Løsningsforslag Eksamen i SIF 5506 Statistikk 1/6 1999

Oppgave 1)

Mulige hendelser ved årsskiftet:

E = Tap av elektrisitetsforsyningen, $P(E) = 0.05$

V = Tap av forsyning av vann,

F = Tap av fjernvarme, $P(F) = 0.05$

Får også oppgitt at $P(E \cap F) = 0.02$

a)

R = Romtemperaturen går ned = Tap av el.forsyningen eller tap av fjernvarme. Dette er det samme som:

$$R = E \cup F$$

Sannsynligheten for R blir:

$$\begin{aligned} P(R) &= P(E) + P(F) - P(E \cap F) \\ &= 0.05 + 0.05 - 0.02 = \underline{\underline{0.08}} \end{aligned}$$

$$P(E) \cdot P(F) = 0.0025 \neq P(E \cap F) \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\text{E og F er avhengige.}}}$$

$$P(E \cap F) \neq 0 \Rightarrow E \cap F \neq \emptyset \Rightarrow \underline{\underline{\text{E og F er ikke disjunkte.}}}$$

b)

I oppgave får vi oppgitt at $P(V|(E \cup F)^c) = 0.07$ og at $P(V|E \cup F) = 0.5$. Dette kan vi bruke til å finne følgende sannsynligheter:

$$P(V|(E \cup F)^c) = \frac{P(V \cap (E \cup F)^c)}{P((E \cup F)^c)} = 0.07$$

$$\Rightarrow P(V \cap (E \cup F)^c) = P((E \cup F)^c) \cdot 0.07 = (1 - P(E \cup F)) \cdot 0.07 = 0.92 \cdot 0.07 = \underline{0.064}$$

$$P(V|E \cup F) = \frac{P(V \cap (E \cup F))}{P(E \cup F)} = 0.5 \Rightarrow P(V \cap (E \cup F)) = P(E \cup F) \cdot 0.5 = 0.08 \cdot 0.05 = \underline{0.04}$$

Vi kan dermed finne $P(V)$ som blir:

$$P(V) = P(V \cap (E \cup F)) + P(V \cap (E \cup F)^c) = 0.04 + 0.064 = \underline{\underline{0.104}}$$

Sannsynligheten for at laboratotieforsøk blir avbrutt er:

$$P(E \cup F \cup V) = P(R \cup V) = P(R) + P(V \cap R^c) = 0.08 + 0.064 = \underline{\underline{0.144}}$$

Oppgave 2)

Antar antall grove fartsoverskridelser, X, over et tidsrom t er Poissonfordelt med parameter λt.

a)

Sannsynlighetsfordelingen til X er gitt ved:

$$P(X = x) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}$$

Med $\lambda = 0.5$ og $t = 5$ får vi :

$$P(X = x) = \frac{(2.5)^x e^{-2.5}}{x!}$$

Sannsynligheten for at det skjer ingen grove overskridelser i perioden:

$$P(X = 0) = e^{-2.5} = \underline{\underline{0.082}}$$

Sannsynligheten for at det skjer mer enn 2 grove overskridelser i perioden:

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= 1 - P(X \leq 2) \\ &= 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)) \\ &= 1 - (0.082 + 0.205 + 0.257) = \underline{\underline{0.456}} \end{aligned}$$

$$\mathrm{E}[X] = 2.5, \ \mathrm{Var}[X] = 2.5$$

b)

Sann fart på bilene er μ, lasermålingene er $N(\mu, 1.5^2)$. Skal finne sannsynligheten for at laseren viser mer enn 130 km/h for en bil som kjører i 129 km/h.

$$\begin{aligned} P(Y > 130 \mid \mu = 129) &= P\left(\frac{Y - 129}{1.5} > \frac{130 - 129}{1.5}\right) \\ &= P(Z > 0.67) \\ &= 1 - P(Z \leq 0.67) = 1 - 0.749 = \underline{\underline{0.251}} \end{aligned}$$

Konstanten må oppfylle:

$$P(Y \geq k \mid \mu = 130) = 0.01$$

som kan omformes til

$$P\left(\frac{Y - 130}{1.5} \geq \frac{k - 130}{1.5} \mid \mu = 130\right) = 0.01$$

Konstanten er dermed gitt ved:

$$\Leftrightarrow \frac{k - 130}{1.5} = 2.325 \Leftrightarrow k = 130 + 1.5 \cdot 2.325 \approx \underline{\underline{133.5}}$$

c)

Sannsynlighetstetthetsfunksjonen er gitt ved:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4 \mid \lambda, t_1, t_2, t_3, t_4) = \frac{(\lambda t_1)^{x_1} e^{-\lambda t_1}}{x_1!} \cdot \frac{(\lambda t_2)^{x_2} e^{-\lambda t_2}}{x_2!} \cdot \frac{(\lambda t_3)^{x_3} e^{-\lambda t_3}}{x_3!} \cdot \frac{(\lambda t_4)^{x_4} e^{-\lambda t_4}}{x_4!}$$

Som gir følgende likelihood:

$$L(\lambda \mid x_1, x_2, x_3, x_4, t_1, t_2, t_3, t_4) = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{4} x_i} \cdot \prod_{i=1}^{4} t_i^{x_i} \cdot e^{-\lambda \sum_{i=1}^{4} t_i}}{\prod_{i=1}^{4} x_i!}$$

$$\Rightarrow \ln L(\lambda \mid x_1, x_2, x_3, x_4, t_1, t_2, t_3, t_4) = \ln \lambda \sum_{i=1}^{4} x_i + \ln(\prod_{t=1}^{4} t_i^{x_i}) - \lambda \sum_{i=1}^{4} t_i - \ln(\prod_{i=1}^{4} x_i!)$$

Deriverer og setter lik null:

$$\frac{\partial \ln L(\lambda \mid \ldots)}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{4} x_i - \sum_{i=1}^{4} t_i = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i}{\sum_{i=1}^{4} t_i}$$

dvs. sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren er:

$$\widehat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{4} X_i}{\sum_{i=1}^{4} t_i} = \frac{\sum_{i=1}^{4} X_i}{30}$$

Forventningsverdien til estimatoren er:

$$\mathrm{E}[\widehat{\lambda}] = \frac{1}{30}\{\mathrm{E}[X_1] + \mathrm{E}[X_2] + \mathrm{E}[X_3] + \mathrm{E}[X_4]\} = \frac{1}{30}\{5\lambda + 5\lambda + 10\lambda + 10\lambda\} = \underline{\underline{\lambda}}$$

og variansen er:

$$\mathrm{Var}[\widehat{\lambda}] = \frac{1}{30^2}\{\mathrm{Var}[X_1] + \mathrm{Var}[X_2] + \mathrm{Var}[X_3] + \mathrm{Var}[X_4]\} = \frac{1}{30^2}\{5\lambda + 5\lambda + 10\lambda + 10\lambda\} = \underline{\underline{\frac{\lambda}{30}}}$$

d)

$Y = \sum_{i=1}^{4} X_i$ er Poissonfordelt med parameter $\lambda \sum_{i=1}^{4} t_i = 30\lambda$: Med $\lambda \approx 0.5$ er $\mathrm{Var}[Y] \approx 15$
$\Rightarrow$ det er rimelig grunn til å tro at fordelingen til Y kan tilnærmes med en normalfordeling.

$$\widehat{\lambda} = \frac{Y}{30} \approx n(v; \lambda, \sqrt{\frac{\lambda}{30}}) \;\Rightarrow\; \frac{\widehat{\lambda} - \lambda}{\sqrt{\frac{\lambda}{30}}} \approx n(z; 0, 1)$$

$$\frac{\widehat{\lambda}-\lambda}{\sqrt{\frac{\lambda}{30}}} \approx \frac{\widehat{\lambda}-\lambda}{\sqrt{\frac{\widehat{\lambda}}{30}}}$$

Vi får:

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\widehat{\lambda}-\lambda}{\sqrt{\frac{\widehat{\lambda}}{30}}} < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \approx 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(\widehat{\lambda} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\widehat{\lambda}}{30}} < \lambda < \widehat{\lambda} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\widehat{\lambda}}{30}}\right) \approx 1-\alpha$$

$$\alpha = 0.05,\ \ \widehat{\lambda} = \frac{20}{30} \quad \Rightarrow \quad \text{et 95 \% konfidensintervall blir:}$$

$$(0.67 - 1.97\sqrt{\frac{2}{90}}, 0.67 + 1.97\sqrt{\frac{2}{90}}) = \underline{\underline{(0.38, 0.96)}}$$

e)

$$\begin{aligned} P(T \le t) &= 1 - P(T > t) = 1 - P(X = 0 \text{ i tidsrommet } [0,t]) \\ &= \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & t > 0 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases} \quad \Rightarrow \text{T er eksponensialfordelt.} \end{aligned}$$

La $U = \min\{T_1, T_2, \ldots, T_8\}$

$$\begin{aligned} P(U \le u) &= 1 - P(T_1 > u, T_2 > u, \ldots, T_8 > u) = 1 - \prod_{i=1}^{8} P(T_i > u) \\ &= \begin{cases} 1 - \prod_{i=1}^{8} e^{-\lambda u} & u > 0 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases} = \begin{cases} 1 - e^{-8\lambda u} & u > 0 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 - e^{-4u} & u > 0 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases} \end{aligned}$$

$$P(U \le \frac{1}{4}) = 1 - e^{-1} = 1 - 0.368 = \underline{\underline{0.632}}$$

Oppgave 3)

a)

$\mu =$ populasjonsgjennomsnitt, dvs. eit gjennomsnitt for alle bilane som køyrer på vegstrekningen i ein gitt periode.

$$\widehat{\mu} = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{12} X_i}{12}\ ,\ \ S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{12}(X_i - \bar{X})^2}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{12} X_i}{12} = \frac{880}{12} = \underline{\underline{73.33}}\,, \quad S = \sqrt{\frac{1}{11}\sum_{i=1}^{12}(X_i - \bar{X})^2} = \sqrt{\frac{1034.7}{11}} = \underline{\underline{9.7}}$$

b)

Type 1 feil er å forkaste H_0 når H_0 er rett.

$$H_0 : \; \mu \geq 77 \qquad H_1 : \; \mu < 77$$

$\alpha = 0.05$, forkast om:

$$\frac{\bar{X} - 77}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < -t_{0.05,11} = -1.8$$

$$\frac{73.33 - 77}{\frac{9.7}{\sqrt{12}}} = -1.31 > -1.8$$

dvs. ikkje grunnlag for å påstå at farten er blitt lågare på 5 % nivå.

c)

Type 2 feil er å ikkje forkaste når H_0 er gal. La $\beta = P(\text{type 2 feil})$. Då er styrken $1 - \beta$.

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\bar{X} - 77}{\frac{10}{\sqrt{12}}} < -1.645 \mid \mu = 74\right) &= P\left(\frac{\bar{X} - 74}{\frac{10}{\sqrt{12}}} < -1.645 + \frac{3}{\frac{10}{\sqrt{12}}} \mid \mu = 74\right) \\ &= \Phi\left(-1.645 + \frac{3\sqrt{12}}{10}\right) = \Phi(-0.61) \\ &= 1 - 0.729 = \underline{\underline{0.271}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & P\left(\frac{\bar{X} - 77}{\frac{10}{\sqrt{n}}} < -1.645 \mid \mu = 74\right) = 0.9 \\ \Leftrightarrow \;& P\left(\frac{\bar{X} - 74}{\frac{10}{\sqrt{n}}} < -1.645 + \frac{3}{\frac{10}{\sqrt{n}}} \mid \mu = 74\right) = 0.9 \\ \Leftrightarrow \;& \Phi\left(-1.645 + \frac{3\sqrt{n}}{10}\right) = 0.9 \\ \Leftrightarrow \;& -1.645 + \frac{3\sqrt{n}}{10} = 1.28 \\ \Leftrightarrow \;& \frac{3\sqrt{n}}{10} = 1.28 + 1.645 = 2.925 \\ \Leftrightarrow \;& n = \frac{(2.925)^2 \cdot 10^2}{3^2} = 95.06 \end{aligned}$$

Dvs. vi må måle farten på 96 bilar eller fleir.