2014-2015

MAT2052

Fonctions de plusieurs variables

Courbes et Surfaces

Dalila Kateb

INTRODUCTION

Ce cours est consacré à l'étude des fonctions de plusieurs variables. Ce sont des fonctions définies sur R^n, ou une partie de R^n, à valeurs dans R ou dans R^p ; n et p désignant deux entiers naturels.

Pour les fonctions de R^2 dans R, nous visualiserons les graphes correspondant à des surfaces de R^3 qui peuvent modéliser des reliefs.
Nous parlerons de pente dans des directions données, comme le ferait un randonneur, de reliefs accidentés que nous modéliserons à l'aide de concepts mathématiques tels que la continuité, des dérivées directionnelles et partielles, de différentiabilité.

Comme nous l'avons fait pour les fonctions d'une variable réelle, nous chercherons à établir, pour ce type de fonctions, les concepts de continuité, de dérivabilité, d'intégrabilité.

Nous introduirons les outils qui nous permettrons de donner les définitions correspondantes.
.
C'est l'objet du premier chapitre qui traite des distances et des normes sur R^n, et de façon plu générale de topologie : la notion fondamentale pour parler de continuité est celle de voisinage.

Une définition intuitive de la continuité d'une fonction f en un point a peut s'énoncer de la façon suivante :
« Les valeurs f(x) pour des valeurs x voisines de a, sont voisines de f(a). »

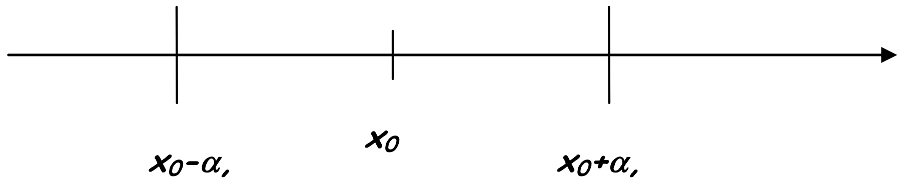
Cette définition pourra être déclinée d'une façon rigoureuse mathématique, si nous pouvons définir la notion de voisinage, qui fait appel à un outil de mesure : la distance.

CHAPITRE I : Topologie de R^n, distances, normes et voisinages

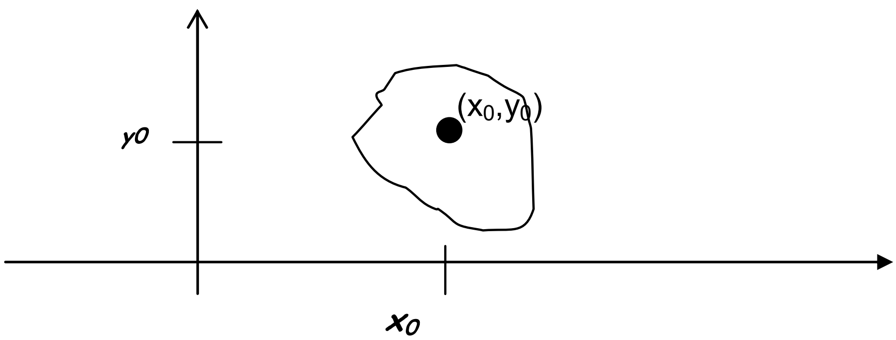
NOTION DE VOISINAGE

Le but de ce paragraphe est de définir les voisinages d'un point d'un ensemble donné E.

Plaçons-nous dans R et considérons un point x_0 .

> Un exemple de voisinage du point x_0 : l'intervalle $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$
>
> 
>

Dans R^2 considérons un point (x_0, y_0) .

> Un exemple de voisinage d'un point (x_0, y_0) :
>
> 
>

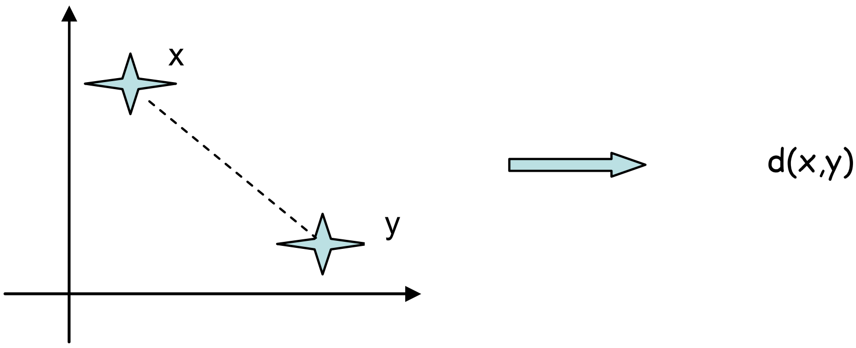
Considérons maintenant un ensemble abstrait E et considérons un point x de E..

> Une définition intuitive de voisinage de x pourrait être :
>
> *« Un voisinage du point x est un ensemble de points qui sont* ***proches*** *de x. »*

Pour que cette définition soit précise, il faut donner un sens au terme « proche ». Pour cela il faut mesurer la distance entre x et les autres points de E

NOTION DE DISTANCE

La notion de distance permet de mesurer l'éloignement entre deux points x et y d'un ensemble E :



x et y dans E

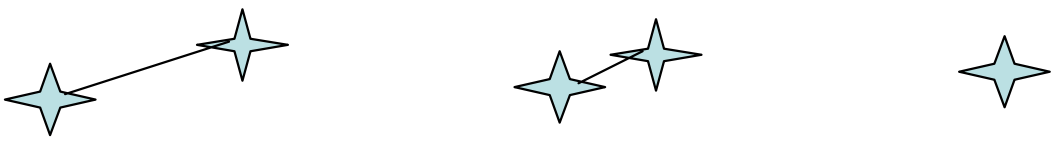
d(x,y) est la distance entre x et y

c'est réel positif

Propriétés d'une distance

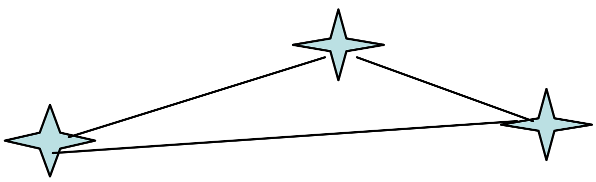
3 propriétés très naturelles :

• P1 : La distance entre deux points est nulle si et seulement si ces deux points sont égaux



• P2 : La distance entre deux points est la même dans les deux sens

• P3 : Lorsque l'on dispose de 3 points x, y et z, la distance entre deux points x et y est toujours plus petite (ou égale) à la somme des distances de x à z et de z à y.



Des propriétés qui donnent la définition d'une distance dans un ensemble E.

Distance sur un ensemble E

Une distance sur E est une application d de ExE dans R^+ vérifiant les 3 propriétés :

P1 : Pour tout x de E et pour tout y de E : d(x,y) = 0 si et seulement si x=y

P2 : Pour tout x de E et pour tout y de E : d(x,y) = d(y,x) (symétrie)

P3 : Pour tout x de E, pour tout y de E et pour tout z de E :
d(x,y)< = d(x,z)+d(z,y) (inégalité triangulaire)

Exemples de distances

- Dans R : d(x,y)=|x-y|
- Dans R2 : soient $M_1 = (x_1, y_1)$ et $M_2 = (x_2, y_2)$

$$d_1(M_1, M_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

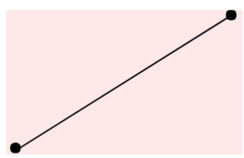
$$d_2(M_1, M_2) = \sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2}$$

$$d_\infty(M_1, M_2) = Sup(|x_1 - x_2|;|y_1 - y_2|)$$

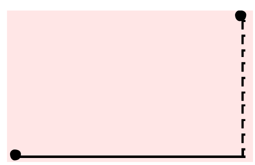
Représenter graphiquement ces distances :

$d_1(M_1, M_2)$:

$d_2(M_1, M_2)$:



$d_\infty(M_1, M_2)$:



ESPACES METRIQUES, BOULES ET VOISINAGES

Un espace E muni d'une distance d est appelé **espace métrique** et noté (E,d).
Soient (E,d) un espace métrique, x_0 un point de E et r un réel positif.

On appelle **boule ouverte** de centre x_0 et de rayon r l'ensemble des points x de E qui sont à une distance de x_0 inférieure à r.
On note cet ensemble B(x_0, r) :

$$\boxed{B(x_0, r) = \{x \in E / d(x_0, x) < r\}}$$

On appelle **boule fermée** de centre x_0 de rayon r l'ensemble noté :

$$\boxed{B_F(x_0, r) = \{x \in E / d(x_0, x) \leq r\}}$$

<u>Exemples:</u>

1) Dans R, représenter la boule de centre 0 de rayon 1 pour la distance usuelle.

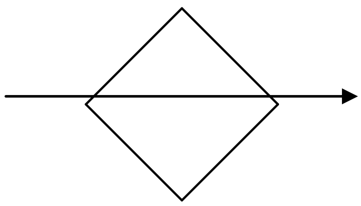
2) Dans R^2, représenter les boules de centre 0 de rayon 1
- Pour la distance de Manhattan d_1
- Pour la distance euclidienne d_2
- Pour la distance d_∞

<u>Réponses:</u>

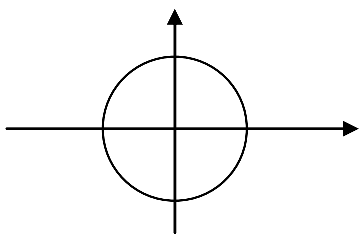
1) $B(O,r) =]-r, r[; \quad r = 1$

2)

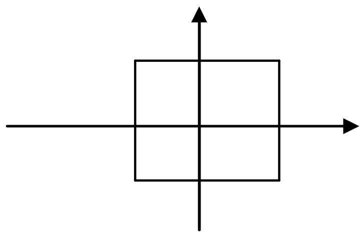
$B(O,1)_{d_1}$:



$B(O,1)_{d_2}$:



$B(O,1)_{d_\infty}$:



Les boules ouvertes vont nous servir à définir la notion de **voisinage** :

Dans un espace métrique (E,d) un **voisinage élémentaire** d'un point x_0 est défini par une boule ouverte $B(x_0, r)$, r >0.
De façon plus générale, un **voisinage** V de x_0 est une partie V de E qui contient une boule ouverte de centre x_0 .

NORMES, ESPACES VECTORIELS NORMES

- Dans certains espaces métriques la distance entre deux points s'exprime à l'aide de leur différence; comme dans R :

$$d(x,y)=|x-y|$$

De façon plus générale, on peut retrouver cette situation lorsque l'ensemble considéré E est un <u>espace vectoriel</u> (on peut alors faire la différence de deux vecteurs). Dans cet espace vectoriel, on doit disposer d'une application appelée

norme, notée par des doubles valeurs absolues, qui se comporte comme la valeur absolue de R et qui permettra de définir la distance entre deux éléments x et y de E par : d(x,y)=||x-y||.

La définition d'une **norme** repose sur les propriétés de la valeur absolue :

Propriétés de la valeur absolue de R

- |.| est une application de R dans R+
- |x|=0 si et seulement si x=0
- |a.x|=|a|.|x| , pour tout réel a et tout réel x
- |x+y| < =|x|+|y|, pour tout x et tout y de R

Ces propriétés vont permettre de donner une définition dans un cadre plus général :

Norme sur un espace vectoriel ; définition

Soit E un espace vectoriel sur R ou C ; une **norme** sur E est une application de E dans R+, notée ||.|| telle que :

- N1 : ||x||=0 si et seulement si x=0
- N2 : ||a.x||=|a|.||x||, pour tout scalaire a et tout vecteur x de E
- N3 : ||x+y||< =||x||+||y||, pour tout vecteur x et tout vecteur y de E

(E,||.||) est appelé **espace vectoriel normé**.

Exemple de normes

- Dans R la norme principale est définie par la valeur absolue : |.|
- Dans R^2, les trois principales normes sont définies en tout point(x,y) par :

$\|(x,y)\|_1 = |x|+|y|$ $\quad\|(x,y)\|_2 = \sqrt{|x|^2+|y|^2}$ $\quad\|(x,y)\|_\infty = Sup(|x|,|y|)$

Preuves (à compléter)

La norme 1 : $\|(x,y)\|_1 = |x|+|y|$

Vérifier que cette application est bien définie de R dans R+ et qu'elle vérifie les propriétés N1, N2 et N3.

La norme 2 : $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{|x|^2+|y|^2}$

Idem (NB : la propriété N3 est plus difficile à établir : il faut élever les expressions au carré.

La norme « infinie » : $\|(x,y)\|_\infty = Sup(|x|,|y|)$
Idem et pas de difficultés

Exercice :
Définir les normes dans R^n, les normes $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ et $\| \ \|_\infty$.
Généraliser les formules précédentes avec n coordonnées.

Normes et distances

Proposition :

Soit (E,||.||) un espace vectoriel normé, alors on peut définir sur E une distance en posant : d(x,y) = ||x-y|| pour tout x et tout y de E.

Preuve : en exercice

Normes équivalentes

Définition

Soit E un espace vectoriel, muni de deux normes notées : $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$.
Ces deux normes sont dites **équivalentes** s'il existe deux réels a et b strictement positifs tels que pour tout x dans E :

$$a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1$$

Exemples

Dans R^n, les normes $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ et $\| \ \|_\infty$ sont équivalentes.

Preuves :
Montrons l'équivalence $\| \ \|_1$ entre et $\| \ \|_\infty$

Pour tout vecteur $x=(x_1,\ldots,x_n)$ de R^n, on a : $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|x_i|$; or pour tout entier i entre 1 et n ; $|x_i| \leq \underset{1\leq i\leq n}{Sup}|x_i|$; D'où : $\sum_{i=1}^{n}|x_i| \leq n \underset{1\leq i\leq n}{Sup}|x_i|$; soit $\|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$

D'autre part il existe un entier k compris entre 1 et n pour lequel $|x_k| = \underset{1\leq i\leq n}{Sup}|x_i|$; or $|x_k| \leq \sum_{i=1}^{n}|x_i|$, soit : $\underset{1\leq i\leq n}{Sup}|x_i| \leq \sum_{i=1}^{n}|x_i|$; c'est-à-dire : $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1$

On a trouvé deux réels strictement positifs : 1 et n tels que

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty,$$

ce qui prouve l'équivalence des normes $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_\infty$

Procéder de même pour montrer l'équivalence des normes $\| \ \|_2$ et $\| \ \|_\infty$

Puis en déduire l'équivalence des normes $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$

Conséquence sur les boules

Soit E un espace vectoriel, muni de deux normes équivalentes $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$.

Soient x_0 un vecteur de E.

On se propose de comparer les boules de centre x_0 relatives à la norme $\| \ \|_1$ et à la norme $\| \ \|_2$.

Notons $B_1(x_0, r)$ la boule relative à $\| \ \|_1$ et $B_2(x_0, r')$ la boule relative à $\| \ \|_2$ de rayons respectifs r et r' (r > 0 et r' > 0).

Proposition

Soit E un espace vectoriel, muni de deux normes équivalentes $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$.

Soient x_0 un vecteur de E. Il existe deux réels strictement positifs a et b tels que $a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1$; alors on a l'inclusion suivante :

$$B_2(x_0, ar) \subset B_1(x_0, r) \subset B_2(x_0, br)$$

Preuve :

Montrons l'inclusion : $B_2(x_0, ar) \subset B_1(x_0, r)$.

Soit x un élément de $B_2(x_0, ar)$, alors par définition on a : (*) $\|x - x_0\|_2 \leq ar$.

D'autre part, d'après l'équivalence des normes, on a : $\|x - x_0\|_1 \leq \frac{1}{a}\|x - x_0\|_2$

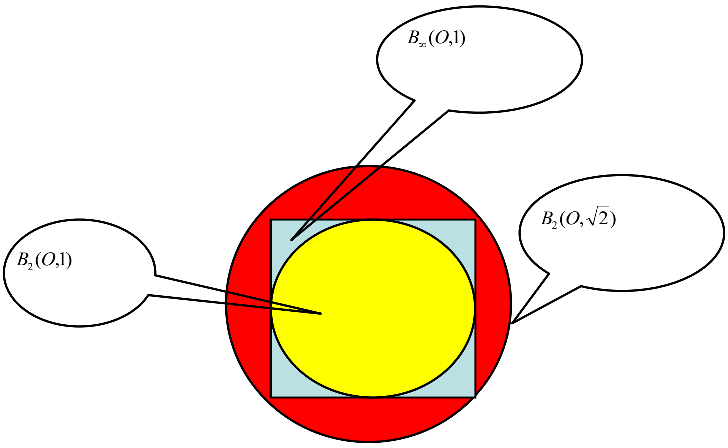
On obtient alors, compte tenu de (*) : $\|x - x_0\|_1 \leq r$;

Ce qui traduit que $x \in B_1(x_0, r)$.

Procéder de façon analogue pour établir l'inclusion : $B_1(x_0, r) \subset B_2(x_0, br)$

Exemple :

On a : $\| \ \|_\infty \leq \| \ \|_2 \leq \sqrt{2}\| \ \|_\infty$. D'où : $B_2(O,1) \subset B_\infty(O,1) \subset B_2(O,\sqrt{2})$



Conséquence sur les voisinages

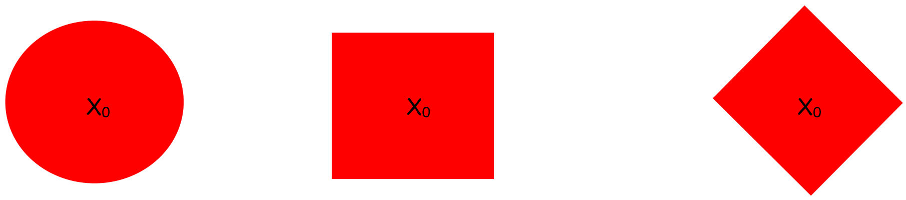
Proposition
Soit E un espace vectoriel, muni de deux normes équivalentes $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_2$.

Soient x_0 un vecteur de E.

Tout voisinage de x_0 pour la norme $\|\ \|_1$ est un voisinage x_0 pour la norme $\|\ \|_2$ et réciproquement.

Pour définir un voisinage d'un point on pourra alors choisir l'une ou l'autre des normes équivalentes.

Par exemple sur R^2, on pourra considérer des voisinages circulaires ou carrés :



Proposition
Sur un espace E de **dimension finie** toutes **les normes sont équivalentes**.

Admise

LIMITE ET CONTINUITE

Les notions de distances, de normes et de voisinages vont pouvoir nous permettre maintenant d'écrire les définitions de limite et de continuité.
Partons de définitions naturelles :
« *Une suite (x_n) converge vers un point x si les valeurs x_n se rapprochent de plus en plus de x lorsque n devient de plus en plus grand.* »
« *Une fonction f est dite continue en un point a si les valeurs f(x) qu'elle prend pour des valeurs x voisines de a, sont voisines de f(a).* »

Pour écrire les définitions mathématiques correspondantes, nous devons disposer d'une structure topologique, c'est-à-dire d'un ensemble E sur lequel on a défini la notion de voisinage.

Limite d'une suite

Plaçons nous donc dans un espace métrique (E,d)

<u>Définition 1 :</u>
Soit (x_n) une suite d'élément de E et soit x un élément de E. On dira que la suite (x_n) converge vers x dans (E,d), et on écrira , $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ si :
« Pour tout voisinage (élémentaire) V de x, il existe un rang N à partir duquel tous les éléments x_n sont dans V »
Soit : $\forall V$ voisinage de x, $\exists N \in N;\quad \forall n \in N,\, n > N \Rightarrow x_n \in V$

Un voisinage élémentaire V de x étant une boule ouverte centrée en x, on obtient la définition équivalente suivante

<u>Définition 2 :</u>
Soit (x_n) une suite d'élément de E et soit x un élément de E. On dit que la suite (x_n) converge vers x dans (E,d), et on écrit $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$,si :
$\forall r > 0, \exists N \in N;\quad \forall n \in N,\, n > N \Rightarrow d(x, x_n) < r$

Remarquons que cette dernière définition est elle-même équivalente à la suivante :

<u>Définition 3 :</u>
Soit (x_n) une suite d'élément de E et soit x un élément de E. On dit que la suite (x_n) converge vers x dans (E,d) si : $\lim_{n\to+\infty} d(x, x_n) = 0$

Exercice 1 : Ecrire la définition de $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$, dans un espace vectoriel normé.

Exercice 2 : Dans (R^2,d_1), montrer que la suite de points : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+n}{n}, \frac{1+n}{n^2}\right) = (1,0)$

A-t-on le même résultat dans (R^2,d_2) ? (R^2,d), où d désigne la distance discrète ?

Exercice 3 : Soit E un espace vectoriel sur lequel on définit deux normes équivalentes N_1 et N_2. Montrer que si une suite (x_n) d'éléments de E converge vers un élément x de E pour la norme N_1, elle converge aussi pour N_2 et réciproquement.

Exercice 4: Dans R^n muni de la norme infinie montrer qu'une suite $(x_p)_{p\in N}$, où pour tout entier p $x_p = (x_{p,1},....,x_{p,n})$, converge vers un élément $x = (x_1,....,x_n)$ de R^n si et seulement si : pour tout entier i variant de 1 à n : $\lim_{p\to+\infty} x_{p,i} = x_i$.

Quelle conclusion peut-on en tirer par rapport aux autres normes ?

Continuité d'une fonction

Considérons deux espaces (E,d) et (E', d')

Définition 1 :

Soit f une application de E dans E' et x_0 un élément de E. On dira que la fonction f est continue au point x_0 de E si :

« Pour tout voisinage (élémentaire) V de $f(x_0)$, il existe un voisinage U de x_0 tel que pour tout x dans U, f(x) est dans V.»

Soit : $\forall V$ voisinage de $f(x_0)$, $\exists U$ voisinage de x_0; $\forall x \in E, x \in U \Rightarrow f(x) \in V$

Un voisinage élémentaire V de x étant une boule ouverte centrée en x, on obtient la définition équivalente suivante :

Définition 2 :

Soit f une application de E dans E' et x_0 un élément de E. On dit que la fonction f est continue au point x_0 si :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0; \quad \forall x \in E, d(x,x_0) < \alpha \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

Cette dernière définition est elle-même équivalente à la suivante :

Définition 3 :

Soit f une application de E dans E' et x_0 un élément de E. On dit que la fonction f est continue au point x_0 si : $\lim_{d(x,x_0)\to 0} d'(f(x), f(x_0)) = 0$

Exercice 5 : Soit f une application de E dans E' et x_0 un élément de E.
Ecrire que f est continue au point x_0 si E et F sont des espaces vectoriels normés.

Exercice 6 : Dans (R^2,d_1), montrer que l'application : $f : \begin{cases} R^2 \to R \\ (x,y) \to x \end{cases}$ est continue sur R^2.

Exercice 7 : Continuité et normes équivalentes

Soit E un espace vectoriel sur lequel on définit deux normes équivalentes N_1 et N_2. Montrer que si une application f de E dans F, où F est un espace vectoriel normé, est continue pour N_1, elle est aussi continue pour N_2, et réciproquement.

Exercice 8 : ***Continuité des applications linéaires***

Soient E et F deux espaces vectoriels normés et f une application linéaire de E dans F. Montrer que f est continue sur E si et seulement si elle est continue en 0.

Exercice 9 : ***Continuité et voisinage***

Soient deux espaces métriques (E,d) et (E', d'), f une application de E dans E' et x0 un élément de E. Montrer que f est continue au point x0 de E ssi :

Pour tout voisinage V de f(x0), il existe un voisinage U de x0 tel que $f(U) \subset V$