1. Ejercicio 2

Estimadores de mínimos cuadrados

1.1. Enunciado

Se pretende estimar los valores de producción Y (en miles de toneladas) de cierto material, en función del tiempo transcurrido X (en meses) usando los valores de la tabla:

X	2	6	14	15	23
Y	3	48	160	201	424

Se plantea un modelo de la forma $Y = a + bx + cx^2$. Encontrar los estimadores de mínimos cuadrados para a, b y c en este modelo.

1.2. Solución

En este ejercicio aplicaremos el método de mínimos cuadrados para estimar los parámetros de un modelo de regresión cuadrática. El objetivo es minimizar la suma de cuadrados de los residuos.

Paso 1: Formulación del problema
Tenemos el modelo cuadrático:

$$Y = a + bx + cx^2 + \varepsilon$$

donde ε representa el error aleatorio. Los datos observados son:

x_i	2	6	14	15	23
y_i	3	48	160	201	424

Paso 2: Conversión a forma matricial
El modelo cuadrático se puede expresar como un modelo de regresión lineal múltiple:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

donde:

- $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 48 \\ 160 \\ 201 \\ 424 \end{bmatrix}$ es el vector de respuestas
- $\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ es el vector de parámetros a estimar
- $\mathbf{X}$ es la matriz de diseño

La matriz de diseño $\mathbf{X}$ se construye con las columnas $[1, x, x^2]$:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 36 \\ 1 & 14 & 196 \\ 1 & 15 & 225 \\ 1 & 23 & 529 \end{bmatrix}$$

Paso 3: Fórmula de mínimos cuadrados
El estimador de mínimos cuadrados está dado por:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y}$$

Paso 4: Cálculo de $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$

$$\mathbf{X}^T\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 14 & 15 & 23 \\ 4 & 36 & 196 & 225 & 529 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 36 \\ 1 & 14 & 196 \\ 1 & 15 & 225 \\ 1 & 23 & 529 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}^T\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 5 & 60 & 990 \\ 60 & 990 & 18510 \\ 990 & 18510 & 370194 \end{bmatrix}$$

Paso 5: Cálculo de $\mathbf{X}^T\mathbf{y}$

$$\mathbf{X}^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 14 & 15 & 23 \\ 4 & 36 & 196 & 225 & 529 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 48 \\ 160 \\ 201 \\ 424 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 836 \\ 15301 \\ 302621 \end{bmatrix}$$

Paso 6: Cálculo de $(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}$
Para la matriz $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$, calculamos la inversa usando una calculadora:

$$(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1} \approx \begin{bmatrix} 1{,}555 & -0{,}253 & 0{,}0085 \\ -0{,}253 & 0{,}0567 & -0{,}00216 \\ 0{,}0085 & -0{,}00216 & 0{,}0000879 \end{bmatrix}$$

Paso 7: Cálculo final de los estimadores

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\beta}} &= (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y} \\ &\approx \begin{bmatrix} 1{,}555 & -0{,}253 & 0{,}0085 \\ -0{,}253 & 0{,}0567 & -0{,}00216 \\ 0{,}0085 & -0{,}00216 & 0{,}0000879 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 836 \\ 15301 \\ 302621 \end{bmatrix} \\ &\approx \begin{bmatrix} -1{,}434 \\ 2{,}865 \\ 0{,}678 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Conclusión
Los estimadores de mínimos cuadrados para el modelo $Y = a + bx + cx^2$ son:

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{a} &= -1{,}434 \\ \hat{b} &= 2{,}865 \\ \hat{c} &= 0{,}678 \end{aligned}}$$

El modelo estimado es:

$$\hat{Y} = -1{,}434 + 2{,}865x + 0{,}678x^2$$

Este modelo cuadrático captura la relación no lineal entre el tiempo transcurrido y la producción del material.