NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR ELEKTRONIKK OG TELEKOMMUNIKASJON
Signalbehandling

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Tor A. Ramstad
Tlf.: 46660465

EKSAMEN I FAG TTT4110 Informasjons- og signalteori

Norsk tekst på oddetalls-sider.
(English text on even numbered pages.)

Dato/Date: 2. juni 2007
Tid/Time: 09.00 - 13.00

Hjelpemidler:
D - Ingen andre trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Bestemt, enkel kalkulator tillatt
(No extra printed or handwritten material allowed.
Simple calculator accepted.)

Bedømmelse:
Ved bedømmelse gir hvert punkt maksimum 5 poeng.
(Maximum 5 point per question.)

Sensurfrist: 27. juni, 2007

Oppgave I

Gitt signalet $x(n) = a^n u(n)$.

a. Finn energien til signalet når den er endelig og angi for hvilke verdier av a svaret gjelder.

b. Avkort signalet slik at det inneholder de N første leddene, altså kan vi skrive denne følgen som $\tilde{x}(n) = a^n[u(n) - u(n-N)]$. Beregn også nå energien og angi for hvilke verdier av a resultatet gjelder.

Gitt et filter med enhetspulsrespons $h(n) = b^n u(n)$.

c. Angi om filteret er kausalt og argumenter for når filteret er BIBO-stabilt.

d. Beregn frekvensresponsen til filteret når filteret er stabilt.

e. Finn utgangssignalet når $x(n)$ er inngangssignal og $h(n)$ er enhetspulsresponsen til filteret.

f. Finn også utgangssignalet når $b = a$.

Vi vil nå filtrere det avkortete signalet med et signaltilpasset filter, som i det tidsdikrete tilfellet er gitt ved $g(n) = \tilde{x}(N - n - 1)$.

g. Skisser grafisk hvordan foldningsoperasjonen utføres og beregn den maksimale verdien av utgangssignalet. Hvordan relateres denne verdien til signalenergien?

Påtrykk nå hvit støy med effektspektraltetthet $S_{NN}(\omega) = N_0/2$ på det signaltilpassete filteret.

h. Finn effektspektraltettheten til utgangssignalet når bare støyen påtrykkes, og sett derav opp uttrykket for den tilhørende støyeffekten (støy-variansen).

i. Bruk Parsevals sats til å finne støyeffekten eksplisitt, uttrykt ved $N_0/2$ og a.

I praktisk kommunikasjon vil både signal og støy påtrykkes filteret samtidig.

j. Finn da signal-støyforholdet på utgangen av filteret i det optimale deteksjonstidspunktet når vi mottar pulsen $\tilde{x}(n)$ og støy med effektspektraltetthet $N_0/2$ samtidig.

Problem I

Given the signal $x(n) = a^n u(n)$.

a. Find the signal energy when it is finite and define the range of a for which the result is valid.

b. Truncate the signal by using the N first terms, that is, the new sequence can be written $\tilde{x}(n) = a^n[u(n) - u(n-N)]$. Now calculate the signal energy and indicate for which values of a the result is valid.

Given a filter with unit sample response $h(n) = b^n u(n)$.

c. Discuss whether the filter is causal and find out when the filter is BIBO stable.

d. Calculate the filter's frequency response when the filter is stable.

e. Calculate the output signal when $x(n)$ is the input signal and $h(n)$ the unit sample response of the filter.

f. Also find the output signal when $b = a$.

We will now filter the truncated signal with a matched filter which for the discrete time case is given by $g(n) = \tilde{x}(N - n - 1)$.

g. Make a graphical sketch which illustrates the convolution operation in this case and compute the maximum value of the output signal. How does the result relate to the signal energy?

Now input white noise with power spectral density m $S_{NN}(\omega) = N_0/2$ into the matched filter.

h. Find the power spectral density of the output noise, and based on that set up an expression for the corresponding noise power (noise variance).

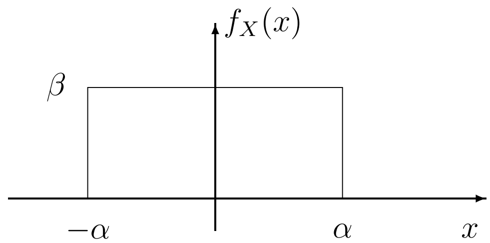
i. Use Parseval's theorem to express the noise power explicitly in terms of $N_0/2$ and a.

In practical communication both signal and noise are input to the matched filter simultaneously.

j. Calculate the output signal-to-noise ratio at the optimal detection point when we receive the pulse $\tilde{x}(n)$ and noise with power spectral density $N_0/2$ simultaneously.

Oppgave II

Sannsynlighetstetthetsfunksjonen til et tidsdiskret signal, $x(n)$, er uniform som vist i figuren.



a. Finn verdiene for α og β når signalet har varians σ_X^2.

Signalet kvantiseres i en uniform kvantiserer med L kvantiseringsintervaller.

b. Finn kvantiseringsstøyvariansen uttrykt ved L og σ_X^2 ved hjelp av tilnærmingsformelen. Er tilnærmelsen god i dette tilfellet? Begrunn svaret.

c. Beregn signal-støyforholdet (SNR) som funksjon av L.

For å finne den minimale raten det kvantiserte signalet kan representeres med skal vi beregne entropien. Vi gjør dette ved å bruke eksakt beregning og beregning med tilnærmingsformel.

d. Finn sannsynligheten for de ulike kvantiserte symbolene og beregn entropien fra eksakt formel som funksjon av L.

e. Beregn entropien fra tilnærmingsformelen

$$H(X) = h(X) - \log_2(\Delta),$$

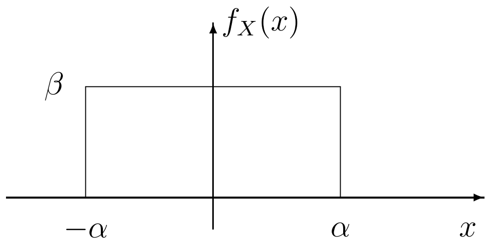
der Δ er kvantiseringsintervallet og $h(X)$ er differensiell entropi.

Kommenter resultatene fra d) og e).

Oppgave II fortsetter på side 7.

Problem II

The probability density function (pdf) of a discrete time signal, $x(n)$, is uniform, as shown in the figure.



a. Find the values of α and β when the signal variance is σ_X^2.

The signal is quantized in a uniform quantizer with L quantization intervals.

b. Find the quantization noise variance in terms of L and σ_X^2 by using the approximation formula. Is the approximation accurate in this case? Substantiate your answer.

c. Calculate the signal-to-noise ratio (SNR) as a function of L.

To find the minimal rate for which the quantized signal can be represented we calculate its entropy. We will do this by exact calculations and by using an approximation formula.

d. Find the probabilities of the quantization intervals and compute from this the entropy as a function of L.

e. Calculate the entropy using the approximation formula

$$H(X) = h(X) - \log_2(\Delta),$$

where Δ is the quantization interval and $h(X)$ the differential entropy.

Comment upon the results from d) and e).

Problem II continues on page 8.

Anta at signalet har båndbredde B og vi ønsker å overføre dette på en kanal med båndbredde $B/2$.

f. Hvordan må punktprøvingen utføres og hvilke frekvensplan-egenskaper må kanalen ha for at vi skal kunne få best mulig kvalitet?

g. For transmisjon med multinivåsignalering, hva er det minste antall nivåer, M, som må brukes på kanalen for at det kvantiserte signalet med L nivåer skal kunne representeres eksakt?

h. Hva må signal-støyforholdet (CSNR) på kanalen minst være for at signalet skal kunne overføres feilfritt?

i. Finn sammenhengen mellom signal-støyforholdet (SNR) utledet i punkt c), og signal-støyforholdet på kanalen (CSNR) funnet i punkt h).

j. Hvis signalet som skal overføres er korrelert, hva burde inkluderes i systemet for å få bedre resultat?

Oppgitte formler:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{L} p_i \log_2(p_i)$$

$$h(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \log_2(f_X(x)) dx$$

$$C = \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{P}{\sigma_N^2}\right) = \frac{1}{2}\log_2(1 + CSNR)$$

Assume now that the signal bandwidth is B and we wish to transmit this on a channel with bandwidth $B/2$.

f. How would you perform the sampling and what frequency domain properties should the channel have to obtain best possible performance?

g. For multilevel transmission, what is the minimum number of levels, M,needed to transmit the quantized signal with L levels?

h. Find the minimum channel signal-to-noise ration (CSNR) needed for error-free transmission.

i. Derive the relation between the signal-to-noise ratio (SNR) found in question c), and the channel signal-to-noise ratio (CSNR) derived in question h).

j. If the signal to be transmitted is correlated, what should be incorporated in the system to improve its performance?

Given formulas:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{L} p_i \log_2(p_i)$$

$$h(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \log_2(f_X(x))dx$$

$$C = \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{P}{\sigma_N^2}\right) = \frac{1}{2}\log_2(1 + CSNR)$$

Enclosure: Fourier representations

Analog signals

Fourier transform:

$$X(j\Omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt$$

Inverse transform:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\Omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$$

Fourier series of finite length signals ($t \in [0, T_0]$) or periodic signals (Period: T_0):

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{j\frac{2\pi}{T_0}kt}$$

Coefficients:

$$\alpha_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt}dt$$

Discrete time signals

Fourier transform, DTFT:

$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

Inverse DTFT:

$$x(n) = \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

Transform of finite length signals ($n \in [0, N-1]$), or series expansion of periodic signals (Period N), DFT:

$$X(k) = \mathcal{DFT}\{x(n)\} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

Inverse DFT:

$$x(n) = \mathcal{IDFT}\{X(k)\} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

Properties of the Fourier transform of infinite, continuous signals

Given:

$$X_i(j\Omega) = \mathcal{F}\{x_i(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_i(t)e^{-j\Omega t}dt$$

Linearity:

$$ax_1(t) + bx_2(t) \Longleftrightarrow aX_1(j\Omega) + bX_2(j\Omega)$$

Time shift:

$$x(t-\tau) \Longleftrightarrow e^{-j\Omega\tau}X(j\Omega)$$

Frequency shift:

$$x(t)e^{-j\Omega_0 t} \Longleftrightarrow X(j(\Omega - \Omega_0))$$

Time domain convolution:

$$x_3(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau \Longleftrightarrow X_3(j\Omega) = X_1(j\Omega)X_2(j\Omega)$$

Multiplication of functions:

$$x_3(t) = x_1(t)x_2(t) \Longleftrightarrow X_3(j\Omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(jU)X_2(j(\Omega - U))dU$$

Parseval's theorem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\Omega)|^2 d\Omega$$