Réseaux de Petri
Le formalisme mathématique

CHIRAZ TRABELSI

trabelsi@esiea.fr

Et

ALEXANDRE BRIERE

briere@esiea.fr

Utilisations des RdPs

1) Modéliser le fonctionnement d'un système
   - Industriel (usine, tapis roulant, moteur, stocks, etc.)
   - Informatique (application logicielle, réseau, système d'exploitation, etc.)
   - D'autres domaines (organisation d'une entreprise, chimie, etc.)

➔ une meilleure compréhension (vue graphique) et structuration du comportement

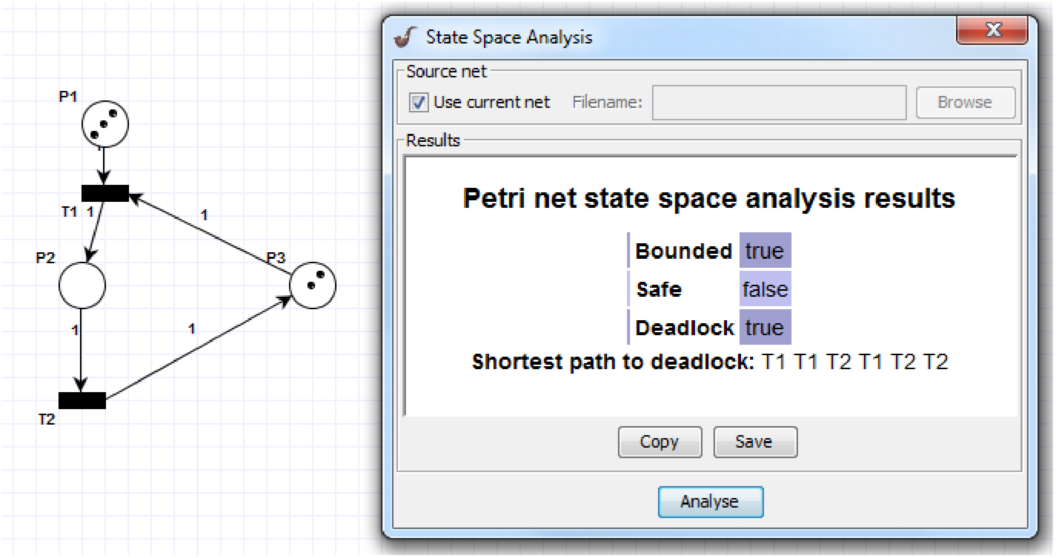
2) Modéliser des systèmes complexes contenant plusieurs modules fonctionnant en parallèle et les interactions entre ces modules
   - Parallélisme
   - Synchronisation
   - Partage de ressources (mémoire, imprimante, etc.)
   - Capacité limitée (mémoire, stock, etc.)

3) Vérification mathématique/formelle

- **Vérification** du bon fonctionnement d’un système **tôt** dans la phase de conception
    - Avant d’aller à l’implémentation, on peut **vérifier** la sûreté du système pour **toutes les évolutions possibles**
    - Avoir un fonctionnement sûr du système, ce qui n’est pas garanti par des jeux de tests après implémentation (les jeux de tests ne peuvent pas couvrir tous les cas)

3) Vérification mathématique/formelle

- Exemples de propriétés à vérifier selon le système à modéliser
  - Est-ce que le réseau est sans blocage?
  - Est-ce qu'il y a une place susceptible de contenir un nombre infini de jetons (débordement)?
  - Est-ce que le système vérifie que deux places P1 et P2, par exemple ne sont jamais actives en même temps?



Le réseau contient un blocage (deadlock)

Utilisations des RdPs

3) Vérification mathématique/formelle

- Une fois on est sûr que le système vérifie toutes les propriétés demandées pour toutes les évolutions possibles, on peut traduire le réseau en code / équations de bascules

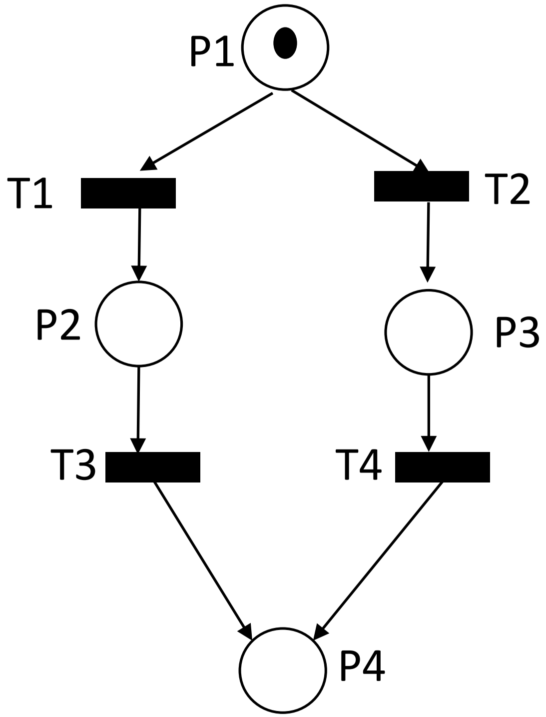
➔ garantir la sûreté du système et détecter rapidement les erreurs avant d’aller à l’implémentation

- Possibilité de traduire le réseau en code automatiquement ➔ accélérer encore plus le développement de systèmes sûrs

- La vérification mathématique est nécessaire pour les systèmes critiques (transport ferroviaire, avionique, etc.)

Représentation algébrique

- Un RdP ordinaire est un quadruplet
  - R=< P, T, Pré, Post > tel que :
  - P= {P1, P2,…,Pn} est un ensemble fini et non vide de places
  - T= {T1,T2, …, Tn} est un ensemble fini et non vide de transitions
  - Pré: P x T --> {0,1} est l'application d'**incidence avant**.
  - Post: P x T --> {0,1} est l 'application d'**incidence arrière**.

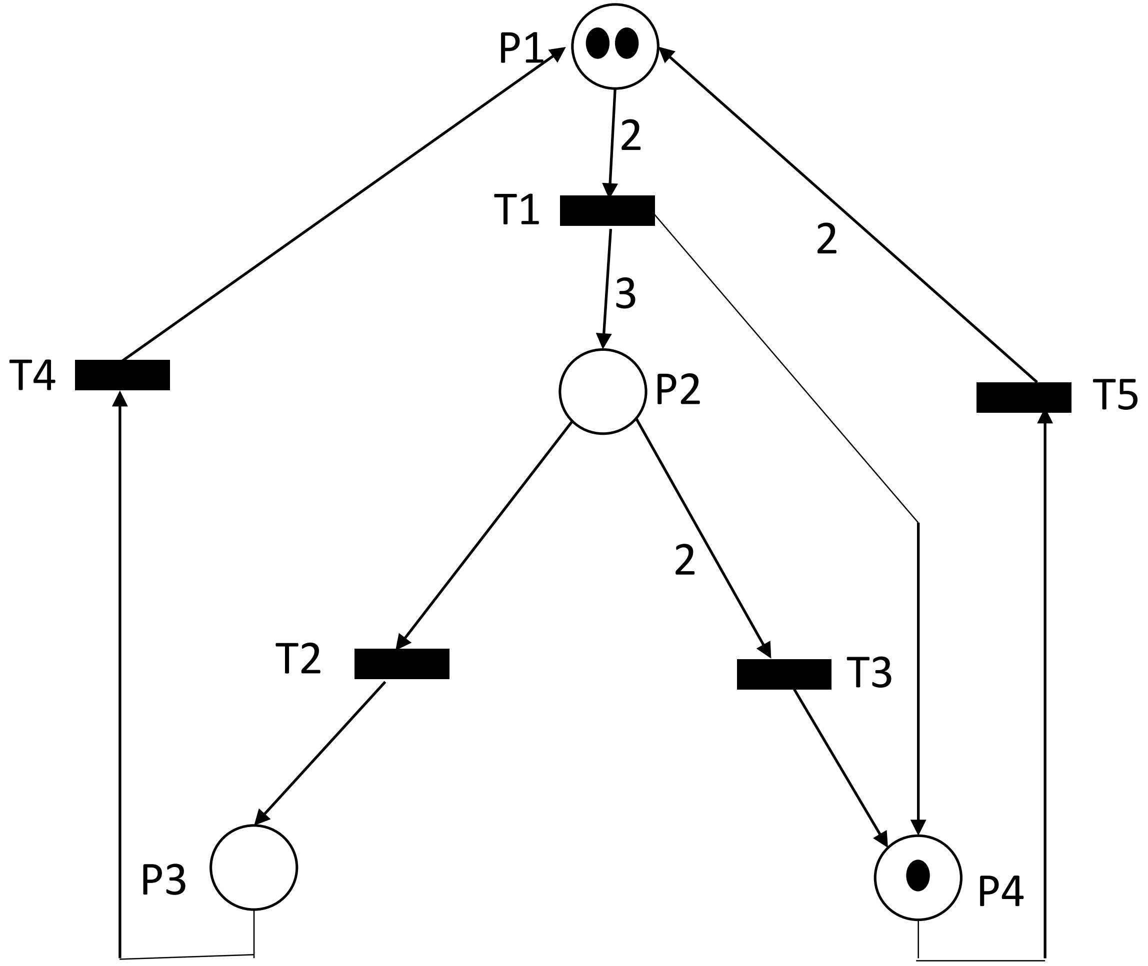


Pre(P1,T1)=1
Pre(P1,T2)=1

Post(P2,T1)=1
Post(P3,T2)=1

Pre(P2,T1)=0
Post(P2,T2)=0

- Un RdP généralisé est défini comme un RdP ordinaire sauf que :
  - Pré: P x T → N
  - Post: P x T → N

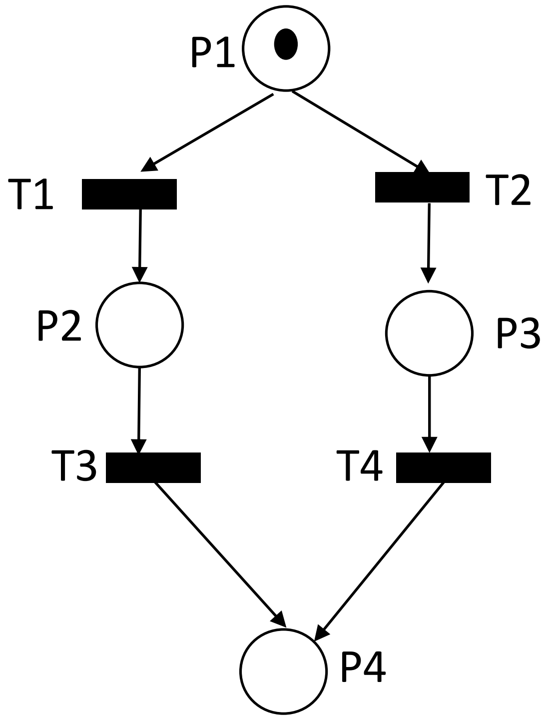


Pre(P1,T1)=2
Post(P3,T2)=1

Matrice d’incidence

- On définit la matrice d ’incidence avant :
  - $W^{-}=[W^{-}_{ij}]$ où $W^{-}_{ij}]$ $=\mathrm{Pre}(P_i, T_j)$

- De même, la matrice d’incidence arrière:
  - $W^{+}=[W^{+}_{ij}]$ où $W^{+}_{ij}]$ $=\mathrm{Post}(P_i, T_j)$

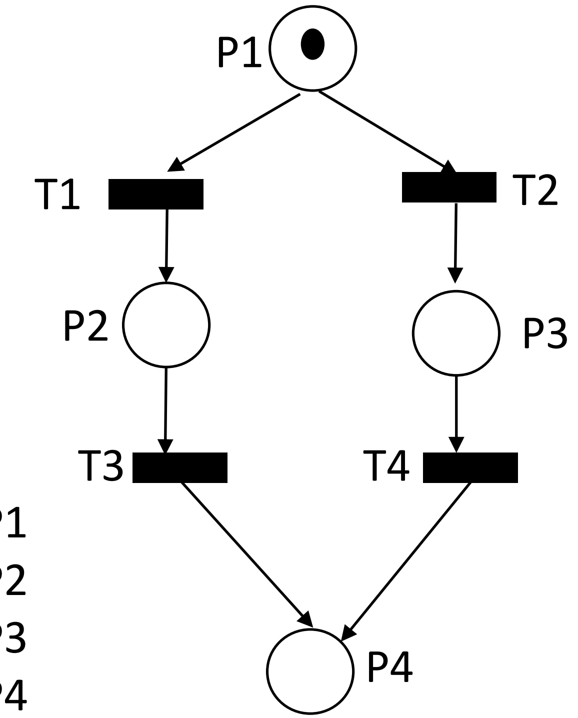


$$W^{-} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} T1 & T2 & T3 & T4 \end{array} & \\ \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| & \begin{array}{c} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \end{array} \end{array}$$

$$W^{+} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} T1 & T2 & T3 & T4 \end{array} & \\ \left| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right| & \begin{array}{c} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \end{array} \end{array}$$

Matrice d’incidence

- On définit la matrice d’incidence du réseau:
  - $W = W^+ - W^-$



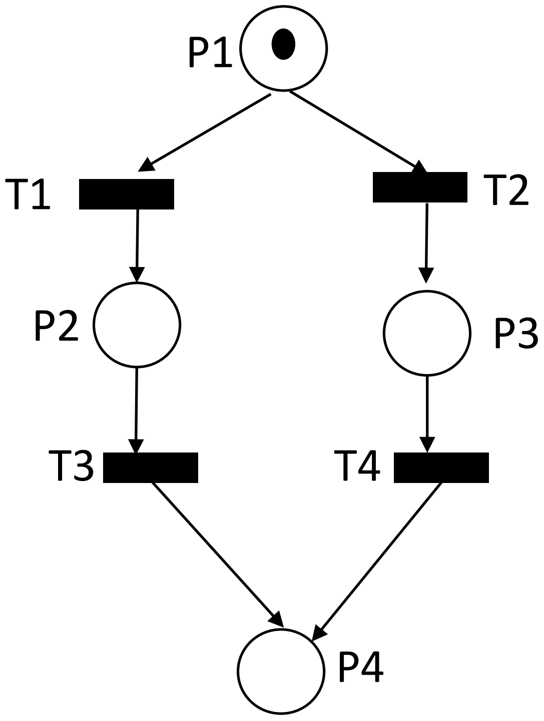
$$W^- = \begin{array}{c|cccc|c} & T1 & T2 & T3 & T4 & \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & P1 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & P2 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & P3 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & P4 \end{array}$$

$$W^+ = \begin{array}{c|cccc|c} & T1 & T2 & T3 & T4 & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & P1 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & P2 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & P3 \\ & 0 & 0 & 1 & 1 & P4 \end{array}$$

$$W^+ - W^- = \begin{array}{cccc} T1 & T2 & T3 & T4 \\ \end{array} \hspace{-0.5em} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{array}{cccc} T1 & T2 & T3 & T4 \\ \end{array} \hspace{-0.5em} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{array}{c|cccc|c} & T1 & T2 & T3 & T4 & \\ & -1 & -1 & 0 & 0 & P1 \\ & 1 & 0 & -1 & 0 & P2 \\ & 0 & 1 & 0 & -1 & P3 \\ & 0 & 0 & 1 & 1 & P4 \end{array}$$

Matrice d'incidence

Remarque: Une colonne de la matrice W correspond à une modification de marquage apportée par le franchissement de la transition correspondante.



$$W^- = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} T1 & T2 & T3 & T4 \end{array} \\ \left|\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right| \end{array} \begin{array}{c} \\ P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \end{array}$$

$$W = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} T1 & T2 & T3 & T4 \end{array} \\ \left|\begin{array}{cccc} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right| \end{array} \begin{array}{c} \\ P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \end{array}$$

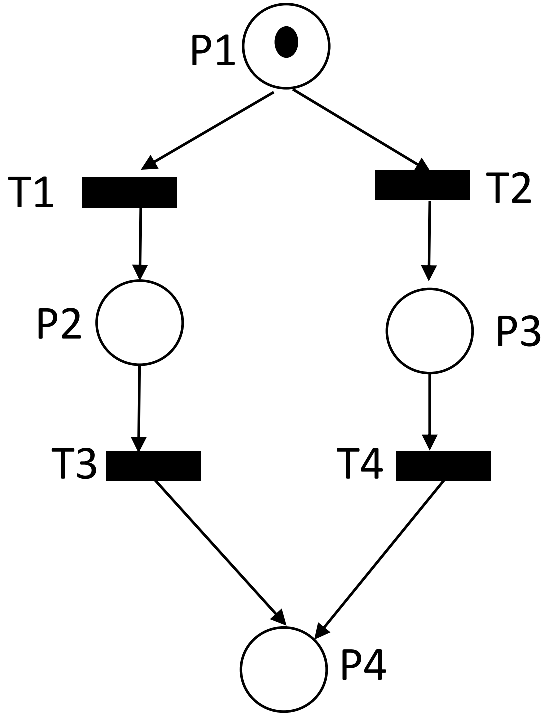
$$W^+ = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} T1 & T2 & T3 & T4 \end{array} \\ \left|\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right| \end{array} \begin{array}{c} \\ P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \end{array}$$

Après franchissement de T1, on enlève 1 marque à P1 et on ajoute 1 marque à P2.

Matrice d’incidence

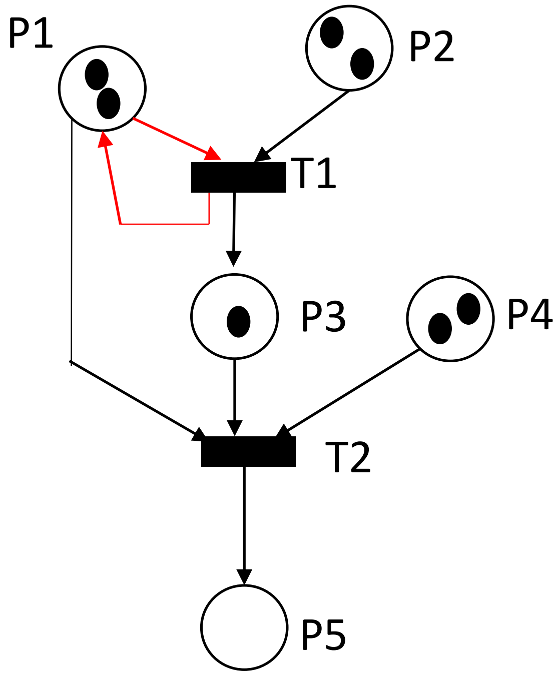
- Si on connait la matrice d’incidence, on peut reproduire le RdP (sans le marquage)

$$W = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} T1 & T2 & T3 & T4 \end{array} \\ \left| \begin{array}{cccc} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right| \end{array} \begin{array}{c} \\ P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \end{array} \longrightarrow$$



Matrice d'incidence

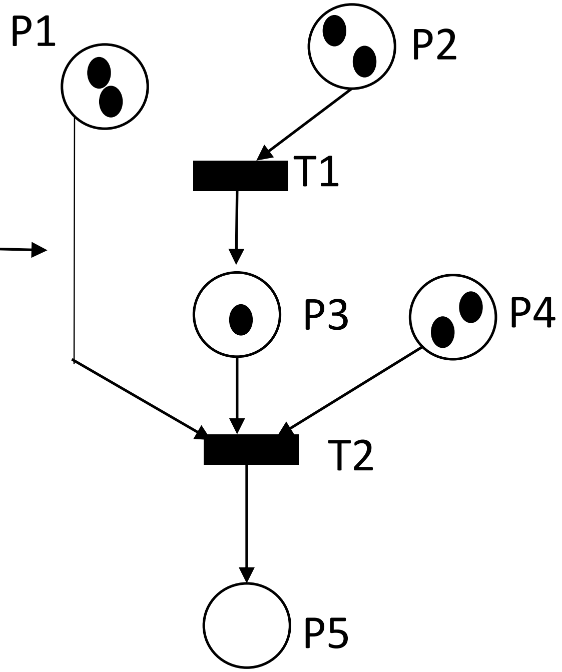
- Si on connait la matrice d'incidence, on peut reproduire le RdP **sauf les boucles élémentaires**



$$W^- = \begin{array}{cc} \begin{matrix} T1 & T2 \end{matrix} & \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{matrix} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \\ P5 \end{matrix} \end{array}$$

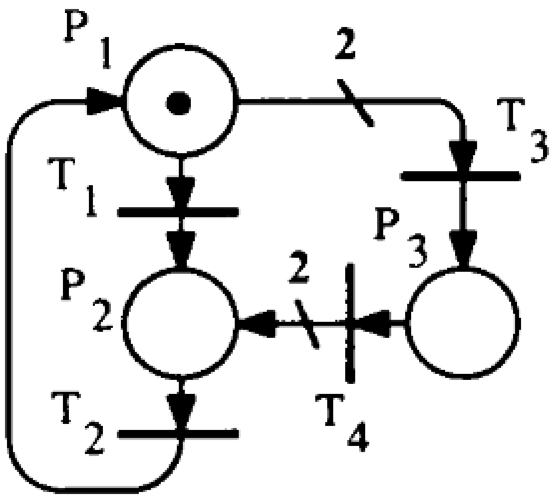
$$W^+ = \begin{array}{cc} \begin{matrix} T1 & T2 \end{matrix} & \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{matrix} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \\ P5 \end{matrix} \end{array}$$

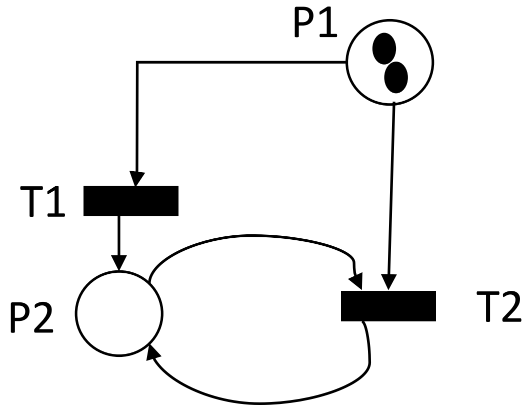
$$W = \begin{array}{cc} \begin{matrix} T1 & T2 \end{matrix} & \\ \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{matrix} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \\ P5 \end{matrix} \end{array}$$



Les boucles élémentaires ne sont pas détectables dans la matrice d'incidence
➔ La seule manière de les détecter est de travailler avec les matrice W- et W+

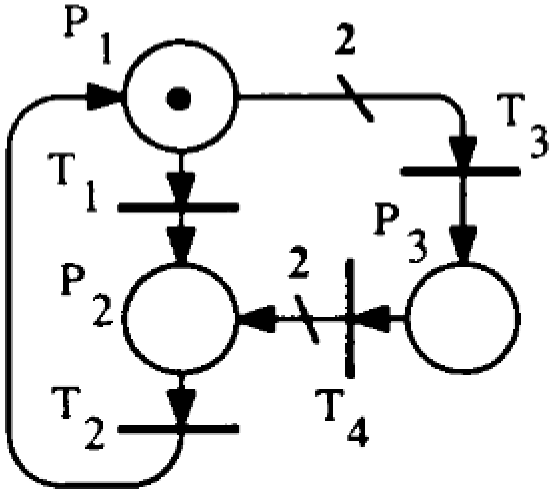
- Donner la matrice d'incidence de ces RdP

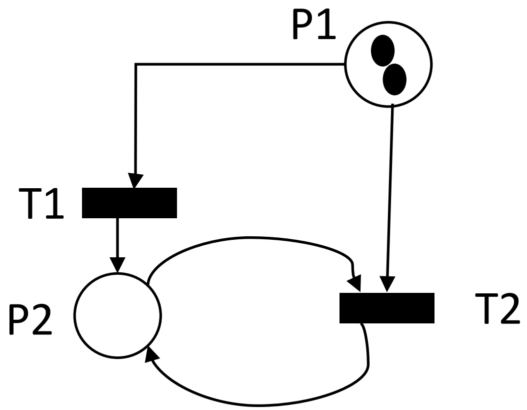




Solution

- Donner la matrice d'incidence de ces RdP



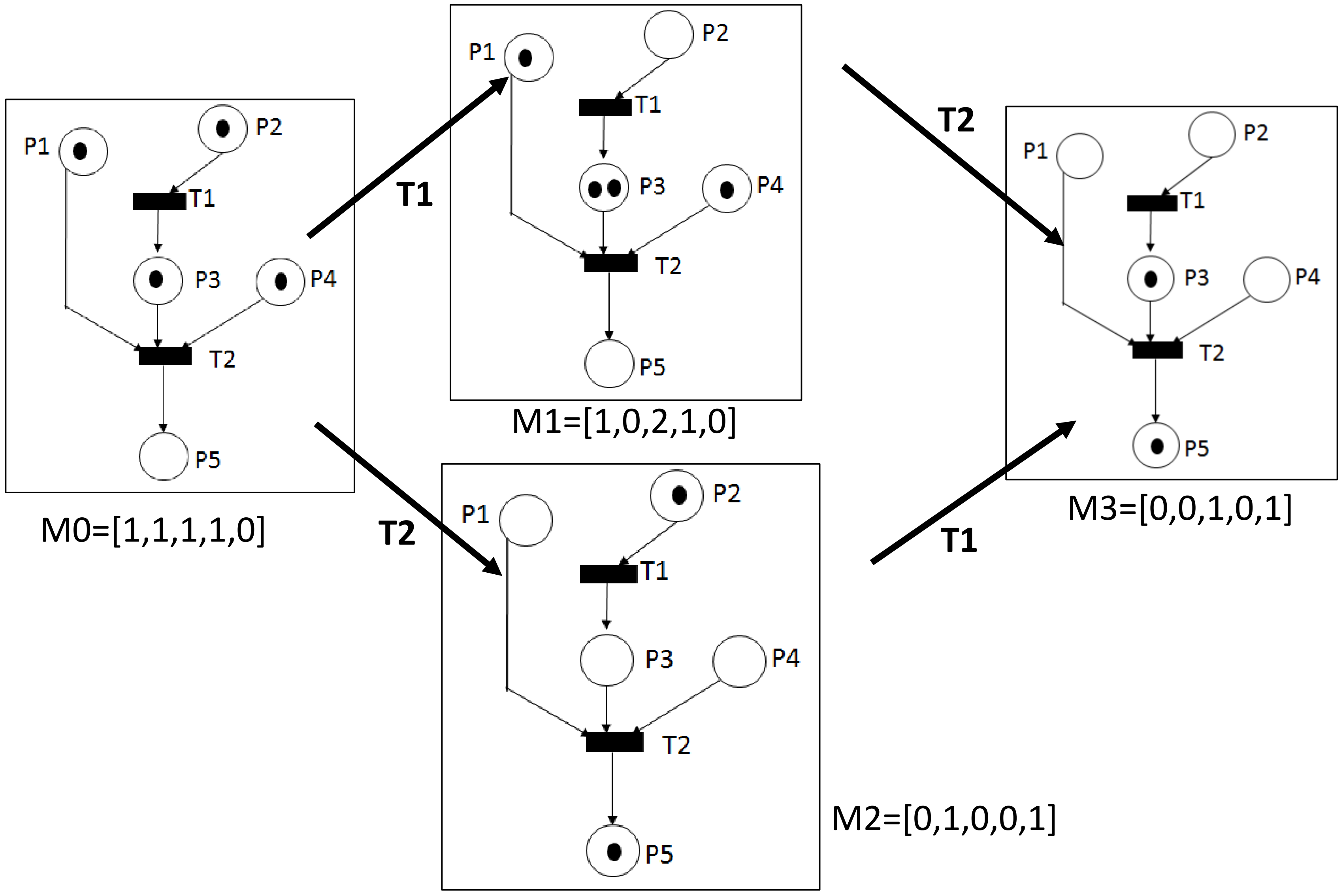


$$W = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} T1 & T2 & T3 & T4 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} P1 \\ P2 \\ P3 \end{array} \end{array}$$

$$W = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} T1 & T2 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} P1 \\ P2 \end{array} \end{array}$$

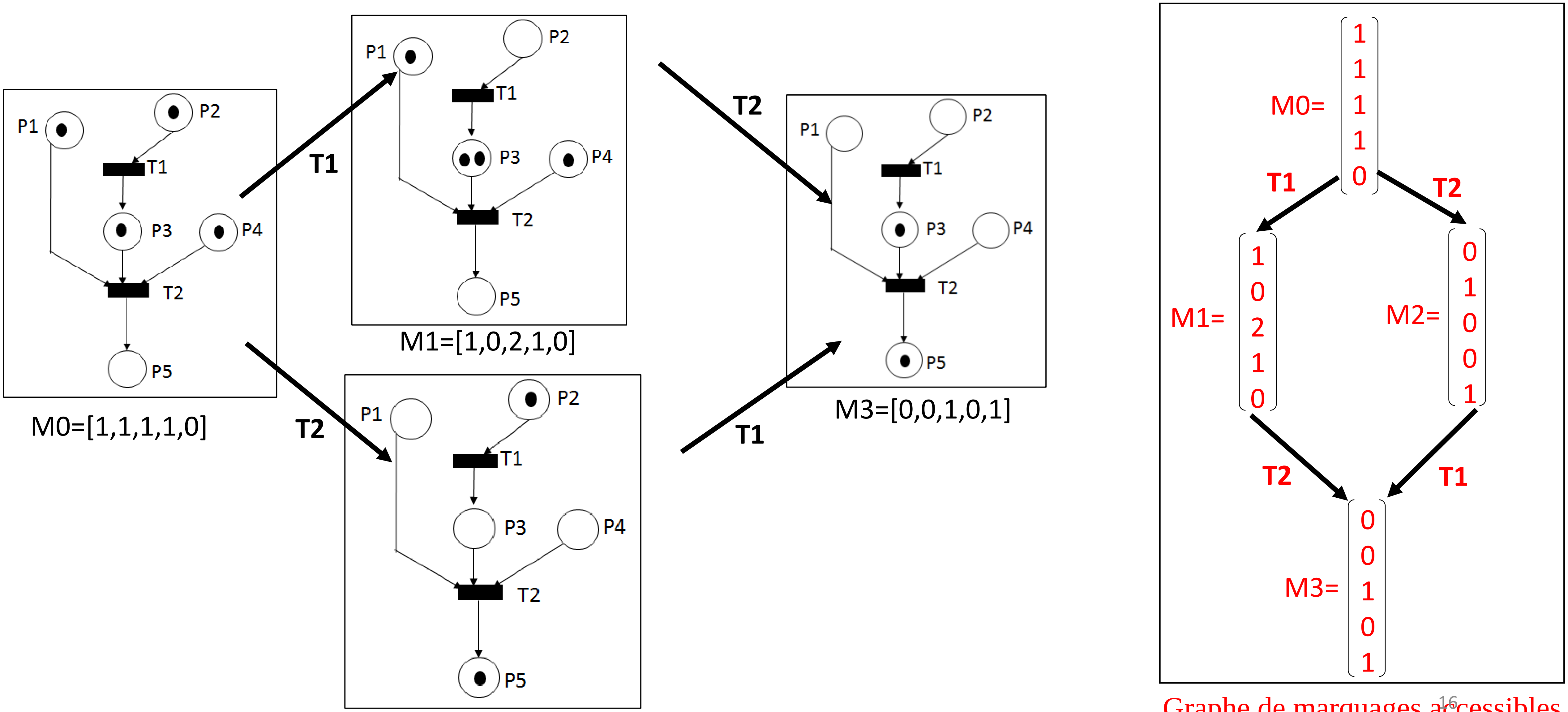
Ensemble de marquages accessibles

- On note *M0 l'ensemble des marquages accessibles à partir du marquage M0.



*M0={M1, M2, M3}

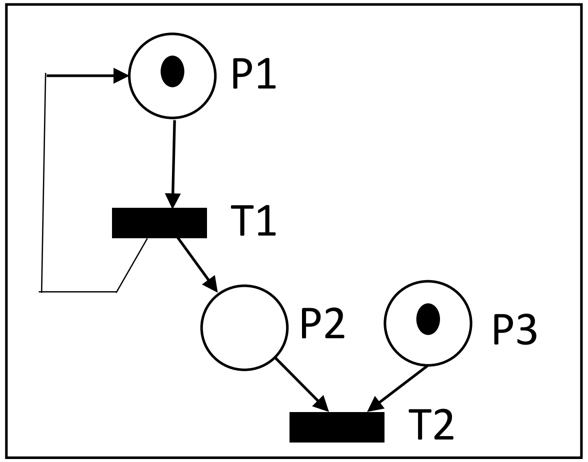
Graphe de marquages accessibles

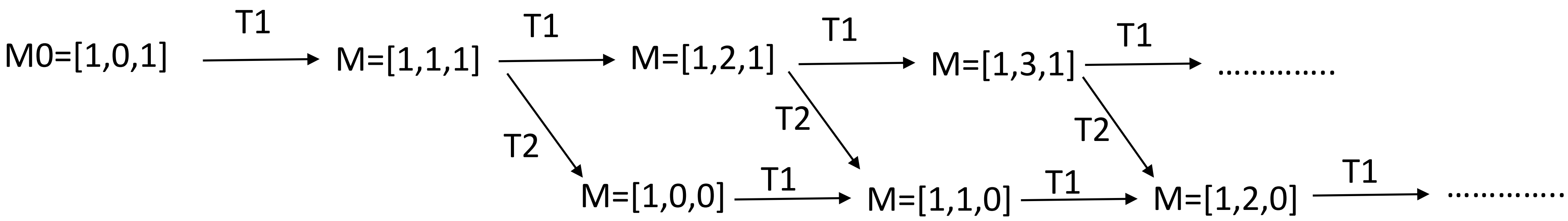


Graphe de marquages accessibles

Graphe de marquages accessibles

- Cas de marquages accessibles infinis

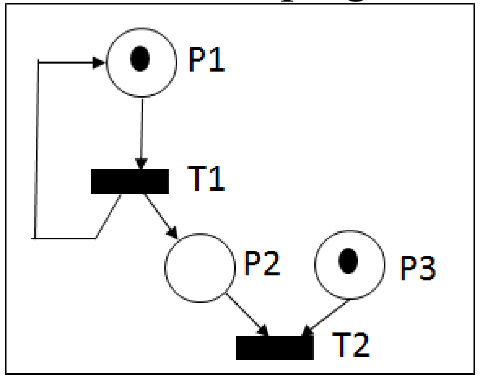




➔ On utilise une autre méthode appelée **graphe de couverture**

Graphe de couverture

- Cas de marquages accessibles infinis

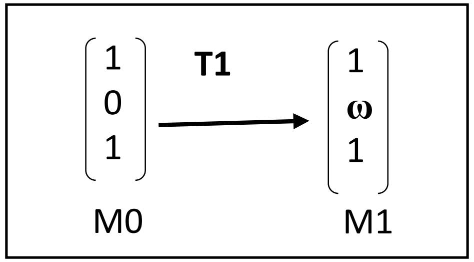


- Les places qui peuvent contenir un nombre infini de jetons sont représentés par le marquage symbolique « **ω** »
  ➔ $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, **ω -n= ω +n= ω**
- Fonction Successeur (M)
  - Boucle: pour toute transition T franchissable à partir de M
    - M'=résultat de la transition T à partir de M
    - Si M'>M0 (toutes les composantes sont supérieures ou égales), on écrit **ω** dans les places supérieures
    - S'il n'y a pas sur le chemin entre M0 et M, un autre marquage M''=M' alors
      - Ajouter M' le successeur de M au graphe
      - Successeur (M')
    - Fin si
  - Fin pour

Successeurs de M0

M0=[1,0,1] $\xrightarrow{T1}$ M1=[1,1,1]
=[1, **ω**,1]

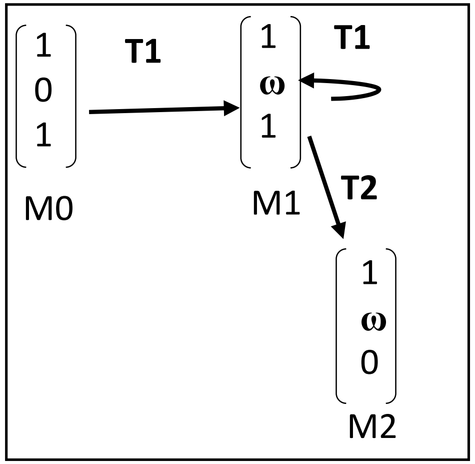
Car toutes les composantes de M1 sont supérieures ou égales à celles de M0



Successeurs de M1

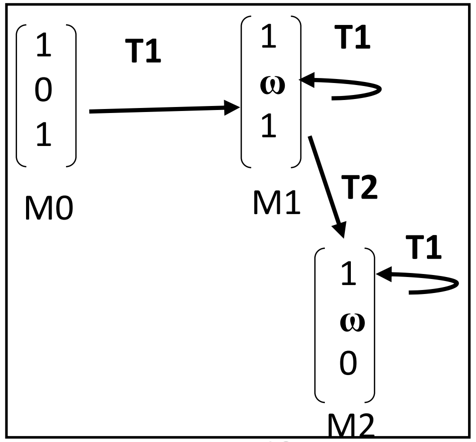
M1=[1, **ω**,1] $\xrightarrow{T1}$ M=[1, **ω** +1,1]
= M1

$\xrightarrow{T2}$ M2=[1, **ω** -1,0]
= [1, **ω**,0]



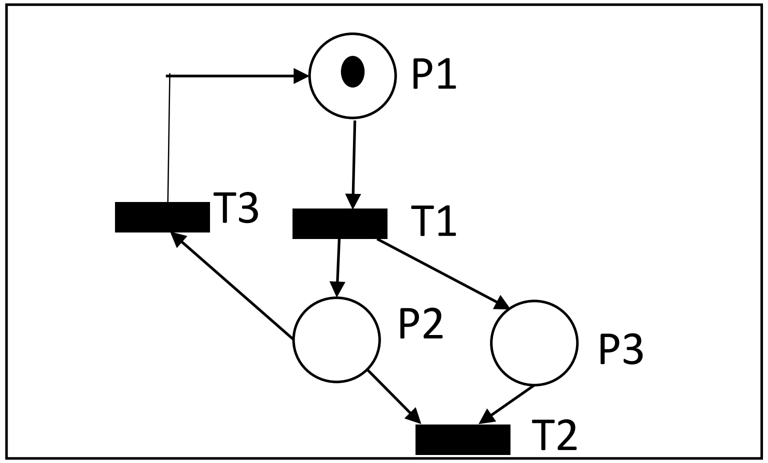
Successeurs de M2

M2=[1, **ω**, 0] $\xrightarrow{T1}$ M3=[1, **ω** +1,0]
= M2

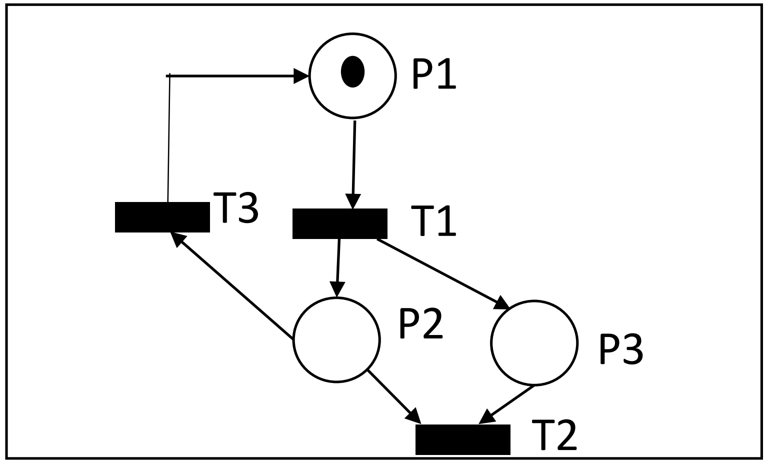


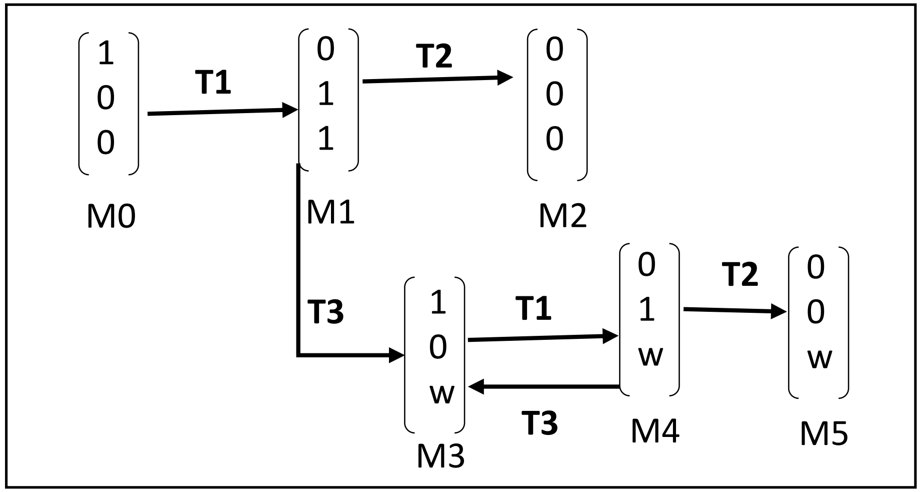
Exercice

- Donner le graphe de couverture de ce RdP



- Donner le graphe de couverture de ce RdP





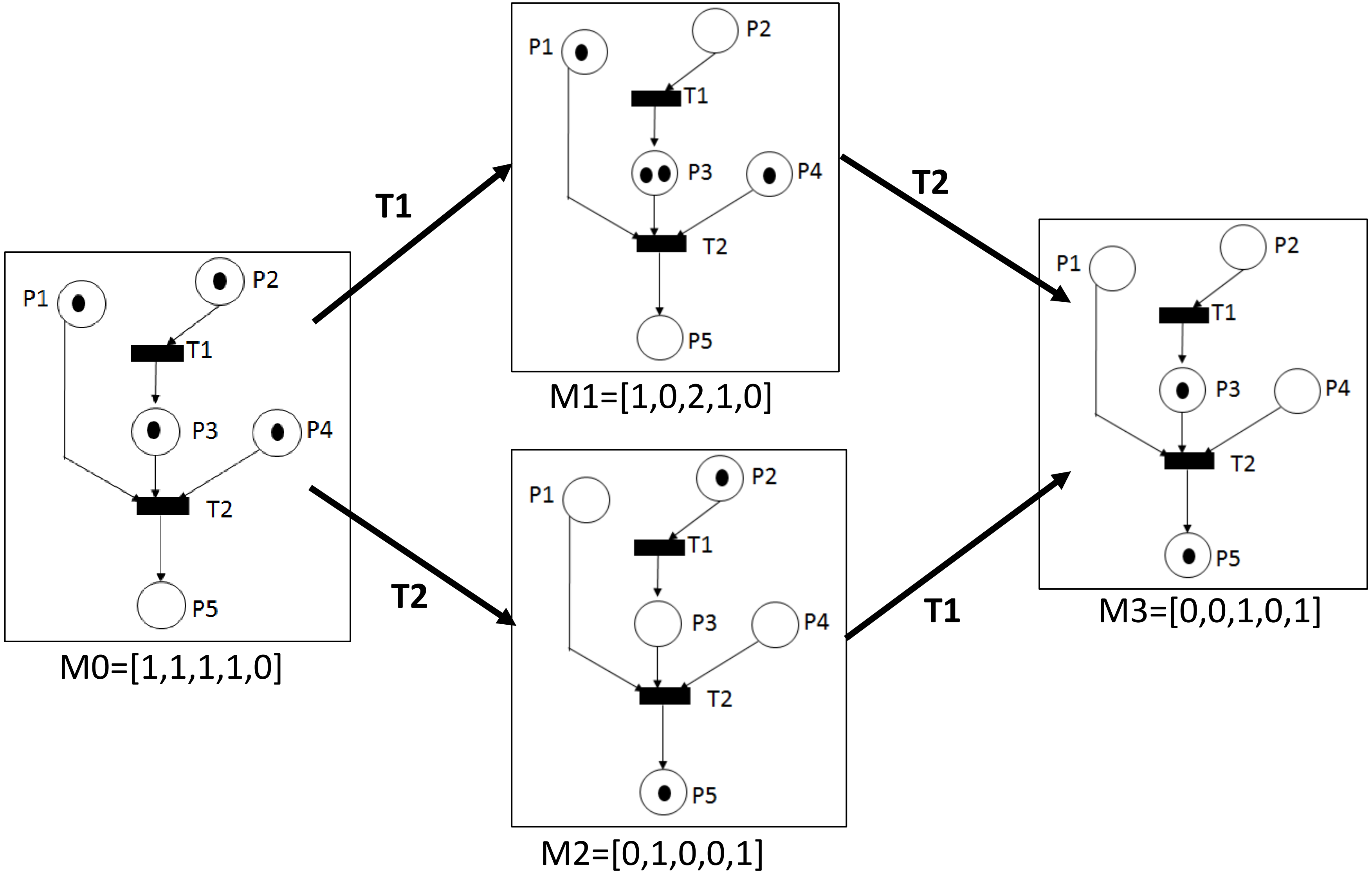
- Successeurs de M0
  Par T1: M1=[0,1,1]
- Successeurs de M1
  Par T2: M2=[0,0,0]
  Par T3: M3=[1,0,1]>M0 → M3=[1,0,w]
- Successeurs de M2
  Pas de transitions franchissables
- Successeurs de M3
  Par T1: M4=[0,1,w]
- Successeurs de M4
  Par T3: M4'=[1,0,w-1]=[1,0,w]=M3
  Par T2: M5=[0,0,w-1]=[0,0,w]
- Successeurs de M5
  Pas de transitions franchissables

Séquence de franchissement

- Une séquence de franchissement est un **chemin** dans le graphe de marquages accessibles
  - On note : **Mi[S>Mj**
    - Ce qui signifie qu'à partir du marquage Mi, le franchissement de la séquence S aboutit au marquage Mj .

Séquence de franchissement

- Une séquence de franchissement est un **chemin** dans le graphe de marquages accessibles



- On note : **Mi[S>Mj**

A partir du marquage Mi, le franchissement de la séquence S aboutit au marquage Mj .

- Exemple: On a 4 séquences de franchissement possibles
- S1 = <T1>
  - M0[S1>M1
  - M2[S1>M3
- S2 =<T2>
  - M0[S2>M2
  - M1[S2>M3
- S3 = <T1,T2>
  - M0[S3>M3
- S4 = <T2,T1>
  - M0[S4>M3

Vecteur de comptage

- Soit S une séquence de franchissement. On appelle **vecteur de comptage** de cette séquence, noté V_S, le vecteur formé, pour chaque transition T, du nombre de fois où la transition T apparaît dans la séquence.

T1 T2

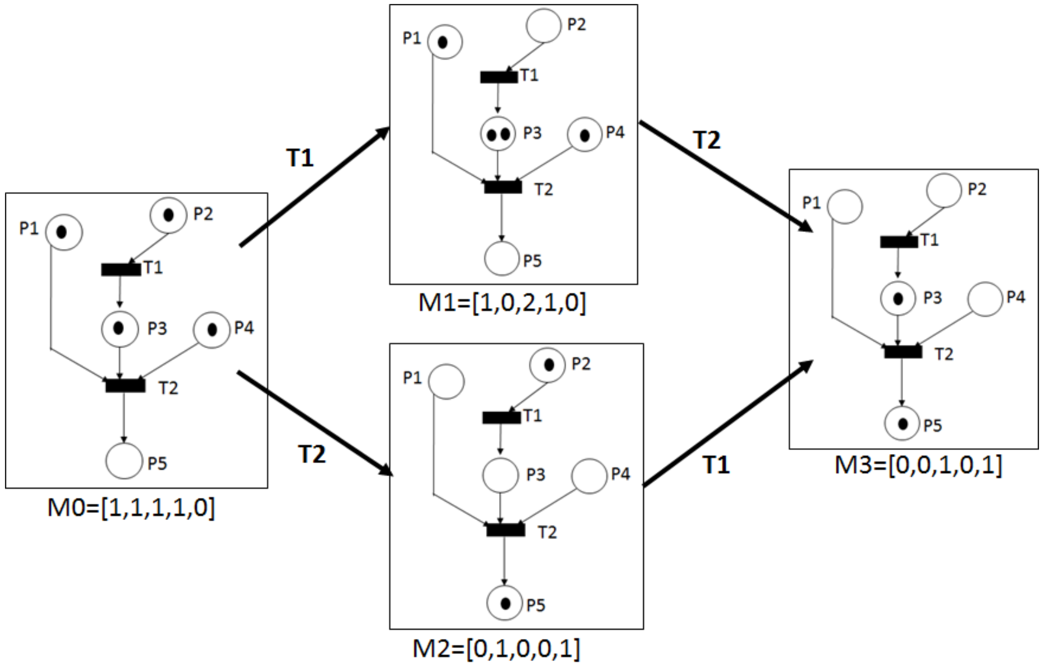
S1 = <T1> ➔ $V_{S1} = [1,0]$

S2 = <T2> ➔ $V_{S2} = [0,1]$

S3 = <T1,T2> ➔ $V_{S3} = [1,1]$

S4= <T2,T1> ➔ $V_{S4} = [1,1]$

Vecteurs de comptage



ATTENTION ! Ce vecteur ne fait que **compter** le nombre d'apparition des transitions. Il ne donne pas, comme la séquence, l'**ordre** dans lequel celles-ci ont lieu.

Exemple: S3 et S4 ont le même vecteur de comptage mais un ordre différent de transitions

Equation fondamentale de franchissement ou équation d'état

- L'équation fondamentale du franchissement permet de calculer l'évolution du RdP. Elle est définie comme suit:

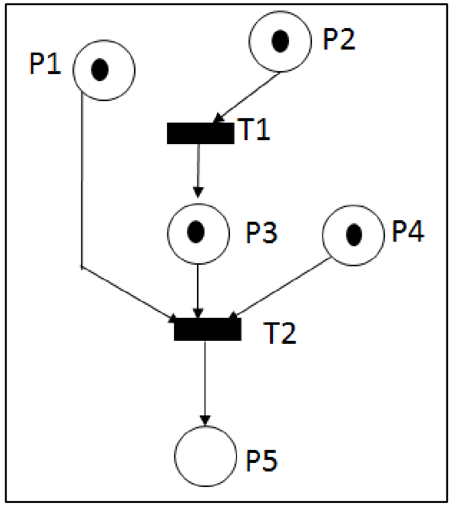
$$\mathbf{M=M0 + W \cdot V_S^{t}}$$

  - M est le marquage atteint après le franchissement de la séquence S
  - M0 est le marquage initial
  - W est la matrice d'incidence
  - V_S^t est la transposée du vecteur de comptage V_S

Equation fondamentale de franchissement ou équation d'état

- **$M = M0 + W \cdot V_S^t$**

Exemple



$$M0=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix} \xrightarrow{\textbf{T1}} M1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\\0\end{pmatrix}$$

- Démontrer que $M1 = M0 + W \cdot V_{S1}^t$

- $S1 = \langle T1 \rangle$, $V_{S1} = [1,0]$

- $W = \begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\\1 & -1\\0 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}$

Equation fondamentale de franchissement ou équation d'état

- **$M = M0 + W \cdot V_S^t$**

- Démontrer que $M1 = M0 + W \cdot V_{S1}^t$

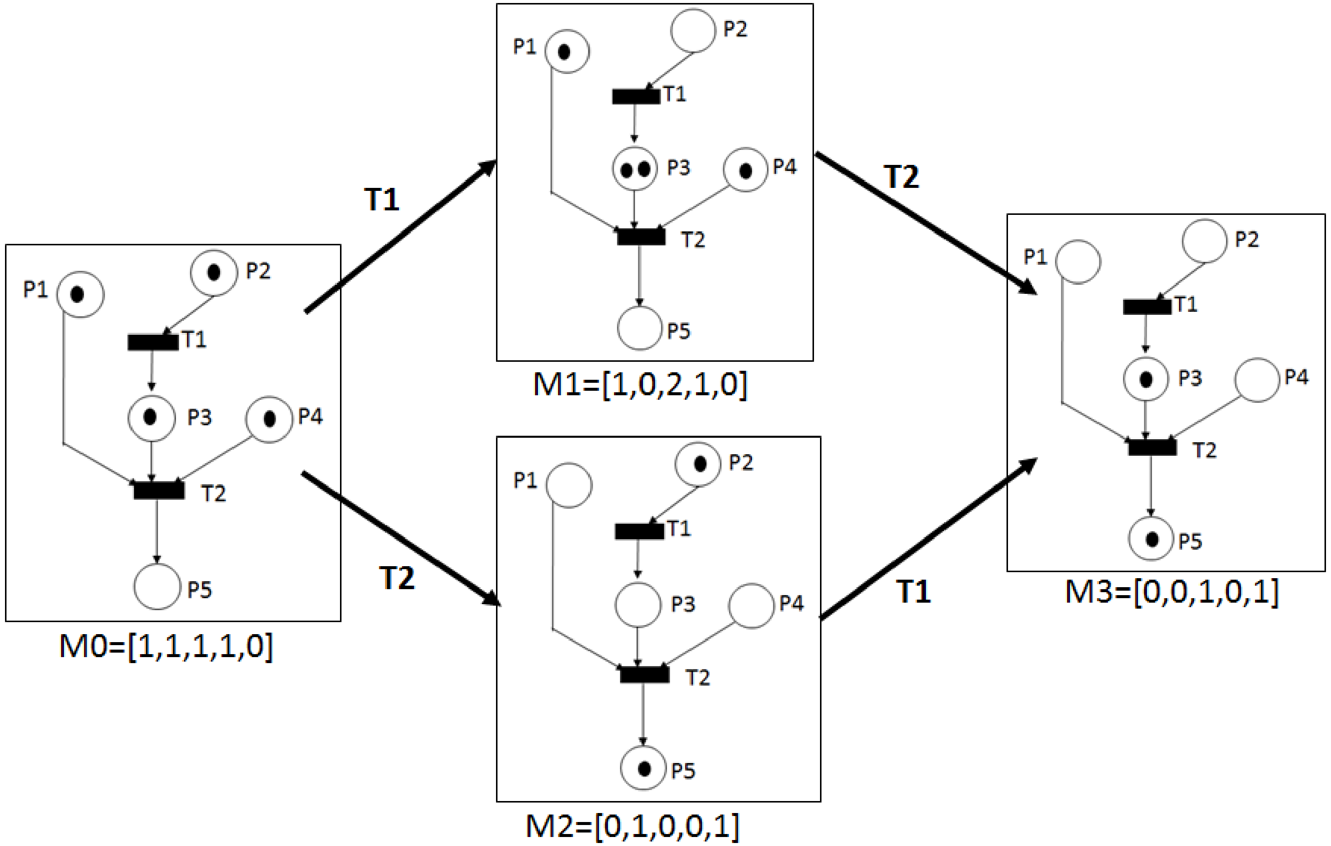
$$M0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textbf{T1}} M1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M0 + W \cdot V_{S1}^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0x1 + (-1)x0 \\ (-1)x1 + 0x0 \\ 1x1 + (-1)x0 \\ 0x1 + (-1)x0 \\ 0x1 + 1x0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = M1$$

Equation fondamentale de franchissement ou équation d'état

- Cas général
  - Pour tout marquage Mi atteignable et une séquence S franchissable à partir de Mi
    - $M = Mi + W.\ \mathbf{V_S}^{\mathbf{t}}$, tel que Mi[S>M



$$M1 = M0 + W \,.\, V_{T1}^{\ t}$$

$$M2 = M0 + W \,.\, V_{T2}^{\ t}$$

$$\begin{aligned} M3 &= M0 + W \,.\, V_{T2T1}^{\ t} \\ &= M1 + W \,.\, V_{T2}^{\ t} \\ &= M2 + W \,.\, V_{T1}^{\ t} \end{aligned}$$

Equation fondamentale de franchissement ou équation d'état

- Vérifier mathématiquement si une transition T est franchissable à partir d'un marquage Mi
  - Appliquer l'équation d'état
    - $Mj = Mi + W \cdot V_{T1}{}^{t}$
    - Si on trouve un marquage qui contient un nombre négatif

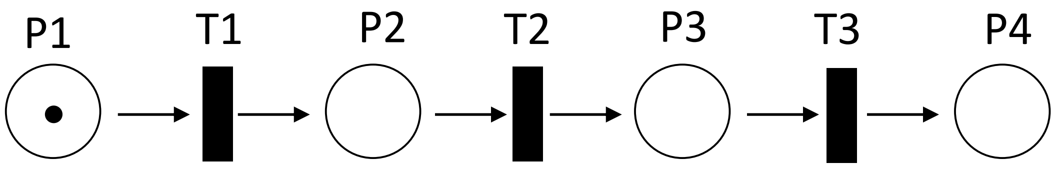
      → la transition n'est pas franchissable,
    - Sinon la transition est franchissable

Equation fondamentale de franchissement ou équation d'état

- Vérifier si une séquence est franchissable à partir d'un marquage Mi

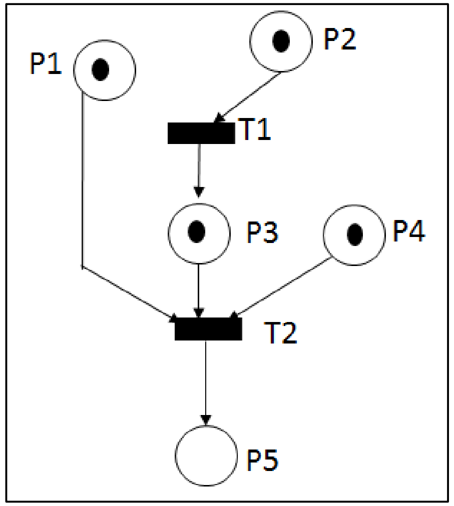
  - On applique l'équation d'état $Mj = Mi + W \cdot V_T^t$ **transition par transition**
    - Si on trouve au cours des calculs un marquage qui contient un nombre négatif
      → la séquence n'est pas franchissable à partir de Mi
    - Si tous les marquages sont positifs → séquence franchissable à partir de Mi

- Attention: si on applique l'équation d'état directement sur toute la séquence, on n'est pas sûr qu'elle soit franchissable
  - Exemple:
    - L'application de l'équation d'état aux 4 séquences <T1, T2, T3>, <T2, T1, T3>, <T3, T2, T1> et <T2, T3, T1> donne le même marquage (car même vecteur de comptage), mais seule la séquence < T1, T2, T3> est franchissable à partir de M0.



- Vérifier si une séquence est franchissable

Exemple: Vérifier si la séquence <T1,T1> est franchissable



Equation d'état appliquée à T1 à partir de M0

$$M0 + W \cdot V_{T1}^{t} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\\1 & -1\\0 & -1\\0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = M1 \begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{0}\\\mathbf{2}\\\mathbf{1}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}$$

Tous les éléments sont positifs donc T1 est franchissable à partir de M0

Equation d'état appliquée à T1 à partir de M1

$$M1 + W \cdot V_{T1}^{t} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\\1 & -1\\0 & -1\\0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\\\mathbf{3}\\\mathbf{1}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}$$

Il y a des éléments négatifs donc T1 n'est pas franchissable à partir de M1

➔ <T1,T1> n'est pas franchissable à partir de M0

Equation fondamentale de franchissement ou équation d’état

- Marquage initial nécessaire pour franchir une séquence donnée

L’équation d’état permet de calculer le marquage initial nécessaire pour franchir une séquence donnée.

$$\mathbf{M = M0 + W\ .\ V_S^{\,t}}$$

Données Inconnu

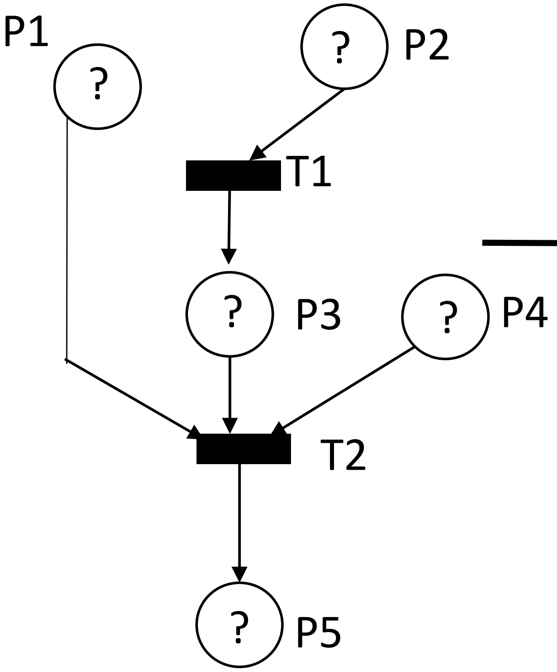
- Exemple: Déterminer le marquage initial qui permet de franchir la séquence <T1,T2> et obtenir le marquage final [0,0,1]

- On applique l’équation d’état **transition par transition dans le sens inverse**,
- Au départ, on calcule M_{f-1} tel que $M_{f-1} = M_f - W.\ V_{Tf}^{\,t}$, avec M_f le marquage final et Tf la transition finale
- On calcule par la suite, M_{f-2} ….jusqu’à arriver à M0
- Si on trouve au cours des calculs un marquage qui contient un nombre négatif → la séquence ne permet jamais d’obtenir le marquage final donné pour n’importe quel marquage initial
- Si tous les marquages sont positifs → on trouve M0

Equation fondamentale de franchissement ou équation d'état

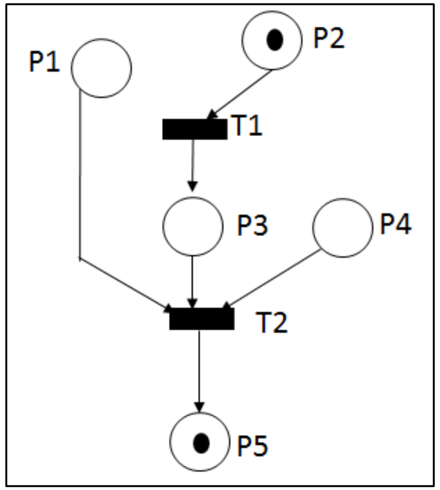
- Marquage initial nécessaire pour franchir une séquence donnée
  - Déterminer le marquage initial qui permet de franchir la séquence <T1,T2> et obtenir le marquage final $M2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{M = M0 + W \,.\, V_S{}^t}$$



<T1,T2>

M0[T1>M1
M1[T2>M2



- $W = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- S = <T1,T2>
  - $S1=\langle T2\rangle$, $V_{S1}=[0,1]$
  - $S2=\langle T1\rangle$, $V_{S2}=[1,0]$

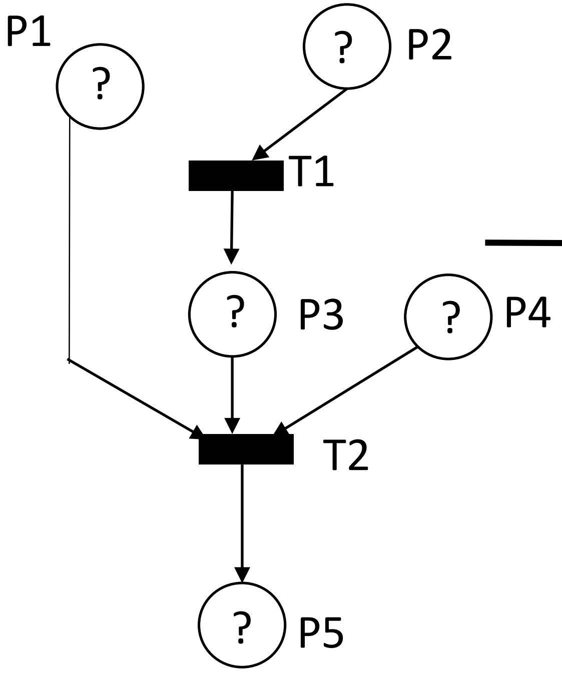
$$M1 = M2 - W \,.\, V_{S1}{}^t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Equation fondamentale de franchissement ou équation d’état

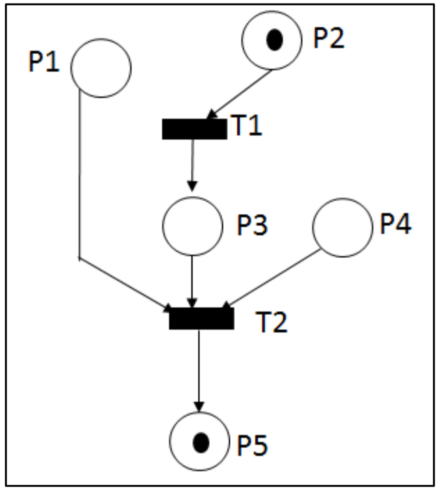
- Marquage initial nécessaire pour franchir une séquence donnée
  - Déterminer le marquage initial qui permet de franchir la séquence <T1,T2> et obtenir le marquage final $M2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{M = M0 + W . V_S^t}$$



<T1,T2> ⟶

M0[T1>M1
M1[T2>M2



- $W = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- S = <T1,T2>
  - S1=<T2>, $V_{S1}=[0,1]$
  - S2=<T1>, $V_{S2}=[1,0]$

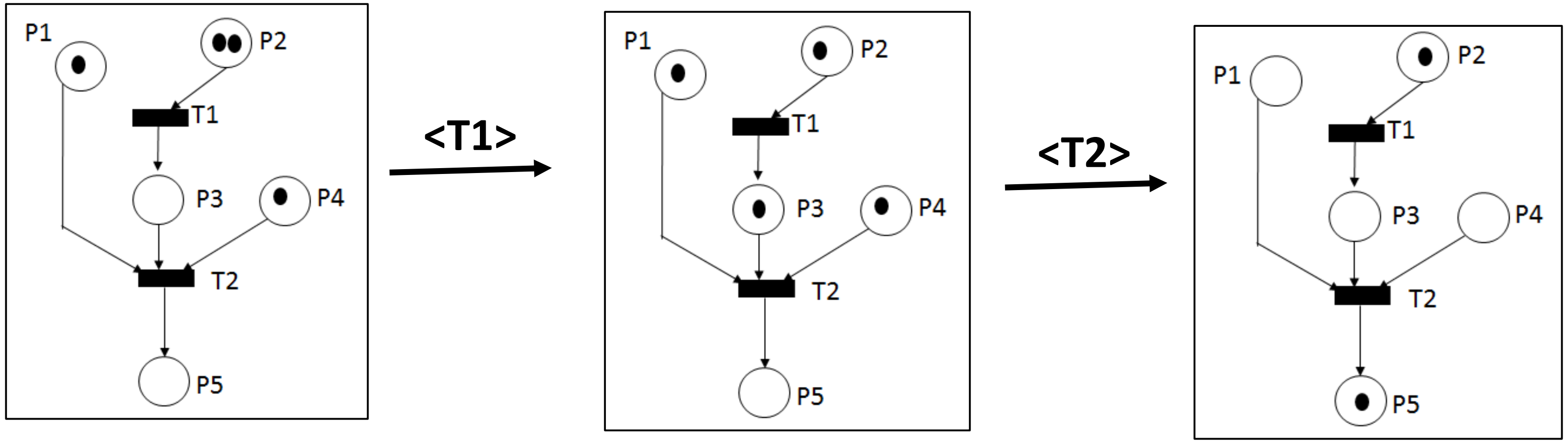
$$M0 = M1 - W . V_{S2}^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Equation fondamentale de franchissement ou équation d’état

- Marquage initial nécessaire pour franchir une séquence donnée

Vérification du marquage

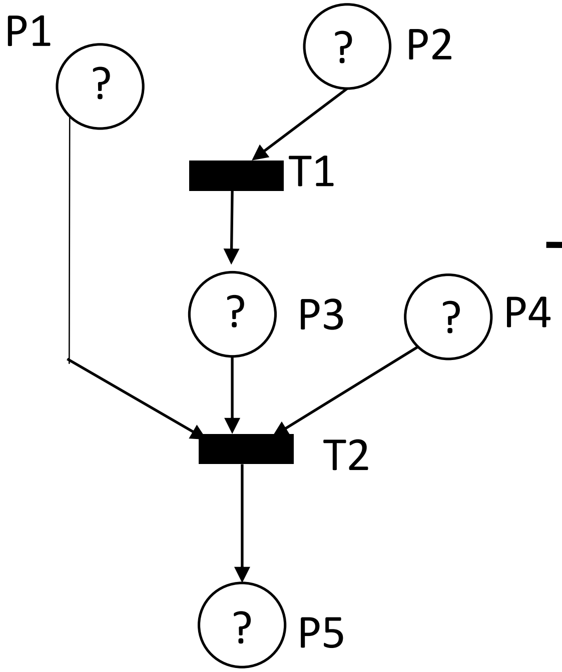


$$M0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad M2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Equation fondamentale de franchissement ou équation d'état

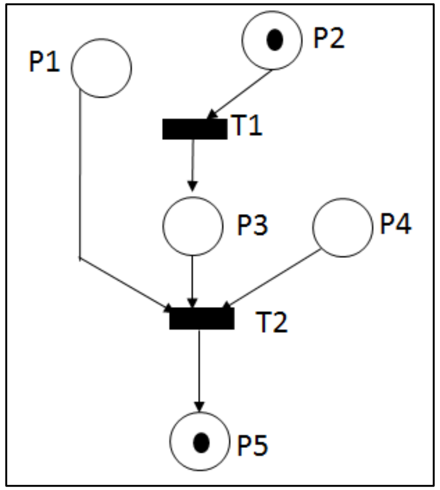
- Marquage initial nécessaire pour franchir une séquence donnée

  Attention: si à un moment dans la marche arrière, on trouve un marquage qui contient des éléments négatifs ➔ on peut interrompre et conclure que la séquence ne donne jamais le marquage final donné pour n'importe quel marquage initial



<T1,T1>

M0[T1>M1
M1[T1>M2



- S = <T1,T1>
  - S1=<T1>, V_{S1}=[1,0]
  - S2=<T1>, V_{S2}=[1,0]
- $W = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad M2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

➔ $W \,.\, V_{S1}^{\,t} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$M1 = M2 - W \,.\, V_S^{\,t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

➔ la séquence <T1,T1> ne donne jamais le marquage M2 pour n'importe quel marquage initial