



## Congruences et calculs dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

### Exercice 1.

- 1) A-t-on  $\overline{52} = \overline{21}$  dans  $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$  ?
- 2) A-t-on  $\overline{36} = \overline{105}$  dans  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  ?
- 3) Dans  $\mathbb{Z}/47\mathbb{Z}$ , a-t-on  $17 \in \overline{100}$  ?
- 4) Soit  $x = 33 \times 55 + 54 \times 990$ .  
Calculez  $\overline{x}$  dans  $\mathbb{Z}/33\mathbb{Z}$  et  $\overline{x}$  dans  $\mathbb{Z}/54\mathbb{Z}$

### Exercice 2. (sans calculatrice)

- a) Calculer dans  $\mathbb{Z}/54\mathbb{Z}$ ,  $C = \overline{29} \times \overline{33} \times \overline{52}$
- b) Calculer dans  $\mathbb{Z}/61\mathbb{Z}$ ,  $D = \overline{13} \times \overline{62} - \overline{12} + \overline{53}$
- c) Calculer dans  $\mathbb{Z}/89\mathbb{Z}$ ,  $E = \overline{90}^5 - \overline{89}^7$
- d) Calculer dans  $\mathbb{Z}/90\mathbb{Z}$ ,  $F = (\overline{79} + \overline{13})(\overline{47} - \overline{72})$
- e) Calculer dans  $\mathbb{Z}/84\mathbb{Z}$ ,  $G = 9 \times \overline{85}^3 - 42 \times \overline{12}^2$

### Exercice 3.

- 1) Dans  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ , calculez :  $\overline{a^2} + \overline{b^2}$ .
- 2) Jean prétend avoir réussi à décomposer le nombre 4947 en une somme de carrés de deux entiers. Qu'en pensez-vous ?

### Exercice 4.

- 1) Résoudre dans  $\mathbb{Z}/57\mathbb{Z}$  les équations suivantes :  
 $-\overline{x} - \overline{10} + \overline{67} = \overline{52}$  ;
- 2) Résoudre dans  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$  l'équation suivante:  $(6 \times \overline{18} - \overline{53})\overline{x} + \overline{36} = -\overline{10}$

### Exercice 5.

- 1) Dans  $\mathbb{Z}/41\mathbb{Z}$ , prouvez que  $\overline{7}$  est inversible puis calculez son inverse ;
- 2) Résoudre dans  $\mathbb{Z}/41\mathbb{Z}$ , l'équation suivante:  $\overline{7}x - \overline{8} = \overline{10}$

### Exercice 6.

Dans  $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$  **prouvez** l'équivalence suivante :  $\overline{6x} - \overline{3y} = \overline{3} \Leftrightarrow \overline{2x} - \overline{y} = \overline{1}$

### Exercice 7.

- 1) Résoudre l'équation  $x \in \mathbb{Z}, 24x \equiv 30 [18]$
- 2) Résoudre l'équation  $\overline{x} \in \mathbb{Z}/18\mathbb{Z}, 6(\overline{x} + \overline{1}) = \overline{0}$