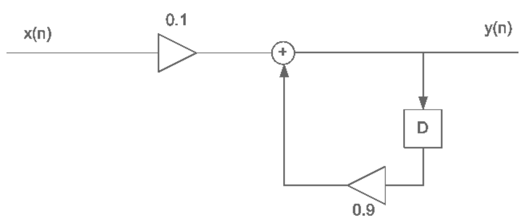
Norges teknisk-
naturvitenskapelige universitet
Institutt for elektronikk og
telekommunikasjon

TTT4110 Informasjons- og signalteori
Løsningsforslag eksamen 9. august 2004

Oppgave 1

(a) Et lineært tidinvariant filter gitt ved differensligning:

$$y(n) = 0.9y(n-1) + 0.1x(n)$$



Figur 1: Direkte form 1-struktur for filteret

(b) Finner først frekvensresponsen ved å Fourier-transformere differensligningen:

$$\begin{aligned}
Y(\omega) &= 0.9e^{-j\omega}Y(\omega) + 0.1X(\omega) \\
Y(\omega)(1 - 0.9e^{-j\omega}) &= 0.1X(\omega) \\
H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} &= \frac{0.1}{1 - 0.9e^{-j\omega}} \\
H(\omega) &= |H(\omega)|e^{j\Phi(\omega)}
\end{aligned}$$

hvor $H(\omega)$ = frekvensrespons, $|H(\omega)|$ = amplituderespons, $\Phi(\omega)$ = faserespons.

$$\begin{aligned}
|H(\omega)|^2 = H(\omega)H^*(\omega) &= \frac{0.1}{1 - 0.9e^{-jw}} \cdot \frac{0.1}{1 - 0.9e^{jw}} \\
&= \frac{0.1^2}{1 - 0.9e^{-jw} - 0.9e^{jw} + 0.81} = \frac{0.1^2}{1.81 - 0 - 9(e^{-jw} + e^{jw})} \\
&= \frac{0.1^2}{1.81 - 1.8\cos\omega} \\
|H(\omega)| &= \frac{0.1}{\sqrt{1.81 - 1.8\cos\omega}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Phi(\omega) &= \arctan \frac{Im(H(\omega))}{Re(H(\omega))} \\
H(\omega) &= \frac{0.1}{1-0.9e^{-j\omega}} \cdot \frac{1-0.9e^{j\omega}}{1-0.9e^{j\omega}} = \frac{0.1(1-0.9\cos\omega - j0.9\sin\omega)}{1.81-1.8\cos\omega} \\
Re(H(\omega)) &= \frac{0.1(1-0.9\cos\omega)}{1.81-1.8\cos\omega} \\
Im(H(\omega)) &= \frac{-0.1\cdot 0.9\sin\omega}{1.81-1.8\cos\omega} \\
\Phi(\omega) &= \arctan \frac{-0.9\sin\omega}{1-0.9\cos\omega}
\end{aligned}
$$

(c) Amplituderesponsen er gitt ved:

$$|H(\omega)| = \frac{0.1}{\sqrt{1.81-1.8\cos\omega}}$$

Denne funksjonen har maksimal verdi for $\omega = 0$

$$|H(0)| = \frac{0.1}{\sqrt{1.81-1.8}} = \frac{0.1}{\sqrt{0.01}} = \frac{0.1}{0.1} = 1$$

Funksjonen er monotont avtagende for $\omega \in [0, \pi]$. Dette betyr at filteret demper mer høyere frekvenskomponenter. $\Rightarrow$ Dette er er lavpassfilter.

(d) Amplituderesponsen viser hvor mye ulike frekvenskomponenter i et signal lir forsterket eller dempet. Faseresponsen viser hvor mye ulike frekvenskomponenter i et signal blir forskjøvet i fase.

Først foretar vi frekvensanalyse av inngangssignalet (finner amplituden og fasen til alle frekvenskomponenter, dvs. amplitude- og fasespektrum). Utgangssignalet vil bestå av de samme frekvenskomponentene, men deres amplitude og fase vil kunne forandres av filteret. La $A_x(\omega_0)$ og $\varphi_x(\omega_0)$ være amplitude og fase til en frekvenskomponent i inngangssignalet. Da vil amplituden og fasen til denne frekvenskomponenten i utgangssignalet finnes ved:

$$A_y(\omega_0) = A_x(\omega_0)|H(\omega_0)| \text{ og } \varphi_y(\omega_0) = \varphi_x(\omega_0) + \Phi(\omega_0)$$

$$x(n) = 2\cos(\frac{\pi}{2}n) + 19\cos(\pi n + \frac{\pi}{4})$$

Inngangssignalet består av to kosinuskomponenter, den første med frekvens $\omega_1 = \frac{\pi}{2}$, amplitude $A_x(\frac{\pi}{2}) = 2$ og fase $\varphi_x(\frac{\pi}{2}) = 0$ og den andre frekvensen med frekvens $\omega_2 = \pi$, amplitude $A_x(\pi) = 19$ og fase $\varphi(\pi) = \frac{\pi}{4}$.

Utgangssignalet vil derfor også bestå av to kosinussignaler med frekvenser $\omega_1 = \frac{\pi}{2}$ og $\omega_2 = \pi$, men deres amplituder og faser vil bli endret av filteret til:

$$\begin{aligned}
A_y(\frac{\pi}{2}) &= A_x(\frac{\pi}{2})|H(\frac{\pi}{2})| = 2\frac{+.1}{\sqrt{1.81}} \approx 0.149 \\
\varphi_y(\frac{\pi}{2}) &= -\varphi_x(\frac{\pi}{2}) + \Phi(\frac{\pi}{2}) = 0 + \arctan\frac{-0.9}{1} \approx -42^o \approx -0.733(\text{rad}) \\
A_y(\pi) &= A_x(\pi)|H(\pi)| = 19\frac{0.1}{\sqrt{1.81+1.81}} = 1 \\
\varphi_y(\pi) &= \varphi_x(\pi) + \Phi(\pi) = \frac{\pi}{4} + \arctan\frac{0}{1} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Utgangssignalet er derfor gitt ved:

$$y(n) = 0.149\cos(\frac{\pi}{2}n - 0.733) + \cos(\pi n + \frac{\pi}{4})$$

Alternativt (men noe mer tungvint), kan oppgaven løses ved å dekomponere $x(n)$ i komplekse eksonentielle basisfunskjoner

$$\begin{aligned}
x(n) &= e^{j\frac{\pi}{2}n} + e^{-j\frac{\pi}{2}n} + \frac{19}{2}e^{j(\pi n+\frac{\pi}{4})} + \frac{19}{2}e^{-j(\pi n+\frac{\pi}{4})} \\
H(-\frac{\pi}{2}) &= H(\frac{\pi}{2}) = \frac{0.1}{\sqrt{1.81}} = 0.074 \\
\Phi(\frac{\pi}{2}) &= -\Phi(\frac{\pi}{2}) = -0.733 \\
H(-\pi) &= H(\pi) = \frac{0.1}{\sqrt{1.81+1.8}} = \frac{1}{19} \\
\Phi(\pi) &= -\Phi(-\pi) = 0 \\
y(n) &= 0.074\Big[e^{j(\frac{\pi}{2}n-0.733)} + e^{-j(\frac{\pi}{2}n-0.733)}\Big] + \frac{19}{2}\frac{1}{19}\Big[e^{j(\pi n+\frac{\pi}{4})} + e^{-j(\pi n+\frac{\pi}{4})}\Big] \\
&= 0.072\cdot 2\cos(\frac{\pi}{2}n - 0.733) + cos(\pi n + \frac{\pi}{4} \\
&= 0.148\cos(\frac{\pi}{2}n - 0.733) + cos(\pi n + \frac{\pi}{4})
\end{aligned}$$

Oppgave 2

(a)

$$\hat{x}_N(t) = \sum_{k=0}^{N}\alpha_k\phi_k(t) \text{ hvor } t \in [T_1, T_2]$$

$\phi_k(t)$ - reelle
$\phi_k(t)$ innbyrdes ortogonale, dvs. $<\phi_k(t), \phi_i(t)>= \int_{T_1}^{T_2}\phi_k(t)\phi_i(t)dt = 0$ for $k \neq i$.

$$D = \int_{T_1}^{T_2}[x(t) - \hat{x}_N(t)]^2 dt = \int_{T_1}^{T_2}[x(t) - \sum_{k=0}^{N}\alpha_k\phi_k(t)]^2 dt$$

α_i, $i = 0, \ldots, N$ som minimerer D finnes fra

$$-\frac{\partial D}{\partial \alpha_i} = 0, \text{ for } i = 0, \ldots, N \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial D}{\partial \alpha_i} &= \int_{T_1}^{T_2} 2[x(t) - \sum_{k=0}^{N} \alpha_n \phi_k(t)](-1)\phi_i(t)dt = 0 \\
&\Rightarrow \int_{T_1}^{T_2} x(t)\phi_i(t)dt = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k \underbrace{\int_{T_1}^{T_2} \phi_k(t)\phi_i(t)dt}_{=0 \text{ for } k \neq i \text{ pga ortogonalitet}} \\
&\Rightarrow \int_{T_1}^{T_2} x(t)\phi_i(t)dt = \alpha_i \int_{T_1}^{T_2} \phi_i(t)\phi_i(t)dt \\
&\Rightarrow \alpha_i = \frac{\int_{T_1}^{T_2} x(t)\phi_i(t)dt}{\int_{T_1}^{T_2} \phi_i^2(t)dt}
\end{aligned}$$

(b) Dette forenkler beregningen av koeffisientene i rekkeutviklingen (hver ligning i lignigsettet (1) er bare avhengig av en α_k).

Koeffisientene som tilsvarer en basisfunksjon er uavhengig av andre basisfunskjoner brukt i approksimasjonen. Dvs. at flere ledd kan legges til approksimasjonen uten at koeffisientene må beregnes på nytt.

Vi benytter følgende basisfunksjoner: $\varphi_k(t) = e^{j\frac{2\pi}{T_0}kt}$, $k \in \mathbb{Z}$, $T_0 = T_1 - T_2$

(c) Basisfunksjonene er gitt ved $\phi_k(t) = \cos(k\pi t)$.
Sjekker ortogonalitet:

$$\begin{aligned}
< \phi_k(t), \phi_i(t) > &= \int_{-1}^{1} \cos(k\pi t)\cos(i\pi t)dt \\
&= \frac{1}{2}\Big[\int_{-1}^{1} \cos[(k+i)\pi t]dt + \int_{-1}^{1} \cos[(k-i)\pi t]dt\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{(k+i)\pi}\sin[(k+i)\pi t]|_{-1}^{1} + \frac{1}{(k-i)\pi}\sin[(k-i)\pi t]|_{-1}^{1}\Big] \text{ for } k \neq i \text{ og } k, i \in \mathbb{N} \\
&= 0 \Rightarrow \text{ basisfunsjonene er ortogonale (fordi indreproduktet er } = 0 \text{ når } k \neq i).
\end{aligned}$$

Signalet

$$x(t) = \begin{cases} 1 & t \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ -1 & \text{ellers} \end{cases}$$

Finner koeffesientene.

Antar $k = 0$:

$$\alpha_0 = \frac{\int_{-1}^{1} x(t)\overbrace{\cos(0)}^{=1}dt}{\int_{-1}^{1} \underbrace{\cos^2(0)dt}_{=1}} = \frac{0}{2} = 0$$

(Middelverdi = 0 gir DC komponent = 0)

Antar $k \neq 0$:

$$\alpha_k = \frac{\overbrace{\int_{-1}^{1} x(t)\cos(k\pi t)dt}^{I}}{\underbrace{\int_{-1}^{1} \cos^2(k\pi t)dt}_{II}}$$

I:

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{-1/2} (-1)\cos(\pi k t)dt = \Big[\frac{-\sin(k\pi t)}{k\pi}\Big]_{-1}^{-1/2} = \frac{1}{k\pi}\Big(sin(k\frac{\pi}{2}) - \sin(k\pi)\Big) \\
&+ \int_{-1/2}^{1/2} 1\cos(\pi k t)dt = \frac{1}{k\pi}\Big(sin(k\frac{\pi}{2}) + \sin(k\frac{\pi}{2})\Big) \\
&+ \int_{1/2}^{1} (-1)\cos(\pi k t)dt = \frac{1}{k\pi}\Big(sin(k\pi) - \sin(k\frac{\pi}{2})\Big) \\
&= \frac{1}{k\pi}\Big(\sin(k\frac{\pi}{2}) - \sin(k\pi) + \sin(k\frac{\pi}{2}) + \sin(k\frac{\pi}{2}) + \sin(k\pi) - \sin(k\frac{\pi}{2})\Big) \\
&= \frac{2}{k\pi}\Big(\sin(k\frac{\pi}{2})\Big) = \frac{1}{\frac{k\pi}{2}}\sin(k\frac{\pi}{2}) \\
&= sinc(\frac{k}{2})
\end{aligned}$$

II:

$$\int_{-1}^{1} \cos^2(\pi k t)dt = \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 1dt}_{=1} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \cos(2\pi k t)dt}_{=0}$$

$$= 1$$

Dette gir koeffisientene:

$$\alpha_k = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ sinc(\frac{k}{2}) & k > 0 \end{cases}$$

Oppgave 3

(a) Approksimasjonsformelen for beregning av kvantiseringsstøyeffekt for en uniform kvantiserer $\sigma_q^2 = \frac{\Delta^2}{12}$ gir eksakt resultat i dette tilfellet fordi sannsynlighetstetthetsfunksjonen er konstant på hvert kvantiseringsintervall.

Lengden til kvantiseringsintervallene er $\Delta = 2$

$$\Rightarrow \sigma_q^2 = \frac{2^2}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Alternativt kan man finne σ_q^2 ved:

$$
\begin{aligned}
\sigma_q^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - Q[x])^2 f_x(x)dx = \sum_{n=1}^{4} \int_{x_n}^{x_n+\Delta} (x - y_n)^2 f_x(x)dx \\
&= \sum_{n=1}^{4} \int_{x_n}^{x_n+\Delta} (\underbrace{x - x_n - \tfrac{\Delta}{2}}_{x'})^2 f_x(x)dx = \sum_{n=1}^{4} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} (x')^2 f_x(x)dx' \\
&= (\frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}) \cdot \frac{1}{3} \cdot (\frac{\Delta^3}{8} + \frac{\Delta^3}{8}) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\Delta^3}{4} = \frac{2^3}{3 \cdot 8} = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Man kan designe en 4 nivå kvantiserer som gir lavere kvantiseringsstøyeffekt med en ikke-uniform kvantiserer. Ved ha kortere kvantiseringsintervaler der sannsynlighetstetthetsfunksjonen er høy vil kvantiseringstøyeffekten reduseres.

(b) Ja, fordi ingen kodeord er prefiks i et annet kodeord.

Gjennomsnittslengden er gitt ved:

$$
\bar{L} = \sum_{n=1}^{4} p_n l_n
$$

hvor p_n er sannsynligheten for n-te kodeord, og l_n er lengden (i bit) til n-te kodeord.

$$
\begin{aligned}
\bar{L} &= p_1 \cdot l_1 + p_2 \cdot l_2 + p_3 \cdot l_3 + p_4 \cdot l_4 \\
&= \frac{1}{16} \cdot 2 \cdot 3 + \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 1 + \frac{1}{8} \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{16} \cdot 2 \cdot 3 \\
&= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} + \frac{2}{4}\frac{3}{8} = \frac{7}{4} = 1.75
\end{aligned}
$$

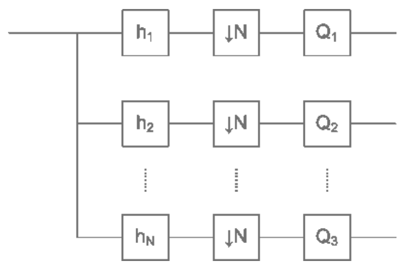
Den teoretiske nedre grense for gjennomsnittelig kodeordslengden er gitt ved entropien, $H = \sum_{n=1}^{4} p_n \log_2(\frac{1}{p_n})$:

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{8} \log_2 8 + \frac{1}{2} \log_2 2 + \frac{1}{4} \log_2 4 + \frac{1}{8} \log_2 8 \\
&= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} = \frac{7}{4} = 1.75
\end{aligned}
$$

Siden $\bar{L} = H$ er det ikke mulig å finne en annen kode som gir lavere gjennomsnittelig antall bit per symbol.

Oppgave 4

(a) Delbåndskoder:



Figur 2: Blokkskjema av en delbåndskoder

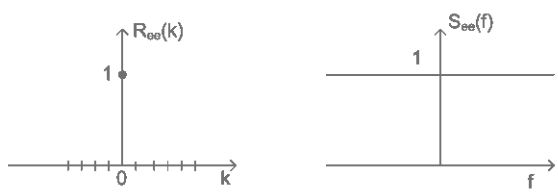
i) En filterbank med N delbåndsfiltre brukes til å splitte signalet i N like store delbånd.

ii) Siden delbåndssignalene har N ganger mindre båndbredde enn det opprinnelige signalet kan de nedsamples N ganger (samplingsteorem vil forbli oppfylt). Etter nedsampling vil det totale antall punktprøver i sekvensen bli lik som for x(n).

iii) Delbåndssignalene kvantiseres med hver sin kvantiserer som optimaliseres til det aktuelle delbåndssignalet.

Kodingsgevinst kan oppnås ved å bruke færre bit i delbånd med lavere signaleffekt.

(b) Hvit støy har ukorrelerte punktprøver. Autokorrelasjonsfunksjonen $R_{ee}(k)$ er derfor lik 0 for $k \neq 0$, og $R_{ee}(0) = \sigma_e^2 = 1$. Effektspekteret er flatt, $S_{ee}(f) = s_0 = \sigma_e^2$.



Figur 3: Autokorrelasjonsfunksjonen og effektspektraltettheten for hvit støy med varians 1.

Man kan ikke opnå noen kodingsgevinst i dette tilfellet (dvs. G=1) fordi $S_{ee}(f)$ er flatt, og delbåndseffektene er dermed like store (ingen korrelasjon i signalet).