Supporto alla Didattica
12/05/2017

CAMPI CONSERVATIVI

Oggi parliamo di campi vettoriali.
Un campo vettoriale è una funzione da $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Per i problemi che ci interessano considereremo campi vettoriali da $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

$$\vec{V}(\vec{r}) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \to \text{Campo vettoriale da } \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

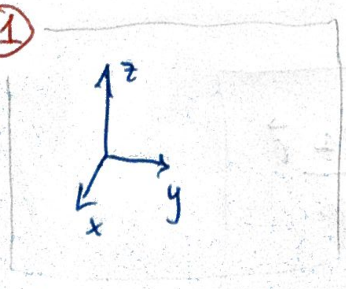
↳ MANGIA UN VETTORE E PRODUCE UN VETTORE

Questi oggetti sono utili per descrivere interazioni gravitazionali ed interazioni elettrostatiche, in particolare in questo caso parleremo di campi conservativi.

- Partiamo dallo spazio vuoto. Se un punto materiale di massa M e carica Q si trova nello spazio vuoto, esso non risente di alcuna forza. Lo spazio viene però modificato: se infatti aggiungiamo un'altra particella di massa m e carica q essa risentirà della "presenza" della prima particella di massa M e carica Q. La "presenza" della particella di massa M e carica Q genera due campi di forze, cioè due oggetti che sono descritti da campi vettoriali, che danno luogo alle interazioni descritte dalle leggi di Gravitazione universale e ~~della~~ di Coulomb.

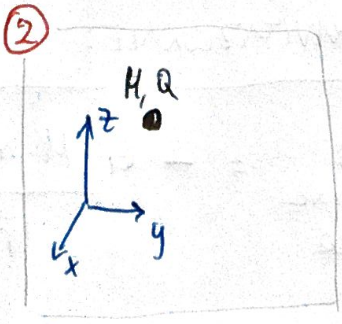
SCHEMATICAMENTE:

1



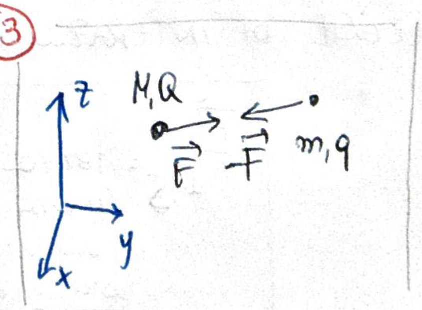
SPAZIO VUOTO

2



SPAZIO CON UNA SOLA MASSA/CARICA
|||
PRESENZA DI CAMPI DI FORZA

3



SPAZIO CON DUE (O PIÙ OGGETTI)
|||
I CAMPI GENERANO FORZE FRA GLI OGGETTI

• Il corpo di massa M e carica Q si chiama sorgente del campo. Le sorgenti vengono solitamente considerate fisse (posizione "costante" $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 \ \forall t$)

• Il secondo oggetto di massa m e carica q viene chiamato massa / carica di prova ed è il corpo di cui si studia la dinamica, cioè l'effetto che i campi generati da una sorgente producono.

QUESTE TEORIE SONO LINEARI!

→ se nello spazio sono presenti più sorgenti ciascuna produce un campo che dipende dalle proprie proprietà. (quindi darà luogo ad una particolare forza)

→ una carica/massa di prova risentirà di un numero di forze pari al numero di sorgenti.

→ la forza totale percepita da una particella di prova è la somma vettoriale delle forze dovute alla presenza di ciascuna sorgente.

COME DEFINIAMO IL CAMPO GENERATO DA UNA SORGENTE?

CASO 1: Interazioni gravitazionali.

• Sorgente di massa M posta nell'origine ("S")

ⓐ Metto una ~~carica~~ massa di prova nel punto $\vec{r}$ di massa m_1

⇒ LEGGE DI INTERAZIONE GRAVITAZIONALE:

$$\boxed{\vec{F}_{1,S} = \text{forza sulla massa di prova dovuta alla sorgente "S"} = -G \frac{M m_1 \vec{r}}{|\vec{r}|^3}}$$

(b) Metto una ~~carica~~ massa di prova nel punto $\vec{r}$ avente massa $m_2 \neq m_1$

$$\boxed{\vec{F}_{2,S} = -G \frac{M m_2 \vec{r}}{|\vec{r}|^3}}$$

Le due forze in (a) e (b) hanno la stessa forma ma sono differenti perchè $m_1 \neq m_2$. Nella costruzione di $\vec{F}_{j,S}$ c'è una parte che dipende dalle proprietà della sorgente e dal ~~su~~ punto nello spazio in cui mettiamo la massa di prova e una parte che dipende dalle proprietà della massetta di prova.

Data una sorgente abbiamo che la forza che un oggetto di prova può essere organizzata in un prodotto fra "le proprietà della sorgente" e "le proprietà della particella di prova.

$$\vec{F} = \left(\overrightarrow{\text{PROPRIETÀ DELLA SORGENTE}}\right) \times \left(\text{PROPRIETÀ DELLA PARTICELLA TEST}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{F}_{j,S} = \underbrace{\left(-\frac{GM\vec{r}}{|\vec{r}|^3}\right)} \times m_j$$

PROPRIETÀ DELLA SORGENTE = CAMPO GRAVITAZIONALE ASSOCIATO ALLA SORGENTE "S"

$$\boxed{\vec{V}_g(\vec{r}) = -G\frac{M\vec{r}}{|\vec{r}|^3}}$$

È lo stesso indipendentemente dalla carica di prova!

INTERAZIONI GRAVITAZIONALI:

$$\text{Se } \vec{F}_{j,S} = -G\frac{M\,m_j\,\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \Rightarrow \vec{V}_g(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_{j,S}}{m_j} = \text{CAMPO GRAVITAZIONALE}$$

CASO 2: Interazioni elettrostatiche

- Sorgente di carica Q posta nell'origine ("S")

ⓐ Carica di prova q_1 in $\vec{r}$

$$\vec{F}_{1,S} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\,q_1}{|\vec{r}|^3}\vec{r}$$

$$\Downarrow$$

ⓑ Carica di prova q_2 in $\vec{r}$

$$\vec{F}_{2,S} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\,q_2}{|\vec{r}|^3}\vec{r}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{F} = (\text{PROPRIETÀ DELLA SORGENTE}) \times (\text{PROPRIETÀ DELLA CARICA DI PROVA})$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\vec{V}_E(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_{j,S}}{q_j} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{|\vec{r}|^3}\vec{r}}$$

Di solito è indicato con $\vec{E}(\vec{r})$ ←

CAMPO VETTORIALE GENERATO DA UNA SORGENTE CARICA

I campi conservativi sono campi vettoriali per cui

$$\boxed{\int_\gamma \vec{V}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = 0 \quad \forall\, \gamma \text{ curva chiusa}}$$

Se riflettiamo sul legame fra campo e forze questo ci dice che per ogni campo conservativo il lavoro compiuto dalla corrispondente forza è nullo!

$$\boxed{\mathcal{L}_{\gamma_{chiusa}} = \int_{\gamma_{chiusa}} \vec{F}\cdot d\vec{r} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{forza conservativa}}}{=} \lambda \int_{\gamma} \vec{V}(\vec{r})\cdot dr = 0}$$

dove $\lambda = m$ per le interazioni gravitazionali e $\lambda = q$ per quelle elettrostatiche.

↳ Il lavoro non dipende dal cammino usato!

Riassumiamo:

→ ad una forza $\vec{F}$ come quella elettrostatica possiamo associare un campo $\vec{V}(\vec{r})$

$$\vec{F}(\vec{r}) \overset{\text{divido per } m \text{ o } q}{\sim} \vec{V}(\vec{r})$$

Integro $\cdot d\vec{r}$ ↓ ↑ $\vec{\nabla}$ $\qquad$ $\vec{\nabla}$ ↑ ↓ Integro $\cdot d\vec{r}$

$$\mathcal{L} = -\Delta E_p \sim (?) \quad -\Delta U$$

(Variazione di Energia potenziale)

Funzione Potenziale

→ Se divido la forza per q o per m trovo il campo associato ad $\vec{F}(\vec{r})$

→ Se integro $\vec{F}(\vec{r})$ lungo un cammino trovo il lavoro $\mathcal{L}$ compiuto dalla forza $\vec{F}(\vec{r})$ lungo un percorso. Questo per le forze conservative è pari all'opposto della variazione di energia potenziale, $\mathcal{L} = -\Delta E_p$.

→ Se divido la variazione di Energia potenziale per "q" o per "m" trovo la variazione di potenziale ΔU.

PROBLEMA 1 Un veicolo spaziale, in viaggio dalla Terra alla Luna, procede lungo la direttrice che congiunge i centri dei due corpi celesti.

Sapendo che la massa della ~~T~~ Terra è M_T, la massa della Luna è M_L e che la distanza media Terra-Luna è r_0, determinare:

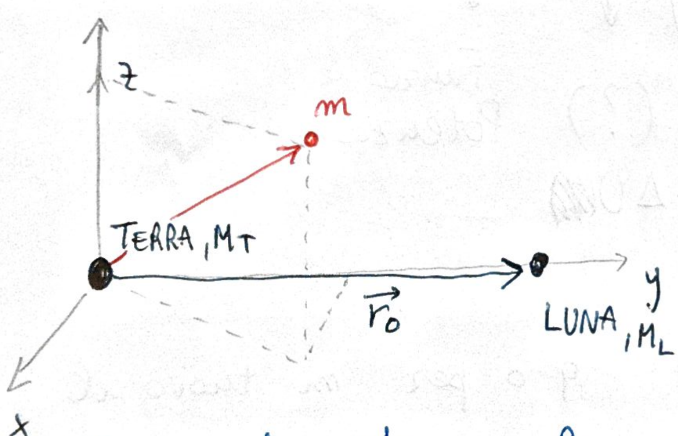
(a) Campo gravitazionale totale in tutto lo spazio

(b) Potenziale gravitazionale totale in tutto lo spazio

(c) Il punto dello spazio ~~in cui~~, lungo la direzione Terra-Luna, in cui la risultante delle forze agenti sulla navicella è nulla.

SVOLGIMENTO (punto (a))

Il sistema è rappresentato in figura.

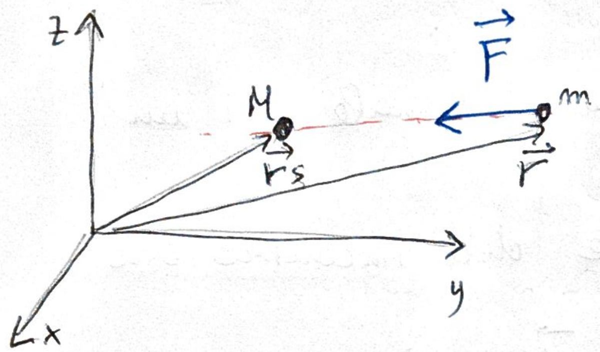


Prendiamo un sistema di assi in cui l'origine è la Terra e in cui la direzione Terra-Luna corrisponde in ogni istante con l'asse delle y.

In questo sistema la posizione della Luna è data dal vettore $\vec{r}_0 = (0, |\vec{r}_0|, 0)$.

Consideriamo una massa di prova posizionata in $\vec{r}$. Questa massa di prova risente di due forze: una generata dalla sorgente Terra e una dalla sorgente Luna. Chiamiamo queste due forze $\vec{F}_T(\vec{r})$ e $\vec{F}_L(\vec{r})$.

L'espressione di queste due forze può essere calcolata usando la legge di gravitazione universale nella sua forma più generale. Se $\vec{r}_s$ è la posizione della sorgente di massa M, una massa di prova posta in $\vec{r}$ di massa m piccola risente di una forza diretta da m ad M con modulo proporzionale a $\frac{GMm}{d^2}$, dove d^2 è la distanza al quadrato fra M ed m.



Abbiamo quindi:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{GMm}{|\vec{r}-\vec{r}_s|^2}\widehat{(\vec{r}-\vec{r}_s)} = -\frac{GMm}{|\vec{r}-\vec{r}_s|^3}(\vec{r}-\vec{r}_s)$$

Se applichiamo questa legge al caso che stiamo considerando abbiamo che:

$$\begin{cases} \vec{F}_T(\vec{r}) = -\dfrac{GM_T m}{|\vec{r}-\vec{r}_T|^3}(\vec{r}-\vec{r}_T) \overset{\vec{r}_T=\vec{0}}{=} -\dfrac{GM_T m}{|\vec{r}|^3}\vec{r} \\[2ex] \vec{F}_L(\vec{r}) = -\dfrac{GM_L m}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}(\vec{r}-\vec{r}_0) \end{cases}$$

~~Abb~~ Abbiamo, per linearità delle interazioni, che

$$\vec{F}_{TOT}(\vec{r}) = \vec{F}_T(\vec{r}) + \vec{F}_L(\vec{r}) = \left(-\frac{GM_T}{|\vec{r}|^3}\vec{r} - \frac{GM_L(\vec{r}-\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}\right)m$$

dove la quantità fra parentesi indica la somma del campo gravitazionale generato dalla Terra $\vec{V}_T(\vec{r})$ e del campo gravitazionale generato dalla luna $\vec{V}_L(\vec{r})$.

Questa quantità rappresenta il <u>campo gravitazionale totale</u> agente ~~nella~~ in un generico punto $\vec{r}$ dello spazio

<u>Risposta (a)</u>

Il campo gravitazionale totale del sistema terra-luna è

$$\boxed{\vec{V}_{TOT}(\vec{r}) = \vec{V}_T(\vec{r}) + \vec{V}_L(\vec{r}) = -G\left(\frac{M_T\,\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \frac{M_L(\vec{r}-\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}\right)}$$

<u>Punto (b)</u>

Calcoliamo ora il potenziale gravitazionale in un generico punto $\vec{r}$ dello spazio.

Abbiamo visto nella prima parte dell'incontro che

$$\Delta U = U_A - U_B = U(\vec{r}_A) - U(\vec{r}_B) = +\int_{\gamma_{\vec{r}_A\to\vec{r}_B}} \vec{V}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$$

Per linearità possiamo:

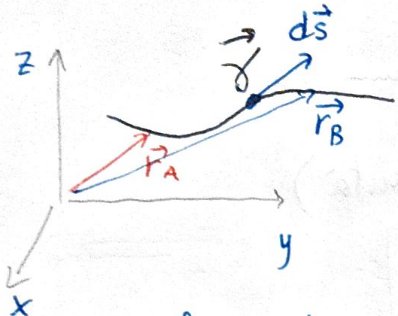
- → calcolare i potenziali associati alle singole sorgenti
- → sommare i risultati per trovare il potenziale totale.

Calcoliamo il potenziale associato al campo gravitazionale terrestre.

Supporto alla didattica 12/05/2017

$$U_T(A) - U_T(B) = +\int_{\gamma(A \to B)} \vec{V}_T \cdot d\vec{s}_\gamma$$

A questo punto specifichiamo chi siano "A" e "B". "A" e "B" sono due punti nello spazio individuati da due vettori $\vec{r}_A$ ed $\vec{r}_B$ (vedi figura).



Nel caso delle interazioni gravitazionali quello che si fa è prendere $\vec{r}_B = \lambda \vec{r}_A$ (vettori che puntano nella stessa direzione) e poi si manda $|\vec{r}_B| \to \infty$. In questo caso si ha che:

$$U_T(\vec{r}_A) - U_T(\vec{r}_B) = +\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{V}_T(\vec{r}) \cdot d\vec{r} =$$

$$= +\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} -\frac{GM_T \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \cdot d\vec{r} = -GM_T \int_{r_A}^{r_B} \frac{r\, dr}{|\vec{r}|^3} =$$

$$= -GM_T \left[-\frac{1}{|\vec{r}|} \right]_{r_A}^{r_B} = -GM_T \left[-\frac{1}{|\vec{r}_B|} + \frac{1}{|\vec{r}_A|} \right]$$

$$U_T(\vec{r}_A) - U_T(\vec{r}_B) = -\frac{GM_T}{|\vec{r}_A|} + \frac{GM_T}{|\vec{r}_B|}$$

Quando $|\vec{r}_B| \to \infty \Rightarrow U_T(\vec{r}_B) \to 0$ (corpi a distanza infinita non interagiscono)

Otteniamo che

$$\boxed{U_T(\vec{r}_A) = -\frac{GM_T}{|\vec{r}_A|}}$$

Il potenziale generato dalla Terra nel punto $\vec{r}$ è

$$U_T(\vec{r}) = -\frac{GM_T}{|\vec{r}|}$$

Analogamente, per la Luna abbiamo:

$$U_L(\vec{r}_A) = -\frac{GM_L}{|\vec{r}_A - \vec{r}_L|} = -\frac{GM_L}{|\vec{r}_A - \vec{r}_L|}$$

$\vec{r}_L$ = posizione della Luna = $\vec{r}_0$

Il potenziale totale è quindi (per linearità)

$$\boxed{U_{TOT}(\vec{r}) = -\frac{GM_T}{|\vec{r}|} - \frac{GM_L}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}}$$

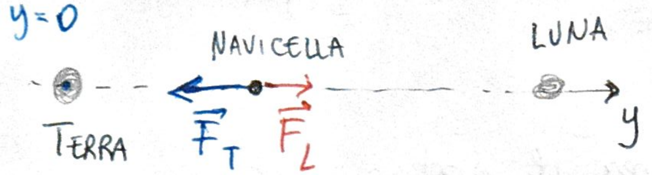
Risposta quesito (b)

Il potenziale totale è

$$\boxed{U_{TOT}(\vec{r}) = -\frac{GM_T}{|\vec{r}|} - \frac{GM_L}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}}$$

Analisi punto (C)

Consideriamo la navicella che percorre il tratto Terra - Luna (vedi figura prossima pagina)



In ogni istante sulla navicella agiscono due forze di attrazione. Se "m" è la massa della navicella ed y_n è la sua posizione, abbiamo che:

$$\vec{F}_{TOT} = \vec{F}_T + \vec{F}_L = -\frac{G M_T m}{|y_n|^2}\hat{y} - \frac{G M_L m (y_n - y_0)}{|y_n - y_0|^3}\hat{y}$$

Per risolvere il quesito (c) richiediamo che

$$\vec{F}_{TOT} \cdot \hat{y} = 0 = -\frac{G M_T m}{|y_n|^2} - \frac{G M_L m}{|y_n - y_0|^3}(y_n - y_0) = 0 \quad (*)$$

In dimensione 1: $\boxed{(y_n - y_0) = \text{segno}(y_n - y_0)\,|y_n - y_0|}$.

Nel nostro caso visto che $y_n < y_0 \Rightarrow \text{segno}(y_n - y_0) = -1$

Ne concludiamo che $(*)$ si riduce a

$$-\frac{G M_T m}{|y_n|^2} + \frac{G M_L m}{|y_n - y_0|^2} = 0$$

Ovvero $M_T (y_n - y_0)^2 - M_L y_n^2 = 0$ (Equazione di secondo grado)

$\downarrow$

$$(M_T - M_L) y_n^2 - 2 M_T y_n y_0 - y_0^2 M_T = 0$$

$$y_{n\pm} = \frac{2 M_T y_0 \pm \sqrt{(2 M_T y_0)^2 + 4 y_0^2 M_T (M_T - M_L)}}{2(M_T - M_L)}$$

Per il nostro caso visto che $y_m \geq 0$ abbiamo che la soluzione fisicamente accettabile è y_{m+} cioè

Risposta quesito (c)

La posizione di equilibrio per il nostro sistema, cioè il punto in cui la forza risultante sulla navicella è nulla è

$$\boxed{y_{m+} = \frac{2 M_T y_0 + \sqrt{8 M_T^2 y_0^2 - 4 M_T M_L y_0^2}}{2(M_T - M_L)}}$$

PROBLEMA 2 Un'astronave di massa m_S (nota) percorre un'orbita circolare di tipo geostazionario attorno alla Terra di massa M_T (nota).

(a) Determinare la distanza "d" che caratterizza l'orbita

• Ad un certo istante l'astronave accende i razzi portando l'astronave da una velocità di modulo $|\vec{v}_i|$ (velocità a cui procede nell'orbita del punto (a)) ad una velocità di modulo $|\vec{v}_f|$.
Supponendo che durante questo processo la distanza dalla Terra (calcolata in (a)) resti la stessa

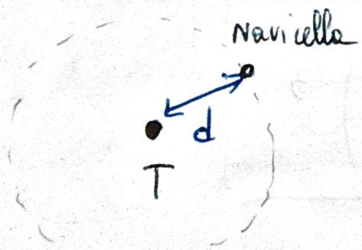
(b) Calcolare la minima $|\vec{v}_f|$ (velocità di fuga) che permette alla navicella di sfuggire al campo gravitazionale terrestre (cioè raggiungere

$|\vec{r}| = +\infty$ con energia cinetica nulla $E_k(\vec{r} \to \infty) = 0$).

(C) Si determini il lavoro effettuato dal sistema di propulsione.

SVOLGIMENTO

- Sulla navicella agiscono esclusivamente interazioni gravitazionali. Visto che essa percorre un'orbita circolare queste devono essere ciò che genera l'accelerazione centripeta.
- L'orbita circolare è di tipo geostazionario: per un'orbita geostazionaria il periodo è uguale al periodo T di rotazione terrestre (durata di un giorno).
- Se "d" (la nostra incognita) è il raggio dell'orbita, durante un periodo lo spazio percorso è $\Delta S = 2\pi d$. Da questo possiamo ricavare il modulo della velocità tangenziale:



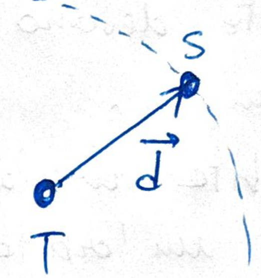
$$\boxed{|\vec{v}| = \frac{2\pi d}{T}}$$

Come abbiamo visto più volte se un corpo percorre un'orbita circolare con velocità tangenziale di modulo $|\vec{v}|$ a distanza R dal centro della circonferenza esso è soggetto ad un'accelerazione centripeta di modulo $|\vec{a}_{cp}| = \frac{|\vec{v}|^2}{R}$.

Questa accelerazione centripeta deve essere generata dalle interazioni gravitazionali ed essere compatibile con il vincolo di geostazionarietà ovvero deve avvenire ad una distanza "d" tale che $|\vec{v}| = \frac{2\pi d}{T}$.

Dal secondo principio:

$$\vec{F} = m_S \vec{a}_{cp} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Int.} \\ \text{gravitazionali}}}{=} -\frac{G M_T m_S \vec{d}}{|d|^3} \quad \text{(vedi figura)}$$



Considerando la componente radiale e usando la forma del $|\vec{a}_{cp}|$ della pagina precedente abbiamo che:

$$m_S \frac{|\vec{v}|^2}{d} = \frac{G M_T m_S}{d^2} \Rightarrow |\vec{v}|^2 = \frac{G M_T}{d}.$$

Usiamo ora che $|\vec{v}| = \frac{2\pi d}{T}$:

$$\frac{4\pi^2}{T^2} d^3 = G M_T \Rightarrow \boxed{d = \left(\frac{G M_T T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}}$$

Risposta quesito (a)

La distanza a cui avviene l'orbita è

$$d = \left(\frac{G M_T T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

- Risoluzione punti (b) e (c).

L'accensione dei razzi comporta una variazione dello stato di moto della navicella.
Come detto nella traccia, dopo l'accensione + spegnimento dei razzi la navicella si trova nello stato:

$$\begin{cases} |\vec{r}| = |\vec{d}| & \text{(del punto (a))} \\ |\vec{v}| \longrightarrow |\vec{v}_f| > |\vec{v}| & \text{(del punto precedente)} \end{cases}$$

Dopo la fase di propulsione abbiamo che l'energia della navicella è:

$$\boxed{E = \frac{1}{2} m_S |\vec{V}_f|^2 - \frac{G M_T m_S}{d^2}} \quad (*)$$

Visto che dopo lo spegnimento dei razzi, le uniche interazioni sono quelle gravitazionali (che sappiamo essere conservative) in un qualsiasi stato del moto l'energia della navicella rimane (*), cioè il moto avviene ad energia costante.

Per determinare la soluzione del punto (b) applichiamo la conservazione dell'energia:

$$E_i = \frac{1}{2} m_S |\vec{V}_f|^2 - \frac{G M_T m_S}{d^2} = E_f = \frac{1}{2} m_S |\tilde{V}|^2 - \frac{G M_T m_S}{\tilde{d}^2}$$

- La velocità di fuga si ottiene considerando il caso in cui:

$$\begin{cases} \tilde{d} \to \infty & (\text{Energia potenziale gravitazionale} = 0) \\ \frac{1}{2} m_S |\vec{v}|^2 \to 0 & (\text{Energia cinetica nulla}) \end{cases}$$

Questo stato descrive una navicella che è riuscita a vincere l'attrazione gravitazionale, portandosi ad una distanza infinita dalla sorgente (Ecco perché velocità di fuga)

Abbiamo quindi:

per le considerazioni sopra

$$E_i = \frac{1}{2} m_S |\vec{v}_f|^2 - \frac{G M_T m_S}{d^2} = E_f = 0$$

ovvero

$$|\vec{v}_f|^2 = \frac{2 G M_T}{d^2} \Rightarrow |\vec{v}_f| = \text{velocità di fuga} = \sqrt{\frac{2 G M_T}{d^2}}$$

Risposta al quesito (b)

La velocità di fuga è pari a

$$\boxed{|\vec{v}_f| = \sqrt{\frac{2 G M_T}{d^2}}}$$

Risoluzione quesito (c)

A seguito della fase accensione + spegnimento dei razzi la navicella passa da una velocità in modulo $|\vec{v}| = \sqrt{\frac{G M_T}{d}}$ ad una velocità finale $|\vec{v}_f| = \sqrt{\frac{2 G M_T}{d}}$. Questo significa che è stato compiuto lavoro (Teorema delle forze vive).

$$\Delta E_K = E_{Kf} - E_{Ki} = \mathcal{L} \text{ (stato iniziale} \rightarrow \text{stato finale)}$$

Visto che durante la propulsione la distanza dalla Terra rimane costante, il campo gravitazionale non compie lavoro $\Rightarrow$ la variazione di energia cinetica avviene solamente a spese dei razzi.

$$\mathcal{L}_{RAZZI} = E_{Kf} - E_{Ki} = \frac{1}{2} m_S |\vec{v}_f|^2 - \frac{1}{2} m_S |\vec{v}|^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m_S \left(\frac{2GM_T}{d} - \frac{GM_T}{d} \right) = \frac{1}{2} \frac{GM_T m_S}{d}$$

Risposta al quesito (c)

Il lavoro compiuto dai razzi è:

$$\boxed{\mathcal{L}_{RAZZI} = \frac{1}{2} \frac{GM_T m_S}{d}}$$

PROBLEMA 3

Prendiamo in analisi un sistema costituito da:

- Calotta sferica dielettrica (buccia di una sfera) di raggio $2R$ e spessore trascurabile sulla quale è depositata una carica $+Q$ distribuita uniformemente (centro nell'origine)
- Sfera piena dielettrica di raggio R sulla quale è depositata una carica $-Q$ uniformemente distribuita sul suo volume (centro nell'origine)
- carica di prova di carica $+q$ che parte da $\vec{r} = (10R, 0, 0)$ con velocità $\vec{v} = (-v_0, 0, 0)$.

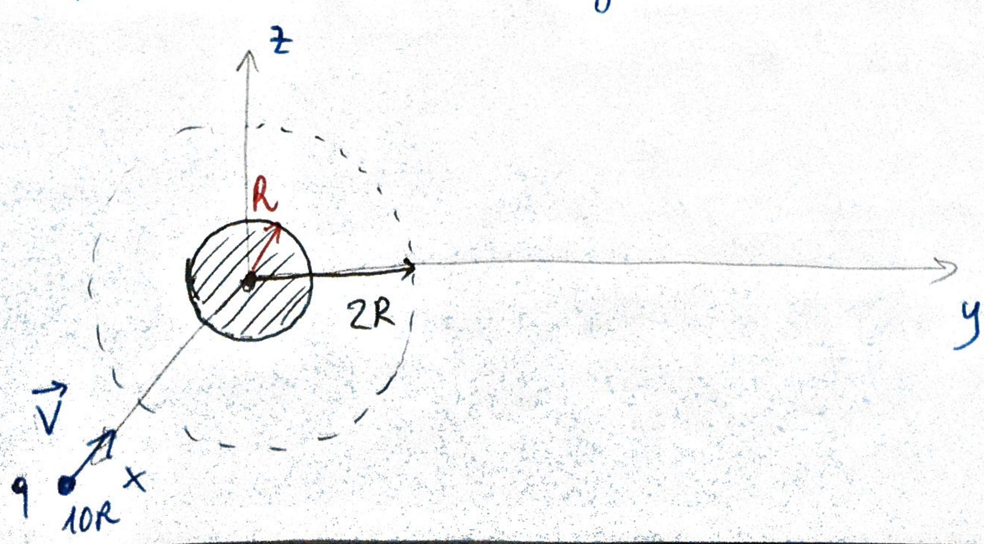
(a) Stabilire con che velocità raggiunge (se la può raggiungere) la superficie della calotta sferica.

(b) Supponendo che possa attraversare la calotta stabilire la velocità della particella in $\vec{r} = (\frac{3}{2}R, 0, 0)$

SVOLGIMENTO

Punto (a)

Il sistema è il seguente:



Come detto all'inizio dell'incontro, anche le interazioni elettrostatiche sono lineari: se in una regione di spazio ho un insieme di sorgenti, ciascuna di esse genera un campo elettrico $\vec{E}_j(\vec{r})$ nel punto $\vec{r}$ ed il campo elettrico totale nel punto $\vec{r}$, cioè $\vec{E}_{TOT}(\vec{r})$, è dato dalla somma vettoriale dei singoli campi elettrici. Se ho N sorgenti:

$$\boxed{\vec{E}_{TOT}(\vec{r}) = \sum_{j=1}^{N} \vec{E}_j(\vec{r})}$$

Il campo totale è direttamente connesso alla forza totale a cui è sottoposta una carica di prova che si trova nella regione in cui sono presenti le sorgenti. Se "q" è la carica della carica di prova allora la forza totale che agisce su questa particella quando si trova nel punto $\vec{r}$ è:

$$\vec{F}_{TOT}(\vec{r}) = \vec{E}_{TOT}(\vec{r})\, q = \sum_{j=1}^{N} \vec{E}_j(\vec{r})\, q = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j(\vec{r}) \quad \text{, con}$$

$$\vec{F}_j(\vec{r}) = \vec{E}_j(\vec{r})\, q.$$

Per capire come venga influenzato il moto della carica di prova del nostro problema dalla presenza del sistema "guscio + sfera" possiamo quindi:

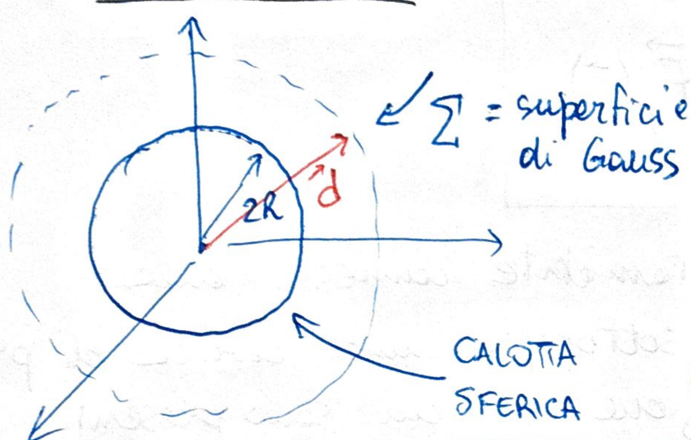
$\underline{1}$ Calcolare i singoli campi $\vec{E}_{CALOTTA}(\vec{r})$ ed $\vec{E}_{SFERA}(\vec{r})$

$\underline{2}$ Sommarli (possiamo farlo per linearità) per calcolare $\vec{E}_{TOT}(\vec{r})$

$\underline{3}$ Calcolare la forza cui è soggetta la carica q in presenza di $\vec{E}_{TOT}(\vec{r})$.

$\boxed{1.}$ Teorema di Gauss:

CALOTTA SFERICA



"Il flusso del campo elettrico generato da una sorgente attraverso ad una superficie chiusa Σ, la che racchiude tutta la sorgente è dato dal rapporto fra la carica* della sorgente ed ε_0"

$$\boxed{\underset{\Sigma(d)}{\Phi}(E) = \frac{Q_{sorgente}}{\varepsilon_0}}$$

Con argomenti di simmetria è possibile mostrare che l'intensità, cioè $|\vec{E}(\vec{r})|$, del campo generato da una sorgente puntiforme e/o a simmetria sferica è radiale e dipende solo dal $|\vec{r}|$

$$\left(\text{se } \vec{r}_1 \neq \vec{r}_2 \text{, ma } |\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| \Rightarrow |\vec{E}(\vec{r}_1)| = |\vec{E}(\vec{r}_2)|\right)$$

Consideriamo quindi come superficie di Gauss una sfera di raggio d, cioè $\Sigma(d) = 4\pi d^2$

Supporto alla didattica
12/10/2017

Il flusso $\Phi_{\Sigma(d)}(\vec{E})$ è dato da:

$$\begin{cases} \text{CARICA NEGATIVA (SORGENTE)}: & -|\vec{E}(d)|\,\Sigma(d) = -|\vec{E}(d)|\,4\pi d^2 \\ \text{CARICA POSITIVA (SORGENTE)}: & |\vec{E}(d)|\,\Sigma(d) = |\vec{E}(d)|\,4\pi d^2 \end{cases}$$

Abbiamo quindi che il campo generato da una calotta sferica di raggio 2R è

$$\vec{E}_{CALOTTA}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}|^2}\,\hat{r} & \text{se } |\vec{r}| \geq 2R \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(Il teorema di Gauss ci dice che l'intensità del campo è nulla se dentro la superficie di Gauss non ci sono cariche)

In maniera analoga otteniamo per una sfera uniformemente carica che (è la seconda sorgente)

$$\vec{E}_{sfera}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}|^2} & \text{per } |\vec{r}| \geq R \\ \dfrac{-Q\,|\vec{r}|}{4\pi\varepsilon_0 R^3} & \text{per } 0 \leq |\vec{r}| \leq R \end{cases}$$

Il campo totale è quindi:

$$\vec{E}_{TOT}(\vec{r}) = \vec{E}_{CALOTTA*}(\vec{r}) + \vec{E}_{SFERA}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & \text{se } |\vec{r}| \geq 2R \\ -\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}^2|} & \text{se } R \leq |\vec{r}| \leq 2R \\ -\dfrac{Q|\vec{r}|}{4\pi\varepsilon_0 R^3} & \text{se } 0 \leq |\vec{r}| \leq R \end{cases}$$

Visto che il campo nelle regione $|\vec{r}| \geq 2R$ (cioè dove si ~~tr~~ trova la carica) è nullo, la carica procede a velocità costante.

Risposta (a)

La velocità con cui la carica raggiunge il guscio è $\vec{V} = (-V_0, 0, 0)$.

Per rispondere al quesito (b) dobbiamo calcolare ~~Il~~ ~~pot~~ il potenziale $U(\vec{r})_j = -\int_{\gamma(+\infty \to r)} \vec{E}_j(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ generato dalla singola sorgente e poi sommarli.

Quando abbiamo $U_{TOT}(\vec{r}) \Rightarrow E_{pot}(\vec{r}) = q\, U_{TOT}(\vec{r})$.

Il passo successivo sarà applicare la conservazione dell'energia.