Функция на моментите (ФМ)

Дефиниция Нека X е сл.вел. Ако $\mathbb{E}e^{tX}$ същ. за $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ за някое $\varepsilon > 0$, то $M_X(t) = \mathbb{E}e^{tX}$ за $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ се нарича ФМ

$\oplus$ $\mathbb{E}e^{tX} = \sum e^{tx_i} \mathbb{P}(X = x_i)$ $\qquad x_i = i$

$\mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{i^2}$

$$\mathbb{E}e^{tX} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx$$

$X \sim U(0,1)$

$$M_X(t) = \mathbb{E}e^{tX} = \int_0^1 e^{tx} dx = \frac{e^t - 1}{t}$$ е добре деф $\forall t \in \mathbb{R}$

Дефиниция X е сл.вел. Тогава
а) $\mathbb{E}X^k$ се нарича момент от ред $k \geq 1$
б) $\mathbb{E}|X|^k$ се нарича абсолютен момент от ред k
в) $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^k$ се нарича централен момент от ред k.
$\mathbb{D}X = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$
г) $\mathbb{E}|X - \mathbb{E}X|^k$ се нарича абсолютен централен момент от ред k

Свойства на M_X. Ще допускаме, че $M_X(t)$ е добре дефиниран и $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

а) $M_X(0) = \mathbb{E}e^{0X} = \mathbb{E}1 = 1$

б) $\frac{d}{dt^k} M_X(t) \Big|_{t=0} = \mathbb{E}X^k$ за $\forall k \geq 1$

в) $M_X(t) = \mathbb{E}e^{tX} = \mathbb{E} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} X^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbb{E}X^k$

г) Ако $M_{X_n}(t) \xrightarrow[n \to \infty]{} M_X(t)$ за $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, където $(X_n)_n$ е редица от сл.вел., то $X_n \xrightarrow[n \to \infty]{d} X$