Feuille de TD 1 :
Complément sur la norme 2

Exercice 1. *Inégalités de Schwarz et de Minkowski*

1. Montrer l'inégalité de Schwarz : $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\forall (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

Indication : Considérer le signe du trinôme $P(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + \lambda y_i)^2$.

2. En déduire l'inégalité de Minkowski : $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\forall (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

3. Que démontre cette dernière inégalité ?

Exercice 2. *Inégalités de Schwarz et de Minkowski pour les fonctions*

1. Montrer l'inégalité de Schwarz : $\forall f, g \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$,

$$\int_0^1 |fg| \leq \left(\int_0^1 |f|^2\right)^{1/2} \left(\int_0^1 |g^2|\right)^{1/2}$$

Indication : Considérer le signe du trinôme $P(\lambda) = \int_0^1 (|f| + \lambda |g|)^2$.

2. En déduire l'inégalité de Minkowski :$\forall f, g \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$,

$$\left(\int_0^1 |f+g|^2\right)^{1/2} \leq \left(\int_0^1 |f|^2\right)^{1/2} + \left(\int_0^1 |g^2|\right)^{1/2}$$

3. Que démontre cette dernière inégalité ?