THEORIE DES GRAPHES

9) ALGORITHME DE FORD-BELLMAN (PAS DE CIRCUIT OU PAS DE CYCLE)

Soient :

G = [X, U] un graphe valué sans circuit (ou sans cycle si le graphe est non orienté) ;

$\Pi(x)$: la longueur du plus court chemin de s à x ;

S : L'ensemble des sommets pour lesquels on a déjà calculé les plus courts chemins ;

s : Le sommet à partir duquel on cherche les plus courts chemins ;

I : Une application qui, à chaque arc, associe son extrémité initiale ;

T : Une application qui, à chaque arc, associe son extrémité terminale ;

A : Une application qui, à chaque sommet, associe l'arc qui pointe vers ce sommet.

L'algorithme de Ford-Bellman consiste à chercher les plus courts chemins d'un sommet s à tous les autres et ce, de proche en proche. Autrement dit, **on ne calcule la longueur du plus court chemin de s à x, $\Pi(x)$, que si on a déjà calculé la longueur des plus courts chemins de s à tous les prédécesseurs de x** (d'où l'ordre topologique).

Remarque

L'algorithme de Ford-Bellman conduit à la construction d'une arborescence de plus courts chemins de racine s qui est représentée par l'application A.

L'algorithme de Ford-Bellman est le suivant.

Procédure Ford-Bellman (donnée G = [X, U] : graphe; donnée l : longueur ; donnée s : sommet ; résultat Π **: longueur des plus courts chemins ; résultat** A **: arborescence des plus courts chemins ; résultat** S **: ensemble des sommets pour lesquels on a déjà calculé les plus courts chemins) ;**

{***On suppose que le graphe G ne comporte pas de circuit***}

Début

S = {s} ;

Π(s) = 0 ;

A(s) = ∅ ;

Tant qu'il existe un sommet x ∉ S dont tous les prédécesseurs sont dans S faire

Π(x) := MIN$_{\{u \text{ tel que } T(u) = x\}}$ [Π(I(u) + l(U)] = [Π(I(ũ) + l(ũ)] ;

A(x) := ũ ;

S := S U {x} ;

Fin Tant que

Si S = X alors

Ecrire(« s est racine de l'arborescence A »)

Sinon

Ecrire(« s n'est racine de l'arborescence A que par rapport aux sommets qui sont dans S »)

Fin Si

Fin;

Exemple

Considérons la matrice d'adjacence ci-dessous.

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13
x1		2	10	1									
x2					20	3							
x3				20	40								
x4								5	3				
x5						20	20				35		
x6											5		
x7								45				40	
x8									10				
x9													45
x10							45					20	
x11										10			
x12													10
x13													

Comme le graphe correspondant à la matrice d'adjacence ne comporte pas de circuit on peut alors appliquer l'algorithme de Ford-Bellman.

Par ailleurs, Le sommet à partir duquel on cherche les plus courts chemins est x1. Donc, s = x1.

La simulation de l'algorithme de Ford-Bellman est donnée par le tableau suivant.

1ère étape = initialisation :

Le sommet de départ donné par l'énoncé est x1. Donc S = {x1} et Π(x1) = 0.

2ème étape :

On choisit un sommet xi$\notin$ S et dont tous les prédécesseurs sont dans S. ici, $\Gamma^-(x2) \subset S$ et $\Gamma^-(x3) \subset S$. Ainsi, on peut aussi bien choisir x2 que x3. Ici, on choisit arbitrairement x2. Donc, S = {x1, x2} et on calcul Π(x2) via la formule

Π(x2) = Min (Π(xi) + l(xi, x2)), avec xi prédécesseur de x2.

Π(x2) = Min (Π(x1) + l(x1, x2)) = Min(0 + 2) =2

A(x2) = (x1, x2) c'est l'arc qui va apparaître dans l'arborescence des plus courts chemins.

$3^{ème}$ étape :

On choisit un sommet xi$\notin$ S et dont tous les prédécesseurs sont dans S. ici, $\Gamma^{-}(x3) \subset S$. Ainsi, on choisit x3. Donc, S = {x1, x2, x3} et on calcul Π(x3) via la formule

Π(x3) = Min (Π(xi) + l(xi, x3)), avec xi prédécesseur de x3.

Π(x3) = Min (Π(x1) + l(x1, x3)) = Min(0 + 10) =10

A(x3) = (x1, x3) c'est l'arc qui va apparaître dans l'arborescence des plus courts chemins.

$4^{ème}$ étape :

On choisit un sommet xi$\notin$ S et dont tous les prédécesseurs sont dans S. ici, $\Gamma^{-}(x4) \subset S$ et $\Gamma^{-}(x5) \subset S$. Ainsi, on peut aussi bien choisir x4 que x5. Ici, on choisit arbitrairement x5. Donc, S = {x1, x2, x3, x5} et on calcul Π(x5) via la formule

Π(x5) = Min (Π(xi) + l(xi, x5)), avec xi prédécesseur de x5.

Π(x5) = Min (Π(x2) + l(x2, x5), Π(x3) + l(x3, x5),) = Min(2 + 20, 10 + 40) =22

Ainsi, l'arc qui entre dans l'arborescence des plus courts chemins est celui qui engendré le minimum, soit l'arc (x2, x5).

A(x5) = (x2, x5) c'est l'arc qui va apparaître dans l'arborescence des plus courts chemins.

$5^{ème}$ étape :

On choisit un sommet xi$\notin$ S et dont tous les prédécesseurs sont dans S. ici, $\Gamma^{-}(x4) \subset S$. Ainsi, on choisit x4. Donc, S = {x1, x2, x3, x5, x4} et on calcul Π(x4) via la formule

Π(x4) = Min (Π(xi) + l(xi, x4)), avec xi prédécesseur de x4.

Π(x4) = Min (Π(x1) + l(x1, x4), Π(x3) + l(x3, x4),) = Min(0 + 1, 10 + 20) =1

Ainsi, l'arc qui entre dans l'arborescence des plus courts chemins est celui qui engendré le minimum, soit l'arc (x1, x4).

A(x4) = (x1, x4) c'est l'arc qui va apparaître dans l'arborescence des plus courts chemins.

$6^{ème}$ étape :

On choisit un sommet xi$\notin$ S et dont tous les prédécesseurs sont dans S. ici, $\Gamma^{-}(x6) \subset S$ et x6 $\notin$ S. Ainsi, on choisit x6. Donc, S = {x1, x2, x3, x5, x4, x6} et on calcul Π(x6) via la formule

$\Pi(x6) = \text{Min}\,(\Pi(xi) + l(xi, x6))$, avec xi prédécesseur de x6.

$\Pi(x6) = \text{Min}\,(\Pi(x2) + l(x2, x6), \Pi(x5) + l(x5, x6)) = \text{Min}(2 + 3, 22 + 20) = 5$

Ainsi, l'arc qui entre dans l'arborescence des plus courts chemins est celui qui engendré le minimum, soit l'arc (x2, x6).

A(x6) = (x2, x6) c'est l'arc qui va apparaître dans l'arborescence des plus courts chemins.

7me étape :

On choisit le sommet x11 car c'est le seul qui ne soit pas dans S et dont tous ses prédécesseurs sont dans S. Donc, S = {x1, x2, x3, x5, x4, x6, x11} et on calcul $\Pi(x11)$ via la formule

$\Pi(x11) = \text{Min}\,(\Pi(xi) + l(xi, x11))$, avec xi prédécesseur de x11.

$\Pi(x11) = \text{Min}\,(\Pi(x5) + l(x5, x11), \Pi(x6) + l(x6, x11)) = \text{Min}(22 + 35, 5 + 5) = 10$

Ainsi, l'arc qui entre dans l'arborescence des plus courts chemins est celui qui engendré le minimum, soit l'arc (x6, x11).

A(x11) = (x6, x11) c'est l'arc qui va apparaître dans l'arborescence des plus courts chemins.

8ème étape :

On choisit le sommet x10 car c'est le seul qui ne soit pas dans S et dont tous ses prédécesseurs sont dans S. Donc, S = {x1, x2, x3, x5, x4, x6, x11, x10} et on calcul $\Pi(x10)$ via la formule

$\Pi(x10) = \text{Min}\,(\Pi(xi) + l(xi, x10))$, avec xi prédécesseur de x10.

$\Pi(x10) = \text{Min}\,(\Pi(x11) + l(x11, x10)) = \text{Min}(10 + 10) = 20$

A(x10) = (x11, x10) c'est l'arc qui va apparaître dans l'arborescence des plus courts chemins.

9ème étape :

On choisit le sommet x7 car c'est le seul qui ne soit pas dans S et dont tous ses prédécesseurs sont dans S. Donc, S = {x1, x2, x3, x4, x5, x6, x10, x11, x7} et on calcul $\Pi(x7)$ via la formule

$\Pi(x7) = \text{Min}\,(\Pi(xi) + l(xi, x7))$, avec xi prédécesseur de x7.

$\Pi(x7) = \text{Min}\,(\Pi(x5) + l(x5, x7), \Pi(x10) + l(x10, x7)) = \text{Min}(22 + 20, 20 + 45) = 42$

A(x7) = (x5, x7) c'est l'arc qui va apparaître dans l'arborescence des plus courts chemins.

$10^{ème}$ étape :

On choisit un sommet xi∉ S et dont tous les prédécesseurs sont dans S. ici, on choisit on peut aussi bien choisir x8 que x12. Ici, on choisit arbitrairement x8. Donc, S = {x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x10, x11, x8} et on calcul Π(x8) via la formule

Π(x8) = Min (Π(xi) + l(xi, x8)), avec xi prédécesseur de x8.

Π(x8) = Min (Π(x4) + l(x4, x8), Π(x7) + l(x7, x8)) = Min(1 + 5, 42 + 45) =6

Ainsi, l'arc qui entre dans l'arborescence des plus courts chemins est celui qui engendré le minimum, soit l'arc (x4, x8).

A(x8) = (x4, x8) c'est l'arc qui va apparaître dans l'arborescence des plus courts chemins.

$11^{ème}$ étape :

On choisit un sommet xi∉ S et dont tous les prédécesseurs sont dans S. ici, on choisit on peut aussi bien choisir x9 que x12. Ici, on choisit arbitrairement x9. Donc, S = {x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x10, x11, x9} et on calcul Π(x9) via la formule

Π(x9) = Min (Π(xi) + l(xi, x9)), avec xi prédécesseur de x9.

Π(x9) = Min (Π(x4) + l(x4, x9), Π(x8) + l(x8, x9)) = Min(1 + 3, 6 + 10) =4

Ainsi, l'arc qui entre dans l'arborescence des plus courts chemins est celui qui engendré le minimum, soit l'arc (x4, x9).

A(x9) = (x4, x9) c'est l'arc qui va apparaître dans l'arborescence des plus courts chemins.

$12^{ème}$ étape :

On choisit un sommet xi∉ S et dont tous les prédécesseurs sont dans S. ici, le seul que l'on puisse choisir est x12. Donc, S = {x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10, x11, x12} et on calcul Π(x12) via la formule

Π(x12) = Min (Π(xi) + l(xi, x12)), avec xi prédécesseur de x12.

Π(x12) = Min (Π(x7) + l(x7, x12), Π(x10) + l(x10, x12)) = Min(42 + 40, 20 + 20) =40

Ainsi, l'arc qui entre dans l'arborescence des plus courts chemins est celui qui engendré le minimum, soit l'arc (x10, x12).

A(x12) = (x10, x12) c'est l'arc qui va apparaître dans l'arborescence des plus courts chemins.

$13^{ème}$ étape :

Enfin, on choisit x13. Donc, S = {x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10, x11, x12, x13} = X et on calcul Π(x13) via la formule

Π(x13) = Min (Π(xi) + l(xi, x13)), avec xi prédécesseur de x13.

Π(x13) = Min (Π(x9) + l(x9, x13), Π(x12) + l(x12, x13)) = Min(4 + 45, 40 + 10) =49

Ainsi, l'arc qui entre dans l'arborescence des plus courts chemins est celui qui engendré le minimum, soit l'arc (x9, x13).

A(x13) = (x9, x13) c'est l'arc qui va apparaître dans l'arborescence des plus courts chemins.

Remarque

Comme S = X = l'ensemble de tous les sommets du graphe, alors on conclut que s = x1 est racine de l'arborescence A.

L'arborescence A des plus courts chemins est donc celle qui suit.