

18

## Oppgave 1

- ① a) Man påtrykker systemet en enhetspuls,  $\delta(n) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$ , og måler utgangssignalet som da er enhetspulseresponsen til filteret.
- ① b)  $h(n)$  er et kausalt filter siden  $h(n) = 0$  for  $n < 0$ .  
(fordi  $u(n) = 0$  for  $n < 0$ ).
- ③ c) La  $x(n)$  og  $y(n)$  være hhv. inngangs- og utgangssignalene til et filter. Filteret er BIBO-stabilt hvis
- (1)  $|x(n)| \leq M < \infty \forall n \Rightarrow |y(n)| < \infty \forall n$   
dvs. hvis filterresponsen på et vilkårlig signal med begrenset amplitude har begrenset amplitude
- Et tilstrekkelig krav for BIBO-stabilitet er for et kausalt system er  $\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty$
- (2) For filteret i denne oppgaven har vi:
- $$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 < \infty$$
- $\Rightarrow$  filteret er stabilt

(Dette kreves ikke: kravet  $\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty$  utledes slik

$$|y(n)| = |x(n) * h(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k) x(k) \right| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} h(n-k) x(k) \right|$$

↑  
kausalitet

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} |h(n-k)| |x(k)| \leq M \sum_{k=0}^{\infty} |h(n-k)|$$

↑  
fordi  $|x(n)| \leq M < \infty$

$\Rightarrow$  hvis  $\sum_{k=0}^{\infty} |h(n)| < \infty \Rightarrow |y(n)| < \infty \Rightarrow$  stabilt system)



- ③ d) Frekvensresponsen kan finnes som den fouriertransformerte av impulsresponsen, dvs.  $H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\omega n}$

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} e^{-j\omega}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}} = \frac{2}{2 - e^{-j\omega}}$$

- ⑤ e) Amplituderrespons viser hvor mye de forskjellige frekvenskomponentene i et signal blir forsterket (dempet) av filteret. (forsterkning som funksjon av frekvens).

- (1) Faseresponsen viser hvor mye de forskjellige frekvenskomponentene i et signal blir forskyvet i fase når de går gjennom filteret (faseforsinkelse som funksjon av frekvens).

$$H(\omega) = \frac{2}{2 - e^{-j\omega}} \cdot \frac{2 - e^{j\omega}}{2 - e^{j\omega}} = \frac{2(2 - e^{j\omega})}{4 - 2e^{-j\omega} - 2e^{j\omega} + 1} = \frac{2(2 - \cos\omega - j\sin\omega)}{5 - 4\cos\omega}$$

$$= \frac{2(2 - \cos\omega)}{5 - 4\cos\omega} - j \frac{2\sin\omega}{5 - 4\cos\omega}$$

(3)  $|H(\omega)|^2 = \left(\frac{2(2 - \cos\omega)}{5 - 4\cos\omega}\right)^2 + \left(\frac{2\sin\omega}{5 - 4\cos\omega}\right)^2 = \frac{4(4 - 4\cos\omega + \cos^2\omega + \sin^2\omega)}{(5 - 4\cos\omega)^2}$

$$= \frac{4(5 - 4\cos\omega)}{(5 - 4\cos\omega)^2} = \frac{4}{5 - 4\cos\omega}$$

$$|H(\omega)| = \frac{2}{\sqrt{5 - 4\cos\omega}} \quad (\text{amplituderrespons})$$

$$\phi(\omega) = \arg H(\omega) = \arctan\left(-\frac{2\sin\omega}{2(2 - \cos\omega)}\right) = \arctan \frac{\sin\omega}{\cos\omega - 2}$$

(  $H(\omega)$  er generelt kompleks og kan derfor uttrykkes som  $H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\phi(\omega)}$  der  $|H(\omega)|$  er amplitudespekteret og  $\phi(\omega)$  er fasespekteret )



- ⑤ f) Inngangssignalet består av en DC-komponent (dvs.  $\omega=0$ ) med amplitude 1 og et kosinussignal med frekvens  $\omega=\pi$ , amplitud 2 og null fase.

Signalet på utgangen av et LTI filter må ha de samme frekvenskomponentene (dvs.  $\omega=0$  og  $\omega=\pi$ ), men deres amplitude og fase vil bli endret i henhold til amplitude- og faseresponsen.

Derfor må vi regne ut  $|H(\omega)|$  og  $\phi(\omega)$  i  $\omega=0$  og  $\omega=\pi$

$\omega$	$\cos \omega$	$\sin \omega$	$ H(\omega) $	$\phi(\omega)$
0	1	0	2	0
$\pi$	-1	0	$\frac{2}{3}$	0

Utgangssignalet vil derfor være

$$y(n) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \cos(\pi n) = \underline{2 + \frac{4}{3} \cos(\pi n)}$$

Alternativt:

$$x(n) = 1 + 2\cos(\pi n) = 1 + e^{j\pi n} + e^{-j\pi n}$$

Når inngangssignalet er av form  $e^{j\omega n}$  vil vi få  $e^{j\omega n} H(\omega)$  på utgangen.  $x(n)$  består av 3 slike ledd der  $\omega=0, \pi$  og  $-\pi$

Derfor vil utgangssignalet være:

$$\begin{aligned} y(n) &= 1 \cdot H(0) + e^{j\pi n} \cdot H(\pi) + e^{-j\pi n} \cdot H(-\pi) \\ &= 1 \cdot 2 + e^{j\pi n} \cdot \frac{2}{3} + e^{-j\pi n} \cdot \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$= 2 + \frac{2}{3} \cdot 2\cos(\pi n) = 2 + \frac{4}{3} \cos(\pi n)$$

10

Oppgave 2

③ a)  $V_s(t) = V_c(t) + V_R(t) \quad (1)$

$$i(t) = \frac{V_R(t)}{R} \quad (2)$$

$$i(t) = C \frac{dV_c(t)}{dt} \quad (3)$$

$$(1) \Rightarrow \frac{dV_s(t)}{dt} = \frac{dV_c(t)}{dt} + \frac{dV_R(t)}{dt}$$

$$\stackrel{(3)}{=} \frac{1}{C} i(t) + \frac{dV_R(t)}{dt}$$

$$\stackrel{(2)}{=} \frac{1}{RC} V_R(t) + \frac{dV_R(t)}{dt}$$

Differensialligningen som beskriver systemet er derfor gitt ved

$$\frac{1}{RC} V_R(t) + \frac{dV_R(t)}{dt} = \frac{dV_s(t)}{dt}$$

③ b) Frekvensresponsen finnes ved å fouriertransformere diff. ligningen

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{RC} V_R(t)\right\} + \mathcal{F}\left\{\frac{dV_R(t)}{dt}\right\} = \mathcal{F}\left\{\frac{dV_s(t)}{dt}\right\}$$

$$\frac{1}{RC} V_R(j\omega) + j\omega V_R(j\omega) = j\omega V_s(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{V_R(j\omega)}{V_s(j\omega)} = \frac{j\omega}{\frac{1}{RC} + j\omega} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

I utledningene har jeg brukt at  $\mathcal{F}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = j\omega X(j\omega)$

Bevis:  $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$  (der  $X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ )

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) (j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ \frac{dx(t)}{dt} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} e^{j\omega t} d\omega \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathcal{F}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = j\omega X(j\omega)$$



$$\begin{aligned}
 \textcircled{4} \text{ a) } \left\{ \begin{aligned} |H(\omega)|^2 &= H(\omega) \cdot H^*(\omega) = \frac{j\omega RC}{1+j\omega RC} \cdot \frac{-j\omega RC}{1-j\omega RC} \\ &= \frac{(\omega RC)^2}{1+(\omega RC)^2} = \frac{1}{\frac{1}{(\omega RC)^2} + 1} \\ |H(\omega)| &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(\omega RC)^2} + 1}} \quad (\text{amplituderrespons}) \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

b) { Vi ser at  $|H(\omega)|$  er monotont stigende funksjon av  $\omega$ ,  
 dvs. at  $|H(\omega)|$  har minimum i  $\omega=0$  ( $H(0)=0$ ) og  
 maksimum for  $\omega \rightarrow \infty$  ( $\lim_{\omega \rightarrow \infty} H(\omega) = 1$ ).  
 $\Rightarrow$  Filteret dæmper lave frekvenser  $\Rightarrow$  Høypassfilter

13

Oppgave 3

- ② a) Punktprøvsperioden er  $T_s = 0,1 \text{ ms} \Rightarrow$

Punktprøvsfrekvensen er  $F_s = \frac{1}{T_s} = 10 \text{ kHz}$

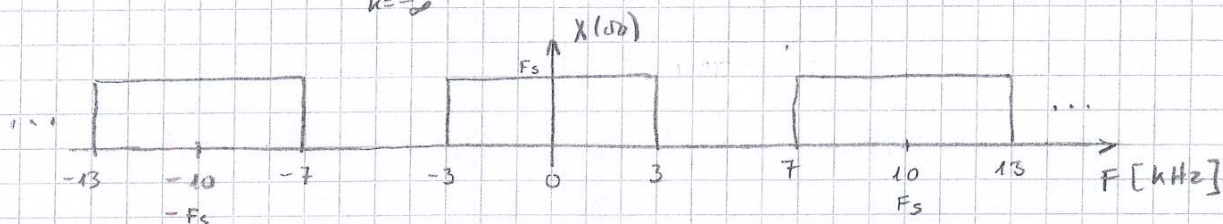
Nyquist teorem sier at et signal kan rekonstrueres eksakt fra sine punktprøver hvis  $F_s$  er større en 2 ganger signalbåndbredde  $B$ .

Her er  $B = 3 \text{ kHz}$  og  $F_s = 10 \text{ kHz} \Rightarrow F_s > 2B$

$\Rightarrow$  Nyquist teorem er oppfylt  $\Rightarrow x_a(t)$  kan rekonstrueres eksakt fra  $x(n)$

- ③ b) Spekteret til det punktprøvede signalet er gitt ved

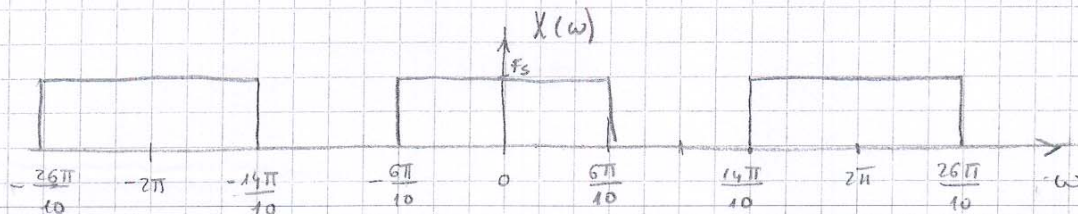
$$X(\omega) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(\omega + 2\pi k F_s)$$



Den normaliserte vinkelfrekvensen er gitt ved

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{F}{F_s}$$

Skisse over  $X(\omega)$  får vi ved å skalere x-aksen med  $\frac{2\pi}{F_s}$ :



(Vi ser at vi får periodisitet med  $2\pi$ , og det er et kjent egenskap av tidsdiskrete signaler at deres spektra  $X(\omega)$  er periodiske med periode  $2\pi$ ).



- ② c) Både  $X_a(F)$  og  $X(\omega)$  er kontinuerlige, dvs. spektrene til både  $x_a(t)$  og  $x(n)$  er kontinuerlige.

Periodiske signaler har diskret spektrum.

$\Rightarrow$  Verken  $x_a(t)$  eller  $x(n)$  er periodiske.

- ② d) Energien kan beregnes vha. Parsevals teorem (gitt i vedlegget):

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x_a^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X_a(\omega)|^2 d\omega \stackrel{\omega=2\pi F}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X_a(F)|^2 2\pi dF \\ = \int_{-\infty}^{\infty} |X_a(F)|^2 dF$$

Vi ser fra figuren at  $X_a(F)$  er reell og positiv

$$\Rightarrow X_a(F) = |X_a(F)|$$

$$\Rightarrow E = \int_{-\infty}^{\infty} X_a^2(F) dF = \int_{-3}^3 dF = 6$$

(Hvis  $F$  uttrykkes i Hz, vil svaret bli 6000.

Det er også riktig, siden måleenheten til  $E$  bare blir endret)

④ e) (2)  $\left\{ \begin{array}{l} X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \Rightarrow X^*(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n) e^{j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j(-\omega)n} \\ \text{fordi } x(n) \text{ er reell} \end{array} \right.$

$$\Rightarrow X^*(\omega) = X(-\omega)$$

(2)  $\left\{ \begin{array}{l} X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\theta(\omega)} \\ X(-\omega) = |X(-\omega)| e^{j\theta(-\omega)} \\ X^*(\omega) = |X(\omega)| e^{-j\theta(\omega)} \end{array} \right.$

$$X(-\omega) = X^*(\omega) \Rightarrow 1) |X(-\omega)| = |X(\omega)| \Leftrightarrow \text{ampl. spekt er en like funk}$$

$$2) \theta(-\omega) = -\theta(\omega) \Leftrightarrow \text{fasespekt er en odde funk.}$$



12

## Oppgave 4

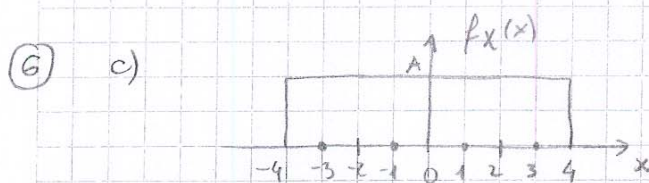
- ④ a) u) • hendelser med liten sannsynlighet inneholder mer informasjon enn hendelser med stor sannsynlighet.  
sikre hendelser inneholder ingen informasjon.
- (1) • informasjonsmengden i to uavhengige hendelser med sannsynligheter  $p_1$  og  $p_2$  bør summeres, og dette er ivare tatt ved bruk av denne formellen fordi

$$I_{p_1 p_2} = \log_2 \frac{1}{p_1 p_2} = \log_2 \frac{1}{p_1} + \log_2 \frac{1}{p_2} = I_{p_1} + I_{p_2}$$

- (2) Entropien til en diskret kilde er definert som gjennomsnittlig informasjon generert av kilden. Hvis en kilde genererer  $N$  forskjellige symboler med sannsynligheter  $p_1, p_2, \dots, p_N$  da vil entropien (gjennomsnittlig informasjon) være:

$$H = \sum_{i=1}^N p_i I_i = \sum_{i=1}^N p_i \log_2 \frac{1}{p_i} = - \sum_{i=1}^N p_i \log_2 p_i$$

- ② b) Signalet har kontinuerlig amplitude og dermed uendelig entropi (vi vil trenge uendelig mange bit for å representere signalet eksakt)



- (2) { Approksimasjonsformelen for kvantiseringsstøyeffekten for en uniform kvantiserer,  $\sigma_q^2 = \frac{\Delta^2}{12}$  der  $\Delta$  er størrelsen på kvantiseringsintervaller kan brukes når vi har stort antall måler  $L$  ( $L \geq 8$ ). Denne formelen gjelder imidlertid eksakt hvis  $f_X(x)$  er konstant i hvert kvantiseringsintervall, noe som er tilfelle i denne oppgaven. Derfor har vi at
- $$\sigma_q^2 = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \quad (\text{fordi } \Delta = 2)$$



Alternativt:  $x_n$  - desisjonsgrenser,  $y_n$  - representasjonsverdier ( $n=1, \dots, 4$ )

$$\sigma_q^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - Q[x])^2 f_X(x) dx = \int_{-4}^4 (x - Q[x])^2 f_X(x) dx$$

$$= \sum_{n=1}^4 \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - y_n)^2 f_X(x) dx = \sum_{n=1}^4 \int_{x_n}^{x_{n+1}} \underbrace{(x - x_n - \frac{\Delta}{2})^2}_{x'} A \cdot dx$$

$$= \sum_{n=1}^4 A \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} (x')^2 dx' = \sum_{n=1}^4 A \cdot \frac{1}{3} (x')^3 \Big|_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} = \sum_{n=1}^4 \frac{A}{3} \left[ \left( \frac{\Delta}{2} \right)^3 - \left( -\frac{\Delta}{2} \right)^3 \right]$$

$$= 4 \cdot \frac{A}{3} \cdot 2 \cdot \frac{\Delta^3}{8} = \underbrace{4 \cdot \Delta \cdot A}_{=1} \cdot \frac{\Delta^2}{12} = \frac{\Delta^2}{12}$$

(fordi dette er arealet under  $f_X(x)$ )

$$\Delta = 2 \Rightarrow \sigma_q^2 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Beregn entropien:

(2) Siden  $f_X(x)$  er uniform fordeling, er alle fire representasjonsverdiene like sannsynlige  $\Rightarrow p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{1}{4}$

Sett i formellen for entropien:

$$H = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{4} \log_2 4 = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 = 2$$

(2) Siden alle representasjonsverdiene kodes med et kodeord av lengde 2 er også gjennomsnittlig kodeordlengde lik  $\bar{L} = 2$

Første Shannons teorem sier at  $\bar{L} \geq H$ , minimal gjennomsnittlig kodeordlengde er gitt av entropien. I dette tilfelle er  $\bar{L} = H$ , og det er derfor ikke mulig å finne en mer effektiv kode (dvs. en kode med mindre  $\bar{L}$ ).