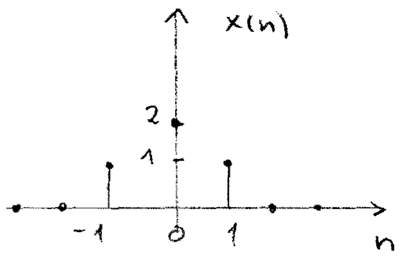
Løsningsforslag til eksamen i TTT4110 Informasjons- og signalteori
8. juni 2010

Oppgave 1

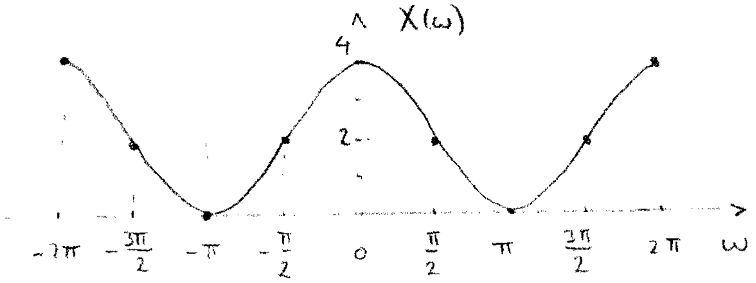
a)



$x(-n) = x(n) \Rightarrow$ likesignal $\Rightarrow$ reelt spektrum

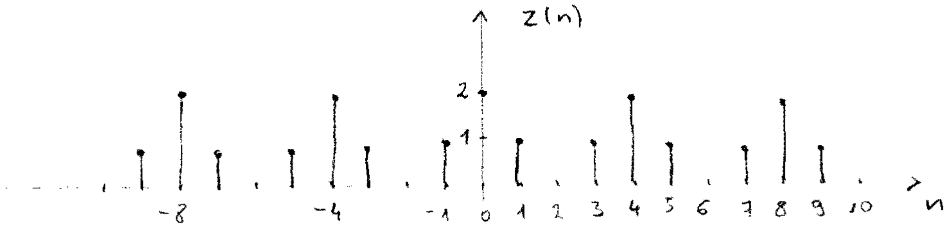
b)

$$X(\omega) = \text{DTFT}\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = e^{-j\omega} + 2 + e^{j\omega} = 2 + 2\cos\omega$$



ω	$\cos\omega$	$X(\omega)$
0	1	4
$\frac{\pi}{2}$	0	2
π	-1	0
$\frac{3\pi}{2}$	0	2

c) $z(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-4l)$ – periodisk utvidelse av $x(n)$ med periode $N=4$.



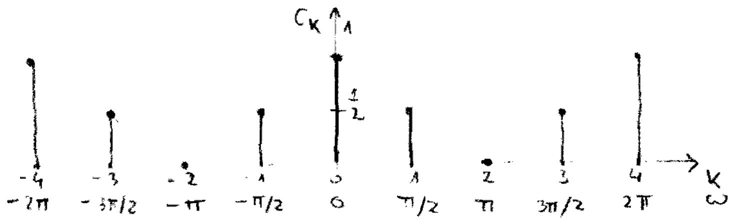
Spekteret til periodiske signaler er gitt ved deres Fourierrekke-utvikling:

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} z(n)e^{-j\frac{2\pi k}{N}n} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} z(n)e^{-j\frac{2\pi k}{4}n}$$

$$= \frac{1}{4}\left(2 + e^{-j\frac{\pi k}{2}} + e^{-j\frac{3\pi k}{2}}\right) = \frac{1}{4}\left(2 + e^{-j\frac{\pi k}{2}} + e^{j\frac{\pi k}{2}}\right) = \frac{1}{4}\left(2 + 2\cos\frac{\pi k}{2}\right)$$

Vi ser at $\quad c_k = \frac{1}{4} X(\omega)\Big|_{\omega = \frac{\pi k}{2}}$

dvs. c_k er samplet og nedskalert versjon av $X(\omega)$



Oppgave 2

a)
$$x(t) = R_1 i_{R_1} + y(t)$$
$$i_{R_1} = i_C + i_{R_2}$$
$$i_C = C\frac{dy(t)}{dt}$$
$$i_{R_2} = \frac{y(t)}{R_2}$$

$$x(t) = R_1\left(C\frac{dy(t)}{dt} + \frac{y(t)}{R_2}\right) + y(t)$$

$$R_1 C\frac{dy(t)}{dt} + \left(\frac{R_1}{R_2}+1\right)y(t) = x(t)$$

b) $H(\Omega)$ finnes ved å ta Fouriertransformen av differensiallikningen:

$$R_1 C\, j\Omega\, Y(\Omega) + \left(\frac{R_1}{R_2}+1\right)Y(\Omega) = X(\Omega)$$

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{1}{j\Omega R_1 C + \frac{R_1}{R_2}+1}$$

c) $h(t) = FT^{-1}\{H(\Omega)\}$

Ser fra tabellen at $FT\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{a+j\Omega}$ for $a>0$

$$H(\Omega) = \frac{1}{R_1 C}\;\frac{1}{j\Omega + \frac{1}{R_2C} + \frac{1}{R_1C}} \quad\Rightarrow\quad a = \frac{1}{R_1C} + \frac{1}{R_2C} > 0$$

$$h(t) = \frac{1}{R_1C}\,FT^{-1}\left\{\frac{1}{j\Omega + a}\right\} = \frac{1}{R_1C}e^{-at}u(t) = \frac{1}{R_1C}e^{-t\left(\frac{1}{R_1C}+\frac{1}{R_2C}\right)}u(t)$$

d) $x(t)$ består av en DC-komponent (dvs. $\Omega=0$) og en cosinuskomponent med $\Omega = 1000$ rad/s.

For å finne ut hvor mye disse frekvenskomponentene blir forsterket (dempet) og faseforskjøvet når de går gjennom systemet må vi finne $H(0)$ og $H(1000)$.

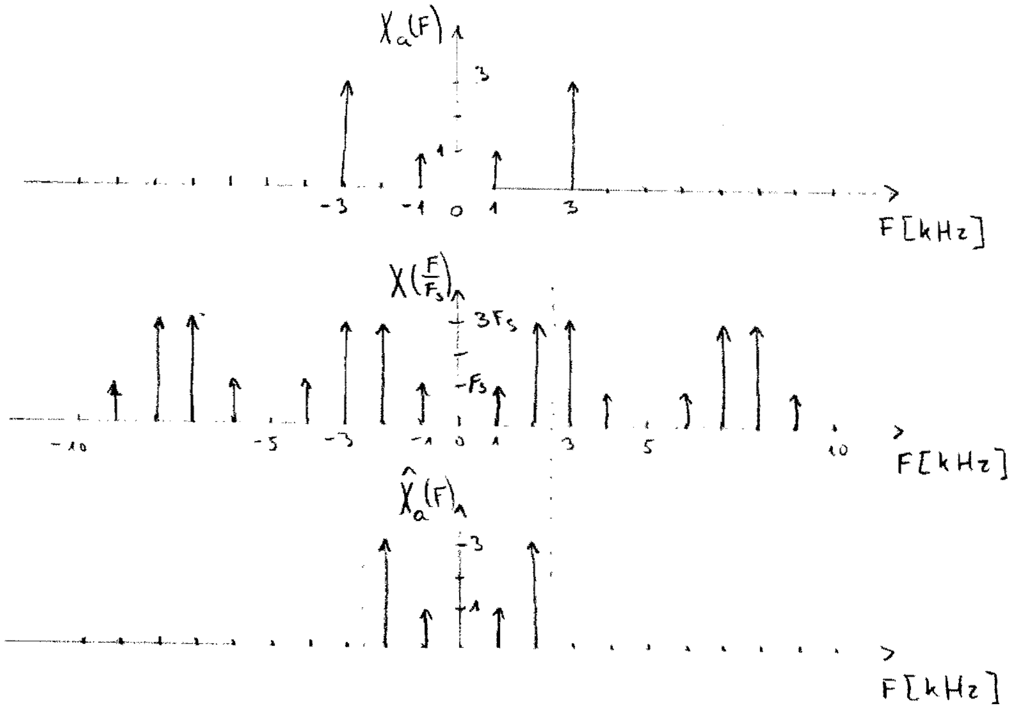
$$H(0) = \frac{1}{\frac{R_1}{R_2}+1} = \frac{1}{2}$$

$$H(1000) = \frac{1}{j1000R_1C + \frac{R_1}{R_2}+1} = \frac{1}{2j+2} = \frac{1}{\sqrt{2^2+2^2}\,e^{j\arctg 1}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$y(t) = 4\cdot H(0) + 2\sqrt{2}\cdot|H(1000)|\cos\left(1000t + \frac{\pi}{4} + \measuredangle H(1000)\right)$$
$$= 4\cdot\frac{1}{2} + 2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\left(1000t+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right) = \underline{2+\cos(1000t)}$$

Oppgave 3

a)

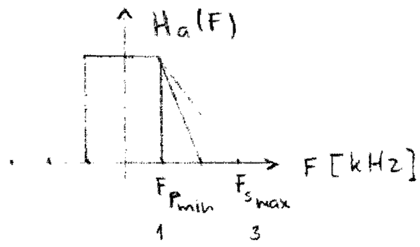


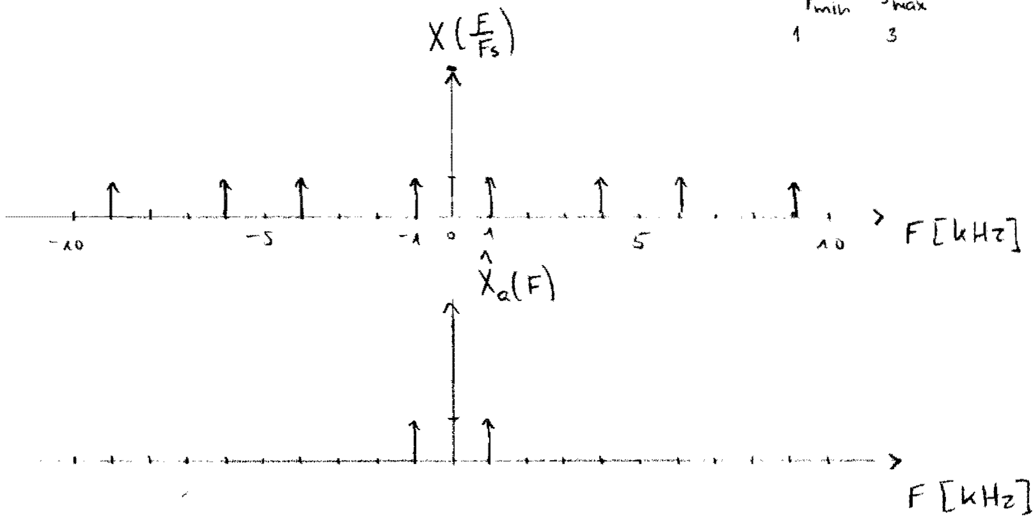
Punktprøvingsteoremet er ikke oppfylt fordi $F_s = 5\,kHz < 2B = 6\,kHz$.

b) Antialiasingfilteret må filtrere bort frekvenskomponentene over $\frac{F_s}{2}$ og beholde frekvenskomponentene under $\frac{F_s}{2}$.

Dette kan oppnås ved et lavpass-filter med $F_p \geq 1\,kHz$ og $F_s < 3\,kHz$.

Figuren til høyre illustrerer noen eksempler





Oppgave 4

a) $x_{min} = -4$, $x_{max} = 4$, $L = 8$ $\Rightarrow$ $\Delta = \dfrac{x_{max} - x_{min}}{L} = 1$

Desisjonsgrenser : $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$

Representasjonsverdier: $-3{,}5 \quad -2{,}5 \quad -1{,}5 \quad -0{,}5 \quad 0{,}5 \quad 1{,}5 \quad 2{,}5 \quad 3{,}5$

b) $P_q = \sigma_q^2 = \dfrac{\Delta^2}{12} = \dfrac{1}{12}$

$$P_x = E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_{-4}^{-2} \frac{1}{16} x^2 dx + \int_{-2}^{0} \frac{1}{4} x^2 dx + \int_{0}^{2} \frac{1}{8} x^2 dx + \int_{2}^{4} \frac{1}{16} x^2 dx$$

$$= \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-4}^{-2} + \frac{1}{4} \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-2}^{0} + \frac{1}{8} \frac{1}{3} x^3 \Big|_{0}^{2} + \frac{1}{16} \frac{1}{3} x^3 \Big|_{2}^{4}$$

$$= \frac{1}{16 \cdot 3} \left[(-2)^3 - (-4)^3 - 4(-2)^3 + 2 \cdot 2^3 + 4^3 - 2^3 \right]$$

$$= \frac{1}{16 \cdot 3} \left[-8 + 64 + 32 + 16 + 64 - 8 \right] = \frac{160}{16 \cdot 3} = \frac{10}{3}$$

$$SNR = \frac{P_x}{P_q} = \frac{\frac{10}{3}}{\frac{1}{12}} = \frac{10 \cdot 12}{3} = 40$$

c) $\left.\begin{array}{l} H = E[I] \\ I = \log_2 \frac{1}{P} \end{array}\right\}$ $H = \sum_{i=1}^{8} p_i \log_2 \frac{1}{p_i}$

$$p_1 = \int_{-4}^{-3} f_X(x)\,dx = \frac{1}{16} = p_2 = p_7 = p_8$$

$$p_3 = \int_{-2}^{-1} f_X(x)\,dx = \frac{1}{4} = p_4$$

$$p_5 = \int_{0}^{1} f_X(x)\,dx = \frac{1}{8} = p_6$$

$$H = 4 \cdot \frac{1}{16} \log_2 16 + 2 \cdot \frac{1}{4} \log_2 4 + 2 \cdot \frac{1}{8} \log_2 8 = \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 3 = 2{,}75 \frac{\text{bit}}{\text{symb}}$$

d) $L = 8 \Rightarrow$ antall bit $= \lceil \log_2 L \rceil = 3$

e) Vi tildeler forskjellig antall bit til kodeordene slik at mer sannsynlige kodeord representeres ved færre bit

Eksempel:

indeks	p	kodeord	l
1	1/16	1100	4
2	1/16	1101	4
3	1/4	00	2
4	1/4	01	2
5	1/8	100	3
6	1/8	101	3
7	1/16	1110	4
8	1/16	1111	4

$$\bar{L} = E[l] = \sum_{i=1}^{8} l_i p_i$$

$$= 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{16} + 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4}$$

$$= 1 + \frac{3}{4} + 1 = 2{,}75$$

Siden $\bar{L} = H$ er det ikke mulig å designe en kode med lavere gjennomsnittlig kodeordlengde.

(Merk at denne konklusjonen kan være annerledes hvis en annen kode hadde blitt foreslått)

f) H – min gjennomsnittlig antall bit per kildesymbol

C – maks antall bit per kanalsymbol for å kunne overføre informasjonen feilfritt.

antall kildesymboler per sekund $(1/T_s)$ = antall kanalsymb per sek. $(1/T_c)$

$\Rightarrow$ For å oppnå feilfri overføring må vi ha

$$\frac{H}{T_s} \leq \frac{C}{T_c} \Rightarrow C \geq H = 2{,}75$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\log_2(1+SNR) \geq H$$

$$\log_2(1+SNR) \geq 2H$$

$$1+SNR \geq 2^{2H}$$

$$SNR \geq 2^{2H} - 1 = 2^{2 \cdot 2{,}75} - 1 = 2^{5{,}5} - 1 = 44{,}25$$