Compito n. 150

*Nome* | *Cognome* | *Numero di matricola*

**Corso di Laurea in Informatica** Fisica - Corso A+B - A.A. 2018-2019 - II Prova in itinere - Pisa, 4 Giugno 2019.
**Modalità di risposta:** Sul presente foglio, per ogni risposta, si scriva **la formula risolutiva in forma simbolica** nell'apposito **riquadro** e si barri **la lettera associata** al valore numerico corretto (sempre presente con una tolleranza massima ±5 %).
Ciascuna risposta sarà valutata come segue: **3.3 punti** se corretta, **-1 punti** se sbagliata, **0 punti** se non presente.
Si ricorda: costante di gravitazione universale G = $6.67 \times 10^{-11}$ Nm$^2$kg$^{-2}$, massa della Terra $M_T = 5.98 \times 10^{24}$ kg, massa della Luna $M_L = 7.35 \times 10^{22}$ kg, distanza Terra-Luna $d_{TL}$ = 384000 km, costante di Coulomb $k_e = 8.99 \times 10^9$ Nm$^2$C$^{-2}$.

**Problema 1:** Una cassa di massa 3.00 Kg risale, a velocità costante, un piano liscio inclinato di 0.240 rad rispetto all'orizzontale.

1. Calcolare la quota di cui è risalita dopo 3.10 s, sapendo che la forza trainante eroga una potenza costante di 9.10 W.

   $h$ [cm] = $W \Delta t / mg$ A 8.70 B 141 C 7.42 D ~~95.9~~ E 40.3

2. Posizioniamo ora la cassa ad una quota di 0.510 m, lasciandola libera di muoversi a partire da ferma e in assenza della forza trainante. Trovare la distanza totale percorsa, se il piano orizzontale presenta attrito con coefficiente dinamico 0.390.

   $d_{tot}$ [m] = $h/\mu_d + h/\sin\theta$ A ~~3.45~~ B 1.35 C 0.653 D 0.217 E 0.327

**Problema 2:** Una macchinina di massa 0.420 kg è vincolata a muoversi su una pista rettilinea, che presenta un giro della morte in verticale, di raggio pari a 0.140 m. Alle estremità della pista sono presenti due molle, di costanti elastiche 14.0 N/m e 8.60 N/m, rispettivamente. La macchinina è inizialmente appoggiata alla prima molla.

3. Di quanto va compressa tale molla, affinché la macchinina possa raggiungere la molla all'estremità opposta della guida?

   $\Delta$ [m] = $\sqrt{5mgR/k_L}$ A 0.571 B 0.0701 C ~~0.454~~ D 0.0361 E 0.320

4. Supponendo che la prima molla sia inizialmente compressa di 1.10 m e che la macchinina riesca a raggiungere la seconda molla, di quanto comprimerà quest'ultima molla?

   $\Delta$ [m] = $\Delta_L \sqrt{k_L/k_R}$ A 13.7 B 4.60 C 1.04 D 1.69 E ~~1.40~~

**Problema 3:** Un'astronave, di massa 35000 kg, si trova ferma lungo la congiungente Terra-Luna, ad una distanza dal centro della Terra pari a 0.930 volte la sua distanza dalla Luna. Determinare:

5. il modulo dell'accelerazione dell'astronave;

   $a$ [cm/s$^2$] = $G \cdot \left| \frac{M_T}{(x\, d_{TL})^2} - \frac{M_L}{[(1-x) d_{TL}]^2} \right|$ A 0.0993 B 0.434 C 0.0577 D 0.197 E ~~0.366~~

6. il lavoro minimo che i motori dell'astronave devono compiere per allontanarla indefinitamente dal sistema Terra-Luna.

   $L$ [GJ] = $G \frac{m_A}{d_{TL}} \cdot \left( \frac{M_T}{x} + \frac{M_L}{1-x} \right)$ A ~~455~~ B 413 C 465 D 137 E 337

**Problema 4:** Si considerino tre cariche elettriche puntiformi uguali, vincolate su un piano, nelle posizioni di coordinate cartesiane A(0,1), B(-1,0), C(0,-1). Si assuma che le coordinate siano espresse in metri.

7. Calcolare il valore $q$ di ciascuna di tali cariche, sapendo che il campo elettrico nel punto D(1,0) vale 5.30 **i** N/C.

   $q$ [nC] = $4|\vec{E}_D| / k_e (1+2\sqrt{2})$ A 0.398 B 10.1 C 9.21 D 0.364 E ~~0.616~~

Si supponga ora che $q$ = 75.0 nC e si posizioni nell'origine del sistema di riferimento O(0,0) una carica 3.90 nC avente massa 0.370 g, inizialmente ferma e libera di muoversi.

8. Determinare il modulo della velocità che tale carica raggiungerà, quando sarà infinitamente lontana dalle altre cariche.

   $v$ [m/s] = $\sqrt{6 k_e q q_e / m_e}$ A ~~0.206~~ B 0.309 C 0.0657 D 0.101 E 0.692

**Problema 5:** Due palline di volume trascurabile, ciascuna di massa 1.30 g e carica elettrica 7.30 nC, sono attaccate alle estremità di una molla che ha lunghezza a riposo 0.740 cm. Si trascuri l'effetto della forza gravitazionale.

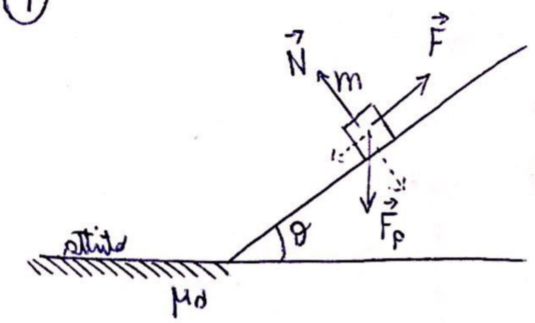
9. Quanto vale la costante elastica della molla, se all'equilibrio essa è allungata di 0.150 cm?

   $k$ [N/m] = $k_e q^2 / \Delta \cdot (\ell_0 + \Delta)^2$ A 3.16 B ~~4.03~~ C 2.40 D 11.0 E 6.32

10. Il sistema è lasciato libero di muoversi recidendo la molla nelle stesse condizioni di allungamento del punto 9, con masse mantenute inizialmente immobili. Determinare il valore dell'accelerazione delle masse quando saranno distanti 3.70 volte la distanza iniziale.

    $a$ [cm/s$^2$] = $\frac{k_e}{m} \cdot \frac{q^2}{[x(\ell_0+\Delta)]^2}$ A 19.3 B 2.73 C 18.0 D 4.06 E ~~34.0~~

(1)




Se la cassa risale a velocità costante, la risultante delle forze che agiscono su di essa deve essere zero.
Perciò lungo il piano inclinato $F = F_p \cdot \sin\theta = mg\sin\theta$
La forza eroga una potenza $W = \frac{L}{\Delta t}$ costante

$L = F \cdot d$ essendo $\vec{F}$ costante e $d$ è la lunghezza percorsa lungo il piano.

$\Rightarrow L = Fd = mg\,\cancel{\sin\theta} \cdot h/\cancel{\sin\theta} = mgh$ essendo $h = d\sin\theta$

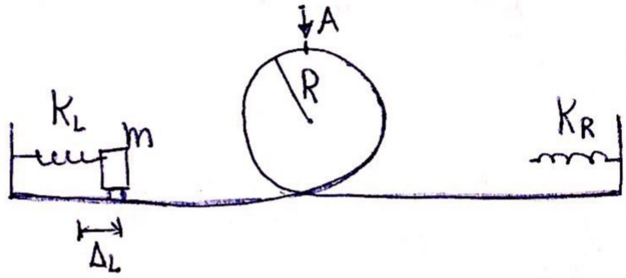
Dunque $W = mgh/\Delta t \Rightarrow h = \frac{W\Delta t}{mg}$ è la quota di cui è risalita in $\Delta t$. 1

Lasciando andare la cassa da una quota $h_2$, essa ha una energia iniziale pari a quella potenziale della forza peso: $E_{in} = mgh_2$. Alla fine la cassa si ferma, a causa dell'attrito sul piano orizzontale, dunque $E_{in}$ viene dissipata in lavoro della forza di attrito (non conservativa): $E_{in} = -L_{f_d}$ (th. energia generalizzato)

$\Rightarrow mgh_2 = -(-f_d \cdot \ell_{per}) = mg\mu_d \ell_{per} \Rightarrow \ell_{per} = h_2/\mu_d$ distanza percorsa in orizzontale.

Dunque $d_{TOT} = \ell_{per.} + \ell_{piano\ inclinato} = \frac{h_2}{\mu_d} + \frac{h_2}{\sin\theta}$. 2

(2)



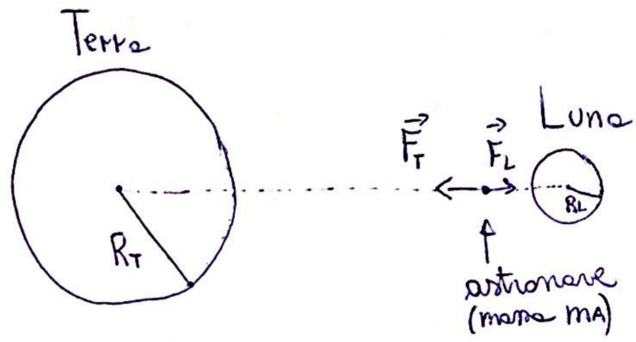

Per riuscire a compiere il giro della morte senza cadere, la macchinina deve arrivare in A con una velocità minima $v_{MIN}$ tale che la forza peso sia uguale alla forza centripeta. Dunque deve essere: $mg = m\frac{v_{MIN}^2}{R} \Rightarrow v_{MIN} = \sqrt{gR}$

Per fare in modo che la macchinina arrivi alla molla destra,
l'energia elastica iniziale deve almeno uguagliare l'energia potenziale + cinetica minima necessaria per arrivare in A: $\frac{1}{2}k_L\Delta_L^2 = \frac{1}{2}m v_{MIN}^2 + mg\cdot(2R) = \frac{1}{2}mgR + 2mgR$

da cui: $\frac{1}{\cancel{2}}k_L\Delta_L^2 = \frac{5}{\cancel{2}}mgR \Rightarrow \Delta_L = \sqrt{5mgR/k_L}$ 3

Se la macchinina arriva alla molla destra, deve essere: $\frac{1}{2}k_L\Delta_L^2 = \frac{1}{2}k_R\Delta_R^2$
dunque la molla destra si comprime di $\Delta_R = \Delta_L\sqrt{k_L/k_R}$ 4

3




Il modulo dell'accelerazione (data dall'interazione gravitazionale) dell'astronave è:

$$|\vec a| = G\left|\frac{M_T}{d_{TA}^2} - \frac{M_L}{d_{LA}^2}\right|$$

Sia x il prefattore tale che l'astronave si trova ad una distanza dal centro della Terra pari a X volte la distanza Terra-Luna

$\Rightarrow d_{TA} = x\, d_{TL}$ ; $d_{LA} = (1-x)\, d_{TL}$ dove $d_{TL}$ è la distanza tra il centro della Terra e il centro della Luna

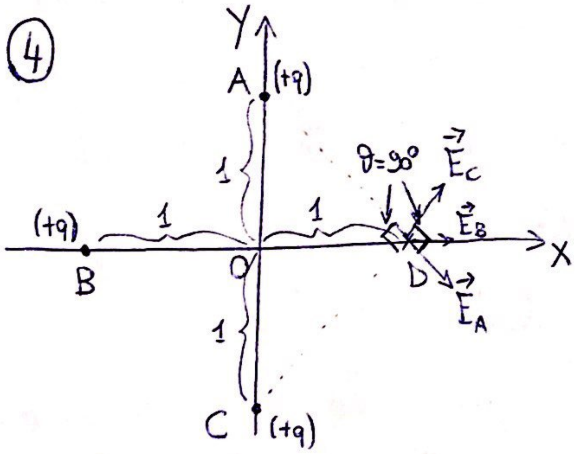
Dunque $$\underline{|\vec a| = G\left|\frac{M_T}{x^2 d_{TL}^2} - \frac{M_L}{(1-x)^2 d_{TL}^2}\right|}\ \boxed{5}$$

$G, M_T, M_L, d_{TL}$ sono tutte costanti note

---

Per allontanare indefinitamente l'astronave, bisogna fare in modo che all'infinito l'energia del sistema sia almeno nulla (= zero energia cinetica + potenziale).
All'inizio invece, essendo vincolata alla Terra e alla Luna, ha un'energia potenziale gravitazionale negativa, pari a: $U_{in} = -G\left(\frac{M_T}{x d_{TL}} + \frac{M_L}{(1-x) d_{TL}}\right) \cdot m_A$
Dunque i motori devono compiere un lavoro $L = |U_{in}| = U_{fin} - U_{in}$ $(U_{fin} = 0)$
perciò $$\underline{L = G\frac{m_A}{d_{TL}}\left(\frac{M_T}{x} + \frac{M_L}{1-x}\right)}\ \boxed{6}.$$

4




Il campo elettrico nel punto D vale:
$$\vec E_D = \vec E_A + \vec E_B + \vec E_C$$
Dalla geometria del problema (vedi figura) si ha che: $|\vec E_D| = |\vec E_B| + 2\,E_{A,x}$ con:

$|\vec E_B| = K_e \frac{q}{2^2}$ modulo del campo elettrico generato dalla carica B

$E_{A,x} = \underbrace{\left[K_e \frac{q}{(\sqrt2)^2}\right]}_{=|\vec E_A|} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{\text{proietta lungo x}}$ componente lungo x del campo generato da A

Dunque: $|\vec E_D| = K_e\left\{\frac{q}{4} + \cancel{2}\,\frac{q}{\cancel{2}}\cdot\frac{\sqrt2}{2}\right\}$

$\Rightarrow |\vec E_D| = K_e\, q\left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt2}{2}\right) \Rightarrow \underline{q = \frac{4|\vec E_D|}{K_e(1+2\sqrt2)}}\ \boxed{7}$

Immaginiamo ora di mettere una carica $q_e$ in O, libera di muoversi, e avente massa $m_e$.

La sua energia potenziale elettrica è: $U_0 = U_A + U_B + U_C = \left(k_e \frac{q\, q_e}{1}\right)\cdot 3$

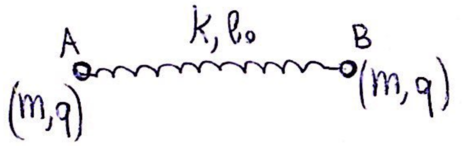
infatti le tre cariche $+q$ situate in A, B, C distano tutte 1 m da O $\Rightarrow U_A = U_B = U_C$

Perciò $U_0 = 3 k_e q q_e$. Quando la carica $q_e$ è infinitamente lontana, avrà solo energia cinetica: $K_\infty = \frac{1}{2} m_e v_\infty^2$.

Usando la legge di conservazione dell'energia: $3 k_e q q_e = \frac{1}{2} m_e v_\infty^2 \Rightarrow v_\infty = \sqrt{\frac{6 k_e q q_e}{m_e}}$.

$\boxed{8}$

(5)




All'equilibrio, su ciascuna carica agiscono la forza elettrica e quella elastica, che devono essere in modulo uguali:

$\vec{F}_e \longleftarrow \overset{A}{\cdot} \longrightarrow \vec{F}_{molla}$

$\vec{F}_{molla} \longleftarrow \overset{B}{\cdot} \longrightarrow \vec{F}_e$

$F_e = k_e \frac{q^2}{(l_0+\Delta)^2}$

$l_0$: lung. a riposo
$\Delta$: allungamento

$F_{molla} = k\cdot\Delta \Rightarrow k\Delta = k_e \frac{q^2}{(l_0+\Delta)^2}$ perciò $k = \frac{k_e q^2}{\Delta (l_0+\Delta)^2}$

$\boxed{9}$

Se ad un certo punto la molla si rompe, le due cariche si muoveranno in modo da respingersi, sottoposte alla forza di Coulomb.


Tale forza sarà pari, in modulo, a: $F_e = k_e \frac{q^2}{d_{AB}^2}$.

All'inizio le due palline distano tra loro $l_0 + \Delta$, dunque quando saranno distanti x volte rispetto a $l_0+\Delta$, su ciascuna di esse agirà un'accelerazione:

$$|\vec{a}| = \frac{F_e}{m} = \underbrace{k_e \frac{q^2}{[x(l_0+\Delta)]^2} \cdot \frac{1}{m}}_{\boxed{10}} .$$