Corrigé du contrôle de MAT2053 du 14 février 2019

Exercice 1. Sans justifier votre réponse**,** répondre par vrai : **V** ou par Faux : **F.**

1) $(\mathbf{R}^*,\times)$ est un groupe : **V** **0,5 pt**

2) $(\mathbf{Z}/12\mathbf{Z},+)$ est un groupe : **V** **0,5 pt**

3) $\left((\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})\setminus\{\overline{0}\},\times\right)$ est un groupe : **F** car **«** $\times$ **»** n'est pas une loi interne dans $(\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})\setminus\{\overline{0}\}$ **0,5 pt**

4) $(]-\infty,0[,\times)$ est un groupe : **F** car **«** $\times$ **»** n'est pas une loi interne dans $]-\infty,0[$ **0,5 pt**

Exercice 2.

1) Prouver que $\overline{5}$ est inversible dans $\mathbf{Z}/46\mathbf{Z}$

> 5 est un entier premier et 5 ne divise pas 46 donc $p\gcd(5,46)=1$,
> d'où $\overline{5}$ est inversible dans $\mathbf{Z}/46\mathbf{Z}$ **1 pt**

2) Dans $\mathbf{Z}/46\mathbf{Z}$ calculer $\overline{a}$ où $a=343\times 46+9\times 5$

> Dans $\mathbf{Z}/46\mathbf{Z}$, on a: $\overline{a}=\overline{343}\times\overline{46}+\overline{9}\times\overline{5}=\overline{0}+\overline{9}\times\overline{5}=\overline{45}$ **0,5 pt**

3) Résoudre dans $\mathbf{Z}/46\mathbf{Z}$, l'équation : $\overline{5}\,\overline{x}+\overline{24}=\overline{34}$

> D'après la question 1) on sait que $\overline{5}$ est inversible dans $\mathbf{Z}/46\mathbf{Z}$ et on remarque que $\overline{9}\times\overline{5}=\overline{45}=\overline{-1}$ dans $\mathbf{Z}/46\mathbf{Z}$ d'où $\overline{-9}=\overline{37}$ est l'inverse de $\overline{5}$ dans $\mathbf{Z}/46\mathbf{Z}$.
> On a : $\overline{5}\,\overline{x}+\overline{24}=\overline{34}\Leftrightarrow\overline{5}\,\overline{x}=\overline{10}\Leftrightarrow\overline{-9}\times\overline{5}\,\overline{x}=\overline{-9}\times\overline{10}\Leftrightarrow\overline{x}=\overline{-90}\Leftrightarrow\overline{x}=\overline{-90}=\overline{2}$
> Donc dans $\mathbf{Z}/46\mathbf{Z}$ l'ensemble des solutions de l'équation : $\overline{5}\,\overline{x}+\overline{24}=\overline{34}$ est $S=\{\overline{2}\}$
> **1,5 pts**

Exercice 3.

Soit $\mathbf{Z}$ muni de la loi de composition interne « $*$ » définie par :

Si $(x,y)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$, $x*y=x-2y$

1) La loi « $*$ » est-elle commutative dans $\mathbf{Z}$? Justifiez votre réponse

> On a $(0,1)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$, $0*1=0-2=-2$ et $1*0=1-0=1$ donc $0*1\neq 1*0$
> Conclusion : la loi « $*$ » n'est pas commutative dans $\mathbf{Z}$ **1 pt**

2) $\mathbf{Z}$ muni de la loi « $*$ » admet-il un élément neutre ? Justifiez votre réponse

> Supposons que $(\mathbf{Z},*)$ admet un élément neutre e.
> Donc $e\in\mathbf{Z}$, $\forall x\in\mathbf{Z}, x*e=x$ et $e*x=x$ en particulier $e*e=e$
> D'où $e-2e=e\Leftrightarrow -2e=0\Leftrightarrow e=0\in\mathbf{Z}$
> Vérifions si on a $\forall x\in\mathbf{Z}, x*0=x$ et $0*x=x$ ceci est faux en effet
> Car pour $x=1$, $0*1=-2$ donc $0*1\neq 1$.
> Conclusuion : $(\mathbf{Z},*)$ n'admet pas un élément neutre. **1,5 pts**

Exercice 4.

Dans $(S_3,\circ)$ le groupe des permutations de $\{1,2,3\}$, on considère les éléments suivants :

$id=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$; $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$ et $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$

1) Calculer $\sigma\circ\tau$.

$\sigma\circ\tau=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$ **0,5 pt**

2) Montrer que $(\{id\,;\tau\},\circ)$ est un sous-groupe de $(S_3,\circ)$

On a $\tau\circ\tau=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=id$ donc

$\circ$	id	τ
id	id	τ
τ	τ	id

On a $\{id\,;\tau\}\subset S_3$, $id\in\{id\,;\tau\}$, et d'après la table de Klein, on remarque que :

- La loi « $\circ$ » est interne dans $(S_3,\circ)$
- l'inverse (symétrique) de id est $id\in\{id\,;\tau\}$
- l'inverse (symétrique) de τ est $\tau\in\{id\,;\tau\}$

Conclusion : $(\{id\,;\tau\},\circ)$ est un sous-groupe de $(S_3,\circ)$ **1 pt**

3) Montrer que $(\{id\,;\tau;\sigma;\sigma\circ\tau\},\circ)$ n'est pas un sous-groupe de $(S_3,\circ)$

On sait que $ord(S_3)=3!=6$, $card(\{id\,;\tau;\sigma;\sigma\circ\tau\})=4$.

Donc $card(\{id\,;\tau;\sigma;\sigma\circ\tau\})$ ne divise pas $ord(S_3)$ d'où d'après le théorème de Lagrange

$(\{id\,;\tau;\sigma;\sigma\circ\tau\},\circ)$ n'est pas un sous-groupe de $(S_3,\circ)$ **1 pt**