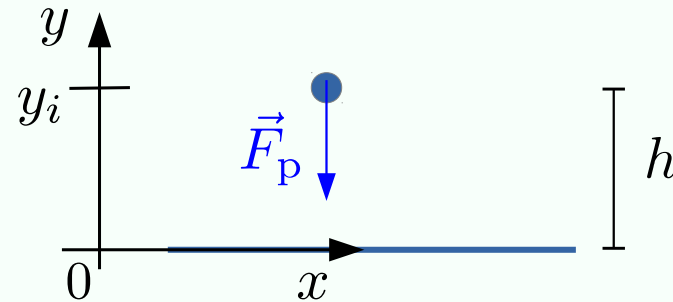


Problemi risolti con le leggi di conservazione dell'energia

Problema 1: Energia potenziale gravitazionale su superficie terrestre

Forza peso: $\vec{F}_p = -mg \hat{j}$

Calcoliamo lavoro e energia potenziale:



$$L = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}_p \cdot d\vec{s} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \underbrace{(F_p)_x}_{\rightarrow 0} dx + (F_p)_y dy = \int_{y_i}^{y_f} (F_p)_y dy = -mg(y_f - y_i)$$

$$\Delta U = U_f - U_i = -L_g = mg(y_f - y_i)$$

Nella caduta di un grave che parte da fermo, trovare la velocità finale:

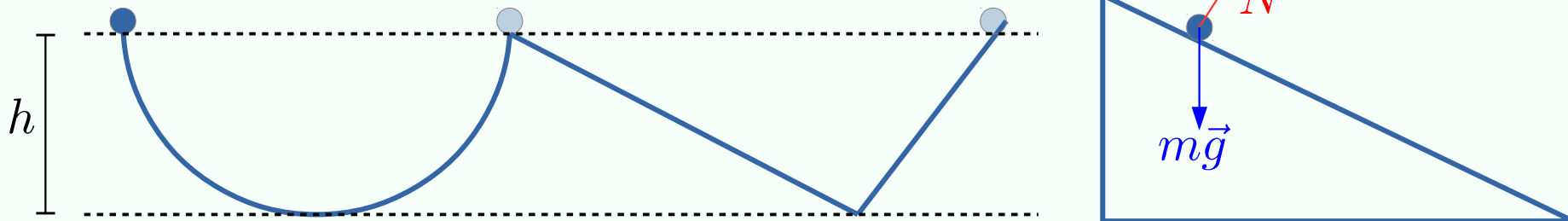
$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}mv_f^2$$

$$0 = \Delta U + \Delta K = mg(y_f - y_i) + \frac{1}{2}mv_f^2$$

$$\Rightarrow v_f = \sqrt{2g(y_i - y_f)} = \sqrt{2gh}$$

Problema 2: Energia potenziale gravitazionale su superficie terrestre + vincoli

Forza peso: $\vec{F}_p = -mg \hat{j}$



Calcoliamo il lavoro e l'energia potenziale

In presenza di **vincoli lisci** si ha lo **stesso risultato che per la caduta libera**: l'altra forza in gioco, quella normale, non fa mai lavoro. [es. piano inclinato, guida o piano liscio]

La differenza di energia dipende solo dalla differenza di quota e la velocità finale è sempre la stessa v_f di cui sopra.

$$L = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} (\vec{F}_p + \vec{N}) \cdot d\vec{s} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}_p \cdot d\vec{s} + \underbrace{\vec{N} \cdot d\vec{s}}_{\rightarrow 0} = \int_{y_i}^{y_f} (F_p)_y dy = -mg(y_f - y_i)$$

$$\Delta U = U_f - U_i = -L_g = mg(y_f - y_i)$$

Nella caduta di un grave che parte da fermo: $\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}mv_f^2$

$$0 = \Delta U + \Delta K = mg(y_f - y_i) + \frac{1}{2}mv_f^2 \Rightarrow v_f = \sqrt{2g(y_i - y_f)} = \sqrt{2gh}$$

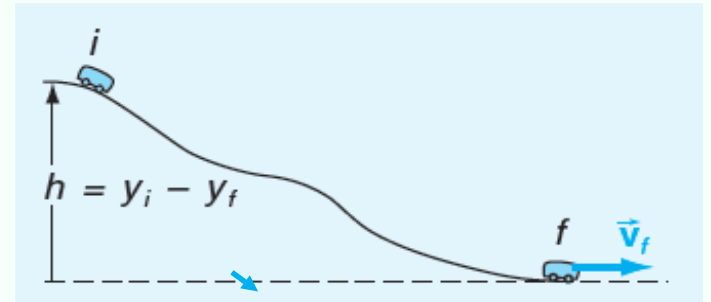
Negli esercizi di prima vale anche l'inverso: partendo da una quota più bassa con velocità iniziale non nulla, si può risalire la rampa fino ad una quota massima h , arrivando con velocità nulla.

Problema 3:

Uno sciatore di massa $m = 80 \text{ kg}$ scivola senza attrito lungo un declivio composto da varie discese, fino ad arrivare in pianura dopo aver compiuto un dislivello $h = 60 \text{ m}$. Se è partito con velocità iniziale in modulo $v_0 = 0.5 \text{ m/s}$, con che velocità finale v_f arriva?

F_{peso} è conservativa, i vincoli non fanno lavoro
non c'è attrito \rightarrow **l'energia meccanica si conserva**

$$0 = \Delta(U + K) \quad K_f - K_i = U_i - U_f$$



$$\frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) = mg(y_i - y_f) = mgh \Rightarrow v_f = \sqrt{v_i^2 + 2gh} = 34 \text{ m/s}$$

Se invece ci fosse **attrito**, e supponessimo che $v_f = 2 \text{ m/s}$, quanto sarebbe il lavoro della forza di attrito? $L_{\text{attrito}} = L_{\text{N.C.}} = \Delta(U + K)$

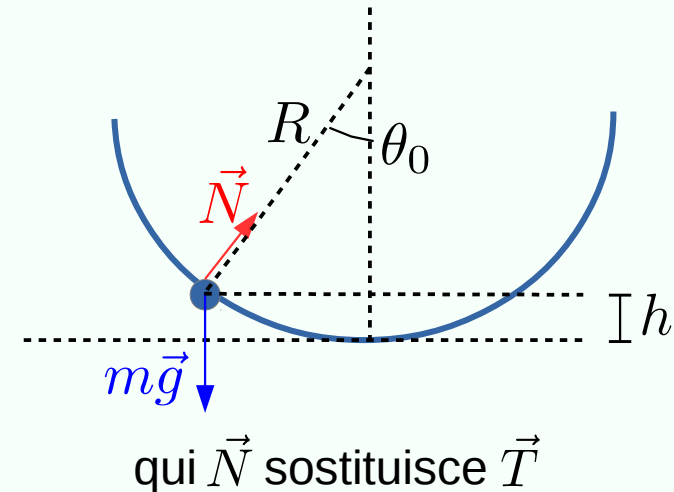
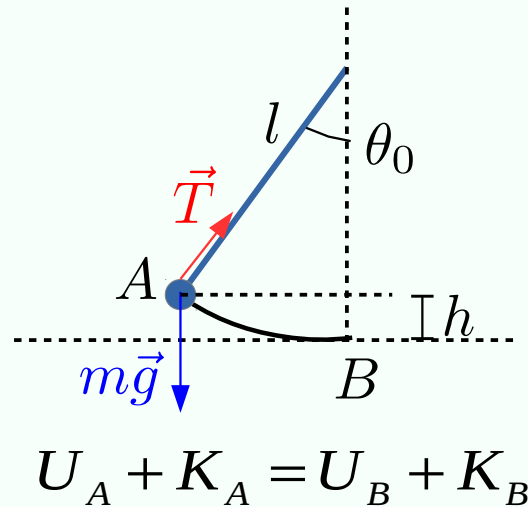
$$L_{\text{attrito}} = (K_f - K_i) + (U_f - U_i) = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) - mgh = -46.7 \text{ kJ}$$

NB: la forza di attrito dinamico durante la discesa varia in direzione e modulo.

Perciò, anche sapendo la distanza percorsa, non sarebbe possibile calcolarne direttamente il lavoro.

Problema 4. Pendolo (o calotta semicircolare).

Un corpo di massa m , appeso ad un filo ideale, viene lasciato libero da una posizione in cui è spostato rispetto alla verticale di un angolo θ_0 . A che velocità passa per la verticale? (il problema è analogo al moto dentro una calotta semicircolare liscia).

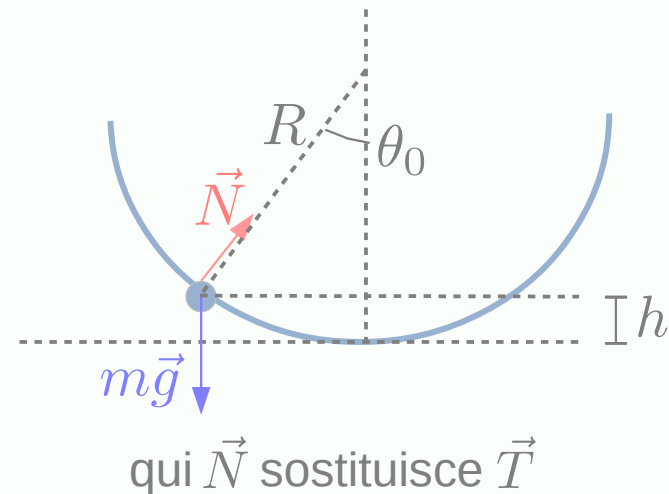
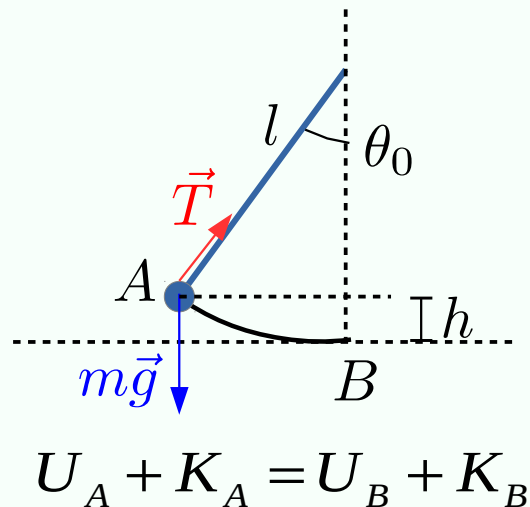


$$h_A = l - l \cos \theta_0 = l(1 - \cos \theta_0)$$

$$mgh_A = mgl(1 - \cos \theta_0) = \frac{1}{2}mv_B^2 \Rightarrow v_B = \sqrt{2gl(1 - \cos \theta_0)}$$

Problema 4. Pendolo (o calotta semicircolare).

Un corpo di massa m , appeso ad un filo ideale, viene lasciato libero da una posizione in cui è spostato rispetto alla verticale di un angolo θ_0 . A che velocità passa per la verticale? (il problema è analogo al moto dentro una calotta semicircolare liscia).



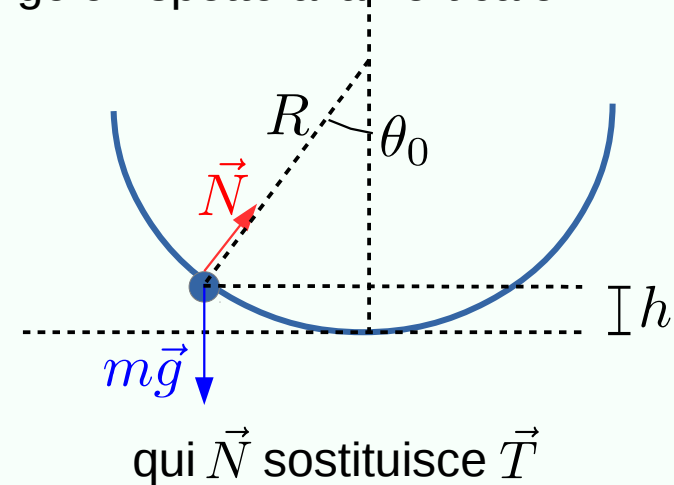
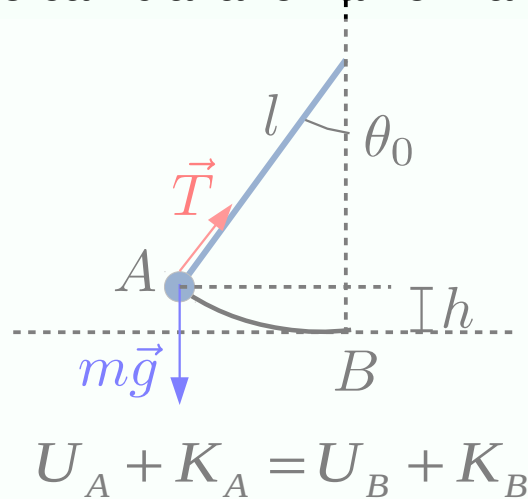
In generale, in un punto P qualunque (corrispondente ad un angolo θ) si ha:

$$mgl(1 - \cos \theta_0) = mgl(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gl(\cos \theta - \cos \theta_0)}$$

Se si volesse conoscere la tensione T (o la forza normale nel caso della calotta sferica) al variare dell'angolo, basta applicare la seconda legge della dinamica.

$$\begin{cases} ma_R = -mv^2/l = -T + mg \cos \theta \\ ma_T = mg \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = mg \cos \theta + 2mgl(\cos \theta - \cos \theta_0)/l \\ \theta = 0 \Rightarrow T = mg + 2mg(1 - \cos \theta_0) \end{cases}$$

Discesa lungo calotta semicircolare: Un corpo di massa m scivola senza attrito lungo il profilo circolare della calotta sferica, lasciato libero in condizioni di quiete partendo da un punto A che si trova spostato rispetto alla verticale di un angolo θ_0 . Con che velocità il corpo passa per il punto più basso della calotta? Come cambia la forza normale N al variare dell'angolo rispetto alla verticale?



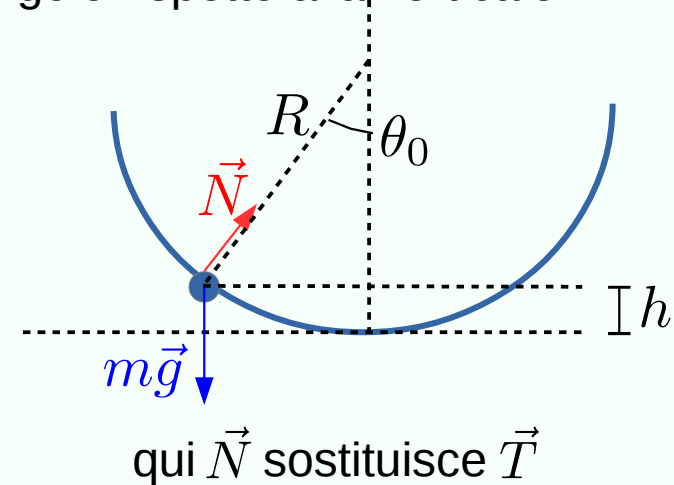
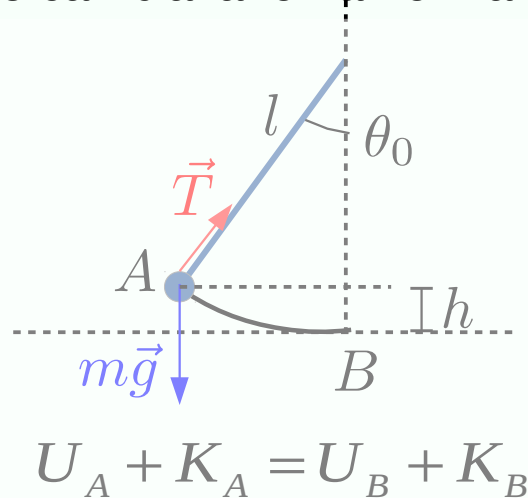
Le forze che fanno lavoro sono conservative (N è perpendicolare alla velocità e non fa lavoro)
 → l'energia meccanica in A è uguale a quella nel punto che si trova nel punto più basso

La relazione fra quota e angolo è data da: $h_A = R - R \cos \theta_0 = R(1 - \cos \theta_0)$

$$U_A + K_A = U_B + K_B$$

$$mgh_A = mgR(1 - \cos \theta_0) = \frac{1}{2}mv_B^2 \Rightarrow v_b = \sqrt{2gR(1 - \cos \theta_0)}$$

Discesa lungo calotta semicircolare: Un corpo di massa m scivola senza attrito lungo il profilo circolare della calotta sferica, lasciato libero in condizioni di quiete partendo da un punto A che si trova spostato rispetto alla verticale di un angolo θ_0 . Con che velocità il corpo passa per il punto più basso della calotta? Come cambia la forza normale N al variare dell'angolo rispetto alla verticale?



In generale, in un punto P qualunque (corrispondente ad un angolo θ) si ha:

$$mgR(1 - \cos \theta_0) = mgR(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gR(\cos \theta - \cos \theta_0)}$$

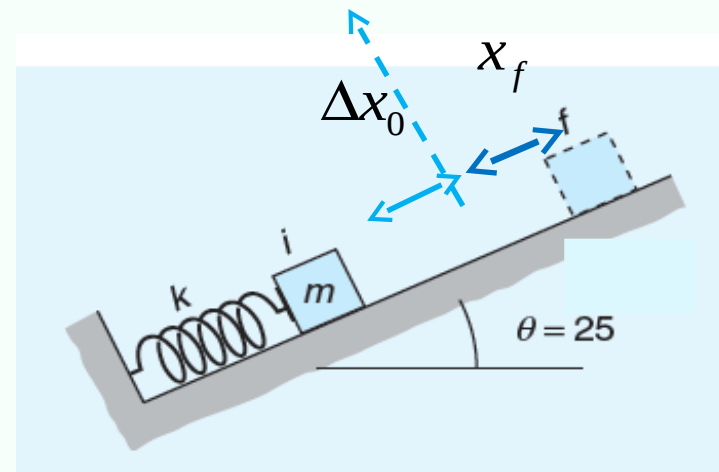
Se si volesse conoscere la forza normale N al variare dell'angolo, basta applicare la seconda legge della dinamica.

$$\begin{cases} ma_R = -mv^2/R = -N + mg \cos \theta \\ ma_T = mg \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = mg \cos \theta + 2mgR(\cos \theta - \cos \theta_0)/R \\ \theta = 0 \Rightarrow N = mg + 2mg(1 - \cos \theta_0) \end{cases}$$

Problema 5: Molla e piano inclinato

Una molla compressa di Δx_0 , lasciata libera all'istante $t = 0$, lancia una massa m lungo un piano inclinato liscio (angolo θ). Calcolare:

- 1) La velocità non appena lasciata la molla
- 2) La massima distanza rispetto alla posizione iniziale



F_{peso} conservativa, F_{elastica} conservativa (ci sono due energie potenziali)

I vincoli non fanno lavoro, non c'è attrito \rightarrow **l'energia meccanica si conserva.**

Prendiamo come riferimento $U = 0$ il punto in cui la molla è a riposo.

$$\Delta(U + K) = 0 \Rightarrow U_i + K_i = U_f + K_f$$

$$(U_{\text{peso}})_i = mg(-\Delta x_0 \sin \theta); \quad (U_{\text{molla}})_i = \frac{1}{2}k(\Delta x_0)^2; \quad K_i = 0$$

- 1) Quando passa per il punto di riposo della molla ($U_1 = 0$)

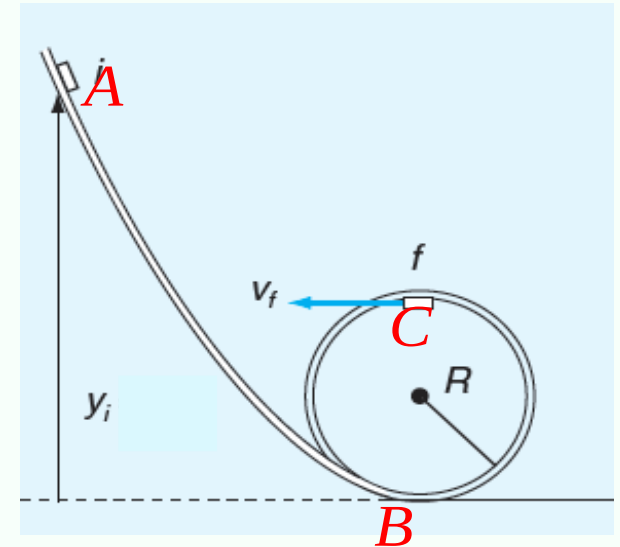
$$\frac{1}{2}k(\Delta x_0)^2 - mg\Delta x_0 \sin \theta = \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{k}{m}(\Delta x_0)^2 - 2g\Delta x_0 \sin \theta}$$

- 2) La massima distanza

$$\frac{1}{2}k(\Delta x_0)^2 - mg\Delta x_0 \sin \theta = mgx_f \sin \theta \Rightarrow x_f = \frac{k(\Delta x_0)^2}{2mg \sin \theta} - \Delta x_0$$

Problema 6: Ottovolante e «giro della morte»

Un corpo di massa m parte da fermo dall'estremità di una rampa alla fine della quale c'è un anello circolare di raggio R . Da che altezza deve partire per poter percorrere tutto l'anello senza staccarsi?



Le forze o sono conservative o non fanno lavoro.

→ quindi E si conserva.

$$\Delta E = \Delta(U + K) = 0 \Rightarrow U_i + K_i = U_f + K_f$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mv_C^2 + mg(2R)$$

Perché non si stacchi mai deve valere la relazione del moto circolare uniforme:

$$ma_R = -m\frac{v_C^2}{R} = \left(\sum_i \vec{F}_i\right)_R = -N - mg \Rightarrow \frac{v_C^2}{R} = \frac{N}{m} + g$$

La v_C minima per non cadere è quando $N = 0$

Sostituendo nella conservazione dell'energia: $v_C^2 = Rg$

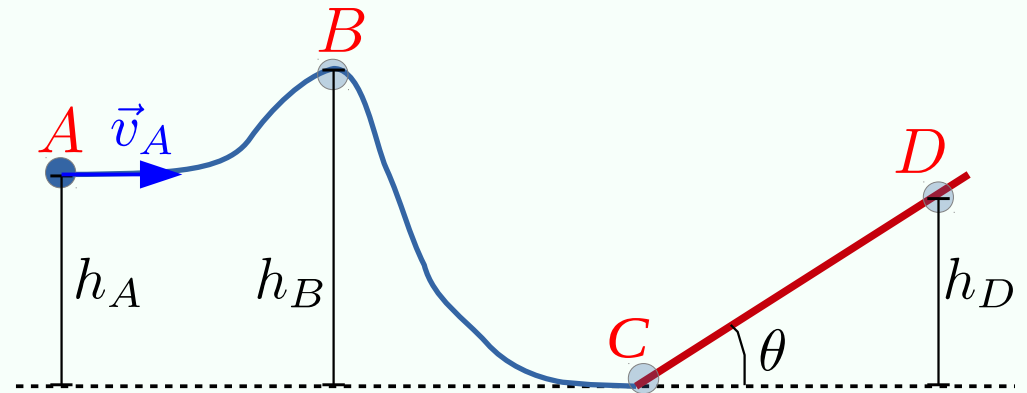
$$mgh_{\min} = 2mgR + \frac{1}{2}mv_C^2 = 2mgR + \frac{1}{2}mgR = \frac{5}{2}mgR \Rightarrow h_{\min} = \frac{5}{2}R$$

Problema 7

Un corpo di massa m scivola lungo una guida liscia partendo con velocità v_A e percorre il tratto ABC in figura.

In seguito sale su un piano inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale, con coefficiente di attrito dinamico μ_d .

Trovare la velocità in B ; la velocità in C ;
l'altezza finale h_D rispetto al punto più basso della traiettoria.



In tutto il tratto da A a C l'energia meccanica si conserva.

Da C a D lavorano anche forze non conservative (attrito).

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B \Rightarrow v_B = \sqrt{v_A^2 + 2g(h_A - h_B)}$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A = \frac{1}{2}mv_C^2 + mgh_C \Rightarrow v_C = \sqrt{v_A^2 + 2gh_A}$$

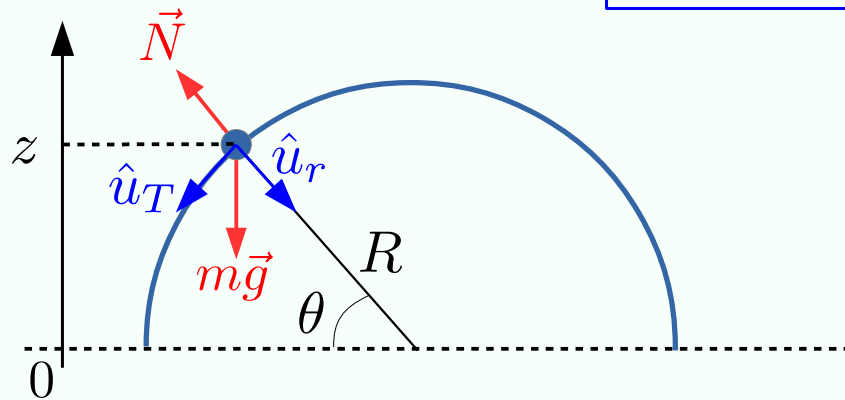
$$E_D - E_C = L_{\text{FNC}} = -f_d d = -f_d \frac{h_D}{\sin \theta} = -\mu_d mg \cos \theta \frac{h_D}{\sin \theta} = -\mu_d mg \frac{h_D}{\tan \theta}$$

$$mgh_D - \frac{1}{2}mv_C^2 = -\mu_d mg \frac{h_D}{\tan \theta} \Rightarrow h_D = \frac{v_C^2}{2g(1 + \frac{\mu_d}{\tan \theta})}$$

Problema 8

Un corpo scivola lungo una calotta semisferica senza attrito, partendo da fermo.
A che altezza si stacca?

Finché sta attaccato il moto è circolare (non uniforme)



$$\begin{cases} m a_r = -m \frac{v^2}{R} = -mg \sin \theta + N & (*) \\ m a_T = mg \cos \theta & (**) \end{cases}$$

L'*energia meccanica si conserva* (non c'è attrito). ($z = R \sin \theta$)

$$mgR = mgz + \frac{1}{2}mv^2 = mgR \sin \theta + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v^2 = 2gR(1 - \sin \theta)$$

$$\text{da (*) si ha: } \frac{v^2}{R} = g \sin \theta - \frac{N}{m} \Rightarrow \frac{2gR(1 - \sin \theta)}{R} = g \sin \theta - \frac{N}{m}$$

$$\theta_c : N = 0 \Rightarrow 2g(1 - \sin \theta_c) = g \sin \theta_c \Rightarrow \sin \theta_c = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta_c \approx 41.8^\circ$$

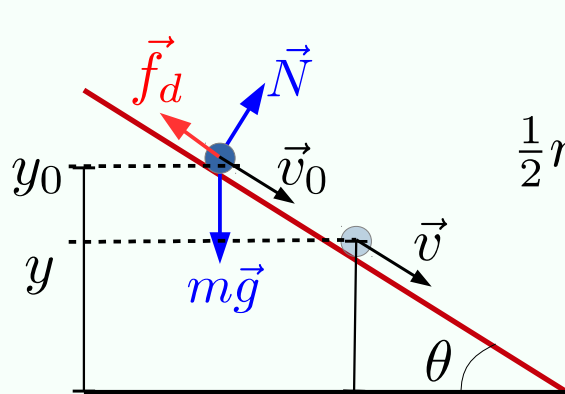
Problema 9

Un corpo su un piano inclinato scabro (con coefficiente di attrito dinamico μ_d) parte con velocità v_0 diretta verso il basso.

Come cambia la velocità durante il moto?

Quali sono le relazioni per avere velocità che cresce, diminuisce o è costante?

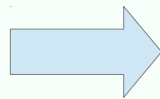
Vale il teorema dell'energia generalizzato: $\Delta(U + K) = L_{N.C.} = -f_d d = -f_d \frac{y_0 - y}{\sin \theta}$



$$f_d = \mu_d mg \cos \theta$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy - \frac{1}{2}mv_0^2 - mgy_0 = -mg \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \mu_d (y_0 - y)$$

$$v^2 + 2gy - v_0^2 - 2gy_0 = -2g\mu_d \frac{y_0 - y}{\tan \theta}$$



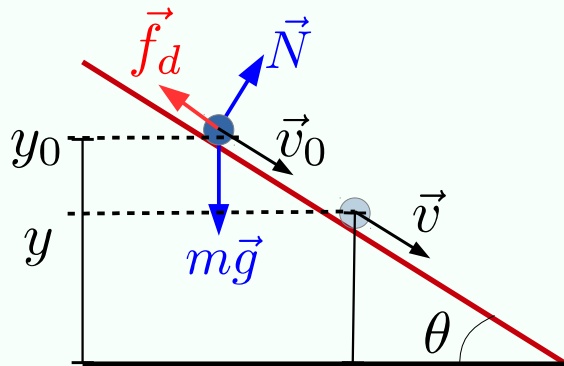
$$v^2 - v_0^2 = 2g(y_0 - y) \left[1 - \frac{\mu_d}{\tan \theta} \right]$$

Problema 9

Un corpo su un piano inclinato scabro (con coefficiente di attrito dinamico μ_d) parte con velocità v_0 diretta verso il basso.

Come cambia la velocità durante il moto?

Quali sono le relazioni per avere velocità che cresce, diminuisce o è costante?



$$v^2 - v_0^2 = 2g(y_0 - y) \left[1 - \frac{\mu_d}{\tan \theta} \right]$$

- (A) Se l'attrito è grande, il termine di destra è negativo.
Perciò al diminuire della quota, v diminuisce finché **il corpo si ferma**
- (B) Se l'attrito non è così grande, o l'inclinazione è sufficientemente grande, il termine a destra è positivo. Dunque **la velocità aumenta**
- (C) Se $\mu_d = \tan \theta$, allora il termine di destra è zero.
La forza di attrito e la componente della forza peso si equilibrano \Rightarrow **v è costante**

$K = \text{cost.}$; U diminuisce e si trasforma in energia termica,
per effetto del lavoro fatto dalle forze dissipative