Supporto alla didattica
15/05/2017

Oggi riprendiamo in considerazione l'ultimo problema della scorsa volta:

PROBLEMA 3, SUPPORTO 12/05/2017

→ Guscio sferico di raggio $2R$ + sfera piena di raggio R
→ Guscio → carica $+Q$
→ Sfera piena → carica $-Q$
→ Carica di prova "q" con velocità iniziale $\vec{v}_0 = (0, -v_0, 0)$ che parte dalla posizione $\vec{r}_0 = (0, 10R, 0)$.

(a) Stabilire con che velocità, in modulo, "q" raggiunge il guscio sferico

(b) Supponendo che possa attraversare il guscio, stabilire con che velocità, in modulo, raggiunge $\vec{r}\,' = (0, \frac{3}{2}R, 0)$

Svolgimento

La scorsa volta abbiamo parlato di campi e potenziali. L'importanza di questi "oggetti" sta nel fatto che, assegnate le sorgenti, i campi e i potenziali sono sempre gli stessi indipendentemente delle proprietà della carica di prova. Schematicamente, per le interazioni elettrostatiche, abbiamo

(FORZA) $\vec{F} = \dfrac{Q_1 q}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}|^2}\hat{r} \xrightarrow{\text{DIVIDO PER "q"}} \vec{E} = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}|^2}\hat{r}$ (CAMPO ELETTRICO)

↓ Integro il prodotto scalare con $d\vec{r}$ ↓ Integro il prodotto scalare con $d\vec{r}$

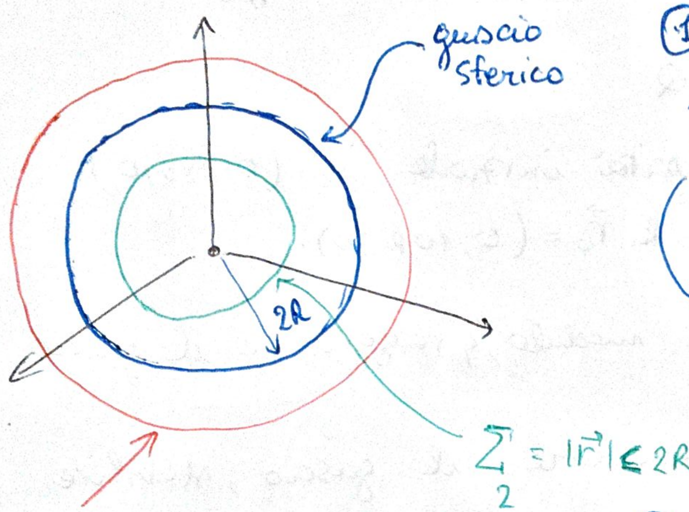
$\mathcal{L} = \displaystyle\int_{\gamma(1\to 2)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -(\Delta E_p) = -(E_{p2} - E_{p1}) \xrightarrow{\text{DIVIDO PER "q"}} -\Delta U = -(U(2) - U(1))$

$-$(VARIAZIONE DI ENERGIA POTENZIALE) $-$(VARIAZIONE DI POTENZIALE)

Se partiamo da una carica puntiforme è tutto semplice.
Se invece consideriamo distribuzioni di carica <u>non</u> puntiformi dobbiamo procedere in maniera differente.

Per distribuzioni con simmetrie ben definite $\Rightarrow$ TEOREMA DI GAUSS

Per un guscio sferico abbiamo:



Σ_1 = superficie di Gauss con $|\vec{r}| > 2R$

① Gauss su Σ_1

$$\Phi_{\Sigma_1}(\vec{E}_{Guscio}(\vec{r})) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow 4\pi r^2 |\vec{E}(\vec{r})| = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_{GUSCIO} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}|^2}\hat{r}$$

② Gauss su Σ_2:

$$\Phi_{\Sigma_2}(\vec{E}_{guscio}(\vec{r})) = 0$$ (<u>non</u> ho cariche dentro)

$$|\vec{E}_{Guscio}(\vec{r})|\Big|_{|\vec{r}|<2R} = 0$$

Abbiamo quindi:

$$\vec{E}_{GUSCIO}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}|^2}\hat{r} & \text{per } |\vec{r}| > 2R \\ 0 & \text{per } |\vec{r}| < 2R \end{cases}$$

Facciamo la stessa cosa per la sfera piena di raggio R.
Prendiamo due superfici di Gauss. Una di raggio $|\vec{r}|>R$ e una per $|\vec{r}|<R$.

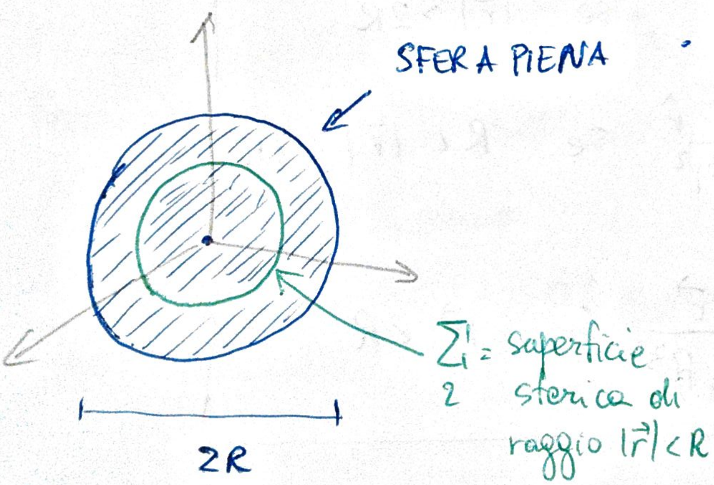
- Se $|\vec{r}|>R$, Gauss ci dice che: $\underset{\Sigma'_1(|\vec{r}|>R)}{\Phi}(\vec{E}_{SFERA}(\vec{r})) = -\frac{Q}{\varepsilon_0}$ ovvero

$$-4\pi r^2 |\vec{E}_{SFERA}(\vec{r})| = -\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\hookrightarrow \vec{E}_{SFERA}(\vec{r}) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}|^2}\hat{r} \text{ se } |\vec{r}|>R$$

- Se $|\vec{r}|<R$, Gauss ci dice che: $\underset{\Sigma'_2(|\vec{r}|<R)}{\Phi}(\vec{E}_{sfera}(\vec{r})) = -\frac{Q(r)}{\varepsilon_0}$

dove $Q(r)$ è la carica contenuta dentro la superficie sferica di raggio $|\vec{r}|<R$ (vedi figura).



- Nel caso di una sfera uniformemente carica abbiamo che la carica $-Q$ è distribuita su tutto il volume della sfera di raggio R.

Uniformemente significa che preso un qualunque volumetto dentro la sfera carica, il rapporto fra la carica dentro quel volumetto ed il volume del volumetto è costante (esiste una densità di carica costante)

$$\rho = \text{densità di carica} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

Per calcolare $Q(r)$ basta moltiplicare ρ per il volume che è delimitato dalla superficie di Gauss Σ_{i_2}:

$$Q(r) = \rho \cdot \underbrace{\frac{4}{3}\pi r^3}_{\Sigma_{i_2} \text{ è sferica}} = -\frac{Q\, r^3}{R^3}$$

Abbiamo quindi che il campo generato dalla sfera piena è

$$\vec{E}_{SFERA}(\vec{r}) = \begin{cases} -\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}|^2}\hat{r} & |\vec{r}| > R \\[2ex] -\dfrac{Q\,\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} & |\vec{r}| < R \end{cases}$$

Il campo totale generato dalle sorgenti è quindi

$$\boxed{\vec{E}_{TOT}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & \text{se } |\vec{r}| > 2R \\[2ex] -\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}|^2}\hat{r} & \text{se } R < |\vec{r}| < 2R \\[2ex] -\dfrac{Q\,\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} & \text{se } |\vec{r}| < R \end{cases}}$$

Risposta (a)

Visto che il campo fuori dal guscio sferico è nullo, la forza totale $\vec{F}_{TOT}(\vec{r})$ che agisce sulla carica "q" è $\vec{F}_{TOT}(\vec{r}) = q\,\vec{E}_{TOT}(\vec{r}) = \vec{0}$. Il moto è quindi rettilineo uniforme. La carica raggiunge la calotta con $\vec{v} = \vec{v}_0$.

Passiamo ora al punto (b).

Per rispondere a questo punto sfruttiamo la conservazione dell'energia. Se $U_{TOT}(\vec{r})$ è il potenziale generato da un insieme di distribuzioni (sorgenti), l'energia potenziale $E_{pot}(\vec{r})$ che una carica "q" ha nel punto $\vec{r}$ è

$$\boxed{E_{pot}(\vec{r}) = q\, U_{TOT}(\vec{r})}$$

Per linearità, nel nostro problema $\boxed{U_{TOT}(\vec{r}) = U_{GUSCIO}(\vec{r}) + U_{SFERA}(\vec{r})}$.

- Calcoliamo $U_{Guscio}(\vec{r})$ e $U_{SFera}(\vec{r})$. Essi sono legati ~~alla~~ ai due campi elettrici calcolati in precedenza.
- In generale abbiamo:

$$U(\vec{r}_A) - U(\vec{r}_B) = \int_{r_A}^{r_B} \vec{V}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Per il nostro problema assumiamo

$$\begin{cases} |\vec{r}_B| = +\infty \\ U(\vec{r}_B) = 0 \end{cases}$$

(questo perché se $E_{pot}(\vec{r}) = q\, U(\vec{r})$ è ragionevole assumere che lo zero del potenziale/energia sia a $|\vec{r}| \to \infty$ perché cariche infinitamente lontane non interagiscono fra loro)

Per noi quindi: $$\boxed{U(\vec{r}) = \int_{\gamma(\vec{r} \to +\infty)} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}}$$

Cominciamo dal guscio sferico

$$\vec{E}_{GUSCIO}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}|^2}\,\hat{r} & |\vec{r}| > 2R \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Usiamo che $U_{GUSCIO}(\vec{r}) = \int_r^\infty \vec{E}_{GUSCIO}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$. C'è da fare attenzione perchè il campo è definito a tratti.

Per $|\vec{r}| \geq 2R$ abbiamo:

$$U_{GUSCIO}(\vec{r}) = \int_r^\infty dr \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 |r|^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Per $|\vec{r}| < 2R$ dobbiamo spezzare l'integrale:

$$U_{GUSCIO}(\vec{r}) = \int_r^\infty \vec{E}_{GUSCIO}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \underbrace{\int_r^{2R} \vec{E}_{GUSCIO}(\vec{r}) \cdot dr}_{|\vec{r}| < 2R} + \underbrace{\int_{2R}^\infty \vec{E}_{GUSCIO}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}}_{|\vec{r}| > 2R} =$$

$$= \int_{2R}^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}|^2} dr = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

Il potenziale generato dal guscio è quindi:

$$\boxed{U_{GUSCIO}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & \text{per } |\vec{r}| \geq 2R \\ \dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R} & \text{per } |\vec{r}| \leq 2R \end{cases}}$$

Supporto alla didattica
15/05/2017

Facciamo la stessa cosa per la sfera piena:

$$\vec{E}_{SFERA}(\vec{r}) = \begin{cases} -\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}|^2}\hat{r} & \text{per } |\vec{r}| > R \\[2ex] -\dfrac{Q\,\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} & \text{per } |\vec{r}| < R \end{cases}$$

Allora abbiamo:

- per $|\vec{r}| > R$ $\quad U_{SFERA}(\vec{r}) = \displaystyle\int_{|\vec{r}|}^{\infty} -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}|^2}\,dr = \boxed{-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$

- per $|\vec{r}| < R$ $\quad U_{SFERA}(\vec{r}) = \displaystyle\int_{|\vec{r}|}^{R} \vec{E}_{SFERA}(\vec{r})\cdot d\vec{r} + \int_{R}^{\infty} \vec{E}_{SFERA}(\vec{r})\cdot d\vec{r} =$

$$= \int_{|\vec{r}|}^{R} -\frac{Q\,r}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\,dr + \int_{R}^{\infty} -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr =$$

$$= \left[+\frac{Q\,r^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3} - \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R}\right] - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} =$$

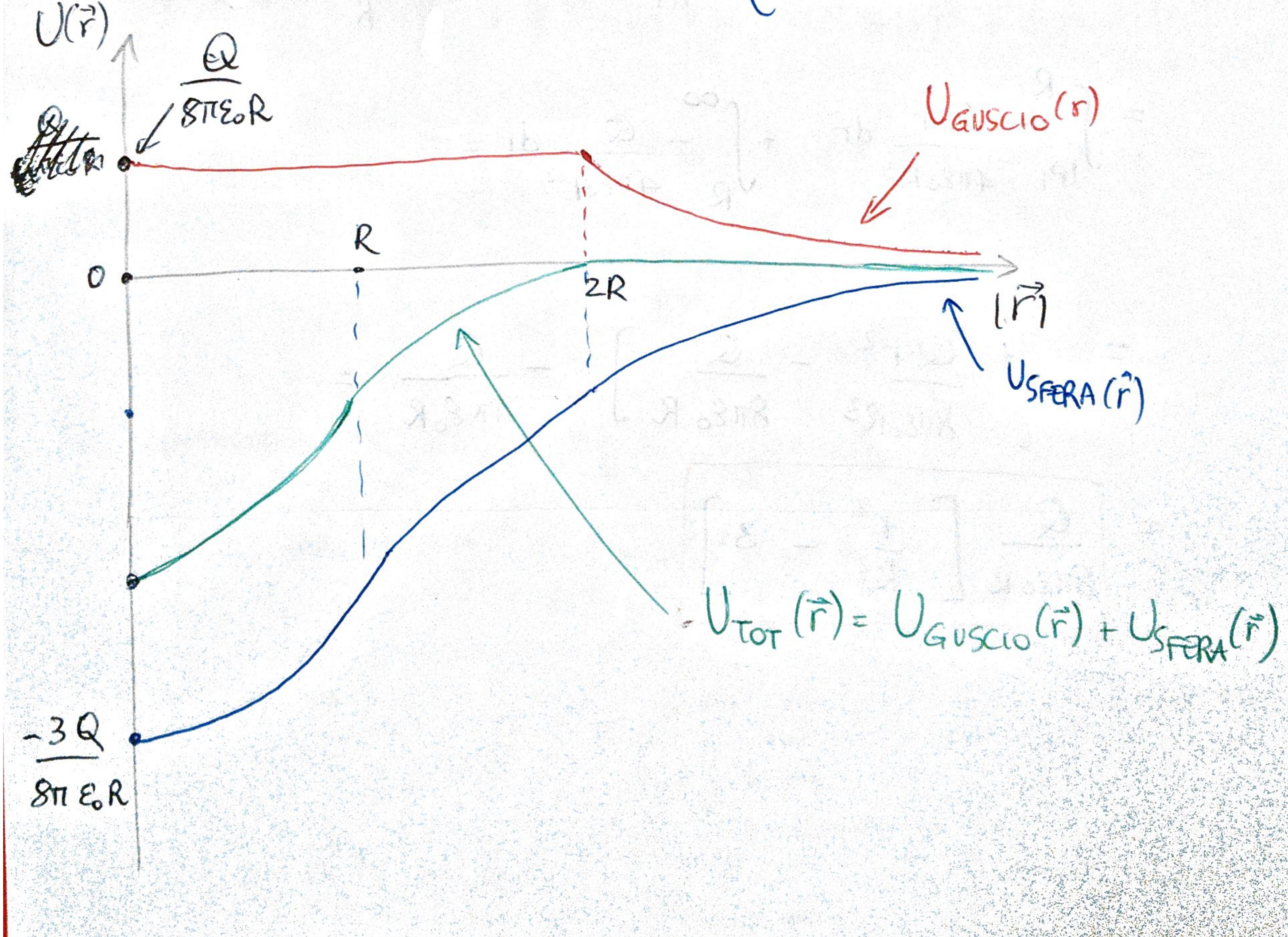
$$= \boxed{\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left[\frac{r^2}{R^2} - 3\right]}$$

Abbiamo quindi:

$$U_{SFERA}(\vec{r}) = \begin{cases} -\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & \text{per } |\vec{r}| \geq R \\ \dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left[\dfrac{r^2}{R^2} - 3\right] & \text{per } |\vec{r}| \leq R \end{cases}$$

Questo ci permette di calcolare il potenziale totale

$$U_{TOT}(\vec{r}) = U_{GUSCIO}(\vec{r}) + U_{SFERA}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & \text{se } |\vec{r}| \geq 2R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{2R} - \dfrac{1}{r}\right] & \text{se } R \leq |\vec{r}| \leq 2R \\ \dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left[\dfrac{r^2}{R^2} - 2\right] & \text{se } |\vec{r}| \leq R \end{cases}$$



Supporto alla didattica
15/05/2017

Ora che abbiamo il potenziale totale possiamo procedere con l'analisi del problema.

Quando la carica "q" raggiunge la superficie del guscio cioè si trova ad $|\vec{r}| = 2R$ essa ha velocità in modulo pari a $|\vec{V}_0|$ ed è immersa in un potenziale totale $U_{TOT}(|\vec{r}|=2R) = 0$.

L'energia iniziale della particella è quindi

$$E_i = \frac{1}{2} m |\vec{V}_0|^2 + q U_{TOT}(2R) = \frac{1}{2} m |\vec{V}_0|^2$$

Quando, sotto l'attrazione della sfera con carica $-q$, raggiunge $|\vec{r}| = \frac{3}{2}R$ la sua energia sarà

$$E_f = \frac{1}{2} m |\vec{V}'|^2 + q U_{TOT}\left(\tfrac{3}{2}R\right) = \frac{1}{2} m |\vec{V}'|^2 + \cancel{\frac{qQ}{8\pi\varepsilon_0 R}\left[\frac{3}{2}R \ldots\right]}$$

$$+ \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{2R} - \frac{1}{\frac{3}{2}R}\right] = \frac{1}{2} m |\vec{V}'|^2 + \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3-4}{6R}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} m |\vec{V}'|^2 - \frac{qQ}{24\pi\varepsilon_0 R}$$

Per conservazione dell'energia segue che

$$E_f = E_i \Rightarrow \frac{1}{2} m |\vec{V}'|^2 = \frac{1}{2} m |\vec{V}_0|^2 + \frac{qQ}{24\pi\varepsilon_0 R}$$

$$\hookrightarrow |\vec{V}'|^2 = |\vec{V}_0|^2 + \frac{qQ}{12\pi\varepsilon_0 R m}$$ da cui

$$|\vec{V}'| = \sqrt{|\vec{V}_0|^2 + \frac{qQ}{12\pi\varepsilon_0 R m}} > |\vec{V}_0|$$

Risposta quesito (b)

La velocità alla quale la carica "q" raggiunge $|\vec{r}| = \frac{3}{2}R$ è in modulo

$$\boxed{|\vec{v}_1'| = \sqrt{|\vec{v}_0|^2 + \frac{qQ}{12\,\varepsilon_0 \pi R m}}}$$

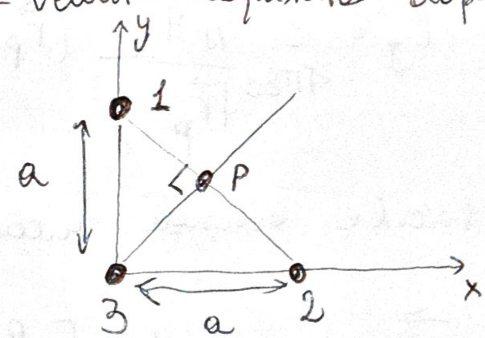
PROBLEMA 1 (Esercizio 2, Esame 13 Gennaio 2015)

Tre cariche sono disposte come in figura

$$\begin{cases} q_1 = q_2 = q \\ q_3 = 2q \end{cases}, \text{"a" è nota}$$

1. Calcolare direzione e intensità del campo elettrico nel punto P
2. Calcolare il lavoro necessario a portare una carica $q_4 = -3q$ depositata su una sferetta di massa "m" (nota) dall'infinito al punto P.
3. Mantenendo fissate le tre cariche puntiformi, se lasciamo la sferetta inizialmente in quiete e libera di muoversi, a partire dal punto P determinare la velocità acquistata dopo

SVOLGIMENTO $\Delta l = \frac{a}{2}$



1. Per rispondere al primo quesito sfruttiamo la linearità delle interazioni. In presenza di più cariche, ciascuna genera un campo elettrico $\vec{E}_j(\vec{r})$ ed il campo elettrico totale è somma vettoriale dei singoli $\vec{E}_j(\vec{r})$.

In questo caso abbiamo 3 cariche e per sapere quale sia il campo totale in P (di cui dobbiamo calcolare le coordinate) dobbiamo valutare 3 contributi.

Per prima cosa indichiamo con $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ e $\vec{r}_3$ la posizione delle tre sorgenti ovvero i vettori

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = (a, 0) \\ \vec{r}_2 = (0, a) \\ \vec{r}_3 = (0, 0) \end{cases}$$

- Il punto in cui dobbiamo calcolare il campo, cioè P, ha coordinate $\vec{r}_P = \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$.
- Il campo in P può essere espresso come il rapporto fra la forza totale percepita da una carica "q'" ed il valore di "q'".

$$\Rightarrow \vec{F}_{TOT}(\vec{r}_P) = \vec{F}_1(\vec{r}_P) + \vec{F}_2(\vec{r}_P) + \vec{F}_3(\vec{r}_P) \text{, dove}$$

$$\vec{F}_j = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_j \cdot q'}{|\vec{r}_P - r_j|^3} (\vec{r}_P - \vec{r}_j)$$

È facile quindi ricavare la forma del campo:

$$\vec{E}_{TOT}(\vec{r}_P) = \frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1 q'}{|\vec{r}_P - \vec{r}_1|^3}(\vec{r}_P - \vec{r}_1) + \frac{q_2 q'(\vec{r}_P - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_P - \vec{r}_2|^3} + \frac{q_3 q'(\vec{r}_P - \vec{r}_3)}{|\vec{r}_P - \vec{r}_3|^3}\right]}{q'} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1 (\vec{r}_P - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_P - \vec{r}_1|^3} + \frac{q_2 (\vec{r}_P - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_P - \vec{r}_2|^3} + \frac{q_3 \vec{r}_P}{|\vec{r}_P|^3}\right]$$

È inoltre facile osservare che:

$$|\vec{r}_P - \vec{r}_1| = |\vec{r}_P - \vec{r}_2| \text{ e che } (\vec{r}_P - \vec{r}_1) + (\vec{r}_P - \vec{r}_2) = \vec{0}$$

Abbiamo quindi che:

$$\vec{E}_{TOT}(\vec{r}_P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\left[\frac{q(\vec{r}_P-\vec{r}_1)}{|\vec{r}_P-\vec{r}_1|^3} + \frac{q(\vec{r}_P-\vec{r}_2)}{|\vec{r}_P-\vec{r}_2|^3}\right]}_{=0} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q\,\vec{r}_P}{|\vec{r}_P|^3}$$

$q_1 = q_2 = q$

$q_3 = 2q$

Questo significa che nel punto P il campo $\vec{E}_{TOT}(\vec{r}_P)$ è diretto lungo la direzione $x=y$.

Risposta al punto 1

$\vec{E}_{TOT}(\vec{r}_P) \parallel \vec{r}_P$ e la sua intensità è $|\vec{E}_{TOT}(\vec{r}_P)| = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0|\vec{r}_P|^2}$.

② Per risolvere il punto 2 usiamo la definizione di Lavoro:

$$\boxed{\mathcal{L}(A\to B) = \int_{\gamma(A\to B)} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}}$$

Nel caso in questione per calcolare il lavoro totale da compiere in presenza delle 3 cariche (sorgenti) possiamo:

1. considerare una carica per volta (linearità)
2. calcolare l'integrale su una curva comoda (CAMPO CONSERVATIVO)

Abbiamo quindi

- $\vec{F}_1(\vec{r}) = \dfrac{q\, q_4\, (\vec{r}-\vec{r}_1)}{4\pi\varepsilon_0\, |\vec{r}-\vec{r}_1|^3} \rightarrow \mathcal{L}_1 = +\displaystyle\int_{\infty}^{\vec{r}_P} \vec{F}_1(\vec{r})\cdot d\vec{r} =$

$$= \int_{\infty}^{r_P} -\frac{3q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(\vec{r}-\vec{r}_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3} \cdot d\vec{r} =$$

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r}-\vec{r}_1 \\ \text{gli estremi cambiano} \end{cases}$$

$$= \int_{\infty}^{r_P - r_1} -\frac{3q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r'}{r'^3}\, dr' = +\frac{3q^2}{4\pi\varepsilon_0} \left.\frac{1}{r'}\right|_{\infty}^{r_P - r_1} = \frac{3q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_P - \vec{r}_1|}$$

- $\vec{F}_2(\vec{r}) = \dfrac{q\, q_4\, (\vec{r}-\vec{r}_2)}{4\pi\varepsilon_0\, |\vec{r}-\vec{r}_2|^3} \rightarrow \mathcal{L}_2 = \displaystyle\int_{+\infty}^{\vec{r}_P} \vec{F}_2(\vec{r})\cdot d\vec{r} =$

$$= \text{stessi passaggi fatti sopra} = \frac{3q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_P - \vec{r}_2|}$$

- $\vec{F}_3(\vec{r}) = \dfrac{2q\, q_4\, \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}|^3} \rightarrow \mathcal{L}_3 = \displaystyle\int_{+\infty}^{\vec{r}_P} \vec{F}_3(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \dfrac{6q^2}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{1}{|\vec{r}_P|}$

Il lavoro totale è quindi:

$$\mathcal{L}_{TOT} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 = \frac{3q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|\vec{r}_P-\vec{r}_1|} + \frac{1}{|\vec{r}_P-\vec{r}_2|} + \frac{2}{|\vec{r}_P|}\right] =$$

$$\underset{|\vec{r}_P-\vec{r}_1| = |\vec{r}_P-\vec{r}_2|}{=} \frac{6q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|\vec{r}_P-\vec{r}_1|} + \frac{1}{|\vec{r}_P|}\right]$$

Però geometricamente è facile convincersi che

$$|\vec{r}_P - \vec{r}_1| = |\vec{r}_P|,$$

Abbiamo quindi in definitiva che

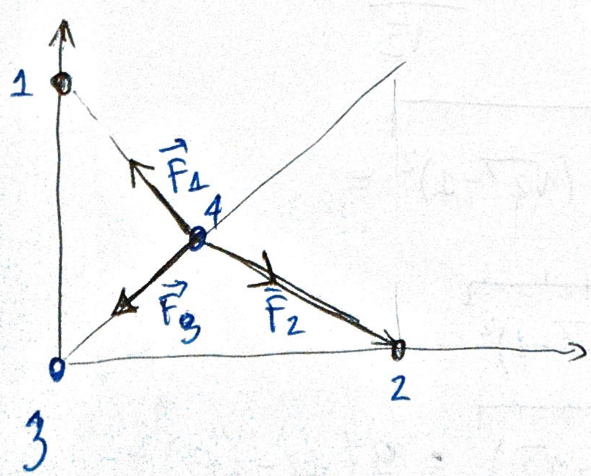
$$\mathcal{L}_{TOT} = \frac{12\, q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_p|}$$

Risposta al quesito (2)

Il lavoro totale $\mathcal{L}_{TOT} = \frac{12\, q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_p|}$.

③ Al punto ① abbiamo calcolato il campo elettrico nel punto P e abbiamo visto che il campo è determinato dalla sola carica nell'origine.

Se mettiamo una carica q_4 in P essa inizierà a muoversi verso q_3 lungo la bisettrice del primo e terzo quadrante $(y=x)$. A causa delle posizione simmetrica di q_1 e q_2 avremo che il moto sarà confinato lungo $y=x$ (questo perché le due componenti generate da q_1 e q_2 ortogonali alla bisettrice del primo e terzo quadrante sono sempre uguali ed opposte).

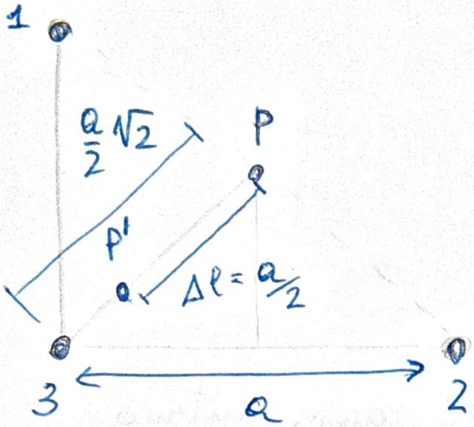


Per calcolare la velocità di q_4 dopo uno spostamento di $\Delta l = \frac{a}{2}$ usiamo la conservazione dell'energia.

Lo stato iniziale corrisponde a:

$$\boxed{E_{K_i} = 0 \qquad E_{p_i} = -\mathcal{L}_{TOT}}$$

cioè energia cinetica nulla ($E_{k_i}=0$) ed energia potenziale pari all'opposto del lavoro $\mathcal{L}_{TOT}$ calcolato al punto 2. Nello stato finale la carica q_4 si troverà nel punto P' (vedi figura) di coordinate $\vec{P}' = \left(\frac{a}{2}(\sqrt{2}-1), \frac{a}{2}(\sqrt{2}-1)\right)$ ad



una certa energia potenziale $E_{pf}(P')$ con una certa energia cinetica $E_{Kf} = \frac{1}{2} m V_f^2$. Usando i risultati del primo problema dell'incontro di oggi

abbiamo che $E_{pf}(P') = q_4 \, U_{TOT}(P') =$

$$= q_4 \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_3}{|\vec{P}'|} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{P}'-\vec{r}_1|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_2}{|\vec{P}'-\vec{r}_2|}}_{\text{sono eguali per simmetria}} \right] =$$

$$= \frac{-3q^2}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{2}{|\vec{P}'|} + \frac{2}{|\vec{P}'-\vec{r}_1|} \right] \text{, dove}$$

$$|\vec{P}'| = \sqrt{\frac{a^2}{4}(\sqrt{2}-1)^2 + \frac{a^2}{4}(\sqrt{2}-1)^2} = a\,\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$$

$$|\vec{P}'-\vec{r}_1| = \sqrt{\left(\frac{a}{2}(\sqrt{2}-1) - a\right)^2 + \frac{a^2}{4}(\sqrt{2}-1)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a}{2}(\sqrt{2}-3)\right)^2 + \frac{a^2}{4}(\sqrt{2}-1)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{4}(2+9-3\sqrt{2}+2+1-\sqrt{2})} = \frac{a}{4}(14-4\sqrt{2})^{1/2}$$

Se imponiamo la conservazione dell'energia, otteniamo:

$$E_i = -\frac{12\,q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}_p|} = -\frac{12\,q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sqrt{2}}{a} = E_f = \frac{1}{2}m|\vec{v}_f|^2 - \frac{6\,q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|\vec{p}'|} + \frac{1}{|\vec{p}'-\vec{r}_1|}\right]$$

$$\Rightarrow |\vec{v}_f|^2 = \frac{12\,q^2}{4\pi\varepsilon_0 m}\left[\frac{1}{|\vec{p}'|} + \frac{1}{|\vec{p}'-\vec{r}_1|}\right] - \frac{24\,q^2}{4\pi\varepsilon_0 m}\frac{1}{|\vec{r}_p|}$$

Da cui si ottiene la soluzione del quesito 3

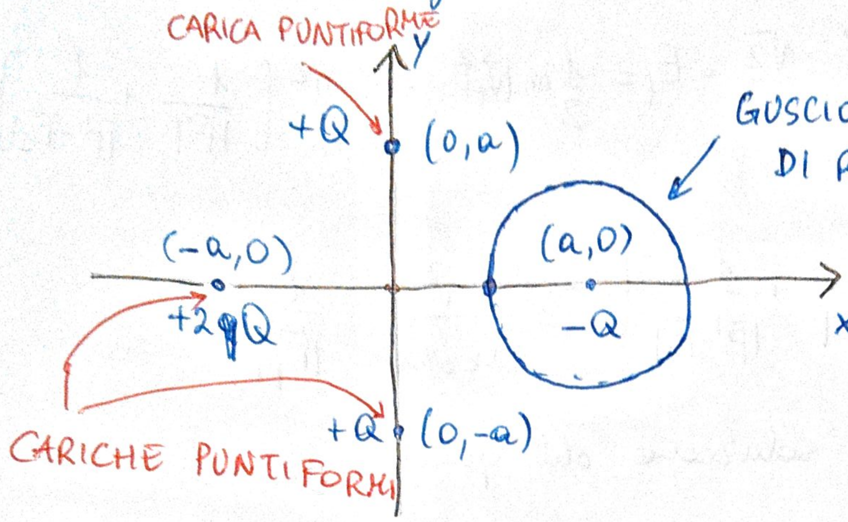
Risposta al quesito 3

La velocità acquistata dopo aver percorso $\Delta l = \frac{a}{2}$ è data da

$$\boxed{|\vec{v}_f| = \sqrt{\frac{12\,q^2}{4\pi\varepsilon_0 m}\left[\frac{1}{|\vec{p}'|} + \frac{1}{|\vec{p}'-\vec{r}_1|} - \frac{2}{|\vec{r}_p|}\right]}}$$

PROBLEMA 2 (Esercizio 2, Esame straordinario 06/11/2015)

La configurazione considerata nel problema è quella riportata in figura



① Potenziale nell'origine degli assi.

② Potenziale in $A=(a/2, 0)$

③ Componenti cartesiane del campo elettrico nell'origine.

④ Componenti cartesiane del campo elettrico in A, trascurando il contributo del guscio sferico.

Nell'origine viene posta una particella di massa m e carica q. Trascurando l'attrito e ogni interazione gravitazionale e che possa attraversare il guscio sferico, determinare la sua velocità per distanze molto grandi rispetto ad "a" ($|\vec{r}| \to +\infty$).