Оценката Ви ще е равна на 2 + броя точки, които получите. Време за работа: 3 часа. Успех.
Ще считаме, че навсякъде работим върху вероятностно пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Задача 1. (1 т.) Урна съдържа топки с номера от 1 до 10 включително. От нея се вадят 3 топки без връщане. Да дефинираме събитията, свързани с извадените топки:

1. $A =$"най-големият номер е 6";
2. $B =$"има поне две топки с четен номер";
3. $C =$"сумата от номерата се дели на 3".

Да се определят вероятностите на горните събития и има ли независими между тях. На колко е равно $\mathbb{P}(A|B)$? Колко е очакваният брой на изтеглените четни номера, ако тегленето е с връщане?

•
Нека $c = \binom{10}{3} = 120$. Тогава

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{5}{2}}{c} = \frac{1}{12}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{\binom{5}{3} + 5\binom{5}{2}}{c} = \frac{1}{2}\,.$$

За $\mathbb{P}(C)$, може или да изброите директно комбинациите, или да забележите, че възможните комбинации по $\mod 3$ са три равни числа или $0 + 1 + 2$. Следователно

$$\mathbb{P}(C) = \frac{3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot \binom{3}{3} + \binom{4}{3}}{c} = \frac{7}{20}\,.$$

Пресмятаме/изброяваме директно

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{\binom{2}{2} + \binom{3}{1} \cdot 2}{c} = \frac{7}{120}, \mathbb{P}(A \cap C) = \frac{3}{120}, \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{21}{120}\,.$$

Независими няма, а

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{7}{60}\,.$$

Ако топките се връщат, изтеглените топки с четни номера следват закона $Bin(3, 1/2)$ и следователно търсеното очакване е $3/2$.

Задача 2. (1 т.) Два инструмента се използват за измерването на прахови частици във въздуха. Да допуснем, че реалното количество е $x\ g/m^3$. В такъв случай, първият дава показание, което е с нормално разпределение със средно x и стандартно отклонение (σ) $0.05x$, а резултатът от втория също е с нормално разпределение със средно x, но със стандартно отклонение $0.1x$. Кой апарат бихте използвали? Колко е вероятността за всеки от апаратите да допусне грешка, която е повече от $0.1x$?

Човек решава да използва средното аритметично от двата апарата. Ако измерванията им са независими, каква е вероятността за грешка над $0.1x$ при тази процедура?

• За предпочитане е апаратът с по-малка дисперсия. Нека измерванията на първия и втория апарат са съответно $\xi_1 \sim N(x, (0.05x)^2)$ и $\xi_2 \sim N(x, (0.1x)^2$. Тогава търсените вероятности са равни на

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|\xi_1 - x| > 0.1x) &= \mathbb{P}(\xi_1 < 0.9x) + \mathbb{P}(\xi_1 > 1.1x) = 2\mathbb{P}(\xi_1 < 0.9x)\\ &= 2\mathbb{P}\left(N(0,1) < \frac{0.9x - x}{0.1x}\right) = 2\mathbb{P}(N(0,1) < -1)\\ &\approx 0.3174\,.\end{aligned}$$

и аналогично

$$\mathbb{P}(|\xi_2 - x| > 0.1x) = 2\mathbb{P}(N(0,1) < -2) \approx 0.0456\,.$$

Ако дефинираме $\xi_3 = 1/2(\xi_1 + \xi_2)$, то $\xi_3 \sim N(x, 1/4(0.05^2 + 0.1^2)x^2)$ и

$$\mathbb{P}(|\xi_3 - x| > 0.1x) = 2\mathbb{P}\left(N(0,1) < \frac{-0.1x}{\sqrt{1/4(0.05^2 + 0.1^2)x^2}}\right) \approx 2\mathbb{P}(N(0,1) < -1.79) \approx 0.0734\,.$$

Задача 3. (1 т.) Нека ξ и η са независими случайни величини, $\xi \sim Exp(2)$ и $\eta \sim U(0, 3)$, т.е.

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{,ако } x > 0 \\ 0 & \text{,иначе} \end{cases}; \quad f_\eta(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{,ако } 0 < x < 3 \\ 0 & \text{,иначе.} \end{cases}$$

Намерете корелация на ξ и η, $P(\xi < \eta)$ и плътността на ξ/η.

•

Корелацията е 0, т.к. ξ и η са независими. Разглеждайки $0 < \eta < 3$ и $0 < \xi < \eta$, получаваме

$$\mathbb{P}(\xi < \eta) = \int_0^3 \int_0^y 2e^{-2x} \cdot \frac{1}{3} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \frac{1}{6}\left(5 + \frac{1}{e^6}\right) \approx 0.8334\,.$$

да отбележим, че от независимостта, $f_{\xi,\eta}(x, y) = 2/3 \cdot e^{-2x}\mathbb{1}_{x>0,0<y<3}$. Дефинираме $X = \xi/\eta$ и $Y = \eta$. Тогава обратната трансформация е $\xi = XY$ и $\eta = Y$ и якобианът ѝ е равен на Y. Следователно

$$f_{X,Y}(x, y) = yf_{\xi,\eta}(xy, y) = y\frac{2}{3}e^{-2xy}\mathbb{1}_{xy>0,0<y<3}\,.$$

Следователно за $x > 0$

$$f_X(x) = \int_{\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\,\mathrm{d}y = \frac{2}{3}\int_0^3 ye^{-2xy}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{6x^2}\int_0^3 -2xy \cdot e^{-2xy}\,\mathrm{d}(-2xy)$$
$$= \frac{1}{6x^2}\int_0^{-6x} t \cdot e^t\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-6x}(-6x - 1) + 1}{6x^2}\,,$$

което и търсехме. Възможно е чрез последния резултат да пресметнете по друг начин и търсената по-рано вероятност:

$$\mathbb{P}(\xi < \eta) = \mathbb{P}\left(\frac{\xi}{\eta} < 1\right) = \int_0^1 f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{e^{-6x}(-6x - 1) + 1}{6x^2}\,\mathrm{d}x$$

Задача 4. (1 т.) Нека ξ и η са случайни величини със съвместна плътност

$$f_{\xi,\eta}(x, y) = \begin{cases} cx^3y^2 & \text{,ако } 0 < x, y < 2 \\ 0 & \text{,иначе.} \end{cases}$$

Намерете константата c, корелацията на ξ и η, както и $\mathbb{E}(\xi|\eta = 1)$.

•

$$1 = c\int_0^2 \int_0^2 x^3y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = c\frac{32}{3}\,.$$

Следователно $c = 3/32 = 0.09735$. За $x \in (0, 2)$

$$f_\xi(x) = \int_0^2 cx^3y^2\,\mathrm{d}y = cx^3\frac{8}{3} = \frac{1}{4}x^3\,.$$

Следователно

$$\mathbb{E}\xi = \frac{1}{4}\int_0^2 x^4\,\mathrm{d}x = \frac{8}{5} = 1.6, \quad D\xi = \frac{1}{4}\int_0^2 x^5\,\mathrm{d}x - \frac{64}{25} = \frac{8}{75} \approx 0.1067\,.$$

Аналогично, за $y \in (0, 2)$

$$f_\eta(y) = c\int_0^2 x^3y^2\,\mathrm{d}x = \frac{3}{8}y^2\,,$$

$$\mathbb{E}\eta = \frac{3}{8}\int_0^2 y^3\,\mathrm{d}y = \frac{3}{2} = 1.5, \quad D\eta = \frac{3}{8}\int_0^2 y^4\,\mathrm{d}y - \frac{9}{4} = \frac{3}{20} = 0.15\,.$$

След това

$$\mathbb{E}\xi\eta = \frac{3}{32}\int_0^2 \int_0^2 xy(x^3y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{12}{5} = 2.4$$

Следователно

$$Cor(\xi, \eta) = \frac{\mathbb{E}\xi\eta - \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta}{\sqrt{D\xi D\eta}} = 0\,.$$

За последния въпрос

$$\mathbb{E}(\xi|\eta = 0.5) = \int_0^2 xf_{\xi|\eta}(x|y = 1)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 x\frac{f_{\xi,\eta}(x, 1)}{f_\eta(1)}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 x\frac{x^3}{4}\,\mathrm{d}x = \frac{8}{5} = 1.6\,.$$