NORGES TEKNISK- NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR TELETEKNIKK
Signalbehandling

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Tor A. Ramstad
Tlf.: 94314

EKSAMEN I FAG SIE2010 Informasjons- og signalteori

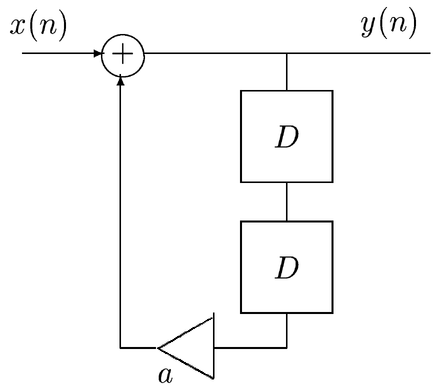
Dato: 21. mai 2001
Tid: Kl. 09.00 - 14.00

Hjelpemidler:
B1 - Typegodkjent kalkulator med tomt minne tillatt.
Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.

Bedømmelse:
Ved bedømmelse vektlegges oppgavene I, II og III likt.

Oppgave I

Et tidsdiskret filter har struktur som vist i figuren.



a. Sett opp differenseligninga for systemet.

b. Finn frekvensresponsen til systemet.

Vi påtrykker hvit støy på systemet.

c. Beregn autokorrelasjonsfunksjonen til utgangssignalet

$$R_{YY}(k) = \mathrm{E}[y(n)y(n+k)],$$

der E[ ] er forventningsoperatoren.

d. Beregn effektspektraltettheten $S_{YY}(\omega)$ til utgangssignalet.

Signalet $y(n)$ skal komprimeres ved hjelp av differensiell koding.

e. Forklar prinsippet og diskuter hva som er den optimale prediktoren.

Oppgave II

Et signal er gitt ved $x(t) = \cos(\Omega_0 t),\ \ t \in [-\infty, \infty]$.

a. Bevis at den fouriertransformerte til signalet er

$$X(j\Omega) = \pi \left[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0) \right].$$

(Du kan eventuelt utføre beviset i motsatt retning, men da må du forklare hvorfor dette er ekvivalent.)

Vi danner et nytt signal fra det gitte som

$$y(t) = \begin{cases} x(t) & \text{for } -\tau \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

b. Er $y(t)$ periodisk? Begrunn din påstand!

c. Finn den fouriertransformerte til $y(t)$ og skisser dens absoluttverdi (modul) når τ omfatter mange perioder av $x(t)$. Gir skissen noe som kan støtte din påstand under pkt. b?

$y(t)$ punktprøves deretter slik at vi oppnår $z(n) = y(nT)$.

d. Skisser absoluttverdien (modulen) til den fouriertransformerte av $z(n)$ for $T << \pi/\Omega_0$. Er $z(n)$ en eksakt representasjon av $y(t)$? Begrunn svaret.

e. Forklar hvordan vi kan gjenvinne $y(t)$ fra $z(n)$ i praksis. Lag et blokkdiagram som viser de nødvendige operasjonene og skisser signalene både i tids- og frekvensplan.

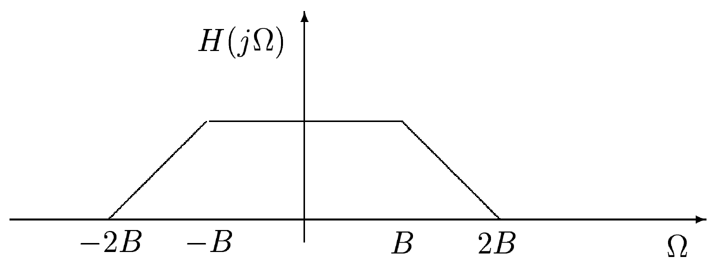
Oppgave III

a. Forklar hva en nyquistkanal er og vis hvordan en kan teste om en kanal er av nyquist-typen gjennom

   i. tidsplanbetraktninger,

   ii. frekvensplanbetraktninger.

Frekvensresponsen til en kanal er vist i figuren.



b. Bevis at dette er en nyquistkanal og finn den maksimale signaleringshastigheten for kanalen.

c. Hva er hensikten med et signaltilpasset filter i digital transmisjon? Forklar også hvordan et slikt filter finnes.

Et binærsymmetrisk transmisjonssystem sender ut to symboler med samme sannsynlighet. Begge de mottatte symbolene er, når en ser bort fra støy, firkantfunksjoner av lengde T, men med amplituder henholdsvis A og $-A$. I tillegg har det mottatte signalet en støykomponent med effektspektraltetthet $N_0/2$. I mottakeren benyttes et signaltilpasset filter.

d. Finn signal-støyforholdet i det optimale deteksjonstidspunktet uttrykt ved de gitte parametrene.

e. Beregn feilsannsynligheten i deteksjonstidspunktet for de samme parametrene som i forrige punkt, når støyen har uniform sannsynlighetstetthetsfunksjon etter filteret.

Vedlegg: Fourier-representasjonar

Analoge signaler

Fouriertransform:

$$X(j\Omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$$

Inverstransform:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\Omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

Fourier-rekker for endelig lange eller periodiske signaler ($t \in [0, T_0]$):

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{j\frac{2\pi}{T_0}kt}$$

Koeffisientar:

$$\alpha_k = \frac{1}{T_0} \int_{0}^{T_0} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt} dt$$

Tidsdiskrete signaler

Fouriertransform, DTFT:

$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

Invers DTFT:

$$x(n) = \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

Transform av endelig lange signaler ($n \in [0, N-1]$), eller rekkeutvikling for periodiske signaler (periode N), DFT:

$$X(k) = \mathcal{F}\{x(n)\} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

Invers DFT:

$$x(n) = \mathcal{F}^{-1}\{X(k)\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

Egenskaper til fouriertransformasjonen av uendelige, kontinuerlige signaler:

Linearitet:

$$ax_1(t) + bx_2(t) \Longleftrightarrow aX_1(j\Omega) + bX_2(j\Omega)$$

Tidsskift:

$$x(t-\tau) \Longleftrightarrow e^{-j\Omega\tau}X(j\Omega)$$

Frekvensskift:

$$x(t)e^{-j\Omega_0 t} \Longleftrightarrow X(j(\Omega - \Omega_0))$$

Foldning (konvolusjon) i tidsplanet:

$$x_3(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau \Longleftrightarrow X_3(j\Omega) = X_1(j\Omega)X_2(j\Omega)$$

Multiplikasjon av funksjoner i tidsplanet:

$$x_3(t) = x_1(t)x_2(t) \Longleftrightarrow X_3(j\Omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(jU)X_2(j(\Omega - U))dU$$

Parsevals sats:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\Omega)|^2 d\Omega$$