NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR ELEKTRONIKK OG TELEKOMMUNIKASJON
Signalbehandling

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Tor A. Ramstad
Tlf.: 46660465

KONTINUASJONSEKSAMEN I FAG TTT4110 Informasjons- og signalteori

Bokmålstekst på oddetalls-nummererte sider
Nynorsktekst på partall-nummererte sider

Dato: 9. august 2007

Hjelpemidler/hjelpemiddel:
D - "Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Enkel kalkulator tillatt."

Bedømmelse/ Poengsetjing:
Maksimum 5 poeng per delpunkt

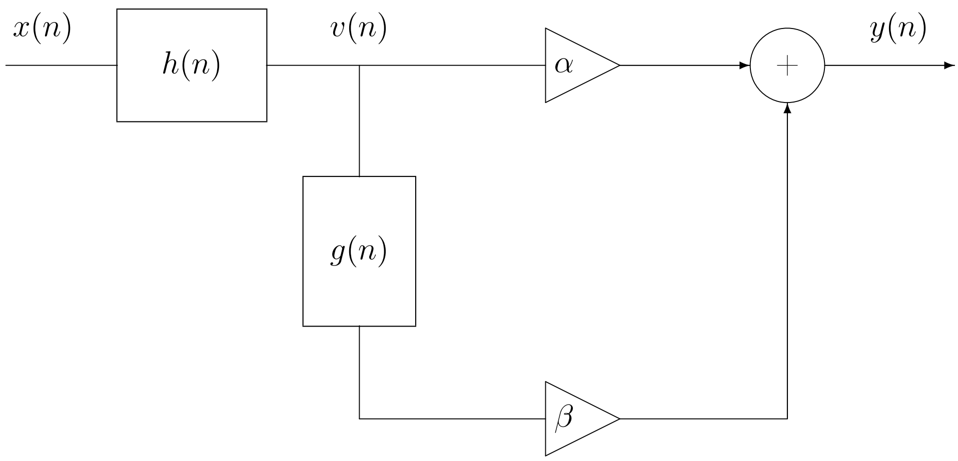
Sensurfrist: 30. august, 2007

Oppgave I

a. Sett opp det matematiske uttrykket for sammenhengen mellom inngangs- og utgangssignal i et lineært, skiftinvariant (LSI), digitalt filter ved hjelp av enhetspulsresponsen.

b. Utled sammenhengen mellom enhetspulsrespons og frekvensrespons for et LSI-filter ved å påtrykke signalet $x(n) = e^{j\omega n}$.

Systemet i figuren under inneholder to LSI-filtre med henholdsvis $h(n)$ og $g(n)$ som enhetspulsresponser.



c. Finn enhetspulsresponsen for det sammensatte systemet når vi uttrykker tidsdiskret foldning som f .eks. $v(n) = h(n) * x(n)$.

d. Finn tilsvarende frekvensrespons for systemet uttrykt ved frekvensresponsene for filtrene og forstekningsfaktorene.

Anta videre at

$$h(n) = a_0\delta(n) + a_1\delta(n-1) \quad \text{og} \quad g(n) = \gamma^n u(n).$$

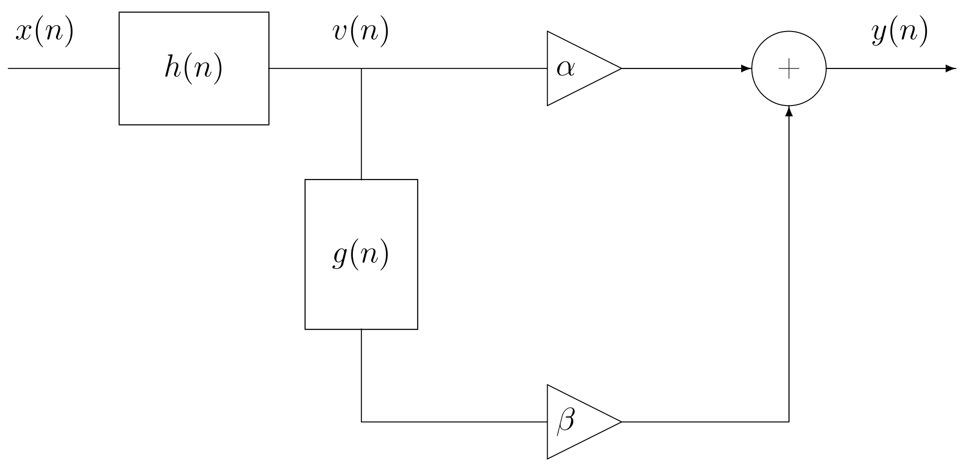
e. Beregn nå frekvensresponsen til systemet og grei ut om betingelsene for BIBO-stabilitet.

Oppgåve I

a. Sett opp det matematiske uttrykket for samanhengen mellom inngangs- og utgangssignala i lineære, skiftinvariante (LSI), digitale filter ved hjelp av einingspulssvaret.

b. Utled samanhengen mellom einingspulssvaret og frekvenssvaret for eit LSI-filter ved å påtrykke signalet $x(n) = e^{j\omega n}$.

Systemet i figuren under inneheld to LSI-filter med $h(n)$ og $g(n)$ som einingspulssvar.



c. Finn einingspulssvaret for det samansette systemet når vi uttrykker tidsdiskret faldning som f .eks. $v(n) = h(n) * x(n)$. Finn likeeins frekvenssvaret for systemet uttrykt ved frekvenssvara for filtra og forstekningsfaktorane.

Gå vidare ut frå at

$$h(n) = a_0\delta(n) + a_1\delta(n-1) \quad \text{og} \quad g(n) = \gamma^n u(n).$$

e. Berekn no frekvenssvaret til systemet og grei ut om vilkåra for BIBO-stabilitet.

Oppgave II

a. Grei ut om sammenhenger og ulikheter mellom DTFT og DFT.

b. Bevis at den inverse DFT kan uttrykkes ved

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}.$$

c. Beregn DFTen av signalet $x(n) = e^{j\omega_0 n}$ for $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, og finn verdiene av ω_0 som gjør at $X(k)$ bare inneholder en frekvenskomponent.

d. Bevis at $X(k) = X^*(N-k)$ for $k = 1, 2, 3, \ldots, N/2 - 1$ for vilkårlig, reell $x(n)$. Hvilke egenskaper har da $X(0)$ og $X(N/2)$?

DFT kan oppfattes som rekkeutvikling av tidsdiskrete signaler. Generelt kan vi ha følgende rekkeutvikling:

$$x(n) = \sum_{k=1}^{N} c_k \phi_k(n).$$

e. Hvilke krav må stilles til basisfunksjonene for at rekkeutviklingen skal være eksakt?

Oppgåve II

a. Grei ut om likskapar og ulikskapar mellom DTFT og DFT.

b. Prov at den inverse DFT kan uttrykkjast som

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn}.$$

c. Berekn DFTen av signalet $x(n) = e^{j\omega_0 n}$ for $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, og finn verdiane av ω_0 som gjer at $X(k)$ inneheld berre ein frekvenskomponent.

d. Prov at $X(k) = X^*(N-k)$ for $k = 1, 2, 3, \ldots, N/2 - 1$ for vilkårleg, reell $x(n)$. Kva for eigenskapar har da $X(0)$ og $X(N/2)$?

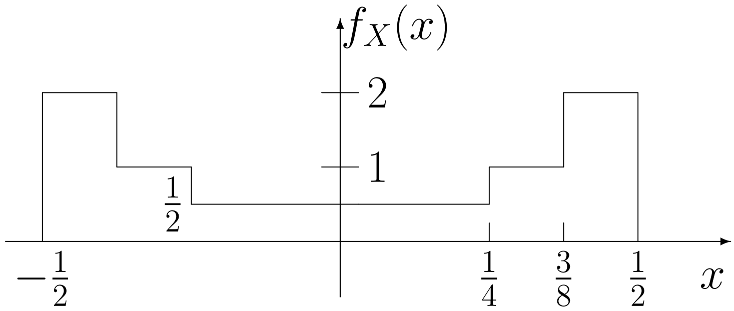
Ein DFT kan tenkjast som ei rekkjeutvikling av tidsdiskrete signal. Generelt kan vi ha følgjande rekkjeutvikling:

$$x(n) = \sum_{k=1}^{N} c_k \phi_k(n).$$

e. Kva for krav må setjast til basisfunksjonane for at rekkjeutviklinga skal vere eksakt?

Oppgave III

Gitt følgende symmetriske sannsynlighetstetthetsfunksjon:



Signalet kvantiseres uniformt med kvantiseringsintervallene $\Delta = 1/8$.

a. Beregn kvantiseringsstøyen.

b. Beregn effekten i det rekonstruerte signalet når signalene i kvantiserings-intervallene representeres med midtpunktene mellom desisjonsgrensene.

c. Finn lavest mulig gjennomsnittlige bitrate per punktprøve for representasjon av det kvantiserte signalet.

Bitrepresentasjonen ønskes overført på en gaussisk kanal med samme antall punktprøver per sekund som antall punktprøver i signalet.

d. Finn nødvendig signal-støyforhold på kanalen for feilfri overføring i henhold til Shannons kanalkapasitetsteorem.

Vi ønsker nå å overføre det kvantiserte signalet som multinivåsignaler (altså med 8 nivåer) der nivåene er lik representasjonsnivåene i kvantisereren.

e. Hva er den minste effekten per punktprøve en kan oppnå?

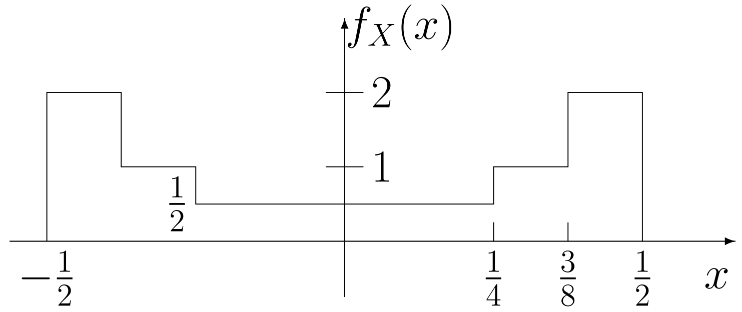
Gitte formler:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{L} p_i \log_2(p_i)$$

$$C = \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{P}{\sigma_N^2}\right) = \frac{1}{2}\log_2(1 + CSNR)$$

Oppgåve III

Signalet x vert karakterisert ved følgjande symmetriske sannsynstettleiksfunksjon:



Signalet skal kvantiserast uniformt med kvantiseringsintervall $\Delta = 1/8$.

a. Finn kvantiseringsstøyen.

b. Finn effekten i det rekonstruerte signalet når signala i kvart kvantiseringsintervall vert representerte med midtpunktet mellom desisjonsgrensene for intervallet.

c. Finn lågast moglege, gjennomsnittlege bitrate per punktprøve for representasjon av det kvantiserte signalet.

Bitrepresentasjonen skal overførast på ein gaussisk kanal med same antall punktprøvar per sekund som antall punktprøvar i signalet.

d. Finn naudsynleg signal-støytilhøve på kanalen for feilfri overføring i fylgje Shannon sitt kanalkapasitetsteorem.

Vi ønskjer no å overføre det kvantiserte signalet som multinivåsignal (altså med 8 nivå) der nivåa er lik representasjonsnivåa i kvantiseraren.

e. Kva er den minste effekten per punktprøve ein kan oppnå?

Gjevne formlar:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{L} p_i \log_2(p_i)$$

$$C = \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{P}{\sigma_N^2}\right) = \frac{1}{2}\log_2(1 + CSNR)$$

Vedlegg: Fourier-representasjoner

Analoge signaler

Fourier-transform:

$$X(j\Omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt$$

Invers fourier-transform:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\Omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$$

Fourierrekker for signaler av endelig lengde ($t \in [0, T_0]$) eller periodiske signaler (periode: T_0):

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{j\frac{2\pi}{T_0}kt}$$

Koeffisienter:

$$\alpha_k = \frac{1}{T_0}\int_{0}^{T_0} x(t)e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt}dt$$

Tidsdiskrete signaler

Fourier-transform, DTFT:

$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

Invers DTFT:

$$x(n) = \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

Transform av signaler av endelig lengde ($n \in [0, N-1]$), eller rekkeutvikling av periodiske signaler (periode N), DFT:

$$X(k) = \mathcal{DFT}\{x(n)\} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

Inverse DFT:

$$x(n) = \mathcal{IDFT}\{X(k)\} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

Egenskaper til fourier-transformasjoner av uendelig lange, kontinuerlige signaler

Gitt:

$$X_i(j\Omega) = \mathcal{F}\{x_i(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_i(t)e^{-j\Omega t}dt$$

Linearitet:

$$ax_1(t) + bx_2(t) \Longleftrightarrow aX_1(j\Omega) + bX_2(j\Omega)$$

Tidsskift:

$$x(t-\tau) \Longleftrightarrow e^{-j\Omega\tau}X(j\Omega)$$

Frekvensskift:

$$x(t)e^{-j\Omega_0 t} \Longleftrightarrow X(j(\Omega - \Omega_0))$$

Konvolusjon i tidsplanet:

$$x_3(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau \Longleftrightarrow X_3(j\Omega) = X_1(j\Omega)X_2(j\Omega)$$

Multiplikasjon av funksjoner:

$$x_3(t) = x_1(t)x_2(t) \Longleftrightarrow X_3(j\Omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(jU)X_2(j(\Omega - U))dU$$

Parsevals teorem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\Omega)|^2 d\Omega$$