Forze elettriche ed elettrostatica

Si propongono vari tipi di esercizi:

A) Si applica il secondo principio della dinamica in casi in cui, nel considerare le forze, le forze elettrostatiche sono presenti e si cerca la legge del moto.

B) Un altro tipo di problemi riguarda situazioni di equilibrio, cioè quando un corpo, posto in un punto in condizioni di quiete, vi permane.

C) Si dà una configurazione di cariche elettriche fissate e si chiede di trovare campi e forze.

D) Si considerano potenziale elettrico ed energia potenziale elettrostatica e si risolve il problema applicando i principi di conservazione.

A) Si applica il secondo principio della dinamica in casi in cui, nel considerare le forze, le forze elettrostatiche sono presenti e si cerca la legge del moto.

Per esempio, se ci fosse presente una forza elettrostatica in una regione di spazio in cui il campo elettrico è costante e la forza gravitazionale sulla superficie terrestre si avrebbe:

$$\sum F_x = qE_x = ma_x$$

$$\sum F_y = qE_y - mg = ma_y$$

Nelle due componenti, in questo esempio, ho accelerazione costante. Nel caso in cui il campo elettrico abbia solo componente verticale, allora si ha:

$$\sum F_x = 0 = ma_x$$

$$\sum F_y = qE - mg = ma_y \Rightarrow a_y = \frac{q}{m}E - g$$

Questo è esattamente il caso del moto parabolico (proiettile, etc.). L'accelerazione lungo y è costante, ma non vale –g, può essere maggiore, uguale o minore di g a seconda di quanto vale il cmapo elettrico e la carica, inoltre può essere diretta verso l'alto (se qE>0 ed è sufficientemente grande). In tutti i casi ho un moto parabolico, la concavità della parabola dipende dal segno di a_y.

Questo tipo di problemi non richiede un addestramento particolare legato all'elettrostatica. Si tratta di applicare le conoscenze della dinamica una volta determinata la risultante delle forze.

A.1)

Problema 1: Una particella carica negativamente di massa 9.00×10^{-27} kg si muove di moto circolare uniforme descrivendo un'orbita circolare completa attorno ad un corpo carico positivamente vincolato in una posizione fissa al centro dell'orbita. Il raggio dell'orbita è 0.380 m. Le due cariche sono uguali in modulo e il valore è quello della carica elementare e, con $e = 1.602 \times 10^{-19}$ C. Trascurando l'effetto dell'attrazione gravitazionale e di ogni forma di attrito, calcolare:

1. il periodo del moto circolare;

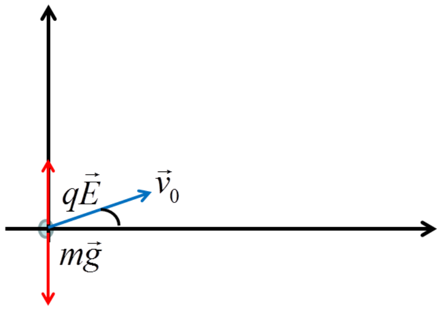
T [s] = $\boxed{}$ A $\boxed{34.8}$ B $\boxed{126}$ C $\boxed{9.20}$ D $\boxed{19.1}$ E $\boxed{9.97}$

Svolgimento:

Il moto è circolare uniforme, quindi la forza elettrostatica di attrazione sulla particella carica negativamente dovrà essere tale da imporre l'accelerazione centripeta:

$$\vec{F}_e = -\frac{K_e e^2}{r^2}\hat{r} = -\frac{mv^2}{r}\hat{r} \Rightarrow v^2 = \frac{K_e e^2}{mr} \Rightarrow \omega^2 = \frac{K_e e^2}{mr^3} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{mr^3}{K_e e^2}}$$

A.2)
Un corpo di massa m e carica q viene lanciato con velocità v_0 inclinata di 30° rispetto all'orizzontale in una regione di spazio in cui sono presenti campo gravitazionale terrestre e un campo elettrico uniforme E diretto lungo l'asse y con verso positivo. Risolvere il moto.
Svolgimento



La sommatoria delle forze sul corpo è diretta lungo y ed è una costante. Lo stesso si può dire per l'accelerazione.

$$\sum \vec{F}_i = q\vec{E} + m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \left(\frac{qE}{m} - g\right)\hat{j} = a_0\hat{j}$$

Se l'accelerazione è costante, nota la velocità e la posizione iniziale. Il moto è facilmente risolvibile. Si tratta di moto parabolico. Dipende dal segno di a0 se la concavità è verso il basso o l'alto.
Per le velocità si ha:

$$v_y = v_{0y} + \left(\frac{qE}{m} - g\right)t = v_0 \sin\theta + \left(\frac{qE}{m} - g\right)t$$

$$v_x = v_0 \cos\theta$$

Per la posizione ad ogni istante (x(t), y(t)), si ha:

$$y = v_{0y}t + \frac{1}{2}\left(\frac{qE}{m} - g\right)t^2 = v_0 \sin\theta t + \frac{1}{2}\left(\frac{qE}{m} - g\right)t^2$$

$$x = v_{0x}t = v_0 \cos\theta t$$

Se viene posto uno schermo perpendicolarmente all'asse x, nel punto x=d, il corpo lo incontrerà in istante t* e coordinate (h=y(t*)) determinabili

$$d = v_{0x}t^* = v_0 \cos\theta t^* \Rightarrow t^* = \frac{d}{v_0 \cos\theta}$$

$$h = y(t^*) = v_0 \sin\theta t^* + \frac{1}{2}\left(\frac{qE}{m} - g\right)t^{*2}$$

$$h = d(tg\theta) + \frac{1}{2}\left(\frac{qE}{m} - g\right)\left(\frac{d}{v_0 \cos\theta}\right)^2$$

A.3)

Problema 5: Un corpuscolo di massa 1.80 mg e carica + 2.20 μC si muove lungo l'asse X, nel verso positivo, e con modulo della velocità 3.30 m/s. Non è presente alcuna forma di attrito e l'effetto della gravità è trascurabile. Al tempo t=0 il corpuscolo passa per l'origine degli assi ed entra in una regione di spazio nella quale il campo elettrico è uniforme, diretto nel verso positivo dell'asse Y, e ha modulo costante 3.10 NC^{-1}. Questa regione di campo elettrico uniforme termina in corrispondenza del piano perpendicolare all'asse X che si trova a distanza L=8.20 m dall'origine. Calcolare:

9. la coordinata y del corpuscolo nell'istante che esce dalla regione con campo elettrico uniforme (x=L).

y_L [m] = ______ A 46.3 B 11.7 C 25.7 D -81.5 E 71.5

Il corpuscolo prosegue oltre, dove il campo elettrico torna ad essere nullo, e termina la sua corsa impattando contro uno schermo perpendicolare all'asse X posto in x=2L.

Calcolare:

10. la coordinata y del corpuscolo quando si trova ad avere coordinata x=2L.

y_f [m] = ______ A -28.6 B -71.4 C 35.1 D 18.8 E 120

Svolgimento

Problema 5. Nella regione di campo elettrico non nullo la sommatoria delle forze sul corpo è diretta lungo y ed è una costante. Lo stesso si può dire per l'accelerazione.

$$\sum \vec{F}_i = q\vec{E} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \left(\frac{qE}{m}\right)\hat{j} = a_0\hat{j}$$

Se l'accelerazione è costante, nota la velocità e la posizione iniziale. Il moto è facilmente risolvibile. Si tratta di moto parabolico. Dipende dal segno di a_0 se la concavità è verso il basso o l'alto.

Per le velocità si ha:

$$v_y = \left(\frac{qE}{m}\right)t$$

$$v_x = v_0$$

Per la posizione ad ogni istante (x(t), y(t)), si ha:

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{qE}{m}\right)t^2$$

$$x = v_0 t$$

La coordinata y per x=L è

$$L = v_0 t^* \Rightarrow t^* = \frac{L}{v_0} \Rightarrow h = y(t^*) = \frac{1}{2}\left(\frac{qE}{m}\right)\left(\frac{L}{v_0}\right)^2 = 11.7m$$

Nel proseguire, il corpuscolo entra in una regione di campo elettrico nullo. La risultante delle forze è nulla. Vuol dire che percorrerà questo tratto a velocità vettoriale costante, quella posseduta a t=t*.

$$v_y = \left(\frac{qE}{m}\right)\frac{L}{v_0}$$

$$v_x = v_0$$

Durante il tratto da x=L a x=2 L (intervallo di tempo t*), il tratto percorso lungo y sarà $v_y t^*$ e la coordinata y:

$$y(2t^*) = y(x(2L)) = \frac{1}{2}\left(\frac{qE}{m}\right)\left(\frac{L}{v_0}\right)^2 + \left(\frac{qE}{m}\right)\left(\frac{L}{v_0}\right)\left(\frac{L}{v_0}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{qE}{m}\right)\left(\frac{L}{v_0}\right)^2 = 35.1m$$

B) Un tipo di problemi riguarda situazioni di equilibrio, cioè quando un corpo, posto in un punto in condizioni di quiete, vi permane. Condizione necessaria è che la accelerazione sia nulla.

Dai precedenti compitini vi sono due esempi: pallina fissata a un filo legato a un piano verticale carico e due palline carice legate a due fili sospesi allo stesso chiodo.

Vediamo come si risolvono (si risolve un esercizio, si invita a provare a risolvere esercizi simili sul Gettys per addestramento).

B.1)

Nel campo gravitazionale terrestre si trova un piano verticale non conduttore uniformemente carico, con densità di carica $\sigma = 3.0 \times 10^{-8}$ C/m^2. Ad un certo punto del piano è fissata l'estremità di un filo lungo 10 cm di massa trascurabile. All'altra estremità del filo è attaccata una pallina di massa 2 g e carica 10^{-5} C. Determinare l'angolo tra piano e filo in condizioni di equilibrio.

4) $\alpha = 40.81°$

Svolgimento

Il sistema è all'equilibrio, quindi la risultante delle forze lungo x e y deve fare zero. Le forze in gioco sono la forza peso (-mg) diretta verticalmente verso il basso, la forza elettrica qE, dove E è uniforme, orizzontale e vale $E=\sigma/(2\varepsilon_0)$ e la tensione del filo che è diretta lungo il filo. Indicando con α l'angolo rispetto alla verticale abbiamo

$$0 = ma_y = \sum F_y = T\cos\alpha - mg \Rightarrow T\cos\alpha = mg$$

$$0 = ma_x = \sum F_x = -T\sin\alpha + q\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \Rightarrow T\sin\alpha = q\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Dividendo la seconda equazione per la prima si ottiene:

$$\tan\alpha = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0 mg}; \sigma = \frac{2\varepsilon_0 mg\tan\alpha}{q}$$

$$tg\alpha = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0 mg} \Rightarrow \alpha = \mathrm{atan}(\frac{q\sigma}{2\varepsilon_0 mg}) = 40^o.81$$

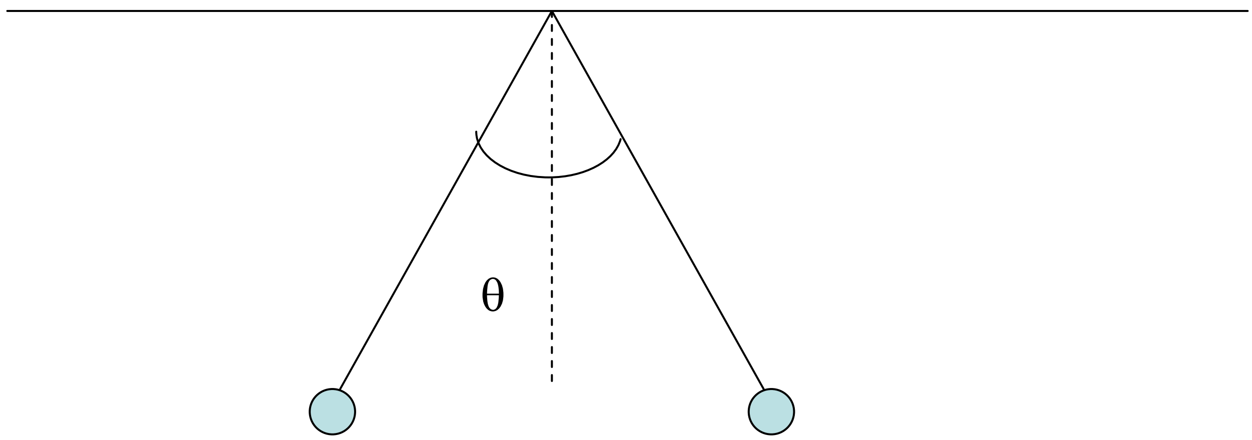
B.2)

In presenza del campo gravitazionale terrestre, due fili di massa trascurabile e lunghi ognuno 10 cm pendono dallo stesso chiodo. All'estremità di ogni filo è attaccata una pallina di massa m = 2 g. Ad ognuna delle due palline viene data la stessa carica elettrica q, e i due fili all'equilibrio formano tra loro un angolo di 12°. Quanto vale la carica di ognuna delle palline?

7) q = 1.001 ×10−8 C

Svolgimento

Lo schema è quello illustrato in figura:



L’angolo θ è l’angolo fra i due fili.

Facendo il conto delle forze (su una sola delle due palline, visto che c’è simmetria l’altra si comporterà in modo analogo) dobbiamo considerare:

$$0 = ma_y = \sum F_y = T\cos\frac{\theta}{2} - mg \Rightarrow T\cos\frac{\theta}{2} = mg$$

$$0 = ma_x = \sum F_x = -T\sin\frac{\theta}{2} + \frac{k_e q^2}{\left(2l\sin\frac{\theta}{2}\right)^2} \Rightarrow T\sin\frac{\theta}{2} = \frac{k_e q^2}{\left(2l\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}$$

Dividendo la seconda equazione per la prima si ottiene:

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{k_e q^2}{mg\left(2l\sin\frac{\theta}{2}\right)^2} \Rightarrow q = 2l\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{\frac{mg\tan\frac{\theta}{2}}{k_e}} = 1.0014\times10^{-8}C$$

C) Problemi di elettrostatica: calcolo di campi e forze.

Richiamiamo brevemente definizioni e relazioni fra le grandezze della elettrostatica illustrate a lezione. Il carattere di questa nota è sintetico, non esaustivo.

La forza di Coulomb (elettrostatica) esercitata da una carica puntiforme q_1 su una carica puntiforme q_2 , separate da una distanza r_{12} è data da:

$\vec{F}_{12} = k_e \frac{q_1 q_2}{(r_{12})^2} \hat{r}_{12}$ dove il versore ha la direzione della congiungente le due cariche

La costante elettrostatica è $k_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.99 \times 10^9\, Nm^2C^{-2}$

ε0=8.854×10-12 $C^2N^{-1}m^{-2}$ è detta costante dielettrica del vuoto.

Se le cariche sono discordi si attraggono, se concordi si respingono.
Inoltre vale il terzo principio della dinamica $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{12}$

Si può definire il campo elettrico in ogni punto dello spazio come la forza elettrostatica che sentirebbe una carica di prova q_0 (per convenzione positiva) di carica unitaria (1 C):

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

per una carica puntiforme abbiamo che $\vec{E} = k_e \frac{q}{r^2}\hat{r}$ dove il versore $\hat{r}$ ha la direzione radiale uscente.

Nel sistema MKS (SI) l'unità di misura del campo è N/C o V/m (volt/metri).

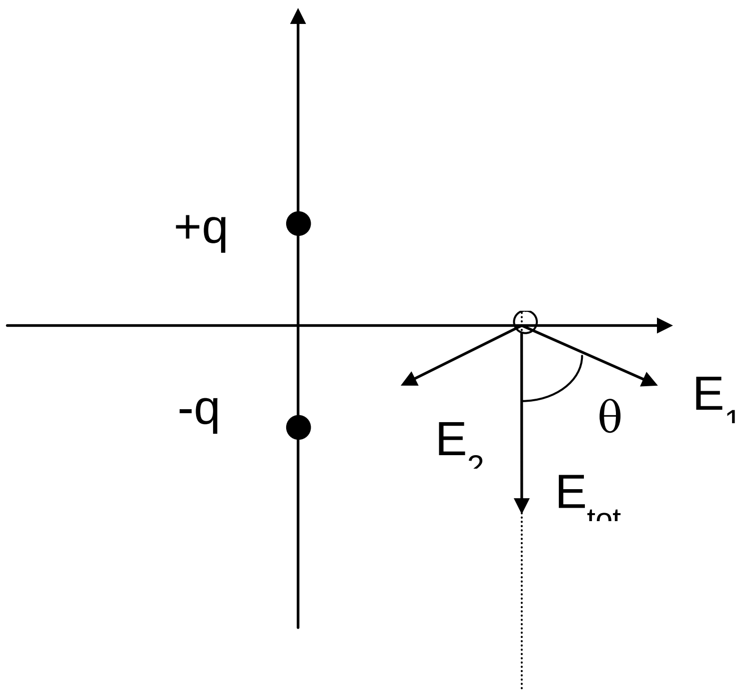
Principio di sovrapposizione
La forza risultante su ciascuna carica è uguale alla somma vettoriale delle forze dovute a tutte le altre cariche.
Riguardo al campo, se c'è un insieme di cariche il campo in un punto è uguale alla somma vettoriale dei campi elettrici in quel punto dovuti a ciascuna carica. In altre parole, uno si calcola l'effetto di ogni signola carica come se fosse l'unica presente e poi somma vettorialmente gli effetti.

$$\vec{E} = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i^2}\hat{r}_i$$

C.1)
Fra gli esercizi dei compitini degli anni precedenti un tipo di problemi prevede due cariche fissate su due punti del piano x-y e si chiede di trovare il campo elettrico (una sua componente) in un terzo punto del piano.

Su di un piano ci sono due cariche uguali in modulo ma di segno opposto, q= 5×10^{-5} C. La carica positiva ha coordinate x = 0, y = +2 cm, la carica negativa x = 0, y =-2 cm. Calcolare la componente y del campo elettrico nel punto (x = 10 cm, y = 0).
-) $E_y = -1.695\times10^7$ V/m

Soluzione
Lo schema è quello indicato in figura:



Il campo elettrico nel punto P=(x=10 cm, y=0 cm) si calcola sommando VETTORIALMENTE i singoli contributi al campo dovuti alle due cariche.
Riguardo alle componenti cartesiane, si sommano.
Indicato con a la distanza delle cariche dal centro e con b la distanza lungo l'asse x del punto P, si ha che la distanza r di P da ciscuna carica è $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $tg\theta = \frac{b}{a}$.

I campi elettrici dovuti alle due cariche sono: $E_1 = \frac{k_e q}{r^2}\hat{r}; E_2 = \frac{k_e(-q)}{r^2}\hat{r}$

La componente della risultante sarà:

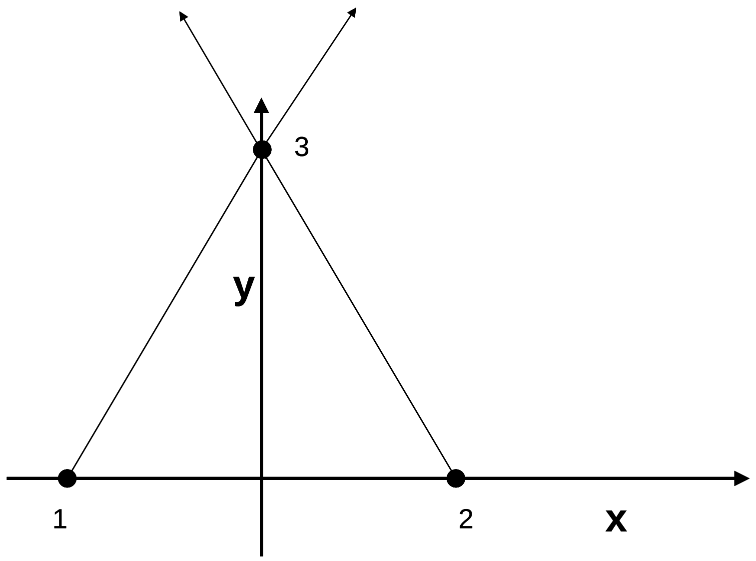
$$E_y = E_{1y} + E_{2y} = -\frac{k_e q}{r^2}\cos\theta - \frac{k_e q}{r^2}\cos\theta = -\frac{2k_e q}{(a^2 + b^2)}\cos\theta = -1.695 \times 10^7 V/m$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

C.2)
In un altro tipo di problemi tre cariche positive uguali sono fissate ai vertici di un triangolo equilatero. Si chiede di calcolare il modulo della forza agente su ogni carica.

Tre cariche positive uguali, di 10^{-6} C l'una, sono poste ai vertici di un triangolo equilatero di lato L=15 cm. Calcolare il modulo della forza agente su ogni carica
-) F = 0.692 N

<u>Soluzione</u>



Essendo le tre cariche uguali e posizionate ai lati di un triangolo equilatero, c'è una simmetria nel sistema. Su ogni carica agisce la stessa forza e lo stesso potenziale. Facciamo quindi il calcolo della forza che agisce sulla carica al vertice che, nel disegno, si trova sull'asse y.

$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

Le componenti del campo nel punto 3 lungo x dovute alle cariche 1 e 2 sono uguali e contrarie e si annullano a vicenda.

Il campo risultante è quindi diretto lungo y:

$$E_y = E_{1y} + E_{2y} = 2\frac{k_e q}{L^2}\cos\theta = 2\frac{k_e q}{L^2}\cos 30^o = \frac{k_e q}{L^2}\sqrt{3}$$

La forza in modulo è $F = \frac{k_e q^2}{L^2}\sqrt{3} = 0.6921N$

%%%%%%%%%%%%%%%%

C.3)

In un altro tipo di problemi quattro cariche sono fissate ai vertici di un quadrato. Si chiede di calcolare il modulo della forza agente su una delle cariche, o il campo in una posizione o l'energia elettrostatica del sistema. Il metodo è quello illustrato in precedenza. Illustreremo la soluzione per alcuni di questi esercizi.

A tre vertici di un quadrato di 10 cm di lato ci sono tre cariche elettriche positive uguali, con q = 5×10^{-4} C. Sul quarto vertice c'è una carica negativa pari a –q/2. Calcolare il modulo del campo elettrico al centro del quadrato

-) $|E|$=1.35×10^9 V/m

<u>Soluzione</u>

Le cariche di segno uguale su vertici opposti danno origine a due campi nel centro del quadrato che sono uguali in modulo e direzione ma opposti in verso, quindi i due contributi si annullano mutuamente. La carica negativa –q/2 e la positiva +q a lei opposta in diagonale originano due campi E_1 e E_2 nel centro del quadrato che hanno la stessa direzione. La somma dei due contributi determina direttamente il modulo .

$$|E| = \left| \frac{k_e q}{\left(L\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{k_e\, q/2}{\left(L\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \right| = \frac{3k_e q}{L^2} = 1.3485 \times 10^9 V/m$$

C.4)

Tre cariche positive ed una negativa, uguali in modulo e pari a 2.58×10^{-6}C l'una, sono poste ai vertici di un quadrato di 2 cm di lato. Calcolare il modulo del campo elettrico al centro del quadrato

-) E = 2.319×10^{8} V/m

e il modulo della forza agente sulla carica negativa

-) f = 286.3 N

<u>Soluzione</u>

Le cariche di segno uguale su vertici opposti danno origine a due campi nel centro del quadrato che sono uguali in modulo e direzione ma opposti in verso, quindi i due contributi si annullano mutuamente. La carica negativa –q e la positiva +q a lei opposta in diagonale originano due campi E_1 e E_2 nel centro del quadrato che hanno la stessa direzione. La somma dei due contributi determina direttamente il modulo .

$$|E| = \left| \frac{k_e q}{\left(L\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{k_e q}{\left(L\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \right| = \frac{4k_e q}{L^2} = 2.319 \times 10^8 V/m$$

La forza sulla carica negativa si trova calcolando il modulo del campo. La carica positiva opposta in diagonale contribuisce con un campo orientato lungo la diagonale, mentre le cariche positive adiacenti alla carica negativa si elidono mutuamente secondo le componenti trasversali e quindi la risultante del campo da loro originato è anch'essa diretta lungo la diagonale.

Il modulo del campo è

$$|E| = \left| \frac{k_e q}{\left(L\sqrt{2}\right)^2} + 2\frac{k_e q}{L^2}\cos 45^o \right| = \left| \frac{k_e q}{2L^2} + \sqrt{2}\,\frac{k_e q}{L^2} \right| = \frac{k_e q}{L^2}\left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\right)$$

$$|F| = |qE| = \frac{k_e q^2}{L^2}\left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\right) = 286.37 N$$

C.5)

Abbiamo tre cariche positive pari a q ed una carica negativa pari a -2q, con q = 10.00×10^{-7} C. Le cariche sono poste ai vertici di un quadrato di 2 cm di lato. Calcolare il modulo del campo elettrico al centro del quadrato

-) E = 1.348×10^{8} V/m

Calcolare il modulo della forza agente sulla carica positiva diagonalmente opposta alla carica negativa

-) f = 9.307 N

Soluzione

Le cariche uguali di segno uguale su vertici opposti danno origine a due campi nel centro del quadrato che sono uguali in modulo e direzione ma opposti in verso, quindi i due contributi si annullano mutuamente. La carica negativa –2q e la positiva +q a lei opposta in diagonale originano due campi E_1 e E_2 nel centro del quadrato che hanno la stessa direzione. La somma di questi due contributi determina direttamente il modulo .

$$|E| = \left| -\frac{k_e q}{\left(L\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} - \frac{k_e 2q}{\left(L\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \right| = \frac{6k_e q}{L^2} = 1.3485\times10^8 V/m$$

La forza sulla carica positiva opposta alla negativa si trova prima calcolando il modulo del campo. La carica negativa opposta in diagonale contribuisce con un campo orientato lungo la diagonale, mentre le cariche positive adiacenti alla carica negativa si elidono mutuamente secondo le componenti trasversali e quindi la risultante del campo da loro originato è anch'essa diretta lungo la diagonale (va calcolata la componente lungo la diagonale).

Il modulo del campo è quindi

$$|E| = \left| -\frac{k_e 2q}{\left(L\sqrt{2}\right)^2} + 2\frac{k_e q}{L^2}\cos 45^o \right| = \left| -\frac{k_e q}{L^2} + \sqrt{2}\frac{k_e q}{L^2} \right| = \frac{k_e q}{L^2}\left(-1+\sqrt{2}\right)$$

e la forza è

$$|F| = |qE| = \frac{k_e q^2}{L^2}\left(-1+\sqrt{2}\right) = 9.3094N$$

C.6)

Ai vertici di un quadrato di 10 cm di lato ci sono quattro cariche elettriche uguali in modulo ($q=8\times10^{-5}$ C), due negative e due positive. Le due cariche positive (e le due negative) sono ai vertici dello stesso lato. Calcolare il modulo del campo elettrico al centro del quadrato

-) $E = 4.068\times10^8$ V/m

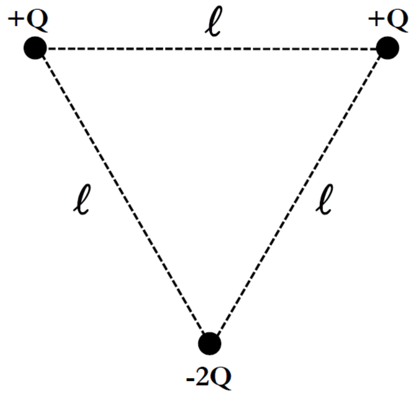
Soluzione

Le cariche di segno discorde su vertici opposti danno origine a due campi nel centro del quadrato che sono uguali in modulo, direzione e verso. Questi due contributi sono perpendicolari fra loro e uguali in modulo, quindi il calcolo del modulo della loro risultante può essere effettuato applicando il teorema di Pitagora.

$$|E| = \left(\left[\frac{k_e q}{\left(L\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \right]^2 + \left[\frac{k_e q}{\left(L\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\left(\frac{4k_e q}{L^2}\right) = 4.0684\times10^8 V/m$$

C.7)

Tre cariche (+Q, +Q, -2Q) sono disposte ai vertici di un triangolo equilatero di lato ℓ come in figura.



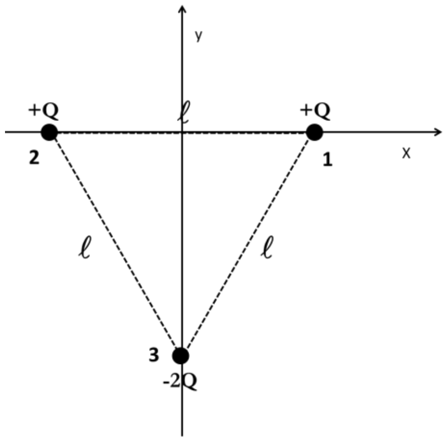
Domanda n. 1: Calcolare il campo elettrico nei punti di mezzo dei lati.

Domanda n. 2: Calcolare il campo elettrico al centro del triangolo.

Domanda n. 3: Calcolare la forza elettrostatica su ciascuna carica.

Svolgimento:

Per la risoluzione, aiuta porre il sistema su un sistema cartesiano.



Alcuni valori utili: cos(30°)=sin(60°)=$(3)^{0.5}$/2; sin(30°)=cos(60°)=0.5

L'altezza h=*l*cos(30°)=*l* $(3)^{0.5}$/2

n.1: Il campo elettrico in un punto qualunque è la somma vettoriale dei campi elettrici dovuti alle 3 cariche. A causa delle simmetrie, nel punto di mezzo dei lati, alcuni i contributi si elidono mutuamente. Vediamo il conto per ognuno dei punti di mezzo, usando le componenti e i versori degli assi x e y.

$$\vec{E}_{mezzo12} = \frac{-2Qk_e}{h^2}\hat{j} = -\frac{8}{3}\frac{k_eQ}{l^2}\hat{j}$$

$$\vec{E}_{mezzo23} = (Q+2Q)\frac{k_e}{(l/2)^2}\left[\cos 60^o\,\hat{i} - \sin 60^o\,\hat{j}\right] + \frac{k_eQ}{h^2}\left[\cos 30^o\,\hat{i} + \sin 30^o\,\hat{j}\right] =$$

$$= \frac{12Qk_e}{l^2}\left[\frac{1}{2}\hat{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{j}\right] + \frac{4Qk_e}{3l^2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j}\right] =$$

$$= \hat{i}\left[\frac{k_eQ}{l^2}\left(6 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\right] + \hat{j}\left[\frac{k_eQ}{l^2}\left(-6\sqrt{3} + \frac{2}{3}\right)\right]$$

$$\vec{E}_{mezzo13} = \hat{i}\left[\frac{k_eQ}{l^2}\left(-6 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\right] + \hat{j}\left[\frac{k_eQ}{l^2}\left(-6\sqrt{3} + \frac{2}{3}\right)\right]$$

n.2 campo elettrico nel centro. Il centro dista dai lati d, per teorema di Pitagora:

$d^2=(l/2)^2+(h/2)^2=7/16(l)^2$

Nel centro del triangolo, per ragioni di simmetria il campo elettrico è diretto solo lungo l'asse y.

$$\vec{E}_0 = E_{1y}\hat{j} + E_{2y}\hat{j} + E_{2y}\hat{j} = -2\frac{k_eQ}{d^2}\hat{j} - \frac{2Qk_e}{\frac{3}{16}l^2}\hat{j} =$$

$$= \hat{j}\left[\frac{k_eQ}{l^2}\left(-\frac{32}{7} - \frac{32}{3}\right)\right] = \hat{j}\left[\frac{k_eQ}{l^2}\left(-\frac{320}{21}\right)\right]$$

n.3 Per le forze elettriche su ogni carica dobbiamo sommare vettorialmente il contributo delle altre due.

Sulla carica 3 la forza sarà diretta lungo y, nel verso positivo. Basta calcolare il modulo di F_{13} o F_{23}, calcolare la componente lungo y e moltiplicare per 2 (entrambe le cariche contribuiscono in modo costruttivo).

$$\vec{F}_{Tot3} = \hat{j}\left[2\frac{k_e 2Q^2}{l^2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$$

Per la forza su 1, sommo vettorialmente i contributi di 2 e 3:

$$\vec{F}_{Tot1} = \left[\frac{k_eQ^2}{l^2}\right]\hat{i} + \left[\frac{k_e 2Q^2}{l^2}\right]\left(-\frac{1}{2}\hat{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{j}\right) = \left[\frac{k_eQ^2}{l^2} - \frac{k_eQ^2}{l^2}\right]\hat{i} + \left[\frac{k_e 2Q^2}{l^2}\right]\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{j}\right) =$$

$$= \hat{j}\left[-\frac{\sqrt{3}k_eQ^2}{l^2}\right]$$

Per la forza su 3, eseguo la stessa operazione e per simmetria trovo:

$$\vec{F}_{Tot2} = \left[-\frac{k_eQ^2}{l^2}\right]\hat{i} + \left[\frac{k_e 2Q^2}{l^2}\right]\left(\frac{1}{2}\hat{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{j}\right) = \hat{j}\left[-\frac{\sqrt{3}k_eQ^2}{l^2}\right]$$

C.8)

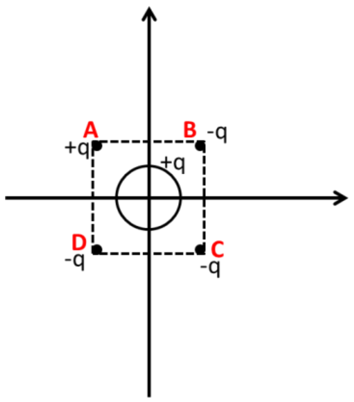
Problema 5: Una distribuzione sferica superficiale di carica (guscio sferico non conduttore uniformemente carico), ha il suo centro P fissato al centro di un quadrato ai cui vertici sono fissate quattro cariche puntiformi. La superficie sferica ha raggio R= 2.80 m ed è carica positivamente di carica +q (in modulo q= 1.10 nC). Le cariche puntiformi, se fissiamo nel punto P l'origine degli assi cartesiani, sono collocate come segue: una carica positiva (A), con carica +q, si trova nel punto (x,y)=(-2R,2R); una carica negativa (B), con carica -q, si trova nel punto (x,y)=(+2R,+2R); la terza carica (C) è negativa, di carica -q, e si trova nel punto (x,y)=(+2R,-2R); la quarta carica (D) è negativa, di carica -q, e si trova nel punto (x,y)=(-2R,-2R). Calcolare:

7. il modulo del campo elettrico nell'origine degli assi (x,y)=(0,0);

E [V/m] = ______ A 0.785 B 1.77 C 4.42 D 7.43 E 0.315

Svolgimento

Lo schema delle cariche può essere questo.



Calcolare il campo elettrico nell'origine degli assi.

$$\vec{E} = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i^2}\hat{r}_i$$

Il guscio non contribuisce, perché all'interno del guscio carico il campo è nullo. Se fosse stato fuori, il campo era da considerare come generato da una carica +q concentrata nell'origine.

Campo nell'origine:

$$\vec{E}_0 = k_e \frac{q}{d^2}\hat{r}_A + k_e \frac{-q}{d^2}\hat{r}_B + k_e \frac{-q}{d^2}\hat{r}_C + k_e \frac{-q}{d^2}\hat{r}_D$$

$$d^2 = 4R^2 + 4R^2 = 8R^2;$$

$$\hat{r}_A = -\hat{r}_C ; \hat{r}_B = -\hat{r}_D$$

$$\vec{E}_0 = k_e \frac{2q}{d^2}\hat{r}_A = k_e \frac{2q}{8R^2}\hat{r}_A = k_e \frac{q}{4R^2}\hat{r}_A = \left(0.315\frac{N}{C}\right)\hat{r}_A$$

C.9)

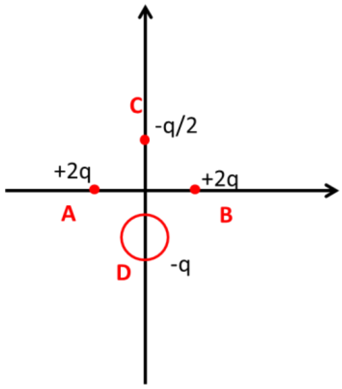
Problema 2: In un piano sono fissate tre cariche puntiformi. Nello stesso piano si trova il centro P di una distribuzione superficiale di carica (guscio sferico non conduttore), anch'essa fissata nel piano. La superficie sferica ha raggio a=1.40 m ed è carica negativamente di carica -q (in modulo q= 7.50 nC). Le tre cariche puntiformi e il punto P occupano quattro punti equidistanti dall'origine degli assi cartesiani. La distanza dal centro degli assi ha un valore pari a 2 volte il raggio della superficie sferica. Più precisamente: una carica positiva, con carica +2q, si trova nel punto (x,y)=(-2a,0), un'altra carica positiva, con carica +2q, si trova in posizione simmetrica alla prima, cioè nel punto (x,y)=(+2a,0); la terza carica è negativa, di carica -q/2, e si trova nel punto (x,y)=(0,+2a); il punto P, centro della superficie sferica carica -q, ha coordinate (x,y)=(0,-2a). Calcolare:

2. la componente lungo y del campo elettrico nell'origine degli assi (x,y)=(0,0);

E [V/m] = $\boxed{}$ A $\boxed{3.21}$ B $\boxed{-8.84}$ C $\boxed{-3.92}$ D $\boxed{-4.30}$ E $\boxed{5.34}$

Svolgimento:

Si deve fare la somma vettoriale dei contributi delle cariche A, B, C, D come in figura



Calcolare il campo elettrico nell'origine degli assi.

$$\vec{E} = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i^2}\hat{r}_i$$

Il guscio contribuisce come se il suo campo fosse generato da una carica -q concentrata nel punto (x,y)=(0,-2a)

Campo nell'origine:

$$\vec{E}_0 = k_e \frac{2q}{d^2}\hat{r}_A + k_e \frac{2q}{d^2}\hat{r}_B + k_e \frac{-q}{2d^2}\hat{r}_C + k_e \frac{-q}{d^2}\hat{r}_D$$

$$d^2 = 4a^2;$$

$$\hat{r}_A = -\hat{r}_B; \hat{r}_C = -\hat{r}_D$$

$$\vec{E}_0 = k_e \frac{-q/2}{4a^2}\hat{j} = k_e \frac{-q}{8a^2}\hat{j} = \left(-4.30 \frac{N}{C}\right)\hat{j}$$

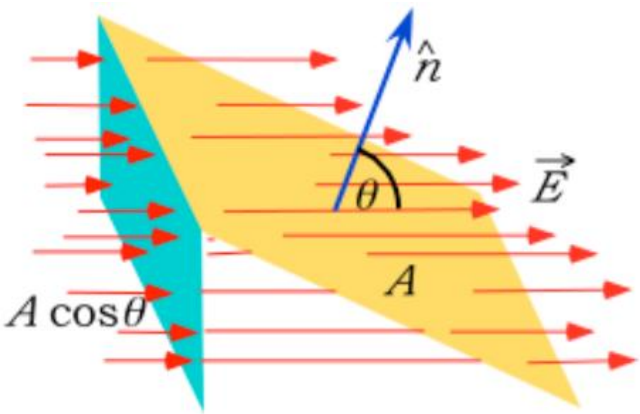
Campo elettrico e Teorema di Gauss

Nel caso di distribuzioni di carica continue, campo elettrico si calcola sommando gli effetti delle singole cariche, integrando sul volume della distribuzione.

$$\vec{E} = k_e \int \frac{dq}{r^2}\hat{r}$$

Questo calcolo non sempre è agevole. Nonostante ciò, si possono a volte usare le conseguenze del teorema di Gauss e le proprietà di simmetria di alcune distribuzioni per risolvere il problema.

Concetto di flusso elettrico
Il flusso elettrico è una grandezza proporzionale al numero di linee di campo elettrico che attraversano una superficie data.



Data una superficie di area A, si può definire il versore normale $\hat{n}$ alla superficie e il vettore $\vec{A} = A\hat{n}$. Se il campo elettrico è uniforme , il flusso del campo elettrico è dato (si veda in figura) da

$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA\cos\theta$

Il flusso è massimo se il campo elettrico è orientato perpendicolare alla superficie mentre è nullo se il campo elettrico è parallelo alla superficie.

Per una superficie e un campo elettrico qualunque si definisce l'elemento infinitesimo

$d\Phi == \vec{E} \cdot d\vec{A}$

e si integra sulla superficie.
Per una superficie chiusa si ha che:

$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E_n dA$

dove E_n è la componente del campo elettrico normale alla superficie presa positiva se uscente e negativa se entrante.

Il teorema di Gauss (conseguenza del fatto che il campo elettrico di una carica puntiforme varia con l'inverso el quadrato della distanza) dice che:

il flusso del campo generato da un insieme di cariche puntiforme qi attraverso una superficie chiusa è pari alla somma algebrica delle cariche contenute all'interno della superficie, divisa per la costante dielettrica del vuoto:

$$\Phi_E = \frac{\left(\sum_i q_i\right)_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Usando il teorema di gauss e le proprietà di simmetria si può trovare il campo elettrico associato a varie distribuzioni di carica.
Può essere utile ricordare alcune definizioni per le distribuzioni di carica.
Se V è il volume: densità volumetrica uniforme di carica $\rho=Q/V$
Se A è l'area di una superficie: densità superficiale uniforme di carica $\sigma=Q/A$
Se l è la lunghezza di una distribuzione a simmetria cilindrica (per es. filo):
densità lineare uniforme di carica $\lambda=Q/l$

Il modulo dell'intensità del campo elettrico generato da varie distribuzioni di carica è il seguente:

$$E_r = \frac{2k\lambda}{r}\sin\theta_0$$ sull'asse trasversale di una distribuzione lineare di carica

$$E_r = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r} = 2k\frac{\lambda}{r}$$ in prossimità di una distribuzione lineare indefinita di carica

$$E_x = \frac{kQx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$ sull'asse di un anello carico

$$E_x = 2\pi k\sigma\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)$$ sull'asse di un disco carico

%%%%%%%%

$$E_n = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = 2\pi k\sigma$$ in prossimità di una distribuzione piana indefinita di carica

%%%%%%%%

$$E_r = 0 \qquad r < R$$ all'interno di uno strato cilindrico di carica

$$E_r = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r} \qquad r > R$$ all'esterno di uno strato cilindrico di carica

%%%%%%%%

$$E_r = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r} \qquad r \geq R \qquad \text{all'esterno di un cilindro pieno carico}$$

$$E_r = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R^2} r \qquad r \leq R \qquad \text{all'interno di un cilindro pieno carico}$$

%%%%%%%%

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \qquad r > R \qquad \text{all'esterno di uno strato sferico di carica}$$

$$E_r = 0 \qquad r < R \qquad \text{all'interno di uno strato sferico di carica}$$

%%%%%%%%

Per una sfera piena carica Q di raggio R

$$E_r = \frac{k_e Q}{R^3} r; r \leq R$$

$$E_r = \frac{k_e Q}{r^2}; r \geq R$$

il campo all'interno varia linearmente con r; se vi fosse una carica di prova negativa, la forza sperimentata sarebbe di tipo elastico -kr

%%%%%%%%

Su una superficie che porta una carica areica (carica riferita all'area della superficie su cui è distribuita) σ, la componente dell'intensità del campo elettrico secondo la normale alla superficie presenta una discontinuità pari a σ/ε_0:

$$E_{n2} - E_{n1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Per esempio all'interno di un condensatore piano e parallelo, dove sulle armature si trova una densità di carica +Q e –Q e una distribuzione di carica superficiale $+\sigma=Q/A$ e $-\sigma=-Q/A$ il campo è nullo al di fuori del condensatore e all'interno è uniforme, diretto perpendicolare alle armature e vale $E=\sigma/\varepsilon_0$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Esercizi svolti.

Nei precedenti compiti e compitini ci sono tre tipi di esercizi: calcolo di un flusso elettrico, campo elettrico generato da un cilindro carico, di una distribuzione sferica carica.

Flusso

Di solito la carica (o la distribuzione di carica uniforme) sono all'interno di un solido regolare.
Si chiede il flusso attraverso una delle facce. Per ragioni di simmetria il flusso attravreso una delle facce è uguale al flusso totale Φ/N, dove N è il numero delle facce (4 per un tetraedro, 6 per un cubo).
Siccome per Gauss si ha che:

$$\Phi_E = \frac{\left(\sum_i q_i\right)_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

il flusso una delle facce è $\frac{\left(\sum_i q_i\right)_{\text{int}}}{N\varepsilon_0}$

Si fanno alcuni esempi significativi, si risolvano i problemi simili per esercizio:

C.10)

Cubo:

Una carica puntiforme q = 10.00 10^{-7} C si trova al centro di un cubo di 10 cm di lato.
Calcolare il flusso del campo elettrico attraverso una faccia del cubo.
-) Φ_{faccia}=1.88 10^4 Vm

Soluzione

Il flusso è $\Phi_E = \frac{\left(\sum_i q_i\right)_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$ =(10.00 10^{-7} C)/(8.854 10^{-12} F/m)
Attraverso una delle 6 facce del cubo è Φ/6=1.8824 10^4 Vm

%%%%%%%%

C.11)

Il volume di un cubo di 10 cm di lato è uniformemente carico, con densità di carica ρ = 5.08 ·10^{-9} C/m^3. Calcolare il flusso del campo elettrico attraverso una faccia del cubo.
-) Φ_{faccia}=0.09562 Vm

Soluzione

Il flusso attraverso una delle 6 facce del cubo è Φ/6

$$\Phi_E = \frac{\rho V}{6\varepsilon_0} = \frac{\left(5.08\times 10^{-9}\right)\times(0.1)^3}{6\varepsilon_0} = 0.0956 Vm$$

C.12)

Tetraedro:

Una carica puntiforme di 5.55_10−6 C si trova al centro di un tetraedro di 10 cm di lato. Calcolare il flusso del campo elettrico attraverso una faccia del tetraedro.

-) Φ_{faccia}= 1.57 10^5 Vm

$$\Phi_E = \frac{q}{4\varepsilon_0} = \frac{\left(5.55\times10^{-6}\right)}{4\varepsilon_0} = 1.5671\times10^{+5}Vm$$

C.13)

Problema 4: Nel piano XY vengono fissati quattro corpi isolanti carichi. In modulo, le loro cariche sono tutte uguali e valgono q= 2.40 mC, ma due di esse sono positive e due negative. Tre di esse sono cariche puntiformi, mentre la quarta è una distribuzione sferica superficiale (ovvero un guscio sferico isolante uniformemente carico). Le cariche puntiformi vengono fissate sugli assi a distanza d= 230 m dall'origine. Nel dettaglio le cariche sono collocate nel modo seguente: A) una carica +q si trova nel punto individuato dalle coordinate cartesiane (x,y)=(d,0); B) una carica -q, si trova nel punto (x,y)=(0,d); C) la terza carica, di carica +q, si trova nel punto (x,y)=(-d,0); D) il guscio sferico isolante, uniformemente carico con carica -q, ha raggio pari a d/2 e ha il suo centro P posto nell'origine degli assi cartesiani. Determinare direzione e verso e calcolare:

7. il modulo del campo elettrico totale nell'origine degli assi (x,y)=(0,0);

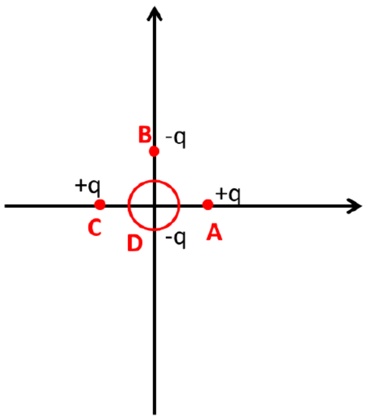
E [N/C] = ☐ A 444 B 37.6 C 408 D 63.9 E 139

8. il modulo della forza elettrica totale che agisce sulla carica di cui al punto B.

F [N] = ☐ A 0.287 B 0.513 C 0.557 D 0.114 E 0.632

Svolgimento Problema 4:

Si deve fare la somma vettoriale dei contributi delle cariche A, B, C, D come in figura



Calcolare il campo elettrico nell'origine degli assi.

$$\vec{E} = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i^2}\hat{r}_i$$

Il guscio non contribuisce, perché all'interno del guscio il campo è nullo.

Campo nell'origine:

$$\vec{E}_0 = k_e \frac{q}{d^2}\hat{r}_A + k_e \frac{-q}{d^2}\hat{r}_B + k_e \frac{q}{d^2}\hat{r}_C$$

$$\hat{r}_A = -\hat{r}_C;$$

$$\vec{E}_0 = k_e \frac{q}{d^2}\hat{j} = \left(408\frac{N}{C}\right)\hat{j}$$

Forza su carica B: si sommano i contributi da A, C e D. Ma A e C hanno le componenti lungo x che si controbilanciano, mentre quelle lungo y che si sommano e sono uguali. IL guscio D agisce come se tutta la carica fosse concentrata nell'origine. La forza è diretta lungo y.

$$\vec{F}_B = -k_e q\left(\frac{q}{r^2}\hat{r}_A + k_e \frac{q}{r^2}\hat{r}_C + k_e \frac{-q}{d^2}\hat{r}_D\right)$$

$$r^2 = 2d^2; \hat{r}_A = -\hat{r}_C;$$

$$\vec{F}_B = k_e \frac{q^2}{d^2}\left(\frac{2\sqrt{2}/2}{2} - 1\right)\hat{j} = -(0.287N)\hat{j}$$

C.14)

Cilindro carico

Si fanno alcuni esempi significativi, si risolvano i problemi simili per esercizio:

Si ha un cilindro infinito uniformemente carico con densità di carica $\rho = 10.00 \times 10^{-9}$ C/m^3 e raggio 10 cm. Calcolare il campo elettrico (in V/m) a 5 cm dall'asse del cilindro

-) E = 28.24 V/m

e a 40 cm dall'asse del cilindro

-) E = 14.12 V/m

Soluzione

Si ricorda che per un cilindro uniformemente carico il campo è

$$E_r = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r} \qquad r \geq R \qquad \text{all'esterno di un cilindro pieno carico}$$

$$E_r = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R^2} r \qquad r \leq R \qquad \text{all'interno di un cilindro pieno carico}$$

Nel caso del problema in questione, abbiamo un cilindro che, per una lunghezza L ha un volume $V=L\pi R^2$ e quindi per una lunghezza L si ha una carica $Q= \rho L\pi R^2$

Quindi la densità lineare di carica è

$\lambda=\rho\pi R^2$;

allora

il campo elettrico (in V/m) a 5 cm dall'asse del cilindro

$E = \lambda/(2\pi\varepsilon_0 R^2)*r = r*\rho/(2\varepsilon_0)$=28.2358 V/m

e a 40 cm dall'asse del cilindro

$E = (\lambda/r)*1/(2\pi\varepsilon_0)= \rho R^2/(2\varepsilon_0 r)=14.1175$ V/m

----

D) Si considerano potenziale elettrico ed energia potenziale elettrostatica e si risolve il problema applicando i principi di conservazione.

D.1)
Si ha un piano (non conduttore) uniformemente carico positivamente, con densità superficiale di carica σ = 10^{-6} C/m^2. Una pallina di massa 1 g e carica elettrica positiva q = 10^{-5} C si trova inizialmente a distanza 2 m dal piano. Con quale velocità minima deve essere lanciata la pallina perchè raggiunga il piano?
-) v0 = 47.527 m/s

Svolgimento
Si conserva l'energia.
$$\Delta E_{tot} = \Delta K + \Delta U = 0$$
L'energia potenziale della pallina la si ricava dal potenziale, che nel caso del piano infinito uniformemente carico vale:
$$\Delta V = -E(x_f - x_i) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(x_f - x_i)$$
Dove x è la distanza da piano (il piano lo posso pensare orientato verticalmente).
Applicando la conservazione dell'energia trovo:
$$0 = \Delta K + \Delta U = \Delta K + q\Delta V = \left(\frac{1}{2}mv_f^{\ 2} - \frac{1}{2}mv_0^{\ 2}\right) + \left[-q\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(x_f - x_i)\right]$$
Nel caso in questione x_f=0, x_i=2 m, v_f=0 (si chiede la velocità minima perché raggiunga il piano quindi basta che lo raggiunga con velocità trascurabile), si ha:
$$0 = -\frac{1}{2}mv_0^{\ 2} + \frac{q\sigma x_i}{2\varepsilon_0} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{q\sigma x_i}{m\varepsilon_0}} = 47.5275 m/s$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

D.2)
Si ha un piano (non conduttore) uniformemente carico positivamente, con densità superficiale di carica σ = 10¯6 C/m^2. Una pallina di carica elettrica q = -3×10−5 C e massa 10 g si trova inizialmente ferma ad 1 m di distanza dal piano. Con quale velocità la pallina arriva sul piano?
-) v = 18.41 m/s

Svolgimento
Si conserva l'energia:
$$\Delta E_{tot} = \Delta K + \Delta U = 0$$
L'energia potenziale della pallina la si ricava dal potenziale, che nel caso del piano infinito uniformemente carico il potenziale vale:
$$\Delta V = -E(x_f - x_i) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(x_f - x_i)$$
Dove x è la distanza da piano (il piano lo posso pensare orientato verticalmente).
La variazione di energia, essendo la carica –q è:
$$\Delta U = -q\Delta V = \left[q\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(x_f - x_i)\right]$$

Quindi se la distanza finale è più piccola della iniziale, l'energia potenziale è diminuita e l'energia cinetica sarà aumentata.

Applicando la conservazione dell'energia trovo:

$$\Delta E_{tot} = \Delta K + \Delta U = \left(\frac{1}{2}mv_f^{\,2} - \frac{1}{2}mv_0^{\,2}\right) + \left[\frac{q\sigma}{2\varepsilon_0}\left(x_f - x_i\right)\right] = 0$$

Nel caso in questione x_f=0, x_i=1 m, v_i=0, si ha:

$$0 = \frac{1}{2}mv_f^{\,2} - \frac{q\sigma x_i}{2\varepsilon_0} \Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{q\sigma x_i}{m\varepsilon_0}} = 18.4073 m/s$$

D.3)

Problema 4: Un guscio sferico isolante di raggio 6.80 m e carica complessiva - 10.0 μC viene fissato con il centro nell'origine degli assi. Nell'origine viene fissata anche una carica puntiforme uguale e opposta a quella del guscio sferico. All'istante $t = 0$ una particella di massa 9.70 g e carica + 2.60 mC viene lanciata verso l'origine degli assi con velocità 90.0 m/s da una posizione distante 22.0 m dall'origine. Supponendo che la particella possa penetrare dentro il guscio sferico senza subire attrito, si calcoli:

7. quanto vale, in modulo, la velocità della particella quando raggiunge il bordo esterno del guscio sferico;

   v [m/s] = ______ A 873 B 0.000 C 705 D 90.0 E 367

8. la minima distanza dall'origine a cui arriva la particella.

   d_m [m] = ______ A 6.30 B 3.17 C 26.7 D 4.46 E 21.1

Svolgimento:

Usando il teorema di Gauss si ricava che il campo elettrico fuori del guscio è nullo (la carica complessiva all'interno di una qualunque superficie sferica gaussiana con centro nell'origine e di raggio r>R_1=6.80 m è nulla). Se il campo è nullo, la forza elettrica è nulla, il potenziale elettrico è nullo. Quindi sulla particella non agiscono forze ed essa giunge sul bordo esterno del guscio sferico con la stessa velocità di quando è partita (risposta a domanda 7).

Una volta che entra nel guscio, il potenziale elettrico sentito dalla particella a distanza r dall'origine è dato dalla somma dei potenziali generati dal guscio sferico e dalla carica fissata nell'origine:

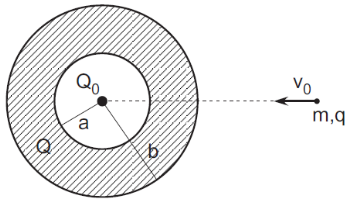
$$V(r) = -\frac{k_e Q}{R_1} + \frac{k_e Q}{r}$$

Considerando la conservazione dell'energia avremo:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = -\frac{k_e Qq}{R_1} + \frac{k_e Qq}{r_{\min}} \Rightarrow r_{\min} = \frac{R_1}{1 + \cfrac{mv_0^2}{2\left(\cfrac{k_e Qq}{R_1}\right)}}$$

D.4)

Problema 3: Si consideri il sistema in figura: una carica puntiforme pari a $Q_0 = 5.80\ \mu$C è posta al centro di un guscio sferico di materiale dielettrico, di raggio interno $a = 0.890$ m e raggio esterno $b = 3.30$ m. Il guscio è a uniformemente carico, e la sua carica totale vale $Q = 9.40\ \mu$C. Determinare:



B.3.1: il modulo del campo elettrico sul bordo esterno del guscio sferico
B.3.2: il potenziale elettrico sul bordo esterno del guscio sferico
B.3.3
Si supponga che ad un certo istante una particella di massa $m = 1.60$ g e carica $q = 4.80\ \mu$C si trovi a distanza molto grande dal guscio (distanza "infinita") e si muova con una velocità diretta contro il centro del guscio sferico. Determinare:

8. il valore minimo del modulo della velocità iniziale di q affinché la particella arrivi a toccare il bordo esterno del guscio sferico.

v_{min} [m/s] = $\boxed{\sqrt{\frac{(Q_0+Q)\,q}{2\,\pi\,\epsilon_0\,m\,b}}}$ A $\boxed{31.3}$ B $\boxed{15.8}$ C $\boxed{133}$ D $\boxed{22.1}$ E $\boxed{105}$

Svolgimento

Per trovare campo e potenziale elettrico si usa il principio di sovrapposizione, andando a determinare il contributo di ogni singola configurazione e poi sommandolo (vettorialmente il campo, scalarmente il potenziale).

La carica puntiforme Q_0 al centro della configurazione genera: $\vec{E} = \frac{k_e Q_0}{r^2}\hat{r};\quad V = \frac{k_e Q_0}{r}$

Per il guscio isolante uno potrebbe usare considerazioni di simmetria (dalle quali si evince che il campo è diretto radialmente) e il teorema di Gauss (dal quale si evince che il campo elettrico originato dal guscio sferico è zero all'interno dello spazio vuoto), oppure usare i risultati che conosciamo per la sfera isolante con distribuzione di carica uniforme e vedere il guscio isolante spesso come una sovrapposizione di due sfere concentriche con distribuzione uniforme di carica $+\rho_0$ (di raggio b) e $-\rho_0$ (di raggio a).

All'esterno si ha per la sfera 1: $\vec{E}_+ = k_e\rho_0\frac{4\pi}{3}b^3\frac{\hat{r}}{r^2};\quad V_+ = k_e\rho_0\frac{4\pi}{3}b^3\frac{1}{r}$

e per la sfera 2: $\vec{E}_- = -k_e\rho_0\frac{4\pi}{3}a^3\frac{\hat{r}}{r^2};\quad V_- = -k_e\rho_0\frac{4\pi}{3}a^3\frac{1}{r}$

La carica totale del guscio è Q: $Q = \rho_0 V_{guscio} = \rho_0\frac{4\pi}{3}\left(b^3 - a^3\right)$

Il campo e il potenziale generato dal guscio all'esterno saranno quindi:

$$\vec{E} = k_e\left[\rho_0\frac{4\pi}{3}\left(b^3 - a^3\right)\right]\frac{\hat{r}}{r^2} = k_e Q\frac{\hat{r}}{r^2};\quad V = \frac{k_e Q}{r}$$

Il contributo totale al modulo e al potenziale del campo elettrico sul bordo esterno del guscio sferico saranno:

$$\vec{E} = k_e\left(Q + Q_0\right)\frac{\hat{r}}{b^2};\quad V = \frac{k_e\left(Q + Q_0\right)}{b}$$

La risposta alla B.3.3 prevede di calcolare il valore minimo di v_0 con cui parte la particella carica dall'infinito per arrivare a toccare il bordo esterno del guscio. Il valore minimo sarà tale che ci arrivi con velocità asintoticamente nulla. Si applica il principio di conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + qV_\infty = \frac{1}{2}mv_f^2 + qV(r=b) \Rightarrow \frac{1}{2}mv_{\min}^2 + 0 = q\frac{k_e\left(Q+Q_0\right)}{b} \Rightarrow v_{\min} = \sqrt{\frac{\left(Q+Q_0\right)q}{2\pi\varepsilon_0 bm}}$$

D.5)

Esercizio B: Elettromagnetismo

Si consideri una corona sferica carica, non conduttrice, fissa, di raggio interno R_1 e raggio esterno R_2 ($R_2 > R_1$); la carica è distribuita con una densità costante $\rho > 0$.

Calcolare:

Domanda n. 5: il campo elettrico (modulo, direzione e verso) in tutto lo spazio;

Domanda n. 6: il potenziale elettrostatico all'esterno della corona sferica ($r > R_2$);

Domanda n. 7: la velocità di fuga v_f di una carica puntiforme $q < 0$ di massa m che si trovi sulla superficie esterna della corona sferica;

Domanda n. 8: la massima distanza dal centro della corona sferica che la stessa particella carica raggiungerebbe se fosse sparata radialmente con una velocità iniziale $v_i < v_f$;

Domanda n. 9: la velocità v_2 della particella nel caso di traiettoria circolare concentrica con la corona sferica e raggio R_3.

<u>Svolgimento</u>

Risposta alla domanda n. 5: La carica totale della corona sferica è

$$Q = \frac{4}{3}\pi\rho\left(R_2^3 - R_1^3\right).$$

Il campo elettrico è nullo per $r < R_1$, mentre all'esterno ($r > R_2$) è quello di una carica puntiforme Q posta nel centro:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\widehat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(R_2^3 - R_1^3\right)\frac{\widehat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

e per $R_1 < r < R_2$ è

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r^3 - R_1^3\right)\frac{\widehat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

Risposta alla domanda n. 6: Assumendo un potenziale nullo all'infinito, il potenziale elettrostatico nella regione esterna alla corona sferica ($r > R_2$) è

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{r}$$

Risposta alla domanda n. 7: La velocità di fuga v_f è la velocità iniziale minima che la carica deve avere per riuscire ad allontanarsi indefinitamente dalla corona sferica. Il campo elettrostatico è conservativo, quindi

$$U_{R_2} + K_{R_2} = U_\infty + K_\infty$$
$$U_\infty = K_\infty = 0$$
$$U_{R_2} = qV(R_2) = \frac{q\rho}{3\varepsilon_0}\frac{\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{R_2}$$
$$K_{R_2} = \frac{1}{2}mv_f^2$$

da cui segue la velocità di fuga

$$v_f = \sqrt{-\frac{2}{m}\frac{q\rho}{3\varepsilon_0}\frac{(R_2^3 - R_1^3)}{R_2}}$$

Risposta alla domanda n. 8: Se $v_i < v_f$ la carica raggiunge una distanza massima R_{max} finita il cui valore si ottiene dalla conservazione dell'energia

$$R_{max} = \frac{2q\rho R_2 (R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 R_2 m v_i^2 + 2q\rho (R_2^3 - R_1^3)}$$

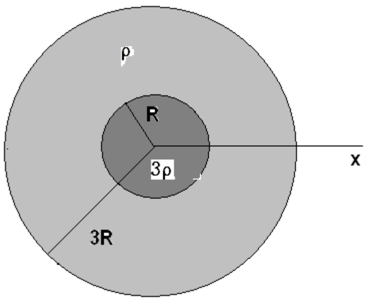
Risposta alla domanda n. 9: Applicando la seconda legge di Newton, sapendo che l'accelerazione centripeta è $a_c = v_2^2/R_3$, si ottiene

$$\frac{|\, q \,|\, \rho}{3\varepsilon_0}\frac{(R_2^3 - R_1^3)}{R_3^2} = m\frac{v_2^2}{R_3}$$

da cui

$$v_2 = \sqrt{\frac{|\, q \,|\, \rho}{3\varepsilon_0 m}\frac{(R_2^3 - R_1^3)}{R_3}}$$

D.6)



In una sfera di materiale isolante di raggio $3R$ viene depositata della carica di volume in maniera non uniforme: nella regione di raggio $r \le R$ la densità di carica per unità di volume è 3ρ mentre nella regione $R < r \le 3R$ la densità è ρ. Calcolare:

Domanda n. 6: il campo elettrico (modulo, direzione e verso) in un punto posto a distanza x dal centro, distinguendo le tre regioni ($x < R, R < x < 3R, x > 3R$);

Domanda n. 7: il potenziale di un punto generico a distanza x posto nelle tre regioni indicate sopra, riferito ad infinito.

Una carica q di massa m parte da ferma dal bordo della sfera ($x_0 = 3R$) e viene accelerata sotto l'azione del campo elettrostatico.

Domanda n. 8: Calcolare la velocità limite che la carica assume (trascurando ogni altra interazione).

<u>Svolgimento</u>

Il modulo del campo elettrico generato da una distribuzione sferica uniforme di carica (con raggio a e densità di carica per unità di volume σ) è:

$$E(x) = \begin{cases} \frac{\sigma}{3\epsilon_0} x & \text{x} \leq \text{a} \\ \\ \frac{\sigma}{3\epsilon_0} \frac{a^3}{x^2} & \text{x} > \text{a} \end{cases} \tag{1}$$

La direzione è radiale e il verso è uscente.
Il potenziale generato da questa distribuzione, prendendo come riferimento un punto a distanza infinita, si ottiene facilmente integrando la eq. [1]:

$$V(x) = \begin{cases} \frac{\sigma}{6\epsilon_0} \left(3a^2 - x^2\right) & \text{x} \leq \text{a} \\ \\ \frac{\sigma}{3\epsilon_0} \frac{a^3}{x} & \text{x} > \text{a} \end{cases} \tag{2}$$

Il problema si risolve applicando il principio di sovrapposizione: la distribuzione in esame equivale ad una sfera di raggio R e densità 2ρ, più una seconda sfera di raggio $3R$ e densità ρ; per ciascuna valgono le eq. [1]-[2], con i valori di a e σ opportuni.

Risposta alla domanda n. 6: Nelle tre regioni, il modulo del campo elettrico vale:

$$E(x) = \begin{cases} \frac{2\rho}{3\epsilon_0} x + \frac{\rho}{3\epsilon_0} x & = \frac{\rho}{\epsilon_0} x & \text{x} \leq \text{R} \\ \\ \frac{2\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{x^2} + \frac{\rho}{3\epsilon_0} x & = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(x + \frac{2R^3}{x^2}\right) & \text{R} < \text{x} \leq 3\text{R} \\ \\ \frac{2\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{x^2} + \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{3^3 R^3}{x^2} & = \frac{29\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{x^2} & \text{x} > 3\text{R} \end{cases} \tag{3}$$

Risposta alla domanda n. 7: Per il potenziale si ha:

$$V(x) = \begin{cases} \frac{2\rho}{6\epsilon_0} \left(3R2 - x^2\right) + \frac{\rho}{6\epsilon_0} \left(3 \cdot 9R^2 - x^2\right) & = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(11R^2 - x^2\right) & \text{x} \leq \text{R} \\ \\ \frac{2\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{x} + \frac{\rho}{6\epsilon_0} \left(3 \cdot 9R^2 - x^2\right) & = \frac{\rho}{6\epsilon_0} \left(\frac{4R^3}{x} + 27R^2 - x^2\right) & \text{R} < \text{x} \leq 3\text{R} \\ \\ \frac{2\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{x} + \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{27R^3}{x} & = \frac{29\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{x} & \text{x} > 3\text{R} \end{cases} \tag{4}$$

Risposta alla domanda n. 8: Per la conservazione dell'energia, la carica q acquista una energia cinetica pari alla differenza di energia potenziale tra i due punti considerati:

$$U(3R) - U(\infty) = q[V(3R) - 0] = q\frac{29\rho R^3}{3\epsilon_0 3R} = \frac{29q\rho R^2}{9\epsilon_0} \tag{5}$$

da cui si ha:

$$v = \sqrt{\frac{58q\rho R^2}{9\epsilon_0 m}}$$

Nota: La risposta a questa domanda poteva essere trovata indipendentemente, osservando che all'esterno della sfera il campo (e il potenziale) è quello generato da una carica puntiforme equivalente:

$$
\begin{aligned}
Q_{tot} &= \frac{4}{3}\pi(2\rho)R^3 + \frac{4}{3}\pi\rho(3R)^3 = \frac{4\pi \cdot 29\rho R^3}{3} \\
V(x) &= \frac{Q_{tot}}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{x} \qquad \text{x>3R} \\
qV(3R) &= \frac{29q\rho R^2}{9\epsilon_0} \\
v &= \sqrt{\frac{58q\rho R^2}{9\epsilon_0 m}}
\end{aligned}
$$

Problemi che richiedono la conoscenza di moti oscillatori o dinamica dei sistemi

A.4)

Problema 2: Un pendolo è costituito da un corpo neutro di massa 0.250 kg sospeso nel vuoto attaccato ad un filo ideale di massa trascurabile e isolante, di lunghezza 2.40 m, in una regione di spazio dove è presente un campo elettrico uniforme di modulo 3.90 kV/m diretto verticalmente verso il basso. Il corpo viene leggermente spostato rispetto alla verticale e lasciato libero, in condizioni di quiete e con il filo teso, ad una quota 0.220 m rispetto al punto P, che identifica la posizione più bassa della traiettoria. Nel punto P si trova in quiete, appoggiato su un piano orizzontale, un corpo di massa 0.190 kg e carica + 2.70 mC con il quale il corpo neutro entra in collisione con un urto perfettamente anelastico al momento del passaggio del pendolo lungo la verticale. Si consideri l'effetto della forza peso e si trascuri quello di ogni forma di attrito. Calcolare:

3. il periodo delle piccole oscillazioni del pendolo dopo l'urto;

   T [s] = ______ A $\boxed{0.437}$ B $\boxed{0.485}$ C $\boxed{1.68}$ D $\boxed{0.407}$ E $\boxed{0.314}$

4. l'ampiezza (in gradi) delle piccole oscillazioni del pendolo dopo l'urto.

   θ_0 [gradi] = ______ A $\boxed{8.80}$ B $\boxed{7.52}$ C $\boxed{24.7}$ D $\boxed{54.7}$ E $\boxed{37.8}$

Svolgimento

Il moto è quello di un pendolo fino all'urto. Usando la conservazione dell'energia si può calcolare la velocità del primo corpo prima dell'urto: $v_{1i} = \sqrt{2gh_0}$

Nell'urto anelastico si conserva la quantità di moto, per cui i due corpi proseguono dopo l'urto con velocità v_f:

$$m_1 v_{1i} = (m_1 + m_2) v_f \Rightarrow v_f = \frac{m_1\sqrt{2gh_0}}{(m_1 + m_2)}$$

Dopo l'urto il corpo si muove sotto l'azione della tensione del filo e di una forza costante diretta verso il basso derivante dalla forza peso e dalla forza elettrica.

Il moto è vincolato a percorrere un arco di cerchio, di raggio L, lunghezza del filo. Definendo l'angolo θ quello fra la verticale e il filo isolante, la componente tangenziale dell'accelerazione è:

$$F_t = ma_t \Rightarrow -(mg + qE)\sin\theta = mL\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Il moto si risolve trovando la soluzione per $\theta(t)$.

$$mL\frac{d^2\theta}{dt^2} + (mg + qE)\sin\theta = 0 \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\left(g + \frac{qE}{m}\right)}{L}\sin\theta = 0 \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \Omega^2\sin\theta = 0; \Omega^2 = \frac{\left(g + \frac{qE}{m}\right)}{L}$$

Il moto è come quello di un pendolo, solo che invece del campo gravitazionale c'è come un valore efficace: $g_{eff} = g + \frac{qE}{m}$

Se le oscillazioni sono piccole, il seno può essere approssimato dall'angolo (in radianti):

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \Omega^2\theta = 0$$

L'equazione di cui sopra è quella dell'oscillatore armonico. Il moto sarà del tipo:

$$\theta(t) = A\cos(\Omega t + \phi) = \theta_0\cos(\Omega t) + \frac{\omega_0}{\Omega}\sin(\Omega t); \quad \Omega^2 = \frac{g_{eff}}{L}$$

Il periodo è:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_{eff}}}$$

La ampiezza delle piccole oscillazioni si può ricavare dalle condizioni iniziali: $\theta_0=0$ e $\omega_0=v_f/L$.

Date le condizioni iniziali, l'ampiezza è $\omega_0/\Omega=v_f/(L\Omega)$:

$$\Delta\theta = \frac{v_f}{\Omega L} = \frac{v_f}{\sqrt{Lg_{eff}}}$$

A.5)

Problema 2 Un pendolo è costituito da corpo di massa m=0.2 *kg* e carica q=+2.0 *mC* sospeso al soffitto tramite un filo ideale isolante di lunghezza L= 1.00 *m*. In tutta la regione di spazio circostante c'è un campo elettrico uniforme di modulo E=1.5 *kV/m* diretto verso il basso lungo la verticale. Il corpo è lasciato libero in condizione di quiete con il filo teso e inclinato rispetto alla verticale. Tale pendolo compie piccole oscillazioni. Fissando un riferimento alla posizione più bassa della traiettoria del pendolo, la quota di partenza è h_0=10.0 *cm*. Si trascuri ogni forma di attrito e si consideri sia l'effetto della forza peso sia della forza elettrostatica. Calcolare:

2.1 periodo delle piccole oscillazioni:

	A	B	C	D	E	
T [s] =	32.0	0.01	6.39	2.00	1.26	

Ad un certo punto un corpo di massa identica e carica opposta è posizionato in quiete lungo la verticale nel punto più basso della traiettoria; il pendolo lo urta in modo completamente anelastico. Calcolare:

2.2 massima quota raggiunta dal pendolo dopo l'urto:

	A	B	C	D	E	
h_{max} [cm] =	1.45	0.03	4.20	6.32	12.8	

Soluzione

Il problema si risolve come il caso classico delle piccole oscillazioni del pendolo in campo gravitazionale, soltanto che in questo caso oltre alla forza peso c'è un'altra forza costante, quella elettrica. Essendo il capo elettrico diretto verso il basso e nella stessa direzione del campo gravitazionale, la forza costante agente sul pendolo è:

$$\vec{F}_c = m\vec{g} + q\vec{E} = (-mg - qE)\,\hat{j}$$

Il corpo è vincolato su una traiettoria circolare di raggio L dal filo ideale. In ogni momento la risultante delle forze applicate avrà una componente radiale (quella che ci consente di calcolare l'accelerazione centripeta) e una tangenziale, che è quella che dice come cambia il modulo dalla velocità del corpo in ogni punto ed è importante per impostare l'equazione differenziale:

$$ma_T = mL\frac{d^2\theta}{dt^2} = F_c\sin\theta = -(mg+qE)\sin\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{g}{L}+\frac{qE}{mL}\right)\sin\theta \approx -\left(\frac{g}{L}+\frac{qE}{mL}\right)\theta$$

L'ultimo passaggio è giustificato che per piccoli angoli seno e angolo hanno valori molto prossimi. Riscrivendo l'equazione secondo il formalismo dell'oscillatore armonico avremo:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \Omega^2\theta = 0$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{g_{eff}}{L}};\, g_{eff} = \left(g + \frac{qE}{m}\right)$$

In questo modo il moto del corpo è come quello del pendolo classico con piccole oscillazioni, solo che la pulsazione è data da una g_{eff} che tiene conto anche dell'effetto della forza elastica.
Dovendo calcolare il periodo:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_{eff}}};\ g_{eff} = \left(g + \frac{qE}{m}\right)$$

Per la seconda domanda dobbiamo porci il problema dell'urto completamente anelastico, calcolare la velocità dopo l'urto e reimpostare il problema. Nell'urto anelastico si conserva la quantità di moto, e, in questo caso, l'energia e la massa. Dopo l'urto il corpo attaccato al filo avrà massa doppia, velocità dimezzata e carica nulla. La forza costante che agisce dopo l'urto è solo la forza peso.
Calcoliamo la velocità immediatamente prima dell'urto, sfruttando la conservazione dell'energia: $\Delta K = -\Delta U$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_0 + qEh_0 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2g_{eff}h_0} = \sqrt{2h_0\left(g + \frac{qE}{m}\right)}$$

Dopo l'urto:

$$mv_1 = 2mv_f \Rightarrow v_f = \frac{v_1}{2} = \sqrt{\frac{g_{eff}h_0}{2}} = \sqrt{\frac{h_0}{2}\left(g + \frac{qE}{m}\right)}$$

La massima quota la calcoliamo di nuovo con la conservazione dell'energia, ricordandoci che l'unica forza che agisce adesso è la forza peso:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = mgh_{\max} \Rightarrow h_{\max} = \frac{v_f^2}{2g} = \frac{g_{eff}h_0}{4g} = \frac{h_0}{4}\left(1 + \frac{qE}{mg}\right)$$

C.15)
Un elettrone ($e = 1.602 \times 10^{-19}$ C, $m_0 = 9.11 \times 10^{-31}$ kg) è libero di muoversi senza attrito all'interno di una sfera carica uniformemente con densità $\rho = 7 \times 10^6$ C/m^3. In quanto tempo l'elettrone percorre un'orbita circolare di 1 mm di raggio?

Soluzione
Sappiamo che per una sfera piena carica Q di raggio R il campo elettrico vale

$$E_r = \frac{k_e Q}{R^3} r;\ r \le R$$

$$E_r = \frac{k_e Q}{r^2};\ r \ge R$$

Il campo all'interno varia linearmente con r.
Per una carica negativa come l'elettrone, la forza sperimentata è simile a quella di tipo elastico, –kr.

Se il moto è di tipo circolare uniforme e l'orbita ha raggio r allora deve valere

$$m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r = qE = \left|-e\frac{k_e Q}{R^3} r\right|$$

da cui:

$$\omega = \sqrt{\frac{e}{m}\frac{k_e Q}{R^3}} = \sqrt{\frac{e}{m}\frac{k_e\rho\left(\frac{4\pi}{3}R^3\right)}{R^3}} = \sqrt{\frac{e}{m}\frac{4\pi k_e\rho}{3}} = 2.15\times10^{14}\ \text{rad/s}$$

e $T=2\pi/\omega$

C.16)
Un elettrone (carica -e, con e = 1.602×10^{-19} C, e massa $m_e = 9.11\times10^{-31}$ kg) è libero di muoversi senza attrito lungo il diametro di una sfera carica uniformemente con densità di carica $\rho = 1\times10^{7}$ C/m^3. Calcolare la frequenza angolare di oscillazione.
-) $\omega = 2.57\times10^{14}$ rad/s

Soluzione

Sappiamo che per una sfera piena carica Q di raggio R il campo elettrico vale all'interno:

$$E_r = \frac{k_e Q}{R^3} r$$

Il campo all'interno varia linearmente con r.
Per una carica negativa come l'elettrone, la forza sperimentata è simile a quella di tipo elastico, –kr.
Abbiamo quindi un oscillatore armonico la cui costante elastica equivalente è

$$F_e = -\frac{k_e e Q}{R^3} r = -kr\,;$$

$$k = \frac{k_e e Q}{R^3} = \frac{k_e e}{R^3}\rho\frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\rho\frac{4\pi}{3} = \frac{e}{\varepsilon_0}\frac{\rho}{3}$$

La frequenza angolare di oscillazione sarà

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{e\rho}{3\varepsilon_0 m}} = 2.573\times10^{14}\,rad/s$$

D.7)
Due particelle puntiformi hanno massa 1 g e carica rispettivamente 5×10^{-6} C e -5×10^{-6} C. Le due particelle si trovano inizialmente a 1 cm di distanza tra loro e vengono lanciate in direzione opposta con la stessa velocità (in modulo) v_0. Qual è la velocità minima per cui le particelle non tornano più indietro?
-) v_0 = 149.9 m/s

Svolgimento
Vale la conservazione dell'energia.

$$\Delta E_{tot} = \Delta K + \Delta U = 0$$

variazione dell'energia cinetica: $\Delta K = K_f - K_i$

variazione dell'energia potenziale: $\Delta U = U_f - U_i = q\Delta V$

Per un sistema di cariche l'energia potenziale è data dal termine
$U = q_1 V_2 = q_2 V_1 = \frac{k_e q_1 q_2}{r}$ dove r è la distanza fra le due cariche

Nel caso di questo problema: $U = -\frac{k_e q^2}{r}$
L'energia potenziale è negativa (infatti le cariche si attraggono).
Le particelle vengono lanciate in direzione opposta con la stessa velocità (in modulo) v_0. La velocità minima per cui le particelle non tornano più indietro è quella per cui l'energia totale (cinetica+potenziale) è positiva, in modo tale che, quando le particelle si trovano a grande distanza (U trascurabile) "resti disponibile un po' di energia" per l'energia cinetica (che è sempre positiva).
All'energia cinetica contribuiscono con un termine ciascuno le due particelle.

$$\Delta E_{tot} = \Delta K + \Delta U = \left(\frac{1}{2} m v_f^{\,2} + \frac{1}{2} m v_f^{\,2} - \frac{1}{2} m v_0^{\,2} - \frac{1}{2} m v_0^{\,2}\right) + \left[-k_e q^2 \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right)\right] = 0$$

Nel caso particolare, la distanza iniziale è 1 cm, quella finale è infinita, la velocità finale è zero e quindi abbiamo:

$$\Delta E_{tot} = \Delta K + \Delta U = -m v_0^{\,2} + \left[k_e q^2 \left(\frac{1}{r_i}\right)\right] = 0$$ da cui:

$$v_0 = \sqrt{\frac{k_e q^2}{m r_i}} = 149.8978 m/s$$

D.8)
Due particelle puntiformi hanno massa 0.1 g e carica 10−6 C. Le due particelle si trovano inizialmente a distanza molto grande tra loro e vengono lanciate una contro l'altra, ognuna con velocità iniziale 457 m/s. A quale distanza tra loro invertono il moto?
-) d = 4.304 ×10−4 m

<u>Svolgimento</u>
Vale la conservazione dell'energia: $\Delta E_{tot} = \Delta K + \Delta U = 0$
All'energia cinetica contribuiscono con un termine ciascuno le due particelle.
Nel caso di questo problema: $U = \frac{k_e q^2}{r}$
L'energia potenziale è positiva (infatti le cariche si respingono).
Le particelle vengono lanciate una verso l'altra con la stessa velocità (in modulo) v_0.
All'inizio la distanza r è molto grande, quindi la energia potenziale è trascurabile (U=0). Via via che si avvicinano l'energia potenziale aumenta a scapito della cinetica. Il punto in cui invertono il moto corrisponde all'istante di velocità nulla e di energia cinetica nulla (energia potenziale massima):

$$\Delta E_{tot} = \Delta K + \Delta U = \left(\frac{1}{2} m v_f^{\,2} + \frac{1}{2} m v_f^{\,2} - \frac{1}{2} m v_0^{\,2} - \frac{1}{2} m v_0^{\,2} \right) + \left[k_e q^2 \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right) \right] = 0$$

Nel caso particolare, la distanza iniziale è infinita, quella finale è l'incognita del problema e la velocità finale è zero. Quindi abbiamo:

$$\Delta E_{tot} = \Delta K + \Delta U = -m v_0^{\,2} + \left[k_e q^2 \left(\frac{1}{r_f} \right) \right] = 0 \text{ da cui:}$$

$$r_f = \frac{k_e q^2}{m v_0^{\,2}} = 4.3035 \times 10^{-4} m$$

D.9)

Problema 5: All'interno di una guida isolante orizzontale liscia e rettilinea sono vincolati a muoversi due corpi uno dei quali ha massa quattro volte l'altro. Il corpo più leggero ha massa 1.40 g. I corpi sono entrambi carichi positivamente con carica + 53.0 μC. Ad un certo istante i corpi vengono lasciati liberi in condizioni di quiete ad una distanza 0.180 m. Trascurando ogni forma di attrito, calcolare:

9. l'energia elettrostatica immagazzinata nella configurazione iniziale;

U [J] = ☐ A 29.8 B 33.8 C 140 D 788 E 491

10. la velocità del corpo più leggero quando si trova a grande distanza dall'altro corpo.

v [m/s] = ☐ A 105 B 138 C 298 D 400 E 366

Svolgimento

I due corpi sono vincolati a muoversi dentro la guida isolante orizzontale. L'energia elettrostatica immagazzinata si può trovare considerando il lavoro che si deve fare per portare una carica dall'infinito fino a distanza d=0.18 m:

$$U_0 = \frac{k_e q^2}{d}$$

Se consideriamo i due corpi come un sistema, la risultante delle forze esterne ha componente nulla lungo x, quindi la quantità di moto lungo x è costante:

$$0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1 + 4 m_1 v_2 \Rightarrow v_2 = -\frac{v_1}{4}$$

Inoltre l'energia si conserva, poiché la forza elettrica è conservativa e la forza peso e la forza normale esercitata dalla guida sono perpendicolari allo spostamento e quindi non fanno lavoro.

$$U_0 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \left(1 + \frac{4}{16}\right) = \frac{5}{8} m_1 v_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{8U_0}{5m_1}}$$