THEORIE DES GRAPHES

6) EULER ET HAMILTON

7.1. Cycles eulériens

Soit G = [X, U] un graphe.

Une chaîne eulérienne est une chaîne qui passe une fois, et **une seule fois**, par **chaque arête de G**.

Un cycle eulérien est une chaîne eulérienne dont les extrémités coïncident.

Un graphe non orienté est dit eulérien s'il admet un cycle eulérien.

Un chemin eulérien est un chemin qui passe une fois, et **une seule fois**, par **chaque arc de G**.

Un circuit eulérien est un chemin eulérien dont les extrémités coïncident.

Un graphe orienté est dit eulérien s'il admet un circuit eulérien.

Il est à souligner que le problème de l'existence et de la détermination d'une chaîne eulérienne (ou d'un cycle eulérien) dans un graphe non orienté a été posé pour la première fois au 18ème siècle par Euler qui voulait savoir si un piéton peut, en se promenant, traverser chaque pont de la ville de Koenigsberg (aujourd'hui appelée Kaliningrad) une fois et une fois. Comme le montre la figure 1 ci-dessous, la ville de Kaliningrad est traversée par une rivière qui coule de part et d'autre d'une île et qui possède sept ponts.

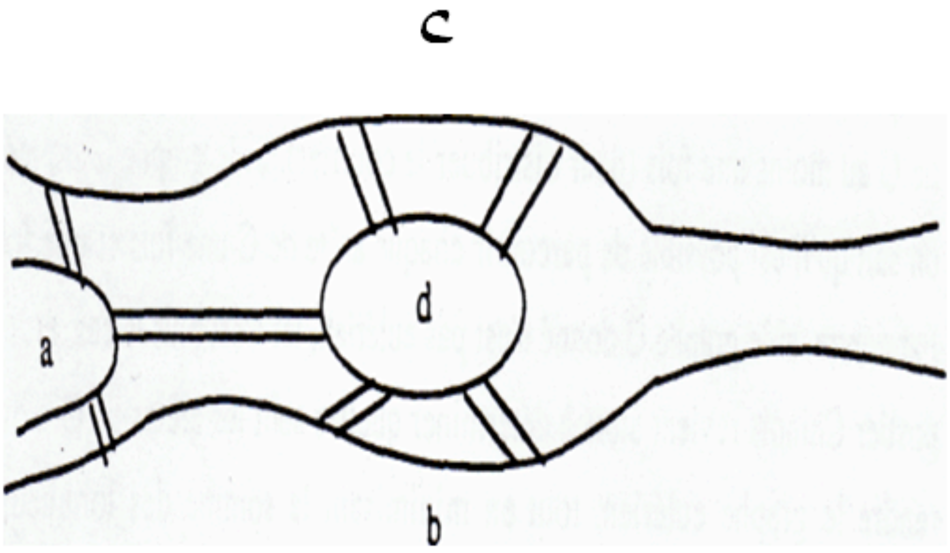

Figure 1. Représentation des ponts de la ville de Kaliningrad.

Pour répondre à la question posée par Euler, on va modéliser le problème sous forme d'un graphe G, où chaque sommet représente une des quatre régions a, b, c, d, et où chaque arête représente un pont. Le graphe obtenu est donc le suivant.

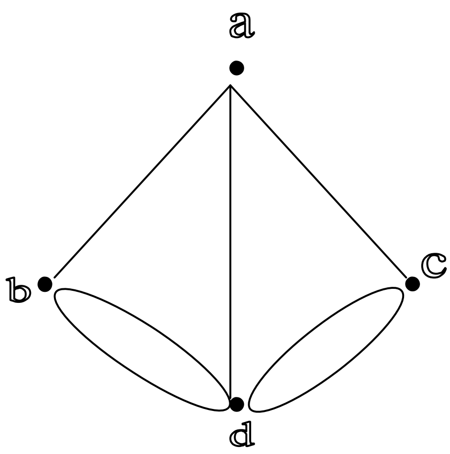

Figure 2. Le graphe G correspondant à la figure 1.

Eu égard à la figure 2, on constate que le problème posé par Euler revient à chercher une chaîne eulérienne.

Euler prouva l'impossibilité du problème posé en démontrant le théorème suivant:

Théorème : Un graphe G = [X, U] admet une chaîne eulérienne ⇔ G est connexe et que le nombre de sommets de degré impair de G est de 2.

Pour la figure 2, d(a) = 3, d(b) = 3, d(c) = 3 et d(d) = 5.

Comme il existe 4 sommets de degré impair (et non 2 sommets de degré impair), d'après le théorème qui précède, on conclut que le graphe de la figure 2 n'admet pas de chaîne eulérienne.

Corollaire : Un graphe G = [X, U] admet un chemin eulérien (un chemin contenant tous les arcs de G) joignant xj à xk $\Leftrightarrow$

- G est connexe
- $d^+(xj) = d^-(xj) + 1$
- $d^+(xk) = d^-(xk) - 1$
- $d^+(xi) = d^-(xi)\ \forall\ xi \in X - \{xj, xk\}$

Corollaire : Un graphe G = [X, U] admet un cycle eulérien (un cycle contenant toutes les arêtes de G) $\Leftrightarrow$ G est connexe et que tous les sommets de G sont de degré pair.

Corollaire : Un graphe G = [X, U] admet un circuit eulérien (un circuit contenant tous les arcs de G) $\Leftrightarrow$ G est connexe et que $d^+(xj) = d^-(xj)\ \forall\ xj \in X$.

<u>Exemple</u>

Considérons le graphe G donné par la figure 3.

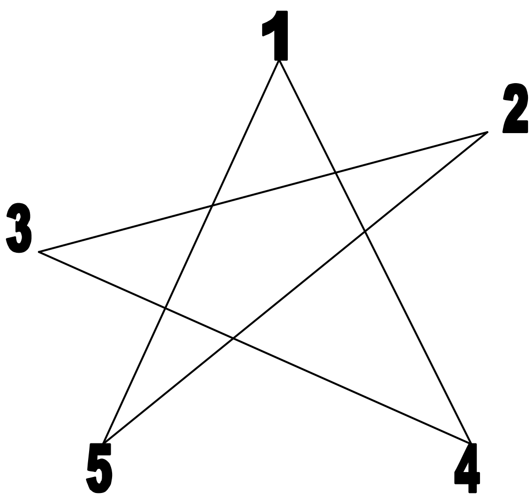

Figure 3.

Supposons que l'on cherche à savoir si le graphe de la figure 3 est eulérien.

Comme le graphe n'est pas orienté, cela revient donc à savoir si le graphe admet un cycle eulérien.

Or, comme G est connexe et que tous les sommets de G sont de degré pair, alors on conclut que le graphe de la figure 3 est eulérien.

On notera que ce graphe ne comporte pas de chaîne eulérienne.

Exemple

Considérons le graphe G donné par la figure 4.

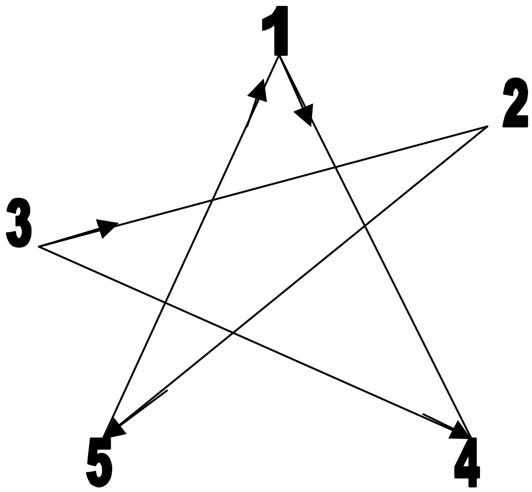

Figure 4.

Supposons que l'on veuille savoir si le graphe de la figure 4 est eulérien.

Comme le graphe est orienté, cela revient donc à la recherche d'un circuit eulérien.

Or, comme tous les sommets n'ont pas autant d'arcs entrants que d'arcs sortants, il vient que le graphe G de la figure 4 n'est pas eulérien.

On notera que ce graphe n'admet pas de chemin eulérien.

En effet, comme il n'y a que deux sommets qui n'ont pas autant d'arcs entrants que d'arcs sortants et que ces sommets sont les sommets 3 et 4, alors on conclut que les seuls chemins eulériens possibles sont ceux ayant pour extrémités les sommets 3 et 4.

Or, comme les sommets 3 et 4 ne peuvent être les extrémités d'un chemin eulérien, alors on conclut que le graphe G de la figure 4 ne possède aucun chemin eulérien.

- $d^+(3) = 2$ et $d^-(3) = 0$, on constate que le sommet 3 ne peut ni être une extrémité initiale, ni une extrémité terminale d'un chemin eulérien ($d^+(3) \neq d^-(3) + 1$ et $d^+(3) \neq d^-(3) - 1$)

- d+(4) = 0 et d-(4) = 2, on constate que le sommet 4 ne peut ni être une extrémité initiale, ni une extrémité terminale d'un chemin eulérien ($d^+(4) \neq d^-(4) + 1$ et $d^+(4) \neq d^-(4) - 1$)

7.2. Cycles hamiltoniens

Soit G = [X, U] un graphe d'ordre n.

Un chemin est dit hamiltonien s'il passe une fois, et **une seule fois**, par **chaque sommet de G**.

Un chemin hamiltonien est donc un chemin élémentaire de longueur n - 1.

Un circuit hamiltonien est un chemin hamiltonien dont les extrémités coïncident.

Un circuit hamiltonien est donc élémentaire et de longueur n.

Une chaîne hamiltonienne est une chaîne qui passe une fois, et **une seule fois**, par **chaque sommet de G**.

Une chaîne hamiltonienne est donc une chaîne élémentaire de longueur n – 1.

Un cycle hamiltonien est une chaîne hamiltonienne dont les extrémités coïncident.

Un cycle hamiltonien est donc élémentaire et de longueur n.

Un graphe est dit hamiltonien s'il admet un circuit hamiltonien (cas orienté) ou un cycle hamiltonien (cas non orienté).

Exemple

Reprenons le graphe G donné par la figure 3.

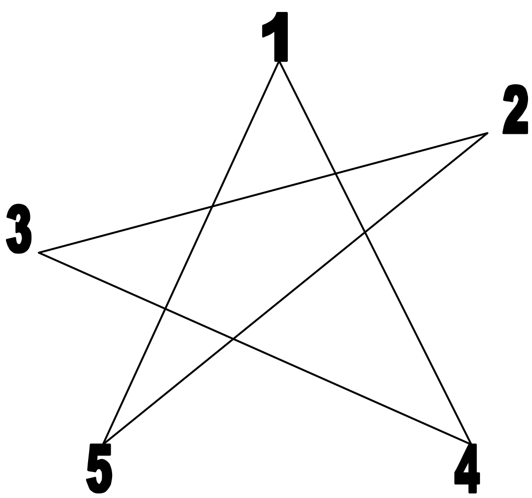

Figure 3.

Le graphe G de la figure 3 est hamiltonien (par exemple, le cycle 1-4-3-2-5-1).

Historiquement, la notion de cycle hamiltonien trouve son origine dans un jeu inventé par Hamilton. Ce jeu est celui du voyage fermé autour du monde. On considère 20 villes réparties sur le globe terrestre que l'on assimile aux sommets d'un dodécaèdre régulier représentant la terre et on souhaite savoir s'il est possible de ne passer qu'une et une seule fois par chacune des 20 villes et ce, en n'utilisant que les arêtes du dodécaèdre et en revenant à son point de départ.

Ainsi, ce jeu qui est modélisé par le graphe de la figure 5 revient à la recherche d'un cycle hamiltonien.

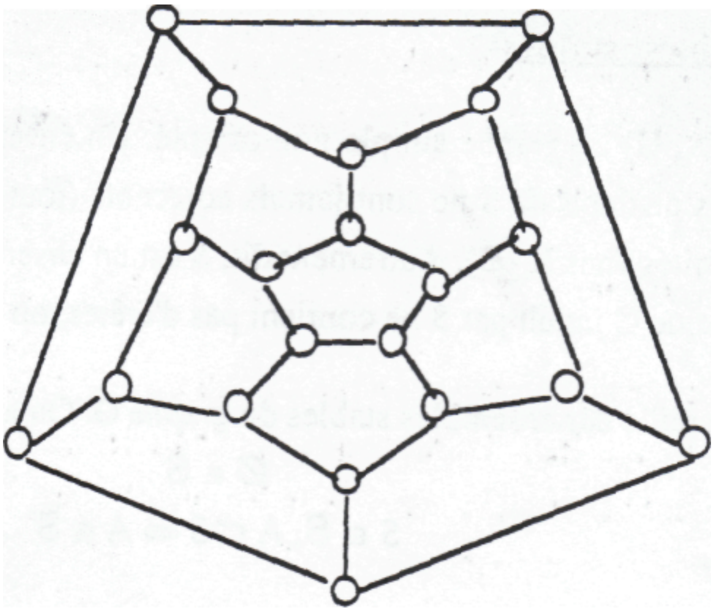

Figure 5.

La réponse à la question de monsieur Hamilton est que le graphe de la figure 5 possède bel et bien un cycle hamiltonien.

Remarque

Contrairement aux graphes eulériens, on ne connaît pas de CNS (condition nécessaire et suffisante) permettant de caractériser les graphes hamiltoniens.

Corollaire (Dirac) : Si G = [X, U] est un graphe non orienté, simple, d'ordre n ($n \geq 3$) et tel que $d(xi) \geq (n / 2)$ $\forall$ xi $\in$ X, alors G admet un cycle hamiltonien.

Théorème : Si un graphe non orienté simple G = [X, U] a n sommets et m arêtes et vérifie $m \geq 1/2\ (n - 1)\ (n - 2) + 2$, alors G admet un cycle hamiltonien.

Théorème : Si un graphe G = [X, U] est complet, sans arcs parallèles et fortement connexe, alors G admet un circuit hamiltonien.

Corollaire 5: Si G = [X, U] est un graphe simple d'ordre n, avec $d^+(xi) \geq (n / 2)$, $d^-(xi) \geq (n / 2)$ $\forall$ xi $\in$ X, alors G admet un circuit hamiltonien.

Exemple

Considérons le graphe G donné par la figure 6.

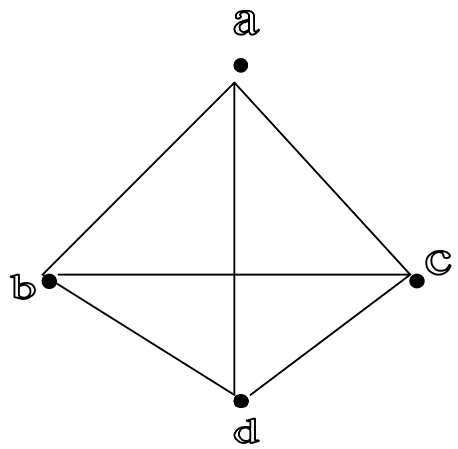

Figure 6.

Le graphe G de la figure 6 est non orienté, **simple** et d'ordre 4. Par ailleurs, comme chacun de ses sommets est de degré supérieur ou égal à 4/2 ($\forall$ xi $\in$ X, d(xi) = 3 et $3 \geq 4/2$), alors, d'après le corollaire de Dirac, le graphe G admet un cycle hamiltonien.

Exemple

Reprenons le graphe G donné par la figure 3.

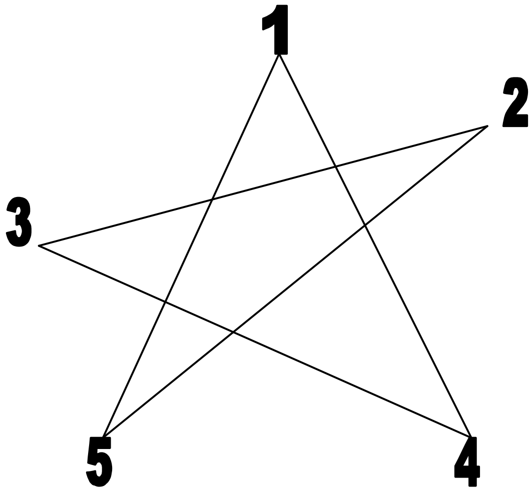

Figure 3.

Le graphe G de la figure 3 est non orienté, simple et d'ordre 5. Par ailleurs, chacun de ses sommets est de degré 2. Pourtant, bien que 2 ne soit pas supérieur ou égal à 5/2, ce graphe est hamiltonien (par exemple, le cycle 1-4-3-2-5-1). La raison en est que le corollaire de Dirac est une condition suffisante et non nécessaire.