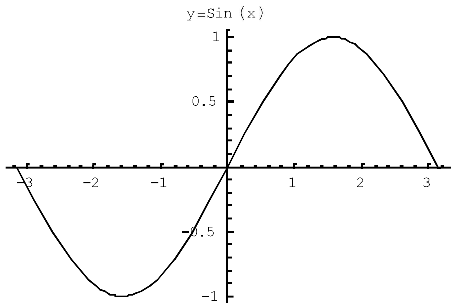
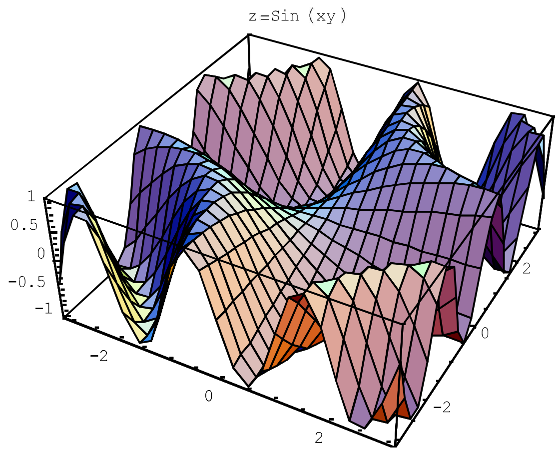
FONCTIONS DE R^n DANS R^p : CONTINUITE ET CONTINUITE PARTIELLE

1. GRAPHES DES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

On considère une fonction f de R dans R : x → f(x) ; le graphe de f est l'ensemble des points (x,y) de R^2 tels que y=f(x). Cet ensemble définit une courbe de R^2.

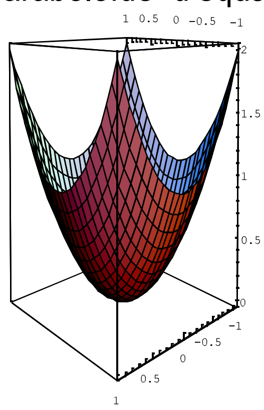


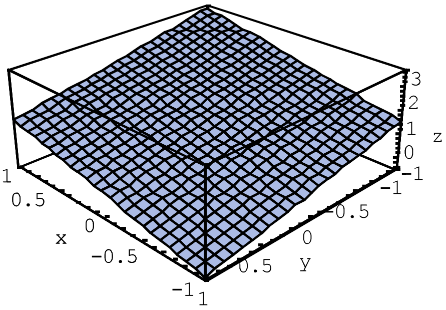
Si f est maintenant une fonction de R^2 dans R : (x,y) → f(x,y) ; son graphe est l'ensemble des points (x,y,z) de R^3 tels que z=f(x,y). Cet ensemble définit une surface de R^3.



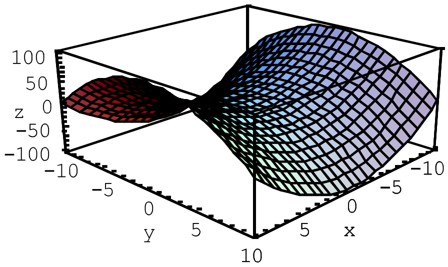
Quelques graphes connus :

Le paraboloïde d'équation : $f(x,y) = x^2 + y^2$

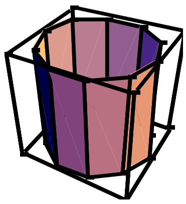




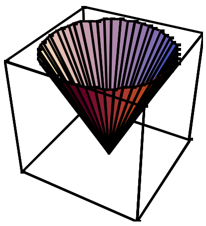
Le plan d'équation z=1+x-y :



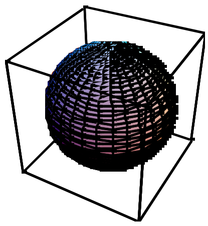
La selle d'équation $f(x,y)=x^2-y^2$:



Le cylindre circulaire d'équation : $x^2+y^2=1$, z quelconque :



Le cône d'équation $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$:



La sphère d'équation $x^2+y^2+z^2=1$:

2. CONTINUITE DES FONCTIONS DE R^n DANS R^p

En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes ; donc pour étudier la continuité des fonctions de R^n dans R^p, nous pouvons utiliser la norme la mieux adaptée aux calculs à développer.
Par exemple, considérons la fonction définie par

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{(x^2-y^2)\sin(xy)}{(x^2+y^2)} & si\,(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si\,(x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Pour étudier la continuité de cette fonction f au point (0,0), compte tenu, de l'expression analytique de f, nous choisissons la norme euclidienne.
Pour tout (x,y) au voisinage de (0,0) dans de R^2 on a , comme : $|\sin(x)| \leq |x|$,

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{(x^2 - y^2)\sin(xy)}{(x^2 + y^2)} \right| \leq \frac{(x^2 + y^2)|\sin(xy)|}{(x^2 + y^2)} \leq |xy|$$

Or $|x|^2 \leq |x|^2 + |y|^2$ d'où : $|x| \leq \sqrt{|x|^2 + |y|^2} = \|(x,y)\|_2$ de même $|y| \leq \sqrt{|x|^2 + |y|^2} = \|(x,y)\|_2$

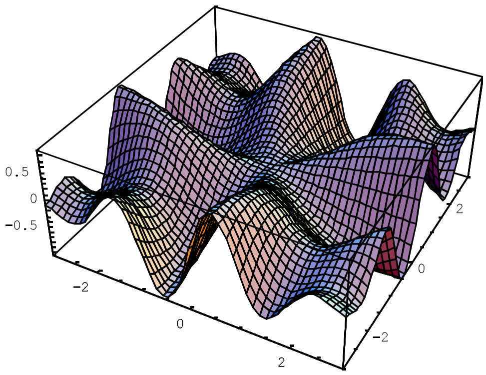
On obtient alors :

$$|f(x,y) - f(0,0)| \leq \|(x,y)\|_2^2$$

Donc quand (x,y)→(0,0) : $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \|(x,y)\|_2 = 0$

On alors : $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y) - f(0,0)| = 0$; soit $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$

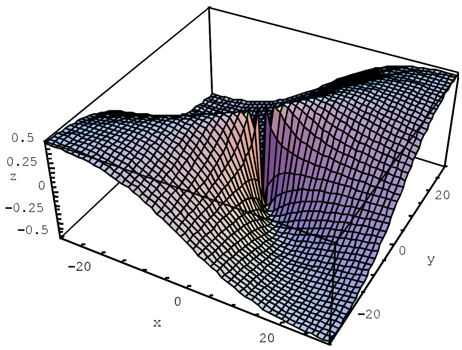
f est donc continue au point (0,0).
Observons son graphe :



$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2 - y^2)\sin(xy)}{(x^2 + y^2)} & si\,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

D'un point (x,y,z) de la surface - avec (x,y) voisin de (0,0) - nous pouvons atteindre le point (0,0,0).

<u>Exemple 2</u> : Observons le graphe suivant :



$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2 + y^2)} & si\,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

D'un point (x,y,z) de la surface - avec (x,y) voisin de (0,0) - nous ne pouvons pas toujours atteindre le point (0,0,0). Ce la dépend des directions suivies.

Quelques résultats sur les fonctions continues et la notion de limite :

- Comme pour les fonctions d'une variable réelle, lorsque l'on somme, que l'on compose, que l'on multiplie des fonctions continues, on obtient une fonction continue.
- La notion de limite dans R^2 (ou R^n), ne dépend pas du « chemin suivi » : Soit f une application de R^2 dans R, a un point de R^2, si $\lim\limits_{(a,b)} f(x,y) = l$, alors pour toute courbe continue passant par (a,b), paramétrée par $\begin{cases} x = \alpha(t) \\ y = \beta(t) \end{cases}, \quad t \in I; \quad (\alpha(t_0), \beta(t_0)) = (a,b)$ on a : $\lim\limits_{t_0} f\big(\alpha(t), \beta(t)\big) = l$
- Dans la pratique, on utilise ce dernier résultat pour montrer qu'une fonction n'est pas continue en un point (a,b) : on choisit des chemins différents passant par (a,b) le long desquels f(x,y) tend vers des valeurs différentes.

Exemple : Etudions la continuité au point (0,0) de l'application f définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Pour x=0 et y non nul, on a : f(0,y) =0 ; d'où (1) $\lim\limits_{x \to 0} f(0,y) = 0$

Par ailleurs, pour x=y non nul, on a f(x,x)=1/2 ; d'où (2) $\lim\limits_{x \to 0} f(x,x) = 1/2$

Les résultats (1) et (2) prouvent que f n'a pas de limite en (0,0), et donc qu'elle n'est pas continue en ce point.

Continuité partielle des fonctions de plusieurs variables réelles, cas des fonctions de deux variables.

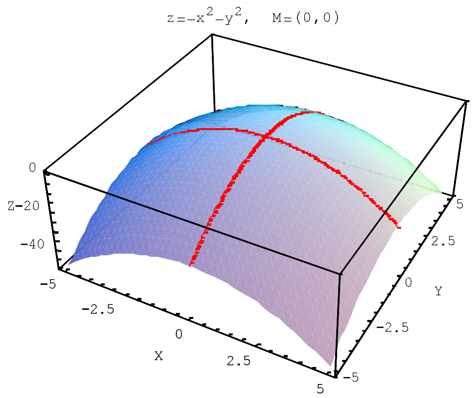
Définition :
Soient f une fonction de R^2 dans R et $a=(a_1,a_2)$ un élément de R^2.
Les applications définies de R dans R par :

$$\varphi_1 : x \mapsto f(x, a_2) \text{ et } \varphi_2 : y \mapsto f(a_1, y)$$

sont appelées première et deuxième applications partielles de f au point a.
Si l'application φ_1 est continue en a_1, on dit que f est continue par rapport à sa première variable au point a.
De même, si φ_2 est continue en a_2, on dit que f est continue par rapport à sa deuxième variable au point a.
Si φ_1 et φ_2 sont continues en a_1 et a_2, respectivement, on dit que f est partiellement continue au point a.

Remarque : La continuité partielle correspond à la continuité suivant des chemins particuliers, lesquels ?

Visualisation des fonctions partielles de f : $f(x,y) = -(x^2 + y^2)$ au point (0,0) :



Exercices :

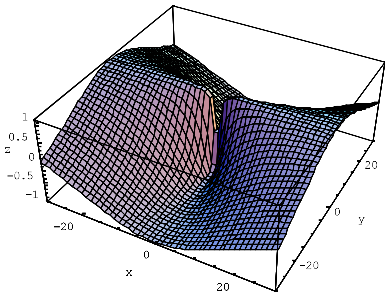
a) Montrer que si f une application de R^2 dans R, est continue en un point a de R^2, alors elle y est partiellement continue.

b) En étudiant au point (0,0) la fonction f définie par : $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$, montrer qu'on n'a pas l'équivalence entre continuité et continuité partielle. Enoncer clairement le résultat obtenu.

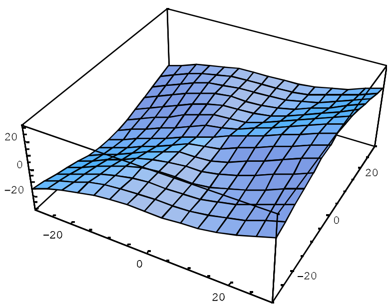
3. EXERCICES

Exercice 1 :

Les fonctions représentées par les graphes suivants sont-elles continues ? Partiellement continues ?



$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$



$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$