Entrenamientos Prepa 9: Conteo

Elías Garza

24 de febrero de 2021

1. Teoría

Definición 1.1. Un **conjunto** es una colección de elementos irrepetidos sin ningún orden particular. Estos pueden incluir cualquier cosa, números, caritas felices, personas, otros conjuntos, y cualquier otra cosa. Así mismo, una **tupla** es una lista de elementos en la que importa el orden y puede haber repetición. Usualmente se le llama una *n-tupla* a una tupla de n elementos.

Definición 1.2. El **factorial** es una función que se aplica a los números enteros (por el momento). Esta es igual a la multiplicación de todos los naturales menores o iguales al numero original y se denota con el símbolo !. De otra forma,

$$n! = (n)(n-1)(n-2)...(2)(1)$$

Lema 1. La cantidad de n-tuplas posibles con n elementos disponibles es $n!$

Demostración. Para la primer posición de la tupla tenemos una total de n posibilidades a escoger pero luego, para la segunda solo tenemos $n-1$ ya que ya usamos una opción para la primera. Así seguimos con todos las posiciones restando 1 cada vez hasta llegar a 1 así que la cantidad de tuplas será $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 1 = n!$. ∎

Definición 1.3. Las **combinaciones** se refieren a la cantidad de subconjuntos de cierto tamaño específico que podemos formar con un conjunto mayor. Estas de denotan $\binom{n}{k}$ para los subconjuntos de tamaño k de un conjunto de tamaño n. Esto se lee *n en k* y también se les llama coeficientes binomiales.

Lema 2. Sucede que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Demostración. Primero comenzaremos contando la cantidad de k-tuplas que se pueden formar con los elementos del conjunto de tamaño n.

Para esto, usaremos la misma estrategia que para demostrar el primer lema. Para el primer elemento de la tupla, tenemos un total de n opciones, luego $n-1$ y así seguimos, con la diferencia de que no podemos llegar hasta el 1 ya que la tupla es de tamaño k. Por lo tanto la cantidad de k-tuplas es

$$n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1).$$

Y esto es igual a

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)(n-k)(n-k-1)...(2)(1)}{(n-k)(n-k-1)...(2)(1)}.$$

Pero esto no puede ser nuestra respuesta ya que las tuplas no son conjuntos. Estamos contando muchas veces a la misma. Por ejemplo con $k = 3$, $(3,2,1)$ y $(2,3,1)$ son dos tuplas distintas pero ambas representan al conjunto $\{1,2,3\}$ así que hay que hacer algún tipo de corrección. Para lograrlo, simplemente notemos que para cada conjunto de k elementos hay $k!$ tuplas posibles las cuales estamos contando asi que al número que teníamos antes hay que dividirlo entre $k!$.

Por lo tanto, al final obtenemos que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

∎

Lema 3. Sea n un número natural, entonces sucede que

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Demostración. Este es un resultado muy famoso el cual también es un ejemplo de una técnica bastante útil que es el *doble conteo*. Básicamente vamos a contar la misma cosa de dos maneras distintas y esto será la cantidad de subconjuntos totales de un conjunto de tamaño n.

Primero veamos que si tenemos un subconjunto de tamaño 0 entonces hay $\binom{n}{0}$ de estos, luego hay $\binom{n}{1}$ subconjuntos de tamaño 1 y en general hay $\binom{n}{i}$ subconjuntos de tamaño i así que en total habrá

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n}$$

subconjuntos ya que esos son todos los posibles tamaños.

Ahora volvamos a contar la cantidad de subconjuntos pero de otra forma. Nos fijaremos en como construir un subconjunto. Observemos que para cada elemento del conjunto hay dos opciones, o esta dentro del subconjunto o no lo esta. Entonces, para cada elemento del conjunto hay 2 opciones por lo que en total habrá 2^n subconjuntos posibles. ∎

Lema 4 (Fórmula de Pascal)**.** Sean n y k enteros positivos tales que $k < n$. Es cierto que

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Demostración. Se puede hacer esto expandiendo cosas y haciendo álgebra pero eso es muy horrible y es algo que se haría en la escuela así que no haremos eso. Primero observemos que eso es igual a la cantidad de subconjuntos de tamaño k de un conjunto de tamaño n. Construyamos uno de esos subconjuntos enfocándonos en un solo elemento x_i. Este tiene dos posibilidades, esta dentro del subconjunto o fuera de él.

Si esta dentro, entonces debemos elegir a otros $k-1$ elementos diferentes a X_i para conseguir armar el subconjunto pero como ya eliminamos a una de las posibilidades, esto nos deja con exactamente $\binom{n-1}{k-1}$ opciones.

Ahora, si x_i no es parte del subconjunto, entonces debemos elegir a otros k excluyendo a ese x_i así que tenemos en total $\binom{n-1}{k}$ opciones. Por lo tanto, al sumar estas dos queda que

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

∎

Lema 5 (Identidad del Palo de Hockey)**.** Sean n y r naturales. Entonces

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \binom{r+2}{r} + ... + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

Esta identidad debe su nombre a que se puede ver como un palo de hockey si la señalas en el triángulo de Pascal. Este triángulo es una estructura en donde se ponen los coeficientes binomiales la cual cumple varias propiedades pero que lamentablemente no veremos hoy.

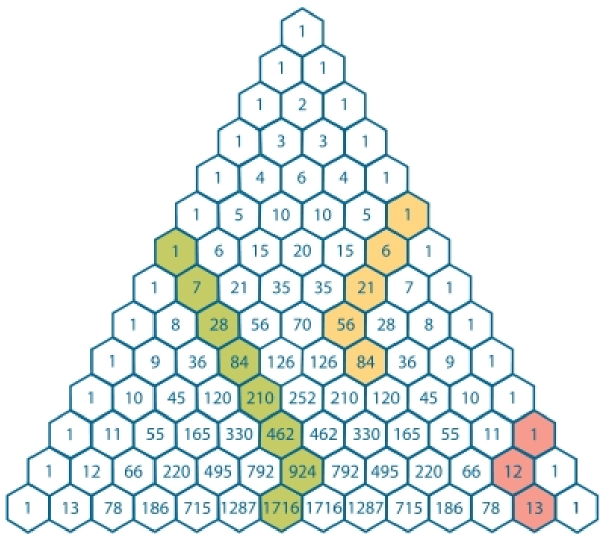

Figura 1: Triángulo de Pascal

Demostración. Solo vamos a utilizar el lema pasado recursivamente hasta llegar a lo que queremos. Sabemos que

$$\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$$

Pero de esto último también sabemos que

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

Y eso último también lo podemos volver a descomponer. De hecho siempre podemos hacer esto hasta que el número de arriba se vuelve igual al de abajo que es cuando obtenemos el $\binom{r}{r}$. Por lo tanto vamos a llegar a

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \binom{r+2}{r} + ... + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

■

2. Problemas

Problema 2.1. En una caja hay a canicas azules, r canicas rojas y v canicas verdes. ¿Cuántas parejas hay de canicas del mismo color?

Problema 2.2. Tenemos un rectángulo de $m \times n$ dividido en cuadritos unitarios. ¿Cuántos caminos hay para llegar de la esquina inferior izquierda a la esquina superior derecha si solo se puede mover hacia arriba o hacia la derecha?

Problema 2.3. Se tienen 10 cajas y 30 pelotas de las cuales 10 son verdes, 10 son rojas y 10 son azules. ¿De cuántas formas se pueden acomodar las 30 pelotas en las 10 cajas?

Problema 2.4. ¿Cuántos términos tiene la expansión de $(a+b+c+d)^{20}$

Problema 2.5. Se tienen 7 bolas blancas y 5 negras. ¿De cuántas formas se pueden colocar en una mesa de forma que no hay 2 bolas negras juntas?

Problema 2.6. Encuentra el número de maneras de colocar cuatro torres en un tablero de ajedrez de manera que ninguna se ataque entre sí.

Problema 2.7. Una araña tiene 8 pies, 8 zapatos distintos y 8 calcetines distinos. Encuentra el número de maneras en las que puede ponerse los 8 calcetines y los 8 zapatos de forma que primero debe ponerse el calcetín y luego el zapato.

Problema 2.8 (OMCC, 2003)**.** Encuentra el número total de maneras de colorear un tablero de ajedrez de forma que cada subcuadrito de 2×2 tenga 2 cuadritos negros y dos blancos.

Problema 2.9. Sean n, k número naturales. ¿Cuántas k-tuplas de números enteros hay tales que $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq ... \leq x_k \leq n$?

Problema 2.10. Considera un n-ágono regular.

a) ¿Cuántas diagonales tiene?

b) Encuentra el número total de veces en las que una diagonal intersecta a otra.

Problema 2.11. Fidel y Alonso escriben listas de enteros. Fidel escribe todas las listas $a_1, a_2, ...a_n$ de longitud n tales que $|a_1| + |a_2| + ... + |a_n| \leq k$. Alonso escribe todas las listas $b_1, b_2, ..., b_k$, de longitud k, tales que $|b_1| + |b_2| + ... + |b_k| \leq n$. Prueba que ambos escribieron el mismo número de listas.

Problema 2.12. Sea p un número primo. Demuestra que $\binom{2p}{p} - 2$ es múltiplo de p^2.

Problema 2.13 (OMM, 2015)**.** Sea n un entreo positivo y k un entero entre 1 y n. Se tiene un tablero de $n \times n$ colo blanco. Se hace el siguiente proceso. Se dibujan k rectángulos con lados de longitud entera, con lados paralelos a los lados del tablero y tales que la esquina superior derecha coincida con la del tablero. ¿Cuántas figuras blancas diferentes podemos obtener, que no se puedan obtener haciendo el proceso con menos de k rectángulos?

Problema 2.14. Demuestra que

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + ... + \binom{n}{2k} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + ... + \binom{n}{2k+1}$$

3. Hints

Hint 1. Una pareja de canicas es un subconjunto de tamaño 2. ¿Cómo contabas los subconjuntos?

Hint 2. En total debes dar $m + n$ pasos. ¿Cuántas formas hay de elegir arriba en esos?

Hint 3. Los colores son eventos independientes. ¿Cuántas formas hay de poner las 10 bolas en 10 cajas?

Hint 4. Expándelo 😛.

Hint 5. Pon las 7 blancas y luego ve los lugares posibles para poner las negras.

Hint 6. Cuenta el número de maneras de elegir las filas y columnas en donde van a estar las torres.

Hint 7. Primero elige el orden en que se va a poner los zapatos y calcetines y luego en que pies van a ir. ¿Porqué hacer esto es igual al número de maneras de acomodar los números del 1 al 8 en una lista dos veces?

Hint 8. Pinta la primer columna y ve que sucede con el resto del tablero.

Hint 9. ¿Cuantos puntos se usan en una intersección?

Hint 10. Expresa esos números en términos de lo que vimos.

Hint 11. Demuestra que si p es un primo, entonces $\binom{p}{k}$ es múltiplo de p.

Hint 12. Revisa las esquinas.

Hint 13. Usa el teorema del Binomio.