NORGES TEKNISK-NATURVITSKAPLEGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR TELETEKNIKK
Signalbehandling

Fagleg kontakt under eksamen:
Namn: Tor A. Ramstad
Tlf.: 94314

EKSAMEN I FAG SIE2010 Informasjons- og signalteori

(Norsk tekst på sider nummerert med partal.
English text on odd numbered pages.)

Dato/Date: 14. mai 2003
Tid/Time: 09.00 - 14.00

Hjelpemiddel:
B1 - Typegodkjend kalkulator med tomt minne og
Rottmann matematiske tabellar.
Ingen andre trykte eller handskrevne hjelpemiddel tillate.

Karakterfastlegging:
Ved karakterfastlegging tel oppgåvene I, II og III likt.
(Equal weighting on each of the three problems.)

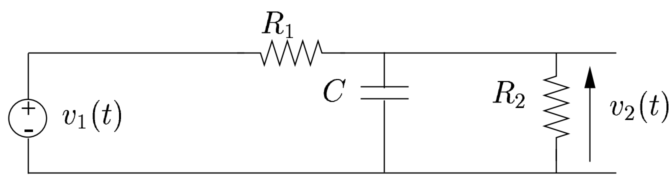
Sensur: 16. juni

Oppgåve I

a. Kva legg vi i omgrepet einingspulsrespons? Grei ut om korleis den kan finnast eksperimentelt?

b. Kva er BIBO-stabilitet? Kva hender dersom ein freistar å finna einingspulsresponsen til eit ustabilt system. Gi eit konkret eksempel.

Eit analogt filter er gitt i figuren.



Vi definerer inngangssignalet som spenninga $v_1(t)$ og utgangssignalet som spenninga $v_2(t)$.

c. Finn differensiallikninga som gir samanhengen mellom utgangs- og inngangssignalet. (Hugs at relasjonen mellom straum og spenning i ein kondensator er gitt som $i_C(t) = C dv_C(t)/dt$ når C er kapasitansen.) Svaret skal ha form som

$$a_1 \frac{dv_2(t)}{dt} + a_0 v_2(t) = b_0 v_1(t).$$

d. Finn *frekvensresponsen* til systemet ved å fouriertransformera venstre- og høgresida av differensiallikninga.

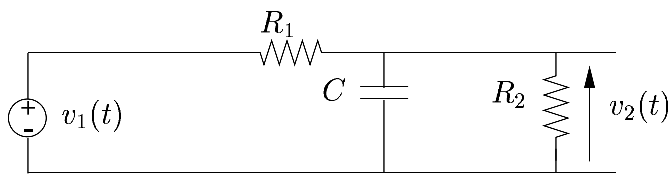
e. Grei ut om to andre måtar å finna frekvensresponsen på for filteret.

Problem I

a. What is meant by the term *unit sample response* and how can it be found experimentally?

b. What is BIBO stability? What happens if we try to obtain the unit sample response experimentally for an *unstable* system? Exemplify trough a concrete example.

An analog filter is given in the figure.



We define the input signal as the voltage $v_1(t)$ and the output signal as the voltage $v_2(t)$.

c. Derive the differential equation that expresses the relation between the input- and output signals. (Recall that the relation between current and voltage in a capacitor is given by $i_C(t) = C du_C(t)/dt$ when C is its capacitance.) The answer should be of the form

$$a_1 \frac{dv_2(t)}{dt} + a_0 v_2(t) = b_0 v_1(t).$$

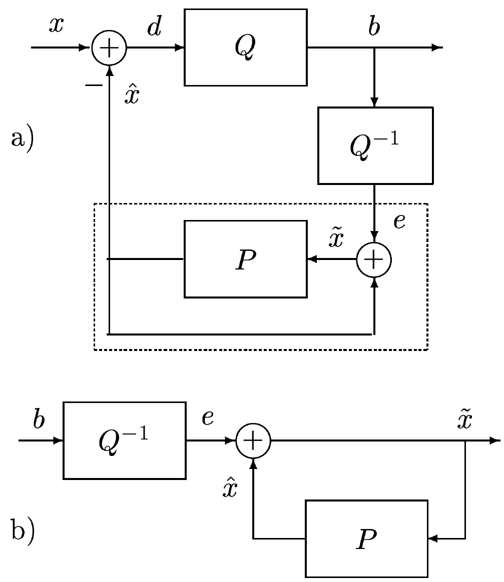
d. Find the *frequency response* of the system by Fourier transforming the left- and right hand sides of the differential equation.

e. Discuss two other ways of finding the frequency response of this filter.

Oppgåve II

a. Kvifor kan vi komprimera signal utan at den subjektive kvaliteten blir forverra?

I figuren er ein DPCM-kodar/dekodar teikna.



b. Forklar prinsippet.

c. Grei ut om prediktoren dersom inngangssignalet er ein AR(1)-prosess der autokorrelasjonsfunksjonen kan skrivas som $R_{XX}(k) = \rho^{|k|}\sigma_X^2$? Grei ut om *prediksjonsfeilen* når ein optimal prediktor vert nytta.

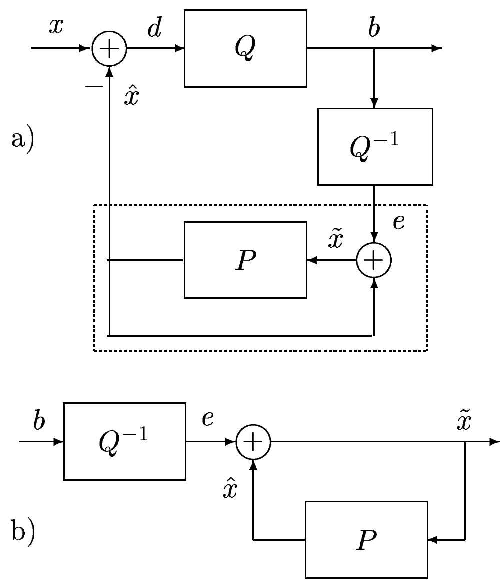
d. Vi bruker ein uniform kvantiserar i systemet. Den har 3 bit og skal dekkje eit dynamisk område frå -2 til 2. Finn kvantiseringsstøyen.

e. Inngangssignalet er no ein AR(1)-prosess med $\rho = 0.9$. Kor stor vert den maksimale signalvariansen til inngangssignalet dersom prediskjonsfeilen er uniformt fordelt og vi ynskjer å hindra overstyringsstøy i kvantiseraren frå punkt d.

Problem II

a. Why is it possible to compress signals without perceptual degradation?

In the below figure a DPCM coder and the corresponding decoder are drawn.



b. Explain how the system works.

c. Discuss the predictor when the input signal is an AR(1)-process where the autocorrelation function can be written as $R_{XX}(k) = \rho^{|k|}\sigma_X^2$. Comment also on the *prediction error* when an optimal predictor is used.

d. Assume that we use a uniform quantizer in the system. It produces 3 bits per sample and covers a dynamic signal range from -2 to 2. Calculate the quantization noise.

e. Assume that the input signal is an AR(1) process with $\rho = 0.9$. What is the maximum input signal variance for avoiding overload in the above quantizer when the prediction error is uniformly distributed.

Oppgåve III

a. Definer kva vi meiner med ortogonalitet av

   i. kontinuerlege funksjonar
   ii. tidsdiskrete funksjonar.

Ei utvida utgåve av Parsevals relasjon for kontinuerlege signal er gitt ved

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t)g^*(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(j\Omega)G^*(j\Omega)d\Omega,$$

der $h(t)$ og $g(t)$ er to signal og $H(j\Omega)$ og $G(j\Omega)$ er deira fouriertransformerte. $*$ står for *kompleskskonjugering.* I resten av oppgåva kan du ha nytte av denne relasjonen.

Vi kan sjå på rekonstruksjonsformelen i punktprøvingsteoremet som ei rekkjeutvikling:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \phi_n(t),$$

med koeffisientar

$$\alpha_n = x(nT)$$

og basisfunksjonar

$$\phi_n(t) = \mathrm{sinc}(t/T - n) = \sin(\pi(t/T - n))/(\pi(t/T - n)).$$

T er intervallet mellom punktprøvene.

b. Prov at dei ulike basisfunksjonane er ortogonale.

I digital transmisjon kan ortogonale symbolsett nyttast til å overføra fleire symbol samstundes.

c. Prov at to symbol $r(t)$ og $s(t)$ er ortogonale dersom symbola ligg i skilde frekvensband.

d. Teikn ein mottakar for systemet over og drøft kva signaltilpassa filter tyder her.

e. Vi ynskjer ofte å nytta signal som har endeleg lengd for å representera den digitale informasjonen. Desse har uendeleg bandbreid. Kan ein framleis finna ortogonale signalsett sjøl om deira fouriertransformerte da vert overlappande? Grunngjev svaret.

Problem III

a. Define what is meant by orthogonality of

   i. continuous functions

   ii. discrete time functions.

An extended version of Parseval's relation for continuous signals is given by

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t)g^*(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(j\Omega)G^*(j\Omega)d\Omega,$$

where $h(t)$ and $g(t)$ are two arbitrary signals and $H(j\Omega)$ and $G(j\Omega)$ are their respective Fourier transforms. $*$ indicates *complex conjugation.* You may need these relations for the remainder of this problem.

The reconstruction formula in the sampling theorem can be viewed as a series expansion:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \phi_n(t),$$

with coefficients

$$\alpha_n = x(nT)$$

and basis functions

$$\phi_n(t) = \mathrm{sinc}(t/T - n) = \sin(\pi(t/T - n))/(\pi(t/T - n)).$$

T is the sampling interval.

b. Prove that the different basis functions are orthogonal.

In digital transmission orthogonal symbol sets can be used to transmit several symbols simultaneously.

c. Prove that two symbol $r(t)$ and $s(t)$ are orthogonal if the symbols occupy disjoint frequency bands.

d. Draw a receiver structure for a system which transmits simultaneous symbols and discuss what matched filtering means here.

e. We often want to use finite length signals for representing the digital information. These signals have infinite bandwidth. Is it still possible to find orthogonal signal sets even when their Fourier transforms overlap? Substantiate your answer.

Enclosure: Fourier representations

Analog signals

Fourier transform:

$$X(j\Omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt$$

Inverse transform:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\Omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$$

Fourier series of finite length signals ($t \in [0, T_0]$) or periodic signals (Period: T_0):

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{j\frac{2\pi}{T_0}kt}$$

Coefficients:

$$\alpha_k = \frac{1}{T_0}\int_{0}^{T_0} x(t)e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt}dt$$

Time discrete signals

Fourier transform, DTFT:

$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

Inverse DTFT:

$$x(n) = \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

Transform of finite length signals ($n \in [0, N-1]$), or series expansion of periodic signals (Period N), DFT:

$$X(k) = \mathcal{DFT}\{x(n)\} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

Inverse DFT:

$$x(n) = \mathcal{IDFT}\{X(k)\} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

Properties of the Fourier transform of infinite, continuous signals

Given:

$$X_i(j\Omega) = \mathcal{F}\{x_i(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_i(t)e^{-j\Omega t}dt$$

Linearity:

$$ax_1(t) + bx_2(t) \Longleftrightarrow aX_1(j\Omega) + bX_2(j\Omega)$$

Time shift:

$$x(t-\tau) \Longleftrightarrow e^{-j\Omega\tau}X(j\Omega)$$

Frequency shift:

$$x(t)e^{-j\Omega_0 t} \Longleftrightarrow X(j(\Omega - \Omega_0))$$

Time domain convolution:

$$x_3(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau \Longleftrightarrow X_3(j\Omega) = X_1(j\Omega)X_2(j\Omega)$$

Multiplication of functions:

$$x_3(t) = x_1(t)x_2(t) \Longleftrightarrow X_3(j\Omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(jU)X_2(j(\Omega - U))dU$$

Parseval's theorem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\Omega)|^2 d\Omega$$