THEORIE DES GRAPHES

INTRODUCTION

La première question que l'on se pose lorsqu'on commence à s'initier à la théorie des graphes est celle qui consiste à savoir pourquoi on utilise le formalisme des graphes. La réponse à cette question réside dans le fait que le formalisme des graphes permet de représenter simplement la structure d'un bon nombre de situations concrètes et par là, il permet de mieux les comprendre et, éventuellement, d'agir sur elles.

A titre d'exemples, on peut citer:

- Le plan du métro peut être modélisé par un graphe et pour trouver le chemin optimal entre 2 stations données, on peut utiliser la théorie des graphes qui nous donnera la solution la plus satisfaisante ;
- Le plan de circulation d'un arrondissement donné peut être modélisé par un graphe et pour savoir si le plan est acceptable ou pas, on peut utiliser les composantes fortement connexes et le graphe réduit ;
- Le trafic aérien entre certaines villes d'un pays peut être modélisé par un graphe où les sommets sont les villes et tel que deux villes sont reliées s'il existe un vol direct entre elles. Maintenant, pour savoir si l'on peut passer une fois, et une fois seulement, par chacune des villes et en revenant à son point de départ, on peut utiliser la théorie des graphes qui nous donnera la solution la plus satisfaisante ;
- De même, après modélisation sous forme de graphe, la théorie des graphes peut être utilisée dans des problèmes d'ordonnancement, de planification, de gestion d'incompatibilité, etc.

1) DEFTNTTTONS ET CONCEPTS DE BASE

1.1. Graphes: concepts orientés

Un graphe G = [X, U] est déterminé par la donnée:

- d'un ensemble X = {xl, x2, „,., xn] dit ensemble des sommets de G ;
- d'un ensemble U = {ul, u2,.... um) dit ensemble des arcs de G où chaque arc ui est un couple **ordonné** de sommets de la forme (xj, xk), avec xj dite extrémité initiale de l'arc ui et xk dite extrémité terminale de l'arc ui.

Le nombre de sommets du graphe G, soit card(X) = n, est appelé l'ordre de G.

Un arc ui de la forme (xj, xj) est appelé une boucle.

Deux arcs ayant même extrémité initiale et même extrémité terminale sont dits parallèles.

Deux arcs sont dits adjacents s'ils ont au moins une extrémité commune.

Le plus souvent, à un graphe G donné, on associe une représentation graphique dans laquelle chaque sommet xi est un point, et chaque arc ui = (xj, xk) est une flèche joignant xj à xk.

Exemple

Pour clarifier toutes les définitions ci-dessus, considérons le graphe G donné par la figure 1.

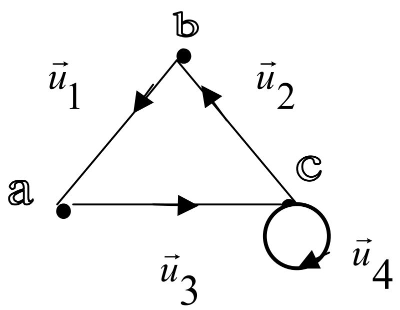


Figure 1.

Pour ce graphe G,

X = {a, b, c} et donc, l'ordre de G est égal à 3 (rappelons que l'ordre d'un graphe est donné par le nombre de ses sommets).

U = $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$, avec $\vec{u}_1$= (b, a), $\vec{u}_2$= (c, b), $\vec{u}_3$= (a, c), $\vec{u}_4$= (c, c).

L'arc $\vec{u}_4$ est une boucle.

Les arcs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_3$ sont adjacents.

Il n'existe pas d'arcs parallèles.

1.2. Successeurs, prédécesseurs et voisins

On dit que xk est un successeur de xj s'il existe un arc ayant xj comme extrémité initiale et xk comme extrémité terminale. L'ensemble des successeurs de xj se note Γ+G(xj).

Exemple

En reprenant le graphe de la figure 1, on trouve que:

Γ^{+}_{G} (a)= {c}, Γ^{+}_{G} (b) = {a}, Γ^{+}_{G} (c) = {b, c}.

On dit que xh est un prédécesseur de xj s'il existe un arc de la forme (xh, xj). L'ensemble des prédécesseurs de xj se note Γ^{-}_{G}(xj).

Exemple

En considérant toujours le graphe G de la figure 1, on obtient:

Γ^{-}_{G} (a) = {b}, Γ^{-}_{G} (b) = {c}, Γ^{-}_{G} (c) = {a, c}.

L'ensemble des sommets voisins de xj se note Γ_{G} (xj) = Γ^{+}_{G} (xj) ∪ Γ^{-}_{G} (xj) ; C'est l'ensemble des sommets directement reliés à xj.

Exemple

En considérant toujours le graphe G de la figure 1, on obtient:

Γ_{G} (a) = {c, b}, Γ_{G} (b) = {a, c}, Γ_{G} (c) = {b, c, a}.

1.3. Graphes simples

Un graphe G = [X, U] est dit simple s'il est sans boucles, et s'il ne possède pas d'arcs parallèles.

Ainsi, le graphe G de la figure 1 est non simple. Par contre, si on élimine de G l'arc $\vec{u}_4$, G devient alors un graphe simple.

1.4. Graphes: concepts non orientés

Il est des cas où la direction des flèches soit sans importance ; Seul importe de savoir quels sont les couples de sommets reliés, et combien de fois ils sont reliés. Dans un tel cas, à tout arc (couple ordonné) ui = (xj, xk), on associe le couple de sommets non ordonné ei = (xj, xk) que l'on appelle la ième arête du graphe. On parle alors de graphe non orienté.

Graphiquement, une arête ei = (xj, xk) est représentée par une ligne (sans flèche) joignant les deux sommets xj et xk.

1.5. Quelques propriétés des graphes simples

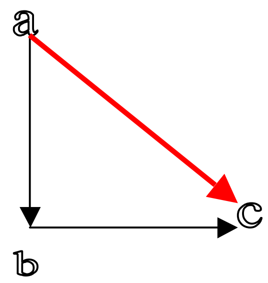
Un graphe simple G = [X, U] est dit:

- symétrique si et seulement si toutes les connexions sont orientées dans les deux sens. Autrement dit, si et seulement si $\forall$ (xj, xk) $\in X^2$: (xj, xk) $\in$ U => (xk, xj) $\in$ U.

- antisymétrique si et seulement si aucune connexion n'est orientée dans les deux sens. Autrement dit, si et seulement si $\forall$ (xj, xk) € X^2 avec xj $\neq$ xk : (xj, xk) € U => (xk, xj) $\notin$ U.

- complet si et seulement si tous les sommets sont reliés deux à deux entre eux. Autrement dit, si et seulement si $\forall$ (xj, xk) $\in X^2$: (xj, xk) $\notin$ U => (xk, xj) $\in$ U.

- transitif si et seulement si $\forall$ (xj, xk, xh) $\in X^3$: (xj, xk) $\in$ U et (xk, xh) $\in$ U => (xj, xh) $\in$ U. Autrement dit, si et seulement si, dès lors qu'il existe une connexion de a vers b et une autre connexion de b vers c, alors impérativement, on doit avoir une connexion de a vers c.

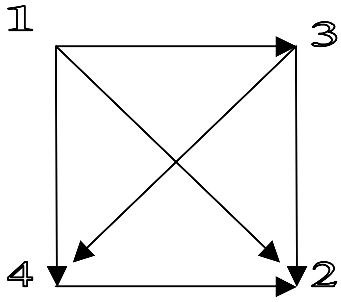


Remarque

Un graphe simple complet d'ordre n se note Kn, et s'appelle une n-clique.

Exemple

Considérons le graphe G donné par la figure qui suit.



Le graphe G est une 4-clique, car

- Il est simple (sans boucles et il ne possède pas d'arcs parallèles) ;
- Il est complet (tous les sommets sont reliés deux à deux entre eux) ;
- Il possède 4 sommets.

1.6. Demi-degrés et degrés

On appelle demi-degré extérieur du sommet xj, noté d+(xj), le nombre d'arcs ayant xj comme extrémité initiale.

On appelle demi-degré intérieur du sommet xj, noté d-(xj), le nombre d'arcs ayant xj comme extrémité terminale.

On appelle degré du sommet xj, noté d(xj), le nombre d'arcs (ou d'arêtes) ayant xj comme extrémité.

$$\mathbf{d(xj) = d^{+}(xj) + d^{-}(xj)}$$

On dit qu'un sommet x est isolé si d(x) = 0. Autrement dit, si x n'est relié à aucun autre sommet.

On dit qu'un sommet x est pendant si d (x) = 1.

Exemple

Pour clarifier les définitions ci-dessus, reprenons le graphe G donné par la figure 1.

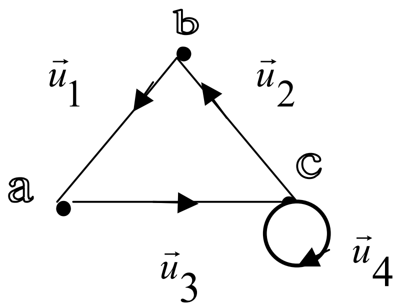


Figure 1.

Pour ce graphe G,

d+(b) = 1, d-(b) = 1 et d(b) = 2.

d+(c) = 2, d-(c) = 2 et d(c) = 4.

Remarque

On dit d'un graphe qu'il est régulier lorsque tous ses sommets ont le même degré.

1.7. Arcs incidents (ou arêtes incidentes) à un sous-ensemble A ⊂ X. Cocycles.

Soit A un sous-ensemble de sommets de X donné.

On dit qu'un arc ui de la forme (xj, xk) est incident à A vers l'extérieur, et l'on écrit, ui ∈ w+(A), si l'extrémité initiale de ui appartient à A, mais pas son extrémité terminale.

On dit qu'un arc ui de la forme (xj, xk) est incident à A vers l'intérieure, et l'on écrit, ui ∈ w-(A), si l'extrémité terminale de ui appartient à A, mais pas son extrémité initiale.

L'ensemble des arcs (ou des arêtes) incidents à l'ensemble des sommets A se note w(A) = w+(A) u w-(A), et s'appelle cocycle relatif à A.

Un cocycle w(A) dans lequel tous les arcs sont orientés dans le même sens (c.-à-d., tel que l'un des deux ensembles w+(A) ou w-(A) est vide) est dit cocircuit.

Un cocycle est dit élémentaire s'il est minimal, c.-à-d., s'il ne contient pas un ensemble d'arcs qui soit un cocycle.

Exemple

Pour clarifier les définitions ci-dessus, reprenons le graphe G donné par la figure 1.

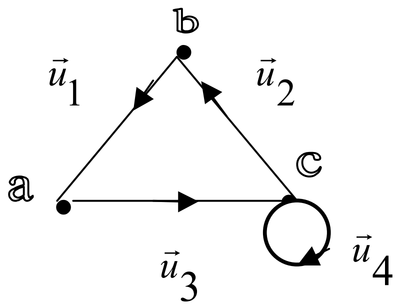


Figure 1.

Soit A = {a, b}.

w+(A) ?

oui car $c \notin A$ | non car $a \in A$

Par conséquent, w+(A) = $\{\vec{u}_3\}$. $\vec{u}_1$ n’appartient pas à w+(A), car son extrémité terminale a est dans A.

w-(A) ?

non car $b \in A$ | oui car $c \notin A$

Par conséquent, w-(A) = $\{\vec{u}_2\}$. $\vec{u}_1$ n’appartient pas à w-(A), car son extrémité initiale b est dans A.

Par définition, le cocycle relatif à A est w(A) = w+(A) ∪ w-(A).

Donc, w(A) = $\{\vec{u}_2, \vec{u}_3\}$.

Comme w(A) contient des éléments de w+(A) et de w-(A), alors ce n’est pas un cocircuit.

1.8. Sous-graphe engendré par un sous-ensemble de sommets

Soient

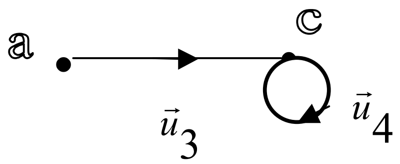
G = [X, U] un graphe orienté ou non orienté, Y un sous-ensemble de X.

Le sous-graphe de G engendré par Y ⊂ X est le graphe Gy dont les sommets sont les sommets de Y, et dont les arcs (ou les arêtes) sont les arcs (ou les arêtes) de G ayant leurs deux extrémités dans Y.

Exemple

Considérons le graphe G donné par la figure 1, et soit Y= {a, c}.

Pour tracer Gy, on considère seulement les sommets de Y et les arcs du graphe G qui ont leurs deux extrémités dans Y. Le graphe résultant est le suivant :



1.9. Graphe partiel engendré par un sous-ensemble d'arcs (ou d'arêtes)

Soient

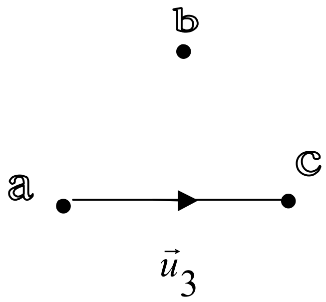
G = [X, U] un graphe orienté ou non orienté, V un sous-ensemble de U.

Le graphe partiel de G engendré par V ⊂ U est le graphe ayant le même ensemble X de sommets que G, et dont les arcs (ou les arêtes) sont les arcs (ou les arêtes) de V.

Exemple

Considérons le graphe G donné par la figure 1 et soit V= $\{\vec{u}_3\}$.

Pour tracer le graphe partiel de G engendré par V, on considère tous les sommets du graphe G et seulement les arcs de V. Le graphe résultant est le suivant :



1.10. Sous-graphe partiel

Soient

G = [X, U] un graphe orienté ou non orienté, Y un sous-ensemble de X, V un sous-ensemble de U.

Le sous-graphe partiel de G engendré par Y et V est le graphe partiel Gy engendré par V. Autrement dit c'est l'intersection des deux graphes qui précédent.

Exemple

Considérons le graphe G donné par la figure 1, et soient Y = {a, c} et V= $\{\vec{u}_3\}$.

Le graphe résultant est le suivant :