NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR ELEKTRONIKK OG TELEKOMMUNIKASJON
Signalbehandling

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Tor A. Ramstad

EKSAMEN I FAG TTT4110 Informasjons- og signalteori

Norsk tekst på oddetalls-sider.
(English text on even numbered pages.)

Dato/Date: 27. mai 2007
Tid/Time: 9.00 - 13.00

Hjelpemidler:
D - Ingen andre trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Bestemt, enkel kalkulator tillatt
(No extra printed or handwritten material allowed.
Simple calculator accepted.)

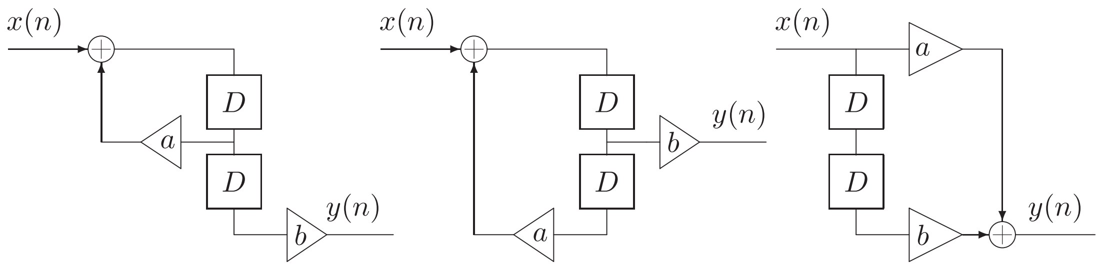
Bedømmelse:
Ved bedømmelse vektlegges hvert punkt likt.
(Equal weighting on each of the questions.)

Sensurfrist 23. juni, 2008

Oppgave 1.

a) Forklar forskjellene mellom FIR- og IIR-filtre.

Gitt følgende tre kretser:



A. B. C.

Differenseligningene til de tre er gitt ved:

1. $y(n) = ax(n) + bx(n-2)$
2. $y(n) = ay(n-1) + bx(n-2)$
3. $y(n) = ay(n-2) + bx(n-1)$

b) Bevis dette og på den måten finn ut hvilken differenseligning som tilhører hver krets.

Vi skal arbeide videre med den siste av differenseligningene.

c) Finn enhetspusresponsen for systemet.

d) Beregn den tilhørende frekvensresponsen og skisser dens modul (tallverdi) for $a = 0,5$ og $b = 1$.

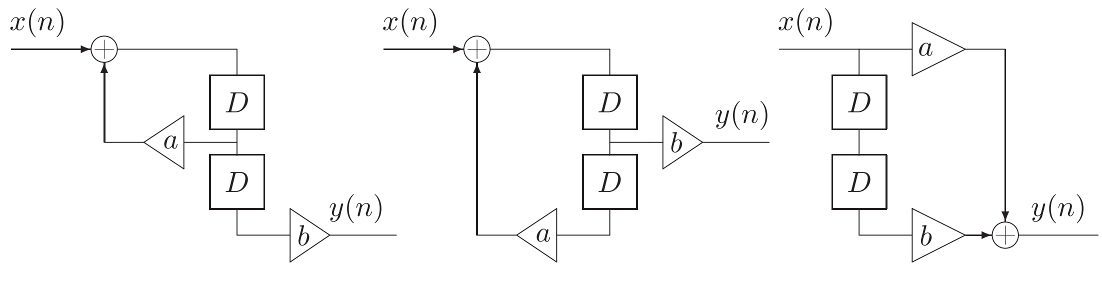
e) Vi påtrykker nå et signal med konstant effektspektraltetthet, $S_{XX}(\omega) = \sigma_X^2$. Hva blir effektspektraltettheten, $S_{YY}(\omega)$, til utgangssignalet?

f) Beregn effekten (variansen σ_Y^2) til utgangssignalet. Ved å bruke Parsevals teorem oppnås resultatet lettest.

Problem 1.

a) Explain the differences between FIR and IIR filters.

Given the following block diagrams:



The difference equations for the three circuits are given by:

1. $y(n) = ax(n) + bx(n-2)$
2. $y(n) = ay(n-1) + bx(n-2)$
3. $y(n) = ay(n-2) + bx(n-1)$

b) Prove this and in this way identify which equation belongs to each of the circuits.

In the following we consider only the last of the difference equations.

c) Find the unit sample response of this system.

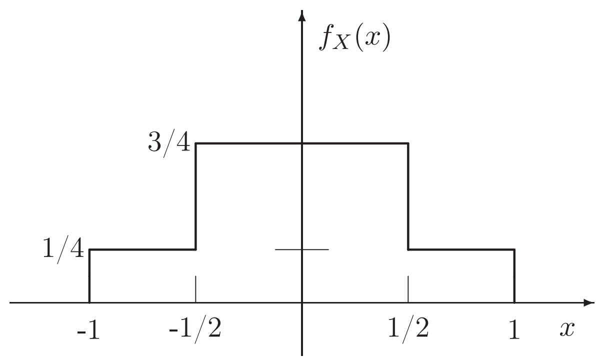
d) Calculate the corresponding frequency response and sketch its magnitude for the parameters $a = 0.5$ and $b = 1$.

e) We now apply a signal with the constant power spectral density, $S_{XX}(\omega) = \sigma_X^2$. What is the power spectral density, $S_{YY}(\omega)$, of the output signal?

f) Calculate the power (variance σ_Y^2) of the output signal. Parseval's teorem might come in handy to simplify the calculations.

Oppgave 2.

Gitt et signal med sannsynlighetstetthetsfunksjon $f_X(x)$ som vist i figuren.



a) Beregn signalets effekt (varians).

Signalet kvantiseres ved hjelp av en uniform kvantiserer med b bit.

b) Beregn kvantiseringsstøyen og signal-støyforholdet.

c) Beregn det kvantiserte signalets entropi når vi bruker 4 like kvantiseringsintervaller.

I praksis kan det være vanskelig å oppnå en bitrate som er lik entropien. Vi velger her følgende kode for de fire nivåene:

0
10
110
111

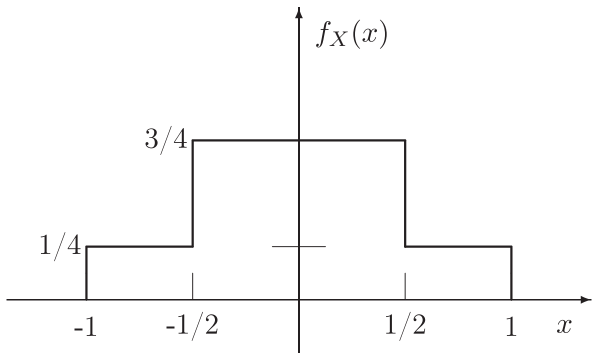
d) Er denne koden entydig dekodbar? Begrunn svaret.

e) Finn den minste gjennomsnittlige bitrate som kan oppnås for det gitte signalet med denne koden, og kommenter forskjellene til entropien og representasjonen med likt antall bit for alle nivåer.

f) Forklar hva vi mener med en pdf-optimalisert (Max-Lloyd) kvantiserer.

Problem 2.

Given a signal with probability density function (pdf) $f_X(x)$ as shown in the figure.



a) Compute the power (variance) of the signal.

The signal is quantized using a uniform quantizer with b bits.

b) Calculate the quantization noise and the signal-to-noise ratio.

c) Calculate the entropy of the quantized signal when the quantizer uses 4 equal intervals.

It can be very difficult to obtain a bit rate equal to the entropy of the signal in practical implementations. Here we choose codes for the for four levels as

0
10
110
111

d) Is this code uniquely decodable? Explain why you reached your conclusion.

e) Derive the lowest obtainable bit rate when using this code for the quantized signal, and discuss the difference between the obtained result to the entropy and the rate using the same rate for all symbols.

f) Explain what is meant by pdf-optimized (Max-Lloyd) quantization.

Oppgave 3.

I diskrete, pulsamplitude-modulerte (PAM) systemer sendes alle symboler med samme pulsform, men forskjellige energier og polaritet. Det optimale filteret for å detektere symbolene i støy er det *signaltilpassete filteret*. Anta at det mottatte signalet uten støy er $ag(t)$, hvor a er amplituden som inneholder meldingen og T_0 er pulslengden.

a) Hva er impulsresponsen til det signaltilpassete filteret?

Anta at den mottatte pulsformen er gitt ved $g(t) = u(t) - u(t - T_0)$, hvor $u(t)$ er enhetssprang-funksjonen.

b) Hva er den nødvendige kanalbåndbredden for å motta dette signalet? Begrunn svaret.

c) Utled utgangssignal $y(t)$ fra filteret når en puls mottas.

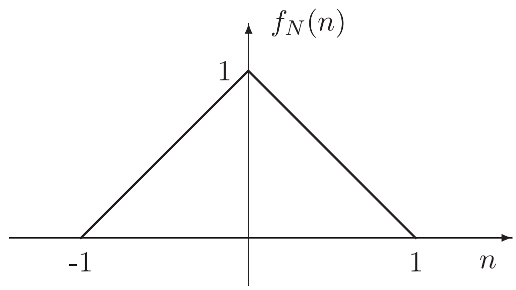
Nå sendes pulser etter hverandre slik at det mottatte signalet er gitt ved

$$x(t) = \sum_{i=0}^{N} a_i g(t - iT_0).$$

d) Tegn $x(t)$ når $N = 3$, $T_0 = 1$, og $\mathbf{a} = [1, 2, -1, 1]$.

e) Tegn også utgangssignal fra det signaltilpassete filteret og diskuter om hvorvidt dette er en Nyquistkanal. (Husk at filteret er lineært og tidsinvariant).

Vi betrakter spesialtilfellet med binær transmisjon hvor alfabetet er gitt av $a = \pm A$, og sannsynlighetstetthetsfunksjonen for utgangsstøyen etter filteret er gitt i figuren.



f) Finn feilsannsynligheten som funksjon av A når deteksjonen utføres optimalt.

Problem 3.

A discrete pulse amplitude modulated (PAM) system transmits all symbols with the same shape but different energies and polarities. The optimal filter for detecting the message in noise is the "matched filter". Assume that the received signal without noise is $ag(t)$, where a is the amplitude containing the message and the length of the pulse is T_0.

a) What is the impulse response of the matched filter?

Assume now that the received pulse shape is given by $g(t) = u(t) - u(t - T_0)$, where $u(t)$ is the unit step function.

b) What is the necessary channel bandwidth to receive this signal? Substantiate your answer.

c) Derive the output signal $y(t)$ from the filter when receiving one pulse.

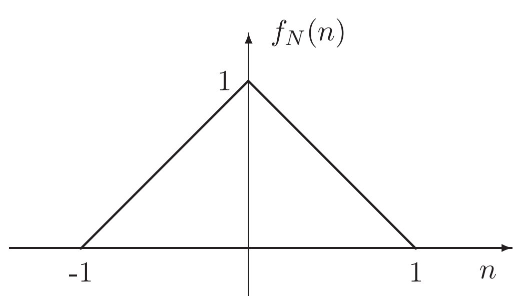
Now transmit pulses with different amplitudes one after the other so that the received signal is given by

$$x(t) = \sum_{i=0}^{N} a_i g(t - iT_0).$$

d) Draw $x(t)$ when $N = 3$, $T_0 = 1$, and $\mathbf{a} = [1, 2, -1, 1]$.

e) Draw the output signal from the matched filter and discuss whether this is a Nyquist channel. (Remember that the filter is linear and time invariant).

Assume now that we have binary transmission where the alphabet is given by $a = \pm A$, and the probability density function of the output noise after the matched filter is given as shown in the figure.



f) Find the bit error probability as a function A when the detection is performed optimally.

Fourier representations

- **Analog signals**

Finite length signals ($t \in [0, T_0]$) or periodic signals with period T_0		Non-periodic signals of infinite length	
Fourier series	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\frac{2\pi}{T_0}kt}$	Inverse Fourier transform	$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$
Coefficients	$c_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt}dt$	Fourier transform	$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt$
Parseval	$\int_{T_0} \lvert x(t)\rvert^2 dt = T_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lvert c_k\rvert^2$	Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lvert X(\Omega)\rvert^2 d\Omega$

- **Time-discrete signals**

Finite length signals ($n \in [0, N-1]$) or periodic signals with period N		Non-periodic signals of infinite length	
Inverse DFT	$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$	Inverse DTFT	$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega n}d\omega$
DFT	$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$	DTFT	$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$
Parseval	$\sum_{n=0}^{N-1} \lvert x(n)\rvert^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \lvert X(k)\rvert^2$	Parseval	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert x(n)\rvert^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \lvert X(\omega)\rvert^2 d\omega$

Relationship between voltage and current

Resistor: $v(t) = Ri(t)$

Capacitor: $i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$

Inductor: $v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$

Properties of the Fourier transform of infinite, continuous signals

Given:

$$X_i(j\Omega) = \mathcal{F}\{x_i(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_i(t) e^{-j\Omega t} dt$$

Linearity:

$$ax_1(t) + bx_2(t) \Longleftrightarrow aX_1(j\Omega) + bX_2(j\Omega)$$

Time shift:

$$x(t-\tau) \Longleftrightarrow e^{-j\Omega\tau} X(j\Omega)$$

Frequency shift:

$$x(t)e^{-j\Omega_0 t} \Longleftrightarrow X(j(\Omega - \Omega_0))$$

Time domain convolution:

$$x_3(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau \Longleftrightarrow X_3(j\Omega) = X_1(j\Omega) X_2(j\Omega)$$

Multiplication of functions:

$$x_3(t) = x_1(t)x_2(t) \Longleftrightarrow X_3(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(jU) X_2(j(\Omega - U)) dU$$

Parseval's theorem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\Omega)|^2 d\Omega$$

Imaginære og komplekse tall

Den imaginære enheten i er definert slik at $i^2 = -1$. Med a og b reelle tall kalles:

$z = ib$ et imaginært tall,

$z = a + ib$ et komplekst tall,

$z^* = a - ib$ det tilhørende konjugerte komplekse tall.

a kalles realdelen ($a = \text{Re}\, z$), b imaginærdelen ($b = \text{Im}\, z$).

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$$
$$z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$
$$z \cdot z^* = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Med $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ følger:

$$z = a + ib = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), = re^{i\varphi}$$
$$z^* = a - ib = r(\cos\varphi - i\sin\varphi). = re^{-i\varphi}$$

$r = |z|$ kalles absoluttverdien, $\varphi = \arg z$ argumentet til z, og tilsvarende er: $r = |z^*|$, $-\varphi = \arg z^*$.

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

Derivasjonsregler

1) La $f(x)$ og $g(x)$ være deriverbare funskjoner av variablen x. Følgende regneregler gjelder:

$$\frac{d}{dx}\left(f(x) \pm g(x)\right) = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x)$$
$$\frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right) = g(x)\frac{d}{dx}f(x) + f(x)\frac{d}{dx}g(x)$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}$$

2) Dersom $y = f(u)$ og $u = g(x)$ er deriverbare i passende områder, gjelder:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = f'(u)g'(x).$$

Spesielle derivasjonsformler

$$\frac{da}{dx} = 0, \quad a = \text{konst} \qquad \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$$
$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}, \qquad \frac{dx}{dx} = 1 \qquad \frac{d\sin x}{dx} = \cos x$$
$$\frac{da^x}{dx} = a^x \ln a, \qquad \frac{de^x}{dx} = e^x \qquad \frac{d\ln x}{dx} = \frac{1}{x}$$

Ubestemte integraler

$$\int\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n\right)dx = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \ldots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + C$$

$$\int e^{\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}e^{\lambda x} + C \qquad \int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad \int \cos x\, dx = \sin x + C$$

Bestemte integraler

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$
$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)\, dx$$
$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$
$$\int_a^b u\, dv = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v\, du$$

Trigonometriske funskjoner

De trigonometriske funskjonene kan defineres ved

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Relasjoner mellom trigonometriske funksjoner

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cot x}$$
$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \qquad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$
$$\sin(-x) = -\sin x \qquad \cos(-x) = +\cos x$$
$$\tan(-x) = -\tan x \qquad \cot(-x) = -\cot x$$

Sum og differens av funksjoner

$$\sin x \pm \sin y = 2\sin\frac{x \pm y}{2}\cos\frac{x \mp y}{2}$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x + y}{2}\cos\frac{x - y}{2}$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x + y}{2}\sin\frac{x - y}{2}$$

Produkt av funksjoner

$$2\sin nx \sin mx = \cos(n - m)x - \cos(n + m)x$$
$$2\cos nx \cos mx = \cos(n - m)x + \cos(n + m)x$$
$$2\sin nx \cos mx = \sin(n - m)x + \sin(n + m)x$$

Addisjonsteoremer:

$$\sin(x \pm y) = \sin x\cos y \pm \cos x\sin y$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin y$$

Funksjoner av det dobbelte argument:

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Funksjoner av det halve argument:

$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$
$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

Geometriske summer

$$\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \frac{1}{1-q}, \; |q|<$$

Kvadratiske ligninger

En annengradsligning med én ukjent kan skrives:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0).$$

Den har to løsninger x_1 og x_2:

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$