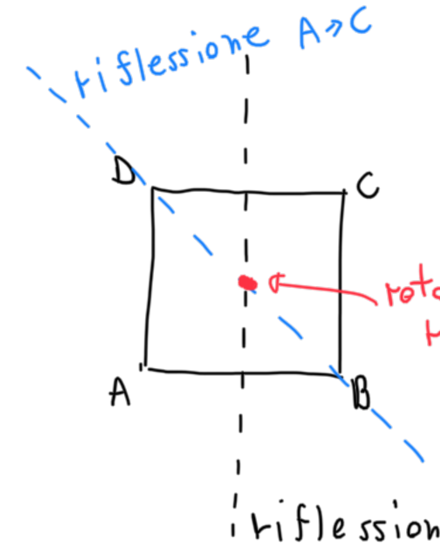
LEGGE DI GAUSS

- simmetrie



rotazione di 90° rispetto a un asse ⊥ al foglio e centrato in •

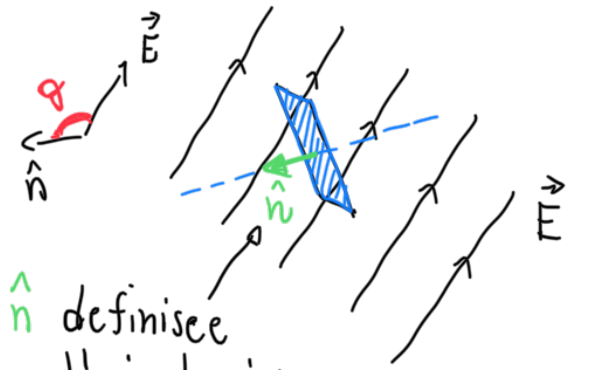
D→A
A→B
B→C
C→D

B→A
C→D

quadrato va in se stesso

il campo elettrico rimane invariato sotto le operazioni di simmetria che non modificano la distribuzione di cariche

- Flusso del campo elettrico (si può definire per un qualsiasi campo vettoriale)



$\hat{n}$ definisce l'orientazione della superficie

▱ superficie piana di area A

→ campo elettrico uniforme

$$\Phi_{\vec{E}}(\vec{S}) = \vec{E} \cdot \Delta\vec{S}$$

$\vec{E}$: vettore campo elettrico

$\Delta\vec{S}$ → superficie "orientata" corrispondente alla sup. piana in blu

superficie "orientata" è un vettore con:

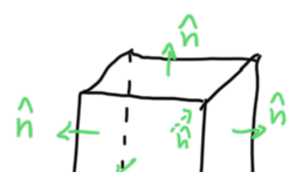
- → modulo = area della superficie (A)
- → direzione è ⊥ a quella individuata dal piano dove c'è la superficie
- → verso è definibile in base a come si fissano le convenzioni (*)

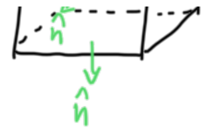
$$\Delta\vec{S} = A\hat{n} \quad \Rightarrow \quad \Phi_{\vec{E}}(\vec{S}) = EA\cos(\theta)$$

- Cosa succede se $\vec{E}$ non è uniforme e/o la superficie non è piana?
- devo dividere la superficie in tanti piccoli pezzi $\Delta\vec{S}_i$ infinitesimi
- calcolare il flusso del campo attraverso ogni pezzo: $\Phi_{\vec{E}}(\Delta\vec{S}_i) = \vec{E} \cdot \Delta\vec{S}_i$
- sommare su tutti i pezzi

$$\Phi_{\vec{E}}(\vec{S}) = \sum_i \Phi_{\vec{E}}(\Delta\vec{S}_i) = \sum_i \vec{E} \cdot \Delta\vec{S}_i \Rightarrow \Phi_{\vec{E}}(\vec{S}) = \int_{\text{superficie}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

(*) Convenzione per superfici chiuse:
queste superfici vengono orientate in modo tale da essere dirette verso l'esterno del volume racchiuso



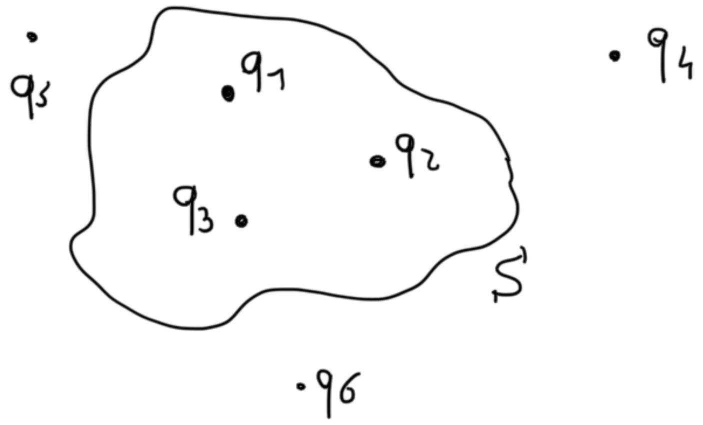


Legge (o teorema) di Gauss:

Il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa è uguale alla carica contenuta dentro tale superficie, diviso per $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k_e}$.

$$\boxed{\oint_{\vec{E}} (\vec{S}) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

(n.b. S deve essere chiusa)

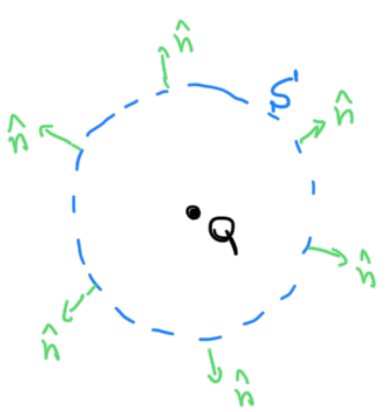


$$\oint_{\vec{E}} (\vec{S}) = \frac{1}{\varepsilon_0}(q_1 + q_2 + q_3)$$

mentre q_4, q_5, q_6 non contribuiscono

La legge di Gauss vale per QUALSIASI tipo di distribuzioni di carica (sia puntiformi, sia continue)

→ Immaginiamo che valga Gauss e supponiamo di avere una carica puntiforme (non conosciamo la legge di Coulomb)



applichiamo Gauss su S:

$$\oint_{\vec{E}} (\vec{S}) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (*1)$$

per definizione di flusso: $\oint_{\vec{E}} (\vec{S}) = \int_{\text{superficie}} \vec{E} \cdot d\vec{s} =$

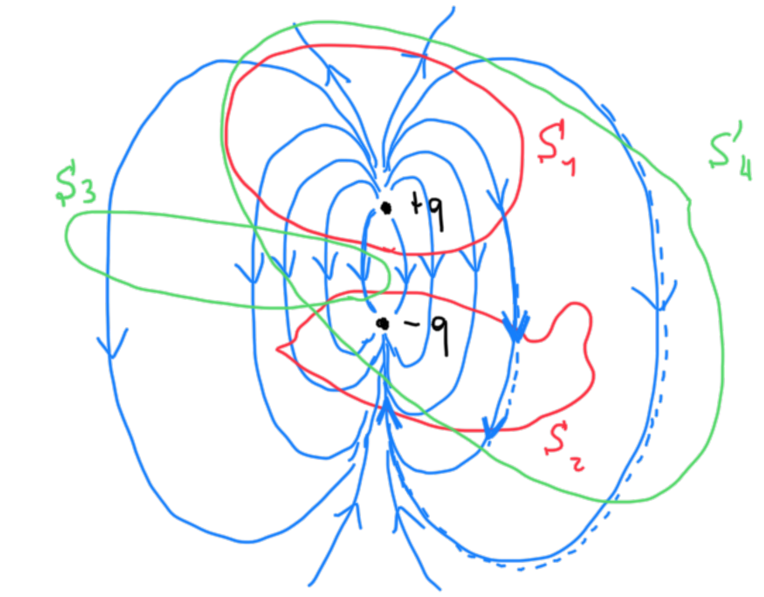
$$= E \cdot \int_{\text{superficie}} ds = E \underbrace{(4\pi R^2)}_{\text{sup. sfera}} \quad (*2)$$

per simmetria $|\vec{E}|$ generato da Q è uguale in ogni punto della superficie S

$\vec{E}$ è diretto radialmente $\quad \vec{E} \parallel \hat{n} \quad \vec{E} \cdot d\vec{s} = E\, ds$

$$(*1) = (*2) \Rightarrow \frac{Q}{\varepsilon_0} = E(4\pi R^2) \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}.$$

• esempio: dipolo elettrico



$$\oint_{\vec E}(\vec S_1) = \frac{+q}{\varepsilon_0} > 0$$

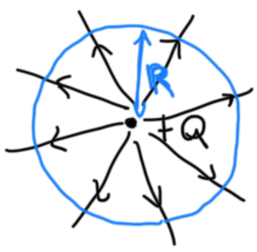
$$\oint_{\vec E}(\vec S_2) = \frac{-q}{\varepsilon_0} < 0$$

$$\oint_{\vec E}(\vec S_3) = 0$$

$$\oint_{\vec E}(\vec S_4) = \frac{+q-q}{\varepsilon_0} = 0$$

ho un dipolo elettrico $|+q| = |-q|$

- Se la $\vec F_{elettrica}$ NON andasse come $1/r^2$
  $\Rightarrow$ NON varrebbe la legge di Gauss



Immaginiamo che generi un campo

$$\vec{\tilde E} = KQ \cdot r^{\alpha}\,\hat r \qquad (\alpha \neq -2)$$

$$\Rightarrow \oint_{\tilde E}(\vec S) = \int \vec E \cdot d\vec s = \underbrace{KQR^{\alpha}}_{\text{Valore di } \vec E \text{ a distanza } R} \cdot \underbrace{(4\pi R^2)}_{\text{superficie di una calotta sferica}} = 4\pi KQ\, R^{\alpha+2}$$

in contrasto con Gauss!