THEORIE DES GRAPHES

12) GESTION DES INCOHÉRENCES

1) Coloration des sommets d'un graphe

La coloration des sommets d'un graphe G = [X, U] est une fonction qui, à chaque sommet de G, fait correspondre une couleur de sorte que deux sommets adjacents ne soient pas coloriés avec la même couleur.

Exemple

Considérons le graphe G donné par la figure 1.

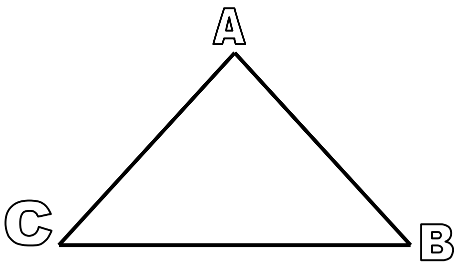

Figure 1.

Pour le graphe de la figure 1, trois couleurs distinctes sont nécessaires car chacun des trois sommets est adjacent aux deux autres.

Si on affecte au sommet A la couleur 1, les sommets B et C ne peuvent prendre cette couleur du fait qu'ils sont adjacents au sommet A.

Par ailleurs, comme les sommets B et C sont adjacents, alors il faut leur affecter des couleurs différentes. Par exemple, on peut affecter au sommet B la couleur 2 et au sommet C la couleur 3.

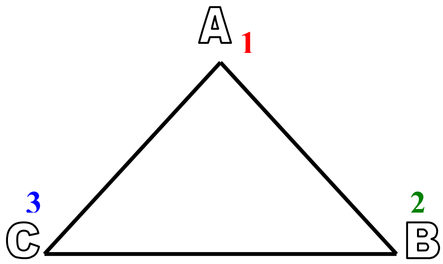

Figure 1'. Coloration de la figure 1.

On appelle k-coloration d'un graphe G = [X, U] une partition (SI, S2, ..., Sk) des sommets de G en k classes de sorte que les sommets d'une même classe ne soient pas adjacents (les sommets d'une même classe sont coloriés avec la même couleur).

Ainsi, une k-coloration d'un graphe G = [X, U] est une partition de ses sommets en k stables.

Un graphe est dit k-coloriable s'il admet une k-coloration.

Tout graphe d'ordre n est n-coloriable. Autrement dit, tout graphe d'ordre n admet au plus n couleurs.

On appelle nombre chromatique d'un graphe simple G, que l'on note $\gamma(G)$, le nombre minimum de couleurs distinctes nécessaire pour effectuer une coloration des sommets de G. Autrement dit, $\gamma(G)$ est le plus petit entier k tel que G soit k-coloriable.

<u>Exemples</u>

Reprenons le graphe de la figure 1. Pour ce graphe, le nombre chromatique $\gamma(G) = 3$ et les stables sont S1 = {A}, S2 = {B} et S3 = {C}.

Maintenant, considérons le graphe G donné par la figure 2.

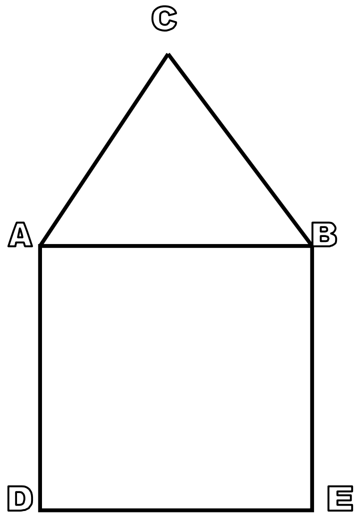

Figure 2.

Pour le graphe de la figure 2, le nombre chromatique γ(G)= 3.

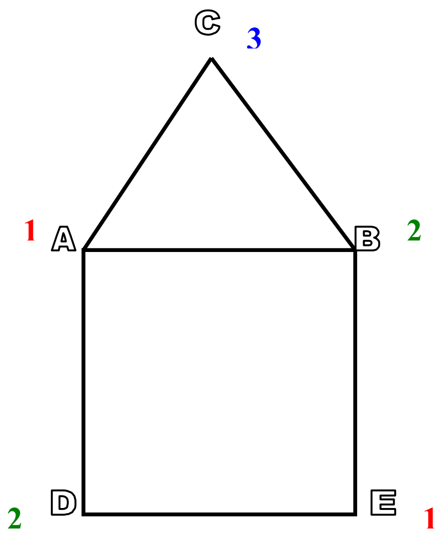

Figure 2'. Nombre chromatique de la figure 2.

Comme γ(G) = 3, on en déduit que l'on peut partitionner l'ensemble des sommets en trois stables S1 = {A, E}, S2 = {B, D} et S3 = {C}, où chaque stable est constitué de sommets coloriés avec la même couleur.

Remarque

La coloration des graphes revêt une grande importance puisqu'un bon nombre de problèmes concrets peuvent se poser en termes de coloration d'un graphe. A titre d'exemple, considérons le problème des examens écrits.

Application: le problème des examens écrits.

Soient:

Y: L'ensemble des étudiants auxquels on doit faire passer un certain nombre d'examens écrits,

Z: L'ensemble de toutes les épreuves possibles.

On souhaite que tous les étudiants qui doivent subir une épreuve zi le fassent en même temps, et que chaque étudiant ait au plus une épreuve à subir par jour.

La question que l'on se pose est celle qui consiste à savoir quel est le nombre minimum de jours nécessaires pour terminer tous les examens ?

Pour répondre à cette question, on opère comme suit :

1) Pour chaque épreuve zi, on forme l'ensemble des étudiants devant subir l'épreuve zi, soit $S(zi) \subset Y$;

2) On modélise le problème sous forme d'un graphe, où l'ensemble des sommets est l'ensemble des S(zi) et où deux sommets S(zi) et S(zj) sont reliés entre eux si et seulement si $S(zi) \cap S(zj) \neq \emptyset$, c.à.d., si et seulement si les sommets S(zi) et S(zj) ont des étudiants en commun.

3) On colorie les sommets de G de sorte que deux sommets adjacents de G ne soient pas coloriés avec la même couleur.

Maintenant, si on assimile chaque couleur de G à un jour, on voit que le problème revient à chercher le nombre chromatique $\gamma(G)$ du graphe G.

Remarque

Comme le montre l'exemple précédent, la coloration des graphes permet de gérer les incompatibilités.

Proposition : Le nombre chromatique d'un graphe complet est n.

Démonstration :

Comme dans un graphe complet, chaque sommet est adjacent aux $n - 1$ autres sommets, si on colorie un sommet x avec une couleur 1, les autres sommets doivent être coloriés avec les couleurs 2, 3, 4, …, n. Ainsi, dans un graphe complet, il faut au moins n couleurs.

Par ailleurs, comme un graphe d'ordre n admet au plus n couleurs, on en déduit que le nombre chromatique d'un graphe complet est n.

Exemple

Reprenons le graphe G donné par la figure 1. Comme ce graphe est d'ordre 3 et est complet, on conclut que son nombre chromatique vaut 3.

Remarque

Le nombre chromatique d'un cycle d'ordre pair vaut 2, et le nombre chromatique d'un cycle d'ordre impair vaut 3.

Exemples

Reprenons le graphe G donné par la figure 1. Comme ce graphe forme un cycle d'ordre impair, on conclut que son nombre chromatique vaut 3.

Maintenant, considérons le graphe G donné par la figure 3.

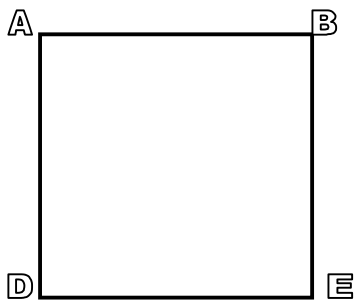

Figure 3.

Comme le graphe de la figure 3 forme un cycle d'ordre pair, on conclut que son nombre chromatique vaut 2.

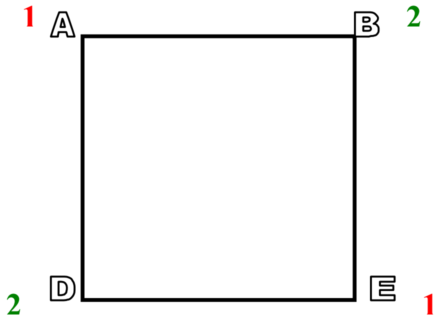

Figure 3'. Nombre chromatique d'un graphe.

Maintenant, considérons le graphe G donné par la figure 2.

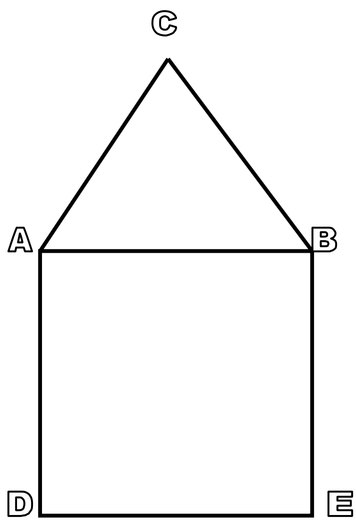

Figure 2.

Comme le graphe de la figure 2 contient un cycle d'ordre pair, il vient que $\gamma(G) \geq 2$.

De même, comme le graphe de la figure 2 contient un cycle d'ordre impair, il vient que $\gamma(G) \geq 3$.

Ainsi, comme ($\gamma(G) \geq 2$ et $\gamma(G) \geq 3$), on conclut que $\gamma(G) \geq 3$.

Par ailleurs, comme l'ensemble des sommets du graphe de la figure 2 peut être partitionné en trois stables S1 = {A, E}, S2 = {B, D} et S3 = {C}, il vient que $\gamma(G) \leq 3$.

Ainsi, comme d'une part $\gamma(G) \geq 3$ et, d'autre part, $\gamma(G) \leq 3$, on conclut que $\gamma(G) = 3$.

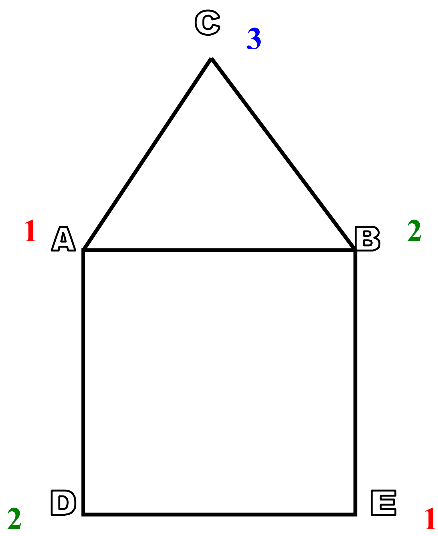

Figure 2’. Nombre chromatique de la figure 2.

Remarque

Il n’existe pas de formule permettant de déterminer avec exactitude le nombre chromatique $\gamma(G)$ d’un graphe quelconque. On peut juste en donner un encadrement.

Proposition : Soient $G = [X, U]$ un graphe simple d’ordre n, et $\alpha(G)$ le nombre de stabilité du graphe G. On a l’encadrement suivant.

$$(\gamma(G) * \alpha(G) \geq n) \text{ et } ((\gamma(G) + \alpha(G) \leq n + 1)$$

Démonstration :

Soit $\{S1, S2, \ldots, Sk\}$ une partition de X en k stables avec $k = \gamma(G)$.

Comme $\{S1, S2, \ldots, Sk\}$ est une k-coloration de G, on a

$(n = |S1| + |S2| + \ldots + |Sk|) \leq (\alpha(G) + \alpha(G) + \ldots + \alpha(G)) = k * \alpha(G) = \gamma(G) * \alpha(G)$.

Ainsi, on a prouvé que $n \leq \gamma(G) * \alpha(G)$

Maintenant, on va démontrer que $\gamma(G) + \alpha(G) \leq n + 1$.

A cette fin, considérons S qui est un ensemble stable de $G = [X, U]$ et dont la cardinalité est $\alpha(G)$. Autrement dit, S est un stable tel que $|S| = \alpha(G)$.

En coloriant les sommets de S avec la même couleur, il en reste $n - \alpha(G)$ sommets.

Maintenant, si l’on colorie tous les sommets restants, $n - \alpha(G)$, de couleurs toutes différentes, on obtient une coloration du graphe avec $1 + (n - \alpha(G))$ couleurs.

Ainsi, on conclut que $1 + n - \alpha(G) \geq \gamma(G)$, ce qui revient au même que de dire $\gamma(G) + \alpha(G) \leq n + 1$.

Proposition : Soient G = [X, U] un graphe simple d'ordre n, et r le degré le plus élevé des sommets du graphe G. On a l'inégalité suivant.

$$\gamma(G) \leq r + 1$$

Démonstration :

Soit {S1, S2, …, Sk} une partition de l'ensemble des sommets X en k stables. Soit x un sommet de l'ensemble Sk. Comme $x \in Sk$ et que Sk est un stable, alors le sommet x est adjacent à au moins un sommet de l'ensemble stable S1 (sinon x serait dans S1). De même, le sommet x est adjacent à au moins un sommet de S2, de S3, …, de Sk-2 et de Sk-1.

Ainsi, le sommet x est adjacent à au moins k – 1 sommets. Autrement dit, $d(x) \geq k - 1$.

Maintenant, sachant que {S1, S2, …, Sk} est une k-coloration du graphe G, on en déduit que $\gamma(G) \leq k$.

Par ailleurs, comme r est le degré le plus élevé des sommets du graphe G, il vient que $r \geq d(x)$.

Ainsi, des inégalités qui précèdent, on conclut que $r \geq d(x) \geq k - 1 \geq \gamma(G) - 1$. Autrement dit, des inégalités qui précèdent, on conclut que $\gamma(G) \leq r + 1$.

<u>Exemple</u>

Considérons le graphe G donné par la figure 4.

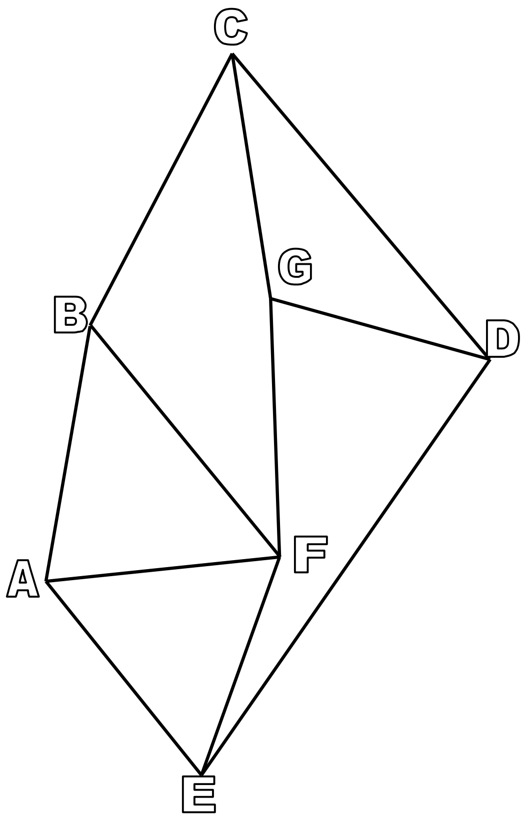

Figure 4.

Comme le graphe de la figure 4 contient un cycle d'ordre impair (ou encore comporte un sous-graphe complet d'ordre 3. par exemple, C-G-D), il vient que $\gamma(G) \geq 3$.

Par ailleurs, comme le sommet de degré le plus élevé est le sommet, avec $d(F) = 4$, alors on en déduit que $\gamma(G) \leq 4 - 1 = 3$.

Ainsi, comme d'une part $\gamma(G) \geq 3$ et, d'autre part, $\gamma(G) \leq 3$, on conclut que $\gamma(G) =3$.

Une coloration du graphe de la figure 4 serait, par exemple, celle qui suit.

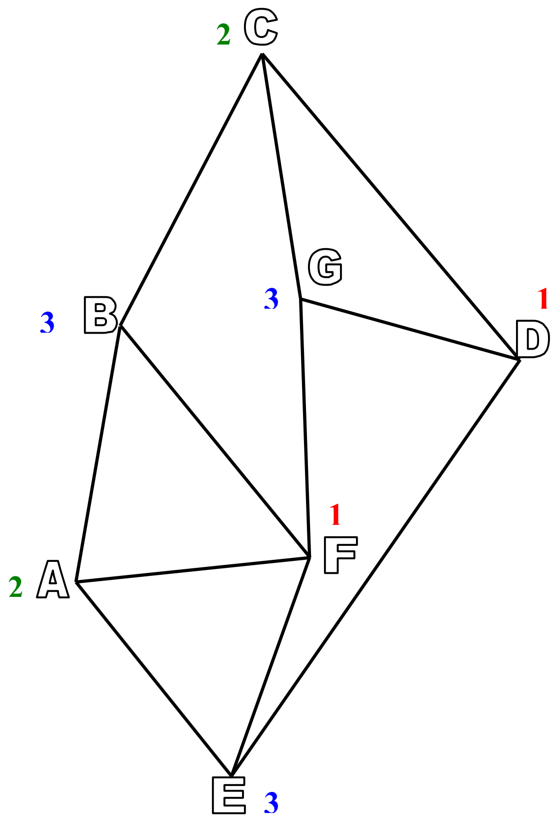

Figure 4'. Nombre chromatique de la figure 4.

2) <u>Algorithme de coloration des sommets d'un graphe : Algorithme de WELSH et POWELL</u>

Soit G = [X, U] un graphe. On désire déterminer le nombre chromatique y(G) du graphe G. Toutefois, comme on ne connaît pas d'algorithme polynomial pour déterminer y(G), on propose alors un algorithme approché qui conduit, **en général**, à une bonne approximation de y(G). Il s'agit de l'algorithme de Welsh et Powell dont le principe général est le suivant.

<u>Algorithme de coloration de Welsh et Powell</u>

Etape 1

a. On nomme l'ensemble des sommets du graphe dans l'ordre décroissant de leur degré. On obtient alors la liste ordonnée {x1, x2, x3, …, xn}, avec d(x1) ≥ d(x2) ≥ d(x3) ≥ … ≥ d(xn).

b. On ordonne l'ensemble des couleurs C.

Etape 2

c. En parcourant la liste ordonnée {x1, x2, x3, …, xn}, on affecte la première couleur disponible au premier sommet non encore coloré, et on affecte cette même couleur à chaque sommet non encore coloré et qui, en outre, n'est adjacent à aucun sommet de cette couleur.

Etape 3

d. On réitère le processus de l'étape 2 et ce, jusqu'à ce que tous les sommets du graphe soient colorés.

<u>Exemple</u>

Considérons le graphe G donné par la figure 5.

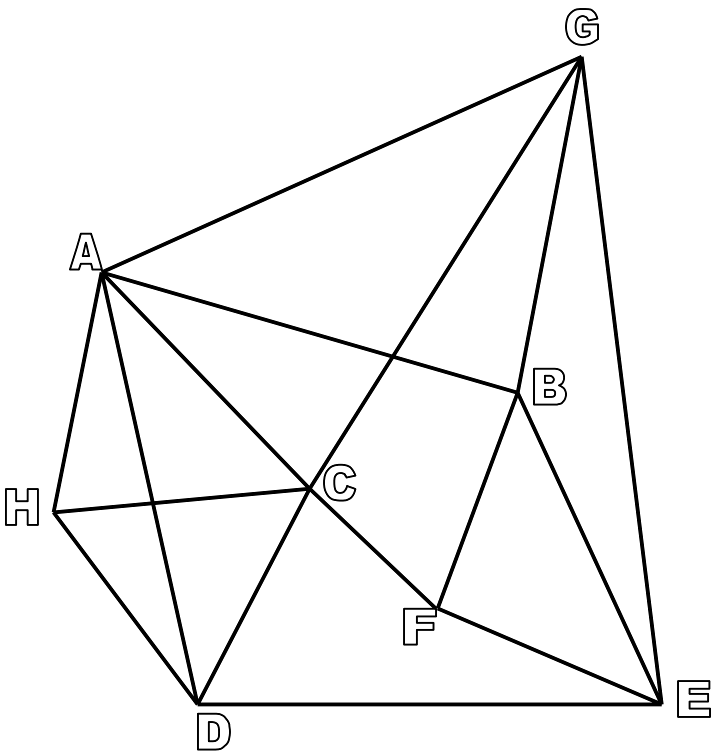

Figure 5.

Maintenant, simulons l'algorithme de Welsh et Powell par rapport au graphe de la figure 5.

Etape 1

e. On nomme l'ensemble des sommets X dans l'ordre décroissant de leur degré. On obtient le résultat suivant.

Sommet	**Sommet nommé**	degré
A	**x1**	5
C	**x2**	5
B	**x3**	4
D	**x4**	4
E	**x5**	4
G	**x6**	4
F	**x7**	3
H	**x8**	3

f. On ordonne l'ensemble des couleurs C selon l'ordre des numéros croissants.

Etape 2

g. On pose c(xl) = c(A) = 1, c.-à-d., on attribue au premier sommet A (sommet de degré le plus élevé) la première couleur 1.

h. En parcourant la liste ordonnée des sommets, on considère, si possible, le premier sommet de cette liste non adjacent au sommet A et on lui affecte la même couleur que celle affectée au sommet A, à savoir, la première couleur 1. ici, on considère donc le sommet E= x5 et on lui affecte la couleur 1. C(x5) = C(E) = 1

i. En parcourant la liste ordonnée des sommets, on considère, si possible, le premier sommet non encore coloré et qui n'est ni adjacent au sommet A, ni adjacent au sommet E. Comme il n'y en a pas et comme tous les sommets du graphe n'ont pas encore été colorés, alors on va réitérer le processus de l'étape 2 et ce, jusqu'à ce que tous les sommets du graphe soient colorés.

Etape 3

j. On pose c(x2) = c(C) = 2, c.-à-d., en parcourant la liste ordonnée des sommets{x1, x2, x3, …, x8}, on affecte la première couleur non encore utilisée au premier sommet non encore coloré.

k. En parcourant la liste ordonnée des sommets, on considère le premier sommet de cette liste non adjacent au sommet C et on lui affecte la même couleur que celle affectée au sommet C. Ici, on considère donc le sommet B= x3 et on lui affecte la couleur 2. C(x3) = C(B) = 2

l. Comme tous les sommets non encore colorés sont adjacent à B ou à C, alors on va réitérer le processus de l'étape 2 et ce, jusqu'à ce que tous les sommets du graphe soient colorés.

Etape 3

m. On pose c(x4) = c(D) = 3, c.-à-d., en parcourant la liste ordonnée des sommets{x1, x2, x3, …, x8}, on affecte la première couleur non encore utilisée au premier sommet non encore coloré.

n. En parcourant la liste ordonnée des sommets, on considère le premier sommet de cette liste non adjacent au sommet D et on lui affecte la même couleur que celle affectée au sommet D. Ici, on considère donc le sommet G= x6 et on lui affecte la couleur 3. C(x6) = C(G) = 3

o. En parcourant la liste ordonnée des sommets, on considère le premier sommet non encore coloré et qui n'est ni adjacent au sommet D ni adjacent au sommet G. Ici, on considère donc le sommet F= x7 et on lui affecte la couleur 3. C(x7) = C(F) = 3

p. Comme le seul sommet non encore coloré est H et que le sommet H est adjacent au sommet D, alors va réitérer le processus de l'étape 2.

Etape 4

q. On pose c(x8) = c(H) = 4, c.-à-d., en parcourant la liste ordonnée des sommets{x1, x2, x3, …, x8}, on affecte la première couleur non encore utilisée au premier sommet non encore coloré.

r. Comme tous les sommets ont été colorés, on s'arrête en concluant qu'avec l'algorithme de Welsh et Powell, il faut 4 couleurs pour colorier le graphe de la figure 5.

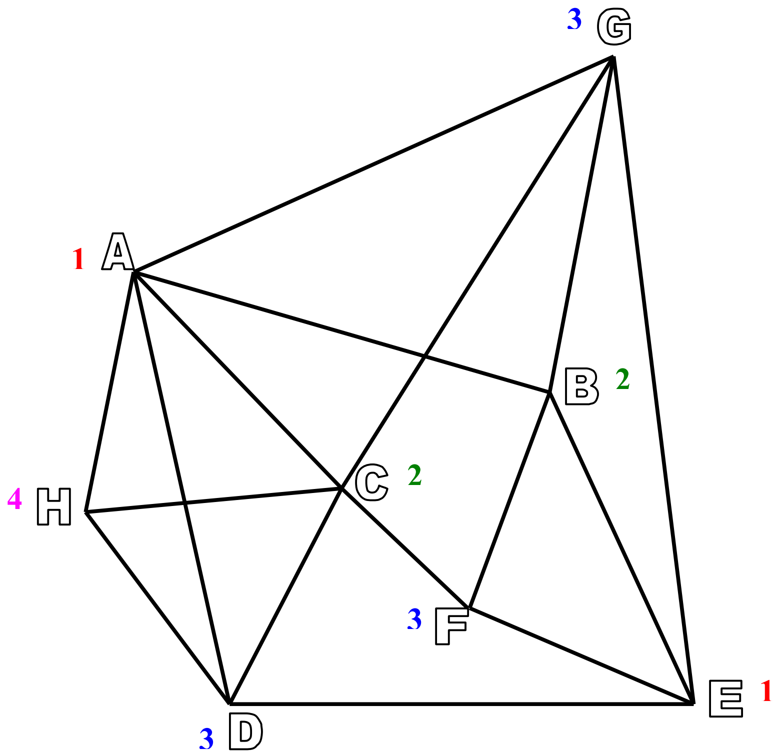

Figure 5'.Coloration du graphe de la figure 5 en utilisant l'algorithme de Welsh et Powell.

<u>Remarque</u>

Comme cela a été indiqué, l'algorithme de Welsh et Powell conduit, **en général**, à une bonne approximation de y(G). Toutefois, il ne garantit pas que le nombre de couleurs distinctes trouvé soit toujours égal au nombre chromatique du graphe considéré.

<u>Remarque</u>

Pour le graphe de la figure5, le nombre de couleurs trouvé en utilisant l'algorithme de Welsh et Powell est le nombre minimum de couleurs distinctes nécessaire pour colorier le graphe, à savoir, le nombre chromatique du graphe.

Comme le graphe de la figure 5 comporte un sous-graphe complet d'ordre 4 (A-C-D-H), il vient que $\gamma(G) \geq 4$.

Par ailleurs, comme le degré le plus élevé des sommets du graphe de la figure 5 vaut 5, alors on en déduit que $\gamma(G) \leq 5 - 1 = 4$.

Ainsi, comme d'une part $\gamma(G) \geq 4$ et, d'autre part, $\gamma(G) \leq 4$, on conclut que $\gamma(G) = 4$.

Remarque

Il est des cas où plusieurs sommets sont de même degré. Au lieu de les classifier selon l'ordre numérique ou lexicographique et donc, d'effectuer un choix arbitraire, il serait souhaitable que d'effectuer un choix qui tient compte des connaissances du domaine sous étude. Cela permet, en général, d'obtenir des résultats plus informatifs et plus