**ENDOMORPHISMES ORTHOGONAUX**

A DAOUDI

## Définition

Soit $E$ un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.

On dit que $E$ est un espace euclidien, si $E$ est muni d'un produit scalaire $<\cdot|\cdot>$ et $\dim(E)$ est finie.

## Définition

Soit $E$ un espace euclidien muni d'un produit scalaire $<\cdot|\cdot>$ tel que $\dim(E)=n$.

On dit qu'un endomorphisme $f$ de $E$ est orthogonal si :

$\forall(u,v)\in E^2, < f(u)| f(v)> = <u|v>$.

On dit aussi que $f$ conserve le produit scalaire.

On note $O(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de $E$.

## Remarques

1) Soit $f$ un endomorphisme orthogonal de $E$, alors $\forall u\in E, \| f(u)\| = \|u\|$

En effet $\forall u\in E$ $, < f(u)| f(u)> = <u|u>$ d'où $\forall u\in E, \| f(u)\| = \|u\|$

d'où tout endomorphisme orthogonal $f$ de $E$ conserve la norme : $\forall u\in E, \| f(u)\| = \|u\|$

| Un endomorphisme orthogonal est appelé alors **une isométrie vectorielle.** |
|---|

2) **Rappel :** Soit $f$ un endomorphisme de $E$ et $\dim(E)=n$ **finie** alors on a :

$f$ est bijective de $E$ sur $E \Leftrightarrow f$ est une surjective de $E$ sur $E$

$\Leftrightarrow f$ est une injective de $E$ dans $E$

$\Leftrightarrow Ker(f)=\{0_E\}$

Soit $f$ un endomorphisme orthogonal de $E$ alors $Ker(f)=\{0_E\}$

En effet, on a : $u\in Ker(f) \Leftrightarrow u\in E$ et $f(u)=0_E$

D'où $\| f(u)\| = \|0_E\| = 0$ or $\| f(u)\| = \|u\|$ (car $f$ un endomorphisme orthogonal de $E$)

Donc $\|u\|=0$ par suite $u=0_E$

**Conclusion.** $Ker(f)=\{0_E\}$ et $\dim(E)=n$ fini car $E$ est un espace euclidien.

Donc $f$ est bijective de $E$ sur $E$.

| Si $f$ est un endomorphisme orthogonal de $E$ alors $f$ est bijective de $E$ sur $E$ |
|---|

3) $(O(E),\circ)$ est un groupe où « $\circ$ » désigne la loi de composition des fonctions.

(Vérifier les propriétés ci-dessous):

3.1) Si $f$ est un endomorphisme orthogonal de $E$ et $g$ est un endomorphisme orthogonal de $E$ alors $(f\circ g)$ est un endomorphisme orthogonal de $E$ ;

3.2) $Id_E$ est un endomorphisme orthogonal de $E$ et c'est l'élément neutre de $(O(E),\circ)$ :

$\forall f \in O(E), Id_E\circ f = f\circ Id_E = f$ ;

3.3) Si $f$ est un endomorphisme orthogonal de $E$ alors $f^{-1}$est un endomorphisme orthogonal de $E$ où $f^{-1}$ désigne l'application réciproque de $f$ ;

3.4) $\forall (f,g,h) \in (O(E))^3, (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ (toujours vraie pour les fonctions)

**Théorème**

Soient $E$ un espace euclidien muni d'un produit scalaire $< \cdot | \cdot >$ tel que $\dim(E) = n$ et $f$ un endomorphisme de $E$.

$f$ est un endomorphisme orthogonal de $E$ **si et seulement si** l'image par $f$ d'une base orthonormée $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de $E$ est une base orthonormée de $E$ (c'est-à-dire $\{f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\}$ est une base orthonormée).

D'où $f$ est un endomorphisme orthogonal de $E$ **si et seulement si** la matrice $A$ de $f$ par rapport à une base orthonormée de $E$ vérifie $({}^tA)A = I_n$

**Preuve.**

- Montrons que si $f$ est un endomorphisme orthogonal de $E$ et si $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ est une base orthonormée de $E$ **alors** $\{f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\}$est une base orthonormée de $E$

En effet $\forall i \in \{1,2,\ldots,n\}, \forall j \in \{1,2,\ldots,n\}, < f(e_i) | f(e_j) > = < e_i | e_j >$ car $f$ est un endomorphisme orthogonal de $E$, d'où $\forall i \in \{1,2,\ldots,n\}, \forall j \in \{1,2,\ldots,n\}$,
$< f(e_i) | f(e_j) > = < e_i | e_j > = \delta_{ij}$ où $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$
car $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ est une base orthonormée de $E$
d'où les vecteurs $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$ sont de norme un et deux à deux orthogonaux et par suite la famille$\{f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\}$est une base orthonormée de $E$

**Conclusion 1** : si $f$ est un endomorphisme orthogonal de $E$ **alors** l'image par $f$ d'une base orthonormée de $E$ est une base orthonormée de $E$.

- Montrons que si l'image par $f$ d'une base orthonormée $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de $E$ est une base orthonormée de $E$ alors $f$ est un endomorphisme orthogonal de $E$.

En effet $\forall i \in \{1,2,\ldots,n\}, \forall j \in \{1,2,\ldots,n\}, < f(e_i) | f(e_j) > = \delta_{ij}$ car par hypothèse $\{f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\}$est une base orthonormée de $E$, idem
$\forall i \in \{1,2,\ldots,n\}, \forall j \in \{1,2,\ldots,n\}, < e_i | e_j > = \delta_{ij}$
D'où $\forall i \in \{1,2,\ldots,n\}, \forall j \in \{1,2,\ldots,n\}, < f(e_i) | f(e_j) > = < e_i | e_j >$
Donc si $u = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ et $v = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n$ alors
$f(u) = x_1 f(e_1) + \cdots + x_n f(e_n)$ et $f(v) = y_1 f(e_1) + \cdots + y_n f(e_n)$ car $f$ est linéaire.
D'où $< f(u) | f(v) > = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ car$\{f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\}$est une base orthonormée de $E$ (cf. TD)
Idem $< u | v > = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$
Donc $\forall (u,v) \in E^2, < f(u) | f(v) > = < u | v >$

**Conclusion 2** : Si l'image par $f$ d'une base orthonormée de $E$ est une base orthonormée de $E$ **alors** $f$ est un endomorphisme orthogonal de $E$.

**Conclusion :**
$f$ est un endomorphisme orthogonal de $E$ **si et seulement si** l'image par $f$ d'une base orthonormée $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de $E$ est une base orthonormée de $E$.

**Remarques (importantes)**
1) Si $f$ est un endomorphisme orthogonal de $E$ et $A$ est la matrice de $f$ par rapport à une base orthonormée de $E$ on a: $({}^tA)A = I_n$

En effet, soit $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ base orthonormée de $E$ d'où
$\forall i \in \{1,2,\dots,n\}, \forall j \in \{1,2,\dots,n\}, < f(e_i) \mid f(e_j) > = < e_i \mid e_j >$ car $f$ est un endomorphisme orthogonal de $E$.

$$\text{Posons } A = M_f(B) = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) & & f(e_n) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}} \text{ d'où } {}^tA = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}} \text{ où } b_{ij} = a_{ji}$$

De plus $f(e_i) = a_{1i}\, e_1 + a_{2i}\, e_2 + \cdots + a_{ki}\, e_k + \cdots + a_{ni}\, e_n = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ki}\, e_k$

et $f(e_j) = a_{1j}\, e_1 + a_{2j}\, e_2 + \cdots + a_{kj}\, e_k + \cdots + a_{nj}\, e_n = \sum_{k=1}^{k=n} a_{kj}\, e_k$

donc $< f(e_i) \mid f(e_j) > = a_{1i}\, a_{1j} + a_{2i}\, a_{2j} + \cdots + a_{ki}\, a_{kj} + \cdots + a_{ni}\, a_{nj} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ki}\, a_{kj}$ car $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ est base orthonormée de $E$.

Si on pose $({}^tA)A = (c_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$ alors par définition on a :

$c_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} b_{ik}\, a_{kj} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ki}\, a_{kj} = < f(e_i) \mid f(e_j) > = < e_i \mid e_j >$ car $f$ est un endomorphisme orthogonal de $E$.

Et puisque $\forall i \in \{1,2,\dots,n\}, \forall j \in \{1,2,\dots,n\}, < e_i \mid e_j > = \delta_{ij}$ et $I_n = (\delta_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$

Par suite $(c_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}} = I_n$ c'est-à-dire $({}^tA)A = I_n$

2) Si $f$ est un endomorphisme orthogonal de $E$ et $A$ est la matrice de $f$ par rapport à une base orthonormée de $E$ alors $|\det(A)| = 1$ c'est-à-dire $\det(A) = -1$ ou $\det(A) = 1$

En effet d'après la remarque 1) on a : $({}^tA)A = I_n$ d'où $\det[({}^tA)A] = \det(I_n) = 1$

Donc $\det({}^tA)\det(A) = 1$ et puisque $\det({}^tA) = \det(A)$ alors $[\det(A)]^2 = 1$ d'où $|\det(A)| = 1$.

3) Si $A$ est la matrice de $f$ par rapport à une base $B$ de $E$ et $M$ est la matrice de $f$ par rapport à une autre base $B'$ de $E$ alors $\det(A) = \det(M)$.

En effet d'après la formule de changement de bases, on a : $M = P^{-1}AP$ où $P$ est la matrice de passage de la base $B$ à la base $B'$, avec $P^{-1}P = I_n$ d'où $\det(P^{-1})\det(P) = 1$

Donc $\det(M) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P)$ et puisque $\det(P^{-1}) = \dfrac{1}{\det(P)}$ car $\det(P^{-1})\det(P) = 1$

Alors $\det(M) = \dfrac{1}{\det(P)}\det(A)\det(P) = \det(A)$

4) On sait que si $A$ est la matrice d'un endomorphisme orthogonal $f$ par rapport à une base orthonormée de $E$ alors $|\det(A)| = 1$ **mais la réciproque est fausse !**

En effet soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice associée à un endomorphisme $f$ de $\mathbf{R}^2$ par rapport à la base canonique $B = \{e_1, e_2\}$ de $\mathbf{R}^2$ où $e_1 = (1{,}0)$ et $e_2 = (0{,}1)$.

$B$ est une base orthonormée de $\mathbf{R}^2$ (muni du produit scalaire canonique) car :

$< e_1 | e_2 > = 0$ et $\|e_1\| = \|e_2\| = 1$

On a $|\det(A)| = 1$ mais $f$ n'est pas un endomorphisme orthogonal de $\mathbf{R}^2$.

Pour le prouver on peut utiliser l'une des méthodes ci-dessous:

1ère méthode

$< f(e_1) | f(e_2) > \neq < e_1 | e_2 >$

car $< e_1 | e_2 > = 0$ et $< f(e_1) | f(e_2) >= 2$ puisque $f(e_1) = (1{,}0)$ et $f(e_2) = (2{,}1)$

2ème méthode

L'image par $f$ de la base orthonormée $B = \{e_1, e_2\}$, à savoir $f(B) = \{f(e_1), f(e_2)\}$ n'est pas une base orthonormée car $< f(e_1) | f(e_2) > \neq 0$

3ème méthode

$({}^tA)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ d'où $({}^tA)A \neq I_2$

**Définition**

Soient $E$ un espace euclidien muni d'un produit scalaire $< \cdot | \cdot >$ et $f$ un endomorphisme orthogonal de $E$.

On dit que $f$ est **une rotation vectorielle** si $\det(A) = 1$ où $A$ est la matrice associée à $f$ par rapport à une base orthonormée de $E$.

**Rappel**

On identifie $\mathbf{C}$ à $\mathbf{R}^2$ en utilisant l'application linéaire bijective $\varphi : \mathbf{C} \to \mathbf{R}^2$ définie par :

$\forall (a,b) \in \mathbf{R}^2$, pour $z = a + ib$, $\varphi(z) = (a,b)$.

La rotation $\varphi_\theta$ de $\mathbf{C}$ d'angle $\theta$ et de centre $O = (0{,}0)$ est définie par :

$\varphi_\theta : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ tel que $\forall z \in \mathbf{C}, \varphi_\theta(z) = z'$ où $z' = e^{i\theta} z$

Soit $z \in \mathbf{C}$ d'où il existe $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, tel que $z = a + ib$ et on a : $z' = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))(a + ib)$

D'où $z' = (a\cos(\theta) - b\sin(\theta)) + i(a\sin(\theta) + b\cos(\theta))$

La rotation vectorielle $R_\theta$ de $\mathbf{R}^2$ d'angle $\theta$ et de centre $O = (0{,}0)$ est donc définie par :

$R_\theta : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ et $\forall (a,b) \in \mathbf{R}^2, R_\theta(a,b) = (a',b')$ où

$$\begin{cases} a' = a\cos(\theta) - b\sin(\theta) \\ b' = a\sin(\theta) + b\cos(\theta) \end{cases} \text{ c'est-à-dire } \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Donc $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ est la matrice associée à la rotation vectorielle $R_\theta$ de $\mathbf{R}^2$ d'angle $\theta$ et de centre $O = (0,0)$ par rapport à la base canonique de $\mathbf{R}^2$ et $\det(A) = [\cos(\theta)]^2 + [\sin(\theta)]^2 = 1$

**Proposition**

Soient $E$ un espace euclidien muni d'un produit scalaire $<\cdot|\cdot>$ et $f$ un endomorphisme orthogonal de $E$ tels que $f \circ f = Id_E$.

1) Si $\lambda$ est une valeur propre de $f$ alors $\lambda = -1$ ou $\lambda = 1$ ;

2) Si $-1$ et $1$ sont les valeurs propres de $f$ alors les sous espaces propres $E_{-1}$ et $E_1$ sont orthogonaux (c'est-à-dire $\forall u \in E_{-1}, \forall v \in E_1, < u | v >= 0$) et $E = E_{-1} \oplus E_1$.

**Preuve** :

1) Soit $\lambda$ une valeur propre de $f$ d'où il existe $u \in E, u \neq 0_E$ tel que $f(u) = \lambda u$

D'où $f\big(f(u)\big) = f(\lambda u) = \lambda f(u)$ car $f$ est linéaire

Donc $u = \lambda(\lambda u)$ car $f \circ f = Id_E$ et $f(u) = \lambda u$ alors $u = \lambda^2 u$ d'où

$u - \lambda^2 u = 0_E \Leftrightarrow (1-\lambda^2)u = 0_E \Leftrightarrow 1-\lambda^2 = 0$ car $u \neq 0_E$ alors $\lambda = -1$ ou $\lambda = 1$.

2) **Montrons que** $E_{-1}$ et $E_1$ sont orthogonaux.

Supposons que $-1$ et $1$ sont les valeurs propres de $f$ et soient $u \in E_{-1}, v \in E_1$ on a donc $f(u) = -u$ et $f(v) = v$.

Puisque $f$ est un endomorphisme orthogonal de $E$ alors $< f(u) | f(v) >=< u | v >$

d'où $< -u | v >=< u | v >$ donc $-< u | v >=< u | v >$

Alors $2 < u | v >= 0$ par suite $< u | v >= 0$.

Conclusion : $E_{-1}$ et $E_1$ sont orthogonaux.

**Montrons que** $E = E_{-1} \oplus E_1$, en effet :

- $\forall u \in E$, on a $\frac{1}{2}\big(u - f(u)\big) \in E_{-1}$

car $f[\frac{1}{2}\big(u - f(u)\big)] = \frac{1}{2}[f(u) - f\big(f(u)\big)]$ d'après la linéarité de $f$.

d'où $f[\frac{1}{2}\big(u - f(u)\big)] = \frac{1}{2}[-u - f\big(-u\big)]$ car $u \in E_{-1}$

donc $f[\frac{1}{2}\big(u - f(u)\big)] = \frac{1}{2}[-u + f\big(u\big)] = -\frac{1}{2}[u - f\big(u\big)]$ car $f$ est linéaire.

- Idem on montre que $\forall u \in E$, on a $\frac{1}{2}\big(u + f(u)\big) \in E_1$
- De plus $\forall u \in E$, on a : $u = \frac{1}{2}\big(u + f(u)\big) + \frac{1}{2}\big(u - f(u)\big)$ donc $E = E_{-1} + E_1$
- Montrons que $E_{-1} \cap E_1 = \{0_E\}$ :

Soit $u \in \big(E_{-1} \cap E_1\big)$ on a donc

$(u \in E_{-1}$ et $u \in E_1) \Leftrightarrow (f(u) = -u$ et $f(u) = u)$ d'où $u = -u$

Donc $2u = 0_E$ soit $u = 0_E$ et comme $0_E \in (E_{-1} \cap E_1)$ par suite $E_{-1} \cap E_1 = \{0_E\}$.

**Conclusion.** $E = E_{-1} \oplus E_1$ car $E = E_{-1} + E_1$ et $E_{-1} \cap E_1 = \{0_E\}$

**Remarques importantes**

Soit $E$ un espace euclidien muni d'un produit scalaire $<\cdot|\cdot>$ .

1) Si $f$ est un endomorphisme orthogonal de $E$ tel que $f \circ f = Id_E$ on a :

- $f = -Id_E$ et dans ce cas $-1$ est **la seule** valeur propre de $f$ : c'est-à-dire $E = E_{-1}$ ;

ou

- $f = Id_E$ et dans ce cas $1$ est **la seule** valeur propre de $f$ : c'est-à-dire $E = E_{-1}$ ;

ou

- $f \neq -Id_E$ et $f \neq Id_E$ alors $-1$ et $1$ **sont les valeurs propres de** $f$ .

2) Si $f$ est un endomorphisme orthogonal de $E$ tel que $f \circ f = Id_E$ , on a :

Si $1$ est une valeur propre de $f$ et $E \neq E_1$ , alors $-1$ est une valeur propre de $f$ .

En effet puisque $E \neq E_1$ alors $f \neq Id_E$ d'où il existe alors $\underline{u_0 \in E, f(u_0) \neq u_0}$ le vecteur non nul $b = f(u_0) - u_0$ , vérifie $f(b) = -b$ car $f \circ f = Id_E$ d'où $-1$ est une valeur propre de $f$ .

3) D'après la remarque 2) on a :

Si $f$ est un endomorphisme orthogonal de $E$ tel que $f \circ f = Id_E$ .

Si $\dim(E_1) \neq 0$ et $\dim(E) \neq \dim(E_1)$ alors $-1$ et $1$ sont les valeurs propres de $f$ , de plus d'après la proposition ci-dessus, les sous espaces propres $E_{-1}$ et $E_1$ sont orthogonaux et $E = E_{-1} \oplus E_1$ .

## Définition

Soient $E$ un espace euclidien de dimension $n$ et $f$ un endomorphisme orthogonal de $E$ tels que $f \circ f = Id_E$ alors :

On dit que $f$ est une symétrie orthogonale par rapport à l'espace $E_1 = Ker(f - Id_E)$.

1) Si $\dim(E_1) = 0$ (c'est-à-dire $1$ n'est pas une valeur propre de $f$ , dans ce cas $f = -Id_E$) : on a est une symétrie centrale ;

2) Si $\dim(E_1) = n-1$ : on a une réflexion d'hyperplan $E_1$ ;

3) Si $\dim(E_1) = n-2$ : on a un renversement

## Exemples

Soient $E$ un espace euclidien et $f$ un endomorphisme orthogonal de $E$ tels que $f \circ f = Id_E$ . Etudions les cas particuliers suivants :

**1er cas** : $\dim(E) = 2$

- Si $1$ n'est pas une valeur propre de $f$ alors $\dim(E_1) = 0$ (d'où $f = -Id_E$) : on a est une symétrie centrale.

- Si $1$ est une valeur propre de $f$ alors $\dim(E_1) \neq 0$ :
  - Si $\dim(E_1) = 1$ : on a une réflexion d'hyperplan $E_1$ ;
  - Si $\dim(E_1) = 2$ , alors $E = E_1$ d'où $f = Id_E$

**2ème cas** : $\dim(E) = 3$

- Si $1$ n'est pas une valeur propre de $f$ alors $\dim(E_1) = 0$ (d'où $f = -Id_E$) : on a une symétrie centrale.
- Si $1$ est une valeur propre de $f$ alors $\dim(E_1) \neq 0$ :
  - Si $\dim(E_1) = 3$, alors $f = Id_E$
  - Si $\dim(E_1) = 2$ : on a est une réflexion d'hyperplan $E_1$ ;
  - Si $\dim(E_1) = 1$ : on a un renversement.

### Théorème

Soient $E$ un espace euclidien de dimension $n$ et $f$ un endomorphisme orthogonal de $E$ tels que $f \circ f = Id_E$ alors :

1) Si $\dim(E_1) = n-1$, alors $f$ est la réflexion d'hyperplan $E_1$ et il existe un vecteur non nul $a \in E_{-1}$ tel que $f = s_a$ où $s_a$ est l'endomorphisme de $E$ défini par :

$$\forall u \in E,\ s_a(u) = u - 2 < u \mid \frac{a}{\|a\|} > \frac{a}{\|a\|}$$

De plus si $A$ est la matrice associée à $f$ par rapport à une base de $E$, $\det(A) = -1$.

2) Si $\dim(E_1) = n-2$ , alors il existe deux vecteurs non nuls orthogonaux $a \in E_{-1}$, $b \in E_{-1}$ tels que le renversement $f$ vérifie : $f = s_a \circ s_b = s_b \circ s_a$ et $\det(A) = 1$ où $A$ est la matrice associée à $f$ par rapport à une base de $E$.

**Preuve**…………

### Exemples

Soient $E$ un espace euclidien et $f$ un endomorphisme orthogonal de $E$ tels que $f \circ f = Id_E$. Etudions les cas particuliers suivants:

**1er cas** : $\dim(E) = 2$

- Si $\dim(E_1) = 2$ alors $f = Id_E$
- Si $\dim(E_1) = 1$ alors $\dim(E) \neq \dim(E_1)$ d'où d'après l'une des remarques ci-dessus, $-1$ et $1$ sont les valeurs propres de $f$, $E_{-1}$ et $E_1$ sont orthogonaux et $E = E_{-1} \oplus E_1$. Donc $\dim(E_{-1}) = 1$, et il existe alors un vecteur non nul $a \in E_{-1}$ tel que $E_{-1} = vect(\{a\})$ et $f = s_a$ est la réflexion par rapport à $E_1$ (c'est la symétrie orthogonale par rapport à $E_1$).
- Si $\dim(E_1) = 0$ alors $f = -Id_E$

**2ème cas** : $\dim(E) = 3$

- Si $\dim(E_1) = 3$ alors $f = Id_E$
- Si $\dim(E_1) = 2$ alors $\dim(E) \neq \dim(E_1)$ d'où d'après l'une des remarques ci-dessus, $-1$ et $1$ sont les valeurs propres de $f$, $E_{-1}$ et $E_1$ sont orthogonaux et $E = E_{-1} \oplus E_1$. Donc $\dim(E_{-1}) = 1$, et il existe alors un vecteur non nul $a \in E_{-1}$ tel que $E_{-1} = vect(\{a\})$ et $f = s_a$ est la réflexion par rapport à $E_1$ (c'est la symétrie orthogonale par rapport à $E_1$).

- Si $\dim(E_1)=1$ alors $\dim(E)\neq\dim(E_1)$ d'où d'après l'une des remarques ci-dessus, $-1$ et $1$ sont les valeurs propres de $f$, $E_{-1}$ et $E_1$ sont orthogonaux et $E=E_{-1}\oplus E_1$.

  Donc $\dim(E_{-1})=2$, et il existe alors deux vecteurs non nuls orthogonaux $(a,b)\in(E_{-1})^2$ tels que $E_{-1}=vect(\{a,b\})$ et $f=s_a\circ s_b=s_b\circ s_a$ est un renversement.
- Si $\dim(E_1)=0$ alors $f=-Id_E$

**Classification des endomorphismes orthogonaux (isométries) en dimension 1, 2 ou 3**

Soient $E$ un espace euclidien muni d'un produit scalaire $<\cdot|\cdot>$ et $f$ un endomorphisme orthogonal (**isométrie**) de $E$ c'est-à-dire $({}^tA)A=I_n$ où $A$ est la matrice associée à $f$ par rapport à une base orthonormée de $E$, d'où $\det(A)=\pm 1$ car $\det({}^tA)=\det(A)$ et $\det(I_n)=1$.

**1er cas** : $\dim(E)=1$

**Théorème (à retenir)**

Si $\dim(E)=1$ et $f$ est un endomorphisme orthogonal (**isométrie**) de $E$ alors $f=-Id_E$ ou $f=Id_E$

**Preuve……**

**2ème cas** : $\dim(E)=2$

**Théorème (à retenir)**

Si $\dim(E)=2$ et $f$ est un endomorphisme orthogonal (**isométrie**) de $E$ on a :

- Si $\det(A)=1$ (c'est-à-dire $f$ est une **isométrie positive**) : il existe $\theta\in\mathbf{R}$ tel que $A=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$, $f$ est la rotation vectorielle d'angle $\theta$ ;

  de plus si $f\neq Id_E$ ou $f\neq -Id_E$ alors $f$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbf{R}$.

- Si $\det(A)=-1$ (c'est-à-dire $f$ est une **isométrie négative**) : il existe $\theta\in\mathbf{R}$ tel que $A=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{pmatrix}$, on a $f\circ f=Id_E$ et $f$ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle $E_1$ d'équation cartésienne : $(A-I_2)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$.

  de plus $f$ est diagonalisable sur $\mathbf{R}$.

**Preuve……**

**Remarques**

1) Si $\dim(E)=2$ et $f$ est une **isométrie négative** alors $f\circ f=Id_E$.

En effet $A=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{pmatrix}$ donc ${}^tA=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{pmatrix}=A$ et puisque $({}^tA)A=I_2$ alors $A.A=I_2$ c'est-à-dire $f\circ f=Id_E$

2) Si $\dim(E)=2$ et $f$ est une **isométrie négative** alors

$E_1=vect(\left\{\left(\cos(\frac{\theta}{2}),\sin(\frac{\theta}{2})\right)\right\}$, $E_{-1}=vect(\left\{\left(-\sin(\frac{\theta}{2}),\cos(\frac{\theta}{2})\right)\right\}$,

3) Si $\dim(E)=2$ et $f$ est une **isométrie négative** alors $f\circ f = Id_E$ et les valeurs propres de $f$ sont $-1$ et $1$ d'où $E_{-1}$ et $E_1$ sont orthogonaux et $E = E_{-1}\oplus E_1$.

| |
|---|
| **Rappel** : Si $B$ est une matrice carrée de type $n\times n$ et $\lambda$ est un scalaire alors $\det(\lambda B)=\lambda^n \det(B)$ |

**Exemples**

1) On considère $\mathbf{R}^2$ muni du produit scalaire usuel $<\cdot|\cdot>$.

Soit $A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}$ la matrice associée à l'endomorphisme $f$ de $\mathbf{R}^2$ par rapport à la base canonique $B=\{e_1,e_2\}$ de $\mathbf{R}^2$ où $e_1=(1,0)$ et $e_2=(0,1)$.

Quelle est la nature de l'endomorphisme $f$ ?

**Réponse**

- Tout d'abord on remarque que $B=\{e_1,e_2\}$ est une base orthonormée car $<e_1|e_2>=0$ et $\|e_1\|=\|e_2\|=1$ ;
- ${}^tA=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}$ et $({}^tA)A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}25 & 0\\ 0 & 25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
- $\det(A)=\det\left(\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}\right)=\left(\frac{1}{5}\right)^2\det\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}=\frac{1}{25}(-25)=-1$

Conclusion :

On a $\dim(\mathbf{R}^2)=2$, $({}^tA)A=I_2$ et $\det(A)=-1$ d'où $f$ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $E_1=Ker(f-Id_{\mathbf{R}^2})$ d'équation cartésienne : $y=\frac{1}{2}x$ car ,

$$(x,y)\in E_1 \Leftrightarrow (A-I_2)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\frac{3}{5}-1 & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{-3}{5}-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\frac{-2}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{-8}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\cdots\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x$$

2) On considère $\mathbf{R}^2$ muni du produit scalaire usuel $<\cdot|\cdot>$.

Soit $A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & -4\\ 4 & 3\end{pmatrix}$ la matrice associée à l'endomorphisme $f$ de $\mathbf{R}^2$ par rapport à la base canonique $B=\{e_1,e_2\}$ de $\mathbf{R}^2$ où $e_1=(1,0)$ et $e_2=(0,1)$.

Quelle est la nature de l'endomorphisme $f$ ?

**Réponse**

Idem :

- Tout d'abord on remarque que $B=\{e_1,e_2\}$ est une base orthonormée car $<e_1|e_2>=0$ et $\|e_1\|=\|e_2\|=1$
- ${}^tA=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 4\\ -4 & 3\end{pmatrix}$ et $({}^tA)A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 4\\ -4 & 3\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & -4\\ 4 & 3\end{pmatrix}=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}25 & 0\\ 0 & 25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

- $\det(A)=\det\left(\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}\right)=\left(\frac{1}{5}\right)^2\det\begin{pmatrix}3 & -4\\ 4 & 3\end{pmatrix}=\frac{1}{25}(25)=1$

Conclusion :
On a $\dim(\mathbf{R}^2)=2$, $({}^tA)A=I_2$ et $\det(A)=1$
d'où il existe $\theta\in\mathbf{R}$ tel que $f$ est la rotation vectorielle d'angle $\theta$ :

$$A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & -4\\ 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$$

$\theta$ est donné à $2k\pi$ où $k\in\mathbf{Z}$ et vérifie : $\cos(\theta)=\frac{3}{5}$ et $\sin(\theta)=\frac{4}{5}$.

$\theta$ n'est pas un angle « classique » mais on peut choisir $\theta=\arctan\left(\frac{4}{3}\right)$ car

$\tan(\theta)=\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}=\frac{4}{3}$ et $\cos(\theta)>0$.

3) On considère $\mathbf{R}^2$ muni du produit scalaire usuel $<\cdot|\cdot>$.

Soit $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & -\sqrt{2}\\ \sqrt{2} & \sqrt{2}\end{pmatrix}$ la matrice associée à l'endomorphisme $f$ de $\mathbf{R}^2$ par rapport à la base canonique $B=\{e_1,e_2\}$ de $\mathbf{R}^2$ où $e_1=(1,0)$ et $e_2=(0,1)$.
Quelle est la nature de l'endomorphisme $f$ ?

**Réponse**
On a $\dim(\mathbf{R}^2)=2$, $B=\{e_1,e_2\}$ est une base orthonormée et on vérifie que $({}^tA)A=I_2$ et $\det(A)=1$ d'où il existe $\theta\in\mathbf{R}$ tel que $f$ est la rotation vectorielle d'angle $\theta$ :

$$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & -\sqrt{2}\\ \sqrt{2} & \sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$$

$\theta$ est donné à $2k\pi$ où $k\in\mathbf{Z}$ et vérifie : $\cos(\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Il suffit alors de choisir $\theta=\frac{\pi}{4}$

Conclusion : $f$ est la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{4}$

Avant de traiter la caractérisation d'un endomorphisme orthogonal d'un espace vectoriel de dimension 3, énonçons le théorème général suivant.

**Théorème (important)**
Soient $E$ un espace euclidien muni d'un produit scalaire $<\cdot|\cdot>$ et $f$ un endomorphisme orthogonal (**isométrie**) de $E$.

1) Si $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ tel que $f(F)\subset F$ alors $f(F^\perp)\subset F^\perp$ ;
(c'est-à-dire si $F$ est stable par $f$ alors $F^\perp$ est stable par $f$, où $F^\perp$ est l'orthogonal de $F$)
2) Si $\lambda\in\mathbf{R}$ et $\lambda$ est une valeur propre de $f$ alors $\lambda=\pm1$ ;

3) Si $-1$ et $1$ sont des valeurs propres de $f$ alors les sous-espaces propres $E_{-1}$ et $E_1$ sont orthogonaux (c'est-à-dire $\forall u \in E_{-1}, \forall v \in E_1, < u | v > = 0$ )

**Preuve…..**

**3ème cas** : $\dim(E) = 3$

**Théorème (à retenir)**

Si $\dim(E) = 3$ et $f$ est un endomorphisme orthogonal (**isométrie**) de $E$ on a :

- Si $\det(A) = 1$ (c'est-à-dire $f$ est une **isométrie positive**), alors $1$ est une valeur propre de $f$ et $\dim(E_1) = 1$ ou $\dim(E_1) = 3$.
  - Si $\dim(E_1) = 3$, alors $f = Id_E$
  - Si $\dim(E_1) = 1$, $f$ est dite une rotation
    - Si $-1$ est une valeur propre (forcement double) de $f$, la rotation $f$ est appelée le retournement d'axe $E_1$ (c'est la symétrie orthogonale par à la droite $E_1$) et il existe une base orthonormée $B' = \{a_1, a_2, a_3\}$ de $E$ telle que la matrice de $f$ par rapport à $B'$ est de la forme $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $E_1 = vect(\{a_3\})$, $\|a_3\| = 1$ et $\{a_1, a_2\}$ est une base orthonormée de $E_{-1}$.
    - Si $-1$ n'est pas une valeur propre de $f$, alors il existe $\theta \in \mathbf{R}$ et il existe une base orthonormée $B' = \{a_1, a_2, a_3\}$ de $E$ tel que la matrice de $f$ par rapport à $B'$ est de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
      $f$ est la rotation vectorielle d'angle $\theta$ et d'axe $E_1 = vect(\{a_3\})$, $\|a_3\| = 1$ et $\{a_1, a_2\}$ est une base orthonormée de $(E_1)^{\perp}$.

- Si $\det(A) = -1$ (c'est-à-dire $f$ est une **isométrie négative**), alors $-1$ est une valeur propre de $f$ et $\dim(E_{-1}) = 1$ ou $\dim(E_{-1}) = 3$.
  - Si $\dim(E_{-1}) = 3$, alors $f = -Id_E$
  - Si $\dim(E_{-1}) = 1$ :
    - Si $1$ est une valeur propre (forcement double) de $f$ : $\dim(E_1) = 2$, il existe une base orthonormée $B' = \{a_1, a_2, a_3\}$ de $E$ telle que la matrice de $f$ par rapport à $B'$ est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans ce cas
      $f \circ f = Id_E$ d'où $f$ est la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $E_1$ : on dit que $f$ est la réflexion de $E_1$.
      $E_{-1} = vect(\{a_3\})$, $\|a_3\| = 1$ et $\{a_1, a_2\}$ est une base orthonormée de $E_1$.

- Si $1$ n'est pas une valeur propre de $f$, alors il existe une base orthonormée $B'=\{a_1,a_2,a_3\}$ une rotation $R$ d'axe $E_{-1}=vect(\{a_3\})$ de matrice $\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0\\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ par rapport à $B'$ telles que $f=S\circ R=R\circ S$ où $S$ est la réflexion par rapport au plan $(E_{-1})^{\perp}$ de matrice $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ par rapport à $B'$.

  C'est-à-dire $f$ est la composée de la réflexion par rapport au plan $(E_{-1})^{\perp}$ et d'une rotation d'axe $E_{-1}$, qui commutent.

**Preuve……**

**Exemples**

1) On considère $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire usuel $<\cdot|\cdot>$.

Soit $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ -2 & 2 & -1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$ la matrice associée à l'endomorphisme $f$ de $\mathbf{R}^3$ par rapport à la base canonique $B=\{e_1,e_2,e_3\}$ de $\mathbf{R}^3$ où $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$ et $e_3=(0,0,1)$.

Quelle est la nature de l'endomorphisme $f$ ?

**Réponse**

On a $\dim(\mathbf{R}^3)=3$, $B=\{e_1,e_2,e_3\}$ est une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$ et on vérifie facilement que $({}^tA)A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ -2 & -1 & 2\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ -2 & 2 & -1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}=I_3$ et $\det(A)=\left(\frac{1}{3}\right)^3\det\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ -2 & 2 & -1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}=1$

D'où $f$ est une isométrie positive et $f\neq Id_{\mathbf{R}^3}$ car $A\neq I_3$ donc d'après le théorème ci-dessus $\dim(E_1)=1$.

De plus $-1$ n'est pas une valeur propre de $f$ car $\det(A+I_3)=\det\begin{pmatrix}\frac{2}{3}+1 & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3}\\ \frac{-2}{3} & \frac{2}{3}+1 & \frac{-1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}+1\end{pmatrix}\neq 0$

D'où il existe $\theta\in\mathbf{R}$ et il existe une base orthonormée $B'=\{a_1,a_2,a_3\}$ de $\mathbf{R}^3$ telles que la matrice de $f$ par rapport à $B'$ est de la forme $\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0\\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

$f$ est la rotation vectorielle d'angle $\theta$ et d'axe $E_1 = vect(\{a_3\})$ , $\|a_3\| = 1$ et $\{a_1, a_2\}$ est une base orthonormée de $(E_1)^\perp$ .

Cherchons les vecteurs $a_1, a_2, a_3$ :

- $(x, y, z) \in E_1 \Leftrightarrow (A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y - 2z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$

  D'où $E_1 = vect(\{(-1,1,1)\})$ donc $E_1 = vect(\{a_3\})$ où $a_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)$ ,

  Par suite $(E_1)^\perp$ est le plan d'équation cartésienne : $-x + y + z = 0$ .

  Posant $a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$ et $a_2 = a_3 \wedge a_1 = \frac{-1}{\sqrt{6}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}e_2 - \frac{2}{\sqrt{6}}e_3$

  D'où $a_2 = (\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}})$ ; $\{a_1, a_2\}$ est une base orthonormée de $(E_1)^\perp$ et $B' = \{a_1, a_2, a_3\}$ est une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$ telles que la matrice de $f$ par rapport à $B'$ est de la forme $M_f(B') = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Cherchons alors $\theta$ un angle de la rotation $f$ .

D'après la formule de changement de bases on a : $M_f(B') = P^{-1}AP$ où

$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de la base $B$ à la base $B'$ .

Et puisque $B$ et $B'$ sont deux bases orthonormées alors $P^{-1} = {}^tP$

D'où $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ donc

$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d'où $\theta = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi$ où $k \in \mathbf{Z}$

Conclusion : $f$ est la rotation vectorielle d'angle $\theta = \frac{-\pi}{3}$ et d'axe $E_1 = vect(\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)\right\})$

2) Soient $E$ un espace euclidien de dimension $3$, muni du produit scalaire usuel $<\cdot|\cdot>$ et $B=\{a_1,a_2,a_3\}$ une base orthonormée de $E$.

Déterminer la matrice par rapport à la base $B$, de la rotation d'axe dirigé par $u=a_1+2a_2+a_3$ et d'angle $\dfrac{3\pi}{2}$.

**Réponse**

Posons $b_3=\dfrac{u}{\|u\|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(a_1+2a_2+a_3)$ et déterminons d'abord un vecteur unitaire (c'est à dire de norme $1$ et orthogonal à $b_3$. On peut choisir par exemple $b_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(a_1-a_3)$

(On peut aussi choisir d'après le procédé de Gram-Schmidt , $b_1=\dfrac{a_1-<a_1|b_3>b_3}{\|a_1-<a_1|b_3>b_3\|}$ )

Puis on choisit $b_2=\dfrac{b_3\wedge b_1}{\|b_3\wedge b_1\|}$ dans la base $B=\{a_1,a_2,a_3\}$, on a donc $b_2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(-a_1+a_2-a_3)$.

D'où la matrice de la rotation d'axe dirigé par $b_3$ et d'angle $\dfrac{3\pi}{2}$ par rapport à la base

$B'=\{b_1,b_2,b_3\}$ est $R=\begin{pmatrix} \cos(\frac{3\pi}{2}) & -\sin(\frac{3\pi}{2}) & 0 \\ \sin(\frac{3\pi}{2}) & \cos(\frac{3\pi}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$