# Réseaux de Petri
# Propriétés structurelles et analyse complète du réseau

CHIRAZ TRABELSI

trabelsi@esiea.fr

Et

ALEXANDRE BRIERE

briere@esiea.fr

# Propriétés structurelles

- Composantes conservatives et invariant de marquage

  - Vérifier que la somme des jetons d'un ensemble de places reste constante pour toute évolution possible du système

  - Exemples d'utilisation:

    1) Vérifier qu'une ressource partagée n'est accédée que par un seul processus à un moment donné
       - la somme des jetons dans les places associées à ces processus doit être égale à 1 tout le temps

    2) Vérifier qu'un composant ne peut être que dans un état à la fois
       - la somme des jetons dans les places représentant l'état de ce composant est toujours égale à 1

    3) Vérifier qu'une ressource de capacité limitée ne déborde pas
       - La somme des jetons dans la place représentant l'occupation de la ressource et celle représentant les places libres dans cette ressource doit être toujours égale à la limite de capacité

- Composantes répétitives et invariant de franchissement

  - Vérifier qu'après une séquence de franchissement donnée, on retourne au même état du système

# Composantes conservatrices et invariant de marquage

- On a un invariant de marquage s'il existe un vecteur F de coefficients (**vecteur colonne**) tel que si on multiplie sa transposée par le vecteur de marquage, le résultat reste constant pour tous les vecteurs de marquage (pour toutes les évolutions possibles du système)
  - $F^T$x M=constante pour tout marquage
  - F est appelé **P-semi-Flot (P-invariant)**
  - Les places qui ont des coefficients non nuls dans F forment

  une **composante conservative**

- Exemple
  - m1+m2+m4 =1 pour tout marquage
    - mi représente le nombre de jetons dans la place Pi

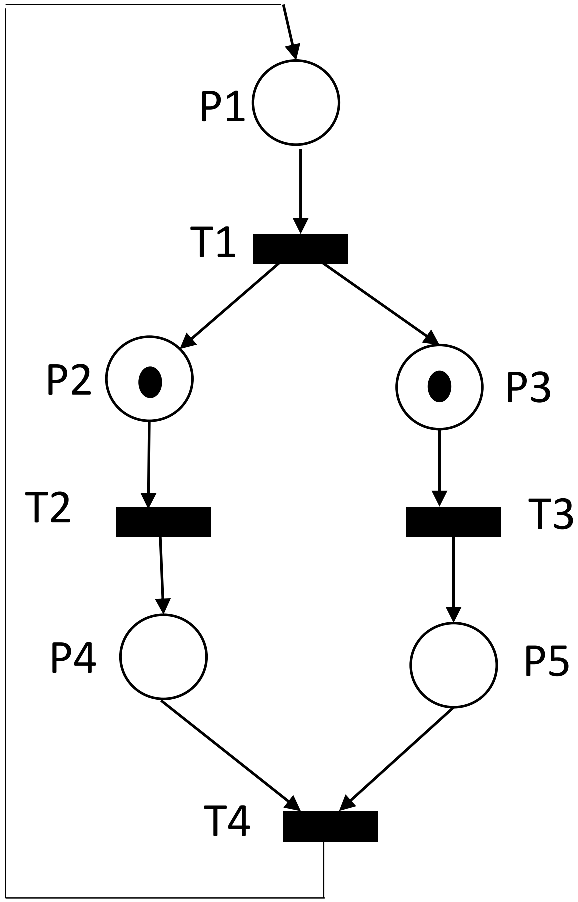
  → [1,1,0,1,0] x M= $F^T$x M= 1 pour tout marquage M

  →$[1,1,0,1,0]^T$ est un P-invariant et {P1,P2,P4} est une composante conservative

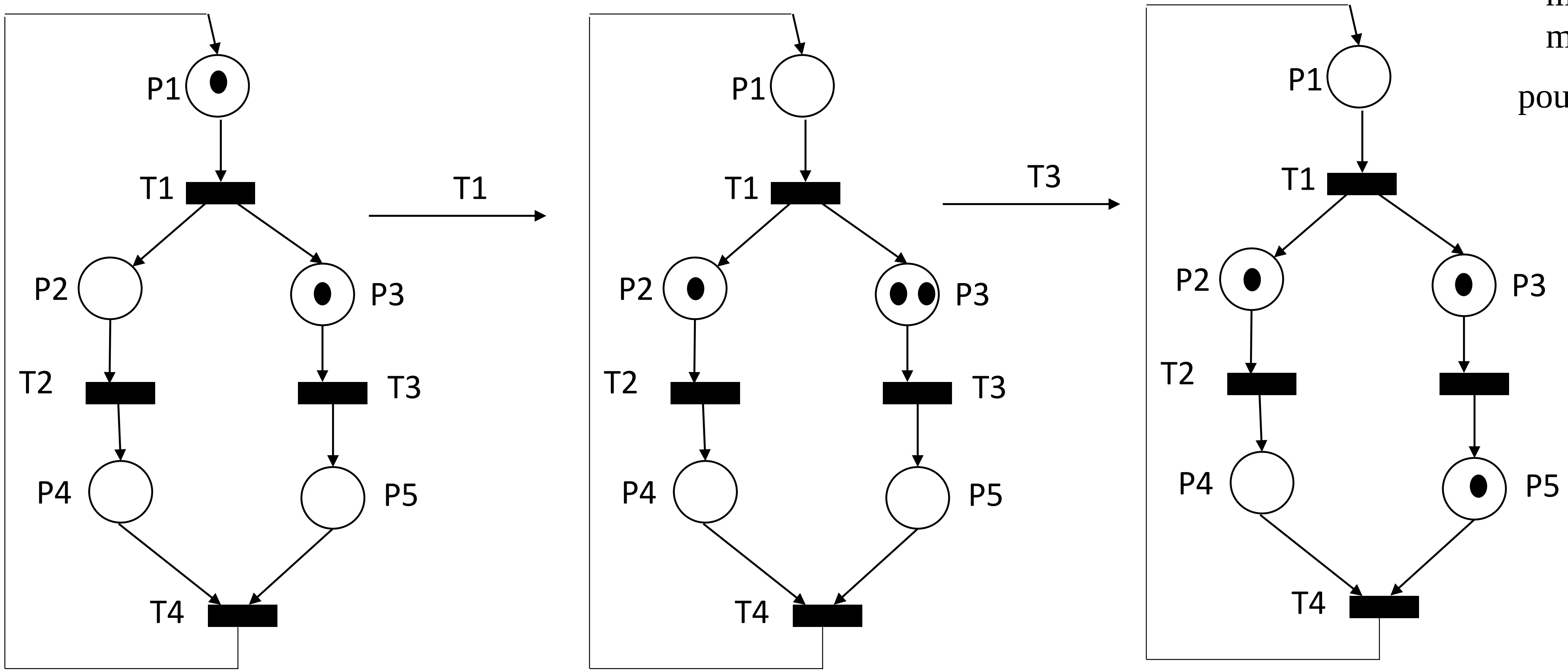
  - m1+m3+m5 =1 pour tout marquage

  →[1,0,1,0,1] x M= 1 pour tout marquage M

  →$[1,0,1,0,1]^T$ est un P-invariant et {P1,P3,P5} est une composante conservative



- Vérifier qu'il s'agit d'une propriété structurelle
  - On change le marquage initial
  - Les composantes conservatives sont toujours [P1,P2,P4] et [P1,P3,P5]




m1+m2+m4=1

m1+m3+m5=2

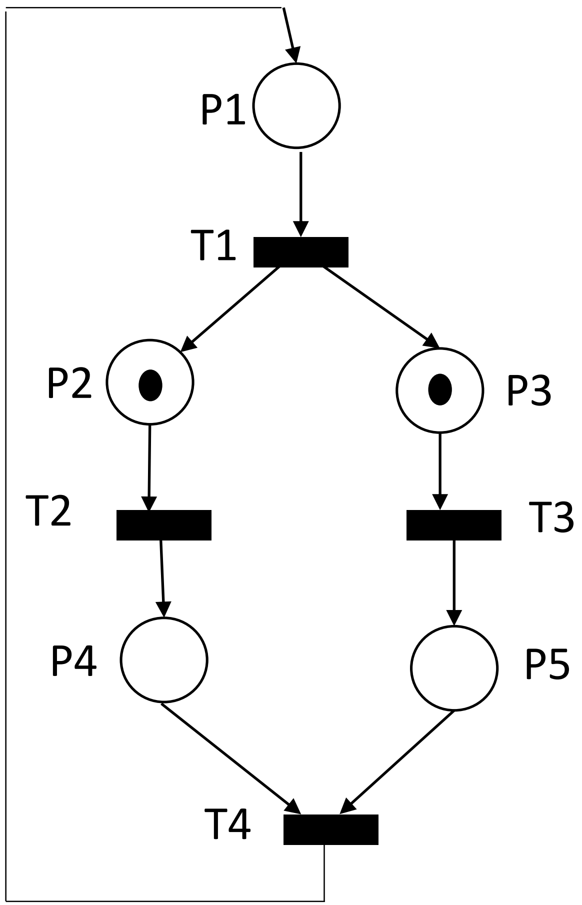
pour tout marquage

# Composantes conservatrices et invariant de marquage

- m1+m2+m4 =1 pour tout marquage
- m1+m3+m5 =1 pour tout marquage
- Le RdP contient deux composantes conservatives {P1,P2,P4} et {P1,P3,P5} et deux P-invariants [1,1,0,1,0] et [1,0,1,0,1]
- La combinaison des deux P-invariants couvrent toutes les places

→ le réseau est **structurellement borné**

- La somme des P-invariants est le vecteur [2,1,1,1,1].
- Ce vecteur est aussi un P-invariant vérifiant: 2m1 + m2 + m3 +m4 +m5=2
- Si le RdP est structurellement borné → il est borné



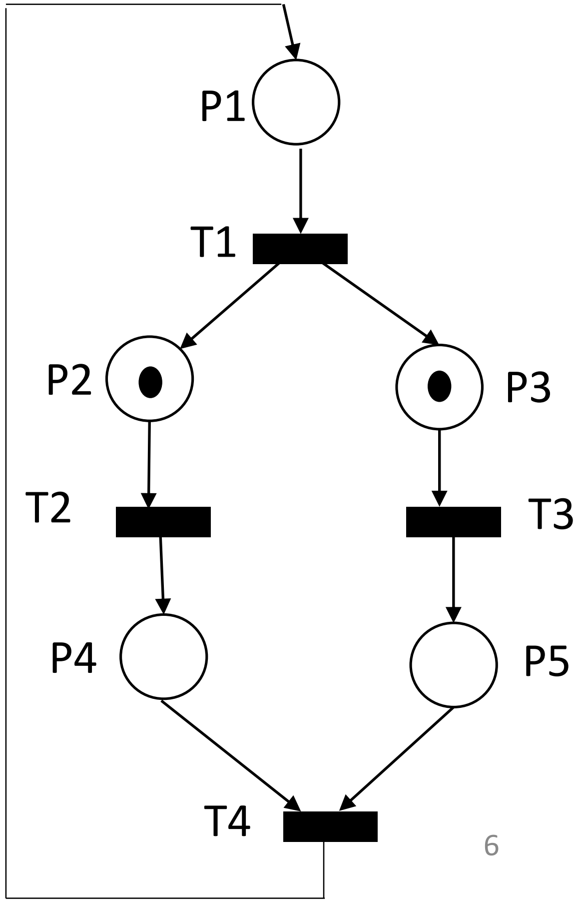
# Composantes conservatrices et invariant de marquage

- Vérification par algèbre linéaire
  - Un P-invariant F vérifie
    - $\mathbf{F^T . W = 0}$
  - M0 ne figure pas dans l'équation → F est indépendant du marquage initial

  → il s'agit bien d'une propriété structurelle
  - F est un vecteur colonne (chaque élément correspondant à un coefficient lié à une place)

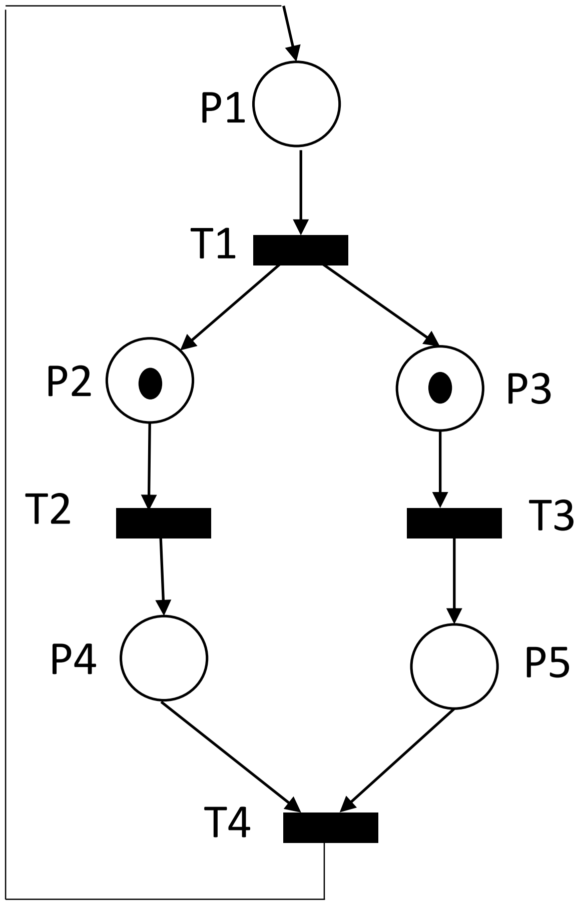
- Exemple: Vérifier que $F = [1,1,0,1,0]^T$ est un P-invariant
  - Vérifier que 1*m1+1*m2+0*m3+1*m4+0*m5=constante pour toute évolution possible du système (m1+m2+m4=constante)

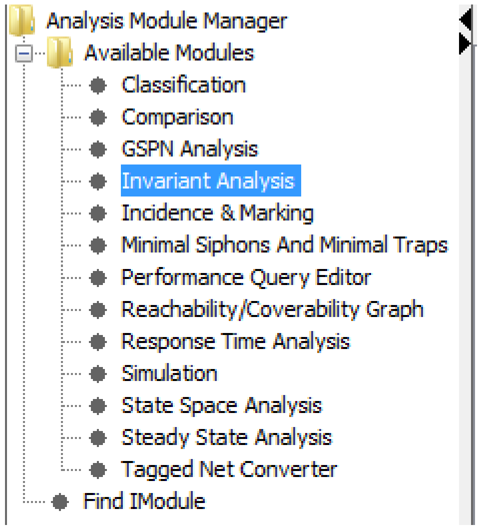
- $$F^T . W = [1 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 1 \ \ 0] . \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = [0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0]$$

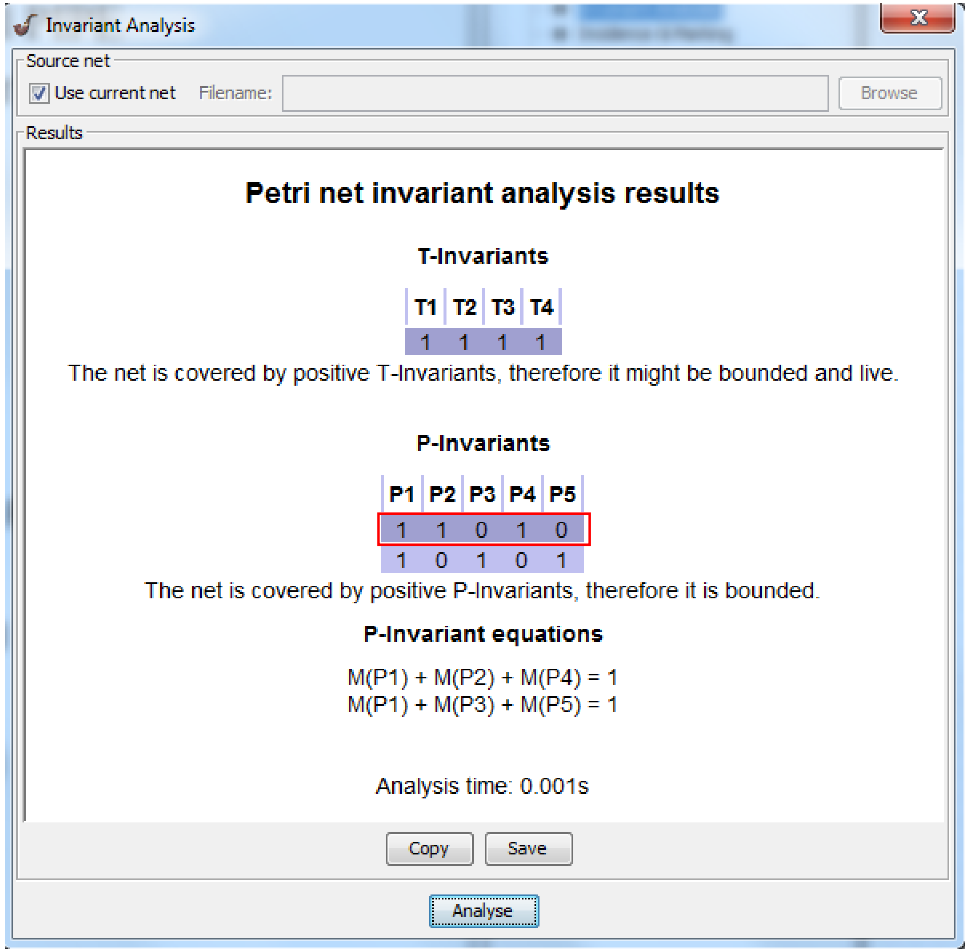


# Composantes conservatrices et invariant de marquage

- Vérification sur l'outil PIPE
  - Exemple: Vérifier que F= [1,1,0,1,0] est un P-invariant



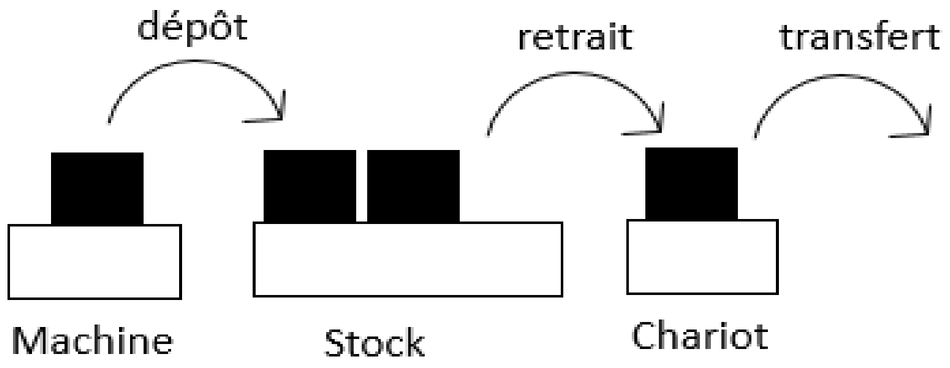



- Exercice:

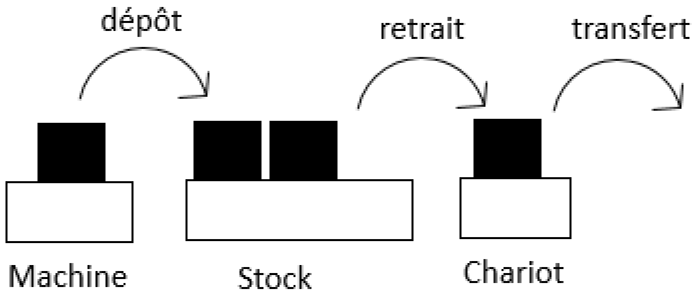
Une machine produit une pièce à la fois. La pièce est déposée dans un stock, s'il y a une place libre dans ce stock dont la capacité est de 3 unités. Dès que le dépôt est fait, la machine commence à produire une autre pièce. Un chariot, dès qu'il a fini de transférer une pièce vers sa destination (une seule pièce à la fois), prélève une pièce dans le stock s'il n'est pas vide.

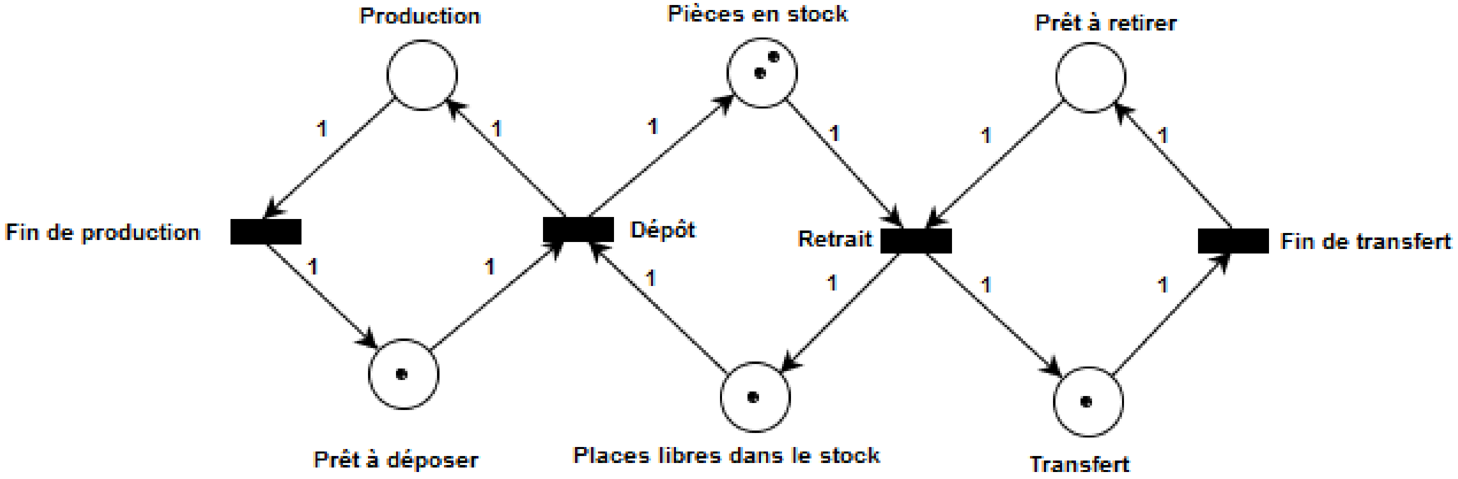
Représenter le fonctionnement de ce système par un RdP avec un marquage initial correspondant à la figure.

- Les places à utiliser sont :
  - P1 : Production
  - P2 : Prêt à déposer dans le stock
  - P3 : Pièces dans le stock
  - P4 : Places libres
  - P5 : Transfert
  - P6 : Prêt à retirer du stock
- Les transitions sont :
  - T1 : fin de la production
  - T2 : dépôt
  - T3 : retrait
  - T4 : fin du transfert



- Exercice:

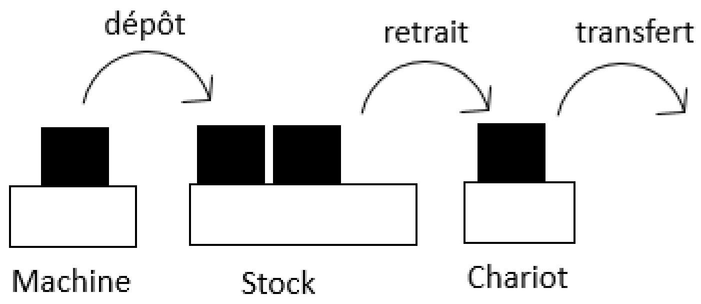

dépôt
retrait
transfert
Machine
Stock
Chariot

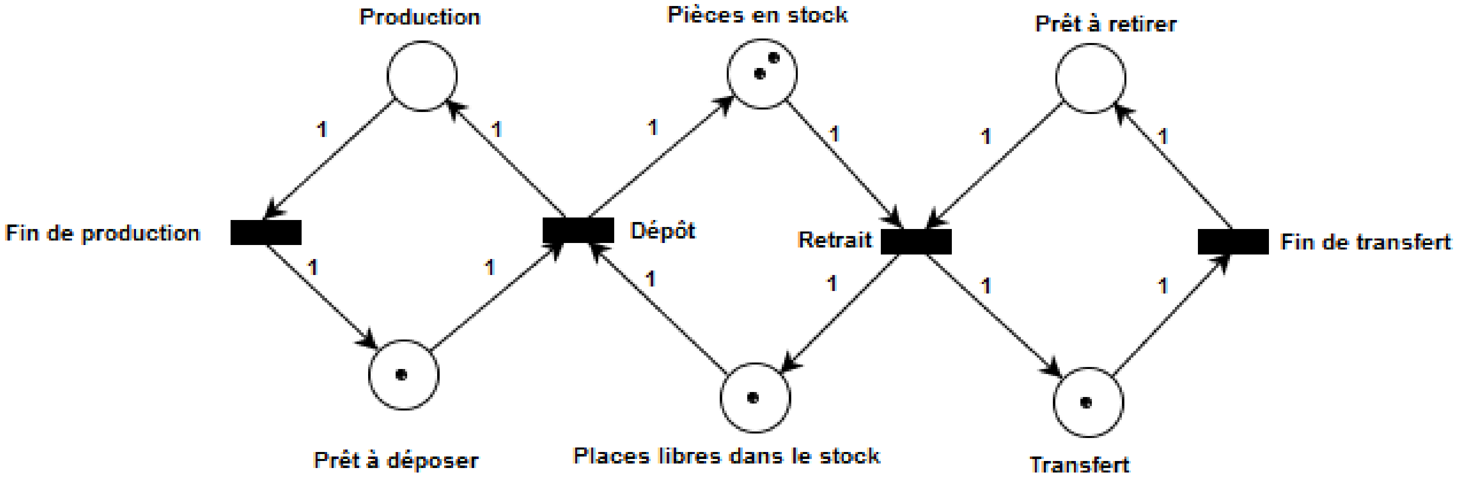

Production
Pièces en stock
Prêt à retirer
Fin de production
Dépôt
Retrait
Fin de transfert
Prêt à déposer
Places libres dans le stock
Transfert
1

- Exemple d'utilisation de l'invariant de marquage:

Vérifier que les propriétés suivantes sont respectées pour n'importe quelle évolution du réseau:

1) La machine peut être soit en production soit prête à déposer une pièce dans le stock
2) Le chariot peut être soit prêt à retirer, soit en transfert
3) Le nombre de pièces dans le stock ne dépasse jamais 3



# Composantes conservatrices et invariant de marquage

- Exemple d'utilisation de l'invariant de marquage:
  1) Vérifier que la machine peut être soit en production soit prête à déposer une pièce dans le stock
     - Vérifier que M(Production) + M(Prêt à déposer) =1

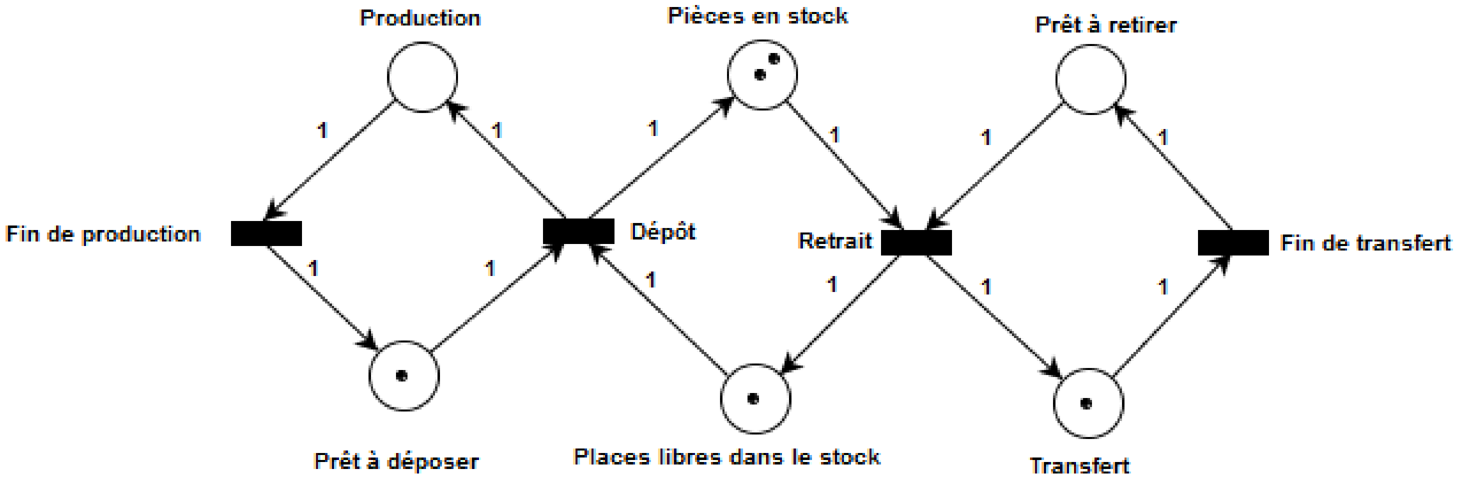
**P-Invariants**

| Production | Prêt à déposer | Places libres dans le stock | Pièces en stock | Prêt à retirer | Transfert |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

The net is covered by positive P-Invariants, therefore it is bounded.

**P-Invariant equations**

$\boxed{\text{M(Production) + M(Prêt à déposer) = 1}}$
M(Places libres dans le stock) + M(Pièces en stock) = 3
M(Prêt à retirer) + M(Transfert) = 1



# Composantes conservatrices et invariant de marquage

- Exemple d'utilisation de l'invariant de marquage:
  2) Vérifier que le chariot peut être soit prêt à retirer, soit en transfert
     - Vérifier que M(Transfert) + M(Prêt à retirer) =1

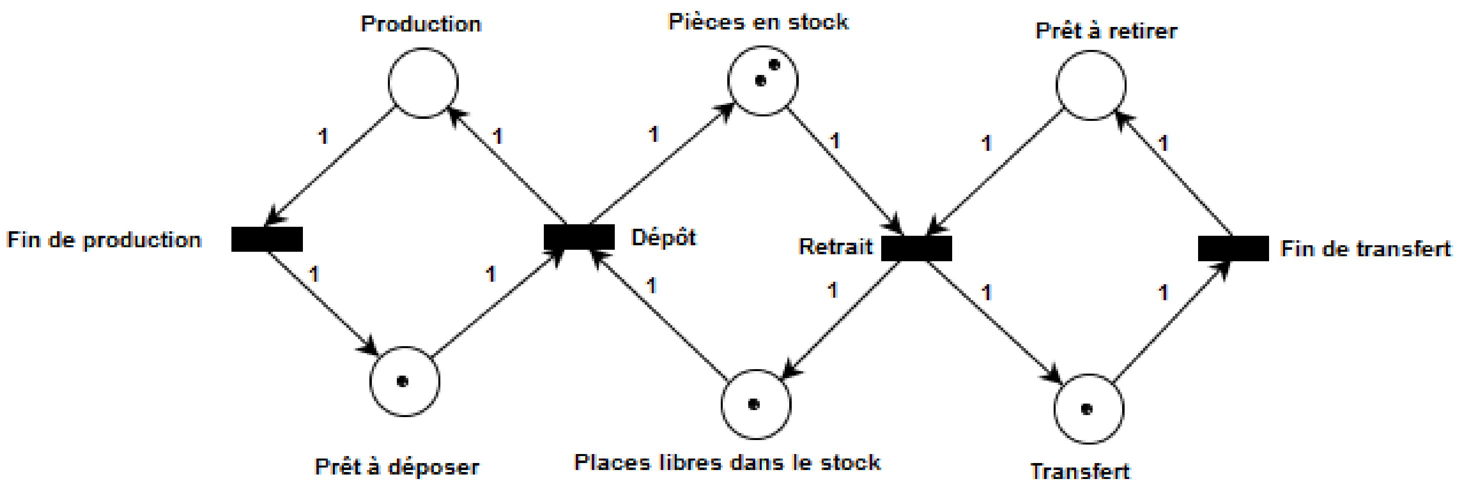
**P-Invariants**

| Production | Prêt à déposer | Places libres dans le stock | Pièces en stock | Prêt à retirer | Transfert |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

The net is covered by positive P-Invariants, therefore it is bounded.

**P-Invariant equations**

M(Production) + M(Prêt à déposer) = 1
M(Places libres dans le stock) + M(Pièces en stock) = 3
M(Prêt à retirer) + M(Transfert) = 1



- Exemple d'utilisation de l'invariant de marquage:
  3) Vérifier que le nombre de pièces dans le stock ne dépasse jamais 3
     - Vérifier que M(Pièces en stock) + M(Places libres dans le stock)=3

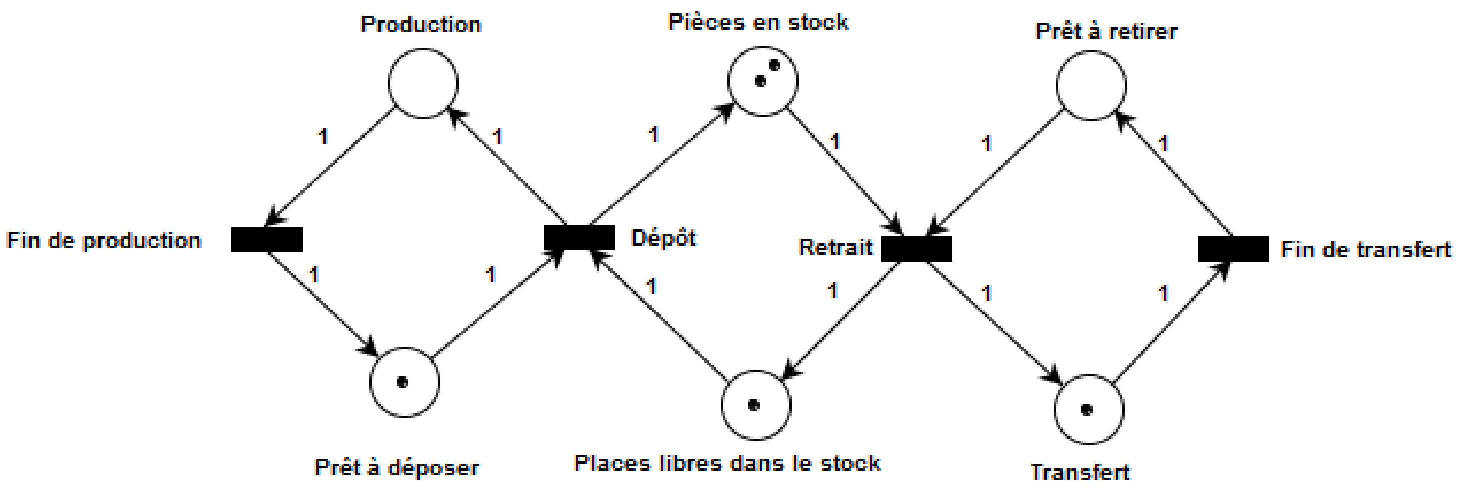
**P-Invariants**

| Production | Prêt à déposer | Places libres dans le stock | Pièces en stock | Prêt à retirer | Transfert |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

The net is covered by positive P-Invariants, therefore it is bounded.

**P-Invariant equations**

M(Production) + M(Prêt à déposer) = 1
M(Places libres dans le stock) + M(Pièces en stock) = 3
M(Prêt à retirer) + M(Transfert) = 1



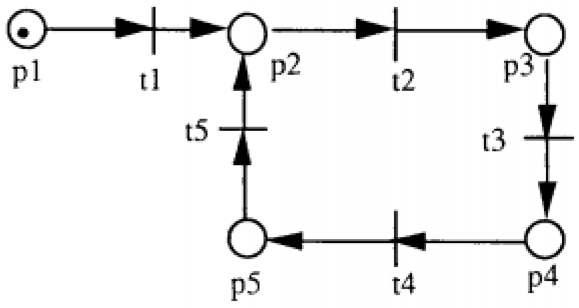
# Composantes répétitives et invariant de franchissement

- Un T-invariant est un vecteur de comptage V correspondant à une séquence S qui à partir d'un marquage M retourne à ce marquage M[S>M

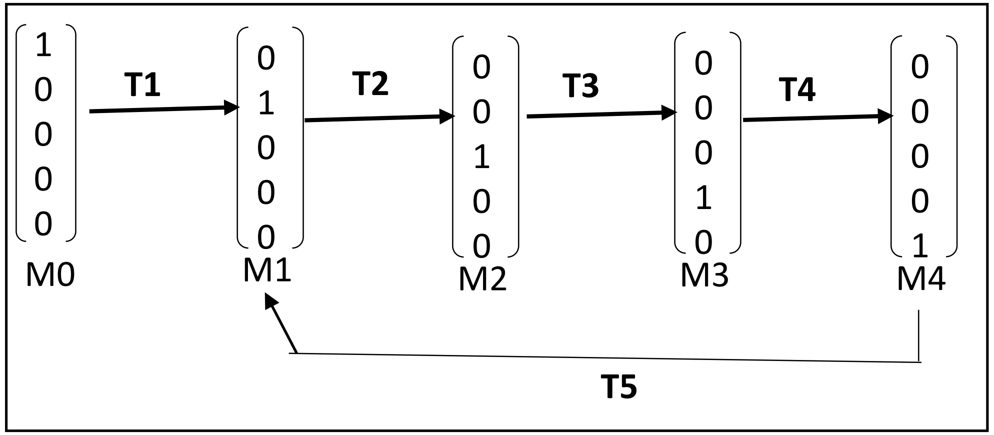
- Cela correspond à un cycle dans le graphe de marquage

- L'ensemble des transitions concernées représente une **composante répétitive**

  - Exemple



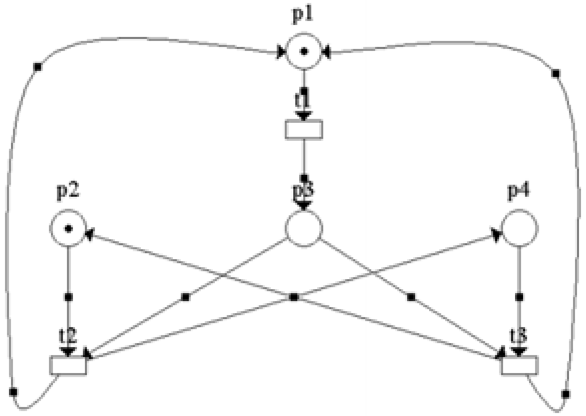

Réseau de Petri



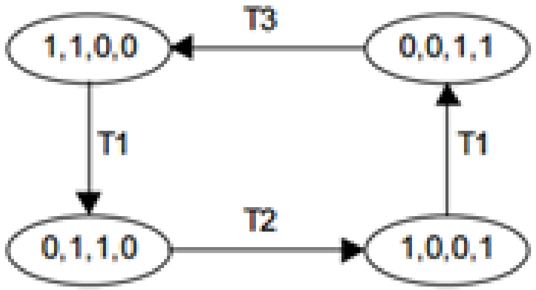

Graphe de marquages accessibles

- V=[0,1,1,1,1] est un **T-invariant**
- {T2,T3,T4,T5} est **composante répétitive**

- Exemple



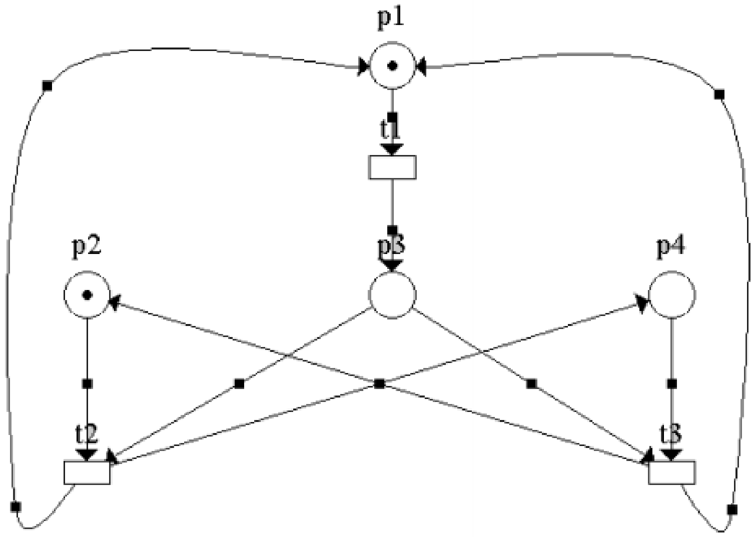

Réseau de Petri

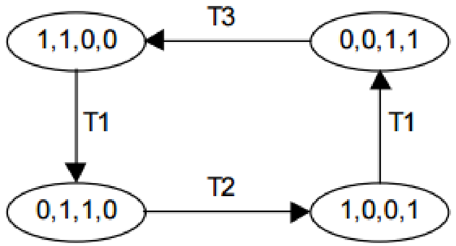



Graphe de marquages accessibles

- V=[2,1,1] est un T-invariant
- {T1,T2,T3} est composante répétitive

- Invariant de franchissement
  - Vérification par algèbre linéaire, l'existence de T-invariant
  - Si V est un T-invariant alors il vérifie l'équation
    - $W \cdot V^T = 0$
    - Vérifier que V= [2,1,1] est T-invariant



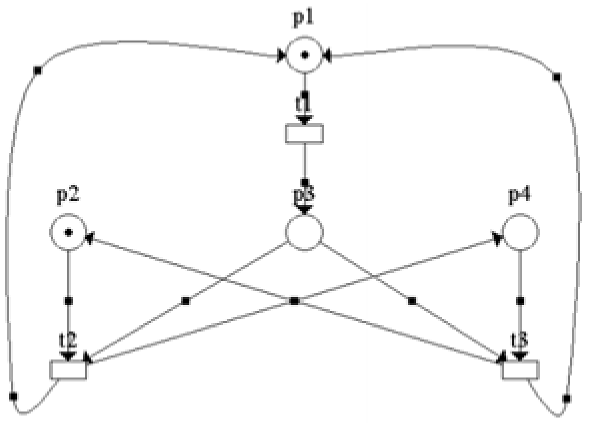

$$W=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

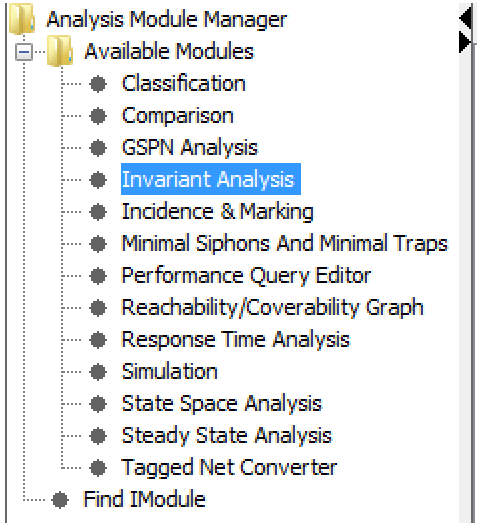
- $$W \cdot V^T = \begin{pmatrix} (-1)x2 & + & 1x1 & + & 1x1 \\ 0x2 & + & (-1)x1 & + & 1x1 \\ 1x2 & + & (-1)x1 & + & (-1)x1 \\ 0x2 & + & 1x1 & + & (-1)x1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

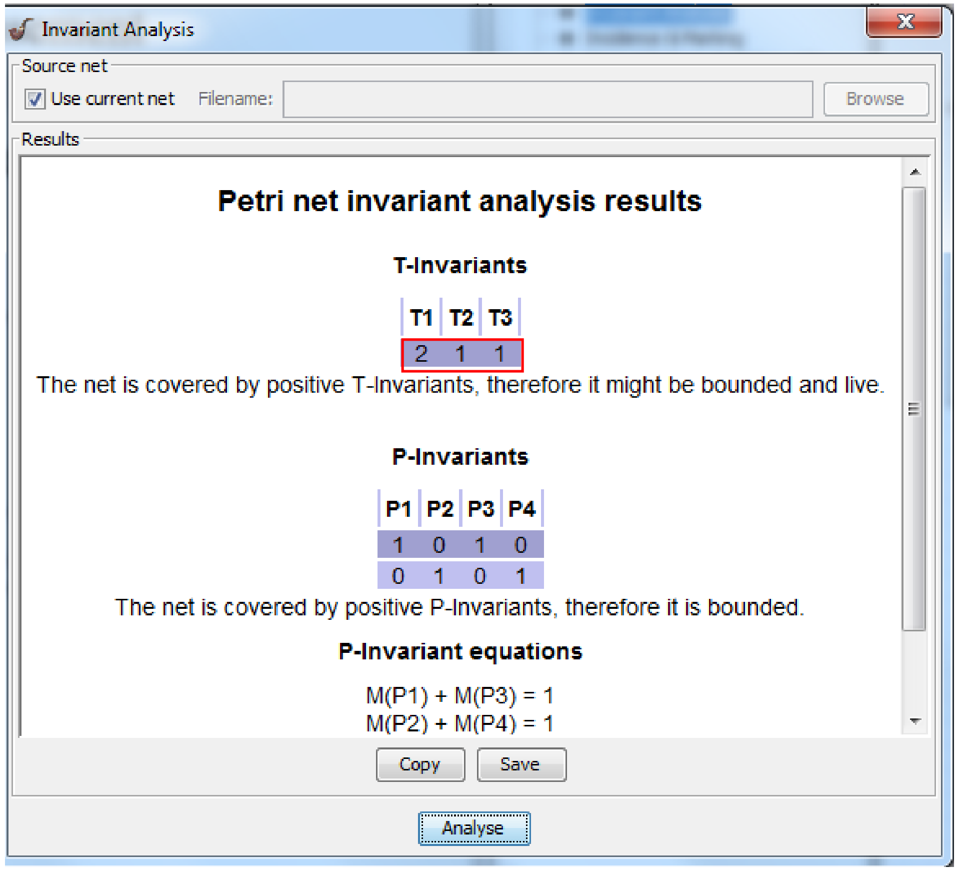
[2,1,1] est un T-invariant

# Composantes répétitives et invariant de franchissement

- Invariant de franchissement
  - Vérification sur l'outil PIPE
    - Vérifier que V= [2,1,1] est T-invariant



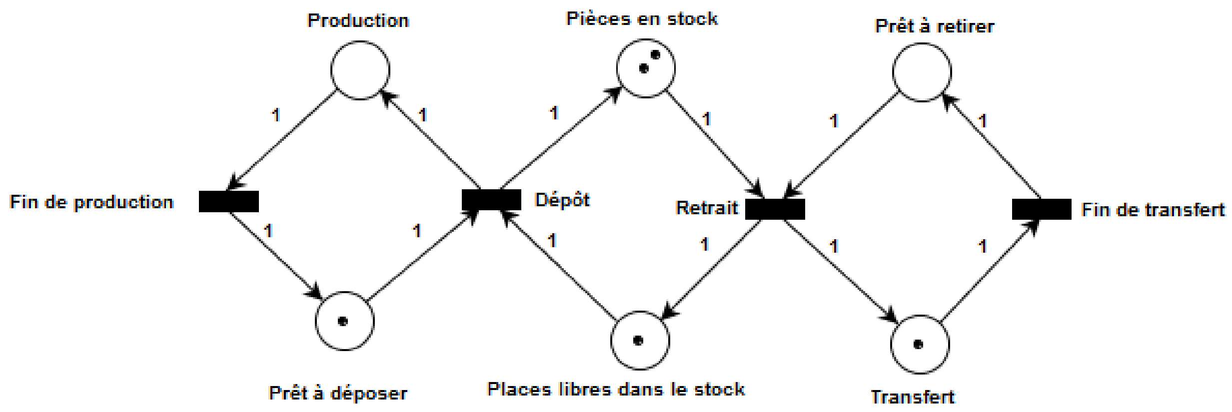
# Composantes répétitives et invariant de franchissement

- Exemple d'utilisation de l'invariant de franchissement:
  - Vérifier qu'après le franchissement des transitions fin de production, dépôt, retrait et fin de transfert, on retourne au même état du système

**T-Invariants**

| Dépôt | Fin de production | Fin de transfert | Retrait |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |

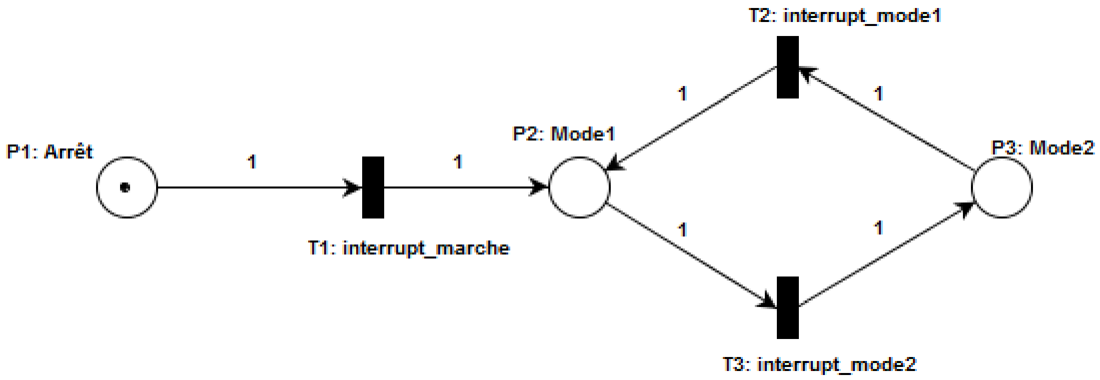
The net is covered by positive T-Invariants, therefore it might be bounded and live.



# Exercice

- Soit un dispositif ayant trois états possibles: en arrêt, mode1, mode2. Ce dispositif possède deux interrupteurs: marche/arrêt et mode1/mode2. Quand on met ce système en marche, le mode 1 s'active par défaut.

Quelqu'un a modélisé ce système par le réseau de Petri suivant:



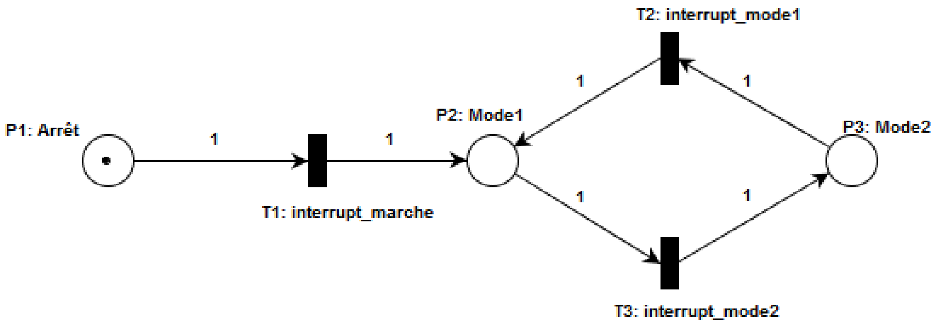

Répondez aux questions suivantes:

1) Donner la matrice d'incidence
2) Donner le marquage initial M0
3) Donner le graphe de marquages accessibles

4) Vérifier mathématiquement si la séquence <T1,T3,T2> est franchissable à partir de M0
5) Même question pour la séquence <T1,T2>
6) Quel est le degré de vivacité de ce réseau? Est-ce qu'il présente un blocage?
7) Est-ce que ce réseau est borné? Si oui, quelle est sa borne?
8) Vérifier à partir du graphe de marquages que le réseau n'est pas réinitialisable? Faire les modifications nécessaires pour le rendre réinitialisable.
9) Vérifier mathématiquement que le système ne peut se trouver que dans un état à la fois (vérifier que $F=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un P-invariant)

10) Trouver les T-invariants de ce réseau et les composantes répétitives correspondantes en utilisant le graphe de marquage. Vérifier ce résultat mathématiquement.

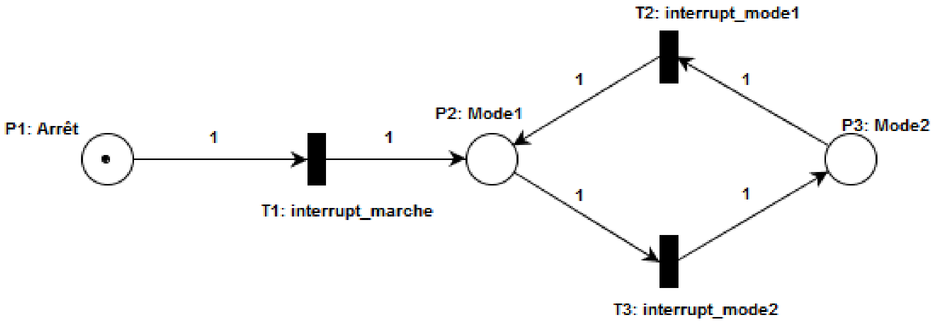
1) Donner la matrice d'incidence



# Exercice

1) Donner la matrice d'incidence

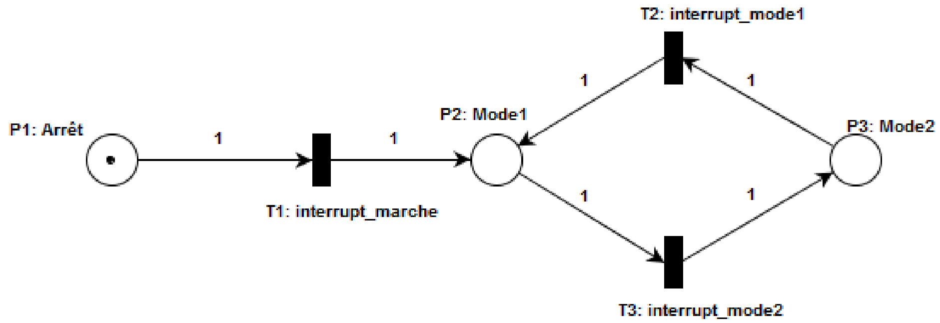
$$W=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

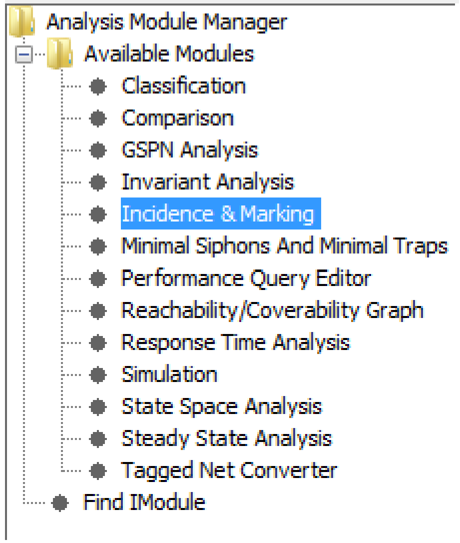


# Exercice

1) Donner la matrice d'incidence

$$W=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$




**Petri net incidence and marking**

**Forwards incidence matrix $I^+$**

| | T1: interrupt_marche | T2: interrupt_mode1 | T3: interrupt_mode2 |
|---|---|---|---|
| P1: Arrêt | 0 | 0 | 0 |
| P2: Mode1 | 1 | 1 | 0 |
| P3: Mode2 | 0 | 0 | 1 |

**Backwards incidence matrix $I^-$**

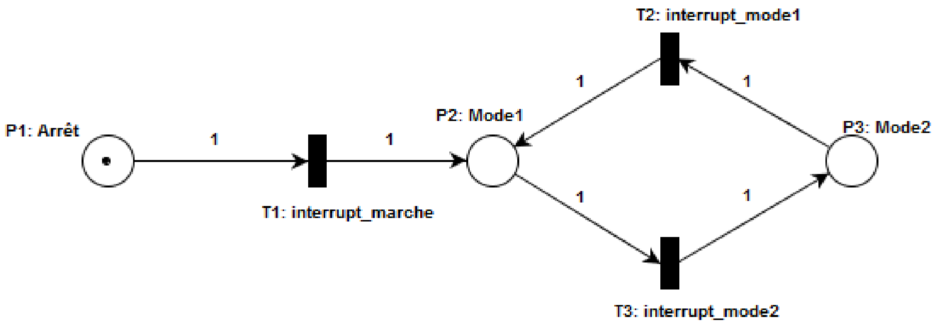
| | T1: interrupt_marche | T2: interrupt_mode1 | T3: interrupt_mode2 |
|---|---|---|---|
| P1: Arrêt | 1 | 0 | 0 |
| P2: Mode1 | 0 | 0 | 1 |
| P3: Mode2 | 0 | 1 | 0 |

**Combined incidence matrix $I$**

| | T1: interrupt_marche | T2: interrupt_mode1 | T3: interrupt_mode2 |
|---|---|---|---|
| P1: Arrêt | -1 | 0 | 0 |
| P2: Mode1 | 1 | 1 | -1 |
| P3: Mode2 | 0 | -1 | 1 |

# Exercice

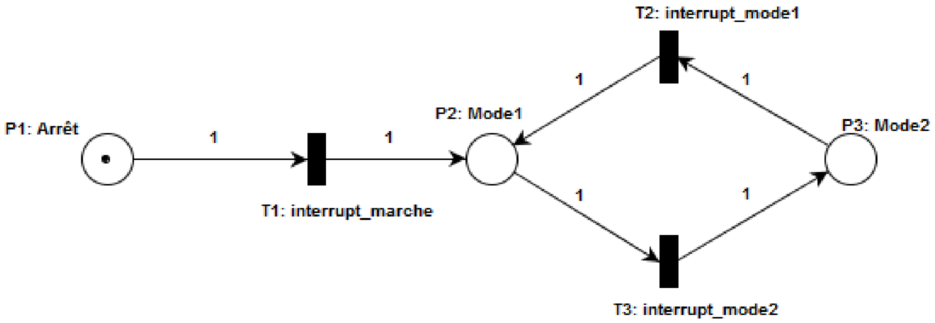
2) Donner le marquage initial M0



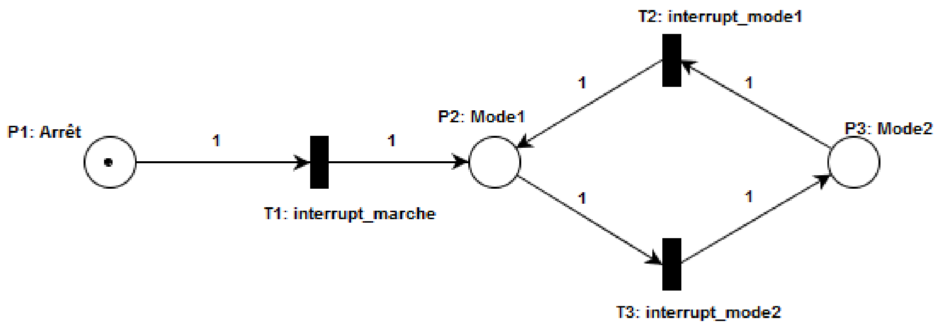
# Exercice

2) Donner le marquage initial M0

$$M0=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

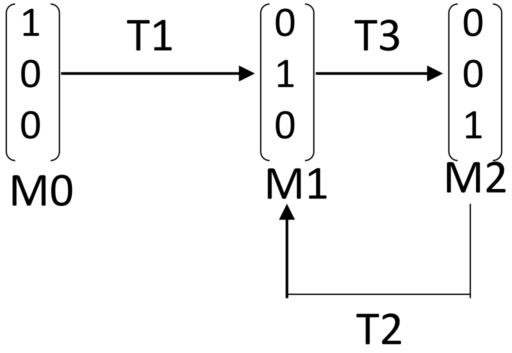


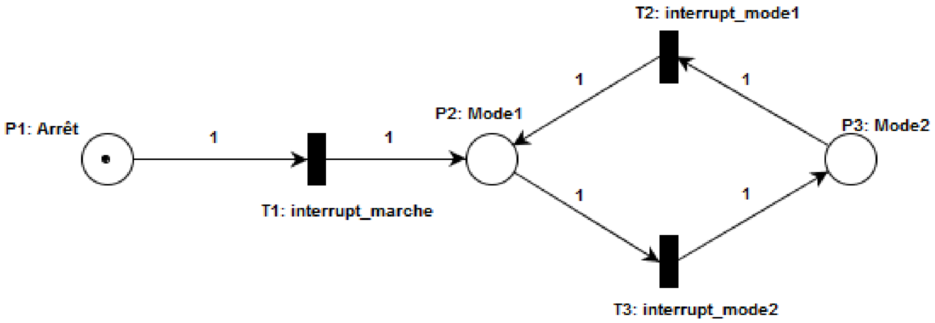
3) Donner le graphe de marquages accessibles



# Exercice

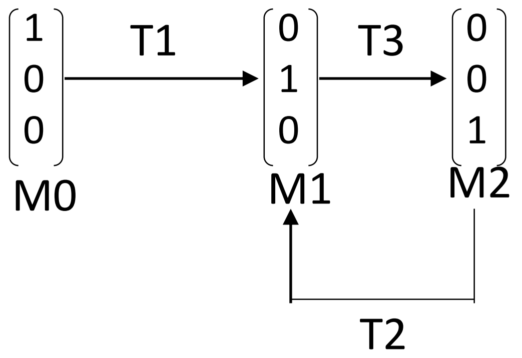
3) Donner le graphe de marquages accessibles

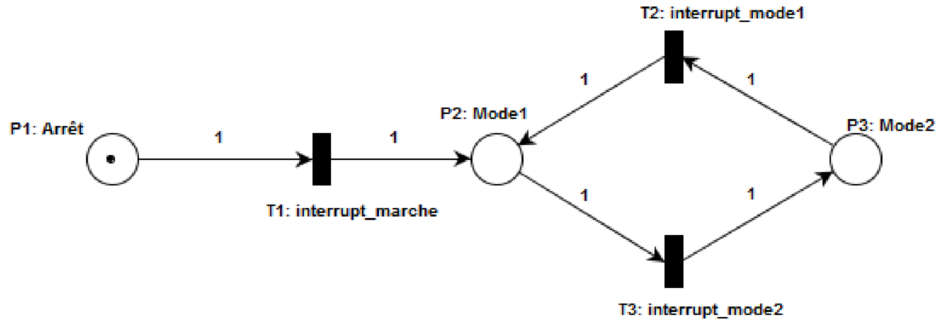


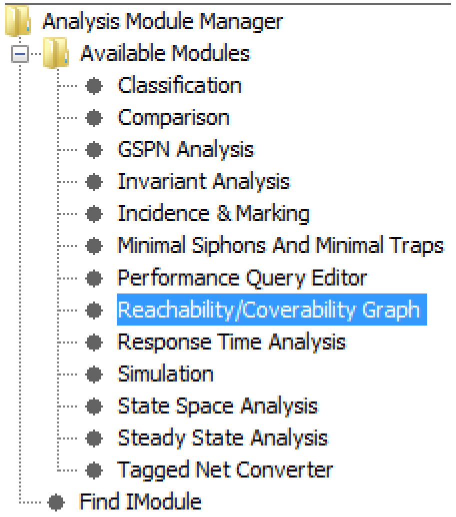



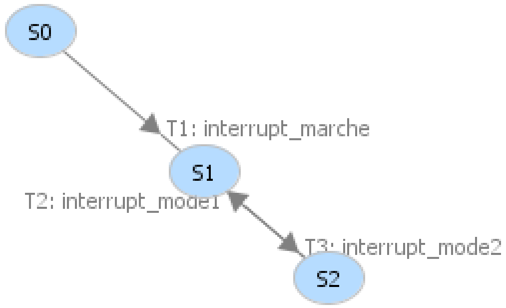
# Exercice

3) Donner le graphe de marquages accessibles

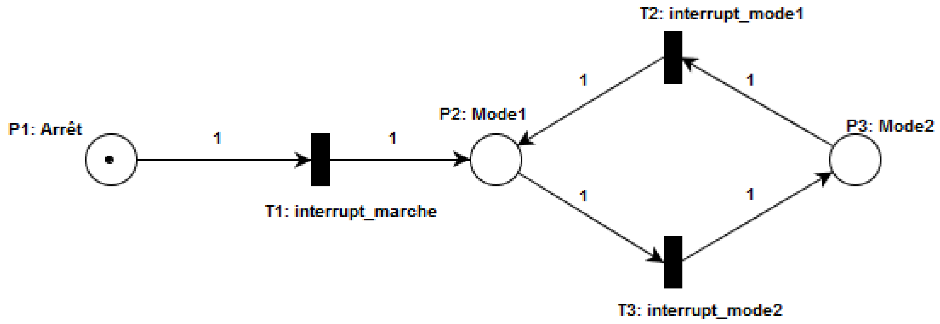


4) Vérifier mathématiquement si la séquence <T1,T3,T2> est franchissable à partir de M0

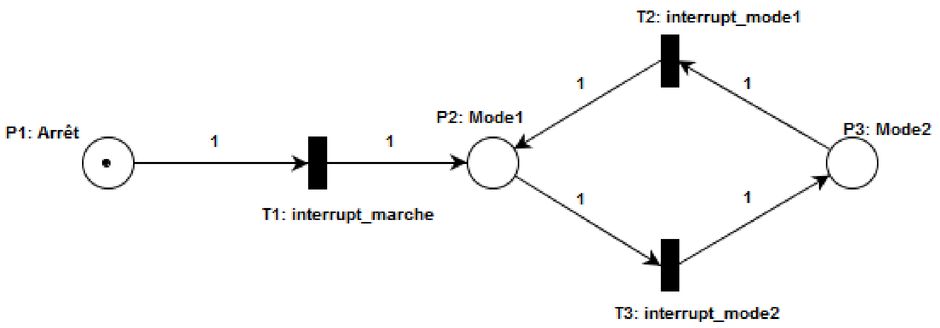



$$W= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

# Exercice

4) Vérifier mathématiquement si la séquence <T1,T3,T2> est franchissable à partir de M0

- Application de l'équation d'état pour la transition T1




$$M1 = M0 + W \cdot V_{T1}{}^{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

M1 ne contient pas de nombres négatifs → T1 est franchissable à partir de M0

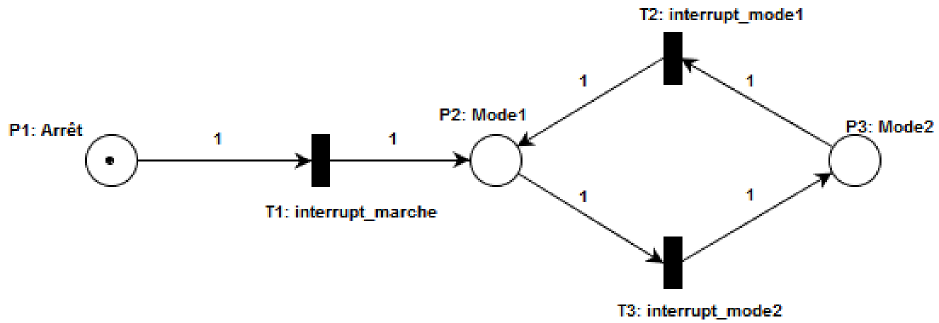
# Exercice

4) Vérifier mathématiquement si la séquence <T1,T3,T2> est franchissable à partir de M0

- Application de l'équation d'état pour la transition T3

$$M2=M1 + W \,.\, V_{T3}^{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

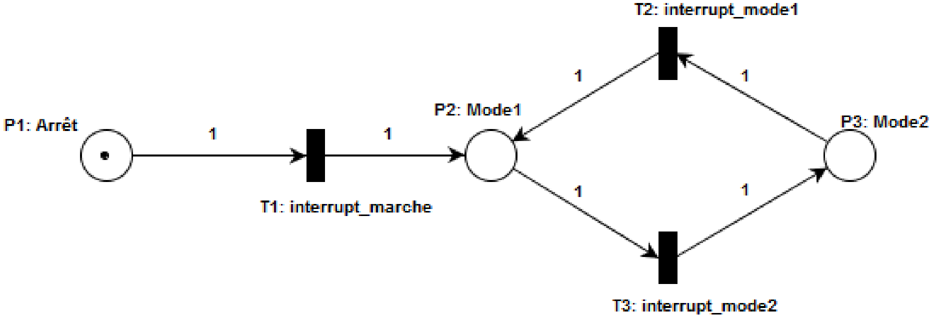
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$




M2 ne contient pas de nombres négatifs → T3 est franchissable à partir de M1

4) Vérifier mathématiquement si la séquence <T1,T3,T2> est franchissable à partir de M0

- Application de l'équation d'état pour la transition T2



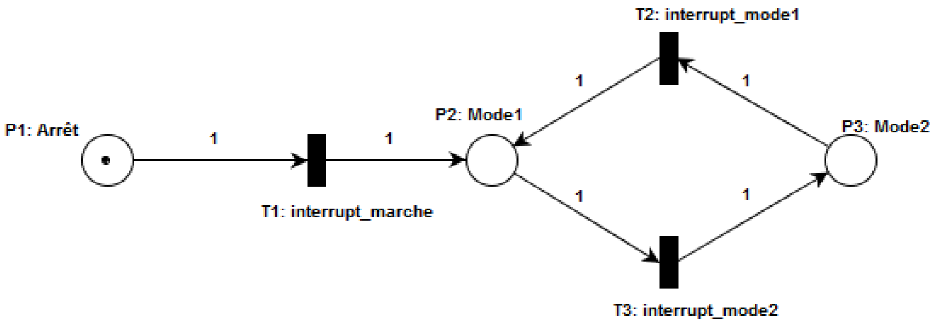

$$M3 = M2 + W \,.\, V_{T2}^{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

M3 ne contient pas de nombres négatifs → T2 est franchissable à partir de M2

→ La séquence <T1,T3,T2> est franchissable à partir de M0

5) Même question pour la séquence <T1,T2 >



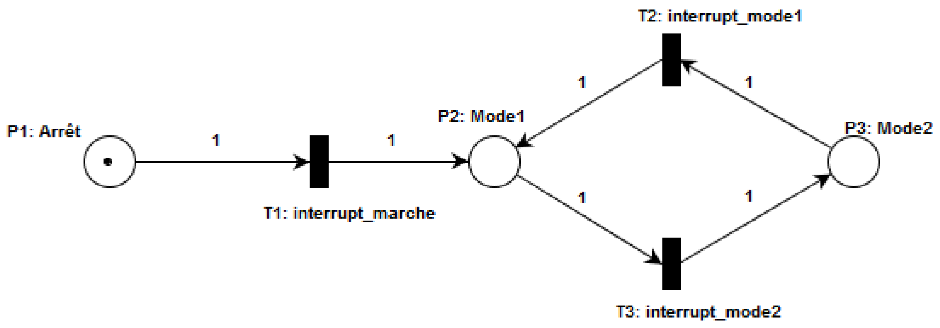

$$W=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

# Exercice

5) Même question pour la séquence <T1,T2 >

On a vérifié dans 4) que T1 est franchissable à partir de M0

- Application de l'équation d'état pour la transition T2



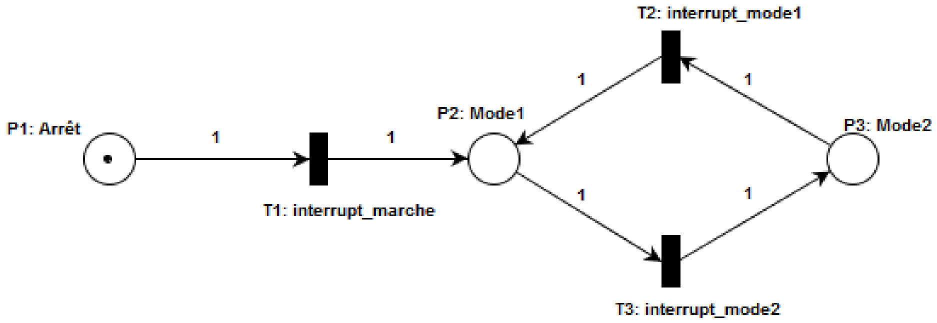

$$M2=M1 + W \,.\, V_{T2}{}^{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

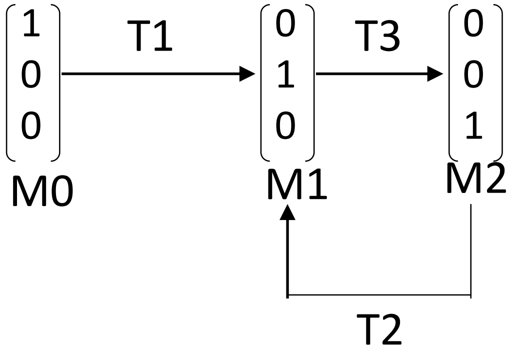
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

M2 contient un nombre négatif → T2 n'est pas franchissable à partir de M1

➔ La séquence <T1,T2> n'est pas franchissable à partir de M0

6) Quel est le degré de vivacité de ce réseau? Est-ce qu'il présente un blocage?

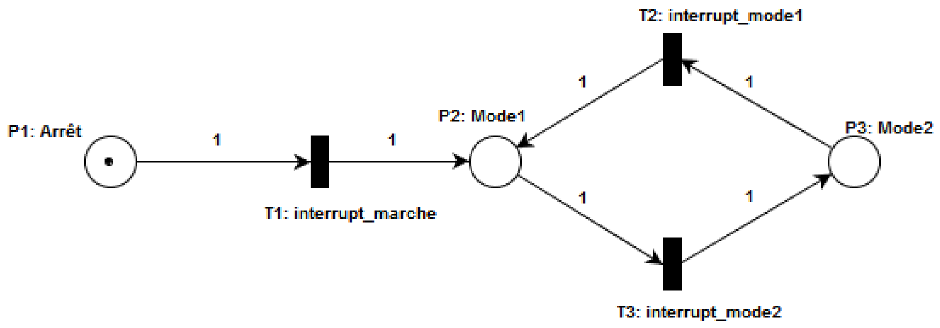


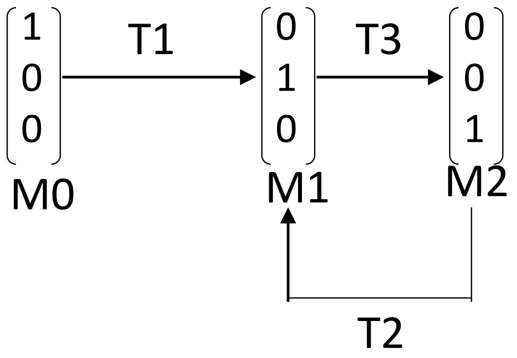



# Exercice

6) Quel est le degré de vivacité de ce réseau? Est-ce qu'il présente un blocage?

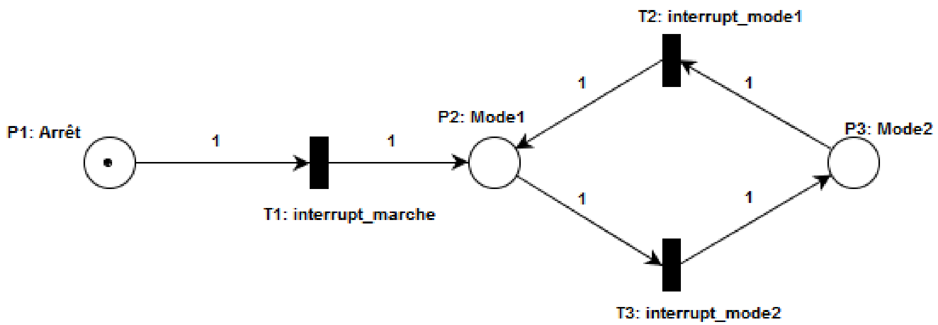
- Ce RdP n'est pas vivant car ses transitions ne sont pas vivantes
- Il est quasi-vivants car toutes ses transitions sont franchissables au moins une fois
- Il est pseudo-vivant car à partir de chaque marquage, on a au moins une transition franchissable
- Il est sans blocage puisqu'il est pseudo-vivant

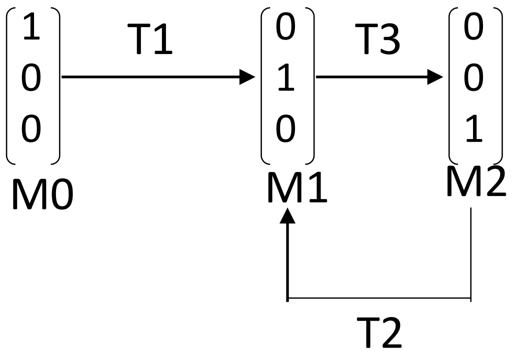


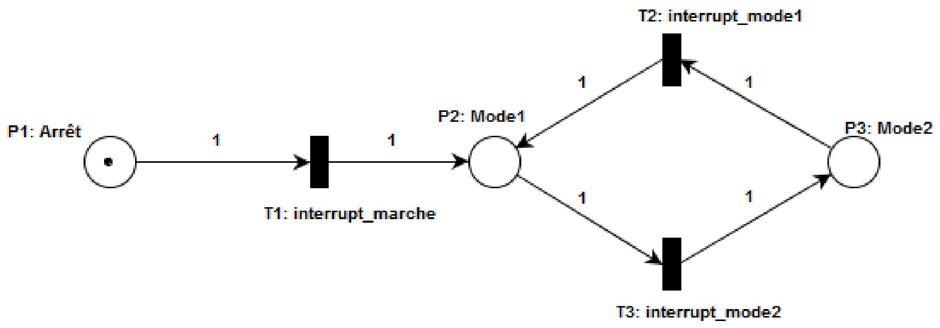
# Exercice

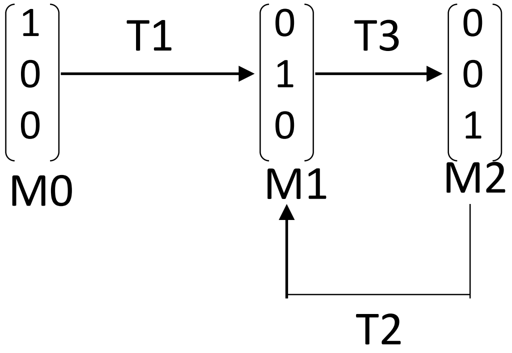
7) Est-ce que ce réseau est borné? Si oui, quelle est sa borne?



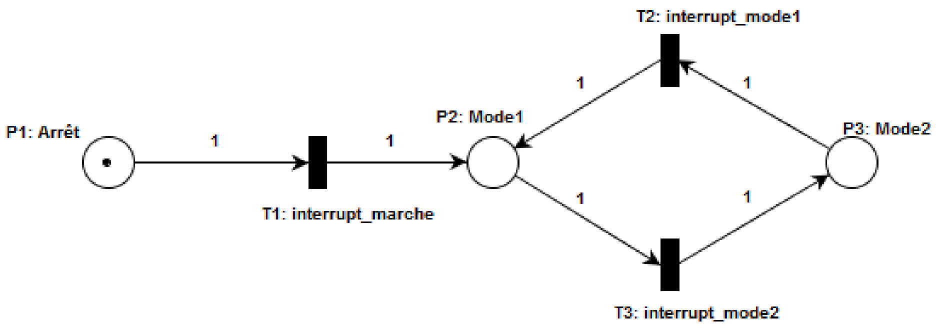
7) Est-ce que ce réseau est borné? Si oui, quelle est sa borne?
Ce réseau est 1-borné car dans toutes les places le nombre de jetons ne dépasse pas 1.

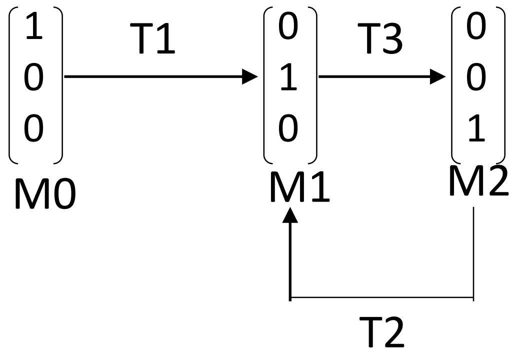


# Exercice

8) Vérifier à partir du graphe de marquages que le réseau n'est pas réinitialisable? Faire les modifications nécessaires pour le rendre réinitialisable.

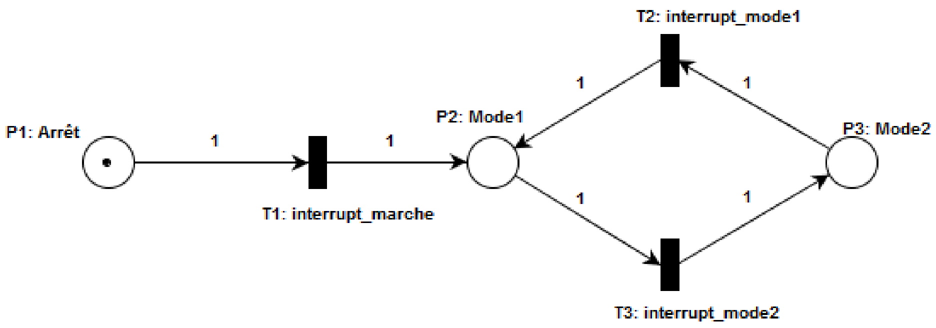


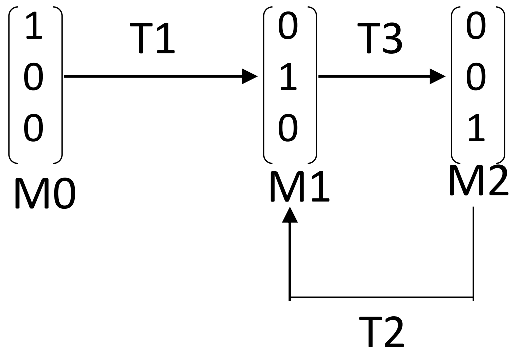




$$M0 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \xrightarrow{T1} M1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \xrightarrow{T3} M2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad M2 \xrightarrow{T2} M1$$

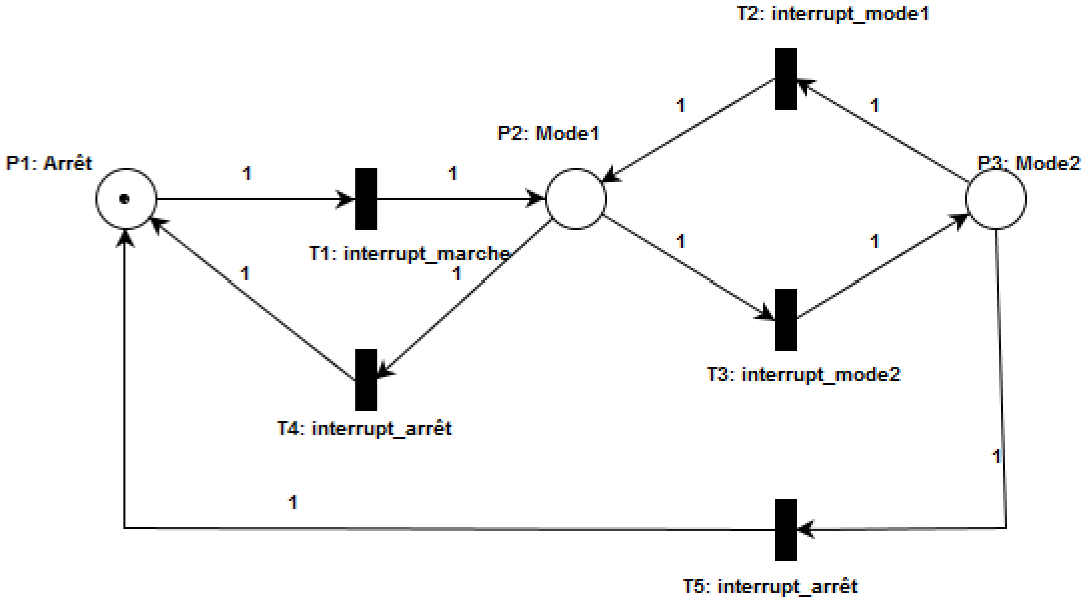
8) Vérifier à partir du graphe de marquages que le réseau n'est pas réinitialisable? Faire les modifications nécessaires pour le rendre réinitialisable.

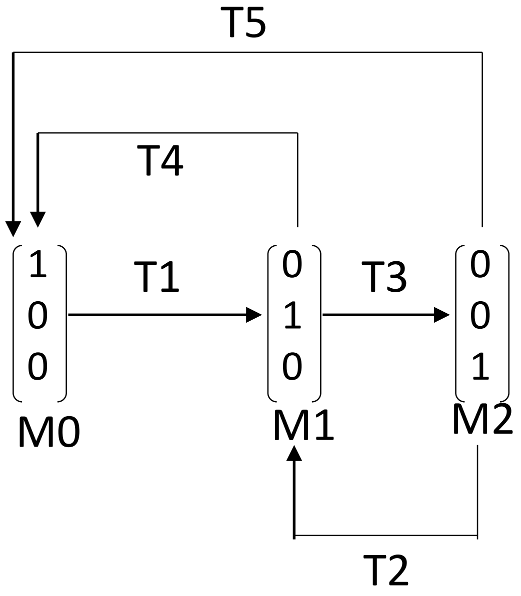
Ce RdP n'est pas réinitialisable car il n'y a pas de séquences de franchissement qui permettent de retourner au marquage initial



8) Vérifier à partir du graphe de marquages que le réseau n’est pas réinitialisable? Faire les modifications nécessaires pour le rendre réinitialisable.

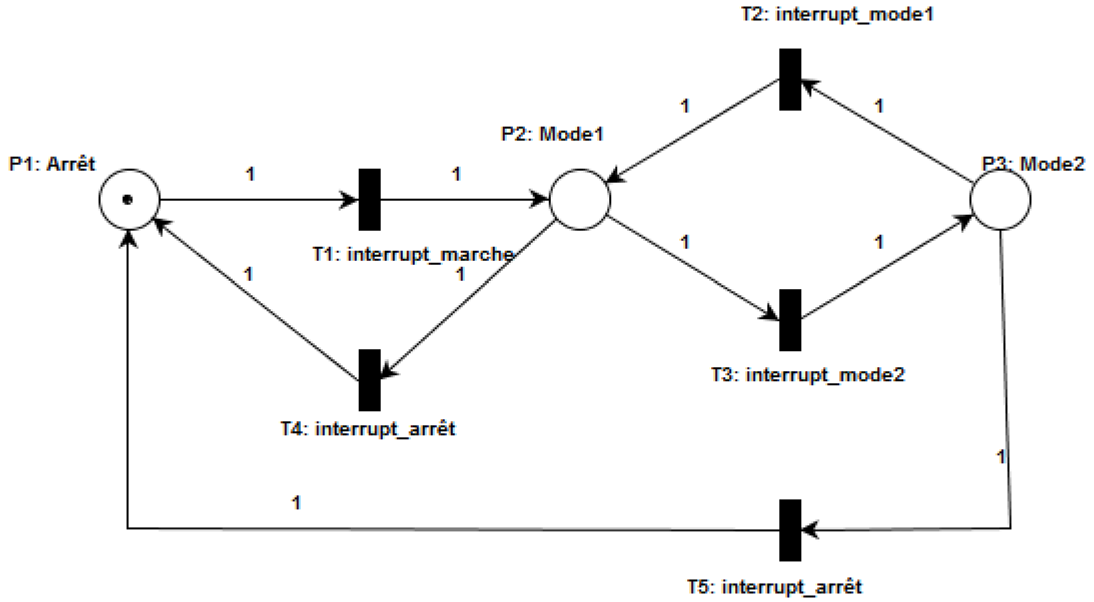



$$M0 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \xrightarrow{T1} M1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \xrightarrow{T3} M2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

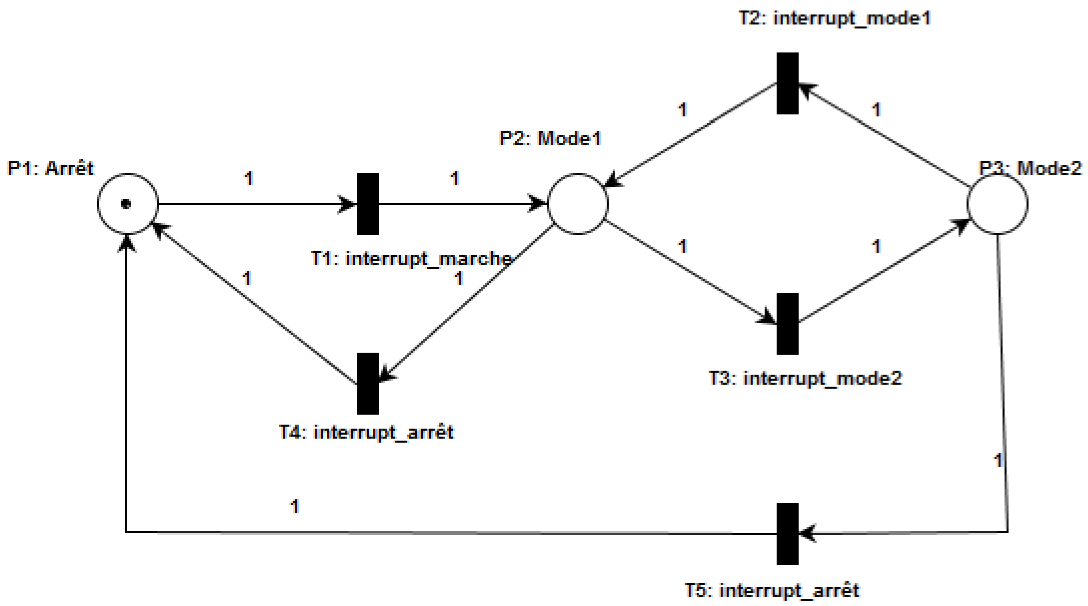
# Exercice

9) Vérifier mathématiquement que le système ne peut se trouver que dans un état à la fois (vérifier que $F=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un P-invariant)



# Exercice

9) Vérifier mathématiquement que le système ne peut se trouver que dans un état à la fois (vérifier que $F=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un P-invariant)




$$F^T . W= [1\ 1\ 1] . \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =[\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]$$

→F=[1,1,1] est un P-invariant → m1+m2+m3=cst=1 pour tout marquage (**la valeur de la constante peut être déduite du marquage initial puisqu'elle reste constante**)

→ {P1,P2,P3} est une composante conservative

# Exercice

9) Vérifier mathématiquement que le système ne peut se trouver que dans un état à la fois (vérifier que $F=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un P-invariant)

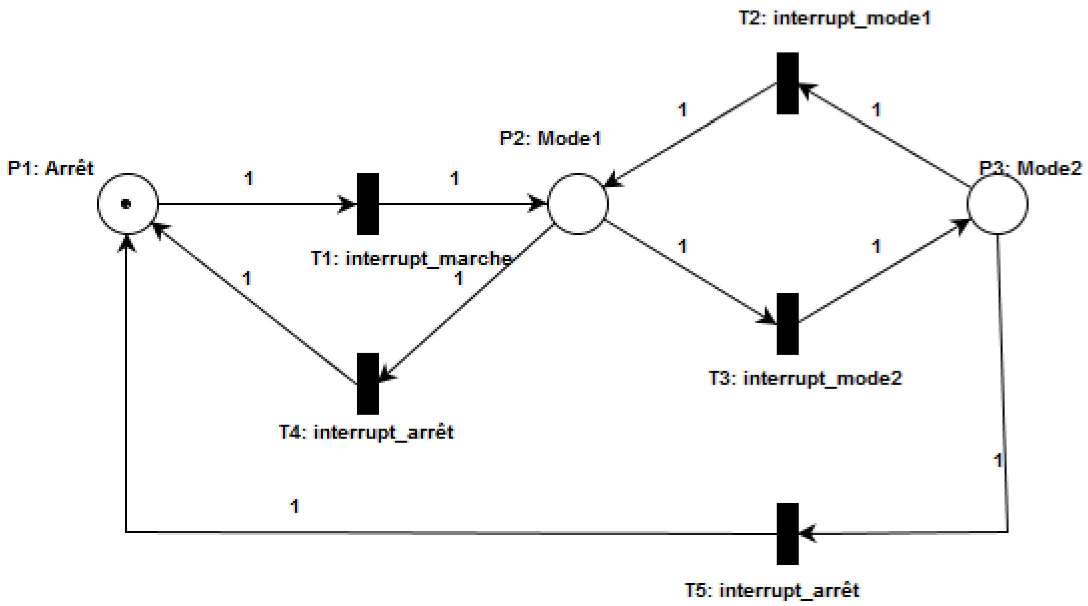
**P-Invariants**

| P1: Arrêt | P2: Mode1 | P3: Mode2 |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |

The net is covered by positive P-Invariants, therefore it is bounded.

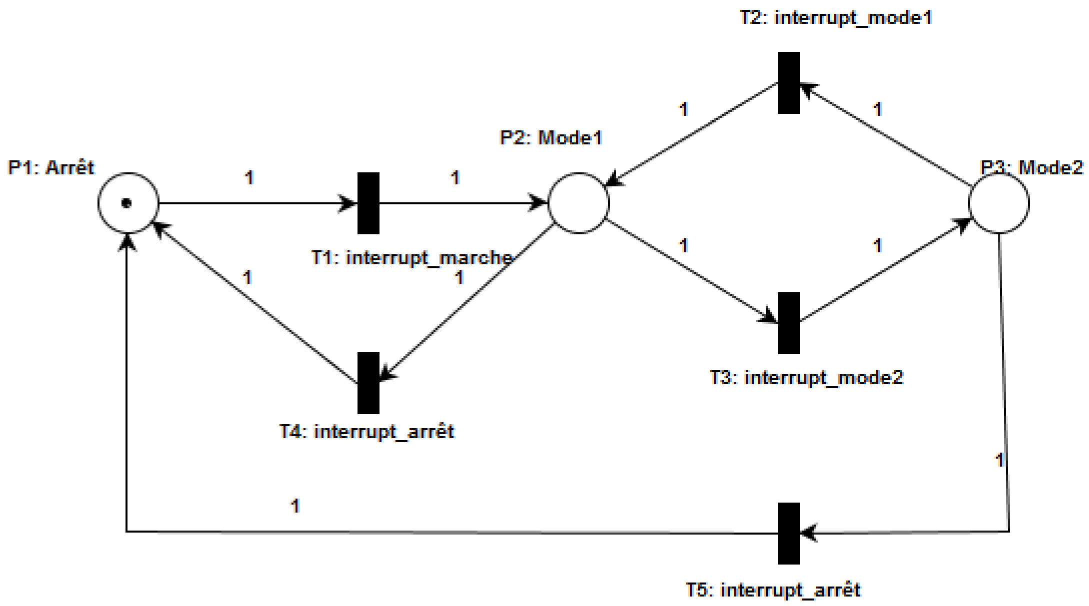
**P-Invariant equations**

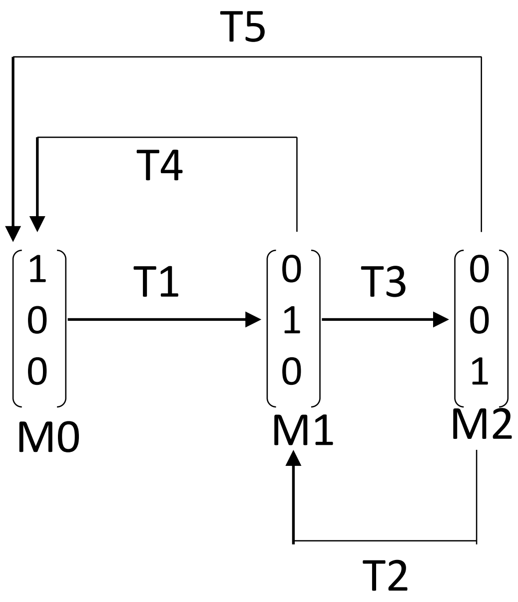
M(P1: Arrêt) + M(P2: Mode1) + M(P3: Mode2) = 1



# Exercice

10) Trouver les T-invariants de ce réseau et les composantes répétitives correspondantes en utilisant le graphe de marquage. Vérifier ce résultat mathématiquement.



# Exercice

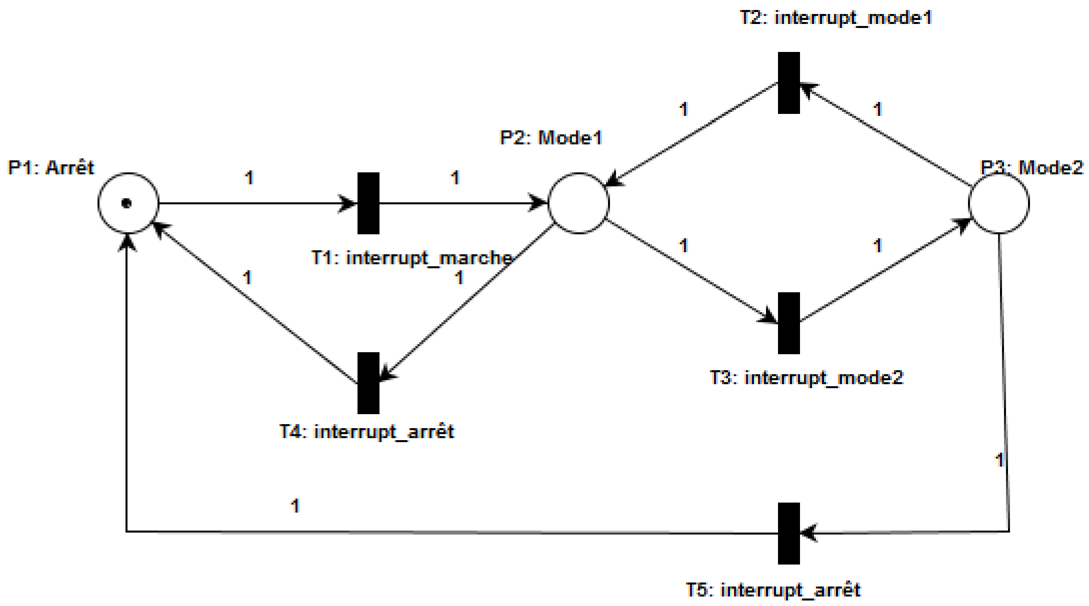
10) Trouver les T-invariants de ce réseau et les composantes répétitives correspondantes en utilisant le graphe de marquage. Vérifier ce résultat mathématiquement.

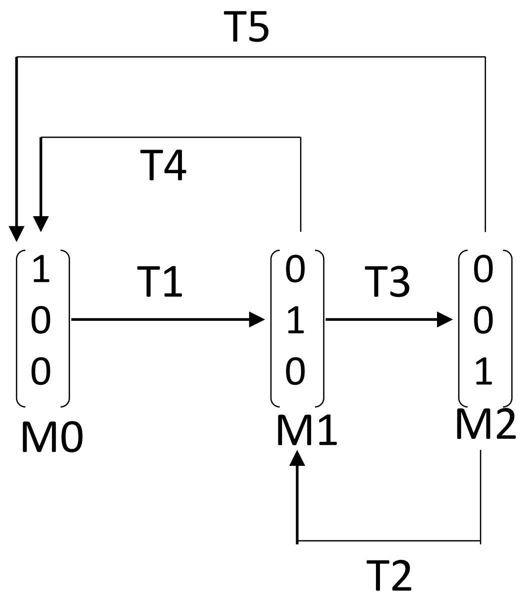
Il s'agit de trouver les cycles dans le graphe de marquage et déterminer leurs vecteurs de comptage

Les cycles : {T2,T3}, {T1,T4} et {T1,T3,T5}

➔V1=[0,1,1,0,0], V2=[1,0,0,1,0] et V3=[1,0,1,0,1] sont des T-invariants

➔ {T2,T3}, {T1,T4} et {T1,T3,T5} sont des composantes répétitives



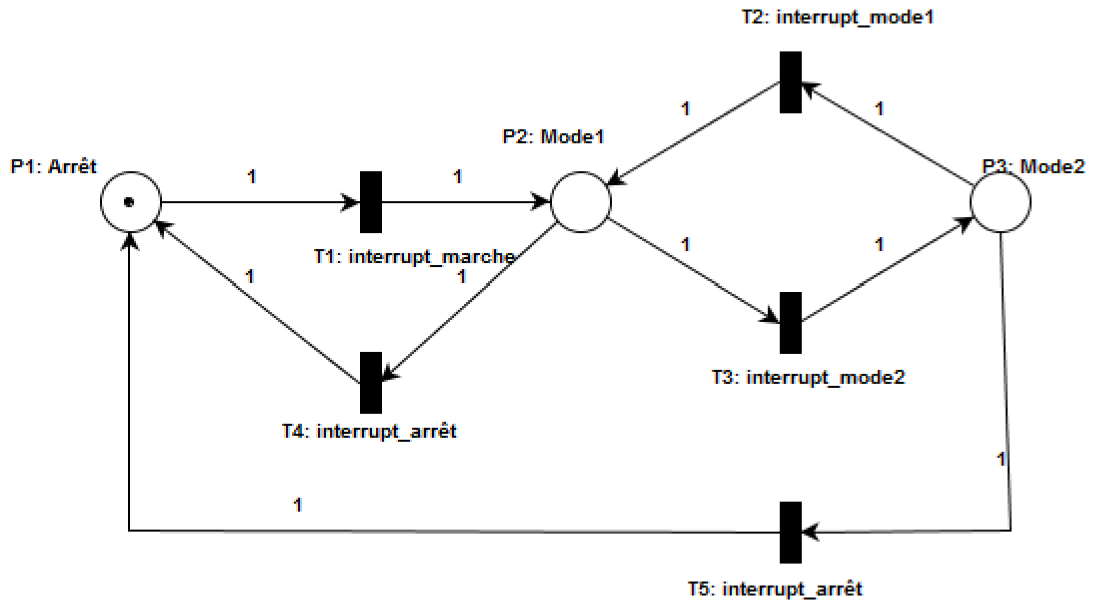
10) Trouver les T-invariants de ce réseau et les composantes répétitives correspondantes en utilisant le graphe de marquage. Vérifier ce résultat mathématiquement.

- V1=[0,1,1,0,0], V2=[1,0,0,1,0] et V3=[1,0,1,0,1] sont des T-invariants

$$W \cdot V1^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$W \cdot V2^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$W \cdot V3^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



# Exercice

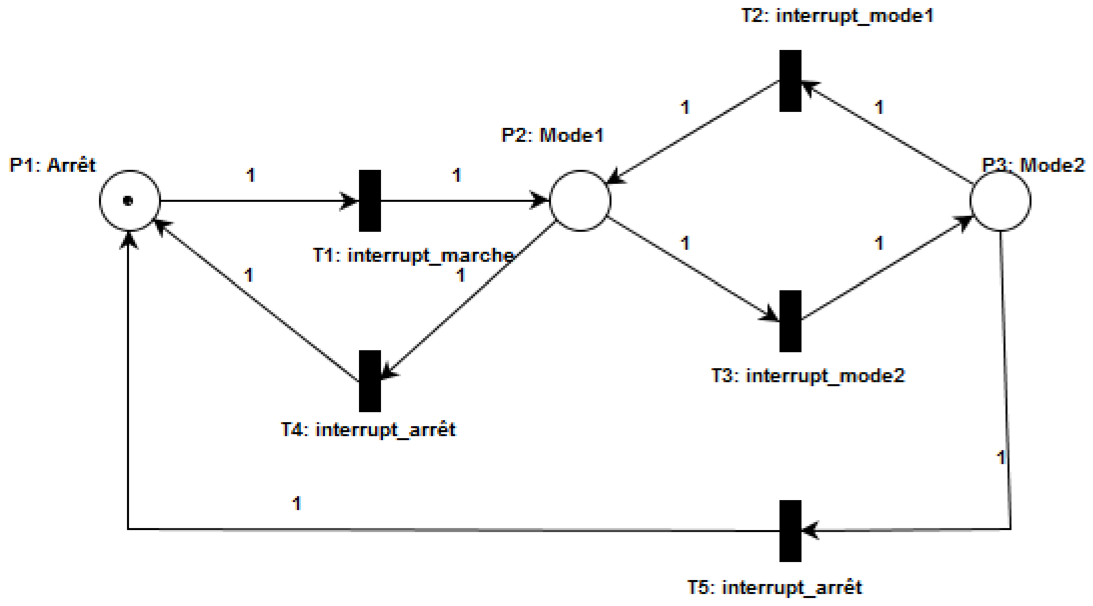
10) Trouver les T-invariants de ce réseau et les composantes répétitives correspondantes en utilisant le graphe de marquage. Vérifier ce résultat mathématiquement.

- V1=[0,1,1,0,0], V2=[1,0,0,1,0] et V3=[1,0,1,0,1] sont des T-invariants

**T-Invariants**

| T1: interrupt_marche | T2: interrupt_mode1 | T3: interrupt_mode2 | T4: interrupt_arrêt | T5: interrupt_arrêt |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

The net is covered by positive T-Invariants, therefore it might be bounded and live.



# Bibliographie


- René David, Hssane Alla, « Du grafcet aux réseaux de Petri », HERMES, 1992

- http://www.metz.supelec.fr/metz/personnel/vialle/course/CNAM-ACCOV-NFP103/extern-doc/RdP/RdP-proprietes.pdf