Feuille de TD 1 : Topologie

Partie A : Normes et distances

Exercice 1. *Distances sur* $\mathbb{R}$
Les applications suivantes définessent-elles des distances sur $\mathbb{R}$?

1. $f(x, y) = xy$
2. $g(x, y) = |x^3 - y^3|$

Exercice 2. *La distance SNCF*
On considère un réseau ferroviaire constitué d'une gare principale P et de gares secondaires situées dans les villes d'une contrée d'un pays. Les lignes de ce réseau sont des droites qui passent toutes par la gare P. Les gares secondaires sont donc toutes reliées à la gare principale P et deux gares secondaires sont reliées entre elles si elles sont alignées avec la gare P.

1. Définir la distance entre deux gares A et B du réseau.
   Indication : Vous pourrez considérer que P correspond à l'origine du plan O.
2. Déterminer les voisinages élémentaires d'un point A du réseau.

Exercice 3. *Distance d'un point à un ensemble*
On se place dans $(\mathbb{R}^2, d)$ avec $d = d_1$. Si E est une partie de $\mathbb{R}^2$ et M un point de $\mathbb{R}^2$, on définit la distance de E à M par la borne inférieure des distances $d(M, M')$ avec M' dans E.

1. Représenter graphiquement la distance du point $A(1, \frac{1}{2})$ au point $C(2, 1)$.
2. Sans faire de calcul, estimer la distance de $M(1, 1)$ à la boule fermée B_F de centre $(\frac{1}{2}, 0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.
3. On propose de vérifier par le calcul la réponse à 2. Pour cela :
   (a) Montrer que tout point $M'(a, b)$ de la boule B_F, vérifie $d(M, M') \geq 1$.
   (b) En déduire que $d(M, B_F) \geq 1$.
   (c) Donner un point M'' de B_F pour lequel $d(M, M'') = 1$.
   (d) En déduire $d(M, B_F)$.

Exercice 4. *Normes sur un espace fonctionnel*
On considère l'espace vectoriel E des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour toute fonction f de E on pose :

$$||f||_1 = \int_0^1 |f(t)|dt, \ ||f||_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \text{ et } ||f||_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|.$$

Montrer que ces applications définissent bien des normes sur E.

Exercice 5.
Si d et d' sont deux distances sur un même ensemble E, montrer que $d + d'$ est aussi une distance sur E.

Exercice 6. *Distance de Manatthan*
Le plan des rues de New-York est un réseau orthogonal d'avenues et de rues numérotées Est/Ouest et Nord/Sud. Si on se trouve à l'angle de la $5^{\text{ème}}$ avenue et de la $10^{\text{ème}}$ rue, pour se rendre à l'angle de la $8^{\text{ème}}$ avenue et de la $14^{\text{ème}}$ rue, il faudra parcourir 3 blocs Est/Ouest et 4 blocs Nord/Sud, soit 7 blocs.

1. Par quelle distance peut-on modéliser ces parcours ?
2. Les quartiers généraux de deux bandes rivales A et B sont repérés par les points $A(2, 3)$ et $B(8, 7)$. Les deux bandes veulent se rencontrer en un terrain neutre à mi-chemin des quartiers généraux. Où peuvent-elles se rencontrer ?
3. Un commissariat de police veut s'installer à égale distance des deux quartiers généraux. Où peut-il s'implanter ?

Exercice 7. *Distance de Hamming*
On définit la distance entre deux octets A et B par le nombre de bits différents.

1. Calculer la distance de Hamming $d(A, B)$ pour $A = 00110011$ et $B = 10100011$.
2. En faisant une recherche bibliographique, trouver l'application de cette distance aux codes correcteurs.

Exercices supplémentaires

Exercice 8. *La distance discrète sur* $\mathbb{R}^2$
Pour tout point M et tout point M' de $\mathbb{R}^2$, on pose :

$$\begin{cases} d(M, M') = 0 & \text{si } M = M' \\ d(M, M') = 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier que d est une distance sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les boules ouvertes et les boules fermées relatives à cette distance.

Exercice 9. *Normes et distances*

1. Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé et d la distance associée. Montrer que d est invariante par translation et que pour tout réel a et tous vecteurs x et y de E, $d(ax, ay) = |a|d(x, y)$.
2. Soit E un espace vectoriel muni d'une distance d, vérifiant les propriétés définies dans la question 1. Montrer que d définit une norme sur E.
3. La distance discrète sur $\mathbb{R}^2$ est-elle définie par une norme ?

Exercice 10.
Dans un espace métrique (E, d), on appelle Cercle de centre M, élément de E, et de rayon $r > 0$, l'ensemble des points M' de E situés à la distance r de M. On note cet ensemble $C(M, r)$. Déterminer $C(O, 1)$ dans $\mathbb{R}^2$ pour les distances d_1, d_2, d_∞, puis la distance discrète.

Exercice 11. *Comparaison de normes*
Établir par le calcul, puis de façon géométrique pour $n = 2$, que pour tout x de $\mathbb{R}^n$ on a :

$$||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq ||x||_1 \leq \sqrt{n}||x||_2 \leq n||x||_\infty.$$

Pour $n = 2$, que traduisent ces inégalités ?

Exercice 12. *Application à l'image : Distance et norme de Chanfrein*
La distance de Chanfrein, ou distance pondérée, est utilisée en analyse d'images dans la représentation et la description des formes. Elle repose sur la notion de chemins. Elle trouve aussi des applications en théorie des graphes. Elle fait l'objet de travaux de recherche, articles, thèses,... Faire une recherche.

Partie B : Limite et continuité

Exercice 13.
Dans $(\mathbb{R}^2, d_1)$, montrer que la suite de points $A_n\left(\frac{1+n}{n}, \frac{1+n}{n^2}\right)$ converge vers le point $B(1, 0)$. A-t-on le même résultat dans $(\mathbb{R}^2, d_2)$? $(\mathbb{R}^2, d)$, où d désigne la distance discrète ?

Exercice 14.
On se place dans $\mathbb{R}^2$ et on considère la suite de points définie par $A_n\left(1 - \frac{1}{n}, 1\right)$.

1. Montrer que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le point $B(1, 1)$ pour la distance euclidienne.
2. La suite converge-t-elle vers B pour la distance SNCF ?
3. La suite converge-t-elle vers B pour la distance d_∞ ?
4. Montrer que pour la distance d_∞, toute suite de points $M_n(x_n, y_n)$ de $\mathbb{R}^2$ converge vers un point $M(x, y)$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ et $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$.

Exercice 15. *Convergence et normes équivalentes*
Soit E un espace vectoriel sur lequel on définit deux normes équivalentes N_1 et N_2. Montrer que si une suite (x_n) d'éléments de E converge vers un élément x de E pour la norme N_1, elle converge aussi pour N_2, et réciproquement.

Exercice 16.
Dans $\mathbb{R}^n$ muni de la norme infinie montrer qu'une suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$, où $x_p = (x_{p,1}, \ldots, x_{p,n})$ pour tout entier p, converge vers un élément $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ si, et seulement si, pour tout entier i variant de 1 à n, on a $\lim_{p\to\infty} x_{p,i} = x_i$. Quelle conclusion peut-on en tirer par rapport aux autres normes ?

Exercice 17. *Normes sur un espace de fonctions*
On pose $E = C_0^1([0,1],\mathbb{R})$, l'espace des fonctions de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui s'annulent en 0 ; et pour tout élément f de E, $N(f) = \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)|$.

1. Montrer que N est une norme sur E.
2. Montrer que pour tout élément f de E, $||f||_\infty \leq N(f)$.
3. Ces deux normes sont-elles équivalentes ?
   Indication : On pourra considérer la suite de fonctions définie par $f_n(t) = \frac{\sin(nt)}{n}$.
4. L'espace E est-il de dimension finie ?

Exercice 18.
Dans $(\mathbb{R}^2, d_1)$, montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x$, est continue sur $\mathbb{R}^2$. L'application f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$ lorsqu'on le munit de la distance discrète ? L'application f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$ lorsqu'on le munit de la distance de Manhattan, et $\mathbb{R}$ de la distance discrète ?

Exercice 19. *Continuité et normes équivalentes*
Soit E un espace vectoriel sur lequel on définit deux normes équivalentes N_1 et N_2. Montrer que si une application f de E dans F, où F est un espace vectoriel normé, est continue pour N_1, elle est aussi continue pour N_2, et réciproquement.

Exercice 20. *Continuité des applications linéaires*
Soient E et F deux espaces vectoriels normés et f une application linéaire de E dans F. Montrer que f est continue sur E si et seulement si elle est continue en 0.

Exercice 21. *Continuité et voisinage*
Soient deux espaces métriques (E,d) et (E',d'), f une application de E dans E' et x_0 un élément de E. Montrer que f est continue au point x_0 de E ssi : Pour tout voisinage V de $f(x_0)$, il existe un voisinage U de x_0 tel que $f(U) \subset V$.

Exercice 22.
Soient E un espace vectoriel sur lequel on définit deux normes équivalentes N_1 et N_2, F un espace vectoriel normé, f une application de E dans F et x_0 un élément de E. En utilisant la définition précédente (Exercice 21) montrer que f est continue en x_0 pour la norme N_1 si et seulement si f est continue en x_0 pour la norme N_2.

Exercice 23. *Caractérisation de la continuité à l'aide de suites*
Soient deux espaces métriques (E,d) et (E',d'), f une application de E dans E' et x_0 un élément de E. Montrer que f est continue au point x_0 de E ssi : Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers x_0, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x_0)$.