (totalmente) elastici*
  → *urti (totalmente) anelastici*
  → *urti in due dimensioni*

Gettys I

Capitolo 10.7

Urti perfettamente elastici (1D)

Consideriamo per semplicità il caso unidimensonale.
Per un urto elastico si conserva sia $\vec{P}$, sia *K*.



$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

$$\Rightarrow \; m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i})$$

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

$$\Rightarrow \; m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2(v_{2f}^2 - v_{2i}^2)$$

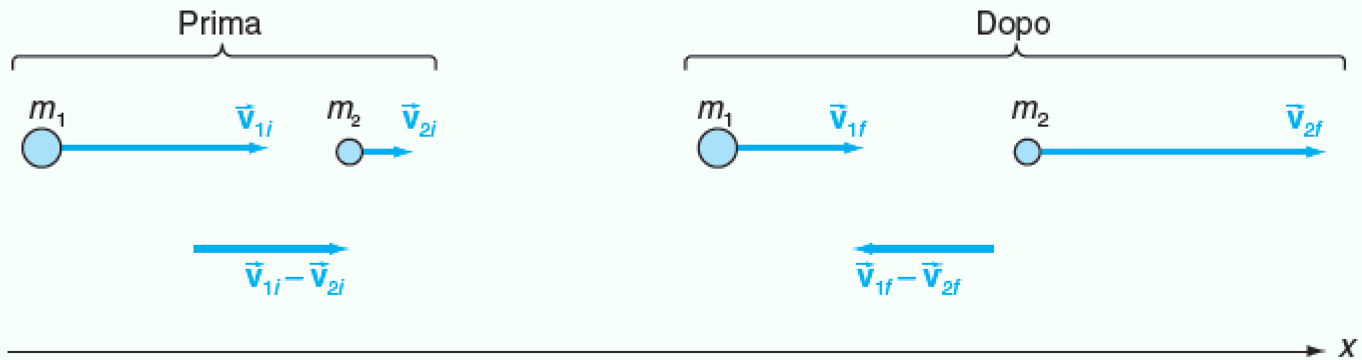
$$\Rightarrow \; m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i})(v_{2f} + v_{2i})$$

Dividendo membro a membro per si ha:

$$(v_{1i} + v_{1f}) = (v_{2f} + v_{2i}) \;\Rightarrow\; \boxed{(v_{1i} - v_{2i}) = (v_{2f} - v_{1f})}$$

La velocità relativa dei due oggetti prima dell'urto è in modulo uguale, ma di segno opposto alla velocità relativa dei due oggetti dopo l'urto.

Urti perfettamente elastici (1D)

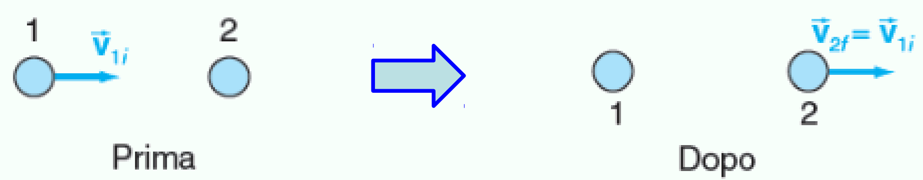


$$\begin{cases}(v_{1i}-v_{2i}) = (v_{2f}-v_{1f})\\ m_1(v_{1i}-v_{1f}) = m_2(v_{2f}-v_{2i})\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{1f} = \left[\dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right]v_{1i} + \left[\dfrac{2m_2}{m_1+m_2}\right]v_{2i} \\ v_{2f} = \left[\dfrac{2m_1}{m_1+m_2}\right]v_{1i} + \left[\dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right]v_{2i}\end{cases}$$

Esempi particolari

Masse uguali $m_1 = m_2$: le due particelle con masse uguali si scambiano le velocità (es. due palle da biliardo con urto frontale o “pendolo di Newton”)

$$\begin{cases} v_{1f} = v_{2i} \\ v_{2f} = v_{1i}\end{cases}$$



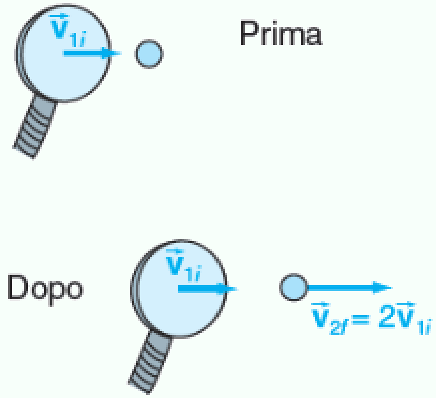
Esempi particolari

Supponiamo che m_2 sia inizialmente in quiete ($v_{2i}=0$)

$$\begin{cases} v_{1f} = \left[\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right] v_{1i} \\ v_{2f} = \left[\dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}\right] v_{1i} \end{cases}$$

- se $m_1 >> m_2$:

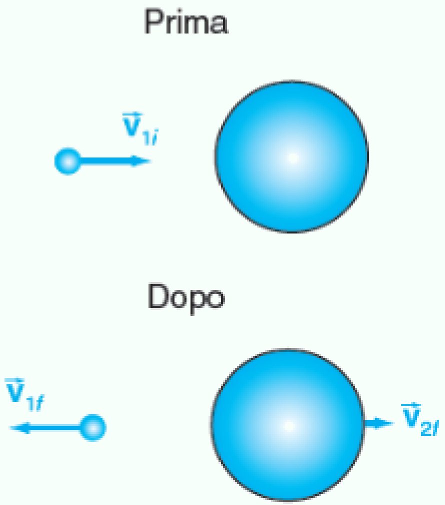
la velocità del corpo di grande massa rimane praticamente invariata, mentre il corpo di piccola massa si allontana con velocità doppia;



$$\begin{cases} v_{1f} = \left[\dfrac{1 - m_2/m_1}{1 + m_2/m_1}\right] v_{1i} \approx v_{1i} \\ v_{2f} = \left[\dfrac{2}{1 + m_2/m_1}\right] v_{1i} \approx 2v_{1i} \end{cases}$$

- se $m_2 >> m_1$:

la massa grande non se ne accorge (rimane quasi ferma) e la piccola rimbalza indietro con velocità uguale e contraria.



$$\begin{cases} v_{1f} = \left[\dfrac{m_1/m_2 - 1}{m_1/m_2 + 1}\right] v_{1i} \approx -v_{1i} \\ v_{2f} = \left[\dfrac{2m_1/m_2}{m_1/m_2 + 1}\right] v_{1i} \approx 0 \end{cases}$$

Quantità di moto e urti

- *Modo dei sistemi: leggi di conservazione*
- *Quantità di moto*
  → *impulso*
- *Urti*
  → *urti (totalmente) elastici*
  → *urti (totalmente) anelastici*
  → *urti in due dimensioni*

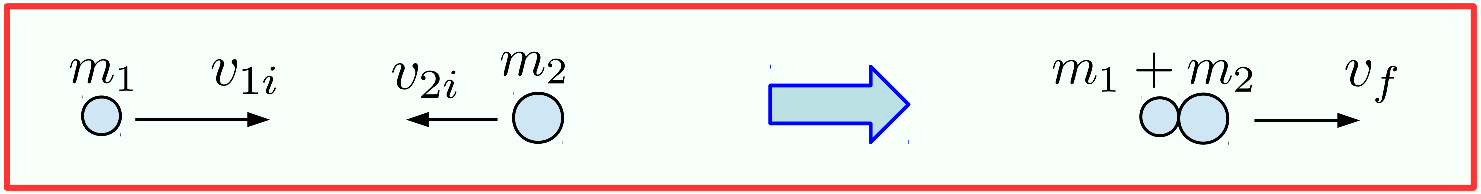
Gettys I

Capitolo 10.7

Urti perfettamente anelastici (1D)

In generale vi sono vari casi di urti anelastici.

Qui considereremo ***solo il caso limite***:

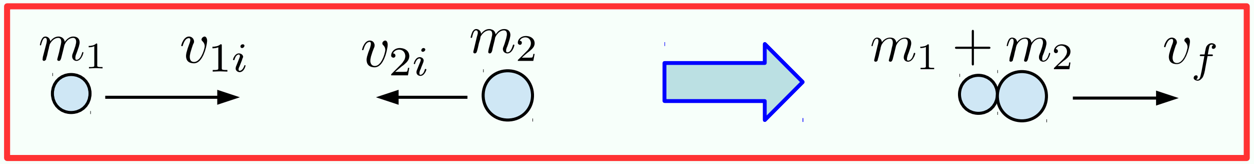


Si parla di **"urto totalmente anelastico"** (in una dimensione):
dopo l'urto i due corpi proseguono attaccati insieme, con la stessa velocità.

$$\vec{P} = \text{cost.} \;\Rightarrow\; m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f$$

$$\Rightarrow \quad v_f = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}$$

Urti perfettamente anelastici (1D)



$$v_f = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}$$

$$K_f - K_i = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^2 - \tfrac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 - \tfrac{1}{2} m_2 v_{2i}^2$$

$$= \frac{(m_1 v_{1i})^2 + (m_2 v_{2i})^2 + 2 m_1 m_2 v_{1i} v_{2i}}{2(m_1 + m_2)} - \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 - \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_{1i}^2 + v_{2i}^2 - 2 v_{1i} v_{2i}) = -\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_{1i} - v_{2i})^2 < 0$$

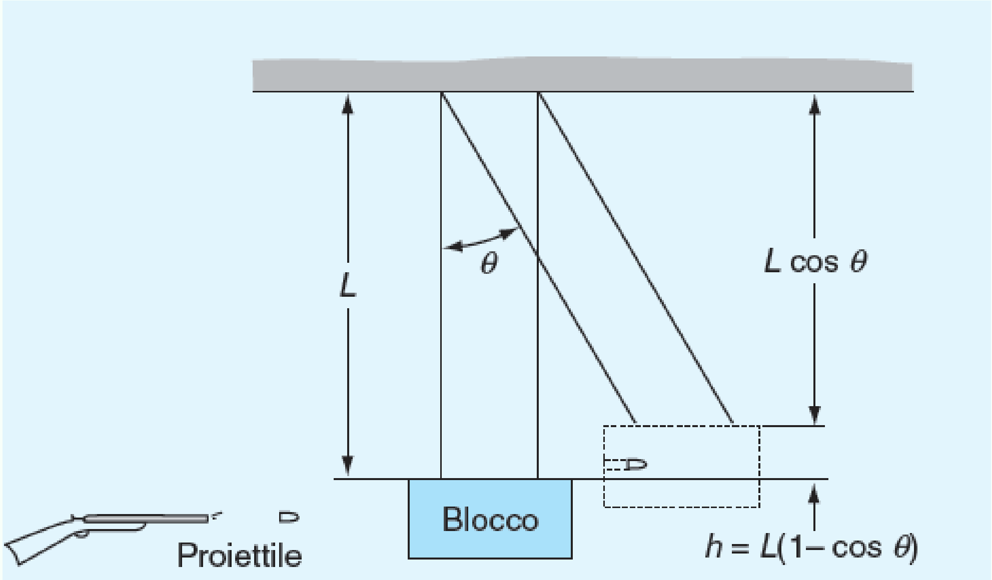
Si può dimostrare che la massima quantità di energia cinetica perduta ($K_i - K_f$) si ha proprio nell'urto totalmente anelastico.

$$v_{2i} = 0 \quad \Longrightarrow \quad K_i = \tfrac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 \,; \quad K_f = \frac{m_1^2\, v_{1i}^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} K_i$$

Esempio: pendolo balistico

(un medoto usato dalla polizia scientifica
per misurare la velocità di un proiettile)

$$\boxed{v_{1i} > 0; \quad v_{2i} = 0}$$



Nel caso elastico avremmo: $v_{2f} = \dfrac{2m_1 v_{1i}}{m_1 + m_2}$

Nel caso totalmente anelastico: $v_f = \dfrac{m_1 v_{1i}}{m_1 + m_2}$ ☆

Dopo l'urto, l'energia meccanica si conserva.
Sia *h* la quota massima rispetto alla posizione iniziale.

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 = (m_1 + m_2)gh \Rightarrow v_f^2 = 2gh$$ (usiamo ora la ☆)

$$\Rightarrow \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} v_{1i}^2 = 2gh \Rightarrow v_{1i} = \frac{m_1 + m_2}{m_1}\sqrt{2gh}$$

Quantità di moto e urti

- *Modo dei sistemi: leggi di conservazione*
- *Quantità di moto*
  → *impulso*
- *Urti*
  → *urti (totalmente) elastici*
  → *urti (totalmente) anelastici*
  → *urti in due dimensioni*

Gettys I
Capitolo 10.7

Urti in due dimensioni

Se un urto fra due particelle avviene ***in due dimensioni*** la conservazione della quantità di moto ci fornisce due equazioni, mentre quella dell'energia (se l'urto è elastico) ce ne fornisce una terza. Ma ognuna delle velocità finali ha due componenti, quindi 3 equazioni e 4 incognite, ***non si può risolvere in modo univoco***.

$$\vec{P}_{\text{tot}} = \text{cost.} = \vec{P}_i = \vec{P}_f \Rightarrow \begin{cases} m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} = m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx} & (1) \\ m_1 v_{1iy} + m_2 v_{2iy} = m_1 v_{1fy} + m_2 v_{2fy} & (2) \end{cases}$$

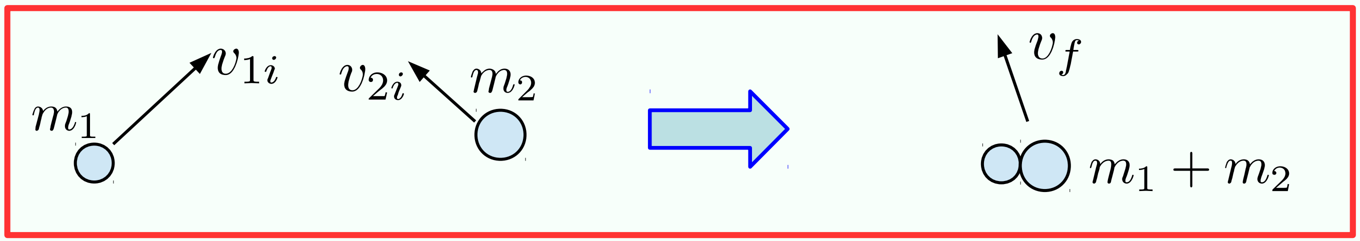
Se l'urto è **elastico**, vale anche la conservazione dell'energia:

$$\begin{aligned} K_i &= \tfrac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \tfrac{1}{2} m_1 (v_{1ix}^2 + v_{1iy}^2) + \tfrac{1}{2} m_2 (v_{2ix}^2 + v_{2iy}^2) \\ = K_f &= \tfrac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 = \tfrac{1}{2} m_1 (v_{1fx}^2 + v_{1fy}^2) + \tfrac{1}{2} m_2 (v_{2fx}^2 + v_{2fy}^2) \end{aligned} \qquad (3)$$

Urti in due dimensioni
→ urto totalmente anelastico

Se l'urto è **totalmente anelastico**, l'energia non si conserva,
ma *le incognite sono solo le due componenti della velocità finale*.

Siccome la quantità di moto (2 equazioni) si conserva sempre, ***il sistema è risolvibile***!



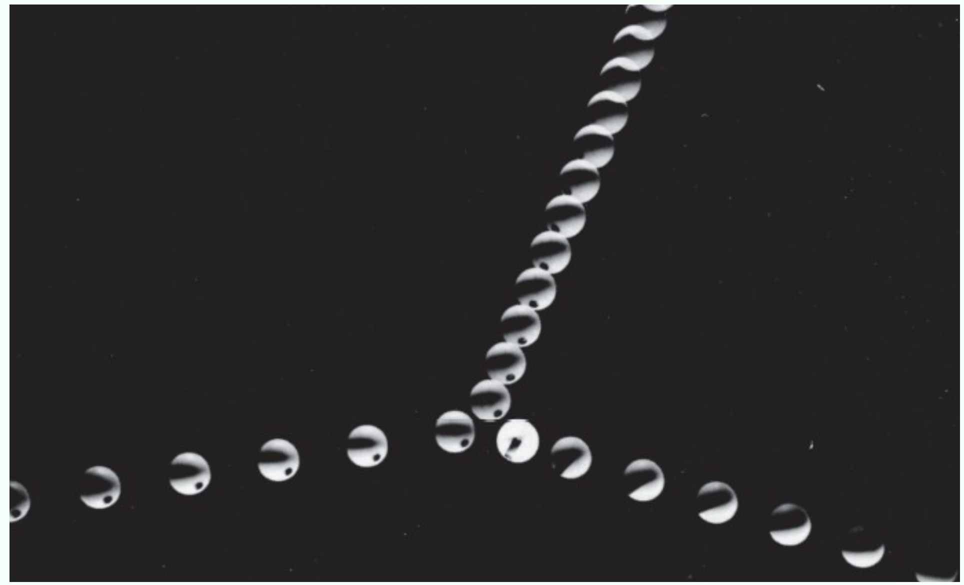
$$m\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = \vec{P}_i = \vec{P}_f = (m_1 + m_2)\vec{v}_f$$

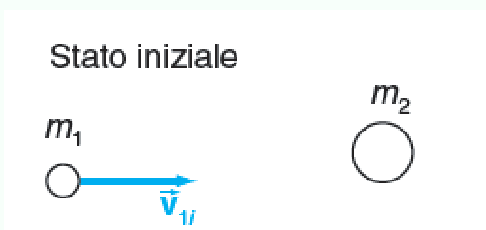
$$\Rightarrow \quad \vec{v}_f = \frac{m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i}}{m_1 + m_2} \qquad \begin{cases} v_{fx} = \dfrac{m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix}}{m_1 + m_2} \\[2ex] v_{fy} = \dfrac{m_1 v_{1iy} + m_2 v_{2iy}}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

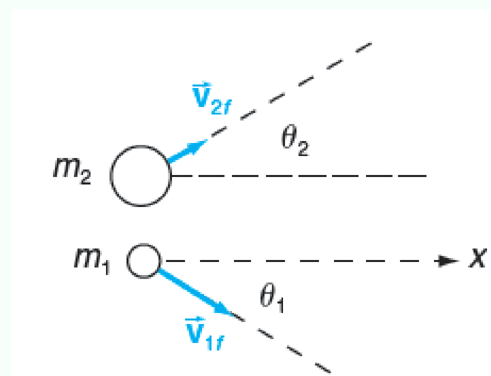
Urti in due dimensioni
→ urto elastico con un corpo inizialmente in quiete

Consideriamo il caso semplice di urto elastico con secondo corpo inizialmente in quiete.

Si conservano sia la quantità di moto che l'energia.





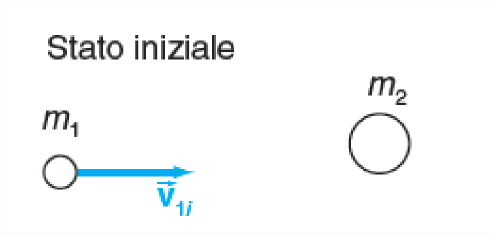


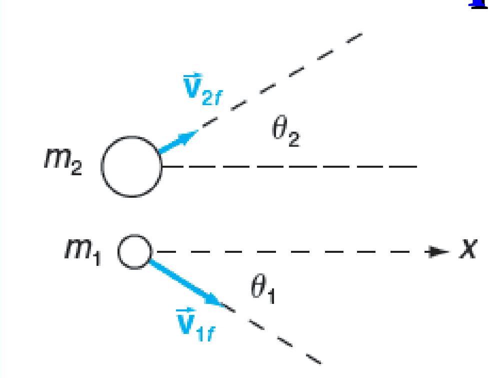
$$\begin{cases} m_1 v_{1i} + 0 = m_1 v_{1f} \cos\theta_1 + m_2 v_{2f} \cos\theta_2 \\ 0 = m_1 v_{1f} \sin\theta_1 - m_2 v_{2f} \sin\theta_2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

Urti in due dimensioni

→ urto elastico con un corpo inizialmente in quiete





$$\begin{cases} m_1 v_{1i} + 0 = m_1 v_{1f}\cos\theta_1 + m_2 v_{2f}\cos\theta_2 \\ 0 = m_1 v_{1f}\sin\theta_1 - m_2 v_{2f}\sin\theta_2 \end{cases}$$

$$\tfrac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 = \tfrac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_{2f}^2$$

Si conosce m_1, m_2, v_{1i} e si deve trovare v_{1f}, v_{2f}, θ_1 e θ_2. Lo stato finale è indeterminato a meno di non conoscere, per es. θ_1 o θ_2.

→ Es.: secondo corpo inizialmente in quiete e $m_2 >> m_1$
(palla contro sponda di biliardo)

$$\begin{cases} m_1 v_{1i}\cos\theta_1 \approx m_1 v_{1f}\cos\theta_2 \\ m_1 v_{1i}\sin\theta_1 \approx m_1 v_{1f}\sin\theta_2 \end{cases}$$

$$\tfrac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 \approx \tfrac{1}{2}m_1 v_{1f}^2$$

$$\Longrightarrow$$

$$\begin{cases} v_{1f} = v_{1i} \\ \theta_2 = \theta_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{1fx} = -v_{1ix} \\ v_{1fy} = v_{1iy} \end{cases}$$