NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR TELETEKNIKK
Signalbehandling

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Tor A. Ramstad
Tlf.: 94314

KONTINUASONSEKSAMEN I FAG SIE2010 Informasjons- og signalteori

(Norwegian text on right hand pages.
English text on reverse pages.)

Dato/Date: . august 2002
Tid/Time: 09.00 - 14.00

Hjelpemidler:
B1 - Typegodkjent kalkulator med tomt minne og
Rottmann matematiske tabeller tillatt.
Ingen andre trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.

Bedømmelse:
Ved bedømmelse vektlegges oppgavene I, II og III likt.
(Equal weighting on each of the three problems.)

Sensurfrist: . august 2002

Oppgave I

Gitt følgende differenseligning:

$$y(n) = ay(n-1) + x(n-k),$$

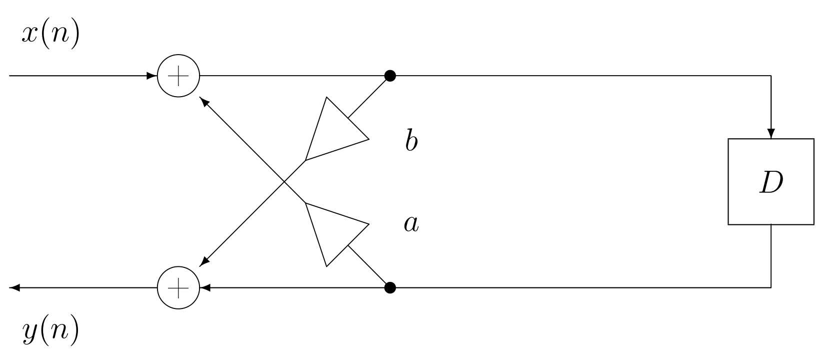
hvor $k \geq 0$.

a. i. Tegn en filterrealisering på direkteform I eller II.
   ii. Finn en struktur for $k = 1$ som realiserer filteret med bare en forsinkelse.

b. Finn enhetspulsresponsen til filteret og diskuter betydningen av k.

c. Beregn frekvensresponsen til filteret og diskuter betydningen av k.

Gitt følgende filter:



d. Finn filterets frekvensrespons $H(e^{j\omega}) = Y(e^{j\omega})/X(e^{j\omega})$.

e. Bevis at $|H(e^{j\omega})|^2 = 1$ når $a = -b$.

Problem I

The following difference equation is given:

$$y(n) = ay(n-1) + x(n-k),$$

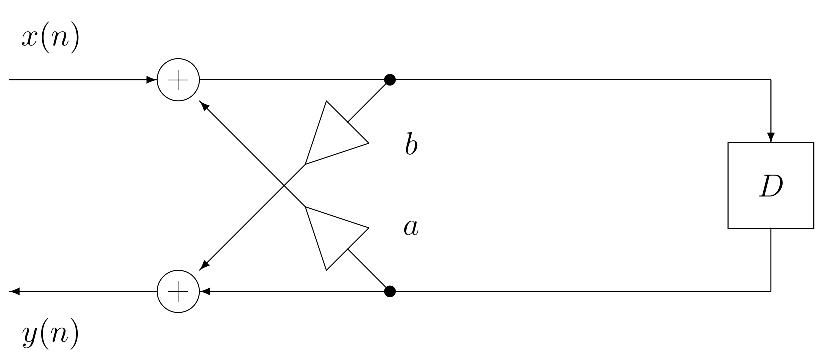
where $k \geq 0$.

a. i. Draw a filter realization in direct form I or II.
   ii. Find a structure for the case $k = 1$ that realizes the filter using only one delay element.

b. Compute the unit sample response of the filter and discuss the implication of selecting different values of k.

c. Compute the frequency response of the filter and discuss the significance of k.

Given the below filter:



d. Derive the frequency response $H(e^{j\omega}) = Y(e^{j\omega})/X(e^{j\omega})$ of this filter.

e. Prove that $|H(e^{j\omega})|^2 = 1$ when $a = -b$.

Oppgave II

Den generelle rekkeutviklinga av signalet $x(t)$ over intervallet $t \in [T_1, T_2]$ kan skrives

$$x(t) = \sum_k \alpha_k \phi_k(t).$$

Vi krever at funksjonene $\{\phi_k(t)\}$ er *lineært uavhengige.*

a. Hvorfor er lineær uavhengighet viktig ved rekkeutvikling? Forklar også hva vi mener med *konvergens i middel* over det ønskete intervallet.

Det er også ofte hensiktsmessig å bruke *ortonormale basisfunksjoner.*

b. Sett opp betingelsen for at basisfunksjonene for den gitte rekka skal være ortonormale, og forklar hvorfor vi gjerne benytter slike funksjonssett.

c. Kan du enkelt bevise at funksjone $\phi_{2k} = t^{2k}$ er ortogonale på funksjonene $\phi_{2l+1} = t^{2l+1}$ over intervallet $t \in [-T_0, T_0]$ for alle heltallsverdier k og l?

En unitær 4×4 hadamard-transform kan skrives

$$\mathbf{H_4} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

d. Bevis at kollonnene i matrisa er innbyrdes ortonormale (når vi inkluderer skaleringsfaktoren $1/2$). Hva er den inverse transformen da?

e. Forklar hvordan hadamard-transformen kan brukes i kompresjon av signaler og argumenter for hvorfor en slik metode kan være fordelaktig.

Problem II

The general series expansion of the signal $x(t)$ over the interval $t \in [T_1, T_2]$ can be expressed as

$$x(t) = \sum_k \alpha_k \phi_k(t).$$

We require that the basis functions be *linearly independent.*

a. Why is linear independence important in series expansions? Explain also what is meant by *convergence in the mean* for series expansions over the given interval.

It is also often desirable to use *orthonormal basis functions.*

b. Write down the conditions for the basis functions in the given series to be orthonormal, and explain why we use the is type of basis.

c. Can you find a simple proof why the functions $\phi_{2k} = t^{2k}$ are orthogonal to the functions $\phi_{2l+1} = t^{2l+1}$ over the interval $t \in [-T_0, T_0]$ for all integer values of k and l?

A unitary 4×4 Hadamard transform can be written as

$$\mathbf{H_4} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

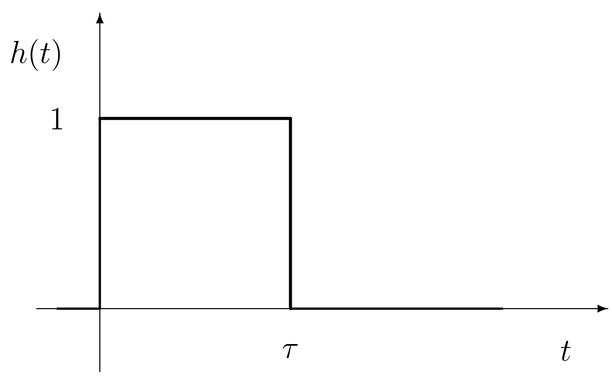
d. Prove that the columns in the matrix are mutually orthonormal (when including the scaling factor $1/2$). What is the inverse of the transform then?

e. Explain how the Hadamard transform can be used in signal compression systems and argue why such a method may be beneficial.

Oppgave III

a. Beskriv nyquist-kriteriet for feilfri, tidsdiskret transmisjon matematisk og med ord både for både tids- og frekvensplanet.

Anta at impulsresponsen til en kanal er som angitt i figuren.



b. i. Finn minste pulsavstand som kan benyttes for eksakt overføring (fremdeles uten støy).

   ii. Skisser det mottatte signalet når de sendte pulsene er impulser med amplituder (skaleringsfaktorer) $[1, 2, -1, 3]$ og det sendes med litt større pulsavstand enn minimum.

c. Beregn frekvensresponsen til kanalen.

d. i. Bevis ut fra de oppnådde resultatene over at relasjonen

$$\frac{\tau}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(\tau F + m\frac{\tau}{T}) = 1$$

   gjelder uavhengig av F for et område av verdier for τ/T.

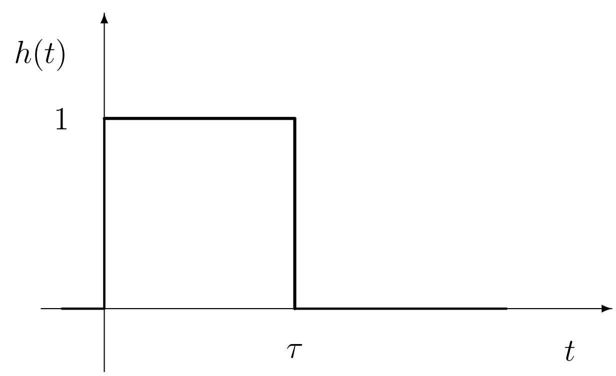
   ii. Finn gyldighetsområdet der relasjonen gjelder eksakt.

e. Hva er det som begrenser antall amplitudenivåer som kan brukes ved digital transmisjon? Gi en så nøyaktig kvantitativ beskrivelse som du kan.

Problem III

a. Describe the Nyquist criterion for error-free, time discrete transmission mathematically and in words both for the time- and the frequency domains.

Assume that the impulse response of a channel is given as in the below figure.



b. i. Find the minimum pulse distance that can be used for exact transmission (still without noise).

   ii. Sketch the received waveform when the transmitted pulses are impulses with amplitudes (weights) $[1, 2, -1, 3]$ and the signal is transmitted with pulse intervals somewhat larger than the minimum.

c. Derive the frequency response of the channel.

d. i. Prove from the above that the relation

$$\frac{\tau}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(\tau F + m\frac{\tau}{T}) = 1$$

   is valid independently of F for a range of τ/T.

   ii. Find the range for which the relation is exact.

e. What limits the number of amplitude levels that can be used for practical digital transmission? Make a quantitative evaluation which is as exact as possible.

Enclosure: Fourier representations

Analog signals

Fourier transform:

$$X(j\Omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt$$

Inverse transform:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\Omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$$

Fourier series of finite length signals ($t \in [0, T_0]$) or periodic signals (Period: T_0):

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{j\frac{2\pi}{T_0}kt}$$

Coefficients:

$$\alpha_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt}dt$$

Time discrete signals

Fourier transform, DTFT:

$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

Inverse DTFT:

$$x(n) = \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

Transform of finite length signals ($n \in [0, N-1]$), or series expansion of periodic signals (Period N), DFT:

$$X(k) = \mathcal{DFT}\{x(n)\} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

Inverse DFT:

$$x(n) = \mathcal{IDFT}\{X(k)\} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

Properties of the Fourier transform of infinite, continuous signals

Given:

$$X_i(j\Omega) = \mathcal{F}\{x_i(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_i(t)e^{-j\Omega t}dt$$

Linearity:

$$ax_1(t) + bx_2(t) \Longleftrightarrow aX_1(j\Omega) + bX_2(j\Omega)$$

Time shift:

$$x(t-\tau) \Longleftrightarrow e^{-j\Omega\tau}X(j\Omega)$$

Frequency shift:

$$x(t)e^{-j\Omega_0 t} \Longleftrightarrow X(j(\Omega - \Omega_0))$$

Time domain convolution:

$$x_3(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau \Longleftrightarrow X_3(j\Omega) = X_1(j\Omega)X_2(j\Omega)$$

Multiplication of functions:

$$x_3(t) = x_1(t)x_2(t) \Longleftrightarrow X_3(j\Omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(jU)X_2(j(\Omega - U))dU$$

Parseval's theorem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\Omega)|^2 d\Omega$$