# Exercices d'Algèbre

## Exercice 1

Déterminer lesquels des ensembles $E_1$, $E_2$, $E_3$ et $E_4$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ :

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 7y = z\}$$

$$E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - z^2 = 0\}$$

$$E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = x + y + z = 0\}$$

$$E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z(x^2 + y^2) = 0\}$$

## Correction

### 1. Pour $E_1$ :

(a) $(0, 0, 0) \in E_1$.

(b) Soient $(x, y, z)$ et $(x', y', z')$ deux éléments de $E_1$.
On a donc $3x - 7y = z$ et $3x' - 7y' = z'$. Donc :

$$3(x + x') - 7(y + y') = z + z',$$

d'où $(x + x', y + y', z + z') \in E_1$.

(c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y, z) \in E_1$. Alors la relation $3x - 7y = z$ implique que :

$$3(\lambda x) - 7(\lambda y) = \lambda z,$$

donc $\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in E_1$.

### 2. Pour $E_2$

$E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - z^2 = 0\}$, c'est-à-dire $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z \text{ ou } x = -z\}$.

Les vecteurs $(1,0,-1)$ et $(1,0,1)$ appartiennent à $E_2$, mais :

$$(1,0,-1)+(1,0,1)=(2,0,0),$$

n'appartient pas à $E_2$ Par conséquent, $E_2$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

**3. Pour $E_3$ :**

(a) $(0,0,0) \in E_3$.

(b) Soient $(x,y,z)$ et $(x',y',z')$ deux éléments de $E_3$.
On a donc $x+y-z=x+y+z=0$ et $x'+y'-z'=x'+y'+z'=0$.
Donc :

$$(x+x')+(y+y')-(z+z')=(x+x')+(y+y')+(z+z')=0,$$

et $(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z') \in E_3$.

(c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x,y,z) \in E_3$. Alors la relation $x+y-z=x+y+z=0$ implique que :

$$\lambda x+\lambda y-\lambda z=\lambda x+\lambda y+\lambda z=0,$$

donc $\lambda(x,y,z)=(\lambda x,\lambda y,\lambda z) \in E_3$.

$E_3$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

**4. Pour $E_4$ :**

- Les vecteurs $(1,0,0)$ et $(0,0,1)$ appartiennent à $E_4$, mais leur somme :

$$(1,0,0)+(0,0,1)=(1,0,1),$$

ne lui appartient pas. Donc $E_4$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

# Exercice 2

On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n$. On suppose $n \geq 1$.

1. L'application
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \int_0^1 P(x)\,dx \end{array}$$
est-elle linéaire ?

2. L'application $f$ est-elle injective, surjective, bijective ?

3. L'application
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \int_0^1 P^2(x)\,dx \end{array}$$
est-elle linéaire ? Injective, surjective, bijective ?

# Correction

## 1. Application $P \mapsto \int_0^1 P(x)\,dx$

Une application est linéaire si elle satisfait les deux propriétés suivantes :

1. $f(P+Q) = f(P) + f(Q)$ pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$.
2. $f(\alpha P) = \alpha f(P)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

Calculons :

$$f(P+Q) = \int_0^1 (P(x) + Q(x))\,dx = \int_0^1 P(x)\,dx + \int_0^1 Q(x)\,dx = f(P) + f(Q).$$

$$f(\alpha P) = \int_0^1 \alpha P(x)\,dx = \alpha \int_0^1 P(x)\,dx = \alpha f(P).$$

L'application est donc linéaire.

## 2. Injection, Surjection, Bijection

**Injectivité:**
L'application $f$ est injective si $f(P) = 0$ implique $P = 0$.

Si $f(P) = \int_0^1 P(x)\,dx = 0$, cela signifie que l'intégrale du polynôme $P(x)$ sur $[0,1]$ est nulle. Cependant, cela n'implique pas nécessairement que $P(x) = 0$ sur tout l'intervalle $[0,1]$. Par exemple, $P(x) = x - \frac{1}{2}$ satisfait $\int_0^1 P(x)\,dx = 0$, mais $P(x) \neq 0$.

Donc, $f$ n'est pas injective.

**Surjectivité**
L'application $f$ est surjective si tout élément de $\mathbb{R}$ est l'image d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

Pour tout $c \in \mathbb{R}$, on peut choisir $P(x) = c$ (un polynôme constant). Alors :

$$f(P) = \int_0^1 c\,dx = c.$$

Ainsi, $f$ est surjective.

**Bijection:**
L'application n'est pas injective, mais elle est surjective. Donc, $f$ n'est pas bijective.

**3. Application** $P \mapsto \int_0^1 P^2(x)\,dx$

**Linéarité**

Pour vérifier la linéarité, considérons :

$$f(P+Q) = \int_0^1 (P(x)+Q(x))^2\,dx \neq \int_0^1 P^2(x)\,dx + \int_0^1 Q^2(x)\,dx = f(P)+f(Q),$$

car le terme $2P(x)Q(x)$ apparaît lors du développement de $(P(x)+Q(x))^2$.

Donc, l'application n'est pas linéaire.

**Injectivité**

Si $f(P) = 0$, alors :

$$\int_0^1 P^2(x)\,dx = 0.$$

Cela implique que $P^2(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$, donc $P(x) = 0$.

L'application est donc injective.

**Surjectivité**

L'application $f$ n'est pas surjective. En effet, $f(P)$ produit uniquement des valeurs positives ou nulles (car $P^2(x) \geq 0$). Par exemple, un réel négatif ne peut pas être atteint par $f$.

Donc, $f$ n'est pas surjective.

**Bijection**

L'application est injective mais pas surjective. Donc, $f$ n'est pas bijective.

# Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_{n+1}[X]$ définie par :

$$P \mapsto Q = e^{X^2}\left(Pe^{-X^2}\right)'.$$

1. Vérifier que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}_{n+1}[X])$.
2. Déterminer la matrice de $f$ relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.
3. Déterminer $\ker f$ et $\operatorname{rg} f$.

# Correction

1. Pour $P$ élément de $\mathbb{R}_n[X]$,

$$f(P) = e^{X^2}\left(Pe^{-X^2}\right)' = e^{X^2}\left(P'e^{-X^2} - 2XPe^{-X^2}\right) = P' - 2XP.$$

Ainsi, si $P$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n$, alors $f(P) = P' - 2XP$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n+1$, et $f$ est bien une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.

De plus, pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]$, on a :

$$f(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)' - 2X(\lambda P + \mu Q) = \lambda(P' - 2XP) + \mu(Q' - 2XQ) = \lambda f(P) + \mu f(Q).$$

Donc, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}_{n+1}[X])$.

2. La matrice $A$ cherchée est élément de $\mathcal{M}_{n+1,n}(\mathbb{R})$. Pour $k = 0$, $f(X^k) = f(1) = -2X$, et pour $1 \leq k \leq n$, $f(X^k) = kX^{k-1} - 2X^{k+1}$. On a donc :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & -2 & 0 & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & -2 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $f(P) = 0$.
Si $P$ n'est pas nul, alors $-2XP$ a un degré strictement plus grand que $P'$ et donc $f(P)$ n'est pas nul.

Par suite, $\ker f = \{0\}$ (donc $f$ est injective) et, d'après le théorème du rang,

$$\mathrm{rg} f = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - \dim(\ker f) = n + 1.$$

Ce qui montre que $\mathrm{Im}\, f$ n'est pas $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ ($f$ n'est pas surjective).

# Exercice 4

Déterminer une base de :

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 2z = 0\}.$$

# Correction

De l'équation $x + y + 2z = 0$, on peut exprimer $x$ en fonction de $y$ et $z$ :

$$x = -y - 2z.$$

Un vecteur $(x, y, z) \in E$ s'écrit :

$$(x, y, z) = (-y - 2z, y, z).$$

On peut décomposer ce vecteur en :

$$(x, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(-2, 0, 1).$$

Les vecteurs $(-1, 1, 0)$ et $(-2, 0, 1)$ sont linéairement indépendants et engendrent l'ensemble $E$.

Ainsi, une base de $E$ est donnée par :

$$\boxed{\{(-1, 1, 0), (-2, 0, 1)\}}.$$

## Exercice 5

Soit $U = \{(u_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des suites réelles. On considère :

$$F = \{u \in U \mid \forall n \geq 0,\ u_{2n+1} = u_{2n}\},$$

$$G = \{u \in U \mid \forall n \geq 0,\ u_{2n+1} = -u_{2n}\}.$$

1. $F$ et $G$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de $U$ ?
2. Est-il vrai que $F \oplus G = U$ ?

## Correction

**Étudions $F \cap G$ :**

Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in F \cap G$, alors :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & u_{2n+1} = u_{2n} \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_{2n+1} = -u_{2n} \end{cases}$$

Alors, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{2n} = -u_{2n} \quad$ soit $\quad u_{2n} = 0$.

Donc $F \cap G = \{u_{2n} = 0\}$

**Étudions de $F \oplus G$ :**

Soit $u_n$ une suite réelle quelconque.

$n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{R}$.

Posons, pour $n \geq 0$ :

$$f_{2n} = \frac{u_{2n} + u_{2n+1}}{2}, \quad g_{2n} = \frac{u_{2n} - u_{2n+1}}{2}.$$

$$f_{2n+1} = f_{2n}$$
$$g_{2n+1} = -g_{2n}.$$

On a bien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in G$.

Soit $n \geq 0$ :

$$-u_{2n} = f_{2n} + g_{2n},$$
$$-u_{2n+1} = f_{2n} + g_{2n} = f_{2n+1} - g_{2n+1}.$$

On a montré que $F \oplus G = U$.