Grafos

Elías Garza

29 de mayo de 2019

Para todo el documento las amistades y enemistades son mutuas además de que los hombres solo tienen de parejas a mujeres y viceversa.

1. Definiciones

- *Adjacente:* un vertice es adjacente a otro si existe una arista que los une.
- *Grado:* el grado de un vertice es la cantidad de aristan que inciden en el.
- *Camino:* una sucesion de vertices $v_1, v_2, ..., v_n$ tal que v_i es adjacente a v_{i+1} para todo i entre 0 y n-1.
- *Camino simple:* un camino que no pasa por el mismo vertice dos veces.
- *Ciclo:* un camino que empieza y termina en el mismo vertice, ademas un ciclo simple es un ciclo que no repite vertices.
- *Grafo conexo:* un grafo en el que existe un camino entre cualesquiera dos vertices.
- *Grafo planar:* un grafo que se puede dibujar en el plano sin que dos aristas se intersecten.
- *Árbol:* un grafo conexo sin ciclos
- *Bosque:* un grafo no necesariamente conexo sin ciclos.
- *Camino o cíclo hamiltoniano:* es un camino o cíclo que pasa por todos los vertices del grafo.
- *N-coloreable:* un grafo es n-coloreable cuando se pueden pintar los vertices de n colores de forma que ningún vertice del mismo color esta conectado. En particular si un grafo es 2-coloreable se le llama bipartito.
- *Número cromatico:* el menor n tal que el grafo es n-coloreable.

2. Lemas útiles

Problema clásico: Demustra que en un grupo de 6 personas siempre existen 3 que son amigos entre si o desconocidos entre si.

Lema 1: La suma de los grados de todos los vertices de un grafo es igual a dos veces el numero de aristas.

Lema 2: En todo grafo, el numero de vertices de grado impar es par.

Lema 3: Demustra que si existe un camnio entre dos vertices entonces existe un camino simple entre estos dos.

Lema 4: Demuestra que si un grafo conexo tiene dos caminos de igual longitud y son los maximos del grafo entonces comparten al menos un vertice.

Lema 5: Todos los arboles tienen al menos un vertice de grado 1 y se les llama *hoja*.

Lema 6: Todos los arboles se pueden construir a partir de un vertice y añadiendo hojas.

Lema 7: Un grafo conexo de n vertices con n-1 aristas es un árbol.

Lema 8: Un grafo es bipartito si y solo si no contiene ciclos de longitud impar.

Lema 9: El número cromatico de un grafo es siempre menor que el mayor grado más 1.

Lema 10: Todos los arboles tienen una cantidad mayor o igual de hojas que el mayor grado de los vertices.

3. Problemas

Problema ejemplo: Hay un torneo de 2n equipos. Cada día juegan todos los equipos una vez. Demuestra que despues de dos dias puedes elegir n equipos de forma que ninguno de ellos ha jugado entre si.

Problema 1: Demuestra que la cantidad de personas en el mundo que en toda su vida han dado una cantidad impar de saludos es par.

Problema 2: En un grupo se tiene que cada par de personas tiene exactamente un amigo en común, demustra que en el grupo no hay ciclos de longitud 4.

Problema 3: Hay 799 equipos, todos juegn contra todos y no hay empates. Demustra que existen 14 equipos tales que 7 de ellos les ganaron a los otros 7.

Problema 4: En un salon hay 32 alumnos y se van a organizar en 33 equipos de 3 personas. No hay dos equipos iguales. Demustra que hay dos equipos que tienen exactamente un alumno en común.

Problema 5: En el mundial de Polytopia, el ganador termino con 1000 ciudades en su imperio de forma de que todas estaban conectadas con su capital para tener más población ahí y poder ganar. Resulta que despues el juago se actualizó y le permitió mejorar los caminos de su imperio. Ahora el los podía pavimentar pero no tenía suficientes estrellas asi que decidió pavimentar de forma que cada ciudad siempre tuviera una cantidad impar de caminos pavimentados saliendo de ella. Demuestra que esto es posible.

Problema 6: En marte hay 50 ciudades pero para viajar se utilizan tuneles. Lamentablemente un politico pusó los N tuneles enre las ciudades de manera alazar pero asegurandose que cualesquiera dos ciudades no estubieran conectadas ppor más de un tunel. Cual es el menor N que asegure que se puede ir de cualquier ciudad a cualquier otra.

Problema 7: Sea δ el menor grado de un grafo G. Supón que $\delta \geq 2$. Demustra que G tiene un cíclo de al menos $\delta + 1$ Ademas de que contiene un camino de al menos δ aristas.

Problema 8: En un grupo de 2017 personas cualquier par de personas tiene exactamente un amigo en común. Determina el menor posible valor de la diferencia entre la cantidad de amigos de la persona con más amigos y la que tiene menos amigos.

Problema 9: Ana y Beto juegan con los vértices de un polígono convexo (los vértices no están unidos por ninguna línea); el juego consiste en lo siguiente: de forma alternada se traza una,arista entre dos vértices siempre y cuando dos aristas no se intercepten internamente (pueden interceptarse pero sólo en los vértices). Si empieza Ana, ¿cuándo Ana tiene estrategia ganadora?¿Cuándo la tiene Beto?

Problema 10: En una fiesta todas las mujeres bailan con al menos un hombre y ningún hombre baila con todas las mujeres. Demustra que existen hombres H_1 y H_2 y mujeres M_1 y M_2 tales que H_1 baila con M_1 , H_2 baila con M_2 pero H_1 no baila con M_2 y H_2 no baila con M_1.

Problema 11: En el plano se tienen 2019 puntos tales que no hay 3 de ellos colineales. Cada par de puntos se une con un segmento. Eric y Vivi juegan el siguiente juego: Vivi le pone un dígito a cada segmento y eric uno a cada punto. Vivi gana si hay dos puntos cuyo dígito es el mismo que en el del segmento que los une, de lo contrario pierde. Prueba que Vivi tiene estrategia ganadora.

Problema 12: En un torneo, todos los equipos juegan entre sí, los equipos los representamos como vértices y trazamos una arista dirgda que va de A a B si A le gana a B, demuestra que existe un vértice A tal que para cualquier otro vértice B existe un camino de A a B siguiendo las aristas dirigidas. Osea si X le gana a Y no puedes ir del vertice Y al vertice X por la arista que los une.

Problema 13: En un salón hay 7 computadoras tales que cada par de computadoras esta conectada por exactamente un cable. Se quiere colorear las computadoras y los cables de forma que no haya dos computadoras con el mismo color, no haya dos cables conectados a la misma computadora de un mismo color y que ninguna computadora tenga conectado un cable de su mismo color. Demuestra que se puede hacer con tan solo 7 colores.
Bonus: Demustra esto mismo para cualquier cantidad impar de computadoras.

Problema 14 (IMO 2007): En una competencia de matematicas algunos participantes son amigos. Decimos que un grupo de participantes es una *clique* si dos cualesquiera de ellos son amigos. (En particular, cualquier grupo con menos de dos participantes es una *clique*). Al numero de elementos de una clique se le llama tamano. Se sabe que en esta competencia el mayor de los tamanos de las *cliques* es par. Demostrar que los participantes pueden distribuirse en dos aulas, de manera que el mayor de los tamanos de las *cliques* contenidas en un aula sea igual al mayor de los tamanos de las *cliques* contenidas en la otra.