THEORIE DES GRAPHES

2) MATRICES ASSOCIEES A UN GRAPHE

Quand le nombre de sommets et d'arêtes d'un graphe sont élevés, il devient pratiquement impossible de représenter graphiquement un graphe. Aussi, on a fait appel à une autre représentation.

2.1. Matrice d'incidence sommets-arcs d'un graphe

Soit G = [X, U] un graphe sans boucle dont l'ensemble des sommets est X = {xl, x2, ... xn) et l'ensemble des arcs est U = (ul, u2,..., um).

La matrice d'incidence sommets-arcs de G est une matrice n * m, A = (aij), définie par

$$
aij = \begin{cases} 1 \text{ si xi est l'extrémité initiale de l'arc uj.} \\ -1 \text{ si xi est l'extrémité terminale de l'arc uj} \\ 0 \text{ dans les autres cas.} \end{cases}
$$

Exemple

Considérons le graphe G donné par la figure 1.

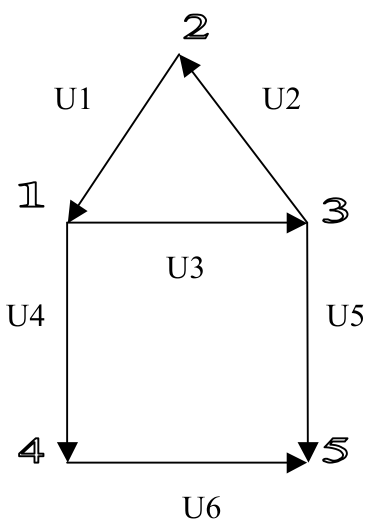

Figure 1.

La matrice d'incidence sommets-arcs de G correspondante est celle qui suit.

	U1	U2	U3	U4	U5	U6
1	-1	0	1	1	0	0
2	1	-1	0	0	0	0
3	0	1	-1	0	1	0
4	0	0	0	-1	0	1
5	0	0	0	0	-1	-1

Notons que dans une matrice d'incidence sommets-arcs, le demi-degré extérieur (resp. le demi-degré intérieur, le degré) d'un sommet xi est donné par le nombre de 1 (resp. de -1, de termes non nuls) de la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice.

2.2. Matrice d'incidence sommets-arêtes d'un graphe

Soit G = [X, U] un graphe dont l'ensemble des sommets est X = {xl, x2, ... xn) et l'ensemble des arcs est U = (ul, u2,..., um).

La matrice d'incidence sommets-arêtes de G est une matrice n * m, A = (aij), définie par

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } x_i \text{ est une des extrémités de l'arc } u_j. \\ 0 \text{ dans les autres cas.} \end{cases}$$

Exemple

Reprenons le graphe G de la figure 1.

La matrice d'incidence sommets-arêtes correspondante est la suivante.

	U1	U2	U3	U4	U5	U6
1	1	0	1	1	0	0
2	1	1	0	0	0	0
3	0	1	1	0	1	0
4	0	0	0	1	0	1
5	0	0	0	0	1	1

2.3. Matrice d'adjacence ou matrice d'incidence sommets-sommets d'un graphe

Soient:

G = [X, U] un graphe sans arcs parallèles et possédant au maximum une boucle par sommet,

X = {xl, x2, ... xn} l'ensemble des sommets de G

La matrice d'adjacence (ou matrice d'incidence sommets-sommets) de G est une matrice n * n, A = (aij), définie par

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } \exists\, u \in U \text{ d'extrémité initiale } x_i \text{ et d'extrémité terminale } x_j. \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Notons que dans le cas d'un graphe non orienté, on peut également définir la matrice d'adjacence d'un graphe simple en considérant qu'à chaque arête (xj, xk), correspond deux arcs (xj, xk) et (xk, xj). Dans un tel cas, la matrice d'adjacence est symétrique.

Exemple

Considérons le graphe G donné par la figure 1.

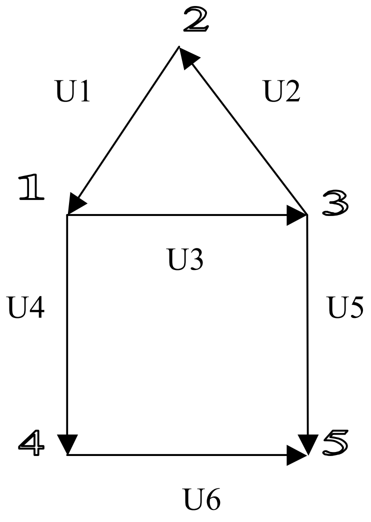

Figure 1.

La matrice d'adjacence correspondante est la suivante.

	1	2	3	4	5
1	0	0	1	1	0
2	1	0	0	0	0
3	0	1	0	0	1
4	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0

3) CHAINE. CYCLE. CHEMIN. CTRCUIT

3.1. Chaîne

Soient:

G = [X, U] un graphe,

xi et xj deux sommets de X.

Une chaîne de longueur q qui joint xi à xj est une concaténation de q **arêtes** dont le départ est le sommet xi et dont l'arrivée est le sommet xj. Ainsi, dans une chaîne qu'importe le sens de parcours.

Une chaîne est dite élémentaire si, en la parcourant, on ne rencontre pas deux fois le même sommet.

Une chaîne est dite simple si elle n'utilise pas deux fois la même arête.

3.2. Cycle

Un cycle est une chaîne simple dont les extrémités coïncident.

Un cycle est dit élémentaire si, on le parcourant, on ne rencontre pas deux fois le même sommet (à l'exception de l'extrémité du cycle).

Une boucle est un cycle élémentaire de longueur 1.

3.3. Chemin

Un chemin de longueur q qui joint xi à xj est une concaténation de q arcs dont l'extrémité initiale est le sommet xi et dont l'extrémité terminale est le sommet xj. Autrement dit, un chemin est une chaîne dont tous les arcs sont orientés dans le même sens.

Un chemin est dit simple s'il n'utilise pas deux fois le même arc.

Un chemin est dit élémentaire si, on le parcourant, on ne rencontre pas deux fois le même sommet.

Un chemin élémentaire est évidemment simple.

3.4. Circuit

Un circuit est un chemin simple dont les extrémités coïncident.

Un circuit élémentaire est un circuit dont tous les sommets sont de degré 2.

Exemple

Considérons le graphe G donné par la figure 2.

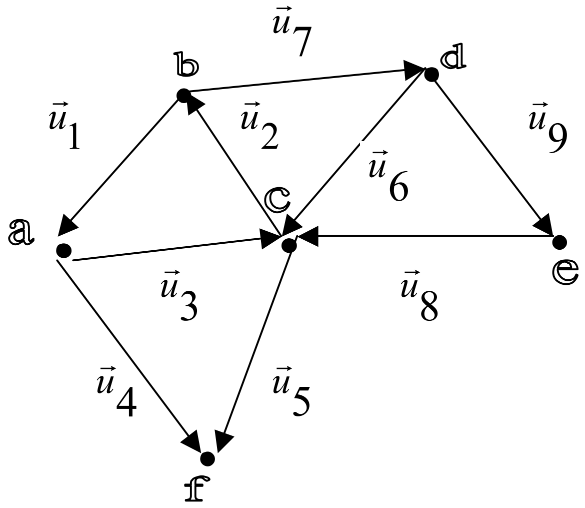

Figure 2.

Pour ce graphe G,

L = $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ est une chaîne de longueur 4 allant de a à f.

L = $\{\vec{u}_2, \vec{u}_8, \vec{u}_9, \vec{u}_6, \vec{u}_5\}$ est une chaîne de longueur 5 simple (on ne passe pas plus d'une fois par la même arête) et non élémentaire (en la parcourant, on rencontre deux fois le sommet c).

$\{\vec{u}_3, \vec{u}_5, \vec{u}_4\}$ est un cycle.

De même, $\{\vec{u}_1, \vec{u}_3, \vec{u}_2\}$ est un cycle. En fait, $\{\vec{u}_1, \vec{u}_3, \vec{u}_2\}$ est aussi un circuit car c'est un cycle orienté dans le même sens et dont les extrémités coïncident.

$\mu = \{\vec{u}_7, \vec{u}_9, \vec{u}_8, \vec{u}_5\}$ est un chemin simple et élémentaire allant du sommet b au sommet f.

3.5. Lien entre matrice d'adjacence et chemins (chaînes)

Théorème : Soit G = [X, U] un graphe orienté (resp. non orienté), sans arcs parallèles, possédant au maximum une boucle par sommet et dont l'ensemble des sommets est X = {xl, x2, ... xn). Soient M = (mij) la matrice d'adjacence et $M^k = (mij)^k = M \times M \ldots \times M$ (le produit de M par elle-même k fois). Alors $\forall$ $k \in N^*$, $(mij)^k$ est égal au nombre de chemins (resp. chaînes) de longueur k reliant le sommet xi au sommet xj.

La trace d'une matrice d'adjacence M, que l'on note Tr(M), est la somme des éléments diagonaux de M.

La trace de M, Tr(M), est égale au nombre de boucles dans le graphe correspondant.

La trace de M^k, $Tr(M^k)$, est égale au nombre de circuits (resp. cycles) de longueur k dans le graphe correspondant.

Exemple

Considérons le graphe G donné par la figure 3.

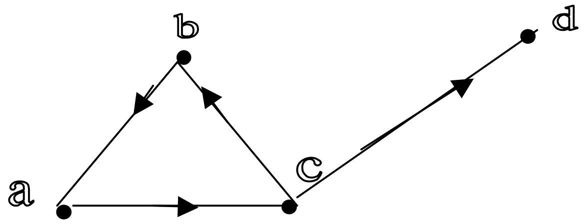

Figure 3.

Supposons que l'on veuille déterminer le nombre total de chemins de longueur 2. Pour ce faire, on va calculer M et M^2.

La matrice d'adjacence M est la suivante.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme Tr(M) = 0+0+0+0 = 0, on conclut que le graphe ne comporte aucune boucle.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, il existe un chemin de longueur 2 entre le sommet a et le sommet b, il existe un chemin de longueur 2 entre le sommet a et le sommet d, il existe un chemin de longueur 2 entre le sommet b et le sommet c et il existe un chemin de longueur 2 entre le sommet c et le sommet a. Par conséquent, le nombre total de chemins de longueur 2 vaut 1+1+1+1 = 4

Par ailleurs, comme $Tr(M^2) = 0+0+0+0 = 0$, on conclut que le graphe ne comporte aucun circuit de longueur 2.

Par contre, si on calcul M^3, on obtient

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme $Tr(M^3) = 1+1+1= 3$, on conclut que le graphe comporte trois circuits de longueur 3.

On notera que le graphe comporte 4 chemins de longueur 3.

Théorème : Soit G = [X, U] un graphe d'ordre n, orienté (resp. non orienté), sans arcs parallèles, possédant au maximum une boucle par sommet et dont la matrice d'adjacence est M = (mij). G est sans circuit $\Leftrightarrow M^n = 0$