NORGES TEKNISK- NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR TELETEKNIKK
Signalbehandling

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Tor A. Ramstad
Tlf.: 94314

KONTINUASJONSEKSAMEN I FAG SIE2010 Informasjons- og signalteori

Dato: 15. august 2001
Tid: Kl. 09.00 - 14.00

Hjelpemidler:
B1 - Typegodkjent kalkulator med tomt minne tillatt.
Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.

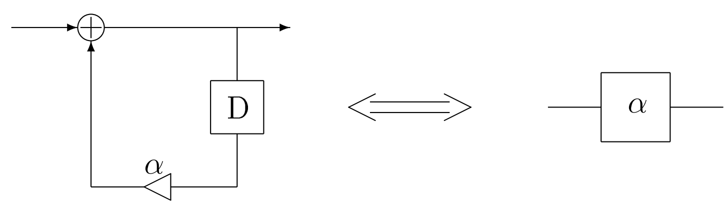
Bedømmelse:
Ved bedømmelse vektlegges oppgavene I, II og III likt.

Oppgave I

I denne oppgaven skal vi betrakte ulike LSI-filtre og deres enhets- og frekvensresponser.

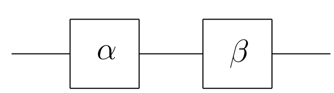
a. Hvordan beviser du at en operator $\mathcal{H}\{\ \}$ er lineær?

Et LSI-filter er gitt som i figuren under. Legg merke til figuren til høyre som er en symbolsk måte å tegne filteret på. Parameteren α angir filterkoeffisienten.



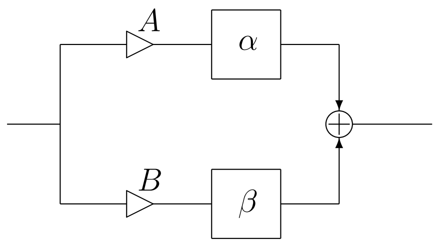
b. Finn enhetspulsresponsen og frekvensresponsen til filteret.

Vi danner et 2.-ordens filter ved å kaskadekople to filtre av samme type som i pkt. b med forskjellige koeffisienter som vist i figuren under.



c. Finn enhetspulsresponsen og frekvensresponsen til det nye filteret når $\beta \neq \alpha$.

Vi danner et alternativt 2.-ordens filter ved å parallellkople de samme to filtrene som i deloppgave c med vektfaktorer A og B som vist i figuren under.



d. Velg A og B slik at det alternative filteret blir ekvivalent med filteret i forrige punkt.

e. Diskuter stabiliteten for de to 2.-ordens filtrene.

Oppgave II

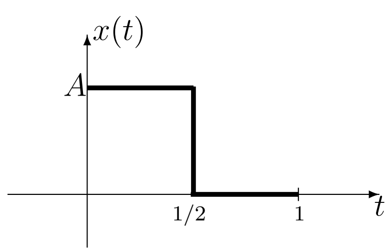
Denne oppgaven omhandler rekkeutvikling av signaler av endelig lengde ved bruk av basisfunksjoner dannet fra ortogonale eksponentialfunksjoner.

a. Bevis at basisfunksjonene i rekka

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{j\frac{2\pi}{T_0}kt}$$

er ortogonale over intervallet $t \in [0, T_0]$.

Gitt funksjonen i figuren som er definert over intervallet $t \in [0, 1]$.



b. Finn koeffisientene i rekka i pkt. a for denne funksjonen.

c. Bevis at Parsevals relasjon gjelder for dette tilfellet.
Oppgitt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

d. Skriv rekka på reell form og diskuter konvergens. Kommenter spesielt verdiene i $t = 0, 1/2$ og 1.

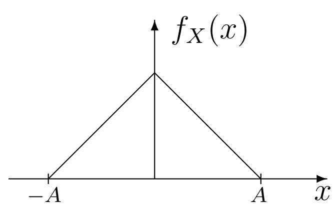
Vi punktprøver nå signalet uniformt i 9 punkter slik at avstanden mellom punktprøvene altså blir $1/8$.

e. Bruk den diskrete fouriertransformen (DFT) til å finne en frekvensplanrepresentasjon for dette signalet. Sammenlign og kommenter forskjellen mellom representasjonen for det diskrete signalet her og det kontinuerlige signalet $x(t)$.

Oppgave III

I denne oppgaven skal vi se på kvantisering av et signal og hvordan dette kan overføres på en kanal.

Sannsynlighetstetthetsfunksjonene til signalet $x(n)$ er vist i figuren.



a. Finn kvantiseringsstøyen uttrykt ved A når signalamplitudene kvantiseres uniformt med 3 bit. (Anta at høyrateapproksimasjonen for kvantiseringsstøy fra uniform kvantiserer kan benyttes for 3 bits kvantiserer.)

b. Finn entropien til det kvantiserte signalet.

En gaussisk kanal har kanalkapasitet gitt ved

$$C = B \log_2 \left(1 + \frac{P}{N_0 B} \right).$$

c. Forklar hva kanalkapasiteten uttrykker og hva symbolene i formelen betyr.

Det kvantiserte signalet fra pkt a. skal sendes over denne kanalen. Signalet produserer $f_s = B$ punktprøver per sekund og $N_0/2 = 0,5 \times 10^{-4}$ W/Hz.

d. Finn minste gjennomsnittlige signaleffekt som må kreves for feilfri overføring når $f_s = 10$ kHz.

e. Foreslå et praktisk multinivå-signaleringssystem for overføring av signalet. Gi videre en analyse av forskjellige problemer som ville medføre andre krav til kanalen for tilnærmet feilfri overføring av det gitte signalet enn det som kanalkapasiteten angir.

Vedlegg: Fourier-representasjonar

Analoge signaler

Fouriertransform:

$$X(j\Omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$$

Inverstransform:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\Omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

Fourier-rekker for endelig lange eller periodiske signaler ($t \in [0, T_0]$):

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{j\frac{2\pi}{T_0}kt}$$

Koeffisienter:

$$\alpha_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt} dt$$

Tidsdiskrete signaler

Fouriertransform, DTFT:

$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

Invers DTFT:

$$x(n) = \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

Transform av endelig lange signaler ($n \in [0, N-1]$), eller rekkeutvikling for periodiske signaler (periode N), DFT:

$$X(k) = \mathcal{F}\{x(n)\} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

Invers DFT:

$$x(n) = \mathcal{F}^{-1}\{X(k)\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

Egenskaper til fouriertransformasjonen av uendelige, kontinuerlige signaler:

Linearitet:

$$ax_1(t) + bx_2(t) \Longleftrightarrow aX_1(j\Omega) + bX_2(j\Omega)$$

Tidsskift:

$$x(t-\tau) \Longleftrightarrow e^{-j\Omega\tau}X(j\Omega)$$

Frekvensskift:

$$x(t)e^{-j\Omega_0 t} \Longleftrightarrow X(j(\Omega - \Omega_0))$$

Foldning (konvolusjon) i tidsplanet:

$$x_3(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau \Longleftrightarrow X_3(j\Omega) = X_1(j\Omega)X_2(j\Omega)$$

Multiplikasjon av funksjoner i tidsplanet:

$$x_3(t) = x_1(t)x_2(t) \Longleftrightarrow X_3(j\Omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(jU)X_2(j(\Omega - U))dU$$

Parsevals sats:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\Omega)|^2 d\Omega$$