

Ejercicio N° 2

Control adaptativo de sistemas

Integrantes: Elías Obreque
Profesor: Manuel Duarte
Auxiliar: Lisbel Bárzaga

Fecha de realización: 22 de noviembre de 2019
Fecha de entrega: 22 de noviembre de 2019
Santiago, Chile

Resumen

En esta tarea se estudia el uso de un controlador directo adaptativo a una planta inestable en función de un modelo de referencia. Por ello, se hace indispensable mostrar el desarrollo de las leyes de ajuste y comprender su significado e impacto en el sistema con el fin tener una intuición de la respuesta del sistema ante un valor externo. Un ejemplo de esto se puede ver cuando se cambian las condiciones iniciales de la planta mostrando que para algunos valores el error puede crecer grandemente en ordenes de magnitud. Si por lo demás se encuentra un perturbación en la salida de la planta no conocida, el error no será acotado y los parámetros de las leyes de ajuste dejan de converger.

Para solucionar este método se trabaja con 4 métodos que modifican las leyes de ajuste en función de crear un controlador robusto e base a la perturbación entrante al sistema.

Finalmente, se ve el caso cuando la planta del sistema tiene un término variable en el tiempo y se acotan los parámetros del error de la planta y de los parámetros con métodos de control robusto.

Índice de Contenidos

1. Pregunta 1	1
1.1. Solución problema 1	1
1.2. Experimentos con diferentes parámetros	8
1.2.1. Condiciones iniciales diferentes entrada oscilante	8
1.2.2. Condiciones iniciales diferentes entrada unitaria	9
1.2.3. Variación de ganancias adaptativas con entrada unitaria	10
1.2.4. Variación de ganancias adaptativas con entrada oscilante	11
1.2.5. Variación de ganancias adaptativas con entrada ruido blanco	12
1.2.6. Variación del parámetro b_p de la planta con entrada unitaria	13
1.2.7. Variación del parámetro c_p de la planta con entrada unitaria	14
1.2.8. Variación del parámetro b_p de la planta con entrada oscilante	15
1.2.9. Variación del parámetro c_p de la planta con entrada oscilante	16
2. Problema 2	18
2.1. Solución problema 1	18
2.1.1. Uso de Zona muerta	25
2.1.2. Cota sobre $\ \theta^*\ $	32
2.1.3. Modificación - σ	37
2.1.4. Modificación - ε	42
2.1.5. Comparación de métodos	46
2.2. Solución problema 2	49
2.2.1. Perturbación con rampa	49
2.2.2. Perturbación osculatoria	49
3. Conclusión	55

Índice de Figuras

1. Localización de las raíces de los sistemas.	2
2. Diagrama de bloques general de MRAS.	2
3. Diagrama de bloque del sistema controlado por 3 leyes de ajuste para $n^* = 1$	3
4. Diagrama de bloques representativo del control adaptativo para un sistema de grado relativo igual a 2.	5
5. Error aumentado para k_p desconocido con $n^* = 2$	6
6. Diagrama de bloques para un control adaptativo directo de un sistema de grado relativo $n^* = 2$	7
7. Diagrama de bloques para las leyes de ajuste del control adaptativo.	7
8. Diagrama de bloques para los vectores auxiliares.	8
9. Diagrama de bloques para calcular el error aumentado.	8
10. Resultados de simulaciones para diferentes valores iniciales del sistema con entrada oscilante.	9
11. Resultados de simulaciones para diferentes valores iniciales del sistema con entrada unitaria.	10

12.	Resultados de simulaciones para diferentes valores de ganancia adaptativa con una entrada unitaria.	11
13.	Resultados de simulaciones para diferentes valores de ganancia adaptativa con una entrada oscilante.	12
14.	Simulaciones para diferentes valores de ganancia adaptativa con ruido blanco.	13
15.	Resultados de simulaciones para diferentes valores de b_p con una entrada unitaria. . .	14
16.	Resultados de simulaciones para diferentes valores de c_p con una entrada unitaria. . .	15
17.	Resultados de simulaciones para diferentes valores de b_p con una entrada oscilante. . .	16
18.	Resultados de simulaciones para diferentes valores de c_p con una entrada oscilante. . .	17
19.	Perturbación $p(t)$ agregada en la salida de la planta.	18
20.	Comportamiento de las leyes de ajuste para diferentes valores de perturbación constante. .	19
21.	Comportamiento de las leyes de ajuste para diferentes valores de amplitud en la perturbación con $\omega_f = 2$	20
22.	Comportamiento de las leyes de ajuste para diferentes frecuencias en la perturbación con $A = 1$	21
23.	Leyes de ajuste para diferentes valores de perturbación constante con valor inicial igual al objetivo.	22
24.	Leyes de ajuste para diferentes valores de amplitud en la perturbación con $\omega_f = 2$ y con valor inicial igual al objetivo.	23
25.	Leyes de ajuste para diferentes frecuencias en la perturbación con $A = 1$ y con valor inicial igual al objetivo.	24
26.	Modificación de las leyes de ajuste con el uso de Zona muerta.	25
27.	Leyes de ajuste para diferentes valores de perturbación constante con valor inicial igual al objetivo.	26
28.	Leyes de ajuste para diferentes valores de perturbación constante con valor inicial aleatorio.	27
29.	Leyes de ajuste para diferentes valores de amplitud en la perturbación con $\omega_f = 2$ y con valor inicial igual al objetivo.	28
30.	Leyes de ajuste para diferentes valores de amplitud en la perturbación con $\omega_f = 2$ y con valor inicial aleatorio.	29
31.	Leyes de ajuste para diferentes frecuencias en la perturbación con $A = 1$ y con valor inicial igual al objetivo.	30
32.	Leyes de ajuste para diferentes frecuencias en la perturbación con $A = 1$ y con valor inicial aleatorio.	31
33.	Modificación de las leyes de ajuste acotando el valor de $\ \theta\ $	32
34.	Leyes de ajuste y error para diferentes valores de θ_{max}	33
35.	Leyes de ajuste y error para $\theta_{max}^* = 9$ con perturbación constante y condición inicial de θ aleatoria.	34
36.	Leyes de ajuste y error para $\theta_{max}^* = 9$ y perturbación constante.	35
37.	Leyes de ajuste y error para $\theta_{max}^* = 9$ y perturbación oscilante con $\omega_f = 2$	36
38.	Leyes de ajuste y error para $\theta_{max}^* = 9$ y perturbación oscilante con $A = 1$	37
39.	Modificación de las leyes de ajuste con constante σ	38
40.	Leyes de ajuste y error para diferentes valores de σ y perturbación igual a 5.	39
41.	Leyes de ajuste y error para $\sigma = 20$ y diferentes valores de perturbación constante. . .	40
42.	Leyes de ajuste y error para $\sigma = 20$ y diferentes valores de A con $\omega_f = 2$	41
43.	Leyes de ajuste y error para $\sigma = 20$ y diferentes valores de ω_f con $A = 1$	42

44.	Modificación de las leyes de ajuste con el uso de ε	43
45.	Leyes de ajuste y error para para diferentes perturbaciones constantes.	44
46.	Leyes de ajuste y error para para diferentes amplitudes A de perturbación con $\omega_f = 2$. .	45
47.	Leyes de ajuste y error para para diferentes frecuencias de perturbaciones con $A = 1$.	46
48.	Comparación del error y las leyes de ajuste con perturbación constante. Entrada $r(t) = 2 \sin(5t)$	47
49.	Comparación del error y las leyes de ajuste con perturbación constante. Entrada $r(t) = 1$.	47
50.	Comparación del error y las leyes de ajuste con perturbación oscilante. Entrada $r(t) = 2 \sin(5t)$	48
51.	Comparación del error y las leyes de ajuste con perturbación oscilante. Entrada $r(t) = 1$.	48
52.	Modificación del término $b_p(t)$ la planta.	49
53.	Error y leyes de ajuste con perturbación rampa $p = 1$. Entrada $r(t) = 2 \sin(5t)$	50
54.	Error y leyes de ajuste con perturbación rampa $p = 5$. Entrada $r(t) = 2 \sin(5t)$	50
55.	Error y leyes de ajuste con perturbación rampa $p = 10$. Entrada $r(t) = 2 \sin(5t)$	51
56.	Error y leyes de ajuste con perturbación rampa $p = 1$. Entrada $r(t) = 1$	51
57.	Error y leyes de ajuste con perturbación rampa $p = 5$. Entrada $r(t) = 1$	52
58.	Error y leyes de ajuste con perturbación rampa $p = 10$. Entrada $r(t) = 1$	52
59.	Error y leyes de ajuste con perturbación rampa $A = 1$. Entrada $r(t) = 2 \sin(5t)$	53
60.	Error y leyes de ajuste con perturbación rampa $A = 5$. Entrada $r(t) = 2 \sin(5t)$	53
61.	Error y leyes de ajuste con perturbación rampa $A = 1$. Entrada $r(t) = 1$	54
62.	Error y leyes de ajuste con perturbación rampa $A = 5$. Entrada $r(t) = 1$	54

1. Pregunta 1

Considere la planta lineal inestable y desconocida de segundo orden definida por,

$$\begin{aligned}\ddot{y}_p(t) - \dot{y}_p(t) - 2y_p(t) &= 3u(t) \\ y_p(0) &= -0.5, \dot{y}_p(0) = 0\end{aligned}$$

y el modelo de referencia,

$$\begin{aligned}\ddot{y}_m(t) + 5\dot{y}_m(t) + 6y_m(t) &= 4r(t) \\ y_m(0) &= 0.0, \dot{y}_m(0) = 0\end{aligned}$$

Diseñe un controlador directo que permitan que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{y_p(t) - y_m(t)\} = 0$$

Estudiar la influencia de las condiciones iniciales, ganancias adaptativas, tipos de referencias, perturbaciones externas, variación de parámetros, entre otros aspectos.

1.1. Solución problema 1

Expresando el sistema como función de transferencia, se tiene para el modelo de referencia,

$$W_m(s) = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)} = \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} = (4) \left(\frac{1}{s^2 + 5s + 6} \right) \quad (1)$$

y para la planta,

$$W_p(s) = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)} = (3) \left(\frac{1}{s^2 - s - 2} \right) \quad (2)$$

De donde se puede notar que el grado relativo $n^* = n - m = 2$, por la tanto, se comienza presentando la *Identidad de Bezout* ya que el Lema 5.1 presentado en [3] no es suficiente.

Lema: (Identidad de Bezout) Sean $Q(s)$ y $P(s)$ polinomios relativamente primos de grados n y m respectivamente. Entonces existen polinomios $M(s)$ y $N(s)$ tal que,

$$M(s)Q(s) + N(s)P(s) = Q^*(s) \quad (3)$$

donde $Q^*(s)$ es un polinomio arbitrario. Luego, en la literatura se presentan dos métodos de resolución cuando se desconocen los parámetros de la planta, del cual se utilizará el primero.

Por otro lado, la estabilidad del modelo de referencia se muestra en la Figura 1 junto a la localización de las raíces de la función de transferencia de la planta. Se puede ver que para la planta solo existe una raíz que estabiliza el sistema. El diagrama general de bloques para el control adaptativo se muestra en la Figura 2.

La solución simple del problema consiste en que la entrada $u(t)$ de la planta sea tal que el comportamiento de la planta sea igual al modelo de referencia. Para ello se supone que,

$$u(t) = W_c(s)r(t) \quad (4)$$

donde

$$W_c(s) = \frac{k_m}{k_p} \frac{Z_m(s)R_p(s)}{Z_p(s)R_m(s)} \quad (5)$$

Así, la resultante función de transferencia de control $W_c(s)$ hará que el sistema completo $W_o(s)$ sea idéntico al modelo de referencia. Sin embargo, esta solución es factible solo cuando $R_p(s)$ es un polinomio Hurwitz, cosa que no se verifica de la Figura 1, en donde uno de los puntos no está en el semiplano negativo del gráfico.

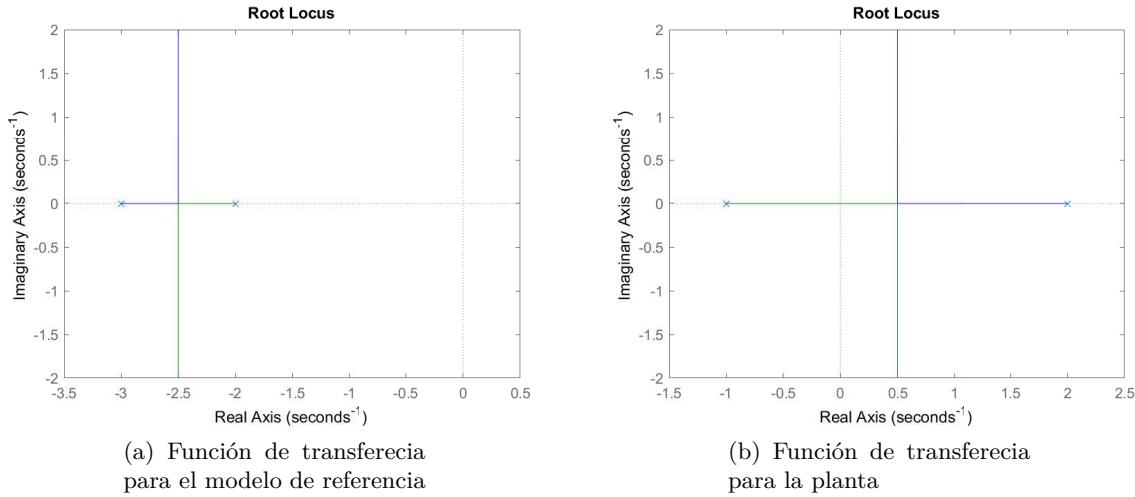


Figura 1: Localización de las raíces de los sistemas.

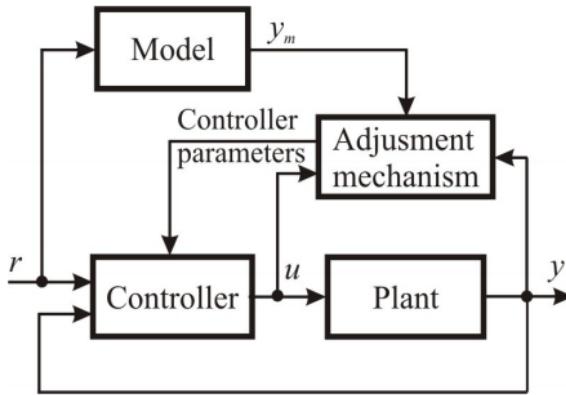


Figura 2: Diagrama de bloques general de MRAS.

De lo anterior, se analiza desde el punto de vista en donde solo se conoce los polinomios $Z_m(s)$ y $Z_p(s)$, es decir, $Z_m(s) = Z_p(s) = 1$. Luego, recordando las leyes de control para $n^* = 1$, la ley de

control es definido por,

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_2(t) &= \Lambda\omega_2(t) + \ell y_p(t) \\ u(t) &= k(t)r(t) + \theta_0(t)y_p(t) + \theta_2^T(t)\omega_2(t)\end{aligned}\quad (6)$$

donde $\theta_0 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $\omega_2, \theta_2 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$, Λ es una matriz de $(n-1) \times (n-1)$ asintóticamente estable con $\lambda(s)$ como su polinomio característico y (Λ, ℓ) es controlable. Las leyes de ajuste son,

$$\begin{aligned}k(t) &= \dot{\psi}(t) = -\text{sgn}(k_p)e_1(t)r(t) \\ \dot{\theta}_0(t) &= \dot{\phi}_0(t) = -\text{sgn}(k_p)e_1(t)y_p(t) \\ \dot{\theta}_2(t) &= \dot{\phi}_2(t) = -\text{sgn}(k_p)e_1(t)\omega_2(t)\end{aligned}\quad (7)$$

Donde, $e_1 = y_p - y_m$ y $\omega_2(t)$ es definida en (6) y que puede ser expresada como su transformada de Lagrange,

$$\omega_2(s) = \frac{\ell}{s - \Lambda} y_p(s) \quad (8)$$

La implementación de este control se muestra en la Figura 3.

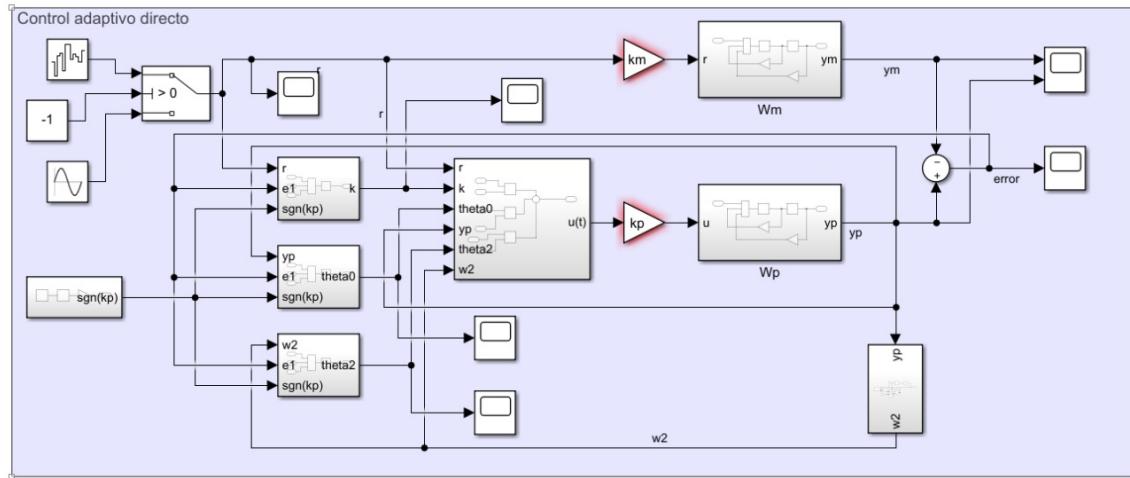


Figura 3: Diagrama de bloques del sistema controlado por 3 leyes de ajuste para $n^* = 1$.

Si bien este sistema funciona para entradas tipo ruido y señales sinusoidales, se introduce un término conocido como *Tuner*, en donde la generación del control de $u(t)$ puede ser convencionalmente descrita por un controlador y el tuner. La forma es lineal e invariante en el tiempo para valores constantes de los parámetros de control del vector θ . De esta forma, la ley de control esta

definida como,

$$\begin{aligned}
 \dot{\omega}_1(t) &= \Lambda\omega_1(t) + \ell u(t) \\
 \dot{\omega}_2(t) &= \Lambda\omega_2(t) + \ell y_p(t) \\
 \omega(t) &= [r(t), \omega_1^T(t), y_p(t), \omega_2^T(t)]^T \\
 \theta(t) &= [k(t), \theta_1^T(t), \theta_0(t), \theta_2^T(t)]^T \\
 u(t) &= \theta^T \omega(t)
 \end{aligned} \tag{9}$$

Las leyes de ajuste para generar la ley de control se presentan a continuación, por otro lado, se añade un término de ganancia γ a cada ley,

$$\begin{aligned}
 k(t) &= \dot{\psi}(t) = -\gamma_1 \cdot \text{sgn}(k_p)e_1(t)r(t) \\
 \dot{\theta}_0(t) &= \dot{\phi}_0(t) = -\gamma_2 \cdot \text{sgn}(k_p)e_1(t)y_p(t) \\
 \dot{\theta}_1(t) &= \dot{\phi}_1(t) = -\gamma_3 \cdot \text{sgn}(k_p)e_1(t)\omega_1(t) \\
 \dot{\theta}_2(t) &= \dot{\phi}_2(t) = -\gamma_4 \cdot \text{sgn}(k_p)e_1(t)\omega_2(t)
 \end{aligned} \tag{10}$$

Los valores de $\omega_1(t)$ y ω_2 se pueden expresar como,

$$\begin{aligned}
 \omega_1(s) &= \frac{\ell}{s - \Lambda} u(s) \\
 \omega_2(s) &= \frac{\ell}{s - \Lambda} y_p(s)
 \end{aligned} \tag{11}$$

Hasta aquí lo anterior es válido para $n^* = 1$ y es presentado porque las leyes de ajuste y de control se mantienen casi de la misma forma con pequeñas modificaciones.

La primera de ellas nace del uso de la identidad de Bezout, donde se puede demostrar que existe un vector de control $\theta(t) = \theta^*$ tal que la función de transferencia del sistema completo $W_o(s)$ sea igual al modelo de referencia $W_m(s)$. Se define $\lambda(s)$ como un polinomio mónico como,

$$\lambda(s) = Z_m(s)\lambda_1(s) \tag{12}$$

donde $\lambda_1(s)$ es un polinomio de Hurwitz de grado $(n - m - 1) = 1$, es decir, $\lambda_1 = s + 1$. Luego, la función de transferencia del sistema completo es,

$$W_o(s) = \frac{k_c k_p Z_p(s) \lambda_1(s) Z_m(s)}{R_p(s)[\lambda(s) - C(s)] - k_p Z_p(s) D(s)} \tag{13}$$

La existencia de los parámetros de control del vector θ^* es equivalente a la existencia de los polinomios $C(s)$ y $D(s)$ (o equivalente a $(\lambda(s) - C(s))$ y $D(s)$) tal que el denominador del polinomio de la ecuación (13) pueda ser igual a $Z_p(s)\lambda_1(s)R_m(s)$. Con la identidad de Bezout se identifica $R_p(s)$ con $Q(s)$, $-k_p Z_p(s)$ con $P(s)$ y $Z_p(s)\lambda_1(s)R_m(s)$ con $Q^*(s)$ como la ecuación (3). Luego, el problema se basa en determinar $C^*(s)$ y $D^*(s)$ tal que $W_o(s) = W_m(s)$ que resulta en,

$$[\lambda(s) - C^*(s)]Q(s) + D^*(s)P(s) = Q^*(s) \tag{14}$$

y

$$k_c = k^* = \frac{k_m}{k_p} \quad (15)$$

Como la ecuación tiene la forma mostrada en la ecuación (5), por el lema se demuestra la existencia de los parámetros de control del vector θ^* . De esta forma se encuentran los valores esperados como sigue,

$$\begin{aligned} [Z_m(s)\lambda_1(s) - \theta_1^*]R_p - k_p Z_p[\theta_2^* + \theta_0^* Z_m(s)\lambda_1(s)] &= Z_p\lambda_1(s)R_m \\ [(1)(s+1) - \theta_1^*][s^2 - s - 2] - 3(1)[\theta_2^* + \theta_0^*(1)(s+1)] &= (1)(s+1)[s^2 + 5s + 6] \\ [(s + (1 - \theta_1^*))[s^2 - s - 2] - 3[\theta_2^* + \theta_0^*(s+1)] &= [s^3 + 6s^2 + 11s + 6] \\ s^3 + s^2(-\theta_1^*) + s(\theta_1^* - 3 - 3\theta_0^*) + (2\theta_1^* - 2 - 3\theta_2^* - 3\theta_0^*) &= s^3 + 6s^2 + 11s + 6 \end{aligned} \quad (16)$$

Resultando en,

$$\begin{aligned} k^* &= 1.33 \\ \theta_1^* &= -6 \\ \theta_0^* &= -6.67 \\ \theta_2^* &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Volviendo a la ecuación (10) de las leyes de control $\theta(t)$, se reemplaza el error $e_1(t)$ por el error aumentado definido como $\varepsilon = e_1(t) + k_1(t)e_2(t)$ con $e_2(t) = \theta^T \bar{\omega} - \bar{u}$ representando hasta ahora lo que es el control adaptativo directo de un sistema de grado relativo $n^* \geq 2$ como muestra el diagrama general de la Figura 4 y $k_1^* = k_p/k_m$.

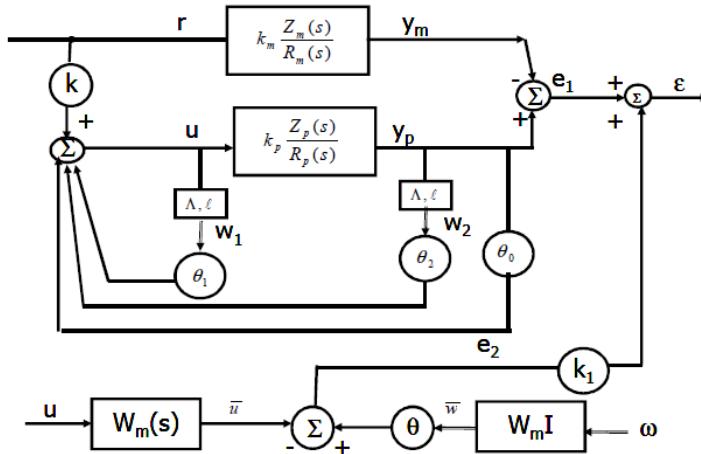


Figura 4: Diagrama de bloques representativo del control adaptativo para un sistema de grado relativo igual a 2.

Expresando los términos de manera más explícita, se tiene,

$$\begin{aligned}
 e_2(t) &= [\theta^T W_m(s) I - W_m(s) \theta^T] \omega \\
 \varepsilon &= \frac{1}{k^*} \phi^T \zeta + \psi_1 e_2 \\
 \zeta &= W_m(s) I \omega \\
 \dot{\theta} &= \dot{\phi} = -\gamma \cdot \text{sgn}(k_p) \frac{\varepsilon \zeta}{1 + \bar{\zeta}^T \bar{\zeta}} \\
 \dot{\psi}_1 &= -\gamma_5 \cdot \frac{\varepsilon e_2}{1 + \bar{\zeta}^T \bar{\zeta}} \\
 \bar{\zeta} &= W_m(s) I \bar{\omega}
 \end{aligned} \tag{18}$$

con I como la matriz de identidad de dimensión $(2n - 1) \times (2n - 1)$. La ecuación (9) se le añaden los siguientes términos,

$$\begin{aligned}
 \omega(t) &= [r(t), \omega_1^T(t), y_p(t), \omega_2^T(t)]^T \\
 \theta(t) &= [k(t), \theta_1^T(t), \theta_0(t), \theta_2^T(t)]^T \\
 \bar{\theta} &= [k(t), \theta_1^T, \theta_0, \theta_2^T]^T \\
 \bar{\omega} &= [r(t), \omega_1^T, y_p, \omega_2^T]^T
 \end{aligned} \tag{19}$$

con los parámetros de error definidos como,

$$\begin{aligned}
 \psi_1(t) &= k_1(t) - k_1^* \\
 \psi(t) &= k(t) - k^* \\
 \phi_0 &= \theta_0(t) - \theta_0^* \\
 \phi_1 &= \theta_1(t) - \theta_1^* \\
 \phi_2 &= \theta_2(t) - \theta_2^* \\
 \phi(t) &= [\psi, \phi_1^T, \phi_0, \phi_2^T]^T
 \end{aligned} \tag{20}$$

La representación de todo lo anterior se puede ver en el diagrama de la Figura 5.

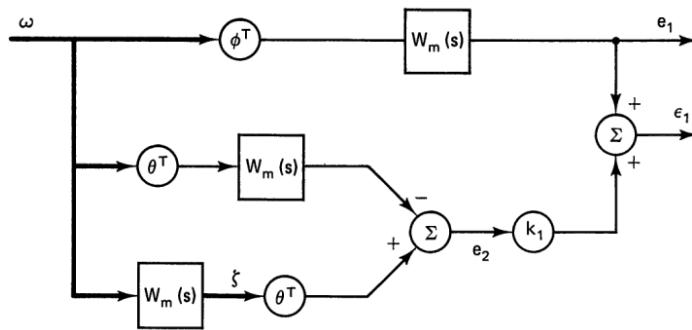


Figura 5: Error aumentado para k_p desconocido con $n^* = 2$.

Finalmente, al diagrama de bloques mostrado en la Figura 3 debe ser modificado, terminando como se muestra en las Figuras,

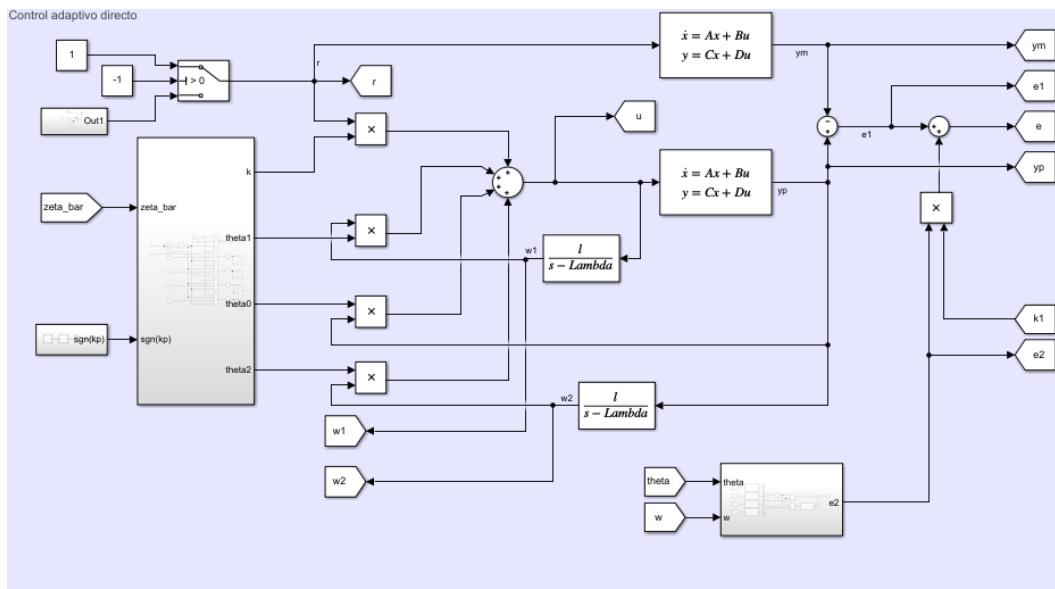


Figura 6: Diagrama de bloques para un control adaptativo directo de un sistema de grado relativo $n^* = 2$.

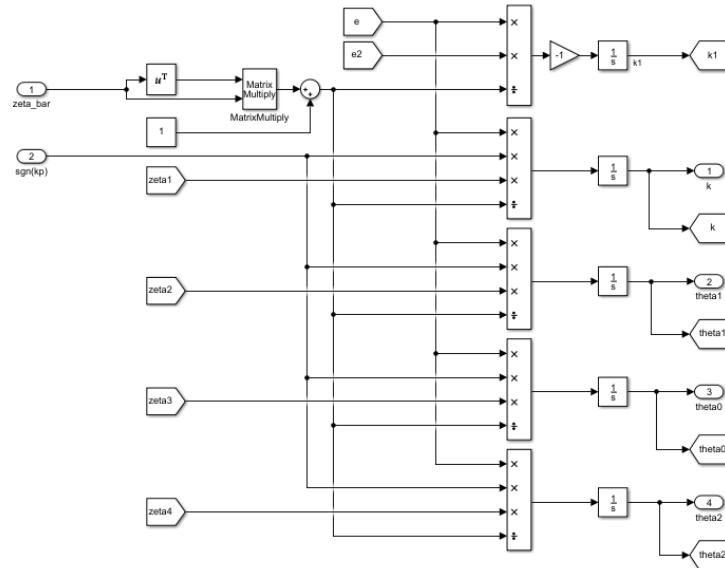


Figura 7: Diagrama de bloques para las leyes de ajuste del control adaptativo.

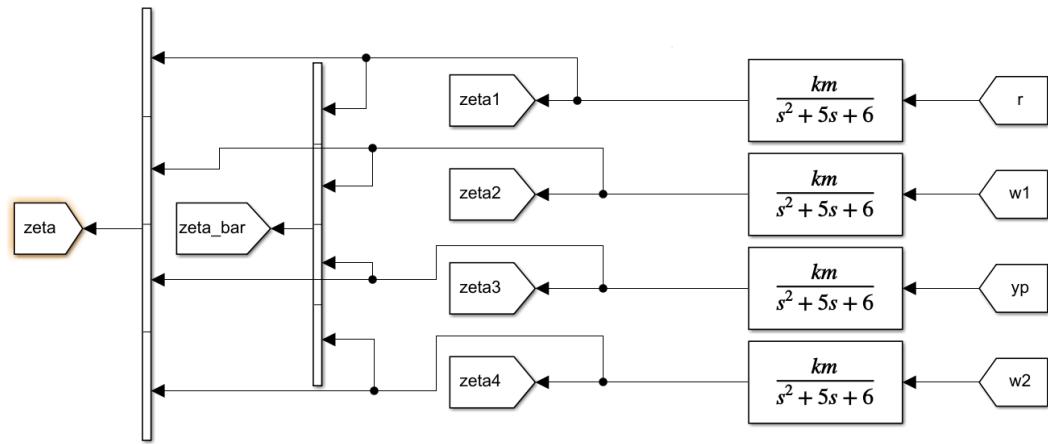


Figura 8: Diagrama de bloques para los vectores auxiliares.

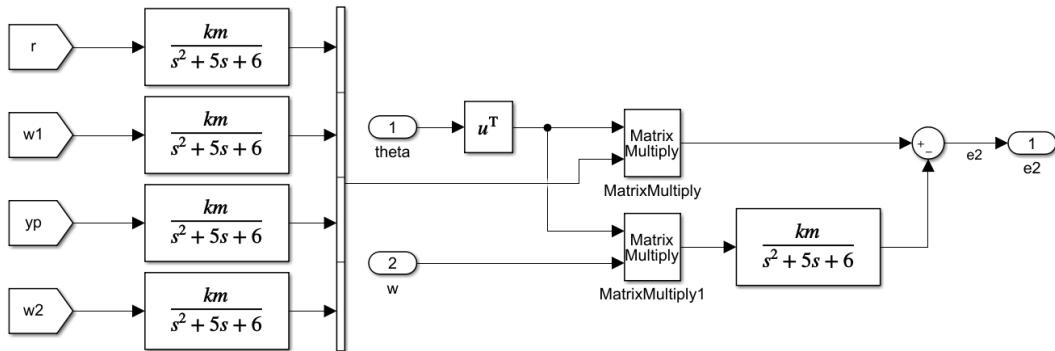


Figura 9: Diagrama de bloques para calcular el error aumentado.

1.2. Experimentos con diferentes parámetros

1.2.1. Condiciones iniciales diferentes entrada oscilante

Primero, se muestran los resultados para las condiciones iniciales dadas en el enunciado. La entrada es $r(t) = 2 \sin((5)t) + \sin((1)t) + \sin((10)t)$ que corresponde a una entrada de excitación persistente con 3 frecuencias diferentes de un mínimo de $n/2$ donde n es el numero de variables a ajustar. Los resultados se muestran en la columna de la Figura 10.(a) junto con los demás experimento que se detallan a continuación:

- Para una condición inicial $y_m = 5$ y $\dot{y}_p = 1$. Columna de la Figura 10.(b)
- Para $\dot{y}_m = 5$ y $\dot{y}_p = 5$. Columna de la Figura 10.(c)

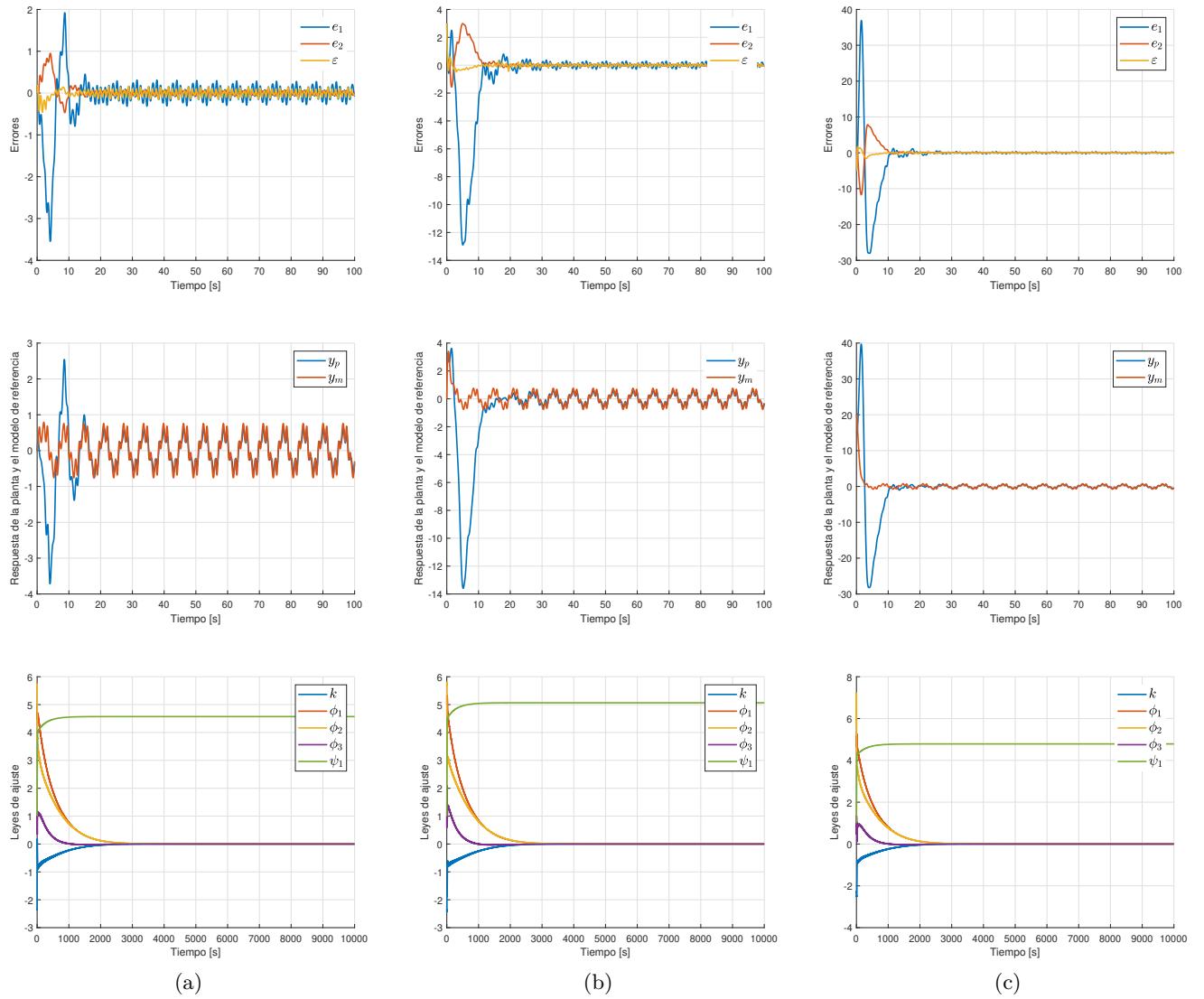


Figura 10: Resultados de simulaciones para diferentes valores iniciales del sistema con entrada oscilante.

1.2.2. Condiciones iniciales diferentes entrada unitaria

Primero, se muestran los resultados para las condiciones iniciales dadas en el enunciado. La entrada es $r(t) = 1$. Los resultados se muestran en la columna de la Figura 11.(a) junto con los demás experimento que se detallan a continuación:

- Para una condición inicial $y_m = 5$ y $\dot{y}_p = 1$. Columna de la Figura 11.(b)
- Para $\dot{y}_m = 5$ y $\dot{y}_p = 5$. Columna de la Figura 11.(c)

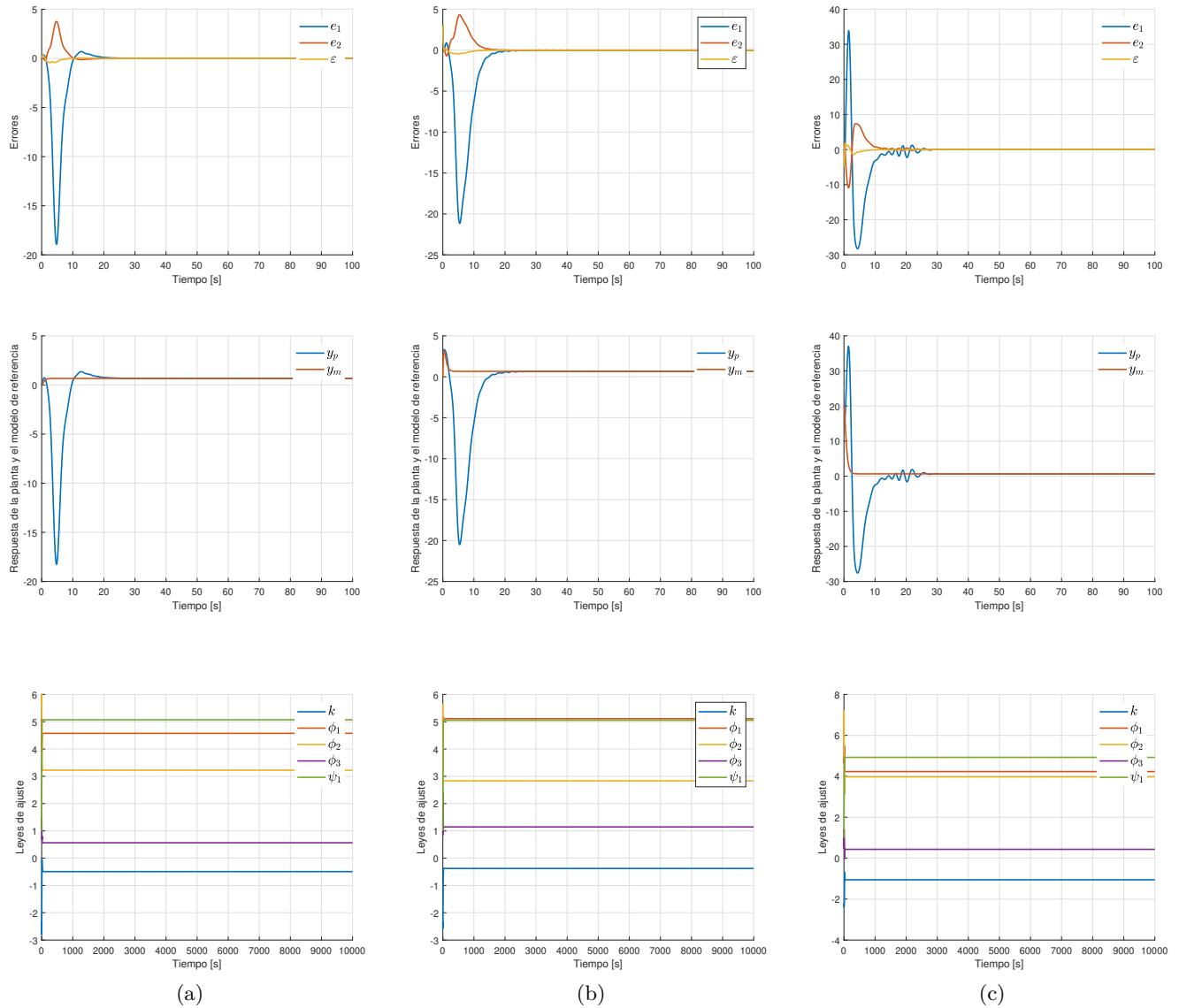


Figura 11: Resultados de simulaciones para diferentes valores iniciales del sistema con entrada unitaria.

1.2.3. Variación de ganancias adaptativas con entrada unitaria

Parámetros:

- Todas las ganancias $\gamma_i = 0.1$. Columna de la Figura 12.(a)
- Todas las ganancias $\gamma_i = 1.0$. Columna de la Figura 12.(b)
- Todas las ganancias $\gamma_i = 10$. Columna de la Figura 12.(c)

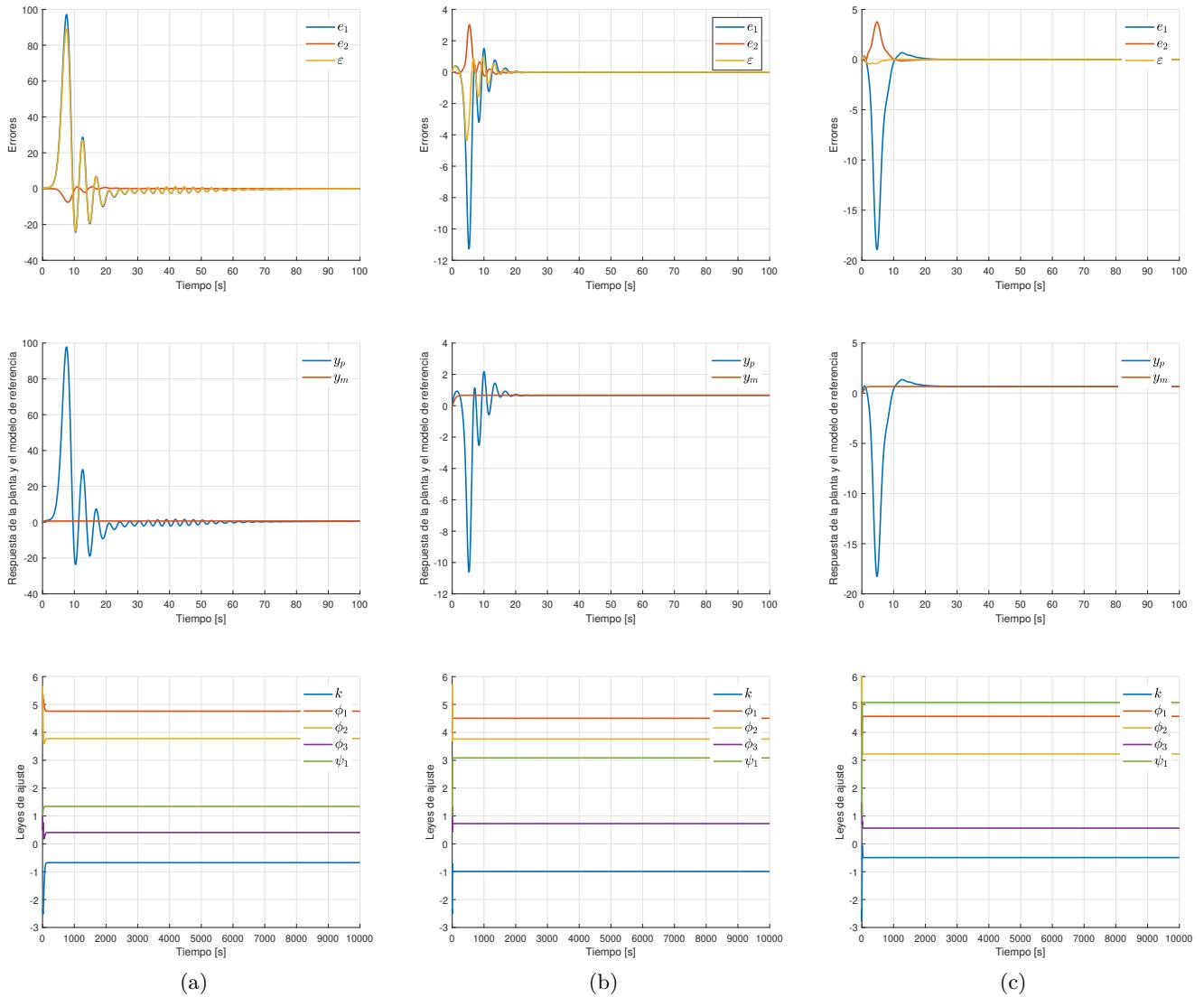


Figura 12: Resultados de simulaciones para diferentes valores de ganancia adaptativa con una entrada unitaria.

1.2.4. Variación de ganancias adaptativas con entrada oscilante

Parámetros:

- Todas las ganancias $\gamma_i = 0.1$. Columna de la Figura 13.(a)
- Todas las ganancias $\gamma_i = 1.0$. Columna de la Figura 13.(b)
- Todas las ganancias $\gamma_i = 10$. Columna de la Figura 13.(c)

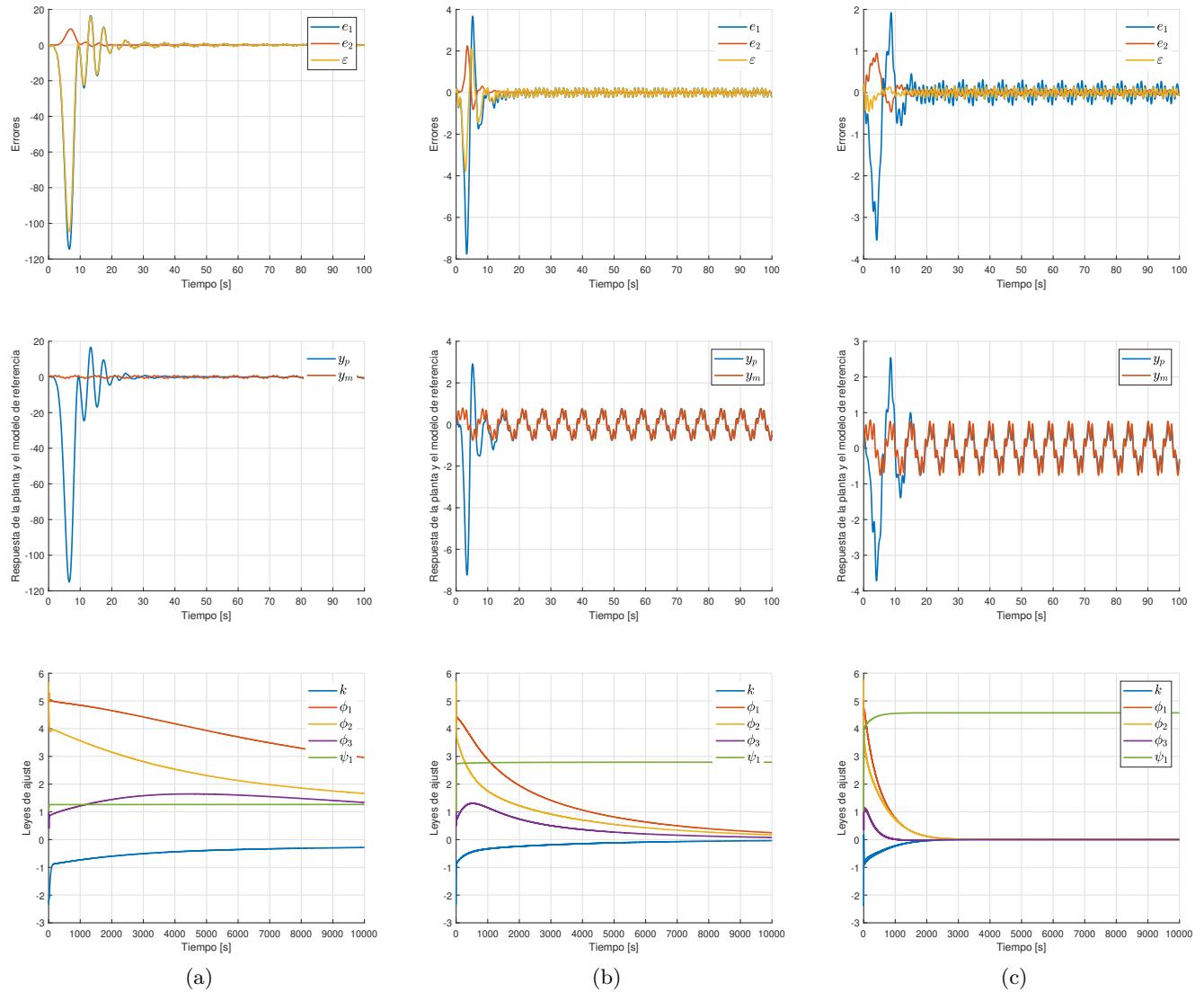


Figura 13: Resultados de simulaciones para diferentes valores de ganancia adaptativa con una entrada ruido blanco.

1.2.5. Variación de ganancias adaptativas con entrada ruido blanco

Parámetros:

- Todas las ganancias $\gamma_i = 0.1$. Columna de la Figura 14.(a)
- Todas las ganancias $\gamma_i = 1.0$. Columna de la Figura 14.(b)
- Todas las ganancias $\gamma_i = 10$. Columna de la Figura 14.(c)

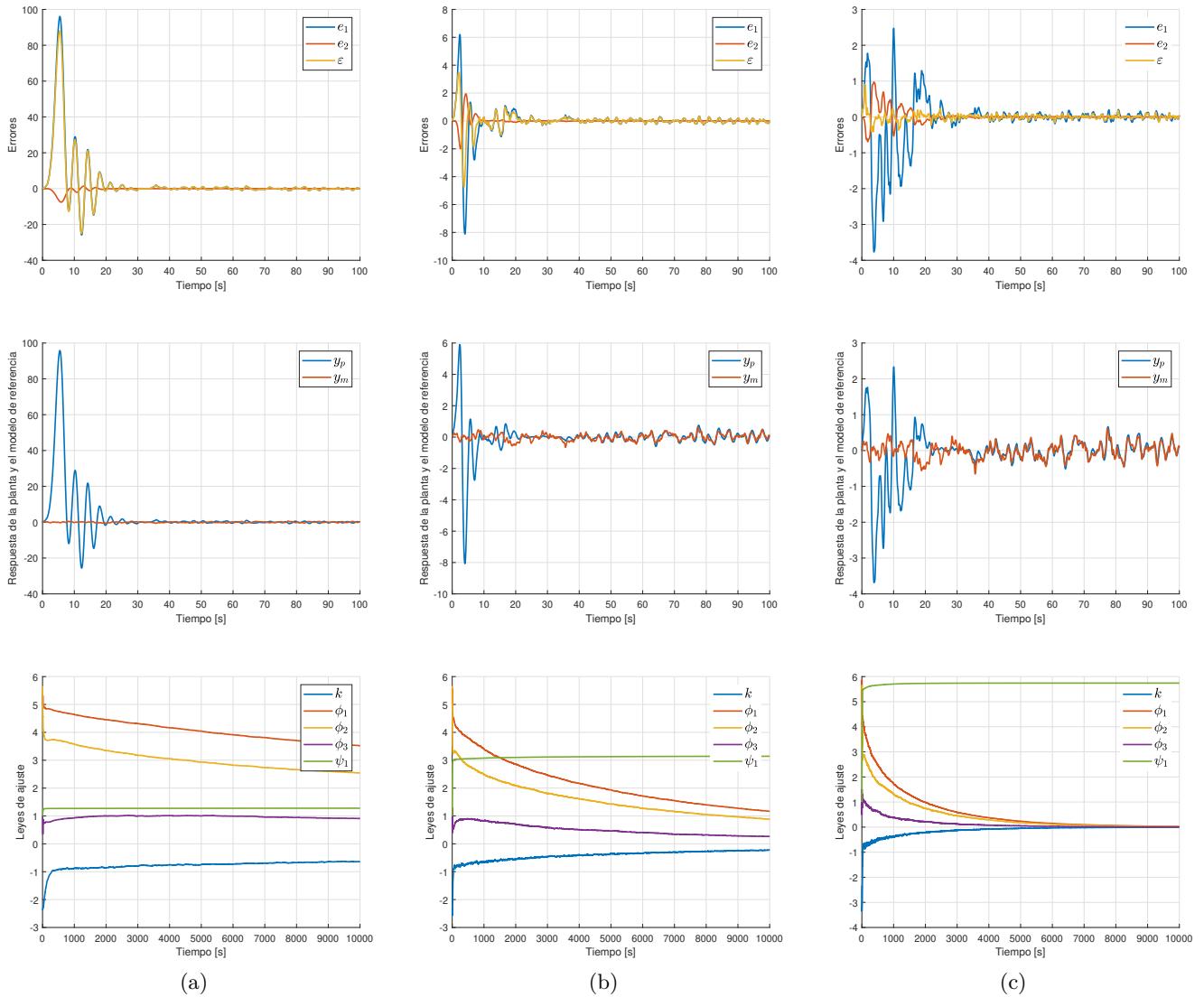


Figura 14: Simulaciones para diferentes valores de ganancia adaptativa con ruido blanco.

1.2.6. Variación del parámetro b_p de la planta con entrada unitaria

Recordando solo el denominador R_p de la función de transferencia de la planta, definido como $R_p(s) = s^2 + b_p s + c_p$ con $b_p = -1$ y $c_p = -2$, se presentan 3 simulaciones. Los parámetros k^* , θ_1^* , θ_0^* , θ_2^* , son reajustados internamente.

- Parámetro $b_p = 5$. Columna de la Figura 15.(a)
- Parámetro $b_p = 0$. Columna de la Figura 15.(b)
- Parámetro $b_p = -5$. Columna de la Figura 15.(c)

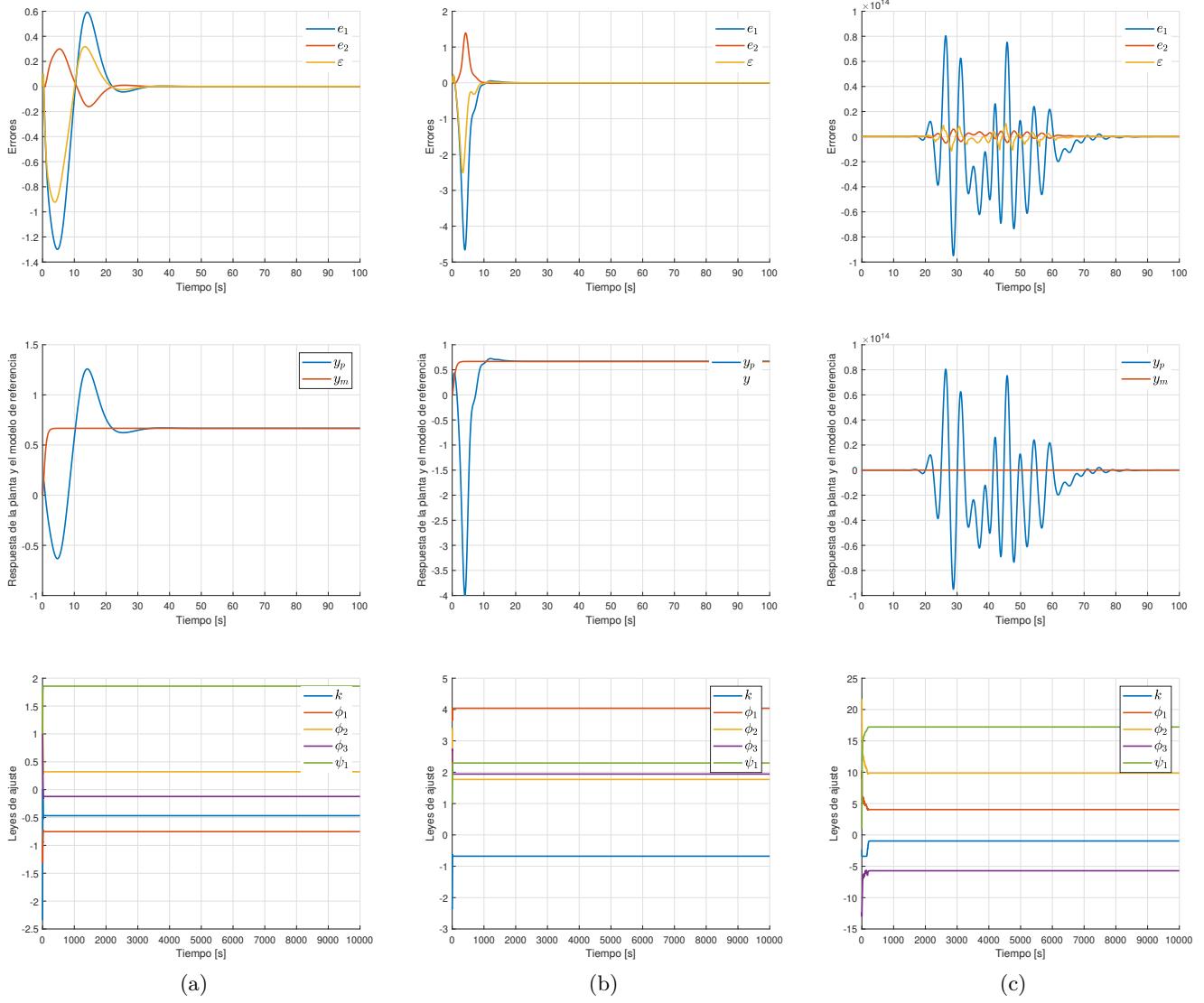


Figura 15: Resultados de simulaciones para diferentes valores de b_p con una entrada unitaria.

1.2.7. Variación del parámetro c_p de la planta con entrada unitaria

Recordando solo el denominador R_p de la función de transferencia de la planta, definido como $R_p(s) = s^2 + b_p s + c_p$ con $b_p = -1$ y $c_p = -2$, se presentan 3 simulaciones,

- Parámetro $c_p = 5$. Columna de la Figura 16.(a)
- Parámetro $c_p = 0$. Columna de la Figura 16.(b)
- Parámetro $c_p = -5$. Columna de la Figura 16.(c)

Las condiciones iniciales son las del enunciado y las ganancias adaptativas son igual a la unidad.

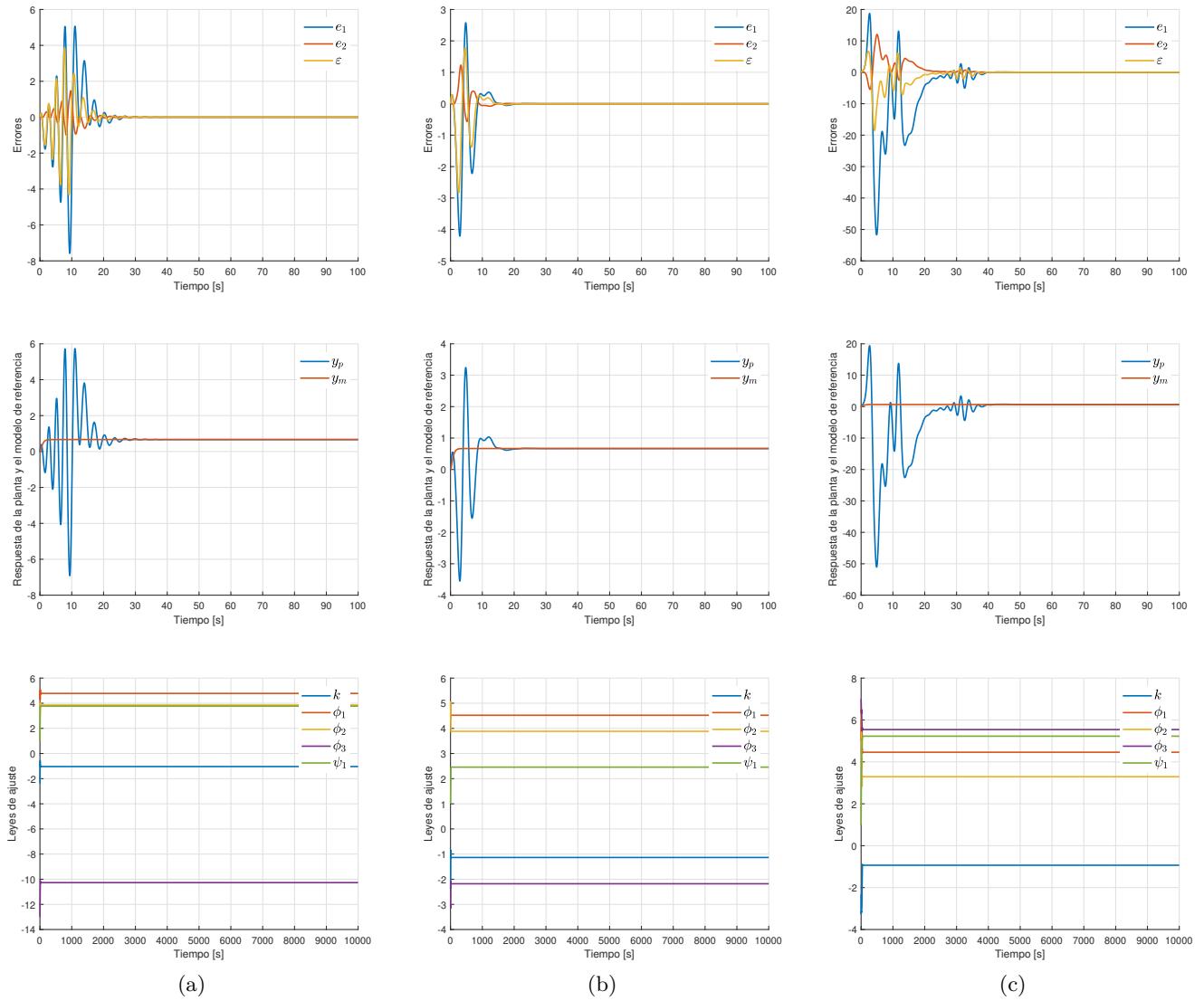


Figura 16: Resultados de simulaciones para diferentes valores de c_p con una entrada unitaria.

1.2.8. Variación del parámetro b_p de la planta con entrada oscilante

La entrada es $r(t) = 2 \sin((5)t) + \sin((1)t) + \sin((10)t)$ y las simulaciones son:

- Parámetro $b_p = 5$. Columna de la Figura 17.(a)
- Parámetro $b_p = 0$. Columna de la Figura 17.(b)
- Parámetro $b_p = -5$. Columna de la Figura 17.(c)

Las condiciones iniciales son las del enunciado y las ganancias adaptativas son igual a la unidad.

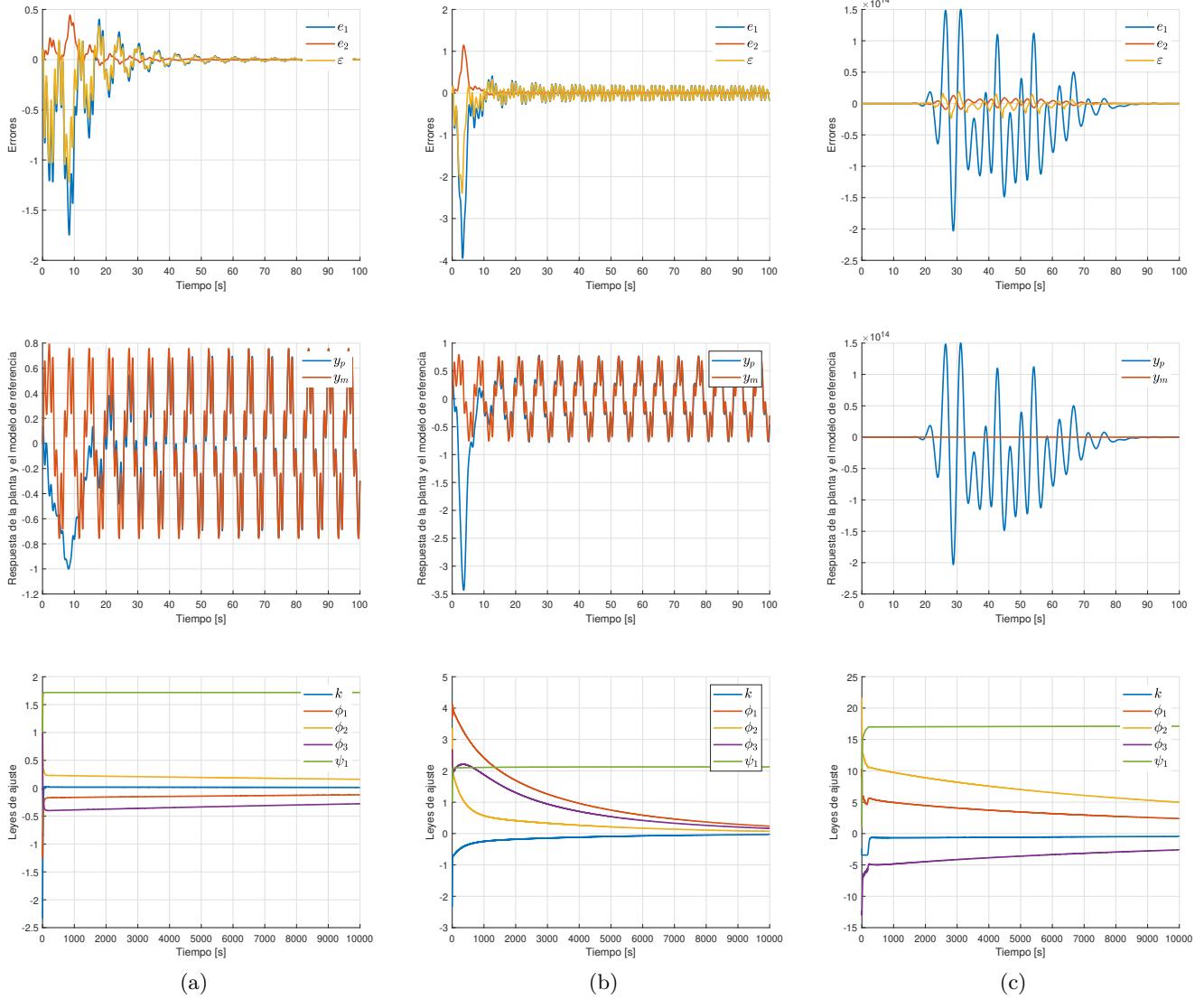


Figura 17: Resultados de simulaciones para diferentes valores de b_p con una entrada oscilante.

1.2.9. Variación del parámetro c_p de la planta con entrada oscilante

La entrada es $r(t) = 2 \sin((5)t) + \sin((1)t) + \sin((10)t)$ y las simulaciones son:

- Parámetro $c_p = 5$. Columna de la Figura 18.(a)
- Parámetro $c_p = 0$. Columna de la Figura 18.(b)
- Parámetro $c_p = -5$. Columna de la Figura 18.(c)

Las condiciones iniciales son las del enunciado y las ganancias adaptativas son igual a la unidad.

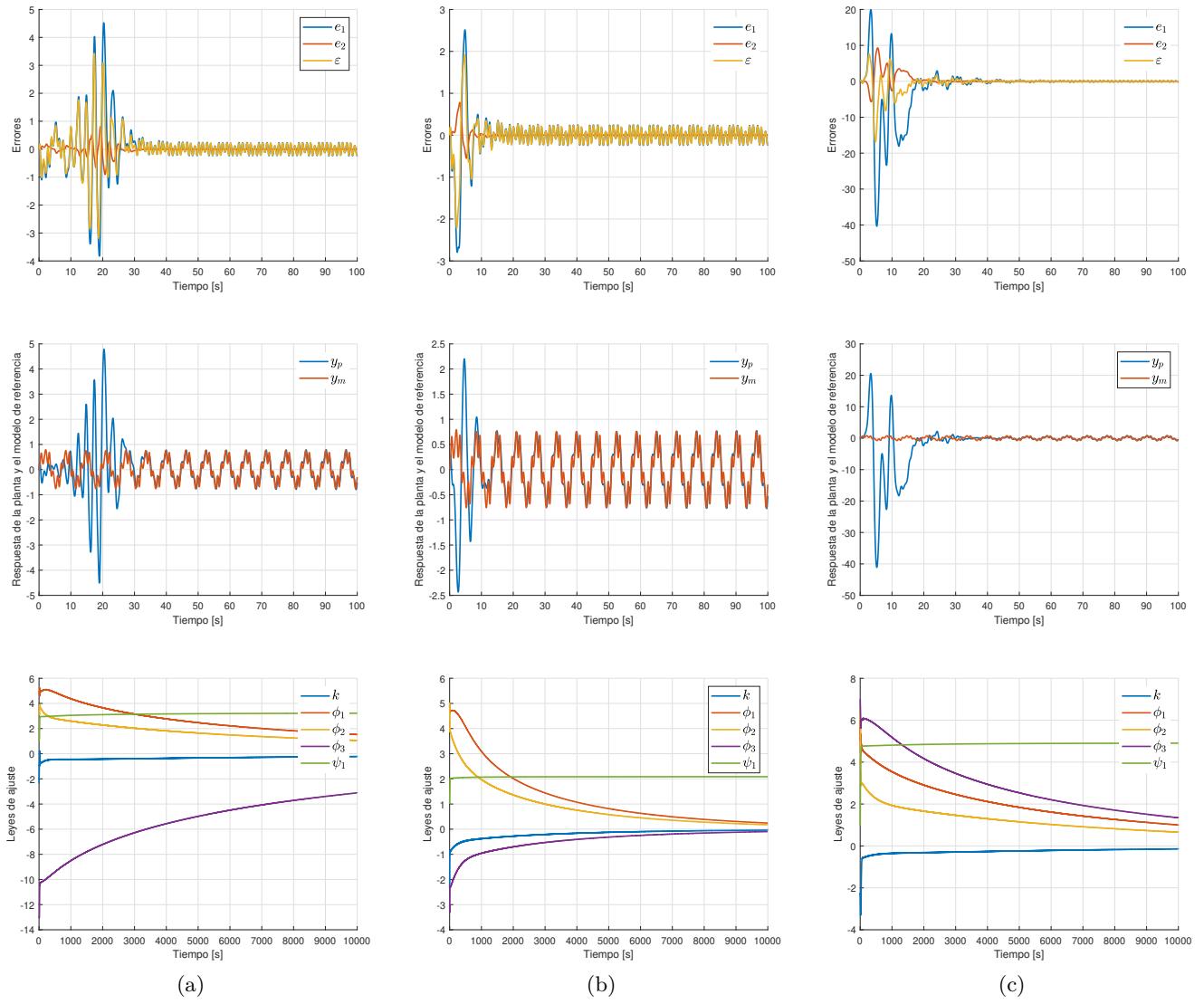


Figura 18: Resultados de simulaciones para diferentes valores de c_p con una entrada oscilante.

De los últimos gráficos se puede concluir que es muy importante conocer los valores de la planta o tener un estimado de ella ya que si éste varía, puede cambiar por completo la respuesta del error y las leyes de ajuste podrían no converger nunca a un valor. Por otro lado, se vio que cuando existen perturbaciones como ruido blanco, influyen en el comportamiento de las leyes de ajuste inclusive en el largo plazo.

Por estos motivos, en la siguiente sección de la tarea se analiza como deben cambiar las leyes de ajuste ante perturbaciones en la salida de la planta y ante valores de la planta variables en el tiempo.

2. Problema 2

1. Consideré la planta inestable y desconocida de segundo orden de la Parte A. Suponga ahora que actúa una perturbación externa $p(t)$ sobre la salida del sistema. Modifique el diseño del controlador para tomar en cuenta dicha perturbación y lograr que la salida de la planta permanezca lo más parecida posible a la salida del modelo de referencia.

Estudiar los casos en que se aplica una perturbación constante de amplitud P y una senoidal de amplitud A y frecuencia ω en torno al valor medio cero. Estudie la influencia de los parámetros correspondientes de las perturbaciones.

2. Realice el mismo estudio de la parte anterior pero suponiendo ahora que el parámetro 2 de la planta es variante en el tiempo. Considere los casos de variaciones del tipo rampa de pendiente p y duración finita y variaciones sinusoidales de amplitud A y frecuencia ω alrededor del valor 2. Estudie la influencia de los parámetros correspondientes de las perturbaciones.

2.1. Solución problema 1

Una perturbación en la salida se representa como se muestra en el diagrama general de la Figura 19.

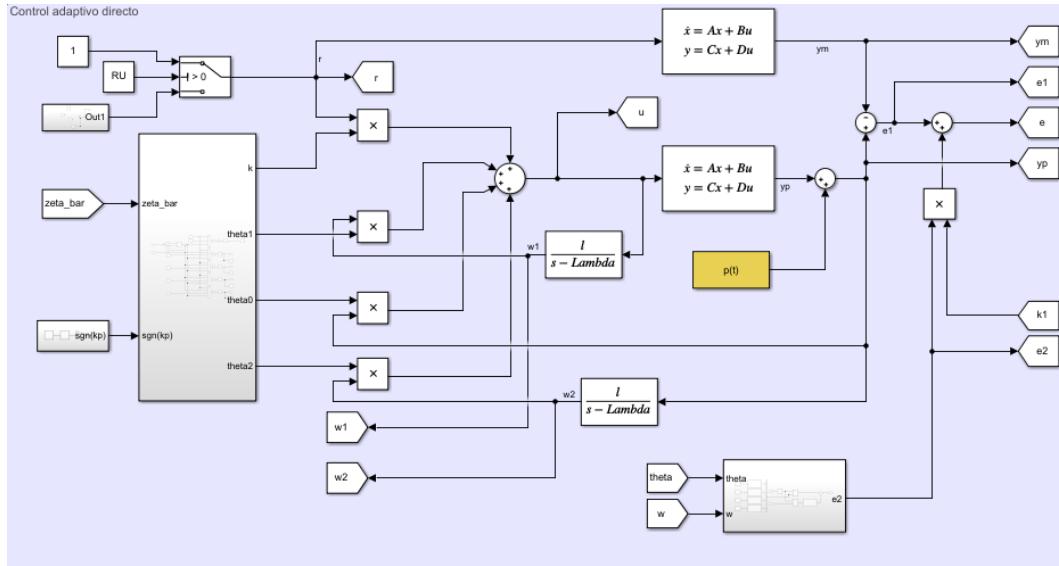


Figura 19: Perturbación $p(t)$ agregada en la salida de la planta.

Antes de detallar la solución, se debe remarcar que hay dos escenarios críticos en los cuales se generan modificaciones en las leyes de ajuste ante perturbaciones. Estos son: Cuando la entrada es de excitación persistente y cuando no lo es. Si la excitación es persistente solo se requiere aumentar el grado de la excitación. Sin embargo, cuando $r(t)$ no es excitación persistente es necesario aplicar otros métodos para que las leyes de ajuste puedan converger a un valor cercano a cero. Se realiza un experimento con entrada $r(t) = 2 \sin((5)t)$ mostrado en la Figura 20.(a) y otro con entrada unitaria mostrando en la Figura 20.(b). En ambos casos se realiza para diferentes valores de perturbación constante.

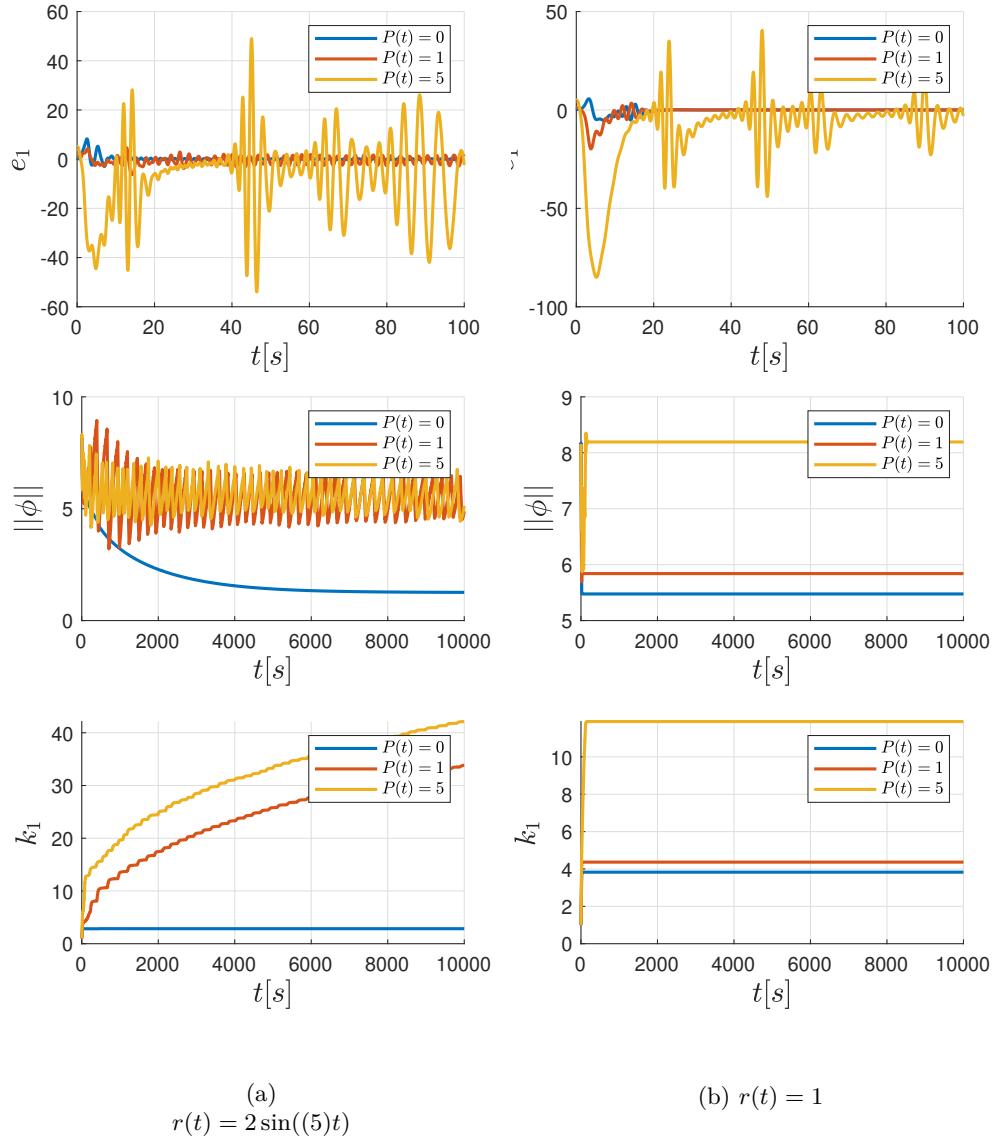


Figura 20: Comportamiento de las leyes de ajuste para diferentes valores de perturbación constante.

Considerando las entradas ya mencionadas, se ve el resultado de aplicar una perturbación oscillatoria definida como $P = A \cdot \sin(\omega_f t)$ para diferentes valores de A y ω_f . En los gráficos de la Figura 21 se puede ver el comportamiento del sistema para diferentes valores de amplitud A mientras que en la Figura 22 se puede ver el comportamiento para diferentes valores de ω_f .

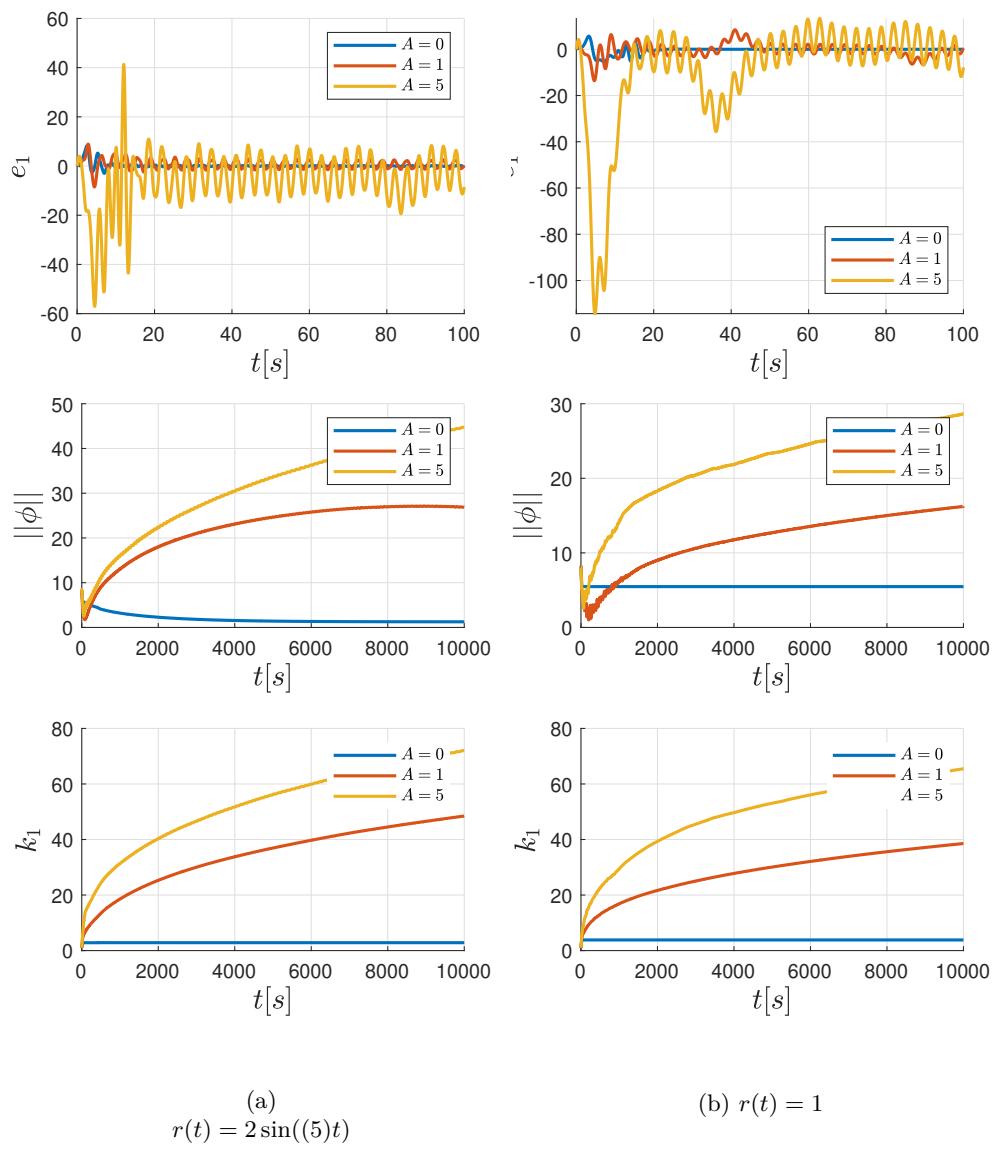


Figura 21: Comportamiento de las leyes de ajuste para diferentes valores de amplitud en la perturbación con $\omega_f = 2$.

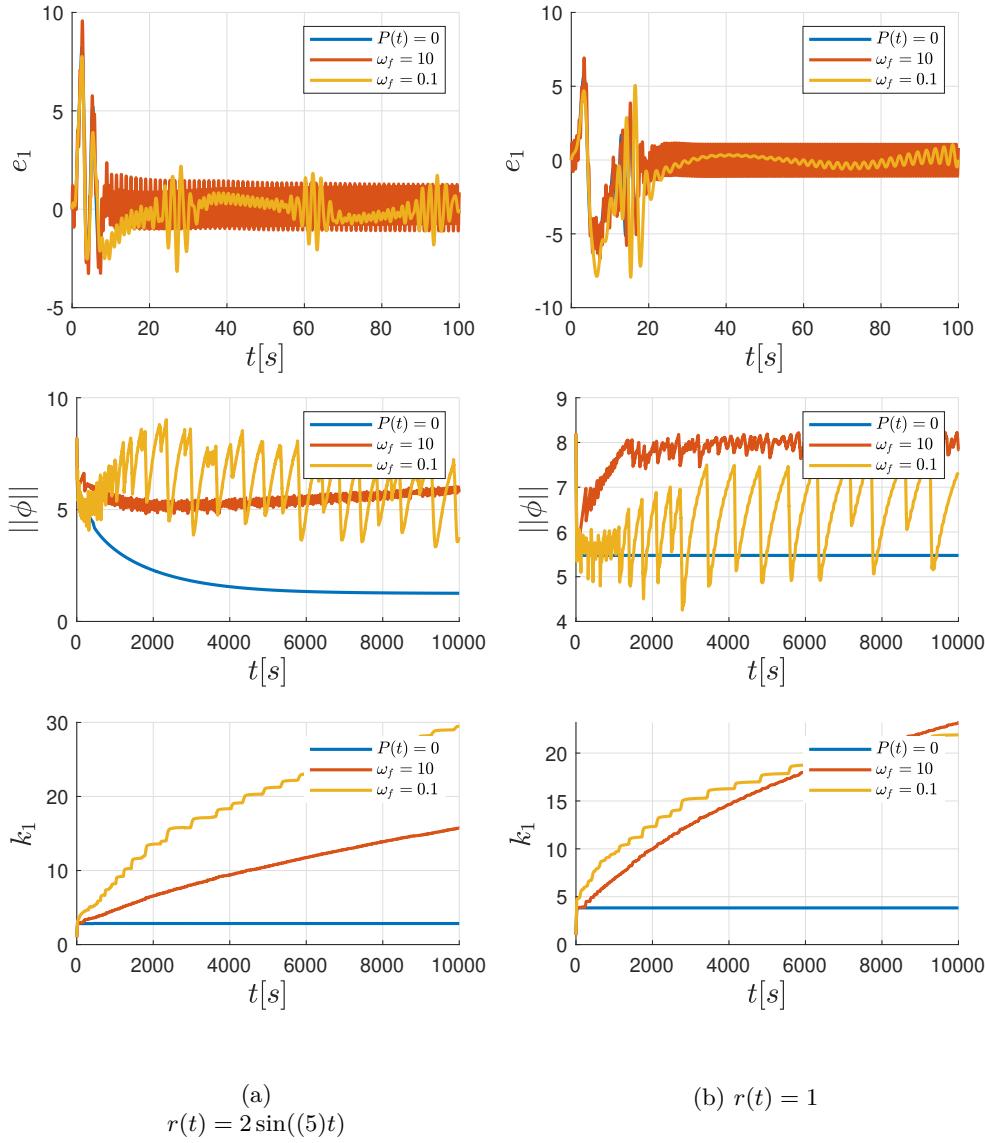


Figura 22: Comportamiento de las leyes de ajuste para diferentes frecuencias en la perturbación con $A = 1$.

Durante las simulaciones se observó que los valores iniciales de los parámetros de error son elementos críticos a la hora de analizar el comportamiento del error de la planta e_1 y las leyes de ajuste. En los casos anteriores se utilizaron valores iniciales random definidos como $k_0 = -1$, $\theta_{00} = 1$, $\theta_{10} = -1$, $\theta_{20} = 2$, sin embargo, si se consideran como valores iniciales los valores objetivos θ^* el resultado es diferente. Esto se puede ver en las Figuras 23 a la 25.

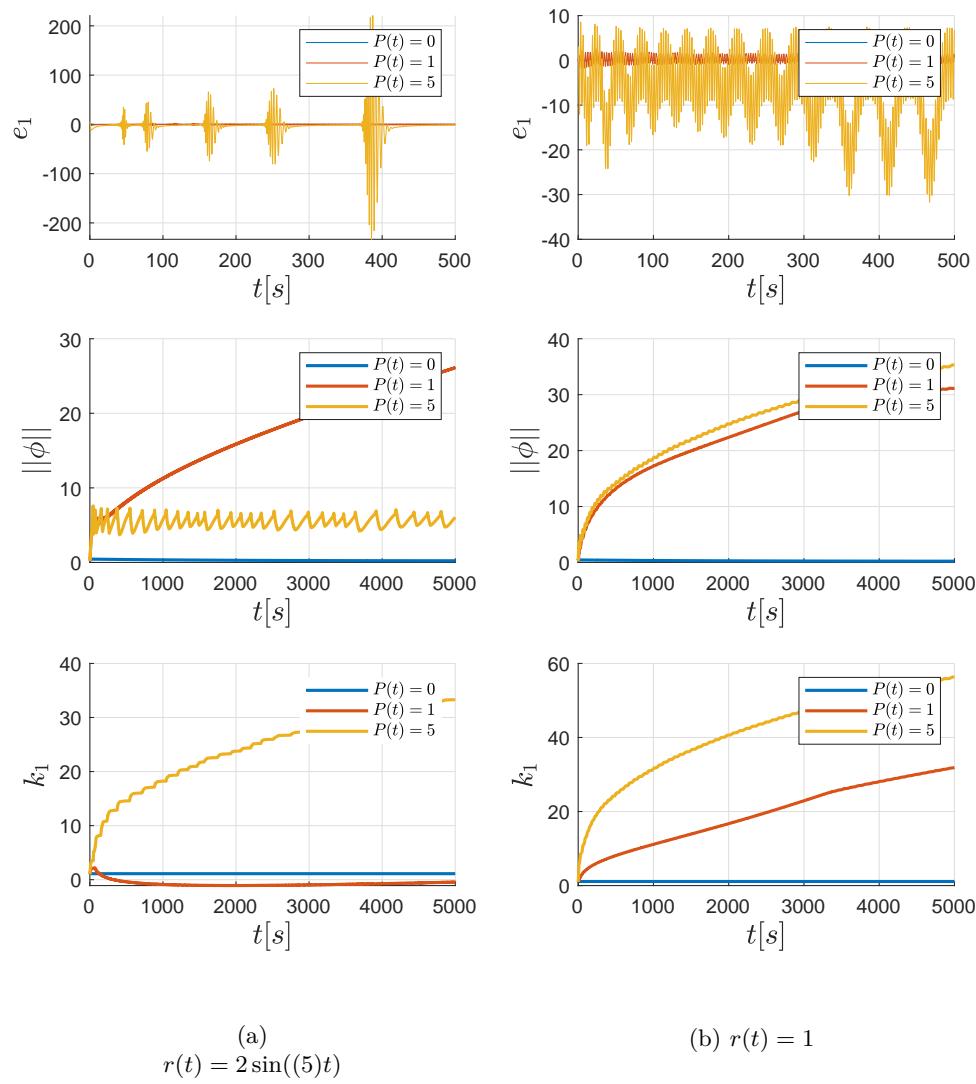


Figura 23: Leyes de ajuste para diferentes valores de perturbación constante con valor inicial igual al objetivo.

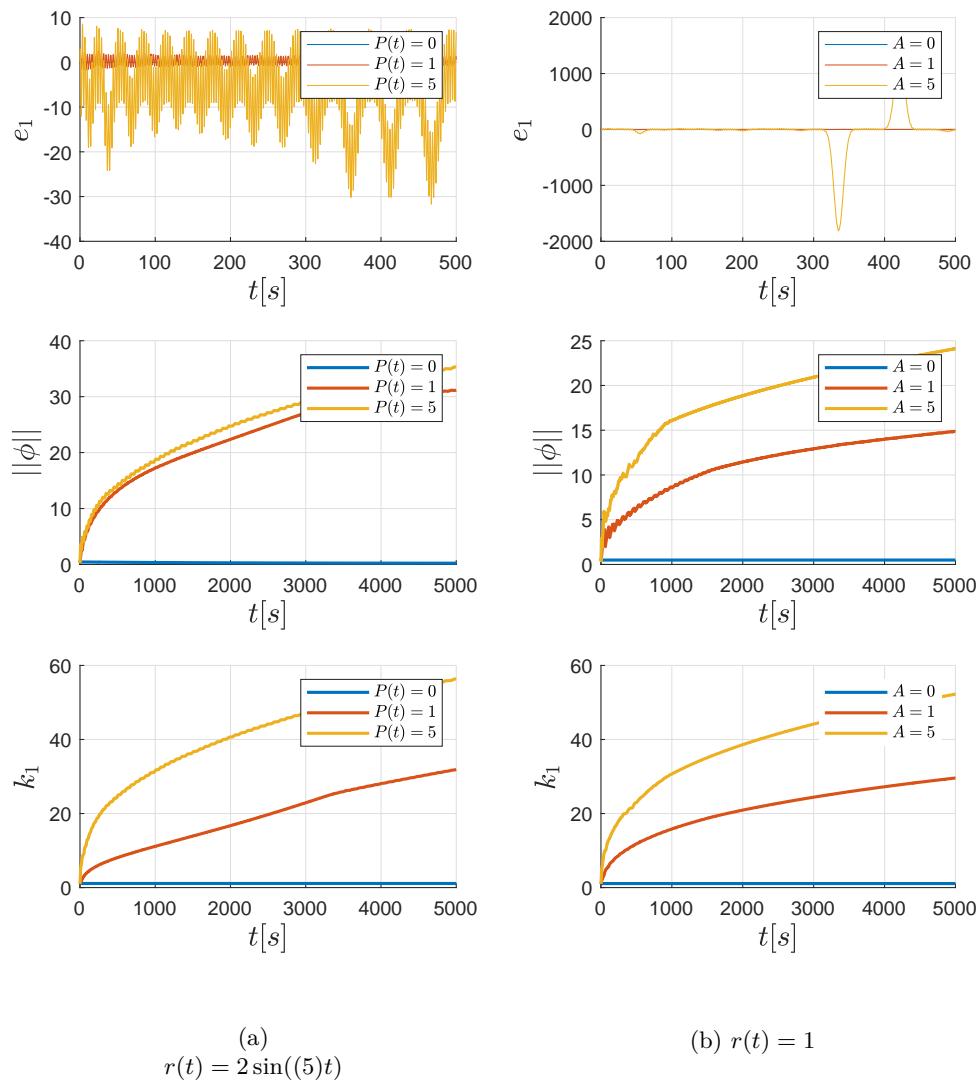


Figura 24: Leyes de ajuste para diferentes valores de amplitud en la perturbación con $\omega_f = 2$ y con valor inicial igual al objetivo.

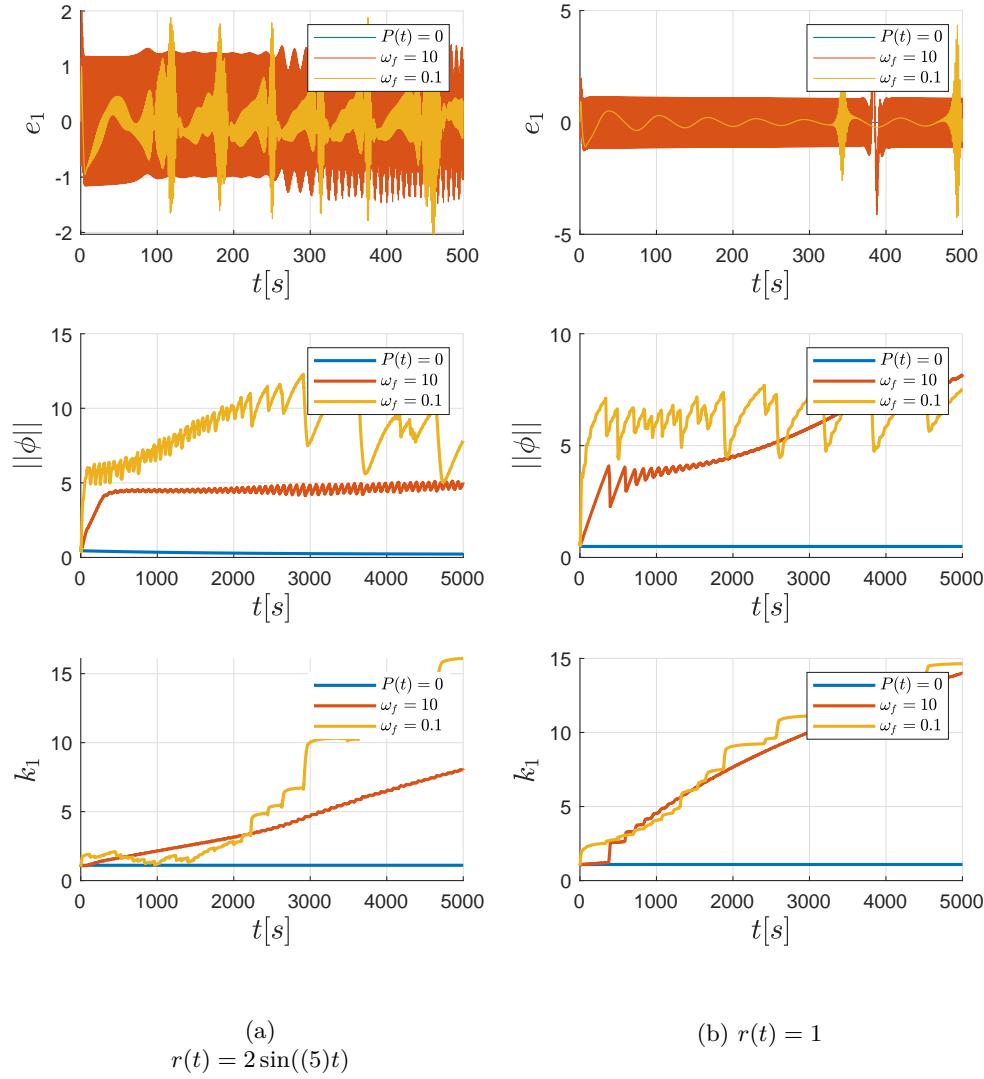


Figura 25: Leyes de ajuste para diferentes frecuencias en la perturbación con $A = 1$ y con valor inicial igual al objetivo.

Hasta aquí se puede observar que en ocasiones el error de la planta tiende a cero pero en otras tiende a oscilar producto de las perturbaciones, lo mismo ocurre con los valores de las leyes de ajuste representado por $\|\phi\|$ donde en ocasiones su valor diverge. Para evitar que estos fenómenos ocurran, se presentan 4 métodos que modifican el actuar de las leyes de ajuste evitando que estas puedan divergir y al mismo tiempo acotar los parámetro de error a valores cercanos a los límites de perturban.

2.1.1. Uso de Zona muerta

Se define la ley de ajuste con una zona muerta bajo una cota representada por la amplitud del ruido y un valor arbitrario positivo, es decir,

$$\dot{\phi} = \begin{cases} -\text{sgn}(k_p) \frac{\varepsilon \zeta}{1 + \xi^T \xi} & |\varepsilon| \geq \nu_o + \delta \\ 0 & |\varepsilon| < \nu_o + \delta \end{cases} \quad (1)$$

donde δ es un valor arbitrario constante y positivo que en este caso se considera igual a 0.01 y $\xi = [\zeta^T, \omega^T]^T$. Esto asegura que los parámetros se ajusten solo cuando la magnitud del error aumentado sea mayor que un predeterminado valor que depende de la perturbación. La aplicación de este método se ve en la Figura 26.

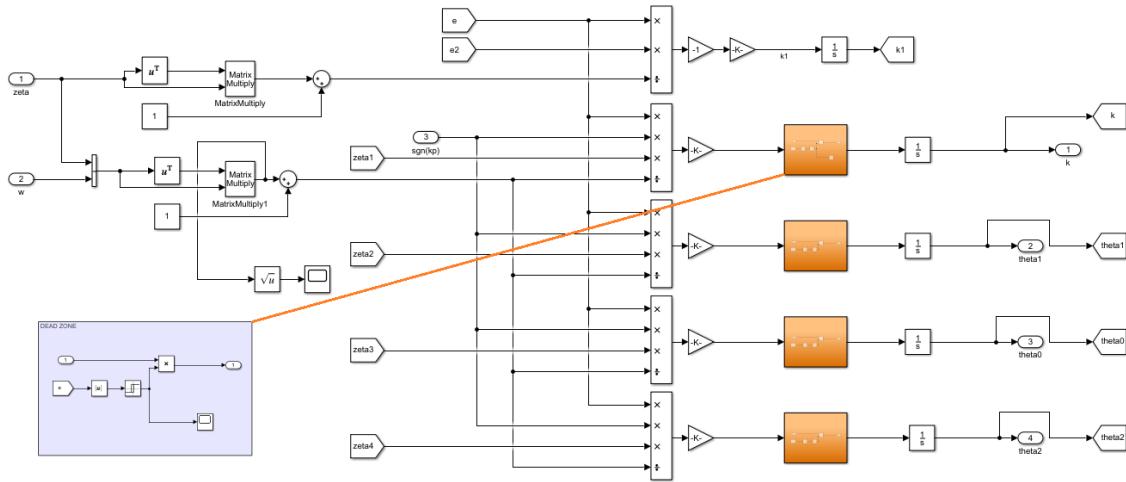


Figura 26: Modificación de las leyes de ajuste con el uso de Zona muerta.

Se realizara una serie de simulaciones en las que se comparan las respuestas de los errores en función de la entrada para diferentes valores de perturbación constante y perturbaciones oscilatorias. En las Figuras 27-29 y 31 se presentan las respuestas cuando las condiciones iniciales de los parámetros de las leyes de ajuste son igual al valor objetivo θ^* , mientras que en las Figuras 28-30 y 32 se presentan las respuestas del error ante condiciones iniciales aleatoria de las leyes de ajuste.

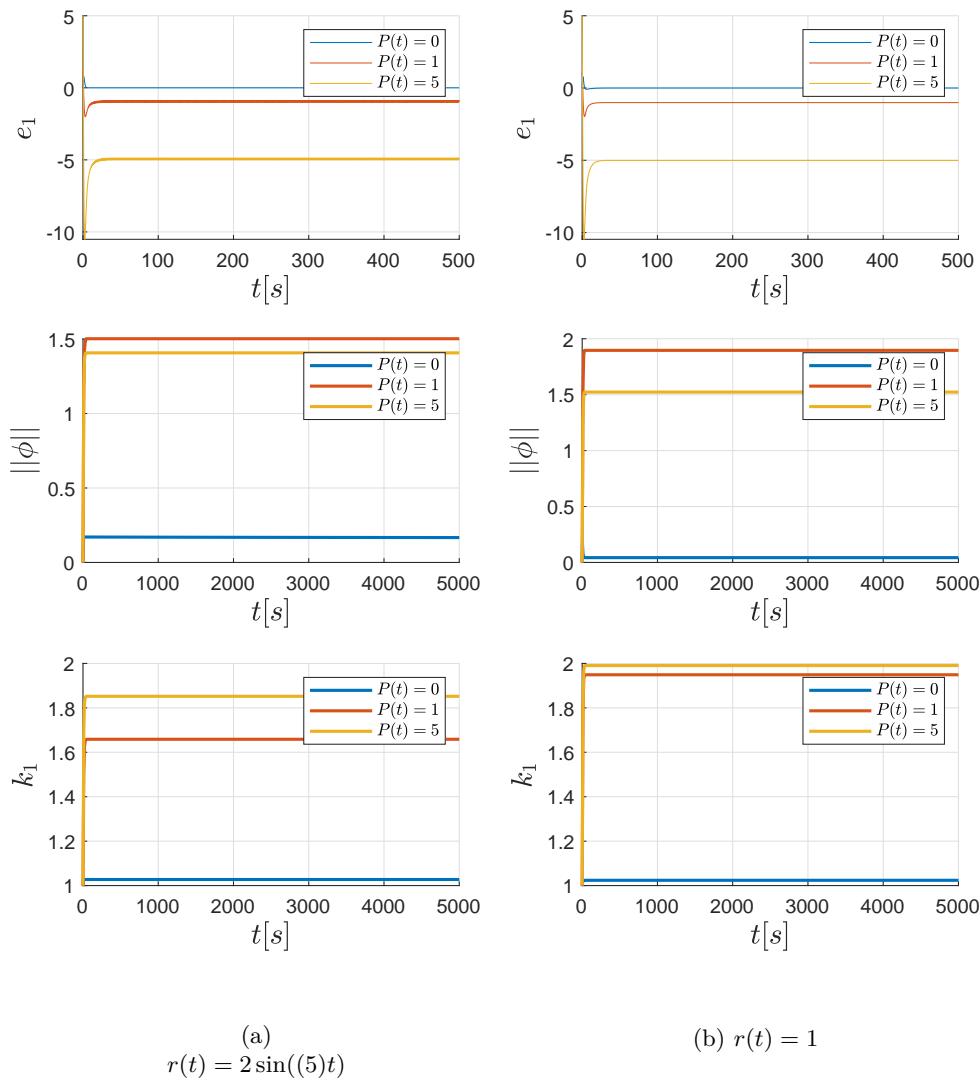


Figura 27: Leyes de ajuste para diferentes valores de perturbación constante con valor inicial igual al objetivo.

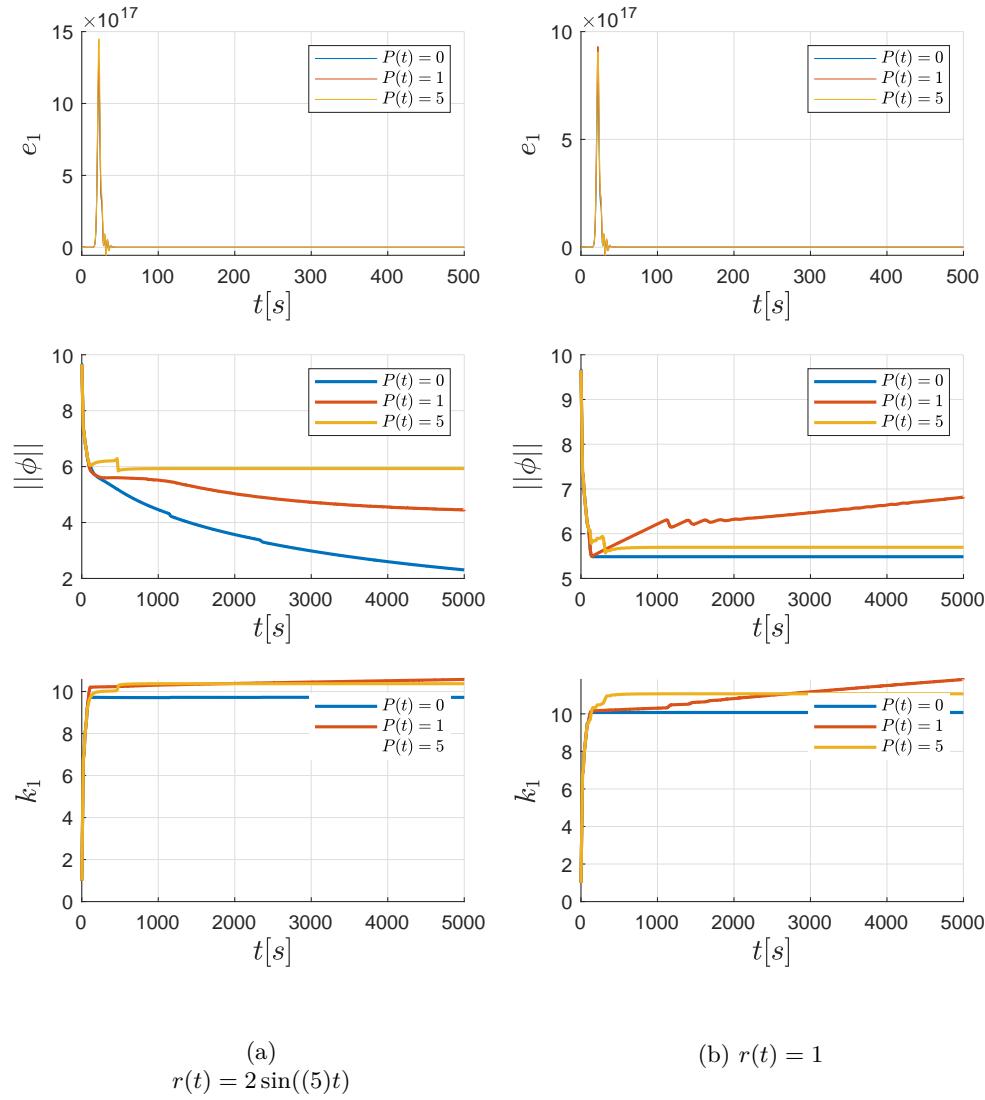


Figura 28: Leyes de ajuste para diferentes valores de perturbación constante con valor inicial aleatorio.

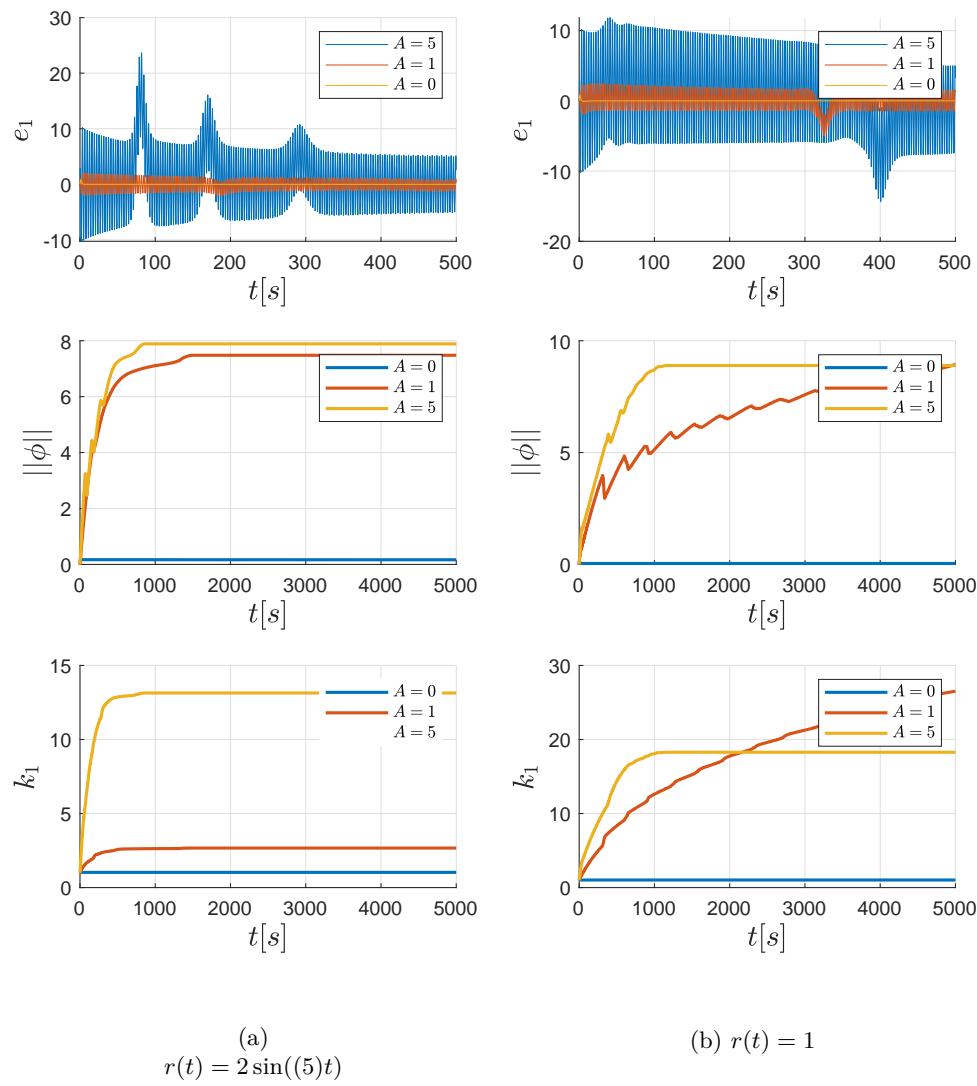


Figura 29: Leyes de ajuste para diferentes valores de amplitud en la perturbación con $\omega_f = 2$ y con valor inicial igual al objetivo.

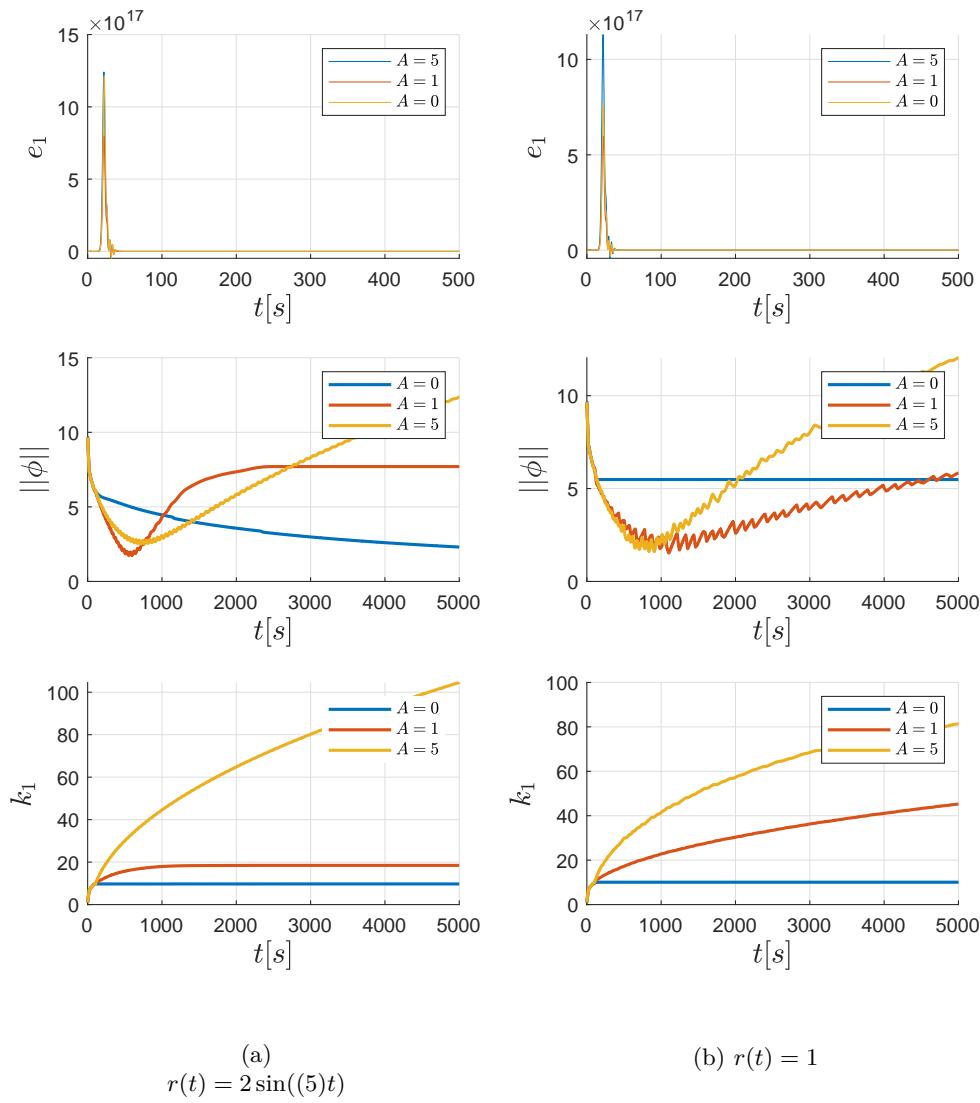


Figura 30: Leyes de ajuste para diferentes valores de amplitud en la perturbación con $\omega_f = 2$ y con valor inicial aleatorio.

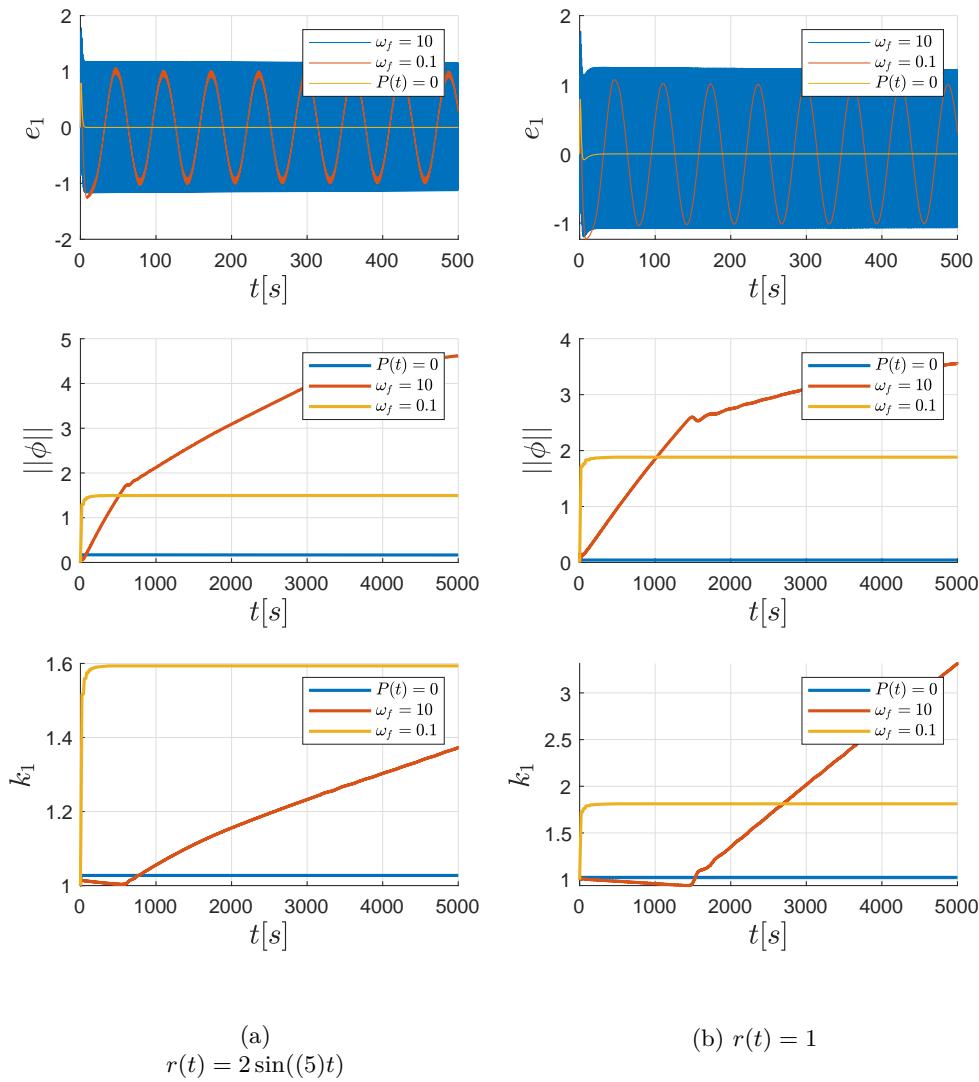


Figura 31: Leyes de ajuste para diferentes frecuencias en la perturbación con $A = 1$ y con valor inicial igual al objetivo.

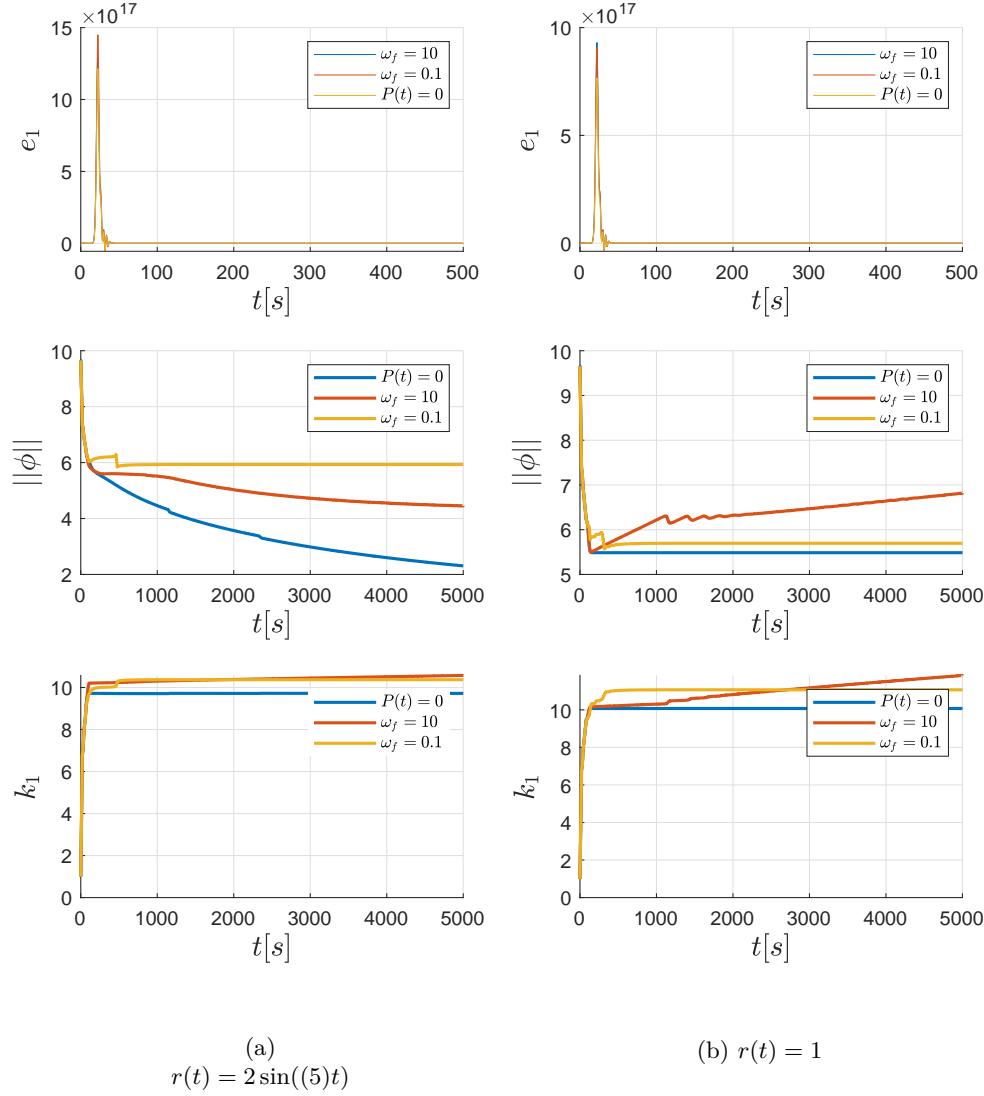


Figura 32: Leyes de ajuste para diferentes frecuencias en la perturbación con $A = 1$ y con valor inicial aleatorio.

Se puede notar que cuando los valores iniciales de las leyes de ajuste son muy diferentes de los valores objetivos el sistema tiene una respuesta tardía que incremento demasiado el error de la planta. Sin embargo, a pesar de esto el sistema logra acotar el error y los parámetros en la mayoría de las simulaciones.

2.1.2. Cota sobre $\|\theta^*\|$

En este caso el espacio esperado de los parámetros es acotado por el espacio S definido como,

$$S = \{\theta \mid \|\theta\| \leq \theta_{max}^*\} \quad (2)$$

donde θ_{max}^* es una constante positiva. Luego, las leyes de ajuste toman la forma de,

$$\dot{\phi} = -\text{sgn}(k_p) \frac{\varepsilon \zeta}{1 + \xi^T \xi} - \theta f(\theta) \quad (3)$$

con

$$f(\theta) = \begin{cases} \left(1 - \frac{\|\theta\|}{\theta_{max}^*}\right) & \|\theta\| > \theta_{max}^* \\ 0 & \|\theta\| \leq \theta_{max}^* \end{cases} \quad (4)$$

La implementación de este método se muestra en la Figura 33.

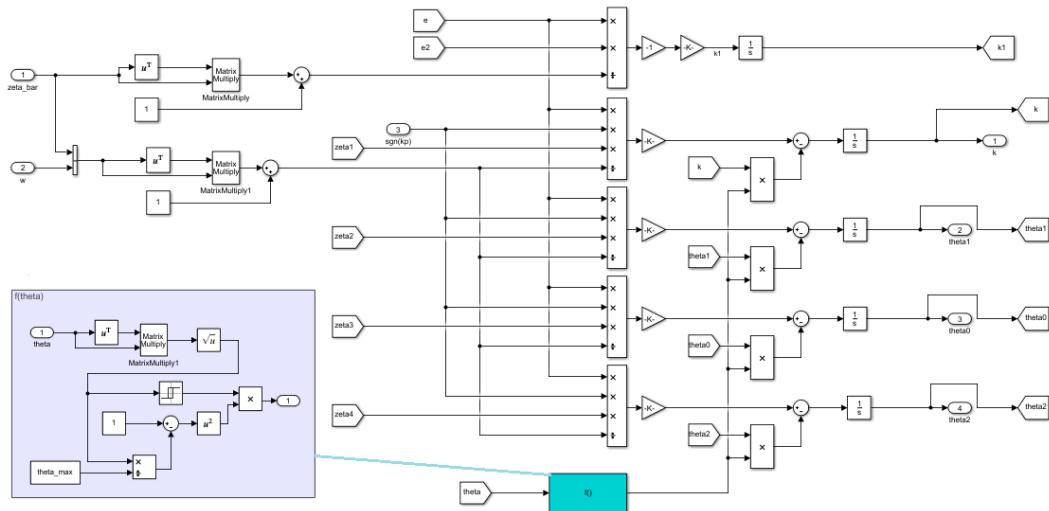


Figura 33: Modificación de las leyes de ajuste acotando el valor de $\|\theta\|$.

Primero, se analiza la influencia del valor máximo de θ para las dos entradas utilizadas en los ejemplos anteriores para valores iniciales de los parámetros diferentes a los objetivos (que es el peor caso para la cota del error y los parámetros). Los resultados para una entrada oscilatoria y para una entrada unitaria se muestran en la Figura 34. La perturbación considerada es constante e igual a 5.

Se puede observar que el error del sistema varía en función de la cota. Al escoger un valor de $f(\theta)$ aleatorio el error comienza a crecer ya que los parámetros de la ley de ajuste nunca alcanzan el valor óptimo. Por otro lado, es de esperar que si se escoge como $\|\theta_{max}^*\|$ como la norma de los valores objetivos, luego el error oscilará alrededor de cero. Sin embargo, esto solo sirve como referencia ya que aún con una norma igual al valor esperado de $\|\theta\|$ no se tiene certeza de que valor podría tener cada elemento del vector que bien podrían ser diferentes a los esperados. Por ello, el valor se fija en $\|\theta_{max}^*\| = 9$ resultando en los gráficos de la Figura 35.

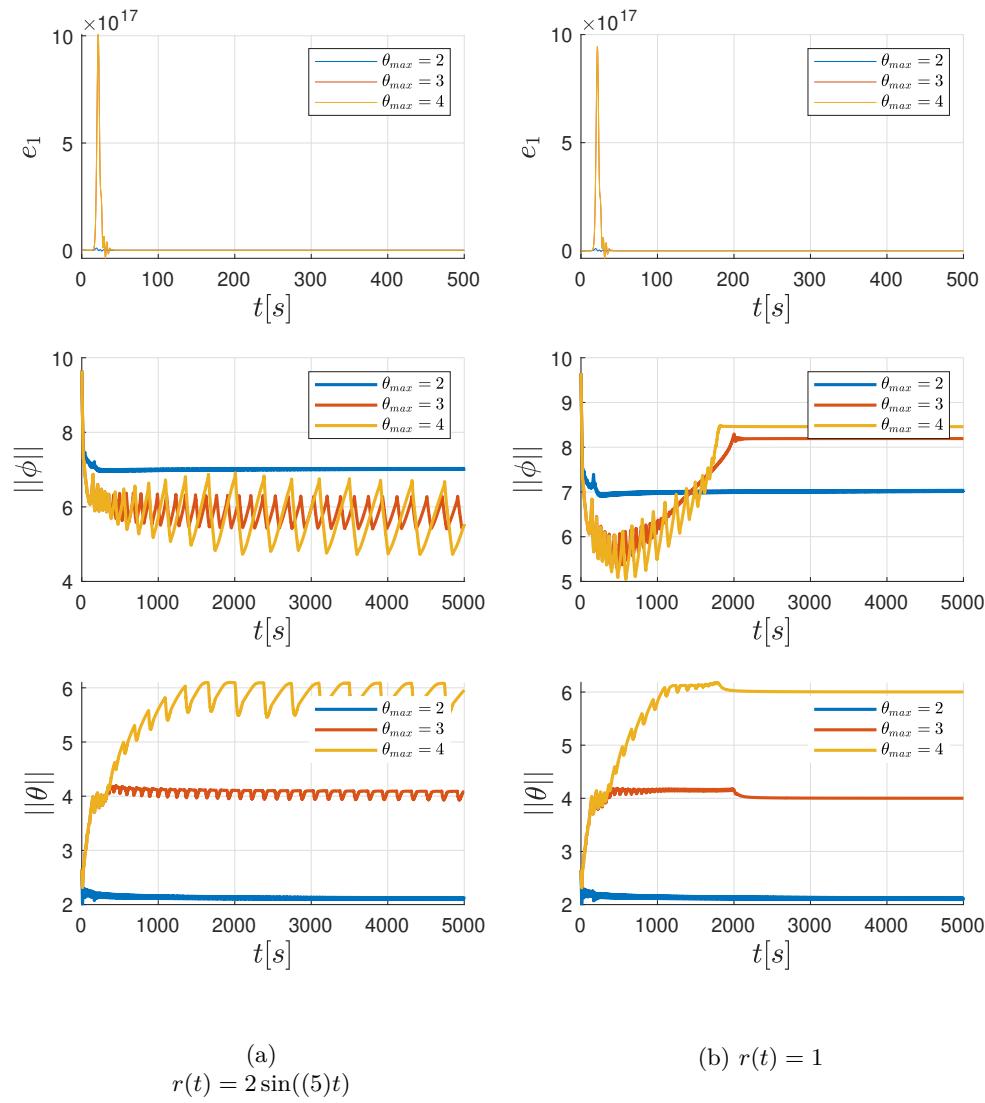


Figura 34: Leyes de ajuste y error para diferentes valores de θ_{max} .

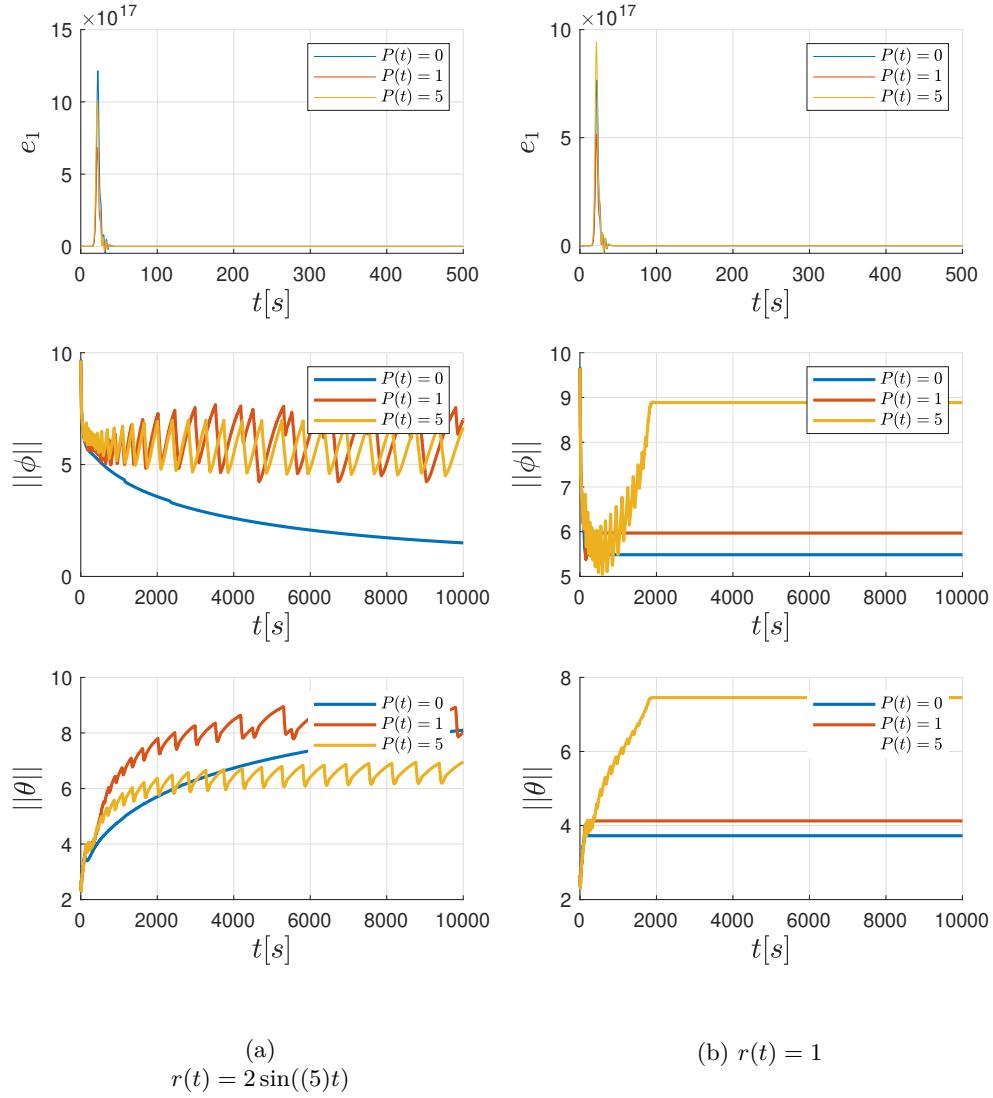


Figura 35: Leyes de ajuste y error para $\theta_{max}^* = 9$ con perturbación constante y condición inicial de θ aleatorio.

Ahora que se conoce el efecto de la cota para los parámetros de las leyes de ajuste se analiza con valores iniciales iguales a los objetivos y así observar más de cerca el valor de e_1 . El resultado de las simulaciones se agrupan en las Figuras 36-37 y 38.

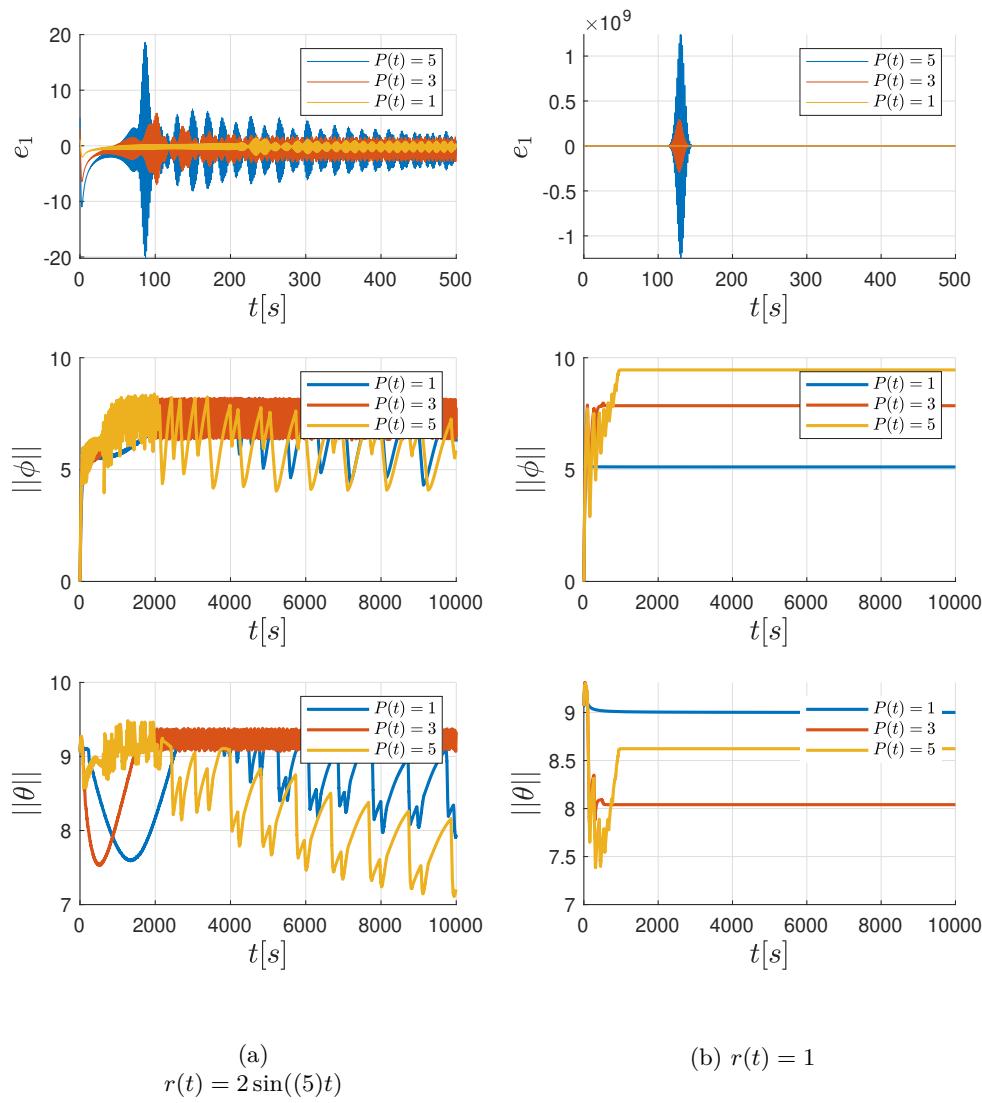


Figura 36: Leyes de ajuste y error para $\theta_{max}^* = 9$ y perturbación constante.

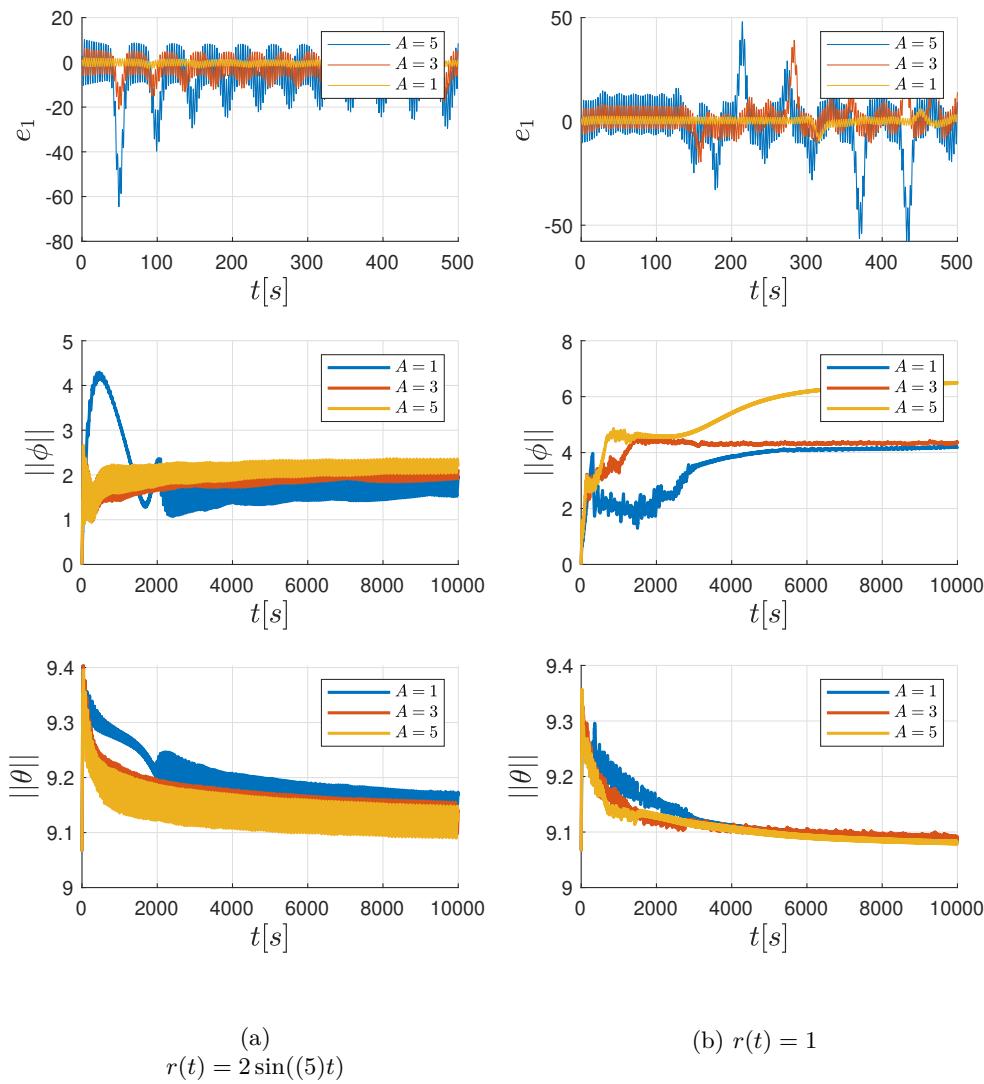


Figura 37: Leyes de ajuste y error para $\theta_{max}^* = 9$ y perturbación oscilante con $\omega_f = 2$.

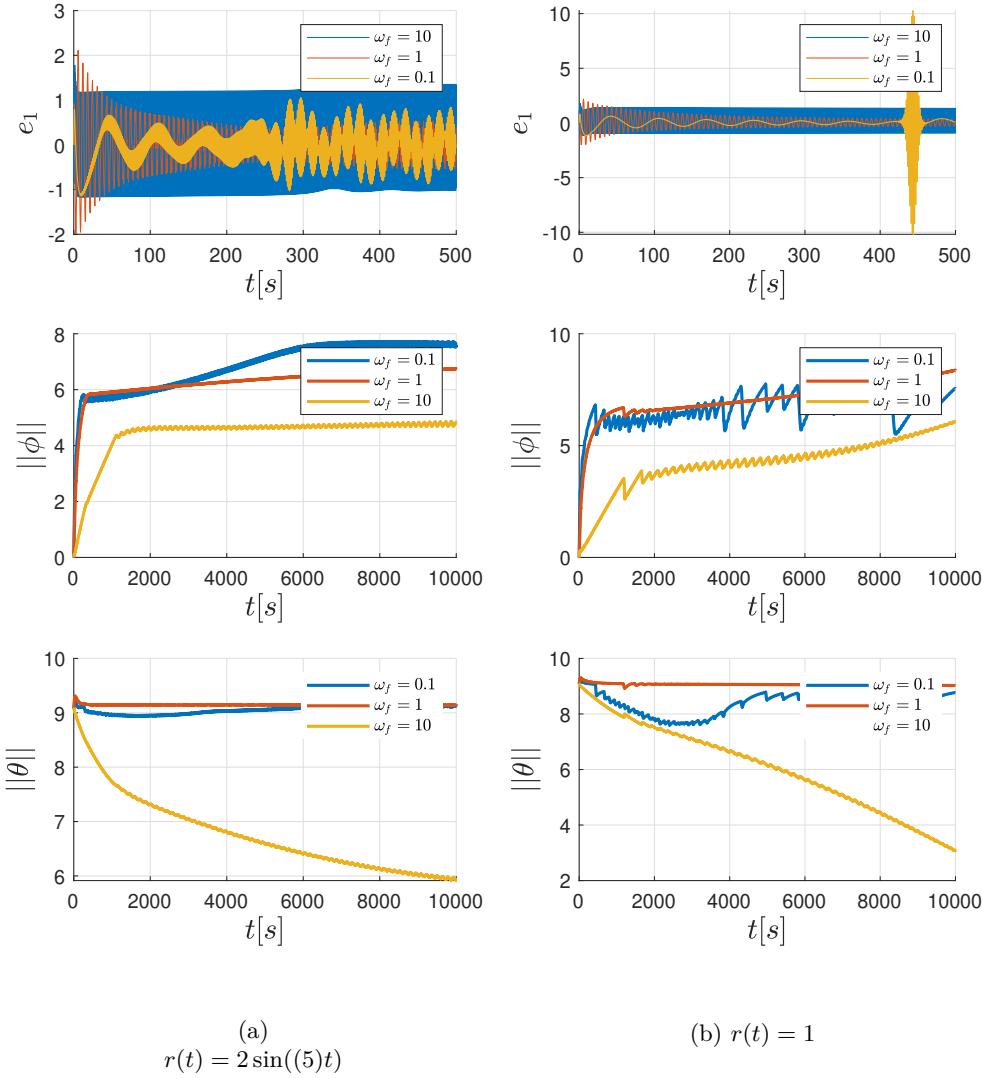


Figura 38: Leyes de ajuste y error para $\theta_{max}^* = 9$ y perturbación oscilante con $A = 1$.

2.1.3. Modificación - σ

Se incorpora un término $\sigma > 0$ en las leyes de ajuste quedando expresadas como,

$$\dot{\phi} = -\text{sgn}(k_p) \frac{\varepsilon \zeta}{1 + \xi^T \xi} - \frac{\sigma \theta}{1 + \xi^T \xi} \quad (5)$$

Donde por Lyapunov se tiene la siguiente restricción,

$$\dot{V} < 0, \quad \forall \|\phi\| > \|\theta^*\| + \frac{\nu_o}{2\sqrt{\sigma}}, \quad |\varepsilon| > \nu_o + \sqrt{\sigma} \|\theta^*\| / 2 \quad (6)$$

La implementación de este método se muestra en la Figura 39.

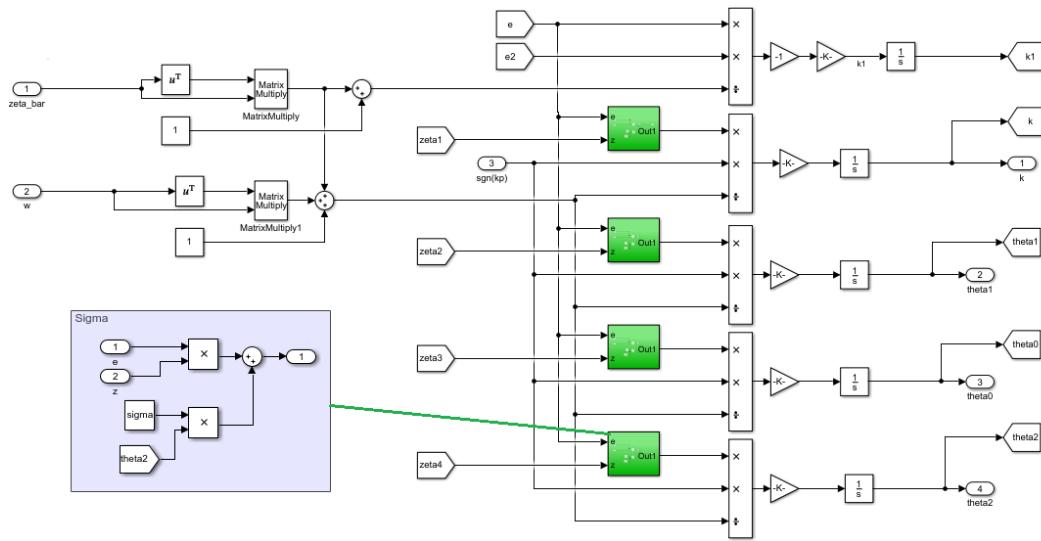


Figura 39: Modificación de las leyes de ajuste con constante σ .

Primero, los experimentos se realizan para diferentes valores de σ con una perturbación constante igual a 5 resultando en los gráficos de la Figura 40. Luego, se realizan simulaciones para diferentes valores de perturbación constante y osculatorias considerando valores iniciales de las leyes de ajuste igual a los valores esperados θ^* . Los resultados se agrupan en las Figuras 41-42 y 43.

Se puede ver en las gráficas que a pesar que se escogió el mejor σ de la Figuras 40, este no se comporta de la misma forma con otras perturbaciones constantes. Tal vez sea un mejor ejercicio estimar σ durante la simulación y que se ajuste al valor que minimiza el error dada una perturbación, ya que claramente su valor depende de la amplitud de la perturbación.

Una solución a este problema es el que presenta el método: Modificación ε , que lo único que hace es reemplazar el valor constante σ por un parámetro que evoluciona durante la simulación, es decir, ε .

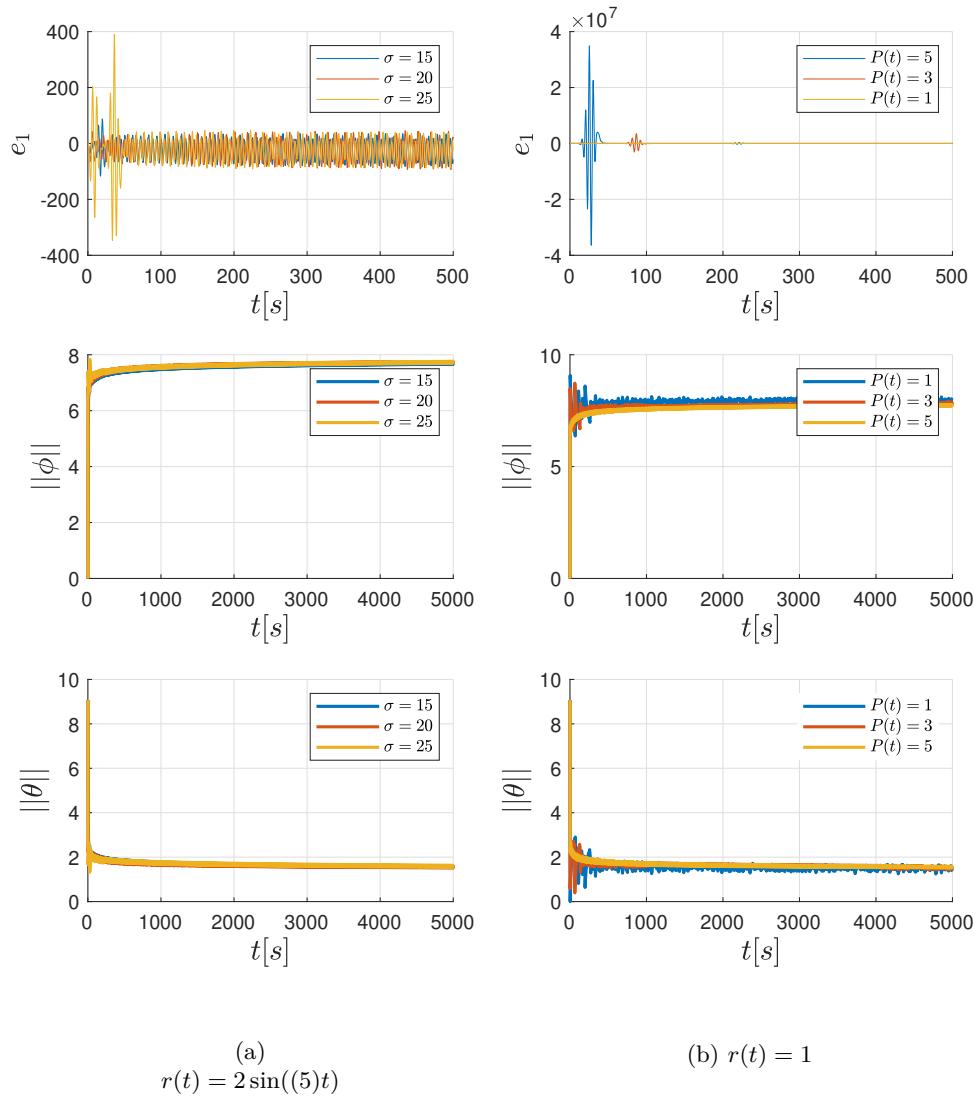


Figura 40: Leyes de ajuste y error para diferentes valores de σ y perturbación igual a 5.

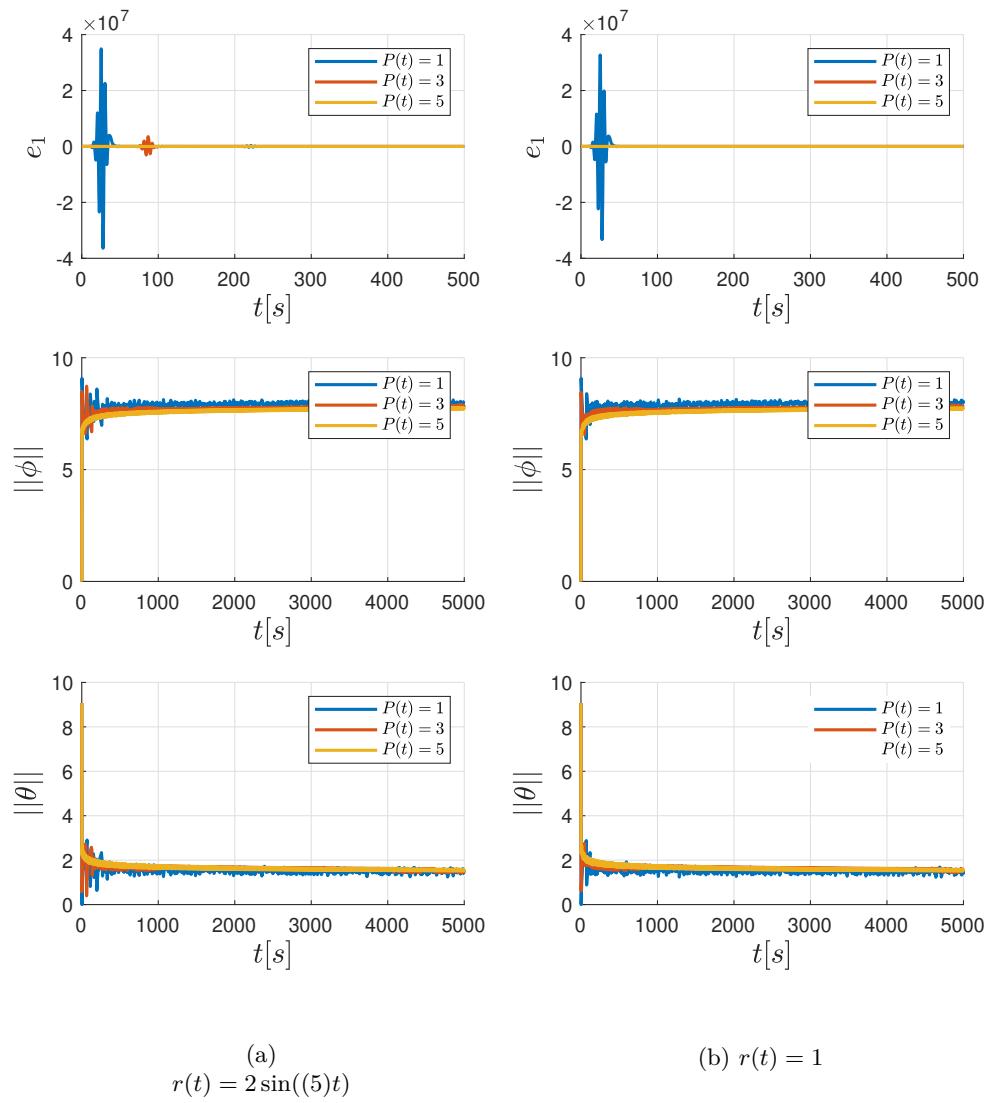


Figura 41: Leyes de ajuste y error para $\sigma = 20$ y diferentes valores de perturbación constante.

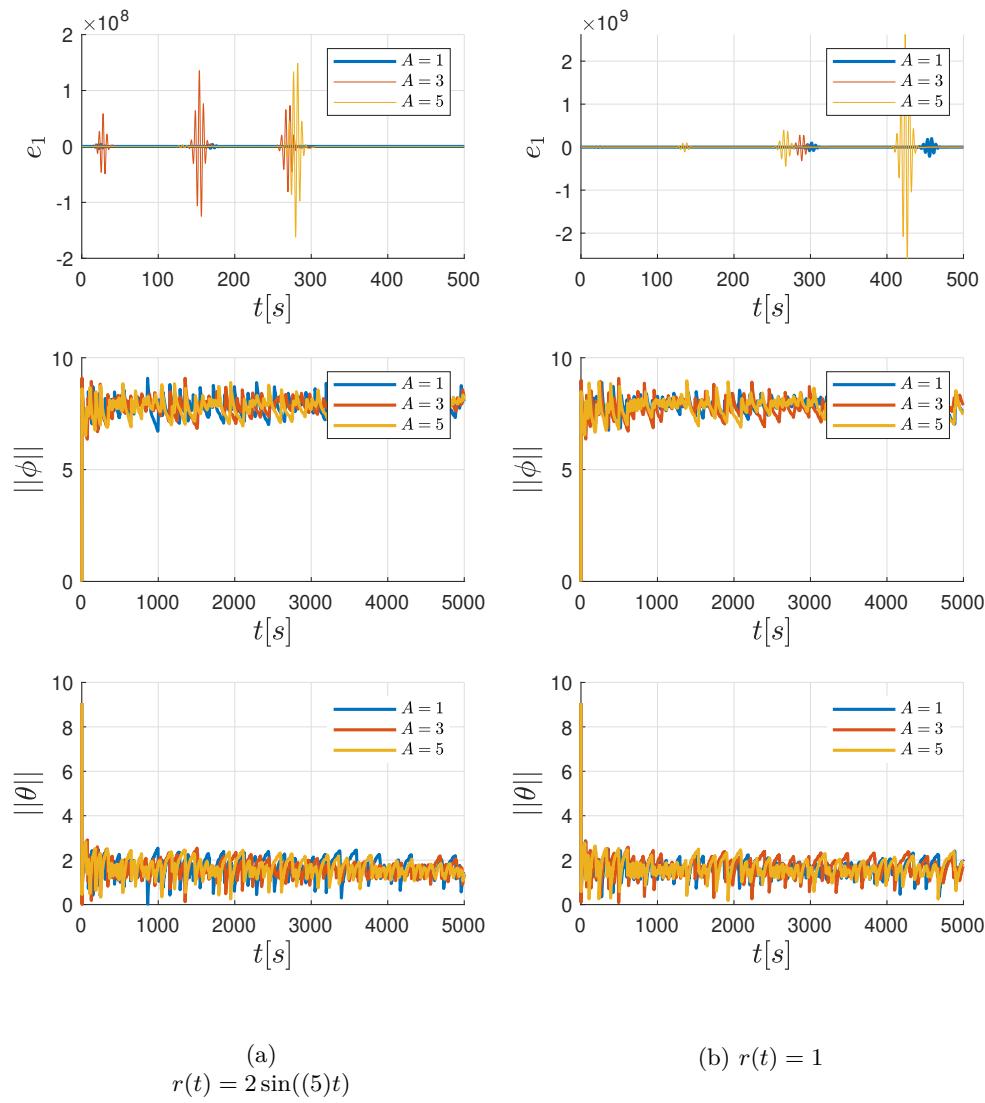


Figura 42: Leyes de ajuste y error para $\sigma = 20$ y diferentes valores de A con $\omega_f = 2$.

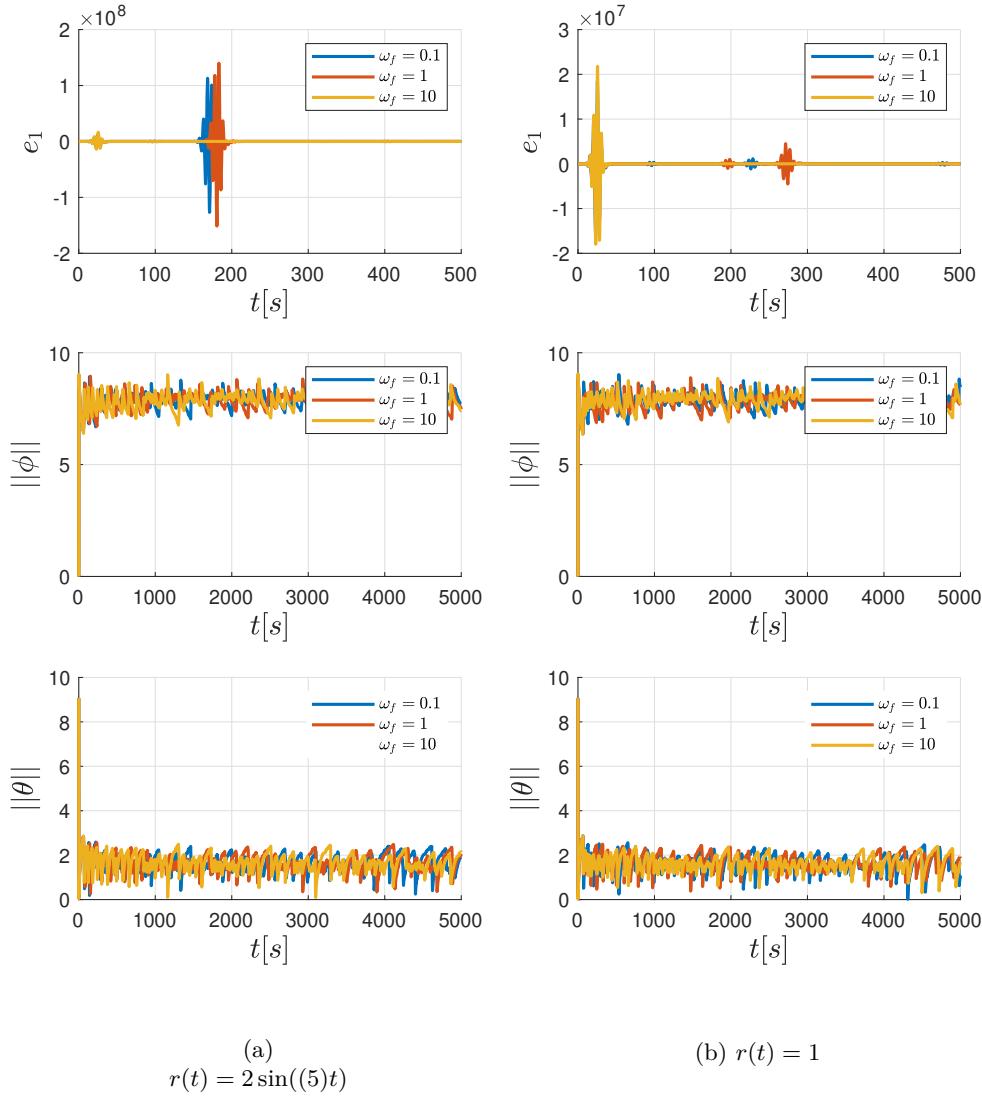


Figura 43: Leyes de ajuste y error para $\sigma = 20$ y diferentes valores de ω_f con $A = 1$.

2.1.4. Modificación - ε

Esta modificación reemplaza el término σ , que es una ganancia constante, por un término proporcional variante en el tiempo, conocido como ε que no es más que el error entre la planta y el modelo de referencia. La ventaja de esto es que si la perturbación desaparece o se hace muy pequeña, el error irá disminuyendo y por lo tanto las leyes de ajuste volverían a tener su forma original. Así, las leyes de ajuste modificadas tienen la siguiente forma,

$$\dot{\phi} = -\text{sgn}(k_p) \frac{\varepsilon \zeta}{1 + \xi^T \xi} - \gamma \frac{|\varepsilon| \theta}{1 + \xi^T \xi} \quad (7)$$

con $\gamma > 0$.

Al igual que en los casos anteriores se consideran como valor inicial de las leyes de ajuste a los valores esperados θ^* . Por otro lado, se analiza para la entrada unitaria y oscilante. La modificación de las leyes de ajuste se puede ver en el diagrama de la Figura 44.

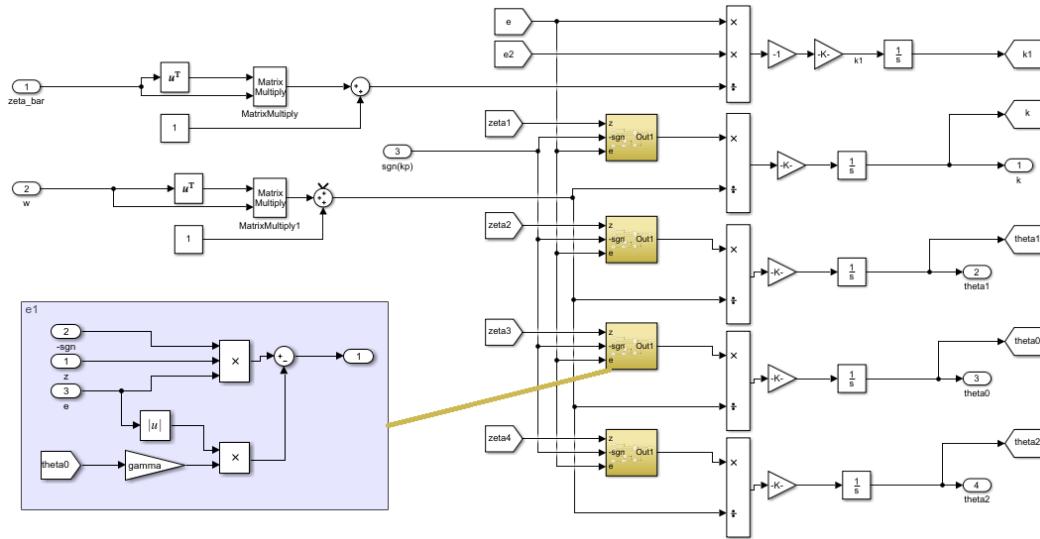


Figura 44: Modificación de las leyes de ajuste con el uso de ε .

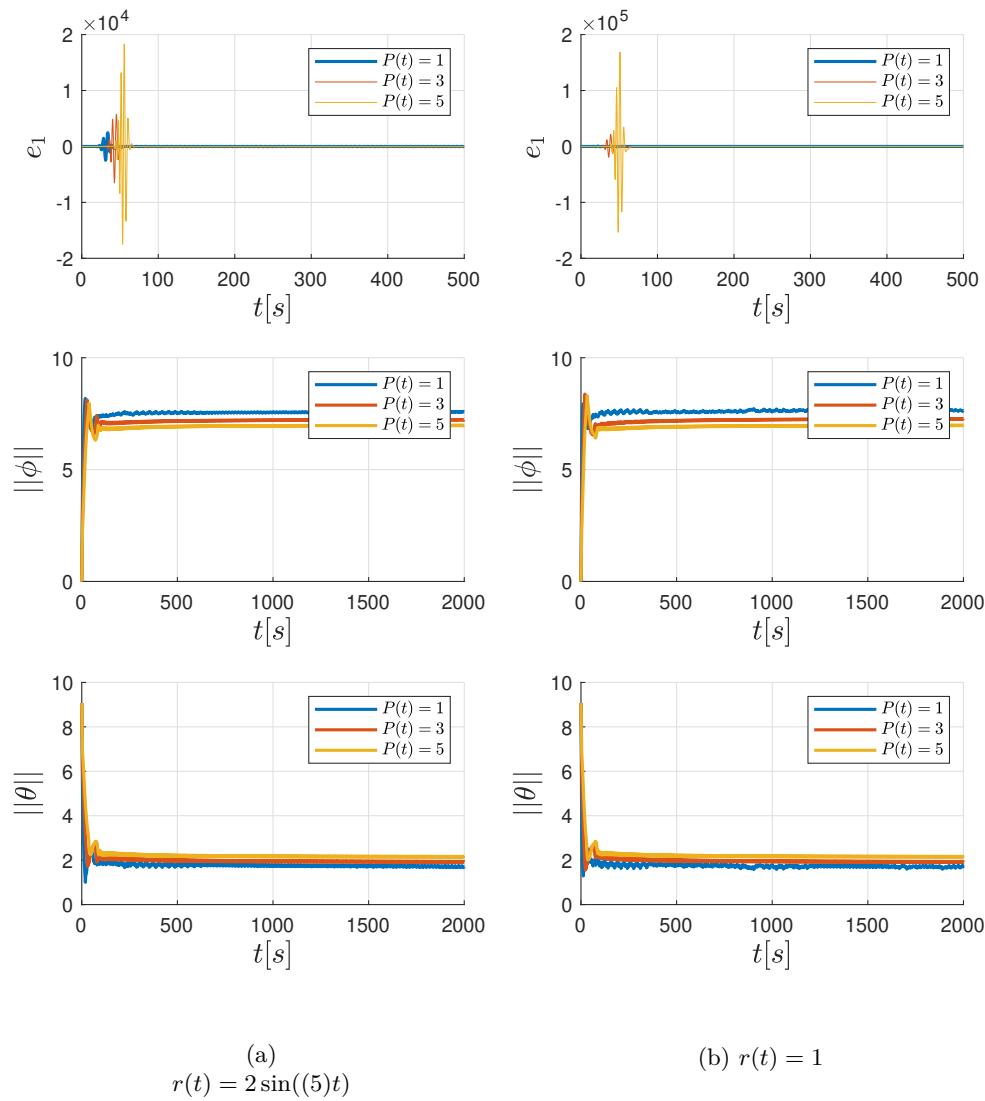


Figura 45: Leyes de ajuste y error para diferentes perturbaciones constantes.

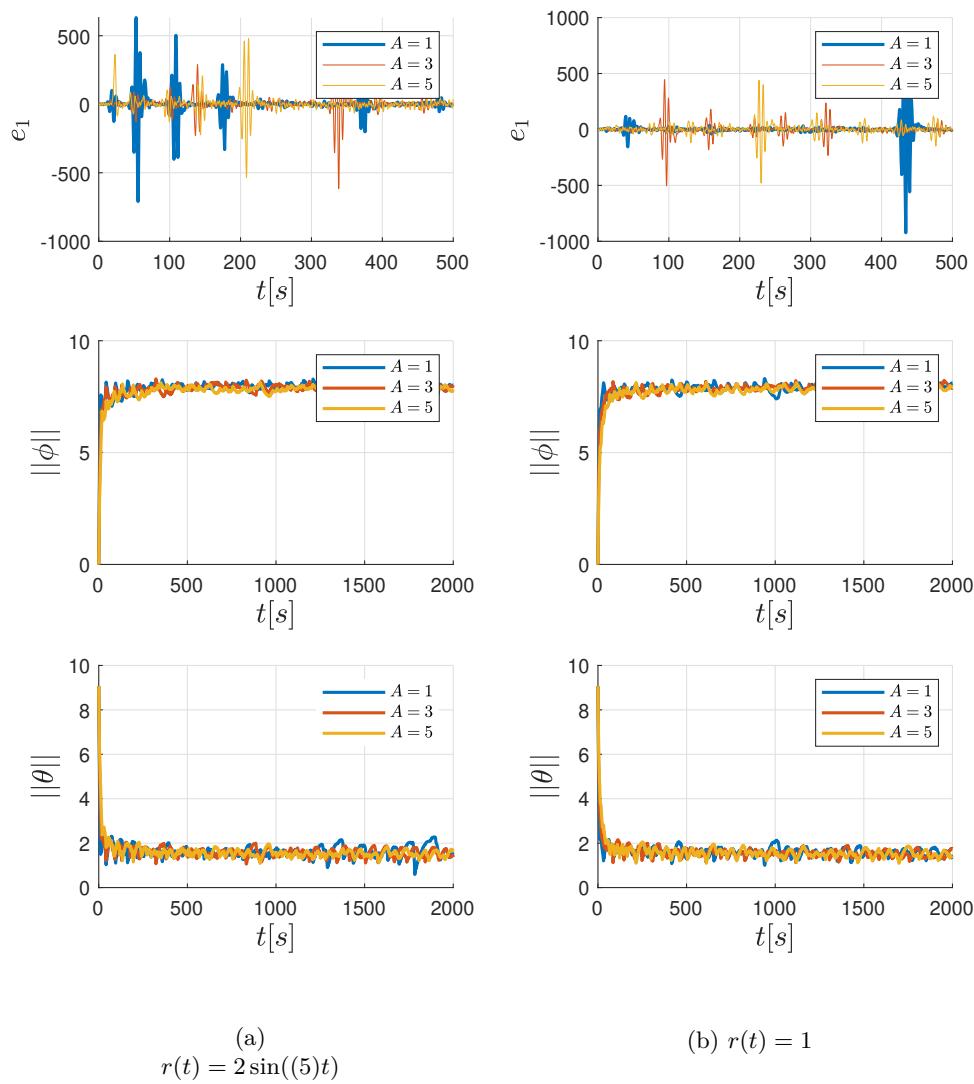


Figura 46: Leyes de ajuste y error para diferentes amplitudes A de perturbación con $\omega_f = 2$.

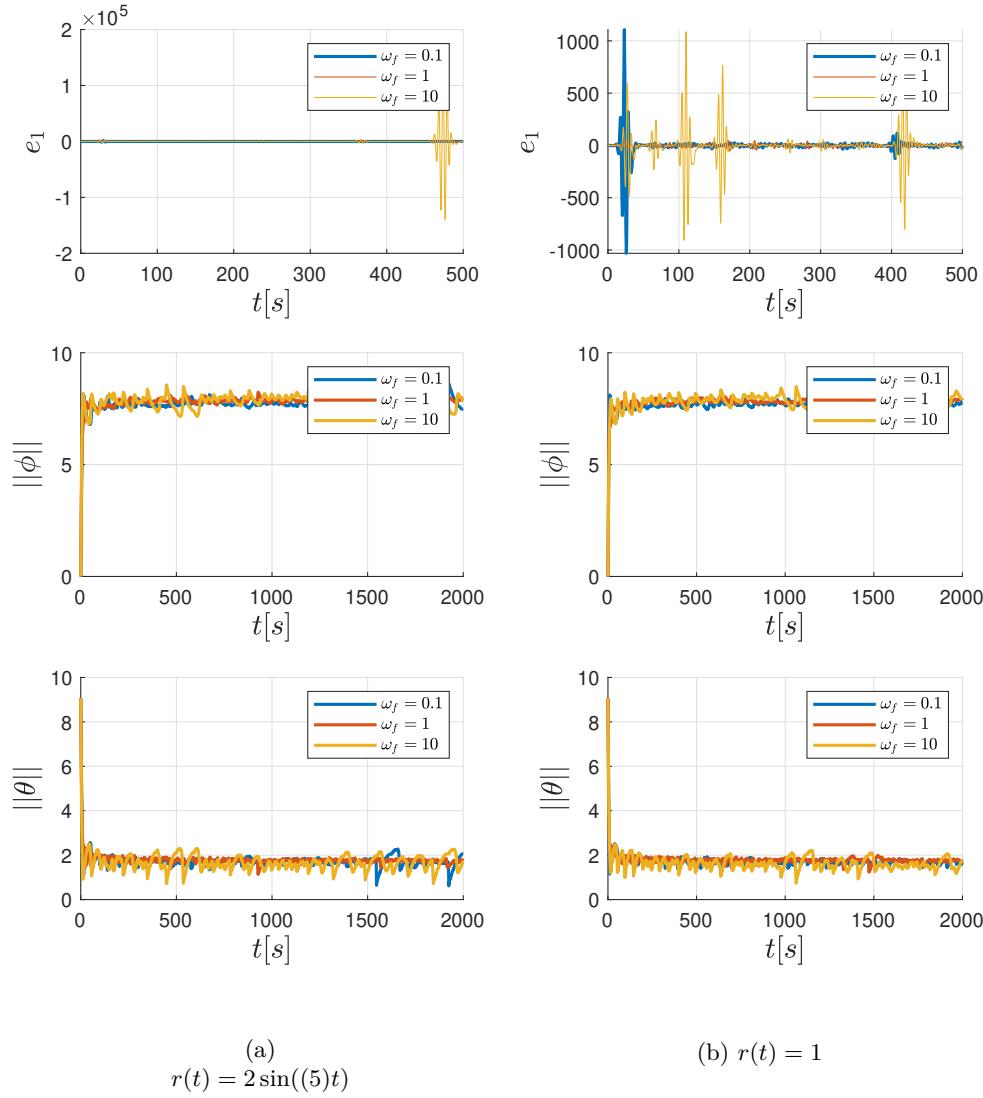


Figura 47: Leyes de ajuste y error para diferentes frecuencias de perturbaciones con $A = 1$.

2.1.5. Comparación de métodos

Para comparar los métodos se consideran una perturbación constante igual a 5 y una perturbación oscilante $P(t) = 1 \sin((1)t)$. De esta forma se tienen los gráficos de la Figura 48 para la entrada $r(t) = 2 \sin(5t)$, y en la Figura 49 los resultados para la entrada unitaria.

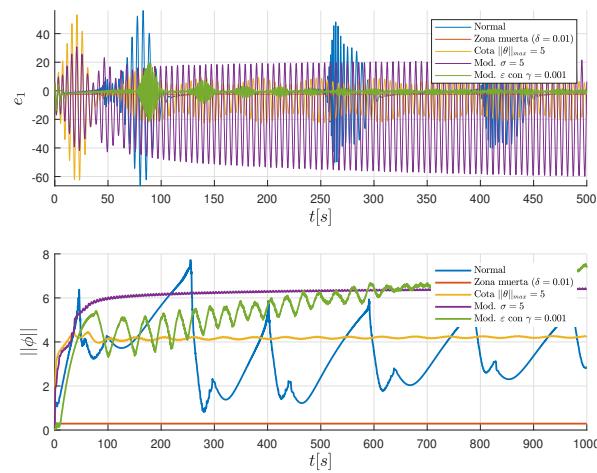


Figura 48: Comparación del error y las leyes de ajuste con perturbación constante. Entrada $r(t) = 2 \sin(5t)$.

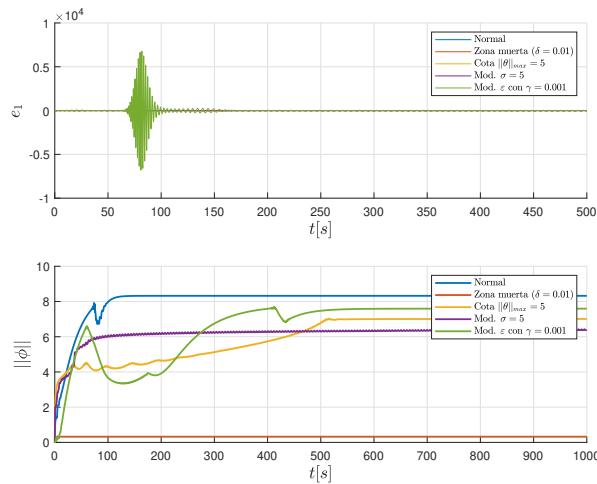


Figura 49: Comparación del error y las leyes de ajuste con perturbación constante. Entrada $r(t) = 1$.

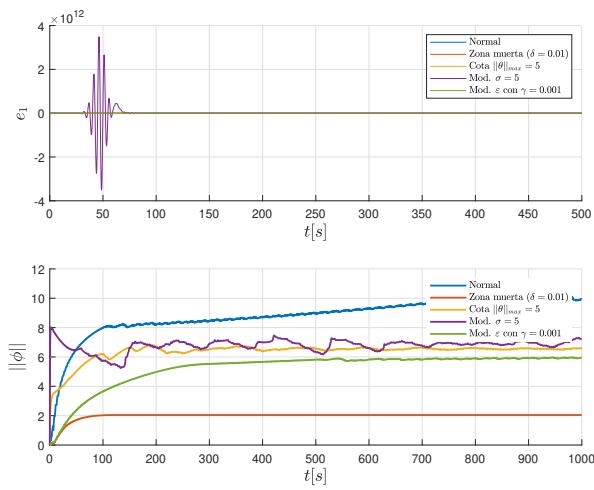


Figura 50: Comparación del error y las leyes de ajuste con perturbación oscilante. Entrada $r(t) = 2 \sin(5t)$.

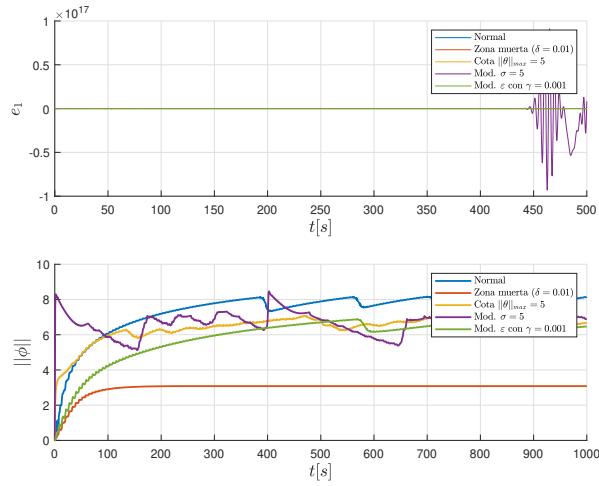


Figura 51: Comparación del error y las leyes de ajuste con perturbación oscilante. Entrada $r(t) = 1$.

2.2. Solución problema 2

Para estudiar el escenario de planta variable se define el sistema como se muestra en la Figura 52.

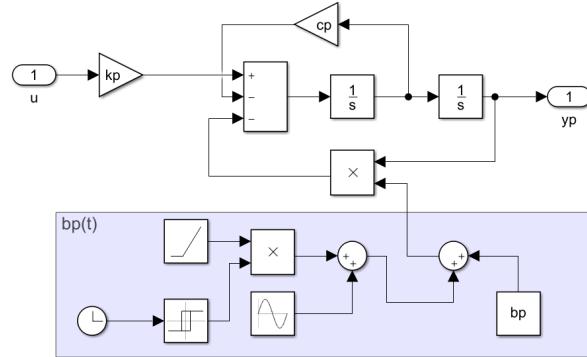


Figura 52: Modificación del término $b_p(t)$ la planta.

La rampa esta definida como $p = [1, 5, 10]$ con un tiempo de activación igual $t_{ramp} = 5$. La amplitud de la perturbación sinusoidal son $A = [1, 5, 10]$.

2.2.1. Perturbación con rampa

Simulaciones para diferentes valores de p y diferentes entradas. Los gráficos se reagrupan desde la Figura 53 hasta 57.

2.2.2. Perturbación osculatoria

Para esta prueba se considera una amplitud $A = [1, 5]$ y una frecuencia $\omega_{bp} = 1$. Los gráficos se reagrupan desde la Figura 59 hasta 62.

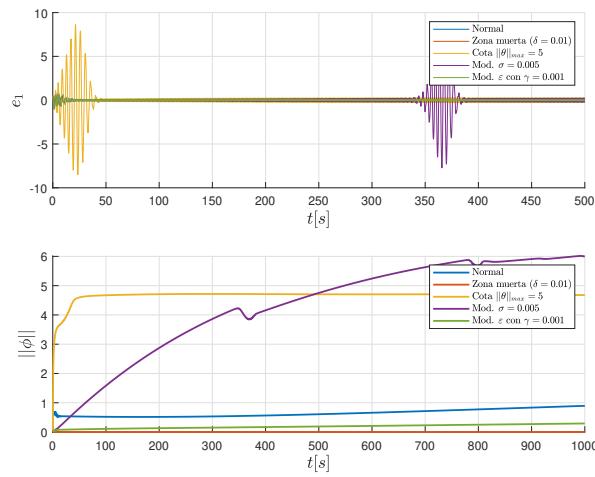


Figura 53: Error y leyes de ajuste con perturbación rampa $p = 1$. Entrada $r(t) = 2 \sin(5t)$.

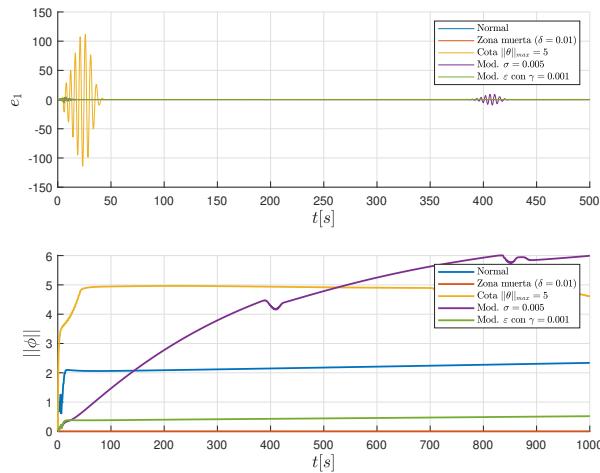


Figura 54: Error y leyes de ajuste con perturbación rampa $p = 5$. Entrada $r(t) = 2 \sin(5t)$.

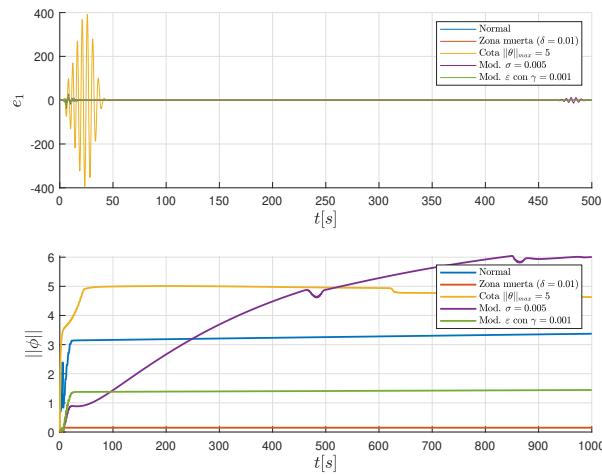


Figura 55: Error y leyes de ajuste con perturbación rampa $p = 10$.
Entrada $r(t) = 2 \sin(5t)$.

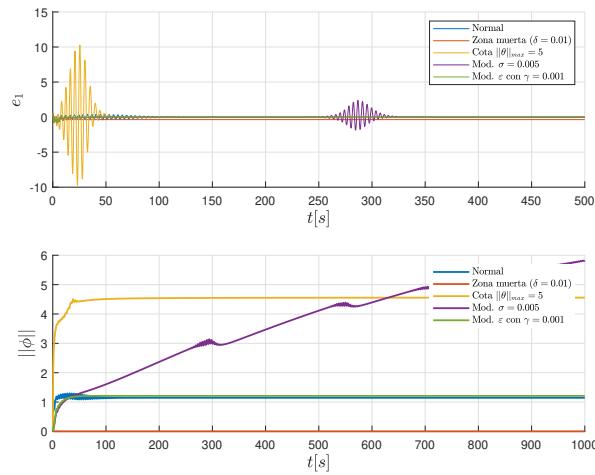


Figura 56: Error y leyes de ajuste con perturbación rampa $p = 1$. Entrada
 $r(t) = 1$.

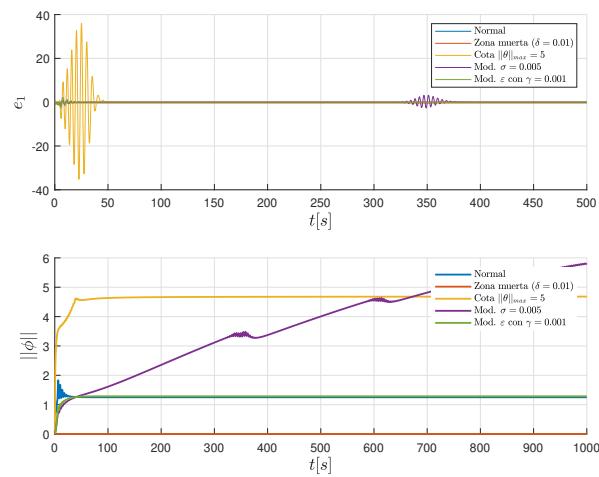


Figura 57: Error y leyes de ajuste con perturbación rampa $p = 5$. Entrada $r(t) = 1$.

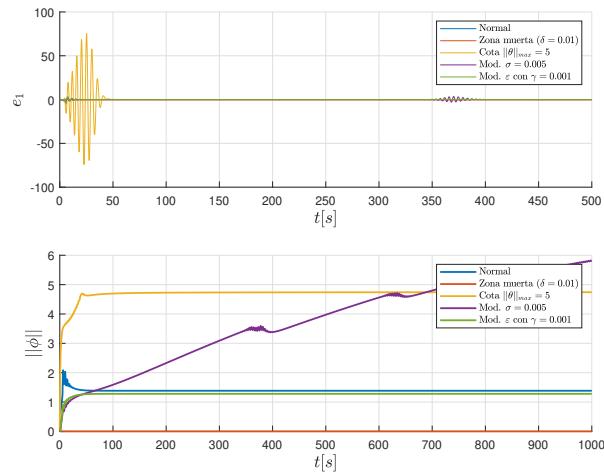


Figura 58: Error y leyes de ajuste con perturbación rampa $p = 10$. Entrada $r(t) = 1$.

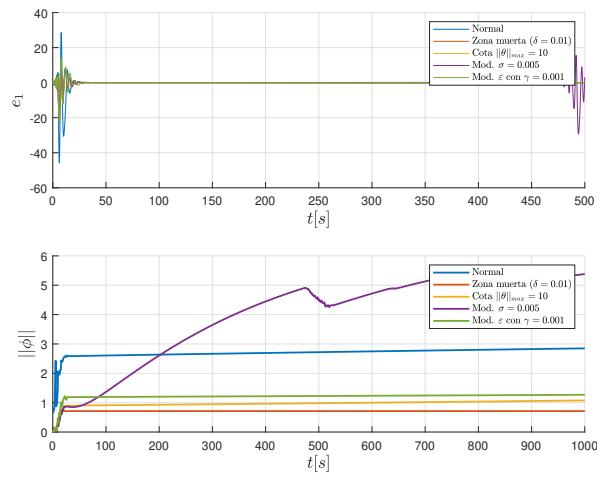


Figura 59: Error y leyes de ajuste con perturbación rampa $A = 1$. Entrada $r(t) = 2 \sin(5t)$.

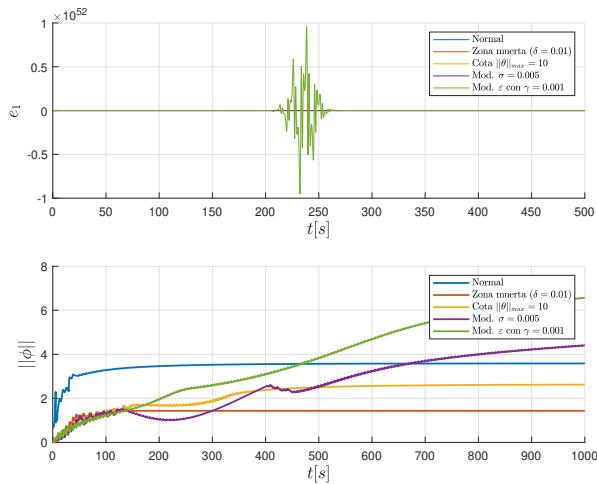


Figura 60: Error y leyes de ajuste con perturbación rampa $A = 5$. Entrada $r(t) = 2 \sin(5t)$.

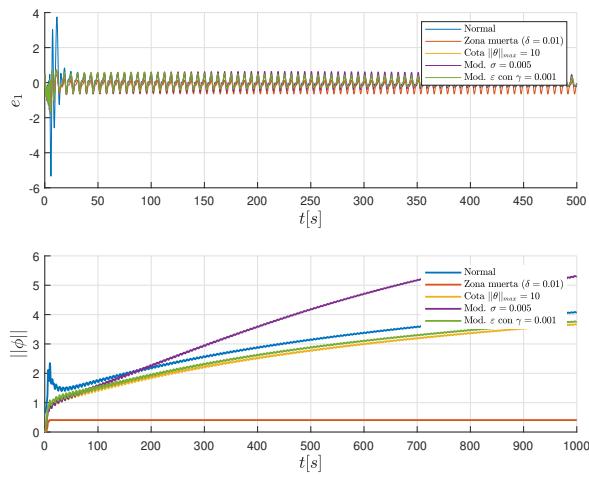


Figura 61: Error y leyes de ajuste con perturbación rampa $A = 1$. Entrada $r(t) = 1$.

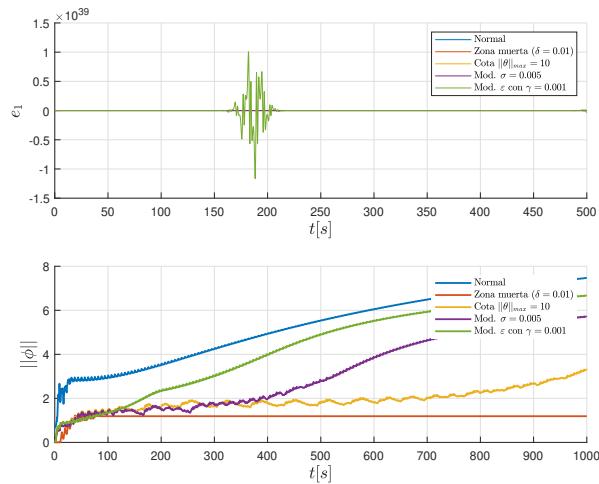


Figura 62: Error y leyes de ajuste con perturbación rampa $A = 5$. Entrada $r(t) = 1$.

3. Conclusión

En la primera parte se pudo observar como una pequeña variación de algunos parámetros como la ganancia adaptativa o valores de la planta, podían hacer que el sistema divergiera. Por el contrario, también habían variables que no afectaban mucho la propagación del error, como lo fueron las condiciones iniciales de la planta y el modelo de referencia y el tipo de entrada.

Cuando se escogen las condiciones iniciales de las leyes de ajuste se debe hacer con mucho cuidado ya que se observó que el error de la planta cambian en ordenes de magnitud más grande en comparación a si los valores iniciales eran cercanos a los valores esperados del vector θ . La variación de éste y otros parámetros del problema hacen que alguna las ley de control tiendan a divergir. Esto se puede solucionar aplicando una entrada de excitación persistente o bien, aplicando 1 de los 4 métodos mencionados.

Sobre la aplicación de los métodos de control robusto, se puede notar que dependiendo de los parámetros asociados a la ley de ajuste como el $\|\theta_{max}\|$, σ y el γ es posible acotar las leyes de ajuste y el error de la planta a valores cercanos a cero. Sin embargo, esos mismos parámetros no sirven para otra amplitud o tipo de perturbación, haciendo que el sistema tenga errores muy grandes al comienzo de la simulación si se cambian las señales de entrada y perturbación. Una posible forma de resolver esto es que los 3 parámetros mencionados con anterioridad sean parte de los valores a ajustar, de tal forma que se adapten al tipo de perturbación que esta entrando.

Respecto al controlar una planta variable en el tiempo se puede notar que los métodos funcionan muy bien, sin embargo, el inconveniente es que para disminuir el error a lo mínimo posible se deben ajustar los parámetros de cada método manualmente.

Referencias

- [1] Narendra K. Stable Adaptive systems.
- [2] Apuntes de catédra Control adaptativo de sistemas prof: Manuel Duarte.
- [3] Narendra K. Stable Adaptive systems. pp 185-186.