Теорема (смяна на променливите). $X$ е вектор от НСВ и $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Нека $Y = g(X)$.

Ако $g: D_X \longrightarrow g(D_X)$ е взаимноеднозначно с обратна функ $h = g^{-1}$,

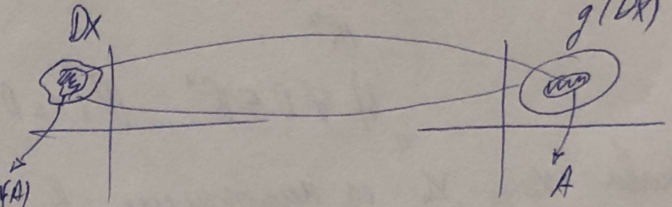
$h, g$ са непрекъснати и $h$ има непрекъснати производни и $\forall y \in g(D_X)$ е вярно, че

$$0 \neq \left| \det \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y_1}(y_1, y_2) & \frac{\partial h_1}{\partial y_2}(y_1, y_2) \\ \frac{\partial h_2}{\partial y_2}(y_1, y_2) & \frac{\partial h_2}{\partial y_2}(y_1, y_2) \end{bmatrix} \right| =: |J(y)|,$$ то $Y$ е вектор от НСВ

с плътност $f_Y(y) = f_X(h(y))\,|J(y)|$ $\forall y \in g(D_X)$ и $D_Y = g(D_X)$

Док) Ще покажем, че $\forall A \subseteq g(D_X)$

$$\mathbb{P}(Y \in A) = \int_A f_Y(y)\,dy$$




$$\mathbb{P}(Y \in A) = \mathbb{P}(g(X) \in A) = \mathbb{P}(X \in h(A)) =$$

$$= \int_{x \in h(A)} f_X(x)\,dx \overset{x=(x_1,x_2)=h(y)=(h_1(y),h_2(y))}{=\!=\!=} \int_{y \in A} \underbrace{f_X(h(y))\,|J(y)|}_{f_Y(y)}\,dy \Rightarrow f_Y(y) = f_X(h(y))\,|J(y)|$$

$y \in g(D_X)$ е плътността на $Y$.

⊕ Нека $V_1, V_2 \ldots V_n$ са независими в съвкупност нормални сл. вел., т.е. $V_i \in N(\mu_i, \sigma_i^2)$.

Тогава $\sum_{i=1}^{n} V_i \in N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)$. Ще покажем за $n = 2$. Другото по индукция

$n=2$ $\quad V_1 + V_2 = \mu_1 + \sigma_1 Z_1 + \mu_2 + \sigma_2 Z_2 =$ $\quad Z_1, Z_2 \in N(0,1)$ $\quad Z_1 \perp\!\!\!\perp Z_2$

$= \mu_1 + \mu_2 + (\sigma_1 Z_1 + \sigma_2 Z_2) =$ $\quad X_1 = \sigma_1 Z_1 \in N(0, \sigma_1^2)$

$= \mu_1 + \mu_2 + X_1 + X_2$ $\quad X_2 = \sigma_2 Z_2 \in N(0, \sigma_2^2)$

$\in N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ $\quad$ Ако $X_1 + X_2 \in N(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$, то