Esercizi sulla conservazione dell'energia (27 marzo – 21 aprile 2017) [svolgimento incluso]

Problema.
Un corpo di massa 0.640 kg vienr lanciato in salita per un piano inclinato che forma un angolo di 30 gradi con l'orizzontale. La velocità iniziale del corpo è di 2.20 m/s ed il coefficiente di attrito dinamico tra il corpo ed il piano inclinato vale 0.280. Calcolare:
9) l'altezza massima da terra raggiunta dal corpo [0.166 m];
10) il lavoro fatto dalla forza di attrito [-0.506 J].

Svolgimento.
9) Le forze in gioco sono la forza peso, la forza del vincolo (normale) e la forza di attrito. L'altezza massima si può trovare usando il teorema dell'energia cinetica o ricavarsi l'accelerazione dalla seconda legge della dinamica e poi applicare le relazioni del moto uniformemente accelerato fra spazio percorso e variazione di velocità. Il risultato è che la altezza massima raggiunta è

$$h = \frac{v_0^2}{2g\left(1 + \frac{\mu_d}{tg\theta}\right)}$$

10) Il lavoro fatto dalle forze di attrito si può calcolare dal prodotto delle forze di attrito ($F_A = \mu_d mg\cos\theta$) per lo spostamento lungo il piano, $l = h/\text{sen}\theta$, dove h è la quantità calcolata al punto precedente.

$$W = -\mu_d mg\cos\theta \frac{h}{\sin\theta} = -\mu_d mg \frac{h}{tg\theta}$$

Problema 4: Una guida senza attrito a forma di settore cilindrico di raggio 43.0 m si estende intorno al suo asse lungo un arco di 90° a sinistra della verticale e a destra è connessa ad un piano orizzontale senza attrito. La guida è fissata rigidamente al piano. Al tempo iniziale t=0 un corpo di massa 10.0 kg viene lasciato libero in stato di quiete all'interno della guida alla sommità del bordo sinistro. Il corpo inizia a scivolare lungo la guida verso il basso. Si consideri l'attrito dell'aria trascurabile in tutto il problema. All'istante t, in cui il raggio vettore che unisce la posizione del corpo con il centro della guida cilindrica forma un angolo di 60° rispetto alla verticale, calcolare:

6. il modulo della forza normale esercitata dalla guida in quel punto.

   N [N] = $\boxed{}$ A $\boxed{147}$ B $\boxed{953}$ C $\boxed{229}$ D $\boxed{126}$ E $\boxed{47.1}$

Una volta arrivato sul piano orizzontale liscio, il corpo prosegue fino a percorrere in salita una rampa inclinata scabra con un'inclinazione di 30° rispetto all'orizzontale. Il coefficiente di attrito dinamico tra il corpo e la rampa vale $\mu_d = 0.650$, quello di attrito statico $\mu_s = 1.00$. Il corpo rallenta fino a fermarsi e, una volta fermatosi, permane nello stato di quiete. Calcolare:

7. la massima quota rispetto all'orizzontale raggiunta dal corpo;

   h [m] = $\boxed{}$ A $\boxed{37.8}$ B $\boxed{17.4}$ C $\boxed{24.1}$ D $\boxed{25.4}$ E $\boxed{20.2}$

8. il modulo della forza di attrito statico esercitata sul corpo in quel punto.

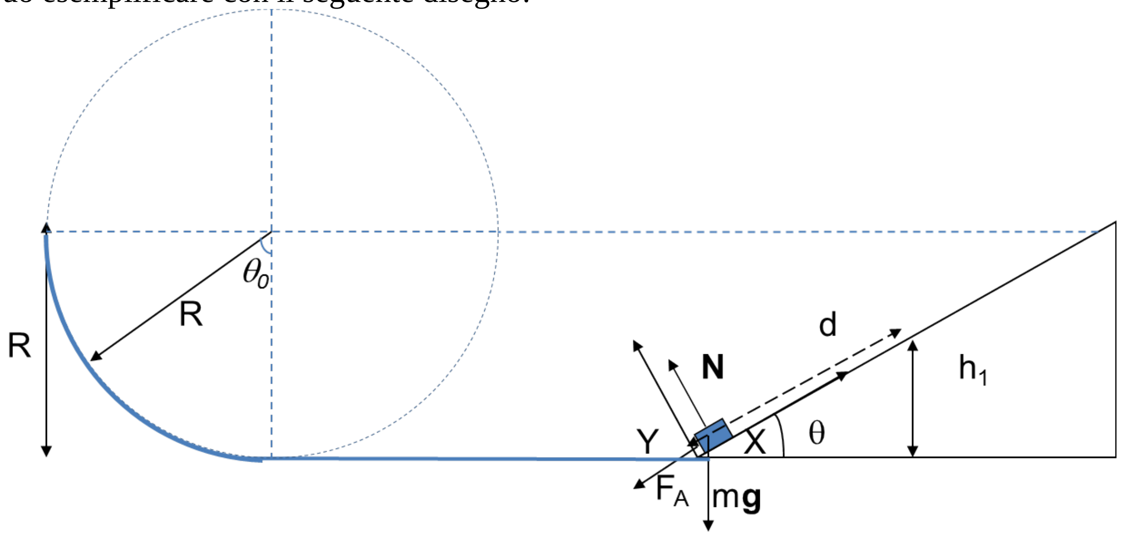
   F [N] = $\boxed{}$ A $\boxed{747}$ B $\boxed{152}$ C $\boxed{54.3}$ D $\boxed{49.1}$ E $\boxed{398}$

A questo punto al corpo viene collegata l'estremità di una fune, inestensibile e di massa trascurabile, tesa parallela alla rampa, la cui altra estremità è collegata ad un motore che si trova al confine fra il piano orizzontale e la rampa. Il motore inizia a tirare il corpo giù lungo la rampa, ad una velocità costante di 0.210 m/s. Calcolare:

9. La tensione della fune.

Svolgimento.
Una guida senza attrito a forma di settore cilindrico di raggio R=43.0 m si estende intorno al suo asse lungo un arco di 90° a sinistra della verticale e a destra è connessa ad un piano orizzontale

senza attrito. La guida è fissata rigidamente al piano. Al tempo iniziale t=0 un corpo di massa *m*=10.0 kg viene lasciato libero in stato di quiete all'interno della guida alla sommità del bordo sinistro. Il corpo inizia a scivolare lungo la guida verso il basso. Si consideri l'attrito dell'aria trascurabile in tutto il problema. All'istante t, in cui il raggio vettore che unisce la posizione del corpo con il centro della guida cilindrica forma un angolo di θ_0=60° rispetto alla verticale, calcolare il modulo della forza normale N esercitata dalla guida in quel punto. Questa parte di problema si può esemplificare con il seguente disegno:



Lungo la guida liscia, l'unica forza che compie lavoro è la forza peso. Applicando in ogni istante il teorema lavoro-energia si può sapere per ogni quota il valore dell'energia cinetica del corpo.

$$\Delta K=\frac{1}{2}mv_f^2-\frac{1}{2}mv_i^2=\frac{1}{2}mv^2=mg(y_i-y_f)=mg[R-(R-R\cos\theta)]=mgR\cos\theta$$

Questa parte è risolvibile con il teorema energia-lavoro o la conservazione dell'energia. La velocità finale è determinabile dal lavoro della forza peso, che è uguale a mg per la differenza di quota.

Inoltre il moto è di tipo circolare. Quindi l'accelerazione centripeta istante per istante vale, in modulo, v^2/R, il cui valore possiamo ricavare dall'equazione appena scritta. Applicando la seconda legge della dinamica e considerando le componenti radiali alla traiettoria, si ottiene:

$$m\frac{v^2}{R}=N-mg\cos\theta\Rightarrow 2\,mg\cos\theta=N-mg\cos\theta\Rightarrow N=3\,mg\cos\theta$$

Per θ_0=60° si ottiene: $$N=3mg\cos(60^o)=\frac{3}{2}mg=147.15\,ms^{-2}$$

La soluzione è quella contrassegnata dalla casella 6.A.

Il corpo sul piano orizzontale liscio ha una velocità v_A che si può determinare dal teorema energia lavoro, essendo il lavoro della forza peso uguale a mgR (R è la quota di partenza) => $v_A=\sqrt{2gR}$

Questa velocità, in modulo, è la stessa che ha il corpo all'inizio del piano scabro.

Lungo il piano inclinato con attrito, percorso in salita, le forze in gioco sono:

$$0=ma_y=\left(\sum_i \vec{F}_i\right)_y=N-mg\cos\theta\Rightarrow N=mg\cos\theta$$

$$\left(\sum_i F_i\right)_x=-\mu_d N-mg\sin\theta=-\mu_d mg\cos\theta-mg\sin\theta=ma_x$$

La inclinazione della rampa è θ=30°.

L'accelerazione nella direzione del moto in questo caso è: $a_x=-g(\sin\theta+\mu_d\cos\theta)$

Il coefficiente di attrito dinamico è μ_d=0.65.

Sapendo il valore di un'accelerazione costante, si può calcolare la variazione della velocità al quadrato in uno spazio percorso d. La massima quota h (domanda 7) sarà ottenuta dopo un tratto d sulla rampa:

$$v_f^2 - v_i^2 = 0 - v_i^2 = -v_A^2 = -2gR = 2a_x d = \frac{2a_x h}{\sin(\theta)}$$

$$h = \frac{v_A^2 \sin(\theta)}{2g[\sin(\theta) + \mu_d \cos(\theta)]} = \frac{v_A^2}{2g\left[1 + \frac{\mu_d}{tg(\theta)}\right]} = \frac{R}{\left[1 + \frac{\mu_d}{tg(\theta)}\right]} = 20.227\,m$$

La soluzione è quella contrassegnata dalla casella 7.E.

Il problema è simile ad altri illustrati a lezione e inseriti nelle slides delle lezioni.
A questo punto il corpo si ferma e, a causa dell'attrito statico, rimane in equilibrio sulla rampa.
Si deve calcolare il modulo della forza di attrito statico in questo punto. Se il corpo è in equilibrio statico, allora vale nelle due componenti, perpendicolare e parallela al piano:

$$0 = ma_y = \left(\sum_i \vec{F}_i\right)_y = N - mg\cos\theta \Rightarrow N = mg\cos\theta$$

$$0 = ma_x = \left(\sum_i \vec{F}_i\right)_x = f_S - mg\sin\theta \Rightarrow f_S = mg\sin\theta = 9.81 \times 10.0 \times \sin(30^o) = 49.05\,N \qquad (**)$$

La soluzione è quella contrassegnata dalla casella 8.D.

Al corpo viene poi collegata una fune ideale tesa parallela ad una rampa e un motore inizia a trascinare il corpo giù lungo la discesa ad una velocità costante v_d=0.21 m/s.
La forza costante applicata dalla fune è in grado di controbilanciare le altre forze, in modo che la risultante delle forze sia nulla e il corpo proceda a velocità costante. Lungo la direzione della rampa si possono calcolare le forze in gioco, che sono date dalla tensione T, dalla forza di attrito (che si oppone sempre al moto) e dalla componente della forza peso (che stavolta è concorde al moto).

$$ma_y = 0 = \left(\sum_i \vec{F}_i\right)_y = N - mg\cos\theta$$

$$ma_x = 0 = \left(\sum_i \vec{F}_i\right)_x = -T - mg\sin\theta + \mu_d N = -T + mg(\mu_d\cos\theta - \sin\theta)$$

E quindi $T = mg(\mu_d\cos\theta - \sin\theta)$.

Problema.
Un paracadutista acrobatico di massa M=70 kg cade verticalmente nell'aria a velocità costante di v_0=140 km/h. Qual è il lavoro compiuto in un intervallo di tempo Δt=120 s (a) dalla forza risultante, (b) dalla forza di gravità, (c) dalla resistenza dell'aria?

Soluzione.
Se consideriamo le forze in gioco e disegniamo il diagramma delle forze, vedremo che sul corpo agiscono due forze: la forza peso, diretta verso il basso, e la resistenza dell'aria, che dipende dalla velocità del corpo, ed è sempre diretta in senso contrario al moto. Sia f_v il modulo della forza viscosa dovuta alla resistenza dell'aria.
Siccome il paracadutista sta cadendo a velocità costante, l'accelerazione sarà nulla. Scrivendo la seconda legge di Newton nella componente verticale si ha:

$$\left(\sum_i \vec{F}_i\right)_y = -mg + f_v = ma_y = 0 \;\Rightarrow\; f_v = mg\,.$$

Il punto (a) chiede il lavoro fatto nell'intervallo Δt dalla forza risultante. La forza risultante è zero e quindi il lavoro è nullo.

Il punto (b) chiede il lavoro fatto nell'intervallo Δt dalla forza di gravità.
Va richiamato il concetto di potenza, cioè lavoro nell'unità di tempo, e ricordarsi che la potenza è anche legata alla velocità: $W = \vec{F} \cdot \vec{v} = mgv_0$ da cui: $L = W\,\Delta t = mgv_0\,\Delta t = 3.2MJ$.

Il punto (c) chiede il lavoro fatto dalla resistenza dell'aria. Siccome la forza legata alla resistenza dell'aria è, in questo caso uguale e opposta alla forza peso, il lavoro sarà uguale a quello della forza peso ma con il segno cambiato: $L_{f_v} = -L_{\text{peso}} = -3.2MJ$.

Invece seguendo il procedimento usato per la forza peso:
$W = \vec{F} \cdot \vec{f_v} = -f_v v_0 = -mg\,v_0; \quad L = W\,\Delta t = -mgv_0\,\Delta t$.

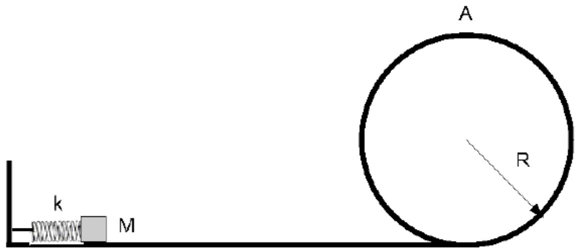
Problema.
Un corpo di massa 10 kg sta scivolando con attrito su un piano orizzontale alla velocità di 4 m/s. Il coefficiente di attrito dinamico è: $\mu_d = 0.4$.
1) Che distanza percorre il corpo prima di fernarsi? [2.048 m];
2) Quanto tempo impiega a percorrere questa distanza? [1.02 s].

Soluzione.
Si può applicare il teorema energia-lavoro, oppure usare la relazione che lega, per moti uniformemente accelerati, differenze di velocità e distanza percorsa. Usiamo il primo modo:
$|f_{ad}| = \mu_d mg;\ L_{f_{ad}} = -\mu_d mgd = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = -\frac{1}{2}mv_i^2 \ \Rightarrow\ d = v_i^2/(2\mu_d g) = 2.04m$.
Il tempo impiegato per percorrere tale distanza è: $0 = v_f = v_i - \mu_d g t^* \ \Rightarrow\ t^* = v_i/(\mu_d g) = 1.02m$.

Problema.
La Luna ha raggio $R_1 = 1.74 \times 10^6 m$ e massa $M_1 = 7.36 \times 10^{22} kg$. Un relitto di una sonda spaziale si trova a distanza $10R_1$ dal centro della Luna e viaggia con una velocità di 4.60 km/s diretta verso il centro della Luna. Considerando solo l'effetto dell'attrazione gravitazionale, calcolare la velocità di impatto sul suolo lunare del relitto.

Svolgimento.
Il problema si risolve applicando la conservazione dell'energia:
$$\frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{GmM_1}{10R} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{GmM_1}{R} \ \Rightarrow\ v_f = \sqrt{v_i^2 + \frac{9GM_1}{5R}} = 5.12\,km/s.$$

Problema.
Un corpo di massa $M = 250\ g$ si muove su una guida liscia come nella figura, il raggio è $R = 4\ m$. Il corpo è inizialmente in quiete a contatto con una molla ideale di costante elastica $k = 2.5\ N/m$ compressa di $x = 2\ m$ rispetto alla lunghezza di riposo. Assumendo che tutti gli attriti siano trascurabili e che il campo gravitazionale possa essere considerato uniforme, determinare:
Domanda n. 1: l'altezza massima raggiunta dal corpo;
Domanda n. 2: la velocità minima v_{min} che il corpo deve avere quando arriva nel punto A affinché riesca a compiere un giro completo senza cadere dalla guida;
Domanda n. 3: la compressione minima x_{min} che deve avere la molla affinché il corpo riesca a compiere un giro completo senza cadere;
Domanda n. 4: se il valore di v_{min} e di x_{min} cambiano in presenza di attrito dinamico sulla guida (non è richiesto il calcolo esatto degli eventuali nuovi valori);



Svolgimento.

Risposta alla domanda n. 1: Non essendoci attriti basta applicare la conservazione dell'energia meccanica

$$\frac{1}{2}kx^2 = Mgh$$

da cui segue che

$$h = \frac{1}{2}\frac{kx^2}{Mg} = 2m$$

Risposta alla domanda n. 2: La velocità minima v_{min} che il corpo deve avere nel punto A per non cadere è quella per cui la reazione vincolare in quel punto si annulla. Applicando la seconda legge di Newton al corpo che si muove di moto circolare sulla guida mostrata in figura e considerando solo la componente radiale nel punto A si ottiene:

$$M\frac{v^2}{R} = N + Mg$$

da cui

$$N = M\left(\frac{v^2}{R} - g\right), \qquad v_{min} = \sqrt{gR} = 6,3m/s$$

Risposta alla domanda n. 3: La compressione minima x_{min} che deve avere la molla affinché il corpo raggiunga il punto A con velocità v_{min} è quindi

$$\frac{1}{2}kx_{min}^2 = Mg(2R) + \frac{1}{2}Mv_{min}^2 = \frac{5}{2}MgR$$

da cui

$$x_{min} = \sqrt{\frac{5MgR}{k}} = 4.4m$$

Risposta alla domanda n. 4: In presenza di attrito dinamico la velocità minima v_{min} che il corpo deve avere nel punto A per non cadere è la stessa di prima, infatti l'attrito esercita una forza tangente alla circonferenza ma non una ortogonale e quindi lascia inalterata la relazione tra N e v trovata in precedenza. In questo caso però l'energia meccanica non si conserva poiché una parte è dissipata e quindi la compressione minima della molla deve essere maggiore di quella trovata nel punto precedente.

Problema.

Una navicella spaziale di massa $m = 200\,kg$ si muove su un'orbita circolare attorno alla Terra con velocità $v_1 = 6200\,m/s$.

Sapendo che la massa e il raggio della Terra sono, rispettivamente, $M_T = 5.98\ 10^{24}\ kg$ e $R_T = 6.37\ 10^6\ m$ determinare:

Domanda n. 1: a quale quota h_1 dalla superficie terrestre orbita la navicella spaziale;

Domanda n. 2: il periodo orbitale T_1.

Ad un certo istante la navicella spaziale accende i razzi e si sposta su un'altra orbita circolare tale che il nuovo periodo orbitale è $T_2 = 8T_1$. Calcolare:

Domanda n. 3: il raggio della nuova orbita R_2;

Domanda n. 4: il modulo della velocità v_2 nella nuova orbita;

Domanda n. 5: il lavoro compiuto dai razzi per spostare la navicella dall'orbita iniziale a quella finale.

Risposta alla domanda n. 1: Dato che la navicella si muove di moto circolare uniforme, applicando la seconda legge di Newton si ottiene

$$\frac{GM_T m}{(R_T+h_1)^2} = m\frac{v_1^2}{R_T+h_1}$$

da cui segue la quota h_1

$$h_1 = \frac{GM_T}{v_1^2} - R_T = 4.006 \times 10^6 m$$

Risposta alla domanda n. 2: Il periodo orbitale è:

$$T_1 = \frac{2\pi(R_T+h_1)}{v_1} = \frac{2\pi GM_T}{v_1^3} = 10516s$$

Risposta alla domanda n. 3: Dalla terza legge di Keplero segue che

$$R_2 = \left(\frac{GM_T T_2^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

da cui

$$R_2 = (R_T+h_1)\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{2/3} = 4(R_T+h_1) = 4.15 \times 10^7\ m$$
$$h_2 = 3R_T + 4h_1 = 3.51 \times 10^7\ m$$

Risposta alla domanda n. 4: Per la velocità si ha:

$$v_2^2 = \frac{GM_T}{R_2} = \frac{GM_T}{4(R_T+h_1)}$$
$$v_2 = \frac{v_1}{2} = 3100\ m/s$$

Risposta alla domanda n. 5: Il lavoro compiuto dai razzi è uguale alla variazione di energia meccanica della navicella nel passare dall'orbita di raggio $R_T + h_1$ a quella di raggio R_2:

$$W = E_2 - E_1 = \left(\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GM_T m}{R_2}\right) - \left(\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GM_T m}{R_T+h_1}\right) = 2.883 \times 10^9\ J$$