Projet : Analyse 1 - Exercices

Logique

Exercice 1 (Tiré du Partiel 2022–2023)

1. Formaliser à l'aide de quantificateurs :
   "Pour que le produit de deux nombres réels soit négatif, il faut qu'au moins un de ces deux nombres soit négatif ou nul."

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, (xy \leq 0 \implies x \leq 0 \text{ ou } y \leq 0)$$

2. Compléter l'expression suivante en vous inspirant de l'exemple ci-dessus pour formaliser "pour que le produit de deux nombres réels soit strictement négatif" :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, (xy > 0 \implies (x > 0 \text{ et } y > 0) \text{ ou } (x < 0 \text{ et } y < 0))$$

Exercice 2 Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}, \exists y \in \mathbb{R}, 4x - 3y > 0$

- Correction :
  On résout $4x - 3y > 0$:

$$\iff 4x > 3y \implies y < \frac{4}{3}x$$

Il suffit de trouver une valeur de y qui dépend de x. Sachant que $x > 0$, on peut poser :

$$y = \frac{4}{3}x - 1$$

Alors, $y < \frac{4}{3}x$. Finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{*+}, \exists y = \frac{4}{3}x - 1,\ 4x - 3y = \frac{8x}{3} + 1 > 0$$

Exercice 3 (Hybride Analyse/Informatique)
Soit la proposition suivante :
"Si n est divisible par 6, alors n est divisible par 2 et n est divisible par 3."

1. Formaliser en langage informatique (Java) :

$$(n\%6{=}{=}0) \implies ((n\%2{=}{=}0)\ \&\&\ (n\%3{=}{=}0))$$

2. Montrer que sa contraposée est équivalente à l'énoncé initial.

- Rappel : n est divisible par $a \iff n\%a\texttt{==}0$.
- On peut écrire P comme :

$$(n\%6\texttt{==}0) \implies ((n\%2\texttt{==}0) \;\&\&\; (n\%3\texttt{==}0))$$

On utilise : $P \implies Q \iff (\text{non } P)$ ou Q.
Soit :

$$\texttt{!}(n\%6\texttt{==}0) \texttt{ || } ((n\%2\texttt{==}0) \;\&\&\; (n\%3\texttt{==}0))$$

$$\iff (n\%6\texttt{!=}0) \texttt{ || } ((n\%2\texttt{==}0) \;\&\&\; (n\%3\texttt{==}0))$$

- Contraposée :

$$\text{non } Q \implies \text{non } P$$

Ici, non $Q \iff \texttt{!}(n\%2\texttt{==}0) \texttt{ || } \texttt{!}(n\%3\texttt{==}0)$.
On utilise : non $(A$ et $B) \iff$ non A ou non B.
Donc :

$$\text{non } Q \iff (n\%2\texttt{!=}0) \texttt{ || } (n\%3\texttt{!=}0)$$

$$\text{non } P \iff (n\%6\texttt{!=}0)$$

On obtient :

$$(n\%2\texttt{!=}0) \texttt{ || } (n\%3\texttt{!=}0) \implies (n\%6\texttt{!=}0)$$

On utilise de nouveau $P \implies Q \iff (\text{non } P)$ ou Q.
Soit :

$$\texttt{!}((n\%2\texttt{!=}0) \texttt{ || } (n\%3\texttt{!=}0)) \texttt{ || } (n\%6\texttt{!=}0)$$

$$\iff ((n\%2\texttt{==}0) \;\&\&\; (n\%3\texttt{==}0)) \texttt{ || } (n\%6\texttt{!=}0)$$

On retrouve bien l'expression de la question 1.

Suites

Exercice 4

Soit $A = \left\{ \frac{2^n}{2^n-1} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$

Déterminer si A admet une borne supérieure et/ou une borne inférieure, si oui, les déterminer.
(Indication : considérer une suite)

Correction :

Posons $U_n = \frac{2^n}{2^n-1}$. Alors, $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}-1}}{\frac{2^n-1}{2^n}} = 2 \times \frac{2^n-1}{2^{n+1}-1} < 1$.

Or $n \geq 1$, et ainsi $2^n \geq 1$ et $2^n - 1 \geq 0$, donc

$$U_n = \frac{2^n}{2^n - 1} > 0.$$

Donc (U_n) est strictement décroissante.
Ainsi, $\sup(A) = U_1 = \frac{2^1}{2^1-1} = 2$.
$\inf(A) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{2^n-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{2^n(1-\frac{1}{2^n})} = 1$.

Exercice 5 : Variation de suites
Étudier le sens de variation de la suite (U_n) définie par :

1. $U_n = 1 + \frac{1}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. $U_n = \frac{-2}{n+4}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. $U_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} - U_n = 1 + \frac{1}{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 - 1 + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0$ car $n > 0$.
   Donc (U_n) est strictement décroissante.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n = \frac{-2}{n+5} - \frac{-2}{n+4} = \frac{-2}{n+5} + \frac{2}{n+4}$.
   Or $\frac{2}{n+5} < \frac{2}{n+4}$, donc $U_{n+1} - U_n > 0$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n > 0 \iff (U_n)$ est strictement croissante.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n+2} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n} = \frac{(n+1)-2(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{n} = \frac{-1}{n+2} + \frac{1}{n} = \frac{-n+n+2}{n(n+2)} = \frac{2}{n(n+2)} > 0$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} - U_n > 0 \iff (U_n)$ est strictement croissante.

Exercice 6 : Terme général d'une suite définie par récurrence
Soit (U_n) la suite définie par :

$$U_0 = 2, \quad U_{n+1} = 2U_n + 3 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Déterminer le terme général de la suite (U_n).
Correction

D'après le cours, il existe α tel que $v_n = U_n - \alpha$ soit géométrique de raison 2.

Alors, on a :

$$v_{n+1} = U_{n+1} - \alpha = 2U_n + 3 - \alpha.$$

On souhaite que cette quantité soit égale à $2v_n = 2(U_n - \alpha)$. Cela donne :

$$2U_n + 3 - \alpha = 2U_n - 2\alpha.$$

En simplifiant, on obtient :

$$3 - \alpha = -2\alpha \quad \text{d'où} \quad \alpha = -3.$$

Ainsi, on a $v_n = v_0 \times 2^n$, avec $v_0 = U_0 - \alpha = 2 - (-3) = 5$.

On en conclut que $U_n = v_n + \alpha = v_n - 3 = 5 \times 2^n - 3 = 2^{n+2} - 3$.

Application à la finance

Exercice 7: **Exercice 8** :

Convergence des suites

Exercice 9 : Soit $U_n = \frac{2n+1}{4n+5}$

Calculer U_0, U_{10} et U_{100}.

Conjecturer la limite de (U_n) et la montrer grâce à la définition.

Correction

$$U_0 = \frac{1}{5}, \quad U_{10} = \frac{21}{45} \approx 0.467, \quad U_{100} = \frac{201}{405} \approx 0.496.$$

U_n semble tendre vers $\frac{1}{2}$. Intuitivement, on voit que le $+1$ au numérateur et le $+5$ au dénominateur deviennent négligeables pour n grand, et donc la fraction se rapproche de $\frac{2n}{4n} = \frac{1}{2}$.

Soit $\epsilon > 0$, on cherche $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$\left| \frac{2n+1}{4n+5} - \frac{1}{2} \right| \leq \epsilon.$$

On a :

$$\frac{2n+1}{4n+5} - \frac{1}{2} = \frac{2(2n+1) - 4n - 5}{2(4n+5)} = \frac{4n+2-4n-5}{2(4n+5)} = \frac{-3}{2(4n+5)}.$$

Le dénominateur est positif pour $n \in \mathbb{N}$ et $-3 < 0$, donc

$$U_n - \frac{1}{2} < 0 \quad \text{et donc} \quad \left| U_n - \frac{1}{2} \right| = \frac{3}{2(4n+5)}.$$

Il faut maintenant montrer que

$$\frac{3}{2(4n+5)} \leq \epsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{3}{2\epsilon} \leq 4n+5.$$

Cela revient à

$$n \geq \frac{3}{2\epsilon} - 5 \quad \Longleftrightarrow \quad n \geq \frac{3}{2\epsilon} \times \frac{1}{4}.$$

On peut poser N tel que

$$N \geq \left\lfloor \frac{3}{2\epsilon} \times \frac{1}{4} \right\rfloor + 1.$$

Ainsi, pour $n \geq N$, on a bien

$$\left| U_n - \frac{1}{2} \right| \leq \epsilon.$$

Exercice 10 : Calcul de limites

1) $U_n = \frac{n^3-6}{3n^2+4n^4+12}$ **pour tout** $n \in \mathbb{N}^*$

Correction

On factorise par les termes de plus haut degré.
On a :

$$U_n = \frac{n^3-6}{3n^2+4n^4+12}.$$

Factorisation :

$$U_n = \frac{n^3(1-\frac{6}{n^3})}{n^4(3+\frac{4}{n^2}+\frac{12}{n^4})} \approx \frac{1}{4} \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

2) $U_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{4}{5}\right)^k$

On reconnaît une somme de $n+1$ termes d'une suite géométrique avec $U_0 = 1$.
Rappel : suite géométrique $U_n = U_0 q^k$, ici $U_0 = 1$ et $q = \frac{4}{5}$.
Ainsi, on a :

$$U_n = \frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{4}{5}} = 5\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right).$$

La limite lorsque $n \to \infty$ est :

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right) = 1.$$

Donc,

$$\lim_{n\to\infty} U_n = 5.$$

Exercice 11 : Suite - récurrence

Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 5$ et $U_{n+1} = -\frac{1}{2}U_n + 3$

1) Déterminer le terme général de la suite U_n
2) Étudier la monotonie de (U_n)
3) Montrer par récurrence que (U_n) est bornée par $\frac{1}{2}$ et 5
4) (U_n) est-elle convergente ?

Correction 1) On remarque que (U_n) est une suite arithmético-géométrique de $a = -\frac{1}{2}$ et $b = 3$.
On pose $\alpha = \frac{b}{1-a} = \frac{3\times 2}{3} = 2$.
Soit (V_n) définie par $V_n = U_n - \alpha = U_n - 2$.
On a :

$$V_{n+1} = U_{n+1} - \alpha = -\frac{1}{2}U_n + 3 - 2 = -\frac{1}{2}U_n + 1 = -\frac{1}{2}(U_n - 2) = -\frac{1}{2}V_n.$$

Donc, V_n est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$, et le terme général est :

$$V_n = V_0 \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Ainsi, le terme général de U_n est :

$$U_n = V_n + \alpha = 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2.$$

2)
On étudie $U_{n+1} - U_n$:

$$U_{n+1} - U_n = -\frac{9}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Pour n pair, $\left(-\frac{1}{2}\right)^n > 0$, et pour n impair, $\left(-\frac{1}{2}\right)^n < 0$.
Ainsi, (U_n) n'est pas monotone. 3)

On pose la propriété $P_n : \forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} \leq U_n \leq 5$.

Initialisation : pour $n = 0$, $U_0 = 5$ et donc P_0 est vrai.

Hérédité : Supposons que P_n est vrai pour un n, c'est-à-dire $\frac{1}{2} \leq U_n \leq 5$. Montrons que P_{n+1} est vrai :

$$U_{n+1} = -\frac{1}{2}U_n + 3.$$

En utilisant $\frac{1}{2} \leq U_n \leq 5$, on trouve que $\frac{1}{2} \leq U_{n+1} \leq 5$.

Donc, P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On conclut que $\lim_{n\to\infty} U_n = 2$ car U_n est bornée et converge vers la solution de l'équation $U = -\frac{1}{2}U + 3$, c'est-à-dire $U = 2$.