# LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN TMA4245 2008-08-07

## Oppgave 1

**a)** La $Y$ være høyden til en tilfeldig valgt ung mann.

$$P(Y > 185) = P(\frac{Y-179}{6} > \frac{185-179}{6}) = P(Z > 1) = 0.1587$$

$$P(Y > 185 | Y > 179) = \frac{P(Y > 185 \cap Y > 179)}{P(Y > 179)} = \frac{P(Y > 185)}{P(Y > 179)} = \frac{P(Z > 1)}{P(Z > 0)} = 0.3173$$

**b)**

$$\begin{aligned} E(\hat{\beta}) &= E\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n\mu_M}\right) = \frac{\sum_{i=1}^n E(X_i)}{n\mu_m} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \beta\mu_M}{n\mu_M} = \beta \end{aligned}$$

så $\hat{\beta}$ er forventningsrett.

$$\begin{aligned} Var(\hat{\beta}) &= Var\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n\mu_M}\right) = \frac{\sum_{i=1}^n Var(X_i)}{n^2\mu_M^2} \\ &= \frac{\sigma_K^2}{n\mu_M^2} \end{aligned}$$

Dermed er

$$T_{n-1} = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi^2_{n-1}}{n-1}}} = \frac{\frac{\hat{\beta}-\beta}{\sigma_K/\sqrt{n\mu_M^2}}}{\sqrt{\frac{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_K^2}}{n-1}}} = \frac{\hat{\beta}-\beta}{S/\sqrt{n\mu_M^2}}$$

t-fordelt med $n-1=4$ frihetsgrader.

$$P(-t_{4,\alpha/2} < \frac{\hat{\beta}-\beta}{S/\sqrt{n\mu_M^2}} < t_{4,\alpha/2}) = 1-\alpha$$

og

$$\hat{\beta} \pm t_{4,\alpha/2} S/\sqrt{n\mu_M^2}$$

er et $1-\alpha$ konfidensintervall for $\beta$.
Realisert verdi blir

$$167.5/179 \pm 2.78 \cdot 5.1/\sqrt{5 \cdot 179^2} = \% = (0.90, 0.97)$$

Alternativt kan en ta utgangspunkt i

$$P(-t_{4,\alpha/2} < \frac{\bar{X}-\mu_K}{S/\sqrt{n}} < t_{4,\alpha/2}) = 1-\alpha$$

$$P(-t_{4,\alpha/2} < \frac{\bar{X}/\mu_M - \mu_K/\mu_M}{S/\sqrt{n\mu_M^2}} < t_{4,\alpha/2}) = 1-\alpha$$

$$P(-t_{4,\alpha/2} < \frac{\hat{\beta}-\beta}{S/\sqrt{n\mu_M^2}} < t_{4,\alpha/2}) = 1-\alpha.$$

## Oppgave 2

**a)**

$$E(\hat{M}) = E(\frac{1}{2}(\bar{X}+\bar{Y})) = \frac{1}{2}(\mu+\mu) = \mu$$

$$\begin{aligned} Var(\hat{M}) &= Var(\frac{1}{2}(\bar{X}+\bar{Y})) = \frac{1}{4}(Var(\bar{X})+Var(\bar{Y}) = \frac{1}{4}(Var(\bar{X})+Var(\bar{Y}) \\ &= \frac{1}{4}(\sigma^2/n + 4\sigma^2/(2n)) = \frac{3}{4}\sigma^2/n \end{aligned}$$

**b)**

$$f_{\bar{X},\bar{Y}}(\bar{x},\bar{y}) = f_{\bar{X}}(\bar{x}) f_{\bar{Y}}(\bar{y}) \propto \exp\left(-0.5\frac{(\bar{x}-\mu)^2}{\sigma^2/n} - 0.5\frac{(\bar{y}-\mu)^2}{4\sigma^2/2n}\right)$$

$$l(\mu; \bar{x}, \bar{y}) \propto -0.5\frac{(\bar{x}-\mu)^2}{\sigma^2/n} - 0.5\frac{(\bar{y}-\mu)^2}{4\sigma^2/2n}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial l}{\partial \mu} &= \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma^2/n} + \frac{\bar{y}-\mu}{4\sigma^2/2n} = 0 \\
2(\bar{x}-\mu) &+ \bar{y} - \mu = 0 \\
\mu &= \frac{1}{3}\left(2\bar{x}+\bar{y}\right)
\end{aligned}
$$

At dette er et maksimum følger av at $\frac{\partial^2 l}{\partial \mu^2} < 0$.
Dermed er

$$M^* = \frac{1}{3}\left(2\bar{X}+\bar{Y}\right)$$

Forventingen:

$$E(M^*) = E(\frac{1}{3}(2\bar{X}+\bar{Y})) = \frac{1}{3}(2\mu+\mu) = \mu$$

Varians:

$$Var(M^*) = Var(\frac{1}{3}(2\bar{X}+\bar{Y})) = \frac{1}{9}(4\sigma^2/n + 4\sigma^2/(2n)) = \frac{2}{3}\sigma^2/n$$

Begge estimatorene er forventningsrette men $M^*$ har mindre varians. Derfor foretrekkes denne estimatoren.

**c)** $H_0 : \mu = 100$ mot $H_1 : \mu < 100$

$$\frac{M^* - 100}{\sqrt{2/(3\cdot 4)}}$$

er standard normalfordelt under $H_0$. Kritisk område blir $C = (-\infty, -z_{0.05}) = (-\infty, -1.65)$. Realisert verdi for testobservator blir $1.06 \notin C$ og $H_0$ beholdes.

**d)**

$$V_1 = \frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2}$$

er $\chi^2$-fordelt med $n-1$ frihetsgrader og

$$V_2 = \frac{(2n-1)S_2^2}{4\sigma^2}$$

er $\chi^2$-fordelt med $2n-1$ frihetsgrader. Siden $V_1$ og $V_2$ dessuten er uavhengige blir summen $\chi^2$-fordelt med $n-1+2n-1 = 3n-2$ frihetsgrader.

$$
\begin{aligned}
T_{3n-2} &= \frac{\frac{M^*-\mu}{\sqrt{\frac{2}{3n}}\sigma}}{\sqrt{\frac{V}{3n-2}}} = \frac{\frac{M^*-\mu}{\sqrt{\frac{2}{3n}}\sigma}}{\sqrt{\frac{\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2}+\frac{(2n-1)S_2^2}{4\sigma^2}}{3n-2}}} \\
&= \frac{M^*-\mu}{\sqrt{\frac{4(n-1)S_1^2+(2n-1)S_2^2}{6n(3n-2)}}}
\end{aligned}
$$

er t-fordelt med $3n-2$ frihetsgrader.

**Oppgave 3**

**a)** La $X_1$ være antall må for Tyskland og $X_2$ være antall mål for Frankrike.

$$P(X_1 = 5, X_2 = 5) = p_T^5 p_F^5 = 0.0551$$

$$P(X_1 = 3, X_2 = 3) = \binom{5}{3} p_T^3 (1 - p_T)^2 \binom{5}{3} p_F^3 (1 - p_F)^2 = 0.06322$$

Sannsynligheten for uavgjort etter del 1 blir

$$p_u = P(X_1 = X_2) = \sum_{i=0}^{5} \binom{5}{i} p_T^i (1 - p_T)^{5-i} \binom{5}{i} p_F^i (1 - p_F)^{5-i} = 0.2728$$

**b)** La $X$ være antall runder i del 2 gitt at stillingen er uavgjort etter del 1.

$$p(X = 1) = p_T(1 - p_F) + p_F(1 - p_T) = 0.38$$

La $A$ være hendelsen at Tyskland vinner.

$$P(A|X = 1) = \frac{P(A \cap X = 1)}{P(X = 1)} = \frac{p_T(1 - p_F)}{p_T(1 - p_F) + p_F(1 - p_T)} = 0.6316$$

$$\begin{aligned} P(A|X = i) &= \frac{P(A \cap X = i)}{P(X = i)} = \frac{p_T(1 - p_F)P(X > i - 1)}{(p_T(1 - p_F) + p_F(1 - p_T))P(X > i - 1)} \\ &= \frac{p_T(1 - p_F)}{p_T(1 - p_F) + p_F(1 - p_T)} = 0.6316 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^{\infty} P(A|X = i)P(X = i) \\ &= \frac{p_T(1 - p_F)}{p_T(1 - p_F) + p_F(1 - p_T)} \sum_{i=1}^{\infty} P(X = i) \\ &= \frac{p_T(1 - p_F)}{p_T(1 - p_F) + p_F(1 - p_T)} = 0.6316 \end{aligned}$$

**c)** Hver runde er et bernulliforsøk, dvs vi har to utfall, suksess eller fiasko.
Runder i en sekvens av forsøk er uavhengige med samme suksess-sannsynlighet.
Antall runder til første suksess $X$ er da geometrisk fordelt med suksess-sannsynlighet

$$p = p_T(1 - p_F) + p_F(1 - p_T) = 0.38$$

Forventning blir

$$E(X) = 1/p = 2.63$$

og varians blir

$$Var(X) = (1-p)/p^2 = 4.29$$

**d)** La $p_u$ være sannsynligheten for uavgjort etter del 1 og $V$ være antall runder som spilles i del 2. $V$ har fordeling

$$p(v) = \begin{cases} 1-p_u & v = 0 \\ p_u(1-p)^v \cdot p & v > 0 \end{cases}$$

$$E(5+V) = 5 + E(V) = 5 + \sum_{v=0}^{\infty} v \cdot p(v) = 5 + p_u E(X) = 5.71$$

$$\begin{aligned} Var(5+V) &= Var(V) = E(V^2) - E(V)^2 = \sum_{v=0}^{\infty} v^2 \cdot p(v) - E(V)^2 \\ &= \sum_{v=1}^{\infty} v^2 \cdot p(v) - E(V)^2 = p_u \sum_{v=1}^{\infty} v^2 \cdot (1-p)^v \cdot p - E(V)^2 \\ &= p_u E(X^2) - E(V)^2 = p_u(Var(X) + E(X)^2) - E(V)^2 = 2.54 \end{aligned}$$