Réseaux de Petri
Le formalisme mathématique
Propriétés comportementales

CHIRAZ TRABELSI

trabelsi@esiea.fr

Et

ALEXANDRE BRIERE

briere@esiea.fr

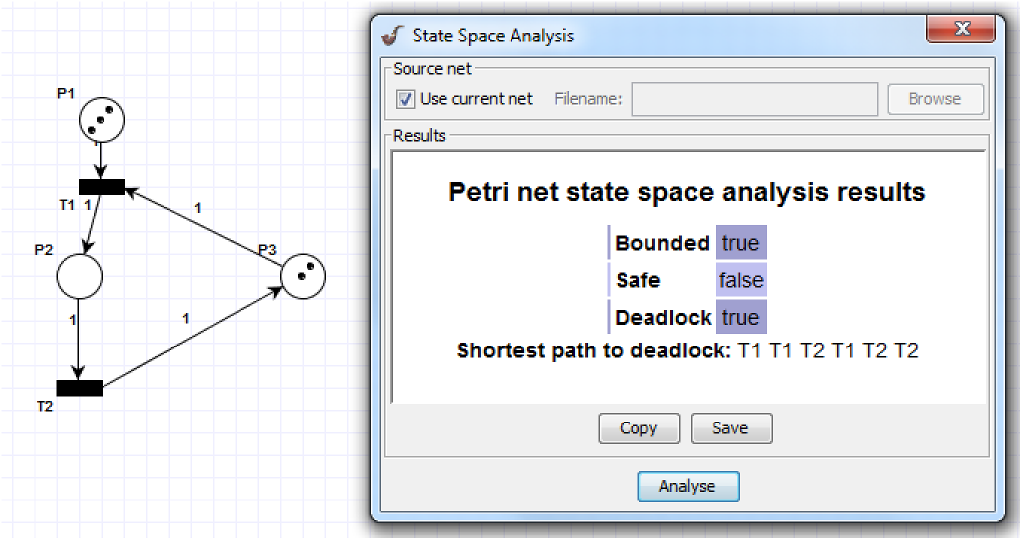
Propriétés d’un RdP

- Le formalisme mathématique permet de vérifier des propriétés d’un RdP
- En vérifiant certaines propriétés d’un RdP, on peut vérifier son bon fonctionnement et sa conformité au cahier de charges du système décrit
- Exemples:
  - Est-ce que le nombre de jetons circulant dans le réseau reste borné ou non (détection des débordements si les places concernées représentent des mémoires de taille limitée ou un lieu de stockage de taille limitée)?
  - Est-ce qu’il y a une partie du réseau qui n’évolue pas (détection des blocages)?

Propriétés d'un RdP

- Méthodes de vérification
  - Algèbre linéaire (matrice d'incidence, vecteur de comptage, équation d'état, etc.)
  - Graphe de couverture

- Comment font les outils de simulation des RdP pour vérifier les propriétés?
  - Représentation informatique des matrices, vecteurs, etc.
  - Utilisation de fonctions pour l'application de l'équation d'état
  - Utilisation de fonctions pour le calcul du graphe de couverture



https://sourceforge.net/projects/pipe2/files/latest/download

Propriétés d’un RdP

- Deux types de propriétés
  - Comportementales: dépendantes du marquage initial
    - Si on change ce marquage, rien ne garantit que les propriétés tiennent encore.

  - Structurelles: indépendantes du marquage initial

Propriétés comportementales

- Les propriétés étudiées dans ce cours
  - Vivacité et blocage
  - Bornitude
  - Réinitialisation

Propriétés comportementales

- Vivacité et blocage (deux propriétés liées)
  - Utilisation
    - Dans la conception de tout système, on doit garantir un fonctionnement sans blocage

    - Si le RdP est sans blocage alors il est actif
      - Mais il y a différents degrés d’activité/vivacité
        - RdP vivant (vivacité absolue)
        - RdP pseudo-vivant
        - RdP quasi-vivant

Propriétés comportementales

- Vivacité et blocage

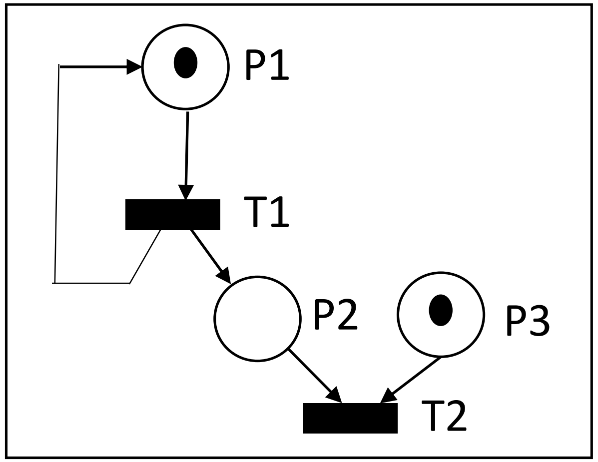
  - Soit *M l’ensemble des marquages qu’il est possible d’atteindre à partir d’un marquage M.

  - Une transition T est **vivante** si :

$$\forall\ M \in {}^*M0,\ \exists\ M' \in {}^*M, \text{ tel que } M[T>M'$$

➔ Une **transition vivante** est une transition **franchissable à chaque pas**

  - Une **transition quasi-vivante** est une transition **franchissable au moins une fois**

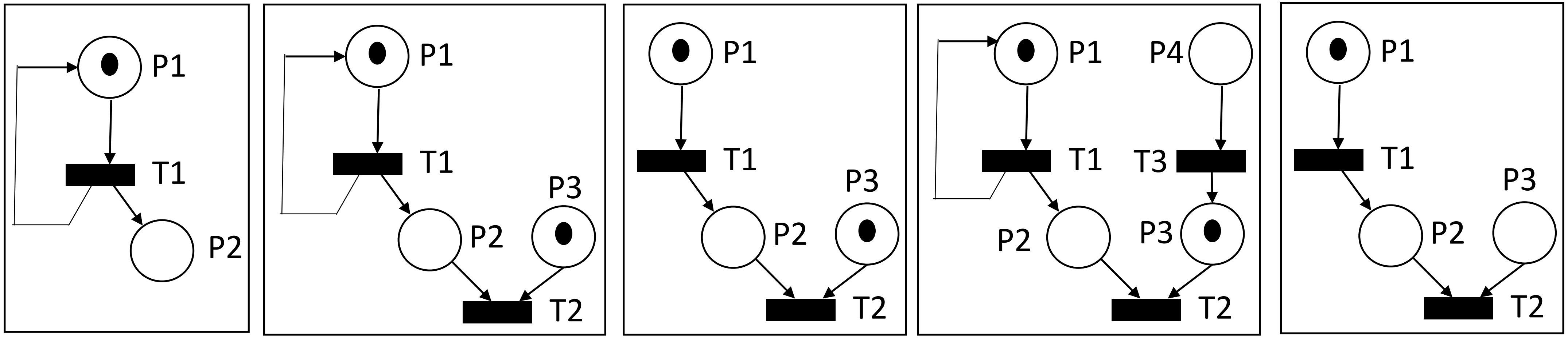


- **T1 est vivante** (et donc **quasi-vivante**)
  - car P1 contient tout le temps un jeton

- **T2 est quasi-vivante** mais **pas vivante**
  - car une fois franchie, T2 ne le sera plus puisqu’il y aura plus de jetons dans P3

Propriétés comportementales

- Vivacité et blocage
  - Un **réseau vivant** est un réseau dans lequel **toutes les transitions sont vivantes**
  - Un **réseau pseudo-vivant** est un réseau dans lequel, à partir de tout marquage accessible depuis le marquage initial, **il existe toujours une transition T franchissable**.
  - Un **réseau quasi-vivant** est un réseau dans lequel **toutes les transitions sont quasi-vivantes.**

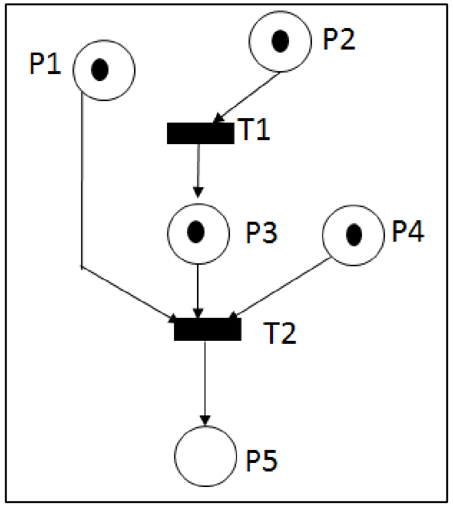


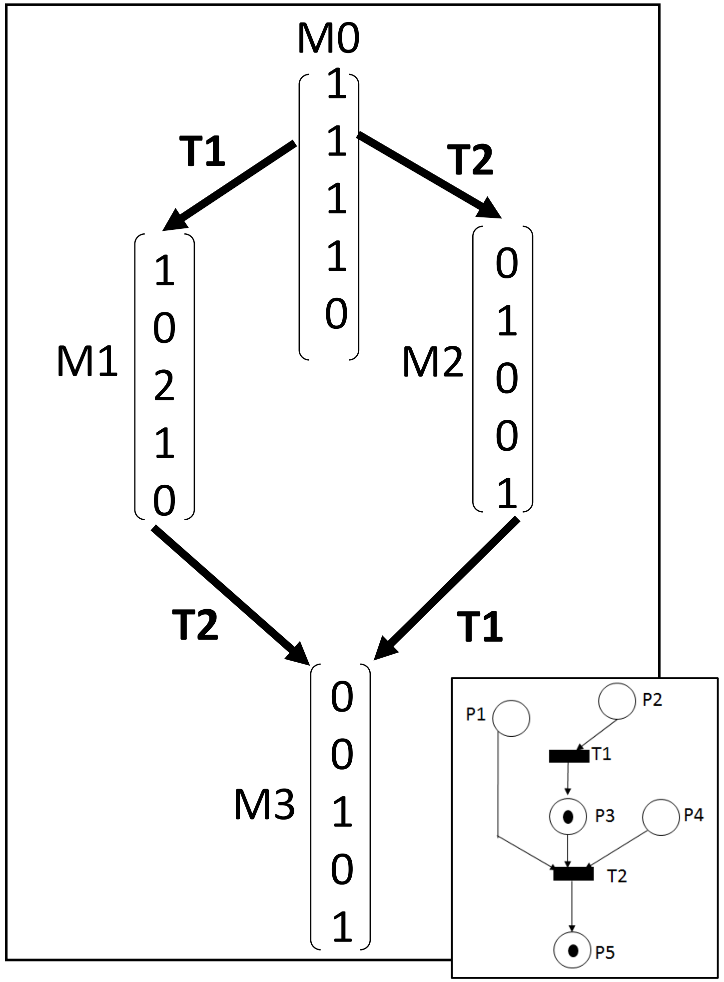
Vivant	x				
Pseudo-vivant	x	x		x	
Quasi-vivant	x	x	x		

Propriétés comportementales

- Vivacité et blocage

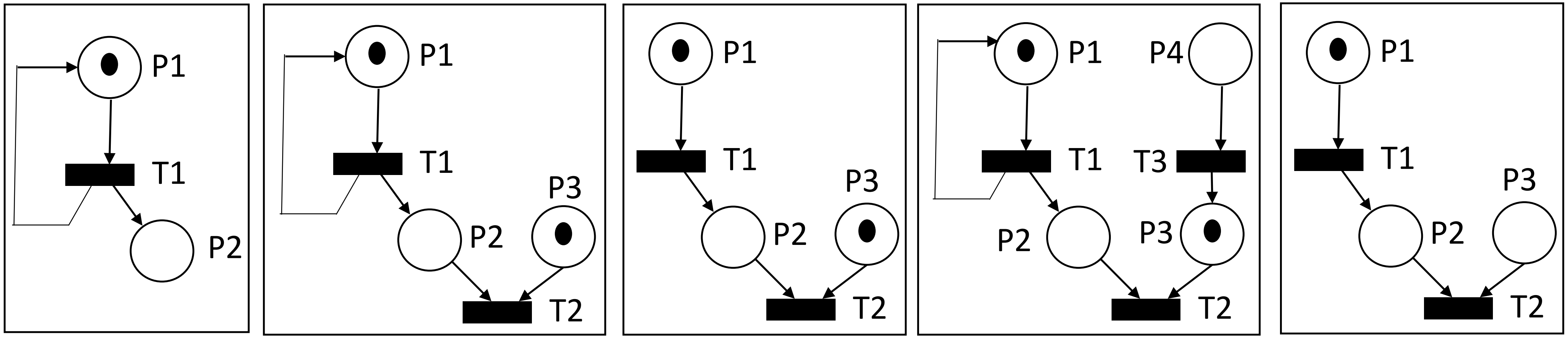
Si, à partir d'un marquage M, aucune transition n'est franchissable, nous dirons que ce marquage représente un **blocage.**





M3 est un blocage

- Vivacité et blocage
  - Un RdP avec blocage n'est ni vivant ni pseudo-vivant (il peut être quasi-vivant ou non)

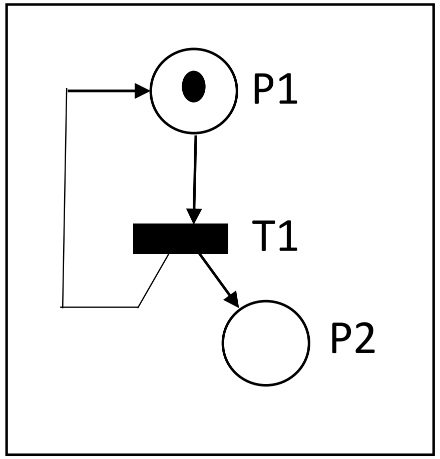


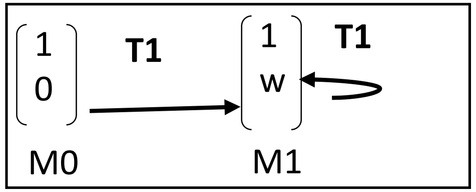
Vivant	x				
Pseudo-vivant	x	x		x	
Quasi-vivant	x	x	x		
Blocage			**x**		**x**

Vivant → sans blocage
Pseudo-vivant → sans blocage
Pas pseudo-vivant → avec blocage

Propriétés comportementales

- Vivacité et blocage
  - Vérification par graphe de couverture





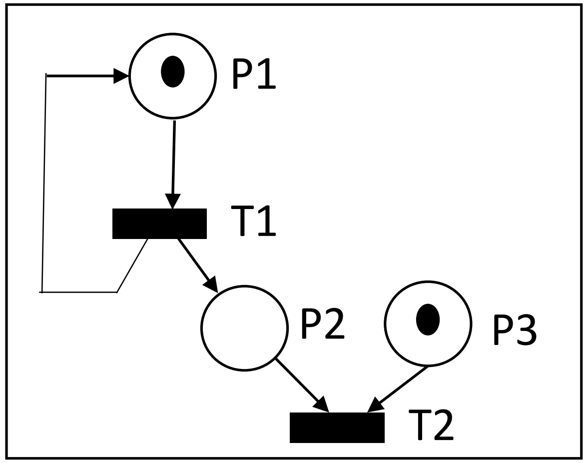
- T1 est franchissable à partir de tous les marquages du graphe → le RdP est vivant

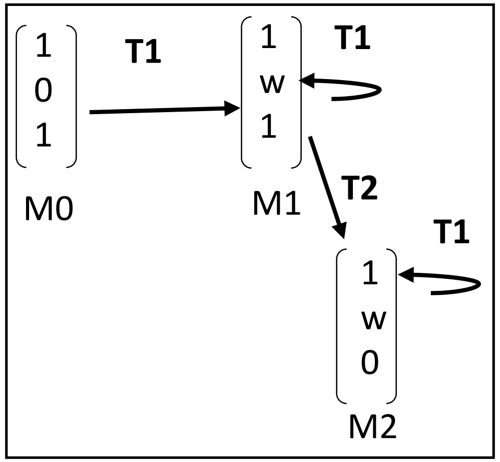
→ sans blocage

Vivant	x
Pseudo-vivant	x
Quasi-vivant	x
Blocage	

- Vivacité et blocage

    - Vérification par graphe de couverture



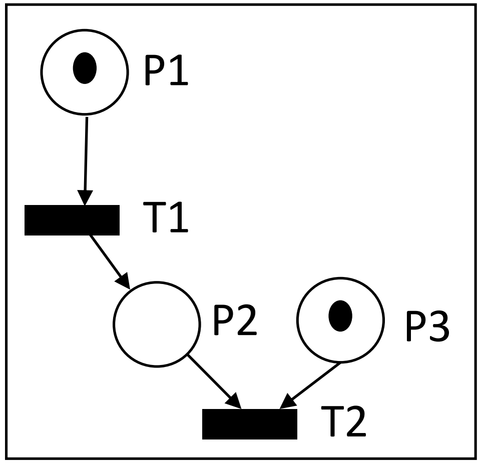


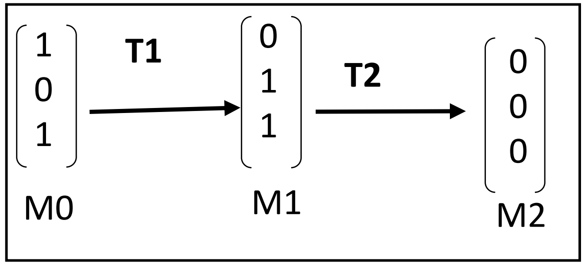
- T2 n’est pas franchissable à partir de M0 → le RdP n’est **pas vivant**
- A partir de chaque marquage il est toujours des transitons franchissables → le RdP est **pseudo-vivant** → **sans blocage**
- Les deux transitions du RdP (T1 et T2) sont chacune franchissables au moins une fois → le RdP est **quasi-vivant**

Vivant	
Pseudo-vivant	x
Quasi-vivant	x
Blocage	

Propriétés comportementales

- Vivacité et blocage
  - Vérification par graphe de couverture

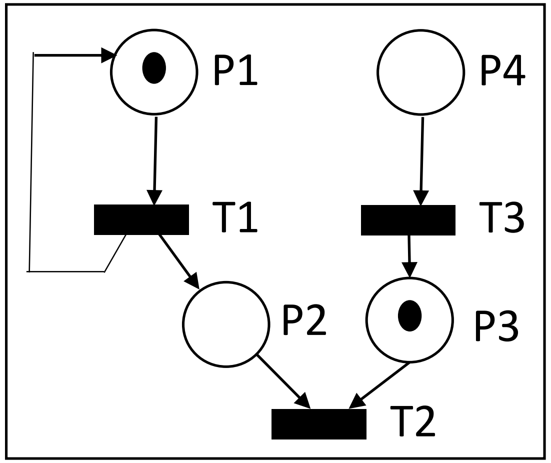


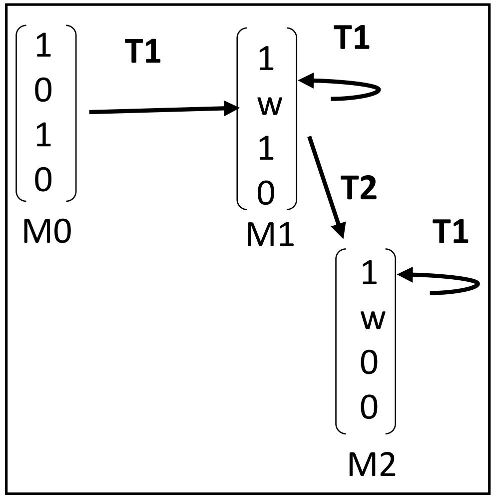


- T2 n’est pas franchissable à partir de M0 → le RdP n’est **pas vivant**
- A partir de M2, il n’y a pas de transition possible→ le RdP n’est **pas pseudo-vivant** → **avec blocage**
- Les deux transitions du RdP (T1 et T2) sont chacune franchissables au moins une fois → le RdP est **quasi-vivant**

Vivant	
Pseudo-vivant	
Quasi-vivant	x
Blocage	x

- Vivacité et blocage
    - Vérification par graphe de couverture





- T2 n'est pas franchissable à partir de M0 → le RdP n'est **pas vivant**
- A partir de chaque marquage il est toujours des transitons franchissables → le RdP est **pseudo-vivant → sans blocage**
- Absence de la transition T3 dans le graphe → le RdP n'est **pas quasi-vivant**

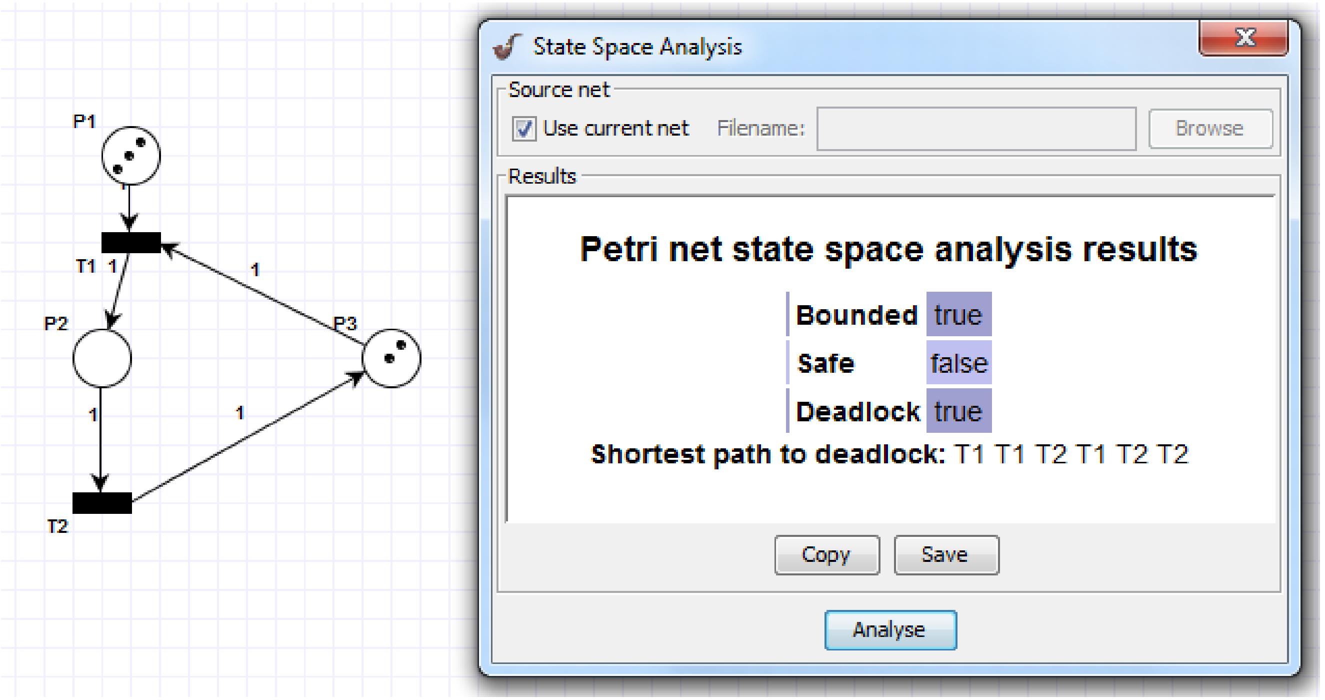
Vivant	
Pseudo-vivant	x
Quasi-vivant	
Blocage	

Propriétés comportementales

- Bornitude

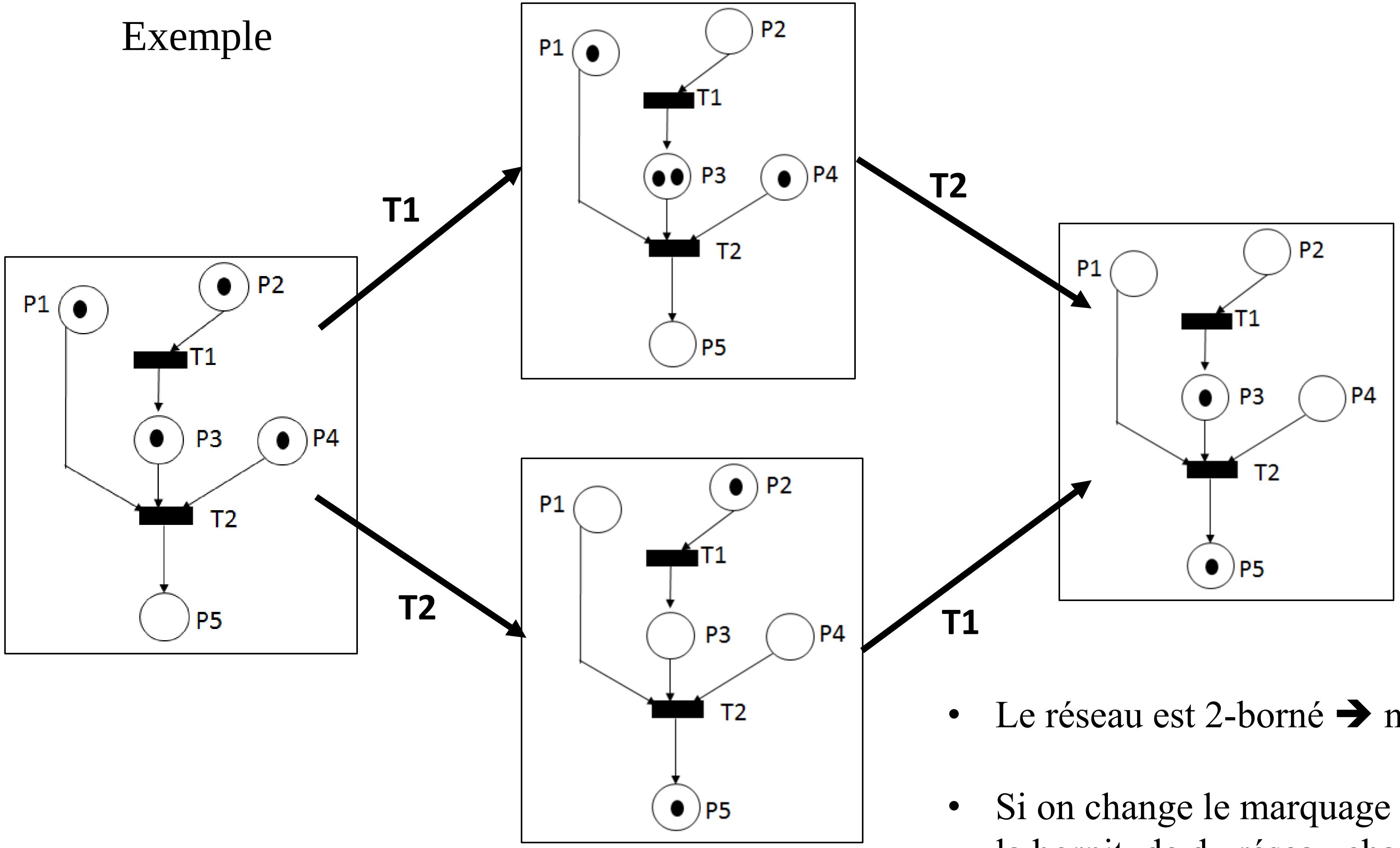
Une place d'un RdP sera **k-bornée** si le nombre de jetons contenus dans cette place ne dépasse jamais k, quelque soit le marquage atteignable à partir de M0.

Un réseau est **k-borné** si toutes ses places sont k-bornées. Si k vaut 1, on parlera de réseau **sain (safe)**.



- Bornitude

  Exemple



- P1 est **1**-bornée
- P2 est **1**-bornée
- P3 est **2**-bornée
- P4 est **1**-bornée
- P5 est **1**-bornée

➔ le réseau est 2-borné

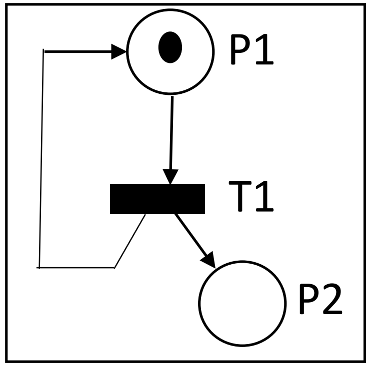
- La bornitude d'un réseau est égale au maximum des bornitudes de ses places

- Le réseau est 2-borné ➔ n'est **pas sain**

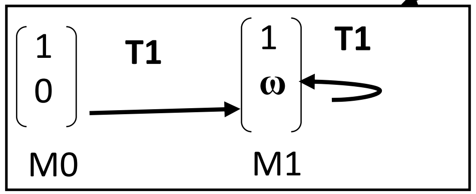
- Si on change le marquage initial (exemple M0[1,1,5,1,0]), la bornitude du réseau change (ici il devient 6-borné)

- Bornitude
  - Un RdP non-borné est un RdP qui contient une ou plusieurs places non-bornées

  - Vérification par graphe de couverture
    - Un RdP non-borné est un RdP dont le nombre de marquages accessibles est infini



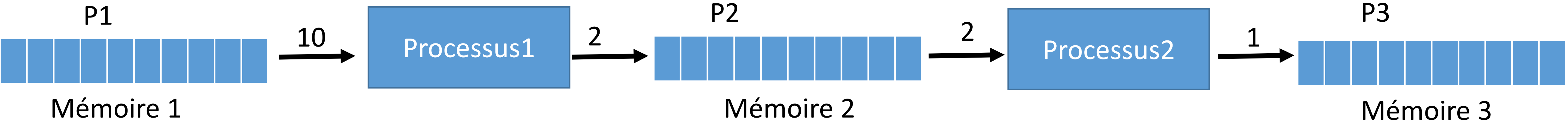
P2 est non-bornée
➔ le RdP est non borné

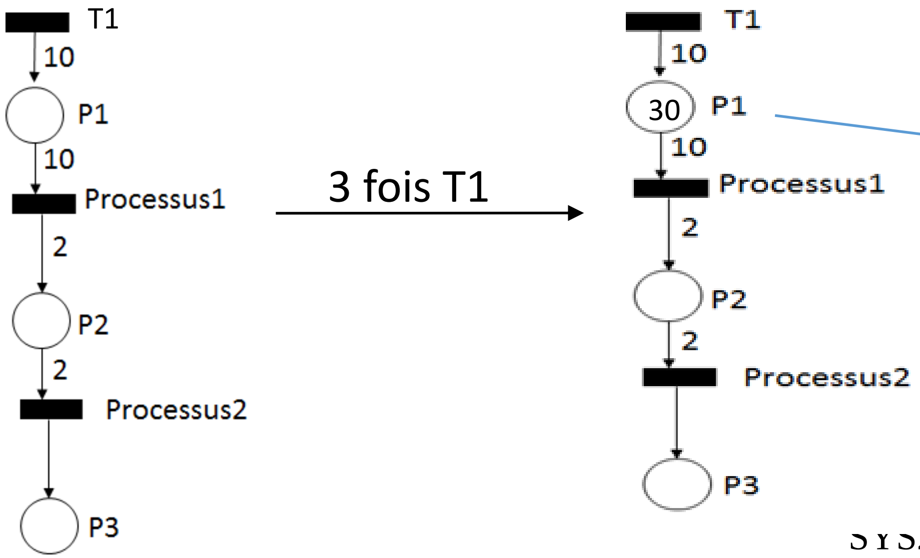


Graphe de couverture

Propriétés comportementales

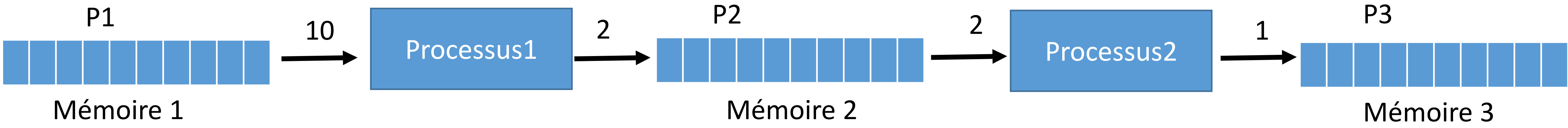
- Bornitude
  - Utilisation
    - En vérifiant qu'un RdP est borné, on vérifie qu'il n'y aura pas débordement dans les places
      - Exemple (application logicielle) : Si les places sont utilisées pour représenter des espaces mémoires (de taille limitée) pour stocker des données intermédiaires, un réseau non-borné entraine la saturation de la mémoire et la perte de données

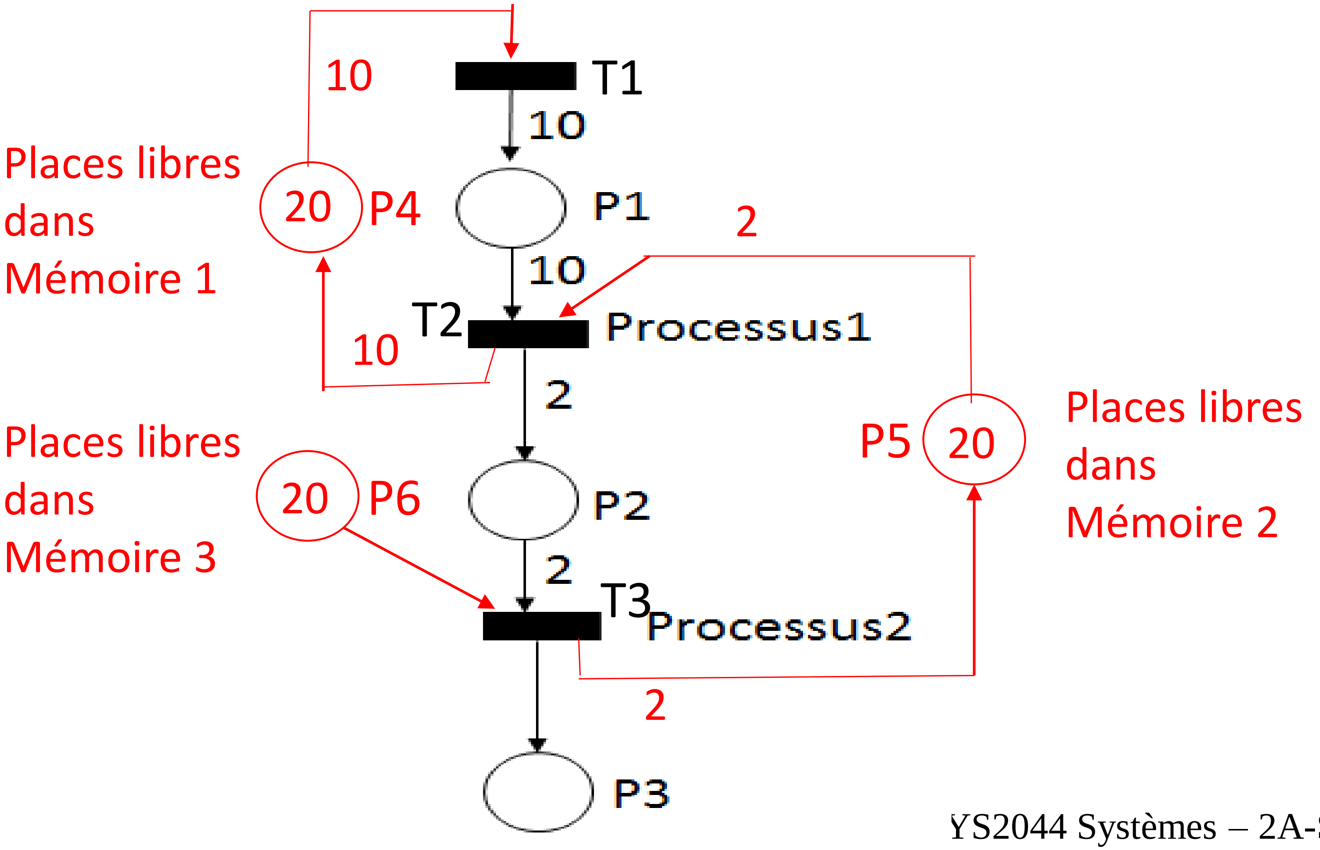




- On suppose que la **capacité maximale** des trois places est **20**
- Débordement de P1
- Pour remédier à ce problème, il faut rendre le réseau 20-borné

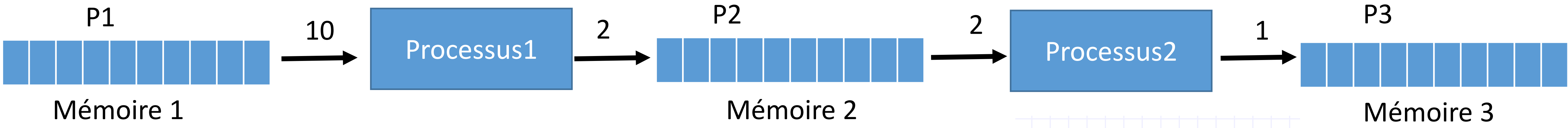
- Bornitude
  - Utilisation

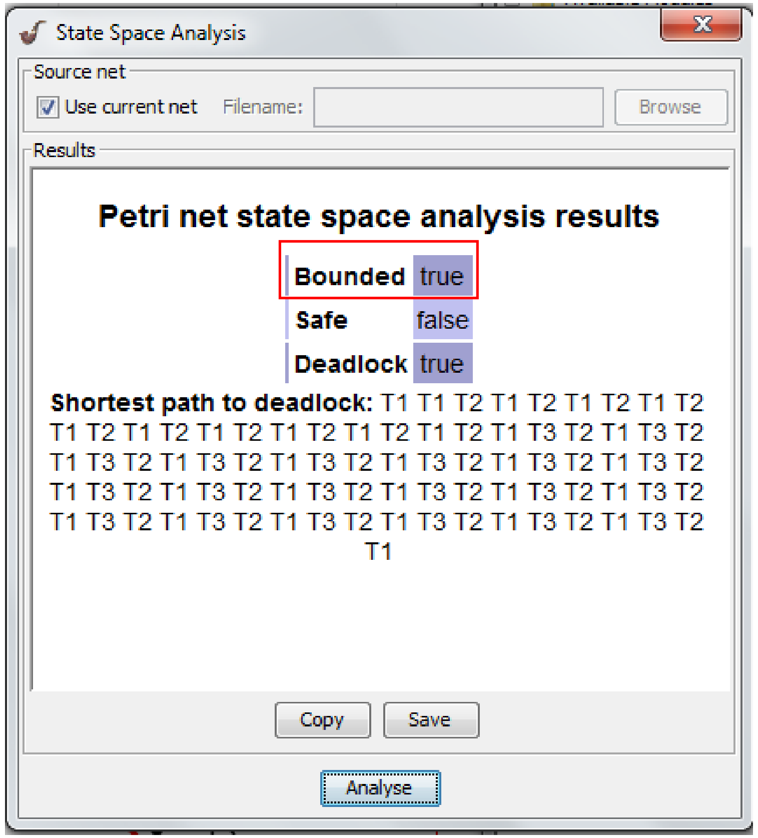


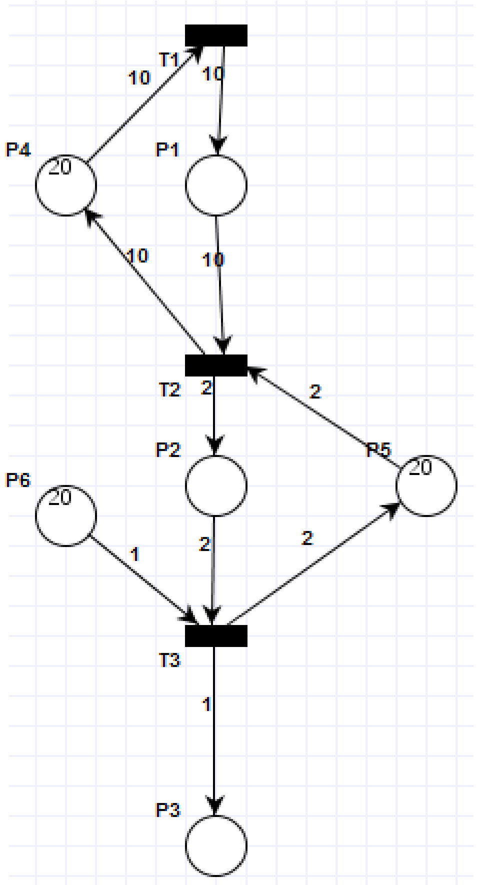


Solution: Ajouter des places pour imposer les limites de capacités

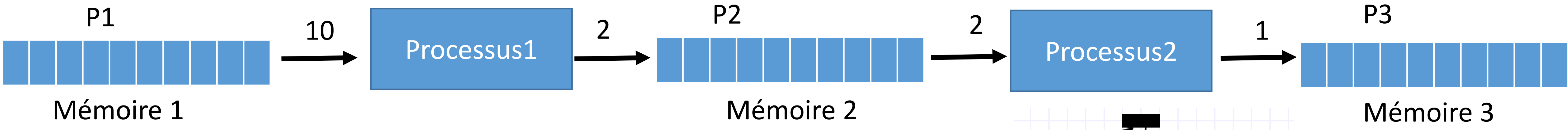
- Bornitude
    - Utilisation

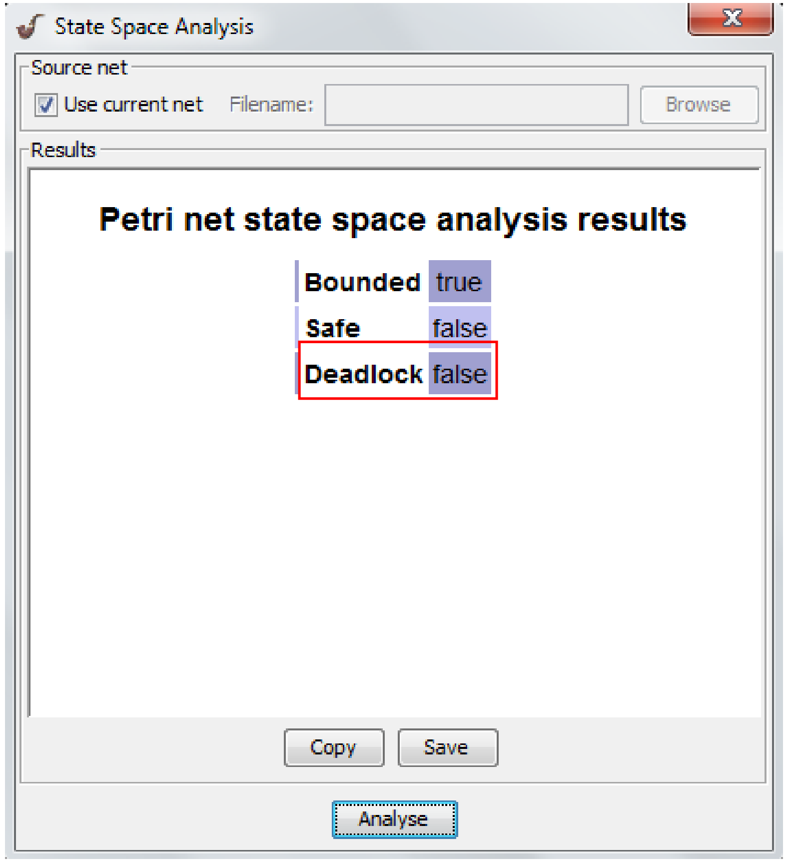


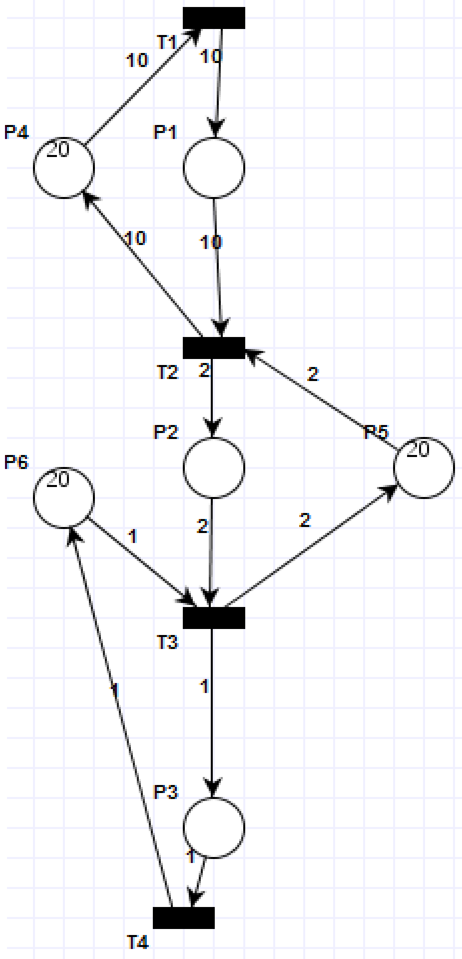




- Bornitude
  - Utilisation







Propriétés comportementales

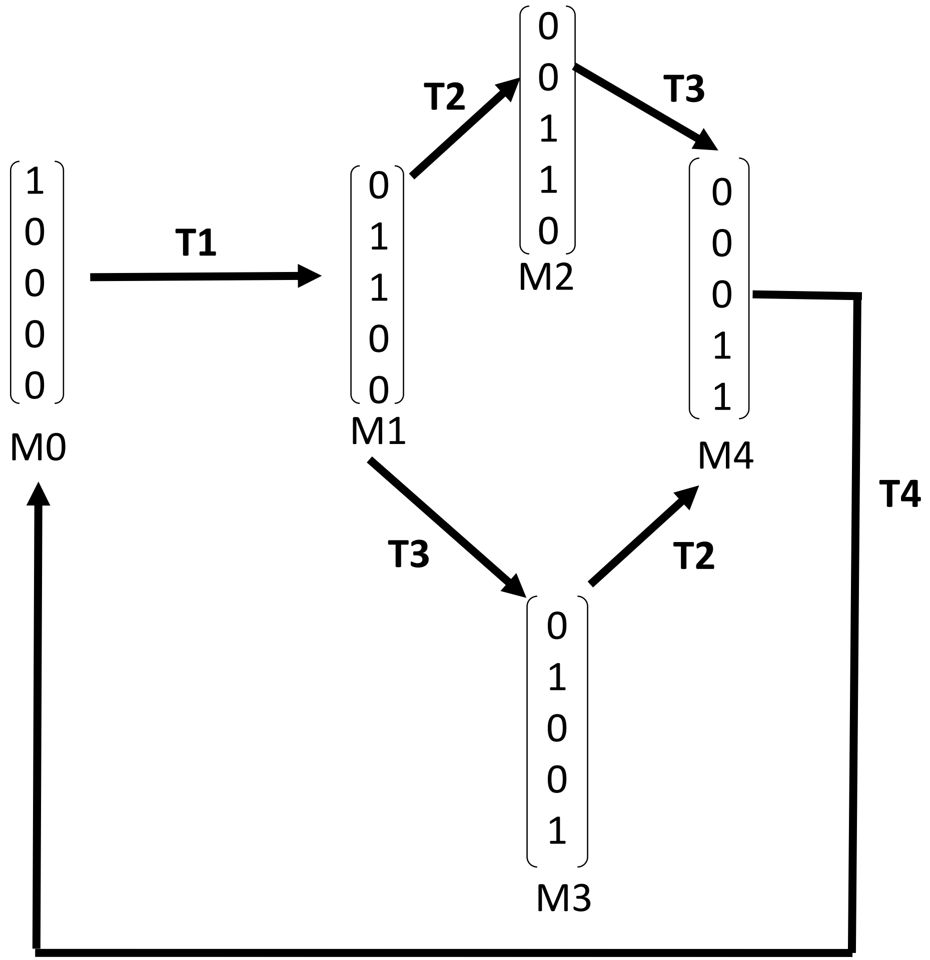
- Réinitialisation
  - La plupart des processus industriels nécessitent la possibilité du retour à l'état initial (fonctionnement répétitif)

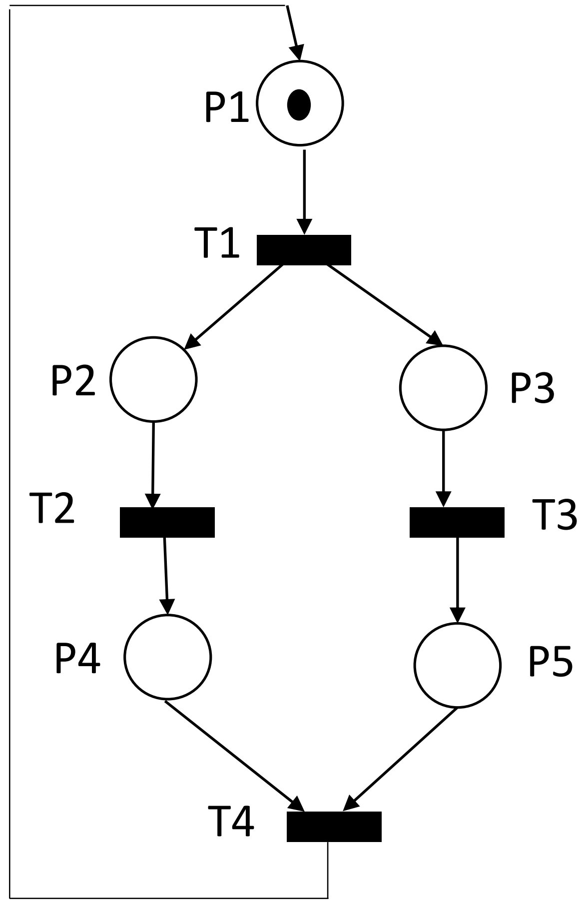
  - Un RdP est réinitialisable/propre si pour tout marquage M accessible à partir du marquage initial, il existe une séquence S de franchissement qui ramène au marquage initial

  → Quel que soit le marquage M de *M0, il existe une séquence S qui ramène au marquage initial M0 :
    - M[S> M0

- Réinitialisation

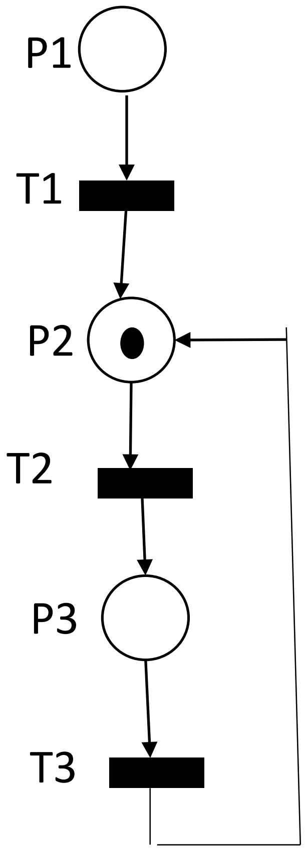
  Exemple

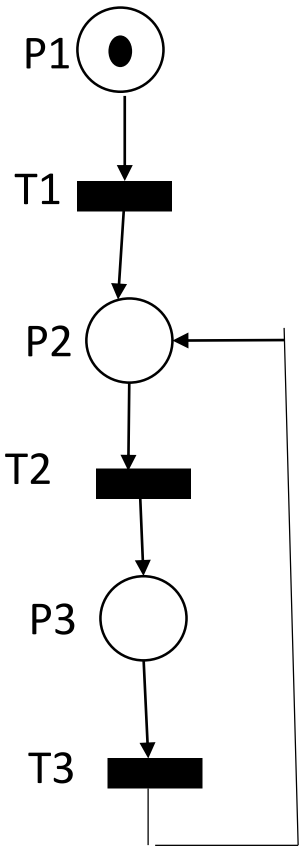




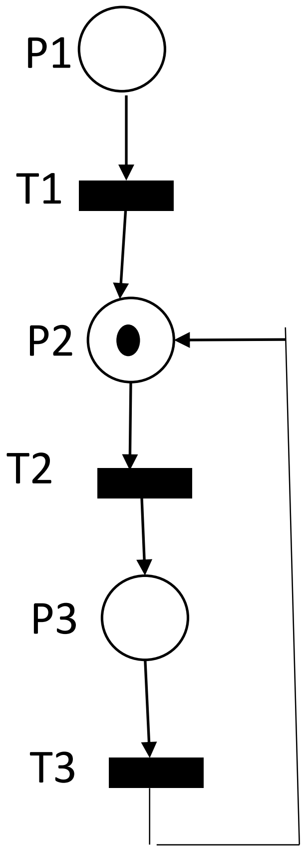
A partir de chaque marquage, il y a un chemin vers le marquage M0
→ le réseau est réinitialisble/ propre

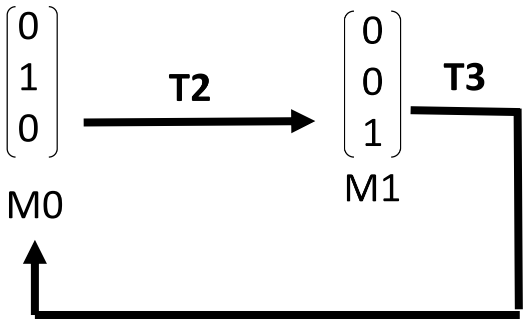
- Exercice
  - Déterminer si ces deux réseaux sont réinitialisables





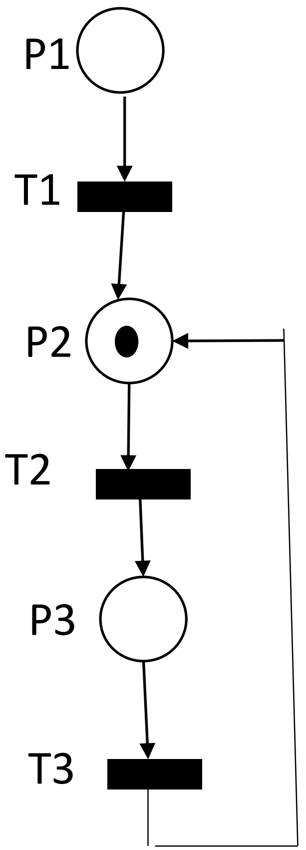
- Exercice

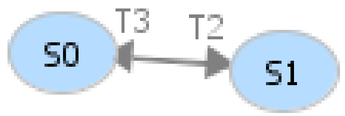




A partir de tout marquage, il y a un chemin vers M0 ➔ le RdP est réinitialisable

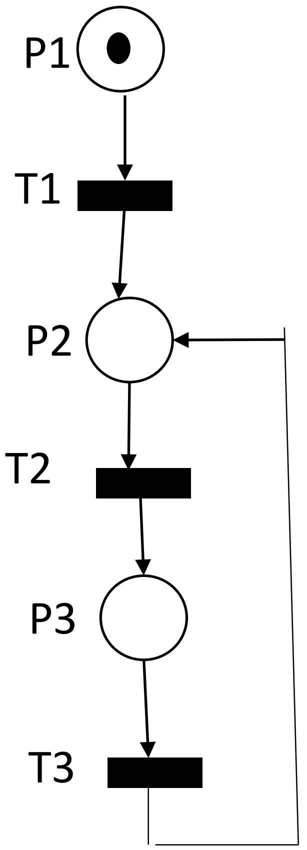
- Exercice





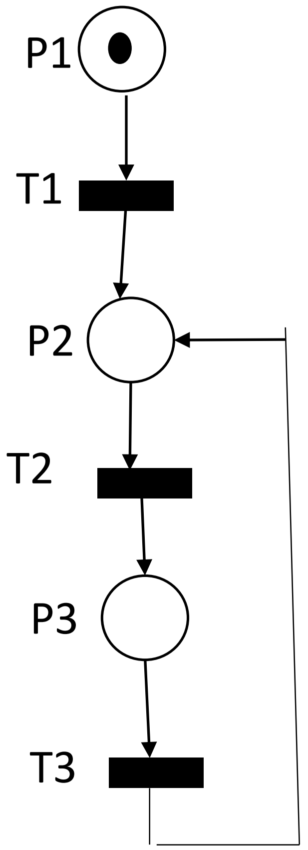
Graphe de marquages accessibles
S0 est le marquage initial

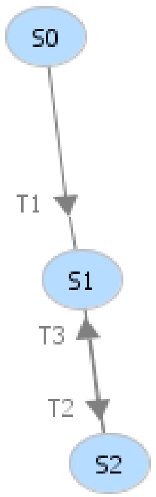
- Exercice



Aucune transition n'a pour sortie P1 → une fois P1 perd son jeton, elle l'aura plus → le marquage initial n'est atteignable à partir d'aucun autre marquage

- Exercice





- Exercice
  - Conclusion: les deux cas concernent le même réseau avec deux marquages initiaux différents, le premier cas est réinitialisable alors le deuxième ne l’est pas → on vérifie que la réinitialisabilité est bien une propriété comportementale (dépendante du marquage initial)