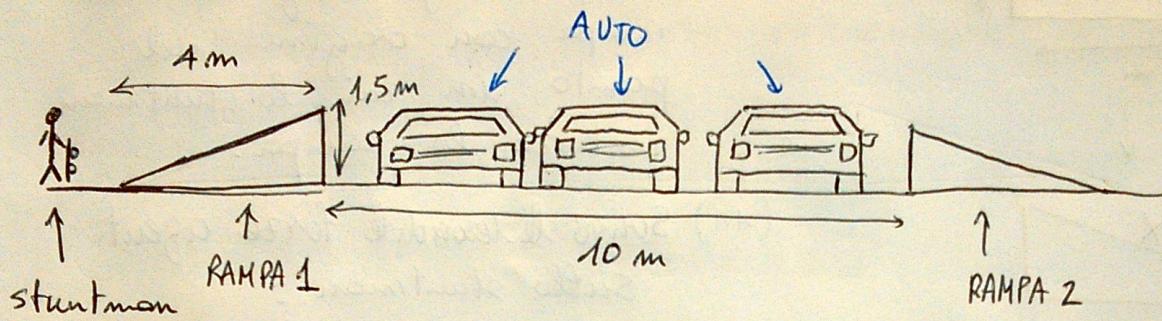


**PROB 1** Uno stuntman deve saltare con uno skateboard una fila di automobili parcheggiate (lunghezza file 10 m). Per farlo costruisce due rampe uguali di lunghezza 4 m e altezza 1,5 m che vengono disposte come in figura



Supponendo che la rampa 1 venga imboccata con una velocità  $\vec{V}_0$  (incognita) diretta lungo la superficie della rampa

- ① Stabilire  $|\vec{V}_0|$  necessario a raggiungere la cima delle rampe in presenza di  $\mu_d = \text{coefficiente di attrito dinamico} = 0,3$

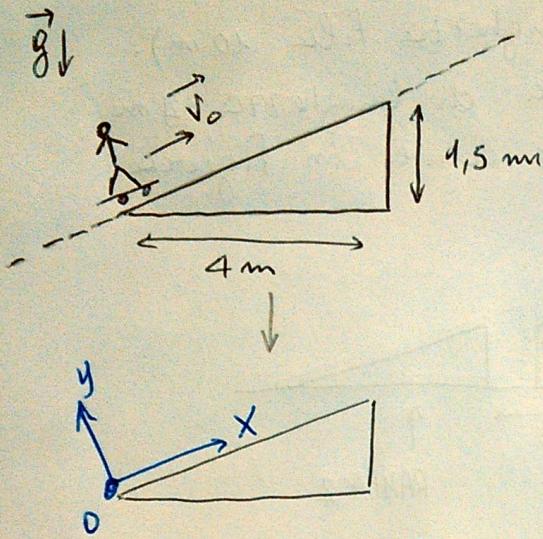
→ PER CASA ←

- ② Stabilire  $|\vec{V}_0|$  necessario a raggiungere l'altra rampa sempre in presenza di  $\mu_d = 0,3$

- ③ Discutere ① e ② in avvenuta di attrito dinamico.

## Svolgimento

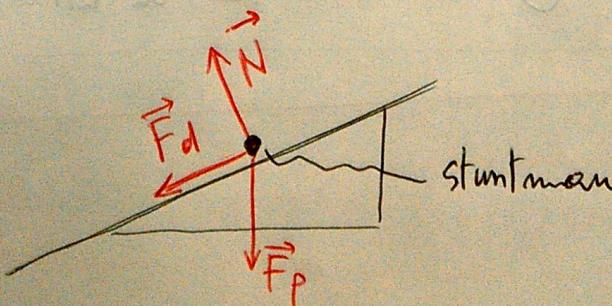
Per il punto ④ il problema si riduce all'analisi del moto di un corpo su una superficie inclinata. Il sistema è descritto in figura 2



(i) Fisso un sistema di coordinate con  $\hat{x}$  diretto lungo la rampa e  $\hat{y}$  ortogonale alla rampa con origine nel punto in cui lo stuntman imbocca la rampa.

(ii) Considero le forze agenti sullo stuntman:

- lo stuntman ha massa "m" (incognita)
- $\Rightarrow$  È soggetto alle forze di gravità (Forza peso)
- il moto avviene lungo una rampa
- $\Rightarrow$  È presente una forza di reazione vincolare ( $\vec{N}$ )
- il piano è scabro
- $\Rightarrow$  È presente una forza di attrito dinamico che si oppone al moto ( $\vec{F}_d$ )



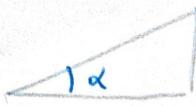
(iii) Applico la seconda legge di Newton:

$$\vec{F}_{\text{TOT}} = \vec{F}_p + \vec{N} + \vec{F}_d = m \vec{a}$$

(iv) Passo in componenti:

per procedere devo prima determinare la pendenza delle rampe

$$\tan \alpha = \frac{1,5}{4} \approx 0,35 \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}(0,35) \approx 19,3^\circ$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 0,94 \\ \sin \alpha = 0,33 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{\text{TOT}} \cdot \hat{x} = m \vec{a} \cdot \hat{x} = a_x m = -|\vec{F}_d| - |\vec{F}_p| \sin \alpha \quad (1) \\ \vec{F}_{\text{TOT}} \cdot \hat{y} = m \vec{a} \cdot \hat{y} = 0 = |\vec{N}| - |\vec{F}_p| \cos \alpha \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{\text{TOT}} \cdot \hat{y} = m \vec{a} \cdot \hat{y} = 0 = |\vec{N}| - |\vec{F}_p| \cos \alpha \quad (2) \end{array} \right.$$

$$(2) \Rightarrow |\vec{N}| = |\vec{F}_p| \cos \alpha = m |\vec{g}| \cos \alpha$$

uso che  $|\vec{F}_d| = \mu_d |\vec{N}| \Rightarrow |\vec{F}_d| = \mu_d m |\vec{g}| \cos \alpha \quad (3)$

$$(1) m a_x = -(|\vec{F}_d| + |\vec{F}_p| \sin \alpha) \stackrel{(3)}{=} -(\mu_d m |\vec{g}| \cos \alpha + m |\vec{g}| \sin \alpha)$$

Da questa segue che (semplifico "m"):

$$a_x = -(\mu_d |\vec{g}| \cos \alpha + |\vec{g}| \sin \alpha) \quad (4)$$

ovvero che il moto lungo la rampa è uniformemente accelerato con  $a_x$  data dalla relazione (4)

(vi) Legge oraria lungo  $\hat{x}$ :

$t=0 \Rightarrow$  istante in cui lo stuntman  
è alla base delle rampe

$$\begin{cases} \vec{r}(t=0) = \vec{0} \\ \vec{v}(t=0) = \vec{v}_0 \\ \vec{a}(t=0) = \vec{a}(t=0) = (\alpha_x, 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 \\ \vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} t \end{cases}$$

(vi) Impongo che per  $t=t^*$  (istante in cui lo stuntman  
raggiunge la cima)

$$\begin{cases} \vec{r}(t^*) = (\text{spazio percorso lungo } \hat{x}, 0) \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \vec{v}(t^*) = \vec{0} \quad (\text{lo stuntman raggiunge la cima e si ferma}) \end{cases} \quad (6)$$

(vii) Proietto (5) e (6) lungo  $\hat{x}$ :

$$\vec{r}(t^*) \cdot \hat{x} = \vec{v}_0 t^* \cdot \hat{x} + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot \hat{x} t^* {}^2 = \text{spazio percorso} = \sqrt{4^2 + (1,5)^2} \text{ m}$$

$$\vec{v}(t^*) \cdot \hat{x} = \vec{v}_0 \cdot \hat{x} + \vec{a} \cdot \hat{x} t^* = 0$$

$$\begin{cases} \sqrt{4^2 + (1,5)^2} \text{ m} = \sqrt{18,25} \text{ m} = 4,27 \text{ m} = \left( v_0 + \frac{\alpha_x}{2} t^* \right) t^* \\ v_0 + \alpha_x t^* = 0 \Rightarrow -\frac{v_0}{\alpha_x} = t^* \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4,27 \text{ m} = \left( v_0 - \frac{v_0}{2} \right) \left( -\frac{v_0}{\alpha_x} \right) = -\frac{v_0^2}{2 \alpha_x} \Rightarrow \sqrt{2 \alpha_x \cdot 4,27 \text{ m}} = v_0 \\ t^* = -\frac{v_0}{\alpha_x} \end{cases}$$

$$V_0 = \sqrt{-8,54 \cdot \alpha_x \text{ m}} = \sqrt{8,54 \text{ m} (\mu_d \cos\alpha + \sin\alpha) / |\vec{g}|} \approx 11,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

↑  
(4)

Risposta al quesito 1

Il  $\vec{V}_0$  necessario a raggiungere la cima della rampa è pari a  $11,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

PER CASA

• Per quanto riguarda il punto ② procediamo in questa maniera :

STRATEGIA

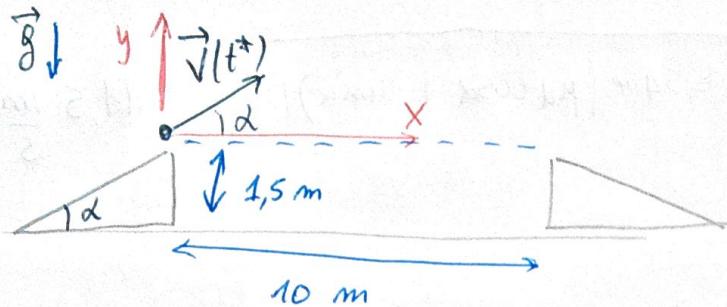
(i) supponiamo che lo stuntman raggiunga a  $t=t^*$  (differente da quello della parte 1 del problema) la cima della rampa con velocità  $\vec{V}(t^*)$  (incognita)

(ii) Stabiliamo per quale  $\vec{V}(t^*)$  lo stuntman riesce a raggiungere l'altra rampa

(iii) usiamo le equazioni della cinematica (simili a (5) e (6)) per determinare quale  $\vec{V}_0$  permette di realizzare la  $\vec{V}(t^*)$  del punto (ii).



Sia  $\vec{v}(t^*)$  la velocità che lo stuntman ha in corrispondenza della cima della rampa 1 (vedi figura).



- (i) Fisso un nuovo sistema di riferimento con origine nel punto in cui si trova lo stuntman a  $t=t^*$  e assi :  $\hat{x} \rightarrow$  lungo l'orizzontale  
 $\hat{y} \rightarrow$  lungo la verticale

(ii) Fisso la nuova origine dei tempi a  $t^* \Rightarrow t'=t-t^*$   
 $\Rightarrow t'=0 \Rightarrow t=t^*$

(iii) Da  $t'=0$  il nostro stuntman segue il moto del proiettile (vedi asse x e y in rosso nella figura sopra)

$$\begin{cases} \vec{r}(t') = \vec{r}(t=0) + \vec{v}(t=0)t' + \frac{1}{2}\vec{a}t'^2; \\ \vec{v}(t') = \vec{v}(t=0) + \frac{1}{2}\vec{a}t' \cdot 2 = \vec{v}(t=0) + \vec{a}t'; \end{cases}$$

(iv) Proietto lungo  $\hat{x}$

$$\begin{cases} \vec{r}(t') \cdot \hat{x} = |\vec{v}(t^*)| \cos \alpha t' \quad (A) \\ \vec{v}(t') \cdot \hat{x} = |\vec{v}(t^*)| \cos \alpha \quad (B) \end{cases}$$

Proietto lungo  $\hat{y}$ :

$$\begin{cases} \vec{r}(t') \cdot \hat{y} = |\vec{v}(t^*)| \sin \alpha t' - \frac{1}{2}|\vec{g}| t'^2 \quad (C) \\ \vec{v}(t') \cdot \hat{y} = |\vec{v}(t^*)| \sin \alpha - |\vec{g}| t' \quad (D) \end{cases}$$

(V) Chiamo  $\bar{t}$  l'istante in cui lo stuntman raggiunge l'altra rampa. Per  $t'=\bar{t} \Rightarrow \begin{cases} \vec{r}(\bar{t}) \cdot \hat{y} = 0 \quad (C=0) \\ \vec{r}(\bar{t}) \cdot \hat{x} = 10m \quad (A=10m) \end{cases}$

$$\vec{r}(\bar{t}) \cdot \hat{y} = 0 = |\vec{v}(t^*)| \sin \alpha \bar{t} - \frac{1}{2} |\vec{g}| \bar{t}^2 = \bar{t} (|\vec{v}(t^*)| \sin \alpha - \frac{1}{2} |\vec{g}| \bar{t}) = 0$$

$\downarrow$  a  $\bar{t}$  sono sulla cima dell'altra rampa       $\uparrow$  raccordo  $\bar{t}$

$$\begin{cases} \bar{t} = 0 \\ \bar{t} \neq 0 = \frac{2 |\vec{v}(t^*)| \sin \alpha}{|\vec{g}|} \end{cases}$$

$\uparrow$  ho saltato le auto

$$\vec{r}(\bar{t}) \cdot \hat{x} = 10 \text{ m} = |\vec{v}(t^*)| \cos \alpha \bar{t} = 2 |\vec{v}(t^*)|^2 \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{|\vec{g}|}, \text{ da cui}$$

$$|\vec{v}(t^*)|^2 = \frac{10 \text{ m} |\vec{g}|}{2 \sin \alpha \cos \alpha}$$

- Da questo punto in poi procedrete da soli:

(vi) tornate al punto (V) della parte ① e richiedete che per  $t=t^*$  lo stuntman abbia velocità in modulo pari a  $|\vec{v}(t^*)|$  e che abbia percorso spazio pari alle lunghezze delle rampe lungo la vecchia direzione  $x$  ( $\sqrt{4^2 + 8,5^2} \text{ m}$ ).

Da queste due equazioni troverete il valore di  $|\vec{v}_0|$  necessario a raggiungere la seconda rampa, saltando la fila di auto.



## PROB 2 | Automobili in curva:

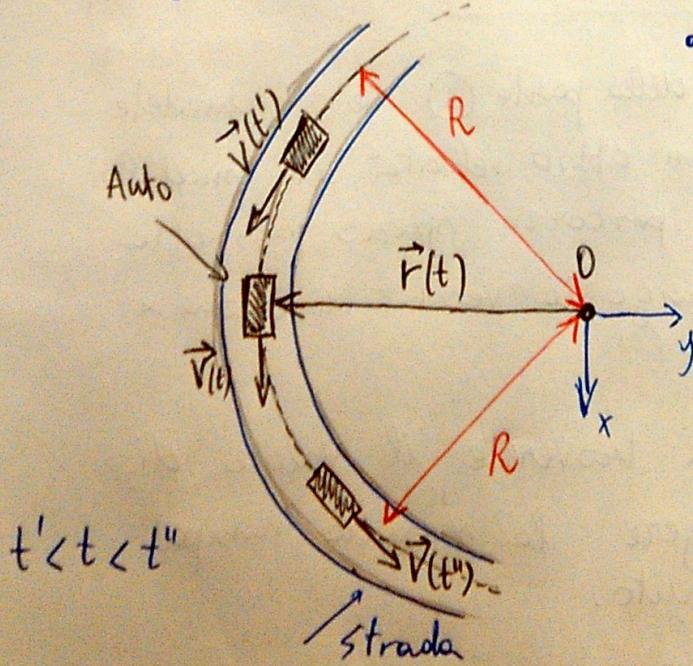
Un'automobile percorre una curva (di raggio di curvatura  $R$ ) su un tratto di strada in piano, con una velocità in modulo costante e pari a  $v$  (incognita).

Sapendo che fra pneumatici e la strada è presente attrito statico con coefficiente  $\mu_s$ ,

- ①. Stabilire quale sia la velocità massima (modulo)  $v_{\max}$  a cui l'auto può percorrere il tratto stradale
- ②. Valutare  $v_{\max}$  per  $\mu_s = 1,2$  ed  $R = 150 \text{ m}$
- ③. Analizzare lo stesso problema nel caso in cui la curva risulti inclinata di  $\alpha = 30^\circ$  rispetto all'orizzontale.

### Svolgimento

Il sistema analizzato nel punto ① e ② è riportato di seguito in figura.



- Il moto rappresentato in figura è un moto di tipo circolare :

$$r_x(t)^2 + r_y(t)^2 = R^2$$

Equazione della circonferenza

che è equivalente a dire che  $|\vec{r}(t)| = R \quad \forall t$

- Visto che nel tempo la direzione del vettore velocità cambia, si tratta di un moto accelerato! (si confronti  $t', t, t''$ )
- Ricordiamoci infatti che:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{a} \quad [\text{ogni modifica del vettore } \vec{V} \text{ (che sia associata al suo modulo e/o alle sue direzioni) è legata alla presenza di un'accelerazione } \vec{a} \neq \vec{0}]$$

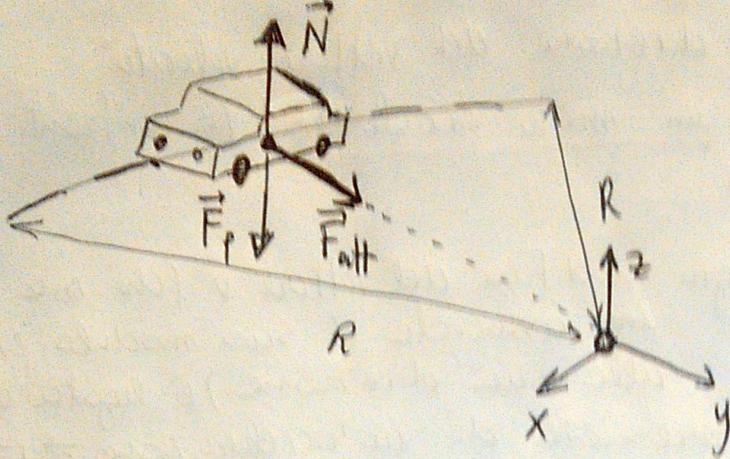
- Nel caso in cui  $|\vec{V}| = \text{costante}$  (che è diverso da  $\vec{V}(t) = \vec{V} + t$ ) diciamo che il moto è circolare uniforme: l'accelerazione cambia solamente la direzione del vettore  $\vec{V}(t)$ , ma non il suo modulo.
- L'accelerazione in questo caso si chiama accelerazione centripeta (diretta dal punto materiale verso il centro della circonferenza lungo cui si muove) ed è legata al modulo di  $|\vec{V}(t)| = v$  e al raggio  $R$  della traiettoria:

$$|\vec{a}_{cp}(t)| = \frac{|\vec{V}(t)|^2}{R} = \frac{v^2}{R}$$

- Per le traiettorie circolari (uniformi e non) vale la 2<sup>a</sup> legge di Newton, cioè che

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \sum_i \vec{F}_i = m \vec{a}_{cp}$$

Costruiamo il diagramma delle forze agenti sull'automobile:



\* lungo la direzione

è (ortogonale al piano della strada) abbiamo

che :

$$\vec{F}_{\text{TOT}} \cdot \hat{z} = (\vec{N} + \vec{F}_p) \cdot \hat{z} = 0$$

perché il moto avviene  
nel piano xy.

Per quanto riguarda il piano x y abbiamo invece che

$$\begin{cases} \vec{F}_{\text{TOT}} \cdot \hat{x} = \vec{F}_{\text{att}}^s \cdot \hat{x} = m \vec{\alpha}_{cp} \cdot \hat{x} & \text{semplificando la notazione} \\ \vec{F}_{\text{TOT}} \cdot \hat{y} = \vec{F}_{\text{att}}^s \cdot \hat{y} = m \vec{\alpha}_{cp} \cdot \hat{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{\text{att}x} = m \alpha_{cp x} \\ F_{\text{att}y} = m \alpha_{cp y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow |\vec{F}_{\text{att}}^s| = \sqrt{F_{\text{att}x}^2 + F_{\text{att}y}^2} = \sqrt{\alpha_{cp x}^2 + \alpha_{cp y}^2} \quad m = |\vec{\alpha}_{cp}| \quad m$$

$$\text{Ma } |\vec{\alpha}_{cp}| = \frac{|\vec{v}|^2}{R} = \frac{V^2}{R} \Rightarrow |\vec{F}_{\text{att}}^s| = m \frac{V^2}{R}$$

moto  
circolare  
uniforme

Eq.  
coordinate z

\* Utiamo ora che  $|\vec{F}_{\text{att}}^s| \leq \mu_s |\vec{N}| = \mu_s m |\vec{g}|$

La velocità massima si raggiunge quando  $|\vec{F}_{\text{att}}^s| = |\vec{F}_{\text{max}}| = \mu_s m |\vec{g}|$

$$\Rightarrow m \frac{V_{\text{max}}^2}{R} = \mu_s m |\vec{g}| \Rightarrow V_{\text{max}} = \mu_s R |\vec{g}|$$

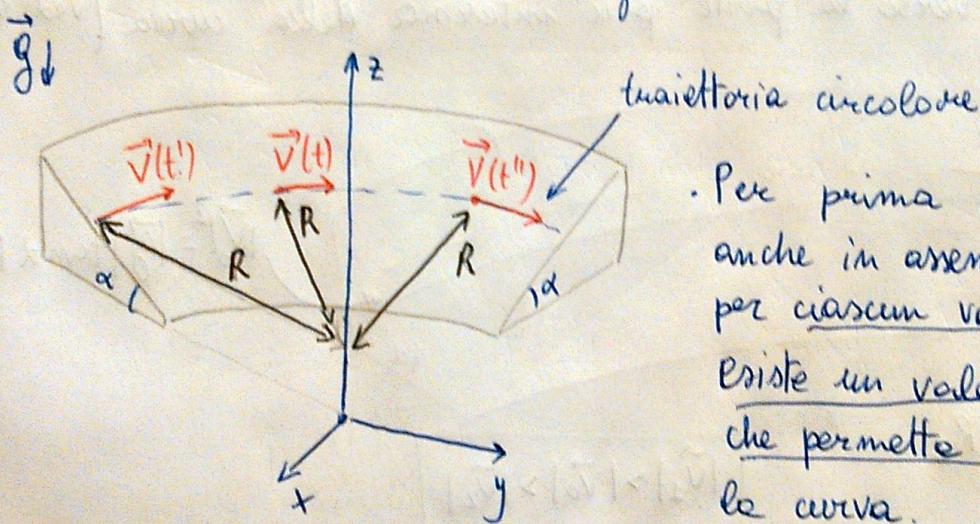
Risposta al quesito 1:  $V_{MAX} = \sqrt{\mu_s g R}$

Risposta al quesito 2: Quando che  $\mu_s^s = 1,2$  ed  $R = 150 \text{ m}$  abbiamo che

$$V_{MAX} = \sqrt{1,2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 150 \text{ m}} = 42 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Passiamo ora al caso in cui  $\alpha = 30^\circ$  rispetto all'orizzontale.

Il sistema è descritto da Figura.

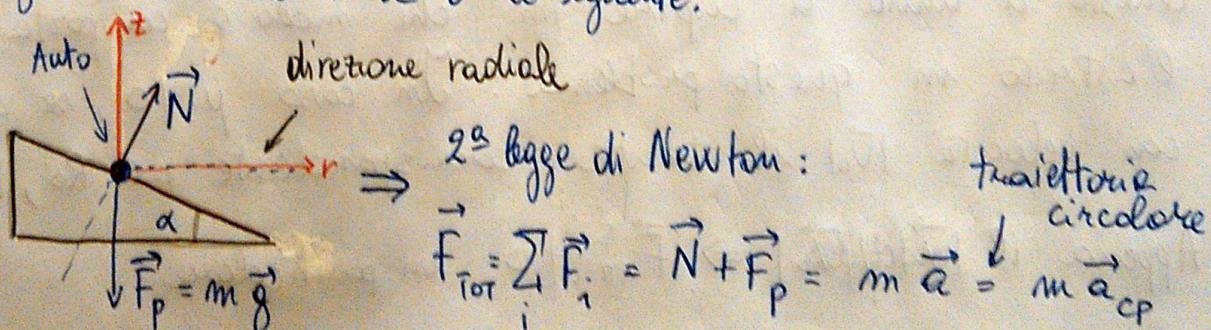


Per prima cosa notiamo che anche in assenza di attrito per ciascun valore di R

esiste un valore della velocità che permette all'auto di percorrere la curva.

Supponiamo per il momento che  $\mu_s = 0$  (percorso senza attrito).

Il diagramma delle forze è il seguente:



$$\vec{F}_{TOT} \cdot \hat{z} = |\vec{N}| \cos \alpha - |\vec{g}| m = 0$$

$$\vec{F}_{TOT} \cdot \hat{r} = |\vec{N}| \sin \alpha = m |\vec{a}_{cp}|$$

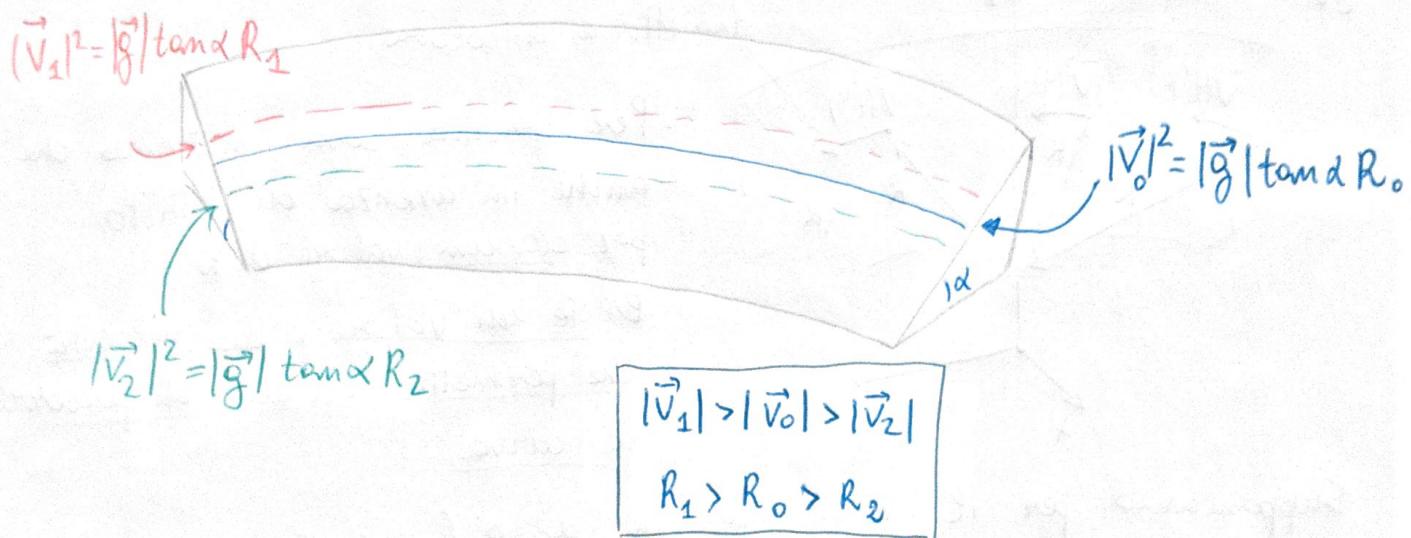
$$|\vec{g}| \tan \alpha = |\vec{a}_{cp}| = \frac{V_0^2}{R}$$

Abbiamo quindi che a fissa inclinazione della curva

$$V^2(R) = |\vec{g}| \tan \alpha R$$

È facile convincersi che il parametro  $R$  dipende dalla quota  $z$  (  $R \propto z$  )

Questo comporta che in assenza di attrito se riammo alle quota  $z_0$  e aumentiamo  $|V|$  la nostra auto verrà spinta verso la parte alta della curva, se invece la nostra velocità diminuisce in modulo verranno spinti verso il basso, cioè verso la parte più interna della curva (vedi sotto)



Questo ci aiuta a capire in che modo si comporta l'attrito in questo problema. In caso giusto, se percorriamo con velocità  $|\vec{V}_0|$  il tratto corrispondente ad  $R_0$ ,  $|\vec{F}_{ATT}^S| = 0$ .

Appena  $|\vec{V}| \neq |\vec{V}_0| \Rightarrow |\vec{F}_{ATT}^S| \neq 0$  in particolare

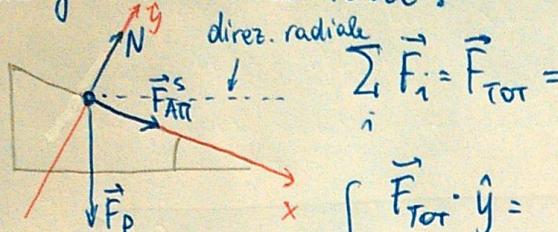
Se  $|\vec{V}| < |\vec{V}_0| \rightarrow$  la forza di attrito punta verso l'esterno

Se  $|\vec{V}| > |\vec{V}_0| \rightarrow$  la forza di attrito punta verso l'interno.

Questo ci permette di dire che esiste, per un dato  $R$ , sia una velocità massima sia una velocità minima a cui possiamo percorrere la curva (perché  $|F_{\text{attr}}^s| \leq \mu_s |\vec{N}|$ )

### CALCOLO DELLA VELOCITÀ MASSIMA

(i) diagramma delle forze:



$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{\text{TOT}} = m \vec{a}_{\text{cp}}$$

2<sup>a</sup> LEGGE DI NEWTON

$$\begin{cases} \vec{F}_{\text{TOT}} \cdot \hat{y} = |\vec{N}| - m|\vec{g}| \cos \alpha = m \vec{a}_{\text{cp}} \cdot \hat{y} = m |\vec{a}_{\text{cp}}| \sin \alpha \\ \vec{F}_{\text{TOT}} \cdot \hat{x} = |\vec{F}_{\text{attr}}^s| + m|\vec{g}| \sin \alpha = m \vec{a}_{\text{cp}} \cdot \hat{x} = m |\vec{a}_{\text{cp}}| \cos \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} |\vec{N}| = m |\vec{a}_{\text{cp}}| \sin \alpha + m |\vec{g}| \cos \alpha \quad (\text{permette di determinare } |\vec{F}_{\text{attr}}^s|) \\ |\vec{F}_{\text{attr}}^s| = m |\vec{a}_{\text{cp}}| \cos \alpha - m |\vec{g}| \sin \alpha \leq |\vec{F}_{\text{attr}}^s|_{\text{MAX}} = \mu_s |\vec{N}| \end{cases}$$

Abbiamo quindi che:

$$0 \leq m |\vec{a}_{\text{cp}}| \cos \alpha - m |\vec{g}| \sin \alpha = \mu_s (m |\vec{a}_{\text{cp}}| \sin \alpha + m |\vec{g}| \cos \alpha)$$

$$\hookrightarrow |\vec{a}_{\text{cp}}| (\cos \alpha - \mu_s \sin \alpha) = |\vec{g}| (\sin \alpha + \mu_s \cos \alpha) > 0$$

$\leftarrow$  Se  $\cos \alpha > \mu_s \sin \alpha$  (vale nel nostro caso perché  $\sqrt{3} > 1,2$ )

$$|\vec{a}_{\text{cp}}|^{\text{MAX}} = \frac{|\vec{g}| (\sin \alpha + \mu_s \cos \alpha)}{\cos \alpha - \mu_s \sin \alpha} =$$

$$= \underbrace{|\vec{g}| \tan \alpha}_{|\vec{a}_{\text{cp}}|^0} \left( \frac{1 + \mu_s \cotan \alpha}{1 - \mu_s \tan \alpha} \right) =$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cotan \alpha = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow |\vec{a}_{cp}^{\max}| = |\vec{g}| \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{1 + \mu_s \sqrt{3}}{1 - \mu_s \frac{1}{\sqrt{3}}} \right) > |\vec{g}| \frac{1}{\sqrt{3}}$$

In particolare:

$$\mu_s = 1,2, R = 150 \text{ m}, |\vec{g}| = 9,81$$

$$|\vec{V}^{\max}|^2 = R |\vec{g}| \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{1 + \mu_s \sqrt{3}}{1 - \mu_s / \sqrt{3}} \right) = 8514 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

$$\Rightarrow |\vec{V}^{\max}| \approx 92,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

### CALCOLO DELLA VELOCITÀ MINIMA

In questo caso va invertito il segno della forza di attrito:

$$\vec{F}_{\text{tot}} \cdot \hat{x} = -|\vec{F}_{\text{att}}^s| + m|\vec{g}| \sin \alpha = m|\vec{a}_{cp}| \cos \alpha \quad (\text{A})$$

$$\vec{F}_{\text{tot}} \cdot \hat{y} = |\vec{N}| - m|\vec{g}| \cos \alpha = m|\vec{a}_{cp}| \sin \alpha \quad (\text{B})$$

→ In questo caso dobbiamo procedere con cautela. ←

L'equazione (A) ci dice:

$$m|\vec{a}_{cp}| \cos \alpha = -|\vec{F}_{\text{att}}^s| + m|\vec{g}| \sin \alpha \\ (\geq 0)$$

Affinché possa esistere una velocità minima non nulla alla quale possiamo percorrere la curva deve valere che

$$m|\vec{a}_{cp}^{\min}| \cos \alpha = -|\vec{F}_{\text{att}}^{s \max}| + m|\vec{g}| \sin \alpha > 0$$

ovvero

$$m|\vec{a}_{cp}^{\min}| \cos \alpha = -\mu_s (m|\vec{a}_{cp}^{\min}| \sin \alpha + m|\vec{g}| \cos \alpha) + m|\vec{g}| \sin \alpha > 0$$

Ovvero

$$m|\vec{a}_{cp}^{\min}|(\cos\alpha + \mu_s \sin\alpha) = m|\vec{g}|(\sin\alpha - \mu_s \cos\alpha) > 0$$

che è soddisfatto se  $\boxed{\tan\alpha > \mu_s}$  (cosa che non vale nel nostro problema)

Nel caso in cui  $\boxed{\tan\alpha > \mu_s}$  abbiamo che possiamo richiedere senza paura che:

$$\begin{aligned} m|\vec{a}_{cp}^{\min}| \cos\alpha &= -|\vec{F}_{\text{attr}}^{\max}| + m|\vec{g}| \sin\alpha = \\ &= -\mu_s(m|\vec{a}_{cp}^{\min} \sin\alpha + m|\vec{g}| \cos\alpha) + m|\vec{g}| \sin\alpha \end{aligned}$$

Ovvero

$$|\vec{a}_{cp}^{\min}| (\cos\alpha + \mu_s \sin\alpha) = |\vec{g}| (\sin\alpha - \mu_s \cos\alpha) (> 0)$$

$$\Rightarrow |\vec{a}_{cp}^{\min}| = \frac{|\vec{g}| \tan\alpha (1 - \mu_s / \tan\alpha)}{(1 + \mu_s \tan\alpha)} < |\vec{g}| \tan\alpha$$

Ne segue che

$$0 < |\vec{V}|_{\min}^2 = R|\vec{g}| \tan\alpha (1 - \mu_s / \tan\alpha) < |\vec{V}_0|^2 = R|\vec{g}| \tan\alpha$$

**PROB. 3**

Un pendolo è costituito da un corpo pesante di massa "m" sospeso ad un filo di lunghezza "L". Se il peso viene fatto muovere lungo una circonferenza di raggio "R", il filo descrive una superficie conica (PENDOLO CONICO). Il tempo necessario perché il peso compie una rivoluzione completa è detto periodo "T".

① Si determini un'espressione di " $g'$ " in funzione di " $T$ ", di " $L$ " e dell'angolo  $\theta$  che il filo forma con la verticale.

SVOLGIMENTO

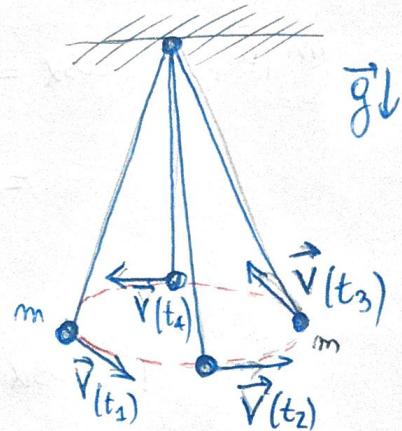
(i) La massa "m" percorre una traiettoria circolare uniforme di raggio "R" nel piano orizzontale con una velocità che in modulo è costante e pari a "v".

(ii) Durante un periodo "T" la massa percorre spazio pari alle lunghezze delle circonferenze, ovvero  $2\pi R$ .

Da questo segue che le velocità "v" (il modulo) ed il periodo "T" sono legati dalla seguente relazione

$$Tv = \text{lunghezza circonferenza} = 2\pi R$$

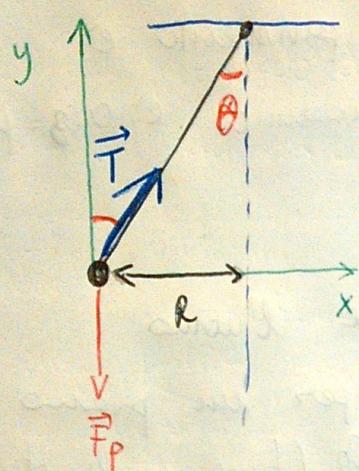
$$\hookrightarrow v = \frac{2\pi R}{T} \quad \left( \begin{array}{l} \text{dalle misure di } R \text{ e } T \\ \text{abbiamo accesso a } v \end{array} \right)$$



RAPPRESENTAZIONE  
DEL PENDOLO CONICO

(iii) Per un moto circolare sappiamo che  $|\vec{a}_{cpl}|$  dipende da  $R$  e da "v" secondo la legge  $|\vec{a}_{cpl}| = \frac{v^2}{R}$

(iv) Applichiamo la seconda legge di Newton al corpo:



$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_p + \vec{T} = m \vec{a}_{cp}$$

tensione

$$\begin{cases} \vec{F}_{\text{tot}} \cdot \hat{y} = -|\vec{F}_p| + |\vec{T}| \cos \theta = 0 = m \vec{a}_{cp} \cdot \hat{y} \\ \vec{F}_{\text{tot}} \cdot \hat{x} = |\vec{T}| \sin \theta = m \vec{a}_{cp} \cdot \hat{x} = m \frac{v^2}{R} \end{cases}$$

Dovendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} |\vec{T}| = \frac{|\vec{F}_p|}{\cos \theta} \\ |\vec{F}_p| \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = |\vec{F}_p| \tan \theta = m \frac{v^2}{R} \end{array} \right.$$

Moltiplico per L sopra e sotto

(v)  $\tan \theta$  è nota:  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{L \sin \theta}{L \cos \theta} =$

$$= \frac{R}{L \cos \theta}$$

$$L \sin \theta = R$$

$$v^2 = \left( \frac{2\pi R}{T} \right)^2$$

(vi)  $|\vec{F}_p| = m |\vec{g}| = \frac{m v^2}{\tan \theta R} = \frac{m (2\pi R)^2}{\tan \theta R T^2} = \frac{m 4\pi^2 R}{\tan \theta T^2} = \frac{m 4\pi^2 L \cos \theta}{T^2}$

$$\Rightarrow |\vec{g}| = \frac{4\pi^2 L \cos \theta}{T^2}$$

Risposta alle domande 1

PROB4

Un uomo trascina una cassa su un pavimento orizzontale, tirando una fune connessa alla cassa.

La cassa (di massa  $45 \text{ kg}$ ) si muove a velocità costante.

Sapendo che l'angolo  $\theta$  fra la fune ed il pavimento è di  $33^\circ$  e che il coefficiente di attrito dinamico è  $0.63 = \mu_{\text{ATT}}$ ,

① Determinare la tensione della corda.

② Trascinando la stessa cassa su per un piano inclinato di  $\alpha = 30^\circ$  rispetto all'orizzontale (fune inclinata di  $33^\circ$  rispetto al piano inclinato) come cambia la tensione?

Svolgimento:

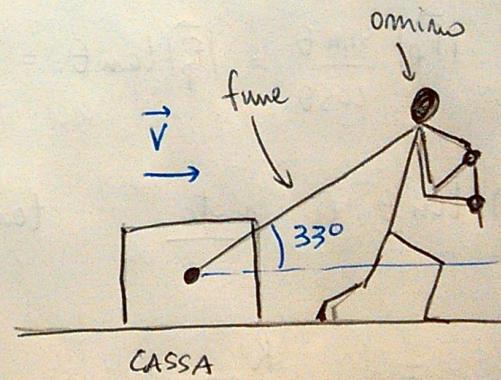
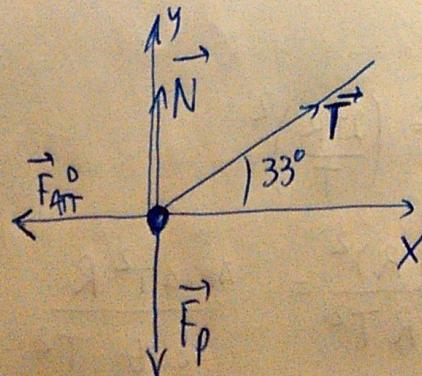
① Il sistema è descritto in figura

(i) Costruiamo il diagramma di corpo libero:

$\rightarrow \vec{F}_p, \vec{F}_{\text{ATT}}, \vec{T}, \vec{N}$  (forza peso, forza

di attrito dinamico, tensione

reazione vincolare del pavimento)



$$(ii) \vec{F}_{\text{TOT}} = \vec{F}_p + \vec{N} + \vec{F}_{\text{ATT}} + \vec{T} = m \vec{a}$$

• Equilibrio lungo  $\hat{y}$ :

$$\vec{F}_{\text{TOT}} \cdot \hat{y} = |\vec{N}| - |\vec{F}_p| + |\vec{T}| \sin(33^\circ) = 0$$

• Il moto lungo  $\hat{x}$  è a velocità costante  $\Rightarrow |\ddot{x}_x = 0|$

$$\vec{F}_{\text{TOT}} \cdot \hat{x} = |\vec{F}_{\text{ATT}}| + |\vec{T}| \cos(33^\circ) = 0$$

(iii) Risolvo il sistema imponendo che  $|\vec{F}_{AT}^D| = \mu_{AT}^D |\vec{N}|$

$$\left\{ \begin{array}{l} |\vec{N}| = |\vec{F}_p| - |\vec{T}| \sin(33^\circ) \\ |\vec{F}_{AT}^D| = \mu_{AT}^D |\vec{N}| = \mu_{AT}^D (|\vec{F}_p| - |\vec{T}| \sin 33^\circ) = |\vec{T}| \cos(33^\circ) \end{array} \right.$$

Allora :

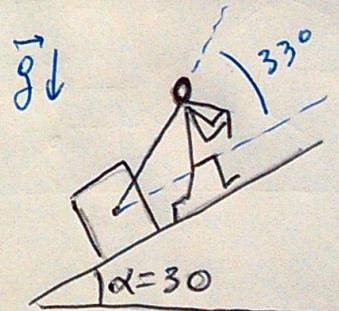
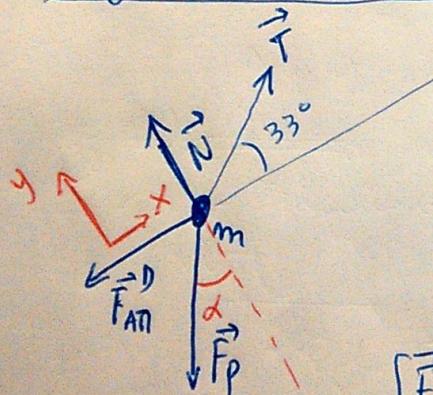
$$|\vec{T}| (\cos(33^\circ) + \mu_{AT}^D \sin(33^\circ)) = \mu_{AT}^D |\vec{F}_p|$$

$$\hookrightarrow |\vec{T}| = \frac{\mu_{AT}^D |\vec{F}_p|}{(\cos(33^\circ) + \mu_{AT}^D \sin(33^\circ))} = 235 \text{ N}$$

Soluzione  
quesito 1

② Per quanto riguarda la seconda parte abbiamo il seguente sistema :

(i) Diagramma delle forze



(ii) proietto  $\vec{F}_{TOT} = \vec{F}_p + \vec{F}_{AT}^D + \vec{N} + \vec{T}$  lungo  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{TOT} \cdot \hat{x} = |\vec{T}| \cos(33^\circ) - |\vec{F}_{AT}^D| - |\vec{F}_p| \sin \alpha = 0 \\ \vec{F}_{TOT} \cdot \hat{y} = |\vec{T}| \sin(33^\circ) + |\vec{N}| - |\vec{F}_p| \cos \alpha = 0 \end{array} \right.$$

$$(i) |\vec{F}_{AT\parallel}^D| = \mu_{AT\parallel}^D |\vec{N}| :$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |\vec{N}| = |\vec{F}_p| \cos \alpha - |\vec{T}| \sin(33^\circ) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |\vec{F}_{AT\parallel}^D| = \mu_{AT\parallel}^D |\vec{N}| = \mu_{AT\parallel}^D (|\vec{F}_p| \cos \alpha - |\vec{T}| \sin(33^\circ)) = (|\vec{F}_p| \sin \alpha + |\vec{T}| \cos(33^\circ)) \end{array} \right.$$

Allora:

$$|\vec{T}| (\cos(33^\circ) + \mu_{AT\parallel}^D \sin(33^\circ)) = |\vec{F}_p| \sin \alpha + \mu_{AT\parallel}^D |\vec{F}_p| \cos \alpha$$

da cui

$$|\vec{T}| = |\vec{F}_p| \frac{(\sin \alpha + \mu_{AT\parallel}^D \cos \alpha)}{(\cos 33^\circ + \mu_{AT\parallel}^D \sin 33^\circ)} \approx 380 \text{ N}$$

Risposta al quesito 2:  $|\vec{T}| = |\vec{F}_p| \frac{(\sin \alpha + \mu_{AT\parallel}^D \cos \alpha)}{(\cos(33^\circ) + \mu_{AT\parallel}^D \sin(33^\circ))} \approx 390 \text{ N}$

