

Nicolò Beverini

*Dipartimento di Fisica  
dell'Università di Pisa*

# Elementi di Fisica





# Indice

<b>1. La misura delle grandezze fisiche.....</b>	<b>5</b>
1.1 Le grandezze fisiche.....	5
1.2 Il Sistema Internazionale di unità di misura.....	6
1.3 Equazioni dimensionali.....	8
1.4 Grandezze scalari e grandezze vettoriali .....	12
<b>2. Vettori ed algebra vettoriale.....</b>	<b>13</b>
2.1 Che cos'è un vettore.....	13
2.2 Le operazioni fondamentali.....	14
2.3 Le componenti di un vettore. ....	15
2.4 Modulo di un vettore .....	16
2.5 Versori .....	16
2.6 Operazioni vettoriali in termini delle componenti.....	17
<b>3. Il moto nello spazio tridimensionale.....</b>	<b>19</b>
3.1 La legge oraria del moto .....	19
3.2 La velocità .....	20
3.3 L'accelerazione.....	22
3.4 L'accelerazione centripeta.....	23
<b>4. I principi della dinamica.....</b>	<b>25</b>
4.1 Il principio d'inerzia.....	25
4.2 Il secondo principio della dinamica .....	26
4.3 Il principio di azione e reazione.....	27
4.4 Le unità di misura di massa e di forza.....	28
4.5 La massa e il peso.....	28
<b>5. Alcuni esempi di forze e di moto.....</b>	<b>31</b>
5.1 L'equazione del moto. ....	31
5.2 Forze costanti e il moto uniformemente accelerato.....	31
5.3 Il moto di un grave.....	34
5.4 Le forze vincolari: la forza normale .....	37
5.5 La tensione di una fune .....	39
5.6 La forza d'attrito statico.....	40
5.7 La forza d'attrito dinamico.....	42
5.8 Forze d'attrito viscoso.....	42

<b>6. L'energia ed il lavoro.....</b>	<b>45</b>
6.1 L'energia cinetica.....	45
6.2 Il lavoro di una forza costante.....	45
6.3 Il prodotto scalare di due vettori .....	47
6.4 Il lavoro effettuato dalla forza peso. ....	47
6.5 Definizione generale di lavoro.....	48
6.6 Forze elastiche e lavoro di una forza elastica.....	49
6.7 Il teorema dell'energia cinetica.....	50
6.8 Applicazioni del teorema dell'energia cinetica. ....	51
6.9 La potenza.....	53
<b>7. L'energia potenziale e il principio di conservazione dell'energia</b>	<b>55</b>
7.1 Le forze posizionali e i campi di forze. ....	55
7.2 Forze conservative e forze dissipative. ....	56
7.3 L'energia potenziale .....	58
7.4 Energia potenziale elastica. ....	59
7.5 Altri esempi di conservazione dell'energia. ....	60
7.6 Il bilancio energetico in presenza di forze dissipative.....	61
<b>8. I problemi d'urto.....</b>	<b>63</b>
8.1 L'urto tra due corpi.....	63
8.2 Urti anelastici.....	64
8.3 Urti elastici .....	65
<b>9. I corpi estesi.....</b>	<b>69</b>
9.1 Il centro di massa. ....	69
9.2 Moto del centro di massa. ....	69
9.3 Energia potenziale di un corpo esteso soggetto alla forza peso. ....	71
9.4 La densità. ....	71
9.5 Il corpo rigido e il momento di una forza. ....	72
9.6 La statica del corpo rigido .....	73
9.7 La statica di un corpo immerso in un liquido.....	75
<b>10. La forza di gravitazione universale.....</b>	<b>77</b>
10.1 Le forze fondamentali della natura.....	77
10.2 Il campo gravitazionale.....	78
10.3 Il moto dei pianeti e le leggi di Keplero .....	79
10.4 L'energia potenziale gravitazionale.....	80
<b>11. Il campo elettrostatico.....</b>	<b>83</b>

11.1 La legge di Coulomb.....	83
11.2 Il campo elettrico .....	84
11.3 Il principio di sovrapposizione. ....	84
11.4 Linee di forza e flusso del campo elettrico .....	85
11.5 Il teorema di Gauss.....	88
11.6 Corpi conduttori e corpi isolanti .....	89
11.7 Campo generato da una sfera carica conduttrice.....	91
<b>12. <i>Il potenziale elettrostatico e i condensatori</i>.....</b>	<b>93</b>
12.1 Il potenziale elettrostatico.....	93
12.2 Potenziale elettrostatico di una carica puntiforme.....	94
12.3 Potenziale di un conduttore.....	95
12.4 I condensatori .....	96
12.5 Il condensatore piano .....	97
12.6 Energia immagazzinata in un condensatore .....	98
<b>13. <i>La corrente elettrica</i>.....</b>	<b>101</b>
13.1 Definizione di corrente .....	101
13.2 La resistenza elettrica .....	102
13.3 Circuiti elettrici .....	103
13.4 Circuiti in serie ed in parallelo .....	104
<b>14. <i>Il campo magnetico</i>.....</b>	<b>107</b>
14.1 La forza di Lorentz.....	107
14.2 Il prodotto vettoriale .....	108
14.3 Moto di una carica in un campo magnetico uniforme .....	109
14.4 La forza magnetica su un conduttore percorso da corrente .....	110
14.5 Generazione dei campi magnetici .....	111
14.6 Forza tra due conduttori paralleli percorsi da corrente.....	112
14.7 Legge di Ampère .....	113
14.8 Campo magnetico in un solenoide.....	115
<b>15. <i>L'elettromagnetismo</i> .....</b>	<b>117</b>
15.1 Il flusso del campo magnetico .....	117
15.2 Il flusso concatenato con una spira .....	118
15.3 L'induzione elettromagnetica .....	118



# 1. La misura delle grandezze fisiche

## 1.1 Le grandezze fisiche

La fisica si propone di studiare i fenomeni naturali e di comprendere le relazioni intercorrenti tra essi, costruendo un modello che correli tramite relazioni matematiche cause ed effetti. Per far questo è necessario *quantificare* i fenomeni in esame, definendo in primo luogo con precisione un insieme di *grandezze* le cui misure ne danno la descrizione. In particolare la definizione di una grandezza fisica dovrà esplicitare il modo in cui può essere misurata in rapporto con una *unità di misura*; si dice perciò che la definizione deve essere *operativa*.

Ad esempio, la lunghezza e la larghezza di un tavolo possono essere definite dalla loro misura rispetto ad un campione, uno strumento cioè che è calibrato rispetto all'unità di misura scelta per le lunghezze (ad esempio, un metro a nastro). Ovviamente, il risultato numerico dell'operazione dipende da quale sia l'unità di misura prescelta: oggi noi d'abitudine usiamo un nastro tarato in metri e nelle sue frazioni decimali e misureremo, ad esempio, una lunghezza di 2,10 metri. Qualcun altro, che possiede un rigghello tarato in unità anglosassoni, vi dirà invece che quello stesso tavolo è lungo 6 piedi e 7/8. L'informazione di quale sia l'unità utilizzata è perciò indispensabile; essa deve *sempre* essere esplicitata.

Anziché per diretto confronto con un campione, la misura di una grandezza può essere effettuata in maniera indiretta, partendo da una misura di grandezze di genere diverso ed utilizzando una relazione geometrica o fisica che lega tali grandezze con quella che si vuole misurare. Consideriamo ad esempio la grandezza *area*. L'unità di misura delle aree può essere definita a partire dalla definizione dell'unità di misura delle lunghezze, come l'area del quadrato di lato unitario. Se le lunghezze si misurano in *metri*, l'unità di misura che così si ottiene per la misura delle aree è il *metro × metro*, ovvero il *metro quadrato*.

Con un ragionamento analogo, partendo dalla definizione di velocità di un corpo come il rapporto tra lo spazio da esso percorso ed il tempo impiegato a percorrerlo, possiamo misurare la grandezza “*velocità*”, eseguen-

do il rapporto tra una misura di *lunghezza* e una misura di *tempo*. Se per misurare le lunghezze l'unità di misura è il *metro* e per il tempo si utilizzai *secondo*, tornerà naturale definire come unità di misura della velocità il *metro/secondo*. Queste grandezze, come l'area, il volume, la velocità, le cui unità di misura vengono definite a partire da altre unità già definite in precedenza sono dette *grandezze derivate*; mentre quelle, come la lunghezza ed il tempo, per cui viene data una definizione indipendente dell'unità di misura, sono dette *grandezze fondamentali*.

Si può così costruisce un *sistema di unità di misura*, definendo un insieme di unità di misura di grandezze considerate fondamentali e derivando da queste le unità di misura per le altre grandezze di interesse fisico. Un sistema d'unità di misura di tal tipo si dice *coerente*, perché le unità di misura delle grandezze derivate sono definite automaticamente a partire dalle unità delle grandezze fondamentali in base alla definizione delle grandezze stesse. La scelta di quali e quante siano le grandezze da considerare fondamentali è a priori arbitraria e così pure è a priori arbitraria la definizione di quale sia l'unità di misura da utilizzare per una grandezza fondamentale. Al fine di accrescere la comprensione reciproca e evitare confusioni, è chiaramente opportuno addivenire ad un accordo quanto più universale possibile e scegliere come unità di misura fondamentali quelle definibili con maggiore precisione e più facilmente riproducibili. Una convenzione internazionale ha ratificato il cosiddetto **Sistema Internazionale di unità di misura (S.I.)**, adottato oggi in quasi tutto il mondo come unico sistema legale (in pratica mancano all'appello solo gli Stati Uniti d'America, dove l'uso del S.I. è solo facoltativo).

L'utilizzo di unità di misura coerenti fra loro dà l'opportunità di poter inserire direttamente nelle formule fisiche i valori numerici delle misure delle singole grandezze ed ottenere automaticamente il valore numerico corretto per il risultato. Ciò non capita ovviamente utilizzando unità non coerenti tra loro, definite cioè in modo indipendente l'una dall'altra. Per esempio si possono misurare le lunghezze in *metri* e usare come unità di volume il *litro*, anziché il *metro cubo*, che è l'unità coerente; ma ciò imporrà l'aggiunta di costanti numeriche alle formule fisiche (il volume di un cubo di spigolo 1 metro è infatti pari a 1000 litri).

## 1.2 Il Sistema Internazionale di unità di misura.

Tramite una convenzione internazionale è stato definito il Sistema Internazionale di unità di misura (simbolo: **SI**), il cui aggiornamento è stato affidato al Bureau International des Poids et des Mesures, di sede a Parigi. Il Sistema Internazionale si basa sulla definizione di sette unità fondamentali (v. tab. I), scelte in modo da coprire i diversi campi della fisica e della tecnologia; a partire da queste, esso definisce l'insieme delle unità derivate. Nei protocolli della Convenzione sono pure definiti i simboli che rappresentano le varie unità.

Per le applicazioni di meccanica sono state definire tre grandezze fondamentali: **lunghezza** (unità di misura il *metro*, simbolo *m*); **tempo** (unità di misura il *secondo*, simbolo *s*) e di **massa** (unità di misura il *kilogram-*

mo, simbolo *kg*). Da esse si ricavano tutte le unità di misura delle grandezze meccaniche, principalmente velocità, accelerazione, forza, lavoro e energia, potenza, pressione. L'unità di tempo è quella oggi definita con la più elevata accuratezza (una misura di tempo può essere eseguita con una precisione migliore di una parte su 10<sup>15</sup>).

Per definire le grandezze elettromagnetiche viene introdotta una quarta grandezza fondamentale, la **corrente elettrica**, la cui unità è denominata *ampère* (simbolo *A*). Una quinta unità fondamentale, il *kelvin* (*K*), misura la **temperatura termodinamica** ed è utilizzata nelle applicazioni termodinamiche. Per la descrizione dei fenomeni chimici, in cui più che la massa è importante il numero di molecole o di atomi, è stata definita una ulteriore grandezza fondamentale, denominata **quantità di materia**, che misura il numero di particelle elementari contenuto in un campione macroscopico; l'unità di misura è la *mole* (*mol*). Un'ulteriore unità di misura, di uso limitato alle fotometria, è la *candela* (*cd*), che misura l'**intensità luminosa**.

Come si è detto, da queste unità fondamentali si ricavano le varie unità derivate. Alcune di queste, particolarmente importanti nelle applicazioni tecnologiche, hanno ricevuto per ragioni di praticità un nome proprio e un simbolo particolare. Ad esempio, la *forza* è definita come il prodotto di una *massa* per un'*accelerazione* ed essa ha quindi come unità nel SI il  $\text{kg} \cdot \text{m/s}^2$ ; a tale unità è stato assegnato il nome di *newton* (simbolo *N*). In questi casi il nome delle unità è per il solito mutuato da quello di un eminente scienziato, che ha lasciato un importante contributo in quel particolare campo della fisica (tab. 2). La convenzione prescrive che il nome di tali unità venga scritto con l'iniziale minuscola, mentre il simbolo corrispondente ha l'iniziale maiuscola.

Il risultato della misura di una grandezza fisica può, al variare dell'oggetto specifico, differire di molti ordini di grandezza. Consideriamo per esempio le lunghezze: la distanza tra Roma e Los Angeles è dell'ordine della decina di milioni di metri, mentre le dimensioni di un batterio sono dell'ordine del milionesimo di metro. I risultati delle misure, espressi nell'unità del SI, sono quindi numeri molto grandi ovvero estremamente piccoli, poco pratici da maneggiare. Il SI prevede a tal fine la possibilità di utilizzare *multipli* o *sottomultipli* delle unità definite prima, ottenuti anteponendo al nome o al simbolo dell'unità opportuni prefissi moltiplicativi, il cui significato è indicato in tab. 3. Il prefisso *kilo* (*k*) esprime perciò che l'unità di misura indicata va moltiplicata per 1000 e il prefisso *micro* (*μ*) indica che l'unità di misura indicata va divisa per 10<sup>6</sup>: 1 *km* è perciò una lunghezza di 1000 *m*, così come 1 *kA* è una corrente elettrica di 1000 *A*; 1 *μm* equivale a 10<sup>-6</sup> *m* e 1 *μA* è pari a 10<sup>-6</sup> *A*. Le misure delle masse fanno eccezione alla regola per ragioni storiche. Come unità SI di massa è stato scelto il *kilogrammo* (*kg*), così chiamato come multiplo di quella che era stata definita più anticamente come unità di massa, il *grammo* (*g*). Si sarebbe dovuto cambiarne la denominazione, ma data l'ormai universale diffusione di tale unità, non lo si è ritenuto opportuno. Di conseguenza, in questo caso i prefissi sono riferiti non all'unità attuale ma alla vecchia unità, il *grammo*.

L'uso di questi prefissi moltiplicativi si è esteso a tutta la letteratura scientifico-tecnologica ed è quindi opportuno memorizzare almeno quelli più comuni, tra  $10^{-12}$  e  $10^{12}$ .

Va tenuto presente che la Convenzione prevede che, quando un'unità di misura con prefisso viene elevata a potenza, si intende che l'esponente si riferisce sia al prefisso sia all'unità:  $2 \text{ cm}^3$  è perciò equivalente a  $2 \cdot (10^{-2} \text{ m})^3 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$  e  $3 \mu\text{s}^{-1}$  equivalgono a  $3 \cdot (10^{-6} \text{ s})^{-1} = 3 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$ .

Per la misura degli angoli, il SI prevede infine l'uso del *radiane* (*rad*) per la misura degli angoli piani e dello *steradiante* (*sr*) per la misura degli angoli solidi. Ricordiamo che il *radiane* è definito come l'angolo piano compreso tra due raggi di un cerchio che, sulla circonferenza, intercettano un arco di lunghezza uguale al raggio stesso. Lo *steradiante* è definito come l'angolo solido che ha il vertice al centro di una sfera ed intercetta sulla superficie di questa un'area equivalente al quadrato del raggio. L'intera superficie sferica sottende quindi un angolo solido di  $4\pi$  steradianti.

Per meglio raggiungere il suo obiettivo di omogeneizzazione universale delle misure, la Convenzione del SI scoraggia l'uso di unità di misura non coerenti (e l'Unione Europea recepisce tale raccomandazione, imponendo l'uso delle unità SI in tutte le applicazioni commerciali). La Convenzione ammette comunque l'uso di alcune unità di misura, che sono al di fuori del sistema SI, ma che sono largamente diffuse e rivestono un ruolo importante nella vita di tutti i giorni. E' il caso del *minuto*, dell'*ora* e del *giorno* (simboli *min*, *h*, *d*) quali unità di tempo, i *gradi*, i *minuti primi* e i *minuti secondi* ( $^{\circ}, ', ''$ ) per la misura degli angoli, il *litro* (*l*) (definito equivalente a  $1 \text{ dm}^3$ ) per le misure di capacità e la *tonnellata* (*t*), equivalente a  $1000 \text{ kg}$ , per misure di massa.

Altre unità di misura non coerenti con il SI sono in uso in alcuni campi specifici della fisica (ad esempio l'*atmosfera* per le misure di pressione). E' chiaro che, quando si utilizzano misure espresse in unità non coerenti, occorrerà fare la massima attenzione nell'applicare le formule per evitare errori grossolani.

### 1.3 Equazioni dimensionali

Come si è già detto, una legge fisica esprime una relazione funzionale tra le misure di differenti grandezze. Essa ha quindi la forma di un'uguaglianza (o di un'equazione), tra due espressioni. Perché un'uguaglianza abbia un senso, è ovviamente indispensabile che le quantità espresse dai due membri siano omogenee tra loro e siano quindi misurate con la stessa unità di misura. E' lo stesso concetto mai abbastanza ribadito alle scuole elementari, in base a cui le pere si sommano alle pere e gli asini agli asini, mentre è privo di senso sommare gli asini alle pere.

Questa proprietà può tornare utile per verificare l'esattezza o meno di una formula, utilizzando le cosiddette equazioni dimensionali. Come si è visto, nell'ambito di un sistema coerente d'unità di misura sono definite alcune grandezze come fondamentali e da esse sono derivate le altre. Qualunque sia la forma di una superficie, la sua area è comunque sempre e-

spressa dal prodotto di due misure di lunghezza (eventualmente con l'aggiunta di costanti numeriche); così il volume di un solido è sempre espresso dal prodotto di tre misure di lunghezza e una velocità è sempre riconducibile al rapporto tra una misura di lunghezza e una misura di tempo. Si dice allora che la grandezza *area* ha le dimensioni fisiche di una lunghezza moltiplicata per se stessa (ovvero una lunghezza al quadrato), che la grandezza *volume* ha le dimensioni di una lunghezza al cubo, che la grandezza *velocità* ha le dimensioni di una lunghezza divisa per un tempo. Affermare che i due membri di un'eguaglianza (o gli addendi di una somma) devono essere omogenei tra loro è equivalente a verificare che essi hanno le stesse dimensioni fisiche e quindi sono esprimibili nelle stesse unità di misura. Una formula non rispetti questo criterio è senza dubbio errata.

Ancora, le equazioni dimensionali risultano utili, quando l'espressione di una legge fisica contiene delle *costanti fisiche*. Per esempio, si consideri la legge di stato dei gas perfetti:

$$pV = nRT$$

Essa esprime la relazione esistente tra la pressione, la temperatura e il volume occupato di una quantità  $n$  di moli di gas perfetto. La costante  $R$ , che compare in questa formula, non è un numero puro, quale può essere invece  $\pi$  nella formula che esprime l'area del cerchio in funzione del raggio. Se si effettua l'analisi dimensionale della legge dei gas perfetti, si scopre che è necessario attribuire una dimensione fisica anche alla costante  $R$ , affinché i due membri dell'equazione abbiano uguali dimensioni. Il valore di  $R$  non è quindi un numero puro, ma dovrà essere espresso nelle adeguate unità di misura. Nel SI, in cui l'unità di volume è il  $m^3$  e l'unità di pressione è il Pascal ( $Pa$ ),  $R$  vale circa  $8,314 \text{ J/mol}\cdot\text{K}$ . Se si usano unità di misura differenti, il valore numerico di  $R$  varierebbe di conseguenza: ad esempio, nell'uso comune dei chimici, abituati a misurare i volumi in litri e le pressioni in atmosfere,  $R$  vale  $0,082 \text{ l atm}/(\text{mol}\cdot\text{K})$ .

**Tab. 1**

<b>Grandezze fondamentali</b>	<b>Unita' di misura</b>	<b>Simbolo</b>	<b>Definizione</b>
Tempo	secondo	s	il secondo è pari a 9192631770 periodi di una transizione atomica del Cs133
Lunghezza	metro	m	il metro è lo spazio percorso dalla radiazione elettromagnetica nel vuoto in $1/299792458$ di secondo
Massa	kilo-grammo	kg	il kilogrammo è la massa del campione conservato presso il <i>Bureau International des Poids et des Mesures</i> a Parigi
Corrente	ampère	A	l'ampère è l'intensità di una corrente costante, che, mantenuta in due conduttori paralleli, di lunghezza infinita e di sezione trascurabile, posti alla distanza di 1 m uno dall'altro nel vuoto, produce tra tali conduttori la forza di $2 \cdot 10^7$ newton per metro di lunghezza
Temperatura termodinamica	kelvin	K	il kelvin è $1/273,16$ la temperatura termodinamica del punto triplo dell'acqua
Quantità di materia	mole	mol	la mole rappresenta una quantità di particelle elementari pari al numero di atomi contenuti in 0,012 kg di $^{12}\text{C}$
Intensità luminosa	candela	cd	la candela è pari all'intensità luminosa di un corpo nero alla temperatura di fusione del platino

**Tab.2**

Grandezza	Unità	Simbolo	Espressione in unità SI	Espressione in unità fondamentali SI
frequenza	<i>hertz</i>	Hz	s <sup>-1</sup>	s <sup>-1</sup>
forza	<i>newton</i>	N	m kg s <sup>-2</sup>	m kg s <sup>-2</sup>
pressione	<i>pascal</i>	Pa	N/m <sup>2</sup>	m <sup>-1</sup> kg s <sup>-2</sup>
energia (lavoro)	<i>joule</i>	J	N m	m <sup>2</sup> kg s <sup>-2</sup>
potenza	<i>watt</i>	W	J/s	m <sup>2</sup> kg s <sup>-3</sup>
carica elettrica	<i>coulomb</i>	C	A s	A s
potenziale elettrico	<i>volt</i>	V	W/A	m <sup>2</sup> kg s <sup>-3</sup> A <sup>-1</sup>
capacità elettrica	<i>farad</i>	F	C/V	m <sup>-2</sup> kg <sup>-1</sup> s <sup>4</sup> A <sup>2</sup>
resistenza elettrica	<i>ohm</i>	$\Omega$	V / A	m <sup>2</sup> kg s <sup>-3</sup> A <sup>-2</sup>
conduttanza	<i>siemens</i>	Si	A/V	m <sup>-2</sup> kg <sup>-1</sup> s <sup>3</sup> A <sup>2</sup>
flusso di induzione magnetica	<i>weber</i>	Wb	V s	m <sup>2</sup> kg s <sup>-2</sup> A <sup>-1</sup>
induzione magnetica	<i>tesla</i>	T	Wb/m <sup>2</sup>	kg s <sup>-2</sup> A <sup>-1</sup>
induttanza	<i>henry</i>	H	Wb/A	m <sup>2</sup> kg s <sup>-2</sup> A <sup>-2</sup>
attività (radioattiva)	<i>becquérel</i>	Bq	s <sup>-1</sup>	s <sup>-1</sup>
dose assorbita	<i>gray</i>	Gy	J/m <sup>3</sup>	m <sup>-1</sup> kg s <sup>-2</sup>

**Tab 3**

Prefisso	Simbolo	Valore	Prefisso	Simbolo	Valore
deca	da	10	deci	d	10 <sup>-1</sup>
etto	h	10 <sup>2</sup>	centi	c	10 <sup>-2</sup>
kilo	k	10 <sup>3</sup>	milli	m	10 <sup>-3</sup>
mega	M	10 <sup>6</sup>	micro	$\mu$	10 <sup>-6</sup>
giga	G	10 <sup>9</sup>	nano	n	10 <sup>-9</sup>
tera	T	10 <sup>12</sup>	pico	p	10 <sup>-12</sup>
peta	P	10 <sup>15</sup>	femto	f	10 <sup>-15</sup>
exa	E	10 <sup>18</sup>	atto	a	10 <sup>-18</sup>
zetta	Z	10 <sup>21</sup>	zepto	z	10 <sup>-21</sup>
yotta	Y	10 <sup>24</sup>	yocto	y	10 <sup>-24</sup>

## 1.4 Grandezze scalari e grandezze vettoriali

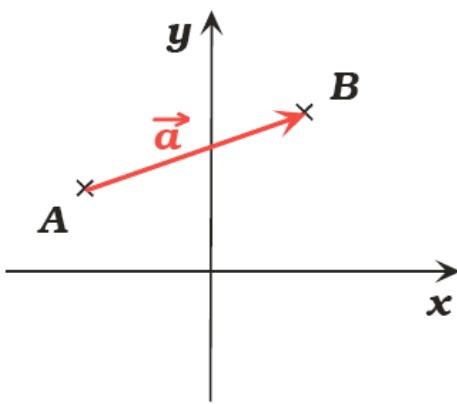
Alcune grandezze possono essere compiutamente espresse dal processo di misura così come è stato descritto nei paragrafi precedenti, cioè da un numero e dall'unità di misura. E' quanto accade quando si misurano intervalli di tempo, masse, energie o cariche elettriche. Grandezze di questo tipo vengono dette *grandezze scalari*.

In altri casi la situazione è più complessa. Noi viviamo in un mondo tridimensionale, in cui i concetti di destra e sinistra, di avanti e indietro, di su e giù possono essere importanti. Indicando una *forza*, per valutarne gli effetti non mi basta darne il valore della sua intensità, ma devo specificare anche in quale direzione essa agisce. Così la grandezza *velocità* è compiutamente indicata solo fornendo anche la *direzione* del moto stesso. Questo tipo di grandezze sono dette *grandezze vettoriali*. Per esse non è dunque sufficiente esprimere il risultato della misura con un numero, ma con un *vettore*, cioè con un qualcosa che contiene informazione anche sulla direzione. In questo testo noi indicheremo che una grandezza  $v$  è una grandezza vettoriale, sovrapponendo al suo simbolo una freccetta:  $\vec{v}$ .

# 2. Vettori ed algebra vettoriale

## 2.1 Che cos'è un vettore

La misura di una grandezza vettoriale non è semplicemente esprimibile con un numero, ma con un'entità matematica più complessa, che contenga anche l'informazione sulla direzione. Definiamo questa entità un *vettore*. Che cosa sia un vettore si può capire osservando la natura di una tipica grandezza vettoriale, quale è il vettore spostamento. Il vettore spostamento misura il cambiamento di posizione di un corpo da un punto dello spazio ad un altro. Per definirlo compiutamente occorre precisare la distanza tra punto di partenza e punto d'arrivo (quello che si dice il *modulo* o il *valore assoluto* del vettore) ed identificarne la direzione. Graficamente il vettore spostamento può essere indicato disegnando una freccia, che congiunga il punto di partenza con il punto d'arrivo, diretta verso quest'ultimo, così come, in due dimensioni, è rappresentato in fig. 1.<sup>1</sup>

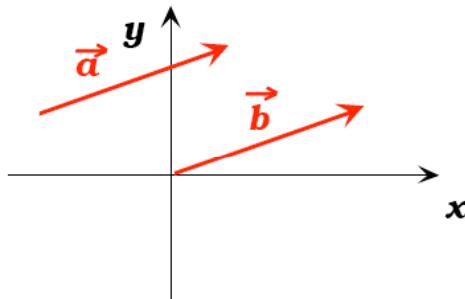


**Fig. 2-1**

---

<sup>1</sup> Nel seguito del capitolo nelle figure esemplificheremo sempre per chiarezza di disegno i vettori in due dimensioni, anche se nel testo parleremo in termini generali di vettori nello spazio tridimensionale.

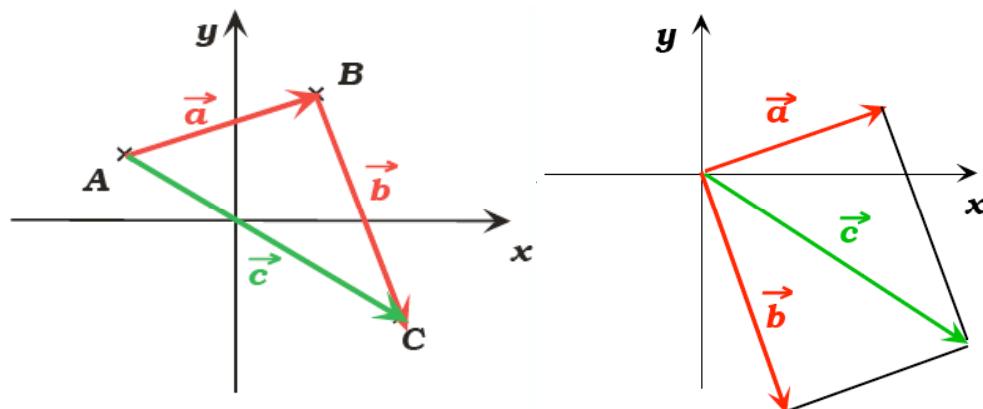
Si noti che il vettore spostamento è definito esclusivamente dalla misura della distanza dei due punti e dalla direzione della congiungente e non da quale siano le coordinate del punto di partenza e del punto d'arrivo. I due vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , rappresentati in fig. 2 da frecce della stessa lunghezza e parallele tra loro, sono in effetti, in base alla nostra definizione, lo stesso vettore ( $\vec{a} = \vec{b}$ ).



**Fig. 2-2**

## 2.2 Le operazioni fondamentali

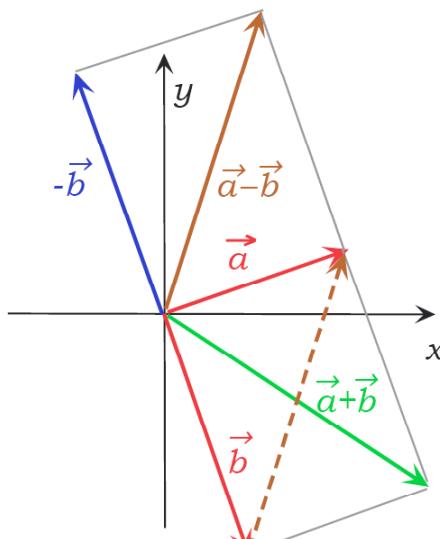
Definiamo ora la somma e la differenza di due vettori.



**Fig. 2-3**

Descriviamo (Fig. 2-3a) uno spostamento dal punto A al punto B (spostamento rappresentato dal vettore  $\vec{a}$ ), seguito da uno spostamento dal punto B verso il punto C (spostamento rappresentato dal vettore  $\vec{b}$ ). Lo spostamento complessivo (cioè la somma dei due spostamenti) è dunque dal punto A al punto C (spostamento rappresentato dal vettore  $\vec{c}$ ). Diremo quindi che il vettore  $\vec{c}$  rappresenta la somma dei due vettori  $\vec{a}$  e di  $\vec{b}$ . Dal disegno di Fig. 2-3b e ricordando quanto appena detto (§ 2.1), che cioè due "frecce" parallele di uguale lunghezza rappresentano lo stesso vettore, disegnando i due vettori in modo che escano da uno stesso punto, risulta che la somma di due vettori è rappresentata dalla diagonale del parallelogramma avente per lati i vettori da sommare e che gode della proprietà commutativa ( $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ ).

Per definire la differenza di due vettori, definiamo prima l'opposto di un vettore  $\vec{b}$ , indicandolo con  $-\vec{b}$ , come quel vettore che aggiunto a  $\vec{b}$  dà come risultato zero. In termini di vettore spostamento, è lo spostamento che, aggiunto allo spostamento dato mi riporta nella posizione di partenza. Graficamente, è il vettore che si ottiene scambiando base e punta della freccia (Fig. 2-4).



**Fig. 2-4**

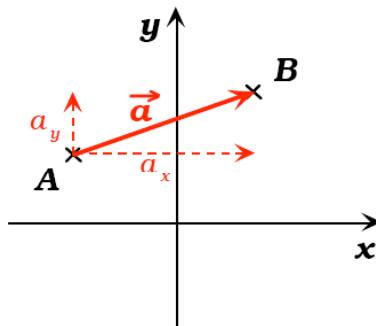
La differenza  $\vec{a} - \vec{b}$  tra due vettori è quindi definita come quel vettore che è la somma di  $\vec{a}$  con l'opposto di  $\vec{b}$ , cioè  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ . Dalla Fig. 2-4 si vede che, costruendo il parallelogramma che ha per lati i vettori  $\vec{a}$  e di  $\vec{b}$ , la differenza  $\vec{a} - \vec{b}$  è data dalla diagonale che congiunge le punte dei due vettori.

### 2.3 Le componenti di un vettore.

Come si può quantificare l'informazione della direzione del vettore?

Definiamo nello spazio tridimensionale una terna di assi cartesiani mutuamente ortogonali, convenzionalmente indicati come asse  $x$ , asse  $y$  ed asse  $z$ . Al solito, considereremo il caso del vettore spostamento, che sarà poi generalizzabile ad un qualunque tipo di vettore. Facendo riferimento al sistema di riferimento cartesiano, possiamo pensare un vettore spostamento  $\vec{a}$  come la somma di uno spostamento nella direzione  $x$ , rappresentato dal vettore  $\vec{a}_x$ , di uno nella direzione  $y$ , rappresentato dal vettore  $\vec{a}_y$ , e di uno nella direzione  $z$ , rappresentato dal vettore  $\vec{a}_z$ . I vettori  $\vec{a}_x$ ,  $\vec{a}_y$  e  $\vec{a}_z$  sono detti i *vettori componenti* (rispetto al sistema di riferimento cartesiano  $Oxyz$ ) di  $\vec{a}$ . E' quindi  $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z$ . I numeri  $a_x$ ,  $a_y$ , e  $a_z$ , che esprimono la lunghezza dei vettori  $\vec{a}_x$ ,  $\vec{a}_y$  e  $\vec{a}_z$  (col segno positivo se questi sono orientati verso il senso positivo degli assi, col segno negativo in caso contrario) si dicono

le *componenti (scalari)* del vettore  $\vec{a}$ . Assegnare una terna di numeri  $a_x$ ,  $a_y$ , e  $a_z$  definisce in modo completo ed univoco il vettore  $\vec{a}$ .



**Fig. 2-5**

In molti casi la fenomenologia può essere descritta con vettori giacenti tutti sullo stesso piano. Orientando opportunamente gli assi del nostro sistema cartesiano, si può allora far sì che la componente di tutti questi i vettori in una direzione sia sempre identicamente nulla. Per esempio, se gli assi  $x$  e  $y$  definiscono il piano in questione, la componente  $z$  sarà sempre nulla. In questo caso sarà sufficiente per definire il vettore dare solo le due componenti non nulle (caso *bidimensionale*).

Nel caso poi che tutti i vettori d'interesse abbiano la stessa direzione, orientando uno degli assi in tale direzione, il vettore si riduce ad una sola componente (caso *unidimensionale*).

## 2.4 Modulo di un vettore

Dato un vettore  $\vec{V}$ , di componenti  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$  la quantità  $\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$ , che è la diagonale del parallelepipedo di spigoli  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$ , e che nel caso del vettore spostamento rappresenta la lunghezza dello spostamento complessivo, prende il nome di modulo o valore assoluto del vettore e viene indicata con il simbolo  $|\vec{V}|$  o più semplicemente, quando non ci sia pericolo di confusione, eliminando la freccetta sul simbolo:

$$[2.1] \quad V = |\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

Dalla definizione discende ovviamente che il valore del modulo di un vettore è sempre espresso da un numero maggiore o uguale a zero.

## 2.5 Versori

Dividendo un vettore per il suo modulo, si ottiene un vettore di modulo **1** la cui direzione coincide con quella del vettore dato. E' comodo usare una notazione particolare per indicare un tale vettore unitario, che prende il nome di *versore*, ponendo un apice  $\wedge$  al posto della freccia al di sopra del simbolo. Ad esempio, dato un vettore  $\vec{r}$ , si può indicare la sua

direzione tramite il versore  $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ . Con i simboli  $\hat{x}, \hat{y}$  e  $\hat{z}$  si indicano i versori relativi ai tre assi, cioè le direzioni  $Ox, Oy, Oz$ .<sup>1</sup>

Essendo  $V_x, V_y, V_z$  le componenti lungo i tre assi del vettore  $\vec{V}$ , si può quindi identificare il vettore in base alla terna di numeri:

$$[2.2] \quad \vec{V} \equiv (V_x, V_y, V_z)$$

ovvero come:

$$[2.3] \quad \vec{V} \equiv V_x \hat{x} + V_y \hat{y} + V_z \hat{z}$$

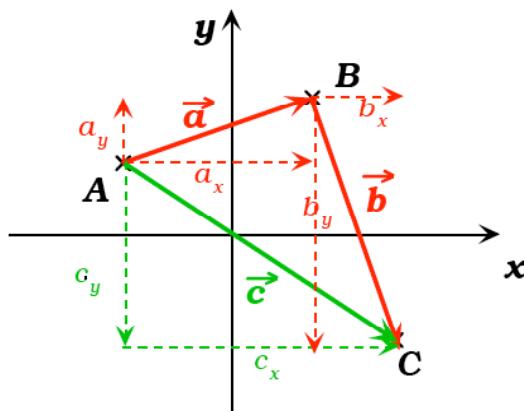
## 2.6 Operazioni vettoriali in termini delle componenti

Scrivere i vettori in termini delle sue componenti permette di effettuare numericamente le operazioni vettoriali, senza bisogno di ricorrere ai grafici.

Osserviamo in primo luogo che l'uguaglianza tra due vettori implica l'uguaglianza delle rispettive componenti. Scrivere  $\vec{a} = \vec{b}$  equivale a scrivere:

$$\begin{cases} a_x = b_x \\ a_y = b_y \\ a_z = b_z \end{cases}$$

Ciò significa anche che un'equazione vettoriale equivale in generale ad un sistema di tre equazioni scalari, una per ogni componente spaziale.



**Fig. 2-6**

La Fig. 2-6 illustra, in termini delle componenti, la somma di due vettori nel caso bidimensionale. Si vede che la componente lungo la direzione  $x$  del vettore  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$  è uguale alla somma algebrica delle componenti  $x$  dei due vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  e la componente lungo la direzione  $y$  del vettore è uguale alla somma algebrica delle componenti  $y$  dei due vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  (attenzione ai

<sup>1</sup> In alcuni testi i versori relativi agli assi  $x, y, z$  sono invece indicati con  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$

segni: nel caso in figura i valori di  $b_y$  e  $c_y$  sono rappresentati da numeri negativi!).

Estendendo il ragionamento al caso tridimensionale si trova che la scrittura  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$  equivale all'insieme delle tre relazioni scalari:

$$\begin{cases} c_x = a_x + b_x \\ c_y = a_y + b_y \\ c_z = a_z + b_z \end{cases}$$

Nel § 2.2 la differenza di due vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  è stata definita come la somma di  $\vec{a}$  con l'opposto di  $\vec{b}$ , cioè  $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ . Essendo per definizione  $-\vec{b}$  quel vettore tale che  $\vec{b} + (-\vec{b}) = 0$ , le cui componenti sono perciò  $(-b_x, -b_y, -b_z)$ , si potrà concludere che:

$$\begin{cases} c_x = a_x - b_x \\ c_y = a_y - b_y \\ c_z = a_z - b_z \end{cases}$$

Si può facilmente definire anche il prodotto di un vettore  $\vec{a}$  per uno scalare  $k$ . Esso è un vettore che ha la stessa direzione di  $\vec{a}$ , se  $k$  è positivo, o direzione opposta, se  $k$  è negativo, e modulo uguale al prodotto del modulo  $|\vec{a}|$  per il valore assoluto di  $k$ . Le componenti di tale vettore sono date dal prodotto delle componenti di  $\vec{a}$  per lo scalare  $k$ . Cioè  $k\vec{a} \equiv (ka_x, ka_y, ka_z)$ .

Il prodotto di due vettori è un'operazione più complessa. In effetti nel prosieguo noi definiremo due tipi diversi di prodotti tra vettori, in un caso con il risultato che è uno scalare, nell'altro in cui il risultato è un vettore. Definiremo tali prodotti quando ne incontreremo le applicazioni.

# 3. Il moto nello spazio tridimensionale

## 3.1 La legge oraria del moto

La geometria analitica ci insegna che la posizione di un corpo puntiforme (cioè di dimensioni trascurabili) nello spazio può essere identificata in un sistema di riferimento di coordinate cartesiane da una terna di numeri. Ricordando la definizione di vettore data nel capitolo precedente, tale terna può essere interpretata come l'insieme delle componenti di un vettore (*il vettore posizione*), che ha la “coda” nell'origine degli assi e la “punta” nel punto occupato dal corpo, le cui componenti sono appunto le tre coordinate cartesiane (Fig. 3-1). Quando il corpo si muove nello spazio, il suo movimento può essere descritto, scrivendo in funzione del tempo il valore delle tre coordinate:

$$[3.1] \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

ovvero, visto che tali coordinate sono le componenti del *vettore posizione*, scrivendo in funzione del tempo il valore di tale vettore.

$$[3.2] \quad \vec{s} = \vec{s}(t)$$

L'espressione [3.2] è detta normalmente *legge oraria del moto*. La linea nello spazio definita dalla [3.1] rappresenta ***la traiettoria*** del moto.

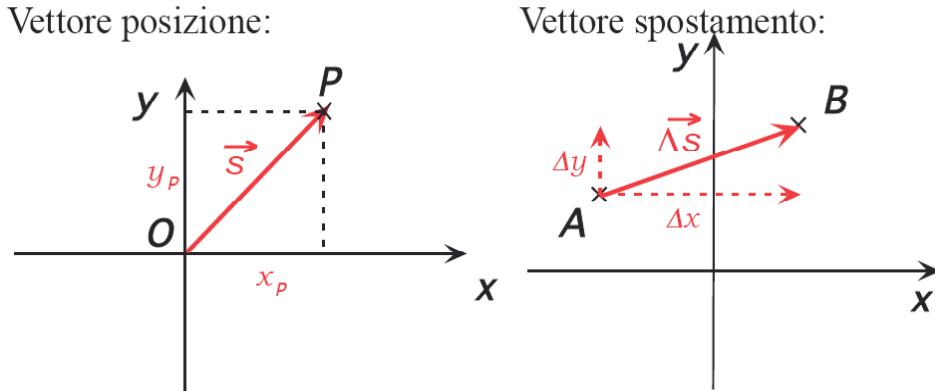


Fig. 3-1

Supponiamo che il corpo si trovi all'istante  $t_1$  nel punto  $P_1$ , le cui coordinate siano  $x_1=x(t_1)$ ,  $y_1=y(t_1)$ ,  $z_1=z(t_1)$  e che successivamente, all'istante  $t_2$ , esso si trovi nel punto  $P_2$ , le cui coordinate siano  $x_2=x(t_2)$ ,  $y_2=y(t_2)$ ,  $z_2=z(t_2)$ . Secondo quanto si è detto sopra, il primo punto è identificato dal vettore posizione  $\vec{s}_1 = \vec{s}(t_1)$  e il secondo dal vettore posizione  $\vec{s}_2 = \vec{s}(t_2)$ . Definiamo *spostamento* il vettore che connette i due punti, graficamente rappresentato da una freccia che parte dal punto  $P_1$  e ha la punta nel punto  $P_2$ . Tale vettore, che indicheremo col simbolo  $\Delta\vec{s}$ , è dunque definito come la differenza tra i due vettori  $\vec{s}_2$  e  $\vec{s}_1$ ; le sue componenti sono  $\Delta x = x_2 - x_1$ ,  $\Delta y = y_2 - y_1$ ,  $\Delta z = z_2 - z_1$ .

### 3.2 La velocità

Facendo il rapporto tra il vettore spostamento e l'intervallo di tempo  $\Delta t = t_2 - t_1$  in cui tale spostamento avviene, si ottiene il vettore  $\vec{v}_m$ , che è definito come la *velocità media nell'intervallo di tempo*  $(t_1, t_2)$  del corpo. In forma vettoriale si scrive:

$$[3.3] \quad \vec{v}_m(t_1, t_2) = \frac{\vec{s}(t_2) - \vec{s}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t} .$$

La [3.3] equivale, esprimendo i vettori nei termini delle loro componenti cartesiane, all'insieme delle tre relazioni scalari:

$$[3.4] \quad \begin{cases} (v_m)_x = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ (v_m)_y = \frac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ (v_m)_z = \frac{z(t_2) - z(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta z}{\Delta t} \end{cases}$$

Dalla definizione data si ricava immediatamente che *l'unità di misura della velocità nel Sistema Internazionale è la velocità media di un corpo che percorre una distanza di 1 metro in 1 secondo (m/s)*.

Partendo dalla definizione data di velocità media, applicando i principi dell'analisi matematica, possiamo definire il valore istantaneo  $\vec{v}$  della velocità ad un certo istante  $t_0$ , calcolando il limite per  $t_1 \rightarrow t_0$  (ovvero, ponendo  $\Delta t = t_1 - t_0$  il limite per  $\Delta t \rightarrow 0$ ) dei rapporti che compaiono nella [3.4]:

$$[3.5] \quad \begin{cases} v_x(t_0) = \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ v_y(t_0) = \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{y(t_1) - y(t_0)}{t_1 - t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ v_z(t_0) = \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{z(t_1) - z(t_0)}{t_1 - t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \end{cases}$$

Le formule che definiscono  $v_x(t_0)$ ,  $v_y(t_0)$ ,  $v_z(t_0)$  nella [3.5], matematicamente esprimono l'operazione di derivata in  $t_0$  delle funzioni  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ . L'insieme di queste tre relazioni può essere espresso vettorialmente nella forma:

$$[3.6] \quad \vec{v}(t_0) = \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{\vec{s}(t_1) - \vec{s}(t_0)}{t_1 - t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t}$$

Questa formula definisce la grandezza  $\vec{v}(t_0)$  come la derivata della funzione  $\vec{s}(t)$  nel punto  $t_0$ ; tale grandezza prende il nome di *velocità istantanea all'istante  $t_0$* .

L'operazione può essere ripetuta per qualunque valore di  $t$ . Si definisce così la funzione vettoriale  $\vec{v}(t)$ , che esprime il valore della velocità istantanea in funzione del tempo, come la *derivata vettoriale rispetto al tempo della funzione  $\vec{s}(t)$* :

$$[3.7] \quad \vec{v}(t) = \vec{s}'(t) = \frac{d \vec{s}}{dt}$$

$$[3.8] \quad \begin{cases} v_x(t) = x'(t) = \frac{dx}{dt} \\ v_y(t) = y'(t) = \frac{dy}{dt} \\ v_z(t) = z'(t) = \frac{dz}{dt} \end{cases}$$

L'espressione *derivata vettoriale* esplicita che al numeratore del rapporto incrementale figura una *differenza tra due vettori* e che di conseguenza il risultato dell'operazione di passaggio al limite fornisce un *vettore*.

Un'osservazione importante. La [3.7] indica che il vettore velocità ha la direzione dello spostamento istantaneo, che è quella della tangente alla

traiettoria. La velocità istantanea ha dunque sempre la direzione della tangente alla traiettoria.

### 3.3 L'accelerazione

Così come si è definito il vettore velocità a partire dal vettore posizione, si definisce a partire dal vettore velocità istantanea il vettore *accelerazione*.

Si definisce come accelerazione media  $\vec{a}_m$  nell'intervallo di tempo  $(t_1, t_2)$  il vettore dato dal rapporto tra la differenza delle velocità agli istanti  $t_2$  e  $t_1$  e l'intervallo di tempo  $\Delta t = t_2 - t_1$ , in cui tale variazione avviene.

In forma vettoriale si scrive:

$$[3.9] \quad \vec{a}_m(t_1, t_2) = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} .$$

La [3.9] può essere scritta in termini delle componenti cartesiane come l'insieme di tre relazioni scalari nella forma:

$$[3.10] \quad \begin{cases} (a_m)_x = \frac{v_x(t_2) - v_x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \\ (a_m)_y = \frac{v_y(t_2) - v_y(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \\ (a_m)_z = \frac{v_z(t_2) - v_z(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v_z}{\Delta t} \end{cases}$$

Dalla definizione data si ricava immediatamente che l'unità di misura dell'accelerazione nel Sistema Internazionale è l'accelerazione media di un corpo che cambia la sua velocità di 1 m/s in 1 secondo ed è quindi indicata come  $m/s^2$ .

Per ottenere il valore istantaneo  $\vec{a}$  dell'accelerazione ad un certo istante  $t_1$  occorre calcolare il limite dell'espressione [3.9] o [3.10] per  $t_2 \rightarrow t_1$  (che è come dire per  $\Delta t = t_2 - t_1 \rightarrow 0$ ):

$$[3.11] \quad \vec{a}(t_1) = \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{\vec{v}(t_1) - \vec{v}(t_0)}{t_1 - t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$[3.12] \quad \begin{cases} a_x(t_1) = \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{v_x(t_1) - v_x(t_0)}{t_1 - t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \\ a_y(t_1) = \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{v_y(t_1) - v_y(t_0)}{t_1 - t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \\ a_z(t_1) = \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{v_z(t_1) - v_z(t_0)}{t_1 - t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_z}{\Delta t} \end{cases}$$

Tale operazione può essere effettuata per ogni valore di  $t$ , definendo così l'*accelerazione istantanea* come la *derivata vettoriale* della funzione velocità.

Si arriva così a definire la funzione (vettoriale)  $\vec{a}(t)$  che esprime il valore della velocità istantanea in funzione del tempo, come la derivata rispetto al tempo della funzione  $\vec{v}(t)$ :

$$[3.13] \quad \vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

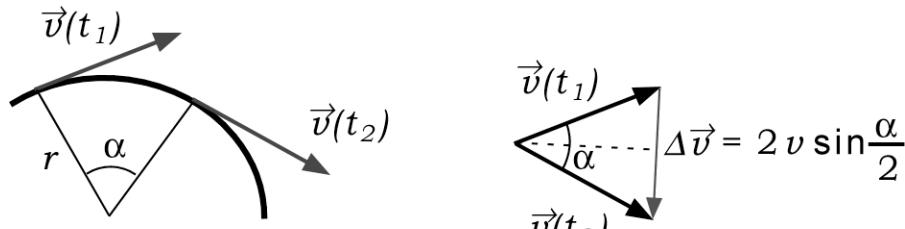
$$[3.14] \quad \begin{cases} a_x(t) = v'_x(t) = \frac{dv_x}{dt} \\ a_y(t) = v'_y(t) = \frac{dv_y}{dt} \\ a_z(t) = v'_z(t) = \frac{dv_z}{dt} \end{cases}$$

### 3.4 L'accelerazione centripeta.

Il fatto che un corpo si muova con velocità in modulo costante, non implica che la sua accelerazione debba essere nulla. Infatti, anche se il *modulo* della velocità è costante, non è detto che sia costante anche il *vettore* velocità. In effetti, il vettore velocità ha, istante per istante, la direzione dello spostamento  $d\vec{s}$ , che è quello della tangente alla traiettoria. Ne consegue che, se la traiettoria non è rettilinea, la direzione della sua tangente, e quindi quella del vettore velocità, cambia; il cambiamento del vettore velocità, in base alla [3.13], implica che c'è un'accelerazione.

Consideriamo il caso più semplice, quello di un corpo che si sta muovendo lungo una traiettoria circolare con velocità in modulo costante (*moto circolare uniforme*) e calcoliamo esplicitamente quale sia il valore di tale accelerazione.

Riferiamoci alla Fig. 3-2. Detto  $v$  il valore (costante) del modulo della velocità, vediamo che il modulo della differenza tra il valore della velocità all'istante  $t_2$  e  $t_1$  è pari a  $|\Delta\vec{v}| = 2v \sin \frac{\alpha}{2}$ , essendo  $\alpha$  l'angolo al centro (misurato in radianti) corrispondente allo spostamento avvenuto lungo la circonferenza nell'intervallo di tempo  $\Delta t = t_2 - t_1$ . Poiché l'arco percorso in tale tempo è  $v(t_2 - t_1)$ , si ha  $\alpha = \frac{v \cdot \Delta t}{r}$ .



**Fig. 3-2**

Il modulo dell'accelerazione *media* tra gli istanti  $t_1$  e  $t_2$  è quindi:

$$[3.15] \quad |\vec{a}_m(t_1, t_2)| = \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} = \frac{2v \sin \alpha/2}{\Delta t}$$

e, passando al limite per  $\Delta t \rightarrow 0$ , si trova che l'accelerazione istantanea vale in modulo:

$$[3.16] \quad |\vec{a}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \right| = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2v \sin \alpha/2}{\alpha r/v} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left( \frac{v^2}{r} \cdot \frac{\sin \alpha/2}{\alpha/2} \right) = \frac{v^2}{r} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha/2}{\alpha/2}$$

Ricordando che  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ , si ottiene infine:

$$[3.17] \quad |\vec{a}| = \frac{v^2}{r}$$

Ci resta da identificare la direzione del vettore accelerazione. Osservando ancora la figura 1, ci si rende conto che, quando  $\alpha \rightarrow 0$ , la direzione di  $\Delta \vec{v}$  tende a divenire ortogonale alla direzione di  $\vec{v}$  e quindi ad essere diretta verso il centro della circonferenza.

Si può dunque concludere che un corpo che si muova di moto circolare uniforme è soggetto ad una accelerazione, costante in modulo e diretta lungo il raggio nella direzione del centro della traiettoria circolare. Per tale ragione questa accelerazione prende il nome di *accelerazione centripeta*.

# 4. I principi della dinamica

## 4.1 Il principio d'inerzia

Perché un corpo si muove in un certo modo? La risposta a questa domanda è l'argomento della **dinamica**. Nel capitolo precedente sono stati forniti gli strumenti necessari per descrivere il moto di un corpo; ora affronteremo il problema di determinare quali siano le cause del moto e di definire le leggi con cui queste agiscono.

A fondamento di tutto il quadro teorico della fisica classica sta il cosiddetto principio d'inerzia, che è il primo dei tre assiomi formulati da Newton nel 1687 nella sua opera fondamentale *PHYLOSOPHIAE NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA*:

Ciascun corpo persevera nel proprio stato di quiete o di moto rettilineo uniforme, eccetto che sia costretto a mutare quello stato da forze impresse.

Lo stato naturale di moto di un corpo isolato, che non interagisce cioè con altri corpi, è quindi di muoversi di moto rettilineo uniforme (la quiete è un caso particolare, in cui la velocità è nulla). Per cambiare tale moto occorre che intervenga qualcosa dall'esterno, qualcosa proveniente dall'interazione con qualche altro corpo. In effetti, nell'esperienza quotidiana noi osserviamo che un corpo, che non subisca spinte esterne, in moto su un piano dopo un tempo più o meno lungo si ferma; ma ciò non contraddice l'affermazione fatta: il rallentamento infatti è dovuto all'interazione tra tale corpo e l'ambiente, per esempio all'attrito radente tra il corpo ed il piano su cui si muove o a quello viscoso contro l'aria. Facendo sì che tali interazioni con l'esterno diminuiscano (per esempio togliendo l'aria), vedremo il corpo conservare più a lungo il suo stato di moto. Potremo dedurne che, se fossimo in grado di isolarlo completamente dall'ambiente esterno, il movimento continuerebbe in perpetuo.

Il caso di un corpo non interagente con altri corpi è puramente teorico; ma serve a stabilire la base teorica per i nostri ragionamenti. Noi cercheremo ora nella dinamica di stabilire le leggi che governano le interazioni di un corpo con l'ambiente in cui si muove, mettendo a fuoco i principi generali ed in particolare i cosiddetti principi di conservazione.

## 4.2 Il secondo principio della dinamica

Per cambiare lo stato di moto di un corpo occorre dunque che su di esso agiscano cause esterne ovvero delle *forze*. Una forza è la grandezza che misura l'interazione del corpo in oggetto con il modo esterno. La forza peso è ad esempio generata dall'interazione tra la massa del corpo e la massa della Terra, la forza elastica è dovuta all'azione di una molla, la forza elettrica è dovuta all'interazione tra la carica elettrica del corpo considerato e le cariche esistenti nel mondo esterno. La misura del cambiamento del moto di un corpo dà la misura della forza che è stata ad esso applicata. In particolare, due forze applicate ad uno stesso corpo sono uguali se, agendo per uno stesso intervallo di tempo, ne modificano allo stesso modo il moto, cioè ne cambiano la velocità di un'uguale quantità  $\Delta\vec{v}$ .

Qual è l'effetto di forze uguali agenti per lo stesso tempo  $\Delta t$  su corpi diversi? Si trova che la velocità di essi cambia in ragione inversamente proporzionale alle loro masse ovvero, espresso in formula

$$[4.1] \quad \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{f}}{m}$$

**ATTENZIONE!** *La velocità è una grandezza vettoriale e quindi sono grandezze vettoriali sia la variazione di velocità  $\Delta\vec{v}$  sia la forza.*

Definiamo ora la grandezza (anche questa vettoriale) **quantità di moto** come il prodotto tra la massa di un corpo e la sua velocità:

$$[4.2] \quad \vec{q} = m\vec{v} \quad .$$

In base a tale definizione, si può reinterpretare la [4.1], dicendo che l'effetto di una forza costante  $\vec{f}$  applicata per un tempo  $\Delta t$  ad un corpo ne fa variare la quantità di moto di una quantità pari a  $\vec{f}\Delta t$  ovvero:

$$[4.3] \quad \vec{f}\Delta t = \Delta\vec{q}$$

L'equazione [4.3] è la formulazione matematica di quanto Newton ha enunciato come *2° principio della dinamica*. La grandezza  $\vec{h} = \vec{f}\Delta t$  prende il nome di **impulso**.

Dobbiamo qui fare una considerazione: il ragionamento svolto sopra e la definizione data dell'impulso presuppone che *la forza applicata al corpo sia costante*. Se ciò non si verifica, se cioè  $\vec{f}$  varia nel corso dell'intervallo di tempo considerato e non è perciò univocamente definita, è opportuno ricorrere ai metodi dell'analisi matematica. Considerando allora intervalli di tempo molto piccoli o, usando più propriamente il linguaggio dell'analisi, passando al limite per  $\Delta t \rightarrow 0$ , si potrà riscrivere la [4.3] usando i valori *istantanei*:

$$[4.4] \quad \vec{f} = \frac{d\vec{q}}{dt} \quad ,$$

che, ricordando la definizione della quantità di moto e che  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$  è equivalente a:

$$[4.5] \quad \vec{f} = m\vec{a}$$

Utilizzando ancora il linguaggio dell'analisi, si può dare una *definizione dell'impulso*, che sia valida anche nel caso generale in cui la forza non è costante:

$$[4.6] \quad \vec{h} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{f} dt$$

ovvero:

$$[4.7] \quad \vec{h} = \vec{f}_m \Delta t \quad ,$$

avendo definito  $\vec{f}_m$  come il *valor medio* di  $\vec{f}$  :  $\vec{f}_m = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} \vec{f} dt$ .

E' evidentemente sempre vera l'espressione

$$[4.8] \quad \vec{h} = \Delta \vec{q} \quad ,$$

che potremo leggere nel seguente modo, che costituisce una formulazione alternativa del 2° principio della dinamica:

La variazione della quantità di moto di un corpo è pari all'impulso delle forze su di esso agenti nell'intervallo di tempo considerato.

### 4.3 Il principio di azione e reazione

Analizziamo ora più in dettaglio quanto accade nell'interazione tra due corpi. Si pensi ad esempio a due carrelli che si urtano. Prima d'urtarsi, essi hanno quantità di moto rispettivamente  $\vec{q}_1$  e  $\vec{q}_2$ . Per effetto della collisione, sul primo carrello agisce un impulso dovuto all'azione del secondo carrello  $\vec{h}_{2 \rightarrow 1}$ , che ne cambia la quantità di moto di una quantità  $\Delta \vec{q}_1$ . Simmetricamente, sul secondo carrello agisce un impulso dovuto all'azione del primo carrello  $\vec{h}_{1 \rightarrow 2}$ , che ne cambia la quantità di moto di una quantità  $\Delta \vec{q}_2$ . Come ha osservato Newton, i due impulsi  $\vec{h}_{1 \rightarrow 2}$  e  $\vec{h}_{2 \rightarrow 1}$  sono uguali e contrari:  $\vec{h}_{2 \rightarrow 1} = -\vec{h}_{1 \rightarrow 2}$ . Di conseguenza  $\Delta \vec{q}_1 = -\Delta \vec{q}_2$ .

Questo fatto costituisce il cosiddetto *terzo principio della dinamica* o *principio di azione e reazione*, che viene spesso enunciato nella forma: *ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria*. Esso ha un valore universale: un corpo appoggiato su un piano orizzontale subisce dal piano stesso una forza, diretta verso l'alto uguale e contraria alla forza con cui il corpo preme sul piano; su una palla che rimbalza contro un muro agisce una forza impressa dal muro uguale e contraria a quella che il muro riceve dalla palla; una pietra che faccio ruotare, legata ad uno spago, intorno al dito riceve da esso una forza, necessaria a fornirle la dovuta accelerazione centripeta, uguale e contraria alla trazione che la pietra, tramite lo spago, esercita sul dito; la mela che Newton vede cadere dall'albero è attratta dalla Terra con una forza uguale e contraria a quella con cui la mela stessa attrae la Terra. Quest'ultimo caso può sembrare a prima vista paradossale; ma facciamo attenzione a quanto afferma il terzo principio. Esso asserisce che le forze, e di conseguenza gli impulsi e le variazioni di quantità di moto,

sono uguali e contrari; mentre invece le accelerazioni e le variazioni di velocità della mela e della Terra sono ben differenti, essendo inversamente proporzionali alle rispettive masse. E' per questo che noi vediamo la mela cadere verso la Terra e non viceversa.

#### 4.4 Le unità di misura di massa e di forza.

Nei paragrafi precedenti abbiamo parlato di masse, senza dare prima una definizione formale precisa di tale grandezza. L'equazione [4.1] (§ 4.2) ci fornisce un metodo per confrontare due masse tra loro. Possiamo confrontare la massa di un corpo con quella di un altro (in particolare con una massa assunta come unità di misura), applicando ai due corpi un identico impulso (cioè una stessa forza per un identico intervallo di tempo) e misurando il rapporto tra le loro variazioni di velocità. Come si è detto nel cap. 1, nel S.I. la massa è assunta come una delle unità fondamentali e la sua unità di misura è il *kilogrammo* (*kg*).

Per quanto riguarda la forza, essa è considerata una grandezza derivata. Per definirla, si può utilizzare la relazione [4.5]  $\vec{f} = m\vec{a}$ . Si ha quindi:

L'unità di misura di forza è quella forza che imprime alla massa unitaria l'accelerazione unitaria.

Nel sistema internazionale la forza unitaria è dunque quella forza che, applicata ad un corpo di massa di 1 *kg*, gli imprime un'accelerazione di 1 *m/s<sup>2</sup>*. L'unità di misura di forza è quindi il *kg·m/s<sup>2</sup>*. Tale unità assume il nome di *newton* (*N*).

#### 4.5 La massa e il peso

Il concetto di *massa* non deve assolutamente essere confuso con quello di *peso*. La massa esprime l'*inerzia* di un corpo, cioè la sua resistenza a variare la velocità di fronte all'azione di una forza. Il peso di un corpo è invece la *forza* che agisce su di esso, dovuta all'attrazione gravitazionale della Terra. In più, la massa è una grandezza scalare; il peso è una grandezza vettoriale. Sono due grandezze diverse, senza relazione a priori tra loro, espresse in unità di misura differenti.

L'esperienza mostra però che, in un qualunque punto dello spazio in prossimità della superficie terrestre, esiste una relazione di proporzionalità diretta tra il peso  $\vec{F}_p$  di un corpo che lì si trova e la sua massa, indipendentemente da qualunque altra proprietà del corpo stesso:

$$[4.9] \quad \vec{F}_p = m\vec{g}$$

Il vettore  $\vec{g}$  che appare nella relazione [4.9] e che ha le dimensioni fisiche di un'accelerazione, prende il nome di *vettore del campo gravitazionale*

o *accelerazione di gravità*. Il modulo di  $\bar{g}$  in prossimità della superficie terrestre alle nostre latitudini vale all'incirca<sup>1</sup>  $9,81 \text{ m/s}^2$ .

Peso e massa sono dunque direttamente proporzionali tra loro; confrontare le masse di due corpi oppure i loro pesi (nello stesso posto) dà dunque lo stesso risultato. Gran parte delle bilance commerciali infatti di norma per misurare le *masse* confrontano i *pesi* dei corpi. I due concetti non vanno però confusi tra loro e le due grandezze vanno espresse utilizzando le rispettive unità di misura: 1 *kg* di pere in effetti pesa circa 9,81 *N*. Spostandomi sulla superficie della terra il loro peso varierebbe da 9,78 *N* in prossimità dell'equatore a 9,83 *N* al Polo. Se poi andassi sulla Luna, la massa delle pere resterebbe sempre 1 *kg*, ma il loro peso si ridurrebbe a circa 2,5 *newton*.

---

<sup>1</sup> Il valore di  $g$  varia con la latitudine da un valore minimo di circa 9,780 all'equatore a circa 9.832 in prossimità dei poli



# 5. Alcuni esempi di forze e di moto

## 5.1 L'equazione del moto.

La descrizione completa del moto di un corpo è contenuta, come si è detto nel § 3.1 dalla cosiddetta *legge oraria del moto*, ossia dalla funzione  $\vec{s}(t)$ , che esprime il valore del vettore posizione in funzione del tempo. Il problema fondamentale della dinamica è quello di determinare quale sia la legge oraria del moto, conoscendo le forze agenti sul corpo.

Ciò può essere ottenuto sfruttando la seconda legge della dinamica. Questa, infatti, nella sua forma [4.5]  $\vec{f} = m\vec{a}$ , collega, istante per istante, il valore della risultante delle forze agenti sul corpo all'accelerazione del moto. Ricordiamo che nel cap. 2 abbiamo definito l'accelerazione come la derivata seconda della legge oraria del moto. La [4.5] può quindi essere riscritta nella forma:

$$[5.1] \quad \vec{f} = m \frac{d^2}{dt^2} \vec{s}(t)$$

Se si conosce il valore in ogni istante di tale forza risultante (parlando in termini matematici, se si conosce come varia la funzione  $\vec{f}(t)$ ), questa relazione è un'*equazione differenziale*, che viene comunemente detta *equazione del moto*, la cui incognita è la funzione  $\vec{s}(t)$ . Matematicamente, risolvere tale equazione significa determinare quale sia quella funzione che, sostituita nella [5.1] la rende un'identità per qualunque valore di  $t$ .

## 5.2 Forze costanti e il moto uniformemente accelerato.

Risolvere esplicitamente l'equazione del moto può essere in generale un arduo problema matematico. Noi affrontiamo qui il caso semplice del moto di un corpo che sia soggetto ad una forza costante.

Se il valore della forza si mantiene costante (ricordiamo che, essendo la forza una grandezza vettoriale, ciò significa che resta costante sia il valore assoluto sia la direzione), ne consegue che anche l'accelerazione è rap-

presentata da un vettore costante  $\vec{a}$ . Il moto è dunque un moto ad accelerazione costante o, come si usa dire, è un *moto uniformemente accelerato*.

Nel § 3.3 l'accelerazione istantanea è stata definita come la derivata della funzione velocità rispetto al tempo, cioè come il rapporto tra la variazione di velocità  $\Delta \vec{v}$  e il corrispondente intervallo di tempo  $\Delta t$ , al limite per  $\Delta t \rightarrow 0$ . Formalmente, la relazione [3.13], considerando le quantità infinitesime  $d\vec{v}$  e  $dt$  come limite delle differenze  $\Delta \vec{v}$  e  $\Delta t$ , può essere riscritta nella forma:

$$[5.2] \quad d\vec{v} = \vec{a}(t') dt' .$$

Sommendo i due membri dell'equazione sull'intero intervallo di tempo tra 0 e  $t$ , o per meglio dire, usando propriamente il linguaggio dell'analisi matematica, integrando i due membri dell'equazione, si ottiene:

$$[5.3] \quad \int_{\vec{v}(0)}^{\vec{v}(t)} d\vec{v} = \int_0^t \vec{a}(t') dt'$$

Al primo membro, la somma di tutte le variazioni di velocità è ovviamente la variazione della velocità tra l'istante iniziale  $t=0$  e quello finale  $t$ :

$$[5.4] \quad \int_{\vec{v}(0)}^{\vec{v}(t)} d\vec{v} = \vec{v}(t) - \vec{v}(0)$$

La funzione da integrare ai due membri è una funzione vettoriale. Poiché l'integrale (definito) è per definizione il limite di una somma, eseguire l'integrale di una funzione vettoriale è equivalente a calcolare il limite della somma (cioè l'integrale) delle funzioni scalari che rappresentano le componenti del vettore. L'espressione [5.3] equivale dunque all'insieme delle tre equazioni:

$$[5.5] \quad \begin{cases} v_x(t) - v_x(0) = \int_0^t a_x(t') dt' \\ v_y(t) - v_y(0) = \int_0^t a_y(t') dt' \\ v_z(t) - v_z(0) = \int_0^t a_z(t') dt' \end{cases}$$

Conoscendo istante per istante il valore dell'accelerazione (e cioè la funzione  $\vec{a}(t)$ ), si potrà allora ricavare la funzione velocità  $\vec{v}(t)$  dalla formula:

$$[5.6] \quad \vec{v}(t) = \int_0^t \vec{a}(t') dt' + \vec{v}_0 ,$$

dove il vettore  $\vec{v}_0 = \vec{v}(0)$  esprime il valore della velocità all'istante iniziale  $t=0$ .

Nel caso che stiamo considerando l'accelerazione è costante  $\vec{a}(t) = \vec{a}$ , e quindi il calcolo dell'integrale è banale:

$$[5.7] \quad \vec{v}(t) = \int_0^t \vec{a}(t') dt' + \vec{v}_0 = \int_0^t \vec{a} dt' + \vec{v}_0 = \vec{a}t + \vec{v}_0$$

In termini delle componenti vettoriali, indicando con  $v_{0x}$ ,  $v_{0y}$ ,  $v_{0z}$  le componenti del vettore  $\vec{v}_0$  e con  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$ , le componenti del vettore  $\vec{a}$ , la relazione vettoriale [5.7] equivale all'insieme di tre relazioni scalari:

$$[5.8] \quad \begin{cases} v_x(t) = a_x t + v_{0x} \\ v_y(t) = a_y t + v_{0y} \\ v_z(t) = a_z t + v_{0z} \end{cases} .$$

Siamo così giunti a determinare la funzione  $\vec{v}(t)$  che esprime, nel caso del moto uniformemente accelerato, la velocità del corpo in funzione del tempo.

Nel § 3.2 la funzione velocità era stata definita come la derivata della funzione posizione  $\vec{s}(t)$  rispetto al tempo. Dalla [3.7] ricaviamo la formula:

$$[5.9] \quad d\vec{s} = \vec{v}(t) dt$$

Si sostituisce in [5.9] la funzione  $\vec{v}(t)$  trovata prima nella [5.7] e si integra nuovamente su tutto l'intervallo di tempo tra 0 e  $t$ . L'integrale del primo membro  $\int_{\vec{s}(0)}^{\vec{s}(t)} d\vec{s}$  dà lo spostamento totale  $\vec{s}(t) - \vec{s}(0)$ . Si ottiene quindi, svolgendo gli integrali:

$$[5.10] \quad \vec{s}(t) - \vec{s}(0) = \int_0^t \vec{v}(t') dt' = \int_0^t (\vec{a}t' + \vec{v}_0) dt' = \frac{1}{2} \vec{a}t^2 + \vec{v}_0 t$$

che, indicando con  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  le componenti del vettore  $\vec{s}(t)$ , equivale a:

$$[5.11] \quad \begin{cases} x(t) - x(0) = \int_0^t v_x(t') dt' = \int_0^t (a_x t' + v_{0x}) dt' = \frac{1}{2} a_x t^2 + v_{0x} t \\ y(t) - y(0) = \int_0^t v_y(t') dt' = \int_0^t (a_y t' + v_{0y}) dt' = \frac{1}{2} a_y t^2 + v_{0y} t \\ z(t) - z(0) = \int_0^t v_z(t') dt' = \int_0^t (a_z t' + v_{0z}) dt' = \frac{1}{2} a_z t^2 + v_{0z} t \end{cases} .$$

Indicando con  $\vec{s}_0 = \vec{s}(0)$ , di componenti  $x_0, y_0, z_0$  il valore del vettore posizione all'istante iniziale  $t=0$ , possiamo quindi concludere che la legge oraria del moto di un corpo soggetto ad accelerazione costante (*moto uniformemente accelerato*) è in generale della forma:

$$[5.12] \quad \vec{s}(t) = \frac{1}{2} \vec{a}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{s}_0$$

che equivale, in termini delle coordinate spaziali del corpo:

$$[5.13] \quad \begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} a_x t^2 + v_{0x} t + x_0 \\ y(t) = \frac{1}{2} a_y t^2 + v_{0y} t + y_0 \\ z(t) = \frac{1}{2} a_z t^2 + v_{0z} t + z_0 \end{cases}$$

I parametri  $\vec{v}_0$  e  $\vec{s}_0$  costituiscono i cosiddetti *valori iniziali* e vanno specificati in base ai dati del problema. Le formule [5.7] e [5.12], o in modo equivalente le formule [5.8] e [5.13], possono essere applicate ogni qual volta si abbia a che fare con problemi riguardanti il moto di un corpo soggetto ad una forza costante.

### 5.3 Il moto di un grave

Esempio tipico di moto uniformemente accelerato è il caso del moto di un grave, di un corpo cioè in movimento soggetto alla sola forza di gravità. Si è detto nel § 4.5 che un corpo di massa  $m$ , libero di muoversi nello spazio in prossimità della superficie terrestre, subisce una forza, detta *forza di gravità* o *forza peso*, diretta verso il basso e direttamente proporzionale a  $m$ :  $\vec{F}_p = m\vec{g}$ . Durante il moto, questa forza si mantiene costante e quindi il moto descritto dal grave sarà un moto uniformemente accelerato con un'accelerazione  $\vec{a} = \vec{g}$ .

Per esemplificare il caso del moto di un corpo soggetto a forze costanti, vediamo dunque come si possono risolvere alcuni problemi relativi al moto dei gravi.

a) Risolviamo dapprima il problema relativo al moto di un grave lasciato cadere da fermo dall'alto di una torre di altezza  $h$ . Con quale velocità esso arriverà al suolo?

La prima cosa da fare è definire un *adeguato* sistema cartesiano in cui descriviamo il moto. *Adeguato* significa che vogliamo evitarci complicazioni inutili; poiché il problema è evidentemente unidimensionale nella direzione del vettore  $\vec{g}$ , sarà opportuno usare una terna in cui uno degli assi (diciamo l'asse  $x$ ) sia in direzione verticale. Poniamo l'origine degli assi alla base della torre e definiamo positiva la direzione verso l'alto.<sup>1</sup> Inseriamo nella [5.6] e [5.11] i dati del nostro problema:

$$[5.14] \quad a_x = -g \quad x(0) = h \quad v(0) = 0$$

Il moto è limitato alla direzione verticale e di conseguenza ci interessa solo la formula relativa alla componente  $x$ . La legge oraria del moto è quindi:

$$[5.15] \quad x(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + h$$

<sup>1</sup> Queste scelte sono totalmente arbitrarie. Si poteva benissimo porre l'origine in cima alla torre oppure definire positiva la direzione verso il basso. Naturalmente in tali casi le condizioni [5.14] vanno modificate opportunamente.

e la velocità in funzione del tempo è espressa da:

$$[5.16] \quad v_x(t) = -gt$$

Il problema richiede di calcolare la velocità al momento in cui il corpo raggiunge il suolo. Tradotto in termini matematici, significa che dobbiamo calcolare il valore di  $v$  all'istante  $t'$  nel quale  $x(t')=0$ . La [5.15] ci fornisce un'equazione dalla quale si ricava il valore di  $t'$ :

$$[5.17] \quad 0 = -\frac{1}{2}gt'^2 + h; \quad t' = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Sostituendo il valore calcolato di  $t'$  nella [5.14], si ottiene:

$$[5.18] \quad v_x(t') = -gt' = -g\sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh}$$

Il segno negativo del risultato esprime il fatto che la velocità è diretta, in senso contrario all'orientazione dell'asse  $x$  e quindi verso il basso.

*b) Modifichiamo ora il problema precedente. Supponiamo che il corpo venga lanciato sempre dall'alto della torre, ma con una velocità iniziale di modulo  $v_0$  in direzione orizzontale. Si calcoli a quale distanza dalla base della torre il corpo arriva a terra e con quale velocità.*

Il moto non è ora più unidirezionale, ma bidimensionale, nel piano definito dalla direzione di  $\vec{v}_0$  e dalla verticale. Consideriamo perciò una terna di riferimento cartesiana, con origine ai piedi della torre, in cui l'asse  $x$  sia orientato lungo la direzione di  $\vec{v}_0$  e l'asse  $y$  in direzione verticale verso l'alto. Essendo il moto bidimensionale, ci interessano solo queste due componenti.

I dati del nostro problema, da inserire nella formula risolutiva, sono dunque:

$$[5.19] \quad a_x = 0; \quad a_y = -g; \quad x(0) = 0; \quad y(0) = h; \quad v_x(0) = v_0; \quad v_y(0) = 0$$

Se ne deduce che la legge oraria del moto ha la forma:

$$[5.20] \quad \begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h \end{cases}$$

e la velocità è:

$$[5.21] \quad \begin{cases} v_x(t) = v_0 \\ v_y(t) = -gt \end{cases}$$

Il problema chiede a quale distanza dalla torre il corpo arrivi a terra, cioè qual è il valore che assume la variabile  $x$  quando  $y=0$ . Per ottenere il risultato si può ricavare dalla seconda equazione della [5.20] il valore  $t'$  per cui  $y = 0$ , risolvendo l'equazione:

$$0 = -\frac{1}{2} g t^2 + h \Rightarrow t' = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

e sostituendo quindi nella prima equazione della [5.20] il valore trovato:

$$x(t') = v_0 t' = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Il valore delle componenti della velocità al momento dell'urto al suolo si può ricavare dalla [5.24]:  $v_x(t) = v_0$  e  $v_y(t) = -\sqrt{2gh}$ . Il modulo della velocità al momento dell'urto al suolo è quindi  $v(t') = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$ .

c) Consideriamo ora il caso di un proiettile, che parte sparato da un punto posto al livello del suolo con velocità iniziale di modulo  $v_0$  in direzione inclinata di un angolo  $\alpha$  rispetto al piano orizzontale. Si vuole calcolare:

1. a quale distanza arriva il proiettile, supponendo che il punto d'arrivo sia alla stessa altezza del punto di partenza, e con quale velocità;
2. qual è l'altezza massima della traiettoria;
3. qual è la velocità in tale punto del proiettile.

Il moto è anche questa volta bidimensionale, nel piano definito dalla direzione della velocità iniziale e dalla verticale. Consideriamo perciò una terna di riferimento cartesiana, con origine nel punto di partenza, in cui l'asse  $x$  e l'asse  $y$  definiscono tale piano, il primo orientato orizzontalmente, il secondo orientato in direzione verticale verso l'alto.

I dati del nostro problema, da inserire nella formula risolutiva, sono dunque:

$$[5.22] \quad a_y = 0; \quad a_x = -g; \quad x(0) = 0; \quad y(0) = 0; \quad v_x(0) = v_0 \cos \alpha; \quad v_y(0) = v_0 \sin \alpha$$

La legge del moto ha quindi la forma:

$$[5.23] \quad \begin{cases} x(t) = v_0 \cos \alpha t \\ y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin \alpha t \end{cases}$$

e la velocità:

$$[5.24] \quad \begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos \alpha \\ v_y(t) = -g t + v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

La risposta alla domanda 1, si può dare calcolando, tramite la seconda equazione della [5.23], quale sia l'istante  $t_f$  in cui il proiettile arriva al suolo:

$$0 = -\frac{1}{2} g t_f^2 + v_0 \sin \alpha t_f \quad \Rightarrow \\ t_f = 2 \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

e sostituendo quindi nella prima il valore trovato, si ottiene:

$$x(t_f) = v_0 \cos \alpha t_f = 2 \frac{v_0}{g} \cos \alpha \sin \alpha.$$

La risposta alla domanda 2 si può trovare osservando che nel punto più alto della traiettoria la componente verticale della velocità è nulla. Quindi dalla [5.24] l'istante  $t_M$  in cui il proiettile arriva in tale punto risolve l'equazione:

$$0 = -g t_M + v_0 \sin \alpha \quad \Rightarrow \\ t_M = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

e quindi

$$y_M = y(t_M) = -\frac{1}{2} g t_M^2 + v_0 \sin \alpha t_M = -\frac{1}{2} g \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2} + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g}$$

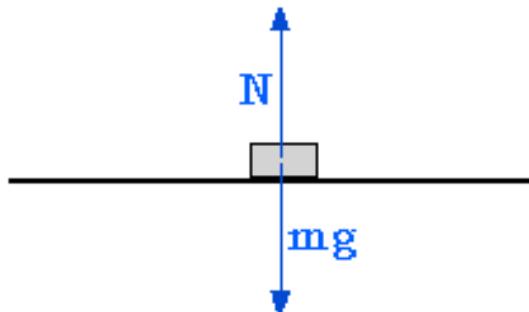
Riguardo la domanda 3, si può osservare che la componente verticale della velocità è nulla; resta quindi solo la componente orizzontale che è costante ed uguale a  $v_0 \cos \alpha$ .<sup>1</sup>

## 5.4 Le forze vincolari: la forza normale

Consideriamo un corpo appoggiato su un piano orizzontale (Fig. 5-1). Esso è in condizione di quiete e quindi la risultante delle forze ad esso applicate deve essere nulla. L'azione della forza di gravità è dunque bilanciata da una forza uguale e contraria  $\vec{N}$  dovuta all'interazione con il piano, che impedisce al corpo di muoversi verso il basso. Tale forza si dice *forza vincolare*, poiché essa ha come origine appunto il vincolo imposto al corpo che gli impedisce di muoversi nella direzione della normale al piano, o anche *forza normale*. Il simbolo  $\vec{N}$ , che usiamo in questi appunti per indicare tale forza, ricorda appunto che essa ha direzione *normale* al piano.

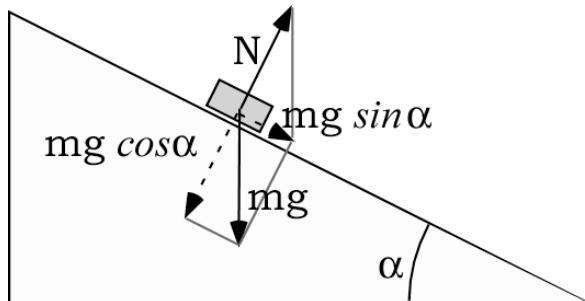
Quanto valga effettivamente la forza vincolare dipende dunque dal valore delle altre forze applicate al corpo. Essa è la *reazione* del piano alla forza agente su di esso causa del corpo appoggiato. Il suo valore è quello giusto per impedire il moto del corpo nella direzione del vincolo.

<sup>1</sup> Matematicamente, il punto più alto della traiettoria corrisponde al massimo della funzione  $y(t)$ . Quindi in tale punto dovrà essere nullo il valore della derivata  $y'(t)$ , che per definizione è la componente verticale della velocità.



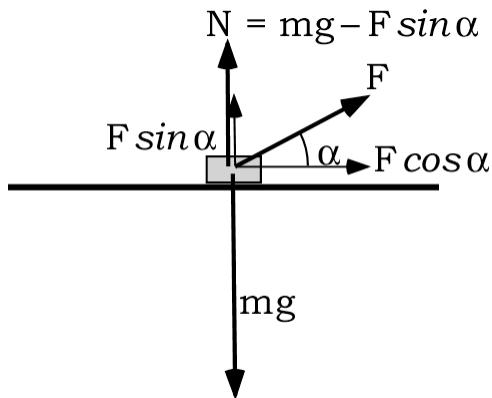
**Fig. 5-1**

Che cosa succede se il piano su cui è appoggiato il corpo non è orizzontale? Ancora il vincolo agisce in modo da impedire il moto del corpo appoggiato nella direzione della normale al piano (Fig. 5-2). In questo caso il corpo non resta in quiete; la forza di gravità agisce infatti in direzione verticale, non ortogonalmente quindi alla superficie del piano. Per vedere quanto valga allora la reazione vincolare, scomponiamo la forza di gravità nelle due direzioni parallela ed ortogonale al piano (immaginiamo cioè la forza  $m\vec{g}$  come la somma vettoriale di due forze in tali direzioni). La componente normale ha, come si evince dalla figura, modulo uguale a  $mg \cos \alpha$  ed è equilibrata dalla forza vincolare (che quindi ha anch'essa per modulo  $mg \cos \alpha$ ); resta dunque la componente parallela, che ha modulo uguale a  $mg \sin \alpha$  e che produce sul corpo un'accelerazione diretta lungo la linea di massima pendenza, il cui valore in modulo è  $g \sin \alpha$ .



**Fig. 5-2**

Finora è stato considerato il caso di un corpo vincolato a muoversi su un piano, soggetto esclusivamente alla forza di gravità. Se ci sono altre forze agenti sul corpo, il ragionamento non cambia; si deve semplicemente tener conto di tutte queste altre forze presenti. Si abbia, per esempio, un corpo posato su un piano orizzontale, tirato da una fune che agisce su di esso in una direzione inclinata di un angolo  $\alpha$  rispetto all'orizzontale (Fig. 5-3). Con  $\vec{F}$  indichiamo la forza esercitata dalla fune.



**Fig. 5-3**

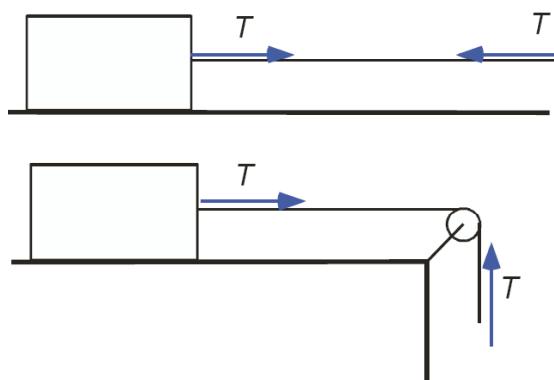
In questo caso la forza vincolare  $\vec{N}$  deve equilibrare nella direzione ortogonale al piano la somma (tenendo conto dei segni!) della forza di gravità e della componente lungo la verticale della forza  $\vec{F}$ ; nel caso in figura è  $|\vec{N}| = mg - F \sin \alpha$ .

## 5.5 La tensione di una fune

Quando una fune, o altro mezzo analogo, è fissata ad un corpo e tirata, si dice che è sottoposta a *tensione*. Essa esercita una forza di trazione sul corpo, applicata al punto di fissaggio e diretta nella direzione della fune stessa. Con *tensione della fune* si intende il modulo di tale forza.

Spesso si considera la fune come *inestensibile* (che cioè non si allunga sotto trazione) ed essa è allora considerata semplicemente come mezzo di collegamento tra due corpi, che vieta loro di allontanarsi (si noti che la fune, a differenza di quello che farebbe una sbarretta rigida, non impedisce invece ai corpi di avvicinarsi). Essa esercita una forza d'uguale intensità sui due estremi.

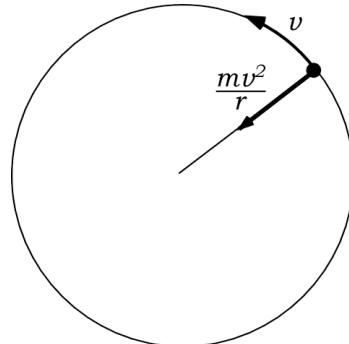
Ciò continua ad esser vero anche se la fune scorre una carrucola (che considereremo di massa trascurabile e priva d'attrito). L'effetto della carrucola è quello di cambiare la direzione d'azione della tensione.



**Fig. 5-4**

Un esempio interessante è quello di un corpo legato ad un punto fisso P da una fune inestensibile. La fune impedisce al corpo di allontanarsi

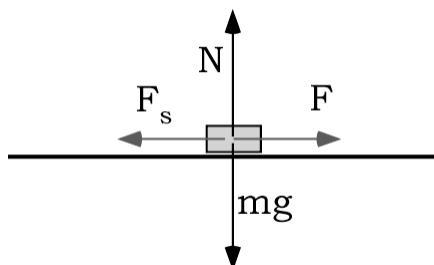
da P; quando è tesa, essa esercita una forza vincolare nella direzione della fune stessa. Se supponiamo che il corpo legato alla fune di lunghezza  $r$  abbia una massa  $m$  e che venga fatto ruotare intorno a P con una velocità in modulo  $v$ , in assenza di altre forze (Fig. 5-5), tale forza (la tensione della fune) può essere calcolata, semplicemente osservando che il corpo, per muoversi di moto circolare uniforme, deve essere soggetto ad un'accelerazione diretta verso il centro pari a  $v^2/r$ . La forza che produce questa accelerazione è la tensione della fune, il cui valore è perciò  $mv^2/r$ .



**Fig. 5-5**

## 5.6 La forza d'attrito statico.

Consideriamo un libro appoggiato su un piano orizzontale. Se ad esso applichiamo lateralmente una forza di piccola entità, esso non si muove; sperimentalmente osserviamo che, per smuoverlo dalla sua posizione, occorre applicare una forza che superi un certo valore. Questo fenomeno è così spiegabile: in risposta alla forza applicata, le due superfici a contatto offrono resistenza a scorrere l'una sull'altra. Ciò si manifesta con una forza, detta forza d'attrito statico, di tipo vincolare, che si oppone al moto del corpo in direzione tangente alla superficie, finché la forza applicata non supera un valore di soglia, che dipende in generale dalla natura delle due superfici a contatto e dalla forza che preme l'una superficie contro l'altra.



**Fig. 5-6**

Si può verificare che in generale il valore massimo che può assumere il modulo della forza d'attrito, corrispondente a tale valore di soglia, è determinato dalla relazione:

$$[5.25] \quad F_A \leq \mu_s N ,$$

dove  $N$  è il modulo della forza, di direzione normale all'area di contatto, che preme una contro l'altra le due superfici, e il coefficiente di proporzionalità

$\mu_s$  è detto *coefficiente d'attrito statico*. Nel caso appena considerato di Fig. 5-6 è evidentemente  $N = mg$ .

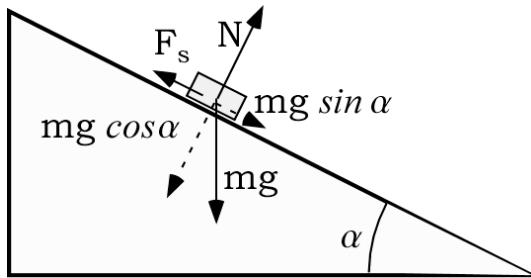


Fig. 5-7

Se il corpo è appoggiato su un piano inclinato, come illustrato in Fig. 5-7, la superficie di contatto non è orizzontale ed occorre tener presente che solo la componente della forza peso normale alla superficie di contatto (pari a  $mg \cos \alpha$ ) contribuisce a premere il corpo sul piano. La forza d'attrito massima vale perciò  $\mu_s N = \mu_s mg \cos \alpha$ .

Siamo ora in grado di rispondere alla domanda, quale sia l'angolo massimo d'inclinazione del piano inclinato perché il corpo appoggiato su di esso si mantenga in quiete, fissato un valore del coefficiente d'attrito  $\mu_s$ . Perché il corpo si mantenga in quiete occorre infatti che la risultante delle forze ad esso applicate sia nulla. Con riferimento a Fig. 5-7, ciò implica che  $N=mg \cos \alpha$  e che il modulo della forza d'attrito  $F_A$  sia pari alla componente tangenziale della forza peso  $mg \sin \alpha$ . La disequazione [5.25] impone che debba essere  $mg \sin \alpha \leq \mu_s mg \cos \alpha$  e cioè  $\mu_s \geq \tan \alpha$ .

Quando per determinare le condizioni per cui un corpo resta in quiete si impone nel bilancio delle forze che la risultante sia nulla occorre evidentemente considerare tutte le forze in gioco, sia per quanto riguarda la componente tangenziale al piano sia quella normale. Ad esempio nel caso illustrato in Fig. 5-8, in cui sul corpo agisce, oltre alla forza peso, una forza  $\vec{F}$  la cui direzione è inclinata di un angolo  $\alpha$  rispetto al piano orizzontale d'appoggio, facendo il bilancio delle componenti delle forze in direzione parallela ed ortogonale al piano, si ha:

$$\begin{cases} N + F \sin \alpha = mg \\ F_A = F \cos \alpha \end{cases}$$

e quindi la condizione di equilibrio, utilizzando la [5.25], sarà:

$$F \cos \alpha \leq \mu_s (mg - F \sin \alpha).$$

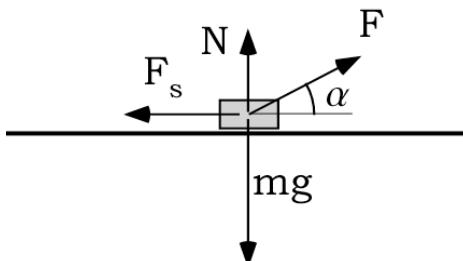


Fig. 5-8

## 5.7 La forza d'attrito dinamico.

Fin qui abbiamo esaminato l'effetto dell'attrito su un corpo in quiete. Si consideri ora un corpo in movimento, che struscia su un piano. Anche in questo caso è presente una forza d'attrito, detta ora di *attrito dinamico*; essa agisce in direzione contraria allo spostamento (e quindi alla direzione del vettore velocità) e il suo modulo dipende ancora dalla natura delle due superfici in contatto e dalla forza normale che le preme una contro l'altra (in generale non dipende invece dalla velocità del moto). Quindi:

$$[5.26] \quad F_d = \mu_d N$$

dove  $\mu_d$  è il cosiddetto *coefficiente di attrito dinamico*, che per il solito ha un valore più piccolo del coefficiente di attrito statico  $\mu_s$  esistente tra le stesse due superfici.

Sottolineiamo qui la differenza tra il significato del coefficiente d'attrito statico e quello dinamico, che è poi la differenza che c'è tra la formula [5.25] e [5.26]. La forza d'attrito statica è una forza di *reazione statica*: essa ha il valore necessario per bilanciare le altre forze presenti; la relazione [5.25] è una diseguaglianza che dice quale possa essere il *valore massimo* di tale forza. La relazione [5.26] ci fornisce invece il valore effettivo della forza d'attrito dinamica quando il corpo è in movimento rispetto al piano.

## 5.8 Forze d'attrito viscoso

C'è un altro tipo di forze d'attrito importante da considerare ed è quello che oppone una resistenza al movimento di un corpo, che si muova entro un fluido (liquido o aeriforme). Una barca, per farsi strada nell'acqua con velocità costante, ha bisogno di un motore che la spinga e così un'automobile che si muova su una strada perfettamente piana deve farsi strada nell'aria. La forza esercitata dal motore è in tali condizioni quella che esattamente bilancia la forza di resistenza (*forza viscosa*) del mezzo.

Per basse velocità, quando il moto del fluido attorno al corpo che avanza in esso si mantiene regolare (*flusso laminare*), tale forza di resistenza è direttamente proporzionale alla velocità ed è diretta in senso opposto al vettore  $\vec{v}$ :

$$[5.27] \quad \vec{f}_A = -\beta \vec{v},$$

dove  $\beta$  è la costante di proporzionalità.

Per velocità più elevate, il flusso del fluido diviene turbolento e la forza di resistenza, ancora diretta in direzione opposta al moto, aumenta in funzione del quadrato della velocità:

$$[5.28] \quad f_A = -\frac{1}{2} C \rho A v^2$$

dove  $\rho$  è la densità del fluido,  $A$  è l'area della sezione del corpo in movimento nel piano ortogonale alla direzione di spostamento e  $C$  è un coefficiente che tiene conto della forma del corpo.

Quando si considera il moto di un corpo macroscopico nell'aria, nella pratica si ha sempre a che fare con un flusso turbolento e quindi con la formula [5.28].

Per vedere, almeno qualitativamente, l'effetto di una tale forza sul moto, esaminiamo il caso di un corpo che cade verticalmente in un mezzo viscoso. Esso è soggetto ad una forza totale nella direzione verticale  $f_T = mg - f_A$  (abbiamo qui assunto positiva la direzione verso il basso).

Supponiamo il caso di flusso laminare; sarà allora  $f_T = mg - \beta v$ . E' chiaro che, se all'inizio  $v < \frac{mg}{\beta}$ , ne segue che  $f_T = mg - \beta v > 0$  e quindi il corpo accelera, aumentando la velocità di caduta. Così facendo però, la forza totale (e quindi l'accelerazione) diminuisce, fintantoché  $v$  raggiunge il valore critico  $v_c = \frac{mg}{\beta}$ . Quando  $v = v_c$ , si ha  $f_T = 0$ ; l'accelerazione quindi si annulla e da allora la caduta prosegue quindi a velocità costante.

Se invece inizialmente  $v > \frac{mg}{\beta}$ , si ha  $f_T = mg - \beta v < 0$ ; la velocità quindi tende a diminuire fino a raggiungere ancora il valore critico trovato prima. In definitiva, dopo un po' di tempo (*asintoticamente*) il corpo arriverà comunque a muoversi con la velocità  $v_c$ , qualunque fosse la sua velocità iniziale.

Nel caso che il moto sia in regime turbolento, il ragionamento non cambia. Qualunque sia la velocità iniziale, si arriva, pur di attendere un tempo sufficiente, ad una condizione di moto rettilineo uniforme. La velocità critica in questo caso si ricava utilizzando l'espressione [5.28] della forza d'attrito e vale  $v_c = \sqrt{\frac{2mg}{C\rho A}}$ .



# 6. L'energia ed il lavoro

## 6.1 L'energia cinetica.

Per fermare un corpo in movimento è necessario applicare ad esso una forza, tale che l'impulso ad esso applicato sia pari alla sua quantità di moto (§ 4.2). In altri termini, se al corpo è applicata una forza costante in direzione contraria alla direzione del moto, il tempo necessario a fermare il corpo è direttamente proporzionale alla sua velocità iniziale. Se però, applicando ancora una forza costante contraria al moto, anziché il *tempo* si misura lo *spazio* percorso dal corpo prima di fermarsi, si constata che lo spazio percorso è proporzionale al *quadrato* della velocità; perciò raddoppiando la velocità lo spazio percorso si quadruplica.

Da questa osservazione, discende che tornerà utile per un corpo in movimento definire una grandezza, che prende il nome di *energia cinetica*:

$$[6.1] \quad E_{cin} = \frac{1}{2}mv^2,$$

proporzionale al prodotto della massa con il quadrato della sua velocità.

Il quadrato di un vettore è una grandezza scalare. E' evidente quindi dalla definizione che l'energia cinetica è una grandezza *scalare*.

## 6.2 Il lavoro di una forza costante.

Nel § 4.2 si è analizzata la relazione esistente tra la variazione della quantità di moto di un corpo e l'impulso delle forze agenti su esso. Quando la risultante delle forze agenti è costante, si è definito l'*impulso* come il prodotto della forza per l'intervallo di *tempo* in cui essa era applicata ([4.3]). Considerando ancora il caso di una forza agente costante, definiamo ora un'altra grandezza, che si ottiene come il prodotto della forza per lo *spostamento* effettuato dal corpo su cui la forza stessa agisce. Tale grandezza prende il nome di *lavoro*.

Sia la forza che lo spostamento sono grandezze vettoriali. E' perciò importante anche considerare quale sia la *direzione relativa* dei due vettori, cioè quanto valga l'angolo tra la direzione della forza e la direzione dello spostamento. Indicando tale angolo con  $\alpha$ , il lavoro eseguito dalla forza costante  $\vec{f}$  su un corpo che esegue uno spostamento  $\Delta\vec{s}$  è definito allora co-

me il *prodotto del modulo della forza per la proiezione dello spostamento nella direzione della forza* (Fig. 6-1a):

$$[6.2] \quad \mathcal{L} = |\vec{f}| \cdot (\Delta s \cos \alpha)$$

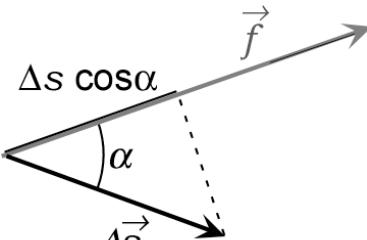
E' possibile definire il lavoro eseguito da una forza costante  $\vec{f}$  su un corpo che esegue uno spostamento  $\Delta \vec{s}$  anche in altro modo, come il *prodotto del modulo dello spostamento per la proiezione della forza nella direzione dello spostamento* (Fig. 6-1b):

$$[6.3] \quad \mathcal{L} = (f \cos \alpha) \Delta s$$

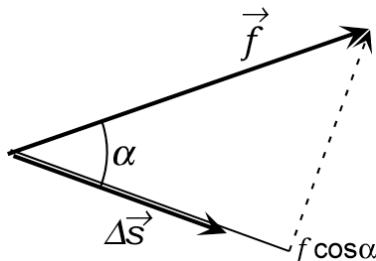
ovvero ancora scrivere:

$$[6.4] \quad \mathcal{L} = |\vec{f}| \cdot |\Delta \vec{s}| \cos \alpha$$

e definire il lavoro come il *prodotto del modulo della forza per il modulo dello spostamento, moltiplicato per il coseno dell'angolo compreso tra le direzioni dei due vettori*. E' evidente che le espressioni [6.2], [6.3], [6.4] sono identiche tra loro e che quindi le tre definizioni sono del tutto equivalenti.



**Fig. 6-1a**



**Fig. 6-1b**

La definizione dell'unità di misura di lavoro coerente con il Sistema Internazionale discende immediatamente dalla definizione data sopra:

Nel Sistema Internazionale l'unità di misura del lavoro è il lavoro effettuato da una forza di **1 newton** per spostare un corpo di **1 metro**.

Tale unità prende il nome di **joule** (simbolo: **J**).

$$\mathbf{1 \ joule = 1 \ N \cdot 1 \ m}$$

Un'osservazione importante: la grandezza *energia cinetica*, che abbiamo definita nel § 6.1, è *omogenea* alla grandezza qui definita come *lavoro*: le due grandezze si esprimono perciò nelle stesse unità di misura. Se si esegue l'analisi dimensionale della grandezza "energia cinetica", si constata infatti che l'unità di misura dell'energia cinetica nel Sistema Internazionale

$$\text{è } kg \cdot \left( \frac{m}{s} \right)^2 = \left( kg \cdot \frac{m}{s^2} \right) \cdot m = N \cdot m = J.$$

### 6.3 Il prodotto scalare di due vettori

L'operazione di moltiplicazione tra i due vettori  $\vec{f}$  e  $\Delta\vec{s}$  che abbiamo usato per definire il lavoro può essere generalizzata per definire il prodotto scalare di due vettori qualunque.

DATI DUE VETTORI  $\vec{a}$  E  $\vec{b}$ , SI DEFINISCE **PRODOTTO SCALARE** DEI DUE VETTORI LA GRANDEZZA SCALARE CHE SI OTTIENE MOLTIPLICANDO I MODULI DEI DUE VETTORI ED IL COSENO DELL'ANGOLO COMPRESO.

In modo equivalente si potrebbe definire il prodotto scalare come la grandezza che si ottiene (si è visto nel paragrafo precedente che è un modo diverso di dire la stessa cosa) moltiplicando il modulo di uno dei vettore per la proiezione dell'altro vettore nella direzione del primo.

L'operazione viene indicata simbolicamente  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  inserendo un punto a mezz'altezza tra i simboli dei due vettori.

Per definizione quindi:

$$[6.5] \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos\alpha$$

E' facile dimostrare che il risultato di questa operazione può essere scritto in termini delle componenti cartesiane  $a_x, a_y, a_z$  e  $b_x, b_y, b_z$  dei due vettori nella forma:

$$[6.6] \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Il prodotto scalare è dunque essendo esprimibile anche come la somma dei prodotti delle componenti dei due vettori.

Dalla definizione [6.5] si ricava che il prodotto scalare di due vettori ha valore massimo quando i vettori sono paralleli ( $\cos 0^\circ = 1$ ), minimo (negativo) se sono antiparalleli ( $\cos 180^\circ = -1$ ) ed è nullo se sono ortogonali ( $\cos 90^\circ = 0$ ).

Ritornando alla definizione di lavoro, si può concludere che *il lavoro eseguito da una forza costante  $\vec{f}$  su un corpo per effettuare uno spostamento  $\Delta\vec{s}$  è definito dal prodotto scalare dei due vettori*:

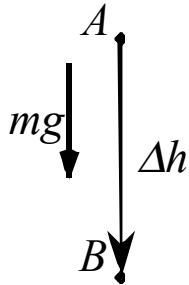
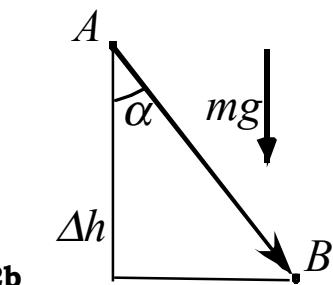
$$[6.7] \quad \mathcal{L} = \vec{f} \cdot \Delta\vec{s} .$$

### 6.4 Il lavoro effettuato dalla forza peso.

Un caso di un corpo che si muove soggetto ad una forza costante, è, come si è visto nel capitolo precedente, quello di un corpo soggetto alla forza di gravità in prossimità della superficie terrestre.

Si consideri dunque un corpo di massa  $m$  che, sotto l'azione della forza peso, si sposta lungo la verticale dal punto A al punto B, scendendo di un dislivello  $\Delta h$  (Fig. 6-2). La forza  $m\vec{g}$  è diretta nella stessa direzione dello spostamento  $\Delta\vec{s}$  e quindi il lavoro è  $\mathcal{L} = \vec{f} \cdot \Delta\vec{s} = mg\Delta h$ .

Se il punto B non è sotto la verticale di A (Fig. 6-2b), ma il segmento AB fa un angolo  $\alpha$  direzione della verticale, applicando la definizione [6.4] ed osservando che il rapporto tra la differenza d'altezza  $\Delta h$  tra A e B ed il modulo  $\Delta s$  dello spostamento (che è la lunghezza del segmento AB) è il coseno dell'angolo  $\alpha$ , si ottiene  $\mathcal{L} = \vec{f} \cdot \Delta \vec{s} = mg \Delta s \cos\alpha = mg\Delta h$ . Il lavoro eseguito dalla forza peso su un corpo di massa  $m$  risulta dunque in entrambi i casi pari al peso del corpo moltiplicato per la differenza di quota tra il punto di partenza e il punto d'arrivo, indipendentemente dall'effettiva direzione di spostamento.


**Fig. 6-2a**

**Fig. 6-2b**

E' evidente che per uno spostamento in direzione orizzontale, essendo forza e spostamento ortogonali tra loro ( $\alpha=90^\circ$ ), il lavoro risulta nullo.

## 6.5 Definizione generale di lavoro

Se la forza non è costante durante lo spostamento, la definizione [6.7] cade in difetto, non esistendo più un valore univoco di  $\vec{f}$ . Possiamo comunque definire propriamente anche in questo caso il lavoro, procedendo nel modo seguente. Si suddivide il percorso effettuato dal corpo in tanti parti  $\Delta s_i$  abbastanza brevi, in modo da poter considerare pressoché costante il valore  $f_i$  del modulo della forza in ciascuno di questi elementi di percorso (consideriamo qui per semplicità che  $\vec{f}$  e  $\Delta \vec{s}$  siano collineari per tutto il tempo dello spostamento e che quindi sia sempre  $\cos\alpha = 1$ ). Calcoliamo ora, per ognuno di questi elementi di percorso  $\Delta s_i$ , il lavoro  $\Delta \mathcal{L}_i$  eseguito dalla forza, considerando su ciascuno di questi elementi un valore della forza costante  $f_i$ , pari a quello che essa ha in corrispondenza del punto iniziale dell'elemento di percorso considerato. Sarà dunque  $\Delta \mathcal{L}_i = f_i \Delta s_i$ . La somma dei singoli lavori elementari  $\Delta \mathcal{L}_i$  fornisce il valore del lavoro  $\mathcal{L}$  per l'intero spostamento:

$$[6.8] \quad \mathcal{L} = \sum_i \Delta \mathcal{L}_i = \sum_i f_i \cdot \Delta s_i$$

Questa non è evidentemente una definizione esatta. La scelta di utilizzare il valore di  $f_i$ , in corrispondenza del punto iniziale dell'elemento di percorso considerato è del tutto arbitraria; potevamo scegliere in altro modo altrettanto valido il valore di  $f_i$ , per esempio come il valore della forza nel punto di mezzo di  $\Delta s_i$  oppure il valore più grande assunto in tale elemento di percorso o il più piccolo. A seconda del criterio di scelta usato, i

risultati saranno diversi. Quanto più brevi sono gli intervalli  $\Delta s_i$ , tanto più piccola però sarà le variazioni possibili del valore di  $f$  e tanto minore sarà di conseguenza l'errore del risultato finale. In modo matematicamente corretto, applicando i metodi dell'analisi matematica, si può dimostrare che il limite dell'espressione [6.8], quando si faccia tendere a zero la lunghezza di ciascun elemento di percorso  $\Delta s_i$ , tende ad un valore preciso, ben definito, che i matematici definiscono come *l'integrale definito della funzione f sul percorso da A a B*.

In forma matematicamente esatta, possiamo quindi definire il lavoro effettuato da una forza variabile (quando la forza è parallela allo spostamento) nel modo seguente:

$$[6.9] \quad \mathcal{L} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_i f_i \cdot \Delta s_i = \int_A^B f \, ds$$

La definizione [6.9], valida quando forza e spostamento sono sempre paralleli, è immediatamente generalizzabile al caso in cui  $\vec{f}$  e  $\Delta \vec{s}$  hanno direzione arbitrarie, scrivendo:

$$[6.10] \quad \mathcal{L} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_i \vec{f}_i \cdot \Delta \vec{s}_i = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

## 6.6 Forze elastiche e lavoro di una forza elastica.

Un esempio di forza che non si mantiene costante nel corso dello spostamento, è la forza elastica. Si pensi ad una molla: essa, lasciata libera, ha una certa lunghezza  $l_0$ . Applichiamo ad un capo una forza a tirare la molla; sperimentalmente si osserva che questa si allunga e che l'allungamento è direttamente proporzionale alla forza applicata. Qualora la molla venga invece compressa, si osserva un accorciamento anch'esso proporzionale alla forza applicata. Dal terzo principio della dinamica deduciamo che la molla esercita su un corpo ad essa collegato una forza, che è direttamente proporzionale al suo allungamento o accorciamento. Detta  $x$  la variazione di lunghezza rispetto alla lunghezza della molla a riposo  $l_0$ , la forza da essa esercitata è dunque:

$$[6.11] \quad f = -kx$$

dove  $k$  è la costante di proporzionalità, caratteristica della particolare molla. Una molla "dura" è caratterizzata da un valore elevato di  $k$ , una "morbida" da un valore piccolo di  $k$ . Si noti il segno negativo nell'espressione [6.11]. Esso evidenzia che la forza elastica è una *forza di richiamo*: la direzione della forza è cioè opposta alla deformazione  $x$  subita dalla molla.

In modo equivalente alla [6.11], se si indica con  $l$  la lunghezza effettiva della molla, essendo  $l = l_0 + x$ , si può scrivere:

$$[6.12] \quad f = -k(l - l_0).$$

Le forze, per cui vale la legge [6.11] (nota anche come *legge di Hooke*), sono dette forze elastiche e costituiscono una classe di forze che si incontrano assai di frequente in fisica.

Calcoliamo ora quale sia il lavoro effettuato dalla forza elastica su un corpo ad esso collegato, quando la molla passa da una lunghezza  $l_1 = l_0 + x_1$  ad una lunghezza  $l_2 = l_0 + x_2$ , cioè quando l'allungamento  $x$  passa dal valore  $x_1$  al valore  $x_2$ .

Poiché la forza non è costante durante lo spostamento, si deve applicare la definizione generale [6.10] e calcolare perciò l'integrale:

$$[6.13] \quad \mathcal{L} = \int_{x_1}^{x_2} f \, dx = \int_{x_1}^{x_2} (-kx) \, dx = -k \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{x_1}^{x_2} = -\frac{kx_2^2}{2} + \frac{kx_1^2}{2}.$$

Effettuiamo in particolare il calcolo del lavoro fatto da una molla di costante elastica  $k$ , che inizialmente è allungata di un tratto  $x_0$ , per riporsi nella posizione d'equilibrio ( $x=0$ ). Si ottiene:

$$[6.14] \quad \mathcal{L} = \int_{x_0}^0 (-kx) \, dx = -k \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{x_0}^0 = \frac{1}{2} kx_0^2$$

## 6.7 Il teorema dell'energia cinetica

Si è visto in precedenza nel § 6.2 che lavoro ed energia cinetica sono grandezze omogenee tra loro. Esiste in effetti una relazione precisa tra il lavoro  $\mathcal{L}$  eseguito da una forza  $f$  su un corpo e la variazione di energia cinetica che questo subisce. Questa relazione è una diretta conseguenza della 2<sup>a</sup> legge della dinamica  $\vec{f} = m\vec{a}$ .

Sappiamo infatti che la 2<sup>a</sup> legge della dinamica può infatti essere scritta nella forma:

$$[6.15] \quad \vec{f} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Calcoliamo, usando la definizione [6.10], il lavoro  $d\mathcal{L}$  fatto dalla forza  $\vec{f}$  per spostare un corpo di una quantità infinitesima  $d\vec{s}$ :

$$[6.16] \quad d\mathcal{L} = \vec{f} \cdot d\vec{s} = m\vec{a} \cdot d\vec{s} = m \frac{d\vec{v} \cdot d\vec{s}}{dt} = m\vec{v} \cdot d\vec{v},$$

dove si è applicata la definizione di velocità  $\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$ .

Integrando la [6.16] sull'intero spostamento ed indicando con A e B il punto di partenza e il punto d'arrivo e con  $v_A$  e  $v_B$  i rispettivi valori della velocità:

$$[6.17] \quad \mathcal{L} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{v_A}^{v_B} m\vec{v} \cdot d\vec{v} = \left[ \frac{1}{2} mv^2 \right]_{v_A}^{v_B} = \frac{1}{2} mv_B^2 - \frac{1}{2} mv_A^2 = E_{cin}^{(B)} - E_{cin}^{(A)}$$

Il risultato dimostra che, quando un corpo si sposta sotto l'azione di una forza, la sua energia cinetica varia di una quantità pari al lavoro eseguito dalla forza. La relazione

[6.18]

$$\mathcal{L} = E_{cin}^{(B)} - E_{cin}^{(A)}$$

prende il nome di **teorema dell'energia cinetica** ed ha un valore assolutamente generale.

## 6.8 Applicazioni del teorema dell'energia cinetica.

L'utilizzo del teorema dell'energia cinetica permette di risolvere in modo semplice molti problemi, evitando le difficoltà matematiche che assai spesso si dovrebbero affrontare per risolvere completamente l'equazioni del moto. Vediamo qui alcuni esempi.

- a) Un'automobile si muove lungo una traiettoria orizzontale con velocità costante  $v_0$ . Ad un certo istante si comincia a frenare, applicando una forza  $F$  costante, diretta in senso contrario al moto. Quanta strada fa l'auto prima di fermarsi?

Per rispondere alla domanda nella maniera più semplice, senza bisogno di trovare esplicitamente la legge oraria del moto, possiamo applicare il teorema dell'energia cinetica. All'istante iniziale l'auto ha un'energia cinetica  $\frac{1}{2}mv_0^2$ ; quando l'auto si ferma, la sua energia cinetica è nulla. La variazione d'energia cinetica è quindi  $\Delta E_{cin} = -\frac{1}{2}mv_0^2$  (essa diminuisce infatti di una quantità  $\frac{1}{2}mv_0^2$ ).

D'altra parte, se indichiamo con  $l$  lo spazio percorso dall'auto durante la frenata, il lavoro fatto dalla forza costante  $F$  è  $\mathcal{L} = -Fl$  (il segno negativo è dovuto al fatto che la forza è diretta in senso opposto al moto). Applicando il teorema dell'energia cinetica, si ha l'eguaglianza  $-Fl = -\frac{1}{2}mv_0^2$ , ovvero

$$l = \frac{m}{2F}v_0^2.$$

Il risultato ottenuto dimostra che lo spazio necessario a fermare un'auto è proporzionale al quadrato della sua velocità iniziale; se questa raddoppia, lo spazio di frenata si moltiplica per quattro.

Consideriamo ora il caso del moto di un corpo che scivola giù da un piano inclinato in assenza d'attrito:

- b) Un corpo scivola senza attrito lungo un piano inclinato, partendo da fermo da un'altezza  $h_0$ . Qual è la sua velocità, quando arriva in fondo al piano inclinato?

Il corpo è soggetto alla forza peso ed alla forza di reazione vincolare del piano, che come abbiamo visto nel § 5.4 ha direzione ortogonale al piano stesso. Visto che il corpo si muove sul piano, l'angolo tra la forza di reazione vincolare e la direzione del moto è sempre  $90^\circ$ ; ne consegue che il lavoro fatto da tale forza è sempre nullo. Si deve quindi considerare solo il lavoro effettuato

dalla forza peso, che come si è visto prima (§ 6.4), vale  $mg\Delta h$ , dove  $\Delta h$  è la differenza tra la quota di partenza e la quota d'arrivo, indipendentemente da quale sia l'angolo d'inclinazione del piano inclinato.

Applicando il teorema dell'energia cinetica, essendo nulla l'energia cinetica nel punto di partenza, si trova che l'energia cinetica del corpo quando arriva alla fine del piano inclinato è  $E_{cin}^f = \frac{1}{2}mv_f^2 = mg\Delta h$  e quindi la sua velocità è (in valore assoluto)  $v_f = \sqrt{2g\Delta h}$ .

È importante notare che il risultato è indipendente da quale fosse il valore dell'angolo d'inclinazione del piano: su questo torneremo nel seguito, quando introdurremo il concetto di energia potenziale.

Risolviamo ora l'analogo problema, in cui però si debba considerare anche la presenza di una forza d'attrito radente:

- c) Un corpo scivola giù da un piano inclinato, partendo da fermo da un'altezza  $h_0$  (Fig. 6-3). Tra il corpo ed il piano agisce una forza d'attrito, espressa dal coefficiente  $\mu_d$  e l'angolo d'inclinazione rispetto all'orizzontale è  $\alpha$ . Con quale velocità il corpo arriva in fondo al piano inclinato?

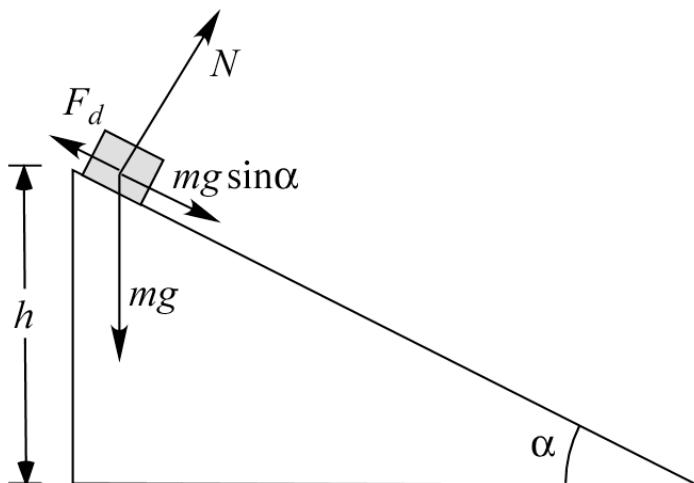


Fig. 6-3

Anche in questo caso, applichiamo il teorema dell'energia cinetica. Oltre alla forza peso e alla reazione vincolare del piano, deve ora essere considerata anche la forza d'attrito dinamica. Questa vale (§ 5.6)  $\mu_d N$ , essendo  $N$  il valore della forza normale al piano d'appoggio ed è diretta in senso contrario al moto. Nel nostro caso  $N = mg \cos \alpha$ .

Il lavoro fatto dalla forza d'attrito è dunque

$$L_{attr} = -\mu_d mg \cos \alpha \cdot (h_0 / \sin \alpha) = -\mu_d mg h_0 \cot \alpha,$$

essendo  $h_0 / \sin \alpha$  lo spostamento. Applicando il teorema dell'energia cinetica, si ottiene quindi:

$$E_{cin}^f = \frac{1}{2}mv_f^2 = mg h_0 - \mu_d mg h_0 \cot \alpha = mg h_0 (1 - \mu_d \cot \alpha)$$

e quindi

$$v_f = \sqrt{2gh_0(1 - \mu_d \cot \alpha)}.$$

Nei casi considerati finora, si aveva sempre a che fare con il moto di corpi soggetti ad una forza costante e sarebbe stato possibile risolvere abbastanza agevolmente i problemi (anche se con qualche calcolo in più), utilizzando le equazioni del moto uniformemente accelerato. Nel problema seguente, in cui agisce una forza di tipo elastico, che non è costante, non utilizzare il teorema dell'energia cinetica renderebbe assai più complessa e laboriosa la risoluzione:

- d) Un corpo collegato tramite una molla di costante elastica  $k$  e lunghezza a riposo  $l$  ad un punto fisso  $P$  si può muovere senza attrito su un piano orizzontale. Inizialmente, esso parte da fermo da una posizione in cui la molla è allungata di una lunghezza  $x_0$ . Qual è la sua velocità, quando passa dalla posizione di riposo della molla?

Applicando il teorema dell'energia cinetica la risposta è immediata. Il lavoro fatto dalla forza elastica per spostare un corpo è stato calcolato nel § 6.6. Nel caso nostro nella posizione di partenza si ha un allungamento  $x_0$  e in quella d'arrivo l'allungamento è nullo.

La formula [6.14] dà il valore del lavoro eseguito dalla molla che vale  $\frac{1}{2}kx_0^2$ .

Per il teorema dell'energia cinetica, questo lavoro è pari alla variazione d'energia cinetica del corpo. Essendo nulla l'energia cinetica iniziale, detta  $v_f$

la velocità nella posizione finale, si ha  $\frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}kx_0^2$ , e perciò:  $v_f = \sqrt{\frac{k}{m}}x_0$ .

## 6.9 La potenza.

Una macchina è un apparato che fornisce lavoro e produce quindi energia. Per valutarne le prestazioni, è importante sapere quanto sia il tempo necessario perché questa fornisca una certa quantità di lavoro.

Si definisce perciò una grandezza, detta *potenza*, che misura il lavoro che una macchina è in grado di fornire nell'unità di tempo. Indicando con  $P$  la potenza, con  $\mathcal{L}$  il lavoro e con  $\Delta t$  l'intervallo di tempo in cui viene fornito tale lavoro, si ha:

$$[6.19] \quad P = \frac{\mathcal{L}}{\Delta t},$$

Questa definizione fornisce il *valore medio* della potenza nell'intervallo di tempo considerato. Usando i consueti metodi dell'analisi infinitesimale, si può definire il valore istantaneo della potenza come:

$$[6.20] \quad P = \frac{d\mathcal{L}}{dt}$$

Dalla definizione [6.20] discende che l'unità di misura del Sistema Internazionale per la potenza è definita come *la potenza fornita da una mac-*

*china che produce in un secondo il lavoro di 1 joule.* Tale unità prende il nome di *watt* (W):

$$1 \text{ watt} = \frac{1 \text{ J}}{1 \text{ s}}$$

In base alla definizione [6.20] si osserva che:

$$[6.21] \quad P = \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{\vec{f} \cdot d\vec{s}}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{v}$$

Il valore istantaneo della potenza fornita ad un corpo in movimento è cioè uguale al prodotto scalare della forza agente su di esso per la sua velocità.

# 7. L'energia potenziale e il principio di conservazione dell'energia

## 7.1 Le forze posizionali e i campi di forze.

C'è una categoria di forze che agiscono su un corpo e ne modificano lo stato di moto, che sono dette *forze posizionali*. Sono quelle forze il cui valore è funzione del punto in cui il corpo si trova nell'istante considerato e non dipende invece da altre variabili cinematiche, come per esempio la velocità o la direzione del moto. Esempi di forze posizionali sono la forza peso, la forza elastica, la forza gravitazionale che governa il moto dei corpi celesti o la forza elettrostatica.

Nel caso della forza peso, la forza è costante in ogni punto; nel caso della forza elastica, la forza che si esercita su un corpo collegato ad una molla dipende dal valore dell'allungamento, ma ogni volta che quel corpo si trova in un dato punto, con lo stesso valore dell'allungamento, subisce la stessa forza. Così, nel caso della forza elettrostatica, ogni qual volta il corpo considerato si trova in un certo punto dello spazio, esso subisce una forza, che è proporzionale al valore della sua carica elettrica e non dipende da altre variabili, quali la velocità o la direzione del moto.

Possiamo allora modellizzare queste forze come una proprietà fisica dello spazio. L'esistenza del Sole con la sua massa fa sì che nello spazio circostante un qualunque altro corpo subisca una forza, la cosiddetta forza d'attrazione gravitazionale, che da un lato è proporzionale al valore della sua stessa massa  $m$ , e dall'altro varia esclusivamente in funzione della distanza dal Sole (cioè della sua posizione relativamente al Sole). Possiamo allora dire che il Sole genera nello spazio un  gravitazionale con cui interagisce la massa dell'altro corpo. Così la presenza di una carica elettrica  $Q$  in un punto dello spazio fa sì che un corpo dotato di una carica  $q$ , posto in vicinanza ad esso, subisca una forza proporzionale al valore di  $q$ , che varia esclusivamente in funzione della distanza tra i due corpi carichi. Ciò equivale a dire che la carica  $Q$  genera nello spazio circostante un  elettrico e che la carica  $q$  interagisce con tale campo.

## 7.2 Forze conservative e forze dissipative.

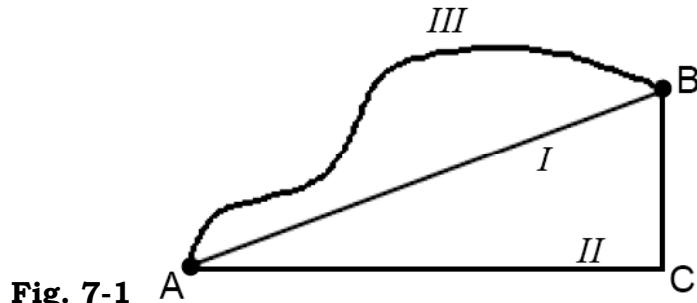


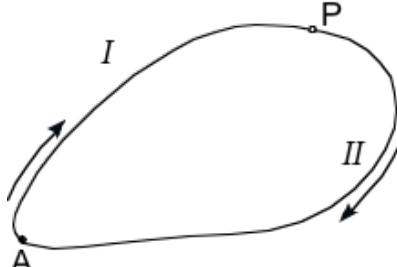
Fig. 7-1

Consideriamo un corpo che si muova in una zona di spazio in cui è definito un campo di forze interagente con tale corpo. Come primo esempio, esaminiamo il caso di un corpo di massa  $m$  che si muove nel campo generato dalla forza peso e consideriamo un suo spostamento da un punto A ad un punto B (Fig. 7-1). Questo stesso spostamento da A a B può essere effettuato lungo diversi itinerari: il corpo si può muovere lungo il segmento di retta che congiunge A con B (percorso I), ma potrebbe invece spostarsi dapprima in orizzontale fino al punto C per poi salire verticalmente da C a B (percorso II) oppure percorrere un'altra strada di profilo qualunque (percorso III).

Nel § 6.4 si è calcolato che il lavoro fatto nel caso del percorso I vale  $\mathcal{L}_I = mg\Delta h = mg(h_A - h_B)$ . Nel caso del percorso II il lavoro complessivo è la somma del lavoro per andare da A a C in direzione orizzontale, che è nullo, e quello per andare da C a B in verticale, che vale  $mg(h_C - h_B) = mg(h_A - h_B)$ ; troviamo quindi che  $\mathcal{L}_{II}$  è uguale a  $\mathcal{L}_I$ . Un po' più complicato è calcolare il lavoro nel caso del percorso III, ma si può dimostrare che il risultato è ancora  $\mathcal{L}_{III} = \mathcal{L}_I = \mathcal{L}_{II} = mg(h_A - h_B)$ . In definitiva, si trova che, qualunque sia il percorso prescelto, il lavoro fatto dalla forza di gravità in uno spostamento da un punto A ad un altro punto B dipende esclusivamente da quale sia il punto iniziale ed il punto finale, mentre risulta essere indipendente dal particolare percorso.

E' immediato dimostrare che, se è vero che il lavoro effettuato dalle forze del campo per uno spostamento da A a B è identico qualunque sia la strada percorsa, deve essere vero anche che il lavoro compiuto da tali forze in un qualsiasi cammino chiuso (quando cioè il punto d'arrivo coincide con il punto di partenza) è sempre nullo. Osserviamo in primo luogo che, se  $\mathcal{L}_{A \rightarrow B}$  è il lavoro fatto in uno spostamento da A a B lungo un dato percorso da una forza posizionale, il lavoro  $\mathcal{L}_{B \rightarrow A}$  per tornare indietro lungo la stessa strada da B a A è uguale, cambiato di segno, a  $\mathcal{L}_{A \rightarrow B}$ , cioè  $\mathcal{L}_{B \rightarrow A} = -\mathcal{L}_{A \rightarrow B}$ ; lo spostamento, infatti, cambia di segno, mentre la forza resta immutata. Si può pensare di spezzare il cammino chiuso in due parti, considerandolo come la somma di uno spostamento I da A a P e quindi di uno spostamento II da P ad A (Fig. 7-2). Il lavoro fatto sull'intero cammino chiuso, partendo da A e tornando in A,  $\mathcal{L}_{A \rightarrow A}$  è la somma del lavoro  $\mathcal{L}_{A \rightarrow P}^I$  fatto nello spostamento I da A a P e del lavoro  $\mathcal{L}_{P \rightarrow A}^{II}$  fatto nello spostamento II da P ad A. Ma,

visto che la forza è posizionale, il lavoro  $\mathcal{L}_{P \rightarrow A}^{\text{II}}$  fatto per andare da P a A lungo il percorso II è uguale, cambiato di segno, al lavoro fatto per muoversi in direzione contraria da A a P, sempre lungo il percorso II. Cioè  $\mathcal{L}_{P \rightarrow A}^{\text{II}} = -\mathcal{L}_{A \rightarrow P}^{\text{II}}$ . Ricordando che  $\mathcal{L}_{A \rightarrow P}^I = \mathcal{L}_{A \rightarrow P}^{\text{II}}$ , partendo da A e tornando in A si ha  $\mathcal{L}_{A \rightarrow P}^I + \mathcal{L}_{P \rightarrow A}^{\text{II}} = \mathcal{L}_{A \rightarrow P}^I - \mathcal{L}_{A \rightarrow P}^{\text{II}} = 0$ .



**Fig. 7-2**

I campi e le forze, per i quali sono valide le proprietà enunciate sopra, sono detti campi *conservativi* e forze *conservative*.

Riassumendo, abbiamo la seguente definizione:

UN CAMPO DI FORZE SI DICE **CONSERVATIVO** SE IL LAVORO ESEGUITO DALLE FORZE DEL CAMPO SU UN CORPO CHE PERCORRE UN QUALUNQUE CAMMINO CHIUSO È SEMPRE NULLO.

che può essere anche formulata in modo assolutamente equivalente nella forma:

UN CAMPO DI FORZE SI DICE **CONSERVATIVO** SE IL LAVORO ESEGUITO DALLE FORZE DEL CAMPO SU UN CORPO CHE SI SPOSTA DA UN QUALUNQUE PUNTO DI PARTENZA AD UN QUALUNQUE ALTRO PUNTO D'ARRIVO È INDIPENDENTE DAL PERCORSO EFFETTIVO.

Tutti i campi di forza posizionali che abbiamo elencato prima sono campi conservativi.

Un esempio di *forza non conservativa* (o, come dice anche, *forza dissipativa*) sono le forze d'attrito. Pensiamo ad un corpo che si stia muovendo, soggetto alla forza d'attrito, su un piano orizzontale su un cammino chiuso (cioè il punto d'arrivo coincide con il punto di partenza). Il lavoro effettuato dalla forza d'attrito è dato da:  $\mathcal{L}_{\text{attr}} = \oint f_{\text{attr}} \cos \alpha \, ds$ , dove il simbolo  $\oint$  sta ad indicare che l'operazione d'integrale è effettuata appunto lungo un cammino chiuso. Dal § 5.6 sappiamo che la forza d'attrito è sempre, istante per istante, diretta in direzione contraria allo spostamento; di conseguenza, durante tutto il moto,  $\cos \alpha = -1$ . Il lavoro totale è quindi la somma di tanti contributi tutti negativi; in totale perciò  $\mathcal{L}_{\text{attr}} < 0$ , diversamente da quanto deve accadere con forze conservative.

### 7.3 L'energia potenziale

Abbiamo appena visto nel paragrafo precedente che, su un corpo in movimento dal punto A al punto B in un *campo di forze conservativo*, il lavoro fatto dalle forze del campo non dipende dal cammino percorso. Secondo il teorema dell'energia cinetica, il lavoro complessivo eseguito dalle forze agenti su un corpo è uguale alla variazione della sua energia cinetica. Ne segue che *per un corpo in moto in un campo conservativo la variazione di energia cinetica dipende solo da quali siano il punto di partenza e il punto d'arrivo e non da quale sia il particolare cammino percorso*. Indicando con  $E_{cin}^A$  e  $E_{cin}^B$  il valore dell'energia cinetica nel punto di partenza A e in quello d'arrivo B, si ha perciò:

$$[7.1] \quad \mathcal{L}_{A \rightarrow B} = E_{cin}^B - E_{cin}^A = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

Un corpo che si muove da A a B sotto l'azione delle forze del campo acquisisce quindi, qualunque sia la traiettoria dello spostamento, la stessa quantità di energia cinetica. Ad esempio, un corpo soggetto alla sola forza peso che scende a terra partendo da un'altezza  $h$ , al momento che giunge al suolo ha incrementato la sua energia cinetica di una quantità  $mgh$ , indipendentemente da quale sia stata la strada percorsa nella discesa.

Torna naturale allora associare ad ogni punto dello spazio una funzione  $U$ , detta *energia potenziale*, definita in modo tale che la sua variazione  $\Delta U = U(B) - U(A)$  in uno spostamento dal punto A al punto B sia pari al lavoro, cambiato di segno, fatto dalle forze del campo per portare il corpo da A a B. Si definisce perciò come **differenza di energia potenziale** tra due punti A e B la grandezza:

$$[7.2] \quad \Delta U = U(B) - U(A) = -\mathcal{L}_{A \rightarrow B} .$$

Partendo da questa definizione, in base al teorema dell'energia cinetica, si ricava:

$$[7.3] \quad \Delta U = U(B) - U(A) = -\mathcal{L}_{A \rightarrow B} = -(E_{cin}^B - E_{cin}^A) = -\Delta E_{cin} ,$$

La relazione [7.3] evidenzia che, per un corpo che si muove soggetto a forze conservative, ad una variazione di energia potenziale corrisponde una variazione uguale e contraria dell'energia cinetica.

La relazione [7.2] non definisce il valore dell'energia potenziale in un punto, bensì la differenza dell'energia potenziale tra due punti. Il valore dell'energia potenziale in un punto P deve sempre essere definito rispetto ad un *riferimento*, che viene assunto come *zero* dell'energia potenziale. La scelta di tale punto di riferimento è di principio completamente arbitraria; in effetti ciò che ha significato fisico è solo la differenza di energia potenziale tra due punti. Di norma per ragioni di praticità è però opportuno scegliere come riferimento un punto (se esiste) in cui la forza sia nulla.

Detto dunque O tale punto di riferimento, si ha la definizione:

SI DICE **ENERGIA POTENZIALE** DI UN CORPO IN UN PUNTO A DI UN CAMPO DI FORZE CONSERVATIVO IL LAVORO CAMBIATO DI SEGNO FATTO DALLE FORZE DEL CAMPO PER PORTARE IL CORPO DA O AD A.

In formula:

$$[7.4] \quad U(A) = -\mathcal{L}_{O \rightarrow A}$$

La relazione [7.3]:  $U(B) - U(A) = -(E_{cin}^B - E_{cin}^A)$  può essere riscritta nella forma:

$$[7.5] \quad U(A) + E_{cin}^A = U(B) + E_{cin}^B$$

che sintetizza il cosiddetto *principio di conservazione dell'energia meccanica*:

QUANDO UN CORPO SI MUOVE IN UN CAMPO DI FORZE CONSERVATIVO, IN ASSENZA DI FORZE DISSIPATIVE, LA SUA ENERGIA MECCANICA TOTALE, DEFINITA COME LA SOMMA, ISTANTE PER ISTANTE, DELL'ENERGIA POTENZIALE E DELL'ENERGIA CINETICA, SI MANTIENE COSTANTE.

## 7.4 Energia potenziale elastica.

Negli esempi fatti fin qui, abbiamo sempre fatto riferimento al moto di un corpo soggetto alla forza peso (*attenzione*: parlando di forza peso e di energia potenziale gravitazionale, facciamo qui riferimento alla forza gravitazionale dovuta all'attrazione della Terra che agisce su un corpo in prossimità della superficie terrestre; la forma generale della forza di gravitazione e dell'energia potenziale gravitazionale la studieremo più avanti nel cap. 10). In base alle considerazioni già fatte nel § 6.4, il lavoro fatto dalla forza peso per portare un corpo di massa  $m$  da un punto A ad un punto B dipende esclusivamente dalla differenza di quota esistente tra i due punti. Se si indicano con  $h_A$  e  $h_B$  le rispettive altezze rispetto ad un livello di riferimento (totalmente arbitrario, essendo la forza peso costante in qualunque punto), è  $\mathcal{L}_{A \rightarrow B} = mg(h_B - h_A)$  e quindi in base alla definizione [7.2] si ha:  $U(B) - U(A) = mg(h_B - h_A)$ . L'energia potenziale di un punto, posto ad una quota  $h$  rispetto al livello assunto come livello di zero, vale  $mgh$ .

Applichiamo ora la definizione di energia potenziale al caso di un corpo in movimento ad opera di una forza elastica. Consideriamo per esempio, come nel § 6.6 un corpo di massa  $m$ , appoggiato su un piano orizzontale, collegato ad un punto fisso da una molla di costante elastica  $k$  e di lunghezza a riposo  $l_0$ . Abbiamo già mostrato che la forza elastica è una forza conservativa; si potrà perciò definire per il corpo in questione un'*energia potenziale elastica*. Quale riferimento (punto in cui assumiamo un valore zero dell'energia potenziale) prendiamo il punto in cui la molla è a riposo ( $f=0$ ), cioè quando l'allungamento  $x$  è nullo.

Usando la definizione di energia potenziale [7.4], otteniamo che il valore dell'energia potenziale per un allungamento della molla  $x_0$  vale:

$$[7.6] \quad U(x_0) = - \int_0^{x_0} (-kx) dx = k \left[ \frac{x}{2} \right]_0^{x_0} = \frac{1}{2} kx_0^2$$

Si noti che sia che la molla sia allungata ( $x > 0$ ), sia che sia compressa ( $x < 0$ ), il valore dell'energia potenziale risulta positivo.

Analizziamo il moto del corpo collegato alla molla, facendo uso del principio di conservazione dell'energia meccanica. Supponiamo che inizialmente l'allungamento della molla sia  $x_0$  e il corpo abbia velocità nulla. In tale posizione esso possiede energia cinetica nulla e la sua energia meccanica totale è dunque pari alla sua energia potenziale e cioè  $\frac{1}{2}kx_0^2$ . Lasciato libero, il corpo si muove sotto l'azione della forza elastica in direzione di accorciare la molla (Fig. 7-3); l'energia potenziale diminuisce e di conseguenza aumenta l'energia cinetica, finché il corpo non arriva nella posizione  $x=0$ , in cui l'energia potenziale ha valore nullo e l'energia meccanica è divenuta tutta energia cinetica. Se  $v_0$  è la velocità in tale punto, si ha dunque  $\frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$ , ovvero  $|v_0| = x_0\sqrt{\frac{k}{m}}$ . Il corpo prosegue poi il moto, comprimendo la molla e incrementando di nuovo la sua energia potenziale a spese dell'energia cinetica, fino a che, esaurita tutta l'energia cinetica, il corpo si ferma per un istante nel punto di massima compressione della molla. Esso riprende poi il moto in direzione contraria, ritornando indietro verso la posizione di partenza.

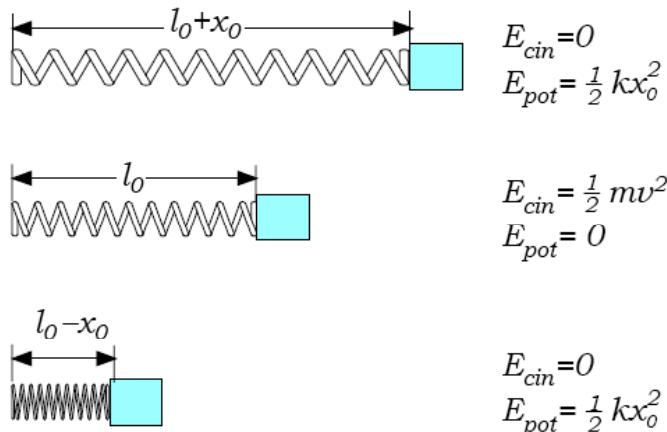


Fig. 7-3

## 7.5 Altri esempi di conservazione dell'energia.

Può capitare che un corpo nel suo moto sia soggetto a più forze conservative di diverso tipo agenti contemporaneamente. Il principio di conservazione dell'energia continua a valere; naturalmente nel bilancio energetico occorre in tal caso considerare tutte le forme d'energia potenziale presenti.

Vediamo ad esempio il seguente problema:

*Un corpo di massa  $m$ , trattenuto da una fune elastica di lunghezza a riposo  $l_0$  e costante elastica  $k$ , è lasciato cadere da fermo da un'altezza  $h$ . Quale altezza minima dal suolo raggiunge?*

In questo caso bisogna tener conto sia dell'energia potenziale gravitazionale che dell'energia potenziale elastica: il corpo inizialmente ha energia potenzia-

le gravitazionale  $mgh$  e energia potenziale elastica nulla (la fune non esercita forza finché non viene allungata). Esso inizia a scendere per effetto della forza peso, convertendo l'energia potenziale gravitazionale in energia cinetica. Dopo che il corpo è sceso di una lunghezza pari ad  $l_0$ , la fune inizia a tender si e quindi l'energia potenziale elastica comincia a crescere. Il punto più basso raggiunto dal corpo è caratterizzato dal fatto che in tale punto la sua velocità (e quindi l'energia cinetica) si annulla. In base alla [7.3], man mano che il corpo scende è sempre verificata la relazione:

$$[7.7] \quad \Delta U_{\text{grav}} + \Delta U_{\text{elast}} = -\Delta E_{\text{cin}}$$

Nel nostro problema l'energia cinetica è nulla sia all'istante iniziale, sia nel punto più basso raggiunto. La variazione di energia potenziale totale tra punto iniziale e punto più basso deve perciò essere nulla, ovvero

$\Delta U_{\text{grav}} + \Delta U_{\text{elast}} = 0$ . Se  $h_f$  è il valore (incognito) dell'altezza nel punto più basso, il corrispondente valore dell'allungamento della fune è  $h - h_f - l_0$ . Si ha quindi  $\Delta U_{\text{grav}} = mg(h - h_f)$  e  $\Delta U_{\text{elast}} = -\frac{1}{2}k(h - h_f - l)^2$ . Il valore di  $h_f$  si determina risolvendo l'equazione:  $mg(h - h_f) - \frac{1}{2}k(h - h_f - l)^2 = 0$ .

## 7.6 Il bilancio energetico in presenza di forze dissipative.

Il principio di conservazione dell'energia meccanica non è più valido, se sono presenti forze dissipative. Ciò non toglie che continui a valere il teorema dell'energia cinetica. Quando a determinare il moto di un corpo siano presenti sia forze conservative sia forze dissipative, si può nell'equazione [6.19] separare il contributo delle forze conservative e delle forze dissipative al lavoro totale. Detto  $\mathcal{L}_{\text{cons}}$  il lavoro eseguito dalle forze conservative e  $\mathcal{L}_{\text{diss}}$  il lavoro eseguito dalle forze dissipative, potremo scrivere:

$$[7.8] \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{cons}} + \mathcal{L}_{\text{diss}} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = E_{\text{cin}}^{(B)} - E_{\text{cin}}^{(A)},$$

che, in base alla definizione data in precedenza di differenza d'energia potenziale come il lavoro cambiato di segno fatto dalle forze conservative, diviene:

$$[7.9] \quad -\Delta U + \mathcal{L}_{\text{diss}} = -(U(B) - U(A)) + \mathcal{L}_{\text{diss}} = E_{\text{cin}}^{(B)} - E_{\text{cin}}^{(A)}$$

ovvero:

$$[7.10] \quad \mathcal{L}_{\text{diss}} = [E_{\text{cin}}^{(B)} + U(B)] - [E_{\text{cin}}^{(A)} - U(A)] = E_{\text{tot}}^{(B)} - E_{\text{tot}}^{(A)}$$

dove  $E_{\text{tot}}^{(A)}$  e  $E_{\text{tot}}^{(B)}$  rappresentano, rispettivamente, l'energia meccanica totale in A e in B.

La [7.10] dice dunque che in uno spostamento la variazione dell'energia meccanica di un corpo, intesa come somma della sua energia potenziale e della sua energia cinetica, è pari al lavoro effettuato dalle forze non conservative. Di norma, tenendo conto che una forza dissipativa agisce in senso contrario al moto e che quindi  $\mathcal{L}_{\text{diss}}$  è negativo, si ha  $E_{\text{tot}}^{(B)} < E_{\text{tot}}^{(A)}$ .



# 8. I problemi d'urto

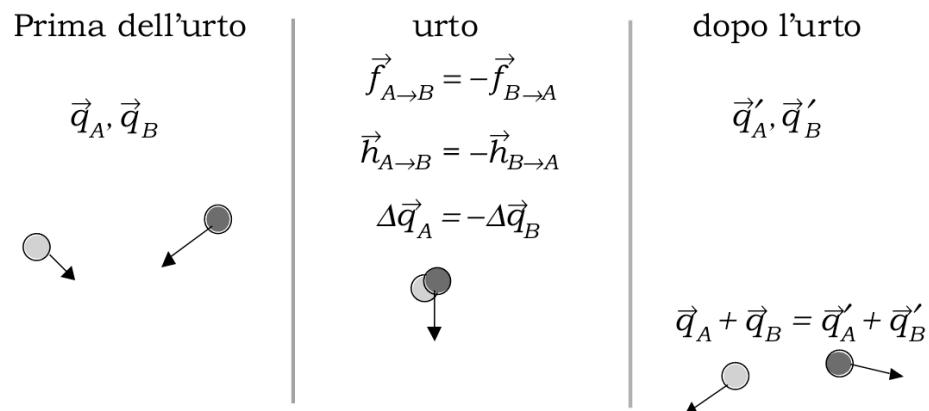
## 8.1 L'urto tra due corpi.

Fin qui abbiamo considerato la dinamica di un corpo, studiando gli effetti delle forze ad esso applicate sul suo moto. Esamineremo ora il caso di due corpi che interagiscono tra loro; ad esempio due bocce che urtano una contro l'altra oppure la testa di un calciatore che colpisce il pallone oppure due automobili che si scontrano frontalmente. Schematizziamo l'urto considerando due corpi A e B, i quali ad un certo istante interagiscono tra loro e supporremo che essi non siano soggetti ad altre forze che non siano quelle dovute alla loro mutua interazione. Come abbiamo già visto nel § 4.3, in base al terzo principio della dinamica, considerando il sistema complessivo costituito dai due corpi, l'effetto dell'interazione, indipendentemente dalla natura delle forze d'interazione, è nello scambio di quantità di moto tra essi (Fig. 8-1). Facendo il confronto tra le quantità di moto  $\vec{q}_A, \vec{q}_B$  dei due corpi immediatamente prima dell'interazione e la quantità di moto  $\vec{q}'_A, \vec{q}'_B$  immediatamente dopo, si ottiene dunque:

$$[8.1] \quad \Delta\vec{q}_A = -\Delta\vec{q}_B$$

ovvero:

$$[8.2] \quad \vec{q}_A + \vec{q}_B = \vec{q}'_A + \vec{q}'_B$$



**Fig. 8-1**

Definendo *quantità di moto totale* del sistema costituito dai due corpi in collisione la somma delle loro quantità di moto, cioè  $\vec{Q} = \vec{q}_A + \vec{q}_B$ , l'uguaglianza [8.2] può essere interpretata dicendo che in un processo d'urto si conserva la *quantità di moto totale* dei corpi collidenti. Questo è un caso particolare del *principio di conservazione della quantità di moto*, di cui parleremo nel prossimo capitolo.

Si noti che, in base a quanto si era detto nel § 4.3, la validità delle formule [8.1] e [8.2] è subordinata all'assenza di forze esterne; si dovrebbe altrimenti mettere in conto anche l'impulso fornito ai due corpi da tali forze esterne.

E' però vero che assai spesso però la dinamica dell'urto si svolge in un intervallo di tempo molto breve; il cambiamento di quantità di moto dei due corpi interagenti durante l'urto avviene allora pressoché istantaneamente, di modo che l'impulso dovuto ad eventuali forze esterne agenti sui due corpi in tale intervallo rimane assai piccolo e in pratica assolutamente trascurabile. Consideriamo per esempio una boccia che colpisce al volo in aria un'altra boccia, anch'essa in movimento. Durante l'urto naturalmente agisce sempre sulle due bocce una forza esterna, che è la forza di gravità; ma la durata della collisione (cioè il tempo in cui le due bocce restano in contatto) è brevissimo e l'impulso fornito dalla forza di gravità in quell'intervallo di tempo è del tutto trascurabile. In casi di questo genere, di urti cioè di durata molto breve (al limite, di durata  $\rightarrow 0$ ) che sono detti perciò *urti impulsivi*, si potrà legittimamente applicare la conservazione della quantità di moto totale e quindi le formule [8.1] e [8.2], considerando con  $\vec{q}_A$ ,  $\vec{q}_B$  e  $\vec{q}'_A$ ,  $\vec{q}'_B$ , rispettivamente le quantità di moto di due corpi l'istante immediatamente precedente e l'istante immediatamente seguente la collisione.

## 8.2 Urti anelastici.

Per determinare quale sia lo stato di moto finale dopo un urto, non è però sufficiente aver stabilito che si deve conservare la quantità di moto totale. Supponendo di conoscere lo stato di moto dei due corpi prima dell'urto (e cioè i valori di  $\vec{q}_A, \vec{q}_B$ ), la relazione [8.2] è infatti *una* equazione vettoriale, nella quale compaiono *due* incognite vettoriali  $\vec{q}'_A, \vec{q}'_B$  ed è quindi indeterminata. Per determinare univocamente tali incognite, occorrono perciò ulteriori informazioni riguardo alla natura dell'urto.

A seconda della natura dei corpi interagenti, l'urto può manifestarsi in maniera differente: una boccia da biliardo rimbalza contro un'altra boccia, mentre una palla di pece si appiccica ad essa. Nel primo caso le due bocce si deformano durante l'urto, ma dopo l'urto riprendono la loro forma; nel secondo la deformazione subita dalla palla nell'urto è invece permanente. Esistono poi casi intermedi: una palla di metallo lanciata contro un muro rimbalza, ma lascia comunque nel muro una deformazione permanente.

La differenza tra i comportamenti indicati sopra è da ricercare nella natura delle forze che intervengono nella collisione; se queste sono forze

conservative, nel processo d'urto si conserva l'energia, in caso contrario ci sarà dissipazione di energia.

Analizziamo dapprima il caso estremo, in cui nell'urto si annulla totalmente il moto relativo tra i due corpi collidenti e quindi i due corpi dopo l'urto si fondono in un unico corpo che si muove con un unico valore della velocità. E' questo per esempio il caso di un proiettile di pistola che si conficca in un sacchetto di sabbia. L'urto è definito in questo caso come *urto totalmente anelastico*, poiché si può dimostrare in questo caso si dissipata tutta l'energia cinetica connessa al moto relativo dei due corpi.

Indicando con  $m_A$  e  $m_B$  le masse dei due corpi e con  $\vec{v}_A$  e  $\vec{v}_B$  le loro velocità prima dell'urto, applichiamo la relazione [8.2], imponendo la condizione che le velocità  $\vec{v}'_A$  e  $\vec{v}'_B$  dopo l'urto siano uguali ( $\vec{v}'_A = \vec{v}'_B = \vec{v}'$ ):

$$[8.3] \quad m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B = (m_A + m_B) \vec{v}'.$$

Questa è un'equazione in cui compare ora una sola incognita e quindi è sufficiente a risolvere completamente il problema.

Va sempre tenuto presente che la [8.3] è un'equazione *vettoriale* e che  $\vec{v}_A$ ,  $\vec{v}_B$  e  $\vec{v}'$  sono *vettori*. Perciò, nel caso di un moto bidimensionale, l'espressione [8.3] equivale al sistema tra le *componenti vettoriali* lungo gli assi  $x$  e  $y$ :

$$[8.4] \quad \begin{cases} m_A v_{Ax} + m_B v_{Bx} = (m_A + m_B) v'_x \\ m_A v_{Ay} + m_B v_{By} = (m_A + m_B) v'_y \end{cases}$$

### 8.3 Urти elasticci

Nel caso in cui la forza d'interazione è conservativa, allora durante l'urto si conserva, oltre alla quantità di moto, anche l'energia meccanica. Durante l'urto i due corpi si deformano, acquisendo energia potenziale, ma subito dopo riprendono la forma originaria, restituendo tale energia. Se si confronta quindi l'energia cinetica totale, misurata un istante immediatamente precedente l'urto, con quella misurata un istante immediatamente successivo, si otterrà sempre lo stesso valore. Un urto in cui la forza d'interazione è conservativa si definisce **urto elastico**. In un urto elastico quindi si conserva l'energia cinetica totale delle particelle incidenti.

In questo contesto tratteremo in dettaglio solo il caso unidimensionale, nel quale cioè il moto dei due corpi prima e dopo l'urto sia sempre su una stessa retta. Dette  $v_A$ ,  $v_B$ ,  $v'_A$ ,  $v'_B$  le componenti nella direzione del moto delle velocità dei due corpi rispettivamente prima e dopo l'urto, possiamo dunque applicare il principio di conservazione della quantità di moto (che abbiamo visto valere per qualunque tipo di urto) e il principio di conservazione dell'energia (perché l'urto è elastico).

Si ottiene un sistema di due equazioni numeriche:

$$[8.5] \quad \begin{cases} m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \\ \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2} m_A v'_A^2 + \frac{1}{2} m_B v'_B^2 \end{cases},$$

che legano i valori delle velocità (con il loro segno) prima dell'urto con quelli delle velocità dopo l'urto.

Quale esempio, svolgiamo esplicitamente i calcoli nel caso particolare in cui il corpo A di massa  $m_A$  urta elasticamente contro un corpo B di massa  $m_B$  inizialmente fermo ( $v_B = 0$ ).

La [8.5] diviene in questo caso:

$$[8.6] \quad \begin{cases} m_A v_A = m_A v'_A + m_B v'_B \\ \frac{1}{2} m_A v_A^2 = \frac{1}{2} m_A v'_A^2 + \frac{1}{2} m_B v'_B^2 \end{cases} .$$

Dalla prima equazione della [8.6] si ricava:

$$[8.7] \quad v'_A = v_A - \frac{m_B}{m_A} v'_B$$

e, sostituendo nella seconda equazione:

$$\begin{aligned} m_A v_A^2 &= m_A \left( v_A - \frac{m_B}{m_A} v'_B \right)^2 + m_B v'_B^2; \\ m_A v_A^2 &= m_A v_A^2 - 2m_B v_A v'_B + \frac{m_B^2}{m_A} v'_B^2 + m_B v'_B^2; \\ \left( \frac{m_B}{m_A} + 1 \right) m_B v'_B - 2m_B v_A &= 0 . \end{aligned}$$

Si ottiene :

$$[8.8] \quad v'_B = \frac{2m_B v_A}{(1 + m_B/m_A)m_B} = \frac{2m_A}{m_A + m_B} v_A$$

$$[8.9] \quad v'_A = v_A - \frac{m_B}{m_A} \cdot \frac{2m_A}{m_A + m_B} v_A = \frac{m_A + m_B - 2m_B}{m_A + m_B} v_A = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_A$$

Nel caso che le masse siano uguali ( $m_A = m_B$ ) si ottiene  $v'_A = 0$  e  $v'_B = v_A$ ; cioè il primo corpo si ferma e il secondo parte con la stessa velocità che aveva il primo prima dell'urto. Questo è quanto possiamo verificare quando a biliardo una boccia urta con urto centrale un'altra uguale, ferma.

Nel caso  $m_A < m_B$ , si ottiene  $v'_A < 0$ ; il valore negativo significa che il corpo A rimbalza indietro. Per  $m_A > m_B$ , si trova invece  $v'_A > 0$ : il corpo A prosegue in avanti.

Esaminiamo infine il caso dell'urto elastico di una palla contro un muro. In questo caso il secondo corpo (il muro) ha una massa molto maggiore del primo (la palla):  $m_A \ll m_B$ .

Calcolando il limite delle espressioni [8.8] e [8.9] per  $m_B / m_A \rightarrow \infty$ , si ottiene  $v'_A = -v_A$  e  $v'_B = 0$ . La palla ribalta quindi indietro con la stessa velocità, cambiata di segno, mentre il muro, ovviamente, non si muove.



# 9. I corpi estesi

## 9.1 Il centro di massa.

Abbiamo fin qui considerato il moto di un corpo prescindendo dalle sue dimensioni e schematizzandolo come puntiforme. In questo capitolo supereremo questa ipotesi e considereremo esplicitamente i corpi estesi.

Un corpo esteso può essere considerato come l'insieme di tante parti, di dimensioni abbastanza piccole da poterle considerare come se fossero puntiformi. Identifichiamo con il vettore  $\vec{r}_i$ , di componenti  $x_i, y_i, z_i$ , la posizione della  $i$ -esima parte, la cui massa è  $m_i$ . Possiamo definire un punto particolare, che viene detto *centro di massa* del corpo esteso, identificato da un vettore  $\vec{r}_{CM}$  le cui coordinate sono:

$$[9.1] \quad \begin{cases} x_{CM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} \\ y_{CM} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} \\ z_{CM} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i} \end{cases},$$

ovvero, in forma vettoriale:

$$[9.2] \quad \vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M},$$

dove  $M = \sum_i m_i$  è la massa complessiva del corpo esteso.

## 9.2 Moto del centro di massa.

La ragione per cui si definisce questo punto e per cui lo si chiama *centro di massa*, diviene chiara analizzandone il moto a seguito di un movimento del corpo esteso.

Applicando la definizione di velocità, la velocità con cui si muove il centro di massa è  $\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt}$ . Sostituiamo in tale espressione il valore di  $\vec{r}_{CM}$  dato dalla [9.2]; si ottiene:

$$[9.3] \quad \vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M} \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{r}_i = \frac{1}{M} \sum_i m_i \frac{d}{dt} \vec{r}_i = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{v}_i,$$

essendo  $\vec{v}_i = \frac{d}{dt} \vec{r}_i$  la velocità della parte i-esima.

Dalla [9.3] si ricava:

$$[9.4] \quad M\vec{v}_{CM} = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

Poiché  $\sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{q}_i = \vec{Q}$  rappresenta la quantità di moto totale del corpo esteso, la [9.4] può essere interpretata dicendo che *la quantità di moto totale di un corpo esteso è uguale a quella di un corpo puntiforme di massa M che si muova solidale con il centro di massa*:

$$[9.5] \quad \boxed{\vec{Q} = M\vec{v}_{CM}}.$$

Calcoliamo ora il valore dell'accelerazione del centro di massa. Per definizione d'accelerazione,  $\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt}$  e quindi:

$$[9.6] \quad \vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M} \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{v}_i = \frac{1}{M} \sum_i m_i \frac{d}{dt} \vec{v}_i = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{a}_i$$

essendo  $\vec{a}_i = \frac{d}{dt} \vec{v}_i$  l'accelerazione della parte i-esima.

Se  $\vec{f}_i$  rappresenta la risultante delle forze agenti sulla parte i-esima del corpo esteso, applicando ad ogni parte il secondo principio della dinamica si ha che  $\vec{f}_i = m_i \vec{a}_i$ . Si ottiene quindi:

$$[9.7] \quad M\vec{a}_{CM} = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{f}_i.$$

Nel considerare le forze agenti sulla parte i-esima, è utile distinguere tra le forze dovute all'interazione con le altre porzioni del corpo stesso, che diremo quindi *forze interne*, la cui risultante indichiamo con  $\vec{f}_i^{(int)}$ , e quelle relative alle interazioni con il mondo esterno, che diremo *forze esterne*, la cui risultante è  $\vec{f}_i^{(est)}$ . Eseguiamo ora la somma di tutte le forze agenti su tutto il corpo esteso, suddividendole tra interne ed esterne:

$$[9.8] \quad \sum_i \vec{f}_i = \sum_i \vec{f}_i^{(int)} + \sum_i \vec{f}_i^{(est)}.$$

Il 3° principio della dinamica ci assicura che  $\sum_i \vec{f}_i^{(int)} = 0$ . In tale somma compare, infatti, la forza agente sulla parte  $i$  dovuta all'interazione con la parte  $j$ , ma compare anche la forza agente sulla parte  $j$  dovuta alla parte  $i$ , che è uguale in modulo ed opposta in direzione (principio d'azione e reazione); di conseguenza i termini della somma si elidono tutti due a due.

Si può quindi scrivere la [9.7] nella forma:

$$[9.9] \quad \vec{F}^{(e)} = \sum_i \vec{f}_i^{(est)} = M\vec{a}_{CM},$$

dove con  $\vec{F}^{(e)} = \sum_i \vec{f}_i^{(est)}$  abbiamo indicato la risultante delle forze esterne.

Osservando la [9.9] si può quindi concludere che:

IL MOTO DEL CENTRO DI MASSA DI UN CORPO ESTESO È IDENTICO AL MOTO DI UN CORPO PUNTIFORME, LA CUI MASSA È PARI ALLA MASSA TOTALE DEL CORPO ESTESO E CHE SIA SOGGETTO AD UNA FORZA PARI ALLA RISULTANTE (VETTORIALE) DI TUTTE LE FORZE ESTERNE APPLICATE AL CORPO ESTESO.

### 9.3 Energia potenziale di un corpo esteso soggetto alla forza peso.

Come possiamo descrivere il comportamento di un corpo esteso di massa  $M$  soggetto alla forza peso? Immaginiamo di suddividerlo in tante parti di massa  $m_i$ , come avevamo fatto nel § 9.1. Ciascuna di queste parti è soggetta ad una forza pari a  $m_i\vec{g}$ . La forza risultante complessiva (cioè la forza peso totale agente sul corpo esteso) è quindi  $\sum_i m_i\vec{g} = M\vec{g}$ .

L'energia potenziale del corpo esteso dovuta all'azione della forza peso è anch'essa definita come la somma delle energie potenziali delle sue singole parti. Poniamoci in un sistema di riferimento in cui l'asse  $z$  sia orientato lungo la verticale. Allora, prendendo come riferimento il livello  $z=0$ , l'energia potenziale della  $i$ -esima parte del corpo esteso di massa  $m_i$ , che si trova nel punto di coordinate  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$  è  $m_i g z_i$ . Ricordando che, per la definizione [9.1] del centro di massa  $Mz_{CM} = \sum_i m_i z_i$ , l'energia potenziale totale è data da:

$$[9.10] \quad U = \sum_i m_i g z_i = Mg z_{CM} .$$

Ne concludiamo che:

L'ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE DI UN CORPO ESTESO DI MASSA  $M$  È PARI ALL'ENERGIA POTENZIALE CHE AVREBBE UN CORPO PUNTIFORME DELLA STESSA MASSA POSIZIONATO NEL CENTRO DI MASSA DEL CORPO ESTESO.

E' per questa ragione che il centro di massa è detto anche *baricentro*, che etimologicamente significa *centro del peso*.

### 9.4 La densità.

Per un corpo esteso è utile introdurre il concetto di densità. Si definisce densità il rapporto esistente tra la sua massa  $M$  di un corpo ed il suo volume  $V$ :

$$[9.11] \quad \rho = \frac{M}{V}$$

Nel Sistema Internazionale l'unità di misura della densità è il  $\text{kg}/\text{m}^3$ . Nell'uso comune si adopera spesso il  $\text{kg}/\text{dm}^3$  o il  $\text{kg}/\text{l}$  o il  $\text{g}/\text{cm}^3$  (che sono tutti equivalenti tra loro). Ricordiamo che 1  $\text{l}$  d'acqua ha la massa di 1  $\text{kg}$ .

Poiché  $1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$ , la densità dell'acqua, espressa in unità SI, è  $1000 \text{ kg/m}^3$ .

## 9.5 Il corpo rigido e il momento di una forza.

Un corpo esteso, la cui forma e dimensioni non possano variare, in altre parole, che sia indeformabile, prende il nome di *corpo rigido*. Naturalmente non esiste in natura un corpo che sia assolutamente rigido, ma in molti casi questa schematizzazione approssima abbastanza bene il comportamento di un corpo esteso, semplificandone notevolmente l'analisi.

Consideriamo un corpo rigido inizialmente in quiete, che sia vincolato a ruotare intorno ad un asse fisso, come ad esempio una porta sui suoi cardini. Per farlo ruotare è necessario applicare una forza; sappiamo però che se spingiamo la porta in un punto vicino all'asse fisso, faremo molta più fatica che se applichiamo la spinta in un punto lontano dall'asse. Se poi spingessimo (o tirassimo) la porta nella direzione dell'asse fisso, osserveremmo che la porta non si muoverebbe per nulla per quanto grande possa essere la forza applicata. L'efficacia di una forza  $\vec{F}$  nel fare ruotare un corpo rigido intorno ad un asse è misurata da una grandezza, che prende il nome di **momento della forza ( $\tau$ )**, definita (vedi la Fig. 9-1, dove è raffigurato un corpo rigido libero di ruotare intorno ad un asse fisso passante per il punto O e perpendicolare al piano del foglio) dal prodotto tra il modulo della forza, la distanza  $d$  tra il punto in cui la forza è applicata e l'asse ed il seno dell'angolo  $\theta$  compreso tra la direzione della forza e la normale all'asse passante per il punto d'applicazione della forza:

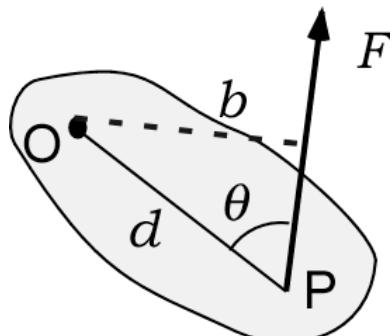
$$[9.12] \quad \tau = |\vec{F}| d \sin \theta$$

La lunghezza  $b = d \sin \theta$ , che rappresenta la distanza della retta d'azione della forza dal punto O, è anche detta *braccio* della forza. La [9.122] può allora essere riscritta:

$$[9.13] \quad \tau = b F,$$

e definire il momento nella forma:

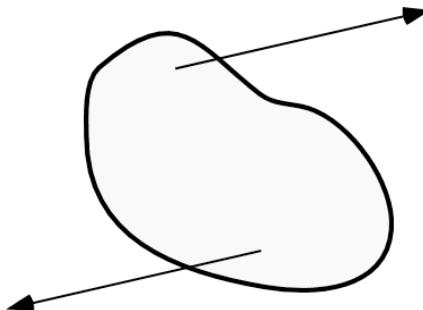
IL MOMENTO DI UNA FORZA RISPETTO AD UN ASSE È DATO DAL PRODOTTO DELLA FORZA STESSA PER IL SUO BRACCIO.



**Fig. 9-1**

## 9.6 La statica del corpo rigido

Un corpo puntiforme è in condizioni di equilibrio quando la risultante delle forze esterne ad esso applicate è nulla. Quali sono le condizioni per cui un corpo rigido è in equilibrio? Ovvero, quali sono le condizioni per cui, se esso è inizialmente fermo, permane in quiete? La risposta a questi quesiti costituisce l'argomento della *statica del corpo rigido*.

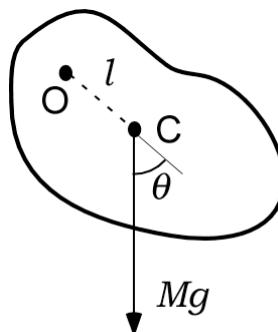


**Fig. 9-2**

È ovvio che è necessario che la risultante  $\vec{F}^{(e)}$  di tutte le forze esterne applicate al corpo sia nulla. In effetti, la [9.9] ci assicura che in tal caso il centro di massa resta in quiete. Questo non è però sufficiente. In Fig. 9-2 è illustrato un esempio in cui due forze, d'uguale intensità e di direzione opposta, sono applicate a due punti diversi del corpo rigido. La forza risultante è nulla; ma, come si verifica facilmente, non è nulla la somma dei momenti delle forze, calcolati rispetto ad un qualunque asse perpendicolare al piano. Di conseguenza il centro di massa del corpo resta fermo, ma il corpo ruota intorno al baricentro.

In effetti, perché un corpo rigido risulti in equilibrio devono essere soddisfatte entrambe le seguenti condizioni:

- a) *la risultante delle forze esterne applicate deve essere nulla,*
- b) *la somma dei momenti delle forze esterne rispetto ad un qualunque asse di rotazione deve essere nulla.*

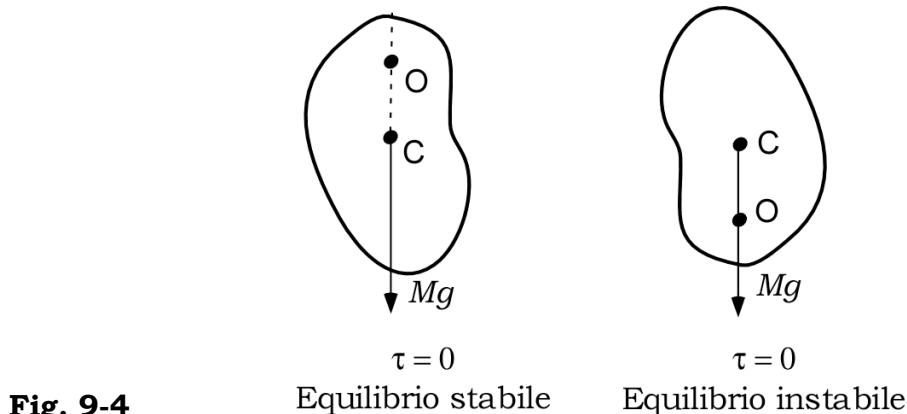


**Fig. 9-3**

$$\tau = Mg l \sin\theta$$

Un corpo rigido di massa  $M$ , sospeso ad un asse orizzontale passante per il punto O (Fig. 9-3), è soggetto ad una forza peso complessiva pari a  $Mg$ . In modo analogo a quanto si è fatto nel § 9.3, si può dimostrare abbastanza facilmente che il momento totale rispetto all'asse di rotazione della forza peso agente sul corpo rigido è pari a quello che avrebbe un corpo puntiforme di massa  $M$ , posto nella posizione del centro di massa C. Se la distanza OC del centro di massa dall'asse è  $l$ , il momento applicato al corpo rigido vale dunque  $\tau = Mg l \sin\theta$ .

Perché il corpo rigido, in assenza di altre forze, sia in condizioni d'equilibrio, occorre che tale momento sia zero, cioè che sia nullo il braccio  $b = l \sin\theta$  della forza peso. Questo si verifica quando  $\sin\theta = 0$ ; il centro di massa e il punto di sospensione si trovano sulla stessa linea verticale (Fig. 9-4). Possono verificarsi due casi diversi. Il centro di massa può trovarsi più in basso rispetto al punto di sospensione; in questo caso, a seguito di un piccolo spostamento del centro di massa dalla verticale, sul corpo agisce un momento che tende a *riportarlo* indietro nella posizione d'equilibrio. Si dice allora che il corpo è in una posizione d'*equilibrio stabile*. Al contrario, se il centro di massa si trova più in alto del punto di sospensione, a seguito di un suo piccolo spostamento dalla verticale, sul corpo agirà un momento che tende ad *allontanarlo* dalla posizione d'equilibrio. Si dice allora che siamo in una posizione d'*equilibrio instabile*.

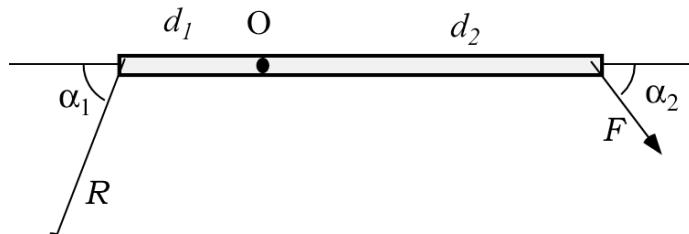


**Fig. 9-4** Equilibrio stabile      Equilibrio instabile

C'è anche un terzo caso, in cui il corpo rigido è sospeso ad un asse che passa per il centro di massa; il braccio della forza peso rispetto al punto di sospensione è allora sempre nullo, comunque sia ruotato il corpo. In questo caso si parla di *equilibrio indifferente*.

Si può verificare che la posizione d'equilibrio stabile corrisponde alla situazione in cui l'energia potenziale gravitazionale è minima; mentre la posizione d'equilibrio instabile corrisponde alla situazione in cui l'energia potenziale gravitazionale è massima. Questa è una regola generale: le posizioni d'equilibrio di un corpo corrispondono agli stati in cui il valore dell'energia potenziale è stazionario; ad un *minimo* dell'energia potenziale corrisponde una situazione d'*equilibrio stabile*, ad un *massimo* una posizione d'*equilibrio instabile*.

Un'applicazione interessante della statica del corpo rigido è la leva. Una leva consiste in una sbarra rigida incernierata in un punto O (detto *fulcro*) (Fig. 9-5); Ad un'estremità di essa è applicata una forza  $\vec{F}$ , in una direzione che fa un angolo  $\alpha_1$  con la sbarra. Quale forza  $\vec{R}$ , che agisce in una direzione che fa angolo  $\alpha_2$  con la sbarra, deve essere applicata all'altro estremo per mantenere l'equilibrio?



**Fig. 9-5**

La condizione d'equilibrio si trova imponendo che la risultante dei momenti delle forze applicate alla sbarra sia nulla e quindi (trascurando il peso della sbarra) che

$$F d_2 \sin \alpha_2 - R d_1 \sin \alpha_1 = 0.$$

I segni dei due momenti sono opposti, poiché essi tendono a far girare il corpo in direzione opposta. Se le forze sono ortogonali alla barra ( $\alpha_1 = \alpha_2 = 90^\circ$ ), si ha la proporzione  $F : R = d_1 : d_2$ .

Volendo considerare anche il peso della sbarra, basterà aggiungere al bilancio dei momenti, con il segno opportuno, anche il momento rispetto al fulcro della forza peso.

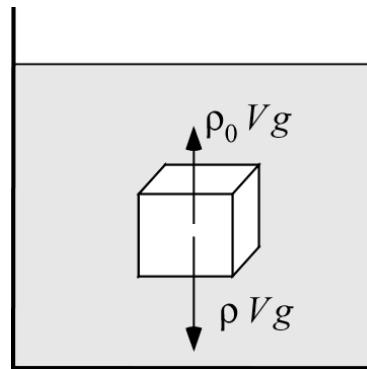
In modo analogo si possono analizzare i casi in cui il fulcro sia posto ad un estremo e la forza agente e la forza resistente sono applicate dalla stessa parte rispetto ad esso.

## 9.7 La statica di un corpo immerso in un liquido.

Esaminiamo infine le condizioni di statica di un corpo solido immerso in un fluido. Con *fluido* s'intende genericamente un corpo privo di forma propria, che assume perciò la forma del recipiente che lo contiene. Se le sue molecole mantengono una distanza l'una dall'altra in media costante (e di conseguenza esso ha un volume proprio, che non cambia al cambiare della forma del recipiente), si parla di fluido allo stato *liquido*; in caso contrario si parla di fluido allo stato *gassoso*.

Un corpo solido, di volume  $V$  e densità  $\rho$ , immerso in un fluido di densità  $\rho_0$ , è soggetto sia alla forza peso, sia alle forze esercitate sulla sua superficie dal fluido circostante, che vengono dette forze di pressione. Per valutare l'entità di queste ultime forze, ipotizziamo che quel volume  $V$  sia occupato dal liquido stesso, anziché dal corpo solido. Esso sarebbe ovviamente in quiete; il suo peso sarebbe esattamente controbilanciato dalle forze di pressione uguali quindi a  $\rho_0 V g$ . Come ha giustamente intuito Archimede, le forze dovute alla pressione dipendono dal fluido circostante e non

da ciò che è contenuto nel volume  $V$ . Ne concludiamo che *un corpo immerso in un liquido riceve una spinta diretta verso l'alto pari al peso di un uguale volume del liquido stesso*. Questa forza è usualmente denominata *spinta d'Archimede*.



**Fig. 9-6**

Su un corpo immerso agiscono quindi, in direzione opposta tra loro, la forza peso e la spinta d'Archimede. Il modulo della forza risultante è:

$$[9.14] \quad F = |\rho Vg - \rho_0 Vg| = Vg \cdot |\rho - \rho_0|$$

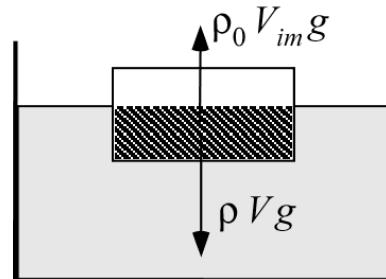
Essa sarà diretta verso l'alto se  $\rho < \rho_0$ , verso il basso se  $\rho > \rho_0$ .

Va osservato che non sempre la forza peso e la spinta d'Archimede hanno lo stesso punto d'applicazione. In effetti, questo capita solo quando il corpo immerso è omogeneo; nel caso generale la forza peso è applicata nel centro di massa del solido, mentre la spinta d'Archimede è applicata al centro di massa del volume di liquido spostato, detto perciò *centro di spinta*. Di conseguenza, su un corpo disomogeneo immerso potrà agire anche un momento non nullo, che farà in modo da portare il centro di spinta e il baricentro allineati sulla stessa verticale.

Per concludere, discutiamo il caso di un corpo che galleggia su un liquido (Fig. 9-7). Se  $\rho < \rho_0$ , il corpo, che era totalmente immerso, è spinto verso l'alto. Arrivato sulla superficie, esso comincia ad emergere al di fuori del liquido. La spinta d'Archimede si riduce così al peso del volume di liquido effettivamente spostato, cioè del volume immerso  $V_{im}$ .

La condizione d'equilibrio è  $\rho_0 V_{im} g - \rho Vg = 0$  e quindi:

$$[9.15] \quad \frac{V_{im}}{V} = \frac{\rho}{\rho_0}$$



**Fig. 9-7**

# 10. La forza di gravitazione universale

## 10.1 Le forze fondamentali della natura.

La fisica spiega tutta la fenomenologia dell'universo, dalla struttura interna del nucleo atomico al comportamento delle galassie, tramite l'applicazione di quattro forze fondamentali. Due di queste, denominate *forza forte* e *forza debole*, governano l'interazione tra le particelle elementari. I fisici classificano queste forze come *forze a corto raggio d'azione*, poiché manifestano i loro effetti solo su distanze piccolissime, minori o uguali a circa 1 fm (1 femtometro =  $10^{-15}$  m), che è l'ordine di grandezza delle dimensioni dei nuclei atomici. Queste forze sono responsabili della stabilità dei nuclei atomici. A distanze maggiori, esse divengono però totalmente trascurabili, per cui, una volta appurato che, grazie ad esse, esiste la materia stabile così come la conosciamo, ci si può dimenticare della loro esistenza.<sup>1</sup>

Le altre due forze fondamentali, che al contrario si manifestano anche a grandi distanze, sono la forza elettrica e la forza gravitazionale. Esse sono descritte dalla legge delle gravitazione universale, formulata da Newton, e dalla legge di Coulomb:

$$[10.1] \quad \vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}$$

$$[10.2] \quad \vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$

La prima esprime il valore della forza gravitazionale, agente tra due corpi puntiformi di massa  $m_1$  e  $m_2$ , posti ad una distanza  $r$  uno dall'altro. Ricordiamo che il simbolo  $\hat{r}$  rappresenta il versore (cioè il vettore di modulo 1; vedi § 2.5) che ha la direzione del vettore  $\vec{r}$ , rappresentato dalla congiungente tra i punti occupati dalle due masse. Il segno negativo sta ad indicare che la forza agente su uno dei due corpi ha direzione opposta alla direzione della congiungente, cioè che *la forza è attrattiva*.

---

<sup>1</sup> A parte quando si considerano i fenomeni di radioattività, che sono connessi all'esistenza di nuclei instabili.

La seconda legge esprime il valore della forza elettrica agente tra due corpi puntiformi, portanti rispettivamente carica  $q_1$  e  $q_2$ , posti ad una distanza  $\vec{r}$  una dall'altra. A differenza delle masse, i valori delle cariche elettriche possono essere sia positive che negative. Se le due cariche hanno lo stesso segno, si sperimenta che la forza agente tra due corpi carichi è *repulsiva* (la direzione della forza agente su uno dei due corpi è nella direzione della congiungente), in caso contrario è *attrattiva*. La forma matematica delle formule [10.1] e [10.2] è identica, a parte il segno: in entrambi i casi, l'intensità della forza diminuisce con la distanza in ragione inversamente proporzionale al quadrato della distanza. Ciò significa che tutte le considerazioni che faremo riguardanti il campo gravitazionale saranno valide anche per il campo elettrico; tenendo conto naturalmente che nel caso elettrico le cariche possono essere positive o negative e che la costante di proporzionalità è nel primo caso negativa e nel secondo positiva.

## 10.2 Il campo gravitazionale.

Il fattore  $G$  che compare nella formula [10.1] è noto in base alle misure sperimentali. Il suo valore, in unità del Sistema Internazionale, è  $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ . Questo valore è assai piccolo: la forza d'attrazione gravitazionale tra due corpi di massa 1 kg posti ad una distanza tra loro di 1 m è solo  $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N}$ . L'accelerazione che viene loro impressa è pari a solo  $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m/s}^2$ , molto difficilmente osservabile sperimentalmente. Perché la forza di gravità abbia effetti su un corpo occorre che esso interagisca con un altro corpo con massa a livello planetario.

Nel § 7.1 abbiamo introdotto il concetto di campo di forze. In tale quadro, la forza agente su un corpo puntiforme di massa  $m$  ad opera di un corpo puntiforme di massa  $M$  è vista come originata dall'interazione tra la massa  $m$  e il *campo gravitazionale* generato dalla massa  $M$ . Il corpo di massa  $M$  genera nello spazio un campo gravitazionale  $\vec{g}$ , il cui valore in un punto posto alla distanza  $\vec{r}$  da esso è :

$$[10.3] \quad \vec{g}(\vec{r}) = -G \frac{M}{r^2} \hat{r}.$$

Il corpo di massa  $m$  posto in tale punto subisce allora una forza data dal prodotto del valore della sua massa per il valore del campo:

$$[10.4] \quad \vec{F} = m\vec{g}(\vec{r}) = m \cdot \left( -G \frac{M}{r^2} \hat{r} \right),$$

ottenendo come risultato di nuovo l'espressione [10.1].

La legge di gravitazione, così com'è stato scritta qui sopra, fa riferimento a corpi puntiformi. Si può obiettare che il Sole ed i pianeti non sono affatto corpi puntiformi, ma estesi. Già Newton si era posto il problema e l'aveva risolto dimostrando matematicamente che un corpo esteso dotato di simmetria sferica genera un campo gravitazionale nello spazio circostante esattamente identico a quello generato da un ipotetico corpo puntiforme d'uguale massa, posizionato nel centro della sfera.

Noi abbiamo considerato in precedenza la forza peso, che avevamo detto essere una conseguenza dell'attrazione della Terra sui corpi che si trovano in prossimità della sua superficie. Qual è dunque il legame tra quella che noi comunemente chiamiamo forza peso e la forza di gravitazione universale [10.1]? La formula [10.3] ci conduce alla risposta. La Terra è con buona approssimazione una sfera; applicando la formula [10.3], in base all'osservazione appena fatta, che il campo gravitazionale generato da una distribuzione sferica di massa è il valore del campo gravitazionale in prossimità della superficie è identico a quello generato da un ipotetico corpo puntiforme d'uguale massa posizionato nel suo centro, si deduce che in un punto sulla superficie della Terra si ha:

$$[10.5] \quad \vec{g} = -G \frac{M_T}{R_T^2} \hat{r},$$

dove  $M_T$  è la massa della terra ( $5,98 \cdot 10^{24}$  kg) e  $R_T$  il suo raggio (6 370 km). Sostituendo i valori numerici, si trova che il modulo di  $\vec{g}$  il valore di circa  $9.83 \text{ m/s}^2$ , che è appunto, a meno di piccole correzioni dovute principalmente al moto di rotazione della Terra, il valore dell'accelerazione di gravità sulla superficie terrestre.

### 10.3 Il moto dei pianeti e le leggi di Keplero

Analizzando le osservazioni astronomiche disponibili ai suoi tempi, con una laboriosissima serie di calcoli durata oltre 10 anni, Keplero riuscì al principio del XVII secolo a codificare il movimento dei pianeti intorno al Sole formulando le tre leggi, che da allora portano il suo nome:

I pianeti si muovono intorno al Sole su orbite ellittiche, di cui il Sole occupa uno dei fuochi.

Il raggio vettore che congiunge il pianeta al Sole descrive spazi uguali in intervalli di tempo uguali

Il quadrato del periodo di rivoluzione di un pianeta intorno al Sole è proporzionale al cubo delle dimensioni dell'asse maggiore dell'orbita.

Solo 80 anni più tardi Newton fu in grado di dimostrare che le tre leggi di Keplero erano una diretta conseguenza dalla legge di gravitazione universale [10.1] da lui enunciata.

Come esercizio, possiamo verificare la validità della terza legge nel caso semplice di un pianeta in orbita circolare. Per muoversi con velocità  $v$ , costante in modulo, lungo una traiettoria circolare di raggio  $R$  intorno ad un corpo di massa  $M$ , un corpo di massa  $m$  deve essere soggetto ad un'accelerazione centripeta costante, pari a  $\frac{v^2}{R}$ . Questa accelerazione è prodotta dalla forza d'attrazione gravitazionale [10.1], che è diretta appunto verso il corpo d'massa  $M$ . Dovrà quindi essere rispettata la condizione:

$$[10.6] \quad G \frac{mM}{R^2} = m \frac{v^2}{R}$$

Il periodo di rivoluzione  $T$  è legato al valore della velocità  $v$  lungo l'orbita e al raggio  $R$  dell'orbita stessa dalla relazione  $vT = 2\pi R$ , per cui  $v = 2\pi R/T$ . Sostituendo in [10.6] si ottiene la relazione:

$$G \frac{mM}{R^2} = m \frac{(2\pi R/T)^2}{R}$$

che, con semplici manipolazioni algebriche, diviene:

$$[10.7] \quad \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

Inserendo al posto di  $M$  la massa del Sole e al posto di  $R$  la distanza di un pianeta dal Sole, la formula [10.7] calcola il periodo di rivoluzione del pianeta (nel conto naturalmente c'è da prestare attenzione ad utilizzare unità di misura coerenti tra loro!). La stessa formula, inserendo per  $M$  il valore della massa della Terra, permette di calcolare quale sia il periodo di rivoluzione di un satellite artificiale che ruoti intorno alla Terra su orbita circolare ad una distanza  $R$  dal suo centro.

Calcoliamo come esempio il raggio dell'orbita di un satellite televisivo *geostazionario*. Con geostazionario si intende un satellite che resta sempre fisso sopra la verticale di un punto sulla superficie terrestre situato lungo l'equatore, effettuando quindi una rivoluzione completa intorno alla Terra esattamente nello stesso tempo che impiega la Terra a ruotare intorno a se stessa). Nella [10.7] a  $T$  va sostituito il valore di 24 ore (pari a 86 400 s) ed a  $M$  la massa  $M_T$  della Terra. Si trova:

$$R = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 86400^2}{4\pi^2}} = 4.225 \cdot 10^7 \text{ m} = 42\,250 \text{ km} .$$

Un satellite geostazionario orbita dunque intorno alla Terra ad un'altezza (rispetto alla superficie terrestre) di  $(42\,250 - 6\,570)$  km = 35 880 km.

## 10.4 L'energia potenziale gravitazionale

La forza di gravitazione è una forza conservativa. Per un corpo che si trova in un campo gravitazionale si può quindi definire una energia potenziale. Ricordando che l'energia potenziale in un punto  $P$  è definita (§ 7.3) come il lavoro cambiato di segno fatto dalle forze del campo per spostare un corpo dalla posizione di riferimento, in cui si pone zero l'energia, al punto  $P$ . Come si è detto nel § 7.3, in generale si usa assumere quale punto di riferimento in cui porre lo zero dell'energia potenziale, un punto in cui la forza sia nulla. Se guardiamo la formula [10.1], vediamo che la forza gravitazionale non va mai esattamente a zero, ma che, quanto più cresce la distanza  $r$  tra i due corpi, diviene sempre più piccolo il modulo della forza; in termini matematici, si dice che la forza tende a zero per  $r \rightarrow \infty$ . Si pone perciò pari a zero l'energia potenziale “all'infinito”, cioè  $U(r \rightarrow \infty) = 0$  o, come si scrive più usualmente,  $U(\infty) = 0$ .

Consideriamo dunque un corpo di massa  $m$  che si trova nel campo gravitazionale generato da un corpo di massa  $M$  ad una distanza  $R$  da esso. Il lavoro per portare quel corpo da una distanza molto grande ( $\rightarrow\infty$ ) ad una distanza  $R$  può essere calcolato eseguendo l'integrale:<sup>1</sup>

$$[10.8] \quad \mathcal{L}_{\infty \rightarrow R} = \int_{\infty}^R \vec{f}(r) \cdot d\vec{r} = -GMm \int_{\infty}^R \frac{1}{r^2} dr = \left[ \frac{GMm}{r} \right]_{\infty}^R = \frac{GMm}{R}$$

Poiché  $U(R) - U(\infty) = -\mathcal{L}_{\infty \rightarrow R}$  e  $U(\infty) = 0$ , si ottiene come valore dell'energia potenziale:

$$[10.9] \quad U(R) = -\frac{GMm}{R}$$

Si noti il segno negativo che compare nella formula. Esso esprime il fatto che, ponendo pari a zero il valore dell'energia potenziale a grande distanza, l'energia potenziale di un corpo che si trovi nel campo gravitazionale di un pianeta è dunque sempre negativa. Ciò implica che il corpo potrà allontanarsi definitivamente (o come si dice normalmente, uscire dal campo gravitazionale) solo se la sua **energia totale** (la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale) è **positiva**, cioè se ha la sua energia cinetica è maggiore del valore assoluto della sua energia potenziale.

Calcoliamo in particolare qual è la velocità iniziale che si deve imprimere ad un corpo che parta dalla superficie di un pianeta perché si allontani definitivamente da esso. Indichiamo con  $M$  la massa del pianeta, con  $R_0$  il suo raggio e con  $m$  la massa del corpo. L'energia potenziale alla partenza, sulla superficie del pianeta vale  $-G\frac{Mm}{R_0}$ . Perché il corpo si allontani definitivamente occorre che per  $r \rightarrow \infty$  esso possa conservare un'energia cinetica  $\geq 0$ . La velocità iniziale  $v_i$  dovrà dunque soddisfare la condizione:

$$[10.10] \quad \frac{1}{2}mv_i^2 - G\frac{Mm}{R_0} \geq 0$$

La velocità minima per cui questa relazione è soddisfatta:

$$[10.11] \quad v_f = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

è detta *velocità di fuga*.

<sup>1</sup> Il simbolo  $\int_{\infty}^b f(x)dx$  è una notazione che sintetizza l'espressione  $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx$



# 11. Il campo elettrostatico

## 11.1 La legge di Coulomb

L'esperienza dimostra che tra due corpi elettricamente carichi si esercita una forza, che può essere, a seconda dei casi, attrattiva o repulsiva. La fenomenologia può essere spiegata ammettendo l'esistenza di due tipi di cariche, dette, secondo una convenzione risalente a Benjamin Franklin, positive o negative; cariche dello stesso segno si respingono, cariche di segno opposto si attraggono. Oggi si sa che tutta la materia che noi conosciamo è tenuta insieme dalle forze elettriche: gli atomi sono costituiti da un nucleo dotato di carica positiva, in cui è concentrata quasi totalmente la massa, e da particelle molto più leggere, gli elettroni, dotati di carica negativa. Le cariche sono quantizzate: la carica portata da una qualunque particella è, in valore assoluto, un multiplo esatto della carica dell'elettrone.

Dall'osservazione sperimentale si deduce che la forza con cui interagiscono due cariche di valore  $q_1$  e  $q_2$ , supposte puntiformi, è diretta nella direzione della congiungente ed è inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza. Indicando con  $r$  tale distanza e con  $\hat{r}$  il versore che indica la direzione della congiungente, si arriva così a scrivere la *legge di Coulomb*:

$$[11.1] \quad \vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$

in cui  $k$  è una costante di proporzionalità il cui valore numerico dipende dalla scelta delle unità di misura usate per misurare le forze, le distanze e le cariche.

Nel Sistema Internazionale viene definita come unità di misura delle cariche elettriche il *coulomb* (C) e la costante  $k$  assume il valore di circa  $8.99 \cdot 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2$ ; la forza agente tra due cariche puntiformi di 1 C, poste ad una distanza di 1 m una dall'altra, è dunque pari a  $8.99 \cdot 10^9 \text{ N}$ . Come si può notare, il valore della forza è molto grande: una carica statica di 1 coulomb è una carica enorme; si preferisce perciò utilizzare di norma i sottomultipli  $\mu\text{C}$  ( $= 10^{-6} \text{ C}$ ) o  $\text{nC}$  ( $= 10^{-9} \text{ C}$ ).

Di solito, si preferisce scrivere la legge di Coulomb ponendo  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  dove  $\epsilon_0$  è la costante dielettrica del vuoto che vale  $8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N m}^2)$ :

$$[11.2] \quad \vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$

## 11.2 Il campo elettrico

Come si è detto nel § 7.1, l'interazione tra due cariche può essere schematizzata supponendo che la prima carica  $q_1$  generi nello spazio circostante un *campo elettrico* e che la seconda carica  $q_2$  interagisca col campo esistente nel punto in cui essa è localizzata. La grandezza *campo elettrico* è perciò definita come il rapporto tra la forza di origine elettrica che agirebbe su una carica  $q_0$ , posta nel punto considerato, ed il valore della carica stessa (in breve, come *la forza agente sulla carica di valore unitario*):

$$[11.3] \quad \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}.$$

Questa descrizione è operativamente identica alla legge di Coulomb enunciata nel paragrafo precedente, se si assume che il campo generato da una carica puntiforme  $q$  nello spazio circostante ad una distanza  $r$  valga:

$$[11.4] \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}.$$

Applicando formula [11.4], si ha infatti che il campo  $\vec{E}_1$  generato dalla carica  $q_1$  nel punto in cui si trova la carica  $q_2$  vale  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$  ed inserendone tale valore nella [11.3] si trova che la forza agente sulla carica  $q_2$  risulta quindi  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$ , che è la forza di Coulomb.

Nel Sistema Internazionale l'unità di misura del campo elettrico si definisce a partire dalla definizione [11.3] come la forza agente sulla carica unitaria e si esprime in  $\frac{\text{newton}}{\text{coulomb}}$  (N/C). Vedremo in seguito che tale unità può essere espressa in modo assolutamente equivalente anche in  $\text{volt}/\text{m}$ , utilizzando l'unità di potenziale elettrostatico, il *volt*, che introdurremo più avanti.

## 11.3 Il principio di sovrapposizione.

In generale una particella carica non interagisce semplicemente con un'altra carica puntiforme, ma con l'insieme di tutti gli altri corpi carichi esistenti nello spazio circostante. Consideriamo dunque una particella dotata di una carica  $q_0$ . Nello spazio circostante sono presenti altre cariche puntiformi  $q_1, q_2, q_3, \dots$ . La forza globale agente sul corpo considerato è allora la somma **vettoriale** delle forze dovute all'interazione di  $q_0$  con ciascuna delle cariche  $q_1, q_2, q_3, \dots$ . Cioè, in formula:

$$[11.5] \quad \vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{f}_{0i} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q_i}{r_{0i}^2} \hat{r}_{0i} = q_0 \cdot \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_{0i}^2} \hat{r}_{0i}$$

dove con  $r_{0i}$  è la distanza tra il punto  $P_0$  in cui si trova la particella di carica  $q_0$  e il punto  $P_i$  in cui si trova la particella di carica  $q_i$  e  $\hat{r}_{0i}$  è il versore che indica la direzione della congiungente i due punti.

Poiché il campo generato in un punto  $P_0$  dalla carica puntiforme  $i$ -esima è  $\vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_{0i}^2} \hat{r}_{0i}$ , dalla [11.5] si deduce che:

$$[11.6] \quad \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i$$

In conclusione, *il campo elettrico generato da un insieme di cariche puntiformi è punto per punto uguale alla somma vettoriale dei campi elettrici generati dalle singole cariche* (PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE).

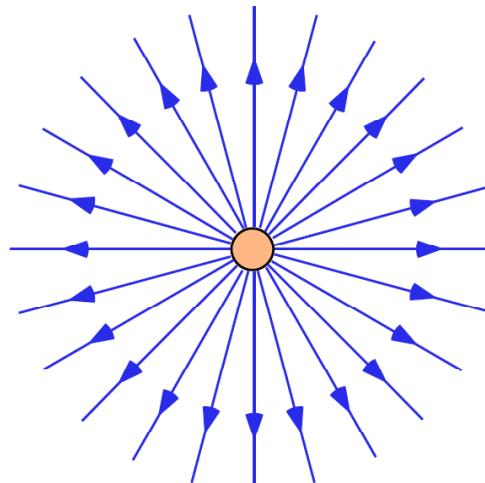
Utilizzando i metodi dell'analisi infinitesimale si può estendere il principio di sovrapposizione al campo elettrico generato da una distribuzione continua di cariche. Il procedimento è quello solito: si suddivide la spazio occupato dalle cariche in tante parti abbastanza piccole da poterle considerare come puntiformi e si applica la [11.6]; il risultato esatto si ottiene calcolando il limite della somma quando le dimensioni delle singoli parti tendono a zero (calcolando cioè un integrale). Formalmente, il campo elettrico si scriverà allora nella forma:

$$[11.7] \quad \vec{E} = \int_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \hat{r} \frac{dq}{r^2}$$

Il calcolo esplicito del campo generato da una distribuzione qualunque di cariche di norma richiede tecniche matematiche assai complesse. E' però possibile in alcuni casi particolari sfruttare alcune proprietà generali del campo elettrico (il teorema di Gauss che ora enunceremo) e le proprietà di simmetria della distribuzione delle cariche per aggirare tali difficoltà e giungere con facilità al risultato.

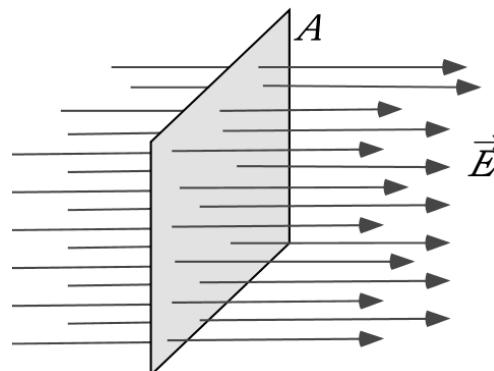
## 11.4 Linee di forza e flusso del campo elettrico

Per visualizzare l'andamento del campo elettrico si usa rappresentarlo graficamente con linee (*linee di forza*), la cui direzione è punto per punto quella del vettore campo elettrico e che sono più o meno addensate in funzione dell'intensità del campo. La Fig. 11-1 mostra le linee di forza che rappresentano l'andamento del campo elettrico generato da un carica elettrica puntiforme positiva.



**Fig. 11-1**

Introduciamo ora il concetto di flusso di campo elettrico. Nel caso in cui il campo elettrico sia uniforme (abbia cioè in tutti i punti lo stesso modulo  $E$  e la stessa direzione). Considerando una superficie piana di area  $A$ , orientata ortogonalmente alla direzione del campo (Fig. 12-1), definiamo **flusso**  $\Phi$  del vettore  $\vec{E}$  attraverso la superficie piana il prodotto di  $|\vec{E}|$  per  $A$ . Graficamente, il flusso è proporzionale al numero delle linee di forza del campo che attraversano la superficie.



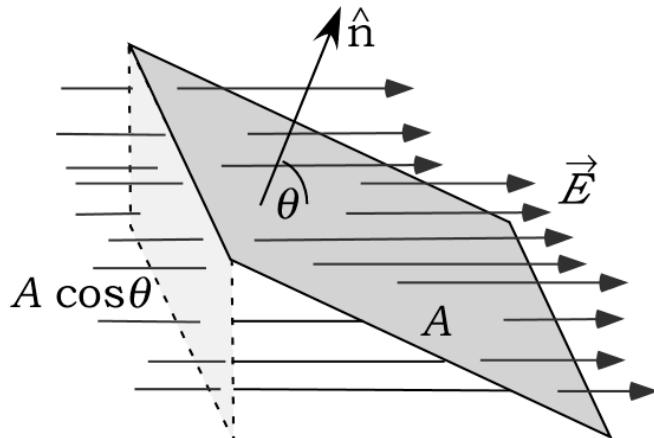
**Fig. 11-2**

Supponiamo ora che la superficie piana  $A$  tagli obliquamente le linee di forza del campo elettrico. Dalla Fig. 11-3 si osserva che il numero di linee di forza del campo tagliate dalla superficie  $A$ , lì disegnata in arancione, è uguale al numero di linee di forza del campo tagliate dalla superficie  $A'$ , disegnata in azzurro, che è la proiezione di  $A$  su un piano ortogonale alla direzione del campo. Indicando con  $\theta$  l'angolo compreso tra la normale al piano e la direzione del campo elettrico. l'area  $A'$  vale  $A \cos\theta$ . Il flusso tagliato da  $A$  risulta quindi pari al prodotto di  $E$  per  $A \cos\theta$ .

In questo coteso è utile definire le superfici piane come grandezze vettoriali, esprimendole come vettori il cui modulo è il valore dell'area e la cui direzione è la direzione della normale al piano su cui giace la superficie. La definizione di flusso del campo elettrico uniforme  $\vec{E}$  attraverso una su-

perficie piana potrà allora essere espressa come il prodotto scalare del vettore  $\vec{E}$  e del vettore  $\vec{A}$ , nella forma:

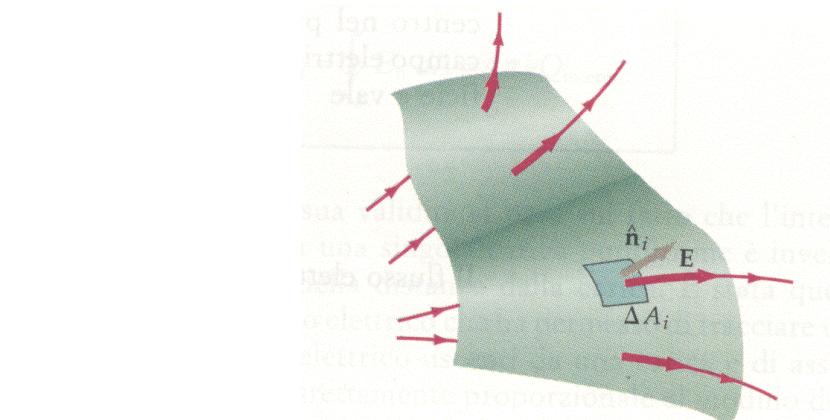
$$[11.8] \quad \Phi(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \vec{A} = |\vec{E}| |\vec{A}| \cos \theta$$



**Fig. 11-3**

Estendiamo ora la definizione al caso in cui  $\vec{E}$  non sia uniforme o la superficie attraverso cui si deve calcolare il flusso non sia piana. A tal fine, si suddivide la superficie in elementi di area  $\Delta \vec{A}_i$ , abbastanza piccoli da poterli considerare piani e da poter considerare su di essi  $\vec{E}$  uniforme. Il flusso di  $\vec{E}$  attraverso l'intera superficie si ottiene eseguendo la somma estesa a tutti gli elementi in cui è stata suddivisa la superficie dei flussi calcolati per ciascun elemento  $\vec{E}_i \cdot \Delta \vec{A}_i$  (Fig. 11-4). Questa operazione può essere formalizzata matematicamente, facendo tendere a zero la dimensione dei singoli elementi di superficie limite ed eseguendo l'operazione di integrazione.

$$[11.9] \quad \Phi = \sum_i \vec{E} \cdot \Delta \vec{A}_i \xrightarrow{\Delta A_i \rightarrow 0} \Phi = \int_{\text{superficie}} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

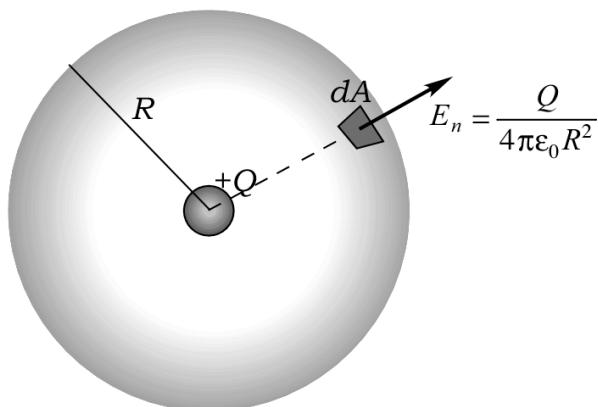


**Fig. 11-4**

## 11.5 Il teorema di Gauss.

Consideriamo un corpo puntiforme di carica  $Q$  e calcoliamo quale sia il flusso del campo elettrico generato da tale carica attraverso una superficie sferica, il cui centro coincida con il punto occupato dal corpo carico (Fig. 11-5). A tal fine suddividiamo la superficie sferica in tante piccole porzioni di area  $dA$ . Il campo  $\vec{E}$  è diretto nella direzione del raggio e quindi è sempre perpendicolare alla superficie. Il flusso di  $\vec{E}$  attraverso il singolo elemento di superficie  $dA$  è perciò dato dal prodotto tra  $dA$  ed il modulo di  $\vec{E}$ , che vale  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$  in tutti i punti della superficie della sfera. Sommando su tutta la superficie della sfera, si ottiene:

$$[11.10] \quad \Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \oint dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$



**Fig. 11-5**

Nel risultato non compare il valore del raggio della superficie sferica: il flusso del campo calcolato è indipendente dal valore del raggio della sfera. In effetti, la superficie cresce con il quadrato del raggio, ma contemporaneamente il valore del campo elettrico decresce in proporzione inversa. Non sarebbe difficile dimostrare, anche se qui non lo facciamo, che si otterrebbe per il flusso lo stesso risultato anche se noi lo attraverso una qualunque superficie, purché questa racchiuda al suo interno la carica  $Q$ . Se poi all'interno della superficie chiusa si trovano più cariche  $q_1, q_2, q_3, \dots$ , i flussi si sommano. Si perviene così in generale a formulare il seguente principio:

**TEOREMA DI GAUSS:** IL FLUSSO DEL CAMPO GENERATO DA UN INSIEME DI CARICHE PUNTIFORMI  $q_i$  ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE CHIUSA È PARI ALLA SOMMA ALGEBRICA DELLE CARICHE CONTENUTE ALL'INTERNO DELLA SUPERFICIE, DIVISA PER LA COSTANTE DIELETTRICA DEL VUOTO:

$$[11.11] \quad \Phi = \frac{\sum_i q_i^{(\text{int})}}{\epsilon_0}$$

Notiamo che il teorema di Gauss si riferisce a superfici chiuse, che quindi dividono lo spazio in una parte interna ed una esterna. Il flusso at-

traverso una superficie chiusa del campo elettrico generato da una carica esterna al volume racchiuso in tale superficie è nullo. Dalla Fig. 11-6 si può infatti evidenziare come le linee di forza che entrano all'interno della superficie ne riescano poi dalla parte opposta.

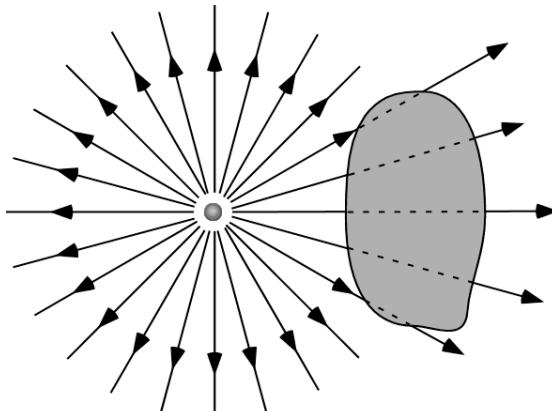


Fig. 11-6

## 11.6 Corpi conduttori e corpi isolanti .

I corpi in natura possono essere classificati come isolanti se le cariche al loro interno sono vincolate o come conduttori se esse sono libere di muoversi. Questa è chiaramente una definizione semplificata, ma più che sufficiente per i nostri scopi. Esempi di corpi isolanti sono i vetri, il quarzo, i materiali plastici, il sale da cucina; esempi di conduttori sono i metalli o le soluzioni saline.

Per i corpi conduttori, il teorema di Gauss permette di dedurre alcune interessanti proprietà. Consideriamo un conduttore in condizioni d'equilibrio, quando cioè non vi sia al suo interno un movimento macroscopico di cariche. *Per un conduttore all'equilibrio* valgono le seguenti proprietà:

- il campo elettrico all'interno del conduttore è uguale a zero
- le eventuali cariche libere sono distribuite esclusivamente sulla superficie
- il campo elettrico sulla superficie ha direzione ortogonale ad essa ed è proporzionale al valore locale della densità di carica.

Vediamo di giustificarle nell'ordine.

La prima affermazione discende direttamente dalla definizione di corpo conduttore. Se il campo elettrico all'interno del conduttore non fosse nullo, le cariche, che per definizione di conduttore sono libere di muoversi, sarebbero sottoposte ad una forza e si muoverebbero, contraddicendo l'ipotesi fatta di equilibrio.

In base al teorema di Gauss possiamo poi che dimostrare che in condizioni statiche l'interno del conduttore deve essere ovunque neutro. La presenza di una carica in un punto all'interno implicherebbe infatti che in un intorno di esso potremmo considerare una superficie chiusa interna al

conduttore attraverso la quale il flusso del campo elettrico dovrebbe essere diverso da zero; ma questo è in contraddizione con quanto dimostrato nel punto precedente, poiché implica che da qualche parte dentro il conduttore ci sia un campo non nullo.

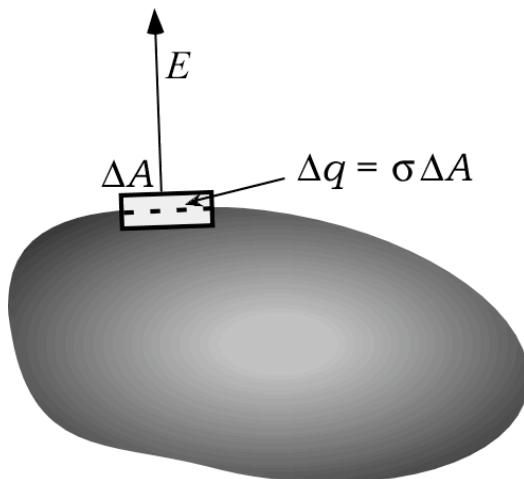
Si noti che ragionamento appena fatto non vale per un punto situato sulla superficie del conduttore. In effetti la presenza di un campo elettrico sulla superficie non è proibita, purché esso abbia una direzione ortogonale alla superficie stessa: la carica è infatti libera di muoversi nel conduttore, ma non di uscire da esso!

Le eventuali cariche presenti nel conduttore si distribuiscono quindi sulla sua superficie. Dato un elemento di superficie di area  $\Delta A$ , definiamo come *densità di carica*  $\sigma$  il rapporto tra la quantità di carica  $\Delta q$  presente su tale superficie e l'area, ovvero:

$$[11.12] \quad \sigma = \frac{\Delta q}{\Delta A}$$

Il valore del campo in un punto sulla superficie del conduttore è legato al valore della densità locale di carica. Facendo riferimento alla Fig. 11-7, consideriamo un elemento di superficie di area  $\Delta A$  sul quale la densità locale di carica sia  $\sigma$ . Ciò significa che nell'area  $\Delta A$  è presente una carica pari a  $\sigma \Delta A$ . Consideriamo ora una superficie cilindrica (indicata in verde nel disegno), avente una base di area  $\Delta A$  all'interno del conduttore, immediatamente al di sotto della superficie, e l'altra immediatamente fuori. Applichiamo il teorema di Gauss a tale superficie: il flusso di  $\vec{E}$  attraverso di essa è pari alla quantità totale di carica racchiusa divisa per  $\epsilon_0$ . Il campo elettrico interno al conduttore è nullo e quindi è nullo il flusso di  $\vec{E}$  attraverso la superficie della base del cilindro interna al conduttore. Ancora nullo è il flusso di  $\vec{E}$  attraverso la superficie laterale, essendo il campo diretto ortogonalmente alla superficie del conduttore. Il flusso totale è dato quindi esclusivamente dal flusso attraverso la base esterna al conduttore, che vale  $E \Delta A$ . Applicando il teorema di Gauss [11.11], si ottiene:

$$E \Delta A = \frac{\sigma \Delta A}{\epsilon_0},$$



**Fig. 11-7**

ovvero:

[11.13]

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

## 11.7 Campo generato da una sfera carica conduttrice

Il teorema di Gauss permette di ricavare con facilità il campo elettrico generato da alcune distribuzioni di carica sfruttandone le proprietà di simmetria.

Noi esamineremo qui il caso di una sfera conduttrice di raggio  $R$  su cui si trova una carica  $Q$ . Per quanto detto nel paragrafo precedente, in condizioni statiche questa carica si distribuisce sulla superficie della sfera. Data la simmetria della sfera, tutti i punti della superficie sono equivalenti tra loro e la carica si distribuisce sulla superficie in modo omogeneo.

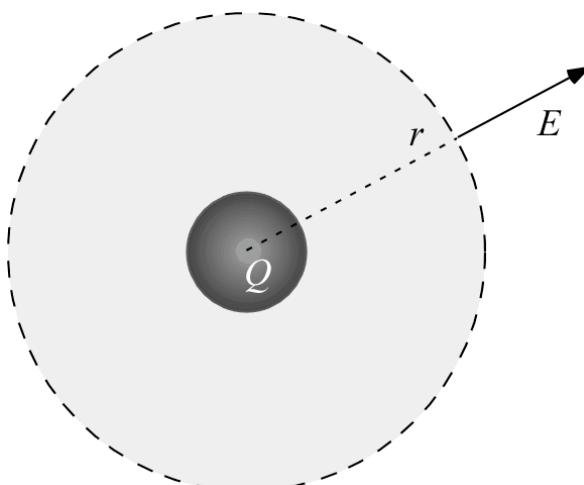
Già sappiamo che all'interno della sfera il campo è nullo. Per calcolare il valore del campo all'esterno della sfera, ad una distanza  $r$  dal suo centro, applichiamo il teorema di Gauss. A tal fine, consideriamo (Fig. 11-8) una superficie sferica di raggio  $r$  concentrica alla sfera carica. Su ogni punto di questa superficie il campo elettrico, per rispettare la simmetria di distribuzione delle cariche, deve essere diretto in direzione radiale. Sempre per rispettare la simmetria di distribuzione delle cariche, il modulo  $E(r)$  deve essere identico su tutti i punti della superficie. Il flusso totale attraverso la superficie è allora  $\Phi = E(r) \cdot 4\pi r^2$  e, in base al teorema di Gauss:

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

da cui:

[11.14]

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$



**Fig. 11-8**

Si può quindi concludere che *il campo elettrico generato da una sfera conduttrice carica è, esternamente alla sfera, esattamente identico a quello generato da un corpo puntiforme d'uguale carica posto nel centro della sfera.* Come si è già detto, all'interno della sfera il campo è invece nullo.

# 12. Il potenziale elettrostatico e i condensatori

## 12.1 Il potenziale elettrostatico

La forza  $\vec{F}$  agente su un corpo di carica  $q$  e massa  $m$  all'interno di un campo elettrico  $\vec{E}$  è, in base alla definizione [11.3],

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Il moto del corpo + quindi determinato dall'equazione:

$$[12.1] \quad m\vec{a} = q\vec{E}$$

In generale il campo elettrico  $\vec{E}$  varia da punto a punto e ricavare la legge oraria del moto dalla [12.1] non è immediato, a meno di casi particolari. Se il campo è uniforme (cioè ha lo stesso valore in tutti i punti dello spazio), dalla [12.1] si ricava che il corpo si muove di moto uniformemente accelerato con un'accelerazione costante  $\frac{q\vec{E}}{m}$ . In altri casi ricavare la legge del moto può essere un problema matematicamente complesso.

Riprendiamo qui i concetti sviluppati in meccanica nel cap. 6 e 7, riguardanti il lavoro e l'energia. Il lavoro effettuato dal campo elettrico su una carica in movimento si ricava dalla [6.10]:

$$\mathcal{L}_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Il campo elettrostatico è un campo conservativo; si può quindi definire per un corpo carico posto all'interno del campo una *energia potenziale elettrostatica*. In base alla definizione [7.2], la differenza d'energia potenziale elettrostatica tra due punti A e B è data dalla formula

$$[12.2] \quad \Delta U = U(B) - U(A) = -\mathcal{L}_{AB} = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Come si vede, la differenza d'energia potenziale [12.2] è il prodotto tra il valore della carica del corpo in movimento e un termine  $-\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$ , che dipende solo dal campo elettrico e quindi dalla distribuzione di cariche che generano il campo. Questo secondo termine, che possiamo interpretare come il valore della differenza di energia potenziale tra il punto B ed il punto A di un corpo che porta la carica unitaria, prende il nome di *differenza di potenziale elettrostatico*.

**DEFINIZIONE:** LA DIFFERENZA DI POTENZIALE ELETTROSTATICO TRA DUE PUNTI A E B È DEFINITA COME IL LAVORO CAMBIATO DI SEGNO PER PORTARE LA CARICA UNITARIA DA A A B.

$$[12.3] \quad \Delta V = V(B) - V(A) = -\frac{\mathcal{L}_{AB}}{q} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Da questa definizione si ricava che l'unità di misura nel sistema internazionale del potenziale elettrostatico è pari a  $1 \text{ joule} / 1 \text{ coulomb}$ . Essa prende il nome di *volt* (V).

Di norma si assume il riferimento di zero del potenziale elettrostatico *all'infinito*, cioè a grande distanza dalla cariche generanti il campo. Il potenziale elettrostatico di un punto A è allora così definito:

$$[12.4] \quad V(A) = -\int_{\infty}^A \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

## 12.2 Potenziale elettrostatico di una carica puntiforme

Si abbia una carica puntiforme  $q$ . Ci proponiamo di calcolare quale sia il valore del potenziale elettrostatico generato da essa nello spazio circostante. Sappiamo che il campo elettrico ad un distanza  $\vec{r}$  dalla carica è  $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$ ; il valore del potenziale elettrostatico in un punto A, posto alla distanza  $r_A$  dalla carica si calcola utilizzando la definizione [12.4]:

$$V(A) = -\int_{\infty}^A \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_{\infty}^{r_A} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{r_A} \frac{1}{r^2} dr = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \right]_{r=\infty}^{r=r_A} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_A} .$$

In funzione della distanza  $r$  si ha quindi:

$$[12.5] \quad V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} .$$

Se a generare il campo sono da più cariche puntiformi  $q_1, q_2, q_3, \dots$ , il potenziale in un punto A si calcola in base al principio di sovrapposizione dei campi elettrici [11.6]:

$$V(A) = -\int_{\infty}^A \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_{\infty}^A \sum_i \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = -\int_{\infty}^A \sum_i (\vec{E}_i \cdot d\vec{s}) = -\sum_i \int_{\infty}^A \vec{E}_i \cdot d\vec{s} ,$$

essendo  $\vec{E}_i$  il campo generato dalla carica  $q_i$ .

Osservando che  $-\int_{\infty}^A \vec{E}_i \cdot d\vec{s}$  è il valore del potenziale elettrostatico  $V_i$  generato in A dalla carica  $q_i$ , si ottiene infine:

$$[12.6] \quad V(A) = \sum_i V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_{A,i}},$$

essendo  $r_{A,i}$  la distanza tra A e la carica  $q_i$ .

Nel caso di una distribuzione continua di cariche, nella [12.6] la somma diviene un integrale:

$$[12.7] \quad V(A) = \int_V \frac{dq}{r}$$

dove l'integrale è esteso a tutto il volume  $\mathcal{V}$  occupato dalle cariche.

Si noti qui una importante differenza tra le formule [11.6] e [11.7], che descrivono la sovrapposizione dei campi elettrostatici generati da un insieme di cariche, e le formule [12.7] e [12.9], che descrivono la sovrapposizione dei potenziali elettrostatici generati da un insieme di cariche. Mentre nelle prime occorre effettuare delle somme *vettoriali*, spesso assai laboriose, per sovrapporre i potenziali si effettuano somme *algebriche*.

### 12.3 Potenziale di un conduttore

Come si è visto nel § 11.6, in condizioni statiche all'interno di un conduttore il campo elettrico è nullo. Di conseguenza, la differenza di potenziale tra due punti di un conduttore è nulla ed il valore del potenziale è uniforme in ogni suo punto o, come si dice normalmente, il conduttore è *equipotenziale*. In condizioni statiche si può quindi definire un *potenziale del conduttore*. Esso è il lavoro, cambiato di segno, necessario a portare la carica unitaria dall'infinito alla superficie di esso.

Nel caso di una sfera conduttrice di raggio  $a$  e carica  $Q$ , essendo il campo elettrico all'esterno della sfera identico a quello generato da una carica puntiforme posto nel centro, il valore del potenziale è:

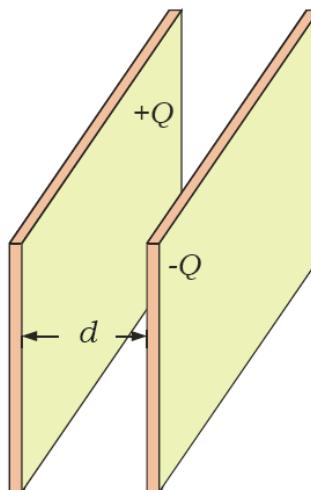
$$[12.8] \quad V_{conduttore} = - \int_{\infty}^A \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_{\infty}^a \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a}.$$

Poiché la Terra può essere considerata nel suo insieme come un corpo conduttore, l'espressione *mettere a terra*, che esprime il fatto di collegare un corpo conduttore alla Terra tramite un altro conduttore, significa che tale corpo è posto a potenziale nullo.

## 12.4 I condensatori

Consideriamo due corpi conduttori isolati tra loro, di forma arbitraria, posti uno vicino all'altro. Il dispositivo così ottenuto è detto *condensatore*; i due conduttori sono detti le sue *armature*. Particolare interesse ha la struttura raffigurata in Fig. 12-1, detta *condensatore piano*, in cui le armature sono costituite da due lastre conduttrici parallele di area  $A$ , separate tra loro di una distanza  $d$ .

Supponiamo che la carica complessiva del condensatore sia nulla e trasferiamo sulla prima armatura una carica  $+Q$  prelevata dall'altra, che quindi risulterà avere una carica  $-Q$ . Nello spazio compreso tra i due corpi sarà allora presente un campo elettrico, la cui intensità è chiaramente proporzionale al valore di  $Q$ . Le linee di forza del campo escono dal conduttore carico positivamente per chiudersi sul conduttore carico negativamente; tra le due armature c'è quindi una differenza di potenziale  $\Delta V$ . Essendo il valore del campo elettrico in ogni punto direttamente proporzionale alla carica  $Q$ , anche il valore di  $\Delta V$  sarà proporzionale a  $Q$ .



**Fig. 12-1**

Il rapporto tra  $Q$  e  $\Delta V$  è dunque una costante, che dipende solo dalla forma geometrica dei due corpi e dalla loro posizione reciproca. Tale costante definisce una grandezza detta *capacità elettrostatica*:

$$\boxed{[12.9] \quad C = \frac{Q}{\Delta V}}$$

In base a questa definizione, l'unità di misura della capacità coerente con il Sistema Internazionale, è la capacità del condensatore che, caricato con la carica di 1 coulomb, assume la differenza di potenziale tra le armature pari a 1 volt. A tale unità è stato attribuito il nome di *farad* ( $F$ ).

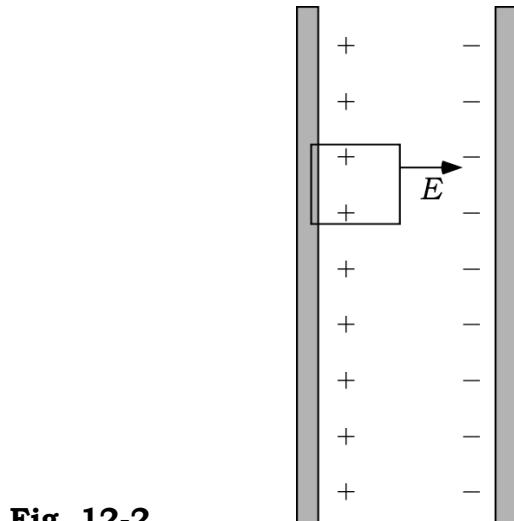
Il *farad* risulta essere un'unità di misura molto grande per le applicazioni pratiche. Di norma, vengono utilizzati i suoi sottomultipli  $\mu F$  ( $= 10^{-6} F$ ) e  $pF$  ( $= 10^{-12} F$ ).

## 12.5 Il condensatore piano

Il valore del campo elettrico e la capacità all'interno di un condensatore piano possono essere facilmente calcolati utilizzando il teorema di Gauss. Facciamo l'ipotesi che le armature del condensatore piano si estendano all'infinito (non è ovviamente un caso fisico, ma ci semplifica il ragionamento) e consideriamo un punto P qualunque all'interno del condensatore. Supponiamo che sulla superficie interna di un'armatura sia distribuita una densità uniforme di carica  $\sigma$  (e che quindi ci sia una densità di carica  $-\sigma$  sull'altra). La simmetria della struttura impone che il campo elettrico abbia direzione perpendicolare alle armature (Fig. 12-2). Per calcolarne il valore, applichiamo il teorema di Gauss alla superficie chiusa di un cilindro che ha una base di area  $A'$  entro l'armatura carica positiva, l'altra, parallela alla prima, passante per P ed ha la superficie laterale ortogonale alle armature. All'interno del conduttore il campo è nullo; il flusso del campo elettrico attraverso la base interna al conduttore è perciò nullo e pure nullo è il flusso attraverso la superficie laterale. Il flusso totale è quindi pari al flusso attraverso la base del cilindro interna al condensatore, uguale a  $E A'$ , essendo  $E$  il valore del modulo del campo elettrico in P. Poiché la carica contenuta all'interno del cilindro è  $\sigma A'$ , si ha per il teorema di Gauss  $E A' = \frac{\sigma A'}{\epsilon_0}$ , ovvero:

[12.10]

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



**Fig. 12-2**

Osserviamo che il valore trovato non dipende da quale sia il punto P entro il condensatore; ne concludiamo che **il campo elettrico all'interno di un condensatore piano è uniforme**, cioè ha in tutti i punti lo stesso valore assoluto e la stessa direzione. Queste conclusioni sono rigorosamente vere per un condensatore infinito, ma mantengono la loro validità anche per condensatori reali, di dimensione finita, purché la distanza tra le armature sia abbastanza piccola rispetto alle loro dimensioni trasversali. Per un

condensatore piano di area  $A$ , con una carica totale  $Q = \sigma A$  sull'armatura, la [12.10] diventa:

$$[12.11] \quad E = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

E' ora assai semplice calcolare il valore della differenza di potenziale tra le armature del condensatore piano. Dalla formula che definisce il potenziale elettrostatico  $V = \int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{s}$ , essendo il vettore  $\vec{E}$  costante, si ottiene immediatamente  $V = Ed$  e quindi:

$$[12.12] \quad V = \frac{qd}{\epsilon_0 A}.$$

La capacità del condensatore risulta allora:

$$C = \frac{q}{V} = \frac{q}{qd/\epsilon_0 A},$$

da cui:

$$[12.13] \quad C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

## 12.6 Energia immagazzinata in un condensatore

Si è detto che un condensatore, quando è carico, immagazzina energia potenziale. Abbiamo dunque un condensatore (qualunque sia la sua forma) di capacità  $C$  e ci proponiamo di calcolare il lavoro richiesto per caricare il condensatore da zero al valore finale  $Q$ .

Il lavoro necessario per trasferire una quantità infinitesima di carica  $dq$  da un'armatura all'altra è  $V dq$ , essendo  $V$  il valore della differenza di potenziale. Il valore di  $V$  non è costante durante il processo di carica; in base alla formula [12.12] esso istante per istante è proporzionale alla quantità di carica presente sulle armature. Quando sul condensatore si trova una carica  $q'$ ; la differenza di potenziale tra le armature è  $V' = \frac{q'}{C}$  e il lavoro necessario per spostare da un conduttore all'altro un'ulteriore carica  $dq'$  è:

$$d\mathcal{L} = V' dq' = \frac{q'}{C} dq'$$

Il lavoro totale necessario a caricare il condensatore è la somma di tutti questi lavori infinitesimi, a partire da quando la carica è nulla fino a quando è stata trasferita la carica  $Q$ :

$$\mathcal{L} = \int d\mathcal{L} = \int_0^Q \frac{q'}{C} dq' = \frac{1}{C} \int_0^Q q' dq' = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Quando il condensatore viene scaricato, esso restituisce questa stessa quantità di lavoro. In termini di energia, possiamo quindi dire che nel condensatore carico è stata immagazzinata un'energia potenziale elettrostatica, pari al lavoro fatto per caricarlo.

Indicando con  $U$  tale energia e ricordando la definizione di capacità elettrica, si ottengono le seguenti tre formule

:

$$[12.14] \quad U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad U = \frac{1}{2} CV^2 \quad U = \frac{1}{2} QV$$



# 13. La corrente elettrica

## 13.1 Definizione di corrente

Se ai capi di un conduttore viene applicata una differenza di potenziale, all'interno di esso si produce un campo elettrico che accelera le cariche libere di muoversi. Tipicamente in un conduttore metallico queste sono gli elettroni di valenza degli atomi. Le collisioni dei portatori di carica con gli ioni del reticolo cristallino del conduttore generano una sorta di forza viscosa (cioè una forza, in direzione opposta al moto, direttamente proporzionale alla velocità) che si oppone al movimento degli elettroni. Come si è visto nel § 5.8, un corpo soggetto ad una forza costante (nel nostro caso la forza elettrostatica) in presenza di una forza viscosa raggiunge rapidamente un regime stazionario, in cui si muove con una velocità costante  $v_d$ , che è la velocità alla quale la forza viscosa egualmente la forza elettrostatica e che viene indicata col nome di *velocità di deriva* o *velocità di drift*. La misura del flusso delle cariche attraverso una sezione di area  $A$  del conduttore (cioè la quantità di carica che fluisce attraverso la sezione del conduttore nell'unità di tempo) prende il nome di **corrente elettrica**. Indicando con  $\Delta q$  la carica totale che attraversa una sezione del conduttore in un intervallo di tempo  $\Delta t$ , si definisce quindi come *corrente media*:

$$[13.1] \quad i_{\text{media}} = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

La [13.1], effettuando l'operazione di passaggio al limite per  $\Delta t \rightarrow 0$ , dà la definizione di *corrente istantanea*:

$$[13.2] \quad i = \frac{dq}{dt}$$

In un conduttore metallico la corrente è portata dagli elettroni, ognuno dei quali ha una carica  $-e$ . La carica che attraversa una sezione di area  $A$  del conduttore in un tempo  $dt$  è allora quella contenuta nel volume di base  $A$  ed altezza  $v_d dt$ . Si può quindi scrivere la corrente come:

$$[13.3] \quad i = -n e v_d A,$$

dove  $n$  è la densità (numero per unità di volume) degli elettroni liberi di muoversi (elettroni di valenza) nel conduttore.

Nel sistema internazionale l'unità di misura della corrente è l'*ampère* (A). In base alla [13.1], 1 *ampère* è la corrente che fluisce in un conduttore

quando attraverso una sua sezione passa la carica di 1 *coulomb* in 1 *secondo*, ovvero  $1 \text{ A} = \frac{1 \text{ C}}{1 \text{ s}}$ .

NEL S.I. L'**AMPÈRE** È DEFINITO COME UNITÀ FONDAMENTALE IN BASE ALLE PROPRIETÀ MAGNETICHE DELLE CORRENTI (COME SI VEDRÀ IN SEGUITO) E LA FORMULA [13.1] È USATA PER DEFINIRE IL **COULOMB**.

## 13.2 La resistenza elettrica

Si è dunque visto che, applicando una differenza di potenziale ai capi di un conduttore, in esso fluisce una corrente elettrica. Il rapporto tra il valore della differenza di potenziale applicata e quello della corrente si definisce come *resistenza* del conduttore:

$$[13.4] \quad R = \frac{\Delta V}{i}$$

L'unità di misura della resistenza elettrica è stata denominata *ohm* ( $\Omega$ ): 1 *ohm* è la resistenza di un conduttore in cui fluisce la corrente di 1 *ampère*, quando si applica ai suoi capi una differenza di potenziale di 1 *volt*.

In un conduttore metallico il valore della resistenza è una costante (*legge di Ohm*). Esso è direttamente proporzionale alla lunghezza  $l$  del conduttore e inversamente proporzionale alla sua sezione  $A$ :

$$[13.5] \quad R = \rho \frac{l}{A} .$$

La costante di proporzionalità  $\rho$ , caratteristica della natura del conduttore, prende il nome di *resistività* e si misura in  $\Omega \cdot \text{m}$

In alcuni casi (in particolare riferendosi a conduttori non metallici) per caratterizzare le proprietà elettriche di un materiale, anziché le grandezze *resistenza* e *resistività*, si preferisce utilizzare i loro reciproci, detti *conduttanza* ( $S$ ) e *conduttività* ( $\sigma$ ), definiti come:

$$[13.6] \quad S = \frac{1}{R} = \frac{I}{\Delta V} \quad \text{e} \quad \sigma = \frac{1}{\rho} .$$

L'unità di misura per la conduttanza è il *siemens* ( $\text{Si}$ ) e per la conduttività il  $\text{Si}/\text{m}$ .

Per far passare la corrente in un conduttore, il campo elettrico compie un lavoro sui portatori di carica. L'energia così fornita è dissipata negli urti dei portatori di carica contro gli altri atomi o ioni del conduttore, producendo il riscaldamento del conduttore. Poiché il lavoro effettuato dal campo elettrico per muovere la carica  $dq$  attraverso una differenza di potenziale  $\Delta V$  è:

$$[13.7] \quad d\mathcal{L} = \Delta V dq = \Delta V i dt ,$$

e ricordando che la potenza era stata definita come il lavoro effettuato nell'unità di tempo (§ 6.9), si ottiene:

[13.8]

$$P = \Delta V \cdot i$$

in cui  $P$  è la potenza necessaria a far fluire la corrente. Tale potenza, come ha dimostrato a suo tempo Joule, è dissipata sotto forma di calore. Questo effetto termico della corrente prende il nome di *effetto Joule* e la legge [13.8] è appunto nota anche come *legge di Joule*.

Usando la definizione di resistenza [13.4], si può riscrivere la [13.8] anche nella forma:

[13.9]

$$P = i^2 R \quad \text{ovvero} \quad P = \frac{\Delta V^2}{R}.$$

### 13.3 Circuiti elettrici

Per mantenere una corrente elettrica costante attraverso un conduttore, occorre fornire l'energia necessaria a mantenere stabile la differenza di potenziale ai suoi capi. A ciò provvede quello che viene detto un generatore di tensione (può essere una pila, una batteria, una macchina elettrica ...). In Fig. 13-1 sono mostrati i simboli che vengono utilizzati per indicare negli schemi elettrici un *generatore di tensione* e un *resistore* (cioè un conduttore caratterizzato dalla sua resistenza elettrica).

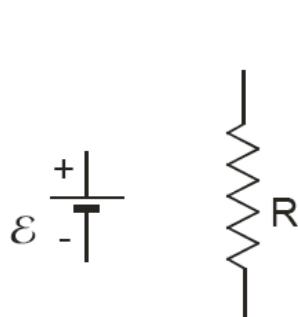


Fig. 13-1

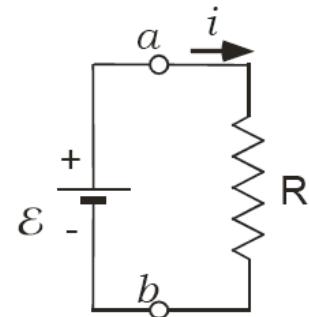


Fig. 13-2

Consideriamo il semplice circuito elettrico schematizzato in Fig. 13-2. Esso comprende un generatore di tensione ai cui capi è connesso un resistore. Perché il circuito costituito dal generatore e dal conduttore possa mantenersi in regime stazionario<sup>1</sup>, il generatore deve far risalire alle cariche il salto di potenziale esistente ai capi del resistore, restituendo quindi ad esse l'energia dissipata per effetto Joule. Si definisce **forza elettromotrice** o **tensione** il lavoro per unità di carica speso dal generatore per mantenere ai capi di un conduttore una differenza di potenziale costante:

[13.10]

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{L}}{q} .$$

<sup>1</sup> Ricordiamo che un sistema si dice in regime stazionario quando le grandezze che lo descrivono si mantengono costanti nel tempo. Qui quindi si intende che la corrente si mantiene costante nel tempo.

In base a tale definizione, la forza elettromotrice ha le stesse dimensioni fisiche del potenziale elettrostatico e quindi la sua unità di misura è ancora il *volt*. In effetti la denominazione di forza elettromotrice è impropria; essa, nonostante il suo nome, non è affatto una forza.

In un generatore ideale il valore della forza elettromotrice uguaglia il valore della caduta di potenziale ai capi del resistore; è cioè  $\mathcal{E} = V_a - V_b = iR$ , essendo  $i$  la corrente che attraversa il resistore. In effetti si può verificare sperimentalmente che non è esattamente così. Se prendiamo una pila e colleghiamo ad essa dei resistori con valori di resistenza diversi, si osserva come, al diminuire della resistenza, diminuisca anche il valore della differenza di potenziale  $V_A - V_B$  ai capi del resistore e quindi del prodotto  $iR$ . Questo si spiega tenendo presente che la corrente elettrica deve circolare anche all'interno nel generatore, dissipando anche lì energia, in misura proporzionale al valore della corrente. Ai capi del generatore, quando in esso circola una corrente  $i$ , la differenza potenziale non è perciò  $\mathcal{E}$ , ma  $\mathcal{E} - i r_i$ . La quantità  $r_i$  prende il nome di *resistenza interna del generatore*. Nel circuito di Fig. 13-3, in cui è evidenziata la resistenza interna del generatore di tensione, si ha dunque:

[13.11]

$$\mathcal{E} - i r_i = V_a - V_b = i R .$$

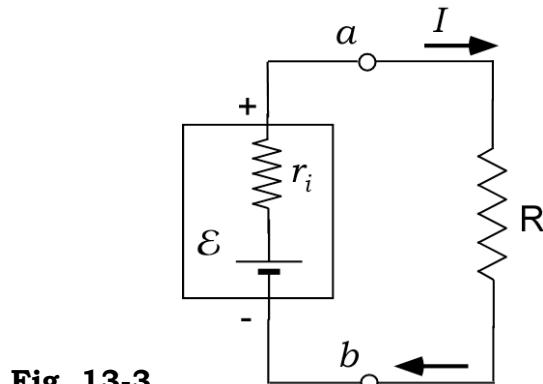


Fig. 13-3

### 13.4 Circuiti in serie ed in parallelo

Quando si connettono più conduttori ad un generatore di tensione, esistono delle semplici regole che permettono di risolvere il circuito, di calcolare cioè la corrente complessiva fornita dal generatore, le correnti che passano in ogni ramo del circuito e le tensioni che si misurano ai capi dei singoli resistori.

Il primo caso che esaminiamo è quello delle **resistenze in serie**. Due o più resistori si dicono *in serie* tra loro se sono attraversati uno dopo l'altro dalla stessa corrente. Questo è il caso dei tre resistori in Fig. 13-4, aventi resistenza  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$ . Applicando la legge di Ohm ai tre singoli resistori, otteniamo le relazioni:

$$[13.12] \quad V_b - V_a = IR_1; \quad V_c - V_b = IR_2; \quad V_d - V_c = IR_3,$$

da cui, sommando membro a membro le tre eguaglianze, si ottiene:

$$[13.13] \quad V_d - V_a = I R_1 + I R_2 + I R_3 = I R_{eq},$$

dove  $R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$  è la resistenza del *circuito equivalente* di Fig.13-5, in cui i tre resistori in serie sono stati sostituiti da un unico resistore, mantenendo lo stesso valore della corrente circolante

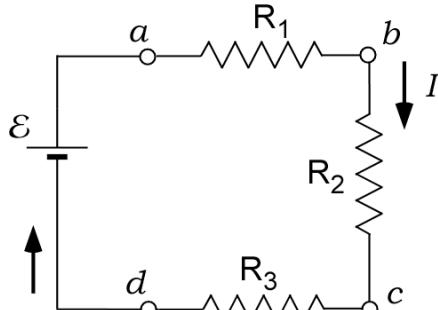


Fig. 13-4

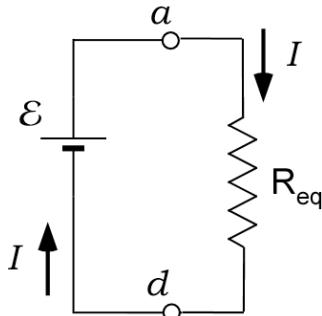


Fig. 13-5

Se ne deduce la seguente regola:

Quando più conduttori sono posti in **serie** tra di loro, essi sono equivalenti ad un unico resistore la cui resistenza è la somma delle singole resistenze.

Vediamo ora invece il caso che più resistori siano posti in **parallelo** tra loro. Questo è il caso in Fig. 13-6 dei due resistori di resistenza  $R_1$  e  $R_2$ . La corrente totale  $I_T$  si ripartisce in  $a$  tra i due resistori per poi ricombinarsi in  $b$ ; dette  $I_1$  e  $I_2$  le correnti nei due rami è ovviamente  $I_1 + I_2 = I_T$ .

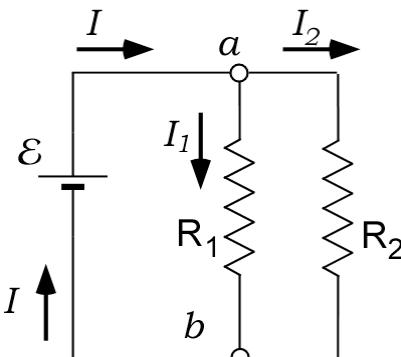


Fig. 13-6

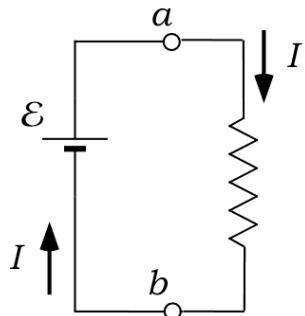


Fig. 13-7

Ai capi dei due resistori c'è la stessa differenza di potenziale  $V_b - V_a$ . Applicando quindi ad essi la legge di Ohm, si ha:

$$[13.14] \quad V_b - V_a = I_1 R_1; \quad V_b - V_a = I_2 R_2;$$

cioè:

$$I_1 = \frac{V_b - V_a}{R_1}; \quad I_2 = \frac{V_b - V_a}{R_2}$$

e quindi:

$$I_T = (V_b - V_a) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Il circuito di Fig. 13-6 è dunque equivalente a quello di Fig. 13-7, in cui i due conduttori in parallelo sono sostituiti da un unico resistore di resistenza  $R_{eq}$ , tale che

$$[13.15] \quad \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} .$$

Se ne deduce la seguente regola:

Quando più conduttori sono posti **in parallelo** tra di loro, essi sono equivalenti ad un unico resistore la cui resistenza è l'inverso della somma degli inversi delle singole resistenze.

Ricordando la definizione di conduttanza, possiamo dare quest'altra regola equivalente:

Quando più conduttori sono posti **in parallelo** tra di loro, essi sono equivalenti ad un unico conduttore la cui conduttanza è la somma delle singole conduttanze.

In generale si potranno presentare situazioni più complesse, in cui si dovranno applicare più volte al circuito le leggi sopra indicate.

# 14. Il campo magnetico

## 14.1 La forza di Lorentz

L'interazione tra corpi carichi in condizioni statiche è descritta dalle forze elettrostatiche che abbiamo studiato nei capitoli precedenti. Su un corpo carico agisce una forza proporzionale al valore  $q$  della carica e al valore  $\vec{E}$  del campo elettrico esistente nel punto occupato dal corpo. Il valore di  $\vec{E}$  è determinato dalla posizione dell'insieme di cariche che si trovano nello spazio circostante. Osservando però le forze agenti su un corpo carico in movimento o su un conduttore in cui passi una corrente elettrica, la descrizione va completata introducendo un altro campo  $\vec{B}$ , detto **campo magnetico**, la cui origine è legata alla presenza di correnti elettriche esistenti nello spazio circostante.

Trascurando per il momento il problema di come si producano i campi magnetici, osserviamo il moto di un corpo di carica  $q$  (per esempio un elettrone o uno ione atomico) che si muova con velocità  $\vec{v}$  in una zona di spazio in cui ci sia un campo magnetico costante  $\vec{B}$ . Dai dati sperimentali si ricava che esso è soggetto ad una forza, proporzionale al valore del campo, che è anche direttamente proporzionale alla velocità e alla carica  $q$ . Questa forza è detta *forza di Lorentz*. Si osserva inoltre che il suo valore dipende anche dalla direzione relativa del vettore  $\vec{v}$  rispetto al vettore  $\vec{B}$  (ovvero dall'angolo  $\theta$  compreso tra i due vettori) e che la sua direzione è ortogonale sia alla direzione di  $\vec{v}$  che a quella di  $\vec{B}$ . Riassumendo in formula la relazione tra i moduli dei vettori:

$$[14.1] \quad |\vec{f}| = qvB\sin\theta$$

La forza è quindi nulla se  $\sin\theta = 0$  ( $\theta = 0^\circ$  oppure  $\theta = 180^\circ$ ): è il caso in cui la carica si muove parallelamente alla direzione del campo magnetico.

La forza di Lorentz può essere espressa in forma vettoriale, utilizzando l'operazione di prodotto vettoriale di due vettori che introdurremo nel paragrafo seguente, nella forma:

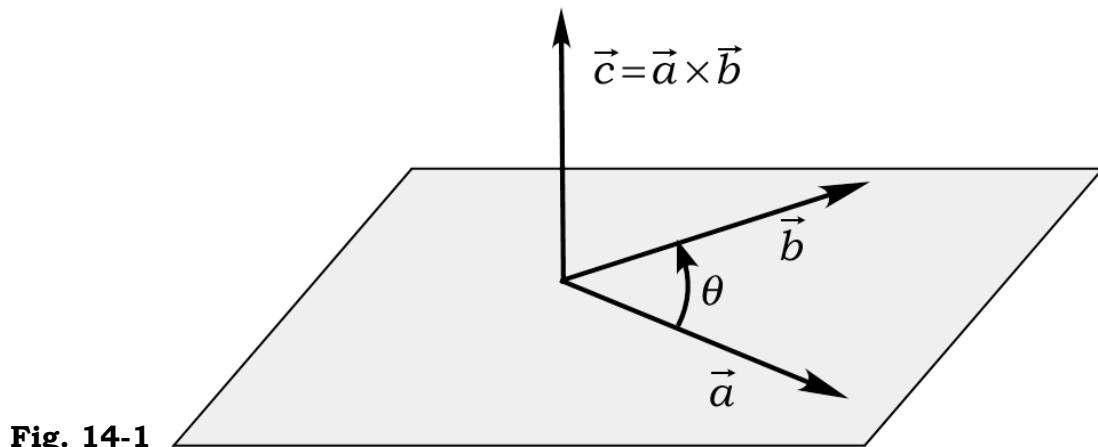
$$[14.2] \quad \vec{f} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

## 14.2 Il prodotto vettoriale

Dati due vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , le cui direzioni formano tra loro un angolo  $\theta$ , si definisce prodotto vettoriale  $\vec{a} \times \vec{b}$  il vettore  $\vec{c}$ , che ha come modulo il prodotto dei moduli moltiplicato per il seno dell'angolo  $\theta$  ed è diretto ortogonalmente al piano definito dai due vettori, nella direzione da cui si osserva la rotazione di  $\vec{a}$  verso  $\vec{b}$  in senso antiorario (Fig. 14-1).

E' quindi:

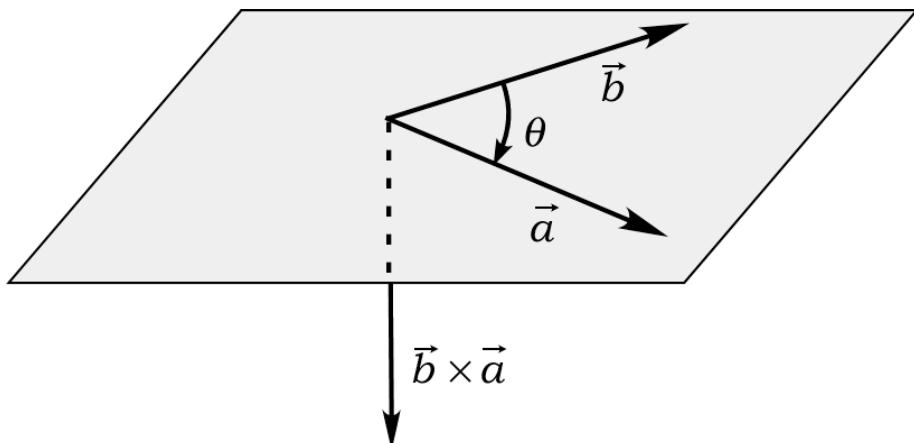
$$[14.3] \quad |\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$$



**Fig. 14-1**

Se  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  sono hanno la stessa direzione oppure hanno direzione opposta ( $\theta = 0^\circ$  o  $\theta = 180^\circ$ ) il risultato è nullo. Naturalmente, invertendo nei prodotti i due fattori, si inverte il senso di rotazione; come conseguenza si inverte anche la direzione del vettore prodotto (Fig. 14-2). Il prodotto vettoriale non gode quindi della proprietà commutativa, propria del prodotto tra grandezze numeriche. In effetti si ha:

$$[14.4] \quad \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$



**Fig. 14-2**

### 14.3 Moto di una carica in un campo magnetico uniforme

Come si è detto, un corpo di massa  $m$  e carica  $q$  in moto in un campo magnetico è soggetto alla forza di Lorentz. Supponiamo che il campo sia uniforme (cioè il vettore  $\vec{B}$  abbia lo stesso modulo e la stessa direzione in tutti i punti) e che inizialmente essa si muova con una velocità  $\vec{v}$ , diretta ortogonalmente a  $\vec{B}$ . E' dunque  $\theta = 90^\circ$  e l'accelerazione cui è sottoposta la carica è in modulo pari a  $\frac{qvB}{m}$ . La direzione di tale accelerazione è ortogonale a  $\vec{v}$ , cioè ortogonale alla traiettoria; essa quindi non fa cambiare il valore del modulo della velocità, ma ne cambia invece la direzione. Poiché l'accelerazione è anche ortogonale a  $\vec{B}$ , il moto resterà confinato nel piano ortogonale a  $\vec{B}$ . Non cambiando dunque né il modulo della velocità né l'angolo tra velocità e campo magnetico, non cambia neppure il valore del modulo dell'accelerazione. Dalla cinematica sappiamo che il moto di un corpo soggetto ad un'accelerazione ortogonale alla direzione del moto è costante in modulo è un moto circolare uniforme.

Il raggio  $R$  della traiettoria circolare si trova ricordando che nel moto circolare uniforme l'accelerazione centripeta deve essere uguale a  $\frac{v^2}{R}$ . Si ha quindi:

$$\frac{qvB}{m} = \frac{v^2}{R}$$

ovvero:

$$[14.5] \quad R = \frac{mv}{qB} .$$

Il caso in cui  $\theta = 0^\circ$  è banale: la forza è nulla e quindi la particella continua a muoversi di moto rettilineo uniforme.

Esaminiamo il caso in cui l'angolo  $\theta$  tra la direzione della velocità e quella del campo magnetico sia diversa da  $0^\circ$  e da  $90^\circ$ . Scomponiamo il vettore velocità  $\vec{v}$  in due componenti,  $v_{\parallel}$  e  $v_{\perp}$ , rispettivamente nella direzione di  $\vec{B}$  e nella direzione ortogonale a  $\vec{B}$ . La componente della forza di Lorentz in direzione di  $\vec{B}$ , e quindi la componente dell'accelerazione della particella in tale direzione, è nulla; perciò  $v_{\parallel}$  si mantiene costante. La forza di Lorentz agisce invece sul piano ortogonale a  $\vec{B}$ ; la proiezione del moto della particella su tale piano è un moto circolare uniforme, con velocità  $v_{\perp}$  e raggio  $R = \frac{mv_{\perp}}{qB}$ . Il moto complessivo è dunque la composizione di un moto uniforme nella direzione di  $\vec{B}$  e di un moto circolare uniforme nella direzione ortogonale a  $\vec{B}$ ; ne risulta in definitiva un moto a spirale della particella intorno alle linee del campo. Il senso di rotazione dipende dal segno della carica: antiorario per una carica positiva, orario per una carica negativa.

Il fatto che la forza di Lorentz agente su una particella carica in movimento sia sempre diretta ortogonalmente alla traiettoria del corpo si ma-

nifesta anche sotto un altro aspetto. Infatti si è visto nel cap. che il lavoro effettuato da una forza che sia sempre ortogonale allo spostamento è sempre nullo. La forza di Lorentz non produce quindi lavoro e di conseguenza non può far variare l'energia cinetica del corpo carico: la velocità di questo potrà variare in direzione, ma non in valore assoluto.

#### 14.4 La forza magnetica su un conduttore percorso da corrente

La corrente all'interno di un conduttore è stata definita come il flusso di cariche attraverso una sezione del conduttore. Quando il conduttore è posto all'interno di un campo magnetico, su queste cariche in movimento si esercita la forza di Lorentz. Consideriamo allora un filo rettilineo conduttore di lunghezza  $l$  e sezione di area  $A$ , percorso da una corrente  $i$ . La corrente per definizione è data dalla quantità di carica che passa attraverso la sezione nell'intervallo di tempo  $\Delta t$ . Come si è visto nel §13.1, in un conduttore metallico i portatori di carica sono gli elettroni, i quali si muovono ad una velocità media  $v_d$ , che avevamo chiamato *velocità di deriva*. Avevamo allora scritto la relazione [13.3]  $i = -n e v_d A$ , dove  $n$  è la densità (numero per unità di volume) degli elettroni di valenza nel conduttore.

Se  $\phi$  è l'angolo tra la direzione del campo magnetico e la direzione del moto degli elettroni (che coincide con la direzione del filo conduttore), su ogni elettrone agisce una forza pari a  $f = -e v_d B \sin \phi$ . Poiché in un elemento di filo lungo  $l$  ci sono  $n A l$  elettroni, sommando il contributo di tutti gli elettroni si ottiene che la forza complessiva agente sul filo è:

$$F = -n A l e v_d B \sin \phi$$

ovvero, ricordando che  $i = -n e v_d A$ :

$$[14.6] \quad F = i l B \sin \phi ,$$

che può anche essere scritta in forma vettoriale:

$$[14.7] \quad \vec{F} = i \vec{l} \times \vec{B} ,$$

avendo definito con  $\vec{l}$  il vettore che ha per modulo la lunghezza  $l$  del filo e per direzione la direzione del filo stesso.

Con i metodi dell'analisi infinitesimale si può generalizzare le formule [14.6] e [14.7] anche per fili conduttori che non siano rettilinei. A tal fine si suddivide il filo in tanti porzioni di lunghezza  $\Delta l$ , abbastanza corti da poterli considerare come rettilinei, si calcola la forza agente su ciascuno di tali porzioni e quindi si sommano (ricordando che si ha a che fare con dei vettori!) i vari contributi, facendo tendere a zero la lunghezza  $\Delta l$ . Con le convenzioni consuete, potremo scrivere, in termini di infinitesimi:

$$[14.8] \quad d\vec{F} = i d\vec{l} \times \vec{B}$$

ed integrando:

$$[14.9] \quad \vec{F} = \int_a^b i d\vec{l} \times \vec{B}$$

essendo  $a$  e  $b$  gli estremi del filo.

Nel Sistema Internazionale l'unità di misura del campo magnetico si definisce a partire dalle formule [14.6] o [14.7] come la forza agente su un conduttore della lunghezza di 1 m, ortogonale al campo e percorso dalla corrente di 1 A. Tale unità prende il nome di **tesla** (**T**).

E' quindi:

$$1 \text{ tesla} = \frac{1 \text{ newton}}{1 \text{ metro} \cdot 1 \text{ ampère}}$$

## 14.5 Generazione dei campi magnetici

Affrontiamo ora il problema di capire come si generano i campi magnetici. Sperimentalmente, si manifestano forze di origine magnetica in prossimità di cariche in movimento (*correnti*) oppure di alcuni corpi detti appunto *magneti*. Noi qui considereremo solo i campi magnetici generati dalle correnti. In effetti, anche i campi magnetici generati dai magneti sono prodotti dalla presenza all'interno del materiale di correnti elettriche a livello microscopico.

Data quindi una distribuzione di correnti, occorre dunque determinare il campo magnetico prodotto da esse nello spazio circostante. Dato un elemento di conduttore di lunghezza infinitesima  $dl$ , che si trova nel punto O, percorso da una corrente  $i$ , esso contribuisce al campo magnetico nel punto P, posto ad una distanza  $r$ , per una quantità in modulo pari a:

$$[14.10] \quad |d\vec{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i dl}{r^2} \sin\phi ,$$

essendo  $\phi$  l'angolo compreso tra la direzione della corrente ed il segmento OP. La direzione del vettore  $d\vec{B}$  è perpendicolare al piano determinato da segmento OP e dalla direzione della corrente.

In forma vettoriale:

$$[14.11] \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} ,$$

dove  $\hat{r}$  è il versore indicante la direzione del segmento OP e  $\mu_0$  è una costante, che prende il nome di suscettività magnetica del vuoto e che nel SI vale  $4\pi \cdot 10^{-7}$  N/A. L'espressione [14.10] e [14.11] costituiscono quella che è detta la **legge di Biot-Savart**.

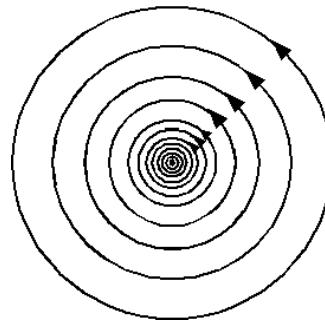
Come si può vedere, la legge di Biot-Savart è simile alla legge di Coulomb che permetteva di calcolare il campo elettrico. Anche in questo caso il valore del campo decresce con la distanza proporzionalmente al suo quadrato; la sorgente del campo però è ora non una carica puntiforme (che è una quantità *scalare*), ma un elemento di corrente (che è una quantità *vettoriale*). Per ottenere il campo elettrico si effettuava quindi un semplice prodotto tra una quantità scalare (la carica) ed il versore  $\hat{r}$ , mentre per ottenere il campo magnetico occorre moltiplicare tra loro due grandezze vettoriali (la direzione della corrente ed il versore  $\hat{r}$ ), e di conseguenza nella formula

appare una dipendenza dalla direzione relativa dei due vettori e nella un prodotto vettoriale.

A partire dalla legge di Biot-Savart, calcolando un integrale, si possono calcolare i valori del campo magnetico nei diversi casi particolari. Considerando un filo rettilineo di lunghezza infinita, percorso da corrente da una corrente  $i$ , si trova ad esempio che ad una distanza  $r$  dal filo il campo vale in modulo:

$$[14.12] \quad |\vec{B}| = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{r} .$$

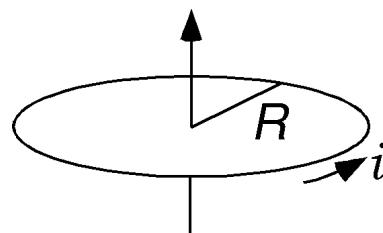
Il vettore  $\vec{B}$  è tangente alla circonferenza che giace sul piano perpendicolare al filo ed ha centro nella posizione del filo stesso, ed è orientato, guardando dalla direzione in cui fluisce la corrente, in senso antiorario. In Fig. 14-3 sono mostrate le linee di forza del campo magnetico generato dalla corrente che scorre verso l'alto in un filo rettilineo perpendicolare al piano del foglio



**Fig. 14-3**

Effettuando il calcolo del campo magnetico generato nel centro di una spira circolare conduttrice di raggio  $R$  (Fig. 14-4), percorsa da una corrente  $i$  si ottiene un campo diretto nella direzione dell'asse il cui valore assoluto è:

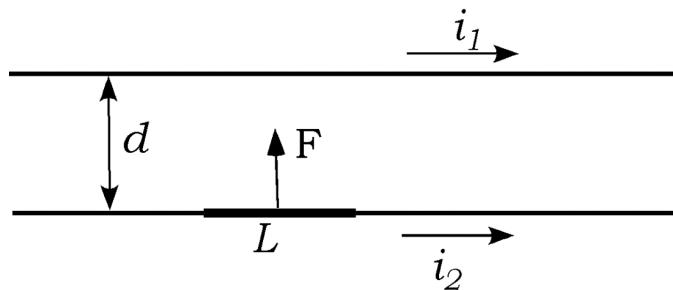
$$[14.13] \quad |\vec{B}| = \frac{\mu_0}{2R} i$$



**Fig. 14-4**

## 14.6 Forza tra due conduttori paralleli percorsi da corrente

Mettendo insieme quanto detto nei §§ 14.4 e 14.5, possiamo calcolare quale sia la forza magnetica agente tra due fili rettilinei paralleli infiniti, posti ad una distanza  $d$ , percorsi da corrente, rispettivamente  $i_1$  e  $i_2$  (Fig. 14-5).



**Fig. 14-5**

Il campo magnetico generato dal filo 1 ad una distanza  $d$  vale infatti [14.12] in modulo:

$$B_i = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r}$$

e la sua direzione è ortogonale al piano definito dai due fili.

La corrente del filo 2 interagisce con il campo  $\vec{B}_i$ ; poiché  $\vec{B}_i$  ha direzione ortogonale alla direzione di flusso della corrente, la forza su una porzione di tale filo lunga  $L$  è [14.6]:

$$F = i_2 L B_i$$

e quindi:

$$[14.14] \quad F = \frac{\mu_0 i_1 i_2 L}{2\pi d}$$

Ricordando le regole relative alla direzione della forza magnetica, si trova che la forza è **attrattiva** se le due correnti sono **concordi**, è **repulsiva** se sono **discordi**.

La formula [14.14] è alla base della definizione nel SI dell'unità di misura di corrente quale grandezza fondamentale.

**DEFINIZIONE: 1 AMPÈRE** È L'INTENSITÀ DI CORRENTE COSTANTE, CHE, MANTENUTA IN DUE CONDUTTORI PARALLELI, DI LUNGHEZZA INFINTA E DI SEZIONE TRASCURABILE, POSTI AD UNA DISTANZA DI **1 METRO** UNO DALL'ALTRO NEL VUOTO, PRODUCE TRA TALI CONDUTTORI LA FORZA DI  **$2 \cdot 10^7$  NEWTON** SU **1 METRO** DI LUNGHEZZA.

## 14.7 Legge di Ampère

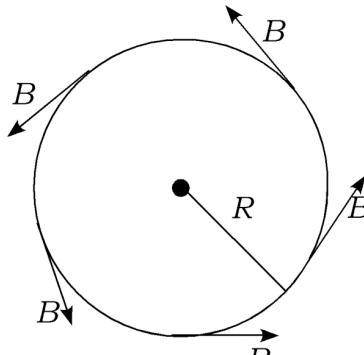
Quando abbiamo studiato il campo elettrostatico, abbiamo trovato una relazione (il teorema di Gauss) che si è rivelata molto utile per determinare il valore del campo in presenza di distribuzioni di cariche che rispettano certe leggi di simmetria. La non esistenza di cariche magnetiche libere implica, applicando il teorema di Gauss al campo magnetico, che il flusso del vettore  $\vec{B}$  attraverso una qualunque superficie chiusa sia nullo.

Nel caso del campo magnetico però esiste un'altra legge fondamentale che aiuta il calcolo del campo.

Partiamo da un'osservazione. Supponiamo di avere un filo rettilineo infinito percorso da una corrente  $i$  che quindi genera un campo magnetico nello spazio circostante; consideriamo una circonferenza di raggio  $R$  su un piano ortogonale al filo e concentrica ad esso e proponiamoci di calcolare il valore di  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ , cioè del prodotto  $\vec{B} \cdot d\vec{s}$  integrato su un giro intero della circonferenza (Fig. 14-6) o, come si dice in termine tecnico, la *circuitazione del vettore  $\vec{B}$* . Come si è visto nel § 14.5, il campo magnetico generato dal filo è, punto per punto, tangente alla circonferenza e  $\vec{B}$  e  $d\vec{s}$  sono sempre paralleli tra loro. Il modulo di  $B$  lungo la circonferenza è costante ed è dato dalla [14.12]; si ha perciò, assumendo come senso positivo di percorrenza della circonferenza il senso antiorario:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint B ds \cos\theta = \oint B ds = \frac{\mu_0}{2\pi R} \oint ds = \frac{\mu_0}{2\pi R} 2\pi R i = \mu_0 i .$$

Come si vede, il risultato non dipende dal raggio della circonferenza considerata, ma solo dal valore della corrente. Invertendo la direzione della corrente, si inverte anche la direzione del campo magnetico e quindi anche il segno della circuitazione.



**Fig. 14-6**

Questo risultato può essere generalizzato: si può dimostrare che effettuando il calcolo di  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ , qualunque sia la linea chiusa lungo la quale si calcola l'integrale, purché la corrente sia *concatenata* con la linea, il risultato non cambia e vale sempre  $\mu_0 i$ . Corrente concatenata significa che essa attraversa una qualunque superficie avente la linea come contorno.

Se ora si ha a che fare non con un solo filo percorso da corrente, ma con più conduttori, percorsi da correnti  $i_1, i_2, \dots, i_n$ , si può ripetere lo stesso ragionamento per ognuna delle correnti e sommarne i contributi (tenendo conto positivo o negativo a seconda della loro direzione di flusso). Ciò costituisce il cosiddetto **teorema di Ampère**: *la circuitazione di  $\vec{B}$  lungo una linea chiusa è uguale alla somma algebrica delle correnti concatenate ad essa*.

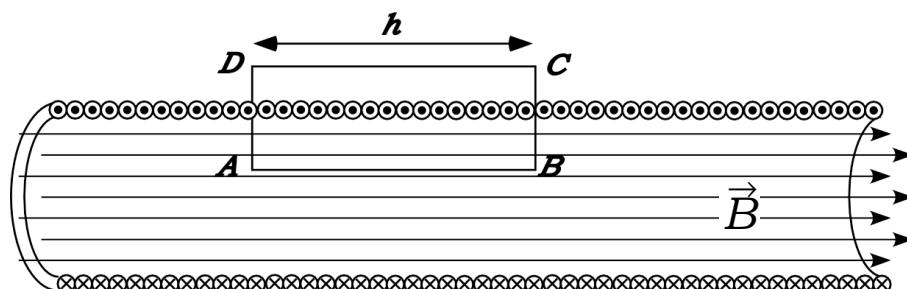
$$[14.15] \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \sum i_c$$

## 14.8 Campo magnetico in un solenoide

Utilizzando il teorema d'Ampère è possibile dimostrare come realizzare in una zona di spazio un campo magnetico uniforme.

Consideriamo un solenoide. Con questo termine si intende un avvolgimento uniforme elicoidale di un filo conduttore attorno ad un cilindro. Il calcolo esatto del campo magnetico all'interno di un solenoide reale è piuttosto difficile. Noi calcoleremo il campo generato da un solenoide ideale, infinitamente lungo (in pratica, di lunghezza molto maggiore del suo raggio), costituito da un avvolgimento molto serrato, tale da poter considerare pressoché uniforme la distribuzione di corrente sulla superficie del cilindro.

Sotto queste ipotesi, la distribuzione delle correnti è perfettamente simmetrica attorno all'asse del solenoide: il campo prodotto deve quindi rispettare tale simmetria. Inoltre, poiché si considera un solenoide di lunghezza infinita, il valore del campo non può cambiare spostandosi in su o in giù, parallelamente all'asse del solenoide e all'interno del solenoide il campo può quindi essere diretto solo in direzione parallela all'asse. Per determinare il valore del campo, applichiamo il teorema di Ampère.



**Fig. 14-7**

In Fig. 14-7 è disegnato un solenoide tagliato in due lungo l'asse. Consideriamo un percorso rettangolare (in blu in figura), che abbia due lati paralleli all'asse del solenoide, uno all'interno ed uno all'esterno, e due perpendicolari ad esso. La circuitazione del vettore  $\vec{B}$  lungo tale percorso può essere calcolata spezzando l'integrale sull'intero rettangolo nella somma degli integrali calcolati sui singoli lati:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_B^C \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_D^A \vec{B} \cdot d\vec{s} .$$

Osserviamo che lungo i due lati BC e DA si ha  $\int_B^C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_D^A \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$ , essendo  $\vec{B}$  perpendicolare alla direzione di  $d\vec{s}$ ; inoltre  $\int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$ , poiché all'esterno del solenoide il campo è nullo. Si ha quindi:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{s} = Bl$$

In base al teorema di Ampère la circuitazione del vettore  $\vec{B}$  è uguale alla somma algebrica delle correnti che attraversano il piano del rettangolo; se dunque  $N$  è il numero di spire tagliate dal rettangolo:

$$Bl = \mu_0 \sum i_c = \mu_0 Ni$$

e:

$$[14.16] \quad B = \mu_0 \frac{N}{l} i$$

ovvero, indicando con  $n$  il numero di spire per unità di lunghezza del solenoide:

$$[14.17] \quad B = \frac{\mu_0 Ni}{h} = \mu_0 ni .$$

Si noti che questo risultato non dipende dalla distanza del lato AB dall'asse del solenoide; il campo è infatti uniforme in tutto il volume all'interno del solenoide.

# 15. L'elettromagnetismo

Nel cap.11 abbiamo studiato il *campo elettrostatico*, cioè il campo elettrico generato da cariche in quiete e che quindi si mantiene costante nel tempo. Nel precedente capitolo si è visto che un *campo magnetico* è generato da una corrente elettrica, che è costituita da cariche in movimento, oppure da un magnete permanente; se le correnti sono stazionarie (cioè non cambiano nel tempo) e sono fermi i magneti, il campo prodotto si mantiene costante (*campo magnetostatico*)..

Se le condizioni di stazionarietà non sono rispettate, compare una nuova fenomenologia. Sperimentalmente si possono fare le seguenti osservazioni:

- Una spira conduttrice è posta in un campo magnetico. Spostando la sorgente che genera il campo (che può essere indifferentemente un magnete permanente o un conduttore percorso da corrente), si osserva il passaggio di una corrente nella spira.
- Una spira conduttrice è posta in un campo magnetico. Spostando la spira, si può osservare in essa il passaggio di una corrente.
- Due spire conduttrici sono poste una vicina all'altra. Facciamo circolare in una di esse una corrente variabile nel tempo; si osserverà il passaggio di una corrente nell'altra.

Queste fenomenologie non sono immediatamente spiegabili con quanto è stato detto finora. Per arrivare a comprenderle occorre che ci dotiamo degli strumenti idonei, analizzando il concetto di flusso del campo magnetico e di flusso concatenato con una spira.

## 15.1 Il flusso del campo magnetico

Definiamo il flusso del vettore campo magnetico attraverso una superficie  $A$ , analogamente a quanto si è fatto quando abbiamo definito nel § 11.4 il flusso del campo elettrico con la formula [11.9]. Si suddivide la superficie  $A$  in tante piccole porzioni  $\Delta A_i$ . Indicando con  $\vec{B}_i$  il valore del campo magnetico su tale elemento di superficie e con  $\vec{\Delta A}_i$  il vettore uguale in modulo all'area  $\Delta A_i$  e diretto ortogonalmente all'elemento di superficie, si definisce flusso del campo magnetico attraverso la superficie  $A$  come:

$$\Phi_A(\vec{B}) = \sum_i \vec{B}_i \cdot \vec{\Delta A}_i,$$

ovvero, passando al limite per  $\Delta A_i \rightarrow 0$ :

$$[15.1] \quad \Phi_A(\vec{B}) = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Nel sistema internazionale l'unità di misura di flusso magnetico, definita tramite la [15.1], è denominata *weber* (*Wb*):

$$1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot 1 \text{ m}$$

Quando nel § 11.5 si era applicato il teorema di Gauss al campo elettrico, avevamo considerato un volume di spazio  $V$ , delimitato da una superficie chiusa  $A$ , e si era trovato che il flusso del vettore campo elettrico attraverso tale superficie era proporzionale alla carica complessiva contenuta nel volume  $V$ . Il teorema di Gauss si applica anche al campo magnetico; siccome però, com'è noto, non esistono cariche magnetiche isolate, se ne deducie che:

**TEOREMA DI GAUSS PER IL CAMPO MAGNETICO:** *Il flusso del vettore  $\vec{B}$  attraverso una qualunque superficie chiusa è sempre nullo.*

## 15.2 Il flusso concatenato con una spira

Si abbia una spira conduttrice (cioè un filo conduttore chiuso ad anello) e consideriamo due superfici  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ , entrambe delimitate dal perimetro della spira. L'insieme di queste due superfici costituisce una superficie chiusa, che racchiude al suo interno un volume  $V$ . In base al teorema di Gauss, il flusso di  $\vec{B}$  attraverso questa superficie chiusa è zero: questo significa che il flusso entrante in  $V$ , attraverso la superficie  $\Sigma_1$  è uguale al flusso uscente da  $V$ , attraverso la superficie  $\Sigma_2$ .

Visto che  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  erano due superfici arbitrarie, se ne può concludere che:

*Il flusso di  $B$  attraverso una qualunque superficie che si appoggia ad una stessa linea chiusa non dipende dalla particolare superficie considerata, ma solo dal suo contorno.*

Visto appunto che il flusso non dipende dalla particolare superficie, si può definire il *flusso di campo magnetico concatenato con una spira* come il flusso di  $\vec{B}$  calcolato attraverso una qualsiasi superficie che ha tale spira per contorno.

## 15.3 L'induzione elettromagnetica

Torniamo ai fatti sperimentali presentatati all'inizio del capitolo. Possiamo spiegare tutti questi fenomeni osservando che la produzione di una corrente elettrica in una spira è collegata alla variazione del flusso del vettore  $\vec{B}$  concatenato con la spira. Quantitativamente:

*Quando varia il flusso del campo magnetico concatenato con una spira conduttrice, in questa viene indotto una forza elettromotrice pari alla variazione del flusso nell'unità di tempo:*

$$[15.2] \quad e = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Questa formula è nota come **legge dell'induzione elettromagnetica** o **legge di Faraday**.

Ricordando la definizione di flusso [15.1], serviamo che  $\Phi_B$  può variare:

- perché varia il valore di  $B$ ;
- perché varia l'area  $A$ ;
- perché cambia l'angolo tra  $\vec{B}$  e  $\vec{A}$ .

Si noti il segno negativo nella [15.2]. Esso significa che *la forza elettromotrice indotta tende a produrre un campo magnetico che si oppone alla variazione del flusso*. Questo affermazione prende il nome di **legge di Lenz**.

Se il circuito comprende un numero  $N$  di spire, i flussi relativo alle singole spire si sommano e la forza elettromotrice indotta sarà moltiplicata per  $N$ :

$$[15.3] \quad e = -N \frac{d\Phi_B}{dt}$$

Come esempio di applicazione della legge di Faraday, esaminiamo il seguente esempio, che analizza il caso di una spira in ruotazione con velocità angolare costante all'interno di un campo magnetico uniforme.

### Esempio

Si calcoli la forza elettromotrice (f.e.m.) e la corrente indotta in una spira di resistenza  $R$  e di area  $A$  che ruota in un campo magnetico uniforme  $\vec{B}$  con una velocità angolare costante  $\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$  intorno ad un asse perpendicolare alla direzione di  $\vec{B}$ .

Indicando con  $\vartheta$  l'angolo compreso tra la direzione di  $\vec{B}$  e la normale alla superficie della spira, all'istante  $t$  si ha:

$$\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{A} = BA \cos\theta = BA \cos\omega t$$

e quindi, applicando la legge di Faraday:

$$e(t) = -\frac{d\Phi_B}{dt} = e_0 \sin\omega t,$$

dove  $e_0 = BA\omega$ . Si ottiene dunque un valore istantaneo della f.e.m. oscillante tra  $-e_0$  e  $e_0$ , con un periodo pari a  $\frac{2\pi}{\omega}$ .

Di conseguenza, il valore della corrente istantanea circolante nella spira è:

$$i(t) = \frac{e}{R} = i_0 \sin\omega t$$

$$\text{con } i_0 = \frac{e_0}{R} = \frac{BA\omega}{R}.$$

Nell'uso comune in elettrotecnica si parla perciò di **f.e.m. alternata** e di **corrente alternata** e si definisce **f.e.m. efficace**  $e_{eff}$  e **corrente efficace**  $i_{eff}$  il valore quadratico medio su un periodo rispettivamente della f.e.m. e della corrente<sup>1</sup>.

Poiché  $\langle \sin^2 x \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}$ , si ha che:

$$[15.4] \quad e_{eff} = \frac{e_0}{\sqrt{2}} \quad i_{eff} = \frac{i_0}{\sqrt{2}} .$$

La potenza dissipata nella spira è:

$$w(t) = e(t) i(t) = e_0 \cdot i_0 \sin^2 \omega t .$$

Il valore medio della potenza dissipata  $\langle w \rangle$  è quindi:

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} e_0 i_0 = \frac{1}{2} \frac{e_0^2}{R} = \frac{1}{2} i_0^2 R ,$$

ovvero, esprimendosi in termini di tensione efficace e di corrente efficace:

$$\langle w \rangle = e_{eff} i_{eff} = \frac{e_{eff}^2}{R} = i_{eff}^2 R .$$

---

<sup>1</sup> Per definizione, il valor medio della funzione periodica  $f(t)$ , di periodo  $T$ , è data da  $\langle f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt$  e il valore quadratico medio da  $\sqrt{\langle f^2 \rangle} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^2(t) dt$ .