Produit scalaire
A DAOUDI

Préliminaire : Le produit scalaire est une notion liée à un problème de distance.

- **Produit scalaire usuel sur $E=\mathbf{R}^2$**

Le produit scalaire usuel sur $\mathbf{R}^2$ est l'application $<\cdot|\cdot>\ :\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ définie par,

Pour tous $u=(x,y)$ et $v=(x',y')$ éléments de $\mathbf{R}^2$, $<u|v>=xx'+yy'$

Elle **vérifie en particulier** : Pour $u\in\mathbf{R}^2$, $<u|u>\geq 0$ et $<u|u>=0\Leftrightarrow u=0_{\mathbf{R}^2}$ d'où

$$\boxed{<0_{\mathbf{R}^2}|0_{\mathbf{R}^2}>=0 \text{ et } \forall u\in\mathbf{R}^2,\ u\neq 0_{\mathbf{R}^2},\ <u|u>\ >0}$$

Car pour $u=(x,y)$ élément de $\mathbf{R}^2$, $<u|u>=x^2+y^2$ et

$$\boxed{\text{Si } (a,b)\in\mathbf{R}^2, a\geq 0 \text{ et } b\geq 0 \text{ on a} : a+b=0\Leftrightarrow a=0 \text{ et } b=0}$$

Pour $u=(x,y)$ élément de $\mathbf{R}^2$, on note $\|u\|=\sqrt{<u|u>}=\sqrt{x^2+y^2}$

L'application $\|.\|:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^+$ s'appelle la norme associée au produit scalaire $<\cdot|\cdot>$, c'est la **norme euclidienne de $\mathbf{R}^2$** associée au **produit scalaire usuel** sur $\mathbf{R}^2$.

- **Produit scalaire usuel sur $E=\mathbf{R}^n$ où $n\in\mathbf{N}^*, n\geq 2$.**

Le produit scalaire usuel sur $\mathbf{R}^n$ est l'application $<\cdot|\cdot>\ :\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ définie par,

Pour tous $u=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ et $v=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ éléments de $\mathbf{R}^n$,

$<u|v>=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$ c'est-à-dire $<u|v>=\sum_{i=1}^{i=n} x_i\, y_i$

Elle **vérifie en particulier** : Pour $u\in\mathbf{R}^n$, $<u|u>\geq 0$ et $<u|u>=0\Leftrightarrow u=0_{\mathbf{R}^n}$ d'où

$$\boxed{<0_{\mathbf{R}^n}|0_{\mathbf{R}^n}>=0 \text{ et } \forall u\in\mathbf{R}^n,\ u\neq 0_{\mathbf{R}^n},\ <u|u>\ >0}$$

Pour $u=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ élément de $\mathbf{R}^n$, on note $\|u\|=\sqrt{<u|u>}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$

L'application $\|.\|:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^+$ s'appelle la norme associée au produit scalaire $<\cdot|\cdot>$, c'est la **norme euclidienne de $\mathbf{R}^n$** associée au **produit scalaire usuel** sur $\mathbf{R}^n$.

I. Produit scalaire sur un $\mathbf{R}$ - espace vectoriel

Définition

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
Une application $\varphi : E \times E \to \mathbf{R}$ est un produit scalaire sur E si :

1) $\forall (u,v) \in E^2,\ \varphi(u,v) = \varphi(v,u)$

2) Pour $u \in E$, **fixé** l'application

$$\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbf{R} \\ v & \to & \varphi(u,v) \end{array}$$

est linéaire : $\forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall \beta \in \mathbf{R}, \forall (v_1,v_2) \in E^2,\ \varphi(u, \alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha \varphi(u, v_1) + \beta \varphi(u, v_2)$

3) Pour $v \in E$, **fixé** l'application

$$\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbf{R} \\ u & \to & \varphi(u,v) \end{array}$$

est linéaire : $\forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall \beta \in \mathbf{R}, \forall (u_1,u_2) \in E^2,\ \varphi(\alpha\, u_1 + \beta\, u_2, v) = \alpha\, \varphi(u_1,v) + \beta\, \varphi(u_2,v)$

4) $\varphi(0_E, 0_E) = 0$

5) $\forall u \in E,\ u \neq 0_E,\ \varphi(u,u) > 0$

Remarques

1) $\varphi : E \times E \to \mathbf{R}$ un produit scalaire sur E, il vérifie donc les propriétés 2) et 3) ci-dessus, on dit alors que φ est une **forme bilinéaire** sur E.

De plus il vérifie $\forall (u,v) \in E^2,\ \varphi(u,v) = \varphi(v,u)$ et $\forall u \in E,\ \varphi(u,u) \geq 0$, on dit alors que φ est **symétrique et positive**.

2) Soit $\varphi : E \times E \to \mathbf{R}$ un produit scalaire, dans **la suite du cours** pour $(u,v) \in E^2$, on notera $\varphi(u,v) = \langle u \mid v \rangle$.

Exemples

1) Pour $E = \mathbf{R}^n$ où $n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2$.

L'application $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ définie par,

Pour tout $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $v = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ éléments de $\mathbf{R}^n$,

$\langle u \mid v \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$ c'est-à-dire $\langle u \mid v \rangle = \sum_{i=1}^{i=n} x_i\, y_i$

Vérifie les propriétés de la définition ci-dessus, donc $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est un produit scalaire appelé le produit scalaire usuel sur $\mathbf{R}^n$.

2) Soient $(a,b) \in \mathbf{R}^2, a < b$ et $E = C([a,b], \mathbf{R})$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $[a,b]$.

L'application $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : E \times E \to \mathbf{R}$ définie par $\forall (f,g) \in E \times E,\ \langle f \mid g \rangle = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$

est un produit scalaire sur E.
En effet il suffit de vérifier les propriétés de la définition ci-dessus.
0_E désigne la fonction nulle, c'est l'application $0_E : [a,b] \to \mathbf{R}$ définie par $\forall t \in [a,b],\ 0_E(t) = 0$.
Pour vérifier la propriété 5) : $\forall f \in E,\ f \neq 0_E,\ \langle f \mid f \rangle > 0$, on utilise le résultat suivant :

Si $g:[a,b]\to\mathbf{R}$ est continue sur $[a,b]$, $g\neq 0_E$ et $\forall t\in[a,b], g(t)\geq 0$, alors $\int_a^b g(t)\,dt>0$

Preuve.
En effet, $\exists\alpha\in[a,b], g(\alpha)>0$ et il existe alors $(a',b')\in\mathbf{R}^2, a'<b'$, tel que $[a',b']\subset[a,b]$ et $\forall t\in[a',b'], g(t)>\dfrac{g(\alpha)}{2}$ d'où $\int_a^b g(t)\,dt>\int_{a'}^{b'} g(t)\,dt>0$

3) Soient $n\in\mathbf{N}^*, (a,b)\in\mathbf{R}^2, a<b$. Si $E=\mathbf{R}[X]$ ou $E=\mathbf{R}_n[X]$, on montre que l'application $<\cdot|\cdot>: E\times E\to\mathbf{R}$ définie par $\forall(P,Q)\in E\times E, <P\mid Q>=\int_a^b P(t)Q(t)\,dt$

est un produit scalaire sur E .

4) Soient $n\in\mathbf{N}^*$ et $E=\mathbf{R}_n[X]$, on considère l'application $<\cdot|\cdot>: E\times E\to\mathbf{R}$ définie par
$\forall(P,Q)\in E\times E, <P\mid Q>=a_0\,b_0+a_1\,b_1+\cdots+a_n\,b_n$
où $P=a_0+a_1\,X+\cdots+a_n\,X^n$ et $Q=b_0+b_1\,X+\cdots+b_n\,X^n$
On montre que l'application $<\cdot|\cdot>$ est un produit scalaire sur E .

5) Soit $E=\mathbf{R}^3$, on montre que l'application $<\cdot|\cdot>: E\times E\to\mathbf{R}$ définie par
$\forall(u,v)\in E\times E, <u\mid v>=2xx'+5yy'+4zz'+2xy'+2yx'-2xz'-2zx'$
où $u=(x,y,z)$ et $v=(x',y',z')$ est un produit scalaire sur $\mathbf{R}^3$.
(remarquer que : si $u=(x,y,z)$, on a $<u|u>=2x^2+5y^2+4z^2+4xy-4xz$
d'où $<u|u>=(x-2z)^2+y^2+(x+2y)^2$ et $(x,y,z)\neq(0,0,0)\Leftrightarrow(x\neq 0$ ou $y\neq 0$ ou $z\neq 0))$

6) Sur un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, on peut définir plusieurs produits scalaires (cf. exemples ci-dessus).

Définition
Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
On dit que E est un espace euclidien si E est muni d'un produit scalaire $<\cdot|\cdot>$ et $\dim(E)$ est finie.

Exemples
1) Pour $n\in\mathbf{N}^*, n\geq 2$, $E=\mathbf{R}^n$ est un espace euclidien.
2) Pour $n\in\mathbf{N}^*$, $\mathbf{R}_n[X]$ est un espace euclidien.
3) $\mathbf{R}[X]$ n'est pas un espace euclidien car $\dim(\mathbf{R}[X])$ est infini.

II. Norme associée à un produit scalaire sur un espace euclidien

Définition
Soit E un espace euclidien, muni d'un produit scalaire $<\cdot|\cdot>$.
Pour $u\in E$, on sait que $<u|u>\geq 0$ et on note $\|u\|=\sqrt{<u|u>}$
$\|u\|$ s'appelle la norme du vecteur u .
L'application $\|.\|: E\to\mathbf{R}^+$ qui à u associe sa norme $\|u\|$ vérifie les propriétés suivantes :

1) $\forall u \in E,\ \|u\| = 0 \Leftrightarrow 0_E$

2) $\forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall u \in E,\ \|\lambda u\| = |\lambda| \times \|u\|$

3) $\forall u \in E,\ \forall v \in E,\ \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (inégalité triangulaire)

Preuve
1) et 2) sont faciles à montrer
La propriété 3) est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivante :

$\forall u \in E,\ \forall v \in E,\ (<u|v>)^2 \leq <u|u> \times <v|v>$ c'est-à-dire $|<u|v>| \leq \|u\| \times \|v\|$

qu'on montre en remarquant que pour la donnée de $(u,v) \in E^2$, on a

$\forall \lambda \in \mathbf{R},\ <u+\lambda v | u+\lambda v> \geq 0 \Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbf{R},\ <u|u> + 2\lambda <u|v> + \lambda^2 <v|v> \geq 0$

d'où $\Delta \leq 0$ c'est-à-dire $(2<u|v>)^2 - 4 <u|u> \times <v|v> \leq 0$ donc

$(<u|v>)^2 \leq <u|u> \times <v|v>$

Preuve de l'inégalité triangulaire :
Soit $(u,v) \in E^2$, $(\|u+v\|)^2 = <u+v|u+v> = <u|u> + 2<u|v> + <v|v>$
D'où $(\|u+v\|)^2 = \|u\|^2 + 2<u|v> + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\| \times \|v\| + \|v\|^2$ car $|<u|v>| \leq \|u\| \times \|v\|$
Donc $(\|u+v\|)^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2$ par suite $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

III. Orthogonalité dans un espace euclidien

Définitions
Soit E un espace euclidien, muni d'un produit scalaire $<\cdot|\cdot>$.
1) Soit $(u,v) \in E^2$, u est dit orthogonal à v (ou u et v sont orthogonaux) si $<u|v> = 0$.

2) Soit A une partie non vide quelconque de E .
L'orthogonal de A, notée $A^\perp$ est défini par : $A^\perp = \{v \in E / \forall u \in A, <u|v> = 0\}$.
$A^\perp$ est l'ensemble des éléments de E orthogonaux à tous les éléments de A.

Exemples
1) Soient $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire usuel $<\cdot|\cdot>$, $e_1 = (1,0,0)$; $e_2 = (0,1,0)$; $e_3 = (0,0,1)$ et $A = \{e_1, e_2\}$ on montre :

- $A^\perp = vect(\{e_3\})$
- $(vect(A))^\perp = (vect(\{e_1,e_2\}))^\perp = vect(\{e_3\}) = A^\perp$
- $(vect(\{e_3\}))^\perp = vect(\{e_1,e_2\})$ c'est-à-dire $(A^\perp)^\perp = vect(\{e_1,e_2\})$ et on a : $A \subset (A^\perp)^\perp$

2) Soit $E = \mathbf{R}_1[X] = \{aX + b / a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}\}$ muni du produit scalaire suivant :
Pour $(P,Q) \in E^2$, $<P|Q> = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$

Soit $A = \{X\}$ on montre que $A^\perp = \left\{aX + b / \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = 0\right\} = \left\{aX - \frac{2}{3}a \ / \ a \in \mathbf{R}\right\}$

D'où $A^\perp = \left\{a(X - \frac{2}{3}) \ / \ a \in \mathbf{R}\right\} = vect(\left\{X - \frac{2}{3}\right\})$

Propriétés

Soient E un espace euclidien, muni d'un produit scalaire $<\cdot|\cdot>$ et A et B deux parties non vides quelconques de E.

1) $\{0_E\}^{\perp} = E$ et $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.

2) $(A \cup B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$ et $A \subset (A^{\perp})^{\perp}$

3) Si $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ alors $A^{\perp} = (vect(A))^{\perp}$

Preuve……

Proposition

Soit E un espace euclidien, muni d'un produit scalaire $<\cdot|\cdot>$.

Si F est un sous-espace vectoriel de E et $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ est une base de F alors on a :

$u \in F^{\perp} \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \ldots, p\},\ <u|a_i> = 0$

Preuve……

Exemple

Soit P le plan vectoriel de $\mathbf{R}^3$ d'équation cartésienne : $x - 2y + 3z = 0$

Déterminez $P^{\perp}$

On a : $P = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x - 2y + 3z = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x = 2y - 3z\}$

D'où $P = \{(2y - 3z, y, z) / y, z \in \mathbf{R}\} = vect(\{(2,1,0); (-3,0,1)\})$

$B = \{(2,1,0); (-3,0,1)\}$ est une base de P car B est une famille génératrice de P et $card(B) = 2 = \dim(P)$.

Notons $a_1 = (2,1,0)$; $a_2 = (-3,0,1)$ et $u = (x, y, z)$ un élément de $\mathbf{R}^3$ donc,

$$u \in P^{\perp} \Leftrightarrow \begin{cases} <u|a_1> = 0 \\ <u|a_2> = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ -3x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = 3x \end{cases}$$

Conclusion : $P^{\perp} = \{(x, -2x, 3x) / x \in \mathbf{R}\} = vect(\{(1,-2,3)\})$

On remarque que $\overrightarrow{n} = (1,-2,3)$ est un vecteur **normal** au plan P et $P^{\perp} = vect(\{\overrightarrow{n}\})$

En général, si P est le plan vectoriel de $\mathbf{R}^3$ d'équation cartésienne : $ax + by + cz = 0$ alors un vecteur **normal** au plan P est $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$ et $P^{\perp} = vect(\{\overrightarrow{n}\})$

Théorème

Soit E un espace euclidien, muni d'un produit scalaire $<\cdot|\cdot>$.

Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors

1) $F \cap F^{\perp} = \{0_E\}$

2) $\dim(F) + \dim(F^{\perp}) = \dim(E)$ et $(F^{\perp})^{\perp} = F$

3) $E = F \oplus F^{\perp}$

Preuve

1) Soit $u \in F \cap F^{\perp}$ montrons que $u = 0_E$

En effet, $u \in F \cap F^{\perp} \Leftrightarrow u \in F$ et $u \in F^{\perp}$

$u \in F^{\perp} \Rightarrow \forall v \in F,\ < u | v >= 0$ d'où $< u | u >= 0$ car $u \in F$

Par suite $u = 0_E$ car si $u \neq 0_E$, $< u | u > > 0$.

Conclusion : $F \cap F^{\perp} = \{0_E\}$

2)

- Montrons que: $\dim(F) + \dim(F^{\perp}) = \dim(E)$

On a F est un sous-espace vectoriel de E , d'où il existe $B_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ une base de F .

Si $\dim(E) = n$, on complète alors B_1 par $B_2 = \{a_{p+1}, a_{p+2}, \ldots, a_n\}$ pour que $B = B_1 \cup B_2 = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ soit une base de E .

Soit $u \in E$ d'où il existe $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$ tel que $u = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n$ et d'après la proposition précédente on a :

$u \in F^{\perp} \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \ldots, p\},\ < u | a_i >= 0$ car $B_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ est une base de F .

$$\Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \ldots, p\},\ < x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n | a_i >= 0$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \ldots, p\},\ x_1 < a_1 | a_i > + x_2 < a_2 | a_i > + \cdots + x_n < a_n | a_i >= 0$$

Si on identifie E à $\mathbf{R}^n$, on peut alors identifier $F^{\perp}$ à l'ensemble des solutions du système linéaire de p - équations et de n inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$ suivant : (1)

$$\begin{cases} x_1 < a_1 | a_1 > + x_2 < a_2 | a_1 > + \cdots + x_n < a_n | a_1 >= 0 \\ x_1 < a_1 | a_2 > + x_2 < a_2 | a_2 > + \cdots + x_n < a_n | a_2 >= 0 \\ \vdots \\ x_1 < a_1 | a_p > + x_2 < a_2 | a_p > + \cdots + x_n < a_n | a_p >= 0 \end{cases}$$

On a le rang du système (1) $= rg(A)$ où $A = \begin{pmatrix} < a_1 | a_1 > & < a_2 | a_1 > & \cdots & \cdots & < a_n | a_1 > \\ < a_1 | a_2 > & < a_2 | a_2 > & \cdots & \cdots & < a_n | a_2 > \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ < a_1 | a_p > & < a_2 | a_p > & \cdots & \cdots & < a_n | a_p > \end{pmatrix}$

A contient n colonnes et p lignes avec $p \leq n$ d'où $rg(A) \leq p$.

Considérons la sous matrice carrée de type (p, p) suivante :

$$M = \begin{pmatrix} < a_1 | a_1 > & < a_2 | a_1 > & \cdots & < a_p | a_1 > \\ < a_1 | a_2 > & < a_2 | a_2 > & \cdots & < a_p | a_2 > \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ < a_1 | a_p > & < a_2 | a_p > & \cdots & < a_p | a_p > \end{pmatrix}$$

et notons f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^p$ associé à M par rapport à la base canonique de $\mathbf{R}^p$, on a $Ker(f) = \{0_{\mathbf{R}^p}\}$ car

$$(y_1, y_2, \ldots, y_p) \in Ker(f) \Leftrightarrow M \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} <a_1|a_1> & <a_2|a_1> & \cdots & <a_p|a_1> \\ <a_1|a_2> & <a_2|a_2> & \cdots & <a_p|a_2> \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ <a_1|a_p> & <a_2|a_p> & \cdots & <a_n|a_p> \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 <a_1|a_1> + y_2 <a_2|a_1> + \cdots + y_p <a_p|a_1> = 0 \\ y_1 <a_1|a_2> + y_2 <a_2|a_2> + \cdots + y_p <a_p|a_2> = 0 \\ \vdots \\ y_1 <a_1|a_p> + y_2 <a_2|a_p> + \cdots + y_p <a_p|a_p> = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in \{1,2,\ldots,p\},\ \ y_1 <a_1|a_i> + y_2 <a_2|a_i> + \cdots + y_p <a_p|a_i> = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in \{1,2,\ldots,p\},\ \ <y_1 a_1 + y_2 a_2 + \cdots + y_p a_p | a_i> = 0$$

$$\Leftrightarrow (y_1 a_1 + y_2 a_2 + \cdots + y_p a_p) \in F^{\perp}$$ car B_1 est une base de F.

et puisque $(y_1 a_1 + y_2 a_2 + \cdots + y_p a_p) \in F$ car $B_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ est une base de F.

$(y_1 a_1 + y_2 a_2 + \cdots + y_p a_p) \in F \cap F^{\perp}$ d'où $y_1 a_1 + y_2 a_2 + \cdots + y_p a_p = 0_E$ car $F \cap F^{\perp} = \{0_E\}$

par suite $y_1 = y_2 = \cdots = y_p = 0$ car $B_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ est une famille libre

donc $(y_1, y_2, \ldots, y_p) = (0,0,\ldots,0) = 0_{\mathbf{R}^p}$

Résumé :

$Ker(f) = \{0_{\mathbf{R}^p}\}$ donc f est injective de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^p$ d'où f est bijective de $\mathbf{R}^p$ sur $\mathbf{R}^p$

Donc sa matrice associée par rapport à la base canonique de $\mathbf{R}^p$ est inversible c'est à dire M est inversible donc $\det(M) \neq 0$.

On a : $rg(A) \leq p$ et M est une sous matrice carrée de type (p, p) tel que $\det(M) \neq 0$,

D'où $rg(A) = p$ et d'après le théorème du rang on a :

$\dim(\mathbf{R}^n) = rg(A) + \dim(G)$ où G est l'ensemble des solutions du système (1)

Et comme on peut identifier E à $\mathbf{R}^n$ et $F^{\perp}$ à G on a donc $\dim(E) = rg(A) + \dim(F^{\perp})$

D'où $n = p + \dim(F^{\perp})$ c'est-à-dire $\dim(F^{\perp}) = n - p$

Conclusion : $\dim(F) + \dim(F^{\perp}) = p + (n-p) = n$, d'où $\dim(F) + \dim(F^{\perp}) = \dim(E)$

- Montrons : $(F^{\perp})^{\perp} = F$

D'après la formule précédente on a : $\dim(F) + \dim(F^{\perp}) = \dim(E)$ (*)

Idem $\dim(F^{\perp}) + \dim((F^{\perp})^{\perp}) = \dim(E)$ (**) car $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E

Donc d'après (*) et (**) on a :

$\dim(F) = \dim(E) - \dim(F^{\perp})$ et $\dim((F^{\perp})^{\perp}) = \dim(E) - \dim(F^{\perp})$

D'où $\dim(F) = \dim((F^{\perp})^{\perp})$ et puisque $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$

On a alors $F = (F^{\perp})^{\perp}$ car F et $(F^{\perp})^{\perp}$ sont des espaces vectoriels (cf. le résultat ci-dessous)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Si $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$ alors $F = G$

3) Pour montrer $E = F \oplus F^{\perp}$ on utilise les propriétés,

$\dim(F)+\dim(F^{\perp})=\dim(E)$, $F\cap F^{\perp}=\{0_E\}$ et le résultat suivant :

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de $\dim(E)=n$.
Si $B_1=\{a_1,a_2,\ldots,a_p\}$ est une base de F et $B_2=\{b_1,b_2,\ldots,b_q\}$ est une base de G telles que $\dim(E)=n=p+q$ et si $B_1\cup B_2=\{a_1,a_2,\ldots,a_p,b_1,b_2,\ldots,b_q\}$ est une famille libre alors $E=vect(B_1\cup B_2)$ et $E=F\oplus G$

Notons $\dim(E)=n$ et $\dim(F)=p$ d'où $\dim(F^{\perp})=n-p$ car $\dim(F)+\dim(F^{\perp})=\dim(E)$
On considère alors $B_1=\{a_1,a_2,\ldots,a_p\}$ une base de F et $B_2=\{b_1,b_2,\ldots,b_{n-p}\}$ une base de $F^{\perp}$.
Puisque $F\cap F^{\perp}=\{0_E\}$ on montre alors que $B_1\cup B_2=\{a_1,a_2,\ldots,a_p,b_1,b_2,\ldots,b_{n-p}\}$ est une famille libre d'où $\dim(vect(B_1\cup B_2))=p+(n-p)=n=\dim(E)$
Donc $vect(B_1\cup B_2)=E$ car $\dim(vect(B_1\cup B_2))=\dim(E)$ et $vect(B_1\cup B_2)$ sous-espace de E
D'où $E=F\oplus G$.

Remarque (deux méthodes pour déterminer l'orthogonal d'un sous-espace)

Grâce à la proposition et le théorème ci-dessus, on a deux méthodes pour déterminer l'orthogonal d'un sous-espace

Exemple
On considère $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire usuel.
Soit P le plan vectoriel de $\mathbf{R}^3$ d'équation cartésienne : $x-2y+3z=0$
Déterminez $P^{\perp}$

1er méthode : on utilise une base de P
Dans l'exemple précédent nous avons montré que $B=\{(2,1,0);(-3,0,1)\}$ est une base de P et si on note $a_1=(2,1,0)$; $a_2=(-3,0,1)$ et $u=(x,y,z)$, on a :

$$u\in P^{\perp}\Leftrightarrow\begin{cases}<u|a_1>=0\\<u|a_2>=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=0\\-3x+z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-2x\\z=3x\end{cases}$$

Conclusion : $P^{\perp}=\{(x,-2x,3x)/x\in\mathbf{R}\}=vect(\{(1,-2,3)\})$

2eme méthode : on utilise la propriété : $(F^{\perp})^{\perp}=F$ où F est sous-espace vectoriel.
Soit $u=(x,y,z)$, d'où $u\in P\Leftrightarrow x-2y+3z=0$

$$\Leftrightarrow<u|\overrightarrow{n}>=0 \text{ où } \overrightarrow{n}=(1,-2,3)$$

$$\Leftrightarrow u\in\left(vect(\{\overrightarrow{n}\})\right)^{\perp}$$

donc $\left(vect(\{\overrightarrow{n}\})\right)^{\perp}=P$ c'est-à-dire $\left(vect(\{(1,-2,3)\})\right)^{\perp}=P$
Par suite $\left(\left(vect(\{(1,-2,3)\})\right)^{\perp}\right)^{\perp}=P^{\perp}$ donc $P^{\perp}=vect(\{(1,-2,3)\})$

IV. Projection orthogonale sur un sous-espace et procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soient E un espace euclidien, muni d'un produit scalaire $<\cdot|\cdot>$ et F un sous-espace vectoriel de E.

Donc on a : $E = F \oplus F^{\perp}$ par suite : $\forall u \in E, \exists ! u_F \in F, \exists ! u_{F^{\perp}} \in F^{\perp}$, tel que $u = u_F + u_{F^{\perp}}$

On note $u_F = p(u)$ et on l'appelle la projection orthogonale de u sur F .

Pour chaque $u \in E$, $p(u)$ est caractérisé par les deux conditions : $\begin{cases} p(u) \in F \\ (u - p(u)) \in F^{\perp} \end{cases}$

On définit ainsi une application $p : E \to F$ caractérisée par : $\forall u \in E$, $\begin{cases} p(u) \in F \\ (u - p(u)) \in F^{\perp} \end{cases}$

On montre que p est une application **linéaire** vérifiant : $\operatorname{Im}(p) = F$ et $Ker(p) = F^{\perp}$

Remarques (importantes)

1) Si $u \in F$ alors $p(u) = u$

car $\begin{cases} u \in F \\ (u - u = 0_E) \in F^{\perp} \end{cases}$ ou parce que $u = u + 0_E$ où $u = u_F$ et $u_{F^{\perp}} = 0_E$

2) Si $u \in F^{\perp}$ alors $p(u) = 0_E$ car $u = 0_E + u$ où $u_F = 0_E$ et $u_{F^{\perp}} = u$

3) $\forall u \in E$, $p(p(u)) = p(u)$ car $p(u) \in F$ et d'après la remarque 1).

Donc si p désigne la projection orthogonale sur F , alors $p \circ p = p$.

Exemple

On considère $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire usuel.

Soit P le plan vectoriel de $\mathbf{R}^3$ d'équation cartésienne : $x - 2y + 3z = 0$. Donc $P^{\perp} = vect(\{(1,-2,3)\})$

1) Déterminez la projection orthogonale de $u = (-1,1,1)$ sur P .

2) Déterminez la projection orthogonale de $v = (0,1,1)$ sur P .

Réponses

1) Notons $p(u) = (x, y, z)$ la projection orthogonale de $u = (-1,1,1)$ sur P

Donc $\begin{cases} p(u) \in P \\ (u - p(u)) \in P^{\perp} \end{cases}$

D'où $\begin{cases} (x, y, z) \in P \\ ((-1,1,1) - (x, y, z)) \in P^{\perp} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ (-1 - x, 1 - y, 1 - z) \in P^{\perp} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ (-1 - x, 1 - y, 1 - z) \in vect(\{(1,-2,3)\}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ \exists \lambda \in \mathbf{R}, (-1 - x, 1 - y, 1 - z) = \lambda(1,-2,3) = (\lambda, -2\lambda, 3\lambda) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ \exists \lambda \in \mathbf{R}, -1 - x = \lambda \\ 1 - y = -2\lambda \\ 1 - z = 3\lambda \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z=0 \\ \exists \lambda \in \mathbf{R}, x=-1-\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=1-3\lambda \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1-\lambda-2(1+2\lambda)+3(1-3\lambda)=0 \\ \exists \lambda \in \mathbf{R}, x=-1-\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=1-3\lambda \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -14\lambda=0 \\ \exists \lambda \in \mathbf{R}, x=-1-\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=1-3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=0 \\ x=-1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$$

Conclusion : La projection orthogonale de $u=(-1,1,1)$ sur P est $p(u)=(-1,1,1)=u$
On aurait pu éviter les calculs ci-dessus en remarquant que $u \in P$: en effet
L'équation cartésienne du plan P est $x-2y+3z=0$ et $-1-(2\times 1)+(3\times 1)=0$
D'où $u \in P$, par suite $p(u)=u$ (cf. remarque ci-dessus).

2) Idem notons $p(v)=(x,y,z)$ la projection orthogonale de $v=(0,1,1)$ sur P.

Donc $\begin{cases} p(v) \in P \\ \big(v-p(v)\big) \in P^{\perp} \end{cases}$

D'où $\begin{cases} (x,y,z) \in P \\ \big((0,1,1)-(x,y,z)\big) \in P^{\perp} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z=0 \\ (-x,1-y,1-z) \in P^{\perp} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z=0 \\ (-x,1-y,1-z) \in vect(\{(1,-2,3)\}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z=0 \\ \exists \lambda \in \mathbf{R}, (-x,1-y,1-z)=\lambda(1,-2,3)=(\lambda,-2\lambda,3\lambda) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z=0 \\ \exists \lambda \in \mathbf{R}, -x=\lambda \\ 1-y=-2\lambda \\ 1-z=3\lambda \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z=0 \\ \exists \lambda \in \mathbf{R}, x=-\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=1-3\lambda \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda-2(1+2\lambda)+3(1-3\lambda)=0 \\ \exists \lambda \in \mathbf{R}, x=-\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=1-3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=\dfrac{1}{14} \\ x=-\dfrac{1}{14} \\ y=\dfrac{8}{7} \\ z=\dfrac{11}{14} \end{cases}$$

Conclusion : La projection orthogonale de $v=(0,1,1)$ sur P est :

$p(v)=(-\frac{1}{14},\frac{8}{7},\frac{11}{14})=\frac{1}{14}(-1,16,11)$.

En utilisant **une base orthonormée** du sous-espace F, on a alors une **autre méthode** pour déterminer la projection orthogonale d'un vecteur sur F (cf. le théorème suivant) :

Définition (base orthonormée)

Soit E un espace euclidien, muni d'un produit scalaire $<\cdot|\cdot>$.

On considère F un sous-espace vectoriel de E et $B_F=\{a_1,a_2,\ldots,a_q\}$ une base de F .

On dit que $B_F=\{a_1,a_2,\ldots,a_q\}$ est une base orthonomée si :

$\forall(i,j)\in(\{1,2,\ldots,q\})^2$, si $i\neq j$ on a : $<a_i|a_j>=0$ c'est-à-dire a_i et a_j sont orthogonaux.

et $\forall i\in\{1,2,\ldots,q\}$, $<a_i|a_i>=1$ c'est-à-dire $\|a_i\|=1$

Théorème (très pratique)

Soient E un espace euclidien, muni d'un produit scalaire $<\cdot|\cdot>$ et F un sous-espace vectoriel de E .

Si $B_F=\{a_1,a_2,\ldots,a_q\}$ est une base orthonormée de F alors

Pour tout $u\in E$, la projection orthogonale de u sur F est

$$p(u)=<u|a_1>a_1+<u|a_2>a_2+\cdots+<u|a_q>a_q=\sum_{k=1}^{k=q}<u|a_k>a_k$$

Preuve

On suppose que $\dim(E)=n$.

On sait que $E=F\oplus F^{\perp}$, considérons alors $B_{F^{\perp}}=\{a_{q+1},a_{q+2},\ldots,a_n\}$ une base de $F^{\perp}$ tel que $B_F\cup B_{F^{\perp}}$ soit une base de E .

Soit $u\in E$ et notons $p(u)$ la projection orthogonale de u sur F .

Donc $\exists\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\in\mathbf{R}$, tel que $u=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\cdots+\lambda_q a_q+\lambda_{q+1}a_{q+1}+\cdots+\lambda_n a_n$

et $p(u)=\lambda_1 p(a_1)+\lambda_2 p(a_2)+\cdots+\lambda_q p(a_q)+\lambda_{q+1}p(a_{q+1})+\cdots+\lambda_n p(a_n)$ car p est linéaire.

D'où $p(u)=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\cdots+\lambda_q a_q+\lambda_{q+1}0_E+\cdots+\lambda_n 0_E$ car

pour $v\in F$ on a $p(v)=v$ et pour $w\in F^{\perp}$ on a $p(w)=0_E$.

Donc $p(u)=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\cdots+\lambda_q a_q$ (1)

De plus $u=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\cdots+\lambda_q a_q+\lambda_{q+1}a_{q+1}+\cdots+\lambda_n a_n$ d'où

$$< u\,|a_1) > = <\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_q a_q + \lambda_{q+1} a_{q+1} + \cdots + \lambda_n a_n\,|a_1 >$$
$$= \lambda_1 < a_1\,|a_1 > + \lambda_2 < a_2\,|a_1 > + \cdots + \lambda_q < a_q\,|a_1 > + \lambda_{q+1} < a_{q+1}\,|a_1 > + \cdots + \lambda_n < a_n\,|a_1 >$$
$$= \lambda_1$$

car $B_F = \{a_1, a_2, \ldots, a_q\}$ est une base orthonormée de F et $B_{F^\perp} = \{a_{q+1}, a_{q+2}, \ldots, a_n\}$ une base de $F^\perp$. Idem pour $k \in \{1, 2, \ldots, q\}$,

$$< u\,|a_k) > = <\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_q a_q + \lambda_{q+1} a_{q+1} + \cdots + \lambda_n a_n\,|a_k > = \lambda_k$$

Par suite d'après (1) on a : $p(u) = < u\,|a_1 > a_1 + < u\,|a_2 > a_2 + \cdots + < u\,|a_q > a_q = \sum_{k=1}^{k=q} < u\,|a_k > a_k$.

Avant de traiter un exemple utilisant le théorème précédent, présentons l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

- **Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt**

Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt consiste à construire une base orthonormée à partir d'une base quelconque.

Théorème

Soit E un espace euclidien, muni d'un produit scalaire $<\cdot|\cdot>$.

On considère F un sous-espace vectoriel de E et $B_F = \{a_1, a_2, \ldots, a_q\}$ une base de F ,

Alors il existe $B'_F = \{b_1, b_2, \ldots, b_q\}$ une base orthonormée de F .

Preuve

On a $a_1 \neq 0_E$, car $B_F = \{a_1, a_2, \ldots, a_q\}$ est une famille libre , donc $\|a_1\| \neq 0$, on note alors

$b_1 = \dfrac{a_1}{\|a_1\|}$ et $\|b_1\| = 1$ car $\|b_1\| = \left\|\dfrac{a_1}{\|a_1\|}\right\| = \dfrac{1}{\|a_1\|}\|a_1\| = 1$

On pose : $b_2 = \dfrac{a_2 - < a_2\,|b_1 > b_1}{\|a_2 - < a_2\,|b_1 > b_1\|}$ (on remarque que $\|b_2\| = 1$, puisque $\|b_1\| = 1$, la projection orthogonale de a_2 sur $D = vect(\{b_1\})$ est $p_D(a_2) = < a_2\,|b_1 > b_1$, donc $(a_2 - p_D(a_2)) \in D^\perp$ d'où $b_2 \in vect(\{b_1\})^\perp$ c'est-à-dire $< b_2\,|b_1 > = 0$)

Idem on pose : $b_3 = \dfrac{a_3 - (< a_3\,|b_1 > b_1 + < a_3\,|b_2 > b_2)}{\|a_3 - (< a_3\,|b_1 > b_1 + < a_3\,|b_2 > b_2)\|}$,

on a donc $\|b_3\| = 1$ et $b_3 \in vect(\{b_1, b_2\})^\perp$ d'où $< b_3\,|b_1 > = 0$ et $< b_3\,|b_2 > = 0$

On construit ainsi de proche en proche, pour $k \in \{1, 2, \ldots, q\}$, les vecteurs

$$b_k = \frac{a_k - \left(\sum_{i=1}^{i=k-1} < a_k\,|b_i > b_i\right)}{\left\|a_k - \left(\sum_{i=1}^{i=k-1} < a_k\,|b_i > b_i\right)\right\|}$$

On vérifie sans peine que $vect(\{a_1, a_2, \ldots, a_q\}) = vect(\{b_1, b_2, \ldots, b_q\})$ et que $B'_F = \{b_1, b_2, \ldots, b_q\}$ est une base orthonormée de F .

Remarque

On considère E un espace euclidien muni d'un produit scalaire $<\cdot|\cdot>$.

Soient $a \in E$ tel que $a \neq 0_E$ et $D = vect(\{a\})$ donc $D = vect(\left\{\frac{a}{\|a\|}\right\})$ et $\left\|\frac{a}{\|a\|}\right\| = 1$

D'où pour tout $u \in E$, la projection orthogonale de u sur D est $p_D(u) = < u \mid \frac{a}{\|a\|} > \frac{a}{\|a\|}$

En particulier si $\|a\| = 1$, alors la projection orthogonale de u sur D est $p_D(u) = < u \mid a > a$

Exemples

1) On considère $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et $B = \{a_1, a_2, a_3\}$ une base de $\mathbf{R}^3$ où $a_1 = (1,1,1)$; $a_2 = (1,1,0)$ et $a_3 = (1,0,0)$

Déterminez une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$ autre que la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $B = \{a_1, a_2, a_3\}$.

On note $b_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|}$; $b_2 = \frac{a_2 - < a_2 \mid b_1 > b_1}{\|a_2 - < a_2 \mid b_1 > b_1\|}$ et $b_3 = \frac{a_3 - (< a_3 \mid b_1 > b_1 + < a_3 \mid b_2 > b_2)}{\|a_3 - (< a_3 \mid b_1 > b_1 + < a_3 \mid b_2 > b_2)\|}$

On a : $\|a_1\| = \sqrt{3}$ donc $b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$

$$a_2 - < a_2 \mid b_1 > b_1 = (1,1,0) - \frac{2\sqrt{3}}{3}(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}) = (1,1,0) - (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3})$$

$\|a_2 - < a_2 \mid b_1 > b_1\| = \left\|(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3})\right\| = \frac{\sqrt{6}}{3}$ donc

$$b_2 = \frac{(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3})}{\frac{\sqrt{6}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{6}}(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}) = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}) = (\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{-\sqrt{6}}{3})$$

$$\begin{aligned} a_3 - (< a_3 \mid b_1 > b_1 + < a_3 \mid b_2 > b_2) &= (1,0,0) - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}) + \frac{\sqrt{6}}{6}(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{-\sqrt{6}}{3})\right) \\ &= (1,0,0) - \left((\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) + (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{-1}{3})\right) \\ &= (1,0,0) - (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) = (\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 0) \end{aligned}$$

$$\|a_3 - (< a_3 \mid b_1 > b_1 + < a_3 \mid b_2 > b_2)\| = \left\|(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 0)\right\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$b_3 = \frac{(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 0)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 0) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, 0)$$

Conclusion : $B' = \{b_1, b_2, b_3\}$ est une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$ où

$b_1 = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$; $b_2 = (\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{-\sqrt{6}}{3})$ et $b_3 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, 0)$.

2) Soit $E=\mathbf{R}_1[X]=\{aX+b / a\in\mathbf{R}, b\in\mathbf{R}\}$ muni du produit scalaire suivant :

Pour $(P,Q)\in E^2$, $<P|Q>=\int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$, donc $\|P\|=\sqrt{<P|P>}=\sqrt{\int_0^1 P(t)^2\,dt}$

Soit $B=\{P_1,P_2\}$ où $P_1=1$ et $P_2=X$. $B=\{P_1,P_2\}$ n'est pas une base orthonormée de

$E=\mathbf{R}_1[X]$ car $<P_1|P_2>=\int_0^1 P_1(t)P_2(t)\,dt=\int_0^1 t\,dt=\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}\neq 0$. (*)

Construisons une base orthonormée de $E=\mathbf{R}_1[X]$ pour le produit scalaire

$<P|Q>=\int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$

On note $Q_1=\frac{P_1}{\|P_1\|}=P_1=1$ car $\|P_1\|=\sqrt{\int_0^1 1\,dt}=\sqrt{[t]_0^1}=\sqrt{1}=1$

et $Q_2=\frac{P_2-<P_2|Q_1>Q_1}{\|P_2-<P_2|Q_1>Q_1\|}$

$<P_2|Q_1>=\int_0^1 P_2(t)Q_1(t)\,dt=\int_0^1 t\,dt=\frac{1}{2}$ d'après (*)

D'où $P_2-<P_2|Q_1>Q_1=X-\frac{1}{2}$ et $\|P_2-<P_2|Q_1>Q_1\|=\sqrt{\int_0^1 (t-\frac{1}{2})^2\,dt}$ d'où

$$\|P_2-<P_2|Q_1>Q_1\|=\sqrt{\left[\frac{1}{3}(t-\frac{1}{2})^3\right]_0^1}=\sqrt{\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3-\frac{1}{3}\times\left(\frac{-1}{2}\right)^3}=\sqrt{\frac{2}{3}\times\frac{1}{8}}=\sqrt{\frac{1}{12}}=\frac{1}{\sqrt{12}}$$

Donc $Q_2=\frac{P_2-<P_2|Q_1>Q_1}{\|P_2-<P_2|Q_1>Q_1\|}=\frac{X-\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{12}}}=\sqrt{12}\left(X-\frac{1}{2}\right)$

Conclusion : $B'=\{Q_1,Q_2\}$ est une base orthonormée de $\mathbf{R}_1[X]$

où $Q_1=1$ et $Q_2=\sqrt{12}\left(X-\frac{1}{2}\right)$

3) On considère $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire usuel.
Soit P le plan vectoriel de $\mathbf{R}^3$ d'équation cartésienne : $x-2y+3z=0$.
Déterminez la projection orthogonale de $v=(0,1,1)$ sur P.

Réponse

On calculera la projection orthogonale de $v=(0,1,1)$ sur P **en utilisant une base orthonormée** de P.

Il est facile de prouver que $B=\{a_1,a_2\}$ est une base de P où $a_1=(2,1,0)$ et $a_2=(-3,0,1)$

B n'est pas orthonormée car $\|a_1\|=\sqrt{5}\neq 1$.

Déterminons une base orthonormée de P en utilisant le procédé de Gram-Schmidt.

On note $b_1=\frac{a_1}{\|a_1\|}$ et $b_2=\frac{a_2-<a_2|b_1>b_1}{\|a_2-<a_2|b_1>b_1\|}$

D'où $b_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1,0)=(\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5},0)$

On a : $a_2 - \langle a_2 | b_1 \rangle b_1 = (-3,0,1) - (-\frac{6\sqrt{5}}{5})(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, 0) = (\frac{-3}{5}, \frac{6}{5}, 1)$

$\|a_2 - \langle a_2 | b_1 \rangle b_1\| = \left\|(\frac{-3}{5}, \frac{6}{5}, 1)\right\| = \sqrt{\frac{14}{5}}$ d'où $b_2 = \sqrt{\frac{5}{14}}(\frac{-3}{5}, \frac{6}{5}, 1)$

Conclusion : $B' = \{b_1, b_2\}$ est une base orthonormée de P où $b_1 = (\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, 0)$ et

$b_2 = \sqrt{\frac{5}{14}}(\frac{-3}{5}, \frac{6}{5}, 1)$

Donc la projection orthogonale de $v = (0,1,1)$ sur P est $p(v) = \langle v | b_1 \rangle b_1 + \langle v | b_2 \rangle b_2$

D'où $p(v) = \frac{\sqrt{5}}{5} b_1 + \frac{11}{5}\sqrt{\frac{5}{14}} b_2 = \frac{1}{14}(-1, 16, 11)$

4) Soit $E = \mathbf{R}_3[X] = \{aX^3 + bX^2 + cX + d \,/\, a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}, c \in \mathbf{R}, d \in \mathbf{R}\}$ muni du produit scalaire suivant : pour $(P,Q) \in E^2$, $\langle P | Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$, pour $\|P\| = \sqrt{\langle P | P \rangle} = \sqrt{\int_0^1 P(t)^2\,dt}$.
et on considère $F = \mathbf{R}_1[X] = vect(\{P_1, P_2\})$ le plan de $\mathbf{R}_3[X]$ où $P_1 = 1$ et $P_2 = X$.
Déterminez la projection orthogonale de $P = 2X^2 - X + 3$ sur F

Réponse

On calculera la projection orthogonale de P sur F **en utilisant une base orthonormée** de F .
Nous avons déjà montré que $B' = \{Q_1, Q_2\}$ est une base orthonormée de $F = \mathbf{R}_1[X]$
où $Q_1 = 1$ et $Q_2 = \sqrt{12}\left(X - \frac{1}{2}\right)$

Notons $p_F(P)$ la projection orthogonale de P sur F d'où

$p_F(P) = \langle P | Q_1 \rangle Q_1 + \langle P | Q_2 \rangle Q_2$

$$\langle P | Q_1 \rangle = \int_0^1 P(t)Q_1(t)\,dt = \int_0^1 (2t^2 - t + 3)\,dt = \left[\frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 3t\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 3 = \frac{19}{6}$$

$$\langle P | Q_2 \rangle = \int_0^1 P(t)Q_2(t)\,dt = \int_0^1 (2t^2 - t + 3)\sqrt{12}\left(t - \frac{1}{2}\right)dt = \sqrt{12}\int_0^1 (2t^2 - t + 3)\left(t - \frac{1}{2}\right)dt$$

Donc $\langle P | Q_2 \rangle = \sqrt{12}\int_0^1 (2t^3 - 2t^2 + \frac{7}{2}t - \frac{3}{2})\,dt = \sqrt{12}\left[\frac{1}{2}t^4 - \frac{2}{3}t^3 + \frac{7}{4}t^2 - \frac{3}{2}t\right]_0^1 = \frac{\sqrt{12}}{12}$

Conclusion :

La projection orthogonale de P sur F est $p_F(P) = \frac{19}{6}Q_1 + \frac{\sqrt{12}}{12}Q_2$

c'est-à-dire $p_F(P) = \frac{19}{6} + (X - \frac{1}{2}) = X + \frac{8}{3}$

V. Distance à un sous-espace (complément)

On considère E un espace euclidien muni d'un produit scalaire $<\cdot|\cdot>$.

Pour $(u,v)\in E^2$, on note $d(u,v)=\|u-v\|$ appelé distance de u à v.

Si A est une partie quelconque non vide de E et $u\in E$, on définit la distance de u à A, notée $d(u,A)$, par : $d(u,A)=\inf\{d(u,v)/v\in A\}=\inf\{\|u-v\|/v\in A\}$

On note aussi $d(u,A)=\inf\limits_{v\in A}\left(\|u-v\|\right)$.

En général, il n'est pas facile de calculer $d(u,A)$.

Théorème

On considère E un espace euclidien muni d'un produit scalaire $<\cdot|\cdot>$.

Si F est un sous-espace vectoriel de E et $u\in E$ alors $d(u,F)=\|u-p_F(u)\|$

Preuve……

Exemples

1) Si E est un espace euclidien muni d'un produit scalaire $<\cdot|\cdot>$ et F un sous-espace vectoriel de E alors

- pour $u\in F$ on a $d(u,F)=\|u-u\|=0$ car pour $u\in F$ on a $p_F(u)=u$.
- pour $u\in F^{\perp}$ on a $d(u,F)=\|u-0_E\|=\|u\|$ car pour $u\in F^{\perp}$ on a $p_F(u)=0_E$.

2) On considère $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire usuel.

Soit P le plan vectoriel de $\mathbf{R}^3$ d'équation cartésienne : $x-2y+3z=0$.

On sait que la projection orthogonale de $v=(0,1,1)$ sur P est $p(v)=\frac{1}{14}(-1,16,11)$

Donc $d(v,P)=\|v-p(v)\|=\left\|(0,1,1)-\left(\frac{-1}{14},\frac{16}{14},\frac{11}{14}\right)\right\|=\left\|(\frac{1}{14},\frac{-2}{14},\frac{3}{14}\right\|=\frac{\sqrt{14}}{14}$

3) Soit $E=\mathbf{R}_3[X]=\{aX^3+bX^2+cX+d/a\in\mathbf{R},b\in\mathbf{R},c\in\mathbf{R},d\in\mathbf{R}\}$ muni du produit scalaire suivant : pour $(P,Q)\in E^2$, $<P|Q>=\int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$, $\|P\|=\sqrt{<P|P>}=\sqrt{\int_0^1 P(t)^2\,dt}$.

Soit $F=\mathbf{R}_1[X]$, on sait que la projection orthogonale de $P=2X^2-X+3$ sur F est $p_F(P)=X+\frac{8}{3}$ donc $d(P,F)=\|P-p_F(P)\|=\left\|2X^2-X+3-X-\frac{8}{3}\right\|=\left\|2X^2-2X+\frac{1}{3}\right\|$

D'où $d(P,F)=\sqrt{\int_0^1\left(2t^2-2t+\frac{1}{3}\right)^2dt}=\sqrt{\int_0^1(4t^4-8t^3+\frac{16}{3}t^2-\frac{4}{3}t+\frac{1}{9})\,dt}=\frac{\sqrt{45}}{45}$