8.10.2020

Ω, $\mathcal{A}$ е σ-алгебра, ако

1) $\Omega \in \mathcal{A}$

2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$

3) $(A_i)_{i\geq 1}$, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Пр. $\Omega = \{\omega_1 \ldots \omega_n\}$

2^{Ω} е σ-алгебра, асоциирана с Ω

$|2^{\Omega}| = 2^{\Omega}$

Пр. $\Omega = \{0, 1\}$

$A_1 = \{\emptyset, \Omega\}$ тривиална σ-алгебра

$A_2 = \{\emptyset, \Omega, \{0\}, \{1\}\}$

$A_2 = 2^{\Omega}$

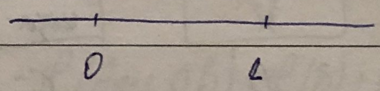
Произволна колекция B от подмн. на Ω, то $\sigma(B)$ ще бъде най-малката σ-алгебра, съдържаща B. Винаги $B \subseteq 2^{\Omega}$

$\Omega = \mathbb{R}$

$O = \{$множеството от вс отворени интервали (a, b), $a < b\}$

$\sigma(O) = B(\mathbb{R})$

$A = (-\infty; 0]$ $\quad B = (0; 1)$ $\quad C = [1; +\infty)$



$\{\emptyset, \mathbb{R}, \{A\}, \{B\}, \{C\}, \{A \cup B\}, \{A \cup C\}, \{B \cup C\}\} = \mathcal{A}_2$

Твърдение: Ако $\mathcal{A}$ е σ-алгебра в Ω и $(A_i)_{i\geq 1}$ са подмн. на Ω: $A_i \in \mathcal{A}$ за $\forall i \geq 1$, тогава $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Док:

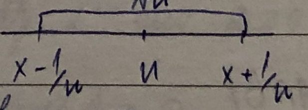
От $A_i \in \mathcal{A} \xRightarrow{2)} \bar{A}_i \in \mathcal{A} \xRightarrow{3)} \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i \in \mathcal{A} \xRightarrow{2)} \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i} \in \mathcal{A} \xRightarrow{\text{де Морган}}$

$\Rightarrow \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{\bar{A}}_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Пр. $\Omega = \mathbb{R}$; O; $B(\mathbb{R}) = \sigma(O)$

Нека $x \in \mathbb{R}$. Ще док. че $\{x\} \in B(\mathbb{R})$. $A_n = \left(x - \frac{1}{n}; x + \frac{1}{n}\right) \in O \Rightarrow A_n \in B(\mathbb{R})$

Това е вярно за $\forall n \geq 1$



$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in B(\mathbb{R})$ по твърдението