

SYS2041 – Électronique numérique

Cours 5 : Tableaux de Karnaugh

Alexandre BRIÈRE



Outil graphique permettant de simplifier les expressions booléennes :

⇒ La somme de produit (SDP) la plus simple possible !

⇒ Le produit de somme (PDS) le plus simple possible !

Table de vérité :

⇒ Tableau 1D de toutes les combinaisons d'entrées possibles

Tableau de Karnaugh :

⇒ Tableau 2D de toutes les combinaisons d'entrées possibles

Tableau de Karnaugh à 2 variables

A	B	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

		B	
		0	1
A	0	0	1
	1	1	0

Tableau de Karnaugh à 3 variables

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>S</i>
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

		<i>C</i>	
		0	1
<i>AB</i>	00	0	1
	01	0	1
	11	0	1
	10	0	1

Attention : les tableaux de Karnaugh utilisent le code de Gray !

Tableau de Karnaugh à 3 variables BIS

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>S</i>
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

		<i>BC</i>			
		00	01	11	10
<i>A</i>	0	0	1	1	0
	1	0	1	1	0

Tableau de Karnaugh à 4 variables

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>S</i>
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

		<i>CD</i>			
		00	01	11	10
<i>AB</i>	00	0	0	0	0
	01	1	1	1	1
	11	1	1	1	1
	10	0	0	0	0

Tableau de Karnaugh à 5 variables

		<i>CD</i>			
		00	01	11	10
<i>AB</i>	00	0	0	0	0
	01	1	1	1	1
	11	1	1	1	1
	10	0	0	0	0

$E = 0$

		<i>CD</i>			
		00	01	11	10
	00	1	1	1	1
	01	0	0	0	0
	11	0	0	0	0
	10	1	1	1	1

$E = 1$

Tableau de Karnaugh d'une SDP standard

Soit l'équation suivante :

$$\overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}C$$

- Déterminer la valeur binaire de chaque terme :

$$\overline{A}\overline{B}\overline{C} : 000 \quad \overline{A}B\overline{C} : 001 \quad A\overline{B}\overline{C} : 110 \quad A\overline{B}C : 100$$

- Pour chaque terme, placer un 1 dans la case correspondante :

		<i>BC</i>			
		00	01	11	10
<i>A</i>	0	1	1		
	1	1			1

Tableau de Karnaugh d'une SDP non standard

Soit l'équation suivante :

$$\overline{A} + A\overline{B} + AB\overline{C}$$

- Déterminer la valeur binaire de chaque terme :

$$\overline{A} : 000 \quad 001 \quad 010 \quad 011$$

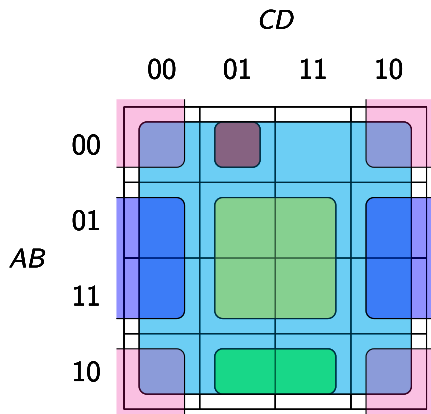
$$A\overline{B} : 100 \quad 101$$

$$AB\overline{C} : 110$$

- Pour chaque terme, placer un 1 dans les cases correspondantes :

		<i>BC</i>			
		00	01	11	10
<i>A</i>	0	1	1	1	1
	1	1	1		1

Cellules contiguës d'un tableau de Karnaugh



Étape 1 – Créer des groupes de cases à 1 :

- Un groupe contient 2^n cases
- Toutes les cases du groupe doivent être contiguës
- Toujours choisir le plus grand groupe possible
- Tous les 1 du tableau doivent être dans un groupe
- Un 1 peut être dans plusieurs groupes

Étape 2 – Déterminer les termes de produit minimisés :

- Chaque groupe correspond à un terme
- Dans chaque groupe, ne garder que les termes fixes
- Additionner les termes engendrés par chaque groupes

Simplification d'une SDP avec un tableau de Karnaugh

Exemple :

		<i>CD</i>			
		00	01	11	10
<i>AB</i>	00			1	1
	01	1	1	1	1
	11	1	1	1	1
	10		1		

$$B + \overline{A}C + A\overline{C}D$$

Tableau de Karnaugh d'un PDS standard

Soit l'équation suivante :

$$(A + B + C)(A + \overline{B} + C)(\overline{A} + \overline{B} + C)(\overline{A} + B + \overline{C})$$

- Déterminer la valeur binaire de chaque terme :

$$A + B + C : 000 \quad A + \overline{B} + C : 010$$

$$\overline{A} + \overline{B} + C : 110 \quad \overline{A} + B + \overline{C} : 101$$

- Pour chaque terme, placer un **0** dans la case correspondante :

		BC			
		00	01	11	10
A	0	0			0
	1		0		0

Tableau de Karnaugh d'un PDS non standard

Soit l'équation suivante :

$$(\overline{A})(A + \overline{B})(A + B + \overline{C})$$

- Déterminer la valeur binaire de chaque terme :

$$\overline{A} : \quad 100 \quad 101 \quad 110 \quad 111$$

$$A + \overline{B} : \quad 010 \quad 011$$

$$A + B + \overline{C} : \quad 001$$

- Pour chaque terme, placer un **0** dans les cases correspondantes :

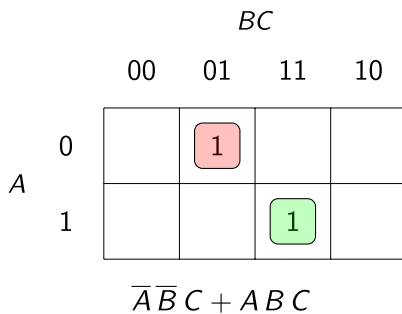
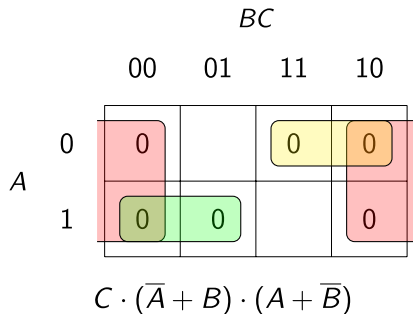
		<i>BC</i>			
		00	01	11	10
<i>A</i>	0		0	0	0
	1	0	0	0	0

Démarche similaire à la simplification d'une SDP :

- Créer des groupes de cases à **0** (et non 1) :
 - ▶ Un groupe contient 2^n cases
 - ▶ Toutes les cases du groupe doivent être contiguës
 - ▶ Toujours choisir le plus grand groupe possible
 - ▶ Tous les **0** du tableau doivent être dans un groupe
 - ▶ Un **0** peut être dans plusieurs groupes
- Déterminer les termes de sommes minimisés :
 - ▶ Chaque groupe correspond à un terme
 - ▶ Dans chaque groupe, ne garder que les termes fixes
 - ▶ Multiplier les termes engendrés par chaque groupes

Conversion de PDS et SDP par tableau de Karnaugh

- Toutes les cellules ne contenant pas de 0 dans le tableau de Karnaugh d'un PDS contiennent des 1
- Toutes les cellules ne contenant pas de 1 dans le tableau de Karnaugh d'une SDP contiennent des 0



Cas particulier des conditions « indifférentes »

$$DCB = \{7,8,9\} \Rightarrow S = 1$$

A	B	C	D	S
0	0	0	0	0(0)
0	0	0	1	0(1)
0	0	1	0	0(2)
0	0	1	1	0(3)
0	1	0	0	0(4)
0	1	0	1	0(5)
0	1	1	0	0(6)
0	1	1	1	1(7)
1	0	0	0	1(8)
1	0	0	1	1(9)
1	0	1	0	X
1	0	1	1	X
1	1	0	0	X
1	1	0	1	X
1	1	1	0	X
1	1	1	1	X

		CD			
		00	01	11	10
AB	00				
	01			1	
	11	X	X	X	X
	10	1	1	X	X

$$S = \bar{A} B C D + A \bar{B} \bar{C}$$

$$S = B C D + A$$

Problème : régulation d'une cuve

Le niveau de la cuve est contrôlé par 2 capteurs de niveau N_H et N_B et deux capteurs de température T_H et T_B .

Une vanne V permet le remplissage tant que le niveau haut n'est pas atteint et une résistance chauffante R assure le chauffage jusqu'à la température maximale T_H .

Une sécurité de fonctionnement interdit le chauffage si le niveau de remplissage est inférieur au niveau bas N_B . De plus, si la température est inférieure à la température T_B , le remplissage est arrêté.

Les capteurs de niveau N_H et N_B sont à 1 s'ils détectent du liquide.

Les capteurs de température T_H et T_B sont à 1 si la température est respectivement supérieure à T_H et T_B .

La vanne est ouverte si V est à 1.

La résistance chauffe si R est à 1.

- [1] Sébastien GAGEOT et Franck CRISON :
SYS2041 : Systèmes numériques (Laval).
- [2] Thomas FLOYD :
Systèmes numériques.
Éditions Reynald Goulet, 2018.