10.12.

СЕМ лекция

Дефиниция: $X \overset{d}{=} Y \Longleftrightarrow F_X = F_Y$. Ако X, Y са непр. сл. вел, то $\Longleftrightarrow f_X = f_Y$

Твърдение: Нека $Z_1 \dots Z_n$ са незав. в съвкупност стандартно норм. разпределени $Z_i \in N(0,1)\ \forall$. Тогава $X = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \in \chi^2(n)$

Док) Ще док., че $Z_1^2 \in \chi^2(1) = \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Понеже Z_i^2 са нез. и еднакво разпр., то от миналия път $\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \in \Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$, което по деф $\chi^2(n)$

$$Y_1 = Z_1^2 = g(Z_1) \qquad g(x) = x^2$$

$$x \ge 0 \quad \mathbb{P}(Y_1 < x) = \mathbb{P}(Z_1^2 < x) = \mathbb{P}(-\sqrt{x} < Z_1 < \sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\sqrt{x}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$f_{Y_1}(x) = \frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\sqrt{x}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-\frac{x}{2}} = \frac{x^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}} = \frac{x^{-1/2} e^{-\frac{x}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}$$

плътност на $\chi^2(1)$

Дефиниция (t-разпределение) Сл. вел. $Y = \frac{Z}{\sqrt{\frac{S}{n}}}$, където $Z \in N(0,1)$, $Z \perp\!\!\!\perp S$ и $S \in \chi^2(n)$, се нарича t-разпределена сл. вел с n-степени на свобода.

⊕ $X_1 \dots X_n \sim N(0,1)$ независими $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(0, \frac{1}{n})$

$$S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2, \quad S \perp\!\!\!\perp \overline{X}$$

$$n.S \in \chi^2(n)$$