

## Дисперсия

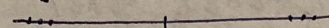
Определение Ато сумата  $\sum_j (x_j - \mathbb{E}X)^2 p_j$  е добре дефинирана, ако  $DX = \sum_j (x_j - \mathbb{E}X)^2 p_j$

$$34 < DX = \left(-1 + \frac{1}{37}\right)^2 \cdot \frac{36}{37} + \left(55 + \frac{1}{37}\right)^2 \frac{1}{37} \quad 1 \approx DY = \left(-1 + \frac{1}{37}\right)^2 \frac{19}{37} + \left(1 + \frac{1}{37}\right)^2 \frac{18}{37}$$

Определение  $\sqrt{DX}$  се казва стандартно отклонение

⊕  $2N$  бита

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{вер } 1/2 \\ -1 & \text{вер } 1/2 \end{cases} \quad 1 \leq i \leq 2N$$

$x_j = -1$   бите

↑ независиме информации  
j, за които  $x_j = 1$

$Y = \sum_{i=1}^{2N} X_i$  и голямата цифра перем ако  $Y > 0$   
и малката перем ако  $Y < 0$   
и равенство  $Y = 0$

~~$EY = 0$~~

$$\mathbb{E}Y = \mathbb{E} \sum_{i=1}^{2N} X_i = \sum_{i=1}^{2N} \mathbb{E}X_i = 0 = 0$$

$$\mathbb{E}X_i = \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 = 0$$

$$P(Y=0) = \frac{1}{2^{2N}} \binom{2N}{N} \approx \frac{\text{const}}{\sqrt{N}}$$

Изводение  $DX = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$

Доказ Ако  $g(x) = (x - \mathbb{E}X)^2$ , то  $\mathbb{E}g(x) = \mathbb{E}(x - \mathbb{E}X)^2 \stackrel{\text{деф}}{=} \sum_j (x_j - \mathbb{E}X)^2 p_j \stackrel{\text{деф}}{=} DX \Rightarrow$  (1) е горн

$$\begin{aligned} DX &= \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}(X^2 - 2X\mathbb{E}X + (\mathbb{E}X)^2) = \mathbb{E}X^2 + \mathbb{E}(-2X\mathbb{E}X) + \mathbb{E}(\mathbb{E}X)^2 = \\ &= \mathbb{E}X^2 - 2\mathbb{E}X\mathbb{E}X + (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 \quad \# \end{aligned}$$

Свойства

а)  $DX \geq 0$  следва от  ~~$DX = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$~~   $DX = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 \geq 0$ , понеже  $(X - \mathbb{E}X)^2 \geq 0$  и  $\Rightarrow \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 \geq 0$

б)  $\mathbb{E}X^2 \geq (\mathbb{E}X)^2$  следва от  $DX = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 \geq 0$

в)  $X = C$  е константа, то  $DX = 0$  следва от  $DX = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}(C - C)^2 = 0$

г)  $D(cX) = c^2 DX$  следва от  $D(cX) = \mathbb{E}(cX)^2 - (\mathbb{E}cX)^2 = c^2 \mathbb{E}X^2 - c^2 (\mathbb{E}X)^2 = c^2 DX$