TD n° 3

Exercice 1. Dans le groupe abélien $\left(Z/16Z,+\right)$

1) Quel est le sous groupe engendré par $\bar{1}$?
2) Quel est le sous groupe engendré par $\bar{2}$?
3) Quel est le sous groupe engendré par $\bar{3}$?

Exercice 2. On note $(\Omega_{12},\times)$ le groupe des racines $12^{\text{ème}}$ de l'unité
a) Quel est le sous groupe engendré par 1 ?
b) Quel est le sous groupe engendré par j où $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$?

Exercice 3.
Soit $A=\left\{x\in\mathbf{R}/\exists n\in\mathbf{Z}\,,\,x=3^n\right\}$ montrez que $(A,\times)$ est un sous-groupe cyclique de $\left(\mathbf{R}^*,\times\right)$ puis donnez un exemple de sous-groupe non trivial de A.

Exercice 4
1) Soit $a\in\{0,1,\ldots,9\}$, montrer que $\begin{array}{lcl} f_a : Z/10Z & \to & Z/10Z \\ \bar{x} & \to & \bar{a}\,\bar{x} \end{array}$ est un morphisme de groupes.

2) Pour quelles valeurs de $a\in\{0,1,\ldots,9\}$, on a $\ker(f_a)=\left\{\bar{0}\right\}$

3) Le code de la carte bancaire de M. Dupont est formé de 4 chiffres de l'ensemble $\{0,1,\ldots,9\}$.
En utilisant la bijection canonique de $Z/10Z$ dans $\{0,1,\ldots,9\}$, quels sont les morphismes f_a qui permettent de chiffrer/déchiffrer le code bancaire de M. Dupont ?

Exercice 5
$\left(\Omega_n,\times\right)$ désigne le groupe des racines $n^{ième}$ complexes de l'unité.
On considère l'application $f:\Omega_4\to C^*$ définie par $f\left(z\right)=z^2$.
1) Montrez que f est un morphisme de groupes de $\left(\Omega_4,\times\right)$ dans $\left(C^*,\times\right)$
2) Montrer que $(f(\Omega_4),\times)$ est un groupe cyclique et dérerminer un générateur du groupe $(f(\Omega_4),\times)$
3) Montrer que $(Ker(f),\times)$ est un groupe cyclique

Exercice 6
1) Déterminer tous les sous-groupes de $(\Omega_{13},\times)$ où $\Omega_{13}=\left\{z\in\mathbf{C}\ /\ z^{13}=1\right\}$
2) Déterminer tous les sous-groupes de $(Z/6Z\,,+)$