# Exercices de Probabilités

## Exercice 1 : Probabilités conditionnelles

Dans une entreprise, on observe que 70% des employés sont des hommes et 30% sont des femmes. Parmi les hommes, 60% travaillent dans le département A et 40% dans le département B. Parmi les femmes, 40% travaillent dans le département A et 60% dans le département B.

On choisit un employé au hasard. Soit les événements suivants :

- $H$ : l'employé est un homme.
- $F$ : l'employé est une femme.
- $A$ : l'employé travaille dans le département A.
- $B$ : l'employé travaille dans le département B.

1. Quelle est la probabilité qu'un employé choisi au hasard travaille dans le département A ?
2. On sait que l'employé choisi travaille dans le département A. Quelle est la probabilité que cet employé soit un homme ?
3. Quelle est la probabilité qu'un employé choisi au hasard travaille dans le département A sachant qu'il est un homme ?

## Correction

**1. Calcul de la probabilité que l'employé travaille dans le département A**

La probabilité qu'un employé travaille dans le département A est donnée par la loi des probabilités totales :

$$P(A) = P(A \mid H)P(H) + P(A \mid F)P(F)$$

Où :

$$P(H) = 0.70, \quad P(F) = 0.30, \quad P(A \mid H) = 0.60, \quad P(A \mid F) = 0.40$$

Ainsi,

$$P(A) = 0.60 \times 0.70 + 0.40 \times 0.30 = 0.42 + 0.12 = 0.54$$

La probabilité qu'un employé choisi au hasard travaille dans le département A est donc $P(A) = 0.54$.

**2. Probabilité que l'employé soit un homme sachant qu'il travaille dans le département A**

La probabilité que l'employé soit un homme sachant qu'il travaille dans le département A est donnée par :

$$P(H \mid A) = \frac{P(A \mid H)P(H)}{P(A)}$$

Nous avons :

$$P(A \mid H) = 0.60, \quad P(H) = 0.70, \quad P(A) = 0.54$$

Ainsi,

$$P(H \mid A) = \frac{0.60 \times 0.70}{0.54} = \frac{0.42}{0.54} \approx 0.7778$$

La probabilité que l'employé soit un homme sachant qu'il travaille dans le département A est environ 0.7778 ou 77.78%.

**3. Probabilité que l'employé travaille dans le département A sachant qu'il est un homme**

La probabilité que l'employé travaille dans le département A sachant qu'il est un homme est simplement :

$$P(A \mid H) = 0.60$$

# Exercice 2 : Fonction de repartition

Soit $X$ une variable aléatoire discrète ayant la loi suivante :

| $X$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $P(X)$ | 0.2 | 0.5 | 0.3 |

Calculez la fonction de répartition $F_X(x)$.

# Correction:

La fonction de répartition $F_X(x) = P(X \leq x)$ est calculée de la manière suivante:

- $F_X(x) = 0$ pour $x < -1$,

- $F_X(x) = 0.2$ pour $-1 \leq x < 0$,
- $F_X(x) = 0.2 + 0.5 = 0.7$ pour $0 \leq x < 1$,
- $F_X(x) = 0.2 + 0.5 + 0.3 = 1$ pour $x \geq 1$.

Ainsi, la fonction de répartition est une fonction en escalier avec les valeurs suivantes :

- $F_X(-2) = 0$,
- $F_X(-1) = 0.2$,
- $F_X(0) = 0.7$,
- $F_X(1) = 1$.

## Exercice 3 : Loi Binomiale

Une pièce équilibrée est lancée 4 fois. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 2 faces ?

## Correction:

La variable aléatoire $X$ suit une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0.5$. La probabilité cherchée est $P(X = 2)$, donnée par la formule :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Substituons :

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} (0.5)^2 (1 - 0.5)^{4-2}$$

- $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{24}{4} = 6$.
- $P(X = 2) = 6 \cdot (0.5)^2 \cdot (0.5)^2 = 6 \cdot 0.25 \cdot 0.25 = 0.375$.

Ainsi, la probabilité d'obtenir exactement 2 faces est :

$$P(X = 2) = 0.375.$$

## Exercice 4 : Loi Hypergéométrique

Dans une classe de 20 étudiants, 12 sont des filles et 8 sont des garçons. On sélectionne aléatoirement 5 étudiants. Quelle est la probabilité que 3 des étudiants sélectionnés soient des filles ?

## Correction:

$X$ suit une loi hypergéométrique avec :

- $N = 20$ (taille totale),
- $K = 12$ (nombre de filles),
- $n = 5$ (taille de l'échantillon),
- $k = 3$ (nombre de filles recherchées).

La probabilité est donnée par :

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Calculons chaque terme :

- $\binom{12}{3} = \frac{12!}{3!(12-3)!} = 220,$
- $\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!(8-2)!} = 28,$
- $\binom{20}{5} = \frac{20!}{5!(20-5)!} = 15504.$

Substituons les valeurs :

$$P(X = 3) = \frac{220 \cdot 28}{15504} = \frac{6160}{15504} \approx 0.397.$$

Ainsi, la probabilité que 3 des étudiants sélectionnés soient des filles est d'environ 0.397.

## Exercice 5 : Arrangements

Dans une classe, il y a 10 élèves : 4 filles et 6 garçons. On choisit au hasard un groupe de 4 élèves pour constituer un comité.

1. Combien de façons différentes peut-on choisir un comité de 4 élèves ?
2. Combien de façons différentes peut-on choisir un comité de 4 élèves, sachant qu'il doit comporter exactement 2 garçons et 2 filles ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un comité comportant exactement 2 garçons et 2 filles ?

## Correction

**1. Nombre de façons de choisir un comité de 4 élèves**

Le nombre de façons de choisir un comité de 4 élèves parmi 10 est donné par le coefficient binomial :

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{4!(10-4)!} = 210$$

Donc, il y a 210 façons de choisir un comité de 4 élèves parmi 10.

**2. Nombre de façons de choisir un comité de 4 élèves avec 2 garçons et 2 filles**

Il faut choisir 2 garçons parmi les 6 garçons et 2 filles parmi les 4 filles. On a :

$$\binom{6}{2} = 15 \quad \text{et} \quad \binom{4}{2} = 6$$

Le nombre total de façons de choisir un comité avec 2 garçons et 2 filles est :

$$\binom{6}{2} \times \binom{4}{2} = 15 \times 6 = 90$$

Il y a donc 90 façons de choisir un comité de 4 élèves avec exactement 2 garçons et 2 filles.

**3. Probabilité d'obtenir un comité avec 2 garçons et 2 filles**

La probabilité d'obtenir un comité avec exactement 2 garçons et 2 filles est le rapport du nombre de façons favorables au nombre total de façons possibles :

$$P(2 \text{ garçons et } 2 \text{ filles}) = \frac{\binom{6}{2} \times \binom{4}{2}}{\binom{10}{4}} = \frac{90}{210} = \frac{3}{7}$$

La probabilité d'obtenir un comité comportant exactement 2 garçons et 2 filles est donc $\frac{3}{7}$.

## Exercice 6 : Independance

On considère un tirage aléatoire d'une boule dans une urne. L'urne contient 5 boules rouges et 3 boules vertes. On définit deux événements :

- $A$ : l'événement "la boule tirée est rouge".
- $B$ : l'événement "la boule tirée est verte".

1. Calculez les probabilités des événements $A$ et $B$.
2. Vérifiez si les événements $A$ et $B$ sont indépendants.

# Correction

**1. Calcul des probabilités des événements**

- La probabilité de tirer une boule rouge $P(A)$ est donnée par :

$$P(A) = \frac{\text{nombre de boules rouges}}{\text{nombre total de boules}} = \frac{5}{8}$$

- La probabilité de tirer une boule verte $P(B)$ est donnée par :

$$P(B) = \frac{\text{nombre de boules vertes}}{\text{nombre total de boules}} = \frac{3}{8}$$

**2. Vérification de l'indépendance**

Les événements $A$ et $B$ sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

- $P(A \cap B)$ représente la probabilité qu'un tirage donne à la fois une boule rouge et une boule verte. Comme il est impossible de tirer une boule rouge et une boule verte en même temps dans cette urne, on a :

$$P(A \cap B) = 0$$

- Calculons maintenant $P(A) \times P(B)$ :

$$P(A) \times P(B) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{15}{64}$$

Puisque $P(A \cap B) = 0 \neq \frac{15}{64}$, les événements $A$ et $B$ ne sont pas indépendants.

Les événements $A$ et $B$ ne sont pas indépendants, car il est impossible qu'un tirage donne à la fois une boule rouge et une boule verte, ce qui rend $P(A \cap B) = 0$ alors que $P(A) \times P(B) \neq 0$.