THEORIE DES GRAPHES

10) ALGORITHME DE DIJKSTRA (LES LONGUEURS SONT POSITIVES OU NULLES)

Soient :

G = [X, U] un graphe valué donné tel que tous les arcs (resp. toutes les arêtes) sont de longueurs (coûts) positives ou nulles ;

S : L'ensemble des sommets pour lesquels on a déjà calculé les plus courts chemins ;

s : Le sommet à partir duquel on cherche les plus courts chemins ;

$\overline{S}$: L'ensemble des sommets qui n'appartiennent pas à S ;

$\Gamma^{+}(x)$: L'ensemble des successeurs de x ;

$\overline{S} \cap \Gamma^{+}(x)$: L'ensemble des successeurs de x qui n'appartiennent pas à S ;

Π(x) : la longueur du plus court chemin de s à x parmi les chemins dont tous les sommets intermédiaires sont dans S.

L'algorithme de Dijkstra est le suivant.

Procédure Dijkstra (donnée G = [X, U] : graphe; donnée l : longueur ; donnée s : sommet ; résultat Π : longueur des plus courts chemins ; résultat S : ensemble des sommets pour lesquels on a déjà calculé les plus courts chemins) ;

{*On suppose que les longueurs sont positives ou nulles*}

Début

S = {s} ;

Π(s) = 0 ;

Π(xi) = l(s, xi) si xi $\in \Gamma^{+}(s)$;

Π(xi) = ∞ si xi $\notin \Gamma^{+}(s)$.

Tant qu'il existe un sommet xj $\notin$ S faire

Choisir xj $\notin$ S tel que Π(xj) := Min$_{\{xi \notin S\}}$ Π(xi)

Si Π(xj) = ∞ alors

Ecrire(« Terminé. s n'est pas racine »)

Sinon

S := S U {xj}

Fin si

Si S = X alors

Ecrire(«Terminé . les Π(xj) sont les plus courts chemins »)

Sinon

Pour tout xi $\in \Gamma^{+}(xj)$ et xi $\notin$ S faire

Π(xi) := Min(Π(xi), Π(xj) + l(xj, xi))

Fin pour tout

Fin si

Fin Tant que

Fin;

Considérons la matrice d’adjacence ci-dessous.

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13
x1		2	10	1									
x2					20	3							
x3				20	40								
x4								5	3				
x5						20	20				35		
x6											5		
x7								45				40	
x8									10				
x9													45
x10							45					20	
x11										10			
x12													10

Comme le graphe correspondant à la matrice d’adjacence ne comporte pas de circuit négatif, et comme toutes les longueurs sont positives, on peut alors appliquer l’algorithme de Dijkstra.

La simulation de l’algorithme de Dijkstra est donnée par le tableau suivant.

x	S	$\overline{S} \cap \Gamma^{+}(x)$	Π(x1)	Π(x2)	Π(x3)	Π(x4)	Π(x5)	Π(x6)	Π(x7)	Π(x8)	Π(x9)	Π(x10)	Π(x11)	Π(x12)	Π(x13)
x1	{x1}		0	2	10	1	+∞	+∞	+∞	+∞	+∞	+∞	+∞	+∞	+∞
x4	{x1,x4}	{x8,x9}		2	10		+∞	+∞	+∞	6	4	+∞	+∞	+∞	+∞
x2	{x1,x4,x2}	{x5,x6}			10		22	5	+∞	6	4	+∞	+∞	+∞	+∞
x9	{x1,x4,x2, x9}	{x13}			10		22	5	+∞	6			+∞	+∞	49
x6	{x1,x4,x2, x9,x6}	{x11}			10		22		+∞	6		+∞	10	+∞	49
x8	{x1,x4,x2, x9,x6,x8}	∅			10		22		+∞			+∞	10	+∞	49
x3	{x1,x4,x2, x9,x6,x8,x3}	{x5}					22		+∞			+∞	10	+∞	49
x11	{x1,x4,x2, x9,x6,x8,x3,x11}	{x10}					22		+∞			20		+∞	49
x10	{x1,x4,x2, x9,x6,x8,x3,x11,x10}	{x7,x12}					22		65					40	49
x5	{x1,x4,x2, x9,x6,x8,x3,x11,x10,x5}	{x7}							42					40	49
x12	{x1,x4,x2, x9,x6,x8,x3,x11,x10,x5,x12}	{x13}							42						49
x7	{x1,x4,x2, x9,x6,x8,x3,x11,x10,x5,x12,x7}	∅													49
x13	S est l'ensemble de tous les sommets. Stop.														

$1^{ère}$ étape = initialisation :

Le sommet de départ donné par l'énoncé est x1. Donc S = {x1} et Π(x1) = 0.

Par ailleurs, pour tous les sommets xi qui sont des successeurs de x1, on a Π(xi) = l(x1,xi), et pour tous les sommets xi qui ne sont pas des successeurs de x1, on a Π(xi) = +∞.

$2^{ème}$ étape :

On choisit un sommet xi$\notin$ S et tel que son Π(xi) soit le plus petit. Soit ici, xi = x4. Ainsi, S = {x1, x4} et $\overline{S} \cap \Gamma^{+}(x4)$= {x8, x9}.

Pour chaque sommet de $\overline{S} \cap \Gamma^{+}(x4)$, on calcul son nouveau Π via la formule

Π(xj) = Min (Π(xj) ; Π(xi) + l(xi, xj)), avec xi le sommet choisi et xj un des sommets de $\overline{S} \cap \Gamma^{+}(xi)$.

Ainsi,

Π(x8) = Min (Π(x8) ; Π(x4) + l(x4, x8)) = Min(+∞ ; 1 + 5) =6

Π(x9) = Min (Π(x9) ; Π(x4) + l(x4, x9)) = Min(+∞ ; 1 + 3) =4

Ensuite, pour chaque sommet qui n'est ni dans S et ni dans $\overline{S} \cap \Gamma^{+}(x4)$ on descend son Π.

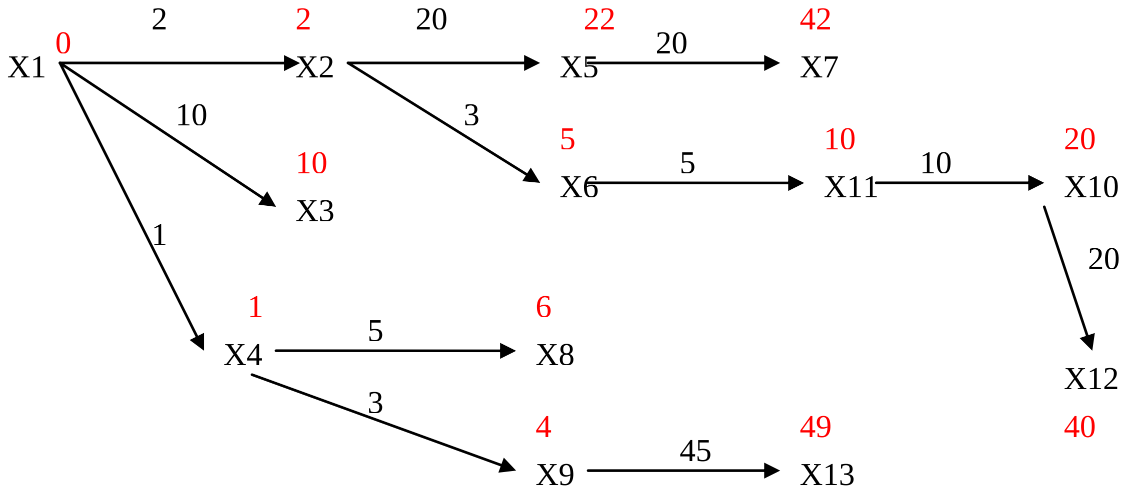
$3^{ème}$ étape :

On réitère le même processus qu'à l'étape 2.

… :

$13^{ème}$ étape :

Comme S = X = l'ensemble de tous les sommets du graphe, alors on conclut que les (Π(xj) sont les plus courts chemins.



Remarque :

Contrairement à Bellman, Dijsktra ne permet pas d'engendrer explicitement l'arborescence des plus courts chemins.

Explication :

Considérons le sommet x12, et supposons que l'on veuille savoir quel est le prédécesseur de x12 dans l'arborescence des plus courts chemins dont la racine est x1.

A cette fin, dans la matrice d'adjacence, on considère la colonne x12 et on regarde quels sont les prédécesseurs de x12.

	x12
x1	
x2	
x3	
x4	
x5	
x6	
x7	40
x8	
x9	
x10	20
x11	
x12	

On constate que x7 et x10 sont les prédécesseurs de x12.

On sait que $\Pi(x7) = 42$, $l(x7, x12) = 40$, $\Pi(x10) = 20$ et $l(x10, x12) = 20$.

Or, comme $[\Pi(x7) + l(x7, x12) = 42 + 40 = 82] \neq [[\Pi(x12) = 40]$, alors x7 ne sera pas le prédécesseur de x12 dans l'arborescence des plus courts chemins.

Par contre, comme $[\Pi(x10) + l(x10, x12) = 20 + 20 = 40] = [[\Pi(x12) = 40]$, alors x10 sera le prédécesseur de x12 dans l'arborescence des plus courts chemins.