Compito n. 1

Nome | *Cognome* | *Numero di matricola*

Corso di Laurea in Informatica

Fisica - Corso A+B - A.A. 2013-2014 - II Prova in itinere - Pisa, 30 Maggio 2014.

- Modalità di risposta: Saranno valutati esclusivamente gli elaborati accompagnati da risoluzione su foglio protocollo allegato. Maggior peso nella valutazione (3 punti a risposta) sarà dato alla correttezza del metodo e delle procedure così come emergono dallo svolgimento dei problemi, mentre un peso minore (0.33 punti) sarà dato all'individuazione del valore numerico corretto di ogni risposta. Sul presente foglio, per ogni risposta si scriva in forma algebrica la formula risolutiva nell'apposito riquadro e si barri la lettera associata al valore numerico corretto. Si effettuino entrambe le operazioni, oltre a fornire lo svolgimento del problema in forma sufficientemente estesa su foglio protocollo allegato. Tra le alternative numeriche proposte c'è sempre la risposta corretta. La tolleranza prevista per il risultato numerico è ±5 % salvo ove diversamente indicato. Attenzione: non saranno valutate, pur se corrette, le scelte con crocetta fra le alternative a risposta multipla, se non accompagnate da adeguato svolgimento della soluzione nel foglio protocollo allegato.
- Si assumano i seguenti valori per le costanti che compaiono nei problemi: intensità campo gravitazionale sulla superficie terrestre g = 9.81 $\mathrm{ms^{-2}}$, costante di gravitazione universale G = 6.67×10^{-11} $\mathrm{Nm^2kg^{-2}}$, costante di Coulomb $k_e = 1/4\pi\epsilon_0 = 8.99 \times 10^9$ $\mathrm{Nm^2C^{-2}}$.

Problema 1: Un'asta sottile rigida di massa M =12 kg e lunghezza L = 3.50 m ruota nel piano orizzontale incernierata intorno ad un palo verticale passante per il suo centro di massa. Il momento di inerzia dell'asta è $I = ML^2/12$. Due sfere forate di massa 3.40 kg, una per ciascun braccio, si trovano infilate sull'asta e vincolate a metà di ciascun braccio, cioè a distanza $L/4$ dal centro. Il sistema così configurato ruota senza attrito con velocità angolare 8.40 rad/s. Ad un certo istante il vincolo viene rimosso e le sfere scivolano lungo l'asta fino alle due estremità. Si calcoli:

1. la velocità angolare nella nuova configurazione;

   ω_f [rad/s] = ☐ A 4.43 B 1.83 C 3.86 D 11.8 E 2.81

A questo punto su una delle due estremità dell'asta viene applicata una forza di intensità costante 1.80 N in direzione tangenziale e opposta al moto. Calcolare:

2. dopo quanto tempo la velocità angolare dell'asta si annulla.

   t [s] = ☐ A 2.52 B 46.5 C 21.3 D 8.58 E 7.03

Problema 2: L'astronave Shuttle, di massa 30000 kg, sta viaggiando dalla Terra in direzione della Luna, alla velocità di 2000 m/s e si trova nel punto A, distante $L/10$ dalla Luna (L è la distanza Terra-Luna, pari a 3.84×10^5 km, la massa della Terra è pari a 5.98×10^{24} kg e quella della Luna è pari a 7.35×10^{22} kg).

3. Calcolare l'energia meccanica totale dello Shuttle nel punto A;

   E [GJ] = ☐ A 21.5 B -49.2 C -3.52 D -65.5 E -25.5

4. Nell'ipotesi che lo Shuttle spenga i motori, si calcoli il modulo della forza sullo Shuttle nello stesso punto.

   $|F|$ [N] = ☐ A 0.0630 B 0.444 C 0.254 D 0.244 E 0.0284

Problema 3: In prossimità della superficie terrestre, su un piano orizzontale, si trova un filo, considerato di lunghezza infinita, sul quale è depositata una carica elettrica positiva con densità lineare uniforme 4.80×10^{-6} C/m. Un punto materiale, con carica 1.80×10^{-3} C e di massa m = 1.60 kg, si trova a distanza h dal filo, sulla linea verticale al filo stesso. Si consideri la forza peso comunque pari a mg. Si calcoli:

5. il valore di h corrispondente alla posizione di equilibrio per il punto materiale;

h [m] = ____ A 14.4 B 10.3 C 29.3 D 9.90 E 6.23

6. il modulo dell'accelerazione del punto materiale, se questo viene lasciato libero di muoversi ad una distanza dal filo pari a 2.40 volte il valore della quota di equilibrio, sempre lungo la verticale.

$|a_p|$ [m/s^2] = ____ A 5.72 B 83.7 C 4.37 D 9.80 E 77.4

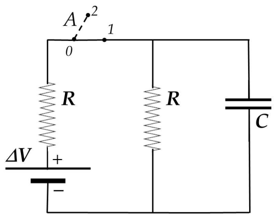
Problema 4: Un circuito è composto da un generatore di forza elettromotrice 0.890 kV, connesso a due resistori in serie, entrambi di resistenza 3.50 MΩ. In parallelo al secondo dei due resistori è connesso un condensatore di capacità 6.40 μF. Fra il primo e il secondo resistore vi è un interruttore, che si trova chiuso da molto tempo (si trova cioè in posizione 1: la corrente attraversa il circuito). Il sistema è in condizioni stazionarie. Al tempo $t = 0$ l'interruttore viene aperto (posizione 2 in figura: la corrente non passa). Calcolare:

7. quanto tempo impiega il condensatore a dimezzare la carica presente sulle sue armature a partire dall'istante $t = 0$ di apertura dell'interruttore;

t [s] = ____ A 15.5 B 212 C 127 D 10.8 E 196

8. l'energia complessiva dissipata nel processo di scarica dall'istante $t = 0$ fino alla scarica completa del condensatore.

E [J] = ____ A 0.669 B 0.161 C 0.957 D 0.634 E 0.777



Problema 5: All'interno di una guida isolante orizzontale rettilinea e liscia sono vincolati a muoversi due corpi uno dei quali ha massa quattro volte l'altro. Il corpo più leggero ha massa 1.80 g. I corpi sono entrambi carichi con carica 82.0 μC, ma mentre il corpo di massa maggiore è carico positivamente, l'altro è carico negativamente. All'istante $t = 0$ i corpi vengono lasciati liberi di muoversi dentro la guida in condizioni di quiete ad una distanza 0.0620 m. Trascurando ogni forma di attrito, calcolare:

9. il valore assoluto dell'energia elettrostatica immagazzinata nella configurazione iniziale;

U [J] = ____ A 714 B 190 C 1480 D 2280 E 975

10. la velocità del corpo di massa più grande quando la distanza fra i due corpi si è dimezzata.

v [m/s] = ____ A 575 B 373 C 841 D 2100 E 233

(in giallo nelle pagine precedenti sono evidenziate le risposte numeriche giuste)

Svolgimento

Esercizio 1

Il momento di inerzia del sistema è dato dal momento di inerzia dell'asta ($I=Ml^2/12$) e da quello delle sfere (per ciascuna di esse $I=mR^2$ con r distanza dal polo di rotazione). Le sfere sono bloccate lungo l'asta e possono essere schematizzate come due punti materiali di massa m distanti $l/4$ del polo di rotazione. In totale all'inizio abbiamo:

$$I_{tot,i} = \frac{Ml^2}{12} + 2m\left(\frac{l}{4}\right)^2 = \left(\frac{M}{12} + \frac{m}{8}\right)l^2$$

Il sistema ruota senza attrito con velocità angolare 8.40 rad/s in un piano orizzontale. Ad un certo istante il vincolo che tiene ferme le sfere viene rimosso (per es. scatta una leva con un meccanismo a tempo) e le sfere scivolano lungo l'asta fino alle due estremità e qua restano. Durante questa operazione si assume che nessuna forza esterna che produce momento torcente stia agendo sul sistema. Infatti non c'è attrito, il vincolo che blocca le sfere viene rimosso tramite un meccanismo interno, la forza peso ha momento nullo sull'asta e sulle sfere (l'effetto della forza peso è tutto simmetrico rispetto al polo di rotazione) e la forza di contatto del perno su cui è incernierata l'asta ha braccio nullo. Quindi si può dire che il momento torcente delle forze esterne è nullo e che il momento angolare si è conservato:

$$0 = \sum_j \vec{\tau}_{ext,j} = \frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} \Rightarrow \vec{L}_{tot,i} = \vec{L}_{tot,f} \Rightarrow I_{tot,i}\omega_i\hat{k} = I_{tot,f}\omega_f\hat{k}$$

Il momento di inerzia dopo che le sfere si sono spostate è $I_{tot,f} = \frac{Ml^2}{12} + 2m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \left(\frac{M}{12} + \frac{m}{2}\right)l^2$

quindi la velocità angolare finale è: $\omega_f = \frac{I_{tot,i}}{I_{tot,f}}\omega_i = \frac{\left(\frac{M}{12} + \frac{m}{8}\right)l^2}{\left(\frac{M}{12} + \frac{m}{2}\right)l^2}\omega_i = 4.43 rad/s$ (A).

A questo punto viene esercitata una forza costante in direzione tangenziale ad una delle due estremità dell'asta. Questo equivale ad un momento torcente costante dovuto alla forza esterna:

$$\vec{\tau}_{ext} = \vec{r} \times \vec{F}_t = -\frac{l}{2}F_t\hat{k} = \frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = I_{tot,f}\frac{d\omega}{dt}\hat{k} = I_{tot,f}\alpha\hat{k} \Rightarrow -\frac{l}{2}F_t = I_{tot,f}\alpha \Rightarrow \alpha = -\frac{lF_t}{2I_{tot,f}}$$

Avendo un'accelerazione angolare α costante, e sapendo che la velocità angolare iniziale è quella calcolata al punto 1 si può calcolare il tempo che serve a portare a zero la velocità angolare come:

$$\Delta\omega = \alpha\Delta t \Rightarrow 0 - \omega_0 = -\frac{lF_t}{2I_{tot,f}}\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{2I_{tot,f}}{lF_t}\omega_0 = \frac{2I_{tot,f}}{lF_t}\frac{I_{tot,i}}{I_{tot,f}}\omega_i = \frac{2I_{tot,i}}{lF_t}\omega_i = \frac{\left(\frac{M}{6} + \frac{m}{4}\right)l}{F_t}\omega_i = 46.5s$$

(B).

Esercizio 2

Problema 2: L'astronave Shuttle, di massa 30000 kg, sta viaggiando dalla Terra in direzione della Luna, alla velocità di 2000 m/s e si trova nel punto A, distante $L/10$ dalla Luna (L è la distanza Terra-Luna, pari a 3.84×10^5 km, la massa della Terra è pari a 5.98×10^{24} kg e quella della Luna è pari a 7.35×10^{22} kg).

La distanza Terra-Luna sopra indicata è fra i centri di massa dei due corpi celesti.

Si deve trovare l'energia meccanica totale nel punto A e il modulo della forza che agisce sullo Shuttle nel punto A, eccezion fatta per la forza dei motori. Le uniche forze in gioco sono le attrazioni gravitazionali dei due pianeti.

Per la prima domanda (energia meccanica), bisogna sommare energia cinetica dello Shuttle, energia potenziale gravitazionale dovuta alla Terra e energia potenziale gravitazionale dovuta alla Luna. Le energie potenziali sono entrambe negative (forza di gravità è sempre attrattiva) e vanno sommate algebricamente.

$$E = K + U_{gT} + U_{gL} = \frac{1}{2} m_S v^2 - \frac{GM_T m_S}{r_{TS}} - \frac{GM_L m_S}{r_{LS}} = m_S \left[\frac{v^2}{2} - \frac{10G}{L} \left(\frac{M_T}{9} + M_L \right) \right] = 21.5GJ \quad \text{(A)}$$

Per la seconda domanda (modulo della forza), bisogna sommare vettorialmente le due forze di gravità, quella dovuta alla Terra e quella dovuta alla Luna, e fare il modulo. Le due forze hanno stessa direzione e verso opposto:

$$\left| \sum_i \vec{F}_i \right| = \left| -\frac{GM_T m_S}{r_{TS}^2} + \frac{GM_L m_S}{r_{LS}^2} \right| = m_S \frac{100G}{L} \left| \left(-\frac{M_T}{81} + M_L \right) \right| = 0.444N \quad \text{(B)}$$

C'è da notare che la forza è particolarmente bassa per un corpo così massivo. Infatti proprio nel Gettys I, pag.142, cap.7 esempio 7.5 si descrive come la regione fra Terra e Luna a un decimo della distanza dalla Luna sia una regione dove la risultante delle forze si può annullare.

Esercizio 3

Problema 3: In prossimità della superficie terrestre, su un piano orizzontale, si trova un filo, considerato di lunghezza infinita, sul quale è depositata una carica elettrica positiva con densità lineare uniforme 4.80×10^{-6} C/m. Un punto materiale, con carica 1.80×10^{-3} C e di massa m = 1.60 kg, si trova a distanza h dal filo, sulla linea verticale al filo stesso. Si consideri la forza peso comunque pari a mg. Si calcoli:

5. il valore di h corrispondente alla posizione di equilibrio per il punto materiale;

   h [m] = $\boxed{}$ A $\boxed{14.4}$ B $\boxed{10.3}$ C $\boxed{29.3}$ D $\boxed{9.90}$ E $\boxed{6.23}$

6. il modulo dell'accelerazione del punto materiale, se questo viene lasciato libero di muoversi ad una distanza dal filo pari a 2.40 volte il valore della quota di equilibrio, sempre lungo la verticale.

   $|a_p|$ [m/s^2] = $\boxed{}$ A $\boxed{5.72}$ B $\boxed{83.7}$ C $\boxed{4.37}$ D $\boxed{9.80}$ E $\boxed{77.4}$

Per trovare la condizione di equilibrio dobbiamo calcolare la risultante delle forze (somma vettoriale) agenti sul punto materiale carico e vedere quando essa è nulla.

$$0 = \sum_j \vec{F}_j = q\vec{E} + m\vec{g}$$

La forza peso è diretta verticalmente verso il basso, mentre il campo elettrico generato da una distribuzione di carica lineare uniforme di densità lineare λ=+4.8x10^{-6} C/m è diretto in direzione radiale, uscente e come modulo vale

$$E = \frac{2k_e \lambda}{r} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Il campo decade con l'inverso della distanza dal filo, non come l'inverso del quadrato come accade con la carica puntiforme. Riscrivendo la risultante delle forze avremo:

$$0 = \sum_j \vec{F}_j = q\vec{E} + m\vec{g} = (qE - mg)\hat{k} \Rightarrow qE - mg = q\frac{2k_e\lambda}{h} - mg = 0 \Rightarrow h = \frac{2k_e\lambda q}{mg} = 9.90m \quad \text{(D)}$$

Se il punto materiale viene posizionato e lasciato libero di muoversi alla distanza dal filo n*h, con n=2.40, avremo che la sua accelerazione è:

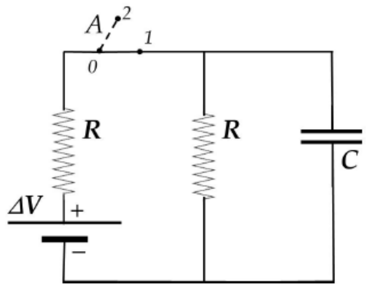
$$m\vec{a}=\sum_j \vec{F}_j = q\vec{E}+m\vec{g}=\left(qE-mg\right)\hat{k}=\left(q\frac{2k_e\lambda}{nh}-mg\right)\hat{k}=\left(q\frac{2k_e\lambda mg}{n2k_e\lambda q}-mg\right)\hat{k}=\left(\frac{1}{n}-1\right)mg\hat{k}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |a|=\left|\left(\frac{1}{n}-1\right)\right|g=5.72ms^{-2}$$

Che è la risposta A.

Esercizio 4

Problema 4: Un circuito è composto da un generatore di forza elettromotrice 0.890 kV, connesso a due resistori in serie, entrambi di resistenza 3.50 MΩ. In parallelo al secondo dei due resistori è connesso un condensatore di capacità 6.40 μF. Fra il primo e il secondo resistore vi è un interruttore, che si trova chiuso da molto tempo (si trova cioè in posizione 1: la corrente attraversa il circuito). Il sistema è in condizioni stazionarie. Al tempo $t = 0$ l'interruttore viene aperto (posizione 2 in figura: la corrente non passa). Calcolare:



7. quanto tempo impiega il condensatore a dimezzare la carica presente sulle sue armature a partire dall'istante $t = 0$ di apertura dell'interruttore;

t [s] = ☐ A 15.5 B 212 C 127 D 10.8 E 196

8. l'energia complessiva dissipata nel processo di scarica dall'istante $t = 0$ fino alla scarica completa del condensatore.

E [J] = ☐ A 0.669 B 0.161 C 0.957 D 0.634 E 0.777

Nella prima configurazione in condizioni stazionarie le due resistenze sono in serie e il condensatore è in parallelo alla seconda.

Applicando la prima legge di Kirchoff, si vede che la relazione fra la corrente che passa nelle resistenze e la d.d.p. della batteria è

$$\Delta V-2RI=0\Rightarrow I=\frac{\Delta V}{2R}$$

Siccome siamo in condizioni stazionarie, il condensatore è carico e ai suoi capi c'è una differenza di potenziale costante nel tempo, pari a quella ai capi del secondo resistore, che, per la legge di Ohm è $RI=R\Delta V/(2R)=\Delta V/2$

La carica sulle armature del condensatore sarà quindi il prodotto della capacità per la d.d.p. ai capi del condensatore, quindi $Q_0=C(\Delta V/2)$

Nel momento in cui l'interruttore viene aperto, il circuito di sinistra (quello che comprende il condensatore) è costituito solo da un resistore e un condensatore. Il primo resistore e la batteria non contano più. È il classico problema di un condensatore carico che si scarica attraverso la resistenza. La legge che descrive l'andamento della carica e del potenziale nel tempo è un decadimento esponenziale con costante tempo τ=RC. Come si arriva a questo risultato è stato oggetto di lezioni, esercitazioni, note di esercizi svolti e ci sono svariati esempi nel Gettys. Avendo a diposizione i materiali era banale scrivere il risultato e non aver sfruttato questa occasione è una grave mancanza dello studente. Tanto più che l'esercizio era stato annunciato. La legge della carica nel tempo è:

$$Q(t) = Q_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Il tempo di dimezzamento t* della carica lo si trova dalla seguente equazione:

$$\frac{Q_0}{2} = Q(t^*) = Q_0 \exp\left(-\frac{t^*}{\tau}\right) \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{t^*}{\tau} \Rightarrow t^* = \tau \ln(2) = RC\ln(2) = 15.5s \quad \text{(A)}$$

Per trovare l'energia complessiva dissipata nel processo di scarica un metodo potrebbe essere quello di calcolarsi la potenza dissipata nel resistore per effetto Joule e poi integrarla nel tempo. La corrente di scarica la si può ricavare facendo la derivata della carica cambiata di segno.

Però c'è un metodo più semplice: la potenza dissipata complessiva sarà la energia elettrostatica immagazzinata all'inizio nel condensatore meno quella alla fine (che è nulla, visto che alla fine il condensatore è scarico). Avremo quindi che

$$E_{diss} = \frac{Q_0 (\Delta V_{cond})^2}{2} - 0 = \frac{Q_0 (\Delta V / 2)^2}{2} = \frac{Q_0 (\Delta V)^2}{8} = 0.634J \quad \text{(D)}$$

Esercizio 5

Problema 5: All'interno di una guida isolante orizzontale rettilinea e liscia sono vincolati a muoversi due corpi uno dei quali ha massa quattro volte l'altro. Il corpo più leggero ha massa 1.80 g. I corpi sono entrambi carichi con carica 82.0 μC, ma mentre il corpo di massa maggiore è carico positivamente, l'altro è carico negativamente. All'istante $t = 0$ i corpi vengono lasciati liberi di muoversi dentro la guida in condizioni di quiete ad una distanza 0.0620 m. Trascurando ogni forma di attrito, calcolare:

9. il valore assoluto dell'energia elettrostatica immagazzinata nella configurazione iniziale;

U [J] = ☐ A 714 B 190 C 1480 D 2280 E 975

10. la velocità del corpo di massa più grande quando la distanza fra i due corpi si è dimezzata.

v [m/s] = ☐ A 575 B 373 C 841 D 2100 E 233

L'energia elettrostatica immagazzinata all'inizio è facile da calcolare: si tratta di considerare la coppia di cariche puntiformi distanti d:

$$U = \frac{k_e(-q)q}{r} = -\frac{k_e q^2}{r} = 975J \quad \text{(E)}$$

Quando i due corpi sono lasciati liberi, si attraggono e si avvicinano. Indichiamo con 1 il corpo carico positivamente e con 2 quello carico negativamente. Per trovare la loro velocità si devono applicare due leggi di conservazione.

Innanzi tutto si conserva l'energia meccanica (cinetica + potenziale elettrostatica) perché le forze in gioco sono conservative o non fanno lavoro (fra queste ultime ci sono le forze vincolari).

$$E_i = -\frac{k_e q^2}{r} = E_f = -\frac{k_e q^2}{r/2} + \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$$

Poi, almeno lungo l'asse orizzontale, la risultante delle forze esterne è zero e quindi si conserva la quantità di moto. Avremo quindi:

$$P_{xi} = 0 = Px_f = +m_1 v_1 + m_2 v_2 \Rightarrow v_2 = -\frac{m_1}{m_2} v_1 = -\frac{4m_2}{m_2} v_1 = -4v_1$$

Combinando le due equazioni:

$v_2 = -4v_1;$

$$-\frac{k_e q^2}{r} = -\frac{2k_e q^2}{r} + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = -\frac{2k_e q^2}{r} + \frac{1}{2} 4m_2 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 16 v_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{k_e q^2}{r} = 10 m_2 v_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{k_e q^2}{10 m_2 r}} = 233 ms^{-1}$$

Che è la risposta (E).