SYS2041 – Électronique numérique
Cours 2 : Algèbre de Boole

Alexandre BRIÈRE

Quésaco ?

Une vision algébrique de la logique :

- Pouvoir modéliser des raisonnements logiques
- Faire des calculs sur ces modèles

Dans ce système il n'y a que deux valeurs possibles :

- Vrai ou faux
- 0 ou 1

Inventé par le mathématicien britannique George Boole (1 815 - 1 864)

Quel lien avec l'électronique et l'informatique ?

Pour un circuit électrique :

$\Rightarrow$ Ouvert ou fermé

Pour un circuit électronique :

$\Rightarrow$ Niveau bas ou haut

Pour un système informatique :

$\Rightarrow$ Code binaire de 0 et 1

Variable binaire

Variable prenant ses valeurs dans l'ensemble $E = \{0,1\}$:

- $A = 0$

  $\Rightarrow$ A est faux

  $\Rightarrow$ Signal électrique à 0V

  $\Rightarrow$ Niveau bas

- $A = 1$

  $\Rightarrow$ A est vrai

  $\Rightarrow$ Signal électrique à 5V (ou autre voltage en fonction de la techno)

  $\Rightarrow$ Niveau haut

Équation logique

- Combinaison de plusieurs variables binaires
- Donne l'état d'une autre variable dite « de sortie » :

  $S = f(A, B, C)$

- Exemple :

  $f = A + B \times C$

Table de vérité

Représenter l'état des variables de sortie pour chacune des combinaisons possibles des N variables d'entrée :

$E1$	$E2$	$S1$	$S2$
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

$S1 \Rightarrow$ égalité

$S2 \Rightarrow$ inégalité

Les opérations de base

Deux opérateurs binaires :

- ET/AND
- OU/OR

Un opérateur unaire :

- NON/NOT

Opérations de base : NON

A	NON A
0	1
1	0

Aussi appelée négation logique

- 4 notations possible :
  - NON A
  - $\overline{A}$
  - $\neg A$
  - $!A$
- La double négation s'annule :
  $\overline{\overline{A}} = A$

Opérations de base : OU

Aussi appelée disjonction logique

- 4 notations possible :
  - A OU B
  - $A + B$
  - $A \vee B$
  - $A \mid B$ (ou $A \mid\mid B$)
- Élément neutre :
  $0 \Rightarrow A + 0 = A$
- Absorption :
  $1 \Rightarrow A + 1 = 1$
- Idempotence :
  $A + A + ... + A + A = A$

A	B	A OU B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Opérations de base : ET

Aussi appelée conjonction logique

- 5 notations possible :
  - A ET B
  - $A \times B$
  - $A \cdot B$
  - $A \wedge B$
  - A & B (ou A && B)
- Élément neutre :
  $1 \Rightarrow A \cdot 1 = A$
- Absorption :
  $0 \Rightarrow A \cdot 0 = 0$
- Idempotence :
  $A \cdot A \cdot ... \cdot A \cdot A = A$

A	B	A ET B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Lois de l'algèbre de Boole

- Commutativité :

  $A + B = B + A$

  $A \cdot B = B \cdot A$

- Associativité :

  $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C = A \cdot B \cdot C$

  $A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$

- Distributivité :

  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

Règles de base de l'algèbre de Boole

1. $A + 0 = A \Rightarrow$ Élément neutre
2. $A + 1 = 1 \Rightarrow$ Absorption
3. $A \cdot 0 = 0 \Rightarrow$ Absorption
4. $A \cdot 1 = A \Rightarrow$ Élément neutre
5. $A + A = A \Rightarrow$ Idempotence
6. $A + \overline{A} = 1 \Rightarrow$ Tiers-exclus
7. $A \cdot A = A \Rightarrow$ Idempotence
8. $A \cdot \overline{A} = 0 \Rightarrow$ Non-contradiction
9. $\overline{\overline{A}} = A \Rightarrow$ Involution
10. $A + A \cdot B = A$
11. $A + \overline{A} \cdot B = A + B$
12. $(A + B) \cdot (A + C) = A + B \cdot C$

Théorème de De Morgan

Mathématicien britannique Auguste De Morgan (1 806 - 1 871)

- $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$
- $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

Références

[1] Sébastien Gageot et Franck Crison :
SYS2041 : Systèmes numériques (Laval).

[2] Thomas Floyd :
Systèmes numériques.
Éditions Reynald Goulet, 2018.