SIE2010 INFORMASJONS- OG SIGNALTEORI

Løsningsforslag eksamen august 2001

Oppgave 1

a) Gitt to vilkårlige signal $x_1(n)$ og $x_2(n)$. La $y_1(n) = \mathcal{H}\{x_1(n)\}$ og $y_2(n) = \mathcal{H}\{x_2(n)\}$. Danner nå et nytt signal $x(n) = c_1x_1(n) + c_2x_2(n)$. Operatoren $\mathcal{H}\{\}$ er lineær dersom:

$$y(n) = \mathcal{H}\{x(n)\} = c_1\mathcal{H}\{x_1(n)\} + c_1\mathcal{H}\{x_1(n)\} = c_1y_1(n) + c_2y_2(n)$$

b) Enhetspulsresponsen $h_\alpha(n)$:

$$\begin{aligned} h_\alpha(-1) &= 0, \quad \text{startvilkår} \\ h_\alpha(0) &= 1 \\ h_\alpha(1) &= \alpha \\ &\vdots \\ h_\alpha(n) &= a^n u(n) \end{aligned}$$

hvor

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Frekvensresponsen $H_\alpha(e^{j\omega})$:

$$H_\alpha(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{h_\alpha(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha e^{-j\omega}\right)^n = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$$

c) Setter $h_\beta(n) = \beta^n u(n)$ og $H_\beta(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\beta e^{-j\omega}}$

Enhetspulsresponsen $h_k(n)$ til kaskadekoplingen:

$$\begin{aligned} h_k(n) &= h_\alpha(n) * h_\beta(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_\alpha(i)h_\beta(n-i) = \sum_{i=0}^{n} \alpha^i\beta^{n-i}u(n) \\ &= \beta^n \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^i u(n) = \beta^n \frac{1-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} u(n) = \frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha} u(n) \quad (1) \end{aligned}$$

Utrkket gjelder når $\alpha \neq \beta$.

Frekvensresponsen $H_k(e^{j\omega})$: Har følgende sammenheng
$h_\alpha(n) * h_\beta(n) \iff H_\alpha(e^{j\omega})H_\beta(e^{j\omega})$. Dette gir

$$H_k(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}\frac{1}{1-\beta e^{-j\omega}} = \frac{1}{1-(\alpha+\beta)e^{-j\omega}+\alpha\beta e^{-j2\omega}}$$

d) Både kaskadekoplingen i 1c og parallellkoplingen i 1d er lineære skiftinvariante filtre (LSI-filtre). Disse er fullstendig beskrevet av enhetspulsresponsene. Derfor må $h_k(n) = h_p(n)$, der $h_p(n)$ er impulsresponsen til parallellkoplingen, for at filtrene skal være ekvivalente.

Finner $h_p(n)$:

$$h_p(n) = Ah_\alpha(n) + Bh_\beta(n) = (A\alpha^n + B\beta^n)\, u(n) \tag{2}$$

Omskriver ligning (**??**)

$$h_k(n) = \left(\frac{-\alpha}{\beta-\alpha}\alpha^n + \frac{\beta}{\beta-\alpha}\beta^n\right) u(n)$$

Ved å sammenligne ligning (**??**) og (**??**) ser vi at

$$A = \frac{-\alpha}{\beta-\alpha} \quad \text{og} \quad B = \frac{\beta}{\beta-\alpha}$$

e) Siden begge filtrene er kausale, er BIBO-stabilitetskriteriet et tilstrekkelig kriterium for å påvise stabilitet.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

Tester om $h_k(n)$ er stabilt for $\alpha \neq \beta$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty} |h_k(n)| &= \sum_{i=0}^{\infty} \left|\frac{-\alpha}{\beta-\alpha}\alpha^i + \frac{\beta}{\beta-\alpha}\beta^i\right| \\
&\leq \frac{|\alpha|}{|\beta-\alpha|}\sum_{i=0}^{\infty}|\alpha|^i + \frac{|\beta|}{|\beta-\alpha|}\sum_{i=0}^{\infty}|\beta|^i \\
&= \frac{|\alpha|}{|\beta-\alpha|}\frac{1}{1-|\alpha|} + \frac{|\beta|}{|\beta-\alpha|}\frac{1}{1-|\beta|} \qquad |\alpha| < 1 \text{ og} |\beta| < 1
\end{aligned}$$

Dvs: $h_k(n)$ er stabilt når $|\alpha| < 1$ og $|\beta| < 1$. Får det samme konvergensområde for $h_p(n)$.

Oppgave 2

a) Basisfunksjonene i rekka er:

$$\varphi_k(t) = e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt}$$

der k er alle heltall. Disse basisfunksjonene er ortogonale dersom (vi må integererer over en periode T_0):

$$\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \varphi_n(t)\varphi_m^*(t)dt = \begin{cases} A_{kk} & n = m \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Tester om dette er oppfylt:

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \varphi_n(t)\varphi_m^*(t)dt &= \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{-j\frac{2\pi}{T_0}nt}e^{j\frac{2\pi}{T_0}mt}dt = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{-j\frac{2\pi}{T_0}(n-m)t} \\
&= \frac{1}{-j\frac{2\pi}{T_0}(n-m)}\left[e^{-j\pi(n-m)} - e^{j\pi(n-m)}\right] = T_0\frac{\sin(\pi(n-m))}{\pi(n-m)} \\
&= T_0\text{sinc}(n-m) = \begin{cases} T_0 & n = m \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases} \qquad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

b) Fra figuren i oppgaveteksten ser vi at grunnperioden $T_0 = 1$. (Da blir basisfunksjonene ortonormale). Koeffisientene α_k i rekka er:

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= \int_0^1 x(t)\varphi_k^*(t)dt = \int_0^1 x(t)e^{j2\pi kt}dt = A\int_0^{\frac{1}{2}} e^{j2\pi kt}dt \\
&= \frac{A}{j2\pi k}\left[e^{j\pi k} - 1\right] = \frac{Ae^{j\frac{\pi}{2}k}}{j2\pi k}\left[e^{j\frac{\pi}{2}k} - e^{-j\frac{\pi}{2}k}\right] \\
&= \frac{A}{\pi k}e^{j\frac{\pi}{2}k}\sin(\frac{\pi}{2}k)
\end{aligned}$$

For å forenkle dette videre må vi finne et utrykk for eksponensial- og sinusleddet:

$$e^{j\frac{\pi}{2}k}\cdot\sin(\pi\frac{k}{2}) = \begin{cases} 0, & k = 4l \\ j, & k = 4l+1 \\ 0, & k = 4l+2 \\ j, & k = 4l+3 \end{cases}$$

der l er heltall. Vi må også finne et eksplisivt utrykk for α_0, da denne har 0 i nevneren:

$$\alpha_0 = \frac{A}{2}e^{j\frac{\pi}{2}k}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}k)}{\pi k/2}\bigg|_{k=0} = \frac{A}{2}\text{sinc}(0) = \frac{A}{2}$$

Totalt får vi da:

$$\alpha_k = \begin{cases} \frac{A}{2}, & k = 0 \\ \frac{jA}{\pi k}, & k \text{ er odde} \\ 0, & k \text{ er like } \neq 0 \end{cases}$$

c) Parsevals relasjon gir effekten i signalet $x(t)$

$$P = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x^2(t)dt = \int_0^1 x^2(t)dt = \int_0^{\frac{1}{2}} A^2 dt = \frac{A^2}{2}$$

Rekkeutviklingen av $x(t)$ gir den samme effekten, noe vi må vise.

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha_k\varphi_k(t)\right|^2 dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha_k\varphi_k(t)\sum_{l=-\infty}^{\infty}\alpha_l^*\varphi_l^*(t)\right| dt \\ &= \frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\alpha_k\alpha_l^*\int_0^{T_0}\varphi_k(t)\varphi_l^*(t)dt = \frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\alpha_k|^2\cdot T_0 \end{aligned}$$

Den siste overgangen er gyldig da basisfunksjonene er ortogonale. (De er også ortonormale da $T_0 = 1$). Utnytter videre at $\alpha_{-k}^2 = \alpha_k^2$

$$\Rightarrow \quad P = \sum_{k=-\infty}^{\infty}|\alpha_k|^2 = |\alpha_0^2| + 2\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2 = \left(\frac{A}{2}\right)^2 + 2\sum_{k=1,3,5,\ldots}^{\infty}\left|\frac{-jA}{\pi k}\right|^2$$

Ved å substituere inn $m = \frac{k}{2} + \frac{1}{2} \rightarrow k = 2m - 1$ får vi

$$P = \frac{A^2}{4} + \frac{2A^2}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2} = \frac{A^2}{4} + \frac{2A^2}{\pi^2}\frac{\pi^2}{8} = \frac{A^2}{2} \qquad \text{q.e.d.}$$

d) Da $x(t)$ er et reelt signal, må også rekkeutviklingen $x_r(t)$ ha reell form. Siden vi har komplekse koeffisienter, kan dette bare være oppfylles dersom koeffisientene opptrer i komplekskonjugerte par. Dvs:

$$\alpha_{-n} = \alpha_n^*$$

Dette ser vi stemmer ut fra utrykket for α_k på forige side. Får da:

$$\begin{aligned} x_r(t) &= \sum_{-\infty}^{\infty}\alpha_k e^{j2\pi kt} \\ &= \frac{A}{2} + \sum_{k=1,3,5}^{\infty} -\frac{jA}{\pi k}\left(e^{-j2\pi kt} - e^{j2\pi kt}\right) \\ &= \frac{A}{2} + \frac{A}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2m-1}\left(e^{j2\pi(2m-1)t} - e^{-j2\pi(2m-1)t}\right) \\ &= \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin(2\pi(2m-1)t)}{2m-1} \end{aligned}$$

Rekkeutviklingen $x_r(t)$ består av sinusledd. Siden sinusfunksjonene er kontinuerligne, blir også $x_r(t)$ kontinuerlig. Når vi tar med uendelig mange ledd i $x_r(t)$ blir den eksakt lik $x(t)$ bortsett fra der $x(t)$ er diskontiuerlig. For $t = 0$, $1/2$ og 1 er $x(t)$ diskontinuerlig. Alle sinusleddene i $x_r(t)$ er 0 for disse t verdiene. Dermed blir

$$x_r(0) = x_r(\frac{1}{2}) = x_r(1) = \frac{A}{2}$$

e) Punktprøvingen gir

$$x(n) = \{A, A, A, A, A, 0, 0, 0, 0\}$$

Finner DFT av $x(n)$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{8} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{9}nk} = A\sum_{n=0}^{4} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{9}nk} = A\frac{1-e^{-j\frac{10\pi}{9}k}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{9}k}}$$

$x(n)$ er ikke en eksakt representasjon av $x(t)$, fordi $\mathcal{F}\{x(t)\}$ ikke er båndbegrenset. Dette skyldes den skarpe overgangen fra A til 0 ved $t = \frac{1}{2}$, noe som gir lekkasje i frekvensplanet.

Observere videre at $x(n) = \mathcal{F}^{-1}\{X(k)\}$ har omtrent de samme basisfunksjonene som rekka i 2a) ($e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$ v.s. $e^{j\frac{2\pi}{T_0}nt}$). Forskjellen er at basisfunksjonene til $x(n)$ er diskrete mens basisfunksjonene til $x(t)$ er kontinuerlige. Av dette konkluderer vi med at $x(n)$ er den 9-ordens diskrete rekkeutviklingen av $x(t)$.

Oppgave 3

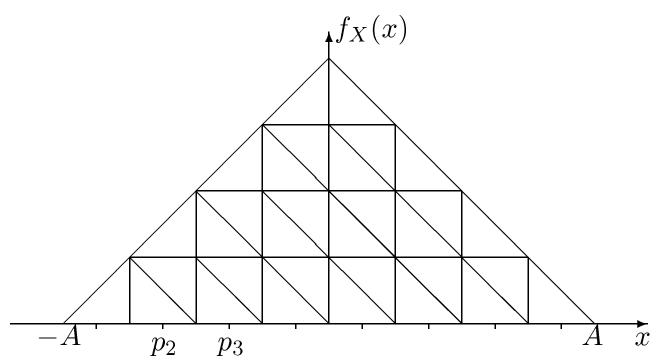
a) Vi bruker 3 bits uniform kvantiserer. Kvantiseringsintervallene Δ er da av lengde

$$\Delta = \frac{A-(-A)}{2^3} = \frac{A}{4}$$

Kvantiseringsstøyen σ_X^2 finner vi ved hjelp av høyrateapproksimasjonen

$$\sigma_X^2 \approx \frac{\Delta^2}{12} = \frac{A^2}{192}$$

b)



Entropien til det kvantiserte signalet

$$\begin{aligned} H &= -\sum_{n=1}^{8} p_n \log_2(p_n) = -2\left(\frac{1}{32}\log_2\frac{1}{32} + \frac{3}{32}\log_2\frac{3}{32} + \frac{5}{32}\log_2\frac{5}{32} + \frac{7}{32}\log_2\frac{7}{32}\right) \\ &= 2.75 \text{ [bit/symbol]} \end{aligned}$$

c) Kanalkapasiteten er den teoretiske maksimale informasjonsmengde målt i bit, som kan overføres over en gaussisk kanal feilfritt. Dette kan i teorien oppnås dersom vi innfører feilkorrigerende koding.

- C er kanalkapasiteten, målt i [bit/s].
- B er båndbredden til kanalen, enhet [Hz].
- P er gjennomsnittlig effekt på mottatt symbol (evt. sendt symbol da det ikke er demping på kanalen), enhet [W].
- $\frac{N_0}{2}$ er effektspektraltettheten til støyen, dvs. støyeffekten per enhet båndbredde på kanalen, enhet [W/Hz].

d) Siden signalet punktprøves med $f_s = 10$ kHz og det trengs 2.75 bit/punktprøve, må kanalen overføre 27500 bit/sekund. Da båndbredden B til kanalen er 10 kHz og det trengs 2 symbol/Hz, må hvert kanalsymbol representere

$$\frac{27500 \text{ [bit/sekund]}}{2 \cdot 10000 \text{ [Hz]}} = 1.375 \text{ [bit]}$$

Finner den minste sendereffekten som kan gi feilfri overføring:

$$\begin{aligned} C &= B \log_2 \left(1 + \frac{P}{N_0 B}\right) \\ 1 + \frac{P}{N_0 B} &= 2^{\frac{C}{B}} \\ \Rightarrow \quad P &= N_0 B \left(2^{\frac{C}{B}} - 1\right) \end{aligned}$$

Setter inn verdier og få

$$P \geq 10^{-4} \cdot 10^4 (2^{2,75} - 1) = 6,73 \text{ [W]}$$

Dvs: Vi må minst bruke en signalleffekt på 6.73 [W] for å kunne overføre signalet fra 3a. feilfritt.

e) Kan bruke variabel-lengde koding og sende i gjennomsnitt 1,375 bit/punktprøve. Dersom en legger til ekstra bit til feilkorrigerende koding, kunne en benytte i gjennomsnitt 2 bit/punktprøve og derfor benytte 4-nivå signalering. Ved bruk av variabellengde-koding er bufring nødvendig.
I praksis må vi bruke en noe større båndbredde B (ca 20-40%) for å overføre den samme mengde informasjon som det som er teoretisk mulig. Vi må også sende med en større sendereffekt P, altså mer enn det Shannon's teorem sier er nødvendig.