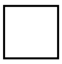
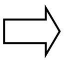
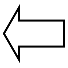
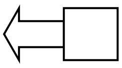
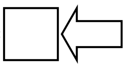
Loi de composition interne et groupe

Exercice 1.
Soit E un ensemble de forme géométriques du plan contenant les éléments a, b et c où :

$a =$  ; $b =$  et $c =$ 

Soit « $*$ » une loi de composition interne sur E définie par:
$\forall(x, y) \in E^2; \ x * y$ est la forme géométrique obtenue en faisant faire un demi-tour à la figure obtenue en plaçant x à gauche de y.
Exemples :

$a * b =$ 

$b * a =$ 

1) Calculer : $a * c$ et $b * c$
2) Calculer : $a *(b * c)$, $(a * b) * c$ et $(a * b) * a$
3) La loi « $*$ » est-elle commutative ?
4) La loi « $*$ » est-elle associative ?

Exercice 2. On considère $\mathbf{R}$ muni de la loi de « $*$ » définie par :
Si $(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, $x * y = |x - y|$
Et on considère $\mathbf{R}^+$ muni de la loi de « $\perp$ » définie par :
Si $(x, y) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$, $x \perp y = |x - y|$

a) La loi « $*$ » est-elle une loi de composition interne dans $\mathbf{R}$?
b) $\mathbf{R}$ muni de la loi « $*$ » admet-il un élément neutre ?
c) La loi « $\perp$ » est-elle une loi de composition interne dans $\mathbf{R}^+$?
d) $\mathbf{R}^+$ muni de la loi « $\perp$ » admet-il un élément neutre ?

Exercice 3.
On considère $\mathbf{R}^*$ muni de la loi de composition interne « $*$ » définie par :
Si $(x, y) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}^*$, $x * y = \dfrac{x}{y}$

a) La loi « $*$ » est-elle commutative ?
b) La loi « $*$ » est-elle associative ?
c) $\mathbf{R}^*$ muni de la loi « $*$ » admet-il un élément neutre ?

Exercice 4. On note $E = \{a + b\sqrt{2} \ / \ a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z}\}$
a) Montrer que E est stable par l'addition et la multiplication
b) (E ,+) est-il un groupe ?
c) (E ,x) est-il un groupe ? (E^* ,x) est-il un groupe ? où $E^* = \{x \in E / x \neq 0\}$

Exercice 5.
On note $E=\{ f_1 , f_2 , f_3 , f_4\}$ l'ensemble des applications suivantes **:**
$f_1 : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}^*$; $f_2 : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}^*$; $f_3 : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}^*$ et $f_4 : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}^*$ définies par :
Pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, $f_1(x) = x$; $f_2(x) = -x$; $f_3(x) = \frac{1}{x}$ et $f_4(x) = \frac{-1}{x}$.

a) On admet que la loi « $\circ$ » composition usuelle de fonctions est une loi de composition interne sur E
b) Si $f \in E$ a-t-on $f \circ f = f_1$? $(E,\circ)$ est-il un groupe ?

Exercice 6.

Les éléments du groupe $(S_3,\circ)$ sont :
$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;
$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Les propositions ci-dessous sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez vos réponses

a) $(\{id\},\circ)$ est un groupe abélien
b) $(\{id,\sigma_1\},\circ)$ est un groupe
c) $(S_3,\circ)$ est un groupe abélien
d) Calculer $\sigma_4 \circ \sigma_5$ et $\sigma_5 \circ \sigma_4$. Que peut-on en déduire ?
e) Si $\sigma \in S_3$ et $\tau \in S_3$ vérifie $\sigma^2 = \tau^2$ alors $\sigma = \tau$
f) Si $\sigma \in S_3$ et $\tau \in S_3$ alors on a : $(\sigma \circ \tau)^2 = \sigma^2 \circ \tau^2$
g) Si $\sigma \in S_3$ et $\tau \in S_3$ alors on a : $(\sigma \circ \tau)^{-1} = \sigma^{-1} \circ \tau^{-1}$

Exercice 7. Soient $(G,.)$ et $(E,+)$ deux groupes **non commutatifs**.
1) Montrer que si $(a,x) \in G^2$ alors $(a^{-1}\, x\, a)^2 = a^{-1} x^2\, a$
2) Pour $(x,y) \in E^2$ calculez $2(-x+y+x)$

Exercice 8. On considère l'ensemble $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} ;\ a \in \mathbf{R}^* \right\}$ muni de la multiplication usuelle des matrices « $\times$ »
1) Montrer que la loi « $\times$ » est une opération interne dans E
2) Montrer que $(E,\times)$ admet un élément neutre
3) $(E,\times)$ est-il un groupe ?

Exercice 9. Soit $(S_3,\circ)$ le groupe des permutations de $\{1,2,3\}$ dont les éléments sont :
$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; $\tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Parmi les ensembles suivants, quels sont les sous-groupes de $(S_3,\circ)$?
$\{Id\}$; $\{Id;\tau_1\}$; $\{\sigma_1;\tau_1\}$; $\{Id;\tau_2\}$; $\{Id;\tau_2;\tau_1;\sigma_1\}$ et $\{Id;\tau_2;\tau_1;\sigma_1;\sigma_2\}$