Løsningsforslag til eksamen i TTT 4110 Informasjons- og signalteori, august 2010

Oppgave 1

a) Et signal er periodisk hvis det finnes N slik at $x(n+N) = x(n) \ \forall n$.

$$x_3(n+N) = \sqrt{3}\cos\left(\frac{2\pi}{3}(n+N) + \frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{2\pi}{3}n + \frac{5\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}N\right)$$

$$x_3(n+N) = x_3(n) \ \forall n \iff \frac{2\pi}{3}N = 2k\pi \Rightarrow N = 3k$$

Grunnperioden (minste periode) : $N = 3$.

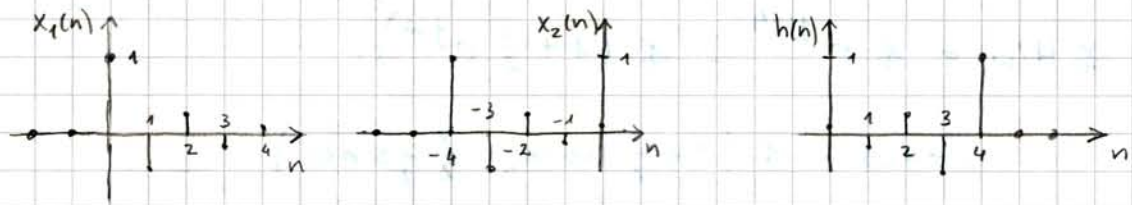
Alternativt : Et tidsdiskret cosinussignal er periodisk hvis

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \in \mathbb{R}$$

Vi har at $f = \dfrac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi} = \frac{1}{3} \in \mathbb{R} \Rightarrow$ periodisk signal

Grunnperiode $N = 3$ (nevneren i f)

b) Ser at $x_2(n) = x_1(n+4)$ og $h(n) = x_2(-n)$



c) $$\text{DTFT}\{x(n-k)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-k)e^{-j\omega n} = \left|\begin{matrix} n-k=\ell \\ n=k+\ell \end{matrix}\right| = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x(\ell)e^{-j\omega(k+\ell)}$$

$$= e^{-j\omega k}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x(\ell)e^{-j\omega \ell} = e^{-j\omega k}X(\omega)$$

d) Siden $x_2(n) = x_1(n+4) \Rightarrow X_2(\omega) = e^{j\omega 4}X_1(\omega)$

$$X_1(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-0{,}5e^{-j\omega})^n = \frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$\Rightarrow X_2(\omega) = \frac{e^{j\omega 4}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

Alternativt kan $X_2(\omega)$ regnes ut direkte:

$$X_2(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-4}^{\infty}(-0{,}5)^{n+4}e^{-j\omega n} = \left|\begin{matrix} n+4=\ell \\ n=\ell-4 \end{matrix}\right|$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^{\ell}e^{-j\omega(\ell-4)} = e^{j\omega 4}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(-\tfrac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^{\ell} = \frac{e^{j\omega 4}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

e) $h(n) \neq 0$ for $n<0$ $\Rightarrow$ filteret er ikke kausalt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=-\infty}^{4} \left|(-0,5)^{4-n}\right| = \left| l = -n \right| = \sum_{n=-4}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+4} = \left| k = n+4 \right|$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} < \infty$$ $\Rightarrow$ filteret er stabilt

f) $$H(\omega) = \text{DTFT}\{h(n)\} = \text{DTFT}\{x_2(-n)\} = X_2(-\omega) = \frac{e^{-j\omega 4}}{1+\frac{1}{2}e^{j\omega}}$$

$$|H(\omega)|^2 = H(\omega)\cdot H^*(\omega) = \frac{e^{-j\omega 4}}{1+\frac{1}{2}e^{j\omega}} \cdot \frac{e^{j\omega 4}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}+\frac{1}{2}e^{j\omega}+\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{\frac{5}{4}+\cos\omega}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}+\cos\omega}}$$

$$\measuredangle H(\omega) = \measuredangle e^{-j\omega 4} - \measuredangle\left(1+\tfrac{1}{2}e^{j\omega}\right)$$

$$= -4\omega - \measuredangle\left(1+\tfrac{1}{2}\cos\omega + \tfrac{1}{2}j\sin\omega\right)$$

$$= -4\omega - \arctan\frac{\frac{1}{2}\sin\omega}{1+\frac{1}{2}\cos\omega} = -4\omega - \arctan\frac{\sin\omega}{2+\cos\omega}$$

g) $$Y_2(\omega) = X_2(\omega)\cdot H(\omega) = H(-\omega)H(\omega) = H^*(\omega)H(\omega) = |H(\omega)|^2$$

$$= \frac{1}{\frac{5}{4}+\cos\omega}$$

h) Utgangssignalet vil også være et cosinussignal med $\omega_0 = \frac{2\pi}{3}$.
Bare amplitude og fase vil endres:

$$y_3(n) = \sqrt{3}\,|H(\omega_0)| \cos\left(\frac{2\pi}{3}n + \frac{5\pi}{6} + \measuredangle H(\omega_0)\right)$$

$$|H(\omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{5/4+\cos\frac{2\pi}{3}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \measuredangle H(\omega_0) = -4\cdot\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = -\frac{17\pi}{6}$$

$$y_3(n) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}n + \frac{5\pi}{6} - \frac{17\pi}{6}\right) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}n - 2\pi\right) = \underline{2\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)}$$

Oppgave 2

a) $c_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)\, e^{-j\frac{2\pi k}{T_0}t}\, dt$, der T_0 er signalperioden

I denne oppgaven er $T_0 = 2\,s$ og $x(t) = t$ for $t \in [0,2)$.

$$c_k = \frac{1}{2}\int_0^2 t\, e^{-j\pi k t}\, dt \overset{k\neq 0}{=} \left| \begin{matrix} u = t & dv = e^{-j\pi k t}dt \\ du = dt & v = \frac{1}{-j\pi k} e^{-j\pi k t} \end{matrix} \right| = \left[u \cdot v \Big|_0^2 - \int_0^2 v\, du \right].$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{t}{j\pi k} e^{-j\pi k t}\Big|_0^2 + \frac{1}{j\pi k}\int_0^2 e^{-j\pi k t}\, dt \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{j\pi k}\underbrace{e^{-j\pi k \cdot 2}}_{1} + \frac{1}{(\pi k)^2} e^{-j\pi k t}\Big|_0^2 \right)$$

$$= -\frac{1}{j\pi k} + \frac{1}{2(\pi k)^2}\left(\underbrace{e^{-j\pi k 2}}_{1} - 1 \right) = -\frac{1}{j\pi k} = \frac{j}{\pi k}$$

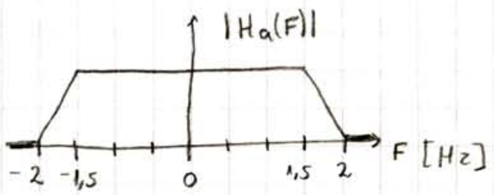
$$k = 0 \Rightarrow c_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 t\, dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}t^2\Big|_0^2 = \frac{1}{4}\cdot 4 = 1$$

$$\Rightarrow c_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \frac{j}{\pi k}, & k \neq 0 \end{cases}$$

b) $E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\, dt$ – uendelig stor for periodiske signaler

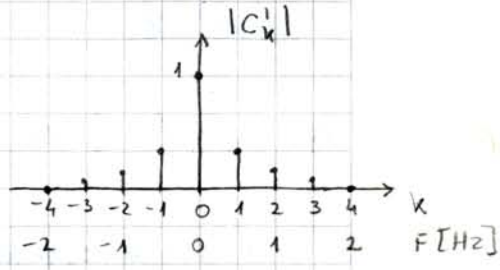
$$P = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x^2(t)\, dt = \frac{1}{2}\int_0^2 t^2 dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot t^3\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 2^3 = \frac{4}{3}$$

c) Siden $c_k \neq 0$ $\forall k$, har inngangssignalet $x(t)$ i utgangspunktet uendelig bredt spektrum. For å unngå aliasing, må vi begrense spekteret til $\frac{F_s}{2} = 1{,}75\,Hz$. Koeffisienten c_k hører til $F_k = \frac{k}{T_0} = \frac{k}{2}\,Hz$. Derfor må vi lage et antialiasing filter som beholder frekvenskomponentene t.o.m. $F_3 = 1{,}5\,Hz$ og fjerner alle f.o.m. $F_4 = 2\,Hz$.



(Formen til $|H_a(F)|$ for $1{,}5 < |F| < 2$, dvs. i transisjonsområde, kan velges vilkårlig) d)

$$c'_k = \begin{cases} 1 & k=0 \\ \frac{j}{k\pi} & |k| = 1,2,3 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \qquad |c'_k| = \begin{cases} 1 & k=0 \\ \frac{1}{k\pi} & |k| = 1,2,3 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases},$$

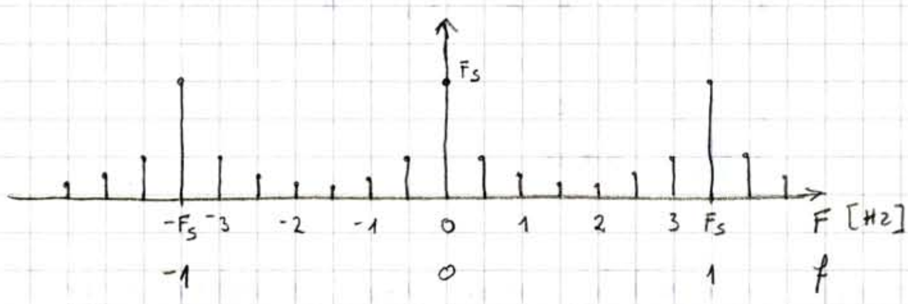


e) Bruker Parselval-teoremet

$$P' = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x'^2(t)\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c'_k|^2 = \sum_{k=-3}^{3} |c'_k|^2 = 1 + 2\left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2}\right) = 1{,}276$$

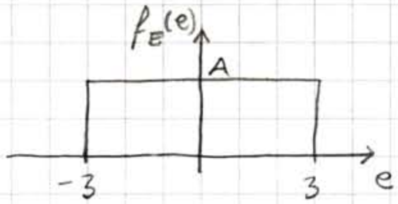
Vi ser at bare en liten del av effekten gikk tapt gjennom antialiasingfilteret, $\frac{P-P'}{P}\cdot 100\% \approx 4{,}3\ \%$

f) Sampling med F_s i tidsdomenet fører til periodisk utvidelse av spekteret med periode F_s:



Oppgave 3

a) $P_E = E[e^2(n)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^2 f_E(e)\,de$,

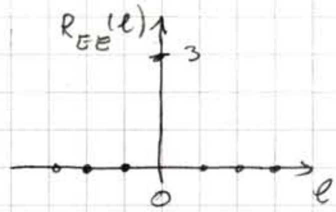


$$\int_{-\infty}^{\infty} f_E(e)\,de = 1$$

$$\int_{-3}^{3} A\,de = 1 \Rightarrow A \cdot 6 = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{6}$$

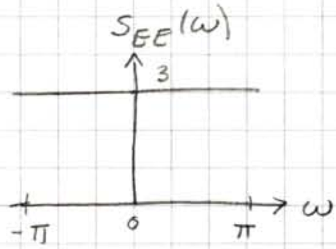
$$P_E = \int_{-3}^{3} \frac{1}{6} e^2 de = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3} e^3 \Big|_{-3}^{3} = \frac{1}{18}\left(3^3 - (-3)^3\right) = \frac{2\cdot 3^3}{2\cdot 3^2} = \underline{\underline{3}}$$

b) $R_{EE}(\ell) = E[e(n)e(n-\ell)] = \begin{cases} 0, & \ell \neq 0 \\ P_E = 3, & \ell = 0 \end{cases}$



fordi hvit støy har ukorrelerte sampler

c) $S_{EE}(\omega) = \text{DTFT}\{R_{EE}(\ell)\} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} R_{EE}(\ell) e^{-j\omega\ell} = 3$



$S_{EE}(\omega)$ er konstant for alle ω

$\Rightarrow$ like mye effekt over alle frekvenser

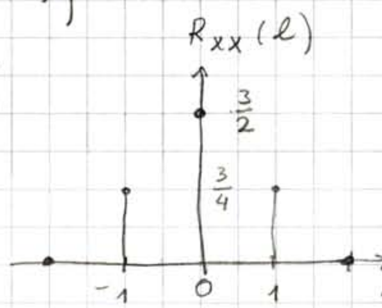
d) $R_{XX}(\ell) = E[x(n)\,x(n-\ell)] = E\left[\frac{1}{2^2}(e(n)+e(n-1))(e(n-\ell)+e(n-1-\ell))\right]$

$$= \frac{1}{4}\Big\{E[e(n)e(n-\ell)] + E[e(n)e(n-1-\ell)] + E[e(n-1)e(n-\ell)] + E[e(n-1)e(n-1-\ell)]\Big\}$$

$$= \frac{1}{4}\Big\{R_{EE}(\ell) + R_{EE}(\ell+1) + R_{EE}(\ell-1) + R_{EE}(\ell)\Big\}$$

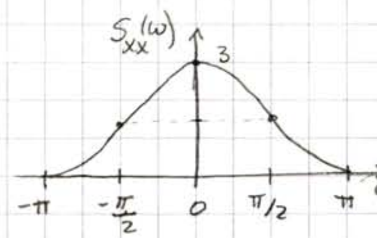
$$= \frac{1}{4}\Big\{2R_{EE}(\ell) + R_{EE}(\ell-1) + R_{EE}(\ell+1)\Big\}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{4}\cdot 2\cdot 3 = \frac{3}{2}, & \ell = 0 \\ \frac{1}{4}\cdot 3, & \ell = \pm 1 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$



e) $S_{XX}(\omega) = \text{DTFT}\{R_{XX}(\ell)\} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} R_{XX}(\ell) e^{-j\omega\ell}$

$$= \frac{3}{4} e^{j\omega} + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} e^{-j\omega} = \frac{3}{2}(1+\cos\omega)$$



f) $R_{XX}(\ell)$ viser statistisk sammenheng mellom samplene med avstand ℓ, og $S_{XX}(\omega)$ viser hvordan effekten er fordelt over frekvensene. Vi ser at midling innfører korrelasjon mellom påfølgende sampler og demper høyfrekvente komponenter.

Oppgave 4

a) $H = E[I] = \sum_{i=1}^{3} p_i \log_2 \frac{1}{p_i}$ [bit] ,

Tre mulige utfall:

symbol	P
blomst	1/2
bie	1/3
honningsglass	1/6

$$H = E[I] = \frac{1}{2}\log_2 2 + \frac{1}{3}\log_2 3 + \frac{1}{6}\log_2 6 = \underline{1{,}46 \text{ bit}}$$

b) Vi må bruke 2 bit/symbol fordi vi har 3 forskjellige symboler. (1 bit/symbol kan brukes for å representere 2 symboler)

c) Vi kan tildelle kortere kodeord til symbolene som er mer sannsynlige og på denne måten redusere den gjennomsnittlige kodeordlengden. For eksempel, kan følgende kode benyttes

symbol	kodeord
blomst	0
bie	10
honningsglass	11

Den gjennomsnittlige kodeordlengden er gitt ved:

$$\bar{L} = \sum_{i=1}^{3} p_i l_i = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{1}{6}\cdot 2 = 1{,}5 \text{ bit}$$

Entropien til kilden representerer teoretisk nedre grense for gjennomsnittlig kodeordlengde. Siden $\bar{L} > H$ er det fortsatt mulig å lage en mer effektiv kode.