Norges teknisk-
naturvitenskapelige universitet
Institutt for teleteknikk

SIE2010 INFORMASJONS- OG SIGNALTEORI

Løsningsforslag eksamen vår 2001

Løsnigsforslaget er laget grundigere en det som kreves for å få 1.0. Håper dette hjelper på forståelsen.
Videre er det i enkelte av oppgavene vist flere framgangsmåter. Alle metodene i en oppgave er likeverdige, men den første motoden har (som oftes) mindre rekning.
Figurene laget på data og er dermed 'fine'. En enkel forklarende skisse er nok til eksamen.

Oppgave 1

a)

$$y(n) = ay(n-2) + x(n)$$

b) Finner frekvensresponsen direkte fra differanseligningen

$$Y(e^{j\omega}) = ae^{-j2\omega}Y(e^{j\omega}) + X(e^{j\omega})$$

$$(1 - ae^{-j2\omega})Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1}{1 - ae^{-j2\omega}}$$

Alternativt. Går veien om impulsresponsen $h(n)$ ved å sende en enhetspuls inn på inngangen, dvs $h(n) = ah(n-2) + \delta(n)$
Når $n < 0$ er $h(n) = 0$. Får videre:

$$\begin{aligned}
&h(0) = ah(-2) + \delta(0) = 1 \\
&h(1) = ah(-1) = 0 \\
&h(2) = ah(0) = a \\
&h(3) = ah(1) = 0 \\
&h(4) = ah(2) = a^2 \\
&\vdots \\
&h(n) = \begin{cases} a^{n/2} & n \text{ er partall} \geq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}
\end{aligned}$$

Frekvensresponsen er gitt som den fouriertransformere av impulsresponsen.

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0,2,4,\ldots}^{\infty} a^{n/2}e^{-j\omega n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j2\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(ae^{-j2\omega}\right)^n = \frac{1}{1-ae^{-j2\omega}}$$

c)
Vil benytte følgende i utledningen av autokorrelasjonsfunksjonen $R_{YY}(k)$

- $y(n)$ stasjonært slik at signalvariansen σ_y^2 er uavhengeig av k. Dvs. $E[y^2(n)] = E[y^2(n+k)] = \sigma_y^2$ for alle k.
- $x(n)$ er ukorrelert (hvit støy), og har dermed en autokorrelasjonsfunksjonen $R_{XX}(k)$ gitt ved

  $$E[x(n+k)x(n)] = \begin{cases} \sigma_x^2 & k=0 \\ 0 & ellers \end{cases}$$

  der σ_x^2 er variansen til den hvite støyen.
- $R_{YY}(k)$ er symmetrisk om $k=0$. Dvs: $R_{YY}(k) = R_{YY}(-k)$

Setter først $k=0$:

$$R_{YY}(0) = \sigma_y^2 = E[(ay(n-2)+x(n))^2]$$

$$= a^2E[y^2(n-2)] + 2aE[y(n-2)x(n)] + E[x^2(n)]$$

$$= a^2\sigma_y^2 + 0 + \sigma_x^2$$

Dette gir

$$R_{YY}(0) = \frac{1}{1-a^2}\sigma_x^2$$

Setter $k=1$:

$$R_{YY}(1) = E[y(n)y(n+1)] = aE[y(n)y(n-1)] + E[y(n)x(n+1)]$$

$$= aR_{YY}(-1) + 0 = aR_{YY}(1)$$

$$\Rightarrow \quad R_{YY}(1) = 0, \quad \text{for } a \neq 0$$

Dersom k er et partall større enn null får vi:

$$R_{YY}(k) = E[y(n)y(n+k)] = E[y(n)(ay(n+k-2)+x(n+k))]$$

$$= aE[y(n)y(n+k-2)] + E[y(n)x(n+k)] = aR_{YY}(k-2)$$

$$\Rightarrow \quad R_{YY}(k) = a^{k/2}R_{YY}(0) = \frac{a^{k/2}}{1-a^2}\sigma_x^2$$

Dersom k er et oddetall større enn null, får vi med tilsvarende framgangsmåte:

$$R_{YY}(k) = a^{\frac{k}{2}-1} R_{YY}(1) = 0$$

Utnytter til slutt at $R_{YY}(k)$ er symmetrisk om $k = 0$ og får.

$$R_{YY}(k) = \begin{cases} \frac{a^{\left|\frac{k}{2}\right|}}{1-a^2}\sigma_x^2 & k \text{ er partall} \\ 0 & k \text{ er oddetall} \end{cases}$$

d) Har følgende sammenheng mellom $S_{YY}(\omega)$ og $H(e^{j\omega})$

$$S_{YY}(\omega) = \left|H(e^{j\omega})\right|^2 \sigma_x^2$$

$$= \frac{\sigma_x^2}{(1 - ae^{-j2\omega})(1 - ae^{j2\omega})} = \frac{\sigma_x^2}{1 - 2a\cos(2\omega) + a^2}$$

Alternativt. $S_{YY}(\omega)$ er den fouriertransformerte av $R_{YY}(k)$, dvs:

$$S_{YY}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{YY}(k) e^{-j\omega k} = \frac{\sigma_x^2}{1-a^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a^{|l|} e^{-j2\omega l}, \qquad l = 2k$$

$$= \frac{\sigma_x^2}{1-a^2}\left[\sum_{l=-\infty}^{0}\left(a^{-1}e^{-j2\omega}\right)^l + \sum_{l=1}^{\infty}\left(ae^{-j2\omega}\right)^l\right]$$

$$= \frac{\sigma_x^2}{1-a^2}\left[\sum_{l=0}^{\infty}\left(ae^{-j2\omega}\right)^l + \sum_{l=0}^{\infty}\left(ae^{j2\omega}\right)^l - 1\right]$$

$$= \frac{\sigma_x^2}{1-a^2}\left[\frac{1}{1 - ae^{-j2\omega}} + \frac{1}{1 - ae^{j2\omega}} - 1\right]$$

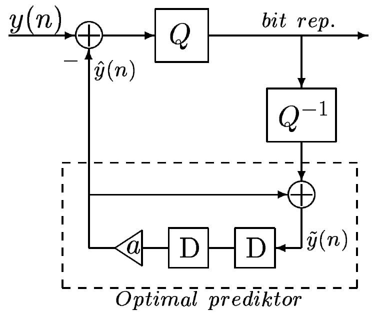
$$= \frac{\sigma_x^2}{1-a^2}\left[\frac{1 - ae^{j\omega} + 1 - ae^{-j\omega} - (1 - a(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + a^2)}{1 - a(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + a^2)}\right]$$

$$= \frac{\sigma_x^2}{1 - 2a\cos(w) + a^2}$$

e) I DPCM er $d(n)$ differansen mellom inngangsignal $y(n)$ og predikert signal $\hat{y}(n)$ basert på tidligere eller funksjon av tidligere verdier. Dersom $\sigma_D^2 < \sigma_S^2$, kan vi bruke mindre kvantiseringsintervall i kvantisereren og dermed øke signal-til-støyforholdet. En optimal prediktor fjerner all korrelasjon i det opprinelige signalet, slik at $d(n)$ kan betraktes som hvit støy. I en 'closed-loop' DPCM-enkoder forsterkes signalet i mottakeren, men ikke kvantiseringsstøyen.

Siden $y(n)$ er korrelert med seg selv forsinket to sampler, er en optimal prediktor for $y(n)$ dermed mellom $y(n)$ og en predikert verdi $\hat{y}(n)$ basert på to forsinket tidligere kvantiserte differanser. Dvs: $\hat{y}(n) = a\tilde{y}(n-2)$. Der $\tilde{y}(n)$ er det rekonstruerte signalet. En skisse av den optimale prediktoren i en DPCM-enkoder er gitt i figur 1.

$y(n)$ er forøvrig en $AR(2)$ prosess, der $\rho(1) = 0$ og $\rho(2) = a$ (ikke krevd).



Figur 1: DPCM enkoder med optimal prediktor. DPCM dekoderen vil ha en tilsvarende prediktor.

Oppgave 2

a)

$$\begin{aligned}
X(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\Omega_0 t)e^{-j\Omega t}dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-j\Omega_0 t} + e^{j\Omega_0 t}\right) e^{-j\Omega t}dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-j(\Omega+\Omega_0)t} + e^{-j(\Omega-\Omega_0)t}\right) dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{-j\Omega' t}dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{-j\Omega'' t}dt \qquad (1) \\
&= \pi\left[\delta(\Omega') + \delta(\Omega'')\right] = \pi\left[\delta(\Omega+\Omega_0) + \delta(\Omega-\Omega_0)\right] \quad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

Alternativt
Bevis ved å gå i motsatt retning.

$$\begin{aligned}
x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\Omega)\} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \pi\left[\delta(\Omega+\Omega_0) + \delta(\Omega-\Omega_0)\right] e^{j\Omega t}d\Omega \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left[\delta(\Omega+\Omega_0) + \delta(\Omega-\Omega_0)\right] e^{j\Omega t}d\Omega \\
\frac{1}{2}\int_{-\Omega_0-\Delta}^{-\Omega_0+\Delta} &\delta(\Omega+\Omega_0)e^{j\Omega t}d\Omega + \frac{1}{2}\int_{\Omega_0-\Delta}^{\Omega_0+\Delta} \delta(\Omega-\Omega_0)e^{j\Omega t}d\Omega \\
&= \frac{1}{2}\left[e^{-j\Omega_0 t} + e^{j\Omega_0 t}\right] = \cos(\Omega_0 t) \quad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

Dette beviset er ekvivalent til den direkte måten over, fordi $x(t)$ og $X(j\Omega)$ er fouriertransformasjonspar. Dvs:

$$X(j\Omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{F}\{\mathcal{F}^{-1}\{X(j\Omega)\}\}$$

b)
Ethvert kontinuerlig periodisk signal og kan utrykkes som

$$x(t) = x\left(t + kT\right),$$

for alle t og <u>alle</u> heltallige verdier av k når T er perioden. Dette gjelder åpenbart ikke, ettersom $y(t) \neq 0$ over et endelig intervall.
Altså: $y(t)$ er <u>ikke</u> periodisk.

c)

$$Y(j\Omega) = \int_{-\tau}^{\tau} \cos(\Omega_0 t) e^{-j\Omega t} dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\tau}^{\tau} \left(e^{-j(\Omega+\Omega_0)t} + e^{-j(\Omega-\Omega_0)t}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{-j(\Omega+\Omega_0)} e^{-j(\Omega+\Omega_0)t} + \frac{1}{-j(\Omega-\Omega_0)} e^{-j(\Omega-\Omega_0)t}\right]_{t=-\tau}^{t=\tau}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{-j(\Omega+\Omega_0)}\left(e^{-j(\Omega+\Omega_0)\tau} - e^{j(\Omega+\Omega_0)\tau}\right) + \frac{1}{-j(\Omega-\Omega_0)}\left(e^{-j(\Omega-\Omega_0)\tau} - e^{j(\Omega-\Omega_0)\tau}\right)\right]$$

Setter $F = \Omega/2\pi$ og $F_0 = \Omega_0/2\pi$ og får:

$$Y(jF) = \tau\frac{\sin(2\pi(F-F_0)}{2\pi(F-F_0)} + \tau\frac{\sin(2\pi(F+F_0)}{2\pi(F+F_0)}$$

$$= \tau \mathrm{sinc}\left(2\tau(F+F_0)\right) + \tau \mathrm{sinc}\left(2\tau(F-F_0)\right)$$

Alternativt
$y(t)$ kan tenkes realisert ved å multipliserer $x(t)$ med en vindusfunksjon $w(t)$ definert ved:

$$w(t) = \begin{cases} 1 & -\tau \leq t \leq \tau \\ 0 & ellers \end{cases}$$

Finner $W(j\Omega) = \mathcal{F}\{w(t)\}$

$$W(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t)e^{-j\Omega t}dt = \int_{-\tau}^{\tau} e^{-j\Omega t}dt = \frac{1}{-j\Omega}\left[e^{-j\Omega\tau} - e^{-j\Omega\tau}\right]$$

$$= \frac{2\sin(\tau\Omega)}{\Omega} = 2\tau\frac{\sin(\pi\frac{\tau}{\pi}\Omega)}{\pi\frac{\tau}{\pi}\Omega} = 2\tau\mathrm{sinc}(\frac{\tau\Omega}{\pi})$$

Multiplikasjon i tidsplanet gir folding i frekvensplanet, dvs:

$$y(t) = x(t)\cdot w(t) \quad \Leftrightarrow \quad Y(j\Omega) = \frac{1}{2\pi}X(j\Omega) * W(j\Omega)$$

Får da

$$Y(j\Omega) = \tau\left[\delta(\Omega+\Omega_0) + \delta(\Omega-\Omega_0)\right] * \mathrm{sinc}(\frac{\tau\Omega}{\pi})$$

$$= \tau\mathrm{sinc}\left(\frac{\tau}{\pi}(\Omega+\Omega_0)\right) + \tau\mathrm{sinc}\left(\frac{\tau}{\pi}(\Omega-\Omega_0)\right)$$

Bruker frekvens F og får

$$Y(jF) = \tau \text{sinc}\left(2\tau(F + F_0)\right) + \tau \text{sinc}\left(2\tau(F - F_0)\right)$$

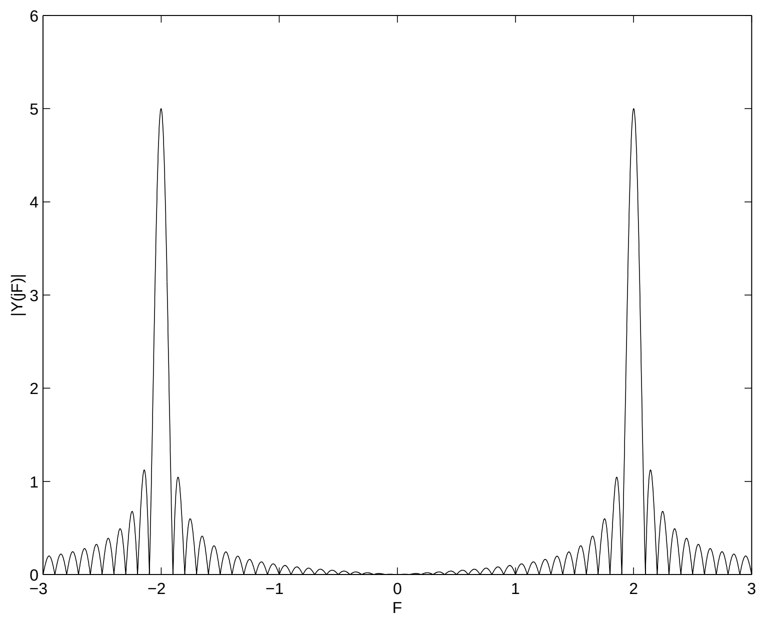
som er det samme svaret som over.

Hjelp til skissen: τ omfatter mange perioder, derfor vil sinc-funksjonene ha mange 0-gjennomganger i frekvensplanet mellom $F = 0$ og $F = F_0$ (tilsvarende for negative verdier). $\text{sinc}(2\tau(F - F_0))$ er null når argumentet er et heltall ulikt 0. Dvs:

$$2\tau(F - F_0) = n, \qquad n = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$\Rightarrow \qquad F = F_0 + \frac{n}{2\tau}$$

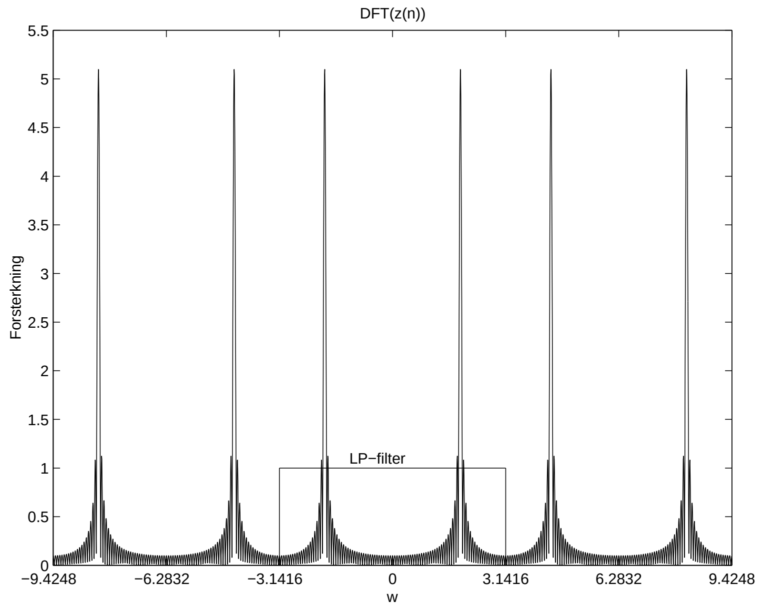
Skissen er gitt under.



Figur 2: $|Y(jF)|$. Har satt $\tau = 5$ og $F_0 = 2$.

Ser av figur 2 at $y(t)$ ikke er båndbegrenset, fordi det sidelobene i frekvensspekteret ikke dør ut for økende F. Derfor kan følgelig $y(t)$ ikke representeres eksakt med $z(n)$.

d) Har oppgitt at $T << \pi/\Omega_0$, dermed vil punktprøvingshastigheten bli $F_s >> 2F_0 = \Omega_0/\pi$. Dette gir en 'rimelig god' representasjon av $y(t)$ (men den er ikke eksakt!. Se det rekonstruerte signalet $y(t)$ fra $z(n)$ i figur 6).
DFT av $z(n)$ vil gi en fouriertransformert $Z(k)$ som har omtrent samme form på modulen som $Y(jF)$, men $Z(k)$ har repeterte spektre. I figur 3 er $Z(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N} = Z(k)$ skissert. Ser at $Z(e^{j\omega}) = Z(e^{j(\omega+2\pi k)})$ for alle heltall k.

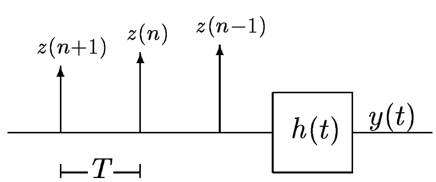


Figur 3: Skisse av $Z(e^{j\omega})$. Det er også skissert inn LP-filteret $H(e^{j\omega})$ i oppgave 2e.

e) Vi kan gjennvinne $y(t)$ fra $z(n)$ ved å sende et impulstog av komponentene i $z(n)$ med hastighet T gjennom et ideelt analogt lavpassfilter $h(t)$. Dette er kalt interpolasjon

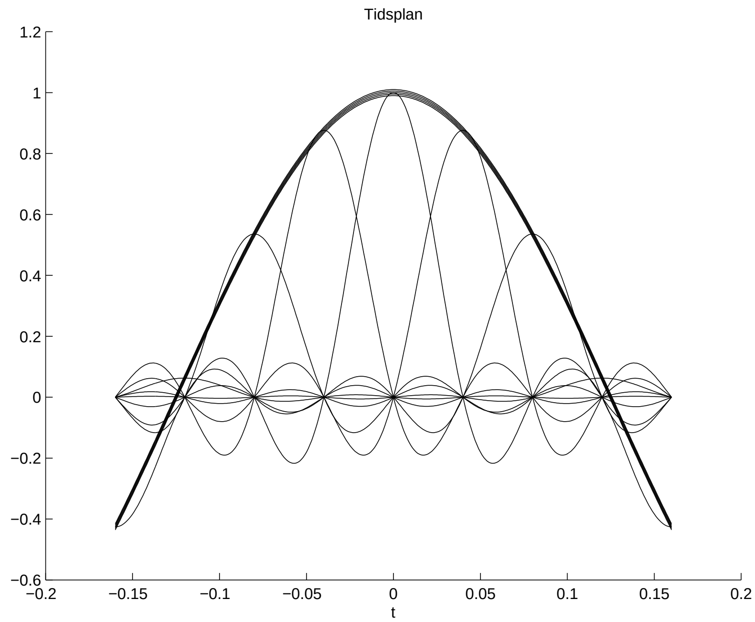
$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z(n)h(t - nT)$$

Figurene 4, 5 og 3 viser henholdsvis blokkdiagramet (teoretisk), tidsplan- og frekvensplan-rekonstruksjon av $y(t)$.

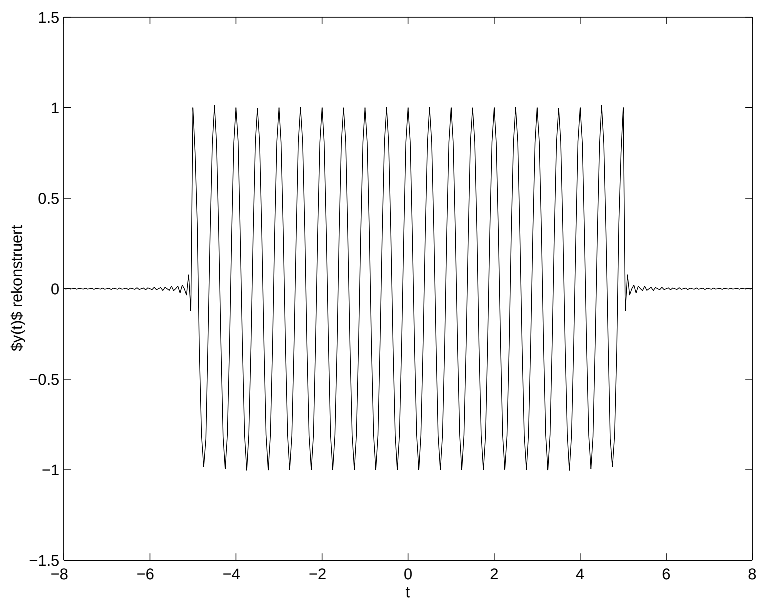


Figur 4: Teoretisk hvordan vi kan gjennvinne $y(t)$.

Vi kan ikke, som vist i figur 4, sende pulser med uendelig høyde inn på $h(t)$ for å gjennskape $y(t)$. I praksis må vi bruke 'sampel & hold' for å danne pulser av endelig høyde og med en energi som er så stor som mulig. Pulser av endelig lengde inn på et LP-filter gir linær forvrenging, noe som må kompenseres for.



Figur 5: Skisse i tidsplanet av reknstruksjonen av $y(t)$, ved hjelp av vektede sinc-funksjoner. Figur 6 viser hele $y(t)$.



Figur 6: NB! Denne figuren var ikke grevd på eksamen!. Det rekonstruerte signalet signalet $y(t)$ fra $z(n)$. Har brukt $\tau = 5$, $F_0 = 2$ og $T = 1/25$. Merk (de uønskede) svingingene rundt $t = \pm\tau$, dette skyldes at vi ikke får med frekvenser av $Y(jF)$ større enn $1/2T$.

Oppgave 3

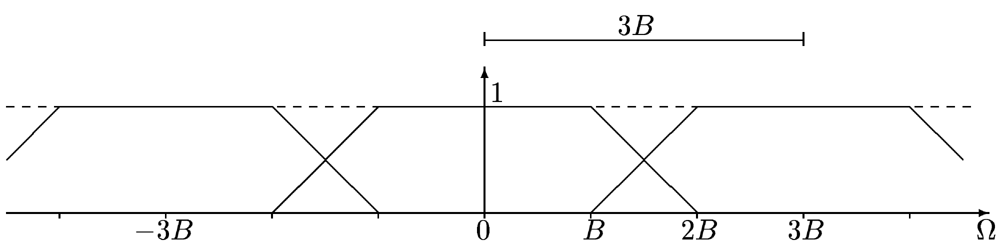
a) En nyquistkanal $h(t)$ kan overføre diskret (digital) informasjon over et analogt medium (kanal), med en signaleringshastighet $1/T$, uten å innføre intersymbolinteferens (ISI).
La $h(t)$ være impulsresponsen til kanalen, sender- og mottakerfilter. $h(t)$ er en nyquistkanal dersom følgende er oppfylt i tidsplanet

$$h(lT) = \begin{cases} 1, & l = 0 \\ 0, & l = \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}$$

La $H(\Omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$. Vi kan se at dette er en nyquistkanal dersom følgende er oppfylt i frekvensplanet

$$\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(\Omega + k\frac{2\pi}{T}) = 1$$

b)
Ser av figuren under at $H(\Omega)$ er en nyquistkanal, da nyqvistkriteriet i frekvensplanet er oppfylt.



Ser av figuren at den maksimale signaleringshastigheten er

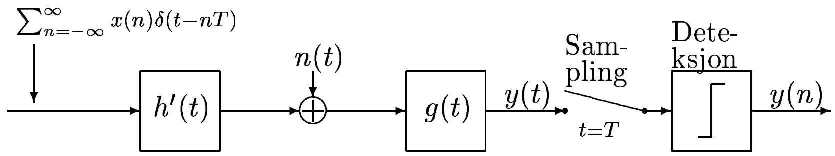
$$\frac{1}{T} = 3B/2\pi \quad \text{symb./sek.}$$

MERK: Frekvensresponsen i oppgaven er gitt med vinkelfrekvens Ω. Derfor er signalerings- hastigheten gitt ved $3B$ dividert på 2π.

c) Et av hovedproblemene i digital komunikkasjon er at transmisjonskanalen adderer støy til det sendte signalet. Et signaltilpasset filter $g(t)$ maksimaliserer signal-støyforholdet i mottakeren ved deteksjonstidspunktet. Dette vil følgelig minimalisere sannsynligheten for feil.
Har følgende sammenheng

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)h'(t - nT) * g(t)$$

der $x(n)$ er den diskrete informasjonen som blir sendt inn på kanalen, $h'(t)$ er impulsresponsen til senderfilteret og kanalen, g(t) er et signaltilpasset filter



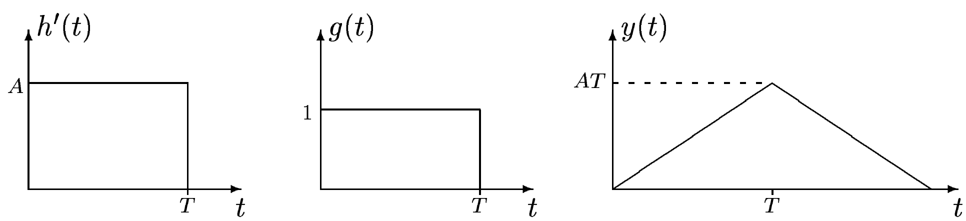
Figur 7: Komunikkasjonssystem. (Figuren er ikke krevd).

(nyquistkanalen er da gitt som $h(t) = h'(t) * g(t)$), $y(t)$ er mottat signal før punktprøving. Dette er illustrert i figuren over. Her er videre $n(t)$ addivtiv støy fra kanalen og $y(n)$ er rekonstruert diskret signal. Vi ønsker selvsagt $y(n) = x(n)$, men støy fra kanalen kan innføre feil, dvs. $y(n) \neq x(n)$.
Det signaltilpasset filter $g(t)$ finnes ved å 'tids-reversere' kanalresponsen $h'(t)$ som gir mottat signalform. Dette er gitt som

$$h'(t) = kg(T - t)$$

der k er en konstant forsterkningsfaktor. Totalresponsen inkludert det signaltilpsaaede filteret må være en nyquistkanal.

d) Benytter samme variabler som figur 7.
Utgangen fra kanalen $h'(t)$ er vist i figur 8. Det signaltilpassede filteret $g(t)$ har lik impulsrespons som $h'(t)$, der k er valgt lik A. $y(t)$ er utgangen av $g(t)$. Ser at $y(t)$ oppfyller nyquistkriteritet i tidsplanet. Vi kan dermed betrakte et symbol av gangen uavhengig av tidligere eller framtidige symbol.



Figur 8:

Finner utrykk for $y(t)$

$$y(t) = h'(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h'(\tau)g(T - \tau)d\tau = A\int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)g(T - \tau)d\tau$$

Utgangen av det signaltilpassede filteret har maksimal (eller negativ) verdi ved $t = T$. Vi sampler derfor $y(t)$ ved dette tidspunktet. Finner først signaleffekten ved å se bort fra støy. Vi får en puls med amplitude A fra kanalen

$$y(T) = A\int_{-\infty}^{\infty} g^2(T - \tau)d\tau = A\int_{0}^{T} 1^2 d\tau = AT$$

Når det motttate symbolet er en firkantfunksjon med amplitude $-A$ blir $y(T)$

$$y(T) = -AT$$

Signaleffekten σ_Y^2 blir den samme uavhengig av om symbol er $-A$ eller A, fordi

$$\sigma_Y^2 = y^2(T) = A^2T^2$$

Effektspektraltettheten til støyen fra kanalen er $N_0/2$. Denne støyen blir også filtrert, og får dermed en effektspektraltetthet etter det signaltilpassede filteret lik

$$S_{DD}(\Omega) = |G(\Omega)|^2 \frac{N_0}{2}$$

Støyeffekten i hvert sampel finner vi som integralet over effektspektraltettheten blir:

$$\sigma_N^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{DD}(\Omega)d\Omega = \frac{N_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |G(\Omega)|^2 d\Omega$$

Bruker Parsevals sats og får

$$\sigma_N^2 = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g^2(t)dt = \frac{N_0}{2}\int_0^T 1^2 dt = \frac{TN_0}{2} \tag{2}$$

Signal-til-støyforholdet blir da:

$$\eta = \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_N^2} = \frac{A^2T^2}{TN_0/2} = \frac{A^2T}{N_0/2}$$

e) Etter det signaltilpassede filteret har støyen har en uniform sannsynlighetstetthetsfunksjon $f_N(n)$ gitt ved

$$f_N(n) \begin{cases} \frac{1}{2B} & -B \leq n \leq B \\ 0 & ellers \end{cases}$$

der n er støybigraget som blir addert til ønsket symbol $\pm AT$. B er den største (absolutt-) verdien støyen kan ha. Merk: Når vi sender et firkantsymbol A på kanalen, blir det forsterket til AT i deteksjonstidspunktet.
Vi har to tilfeller: Dersom $B < AT$ får vi aldri feil. Når $B \geq AT$ får vi feil dersom vi sender A og kanalen adderer et støybidrag på $n < -A$ til dette signalet. Tilsvarende, dersom vi sender $-A$ får vi feil dersom kanalen adderer et støybidrag på $n > A$. Får da

$$P(feil) = P(A)P(n < -AT|A \text{ er sendt}) + P(-A)P(n > AT| - A \text{ er sendt})$$

Antar at det er lik sannsynlighet for å motta $-A$ som A (svaret blir uansett det samme). Dette gir

$$P(feil) = \frac{1}{2}\int_{-B}^{-AT} f_N(n)dn + \frac{1}{2}\int_{AT}^{B} f_N(n)dn$$

$$= \int_{AT}^{B} \frac{1}{2B} dn = \frac{B - AT}{2B}, \qquad B \geq AT \tag{3}$$

B kan finnes, av støyeffekten, som følger:

$$\sigma_N^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f_N(x) x^2 dx = \frac{1}{2B} \int_{-B}^{B} x^2 dx = \frac{B^2}{3}$$

Fra formel 2 har vi et annet utrykk for σ_N^2, denne må være lik utrykket over. Dvs:

$$\frac{B^2}{3} = \frac{TN_0}{2}$$

som gir

$$B = \sqrt{3T\frac{N_0}{2}}$$

Setter dette utrykket inn i 3, tar også med tilfelle $B < AT$ og får:

$$P(feil) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{A^2T}{6N_0}} & \sqrt{\frac{3N_0/2}{A^2T}} \geq 1 \\ 0 & \sqrt{\frac{3N_0/2}{A^2T}} < 1 \end{cases}$$