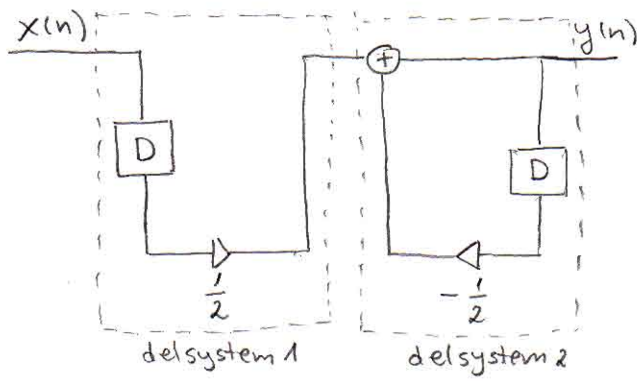
Løsningsforslag til eksamen i Infosig, 5. juni 2009

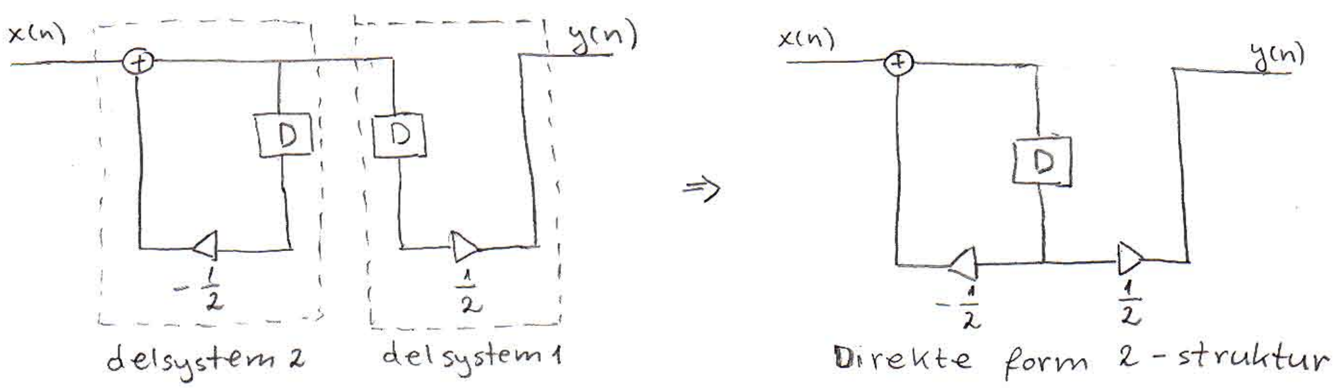
Oppgave 1

a) $2y(n) + y(n-1) = x(n-1) \Rightarrow y(n) = \frac{1}{2}x(n-1) - \frac{1}{2}y(n-1)$

Direkte form 1-struktur



Direkte form 2-struktur får vi ved å bytte om rekkefølgen til de to delsystemene og slå sammen forsinkelseselementene.



Direkte form 2-struktur

Direkte form 2-struktur er fordelakti fordi den bare bruker ett forsinkelses element, mens direkte form 1-struktur bruker 2. Dvs. den representerer en mer effektiv implementering av filteret som krever mindre minne.

b) Vi får enhetspulsrespons på utgangen av filteret når vi påtrykker enhetspuls på inngangen:

$$h(n) = \frac{1}{2}\delta(n-1) - \frac{1}{2}h(n-1) = -\frac{1}{2}h(n-1) \quad \text{for } n \neq 1$$

Siden filteret er kausalt har vi at $h(n) = 0$ for $n < 0$.

$$\left.\begin{aligned} h(0) &= -\tfrac{1}{2}h(-1) = 0 \\ h(1) &= \tfrac{1}{2}\delta(0) - \tfrac{1}{2}h(0) = \tfrac{1}{2} = -\left(-\tfrac{1}{2}\right) \\ h(2) &= -\tfrac{1}{2}\cdot h(1) = -\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = -\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 \\ h(3) &= -\tfrac{1}{2}h(2) = -\left(-\tfrac{1}{2}\right)^3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow h(n) = \begin{cases} 0 & \text{for } n < 1 \\ -\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \text{for } n \geq 1 \end{cases}$$

$$= -\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n u(n-1)$$

$h(n)$ er uendelig lang $\Rightarrow$ IIR filter.

1c) Vi finner først frekvensresponsen

$$H(\omega) = \mathrm{DTFT}\,(h(n)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\, e^{-j\omega n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\tfrac{1}{2}\right)^n e^{-j\omega n} = \left| \begin{array}{l} n' = n-1 \\ n = n'+1 \end{array} \right|$$

$$= -\sum_{n'=0}^{\infty} \left(-\tfrac{1}{2} e^{-j\omega}\right)^{n'+1} = \frac{\frac{1}{2} e^{-j\omega}}{1 + \frac{1}{2} e^{-j\omega}} = \frac{e^{-j\omega}}{2 + e^{-j\omega}}$$

Vi kan også finne $H(\omega)$ ved å ta utgangspunkt i differensligningen:

$$2y(n) + y(n-1) = x(n-1) \quad \Big|\ \cdot \mathrm{DTFT}\{\cdot\}$$

$$2Y(\omega) + e^{-j\omega} Y(\omega) = e^{-j\omega} X(\omega)$$

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{e^{-j\omega}}{2 + e^{-j\omega}}$$

Videre har vi at amplituderesponsen er gitt ved

$$|H(\omega)| = \left| \frac{e^{-j\omega}}{2 + e^{-j\omega}} \right| = \frac{|e^{-j\omega}|}{|2 + e^{-j\omega}|}$$

$$|e^{-j\omega}| = 1$$

$$|2 + e^{-j\omega}| = |2 + \cos\omega - j\sin\omega| = \sqrt{(2+\cos\omega)^2 + \sin^2\omega}$$

$$= \sqrt{4 + 4\cos\omega + \cos^2\omega + \sin^2\omega} = \sqrt{5 + 4\cos\omega}$$

$$\Rightarrow \quad |H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{5 + 4\cos\omega}}$$

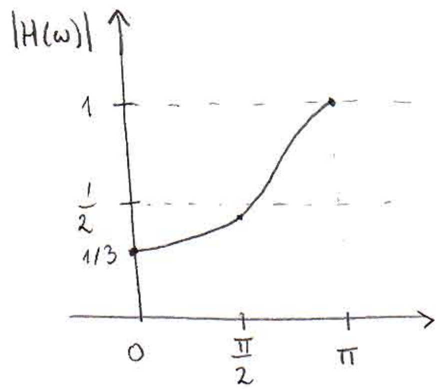
Alternativt kan vi finne $|H(\omega)|$ på følgende måte:

$$|H(\omega)|^2 = H(\omega) \cdot H^*(\omega) = \frac{e^{-j\omega}}{2 + e^{-j\omega}} \cdot \frac{e^{j\omega}}{2 + e^{j\omega}}$$

$$= \frac{1}{4 + 2e^{-j\omega} + 2e^{j\omega} + 1} = \frac{1}{5 + 2(e^{-j\omega} + e^{j\omega})} = \frac{1}{5 + 4\cos\omega}$$

$$\Rightarrow \quad |H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{5 + 4\cos\omega}}$$

$|H(\omega)|$ er skissert i følgende figur



$\cos 0 = 1 \qquad |H(0)| = \frac{1}{3}$

$\cos \frac{\pi}{2} = 0 \qquad |H(\frac{\pi}{2})| = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx \frac{1}{2}$

$\cos \pi = -1 \qquad |H(\pi)| = 1$

$\cos \omega$ er monotont avtagende pa interval $[0, \pi]$, mens $|H(\omega)|$ er monotont stigende.

Derfor er dette et høypass-filter.

1d) $X(\omega) = \text{DTFT}\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-j\omega n} = 5 \cdot e^{-j\omega \cdot 0} + 2e^{j\omega} + 2e^{-j\omega}$

$= 5 + 4\cos\omega$

1e) $Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$

$|Y(\omega)| = |X(\omega)| \cdot |H(\omega)|$

$X(\omega) \in \mathbb{R}$ og $X(\omega) > 0$ for alle $\omega \Rightarrow |X(\omega)| = X(\omega)$

$\Rightarrow |Y(\omega)| = (5 + 4\cos\omega) \cdot \frac{1}{\sqrt{5 + 4\cos\omega}} = \sqrt{5 + 4\cos\omega}$

Oppgave 2

2a)
$$P_X = E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_{-4}^{-2} x^2 \cdot \frac{1}{16}\,dx + \int_{-2}^{0} x^2 \cdot \frac{1}{4}\,dx + \int_{0}^{2} x^2 \cdot \frac{1}{8}\,dx + \int_{2}^{4} x^2 \cdot \frac{1}{16}\,dx$$
$$= \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_{-4}^{-2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_{-2}^{0} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_{0}^{2} + \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_{2}^{4}$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{16}\left[(-8+64) + 4(0+8) + 2(8-0) + (64-8)\right]$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{16}(56+32+16+56) = \frac{160}{48} = \frac{10}{3}$$

2b) Kvantisereren skal dekke verdiene fra $x_{min} = -4$ til $x_{max} = 4$ med $L = 4$ kvantiseringsintervaller.

$$\Delta = \frac{x_{max} - x_{min}}{L} = 2$$

Desisjonsgrensene: $-4, -2, 0, 2$ og 4

Representasjonsverdiene skal være midt mellom desisjonsgrensene, dvs. $-3, -1, 1$ og 3

2c) Siden $f_X(x)$ er konstant på hvert av kvantiseringsintervallene, vil approksimasjonsformellen for beregning av kvantiseringsstøy-effekten gi eksakt resultat:

$$\sigma_q^2 = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Alternativt kan vi regne ut σ_q^2 ved å starte fra definisjonen:

$$\sigma_q^2 = E[q^2] = E\left[(x - Q[x])^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - Q[x])^2 f_X(x)\,dx$$
$$= \underbrace{\int_{-4}^{-2} (x+3)^2 \cdot \frac{1}{16}\,dx}_{x' = x+3} + \underbrace{\int_{-2}^{0} (x+1)^2 \cdot \frac{1}{4}\,dx}_{x' = x+1} + \underbrace{\int_{0}^{2} (x-1)^2 \frac{1}{8}\,dx}_{x' = x-1} + \underbrace{\int_{2}^{4} (x-3)^2 \cdot \frac{1}{16}\,dx}_{x' = x-3}$$
$$= \frac{1}{16}\int_{-1}^{1} x'^2\,dx' + \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} x'^2\,dx' + \frac{1}{8}\int_{-1}^{1} x'^2\,dx' + \frac{1}{16}\int_{-1}^{1} x'^2\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x'^2\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x'^3\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{6}\cdot(1-(-1)) = \frac{1}{3}$$

$$SNR = \frac{P_x}{\sigma_q^2} = \frac{\frac{10}{3}}{\frac{1}{3}} = 10$$

$$(SNR = 10 \log_{10} 10 \text{ dB} = 10 \text{ dB})$$

2d) Entropien til et diskret kilde er definert som gjennomsnittlig informasjonsinnhold i hvert kildesymbol gitt i bit.

Det kvantiserte signalet kan innta 4 forskjellige verdier, $-3, -1, 1$ og 3 med sannsynligheter hhv. $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ og $\frac{1}{8}$.
(Disse fås ved å integrere $f_X(x)$ over de respektive kvantiseringsintervallene)

Informasjonsinnhold i et kildesymbol er gitt ved $I = \log_2 \frac{1}{p}$ [bit], der p er sannsynligheten til kildesymbolet.

Entropien er dermed gitt ved:

$$E = E[I] = \sum_{i=1}^{4} I_i p_i = \sum_{i=1}^{4} p_i \log_2 \frac{1}{p_i}$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \log_2 8 + \frac{1}{2} \log_2 2 + \frac{1}{4} \log_2 4 + \frac{1}{8} \log_2 8$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} = 1{,}75 \text{ bit}$$

2e) Vi har 4 representasjonsverdier og trenger derfor 4 forskjellige kodeord. Med 1 bit kan vi bare danne 2 forskjellige kodeord (0 og 1), mens med 2 bit vi kan danne 4 forskjelige kodeord (00, 01, 10, 11). Derfor er den minste kodeordlengde i dette tilfelle lik 2 bit.

Det spiller ingen rolle hvilket kodeord tilordnes hvilken av representasjonsverdiene, men vi kan f.eks velge følgende tilordning:

−3	00
−1	01
1	10
3	11

2f) Koden kan dekodes entydig siden ingen av kodeordene er prefiks i et annet kodeord.

Gjennomsnittlig kodeordlengde:

$$\bar{L} = E[\ell] = \sum_{i=1}^{4} l_i p_i = 3 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 1,75$$

Siden $\bar{L} = H$ er det ikke mulig å designe en annen kode med lavere $\bar{L}$.

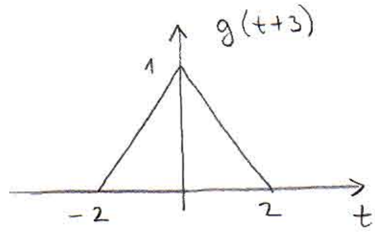
Oppgave 3

3a) Overføring over en kanal er mulig uten ISI hvis Nyquist kriteriet er oppfylt. Siden $g(t)$ er oppgitt, benytter vi Nyquist kriteriet i tidsdomenet som sier at overføring uten ISI er mulig hvis det finnes $T > 0$ og $\Delta t \geq 0$ slik at

$$g(kT + \Delta t) = \begin{cases} 1 & \text{for } k = 0 \\ 0 & \text{for } k \neq 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow g(\Delta t) = 1 \Rightarrow \Delta t = 3\,\text{ms} \\ &g(kT + 3) = 0 \quad \text{for } |k| \geq 1 \Rightarrow T \geq 2\,\text{ms} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Nyquist kriteriet er oppfylt og overføring uten ISI er dermed mulig over denne kanalen.



Den minimale avstanden mellom kanalsymbolene er $T_{min} = 2\,\text{ms}$, og den maksimale signaleringshastigheten er derfor

$$\frac{1}{T_{min}} = \frac{1}{2\,\text{ms}} = 500 \, \frac{\text{symboler}}{\text{s}}$$

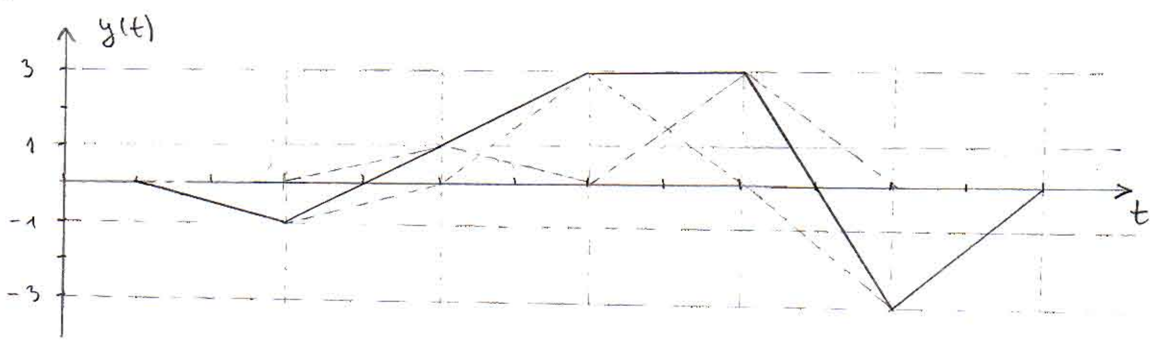
3b) Gitt at $w(t) = 0$, har vi at

$$y(t) = x(t) * h(t) * h_m(t) = \sum_k x_k h_s(t - kT) * h(t) * h_m(t) \Rightarrow$$

$$y(t) = \sum_k x_k g(t - kT)$$

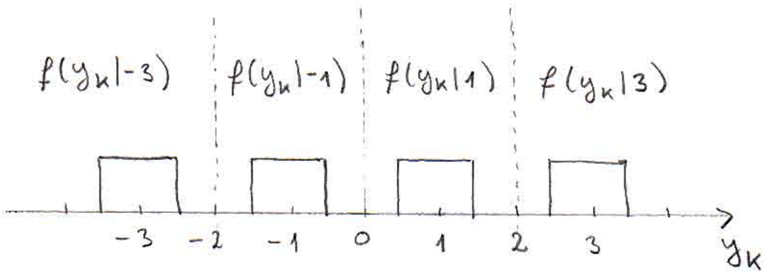
Videre har gitt sekvensen av kanalsymbolene x_k : $-1, 1, 3, 3, -3$.

$y(t)$ er vist ved den heltrukne linjen i følgende figur.



3c) Overføringsfeil får vi hvis $\hat{x}_k \neq x_k$.

Følgende figur viser sannsynlighetstetthetsfordeling til y_k gitt at alle kanalsymbolene er like sannsynlige og at kanalstøyen er uniformt fordelt på intervallet $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.



De vertikale stiplete linjene representerer desisjonsgrensene. Siden sannsynlighetstetthetsfordelingene gitt de forskjellige kanalsymbolene ikke overlapper er sannsynligheten for overføringsfeil lik 0.

3d) For å oppnå feilfri overføring over en kanal med hvit gaussisk støy, kan vi sende maksimalt

$$C = \frac{1}{2} \log_2 (1 + SNR) \ \frac{\text{bit}}{\text{symbol}}$$

I denne oppgaven sender vi 4 forskjellige kanalsymboler, dvs. $2 \ \frac{\text{bit}}{\text{symbol}}$.

$$\Rightarrow \quad 2 < \frac{1}{2} \log_2 (1 + SNR) \Rightarrow \log_2 (1 + SNR) > 4 \Rightarrow 1 + SNR > 16$$

$$\Rightarrow \quad SNR > 15$$

$$(SNR > 10 \log_{10} 15 \text{ dB} = 11{,}76 \text{ dB}).$$