Изпит по СЕМ

03.02.2021

Време за работа 150 минути

Общият брой точки е 73 плюс 7 бонус точки

*При работата върху проблемите може да реферирате към теореми и твърдения, които ви помагат за извеждането на някоя стъпка. Всички части на въпрос, предхождани от •, се решават от всички. За някои въпроси се изчислява индивидуален параметър M и ако $M = x$, решавайте само тези части, предхождани от **(x)** в допълнение на частите, предхождани от •. За всяка задача записвате изчислението на M и факултетния си номер. Пример: изчислявате за конкретна задача $M = 1$ и решавате за тази задача частите с **(1)** и •. При някои задачи се изчислява параметър N, но зависимостта от него е числова и се отразява в конкретна подзадача, която се решава от всички и изчислението на N се прилага.*

Въпрос 1. Използвайки наготово останалите компоненти на вероятностното пространство:

- дефинирайте вероятностната функция $\mathbb{P}$; (***2 точки***)
- докажете, че $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)$. (***2 точки***)

Proof. Дефиницията я има в лекциите. Знаем, че $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$. Поставяйки, $D = A \cup B$, то

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbb{P}(D \cup C) \leq \mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(C) \\ &\leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)\end{aligned}$$

□

Въпрос 2. За всеки две събития A, B дефинираме $A\Delta B = A \cap B^c \bigcup A^c \cap B$, където ^{c} е операцията допълнение и въвеждаме индикаторната функция 1_D за произволно събитие D.

Нека $M = \Phi \bmod 2$, където Φ е <u>последната</u> цифра на вашия факултетен номер.

(0) Изразете $1_{(A\Delta B)\Delta C}$ чрез индикаторните функции $1_A, 1_B, 1_C$.***(5 точки)***

(1) Докажете, че $\mathbb{P}(A\Delta B) \leq \mathbb{P}(A\Delta C) + \mathbb{P}(B\Delta C)$.***(5 точки)***

Proof. Отбелязваме, че $A\Delta B = A \cup B \setminus A \cap B$ и следователно

$$1_{A\Delta B} = 1_{A\cup B} - 1_{A\cap B} = 1_A + 1_B - 1_A 1_B - 1_A 1_B = 1_A + 1_B - 2 1_A 1_B.$$

Следователно, поставяйки $D = A\Delta B$, е вярно, че

$$\begin{aligned}1_{(A\Delta B)\Delta C} &= 1_D + 1_C - 2 1_D 1_B \\ &= 1_A + 1_B - 2 1_A 1_B + 1_C - 2(1_A + 1_B - 2 1_A 1_B) 1_B\end{aligned}$$

и остава да отворите скобите за първата задача. За втората ще докажем, че

$$1_{A\Delta B} \leq 1_{A\Delta C} + 1_{B\Delta C}. \tag{0.1}$$

Благодарение на равенството горе трябва да покажем, че

$$1_A + 1_B - 2 1_A 1_B \leq 1_A + 1_C - 2 1_A 1_C + 1_C + 1_B - 2 1_C 1_B$$

или съкращавайки имаме, че трябва да покажем, че

$$1_A 1_C + 1_C 1_B \leq 1_C + 1_A 1_B$$

Ако $\omega \notin A \cup B$, то $0 \leq 1_C(\omega)$. Ако $\omega \in A \cap B$, то е в сила $21_C(\omega) \leq 1_C(\omega) + 1$ или $1_C(\omega) \leq 1$. Проверете останалия случай, когато ω е само в едно от двете множества A, B. Понеже (0.1) е вярно, то можем да вземем очакване от двете му страни и от линейността и монотоността на очакването да получим желаното неравенство. $\square$

Въпрос 3. ***Нека*** $M = \Phi \bmod 2$***, където*** Φ ***е <u>предпоследната</u> цифра на вашия факултетен номер.***

(0) Докажете, че
$$\mathbb{P}(A|B) \geq \frac{\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1}{\mathbb{P}(B)}.\textbf{\textit{(3 точки)}}$$

(1) Докажете, че ако $\mathbb{P}(A|C) > \mathbb{P}(B|C)$ и $\mathbb{P}(A|C^c) > \mathbb{P}(B|C^c)$, то
$$\mathbb{P}(A) > \mathbb{P}(B).\textbf{\textit{(3 точки)}}$$

Proof. Първото неравенство се редуцира до

$$\mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$$

и това е изпълнено понеже

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B).$$

Второто неравенство следва от

$$\mathbb{P}(A|C) > \mathbb{P}(B|C) \iff \mathbb{P}(A \cap C) > \mathbb{P}(B \cap C); \quad \mathbb{P}(A|C^c) > \mathbb{P}(B|C^c) \iff \mathbb{P}(A \cap C^c) > \mathbb{P}(B \cap C^c)$$

и сумиране на второто и четвъртото неравенство. $\square$

Въпрос 4. Тестват се за Ковид n души по следната процедура: пробите се събират заедно и ако тестът е отрицателен, всички се декларират здрави, а ако е положителен, всеки се тества отново с индивидуален тест. В популацията има 4 кръвни групи (КГ$_i$, $i = 1, 2, 3, 4$) с равна представителност от $1/4$. Сред КГ$_1$ има 10% заразени, сред КГ$_2$ има 1% заразени, сред КГ$_3$ има 5% заразени и сред КГ$_4$ има 4% заразени. Всеки от $n-$те тествани индивида се допуска, че е с кръвна група, независима от тази на всички останали $n - 1$ души и падаща се с вероятността на представителността на кръвната група в популацията.
Нека $N = \Phi \bmod 3$***, където*** Φ ***е <u>последната</u> цифра на вашия факултетен номер.*** Цената на общия тест е 1 лев, а цената на всеки повторен, индивидуален тест е $1 + 0.1 \times N$.

- Съставете модел, който отразява очакваната цена $\mathcal{P}(n)$ на един тестван по тази процедура човек.***(5 точки)***
- Третирайки n като непрекъсната променлива x, изведете уравнение за x (без да го решавате), което ви задава x^*, такова че $\mathcal{P}(x^*) = \min_{x>0}\{\mathcal{P}(x)\}$.***(2 точки)***
- Ако имате време, намерете с помощта на компютър за кое n^* се получава минимална единична цена и нейната стойност.(***3 бонус точки***)

Proof. Тази задача е решавана на лекции. Само трябва да определите вероятността някой да е заразен. Имаме

$$\mathbb{P}\left(infected\right) = \sum_{i=1}^{4} \mathbb{P}\left(infected \cap KG_i\right) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} \mathbb{P}\left(infected | KG_i\right) = 0.05.$$

Следователно средната цена за един човек е

$$\mathcal{P}(n) = \frac{1}{n}\left(0.95^n + (1 + (1 + 0.1 \times N)n)(1 - 0.95^n)\right).$$

□

Въпрос 5. Нека X е случайна величина, приемаща стойности в $\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$. Нека $H_X(\lambda) = \mathbb{E}\left[e^{-\lambda X}\right]$ за $\lambda \geq 0$. Тогава:

- покажете, че $H_X(\lambda) \leq 1$ и чрез формално диференциране по λ под знака на очакването, изразете $\mathbb{E}\left[X\right]$ и $\mathbb{E}\left[X^2\right]$;***(3 точки)***
- изразете пораждащата функция на X, т.е. s_X, чрез H_X.***(2 точки)***

Нека $M = \Phi \,\mathrm{mod} 2$***, където*** Φ ***е сумата на последните две цифри на вашия факултетен номер.***

(0) За $X \sim Bi(n, p)$ намерете $H_X(\lambda)$ и чрез нея намерете $\mathbb{E}\left[X\right], \mathbb{E}\left[X^2\right]$.***(5 точки)***
(1) За $X \sim Po(\mu)$ намерете $H_X(\lambda)$ и чрез нея намерете $\mathbb{E}\left[X\right], \mathbb{E}\left[X^2\right]$.***(5 точки)***

Proof. Понеже X е неотрицателна случайна величина, то $e^{-\lambda X} \leq 1$ и от монотонност на очакването следва, че

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda X}\right] \leq \mathbb{E}\left[1\right] = 1.$$

Вземаме производни по λ и получаваме

$$\frac{d}{d\lambda}\mathbb{E}\left[e^{-\lambda X}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{d}{d\lambda}e^{-\lambda X}\right] = -\mathbb{E}\left[Xe^{-\lambda X}\right].$$

Като поставите $\lambda = 0$ имате

$$H_X'(0) = -\mathbb{E}\left[X\right].$$

Упраженете вземането на още една производна за втория момент. Забележете, че $h = e^{-\lambda} < 1$ и следователно

$$s_X(h) = \mathbb{E}\left[h^X\right] = \mathbb{E}\left[e^{-\lambda X}\right] = H_X(\lambda) \implies s_X(e^{-\lambda}) = H_X(\lambda).$$

За биномното $X = \sum_{j=1}^{n} X_j$ и понеже са независими

$$H_X(\lambda) = \mathbb{E}\left[e^{-\lambda X}\right] = \mathbb{E}\left[e^{-\lambda \sum_{j=1}^{n} X_j}\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^{n} e^{-\lambda X_j}\right] = \prod_{j=1}^{n}\mathbb{E}\left[e^{-\lambda X_j}\right] = \left(\mathbb{E}\left[e^{-\lambda X_1}\right]\right)^n.$$

Също така $\mathbb{E}\left[e^{-\lambda X_1}\right] = q + pe^{-\lambda}$. Упражнете за Поасоновото. □

Въпрос 6. Нека $\xi \in U(0, 2), \eta \in U(0, 1)$.

- Намерете $\mathbb{E}\left[\xi\right], \mathbb{E}\left[\eta\right], \mathbb{E}\left[\xi^2\right], \mathbb{E}\left[\eta^2\right]$.***(3 точки)***

Нека е дадено, че $cov(\xi, \eta) = -\frac{1}{10}$. ***Нека*** $M = \Phi \,\mathrm{mod} 2$***, където*** Φ ***е сумата на последните три цифри на вашия факултетен номер.***

(0) Намерете $D(\xi - 2\eta)$.***(4 точки)***
(1) Намерете $D(\xi - 3\eta)$.***(4 точки)***

Proof. Тази задача е стандартна. Няма да губя време да я пиша. □

Въпрос 7. Работата на централа за конкретен ден зависи от отклонението от очакването на параметър, моделиран със случайна величина X с $\mathbb{E}[X] = 1, DX = 0.01$, т.е. от $Y = |X - 1|$. Поради съществуваща екологична опасност при големи отклонения от средното, регулаторен орган налага глоба от $g(n)$ лева, ако $Y \in (n, n+1], n \geq 2$.

- Намерете горна граница за стойностите на $f(a) = \mathbb{P}(Y > a)$.***(3 точки)***
- Според независими експерти за $g(n) = n^{3/2}$ е вярно, че $\lim_{n\to\infty} g(n)\mathbb{P}(Y \in [n, n+1)) = 0$ и глобите не са достатъчно ефективни. Вярно ли е тяхното твърдение за границата?***(4 точки)***
- Ако X е случайна величина, приемаща стойности в $\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$, докажете, че за всяко $\lambda > 0$

$$\mathbb{P}(X \leq n) \leq \mathbb{E}\left[e^{-\lambda X}\right] e^{\lambda n}.(\textit{4 бонус точки})$$

Proof. От неравенството на Чебишов

$$\mathbb{P}(Y > a) = \mathbb{P}(|X - 1| > a) \leq \frac{DX}{a^2}.$$

Също така $\mathbb{P}(Y \in [n, n+1)) \leq \mathbb{P}(Y \geq n)$ и горната граница също е валидна както за $\mathbb{P}(Y > n)$, така и за $\mathbb{P}(Y \geq n)$, вижте доказателството на неравенството. Следователно

$$\lim_{n\to\infty} g(n)\mathbb{P}(Y \in [n, n+1)) \leq \lim_{n\to\infty} g(n)\mathbb{P}(Y \geq n) \leq \lim_{n\to\infty} g(n)DX/n^2 = 0.$$

□

Въпрос 8. Нека $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ са независими случайни величини с Поасоново разпределение. Следователно имаме за $k \geq 0$

$$\mathbb{P}(X_1 = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Чрез тези случайни величини се моделира процес на раждане чрез $Y_n = (1+X_n)Y_{n-1}, n \geq 1, Y_0 = 1$ и процес на раждане и умиране чрез $Z_n = X_n Z_{n-1}, n \geq 1, Z_0 = 1$.

Нека $M = \Phi \bmod 2$***, където*** Φ ***е*** <u>***последната***</u> ***цифра на вашия факултетен номер.***

- Кога казваме, че редица от сл.вел. ξ_n клони почти сигурно към сл. вел. ξ? ***(2 точки)***

(0) Съществува ли граница на редицата $\frac{1}{n}\log Y_n$ и коя е тя? За какъв тип сходимост става въпрос? Вярно ли е, че $\mathbb{E}[Y_n]$ расте с експоненциална скорост? ***(8 точки)***

(1) Пресметнете $\mathbb{P}(Z_n \neq 0)$ и докажете, че Z_n клони към 0 почти сигурно, т.е. процесът изчезва почти сигурно. Вярно ли е, че $\mathbb{E}[Z_n]$ расте с експоненциална скорост при $\lambda > 1$? ***(8 точки)***

Proof. $Y_n = \prod_{j=1}^n (1 + X_j)$ и следователно

$$\frac{1}{n}\log(Y_n) = \sum_{j=1}^n \log(1 + X_j)$$

Поставяйки $U_j = \log(1 + X_j)$, знаем, че U_j са независими и еднакво разпределени. Вярно е, че

$$\mathbb{E}[U_1] = \mathbb{E}[\log(1 + X_1)] \leq \mathbb{E}[X_1] < \infty,$$

понеже $\log(1+x) \le x$ за неотрицателни стойности на x. Следователно по ЗГЧ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log(Y_n) = \mathbb{E}\left[\log(1+X_1)\right] \text{ почти сигурно.}$$

Също така

$$\mathbb{E}\left[Y_n\right] = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[1+X_j\right] = \left(\mathbb{E}\left[1+X_1\right]\right)^n = (1+\lambda)^n.$$

$Z_n = \prod_{j=1}^{n} X_j$ и събитията

$$\{Z_n = 0\} = \bigcup_{j=1}^{n} \{X_j = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\} = \bigcup_{j=1}^{n+1} \{X_j = 0\}.$$

Нещо повече

$$\{\text{процесът изчезва}\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{Z_j = 0\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{X_j = 0\}.$$

Следователно

$$\mathbb{P}\left(\text{процесът не изчезва}\right) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\{X_j = 0\}\right)^c\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}\{X_j \neq 0\}\right)$$

$$\prod_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(X_j \neq 0\right) = \prod_{j=1}^{\infty}(1-e^{-\lambda}) = 0.$$

Следователно $\lim_{n\to\infty} Z_n = 0$. Нещо повече

$$\mathbb{E}\left[Z_n\right] = \left(\mathbb{E}\left[X_1\right]\right)^n = \lambda^n.$$

□

Въпрос 9. Зар с шест стени се хвърля 3×10^{12} пъти и се образува броя X на падналите се от тези хвърляния единици или тройки. ***Нека*** $N = \Phi \bmod 3$***, където*** Φ ***е предпоследната цифра на вашия факултетен номер.*** Слаб студент трябва да отговори на следните въпроси:

- Каква е вероятността (*приблизително*) за $X > 10^{12}$?
- Каква е вероятността (*приблизително*) за $X > 10^{12} + 10^{1+N}$?
- Каква е вероятността (*приблизително*) за $X > 10^{12} + 10^{7+N}$?

Студентът не знаел какво да прави и отговорял навсякъде 50 на 50 или 1/2. На колко и на кои въпроси е отговорил правилно? Обосновете математически отговора си.***(7 точки)***

Proof. Задачата се решава с ЦГТ. $Z_n = \frac{X-10^{12}}{10^6 a}, a = \sqrt{2/3}$ и приблизително до $N(0,1)$. Следователно

$$\mathbb{P}\left(X > 10^{12}\right) = \mathbb{P}\left(Z_n > 0\right) \sim \mathbb{P}\left(Z > 0\right); \mathbb{P}\left(X > 10^{12} + 10^b\right) = \mathbb{P}\left(Z_n > 10^{b-6}/a\right) \sim \mathbb{P}\left(Z > 10^{b-6}/a\right)$$

и в зависимост от b ще намерите отговора. □

Въпрос 10. Времетраенето на придобит към вирус имунитет се моделира с непрекъсната, експоненциално разпределена случайна величина X с параметър λ, а силата на имунитета се измерва от непрекъсната случайна величина Y с плътност $f_Y(y) = \beta y^{\beta-1}, 0 < y \le 1, \beta > 0$. Нека $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\overrightarrow{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ са n наблюдения върху X, Y.

Нека $M = \Phi \bmod 2$***, където*** Φ ***е сумата на третата и последната цифра на вашия факултетен номер.***

(0) Намерете максимално правдоподобна оценка за λ; намерете оценка по метода на моментите. ***(5 точки)***

(1) Намерете максимално правдоподобна оценка за β и разпишете функцията на правдоподобие. ***(5 точки)***

(0) Състоятелна ли е максимално правдоподобната оценка? ***(3 точки)***

(1) Състоятелна ли е максимално правдоподобната оценка? ***(3 точки)***

Въпрос 11. Ваксина преминава изпитания на фаза 3, като са тествани $n = 10000$ души, от които 9000 са получили имунитет. Допуска се, че получилите имунитет са $X \in Bi(10000, p)$. Как бихте конструирали симетрична критична област за тестването на нулевата хипотеза $H_0 : p = 0.9$ с грешка от първи род $\alpha = 0.01$? Имате ли основания да мислите, че тази критична област е близка до оптималната критична област? ***(5 точки)***