CHAPITRE IV

FONCTIONS DE CLASSE C2
APPLICATION A LA RECHERCHE D'EXTREMA

1. FONCTIONS DE CLASSE C2

Définition fonction admettant des dérivées partielles à l'ordre 2 :

Une fonction f sur R^n à valeurs dans R de clase C^1 sur un ouvert U admet des **dérivées partielles à l'ordre 2** en tout point de U, si les applications dérivées partielles premières sont dérivables par rapport à toutes les variables en tout point de U.
Ces dernières dérivées sont alors appelées dérivées partielles seconde de f et sont notées : $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$

Exemple : f : R^2 → R de classe C^1 admet des dérivées partielles à l'ordre 2 sur R^2 si :
si les applications :

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \begin{cases} R^2 \to R \\ (x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} : \begin{cases} R^2 \to R \\ (x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{cases}$$

sont dérivables par rapport à x et par rapport à y en tout point (x,y) de R^2.

Les dérivées partielles seconde de f et sont : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ **,** $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$**,** $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}$ notée $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ **.**

<u>Définition : fonction de classe C^2</u>
Une fonction f sur R^n à valeurs dans R est dite de **clase C^2** sur un ouvert U si elle admet des dérivées partielles à l'ordre 2 en tout point de U, et si de plus les applications dérivées partielles secondes sont continues sur U.

<u>Théorème de Schwarz</u> <u>*(admis)*</u>

Si f est de classe C^2 sur un ouvert U de R^2 alors en tout (x,y) de U on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

2. FORMULE DE TAYLOR A L'ORDRE 2

Proposition :

Soit f une application de classe C^2 sur un ouvert U de R^2 à valeurs dans R.
Pour tout point M(x,y) de U et pour tout H(h,k) au voisinage de 0 dans R^2 on a :

$$\boxed{f(M+H)=f(M)+\frac{df_M(H)}{1!}+\frac{d^2f_M(H,H)}{2!}+o\left(\|H\|^2\right)}$$

où

$$d^2f_M(H,H)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)h^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)hk+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)k^2$$

est la différentielle seconde de f au point M calculée en (H,H).

NB : si la différentielle première de f en M : df_M set une application linéaire de R^2 dans R, la différentielle seconde d^2f_M est une application bilinéaire de $R^2\times R^2$ dans R.

Preuve :

Considérons la fonction de la variable réelle t : $\varphi(t)=f(M+tH)$

Alors on peut écrire : $\varphi=f\circ g$ où $g:\begin{cases}R\to R^2\\ t\mapsto M+tH\end{cases}$

φ étant une composée d'applications de classe C^2 elle est elle même de classe C^2 et d'après les règles de dérivation on a :

$$\varphi'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(M+tH)h+\frac{\partial f}{\partial y}(M+tH)k$$

et : $$\varphi''(t)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M+tH)h^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(M+tH)hk+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M+tH)k^2$$

Appliquons la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 sur [0,1] :

$\varphi(1)=\varphi(0)+\dfrac{\varphi'(0)}{1!}+\dfrac{\varphi''(\theta)}{2!}$ où $\theta\in]0,1[$

Soit :

$$f(M+H)=f(M)+\frac{\partial f}{\partial x}(M)h+\frac{\partial f}{\partial y}(M)k+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M+\theta H)h^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(M+\theta H)hk+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M+\theta H)k^2$$

Soit encore

(*) $$f(M+H)=f(M)+\frac{df_M(H)}{1!}+\frac{d^2f_{M+\theta h}(H,H)}{2!}$$

Comme les dérivées partielles de f sont continue en M (f est de classe C^2 sur U), on a :

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M+\theta H)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M)+\varepsilon_1(H)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(M+\theta H)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(M)+\varepsilon_2(H)$ et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M+\theta H)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M)+\varepsilon_3(H)$$

où les fonctions $\varepsilon_i,\quad i=1,2,3$ sont de limite nulle en 0.

En remplaçant dans (*), on obtient :

$$f(M+H)=f(M)+\frac{df_M(H)}{1!}+\frac{d^2 f_M(H,H)}{2!}+o\left(\|H\|^2\right)$$

3. APPLICATION A LA RECHERCHE D'EXTREMA

Définition :

Soient f une application de R^2 dans R et M un point de R^2.

On dit que f admet un **maximum local** en M (respectivement un minimum), s'il existe un voisinage de M sur lequel on a : $f(M+H)\le f(M)$ (respectivement : $f(M+H)\ge f(M)$).

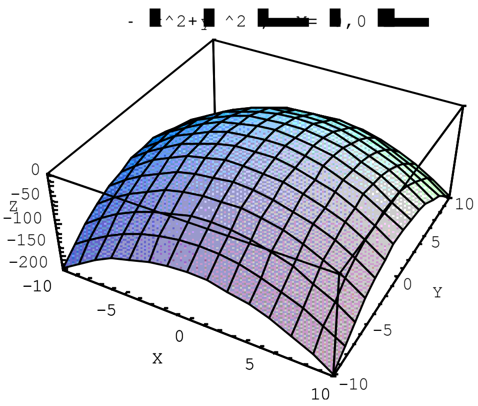
On dit que f admet un **extremum local** en M, si elle y admet un maximum ou un minimum local.

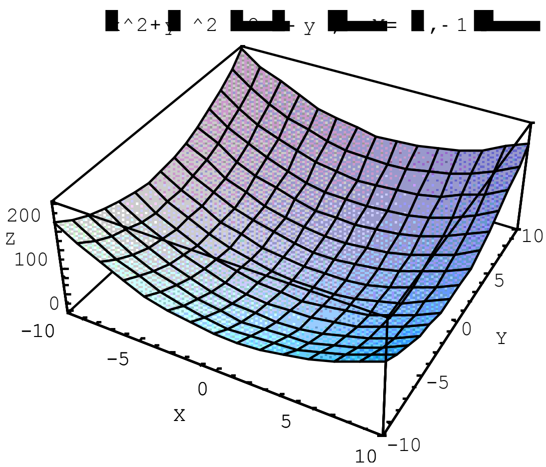
On dit que f admet un **point col** ou un point selle en M si dans tout voisinage de Mil existe des points M+H et M+H' tel que $f(M+H)\ge f(M)$ et $f(M+H')\le f(M)$

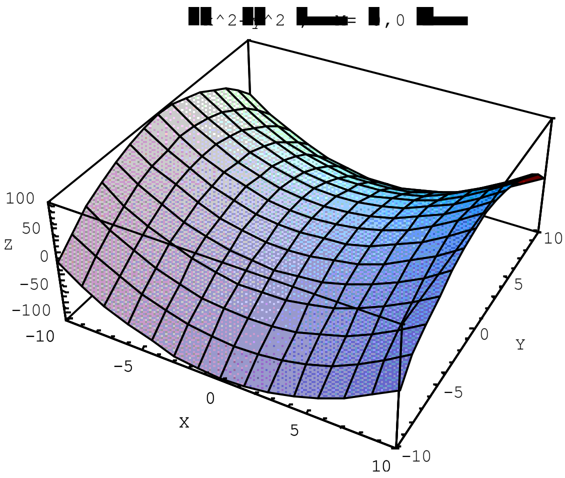
Exemples :

Pour la fonction définie par : $f(x,y)=-(x^2+y^2)$, l'origine est un maximum

Pour la fonction définie par : $f(x,y)=x^2+y^2-2(x-y)$, le point (1,-1,-2) est un minimum :







Pour la fonction définie par : $f(x,y) = x^2 - y^2$, l'origine est un point col :

Proposition : Condition nécessaire

Soient f une **application différentiable** sur un ouvert U de R^2, à valeurs dans R et M un point de U.
Si f admet un extremum local en M alors $df_M = 0$.

Preuve :

Si f admet un extremum local en M(x,y) alors les fonctions partielles de f admettent un extremum local en x et en y respectivement, comme elles sont dérivables , leurs dérivée s'annule en ce point , on a donc : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$. D'où $df_M = 0$.

Définition :

Soient f une application différentiable sur un ouvert U de R^2 et à valeurs dans R.
Un point M(x,y) de U est appelé **point critique** de f, si $df_M = 0$.

Proposition : (conditions suffisantes)

Soient f une application de **classe C²** de R^2 dans R et M(x,y) un **point critique** de f.

Posons : $R = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$, $S = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ et $T = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$.

Alors :

- si $RT - S^2 > 0$ et $R < 0$, f admet un maximum en M
- si $RT - S^2 > 0$ et $R > 0$, f admet un minimum en M
- si $RT - S^2 < 0$ f n'admet pas d'extrémum en M : on a un col ou un point selle
- si $RT - S^2 = 0$ on ne peut pas conclure

Preuve :

C'est l'étude du signe de $f(M+H)-f(M)$ qui précise s'il y a un extremum en M.
Or d'après la formule de Taylor, on a :

$$f(M+H)-f(M)=Rh^2+2S\,hk+T\,k^2+o\left(\|(h,k)\|^2\right)$$

Il suffit donc d'étudier le signe de $Rh^2+2S\,hk+T\,k^2=k^2\left(R\left(\frac{h}{k}\right)^2+2S\left(\frac{h}{k}\right)+T\right)$

pour $k\neq 0$.

Le discriminant du trinôme en $\frac{h}{k}$ étant égal à S^2-RT :

- Si $RT-S^2>0$, le trinôme est du signe de R donc f admet un maximum en M pour $R<0$ et un minimum pour $R>0$.
- Si $RT-S^2<0$, le trinôme change de signe : il existe a et b tels que $\left(Ra^2+2Sb+T\right)>0$ et $\left(Ra^2+2Sb+T\right)<0$

Alors en prenant $h=\frac{a}{n}$ et $k=\frac{1}{n}$ avec n assez grand puis $h'=\frac{b}{n}$ et $k'=\frac{b}{n}$
On montre que $f(M+H)-f(M)$ change de signe au voisinage de 0 et donc f n'a pas d'extremum en ce point.
Ce type de point est appelé col ou point selle.

- Enfin si $RT-S^2=0$ on ne peut pas conclure, car dans ce cas le trinôme s'annule en un point a et est de signe constant par ailleurs.

Mais alors en choisissant comme précédemment (h,k), on montre que dans tout voisinage de 0
il existe des points qui annulent l'expression $Rh^2+2S\,hk+T\,k^2$.
On ne peut donc pas connaître le signe de celle-ci au voisinage de 0 et déterminer la nature du point M.
On envisage alors une autre méthode.

Exemple : Considérons la fonction définie par $f(x,y)=\left(x^2-y^2\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$
Déterminons les points critiques, pour cela nous devons résoudre le système :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{cases}$$

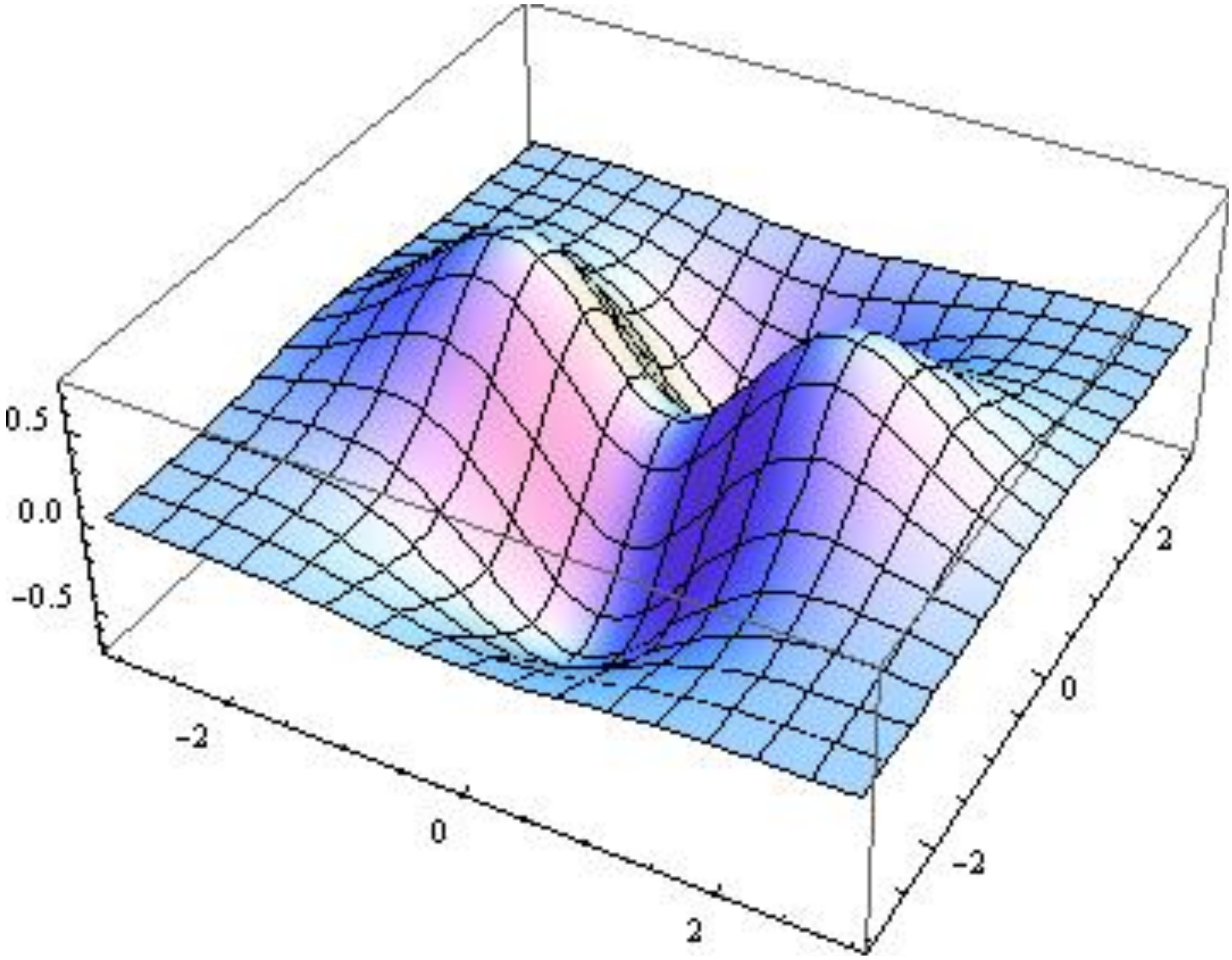
Soit $\begin{cases}\left[2-(x^2-y^2)\right]xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0\\ \left[-2-(x^2-y^2)\right]ye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0\end{cases}$

Les solutions de ce système sont alors : $(0,0)$, $(0,\sqrt{2})$, $(0,-\sqrt{2})$, $(\sqrt{2},0)$, et $(-\sqrt{2},0)$,
En calculant les dérivées partielles secondes, on obtient les résultats suivants :

Points	R	S		T $RT-S^2$	nature du point
$(0,0)$	2	0	-2	-4	col
$(0,\sqrt{2})$	4 e	0	4 e	16 e ^{2}	minimum
$(0,-\sqrt{2})$	4 e	0	4 e	16 e ^{2}	minimum
$(\sqrt{2},0)$	-4 e	0	-4 e	16 e ^{2}	maximum
$(-\sqrt{2},0)$	-4 e	0	-4 e	16 e ^{2}	maximum

<u>Représentation graphique :</u>

```
f[x_,y_]:=(x^2-y^2) Exp[-(x^2+y^2)/2]
Plot3D[f[x,y],{x,-3,3},{y,-3,3}]
```



<u>Exercice 1 :</u> f est classe C2 si elle admet des dérivées partielles qui admettent elles mêmes des dérivées partielle continues.

Soit f définie par : $f(x,y) = \begin{cases} x\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) Montrer que f est de classe C2 sur $R^2 \setminus \{(0,0)\}$ et préciser ses dérivées partielles secondes.
b) Etudier l'existence des dérivées partielles secondes en (0,0).
c) f est-elle de classe C2 en (0,0) ?

<u>Exercice 2 :</u>
Etudier les extréma des fonctions suivantes :
a) $f(x,y) = x\left[(\ln(x))^2 + y^2\right]$
b) $f(x,y) = x^3 - 3x^2 + y^2$
c) $f(x,y) = x^2 + y^3$
d) $f(x,y) = x^3 y^2 (1-x-y)$

<u>Exercice 3 :</u> Déterminer la plus courte distance entre le point (1,0,-2) et le plan d'équation : $x + 2y + 3 = 4$

<u>Exercice 4 :</u> Calculer le volume maximal d'une boîte rectangulaire sans couvercle qu'on peut fabriquer avec 12 m^2 de carton.

<u>Exercice 5 :</u> On fabrique une boîte rectangulaire sans couvercle de 12 m^3 en utilisant des matériaux différents pour chaque face. Le matériau du fond coûte 4€ le m^2, le matériau de face opposées coûte 3 € le m^2, et le matériau des deux faces restantes 2€ le m^2. Déterminer la taille de la boîte correspondant au projet de coût minimal.

<u>Exercice 6 : Méthode des moindres carrés</u>
On dispose d'une suite de points (x_1,y_1),…., (x_N,y_N) obtenus à la suite d'une expérience.
On cherche une droite D d'équation : y=ax+b qui approxime au mieux cet ensemble de mesures.
Soit (x_n,y_n) un point de la suite. On note e_n l'écart vertical entre y_n et et D :
$e_n = | y_n - a x_n - b|$.

On cherche a et b de façon que l'écart moyen quadratique $E = \sum_{n=1}^{N} e_n^2$ soit minimal.

Posons : $f(a,b) = \sum_{n=1}^{N} \left| y_n - ax_n - b \right|^2$

Déterminer les points critiques de f. Puis déterminer la droite D pour :

x_n :	0	1,1	3,2	3,9	7,1	8,9
y_n :	1,1	1,6	1,6	2,8	2,9	3,8