Feuille de TD 2 :
Continuité des fonctions à plusieurs variables

Exercice 1.
Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \frac{2x-y^2}{2x+y^2}$.

1. Déterminer (et dessiner) son domaine de définition.
2. Vérifier que f est continue sur son domaine de définition.
3. Montrer que f n'a pas de limite en $(0,0)$.

Exercice 2.
Étudier la continuité partielle au point $(0,0)$ puis la continuité en $(0,0)$ de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Exercice 3.
Les fonctions suivantes sont-elles continues ? Partiellement continues ?

1. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
2. $g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 4.
Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Étudier la continuité de f au point $(0,0)$.

Exercice 5.
Montrer que la fonction f sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4}{y(y-x^2)} & \text{si } y(y-x^2) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

n'est pas continue en $(0,0)$, mais que les restrictions à toute droite passant par l'origine sont continues en ce point.

Exercice 6.
Etudier la continuité partielle et la continuité des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
2. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
3. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+2y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1/2 & \text{sinon} \end{cases}$
4. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^4-2x^3y+x^2y^2}}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ |x| & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 7.
Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$, $f(x)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^p$ dont les composantes sont notées $f_i(x)$, $i = 1, \ldots, p$. On définit ainsi p applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$: $x \mapsto f_i(x)$, $i = 1, \ldots, p$, appelées applications composantes.

1. Montrer que f est continue en un point a de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si les p applications f_i sont continues en a.
   Indication : Utiliser la norme infinie.
2. Étudier la continuité sur $\mathbb{R}^2$ de l'application f définie par $f(x,y) = (y,x)$.

Exercice 8.
Étudier la continuité des applications :

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y) \mapsto (xy, x+y, \sin(x^2+y))$
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $g(x) = \begin{cases} \left(e^x, \frac{\sin x}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ (1,1) & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 9.
Vérifier que toute application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ est continue.