

NTNU
NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR KONSTRUKSJONSTEKNIKK

Faglig kontakt under eksamen : Jan B. Aarseth
Tlf.: (735)93568

EKSAMEN I FAG TKT4126 MEKANIKK

Fredag 7. desember 2007

Tid: kl. 9.00 - 13.00

Tillatte hjelpemidler: C - Godkjent kalkulator

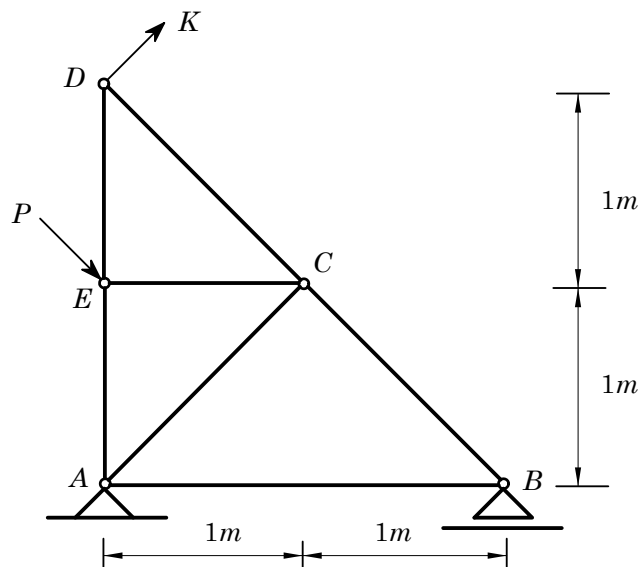
Rottmann : Matematisk formelsamling.

Irgens : Formelsamling Mekanikk

Språkform: Bokmål

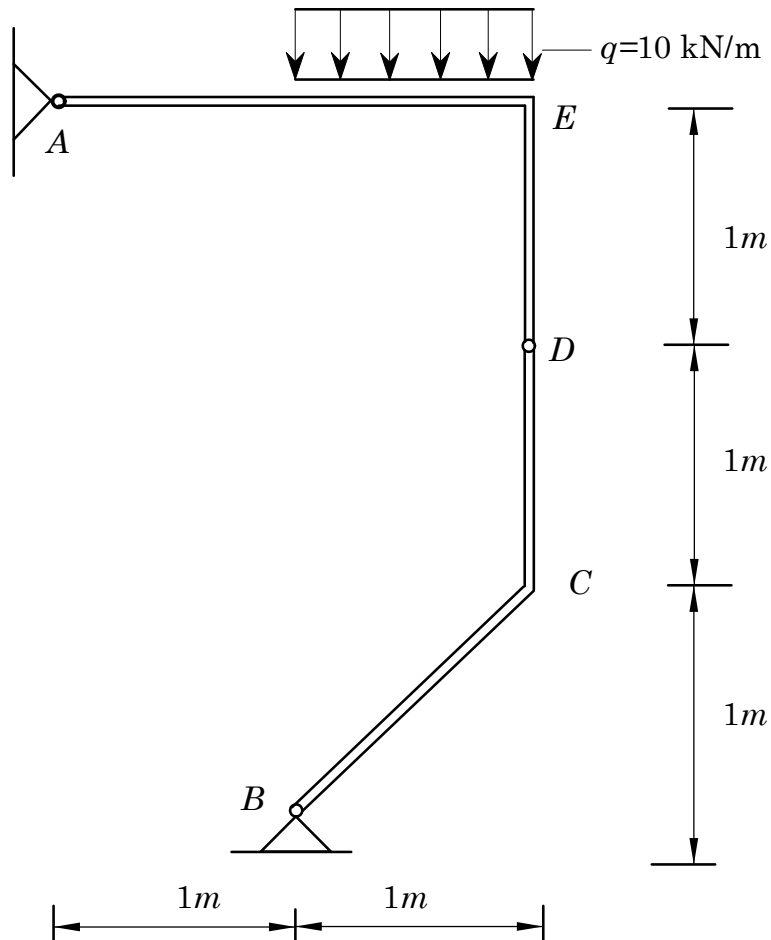
Sensurdato: 7. januar 2008

Oppgave 1 (25%)



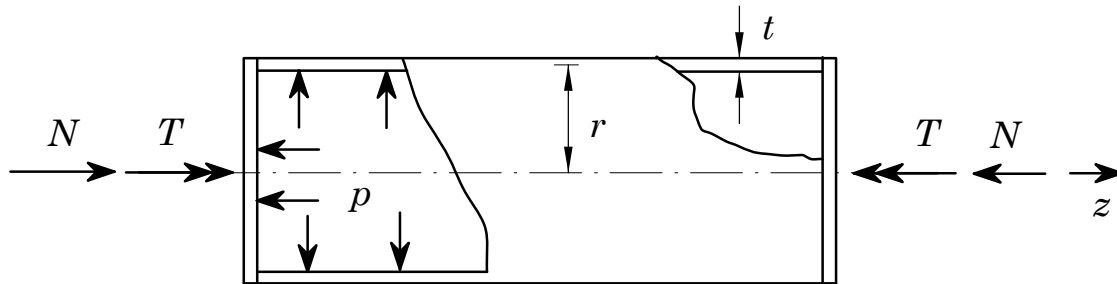
Figuren viser et fagverk opplagret med et fast boltelager i A og et glidelager i B . Fagverket er belastet med en kraft $P = 20\sqrt{2}$ kN i E og en kraft $K = 4\sqrt{2}$ kN i D . Begge kreftene danner 45° med horisontalen.

- Vis at fagverket er statisk bestemt og bestem opplagerreaksjonene i A og B .
- Bestem alle stavkreftene og angi strekk- og trykkstaver på figur.

Oppgave 2 (25%)

Figuren viser en ramme som er opplagret med faste boltelagre i A og B og som har et indre ledd i D . Ramma består av den horisontale bjelken AE med lengde 2m , de vertikale bjelkene ED og CD , begge med lengde 1m , samt skråbjelken BC som danner 45° med horisontalen. Det er stive hjørner i E og C . Ramma er belastet med en jevnt fordelt belastning $q = 10\text{kN/m}$ langs halve AE .

- Vis at ramma er statisk bestemt og bestem lagerreaksjonene i A og B samt leddkrefter i D . Tegn kraftbilde.
- Beregn og tegn moment-, skjær- og aksialkraftdiagram for ramma. Påfør størrelser og virkningsymboler på diagrammene. (For momentdiagrammet kan virkningsymboler utelates dersom diagrammet tegnes på strekksiden).

Oppgave 3 (25%)

Figuren viser en beholder laget av et sirkulært rør med midlere radius $r = 150 \text{ mm}$ og veggtykkelse $t = 5 \text{ mm}$. Beholderen kan belastes med et indre trykk p , et torsjonsmoment T og en aksialkraft N . Flytespenning $f_y = 340 \text{ MPa}$.

- Belaster med $p = 6 \text{ MPa}$, $N = 235 \text{ kN}$ (trykk) og $T = 45 \text{ kNm}$ (med dreieretning som vist på figuren). Beregn spenningene som virker på et element i rørveggen.
- Beregn hovedspenningene og hovedretningene samt maksimal skjærspenning for elementet i spørsmål a)
- Tegn Mohrs sirkel for den funne spenningstilstanden.
- Holder p og N konstante med verdier som gitt i spørsmål a). Øker torsjonsmomentet til flytning inntreffer i følge Mises-kriteriet. Beregn det tilhørende flyte-torsjonsmomentet T_y .

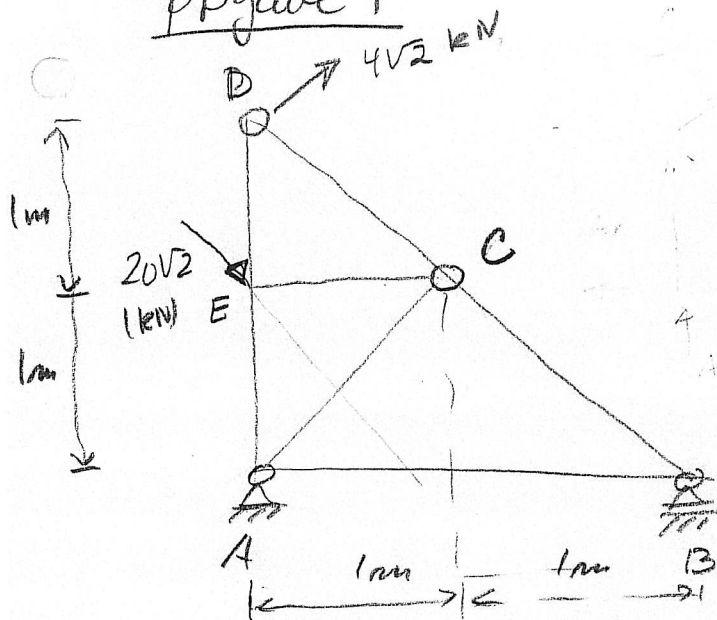
Oppgave 4 (25%)

Vi fortsetter med beholderen i oppgave 3. I tillegg til dimensjonene som er gitt, har beholderen en lengde $L = 500 \text{ mm}$. Her antar vi at de gitte dimensjonene refererer til tilstanden før beholderen belastes.

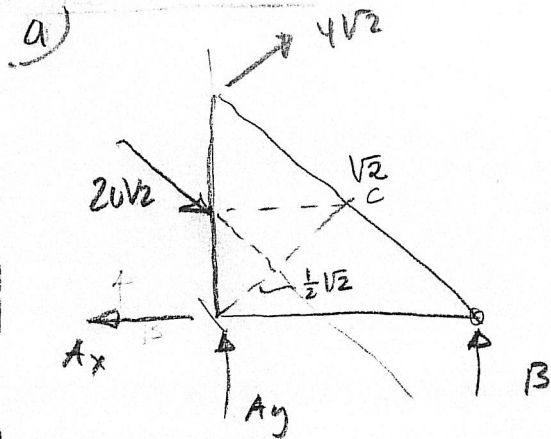
Materialdata : $E = 2.0 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $\nu = 0.3$

- a) Bestem lengdeforandringen ΔL samt forandringen av tykkelsen Δt forårsaket av belastningen i oppgave 3, spørsmål a)
- b) Vis at forbindelsen mellom forandring av radius Δr og tøyningen ε_θ i ringretningen er gitt ved :
$$\varepsilon_\theta = \frac{\Delta r}{r}$$
 Bestem Δr for belastningen i oppgave 3, spørsmål a)
- c) Vi belaster nå beholderen bare med et trykk p og en aksialkraft N . Med en strekkklapp som danner 45° med z -aksen, måles tøyningen ε . Idet flytning inntreffer, viser strekkklappen $\varepsilon = 0$. Vis at vi da har følgende tilstand : $\sigma_z + \sigma_\theta = 0$. Bruk dette til å bestemme trykket p_y ved flytning etter Tresca-kriteriet.
- d) Bestem også aksialkrafta N_y ved flytning for tilstanden i spørsmål c)

Oppgave 1



Global likevekt



$$\sum M_A = 0:$$

$$B \cdot 2 - 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - 20\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0$$

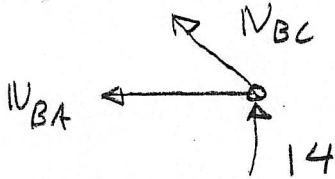
$$\Rightarrow B = \frac{1}{2} [8 + 20] = \underline{\underline{14 \text{ kN}}}$$

$$\sum F_x = 0: A_x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 4\sqrt{2} - 20\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow A_x = \underline{\underline{24 \text{ kN}}}$$

$$\sum F_y = 0: A_y + B + 4\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 20\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\Rightarrow A_y = 20 - 4 - 14 = \underline{\underline{2 \text{ kN}}}$$

d) likevekt knutep. B:

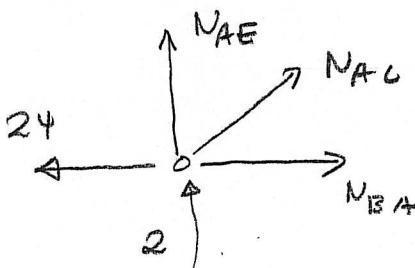


$$\sum F_x = 0: \frac{N_{BA}}{\sqrt{2}} + \frac{N_{BC}}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\sum F_y = 0: \frac{N_{BC}}{\sqrt{2}} + 14 = 0$$

$$\Rightarrow N_{BC} = \underline{\underline{-14\sqrt{2}}}, N_{BA} = \underline{\underline{14}} \quad \text{ok}$$

Knutepkt. A



$$\sum F_x = 0: \frac{N_{AC}}{\sqrt{2}} + N_{BA} - 24 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{N_{AC}}{\sqrt{2}} = 24 - N_{BA} = \underline{\underline{10}}$$

$$\Rightarrow N_{AC} = \underline{\underline{10\sqrt{2}}}$$

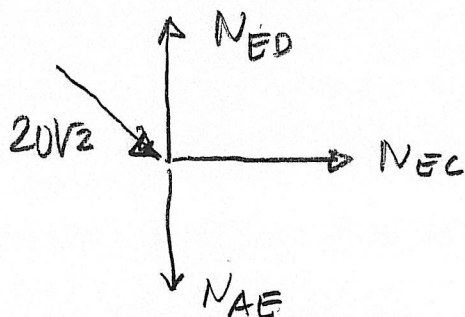
$$\sum F_y = 0: 2 + N_{AE} + \frac{N_{AC}}{\sqrt{2}} = 0$$

$$N_{AE} = -2 - \frac{N_{AC}}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{-12}}$$

Oppgave 1 forts

Side 2

Knute pkt. E



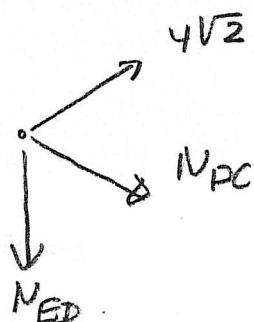
$$\sum F_x = 0 : \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + N_{EC} = 0$$

$$\Rightarrow N_{EC} = \underline{\underline{-20}}$$

$$\sum F_y = 0 : N_{ED} - N_{AE} - \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\Rightarrow N_{ED} = N_{AE} + 20 = -12 + 20 = \underline{\underline{8}}$$

Knute pkt. D



$$\sum F_x = 0 : \frac{N_{DC}}{\sqrt{2}} + \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 0$$

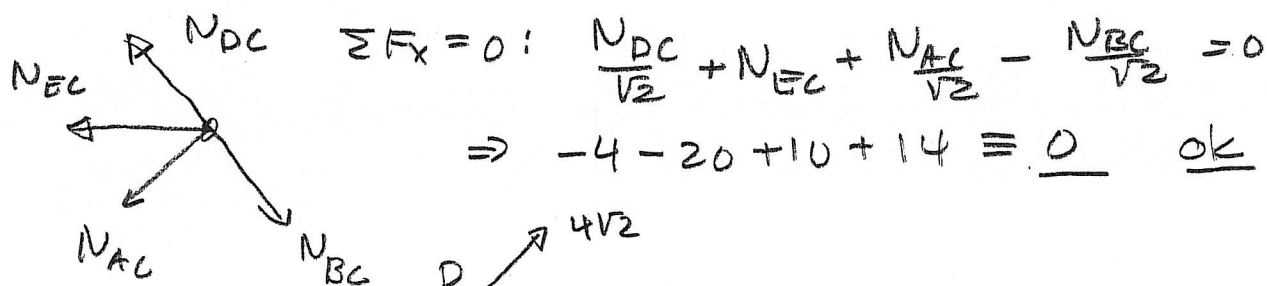
$$\Rightarrow N_{DC} = \underline{\underline{-4\sqrt{2}}}$$

Kontroll: $\sum F_y = 0 :$

$$4 - \frac{N_{DC}}{\sqrt{2}} - N_{ED} = 0$$

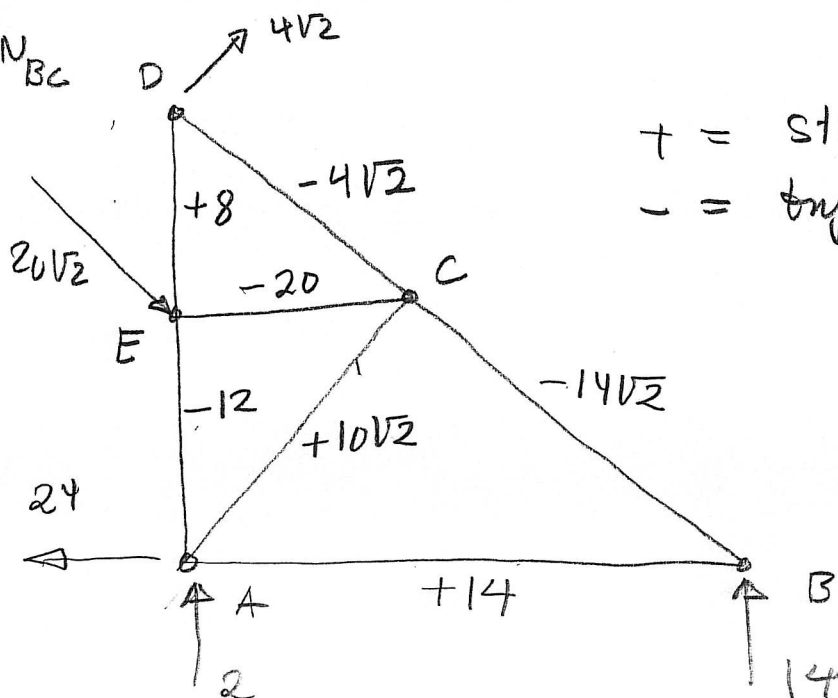
$$4 + 4 - 8 = \underline{\underline{0}} \quad \underline{\underline{OK}}$$

Brueker knute pkt. C for kontroll



$$\sum F_x = 0 : \frac{N_{DC}}{\sqrt{2}} + N_{EC} + \frac{N_{AC}}{\sqrt{2}} - \frac{N_{BC}}{\sqrt{2}} = 0$$

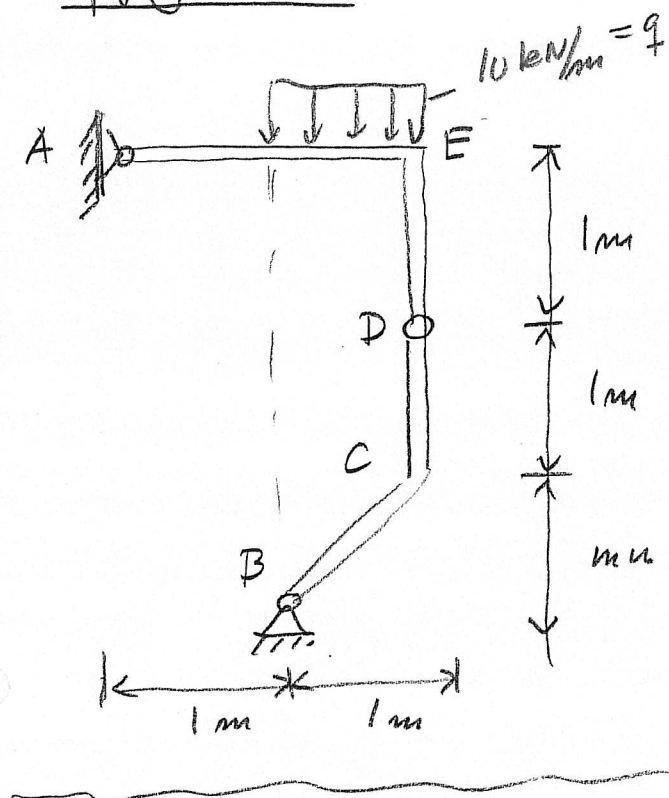
$$\Rightarrow -4 - 20 + 10 + 14 = \underline{\underline{0}} \quad \underline{\underline{OK}}$$



$+$ = strekk

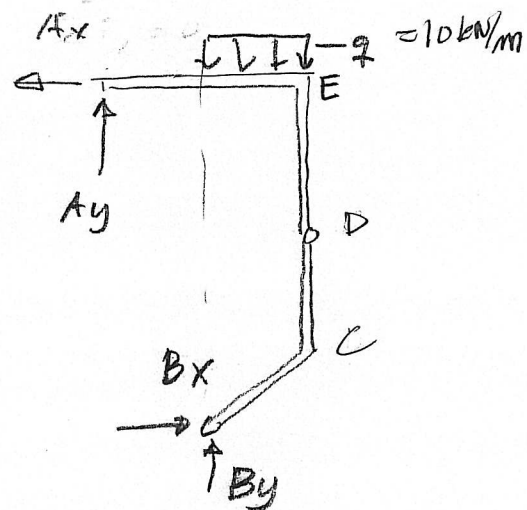
$-$ = trykk

Oppgave 2



b)

Global likevekt



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = B_x$$

$$\sum F_y = 0: B_y + A_y - 10 \cdot 1 = 0 \Rightarrow B_y + A_y = 10$$

$$\sum M_B = 0: -A_x \cdot 3 + A_y \cdot 1 + 10 \cdot \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow A_x = \frac{1}{3}(A_y + 5) \quad (1)$$

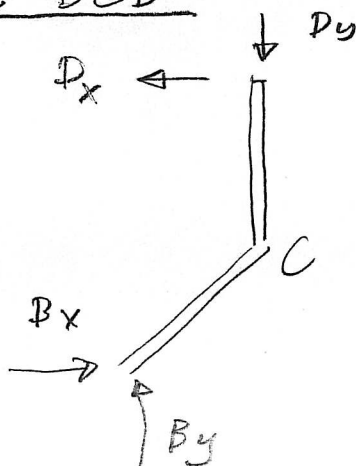
Del AED:

$$\sum M_D = 0: -A_x \cdot 1 + A_y \cdot 2 - 10 \cdot \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow A_x = 2A_y - 5 \quad (2)$$

$$(1) \text{ og } (2): \frac{1}{3}(A_y + 5) = 2A_y - 5 \Rightarrow A_y = \underline{4 \text{ kN}}$$

Derav: $B_y = 10 - A_y = \underline{6 \text{ kN}}$, $A_x = \underline{3 \text{ kN}}$ og $B_x = \underline{3 \text{ kN}}$

Del BCD



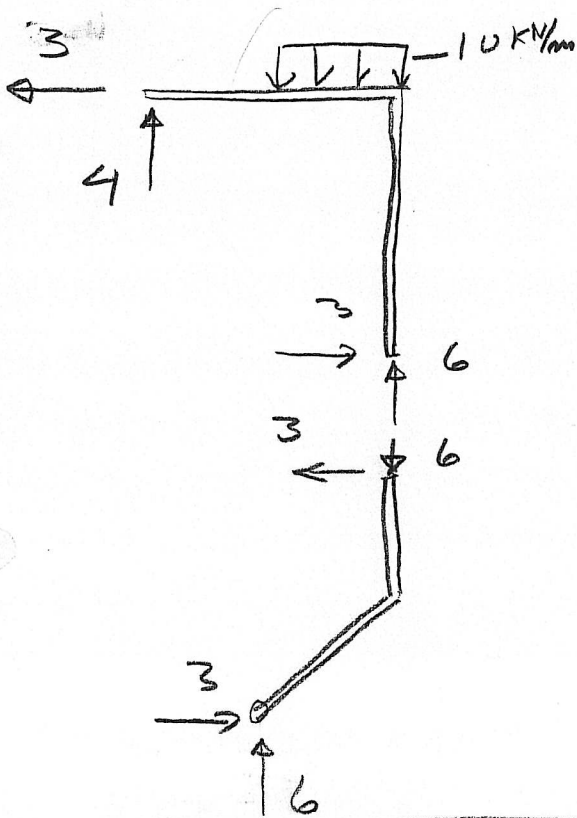
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow D_x = B_x = \underline{3 \text{ kN}}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow D_y = B_y = \underline{6 \text{ kN}}$$

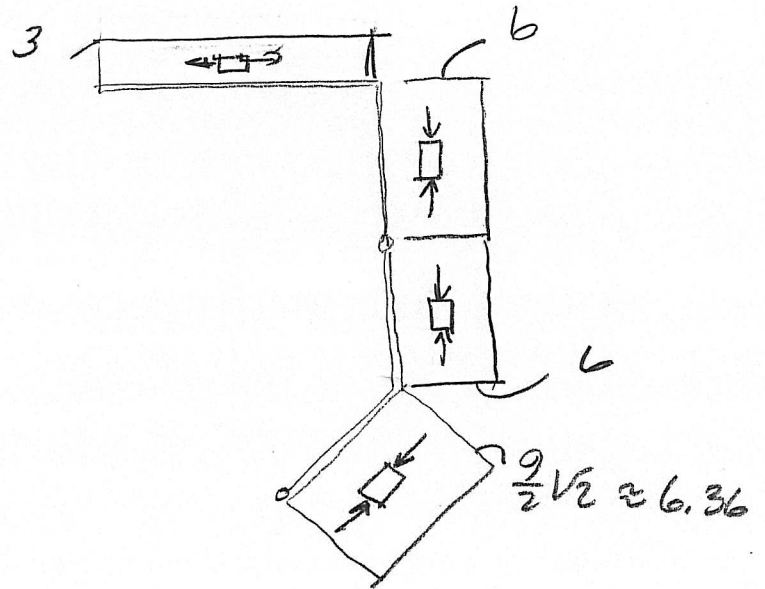
Oppgave 2 forts

Side 2

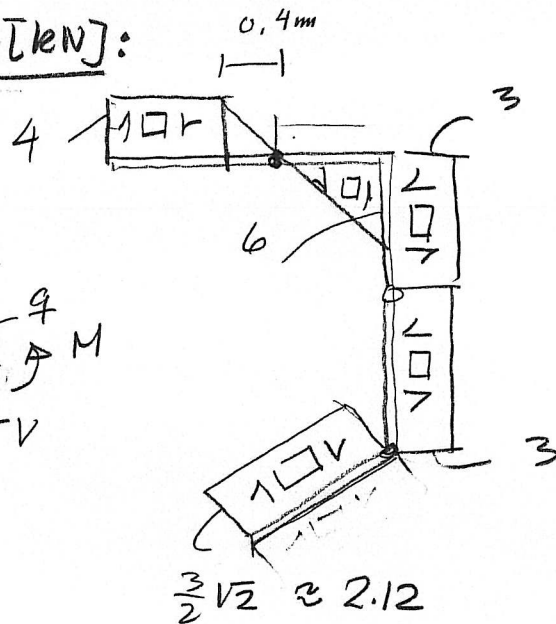
Kraftbilde [kN]



N [kN]:



V [kN]:



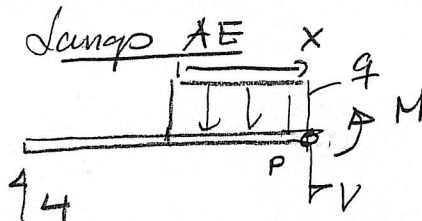
$$\sum F_x = 0:$$

$$4 - q \cdot x - V = 0$$

$$V = 4 - 10 \cdot x$$

$$V = 0 \text{ for } x = 0.4$$

$$V(1) = -6$$



$$\sum M_P = 0: 4(1+x) - \frac{q x^2}{2} - M = 0$$

$$\Rightarrow M = 4 + 4x - 5x^2$$

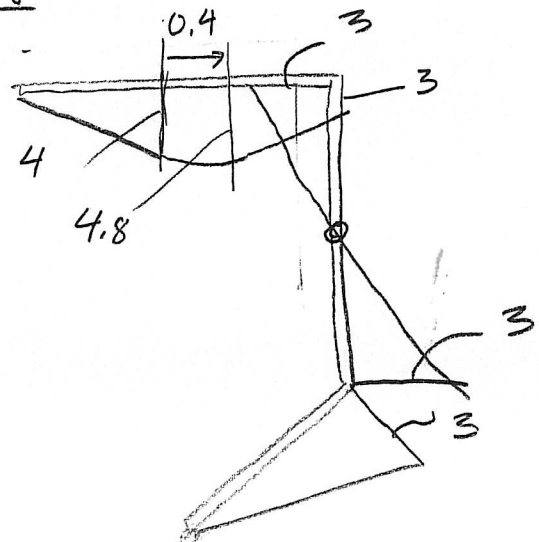
$$\frac{dM}{dx} = V = 4 - 10 \cdot x$$

$$M(0) = 4, M_{\max} \text{ for } x = 0.4$$

$$= 4.8 \text{ kNm}$$

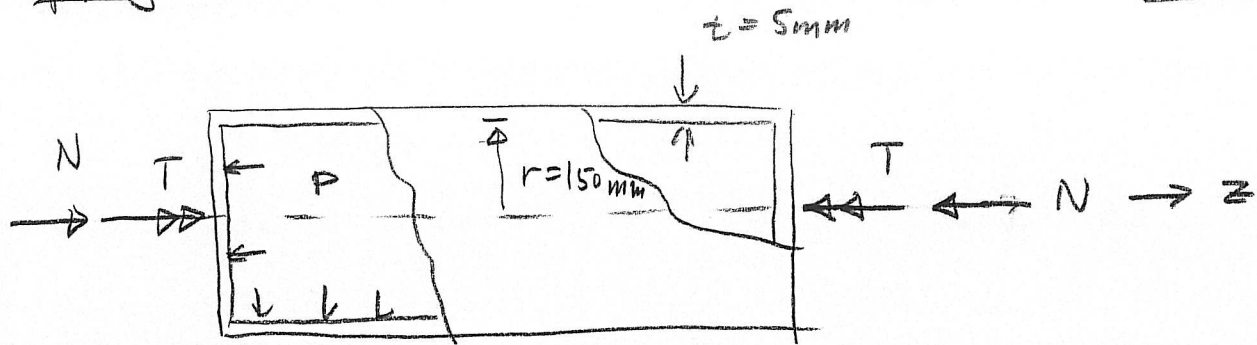
$$M(1) = 3$$

M [kNm]:

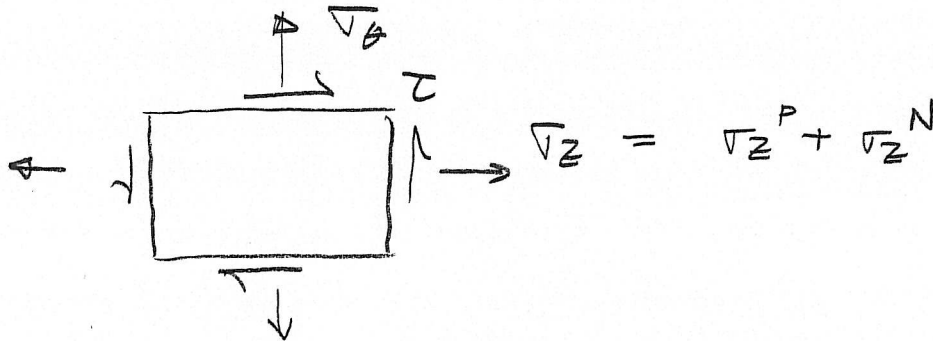


Oppgave 3

side (1)



a) $p = 6 \text{ MPa}$, $N = 235 \text{ kN (trykk)}$, $T = 45 \text{ kNm}$



$$\sigma_\theta = \frac{pr}{t} = 6 \cdot \frac{150}{5} = \underline{180 \text{ MPa}}$$

$$\sigma_z^p = \frac{\sigma_\theta}{2} = \underline{90 \text{ MPa}}$$

$$\sigma_z^N = \frac{N}{2\pi r t} = - \frac{235 \cdot 10^3}{2\pi \cdot 150 \cdot 5} = -49.9 \approx \underline{-50 \text{ MPa}}$$

$$\Rightarrow \sigma_z = 90 - 50 = \underline{40 \text{ MPa}}$$

$$\tau = \frac{T \cdot r}{2\pi r^3 t} = \frac{T}{2\pi r^2 t} = \frac{45 \cdot 10^6}{2\pi (150)^2 \cdot 5} = 63.66 \approx \underline{64 \text{ MPa}}$$

b) Hovedspenninger og hovedretninger.

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_z + \sigma_\theta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_\theta}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{40 + 180}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{40 - 180}{2}\right)^2 + 64^2}$$

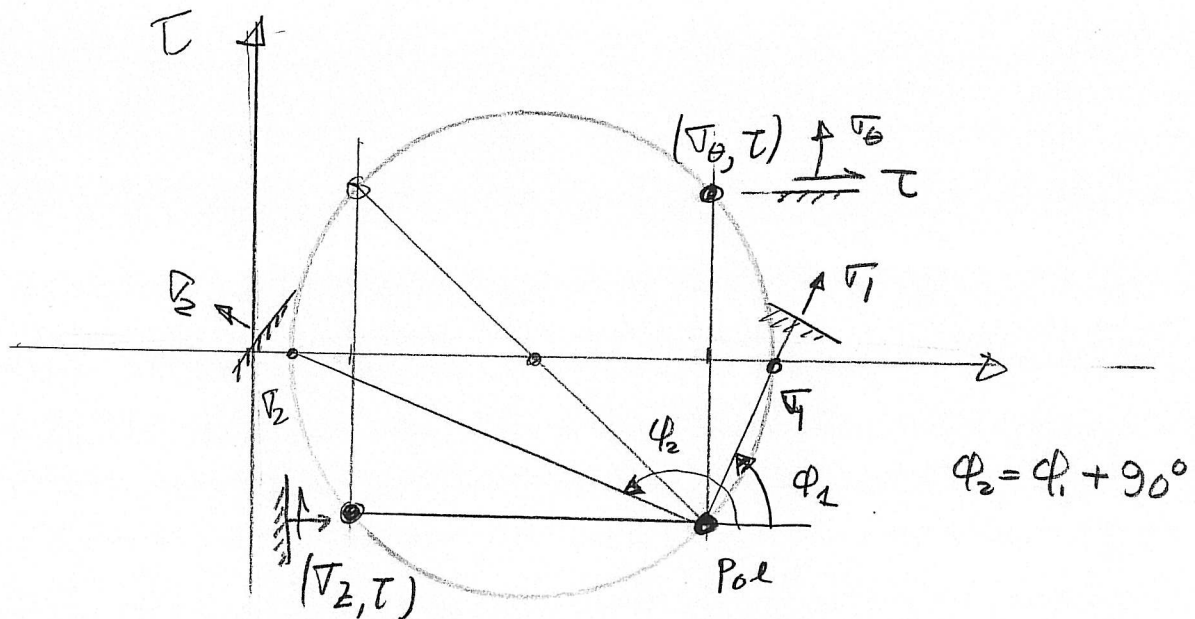
$$= 110 \pm 94.8 \approx \underline{110 \pm 95}$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = \underline{205}, \sigma_2 = \underline{15} \text{ (MPa)}$$

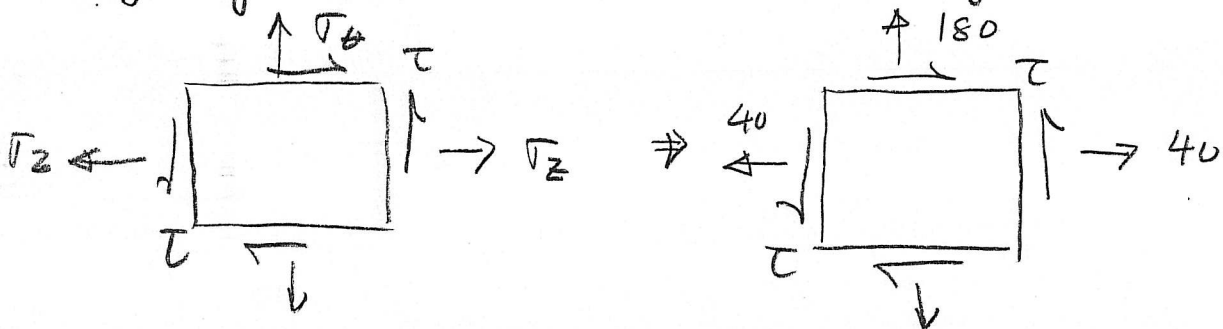
$$\varphi = \arctan\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_z}{\tau}\right) = \arctan\left(\frac{205 - 40}{64}\right) = \arctan(2.578) = \underline{68.8^\circ}$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{\sigma_1 - 0}{2} = \underline{102.5 \text{ MPa}}$$

c) Mohrs sirkel



d) Flytning etter Mises-kriteriet, $f_y = 340 \text{ MPa}$



Mises: $\sigma_d' = \sqrt{\sigma_z^2 + \sigma_b^2 - \sigma_z \sigma_b + 3\tau^2} = f_y$

$$\sigma_d'^2 = 40^2 + 180^2 - 40 \cdot 180 + 3\tau^2 = 26800 + 3\tau^2 = f_y^2$$

$$\Rightarrow \tau^2 = \frac{f_y^2 - 26800}{3}$$

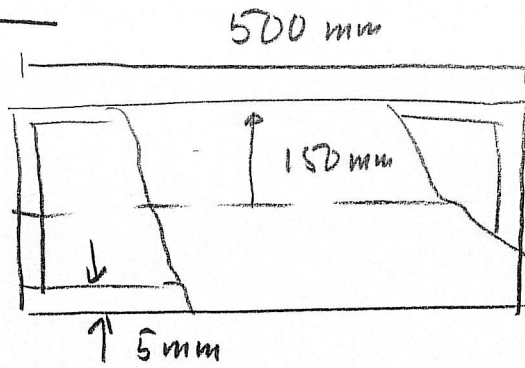
$$\Rightarrow \tau_y = \sqrt{\frac{340^2 - 26800}{3}} = 172 \text{ MPa}$$

$$T_y = 2\pi r^2 \cdot \tau_y = 2\pi \cdot 150^2 \cdot 172 = 1.216 \cdot 10^8 \text{ Nmm}$$

$$= 121.6 \text{ kNm}$$

Oppgave 4

side 1

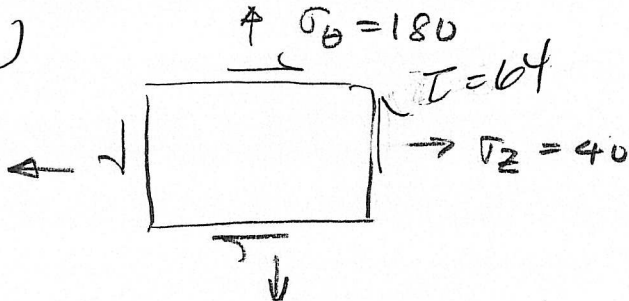


$$E = 2.10^5 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0.3$$

$$f_y = 340 \text{ MPa}$$

a)



$$\epsilon_z = \frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu \sigma_\theta) = \frac{1}{E} (40 - 0.3 \cdot 180) = -\frac{14}{E}$$

$$\Rightarrow \Delta L = -\frac{14 \cdot L}{E} = -\frac{14 \cdot 500}{2.10^5} = -0.035 \text{ mm}$$

$$\epsilon_r = \epsilon_t = \frac{\Delta t}{t} = \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu (\sigma_\theta + \sigma_z)] = -\frac{\nu (\sigma_z + \sigma_\theta)}{E} = -\frac{0.3 \cdot 220}{E}$$

$$\Rightarrow \Delta t = -\frac{66 \cdot 5}{E} = -0.00165 \text{ mm}$$

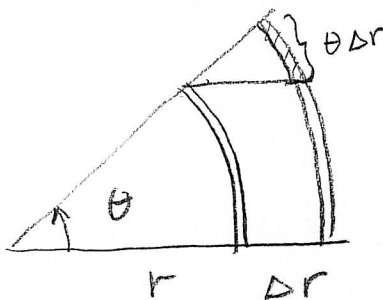
b)

$$\epsilon_\theta = \frac{\text{Ny omkrætt} - \text{gammel omkrætt}}{\text{gammel omkrætt}} = \frac{2\pi(r+\Delta r) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{\Delta r}{r}$$

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_z) = \frac{1}{E} (180 - 0.3 \cdot 40) = \frac{168}{E}$$

$$\Rightarrow \Delta r = \frac{168}{E} \cdot r = \frac{168 \cdot 150}{2.10^5} = 0.126 \text{ mm}$$

Event:

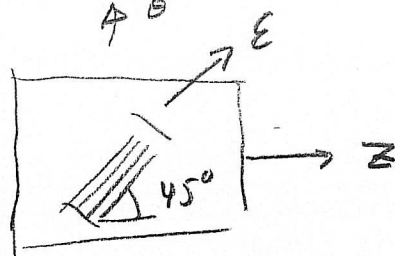


$$\epsilon_\theta = \frac{(r+\Delta r)\theta - r\theta}{r\theta} = \frac{\Delta r}{r}$$

Oppgave 4 forts

side 2

c)



$$f_y = 340 \text{ MPa}$$

$$\epsilon = \epsilon_{45^\circ} = \frac{\epsilon_z + \epsilon_\theta}{2} + \left(\frac{\epsilon_z - \epsilon_\theta}{2} \right) \cos 90^\circ = 0$$

$$\Rightarrow \epsilon_z + \epsilon_\theta = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu \sigma_\theta) + \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_z) = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_z (1 - \nu) + \sigma_\theta (1 - \nu) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\sigma_z + \sigma_\theta = 0}}$$

Flytning Trossa: $\sigma_{\max} - \sigma_{\min} = f_y$

$$\sigma_{\max} = \sigma_\theta, \sigma_{\min} = \sigma_z = -\sigma_\theta$$

$$\Rightarrow \sigma_\theta - (-\sigma_\theta) = f_y \Rightarrow \sigma_\theta = \frac{f_y}{2} = \underline{170}$$

$$\Rightarrow \frac{P_y r}{t} = 170 \Rightarrow P_y = \frac{t}{r} \cdot 170 = \frac{5}{150} \cdot 170 = \underline{5.67 \text{ MPa}}$$

d) Aksialkraft N_y ved flytning.

$$\sigma_z = -\sigma_\theta = -170$$

$$\therefore -170 = \sigma_z^P + \frac{N_y}{2\pi r t}$$

$$\sigma_z^P = \frac{\sigma_\theta}{2} = \frac{170}{2} = 85 \Rightarrow \frac{N_y}{2\pi r t} = -170 - 85 = \underline{-255}$$

$$N_y = -255 \cdot 2\pi r t =$$

$$-255 \cdot 2\pi \cdot 150 \cdot 5 = -1.202 \text{ MN}$$

$$= \underline{\underline{-1202 \text{ kN}}}$$