Informatique *TP*
Logique Ipesup

1 Syntaxe

1.1 Exercice

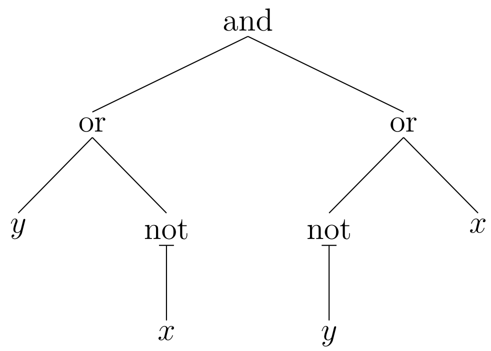
Représenter les arbres syntaxiques des formules logiques suivantes.

1. $\mathrm{imp}(\mathrm{or}(x, y), \mathrm{or}(z, y))$
2. $\mathrm{or}(\mathrm{imp}(x, y), \mathrm{not}(x))$
3. $\mathrm{and}(\mathrm{or}(\mathrm{or}(x, y), \mathrm{not}(z)), t)$
4. $\mathrm{or}(x, \mathrm{and}(y, \mathrm{or}(\mathrm{not}(z), t)))$

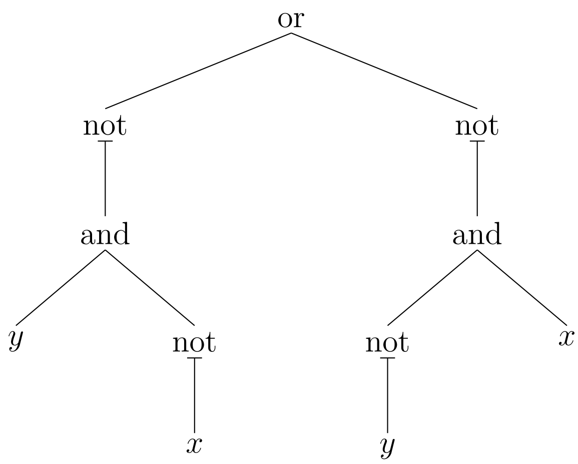
1.2 Exercice

Écrire les formules logiques représentées par les arbres suivants.

Arbre 1



Arbre 2



1.3 Sémantique

1.4 Exercice

x et y désignent deux variables propositionnelles.

1. Quelles valuations donnent la même valeur aux formules $\varphi = (x \vee y)$ et $\psi = (x \to y)$?
2. On considère la formule $\omega = (\varphi \to \psi)$. Quel est l'ensemble des modèles de ω, noté $\mathrm{mod}(\omega)$?
3. Une formule est dite *contingente* si elle est satisfiable sans être tautologique. La formule ω est-elle contingente ou tautologique ?

1.5 Exercice

x et y désignent deux variables propositionnelles. On considère les formules :

$$\varphi = x \wedge (\neg y \to (y \to x)) \qquad \psi = (x \vee y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$$

1. Si v est une valuation, quand cela est possible, déterminer les valeurs de vérité de φ et ψ dans les cas suivants :
   (a) $v(x) = F$, $v(y) = V$;
   (b) $v(x) = F$;
   (c) $v(y) = F$.
2. Ces formules sont-elles satisfiables ? Sont-elles des tautologies ?
3. Un ensemble de formules est dit consistant s'il existe au moins une valuation qui satisfait chacune de ses formules. L'ensemble $\{\varphi, \psi\}$ est-il consistant ?

1.6 Exercice

x et y désignent deux variables propositionnelles. Parmi les trois formules suivantes, l'une est une tautologie, une autre est contingente et une dernière est insatisfiable. Les identifier.

$$\varphi_1 = (x \to y) \to y \qquad \varphi_2 = x \to (y \to x) \qquad \varphi_3 = (x \wedge y) \leftrightarrow (x \to \neg y)$$

1.7 Exercice

1. Montrer que toute formule φ est une tautologie si et seulement si $\neg\varphi$ est insatisfiable.
2. Si un algorithme vérifie le caractère tautologique d'une formule, en déduire un algorithme qui vérifie si une formule est insatisfiable. Justifier votre réponse.

1.8 Exercice

Dans toutes les expressions suivantes, φ, ψ et ω désignent trois formules logiques.

1. Montrer les équivalences suivantes :
   (a) Idempotence de la conjonction :
   $$\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$$
   (b) Idempotence de la disjonction :
   $$\varphi \vee \varphi \equiv \varphi$$
   (c) Lois de la négation :
   $$\neg(\neg\varphi) \equiv \varphi \qquad \varphi \wedge \neg\varphi \equiv \bot \qquad \varphi \vee \neg\varphi \equiv \top \quad \text{(tiers exclu)}$$
   (d) Lois de simplification :
   $$\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \equiv \varphi \qquad \varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \equiv \varphi \qquad \varphi \vee (\neg\varphi \wedge \psi) \equiv \varphi \vee \psi$$
2. Montrer les lois de distributivité :
   (a) $\varphi \wedge (\psi \vee \omega) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \omega)$
   (b) $\varphi \vee (\psi \wedge \omega) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \omega)$
3. Montrer les lois de De Morgan :
   (a) $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv (\neg\varphi) \vee (\neg\psi)$
   (b) $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\varphi) \wedge (\neg\psi)$

1.9 Exercice

φ et ψ désignent deux formules logiques.

1. Montrer les équivalences suivantes.
   (a) $(\varphi \to \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \psi)$
   (b) $(\varphi \leftrightarrow \psi) \equiv ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$
2. En déduire deux formules sémantiquement équivalentes aux formules suivantes dans lesquelles seuls les connecteurs $\neg$, $\wedge$ et $\vee$ apparaissent.
   (a) $(\varphi \leftrightarrow \psi)$
   (b) $(((\varphi \to \psi) \wedge \varphi) \to \psi)$

1.10 Exercice

On considere un Sudoku. On suppose donnée une grille du jeu avec un certain nombre de cases déjà remplies. Afin de compléter la grille, on va définir une formule logique qui, si elle est satisfiable, permet de construire une solution. Pour modéliser le problème en termes logiques, on adopte les notations suivantes.

— Chaque ligne du tableau est repérée par un entier $r \in [0, 8]$.
— Chaque colonne du tableau est repérée par un entier $c \in [0, 8]$.
— Chaque case contient un entier $k \in [1, 9]$.

On définit alors une propositionnelle $x_{r,c,k}$ dont la valeur de vérité est V si la case (r, c) du tableau solution contient la valeur k ; F sinon.

1. (a) Sachant que chaque case doit contenir au moins un entier non nul, écrire une CNF C_1 qui exprime cette contrainte.
   (b) Sachant que chaque case doit contenir au plus un entier non nul, écrire une CNF C_2 qui exprime cette contrainte.
   (c) Sachant que chaque ligne doit contenir exactement une seule occurrence de chaque entier, écrire une CNF C_3 qui exprime cette contrainte.
   (d) Sachant que chaque colonne doit contenir exactement une seule occurrence de chaque entier, écrire une CNF C_4 qui exprime cette contrainte.
   (e) Sachant que chaque sous-groupe 3×3 doit contenir exactement une seule occurrence de chaque entier, écrire une CNF C_5 qui exprime cette contrainte.
   (f) On note I l'ensemble des triplets (r, c, k) des cases (r, c) et des entiers k initialement présents sur la grille. Écrire une CNF C_0 qui traduit la présence de ces chiffres dans la solution du problème.
   (g) En déduire une formule φ associée au problème du Sudoku.
2. (a) Combien de variables propositionnelles le problème comporte-t-il ?
   (b) Si on omet la clause C_0, combien φ comporte-t-elle de clauses disjonctives ?
3. En généralisant le problème du Sudoku à une grille $n \times n$ où $n = d^2$, $d \in \mathbb{N}^*$, montrer que le nombre de clauses disjonctives dans φ est en $O(n^4)$.
4. Si la formule est satisfiable, comment la connaissance des valeurs de vérité de chaque variable permet-elle la construction de la solution ?