30.11.

СЕМ упр

Зад. $\xi \perp\!\!\!\perp \eta$ $\mathbb{P}(\xi=k)=\mathbb{P}(\eta=k)=pq^k$ $p\in(0,1)$ $q=1-p$ $k\in\{0,1,\dots\}$ (имаме $\xi,\eta \sim Ge(p)$)

$Z=\max(\xi,\eta)$

*не съм сигурна как се пише как*

1) разпределението на $Z$?

2) разпределението на $(Z,\xi)$, т.е. $\mathbb{P}(Z=k,\xi=r)$

Решение

1) $Z\in\{0,1,2,\dots\}=\mathbb{N}_0$

$\mathbb{P}(Z=k)=?$ за $k\in\mathbb{N}_0$

$\mathbb{P}(\max(\xi,\eta)=k)=\mathbb{P}(\xi=k,\eta<k)+\mathbb{P}(\xi<k,\eta=k)+\mathbb{P}(\xi=k,\eta=k)=$

$\overset{\text{симетрия}}{=}2\mathbb{P}(\xi=k,\eta<k)+\mathbb{P}(\xi=k,\eta=k)\overset{\text{нез}}{=}2\mathbb{P}(\xi=k)\mathbb{P}(\eta<k)+\mathbb{P}(\xi=k)\mathbb{P}(\eta=k)=$

$\overset{\text{усл.}}{=}2pq^k(pq^0+\dots+pq^{k-1})+(pq^k)^2=2pq^k p\cdot\frac{1-q^k}{1-q}+p^2q^{2k}$

2) $\mathbb{P}(Z=k,\xi=m)\overset{=p_{km}}{=}?$ $k,m\in\mathbb{N}_0$

I сл. Ако $m>k$; $p_{km}=0$

II сл. Ако $m=k$; $p_{kk}=\mathbb{P}(\xi=k,\eta\le k)\overset{\text{нез.}}{=}pq^k(pq^0+\dots+pq^k)=$

$=pq^k\cdot p\frac{1-q^{k+1}}{1-q}=pq^k(1-q^{k+1})$

III сл. Ако $m<k$;

$p_{km}=\mathbb{P}(\xi=m,\eta=k)=pq^m pq^k=p^2q^{m+k}$

Независими ли са $Z$ и $\xi$?

Не са.

$\mathbb{P}(Z=2,\xi=3)=0$

$\mathbb{P}(Z=2)\cdot\mathbb{P}(\xi=3)=(\text{число}>0)\underset{>0}{pq^3}>0$