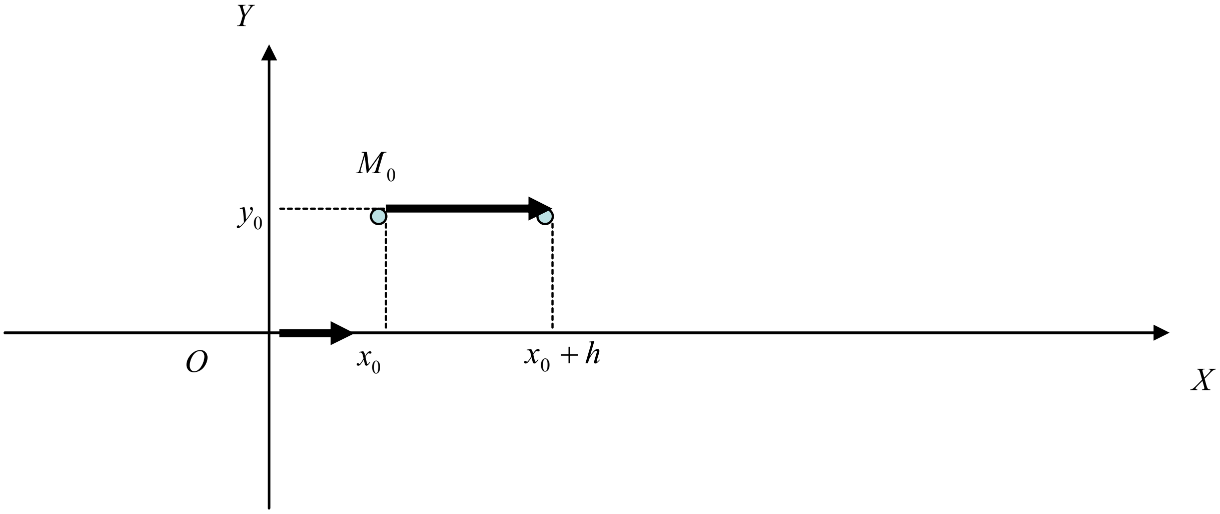
4. DERIVEES DIRECTIONNELLES

a) Dérivation par rapport à x, par rapport à y :

Dériver par rapport à x en un point (x_0, y_0) c'est calculer la pente de la surface au point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ dans la direction Ox.

On ajoute un petit accroissement à x (y étant fixé égal à y_0) et on étudie le taux de variation: $\dfrac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$

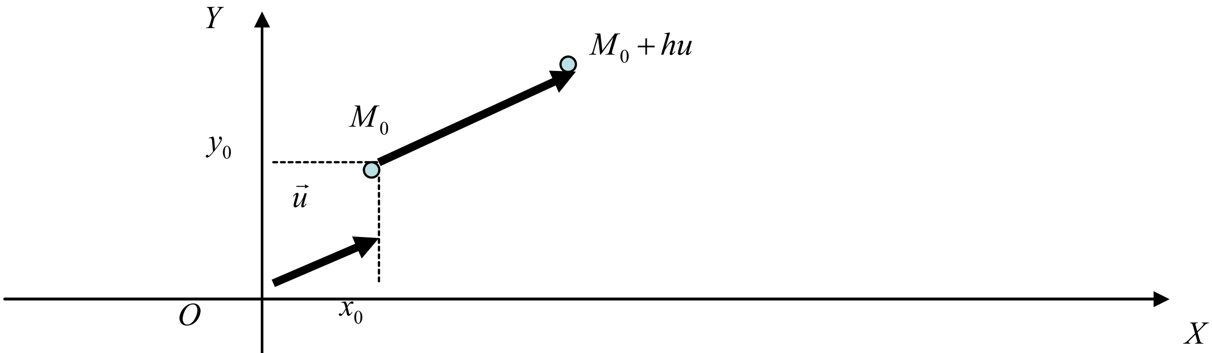


b) Dérivation dans une direction donnée

Une direction est la donnée d'un vecteur unitaire : u=(cos(t) , sin(t)).
Pour dériver dans la direction donnée par u au point $M_0(x_0, y_0)$, on ajoute un petit accroissement de la forme « h u » et on étudie le taux de variation:

$$\frac{f(x_0 + h\cos t, y_0 + h\sin t) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Si ce taux de variation admet une limite finie quand h tend vers 0, on dit que la fonction **f est dérivable au point** $M_0(x_0, y_0)$ **dans la direction t** (direction donnée par le vecteur u).
Et on note cette dérivée : $\dfrac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0)$



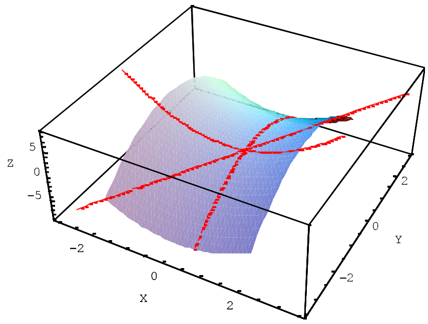
Exemple :
Etude de la dérivée au point (0.5 ; -0,5) dans la direction 45° de f définie : $f(x,y) = x^2 - y^2$.
Quel est le vecteur u qui donne la direction 45° ?

Calculer le taux de variation de f au point (0.5 ; -0,5) dans cette direction :

f est-elle dérivable au point (0.5 ; -0,5) dans la direction 45° ?

Si oui préciser $\dfrac{\partial f}{\partial u}(0{,}5;-0{,}5)$:

Interpréter le graphe suivant :



c) Dérivée suivant un vecteur non nul
Etant donné un vecteur non nul u de coordonnées (a,b), on définit la **dérivée de f suivant le vecteur u** en un point $M_{à}(x_0, y_0)$ par la limite du taux de variation quand elle existe :

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0}\left(\frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}\right)$$