CC1 Algèbre linéaire 2023

24/10/2023

Calculatrices, smartphones, montres connectées, écouteurs interdits.

Il ne sera pas donné de points pour des résultats énoncés sans justifications.

Exercice 1
Vrai ou faux? Justifiez vos réponses!
Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels?

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, 2x^2+3y^2+z^2=7\} \\ E_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, 2x+z=0\} \\ E_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \sin(x)=0\} \end{aligned}$$

Exercice 2
On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On suppose $n \geq 1$.

1. L'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_n[X] &\to \mathbb{R} \\ P &\mapsto \int_0^1 P(x)dx \end{aligned}$$

est-elle linéaire?

2. L'application f est-elle injective, surjective, bijective?

3. L'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_n[X] &\to \mathbb{R} \\ P &\mapsto \int_0^1 P^2(x)dx \end{aligned}$$

est-elle linéaire? injective, surjective, bijective?

Scanné avec CamScanner

CC2 Algèbre linéaire 2023

28/11/2023

Calculatrices, smartphones, montres connectées, écouteurs interdits.

Il ne sera pas donné de points pour des résultats énoncés sans justifications.

Exercice 1

nb: les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

Soient a, b et c trois réels. On supposera $a \neq 0$. Soit E un espace vectoriel. Pour une application linéaire f de E dans E, on notera $f^2 = f \circ f$. On note I l'application identité de E dans E et O l'application nulle. On considère l'équation:

I identité f $E \to E$

$a \neq 0$
E ev

$$af^2 + bf + cI = O. \qquad (1)$$

$f^2 = f \circ f$

1. On suppose dans cette question que $b^2 - 4ac \geq 0$. Montrer qu'il existe au moins une solution de (1).

2. On suppose dans cette question que $c \neq 0$. Montrer que toute solution de (1) est bijective.

3. On suppose dans cette question que $b = c = 0$. Montrer que f est solution de (1) si et seulement si $Im(f) \subset Ker(f)$.

Exercice 2

On définit l'applicaton de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par:

$$f(x, y) = (2x + y, x + 7y).$$

1. Montrer que f est linéaire.

2. Expliciter $Ker(f)$ et $Im(f)$.

3. Déterminer l'inverse de f.

Scanné avec CamScanner

UGA
Université
Grenoble Alpes

- Année 2023/24, L1 MIASHS
- Examen final: Algèbre linéaire
- Enseignant responsable: Jacques Istas
- Date: 20/12/2023
- Durée: 1h30
- Matériel autorisé: une feuille A4

SUJET

Exercice

Déterminer une base de $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y+2z=0\}$.

Problème

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$:

$$P(x) \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Si P est non-nul, on appelle valuation de P le plus petit entier k tel que $a_k \neq 0$.

On définit la famille $\mathcal{F}$ constituée des polynômes P_k définis par:

$$P_k(x) \quad = \quad x^k(1-x)^{n-k}, \; k = 0, 1, \ldots, n$$

Scanné avec CamScanner

1. Quelle est la valuation de P_k?

2. Montrer que $\mathcal{F}$ est une famille libre.

3. En déduire que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. On définit l'application linéaire f de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ par:

$$f(X^k) = P_k, \ k = 0, 1, \ldots, n.$$

   Quelle est l'image $f(Q)$ d'un polynôme Q quelconque de $\mathbb{R}_n[X]$?

5. L'application f est-elle inversible?

Scanné avec CamScanner

18/09/23

TD n° 1 — Énoncé

Algèbre

Exo 1 : Négation de $0 \leq x < 2$

$x \not> 0$ ou $x \geq 2$ (car on peut décomposer l'énoncé comme : $0 \leq x$ et $x < 2$)

Exo 2 : Écrire à l'aide de quantificateurs les phrases suivantes, puis les nier.

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

a) f est l'application nulle
b) $f(x) = 0$ a une solution
c) $f(x) = 0$ a exactement une solution

2) $(u_n)_n \in \mathbb{N}$ Suite

a) $(u_n)_n \in \mathbb{N}$ est bornée
b) ——— croissante
c) ——— majorée

Exo 3 : Écrire à l'aide de quantificateurs les phrases suivantes puis les nier.

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

a) f est l'identité
b) f a un point fixe

Exo 4 : Les phrases suivantes sont-elles équivalentes ?

1) $\forall x \in \mathbb{R}\ (f(x) = 0$ et $g(x) = 0)$

et $(\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = 0)$ et $(\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 0)$

2) $\forall x \in \mathbb{R}\ (f(x) = 0$ ou $g(x) = 0)$

et $(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 0)$

3) Donner un exemple de f et g toutes deux non-nulles dont le produit $f \cdot g$ est nul

Scanné avec CamScanner

18/09/23

TD n°1 – Résolution
Algèbre

Exo 1 : $x < 0$ ou $x \geq 2$

Exo 2 : 1) a) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$

b) $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$

c) $\exists ! x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$

NÉGATIONS : a) $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$

b) $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \neq 0$

c) $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0)$ ou $(\exists (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) = 0)$

2) a) $\exists m \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$

$m \leq u_n$ et $u_n \leq M$

b) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$

c) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$

Négations : a) $\forall m \in \mathbb{R}, \forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N},\ u_n < m$ ou $u_n > M$

b) $\exists n \in \mathbb{N}, u_n > u_{n+1}$

c) $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n > M$

Exo 3 : a) $\forall x \in \mathbb{R}^2, f(x) = x$

b) $\exists x \in \mathbb{R}^2, f(x) = x$

NÉGATIONS : a) $\exists x \in \mathbb{R}^2, f(x) \neq x$

b) $\forall x \in \mathbb{R}^2, f(x) \neq x$

Exo 4 : 1) oui

2) oui

3) Ex : $f : f(x) = 0$ si $x \in]-\infty ; 0]$
$f(x) = 1$ sinon
$g : g(x) = 0$ si $x \in]0 ; +\infty[$
1 sinon

Scanné avec CamScanner

25/09/23

TD n°2 (Énoncé)

Algèbre

Exo 1 : Mq $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pas ds les copies !! (idem $\forall a$)

On cherche à prouver par récurrence la propriété ci-dessus

Initialisation : Pour $n = 1$ on a : $n^2 = 1$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1(2 \times 3)}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Donc P_1 est vraie

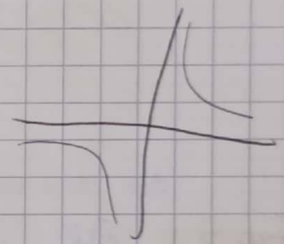
Hérédité : Prenons $n+1$: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$

$$\frac{n(n+1)(2n+n)}{6} + \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$= '' + \frac{(n^2+2n+n+2)(2n+3)}{6}$$

$$= \frac{(n^2+3n+2)(2n+3)}{6} = \frac{2n^3+6n^2+4n+3n^2+6n+6}{6}$$

Exo 2 : Donner des exemples d'applications de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$



(1) - injective non surjective

puis - surjective non injective

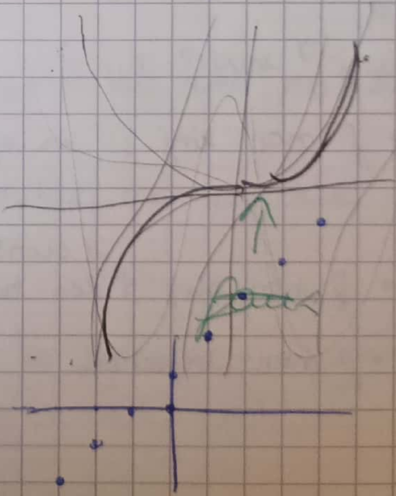
Rappel Injective : $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

surjective : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in$ faux !!

(1) $y = \frac{1}{x}$ Non car pas déf en 0

(2) $y = x^2$, x^2+3, $\sin x$

faux : elle est injective !!



Exo 3 : $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad \mathbb{N} = 0, 1, 2, 3 \ldots$

$n \to n+1$

$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $\quad \to \mathbb{Z} = -3, -2, -1, 0, 1 \ldots$

$n \to n+1$

f et g injectives : 1 seul antécédent de $n+1$: c'est n

f non surjective : 0 pas | couvert / atteint

g surjective

donc f non bijective

g bijective

Exo 4 : $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}^* \right\}$ (Ensemble des rationnels)

$f : [0,1] \to [0,1]$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculer $f \circ f(x)$

$\frac{p}{q}$ avec $q > p$

$f \circ f(x)$?

x si $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$
$1-x$ sinon

$(x) \longrightarrow f(x) \longrightarrow f \circ f(x)$

$[0,1)$ $\quad$ $[0,1]$

- si $f(x) \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$
  $f \circ f(x) = x$
- Si $f(x) \notin [0,1] \cap \mathbb{Q}$
  $f \circ f(x) = 1 - x$

Si $x \in \mathbb{Q}$ alors
$1 - x \in \mathbb{Q}$

~~$x = \frac{p}{q}$ supposons [illegible]~~

$$1 - x = \frac{p}{q}$$

Exo 5 : $f : [1 ; +\infty[\to [0, +\infty[$

$f(x) = x^2 - 1$

f inj ? surj ? bij ?

$f(x) \geq 0$ avec ensemble de départ $f : [1 ; +\infty[$

- f inj : en effet ; $f(x)$ strictement croissante

$\nearrow$ croiss $+ f(1) = 0$

- f surj : les réels entre -1 et $+\infty$ donc entre $[0, +\infty[$ ds ensemble arrivée
- f bijective

$(x_1 \in E)\ (x_2 \in E)$

$x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1$

$\Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow |x_1| = |x_2|$ avec $E = [1 ; +\infty[$

donc $x_1 = x_2 \Rightarrow f$ injective

Scanné avec CamScanner

25/09/23

TD n°2 Algèbre (Correction)

Exo 1 :

Initialisation : $n = 1 \quad 1 = \frac{1 \times 2 \times 3}{6}$

Hérédité : Je suppose vrai à l'étape n

en $n+1$: $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$(n+1) \left| \frac{n(2n+1) + 6(n+1)}{\cancel{6}} \stackrel{?}{=} \frac{(n+2)(2n+3)}{\cancel{6}} \right.$$

on le met ici en facteur

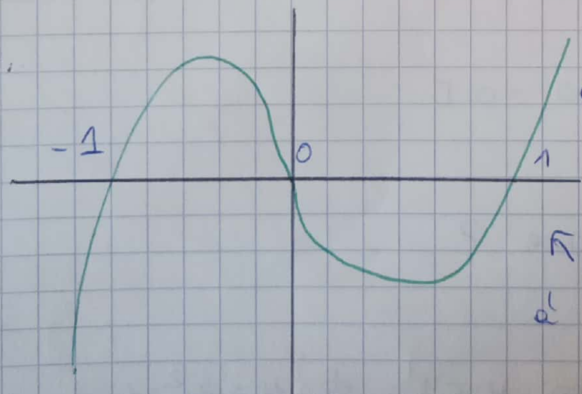
$$2n^2 + \cancel{3}7n + 6 = 2n^2 + 4n + 3n + 6$$

Exo 2 :

Non surjective ⇒ ds l'ensemble d'arrivée, ∀ le monde est atteint.

inj ~~surj~~ : $x \to e^x$
- si $e^x = e^y \Rightarrow x = y$ inj
- $e^x > 0$ non surj : les négatifs ne sont pas atteints !

surje, non inj :



← fct surjective non injective

↖ ici : on cherche la fct qui peut ressembler à ça : ex : $x(x-1)(x+1)$

Exo 3 :

f : inj, non surj → non bij

car 0 non atteint !

g : inj, surj → tous les élément de $\mathbb{Z}$ sont atteints ! → bijective

Scanné avec CamScanner

Exo 4 : Il y a bcp + d'irrationnels que de rationnels de $[0,1]$

$-x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ $\quad f \circ f(x) = f(x) = x$

$-x \notin [0,1] \cap \mathbb{Q}$ $\quad f(x) = 1 - x$

$\Rightarrow 1-x \in [0,1]$

$f(1-x) = 1-(1-x) = 1 - 1 + x = x$

* est-il possible que $1-x \in \mathbb{Q}$? Si $x \notin \mathbb{Q}$

Par l'absurde. $1 - x = \frac{p}{q} \Leftrightarrow x = 1 - \frac{p}{q} = \frac{q-p}{q}$

contradiction ! car $\frac{q-p}{q}$ est un rationnel !

$x \in [0,1]$

$x \notin [0,1] \cap \mathbb{Q} \Rightarrow (1-x) \notin [0,1] \cap \mathbb{Q}$

Question supplémentaire : cette fct est-elle continue ?

$f(0) = 0$
$\varepsilon \to 0$
$f(\varepsilon)$

$\varepsilon \to 0$ $\begin{cases} \varepsilon \in \mathbb{Q} & f(\varepsilon) = \varepsilon \to 0 \\ \varepsilon \notin \mathbb{Q} & f(\varepsilon) = 1 - \varepsilon \to 1 \end{cases}$

$-x \in \mathbb{Q} : f(x+\varepsilon) \begin{cases} \varepsilon \in \mathbb{Q} & f(x+\varepsilon) \to x + \varepsilon \to x \\ \varepsilon \notin \mathbb{Q} & f(x+\varepsilon) \to 1 - x - \varepsilon \to 1 - x \end{cases}$

Soit : $x = \frac{1}{2}$ continue

$x \neq \frac{1}{2}$ pas continue

finir : cas x irrationnels

Exo 5 : $f : [1 ; +\infty[\to [0, +\infty[$

$f(x) = x^2 - 1$

f injective, surjective, bijective ?

Regardons l'injectivité :

Prenons $y \in [0, +\infty[$. et $\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = x'^2 - 1 \end{cases}$

avec $x \in [1, +\infty[$
$x' \in [1, +\infty[$ $\quad x \neq x'$

On a donc : $x'^2 - 1 = x^2 - 1$ Soit $x'^2 = x^2$

or $x \in [1, +\infty[$ donc $x = x' \Rightarrow f$ est injective

Scanné avec CamScanner

TD Algèbre n°2 Correction

Regardons la surjectivité

Soit $y \in [0, +\infty[$

Existe-t-il un $x \in [1, +\infty[$ tel que $y = x^2 - 1$

$y + 1 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y+1}$

→ f est surjective

→ f est injective et surjective, elle est donc bijective

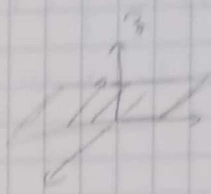
Scanné avec CamScanner

02/10/23 **TD Algèbre n°3** Énoncé

Exo 1 :

(voir meilleure rédaction sur corrigé)

E : $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y = 0\}$



l'ensemble considéré est-il un ev ?

L'élément neutre (0_E) ∈ à l'ensemble

Multiplication externe : $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda(\underset{u}{u}) = \lambda(x_1, y_1, z_1) = \lambda(\underset{v}{x_1 + y_1}) = \lambda \times 0 = 0$

Addition interne Soit $(x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$, soit $(x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$

$u + v = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)$

$= x_1 + y_1 + x_2 + y = 0$ l'addition interne est vérifiée

Donc l'ensemble est un ev. (c'est un plan)

Exo 2 :

E : $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ z = 1\}$

$0_E = (0, 0, 0)$ n'appartient pas à l'ensemble considéré, donc

E n'est pas un espace vectoriel

Exo 3 :

ev ? (on les appelle E) Voir corrigé

(1) $F : \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ ✓

(2) – $\{f \in F,\ f(0) = 1\}$

(3) – $\{f \in F,\ f(1) = 0\}$

(4) – $\{f \in F,\ f \text{ croissante}\}$

(5) – $\{f \in F,\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0\}$

---

(1) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ ~~0_E n'appartient pas à toutes les fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$~~

~~contre exemple :~~ Soit $x \in \mathbb{R}$ ~~$f(x) = 3$~~ $0 \in \mathbb{R}$

~~→ pas un ev~~ λu $u + v$ ok

↑ multiplier une fonction par λ, f appartient tj à $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

(2) : $\{f \in F,\ f(0) = 1\}$

(0) ∉ l'ensemble donc pas un ev)

en effet 0_F $\forall x\ f(x) = 0$, or ici $f = 1$

Scanné avec CamScanner

(3)

~~$f(0_E)$ pas forcément nul donc pas un ev~~

~~De plus~~ . $f(1)=0$ donc $\exists$ un élément neutre : $f(1)$.

(4) $\{f \in F, f$ croissante$\}$ $0_E \in E$

$u+v$, avec $u \in E$, $v \in E$

oui $\rightarrow$ ev

f croissante : $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

$\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 1$

$\lambda x_1 \leq \lambda x_2 \Rightarrow \lambda f(x_1) \leq \lambda f(x_2)$

Exo 4 :

(1) $\mathcal{U} = \{(u_n)_n \in \mathbb{N})$

(Ensemble des suites réelles)

(2) $\mathcal{U} = \{(u_n) n \in \mathbb{N}$ tq $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0\}$

(1) $\exists U_n, \forall n \in \mathbb{N}, U_n = 0$ $\rightarrow$ Élément neutre ok

Soit u_n, $u_{n'}$ deux suites réelles

Alors $u_n + u_{n'} \in \mathbb{R}$

et $\lambda u_n \in \mathbb{R}$ $\rightarrow$ c'est un **ev**

(2) $\exists u_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ (ça aurait été faux si converge vers 1 (ou autre $k \neq 0$) en effet : deux suites qui convergent vers 1 $\rightarrow$ somme de ça converge vers 2)

Soit u_n : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ et v_n : $\lim\limits_{n \to +\infty} = 0$

$\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n + v_n) = 0$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda u_n \in \mathbb{R}$ $\rightarrow$ c'est un ev

$\lambda \neq 1$

Scanné avec CamScanner

02/10/23

TD Algèbre n° 3

Exo 5

E = ensemble des polynomes de degré n

$x^3 - x^3 = 0$

l'ensemble des polynomes de degré fixé n n'est pas un ev.

E = ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n

Pôlynome nul est l'élément neutre

$0_E(0) = 0$

Addition de deux polynomes de degré inférieur ou égal à n
→ résultat : bien un polynome de " "
Multiplicatio par λ : aussi.

Notatio : $\underbrace{E \to \mathbb{R}_n[X]}_{\text{est un ev !!}}$ ensemble des polynômes réels ($\mathbb{R}$) de degré inf ou égal à n et à une seule variable [X]

Si polynomes complexes, 2 var :

$\mathbb{C}_{n,m}[X,Y]$

Exo 6 :

$\{ f : [a,b] \to \mathbb{R}$
qui vérifient $f(a) = f(b) + \int_a^b e^t f(t)dt \} = E$

$f, g \in E$

On a $f(a) = f(b) + \int_a^b e^t f(t)dt$

$g(a) = g(b) + \int_a^b e^t g(t)\, dt$

$(f+g)(a) = (f+g)(b) + \int_a^b e^t (f+g)(t)dt$

$\lambda f(a) = \lambda f(b) + \int_a^b e^t (\lambda f)(t)dt$

car on intègre entre 0 et 0

Élément neutre : $f(a) = 0$, $f(b) = 0$ $\quad \int_a^b e^t f(t)dt = 0$

Sym ? $-f(a) = -f(b) + \int_a^b e^t (-f(t))dt$

Scanné avec CamScanner

TD Algèbre n°3

Correction

Exo 1 : • $0_E \in E$

• – $\forall u, v \in E$

$u = (x, y, z) \quad x + y = 0$

$v = (x', y', z') \quad x' + y' = 0$

Question : $(u+v) \in E$? $u + v = x + y + x' + y' = 0$ $= x + x' + y + y'$

$= (x + x', y + y', z + z')$

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in E$

A t-on $\lambda . u \in E$? $= (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$

$\lambda(u) = \lambda(x, y, z) = \lambda x + \lambda y = \lambda \times 0 = 0$

Donc l'ensemble considéré est un ev. (Plan)

Exo 2 $(0,0,0) \notin E$ donc ce n'est pas un ev.

Exo 3 : L'élément neutre de F :

$\forall x \in \mathbb{R}, \; 0_F(x) = 0$

(Symétrique de $f = -f$)

$\left.\begin{array}{l} f \in F \\ \lambda \in \mathbb{R} \\ (\text{et } \lambda \neq 1) \end{array}\right) \Rightarrow \lambda . f \in F$

$f \in F, \; g \in F \Rightarrow f + g \in F$

L'ensemble des fonctions réelles est un ev !!

(2) $0_F \notin E$

avec λ : $f \in E \quad f(0) = 1$

$2023 \times f(0) = 2023$

$2023 \times f \notin E$

(3) $f \in E \quad f(1) = 0$

$\lambda \in \mathbb{R}, \; \lambda \neq 1$

$\lambda f \in E$

car $\lambda f(1) = 0$

$f, g \in E$

$(f + g)(1) = f(1) + g(1) = 0$

→ Donc E est un ev.

Scanné avec CamScanner

(4)

$\forall x \in \mathbb{R}, \; f(x) = x$

$f \in E$

$-f \notin E$

(5) c'est un ev pour $\lim\limits_{x \to +\infty} = 0$, ça n'aurait pas été juste si $\lim\limits_{x \to +\infty} = k$

en effet : $f(x) = 0$ existe, (et sa lim est 0)

f, g $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f \to 0 \quad \lim\limits_{x \to +\infty} g \to 0 \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f + g = 0$

idem λ

Scanné avec CamScanner

TD Algèbre n°4

du 09/10/23 (SEV)

Exo 1 : Quels sont les sev de $\mathbb{R}$?

Sev de $\mathbb{R}$ = tous les espaces tels que :

$$\begin{array}{ll} & \begin{cases} 0_E \in \mathbb{R} \\ \lambda u \in \mathbb{R} \\ u+v \in \mathbb{R} \end{cases} \\ u \in E & \\ u, v \in E & \end{array}$$

Correction : $\mathbb{R}, \{0\}$

- E sev de $\mathbb{R}$, $E \neq \{0\}$
$\rightarrow \exists x \in E, x \neq 0$

$\underbrace{\frac{1}{x}}_{\lambda} \times \underbrace{x}_{x} \in E \rightarrow 1 \in E$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \times 1 \in E$ donc $E = \mathbb{R}$

Exo 2 : $\mathbb{R}^n[X]$ $n \geq 1$ (pour retrouver les particulier des polynomes constants)

F : ensemble des polynomes pairs de $\mathbb{R}_n[X]$

G : " " impairs "

F et G sont-ils en somme directe ?

(rappel : pair : $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$
impair : $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$)

Somme directe : intersection nulle

$\begin{cases} F : \forall x \in \mathbb{R}^n[x]\ F(-x) = F(x) \\ G : \forall x \in \mathbb{R}^n[X],\ G(-x) = -G(x) \\ (\lambda = -1) \\ F + G = \text{Soit } u \in F, \text{ alors } F(-u) = F(u) \\ \text{Soit } v \in G \text{ alors } G(-u) = -G(v) \end{cases}$

vecteur nul
$\exists x \in (F \cap G)$
$F(-x) = -F(x) = F(x)$
$f(x) = 0_E$

$\lambda = -1$ $F(-u) + G(-u) =$
$\rightarrow F(\lambda u) + G(\lambda u) = \lambda F(u) + \lambda G(u) = \lambda G(u) - \lambda F(u)$

Correction ① Vérif que intersection réduite au vecteur nul

- Etudions $F \cap G$
$P \in F \cap G$: $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, P(-x) = P(x) \\ \forall x \in \mathbb{R}, P(-x) = -P(x) \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = -P(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = 0$ $\underset{(\text{Polynome nul})}{0_{\mathbb{R}_n[X]}}$

Donc $F \cap G = \{0\}$

Scanné avec CamScanner

<u>Brouillon</u> : $P \in \mathbb{R}_n[X]$ $\quad P \overset{?}{=} f + g \quad$ $f \in F$, $g \in G$

$P(x) = ax^2 + bx + c$

$= \underbrace{(ax^2 + c)}_{F} + \underbrace{bx}_{G}$

$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = \underbrace{bx^2 + d}_{F} + \underbrace{ax^3 + cx}_{G}$

$\exists k \in \mathbb{N}, \; P(x) = \left(\sum_{k=0}^{n/2} ax^{2k} + bx^{2k+1} \right.$

$\left. \sum_{k=0}^{n/2} ax^{2k} + \sum_{k=0}^{n/2} bx^{2k+1} \right)$ faux car $n/2$ pas forcément pair

<u>Rédaction</u> :

<u>Etudions $F+G$</u>.

Soit P un polynome quelconque de $\mathbb{R}_n[X]$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

* Soit I l'ensemble des entiers pairs inférieurs ou égaux à n.

* Soit J l'ensemble des entiers impairs inférieurs ou égaux à n

Posons $f(x) = \sum_{k \in I} a_k x^k$ et $g(x) = \sum_{k \in J} a_k x^k$

* f est pair $\quad$ g est impair

On vérifie que $P(x) = f(x) + g(x)$ $(\forall x \in \mathbb{R})$

On a montré que $F + G = \mathbb{R}_n[X]$

* ① Soit $k \in I$, la fonction $x \longmapsto x^k$ est paire donc f est paire
idem avec g

autre rédac possible ② $\forall x \in \mathbb{R}, \; g(-x) = \sum_{k \in J} a_k (-x)^k$
(① ou ②)

$= -\sum_{k \in J} a_k (x)^k = -g(x)$

<u>Conclusion</u> : $F \oplus G = \mathbb{R}_n[X]$ (Somme directe pratique pour les projections)

Scanné avec CamScanner

Exo 3 : $\mathcal{U} = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$ (ens. des suites réelles)

$F = \{u \in \mathcal{U}$ telles que $\forall n \geq 0, u_{2n+1} = u_{2n}\}$ (un indice)

$G = \{u \in \mathcal{U}$ telles que $\forall n \geq 0\ u_{2n+1} = -u_{2n}\}$

1) F et G sont-ils des sev de $\mathcal{U}$?
(à faire à la maison)

2) Est-il vrai que $F \oplus G = \mathcal{U}$?

· Étudions $F\cap G$: Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in F \cap G$ alors $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} = u_{2n} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} = -u_{2n} \end{cases}$

alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = -u_{2n}$ soit $u_{2n} = 0$

Donc $F \cap G = \{u_{2n} = 0\}$ ✓

· Étudions $F+G$:

Soit u_n une suite réelle quelconque.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}$

Brouillon : $u \in \mathcal{U}$, $u \overset{?}{=} f + g$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = f_n + g_n$

$u_{2n} = f_{2n} + g_{2n}$

$u_{2n+1} = f_{2n+1} + g_{2n+1} = f_{2n} - g_{2n}$

$\begin{cases} u_{2n} = f_{2n} + g_{2n} \\ u_{2n+1} = f_{2n} - g_{2n} \end{cases}$

$f_{2n} = \dfrac{u_{2n} + u_{2n+1}}{2}$

$g_{2n} = \dfrac{u_{2n} - u_{2n+1}}{2}$

et $f_{2n+1} = f_{2n}$

$g_{2n+1} = -g_{2n}$

*

on résoud le système en cherchant f_{2n} et g_{2n}

Rédaction (on part de *)

Soit u une suite réelle quelconque
Posons ; pour $n \geq 0$,

$f_{2n} = \dfrac{u_{2n} + u_{2n+1}}{2}$ $g_{2n} = \dfrac{u_{2n} - u_{2n+1}}{2}$

3/4

Scanné avec CamScanner

$f_{2n+1} = f_{2n}$

$g_{2n+1} = -g_{2n}$

on a bien $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$

et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \in G$

Soit $n \geq 0$, $- u_{2n} = f_{2n} + g_{2n}$

$- u_{2n+1} = f_{2n} - g_{2n} = f_{2n+1} + g_{2n+1}$

On a montré que $F + G = \mathcal{U}$

Scanné avec CamScanner

//Partiel jusqu'à AL TD Algèbre du 16/10/23) MOS

Exo 1 : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$f(x,y) = (2x+y, x-y)$

Ker(f), Im(f) ?

Ker(f) : $\begin{cases} 2x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=0 \\ 2x-2x+y-2(-\frac{2}{3}y)=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=0 \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0 \\ y+2y=0 \Rightarrow y=0 \end{cases}$

Correctº : Ker(f) = sev de l'ensemble de départ :

$\text{Ker}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = (0,0)\}$

$\begin{cases} 2x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$ $\text{Ker}(f) = \{(0,0)\}$

Im(f) = sev de l'ensemble d'arrivée

$= \{(X,Y) \in \mathbb{R}^2, \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = (X,Y)\}$

$\begin{cases} 2x+y=X \\ x-y=Y \end{cases}$ L_1+L_2 $\begin{cases} 3x = X+Y \Rightarrow x = \frac{X+Y}{3} \\ y = \frac{X+Y}{3} - Y \end{cases}$

$\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$

(Au passage Ker red à (0,0) → inj + surj → bij).

Exo 2 : $\mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$

$P \longrightarrow P'$

Ker(f) ? Im(f) ?

$\text{Ker}(f) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_n[X], f(x_1, \dots, x_n) = (0,0)\}$

1) Vérif que c'est une applicatº linéaire

Soit $\mathbb{R}_n[X]$, $P_1[X] \in \mathbb{R}_n[X]$
$P_2[X] \in \mathbb{R}_n[X]$

Scanné avec CamScanner

Vérifions que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda(P_1[X] + P_2[X]) = \lambda P_1[X] + \lambda P_2[X] \quad \in \mathbb{R}_m[X]$$

$$\text{et } \lambda(P_1'[X] + P_2'[X]) \in \mathbb{R}_m[X]$$

$$P_1[X] = a_i x_i^n$$

Correction : $\forall P, Q \in \mathbb{R}_m[X]$

$$f(P+Q) = (P+Q)' = P' + Q' = f(P) + f(Q)$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda P) \underset{(\lambda P)'}{=} \lambda P' = \lambda f(P)$$

Donc f est une application linéaire

$\mathrm{Ker}(f) = \cancel{(x_1, \dots, x_m) = (0, \dots, 0)}$

$$\{P \in \mathbb{R}_m[X],\ f(P) = 0\}$$

$$P' = 0$$

P : polynôme constant

$\mathrm{Ker}(f)$ = ensemble des polynômes constants

$$\parallel$$

$\mathbb{R}_0[X]$ (f n'est pas injective)

$$\mathrm{Im}(f) = \{Q \in \mathbb{R}_m[X],\ \exists P \in \mathbb{R}_m[X],\ f(P) = Q\}$$

$$P' = Q$$

(En exam → faire une petite phrase : P primitive de Q convient, comme $Q \in \mathbb{R}_m[X]$*, ce n'est possible que si $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$)

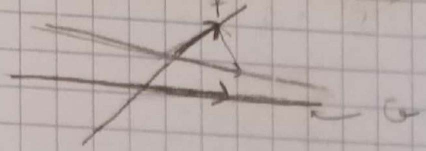
Soit $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_{m-1}[X]$

* P a un degré de plus que Q.

Rq : la m̂ applicat° de $\mathbb{R}_m[X] \to \mathbb{R}_{m-1}[X]$ est surjective !

Ça dépend de l'ensemble !

Exo 3 :



$p : E \to E$

E un ev

F, G, deux sev de E tels que $F \oplus G = E$

je note p la projection sur $F \parallel G$ parallèlement à G

Ker (p), Im (p) ?

Ker (p) = G

Im (p) = F

Correc° : def de la projection : $\forall x \in E, \exists! f \in F, \exists! g \in G, x = f + g$
par def, $p(x) = f$

$$x = \underbrace{p(x)}_{\in F} + \underbrace{(x - p(x))}_{\in G}$$ car décomposition unique

• $x \in F$, $p(x) = x$ car proj sur F donc $x = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0}_{\in G}$

donc $F \subset Im(p)$

• $x \in G$, $p(x) = \underbrace{x}_{\in G} + \underbrace{0}_{\in F} \Rightarrow G \subset Ker(p)$

Rappel

$Ker(p) = \{x \in E, p(x) = 0\}$

$x - p(x) \in G$

or si $p(x) = 0$ alors $x \in G$

donc $Ker(p) = G$

~~$Im(p) = \{X \in E, p(x) = X\}$~~

~~$x = p(x) + (x - p(x))$~~

~~$x = X + (x - p(x))$~~ $= X + (x - X) \Rightarrow X$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ ($p(x) = X$)

$Im(p) = \{y \in E, \exists x \in E, p(x) = y\}$

$y \in E, \exists x \in E, p(x) = y$

$p(x) \in F$, $Im(p) = F$

$Im(p) \oplus Ker(p) = E$

06/11/23

TD Algèbre n°6

Exo 1 :

Donner un ex de :

a) famille libre non génératrice de $\mathbb{R}^3$

b) " génératrice liée de $\mathbb{R}^3$

$\lambda(1,0,0) \overset{?}{=} (0,0,0) \Rightarrow \lambda = 0$

a) famille libre dans $\mathbb{R}^3$: à entre un et 3 vecteurs
famille à un vecteur ($\emptyset$ vecteur nul) forme une famille libre
non génératrice : dès que moins que 3 vecteurs $\Rightarrow$ non génératrice

ex : $(1,0,0)$, $(2022, 1914, 1664)$

b) génératrice $\to$ au moins 3 éléments dans $\mathbb{R}^3$ $\to$ forme une base
pour ê liée $\to$ il faut donc au moins 4 éléments

ex $(1,0,0,1)$ $\lambda(1,0,0,-1) = (0,0,0,0)$
ssi $\lambda = 1$

on commence par écrire $(1,0,0)$; $(0,1,0)$; $(0,0,1)$ une base de $\mathbb{R}^3$
on rajoute un élément au pif ex : $(1,2,3)$

$\to \{(1,0,0) ; (0,1,0) ; (0,0,1) ; (1,2,3)\}$

Exo 2 :

(forme un ev)

$F = \{ a \sin^2 x + b\cos^2 x + c\cos(2x) + d\sin(2x), a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$

dim F ? dim $F \leq 4$

$= \{a+b + c\cos(2x) + d\sin(2x)\}$

$\cos^2(x) = \dfrac{\cos(2x)+1}{2}$

$\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$

$a\sin^2(x) + b\cos^2(x) = a\dfrac{(\cos(2x)+1)}{2} + b\left(\dfrac{1-\cos(2x)}{2}\right) + c\cos(2x) + d\sin(2x)$

$+c\cos(2x) + d\sin(2x)$

Une cl de $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, $\sin(2x)$, $\cos(2x)$ est également une cl de $(\cos(2x), \sin(2x), 1) \Rightarrow \dim F \leq 3$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $a\cos(2x) + b\sin(2x) + c = 0$

$x = 0$ $a + c = 0$

$x = \frac{\pi}{4}$ $b + c = 0$ $\Rightarrow a = b = c = 0$ donc la famille $(\cos(2x), \sin(2x), 1)$ est libre

$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ $-a + c = 0$

Donc dim F = 3

Scanné avec CamScanner

en dernier → a le plus ... $e^{a_n x^2}$

Exo 3 :

$a_1, \dots, a_n$ réels deux à deux distincts (donc tous $\neq$)

$\mathcal{F}\ \{e^{a_k x},\ k=1,\dots,n\}$ libre ?

oui : car $a_1, \dots, a_n$ tous $\neq$ et e^x fct strictement croissante et positive

On suppose par l'absurde que $\{e^{a_k x}, k=1,\dots,n\}$ est liée

donc $\lambda e^{a_1 x} + \lambda e^{a_2 x} + \dots \lambda e^{a_n x} = 0$

$\exists \lambda \neq 0$

si $x \to +\infty$ $\quad e^{+kx} \to +\infty$

si $x \to -\infty$ $\quad e^{a_k x} \to 0$

$e^{3x} > e^{2x}$ quand $x \to +\infty$

Correction

Sans nuire à sa généralité, nous pouvons supposer les $(a_k)_{k=1,\dots,n}$ ordonnés $a_1 < a_2 < \dots < a_n$

Procédons par l'absurde. Supposons $\mathcal{F}$ liée :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e^{a_k x} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Multiplions (1) par $e^{-a_n x}$

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e^{(a_k - a_n)x} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

$\forall k = 1, \dots, n-1,\ a_k - a_n < 0$

Dans (2), faisons $x \to +\infty$, on en déduit $\lambda_n = 0$

On procède ensuite par récurrence descendante
on multiplie (1) par $e^{-a_{n-1}x}$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k e^{(a_k - a_{n-1})x} = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Puis $x \to +\infty$; $\lambda_{n-1} = 0$

On a aussi montré que $\mathcal{F}$ est libre

Donc sev engendré par $\mathcal{F}$ de dimension n

- ensemble des fonctions $\{e^{ax}, a \in \mathbb{R}\}$ est de dimension infinie car on peut trouver des familles libres avec autant d'éléments qu'on veut

Suite TD Algèbre n°6

Exo 4 :

$$\begin{cases} 1+X & (1) \\ 2-3X+X^2 & (2) \\ X^2-5X & (3) \end{cases}$$

$P_1(X) = 1+X$

$P_2(X) = 2-3X+X^2$

$P_3(X) = X^2-5X$

Famille (P_1, P_2, P_3) libre ?

$$2\times(1)+(3) = 2(1+X)+X^2-5X$$
$$= 2+2X+X^2-5X = 2-3X+X^2.$$

$P_2 = 2P_1 + P_3$ donc la famille (P_1, P_2, P_3) est liée

(EV engendré par (P_1, P_2, P_3) est de dimension 2)
car les 2 premiers sont libres, et ils génèrent E,

Scanné avec CamScanner

13/11/23

TD Algèbre n°1

Exo 1

a) $M_3(\mathbb{R})$

$A = (a_{ij})$

$F = \{ A \in M_3(\mathbb{R}) \text{ tq } a_{ii} = 0,\ i = 1,2,3 \}$

(Donner un ex de)

Base de F ?

SS entendu : bon un ev de

$$F = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} = a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{13}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ a_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{23}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{31}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{32}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

est une base de F et F est de dimension 6 (car elle est génératrice et c'est une sous famille d'une famille libre)

b) $G = \{ A \in M_n(\mathbb{R}),\ a_{ij} = 0 \text{ si } i<j \}$

Dim G ?

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 6 $n \times n$

$n + n(n-1) + (n-1)$

$= (n-(n-1))$

$$G = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & & \vdots \\ a & \vdots & \vdots & a_{44} & & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

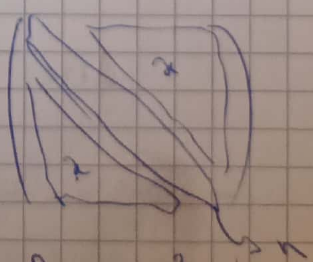
donc base de G a $\underbrace{n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1}_{n \text{ fois}}$ $= n+n+1$ $= 2n+1$

=

$n + (n-1) + (n-2) + \dots + (n-(n-1))$

$n + n - 1 + n - 2 + \dots + n - n + 1$

$= n$



$2x + n = n^2$

$\Leftrightarrow 2x = n^2 - n$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{n(n-1)}{2}$

$x + n = \dfrac{n(n-1)}{2} + n$

$= \dfrac{n(n-1)+2n}{2} = \dfrac{n^2-n+2n}{2} = \dfrac{n^2+n}{2}$ $\dfrac{n(n+1)}{2}$

qui est un entier car n pair ou n^2+1 impair

Scanné avec CamScanner

Exo 2 :

E de dim n

H : hyperplan de E

pas besoin de vérifier car le vecteur nul appartient à H.

$u \neq 0$, $u \notin H$

$\Delta = \{ \lambda u, \lambda \in \mathbb{R} \}$

Est-il vrai que $H \oplus \Delta = E$? Oui

Dans un espace de dimension n, un hyperplan est un espace de dimension $(n-1)$

$\dim(H + \Delta) = \dim(H) + \dim(\Delta) - \dim(H \cap \Delta)$

or : $\dim(H \cap \Delta)^{*} = 0$ car $u \notin H$

donc $\dim(H + \Delta) = \dim(H) + \dim(\Delta)$
$= (n-1) + 1$
$= n$

$\dim(E) = n = \dim(H) + \dim(\Delta)$

donc $E = H \oplus \Delta$

+ E de dim finie, H sev de E $\Rightarrow \exists \Delta$ sev de E tq : $E = H \oplus \Delta$

Correcto + propre :

$*$ $H \cap \Delta$?

$x \in H \cap \Delta$

a) $x \in \Delta$, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $x = \lambda u$

Si $\lambda \neq 0$ $u = \frac{x}{\lambda}$

b) $x \in H$, $\Rightarrow \frac{x}{\lambda} \in H \Rightarrow u \in H$ contradiction

donc $\lambda = 0$ donc $H \cap \Delta = \{0\}$

- On écrit :

$\dim(H + \Delta) = \dim(H) + \dim(\Delta) - \dim(H \cap \Delta)$
$= n - 1 + 1 - 0 = n$

- Posons $F = H + \Delta$
F sev de E, $\dim(F) = \dim(E)$ donc $F = E$

Conclusion : $H \oplus \Delta = E$

Scanné avec CamScanner

TD Algèbre n°8

0/11/23

Exo 1

$E \to E$
$\dim E = p$

$Id : x \to x$

$B = (e_1, \dots, e_p)$ base de E

$B' = (e_p, \dots, e_1)$

$M_{B,B'}(Id)$?

$$\begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (0) & 1 \\ 1 & (0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & (0) \\ & \end{pmatrix}$$

Correction $x \to f(x)$

$(e_1, \dots, e_p) \to (f_1, \dots, f_p)$

$f(e_1) = cl(f_1, \dots, f_p)$

$f(e_p) = cl(f_1, \dots, f_p)$

$$\begin{array}{c|c} & f(e_1) \ \dots \ f(e_p) \\ \begin{matrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{matrix} & \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array}$$

$Id(e_i) = e_i$

$$\begin{array}{c|c} & Id(e_1)\ Id(e_2) \ \dots \ Id(e_p) \\ \begin{matrix} e_p \\ \vdots \\ e_1 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 1 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ 1 & 1 & & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$M_{B,B'}(Id)$

$Id(e_i) = e_i$

$$\begin{array}{c|c} & Id(e_1) \ \dots \ Id(e_p) \\ \begin{matrix} e_1 \\ \\ e_p \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$M_{B,B}(Id)$

C'est la même application linéaire mais si on prend une autre base : on obtient pas la même matrice (Matrices semblables).

Exo 2 :

$E \to E$

Ecrire la matrice d'une homothétie, symétrie, projection dans la base de votre choix
(symétrie dans $\mathbb{R}^2$)

homothétie $\begin{array}{cc} h(e_1) & h(e_p) \\ \end{array}$
$$\begin{pmatrix} \lambda & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda \end{pmatrix}$$

$M_{B,B}(h)$ avec $B = (1,0,0,\dots)$
$(0,1,0 \dots)$
$(0,0,0,\dots 1)$

symétrie $\begin{pmatrix} -1 & (0) \\ (0) & -1 \end{pmatrix}$ $M_{B,B}(s)$

projection : $\begin{array}{c} p(e_1) \ \dots \ p(g_p) \\ \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \\ (0) & & & & \ddots 0 \end{pmatrix} \end{array} = M_{B,B}(pr)$

Correction $(e_1, \dots, e_p)$ base de E

- $h(x) = \lambda x$ homothétie

$h(e_i) = \lambda e_i$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} h(e_1) & h(e_p) \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ \\ e_p \end{array} & \begin{pmatrix} \lambda & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda \end{pmatrix} \end{array}$$

- Symétrie $\lambda = -1$
- projection il faut donner 2 espaces F et G en somme directe

$F + G = E$

prof sur $F // G$: $x \in E : \exists !\, f \in F$, $\exists !\, g \in G$, $x = f + g$
$p(x) = f$

$\dim(F) = q$

$\{f_1, \dots f_q\}$ base de F

$\{g_{q+1}, \dots g_p\}$ base de G

$\{f_1, \dots, f_q, g_{q+1}, \dots g_p\}$ base de E car $F \oplus G = E$

Vu que l'on est ~~sur~~ en projection sur F : $p(f_i) = f_i$ et $p(g_i) = 0$

Scanné avec CamScanner

$$M_{B,B}(p_1) = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} p(f_1) & & p(f_q) & p(g_{q+1}) & & p(g_p) \end{matrix} \\ \begin{matrix} f_1 \\ \\ f_q \\ g_{q+1} \\ \\ g_p \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Rq Si on projette sur $G \,//\, F$ on a
$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} p(f_1) & p(f_q) & p(g_{q+1}) & p(g_p) \end{matrix} \\ \begin{matrix} f_1 \\ f_q \\ g_{q+1} \\ g_p \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exo 3 : $\mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$

$$P \xrightarrow{f} P'$$

Matrice ~~Base~~ de f dans la base de votre choix

$\{1, X, X^2, \dots X^n\}$ base de $\mathbb{R}_n[X]$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} f(P_0) & f(P_2) & f(P_n) \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 = P_0 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ & 1 & & \\ & & X & \\ (0) & & & X^{n-1} \end{pmatrix} \end{array}$$

$f(1) = 0$

$f(X) = 1$

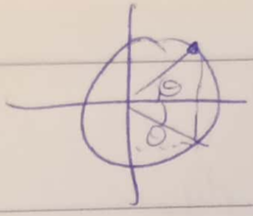
$f(X^2) = 2X$

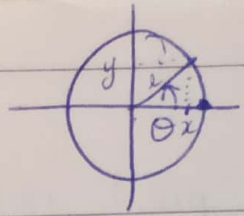
$f(X^n) = nX^{n-1}$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & X & 2X & & nX^{n-1} \\ \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & & \shortparallel \\ f(P_1) & f(X) & f(X^2) & \dots & f(X^n) \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ \\ X^n \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & 2 & & & \\ 0 & & 0 & 3 & & \\ \vdots & & 0 & 0 & 4 \ddots & \\ & (0) & & & 0 & n \\ & & \vdots & & & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(la vraie diagonale = que des zéros)

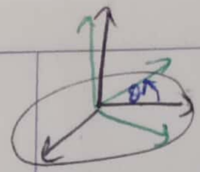
Scanné avec CamScanner





$\cos\theta = \frac{x}{\ell}$

$\sin\theta = \frac{y}{\ell}$



Exo 4 : Matrice de rotation dans $\mathbb{R}^3$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & +\sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} r(e_1) & r(e_2) & r(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

si on veut rotation dans sens inverse : $R^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) & 0 \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

si on veut θ^n : $\cos(n\theta) \quad -\sin(n\theta - \dots$
$- \dots \dots)$

$r(e_1) = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2 + 0$

$r(e_2) = +\sin(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2 + 0$

$r(e_3) = e_3$

composition de l'appli linéaire

R_θ et R_φ deux rotations de même axe $R_\theta \times R_\varphi = R_{\theta+\varphi}$

Réfléchir à si compo de 2 rotations d'axe $\neq$: commutatif ou pas

Scanné avec CamScanner

= TD moy

TD Algèbre du 27/11/23

Exo 2 CC 2 2021

$f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$

$f(P) = P(0)$

1) f linéaire ?

2) $\mathrm{Ker}(f)$ de f

3) $\mathrm{Im}(f)$?

1) f linéaire ssi ~~$\forall f, g \in \mathbb{R}_n[X]$~~

~~$(f+g)(P) = f(P) + g(P)$~~

~~$f(P) = P(0)$~~

~~$g(P) = P(0)$~~

~~$(f+g)(P) =$~~

Soient P et $Q \in \mathbb{R}_n[X]$

Qu : A-t-on $(P+Q)(0) = P(0) + Q(0)$

$= P(0) + Q(0)$ Vrai

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$

$f(\lambda P) = \lambda P(0) = \lambda P(0)$

correction : 1) $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$

pas sur la copie

Montrons que $f(P+Q) \overset{?}{=} f(P) + f(Q)$

$(P+Q)(0) = P(0) + Q(0)$

$f(\lambda P) \overset{?}{=} \lambda f(P)$

$(\lambda P)(0) = \lambda P(0)$

donc f linéaire

2) $\mathrm{Ker}(f) = \{ P \in \mathbb{R}_n[X], f(P) = 0 \}$

$\sum a_k x^k \Leftarrow \begin{cases} a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \text{ en } x = 0 = 0 \\ \Rightarrow a_0 = 0 \end{cases}$ $= \{ P \in \mathbb{R}_n[X] = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, k = 0$

Scanné avec CamScanner

↗ de dimension n donc hyperplan

correction 2) $Ker(f) = \{ P \in \mathbb{R}_n[X] \text{ tq } P(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k \}$

$Ker(f)$ est l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ dont le coefficient constant est nul.

3) $Im(f) = \{ P(0) \in \mathbb{R}, \exists P \in \mathbb{R}_n[X], f(P) = P(0) \}$

correction 3) $Im(f)$ est un sev de $\mathbb{R}$

$Im(f)$ est soit $\{0\}$ soit $\mathbb{R}$ $\longrightarrow$ ça se voit qd c'est le cas car c'est l'application nulle

Prenons $P(x) \equiv 1$

(Soit P le polynome constant égal à 1. $1 \in Im(f)$

car $P(0) = 1$) donc $Im(f) = \mathbb{R}$

Exo 3

E = ens des polynomes pairs de $\mathbb{R}_n[X]$

1) E sev ① car $0_{\mathbb{R}_n[X]}$ (polynome nul est pair) ② car la somme de deux fonctions paires est paires et que multiplier un polynome / une fonction paire par un réel donne toujours un polynôme pair(e) de $\mathbb{R}_n[X]$ (ev / une fonction

Th : un sev est un ev donc E ev

2) Base de E : Je cherche une famille ~~de dimension n+1~~

$P(-x) = P(x)$ ~~$\{1, x, x^2, \dots\}$~~

$\{1, x^2, x^4, x^6, \dots, x^p\}$ avec $p = n$ si n pair ou $p = n+1$ si n impair

$n = 2$

3) $\dim E = \frac{2m+1}{2}$ si n

correction 1)

En français : La somme de deux fonctions paires est paire

Le produit d'une fonction paire par un réel est paire

Le polynome nul appartient à E

E est donc un sev de $\mathbb{R}_n[X]$, c'est aussi un ev.

En maths : $\forall P \in E \quad \forall x \in \mathbb{R}, P(-x) = P(x)$

pour la ligne 1) et 2) $\forall Q \in E \quad (P+Q)(-x) = P(-x) + Q(-x) = (P+Q)(x)$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad (\lambda P)(-x) = \lambda P(-x) = (\lambda P)(x)$

Scanné avec CamScanner

2) Soit P un polynôme quelconque de E.

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \text{et} \quad P(x) = P(-x) \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Notons I l'ensemble des entiers pairs inférieurs ou égaux à n

Notons J l'ensemble des entiers impairs inférieurs ou égaux à n

$$P(x) = \sum_{k \in I} a_k x^k + \sum_{k \in J} a_k x^k$$

$$P(-x) = \sum_{k \in I} a_k x^k - \underbrace{\sum_{k \in J} a_k x^k}_{\text{car impairs}}$$

$\Rightarrow \sum_{k \in J} a_k x^k = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \sum_{k \in J} a_k x^k$ est le polynôme nul donc $\forall k \in J, a_k = 0$

x^2, x^4, x^6, x^8

si $n = 8$

card $= 5$

$\{x^k, k \in I\}$ base de E

x^2, x^4, x^6 card $= 4$

$= 7$

$n+1$

donc n impair

$\frac{n}{2}$

3) $\dim(E) = \operatorname{Card}(I)$

n pair $\quad n = 2p$

$\operatorname{Card}\{0, 2, 4, \dots, 2p\} = \operatorname{card}\{0, 1, 2, \dots, p\} = p+1 = \frac{n}{2} + 1$

n impair. $\quad n = 2p+1 \Rightarrow 2p = n-1 \Rightarrow p = \frac{n-1}{2}$

$\operatorname{card}\{0, 2, 4, \dots, 2p\} = \text{"} \quad \text{"} = p + 1 = \frac{n-1}{2} + 1$

$= \frac{n+1}{2}$

4) $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ base de E

NON car x n'appartient pas à E

APPLI TH RANG :

Exo

applications du Th du rang

1) $p < q$ existe-il des surjections linéaires de $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$

non

2) $p > q$ existe-t-il des injections linéaires de $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$

injectives $\Rightarrow$ $p \leq q$ donc non il y aura forcément des antécédents pr la m̂ image

$\Downarrow$

faux

1) $\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$

si f surjective $\dim(\mathrm{Im}(f)) = q$

$\dim(\mathbb{R}^p) = \dim(\mathbb{R}^q)$

or $p > q$

donc impossible

donc $\dim E = p < q$ impossible

$\dim(\mathbb{R}^p)$ on a forcément $\dim E = p \geq q$

si f injective $\dim(\ker(f)) = 0$

donc $\dim \mathrm{Im}(f) \leq \dim(E)$ donc $p > q$

impossible

Correction : 1) f $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ linéaire, surjective

linéaire : $\dim \mathbb{R}^p = \dim \mathrm{Im}(f) + \dim \ker(f)$

surj : $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^q$

$p = q + \dim \ker(f)$

donc pas possible si $p < q$

2) $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ linéaire, injective

l : $\dim \mathbb{R}^p = \dim \mathrm{Im}(f) + \dim \ker(f)$

inj : $\ker(f) = \{0\}$

$p = \dim \mathrm{Im}(f)$ or $\mathrm{Im}(f)$ sev de $\mathbb{R}^q$ donc

$\dim \mathrm{Im} f \leq q$

or $p > q$: pas possible

On ne peut pas avoir une appli linéaire de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ si elles sont ~~..~~ bijectives

Scanné avec CamScanner

n°9

Suite TD Algèbre du 27/11/23

Exo 1) $f : E \to F$ linéaire (F et E de dim finie)
H sev de E

Est-il vrai que $\dim f(H) = \dim(H) - \dim(H \cap \mathrm{Ker}(f))$?

f linéaire : $\dim(E) = \dim \mathrm{Im}(f) + \dim \mathrm{Ker}(f)$

H sev de E : $\dim(H) \leq \dim(E)$

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{g} & f(H) \text{ sev de } F \\ x & \longrightarrow & f(x) \end{array}$$

$\dim(H) = \underbrace{\dim \mathrm{Im}(g)}_{= \dim f(H)} + \underbrace{\dim \mathrm{Ker}(g)}_{= \dim(H \cap \mathrm{Ker}(f))}$ vrai !!

donc $\dim f(H) = \dim(H) - \dim \mathrm{Ker}(g)$

$g(x) = 0$: $\begin{cases} x \in H \\ \text{et } f(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow x \in H$ et $x \in \mathrm{Ker}(f)$ donc $x \in H \cap \mathrm{Ker}(f)$

réciproque $\begin{array}{l} x \in H \\ x \in \mathrm{Ker}(f) \end{array} \Rightarrow g(x) = 0$

2) K sev de F $\dim f(H) = \dim H - \dim(H \cap \mathrm{Ker}(f))$

Relier $\dim f^{-1}(K)$
$\dim \mathrm{Ker}(f)$ et $\dim(K \cap \mathrm{Im}(f))$

$\mathrm{Ker}(f) + \dim f^{-1}(K) = \dim(K \cap \mathrm{Im}(f))$

$\dim f^{-1}(K) \leq \dim(E)$
$\shortparallel$
$\dim($

Correction : $f^{-1}(K) \xrightarrow{g} K$ appliquer th du rang à g

TD Algèbre n°10 du 04/12/23

Exo 1 : Donner une base de $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tq } 7x+y+z-t=0\}$

on cherche une famille libre et génératrice, ie à ~~4~~ 3 éléments tq car hyperplan

$$7x+y+z-t=0$$

Corr :

$$\mathbb{R}^4 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$$

$$(x,y,z,t) \longrightarrow 7x+y+z-t$$

φ linéaire
φ pas l'application nulle

$H = \operatorname{Ker} \varphi$
$\operatorname{Im} \varphi = \mathbb{R}$

$\dim \mathbb{R}^4 = 4$
$\dim H = 3$

$t = 7x+y+z$

$\{(\frac{1}{7},0,0,1),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\}$ est une base et on a bien :

correction : $\{(1,0,0,7)$
$(-1,0,7,0)$
$(-1,7,0,0)\}$ base (libre et de 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ donc génératrice = base)

Exo 2 : Déf : $\mathbb{R}_n[X]$

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad P \neq 0$$

Valuation $(P) = \min\{k \text{ tq } a_k \neq 0\}$ (= + petit indice de coeff différent de 0)

$\mathbb{R}_n[X]$

$k=0,\dots,n$ $\qquad (1+x)^0 = 1$

$P_k(x) = (1+x)^k$

1) $\mathrm{Val}(P_k)$?

2) $\{P_k,\ k=0,\dots,n\}$ base de $\mathbb{R}_n[X]$?

$\frac{k!}{i!(k-i)!}$ $\quad C_k^i$

1) $(1+x)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^{k-i} y^i$

$= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} 1^{k-i} x^i = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^i$ car $1^{k-i} = 1$

Scanné avec CamScanner

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} x^i$$

$$= \quad C_k^k = 1$$ donc ordre 0

$$P_k(x) = \sum_{p=0}^{k} C_k^p x^{k-p}$$

quand $p = k$ ça fait $1 \times C_k^p$
= monôme le + petit

$$\text{val}(P_k) = 0$$

2) $\{P_k,\ k = 0, \ldots, n\}$ $n+1$ éléments

$\mathbb{R}_n[x]$ $n+1$ éléments (dim $\mathbb{R}_n[x]$ $= n+1$)

$P_k = (1+x)^k$ est libre en effet :

$\forall P \in P_k$ on a : $\alpha(1+x)^k + \beta(1+x)^{k+1} = 0$

on suppose la famille des P_k liée :
$\exists\ \alpha, \beta \neq 0$, $\alpha(1+x)^k + \beta(1+x)^{k'} = 0$, $k \neq k'$ et $\in \mathbb{N}$, $\leq n$
$\in \mathbb{R}$ $\alpha(1+x)^k$

$\Rightarrow \alpha, \beta = 0$ car $(1+x)^k \neq (1+x)^{k+1}$

$= \lambda_0 (1+x)^0 + \lambda_1 (1+x)^1 + \ldots + \lambda_n$

Correction 2)

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(x) = 0$$

on procède par récurrence descendante

$x^n \cdot \lambda_n$ est nul $\Rightarrow \lambda_n = 0$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k P_k = 0 \qquad x^{n-1} \lambda_{n-1} \text{ nul} \Rightarrow \lambda_{n-1} = 0$$

...

$\lambda_0 = 0$

Donc la famille est libre
De plus : Elle est de cardinal $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[x])$
donc aussi génératrice
$\Rightarrow$ c'est une base

Scanné avec CamScanner

Suite TD Algèbre du 04/12/23
n°10

Exo 3 E, F ev dim finie

$\dim E = \dim F = n$

$(e_1, \dots, e_n)$ base de E

$(f_1, \dots, f_n)$ base de F

Je def une appli linéaire φ par

$\forall i = 1, \dots, n \qquad \varphi(e_i) = f_i$

1) Ai-je bien défini φ ?

2) φ inversible ?

1) Soit $x \in E$ alors $x = (x_1, \dots x_n)$

objectif définir $\varphi(x)$

$$x = (x_1, \dots, x_n) = a(e_1) + b(e_2) + \dots + \gamma e_m$$

$$x_1 = a e_1$$

Correction : $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

1)
$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$$

donc oui elle est bien définie

2) Si φ inversible, l'application inverse est linéaire

image d'une base = $\varphi^{-1}(f_1, \dots f_n) = (e_1, \dots e_n)$

$$\begin{array}{ccc} E & \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} & F \\ e_i & \rightleftarrows & f_i \end{array}$$

$\psi(f_i) = e_i$

$$\psi \circ \varphi(x) = \psi\left(\sum_1^n x_i f_i\right) = \sum_1^n x_i \psi(f_i)$$
$$= \sum_1^n x_i e_i = x$$

Scanné avec CamScanner

Exo CC $af^2 + bf + cI = 0$

$f \circ \left(\frac{a}{c} f + \frac{b}{c} I\right) = Id$

Exo 4 $\dim E = n$

$E \xrightarrow{\varphi} E$

$E \xrightarrow{\psi} E$

φ, ψ linéaires

Mq : $\varphi \circ \psi = Id \Rightarrow \psi \circ \varphi = Id$

Si $\varphi \circ \psi = Id$ alors ψ et φ bijectives et $\psi = \varphi^{-1}$

Donc $\psi \circ \varphi = Id$

En passant par des matrices

$$\varphi \circ \psi = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$$

Correction $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E

A matrice de φ dans $\mathcal{E}$

B matrice de ψ dans $\mathcal{E}$

$AB = I_n$

Donc inversible et inverse à droite = inverse à gauche

(B est l'inverse à droite de A)

– CM (appli du th du rang)

inversible à d = inversible à g + inverse à droite = inverse à gauche

donc $AB = BA = I_n$

$\Rightarrow \psi \circ \varphi = Id$

(Refaire démo vers AL de matrice vers matrice avec une AL d'AL)

cool par abstraction