Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for telematikk

Faglig kontakt under eksamen:
Poul Heegaard (73 594321)

EKSAMEN I EMNE
TTM4110 PÅLITELIGHET OG YTELSE MED SIMULERING
LØSNINGSFORSLAG

Mandag 14. desember 2005
Tid: 09:00 – 13:00

Hjelpemidler:
C - Graham Birtwistle: DEMOS - A system for Discrete Event Modelling on Simula. Formelsamling i fag TTM4110 Pålitelighet og ytelse med simulering. NB! Formelsamlingen er vedlagt.

a) Tjenester som leveres er lagring (epost og web-sider) og overføring (sende og motta epost, samt henting av web-sider). Tjenesteattributter for lagring er tilgjengelighet og funksjonssikkerhet, mens for overføring er oppslagstid (behandlingstid) og throughput.

b) Først setter vi opp et uttrykk for funksjonssikkerheten

$$R(t) = P(T_{FF} > t) = 1 - P(T_{FF} \leq t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t} \tag{1}$$

Sannsynligheten for uavbrutt levering i 2 døgn blir

$$R(48) = e^{-0.01 \cdot 48} = 0.6188 \tag{2}$$

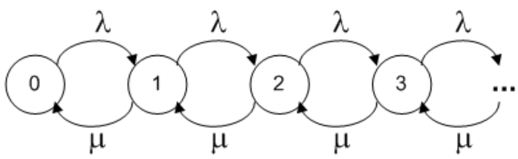
Antall feil følger en Poisson-fordeling der

$$P_i = \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} \tag{3}$$

Forventningen finnes fra formelarket

$$\alpha = \lambda t = 0.01 \cdot 24 \cdot 365 = 87.6 \tag{4}$$

c) Tilstandsmodellen blir:



Figur 1: Uendelig kølengde og en betjener

Denne modellen kalles for Erlangs kømodell - M/M/1 med Kendalls notasjon.

Siden ingen ankomster blir avvist vil tilbudt og avviklet trafikk bli like. To uttrykk for dette er

$$
\begin{aligned}
A &= \sum_{i=0}^{\infty} \lambda p_i E(X) = \lambda \frac{1}{\mu} \sum_{i=0}^{\infty} p_i = \frac{\lambda}{\mu} && (5)\\
A' &= \sum_{i=1}^{\infty} = 1 \cdot p_i = 1 - p_0 && (6)
\end{aligned}
$$

For å finne systemtiden kan vi bruke Little

$$
E(S) = \frac{E(I)}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{A}{1-A} = \frac{1}{\mu - \lambda} \tag{7}
$$

d) Funksjonssannsynligheten er $R(t) = e^{-\alpha_s t}$ når tid til feil er n.e.d. (NB! α_s ble ikke oppgitt på oppgaveteksten, men opplyst på eksamen).
Når serveren er oppe kan en feil oppstå og den går i nedetilstanden, eller ingen feil oppstår. Når serveren er i nedetilstanden kan reparasjon bli fullført slik at serveren beveger seg over i oppetilstanden, eller ingen reparasjon skjer.
Transientligninger for dette blir (α_s = feilintensitet og β = reparasjonsintensitet, mens $P_U(t)$ og $P_D(t)$ er sannsynligheten for å være i h.h.v. oppe og nedetilstand ved tid t)

$$
\begin{aligned}
P_U(t+dt) &= P_U(t) \cdot (1 - \alpha \cdot \Delta t) + P_D(t) \cdot (\beta \cdot \Delta t) + o(\Delta t)\\
P_D(t+dt) &= P_D(t) \cdot (1 - \beta \cdot \Delta t) + P_U(t) \cdot (\alpha \cdot \Delta t) + o(\Delta t)\\
P_U(t) + P_D(t) &= 1 && (8)
\end{aligned}
$$

Øyeblikkstilgjengeligheten blir

$$
A(t) = P_U(t) \tag{9}
$$

Stasjonærtilgjengeligheten blir lik sannsynligheten for å være i oppetilstanden når $t \to \infty$.
Ved å sette opp et enkelt tilstandsdiagram med to tilstander, finnes P_U

$$
\begin{aligned}
P_U \cdot \alpha_s &= P_D \cdot \beta\\
P_U + P_D &= 1
\end{aligned} \tag{10}
$$

gir

$$
P_U = \frac{\beta}{\beta + \alpha_s} \tag{11}
$$

Systemet kan kun feile når det er i oppetilstand. Dette gir

$$\Lambda = A \cdot \alpha_s + (1 - A) \cdot 0 = \frac{\beta}{\beta + \alpha_s} \cdot \alpha_s = \frac{\beta \alpha_s}{\alpha_s + \beta} \tag{12}$$

Tiden mellom feil blir

$$MTBF = \frac{1}{\alpha_s} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha_s}{\alpha_s \beta} \tag{13}$$

e) Poisson ankomstprosess gir n.e.d. fordelt tid mellom ankomster. Forespørslene som ankommer tjener 1 vil være avhengige av sannsynligheten for å nå tjener 1 (p_1).

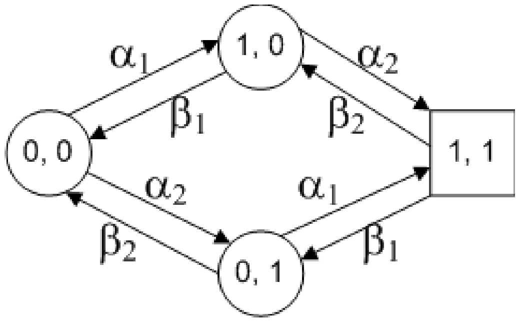
$$\text{Tid mellom ankomster } = \frac{1}{\lambda p_1} \tag{14}$$

Tiden i systemet er nå avhengig av hvilken tjener som blir brukt, dvs at vi må bruke betinget forventning. $P(Tjener1)$ betegner sannsynligheten for at tjener 1 blir brukt.

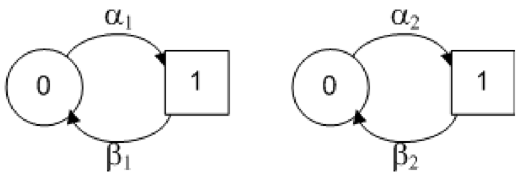
$$\begin{aligned} E(S_2) &= E(S_2|Tjener1) \cdot P(Tjener1) + E(S_2|Tjener2) \cdot P(Tjener2) \\ &= \frac{E(X)}{1 - A} \cdot p_1 + \frac{E(X)}{1 - A} \cdot p_2 = \frac{\frac{1}{\mu/2} \cdot 2}{1 - \frac{p_1 \lambda}{\mu/2}} + \frac{\frac{1}{\mu/2} \cdot 2}{1 - \frac{p_1 \lambda}{\mu/2}} \\ &= \frac{2/\mu}{1 - \lambda/\mu} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \\ &= 2 \cdot \frac{1}{\mu - \lambda} \end{aligned} \tag{15}$$

dvs at tiden i systemet er $2 \cdot E(S)$ fra punkt c.

f) Definerer systemtilstandene som følger:
$(0, 0)$ - Begge tjenerne er oppe
$(1, 0)$ - Tjener 1 er nede
$(0, 1)$ - Tjener 2 er nede
$(1, 1)$ - Begge tjenerne er nede



Figur 2: Tilstandsdiagram



Figur 3: Forenklet tilstandsdiagram for henholdsvis tjener 1 og tjener 2

Ved å betrakte tjenerne uavhengig kan modellen forenkles til to uavhengige tilstandsdiagram.

Sannsynligheten for å være i nedetilstandene i fig.3 blir henholdsvis

$$\begin{aligned} P_1^{(1)} &= \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\beta_1} \\ P_1^{(2)} &= \frac{\alpha_2}{\alpha_2+\beta_2} \end{aligned} \tag{16}$$

Ved hjelp av produktform-løsning kan den totale utilgjengeligheten (P_{11} fra fig. 2) finnes

$$P_D = P_{11} = P_1^{(1)} \cdot P_1^{(2)} = \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2}{(\alpha_1+\beta_1)\cdot(\alpha_2+\beta_2)} \tag{17}$$

Bruker den ikke-forenklede modellen til å sette opp tilstandsligningene

$$\begin{aligned} P_{00}\cdot(\alpha_1+\alpha_2) &= P_{10}\cdot(\beta_1) + P_{01}\cdot(\beta_2) \\ P_{10}\cdot(\beta_1+\alpha_2) &= P_{00}\cdot(\alpha_1) + P_{11}\cdot(\beta_2) \\ P_{01}\cdot(\alpha_1+\beta_2) &= P_{00}\cdot(\alpha_2) + P_{11}\cdot(\beta_1) \\ P_{11}\cdot(\beta_1+\beta_2) &= P_{10}\cdot(\alpha_2) + P_{01}\cdot(\alpha_1) \\ P_{00}+P_{10}+P_{01}+P_{11} &= 1 \end{aligned} \tag{18}$$

Stasjonærtilgjengeligheten for systemet blir lik sannsynligheten for å være i en av oppetilstandene

$$A = (1 - U) = 1 - P_{11} \tag{19}$$

Systemfeilraten er lik intensitetene fra en arbeidende tilstand til en feilet multiplisert med sannsynligheten for å være i den tilstanden - eller motsatt lik sannsynligheten for å være i den feilede tilstanden multiplisert med intensiteten ut fra den (ref likevektsligningen, (5.28) side 140, i et tilstandsdiagram).

$$\Lambda = P_{11} \cdot (\beta_1 + \beta_2) = (1 - A) \cdot (\beta_1 + \beta_2) \tag{20}$$

hvor A er oppgitt i oppgaveteksten.
I henhold til Korolyuks teorem blir MTBF

$$MTBF = 1/\Lambda \tag{21}$$

Når vi skal sammenligne MTBF her og i punkt d, har vi at $MTBF_1 = \frac{\beta+\alpha_s}{\alpha_s\beta}$ og $MTBF_2 = \frac{(\alpha_1+\beta_1)(\alpha_2+\beta_2)}{\alpha_1\beta_1(\beta_1+\beta_2)}$. Antar at $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_s << \beta_1, \beta_2, \beta$. $Teller^{(1)}$ gir $O(\beta^2)$, $Teller^{(2)}$ gir $O(\beta)$, $Nevner^{(1)}$ gir $O(\beta\alpha^2)$, $Nevner^{(2)}$ gir $O(\beta\alpha)$. Av dette får vi

$$\frac{MTBF_2}{MTBF_1} \rightarrow O(\frac{\beta}{\alpha}) \tag{22}$$

som gir

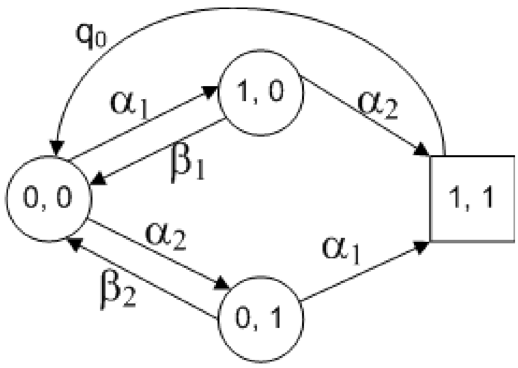
$$MTBF_2 >> MTBF_1 \tag{23}$$

g) For å finne MTFF gjør vi feiltilstanden absorberende og introdukserer overgangen q_0.

MTFF finnes vha ligningen

$$MTFF = \frac{1 - P_F^*}{P_F^* \cdot q_0} \tag{24}$$

der P_F^* betegner den nye tilstandssannsynligheten for feiltilstanden. Ligningssettet for å finne P_F^* blir



Figur 4: Modell for å finne MTFF

$$
\begin{aligned}
P_{00}^{*}\cdot(\alpha_1+\alpha_2) &= P_{10}^{*}\cdot(\beta_1)+P_{01}^{*}\cdot(\beta_2)+P_{F}^{*}\cdot(q_0)\\
P_{10}^{*}\cdot(\beta_1+\alpha_2) &= P_{00}^{*}\cdot(\alpha_1)\\
P_{01}^{*}\cdot(\alpha_1+\beta_2) &= P_{00}^{*}\cdot(\alpha_2)\\
P_{F}^{*}\cdot(q_0) &= P_{10}^{*}\cdot(\alpha_2)+P_{01}^{*}\cdot(\alpha_1)\\
P_{00}^{*}+P_{10}^{*}+P_{01}^{*}+P_{F}^{*} &= 1
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Ved utregning finnes P_F^*

$$
P_F^* = \frac{\alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2)}{\alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2)+q_0(\alpha_1^2+(\alpha_2+\beta_2)(\alpha_2+\beta_2)+\alpha_1(\alpha_2+\beta_1+\beta_2))} \tag{26}
$$

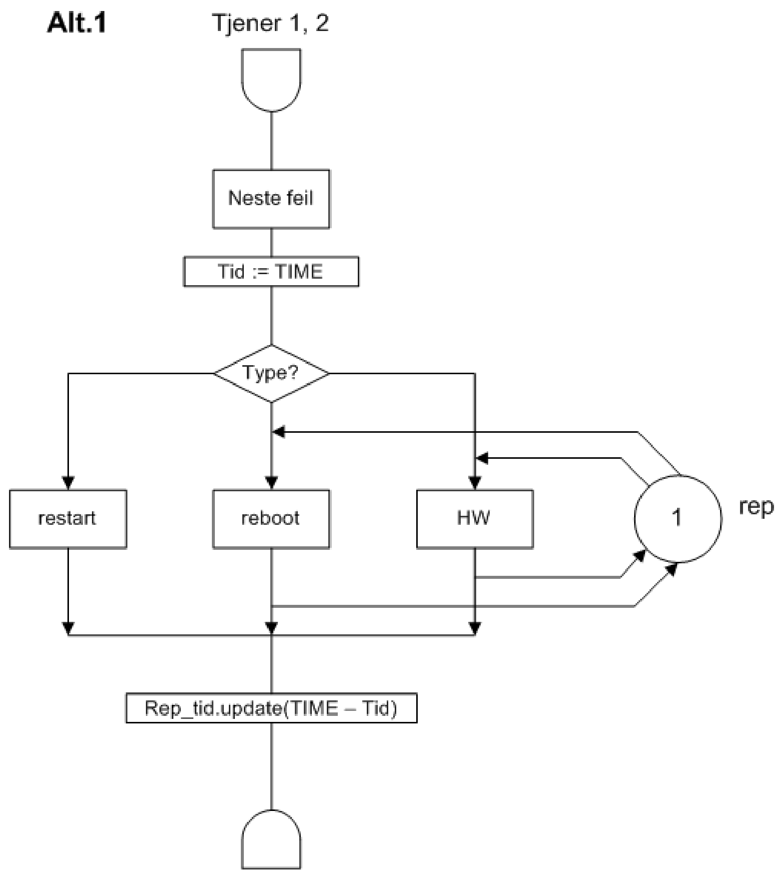
innsatt i uttrykket for MTFF får vi

$$
MTFF = \frac{\alpha_1^2+(\alpha_2+\beta_1)(\alpha_2+\beta_2)+\alpha_1(\alpha_2+\beta_1+\beta_2)}{\alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2)} \tag{27}
$$

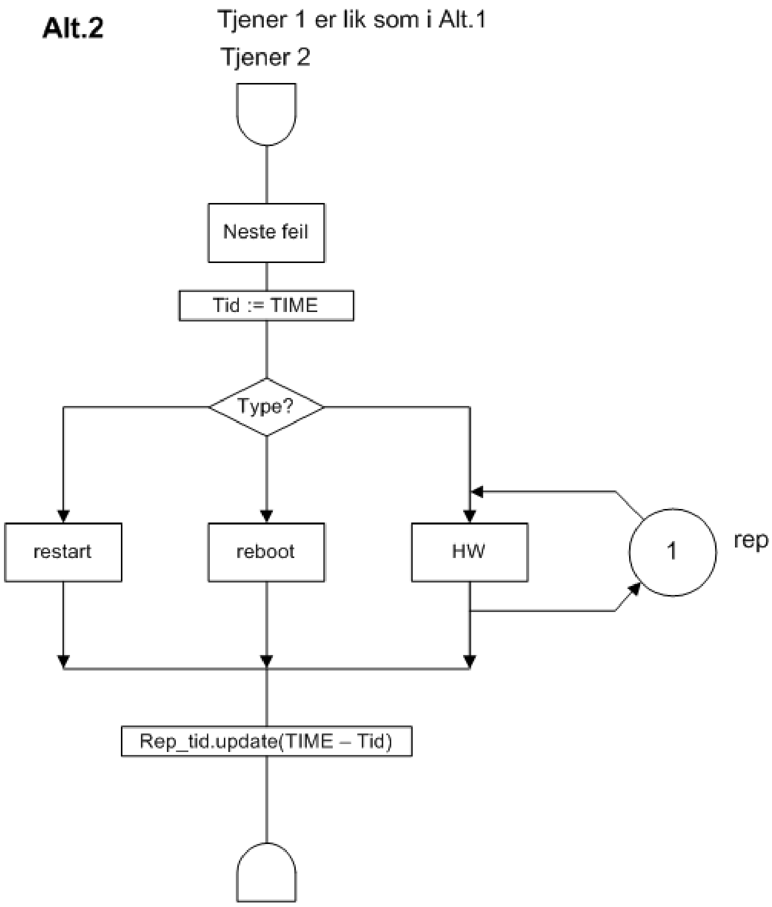
Merk her at det ikke var nødvendig med full utregning for å få full uttelling.

h) Entiteter blir tjenerne som kan feile. Reparatøren er en ressurs som tjenerne kjemper om. Hver gang en tjener feiler sjekker den på type feil, og legger evt beslag på reparatøren. Merk at det er to feil-prosesser i systemet (en for hver tjener).

Alternativ 1 beskriver tilfelle uten avtale med person på kontorfellesskap, mens alternativ 2 er med en slik avtale. I alternativ 2 trengs ingen ressurs under reboot da en ekstern person alltid er tilgjengelig for reboot.



Figur 5: Aktivitetsdiagram, uten avtale



Figur 6: Aktivitetsdiagram, med avtale

Innhenting av statistikk kan skje hver gang en type feil oppstår, samt at en variabel $rep - tid$ oppdateres med tid for reparasjon. Sammenligninger av alternativene vil gi informasjon om firmaets beslutning.

i) Replikasjonsmetoden trenger flere uavhengige observasjoner med samme start og stoppbetingelser. Et forslag er:

- for hver replikasjon DO (i) samme starttilstand (ii) endre frø til generatoren (iii) samme stoppbetingelse (enten antall hendelser eller tid)

Forventning og varians blir

$$E(X_r) = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{10}\frac{Y_r}{20} = 5.01 \tag{28}$$

$$Var(X_r) = S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{r=1}^{10}\frac{(Y_r - \overline{Y})^2}{20^2} = 1.75 \tag{29}$$

$$\tag{30}$$

Forutsetningen for å benytte en Normal-fordeling er at variansen er kjent, eller at vi har et stort antall uavhengige observasjoner. Her må vi bruke student-t fordelingen siden variansen verken er kjent eller antallet uavhengige observasjoner er stort nok. Et 95% konfidensintervall gjør at vi må bruke kvantilen $t_{0.025,9} = 2.26$, og får

$$P(-t_{0.025,9} < T < t_{0.025,9}) = 0.95, \text{ der } T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \tag{31}$$

Ved innsetting av den estimerte forventningen og variansen over blir konfidensintervallet

$$\begin{aligned}(\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot t_{0.025,9} \quad &, \quad \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot t_{0.025,9}) \\ (4.06 \quad &, \quad 5.96)\end{aligned} \tag{32}$$