Изпит по СЕМ

03.02.2021

Време за работа 150 минути

Общият брой точки е 73 плюс 7 бонус точки

*При работата върху проблемите може да реферирате към теореми и твърдения, които ви помагат за извеждането на някоя стъпка. Всички части на въпрос, предхождани от •, се решават от всички. За някои въпроси се изчислява индивидуален параметър M и ако $M = x$, решавайте само тези части, предхождани от **(x)** в допълнение на частите, предхождани от •. За всяка задача записвате изчислението на M и факултетния си номер. Пример: изчислявате за конкретна задача $M = 1$ и решавате за тази задача частите с **(1)** и •. При някои задачи се изчислява параметър N, но зависимостта от него е числова и се отразява в конкретна подзадача, която се решава от всички и изчислението на N се прилага.*

Въпрос 1. Използвайки наготово останалите компоненти на вероятностното пространство:

- дефинирайте вероятностната функция $\mathbb{P}$; (***2 точки***)
- докажете, че $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)$. (***2 точки***)

Въпрос 2. За всеки две събития A, B дефинираме $A\Delta B = A \cap B^c \bigcup A^c \cap B$, където ^{c} е операцията допълнение и въвеждаме индикаторната функция 1_D за произволно събитие D.

Нека** $M = \Phi \bmod 2$**, където** Φ **е <u>последната</u> цифра на вашия факултетен номер.

(0) Изразете $1_{(A\Delta B)\Delta C}$ чрез индикаторните функции $1_A, 1_B, 1_C$.***(5 точки)***

(1) Докажете, че $\mathbb{P}(A\Delta B) \leq \mathbb{P}(A\Delta C) + \mathbb{P}(B\Delta C)$.***(5 точки)***

Въпрос 3. ***Нека** $M = \Phi \bmod 2$**, където** Φ **е <u>предпоследната</u> цифра на вашия факултетен номер.***

(0) Докажете, че
$$\mathbb{P}(A|B) \geq \frac{\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1}{\mathbb{P}(B)}.\textbf{\textit{(3 точки)}}$$

(1) Докажете, че ако $\mathbb{P}(A|C) > \mathbb{P}(B|C)$ и $\mathbb{P}(A|C^c) > \mathbb{P}(B|C^c)$, то
$$\mathbb{P}(A) > \mathbb{P}(B).\textbf{\textit{(3 точки)}}$$

Въпрос 4. Тестват се за Ковид n души по следната процедура: пробите се събират заедно и ако тестът е отрицателен, всички се декларират здрави, а ако е положителен, всеки се тества отново с индивидуален тест. В популацията има 4 кръвни групи (КГ$_i$, $i = 1, 2, 3, 4$) с равна представителност от $1/4$. Сред КГ$_1$ има 10% заразени, сред КГ$_2$ има 1% заразени, сред КГ$_3$ има 5% заразени и сред КГ$_4$ има 4% заразени. Всеки от $n-$те тествани индивида се допуска, че е с кръвна група, независима от тази на всички останали $n-1$ души и падаща се с вероятността на представителността на кръвната група в популацията.

Нека** $N = \Phi \bmod 3$**, където** Φ **е <u>последната</u> цифра на вашия факултетен номер. Цената на общия тест е 1 лев, а цената на всеки повторен, индивидуален тест е $1 + 0.1 \times N$.

- Съставете модел, който отразява очакваната цена $\mathcal{P}(n)$ на един тестван по тази процедура човек.***(5 точки)***
- Третирайки n като непрекъсната променлива x, изведете уравнение за x (без да го решавате), което ви задава x^*, такова че $\mathcal{P}(x^*) = \min_{x>0}\{\mathcal{P}(x)\}$.***(2 точки)***

- Ако имате време, намерете с помощта на компютър за кое n^* се получава минимална единична цена и нейната стойност.(*3 бонус точки*)

Въпрос 5. Нека X е случайна величина, приемаща стойности в $\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$. Нека $H_X(\lambda) = \mathbb{E}\left[e^{-\lambda X}\right]$ за $\lambda \geq 0$. Тогава:

- покажете, че $H_X(\lambda) \leq 1$ и чрез формално диференциране по λ под знака на очакването, изразете $\mathbb{E}[X]$ и $\mathbb{E}\left[X^2\right]$;***(3 точки)***
- изразете пораждащата функция на X, т.е. s_X, чрез H_X.***(2 точки)***

Нека $M = \Phi \bmod 2$, където Φ е сумата на последните две цифри на вашия факултетен номер.

(0) За $X \sim Bi(n, p)$ намерете $H_X(\lambda)$ и чрез нея намерете $\mathbb{E}[X], \mathbb{E}\left[X^2\right]$.***(5 точки)***
(1) За $X \sim Po(\mu)$ намерете $H_X(\lambda)$ и чрез нея намерете $\mathbb{E}[X], \mathbb{E}\left[X^2\right]$.***(5 точки)***

Въпрос 6. Нека $\xi \in U(0, 2), \eta \in U(0, 1)$.

- Намерете $\mathbb{E}[\xi], \mathbb{E}[\eta], \mathbb{E}\left[\xi^2\right], \mathbb{E}\left[\eta^2\right]$.***(3 точки)***

Нека е дадено, че $cov(\xi, \eta) = -\frac{1}{10}$. ***Нека $M = \Phi \bmod 2$, където Φ е сумата на последните три цифри на вашия факултетен номер.***

(0) Намерете $D(\xi - 2\eta)$.***(4 точки)***
(1) Намерете $D(\xi - 3\eta)$.***(4 точки)***

Въпрос 7. Работата на централа за конкретен ден зависи от отклонението от очакването на параметър, моделиран със случайна величина X с $\mathbb{E}[X] = 1, DX = 0.01$, т.е. от $Y = |X - 1|$. Поради съществуваща екологична опасност при големи отклонения от средното, регулаторен орган налага глоба от $g(n)$ лева, ако $Y \in (n, n+1], n \geq 2$.

- Намерете горна граница за стойностите на $f(a) = \mathbb{P}(Y > a)$.***(3 точки)***
- Според независими експерти за $g(n) = n^{3/2}$ е вярно, че $\lim_{n\to\infty} g(n)\mathbb{P}(Y \in [n, n+1)) = 0$ и глобите не са достатъчно ефективни. Вярно ли е тяхното твърдение за границата?***(4 точки)***
- Ако X е случайна величина, приемаща стойности в $\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$, докажете, че за всяко $\lambda > 0$

$$\mathbb{P}(X \leq n) \leq \mathbb{E}\left[e^{-\lambda X}\right] e^{\lambda n}.(\textit{4 бонус точки})$$

Въпрос 8. Нека $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ са независими случайни величини с Поасоново разпределение. Следователно имаме за $k \geq 0$

$$\mathbb{P}(X_1 = k) = e^{-k}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Чрез тези случайни величини се моделира процес на раждане чрез $Y_n = (1+X_n)Y_{n-1}, n \geq 1, Y_0 = 1$ и процес на раждане и умиране чрез $Z_n = X_n Z_{n-1}, n \geq 1, Z_0 = 1$.
Нека $M = \Phi \bmod 2$, където Φ е последната цифра на вашия факултетен номер.

- Кога казваме, че редица от сл.вел. ξ_n клони почти сигурно към сл. вел. ξ? ***(2 точки)***

(0) Съществува ли граница на редицата $\frac{1}{n}\log Y_n$ и коя е тя? За какъв тип сходимост става въпрос? Вярно ли е, че $\mathbb{E}[Y_n]$ расте с експоненциална скорост? ***(8 точки)***

(1) Пресметнете $\mathbb{P}(Z_n \neq 0)$ и докажете, че Z_n клони към 0 почти сигурно, т.е. процесът изчезва почти сигурно. Вярно ли е, че $\mathbb{E}[Z_n]$ расте с експоненциална скорост при $\lambda > 1$? ***(8 точки)***

Въпрос 9. Зар с шест стени се хвърля 3×10^{12} пъти и се образува броя X на падналите се от тези хвърляния единици или тройки. ***Нека*** $N = \Phi \operatorname{mod} 3$***, където*** Φ ***е <u>предпоследната</u> цифра на вашия факултетен номер.*** Слаб студент трябва да отговори на следните въпроси:

- Каква е вероятността (*приблизително*) за $X > 10^{12}$?
- Каква е вероятността (*приблизително*) за $X > 10^{12} + 10^{1+N}$?
- Каква е вероятността (*приблизително*) за $X > 10^{12} + 10^{7+N}$?

Студентът не знаел какво да прави и отговорял навсякъде 50 на 50 или 1/2. На колко и на кои въпроси е отговорил правилно? Обосновете математически отговора си.***(7 точки)***

Въпрос 10. Времетраенето на придобит към вирус имунитет се моделира с непрекъсната, експоненциално разпределена случайна величина X с параметър λ, а силата на имунитета се измерва от непрекъсната случайна величина Y с плътност $f_Y(y) = \beta y^{\beta-1}, 0 < y \leq 1, \beta > 0$. Нека $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\overrightarrow{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ са n наблюдения върху X, Y.

Нека $M = \Phi \operatorname{mod} 2$***, където*** Φ ***е сумата на <u>третата и последната</u> цифра на вашия факултетен номер.***

(0) Намерете максимално правдоподобна оценка за λ; намерете оценка по метода на моментите. ***(5 точки)***

(1) Намерете максимално правдоподобна оценка за β и разпишете функцията на правдоподобие. ***(5 точки)***

(0) Състоятелна ли е максимално правдоподобната оценка? ***(3 точки)***

(1) Състоятелна ли е максимално правдоподобната оценка? ***(3 точки)***

Въпрос 11. Ваксина преминава изпитания на фаза 3, като са тествани $n = 10000$ души, от които 9000 са получили имунитет. Допуска се, че получилите имунитет са $X \in Bi(10000, p)$. Как бихте конструирали симетрична критична област за тестването на нулевата хипотеза $H_0 : p = 0.9$ с грешка от първи род $\alpha = 0.01$? Имате ли основания да мислите, че тази критична област е близка до оптималната критична област? ***(5 точки)***