NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Kontinuasjon 2014

Eksamensoppgave i **TMA4140 Diskret matematikk**

Faglig kontakt under eksamen: Christian Skau

Tlf: 73591755

Eksamensdato: 14. august 2014

Eksamenstid (fra–til): 15:00-19:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C:
Bestemt, enkel kalkulator, Rottmanns matematiske formelsamling.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1 La universalmengden være de rasjonale tallene $\mathbb{Q}$. Avgjør om utsagnet $\neg\forall x\exists y(x < y)$ er sant eller galt, og gi en ekvivalent fremstilling der negasjonen $\neg$ ikke forekommer.

Oppgave 2 Vis at $3x^2 + x\log x$ er $\Theta(x^2)$.

Oppgave 3

a) Gi en begrunnelse for at det finnes eller ikke finnes $a, b \in \mathbb{Z}$ slik at

$$2310a + 3553b = 31.$$

b) Finn en løsning x, der $0 < x < 11$, til kongruensligningen

$$3x + 129^{1000001} \equiv -4 \pmod{11}.$$

Oppgave 4 La $h \geq 0$. Vis ved induksjon ulikheten

$$1 + nh \leq (1+h)^n$$

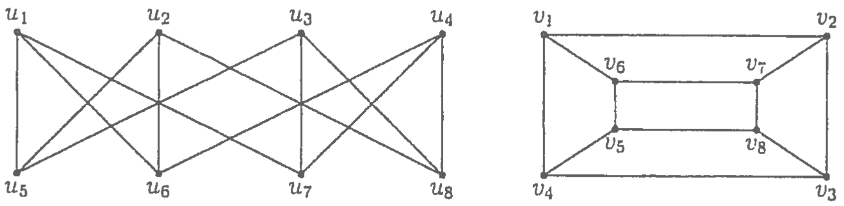
for alle $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Oppgave 5 Hvor mange løsninger finnes det til ulikheten

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 11$$

når $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq 2$, $x_3 \geq 3$?

Oppgave 6 Gi en begrunnelse for om de to grafane i Figur 1 er isomorfe eller ikke.



Figur 1: To grafer

Oppgave 7 Konstruer en deterministisk endelig tilstandsautomat M med høyst fire tilstander som gjenkjenner alle binære strenger som starter med 0 og har et odde antall 1'ere.

Oppgave 8

a) Konstruer en ikke-deterministisk endelig tilstandsautomat M som gjenkjenner språket generert av den regulære grammatikken $G = (V, T, S, P)$ der $V = \{S, A, B, 0, 1\}$, $T = \{0, 1\}$, og P er gitt ved:

$$S \to 1B,\ S \to 0,\ A \to 1A,\ A \to 0B,\ A \to 1,\ A \to 0,\ B \to 1.$$

b) Finn et regulært uttrykk for mengden av binære strenger som ender med 00 og som ikke inneholder 11.

Kontinuasjonseksamen i TMA4140: Diskret Matematikk.

14 august, 2014. Løsningsforslag.

Oppgave 1 Utsagnet er galt. Dessuten er

$\neg \forall x \exists y (x<y) \equiv \exists x \forall y (x \geq y)$.

Oppgave 2 $\dfrac{3x^2+x\log x}{x^2} = 3 + \dfrac{\log x}{x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 3$.

Dette viser at $3x^2+x\log x$ er $\Theta(x^2)$.

Oppgave 3 a) Største felles divisor $(2310, 3553)$ til 2310 og 3553 er lik 11. Siden $11 \nmid 31$, så finnes det ikke $a, b \in \mathbb{Z}$ slik at $2310a+3553b=31$.

b) Ifølge Fermat så er $129^{10} \equiv 1 \pmod{11}$.

Da er $129^{1000001} = 129 \cdot 129^{1000000} = 129 \cdot [129^{10}]^{100000} \equiv 129 \pmod{11}$. Setter vi dette inn i $3x+129^{1000001} \equiv -4 \pmod{11}$, så ser vi at løsningen er $\underline{x=7}$

Oppgave 4 Ulikheten holder for $n=0$ idet begge sider er lik 1. Anta ulikheten holder for n, altså $1+nh \leq (1+h)^n$. Vi får

$$1+(n+1)h = (1+nh)+h$$

$$(1+h)^{n+1} = (1+h)^n(1+h) = (1+h)^n + h(1+h)^n.$$

Ifølge induksjonsantagelsen så er $1+nh \leq (1+h)^n$. Dessuten er det klart at $h \leq h(1+h)^n$. Altså gjelder ulikheten for $n+1$, og induksjonsbeviset er fullført

Oppgave 5 Antall løsninger den gitte ulikheten er det samme som antall løsninger av ulikheten $y_1+y_2+y_3 \leq 5$ der $y_1, y_2, y_3 \geq 0$. Ved å innføre en ny variabel $y_4 \geq 0$, så er antall løsninger av ulikheten det samme som antall løsninger av likheten

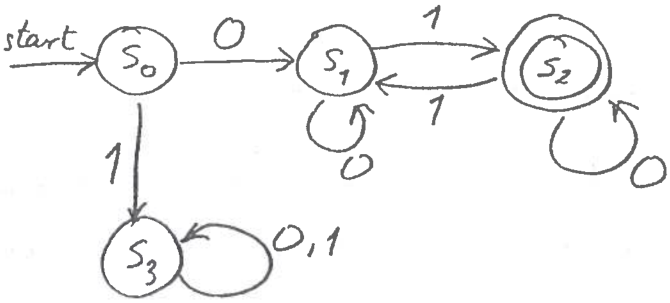
$$y_1+y_2+y_3+y_4 = 5\ ;\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0.$$

Svaret er $C(4+5-1, 5) = C(8,5)$

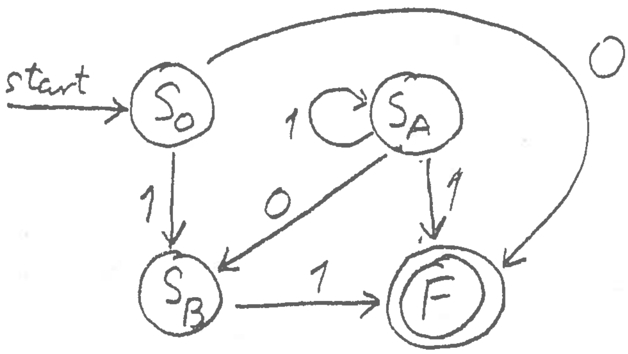
$$= \binom{8}{5} = \underline{56}$$

Oppgave 6 Grafene er isomorfe. De er begge todelte grafer. Den ene er det opplagt, og den andre er det også idet $\{v_1, v_3, v_5, v_7\}$ og $\{v_2, v_4, v_6, v_8\}$ todeler den andre grafen. Ved å plassere $\{v_1, v_3, v_5, v_7\}$ horisontalt over $\{v_2, v_4, v_6, v_8\}$ så ser man at de to grafene er isomorfe.

Oppgave 7



Oppgave 8 a)



Følger man instruksjonene for hvordan man konstruerer en ikke-deterministisk automat fra en regulær grammatikk så får man den tegnede automaten.

b) $(0 \cup 10)^*(\lambda \cup 1)00$