Probabilidad y estadística para la Inteligencia Artificial, clase 5

Camilo Enrique Argoty Pulido

Especialización en Inteligencia Artificial

18 de noviembre de 2024

Ejemplos y ejercicios de intervalos de confianza

Intervalo de confianza bilateral para la media, conociendo σ

Example

Se encuentra que la concentración promedio de zinc que se obtiene en una muestra de mediciones en 36 sitios diferentes de un río es de 2.6 gramos por mililitro.

Intervalo de confianza bilateral para la media, conociendo σ

Example

Se encuentra que la concentración promedio de zinc que se obtiene en una muestra de mediciones en 36 sitios diferentes de un río es de 2.6 gramos por mililitro.

1. Calcule los intervalos de confianza del $95\,\%$ y del $99\,\%$ para la concentración media del zinc en el río. Suponga que la desviación estándar de la población es de $0{,}3$ gramos por mililitro.
2. ¿Qué tan grande debe ser la muestra para si se quiere que, con una confianza de $9{,}5\,\%$ el error en la estimación sea menor que $0{,}05$?

Intervalo de confianza unilateral para la media, conociendo σ

Example

En un experimento de pruebas psicológicas se seleccionan al azar 25 sujetos y se miden sus tiempos de reacción, en segundos, ante un estímulo particular.

Intervalo de confianza unilateral para la media, conociendo σ

Example

En un experimento de pruebas psicológicas se seleccionan al azar 25 sujetos y se miden sus tiempos de reacción, en segundos, ante un estímulo particular.

La experiencia sugiere que la varianza en los tiempos de reacción ante los diferentes tipos de estímulo $4s^2$ y que la distribución del tiempo de reacción es aproximadamente normal.

Intervalo de confianza unilateral para la media, conociendo σ

Example

En un experimento de pruebas psicológicas se seleccionan al azar 25 sujetos y se miden sus tiempos de reacción, en segundos, ante un estímulo particular.

La experiencia sugiere que la varianza en los tiempos de reacción ante los diferentes tipos de estímulo $4s^2$ y que la distribución del tiempo de reacción es aproximadamente normal.

Calcule un intervalo superior del $95\,\%$ de confianza para el tiempo de reacción.

Intervalos de confianza para la media, sin conocer σ

Example

El contenido de ácido sulfúrico de 7 contenedores similares es de $9{,}8$; $10{,}2$; $10{,}4$; $9{,}8$; $10{,}0$; $10{,}2$ y $9{,}6$ litros.

Intervalos de confianza para la media, sin conocer σ

Example

El contenido de ácido sulfúrico de 7 contenedores similares es de $9{,}8$; $10{,}2$; $10{,}4$; $9{,}8$; $10{,}0$; $10{,}2$ y $9{,}6$ litros.

Calcule un intervalo de confianza del $95\,\%$ para el contenido promedio de todos los contenedores suponiendo una distribución normal

Intervalos de confianza para la media, sin conocer σ

Si $n \geq 30$, se asume que S^2 está muy cerca de σ^2 y por lo tanto, se suele aceptar el intervalo de confianza como si se conociera σ^2, usando $S2$

Intervalos de confianza para la media, sin conocer σ

Si $n \geq 30$, se asume que S^2 está muy cerca de σ^2 y por lo tanto, se suele aceptar el intervalo de confianza como si se conociera σ^2, usando $S2$

Example

Se obtienen las calificaciones de matemáticas del Examen de Aptitudes Escolares (SAT por sus siglas en inglés), de una muestra aleatoria de 500 estudiantes del último año de preparatoria del estado de Texas. Se calculan la media y la desviación estándar muestrales, que son 501 y 112, respectivamente.

Intervalos de confianza para la media, sin conocer σ

Si $n \geq 30$, se asume que S^2 está muy cerca de σ^2 y por lo tanto, se suele aceptar el intervalo de confianza como si se conociera σ^2, usando $S2$

Example

Se obtienen las calificaciones de matemáticas del Examen de Aptitudes Escolares (SAT por sus siglas en inglés), de una muestra aleatoria de 500 estudiantes del último año de preparatoria del estado de Texas. Se calculan la media y la desviación estándar muestrales, que son 501 y 112, respectivamente.

Calcule un intervalo de confianza del $99\,\%$ de la calificación promedio de matemáticas en el SAT para los estudiantes del último ño de preparatoria del estado de Texas.

Intervalo de confianza para la diferencia entre medias

Theorem

Si $\bar{x}_1$ *y* $\bar{x}_2$ *son las medias muestrales de muestras aleatorias independientes de tamaños* n_1 *y* n_2*, de poblaciones que tienen varianzas conocidas* σ_1^2 *y* σ_2^2*, respectivamente, un intervalo de confianza del* $100(1-\mu)\,\%$ *para* $\mu_1 - \mu_2$ *está dado por:*

Intervalo de confianza para la diferencia entre medias

Theorem

Si $\bar{x}_1$ *y* $\bar{x}_2$ *son las medias muestrales de muestras aleatorias independientes de tamaños* n_1 *y* n_2*, de poblaciones que tienen varianzas conocidas* σ_1^2 *y* σ_2^2*, respectivamente, un intervalo de confianza del* $100(1-\mu)\,\%$ *para* $\mu_1 - \mu_2$ *está dado por:*

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Intervalo de confianza para la diferencia entre medias

Theorem

Si $\bar{x}_1$ *y* $\bar{x}_2$ *son las medias muestrales de muestras aleatorias independientes de tamaños* n_1 *y* n_2*, de poblaciones que tienen varianzas conocidas* σ_1^2 *y* σ_2^2*, respectivamente, un intervalo de confianza del* $100(1-\mu)\,\%$ *para* $\mu_1 - \mu_2$ *está dado por:*

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Theorem

Si $\bar{x}_1$ *y* $\bar{x}_2$ *son las medias muestrales de muestras aleatorias independientes de tamaños* n_1 *y* n_2*, con varianzas muestrales* S_1^2 *y* S_2^2 *respectivamente, un intervalo de confianza del* $100(1-\mu)\,\%$ *para* $\mu_1 - \mu_2$ *está dado por:*

Intervalo de confianza para la diferencia entre medias

Theorem

Si $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$ son las medias muestrales de muestras aleatorias independientes de tamaños n_1 y n_2, de poblaciones que tienen varianzas conocidas σ_1^2 y σ_2^2, respectivamente, un intervalo de confianza del $100(1-\mu)\,\%$ para $\mu_1 - \mu_2$ está dado por:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Theorem

Si $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$ son las medias muestrales de muestras aleatorias independientes de tamaños n_1 y n_2, con varianzas muestrales S_1^2 y S_2^2 respectivamente, un intervalo de confianza del $100(1-\mu)\,\%$ para $\mu_1 - \mu_2$ está dado por:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

Intervalo de confianza para la diferencia entre medias

Example

Se llevó a cabo un experimento donde se compararon dos tipos de motores, el A y el B. Se midió el rendimiento de combustible en millas por galón. Se realizaron 50 experimentos con el motor tipo A y 75 con el motor B.

Intervalo de confianza para la diferencia entre medias

Example

Se llevó a cabo un experimento donde se compararon dos tipos de motores, el A y el B. Se midió el rendimiento de combustible en millas por galón. Se realizaron 50 experimentos con el motor tipo A y 75 con el motor B.

La gasolina utilizada y las demás condiciones se mantuvieron constantes. El rendimiento promedio de gasolina para el motor A fue de 36 millas por galón y el promedio para el motor B fue de 42 millas por galón.

Intervalo de confianza para la diferencia entre medias

Example

Se llevó a cabo un experimento donde se compararon dos tipos de motores, el A y el B. Se midió el rendimiento de combustible en millas por galón. Se realizaron 50 experimentos con el motor tipo A y 75 con el motor B.

La gasolina utilizada y las demás condiciones se mantuvieron constantes. El rendimiento promedio de gasolina para el motor A fue de 36 millas por galón y el promedio para el motor B fue de 42 millas por galón.

Calcule un intervalo de confianza del $96\,\%$ sobre $\mu_B - \mu_A$, donde μ_A, μ_B corresponden a la media de rendimiento para los motores A y B respectivamente.

Intervalo de confianza para la diferencia entre medias

Example

Se llevó a cabo un experimento donde se compararon dos tipos de motores, el A y el B. Se midió el rendimiento de combustible en millas por galón. Se realizaron 50 experimentos con el motor tipo A y 75 con el motor B.

La gasolina utilizada y las demás condiciones se mantuvieron constantes. El rendimiento promedio de gasolina para el motor A fue de 36 millas por galón y el promedio para el motor B fue de 42 millas por galón.

Calcule un intervalo de confianza del $96\,\%$ sobre $\mu_B - \mu_A$, donde μ_A, μ_B corresponden a la media de rendimiento para los motores A y B respectivamente.

Suponga que las desviaciones estándar son 6 y 8 para A y B respectivamente.

Intervalo de confianza para la diferencia entre medias

Example

El Departamento de zoología de Virginia Tech llevó a cabo un estudio para estimar la diferencia en la cantidad de ortofósforo químico medido en dos estaciones diferentes del río James. El ortofósforo se mide en miligramos por litro.

Intervalo de confianza para la diferencia entre medias

Example

El Departamento de zoología de Virginia Tech llevó a cabo un estudio para estimar la diferencia en la cantidad de ortofósforo químico medido en dos estaciones diferentes del río James. El ortofósforo se mide en miligramos por litro.

Se reunieron 15 muestras de la estación 1 y 12 muestras de la estación 2. Las 15 muestras de la estación 1 tuvieron un contenido promedio de ortofósforo de $3{,}84$ miligramos por litro y una desviación estándar de $3{,}07$ miligramos por litro; en tanto que las 12 muestras de la estación 2 tuvieron un contenido promedio de $1{,}49$ miligramos por litro y una desviación estándar de $0{,}80$ miligramos por litro.

Intervalo de confianza para la diferencia entre medias

Example

El Departamento de zoología de Virginia Tech llevó a cabo un estudio para estimar la diferencia en la cantidad de ortofósforo químico medido en dos estaciones diferentes del río James. El ortofósforo se mide en miligramos por litro.

Se reunieron 15 muestras de la estación 1 y 12 muestras de la estación 2. Las 15 muestras de la estación 1 tuvieron un contenido promedio de ortofósforo de $3{,}84$ miligramos por litro y una desviación estándar de $3{,}07$ miligramos por litro; en tanto que las 12 muestras de la estación 2 tuvieron un contenido promedio de $1{,}49$ miligramos por litro y una desviación estándar de $0{,}80$ miligramos por litro.

Calcule un intervalo de confianza de $95\,\%$ para la diferencia en el contenido promedio verdadero de ortofósforo en estas dos estaciones. Suponga que las observaciones provienen de poblaciones normales con varianzas diferentes.

Intervalo de confianza para la varianza

Theorem

Si σ^2 *es la varianza de una muestra aleatoria de tamaño* n *de una población normal, un intervalo de confianza del* $100(1-\alpha)\,\%$ *para* σ^2 *es:*

Intervalo de confianza para la varianza

Theorem

Si σ^2 *es la varianza de una muestra aleatoria de tamaño* n *de una población normal, un intervalo de confianza del* $100(1-\alpha)\,\%$ *para* σ^2 *es:*

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}},$$

Intervalo de confianza para la varianza

Theorem

Si σ^2 *es la varianza de una muestra aleatoria de tamaño* n *de una población normal, un intervalo de confianza del* $100(1-\alpha)\,\%$ *para* σ^2 *es:*

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}},$$

donde $\chi^2_{\alpha/2}$ *y* $\chi^2_{1-\alpha/2}$ *son valores críticos de* χ^2 *con* $n-1$ *grados de libertad para* α *y* $(1-\alpha/2)$

Intervalo de confianza para la varianza

Example

Los siguientes son los pesos, en decagramos, de 10 paquetes de se millas de pasto distribuidas por cierta empresa: $46{,}4$; $46{,}1$; $45{,}8$; $47{,}0$; $46{,}1$; $45{,}9$; $45{,}8$; $46{,}9$; $45{,}2$ y $46{,}0$.

Intervalo de confianza para la varianza

Example

Los siguientes son los pesos, en decagramos, de 10 paquetes de se millas de pasto distribuidas por cierta empresa: $46{,}4$; $46{,}1$; $45{,}8$; $47{,}0$; $46{,}1$; $45{,}9$; $45{,}8$; $46{,}9$; $45{,}2$ y $46{,}0$.

Calcule un intervalo de confianza del $95\,\%$ para la varianza de todos los pesos de este tipo de paquetes de semillas de pasto distribuidos por la empresa. Suponga una población normal.

Intervalo de confianza para el cociente de varianzas

Example

Si S_1^2 y S_2^2 son varianzas muestrales de muestras independientes de tamaño n_1 y n_2, respectivamente, tomadas de poblaciones normales, entonces el intervalo de confianza del $100(1-\alpha)\,\%$ para σ_1^2/σ_2^2 es:

Intervalo de confianza para el cociente de varianzas

Example

Si S_1^2 y S_2^2 son varianzas muestrales de muestras independientes de tamaño n_1 y n_2, respectivamente, tomadas de poblaciones normales, entonces el intervalo de confianza del $100(1-\alpha)\,\%$ para σ_1^2/σ_2^2 es:

$$\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{f_{\alpha/2}(\nu_1,\nu_2)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2} f_{\alpha/2}(\nu_1,\nu_2),$$

Intervalo de confianza para el cociente de varianzas

Example

Si S_1^2 y S_2^2 son varianzas muestrales de muestras independientes de tamaño n_1 y n_2, respectivamente, tomadas de poblaciones normales, entonces el intervalo de confianza del $100(1-\alpha)\,\%$ para σ_1^2/σ_2^2 es:

$$\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{f_{\alpha/2}(\nu_1,\nu_2)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2} f_{\alpha/2}(\nu_1,\nu_2),$$

donde $f_{\alpha/2}(\nu_1,\nu_2)$ es el valor crítico para $\alpha/2$ para la distribución F de Fisher con n_1-1 y n_2-1 grados de libertad.