Projet : Analyse 1 - Exercices

Logique

Exercice 1 (Tiré du Partiel 2022–2023)

1. Formaliser à l'aide de quantificateurs :
   "Pour que le produit de deux nombres réels soit négatif, il faut qu'au moins un de ces deux nombres soit négatif ou nul."

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, (xy \leq 0 \implies x \leq 0 \text{ ou } y \leq 0)$$

2. Compléter l'expression suivante en vous inspirant de l'exemple ci-dessus pour formaliser "pour que le produit de deux nombres réels soit strictement négatif" :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, (xy > 0 \implies (x > 0 \text{ et } y > 0) \text{ ou } (x < 0 \text{ et } y < 0))$$

Exercice 2 Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}, \exists y \in \mathbb{R}, 4x - 3y > 0$

Correction :
On résout $4x - 3y > 0$:

$$\iff 4x > 3y \implies y < \frac{4}{3}x$$

Il suffit de trouver une valeur de y qui dépend de x. Sachant que $x > 0$, on peut poser :

$$y = \frac{4}{3}x - 1$$

Alors, $y < \frac{4}{3}x$. Finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{*+}, \exists y = \frac{4}{3}x - 1,\ 4x - 3y = \frac{8x}{3} + 1 > 0$$

Exercice 3 (Hybride Analyse/Informatique)
Soit la proposition suivante :
"Si n est divisible par 6, alors n est divisible par 2 et n est divisible par 3."

1. Formaliser en langage informatique (Java) :

Correction :

$$(n\%6\texttt{==}0) \implies ((n\%2\texttt{==}0)\ \ \&\&\ \ (n\%3\texttt{==}0))$$

2. Montrer que sa contraposée est équivalente à l'énoncé initial.

Correction :

- Rappel : n est divisible par $a \iff n\%a\texttt{==}0$.
- On peut écrire P comme :

$$(n\%6\texttt{==}0) \implies ((n\%2\texttt{==}0)\ \ \&\&\ \ (n\%3\texttt{==}0))$$

On utilise : $P \implies Q \iff (\text{non } P)$ ou Q.
Soit :

$$!(n\%6\texttt{==}0)\ \texttt{||}\ ((n\%2\texttt{==}0)\ \ \&\&\ \ (n\%3\texttt{==}0))$$
$$\iff (n\%6\texttt{!=}0)\ \texttt{||}\ ((n\%2\texttt{==}0)\ \ \&\&\ \ (n\%3\texttt{==}0))$$

- Contraposée :

$$\text{non } Q \implies \text{non } P$$

Ici, non $Q \iff !(n\%2\texttt{==}0)\ \texttt{||}\ !(n\%3\texttt{==}0)$.
On utilise : non $(A$ et $B) \iff$ non A ou non B.
Donc :

$$\text{non } Q \iff (n\%2\texttt{!=}0)\ \texttt{||}\ (n\%3\texttt{!=}0)$$

$$\text{non } P \iff (n\%6\texttt{!=}0)$$

On obtient :

$$(n\%2\texttt{!=}0)\ \texttt{||}\ (n\%3\texttt{!=}0) \implies (n\%6\texttt{!=}0)$$

On utilise de nouveau $P \implies Q \iff (\text{non } P)$ ou Q.
Soit :

$$!((n\%2\texttt{!=}0)\ \texttt{||}\ (n\%3\texttt{!=}0))\ \texttt{||}\ (n\%6\texttt{!=}0)$$

$$\iff ((n\%2\texttt{==}0)\ \ \&\&\ \ (n\%3\texttt{==}0))\ \texttt{||}\ (n\%6\texttt{!=}0)$$

On retrouve bien l'expression de la question 1.

Suites

Exercice 4
Soit $A = \left\{ \frac{2^n}{2^n-1} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$

Déterminer si A admet une borne supérieure et/ou une borne inférieure, si oui, les déterminer.
(Indication : considérer une suite)

Correction : Posons $U_n = \frac{2^n}{2^n-1}$. Alors, $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}-1}}{\frac{2^n-1}{2^n}} = 2 \times \frac{2^n-1}{2^{n+1}-1} < 1$.

Or $n \geq 1$, et ainsi $2^n \geq 1$ et $2^n - 1 \geq 0$, donc

$$U_n = \frac{2^n}{2^n-1} > 0.$$

Donc (U_n) est strictement décroissante.
Ainsi, $\sup(A) = U_1 = \frac{2^1}{2^1-1} = 2$.
$\inf(A) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{2^n-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{2^n(1-\frac{1}{2^n})} = 1$.

Exercice 5 : Variation de suites Étudier le sens de variation de la suite (U_n) définie par :

1. $U_n = 1 + \frac{1}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. $U_n = \frac{-2}{n+4}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. $U_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} - U_n = 1 + \frac{1}{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 - 1 + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0$ car $n > 0$.
   Donc (U_n) est strictement décroissante.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n = \frac{-2}{n+5} - \frac{-2}{n+4} = \frac{-2}{n+5} + \frac{2}{n+4}$.
   Or $\frac{2}{n+5} < \frac{2}{n+4}$, donc $U_{n+1} - U_n > 0$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n > 0 \iff (U_n)$ est strictement croissante.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n+2} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n} = \frac{(n+1)-2(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{n} = \frac{-1}{n+2} + \frac{1}{n} = \frac{-n+n+2}{n(n+2)} = \frac{2}{n(n+2)} > 0$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} - U_n > 0 \iff (U_n)$ est strictement croissante.

Exercice 6 : Terme général d'une suite définie par récurrence Soit (U_n) la suite définie par :

$$U_0 = 2, \quad U_{n+1} = 2U_n + 3 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Déterminer le terme général de la suite (U_n).

Correction : D'après le cours, il existe α tel que $v_n = U_n - \alpha$ soit géométrique de raison 2.

Alors, on a :

$$v_{n+1} = U_{n+1} - \alpha = 2U_n + 3 - \alpha.$$

On souhaite que cette quantité soit égale à $2v_n = 2(U_n - \alpha)$. Cela donne :

$$2U_n + 3 - \alpha = 2U_n - 2\alpha.$$

En simplifiant, on obtient :

$$3 - \alpha = -2\alpha \quad \text{d'où} \quad \alpha = -3.$$

Ainsi, on a $v_n = v_0 \times 2^n$, avec $v_0 = U_0 - \alpha = 2 - (-3) = 5$.
On en conclut que $U_n = v_n + \alpha = v_n - 3 = 5 \times 2^n - 3 = 2^{n+2} - 3$.

Application à la finance

Exercice 7: Un client détient un capital initial de 20 000 euros, qu'il dépose sur un livret de développement durable et solidaire. Celui-ci rémunère à un taux annuel de 3%. Il ajoute 100 euros chaque mois pendant une durée de 5 ans.
Après ces 5 ans, il décide d'acheter un bien d'une valeur de 30 000 euros avec l'argent accumulé, et emprunte le montant manquant à la banque. Cet emprunt est remboursable sur 4 ans avec un taux annuel de 4%.

1. Calculer le montant accumulé sur le compte épargne après 5 ans et déterminer le montant de l'emprunt nécessaire.

2. Calculer l'annuité constante pour rembourser cet emprunt.

3. Comparer le coût total du crédit au montant des intérêts obtenus sur l'épargne.

Correction :

1. **Montant accumulé sur le compte épargne** :

$$\begin{aligned}
t &= \frac{1+0,03}{12} - 1 \approx 0,002466,\\
n &= 5 \times 12 = 60,\\
V_n &= 20\,000 \cdot (1+t)^n + 100 \cdot \frac{(1+t)^n - 1}{t},\\
V_{60} &\approx 20\,000 \cdot (1+0,002466)^{60} + 100 \cdot \frac{(1+0,002466)^{60} - 1}{0,002466},\\
&\approx 28\,419,57 \;\text{ euros.}
\end{aligned}$$

   On déduit le montant de l'emprunt nécessaire, soit :

$$30\,000 - 28\,419,57 = 1\,580,43 \;\text{ euros.}$$

2. **Annuité constante pour rembourser l'emprunt** :

$$\begin{aligned}
a &= \frac{C \cdot t}{1-(1+t)^{-n}}, \quad C = 1\,580,43,\ t = 0,04,\ n = 4,\\
a &= \frac{1\,580,43 \cdot 0,04}{1-(1+0,04)^{-4}},\\
a &\approx 440,78\,\text{euros.}
\end{aligned}$$

3. **Comparaison** :

$$\begin{aligned}
\text{Intérêts obtenus sur l'épargne} &= 28\,419,57 - (20\,000 + 100 \times 60) = 2\,419,57\,\text{euros},\\
\text{Coût total du crédit} &= 4 \times 440,78 - 1\,580,43 = 183,69\,\text{euros.}
\end{aligned}$$

   Conclusion : Les intérêts obtenus sur l'épargne compensent largement le coût du crédit.

Exercice 8 Un étudiant de MIASHS, épuisé par son année en L1, décide de préparer sa fin d'étude en achetant un petit bateau pour voyager. Le bateau qu'il a sélectionné coûte 15 000 euros. Il dispose de 3 000 euros en épargne, rémunérée à un taux annuel de 1,5%, et décide d'emprunter le reste auprès d'une banque à un taux annuel de de 4% sur 5 ans. Il choisit de placer ses 3 000 euros en épargne pour accumuler des intérêts avant de les utiliser pour réduire le montant de l'emprunt.

1. Calculer le montant accumulé en épargne après 2 ans.

2. Déterminer le montant restant à rembourser sur l'emprunt après avoir utilisé l'épargne accumulée.

3. Calculer les mensualités constantes pour rembourser cet emprunt sur 5 ans.

Correction :

1. **Montant accumulé en épargne** :

$$\begin{aligned} t &= 0,015, \\ n &= 2, \\ V_n &= 3\,000 \cdot (1+t)^n, \\ V_2 &= 3\,000 \cdot (1+0,015)^2 \approx 3\,090,68\,\text{euros}. \end{aligned}$$

2. **Montant restant à rembourser** :

$$15\,000 - 3\,090,68 = 11\,909,32\,\text{euros}.$$

3. **Mensualité constante pour rembourser l'emprunt** :

$$\begin{aligned} t &= \frac{4}{12} = 0,003333, \\ n &= 5 \times 12 = 60, \\ a &= \frac{C \cdot t}{1-(1+t)^{-n}}, \quad C = 11\,909,32, \\ a &= \frac{11\,909,32 \cdot 0,003333}{1-(1+0,003333)^{-60}}, \\ a &\approx 220,56\,\text{euros}. \end{aligned}$$

Convergence des suites

Exercice 9 : Soit $U_n = \frac{2n+1}{4n+5}$ Calculer U_0, U_{10} et U_{100}.
Conjecturer la limite de (U_n) et la montrer grâce à la définition.

Correction :

$$U_0 = \frac{1}{5}, \quad U_{10} = \frac{21}{45} \approx 0.467, \quad U_{100} = \frac{201}{405} \approx 0.496.$$

U_n semble tendre vers $\frac{1}{2}$. Intuitivement, on voit que le $+1$ au numérateur et le $+5$ au dénominateur deviennent négligeables pour n grand, et donc la fraction se rapproche de $\frac{2n}{4n} = \frac{1}{2}$.

Soit $\epsilon > 0$, on cherche $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$\left|\frac{2n+1}{4n+5} - \frac{1}{2}\right| \leq \epsilon.$$

On a :

$$\frac{2n+1}{4n+5} - \frac{1}{2} = \frac{2(2n+1) - 4n - 5}{2(4n+5)} = \frac{4n+2-4n-5}{2(4n+5)} = \frac{-3}{2(4n+5)}.$$

Le dénominateur est positif pour $n \in \mathbb{N}$ et $-3 < 0$, donc

$$U_n - \frac{1}{2} < 0 \quad \text{et donc} \quad \left|U_n - \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2(4n+5)}.$$

Il faut maintenant montrer que

$$\frac{3}{2(4n+5)} \leq \epsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{3}{2\epsilon} \leq 4n+5.$$

Cela revient à

$$n \geq \frac{3}{2\epsilon} - 5 \quad \Longleftrightarrow \quad n \geq \frac{3}{2\epsilon} \times \frac{1}{4}.$$

On peut poser N tel que

$$N \geq \left\lfloor \frac{3}{2\epsilon} \times \frac{1}{4} \right\rfloor + 1.$$

Ainsi, pour $n \geq N$, on a bien

$$\left|U_n - \frac{1}{2}\right| \leq \epsilon.$$

Exercice 10 : Calcul de limites 1) $U_n = \frac{n^3-6}{3n^2+4n^4+12}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Correction : On factorise par les termes de plus haut degré.
On a :

$$U_n = \frac{n^3 - 6}{3n^2 + 4n^4 + 12}.$$

Factorisation :

$$U_n = \frac{n^3(1 - \frac{6}{n^3})}{n^4(3 + \frac{4}{n^2} + \frac{12}{n^4})} \approx \frac{1}{4} \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

2) $U_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{4}{5}\right)^k$

On reconnaît une somme de $n+1$ termes d'une suite géométrique avec $U_0 = 1$.

Rappel : suite géométrique $U_n = U_0 q^k$, ici $U_0 = 1$ et $q = \frac{4}{5}$.

Ainsi, on a :

$$U_n = \frac{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{4}{5}} = 5\left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right).$$

La limite lorsque $n \to \infty$ est :

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right) = 1.$$

Donc,

$$\lim_{n\to\infty} U_n = 5.$$

Exercice 11 : Suite - récurrence Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 5$ et $U_{n+1} = -\frac{1}{2}U_n + 3$

1. Déterminer le terme général de la suite U_n.
2. Étudier la monotonie de (U_n).
3. Montrer par récurrence que (U_n) est bornée par $\frac{1}{2}$ et 5.
4. (U_n) est-elle convergente ?

Correction : 1) On remarque que (U_n) est une suite arithmético-géométrique de $a = -\frac{1}{2}$ et $b = 3$.

On pose $\alpha = \frac{b}{1-a} = \frac{3\times 2}{3} = 2$.

Soit (V_n) définie par $V_n = U_n - \alpha = U_n - 2$.

On a :

$$V_{n+1} = U_{n+1} - \alpha = -\frac{1}{2}U_n + 3 - 2 = -\frac{1}{2}U_n + 1 = -\frac{1}{2}(U_n - 2) = -\frac{1}{2}V_n.$$

Donc, V_n est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$, et le terme général est :

$$V_n = V_0\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Ainsi, le terme général de U_n est :

$$U_n = V_n + \alpha = 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2.$$

2) On étudie $U_{n+1} - U_n$:

$$U_{n+1} - U_n = -\frac{9}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Pour n pair, $\left(-\frac{1}{2}\right)^n > 0$, et pour n impair, $\left(-\frac{1}{2}\right)^n < 0$.

Ainsi, (U_n) n'est pas monotone.

3) On pose la propriété $P_n : \forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} \leq U_n \leq 5$.

Initialisation : pour $n = 0$, $U_0 = 5$ et donc P_0 est vrai.

Hérédité : Supposons que P_n est vrai pour un n, c'est-à-dire $\frac{1}{2} \leq U_n \leq 5$. Montrons que P_{n+1} est vrai :

$$U_{n+1} = -\frac{1}{2}U_n + 3.$$

En utilisant $\frac{1}{2} \leq U_n \leq 5$, on trouve que $\frac{1}{2} \leq U_{n+1} \leq 5$.

Donc, P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On conclut que $\lim_{n\to\infty} U_n = 2$ car U_n est bornée et converge vers la solution de l'équation $U = -\frac{1}{2}U + 3$, c'est-à-dire $U = 2$.