(1) **Problema 1**: Un punto materiale di massa 0.420 Kg si trova connesso all'estremo libero di una molla ideale, di costante elastica 14.0 N/m, posta su un piano inclinato liscio, di angolo 1.10 rad rispetto all'orizzontale, con il secondo estremo fissato all'apice del piano inclinato. Il punto materiale inizia il suo moto nel punto, origine dei sistema di coordinate, in cui la molla è a riposo. Determinare:

1. il valore massimo della distanza dall'origine se il punto materiale si muove inizialmente con velocità 44.0 m/s diretta verso la base del piano inclinato;

$x_{max}$ [m] = $\boxed{\frac{1}{k}\left[mg\sin\theta + \sqrt{(mg\sin\theta)^2 + k m v_0^2}\right]}$ A ~~7.89~~ B 37.0 C 113 D 77.7 E 17.6

(2) **Problema 5**: Due satelliti artificiali descrivono due orbite circolari attorno alla Terra. Determinare:

9. il rapporto dei raggi orbitali sapendo che il rapporto delle velocità vale $v_2/v_1 = 0.190$;

$R_2/R_1$ = $\boxed{(v_1/v_2)^2}$ A 20.3 B 5.41 C 42.0 D 64.9 E ~~27.7~~

10. il periodo dell'orbita del secondo satellite se il raggio dell'orbita vale 51000 km.

$T$ [h] = $\boxed{\sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{G M_T}}}$ A 78.7 B 51.1 C 115 D 288 E ~~31.9~~

(3) **Problema 5**: Un uomo spinge un blocco di massa 63.0 Kg sul piano orizzontale liscio con una potenza costante pari a 68.0 J/s. Alla fine del tratto orizzontale l'uomo lascia il libero blocco di salire su un piano inclinato scabro, di angolo 0.660 rad rispetto all'orizzontale e coefficiente di attrito dinamico 0.270. Determinare:

9. il valore della velocità del blocco alla base del piano inclinato, se l'uomo lo spinge per un tempo di 5 s.;

$v$ [m/s] = $\boxed{\sqrt{2W\Delta t/m}}$ A 2.41 B 0.641 C 4.98 D 7.69 E ~~3.29~~

10. l'altezza massima raggiunta dal blocco sul piano inclinato, se l'uomo lo spinge sempre con la stessa potenza ma per un tempo doppio.

$h$ [m] = $\boxed{\frac{2W\Delta t}{mg(1+\mu_d \cot\theta)}}$ A 2.02 B 1.31 C 2.95 D 7.37 E ~~0.816~~

(4) **Problema 4**: In una stazione di bungee jumping, una fune di costante elastica 27.0 N/m e lunghezza di riposo 54.0 m, permette il salto da un terrazzo posto 130 m sopra alla superficie di un lago. Determinare:

7. il valore della massa di un campione che lasciandosi cadere da fermo dal terrazzo sfiora la superficie del lago;

$m$ [Kg] = $\boxed{\frac{K(h-\ell_0)^2}{2gh}}$ A 114 B 52.6 C 72.8 D 76.7 E ~~61.1~~

8. la quota rispetto al lago che il campione raggiunge dopo molte oscillazioni se la sua massa vale 52.0 kg (supponendo che continui ad oscillare in maniera smorzata appeso all'elastico).

$h_{fin}$ [m] = $\boxed{(h-\ell_0)-\frac{mg}{K}}$ A 870 B 177 C 63.2 D ~~57.1~~ E 463

(5) **Problema 2**: Sappiamo che la stazione spaziale internazionale si muove di moto circolare uniforme compiendo un giro intorno alla Terra in 5500 s. La massa della Terra è pari a $5.972 \times 10^{24}$ kg. Si calcoli:

3. il raggio dell'orbita della stazione spaziale.

$R$ [km] = $\boxed{\sqrt[3]{G\frac{M_T T^2}{4\pi^2}}}$ A 482 B 4210 C 1970 D ~~6730~~ E 2180

La navicella Sojuz, di massa 43000 kg, orbita intorno alla Terra su un'orbita circolare distinta, di raggio 6600 km. Si calcoli:

4. qual è il valore minimo di energia addizionale di cui ha bisogno la Sojuz per andare ad orbitare stabilmente su un'orbita coincidente con quella della stazione spaziale internazionale e poter effettuare il rifornimento.

$\Delta E$ [GJ] = $\boxed{G\frac{M_T m}{2}\left(\frac{1}{R_i}-\frac{1}{R_f}\right)}$ A 17.2 B 29.5 C 14.7 D 63.0 E ~~25.6~~

(6) **Problema 4**: Il profilo di una pista per skateboard consiste di un piano inclinato alto 1.10 m e lungo 5 m, seguito da un piano orizzontale, lungo 5 m, connesso a un profilo ascendente a forma di un quarto di cerchio di raggio 3.00 m.

5. Trascurando tutti i possibili attriti determinare il valore della velocità che deve essere impressa allo skateboard all'inizio del piano inclinato per riuscire a percorrere interamente il profilo a un quarto di cerchio.

$v$ [m/s] = $\boxed{\sqrt{2g(R-h)}}$ A 3.39 B ~~6.11~~ C 0.390 D 4.70 E 2.41

7

**Problema 4** Una molla, di costante elastica 180 N/m, ha una estremità fissata alla parete e giace sul piano orizzontale. La molla viene mantenuta compressa di 0.240 m ed all'estremo libero si pone in contatto una pallina di massa 0.950 kg. Si trascuri ogni forma di attrito per tutto il tratto di compressione della molla. Se all'istante iniziale si rilascia la molla, calcolare:

6. il modulo della velocità della pallina dopo che questa ha abbandonato la molla

$v$ [m/s] = $\boxed{\sqrt{\frac{K}{m}}\,\Delta x}$  A 3.52  B 2.30  C 5.10  D ~~3.30~~  E 5.52

7. il valore minimo della compressione tale che la pallina possa attraversare, dopo aver lasciato la molla, un tratto orizzontale lungo 7.00 m su cui è presente dell'attrito dinamico caratterizzato da un coefficiente 0.2.

$\Delta x$ [m] = $\boxed{\sqrt{2mg\mu_d \ell / K}}$  A 0.336  B 0.0544  C 0.657  D ~~0.381~~  E 0.709

8

**Problema 6**: In un ufficio di smistamento postale un pacco di massa 0.750 kg scivola su una rampa inclinata di 45 gradi rispetto all'orizzontale e lunga 1.00 m. Fra la rampa e il pacco è presente attrito. Nel punto più alto del piano inclinato il pacco ha una velocità pari a 2.00 m/s.

8. Determinare il valore del coefficiente di attrito dinamico necessario per fare giungere il pacco alla base del piano inclinato con velocità nulla.

$\mu_d$ = $\boxed{\frac{g\ell\sin\theta + v_0^2/2}{g\ell\cos\theta}}$  A 2.56  B ~~1.29~~  C 10.8  D 1.81  E 8.58

9

**Problema 2**: Un satellite geostazionario orbita intorno alla Terra. La sua massa è di 39000 kg e percorre un'orbita circolare in 24 ore. Per necessità strategiche viene spostato su un'orbita distante che ha raggio 1.60 volte il raggio dell'orbita originale. Si ricorda che la massa della Terra è pari a $5.972 \times 10^{24}$ kg. Si calcoli:

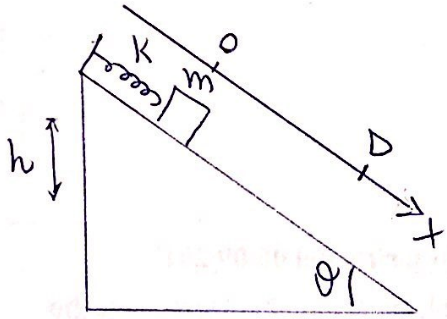
3. il periodo della nuova orbita;

$T$ [ks] = $\boxed{T_1 \cdot \alpha^{3/2}}$  A ~~175~~  B 399  C 28.6  D 531  E 207

4. il valore minimo di energia meccanica da fornire al satellite per portarlo stabilmente sulla nuova orbita.

$\Delta E$ [GJ] = $\boxed{G\frac{M_T m}{2R_1}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right) \quad (\alpha = R_2/R_1)}$  A 9.79  B ~~69.0~~  C 39.5  D 37.9  E 4.41

①




$$mgh + \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} k D^2$$

$$h = D \sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} k D^2 - mg D \sin\theta - \frac{1}{2} m v_0^2 = 0$$

$$D = \frac{mg\sin\theta \pm \sqrt{m^2 g^2 \sin^2\theta + k m v_0^2}}{k}$$

soluzione accettabile con (+)

$m = 0.42\ kg$ ; $k = 14\ N/m$ ; $\theta = 1.1\ rad$

$v_0 = 44\ m/s$ $\Rightarrow D = 7.888\ m$ ~~$-7.363\ m$~~

② $G \frac{M_T m}{R^2} = m \frac{v^2}{R}$ per un generico satellite

$$\Rightarrow \begin{cases} G \frac{M_T \cancel{m_1}}{R_1^2} = \cancel{m_1} \frac{v_1^2}{R_1} \\ G \frac{M_T \cancel{m_2}}{R_2^2} = \cancel{m_2} \frac{v_2^2}{R_2} \end{cases}$$

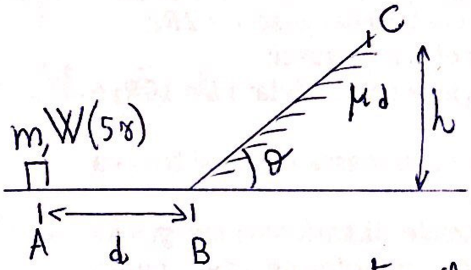
da cui: $\frac{\cancel{R_2^2}}{R_1^{\cancel{2}}} = \frac{v_1^2}{\cancel{R_1}} \cdot \frac{\cancel{R_2}}{v_2^2} \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2$

$v_2/v_1 = 0.19 \Rightarrow R_2/R_1 = (1/0.19)^2 = 27.701$

$$G \frac{M_T \cancel{m}}{R^2} = \cancel{m} \cdot \left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2 \cdot \frac{1}{R} \Rightarrow G \frac{M_T}{R^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot R \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{G M_T} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{G M_T}}$$

$G = 6.671 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$ ; $R = 51 \cdot 10^6\ m$ ; $M_T = 5.97 \cdot 10^{24}\ kg$ $\Rightarrow T = 1.147 \cdot 10^5\ s = 31.853\ h$

③




$W = \frac{L_{A \to B}}{\Delta t} = \frac{F d}{\Delta t}$ $\qquad F = m \cdot a \Rightarrow W = \frac{m a d}{\Delta t}$

(se la potenza è costante, lo è anche l'accelerazione)

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{W \cdot \Delta t}{m d} \\ d = \frac{1}{2} a \Delta t^2 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{W \cancel{\Delta t}}{m a \Delta t^{\cancel{2}}} \cdot 2$$

moto unif. accelerato:

da cui: $a^2 = \frac{2W}{m \Delta t}$

$\Rightarrow a = \sqrt{\frac{2W}{m\Delta t}}$

$$v_{(B)} = a \cdot \Delta t = \sqrt{\frac{2W}{m \Delta t}} \cdot \Delta t = \sqrt{\frac{2 W \Delta t}{m}}$$

$W = 68\ \frac{J}{s}$ ; $\Delta t = 5s$ ; $m = 63\ kg$ $\Rightarrow v_{(B)} = 3.285\ \frac{m}{s}$

$-K_B = -U_c + L_{fd}$

$(\Delta K + \Delta U = L_{fd})$

$K_B = L_{A \to B} = W \cdot (2\Delta t)$ ; $U_c = mgh$ ; $L_{fd} = -mg(\cos\theta)\mu_d \cdot \frac{h}{\sin\theta}$

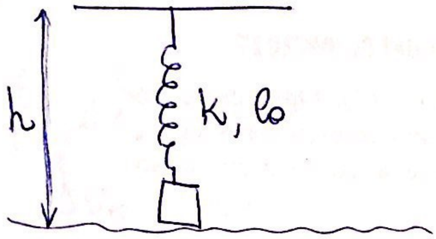
$= -mg\mu_d h \cdot \text{cotan}\,\theta$

$\Rightarrow 2 W \Delta t = mgh(1 + \mu_d\, \text{cotan}\,\theta)$

$\hookrightarrow h = (2 W \Delta t) \cdot (mg[1 + \mu_d\, \text{cotan}\,\theta])^{-1}$

$$h = \frac{2W\Delta t}{mg(1+\mu_d \cot\theta)}$$ $W = 68\ J/s$ ; $m = 63\ kg$ ; $\Delta t = 5\ s$ ; $\mu_d = 0.27$ ; $\theta = 0.66\ rad$ $\Rightarrow h = 0.816\ m$

(4)




$$mgh = \frac{1}{2}k(h-\ell_0)^2 \Rightarrow m = \frac{k(h-\ell_0)^2}{2gh}$$

$k = 27\ \frac{N}{m}$ ; $h = 130\ m$ ; $\ell_0 = 54\ m$ ; $\Rightarrow m = 61.143\ kg$

quando le oscillazioni si smorzano, il corpo è all'equilibrio ($\vec{F}_{TOT} = 0$)

$$\Rightarrow mg = k(x_{fin} - \ell_0) \Rightarrow x_{fin} = \frac{mg}{k} + \ell_0$$

$m = 52\ kg$ ; $k = 27\ \frac{N}{m}$ ; $\ell_0 = 54\ m$ $\Rightarrow x_{fin} = 72.893\ m$ distanza dal terreno

$h_{fin} = -x_{fin} + h = (h - \ell_0) - \frac{mg}{k} = 57.107\ m$ distanza dal lago

(5) $$G\frac{M_T m}{R^2} = m\frac{v^2}{R} = m\frac{4\pi^2 R^{\cancel{2}}}{T^2}\cdot\frac{1}{\cancel{R}}$$

$$\Rightarrow G\frac{M_T}{R^2} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \Rightarrow R^3 = G\frac{M_T T^2}{4\pi^2} \quad \text{da cui } R = \sqrt[3]{G\frac{M_T T^2}{4\pi^2}}$$

$G = 6.671\cdot 10^{-11}\ \frac{N\,m^2}{kg^2}$ ; $M_T = 5.98\cdot 10^{24}\ kg$ ; $T = 5.5\cdot 10^3\ s$ $\Rightarrow R = 6.736\cdot 10^6\ m$

L'energia meccanica della navicella in orbita è; $E = K + U = -G\frac{M_T m}{2R}$

$$\Rightarrow \Delta E = E_f - E_i = G\frac{M_T m}{2}\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_f}\right)$$

$m = 4.3\cdot 10^4\ kg$
$R_i = 6.6\cdot 10^6\ m$ ; $R_f = 6.736\cdot 10^6\ m$
$\Rightarrow \Delta E = 2.624\cdot 10^{10}\ J$

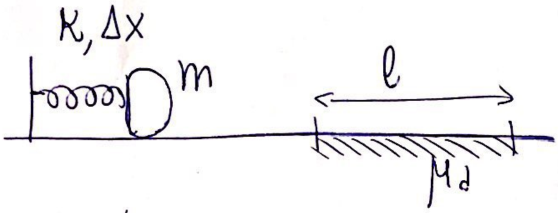
(6) Deve valere banalmente la conservazione dell'energia (non si richiede altro, perché lungo la traiettoria circolare è necessariamente presente la forza vincolare).


$$\cancel{m}gh + \frac{1}{2}\cancel{m}v_0^2 = \cancel{m}gR$$

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{2(gR - gh)}$$

$h = 1.1\ m$ ; $R = 3\ m$ $\Rightarrow v_0 = 6.106\ m/s$

(7)



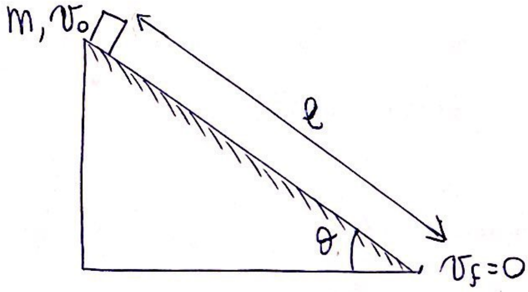

$$\frac{1}{2}k\Delta x^2 = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k}{m}}\,\Delta x$$
$(\Delta U_{ee} + \Delta K = 0)$

$\Delta x = 0.24\,m$
$k = 180\,\frac{N}{m}$ $\Rightarrow v = 3.304\,\frac{m}{s}$
$m = 0.95\,kg$

• $\frac{1}{2}k\Delta\tilde{x}^2 = mg\mu_d l \Rightarrow \Delta\tilde{x} = \sqrt{\frac{2mg\mu_d l}{k}}$
$(\Delta U_{ee} = L_{f_d} \Rightarrow U_f - U_i = -U_i = -f_d \cdot l)$

$m = 0.95\,kg$
$k = 180\,\frac{N}{m}$ $\Rightarrow \Delta\tilde{x} = 0.381\,m$
$\mu_d = 0.2$
$l = 7\,m$

(8)




$$\Delta U_g + \Delta K = L_{f_d}$$
$$\underbrace{(U_f - U_i)}_{-mgh} + \underbrace{(K_f - K_i)}_{-\frac{1}{2}mv_0^2} = -f_d \cdot l$$
$$\Rightarrow \cancel{m}g\,l\sin\theta + \frac{1}{2}\cancel{m}v_0^2 = \cancel{m}g(\cos\theta)\mu_d l$$

$$\mu_d = \frac{g\,l\sin\theta + v_0^2/2}{g\,l\cos\theta}$$

$l = 1\,m$; $\theta = 45°$; $v_0 = 2\,\frac{m}{s}$ $\Rightarrow \mu_d = 1.288$

(9) All'inizio il satellite è su un'orbita geostazionaria $\Rightarrow T_1 = 24h = 86400\,s$

$$G\frac{M_T m}{R_1^2} = m\cdot\frac{v_1^2}{R_1} = m\frac{4\pi^2 R_1}{T_1^2} \Rightarrow G\frac{M_T \cancel{m}}{R_1^2} = \cancel{m}\frac{4\pi^2 R_1}{T_1^2} \Rightarrow R_1 = \sqrt[3]{G\frac{M_T T_1^2}{4\pi^2}}$$

La nuova orbita è caratterizzata da un raggio $R_2 = \alpha R_1$ (con $\alpha = 1.6$)

perciò $$T_2 = \sqrt{\frac{4\pi^2 R_2^3}{GM_T}} = \sqrt{\frac{\cancel{4\pi^2}}{\cancel{GM_T}}\cdot\alpha^3\cdot\frac{\cancel{GM_T}T_1^2}{\cancel{4\pi^2}}} = T_1\cdot\alpha^{3/2} \Rightarrow T_2 = 1.75\cdot 10^5\,s$$

$$\Delta E_{MIN} = G\frac{M_T m}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = G\frac{M_T m}{2R_1}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$$

$G = 6.671\cdot 10^{-11}\,\frac{N\,m^2}{kg^2}$; $M_T = 5.98\cdot 10^{24}\,kg$; $m = 3.9\cdot 10^4\,kg$; $T_1 = 8.64\cdot 10^5\,s$; $\alpha = 1.6$

$$\Rightarrow \Delta E_{MIN} = 6.904\cdot 10^{10}\,J$$