Synthèse du cours de Probabilités

1 Variables aléatoires

1.1 Probabilité conditionnelle:

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et B un événement tel que $P(B) \neq 0$. On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B, le réel

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Propriétés:

- Soit B un évènement tel que $P(B) \neq 0$, alors, pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a
$$P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B).$$
- Soit A et B deux évènements de probabilité non nulle. Les trois conditions sont équivalentes :
    1. A et B sont indépendants :$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
    2. $P(A \mid B) = P(A)$.
    3. $P(B \mid A) = P(B)$.
- Soit $B \in \mathcal{A}$ tel que $0 < P(B) < 1$. Alors, pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a
$$P(A) = P(A \mid B)P(B) + P(A \mid B^c)P(B^c).$$

1.2 Formule des Probabilités Totales

Soit $(B_i)_{i \in I}$ (avec $I \subseteq N$ fini ou non) une famille d'évènements deux à deux incompatibles telle que : $\forall i \in I,\ P(B_i) \neq 0 \quad et \quad \bigcup_{i \in I} B_i = \Omega$ alors, pour tout évènement $A \in \mathcal{A}$, on a :

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A \cap B_i) = \sum_{i \in I} P(A|B_i)P(B_i).$$

1.3 Loi de probabilité:

Si $X : \Omega \longrightarrow R$ est une variable aléatoire réelle discrète, alors $X(\Omega) = \{X(\omega) : \omega \in \Omega\}$ est un ensemble dénombrable.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, et X une variable aléatoire réelle discrète. On appelle loi de probabilité (ou distribution de probabilité) de la variable X, l'application f :

$$f : X(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$$

$$x \longmapsto P(X = x).$$

On suppose que X est une variable aléatoire réelle discrète et que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. On peut présenter la loi de probabilité de X sous forme de tableau :

x	x_1	x_2	x_3	$\ldots$
$P(X = x)$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	$P(X = x_3)$	$\ldots$

Proposition: Soit X une v.a. réelle discrète définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. Alors la famille d'ensembles $\{X = x\}_{x \in X(\Omega)}$ forme une partition de l'univers Ω. De plus, $\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = 1$.

1.4 Fonction de répartition:

On appelle fonction de répartition (f.d.r.) d'une variable aléatoire X la fonction F_X définie sur R par :

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

Lorsque X est une variable aléatoire discrète, c'est-à-dire qu'elle ne prend qu'un nombre dénombrable de valeurs $\{x_i : i \in I \subset N\}$, la f.d.r. F_X de X s'écrit :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i).$$

Propriétés:

La fonction de répartition F_X vérifie les propriétés suivantes :

- F_X est une application définie sur R à valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$.
- F_X est continue à droite.

- F_X est une fonction croissante et, pour une variable aléatoire discrète, F_X est une fonction en escalier.
- On a :
$$\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1, \quad \lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0.$$
- La fonction de répartition caractérise totalement la variable aléatoire X.
- Pour tout $x \in R$, $P(X > x) = 1 - F_X(x)$.
- Pour tout $x, y \in R$, $P(x < X \leq y) = F_X(y) - F_X(x)$.

1.5 Espérance:

On appelle espérance mathématique de X, le nombre $E(X)$ défini par :

$$E(X) = \sum_{k \in E} k \cdot P(X = k)$$

Propriétés:
Soient X et Y deux variables aléatoires, et a et b des nombres réels. On a :

- $E(aX) = aE(X)$
- $E(aX + b) = aE(X) + b$
- $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$ (linéarité de l'espérance)
- Si $X \geq 0$, alors $E(X) \geq 0$
- Si $X \geq 0$ et $E(X) = 0$, alors $P(X = 0) = 1$ (c'est-à-dire X est une constante égale à 0)
- Si $X \geq Y$ (c'est-à-dire pour tout $\omega \in \Omega$, on a $X(\omega) \geq Y(\omega)$), alors $E(X) \geq E(Y)$

1.6 Variance:

$$V(X) = E\big((X - E(X))^2\big)$$

Propriétés:

Soit X une variable aléatoire admettant une variance et donc une espérance.

- $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$
- La variance est toujours positive.
- Soient a et b deux réels, $V(aX + b) = a^2 V(X)$
- Si $V(X) = 0$, alors X est égale à une constante.

1.7 Écart type:

Soit X une variable aléatoire possédant une variance. L'écart type de la variable aléatoire X est un réel égal à

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

2 Lois usuelles discrètes

2.1 Loi de Probabilité Uniforme

Soit Ω un univers discret et fini. La loi de probabilité uniforme P satisfait :

- Pour tout $\omega \in \Omega$, $P(\omega) = \frac{1}{card(\Omega)}$;
- Pour tout $A \subset \Omega$, $P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$ (le nombre des cas favorables divisé par le nombre des cas possibles).

2.2 Loi de bernoulli:

Modélise une expérience aléatoire qui n'a que deux issues possibles :

- **Succès** (avec probabilité p),
- **Échec** (avec probabilité $1 - p$).

Variable de Bernoulli:

Une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si :

$$P(X = 1) = p \quad et \quad P(X = 0) = 1 - p$$

Où :

- $X = 1$ représente le succès,
- $X = 0$ représente l'échec.

Espérance et Variance:

- **Espérance** : $E(X) = p$
- **Variance** : $Var(X) = p(1 - p)$

Exemples d'application:

- **Lancer une pièce** : succès si face, échec si pile ($p = 0,5$).
- **Réussite ou échec d'un tir au but** ($p =$ probabilité de marquer).

2.3 Loi binomiale:

La loi binomiale modélise une situation où l'on répète une **même expérience aléatoire indépendante** (suivant une loi de Bernoulli) un nombre fixé de fois. Elle est utilisée pour dénombrer le **nombre de succès** obtenus dans ces répétitions.

Variable binomiale:

Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n (nombre de répétitions) et p (probabilité de succès) si :

$$P(X = k) = nkp^k(1 - p)^{n-k}, \quad k \in \{0, 1, \ldots, n\}$$

Où $nk = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ est le coefficient binomial.

Espérance et Variance

- **Espérance** : $E(X) = np$
- **Variance** : $Var(X) = np(1 - p)$

Exemples d'application

- **Lancer une pièce** n fois : compter le nombre de faces ($p = 0,5$).
- **Étude d'un test médical** : calculer le nombre de patients guéris parmi n participants ($p =$ probabilité de guérison).

2.4 Loi hypergéometrique:

La loi hypergéométrique modélise une situation où l'on effectue un **tirage sans remise** dans une population de taille N, contenant deux types d'éléments :

- K éléments d'un type (succès),
- $N - K$ éléments d'un autre type (échecs).

Elle permet de calculer la probabilité d'obtenir exactement k succès lors d'un tirage de n éléments.

Variable hypergéométrique:

Une variable aléatoire X suit une loi hypergéométrique avec les paramètres N, K, et n si :

$$P(X = k) = \frac{KkN - Kn - k}{Nn}, \quad \max(0, n - (N - K)) \leq k \leq \min(n, K)$$

Où $ab = \frac{a!}{b!(a-b)!}$ est le coefficient binomial.

Espérance et Variance:

- **Espérance** : $E(X) = n \cdot \frac{K}{N}$
- **Variance** : $Var(X) = n \cdot \frac{K}{N} \cdot \frac{N-K}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1}$

Exemples d'application

- **Tirage de cartes** : Probabilité d'avoir k cartes rouges en tirant n cartes d'un paquet de $N = 52$.
- **Qualité en production** : Vérification de n produits pour estimer le nombre k de défectueux parmi K produits défectueux dans un lot de taille N.

2.5 Loi Uniforme:

- X suit la loi uniforme sur $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ si et seulement si X prend les valeurs $x_1, \dots, x_n$ avec les probabilités :

$$P(X = x_i) = \frac{1}{n}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

- Espérance :

$$E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

- Variance :

$$Var(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2$$

2.6 Loi Géométrique:

La loi géométrique modélise une situation où l'on effectue une série d'essais identiques et indépendants, chaque essai ayant deux issues possibles : succès ou échec. La variable aléatoire X représente le **nombre d'essais nécessaires** pour obtenir le premier succès.

2.6.1 Propriété principale

- Chaque essai a une probabilité constante p de succès.
- La probabilité que le premier succès se produise au k-ième essai est donnée par :

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p, \quad k \geq 1.$$

2.6.2 Espérance et Variance

- **Espérance** : $E(X) = \frac{1}{p}$
- **Variance** : $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

2.6.3 Exemples d'application

- Compter combien de lancers de dé sont nécessaires pour obtenir un 6 ($p = \frac{1}{6}$).
- Observer combien de jours il faut attendre avant qu'un événement rare se produise (p = probabilité quotidienne de l'événement).

2.7 Loi de Poisson

La loi de Poisson est utilisée pour modéliser le **nombre d'événements rares** ou aléatoires qui se produisent dans un intervalle donné (temps, espace, etc.).

Définition:
Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson si elle représente le **nombre d'événements survenant dans un intervalle**, avec une probabilité donnée par :

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Propriétés principales:
Le paramètre λ représente à la fois l'**espérance** et la **variance** :

$$E(X) = \lambda, \quad Var(X) = \lambda.$$

3 Élements d'analyse combinatoire

Le dénombrement est une branche des mathématiques permettant de **compter les éléments** d'un ensemble fini, souvent en lien avec les probabilités. Voici les notions principales :

3.1 Règles

1. **Principe additif** : Si une tâche peut être réalisée de n_1 façons ou n_2 façons (mutuellement exclusives), alors elle peut être réalisée de $n_1 + n_2$ façons.
   - Exemple : Choisir une carte rouge (26 possibilités) ou noire (26 possibilités) dans un jeu standard : $26 + 26 = 52$.
2. **Principe multiplicatif** : Si une tâche est composée de plusieurs étapes indépendantes, elle peut être réalisée de $n_1 \times n_2$ façons.
   - Exemple : Choisir une carte et lancer un dé : $52 \times 6 = 312$.

3.2 Arrangements

Un arrangement est une sélection **ordonnée** de p éléments parmi n.

- **Sans répétition** :
$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}.$$
Exemple : Placer 3 personnes parmi 10 en ligne ($A_{10}^3 = 720$).

- **Avec répétition** :
$$A_n^p = n^p.$$
Exemple : Composer un mot de 3 lettres avec l'alphabet ($26^3 = 17576$).

3.3 Combinaisons

Une combinaison est une sélection **non ordonnée** de p éléments parmi n.

- Formule :
$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$
Exemple : Choisir 5 cartes dans un jeu de 52 (C_{52}^5).

- **Avec répétition** : On utilise la même formule en tenant compte des éléments réutilisables :
$$C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}.$$

3.4 Permutations

Une permutation est un arrangement de **tous les éléments** d'un ensemble.

- Formule :
$$P_n = n!.$$
Exemple : Ordonner 5 personnes ($5! = 120$).

4 Indépendance des Événements

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité.

- Deux événements A et B sont dits indépendants si :
$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

- Soit $(A_i)_{i \in I}$, avec $I \subseteq N$ (fini ou non). On dit que les A_i sont indépendants dans leur ensemble (ou mutuellement indépendants) si, pour tout $J \subseteq I$, on a :
$$P\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} P(A_i)$$

Remarque : Ne pas surtout confondre ”indépendants” et ”incompatibles” pour des événements.

- A et B sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.
- A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
- La seule liaison : L'incompatibilité de deux événements de probabilité non nulle implique leur dépendance.