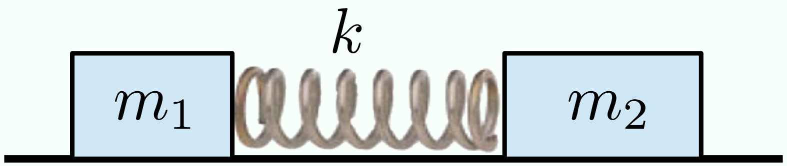
Problemi risolti con la legge di conservazione della quantità di moto

Due masse m_1 e m_2 sono collegate da una molla ideale di costante k e lunghezza a riposo l_0 e sono appoggiate su un piano orizzontale liscio. Descrivere il moto del sistema quando le masse vengono allontanate tra di loro, in modo da spostare la lunghezza della molla dalla posizione a riposo a $l_0+\Delta l$.



$$x_{2i} = x_{1i} + l_0 + \Delta l$$

$$x_{\mathrm{CM}} = \big(m_1 x_1 + m_2 x_2\big)/M$$

$$v_{\mathrm{CM}} = \big(m_1 v_1 + m_2 v_2\big)/M$$

$$a_{\mathrm{CM}} = \big(m_1 a_1 + m_2 a_2\big)/M$$

nessuna $\vec{F}_{\mathrm{ext}}$ lungo x
nessun attrito
$\Rightarrow$ la quantità di moto si conserva lungo x

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \;\Rightarrow\; \vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}$$

La molla esercita forze uguali e contrarie sui due corpi: $a_{\mathrm{CM}} = \dfrac{F_{12} + F_{21}}{M} = 0$

$$v_{\mathrm{CM}} = \mathrm{cost.} = 0 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{M} \;\Rightarrow\; v_1 = -\frac{m_2}{m_1} v_2$$

Il centro di massa mantiene lo stato iniziale, anche se le due masse si allontanano e si avvicinano con moto oscillatorio.

In generale, se la velocità del centro di massa $v_{\rm CM}$ è costante, un sistema di riferimento inerziale “comodo” può essere quello che si trova solidale con il centro di massa.

Sia OCM il **sistema di riferimento nel centro di massa**:

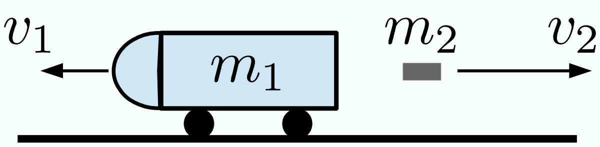
$$\begin{aligned} x_{1,\rm OCM} &= x_1 - x_{\rm CM} \\ x_{2,\rm OCM} &= x_2 - x_{\rm CM} \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} v_{1,\rm OCM} &= v_1 - v_{\rm CM} \\ v_{2,\rm OCM} &= v_2 - v_{\rm CM} \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} a_{1,\rm OCM} &= a_1 - a_{\rm CM} \\ a_{2,\rm OCM} &= a_2 - a_{\rm CM} \end{aligned}$$

$$v_{1,\rm OCM} = v_1 - \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{M} = \frac{v_1(\cancel{m_1} + m_2) - \cancel{m_1} v_1 - m_2 v_2}{M} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)$$

$$v_{2,\rm OCM} = v_2 - \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{M} = \frac{v_2(m_1 + \cancel{m_2}) - m_1 v_1 - \cancel{m_2} v_2}{M} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}(v_2 - v_1)$$

$$\Rightarrow\quad v_{1,\rm OCM} = -\frac{m_2}{m_1}\, v_{2,\rm OCM}$$

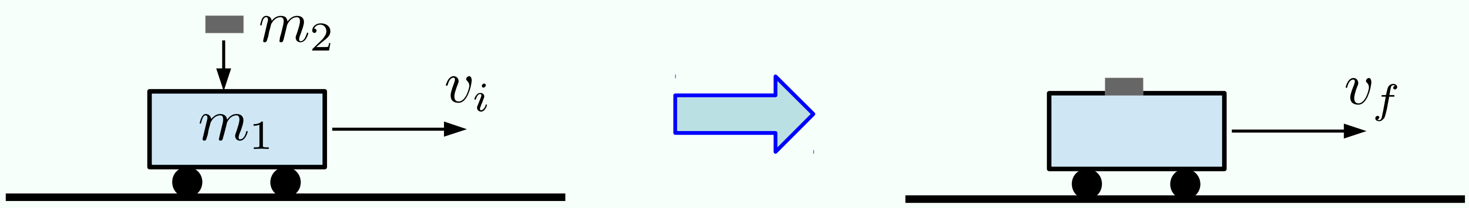
Un cannone su una rotaia liscia spara un proiettile e ne subisce il rinculo. Il cannone ha massa $m_1 = 100$ kg, mentre il proiettile ha massa $m_2 = 0.1$ kg. Se $v_2 = 30$ m/s, quanto vale v_1 dopo lo sparo?



$$\frac{dP_x}{dt} = \sum_i \left(\vec{F}_{\mathrm{ext},i}\right)_i = 0$$

$$\Rightarrow\ m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = 0 \ \Rightarrow\ v_{1f} = -\frac{m_2}{m_1} v_{2f} = -0.03\, m/s$$

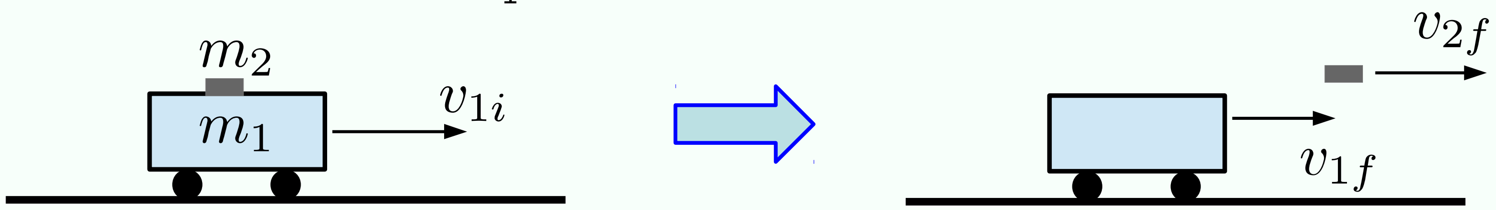
Un carrello di massa m_1 scivola su una rotaia liscia orizzontale. Un corpo m_2 cade sopra m_1 dalla verticale e si appiccica. Quanto vale la velocità finale del carrello?



$$\sum_i \left(\vec{F}_{\mathrm{ext},i}\right)_i = 0 \ \Rightarrow\ P_x = \mathrm{cost.} \ \Rightarrow\ P_{ix} = P_{fx}$$

$$\Rightarrow\ m_1 v_i = (m_1 + m_2) v_f \ \Rightarrow\ v_f = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_i$$

Un corpo di massa m_2 viaggia in un carrello su una rotaia liscia orizzontale con velocità v_1. Il corpo viene quindi gettato con velocità $v_{2f} - v_{1f} = \Delta v$.
Quanto vale la velocità finale v_1 del carrello?



$$\sum_i \left(\vec{F}_{\mathrm{ext},i}\right)_x = 0 \;\Rightarrow\; P_x = \mathrm{cost.} \;\Rightarrow\; P_{ix} = P_{fx}$$

$$\Rightarrow\; m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = m_1 v_{1f} + m_2 (v_{1f} + \Delta v)$$

$$\Rightarrow (m_1 + m_2) v_{1i} = (m_1 + m_2) v_{1f} + m_2 \Delta v$$

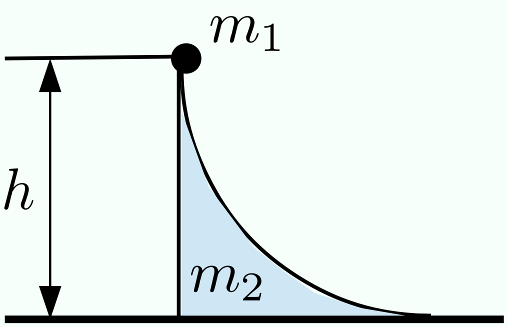
$$\begin{cases} v_{1f} = v_{1i} - \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}\Delta v \\[2ex] v_{2f} = v_{1f} + \Delta v = v_{1i} + \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\Delta v \end{cases}$$

gettando il corpo avanti ($\Delta v > 0$)
→ $v_{1f} < v_{1i}$

gettando il corpo indietro ($\Delta v < 0$)
→ $v_{1f} > v_{1i}$

(l'effetto è più grande se m_2 è più grande)

Un corpo di massa m_1, inizialmente fermo, viene sospinto da un'altezza h lungo una rampa curva (di massa m_2) a forma di arco di cerchio, uscendone tangente al piano orizzontale. Supponendo che le superfici siano lisce, trovare le velocità finali v_1 e v_2 del corpo e della rampa sul piano orizzontale.



Il moto può essere molto difficile da descrivere.

Tuttavia *<u>si conservano due grandezze</u>*:

1) energia meccanica (l'energia potenziale interna non cambia)

⇒ il lavoro delle forze esterne (forza peso) fa cambiare l' energia cinetica del sistema;

$$m_1 g h = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2$$

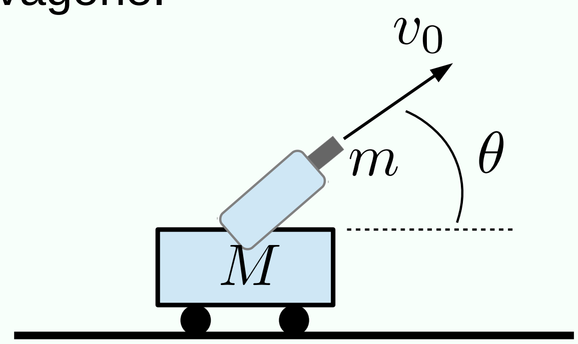
2) quantità di moto lungo *x* (la risultante delle forze esterne è nulla lungo *x*).

Si noti invece che lungo *y* la quantità di moto non è costante.

$$P_x = \text{cost.} \;\Rightarrow\; 0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \;\Rightarrow\; v_2 = -(m_1/m_2) v_1$$

$$\Rightarrow\; gh = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) v_1^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v_1 = \sqrt{\dfrac{2 m_2 g h}{m_1 + m_2}} \\ v_2 = -\sqrt{\dfrac{2 m_1^2 g h}{(m_1 + m_2) m_2}} \end{cases}$$

Un vagone si trova in quiete su una rotaia liscia, e sopra di esso vi è un cannone. Sia *M* la massa del totale del cannone + vagone. Supponiamo di sparare un proiettile di massa *m* con velocità iniziale v_0, con un angolo θ rispetto all'orizzontale. Calcolare la velocità v_c di rinculo del vagone.



Nel momento in cui il cannone spara, la forza normale *N* > *mg,* quindi:

$$\sum_i \left(\vec{F}_{\mathrm{ext},i}\right) \neq 0$$

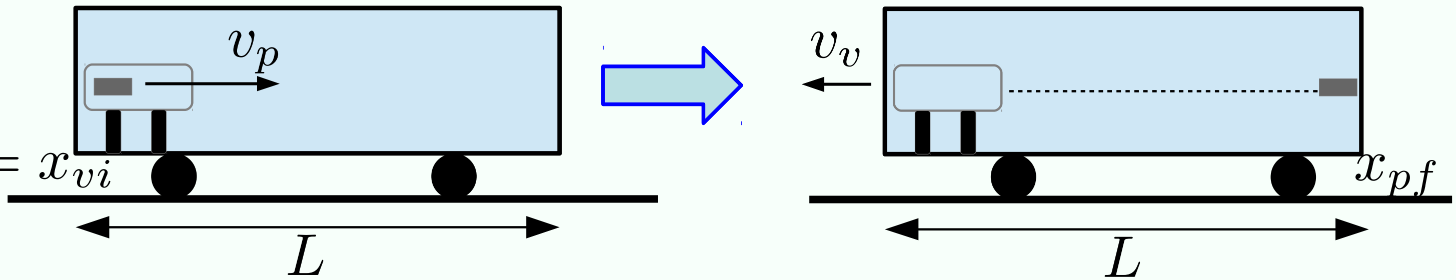
Tuttavia lungo *x* la componente della risultante delle forze è nulla!

Perciò: $$\sum_i \left(\vec{F}_{\mathrm{ext},i}\right)_x = 0 \;\Rightarrow\; P_x = \mathrm{cost.} \;\Rightarrow\; P_{ix} = P_{fx} = 0$$

$$0 = P_x = m v_0 \cos\theta + M v_c \;\Rightarrow\; v_c = -\frac{m v_0 \cos\theta}{M}$$

Un vagone si trova in quiete su una rotaia liscia, e all'interno di esso vi è un cannone. Sia *M* la massa del totale del cannone + vagone. Il cannone è fissato al pavimento ad un estremo. Supponiamo di sparare un proiettile di massa *m* orizzontalmente e che esso si conficchi in un bersaglio all'altra estremità.
Come varia la velocità del centro di massa? E la coordinata del centro di massa?

$$x_{pi} + \frac{L}{2} = x_{vi}$$



$$x_{pf} - \frac{L}{2} = x_{vf}$$

$$\sum_i \left(\vec{F}_{\text{ext},i}\right)_x = 0 \Rightarrow P_x = 0 = P_{ix} = P_{fx} \quad \text{quindi} \quad mv_p + Mv_v = 0$$

La coordinata (e dunque la velocità) del *centro di massa del sistema* non cambia.

Dopo aver sparato, il proiettile si muove verso destra e il vagone verso sinistra.
Sia x_v la coordinata del <u>*centro di massa del vagone*</u>. Abbiamo che:

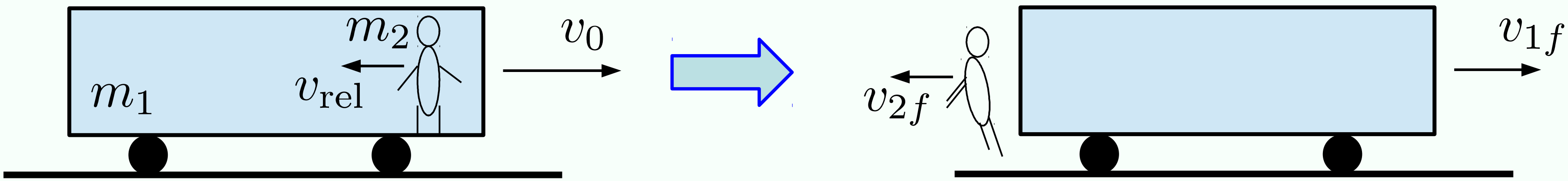
i) istante iniziale $x_{\text{CM}} = \dfrac{mx_{pi} + Mx_{vi}}{M+m}$

f) istante finale $x_{\text{CM}} = \dfrac{mx_{pf} + Mx_{vf}}{M+m}$

$$\Rightarrow \quad 0 = m(x_{pf} - x_{pi}) + M(x_{vf} - x_{vi}) = m(x_{vf} - x_{vi} + L) + M(x_{vf} - x_{vi})$$

Da cui perciò: $m(\Delta x_v + L) + M\Delta x_v = 0 \Rightarrow \Delta x_v = -\dfrac{m}{M+m}L$

Un vagone si trova in quiete su una rotaia liscia, e sopra di esso c'è un uomo. All'inizio tutti hanno velocità vettoriale uguale $\boldsymbol{v}_0$. Poi l'uomo inizia a correre con velocità relativa $\boldsymbol{v}_{\text{rel}}$ verso il retro del vagone, e alla fine spicca un salto nel vuoto allontanandosi dal vagone. Calcolare le velocità finali di vagone e uomo.



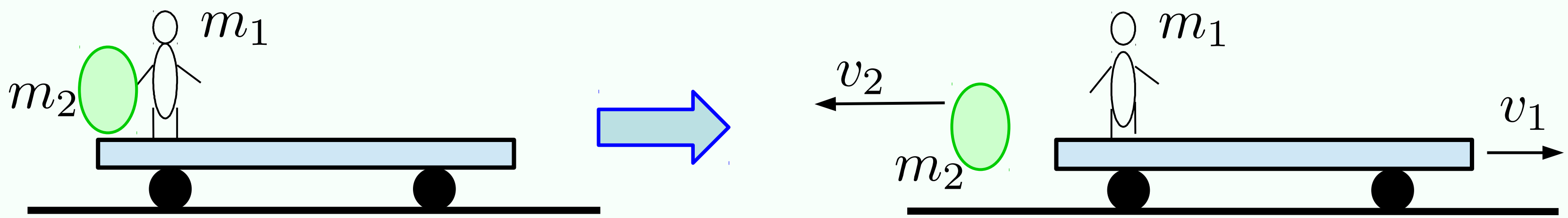
Siccome non c'è attrito, si ha che: $\sum_i \left(\vec{F}_{\text{ext},i}\right)_x = 0 \;\Rightarrow\; P_{ix} = P_{fx}$

$$v_{2f} = v_{1f} + v_{\text{rel}}$$

$$(m_1 + m_2)v_0 = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = (m_1 + m_2)v_{1f} + m_2 v_{\text{rel}}$$

$$v_{1f} = v_0 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_{\text{rel}} \qquad v_{2f} = v_0 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{\text{rel}}$$

Un uomo di massa m_1 spinge un sacco di massa m_2 fuori dalla slitta (inizialmente ferma e di massa trascurabile) con velocità v_2 rispetto al suolo ghiacciato. Trascurando gli attriti, calcolare: 1) la velocità finale della slitta; 2) il lavoro totale fatto per spingere fuori il sacco.



$$\sum_i \left(\vec{F}_{\mathrm{ext},i}\right)_x = 0 \;\Rightarrow\; P_x = \mathrm{cost.}$$

$$0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \;\Rightarrow\; v_1 = -\frac{m_2}{m_1} v_2$$

Per trovare il lavoro fatto dall'uomo, bisogna osservare che il lavoro delle forze esterne è nullo. Siccome il sistema è *conservativo*, l'energia si conserva:

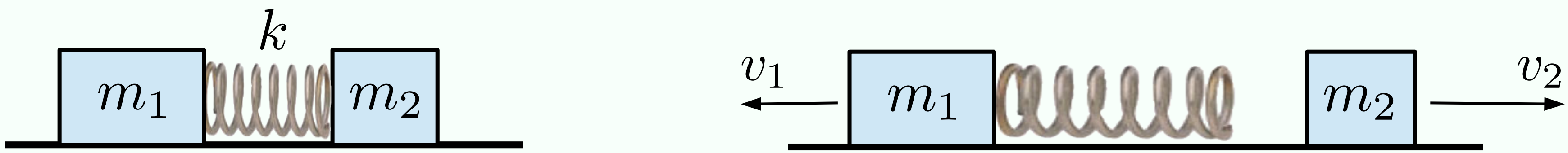
$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{\mathrm{int}} = L_{\mathrm{F_{ext}}} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\Delta E_{\mathrm{int}} = \Delta K > 0$$

L'energia interna è diminuita, essendo stata spesa nel lavoro per spingere via il sacco.

$$\Delta K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m_2}{m_1} + 1\right) m_2 v_2^2$$

10

Due masse a riposo su un piano orizzontale liscio vengono messe a contatto con una molla compressa di una lunghezza Δl (di massa trascurabile). Al tempo $t=0$ la molla viene lasciata libera di espandersi, spinge via le masse e si stacca da esse. Sapendo che la velocità finale del corpo 2 è v_2, calcolare v_1, l'energia potenziale della molla all'inizio, e la costante elastica k della molla.



$$\sum_i \left(\vec{F}_{\text{ext},i}\right)_x = 0 \;\Rightarrow\; P_i = P_f = 0 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$\Rightarrow \quad v_1 = -\frac{m_2}{m_1} v_2$$

$$0 = L_{\mathrm{F_{ext}}} = \Delta K + \Delta U$$

$$-\Delta U = \Delta K > 0$$

$$\Delta K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - 0 = \frac{1}{2}\left(\frac{m_2}{m_1} + 1\right) m_2 v_2^2$$

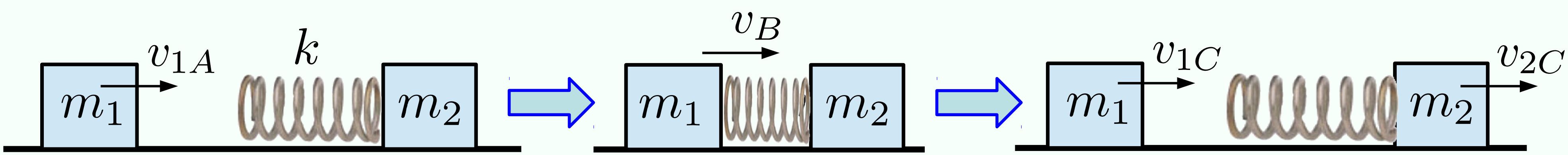
Variazione dell' energia potenziale della molla

$$\Delta K = -\Delta U = \tfrac{1}{2} k\, \Delta l^2$$

$$\Rightarrow \quad k = m_2 \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \frac{v_2^2}{\Delta l^2}$$

11

Due corpi scivolano su un piano orizzontale liscio. Inizialmente il primo si muove con velocità v_{1A}, il secondo è in quiete e ha attaccata una molla (A). Il sistema è isolato (si conservano quantità di moto e energia meccanica). Trovare: la massima compressione della molla, di costante elastica k, quando i due corpi hanno la stessa velocità (B), e le velocità v_{1C} e v_{2C} dopo che si sono separati (C).



$$\left(P_{\text{tot}}\right)_x = \text{cost.} = m_1 v_{1A} = (m_1 + m_2) v_B \;\Rightarrow\; v_B = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1A}$$

$$E_A = E_B \;\Rightarrow\; \tfrac{1}{2} m_1 v_{1A}^2 = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2) v_B^2 + \tfrac{1}{2} k\,\Delta x^2$$

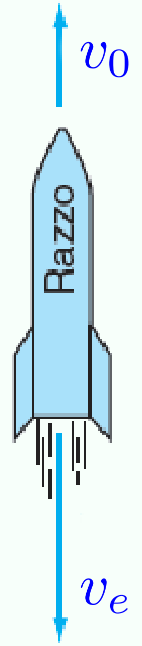
$$\Rightarrow\; \tfrac{1}{2} m_1 v_{1A}^2 = \frac{m_1^2}{2(m_1 + m_2)} v_{1A}^2 + \tfrac{1}{2} k\,\Delta x^2 \;\Rightarrow\; \Delta x = \sqrt{\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2) k}}\, v_{1A}$$

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_{1A}^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_{1C}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2C}^2 \;\Rightarrow\; m_1 \left(v_{1A}^2 - v_{1C}^2\right) = m_2 v_{2C}^2$$

$$m_1 v_{1A} = m_1 v_{1C} + m_2 v_{2C} \;\Rightarrow\; m_1 (v_{1A} - v_{1C}) = m_2 v_{2C}$$

$$\Rightarrow\; v_{1A} + v_{1C} = v_{2C}\,; \qquad v_{1C} = v_{1A} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$$

Moto di un razzo: il razzo esercita una forza sui gas espulsi dal reattore e i gas espulsi esercitano una forza su di lui (3° prinicipio). Il gas è espulso nell'atmosfera, ma anche nello spazio vuoto. All'interno del reattore si verificano esplosioni e reazioni chimiche che *fanno variare l'energia interna*.

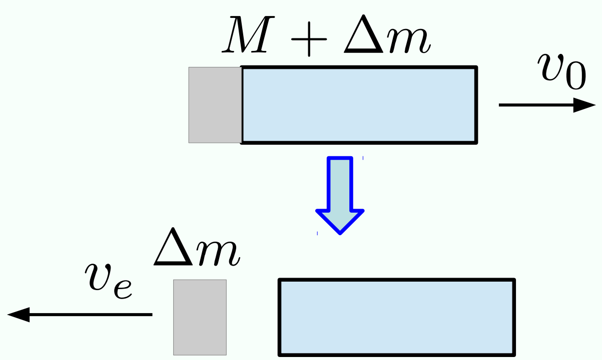


Tuttavia in assenza di forze esterne, la *quantità di moto del sistema si conserva*. I gas di scarico acquistano una quantità di moto ***p*** e il razzo una ***p*** nel verso opposto.

La massa varia nel tempo: Δm è la massa rilasciata con i gas, che supponiamo essere espulsi a velocità v_e.

$$(M + \Delta m)v_0 = M(v_0 + \Delta v) + \Delta m(v_0 - v_e)$$

$$\Rightarrow \quad M\Delta v = \Delta m\, v_e$$



Facendo un passaggio al limite $\Delta t \to 0$ e poi integrando:

$$dm = -dM\,; \quad \boxed{M\,dv = -dM\,v_e}$$

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -v_e \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M} \;\Rightarrow\; v_f - v_i = v_e \ln\left[\frac{M_i}{M_f}\right]$$

$$\Rightarrow \quad F_{\text{spinta}} = M\frac{dv}{dt} = \left| v_e \frac{dM}{dt} \right|$$