Espaces vectoriels abstraits sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$

A. DAOUDI

Définition (espace vectoriel sur $\mathbf{R}$)
Soit E un ensemble muni d'une loi interne notée « $+$ » et d'une loi externe notée « $\cdot$ ».
On dit que $(E,+,\cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ ou $(E,+,\cdot)$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

Propriétés 1 (de la loi interne dans E)
Pour tous u,v,w dans E on a :
1) $u+v=v+u$
2) $(u+v)+w=v+(u+w)$ on note alors $u+v+w=(u+v)+w=v+(u+w)$
3) $u+0_E=0_E+u=u$
4) $u+(-u)=0_E$ (on notera $u+(-u)=u-u$)

(0_E s'appelle le vecteur nul de E, c'est l'élément neutre du groupe $(E,+)$)

Propriétés 2 (de la loi externe dans E)
Pour tous α,β dans $\mathbf{R}$ et tous u,v dans E on a:
1) $1\cdot u=u$
2) $(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u$
3) $(\alpha\beta)u=\alpha(\beta u)$
4) $\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$

Remarque

Soit E un ensemble muni d'une loi interne notée « $+$ » et d'une loi externe notée « $\cdot$ ».
On dit que $(E,+,\cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ ou $(E,+,\cdot)$ est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel si la propriété 1 ci-dessus est vérifiée et si la propriété 2 ci-dessus est vérifiée en remplaçant $\mathbf{R}$ par $\mathbf{C}$.

Exemples
1) Pour chaque $n\in\mathbf{N}^*$, $(\mathbf{R}^n,+,\cdot)$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel
2) Pour chaque $n\in\mathbf{N}^*$, $(\mathbf{C}^n,+,\cdot)$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel
3) Pour chaque $n\in\mathbf{N}^*$, $(\mathbf{C}^n,+,\cdot)$ est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel
4) $(\mathbf{R}[X],+,\cdot)$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel où $\mathbf{R}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbf{R}$.
5) $(\mathbf{C}[X],+,\cdot)$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel où $\mathbf{C}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbf{C}$.
6) $(\mathbf{C}[X],+,\cdot)$ est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel
7) Pour chaque $n\in\mathbf{N}^*$, $(\mathbf{R}_n[X],+,\cdot)$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel où
$\mathbf{R}_n[X]=\{P\in\mathbf{R}[X]\,/\deg(P)\le n\}$

8) Soient I un intervalle (non vide) de $\mathbf{R}$.
On note $E = C(I,\mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbf{R}$ qui sont continues sur I, et $F = D(I,\mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbf{R}$ qui sont dérivables sur I, alors $(E,+,\cdot)$ et $(F,+,\cdot)$ sont deux $\mathbf{R}$-espaces vectoriels.

II. Famille libre/liée/ génératrice

Définitions (famille libre/liée/famille génératrice)
Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel où $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ ou $\mathbf{K}=\mathbf{C}$
Soient $u_1, u_2,\ldots,u_p$ des vecteurs de E et $B=\{u_1, u_2,\ldots,u_p\}$.
1) On dit que la famille B est libre si :
$\forall \alpha_1, \alpha_2,\ldots,\alpha_p \in \mathbf{K}$, $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_p u_p = 0_E \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0$
On dit aussi que les vecteurs $u_1, u_2,\ldots,u_p$ sont linéairement indépendants.

2) On dit que la famille B est liée si B **n'est pas libre** c'est-à-dire:
$\exists \alpha_1, \alpha_2,\ldots,\alpha_p \in \mathbf{K}$ et $\exists k \in \{1,2,\ldots,p\}$, $\alpha_k \neq 0$ tel que $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_p u_p = 0_E$
c'est-à-dire que le système : $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_p u_p = 0_E$ d'inconnues $\alpha_1, \alpha_2,\ldots,\alpha_p \in \mathbf{K}$ admet une solution non nulle.
On dit aussi que les vecteurs $u_1, u_2,\ldots,u_p$ sont linéairement dépendants.

3) On dit que B est une famille génératrice de E si $E = vect(\{u_1, u_2,\ldots,u_p\})$
c'est-à-dire $\forall u \in E$, $\exists \alpha_1, \alpha_2,\ldots,\alpha_p \in \mathbf{K}$, tel que $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_p u_p$
Remarque (importante)
Si $B=\{u_1, u_2,\ldots,u_p\}$ est une famille libre et $\alpha_1, \alpha_2,\ldots,\alpha_p \in \mathbf{K}$, $\beta_1, \beta_2,\ldots,\beta_p \in \mathbf{K}$ on a :
$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_p u_p = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \ldots + \beta_p u_p \Leftrightarrow \forall i \in \{1,2,\ldots,p\}, \alpha_i = \beta_i$
«ce qui permet de faire l'identification»

Exemples :
1) Pour $n \in \mathbf{N}^*$, $\{1, X,\ldots, X^n\}$ est une famille libre et génératrice de $\mathbf{R}_n[X]$
2) Soit $\omega \in \mathbf{R}^*$.
Dans l'espace $E = C(\mathbf{R},\mathbf{R})$, la famille $\{f, g\}$ est libre
où $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est définie par $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = \cos(\omega x)$
et $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est définie par $\forall x \in \mathbf{R}, g(x) = \sin(\omega x)$

Application : Déterminer une solution particulière φ de l'équation différentielle
$y' + 3y = \cos(2x)$ avec $y' = \dfrac{dy}{dx}$ sous la forme $\varphi(x) = \alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x)$ où $(\alpha,\beta) \in \mathbf{R}^2$.

Propriétés
Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel où $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ ou $\mathbf{K}=\mathbf{C}$
1) Si $u \in E$ et $u \neq 0_E$ alors la famille $F = \{\ u\ \}$ est libre.
2) Toute famille libre ne contient pas le vecteur nul
3) Toute famille contenue dans une famille libre est libre
4) Toute famille contenant une famille liée est liée

Remarque sur le concept de famille libre/liée

- Construire le deuxième étage d'un immeuble est lié à la construction de son premier étage.

- Dans la gestion d'un projet, on détermine d'abord les tâches indépendantes puis celles qui sont liées. On peut donc mener en parallèle les tâches indépendantes ce qui permet de gagner du temps dans la réalisation du projet.

III. **Sous-espace vectoriel**

Définition

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel où $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ ou $\mathbf{K}=\mathbf{C}$.

On appelle sous-espace de E (en abrégé s.e.v) toute partie non vide F de E telle que $(F,+,\cdot)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

Théorème

Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel où $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ ou $\mathbf{K}=\mathbf{C}$, et F une partie de E.

1) $(F,+,\cdot)$ est un s.e.v de $(E,+,\cdot)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F \text{ est non vide} & (\text{vérifier que } 0_E \in F) \\ \forall (u,v)\in F^2,\ (u+v)\in F & (F \text{ est stable par la loi } "+") \\ \forall \lambda \in \mathbf{K}, \forall u \in F,\ (\lambda v)\in F & (F \text{ est stable par la loi } ".") \end{cases}$$

2) $(F,+,\cdot)$ est un s.e.v de $(E,+,\cdot)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F \text{ est non vide} & (\text{vérifier que } 0_E \in F) \\ \forall (\alpha,\beta)\in \mathbf{R}^2, \forall (u,v)\in F^2,\ (\alpha u+\beta v)\in F & (F \text{ est stable par combinaison linéaire}) \end{cases}$$

Exemples

1) Si E est un espace vectoriel, alors $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E.

2) $\mathbf{R}_n[X]$ est un s.e.v de $\mathbf{R}[X]$

3) Soit $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ l'ensemble des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$

c'est-à-dire $f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \Leftrightarrow f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ est une application

$C(\mathbf{R},\mathbf{R})$ et $D(\mathbf{R},\mathbf{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.

4) Soient $E=\{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} / \forall x\in\mathbf{R},\ f(-x)=f(x)\}$: ensemble des fonctions paires, et

$F=\{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} / \forall x\in\mathbf{R},\ f(-x)=-f(x)\}$: ensemble des fonctions impaires.

Alors E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.

Théorème

Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel où $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ ou $\mathbf{K}=\mathbf{C}$ et I un ensemble non vide.

Si pour tout $i\in I$, F_i désigne un sous-espace vectoriel de E, alors $(\bigcap_{i\in I} F_i)$ est un sous-espace vectoriel de E.

IV. Somme/ somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Théorème et définition (somme de deux s.e.v)

Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel où $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ ou $\mathbf{K}=\mathbf{C}$, et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

On note $F+G=\{u\in E/\exists u_F\in F,\exists u_G\in G,u=u_F+u_G\}$,

On montre que $F+G$ est un sous-espace de E.

$F+G$ est appelé somme des sous-espaces vectoriels F et G.

Définition (somme directe de deux s.e.v)

Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel où $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ ou $\mathbf{K}=\mathbf{C}$, et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

La somme $F+G$ est dite directe si : $\forall u\in(F+G),\exists! u_F\in F,\exists! u_G\in G,u=u_F+u_G$,

La somme $F+G$ est notée alors $F\oplus G$.

Théorème (somme directe de deux s.e.v)

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel où $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ ou $\mathbf{K}=\mathbf{C}$.

La somme de deux sous-espaces vectoriels F et G de E est directe si et seulement si $F\cap G=\{0_E\}$.

Définition (sous espaces supplémentaires)

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel où $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ ou $\mathbf{K}=\mathbf{C}$.

Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont dits supplémentaires, si E est la somme directe de F et G : $E=F\oplus G$

c'est-à-dire $E=F\oplus G\Leftrightarrow(E=F+G$ et $F\cap G=\{0_E\})$

Exemples

1) Si $B=\{a_1,a_2,\ldots,a_p\}$ est une base d'un espace vectoriel E, alors

$E=vect\{a_1,\ldots,a_k\}\oplus vect\{a_{k+1},\ldots,a_p\}$

2) Soit $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ un endomorphisme tel que $f\circ f=Id_{\mathbf{R}^n}$, $f\neq -Id_{\mathbf{R}^n}$ et $f\neq Id_{\mathbf{R}^n}$

Alors -1 et 1 sont les seules valeurs propres de f et $\mathbf{R}^n=E_{-1}\oplus E_1$

3) Soient $E=\{f\in\mathbf{R}^{\mathbf{R}}/\forall x\in\mathbf{R}, f(-x)=f(x)\}$ et $F=\{f\in\mathbf{R}^{\mathbf{R}}/\forall x\in\mathbf{R}, f(-x)=-f(x)\}$

Alors E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ et $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}=E\oplus F$

$\forall x\in\mathbf{R}, e^x=ch(x)+sh(x)$ où $ch(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $sh(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

V. Application linéaire/ projecteur/symétrie

Définition

Soient $(E,+,\cdot)$ et $(F,+,\cdot)$ deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels où $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ ou $\mathbf{K}=\mathbf{C}$.

Une application $f:E\to F$ est dite linéaire si :

$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbf{K}^2,\forall u\in E,\forall v\in E, f(\alpha u+\beta v)=\alpha f(u)+\beta f(v)$

ou si $\begin{cases}\forall u\in E,\forall v\in E, f(u+v)=f(u)+f(v)\\ \forall\alpha\in\mathbf{K},\forall u\in E, f(\alpha u)=\alpha f(u)\end{cases}$

On montre alors que $f(0_E)=0_F$

Définition (noyau et image d'une application linéaire)

Soient $(E,+,\cdot)$ et $(F,+,\cdot)$ deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et $f:E\to F$ une application linéaire.

On note $Ker(f)=\{u\in E/f(u)=0_E\}$: appelé noyau de f et on note

$\mathrm{Im}(f)=\{y\in F/\exists u\in E, y=f(u)\}=\{f(u)/u\in E\}=f(E)$: appelé image de f.

Théorème
Soient $(E,+,\cdot)$ et $(F,+,\cdot)$ deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et $f: E \to F$ une application linéaire.
On a :
1) $Ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E
2) $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F
3) f est injective de E dans $F \Leftrightarrow Ker(f) = \{0_E\}$
4) f est surjective de E sur $F \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = F$

Exemples
1) Soit $a \in \mathbf{R}$ l'application $\varphi : C(\mathbf{R},\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ définie par : $\forall f \in C(\mathbf{R},\mathbf{R}), \varphi(f) = f(a)$
est une application linéaire.
2) L'application $\psi : D(\mathbf{R},\mathbf{R}) \to \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ définie par : $\forall f \in D(\mathbf{R},\mathbf{R}), \psi(f) = f'$
est une application linéaire de $D(\mathbf{R},\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.
3) L'ensemble $E = \{P \in \mathbf{R}_3[X] / P(1) = 0\}$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et
$E = vect\{X^3 - X^2, X^2 - X, X - 1\}$

Définition (projecteur)
Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel où $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ et F, G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E : $E = F \oplus G$
(d'où (*) : $\forall u \in E, \exists! u_F \in F, \exists! u_G \in G, u = u_F + u_G$)
On appelle projection sur F parallèlement à G, l'application $p: E \to E$ définie par
$\forall u \in E, p(u) = u_F$ où u_F est l'élément de la propriété (*)
Idem, on appelle projection sur G parallèlement à F, l'application $q: E \to E$ définie par
$\forall u \in E, q(u) = u_G$ où u_G est l'élément de la propriété (*)

Remarques
1) Les applications $p: E \to E$ et $q: E \to E$ sont des endomorphismes.
2) $\mathrm{Im}(p) = F$, $Ker(p) = G$ de plus $\forall u \in F, p(u) = u$ et $E = \mathrm{Im}(p) \oplus Ker(p)$
3) $\mathrm{Im}(q) = G$, $Ker(q) = F$ de plus $\forall u \in G, q(u) = u$ et $E = \mathrm{Im}(q) \oplus Ker(q)$
4) Soit $p: E \to E$ un endomorphisme.
Si on montre que $E = \mathrm{Im}(p) \oplus Ker(p)$ et $\forall u \in \mathrm{Im}(p), p(u) = u$ alors p est un projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $Ker(p)$.

Théorème (caractérisation d'un projecteur)
Soit $(E,+,\cdot)$ $\mathbf{K}$-espace vectoriel où $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.
Un endomorphisme $p: E \to E$ est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$

Remarque
Si $p: E \to E$ est **un projecteur** on a :
$\forall u \in E, u = p(u) + (u - p(u))$; $p(u) \in \mathrm{Im}(p)$ et $(u - p(u)) \in Ker(p)$
De plus 1 est une valeur propre de p et $E_1 = \mathrm{Im}(p)$ (où $E_1 = Ker(f - Id_E)$ est l'espace sur lequel on projecte)

Exemple
Soient $E = \{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} / \forall x \in \mathbf{R}, f(-x) = f(x)\}$ et $F = \{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} / \forall x \in \mathbf{R}, f(-x) = -f(x)\}$
On sait que $\mathbf{R}^{\mathbf{R}} = E \oplus F$.

On considère l'application $p:\mathbf{R}^{\mathbf{R}}\to\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ définie par $\forall f\in\mathbf{R}^{\mathbf{R}}, p(f)=h$ où $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ telle que $\forall x\in\mathbf{R}, h(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$, h est une fonction paire.

p est la projection sur E parallèlement à F.

Si on note $\forall x\in\mathbf{R}, f(x)=e^{x}$ alors $p(f)=ch$. où $\forall x\in\mathbf{R}, ch(x)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$.

Définition (symétrie)

Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel où $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ ou $\mathbf{K}=\mathbf{C}$ et F , G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E : $E=F\oplus G$

(d'où (*) : $\forall u\in E,\exists! u_F\in F,\exists! u_G\in G, u=u_F+u_G$)

On appelle symétrie (vectorielle) par rapport à F parallèlement à G , l'application $s:E\to E$ définie par $\forall u\in E, s(u)=u_F-u_G$

Théorème (caractérisation d'une symétrie)

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel où $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ ou $\mathbf{K}=\mathbf{C}$.

Un endomorphisme $s:E\to E$ est une symétrie si et seulement si $s\circ s=Id_E$

Remarques

1) Si $s:E\to E$ est une symétrie telle que $s\neq -Id_E$ on a :
1 est une valeur propre de s et $E_1=Ker(f-Id_E)$ est l'espace par rapport auquel on effectue la symétrie)

2) Si $s:E\to E$ est une symétrie telle que $s\neq Id_E$ et $s\neq -Id_E$ on a :
-1 et 1 sont deux valeurs propres de s , $E=E_1\oplus E_{-1}$ où $E_1=Ker(f-Id_E)$ et $E_{-1}=Ker(f+Id_E)$. De plus s est la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_{-1}.

3) Soit $f:E\to E$ un endomorphisme. Si on montre que $E=Ker(f-Id_E)\oplus Ker(f+Id_E)$ (c'est-à-dire $E=E_1\oplus E_{-1}$ où $E_1=Ker(f-Id_E)$ et $E_{-1}=Ker(f+Id_E)$), alors f est la symétrie par rapport à $E_1=Ker(f-Id_E)$ parallèlement à $E_{-1}=Ker(f+Id_E)$.

Exemples

1) L'application $s:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ définie par : $\forall(x,y,z)\in\mathbf{R}^3, s(x,y,z)=(x,-y,z)$ est la symétrie par rapport à $F=vect\{e_1,e_3\}$ parallèlement à $G=vect\{e_2\}$ où $B=\{e_1,e_2,e_3\}$ est la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

2) Si $A=\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}7 & -4 & 4\\ -4 & 1 & 8\\ 4 & 8 & 1\end{pmatrix}$ est la matrice associée à un endomorphisme f de $\mathbf{R}^3$ par rapport à la base canonique $B=\{e_1,e_2,e_3\}$ de $\mathbf{R}^3$, alors f est la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_{-1} où $E_1=Ker(f-Id_E)$ et $E_{-1}=Ker(f+Id_E)$.

VI/. Dimension d'un espace vectoriel

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel où $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ ou $\mathbf{K}=\mathbf{C}$.

Alors E admet une base (famille libre et génératrice). La dimension peut être finie ou infinie et dépend du choix du corps $\mathbf{K}$.

Exemples

1) Soit $E=\mathbf{C}$. Si $\mathbf{K}=\mathbf{C}$ alors $\dim_{\mathbf{C}}(E)=1$ mais si $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ alors $\dim_{\mathbf{R}}(E)=2$

2) $\mathbf{R}[X]$ est de dimension infinie et pour $n\in\mathbf{N}^*$, $\dim(\mathbf{R}_n[X])=n+1$ car $\{1, X,\ldots,X^n\}$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.