Synthèse Analyse 1

Logique Mathématique

Quantificateurs et Connecteurs Logiques

Notations	**Type**	**Définition**
$\forall x \in E$	Quantificateur Universel	Pour tout x dans E
$\exists x \in E$	Quantificateur Existentiel	Il existe au moins un x dans E
$\exists! x \in E$	Quantificateur Unique	Il existe un unique x dans E
$\neg P$ ou **non** P	Négation	L'assertion est vraie si P est fausse.
$P \cap Q$	Conjonction	Vraie seulement si P et Q sont toutes deux vraies.
$P \cup Q$	Disjonction	Vraie si au moins une des assertions P ou Q est vraie.
$P \implies Q$	Implication	Faux seulement si P est vrai et Q est faux. Vrai sinon
$P \iff Q$	Équivalence	Vraie si P et Q sont toutes deux vraies ou toutes deux fausses.

Quantificateurs	**Négation**	**Stratégie**
$\forall x, p(x)$	$\exists x, \overline{p(x)}$	Trouver un contre-exemple
$\exists x, p(x)$	$\forall x, \overline{p(x)}$	Tout x contredit $p(x)$

Connecteurs	**Négation**	**Stratégie**
$p(x)$ et $q(x)$	$\overline{p(x)}$ ou $\overline{q(x)}$	Contredire l'un des prédicats
$p(x)$ ou $q(x)$	$\overline{p(x)}$ et $\overline{q(x)}$	Contredire les deux prédicats
$p(x) \implies q(x)$	$p(x)$ et $\overline{q(x)}$	Trouver un élément vérifiant $p(x)$ et contredisant $q(x)$

Bornes Inf/Sup

Définitions

- $a \in E$ **maximum** (resp. minimum) de A si :

$$a \in A \quad \text{et} \quad \forall b \in A, a \geq b \quad (\text{resp. } a \leq b).$$

- M **majorant** (resp. minorant) de A si $\forall b \in A, M \geq b \quad$ (resp. $m \leq b$).
- Une partie A est **bornée** si elle est majorée et minorée.
- **Borne supérieure** : $x = \sup A$ ssi :

$$\begin{cases} \forall a \in A,\ a \leq x, & \text{(x est un majorant)} \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A \text{ tel que } a > x - \varepsilon. & \text{(et c'est le plus petit)} \end{cases}$$

- **Borne inférieure** : $x = \inf A$ ssi :

$$\begin{cases} \forall a \in A,\ a \geq x, & \text{(x est un minorant)} \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A \text{ tel que } a < x + \varepsilon. & \text{(et c'est le plus grand)} \end{cases}$$

Suites Numériques

- Suite numérique = ensemble de nombres indexé par les entiers, notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Peut être définie :
  - explicitement : $u_n = f(n)$,
  - Par itération : $u_{n+1} = f(u_n)$ avec u_0

Monotonie

- (u_n) **croissante** si $u_{n+1} \geq u_n$ **- décroissante** si $u_{n+1} \leq u_n$ (strictement : inégalités strictes)
- Etudier $u_{n+1} - u_n$ et comparer à 0 ou si u_n positive : étudier $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et comparer à 1.

Bornes

- (u_n) **majorée** si $\exists M \in \mathbb{R}, \quad u_n \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- **minorée** si $\exists m \in \mathbb{R}, \quad u_n \geq m, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- **bornée** si majorée et minorée.

- Les propriétés de bornes s'appliquent à partir d'un certain rang. (on peut étudier pour n grand)

Récurrence

Pour une propriété P_n :
Initialisation : On montre que P_0 est vraie.
Hérédité : On se place à un certain n tel que P_n soit vraie. On montre que $P_n \implies P_{n+1}$
Conclusion : P_n est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

Suites Fondamentales

Suite Arithmétique

- Formule explicite (raison r) : $u_n = u_0 + nr$
- Somme des $k+1$ premiers termes :

$$S_k = \frac{(k+1)(u_0 + u_k)}{2}.$$

Suite Géométrique

- Formule explicite (raison q) : $u_n = u_0 q^n$
- Somme des $k+1$ premiers termes :

$$S_k = u_0 \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}.$$

Suite Arithmético-Géométrique

Définie par $u_{n+1} = au_n + b$. - Si $a \neq 1$, le terme général peut être calculé en se ramenant à une suite géométrique.

Application à la finance

En finance, , la valeur d'un capital évolue dans le temps, ce qui nécessite une compréhension des notions de **capitalisation** et **actualisation** pour effectuer des placements ou des emprunts.

Un taux d'intérêt, souvent exprimé annuellement, peut être converti pour d'autres périodes. Par exemple, un taux annuel de 5% correspond à un taux mensuel calculé par :

$$\left(1 + \frac{5}{100}\right) = \left(1 + \frac{t}{100}\right)^{12},$$

où t est le taux mensuel. En résolvant, on trouve :

$$t = 0.407\%.$$

Vocabulaire

- **Valeur actuelle** : capital initial placé.
- **Valeur future** : capital obtenu après n périodes.
- **Capitalisation** : calcul de la valeur future.
- **Actualisation** : calcul de la valeur actuelle.

Placements à intérêts simples

Un capital C produit des intérêts constants $t\%$ à chaque période.

Le capital C_n au bout de n périodes est donné par :

$$C_n = C + C \cdot \frac{t}{100} \cdot n.$$

Placements à intérêts composés

Les intérêts sont réinvestis, générant des intérêts supplémentaires.

Le capital K_n après n périodes est donné par :

$$K_n = K\left(1 + \frac{t}{100}\right)^n.$$

Valeur acquise d'une suite d'annuités

En plaçant des annuités constantes A chaque période avec un taux composé $t\%$, la valeur acquise après n périodes est :

$$V_n = A\left[1 + \left(1 + \frac{t}{100}\right) + \cdots + \left(1 + \frac{t}{100}\right)^n\right].$$

C'est une somme géométrique :

$$V_n = A \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{t}{100}\right)^{n+1}}{1 - \left(1 + \frac{t}{100}\right)} = A \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{t}{100}\right)^{n+1}}{\frac{t}{100}}.$$

Calcul de la mensualité d'un crédit

La mensualité constante m pour rembourser un capital C emprunté sur n périodes avec un taux t (décimal) est donnée par :

$$m = C \cdot \frac{t}{1 - (1 + t)^{-n}}.$$

Problème de dépréciation

Considérons un produit initialement en quantité Q_i qui se déprécie de $p\%$ par période, tout en ajoutant une production constante Q chaque période. La quantité finale après n périodes est :

$$Q_i \cdot (1-p)^n + Q \cdot \frac{1-(1-p)^n}{p}.$$

En fixant une quantité cible, cette équation permet de déterminer Q.

Limites de suites

Déf : Partie entière $E(\cdot)$ donne pour chaque réel le plus grand entier inférieur ou le plus petit entier supérieur.

Limite d'une Suite Numérique

(u_n) admet une limite $l \in \mathbb{R}$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

(u_n) **convergente** si admet une limite réelle l, (sinon : **divergente**).

$$(u_n) \text{ admet une limite } l \in \mathbb{R} \implies l \text{ est unique.}$$

- Une suite (u_n) tend vers $+\infty$ si :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq M.$$

Suites de Référence

- $(-1)^n$: alternée $\implies$ pas de limite.
- Suites arithmétiques ayant pour représentation graphique des points alignés : divergentes.

- Suite géométrique q^n :

$$|q| < 1 \implies \lim_{n\to\infty} q^n = 0,$$
$$q = 1 \implies \lim_{n\to\infty} q^n = 1,$$
$$q > 1 \implies \lim_{n\to\infty} q^n = +\infty,$$
$$q \leq -1 \implies q^n \text{ n'admet pas de limite.}$$

Limites de référence : - Constante : $\lim_{n\to\infty} c = c$, pour $c \in \mathbb{R}$; - Monômes : $\lim_{n\to\infty} n^a = +\infty$ pour $a > 0$, et $\lim_{n\to\infty} n^{1/2} = +\infty$; - Par inversion, si $a < 0$, $\lim_{n\to\infty} n^a = 0$.

Opérations sur les Limites

NB : "FI" = Forme indéterminée

1. $(u_n) \to l$ et $(v_n) \to l'$, alors $(u_n + v_n) \to l + l'$
2. Si $(u_n) \to l$ et $(v_n) \to +\infty$, alors $(u_n + v_n) \to +\infty$. Si $(u_n) \to +\infty$ et $(v_n) \to -\infty$, on obtient une FI
3. Si $(u_n) \to l$ et $(v_n) \to l'$, alors $(u_n \times v_n) \to l \times l'$
4. Si $(u_n) \to l \neq 0$ ou $(u_n) \to \pm\infty$, et $(v_n) \to \pm\infty$, alors $(u_n \times v_n) \to \pm\infty$, selon le signe du produit. Une FI apparaît pour $0 \times \pm\infty$

Limite de l'inverse
Si $(u_n) \to l \neq 0$, alors $\left(\frac{1}{u_n}\right) \to \frac{1}{l}$

Théorème des gendarmes
Soient (u_n) et (w_n) deux suites convergeant vers $l \in \mathbb{R}$. Si (v_n) est telle que $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang, alors (v_n) converge vers l, c'est-à-dire $\lim v_n = l$.

Inégalités de suites

1. Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim u_n = +\infty$, alors $\lim v_n = +\infty$.
2. Si $u_n \geq v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim u_n = -\infty$, alors $\lim v_n = -\infty$.

Suites croissantes et décroissantes

1. Si (u_n) est croissante et majorée, alors (u_n) est convergente et $\lim u_n = \sup\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$.
2. Si (u_n) est décroissante et minorée, alors (u_n) est convergente et $\lim u_n = \inf\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Suites adjacentes
(u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si :

$$-u_n \leq v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (u_n) \text{ croissante }, \quad (v_n) \text{ décroissante }, \quad \lim_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0.$$

Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors elles convergent toutes les deux vers $l \in \mathbb{R}$, avec $u_n \leq l \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Suites définies par une relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite définie par récurrence, avec u_0 donné et $u_{n+1} = f(u_n)$. Si (u_n) converge vers une limite l, et si f est continue, alors :

$$f(l) = l,$$

Point fixe : $x \in I$ *point fixe* de f si $f(x) = x$.

Convergence vers un Point Fixe

Pour une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, les conditions suivantes permettent de garantir que $\lim u_n = l$:

- Si $f(I) \subset I$,
- f possède un unique point fixe l sur I,
- $u_0 \in I$ et (u_n) est croissante majorée ou décroissante minorée.

Fonction contractante
Soit I un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$ et $f : I \to I$. La fonction f est *contractante* sur I s'il existe une constante $k \in [0, 1[$ telle que :

$$\forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Point fixe d'une fonction contractante
Si $f : I \to I$ est une application contractante, alors :

- f est continue,
- f possède un unique point fixe $l \in I$,
- pour tout $u_0 \in I$, la suite (u_n) définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l.