Exercices de révision

Programme du contrôle :

- *Chapitre 1 Topologie : normes, distances, boules, limite et continuité en termes de normes et distances*
- *Chapitre 2 Continuité : continuité et continuité partielle*
- *Chapitre 3 Différentiabilité (début) : dérivées partielles et dérivées directionnelles*

Exercice 1. *(extrait du contrôle 2017-2018)*
Pour tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$ on définit $f(x, y) = \max\{|x + 3y|, |2x + y|\}$.

1. Calculer les images par cette fonction des points $(1, 0)$ et $(2, 1)$.
2. Montrer que f est positive.
3. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a $f(a, 0) = f(a, -a)$.
4. Résoudre le système $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$.
5. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$. Comment s'appelle cette propriété ?
6. Montrer que pour tout $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $f(\lambda M) = |\lambda| f(M)$. Comment s'appelle cette propriété ?
7. Montrer que f vérifie l'inégalité triangulaire.
8. Calculer la distance associée à cette norme entre les points $A(2, 3)$ et $B(1, 1)$.
9. Déterminer la boule fermée de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 et la représenter.

Exercice 2. *(extrait d'un test 2016-2017)*
Soient d_1 et d_2 deux distances sur un ensemble e. Démontrer que l'application $d : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par $d(x, y) = \max\{d_1(x, y), d_2(x, y)\}$ est une distance sur E.

Exercice 3.
Montrer que $d(x, y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$ définit une distance sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4. *(extrait du contrôle 2017-2018)*
Soit f la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - 2y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer $\lim_{x\to 0} f(x, 0)$, $\lim_{y\to 0} f(0, y)$, $\lim_{x\to 0} f(x, x)$ et $\lim_{x\to 0} f(x, \lambda x)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Que représentent ces quantités ?

2. f est-elle partiellement continue en (0,0) ?
3. f est-elle continue en (0,0) ?
4. f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?
5. Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point (a, b) de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
6. Calculer ces dérivées partielles en tout point (a, b) de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
7. Étudier l'existence de dérivées partielles en $(0, 0)$.
8. Calculer la dérivée directionnelle de f au point $(1, 0)$ suivant le vecteur $\vec{u} = (1, 1)$.

Exercice 5. *(extrait du contrôle 2015-2016)*
Soit $m \geq 0$ un entier. On considère la fonction f_m définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(xy)^m}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Pour quelles valeurs de m l'application f_m est-elle continue ?
   Indication : traiter les cas $m = 0$, $m = 1$ puis $m \geq 2$.
2. La fonction f_1 admet-elle des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$? Si c'est le cas, les calculer.

Autres exercices : ceux des feuilles de TD2 et TD3 non traitées pendant les séances de TD.