

Ejercicio N° 1

Control adaptivo de sistemas

Integrantes: Elías Obreque
Profesor: Manuel Duarte
Auxiliar: Lisbel Bárzaga

Fecha de realización: 13 de septiembre de 2019
Fecha de entrega: 13 de septiembre de 2019
Santiago, Chile

Resumen

En muy pocas ocasiones se tiene un conocimiento completo de la planta de un sistema. Controlar un sistema que es desconocido tiene grandes contrapuntos como el mal uso de un controlador o la poca eficiencia del funcionamiento. Por ello, existen metodologías que ayudan a modelar una planta, que es parcialmente desconocida, y generar un control sobre ella al tener un modelo ajustado. Estos métodos son conocidos como *Sistemas adaptivos simples* y abarcan lo que son: control directo, control indirecto (algebraico), control indirecto (dinámico) y control combinado. La aplicación de lo señalada se realiza en el desarrollo de la primera pregunta.

Otro camino que existe para sistemas desconocidos parcialmente es la *Teoría de observadores* que es un estimador de estado, es decir, un algoritmo que permite estimar el estado interno oculto (no medible) de un sistema dinámico lineal a partir de las mediciones de la entrada y la salida de dicho sistema. Se basa en crear un *clon* del original al cual se le pueden medir los parámetros del estado internamente. El uso de los observadores se ve en el desarrollo de la pregunta 2.

Índice de Contenidos

1. Pregunta 1	1
1.1. Enunciado	1
1.2. Solución problema 1	2
2. Pregunta 2	21
2.1. Enunciado	21
2.2. Solución problema 2	21
3. Conclusión	29
4. Referencias	30

Índice de Figuras

1. Controlador adaptivo directo	2
2. Error con controlador adaptivo directo con diferentes escalones.	3
3. Ley de ajuste $\theta(t)$ con controlador adaptivo directo con diferentes escalones.	4
4. Ley de ajuste $k(t)$ con controlador adaptivo directo con diferentes escalones.	4
5. Error con controlador adaptivo directo con diferente condición inicial y_p	5
6. Ley de ajuste $\theta(t)$ con controlador adaptivo directo con diferente condición inicial y_p . .	5
7. Ley de ajuste $k(t)$ con controlador adaptivo directo con diferente condición inicial y_p . .	6
8. Error con controlador adaptivo directo con diferente condición inicial y_m	6
9. Ley de ajuste $\theta(t)$ con controlador adaptivo directo con diferente condición inicial y_m .	7
10. Ley de ajuste $k(t)$ con controlador adaptivo directo con diferente condición inicial y_m .	7
11. Error con controlador adaptivo directo con diferente condición inicial k	8
12. Ley de ajuste $\theta(t)$ con controlador adaptivo directo con diferente condición inicial k . .	8
13. Ley de ajuste $k(t)$ con controlador adaptivo directo con diferente condición inicial k . .	9
14. Error con controlador adaptivo directo con diferente condición inicial θ	9
15. Ley de ajuste $\theta(t)$ con controlador adaptivo directo con diferente condición inicial θ . .	10
16. Ley de ajuste $k(t)$ con controlador adaptivo directo con diferente condición inicial θ . .	10
17. Error con controlador adaptivo directo con diferente condición inicial para entrada sinusal.	11
18. Controlador adaptivo directo con <i>sine wave</i> y diferente valor en la amplitud a un tiempo de simulación más largo.	11
19. Controlador adaptivo indirecto.	12
20. Error con controlador adaptivo indirecto con diferentes escalones.	13
21. Ley de ajuste $\theta(t)$ con controlador adaptivo indirecto con diferentes escalones.	13
22. Ley de ajuste $k(t)$ con controlador adaptivo directo con diferentes escalones.	14
23. Error con controlador adaptivo indirecto con diferente condición inicial y_p	14
24. Ley de ajuste $\theta(t)$ con controlador adaptivo indirecto con diferente condición inicial y_p .	15
25. Ley de ajuste $k(t)$ con controlador adaptivo directo con diferente condición inicial y_p . .	15
26. Error con controlador adaptivo indirecto con diferente condición inicial y_m	16
27. Ley de ajuste $\theta(t)$ con controlador adaptivo indirecto con diferente condición inicial y_m .	16

28.	Ley de ajuste $k(t)$ con controlador adaptivo directo con diferente condición inicial y_m	17
29.	Error con controlador adaptivo indirecto con diferente condición inicial k	17
30.	Ley de ajuste $\theta(t)$ con controlador adaptivo indirecto con diferente condición inicial k	18
31.	Ley de ajuste $k(t)$ con controlador adaptivo directo con diferente condición inicial k	18
32.	Error con controlador adaptivo indirecto con diferente condición inicial θ	19
33.	Ley de ajuste $\theta(t)$ con controlador adaptivo indirecto con diferente condición inicial θ	19
34.	Ley de ajuste $k(t)$ con controlador adaptivo directo con diferente condición inicial θ	20
35.	Controlador adaptivo indirecto con <i>sine wave</i> y diferente valor en la amplitud.	20
36.	Diagrama principal del sistema con observador basado en una realización mínima.	24
37.	Diagrama interno de los elementos <i>Observer</i> y <i>Multiplier</i> del sistema con observador basado en una realización mínima.	25
38.	Error entre la planta y el observador diseñado	25
39.	Ley de ajuste $\hat{g}(t)$ para los 3 casos señalados	26
40.	Ley de ajuste $\hat{b}(t)$ para los 3 casos señalados	26
41.	Error entre la planta y el observador diseñado	27
42.	Ley de ajuste $\hat{g}(t)$ para los 3 casos señalados	27
43.	Ley de ajuste $\hat{b}(t)$ para los 3 casos señalados	28

1. Pregunta 1

1.1. Enunciado

Considere la planta lineal inestable y desconocida de primer orden,

$$\begin{aligned}\dot{y}_p(t) &= 3y_p(t) + 2u(t) \\ y_p(0) &= -0.5\end{aligned}$$

y el modelo de referencia lineal asintóticamente estable de primer orden,

$$\begin{aligned}\dot{y}_m(t) &= -0.5y_m(t) + 3r(t) \\ y_m(0) &= -1.0\end{aligned}$$

Se pide diseñar diferente tipo de controladores adaptables que permitan que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{y_p(t) - y_m(t)\} = 0$$

Para cada uno de los casos estudiar la influencia de las condiciones iniciales (de la planta, del modelo de referencia y de los parámetros del controlador), ganancias adaptivas (iguales o distintas), tipos de referencias (escalón y senoidal), perturbaciones externas (escalón y senoidal) y variación de parámetros de la planta (escalón y senoidal). Si lo desea explore algún otro aspecto que sea de su interés.

1. Usar un controlador directo. Determinar qué ocurre con el esquema si el signo de la ganancia de alta frecuencia de la planta es estimado erróneamente. Comentar sobre la convergencia del error de control y la convergencia paramétrica.
2. Usar un controlador indirecto algebraico. Determinar qué ocurre con el esquema si la cota superior/inferior de la ganancia de alta frecuencia es mal estimada. Comentar sobre la convergencia del error de control y la convergencia paramétrica. Para la convergencia del error de control, ¿se requiere convergencia paramétrica (planta y/o controlador)? ¿Se requiere excitación persistente para satisfacer el objetivo de control ?
3. Usar un controlador indirecto dinámico. Comentar sobre la convergencia del error de control y la convergencia paramétrica. Para la convergencia del error de control, ¿se requiere convergencia paramétrica (planta y/o controlador)? ¿Se requiere excitación persistente para satisfacer el objetivo de control?
4. Usar un controlador combinado. Comentar sobre la convergencia del error de control y la convergencia paramétrica. Para la convergencia del error de control, ¿ se requiere convergencia paramétrica (planta y/o controlador) ? ¿Se requiere excitación persistente para satisfacer el objetivo de control?

1.2. Solución problema 1

1. Considerando los sistemas modelo de referecnia y de planta mencionados, se tiene la siguiente ley de control,

$$u(t) = \theta(t)y_p(t) + k(t)r(t) \quad (1)$$

Los parametros $\theta(t)$ y $k(t)$ son las leyes de ajuste del sistema completo para que el error tienda a cero en el infinito. Para el método directo se definen las derivadas de estas funciones como,

$$\dot{\theta}(t) = -\text{sgn}(k_p)e(t)y_p(t) \quad (2)$$

$$\dot{k}(t) = -\text{sgn}(k_p)e(t)r(t) \quad (3)$$

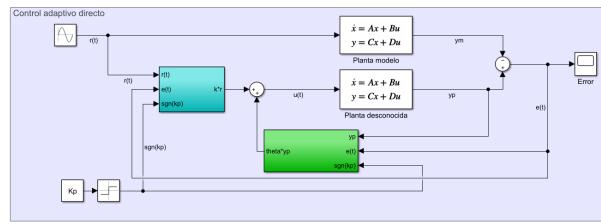


Figura 1: Controlador adaptivo directo

Para que el modelo de referecnia y la planta converga y el error, definido por $e = y_p - y_m$ sea asintoticamente estable, se debe cumplir que,

$$\begin{aligned} \theta^* &= \frac{a_m - a_p}{k_p} \\ k^* &= \frac{k_m}{k_p} \end{aligned} \quad (4)$$

Considerando que los valores de las variables son, $a_m = 0.5$, $a_p = -3$, $k_m = 3$ y $k_p = 2$. Luego,

$$\begin{aligned} \theta^* &= \frac{-0.5 + 3}{2} = 1.25 \\ k^* &= \frac{3}{2} = 1.5 \end{aligned} \quad (5)$$

Con la definición del error predicha y la ley de control de la ecuación (1) se tiene la siguiente respuesta de la planta,

$$y_p(t) = (a_p - k_p\theta(t))y_p(t) + k(t)k_p r(t) \quad (6)$$

Donde la derivada del error es,

$$\begin{aligned} \dot{e}_c &= \dot{y}_p - \dot{y}_m \\ &= a_m e_c + k_p(\theta(t) - \frac{a_m - a_p}{k_p})y_p + k_p \left(k(t) - \frac{k_m}{k_p} \right) r(t) \end{aligned} \quad (7)$$

Definiendo los errores de $\theta(t)$ y $k(t)$ como $\phi(t) = \theta(t) - \theta^*$ y $\psi(t) = k(t) - k^*$, respectivamente, el error puede quedar expresado como sigue,

$$\dot{e}_c = a_m e_c + k_p \phi(t) y_p + k_p \psi(t) r(t) \quad (8)$$

Para analizar la convergencia del error expresado, se define la siguiente función de Lyapunov y las leyes de ajuste.

$$\begin{aligned} V(\phi, \psi, e_c) &= \frac{1}{2} \left(e_c^2 + |k_p| (\phi^2 + \psi^2) \right) \\ \dot{\phi}(t) &= \dot{\theta}(t) = -\gamma_\theta \text{sgn}(k_p) e_c(t) r(t) \\ \dot{\psi}(t) &= \dot{k}(t) = -\gamma_k \text{sgn}(k_p) e_c(t) r(t) \end{aligned} \quad (9)$$

Como ya se había mencionado en la ecuación (3). Notar que γ_θ y γ_k son ganancias adaptivas que deben ser positivas y mayores que 1. De la ecuación de Lyapunov, se tiene que su derivada es,

$$\dot{V} = \left(e_c(t) \dot{e}_c(t) + |k_p| (\phi \dot{\phi} + \psi \dot{\psi}) \right) \quad (10)$$

Reemplazando las leyes de ajuste definidas,

$$\dot{V} = a_m e_c^2 \quad (11)$$

Considerando que a_m debe ser menor a 0 para que el modelo sea asintóticamente estable y que e_c es acotado, luego la función de Lyapunov es negativa semidefinida y el error tiende a cero.

Para los valores de la planta y el modelo se tienen los siguientes resultados:

- a) Entrada escalón: Caso 1: $r = 1$, Caso 2: $r = 10$, Caso 3: $r = 20$.

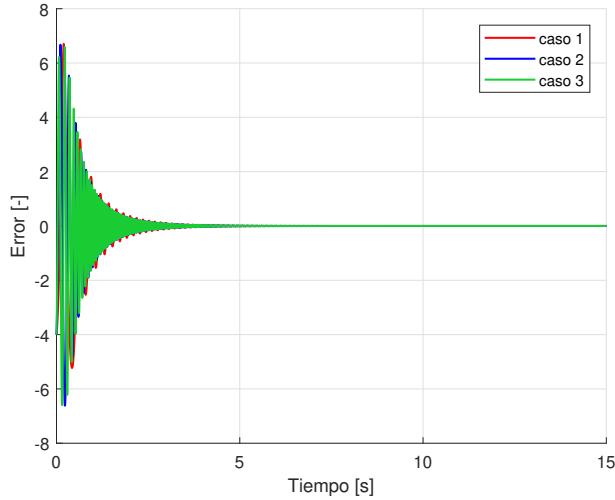


Figura 2: Error con controlador adaptivo directo con diferentes escalones.

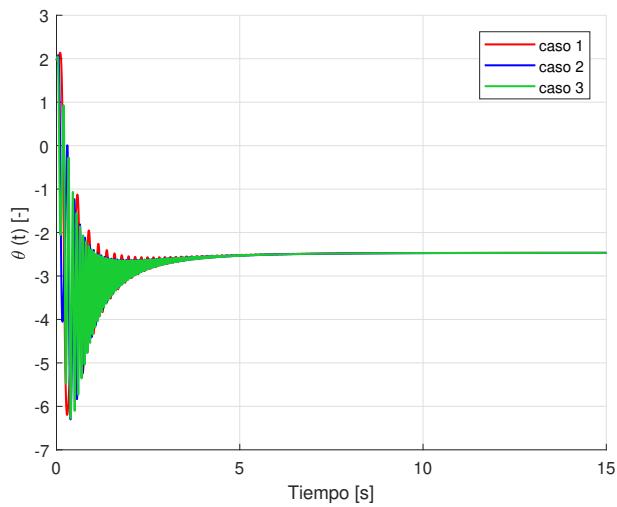


Figura 3: Ley de ajuste $\theta(t)$ con controlador adaptivo directo con diferentes escalones.

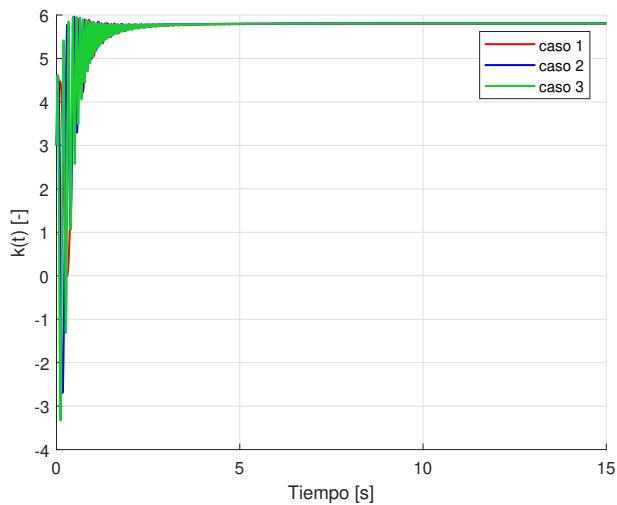


Figura 4: Ley de ajuste $k(t)$ con controlador adaptivo directo con diferentes escalones.

- b) Condiciones iniciales: Caso 1: $y_p = -10$, Caso 2: $y_p = -0.5$, Caso 3: $y_p = 10$. Escalón constante igual a 10.

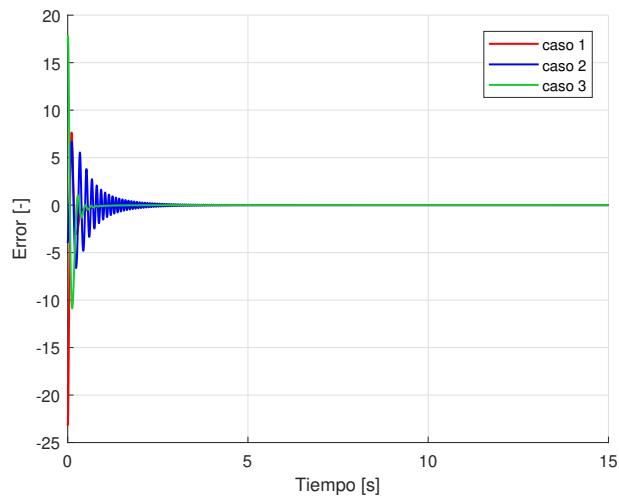


Figura 5: Error con controlador adaptivo directo con diferente condición inicial y_p .

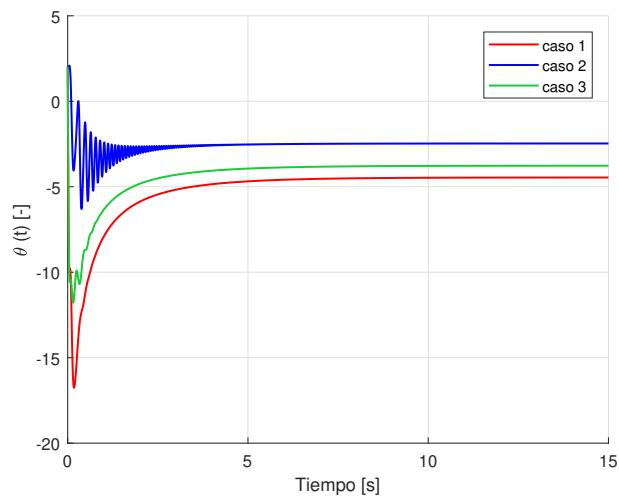


Figura 6: Ley de ajuste $\theta(t)$ con controlador adaptivo directo con diferente condición inicial y_p .

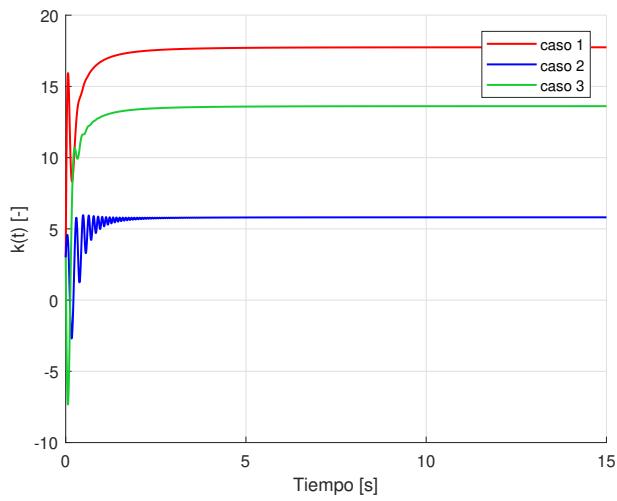


Figura 7: Ley de ajuste $k(t)$ con controlador adaptivo directo con diferente condición inicial y_p .

- c) Condiciones iniciales: Caso 1: $y_m = -10$, Caso 2: $y_m = 1$, Caso 3: $y_m = 10$. Escalón constante igual a 10.

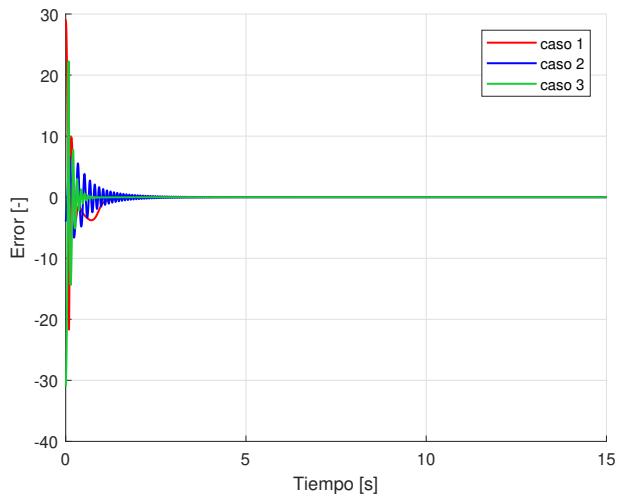


Figura 8: Error con controlador adaptivo directo con diferente condición inicial y_m .

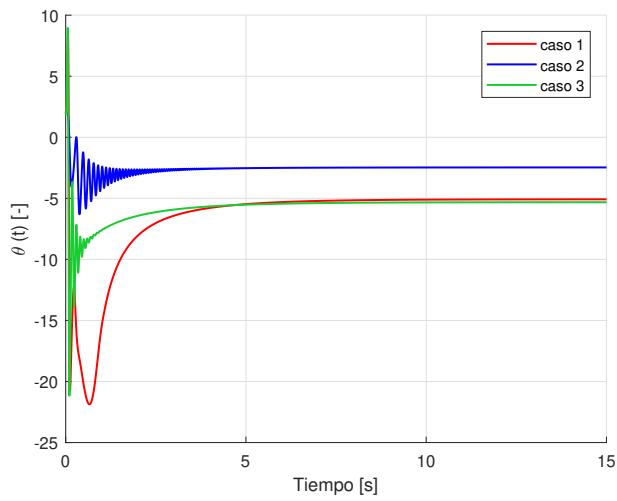


Figura 9: Ley de ajuste $\theta(t)$ con controlador adaptivo directo con diferente condición inicial y_m .

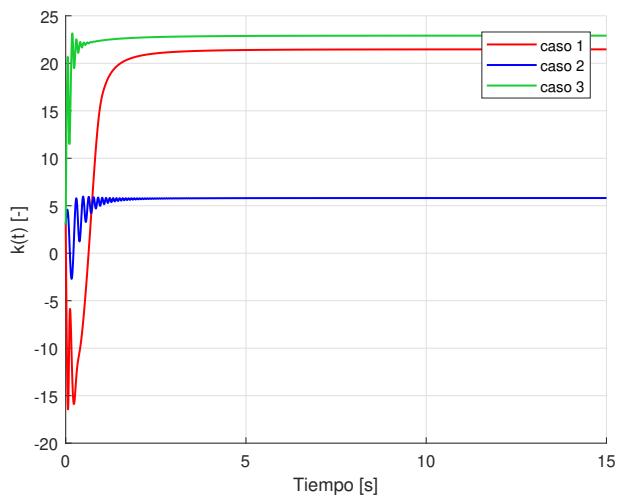


Figura 10: Ley de ajuste $k(t)$ con controlador adaptivo directo con diferente condición inicial y_m .

- d) Condiciones iniciales: Caso 1: $k = 1$, Caso 2: $k = 5$, Caso 3: $k = 10$. Escalón constante igual a 10.

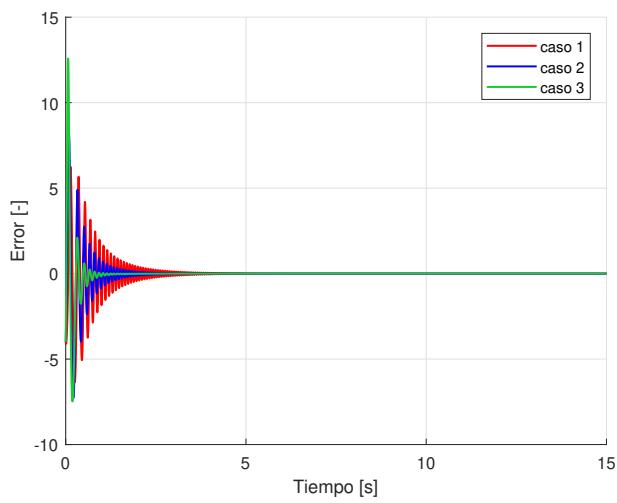


Figura 11: Error con controlador adaptivo directo con diferente condición inicial k .

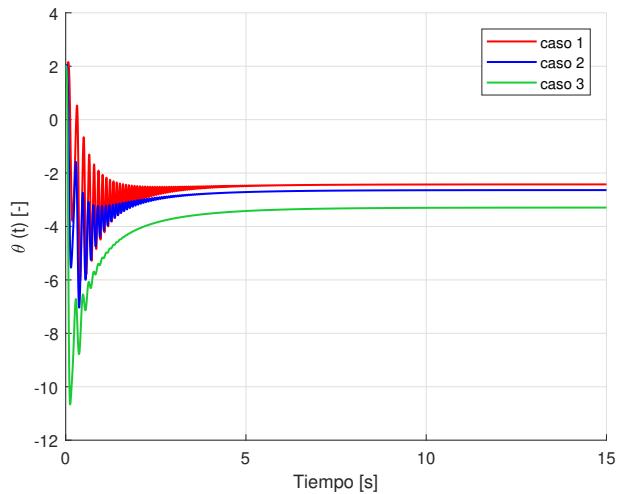


Figura 12: Ley de ajuste $\theta(t)$ con controlador adaptivo directo con diferente condición inicial k .

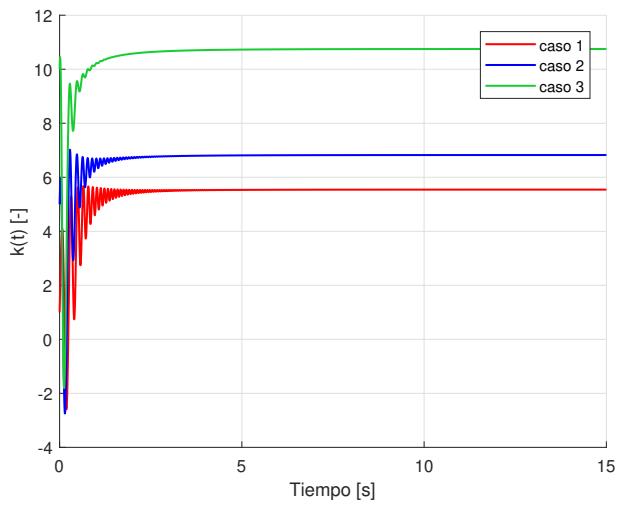


Figura 13: Ley de ajuste $k(t)$ con controlador adaptivo directo con diferente condición inicial k .

- e) Condiciones iniciales: Caso 1: $\theta = -5$, Caso 2: $\theta = 1$, Caso 3: $\theta = 5$. Escalón constante igual a 10.

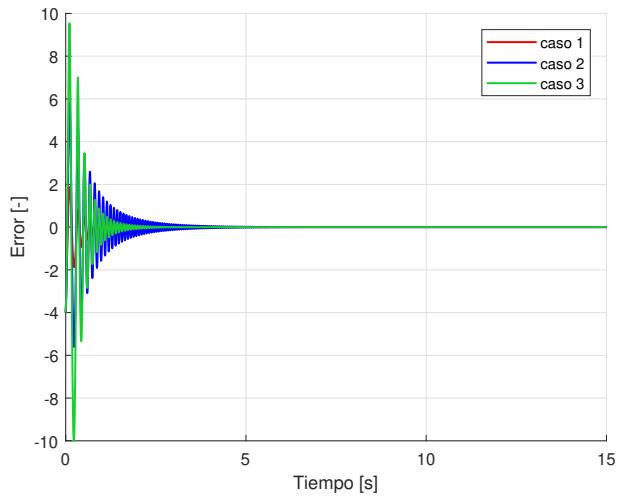


Figura 14: Error con controlador adaptivo directo con diferente condición inicial θ .

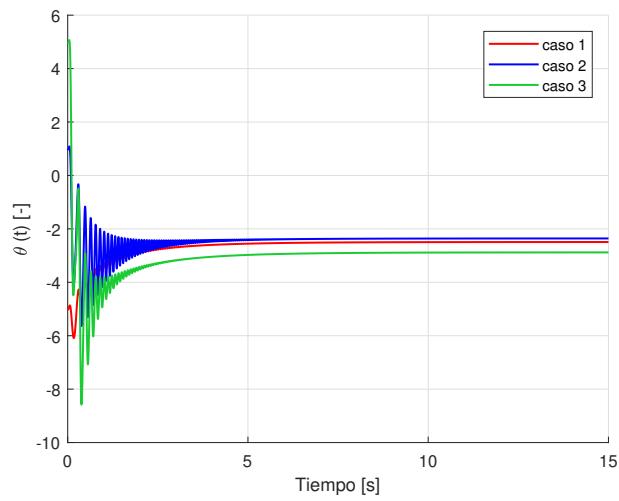


Figura 15: Ley de ajuste $\theta(t)$ con controlador adaptivo directo con diferente condición inicial θ .

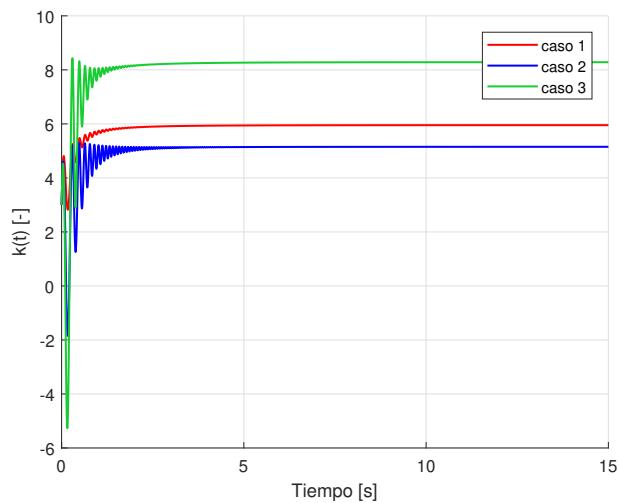


Figura 16: Ley de ajuste $k(t)$ con controlador adaptivo directo con diferente condición inicial θ .

f) Entrada sinusoidal: $r(t) = [1, 10, 20] \cdot \sin(f)$ con f fijo igual a 10 rad/s y bias igual a 5 .

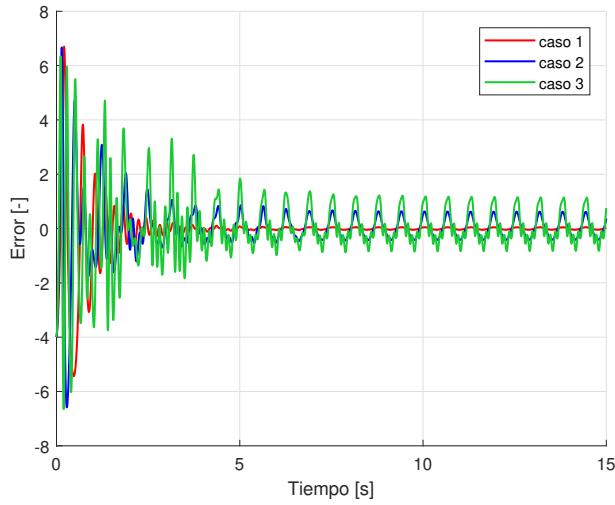


Figura 17: Error con controlador adaptivo directo con diferente condición inicial para entrada sinusoidal.

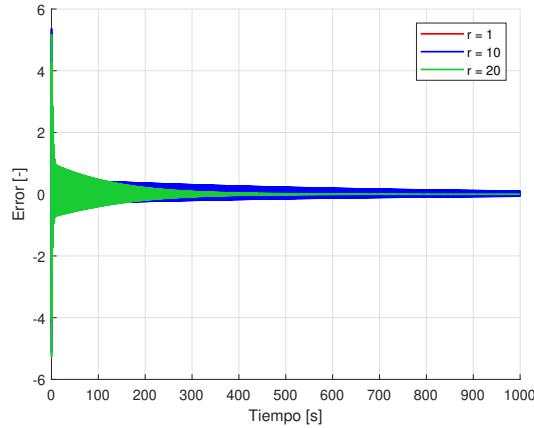


Figura 18: Controlador adaptivo directo con *sine wave* y diferente valor en la amplitud a un tiempo de simulación más largo.

2. Análogo al caso anterior la ley de control esta en función de las leyes de ajuste $\theta(t)$ y $k(t)$. Sin embargo, en el caso indirecto algebraico, dichas funciones se definen como,

$$\begin{aligned}\theta(t)^* &= \frac{a_m - \hat{a}_p(t)}{\hat{k}_p} \\ k(t)^* &= \frac{k_m}{\hat{k}_p(t)}\end{aligned}\quad (12)$$

donde \hat{a}_p y \hat{k}_p es un estimado de dichos valores, al suponerlos desconocidos. Luego el estimador se define como,

$$\dot{\hat{y}}_p = a_m \hat{y}_p + [\hat{a}_p(t) - a_m] y_p + \hat{k}_p(t) u \quad (13)$$

El error de este estimador identificador esta definido como,

$$\dot{e}_i = a_m e_i + (\hat{a}_p(t) - a_p)y_p(t) - (\hat{k}_p(t) - k_p)u(t) \quad (14)$$

Con,

$$\dot{\hat{a}}_p = \gamma_{\hat{a}_p} e_i y_p \quad (15)$$

y

$$\dot{\hat{k}}_p = f(e_i, u, \underline{k}_p) \quad (16)$$

tal que $\hat{k}_p(t) > \underline{k}_p$. Con \underline{k}_p como cota mínima para que el valor de $k(t)$ no se indetermine en $\hat{k}_p = 0$.

El error de los estimadores se define como,

$$\begin{aligned} \tilde{a}_p(t) &= \hat{a}_p(t) - a_p \\ \tilde{k}_p(t) &= \hat{k}_p(t) - k_p \end{aligned} \quad (17)$$

El Lyapunov de este controlador es,

$$V = \frac{1}{2}(e_i^2 - \tilde{a}_p^2 + \tilde{k}_p^2) \quad (18)$$

Con $\dot{\tilde{a}}_p(t) = \dot{\hat{a}}_p(t) = \gamma_{\hat{a}_p} e_i y_p$. Definiendo $e_i = y_p - \hat{y}_p$, la función f se define como,

$$f(e_i, u, \underline{k}_p) = \begin{cases} e_i u, & \text{si } \hat{k}_p(t) > \underline{k}_p \\ e_i u, & \text{si } \hat{k}_p(t) = \underline{k}_p \text{ y } e_i u > 0 \\ 0, & \text{si } \hat{k}_p(t) = \underline{k}_p \text{ y } e_i u \leq 0 \end{cases} \quad (19)$$

Luego, la derivada del Lyapunov esta definido como,

$$\dot{V} = \begin{cases} a_m e_i, & \text{si } \hat{k}_p(t) > \underline{k}_p \\ a_m e_i, & \text{si } \hat{k}_p(t) = \underline{k}_p \text{ y } e_i u > 0 \\ a_m e_i - \tilde{k} e_i u, & \text{si } \hat{k}_p(t) = \underline{k}_p \text{ y } e_i u \leq 0 \end{cases} \quad (20)$$

De lo anterior se diseña en diagrama de la siguiente figura.

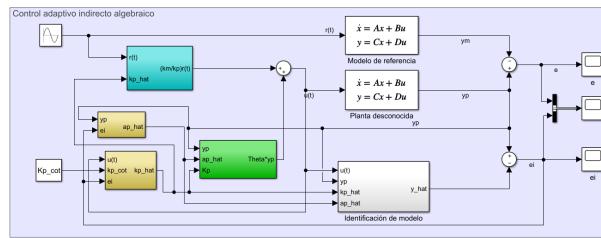


Figura 19: Controlador adaptivo indirecto.

Resultados de simulación:

- a) Entrada escalón: Caso 1: $r = 1$, Caso 2: $r = 10$, Caso 3: $r = 20$.

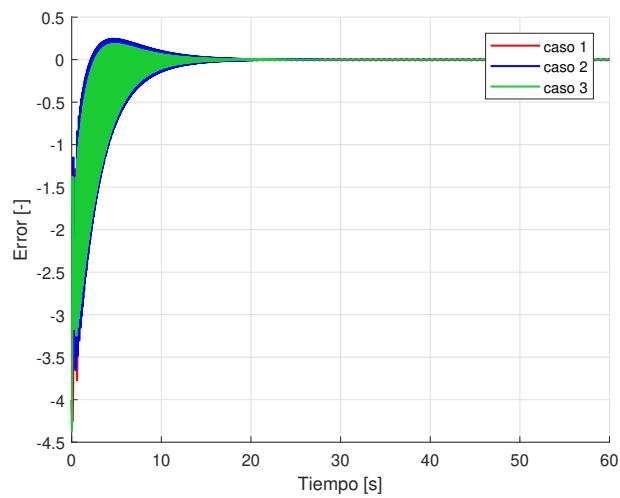


Figura 20: Error con controlador adaptivo indirecto con diferentes escalones.

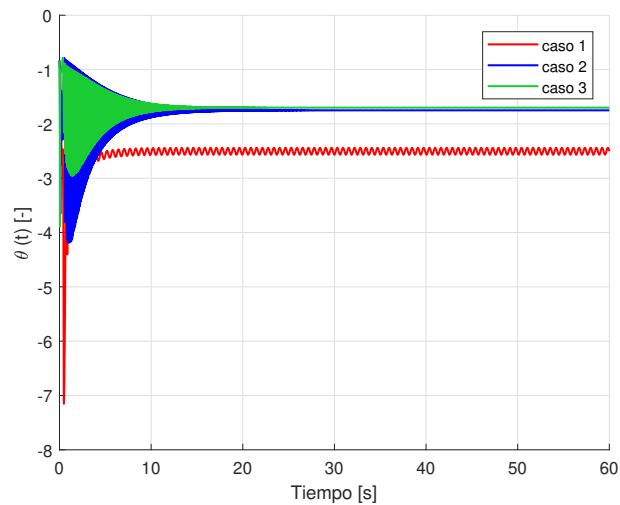


Figura 21: Ley de ajuste $\theta(t)$ con controlador adaptivo indirecto con diferentes escalones.

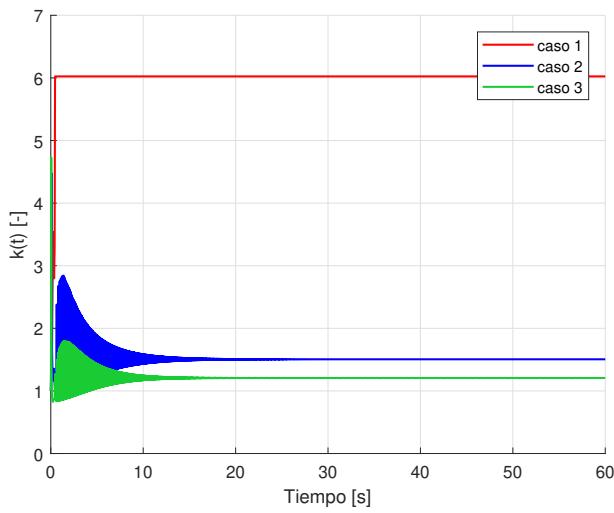


Figura 22: Ley de ajuste $k(t)$ con controlador adaptivo directo con diferentes escalones.

b) Condiciones iniciales: Caso 1: $y_p = -10$, Caso 2: $y_p = -0.5$, Caso 3: $y_p = 10$

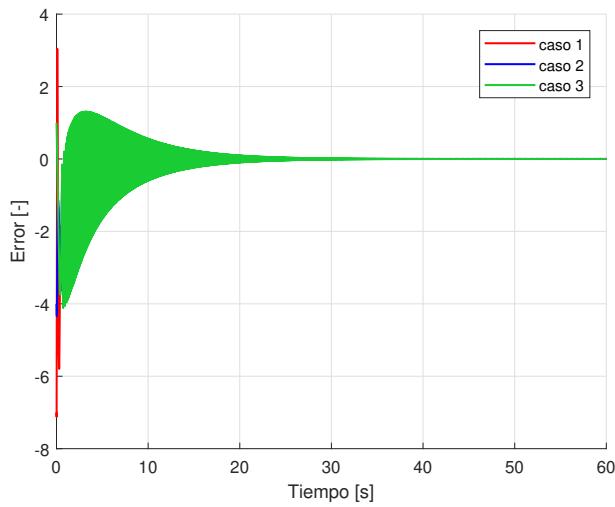


Figura 23: Error con controlador adaptivo indirecto con diferente condición inicial y_p .

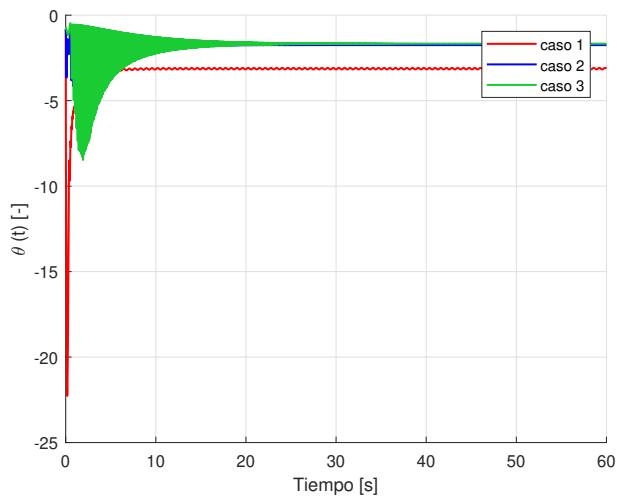


Figura 24: Ley de ajuste $\theta(t)$ con controlador adaptivo indirecto con diferente condición inicial y_p .

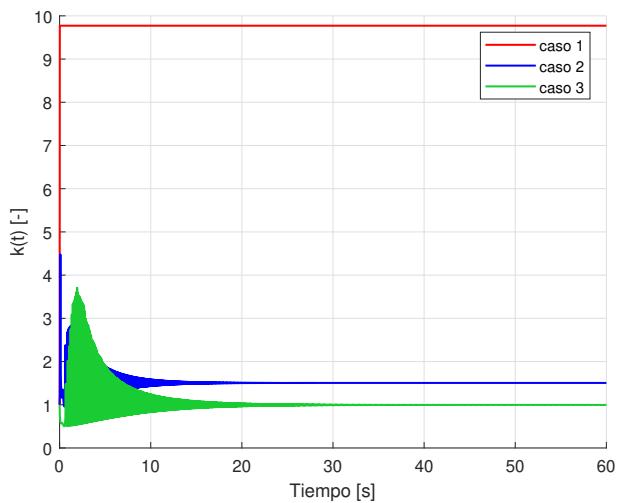


Figura 25: Ley de ajuste $k(t)$ con controlador adaptivo directo con diferente condición inicial y_p .

- c) Condiciones iniciales: Caso 1: $y_m = -10$, Caso 2: $y_m = 1$, Caso 3: $y_m = 10$. Escalón constante igual a 10.

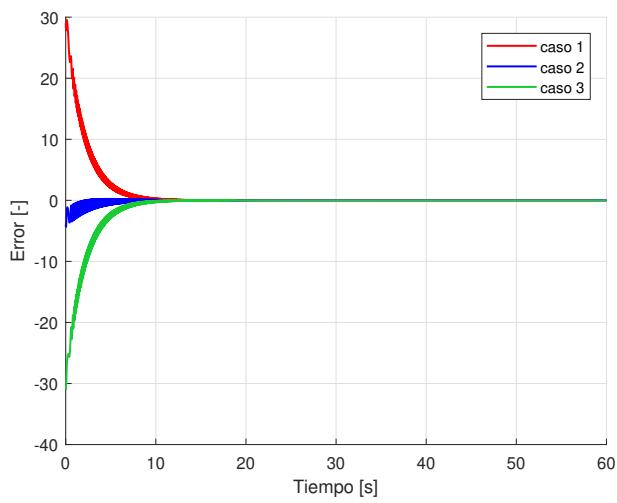


Figura 26: Error con controlador adaptivo indirecto con diferente condición inicial y_m .

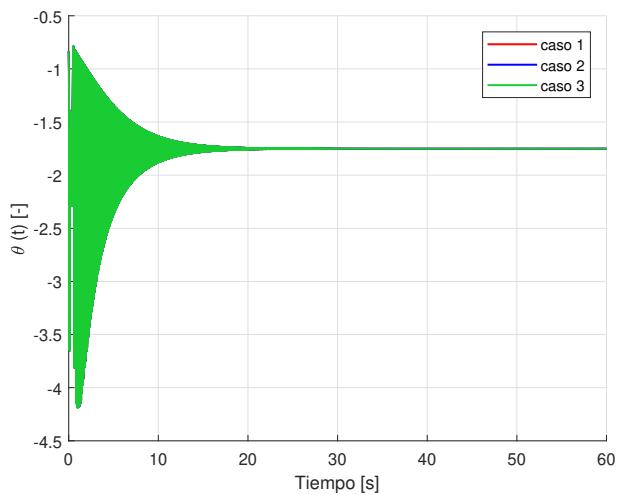


Figura 27: Ley de ajuste $\theta(t)$ con controlador adaptivo indirecto con diferente condición incial y_m .

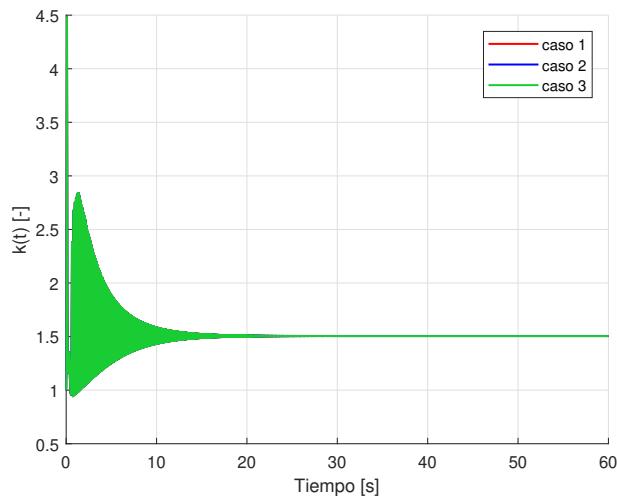


Figura 28: Ley de ajuste $k(t)$ con controlador adaptivo directo con diferente condición inicial y_m .

- d) Condiciones iniciales: Caso 1: $k = 1$, Caso 2: $k = 5$, Caso 3: $k = 10$. Escalón constante igual a 10.

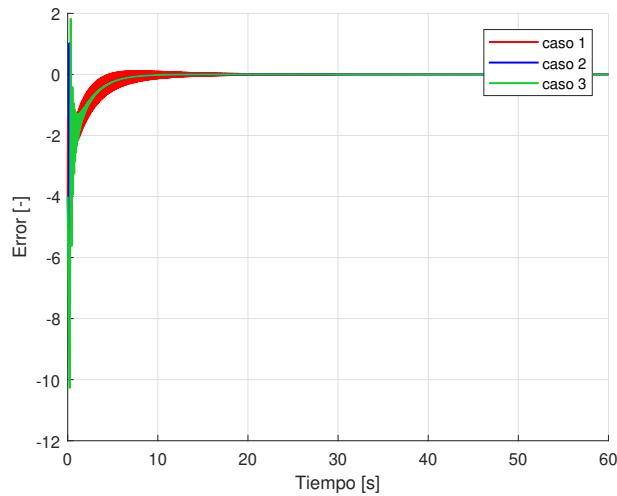


Figura 29: Error con controlador adaptivo indirecto con diferente condición inicial k .

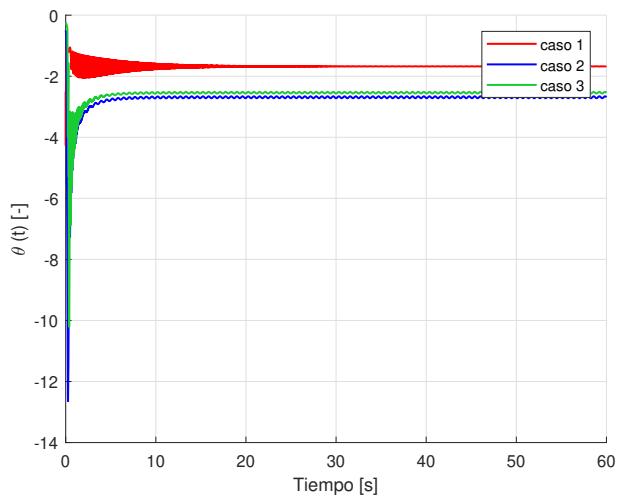


Figura 30: Ley de ajuste $\theta(t)$ con controlador adaptivo indirecto con diferente condición inicial k .

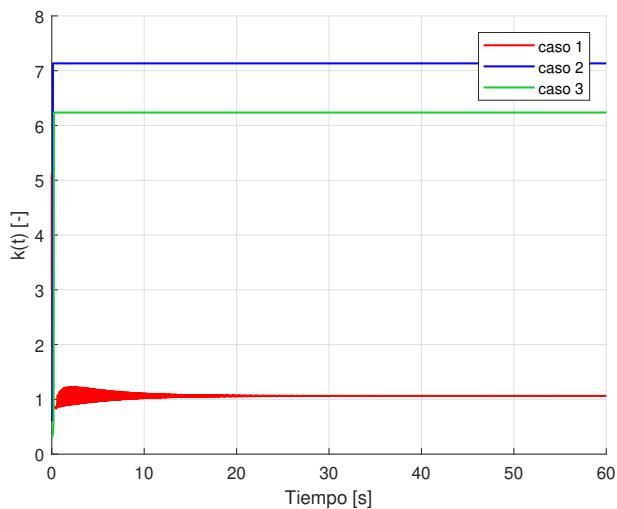


Figura 31: Ley de ajuste $k(t)$ con controlador adaptivo directo con diferente condición inicial k .

- e) Condiciones iniciales: Caso 1: $\theta = -5$, Caso 2: $\theta = 1$, Caso 3: $\theta = 5$. Escalón constante igual a 10.

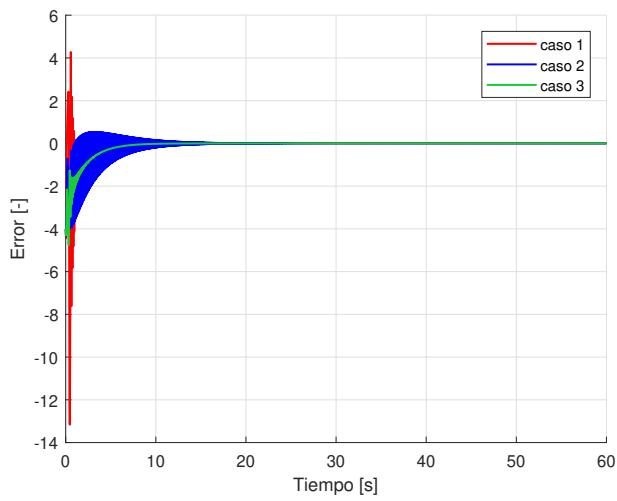


Figura 32: Error con controlador adaptivo indirecto con diferente condición inicial θ .

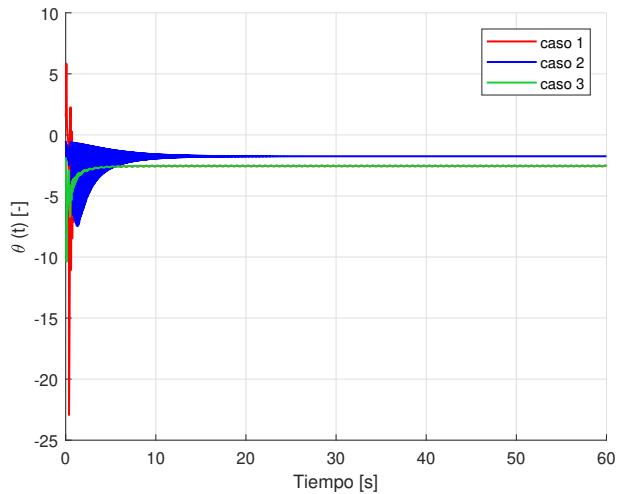


Figura 33: Ley de ajuste $\theta(t)$ con controlador adaptivo indirecto con diferente condición incial θ .

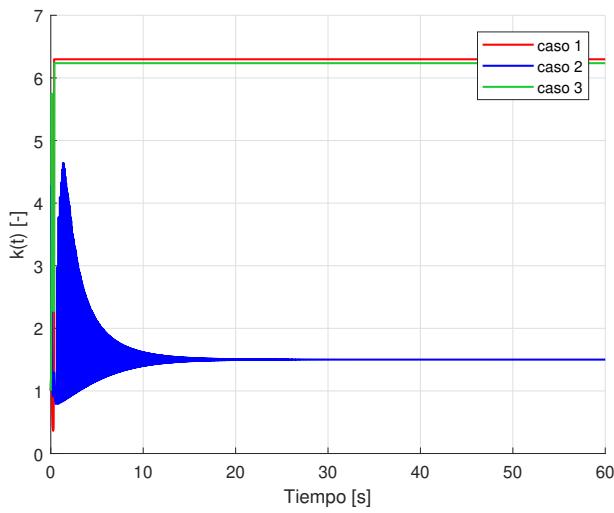


Figura 34: Ley de ajuste $k(t)$ con controlador adaptivo directo con diferente condición inicial θ .

f) Entrada sinusoidal: $r(t) = [1, 10, 20] \cdot \sin(f)$ con f fijo igual a 10 rad/s y bias igual a 5 .

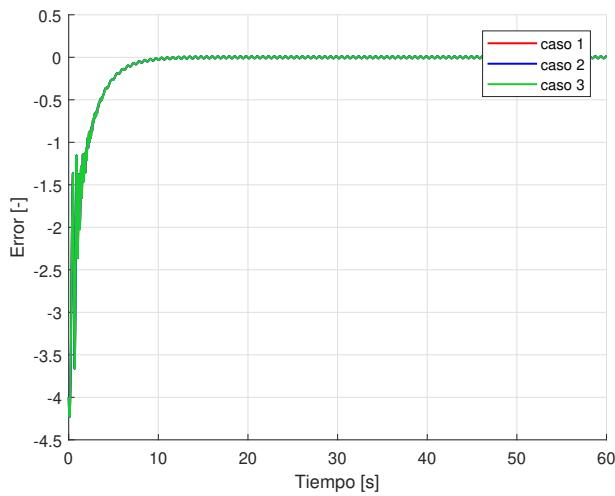


Figura 35: Controlador adaptivo indirecto con *sine wave* y diferente valor en la amplitud.

2. Pregunta 2

2.1. Enunciado

Considere el sistema de segundo orden definido por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} x(t)\end{aligned}\quad (1)$$

1. Encontrar un observador basado en una realización mínima para el sistema.
2. Encontrar un observador basado en una realización no mínima para el sistema.

Nota: Deje claramente establecido para cada caso: la matriz de transformación utilizada; las variables y parámetros conocidos; las variables y parámetros desconocidos. Considere ahora los siguientes valores de los parámetros:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1. Evaluar diseño anterior de a) y analizar su comportamiento.
2. Evaluar diseño anterior de b) y analizar su comportamiento.
3. Comparar ambos diseños y extraer las conclusiones pertinentes.

Nota: Estudie el comportamiento, para cada caso, frente a:

- i) Entradas tipo escalón y sinusoidal.
- ii) Variaciones en escalón de parámetros del sistema original.
- iii) Presencia de perturbaciones acotadas.

2.2. Solución problema 2

1. Un observador basado en la realización mínima para un sistema de una sola entrada y salida que sea lienal e invariante del tiempo con parámetros desconocidos, puede ser descrito por medio de una ecuación diferencial de la forma,

$$\begin{aligned}\dot{x}_p &= [a|\bar{A}]x_p + bu \\ y_p &= h^T x_p = x_1\end{aligned}\quad (2)$$

donde $a^T = [a_1, a_2, \dots, a_n]$, $b^T = [b_1, b_2, \dots, b_n]$, con la suposición de que \bar{A} es conocida y de dimensiones $(n \times (n-1))$. Por otro lado, $h^T = [1, 0, \dots, 0]$. Los vectores a y b representan los parámetros desconocidos de la planta. El fundamento de los observadores de este tipo se basa en que aunque (h^T, A, b) contiene $n^2 + 2n$ elementos, solo se necesitan $2n$ parámetros para determinar la única relación entre entrada y salida.

Luego, el objetivo es encontrar estos valores tanto como el estado x_p del sistema solo considerando los datos de entrada y salida. Una representación de la planta equivalente a la ecuación

(2) es,

$$\begin{aligned}\dot{x}_p &= [-k|\bar{A}]x_p + gy_p + bu \\ y_p &= h^T x_p = x_1\end{aligned}\quad (3)$$

Donde k es un vector **conocido** tal que $K = [-k|\bar{A}]$ sea una matriz asintóticamente estable, $g = k + a$. La matriz \underline{A} es dada o conocida y se define como,

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_2 & & 0 \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (4)$$

Aquí nace la primera condición para los valores que generan esta matriz. Los valores λ_n deben ser con parte real negativa.

Notar que g y b son vectores desconocidos mientras que las señales $u(t)$ y $y_p(t)$ pueden ser medidas en el tiempo t . Para estimar g y b se puede representar un observador adaptivo con la siguiente estructura,

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_p(t) &= K\hat{x}_p(t) + \hat{g}(t)y_p(t) + \hat{b}(t)u(t) + v_1(t) + v_2(t) \\ \hat{b}(t) &= h^T \hat{x}_p(t)\end{aligned}\quad (5)$$

donde $\hat{g}(t)$ y $\hat{b}(t)$ son los valores a estimar para g y b respectivamente. El error puede ser estimado como,

$$\begin{aligned}\dot{e} &= Ke + \phi y_p + \psi u + v_1(t) + v_2(t) \\ e_1 &= h^T e\end{aligned}\quad (6)$$

con,

$$\begin{aligned}e(t) &= \hat{x}_p(t) - x_p(t) \\ e_1(t) &= \hat{y}_p(t) - y_p(t) \\ \phi(t) &= \hat{g}(t) - g \\ \psi(t) &= \hat{b}(t) - b\end{aligned}\quad (7)$$

El objetivo es determinar las leyes adaptivas para ajustar $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$. Ahora, se define el siguiente teorema:

Teorema: Sea (h^T, K) un par observable, donde $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es asintóticamente estable. Dada una función continua en el tiempo por partes limitadas $z : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\dot{\phi} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$, un vector $d \in \mathbb{R}^n$ y funciones $v, \omega : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ pueden ser determinadas tal que el sistema,

$$\begin{aligned}\dot{e} &= Ke + \phi z + v & e_1 &= h^T e \\ \dot{\epsilon} &= K\epsilon + d\phi^T \omega & \epsilon_1 &= h^T \epsilon\end{aligned}\quad (8)$$

(i) El vector $d^T = [1, d_2, \dots, d_n]$ se escoge tal que $h^T(sI - K)^{-1}d$ sea estrictamente positivo real.

(ii) Definiendo la matriz de transferencia como,

$$G_i = \left[\frac{s^{n-i}}{s^{n-1} + d_2 s^{n-2} + \dots + d_n} \right], i = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

y

$$G^T(s) = [G_1(s), G_2(s), \dots, G_n(s)] \quad (10)$$

Si $\omega^T = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n]$, se define $\omega_i(t) = G_i(s)z(t)$. Ya que $d^T G(s) = 1$, se sigue que cuando ϕ es un vector constante, considerando $v(t) = 0$,

$$h^T[sI - K]^{-1}\phi = \{h^T[sI - K]^{-1}d\}\phi^T G(s) \quad (11)$$

(iii) Se define,

$$v^T(t) = -\dot{\phi}^T(t)[0, A_2\omega(t), \dots, A_n\omega(t)] \quad (12)$$

donde $A_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $m = 1, \dots, n$.

En el observador adaptivo descrito en la ecuación (3), el objetivo es elegir un v_1 y v_2 de tal forma que las leyes del estado adativo pueden obtenerse. Esto se puede cumplir primero definiendo el vector $\omega_1(t)$ y $\omega_2(t)$ como,

$$\begin{aligned} G(s)u(t) &= \omega_1(t) \\ G(s)y_p(t) &= \omega_2(t) \end{aligned} \quad (13)$$

y los vectores $v_i(t)$ se definen como,

$$\begin{aligned} v_1^T &= \psi^T[0, A_2\omega_1, \dots, A_n\omega_1] \\ v_2^T &= \dot{\phi}^T[0, A_2\omega_2, \dots, A_n\omega_2] \end{aligned} \quad (14)$$

Reemplazando estos cambios en la definicion del teorema,

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} &= K\epsilon + d(\psi^T\omega_1 + \phi^T\omega_2) \\ \epsilon_1 &= h^T\epsilon \end{aligned} \quad (15)$$

De donde nacen las leyes de ajuste,

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= -e_i\omega_1 \\ \dot{\phi} &= -e_i\omega_2 \end{aligned} \quad (16)$$

Para el sistema de 2×2 presentado en el enuncionado se defienen los siguientes parametros conocidos o dados,

$$\begin{aligned} G_1(s) &= \frac{s}{s + d_2} \\ G_2(s) &= \frac{1}{s + d_2} \end{aligned} \quad (17)$$

El valor de d_2 se fija para que $h^T(sI - K)^{-1}d$ sea positivo. Considerando $k^T = [k_1, k_2]$ y

$\bar{A} = [1 \ \lambda_2]^T$. Luego, se tiene,

$$[1 \ 0] \left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 & 1 \\ k_2 & \lambda_2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ d_2 \end{bmatrix} > 0 \quad (18)$$

Resolviendo,

$$\begin{aligned} [1 \ 0] \left(\begin{bmatrix} s - k_1 & -1 \\ -k_2 & s - \lambda_2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ d_2 \end{bmatrix} &> 0 \\ [1 \ 0] \frac{1}{(s - k_1)(s - \lambda_2) - k_2} \left(\begin{bmatrix} s - \lambda_2 & 1 \\ k_2 & s - k_1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ d_2 \end{bmatrix} &> 0 \\ [1 \ 0] \frac{1}{(s - k_1)(s - \lambda_2) - k_2} \left(\begin{bmatrix} s - \lambda_2 + d_2 \\ k_2 + d_2(s - k_1) \end{bmatrix} \right) &> 0 \\ \frac{s - \lambda_2 + d_2}{(s - k_1)(s - \lambda_2) - k_2} &> 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Para que la matriz K sea asintótica se define $k = [-5 \ -5]^T$ y $\lambda_2 = -1$, luego, la condición para d_2 es,

$$\begin{aligned} s - \lambda_2 + d_2 &> (s - k_1)(s - \lambda_2) - k_2 \\ d_2 &> (s - \lambda_2)((s - k_1) - 1) - k_2 \end{aligned} \quad (20)$$

Finalmente, se construye el diagrama de bloque mostrado a continuación.

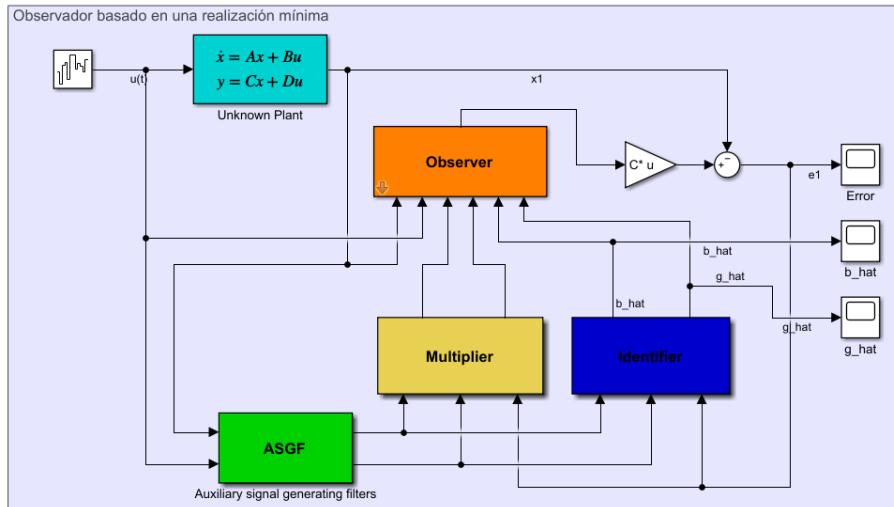


Figura 36: Diagrama principal del sistema con observador basado en una realización mínima.

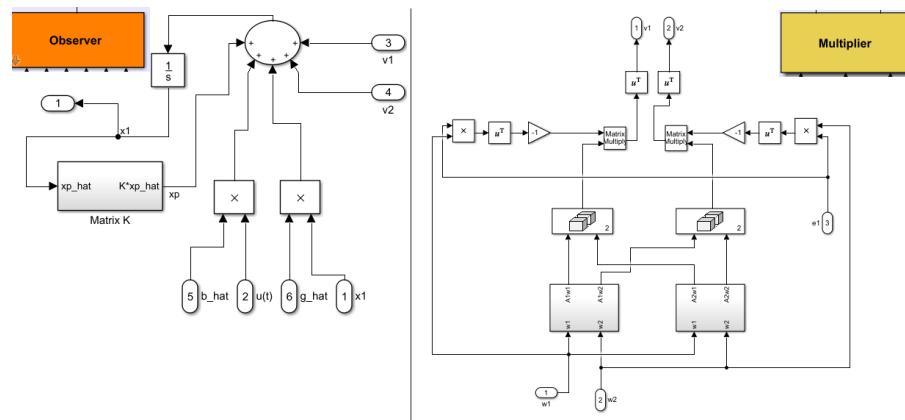


Figura 37: Diagrama interno de los elementos *Observer* y *Multiplier* del sistema con observador basado en una realización mínima.

2. –
3. Considerando los valores de los vectores k y d presentados con anterioridad, y analizando 3 casos de escalon, Caso 1: $r = 0.1$, Caso 2: $r = 0.5$, Caso 3: $r = 1.0$, luego se tiene,

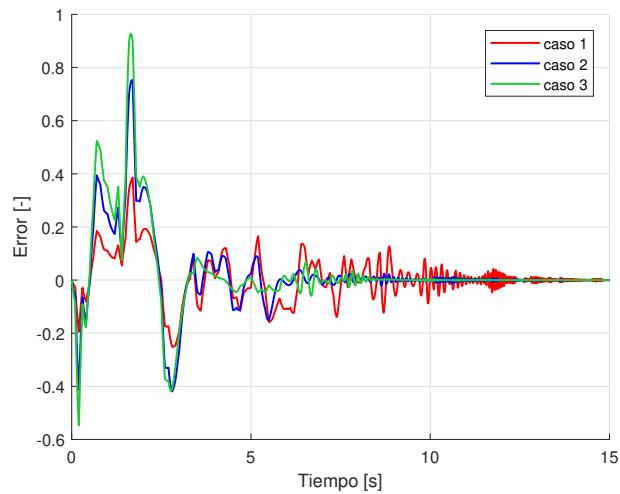
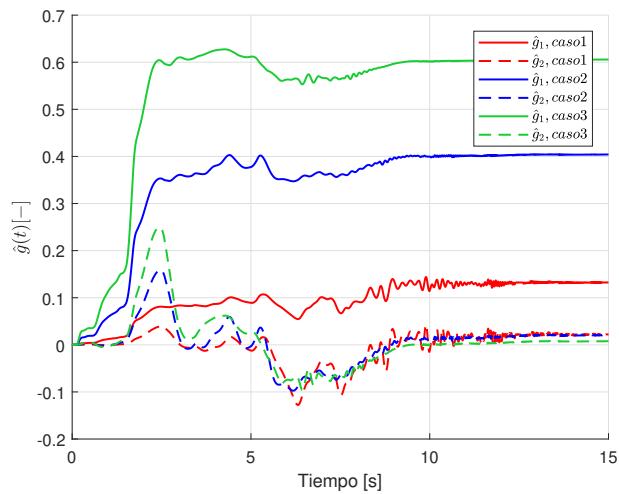
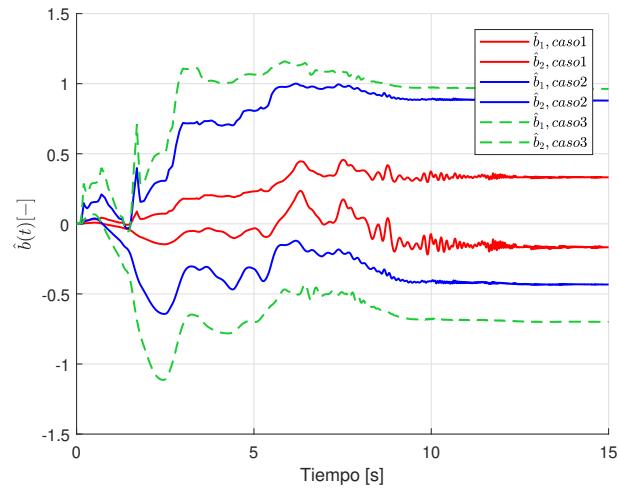


Figura 38: Error entre la planta y el observador diseñado

Figura 39: Ley de ajuste $\hat{g}(t)$ para los 3 casos señaladosFigura 40: Ley de ajuste $\hat{b}(t)$ para los 3 casos señalados

Para diferentes valores de entrada sinusoidal, (La señal tiene la amplitud de los escalones variables a 10 rad/s sin bias)

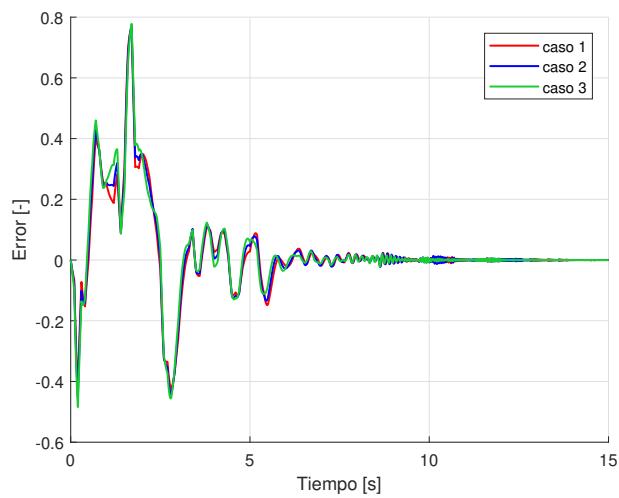
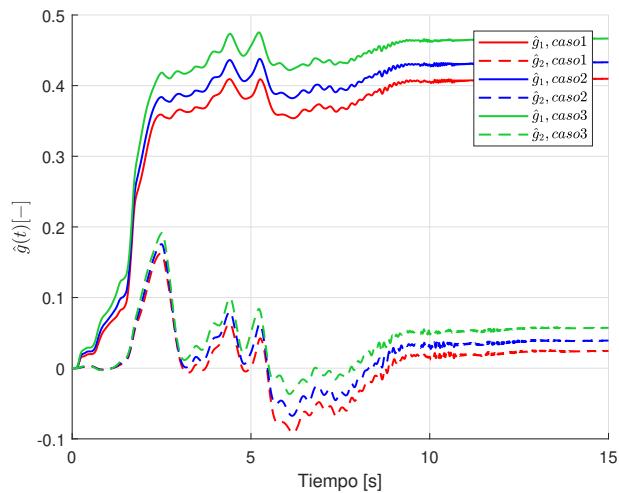


Figura 41: Error entre la planta y el observador diseñado

Figura 42: Ley de ajuste $\hat{g}(t)$ para los 3 casos señalados

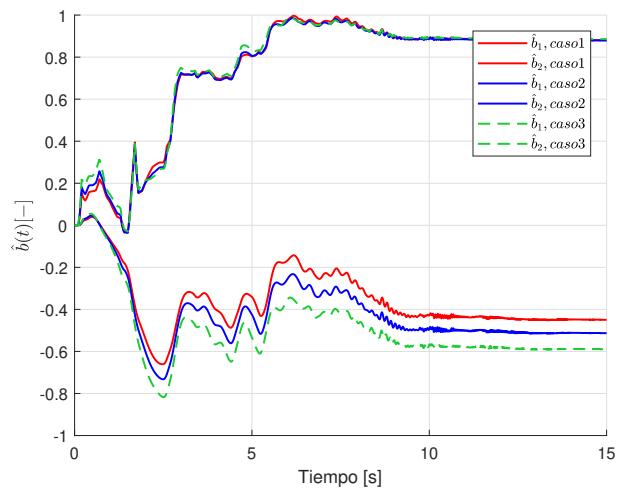


Figura 43: Ley de ajuste $\hat{b}(t)$ para los 3 casos señalados

3. Conclusión

En la primera sección se logró hacer un control adativo que lleva a la estabilidad el error de dos plantas, una de referencia y una desconocida. Para los dos casos se puede visualizar el tiempo y la forma de cada simulación en los casos de control directo e indirecto. Con el control directo los errores se estabilizaban en cero en un tiempo más corto que con el controlador indirecto. Por otro lado, la amplitud de los errores eran más bajas en el control indirecto a excepción de la prueba donde y_m variaba. En ambos casos para valores extremos, se tiene valores iniciales del error de gran amplitud. Desde el punto de vista de la ley de control y las leyes de ajuste se puede ver que en todos los casos convergen a un valor fijo en el tiempo, demostrando así el poder de ambos controladores.

En la parte 2 del ejercicio la implementación de un observador basado en la mínima realización fue completada. En ella se presenta primera algunas restricciones para los valores iniciales que conocemos o podemos pretender conocer. Por otro lado, están los términos que uno desconoce y que gracias al observador presentado se logra estimar un valor de \hat{g} y \hat{b} . Es posible ver en los gráficos de las simulaciones que para diferentes valores iniciales de \hat{g} y \hat{b} se tienen leyes de ajuste de amplitud más altas para condiciones altas. Sin embargo, aunque los valores de las leyes de control se van separando la una con la otra, el error se mantiene bien acotado. Se puede ver que el error entre el observador y la planta es muy semejante para los 3 casos simulados. Tanto las leyes de ajuste como el error convergen a un valor en un tiempo finito. El experimento que mejor muestra este efecto es cuando se introduce una señal sinusoidal con diferentes valores de amplitud, que a diferencia del caso donde variaba el escalón, sintoniza los valores tanto del error como las componentes de los vectores \hat{g} y \hat{b} .

4. Referencias

- [1] Narendra K. Stable Adaptive systems.
- [2] Apuntes de catédrara Control adaptivo de sistemas prof: Manuel Duarte.