Зад 7. От 1,2,3,4,5 избираме 3 числа

$X = $ „най-малкото избрано"

$Y = $ „средното избрано"

$\mathbb{P}(X=1, Y=2) = \frac{3}{10}$

1) съвместно разпределение на X и Y

$\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$

Y \ X	1	2	3
2	$\frac{3}{10}$	0	0
3	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	
4	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

123   234   345
124   235
125   245
135
145

2) маргинални разпределения, т.е. разпределенията на X и Y

X	1	2	3
	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

Y	2	3	4
	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$

$\mathbb{E}X = \frac{1 \cdot 6 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1}{10} = 1,5$

$\mathbb{E}Y = \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3}{10} = 3$

3) $X \perp\!\!\!\perp Y$? Не

$\mathbb{P}(X=2, Y=2) = 0$

$\mathbb{P}(X=2)\,\mathbb{P}(Y=2) = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} \neq 0 \implies$ не са

$\mathbb{D}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{1^2 \cdot \frac{6}{10} + 2^2 \cdot \frac{3}{10} + 3^2 \cdot \frac{1}{10}}{\cancel{10}} - \frac{225}{100} =$

$= \frac{45}{100} = 0,45$

$\mathbb{D}Y = \frac{96}{10} - 9 = 0,6$

4) Cov и Cor на (X, Y)?

деф:

$Cov(X, Y) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)\big) = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$

$Cov(X, X) = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{D}X$

$Cor(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{D}X}\sqrt{\mathbb{D}Y}} \in [-1, 1]$

X, Y - цели

Ако $X\uparrow \implies Y\uparrow$, то $Cor \geq 0$

Ако $Cor < 0 \longrightarrow X\uparrow$, то $Y\downarrow$

X	7	1	5,5	2	4

Y	1	10	100	11	12	13

$Cor(X, Y) \in (-1, 1)$

X, Y идват от X, Y

$Cor(X, Y) = \frac{\mathbb{E}XY - \mathbb{E}X \mathbb{E}Y}{\sqrt{\mathbb{D}X}\sqrt{\mathbb{D}Y}}$

$\frac{Cor(X, Y)}{\mathbb{E}XY \to \bar{x}\bar{y}}$

$\mathbb{E}X \approx \frac{1}{n}\sum x_i$

$\mathbb{E}Y$

$\frac{1}{n}\sum x_i y_i$

$\frac{1}{n}\sum 1 \cdot 10 \cdots$

$\mathbb{D}X \approx \frac{1}{n-1}\sum (x - \mathbb{E}X)^2$

$\mathbb{D}Y$