5. Формула на Бейс. Геометрична вероятност

(Формула на Бейс) Нека $H_1, \dots, H_n$ е разбиване на Ω на събития с ненулева вероятност и $A \subset \Omega$. Тогава за $k \in \{1, \dots, n\}$

$$\mathbb{P}(H_k|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_k)\mathbb{P}(H_k)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A|H_i)\mathbb{P}(H_i)}.$$

Задача 1. Разполагаме с тест за рядко заболяване, който е точен в 99% от случаите и при заразените (когато трябва да е положителен), и при незаразените (когато трябва да е отрицателен). Ако знаете, че 0,5% от населението има това заболяване, каква е вероятността случайно избран човек с положителен тест да е болен?

Решение 1. Дефинираме $H_1 := \{\text{човекът е болен}\}, H_2 := \overline{H_1} = \{\text{човекът не е болен}\}$ и $A := \{\text{тестът е положителен}\}$. По условие $\mathbb{P}(H_1) = 0.5\%, \mathbb{P}(H_2) = 99.5\%, \mathbb{P}(A|H_1) = 99\%$ и $\mathbb{P}(A|H_2) = 1\%$. От формулата на Бейс, можем да пресметнем търсеното $\mathbb{P}(H_1|A)$. Отг.: ≈ 0.3322.

(Какво представлява Ω в случая? Това може да са тройките (човек, болен/здрав, изход от тест). Можем да разгледаме и по-малко Ω. Идеи?)

Задача 2. В компютърен център има три принтера А, Б и В. Заявките за печат се изпращат към първия свободен принтер. Вероятностите заявка да бъде изпратена към А, Б или В са съответно 0.6, 0.3 и 0.1. Вероятността за всеки от принтерите да провали печатането е съответно 0.01, 0.05 и 0.04. Ако печатането на даден документ е било прекратено, каква е вероятността причината да е грешка в принтера А?

Решение 2. Дефинираме $H_1 := \{\text{документът е изпратен към принтер А}\}$, $H_2 := \{\text{документът е изпратен към принтер Б}\}$, $H_3 := \{\text{документът е изпратен към принтер В}\}$ и $D := \{\text{печатането е провалено}\}$. По условие $\mathbb{P}(H_1) = 0.6, \mathbb{P}(H_2) = 0.3, \mathbb{P}(H_3) = 0.1, \mathbb{P}(D|H_1) = 0.01, \mathbb{P}(D|H_2) = 0.05$ и $\mathbb{P}(D|H_3) = 0.04$. От формулата на Бейс, можем да пресметнем търсеното $\mathbb{P}(H_1|D)$. Отг.:0.24.

Задача 3. Дадени са три жетона. Първият има две бели страни, вторият две черни, а третият една бяла и една черна страна. По случаен начин се избира жетон и се хвърля върху маса. Ако горната страна на жетона е бяла, каква е вероятността другата му страна която не се вижда също да е бяла?

Решение 3. Дефинираме $H_1 := \{\text{изтеглили сме монета (бяло, бяло)}\}$, $H_2 := \{\text{изтеглили сме монета (бяло, черно)}\}$, $H_3 := \{\text{изтеглили сме монета (черно, черно)}\}$ и $A := \{\text{хвърлили сме бяло}\}$. По условие $\mathbb{P}(H_1) = 1/3, \mathbb{P}(H_2) = 1/3, \mathbb{P}(H_3) = 1/3, \mathbb{P}(A|H_1) = 1, \mathbb{P}(A|H_2) = 1/2$ и $\mathbb{P}(A|H_3) = 0$. От формулата на Бейс, можем да пресметнем търсеното $\mathbb{P}(H_1|A)$. Отг.: 2/3.

Задача 4. Изпит се провежда по следния начин: във всеки билет има написан един въпрос с четири отговора, от които само един е верен. Предполагаме, че студент знае 90% от въпросите, а ако не знае верния отговор, налучква. Каква е вероятността студент, който е отговорил правилно, да не е знаел верният отговор, а да е налучкал?

Решение 4. Дефинираме $H_1 := \{\text{студентът знае въпроса}\}$, $H_2 := \{\text{студентът не знае въпроса}\}$ и $A := \{\text{ отговорът е правилен }\}$. По условие $\mathbb{P}(H_1) = 9/10, \mathbb{P}(H_2) = 1/10, \mathbb{P}(A|H_1) = 1, \mathbb{P}(A|H_2) = 1/4$. От формулата на Бейс, можем да пресметнем търсеното $\mathbb{P}(H_2|A)$. Отг.: 1/37.

Задача 5. Трима ловци едновременно стрелят по заек. Заекът е убит от един куршум при първата стрелба. Каква е вероятността той да е изстрелян от първия ловец, ако те уцелват с вероятност, съответно 0.2, 0.4 и 0.6?

Решение 5. $p_1 := \mathbb{P}(\text{само I уцелва от първия път}\} = 0.2 \cdot 0.6 \cdot 0.4, p_2 = \mathbb{P}(\text{само II уцелва от първия път}\} = 0.8 \cdot 0.4 \cdot 0.4, p_3 := \mathbb{P}(\text{само III уцелва от първия път}\} = 0.8 \cdot 0.6 \cdot 0.6$. Отг.: $p_1/(p_1 + p_2 + p_3) = 3/29$. *(Можете да проверите, че отговорът не се променя, ако премахнем уточнението, че уцелването е станало точно на първата стрелба.)*

Задача 6. Раздаваме последователно картите от стандартно тесте карти. Ако за първи път видим червено асо на 6-та позиция, каква е вероятността след това да видим черно след другото червено асо?

Решение 6. Дефинираме $H_i := \{\text{изтеглили сме i черни аса до 6-тата карта}\}$ за $i = 1, 2$ и $A = \{\text{виждаме черно след второто червено асо}\}$. Пресмятаме $\mathbb{P}(H_0) = \binom{48}{5}/\binom{50}{5}$, $\mathbb{P}(H_1) = 2 \cdot \binom{48}{4}/\binom{50}{5}$, $\mathbb{P}(A|H_0) = 2/3, \mathbb{P}(A|H_1) = 1/2, \mathbb{P}(A|H_2) = 0$. Пресмятаме $\mathbb{P}(A)$ по формулата за пълната вероятност. Отг.: ≈ 0.6306.

Задача 7. На изпит се явяват 100 студенти, 55 момчета и 45 момичета. Момичетата взимат изпита с вероятност 0.7, а момчетата - с 0.4. След изпита се избират три резултата. Два от тях се оказали успешни, а един неуспешен. Каква е вероятността и трите резултата да са на момичета?

Решение 7. Дефинираме $H_1 := \{$избрали сме три момичета$\}$, $H_2 := \{$избрали сме две момичета и момче$\}$, $H_3 := \{$избрали сме две момчета и момиче$\}$, $H_4 := \{$избрали сме три момчета$\}$
и $A := \{$отговорите на избраните трима са два верни и един грешен$\}$. Пресмятаме $\mathbb{P}(H_1) = \binom{45}{3}/\binom{100}{3}, \mathbb{P}(H_2) = 55 \cdot \binom{45}{2}/\binom{100}{3}, \mathbb{P}(H_3) = 45 \cdot \binom{55}{2}/\binom{100}{3}, \mathbb{P}(H_4) = \binom{55}{3}/\binom{100}{3}, \mathbb{P}(A|H_1) = 3 \cdot (0.7)^2 \cdot (0.3), \mathbb{P}(A|H_2) = (0.7)^2 \cdot (0.6) + 2 \cdot (0.7) \cdot (0.3) \cdot (0.4), \mathbb{P}(A|H_3) = (0.4)^2 \cdot (0.3) + 2 \cdot (0.7) \cdot (0.4) \cdot (0.6)$ и $\mathbb{P}(A|H_4) = 3 \cdot (0.4)^2 \cdot (0.6)$. От формулата на Бейс, можем да пресметнем търсеното $\mathbb{P}(H_1|A)$.

Задача 8. Даден е кръг с радиус R. Върху диаметъра по случаен начин е избрана точка A. През точка A е прекарана хорда перпендикулярна на диаметъра. Каква е вероятността хордата да бъде по-къса от R? Отг.: $(2 - \sqrt{3})/2$.

Задача 9. Два парахода трябва да бъдат разтоварени на един и същи пристан през един и същи ден. Всеки от тях, независимо от другия, може да пристигне в кой да е момент от денонощието. Каква е вероятността параходите да не се засекат, ако за разтоварването на първия са необходими 6, а за втория 4 часа? Отг.: ≈ 0.6285.

Задача 10. Автобусите от линия A се движат на интервали от пет минути, а от линия B на десет минути, независимо от автобусите от линия A. Каква е вероятността

1. автобус от A да дойде преди автобус от Б;
2. пътник, дошъл в случаен момент на спирката, да чака не повече от две минути?

Отг.: $3/4, 26/50$.

Задача 11. Дадена е отсечка с дължина K. По случаен начин се избират две други отсечки с дължина по-малка от K. Каква е вероятността от трите отсечки да може да се построи триъгълник? Отг.: $1/2$

Задача 12. Каква е вероятността от три избрани по случаен начин отсечки с дължина по-малка от K да може да се построи триъгълник? Отг.: $1/2$

Задача 13. Дадена е магнетофонна лента с дължина 100м. Върху всяка от двете страни на лентата, на случайно избрано място, е записано непрекъснат съобщение с дължина 20м. Каква е вероятността между 25 и 50м, считано от началото на лентата, да няма участък несъдържащ поне едно от двете съобщения?

Задача 14. По случаен начин и независимо едно от друго се избират две числа x и y в интервала $(0, 1]$. Каква е вероятността на събитията

1. $xy \leq 1/4$;
2. $x + y \leq 1$ и $x^2 + y^2 \geq 1/2$;
3. $xy \geq 2/5$ и $x^2 + y^2 \leq 1$?

Задача 15. Разделяме случайно отсечка с дължина 1 на 3 части. Каква е вероятността те да могат да образуват триъгълник? Отг.: $1/4$

Задача 16. (Bertrand Paradox) Да разгледаме равностранен триъгълник, вписан в окръжност с радиус 1. Каква е вероятността случайно избрана хорда от тази окръжност да е по-дълга от страната на триъгълника? Отг.: $1/2, 1/3, 1/4$?