Løsningsforslag til eksamen i TTT4110 Infosig, 7. juni 2011

Oppgave 1

a) $$H(\hat{\omega}) = \frac{1}{2 - e^{j\hat{\omega}}}$$

$$|H(\hat{\omega})| = \frac{1}{|2 - e^{j\hat{\omega}}|} = \frac{1}{|2 - \cos\hat{\omega} - j\sin\hat{\omega}|} = \frac{1}{\sqrt{(2-\cos\hat{\omega})^2 + \sin^2\hat{\omega}}} = \frac{1}{\sqrt{5 - 4\cos\hat{\omega}}}$$

$\hat{\omega}$	0	$\nearrow$	π
$\cos\hat{\omega}$	1	$\searrow$	-1
$\lvert H(\hat{\omega})\rvert$	1	$\searrow$	$\frac{1}{3}$

$|H(\hat{\omega})|$ er monotont avtagende funksjon for $\hat{\omega} \in [0, \pi]$ $\Rightarrow$ $H(\hat{\omega})$ er et lavpassfilter.

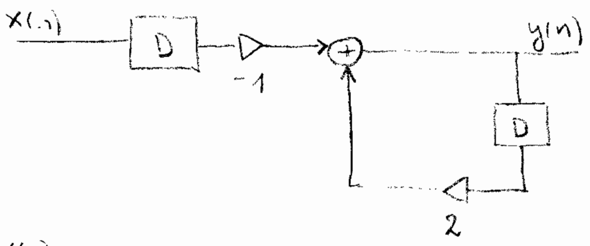
b) $$H(\hat{\omega}) = \frac{Y(\hat{\omega})}{X(\hat{\omega})} = \frac{1}{2 - e^{j\hat{\omega}}} \Rightarrow 2Y(\hat{\omega}) - Y(\hat{\omega})e^{j\hat{\omega}} = X(\hat{\omega}) \quad | \text{ IDTFT}$$

$$2y(n) - y(n+1) = x(n)$$

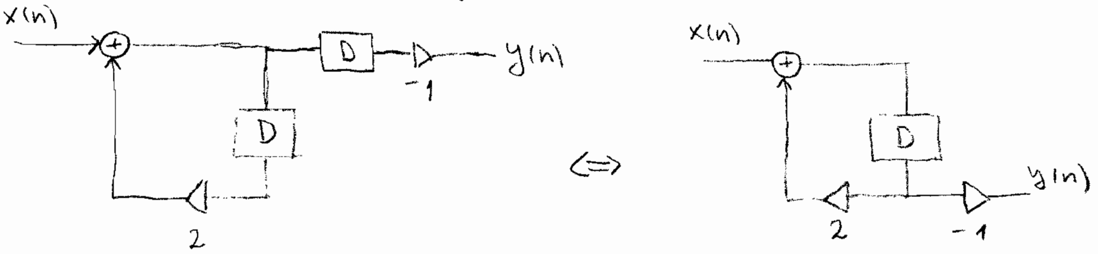
or $$2y(n-1) - y(n) = x(n-1)$$

or $$y(n) = -x(n-1) + 2y(n-1)$$

c)



Direkte form 1 - struktur



Direkte form 2 struktur

DF2 er fordelaktig fordi den bruker færre forsinkelseselementer $\Rightarrow$ mindre minne.

d) $$H(\hat{\omega}) = \text{DTFT}\{h(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\hat{\omega}n} \qquad (1)$$

$$H(\hat{\omega}) = \frac{1}{2 - e^{j\hat{\omega}}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{j\hat{\omega}}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} e^{j\hat{\omega}n} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{0} 2^n e^{-j\hat{\omega}n} = \sum_{n=-\infty}^{0} 2^{n-1} e^{-j\hat{\omega}n} \quad (2)$$

(1) og (2) $\Rightarrow$
$$h[n] = \begin{cases} 2^{n-1} & n \in (-\infty, 0] \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} = 2^{n-1}u[-n]$$

e) $h[n] = 2^{n-1} u[-n]$

Dette er et IIR-filter fordi $h[n]$ er uendelig lang.
Dette er ikke et kausalt system fordi $h[n] \neq 0$ for $n<0$.

f)

$$X(\hat{\omega}) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{j\hat{\omega}}}$$

$$Y(\hat{\omega}) = X(\hat{\omega})\cdot H(\hat{\omega}) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{j\hat{\omega}}}\cdot\frac{1}{2-e^{j\hat{\omega}}} = \frac{1}{2+e^{j\hat{\omega}}-e^{j\hat{\omega}}-\frac{1}{2}e^{j2\hat{\omega}}} = \frac{1}{2-\frac{1}{2}e^{j2\hat{\omega}}}$$

$$Y(\hat{\omega}) = \text{DTFT}\{y[n]\} = \sum_{n=\infty}^{\infty} y[n]\, e^{-j\omega n} \quad (1)$$

$$Y(\hat{\omega}) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{j2\hat{\omega}}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}e^{j\hat{\omega}2n} = \frac{1}{2}\sum_{k=\infty}^{0}2^{2k}e^{-j\hat{\omega}2k} = \sum_{k=\infty}^{0}2^{2k-1}e^{-j\hat{\omega}2k} \quad (2)$$

(1) og (2) $\Rightarrow$ $y[n] = \begin{cases} 2^{2k-1} & \text{for } n=2k,\ k\leq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} = \begin{cases} 2^{n-1}, & n\leq 0 \text{ og } n \text{ partall} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$

Oppgave 2

a) $$X_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\, e^{-j\omega t}\,dt = \int_{-2}^{2} e^{-j\omega t}\,dt = \frac{1}{-j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_{-2}^{2} = \frac{1}{-j\omega}\left(e^{-j2\omega}-e^{j2\omega}\right)$$

$$= \frac{2}{\omega}\,\frac{e^{j2\omega}-e^{-j2\omega}}{2j} = \frac{2}{\omega}\sin(2\omega) = 4\cdot\frac{\sin(2\omega)}{2\omega}$$

b) $x_2(t)$ er et periodisk signal og dets spektrum er dermed gitt ved Fourierrekkekoeffisienter c_k.

$$c_k = \frac{1}{T}\int_T x_2(t)\, e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} = \frac{1}{8}\int_{-4}^{4} x_2(t)\, e^{-j\frac{\pi k}{4}t}\,dt = \frac{1}{8}\int_{-2}^{2} e^{-j\frac{\pi k}{4}t}\,dt$$

Hvis vi sammenligner dette med integraluttrykket for $X_1(\omega)$, vi ser at

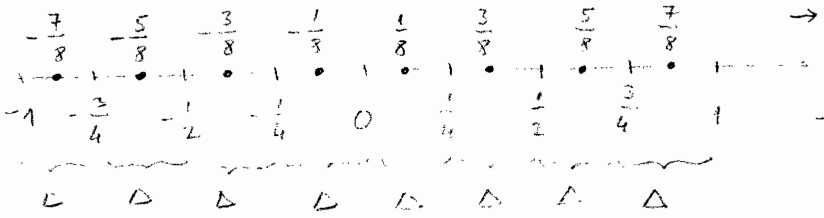
$$c_k = \frac{1}{8}X_1(\omega)\Big|_{\omega=\frac{\pi k}{4}} = \frac{1}{8}\cdot 4\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{\frac{\pi k}{2}} = \frac{1}{2}\,\frac{\sin(\pi k/2)}{\pi k/2}$$

c) $$x_2(t) = \sum_{k=\infty}^{\infty} x_1(t-kT) = \sum_{k=\infty}^{\infty} x_2(t-8k)$$

$$c_k = \frac{1}{T}X_1(\omega)\Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{T}} = \frac{1}{8}X_1\left(\frac{\pi k}{4}\right)$$ – spekteret til $x_2(t)$ er skalert og samplet versjon av $X_1(\omega)$.

Oppgave 3

a) $\Delta = \dfrac{X_{max} - X_{min}}{8} = \dfrac{1-(-1)}{8} = \dfrac{1}{4}$



→ representasjonsverdier (midt mellom desisjonsgrenser)

→ desisjonsgrenser

Den største kvantiseringsfeilen er lik $\dfrac{\Delta}{2} = \dfrac{1}{8}$

b) $SQNR = \dfrac{P_x}{P_q}$

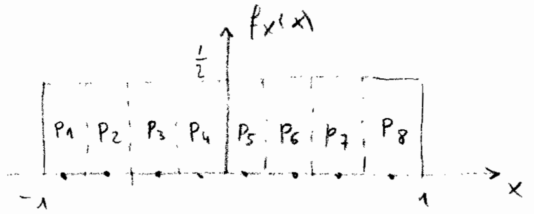
$$P_x = E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{6}\cdot 2 = \frac{1}{3}$$

$$P_q \approx \frac{\Delta^2}{12} = \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{12} = \frac{1}{192}$$

$$SQNR = \frac{P_x}{P_q} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{192}} = \frac{192}{3} = 64$$

$$SQNR\,[dB] = 10\log_{10} SQNR = 10\log_{10} 64 = 18{,}06\text{ dB}$$

c)



Alle representasjonsverdiene er like sannsynlige

$p_1 = p_2 = \ldots = p_8 = p = \frac{1}{8}$

$$H = E[I] = \sum_{i=1}^{8} p_i \log_2 \frac{1}{p_i} = 8\cdot p \cdot \log_2 \frac{1}{p} = 8\,\frac{1}{8}\cdot\log_2 8 = 3 \text{ bit/kildesymbol}$$

d) Med $L=8$ kodeord, må vi bruke minst $\log_2 8 = 3$ bit for å kode hvert kodeord.

Kodeeksempel

symbol (represent. verdi)	Kodeord
1	000
2	001
3	010
4	011
5	100
6	101
7	110
8	111

e) Nei, fordi H = 3 bit/kildesym, og H er i følge Shannons kildekodingsteorem den minste gjennomsnittlige kodeordlengden

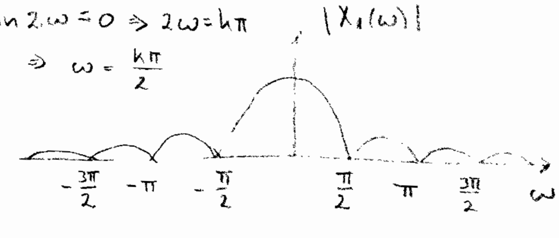
d) $f_s = 0{,}5\,\text{Hz} \Rightarrow \omega_s = 2\pi f_s = \pi \ \frac{\text{rad}}{s}$

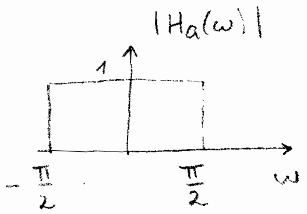
For å unngå aliasing må spekteret til $x_1(t)$, som har uendelig utstrekning i frekvens, begrenses til $[-\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2}] = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

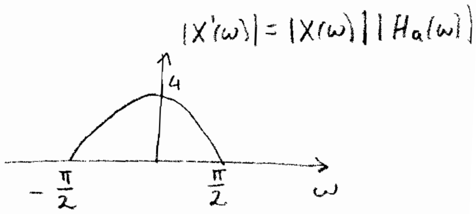
Siden vi ønsker å beholde mest mulig signalenergi, oppnår vi et optimalt resultat ved et ideelt lavpassfilter med grensefrekvens $\omega_c = \frac{\pi}{2}$.

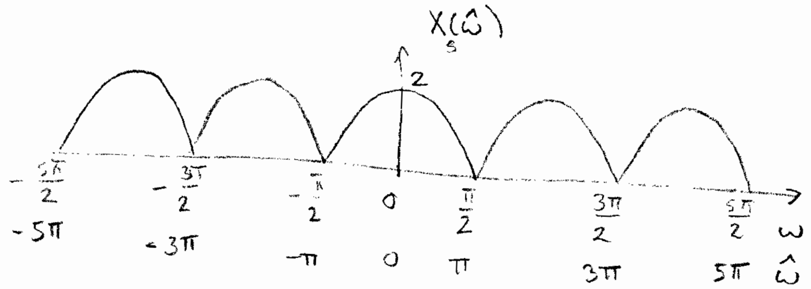
$\sin 2\omega = 0 \Rightarrow 2\omega = k\pi$

$\Rightarrow \omega = \frac{k\pi}{2}$







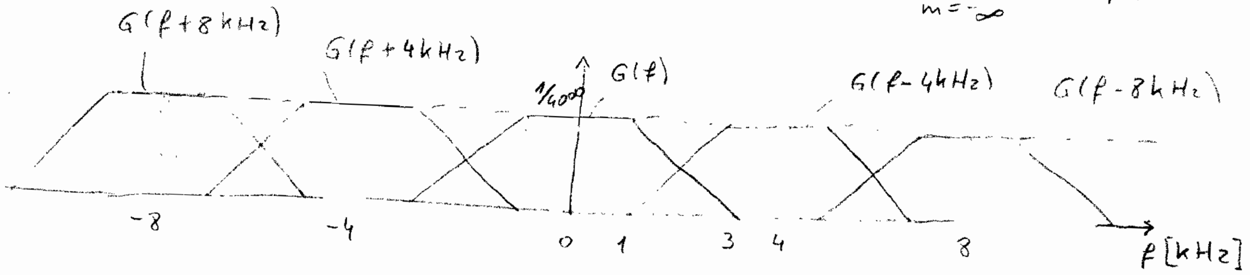


$$X_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X'(\omega - k\,\omega_s)$$

$\hat{\omega} = 2\pi \hat{f} = 2\pi \frac{f}{f_s} = \omega \cdot T_s = 2\omega$

Oppgave 4

a) Overføring uten ISI er mulig hvis Nyquistkriteriet er oppfylt. Siden $G(f)$ er gitt, er det enklest å benytte Nyquistkriteriet i frekvensdomenet. Vi må finne ut om det finnes en T slik at $\sum_{m=-\infty}^{\infty} G(f + \frac{m}{T}) = T$



Vi ser fra skissen over at Nyquistkriteriet er oppfylt for $\frac{1}{T} = 4\,\text{kHz}$. Maksimalt antall kanalsymboler per sekund som kan sendes over denne kanalen uten ISI er dermed 4000.

b) Entropien til signalet er $H = 3 \ \frac{\text{bit}}{\text{kildesym}}$. Det genereres $f_s = \frac{1}{T_s} = 8000 \frac{\text{kildesym}}{s}$.
For å kunne overføre dette signalet feilfritt gjennom kanalen, må vi ha

$$\frac{C}{T} \geq \frac{H}{T_s} \Rightarrow C \geq T \cdot \frac{H}{T_s} = \frac{1}{4000} \cdot 3 \cdot 8000 = 6 \ \frac{\text{bit}}{\text{kanalsymbol}}$$

For en kanal med Gaussisk hvit støy, er C gitt ved

$$C = \frac{1}{2} \log_2 (1 + SNR) \ \frac{\text{bit}}{\text{kanalsym}}$$

Derfra kan vi finne $SNR = 2^{2C} - 1 \geq 2^{2 \cdot 6} - 1 = 4095$ ($\approx 36\,\text{dB}$)