д) $X \stackrel{d}{=} Y$, то $M_X = M_Y$ и обратно!

е) $X \perp\!\!\!\perp Y$, и M_X, M_Y са добре деф. за $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, то $M_{X+Y}(t) =$

$$= \mathbb{E} e^{t(X+Y)} = M_X(t) M_Y(t)$$

$$\mathbb{E} e^{tX} e^{tY} \stackrel{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} \mathbb{E} e^{tX} \mathbb{E} e^{tY}$$

X, Y са непрекъснати с плътност f_X, f_Y

1) $f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x-y) f_Y(y)\, dy$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_{X+Y}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)\, dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_Y(x)\, dx$

ж) $Y = aX + b$, то $M_Y(t) = e^{bt} M_X(at)$ за $\forall t$, стига че $M_X(at)$ е добре дефинирано.

Ако M_X е добре деф. за $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, то $M_X(at)$ е добре деф. за $-\varepsilon < at < \varepsilon$ и следователно $M_Y(t)$ е добре деф за $\frac{-\varepsilon}{|a|} < t < \frac{\varepsilon}{|a|}$

$$M_Y(t) = \mathbb{E} e^{t(aX+b)} = \mathbb{E} e^{bt} e^{taX} = e^{bt} \mathbb{E} e^{atX} = e^{bt} M_X(at)$$

<u>Твърдение</u> $X \in N(\mu, \sigma^2)$, то $\forall t \in \mathbb{R}$, $M_X(t) = e^{\mu t} e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

$\boxed{\text{Док}}$ $X = \mu + \sigma Z$, където $Z \in N(0,1)$

$$M_Z(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-x^2/2} dx = \frac{e^{t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-1/2 (x-t)^2} dx \stackrel{\substack{dx = dy \\ x - t = y}}{=}$$

$$= e^{t^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy = e^{t^2/2}$$