Potenziale elettrico

- *Introduzione*

  → *energia potenziale elettrica*
- *Potenziale elettrico*

  → *esempi*
- *Relazione tra campo e potenziale elettrico*
- *Elettrostatica*

Gettys II

Capitolo 3

Ricordiamo la relazione generale fra *energia potenziale*, *lavoro* e *forza conservativa*:

$$\vec{F}(x,y,z) \iff U(x,y,z)$$

$$\Delta U = U_f - U_i = -L(\vec{r}_i, \vec{r}_f) = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}; \qquad \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U \quad \left(F_x = -\frac{\partial U}{\partial x};\ F_y = -\frac{\partial U}{\partial y};\ F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \right)$$

Energia potenziale elettrica:

→ il ***campo elettrico*** è conservativo;

→ il campo elettrico è funzione della posizione;

→ il lavoro fatto dalla forza elettrica da un punto all'altro dipende ***solo*** *dalla posizione iniziale e finale* e *non* dal percorso;

→ l'energia meccanica si conserva;

→ è quindi possibile scrivere l'*energia potenziale elettrica*.

Il lavoro infinitesimo *dL* svolto dal campo elettrico su una carica q_0 varia l'energia potenziale *dU* del sistema carica-campo:

$$dU = -dL = -q_0\,\vec{E}\cdot d\vec{s}$$

La variazione di energia potenziale del sistema carica-campo è:

$$\Delta U = U_B - U_A = -q_0 \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

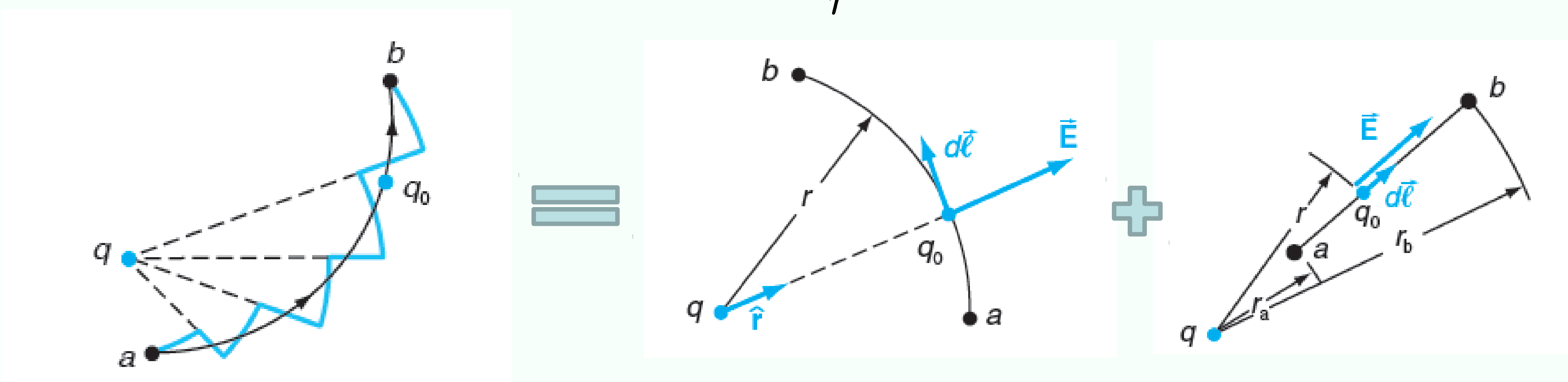
Calcoliamo il lavoro del campo elettrico quando una particella di prova di carica q_0 viene spostata nel campo di una carica puntiforme q fissata che genera il campo.

La variazione di energia potenziale è uguale al lavoro, cambiato di segno, fatto dalla forza conservativa:

$$\Delta U = -L = -\int_A^B \vec{F}_e \cdot d\vec{l} = -q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Lo spostamento lungo una traiettoria di forma arbitraria lo si può sempre vedere come una somma di piccoli archi (lungo i quali il lavoro infinitesimo è nullo: dL=0) e di piccoli segmenti radiali

$$\vec{E} = E\,\hat{r}\,; \qquad \vec{E} \cdot d\vec{l} = k_e \frac{q}{r^2}\hat{r} \cdot d\vec{l}; \qquad \vec{r} \cdot d\vec{l} = dl\,\cos\theta = dr$$



$$\boxed{L =} \, q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0 \int_{r_A}^{r_B} k_e \frac{q}{r^2} dr = k_e q_0 q \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B} = \boxed{k_e q_0 q \left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right]}$$

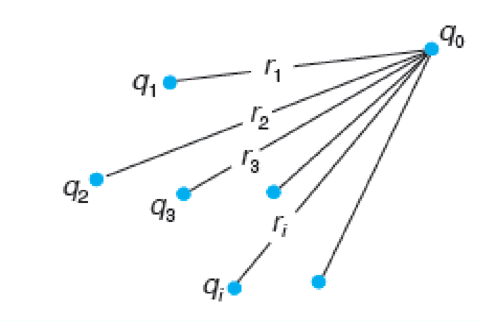
$$\Rightarrow \boxed{U_B - U_A = k_e\, q\, q_0 \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right]}$$

Questa quantità dipende ***solo*** dalla posizione iniziale e finale (in particolare dalle coordinate radiali) e ***non dal cammino***.

Fissando la posizione di partenza all'infinito ($r_A \to \infty$) e ponendo lì il valore di riferimento (nullo) dell'energia potenziale si ha:

$$U_B = \frac{k_e\, q\, q_0}{r_B}; \qquad \boxed{U(r) = \frac{k_e\, q\, q_0}{r}}$$

Se più cariche puntiformi generassero il campo, l'energia potenziale sarebbe la somma dei singoli contributi
(i campi si sommano vettorialmente, ma il lavoro è uno scalare)



$$U(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{F} \cdot d\vec{l} \qquad U = \sum_i U_i = q_0\, k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

A volte si definisce l'energia potenziale elettrica come il lavoro compiuto (da un agente esterno) *contro* la forza elettrica, quando la particella carica di prova viene portata dall'infinito ad una distanza *r* dalla carica fissata.

Potenziale elettrico

- *Introduzione*

  → energia potenziale elettrica

- *Potenziale elettrico*

  → esempi

- *Relazione tra campo e potenziale elettrico*

- *Elettrostatica*

Gettys II

Capitolo 3

Potenziale elettrico

Il potenziale elettrico *V* sta all'energia potenziale *U* come il campo ***E*** sta alla forza ***F*** :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{V = \frac{U}{q_0}}$$

Definizione: il potenziale elettrico generato da una carica in un punto è uguale all'energia potenziale per unità di carica di una carica di prova q_0 che si trova in quel punto.

→ È uno *scalare*.

→ Unità di misura: ***Volt*** **1 V = 1 *J*/*C***

[unità di misura del campo elettrico: V / m]

La ***differenza di potenziale*** è: $$\Delta V = \frac{\Delta U}{q_0} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Il potenziale è *definito a meno di una costante additiva*.
Il riferimento dipende dal sistema. In caso in cui il potenziale è nullo all'infinito:

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\boxed{V(\infty) = 0 \;\Rightarrow\; V_P = -\int_\infty^P \vec{E} \cdot d\vec{s}}$$

Il potenziale può essere visto anche come il lavoro per unità di carica necessario per portare una particella di prova dall'infinito ad un punto *P* arbitrario.

→ Per una carica puntiforme: $V = k_e \dfrac{q}{r}$

→ Per più cariche puntiformi occorre fare la ***somma algebrica dei potenziali*** generati dalle singole particelle: $V = k_e \sum_i \dfrac{q_i}{r_i}$

Potenziale elettrico

- *Introduzione*

  → *energia potenziale elettrica*
- *Potenziale elettrico*

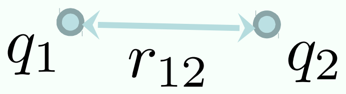
  → *esempi*
- *Relazione tra campo e potenziale elettrico*
- *Elettrostatica*

Gettys II

Capitolo 3

Coppia di cariche:

$$U = q_1 V_2 = q_2 V_1 = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

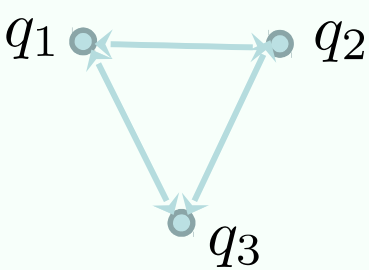


L’energia potenziale presenta solo un termine per coppia.

Se le cariche hanno segni concordi, l’energia potenziale è *positiva* (le due cariche si possono allontanare all’infinito). Se le cariche sono discordi, l’energia potenziale è *negativa* (le cariche si attraggono: moto confinato).

Tre cariche:

$$U_{\mathrm{tot}} = k_e \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right)$$



L’energia associata a tre o più cariche puntiformi si calcola sommando algebricamente le energie potenziali di ogni coppia (contatata una sola volta).

→ Per una particella di prova nel campo di altre particelle, l’energia potenziale di q_0 (non del sistema) è: $U_{q_0} = k_e q_0 \, \Sigma_i \, q_i / r_i$

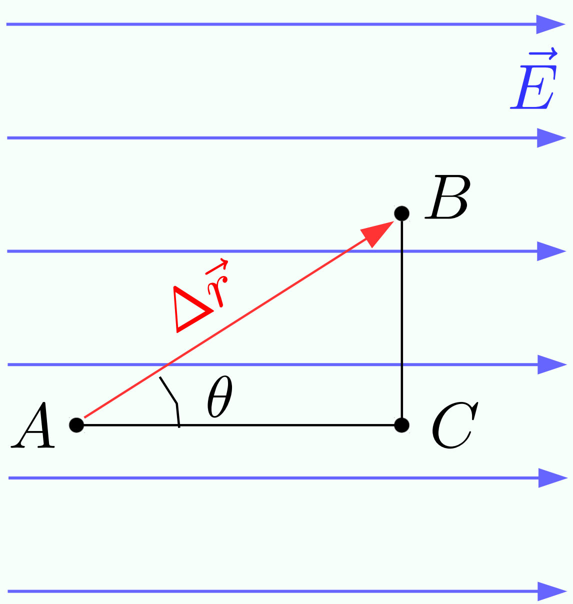
Campo elettrico uniforme:

È analogo al caso del campo gravitazionale (forza peso). La differenza di energia potenziale è pari al lavoro fatto dalla forza elettrica per unità di carica cambiato di segno:

$$\Delta U_{BA} = U_B - U_A = -L_{\mathrm{campo\_A\to B}} = -\int_A^B \vec{F}_e \cdot d\vec{s} = -q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\Delta V_{BA} = \frac{\Delta U_{BA}}{q_0} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\vec{E} \cdot \int_A^B d\vec{s} = -\vec{E} \cdot \Delta\vec{r}$$

$$= -E\,\Delta r\,\cos\theta = -E\,d = \Delta V_{CA}$$



Muoversi da B a C (o comunque in ogni cammino perpendicolare al campo) non porta a variazioni di potenziale: *le superfici* ***perpendicolari*** *al campo elettrico sono* ***equipotenziali***.

L'unico cammino che fa variare il potenziale è quello ***lungo*** il campo elettrico (analogo all'energia potenziale della forza peso): $\Delta V = -Ed$

Dipolo in un campo elettrico uniforme:

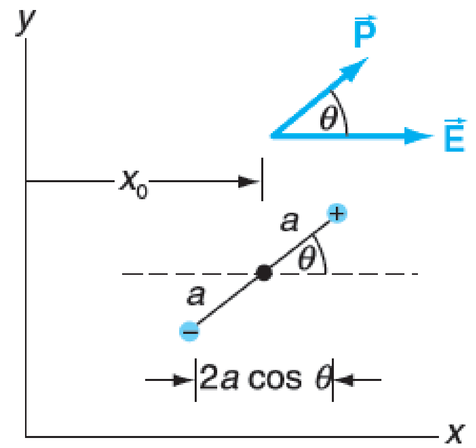


Figura 3.17
Esempio 3.11: L'energia potenziale di un dipolo in un campo uniforme, $\vec{\mathbf{E}} = E_x\hat{\mathbf{i}}$.

Un dipolo è costituito da due cariche uguali e opposte, che si trovano ad una distanza fissata 2*a*.

$$V(x) = -Ex + V_0$$

$$x_+ = x_0 + a\,\cos\theta \;\Rightarrow\; U_+ = q\big[-E(x_0 + a\,\cos\theta) + V_0\big]$$

$$x_- = x_0 - a\,\cos\theta \;\Rightarrow\; U_- = -q\big[-E(x_0 - a\,\cos\theta) + V_0\big]$$

$$U_{\text{tot}} = \cancel{U_{\text{int}}} + U_+ + U_- = -2aqE\cos\theta = -pE\cos\theta$$

Energia potenziale elettrica di un dipolo in campo uniforme: $\boxed{U = -\vec{p}\cdot\vec{E}}$

Potenziale elettrico

- *Introduzione*

  → *energia potenziale elettrica*
- *Potenziale elettrico*

  → *esempi*
- *Relazione tra campo e potenziale elettrico*
- *Elettrostatica*

Gettys II

Capitolo 3

Relazioni generale fra campo elettrico e potenziale: $\vec{E}(x,y,z) \quad \Longleftrightarrow \quad V(x,y,z)$

$V(x,y,z) \Rightarrow \vec{E}(x,y,z)$ differenziale e locale

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

derivata direzionale
(gradiente)

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right)$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x};\ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y};\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$\vec{E}(x,y,z) \Rightarrow V(x,y,z)$ integrale e "globale"

Variazione di potenziale è pari all'integrale di linea del campo elettrico fra i punti *A* e *B*.

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} \qquad dV = -\vec{E}\cdot d\vec{s}$$

perciò:

$$\Delta V_{AA} = -\int_A^A \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0 \ \Rightarrow \ \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0$$

Circuitazione del campo elettrico è sempre nulla!

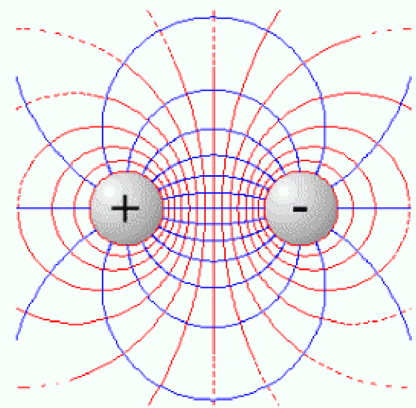
Potenziale elettrico

- *Introduzione*
  → *energia potenziale elettrica*
- *Potenziale elettrico*
  → *esempi*
- *Relazione tra campo e potenziale elettrico*
- *Elettrostatica*

Gettys II
Capitolo 3

Elettrostatica: linee di campo e superfici equipotenziali

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \qquad E_t = -\frac{\partial V}{\partial t} \qquad E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

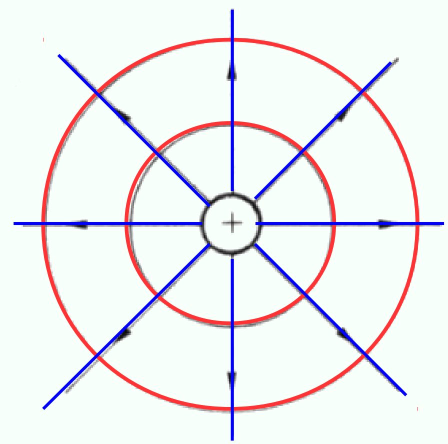


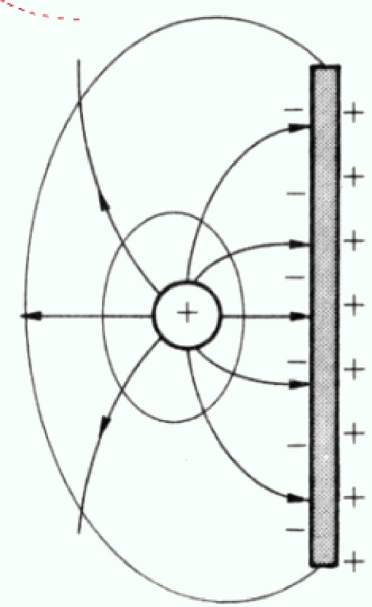
superfici equipotenziali

linee di campo

Le ***superfici equipotenziali*** sono quelle **perpendicolari** alle linee di campo.

→ Lungo di esse la differenza di potenziale non cambia perché l’integrale di linea è nullo.





Esempio: un ***conduttore***, all’equilibrio, si trova tutto allo stesso potenziale.

⇒ siccome le superfici esterne dei conduttori sono equipotenziali, i campi elettrici sono perpendicolari alle superfici esterne dei conduttori;

⇒ all’interno di un conduttore il campo elettrico è nullo.

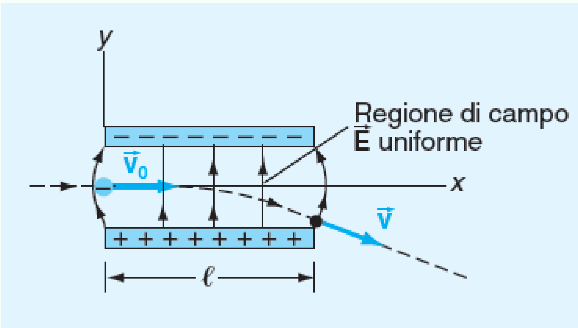
Esempi vari

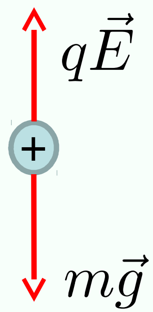
Dinamica di cariche in campi elettrici e gravitazionali

Cariche puntiformi e campi

Moto di cariche in campo elettrico uniforme

Consideriamo una carica +*q* di massa *m* in una regione di campo elettrico uniforme, diretto verso l'alto (*y*). Con quale carica il corpo rimane in equilibrio?

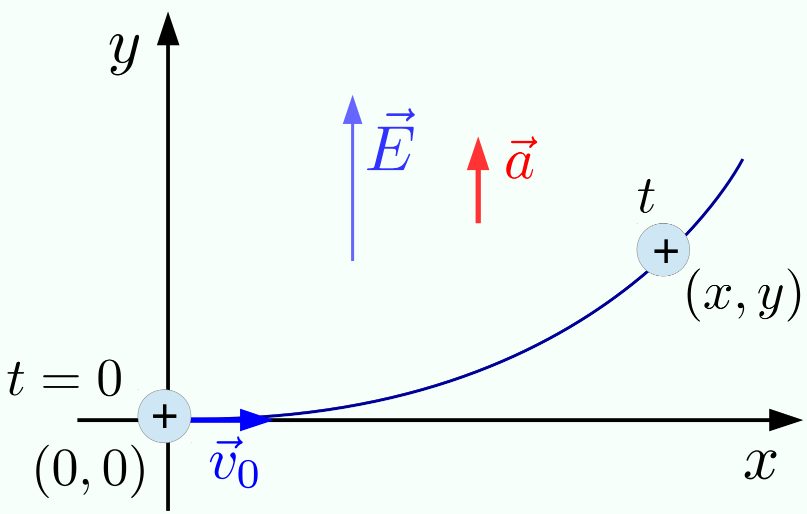


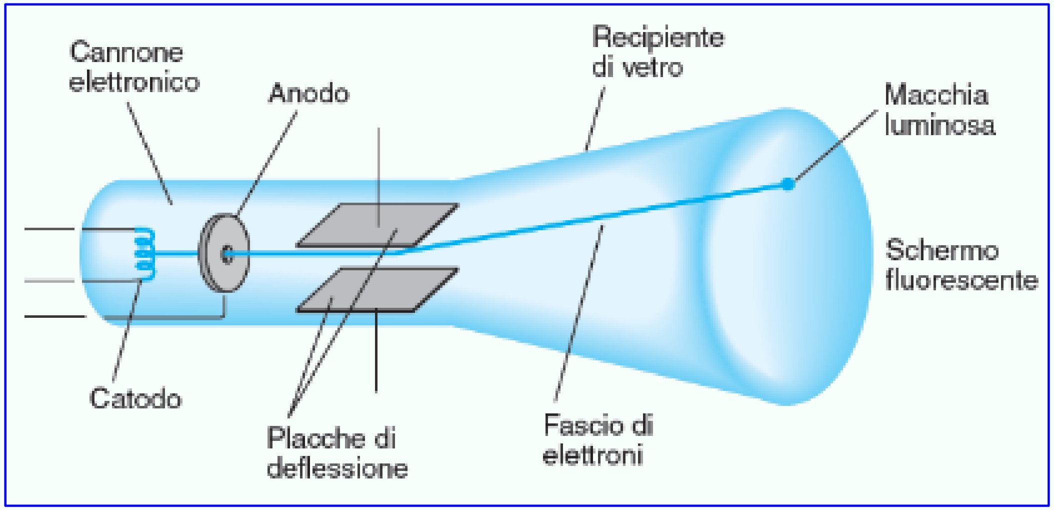


$$\sum \vec{F}_z = 0 \;\Rightarrow\; qE - mg = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{q = \frac{mg}{E}}$$

Se tale carica viene lanciata con velocità iniziale v_0, essa percorre un moto parabolico.

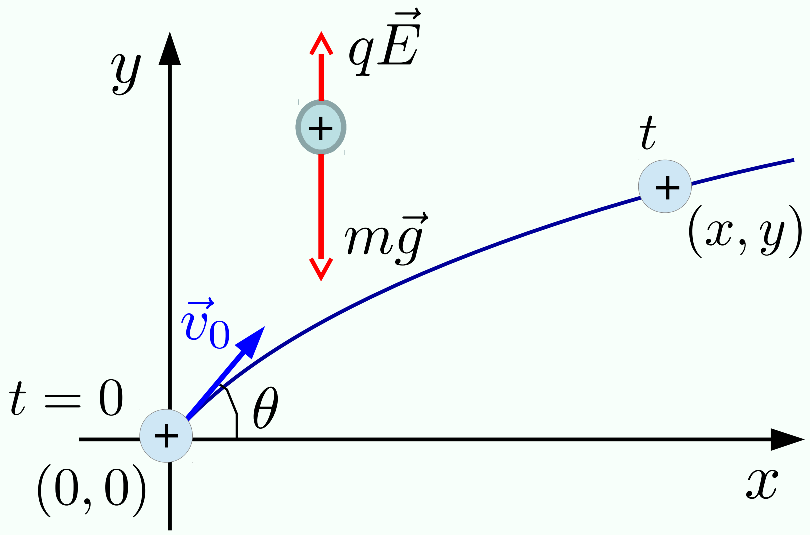




Moto di cariche in campo elettrico uniforme

Consideriamo ora l'effetto combinato della forza elettrica e di quella gravitazionale.

Supponiamo che una carica +*q* di massa *m* si trovi in una regione di campo elettrico uniforme, diretto verso l'alto (*y*). Essa viene lanciata con velocità iniziale v_0 inclinata di un angolo rispetto all'asse x. Studiarne il moto.



$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i = q\vec{E} + m\vec{g}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \left(\frac{qE}{m} - g\right)\hat{j}} = a_0\hat{j}$$

→ moto uniformemente accelerato (2D)

$$\begin{cases} v_y = v_0 \sin\theta + \left(\dfrac{qE}{m} - g\right) t \\ v_x = v_0 \cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = (v_0 \sin\theta)\, t + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{qE}{m} - g\right) t^2 \\ x = (v_0 \cos\theta)\, t \end{cases}$$

Moto di cariche in campo elettrico uniforme

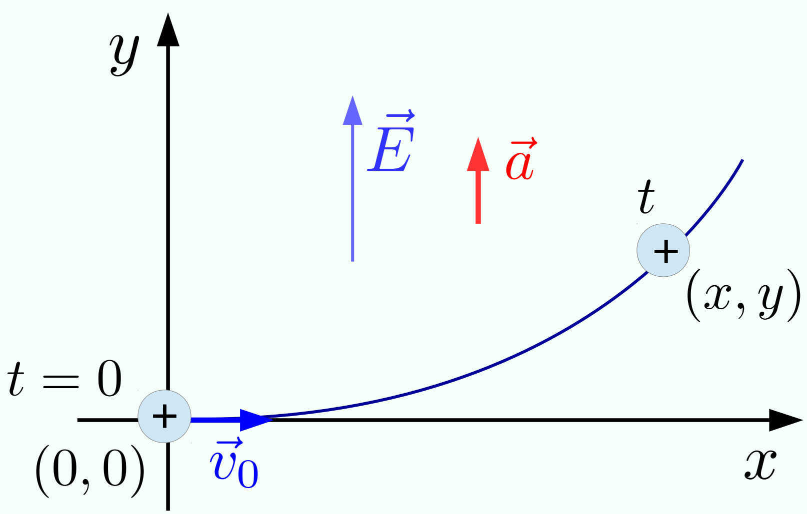
$$\begin{cases} y = (v_0 \sin\theta)\, t + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{qE}{m} - g\right) t^2 \\ x = (v_0 \cos\theta)\, t \end{cases}$$

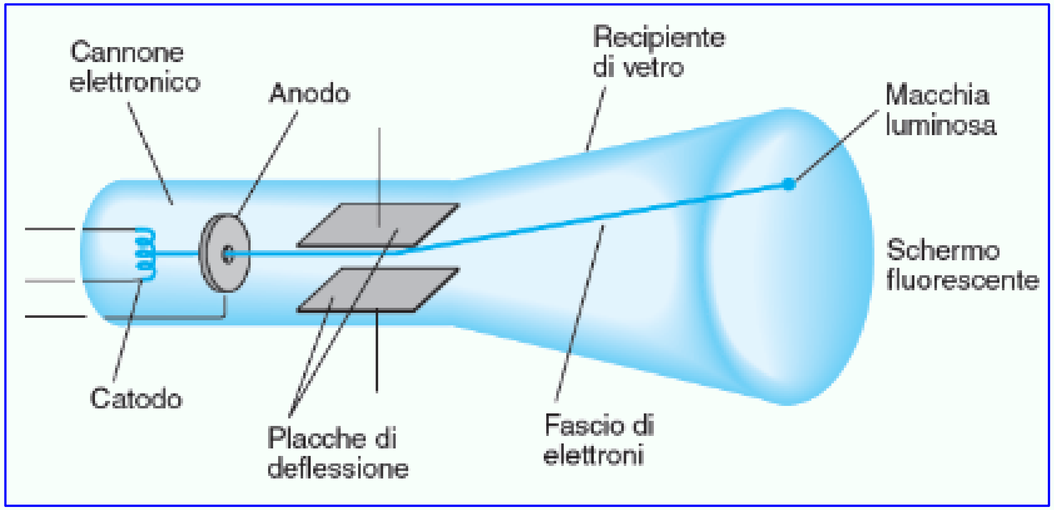
Moto uniformemente accelerato in 2D (moto del proiettile)

Se la carica *q* ha massa trascurabile (nel senso che $mg \ll qE$) e parte da orizzontale (θ = 0), a che altezza rispetto a *x* colpisce uno schermo a distanza *d*?

$$d = v_0 t^* \;\Rightarrow\; t^* = \frac{d}{v_0}$$

$$h = \frac{1}{2}\left(\frac{qE}{m} - g\right)\left(\frac{d}{v_0}\right)^2 \simeq \frac{1}{2}\frac{q}{m}\frac{d^2}{v_0^2}E$$

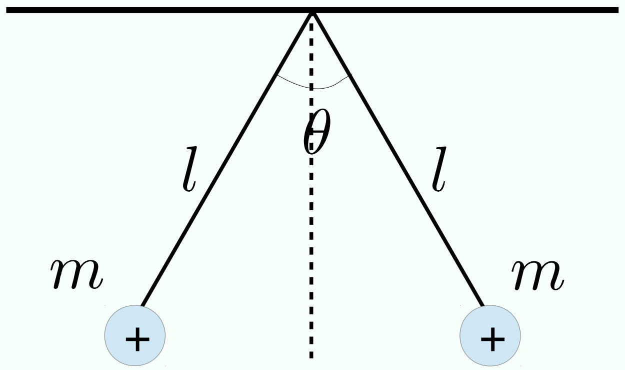




Cariche puntiformi e filo

In presenza del campo gravitazionale terrestre, due fili di massa trascurabile e lunghi ognuno *l* pendono dallo stesso chiodo. All'estremità di ogni filo è attaccata una pallina di massa *m*. Ad ognuna delle due palline viene data la stessa carica elettrica e i due fili all'equilibrio formano tra loro un angolo di θ.

Quanto vale la carica q di ognuna delle palline?



Facendo il conto delle forze su una delle due palline (data la ***simmetria*** *del problema*, l'altra pallina si comporterà in modo analogo):

$$\begin{cases} 0 = ma_y = \sum F_y = T\cos\frac{\theta}{2} - mg \;\Rightarrow\; T\cos\frac{\theta}{2} = mg \\ 0 = ma_x = \sum F_x = -T\sin\frac{\theta}{2} + \dfrac{k_e q^2}{\left(2l\,\sin\frac{\theta}{2}\right)^2} \;\Rightarrow\; T\sin\frac{\theta}{2} = \dfrac{k_e q^2}{\left(2l\,\sin\frac{\theta}{2}\right)^2} \end{cases}$$

da cui, dividendo membro a membro:

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{k_e q^2}{mg\left(2l\,\sin\frac{\theta}{2}\right)^2} \;\Rightarrow\; \boxed{q = 2l\,\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{\frac{mg}{k_e}\tan\frac{\theta}{2}}}$$

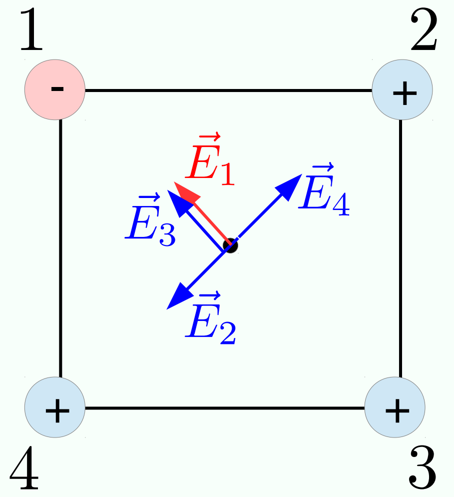
Cariche puntiformi e campo

Tre cariche positive ed una negativa, uguali in modulo e pari a *q* l'una, sono poste ai vertici di un quadrato di lato *L*.
→ calcolare il modulo del campo elettrico e il potenziale al centro del quadrato.

<u>Soluzione</u>
Le cariche di segno uguale su vertici opposti (2 e 4) danno origine a due campi nel centro del quadrato uguali in modulo e direzione, ma opposti in verso [quindi i due contributi si annullano mutuamente]. La carica negativa –*q* (1) e la positiva +*q* a lei opposta in diagonale (3) originano due campi E_1 e E_2 nel centro del quadrato che hanno la stessa direzione. La somma di tali contributi determina direttamente il modulo. Per il potenziale si sommano algebricamente i quattro potenziali.

$$|\vec{E}| = |\vec{E}_1| + |\vec{E}_3| = \frac{k_e q}{\left(L/\sqrt{2}\right)^2} + \frac{k_e q}{\left(L/\sqrt{2}\right)^2} = \frac{4 k_e q}{L^2}$$

$$V = \frac{k_e q}{L/\sqrt{2}} + \frac{k_e q}{L/\sqrt{2}} \cancel{+ \frac{k_e q}{L/\sqrt{2}}} \cancel{- \frac{k_e q}{L/\sqrt{2}}} = 4\frac{k_e q}{L\sqrt{2}}$$



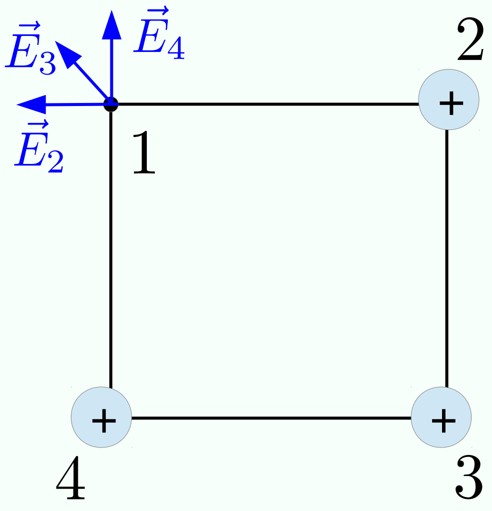
Cariche puntiformi e campo

Tre cariche positive ed una negativa, uguali in modulo e pari a *q* l'una, sono poste ai vertici di un quadrato di lato *L*.
→ calcolare il modulo della forza agente sulla carica negativa;
→ calcolare campo e potenziale in quel punto in sua assenza.

Soluzione

La forza su 1 si trova calcolando il modulo del campo complessivo generato dalle altre tre cariche (ottenuto sommando vettorialmente i campi generati dalle singole cariche) come se la carica negativa non ci fosse. La carica 3 genera un campo orientato lungo la diagonale; le cariche 2 e 4 generano campi le cui componenti trasversali si elidono mutuamente mentre la componente diagonale è uguale e si somma in maniera costruttiva. Perciò la risultante del campo elettrico generato da 2-3-4 è anch'essa diretta lungo la diagonale:

$$|\vec{E}| = \left| \frac{k_e q}{(L\sqrt{2})^2} + 2\frac{k_e q}{L^2} \cos\frac{\pi}{4} \right| = \frac{k_e q}{L^2}\left(\tfrac{1}{2} + \sqrt{2}\right)$$



Il potenziale elettrico vale: $V = \frac{k_e q}{L\sqrt{2}} + 2\frac{k_e q}{L} = \frac{k_e q}{L}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\right)$

La forza su una carica negativa in tall punto è attrattiva, lungo la diagonale e di modulo: $|\vec{F}| = |q\vec{E}| = \frac{k_e q^2}{L^2}\left(\tfrac{1}{2} + \sqrt{2}\right)$