TMA4140 — Diskret Matematikk

Eksamen 15 des. 2011 — Løsningsforslag

Oppgave 1 a) De to grafene er isomorfe. En (av flere mulige) isomorfi-avbildninger er F definert ved:
$F(a)=1$, $F(b)=6$, $F(c)=4$, $F(d)=5$, $F(e)=2$, $F(f)=3$.

b) Dersom man fjerner en hvilken som helst kant i grafen G så vil nøyaktig to noder få odde grad, mens alle de øvrige nodene vil ha partalls grader. Ifølge Eulers teorem vil den nye grafen ha en Eulervei (eller Eulersti), men ikke noen Eulerkrets.

Oppgave 2 Vises ved induksjon. Vi har at $(F_1, F_2)=1$. Anta $(F_{n-1}, F_n)=1$. Siden $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ så må $(F_n, F_{n+1})=1$.
(Anta nemlig $(F_n, F_{n+1})=d$, $d>1$. Da vil $d \mid F_{n-1}$, siden $d \mid (F_{n+1}-F_n)=F_{n-1}$. Siden $d \mid F_n$ så vil $(F_{n-1}, F_n) \geq d > 1$, hvilket er en motsigelse. Altså er $(F_n, F_{n+1})=1$.)

Oppgave 3 a) Siden $(110, 273) = 1$, så finnes $a \in \mathbb{Z}$ slik at $110a \equiv 1 \pmod{273}$.
a finnes ved den Euklidske algoritmen:

$$273 = 110 \cdot 2 + 53$$
$$110 = 53 \cdot 2 + 4$$
$$53 = 4 \cdot 13 + 1$$

Herav får vi:

$$1 = 53 - 4 \cdot 13 = 53 - (110 - 53 \cdot 2) \cdot 13$$
$$= -110 \cdot 13 + 53 \cdot 27 = -110 \cdot 13 + (273 - 110 \cdot 2) \cdot 27$$
$$= 273 \cdot 27 + 110 \cdot (-67).$$ Altså $\underline{a = -67}$

Multiplisér $110x \equiv 157 \pmod{273}$ på begge sider med $a = -67$:

$$x \equiv 110 \cdot (-67)x \equiv 157 \cdot (-67) \equiv -10519$$
$$\equiv 128 \pmod{273}$$, siden
$$-10519 + 273 \cdot 39 = 128.$$

Altså $\underline{\underline{x = 128}}$

b) Ved Fermat er $2^{330} \equiv 1 \pmod{31}$, siden $2^{30} \equiv 1 \pmod{31}$. Nå er $2^5 = 32 \equiv 1 \pmod{31}$

$$2^{343} = 2^{330} \cdot 2^{13} = 2^{330} \cdot 2^5 \cdot 2^5 \cdot 2^3 \equiv 8 \pmod{31}.$$

Altså $2^{343} + 1 \equiv 9 \pmod{31}$. Da er $\underline{\underline{x = 9}}$

Oppgave 4

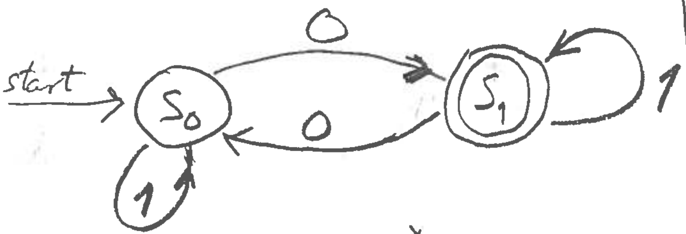
Helene kan plukke $\binom{8}{4}$ forskjellige utvalg av 4 bøker. For hver av disse utplukk kan Karl velge $\binom{4}{2}$ forskjellige utvalg av 2 bøker av de resterende 4 bøkene. (Kristin vil da nødvendigvis få de 2 siste bøkene.)

Antall forskjellige fordelinger er altså

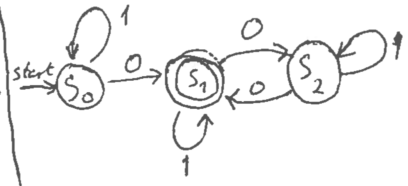
$$\binom{8}{4}\binom{4}{2} = \frac{8!}{4!\,4!}\cdot\frac{4!}{2!\,2!} = \underline{\underline{420}}$$

Oppgave 5

a)



Alternativ løsning:

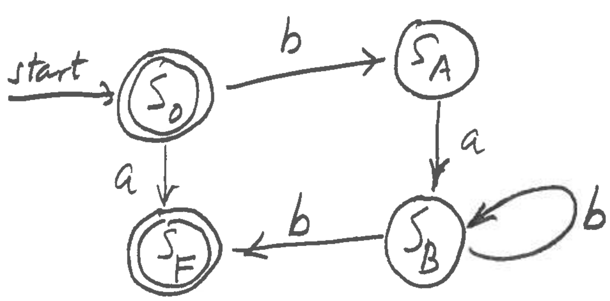


b) $1^*0\{1 \cup 01^*0\}^*$

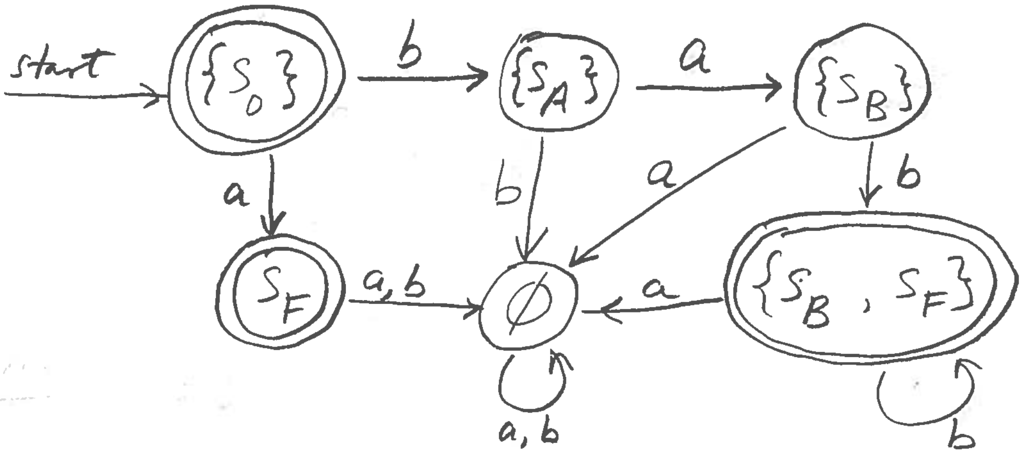
Oppgave 6

a) $\lambda \cup a \cup bab^*b$

b) Ved å følge lærebokens beskrivelse av hvordan man fra en regulær grammatikk danner en (ikke-deterministisk) tilstandsautomat som gjenkjenner samme språket, får man:



Ved å følge lærebokens beskrivelse av hvordan man fra en ikke-deterministisk tilstandsautomat konstruerer en deterministisk automat som gjenkjenner samme språket, får man den søkte M:



SVARKUPONG

Kryss av det du mener er riktige svar, inntil 10 kryss. Et riktig satt kryss gir 1 poeng, og hvert kryss mer enn 10 gir −3 poeng. Merk denne siden med kandidatnummer, og lever den.

Kandidatnummer:

	Alt 1	Alt 2	Alt 3	Alt 4
Deloppgave 1		X		
Deloppgave 2			X	
Deloppgave 3		X	X	X
Deloppgave 4		X		
Deloppgave 5	X			
Deloppgave 6				X
Deloppgave 7	X			
Deloppgave 8			X	