Cours d'Algèbre Linéaire :
Espaces Vectoriels, Sous-Espaces Vectoriels et Applications Linéaires

Introduction

L'algèbre linéaire est une branche des mathématiques fondamentales, essentielle dans plusieurs domaines, notamment la physique, l'informatique, et l'économie. Ce cours aborde trois concepts clés : les espaces vectoriels, les sous-espaces vectoriels et les applications linéaires.

1 Espaces Vectoriels

Définition

Un **espace vectoriel** est un ensemble V muni de deux opérations :

- **Addition** $+ : V \times V \to V$,
- **Multiplication par un scalaire** $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$,

où $\mathbb{K}$ est un corps (souvent $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Ces opérations doivent satisfaire les 8 axiomes suivants :

1. **Associativité de l'addition** : $u + (v + w) = (u + v) + w$,
2. **Commutativité de l'addition** : $u + v = v + u$,
3. **Élément neutre pour l'addition** : Il existe $0 \in V$ tel que $u + 0 = u$,
4. **Inverse pour l'addition** : Pour tout $u \in V$, il existe $-u \in V$ tel que $u+(-u) = 0$,
5. **Compatibilité avec la multiplication scalaire** : $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$,
6. **Distributivité sur les scalaires** : $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$,
7. **Associativité de la multiplication scalaire** : $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha\beta) \cdot u$,
8. **Multiplication par l'identité** : $1 \cdot u = u$.

Exemples

- $\mathbb{R}^n$ avec l'addition et la multiplication classique.
- L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n, $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$.
- L'espace des fonctions continues $C([a,b])$.

2 Sous-Espaces Vectoriels

Définition

Un **sous-espace vectoriel** W d'un espace vectoriel V est un sous-ensemble de V qui :

1. Contient l'élément neutre 0,
2. Est fermé pour l'addition : Si $u, v \in W$, alors $u + v \in W$,
3. Est fermé pour la multiplication par un scalaire : Si $\alpha \in \mathbb{K}$ et $u \in W$, alors $\alpha \cdot u \in W$.

Exemples

- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$.
- L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène $A\mathbf{x} = 0$.

3 Applications Linéaires

Définition

Une **application linéaire** $f : V \to W$ entre deux espaces vectoriels V et W est une fonction qui vérifie :

1. $f(u + v) = f(u) + f(v)$ pour tous $u, v \in V$,
2. $f(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot f(u)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et $u \in V$.

Exemples

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, définie par $f(x, y) = (2x, 3y)$.
- Dérivation $D : C^1([a,b]) \to C([a,b])$, $D(f) = f'$.

Représentation par des Matrices

Toute application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ peut être représentée par une matrice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, telle que pour tout vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.$$

Exemple

Considérons l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x, y) = (x + y, 2x - y, x).$$

Sa matrice associée dans les bases canoniques est :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Noyau et Image

- **Noyau** : $\ker(f) = \{\mathbf{v} \in V \mid f(\mathbf{v}) = 0\}$, sous-espace de V.
- **Image** : $\text{Im}(f) = \{f(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V\}$, sous-espace de W.

Théorème Fondamental

Pour toute application linéaire $f : V \to W$,

$$\dim(V) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)).$$

Exercices

1. Démontrer que l'ensemble $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$.
2. Trouver le noyau et l'image de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x + y, y + z)$.
3. Représenter l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, donnée par $f(x, y) = (x - y, x + y, 2x)$, par une matrice.
4. Montrer que l'ensemble des matrices symétriques $S_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace de $M_n(\mathbb{R})$.

Conclusion

Ce cours a introduit les bases des espaces vectoriels, leurs sous-espaces et les applications linéaires, notamment leur représentation matricielle. Ces concepts sont essentiels pour des sujets avancés comme les transformations linéaires, les valeurs propres et les applications pratiques en sciences.