MAT 2051 TD 2

Exercice 1.
Soit E l'ensemble des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.
On considère deux applications de E définies par : $\forall x \in \mathbf{R},\ f_1(x) = e^x$ et $f_2(x) = e^{2x}$
Montrer que la famille $\{\ f_1, f_2\ \}$ est libre dans E

Exercice 2.
Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & a & c \end{pmatrix} \ /\ a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}, c \in \mathbf{R} \right\}$
1) Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$
(Indication : déterminer une famille génératrice)
2) Déterminer une base de E
3) Calculer $\dim(E)$

Exercice 3.
Soient $\omega \in \mathbf{R}^*$ et E l'ensemble des fonctions numériques f définies par :
$\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$ où $(a,b) \in \mathbf{R}^2$.
3.1) En utilisant la définition de E, compléter : $f \in E \Leftrightarrow$.......
3.2) Déterminer deux fonctions numériques f_1 et f_2 telles que $E = vect\{\ f_1\ ,\ f_2\}$.
3.3) Prouver que E est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$, calculer $\dim(E)$.
3.4) En déduire que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle : $y'' + \omega^2 y = 0$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ de dimension 2.

Exercice 4.
A. Soient $(D(\mathbf{R},\mathbf{R}),+,.)$ l'espace vectoriel des fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$ et $a \in \mathbf{R}$.
On considère la fonction $\varphi : D(\mathbf{R},\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ définie par $\forall f \in D(\mathbf{R},\mathbf{R}), \varphi(f) = f(a)$
et la fonction $\psi : D(\mathbf{R},\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ définie par $\forall f \in D(\mathbf{R},\mathbf{R}), \psi(f) = f'(a)$
1.a) Calculer $\varphi(f)$ et $\psi(f)$ pour $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = (x-1)^2$
1.b) Calculer $\varphi(g)$ et $\psi(g)$ pour $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $\forall x \in \mathbf{R}, g(x) = (x-a)\sin(x)$
1.c) Montrer que φ et ψ sont des applications linéaires de $D(\mathbf{R},\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}$.

B. Les ensembles suivants sont-ils des sous espaces vectoriels de $D(\mathbf{R},\mathbf{R})$?
1) $F = \{\ f \in D(\mathbf{R},\mathbf{R}) / f'(1) = 0\ et\ f(2) = 0\ \}$
2) $G = \{\ f \in D(\mathbf{R},\mathbf{R}) / f(0) = 0\ ou\ f(1) = 0\ \}$

Exercice 5.

Soit $E=\left\{P\in\mathbf{R}_3[X]\,/\,P(0)=P(1)=0\ \ et\ \ P'(-1)=0\right\}$

où $\mathbf{R}_3[X]$ représente l'ensemble des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 3 et P' désigne le polynôme dérivé du polynôme P .

1) Montrer que si $P\in E$ alors les racines de P sont des réels.

2) Déterminer une famille génératrice de E

3) Calculer $\dim(E)$.

Exercice 6.

Pour $n\in\mathbf{N}^*$, on désigne par $\mathbf{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

1) Pour $a\in\mathbf{R}$, montrer que $\left\{1,(X-a),(X-a)^2,\ldots,(X-a)^n\right\}$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$

2) Soit $P=2X^3+X+3$, donnez les composantes de P dans la base $\left\{1,(X-1),(X-1)^2,(X-1)^3\right\}$ de $\mathbf{R}_3[X]$

4) Soient $B_1=\left\{1,(X-1),(X-1)^2\right\}$ et $B_2=\left\{1,(X-2),(X-2)^2\right\}$ deux bases de $\mathbf{R}_2[X]$.

Donner A la matrice de passage de la base B_1 à la base B_2.

Exercice 7.

Soient $E=\mathbf{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes $P\in\mathbf{R}[X]$ tel que $\deg(P)\leq 2$ et $B=\left\{1,X,X^2\right\}$ la base canonique de E.

On considère l'application φ définie sur E par : $\forall P\in E, \varphi(P)=(1-X^2)P''-P'$.

Où P' désigne le polynôme dérivé de P et P'' désigne le polynôme dérivé de P'.

1) Montrer que φ est un endomorphisme de E ;

2) Si $P=aX^2+bX+c$, déterminer $(a,b,c)\in\mathbf{R}^3$ tel que $\varphi(P)=0_E$ où 0_E désigne le polynôme nul.

3) Déterminer une base de $Ker(\varphi)$;

4) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$.

Exercice 8.

Dans $\mathbf{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels

$E=\left\{(x,y,z,-z)\in\mathbf{R}^4\,/\,x+y=0\right\}$ et $F=\left\{(x,x,x,y)\in\mathbf{R}^4\,/\,x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\right\}$

1) Montrer que E et F sont supplémentaires

2) Soit p la projection sur E parallèlement à F, déterminer $p(u)$ pour le vecteur $u=(0,1,0,1)$.

Exercice 9.

Soient $E=\left\{f\in\mathbf{R}^{\mathbf{R}}\,/\,\forall x\in\mathbf{R}, f(-x)=f(x)\right\}$ et $F=\left\{f\in\mathbf{R}^{\mathbf{R}}\,/\,\forall x\in\mathbf{R}, f(-x)=-f(x)\right\}$

On sait que $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}=E\oplus F$.

On considère $p:\mathbf{R}^{\mathbf{R}}\to\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ la projection sur E parallèlement à F.

Calculer $p(f), p(g)$ et $p(h)$

où $\forall x\in\mathbf{R}, f(x)=\cos(x)+\sin(x); g(x)=\cos(x+1)$ et $h(x)=-xe^x$