Оценката Ви ще е равна на 2 + броя точки, които получите. Време за работа: 3 часа. Успех.

Ще считаме, че навсякъде работим върху вероятностно пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *Да припомним, че за* $A \subset \Omega$ *бележим* $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

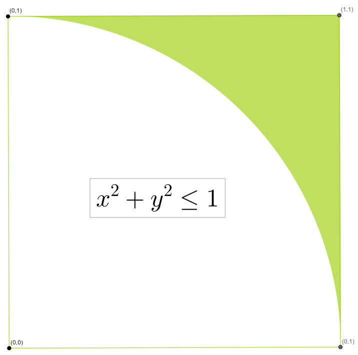
Задача 1. (1т) Три зара се хвърлят едновременно 5 пъти. Каква е вероятността броят на хвърлянията, при които се падат само нечетни точки да бъде четен? Да се намери средната стойност на този брой.

• Нека X ="броят хвърляния, при които се падат само нечетни точки". Тъй като вероятността да се паднат само нечетни при едно хвърляне на трите зара е $(1/2)^3$, то $X \sim Bin(5, 1/8)$. В такъв случай

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \text{ е четно }) &= \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=4) \\ &= \binom{5}{0}\left(\frac{1}{8}\right)^0\left(\frac{7}{8}\right)^5 + \binom{5}{2}\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\frac{7}{8}\right)^3 + \binom{5}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^4\left(\frac{7}{8}\right)^1 \\ &\approx 0.619\,.\end{aligned}$$

Стандартно, $\mathbb{E}X = 5 \cdot 1/8 = 0.625$ и $DX = 5 \cdot 1/8 \cdot 7/8 \approx 0.547$.

Задача 2. (0.8 т.) По случаен начин се избират две числа в интервала $[0, 1]$. Каква е вероятността сумата от квадратите им да бъде по-голяма от 1?



Отговор: $1 - \pi/4 \approx 0.215$.

Задача 3. (1 т.) На състезание участват 25 отбора: 8 отбора в категория джипове, 10 в камиони и 7 в мотоциклети. Джиповете завършват състезанието с вероятност 0.9, камионите - с 0.7, а моторите - с 0.6. След състезанието на случаен принцип се избират три отбора от участващите. Известно е, че един от избраните три отбора е завършил състезанието, а другите два - не са. Каква е вероятността избраните три отбора да са от различни категории?

• Нека $A = \{$един от избраните три отбора е завършил, а другите два - не$\}$. Ще пишем K за камион, J за джип и M за мотоциклет. Дефинираме хипотезите $H_{ijk} = \{$избрани са {i,j,k} $\}$ (те са $\binom{3+3-1}{2} = 10$

на брой. Защо?). С тези нотации, търсим $\mathbb{P}(H_{KJP}|A)$, като знаем

$$\mathbb{P}(A|H_{KKK}) = 3 \cdot (0.3)^2 \cdot (0.7) = 0.189; \qquad \mathbb{P}(H_{KKK}) = \frac{\binom{10}{3}}{\binom{25}{3}} = \frac{6}{115};$$

$$\mathbb{P}(A|H_{JJJ}) = 3 \cdot (0.1)^2 \cdot (0.9) = 0.027; \qquad \mathbb{P}(H_{JJJ}) = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{25}{3}} = \frac{14}{575};$$

$$\mathbb{P}(A|H_{MMM}) = 3 \cdot (0.4)^2 \cdot (0.6) = 0.288; \qquad \mathbb{P}(H_{MMM}) = \frac{\binom{7}{3}}{\binom{25}{3}} = \frac{7}{460};$$

$$\mathbb{P}(A|H_{KKJ}) = 2 \cdot (0.7) \cdot (0.3) \cdot (0.1) + (0.3)^2 \cdot (0.9) = 0.123; \qquad \mathbb{P}(H_{KKJ}) = \frac{\binom{10}{2}\binom{8}{1}}{\binom{25}{3}} = \frac{18}{115};$$

$$\mathbb{P}(A|H_{KKM}) = 2 \cdot (0.7) \cdot (0.3) \cdot (0.4) + (0.3)^2 \cdot (0.6) = 0.222; \qquad \mathbb{P}(H_{KKM}) = \frac{\binom{10}{2}\binom{7}{1}}{\binom{25}{3}} = \frac{63}{460};$$

$$\mathbb{P}(A|H_{JJK}) = 2 \cdot (0.9) \cdot (0.1) \cdot (0.3) + (0.1)^2 \cdot (0.7) = 0.061; \qquad \mathbb{P}(H_{JJK}) = \frac{\binom{8}{2}\binom{10}{1}}{\binom{25}{3}} = \frac{14}{115};$$

$$\mathbb{P}(A|H_{JJM}) = 2 \cdot (0.9) \cdot (0.1) \cdot (0.4) + (0.1)^2 \cdot (0.6) = 0.078; \qquad \mathbb{P}(H_{JJM}) = \frac{\binom{8}{2}\binom{7}{1}}{\binom{25}{3}} = \frac{49}{575};$$

$$\mathbb{P}(A|H_{MMK}) = 2 \cdot (0.6) \cdot (0.4) \cdot (0.3) + (0.4)^2 \cdot (0.7) = 0.256; \qquad \mathbb{P}(H_{MMK}) = \frac{\binom{7}{2}\binom{10}{1}}{\binom{25}{3}} = \frac{21}{230};$$

$$\mathbb{P}(A|H_{MMJ}) = 2 \cdot (0.6) \cdot (0.4) \cdot (0.1) + (0.4)^2 \cdot (0.9) = 0.192; \qquad \mathbb{P}(H_{MMJ}) = \frac{\binom{7}{2}\binom{8}{1}}{\binom{25}{3}} = \frac{42}{575};$$

$$\mathbb{P}(A|H_{KJM}) = (0.7) \cdot (0.1) \cdot (0.4) + (0.3) \cdot (0.9) \cdot (0.4) + (0.3) \cdot (0.1) \cdot (0.6) = 0.154; \quad \mathbb{P}(H_{KJM}) = \frac{\binom{10}{1}\binom{8}{1}\binom{7}{1}}{\binom{25}{3}} = \frac{28}{115}.$$

По формулата на Бейс, замествайки получените по-горе стойности, получаваме

$$\mathbb{P}(H_{KJP}|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_{KJM})\mathbb{P}(H_{KJM})}{\sum_{i,j,k}\mathbb{P}(A|H_{ijk})\mathbb{P}(H_{ijk})} = \frac{0.154 \cdot \frac{28}{115}}{\sum_{i,j,k}\mathbb{P}(A|H_{ijk})\mathbb{P}(H_{ijk})} \approx 0.244\,.$$

Задача 4. (1.2 т.)

1. (0.4 т.) Нека $A, B \subset \Omega$ са събития. Припомнете кога наричаме A и B независими. Докажете, че ако A и B са независими, то $\overline{A}$ и B също са независими.

   • A и B се наричат независими, ако $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Ако това е вярно, тъй като $B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$, то

   $$\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(A)) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(\overline{A}),,$$

   което доказва исканото.

2. (0.4 т.) Нека $n > 1$ е естествено число и $A_1, \ldots, A_n$ са събития. Да припомним, че наричаме $A_1, \ldots, A_n$ независими в съвкупност, ако за всяко $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$

   $$\mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2}) \ldots \mathbb{P}(A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k})\,. \tag{1}$$

   Докажете, че ако $A_1, \ldots, A_n$ са независими в съвкупност, то $\overline{A_1}, \ldots, \overline{A_n}$ също са независими в съвкупност.

   • Възможно е решение по индукция или директно с формулата за включване и изключване. Ще представим друго такова: ще докажем, че ако $A_1, \ldots, A_n$ са независими в съвкупност, то $A_1, \ldots, A_{n-1}, \overline{A_n}$ също са независими в съвкупност. Резултатът от условието ще следва като приложим n пъти горния. Ще проверим дефиницията (1) за множествата $A_1, \ldots, A_{n-1}, \overline{A_n}$. Да изберем $I := \{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$. Ако $n \notin I$, то (1) е изпълнено от независимостта на $A_1, \ldots, A_{n-1}$. В противен случай, Б.О.О. $i_1 = n$. Тогава

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{A_n} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) &= \mathbb{P}(A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) - \mathbb{P}(A_n \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \\ &= \mathbb{P}(A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k})(1 - \mathbb{P}(A_n)) \\ &= \mathbb{P}(A_{i_2}) \ldots \mathbb{P}(A_{i_k})\mathbb{P}(\overline{A_n})\,,\end{aligned}$$

   което искахме да докажем.

3. (0.4 т.) Нека X е случайна величина, която приема стойности в $\mathbb{N}$ и за $n \in \mathbb{N}$, $p_n := \mathbb{P}(X = n)$. Дефинирайте очакването $\mathbb{E}X$ и дисперсията DX на X. Докажете, че

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq k) = \mathbb{E}X\,. \tag{2}$$

- $$\mathbb{E}X = \sum_{n=1}^{\infty} np_n; \quad DX = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(n - \mathbb{E}X)^2 p_n\,.$$

За формално доказателство на (2), може да разменим реда на сумиране, т.е. да използваме дискретния вариант на теоремата на Фубини

$$\mathbb{E}X = \sum_{n=1}^{\infty} np_n = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} p_n = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty} p_n = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq k)\,.$$

Това е формализиране на идеята, която трябваше да забележите:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq 1) &= p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + \dots \\
\mathbb{P}(X \geq 2) &= p_2 + p_3 + p_4 + \dots \\
\mathbb{P}(X \geq 3) &= p_3 + p_4 + \dots \\
\mathbb{P}(X \geq 4) &= p_4 + \dots\,,
\end{aligned}$$

откъдето може да видите защо $\mathbb{P}(X \geq 1) + \mathbb{P}(X \geq 2) + \cdots = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \cdots = \mathbb{E}X$. Можете (при желание) да проверите коректността на горното като упражнение по ДИС.