Оценката Ви ще е равна на 2 + броя точки, които получите. Време за работа: 4 часа. Успех. Ще считаме, че навсякъде работим върху вероятностно пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Задача 1. (2 т.)

1. (0.5 т.) Теглим 2 карти от стандартно тесте с 52 карти. Нека X е броят на изтеглените аса, а Y на изтеглените купи. Намерете съвместното разпределение и корелацията на X и Y.

   - Нека $C = \binom{52}{2} = 1326$. Пресмятаме чрез комбинаторни съображения

X(аса)\\Y(купи)	0	1	2
0	$\binom{36}{2}/C$	$\binom{12}{1}\binom{36}{1}/C$	$\binom{12}{2}/C$
1	$\binom{3}{1}\binom{36}{1}/C$	$(\binom{12}{1}\binom{3}{1} + \binom{1}{1}\binom{36}{1})/C$	$\binom{12}{1}/C$
2	$\binom{3}{2}/C$	$\binom{3}{1}/C$	0

,

тоест, след пресмятане и събиране по редове и колони (или директно чрез комбинаторика),

X(аса)\\Y(купи)	0	1	2
0	105/221	72/221	11/221
1	18/221	12/221	2/221
2	1/442	1/442	0

Y(купи)	0	1	2
$\mathbb{P}(Y = \cdot)$	19/34	13/34	2/34

X(аса)	0	1	2
$\mathbb{P}(X = \cdot)$	188/221	32/221	1/221

.

Следователно

$$\mathbb{E}X = 34/221 = 2/13; \qquad DX = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = 36/221 - (2/13)^2 = 400/2873;$$

$$\mathbb{E}Y = 17/34 = 1/2; \qquad DY = \mathbb{E}Y^2 - (\mathbb{E}Y)^2 = 21/34 - 1/4 = 25/68;$$

$$\mathbb{E}XY = 12/221 + 4/221 + 2/442 = 1/13; \qquad Cor(X,Y) = \frac{\mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y}{\sqrt{DX \cdot DY}} = \frac{1/13 - 1/13}{\sqrt{DX \cdot DY}} = 0\,.$$

Оказва се, че X и Y не са корелирани, макар че не са независими!

2. (1 т.) Нека случайната величина X е цената на даден актив, а случайната величина Y - средният лихвен процент по депозитите (и двете за ден и в безмерни единици). Нека съвместната им плътност е $f_{X,Y}(x,y) = c(x^2 + e^y x)$ за $0 < x, y < 1$ и 0 извън тази област, като c е някаква константа. Намерете константата c и ковариацията на X и Y. Колко е очакването на цената на актива, ако лихвеният процент е 0.5?

   - $$1 = c\int_0^1\int_0^1 (x^2 + e^y x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = c\int_0^1 \frac{1}{3} + \frac{1}{2}e^y\,\mathrm{d}y = c\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}(e-1)\right) = \frac{3e-1}{6}\,.$$

Следователно $c = 6/(3e-1)$. За $x \in (0;1)$

$$f_X(x) = \int_0^1 c(x^2 + e^y x)\,\mathrm{d}y = c(x^2 + (e-1)x)\,.$$

Следователно

$$\mathbb{E}X = c\int_0^1 x(x^2 + (e-1)x)\,\mathrm{d}x = c\left(\frac{1}{4} + (e-1)\frac{1}{3}\right) = c\frac{4e-1}{12}\,.$$

Аналогично, за $y \in (0,1)$

$$f_Y(y) = c\int_0^1 x^2 + e^y x\,\mathrm{d}x = c\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}e^y\right) = \frac{c}{6}\left(2 + 3e^y\right)\,,$$

$$\mathbb{E}Y = \frac{c}{6}\int_0^1 y(2 + 3e^y)\,\mathrm{d}y = \frac{c}{6}\left(2\frac{1}{2} + 3\right) = \frac{2c}{3}\,,$$

като използвахме, че $\int xe^x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}e^x = xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x = e^x(x-1)$ и следователно $\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x = 1$. След това

$$\mathbb{E}XY = c\int_0^1\int_0^1 xy(x^2+e^y x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = c\int_0^1 \frac{1}{4}y + \frac{1}{3}ye^y\,\mathrm{d}y = c\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = \frac{11c}{24}\,.$$

Следователно

$$Cor(X,Y) = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y = \frac{11c}{24} - c^2\frac{4e-1}{18} \approx -0.0014\,.$$

За последния въпрос

$$\mathbb{E}(X|Y=0.5) = \int_0^1 xf_{X|Y}(x|y=0.5)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\frac{f_{X,Y}(x,0.5)}{f_Y(0.5)} = \int_0^1 x\frac{c(x^2+x\sqrt{e})}{\frac{c}{6}(2+3\sqrt{e})}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{6}{2+3\sqrt{e}}\int_0^1 x^3 + x^2\sqrt{e}\,\mathrm{d}x = \frac{6}{2+3\sqrt{e}}(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\sqrt{e}) \approx 0.6907\,.$$

3. (0.5 т.) Нека X е случайна величина с плътност $f_X(x) = \frac{1}{4}xe^{-x/2}$ за $x \geq 0$ и 0 иначе. Намерете плътността на случайната величина $Y = -2X+2$.

   • Може да приложите директно нужната теорема или да имитирате доказателството ѝ: за $y > 2, \mathbb{P}(Y \leq 2) = \mathbb{P}(X \geq 0) = 1$ и $f_Y(y) = 0$.

   За $y \leq 2, F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(-2X+2 \leq y) = \mathbb{P}(X \geq 1/2(2-y)) = 1 - F_X(1/2(2-y))$. Следователно

$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F_y(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(1 - F_X\left(\frac{1}{2}(2-y)\right)\right) = -F'_X\left(\frac{1}{2}(2-y)\right)\cdot\left(\frac{1}{2}(2-y)\right)'$$
$$= \frac{1}{2}f_X\left(1-\frac{1}{2}y\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}y\right)e^{y/4-1/2}\,.$$

Задача 2. (0.5 т.)

По официални данни, историческата средна температура в София през януари е $-0.5°C$. Нека случайната величина $X =$ "средна температура през януари в София в градуси по Целзий". Да приемем, че тя има нормално разпределение. Обикновено оценка за дисперсията се прави също от данни, но като задача ние ще разгледаме друг (непрепоръчителен) метод.

Да кажем, че даден човек разглежда температура над $20°C$ градуса като изключителна аномалия - вероятността ѝ е 1 процент. Каква оценка води това разсъждение за дисперсията на X? Каква е вероятността в такъв случай температурата да падне под $-15°C$ градуса?

• Нека $\sigma^2, \sigma \geq 0$ е дисперсията на X, т.е. $X \sim N(-0.5, \sigma^2)$. Имаме, че

$$\frac{1}{100} = \mathbb{P}\left(X \geq 20\right) = \mathbb{P}\left(\frac{X+0.5}{\sigma} \geq \frac{20.5}{\sigma}\right) = \mathbb{P}\left(N(0,1) \geq \frac{20.5}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{20.5}{\sigma}\right)\,,$$

където $\Phi(x) = \mathbb{P}(N(0,1) \leq x)$. От таблица със стойности за Φ търсим стойност z, за която $\Phi(z) = 0.99$. Така получаваме $20.5/\sigma \approx 2.33$ и $\sigma \approx 8.80$. В такъв случай

$$\mathbb{P}(X \leq -15) = \mathbb{P}\left(\frac{X+0.5}{8.80} \leq \frac{-14.5}{8.80}\right) \approx \mathbb{P}\left(N(0,1) \leq -1.65\right) \approx 0.0495\,.$$

Задача 3. (1.5 т.) Точка A попада случайно в окръжност $k(O,1)$ с център O и радиус 1. Нека случайната величина X е равна на $|OA|$. Можете ли да предположите колко са модата и медианата? Аргументирайте се. Колко бихте очаквали да е $\mathbb{E}X$? *(Мода на дискретно разпределение наричаме стойността с най-голяма вероятност. В непрекъснатия случай, по аналогия, се интересуваме от стойността, която максимизира f_X. Наричаме a медиана на разпределението на X, ако $\mathbb{P}(X \leq a) = \mathbb{P}(X \geq a) = 1/2$.)*

• Можем да предположим неформално, че модата ще 1, тъй като при фиксирано разстояние от центъра, колкото е по-голямо, толкова "повече точки има". Разбира се и в двата случая формално броят точки е с една и съща кардиналност. Медианата ще е стойността, за която $\pi r^2 = 1 - \pi r^2$.

1. (0.75 т.)Намерете функцията на разпределение, плътността, очакването и дисперсията на X.

   • За $c \in (0,1)$, $F_X(c) = \mathbb{P}(X \leq c) = \mathbb{P}(X \in k(O,c)) = S_{k(O,c)}/S_{k(0,1)} = c^2$. Следователно $f_X(c) = F'_X(c) = 2c$. За пълнота, ако $c \geq 1$, то $F_X(c) = 1, f_X(c) = 0$, а ако $c \leq 0, F_X(c) = 0, f_X(c) = 0$. Получаваме

$$\mathbb{E}X = \int_0^1 x2x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}; DX = \int_0^1 x^2\cdot 2x\,\mathrm{d}x - \frac{4}{9} = \frac{1}{9}\,.$$

2. (0.75 т.) Нека сега разгледаме 3 точки, A_1, A_2 и A_3, които попадат случайно и независимо една от друга в същата окръжност. Колко е очакването на разстоянието до най- близката до центъра? А до най-отдалечената? *(Бонус: Намерете очакваното разстояние до средната точка. Би ли трябвало то да е равно на* $\mathbb{E}X$ *?)*

   • Нека разстоянията от центъра O до A_1, A_2 и A_3 са съответно X_1, X_2 и X_3. Тогава $X_1, X_2, X_3 \sim X$ са независими, където X е случайната величина от миналата подточка. В такъв случай, разстоянието до най-близката точка е $Y_1 = \min(X_1, X_2, X_3)$, а до най-отдалечената $Y_2 = \max(X_1, X_2, X_3)$. За $y \in (0,1)$, $\mathbb{P}(Y_2 \leq y) = \mathbb{P}(X \leq y)^3 = y^6$. Следователно

$$f_{Y_2}(y) = 6y^5; \mathbb{E}Y_2 = \int_0^1 y6y^5 \, \mathrm{d}y = \frac{6}{7}.$$

   Аналогично $\mathbb{P}(Y_1 \leq y) = 1 - \mathbb{P}(Y_1 \geq y) = 1 - (\mathbb{P}(X \geq y))^3 = 1 - (1 - y^2)^3$. Следователно

$$f_{Y_1}(y) = 6y(1-y^2)^2; \mathbb{E}Y = \int_0^1 y6y(1-y^2)^2 \, \mathrm{d}y = \frac{16}{35}.$$