

1.- EXPERIMENTOS ALEATORIOS. SUCESOS

Experimento aleatorio

Es aquel cuyo resultado depende del azar y, aunque conocemos todos los resultados, no se puede predecir de antemano el resultado que se va a obtener.

Por ejemplo, lanzar un dado o una moneda son experimentos aleatorios.

Los experimentos aleatorios pueden ser *simples* o *compuestos*.

Son simples aquellos que constan de una sola etapa. Por ejemplo, lanzar una moneda al aire.

Son compuestos si constan de varias etapas. Por ejemplo, lanzar un dado cinco veces o el experimento que consiste en tirar una moneda y luego sacar una bola de una bolsa.

Espacio muestral de un experimento aleatorio

Es el conjunto formado por todos los resultados que podemos obtener al hacer el experimento.

El espacio muestral se representa con la letra E.

Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado, el espacio muestral es $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Suceso aleatorio

Es un subconjunto del espacio muestral y, por tanto, está formado por algunos resultados del experimento aleatorio.

Los sucesos se representan con letras mayúsculas

Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado, $A = \text{salir número par} = \{2, 4, 6\}$ es un suceso

Probabilidad de un suceso aleatorio

Si en un experimento aleatorio todos los resultados tienen la misma posibilidad de aparecer, para calcular la probabilidad de un suceso se divide el número de casos favorables al suceso entre el número de casos posibles:

REGLA DE LAPLACE : $p(A) = \frac{\text{Casos favorables a que ocurra } A}{\text{Casos posibles}} = \frac{\text{Nº de elementos de } A}{\text{Nº de elementos de } E}$
--

La probabilidad nos indica si es más o menos frecuente que ocurra dicho suceso.

La probabilidad de un suceso siempre es un número entre 0 y 1 (ambos incluidos): $0 \leq p(A) \leq 1$, pues el número de casos favorables siempre es menor o igual al número de casos posibles

Suceso seguro

Es aquel que siempre ocurre al realizar el experimento.

Por ejemplo, al lanzar una moneda el suceso $A = \text{"salir cara o cruz"} = \{C, X\}$ siempre ocurre, pues al lanzar la moneda siempre saldrá cara o cruz. A es un suceso seguro.

Observa que A coincide con el espacio muestral, E.

La probabilidad del suceso seguro es 1: $p(E) = 1$

Suceso imposible

Es aquel que nunca ocurre. Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado, el suceso $A = \text{"salir un número mayor que 6"}$ nunca ocurre. A es un suceso imposible.

El suceso imposible es el conjunto "que no tiene ningún elemento"

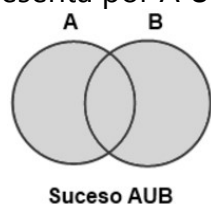
Este conjunto se llama conjunto vacío y se representa con el símbolo \emptyset

La probabilidad del suceso imposible es 0: $p(\emptyset) = 0$

Unión de sucesos

La unión de dos sucesos A y B es otro suceso formado "juntando" los elementos de A y B.

La unión de A y B se representa por $A \cup B$. (Observa que $A \cup B = B \cup A$)



$A \cup B$ significa que "ocurre A ó B"

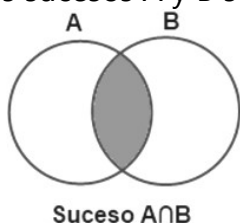
Ejemplo

En el lanzamiento de un dado, si tomamos los sucesos: $\begin{cases} A = \text{"salir n}^\circ \text{ par"} = \{2, 4, 6\} \\ B = \text{"salir n}^\circ \text{ primo"} = \{2, 3, 5\} \end{cases}$
entonces $A \cup B = \text{"salir un n}^\circ \text{ par o un n}^\circ \text{ primo"} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

Intersección de sucesos

La intersección de dos sucesos A y B es otro suceso formado por los elementos comunes de A y B.

La intersección de los sucesos A y B se representa por $A \cap B$. (Observa que $A \cap B = B \cap A$)

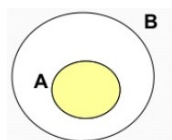


$A \cap B$ significa que "ocurre A y ocurre B"

Ejemplo

En el lanzamiento de un dado, si tomamos los sucesos: $\begin{cases} A = \text{"salir n}^\circ \text{ par"} = \{2, 4, 6\} \\ B = \text{"salir n}^\circ \text{ primo"} = \{2, 3, 5\} \end{cases}$
entonces $A \cap B = \text{salir n}^\circ \text{ par y n}^\circ \text{ primo} = \{2\}$

Si $A \subset B$, $A \cap B = A$



. En particular $A \cap (A \cup B) = A$, pues $A \subset A \cup B$

Se puede demostrar que $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Sucesos compatibles y sucesos incompatibles

Dos sucesos A y B son compatibles cuando al realizar un experimento pueden ocurrir al mismo tiempo.

Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado los sucesos $A = \text{"salir un número par"} = \{2, 4, 6\}$

y $B = \text{"salir un número primo"} = \{2, 3\}$ son compatibles, pues si sale un 2 ocurren los dos sucesos a la vez (2 es un número par y también es un número primo).

Si A y B son compatibles, hay elementos repetidos en A y B. En el ejemplo anterior $A \cap B = \{2\} \neq \emptyset$

En general, A y B son compatibles $\leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$



Dos sucesos A y B son *incompatibles* cuando al realizar un experimento **no** pueden ocurrir al mismo tiempo.

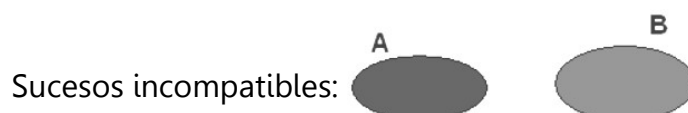
Por ejemplo, si sacamos al azar una carta de la baraja, los sucesos A = "salir un basto" y B = "salir una espada" son incompatibles, pues no puede salir a la vez un basto y una espada.

Si A y B son incompatibles, no hay elementos repetidos en A y B. En el ejemplo anterior $A \cap B = \emptyset$

En general, A y B son incompatibles $\leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

Ten en cuenta que si A y B son incompatibles, entonces

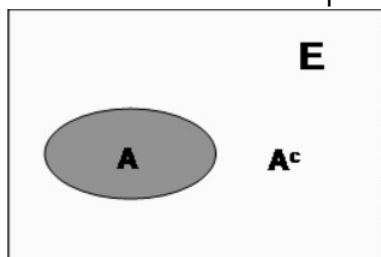
$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - \overbrace{p(A \cap B)}^{\text{vale 0}} \Rightarrow \boxed{\text{si A y B son incompatibles, } p(A \cup B) = p(A) + p(B)}$$



Suceso contrario o complementario

Dado un suceso A, el suceso contrario o complementario de A es aquel que expresa lo contrario de lo que expresa el suceso A. Se representa por A^c o también por \bar{A} .

El suceso A^c está formado por los elementos del espacio muestral que no están en A



Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado, si A = "salir número par" = {2, 4, 6}, entonces el suceso contrario es A^c = "no salir número par" = "salir número impar" = {1, 3, 5}

Las propiedades más importantes del suceso complementario son:

$$1) A \text{ y } A^c \text{ son incompatibles (es decir } A \cap A^c = \emptyset) \quad 2) A \cup A^c = E \quad 3) (A^c)^c = A$$

$$4) \text{ Leyes de Morgan : } \begin{cases} (A \cup B)^c = A^c \cap B^c \\ (A \cap B)^c = A^c \cup B^c \end{cases}$$

$$E = A \cup A^c \text{ y } A, A^c \text{ son incompatibles} \Rightarrow \overbrace{p(E)}^{\text{vale 1}} = p(A \cup A^c) = p(A) + p(A^c)$$

Ten en cuenta:

$$\text{Luego, } p(A) + p(A^c) = 1 \Rightarrow \begin{cases} p(A^c) = 1 - p(A) \\ p(A) = 1 - p(A^c) \end{cases}$$

Por ejemplo, si $p(A) = 0,3 \rightarrow p(A^c) = 1 - 0,3 = 0,7$

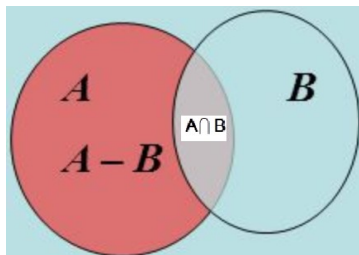
Diferencia de dos sucesos.

Dados dos sucesos A y B, se define $A - B$ como el suceso que expresa: "ocurre A y no ocurre B".

Es decir $A - B = A \cap B^c$.

Los elementos de $A - B$ se obtienen tomando los elementos de A que no estén en B.

Es decir, $A - B$ se obtiene "quitándole" a los elementos de A los de $A \cap B$



$$\text{Por tanto, } p(A - B) = p(A \cap B^c) = p(A) - p(A \cap B)$$

Probabilidad condicionada

Dados dos sucesos, A y B, con $p(B) \neq 0$, se llama probabilidad de A condicionada a B a la probabilidad de que ocurra A sabiendo que ha ocurrido B.

La probabilidad de A condicionada a B se representa por $p(A/B)$ y se puede calcular usando la fórmula:

$$p(A / B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Si despejamos $P(A \cap B)$ de la fórmula anterior se obtiene: $p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A/B)$

Sucesos independientes

Dos sucesos A y B son independientes si $p(A/B) = p(A)$ y $p(B/A) = p(B)$

Se aquí se deduce que A y B son independientes $\Leftrightarrow p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

Para tres sucesos se cumpliría A, B y C son independientes $\Leftrightarrow p(A \cap B \cap C) = p(A) \cdot p(B) \cdot p(C)$

Análogamente si hubiese más de tres sucesos.

Se puede demostrar que si A y B son independientes, entonces también son independientes A y B^c , A^c y B , A^c y B^c

Por ejemplo, $p(A \cap B^c) = p(A) - p(A \cap B) \xrightarrow{\text{como A y B son independientes}} p(A) - p(A) \cdot p(B)$

Sacando factor común: $p(A) \cdot [1 - p(B)] = p(A) \cdot p(B^c) \Rightarrow A$ y B^c son independientes

$$\text{Ten en cuenta que } \begin{cases} p(A / B^c) = \frac{p(A \cap B^c)}{p(B^c)} = \frac{p(A) - p(A \cap B)}{1 - p(B)} \\ p(A^c / B) = \frac{p(A^c \cap B)}{p(B)} = \frac{p(B) - p(A \cap B)}{p(B)} \\ p(A^c / B^c) = \frac{p(A^c \cap B^c)}{p(B^c)} = \frac{p(A \cup B)^c}{1 - p(B)} = \frac{1 - p(A \cup B)}{1 - p(B)} \end{cases}$$

Ejercicio de clase 1

Sean A, B y C tres sucesos de los que se sabe que A y B son independientes, A y C son incompatibles, $p(A) = 0,4$, $p(A \cap B) = 0,1$ y $p(C) = 0,2$. Calcule las probabilidades de los siguientes sucesos:

- a) Que suceda A si no sucede B b) Que no suceda ni A ni C
c) Que si no sucede B tampoco suceda A. (Propuesto PAU Andalucía 2017)

Solución

$$a) p(A / B^c) = \frac{p(A \cap B^c)}{p(B^c)} = \frac{p(A) - p(A \cap B)}{1 - p(B)} \text{ (hay que calcular antes } p(B))$$

$$\text{Como A y B son independientes} \Rightarrow p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) \Rightarrow 0,1 = 0,4 \cdot p(B) \Rightarrow p(B) = \frac{0,1}{0,4} = 0,25$$

$$\text{Luego, } p(A / B^c) = \frac{0,4 - 0,1}{1 - 0,25} = 0,4$$

$$b) p(A^c \cap C^c) \xrightarrow{\text{Por una de las leyes de Morgan}} p(A \cup C)^c = 1 - p(A \cup C) = 1 - \left[p(A) + p(C) - \overbrace{p(A \cap C)}^{\text{vale 0 porque A y C son incompatibles}} \right]$$

$$\text{Luego, } p(A^c \cap C^c) = 1 - (0,4 + 0,2 - 0) = 0,4$$

$$c) p(A^c / B^c) = \frac{p(A^c \cap B^c)}{p(B^c)} \xrightarrow{\text{Por las leyes de Morgan}} \frac{p(A \cup B)^c}{1 - p(B)} = \frac{1 - p(A \cup B)}{1 - p(B)}, \text{ hay que calcular antes } p(A \cup B)$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \xrightarrow{p(B) = 0,25 \text{ (se vió en a)}} 0,4 + 0,25 - 0,1 = 0,55$$

$$\text{Luego, } p(B^c / A^c) = \frac{1 - 0,55}{1 - 0,25} = 0,6$$

Ejercicio de clase 2

De los sucesos A y B se sabe que $p(A) = 0,6$, $p(B/A) = 0,8$ y $p(B/A^c) = 0,1$.

- a) Calcule las probabilidades $p(B)$, $p(A \cap B)$ y $p(A \cup B)$.
b) ¿Son los sucesos A y B independientes? (Propuesto PAU Andalucía 2017)

Solución

$$a) \text{ Como } p(B / A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} \xrightarrow{\text{sustituyendo}} 0,8 = \frac{p(B \cap A)}{0,6} \xrightarrow{\text{despejando}} \boxed{p(A \cap B) = 0,48}$$

$$\text{Como } p(B / A^c) = \frac{p(B \cap A^c)}{p(A^c)} = \frac{p(B) - p(A \cap B)}{1 - p(A)} \xrightarrow{\text{sustituyendo}} 0,1 = \frac{p(B) - 0,48}{\underbrace{1 - 0,6}_{\text{es } 0,4}} \xrightarrow{\text{despejando}} p(B) = 0,1 \cdot 0,4 + 0,48 = \boxed{0,52}$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \xrightarrow{\text{sustituyendo}} p(A \cup B) = 0,6 + 0,52 - 0,48 = \boxed{0,64}$$

$$b) \begin{cases} p(A \cap B) = 0,48 \\ p(A) \cdot p(B) = 0,6 \cdot 0,52 = 0,312 \end{cases} \Rightarrow \text{Como } p(A \cap B) \neq p(A) \cdot p(B), \text{ A y B no son independientes (son dependientes)}$$

Ejercicio de clase 3

De los sucesos A y B de un experimento aleatorio se conocen las siguientes probabilidades:

$$p(A) = 0,4 \quad p(B) = 0,5 \quad p(A \cup B)^c = 0,1$$

- a) Razone si A y B son sucesos compatibles. b) Razone si A y B son sucesos independientes.
c) Calcule $p(A \cap B^c)$. d) Calcule $p(A/B^c)$. (Propuesto PAU Andalucía 2016)

Solución

$$a) p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \xrightarrow{\text{como } p(A \cup B) = 1 - 0,1 = 0,9} 0,9 = 0,4 + 0,5 - p(A \cap B)$$

Despejando: $p(A \cap B) = 0$. Por tanto, A y B son incompatibles (luego, no son compatibles)

$$b) \begin{cases} p(A \cap B) = 0 \\ p(A) \cdot p(B) = 0,4 \cdot 0,5 = 0,2 \end{cases} \Rightarrow \text{Como } p(A \cap B) \neq p(A) \cdot p(B), \text{ A y B no son independientes}$$

$$c) p(A \cap B^c) = p(A) - p(A \cap B) = 0,4 - 0 = \boxed{0,4}$$

$$d) p(A / B^c) = \frac{p(A \cap B^c)}{p(B^c)} = \frac{0,4}{1 - 0,5} = \boxed{0,8}$$

Ejercicio de clase 4

Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que $p(A) = 0,3$, $p(B) = 0,6$ y $p(A^c \cap B^c) = 0,28$.

- a) Halle la probabilidad de que ocurran ambos sucesos a la vez.
b) Calcule la probabilidad de que ocurra A sabiendo que no ha ocurrido B.
c) ¿Son A y B independientes? (Propuesto PAU Andalucía 2016)

Solución

a) Nos piden $p(A \cap B)$. Como $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, tenemos antes que calcular $p(A \cup B)$

$$\text{Como } p(A^c \cap B^c) \xrightarrow{\text{por las leyes de Morgan}} p(A \cup B)^c \Rightarrow p(A \cup B) = 1 - \overbrace{p(A^c \cap B^c)}^{\text{es } p(A^c \cap B^c) = 0,28} = 1 - 0,28 = 0,72$$

$$\text{Sustituyendo } 0,72 = 0,3 + 0,6 - p(A \cap B) \xrightarrow{\text{despejando}} p(A \cap B) = 0,3 + 0,6 - 0,72 = \boxed{0,18}$$

$$b) \text{ Nos piden } p(A / B^c) = \frac{p(A \cap B^c)}{p(B^c)} = \frac{p(A) - p(A \cap B)}{1 - p(B)} = \frac{0,3 - 0,18}{1 - 0,6} = \boxed{0,3}$$

$$c) \begin{cases} p(A \cap B) = 0,18 \\ p(A) \cdot p(B) = 0,3 \cdot 0,6 = 0,18 \end{cases} \Rightarrow \text{Como } p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B), \text{ A y B son independientes}$$

Ejercicio de clase 5

Sean dos sucesos A y B tales que $p(A) = 0,25$, $p(B) = 0,6$, $p(A \cap B^c) = 0,1$

- a) Calcule la probabilidad de que ocurra A y ocurra B.
b) Calcule la probabilidad de que no ocurra A pero sí ocurra B.
c) Calcule la probabilidad de que ocurra A sabiendo que ha ocurrido B.
d) ¿Son independientes A y B? (Propuesto PAU Andalucía 2015)

Solución

$$a) \text{ Nos piden } p(A \cap B). \text{ Como } p(A \cap B^c) = p(A) - p(A \cap B) \Rightarrow 0,1 = 0,25 - p(A \cap B) \Rightarrow p(A \cap B) = 0,25 - 0,1 = \boxed{0,15}$$

$$b) \text{ Nos piden } p(A^c \cap B) = p(B) - p(A \cap B) = 0,6 - 0,15 = \boxed{0,45}$$

$$c) \text{ Nos piden } p(A / B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0,15}{0,6} = \boxed{0,25}$$

c) Son independientes porque $p(A / B) = p(A) = 0,25$

Ejercicio de clase 6

Sean A y B dos sucesos del mismo experimento aleatorio tales que $p(A) = 1/6$, $p(B) = 1/3$ y $p(A \cup B) = 1/2$. a) ¿Son A y B incompatibles? ¿Son independientes? b) Calcule $p[A/(A \cup B)]$ (Propuesto Selectividad Andalucía 2005)

Solución

a) Primero hallamos $p(A \cap B)$. Como $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, despejando

$$p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = 0. \text{ Por tanto, A y B son incompatibles}$$

$$\begin{cases} p(A \cap B) = 0 \\ p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18} \Rightarrow \text{Como } p(A \cap B) \neq p(A) \cdot p(B), \text{ A y B no son independientes} \end{cases}$$

$$b) p[A/(A \cup B)] = \frac{p[A \cap (A \cup B)]}{p(A \cup B)} \xrightarrow{\text{como } A \subset A \cup B \Rightarrow A \cap (A \cup B) = A} \frac{p(A)}{p(A \cup B)} = \frac{1/6}{1/2} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

Ejercicio de clase 7

Dado un espacio muestral E se consideran los sucesos A y B, cuyas probabilidades son $p(A) = \frac{2}{3}$

y $p(B) = \frac{1}{2}$. a) ¿Pueden ser los sucesos A y B incompatibles? ¿Por qué?

b) Suponiendo que los sucesos A y B son independientes, calcule $p(A \cup B)$.

c) Suponiendo que $A \cup B = E$, calcule $p(A \cap B)$. (Propuesto PAU Andalucía 2001)

Solución

a) Supongamos que fuesen incompatibles (entonces $p(A \cap B) = 0$). Luego $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 0 = \frac{7}{6} > 1$, lo que es imposible, pues la probabilidad de un suceso siempre es menor o igual a 1.

b) Como A y B son independientes, $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$.

$$\text{Luego } p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A) \cdot p(B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{5}{6}}$$

$$c) \text{ Como } A \cup B = E \Rightarrow \overbrace{p(A \cup B)}^{\text{vale 1}} = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \Rightarrow p(A \cap B) = p(A) + p(B) - 1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 1 = \boxed{\frac{1}{6}}$$

Ejercicio de clase 8

De los sucesos independientes A y B se sabe que $p(A^c) = 0.4$ y $p(A \cup B) = 0.8$

a) Halle la probabilidad de B. b) Halle la probabilidad de que no se verifique B si se ha verificado A.

c) ¿Son incompatibles los sucesos A y B? (Propuesto PAU Andalucía 2013)

Solución

a) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$. Como $p(A) = 1 - p(A^c) = 1 - 0.4 = 0.6$

y $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$ por ser A y B independientes. Llamamos, $x = p(B)$

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A) \cdot p(B)$, sustituimos:

$$0.8 = 0.6 + x - 0.6x \Rightarrow 0.2 = 0.4x \Rightarrow x = \frac{0.2}{0.4} = 0.5 \Rightarrow \boxed{p(B) = 0.5}$$

b) Como A y B son independientes, A y B^c también lo son

$$\text{Entonces, } p(B^c / A) = p(B^c) = 1 - p(B) = 1 - 0.5 = \boxed{0.5}$$

c) Como $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = 0.6 \cdot 0.5 = 0.3 \neq 0$, A y B no son incompatibles (son compatibles)

Ejercicio de clase 9

Dados los sucesos A y B de un mismo espacio muestral se sabe que:

$$p(A) = 2/3, \quad p(B) = 1/5 \quad \text{y} \quad p(A \cup B) = 5 p(A \cap B)$$

a) Calcular la probabilidad de que se verifiquen los dos sucesos A y B.

b) Calcular la probabilidad de que solo se verifique el suceso A. (Propuesto PAU Andalucía 1997)

Solución

a) Nos piden $p(A \cap B)$. Como $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ entonces

$$5p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \Rightarrow 6p(A \cap B) = p(A) + p(B) \Rightarrow p(A \cap B) = \frac{p(A) + p(B)}{6} = \frac{2/3 + 1/5}{6} = \boxed{\frac{13}{90}}$$

$$b) \text{ Nos piden } p(A \cap B^c) = p(A) - p(A \cap B) = \frac{2}{3} - \frac{13}{90} = \boxed{\frac{47}{90}}$$

Hacer actividades 1 a 12**Ejercicio de clase 10**

En un estudio sobre los niveles de audiencia de dos cadenas de radio, se obtuvo que el 50% de la población escucha la cadena A, el 40% escucha la cadena B y el 20% oye ambas.

a) Halle el porcentaje de la población que escucha alguna de las dos cadenas.

b) Calcule el porcentaje de la población que escucha solo la cadena B.

c) Halle el porcentaje de la población que escucha solo una de las dos cadenas.

(Propuesto PAU Andalucía 2017)

Solución

A = "escuchar la cadena A" B = "escuchar la cadena B"

Según el enunciado : $p(A) = 50\% = 0,5$ $p(B) = 40\% = 0,4$ $p(A \cap B) = 20\% = 0,2$

$$a) p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,5 + 0,4 - 0,2 = 0,7 = \boxed{70\%}$$

$$b) p(B \cap A^c) = p(B) - p(A \cap B) = 0,4 - 0,2 = 0,2 = \boxed{20\%}$$

$$c) p(B \cap A^c) + p(A \cap B^c) = p(B) - p(A \cap B) + p(A) - p(A \cap B) = p(B) + p(A) - 2 p(A \cap B) = 0,4 + 0,5 - 2 \cdot 0,2 = 0,5 = \boxed{50\%}$$

Ejercicio de clase 11

Marta tiene dos trajes rojos, un traje azul y uno blanco. Además, tiene un par de zapatos de color rojo, otro de color azul y dos pares blancos. Si decide aleatoriamente qué ponerse, determine las probabilidades de los siguientes sucesos: a) Llevar un traje rojo y unos zapatos blancos.

b) No ir toda vestida de blanco. c) Calzar zapatos azules o blancos.

(Propuesto PAU Andalucía 2016)

Solución

$$TR = \text{"llevar traje rojo"}, \quad p(TR) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad TA = \text{"llevar traje azul"}, \quad p(TA) = \frac{1}{4} \quad TB = \text{"llevar traje blanco"}, \quad p(TB) = \frac{1}{4}$$

$$ZR = \text{"llevar zapatos rojos"}, \quad p(ZR) = \frac{1}{4} \quad ZA = \text{"llevar zapatos azules"}, \quad p(ZA) = \frac{1}{4} \quad ZB = \text{"llevar zapatos blancos"}, \quad p(ZB) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

La elección de una prenda es independiente de la elección de la otra.

Luego, los sucesos elegir traje y elegir zapatos son independientes.

$$a) p(TR \cap ZB) = p(TR) \cdot p(ZB) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{4}} \quad b) 1 - p(TB \cap ZB) = 1 - p(TB) \cdot p(ZB) = 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{7}{8}}$$

$$c) p(ZA \cup ZB) \xrightarrow{\text{son sucesos incompatibles}} p(ZA) + p(ZB) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

Ejercicio de clase 12

El 60% de los jóvenes de una ciudad usa Facebook, el 80% usa WhatsApp y el 4% usa Facebook pero no WhatsApp.

- Halle el porcentaje de jóvenes de esa ciudad que usa ambas aplicaciones.
- Calcule el porcentaje de esos jóvenes que usa WhatsApp pero no Facebook.
- Entre los jóvenes que usan WhatsApp, ¿qué porcentaje usa también Facebook?
- Los sucesos "usar Facebook" y "usar WhatsApp", ¿son independientes?

(Propuesto PAU Andalucía 2016)

Solución

$A = \text{"usar Facebook"}$ $B = \text{"usar WhatsApp"}$

Según el enunciado : $p(A) = 60\% = 0,6$ $p(B) = 80\% = 0,8$ $p(A \cap B^c) = 4\% = 0,04$

a) como $p(A \cap B^c) = p(A) - p(A \cap B) \Rightarrow 0,04 = 0,6 - p(A \cap B) \Rightarrow p(A \cap B) = 0,6 - 0,04 = 0,56 = \boxed{56\%}$

b) $p(B \cap A^c) = p(B) - p(A \cap B) = 0,8 - 0,56 = 0,24 = \boxed{24\%}$ c) $p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0,56}{0,8} = 0,7 = \boxed{70\%}$

d) $\begin{cases} p(A \cap B) = 0,56 \\ p(A) \cdot p(B) = 0,6 \cdot 0,8 = 0,48 \end{cases} \Rightarrow \text{Como } p(A \cap B) \neq p(A) \cdot p(B), A \text{ y } B \text{ no son independientes}$

Ejercicio de clase 13

Se sabe que el 80% de los visitantes de un determinado museo son andaluces y que el 55% son andaluces y adultos. Además, el 17% de los visitantes son no andaluces y adultos. Se elige, al azar, un visitante del museo:

- ¿Cuál es la probabilidad de que no sea adulto?
- Si es adulto, ¿cuál es la probabilidad de que sea andaluz?

(Propuesto PAU Andalucía 2014)

Solución

$A = \text{"ser andaluz"}$, $p(A) = 80\% = 0,8$ $B = \text{"ser adulto"}$ $p(A \cap B) = 55\% = 0,55$ $p(A^c \cap B) = 17\% = 0,17$

a) como $p(A^c \cap B) = p(B) - p(A \cap B) \Rightarrow 0,17 = p(B) - 0,55 \Rightarrow p(B) = 0,17 + 0,55 = 0,72$

Nos piden $p(B^c) = 1 - p(B) = 1 - 0,72 = 0,28 = \boxed{28\%}$

b) $p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0,55}{0,72} \cong 0,764 = \boxed{76,4\%}$

Ejercicio de clase 14

Lena y Adrián son aficionados al tiro con arco. Lena da en el blanco con probabilidad de $\frac{7}{11}$ y Adrián con probabilidad de $\frac{9}{13}$. Si ambos sucesos son independientes, calcule la probabilidad de los siguientes sucesos: a) "Ambos dan en el blanco" b) "sólo Lena da en el blanco"

- "Al menos uno da en el blanco"

(Propuesto PAU Andalucía 2009)

Solución

$$\begin{cases} A = \text{"Lena da en el blanco"}, p(A) = \frac{7}{11} \\ B = \text{"Adrián da en el blanco"}, p(B) = \frac{9}{13} \end{cases}$$

a) como A y B son independientes $\rightarrow p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = \frac{7}{11} \cdot \frac{9}{13} = \frac{63}{143}$

b) $p(A \cap B^c) = p(A) - p(A \cap B) = \frac{7}{11} - \frac{63}{143} = \frac{28}{143}$ c) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{7}{11} + \frac{9}{13} - \frac{63}{143} = \frac{127}{143}$

Ejercicio de clase 15

El examen de Matemáticas de un alumno consta de dos ejercicios. La probabilidad de que resuelva el primero es del 30%, la de que resuelva ambos es del 10%, y la de que no resuelva ninguno es del 35%. Calcule las probabilidades de los siguientes sucesos:

- a) Que el alumno resuelva el segundo ejercicio.
b) Que resuelva el segundo ejercicio, sabiendo que no ha resuelto el primero.

(Propuesto PAU Andalucía 2008)

Solución

$$\begin{cases} A = \text{"resolver bien el primer ejercicio"}, p(A) = 30\% = 0,3 \\ B = \text{"resolver bien el segundo ejercicio"} \end{cases} \quad p(A \cap B) = 10\% = 0,1 \quad p(A^c \cap B^c) = 35\% = 0,35$$

a) Nos piden $p(B)$. Pero como $p(A^c \cap B^c) = p(A \cup B)^c = 1 - [p(A) + p(B) - p(A \cap B)]$

$$0,35 = 1 - (0,3 + p(B) - 0,1) \Rightarrow 0,35 = 0,8 - p(B) \Rightarrow p(B) = 0,8 - 0,35 = 0,45 = \boxed{45\%}$$

b) $p(B / A^c) = \frac{p(B \cap A^c)}{p(A^c)} = \frac{p(B) - p(A \cap B)}{1 - p(A)} = \frac{0,45 - 0,1}{1 - 0,3} = 0,5 = \boxed{50\%}$

Ejercicio de clase 16

En una ciudad, el 40% de sus habitantes lee el diario A, el 25% lee el diario B y el 50% lee al menos uno de los dos diarios. a) Los sucesos "leer el diario A" y "leer el diario B" ¿son independientes?

b) Entre los que leen el diario A, ¿qué porcentaje lee también el diario B?

c) Entre los que leen, al menos, un diario ¿qué porcentaje lee los dos?

d) Entre los que no leen el diario A, ¿qué porcentaje lee el diario B?

(Propuesto PAU Andalucía 2004)

Solución

$$\begin{cases} A = \text{"leer el diario A"}, p(A) = 40\% = 0,4 \\ B = \text{"leer el diario B"}, p(B) = 25\% = 0,25 \end{cases} \quad p(A \cup B) = 50\% = 0,5$$

a) Como $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \Rightarrow 0,5 = 0,4 + 0,25 - p(A \cap B) \Rightarrow p(A \cap B) = 0,15$

$$\begin{cases} p(A \cap B) = 0,15 \\ p(A) \cdot p(B) = 0,4 \cdot 0,25 = 0,1 \end{cases} \Rightarrow \text{Como } p(A \cap B) \neq p(A) \cdot p(B), A \text{ y } B \text{ no son independientes}$$

b) $p(B / A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{0,15}{0,4} = 0,375 = \boxed{37,5\%}$

c) $p(A \cap B / A \cup B) = \frac{p(A \cap B \cap A \cup B)}{p(A \cup B)}$ (como $A \cap B \subset A \cup B \Rightarrow A \cap B \cap A \cup B = A \cap B$)

Nos quedaría $\frac{p(A \cap B)}{p(A \cup B)} = \frac{0,15}{0,5} = 0,3 = \boxed{30\%}$

d) $p(B / A^c) = \frac{p(B \cap A^c)}{p(A^c)} = \frac{p(B) - p(A \cap B)}{1 - p(A)} = \frac{0,25 - 0,15}{1 - 0,4} = 0,167 = \boxed{16,7\%}$

Hacer actividades 13 a 19

Ejercicio de clase 17

Un experimento aleatorio consiste en lanzar simultáneamente dos dados con las caras numeradas del 1 al 6. Calcule la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:

- a) Obtener dos unos. b) Obtener al menos un dos. c) Obtener dos números distintos.
d) Obtener una suma igual a cuatro. (Propuesto PAU Andalucía 2007)

Solución

El nº de resultados posibles es $6 \cdot 6 = 36$

a) $A = \text{"salir dos unos"} = \{11\}$ (hay 1 caso favorable) $\Rightarrow p(A) = \frac{1}{36}$

b) $A = \text{"salir al menos un 2"} ; A^c = \text{"no salir ningún 2"} \text{ (hay } 5 \cdot 5 = 25 \text{ casos favorables a } A^c)$

$$p(A) = 1 - p(A^c) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$$

c) $A = \text{"salir números distintos"} ; A^c = \text{"salir números iguales"} = \{11, 22, \dots, 55, 66\}$ (hay 6 casos favorables a A^c)

$$p(A) = 1 - p(A^c) = 1 - \frac{6}{36} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

d) $A = \text{"suma de los puntos igual a 4"} = \{13, 31, 22\}$ (hay 3 casos favorables) $\Rightarrow p(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

Ejercicio de clase 18

Laura tiene un dado con tres caras pintadas de azul y las otras tres de rojo. María tiene otro dado con tres caras pintadas de rojo, dos de verde y una de azul. Cada uno tira su dado y observan el color.

- a) Describa el espacio muestral asociado y las probabilidades de los sucesos elementales.

- b) Si salen los dos colores iguales gana Laura; y si sale el color verde, gana María.

Calcule la probabilidad que tiene cada uno de ganar. (Propuesto PAU Andalucía 2006)

Solución

a) Suponiendo que sea Laura la primera en tirar y $A = \text{"salir cara azul"} , R = \text{"salir cara roja"} , V = \text{"salir cara verde"}$
 $E = \{AR, AV, AA, RR, RV, RA\}$. Observamos que el resultado obtenido por María no depende del obtenido por Laura

$$p(AR) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4} \quad p(AV) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6} \quad p(AA) = \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \quad p(RR) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4} \quad p(RV) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6} \quad p(RA) = \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

b) Sea $L = \text{"gana Laura"} = \text{"salen colores iguales"} = \{AA, RR\} \Rightarrow p(L) = p(AA) + p(RR) = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$

Sea $M = \text{"gana María"} = \text{"sale color verde"} = \{AV, RV\} \Rightarrow p(M) = p(AV) + p(RV) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

Ejercicio de clase 19

En un juego se sortea cada día un premio utilizando papeletas con tres cifras, numeradas del 000 al 999.

- Calcule la probabilidad de que el número premiado termine en 5.
- Calcule la probabilidad de que el número premiado termine en 55.
- Sabiendo que ayer salió premiado un número terminado en 5, calcule la probabilidad de que el número premiado hoy termine también en 5. (Propuesto PAU Andalucía 2005)

Solución

El nº de resultados posibles es 1000

- a) $A = \text{"el número termina en 5"}$. De los 1000 números hay $1000 : 10 = 100$ que terminan en 5.

$$\text{Luego, hay 100 casos favorables al suceso } A \Rightarrow p(A) = \frac{100}{1000} = \boxed{\frac{1}{10}}$$

- b) $B = \text{"el número termina en 55"}$. De los 1000 números hay $1000 : 100 = 10$ que terminan en 55.

$$\text{Luego, hay 10 casos favorables al suceso } B \Rightarrow p(B) = \frac{10}{1000} = \boxed{\frac{1}{100}}$$

- c) Como el resultado de un sorteo de ayer es independiente

del resultado del sorteo de hoy, la probabilidad es $\boxed{\frac{1}{10}}$

Ejercicio de clase 20

Una persona lanza dos veces consecutivas un dado equilibrado, con las caras numeradas del 1 al 6.

- Determine el número de resultados del espacio muestral de este experimento aleatorio.
- Sea A el suceso "la mayor de las puntuaciones obtenidas es menor que 4" y B el suceso "la primera puntuación es impar". Halle la probabilidad de A y la de B.
- ¿Son independientes A y B? (Propuesto PAU Andalucía 2010)

Solución

- a) El nº de resultados del espacio muestral es el nº de resultados posibles, que es $6 \cdot 6 = 36$

- b) $A = \text{"la mayor de las puntuaciones es 3, 2 ó 1"} = \{13, 31, 23, 32, 33, 12, 21, 22, 11\}$

$$\text{Como hay 9 casos favorables de 36 posibles, } p(A) = \frac{9}{36} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$B = \{11, 12, \dots, 16, 31, 32, \dots, 36, 51, 52, \dots, 56\}. \text{ Como hay 18 casos favorables de 36 posibles, } p(B) = \frac{18}{36} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

- c) Como $A \cap B = \{13, 31, 32, 33, 12, 11\}$, $p(A \cap B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$$\begin{cases} p(A \cap B) = \frac{1}{6} \\ p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \text{Como } p(A \cap B) \neq p(A) \cdot p(B), \text{ A y B no son independientes}$$

Ejercicio de clase 21

Un dado tiene seis caras, tres de ellas marcadas con un 1, dos marcadas con una X y la otra marcada con un 2. Se lanza tres veces ese dado.

- ¿Cuál es la probabilidad de obtener tres veces el 1?
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos X y un 2 en cualquier orden?
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener tres resultados diferentes?

(Propuesto PAU Andalucía 2010)

Solución

Lanzamos el dado. Sea ① = sacar un 1 ⊗ = Sacar una x ② = Sacar un 2

$$\text{Según el enunciado, } p(\textcircled{1}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad p(\otimes) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad p(\textcircled{2}) = \frac{1}{6}$$

Hay que tener en cuenta que el resultado en un lanzamiento no depende del resultado en el lanzamiento anterior.

Luego, los resultados del experimento de lanzar el dado 3 veces son independientes e incompatibles

$$\text{a) } p(\textcircled{1}\textcircled{1}\textcircled{1}) = p(\textcircled{1}) \cdot p(\textcircled{1}) \cdot p(\textcircled{1}) = [p(\textcircled{1})]^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$\text{b) } p(\otimes\otimes\textcircled{2} \cup \textcircled{2}\otimes\otimes \cup \otimes\textcircled{2}\otimes) = \left[\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2\right] \cdot 3 = \left[\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{9}\right] \cdot 3 = \frac{3}{54} = \frac{1}{18}$$

$$\text{c) } p(\textcircled{1}\otimes\textcircled{2} \cup \textcircled{1}\textcircled{2}\otimes \cup \otimes\textcircled{1}\textcircled{2} \cup \otimes\textcircled{2}\textcircled{1} \cup \textcircled{2}\textcircled{1}\otimes \cup \textcircled{2}\otimes\textcircled{1}) = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}\right] \cdot 6 = \frac{1}{36} \cdot 6 = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Ejercicio de clase 22

En el experimento aleatorio de lanzar una moneda tres veces se consideran los siguientes sucesos:

A: "sacar al menos una cara y una cruz"

B: "sacar a lo sumo una cara".

- Determine el espacio muestral asociado a ese experimento y los sucesos A y B.
- ¿Son independientes ambos sucesos? (Propuesto PAU Andalucía 2001)

Solución

$$\text{a) } E = \{ccc, ccx, cxc, cxx, xcc, xcx, xxc, xxx\} \quad A = \{ccx, cxc, cxx, xcc, xcx, xxc\} \quad B = \{cxx, xcx, xxc, xxx\}$$

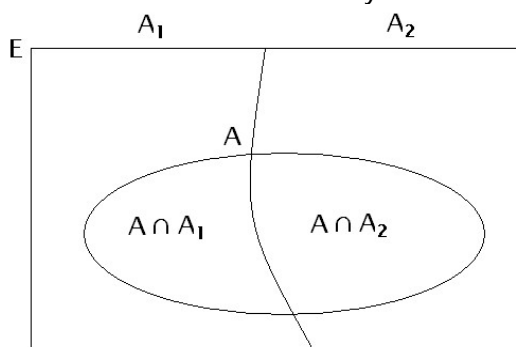
$$\text{b) Hay 8 casos posibles, luego } p(A) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \quad p(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}. \text{ Como } A \cap B = \{cxx, xcx, xxc\}, \quad p(A \cap B) = \frac{3}{8}$$

$$\begin{cases} p(A \cap B) = \frac{3}{8} \\ p(A) \cdot p(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \end{cases} \Rightarrow \text{Como } p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B), \text{ A y B son independientes}$$

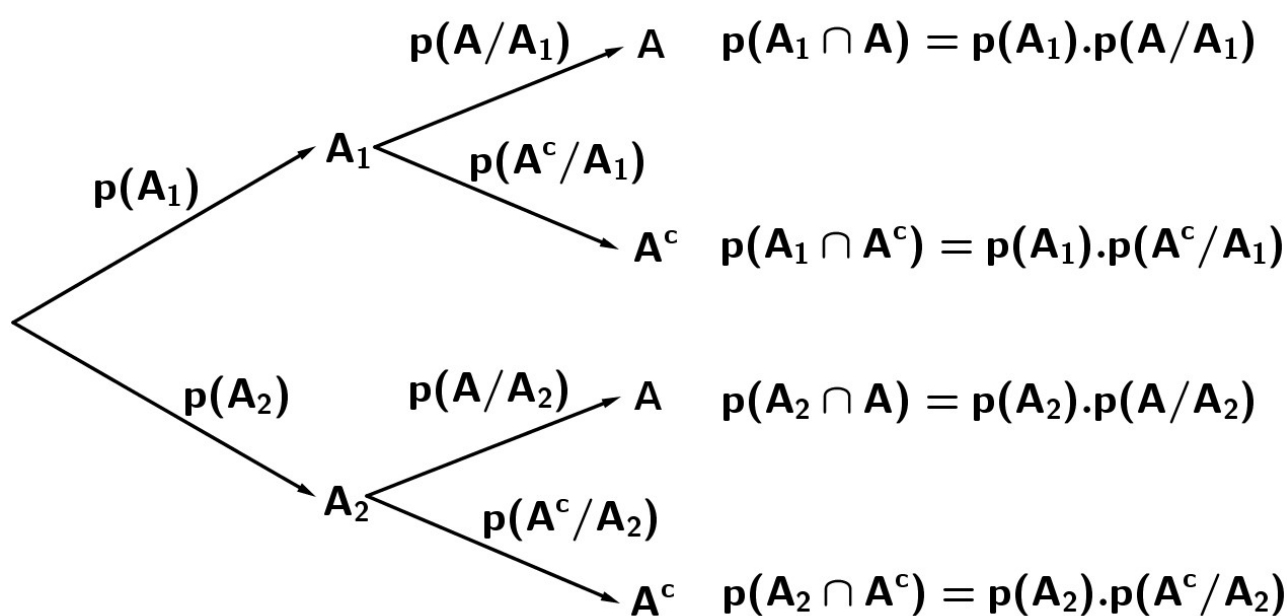
Hacer actividades 20 a 28

2.- TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL. FÓRMULAS DE BAYES

Sean A_1, A_2 son sucesos incompatibles con $A_1 \cup A_2 = E$ y A es un suceso cualquiera



$$\text{Como } p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A/B) \Rightarrow \begin{cases} p(A \cap A_1) = p(A_1) \cdot p(A/A_1) \\ p(A \cap A_2) = p(A_2) \cdot p(A/A_2) \end{cases}$$



$$p(A) = p(A \cap A_1) + p(A \cap A_2) = p(A_1) \cdot p(A/A_1) + p(A_2) \cdot p(A/A_2)$$

Por tanto, se cumple **teorema de la probabilidad total** : $p(A) = p(A_1) \cdot p(A/A_1) + p(A_2) \cdot p(A/A_2)$

Usando la definición de probabilidad condicionada y el teorema de la probabilidad total deducimos

$$\begin{cases} p(A_1/A) = \frac{p(A_1 \cap A)}{p(A)} \\ p(A_2/A) = \frac{p(A_2 \cap A)}{p(A)} \end{cases} \Rightarrow \text{fórmulas de Bayes: } \begin{cases} p(A_1/A) = \frac{p(A_1) \cdot p(A/A_1)}{p(A)} \\ p(A_2/A) = \frac{p(A_2) \cdot p(A/A_2)}{p(A)} \end{cases}, \text{ siendo } p(A) = p(A_1) \cdot p(A/A_1) + p(A_2) \cdot p(A/A_2)$$

Para calcular probabilidades en experimentos compuestos se usan principalmente técnicas de diagramas de árbol y tablas de contingencia. Lo veremos en los ejercicios de clase.

Ejercicio de clase 23

Se sabe que el 30% de los individuos de una población tiene estudios superiores; también se sabe que, de ellos, el 95% tiene empleo. Además, de la parte de la población que no tiene estudios superiores, el 60% tiene empleo.

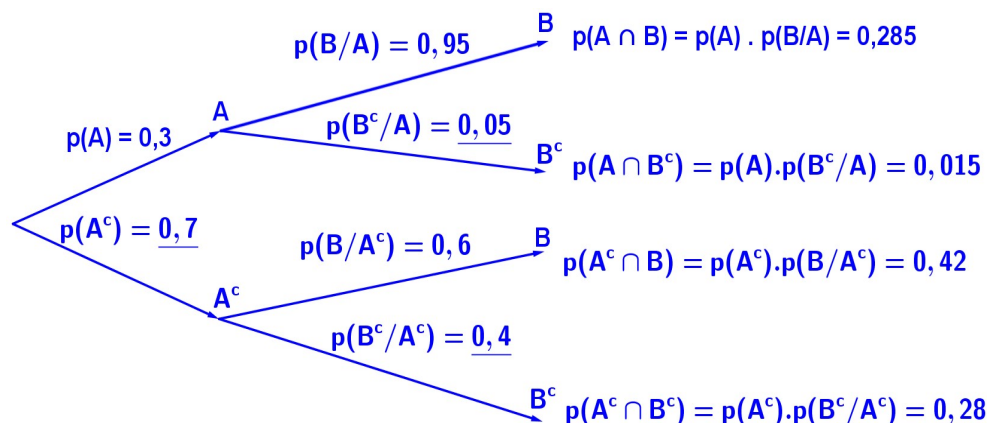
a) Calcule la probabilidad de que un individuo, elegido al azar, tenga empleo.

b) Se ha elegido un individuo aleatoriamente y tiene empleo; calcule la probabilidad de que tenga estudios superiores. (Propuesto PAU Andalucía 2017)

Solución

$\{A = \text{"tener estudios superiores"}, p(A) = 30\% = 0,3$
 $B = \text{"tener empleo"}\}$

$$p(B/A) = 95\% = 0,95 \quad p(B/A^c) = 60\% = 0,6$$



a) Por el teorema de la probabilidad total : $p(B) = p(A \cap B) + p(A^c \cap B) = 0,285 + 0,42 = 0,705 = \boxed{70,5\%}$

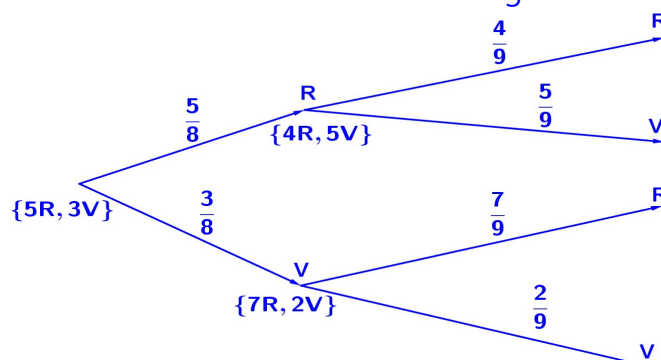
b) $p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0,285}{0,705} \cong 0,404 = \boxed{40,4\%}$

Ejercicio de clase 24

Una urna contiene 5 bolas rojas y 3 verdes. Se extrae una bola y se reemplaza por dos bolas del otro color. A continuación se extrae una segunda bola. a) Calcule la probabilidad de que la segunda bola extraída sea verde. b) Halle la probabilidad de que la primera haya sido roja, sabiendo que la segunda también ha sido roja. (Propuesto PAU Andalucía 2017)

Solución

R = "sacar bola roja" V = "sacar bola verde". Hacemos un diagrama de árbol (simplificado) de la situación



a) Por el teorema de la probabilidad total, la probabilidad que nos piden es :

$$p(2^a V) = p(RV) + p(VV) = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{9} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{9} = \boxed{\frac{31}{72}}$$

$$b) p(1^a R / 2^a R) = \frac{p(RR)}{p(2^a R)} = \frac{p(RR)}{1 - p(2^a V)} = \frac{\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{9}}{1 - \frac{31}{72}} = \frac{\frac{20}{72}}{\frac{41}{72}} = \boxed{\frac{20}{41}}$$

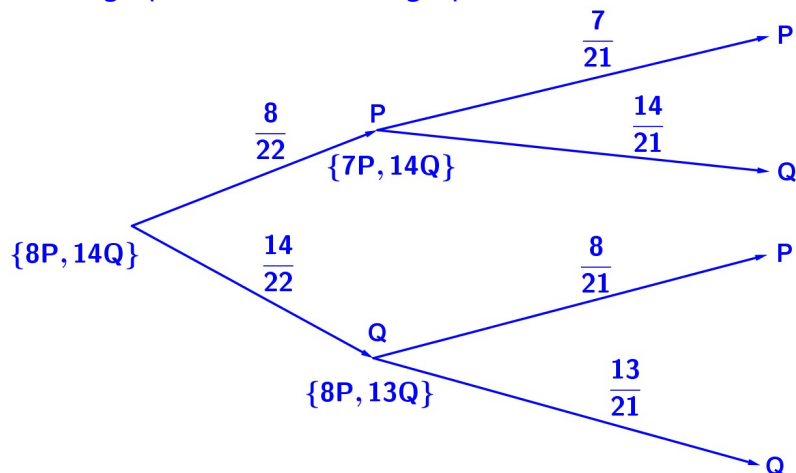
Ejercicio de clase 25

En un departamento de una Universidad hay 8 profesores y 14 profesoras. Se quiere constituir una comisión formada por 2 miembros del departamento, elegidos al azar. a) ¿Cuál es la probabilidad de que sean profesoras? b) Calcule la probabilidad de que la comisión esté constituida por un profesor y una profesora. c) Halle la probabilidad de que en la comisión no haya ninguna profesora.

(Propuesto PAU Andalucía 2017)

Solución

P = "elegir profesor" Q = "elegir profesora". Hacemos un diagrama de árbol (simplificado) de la situación



a) Nos piden $p(QQ) = \frac{14}{22} \cdot \frac{13}{21} = \frac{182}{462} = \boxed{\frac{13}{33}}$

b) $p(PQ) + p(QP) = \frac{8}{22} \cdot \frac{14}{21} + \frac{14}{22} \cdot \frac{8}{21} = \frac{224}{462} = \boxed{\frac{16}{33}}$

c) $p(PP) = \frac{8}{22} \cdot \frac{7}{21} = \frac{56}{462} = \boxed{\frac{4}{33}}$

Ejercicio de clase 26

Supongamos que el 20% de los votantes de Trump apoya la construcción del muro en la frontera de México y que solo el 5% de los que no lo votaron lo apoya. En un grupo formado por 5000 votantes de Trump y 10000 estadounidenses que no lo votaron se elige una persona al azar.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que ésta apoye la construcción del muro?
 b) Si la persona elegida apoya la construcción del muro, ¿Cuál es la probabilidad de que no haya votado a Trump?
 c) Calcule la probabilidad de que sea votante de Trump o apoye la construcción del muro.

(Propuesto PAU Andalucía 2017)

Solución

A = "votar a Trump" B = "apoyar la construcción del muro".

Hacemos una tabla de contingencia de la situación

nº de personas	A	A ^c	Total
B	20% de 5 000 = 1 000	5% de 10 000 = 500	1 500
B ^c	4 000	9 500	13 500
Total	5 000	10 000	15 000

a) Nos piden $p(B) = \frac{1\,500}{15\,000} = 0,1 = \boxed{10\%}$

b) $p(A^c / B) = \frac{p(A^c \cap B)}{p(B)} = \frac{p(B) - p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{1500}{15000} - \frac{1000}{15000}}{\frac{1500}{15000}} = \frac{500}{1500} \cong 0,333 = \boxed{33,3\%}$

c) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{5000}{15000} + \frac{1500}{15000} - \frac{1000}{15000} = \frac{5500}{15000} \cong 0,367 = \boxed{36,7\%}$

Ejercicio de clase 27

En una ciudad hay dos fábricas de pasta, F_1 y F_2 , que producen dos tipos de productos, A y B, que venden a un distribuidor en paquetes de 1 kg. En un mes, la fábrica F_1 produce 20 000 kg de pasta, de los que 12 000 son del tipo A y la fábrica F_2 produce 25 000 kg de pasta de los que 15 000 kg son del tipo A. Se escoge al azar un paquete del distribuidor.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea del tipo B?

b) Si el paquete elegido resulta ser del tipo A, ¿qué es más probable, que proceda de la fábrica F_1 o que proceda de la F_2 ? (Propuesto PAU Andalucía 2017)

Solución

F_1 = "el producto procede de la fábrica F_1 " F_2 = "el producto procede de la fábrica F_2 "

A = "la pasta es del tipo A" B = "la pasta es del tipo B"

Hacemos una tabla de contingencia de la situación

nº de paquetes	F_1	F_2	Total
A	12 000	15 000	27 000
B	8 000	10 000	18 000
Total	20 000	25 000	45 000

$$\text{a) Nos piden } p(B) = \frac{18\,000}{45\,000} = 0,4 = \boxed{40\%}$$

$$\text{b) } \left\{ \begin{array}{l} p(F_1 / A) = \frac{p(F_1 \cap A)}{p(A)} = \frac{\frac{12\,000}{45\,000}}{\frac{27\,000}{45\,000}} = \frac{12\,000}{27\,000} \cong 0,444 = 44,4\% \\ p(F_2 / A) = \frac{p(F_2 \cap A)}{p(A)} = \frac{\frac{15\,000}{45\,000}}{\frac{27\,000}{45\,000}} = \frac{15\,000}{27\,000} \cong 0,556 = 55,6\% \end{array} \right.$$

Como $55,6\% > 44,4\%$, es más probable que proceda de F_2

Ejercicio de clase 28

A una asamblea en la Universidad asisten 420 alumnos de los cuales 180 son de Empresariales, 72 de Relaciones Laborales y el resto de Derecho. Un tercio de los alumnos de Empresariales, dos tercios de los de Derecho y 16 alumnos de Relaciones Laborales votan NO a la huelga. El resto ha votado Sí.

a) Calcule la probabilidad de que elegido un alumno al azar, sea de Empresariales y haya votado Sí a la huelga.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que elegido un alumno al azar haya votado Sí a la huelga?

c) Si elegido un alumno al azar, resulta que ha votado NO a la huelga, ¿cuál es la probabilidad de que sea de Relaciones Laborales? (Propuesto PAU Andalucía 2017)

Solución

E = "el alumno es de Empresariales" RL = "el alumno es de Relaciones Laborales"

D = "el alumno es de Derecho" H = "el alumno vota Sí a la huelga"

Hacemos una tabla de contingencia de la situación

nº de alumnos	E	RL	D	Total
H	120	56	56	232
H^c	$\frac{1}{3}$ de 180 = 60	16	$\frac{2}{3}$ de 168 = 112	188
Total	180	72	168	420

$$\text{a) } p(E \cap H) = \frac{120}{420} \cong 0,286 = \boxed{28,6\%}$$

$$\text{b) } p(H) = \frac{232}{420} \cong 0,552 = \boxed{55,2\%}$$

$$\text{c) } p(RL / H^c) = \frac{p(RL \cap H^c)}{p(H^c)} = \frac{\frac{16}{420}}{\frac{188}{420}} = \frac{16}{188} \cong 0,085 = \boxed{8,5\%}$$

Ejercicio de clase 29

Disponemos de tres monedas: 1 dólar, 1 libra y 1 euro.

La moneda de 1 dólar está trucada y la probabilidad de que salga cara es el doble de la probabilidad de que salga cruz. La moneda de 1 libra también está trucada y tiene dos caras y la de 1 euro es correcta. Se escoge una de las tres monedas al azar y se lanza.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que salga cara?

b) Sabiendo que salió cruz, ¿cuál es la probabilidad de que la moneda lanzada fuera la de 1 dólar?

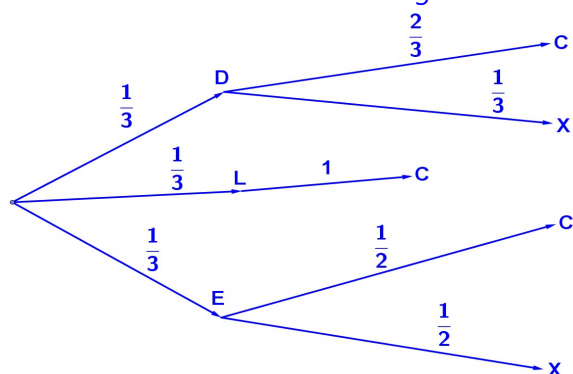
(Propuesto PAU Andalucía 2016)

Solución

$D = \text{"escoger el dólar"}$ $L = \text{"escoger la libra"}$ $E = \text{"escoger el euro"}$. Como se escogen al azar, $p(D) = p(L) = p(E) = \frac{1}{3}$

$C = \text{"salir cara"}$ $X = \text{"salir cruz"}$. Según el enunciado, $p(C/D) = \frac{2}{3}$, $p(X/D) = \frac{1}{3}$; $p(C/L) = 1$; $p(C/E) = p(X/E) = \frac{1}{2}$

Hacemos un diagrama de árbol (simplificado) de la situación



a) Por el teorema de la probabilidad total:

$$p(C) = p(DC) + p(LC) + p(EC) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{13}{18}$$

$$b) p(D/X) = \frac{p(DX)}{p(X)} = \frac{p(DX)}{1 - p(C)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{1 - \frac{13}{18}} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{5}{18}} = \frac{2}{5}$$

Ejercicio de clase 30

Una enfermedad puede estar provocada por solo una de estas tres causas: A, B o C.

La probabilidad de que la causa sea A es 0.3, la de que sea B es 0.2 y la de que sea C es 0.5.

El tratamiento de esta enfermedad requiere hospitalización en el 20% de los casos si está provocada por A, en el 55% si la causa es B y en el 10% si la causa es C.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un enfermo con la citada enfermedad no necesite hospitalización?

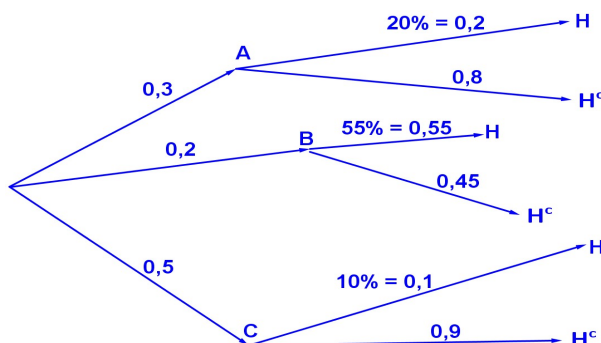
b) Si un enfermo está hospitalizado debido a esta enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que la causa haya sido A?

(Propuesto PAU Andalucía 2015)

Solución

$A = \text{"la causa de la enfermedad es A"}$ $B = \text{"la causa de la enfermedad es B"}$ $C = \text{"la causa de la enfermedad es C"}$.

$H = \text{"el tratamiento de la enfermedad requiere hospitalización"}$. Hacemos un diagrama de árbol (simplificado) de la situación



$$a) \text{ Por el teorema de la probabilidad total: } p(H^c) = p(H^c \cap A) + p(H^c \cap B) + p(H^c \cap C) = 0.3 \cdot 0.8 + 0.2 \cdot 0.45 + 0.5 \cdot 0.9 = 0.78 = \boxed{78\%}$$

$$b) p(A/H) = \frac{p(A \cap H)}{p(H)} = \frac{p(A \cap H)}{1 - p(H^c)} = \frac{0.3 \cdot 0.2}{1 - 0.78} \cong 0.273 = \boxed{27.3\%}$$

Ejercicio de clase 31

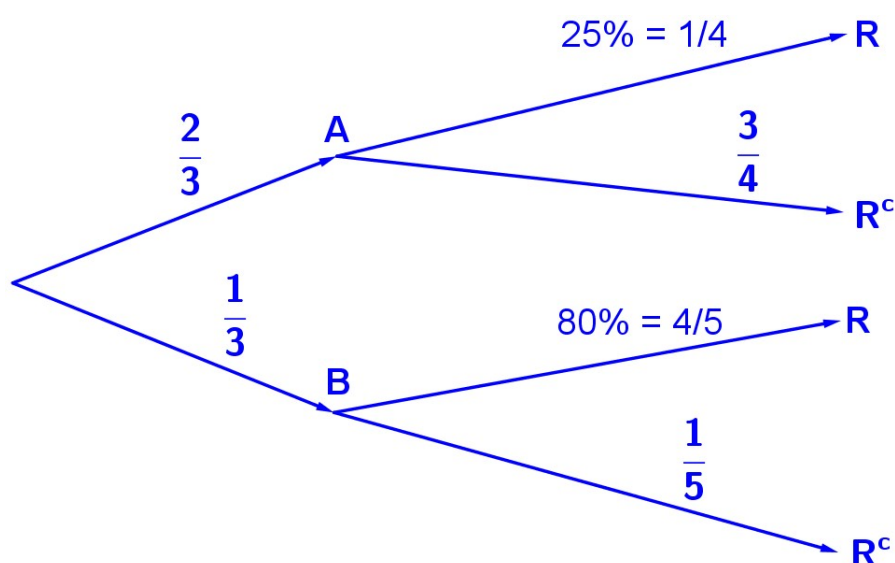
Una empresa dedicada a la producción de jamones ibéricos dispone de dos secaderos, A y B, con distintas condiciones ambientales y de almacenamiento. En el secadero B se curan la tercera parte de los jamones. El 25% de los jamones curados en el secadero A son catalogados como Reserva, mientras que en el B este porcentaje asciende al 80%. Elegido un jamón al azar de uno de los secaderos, calcule la probabilidad de los siguientes sucesos:

- a) El jamón no es de Reserva. b) Si el jamón es de Reserva, que proceda del secadero A.
(Propuesto PAU Andalucía 2015)

Solución

A = "el jamón es del secadero A" B = "el jamón es del secadero B". R = "el jamón es de reserva"

Hacemos un diagrama de árbol (simplificado) de la situación



a) Por el teorema de la probabilidad total : $p(R^c) = p(R^c \cap A) + p(R^c \cap B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{17}{30} \cong 0,567 = \boxed{56,7\%}$

b) $p(A / R) = \frac{p(A \cap R)}{p(R)} = \frac{p(A \cap R)}{1 - p(R^c)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}}{1 - \frac{17}{30}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{13}{30}} = \frac{5}{13} \cong 0,385 = \boxed{38,5\%}$

Ejercicio de clase 32

En una urna A hay 8 bolas verdes y 6 rojas. En otra urna B hay 4 bolas verdes, 5 rojas y 1 negra. Se lanza un dado, si sale un número menor que 3 se saca una bola de la urna A, y si sale mayor o igual que 3 se saca una bola de la urna B.

- a) Calcule la probabilidad de que la bola sea verde si ha salido un 4.
 b) Calcule la probabilidad de que la bola elegida sea roja.
 c) Sabiendo que ha salido una bola verde, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la urna A?
 (Propuesto PAU Andalucía 2015)

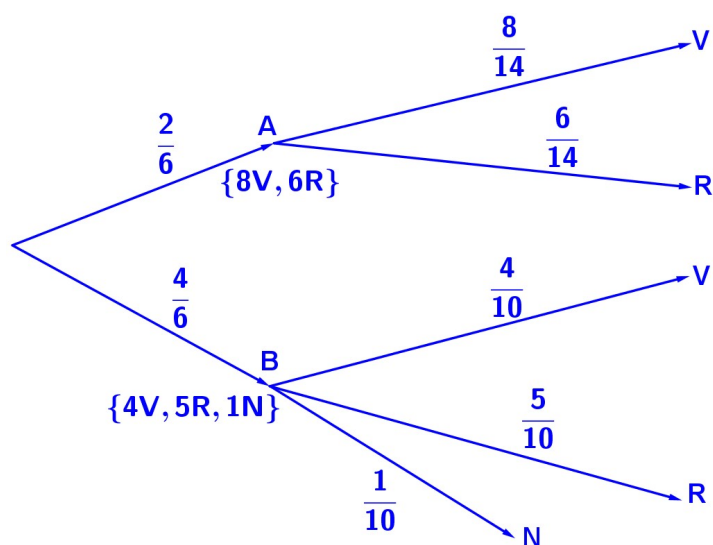
Solución

$A = \text{"salir } n^\circ < 3" = \text{"salir 1 ó 2"} = \text{"sacar bola de la urna A"}$

$B = \text{"salir } n^\circ \geq 3" = \text{"salir 3,4,5 ó 6"} = \text{"sacar bola de la urna B"}$

$V = \text{"la bola es verde"} \quad R = \text{"la bola es roja"} \quad N = \text{"la bola es negra"}$

Hacemos un diagrama de árbol (simplificado) de la situación



a) Si ha salido un 4 es porque ha ocurrido el suceso B $\Rightarrow p(V / B) = \frac{p(V \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{4}{6} \cdot \frac{4}{10}}{\frac{4}{6}} = \boxed{\frac{2}{5}}$

b) Por el teorema de la probabilidad total: $p(R) = p(R \cap A) + p(R \cap B) = \frac{2}{6} \cdot \frac{6}{14} + \frac{4}{6} \cdot \frac{5}{10} = \boxed{\frac{10}{21}}$

c) $p(A / V) = \frac{p(A \cap V)}{p(V)} \xrightarrow{\text{fórmula de Bayes}} \frac{p(A \cap V)}{p(V \cap A) + p(V \cap B)} = \frac{\frac{2}{6} \cdot \frac{8}{14}}{\frac{2}{6} \cdot \frac{8}{14} + \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{10}} = \frac{\frac{4}{21}}{\frac{16}{35}} = \boxed{\frac{5}{12}}$

Ejercicio de clase 33

- a) Un ilusionista tiene seis cartas: cuatro ases y dos reyes. Saca una carta, la enseña al público y, sin verla, la vuelve a mezclar con las demás. A continuación saca una segunda carta que resulta ser un as. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera carta haya sido también un as?
- b) Si el ilusionista no devolviera la primera carta a la baraja y la segunda carta extraída fuera un as, ¿cuál es la probabilidad de que la primera carta haya sido también un as?

(Propuesto PAU Andalucía 2015)

Solución

a) Nos piden $p(1^{\text{a}} \text{ carta sea as}) = \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3}}$

b) Como la carta no se devuelve a la baraja, el resultado de la 2ª extracción depende del resultado en la 1ª

$$p(1^{\text{a}} \text{ carta as} / 2^{\text{a}} \text{ carta as}) = \frac{p(1^{\text{a}} \text{ carta as y } 2^{\text{a}} \text{ carta as})}{p(2^{\text{a}} \text{ carta as})} \xrightarrow{\text{fórmula de Bayes}} \frac{p(\text{as} - \text{as})}{p(\text{as} - \text{as}) + p(\text{rey} - \text{as})} = \frac{\frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5}} = \frac{\frac{12}{30}}{\frac{20}{30}} = \boxed{\frac{3}{5}}$$

Ejercicio de clase 34

En una urna hay cuatro bolas blancas y dos rojas. Se lanza una moneda, si sale cara se extrae una bola de la urna y si sale cruz se extraen, sin reemplazamiento, dos bolas de la urna.

- a) Calcule la probabilidad de que se hayan extraído dos bolas rojas. b) Halle la probabilidad de que no se haya extraído ninguna bola roja.

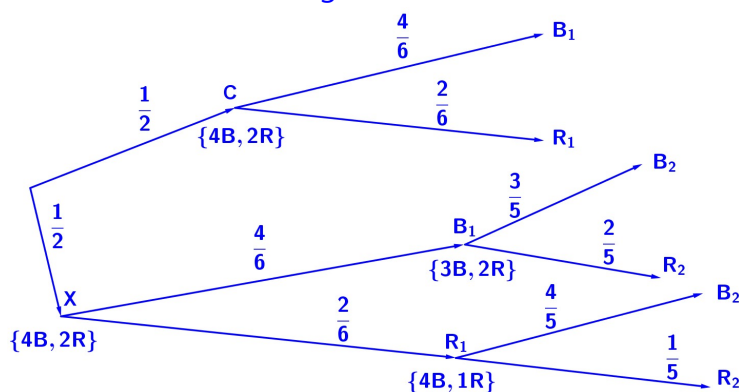
(Propuesto PAU Andalucía 2007)

Solución

C = "salir cara" = "sacar una bola de la urna" X = "salir cruz" = "sacar 2 bolas de la urna"

B₁ = "la 1ª bola es blanca" B₂ = "la 2ª bola es blanca" R₁ = "la 1ª bola es roja" R₂ = "la 2ª bola es roja"

Hacemos un diagrama de árbol



a) Piden $p(XR_1 R_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{30} \cong 0,033 = \boxed{3,3\%}$

b) Piden $p(CB_1) + p(XB_1 B_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{8}{15} \cong 0,533 = \boxed{53,3\%}$

Ejercicio de clase 35

De una lista de 10 personas, de las que 7 son hombres, seleccionamos 2 personas al azar.

Calcule la probabilidad de que sean de distinto sexo en los siguientes casos:

a) Se eligen sin reemplazo.

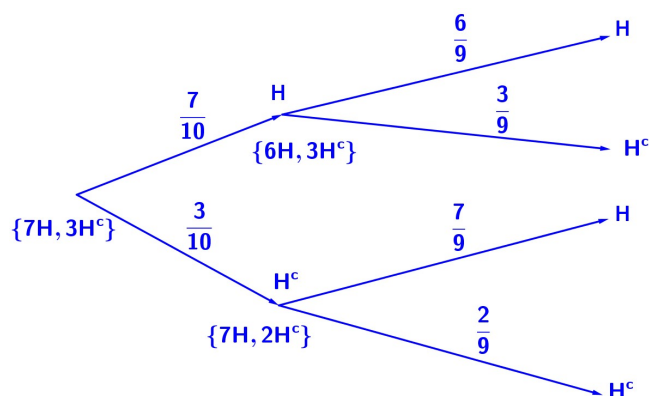
b) Se eligen con reemplazo.

(Propuesto PAU Andalucía 2000)

Solución

H = "la persona es hombre"

a) Como se eligen sin reemplazo haremos un diagrama de árbol



$$\text{Piden } p(HH^c) + p(H^c H) = \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{42}{90} \cong 0,467 = \boxed{46,7\%}$$

b) Como se eligen con reemplazo, hay independencia de sucesos

$$\text{Piden } p(HH^c) + p(H^c H) = \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{42}{100} = 0,42 = \boxed{42\%}$$

Ejercicio de clase 36

En un Instituto se pueden practicar dos deportes: fútbol y baloncesto. Se sabe que el 48% de los alumnos practica fútbol pero no baloncesto, que el 15% practica baloncesto pero no fútbol y que el 28% no practica ninguno de los dos. Si se toma, al azar, un alumno de ese Instituto, calcule la probabilidad de que:

a) Practique fútbol.

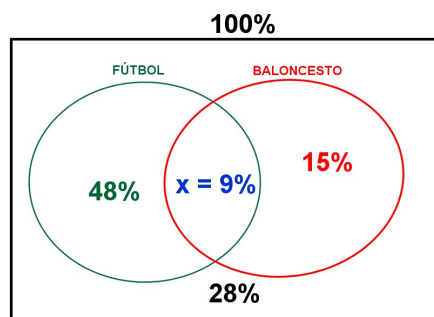
b) Practique alguno de los dos deportes.

c) No practique fútbol, sabiendo que practica baloncesto.

(Propuesto PAU Andalucía 2007)

Solución

Podemos usar un diagrama de Venn.



$$\text{Como el total es el } 100\% \Rightarrow 48 + x + 15 + 28 = 100 \Rightarrow x = 9\%$$

$$\text{a) } p(\text{Fútbol}) = 48\% + 9\% = \boxed{57\%}$$

$$\text{b) } p(\text{Fútbol ó Baloncesto}) = 48\% + 15\% + 9\% = \boxed{72\%}$$

$$\text{c) } p(\text{No fútbol / baloncesto}) = \frac{p(\text{No fútbol y baloncesto})}{p(\text{baloncesto})} = \frac{15\%}{15\% + 9\%} = \frac{15\%}{24\%} = \frac{0,15}{0,24} = 0,625 = \boxed{62,5\%}$$

Ejercicio de clase 37

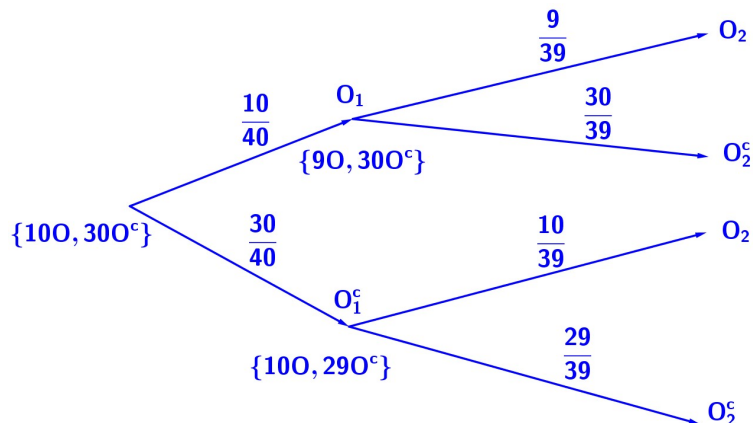
Se dispone de una baraja española de 40 cartas (10 de oros, 10 de copas, 10 de espadas y 10 de bastos). Se saca una carta, al azar, y sin devolverla, se saca otra, al azar.

a) Calcule la probabilidad de que ninguna de las dos cartas sea de oros.

b) Sabiendo que la 2ª carta extraída ha sido de copas, calcule la probabilidad de que también lo fuera la primera. (Propuesto PAU Andalucía 2002)

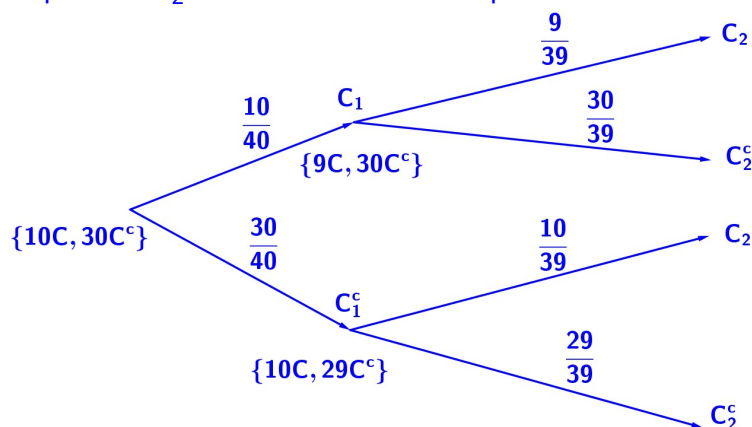
Solución

a) O_1 = "la 1ª carta es de oros" O_2 = "la 2ª carta es de oros". Hacemos un diagrama de árbol



$$P(\text{iden } O_1^c \cap O_2^c) = \frac{30}{40} \cdot \frac{29}{39} = \frac{870}{1560} \cong 0,558 = \boxed{55,8\%}$$

b) C_1 = "la 1ª carta es de copas" C_2 = "la 2ª carta es de copas". Hacemos un diagrama de árbol



$$P(\text{iden } C_1 / C_2) = \frac{p(C_1 \cap C_2)}{p(C_2)} = \frac{p(C_1 \cap C_2)}{p(C_1 \cap C_2) + p(C_1^c \cap C_2)} = \frac{\frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39}}{\frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} + \frac{30}{40} \cdot \frac{10}{39}} = \frac{90/1560}{390/1560} = \frac{90}{390} \cong 0,231 = \boxed{23,1\%}$$

Ejercicio de clase 38

Disponemos de tres dados, uno de los cuales está trucado. La probabilidad de sacar 5 con el dado trucado es 0.25, siendo los otros resultados equiprobables. Se elige un dado al azar y se realiza un lanzamiento con él.

a) Determine la probabilidad de obtener un 2.

b) Dado que ha salido un 2, ¿cuál es la probabilidad de que hayamos elegido el dado trucado?

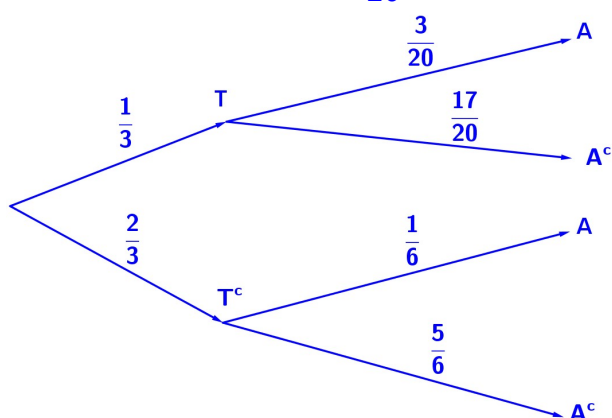
(Propuesto PAU Andalucía 2001)

Solución

$T = \text{"elegir dado trucado"} \Rightarrow \text{con el dado trucado } p(5) = 0,25 = \frac{1}{4} \text{ y } p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(6) = x$

Como $p(1) + p(2) + \dots + p(5) + p(6) = 1 \Rightarrow 5x + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{20}$.

$A = \text{"sacar 2"} \text{, } p(A / T) = \frac{3}{20}$ Hacemos un diagrama de árbol



$$\text{a) Piden } p(A) = p(A \cap T) + p(A \cap T^c) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{20} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{29}{180} \cong 0,161 = \boxed{16,1\%}$$

$$\text{b) } p(T / A) = \frac{p(T \cap A)}{p(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{20}}{\frac{29}{180}} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{29}{180}} = \frac{9}{29} \cong 0,310 = \boxed{31\%}$$

Ejercicio de clase 39

Entre las 7 bolas de una máquina de fútbolín hay 2 rojas y 5 blancas; en cada partida, la máquina va sacando las bolas de una en una, de forma aleatoria, sin reemplazamiento. Calcule la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:

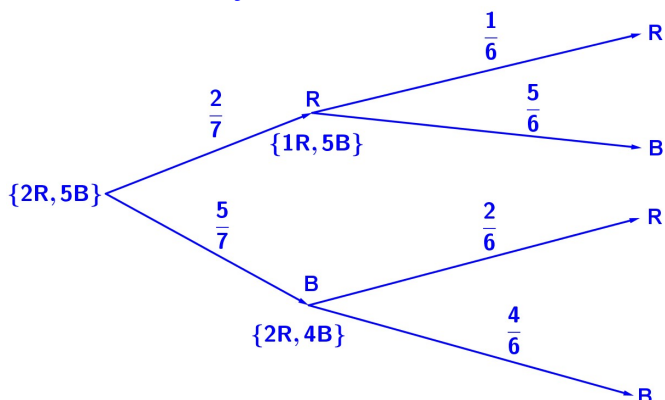
a) "La primera bola es roja".

b) "Las dos primeras bolas son blancas".

c) "Las dos primeras bolas son de colores distintos". (Propuesto PAU Andalucía 2004)

Solución

$R = \text{"la bola es roja"} \text{ } B = \text{"la bola es blanca"} \text{. Hacemos un diagrama de árbol (simplificado) de la situación}$



$$\text{a) } p(R) = \boxed{\frac{2}{7}}$$

$$\text{b) } p(BB) = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} = \boxed{\frac{10}{21}}$$

$$\text{c) } p(RB) + p(BR) = \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{6} = \boxed{\frac{10}{21}}$$

Ejercicio de clase 40

Una caja contiene diez tornillos, de los que dos son defectuosos.

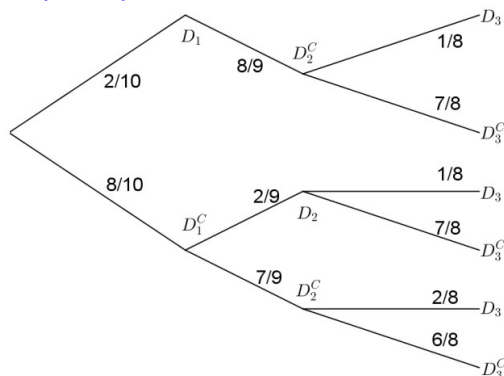
- a) Si vamos extrayendo tornillos, uno tras otro, hasta localizar los dos defectuosos, ¿cuál es la probabilidad de necesitar exactamente tres extracciones para localizarlos?
- b) Si extraemos solo dos tornillos, y el segundo ha resultado ser defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que el primero también lo haya sido?

(Propuesto PAU Andalucía 2001)

Solución

Sea D_1 = "el 1er tornillo es defectuoso" D_2 = "el 2º tornillo es defectuoso" D_3 = "el 3er tornillo es defectuoso"

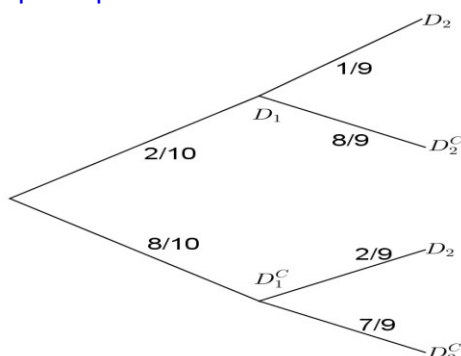
- a) Hacemos un diagrama de árbol que represente las 3 extracciones



Los casos en que encontramos los dos tornillos defectuosos son : $D_1 D_2^c D_3$ y $D_1^c D_2 D_3$

Luego, la probabilidad es $p(D_1 D_2^c D_3) + p(D_1^c D_2 D_3) = \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{8} + \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{45} \cong 0,044 = \boxed{4,4\%}$

- b) Hacemos un diagrama de árbol que represente las 2 extracciones



$$p(D_1 / D_2) = \frac{p(D_1 \cap D_2)}{p(D_2)} = \frac{\frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9}}{\frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9}} = \frac{1}{9} \cong 0,111 = \boxed{11,1\%}$$

Hacer actividades 29 a 45