Оценката Ви ще е равна на 2 + броя точки, които получите. Време за работа: 3 часа. Успех. Ще считаме, че навсякъде работим върху вероятностно пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Задача 1. (1 т.) Урна съдържа топки с номера от 1 до 10 включително. От нея се вадят 3 топки без връщане. Да дефинираме събитията, свързани с извадените топки:

1. $A =$"най-големият номер е 6";
2. $B =$"има поне две топки с четен номер";
3. $C =$"сумата от номерата се дели на 3".

Да се определят вероятностите на горните събития и има ли независими между тях. На колко е равно $\mathbb{P}(A|B)$? Колко е очакваният брой на изтеглените четни номера, ако тегленето е с връщане?

Задача 2. (1 т.) Два инструмента се използват за измерването на прахови частици във въздуха. Да допуснем, че реалното количество е $x\ g/m^3$. В такъв случай, първият дава показание, което е с нормално разпределение със средно x и стандартно отклонение (σ) $0.05x$, а резултатът от втория също е с нормално разпределение със средно x, но със стандартно отклонение $0.1x$. Кой апарат бихте използвали? Колко е вероятността за всеки от апаратите да допусне грешка, която е повече от $0.1x$?

Човек решава да използва средното аритметично от двата апарата. Ако измерванията им са независими, каква е вероятността за грешка над $0.1x$ при тази процедура?

Задача 3. (1 т.) Нека ξ и η са независими случайни величини, $\xi \sim Exp(2)$ и $\eta \sim U(0,3)$, т.е.

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{,ако } x > 0 \\ 0 & \text{,иначе} \end{cases} ; \quad f_\eta(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{,ако } 0 < x < 3 \\ 0 & \text{,иначе.} \end{cases}$$

Намерете корелация на ξ и η, $P(\xi < \eta)$ и плътността на ξ/η.

Задача 4. (1 т.) Нека ξ и η са случайни величини със съвместна плътност

$$f_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} cx^3y^2 & \text{,ако } 0 < x, y < 2 \\ 0 & \text{,иначе.} \end{cases}$$

Намерете константата c, корелацията на ξ и η, както и $\mathbb{E}(\xi|\eta = 1)$.