# CHAPITRE III

## FONCTIONS DIFFERENTIABLES DE $R^n$ DANS $R^p$

### 1. DERIVEES PARTIELLES

Définition :
Soient f une fonction de $R^2$ dans R et $a=(a_1,a_2)$ un élément de $R^2$.
Si l'application partielle $\varphi_1$ est dérivable en $a_1$, on dit que f admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable au point a.
De même, si $\varphi_2$ est dérivable en $a_2$, on dit que f admet une dérivée partielle par rapport à sa deuxième variable au point a.

Ces dérivées lorsqu'elles existent sont notées respectivement : $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$.
Si f admet des dérivées partielles en tout point d'un ouvert U de $R^2$ et si les applications dérivées partielles :
$\frac{\partial f}{\partial x}:(x,y)\mapsto\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}:(x,y)\mapsto\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$
sont continues sur U, on dit que f est de classe C1 sur U.
On a des résultats classiques sur la somme, le produit, la composée de fonctions de classe C1.

***Exemple 1*** :
Calcul des dérivées partielles au point (0,0) de la fonction définie par :

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{(x^2+y^2)} & si\,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Etudier l'existence des dérivées partielles au point (0,0).

***Remarque :*** f admet des dérivées partielles par rapport à x et par rapport à y en (0,0) ; f est-elle continue en (0,0) ?

***Exemple 2 :*** Etude des dérivées partielles au point (0,5 ; 0,5) de la fonction f définie par : $f(x,y)=(x^2-y^2)$
Pour tout réel y , l'application x→ f(x,y) est de classe C1 d'où :

22

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) =$$

De même , pour tout réel x, l'application x→ f(x,y) est de classe C1 d'où :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = .$$

On a donc pour x=0,5 et y= 0,5 : $\frac{\partial f}{\partial x}(0{,}5;\,0{,}5) =$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0{,}5;\,0{,}5) =$

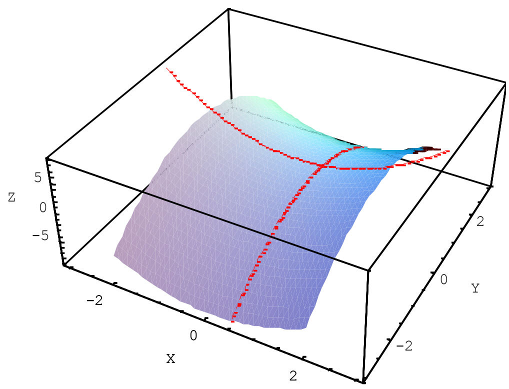
***Remarque :***

Si f est une fonction de $R^2$ dans R, elle définit une surface d'équation : z=f(x,y) dont le graphe est une partie de $R^3$.

Un point M de la surface aura pour coordonnées un triplet (x,y, f(x,y)). L'abscisse x et l'ordonnée y de ce point permettent de repérer le point dans le plan x0y, ce sont les coordonnées de la projection de M sur ce plan. La côte z=f(x,y) donne la hauteur du point M.

Si la surface représente un relief, un personnage qui se déplace sur la surface peut s'orienter grâce au plan xOy qui indique les directions qu'il peut emprunter. Il peut par exemple correspondre aux points cardinaux.

Dans l'exemple précédent, le personnage partant du point (0,5 ; 0,5 ; 0) monte s'il suit un chemin dans la direction 0x et descend s'il va dans la direction 0y.




Une pente positive dans la direction OX et une pente négative dans la direction OY

***Remarques :***

- Les dérivées partielles correspondent à des dérivées suivant les directions Ox et Oy.
  → On peut dériver suivant <u>d'autres directions !</u>
- L'existence des dérivées partielles n'entraîne pas la continuité.
  → Ce n'est pas la bonne notion qui généralise le concept de <u>dérivabilité</u>.

**<u>D'où deux axes de réflexion</u>** :

1. Généraliser le concept de dérivabilité pour les fonctions de deux variables : c'est l'objet du paragraphe 2
2. Définir les dérivées dans une direction donnée ; c'est l'objet du paragraphe 4.

## 2. FONCTIONS DIFFERENTIABLES

**<u>Définition :</u>**

Une fonction $f : R^n \to R$ est **<u>différentiable</u>** en un point M s'il existe une **application linéaire** (continue) $\begin{array}{c} l : R^n \to R \\ H \mapsto l(H) \end{array}$ telle que :

$$\boxed{f(M+H) - f(M) = l(H) + o(\|H\|)}$$

C'est à dire :

$$\boxed{\lim_{H \to 0} \frac{f(M+H) - f(M) - l(H)}{\|H\|} = 0}$$

Notation : l'application linéaire $l$ est alors unique, elle est notée $df_M$ et est appelée **<u>application différentielle de f au point $M$ .</u>**

NB :

- $M = (x_1,...x_n)$ est un l'élément de $R^n$ où l'étude se fait.
- $H = (h_1,...h_n)$ est un élément de $R^n$ , au voisinage de (0,..,0) qui joue le rôle de l'accroissement.
- Comme on est en dimension finie, il n'est pas utile de préciser la continuité de l'application linéaire $l$ . (On montre qu'en dimension finie toutes les applications linéaires sont continues)
- $o(\|H\|) = \|H\| \varepsilon(H)$ avec $\lim_{H \to 0} \varepsilon(H) = 0$
- Si f est une fonction d'une variable réelle, f est différentiable en M si et seulement si f est dérivable en M et pour tout réel $H$ : $l(H) = f'(M)H$
- $df_M$ est une application linéaire de $R^n$ dans $R$ .

<u>Exemple 1 : *(à faire)*</u>

Soients $f(x, y) = x^2 + y^2$ et M=(1,1).

Montrons que f est différentiable en M. Pour cela, donnons-nous un accroissement $H = (h_1, h_2)$ et calculons :

$f(M+H) - f(M) =$

Dans cette expression, on reconnaît une fonction linéaire l en $H = (h_1, h_2)$ :

$$l : H = (h_1, h_2) \mapsto l(h_1, h_2) =$$

( NB : Les applications linéaires de $R^n$ dans $R$ sont de la forme :

$$H = (h_1,...,h_n) \mapsto a_1 h_1 + ... + a_n h_n \quad )$$

Calculer la limite quand $H=(h_1,h_2)\to(0,0)$ de l'expression :

$$\frac{f(M+H)-f(M)-l(H)}{\|H\|}=$$

Si on choisit la norme euclidienne, on obtient :

$$\frac{f(M+H)-f(M)-l(H)}{\|H\|_2}=$$

D'où $\lim\limits_{H\to 0}\frac{f(M+H)-f(M)-l(H)}{\|H\|}=$

f est-elle différentiable en M=(1,1) ?

Si oui préciser pour tout élément $H=(h_1,h_2)$ :

$$df_M(h_1,h_2)=$$

**<u>Remarque sur le cadre général des applications différentiables :</u>**

On peut définir la notion de différentiabilité pour des applications d'un espace vectoriel normé $(E,\|\ \|)$ dans un espace vectoriel normé $(F,\|\ \|)$.

*Une fonction $f:E\to F$ est différentiable en un point M de $E$ s'il existe une application <u>linéaire et continue</u>* $\begin{array}{l} l:E\to F \\ H\mapsto l(H)\end{array}$ *telle que :*

$$f(M+H)-f(M)=l(H)+o(\|H\|_E)$$

*C'est à dire :* $\lim\limits_{H\to 0}\frac{\|f(M+H)-f(M)-l(H)\|_F}{\|H\|_E}=0$

Un exemple sera donné en TD.

**Proposition 1 :** *(Différentiabilité et continuité)*

Toute application **différentiable** en un point M est **continue** en ce point :

f différentiable en M $\Rightarrow$ f continue en M

*Preuve :*

Soit $f$ une application différentiable en un point $M$, alors au voisinage de 0 on a :
$f(M+H)=f(M)+l(H)+o(\|H\|)$.
Quand $H \to 0$, on a par définition $\lim\limits_{H\to 0} o(\|H\|)=0$ de plus, comme $l$ est linéaire et continue on a aussi : $\lim\limits_{H\to 0} l(H)=0$.
On obtient alors : $\lim\limits_{H\to 0} f(M+H)=f(M)$, ce qui prouve la continuité de $f$ au point $M$.

La proposition suivante nous donne une définition plus simple de la différentiabilité pour les fonctions $f: R^n \to R$

Le calcul pour trouver l'application linéaire $l$ intervenant dans la définition, est parfois assez compliqué.
Pour les applications $f: R^n \to R$, cette application linéaire, lorsqu'elle existe n'est pas quelconque.
Plus précisément, nous allons montrer que si une application $f: R^n \to R$ est différentiable en un point $M$, alors l'application linéaire $l = df_M$ s'exprime à l'aide des dérivées partielles de $f$ au point $M$.

**Proposition 2:** *(Fonction différentiable et dérivées partielles)*
Soit $f: R^n \to R$, une application différentiable en un point $M$ de $R^n$.
Alors $f$ admet des dérivées partielles par rapport à toutes ses variables au point $M$ et pour tout élément $H=(h_1,...h_n)$ de $R^n$ on a :

$$\boxed{df_M(H)=\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(M)\times h_i}$$

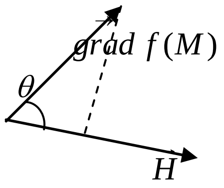
On peut remarquer que c'est le produit scalaire du vecteur $\overrightarrow{grad}\, f(M)$ par le vecteur $\vec{H}$ :

$$\boxed{df_M(H)=\overrightarrow{grad}\, f(M)\bullet \vec{H}}$$

(NB : dans la base canonique de $R^n$, $\overrightarrow{grad}\, f(M)=\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\vec{e}_i$ )

Si $\theta$ représente l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{grad}\, f(M)$ et $\vec{H}$, alors

$df_M(H) = \left\| \overrightarrow{grad}\, f(M) \right\| \times \left\| \vec{H} \right\| \cos\theta$




Reprenons l'exemple 1 :
On a montré que l'application définie par : $f(x,y) = x^2 + y^2$ est différentiable au point M=(1,1) et pour tout élément $H = (h_1, h_2)$ de $R^2$ : $df_M(h_1, h_2) = 2h_1 + 2h_2$

Or $f$ admet des dérivées partielles au point M, données par : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(M) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(M) = 2$.

On a bien : $\overrightarrow{grad}\, f(M) \bullet \vec{H} = 2h_1 + 2h_2 = df_M(H)$.

**Preuve de la proposition :**

Si $f$ est différentiable en $M$ alors pour tout vecteur $H = (h_1, \ldots h_n)$ au voisinage de 0 dans $R^n$ on a :

$$f(M+H) - f(M) = l(H) + o(\|H\|)$$

En particulier pour tout entier $i \in \{1, \ldots, n\}$, pour $H_i = t\, e_i$, où $e_i$ désigne le i-ème vecteur de la base canonique de $R^n$ et $t$ un réel au voisinage de 0, on a

$$f(M+H_i) - f(M) = l(H_i) + o(\|H_i\|)$$

Soit :

$$f(M + t\, e_i) - f(M) = l(te_i) + o(\|te_i\|)$$

Comme l'application $l$ est linéaire et $\|te_i\| = |t|$ on obtient :

$$f(M + t\, e_i) - f(M) = t l(e_i) + o(|t|)$$

Pour tout réel $t \neq 0$, on peut alors écrire :

$$\frac{f(M + t\, e_i) - f(M)}{t} = l(e_i) + \frac{|t|}{t}\varepsilon(|t|)$$

Comme $\dfrac{|t|}{t}$ est borné et $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon(|t|) = 0$, on obtient :

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(M + t\, e_i) - f(M)}{t} = l(e_i)$$

Ce qui prouve que $f$ admet des dérivées partielles au point $M$ par rapport à toutes ses variables et pour tout entier $i \in \{1, \ldots, n\}$ :

(1) $\frac{\partial f}{\partial x_i}(M) = l(e_i) = df_M(e_i)$

Or pour tout vecteur $H = h_1 e_1 + ... + h_n e_n$, d'après la linéarité de $df_M$ , on a :

(2) $df_M(H) = \sum_{i=1}^{n} df_M(e_i) h_i$

De (1) et (2) il vient que : $df_M(H) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(M) h_i$

**Remarque sur l'utilisation de cette proposition :**

- Lorsque l'on veut vérifier qu'une application $f : R^n \to R$ est différentiable en un point $M$ , il suffit de vérifier que f possède des dérivées partielles en ce point et que : $\lim_{H \to 0} \frac{f(M+H) - f(M) - \overrightarrow{grad}\, f(M) \bullet H}{\|H\|} = 0$
- La proposition précédente permet donc de passer l'étape "recherche de l'expression linéaire en H " intervenant dans $f(M+H) - f(M)$ .
- Si une fonction n'a pas de dérivée partielle par rapport à une variable en un point, alors elle n'est pas différentiable en ce point.

**Exemple 2** : Soit la fonction définie par : $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Vérifier que f admet des dérivées partielles au point (0,0) :

Calculer : $\Delta(h,k) = f(h,k) - f(0,0) - h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

Quelle limite doit-on calculer pour montrer que $\Delta(h,k) = o(\|(h,k)\|)$ ?

Cette condition est-elle vérifiée ?

Quelle conclusion peut-on faire quant à la différentiabilité de $f$ en (0,0) ?

**Exemple 3 :** Soit la fonction définie par : $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Mêmes questions que l'exemple précédent.

**Proposition 3 : (admise)**

Si $f:R^n\to R$ est une application dérivable par rapport à toutes ses variables en tout point $M$ d'un ouvert $U$ de $R^n$ et si de plus les dérivées partielles sont continues sur $U$, alors $f$ est différentiable sur $U$.

NB : Une fonction $f:R^n\to R$ dérivable par rapport à toutes ses variables en tout point $M$ d'un ouvert $U$ de $R^n$ à dérivées partielles continues sur $U$ est dite de classe $C^1$ sur $U$.

On peut donc formuler la proposition 3 sous la forme suivante :

**Toute fonction $f:R^n\to R$ de classe $C^1$ sur un ouvert $U$ est différentiable sur $U$.**

**Exemple 4 :**

Soit la fonction définie par : $f(x,y)=xy$.

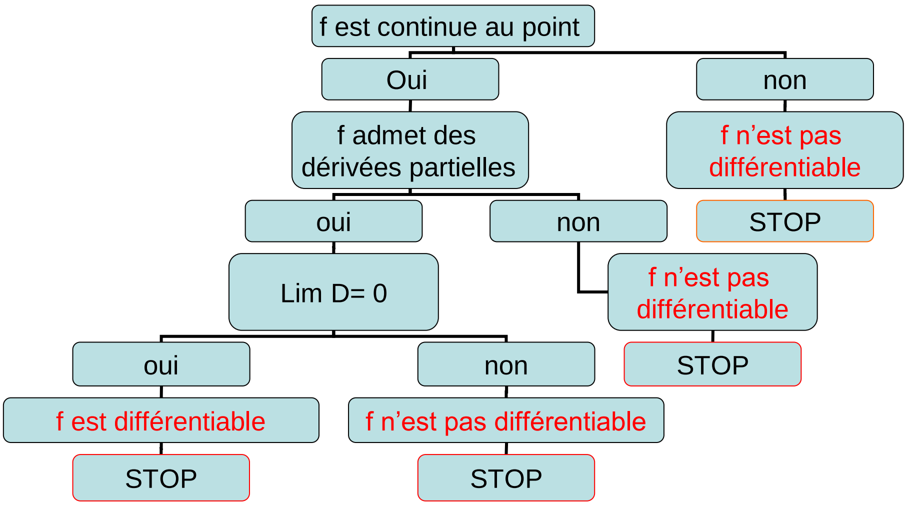
$f$ admet des dérivées partielles par rapport à $x$ et par rapport à $y$ en tout point $M(x,y)$ de $R^2$ : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x$

Que peut-on dire des dérivées partielles de f ?

$f$ est-elle différentiable sur $R^2$ ?

Préciser l'application différentielle de f en tout point $M(x,y)$ de $R^2$ :

# Plan d'étude




$$D = \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k}{\|(h,k)\|}$$

## Interprétations de la différentielle :

### 1. Approximation linéaire :

Si $f : R^n \to R$ est **différentiable** en un point M alors au voisinage de M on peut écrire :

$$f(M') - f(M) = df_M(M - M') + o(\|M - M'\|)$$

D'où : $f(M') - f(M) \approx df_M(M - M')$

### 2. Interprétation géométrique :

Soit $f : R^2 \mapsto R$, alors l'équation $z = f(x, y)$ définit une surface S de $R^3$.
Si $f$ est différentiable en un point $M(x_0, y_0)$ de $R^2$ alors

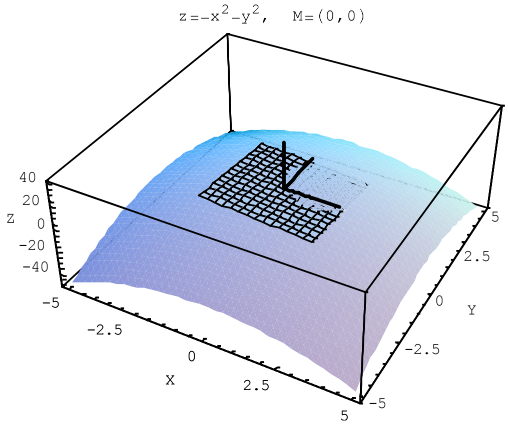
$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\|x - x_0, y - y_0\|)$$

L'équation : $z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$ définit alors un plan, appelé plan tangent à la surface S au point $M'(x_0, y_0, z_0)$ où $z_0 = f(x_0, y_0)$.

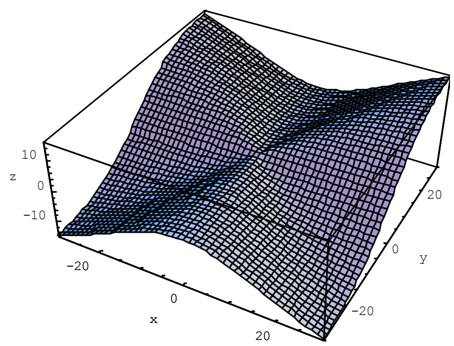
Ce plan est porté par les vecteurs directeurs : $v_1 = \left(1{,}0, \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right)$ et

$v_1 = \left(0{,}1, \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$.

Un vecteur normal est alors donné par : $N = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right)$




Exemple de surface continue sans plan tangent :




Opérations sur les applications différentiables
D'après les théorèmes de 1-ère année (somme, produit, inverse de fonctions continues, dérivables) on peut donner le résultat suivant :

**Proposition 4 :**

Si $f : R^n \to R$, $g : R^n \to R$ sont deux fonctions de classe $C^1$ sur un ouvert $U$ alors $f + g$, $fg$ sont aussi de classe $C^1$ sur $U$.

Si de plus $g$ ne s'annule pas sur $U$, $\dfrac{f}{g}$ est aussi de classe $C^1$ sur $U$.

**Proposition 5 :**

Si $f: R^n \to R$, $g: R^n \to R$ sont deux fonctions différentiables sur un ouvert $U$ alors $f+g$, $fg$ sont aussi de différentiables $C^1$sur $U$.

Si de plus $g$ ne s'annule pas sur $U$, $\frac{f}{g}$ est aussi différentiable sur $U$.

NB : La proposition nécessiterait une démonstration.

## 4. EXERCICES DU CHAPITRE 3

**Exercice 1 :** Etudier l'existence, puis calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes sur leur domaine de définitions :

a) $f(x,y) = \dfrac{x}{x+y}$ b) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ c) $f(x,y) = Arctg\,\dfrac{y}{x}$

d) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ e) $f(x,y) = \cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

**Exercice 2 :** Etudier l'existence des dérivées partielles des fonctions suivantes au point (0,0)

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x-y}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

**Exercice 3 :** Etudier la différentiabilité en (0,0) de la fonction définie par

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5-y^5}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

**Exercice 4 :** (Notation différentielle)

Montrer que toute application linéaire $l: R^n \to R$ est différentiable sur $R^n$ et qu'en tout point $M$ de $R^n$ : $dl_M = l$

Soit $f: R^n \to R$ une application différentiable sur un ouvert $U$ de $R^n$.

Alors en tout point $M$ de $R^n$ on a : $df_M(H) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(M) \times h_i$ pour tout $H = (h_1, \ldots h_n)$.

Or $h_i$ est la i-ème projection sur $R$ de $H : h_i = p_i(H)$

Comme l'application $p_i : \begin{cases} R^n \to R \\ x=(x_1,..,x_n) \mapsto x_i \end{cases}$ est linéaire, elle est différentiable sur $R^n$ et $dp_{i\,x} = p_i$.

On convient de noter $dp_{i\,x} = dx_i$. Alors $h_i = p_i(H) = dx_i(H)$

La différentielle de $f$ au point $M$ s'écrit alors : $df_M(H) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(M) \times dx_i(H)$ pour tout $H=(h_1,...h_n)$. D'où $\boxed{df_M = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(M) \times dx_i}$

**Exercice 5 :** Montrer que l'application définie sur R$^2$ par :
$f(x,y) = x + 3y + x^2\left(\sqrt{|\sin x|} + y^3\right)$ est différentiable en (0,0) et préciser sa différentielle $df_{(0,0)}$

**Exercice 6 :** Vérifier que l'application f définie par : $f(x,y) = x^2 y + \cos(x+y)$ est différentiable sur R$^2$ et préciser sa différentielle $df_{(x,y)}$ en tout point (x,y) de R$^2$.

**Exercice 7 :** Etudier la différentiabilité des applications définies sur R$^2$ par:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

**Exercice 8 :** Soit f définie par : $f(x,y) = \cos(xy)e^{x+y^2}$

a) Déterminer la différentielle de f au point (1,0) et donner l'interprétation géométrique.
b) En déduire une valeur approchée de f(1,001 ; 0,01).

**Exercice 9 :**
Soit E l'espace vectoriel des matrices carrées nxn, muni de la norme infinie :
$\|A\|_\infty = \underset{1\le i\le n}{Sup} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$ où $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$

a) Montrer qu'il existe une constante C>0 telle que :
$\forall (A,B) \in E^2, \|AB\|_\infty \le C\|A\|_\infty \|B\|_\infty$
b) On considère l'application f : E → E définie par : f(A)=A$^2$, pour tout élément A de E. Montrer que f est différentiable sur E et que :
$\forall A \in E, df_A : \begin{cases} E \to E \\ H \mapsto MH + HM \end{cases}$

**Exercice 10 :** Soit la fonction f définie par :

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \quad si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) Etudier l'existence des dérivées partielles et les calculer s'il y a lieu.
b) Etudier la continuité des dérivées partielles.
c) f est-elle différentiable en (0,0) ?

**Exercice 11 :** Soit la fonction f définie par : $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \quad si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

a) Vérifier que $f(x,y)=o(\|(x,y)\|_2)$.
b) En déduire que f est différentiable en (0,0) et préciser $df_{(0,0)}$.

**Exercice 12 :** Montrer que la fonction : $f:\begin{cases}R^2 \to R^2\\ (x,y)\mapsto(x+y,x-y)\end{cases}$ est différentiable sur $R^2$ et préciser $df_{(x,y)}$ en tout point (x,y) de $R^2$.

**Exercice 13 :** Soit f une fonction de $R^n$ dans R, et a un point de $R^n$. On donne les propositions suivantes
A : f est continue en a.
B : f est différentiable en a.
C : f admet des dérivées partielles par rapport à toutes ses variables au point a.
D : f est de classe C1 au voisinage de a.
E : $\overrightarrow{\text{grad}}f(a)=0$
F : f(x)=||x-a||, pour tout x dans $R^n$.
G : f(x)=||x-a||$^2$, pour tout x dans $R^n$.
Compléter le tableau suivant en cochant la case à l'intersection d'une ligne et d'une colonne, chaque fois que la proposition de la ligne entraîne la proposition de la colonne.

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | x | | | | | | |
| B | | x | | | | | |
| C | | | x | | | | |
| D | | | | x | | | |
| E | | | | | x | | |
| F | | | | | | x | |
| G | | | | | | | X |

**Exercice 14 :**

34

a) Montrer que l'application définie sur $R^2$ par :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \quad si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$ est de classe C1 sur $R^2$

b) f est-elle différentiable sur $R^2$? Préciser s'il y a lieu sa différentielle.

**Exercice 15 :** Calculer la différentielle de f au point a indiqué après avoir justifier son existence, pour :

a) $f(x,y)=x^y$ au point a=(1,1)

b) $f(x,y,z)=(x+y)e^{x\cos z}$ au point a=(0,0,0)

c) $f(x,y,z,t)=xy+zt$ en tout point a de $R^4$.

d) $f(x_1,...,x_n)=x_1^2+....+x_n^2$ en tout point $x=(x_1,...,x_n)$ de $R^n$ (n entier naturel).