Задача 1. Нека X е температурата (в градуси), а Y е времето (в минути), необходимо за запалване на дизелов двигател. Нека $f_{X,Y}(x,y) = 1/2000(x+5y+10), -10 \leq x \leq 30, 0 \leq y \leq 2$. Да се определи

1. вероятността да е нужна поне 1 минута за запалване;
2. средното време за запалване при 15 градуса;
3. ако двигателят е запалил за 1.5 минути, каква е вероятността температурата да е отрицателна?

Задача 2. Върху страните на квадрат, независимо една от друга, по случаен начин попадат две точки. Да се намери математическото очакване на квадрата на разстоянието между точките, ако страната на квадрата е a.

Задача 3. Нека случайните величини $X_1, X_2 \sim Exp(\lambda)$ са независими. Да се намери разпределението на случайната величина $Y = X_1/(X_1+X_2)$.

Задача 4. Нека случайните величини $X_1, X_2 \sim U(0,1)$ са независими. Да се намери разпределението на случайната величина $Y = X_1 + X_2$.

Задача 5. Нека случайните величини $X_1, X_2 \sim Exp(\lambda)$ са независими. Да се намери плътността на случайната величина

1. $Y = \max(X_1, X_2)$;
2. $Y = \min(X_1, X_2)$.

Задача 6. Случайна величина $Z = (X, Y)$ има плътност $f(x,y) = c(1+xy)\mathbb{1}_{\{0<x<y<1\}}$ Намерете константата c, $\mathbb{E}XY, D(X,Y)$.

Задача 7. Във вътрешността на триъгълник с лице 1 по случаен начин попада точка P. Правата през P, успоредна на страна на тригълника, пресичат другите му две страни в точките Q и R. Точките S и T лежат върху страна на триъгълника, така че $QRST$ е правоъгълник. Да се намери $\mathbb{E}S_{QRST}$.

Задача 8. Във вътрешността на тетраедър с обем 1 по случаен начин попада точка P. Равнината през P, успоредна на една от стените на T отсича от T тетраедър T_1. Да се намери $\mathbb{E}V_{T_1}$.

Общи задачи, подбрани от колежката Цв. Златкова:

1. Клуб по танци се състои от 22 ученика, 10 жени и 12 мъже. Ако трябва да се изберат по 5 мъже и 5 жени, за да се образуват двойки за дадено състезание, то по колко начина може да стане това?

2. Нека A, B и C са три събития. Напишете израз за събитията, така че от A, B и C:

   а) само A настъпва;

   б) поне едно от трите настъпва;

   в) поне две от събитията настъпват;

   г) нито едно от тях не настъпва.

3. Частно начално училище предлага три езика: испански, френски и немски. Тези часове са възможни за всичките 100 ученика, които го посещават. Има 28 ученика в класа по испански, 26 в класа по френски и 16 в класа по немски. Има 12 ученика, които учат испански и френски, 4 ученика, които посещават френски и немски и шестима, които посещават испански и немски. В допълнение, двама учат и трите езика. Ако случайно изберем ученик, каква е вероятността:

   а) да не посещава нито един от тези часове;

   б) да учи точно един език.

4. Пет карти се теглят от стандартен дек. Каква е вероятността да сме изтеглили:

   а) 3 аса и 2 попа;

   б) фул хаус (три еднакви карти и чифт от други две еднакви карти; примерно: 3 седмици и 2 дами).

5. Двама опитни инспектора един след друг проверяват изделия по поточна линия. Когато дефектно изделие минава по линият, вероятността, че няма да бъде засечено от първия инспектор е 0,1. Вторият ще "изпусне" 5 от 10 дефектни изделия, които не са били забелязани от първия. Каква е вероятността, че дефектно изделие няма да бъде забелязано и от двамата инспектора?

6. Когато момчетата, които учат във ФМИ са попитани, 50% казват, че не се срещат с някое момиче от факултета. Когато момичетата са попитани, 40% отговарят, че не излизат с никого от ФМИ. Момчетата са 52% от студентите на факултета. Каква е вероятността, че случайно избран студент:

   а) не излиза с никого от ФМИ;

   б) е момиче и не излиза с никого от ФМИ;

   в) който излиза с някого от факултета, е момче?

7. Кутия съдържа 6 бели и 4 черни топки. От кутията се изваждат две топки. Да се намери вероятността на събитията: двете топки да са бели, двете топки са различен цвят и втората топка да е бяла.

8. Вероятността жителите на дадена област да се разболеят от дадено заболяване е 0,15. Болестта се открива с тест, който дава положителен резултат с вероятност 0,9 при наличие на заболяване и с вероятност 0,02 при отсъствие на болестта. Да се намери вероятността гражданин от областта, за който тестът е положителен, да е болен от тази болест.

9. Две карти са случайно избрани (без връщане) от дек от 52 карти. Нека B е събитието, че двете карти са аса; A_S е събитието, че е изтеглено асо спатия и A - поне едно асо е изтеглено. Намерете:

а) $\mathbf{P}(B|A_5)$ б) $\mathbf{P}(B|A)$

10. 5 еднакви купи са номерирани 1,2,3,4 и 5. Купа i съдържа i бели и $5 - i$ черни топчета, $i = 1, 2, \ldots, 5$. Случайно е избрана купа и от нея са взети случайно две топчета (без връщане).
    а) Каква е вероятността, че и двете избрани топчета са бели?
    б) При положение, че двете избрани топчета са бели, каква е вероятността, че са били взети от купа номер 3?
11. Играч хвърля монета с диаметър 10mm върху маса от достатъчно голямо разстояние. Масата е разграфена на квадратчета със страна 20mm. Ако монетата попадне изцяло в някое квадратче, т.е. не пресича мрежата от линии, играчът получава награда, в противен случай губи монетата си. Считайки, че монетата е паднала върху масата, да се намери вероятността играчът да спечели.
12. В правилен шестоъгълник ABCDEF с апотема a по случаен начин се избира точка M. Намерете вероятностите на събитията:
    а) най-близката за M страна да е страната AB;
    б) най-близкият за M голям диагонал да е диагоналът CF.
13. Младо семейство решило да продължава да се сдобива с деца, докато се роди момиче. Каква е вероятността в семейството да има най-много 4 момчета, ако вероятността за раждане на момче е 0,512?
14. Завод доставя на търговско предприятие 1000 доброкачествени изделия. Вероятността при транспортирането за всяко от изделията да получи някаква повреда е 0,002. Да се намери вероятността при транспортирането да се повредят:
    а) точно 3 изделия;
    б) не повече от 5 изделия;
    в) между 2 и 5 изделия включително.
15. Известно е, че произведена дискета от дадена компания е дефектна с вероятност 0.01. Компанията продава дискетите в кутия по 10 и предлага връщане на сумата, ако има повече от една дефектна. Ако някой закупи три кутии с дискети, каква е вероятността, че клиентът ще върне точно една от тях?
16. Продавач на коли може да се свърже с един или двама клиента на ден, съответно с вероятност 1/3 и 2/3. Всеки контакт ще доведе или до продажба на стойност 150 хил. лв., или до нулева продажба, съответно с вероятност 0,1 и 0,9. Напишете вероятностното разпределение на броя продажби за един ден. Намерете очакването и дисперсията на сл. вел. ξ - печалбата за даден ден. Пресметнете $\mathbf{P}(\xi > \mathbf{E}X)$.
17. Двама човека се редуват да хвърлят правилно зарче, докато на някого не се падне шестица. Човек A хвърля първи, B - втори, A - трети и т.н. При положение, че B е хвърлил първи шестица, каква е вероятността това да е станало при второто му мятане на зарчето?

18. Договори за доставка на храна в два офиса на дадена компания са произволно разпределени на една или повече от три фирми, A, B и C. Нека X е броят на договори за фирма A и Y е броят на договори за B. Всяка фирма може да получи 0,1 или 2 договора. Да се намери съвместното разпределение на X и Y. Да се намери $Cov(X, Y)$? Как ще я интерпретирате?

19. Един път се хвърля правилен зар. Въвеждаме случайните величини: X е индикаторът на четните паднали се точки върху зара ($X = 1$, ако се е паднал четен брой точки; $X = 0$, ако точките са нечетен брой), а Y е индикаторът на броя точки, делящи се на 3 ($Y = 1$, ако броят точки върху горната страна на зара се дели на 3, и $Y = 0$ в противен случай).

    а) Да се опише законът на разпределение на случайния вектор (X, Y).
    б) Да се намерят маргиналните разпределения на X и Y.
    в) Независими ли са X и Y?
    г) Да се пресметне математическото очакване $\mathbb{E}[XY]$.
    д) Намерете корелацията и дайте интерпретация на корелационния коефициент.
    е) Пресметнете условното математическо очакване $\mathbb{E}(X|Y = 1)$.

20. Случайната величина ξ е разпределена по закон с плътност от вида:

$$f_{\xi}(x) = c.\cos x, \quad |x| \leq \frac{\pi}{2}$$

    Да се намерят константата c, $\mathbb{P}(|\xi| < \frac{\pi}{4})$, $\mathbb{E}\xi$, $\mathbb{D}\xi$.

21. Нека Y да е непрекъсната случайна величина с плътност

$$f(y) = \begin{cases} ay^2, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & y \notin [0, 1] \end{cases}$$

    където a е неизвестен реален параметър.

    а) Намерете параметъра a.
    б) Пресметнете EY, DY и $E[5Y^2 + 6Y + 2]$.

22. Нека сл.в. $\xi \in N(10, 4)$. Намерете вероятността, че отклонението на сл.в. от математическото ѝ очакване по модул няма да надминава три пъти стандартното ѝ отклонение.

23. Нека случайната величина $\xi \in N(5, 4)$. Намерете

    а) $P(\xi < 2)$;
    б) симетричен относно математическото очакване $E\xi$ интервал, в който с вероятност 0,95 попада ξ.

24. Резултатите от изпит се предполага, че са нормално разпределени със средно 78 и дисперисия 36 точки.

    а) Каква е вероятността човек, който се е явил на изпита, да изкара повече от 72 точки?
    б) Студент, който има резултат в топ 10% на това разпределение, получава отлична оценка. Какъв е минималният брой точки, за да се изкара отличен на изпита?

1. Имаме една зелена и една бяла кутия, всяка има по 3 топки, номерирани с числата от 1 до 3. Вадим два пъти с връщане от зелената и веднъж от бялата. Нека X е броят изтеглени нечетни числа, а Y - най-голямото число изтеглено от зелената. Да се намери съвместното разпределние на X и Y и $\mathbb{P}(Y = 1|x = 3)$. Независими ли са двете случайни величини?

2. Броят на домашните, проверени от преподавател по ВиС за един семестър е нормално разпределена случайна величина с очакване 150.

   а) ако дисперсията е 100, намерете вероятността преподавателят да е проверил по-малко от 135 домашни.

   б) ако дисперсията е 100, да се намери x, такова че с вероятност 90% ще провери по-малко от x домашни.

   в) ако вероятността да е проверил по-малко от 145 домашни е 0.46, то каква е дисперсията?

3. Нека животът на даден модел крушки има експоненциално разпределение с очакване 8 години.

   а) Намерете вероятността, че крушка ще работи по-малко от 1 година.

   б) Намерете вероятността, че крушка ще работи между 6 и 10 години.

   в) 70% от всички крушки колко дълго работят?

   г) Компания решава да предлага възвръщане на сумата, ако животът на една крушка е в най-долните 2%. Колко месеца приблизително са това?

4. Една вечер в дупка в градината има 20 бременни зайци. Дупката не е обесопасена и всеки заек може да избяга през нощта с вероятност 1/2. На следващата сутрин останалите зайци раждат произовелен брой бебета с Поасоново разпределение с параметър 3. Определете пораждащата функция за общия брой новородени зайчета.