

1 Exercice

x, y, z désignent trois variables propositionnelles. Pour chacune des formules suivantes, déterminer si elle est satisfiable et, dans le cas positif, toutes les valuations qui la satisfont.

1. $x \wedge y \wedge z$
2. $x \vee y \vee z$
3. $x \wedge z \wedge (y \vee z)$
4. $x \wedge (\neg z) \wedge (y \vee \neg x) \wedge (\neg y \vee z)$

2 Exercice

x et y désignent deux variables propositionnelles. Montrer que les formules suivantes sont des tautologies.

1. $(x \vee \neg x)$
2. $(x \rightarrow x)$
3. $((x \rightarrow y) \wedge x) \rightarrow y$
4. $((x \vee y) \leftrightarrow \neg(\neg x \wedge \neg y))$

3 Exercice

Soit \mathcal{V} un ensemble de variables propositionnelles et Val l'ensemble des valuations définies sur \mathcal{V} . Pour toutes formules logiques φ et ψ définies sur \mathcal{V} , montrer les propriétés ensemblistes suivantes.

1. $\text{Mod}(\neg\varphi) = \text{Val} \setminus \text{Mod}(\varphi)$
2. $\text{Mod}(\varphi \vee \psi) = \text{Val}(\varphi) \cup \text{Val}(\psi)$
3. $\text{Mod}(\varphi \wedge \psi) = \text{Val}(\varphi) \cap \text{Val}(\psi)$

4 Exercice

Étant données trois formules logiques φ, ψ, ω , on définit l'opérateur ternaire Δ par :

$$\Delta(\varphi, \psi, \omega) = (\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \omega).$$

1. Écrire sous la forme la plus simple les formules $\Delta(\top, \psi, \omega)$ et $\Delta(\perp, \psi, \omega)$.
2. Exprimer $(\varphi \wedge \psi)$ et $(\varphi \vee \psi)$ par une formule ne comportant qu'un seul Δ .
3. Exprimer $(\neg\varphi)$ en fonction de Δ , de \top et de \perp .

5 Exercice

φ et ψ désignent deux propositions logiques.

1. (a) Prouver l'équivalence $(\varphi \rightarrow \psi) \equiv (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$ (*contraposition*).
(b) Prouver l'équivalence $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \omega)) \equiv ((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \omega)$ (*exportation*).
(c) Prouver que $((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$ est une tautologie (*loi de Pierce*).
(d) Si x, y, z sont trois variables propositionnelles, que dire de la formule :

$$((x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow z)) ?$$

2. (a) Prouver que $(\varphi \leftrightarrow \psi) \equiv ((\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi))$.
(b) Prouver que $\varphi \equiv \psi$ si et seulement si $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ est une tautologie.