MAT 2051 TD 4

Exercice 1.

On considère $\mathbf{R}^2$ muni du produit scalaire usuel noté $<\cdot \mid \cdot>$.

Soient f_1, f_2, f_3 et f_4 des endomorphismes de $\mathbf{R}^2$ définies par :

$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2$, $f_1(x,y) = (-y,-x)$, $f_2(x,y) = (2x,2y)$, $f_3(x,y) = (y,x)$ et $f_4(x,y) = (-y,x)$

1) Dans le cas où l'un des endomorphismes f_1, f_2, f_3 et f_4 est orthogonal, donner sa nature précise.

2) On considère la figure de l'annexe, qui représente un bonhomme.
Dessiner les images du bonhomme par chacune des applications f_1, f_2, f_3 et f_4 .

Exercice 2.

On considère $\mathbf{R}^2$ muni du produit scalaire usuel noté $<\cdot \mid \cdot>$.

On note A la matrice associée à un endomorphisme f de $\mathbf{R}^2$ par rapport à la base canonique (orthonormée) B de $\mathbf{R}^2$.

Dans les cas suivants, f est-il un endomorphisme orthogonal de $\mathbf{R}^2$? Si oui, quelle est la nature de l'endomorphisme f (c'est-à-dire une rotation ou une symétrie orthogonale).

- Si f est une rotation précisez l'angle θ de la rotation.
- Si f est une symétrie orthogonale par rapport à une droite D, déterminez alors l'équation cartésienne de D.

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$; 3) $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

Exercice 3.

On considère $\mathbf{R}^2$ muni du produit scalaire usuel noté $<\cdot \mid \cdot>$.

Soit $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$ la matrice associée à un endomorphisme f de $\mathbf{R}^2$ par rapport à la base canonique B de $\mathbf{R}^2$.

1) Quelle est la nature de l'endomorphisme f .

2) L'endomorphisme f est-il une rotation ?

3) Prouver que f est une symétrie orthogonale par une droite D puis déterminer l'équation cartésienne de D.

4) Prouver que f est diagonalisable sur $\mathbf{R}$.

5) Prouver qu'il existe une base orthonormée B' de $\mathbf{R}^2$ (on ne cherche pas à la calculer) telle que la matrice de f par rapport à B' est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4.

On considère $\mathbf{R}^2$ muni du produit scalaire usuel noté $< \cdot \mid \cdot >$.

Soient $u=(a,b)$ un vecteur unitaire de $\mathbf{R}^2$ (c'est-à-dire $\|u\|=1$) et f la symétrie orthogonale par rapport à la droite D dirigée par u.

1) Soit $v=(-b,a)$, montrer que $B'=\{u;v\}$ est une base orthonormée de $\mathbf{R}^2$

2) Donner $M_f(B')$, la matrice de f par rapport à la base $B'=\{u;v\}$

3) Montrer que la matrice f par rapport à la base canonique B de $\mathbf{R}^2$ est

$$M_f(B)=\begin{pmatrix} a^2-b^2 & 2ab \\ 2ab & b^2-a^2 \end{pmatrix}$$

Exercice 5.

Dans un espace euclidien E muni d'une base orthonormée directe $B=\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, montrer que la matrice M dans la base B de la rotation d'axe dirigé par le vecteur $u=\vec{i}+\vec{k}$ et d'angle $\theta=\frac{\pi}{2}$ est $M=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Exercice 6. (Extrait de l'examen novembre 2017)

On considère $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire usuel $<\cdot|\cdot>$.

Soient $u=(1,1,1)$, $v=(1,-1,0)$, $w=(1,1,-2)$ et $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice associée à un endomorphisme f de $\mathbf{R}^3$ par rapport à la base canonique $B=\{e_1,e_2,e_3\}$ de $\mathbf{R}^3$ où $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$ et $e_3=(0,0,1)$.

1) Montrer que f est un endomorphisme orthogonal et calculer $\det(A)$.
2) Vérifier que u est un vecteur propre de f.
3) Vérifier que v et w sont des vecteurs propres de f associés à la valeur propre -1.
4) Déterminer la dimension du sous–espace propre $E_1=Ker(f-Id_{\mathbf{R}^3})$.
5) Déterminer $E_1^{\perp}$ l'orthogonal de E_1.
6) Montrer que $E_{-1}=E_1^{\perp}$.
7) Calculer $<v|w>$ puis déterminer une base orthonormée $\{a_1,a_2\}$ de E_{-1}.
8) Déterminer une base orthonormée $B'=\{a_1,a_2,a_3\}$ de $\mathbf{R}^3$ où $a_3\in E_1$.
9) Déterminer la matrice associée à l'endomorphisme f par rapport à la base B'.
10) Préciser la nature de l'endomorphisme f.