NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR ELEKTRONIKK OG TELEKOMMUNIKASJON

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Bojana Gajić
Tlf.: 92490623

EKSAMEN I EMNE
TTT4110 INFORMASJONS- OG SIGNALTEORI

Dato: lørdag 13. august 2005
Tid: kl. 09.00 - 13.00

Hjelpemidler: D–Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

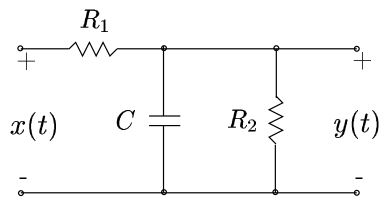
INFORMASJON

- Eksamen består av 4 oppgaver:
  - Oppgave 1 omhandler analoge filtre.
  - Oppgave 2 omhandler signalspektra og punktprøving.
  - Oppgave 3 omhandler stokastiske signaler, kvantisering og DPCM.
  - Oppgave 4 omhandler entropi og kildekoding.
- Maksimalt antall poeng for hver deloppgave er angitt i parentes.
  Det er 55 poeng til sammen.
- Noen viktige formler finnes i vedlegget (NB! utvidet med en side i forhold til våreksamen).
- Faglærer vil gå rundt to ganger, første gang ca. kl. 10 og andre gang ca. kl. 11:45.
- Sensurfrist er 3 uker etter eksamensdato.

Lykke til!

Oppgave 1 *(2+5+2+5=14)*

Figur 1 viser et analogt filter.



Figur 1:

1a) Finn en differensialligning som beskriver sammenheng mellom inngangsspenningen $x(t)$ og utgangsspenningen $y(t)$ vha. filterkomponenter R_1, R_2 og C.

1b)
- Vis at frekvensresponsen til filteret er gitt ved

$$H(\Omega) = \frac{1}{j\Omega R_1 C + \frac{R_1}{R_2} + 1}$$

- Finn amplitude- og faseresponsen til filteret.
- Bestem filtertype (lavpass, høypass, båndpass eller båndstopp).

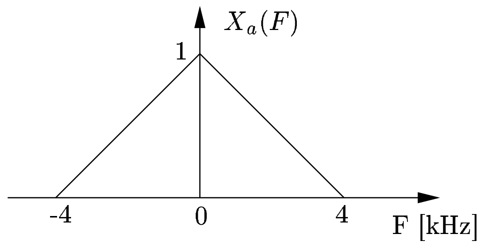
1c) Finn impulsresponsen til filteret.

1d) Finn filterets respons på følgende inngangssignaler gitt at $R_1 = 1\,k\Omega$, $R_2 = 10\,k\Omega$ og $C = 1\,\mu F$:

- $x(t) = 10\cos(1000t) + \cos(3000t + \pi/4)$
- $x(t) = u(t)$

Oppgave 2 *(3+4+6=13)*

Figur 2 viser spekteret til et analogt signal $x_a(t)$.



Figur 2:

2a)
- Hvilken egenskap ved spekteret tilsier at signalet $x_a(t)$ er tidskontinuerlig?
- Er signalet $x_a(t)$ periodisk?
- Er signalet $x_a(t)$ reelt?

Begrunn svarene.

2b) Signalet $x_a(t)$ punktprøves med punktprøvingsfrekvens F_s.

- Finn den laveste punktprøvingsfrekvensen F_{min} for å unngå foldningsfeil (*aliasing*) uten bruk av et antialiasing-filter.
- Skisser spekteret til det punktprøvede signalet som funksjon av digital frekvens når $F_s = F_{min}$.

2c) Vi ønsker nå å punktprøve signalet $x_a(t)$ med $F_s = \frac{3}{4}F_{min}$.

- Forklar hvordan vi i dette tilfellet kan unngå foldningsfeil ved å benytte antialiasing-filter før punktprøving.
- Skisser amplituderesponsen til et ideelt antialiasing-filter som sørger for at foldningsfeil ikke oppstår, og innfører minst mulig degradasjon i signalet.
- Skisser amplitudespekteret til signalet på utgangen av antialiasing-filteret.
- Skisser amplitudespekteret til det punktprøvede signalet som funksjon av digital frekvens når antialiasing-filteret benyttes.

Oppgave 3 *(5+2+3+6+2=18)*

Denne oppgaven omhandler stokastiske signaler. Anta at alle signalene har null middelverdi.

La $x(n)$ være en AR(1)-prosess generert ved å sende hvit støy $e(n)$ med varians $\sigma_E^2 = 4$ gjennom et filter beskrevet ved følgende differensligning

$$x(n) = 0,9x(n-1) + e(n).$$

3a)
- Skriv et uttrykk for autkorrelasjonsfunksjonen til $e(n)$, $R_{EE}(k)$.
- Vis at autokorrelasjonsfunksjonen til $x(n)$ er gitt ved

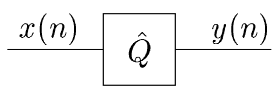
$$R_{XX}(k) = 21,05 \cdot 0,9^{|k|}$$

- Skisser $R_{EE}(k)$ og $R_{XX}(k)$.
- Gi en fysisk tolkning av autokorrelasjonsfunksjon, og bruk denne til å forklare forskjellene mellom $R_{EE}(k)$ og $R_{XX}(k)$.

3b) Finn effektspektraltettheten til $x(n)$.

I resten av oppgaven skal vi bruke en uniform kvantiserer $\hat{Q}$ med 32 kvantiseringsnivåer som dekker intervallet $[-3\sigma, 3\sigma]$, der σ er standardavviket til signalet på inngangen av kvantisereren. Anta at overstyringsstøyen er neglisjerbar og at approksimasjonsformelen for kvantiseringsstøyvarians for en uniform kvantiserer kan benyttes.

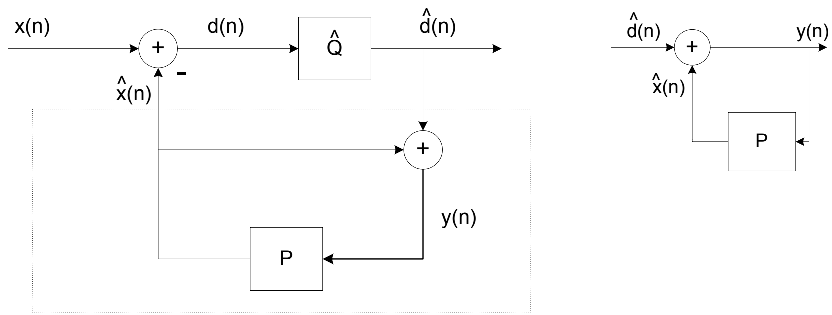
3c) Først kvantiseres signalet $x(n)$ direkte med kvantisereren $\hat{Q}$ som vist i figur 3.



Figur 3: Direkte kvantisering

- Beregn variansen til kvantiseringsfeilen $q(n) = y(n) - x(n)$, σ_Q^2, i dette tilfellet.

3d) Vi ønsker nå å bruke differensiell koding (DPCM) på signalet $x(n)$ som vist i figur 4. Anta at utgangen til prediksjonsfilteret P er gitt ved $\hat{x}(n) = \alpha x(n-1)$.



Figur 4: DPCM koder og dekoder

- Finn koeffisienten α som minimaliserer variansen til prediksjonsfeilen $d(n)$.
- Vis at prediksjonsfeilvariansen for den optimale verdien av α er gitt ved

$$\sigma_D^2 = \sigma_E^2.$$

- Beregn variansen til rekonstruksjonsfeilen $r(n) = y(n) - x(n)$, σ_R^2, ved bruk av DPCM når den optimale koeffisienten benyttes.

3e) Sammenlign resultatene i 3c) og 3d).

- Forklar hvilken gevinst vi har oppnådd ved bruk av DPCM sammenlignet med direkte kvantisering.
- Hvilken egenskap av signalet $x(n)$ har gjort dette mulig?

Oppgave 4 *(2+3+5=10)*

4a) Informasjonsmengde i en hendelse med sannsynlighet p er gitt ved

$$I = \log_2(1/p) \text{ [bit]}.$$

- Forklar hvorfor dette er en fornuftig mål for informasjonsinnhold.

4b)
- Definer begrepet entropi for en diskret kilde.
- Uttrykk entropien til en diskret, minneløs kilde vha. symbolsannsynlighetene p_i, $i = 1, \ldots, N$.
- Beregn entropien til en diskret minneløs kilde som genererer fire forskjellige symboler med sannsynligheter $p_1 = 0,5$, $p_2 = 0,25$, $p_3 = 0,125$ og $p_4 = 0,125$.

4c) Kildesymbolene fra deloppgave 4b) representeres med følgende kode:

symbol	sannsynlighet	kodeord
1	0,5	0
2	0,25	10
3	0,125	110
4	0,125	111

- Er koden entydig dekodbar? Begrunn svaret.
- Finn gjennomsnittlig antall bit per symbol for denne koden.
- Er det mulig å finne en kode med lavere gjennomsnittlig antall bit per symbol? Begrunn svaret, og hvis dette er mulig, finn en slik kode.