Feuille de TD 4 :
Différentiabilité

Exercice 1.
Étudier la différentiabilité en $(0,0)$ des applications définies par :

1. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
2. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5-y^5}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 2.
Étudier la différentiabilité des applications définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

1. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
2. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
3. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
4. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
5. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
6. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{\sqrt{x^4+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 3.
Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Etudier l'existence des dérivées partielles et les calculer s'il y a lieu.
2. Etudier la continuité des dérivées partielles.
3. f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Exercice 4.
Pour les applicatuins suivantes, étudier la continuité de f, l'existence et la continuité des dérivées partielles de f :

1. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3)-\sin(y^3)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
2. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 5.

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2. f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$? Préciser s'il y a lieu sa différentielle.

Exercice 6. *Différentielle d'une application linéaire*

Montrer que toute application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et qu'en tout point a de $\mathbb{R}^n$: $df_a = f$.

Exercice 7.

Vérifier que l'application f définie par $f(x,y) = x^2y + \cos(x+y)$, est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et préciser sa différentielle en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8.

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Vérifier que $f(x,y) = o(||(x,y)||_2)$.
2. En déduire que f est différentiable en $(0,0)$ et préciser $df_{(0,0)}$.

Exercice 9.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $f(x,y) = (x+y, x-y)$. Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et préciser $df_{(a,b)}$ en tout point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 10.

Calculer la différentielle de f au point a indiqué, après avoir justifié son existence, pour :

1. $f(x,y) = x^y$ au point $a = (1,1)$.
2. $f(x,y,z) = (x+y)e^{x\cos z}$ au point $a = (0,0,0)$.
3. $f(x,y,z,t) = xy + zt$ en tout point a de $\mathbb{R}^4$.
4. $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ en tout point a de $\mathbb{R}^n$.