Optimisation appliquée à la localisation d'unités de soins et à la prise en charge des patients

Projet MOGPL

Richard Ung, Elias Bendjaballah

Rapport

3 janvier 2021

Table des matières

Précision :
Les indices utilisés dans ce rapport sont similaires aux indices utilisés dans le code de chaque question, avec une différence de -1 pour respecter l'indexation des listes et matrices en python au niveau des modules numpy et gurobi.

1 Répartition de patients dans les unités de soin

1.1 Formulation du programme linéaire

Pour obtenir l'affectation des différentes villes aux différents secteurs considérés, on résout le programme linéaire en considérant :
Les variables de décision :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si un patient de la ville } i \text{ est soigné dans le secteur } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\forall i \in \{1, ..., n\} \text{ et } \forall j \in \{1, ..., k\}$$

On cherche à minimiser la distance moyenne de chaque habitant à l'unité de soin dont il dépend. Il faut donc résoudre la fonction objectif :

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} x_{ij} d_{ij} \frac{v_i}{P} \text{ avec } P = \sum_{i=1}^{n} v_i$$

On utilise les variables booléennes x_{ij} pour minimiser les distances moyennes de trajet d_{ij}, sans oublier la pondération par la population de la ville considérée, avec P la population totale des villes dont on souhaite trouver le centre associé.
Il faut alors respecter les contraintes :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{k} x_{ij} = 1 & \forall i \in \{1, ..., n\} & (1) \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} v_i \leq \gamma & \text{avec } \gamma = \frac{1+\alpha}{k} \sum_{i=1}^{n} v_i \text{ où } \alpha > 0,\ \forall j \in \{1, ..., k\} & (2) \\ x_{ij} \in \{0, 1\} & \forall i \in \{1, ..., n\},\ \forall j \in \{1, ..., k\} & (3) \end{cases}$$

Où (1) est la contrainte assurant qu'une ville n'est associée qu'à un seul et unique centre, (2) la contrainte permettant de respecter la limite de population par secteur et (3) la spécification du caractère booléen des variables de décision.

On peut essayer de résoudre le problème par un algorithme de flot maximum à coût minimum appliqué à un graphe biparti complet. On sépare les sommets en deux sous-ensembles avec d'un côté les 15 villes et de l'autre les k centres. On ajoute un sommet source s lié aux n villes de capacité v_i et de coût nul et un sommet puit t recevant les arcs sortants des k centres de capacité γ et de coût nul. Les arcs entre chacun des n sommets représentant une ville i et chacun des k centres indicés par j ont pour capacité v_i et pour coût d_{ij}. En essayant de résoudre ce problème comme nous l'avons vu en TD, on se rend compte qu'il n'est pas possible de fragmenter la population d'une ville étant donné que chaque ville ne peut être associée qu'à un seul centre.

1.2 Application numérique

Nous avons choisi pour notre implémentation numérique à trois villes ($k = 3$), de placer les unités de soin dans les villes de Lille, Nantes et Montpellier. Une exécution du PL pour $\alpha = 0.1$ nous retourne les associations suivantes :

- L'unité de soin de Nantes doit prendre en charge les patients de : Nantes, Bordeaux, Rennes, Saint-étienne, Grenoble, Angers.
- L'unité de soin de Montpellier doit prendre en charge les patients de : Toulouse, Nice, Montpellier, Toulon.
- L'unité de soin de Lille doit prendre en charge les patients de : Strasbourg, Lille, Reims, Le Havre, Dijon.

Valeur de la fonction objectif : 267.537 km par habitant.
En prenant $\alpha = 0.2$, on obtient :

- L'unité de soin de Nantes doit prendre en charge les patients de : Nantes, Bordeaux, Rennes, Saint-étienne, Grenoble, Angers.
- L'unité de soin de Montpellier doit prendre en charge les patients de : Toulouse, Nice, Montpellier, Toulon.
- L'unité de soin de Lille doit prendre en charge les patients de : Strasbourg, Lille, Reims, Le Havre, Dijon.

Valeur de la fonction objectif : 267.537 km par habitant.
Soit exactement les mêmes associations que pour l'exécution précédente avec $\alpha = 0.1$. Cela peut s'expliquer par le fait que ces centres soient éloignés les uns des autres et qu'ils couvrent ainsi mieux le territoire (Nantes à l'Ouest, Lille au Nord et Montpellier pour le Sud). Le poids de la distance d_{ij} séparant chaque ville candidate i au centre considéré j est plus important que le poids associé à la population de la ville normalisé par la population totale $\frac{v_i}{\sum_{i=1}^{n} v_i}$. La fonction objectif est identique pour les deux exécutions, ce qui confirme que la modification du facteur α (au niveau de la contrainte (2) associée à la population maximale autorisée par secteur), a peu d'effet et que les distances d_{ij} jouent un rôle plus important dans la fonction objectif.

Pour une exécution avec quatre villes ($k = 4$), on a choisi arbitrairement de placer les centres dans les villes de Saint-étienne, Lille, Le Havre et Nantes. En choisissant $\alpha = 0.1$, on obtient alors la répartition suivante :

- L'unité de soin de Nantes doit prendre en charge les patients de : Toulouse, Nantes, Angers.
- L'unité de soin de Lille doit prendre en charge les patients de : Strasbourg, Lille, Reims, Dijon.
- L'unité de soin du Saint-étienne doit prendre en charge les patients de : Nice, Montpellier, Saint-étienne, Toulon.
- L'unité de soin du Havre doit prendre en charge les patients de : Bordeaux, Rennes, Le Havre, Grenoble.

Valeur de la fonction objectif : 347.289 km par habitant.
Mais en prenant un $\alpha = 0.2$, on obtient :

- L'unité de soin de Nantes doit prendre en charge les patients de : Toulouse, Nantes, Bordeaux.
- L'unité de soin de Lille doit prendre en charge les patients de : Strasbourg, Lille, Reims, Dijon.
- L'unité de soin de Saint-étienne doit prendre en charge les patients de : Nice, Montpellier, Saint-étienne, Toulon.
- L'unité de soin du Havre doit prendre en charge les patients de : Rennes, Le Havre, Grenoble, Angers.

Valeur de la fonction objectif : 334.472 km par habitant.

On remarque que la ville de Bordeaux (254 436 habitants) initialement affectée au centre du Havre lorsque $\alpha = 0.1$ est ensuite affectée au centre de Nantes lorsque $\alpha = 0.2$ et que la ville d'Angers (152 960 habitants) affectée à Nantes lorsque $\alpha = 0.1$ est affectée au Havre lorsque $\alpha = 0.2$. La fonction objectif a aussi diminué d'environ 13 km par habitant. Cet échange de villes dans l'affectation des secteurs de Nantes et du Havre peut s'expliquer par le fait qu'en relaxant la contrainte (2) realtive à la population par secteur, on autorise l'association Bordeaux-Nantes ($d_{ij} = 347\ km$) bien plus avantageuse que l'association Bordeaux-Le Havre ($d_{ij} = 651\ km$). Le changement résultant de cette modification de l'affectation optimale affecte aussi la ville d'Angers qui était affectée à Nantes sans relâchement de (2) avec $d_{ij} = 88\ km$ et qui se retrouve affectée au Havre lorsque $\alpha = 0.2$ avec $d_{ij} = 295\ km$. Bien que ce second changement soit réalisé au détriment de la distance moyenne séparant chaque habitant d'Angers au centre de soin, la modification reste avantageuse car le bénéfice réalisé pour la distance moyenne des habitants de Bordeaux est supérieur à la perte subie par les habitants d'Angers et ce grâce à l'augmentation de α et malgré la différence de population de 254 436 − 152 960 = 101 476 habitants entre les deux villes. Cette amélioration globale de la distance moyenne explique la diminution de la valeur de la fonction objectif.

2 Localisation optimale des unités de soin

2.1 Choix des villes contenant les unités de soin

Formulation du nouveau programme linéaire :

Etant donné un nombre k d'unités de soins à placer et un paramètre $\alpha > 0$, on a :

Variables de décision :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si un patient de la ville } i \text{ est soigné dans le secteur } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si la ville } i \text{ abrite une des } k \text{ unités de soins à placer} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Fonction objectif :

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} d_{ij} \frac{v_i}{P}, \text{ avec } P = \sum_{i=1}^{n} v_i$$

Sous les contraintes :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 & \forall i \in \{1, ..., n\} & (1) \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} v_i \leq \gamma & \text{avec } \gamma = \frac{1+\alpha}{k} \sum_{i=1}^{n} v_i \text{ et } \alpha > 0, \ \forall j \in \{1, ..., n\} & (2) \\ x_{ij} \leq y_j & \forall i \in \{1, ..., n\}, \ \forall j \in \{1, ..., n\} & (3) \\ \sum_{j=1}^{n} y_j = k & & (4) \\ x_{ij} \in \{0, 1\} & \forall i \in \{1, ..., n\}, \ \forall j \in \{1, ..., n\} & (5) \\ y_j \in \{0, 1\} & \forall j \in \{1, ..., n\} & (6) \end{cases}$$

Où (1) est la contrainte assurant qu'une ville n'est associée qu'à un seul et unique centre et (2) la contrainte permettant de respecter la limite de population par secteur. Cette fois-ci, l'indice j prend ses valeurs dans l'intervalle $[\![1, n]\!]$ pour déterminer les villes acceuillant les centres parmi les 15 villes du jeu de données. La contrainte (3) est une contrainte permettant de spécifier l'implication entre les habitants de la ville i qui sont soignés dans la ville d'indice j et la variable booléenne y_j précisant la présence d'un centre dans cette ville (si $x_{ij} = 1$ alors $y_j = 1$). La contrainte (4) permet de fixer le nombre de centres à un total de k et les contraintes (5) et (6) précisent le caractère booléen des variables de décision.

Solutions du PL :

<u>Avec 3 centres de soins :</u>

Si l'on choisit de placer 3 unités de soin ($k = 3$) avec $\alpha = 0.1$:
On aura que les centres seront situés à Nantes, Montpellier et Dijon.

- L'unité de soin de Nantes doit prendre en charge les patients de : Nantes, Bordeaux, Rennes, Le Havre, Angers.
- L'unité de soin de Montpellier doit prendre en charge les patients de : Toulouse, Nice, Montpellier, Toulon.
- L'unité de soin de Dijon doit prendre en charge les patients de : Strasbourg, Lille, Reims, Saint-étienne, Grenoble, Dijon.

La fonction objectif a pour valeur 228.086 km par habitant.

Si l'on choisit de placer 3 unités de soin ($k = 3$) avec $\alpha = 0.2$:
On aura que les centres seront situés à Nantes, Montpellier et Dijon.

- L'unité de soin de Nantes doit prendre en charge les patients de : Nantes, Bordeaux, Rennes, Le Havre, Angers.

- L'unité de soin de Montpellier doit prendre en charge les patients de : Toulouse, Nice, Montpellier, Toulon.
- L'unité de soin de Dijon doit prendre en charge les patients de : Strasbourg, Lille, Reims, Saint-étienne, Grenoble, Dijon.

La fonction objectif a pour valeur 228.086 km par habitant.
On peut comparer ce résultat avec ce que l'on obtient avec le PL de la question 1 en choisissant de mettre les centres de soin à Nantes, Montpellier et Dijon. Le résultat est identique avec la même répartition de secteurs et la même valeur pour la fonction objectif et ce pour les deux valeurs possibles du paramètre α. Toutes les autres combinaisons de villes autres que celles retournées par le PL de la question 2.1 aboutissent à des valeurs à l'optimum supérieures. Le PL écrit retoune donc bien la localisation optimale des k centres.
Modifier la contrainte (2) n'affecte pas la répartition des différents secteurs. Ce résultat semble correct, car étant donné les villes du jeu de données et leurs populations respectives, on a bien une répartition optimale des centres de soin avec Nantes qui prendra en charge les habitants des villes situés à l'Ouest et au Nord-Ouest, Dijon celles situées à l'Est et au Nord-Est et Montpellier toutes les villes situées au Sud.

Avec 4 centres de soins :

Si l'on choisit de placer 4 unités de soin ($k = 4$) avec $\alpha = 0.1$:
On aura que les centres seront situés à Toulouse, Rennes, Reims et Toulon.

- L'unité de soin de Toulouse doit prendre en charge les patients de : Toulouse, Bordeaux, Saint-étienne.
- L'unité de soin de Rennes doit prendre en charge les patients de : Nantes, Rennes, Le Havre, Angers.
- L'unité de soin de Reims doit prendre en charge les patients de : Strasbourg, Lille, Reims, Dijon.
- L'unité de soin de Toulon doit prendre en charge les patients de : Nice, Montpellier, Toulon, Grenoble.

La fonction objectif a pour valeur 174.350 km par habitant.

Si l'on choisit de placer 4 unités de soin ($k = 4$) avec $\alpha = 0.2$:
On aura que les centres seront situés à Toulouse, Nantes, Reims et Toulon.

- L'unité de soin de Toulouse doit prendre en charge les patients de : Toulouse, Montpellier, Bordeaux.
- L'unité de soin de Nantes doit prendre en charge les patients de : Nantes, Rennes, Angers.
- L'unité de soin de Reims doit prendre en charge les patients de : Strasbourg, Lille, Reims, Le Havre, Dijon.
- L'unité de soin de Toulon doit prendre en charge les patients de : Nice, Saint-étienne, Toulon, Grenoble.

La fonction objectif a pour valeur 167.035 km par habitant.
Une exécution du PL de la question précédente avec en entrée les villes de Toulouse, Nantes, Reims et Toulon retoune le même résultat avec les bonnes affectations et la bonne valeur à l'objectif (idem pour les villes obtenues avec $\alpha = 0.1$). Toute autre combinaison de villes en entrée aboutit à une valeur à l'optimum supérieure ce qui confirme l'optimalité de la solution et du PL écrit.
Cette fois-ci, on remarque que pour $\alpha = 0.2$ par exemple, les 4 centres sont disposés de manière à former les sommets d'un rectangle avec Toulouse pour le Sud-Ouest, Nantes pour le Nord-Ouest, Reims

pour le Nord-Est et Toulon pour le Sud-Est. Relâcher la contrainte (2) sur la population par secteur a remplacé le centre de Rennes par celui de Nantes dont la population est plus importante et a aussi redéfini les associations de plusieurs autres villes. Montpellier est associée à Toulouse ($d_{ij} = 242$) au lieu de Toulon ($d_{ij} = 469$). Les autres changements sont parfois bénéfiques et parfois pénalisants (Le Havre-Reims : 344 km et Le Havre-Rennes : 280 km) mais aboutissent à une amélioration de la distance moyenne entre les habitants et leur centre. On voit l'effet bénéfique d'ajouter un centre sur la valeur à l'optimum qui permet de gagner $228.086 - 167.035 = 61.051$ km en moyenne par habitant.

Avec 5 centres de soins :

Si l'on choisit de placer 5 unités de soin ($k = 5$) avec $\alpha = 0.1$:
On aura que les centres seront situés à Toulouse, Nice, Nantes, Lille et Dijon.

- L'unité de soin de Toulouse doit prendre en charge les patients de : Toulouse, Montpellier.
- L'unité de soin de Nice doit prendre en charge les patients de : Nice, Toulon.
- L'unité de soin de Nantes doit prendre en charge les patients de : Nantes, Bordeaux, Rennes.
- L'unité de soin de Lille doit prendre en charge les patients de : Lille, Reims, Le Havre, Angers.
- L'unité de soin de Dijon doit prendre en charge les patients de : Strasbourg, Saint-étienne, Grenoble, Dijon.

La valeur de la fonction objectif est de 156.856 km par habitant.

Si l'on choisit de placer 5 unités de soin ($k = 5$) avec $\alpha = 0.2$:
On aura que les centres seront situés à Toulouse, Nice, Montpellier, Rennes et Reims.

- L'unité de soin de Toulouse doit prendre en charge les patients de : Toulouse, Bordeaux.
- L'unité de soin de Nice doit prendre en charge les patients de : Nice, Toulon.
- L'unité de soin de Montpellier doit prendre en charge les patients de : Montpellier, Saint-étienne, Grenoble.
- L'unité de soin de Rennes doit prendre en charge les patients de : Nantes, Rennes, Le Havre, Angers.
- L'unité de soin de Reims doit prendre en charge les patients de : Strasbourg, Lille, Reims, Dijon.

La valeur de la fonction objectif est de 134.992 km par habitant.
On retrouve ces mêmes résultats avec le PL de la question 1 en plaçant les centres dans les villes retournées par le PL et ce dans les deux cas. Les solutions retournées sont optimales car toute autre combinaison de ville retourne une valeur à l'optimum supérieure en utilisant le PL de la question 1. On remarque cette fois-ci, que l'on a 3 villes au Sud qui abriteront un centre de soin lorsque $\alpha = 0.2$ ce qui s'explique par le fait que dans le jeu de données, on a bien que les villes du Sud sont en général plus peuplées que les villes du Nord avec Toulouse, Toulon, Bordeaux, Nice, Montpellier, Saint-étienne, Grenoble et Dijon qui totalisent 2 019 019 habitants sur un total de 3 564 500 pour la totalité des villes considérées. On a un écart important entre les deux valeurs à l'objectif (environ 21 km) et une répartition très différente. Les centres choisis pour $\alpha = 0.1$ diffèrent beaucoup de ceux choisis pour $\alpha = 0.2$.
Le gain en distance parcourue est d'environ 30 km par habitant comparé à une couverture comportant 4 unités de soin et de 93.094 km pour une couverture composée de 3 unités de soin.

2.2 Version plus équitable

Le nouveau PL en variables mixtes qui permet d'aboutir à une solution plus équitable est :
Etant donné un nombre k d'unités de soins à placer et un paramètre $\alpha > 0$, on a :
Variables de décision :
- $d(i, f(i))$: la distance séparant un individu de la ville d'indice i à son unité de soin avec $f(i)$ le numéro de la ville abritant une unité de soin.
Si l'on prend comme précédemment les variables :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si un patient de la ville } i \text{ est soigné dans le secteur } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si la ville } j \text{ abrite une des } k \text{ unités de soins à placer} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors on a que :

$$d(i, f(i)) = d_{if(i)}x_{if(i)}$$

Une solution consisterait alors à minimiser la quantité $\max_{i\in I}\ d(i, f(i))$
Fonction objectif :

$$\min z$$

Sous les contraintes :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 & \forall i \in \{1, ..., n\} & (1) \\ z \geq d(i, f(i)) & d(i, f(i)) = \sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_{ij}\ , \forall i \in \{1, ..., n\} & (2) \\ & d(i, f(i)) \in \mathbb{N} & \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij}v_i \leq \gamma & \text{avec } \gamma = \frac{1+\alpha}{k}\sum_{i=1}^{n} v_i \text{ et } \alpha > 0,\ \forall j \in \{1, ..., n\} & (3) \\ x_{ij} \leq y_j & \forall i \in \{1, ..., n\},\ \forall j \in \{1, ..., n\} & (4) \\ \sum_{j=1}^{n} y_j = k & & (5) \\ x_{ij} \in \{0, 1\} & \forall i \in \{1, ..., n\},\ \forall j \in \{1, ..., n\} & (6) \\ y_j \in \{0, 1\} & \forall j \in \{1, ..., n\} & (7) \end{cases}$$

Où (1) est la contrainte assurant qu'une ville n'est associée qu'à un seul et unique centre, (2) la contrainte permettant maximiser la distance entre chaque habitant d'une ville i en spécifiant son centre de soin j grâce au calcul de $d(i, f(i))$. La contrainte (3) permet de respecter la limite de population par secteur et la (4) est une contrainte d'implication identique à celle précisée dans la question précédente. La contrainte (5) fixe le nombre de centre à k et les contraintes (5) et (6) spécifient le caractère booléen des variables de décision.

Applications numériques

$\underline{k = 3}$:

Pour $\alpha = 0.1$, on aura que les centres seront situés à Bordeaux, Reims et Toulon.

- L'unité de soin de Bordeaux doit prendre en charge les patients de : Toulouse, Nantes, Bordeaux, Rennes.
- L'unité de soin de Reims doit prendre en charge les patients de : Strasbourg, Lille, Reims, Le Havre, Dijon, Angers.

- L'unité de soin de Toulon doit prendre en charge les patients de : Nice, Montpellier, Saint-étienne, Toulon, Grenoble.

La fonction objectif a pour valeur 458 km par habitant.
Pour $\alpha = 0.2$, on aura que les centres seront situés à Montpellier, Bordeaux et Reims.

- L'unité de soin de Montpellier doit prendre en charge les patients de : Nice, Montpellier, Saint-étienne, Toulon, Grenoble.
- L'unité de soin de Bordeaux doit prendre en charge les patients de : Toulouse, Nantes, Bordeaux, Rennes, Angers.
- L'unité de soin de Reims doit prendre en charge les patients de : Strasbourg, Lille, Reims, Le Havre, Dijon.

La fonction objectif a pour valeur 458 km par habitant.
Si l'on compare pour $\alpha = 0.1$, la distance maximale d'un individu à son unité de soin est de 458 km et correspond à la distance entre Bordeaux et Rennes. Aucune autre association ne relie des habitants à des centres plus distants. Dans la question précédente, bien que la distance moyenne pour chaque habitant était de 228.086 km, on avait que les lillois devaient se rendre à Dijon pour leurs soins, ce qui nécessite un trajet de 501 km. Cette verison permet donc d'éviter les configurations qui se contentent de minimiser la distance moyenne des habitants et qui imposent parfois de longs trajets à certains citadins et de plus courts trajets à d'autres.

<u>$k = 4$</u> **:**

Pour $\alpha = 0.1$, on aura que les centres seront situés à Nantes, Montpellier, Reims, Grenoble.

- L'unité de soin de Nantes doit prendre en charge les patients de : Nantes, Bordeaux, Rennes, Angers.
- L'unité de soin de Montpellier doit prendre en charge les patients de : Toulouse, Nice, Grenoble.
- L'unité de soin de Reims doit prendre en charge les patients de : Strasbourg, Lille, Reims, Le Havre.
- L'unité de soin de Grenoble doit prendre en charge les patients de : Montpellier, Saint-étienne, Toulon, Dijon.

La fonction objectif a pour valeur 372.0 km par habitant.
Pour $\alpha = 0.2$, on aura que les centres seront situés à Nice, Bordeaux, Le Havre et Dijon.

- L'unité de soin de Nice doit prendre en charge les patients de : Nice, Montpellier, Toulon.
- L'unité de soin de Bordeaux doit prendre en charge les patients de : Toulouse, Nantes, Bordeaux.
- L'unité de soin de Le Havre doit prendre en charge les patients de : Lille, Rennes, Reims, Le Havre, Angers.
- L'unité de soin de Dijon doit prendre en charge les patients de : Strasbourg, Saint-étienne, Grenoble, Dijon.

La fonction objectif a pour valeur 347.0 km par habitant.
Pour $\alpha = 0.2$, la distance maximale qui sépare des habitants de leur centre de soin est de 347 km. C'est la distance qui sépare les Nantais du centre de Bordeaux. Aucune autre distance n'est supérieure à celle-ci et tous les autres citadins sont à une distance inférieure. Si l'on compare ce résultat à celui obtenu dans la question précédente, on voit que dans la répartition précédente, les toulonnais doivent se rendre à Saint-étienne pour se soigner ce qui implique un trajet de 398 km. Là aussi, la valeur à l'optimum est plus importante (comparé aux 167.035 obtenus pour $k = 4$ et $\alpha = 0.2$) mais les écarts entre les distances parcourues par les citadins des différentes villes n'en est pas moins importante.

$\underline{k = 5}$ **:**

Pour $\alpha = 0.1$, on aura que les centres seront situés à Toulouse, Nantes, Montpellier, Le Havre et Dijon.

- L'unité de soin de Toulouse doit prendre en charge les patients de : Toulouse, Montpellier.
- L'unité de soin de Nantes doit prendre en charge les patients de : Nantes, Bordeaux, Rennes.
- L'unité de soin de Montpellier doit prendre en charge les patients de : Nice, Toulon, Grenoble.
- L'unité de soin du Havre doit prendre en charge les patients de : Lille, Reims, Le Havre, Angers.
- L'unité de soin de Dijon doit prendre en charge les patients de : Strasbourg, Saint-étienne, Dijon.

La valeur de la fonction objectif est de 347.0 km par habitant.

Pour $\alpha = 0.2$, on aura que les centres seront situés à Nantes, Bordeaux, Lille, Toulon, Dijon.

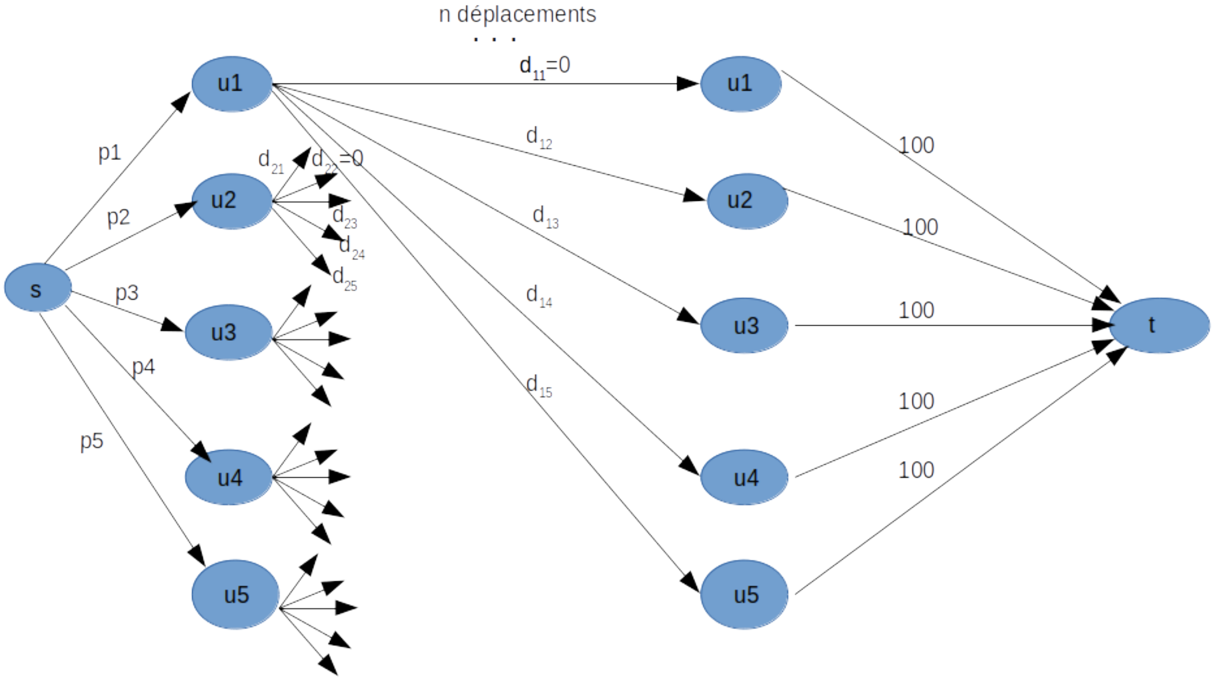
- L'unité de soin de Nantes doit prendre en charge les patients de : Nantes, Rennes, Angers.
- L'unité de soin de Bordeaux doit prendre en charge les patients de : Toulouse, Bordeaux.
- L'unité de soin de Lille doit prendre en charge les patients de : Lille, Reims, Le Havre.
- L'unité de soin du Toulon doit prendre en charge les patients de : Nice, Montpellier, Toulon.
- L'unité de soin de Dijon doit prendre en charge les patients de : Strasbourg, Saint-étienne, Grenoble, Dijon.

La valeur de la fonction objectif est de 332.0 km par habitant.
Si l'on choisit de comparer pour $\alpha = 0.2$, la valeur à l'optimum de la configuration obtenue pour $k = 5$, correspond à la distance séparant les Strasbourgeois du centre de Dijon (332 km) et aucun autre citadin n'est plus éloigné de son centre de soin. Dans la répartition obtenue à la question précédente, les Strasbourgeois doivent parcourir 347 km pour se rendre à Reims. Les écarts sont moins importants que pour les exemples précendents mais avec 5 centres on a une meilleure couverture et les écarts de distance sont donc naturellement plus petits. On a cette fois-ci aussi une plus grande valeur à l'optimum qu'à la question d'avant ce qui est normal étant donné que l'on minimise la distance maximale.

3 Equilibrage des charges des unités de soin

3.1 Formulation du problème :

Nous avons choisi de formuler le problème comme un problème de flot maximum à coût minimum. Le graphe représentant la situation est présenté ci-après :
Les 5 unités sont représentés par les noeuds $u1$, $u2$, $u3$, $u4$, $u5$ et les coûts des tranferts de patients par les poids d_{ij} (distances entres les centres) où $i \in [\![1, 5]\!]$ et $j \in [\![1, 5]\!]$. Le cas où des patients restent dans la même unité de soin se traduit par les $d_{ij} = 0$ si $i = j$. Les demandes initiales des unités étant caractérisées par $p = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ comme présenté sur les arcs sortant de l'état initial s. A la suite de n tranferts, on aboutit à la situation d'équilibre obtenue dans l'état t en fin d'exécution.



3.2 Résolution :

Variables de décision :

$$x_{ij} : \text{le nombre de patients se déplaçant de la ville } i \text{ à la ville } j.$$

Fonction objectif :

$$\min \sum_{i=1,j=1}^{5} x_{ij} d_{ij}$$

Sous les contraintes :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{5} x_{ij} = p_i & i = 1, ..., 5 & (1) \\ \\ \sum_{i=1}^{5} x_{ij} \leq 100 & j = 1, ..., 5 & (2) \\ \\ p_i \in \mathbb{N} & i = 1, ..., 5 & (3) \\ x_{ij} \in \mathbb{N} & i = 1, ..., 5, j = 1, ..., 5 & (4) \end{cases}$$

Résultats :

En testant notre programme pour les villes de Nantes, Bordeaux, Lille, Toulon et Dijon obtenues à la question 2.2 pour $\alpha = 0.2$ avec $p = (150, 150, 25, 150, 25)$, on obtient que :

$$\begin{pmatrix} 100 & 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 25 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$

Sur les 150 personnes demandant à être soignées à Nantes, 100 le seront et 50 seront transférées à Lille.
Sur les 150 personnes souhaitant être soignées à Bordeaux, 100 le seront et 25 iront à Lille et les 25 restants iront à Dijon.
Sur les 25 personnes souhaitant se soigner à Lille, la totalité le sera.
Sur les 150 personnes souhaitant être soignées à Toulon, 100 le sera et 50 personnes seront transférées à Dijon. Enfin la totalité des 25 personnes voulant être soignées à Dijon le sera.
La somme sur chaque colonne permet de bien vérifier que la capacité limite de chaque unité a bien été respectée avec aucune somme supérieure à 100 et l'on retrouve bien les 500 patients en faisant le total.
La somme sur les lignes permet de retrouver les demandes pour chaque ville comme précisé dans le paramètre p (150 pour Nantes, 150 pour Bordeaux, ect...).
On a que la valeur à l'objectif est de 94 175 km, ce que l'on retrouve en calculant :

$$\sum_{i=1,j=1}^{5} x_{ij} d_{ij} \text{ avec } d_{ij} = 0 \text{ si } i = j$$