esiea
ECOLE D'INGENIEURS
DU MONDE NUMERIQUE

MAT 2051 TD 3

Exercice 1.

On considère $E=\mathbf{R}_2[X]=vect(\{1,X,X^2\})$ l'ensemble des polynômes P à coefficients réels tel que $\deg(P)\leq 2$, muni du produit scalaire $<\cdot \mid \cdot>$ défini par :

Pour $(P,Q)\in E^2$, $< P \mid Q >=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$

Calculer $< P \mid X >$ pour $P\in\{1,X,X^2\}$

Exercice 2.

Soit E un $\mathbf{R}$ - espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $<\cdot \mid \cdot>$.

Pour $u\in E$, on pose $\|u\|=\sqrt{< u \mid u >}$

Montrer que si $u\in E$ et $u\neq 0_E$ alors le vecteur $v=\frac{u}{\|u\|}$ vérifie $\|v\|=1$

Exercice 3.

On considère l'application φ définie sur $\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2$ par :

$\forall(u,v)\in\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2$, si $u=(x,y)$ et $v=(x',y')$ on a : $\varphi(u,v)=4xx'-xy'-x'y+2yy'$

1) On note $u_1=(1,2)$ et $u_2=(3,-2)$ calculer $\varphi(u_1,u_2)$

2) Soit $(a,b)\in\mathbf{R}^2$, posons $u=(a,b)$ calculer $\varphi(u,u)$

3) Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbf{R}^2$

4) Prouver que $B=\{u_1;u_2\}$ est une base orthogonale de $\mathbf{R}^2$ pour le produit scalaire φ ; c'est-à-dire B est une base de $\mathbf{R}^2$ et $\varphi(u_1,u_2)=0$.

5) Déterminer une base orthonormée $B'=\{v_1;v_2\}$ de $\mathbf{R}^2$ pour le produit scalaire φ ; c'est-à-dire B' est une base orthogonale de $\mathbf{R}^2$ et $\|v_1\|=\|v_2\|=1$ où $\forall u\in\mathbf{R}^2, \|u\|=\sqrt{\varphi(u,u)}$.

Exercice 4.

On considère l'application φ définie sur $\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2$ par :

$\forall(u,v)\in\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2$, si $u=(x,y)$ et $v=(x',y')$ on a : $\varphi(u,v)=2xx'-2yy'+xy'+x'y$

φ est-elle un produit scalaire sur $\mathbf{R}^2$?

Exercice 5.

Soient E un $\mathbf{R}$ - espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $<\cdot \mid \cdot>$ et $(u,v,w)\in E^3$

1) Montrer que $\forall u\in E$, $< 0_E \mid u >=0$ où 0_E désigne le vecteur nul de E.

2) Calculer $< u+v \mid u+v >$

3) Montrer le théorème de Pythagore : si u et v sont orthogonaux alors $\|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$

4) Montrer que si $v-w$ est orthogonal à u et v est orthogonal à $w-u$.
alors w est orthogonal à $u-v$

Exercice 6.

On considère $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire usuel.

Soient $a=(-1,1,-1)$, $b=(2,2,0)$ et $c=(-1,1,2)$ des vecteurs de $\mathbf{R}^3$.

Montrer que $vect(\{c\})=(vect(\{a,b\}))^{\perp}$

Exercice 7.

On considère $\mathbf{R}^4$ muni du produit scalaire usuel.

Déterminez l'orthogonal du sous espace F de $\mathbf{R}^4$ d'équations :

$$\begin{cases} -x_1+x_2+x_3-2x_4=0 \\ x_1+2x_2+x_4=0 \end{cases}$$

Exercice 8.

Dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$ usuel, on note E le plan d'équation cartésienne $x-y=0$

1) Déterminer la projection orthogonale de $u=(1,1,1)$ sur E.

2) Déterminer la projection orthogonale de $v=(-2,2,0)$ sur E.

3) Déterminer la projection orthogonale de $w=(1,0,1)$ sur E (de deux manières différentes)

Exercice 9.

Soit E un $\mathbf{R}$ - espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $< \cdot \mid \cdot >$.

On note $B=\{a_1,a_2,a_3\}$ une famille de E formée de vecteurs non nuls deux à deux orthogonaux c'est-à-dire $\forall i\in\{1,2,3\}, \forall j\in\{1,2,3\},\ i\neq j,\ < a_i \mid a_j > = 0$.

Montrer que la famille $B=\{a_1,a_2,a_3\}$ est libre.

Exercice 10.

Dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$ usuel, on note F le plan d'équation cartésienne $x-y+z=0$.

1) Donner sans justifier une base orthogonale $\{v_1,v_2\}$ du plan F.

2) Donner un vecteur v_3 tel que $\{v_1,v_2,v_3\}$ soit une base orthogonale de $\mathbf{R}^3$.

3) Donner la matrice, par rapport à la base $\{v_1,v_2,v_3\}$, de la projection orthogonale p sur le plan F

Exercice 11.

Soit $n\in\mathbf{N}$, $n\geq 3$.

On considère $E=\mathbf{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes P à coefficients réels tel que $\deg(P)\leq n$, muni du produit scalaire $< \cdot \mid \cdot >$ défini par :

Pour $(P,Q)\in E^2$, $< P \mid Q >=\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$

1) Soit $F=vect(\{1,X,X^3\})$

Construire par le procédé de Gram-Schmidt une base orthonormée $\{Q_1,Q_2,Q_3\}$ de F.

2) Exprimer dans la base $\{Q_1,Q_2,Q_3\}$ la projection orthogonale de X^2 sur F