Exercices

Partie 1 : Espaces Vectoriels

1. **Vérification des axiomes** : Montrer que l'ensemble $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, muni des opérations usuelles d'addition et de multiplication par un scalaire, est un espace vectoriel.

2. **Espaces vectoriels de fonctions** : Soit $V = C([0, 1])$, l'ensemble des fonctions continues définies sur $[0, 1]$. Vérifiez que V est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Justifiez.

3. **Sous-ensemble non vectoriel** : L'ensemble $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ est-il un espace vectoriel ? Justifiez.

Partie 2 : Sous-Espaces Vectoriels

1. **Vérification d'un sous-espace** : Démontrer que $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. **Intersection de sous-espaces** : Soient $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$ et $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + z = 0\}$. Déterminez si $W_1 \cap W_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

3. **Génération d'un sous-espace** : Trouvez la dimension et une base du sous-espace W de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 4, 2)$ et $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)$.

Partie 3 : Applications Linéaires

1. **Définition et propriétés** : Vérifiez si les fonctions suivantes sont des applications linéaires. Justifiez :

   - $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + y, 2x - y)$,
   - $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = (x^2, y^2)$.

2. **Noyau et image** : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, définie par $f(x, y, z) = (x + y, y + z)$. Trouvez une base du noyau $\ker(f)$ et de l'image $\mathrm{Im}(f)$.

3. **Représentation matricielle** : Représentez l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (x - y, 2x + y, 3y)$ sous forme matricielle.

Partie 4 : Théorème Fondamental de l'Algèbre Linéaire

1. **Calcul dimensionnel** : Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire telle que $\dim(\ker(f)) = 2$. Quelle est la dimension de l'image $\mathrm{Im}(f)$?

2. **Exemple avec des matrices** : Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. Trouvez :

   - La dimension du noyau de A,
   - La dimension de l'image de A,
   - Une base pour chacun.

Partie 5 : Applications à la Géométrie

1. **Transformation géométrique** : L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est définie par $f(x, y) = (2x, 3y)$. Décrivez l'effet de cette transformation sur le plan.

2. **Projection** : Trouvez la matrice de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ qui projette orthogonalement tout vecteur sur le plan $x + y + z = 0$.