UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ingeniería

Laboratorio de Sistemas Embebidos

Especialización en Inteligencia Artificial

Probabilidad y Estadística para la Inteligencia Artificial

SEGUNDO TRABAJO PRÁCTICO

Docente: Camilo Argoty

Estudiante: Eliana Harriet

Código SIU: a2217

Fecha límite: 17 de Agosto de 2025

Índice

1. Ejercicio 1

Método de máxima verosimilitud

1.1. Enunciado

Una variable aleatoria discreta X puede tomar los valores 0, 1, 2 y 3. Las probabilidades para cada valor posible están dadas por la siguiente tabla:

X	0	1	2	3
p	$\frac{3\theta}{3}$	$\frac{6\theta}{3}$	$\frac{1-3\theta}{3}$	$\frac{2(1-3\theta)}{3}$

Si experimentalmente se obtienen los siguientes datos: $(0, 2, 3, 0, 1, 0, 3, 2, 1, 0)$, determine el valor de θ usando el método de máxima verosimilitud.

1.2. Solución

En este ejercicio utilizaremos el método de máxima verosimilitud para estimar el parámetro θ de una distribución discreta, basándonos en una muestra de datos observados.

Paso 1: Verificación de la distribución de probabilidad

Primero verificamos que las probabilidades dadas constituyen una distribución válida. Las probabilidades son:

$$
\begin{aligned}
P(X = 0) &= \frac{3\theta}{3} = \theta \\
P(X = 1) &= \frac{6\theta}{3} = 2\theta \\
P(X = 2) &= \frac{1 - 3\theta}{3} \\
P(X = 3) &= \frac{2(1 - 3\theta)}{3}
\end{aligned}
$$

Verificamos que suman 1:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{3} P(X = i) &= \theta + 2\theta + \frac{1 - 3\theta}{3} + \frac{2(1 - 3\theta)}{3} \\
&= 3\theta + \frac{1 - 3\theta + 2(1 - 3\theta)}{3} \\
&= 3\theta + \frac{1 - 3\theta + 2 - 6\theta}{3} \\
&= 3\theta + \frac{3 - 9\theta}{3} \\
&= 3\theta + 1 - 3\theta = 1\checkmark
\end{aligned}
$$

Paso 2: Análisis de los datos observados

Los datos experimentales son: $(0, 2, 3, 0, 1, 0, 3, 2, 1, 0)$

Contamos las frecuencias observadas:

$$
\begin{aligned}
n_0 &= 4 \text{ (apariciones de 0)} \\
n_1 &= 2 \text{ (apariciones de 1)} \\
n_2 &= 2 \text{ (apariciones de 2)} \\
n_3 &= 2 \text{ (apariciones de 3)} \\
n &= 10 \text{ (total de observaciones)}
\end{aligned}
$$

Paso 3: Construcción de la función de verosimilitud

La función de verosimilitud para una muestra de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas es:

$$\begin{aligned}
L(\theta) &= \prod_{i=1}^{n} f_{x_i}(x_i, \theta) \\
&= [P(X=0)]^{n_0} \times [P(X=1)]^{n_1} \times [P(X=2)]^{n_2} \times [P(X=3)]^{n_3} \\
&= \theta^4 \times (2\theta)^2 \times \left(\frac{1-3\theta}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2(1-3\theta)}{3}\right)^2
\end{aligned}$$

Simplificando:

$$\begin{aligned}
L(\theta) &= \theta^4 \times 4\theta^2 \times \frac{(1-3\theta)^2}{9} \times \frac{4(1-3\theta)^2}{9} \\
&= 4\theta^6 \times \frac{(1-3\theta)^2}{9} \times \frac{4(1-3\theta)^2}{9} \\
&= \frac{16\theta^6(1-3\theta)^4}{81}
\end{aligned}$$

Paso 4: Función de log-verosimilitud

Para facilitar los cálculos de derivación, aplicamos el logaritmo natural a la función de verosimilitud. Como el logaritmo es una función monótona creciente, el máximo de $L(\theta)$ coincide con el máximo de $\ln L(\theta)$.

Partiendo de:

$$L(\theta) = \frac{16\theta^6(1-3\theta)^4}{81}$$

Aplicamos logaritmo natural:

$$\begin{aligned}
\ln L(\theta) &= \ln\left(\frac{16\theta^6(1-3\theta)^4}{81}\right) \\
&= \ln(16) + \ln(\theta^6) + \ln[(1-3\theta)^4] - \ln(81) \\
&= \ln(16) + 6\ln(\theta) + 4\ln(1-3\theta) - \ln(81)
\end{aligned}$$

Como $\ln(16)$ y $\ln(81)$ son constantes, podemos trabajar con la función simplificada:

$$\ln L(\theta) = 6\ln(\theta) + 4\ln(1-3\theta) + \text{constante}$$

Paso 5: Condición de primer orden

Para encontrar el estimador de máxima verosimilitud, aplicamos la condición necesaria de primer orden: derivamos la log-verosimilitud con respecto a θ e igualamos a cero.

Calculamos cada derivada por separado:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\theta}[6\ln(\theta)] &= 6 \cdot \frac{1}{\theta} = \frac{6}{\theta} \\
\frac{d}{d\theta}[4\ln(1-3\theta)] &= 4 \cdot \frac{1}{1-3\theta} \cdot \frac{d}{d\theta}(1-3\theta) \\
&= 4 \cdot \frac{1}{1-3\theta} \cdot (-3) = \frac{-12}{1-3\theta}
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\theta}[\ln L(\theta)] = \frac{6}{\theta} + \frac{-12}{1-3\theta} = 0 \\
&\frac{6}{\theta} - \frac{12}{1-3\theta} = 0
\end{aligned}$$

Paso 6: Resolución de la ecuación
Resolvemos la ecuación de primer orden paso a paso:

$$\begin{aligned}
\frac{6}{\theta} - \frac{12}{1-3\theta} &= 0 \\
\frac{6}{\theta} &= \frac{12}{1-3\theta} \\
6(1-3\theta) &= 12\theta \\
6 - 18\theta &= 12\theta \\
6 &= 12\theta + 18\theta \\
6 &= 30\theta \\
\theta &= \frac{6}{30} = \frac{1}{5} = 0{,}2
\end{aligned}$$

Paso 7: Verificación de restricciones
Para que todas las probabilidades sean válidas, necesitamos:

- $\theta > 0$ para que $P(X=0)$ y $P(X=1)$ sean positivas
- $1 - 3\theta > 0 \Rightarrow \theta < \frac{1}{3}$ para que $P(X=2)$ y $P(X=3)$ sean positivas

Como $\theta = 0{,}2$, tenemos:

- $0{,}2 > 0$ ✓
- $0{,}2 < \frac{1}{3} \approx 0{,}333$ ✓

Paso 8: Verificación de las probabilidades resultantes
Con $\theta = 0{,}2$, las probabilidades son:

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= 0{,}2 \\
P(X=1) &= 2(0{,}2) = 0{,}4 \\
P(X=2) &= \frac{1-3(0{,}2)}{3} = \frac{0{,}4}{3} \approx 0{,}133 \\
P(X=3) &= \frac{2(0{,}4)}{3} = \frac{0{,}8}{3} \approx 0{,}267
\end{aligned}$$

Verificación: $0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}133 + 0{,}267 = 1{,}0$ ✓
Conclusión
El estimador de máxima verosimilitud para el parámetro θ es:

$$\boxed{\hat{\theta}_{MV} = 0{,}2}$$

Este valor maximiza la probabilidad de observar los datos experimentales dados y satisface todas las restricciones necesarias para que la distribución sea válida.

2. Ejercicio 2

Estimadores de mínimos cuadrados

2.1. Enunciado

Se pretende estimar los valores de producción Y (en miles de toneladas) de cierto material, en función del tiempo transcurrido X (en meses) usando los valores de la tabla:

X	2	6	14	15	23
Y	3	48	160	201	424

Se plantea un modelo de la forma $Y = a + bx + cx^2$. Encontrar los estimadores de mínimos cuadrados para a, b y c en este modelo.

2.2. Solución

En este ejercicio aplicaremos el método de mínimos cuadrados para estimar los parámetros de un modelo de regresión cuadrática. El objetivo es minimizar la suma de cuadrados de los residuos.

Paso 1: Formulación del problema

Tenemos el modelo cuadrático:

$$Y = a + bx + cx^2 + \varepsilon$$

donde ε representa el error aleatorio. Los datos observados son:

x_i	2	6	14	15	23
y_i	3	48	160	201	424

Paso 2: Conversión a forma matricial

El modelo cuadrático se puede expresar como un modelo de regresión lineal múltiple:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

donde:

- $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 48 \\ 160 \\ 201 \\ 424 \end{bmatrix}$ es el vector de respuestas
- $\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ es el vector de parámetros a estimar
- $\mathbf{X}$ es la matriz de diseño

La matriz de diseño $\mathbf{X}$ se construye con las columnas $[1, x, x^2]$:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 36 \\ 1 & 14 & 196 \\ 1 & 15 & 225 \\ 1 & 23 & 529 \end{bmatrix}$$

Paso 3: Fórmula de mínimos cuadrados

El estimador de mínimos cuadrados está dado por:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y}$$

Paso 4: Cálculo de $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$

$$\mathbf{X}^T\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 14 & 15 & 23 \\ 4 & 36 & 196 & 225 & 529 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 36 \\ 1 & 14 & 196 \\ 1 & 15 & 225 \\ 1 & 23 & 529 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}^T\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 5 & 60 & 990 \\ 60 & 990 & 18510 \\ 990 & 18510 & 370194 \end{bmatrix}$$

Paso 5: Cálculo de $\mathbf{X}^T\mathbf{y}$

$$\mathbf{X}^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 14 & 15 & 23 \\ 4 & 36 & 196 & 225 & 529 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 48 \\ 160 \\ 201 \\ 424 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 836 \\ 15301 \\ 302621 \end{bmatrix}$$

Paso 6: Cálculo de $(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}$

$$\mathbf{X}^T\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 5 & 60 & 990 \\ 60 & 990 & 18510 \\ 990 & 18510 & 370194 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1} \approx \begin{bmatrix} 1{,}555 & -0{,}253 & 0{,}0085 \\ -0{,}253 & 0{,}0567 & -0{,}00216 \\ 0{,}0085 & -0{,}00216 & 0{,}0000879 \end{bmatrix}$$

Paso 7: Cálculo final de los estimadores

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\beta}} &= (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y} \\ &\approx \begin{bmatrix} 1{,}555 & -0{,}253 & 0{,}0085 \\ -0{,}253 & 0{,}0567 & -0{,}00216 \\ 0{,}0085 & -0{,}00216 & 0{,}0000879 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 836 \\ 15301 \\ 302621 \end{bmatrix} \\ &\approx \begin{bmatrix} -1{,}434 \\ 2{,}865 \\ 0{,}678 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Conclusión

Los estimadores de mínimos cuadrados para el modelo $Y = a + bx + cx^2$ son:

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{a} &= -1{,}434 \\ \hat{b} &= 2{,}865 \\ \hat{c} &= 0{,}678 \end{aligned}}$$

El modelo estimado es:

$$\hat{Y} = -1{,}434 + 2{,}865x + 0{,}678x^2$$

Este modelo cuadrático captura la relación no lineal entre el tiempo transcurrido y la producción del material.

3. Ejercicio 3

Inferencia bayesiana

3.1. Enunciado

Don Francisco tiene 5 clientes a los que les ha vendido mercancías a crédito y, de ellos, 3 están en mora con el pago prometido. Matías, teniendo en cuenta la información disponible, considera que puede modelar el porcentaje p de morosidad según una distribución $B(2,3)$. Para determinar los parámetros α y β, decide usar inferencia bayesiana. Con esto, pretende explicarle a Don Francisco, cómo será el comportamiento de pago de sus clientes a crédito.

Determinen la distribución a posteriori del parámetro p de porcentaje de morosidad (α y β). Determinar su media y su varianza.

3.2. Solución

En este ejercicio aplicaremos inferencia bayesiana para actualizar nuestro conocimiento sobre el parámetro de morosidad usando distribuciones conjugadas Beta-Binomial.

Paso 1: Identificación del modelo

Tenemos los siguientes elementos:

- **Datos observados**: 5 clientes, 3 en mora
- **Distribución a priori**: $p \sim \text{Beta}(2,3)$
- **Verosimilitud**: Binomial con $n = 5$ ensayos y $k = 3$ éxitos (clientes en mora)

El número de clientes en mora sigue una distribución binomial:

$$X|p \sim \text{Binomial}(n = 5, p)$$

Paso 2: Distribución a priori

La distribución a priori es:

$$p \sim \text{Beta}(\alpha_0 = 2, \beta_0 = 3)$$

Con función de densidad:

$$\pi(p) = \frac{\Gamma(2+3)}{\Gamma(2)\Gamma(3)} p^{2-1}(1-p)^{3-1} = \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(2)\Gamma(3)} p(1-p)^2$$

Simplificando: $\pi(p) = 12p(1-p)^2$ para $p \in [0,1]$

Paso 3: Función de verosimilitud

La función de verosimilitud expresa la probabilidad de observar $k = 3$ clientes en mora de un total de $n = 5$ clientes, dado el parámetro p.

Como el número de clientes en mora sigue una distribución binomial, la verosimilitud es:

$$L(p|k = 3) = \binom{5}{3} p^3(1-p)^{5-3} = 10p^3(1-p)^2$$

Esta función representa qué tan probable es observar exactamente 3 clientes en mora para diferentes valores del parámetro p.

Paso 4: Aplicación del teorema de Bayes

Usando el teorema de Bayes para obtener la distribución a posteriori:

$$f(p|k = 3) = \frac{L(p|k = 3) \cdot \pi(p)}{\int_0^1 L(p|k = 3) \cdot \pi(p)\, dp}$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} f(p|k=3) &\propto L(p|k=3)\cdot\pi(p) \\ &\propto p^3(1-p)^2\cdot p(1-p)^2 \\ &\propto p^{3+1}(1-p)^{2+2} \\ &\propto p^4(1-p)^4 \end{aligned}$$

Paso 5: Identificación de la distribución a posteriori
Del Paso 4 obtuvimos que la distribución a posteriori es proporcional a:

$$f(p|k=3)\propto p^4(1-p)^4$$

Recordamos que la función de densidad de una distribución Beta(α,β) tiene la forma:

$$f(p)\propto p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}$$

Comparando nuestro resultado $p^4(1-p)^4$ con la forma estándar $p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}$:

$$\begin{aligned} \alpha-1=4 &\Rightarrow \alpha=5 \\ \beta-1=4 &\Rightarrow \beta=5 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$p|k=3\sim \text{Beta}(\alpha_n=5,\beta_n=5)$$

Verificamos usando la regla de actualización bayesiana para conjugadas Beta-Binomial:

$$\begin{aligned} &\alpha_n=\alpha_0+k=2+3=5\checkmark \\ &\beta_n=\beta_0+(n-k)=3+(5-3)=3+2=5\checkmark \end{aligned}$$

Conclusión del paso:

$$\boxed{p|k=3\sim \text{Beta}(5,5)}$$

Paso 6: Cálculo de la media a posteriori
Para una distribución Beta(α,β), la media es:

$$E[p|k=3]=\frac{\alpha_n}{\alpha_n+\beta_n}=\frac{5}{5+5}=\frac{5}{10}=0{,}5$$

Paso 7: Cálculo de la varianza a posteriori
Para una distribución Beta(α,β), la varianza es:

$$\text{Var}(p|k=3)=\frac{\alpha_n\beta_n}{(\alpha_n+\beta_n)^2(\alpha_n+\beta_n+1)}$$

Sustituyendo valores:

$$\text{Var}(p|k=3)=\frac{5\cdot 5}{(5+5)^2(5+5+1)}=\frac{25}{10^2\cdot 11}=\frac{25}{1100}=\frac{1}{44}\approx 0{,}0227$$

Paso 8: Interpretación y comparación
Distribución a priori vs. a posteriori:

- **A priori**: Beta$(2,3)$ con $E[p]=\frac{2}{5}=0{,}4$ y $\text{Var}(p)=\frac{6}{150}=0{,}04$
- **A posteriori**: Beta$(5,5)$ con $E[p]=0{,}5$ y $\text{Var}(p)=0{,}0227$

Conclusiones
Los parámetros de la distribución a posteriori son:

$$\boxed{\alpha = 5, \quad \beta = 5}$$

La media y varianza a posteriori son:

$$\boxed{E[p|k = 3] = 0{,}5, \quad \text{Var}(p|k = 3) = \frac{1}{44} \approx 0{,}0227}$$

Interpretación para Don Francisco:

- La estimación de morosidad se actualizó de 40 % (a priori) a 50 % (a posteriori)
- La incertidumbre se redujo: la varianza disminuyó de 0.04 a 0.0227
- Los datos observados (3 de 5 clientes en mora) han influido en aumentar la estimación de morosidad
- La distribución a posteriori es simétrica alrededor de 0.5, indicando igual probabilidad de pago o mora