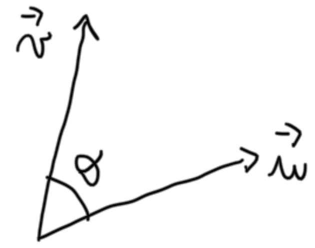
Prodotto scalare

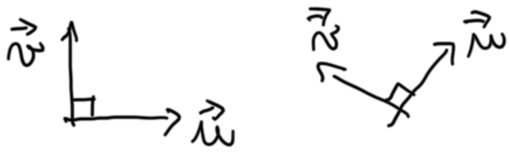
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$



$\vec{u}\cdot\vec{v}$ è uno scalare

$\cancel{\vec{u}\,\vec{v}}$

→ Se $\vec{u}\perp\vec{v}$

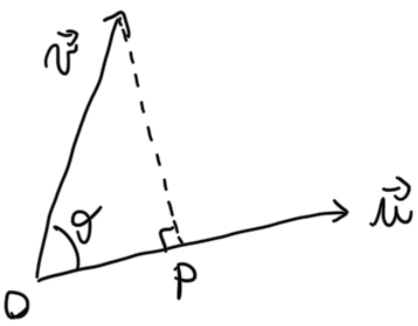


$\Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \qquad \left(\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\theta = 0\right)$

→ se $\vec{u}\parallel\vec{v}$

$\Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{cases} |\vec{u}||\vec{v}| & \text{se hanno lo stesso verso} \\ -|\vec{u}||\vec{v}| & \text{se hanno versi opposti} \end{cases}$

- proprietà commutativa
  $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
- proprietà distributiva
  $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$



$\vec{u}\cdot\vec{v}$ = modulo di $\vec{u}$ per la proiezione di $\vec{v}$ su $\vec{u}$

$= |\vec{u}|\cdot |\vec{v}|\cos\theta \equiv d(OP)$

e viceversa

Calcolo di $\vec{u}\cdot\vec{v}$

$$\begin{cases} \vec{u} = u_x\hat{i}+u_y\hat{j}+u_z\hat{k} \\ \vec{v} = v_x\hat{i}+v_y\hat{j}+v_z\hat{k} \end{cases}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (u_x\hat{i}+u_y\hat{j}+u_z\hat{k})\cdot(v_x\hat{i}+v_y\hat{j}+v_z\hat{k}) =$$

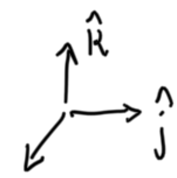
$$= u_xv_x\,\hat{i}\cdot\hat{i} + \cancel{u_xv_y\,\hat{i}\cdot\hat{j}} + \cancel{u_xv_z\,\hat{i}\cdot\hat{k}} +$$

$$+ \cancel{u_yv_x\,\hat{j}\cdot\hat{i}} + u_yv_y\,\hat{j}\cdot\hat{j} + \cancel{u_yv_z\,\hat{j}\cdot\hat{k}} +$$

$$+ \cancel{u_zv_x\,\hat{k}\cdot\hat{i}} + \cancel{u_zv_y\,\hat{k}\cdot\hat{j}} + u_zv_z\,\hat{k}\cdot\hat{k} =$$

$$= u_xv_x + u_yv_y + u_zv_z$$

Versori



$\hat{i}\cdot\hat{i} = 1 \qquad \hat{i}\cdot\hat{j} = 0$

$\hat{j}\cdot\hat{j} = 1 \qquad \hat{j}\cdot\hat{k} = 0$

$\hat{k}\cdot\hat{k} = 1 \qquad \hat{i}\cdot\hat{k} = 0$

(in generale $\vec{u}\cdot\vec{u} = |\vec{u}|^2$)

Derivata di un vettore

$$\vec{u}(t) = u_x(t)\hat{i} + u_y(t)\hat{j} + u_z(t)\hat{k}$$

fissato il sistema di riferimento

$$\frac{\Delta\vec{u}(t)}{\Delta t} = \frac{\vec{u}(t+\Delta t)-\vec{u}(t)}{\Delta t}$$

rapporto incrementale

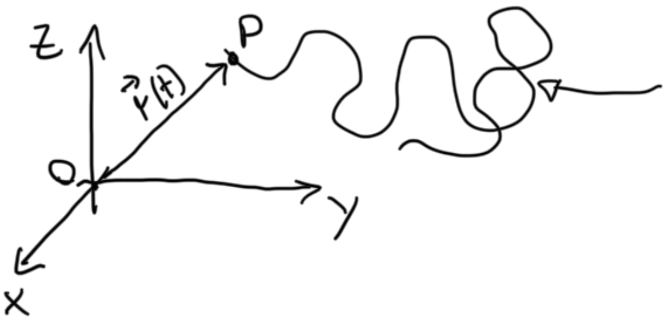
$$\Rightarrow \frac{d\vec{u}(t)}{\ } = \lim \frac{\vec{u}(t+\Delta t)-\vec{u}(t)}{\ } = \frac{du_x(t)}{\ }\hat{i} + \frac{du_y(t)}{\ }\hat{j} + \frac{du_z(t)}{\ }\hat{k}$$

$\frac{\quad}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\quad}{\Delta t} = \frac{\quad}{dt} \hat{i} + \frac{\quad}{dt} \hat{j} + \frac{\quad}{dt} \hat{k}$

è un vettore le cui componenti sono le derivate delle componenti (operatore lineare)

Cinematica del punto materiale

- vettore posizione $\vec{r}(t)$ è il vettore $\vec{OP}$



- traiettoria: insieme dei punti attraversati nel tempo

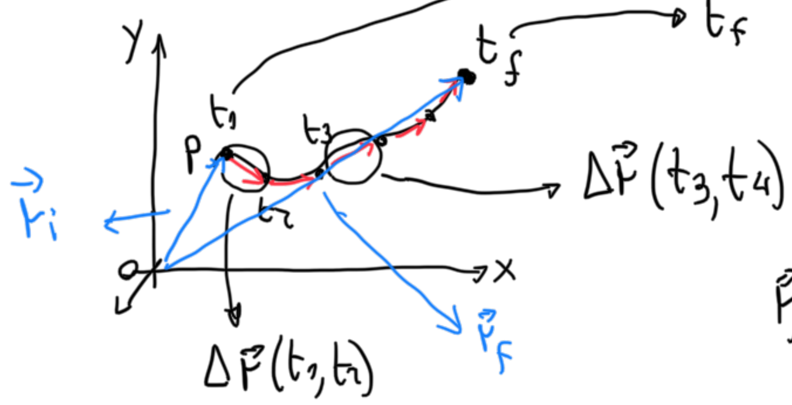
- vettore spostamento $\vec{s}(t) = \Delta\vec{r}(t) = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$

$\vec{s}(t) = \vec{r}(t_2) + (-\vec{r}(t_1))$

Se abbiamo istanti di tempo successivi $t_1, t_2, t_3, t_4 \dots$

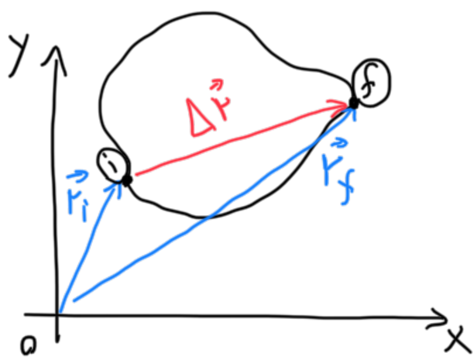
$t_1 \equiv t_i$ (tempo iniziale)

t_f (tempo finale)



$\vec{r}_f = \vec{r}_i + \sum_j \Delta\vec{r}_j$

$\vec{r}_f = \vec{r}_i + \Delta\vec{r}(t_1, t_2) + \Delta\vec{r}(t_2, t_3) + \dots$



- Velocità media (vettore)

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\vec{r}_f - \vec{r}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Si misura in $\frac{\text{distanza}}{\text{tempo}}$ (in S.I. $\left[\frac{m}{s}\right]$)

- velocità istantanea (il tempo intercorso Δt è "piccolissimo")

$$\lim_{t_f \to t_i} \frac{\vec{r}_f - \vec{r}_i}{t_f - t_i} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t_i + \Delta t) - \vec{r}(t_i)}{\Delta t}$$

$t_f = t_i + \Delta t$

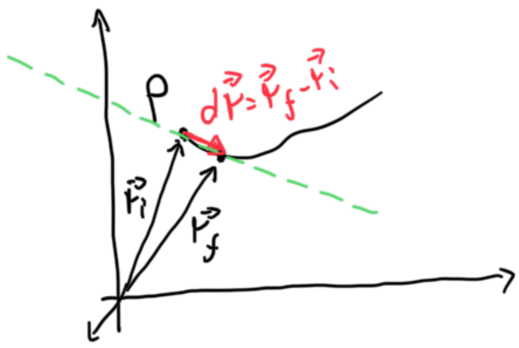
con Δt piccolissimo (prendo le derivate)

$\Delta t \to dt$

$$\boxed{\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}} \quad // \quad \text{(vettore)}$$

→ $\vec{v}$ è un vettore proporzionale allo spostamento infinitesimo

$\vec{v} \propto d\vec{r}$ ⇒ $\vec{v}$ ha la STESSA direzione e verso dello spostamento $d\vec{r}$



⇒ la velocità è TANGENTE alla TRAIETTORIA

$d\vec{r}$ ⇒ $\boxed{d\vec{v}}$ (velocità istantanea!)

[per $\langle \vec{v} \rangle$ non è sempre vero]

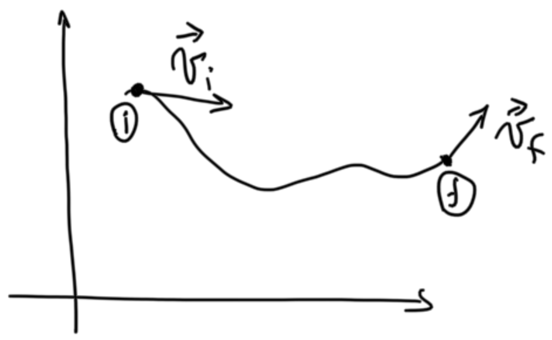
$$\vec{r}(t) = r_x(t)\hat{i} + r_y(t)\hat{j} + r_z(t)\hat{k}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dr_x(t)}{dt}\hat{i} + \frac{dr_y(t)}{dt}\hat{j} + \frac{dr_z(t)}{dt}\hat{k}$$

- accelerazione media (vettore)

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

si misura in $\frac{\text{distanza}}{\text{tempo}^2}$ (in S.I. $\left[\frac{m}{s^2}\right]$)



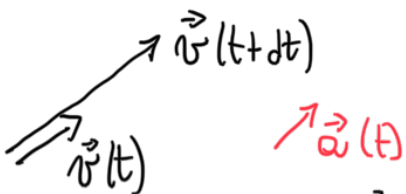
accelerazione quantifica come cambiano le velocità

- accelerazione istantanea

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \; ; \quad \boxed{\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}}$$

$\vec{a}$ è diversa da zero se ($|\vec{a}| \neq 0$)
- → il modulo di $\vec{v}$ cambia ①
- → la direzione di $\vec{v}$ cambia ②

①



Cambio modulo di $\vec{v}$

②