Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Anna Kim
Tlf.: 50214

KONTINUASJONSEKSAMEN I FAG SIE2010 Informasjons- og signalteori

Dato: Onsdag 13. august 2003
Tid: Kl. 09.00 - 14.00

Hjelpemidler:
B1 - Godkjent kalkulator tillatt.
Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.

Bedømmelse:
Ved bedømmelse vektlegges oppgavene I, II og III likt.
Sensurfrist: 3.september

Oppgave I

Gitt differenselikninga

$$y(n) = \alpha y(n-N) + \beta x(n),$$

der $N > 1$.

1. Tegn en realisering av filteret.
2. Finn enhetspulsresponsen til det tidsdiskrete filteret som beskrives ved likninga når $x(n)$ er inngangssignalet og $y(n)$ er utgangssignalet.
3. For hvilke verdier av filterkoeffisientene er filteret BIBO-stabilt?
4. Utled frekvensresponsen $H(e^{j\omega}) = Y(e^{j\omega})/X(e^{j\omega})$.

Vi modifiserer filteret ved å legge til et ekstra ledd slik at differenselikninga blir

$$y(n) = \alpha y(n-N) + \beta x(n) - \gamma x(n-1).$$

5. Skisser en enkel måte å finne enhetspulsresponsen for dette systemet på ut fra enhetspulsresponsen til det opprinnelige filteret?

Oppgave II

Rekkeutvikling av et signal $x(t)$ i intervallet $t \in [-1, 1]$ ved hjelp av basisfunksjoner $\Phi_k(t), \;\; k = 1, 2, \cdots$ kan skrives

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \Phi_k(t).$$

Minstekravet til basisfunksjoner ved rekkeutviklinga er at de er *lineært uavhengige*.

1. Forklar hva *lineær uavhengighet* er.

2. Hvorfor brukes ofte *ortogonale* eller *ortonormale* basisfunksjoner ved rekkeutvikling? Sett opp de matematiske relasjonene mellom basisfunksjonene for de to tilfellene.

Approksimasjonsfeilen (uttrykt ved energien av feilsignalet) som gjøres ved rekkeutvikling med et endelig antall ledd, N, ortonormale basisfunksjoner, kan beregnes å være

$$\langle \epsilon^2 \rangle_N = \int_{-1}^{1} \mid x(t) \mid^2 dt - \sum_{n=1}^{N} \mid \alpha_n \mid^2 .$$

3. Bevis at denne feilen også kan uttrykkes ved hjelp av energien i de koeffisientene som er utelatt fra den komplette rekkutvikingen når vi forutsetter konvergens i middel.

I det følgende skal vi bruke legendrepolynomer som basisfunksjoner. De to første polynomene i den ortonormale basisen for intervallet $t \in [-1, 1]$ er gitt ved:

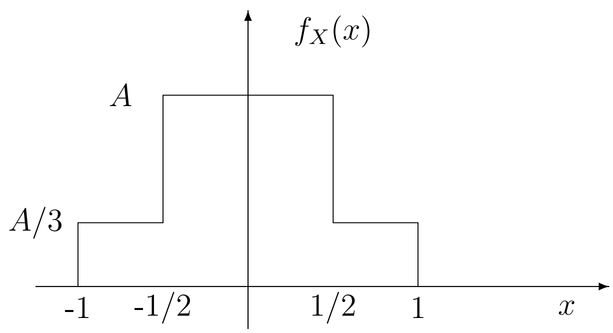
$$\Phi_1(t) = \frac{1}{2}, \quad \Phi_2(t) = \frac{2}{3} t.$$

4. Finn de to første koeffisientene, α_1 of α_2, i rekkeutvikla for $x(t) = e^{rt}$ i området $t \in [-1, 1]$, der r er er en gitt reell paramerter, når legendrepolynomene brukes som basis.

5. Sammenlign resultatet fra punkt 4 med taylor-rekkeutviklinga av samme funksjon omkring punktet for $t = 0$, og sjekk hva som skjer dersom vi lar $r \to 0$. Kommenter resultatet.

Oppgave III

Sannsynlighetstetthetsfunksjonen til et signal $x(n)$ er gitt i figur 1.



Figur 1:

1. Finn hvilken verdi A må ha.

Signalet kvantiseres uniformt i fire intervaller og en bruker midtpunktet i hvert kvantiseringsintervall som representasjonsverdi.

2. Beregn kvatiseringsstøyen eksakt og sammenlign med formelen $\sigma_Q^2 = \Delta^2/12$. Kommenter resultatene.
3. Beregn entropien til det kvantiserte signalet ved hjelp av

$$H = -\sum_{i=1}^{4} P_i \ \mathrm{lb}(P_i),$$

der P_i er sannsynligheten for symbol nr. i.

Kanalkapasiteten målt i bit/symbol for en gaussisk kanal er gitt ved

$$C = \frac{1}{2}\mathrm{lb}\left(1 + \frac{P}{\sigma_N^2}\right),$$

der P er signaleffekten og σ_N^2 er støyeffekten.

4. a. Hva er den eksakte betydningen av kanalkapasitet.
   b. Beregn det minste signal-støyforhold som er nødvendig for å kunne overføre den kvantiserte versjonen av signalet $x(n)$ eksakt.

I et tenkt transmisjonssystem sender vi de fire representasjonsverdiene for det kvantiserte signalet fra punkt 2 direkte som amplituder i et 4-PAM-system.

5. a. Beregn signaleffekten for 4-PAM-systemet.

   b. Finn støyeffekten σ_N^2 som gir samme signal-støyforhold som i punkt 4 og kommenter hva som vil skje i praksis når denne støyen påvirker PAM-signalet. Lag gjerne en skisse.

Enclosure: Fourier representations

Analog signals

Fourier transform:

$$X(j\Omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt$$

Inverse transform:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\Omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$$

Fourier series of finite length signals ($t \in [0, T_0]$) or periodic signals (Period: T_0):

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{j\frac{2\pi}{T_0}kt}$$

Coefficients:

$$\alpha_k = \frac{1}{T_0}\int_{0}^{T_0} x(t)e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt}dt$$

Time discrete signals

Fourier transform, DTFT:

$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

Inverse DTFT:

$$x(n) = \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

Transform of finite length signals ($n \in [0, N-1]$), or series expansion of periodic signals (Period N), DFT:

$$X(k) = \mathcal{DFT}\{x(n)\} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

Inverse DFT:

$$x(n) = \mathcal{IDFT}\{X(k)\} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

Properties of the Fourier transform of infinite, continuous signals

Given:

$$X_i(j\Omega) = \mathcal{F}\{x_i(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_i(t)e^{-j\Omega t}dt$$

Linearity:

$$ax_1(t) + bx_2(t) \Longleftrightarrow aX_1(j\Omega) + bX_2(j\Omega)$$

Time shift:

$$x(t-\tau) \Longleftrightarrow e^{-j\Omega\tau}X(j\Omega)$$

Frequency shift:

$$x(t)e^{-j\Omega_0 t} \Longleftrightarrow X(j(\Omega - \Omega_0))$$

Time domain convolution:

$$x_3(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau \Longleftrightarrow X_3(j\Omega) = X_1(j\Omega)X_2(j\Omega)$$

Multiplication of functions:

$$x_3(t) = x_1(t)x_2(t) \Longleftrightarrow X_3(j\Omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(jU)X_2(j(\Omega - U))dU$$

Parseval's theorem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\Omega)|^2 d\Omega$$