Дисперсия

Дефиниция Ако сумата $\sum_j (x_j - \mathbb{E}X)^2 p_j$ е добре дефинирана, то $DX = \sum_j (x_j - \mathbb{E}X)^2 p_j$

X $\qquad\qquad$ Y

$34 < DX = \left(-1 + \frac{1}{37}\right)^2 \cdot \frac{36}{37} + \left(35 + \frac{1}{37}\right)^2 \frac{1}{37}$ $\qquad$ $1 \approx DY = \left(-1 + \frac{1}{37}\right)^2 \frac{19}{37} + \left(1 + \frac{1}{37}\right) \frac{18}{37}$

Дефиниция $\sqrt{DX}$ се нарича стандартно отклонение

⊕ $2N$ фрей игри

$x_j = -1$

вдясно

положение играчите

j, за които $x_j = 1$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{вер. } 1/2 \\ -1 & \text{вер. } 1/2 \end{cases} \qquad 1 \le i \le 2N$$

$Y = \sum_{i=1}^{2N} X_i$ и дясната страна печели ако $Y > 0$

и лявата печели ако $Y < 0$

и равенство $Y = 0$

$\mathbb{E}Y = \mathbb{E}\sum_{i=1}^{2N} X_i = \sum_{i=1}^{2N} \mathbb{E}X_i = \sum 0 = 0$ $\qquad$ $\mathbb{E}X_i = \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 = 0$

$\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1}{2^{2N}} \binom{2N}{N} \approx \frac{const}{\sqrt{N}}$

Твърдение $DX \overset{(1)}{=} \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 \overset{(2)}{=} \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$

Док.) Ако $g(x) = (x - \mathbb{E}X)^2$, то $\mathbb{E}g(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 \overset{деф}{=} \sum_j (x_j - \mathbb{E}X)^2 p_j \overset{деф}{=} DX \Rightarrow$ (1) е док.

$DX = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}\left(X^2 - 2X\mathbb{E}X + (\mathbb{E}X)^2\right) = \mathbb{E}X^2 + \mathbb{E}(-2X\mathbb{E}X) + \mathbb{E}(\mathbb{E}X)^2 =$

$= \mathbb{E}X^2 \cancel{- 2\mathbb{E}X\mathbb{E}X + (\mathbb{E}X)^2} = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$ #

Свойства:

а) $DX \ge 0$ следва от $DX = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 \ge 0$, понеже $(X - \mathbb{E}X)^2 \ge 0$ и $\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 \ge 0$

б) $\mathbb{E}X^2 \ge (\mathbb{E}X)^2$ следва от $DX = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 \ge 0$

в) $X = C$ е константа, то $DX = 0$ следва от $DX = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}(C - C)^2 = 0$

г) $D(cX) = c^2 DX$ следва от $DcX = \mathbb{E}(cX)^2 - (\mathbb{E}cX)^2 = c^2\mathbb{E}X^2 - c^2(\mathbb{E}X)^2 = c^2 DX$