Løsningsforslag for kontinuasjonseksamen i Informasjons- og signalteori, 3. august 2009

Oppgave 1

a) Linearitet

$$\left.\begin{aligned} y_1(n) &= \mathcal{H}\{x_1(n)\} \\ y_2(n) &= \mathcal{H}\{x_2(n)\} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathcal{H}\{a x_1(n) + b x_2(n)\} = a y_1(n) + b y_2(n)$$

Stabilitet

$$|x(n)| \leq M_x < \infty, \ \forall n \Rightarrow |y(n)| \leq M_y < \infty, \ \forall n$$

Tidsinvarians

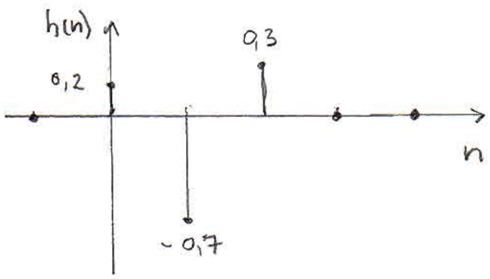
$$y(n) = \mathcal{H}\{x(n)\} \Rightarrow \mathcal{H}\{x(n-k)\} = y(n-k), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Systemet må være lineært og tidsinvariant for å kunne beskrives entydig ved $h(n)$

b) $$y(n) = 0{,}2 \cdot \left[x(n) - 3{,}5\, x(n-1) + 1{,}5\, x(n-2)\right]$$

$$= 0{,}2\, x(n) - 0{,}7\, x(n-1) + 0{,}3\, x(n-2)$$

c) $$h(n) = \mathcal{H}\{\delta(n)\} \Rightarrow h(n) = 0{,}2\delta(n) - 0{,}7\delta(n-1) + 0{,}3\delta(n-2) = \begin{cases} 0{,}2 & n=0 \\ -0{,}7 & n=1 \\ 0{,}3 & n=2 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$



d) $$H(\omega) = \text{DTFT}\{h(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\omega n} = 0{,}2 - 0{,}7\, e^{-j\omega} + 0{,}3\, e^{-j2\omega}$$

Alternativt kan vi ta DTFT av diff. ligningen i b)

$$Y(\omega) = 0{,}2\, X(\omega) - 0{,}7\, X(\omega) e^{-j\omega} + 0{,}3\, X(\omega) e^{-j2\omega}$$

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = 0{,}2 - 0{,}7\, e^{-j\omega} + 0{,}3\, e^{-j2\omega}$$

Oppgave 2

a) $t = nT = \frac{n}{F_s}$

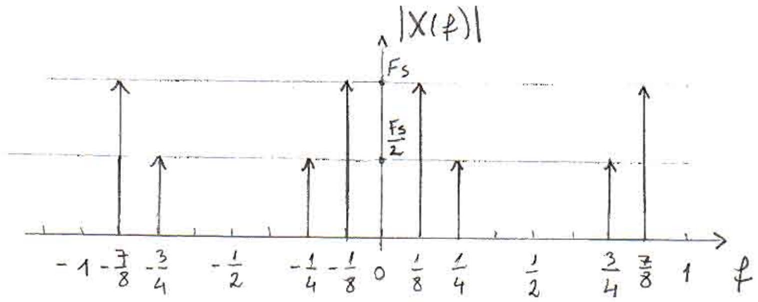
$$x_a(t) = 2\cos\left(2\pi \frac{F_1}{F_s} n\right) + \cos\left(2\pi \frac{F_2}{F_s} n\right)$$

$$= 2\cos(2\pi f_1 n) + \cos(2\pi f_2 n)$$

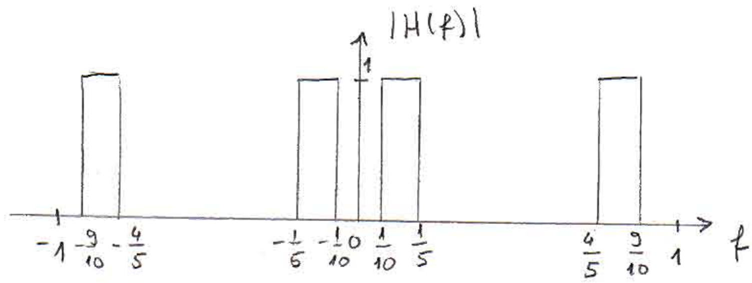
der $f_1 = \frac{1}{8}$ og $f_2 = \frac{1}{4}$

Samplingsteoremet er oppfylt fordi samplingsfrekvensen F_s er større enn to ganger den største frekvenskomponenten i signalet, dvs. $F_s > 2F_2$

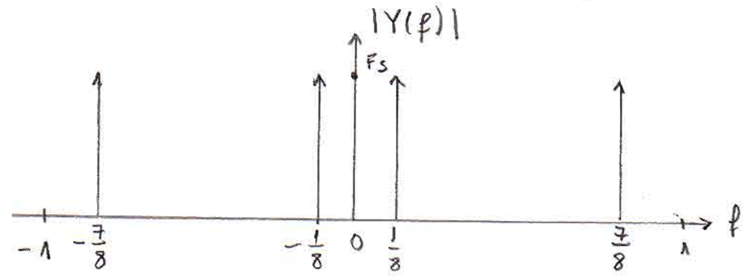
b)



c)



d)



e) Cosinus-komponenten med frekvens F_2 blir filtrert bort, og utgangssignalet er dermed gitt ved

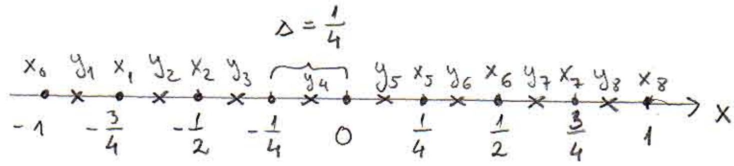
$$y(n) = 2\cos(2\pi f_1 n)$$

Oppgave 3

a) $P_X = E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx = 2\int_0^1 x^2(1-x)\,dx = 2\left[\int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x^3 dx\right]$

$= 2\cdot\left[\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 - \frac{1}{4}x^4\Big|_0^1\right] = 2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) = 2\cdot\frac{4-3}{12} = \frac{1}{6}$

b)



Desisjonsgrensene er merket med sirkler.
Representasjonsgrensene ligger midt mellom desisjonsgrensene og er merket med kryss.

c) Bruker tilnærmingsformelen

$$\sigma_q^2 = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{(1/4)^2}{12} = \frac{1}{16\cdot 12} = \frac{1}{192}$$

$$SNR = \frac{P_X}{\sigma_q^2} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{16\cdot 12}} = 32$$

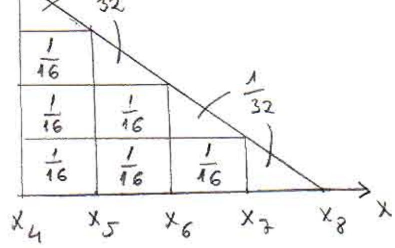
Uttrykt i dB vi har: $SNR = 10\log_{10} 32 = 15{,}05\,\text{dB}$

d) Vi har 8 forskjellige kildesymbolene som tilsvarer representasjonsverdiene og har sannsynligheter $p_1, p_2, \ldots, p_8$.

Entropien er gitt ved: $H = E[I] = \sum_{i=1}^{8} p_i \log_2 \frac{1}{p_i}$ [bit]

der $p_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_X(x)\,dx$.

Vi bruker følgende figur for beregning av p_i



$p_1 = p_8 = \frac{1}{32}$

$p_2 = p_7 = \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{3}{32}$

$p_3 = p_6 = 2\cdot\frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{5}{32}$

$p_4 = p_5 = 3\cdot\frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{7}{32}$

$$H = 2\cdot\left[\frac{1}{32}\log_2 32 + \frac{3}{32}\log_2\frac{32}{3} + \frac{5}{32}\log_2\frac{32}{5} + \frac{7}{32}\log_2\frac{32}{7}\right] = 2{,}749 \text{ bit}$$

e) $\lceil \log_2 8 \rceil = 3$ bit

y_1	000
y_2	001
y_3	010
y_4	011
y_5	100
y_6	101
y_7	110
y_8	111

f) Vi tilordner færre bit til mer sannsynlige kildesymbolene, samtidig som vi passer på at ingen kodeord blir prefiks i et annet kodeord.

y_4	00
y_5	01
y_3	100
y_6	101
y_2	1100
y_7	1101
y_1	1110
y_8	1111

$$\bar{L} = \sum_{i=1}^{\infty} l_i p_i =$$

$$= 2\left[2 \cdot \frac{7}{32} + 3 \cdot \frac{5}{32} + 4 \cdot \frac{3}{32} + 4 \cdot \frac{1}{32}\right]$$

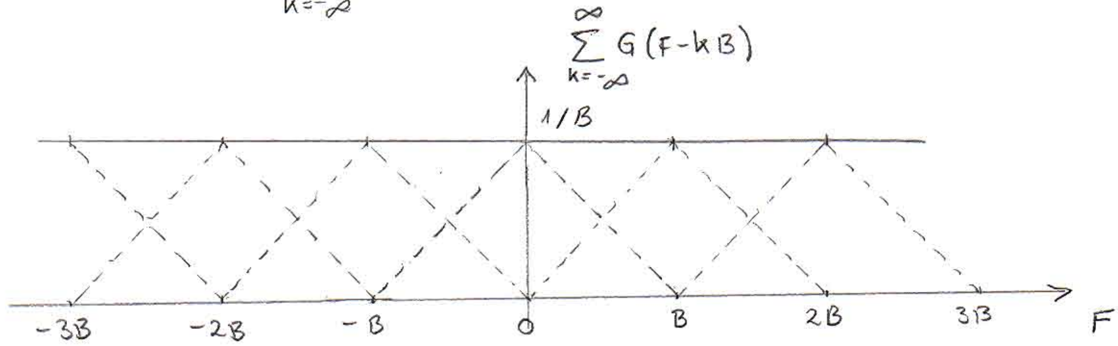
$$= \frac{45}{16} = 2{,}8125 \text{ bit}$$

g) Den nedre grensen på $\bar{L}$ er gitt ved signalets entropi $H = 2{,}749$ bit.

Oppgave 4

a) For at overføring uten ISI skal være mulig, må kanalen oppfylle Nyquist-kriteriet. Siden $G(F)$ er gitt, er det enklest å bruke Nyquist-kriteriet i frekvensdomenet; dvs. finne ut om det finnes en T slik at

$$\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} G\left(F-\frac{k}{T}\right)=1 \qquad (*)$$



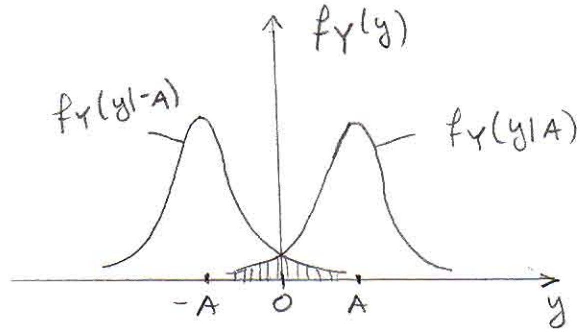
Fra figuren over, ser vi at

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} G(F-kB)=\frac{1}{B}$$

Velger vi $T=\frac{1}{B}$, er kriteriet $(*)$ oppfylt.

Dette viser at overføring uten ISI er mulig, og at den maksimale signaleringshastigheten er $\frac{1}{T}=B \ \frac{\text{kanalsymb.}}{\text{s}}$

b)



c) Sannsynligheten for overføringsfeil er lik det skraverte arealet i figuren over.

$$P(\text{feil}) = 2\cdot\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2}}\,e^{-\frac{(x+A)^2}{2\sigma_w^2}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-(x+A)^2}\,dx = \left|\begin{matrix} t = x+A \\ dt = dx\end{matrix}\right|$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_A^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \operatorname{erfc}(A)$$