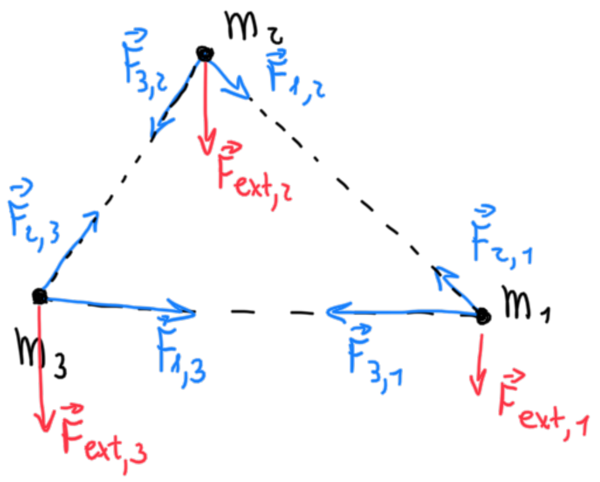
SISTEMI DI PIÙ PARTICELLE



$\vec{F}_{i,j}$ forze interne (III principio azione e reazione)

↓

al sistema delle 3 particelle

↑

$\vec{F}_{ext,i}$ forze esterne (esempio: forze peso)

II principio applicato a ciascuna delle tre palline: $\vec{F}_{R,i} = m_i \vec{a}_i$ (risultante)

$$\begin{cases} \vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{3,1} + \vec{F}_{ext,1} = m_1 \vec{a}_1 \\ \vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{3,2} + \vec{F}_{ext,2} = m_2 \vec{a}_2 \\ \vec{F}_{1,3} + \vec{F}_{2,3} + \vec{F}_{ext,3} = m_3 \vec{a}_3 \end{cases}$$

↓ somma ↓ somma

$$\cancel{\vec{F}_{2,1}} + \cancel{\vec{F}_{3,1}} + \vec{F}_{ext,1} + \cancel{\vec{F}_{1,2}} + \cancel{\vec{F}_{3,2}} + \vec{F}_{ext,2} + \cancel{\vec{F}_{1,3}} + \cancel{\vec{F}_{2,3}} + \vec{F}_{ext,3} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3$$

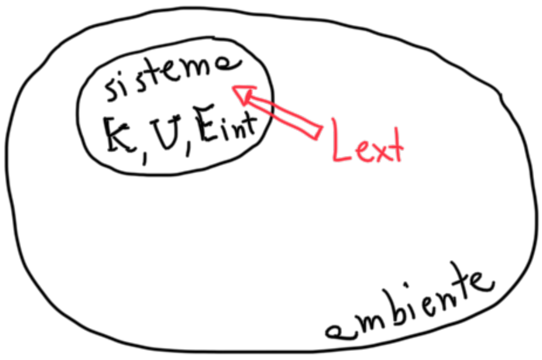
$$\Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{3} \vec{F}_{ext,i} = \sum_{i=1}^{3} m_i \vec{a}_i} \quad (*)$$

III principio: $\vec{F}_{i,j} = -\vec{F}_{j,i}$

le forze interne sono sparite

[implica la legge di conservazione della quantità di moto (vedi dopo) per sistemi "isolati"]

- Legge di conservazione dell'energia: (caso generale)



K: energia cinetica delle "palline" nel sistema

U: energia potenziale di interazione tra le varie palline del sistema

E_{int}: energia interna delle "palline"

L_{ext}: lavoro che l'ambiente fa sul sistema

$L_{ext} > 0$ se è fatto dall'ambiente sul sistema

$L_{ext} < 0$ se è fatto dal sistema sull'ambiente

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{int} = L_{ext}$$

$L_{ext} = 0 \Rightarrow (K + U + E_{int})$ si conserva

Quantità di moto

per una particella di massa m e velocità $\vec{v}$
la quantità di moto si definisce come: $\vec{p} = m\vec{v}$
$\vec{p}$ è un vettore, si misura in $\left[Kg \cdot \frac{m}{s}\right]$ (SI)

II legge di Newton ($\vec{F} = m\vec{a}$)
può essere riletta in una chiave più generale:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \underset{\substack{\text{se} \\ m \text{ è costante}}}{=} m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

se m NON è costante: $\vec{F} = m\vec{a} + \frac{dm}{dt}\vec{v}$

(es: missile che brucia carburante
carrello con sabbia e perdita di materiale)

nell'ipotesi di m_i costanti

$$\sum_i \vec{F}_{ext,i} = \sum_i \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i)$$

Se $\vec{F}_{ext,TOT} = 0 \Rightarrow \vec{P}_{TOT}$ si conserva
sistema è ISOLATO

$\vec{P}_{TOT} = \sum_i \vec{P}_i$ quantità di moto totale

Forze impulsive (esempio: durante un urto)

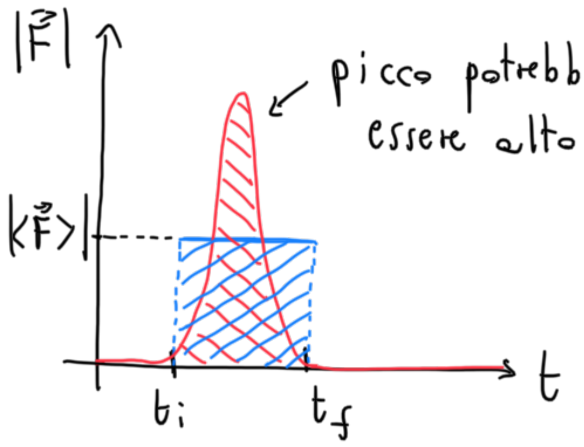
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \Delta\vec{p} = \vec{F}\cdot\Delta t$$

se Δt è piccolo solo nelle condizione di una forza impulsiva

forza impulsiva (Δt piccolo)

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\, dt \Rightarrow \vec{p}_f - \vec{p}_i = \vec{J}$$

definizione di Impulso



picco potrebbe essere alto

Δt è piccolo

$$\boxed{\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{impulsiva}\, dt}$$

Teorema dell'impulso

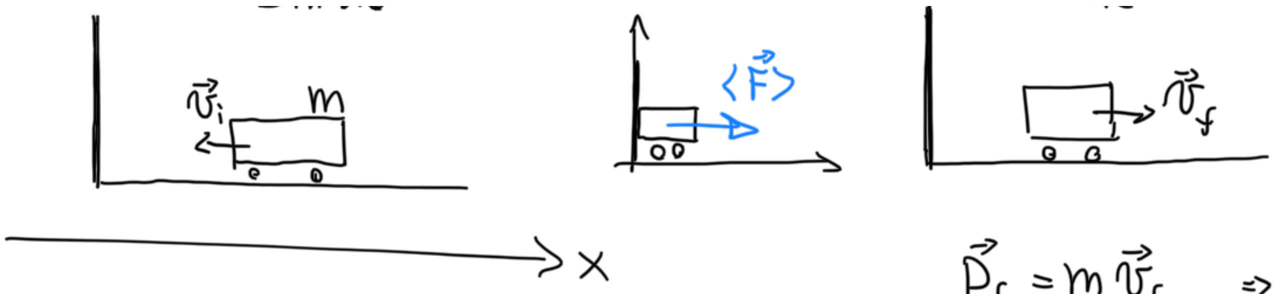
$$\vec{J} = \langle \vec{F} \rangle \cdot \Delta t$$

$A_{//} = A_{\backslash\backslash}$

forza media impulsiva che fornisce un impulso $\vec{J}$ in un tempo Δt

- esempio:

Inizio durante l'urto Fine



$\vec{p}_f = m\vec{v}_f \Rightarrow p_{f,x} = m v_f$

$\vec{p}_i = m\vec{v}_i \Rightarrow p_{i,x} = -m v_i$

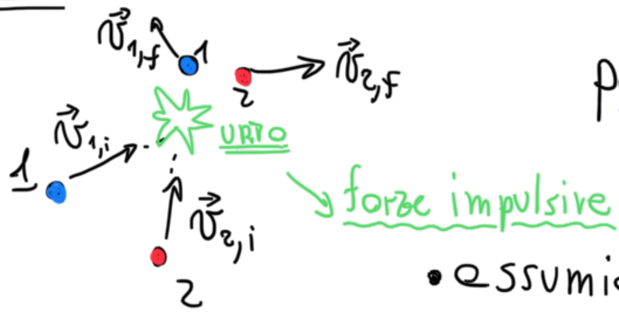
durante l'urto il carrello ha acquisito un impulso $\vec{J} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$ $\quad J_{,x} = m v_f - (-m v_i) = m(v_f + v_i)$

qui da +

Se conosco Δt, tempo durante cui avviene l'urto, allora posso calcolare $\langle F \rangle_x = \frac{J_x}{\Delta t}$ (componente x)

tipicamente Δt è piccolo, dunque $\langle F \rangle$ è grande

URTI : interazioni tra corpi in tempi brevissimi



esempio di urto tra due palline

possono conservarsi
- → quantità di moto
- → energia

• assumiamo un urto in cui le particelle non si deformano

Tipicamente urti di questo tipo, se avvengono in orizzontale, sono esempi di situazioni in cui il sistema delle (due) palline è ISOLATO.

$\Rightarrow$ si conserva la quantità di moto (I)

$\boxed{\text{URTI ELASTICI}}$ se l'energia cinetica totale si conserva (II)

$$(K_{1,i} + K_{2,i} = K_{1,f} + K_{2,f})$$

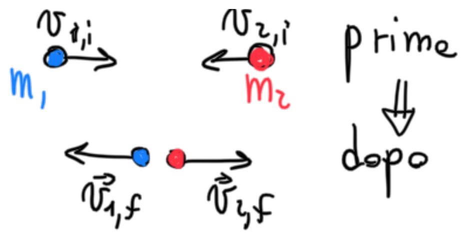
$\boxed{\text{URTI ANELASTICI}}$ se l'energia cinetica totale NON si conserva

URTI ELASTICI	URTI ANELASTICI
si conservano (II) energia cinetica (I) quantità di moto	si conserva (I) quantità di moto

(attenzione: il sistema deve essere ISOLATO)
→ es: tavolo da biliardo

• Caso di urto in 1 dimensione (1D)

SE URTO ELASTICO



I $\quad \vec{p}_{1,i} + \vec{p}_{2,i} = \vec{p}_{1,f} + \vec{p}_{2,f}$

$$m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i} = m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f}$$

II $\quad \cancel{\tfrac{1}{2}} m_1 v_{1,i}^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}} m_2 v_{2,i}^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}} m_1 v_{1,f}^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}} m_2 v_{2,f}^2$

due equazioni che posso mettere a sistema

di solito conosco $m_1, m_2, v_{1,i}, v_{2,i}$

e voglio trovare $\underline{v_{1,f}}$ e $\underline{v_{2,f}}$ $\rightarrow$ risolvo il sistema delle 2 equazioni accoppiate

$$\begin{cases} \text{I} \quad m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i} = m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f} \\ \text{II} \quad m_1 (v_{1,i}^2 - v_{1,f}^2) = m_2 (v_{2,f}^2 - v_{2,i}^2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m_1 (v_{1,i} - v_{1,f}) = m_2 (v_{2,f} - v_{2,i}) \quad *1 \\ m_1 (v_{1,i} + v_{1,f})(v_{1,i} - v_{1,f}) = m_2 (v_{2,i} + v_{2,f})(v_{2,i} - v_{2,f}) \quad *2 \end{cases}$$

$$v_{1,i} + v_{1,f} = v_{2,i} + v_{2,f} \quad \Rightarrow \quad \underline{v_{1,i} - v_{2,i} = v_{2,f} - v_{1,f}}$$

$$\frac{(*2)_S}{(*1)_S} = \frac{(*2)_D}{(*1)_D}$$

Velocità relative non cambiano in modulo, ma hanno segno opposto (prima e dopo l'urto)

se si fanno i conti, abbiamo che:

$$\boxed{\begin{cases} v_{1,f} = \left(\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1,i} + \left(\dfrac{2 m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{2,i} \\[2ex] v_{2,f} = \left(\dfrac{2 m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1,i} + \left(\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{2,i} \end{cases}}$$

urto 1D elastico

esempi: A $\Rightarrow$ Masse uguali: $\boxed{m_1 = m_2}$

$$\begin{cases} v_{1,f} = v_{2,i} \\ v_{2,f} = v_{1,i} \end{cases}$$

si scambiano le velocità

B $\Rightarrow$ supponiamo $m_1 \neq m_2$ e $\boxed{v_{2,i} = 0}$

$$\begin{cases} v_{1,f} = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1,i} \\[2ex] v_{2,f} = \dfrac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_{1,i} \end{cases}$$

se $m_1 \gg m_2$

$v_{1,f} \simeq v_{1,i}$

$v_{2,f} \simeq 2 v_{1,i}$

1 = palla da bowling

2 = palla da ping pong

---

se $m_2 \gg m_1$

$v_{1,f} = - v_{1,i}$

$v_{2,f} = 0$

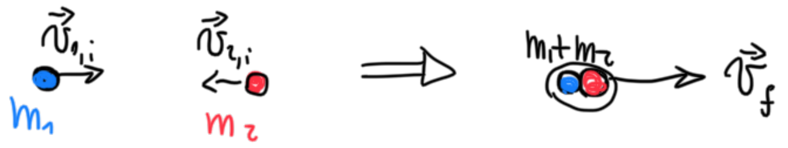
1: palla da ping pong

2: " bowling

Se URTO COMPLETAMENTE ANELASTICO (1D)

le palline dopo l'urto si attaccano

se il sistema è isolato, si conserva solo la quantità di moto:



prima dell'urto ⇒ dopo l'urto le palline sono attaccate

(I) $m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i} = (m_1+m_2) v_f \Rightarrow \boxed{v_f = \dfrac{m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i}}{m_1+m_2}}$

$K_f - K_i \neq 0$ (l'energia cinetica non si conserva)

$$K_f - K_i = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_f^2 - \left(\frac{1}{2}m_1 v_{1,i}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2,i}^2\right) =$$

$$= \dots = -\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(v_{1,i}-v_{2,i})^2 < 0$$

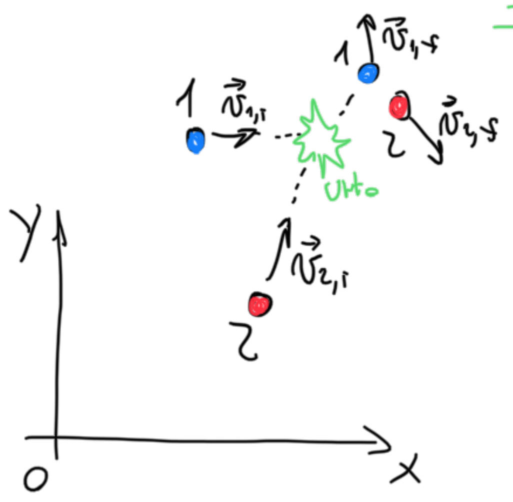
⇒ l'energia cinetica finale è MINORE di quella iniziale: $K_f < K_i$

- se l'energia cinetica NON si conserva, ma le palline alla fine non si attaccano, allora si parla (in generale) di urto anelastico

(I) $m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i} = m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f}$

($\Delta K < 0$ ma in genere si dissipa meno energia che per urto completamente anelastico)

Caso di urto in 2 dimensioni (2D)



(I) cons. quantità di moto, se sistema ISOLATO

$$m_1 \vec{v}_{1,i} + m_2 \vec{v}_{2,i} = m_1 \vec{v}_{1,f} + m_2 \vec{v}_{2,f} \quad (*)$$

(II) cons. energia cinetica, se urto ELASTICO

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1,i}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2,i}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1,f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2,f}^2 \quad (*)$$

(*) in realtà sarebbero 2 equazioni per le componenti x, y
equazione tra vettori ($\vec{p}$)

(*) equazione tra scalari (E)

se conoscessi solo m_1, m_2, $\vec{v}_{1,i}$, $\vec{v}_{2,i}$ avrei problemi a trovare

$v_{1i,x}$ $v_{1i,y}$ $v_{2i,x}$ $v_{2i,y}$

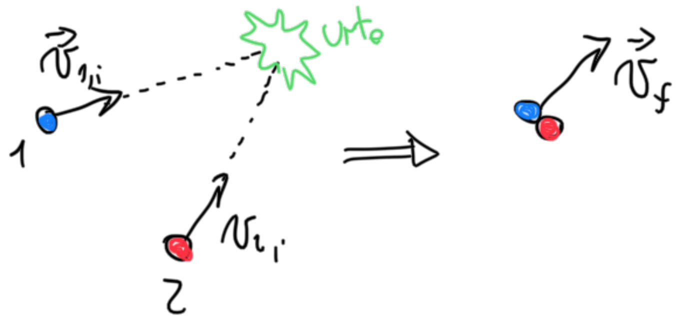
$\vec{v}_{1,f}$ e $\vec{v}_{2,f}$ in generale

(4 incognite: $v_{1f,x}$ $v_{1f,y}$ $v_{2f,x}$ $v_{2f,y}$

MA al più 3 equazioni!)

- Caso semplice di urto in 2D:

Urto completamente anelastico



inizio $\Longrightarrow$ fine

si conserva solo $\vec{p}$

I $m_1\vec{v}_{1,i} + m_2\vec{v}_{2,i} = (m_1+m_2)\vec{v}_f$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} m_1 v_{1i,x} + m_2 v_{2i,x} = (m_1+m_2)v_{f,x} \\ m_1 v_{1i,y} + m_2 v_{2i,y} = (m_1+m_2)v_{f,y} \end{cases}$$

Se conosco m_1, m_2, $\vec{v}_{1i}$, $\vec{v}_{2i}$, posso trovare $\vec{v}_f$ (cioè $v_{f,x}$ e $v_{f,y}$)