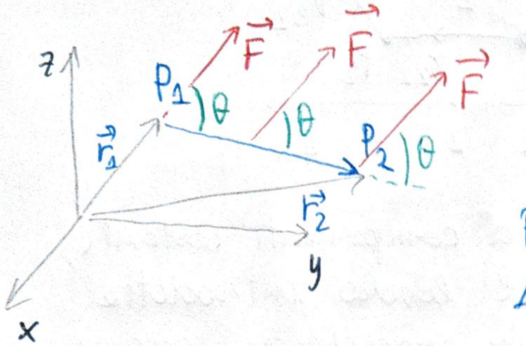
Supporto alla didattica
08/05/2017



## LAVORO E CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

- Corpo di massa M sul quale agiscono varie forze.
- Sotto l'azione di queste forze → passo da un punto $P_1$ ad un punto $P_2$, identificati da $\vec{r}_1$ ed $\vec{r}_2$ (vedi figura)




OSS Posso considerare una forza alla volta!

Chiamiamo $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 \equiv \Delta\vec{r}$ vettore spostamento.

Per una forza $\vec{F}$ "costante" rispetto al vettore $\Delta\vec{r}$, cioè un vettore $\vec{F}$ di modulo costante e che forma con $\Delta\vec{r}$ un angolo $\theta$ costante, possiamo introdurre il lavoro di $\vec{F}$ lungo lo spostamento $\Delta\vec{r}$ nel modo seguente:

$$\boxed{\mathcal{L} = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = W} \quad (\mathcal{L} \to \text{lavoro}\ ,\ W \Rightarrow \text{Work})$$

(LAVORO = PRODOTTO SCALARE FRA FORZA $\vec{F}$ E VETTORE SPOSTAMENTO)

## COME CALCOLIAMO IL LAVORO?

- METODO A: $\mathcal{L} = |\vec{F}||\Delta\vec{r}|\cos(\theta)$,
  - → $|\vec{F}|$ = modulo della forza
  - → $|\Delta\vec{r}|$ = modulo dello spostamento
  - → $\theta$ = angolo ~~tra~~ fra $\vec{F}$ e $\Delta\vec{r}$ (nel piano in cui giacciono $\vec{F}$ e $\Delta\vec{r}$)
- METODO B: $\mathcal{L} = \sum_{\alpha=x,y,z} (\vec{F})_\alpha (\Delta\vec{r})_\alpha$

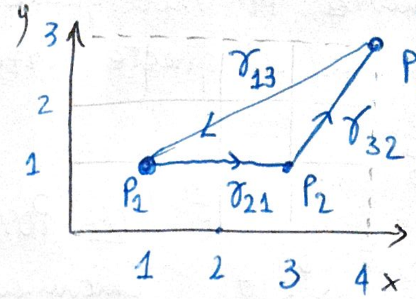
dove $(\vec{F})_{\alpha=x,y,z} = \vec{F}\cdot\hat{x},\ \vec{F}\cdot\hat{y},\ \vec{F}\cdot\hat{z}$

$(\Delta\vec{r})_{\alpha=x,y,z} = \Delta\vec{r}\cdot\hat{x},\ \Delta\vec{r}\cdot\hat{y},\ \Delta\vec{r}\cdot\hat{z}$

PROBLEMA 1

Calcolare il lavoro esercitato da una forza costante $\vec{F}=(f,f)$ (con $f>0$) lungo i percorsi indicati in figura cioè

- $\gamma_{21} : P_1 \to P_2$
- $\gamma_{32} : P_2 \to P_3$
- $\gamma_{13} : P_3 \to P_1$




SVOLGIMENTO Visto che $\vec{F}$ è un vettore a componenti costanti, possiamo usare la formula per il lavoro introdotta nella pagina precedente. Come detto in precedenza possiamo procedere in due modi:

METODO A

$$\mathcal{L}_{\gamma_{ij}} = |\vec{F}||\Delta\vec{r}_{\gamma_{ij}}|\cos(\theta_{\vec{F},\Delta\vec{r}_{\gamma_{ij}}})$$

METODO B

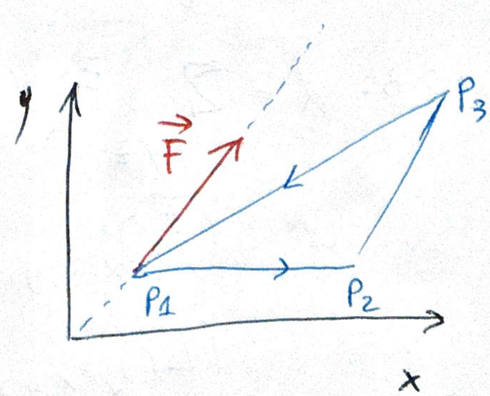
$$\mathcal{L}_{\gamma_{ij}} = \sum_{\alpha=x,y} (\vec{F})_\alpha (\Delta\vec{r}_{\gamma_{ij}})_\alpha$$

UNA VOLTA NELLA VITA CONVIENE FARLO IN ENTRAMBI I MODI PER CONVINCERSI CHE SIANO METODI EQUIVALENTI

- Per prima cosa calcoliamo la direzione della forza $\vec{F}$

$$\tan(\theta_{\vec{F},\hat{x}}) = \frac{\sin\theta_{Fx}}{\cos\theta_{Fx}} = \frac{(\vec{F})_y}{(\vec{F})_x} = 1 \Rightarrow \theta_{\vec{F},\hat{x}} = 45°, 225°$$

Visto che $f>0 \Rightarrow \theta_{\vec{F},\hat{x}} = 45°$



Supporto alla didattica 08/05/2017



- Calcoliamo ora le direzioni per gli spostamenti. Supponiamo che i punti $P_j$ siano identificati dai vettori $\vec{r}_j$.

Allora passare da:

$$\begin{cases} P_1 \to P_2 \Rightarrow \Delta\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \\ P_2 \to P_3 \Rightarrow \Delta\vec{r}_{32} = \vec{r}_3 - \vec{r}_2 \\ P_3 \to P_1 \Rightarrow \Delta\vec{r}_{13} = \vec{r}_1 - \vec{r}_3 \end{cases}$$

Dalla figura della pagina precedente abbiamo che:

$$\boxed{\Delta\vec{r}_{21} = (2,0) \quad , \Delta\vec{r}_{32} = (1,2) \quad , \Delta\vec{r}_{13} = (-3,-2)}$$

Allora

$$\left.\begin{aligned} \tan(\theta_{\Delta\vec{r}_{21}}) &= 0 \Rightarrow \theta_{\Delta\vec{r}_{21}} = 0 \\ \tan(\theta_{\Delta\vec{r}_{32}}) &= 2 \Rightarrow \theta_{\Delta\vec{r}_{32}} \simeq 63.5^\circ \\ \tan(\theta_{\Delta\vec{r}_{13}}) &= \frac{2}{3} \Rightarrow \theta_{\Delta\vec{r}_{13}} \simeq 214^\circ \end{aligned}\right\}$$

QUESTO CI PERMETTE DI APPLICARE IL METODO A

- Per $\gamma_{21}$ abbiamo

$$\mathcal{L} = |\vec{F}||\Delta\vec{r}_{21}| \cos(\theta_{\vec{F},\Delta\vec{r}_{21}}) = |\vec{F}||\Delta\vec{r}_{21}| \cos(45^\circ - 0^\circ) =$$

$$= \sqrt{f^2+f^2}\left(\sqrt{2^2+0^2}\right)\frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$= \sqrt{2}\, f \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2f$$

$f>0$

($\vec{F}$ è parallelo a $\Delta\vec{r}_{21}$ e concorde $\Rightarrow \mathcal{L} = |\vec{F}||\Delta\vec{r}_{21}|$)

• Per $\gamma_{32}$ abbiamo

$$\mathcal{L} = |\vec{F}|\,|\Delta\vec{r}_{32}|\cos(\theta_{\vec{F},\Delta\vec{r}_{32}}) = \sqrt{2}f\left(\sqrt{1^2+2^2}\right)\cos(45^\circ - 63{,}5^\circ) =$$

$$= \sqrt{10}f\cos(18{,}5^\circ) \simeq 3f$$

• Per $\gamma_{13}$ abbiamo che:

$$\mathcal{L} = |\vec{F}|\,|\Delta\vec{r}_{13}|\cos(\theta_{\vec{F},\Delta\vec{r}_{13}}) = \sqrt{2}f\left(\sqrt{2^2+3^2}\right)\cos(45^\circ - 214^\circ) =$$

$$= \sqrt{26}f\cos(169) \approx -5f$$

RIASSUNTO METODO "A"

$$\mathcal{L}_{\gamma_{21}} = 2f \quad , \mathcal{L}_{\gamma_{32}} \simeq 3f \quad , \mathcal{L} \simeq -5f$$

(1)

$\longleftrightarrow$

METODO "B"

$$\mathcal{L}_{\gamma_{21}} = \sum_{\alpha=x,y} (\vec{F})_\alpha (\Delta\vec{r}_{21})_\alpha = 2f + 0 = 2f$$

$$\mathcal{L}_{\gamma_{32}} = \sum_{\alpha=x,y} (\vec{F})_\alpha (\Delta\vec{r}_{32})_\alpha = f + 2f = 3f$$

$$\mathcal{L}_{\gamma_{13}} = \sum_{\alpha=x,y} (\vec{F})_\alpha (\Delta\vec{r}_{13})_\alpha = f(-3) + f(-2) = -5f$$

RIASSUNTO METODO "B"

$$\mathcal{L}_{\gamma_{21}} = 2f \quad , \mathcal{L}_{\gamma_{32}} = 3f \quad , \mathcal{L}_{\gamma_{13}} = -5f$$

(2)

Come deve essere i due metodi danno lo stesso risultato.

NOTA
Abbiamo visto il lavoro nel caso di forze costanti. Questa definizione di lavoro può essere estesa al caso di forze non costanti. In questo caso il lavoro di una forza viene espresso come

$$\boxed{\mathcal{L}_\gamma = \int_{\vec{x}_i}^{\vec{x}_f} \vec{F} \cdot d\vec{x}}$$

dove $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x})$ è una forza dipendente dalla posizione e l'integrazione avviene lungo un percorso $\gamma$ che connette $\vec{x}_i$ ed $\vec{x}_f$, cioè punto iniziale e finale

Il concetto di lavoro è estremamente importante perché direttamente connesso all'energia.

• TEOREMA DELLE FORZE VIVE O DELL'ENERGIA CINETICA •

Dati due stati (iniziale e finale), la variazione di energia cinetica di un corpo fra questi due stati è uguale al lavoro compiuto della forza totale agente su questo corpo fra questi due stati:

$$\boxed{E_{K\,finale} - E_{K\,iniziale} = \mathcal{L}_{\vec{F}_{TOT}} (\text{stato iniziale} \rightarrow \text{stato finale})}$$

• Se non sono presenti forze dissipative, questo teorema è equivalente a dire che l'energia è costante cioè è conservata. Questo perché abbiamo che

$$\mathcal{L}_{\vec{F}_{TOT}} (\text{stato iniziale} \rightarrow \text{finale}) = -\Delta U = -(U_f - U_i)$$

dove $U_j$ = energia potenziale del sistema nello stato j. Abbiamo quindi che:

$$E_{kf} - E_{ki} = -(U_f - U_i) = -U_f + U_i \quad ;$$

$$\boxed{E_i \equiv E_{ki} + U_i = E_{kf} + U_f = E_{kf}}$$

Nel caso di forze dissipative, come le forze di attrito, abbiamo invece che:

$$E_{kf} - E_{ki} = \underbrace{-(U_f - U_i)}_{\text{contributo conservativo}} + \mathcal{L}_{\text{forze dissipative}}(\text{stato in.} \rightarrow \text{stato finale})$$

$$E_f = E_{kf} + U_f = E_{ki} + U_i + \mathcal{L}_{\text{forze dissipative}}(\text{Stato in.} \rightarrow \text{stato finale})$$

cioè

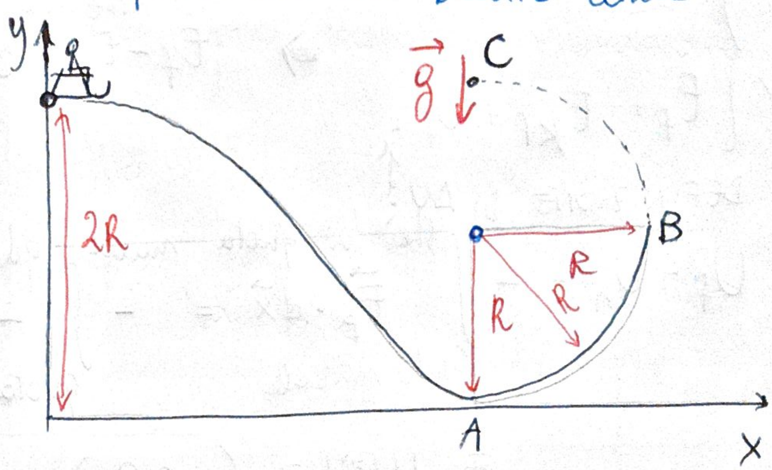
$$\boxed{E_f = E_i + \mathcal{L}_{\text{forze dissipative}}}$$

Se sono presenti forze dissipative, l'energia si conserva ma in maniera "differente"!

- $E_i$ ed $E_f$ si riferiscono ad esempio a proprietà di un punto materiale o più punti materiali che chiamiamo sistema. Se sono presenti solo forze conservative l'energia rimane nel sistema ed è la medesima. Se sono presenti forze dissipative è necessario considerare il "sistema" come immerso in un ambiente: in questo caso l'energia può passare dal sistema all'ambiente (ad esempio sotto forma di calore) e non possiamo dire che $E_i = E_f$, però se consideriamo anche l'energia dispersa nell'ambiente (cioè il lavoro delle forze dissipative) possiamo conservare l'energia dicendo che $E_f = E_i + \mathcal{L}_{\text{forze dissipative}}$.

PROBLEMA 2

Una slitta parte dalla cima di un pendio da ferma da una quota pari a $2R$ e percorre un tratto come in figura.




Il tratto da $A \to B$ è circolare. Trascurando ogni attrito,

Vogliamo:

(a) Modulo della velocità in A

(b) intensità della forza normale in (A)

(C) Modulo della velocità e intensità della forza normale in (B)

(d) Come sarebbe il modulo della velocità se la guida circolare arrivasse fino a C? E la forza normale?

SVOLGIMENTO

Visto che non sappiamo quale sia il profilo del pendio, non possiamo usare la cinematica ⇒ Usiamo la conservazione dell'energia.

(a) → velocità in A.

Quello che dobbiamo considerare è la coppia di stati:

STATO INIZIALE: slitta sulla cima
STATO FINALE: slitta in fondo alla collina (punto A)

Visto che non sono presenti attriti l'energia fra questi due stati è costante.

STATO INIZIALE: $\vec{r} = (0, 2R)$ , $\vec{v} = (0,0)$

STATO FINALE: $\vec{r} = (r_A, 0)$ , $\vec{v} = (v_f, 0) \neq 0$

Abbiamo quindi:

CONSERVAZIONE ENERGIA

TEREMA FORZE VIVE

$$\begin{cases} E_i = E_{Ki} + U_i \\ E_f = E_{Kf} + U_f \end{cases} \Rightarrow E_f - E_i = 0 \Rightarrow E_{Kf} - E_{Ki} = -(U_f - U_i)$$

DEFINIZIONE DI $\Delta U$:

$$U_f - U_i = -\int_{\text{Stato iniziale}}^{\text{Stato finale}} \vec{F}_p \cdot d\vec{x} = -\int_{\text{quota iniziale}}^{\text{quota finale} = \text{quota iniziale} - 2R} -M|\vec{g}|\,dz =$$

$$= M|\vec{g}|(-2R)$$ da questa segue che

$$E_{Kf} - E_{Ki} = -(U_f - U_i) = 2M|\vec{g}|R.$$

Usiamo che la slitta parte da ferma $\Rightarrow v_i^2 = 0$

$\Rightarrow E_{Kf} = 2M|\vec{g}|R$ cioè $E_{Kf} = \frac{1}{2}M v_f^2 = 2M|\vec{g}|R$, da cui

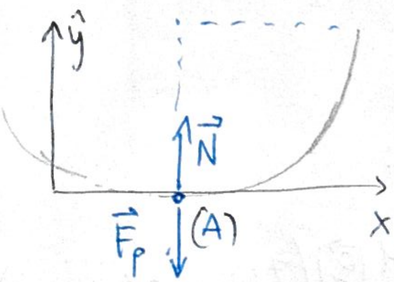
$\hookrightarrow v_f^2 = 4|\vec{g}|R \Rightarrow \boxed{|\vec{v}_f| = 2\sqrt{|\vec{g}|R}}$

Risposta (a): il modulo della velocità della slitta in (A) è $|\vec{v}_f| = 2\sqrt{|\vec{g}|R}$

Quando la slitta raggiunge il punto A inizia a percorrere una traiettoria circolare. Questo significa che la risultante delle forze agenti sulla slitta deve generare un'accelerazione centripeta tale da avere velocità in modulo pari a $|\vec{v}_f|$ (vedi figura)

2ª LEGGE DI NEWTON

$$\vec{F}_{cp} = M\vec{a}_{cp} = \vec{N} + \vec{F}_p$$




↳ proietto lungo $\hat{y}$

$$\begin{cases} M|\vec{a}_{cp}| = N - M|\vec{g}| \\ |\vec{a}_{cp}| = \dfrac{|v_f|^2}{R} \end{cases} \Rightarrow N = M\left(\frac{|\vec{v}_f|^2}{R} + |\vec{g}|\right) =$$

$$= M\left(\frac{4|\vec{g}|R}{R} + |\vec{g}|\right) =$$

$$= 5M|\vec{g}|$$

Risposta (b)

L'intensità della reazione vincolare in (A) è pari a $|\vec{N}| = 5M|\vec{g}|$.

Passiamo al punto successivo del problema.

(C) Voglio il modulo della velocità e l'intensità della forza normale nel punto B.

Il procedimento è analogo a quanto fatto in precedenza

→ CONSERVO L'ENERGIA FRA (A) E (B)

→ CALCOLO LA COMPONENTE NORMALE ALLA GUIDA.

STATO INIZIALE : $\vec{r} = (r_A, 0)$ , $\vec{V} = (V_f, 0)$

STATO FINALE : $\vec{r} = (x_B, y_B)$ , $\vec{V} = (0, V_B)$

Abbiamo quindi:

$$\begin{cases} E_i = E_{Ki} + U_i \\ E_f = E_{Kf} + U_f \end{cases} \Rightarrow$$

Conservo l'energia

$E_{Kf} + U_f = E_{Ki} + U_i$ da cui

$$\boxed{E_{Kf} - E_{Ki} = -U_f + U_i}$$

Sfrutto il legame fra $\Delta U = U_f - U_i$ e $\mathcal{L}$:

$$U_f - U_i = -\int_{\text{stato iniziale}}^{\text{stato finale}} \vec{F}_p \cdot d\vec{x} = -\int_{\text{stato iniziale}}^{\text{stato finale}} -M|\vec{g}|\,dz = M|\vec{g}|(z_{finale} - z_{iniziale})$$

$$= M|\vec{g}|R$$

Allora

$$-U_f + U_i = -M|\vec{g}|R = E_{Kf} - E_{Ki} \Rightarrow \boxed{E_{Kf} = E_{Ki} - M|\vec{g}|R}$$

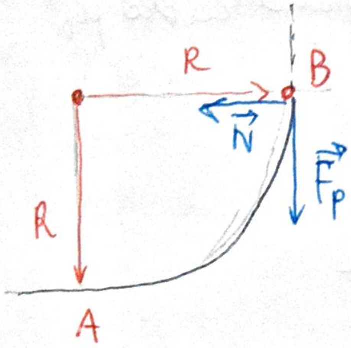
$$\boxed{E_{Ki} = \frac{1}{2} M V_{fA}^2 = \frac{1}{2} M\, 4|\vec{g}|R = 2M|\vec{g}|R \quad \text{da cui}}$$

$$E_{fB} = \frac{1}{2} M V_{fB}^2 = E_{Ki} - M|\vec{g}|R = M|\vec{g}|R;$$

$$V_{fB}^2 = 2R|\vec{g}| \Rightarrow |\vec{V}|_{fB} = \sqrt{|\vec{g}|R2}$$

La velocità della slitta nel punto (B) è $|\vec{V}|_{fB} = \sqrt{2|\vec{g}|R}$.

Ora che abbiamo $|\vec{v}_{fB}|$ possiamo procedere come nel punto precedente.
Nel punto B abbiamo che la slitta è soggetta alla reazione del vincolo e alla gravità (vedi figura).




Visto che la traiettoria è circolare, la risultante delle forze nella direzione radiale deve essere tale da generare un accelerazione ~~...~~ centripeta coerente con il moto circolare a velocità in modulo pari a $|\vec{v}_{fB}|$.

$$|\vec{a}_{cp}| = \frac{|\vec{v}_{fB}|^2}{R} \Rightarrow M\,|\vec{a}_{cp}| = M\frac{|\vec{v}_{fB}|^2}{R} = |\vec{N}|$$

Abbiamo quindi che : $|\vec{N}| = \frac{M}{R}|\vec{v}_{fB}|^2 = \frac{M}{R}\left[2|\vec{g}|R\right] = 2M|\vec{g}|$

Risposta al quesito (c)

Il modulo della velocità in B è $|\vec{v}_{fB}| = \sqrt{2|\vec{g}|R}$.
L'intensità della forza normale in B è $|\vec{N}| = 2M|\vec{g}|$

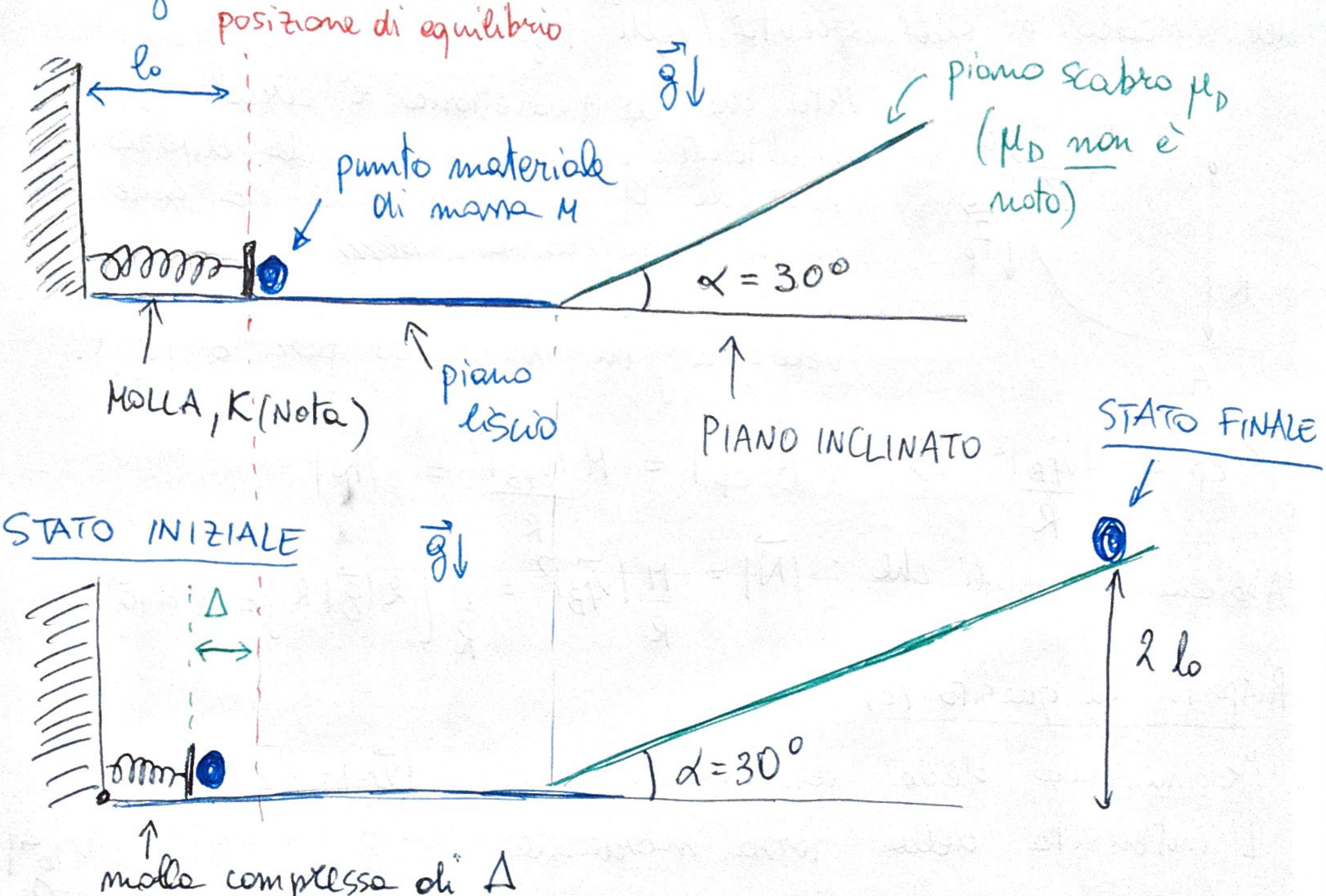
Cosa succederebbe nel punto "C"?
Come prima:

- CONSERVO L'ENERGIA FRA STATO INIZIALE
- APPLICO LA DEFINIZIONE DI ACCELERAZIONE CENTRIPETA

→ Conservando l'energia fra la cima della collina e il punto "C" è facile mostrare che

$$\boxed{E_{KC} = 0} \quad \text{perchè } \Delta U = 0 \text{ ed } E_{Ki} = 0$$

PROBLEMA 3 Il sistema considerato nel problema è descritto in figura




Una molla di costante K e lunghezza a riposo "$l_0$" (K ed $l_0$ sono noti) viene compressa di $\Delta$ come in figura (STATO INIZIALE). Questa molla viene usata per mettere in moto un punto materiale di massa M.

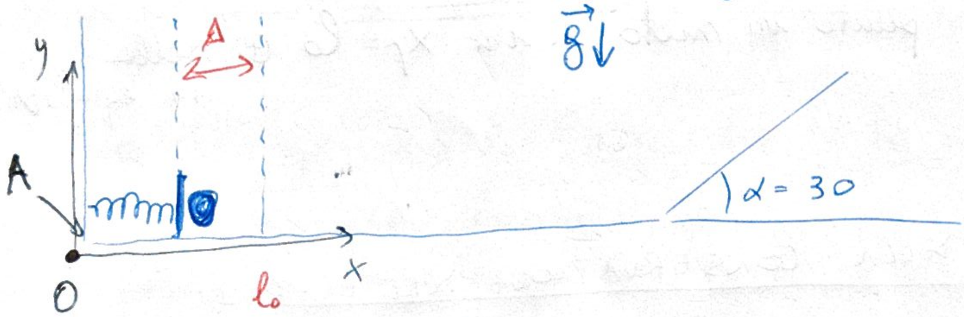
(a) Calcolare la velocità con cui il punto raggiunge la base del piano inclinato (su questo tratto non è presente attrito)

(b) Sapendo che l'altezza raggiunta dal punto materiale è $2\,l_0$, stabilire quanto valga $\mu_D$.

Analisi del punto A (a)

Visto che nel tratto orizzontale non sono presenti forze dissipative, l'energia dello stato iniziale per il punto materiale ($E_i = E_{Ki} + U_i$) è uguale all'energia che il punto materiale ha alla base del piano inclinato ($E_f = E_{Kf} + U_f$).

Prendiamo come origine degli assi il punto "A" (vedi figura)




Nello stato iniziale abbiamo il punto materiale fermo, ad una quota $y=0$ e appoggiato ad una molla:

$$\begin{cases} E_{Ki} = 0 \text{ (è fermo)} \\ U_{g\,i} = \text{Energia potenziale gravitazionale} = 0 \text{ (possiamo porla uguale a zero)} \\ U_{elastica,\,i} = \text{Energia potenziale della molla compressa} = ? \end{cases}$$

L'energia potenziale gravitazionale è già stata calcolata esplicitamente nel problema precedente.

Quello che dobbiamo calcolare è l'energia potenziale elastica o meglio calcolare $U_{el,finale} - U_{el.iniziale}$.

Visto che non sono presenti attriti ed il tratto fra la parete ~~ed~~ e la base del piano è orizzontale, possiamo considerare in realtà solo cosa succede tra $x_i = l_0 - \Delta$ ed $x_f = l_0$ (Per $x > x_f$ la molla non influenza più il moto del punto materiale perchè il punto si stacca dal supporto).

STATO INIZIALE : punto fermo in $x_i = l_0 - \Delta$ ⊕ molla compressa

STATO FINALE : punto in moto in $x_f = l_0$ ⊕ molla in equilibrio

⟹ USO IL TEOREMA DELLA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

$$E_i = \underset{0}{\underset{\|}{E_{Ki}}} + U_{elastica\ i} + \underset{0}{\underset{\|}{U_{gi}}} = \underset{\neq 0}{E_{Kf}} + U_{elastica\ finale} + \underset{\overset{\|}{0}}{\underset{\overset{\|}{U_{gi}}}{U_{gf}}}$$

Ne segue che:

$$E_{Kf} - E_{Ki} = E_{Kf} = U_{elastica\ i} - U_{elastica\ finale} =$$

$$= \int_{\substack{\text{stato iniziale} \\ (x_i = l_0 - \Delta)}}^{\text{stato finale } (x_f = l_0)} \vec{F}_{el}(x) \cdot dx =$$

$$= \int_{x_i = l_0 - \Delta}^{x_f = l_0} -k(x - l_0)\, dx = -k \left[ \frac{x^2}{2} - l_0 x \right]_{x_i}^{x_f} =$$

$$x_f = l_0 \ , \ x_i = l_0 - \Delta$$

$$E_{kf} = -k\left[\frac{x_f^2}{2} - \frac{x_i^2}{2} - l_0(x_f - x_i)\right] = -k\left[\frac{l_0^2 - (l_0-\Delta)^2}{2} - l_0\Delta\right] =$$

$$= +k\frac{\Delta^2}{2}$$

sfrutto la forma dell'energia cinetica

$$E_{kf} = \frac{1}{2}M v_f^2 = K\frac{\Delta^2}{2} \Rightarrow v_f^2 = \frac{K\Delta^2}{M} \Rightarrow |\vec{V}_f| = \sqrt{\frac{K}{M}}\,\Delta$$

Visto che per $x \geq l_0$ non ho forze dissipative e non cambia la quota, questa è la velocità con cui il corpo raggiunge la base del piano inclinato.

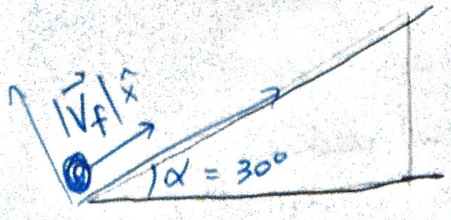
Risposta (a)

La velocità con cui il punto raggiunge la base del blocco è $\vec{V}_F = \sqrt{\frac{K}{M}}\,\Delta\,\hat{x}$

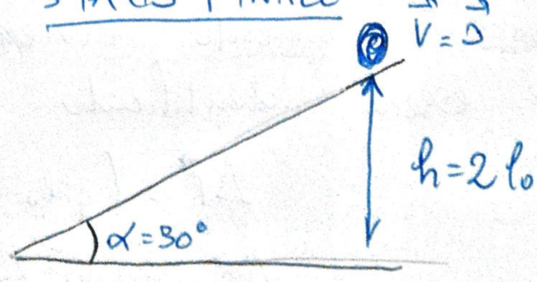
Passiamo alla seconda parte del problema.

Supponiamo che non ci siano problemi nel passare ~~dalla~~ dal tratto orizzontale al piano inclinato (l'energia è conservata). La situazione è quindi:

STATO INIZIALE




STATO FINALE



Per analizzare questo punto del problema, sfruttiamo il teorema delle forze vive:

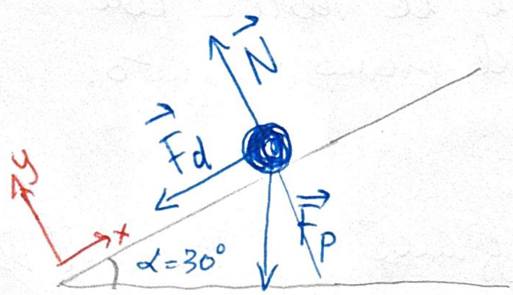
$$\boxed{\Delta E_K = E_{K\,finale} - E_{K\,iniziale} = \mathcal{L}_{\vec{F}_{TOT}}(\text{stato iniziale} \to \text{stato finale})}$$

1) $\Delta E_K = E_{K\,finale} - E_{K\,iniziale} = 0 - \frac{1}{2} M (V_f)^2$

corpo fermo alla quota $2l_0$

2) $\mathcal{L}_{\vec{F}_{TOT}}$ (stato iniziale $\to$ finale) $= ?$

DETERMINIAMO LE FORZE A CUI È SOGGETTO IL CORPO NELLA SALITA LUNGO IL PIANO: DIAGRAMMA DELLE FORZE




Equilibrio lungo $\hat{y}$:

$$|\vec{N}| = M|\vec{g}| \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} M|\vec{g}|$$

La reazione $\vec{N}$ determina l'intensità di $\vec{F}_d$. Nel dettaglio abbiamo che

$$|\vec{F}_d| = |\vec{N}| \mu_d = \frac{\sqrt{3}}{2} M |\vec{g}| \mu_d$$

A questo punto possiamo calcolare il lavoro lungo lo spostamento dalla base alla "vetta" a quota $2 l_0$.

Questo spostamento avviene lungo il piano quindi può essere identificato tramite l'uso del seguente vettore:

$$\Delta\vec{r} = (4 l_0, 0) \text{ (nel sistema solidale al piano inclinato)}$$

$\cancel{\Delta\vec{r} = (2\sqrt{3}\, l_0, 2 l_0)}$

$$\mathcal{L}_{\vec{F}_{TOT}} = \vec{F}_{TOT} \cdot \Delta\vec{r} =$$ (questo perchè tutte le forze sono costanti)

$\Delta\vec{r}$ ha componente non nulla solo lungo $\hat{x}$

$$= (\vec{N} + \vec{F}_d + \vec{F}_p) \cdot \Delta\vec{r} =$$

$$= ((\vec{N})_x + (\vec{F}_d)_x + (\vec{F}_p)_x)\, 4\, l_0 = -M|\vec{g}|\left(\frac{1+\sqrt{3}\,\mu_d}{2}\right) \cdot 4\, l_0 =$$

$(\vec{N})_x = 0$

$(\vec{F}_d)_x = -\mu_d |\vec{N}| = -\mu_d \frac{\sqrt{3}}{2} |\vec{g}| M$

$(\vec{F}_p)_x = -M|\vec{g}| \sin(30°) = -\frac{M|\vec{g}|}{2}$

$$= -2M|\vec{g}|(1+\sqrt{3}\,\mu_d)\, l_0$$

→ Questo è uguale alla variazione di energia cinetica in (1)

Abbiamo quindi

$$\Delta E_k = E_{k\,finale} - E_{k\,iniziale} = -\frac{1}{2} M v_f^2 = -2M|\vec{g}|(1+\sqrt{3}\,\mu_d)\, l_0,$$

da cui segue che

$$\frac{v_f^2}{4|\vec{g}|l_0} = 1+\sqrt{3}\,\mu_d \Rightarrow \boxed{\mu_d = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{v_f^2 - 4|\vec{g}|l_0}{4|\vec{g}|l_0}\right]}$$

Risposta quesito (b)

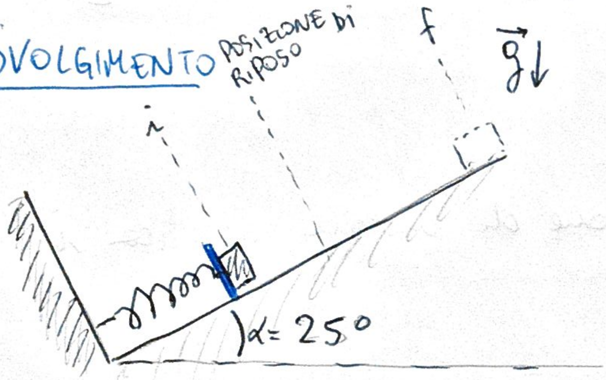
Il coefficiente di attrito dinamico vale $\mu_d = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{v_f^2 - 4|\vec{g}|l_0}{4|\vec{g}|l_0}\right]$

PROBLEMA 4 Un blocco di massa 2,1 Kg viene spinto contro una molla leggera (massa trascurabile) di costante elastica $k = 2400 \, N/m$ cosicché questa viene compressa di 0,15 m.
La molla lancia il blocco su per un piano inclinato di 25°. Il blocco si arresta momentaneamente in un punto indicato con "f". Gli attriti sono trascurabili. Si ammetta che il blocco perda contatto con la molla quando questa è rilassata.

(a) A quale distanza dal punto "i" lungo il piano inclinato si trova "f"?

(b) Quando il blocco ridiscende scivolando lungo il piano inclinato, qual è il modulo della sua velocità a metà strada tra "f" ed "i"?

SVOLGIMENTO




Sul blocco agiscono diverse forze. Inizialmente fra "i" e la "posizione di riposo" abbiamo 3 forze:

- forza elastica : $\vec{F}_{el}$
- forza peso : $\vec{F}_P$
- Reazione normale : $\vec{N}$

Visto che la forza elastica e la forza peso sono le uniche a fare lavoro mentre il corpo si sposta lungo il piano ($\vec{N} \perp$ piano) ed esse sono conservative, l'energia è costante.

Come nel problema precedente abbiamo

$$E_i = \underset{=0}{E_{k_i}} + \underset{\neq 0}{U_{el,i}} + \underset{\neq 0}{U_{g,i}} = \underset{=0}{E_{kf}} + \underset{=0}{U_{el,f}} + \underset{\neq 0}{U_{g,f}}$$

Supporto alla didattica
08/05/2017



$$\boxed{U_{el,f} - U_{el,i} = -U_{g,f} + U_{g,i}}$$

- $U_{el,f} - U_{el,i} = -\int_{\text{Stato iniziale}}^{\text{stato finale}} F_{el}(x)\,dx \underset{\uparrow}{=} +\int_{x_{eq}-\Delta}^{x_{eq}} dx\, K(x-l_0) = -K\frac{\Delta^2}{2} =$

$x_{eq}-\Delta =$ stato iniziale $= x_i$

$x_{eq} =$ stato intermedio $= x_i + \Delta$

$$= -\frac{1}{2}\left(2400\,\frac{N}{m}\right)(0{,}15\,m)^2 = -27\,J$$

- $U_{g,f} - U_{g,i} = -\int_{x_i}^{x_f} \vec{F}_{px} \cdot d\vec{x} = m|\vec{g}|\sin(25°)\int_{x_i}^{x_f} dx = m|\vec{g}|\sin(25°)(x_f - x_i)$

Abbiamo quindi che:

$$U_{el,f} - U_{el,i} = -27\,J = -m|\vec{g}|\sin(25°)(x_f - x_i) = -U_{g,f} + U_{g,i}$$

Uso $\begin{cases} |\vec{g}| = 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \\ m = 2{,}1\,kg \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{27\,J}{m|\vec{g}|\sin(25°)} = (x_f - x_i) \simeq 3{,}1\,m}$

Risposta "a"

La distanza fra il punto "i" ed il punto "f" è $(x_f - x_i) \simeq 3{,}1\,m$.

Punto "b"

Quando il blocco ridiscende giù per il piano inclinato e si trova a metà strada, la molla è ancora rilassata (questo perchè $\frac{x_f - x_i}{2} > \Delta$) quindi abbiamo che (prendendo come stato iniziale lo stato finale del punto precedente e come nuovo stato finale quello in cui il blocco sta a metà fra "i" ed "f" con velocità <u>non</u> nulla)

$$\boxed{\Delta E_K = \underset{\neq 0}{E_{Kf}} - \underset{= 0}{E_{Ki}} = \mathcal{L}_{\vec{F}_P}(\text{Stato iniziale} \to \text{stato finale})}$$

TEOREMA DELLE FORZE VIVE

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m V_F^2 = \int_{x_i = 3,1\,m}^{x_f = 3.1\,m/2} \vec{F}_P \cdot d\vec{x} = -m|\vec{g}|\sin(25°) \int_{x_i = 3,1\,m}^{x_f = \frac{3,1\,m}{2}} dx =$$

$$= m|\vec{g}|\sin(25°)\left(\frac{3,1\,m}{2}\right)$$

$$V_f^2 = |\vec{g}|\sin(25°)(3,1\,m) \Rightarrow \boxed{|\vec{V}_f| = \sqrt{3,1\,m \cdot |\vec{g}|\sin(25°)} \approx 3,59\,\frac{m}{s}}$$

Risposta punto "b"

La velocità del punto materiale a metà strada è di $\boxed{3,659\,\frac{m}{s} = |\vec{V}_f|}$.