Kontinuasjonseksamen TMA4140: Diskret Matematikk, august 2010.

Løsningsforslag

Oppgave 1

a) $6^4 = 1296$

b) $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

Oppgave 2

Her er tabeller for henholdsvis A, B og C:

p	q	$p \vee q$	$\neg p \wedge (p \vee q)$	$\neg p \wedge (p \vee q) \to q$
0	0	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	0	1

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	$q \to (p \wedge (p \to q))$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	0
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

p	q	r	$r \wedge q$	$p \vee q$	$(r \wedge q) \to (p \vee q)$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1

Fra disse tabellene ser vi at A og C er tautologiene, mens det ikke finnes noen selvmotsigelser.

Oppgave 3

Vi ser at ulikhetene holder for $n=2$. Anta ulikhetene holder for $k=n$. Da får vi for henholdsvis venstre og høyre ulikhet for $k=n+1$ ved å bruke induksjonsantagelsen:

$$1^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 < \frac{n^3}{3} + n^2 < \frac{n^3}{3} + n^2 + n + \frac{1}{3} = \frac{(n+1)^3}{3}$$

$$1^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 > \frac{n^3}{3} + (n+1)^2 = \frac{n^3}{3} + n^2 + 2n + 1 > \frac{n^3}{3} + n^2 + n + \frac{1}{3} = \frac{(n+1)^3}{3}$$

Oppgave 4 a) $m = 4 \cdot 5 \cdot 11 = 220$

$\frac{m}{4} = 55 \equiv 3 \pmod 4$; $3y_1 \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow y_1 = 3$

$\frac{m}{5} = 44 \equiv 4 \pmod 5$; $4y_2 \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow y_2 = 4$

$\frac{m}{11} = 20 \equiv 9 \pmod{11}$; $9y_3 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow y_3 = 5$.

En løsning er

$3 \cdot 55 \cdot 3 + 2 \cdot 44 \cdot 4 + 4 \cdot 20 \cdot 5 = 1247$.

Det finnes kun en løsning x slik at $0 \le x \le 219$, og den er gitt ved $x = 1247 - 5 \cdot 220 = \underline{\underline{147}}$

b) Den karakteristiske ligningen er

$r^2 - 6r + 8 = 0$. Røttene er 2 og 4.

Løsningen er da på formen

$a_n = \alpha 2^n + \beta 4^n$, der α og β er konstanter.

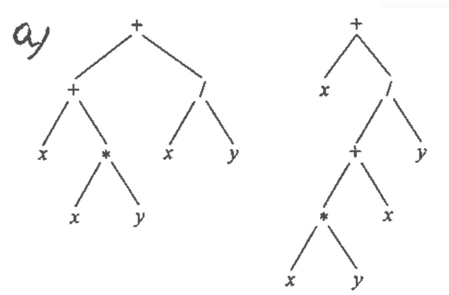
α og β bestemmes av initialbetingelsene:

$$\left.\begin{aligned} 4 &= a_0 = \alpha + \beta \\ 10 &= a_1 = 2\alpha + 4\beta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha = 3, \beta = 1$$

Løsningen blir:

$a_n = 3 \cdot 2^n + 4^n$, $n \ge 0$.

Oppgave 5 a)



b) $++x*xy/xy$, $+x/+*xyxy$, $xxy*+xy/+$, $xxy*x+y/+$

Oppgave 6 a)

$$1^*0\{0^* \cup 0^*1\{0,1\}\{0,1\}^*\}$$

b) Grammatikken $G=(V,T,S,P)$ genererer språket som automaten gjenkjenner, der $V=\{S, A, B, 0, 1\}$. Her korresponderer symbolene S, A og B til tilstandene s_0, s_1 og s_2, henholdsvis; $T=\{0,1\}$; S er startsymbolet; produksjonene er

$S \to 0A$, $S \to 1B$, $S \to 1$, $S \to \lambda$, $A \to 0A$, $A \to 1B$, $A \to 1$, $B \to 0A$, $B \to 1B$, $B \to 1$.