Code Module:MAT2053
Intitulé du Module : Mathématiques et cryptographie (partie Maths)
Date : 14 février 2019 **Durée : 45 mn**
Professeur : A. DAOUDI et H. MECHKOUR **Nbre de pages : 01**
Contrôle : Oui **Niveau** : 2A
Documents autorisés : Non
Calculatrice autorisée : Non

Remarques : Soignez votre présentation. Une rédaction précise et concise est exigée.

Sujet (partie mathématiques)

Exercice 1. Sans justifier votre réponse**,** répondre par vrai : **V** ou par Faux : **F.**

1) $(\mathbf{R}^{*},\times)$ est un groupe
2) $(\mathbf{Z}/12\mathbf{Z},+)$ est un groupe
3) $\left((\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})\setminus\{\bar{0}\},\times\right)$ est un groupe
4) $(\left]-\infty,0\right[,\times)$ est un groupe

Exercice 2.

1) Prouvez que $\bar{5}$ est inversible dans $\mathbf{Z}/46\mathbf{Z}$
2) Dans $\mathbf{Z}/46\mathbf{Z}$ calculez $\bar{a}$ où $a=343\times 46+9\times 5$
3) Résoudre dans $\mathbf{Z}/46\mathbf{Z}$ l'équation : $\bar{5}\,\bar{x}+\overline{24}=\overline{34}$

Exercice 3.

Soit $\mathbf{Z}$ muni de la loi de composition interne « $*$ » définie par :
Si $(x,y)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$, $x*y=x-2y$

1) La loi « $*$ » est-elle commutative dans $\mathbf{Z}$? Justifiez votre réponse
2) $\mathbf{Z}$ muni de la loi « $*$ » admet-il un élément neutre ? Justifiez votre réponse

Exercice 4.

Dans $(S_3,\circ)$ le groupe des permutations de $\{1,2,3\}$, on considère les éléments suivants :

$$id=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\ ;\ \sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\text{ et }\tau=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$$

1) Calculer $\sigma\circ\tau$.
2) Montrer que $(\{id\,;\tau\},\circ)$ est un sous-groupe de $(S_3,\circ)$
3) Montrer que $(\{id\,;\tau;\sigma;\sigma\circ\tau\},\circ)$ n'est pas un sous-groupe de $(S_3,\circ)$

Détachez cette feuille SVP

NOM PRENOM :
groupe :

Exercice 1. Répondre par vrai : **V** ou par Faux : **F**

1) $(\mathbf{R}^*, \times)$ est un groupe

☐

2) $(\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}, +)$ est un groupe

☐

3) $\left((\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}) \setminus \{\overline{0}\}, \times\right)$ est un groupe

☐

4) $(]-\infty, 0[, \times)$ est un groupe

☐

Exercice 2.
1) Prouvez que $\overline{5}$ est inversible dans $\mathbf{Z}/46\mathbf{Z}$
2) Dans $\mathbf{Z}/46\mathbf{Z}$ calculez $\overline{a}$ où $a = 343 \times 46 + 9 \times 5$
3) Résoudre dans $\mathbf{Z}/46\mathbf{Z}$ l'équation : $\overline{5}\,\overline{x} + \overline{24} = \overline{34}$

Suite de l'exercice 2.

Exercice 3. Soit $\mathbf{Z}$ muni de la loi de composition interne « $*$ » définie par :
Si $(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, $x * y = x - 2y$

1) La loi « $*$ » est-elle commutative dans $\mathbf{Z}$? Justifiez votre réponse
2) $\mathbf{Z}$ muni de la loi « $*$ » admet-il un élément neutre ? Justifiez votre réponse

Exercice 4.

Dans $(S_3,\circ)$ le groupe des permutations de $\{1,2,3\}$, on considère les éléments suivants :

$id=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$; $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$ et $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$

1) Calculer $\sigma\circ\tau$.

2) Montrer que $(\{id\,;\tau\},\circ)$ est un sous-groupe de $(S_3,\circ)$

3) Montrer que $(\{id\,;\tau\,;\sigma;\sigma\circ\tau\},\circ)$ n'est pas un sous-groupe de $(S_3,\circ)$

Suite de l'exercice 4