NTNU

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4140 Diskret matematikk**

Faglig kontakt under eksamen: Christian Skau
Tlf: 7359 1755

Eksamensdato: 17. desember 2013
Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00
Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C:
Bestemt, enkel kalkulator, Rottmans matematiske formelsamling.

Annen informasjon:

Målform/språk: bokmål
Antall sider: 7
Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Eksamenssettet består av to deler: Oppgavene 1 til 7 med i alt 10 punkter (hvert punkt teller like mye) utgjør en del, og oppgave 8, som er en flervalgsoppgave utgjør den andre delen. Oppgave 8 teller 50%, og oppgavene 1 til 7 teller 50%.
Siste side av oppgavesettet er et ark med en kupong der dine svar skal krysses av. Denne siden med kupongen skal merkes med kandidatnummeret ditt og leveres sammen med besvarelsene på de syv første oppgavene.

Oppgave 1

Tegn det rotfestede treet som representerer uttrykket

$$\frac{x-(3+2y)}{x^2+5}$$

og skriv ned postfix formen til uttrykket.

Oppgave 2

Finn løsningen av kongruensligningene

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod 3 \\ x &\equiv 4 \pmod 5 \\ x &\equiv -7 \pmod{47} \end{aligned}$$

slik at $706 \leq x \leq 1410$.

Oppgave 3

Vis ved induksjon formelen

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$$

for $n \geq 1$.

Oppgave 4

En bokhylle inneholder 12 bøker som står i rekkefølge. På hvor mange måter kan man plukke ut 5 bøker slik at man ikke plukker bøker som står ved siden av hverandre?

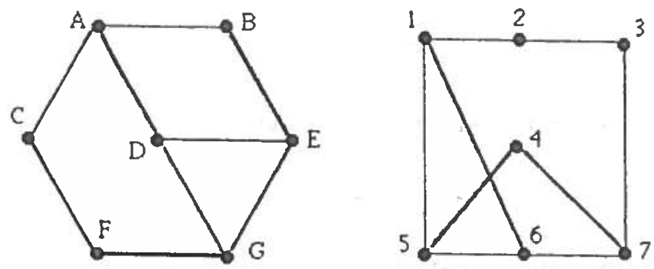
(Hint: Representer bøkene som plukkes ut ved stolper $|$, og bøkene som ikke blir plukket ut ved $*$.)

Oppgave 5

Definer eksplisitt en funksjon

$$f : \{A, B, C, D, E, F, G\} \longrightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

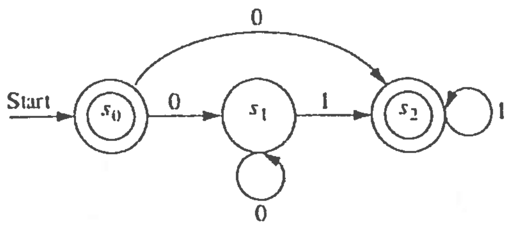
mellom nodene til de to grafene i Figur 1. som gir en isomorfi mellom grafene.



Figur 1.

Oppgave 6

Gitt den ikke-deterministiske endelige tilstandsautomaten $M = (S, I, f, s_0, F)$ fremstilt i Figur 2.



Figur 2.

a) Finn et regulært uttrykk som representerer språket $L(M)$ som M gjenkjenner.

b) Beskriv en regulær grammatikk $G = (V, T, S, P)$ slik at språket $L(G)$ som G genererer er lik $L(M)$.

c) Fremstill ved en figur en deterministisk endelig tilstandsautomat $\overline{M} = (\overline{S}, I, \overline{f}, \overline{s_0}, \overline{F})$ slik at $L(\overline{M}) = L(M)$.

Oppgave 7

a) Finn et regulært uttrykk som representerer den regulære mengden bestående av alle strenger over $\{0, 1\}$ som inneholder minst to påfølgende $0'$er eller minst tre påfølgende $1'$ere.

b) Konstruer en ikke-deterministisk endelig tilstandsautomat $M = (S, I, f, s_0, F)$ med høyst fire tilstander som gjenkjenner den regulære mengden representert ved det regulære uttrykket $(001 \cup (11)^*)^*$.

Oppgave 8

INSTRUKSJONER:

Dette er en flervalgsoppgave, der siste siden er et ark med en kupong hvor dine svar skal krysses av. Denne siden skal merkes med kandidatnummeret ditt og leveres sammen med besvarelsene på de første syv oppgavene. Det vil være minst ett, men gjerne flere rette svar-alternativer for hver oppgave. Det er totalt 10 rette svar og du skal ikke sette flere kryss enn dette. Rett kryss gir 1 poeng. (Du trekkes ikke for å sette et kryss galt.) Setter du flere enn 10 kryss trekkes du 3 poeng pr. kryss mer enn 10.

Deloppgave 1.

La $P(x, y)$ bety "$x + 2y = xy$", der x og y er hele tall. Hvilke av følgende er sant?

Alt 1) $\exists y P(3, y)$
Alt 2) $\forall x \exists y P(x, y)$
Alt 3) $\exists x \forall y P(x, y)$
Alt 4) $\forall y \exists x P(x, y)$

Deloppgave 2.

Hvilke av følgende logiske utsagn er tautologier?

Del 1) $((p \to q) \wedge \neg p) \to \neg q$
Del 2) $(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
Del 3) $(p \to (\neg q \wedge r)) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg(r \to q))$
Del 4) $(p \to (q \to r)) \leftrightarrow (p \to (q \wedge r))$

Deloppgave 3.

Hvor mange heltalls løsninger finnes det til ligningen

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 21, \text{når } x_1 \geq 0, x_2 \geq 3, x_3 \geq 2, x_4 \geq 5?$$

Alt 1) 1932
Alt 2) 12650
Alt 3) 1365
Alt 4) 364

Deloppgave 4.

La R være relasjonen på $\mathbf{Z}$ definert ved at $(x, y) \in R$ dersom $3|(x + 2y)$, dvs. 3 er en divisor til $(x + 2y)$. Hvilke av følgende er sant?

Alt 1) R er refleksiv.
Alt 2) R er antisymmetrisk.
Alt 3) R er symmetrisk.
Alt 4) R er transitiv.

Deloppgave 5.

Gitt rekurrensrelasjonen $a_n = -8a_{n-1} - 16a_{n-2}$, der $n \geq 0$ og $a_0 = 2, a_1 = -20$. Hva er a_9?

Alt 1) 1900544
Alt 2) -7602176
Alt 3) 7602176
Alt 4) -1900544

Deloppgave 6.

Hvilke av følgende utsagn er riktige?

Alt 1) Koeffisienten til x^4y^6 i utviklingen av $(2x - 3y)^{10}$ er 2939328
Alt 2) $(2B3EA)_{16} = (167130)_{10}$
Alt 3) $5^{1083} \equiv 3 \pmod{41}$
Alt 4) Største felles divisor til 4807 og 2091 er lik 1.

Deloppgave 7.

La $G = (V, E)$ være en urettet sammenhengende graf. Hvilke av følgende utsagn er garantert sanne?

Alt 1) Dersom G har en Eulerkrets så har G en Hamiltonkrets
Alt 2) Det finnes en G som har nøyaktig 3 noder av odde grad.
Alt 3) Dersom$|V| = n \geq 2$ og G er den komplette grafen K_n, så er $|E| = \binom{n}{2}$.
Alt 4) Dersom $|V| = n \geq 3$ og G er sykel-grafen C_n, så er $|E| = n + 1$.

Deloppgave 8.

På hvor mange måter kan man ordne bokstavene i PIPPI som ikke starter med en P og ikke ender med en I?

Alt 1) 7
Alt 2) 3
Alt 3) 10
Alt 4) 6

SVARKUPONG

Kryss av det du mener er riktige svar, inntil 10 kryss. Et riktig satt kryss gir 1 poeng, og hvert kryss mer enn 10 gir −3 poeng. Merk denne siden med kandidatnummer, og lever den.

Kandidatnummer:

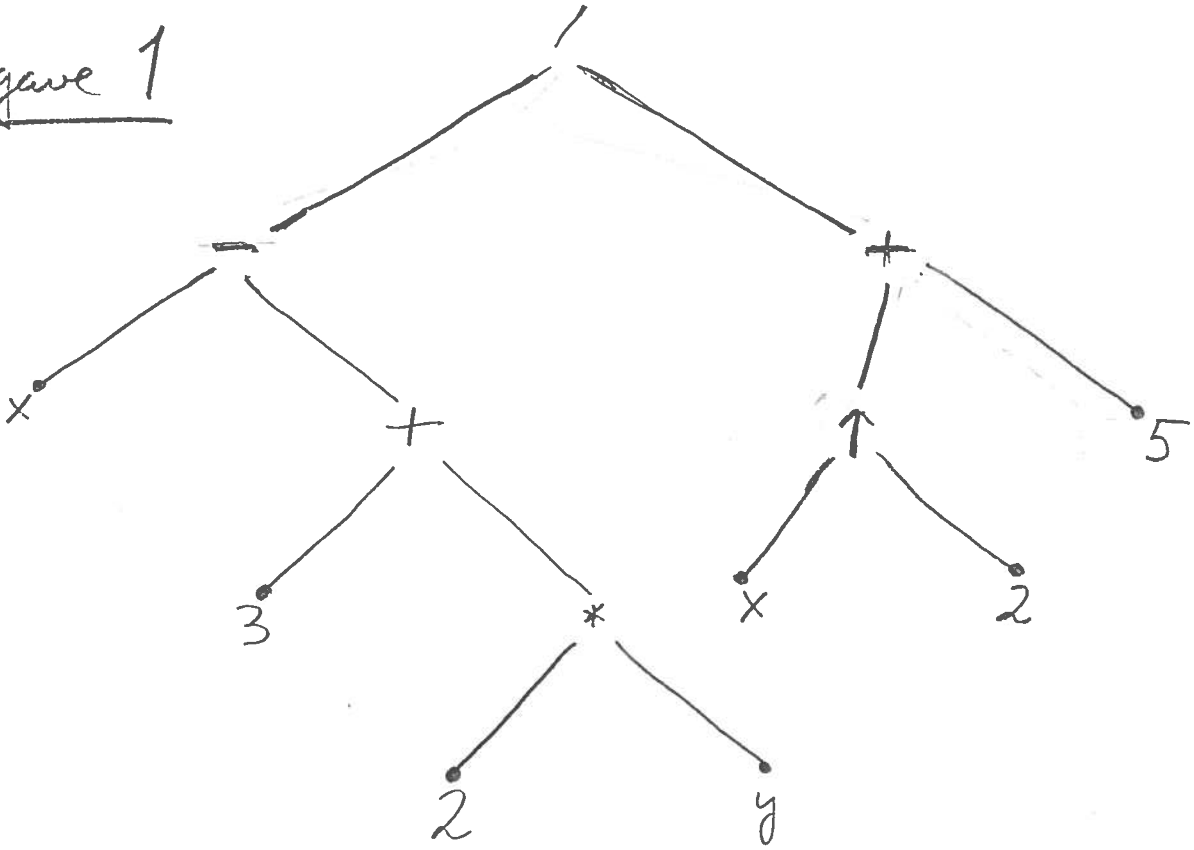
	Alt 1	Alt 2	Alt 3	Alt 4
Deloppgave 1				
Deloppgave 2				
Deloppgave 3				
Deloppgave 4				
Deloppgave 5				
Deloppgave 6				
Deloppgave 7				
Deloppgave 8				

Eksamen TMA4140: Diskret Matematikk

Desember 17, 2013

Løsningsforslag

Oppgave 1



$x\,3\,2\,y * + - x\,2 \uparrow 5 + /$

Oppgave 2

Bruk det kinesiske restteoremet.

$m = 3 \cdot 5 \cdot 47 = \underline{705}$, $M_3 = \frac{m}{3} = \underline{235}$, $M_5 = \frac{m}{5} = \underline{141}$

$M_{47} = \frac{m}{47} = \underline{15}$. Finn y_3, y_5, y_{47} slik at

$M_3 y_3 \equiv 1 \pmod 3$, $M_5 y_5 \equiv 1 \pmod 5$, $M_{47} y_{47} \equiv 1 \pmod{47}$

$$x = \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{M_3 y_3} \cdot 2 + \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{M_5 y_5} \cdot 4 + \underset{\overset{\shortparallel}{22}}{M_{47} y_{47}} \cdot (-7) + m \cdot L = -2310 + 705L$$

$(L \in \mathbb{Z})$

Velg $L = 3$. Da får vi løsningen: $x = \underline{\underline{839}}$

Oppgave 3

La $P(n)$ betegne påstanden:

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$$

Vi ser at $P(1)$ er sann (vi får $\frac{1}{4}$ på begge sider). Anta $P(n)$ er sann (induksjonsantagelsen).
Vi skal vise at $P(n+1)$ er sann, altså

$$\underbrace{\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}}_{=\frac{n}{3n+1}\text{ ifølge induksjonsantagelsen.}}+\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}=\frac{n+1}{3n+4}$$

Vi må vise

$$\frac{n}{3n+1}+\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}=\frac{n+1}{3n+4}$$

Ved å multiplisere på begge sider med $(3n+1)(3n+4)$ så ser man lett at vi har likhet.

Oppgave 4

$* \mid * * \mid * \mid * * \mid * \mid$ (Eksempel på tillatt utplukk.)

minst en $*$ på hver av disse plassene, altså ialt 4 $*$. Da er det 3 $*$ igjen.

Problemet reduserer seg til hvor mange måter man kan velge ut 3 posisjoner av ialt $3+5=8$ posisjoner, altså $C(8,3)=\binom{8}{3}=\underline{\underline{56}}$ (Eks.
$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ * & \mid & \mid & \mid & * & * & \mid & \mid \end{array}$$
)

Oppgave 5

$f(A) = 7$, $f(B) = 4$, $f(C) = 3$, $f(D) = 6$,
$f(E) = 5$, $f(F) = 2$, $f(G) = 1$

(f er faktisk entydig bestemt: $f(A)$ må nødvendigvis være lik 7, siden A og 7 er de eneste nodene av grad tre som har to naboer av grad to i de to grafene. Utifra dette faktum kan man ved inspeksjon se at f er entydig.)

Oppgave 6

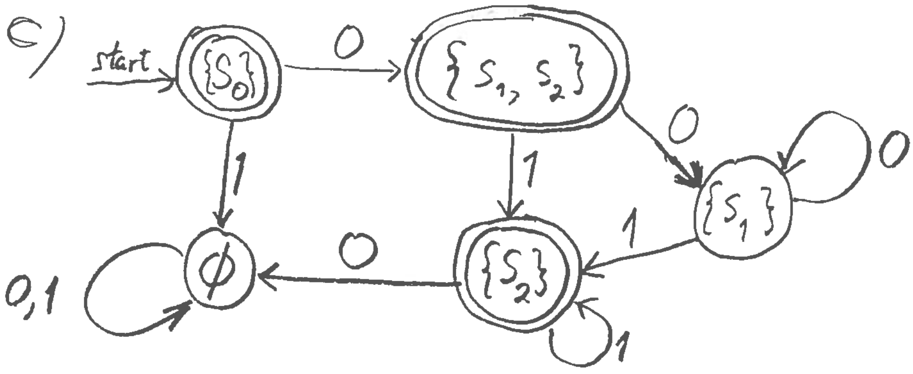
a) $\lambda \cup 01^* \cup 00^*11^*$

b) Ved å følge beskrivelsen som er gitt i lærebøka så får vi følgende regulære grammatikk $G = (V, T, S, P)$ fra M:

$V = \{ S\ (\leftrightarrow s_0),\ A\ (\leftrightarrow s_1),\ B\ (\leftrightarrow s_2),\ 0, 1\}$, $T = \{0, 1\}$

P: $S \to \lambda$, $S \to 0A$, $S \to 0B$, $S \to 0$,
$A \to 0A$, $A \to 1B$, $A \to 1$, $B \to 1B$, $B \to 1$

c)

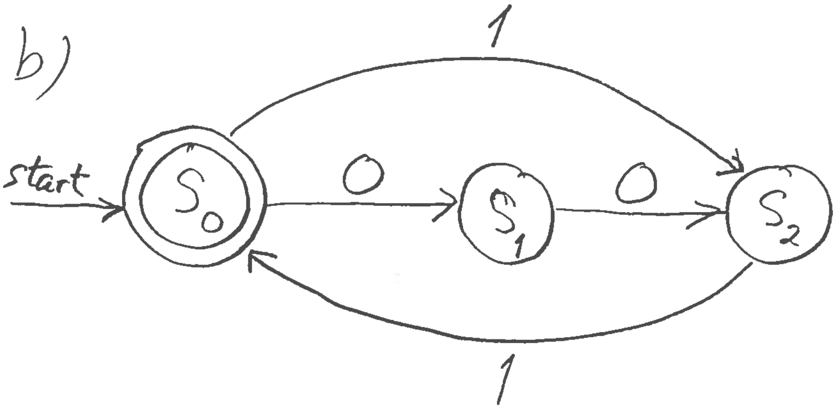


Vi har fulgt beskrivelsen som er gitt i lærebøka for å fremstille $\overline{M}$ fra M.

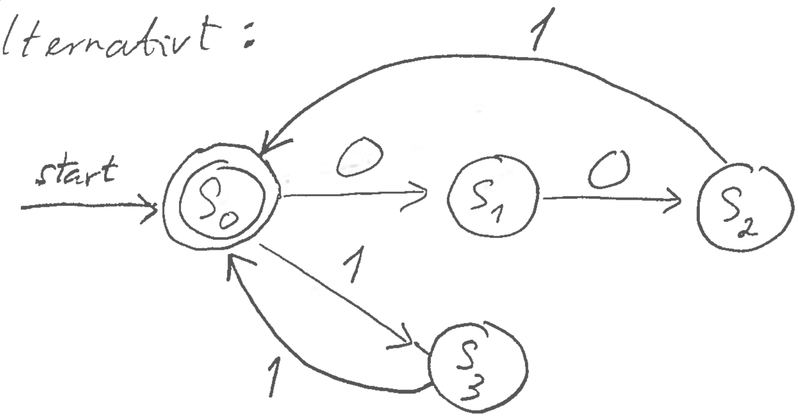
Oppgave 7

a) $(0 \cup 1)^* (00 \cup 111)(0 \cup 1)^*$

b)



Alternativt:



Oppgave 8

	Alt 1	Alt 2	Alt 3	Alt 4
Deloppgave 1	X			
Deloppgave 2			X	
Deloppgave 3				X
Deloppgave 4	X		X	X
Deloppgave 5		X		
Deloppgave 6				X
Deloppgave 7			X	
Deloppgave 8		X		