NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4140 Diskret matematikk**

Faglig kontakt under eksamen: Christian Skau

Tlf: 7359 1755

Eksamensdato: august 2015

Eksamenstid (fra–til): 09.00-13.00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C: Bestemt, enkel kalkulator, Rottmans matematiske formelsamling

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

Oppgave 1

Hvilke av følgende utsagn er en tautologi?

(i) $[\neg p \to (\neg q \wedge q)] \to p$

(ii) $[p \wedge (p \to q)] \to \neg q$

(iii) $[\neg q \wedge (p \to q)] \to p$

(iv) $\neg[\neg p \wedge (p \vee q)] \to q$

Oppgave 2

Hva er den hexadesimale (dvs. grunntall 16) fremstillingen av $(2939)_{10}$? [Vi bruker symbolene A, B, C, D, E, F til å betegne henholdsvis $10, 11, 12, 13, 14, 15$].

Oppgave 3

La universimalmengden være de hele tallene $\mathbf{Z}$. Avgjør om utsagnet

$$\neg\exists y \forall x \exists z((y+1)x = z^2)$$

er sant eller galt. Gi en ekvivalent fremstilling der negasjonen $\neg$ ikke forekommer.

Oppgave 4

Hva er løsningen til rekurrensrelasjonen

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2};\, n \geq 2, \text{med initialbetingelsene } \; a_0 = 6, a_1 = 8?$$

Oppgave 5

La $f, g : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ være definert ved

$$f(x) = (x^2 - 2x)\log(x+1)$$
$$g(x) = (3x^2 + 1)\log(x^2)$$

Vis at $f(x)$ er $\Theta(g(x))$.

Oppgave 6

Finn antallet veier av lengde 4 mellom to forskjellige noder i den komplette grafen K_4. (K_4 er den enkle (urettede) grafen med fire noder der hvert par av noder er forbundet med en kant.)

Oppgave 7

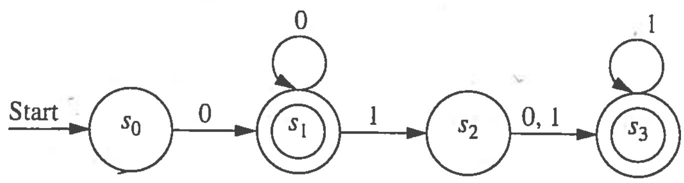
Konstruer en deterministisk endelig tilstandsautomat med færre enn fem noder som gjenkjenner mengden av binære strenger som starter med 0 og som har et odde antall 1′ere.

Oppgave 8

Vis at det ikke finnes noen endelig (ikke-deterministisk) tilstandsautomat med to tilstander som gjenkjenner mengden av binære strenger som har en eller flere 1′ere og som slutter med 0.

Oppgave 9

Finn et regulært uttrykk for språket L som tilstandsautomaten i Figur 1 gjenkjenner. Finn en regulær grammatikk $G = (V, T, S, P)$ som genererer språket L.



Figur 1.

Oppgave 10

På hvor mange måter kan man fordele ti identiske DVD'er i tre identiske bokser slik at hver boks inneholder minst to DVD'er?

Kontinuasjonseksamen i TMA4140: Diskret Matematikk, August 2015

Løsningsforslag

Oppgave 1 (i) er eneste tautologi.

Oppgave 2 B7B

Oppgave 3 Utsagnet er galt. (Eksempel: Dersom $y=-1$, $z=0$, så er $(y+1)x = z^2$ sann for alle x.)

$$\forall y \exists x \forall z \left((y+1)x \neq z^2\right).$$

Oppgave 4 $a_n = (6-2n)2^n$

Oppgave 5

$$\frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \frac{|(x^2-2x)\log(x+1)|}{|(3x^2+1)\log x^2|} \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}$$

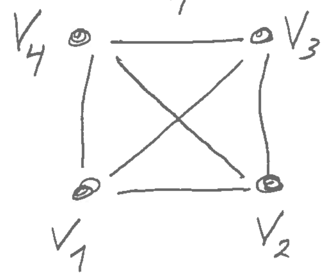
$$= \left|\frac{1-\frac{2}{x}}{3+\frac{1}{x^2}}\right| \cdot \left|\frac{\log(x+1)}{2\log x}\right| \longrightarrow \frac{1}{6} \quad \text{når } x \to \infty.$$

Dette viser at $f(x)$ er $O(g(x))$ og at $g(x)$ er $O(f(x))$, som medfører at $f(x)$ er $\Theta(g(x))$.

Oppgave 6

Nabomatrisen

K_4



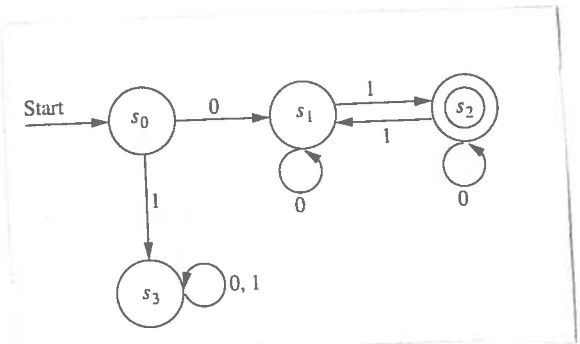
er $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 21 & 20 & 20 & 20 \\ 20 & 21 & 20 & 20 \\ 20 & 20 & 21 & 20 \\ 20 & 20 & 20 & 21 \end{bmatrix}$$

Svaret er altså <u>20</u>

Oppgave 7



Oppgave 8

Anta ad absurdum at en slik automat eksisterer, og la s_0 være starttilstanden og la s_1 være den andre tilstanden. Siden den tomme strengen ikke gjenkjennes så må s_1 være eneste finaltilstand med minst en overgang fra s_0 til s_1. Siden strengen 0 ikke gjenkjennes så må overgangen være gitt ved 1. Men dette strider mot at strengen 1 ikke gjenkjennes.

Oppgave 9 $00^*(\lambda \cup 1(0 \cup 1)1^*)$

Den regulære grammatikken $G = (V, T, S, P)$ er gitt ved:

La $S \leftrightarrow s_0$, $A \leftrightarrow s_1$, $B \leftrightarrow s_2$, $C \leftrightarrow s_3$

Da er

$V = \{S, A, B, C, 0, 1\}$, $T = \{0, 1\}$,

P: $S \to 0$, $A \to 0$, $B \to 0$, $B \to 1$, $C \to 1$

$S \to 0A$, $A \to 0A$, $A \to 1B$, $B \to 0C$,

$B \to 1C$, $C \to 1C$

Oppgave 10

Problemet reduseres til å finne ut på hvor mange måter man kan fordele 4 $(= 10 - 3 \cdot 2)$ identiske DVD'er i tre identiske bokser. Mulighetene er: 4 0 0, 3 1 0, 2 2 0, 2 1 1

Altså $\underline{\underline{4}}$ måter.