NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR TELETEKNIKK
Signalbehandling

LØSNINGSFORSLAG for KONTINUASJONSEKSAMEN
I FAG SIE2010 Informasjons- og signalteori, 29. juli 2002

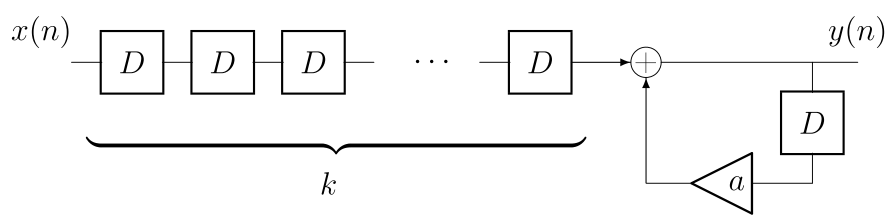
Oppgave I

Gitt følgende differenseligning:

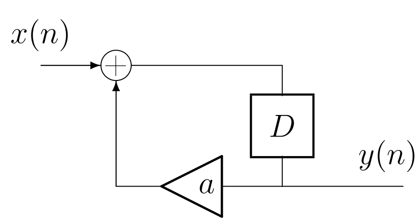
$$y(n) = ay(n-1) + x(n-k),$$

hvor $k \geq 0$.

a. i. En mulig filterrealisering forsinker signalet på inngangen og deretter bruker en tilbakekoplet struktur for å realisere $ay(n-1)$:



ii. Ved å ta utgangespunkt i direkteform II-strukturen for et førsteordens filter og tappe utgangen etter forsinkelsen, oppnår vi den ønskete strukturen:



b. Enhetspulsresponsen til filteret $h(n)$ er utgangssignalet når inngangssignalet er $x(n) = \delta(n)$ og $h(n) = 0$ for $n < 0$. Kan finne $h(n)$ iterativt. Ettersom $\delta(n-k)$ vil inngå i ligninga, blir det første signalet ut $h(k) = 1$. Deretter er inngangssignalet 0, men signalet vil tilbakekobles og multipliserer med a for hvert utgangssignal. Derfor kan vi skrive:

$$h(n) = a^{n-k}u(n-k).$$

k forsinker rett og slett enhetspulsresponsen, som naturlig er.

c. Frekvensresponsen kan finnes enten ved å fouriertransformere enhetspulsresponsen, eller direkte fra differanseligninga som vist her:

Bruker betegnelsen: $X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x(n)\}$, og tilsvarende for $Y(e^{j\omega})$.

Differenseligninga tranformeres nå til:

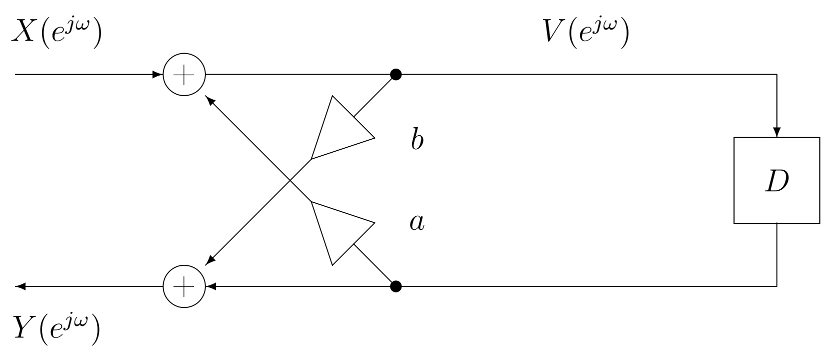
$$Y(e^{j\omega}) = ae^{-j\omega}Y(e^{j\omega}) + e^{-j\omega k}X(e^{j\omega}).$$

Finner derav:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{e^{-j\omega k}}{1 - ae^{-j\omega}}.$$

k gir altså et lineært fasebidrag $\Delta\phi(\omega) = -\omega k$ som tilsvarer en forsinkelse på k punktprøver.

Gitt følgende filter:



d. Filterets frekvensrespons $H(e^{j\omega}) = Y(e^{j\omega})/X(e^{j\omega})$ kan finnes ved å beregne $Y(e^{j\omega})$ som funksjon av $X(e^{j\omega})$. Vi innfører hjelpesignalet $V(e^{j\omega})$, som vist i figuren.

Vi kan nå sette opp følgende to ligninger:

$$Y(e^{j\omega}) = bV(e^{j\omega}) + e^{-j\omega}V(e^{j\omega}) = \left(b + e^{-j\omega}\right)V(e^{j\omega})$$

$$V(e^{j\omega}) = ae^{-j\omega}V(e^{j\omega}) + X(e^{j\omega}).$$

Løser andre ligning med hensyn på $V(e^{j\omega})$.

$$V(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}X(e^{j\omega}).$$

Setter inn i første ligning:

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{b + e^{-j\omega}}{1 - ae^{-j\omega}} X(e^{j\omega}).$$

Finner derav:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{b + e^{-j\omega}}{1 - ae^{-j\omega}}.$$

e. Setter $a = -b$. Dette gir følgende frekvensrespons:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{b + e^{-j\omega}}{1 + be^{-j\omega}}.$$

Antar b reell:

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) = \frac{b + e^{-j\omega}}{1 + be^{-j\omega}} \cdot \frac{b + e^{j\omega}}{1 + be^{j\omega}}.$$

Multipliserer siste faktor med $e^{-j\omega}$ i teller og nevner:

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{b + e^{-j\omega}}{1 + be^{-j\omega}} \cdot \frac{be^{-j\omega} + 1}{e^{-j\omega} + b} = 1.$$

Dette beviser at filteret er et allpassfilter, dvs. et filter som har enhetsforsterkning ved alle frekvenser. Det eneste som skjer ved filtreringen er at fasen modifiseres.

Oppgave II

a. *Lineær uavhengighet* sørger for at hvert ledd i en rekke bidrar til å uttrykke noe nytt. Dette kan illustreres vektorielt for et tredimensjonalt rom. Dersom vi skal beskrive et punkt i rommet med tre koordinater, er det viktig at *ikke* alle tre basisvektorer ligger i et plan. I så fall må en innføre en fjerde komponent som ikke ligger i planet.

Konvergens i middel betyr at integralet av den kvadratiske differensen mellom funksjonen og dens rekkeutvikling er null når et tilstrekkelig antall ledd inkluderes. (Oftest er det et uendelig antall.) Konvergens i middel tillater at det er avvik mellom funksjonen og dens rekkeutvikling i isolerte punkter.

b. *Ortonormale basisfunksjoner* over intervallet $[T_1, T_2]$ betyr at

$$\int_{T_1}^{T_2} \phi_k(t)\phi_l(t)dt = \begin{cases} 1 \text{ for } k = l, \\ 0 \text{ ellers.} \end{cases}$$

c. Funksjonene $\phi_{2k} = t^{2k}$ er like funksjoner, mens funksjonene $\phi_{2l+1} = t^{2l+1}$ er odde funksjoner over intervallet $t \in [-T_0, T_0]$ for alle heltallsverdier k og l. Produktet av de to blir derfor en odde funksjon som integres til 0. Altså er funksjonene ortogonale.

Dette kan også lett beregnes:

$$\int_{-T_0}^{T_0} t^{2(k+l)+1} dt = \frac{1}{2(l+k)+2}\left[T_0^{2(k+l)+2} - (-T_0)^{2(k+l)+2}\right] = 0.$$

d. Definerer vektorer som er kolonnene til hadamard-transformen:

$$\mathbf{h_1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{h_2} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{h_3} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{h_4} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ortonormalitet krever $\mathbf{h_i}^T\mathbf{h_j} = \delta ij$. Som eksemel beregner vi:

$$\mathbf{h_1}^T\mathbf{h_2} = \frac{1}{4}[1\ 1\ 1\ 1]\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}(1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)) = 0.$$

Alle ulike vektorer gir 0 som resultat, mens like vektorer gir 1 som svar.

Når ortonormalitet er oppfylt, er den inverse alltid lik den *hermitisk konjugerte* (transponert og kompleksknjugert). Ettersom matrisa er reell og symmetrisk, forenkles dette resultatet slik at matrisa blir sin egen invers:

$$\mathbf{H}_4^{-1} = \mathbf{H}_4.$$

e. Transformering av signaler før kvantisering kan være fordelaktig for signal som er korrelerte.

Metoden vil være som følger:

Splitt signalet opp i vektorer av lengde N, kall disse $\mathbf{x}_k$ og utfør transformasjonen

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_N\mathbf{x}_k.$$

Dersom x er sterkt korrelert, vil y tendere mot å bli ukorrelert. Anta f. eks. at x er nesten konstant. Da vil første-komponenten i $\mathbf{y}_k$ bli stor og resten av komponentene små. Ved kvantisering brukes flest bit på de store komponentene og få på de små. Derfor kan gjennomsnittsraten bli lav ved denne metoden. Bitrepresentasjonen for $\mathbf{y}$ gir koden. Dekodingen skjer ved at $\mathbf{y}$ rekonstrueres fra bitene til signalet $\hat{\mathbf{y}}$, og det dekodete signalet finnes ved

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{H}_N\hat{\mathbf{y}},$$

når $\mathbf{H}_N$ er unitær.

Oppgave III

a. Nyquist-kriteriet i **tidsplanet**:

En mottatt puls som representerer ett sendt signal må ha følgende egenskaper:

$$g(kT+\theta) = \begin{cases} 1 \text{ for } k=0, \\ 0 \text{ ellers.} \end{cases}$$

Vi detekterer sendt informasjon i tidspunktene $kT+\theta$ når k er heltall. Med de definerte pulsene vil bare en sendt puls bidra i deteksjonspunktene når sendt pulsavstand er T, dvs. ingen *inter-symbolinterferens*.

Nyquist-kriteriet i **frekvensplanet**:

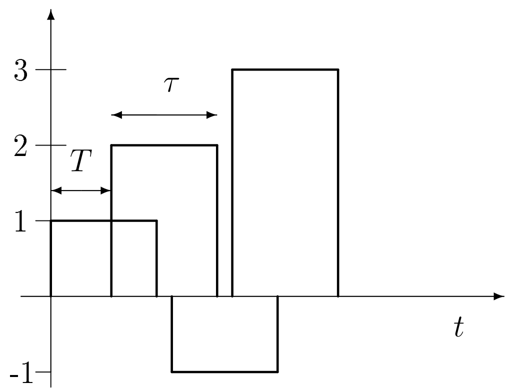
Den fouriertransformerte, $G(j\Omega)$, av mottatt pulsform må oppfylle følgende ligning:

$$\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} G(j\Omega + j\frac{2\pi m}{T}) = 1.$$

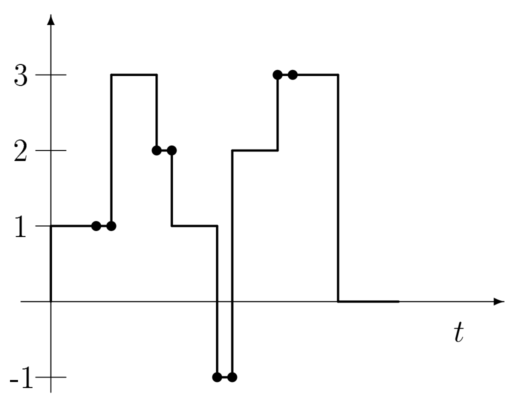
Dette betyr at den fouriertransformerte summert med alle forskyvninger av seg selv med $2\pi m/T$, der m er heltall, må summere seg til 1!

b. i Fra tidsplankravet er det lett å se at minsteavstanden må oppfylle $T > \tau/2$. Vi ser dette fra skissen under.

ii. Skisse av individuelle, mottatte pulser når de sendte pulsene har amplituder $[1, 2, -1, 3]$ og det sendes med litt større pulsavstand (T) enn minimum:



Mottatt signal = summen av pulsene:



Deteksjonen må foregå mellom hver av parene av prikker.

c. Frekvensresponsen til kanalen:

$$\begin{aligned} G(j\Omega) &= \int_0^{\tau} e^{-j\Omega t} dt = -\frac{1}{j\Omega}\left[e^{-j\Omega\tau} - 1\right] \\ &= \tau e^{-j\Omega\tau/2}\frac{e^{j\Omega\tau/2} - e^{-j\Omega\tau/2}}{2j\frac{\Omega\tau}{2}} = \tau e^{-j\Omega\tau/2}\mathrm{sinc}(\frac{\Omega\tau}{2\pi}). \end{aligned}$$

Uttrykket blir litt penere når vi velger frekvensen $F = \Omega/2\pi$ som uavhengig variabel:

$$G(jF) = \tau e^{-j\pi F\tau}\mathrm{sinc}(F\tau).$$

d. i. Vi ser at relasjonen

$$\frac{\tau}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}(\tau F + m\frac{\tau}{T}) = 1$$

inneholder den fouriertransformerte av fra forrige punkt, bortsett fra en fasefaktor. Denne kan vi bli kvitt ved å legge den utsendte pulsen symmetrisk omkring origo. Fra betraktninger i tidsplanet har vi sett at kanalen er av nyquisttypen så lenge $T > \tau/2$. Dette endrer seg ikke ved flytting av pulsen (fjerning av fasefaktoren). Ved bruk av nyquistkriteriet i frekvensplanet bevises dermed påstanden.

ii. Gyldighetsområdet for relasjonen blir følgelig for $T > \tau/2$.

e. Kanalkapasiteten (for en gaussisk kanal) er gitt ved:

$$C = B\log_2\left(1 + \frac{P}{N_0 B}\right) \text{ bit/s.}$$

Det kan sendes $2B$ pulser pr. s. Derfor blir antall bit pr. puls:

$$b = \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{P}{N_0 B}\right).$$

P er signaleffekten, mens $N_0 B = (N_0/2)(2B)$ ($N_0/2$ er støyeffekttettheten og $2B$ er dobbeltsidig båndbredde) representerer kanalstøyeffekten. Altså er det *signal-støyforholdet* som avgjør antall bit pr. puls som kan sendes i henhold til formelen. Antall nivåer er $L = 2^b$.