NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR ELEKTRONIKK OG TELEKOMMUNIKASJON
Signalbehandling

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Tor A. Ramstad
Tlf.: 46660465

EKSAMEN I FAG TTT4110 Informasjons- og signalteori

Norsk tekst på oddetalls-sider.
(English text on even numbered pages.)

Dato/Date: 26. mai 2006
Tid/Time: 09.00 - 13.00

Hjelpemidler:
D - Ingen andre trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Bestemt, enkel kalkulator tillatt
(No extra printed or handwritten material allowed.
Simple calculator accepted.)

Bedømmelse:
Ved bedømmelse vektlegges hvert punkt likt.
(Equal weighting on each of the questions.)

Sensurfrist: 16. juni, 2006

Oppgave I

Gitt impulsresponsen $h(t) = e^{\alpha t}u(t)$ til et analogt filter der $\mathrm{Re}\{\alpha\} < 0$.

a. Finn den tilsvarende frekvensresponsen.

Et digital filter avledes fra det analoge filteret ved punktprøving av impulsresponsen: $h_d(n) = h(nT)$. (Dette kalles impulsinvariant transform fra analogt til digitalt filter.)

b. Finn frekvensresponsen til det oppnådde digitale filteret: $H_d(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\left\{h_d(n)\right\}$.

c. Skisser modulen (absoluttverdien) av frekvensresponsene for $\alpha = -1$ and $T = 1/2$.

Vi avkorter nå impulsresponsen til det digitale filteret for å oppnå et FIR-filter, altså

$$h_{FIR}(n) = \begin{cases} h_d(n) \text{ for } n \leq N, \\ 0 \text{ ellers.} \end{cases}$$

d. Finn og skisser frekvensresponsen til FIR-filteret og sammenlign med IIR filteret for $N = 4$ og de samme parametrene som i spørsmål c.

Problem I

Given the impulse response $h(t) = e^{\alpha t}u(t)$ of an analog filter, where $\mathrm{Re}\{\alpha\} < 0$.

a. Find its frequency response.

A digital filter is derived from the analog filter by sampling of the impulse response: $h_d(n) = h(nT)$. (This is called the impulse invariant method for deriving a digital filter from an analog filter.)

b. Derive the frequency response of the digital filter: $H_d(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{h_d(n)\}$.

c. Sketch the magnitudes of both frequency responses for $\alpha = -1$ and $T = 1/2$.

Next we truncate the impulse response of the digital filter to make it into an FIR filter, that is

$$h_{FIR}(n) = \begin{cases} h_d(n) \text{ for } n \leq N, \\ 0 \text{ otherwise.} \end{cases}$$

d. Find and sketch the frequency response of the FIR filter and compare with the IIR filter for $N = 4$ and the parameters from Question c.

Oppgave II

Følgende differenseligning er gitt:

$$x(n) = \alpha x(n-1) + \beta e(n), \text{ where } |\alpha| \leq 1.$$

a. Beregn systemets enhetspulsresponsen.

b. Beregn den tilhørende frekvensresponsen.

Anta at inngangssignalet $e(n)$ er hvitt og gaussisk med varians σ_E^2.

c. Hvilken type prosess representerer $x(n)$? Finn effektspektraltettheten til denne prosessen uttrykt ved α, β og σ_E^2.

d. Bevis at variansen til $x(n)$ er gitt ved $\sigma_X^2 = \beta^2\sigma_E^2/(1-\alpha^2)$.

Vi påtrykker nå $x(n)$ på et filter med differenseligning

$$y(n) = ax(n) + bx(n-1).$$

e. Bevis at dette er et hvitingsfilter for $x(n)$, og at det faktisk gjenskaper $e(n)$ fullstendig ved riktige valg av a and b ($y(n) = e(n)$). (Det finnes minst tre metoder for å bevise dette.)

Vi ønsker å finne en effektiv digital representasjon av $x(n)$. Dette inkluderer en uniform kvantiserer som modelleres som additive, hvit støy, som også er ukorrelert med signalet inn i kvantisereren. Vi skal studere to forskjellige tilfeller og sammenligne disse. I første metode kvantiseres $x(n)$ direkte, i andre metode kvantiseres $y(n)$.

f. Når vi kvantiserer $y(n)$, hvordan vil du rekonstruere signalet (tilnærmelse til $x(n)$)?

g. Velg filter-parametre slik at variansene til signalene inn i kvantisereren er lik for de to tilfellene. Sammenlign signal-støyforholdet i utgangssignalene for de to tilfellene.

h. Sammenlign effektspektraltetthetene til støydelen av utgangssignalene i de to tilfellene.

Problem II

The following difference equation is given:

$$x(n) = \alpha x(n-1) + \beta e(n), \text{ where } |\alpha| \leq 1.$$

a. Compute its unit sample response.

b. Compute the frequency response of the filter.

Assume that the input signal is a white, Gaussian with variance σ_E^2.

c. What kind of process does $x(n)$ represent? Find the power spectral density of this process expressed in terms of α, β, and σ_E^2.

d. Prove that the variance of $x(n)$ is given by $\sigma_X^2 = \beta^2\sigma_E^2/(1-\alpha^2)$.

Assume that $x(n)$ is input into a filter with difference equation

$$y(n) = ax(n) + bx(n-1).$$

e. Prove that this filter is a whitening filter for $x(n)$, and in fact, recreates $e(n)$ exactly with proper choices of a and b ($y(n) = e(n)$). (There are at least three methods for proving this.)

We now want to derive an efficient digital representation of $x(n)$. This will include a uniform quantizer which is modeled as additive, white noise, which is uncorrelated to the quantizer input. Two different cases will be studied and compared. Firstly, we quantize $x(n)$ directly, secondly, we rather quantize $y(n)$.

f. If we quantize $y(n)$, what would be the procedure for signal reconstruction (approximation to $x(n)$)?

g. Choose filter parameters such that the variances of the input to the quantizer are equal for the two cases. Compare the signal-to-noise ratio in the reconstructed signal for the two cases.

h. Compare the noise spectra that are part of the output signals for the two cases.

Oppgave III

Et signal har sannsynlighetstetthetsfunksjon

$$f_X(x) = Ae^{-\alpha|x|}, \alpha > 0.$$

a. Bestem A og α slik at signalets varians er lik 1.

Signalet kvantiseres uniformt med desisjonsgrenser $d_k = k\Delta$,
$k = -\infty, \ldots, -1, 0, 1 \ldots, \infty$.

b. Finn kvantiseringsstøyen når $\Delta << 1$.

c. Finn sannsynligheten for de ulike kvantiseringsintervallene, og beregn den minste raten, R i bit per punktprøve, som det kvantiserte signalet kan representeres ved.

Anta at vi klarer å representere signalet med raten R bit per punktprøve som i forrige punkt og at båndbredden til signalet er $W = 4$ kHz. Anta videre at kanalen er additiv, gaussisk og har båndbredde $B = 2$ kHz.

d. Finn nødvendig signal-støyforhold på kanalen for at en, dersom alt er ideelt, kan overføre signalet feilfritt.

Oppgitt:

$$\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \text{ for } \alpha > 0 \text{ og } n = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

og

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}, \text{ for } |x| < 1.$$

Problem III

The probability density function of a signal is given by

$$f_X(x) = Ae^{-\alpha|x|}, \alpha > 0.$$

a. Choose A and α to make the variance equal to 1.

The signal is quantized uniformly with decision levels $d_k = k\Delta$, $k = -\infty, \ldots, -1, 0, 1 \ldots, \infty$.

b. Find the quantization noise when $\Delta << 1$.

c. Find the probability of the different quantizer intervals and compute the lowest possible rate, R, in bits per sample, for representing the quantized signal.

Assume that we manage to represent the signal at the rate R bits per sample as found in c, and that the bandwidth of the signal is $W = 4$ kHz. Furthermore, assume that an additive, Gaussian channel has bandwidth $B = 2$ kHz.

d. Compute the necessary signal-to-noise ratio on the channel for transmitting the signal without error if the whole system is otherwise perfect.

Given mathematical relations:

$$\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \text{ for } \alpha > 0 \text{ og } n = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

and

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}, \text{ for } |x| < 1.$$

Fourier representations

- **Analog signals**

Finite length signals ($t \in [0, T_0]$) or periodic signals with period T_0		Non-periodic signals of infinite length	
Fourier series	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\frac{2\pi}{T_0}kt}$	Inverse Fourier transform	$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$
Coefficients	$c_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt}dt$	Fourier transform	$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt$
Parseval	$\int_{T_0} \lvert x(t)\rvert^2 dt = T_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lvert c_k\rvert^2$	Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lvert X(\Omega)\rvert^2 d\Omega$

- **Time-discrete signals**

Finite length signals ($n \in [0, N-1]$) or periodic signals with period N		Non-periodic signals of infinite length	
Inverse DFT	$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$	Inverse DTFT	$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega n}d\omega$
DFT	$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$	DTFT	$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$
Parseval	$\sum_{n=0}^{N-1} \lvert x(n)\rvert^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \lvert X(k)\rvert^2$	Parseval	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert x(n)\rvert^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \lvert X(\omega)\rvert^2 d\omega$

Relationship between voltage and current

Resistor: $v(t) = Ri(t)$

Capacitor: $i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$

Inductor: $v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$

Properties of the Fourier transform of infinite, continuous signals

Given:

$$X_i(j\Omega) = \mathcal{F}\{x_i(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_i(t)e^{-j\Omega t}dt$$

Linearity:

$$ax_1(t) + bx_2(t) \Longleftrightarrow aX_1(j\Omega) + bX_2(j\Omega)$$

Time shift:

$$x(t-\tau) \Longleftrightarrow e^{-j\Omega\tau}X(j\Omega)$$

Frequency shift:

$$x(t)e^{-j\Omega_0 t} \Longleftrightarrow X(j(\Omega - \Omega_0))$$

Time domain convolution:

$$x_3(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau \Longleftrightarrow X_3(j\Omega) = X_1(j\Omega)X_2(j\Omega)$$

Multiplication of functions:

$$x_3(t) = x_1(t)x_2(t) \Longleftrightarrow X_3(j\Omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(jU)X_2(j(\Omega - U))dU$$

Parseval's theorem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\Omega)|^2 d\Omega$$