Réduction d'endomorphismes
ou
Diagonalisation de matrices

A. DAOUDI

Notions abordées

I. Matrice diagonale, valeur propre/vecteur propre associé à un endomorphisme/matrice
II. Sous-espace propre associé à une valeur propre
III. Polynôme caractéristique associé à un endomorphisme/matrice
IV. Conditions de diagonalisation d'un endomorphisme/matrice

Dans ce chapitre, on note $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ ou $\mathbf{K}=\mathbf{C}$.

Pour $n\in\mathbf{N}^*$, $M_n(\mathbf{K})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de type $n\times n$ à coefficients dans $\mathbf{K}$

I. Matrice diagonale, valeur propre/vecteur propre associé à un endomorphisme/matrice

Définition (matrice diagonale)
Soit $A\in M_n(\mathbf{K})$.
On dit que A est une matrice diagonale $\Leftrightarrow \exists\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\in\mathbf{K}$, tel que

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}$$

Exemples

$$I_n=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix} \text{ et } A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -5 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix} \text{ sont des matrices diagonales.}$$

Définitions (valeur propre/vecteur propre)
Soit $f:\mathbf{K}^n\to\mathbf{K}^n$ un endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ (c'est-à-dire f est linéaire)

1) Soit $\lambda\in\mathbf{K}$, λ est une valeur propre de $f\Leftrightarrow \exists u_0\in\mathbf{K}^n$ et $u_0\neq 0_{\mathbf{K}^n}$ tel que $f(u_0)=\lambda u_0$

2) Soit $u_0\in\mathbf{K}^n$, u_0 est un vecteur propre de $f\Leftrightarrow u_0\neq 0_{\mathbf{K}^n}$ et $\exists\lambda\in\mathbf{K}$ tel que $f(u_0)=\lambda u_0$

D'après les définitions 1) et 2) on dit :
u_0 est un vecteur associé à la valeur propre λ ou λ est une valeur propre associée au vecteur propre u_0 .

Remarques (important)
1) Si $A=M_f(B)$ où f est un endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ et B est une base de $\mathbf{K}^n$, on a :
Pour $\lambda\in\mathbf{K}$, λ est une valeur propre de A si λ est une valeur propre de f
Idem pour $u_0\in\mathbf{K}^n$, u_0 est un vecteur propre de A si u_0 est un vecteur propre de f
2) Si $A\in M_n(\mathbf{K})$, il existe alors un unique endomorphisme f de $\mathbf{K}^n$ tel que $A=M_f(B)$ où B est la base canonique de $\mathbf{K}^n$,

Exemple 1:

Etant donnés une matrice $A \in M_n(\mathbf{K})$ et un vecteur $v \in \mathbf{K}^n$ non nul, comment vérifier que v est un vecteur propre de A ?
Réponse : On calcul Av puis on cherche un scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$ vérifiant $Av = \lambda v$.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice associée à un endomorphisme f de $\mathbf{R}^3$ par rapport à la base canonique B de $\mathbf{R}^3$.
Montrez que le vecteur $v = (1,1,1)$ est un vecteur propre de A (ou de f).

$$Av = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow Av = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow Av = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $Av = 2v$ et comme $v \neq 0_{\mathbf{R}^3}$ alors v est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2.

Exemple 2:

Etant donnés une matrice $A \in M_n(\mathbf{K})$ et un scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$, comment vérifier que λ est une valeur propre de A ?
Réponse :
Notons f l'endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ associé à A par rapport à la base canonique B de $\mathbf{K}^n$.
Plusieurs méthodes sont possibles:

1ère méthode : vérifier que $\dim\left(Ker(f - \lambda Id_{\mathbf{K}^n})\right) \geq 1$ en appliquant le théorème du rang à l'endomorphisme $(f - \lambda Id_{\mathbf{K}^n})$ (sans calculer une base de $Ker(f - \lambda Id_{\mathbf{K}^n})$)

2ème méthode : vérifier que $Ker(f - \lambda Id_{\mathbf{K}^n}) \neq \{0_{\mathbf{K}^n}\}$
(vérifier que le système $(A - \lambda I_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ admet une solution non nulle dans $\mathbf{K}^n$)

3ème méthode : vérifier que λ est une racine du polynôme caractéristique associé à la matrice A : $P_A(X) = \det(A - X\,I_n)$, c'est-à-dire vérifier que $P(\lambda) = 0$.

Les méthodes proposées dans l'exemple 2, sont des conséquences des résultats du théorème suivant.

Théorème

Soient $\lambda \in \mathbf{K}$ et $A = M_f(B)$ où f est un endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ et B est une base de $\mathbf{K}^n$, on a :

1) λ est une valeur propre de $A \Leftrightarrow Ker(f - \lambda Id_{\mathbf{K}^n}) \neq \{0_{\mathbf{K}^n}\}$
2) λ est une valeur propre de $A \Leftrightarrow \dim\left(Ker(f - \lambda Id_{\mathbf{K}^n})\right) \geq 1$
3) λ est une valeur propre de $A \Leftrightarrow P(\lambda) = 0$ (c'est-à-dire λ racine du polynôme P) où $P_A(X) = \det(A - X\,I_n)$: ce polynôme s'appelle le polynôme caractéristique associé à A.

Preuve du théorème.

1) λ est une valeur propre de $A \Leftrightarrow \lambda$ est une valeur propre de f

$\Leftrightarrow \exists u_0 \in \mathbf{K}^n$ et $u_0 \neq 0_{\mathbf{K}^n}$ tel que $f(u_0) = \lambda u_0$

$\Leftrightarrow \exists u_0 \in \mathbf{K}^n$ et $u_0 \neq 0_{\mathbf{K}^n}$ tel que $f(u_0) - \lambda u_0 = 0_{\mathbf{K}^n}$

$\Leftrightarrow \exists u_0 \in \mathbf{K}^n$ et $u_0 \neq 0_{\mathbf{K}^n}$ tel que $(f - \lambda Id_{\mathbf{K}^n})(u_0) = 0_{\mathbf{K}^n}$

$\Leftrightarrow \exists u_0 \in \mathbf{K}^n$ et $u_0 \neq 0_{\mathbf{K}^n}$ tel que $u_0 \in Ker(f - \lambda Id_{\mathbf{K}^n})$

$\Leftrightarrow Ker(f - \lambda Id_{\mathbf{K}^n}) \neq \{0_{\mathbf{K}^n}\}$

2) D'après 1) on a :

λ est une valeur propre de $A \Leftrightarrow Ker(f - \lambda Id_{\mathbf{K}^n}) \neq \{0_{\mathbf{K}^n}\}$

$\Leftrightarrow \dim(Ker(f - \lambda Id_{\mathbf{K}^n})) \neq 0$

$\Leftrightarrow \dim(Ker(f - \lambda Id_{\mathbf{K}^n})) \geq 1$ car $\dim(Ker(f - \lambda Id_{\mathbf{K}^n})) \in \mathbf{N}$

3) **Rappel important** :

Si $M = M_g(B)$ où g est un endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ et B est une base de $\mathbf{K}^n$, on a :

g bijective de $\mathbf{K}^n$ sur $\mathbf{K}^n \Leftrightarrow g$ injective de $\mathbf{K}^n$ sur $\mathbf{K}^n \Leftrightarrow \ker(g) = \{0_{\mathbf{K}^n}\}$

D'où la matrice M est inversible $\Leftrightarrow \ker(g) = \{0_{\mathbf{K}^n}\}$

Par suite $\ker(g) \neq \{0_{\mathbf{K}^n}\} \Leftrightarrow M$ n'est pas inversible d' où $\ker(g) \neq \{0_{\mathbf{K}^n}\} \Leftrightarrow \det(M) = 0$

Résumé : Si $M = M_g(B)$ où g est un endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ et B est une base de $\mathbf{K}^n$, on a : $\ker(g) \neq \{0_{\mathbf{K}^n}\} \Leftrightarrow \det(M) = 0$

En appliquant le résultat ci-dessus à l'endomorphisme $(f - \lambda Id_{\mathbf{K}^n})$ on a alors

$Ker(f - \lambda Id_{\mathbf{K}^n}) \neq \{0_{\mathbf{K}^n}\} \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0 \Leftrightarrow P(\lambda) = 0$ où $P(X) = \det(A - X I_n)$

Or d'après 1) on a : λ est une valeur propre de $A \Leftrightarrow Ker(f - \lambda Id_{\mathbf{K}^n}) \neq \{0_{\mathbf{K}^n}\}$

D'où λ est une valeur propre de $A \Leftrightarrow P(\lambda) = 0$ (c'est-à-dire où λ racine du polynôme P)

où $P_A(X) = \det(A - X I_n)$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice associée à l'endomorphisme f de $\mathbf{R}^3$ par rapport à la base canonique B de $\mathbf{R}^3$.

Montrez que 2 est une valeur propre de A (ou de f).

1ère méthode : vérifier que $\dim(Ker(f - 2Id_{\mathbf{R}^3})) \geq 1$ en appliquant le théorème du rang à l'endomorphisme $(f - 2Id_{\mathbf{R}^3})$

$$rg(A - 2I_3) = rg\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -2 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \leq 2 \text{ car } \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

De plus $\det\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$ d'où $rg(A - 2I_3) = rg\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = 2$

Et d'après le théorème du rang on a : $\dim(\mathbf{R}^3) = rg(A-2I_3) + \dim\left(Ker(f-2Id_{\mathbf{R}^3})\right)$
Donc $3 = 2 + \dim\left(Ker(f-2Id_{\mathbf{R}^3})\right)$ d'où $\dim\left(Ker(f-2Id_{\mathbf{R}^3})\right) = 1 \geq 1$
Conclusion : 2 est une valeur propre de A (ou de f)

2ème méthode : vérifier que $Ker(f-2Id_{\mathbf{R}^3}) \neq \{0_{\mathbf{R}^3}\}$

$$(x,y,z) \in Ker(f-2Id_{\mathbf{R}^3}) \Leftrightarrow (A-2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x-y+2z=0 \\ -3x+2y+z=0 \\ 5x-3y-2z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2z=0 \\ -3x+2y+z=0 \\ 5x-3y-2z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2z=0 \\ 5y-5z=0 \\ -8y+8z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2z=0 \\ y=z \\ y=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z \\ y=z \end{cases}$$

D'où $Ker(f-2Id_{\mathbf{R}^3}) = \{(z,z,z)/z \in \mathbf{R}\} = \{z(1,1,1)/z \in \mathbf{R}\} = vect(\{(1,1,1)\})$ et $(1,1,1) \neq 0_{\mathbf{R}^3}$
Donc $Ker(f-2Id_{\mathbf{R}^3}) \neq \{0_{\mathbf{R}^3}\}$
Conclusion : 2 est une valeur propre de A (ou de f) de plus $\{(1,1,1)\}$ est une base de $Ker(f-2Id_{\mathbf{R}^3})$ et $(1,1,1)$ est un vecteur propre de A (ou de f) associé à la valeur propre 2.

3ème méthode : vérifier que 2 est une racine du polynôme caractéristique
$P_A(X) = \det(A - X\,I_3)$

$$P_A(X) = \det(A - X\,I_3) = \det\begin{pmatrix} 1-X & -1 & 2 \\ -3 & 4-X & 1 \\ 5 & -3 & -X \end{pmatrix} = \cdots = (1-X)(X^2-4X+3) + 13X - 27$$

D'où $P_A(2) = -1(4-8+3) + 26 - 27 = 1 - 1 = 0$
Donc 2 est une racine du polynôme caractéristique $P_A(X) = \det(A - X\,I_3)$
Conclusion : 2 est une valeur propre de A (ou de f)

II. Sous-espace propre associé à une valeur propre

Définition (Sous-espace propre)
Soient $f : \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^n$ un endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ et λ une valeur propre de f .
On note $E_\lambda = Ker(f - \lambda Id_{\mathbf{K}^n})$ et s'appelle le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ.

Remarque

Soient $f:\mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^n$ un endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ et λ une valeur propre de f

$E_\lambda = Ker(f-\lambda\, Id_{\mathbf{K}^n}) = \{u \in \mathbf{K}^n / (f-\lambda\, Id_{\mathbf{K}^n})(u) = 0_{\mathbf{K}^n}\} = \{u \in \mathbf{K}^n / f(u) - \lambda\,(u) = 0_{\mathbf{K}^n}\}$

D'où $E_\lambda = \{u \in \mathbf{K}^n / f(u) = \lambda\,(u)\}$

Résumé :

si $u \in \mathbf{K}^n$ et $u \neq 0_{\mathbf{K}^n}$ alors on a:
$u \in E_\lambda \Leftrightarrow u$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\lambda \Leftrightarrow f(u) = \lambda u$

Exemple

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice associée à l'endomorphisme f de $\mathbf{R}^3$ par rapport à la base canonique B de $\mathbf{R}^3$.

Nous avons montré que $(1,1,1)$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre 2

D'où $(1,1,1) \in E_2$.

Remarques (important)

Soient $f:\mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^n$ un endomorphisme de $\mathbf{K}^n$, $A = M_f(B)$ où B est une base $\mathbf{K}^n$ et λ une valeur propre de f , on a :

1) $E_\lambda \neq \{0_{\mathbf{K}^n}\}$ c'est-à-dire $\dim(E_\lambda) \neq 0$;

2) On peut calculer $\dim(E_\lambda)$ par deux méthodes :

- 1ère méthode : On applique le théorème du rang à l'endomorphisme $(f - \lambda\, Id_{\mathbf{K}^n})$ en calculant d'abord $rg(A-\lambda\, I_n)$
- 2ème méthode : on cherche une base de E_λ en résolvant dans $\mathbf{K}^n$ le système

$$(A-\lambda\, I_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemple

D'après les calculs de l'exemple traité précédemment, on a :

D'après le théorème du rang : $\dim(E_2) = 1$ et en résolvant dans $\mathbf{R}^3$ le système

$(A-2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, nous avons montré que $E_2 = Ker(f - 2Id_{\mathbf{R}^3}) = vect(\{(1,1,1)\})$ et comme $(1,1,1) \neq 0_{\mathbf{R}^3}$ alors $\{(1,1,1)\}$ est une base de E_2 par suite $\dim(E_2) = card(\{(1,1,1)\}) = 1$

III. Polynôme caractéristique associé à un endomorphisme/matrice

Définition (Sous-espace propre)

Soient $f:\mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^n$ un endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ et $A = M_f(B)$ où B est une base $\mathbf{K}^n$.

On note $P_A(X) = \det(A - X\, I_n)$

$P_A(X)$ s'appelle le polynôme caractéristique associée à la matrice A.

Remarque (important)

Soit $f:\mathbf{K}^n\to\mathbf{K}^n$ un endomorphisme de $\mathbf{K}^n$

Si $A=M_f(B)$ où B est une base $\mathbf{K}^n$ et $D=M_f(B')$ où B' est une autre base $\mathbf{K}^n$

Alors $P_A(X)=P_D(X)$ où $P_A(X)=\det(A-X\,I_n)$ et $P_D(X)=\det(D-X\,I_n)$

C'est la raison pour laquelle on dit « **le** polynôme caractéristique ».

En d'autres termes, le polynôme caractéristique ne dépend pas du choix de la base de $\mathbf{K}^n$.

Preuve. D'après la formule de changement de bases, on a : $D=P^{-1}A\,P$ où P est la matrice de passage de la base B à la base B'.

On a $(D-X\,I_n)=(P^{-1}AP-X\,I_n)$ car $D=P^{-1}A\,P$

D'où $(D-X\,I_n)=P^{-1}(A-X\,I_n)P$ car

$P^{-1}(A-X\,I_n)P=(P^{-1}A-X\,P^{-1}I_n)P=P^{-1}AP-X\,(P^{-1}I_nP)=P^{-1}AP-X\,I_n$ puisque

$P^{-1}I_nP=P^{-1}P=I_n$

Donc on a bien $(D-X\,I_n)=P^{-1}(A-X\,I_n)P$ par suite

$\det(D-X\,I_n)=\det\left(P^{-1}(A-X\,I_n)P\right)=\det(P^{-1})\,\det(A-X\,I_n)\det(P)$ car

$\det(M\,N)=\det(M)\det(N)$

Et puisque $P^{-1}P=I_n$ alors $\det(P^{-1}P)=\det(I_n)\Leftrightarrow\det(P^{-1})\det(P)=1\Leftrightarrow\det(P^{-1})=\dfrac{1}{\det(P)}$

D'où $\det(D-X\,I_n)=\dfrac{1}{\det(P)}\det(A-X\,I_n)\det(P)=\det(A-X\,I_n)$

Conclusion :

$P_A(X)=P_D(X)$ où $P_A(X)=\det(A-X\,I_n)$ et $P_D(X)=\det(D-X\,I_n)$

Définitions et propriétés (racine d'un polynôme et multiplicité d'une racine)

On note $\mathbf{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbf{R}$,

et $\mathbf{C}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbf{C}$.

On remarque évidement que $\mathbf{R}[X]\subset\mathbf{C}[X]$.

1) Soient $P\in\mathbf{R}[X]$ ou $P\in\mathbf{C}[X]$ et $a\in\mathbf{C}$.

On dit que a est une racine de P si $P(a)=0$

2) a est racine de $P\Leftrightarrow(X-a)$ divise $P\Leftrightarrow\exists\ Q\in\mathbf{C}[X],\ P=(X-a)Q$

3) Soient $\alpha,\lambda_1,\ldots,\lambda_p\in\mathbf{C}$ et $n_1,\ldots,n_p\in\mathbf{N}^*$ tel que pour $1\le i\le p$ et $1\le j\le p$, si $i\ne j$ on a $\lambda_i\ne\lambda_j$ (c'est-à-dire les valeurs λ_i sont deux à deux distinctes)

Si la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P dans $\mathbf{C}[X]$ est de la forme :

$P=\alpha\,(X-\lambda_1)^{n_1}\cdots(X-\lambda_p)^{n_p}$,

Alors, α est le coefficient du plus haut degré de P et $\deg(P)=n_1+\cdots+n_p$ (c'est le degré de P)

De plus, pour tout i vérifiant $1\le i\le p$, on dit que λ_i est une racine de P de multiplicité n_i.

Remarques

1) Soit $P\in\mathbf{C}[X]$ tel que sa décomposition en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbf{C}[X]$ est de la forme : $P=\alpha\,(X-\lambda_1)^{n_1}\cdots(X-\lambda_p)^{n_p}$

Si l'un des $n_i=1$ on dit que λ_i est une racine simple de P

Si l'un des $n_i = 2$ on dit que λ_i est une racine double de P

Si l'un des $n_i = 3$ on dit que λ_i est une racine triple de P

2) Si $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_k X^k$, pour déterminer les racines de P, il suffit de résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation $P(x) = 0$ c'est-à-dire $a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k = 0$

3) Soient P_1 et P_2 deux polynômes de $\mathbf{C}[X]$.

Attention : $P_1(x) + P_2(x) = 0$ **n'est pas équivalent à** $P_1(x) = 0$ et $P_2(x) = 0$.

Mais $P_2(x)\ P_2(x) = 0 \Leftrightarrow P_1(x) = 0$ ou $P_2(x) = 0$

D'où pour faciliter la recherche des racines d'un polynôme, on essaie de le factoriser.

Exemples

1) Attention si $P = (X-1)(X^2-1)$ **on ne peut dire** que 1 est une racine simple de P car on doit encore factoriser pour avoir la décomposition de P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbf{C}[X]$.

En effet $P = (X-1)(X-1)(X+1)$ car $(X^2 - a^2) = (X-a)(X+a)$

D'où décomposition de P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbf{C}[X]$ est de la forme :

$P = (X-1)^2(X+1)$

Conclusion :

-1 est une racine simple de P et 1 est une racine double de P.

2) Soit $P = (X+2)(4X^2 - 3X - 1)^2$ déterminez les racines de P ainsi que leur multiplicité.

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(4x^2 - 3x - 1)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x+2) = 0 \text{ ou } (4x^2 - 3x - 1)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } 4x^2 - 3x - 1 = 0$$

Pour l'équation : $4x^2 - 3x - 1 = 0$ calculons $\Delta = 25$ d'où

$$4x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3+5}{8} \text{ ou } x = \frac{3-5}{8} \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = \frac{-1}{4}$$

Conclusion : $P = 16(X+2)(X-1)^2(X + \frac{1}{4})^2$

Donc -2 est une racine simple de P.

1 et $\frac{-1}{4}$ sont des racines doubles de P.

Remarques (important)

1) Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $P = aX^2 + bX + c$ avec $a \in \mathbf{R}^*$ et $(b,c) \in \mathbf{R}^2$

Si $\Delta = (b^2 - 4ac) < 0$ alors P est irréductible dans $\mathbf{R}[X]$ alors P n'admet pas une racine réelle mais il existe λ_1 et λ_2 deux complexes **non réels,** tel que $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ (λ_2 est le conjugué du complexe λ_1) et $P = a(X-\lambda_1)(X-\lambda_2) = a(X-\lambda_1)(X-\overline{\lambda_1})$

2) Si $P \in \mathbf{R}[X]$ et $\deg(P) \geq 3$ alors :

il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $(X - \lambda)$ divise P ou il existe $a \in \mathbf{R}^*$ et $(b,c) \in \mathbf{R}^2$ tel que $aX^2 + bX + c$ divise P.

Exemples

1) Soit $P = (X-1)(X^2+1)$ et $(X^2+1) \in \mathbf{R}[X]$ de plus $\Delta = -4 < 0$ donc (X^2+1) n'a pas de racine réelle et (X^2+1) irréductible dans $\mathbf{R}[X]$.

Conclusion : $P=(X-1)(X^2+1)$ est la décomposition en produits de facteurs irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$ et 1 est l'unique racine réel de P.
Puisque $X^2+1=(X-i)(X+i)$, la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P dans $\mathbf{C}[X]$ est : $P=(X-1)(X-i)(X+i)$.
Conclusion : $1, -i$ et i sont les racines de P et sont toutes des racines simples.

Théorème
Soient $f:\mathbf{K}^n\to\mathbf{K}^n$ un endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ et $A=M_f(B)$ où B est une base $\mathbf{K}^n$.
Les valeurs propres de A (ou de f) sont les racines du polynôme caractéristique $P_A(X)$

Preuve.
Il résulte de la propriété suivante (déjà démontrée) :
λ est une valeur propre de A (ou de f) $\Leftrightarrow$
λ est une racine du polynôme caractéristique $P_A(X)=\det(A-X\,I_n)$

Exemple
Soit $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-3&4&1\\5&-3&0\end{pmatrix}$ la matrice associée à l'endomorphisme f de $\mathbf{R}^3$ par rapport à la base canonique B de $\mathbf{R}^3$.
Cherchons toutes les valeurs propres de A (sachant que 2 est une valeur propre de A)
On a : $P_A(X)=\det(A-X\,I_n)=(1-X)(X^2-4X+3)+13X-27$
Donc $P_A(X)=-X^3+5X^2+6X-24$
On sait que 2 est une valeur propre de A d'où 2 est une racine du polynôme caractéristique $P_A(X)$ (c'est-à-dire $P_A(2)=0$) donc $(X-2)$ divise $P_A(X)$.
Effectuons alors la division euclidienne de $P_A(X)$ par $(X-2)$ (division suivant les puissances décroissantes)

$$\begin{array}{l|l}
-X^3+5X^2+6X-24 & X-2 \\ \cline{2-2}
\underline{-X^3+2X^2} & -X^2+3X+12 \\
\quad 3X^2+6X-24 & \\
\quad \underline{3X^2-6X} & \\
\qquad 12X-24 & \\
\qquad \underline{12X-24} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

Conclusion 1 : $P_A(X)=-X^3+5X^2+6X-24=(X-2)(-X^2+3X+12)$
$P_A(x)=0\Leftrightarrow(x-2)(-x^2+3x+12)=0$
$\Leftrightarrow\ (x-2)=0$ ou $(-x^2+3x+12)=0$
Résolvons l'équation : $-x^2+3x+12=0$, $\Delta=9+48=57$ d'où
$$-x^2+3x+12=0\ \Leftrightarrow\ x=\frac{-3-\sqrt{57}}{-2}\ \text{ou}\ x=\frac{-3+\sqrt{57}}{-2}\ \Leftrightarrow\ x=\frac{3+\sqrt{57}}{2}\ \text{ou}\ x=\frac{3-\sqrt{57}}{2}$$
Donc $-X^2+3X+12=-(X-\frac{3+\sqrt{57}}{2})(X-\frac{3-\sqrt{57}}{2})$
Par suite $P_A(X)=-(X-2)(X-\frac{3+\sqrt{57}}{2})(X-\frac{3-\sqrt{57}}{2})$

Conclusion : les valeurs propres de A sont : 2 , $\dfrac{3+\sqrt{57}}{2}$ et $\dfrac{3-\sqrt{57}}{2}$

IV. Conditions de diagonalisation d'un endomorphisme/matrice

Théorème

Soient $f:\mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^n$ un endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ et $A = M_f(B)$ où B est une base $\mathbf{K}^n$.

On suppose qu'on a :

λ_1 est une valeur propre de f associée au vecteur propre u_1,

et λ_2 est une valeur propre de f associée au vecteur propre u_2.

1) Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alors la famille $\{u_1, u_2\}$ est libre

2) Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alors $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0_{\mathbf{K}^n}\}$

Preuve

1) Par hypothèse on a : $f(u_1) = \lambda_1 u_1$ et $u_1 \neq 0_{\mathbf{K}^n}$ idem $f(u_2) = \lambda_2 u_2$ et $u_2 \neq 0_{\mathbf{K}^n}$.

Montrons que si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alors la famille $\{u_1, u_2\}$ est libre.

Soient $\alpha \in \mathbf{K}$ et $\beta \in \mathbf{K}$ tel que $\alpha u_1 + \beta u_2 = 0_{\mathbf{K}^n}$ montrons que $\alpha = \beta = 0$ en utilisant la condition $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

$$\begin{aligned}
\alpha u_1 + \beta u_2 = 0_{\mathbf{K}^n} &\Rightarrow f(\alpha u_1 + \beta u_2) = f(0_{\mathbf{K}^n}) \\
&\Rightarrow \alpha\, f(u_1) + \beta\, f(u_2) = 0_{\mathbf{K}^n} \text{ car } f:\mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^n \text{ est une application linéaire} \\
&\Rightarrow \alpha \lambda_1 u_1 + \beta \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbf{K}^n} \text{ car } f(u_1) = \lambda_1 u_1 \text{ et } f(u_2) = \lambda_2 u_2
\end{aligned}$$

On a donc : (1) $\alpha u_1 + \beta u_2 = 0_{\mathbf{K}^n}$ et (2) $\alpha \lambda_1 u_1 + \beta \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbf{K}^n}$

On multiplie alors (1) par λ_1 et on obtient (3) $\alpha \lambda_1 u_1 + \beta \lambda_1 u_2 = 0_{\mathbf{K}^n}$

D'après (2) et (3) on a donc : $\beta(\lambda_2 - \lambda_1) u_2 = 0_{\mathbf{K}^n}$

D'où $\beta(\lambda_2 - \lambda_1) = 0$ car $u_2 \neq 0_{\mathbf{K}^n}$ par suite $\beta = 0$ car $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Donc (1) devient $\alpha u_1 = 0_{\mathbf{K}^n}$ d'où $\alpha = 0$ car $u_1 \neq 0_{\mathbf{K}^n}$

Résumé :

Pour $\alpha \in \mathbf{K}$ et $\beta \in \mathbf{K}$ tel que $\alpha u_1 + \beta u_2 = 0_{\mathbf{K}^n}$ on a $\alpha = \beta = 0$ si $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

C'est-à-dire si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alors la famille $\{u_1, u_2\}$ est libre

2) Montrons que si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alors $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0_{\mathbf{K}^n}\}$

> **Rappels.** Soient E et F deux ensembles on a :
> $E = F \Leftrightarrow (E \subset F$ et $F \subset E)$.
> $u \in (E \cap F) \Leftrightarrow (u \in E$ et $u \in F)$

On sait que $0_{\mathbf{K}^n} \in E_{\lambda_1}$ et $0_{\mathbf{K}^n} \in E_{\lambda_2}$ car E_{λ_1} et E_{λ_2} sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{K}^n$

donc $0_{\mathbf{K}^n} \in (E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2})$ c'est-à-dire $\{0_{\mathbf{K}^n}\} \subset (E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2})$

Reste à montrer que $(E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2}) \subset \{0_{\mathbf{K}^n}\}$

Soit $u \in (E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2})$, montrons que $u \in \{0_{\mathbf{K}^n}\}$ c'est-à-dire $u = 0_{\mathbf{K}^n}$ en utilisant la condition $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\begin{aligned}
\text{En effet } u \in (E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2}) &\Leftrightarrow u \in E_{\lambda_1} \text{ et } u \in E_{\lambda_2} \\
&\Leftrightarrow u \in \mathbf{K}^n,\ f(u) = \lambda_1 u \text{ et } f(u) = \lambda_2 u \\
&\Rightarrow u \in \mathbf{K}^n \text{ et } \lambda_1 u - \lambda_2 u = 0_{\mathbf{K}^n}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow\ u \in \mathbf{K}^n$ et $(\lambda_1 - \lambda_2)u = 0_{\mathbf{K}^n}$

$\Rightarrow u = 0_{\mathbf{K}^n}$ car $\lambda_1 \neq \lambda_2$

D'où $(E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2}) \subset \{0_{\mathbf{K}^n}\}$ si $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Conclusion. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alors $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0_{\mathbf{K}^n}\}$

Remarque

Soient $f : \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^n$ un endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ et $A = M_f(B)$ où B est une base $\mathbf{K}^n$.

Pour chaque $i \in \{1,\dots,p\}$, on suppose qu'on a une valeur propre λ_i de f associée au vecteur propre u_i .

Si $\forall i \in \{1,\dots,p\}$, $\forall j \in \{1,\dots,p\}$, $i \neq j$ on a $\lambda_i \neq \lambda_j$,

Alors la famille $\{u_1,\dots,u_p\}$ est libre

Théorème

Soient $f : \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^n$ un endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ et $A = M_f(B)$ où B est une base $\mathbf{K}^n$.

On suppose qu'on a, deux valeurs propres de f , notées λ_1 et λ_2 .

Soient $B_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ une base de $E_{\lambda_1} = Ker(f - \lambda_1 Id_{\mathbf{K}^n})$ et

$B_2 = \{b_1, b_2, \dots, b_q\}$ une base de $E_{\lambda_2} = Ker(f - \lambda_2 Id_{\mathbf{K}^n})$

Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alors $B_1 \cup B_2 = \{a_1, a_2, \dots, a_p, b_1, b_2, \dots, b_q\}$ est libre

Preuve

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q \in \mathbf{K}$, tel que

$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_p a_p + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \dots + \beta_q b_q = 0_{\mathbf{K}^n}$, montrons que

$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_q = 0$ en utilisant la condition $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

En effet $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_p a_p + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \dots + \beta_q b_q = 0_{\mathbf{K}^n} \Leftrightarrow$

$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_p a_p = -(\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \dots + \beta_q b_q)$

D'où $(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_p a_p) \in E_{\lambda_2}$ (*) car $-(\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \dots + \beta_q b_q) \in E_{\lambda_2}$ puisque $B_2 = \{b_1, b_2, \dots, b_q\}$ est une base de E_{λ_2} .

De plus $(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_p a_p) \in E_{\lambda_1}$ (**) car $B_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ une base de E_{λ_1}

D'où $(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_p a_p) \in (E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2})$ d'après (*) et (**)

Or $\lambda_1 \neq \lambda_2$ on a : $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0_{\mathbf{K}^n}\}$

Donc $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_p a_p = 0_{\mathbf{K}^n}$ et comme $B_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ est libre (car base de E_{λ_1})

Alors $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$

Idem on prouve que $\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \dots + \beta_q b_q = 0_{\mathbf{K}^n}$ et puisque $B_2 = \{b_1, b_2, \dots, b_q\}$ est une base de E_{λ_2} alors $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_q = 0$

Résumé :

Si $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_p a_p + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \dots + \beta_q b_q = 0_{\mathbf{K}^n}$ et si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alors

$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_q = 0$

Conclusion :

Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alors $B_1 \cup B_2 = \{a_1, a_2, \dots, a_p, b_1, b_2, \dots, b_q\}$ est libre

Définition

Soit $f:\mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^n$ un endomorphisme de $\mathbf{K}^n$.
f est diagonalisable s'il existe une base B de $\mathbf{K}^n$ telle que $M_f(B)$ soit une matrice diagonale.

Définition
Soit $A \in M_n(\mathbf{K})$.
A est diagonalisable s'il existe une matrice inversible $P \in M_n(\mathbf{K})$ telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale.

Remarque
Soient $f:\mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^n$ un endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ et $A = M_f(B)$ où B est une base de $\mathbf{K}^n$.
On a f est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable

Exemple
Soient $f:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ un endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ et $A = M_f(B) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ où B est la base canonique de $\mathbf{R}^2$.
Montrons que f et A sont diagonalisables.
On pose $a_1 = (1,0)$ et $a_2 = (1,1)$
On montre que $B' = \{a_1, a_2\}$ est une base $\mathbf{R}^2$;
et $M_f(B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale donc f est diagonalisable.
De plus la matrice de passage de la base B à la base B' est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et en calculant $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ (résultat prévisible d'après la formule de changement de bases)
D'où $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale donc A est diagonalisable.

Théorème (conditions de diagonalisation)
Soient $f:\mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^n$ un endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ et $A = M_f(B)$ où B est une base $\mathbf{K}^n$.
On suppose que le polynôme caractéristique associé A est de la forme :
$P_A(X) = \alpha (X - \lambda_1)^{n_1} \cdots (X - \lambda_p)^{n_p}$
A est diagonalisable sur $\mathbf{K} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, p\},\ \lambda_i \in \mathbf{K} \\ \forall i \in \{1, \dots, p\},\ \dim(E_{\lambda_i}) = n_i \end{cases}$

Preuve (voir cours)

Exemples (voir cours)