Feuille de TD 3 :
Dérivées partielles et directionnelles

Exercice 1.
On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = 2x^2 - xy + y^2$$

et (x_0, y_0) un point de $\mathbb{R}^2$. Calculer, en utilisant la définition, les dérivées partielles de f en (x_0, y_0).

Exercice 2.
Pour les fonctions suivantes, déterminer les domaines de définition puis justifier les domaines d'existence des dérivées partielles. Calculer les dérivées partielles sur ces domaines.

1. $f(x,y) = \frac{x}{x+y}$
2. $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$
3. $f(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$
4. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$
5. $f(x,y) = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$
6. $f(x,y) = \ln\left(1 + \frac{x}{y}\right)$.

Exercice 3.
Etudier l'existence des dérivées partielles des fonctions suivantes au point $(0,0)$:

1. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
2. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
3. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 4.
Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

admet des dérivées partielles en $(0,0)$, les calculer. Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 5.
Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions mais n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 6.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 + y$.

1. Montrer que f admet en tout point de $\mathbb{R}^2$ des dérivées dans toutes les directions.
2. Préciser alors la dérivée de f en un point (x,y) de $\mathbb{R}^2$ dans la direction θ.
3. Application pour le point $M = (2,1)$ et $\theta = 135°$.

Exercice 7.
Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est continue et admet des dérivées suivant tout vecteur non nul en $(0,0)$.