Lavoro ed Energia

- *Lavoro (definizione)*
  - → *esempi*
  - → *lavoro svolto da una molla*
- *Energia (definizione)*
  - → *teorema dell'energia cinetica*
  - → *esempi*
- *Potenza (definizione)*

Gettys

Capitolo 8

Lavoro ed Energia

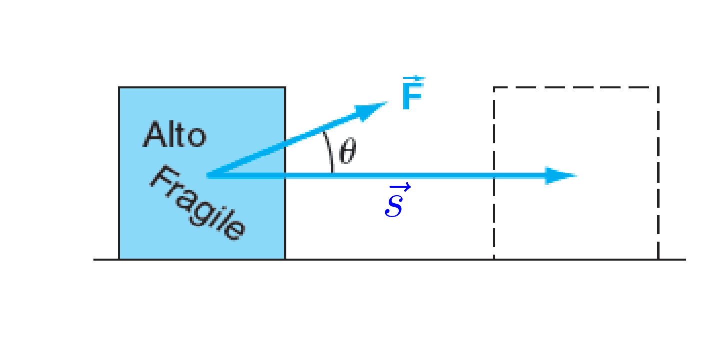
- *Lavoro (definizione)*
  - → *esempi*
  - → *lavoro svolto da una molla*
- *Energia (definizione)*
  - → *teorema dell'energia cinetica*
  - → *esempi*
- *Potenza (definizione)*

Gettys

Capitolo 8

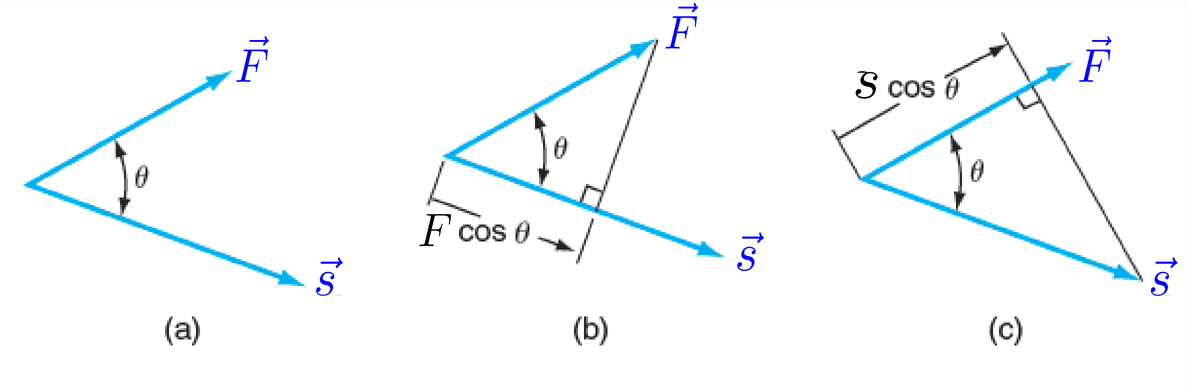
Supponiamo che una forza costante agisca su un corpo (es. una cassa) che si muove in linea retta.

Lo spostamento è: $\Delta\vec{r} = \vec{s}$



Il ***lavoro*** *compiuto dalla forza* (costante) sul corpo mentre subisce lo spostamento è

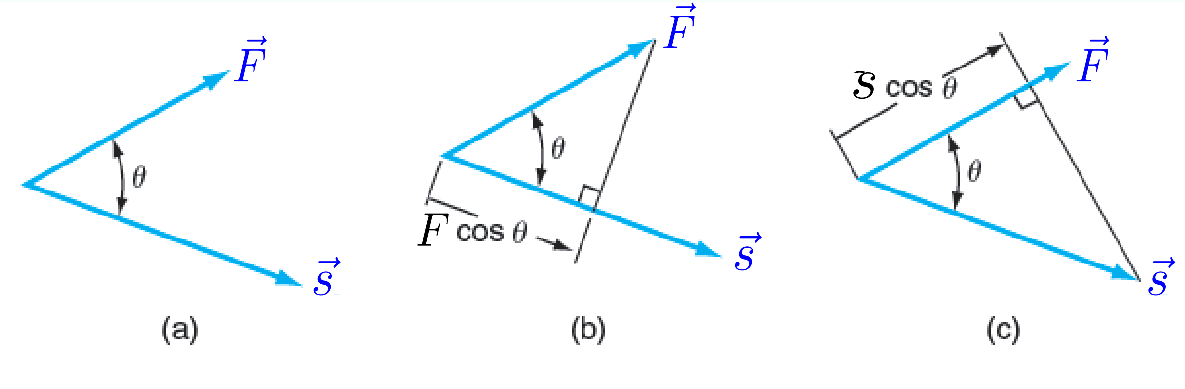
$$\boxed{L = \vec{F} \cdot \vec{s}} = F\, s \cos\theta = F_{\|}\, s = F\, s_{\|}$$



Il lavoro è il ***prodotto scalare dei due vettori***, che si può scrivere anche come:

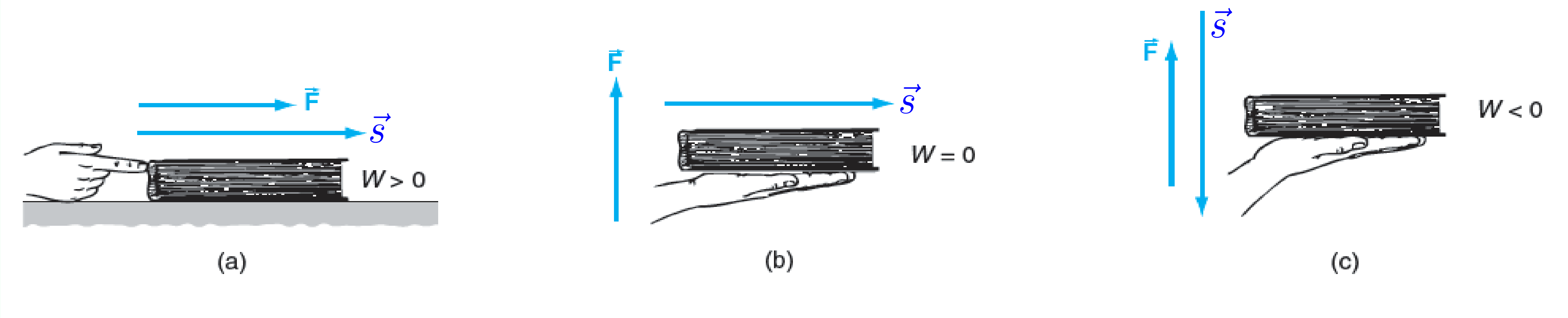
→ prodotto dei moduli e del coseno dell'angolo compreso;
→ prodotto dello spostamento per la componente della forza lungo di esso;
→ prodotto della forza per la componente dello spostamento parallela ad essa.

$$\boxed{L = \vec{F} \cdot \vec{s}} = F\, s\, \cos\theta = F_{\|}\, s = F\, s_{\|}$$



Osservazioni:

- se il corpo non si muove, il lavoro è nullo $L = 0$;
- il lavoro può essere positivo ($\theta > 0$), negativo ($\theta < 0$) o nullo ($\theta = 90^o$)



L'unità di misura MKS del lavoro è il ***Joule*** (J): $\boxed{1\ J = 1\ Nm}$

Lavoro ed Energia

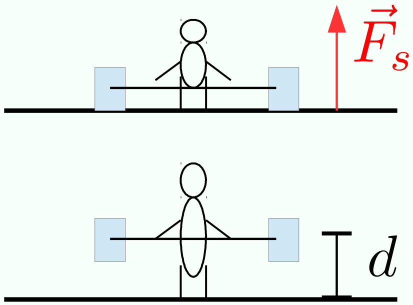
- *Lavoro (definizione)*
  - → *esempi*
  - → *lavoro svolto da una molla*
- *Energia (definizione)*
  - → *teorema dell'energia cinetica*
  - → *esempi*
- *Potenza (definizione)*

Gettys

Capitolo 8

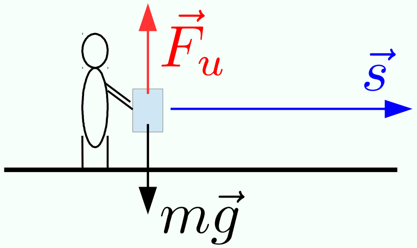
1) Sollevatore di pesi: durante il sollevamento $L = F_s d$

Se il sollevatore sta fermo col peso in mano, il lavoro è nullo.
Quando il sollevatore alza il peso, $L > 0$

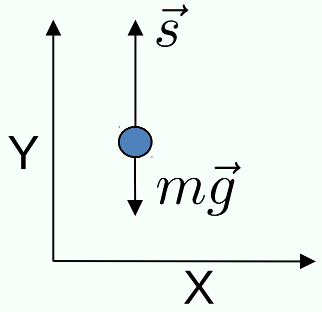


2) Un uomo che cammina recando in mano un peso esercita una forza verticale sul corpo. Questa forza non compie lavoro, perché è perpendicolare allo spostamento.

$$L = \vec{F}_u \cdot \vec{s} = F_u\, s \cos 90^\circ = 0$$

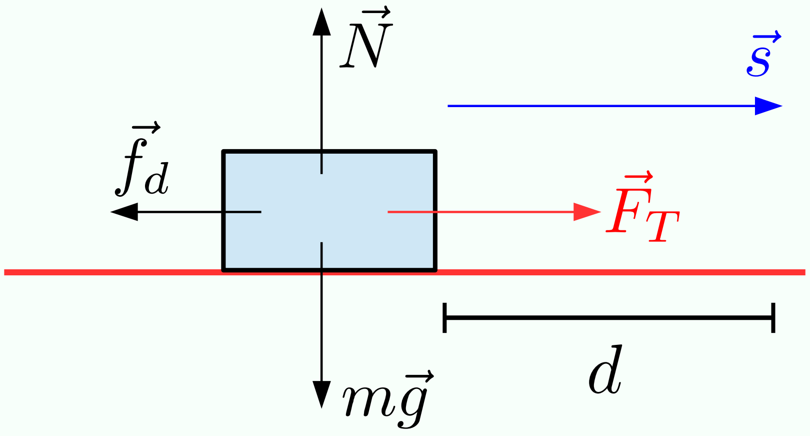


3) Lavoro della forza peso durante il moto di un grave



$$L = m\vec{g} \cdot \vec{s} = -mg(y_f - y_i) = \begin{cases} < 0 & \text{se} \quad y_f > y_i \\ > 0 & \text{se} \quad y_f < y_i \\ = 0 & \text{se} \quad y_f = y_i \end{cases}$$

4) Una cassa su un piano scabro viene tirata con una forza parallela al piano per un tratto *d*. Che lavoro fanno le varie forze?



$$\vec{F}_T \parallel \vec{s} \;\Rightarrow\; L_T = \vec{F}_T \cdot \vec{s} = F_T\, d > 0$$

$$\vec{N} \perp \vec{s} \;\Rightarrow\; L_N = \vec{N} \cdot \vec{s} = 0$$

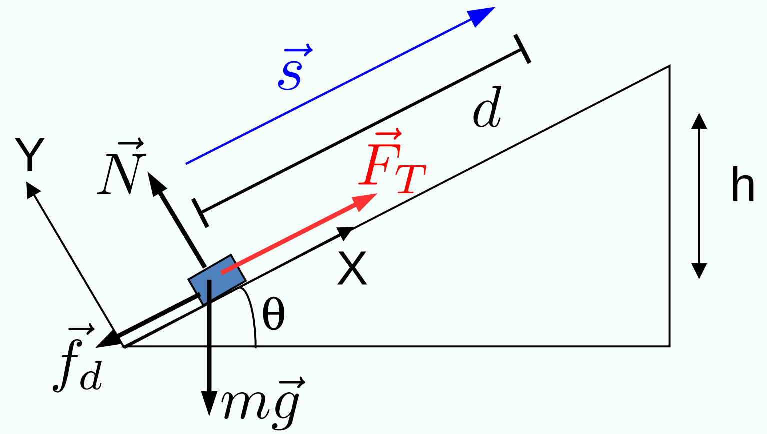
$$L_{\text{peso}} = m\,\vec{g} \cdot \vec{s} = 0$$

$$L_{\text{attrito}} = \vec{f}_d \cdot \vec{s} = -\mu_d N d = -\mu_d\, mg\, d < 0$$

5) Piano inclinato scabro dove una fune traina un corpo **a velocità costante**.
Qual è il lavoro delle varie forze lungo un percorso in cui la quota cambia di h?

$$\begin{cases} \sum_i F_{yi} = N - mg\cos\theta = 0 \\ \sum_i F_{xi} = -\mu_d N + F_T - mg\sin\theta = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad F_T = mg(\sin\theta + \mu_d\, cos\theta)$$



$$L_T = \vec{F}_T \cdot \vec{s} = F_T\, d = F_T \frac{h}{\sin\theta} = mgh\left(1 + \frac{\mu_d}{\tan\theta}\right)$$

$$L_{\text{peso}} = m\,\vec{g}\cdot\vec{s} = -mg\,d\,\sin\theta = -mgh$$

$$L_N = \vec{N}\cdot\vec{s} = 0 \quad (F_{\text{vincolo}} \perp \text{ spostamento})$$

$$L_{\text{attrito}} = \vec{f}_d \cdot \vec{s} = -\mu_d N\, d = -\mu_d mg\, d\,\cos\theta = -\frac{\mu_d\, mgh}{\tan\theta}$$

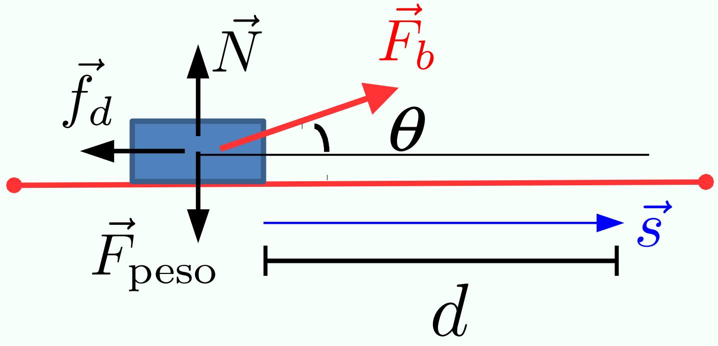
In totale:

$$\sum_i L_i = 0$$

6) Slitta trascinata a **velocità costante** su un piano orizzontale scabro, tramite una forza inclinata.

$$\begin{cases} \sum_i F_{xi} = F_b \cos\theta - f_d = F_b \cos\theta - \mu_d N = 0 \\ \sum_i F_{yi} = F_b \sin\theta + N - mg = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad F_b = \frac{\mu_d mg}{\cos\theta + \mu_d \sin\theta}$$



Qual è il lavoro fatto da $\vec{F}_b$?

Solo la componente orizzontale fa lavoro:

$$L = \vec{F}_b \cdot \vec{s} = F_b \, s \, \cos\theta = \frac{\mu_d \, mg}{1 + \mu_d \tan\theta} d$$

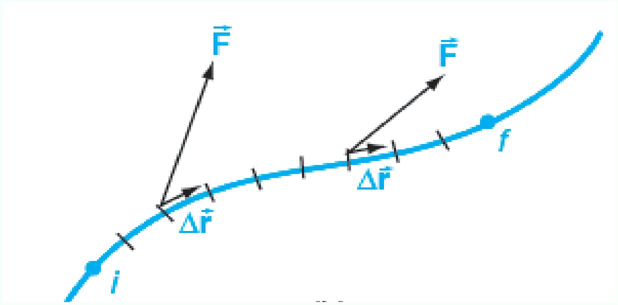
Il lavoro fatto da $\vec{F}_b$ è positivo, quello della forza di attrito è negativo.

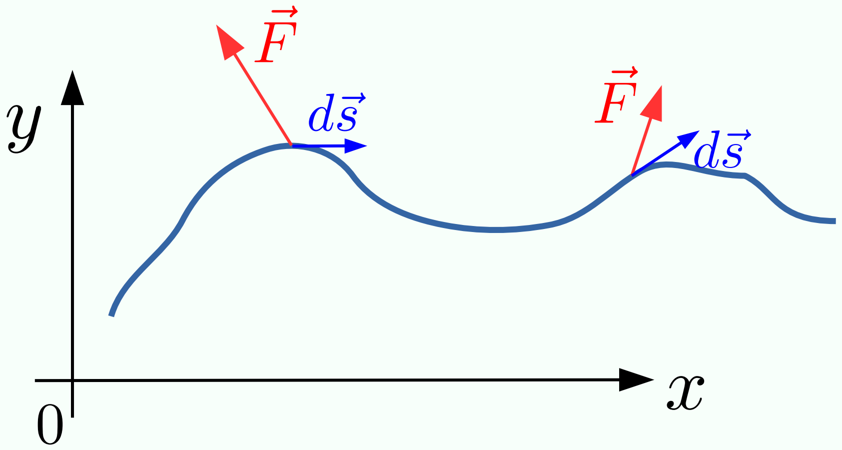
Alla fine il lavoro totale è zero.

Finora sono stati considerati casi con forza costante.

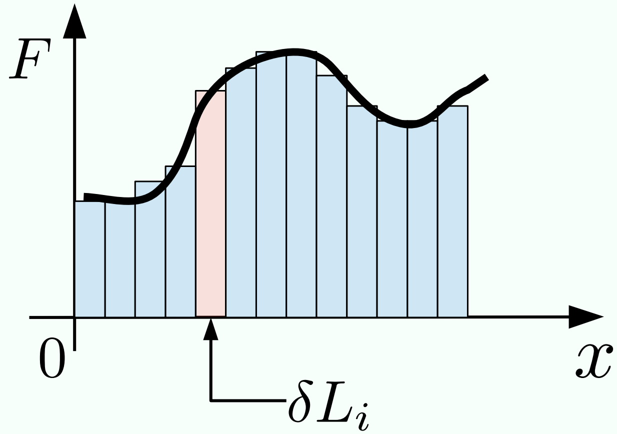
In generale, se la forza varia in modulo e direzione, occorre analizzare il **lavoro infinitesimo δL** fatto lungo uno spostamento infinitesimo *ds*, per il quale la forza può essere considerata costante.

$$\boxed{\delta L_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{s}_i}$$





In una dimensione:



Il lavoro è dato dall'area sottesa dalla curva, ossia dall'integrale:

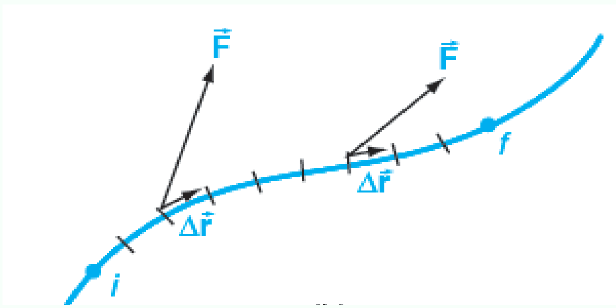
$$\boxed{L = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx}$$

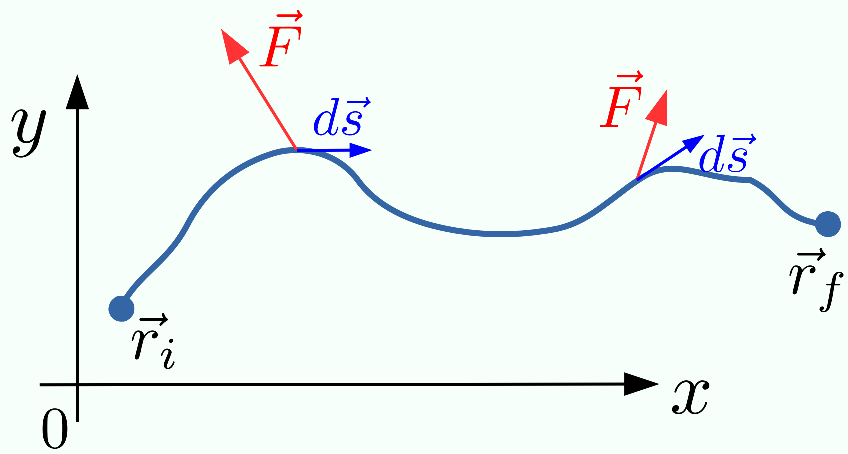
$$\approx \sum_i \delta L_i = \sum_i F_i dx_i$$

Finora sono stati considerati casi con forza costante.

In generale, se la forza varia in modulo e direzione, occorre analizzare il **lavoro infinitesimo** δL fatto lungo uno spostamento infinitesimo *ds*, per il quale la forza può essere considerata costante.

$$\boxed{\delta L_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{s}_i}$$





In due dimensioni:

$$\boxed{L = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{s}} \approx \sum_i F_i \cos\theta_i \, ds_i = \sum_i (F_{xi}\, dx_i + F_{yi}\, dy_i)$$

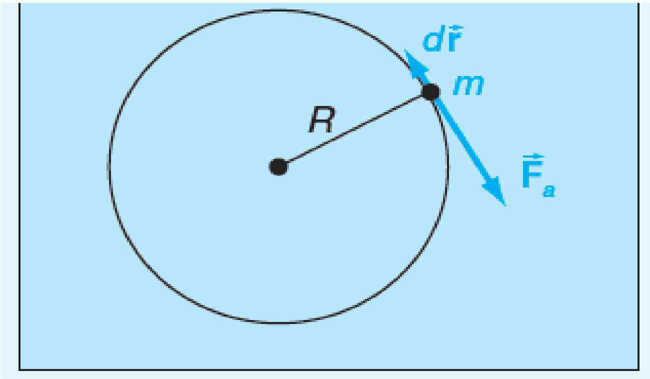
dove abbiamo espresso i vettori in componenti:

$$\vec{F}_i = F_{xi}\, \hat{i} + F_{yi}\, \hat{j}$$
$$d\vec{s}_i = dx_i\, \hat{i} + dy_i\, \hat{j}$$

7) Moto circolare uniforme nel piano orizzontale.

La forza che genera l'accelerazione centripeta (ad es. la tensione *T*) è sempre perpendicolare alla velocità, e quindi allo spostamento *ds*.

$\vec{s}$ non costante



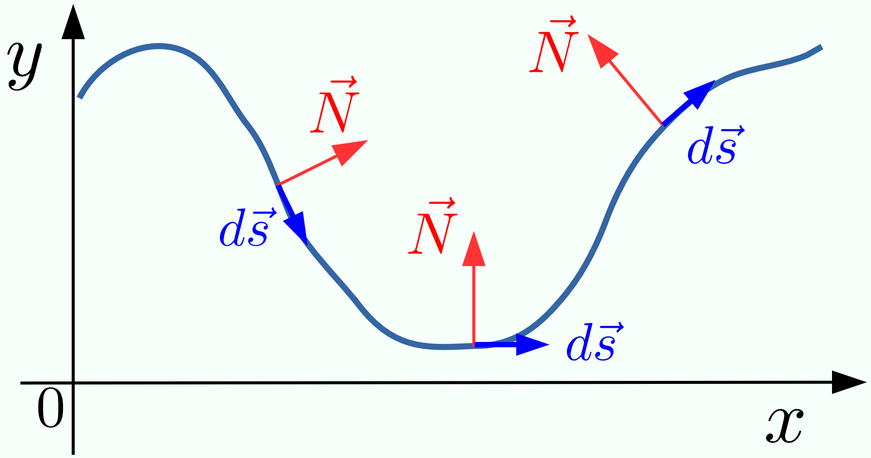
Il lavoro è nullo, sia istantaneamente,
sia complessivamente:

$$\vec{F}_i \cdot d\vec{s}_i = 0 \;\Rightarrow\; L = \sum_i \delta L_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{s}_i = 0$$

---

8) Tutte le forze normali esplicate dai vincoli non fanno mai lavoro, perché $\vec{N}$ è sempre perpendicolare allo spostamento:

$$\vec{N} \perp d\vec{s} \quad \Rightarrow \quad L_N = 0$$



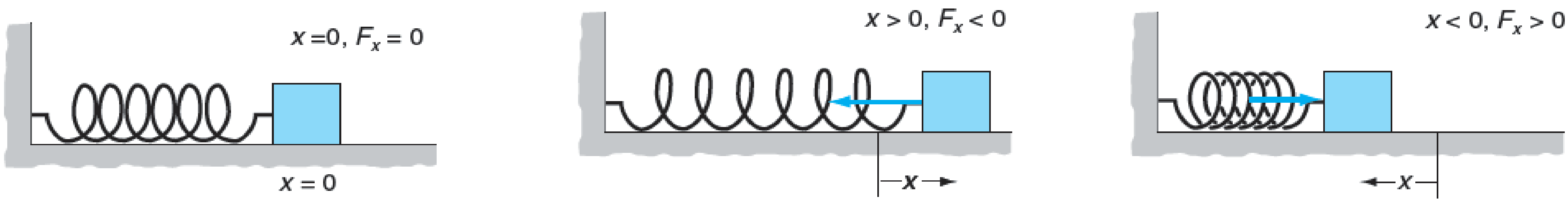
Lavoro ed Energia

- *Lavoro (definizione)*
  - → *esempi*
  - → *lavoro svolto da una molla*
- *Energia (definizione)*
  - → *teorema dell'energia cinetica*
  - → *esempi*
- *Potenza (definizione)*

Gettys
Capitolo 8

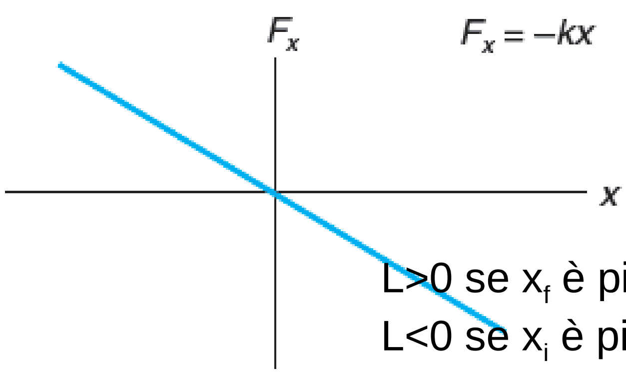
9) Consideriamo un blocco di massa *m* collegato ad una molla di costante *k*.
Sia x_0 la posizione a riposo della molla (possiamo farla coincidere con l'origine).

Legge di Hooke: $F = -k(x - x_0) = -k\,x \qquad \Rightarrow \quad -k\,x = m\frac{d^2x}{dt^2}$

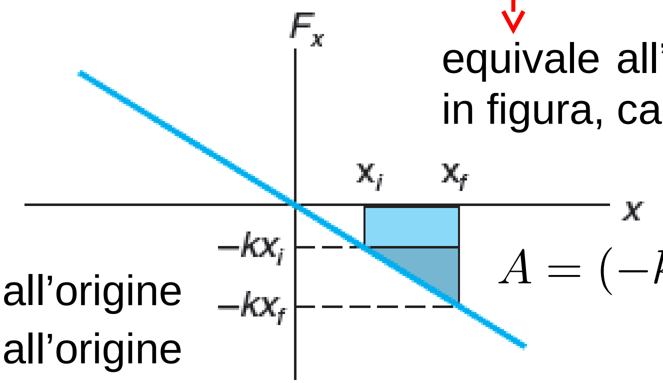


Calcoliamo ora il lavoro fatto dalla molla, quando il corpo passa da una posizione x_i a x_f.

$$L_{\text{molla}} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}_{\text{molla}} \cdot d\vec{s} = \int_{x_i}^{x_f} -kx\,dx = \frac{1}{2}k(x_i^2 - x_f^2)$$



L>0 se x_f è più vicino di x_i all'origine
L<0 se x_i è più vicino di x_f all'origine



equivale all'area del trapezio in figura, cambiata di segno

$$A = (-kx_i - kx_f)\frac{x_f - x_i}{2}$$

Lavoro ed Energia

- *Lavoro (definizione)*
  - → *esempi*
  - → *lavoro svolto da una molla*
- *Energia (definizione)*
  - → *teorema dell'energia cinetica*
  - → *esempi*
- *Potenza (definizione)*

Gettys

Capitolo 8

Energia ed energia cinetica

L'***energia*** è una misura della capacità di compiere lavoro.

Definiamo per adesso un particolare tipo di energia:
l'***energia cinetica traslazionale***. Essa è chiamata così, perché legata al moto.

Dato un punto materiale di massa *m* che si muove con velocità di modulo *v*, la sua energia cinetica è definita da:

$$\boxed{K = \frac{1}{2} m v^2}$$

L'energia cinetica è uno ***scalare*** ed ha le stesse dimensioni del lavoro.
L'unità di misura è il ***Joule***.

⇨ Dal 2° principio della dinamica e dalla definizione di lavoro si può intuire che ci deve essere qualche *relazione fra energia cinetica e lavoro*.

Lavoro ed Energia

- *Lavoro (definizione)*
  - → *esempi*
  - → *lavoro svolto da una molla*
- *Energia (definizione)*
  - → *teorema dell'energia cinetica*
  - → *esempi*
- *Potenza (definizione)*

Gettys

Capitolo 8

Teorema dell'energia cinetica

(o energia-lavoro o "delle forze vive")

Il ***lavoro totale*** compiuto su un corpo è uguale alla ***variazione dell'energia cinetica*** del corpo stesso.

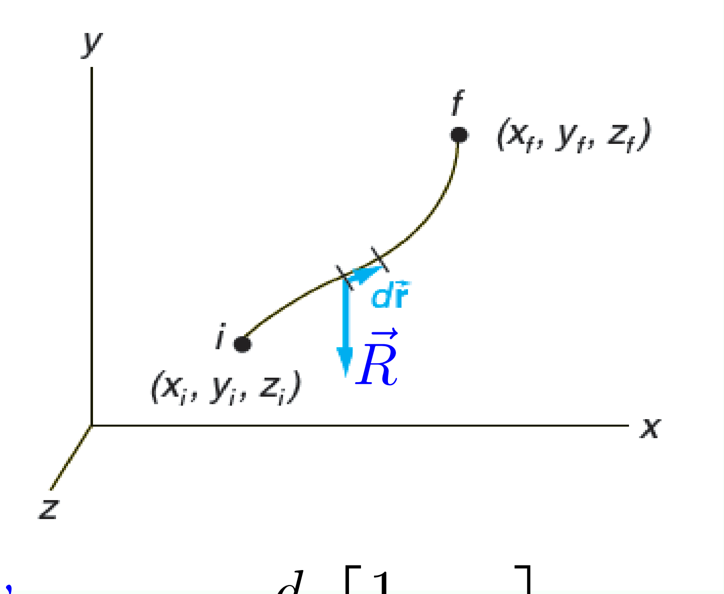
Per lavoro totale si intende quello fatto dalla risultante delle forze applicate, oppure dalla somma dei lavori delle singole forze (vale la proprietà distributiva)

$$L_{\mathrm{TOT}} = \sum_i L_i = \sum_i \int \vec{F}_i \cdot d\vec{s} = \int \vec{R} \cdot d\vec{s} \qquad \left(\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i\right)$$

$$\boxed{L_{\mathrm{TOT}} = \Delta K} = K_f - K_i = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2)$$

Teorema dell'energia cinetica

Calcoliamo esplicitamente il lavoro lungo una traiettoria, dal punto $\vec{r}_i$ al punto $\vec{r}_f$. Occorre scomporlo in una somma di lavori calcolati su spostamenti infinitesimi $d\vec{r}$, quindi sommarli:



$$L_{\mathrm{TOT}} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \left(\sum_n \vec{F}_n \right) \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} m\vec{a} \cdot d\vec{r}$$

Dimostiamo ora il teorema dell'energia cinetica.

$$\vec{a} \cdot d\vec{r} = a_x\, dx + a_y\, dy + a_z\, dz$$

considerando termine per termine: $$m\, a_x\, dx = m \frac{dv_x}{dt}\, v_x\, dt = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} m v_x^2\right] dt$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} m v^2\right] dt = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)\right] dt = m\, \vec{a} \cdot d\vec{r}$$

$$\boxed{L_{\mathrm{TOT}} =} \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} m\, \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_i^f \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} m v^2\right] dt = \tfrac{1}{2}\left(m v_f^2 - m v_i^2\right) \boxed{= \Delta K}$$

Lavoro ed Energia

- *Lavoro (definizione)*
  - → *esempi*
  - → *lavoro svolto da una molla*
- *Energia (definizione)*
  - → *teorema dell'energia cinetica*
  - → *esempi*
- *Potenza (definizione)*

Gettys

Capitolo 8

Teorema dell'energia cinetica

$$\boxed{L_{\mathrm{TOT}} = \Delta K} = K_f - K_i = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2)$$

Esempi:

1) Moto circolare uniforme: $L = 0 \;\Rightarrow\; \Delta K = 0 \;\Rightarrow |v_f| = |v_i|$

→ la velocità è costante in modulo

$$L_{\mathrm{TOT}} = \int \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{s} = \int -\frac{mv^2}{r}\hat{u}_r \cdot d\vec{s} = \int -\frac{mv^2\,ds}{r}\hat{u}_r \cdot \hat{u}_t = 0$$

---

2) Forza costante applicata ad una massa in una dimensione: $F = ma$

$$L = F\,\Delta x = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2$$

$$\Rightarrow\; ma(x_f - x_i) = \frac{m}{2}(2a)(x_f - x_i) = \frac{m}{2}(v_f^2 - v_i^2) = L$$

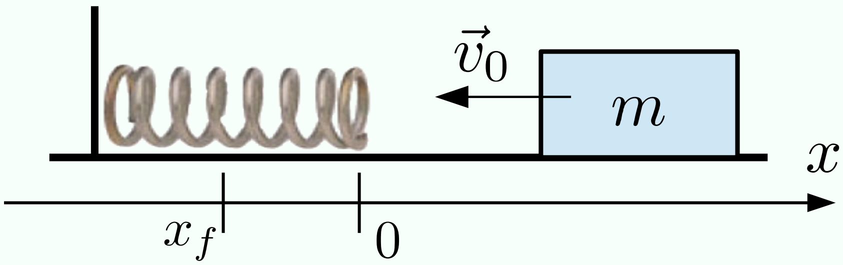
qui abbiamo usato il fatto che: $v(t)^2 = v_i^2 + 2a\left[x(t) - x_i\right]$

Esempi:

3) Un corpo lanciato contro una molla. Di quanto si comprime la molla?

$$\begin{cases} \Delta K = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 \\ L_{\text{molla}} = -\frac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2) = -\frac{1}{2}k(x_f^2) \end{cases}$$

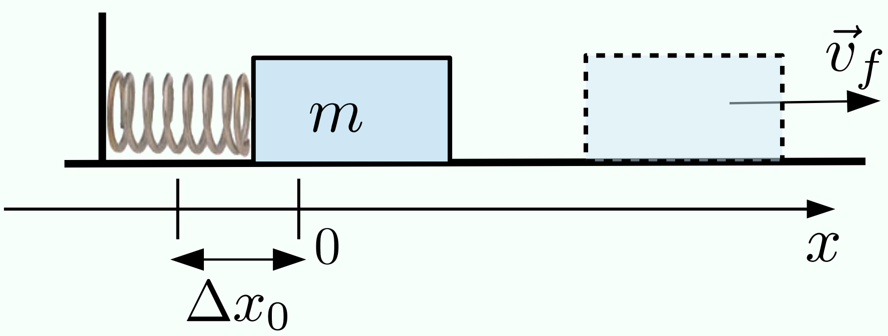
$$\Rightarrow \boxed{x_f = \sqrt{\frac{m}{k}}v_0}$$



4) Se invece il corpo è lasciato in quiete ma appoggiato a molla compressa, con che velocità ne esce?

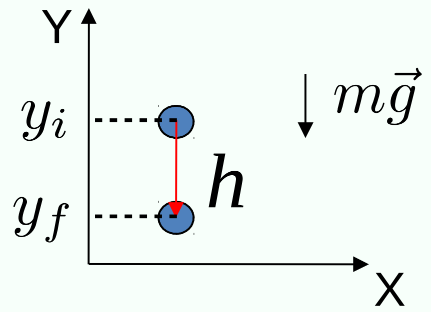
$$\begin{cases} \Delta K = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 \\ L_{\text{molla}} = -\frac{1}{2}k(0 - \Delta x_0^2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_f = \sqrt{\frac{k}{m}}\Delta x_0}$$



Esempi:

4) Caduta di un grave da y_i a y_f.



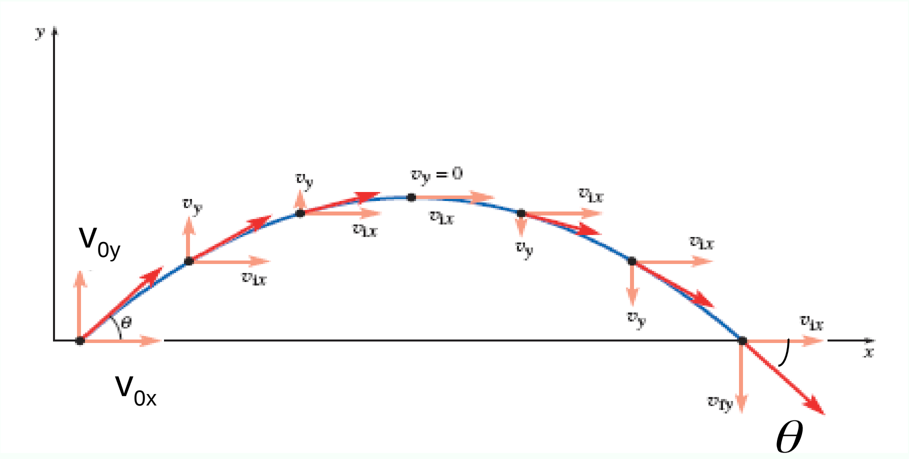
$$L_{\text{peso}} = -mg(y_f - y_i) = \Delta K = \tfrac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2)$$

$$\text{Se } v_i = 0 \;\Rightarrow\; mgh = \tfrac{1}{2}mv_f^2 \;\Rightarrow\; \boxed{v_f = \sqrt{2gh}}$$

5) Moto parabolico sotto l'azione della forza peso

$$L_{\text{peso}} = -mg(y_f - y_i) = -mgy$$

$$\Delta K = \tfrac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) = \frac{m}{2}(v_y^2 - v_0^2 \sin^2\theta)$$



Si trovano relazioni interessanti fra la componente y e la quota:

$$v_i^2 = v_0^2; \quad \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\theta \\ v_{0y} = v_0 \sin\theta \end{cases} ; \qquad v^2 = v_x^2 + v_y^2 = (v_0 \cos\theta)^2 + v_y^2$$

$$L_{\text{peso}} = \Delta K \Rightarrow -mgy = \frac{m}{2}[v_y^2 - (v_0 \sin\theta)^2] \;\Rightarrow\; \boxed{v_y^2 = (v_0 \sin\theta)^2 - 2gy}$$

Lavoro ed Energia

- *Lavoro (definizione)*
  - → *esempi*
  - → *lavoro svolto da una molla*
- *Energia (definizione)*
  - → *teorema dell'energia cinetica*
  - → *esempi*
- *Potenza (definizione)*

Gettys

Capitolo 8

Potenza

Si definisce la ***potenza istantanea*** come il lavoro prodotto nell'unità di tempo:

$$\boxed{P =} \lim_{\Delta t \to 0} \langle P \rangle = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta L}{\Delta t} \boxed{= \frac{dL}{dt}}$$

La potenza media si può esprimere in funzione della velocità del corpo e della forza che compie lavoro, supponendo che l'intervallo di tempo sia sufficientemente piccolo da considerare ***F*** costante:

$$\langle P \rangle = \frac{\vec{F} \cdot \Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

La potenza istantanea è il prodotto scalare fra forza e velocità istantanea:

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \langle P \rangle = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{F} \cdot \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \boxed{= \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

L'unità di misura MKS nel SI della potenza è il ***Watt*** (W): $\boxed{1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}}$

→ Negli apparecchi elettrici si riporta il W o il kW (10^3 W)
→ Invece il kilowattora (kWh) è una misura di energia consumata: 1 kW * 1 h = 3600 kJ