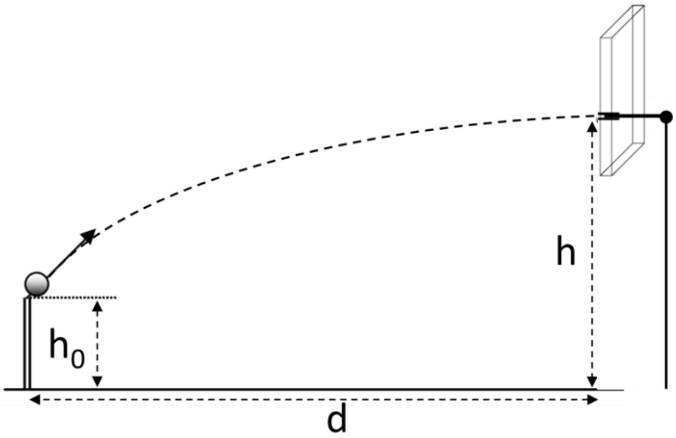
Esame di Fisica per Informatica, Corsi A e B
Appello straordinario del 4 aprile 2014 riservato a studenti fuori corso, lavoratori, genitori con figli di età inferiore agli otto anni, in maternità.

Si svolga il primo esercizio (A) e uno a scelta fra il secondo (B) e il terzo esercizio (C)

Esercizio A

Un giocatore vuole colpire con la palla un bersaglio (un punto del tabellone verticale) posto a distanza $\boldsymbol{d}$ = 6.0 m dal giocatore e altezza $\boldsymbol{h}$=3.0 m da terra, facendo in modo che la palla rimbalzi sul bersaglio con velocità diretta orizzontalmente.

Il lancio della palla viene effettuato dall'altezza $\boldsymbol{h_0}$=1.8 m. La palla ha massa $\boldsymbol{m}$ = 0.8 kg. Si trascurino dimensione della palla e attrito dell'aria.



Figura_Esercizio.A

Calcolare i seguenti parametri necessari affinché avvenga il rimbalzo come desiderato:

1. il modulo della velocità $\mathbf{v_0}$ con cui è lanciata la palla;

2. l'angolo α rispetto all'orizzontale con cui la palla viene lanciata.

Calcolare anche:

3. il tempo $\mathbf{t_x}$ che intercorre fra il lancio e il momento dell'urto;

4. la variazione della quantità di moto della palla fra gli istanti prima e dopo l'urto, se l'urto avviene in modo perfettamente elastico.

Considerando che l'urto avvenga in modo perfettamente elastico, e che il pallone dopo il rimbalzo non venga disturbato nella sua traiettoria e cada a terra, calcolare:

5. la distanza $\mathbf{d_F}$ dal piede della perpendicolare del tabellone del punto di caduta a terra del pallone dopo il rimbalzo.

Se invece l'urto avvenisse in modo non perfettamente elastico, e nell'urto la palla perdesse il 20% della sua energia cinetica, calcolare, in questo caso:

6. la distanza $\mathbf{d_F}$ dal piede della perpendicolare del tabellone del punto di caduta a terra del pallone dopo il rimbalzo.

Esercizio B

Due condensatori di capacità $\boldsymbol{C_1}$ = 0.2 μFarad e $\boldsymbol{C_2}$ = 0.1 μFarad vengono separatamente caricati da due batterie secondo due configurazioni (si veda figura.B): (i) alla stessa differenza di potenziale $\boldsymbol{\Delta V_{AB}} = \boldsymbol{V_A} - \boldsymbol{V_B} = \boldsymbol{\Delta V_{CD}} = \boldsymbol{V_C} - \boldsymbol{V_D} = \boldsymbol{V_0}$ = +10 Volt; (ii) alla stessa differenza di potenziale ma con polarità opposta: $\boldsymbol{\Delta V_{AB}} = \boldsymbol{V_A} - \boldsymbol{V_B} = \boldsymbol{V_0}$ = +10 Volt mentre $\boldsymbol{\Delta V_{CD}} = \boldsymbol{V_C} - \boldsymbol{V_D} = -\boldsymbol{V_0}$ = -10 Volt.

1. Calcolare, nel caso (i), la carica Q_1 accumulata sulle armature del condensatore C_1;

2. calcolare, nel caso (i), l'energia elettrostatica immagazzinata nel condensatore C_1.

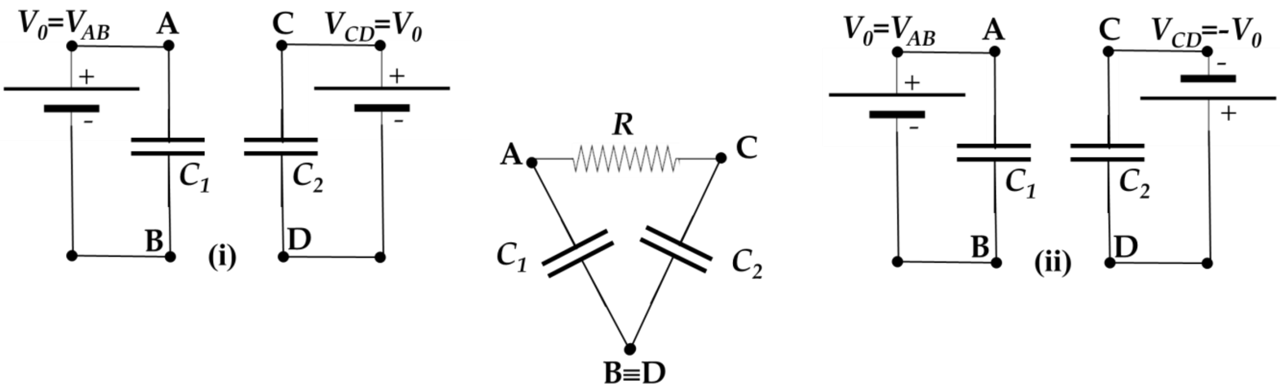
I due condensatori sono poi disconnessi dalle batterie e collegati insieme (si veda figura B) attraverso un resistore R = 100 MOhm che viene inserito fra i punti A e C, mentre i punti B e D sono messi a comune.

3. Determinare la carica su ciascun condensatore in condizioni stazionarie dopo il collegamento nel caso (i);

4. determinare la carica su ciascun condensatore in condizioni stazionarie dopo il collegamento nel caso (ii);

5. determinare la legge che descrive la corrente $I(t)$ che scorre in ogni istante nel resistore R dopo il collegamento nel caso (ii);

6. calcolare l'energia totale dissipata nel resistore R dall'istante t=0 dopo il collegamento fino al raggiungimento delle condizioni stazionarie nel caso (ii).



Figura_Esercizio.B

Esercizio C

La capacità di smaltimento di una coda alla biglietteria di un cinema è di 8 persone al minuto. In quell'ambiente vige anche la disdicevole abitudine di lasciare inserire nuovi arrivati che trovino un amico già in coda, nel qual caso si affiancano all'amico. Questo avviene in media una volta al minuto ogni 15 persone in coda.
Una certa persona P arriva all'istante t=0 e si mette regolarmente in coda trovando davanti a sé 100 persone (trattare il numero di persone come variabile continua del tempo).

1. In quanto tempo arriva a pagare il biglietto?

2. In quanto tempo arriverebbe a pagare il biglietto se nessuno si infilasse abusivamente?

3. C'è una soluzione di equilibrio alle equazioni del sistema? Si tratta di un sistema stabile?

4. Che succede se, restando tutto il resto immutato, la biglietteria rallenta al ritmo di 2 biglietti al minuto?

Svolgimento
Esercizio A
Il moto è del tipo del proiettile, cioè un moto in 2 dimensioni, a velocità costante lungo x e a accelerazione costante lungo y (a_y=-g).
È bene scrivere la legge oraria e la velocità nel tempo:

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_y = v_0 \sin\alpha - gt \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = (v_0 \cos\alpha)t \\ y = h_0 + (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Se si vuole che il bersaglio (di coordinate (x,y)=(d,h)) sia colpito quando la velocità è orizzontale, è utile vedere in che istante t* la velocità verticale è zero.

$$v_y = 0 \Rightarrow 0 = v_0 \sin\alpha - gt^*; \Rightarrow t^* = v_0 \sin\alpha / g$$

A questo punto vi sono varie strade possibili per determinare v_0 e α, avendo due incognite e tre equazioni. Vediamo una possibile strada.
Sostituendo nella legge oraria con le coordinate del bersaglio:

$$\begin{cases} d = \dfrac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} \\ h - h_0 = \dfrac{(v_0 \sin\alpha)^2}{g} - \dfrac{1}{2}g\left(\dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 = \dfrac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g} \end{cases}$$

Dividendo la seconda equazione per la prima:

$$\frac{2(h-h_0)}{d} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha \Rightarrow \alpha = \mathrm{atan}\left[\frac{2(h-h_0)}{d}\right]$$

A questo punto per esempio si può andare a vedere che, dalle equazioni precedenti,

$$v_0^2 = \frac{dg}{\sin\alpha \cos\alpha}$$

e ricavare v_0, sapendo quanto vale α. In modo più elegante, sapendo, dalla trigonometria, che sinαcosα=(tanα)^2

$$v_0^2 = \frac{dg}{\sin\alpha \cos\alpha} = \frac{dg}{(\tan\alpha)^2} \Rightarrow v_0 = \frac{\sqrt{d^3 g}}{2(h-h_0)}$$

A questo punto, conoscendo v_0 e α (risposte (2) e (1) rispettivamente), si può calcolare (risposta (3)) il tempo t* che intercorre fra il lancio e l'impatto $t^* = v_0 \sin\alpha / g = \dfrac{\sqrt{2g(h-h_0)}}{g} = \sqrt{\dfrac{2(h-h_0)}{g}}$

Il quesito (4) chiede la variazione della quantità di moto in caso di urto elastico. La velocità della palla prima dell'urto è solo orizzontale, $v_x = v_0 \cos\alpha$, e il tabellone è e rimane fermo, quindi si può considerare il caso di urto unidimensionale. L'urto contro il tabellone, che ha massa M molto più grande di quella della palla, m, avviene in modo elastico. Si dovranno conservare quantità di moto ed energia.

$$mv_i = mv_f + MV_f \Rightarrow MV_f = mv_i - mv_f$$

$$\frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}MV_f^2 \Rightarrow \frac{1}{2}MV_f^2 = \frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}m\left(\left(v_i - v_f\right)\left(v_i + v_f\right)\right) \Rightarrow$$

$$V_f = \left(v_i + v_f\right)$$

$$ma \quad V_f = 0 \Rightarrow v_f = -v_i = -v_0 \cos\alpha$$

$$\Delta P = P_f - P_i = mv_f - mv_i = -2mv_i = -2mv_0 \cos\alpha$$

Il quesito (5) chiede dove va a cadere la palla dopo il rimbalzo se niente interferisce più con essa. Se l'urto è elastico, possiamo reimpostare la legge oraria con nuove condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x = d - \left(v_0 \cos\alpha\right)t \\ y = h - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

La palla toccherà a terra (y=0) all'istante $t_f = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ e quindi la coordinata x sarà:

$$d_f = d - \left(v_0 \cos\alpha\right)\sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow d - d_f = \left(v_0 \cos\alpha\right)\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Il quesito (6) chiede la distanza nel caso in cui l'urto non sia elastico e l'energia cinetica K diminuisca nell'urto, in misura di un fattore a=0.8. Siccome la relazione fra energia cinetica dopo l'urto e prima dell'urto si può scrivere come $K_d = aK_p$, è facile ricavare che la relazione fra modulo della velocità v_d dopo l'urto e modulo della velocità v_p prima dell'urto sarà $\left|v_d\right| = \left|v_p\right|\sqrt{a} = \left(v_0 \cos\alpha\right)\sqrt{a}$

La distanza, nel caso dell'urto non elastico, sarà $d - d_f = \sqrt{a}\left(v_0 \cos\alpha\right)\sqrt{\frac{2h}{g}}$

Esercizio B

I condensatori sono caricati, nel caso (i) $V_{AB} = V_0 = 10V; V_{CD} = V_0 = 10V$,

e nel caso (ii) $V_{AB} = V_0 = 10V; V_{CD} = -V_0 = -10V$.

Il quesito (1) chiede la carica accumulata sulle armature del primo condensatore. Avremo nel caso (i):

$$V_{AB} = V_0 = 10V = \frac{Q_1}{C_1}; \Rightarrow Q_1 = V_0 C_1$$

$$V_{CD} = V_0 = 10V = \frac{Q_2}{C_2}; \Rightarrow Q_2 = V_0 C_2$$

E nel caso (ii):

$$V_{AB} = V_0 = 10V = \frac{Q_1}{C_1}; \Rightarrow Q_1 = V_0 C_1$$

$$V_{CD} = -V_0 = -10V = -\frac{Q_2}{C_2}; \Rightarrow Q_2 = -V_0 C_2$$

Quindi nel caso (ii) la carica accumulata sull'armatura connessa al punto C sarà negativa, al contrario che nel caso (i). I valori assoluti delle cariche sono gli stessi, per i rispettivi condensatori, nel caso (i) e (ii).

Il quesito (2) chiede l'energia elettrostatica immagazzinata nel condensatore 1. Applicando la definizione di energia elettrostatica associata ad un condensatore abbiamo, rispettivamente per il condensatore 1 e per il 2 (risposta non richiesta ma è utile per il quesito 6):

$$E_1 = \frac{1}{2} Q_1 \Delta V_1 = \frac{1}{2} C_1 \left(\Delta V_1\right)^2 = \frac{1}{2} C_1 V_0^2$$

$$E_2 = \frac{1}{2} Q_2 \Delta V_2 = \frac{1}{2} C_2 \left(\Delta V_2\right)^2 = \frac{1}{2} C_2 V_0^2$$

Si vede come, sia per il condensatore 1 che per il condensatore 2, l'energia immagazzinata non è diversa nel caso (i) e nel caso (ii), comparendo la differenza di potenziale, ma al quadrato.

Quesito (3)

Nel caso (i), quando si collegano i condensatori, si vanno a collegare due elementi che sono alla stessa differenza di potenziale, V_0. Ai capi della resistenza pertanto, all'istante iniziale del collegamento t=0, non vi è differenza di potenziale: per la legge di Ohm, la corrente che attraversa la resistenza è nulla. Il sistema è all'equilibrio a t=0 e in questo stato permane. Per cui avremo:

$$Q_1(t=0) = V_0 C_1 = Q_1(t \to 0)$$

$$Q_2(t=0) = V_0 C_2 = Q_2(t \to 0)$$

Quesito (4)

Nel caso (ii), al momento di collegare i condensatori, i due capi della resistenza si trovano a potenziali diversi. Vi sarà quindi passaggio di carica e la carica sulle armature dei due condensatori si andrà a redistribuire. Vi sarà un regime transiente, che andremo a descrivere in seguito, ma alla fine la corrente nel condensatore sarà nulla e ai capi dei due condensatori si stabilirà la stessa differenza di potenziale $V_{AB} = V_{CD} = \Delta V_f$. Le cariche sui due condensatori saranno:

$$Q_{1f} = C_1 \Delta V_f ; Q_{2f} = C_2 \Delta V_f$$

Siccome vale anche la conservazione della carica:

$$const = Q_{tot} = Q_1 + Q_2 = Q_{1f} + Q_{2f} = C_1 \Delta V_f + C_2 \Delta V_f = Q_{1i} + Q_{2i} = V_0 C_1 - V_0 C_2$$

Da cui:

$$\Delta V_f = V_0 \frac{\left(C_1 - C_2\right)}{\left(C_1 + C_2\right)}$$

E per le cariche:

$$Q_{1f} = C_1 V_0 \frac{\left(C_1 - C_2\right)}{\left(C_1 + C_2\right)}; Q_{2f} = C_2 V_0 \frac{\left(C_1 - C_2\right)}{\left(C_1 + C_2\right)}$$

Quesito (5)

Al momento del collegamento del resistore si può applicare la legge di Kirchoff delle maglie e calcolare la somma delle cadute di potenziale attraverso il circuito (per esempio partendo da B, andando ad A e poi a C e di nuovo a B) e porla uguale a zero:

$$+\frac{Q_1(t)}{C_1}-RI(t)-\frac{Q_2(t)}{C_2}=0$$

$$Q_1(t=0)=V_0C_1;Q_2(t=0)=-V_0C_2;$$

$$Q_1+Q_2=Q_{tot}=const=Q_{1i}+Q_{2i}=V_0C_1-V_0C_2$$

$$\frac{dQ_{tot}}{dt}=0;Q_2(t)=Q_{tot}-Q_1(t)$$

$$+\frac{Q_1(t)}{C_1}-RI(t)-\frac{Q_{tot}}{C_2}+\frac{Q_1(t)}{C_2}=0$$

Dove nell'ultima riga ho sostituito l'espressione per Q_2. Posso quindi considerare l'espressione che lega la corrente che fluisce nel resistore e la variazione della carica nelle armature del condensatore (ricavabile dalla conservazione della carica):

$$I(t)=-\frac{dQ_1(t)}{dt}=\frac{dQ_2(t)}{dt}$$

Sostituendo, abbiamo l'equazione differenziale

$$Q_1(t)\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)+R\frac{dQ_1(t)}{dt}=\frac{Q_{tot}}{C_2}$$

Scrivendo l'espressione per la serie dei due condensatori come:

$$C_S=\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)^{-1}=\left(\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\right);\quad \tau=RC_S;\Rightarrow\frac{Q_1(t)}{RC_S}+\frac{dQ_1(t)}{dt}=\frac{Q_{tot}}{RC_2}$$

Tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono rappresentate dalla famiglia:

$$Q_{1-OMO}(t)=A\exp(-t/\tau) \qquad (*)$$

Una soluzione particolare dell'equazione è invece, per es., la soluzione a t lunghi che abbiamo già calcolato:

$$Q_{1-P}(t)=C_1V_0\frac{(C_1-C_2)}{(C_1+C_2)} \qquad (**)$$

Infatti $C_1V_0\frac{(C_1-C_2)}{R(C_1+C_2)}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)=C_1V_0\frac{(C_1-C_2)}{R(C_1+C_2)}\left(\frac{C_1+C_2}{C_1C_2}\right)=\frac{Q_{tot}}{RC_2}$

Tutte le soluzioni dell'equazione differenziale quindi sono date dalla somma di (*) e (**):

$$Q_1(t)=A\exp(-t/\tau)+C_1V_0\frac{(C_1-C_2)}{(C_1+C_2)}$$

Per trovare la soluzione del caso nostro, dobbiamo imporre la condizione iniziale:

$$Q_1(t=0)=V_0C_1=A\exp\left(-0/\tau\right)+C_1V_0\frac{\left(C_1-C_2\right)}{\left(C_1+C_2\right)}\Rightarrow$$

$$A=C_1V_0-C_1V_0\frac{\left(C_1-C_2\right)}{\left(C_1+C_2\right)}=C_1V_0\frac{C_1+C_2-C_1+C_2}{\left(C_1+C_2\right)}=V_0\frac{2C_1C_2}{\left(C_1+C_2\right)}=V_0\frac{2C_1C_2}{\left(C_1+C_2\right)}=2C_SV_0\Rightarrow$$

$$Q_1(t)=2C_SV_0\exp\left(-t/\tau\right)+C_1V_0\frac{\left(C_1-C_2\right)}{\left(C_1+C_2\right)}$$

E derivando si trova l'espressione della corrente:

$$I\left(t\right)=-\frac{dQ_1\left(t\right)}{dt}=\frac{1}{RC_S}2C_SV_0\exp\left(-t/\tau\right)=\frac{2V_0}{R}\exp\left(-t/\tau\right)$$

Quesito (6)

Si chiede quanta energia è dissipata in totale dalla resistenza. Una strada sarebbe calcolarsi la potenza dissipata per effetto Joule e poi integrare nel tempo. Più semplicemente invece si può considerare l'energia elettrostatica alla fine (nello stato stazionario) e quella all'inizio, un attimo prima di chiudere il circuito e fare la differenza.

$$E_i=E_{i1}+E_{i2}=\frac{1}{2}C_1V_0^2+\frac{1}{2}C_2V_0^2=\frac{1}{2}\left(C_1+C_2\right)V_0^2$$

$$E_f=E_{f1}+E_{f2}=\frac{1}{2}C_1\Delta V_f^2+\frac{1}{2}C_2\Delta V_f^2=\frac{1}{2}\left(C_1+C_2\right)\Delta V_f^2=\frac{1}{2}\left(C_1+C_2\right)V_0^2\frac{\left(C_1-C_2\right)^2}{\left(C_1+C_2\right)^2}=\frac{1}{2}V_0^2\frac{\left(C_1-C_2\right)^2}{\left(C_1+C_2\right)}$$

$$E_{diss}=E_i-E_f=\frac{1}{2}V_0^2\left[\left(C_1+C_2\right)-\frac{\left(C_1-C_2\right)^2}{\left(C_1+C_2\right)}\right]=\frac{1}{2}V_0^2\left[\frac{\left(C_1+C_2\right)^2-\left(C_1-C_2\right)^2}{\left(C_1+C_2\right)}\right]=2V_0^2\frac{C_1C_2}{\left(C_1+C_2\right)}$$

Esercizio C

Il problema va portato da variabili discrete (n. persone in fila) a variabili continue. Consideriamo che x(t) è la variabile che mi dice quanto l'onesto aspirante spettatore, chiamiamolo Mario, è lontano dalla biglietteria: x(t) è proporzionale al numero di persone che gli sono davanti. Sappiamo che la biglietteria smaltisce 8 persone al minuto, e definiamo la velocità di smaltimento (o *rate*) con r=8 persone/minuto. Sappiamo anche però che negli stessi istanti un numero di "abusivi" si infiltrano nella fila nella misura di a=1 persona/(15 persone in fila per minuto).

Volendo esprimere la velocità con cui Mario si allontana (>0) o avvicina (<0) alla biglietteria e considerando i due contributi di cui sopra abbiamo:

$$\frac{dx}{dt}=-r+ax$$

$$\frac{dx}{dt}-ax=-r$$

Questa è una equazione differenziale, e sappiamo anche la condizione iniziale x(0)=100 (Mario ha davanti 100 persone quando si mette in fila).

Per rispondere al quesito (1), qual è l'istante in cui Mario compra il biglietto, dobbiamo trovare tutte le soluzioni dell'omogenea associata $\frac{dx}{dt}-ax=0\Rightarrow x=A\exp(at)$

e una soluzione particolare della equazione differenziale, per esempio la soluzione di equilibrio, cioè quella per cui $x_{eq}(t)$=costante, cioè, detto in gergo, Mario non si "schioda" dalla posizione iniziale, perché per tanti spettatori che la biglietteria smaltisce, tanti "abusivi" si infiltrano.

$-ax_{eq} = -r \Rightarrow x_{eq} = r/a = 8 \times 15 = 120$

La famiglia di soluzioni dell'equazione differenziale è:

$x(t) = x_{OMO}(t) + x_{eq} = A\exp(at) + r/a$

Imponendo le condizioni iniziali otteniamo la legge con cui Mario si avvicina alla biglietteria:

$x(0) = 100 = A\exp(a0) + r/a = A + 120 \Rightarrow A = -20 \Rightarrow x(t) = -20\exp(t/15) + 120$

Quando arriva Mario a pagare?

t_p: $0 = x(t_p) = -20\exp(t_p/15) + 120 \Rightarrow \ln 6 = t_p/15 \Rightarrow t_p = 15\ln 6 = 26.9\,\text{min}$

Quesito (2)

Si chiede quando paga Mario se non ci fossero abusivi, cioè se il parametro a=0.

Se così è dobbiamo riconsiderare l'equazione differenziale. Il sistema evolve in modo differente.

$$\frac{dx}{dt} = -r$$

Sappiamo anche la condizione iniziale x(0)=100.

Dobbiamo trovare tutte le soluzioni dell'omogenea associata $\frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow x = A$

Dobbiamo anche trovare una soluzione particolare della equazione differenziale, cioè una funzione che derivata una volta dia –r. Un candidato buono è:

$x_p = -rt$

La famiglia di soluzioni dell'equazione differenziale è: $x(t) = x_{OMO}(t) + x_P = A - rt$

Imponendo le condizioni iniziali si ottiene la soluzione: $x(0) = 100 = A \Rightarrow x(t) = 100 - rt$

Quando arriva Mario a pagare?

t_p: $0 = x(t_p) = 100 - rt_p \Rightarrow t_p = \frac{100}{r} = \frac{100}{8} = 12.5\,\text{min}$

Quesito (3)

Si chiede se esiste una condizione di equilibrio. Cioè una condizione iniziale che può permanere nel tempo senza mutare. Nel caso in cui non ci siano infiltrati si vede subito dall'equazione differenziale che non è così. Nel caso originario, la abbiamo già calcolata, è la posizione per la quale $x_{eq}(t)$=costante, per la quale Mario non si "schioda" dalla posizione iniziale, perché per tanti spettatori che la biglietteria smaltisce, tanti "abusivi" si infiltrano:

$-ax_{eq} = -r \Rightarrow x_{eq} = r/a = 8 \times 15 = 120$

Questa posizione non è di equilibrio stabile, infatti per $x<x_{eq}$ Mario si allontanerebbe dalla posizione di equilibrio avvicinandosi alla cassa, mentre per per $x>x_{eq}$ Mario si allontanerebbe dalla posizione di equilibrio allontanandosi dalla cassa in modo esponenziale.

Quesito (4)

Si chiede che succede se, nel caso iniziale, la biglietteria rallentasse al ritmo di r=2 biglietti al minuto. Il sistema dinamico è lo stesso, non cambia l'equazione differenziale, ma cambia il punto di equilibrio:

$$\frac{dx}{dt} - ax = -r$$

La condizione iniziale x(0)=100. La soluzione di equilibrio, cioè quella per cui $x_{eq}(t)$=costante, adesso è: $-ax_{eq} = -r \Rightarrow x_{eq} = r/a = 2\times 15 = 30$

La famiglia di soluzioni dell'equazione differenziale è: $x(t) = x_{OMO}(t) + x_{eq} = A\exp(at) + r/a$

Imponendo le condizioni iniziali si trova la posizione nel tempo di Mario:

$x(0) = 100 = A\exp(a0) + r/a = A + 30 \Rightarrow A = 70 \Rightarrow x(t) = 70\exp(t/15) + 30$

Mario non arriverà mai a pagare, perché la sua distanza dalla biglietteria aumenta nel tempo, a causa degli infiltrati. Come lui, tutti quelli con x iniziale >30 non arriveranno mai a comprare il biglietto.