Teoremi e Dimostrazioni orale Gemignani

Teorema 2.2.1 - Errore inerente

Sia $x \in \mathbb{R}$ con $\omega \leq |x| \leq \Omega$ *(no **underflow/overflow**)*, si ha:

$$|\epsilon_{in}| = \left|\frac{trn(x) - x}{x}\right| \qquad \begin{aligned} &\leq u = \beta^{1-t} \\ &= \frac{1}{2}\beta^{1-t} \text{ per } arr(x) \end{aligned}$$

Dimostrazione

Sia $x = (-1)^s \beta^p \alpha$. L'errore **assoluto** $|x - trn(x)|$ è maggiorato dalla distanza di due numeri di macchina **consecutivi**, per cui si ha

$$|trn(x) - x| \leq \beta^{p-t} \tag{1}$$

Inoltre vale $|x| \geq \beta^{p-1}$, quindi

$$|\epsilon_{in}| = \left|\frac{trn(x) - x}{x}\right| \leq \frac{\beta^{p-t}}{\beta^{p-1}} = \beta^{1-t} = u \tag{2}$$

Teorema 3.1.1 - Errore totale

$\epsilon_{tot} = \epsilon_{in} + \epsilon_{alg}$

Dimostrazione

$$\epsilon_{tot} = \frac{g(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \tag{1}$$

$$= \underbrace{\frac{g(\tilde{x}) - f(\tilde{x})}{f(\tilde{x})}}_{\epsilon_{alg}} \underbrace{\frac{f(\tilde{x})}{f(x)}}_{(1+\epsilon_x)} + \underbrace{\frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}}_{\epsilon_{in}} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &= \epsilon_{alg}(1 + \epsilon_x) + \epsilon_{in} \\ &\doteq \epsilon_{alg} + \epsilon_{in} \end{aligned} \tag{3}$$

Teorema 4.4.1 - Cerchi di Gershgorin

Sia $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Definiamo di **Cerchi di Gershgorin** $K_i \ \forall\, 1 \leq i \leq n$ come

$$K_i = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}| \leq \sum_{j=1, J \neq i}^{n} |a_{i,j}| \ \ \forall\, 1 \leq i \leq n \right\} \tag{1}$$

Allora

λ autovalore di $A \implies \lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} K_i$

Dimostrazione

Sia λ autovalore di A con corrispondente autovettore **destro** x.\
La relazione $Ax = \lambda x$ implica

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = \lambda x_i \ \ \forall\, 1 \le i \le n \tag{1}$$

Estraendo dalla sommatoria l'elemento diagonale rimane

$$\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} a_{i,j} x_j + a_{i,i} x_i = \lambda x_i \qquad \forall\, 1 \le i \le n \tag{2.1}$$

$$\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} a_{i,j} x_j = \lambda x_i - a_{i,i} x_i \qquad \forall\, 1 \le i \le n \tag{2.2}$$

$$\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} a_{i,j} x_j = (\lambda - a_{i,i}) x_i \qquad \forall\, 1 \le i \le n \tag{2.3}$$

Preso p indice della componente di modulo massimo di x (ES: $|x_p| = \|x\|_\infty$)\
Poichè $x = 0 \implies |x_p| > 0$ e per $p = i$ otteniamo

$$\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} a_{p,j} x_j = (\lambda - a_{p,p}) x_p \tag{3}$$

Passando ai valori assoluti

$$|(\lambda - a_{p,p}) x_p| = |(\lambda - a_{p,p})||x_p| = \left| \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} a_{p,j} x_j \right| \le \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} |a_{p,j}||x_j| \tag{4}$$

Dividendo per $|x|$

$$|(\lambda - a_{p,p})| \le \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} |a_{p,j}| \tag{5}$$

Da cui la tesi

Teorema 5.1.1 - Esistenza e Unicità di LU

Data $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Se $A(1:k, 1:k)$ e' invertibile $\forall\, 1 \le k \le n-1$ allora esiste unica ($\exists!$) LU di A

Dimostrazione

Per induzione su n

1. Per $n = 1$ si ha $A = [a] = [1][a]$ unica fattorizzazione LU di A
2. Supponiamo la veridicita' del teorema per A di ordine $m \le n-1$
3. Costruiamo LU per A di ordine n

$$\left[\begin{array}{c|c} A(1:n-1, 1:n-1) & z \\ \hline v^T & \alpha \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} L(1:n-1, 1:n-1) & 0 \\ \hline \omega^T & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} U(1:n-1, 1:n-1) & y \\ \hline 0^T & \beta \end{array}\right]$$

Come sistema

$$
\begin{cases}
A(1:n-1,1:n-1) & = L(1:n-1,1:n-1)U(1:n-1,1:n-1) & (1) \\
z & = A(1:n-1,1:n-1)y & (2) \\
v^t & = \omega^T U(1:n-1,1:n-1) & (3) \\
\alpha & = \omega^T y + \beta & (4)
\end{cases}
$$

Per ipotesi $A(1:n-1,1:n-1)$ invertibile e per tale motivo $\exists! LU$ con fattori triangolari (equazione (1) del sistema)

- $L(1:n-1,1:n-1)$
- $U(1:n-1,1:n-1)$

Sempre dall'invertibilita' di $A(1:n-1,1:n-1)$ segue che

1. $L(1:n-1,1:n-1)$ e' invertibile per costruzione
2. $U(1:n-1,1:n-1)$ e' invertibile

   > **Important**
   >
   > $\det(A) = \det(LU) = \det(L) * \det(U)$ e $\det(L) = 1$ per costruzione. Segue che $\det(A) = \det(U)$, se $\det(A) \neq 0 \implies \det(U) \neq 0$

Di conseguenza le equazioni (2) e (3) del teorema ammetto unica soluzione. Anche l'equazione (4) ammette unica soluzione poiche' conseguenza delle equazioni precedenti

---

Teorema 6.1.2 - Convergenza dei Metodi Iterativi (Cond. Suff.)

Dato il metodo iterativo

$$
\begin{cases}
x^{(0)} \in \mathbb{R}^n & & (1) \\
x^{(k+1)} = Px^{(k)} + q & k \geq 0 & (2)
\end{cases}
$$

> Con $P = M^{-1}N,\ q = M^{-1}b,\ A = M - N$

Il metodo converse se esiste ($\exists$) una norma matriciale indotta su $\mathbb{R}^n$ t.c. $\|P\| < 1$

Dimostrazione

Prese le relazioni

$$
x^{(k+1)} = Px^{(k)} + q \qquad\qquad x = Px + q
$$

E sottratte tra di loro

$$
\underbrace{x^{(k+1)} - x}_{e^{k+1}} = \underbrace{P(x^{(k)} - x)}_{Pe^k}
$$

$$
e^{(k+1)} = Pe^{(k)} \tag{2}
$$

Stando alla relazione (2) e' facile dimostrare che

> **Important**
>
> $$
> \begin{aligned}
> e^{(k+1)} &= Pe^{(k)} \\
> &= P(Pe^{(k-1)}) \\
> &= P(\underbrace{P * P * \cdots * P}_{\text{k volte}} e^{(0)}) \\
> &= P^{k+1} e^{(0)}
> \end{aligned}
> $$

Passando alla norma

$$\|e^{(k+1)}\| = \|P^{k+1}e^{(0)}\| \leq \|P\|^{k+1}\|e^{(0)}\|$$

> **Tip**
>
> Poiche' $\|P\| < 1$ per ipotesi del teorema, $\lim_{k\to\infty} \|P\|^{k+1}\|e^{(0)}\| = 0$ e per costruzione del teorema $0 \leq \|e^{(k+1)}\|$

Segue dal teorema del confronto che $\forall e^{(0)}$ o, equivalentemente, $\forall x^{(0)}$

$$\lim_{k\to\infty} \|e^{(k+1)}\| = \lim_{k\to\infty} \|x^{(k+1)} - x\| = 0$$

Teorema 6.1.3 - Convergenza per Raggio Spettrale (Cond. Nec. e Suff.)

Dato il metodo iterativo

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n & & (1) \\ x^{(k+1)} = Px^{(k)} + q & k \geq 0 & (2) \end{cases}$$

> Con $P = M^{-1}N,\ q = M^{-1}b,\ A = M - N$

Se $\rho(P) < 1$ allora il metodo e' convergente

> Dove $\rho(A) = \max_i |\lambda_i|$ con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ autovalori di A e' detto **raggio spettrale di A**

Teorema 6.3.1 - Convergenza di Jacobi e Gauss-Seidel

Dimostrazione

Teorema 10.1.1 - Metodo di Bisezione

Dimostrazione

Teorema 10.2.2 - Teorema del Punto Fisso

Dimostrazione

Teorema 10.2.3 - Convergenza Locale dei Metodi di Iterazione Funzionale

Dimostrazione

Teorema 10.3.1 - Convergenza Locale per Radici Semplici

Dimostrazione