Norwegian University of Science and Technology
Department of Telematics

Contact during exam [Faglig kontakt under eksamen]:
Poul E. Heegaard (94321 / 99286858)

EXAM IN COURSE [EKSAMEN I EMNE]
TTM4110 Dependability and Performance with Discrete event Simulation [Pålitelighet og ytelse med simulering]

Wednesday [Onsdag] 2008-12-03
09:00 – 13:00

The English version starts on page 2.

Bokmålsutgaven starter på side 6.

Hjelpemidler:
C - Graham Birtwistle: DEMOS - A system for Discrete Event Modelling on Simula. Formula sheet for TTM4110 Dependability and Performance with Discrete Event Simulation is attached. Predefined simple calculator.
Graham Birtwistle: DEMOS - A system for Discrete Event Modelling on Simula. Formelsamling i fag TTM4110 Pålitelighet og ytelse med simulering er vedlagt. Forhåndsbestemt enkel kalulator.]

Sensur 2009-week 1

English version[1]

In this exam we will study a ticketing system for railway passengers. To avoid queues at the platforms the railway company has removed the control gates where you previously "checked in, checked out". Instead the passengers will "be in, be out" which means that they are detected by their eIdentity (eID) that is assumed to be stored on the SIM-card in their mobile phones. The SIM-card is assumed to be have an embedded WLAN radio so when they enter the train their eID is sent via a wireless network to the ticket server (TS) which determines the departure station and travel class (first or second) and uses the the SMS server to send a ticket via the mobile network to the passenger. At the destination station when the system detects that the passenger leaves the train the traveller's account is deducted accordingly. It is assumed that each passenger's identity can be determined from the eID. See Figure 1 for an illustration of the ticket system architecture[2].

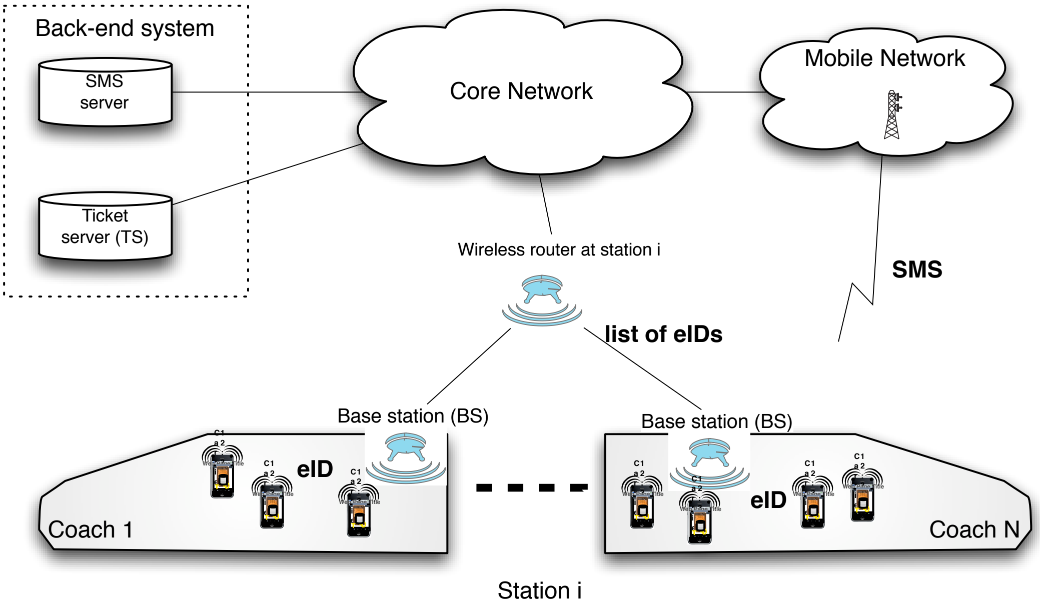

Figure 1: Illustration of the "be-in, be-out" ticket system.

The railway company depends on correct registration of eIDs from all stations a passenger passes along the route. The first eID registered determines the departure station, while the last in a sequence of eIDs is the arrival station. All eIDs in between is from transit stations along the route. If an eID at one of the transit stations, i.e. between the departure and arrival stations, is lost the ticket is free. Furthermore, if three or less eIDs are registered the ticket is free. The price of the ticket depends of the number of stations travelled, so for the railway company even loosing eIDs in the beginning and end of the trip implies lost revenue for the railway company.

The probability of loosing an eID at any station is $p_{\text{eID}} = 0.01$. The ticket costs 1 €/station. An n-station train ride consists of a departure station, $n-1$ transit stations, and an arrival station. The total cost of an n-station train ride is n €.

[1] In case of divergence between the English and the Norwegian version, the English version prevails.

[2] Details regarding confirmation, corrections, reservations, and ticket control are left out for simplicity.

a) Assume that a passenger X travels $n = 4$ stations train ride. What is the probability that the passenger is charged the full price 4 € for the trip? What is the probability that only 3 € can be charged due to eID loss? What is the probability that the ticket is free? What is the expected price of a ticket on a $n = 4$ stations train ride?

Let's now focus on the SMS server. It has one processor with negative exponentially distributed service times with expectation μ_{SMS}^{-1}=0.5. The messages to be processed arrive at the server according to a Poisson process with intensity $\lambda_{\mathrm{SMS}} = 0.5$. First, we assume that the SMS server has an infinite queuing capacity.

b) Make a state diagram (Markov model) of the SMS server in order to study the message sojourn times in the server. What is used to identify the state of the server in this respect? Use Kendall notation to describe the queuing model this represent. Determine the expected sojourn time in the SMS server (queuing and service). What is the probability of non-zero waiting time, i.e., $P(W > 0)$?

Now, assume that the SMS server has a finite queuing capacity of $q_{\max} = 2$ and that requests are served in the same order as they arrive.

c) How is this system described in Kendall's notation? Make a state diagram (Markov model) of the SMS server with finite queuing capacity of $q_{\max} = 2$. Determine the steady state probabilities in your SMS server model. Obtain numerical values of the expected number in the system, the variance of the number in the system, and the SMS message loss ratio.

The passengers arrive at station i according to a Poisson process with intensity $\xi = 0.01$ [min^{-1}]. The trains arrive at station i with interarrival time following a Weibull$-k$ distribution with $\lambda = 0.1$ scale parameter and shape parameter $k = 2$. (See the table in the formula sheet. In addition you need to know $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ and it might be helpful to know that $\int_0^\infty t \cdot e^{-(a \cdot t)^2} dt = \frac{1}{2a^2}$).

d) What is the probability density distribution of the time to next train arrives observed from an arbitrary point in time (forward recurrence time)? What is the expected time until next train arrives observed from an arbitrary point in time? What is the train interarrival time distribution when $k = 1$? What is the expected time to next train in this case?

The railway company is interested in evaluation of the performance of the wireless router. The company needs to know if the eIDs of all passengers will be registered in the short time a train is at the station. It is found that the wireless router and its communication with the base stations on board the train is the bottleneck so the back-end system (ticket and SMS servers) and the core and mobile networks are ignored. The performance of a router at an arbitrary station i is to be simulated and the effect of the eID losses to be estimated.

e) Describe a random variate generator of the train interarrival times that is Weibull distributed with scale parameter $k = 2$. Justify the choice of method.

The wireless router at station i is polling each base station (one for each coach on the train) in sequence. It starts with the base station in coach 1, reads all eIDs collected by this base station, and continue to coach $2, 3, \cdots$ and so on until all base stations on the train are polled. The time it takes to transfer the eIDs from the base station to the wireless router depends on the number of eIDs which again depends on the number of passenger in each coach. The probability of loosing an eID is $p_{\mathrm{eID}} = 0.01$. The polling of the base stations starts when the doors are closed. If the train get out of reach of the wireless router before all eIDs are registered the remaining eIDs are lost.

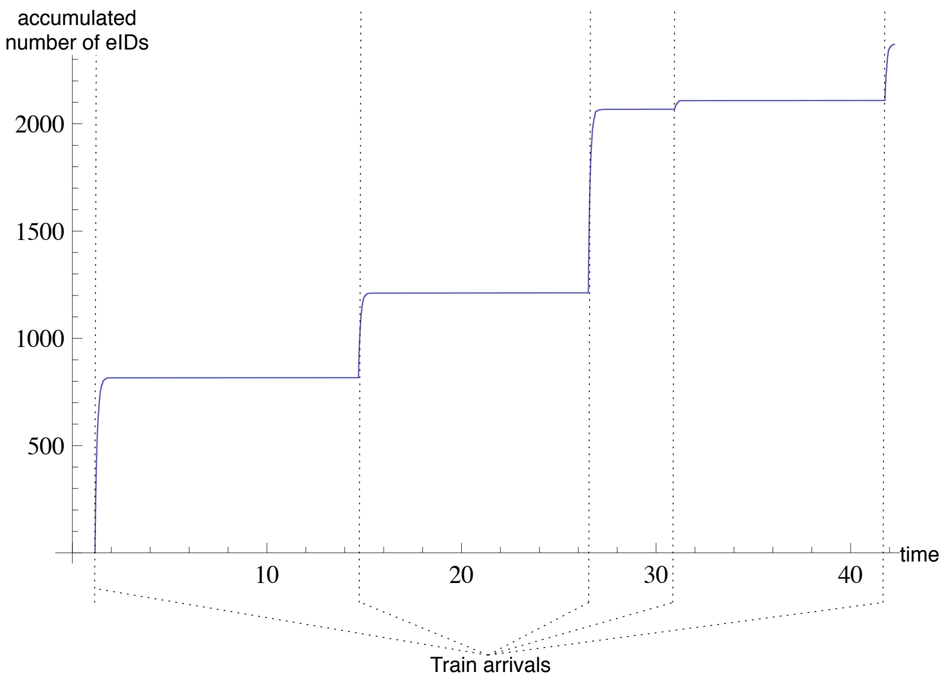

Figure 2: Plot of accumulated number of eIDs at a station as a function of time

f) Regard one station and one train stop. Identify all random behaviours (times, numbers) that constitutes the dynamics of the simulation model of the base stations and the wireless router at the station. Specify the entities and resources in your simulation model and describe the model by use of activity diagrams. How is the system state defined? What is an *event* and give examples of events in your model? Show clearly in your model how you collect data required to evaluate the performance as requested.

Measurements on the wireless router records the time of eID arrivals. In Figure 2 a plot of the accumulated number of eIDs received up to time t is given. The number of eIDs observed is $n = 2980$ and the sum of all observed eIDs interarrival times is $\sum_{i=1}^{n} T_i = 21.9667$ while the sum of their squares is $\sum_{i=1}^{n} T_i^2 = 117.462$.

g) Estimate the average interarrival time $\bar{T}$ and its standard error $S_{\bar{T}}$. Is it reasonable to assume that the interarrival times of eIDs are independent, identically distributed? Justify your answer.

The back-end system consists of two servers (ticket and SMS server) that are installed on one processing unit (PU) each. The railway company has three available PUs. Figure 3 shows an example with the ticket server running on processing unit 1 (PU_1) while the SMS server is running on PU_2. The third (PU_3) is a spare unit for both. If PU_1 fails, a reconfiguration of the ticket server occurs and the server is moved to PU_3. Similar for the SMS server if PU_2 fails. No processing takes place during reconfiguration. After a repair the system is not reconfigured (but a re-indexing of the PUs takes place, so the ticket server runs on PU_1, etc) A single PU cannot host more than one server process. The PU_i, ($i = 1, 2, 3$), fails according to a Poisson process with failure rate λ_{PU}. They are repaired by one shared repairman with repair time that is negative exponentially distributed (n.e.d.) with expected time μ_{PU}^{-1}. The reconfiguration time is n.e.d. with rate γ.

h) Make a model of the subsystem that consists of the ticket and SMS servers, and the three

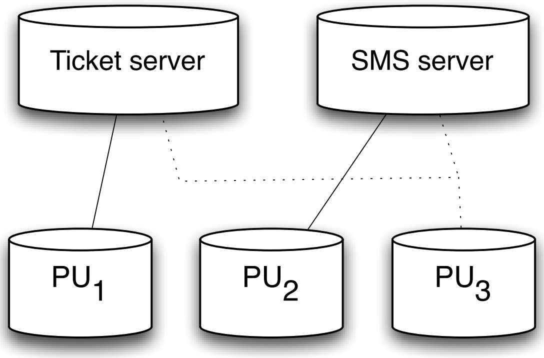

Figure 3: Subsystem of ticket and SMS servers provided on three processing units

PUs with the objective to determine the (simultaneous) availability of the two services. Identify the system failure states where either ticket or SMS servers are not working. Establish a set of equations to determine the steady state probabilities in your model (the equations should not be solved). Given that the state probabilities are known, what is the steady state availability for this subsystem? What is the system failure rate?

The unavailability of the ticket and SMS servers is not critical in the periods where there are no trains at any stations, i.e. no eIDs are sent, i.e. if the back-end system is failed while no trains are on a station no eIDs are lost. It is of interest to find the fraction of the time when eIDs are lost due to the back-end system failure. Let's assume that the time between arrivals of any train at any station is n.e.d. with expectation β^{-1}. The time at the station when eIDs are transferred is assumed to be n.e.d. with expectation α^{-1}.

i) Extend your dependability model from the previous task to include the arrival and departure of trains at a station (i.e. start/stop transmission of eIDs). Define the system failure states to be the states where eIDs are lost.

Norsk bokmål utgave[3]

I denne oppgaven skal vi studere et billetteringssystem for togpassasjerer. For å unngå køer på plattformen ha togselskapet bestemt seg for å fjerne slusene hvor passasjerene "sjekket in, sjekket ut". I stede vi de ha et "be in, be out" system hvor de reisende regitreres gjennom deres eIdentitet (eID) som vi antar ligger lagret på SIM-kortet i mobiltelefonene. Vi antar at SIM-kortene har en innbygget WLAN radio slik at når passasjerene entrer toget vil deres eID sendes via WLAN nettet på stasjonen til ticket server (TS) som finner avreise stasjon og korrekt klasse (første eller andre). Ticket server bruker SMS server for å sende en billett via mobilnettet til den nye passasjeren. På ankomststasjonen vil systemet oppdage at passasjeren forlater toget og den reisendes konto belastes tilsvarende. Det er antatt at passasjerenes identiet kan bestemmes korrekt fra eIDen Se figur 1 (side 2) for en illustrasjon av billettsystem-arkitekturen (ticket system architecture)[4].

Tog-selskapet er avhengig av korrekt registrering av alle eIDer på alle stasjoner som passasjerene passerer for på kunne utstede korrekt billett. Den første registrerte eID bestemmer avgangsstasjonen, mens den siste i en sekvens av eIDer bestemmer endestasjonen for reisen. Alle eIDer registrert i mellom er transittstasjoner langs ruten. Hvis en eID ved en transittstasjon tapes vil reisen bli gratis. Videre vil en reise hvor kun tre eller færre eIDer registreres i sekvens gi gratis reise. Prisen på en billett er avhengig av antall stasjoner så derfor vil selv et tap av en eID i starten og enden av en reise påføre togselskapet tap i inntekter.

Sannsynligheten for tapt eID på enhver stasjon er $p_{\text{eID}} = 0.01$. Billetten koster 1 €/stasjon. En n-stasjons togreise består av en avreise og en ankomst stasjon, og $n-1$ transitt stasjoner. Den totale prisen for en n-stasjon togreise er n €.

a) Anta at passasjer X tar en $n = 4$ stasjons togreise. Hva er sannsynligheten for at passasjeren må betale full pris 4 € for turen? Hva er sannsynligheten for at turen bare koster 3 € på grunn av tap av eID? Hva er sannsynligheten for at billetten er gratis? Hva er forventet pris for en $n = 4$ stasjons togreise?

La oss nå fokusere på SMS-serveren [SMS-tjeneren]. Den har kun én prosessor med negativ eksponentialfordelt (n.e.d.) betjeningstid med forventning $\mu_{\text{SMS}}^{-1} = 0.5$. Medlingene som skal behandles av SMS-serveren ankommer i henhold til en Poissonprosess med intensitet $\lambda_{\text{SMS}} = 0.5$. Først antar vi at SMS-serveren har uendelig køkapasitet.

b) Lag et tilstandsdiagram (Markovmodell) av SMS-serveren for å studere tiden en melding er i serveren. Hva vil du bruke for a representere tilstanden til serveren med hensyn på dette? Bruk Kendalls notasjon for å beskrive kømodellen som dette representerer. Bestem forventet tid i systemet [expected sojourn time] i SMS-serveren (køtid og betjeningstid). Hva er sannsynligheten for ventetid større enn null (non-zero waiting time, i.e., $P(W > 0)$)?

Anta nå at SMS-serveren har endelig køkapasitet $q_{\max} = 2$ og at meldinger er betjent i samme rekkefølge som de ankommer.

[3] I tilfelle uoverensstemmelse mellom den engelske og norske utgaven, er det den engelske som er gjeldende. Engelske betegnelser anvendes hvor ingen norsk oversettelse ble funnet.

[4] Detaljer om bekreftelse, korreksjoner, reservasjoner, og billettkontroll er utelatt for å forenkle beskrivelsen.

c) Hvordan er dette beskrevet ved Kendalls notasjon? Lag et tilstandsdiagram (Markov-modell) av SMS-serveren med endelig køkapasitet $q_{\max} = 2$. Bestem de stasjonære tilstandssannsynlighetene (steady state probabilities) i SMS-server modellen. Beregn nummeriske verdier for forventet antall [expected number] i systemet, variansen [variance] av antall i systemet, og SMS meldingestapsratio [SMS message loss ratio].

Passasjerene ankommer stasjon i i henhold til en Poissonprosess med intensitet $\xi = 0.01$ [min^{-1}]. Togene ankommer stasjon i med interankomsttider i henhold til en Weibull$-k$ fordeling med skala parameter $\lambda = 0.1$ and formfaktor [shape parameter] $k = 2$. (Se tabellen i formelsamlingen. I tillegg er det nyttig å vite at gammafunsjonen har følgende verdier $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ og at $\int_0^\infty t \cdot e^{-(a \cdot t)^2} dt = \frac{1}{2a^2}$).

d) Hva er sannsynlighetstetthetsfunksjonen for tid til neste togankomst fra et vilkårlig tidspunkt [forward recurrence time]? Hva er forventet tid til neste togankomst når du ankommer stasjonen på et tilfeldig tidspunkt? Hva er sannsynlighetstetthetsfunksjonen når $k = 1$? Hva blir forventet tid til neste togankomst fra et vilkårlig tidspunkt nå?

Togselskapet er interessert i å evaluere ytelsen til trådløsruteren [wireless router]. Selskapet trenger å vite om alle eIDer blir registrert i det korte tidsintervallet toget står på stasjonen. Det er kjent at trådløsruteren og dennes kommunikasjon med basestasjonene om bord på toget er flaskehalsen i systemet. Back-end systemet (ticket- og SMS-servere) og kjerne [core] og mobil nettet er derfor antatt uten innflytelse på ytelsen. Ytelsen til en trådløsruter på en vilkårlig stasjon i skal simuleres og effekten av eID tap skal estimeres.

e) Beskriv en tilfeldigtall-generator [random variate generator] for interankomsttidene til toget som er Weibull-fordelt med formfaktor [scale parameter] $k = 2$. Begrunn valg av metode.

Trådløseruteren på stasjon i poller hver basestasjon (en i hver vogn på toget) i en fast sekvens. Den starter med vogn 1, leser alle eIDene som er samlet inn av denne basestasjonen, og fortsetter til vogn $2, 3, \cdots$ og så videre til alle basestasjonene på toget er pollet. Tiden det tar for å overføre eIDene fra en basestasjon til trådløseruteren er avhengig av antall eIDer, som igjen er avhengig av antall passasjerer i vognen. Sannsynligheten for at en eID tapes er $p_{\text{eID}} = 0.01$. Pollingen av basestasjonene starter når dørene lukkes. Hvis toget forlater rekkevidden av den trådløse ruteren før alle eIDer er reigstrert så vil de resterende eIDer bli tapt.

f) Betrakt en stasjon og ett togstopp. Identifisér tilfeldig oppførsel (tider, antall) som utgjør dynamikken i simuleringsmodellen din av basestatsjonene og den trådløse ruteren på stasjonen. Spesifisér entiteter og ressurser i modellen og beskriv denne ved hjelp av aktivitetsdiagram. Hvordan er systemtilstanden definert? Hva er en *hendelse* (*event*) og gi eksempler på hendelser i din modell? Vis tydelig hvordan du samler inn nødvendig data for å evaluere ytelsen som ønsket.

Målinger på trådløsruteren registrerer tidspunkt for ankomst av hver eID. I figur 2 (side 4) vises et plott av det akkumulerte antall eIDer som er mottatt fram til tidspunkt t. Antall eID observasjoner er $n = 2980$. Summen av interankomsttidspunkt T_i for eIDene er $\sum_{i=1}^{n} T_i = 21.9667$ mens summen av kvadratene er $\sum_{i=1}^{n} T_i^2 = 117.462$.

g) Estimér gjennomsnittlig interankomsttid $\bar{T}$ og dennes *standard error* $S_{\bar{T}}$. Er det rimelig å anta at interankomsttidene til eIDene er uavhengig, identisk fordelte? Begrunn svaret.

Back-end systemet består av to servere (ticket- og SMS-server) som er installert på hver sin processing unit (PU). Togselskapet har tre PUer. Figur 3 viser et eksepel hvor ticket-serveren kjører på processing unit 1 (PU_1) mens SMS-serveren kjører på PU_2. Den tredje (PU_3) er en reserveenhet for begge. Hvis PU_1 feiler så vil ticket-serveren rekonfigureres og flyttes til PU_3. Tilsvarende for SMS-serveren hvis PU_2 feiler. Ingen prosessering finner sted ved rekonfigurering. Etter reparasjon så blir systemet ikke rekonfigurert (men en reindeksering av PUene finner sted hvor ticket-server kjører på PU_1, osv.). En enkel PU kan ikke kjøre mer enn en server. En PU_i, ($i = 1, 2, 3$), feiler i henhold til en Poissonprosess med feilrate λ_{PU}. De blir reparert av en felles reparatør med reparasjonstid som er negativ eksponsielt fordelt (n.e.d.) med forventet tid μ_{PU}^{-1}. Rekonfigureringstiden er n.e.d. med rate γ.

h) Lag en modell av delsystemet som består at ticket- og SMS-servere og tre PUer med hensyn på å bestemme den (samtidige) tilgjengeligheten (availability) av de to tjenestene. Identifisér systemfeiltilstandene hvor enten ticket- eller SMS-serveren ikke virker. Sett opp et sett av ligninger for å bestemme stasjonærsannsynlighetene i modellen din (ligningene skal ikke løses). Anta at tilstandssannsynlighetene er kjent, hva er tilstandstilgjengeligheten for dette delsystemet? Hva er systemfeilraten?

Utilgjengeligheten (unavailability) av ticket- og SMS-serverne er ikke kritisk når det ikke er tog på noen av stasjonene. dvs. ingen eIDer er sent. Dette betyr at hvis back-end systemet feiler når det ikke er tog på noen av stasjonene så vil ikke dete være en systemfeil ettersom ingen eIDer tapes. Det er interessant å bestemme den andelen tid hvor eIDs tapes på grunn av feil i back-end systemet. La oss anta at tid mellom ankomst av tog på en av stasjonene er n.e.d. med forventning β^{-1}. Tiden på stasjonen hvor eIDer skal overføres er n.e.d. med forvetning α^{-1}.

i) Utvid pålitelighetsmodellen fra forrige oppgave slik at ankomst og avgang av tog fra stasjonene (dvs. start/stopp av eID overføring) inkluderes. Definér systemfeiltilstandene til å være tilstandene hvor eIDer blir tapt.

Collection of formulas for
TTM4110 Dependability and Performance with Discrete Event Simulation

General

X	random variable
Ω	sample space
A_i	partition of Ω

Bayes' formula

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i) \times P(A_i)}{\sum_j P(B \mid A_j) \times P(A_j)} = \frac{P(B \mid A_i) \times P(A_i)}{P(B)} \tag{1}$$

Cumulative distribution function (cdf)

$$F_X(x) = P(X \leqslant x),\ \forall x \in \Omega \tag{2}$$

Probability density function (pdf) (X continuous)

$$f_X(x) = \lim_{\mathrm{d}x \to 0} \frac{P(x < X \leqslant x + \mathrm{d}x)}{\mathrm{d}x},\ \forall x \in \Omega \tag{3}$$

Probability mass function (pmf) (X discrete)

$$f_x = P(X = x),\ \forall x \in \Omega \tag{4}$$

j^{th}order **moment** (X continuous)

$$m_j = \mathrm{E}(X^j) = \int_\Omega x^j f(x)\mathrm{d}x,\ j \in \mathbb{N}^* \tag{5}$$

j^{th}order **central moment** (X continuous)

$$\mathrm{E}((X-\mu)^j) = \int_\Omega (x-\mu)^j f(x)\mathrm{d}x,\ j \in \mathbb{N}^* \tag{6}$$

Palm's identity (X continuous, non-negative and real-valued)

$$m_j = \mathrm{E}(X^j) = \int_0^\infty x^j f(x)\mathrm{d}x = \int_0^\infty j x^{j-1}(1 - F(x))\mathrm{d}x,\ j \in \mathbb{N}^* \tag{7}$$

Expected value of X

$$\mu = \mathrm{E}(X) \tag{8}$$

Variance of X

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = E_X\left((X-\mu)^2\right) \tag{9}$$

Standard deviation

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} \tag{10}$$

Coefficient of variation

$$\rho = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{\sqrt{\mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2}}{\mathrm{E}(X)} \tag{11}$$

Expected value of a sum of random variables

$$\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(X_i) \tag{12}$$

Variance of a sum of mutually independent random variables

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) \tag{13}$$

Variance of a sum of non mutually independent random variables

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) \tag{14}$$

Covariance

$$\sigma_{X,Y} = \mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}((X-\mu_X)(Y-\mu_Y)) = \mathrm{E}(XY) - \mu_X\mu_Y \tag{15}$$

Covariance (X and Y continous)

$$\sigma_{X,Y} = \int_\Omega \int_\Omega ((x-\mu_X)\cdot(y-\mu_Y)) f(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \tag{16}$$

Covariance (X and Y discrete)

$$\sigma_{X,Y} = \sum_x \sum_y ((x-\mu_X)\cdot(y-\mu_Y)) f_{x,y} \tag{17}$$

Correlation coefficient

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\cdot\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X\sigma_Y},\ -1 \leqslant \rho_{X,Y} \leqslant 1 \tag{18}$$

Table 1: Characteristics of relevant distributions

$X \sim$	$f(x)$	$F(x)$	$\mathrm{E}(X)$	$\mathrm{Var}(X)$
n.e.d.	$\lambda e^{-\lambda x}$	$1 - e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Erlang-k	$\frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!}\lambda e^{-\lambda x}$	$1 - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda x)^j}{j!} e^{-\lambda x}$	$\frac{k}{\lambda}$	$\frac{k}{\lambda^2}$
Gamma	$\frac{(\lambda x)^{k-1}}{\Gamma(k)}\lambda e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^{\lambda x} u^{k-1} e^{-u} \mathrm{d}u$	$\frac{k}{\lambda}$	$\frac{k}{\lambda^2}$
Weibull	$k\lambda(\lambda x)^{k-1} e^{-(\lambda x)^k}$	$1 - e^{-(\lambda x)^k}$	$\frac{1}{\lambda}\Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)$	$\frac{1}{\lambda^2}\left(\Gamma\left(\frac{2}{k}+1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{k}+1\right)\right)$
Uniform	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{x-a}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Standard Normal, $\mathcal{N}(0,1)$	$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$	$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(u)\mathrm{d}u$	0	1
Normal, $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$	μ	σ^2
Bernoulli	$\begin{cases} p & x=1 \\ 1-p & x=0 \end{cases}$		p	$p(1-p)$
Geometric	$(1-p)^x p$	$1-(1-p)^{x+1}$	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Shifted geometric	$(1-p)^{x-1} p$	$1-(1-p)^x$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Binomial	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	$\sum_{i=0}^{x} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$	np	$np(1-p)$
Poisson	$\frac{\alpha^x}{x!} e^{-\alpha}$	$e^{-\alpha} \sum_{i=0}^{x} \frac{\alpha^i}{i!}$	α	α

Intensity of a point process $X(t)$

$$z(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathrm{E}(N(t+\Delta t) - N(t))}{\Delta t} \tag{19}$$

Rate of a point process $X(t)$

$$\phi(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{P(y < Y \leq y + \Delta t | Y > y)}{\Delta y} \tag{20}$$

Autocovariance of a stationary process $X(t)$

$$\sigma_{XX}(\tau) \equiv \sigma_{X(t)X(t+\tau)} = \mathrm{E}(X(t)X(t+\tau)) - \mu^2 \tag{21}$$

Autocorrelation

$$\rho_X(\tau) = \frac{\sigma_{XX}(\tau)}{\sigma_{XX}(0)} \tag{22}$$

Residual lifetime

$$f(t+a \mid a) = \frac{f(t+a)}{1-F(a)} \tag{23}$$

Forward recurrence time

$$f_T(t) = \frac{P(t < T \leqslant t + \mathrm{d}t)}{\mathrm{d}t} = \int_t^\infty \frac{1}{x} \frac{1}{\mathrm{E}(X)} x f_X(x) \mathrm{d}x = \frac{1 - F_X(t)}{\mathrm{E}(X)} \tag{24}$$

Expected forward recurrence time

$$\mathrm{E}(T) = \frac{\mathrm{E}(X^2)}{2\mathrm{E}(X)} \tag{25}$$

Regular point process $N(t)$ is the number of events and S_r the time to the r^{th} event.

$$P(N(t) < r) = P(S_r > t) \tag{26}$$

Renewal function

$$H(t) = \mathrm{E}(N(t)) = \frac{t}{\mathrm{E}(Y)} + \frac{\mathrm{Var}(Y) - \mathrm{E}(Y)^2}{2\mathrm{E}(Y)^2} + o(1) \tag{27}$$

Traffic

Little's formula

$$\bar{N} = \bar{\lambda} \cdot \hat{W} \tag{28}$$

Offered traffic

$$A = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \, p_i \big|_{n=\infty} \mathrm{E}(X) \tag{29}$$

Carried traffic

$$A' = \sum_{i=0}^{k} \min(i, n) p_i \tag{30}$$

Carried traffic $I(t)$ is the observed resource utilisation over the time interval (t_1, t_2)

$$A' = \frac{1}{t_2 + t_1} \int_{t_1}^{t_2} I(t) \mathrm{d}t \tag{31}$$

Erlang's B-formula

$$E_n(A) = \frac{A^n / n!}{\sum_{\nu=0}^{n} A^\nu / \nu!} \tag{32}$$

Recursive Erlang's B-formula

$$E_n(A) = \frac{A E_{n-1}(A)}{n + A E_{n-1}(A)}, \; n = 1, 2, \cdots, n \tag{33}$$

Time congestion in an Engset's loss system

$$E_{n,s}(\beta) = p_n = \frac{\binom{s}{n} \beta^n}{\sum_{\nu=0}^{n} \binom{s}{\nu} \beta^\nu}, \; s \geqslant n, \; \beta = \frac{\lambda}{\mu} \tag{34}$$

Call congestion in an Engset's loss system

$$B_{n,s}(\beta) = \frac{(s-n)\binom{s}{n} \beta^n}{\sum_{\nu=0}^{n} (s-\nu) \binom{s}{\nu} \beta^\nu}, \; s \geqslant n, \; \beta = \frac{\lambda}{\mu} \tag{35}$$

Erlang's C-formula (probability of waiting in an $M/M/n$ system)

$$E_{2,n}(A) = P(W > 0) = p_n \frac{n}{n - A} = \frac{\frac{A^n}{n!} \frac{n}{n-A}}{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{A^i}{i!} + \frac{A^n}{n!} \frac{n}{n-A}}, \; A < n \tag{36}$$

Expected sojourn time in an $M/M/n$ system

$$\mathrm{E}(S) = \frac{1}{(n-A)\mu} \left(E_{2,n}(A) + n - A \right), \; A < n \tag{37}$$

Waiting time distribution for all customers in an $M/M/n/\infty/FIFO$ system

$$F_W(t) = 1 - E_{2,n}(A) e^{-(n-A)\mu t}, \; t \geqslant 0, \; A < n \tag{38}$$

Jackson network

$$\Lambda_k = \lambda_k + \sum_{j=1}^{K} p_{jk}\Lambda_j,\ k, j = 1, \ldots, K \tag{39}$$

Dependability

Mean Time to First Failure

$$MTFF = \mathrm{E}(T_{FF}) = \int_0^\infty R(t)\mathrm{d}t \tag{40}$$

Mean Time to Catastrophic Failure

$$MTCF = \mathrm{E}(T_{CF}) \tag{41}$$

Mean Time Between Failures

$$MTBF = \mathrm{E}(T_{BF}) \tag{42}$$

Mean Up Time

$$MUT = \mathrm{E}(T_U) \tag{43}$$

Mean Down Time

$$MDT = \mathrm{E}(T_D) \tag{44}$$

Mean Time To Failure

$$MTTF = \mathrm{E}(T_F) = \int_0^\infty \tilde{R}(t)\mathrm{d}t \tag{45}$$

Mean Time Between Failures calculated from a state transition diagram

Ω_W	set of all working states
Ω_F	set of all failed states
q_{ij}	transition intensity from state i to state j
p_i	stationary probability that the system is in state i

$$\frac{1}{MTBF} = \sum_{i\in\Omega_W}\sum_{j\in\Omega_F} p_i \cdot q_{ij} = \sum_{i\in\Omega_W}\sum_{j\in\Omega_F} p_j \cdot q_{ji} \tag{46}$$

Mean Time to First Failure for a system that cannot be repaired and a structure of indenpendent elements with constant failure rate λ_i ($\lambda = \lambda_i, \forall i$).

$$MTFF_{\text{series}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^{-1} \tag{47}$$

$$MTFF_{\text{parallel}} = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} \tag{48}$$

$$MTFF_{k-\text{out}-\text{of}-n} = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{j} \tag{49}$$

Reliability function

$$R(t) = P(T_{FF} > t),\ \text{service delivery starts when the system is new} \tag{50}$$

$$\tilde{R}(t) = P(T_F > t),\ \text{service delivery starts while the system is stationary} \tag{51}$$

$$R_{\text{series}}(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t) \tag{52}$$

$$R_{\text{parallel}}(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - R_i(t)) \tag{53}$$

$$R_{k-\text{out}-\text{of}-n}(t) = \sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i} R(t)^i(1-R(t))^{n-i},\ R_i(t) = R(t),\ \forall i \tag{54}$$

Let $I(t) = \begin{cases} 1 & \text{the system is up at time } t \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

Instantaneous availability

$$A(t) = P(I(t) = 1) \tag{55}$$

Interval availability between t_1 and t_2

$$A(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} A(t)\mathrm{d}t = \mathrm{E}\left(\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} I(t)\mathrm{d}t\right) \tag{56}$$

(Asymptotic) Availability

$$A = \lim_{t\to\infty} P(I(t) = 1) = \lim_{t\to\infty} \mathrm{E}(I(t)) = \frac{MUT}{MDT + MUT} = \frac{MUT}{MTBF} \tag{57}$$

$$A = \sum_{i\in\Omega_W} p_i \tag{58}$$

where Ω_W is the set of all working states and p_i the stationary probability for state i.

$$A_{\text{series}} = \prod_{i=1}^{n} A_i \tag{59}$$

$$A_{\text{parallel}} = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - A_i) \tag{60}$$

$$A_{k-\text{out}-\text{of}-n} = \sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i} A^i(1-A)^{n-i},\ A_i = A,\ \forall i \tag{61}$$

Unavailability

$$U(\cdots) = 1 - A(\cdots) \tag{62}$$

Estimators

Let Θ be an *unbiased* and *consistent estimator* of a parameter ξ, i.e. $\mathrm{E}(\Theta) = \xi$ and $\mathrm{Var}(\Theta(n)) \to 0$ when $n \to \infty$. Let $X_1, X_2, \cdots, X_n$ be n independent and identically distributed observations, and $\mathrm{E}(X_i) = \xi$ and $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2,\ i = 1, 2, \cdots, n$.

Time average

$$\bar{X} = \frac{1}{T}\int_0^T X(t)\mathrm{d}t \tag{63}$$

Sample mean

$$\hat{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \tag{64}$$

Sample variance

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{X})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{n}{n-1}\hat{X}^2 \tag{65}$$

Variance of the sample mean

$$S_{\hat{X}}^2 = \frac{S^2}{n} \tag{66}$$

Standard error of the sample mean

$$S_{\hat{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}} \tag{67}$$

$1 - \alpha$ **confidence interval** for $\hat{X}$ (with unknown variance)

$$\left(\hat{X} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}, \hat{X} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}\right) \tag{68}$$

($t_{\alpha/2,n-1}$ is the $\alpha/2$-quantile of the Student's t-distribution with $n-1$ degrees of freedom.)

Some mathematical formulas

Exponential function

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!} \tag{69}$$

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \tag{70}$$

Binomial theorem

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = (a+b)^n, \ n > 0 \tag{71}$$

Geometric series

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \ n \in \mathbb{N}, \ |x| < 1 \tag{72}$$

De Morgan's theorem

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B} \tag{73}$$

$$\overline{A} + \overline{B} = \overline{A \cdot B} \tag{74}$$