Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN I FAG TMA4245 STATISTIKK

6.august 2004

Oppgave 1 Midtveiseksamen

a) X er en stokastisk variabel som beskriver antall korrekte svar på $n = 20$ spørsmål på midtveiseksamen (flervalgsoppgave).

Betingelser for at X er binomisk fordelt:

- Vi ser på $n = 20$ svar.
- For hvert svar sjekker vi om svaret er korrekt eller ikke.
- Sannsynligheten for at svaret er korrekt er $\frac{1}{m}$ fordi Ole tipper, og det er bare ett svar som er korrekt blant m mulig svar. Denne sannsynligheten er den samme for alle n svarene.
- De n svarene er uavhengige av hverandre, siden Ole tipper svaret på hvert spørsmål.

Under disse 4 betingelsene er X binomisk fordelt med parametere $n = 20$ og $p = \frac{1}{m}$. Dermed er sannsynlighetsfordelingen til X gitt ved punktsannsynligheten $f(x)$,

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \qquad x = 0, 1, ..., n$$

Sannsynligheten for å svare korrekt på minst 8 spørsmål finner vi enklest ved tabelloppslag (s 17 i formelsamlingen). Vi gjør dette for de tre verdiene av m som er oppgitt, $m = 2, 4, 5$. (Grunnen til at disse tre verdiene er valgt er kun pga at de finnes i tabellen...)

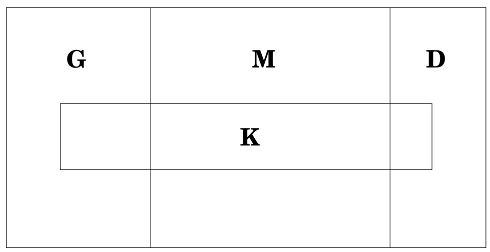
$$\begin{aligned}
m = 2 : P(X \geq 8) &= 1 - P(X \leq 7 | p = 0.5, n = 20) = 1 - 0.132 = \underline{\underline{0.87}} \\
m = 4 : P(X \geq 8) &= 1 - P(X \leq 7 | p = 0.25, n = 20) = 1 - 0.898 = \underline{\underline{0.10}} \\
m = 5 : P(X \geq 8) &= 1 - P(X \leq 7 | p = 0.2, n = 20) = 1 - 0.968 = \underline{\underline{0.03}}
\end{aligned}$$

Forventningen til X er $\mathrm{E}(X) = np$. Forventet antall korrekte svar for $m = 2, 4, 5$ blir da:

$$\begin{aligned} m = 2 : \mathrm{E}(X) &= 20 \cdot \frac{1}{2} = 10 \\ m = 4 : \mathrm{E}(X) &= 20 \cdot \frac{1}{4} = 5 \\ m = 5 : \mathrm{E}(X) &= 20 \cdot \frac{1}{5} = 4 \end{aligned}$$

b) $G =$ spørsmålet er fra den delen av pensum som Ole kan godt,
$M =$ spørsmålet er fra den delen av pensum som Ole kan middels godt,
$D =$ spørsmålet er fra den delen av pensum som Ole kan dårlig,
$K =$ Ole svarer korrekt på spørsmålet.

Venndiagram for de fire hendelsene:



Sannsynligheten for at Ole svarer korrekt på et tilfeldig valgt spørsmål, $P(K)$, finner vi vet å bruke setningen om total sannsynlighet. Vi vet at G, M, D er en partisjon av utfallsrommet (det ser vi lett av venndiagrammet og at summen av sannsynlighetene er 1).

$$\begin{aligned} P(K) &= P(K \cap G) + P(K \cap M) + P(K \cap D) \\ &= P(K|G) \cdot P(G) + P(K|M) \cdot P(M) + P(K|D) \cdot P(D) \\ &= 0.8 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.2 = \underline{\underline{0.48}} \end{aligned}$$

Bayes regel kan benyttes til å finne sannsynligheten for at spørsmålet var fra den delen av pensum som Ole kan dårlig, gitt at Ole svarte korrekt på spørsmålet.

$$\begin{aligned} P(D|K) &= \frac{P(K \cap D)}{P(K)} \\ &= \frac{P(K|D) \cdot P(D)}{P(K)} = \frac{0.2 \cdot 0.2}{0.48} = \underline{\underline{0.08}} \end{aligned}$$

Oppgave 2 Oljeutslipp

a) La X være en stokastisk variabel som angir oljekonsentrasjonen i et tilfeldig valgt utslipp av produksjonsvann. Vi antar at X er normalfordelt med forventning $\mu = 21.6$mg/l og standardavvik $\sigma = 3.4$ mg/l.

Sannsynligheten for at oljekonsentrasjonen i et tilfeldig valgt utslipp av produksjonsvann er mindre enn 30 mg/l:

$$\begin{aligned} P(X < 30) &= P(X \leq 30) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{30-21.6}{3.4}) \\ &= P(Z \leq 2.47) = \Phi(2.47) = \underline{\underline{0.9932}} \end{aligned}$$

Sannsynligheten for at oljekonsentrasjonen i et tilfeldig valgt utslipp overskrider myndighetenes krav:

$$\begin{aligned} P(X > 40) &= 1 - P(X \leq 40) = 1 - P(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{40-21.6}{3.4}) \\ &= 1 - P(Z \leq 5.4) = 1 - \Phi(5.4) = 1 - 1 = \underline{\underline{0}}\text{(tilnærmet)} \end{aligned}$$

Sannsynligheten for at oljekonsentrasjonen i et tilfeldig valgt utslipp ligger innenfor $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$:

$$\begin{aligned} P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) &= P(X \leq \mu + 3\sigma) - P(X \leq \mu - 3\sigma) \\ &= P(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{\mu + 3\sigma - \mu}{\sigma}) - P(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{\mu - 3\sigma - \mu}{\sigma}) \\ &= P(Z \leq 3) - P(Z \leq -3) = \Phi(3) - \Phi(-3) \\ &= 0.9987 - 0.0013 = \underline{\underline{0.9974}} \end{aligned}$$

b) Vi har 24 uavhengige målinger av oljekonsentrasjonen i produksjonsvann i løpet av et døgn. Disse kaller vi $X_1, X_2, ..., X_{24}$. Hver måling er normalfordelt med forventing $\mu = 21.6$ og standardavvik $\sigma = 3.4$.

Gjennomsnittet av de 24 målingene kaller vi $\bar{X} = \frac{1}{24}\sum_{i=1}^{24} X_i$. Siden hver av de 24 målingene er normalfordelte og de 24 målingene er uavhengige vil gjennomsnittet også være normalfordelt med følgende forventning og varians:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu = \frac{1}{n} n\mu = \mu \\ \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) &= \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 n\sigma = \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

Sannsynligheten for at gjennomsnittet av disse målingene er lavere enn 20 mg/l:

$$\begin{aligned} P(\bar{X} < 20) &= P(\bar{X} \le 20) = P(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le \frac{20 - 21.6}{\frac{3.4}{\sqrt{24}}}) \\ &= P(Z \le -2.30) = \Phi(-2.30) = \underline{\underline{0.011}} \end{aligned}$$

Sannsynligheten for at ingen av de 24 målingene er over 30 mg/l:

$$\begin{aligned} P[(X_1 \le 30) \cap (X_2 \le 30) \cap \cdots \cap (X_{24} \le 30)] &= P(X_1 \le 30) \cdot P(X_2 \le 30) \cdots P(X_{24} \le 30) \\ &= [P(X_i \le 30)]^{24} = (0.9932)^{24} = \underline{\underline{0.85}} \end{aligned}$$

c) Etter den nye rensemetoden har vi $Y_1, Y_2, ..., Y_{16}$ som alle er normalfordel med ukjent forventning ν, og med standardavvik τ, som i første omgang antas kjent, $\tau = 3.4$ mg/l.

Vi velger den konservative antakelsen om at den nye rensemetoden ikke er bedre enn den gamle og setter $\nu = 21.6$ som nullhypotese. Hypotesen som vi ønsker å teste, $\mu < 21.6$ velger vi som alternativ hypotese.

$$H_0 : \nu = 21.6 \qquad vs. \qquad H_1 : \nu < 21.6$$

Vi bruker $\bar{Y}$ som estimator for ν og vi vil forkaste H_0 når $\bar{Y}$ er liten (fordi da tror vi på den alternative hypotesen). Vi vet at under H_0 så er

$$Z_0 = \frac{\bar{Y} - 21.6}{\frac{\tau}{\sqrt{n}}}$$

standard normalfordelt. Hvis vi skal forkaste H_0 når $\bar{Y}$ er liten, vil vi også forkaste H_0 når Z_0 er liten og vi bestemmer oss for å forkaste H_0 når $Z_0 \le k$ (Z_0 er dermed testobservatoren vår). Videre bestemmer vi k slik at

$$P(\text{type I feil}) = P(\text{forkaste } H_0 | H_0 \text{ er sann}) \le \alpha.$$

Innsatt $Z_0 \le k$ for hendelsen "forkaste H_0" og $\nu = 21.6$ for hendelsen "H_0 sann":

$$\begin{aligned} P(\text{forkaste } H_0 | H_0 \text{ er sann}) &\le \alpha \\ P(Z \le k | \nu = 21.6) &= \alpha \\ P(\frac{\bar{Y} - 21.6}{\frac{\tau}{\sqrt{n}}} \le k | \nu = 21.6) &= \alpha \end{aligned}$$

Tallet k som har areal α til venstre i standard normalfordelingen er kvantilen $-z_\alpha$, dvs. $k = -z_\alpha$.

i) Dvs. vi forkaster H_0 når

$$\underline{\underline{Z_0 = \frac{\bar{Y} - 21.6}{\frac{\tau}{\sqrt{n}}} \le -z_\alpha}}$$

ii) Alternativt kan vi løse ut forkastningsområdet over som

$$\underline{\underline{\bar{Y} \leq 21.6 - z_\alpha \frac{\tau}{\sqrt{n}}}}$$

For $\alpha = 0.01$ er $-z_{0.01} = -2.326$. Videre har vi $Z_0 = \frac{\bar{Y}-21.6}{\frac{\tau}{\sqrt{n}}} = \frac{19.8-21.6}{\frac{3.4}{\sqrt{16}}} = -2.12$. Vi kan bruke begge måtene for å skrive opp forkastningsområdet:

i) $Z_0 = -2.12$. som er større enn -2.326, og dermed gir det *ikke* forkastning.

ii) $\bar{Y} = 19.8$ og forkastningsområdet $21.6 - z_\alpha \frac{\tau}{\sqrt{n}} = 21.6 - 2.326 \cdot \frac{3.4}{\sqrt{16}} = 19.6$ Her er $19.8 > 19.6$ og vi forkaster ikke H_0.

Konklusjonen er at det vi har observert (eller noe verre) er ganske sannsynlig (har høyere sannsynlighet enn 0.01) når H_0 er sann, og vi forkaster dermed ikke H_0.

Liten digresjon: $P-$verdien angir sannsynligheten for det vi har observert eller noe verre gitt at H_0 er sann (der verre henspeiler på den alternative hypotesen). Vi har ikke forkastet H_0 på signifikansnivå 0.01, det betyr at det vi har observert eller noe verre har større sannsynlighet enn 0.01 når H_0 er sann. Det betyr at p-verdien til testen vil være *større* enn 0.01.

Vi skal så anta at vi *ikke* kjenner standardavviket τ, men at vi isteden får vite at det empiriske standardavviket for målingene var 2.6 mg/l.

Vi kan dermed ikke lenger basere oss på den standard normalfordelte Z_0, men må heller innføre en estimator for τ og ender opp med en testobservator, T_0, som er t-fordelt.

Vi estimerer τ^2 med det empiriske standardavviket, $\hat{\tau}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$ og erstatter τ med $\hat{\tau}$ i Z_0 og får T_0:

$$T_0 = \frac{\bar{Y} - 21.6}{\frac{\hat{\tau}}{\sqrt{n}}}$$

som er t-fordelt med $n-1$-frihetsgrader.

Vi forkaster dermed H_0 når $T_0 \leq -t_{\alpha,n-1}$. Setter vi inn tall får vi at

$$T_0 = \frac{19.8 - 21.6}{\frac{2.6}{\sqrt{16}}} = -2.77$$

og $-t_{0.01,15} = -2.60$. Dermed er $-2.77 < -2.60$ og vi *forkaster* H_0.

Overgangen fra kjent til ukjent standardavvik førte til to endringer. Først så relaterte vi forkastningsområdet til en t-fordeling istedenfor til en standard normalfordling. t-fordelingen har tyngre haler enn standard normalfordelingen, og grensene for forkastningsområdet ble dermed mer ekstreme (vi flyttet oss lengre til venstre for å få areal 0.01 nedenfor forkastningsgrensen).

Dette gjorde testen "strengere" (fordi vi har innført mer usikkerhet ved at vi ikke kjenner den sanne verdien av τ). Denne endringen skulle tilsi at det ble enda vanskeligere å forkaste H_0.

Den andre endringen var at vi nå satt inn en estimert verdi for τ istedenfor det vi trodde var den sanne verdien. Nå viste det seg at den estimerte verdien var mye mindre enn den vi antok var den sanne verdien. Dette betyr at de 16 målingene viste mindre variasjon enn et standardavvik på 3.4 tilsier, og de 16 målingene gav et empirisk standardavvik på 2.6. Dermed ble vi sikrere i vår sak. De to endringene dro i motsatt retning, men den siste endringen var sterkere enn den første. Dette førte til at vi nå forkaster H_0 og mener at vi har sterke bevis for at den nye rensemetoden er bedre enn den andre.

d) For å finne et 95% konfidensintervall for μ baserer vi oss på at

$$T = \frac{\bar{Y} - \nu}{\frac{\hat{\tau}}{\sqrt{n}}}$$

har en t-fordeling med $n-1$ frihetsgrader.

Her lar vi $\alpha = 0.05$.

$$\begin{array}{rcccl} P(-t_{\frac{\alpha}{2},n-1} & \leq & T & \leq & t_{\frac{\alpha}{2},n-1}) = 1-\alpha \\ P(-t_{\frac{\alpha}{2},n-1} & \leq & \frac{\bar{Y}-\nu}{\frac{\hat{\tau}}{\sqrt{n}}} & \leq & t_{\frac{\alpha}{2},n-1}) = 1-\alpha \\ P(\bar{Y} - t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{\hat{\tau}}{\sqrt{n}} & \leq & \nu & \leq & \bar{Y} + t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{\hat{\tau}}{\sqrt{n}}) = 1-\alpha \\ P(\hat{\nu}_L & \leq & \nu & \leq & \hat{\nu}_U) = 1-\alpha \end{array}$$

Tallsvar:

$$\begin{aligned} t_{\frac{\alpha}{2},n-1} &= t_{\frac{0.05}{2},15} = 2.131 \\ \hat{\nu}_L &= 19.8 - 2.131 \cdot \frac{2.6}{\sqrt{16}} = 18.4 \\ \hat{\nu}_U &= 19.8 + 2.131 \cdot \frac{2.6}{\sqrt{16}} = 21.2 \end{aligned}$$

95% konfidensintervall for ν: $\underline{\underline{[18.4, 21.2]}}$.

Oppgave 3 Trafikktetthet

X er tid mellom to bilpasseringer på en vei, og den kumulative fordelingsfunksjonen til X er gitt som $F_X(x)$.

$$F_X(x) = 1 - \left(1 + \frac{x}{\theta}\right) e^{-\frac{x}{\theta}} \quad \text{for } x > 0,$$

der $\theta > 0$ er en parameter som spesifiserer trafikkmengden på veien som undersøkes.

a) Sannsynligheten for at tiden mellom to etterfølgende biler er høyst θ finner vi ved direkte innsetting i den kumulative fordelingsfunksjonen. Siden $P(X \leq x) = F_X(x)$ er

$$\begin{aligned} P(X \leq \theta) &= F_X(\theta) = 1 - \left(1 + \frac{\theta}{\theta}\right) e^{-\frac{\theta}{\theta}} \\ &= 1 - (1+1)e^{-1} = 1 - 2 \cdot e^{-1} = \underline{\underline{0.26}} \end{aligned}$$

Vi finner sannsynlighetstettheten til X ved å derivere den kumulative fordelingsfunksjonen:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{d}{dx}[1 - \left(1 + \frac{x}{\theta}\right) e^{-\frac{x}{\theta}}] \\ &= 0 - (0 + \frac{1}{\theta}) \cdot e^{-\frac{x}{\theta}} - (1 + \frac{x}{\theta}) \cdot (-\frac{1}{\theta}) \cdot e^{-\frac{x}{\theta}} \\ &= (-\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta} + \frac{x}{\theta^2}) \cdot e^{-\frac{x}{\theta}} = \underline{\underline{\frac{x}{\theta^2} \cdot e^{-\frac{x}{\theta}}}} \end{aligned}$$

Kommentar: denne fordelingen er en Gamma-fordeling med parametre $\alpha = 2$ og $\beta = \theta$.

b) Kumulative fordelingsfunksjonen $F_W(w)$ til $W = \frac{2X}{\theta}$:

$$\begin{aligned} F_W(w) &= P(W \leq w) = P(\frac{2X}{\theta} \leq w) = P(X \leq \frac{w\theta}{2}) \\ &= F_X(\frac{w\theta}{2}) = 1 - (1 + \frac{w\theta}{2\theta}) \cdot e^{-\frac{w\theta}{2}} = \underline{\underline{1 - (1 + \frac{w}{2}) \cdot e^{-\frac{w}{2}}}} \end{aligned}$$

For å vise at W er kjikvadratfordelt med 4 frihetsgrader sammenligner vi sannsynlighetstettheten til W med sannsynlighetstettheten til en kjikvadratfordeling med 4 frihetsgrader. Først deriverer vi den kumulative fordelingsfunksjonen for W for å finne sannsynlighetstettheten til W.

$$\begin{aligned} f_W(w) &= \frac{dF_W(w)}{dw} = \frac{d}{dw}[1 - (1 + \frac{w}{2}) \cdot e^{-\frac{w}{2}}] \\ &= 0 - (0 + \frac{1}{2}) \cdot e^{-\frac{w}{2}} - (1 + \frac{w}{2}) \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot e^{-\frac{w}{2}} \\ &= (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{w}{4}) \cdot e^{-\frac{w}{2}} = \frac{w}{4} \cdot e^{-\frac{w}{2}} \end{aligned}$$

Deretter slår vi opp i formelsamlingen for å se hvordan sannsynlighetstettheten til en kjikvadratfordelt størrelse med $\nu = 4$ frihetsgrader ser ut.

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \frac{1}{2^{4/2}\Gamma(4/2)} z^{4/2-1} e^{-\frac{z}{2}} \\ &= \frac{1}{2^2\Gamma(2)} z^{2-1} e^{\frac{z}{2}} = \frac{z}{4} e^{-\frac{z}{2}} \end{aligned}$$

siden $\Gamma(2) = 1! = 1$.

Dermed ser vi at $f_W(w) = f_Z(w)$, og W er kjikvadratfordelt med 4 frihetsgrader. Vi vet da at $\mathrm{E}(W) = 4$ og $\mathrm{Var}(W) = 2 \cdot 4 = 8$.

Alternativ fremgangsmåte: momentgenererende funksjon eller transformasjonsformelen.

Forventning og varians for X:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \mathrm{E}\left(\frac{W\theta}{2}\right) = \frac{\theta}{2}\mathrm{E}(W) = \frac{\theta}{2} \cdot 4 = \underline{\underline{2\theta}} \\ \mathrm{Var}(X) &= \mathrm{Var}\left(\frac{W\theta}{2}\right) = \frac{\theta^2}{2^2}\mathrm{Var}(W) = \frac{\theta^2}{2^2} \cdot 2 \cdot 4 = \underline{\underline{2\theta^2}} \end{aligned}$$

c) Skal finne sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren (SME) for θ basert på n uavhengige målinger $X_1, \ldots, X_n$. Vi ser først på rimelighetsfunksjonen, og siden observasjonene er uavhengige finner vi den ved å multiplisere sammen marginalsannsynlighetstetthentene $f_X(x_i)$.

Rimelighetsfunksjonen er gitt ved:

$$\begin{aligned} L(\theta) &= L(\theta; x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n; \theta) \\ &= f(x_1; \theta) \cdots f(x_n; \theta) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\theta^2} e^{-\frac{x_i}{\theta}} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i}{\theta^{2n}} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i} \end{aligned}$$

Tar logaritmen:

$$l(\theta; x_1, ..., x_n) = \ln \prod_{i=1}^{n} x_i - 2n \ln\theta - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Finner maksimumspunkt ved å derivere ln-rimelighetsfunksjonen og sette lik 0.

$$\frac{\partial l}{\partial\theta} = 0 - \frac{2n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Setter uttrykket lik 0, og får

$$\begin{aligned} -2n + \frac{1}{\hat{\theta}}\sum_{i=1}^{n} x_i &= 0 \\ \hat{\theta} &= \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} x_i \end{aligned}$$

SME for θ blir da $\underline{\underline{\hat{\theta} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i}}$.

Forventning og varians til $\hat{\theta}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[\hat{\theta}] &= \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(X_i) = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} 2\theta = \underline{\underline{\theta}} \\ \mathrm{Var}[\hat{\theta}] &= \frac{1}{(2n)^2}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) = \frac{1}{(2n)^2}\sum_{i=1}^{n} 2\theta^2 = \underline{\underline{\frac{\theta^2}{2n}}} \end{aligned}$$

En god estimator, $\hat{\theta}$, er en estimator som er

- forventningsrett, dvs. $E(\hat{\theta}) = \theta$, og
- har liten varians, dvs. $\mathrm{Var}(\hat{\theta})$ er liten.

Vi liker veldig godt hvis variansen minker når antall observasjoner som estimatoren er basert på øker, og går mot 0 når antall observasjoner går mot uendelig (konsistent).

SME-estimatoren er forventningsrett og har varians som minker (mot 0) når antall observasjoner øker. Ja, dette er en god estimator.

d) Man ønsker å teste

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ mot } H_1 : \theta > \theta_0$$

for en gitt verdi $\theta_0 > 0$ basert på testobservatoren

$$Y = \frac{4n\hat{\theta}}{\theta_0}$$

Vi ser først på uttrykket for Y når vi setter inn $\hat{\theta}$:

$$\begin{aligned} Y &= \frac{4n\hat{\theta}}{\theta_0} = \frac{4n \cdot \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i}{\theta_0} \\ &= \frac{2\sum_{i=1}^{n} X_i}{\theta_0} \end{aligned}$$

Under H_0 (dvs. når H_0 er sann), vet vi fra punkt b) at

$$W_i = \frac{2X_i}{\theta_0}$$

er kjikvadratfordelt med 4 frihetsgrader. Siden X_i, $i = 1, ..., n$ er uavhengige vil også $W_1, ..., W_n$ være uavhengige, og dermed vil $Y = \sum_{i=1}^{n} W_i$ være kjikvadratfordelt med $4n$-frihetsgrader.

Vi vil forkaste H_0 når det vi har observert er lite sannsynlig under H_0, dvs. når $\hat{\theta}$ er stor. Det betyr at Y må være stor for at vi skal forkaste H_0. Vi finner en konstant k slik at vi kontrollerer Type-I feilen på nivå α.

$$P(\text{type I feil}) = P(\text{forkaste } H_0 | H_0 \text{ er sann}) \leq \alpha.$$

Innsatt $Y \geq k$ for hendelsen "forkaste H_0".

$$\begin{aligned} P(\text{forkaste } H_0 | H_0 \text{ er sann}) &\leq \alpha \\ P(Y \geq k | \theta_0) &= \alpha \\ P(\frac{2\sum_{i=1}^{n} X_i}{\theta_0} \geq k | \theta_0) &= \alpha \end{aligned}$$

Tallet k som har areal α til høyre i kjikvadratfordelingen med $4n$-frihetsgrader kaller vi $\chi^2_{\alpha,4n}$, dvs. $k = \chi^2_{\alpha,4n}$. Dvs. vi forkaster H_0 når $\underline{\underline{Y \geq \chi^2_{\alpha,4n}}}$.