12.11.

СЕМ лекция

⊕ $n \geq 100$ и $np \leq 20$ можем да считаме, че $\mathbb{P}(X_n = k) \approx \mathbb{P}(X = k)$, където $\lambda = np$

$n = 1000$

$p = 0{,}001$

$\tilde{X} \in Bi(1000, \frac{1}{1000})$

$$\binom{1000}{3}\left(\frac{1}{1000}\right)^3\left(\frac{999}{1000}\right)^{997} = \mathbb{P}(\tilde{X} = 3) \approx \frac{1^3}{3!}e^{-1} = \frac{e^{-1}}{3!} \approx \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2{,}717\ldots}$$

$\lambda = np = 1 \leq 20$

Док) $X_n \sim Bi(n, p_n)$. Тогава $g_{X_n}(s) = (1 - p_n + p_n s)^n$. Ако $g_{X_n}(s) \xrightarrow[n\to\infty]{} g_X(s)$

където $g_X(s) = e^{-\lambda}e^{\lambda s}$ ⟶ пораждаща функ ~~за~~ $X \sim Bi(\lambda)$

От $g_{X_n}(s) \xrightarrow[n\to\infty]{} g_X(s) \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad \forall k \geq 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| \; \mathbb{P}(X = k)$

$\lim_n g_{X_n}(s) = \Big(1 - \frac{\lambda}{n} - \frac{\nu_n}{n} + \frac{\lambda}{n}s +$

Е. Хипергеометрично разпределение N обекта, от които M са маркирани

Избират се n обекта и X е броят маркирани измежду тези n.

$X \in HG(N, M, n)$

Твърдение $X \in HG(N, M, n)$. Тогава

а) $$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

~~$0 \leq k \leq n$~~

$\max \_\_\_ \leq k \leq \min(n, M)$

б) $EX = n\frac{M}{N}$; $DX = n\frac{M}{N}\cdot\frac{N-M}{N}\cdot\frac{N-n}{N-1}$

Док а) $$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$X_i \sim Be(p_i)$

$p_i = \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{\binom{N-1}{M-1}}{\binom{N}{M}} = \binom{M}{N}$

б) $\underbrace{\underbrace{\_\;\_\;\_\;\_\;\_\;\underset{i}{\_}\;\_\;\_\;\_}_{n}\;|\;\_\;\_\;\_\;\_\;\_\;\_}_{N}$

$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$X_i = \begin{cases} 1 & \text{ако на } i\text{-то място има марк.} \\ 0 & \text{ако не е марк.} \end{cases}$

$EX = \sum_{i=1}^{n} EX_i$