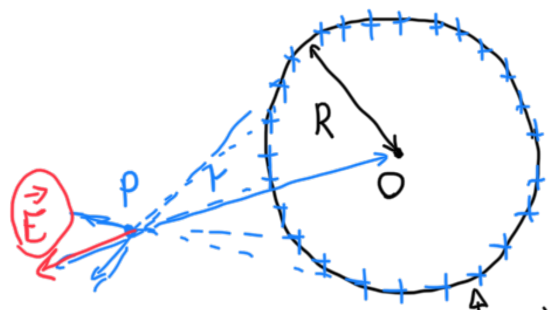
Applicazioni della legge di Gauss

- Sfera carica cava (guscio sferico) - isolante

Come è fatto $\vec{E}$ e V ?

$\vec{E}$ è generato DAL guscio sferico



$\sigma = \dfrac{Q}{A}$ (Q → carica sulla superficie; A → area della superficie)

(Area della sfera $= 4\pi R^2$)

↑ sulla superficie c'è una carica elettrica distribuita in modo uniforme

simmetria sferica (rispetto ad O) ⇒ $\vec{E}$ avrà la stessa simmetria

$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\cdot\hat{r}}$ segue dalla simmetria

domanda: quanto vale $E(r)$?
→ usiamo Gauss

① prendo P fuori dal guscio

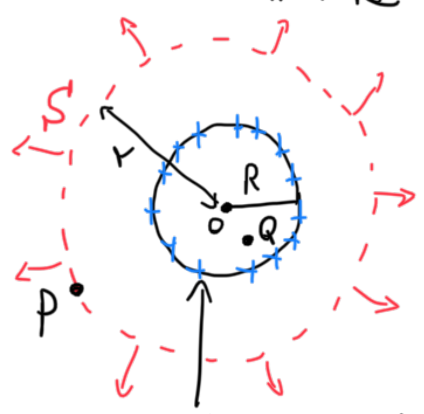
prendo una superficie S che passa da P e soddisfa la simmetria sferica

$\Phi_{\vec{E}}(\vec{S}) = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ Legge di Gauss

$\Phi_{\vec{E}}(\vec{S}) = \displaystyle\int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} =$ definizione di flusso

$= E(r)\cdot S = E(r)\cdot 4\pi r^2$

è una sfera cava che racchiude la sfera dove ci sono le cariche



le cariche stanno qui

$\Rightarrow \dfrac{Q}{\varepsilon_0} = E(r)\cdot 4\pi r^2$

dunque $E(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

oppure

$E(r) = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\dfrac{R^2}{r^2}$

siccome $\sigma = \dfrac{Q}{A} = \dfrac{Q}{4\pi R^2}$

$\Rightarrow Q = \sigma\, 4\pi R^2$

② Cosa succede se sto dentro la superficie con le cariche? (nel punto M)

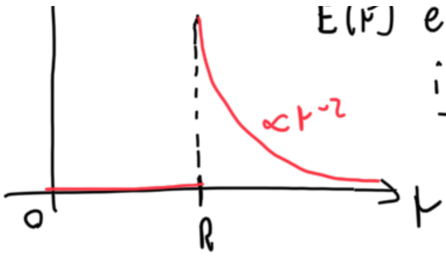
$\Phi_{\vec{E}}(\vec{S}_2) = 0$ non ci sono cariche dentro la superficie S_2

$\Phi_{\vec{E}}(\vec{S}_2) = \displaystyle\int_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{S} = E(r)\cdot 4\pi r^2$

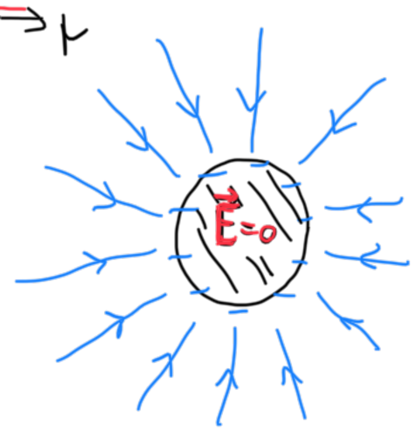
$\Rightarrow 0 = E(r)\cdot 4\pi r^2 \quad \Rightarrow E(r) = 0$

Riassumendo

$$\boxed{E(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r<R \\ \underbrace{\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}_{\text{Coulomb}} & \text{se } r>R \end{cases}}$$



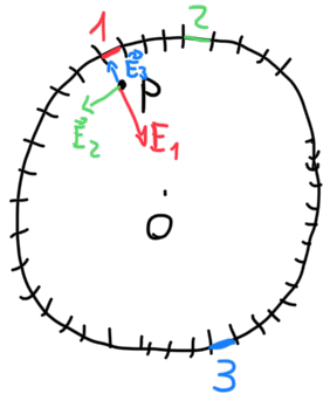
$E(r)$ è discontinuo in $r=R$



→ Come faccio a calcolare $V(r)$?

per $r>R$ è tutto "come Coulomb"

$$\Rightarrow V(r>R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



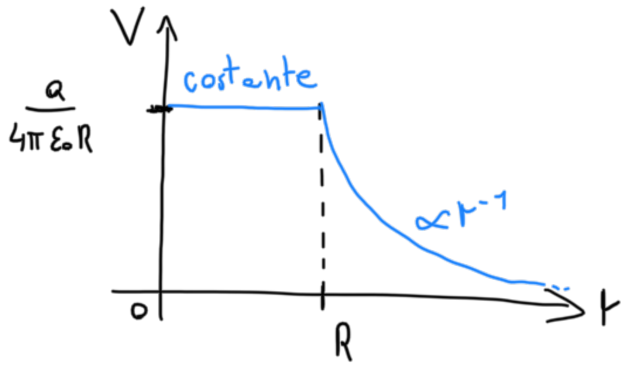
Tuttavia se $r<R$ ⇒ la situazione è diversa

$$\vec{E}(r<R) = 0 \quad \Rightarrow V(r<R) = \text{costante}$$

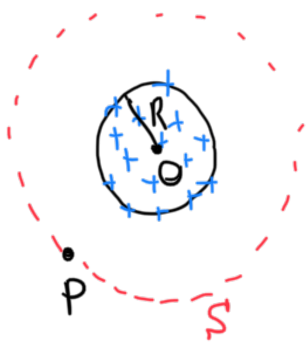
i punti dentro il guscio sono equipotenziali

‖ Il potenziale elettrico V deve essere una funzione continua in $\vec{r}$.

$$V(r<R) = V(r=R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$



- sfera carica piena



procedo come prima, tenendo conto che ora la carica è distribuita in un volume

$$\rho = \frac{Q}{V} \qquad V \text{ è il volume della sfera } \left(V = \frac{4}{3}\pi R^3\right)$$

Simmetria sferica

① Immaginiamo che P sia a distanza $r>R$

$$\Phi_{\vec{E}}(\vec{S}) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \quad \text{dove } Q_{int} = Q$$

$$\Phi_{\vec{E}}(S) = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = E(r)\cdot 4\pi r^2$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho V}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

Come prima! se $r>R$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

(stessa cosa di prima → Coulomb)

② Immaginiamo che M stia a distanza $r<R$

differenza: $\Phi_{\vec{E}}(\vec{S}) = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

$\boxed{Q_{int} \neq Q}$

è la carica contenuta dentro la superficie S', che ha raggio $r<R$

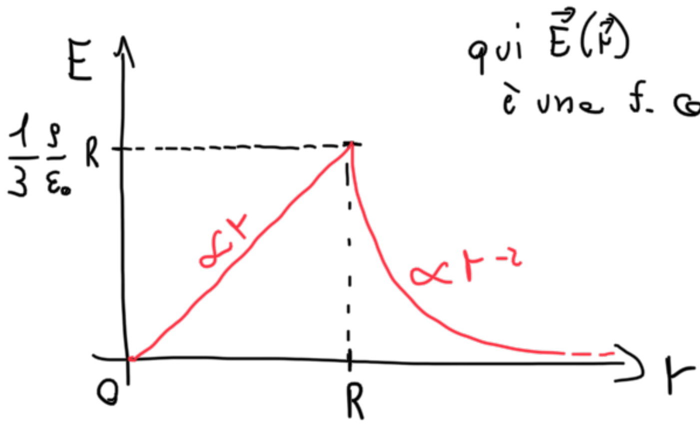
come calcolo Q_{int}?

$\rightarrow \rho = \dfrac{Q}{V} = \dfrac{Q_{int}}{\ldots}$ (perché ρ è

$V_{S'}$ costante)

$$\Rightarrow Q_{int} = \rho V_{S'} = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \longrightarrow \quad \Phi_{\vec{E}}(S') = \frac{4}{3}\rho\frac{\pi r^3}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_{\vec{E}}(S') = \int_{S'} \vec{E}\cdot d\vec{s} = E(r)\cdot(4\pi r^2) \longrightarrow \frac{\cancel{4}}{3}\rho\frac{\pi r^{\cancel{3}}}{\varepsilon_0} = E(r)\cdot \cancel{4\pi r^2}$$



qui $\vec{E}(\vec{r})$ è una f. continua

$$\Rightarrow E(r) = \frac{1}{3}\frac{\rho}{\varepsilon_0} r$$

$$\boxed{\vec{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & \text{se } r > R \\ \dfrac{1}{3}\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} r & \text{se } r < R \end{cases}}$$

$$E(R) = \frac{1}{3}\frac{\rho}{\varepsilon_0}R = \frac{1}{\cancel{3}}\frac{\cancel{R}}{\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{\frac{4}{\cancel{3}}\pi R^{\cancel{3}2}}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

$$\text{se } r < R \Rightarrow \Delta V = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{r} \quad (\text{dove } r_1, r_2 < R)$$

$$V(r_2) - V(r_1) = -\int_{r_1}^{r_2}\left(\frac{1}{3}\frac{\rho}{\varepsilon_0}r\right)\hat{r}\cdot d\vec{r} = -\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{3}\frac{\rho}{\varepsilon_0} r\,dr = -\frac{1}{3}\frac{\rho}{\varepsilon_0}\,\frac{1}{2}r^2\Big|_{r_1}^{r_2} =$$

$$= -\frac{1}{6}\frac{\rho}{\varepsilon_0}(r_2^2 - r_1^2)$$

prendiamo $r_1 \equiv R$

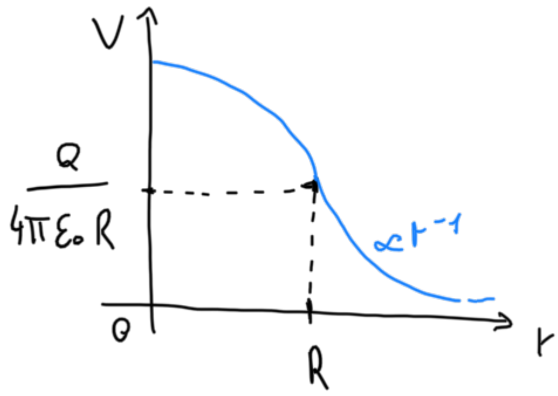
$$\Rightarrow V(r_2) - V(R) = -\frac{1}{6}\frac{\rho}{\varepsilon_0}(r_2^2 - R^2)$$

ma $V(R) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

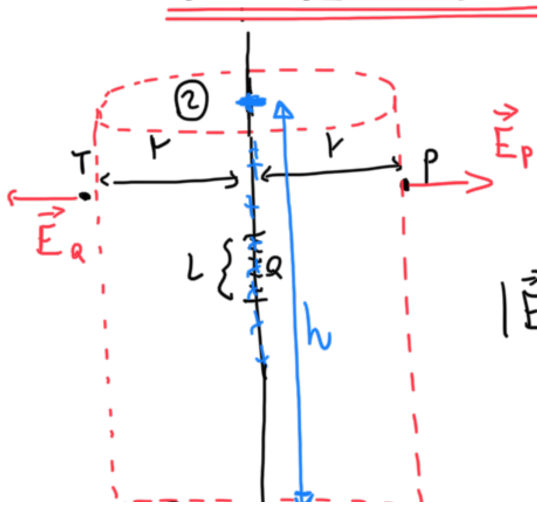
$$\Rightarrow V(r_2) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{1}{6}\frac{\rho}{\varepsilon_0}(r_2^2 - R^2)$$

$$= \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}(3R^2 - r_2^2)$$

$$V(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & \text{se } r > R \\ \dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}(3R^2 - r_2^2) & \text{se } r < R \end{cases}$$



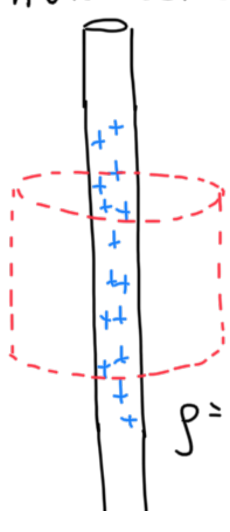
- <u>filo carico (infinito)</u> oppure cilindro carico (infinito)



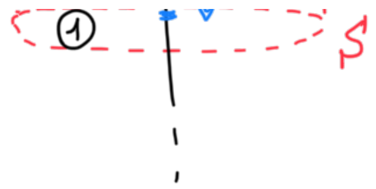
simmetria cilindrica

$$|\vec{E}_P| = |\vec{E}_T|$$

$$\lambda = \frac{Q}{L} \Rightarrow Q = \lambda \cdot L$$



$$\rho = \frac{Q}{V}$$



$$= \Phi_{\vec{E}}(\vec{S}) = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_{sup.\,laterale} \vec{E}\cdot d\vec{s} + \cancel{\int_{base 1} \vec{E}\cdot d\vec{s}} + \cancel{\int_{base 2} \vec{E}\cdot d\vec{s}} = E\cdot S_{laterale} = E\cdot 2\pi r h \quad (A)$$

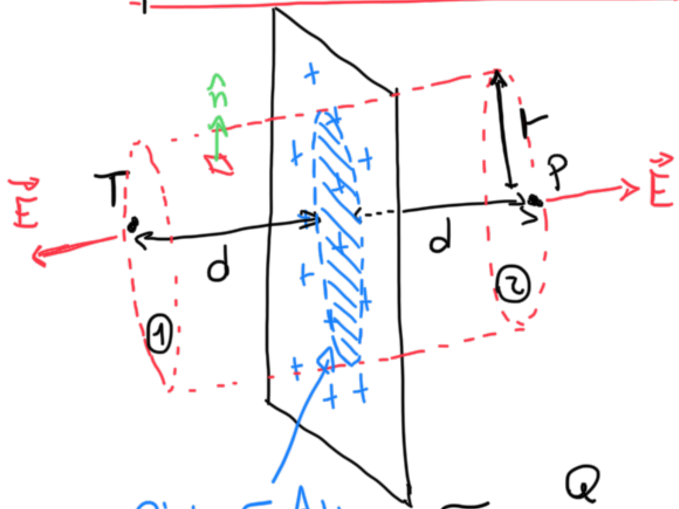
$$= \Phi_{\vec{E}}(\vec{S}) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \quad (B)$$

$$Q_{int} = \lambda \cdot L_{cilindro} = \lambda h$$

$$\left(k_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)$$

$$(A) = (B) \Rightarrow E\, 2\pi r \cancel{h} = \frac{\lambda \cancel{h}}{\varepsilon_0} \qquad \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}} = \frac{2k_e\lambda}{r}$$

- piano carico (infinito)



$Q_{int} = \sigma \cdot A_{blu} = \sigma \cdot \pi r^2$

$\sigma = \frac{Q}{A}$

$(A_{blu} = A_{(1)} = A_{(2)})$

simmetria di riflessione rispetto al piano

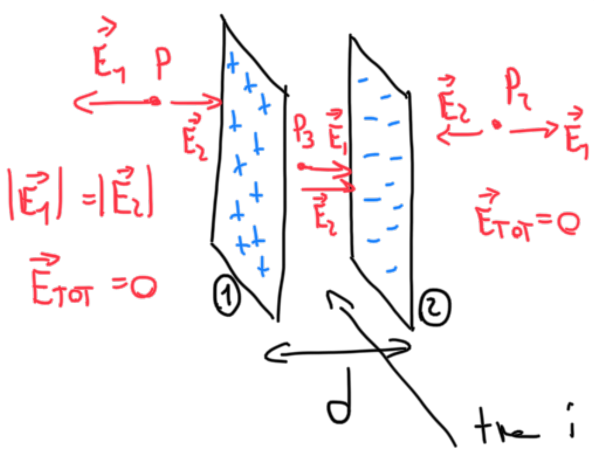
$$\Phi_{\vec{E}}(\vec{S}) = \int_{base 1} \vec{E}\cdot d\vec{s} + \int_{base 2} \vec{E}\cdot d\vec{s} + \cancel{\int_{sup.\,lat.} \vec{E}\cdot d\vec{s}}$$

$$= E(\pi r^2) + E(\pi r^2) = 2E\pi r^2 \quad (A)$$

$$\Phi_{\vec{E}}(\vec{S}) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma\pi r^2}{\varepsilon_0} \quad (B)$$

$$(A) = (B) \Rightarrow 2E\cancel{\pi r^2} = \frac{\sigma\cancel{\pi r^2}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

- Condensatore

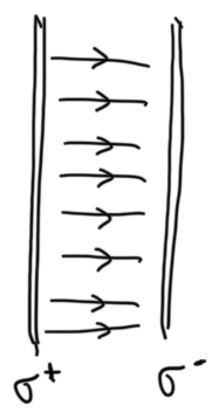


$$\vec{E}_{TOT} = \vec{E}_{piano 1} + \vec{E}_{piano 2}$$

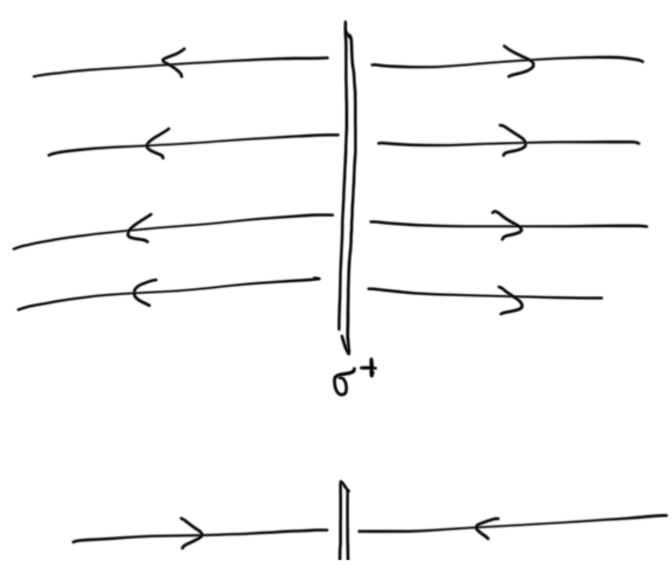
$\boxed{\sigma_1 = -\sigma_2}$ assumiamo di essere in questa situazione

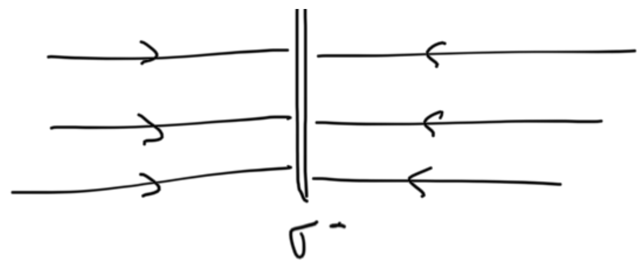
dove $\sigma = |\sigma_1| = |\sigma_2|$

tra i due piani $E_{TOT} = 2\cdot\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$



piani infiniti




σ^-