Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Christian Skau, telefon 73591755

Eksamen i TMA4140 DISKRET MATEMATIKK

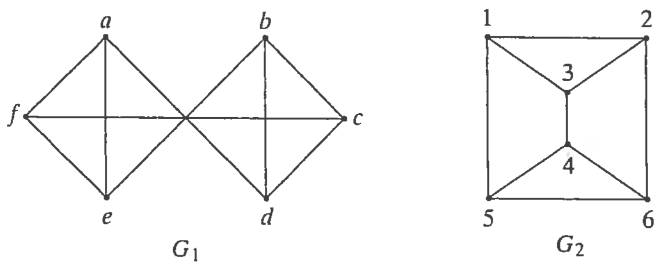
15. desember 2011
Tid: 09.00-13.00
Bokmål
Sensur 16. januar 2012

Hjelpemidler: Hjelpemiddelkode C. Bestemt enkel kalkulator, Rottmans matematiske formelsamling

Eksamenssettet består av to deler: Oppgavene 1 til 6 med i alt 10 punkter (hvert punkt teller like mye) utgjør en del, og oppgave 7, som er en flervalgsoppgave utgjør den andre delen. Oppgave 7 teller 50%, og oppgavene 1 til 6 teller 50%.
Siste side av oppgavesettet er et ark med en kupong der dine svar skal krysses av. Denne siden med kupongen skal merkes med kandidatnummeret ditt og leveres sammen med besvarelsene på de seks første oppgavene.

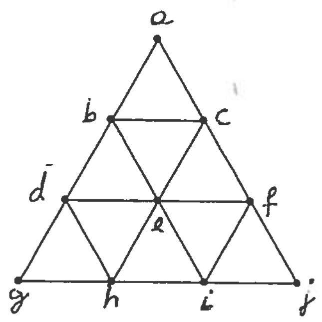
Oppgave 1

a) Vis eller motbevis om grafene G_1 (med nodene a, b, c, d, e, f) og G_2 (med nodene $1, 2, 3, 4, 5, 6$) i Figur 1 er isomorfe eller ikke.



Figur 1.

b) Fjern en kant i grafen G (med nodene $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$) i Figur 2, og gi en begrunnelse for om den nye grafen har en Eulerkrets eller Eulervei.



Figur 2.

Oppgave 2

La $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ for $n \geq 2$, der $F_1 = F_2 = 1$. Vis at F_{n-1} og F_n er relativt primiske, dvs. $(F_{n-1}, F_n) = 1$, for alle $n \geq 2$.

Oppgave 3

a) Finn $0 < x < 273$ slik at

$$110x \equiv 157 (\text{mod}\, 273)$$

b) Finn $0 < x < 31$ slik at

$$x \equiv 2^{343} + 1 (\text{mod}\, 31)$$

(Både i a) og b) skal du forklare kort hvilken framgangsmåte du bruker ved å henvise til relevante teoremer.)

Oppgave 4

På hvor mange måter kan 8 distinkte bøker fordeles på de tre studentene Helene, Karl og Kristin, når Helene skal ha 4 bøker, og Karl og Kristin skal ha 2 bøker hver? Forklar kort hvordan du resonnerer.

Oppgave 5

a) Konstruer en deterministisk endelig tilstandsautomat M med høyst tre tilstander, og med input alfabet $\{0, 1\}$, slik at språket $L(M)$ som M gjenkjenner (eller aksepterer) består av alle binære strenger med et odde antall $0'$er.

b) Skriv ned et regulært uttrykk for språket $L(M)$ i a).

Oppgave 6

a) Gitt den regulære grammatikken $G = (V, T, S, P)$, der $V = \{S, A, B, a, b\}, T = \{a, b\}, S$ er startsymbolet og produksjonene P er gitt ved:

$$S \rightarrow bA, \quad S \rightarrow a, \quad S \rightarrow \lambda$$

$$A \rightarrow aB, \quad B \rightarrow bB, \quad B \rightarrow b.$$

Uttrykk språket $L(G)$ som G genererer ved et regulært uttrykk.

b) Konstruer en deterministisk endelig tilstandsautomat M slik at $L(M) = L(G)$.

Oppgave 7

INSTRUKSJONER:

Dette er en flervalgsoppgave, der siste siden er et ark med en kupong hvor dine svar skal krysses av. Denne siden skal merkes med kandidatnummeret ditt og leveres sammen med besvarelsene på de første seks oppgavene. Det vil være minst ett, men gjerne flere rette svar-alternativer for hver oppgave. Det er totalt 10 rette svar og du skal ikke sette flere kryss enn dette. Rett kryss gir 1 poeng. (Du trekkes ikke for å sette et kryss galt.) Setter du flere enn 10 kryss trekkes du 3 poeng pr. kryss mer enn 10.

Deloppgave 1.

Hvordan ser uttrykket $(x + xy)^2 + x/y$ ut i prefiks notasjon?

Alt 1) $xxy * +2 \uparrow xy/+$

Alt 2) $+ \uparrow +x * xy2/xy$

Alt 3) $x + x * y \uparrow 2 + x/y$

Alt 4) $+ \uparrow +x/xy2 * xy$

Deloppgave 2. Gitt rekurrensrelasjonen $a_n = 10a_{n-1} - 25a_{n-2}$, der $n \geq 2$, og der $a_0 = 1, a_1 = 15$. Hva er a_8?

Alt 1) 390625

Alt 2) 3515625

Alt 3) 6640625

Alt 4) 6250000

Deloppgave 3.

La universalmengden være $\{2, 3, 4, 5, \cdots\}$. Hvilke av følgende utsagn er garantert riktige? ($a|b$ betyr at a er en divisor i b.)

Alt 1) $\forall m \exists n \exists k (m = n^k)$

Alt 2) $\forall m \exists n (m^{n-1} \equiv 1 (\operatorname{mod} n))$

Alt 3) $\exists n \forall m (m \equiv m^n (\operatorname{mod} n))$

Alt 4) $\exists n \exists k \forall m (k | (n-1)^m)$

Deloppgave 4.

Hvilke av følgende logiske utsagn er en tautologi?

Alt 1) $[(r \to q) \to p] \leftrightarrow [r \to (q \to p)]$

Alt 2) $[(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)] \to (q \vee r)$

Alt 3) $[(p \to q) \to (r \to s)] \leftrightarrow [(p \to r) \to (q \to s)]$

Alt 4) $[(p \to q) \to r] \leftrightarrow [p \to (q \to r)]$

Deloppgave 5.

På hvor mange måter kan 8 menn og 5 kvinner plasseres i rekkefølge slik at ikke to kvinner står ved siden av hverandre?

Alt 1) 609638400

Alt 2) 4838400

Alt 3) 9676800

Alt 4) 193536000

Deloppgave 6. Hva er koeffisienten til x^5y^7 i utviklingen av $(2x - 3y)^{12}$?

Alt 1) -18475776

Alt 2) -27713664

Alt 3) -792

Alt 4) -55427328

Deloppgave 7.

Hvilke av følgende utsagn er riktige?

Alt 1) $(4FA1)_{16}$ er $(20385)_{10}$ i det hexadesimale systemet.

Alt 2) Det finnes $s, t \in \mathbf{Z}$ slik at $770s + 1911t = 1$.

Alt 3) Dersom en sammenhengende graf har en Hamiltonkrets, så har den en Eulerkrets.

Alt 4) En relasjon R som er symmetrisk og transitiv vil også være refleksiv.

Deloppgave 8.

La $P(\mathbf{R})$ være mengden bestående av alle ikke-tomme delmengder av de reelle tallene $\mathbf{R}$. La relasjonen R på $P(\mathbf{R})$ være definert ved $(A, B) \in R$ dersom det for hver $\epsilon > 0$ finnes en $a \in A$ og $b \in B$ slik at $|a - b| < \varepsilon$. Hvilke av følgende egenskaper har relasjonen R?

Alt 1) R er transitiv.

Alt 2) R er antisymmetrisk.

Alt 3) R er refleksiv og symmetrisk.

Alt 4) R er en delvis (eller partiell) ordning.

SVARKUPONG

Kryss av det du mener er riktige svar, inntil 10 kryss. Et riktig satt kryss gir 1 poeng, og hvert kryss mer enn 10 gir -3 poeng. Merk denne siden med kandidatnummer, og lever den.

Kandidatnummer:

	Alt 1	Alt 2	Alt 3	Alt 4
Deloppgave 1				
Deloppgave 2				
Deloppgave 3				
Deloppgave 4				
Deloppgave 5				
Deloppgave 6				
Deloppgave 7				
Deloppgave 8				