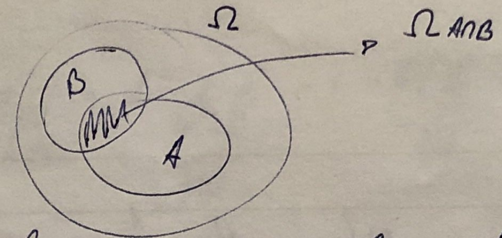
Условна вероятност

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$; $A \in \mathcal{A}$ настъпва



Дефиниция: Нека $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ е вероятностно простр. и $A \in \mathcal{A}$: $\mathbb{P}(A) > 0$. Тогава условна вероятност при условие A наричаме $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}$ $\forall B \in \mathcal{A}$

Новото вер. простр. $(A; \mathcal{A}\cap A, \mathbb{P}_A)$; $\mathcal{A}\cap A = \{B\cap A;\ B \in \mathcal{A}\}$

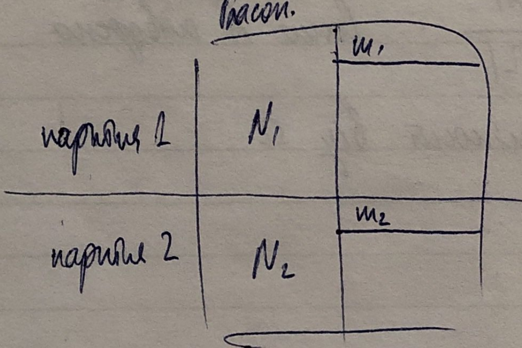
⊕ 6 от 49 ; $B = \{(1,2,3,4,5,6)\}$; $A = \{\omega \in \Omega : 1 \text{ и } 2 \in \omega\}$

шестторки

$B \subseteq A$

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{1/13983816}{\binom{47}{4}\Big/\binom{49}{6}} = \frac{1}{\binom{47}{4}} = \frac{1}{175000}$$

⊕



$A = \{\text{млад}\}$

$B = \{\text{гласувал за П1}\}$

$\frac{N_1}{N_1+N_2}$

$\Downarrow$

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{m_1}{N_1+N_2}}{\frac{m_1+m_2}{N_1+N_2}} = \frac{m_1}{m_1+m_2}$$

Независимост

Дефиниция: Две събития A и B се наричат независими, ако $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)$

(~~Ако Вероятността на A (P(A>0)~~ ~~Ако~~ (Ако $\mathbb{P}(A>0) \Rightarrow \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$)

Дефиниция (Взаимна независимост) $A_1, A_2, \dots, A_n$. Тогава те са независими взаимно, ако $\forall M \subseteq \{1, \dots, n\}$, $M \neq \emptyset$: $\mathbb{P}(\bigcap_{i\in M} A_i) = \prod_{i\in M} \mathbb{P}(A_i)$

Теорема Нека $A_1, A_2, \dots, A_n$ са n събития, такива че $\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) > 0$. Тогава

(*) $\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \mathbb{P}(A_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)\ \mathbb{P}(A_{n-1} | \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \times \dots \times \mathbb{P}(A_2|A_1)\,\mathbb{P}(A_1)$

Док.: По индукция $n=1$ $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_1)$ ✓

Нека (*) е вярно за $n=k$ $\mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{k} A_i) = \mathbb{P}(A_k | \bigcap_{k=1}^{k-1} A_i) \times \dots \times \mathbb{P}(A_2|A_1)\,\mathbb{P}(A)$

Взимаме $n = k+1$. Тогава $\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{k+1} A_i) = \mathbb{P}(A_{k+1} \cap \bigcap_{i=1}^{k} A_i) = \mathbb{P}(A_{k+1}$