Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Christian Skau, telefon 73591755

Eksamen i TMA4140 DISKRET MATEMATIKK

18. desember 2012
Tid: 09.00-13.00
Bokmål
Sensur 19. januar 2013

Hjelpemidler: Hjelpemiddelkode C. Bestemt enkel kalkulator, Rottmans matematiske formelsamling

Eksamenssettet består av to deler: Oppgavene 1 til 7 med i alt 10 punkter (hvert punkt teller like mye) utgjør en del, og oppgave 8, som er en flervalgsoppgave utgjør den andre delen. Oppgave 8 teller 50%, og oppgavene 1 til 7 teller 50%.
Siste side av oppgavesettet er et ark med en kupong der dine svar skal krysses av. Denne siden med kupongen skal merkes med kandidatnummeret ditt og leveres sammen med besvarelsene på de syv første oppgavene.

Oppgave 1 Finn $0 < x < 1121$ som løser kongruensligningene

$$x \equiv 6 \pmod{19},$$
$$x \equiv 28 \pmod{59}.$$

Oppgave 2 Tegn det binære treet som representerer uttrykket

$$\left((x+y)^3 - z\right) \cdot \frac{z^2}{5}$$

og skriv uttrykket i postfiks notasjon.

Oppgave 3 Vis ved induksjon formelen

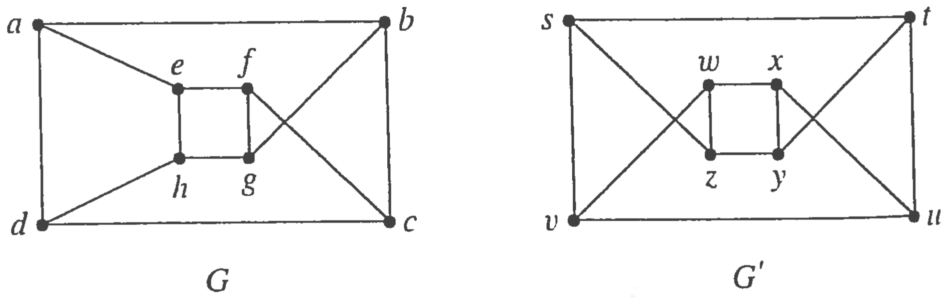
$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

for $n \geq 2$.

Oppgave 4 Et matematisk institutt har 8 mannlige professorer og 7 kvinnelige professorer. På hvor mange måter kan man sette sammen en komité bestående av 6 professorer som skal inneholde minst én kvinnelig professor? Forklar hvordan du resonnerer.

Oppgave 5

a) Er grafene G og G' i Figur 1 isomorfe eller ikke? Begrunn svaret.



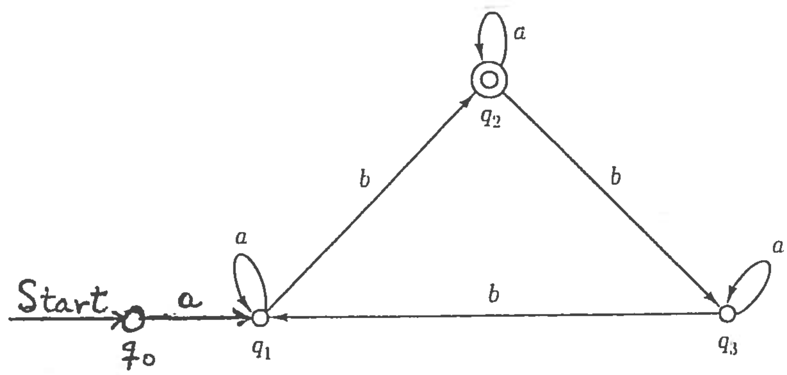
Figur 1

b) Tegn alle ikke-isomorfe grafer med 3 noder som har null, en eller to kanter.

Oppgave 6

a) La M være tilstandsautomaten i Figur 2. Skriv ned et regulært uttrykk som representerer språket $L(M)$ som M gjenkjenner. Beskriv med få ord hva som karakteriserer språket $L(M)$.

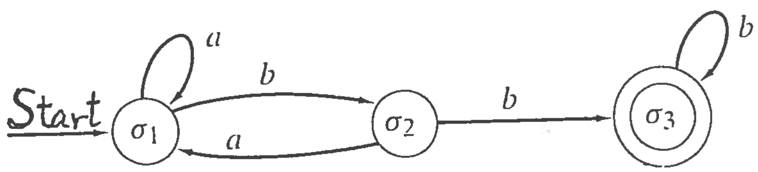
b) Lag en regulær grammatikk $G = (V, T, S, P)$ slik at språket $L(G)$ generert av G er lik $L(M)$, der ikke-terminalene S, A, B, C i V svarer til q_0, q_1, q_2, q_3, henholdsvis.



Figur 2

Oppgave 7

a) Finn et regulært uttrykk som representerer språket $L = L(M)$ som den ikke-deterministiske automaten M i Figur 3 gjenkjenner.



Figur 3

b) Tegn en ikke-deterministisk automat $\tilde{M}$ med tre tilstander som gjenkjenner språket $L^R = \{x_n \ldots x_1 \mid x_1 \ldots x_n \in L\}$, der L er språket i a). (Med andre ord, L^R er det inverse språket til L.)
(Hint: Modifisér automaten M i Figur 3.)

Oppgave 8

INSTRUKSJONER:

Dette er en flervalgsoppgave, der siste siden er et ark med en kupong hvor dine svar skal krysses av. Denne siden skal merkes med kandidatnummeret ditt og leveres sammen med besvarelsene på de første syv oppgavene. Det vil være minst ett, men muligens flere rette svar-alternativer for hver oppgave. Det er totalt 10 rette svar og du skal ikke sette flere kryss enn dette. Rett kryss gir 1 poeng. (Du trekkes ikke for å sette et kryss galt.) Setter du flere enn 10 kryss trekkes du 3 poeng pr. kryss mer enn 10.

Deloppgave 1. Hvilke av følgende logiske utsagn er en tautologi?

Alt 1) $\big(p \to (q \lor r)\big) \leftrightarrow \big((\neg q \land p) \to r\big)$

Alt 2) $\big(s \to (\neg r \land p)\big) \land \big((p \to (r \lor q)) \land s\big)$

Alt 3) $\big((r \lor q) \lor p\big) \to \big(p \land (q \lor r)\big)$

Alt 4) $\big(p \lor (\neg p \land \neg q)\big) \to \big((\neg(r \lor q)) \lor p\big)$

Deloppgave 2. La G være en sammenhengende urettet graf med 4 noder og uten sløyfer. Hvilke av følgende utsagn er garantert riktige?

Alt 1) G har minst to noder av samme grad.

Alt 2) G har en Hamiltonvei.

Alt 3) Mellom to distinkte noder er det en enkel vei.

Alt 4) G har en Eulervei.

Deloppgave 3. Gitt rekurrensrelasjonen $d_n = 4(d_{n-1} - d_{n-2})$, der $n \geq 2$ og $d_0 = d_1 = 1$. Hva er d_{15}?

Alt 1) -106496

Alt 2) -212992

Alt 3) -425984

Alt 4) -851968

Deloppgave 4. La universalmengden være de rasjonale tallene $\mathbb{Q}$. Hvilke av følgende utsagn er garantert riktige?

Alt 1) $\forall x \exists y \forall z\, (xz = y)$

Alt 2) $\forall x \forall y \exists z\, \big((x \leq z \leq y) \vee (y \leq z \leq x)\big)$

Alt 3) $\exists x \forall y \exists z\, (xy = y^2 z + z)$

Alt 4) $\forall x \forall y \exists z\, (yz = x)$

Deloppgave 5. La $A = \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$, der $\mathbb{Z}^+$ er de naturlige tallene $\{1, 2, 3, \ldots\}$. La $R \subseteq A \times A$ være relasjonen på A definert ved $\big((a, b), (c, d)\big) \in R$ dersom $a + d = c + b$. Hvilke av følgende er sant?

Alt 1) R er symmetrisk.

Alt 2) R er en delvis ordning.

Alt 3) R er ikke en ekvivalensrelasjon.

Alt 4) R er transitiv.

Deloppgave 6. På hvor mange måter kan to forskjellige tall plukkes ut av $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ slik at summen er et partall?

Alt 1) 2500

Alt 2) 4950

Alt 3) 9900

Alt 4) 2450

Deloppgave 7. Hva er koeffisienten til x^7 i utviklingen av $(2x - 3)^{10}$?

Alt 1) 414720

Alt 2) 2099520

Alt 3) -2099520

Alt 4) -414720

Deloppgave 8. Hvilke av følgende utsagn er riktige?

Alt 1) Det eksisterer en funksjon $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ som er surjektiv, der $\mathbb{Q}$ er de rasjonale tallene og $\mathbb{R}$ de reelle tallene.

Alt 2) $28^{3276} \equiv 1 \pmod{29}$

Alt 3) Det finnes $u, v \in \mathbb{Z}$ slik at $9541u + 2891v = 11$.

Alt 4) Den heksadesimale ekspansjonen av $(981679)_{10}$ er $(DFAAF)_{16}$.

SVARKUPONG

Kryss av det du mener er riktige svar, inntil 10 kryss. Et riktig satt kryss gir 1 poeng, og hvert kryss mer enn 10 gir −3 poeng. Merk denne siden med kandidatnummer, og lever den.

Kandidatnummer:

	Alt 1	Alt 2	Alt 3	Alt 4
Deloppgave 1				
Deloppgave 2				
Deloppgave 3				
Deloppgave 4				
Deloppgave 5				
Deloppgave 6				
Deloppgave 7				
Deloppgave 8				