SIE2010 INFORMASJONS- OG SIGNALTEORI

Løsningsforslag eksamen mai 2002

Oppgave 1

a)

- **Linearitet:** Dersom vi kan bruke superposisjonsprinsippet på et system er det lineært. Matematisk kan vi utrykke dette ved hjelp av signalene $y_1(n) = \mathcal{H}\{x_1(n)\}$ og $y_2(n) = \mathcal{H}\{x_2(n)\}$. Systemet $\mathcal{H}\{\}$ er lineært dersom

$$y(n) = \mathcal{H}\{c_1 x_1(n) + c_2 x_2(n)\} = c_1 \mathcal{H}\{x_1(n)\} + c_2 \mathcal{H}\{x_2(n)\} = c_1 y_1(n) + c_2 y_2(n)$$

- **Skiftinvarians:** Dersom inngangsignalet $x(n)$ på et system $\mathcal{H}\{\}$ blir forsinket med n_0, blir utgangssignalet $y(n)$ forsinket tilsvarende men ellers ha lik form. Matematisk:

$$y(n) = \mathcal{H}\{x(n)\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad y(n-n_0) = \mathcal{H}\{x(n-n_0)\}$$

- **Kausalitet:** Enhetspulsresponsen $h(n) = \mathcal{H}\{\delta(n)\}$ er 0 for $n < 0$.

b)

i.

- Lineært?

$$\mathcal{H}\{c_1 x_1(n) + c_2 x_2(n)\} = c_1^2 x_1^2(n) + c_2^2 x_2^2(n) + 2c_1 c_2 x_1(n) x_2(n)$$

  Nei!

- Skiftinvariant?

$$\mathcal{H}\{x(n-n_0)\} = x^2(n-n_0)$$

  Ja!

- Kausalt? Ja!

ii.

- Lineært?

$$\mathcal{H}\{c_1 x_1(n) + c_2 x_2(n)\} = c_1(x_1(n) + x_1(n+3)) + c_2(x_2(n) + x_2(n+3))$$

  Ja!

- Skiftinvariant?

$$\mathcal{H}\{x(n-n_0)\} = x(n-n_0) + x(n+3-n_0)$$

  Ja!

- Kausalt? Nei, da $y(n) \neq 0$ for $n = -3$.

iii.

- Lineært?

$$\mathcal{H}\{c_1x_1(n) + c_2x_2(n)\} = a\sin(c_1x_1(n) + c_2x_2(n)) \neq ac_1\sin(x_1(n)) + ac_2\sin(x_2(n))$$

  Nei!

- Skiftinvariant?

$$\mathcal{H}\{x(n - n_0)\} = a\sin(x(n - n_0))$$

  Ja!

- Kausalt? Ja!

iv.

- Lineært?

$$\mathcal{H}\{c_1x_1(n) + c_2x_2(n)\} = a^n(c_1x_1(n) + c_2x_2(n)) = c_1a^nx_1(n) + c_2a^nx_2(n)$$

  Ja!

- Skiftinvariant?

$$\mathcal{H}\{x(n - n_0)\} = a^nx(n - n_0)$$

  Nei!

- Kausalt? Ja!

v.

- Lineært?

$$\mathcal{H}\{c_1x_1(n) + c_2x_2(n)\} = a(c_1x_1(n) + c_2x_2(n)) + b^n = [ac_1x_1(n) + b^n] + ac_2x_2(n)$$

  Nei!

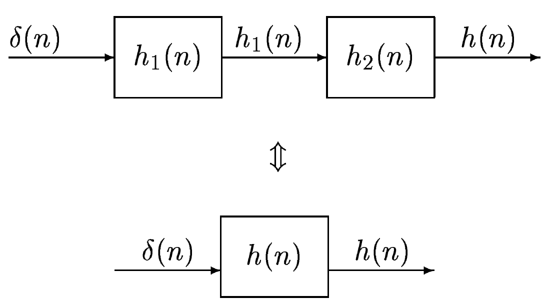
- Skiftinvariant?

$$\mathcal{H}\{x(n - n_0)\} = ax(n - n_0) + b^n$$

  Nei!

- Kausalt? Nei, da b^n har verdier for alle n.

c) Skal vise at:



der $h(n) = h_1(n) * h_2(n)$
Utgangsignalet fra det første filteret er $h_1(n)$ når vi påtrykker en δ-puls. Dette kan generelt skrives som

$$g_1(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1(k)\delta(n - k)$$

$h_1(n)$ er inngangen til filteret $h_2(n)$. Utgangsignalet kan da skrives som

$$\begin{aligned}
h(n) &= \mathcal{H}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1(k)\delta(n-k)\right\} \\
&\Downarrow \text{ Linearitat} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1(k)\mathcal{H}\left\{\delta(n-k)\right\} \\
&\Downarrow \text{ Skiftinvarians} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1(k)h_2(n-k) = h_1(n) * h_2(n)
\end{aligned}$$

q.e.d.

Alternativ løsning $h_1(n)$ er utgangen til det første filteret og påtrykk på $h_2(n)$, når vi påtrykker en δ-puls. Generelt gjelder

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

når signalene er lineære og skiftinvariante. Her har vi

$$h(n) = h_1(n) * h_2(n)$$

q.e.d.

d)

$$\begin{aligned}
h(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1(k)h_2(n-k) = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \beta^{n-k} = \beta^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \\
&= \beta^n \frac{1-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1}}{1-\frac{\alpha}{\beta}} u(n) = \frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha} u(n)
\end{aligned}$$

e) Frekvensresponsen $H_1(e^{j\omega})$:

$$H_1(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{h_1(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha e^{-j\omega}\right)^n = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$$

Tilsvarende

$$H_2(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{h_2(n)\} = \frac{1}{1-\beta e^{-j\omega}}$$

Har følgende sammenheng mellom en kaskadekopling av filtre i tidsplan og frekvensplan: $h_1(n) * h_2(n) \iff H_1(e^{j\omega})H_2(e^{j\omega})$. Dette gir

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}} \frac{1}{1-\beta e^{-j\omega}} = \frac{1}{1-(\alpha+\beta)e^{-j\omega}+\alpha\beta e^{-j2\omega}}$$

f) Begge filtrene er kausale. BIBO-stabilitetskriterie er da et tilstrekkelig kriterium for å påvise stabilitet.

$$\sum_{i=0}^{\infty} |h(i)| < \infty$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} |h_1(n)| = \sum_{i=0}^{\infty} \left|\alpha^i\right| = \frac{1}{1-|\alpha|} \qquad |\alpha| < 1$$

Tester om $h(n)$ er stabilt for $\alpha \neq \beta$:

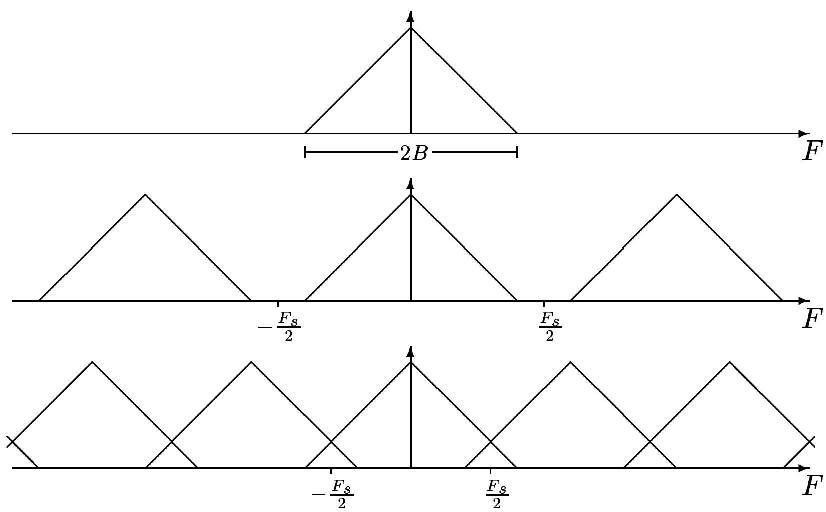
$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty} |h_k(n)| &= \sum_{i=0}^{\infty} \left|\frac{-\alpha}{\beta-\alpha}\alpha^i + \frac{\beta}{\beta-\alpha}\beta^i\right| \\
&\leq \frac{|\alpha|}{|\beta-\alpha|}\sum_{i=0}^{\infty} |\alpha|^i + \frac{|\beta|}{|\beta-\alpha|}\sum_{i=0}^{\infty} |\beta|^i \\
&= \frac{|\alpha|}{|\beta-\alpha|}\frac{1}{1-|\alpha|} + \frac{|\beta|}{|\beta-\alpha|}\frac{1}{1-|\beta|} \qquad |\alpha| < 1 \text{ og} |\beta| < 1
\end{aligned}$$

Dvs: Alle filtrene er stabile når $|\alpha| < 1$ og $|\beta| < 1$.

Alternativ løsning for $\mathbf{h_1(n)}$. Når $h_1(n)$ er BIBO-stabilt, er utgangsignalet begrenset. Dvs. inngangsignalet til $h_2(n)$ er begrenset. Da holder det å sjekke at $h_2(n)$ er BIBO-stabilt. $\Rightarrow |\alpha| < 1$ og $|\beta| < 1$.

Oppgave 2

a) Dersom det analoge signalet er båndbegrenset til $B \leq \frac{1}{2T_s}$ sier punktprøvingsteoremet at punktprøvene representerer signalet eksakt. Dersom $F_s = \frac{1}{T_s} < 2B$ vil vi få aliasing pga. de repeterte spektrene (speilkomponenter) som genereres av samplingsprosessen.



Figur 1: Øverst: Opprinnelig kontinuerlig signal. Midten: Spekteret av det samplede signalet der $F_s > 2B$. Nederst: Spekteret av det samplede signalet der $F_s < 2B$.

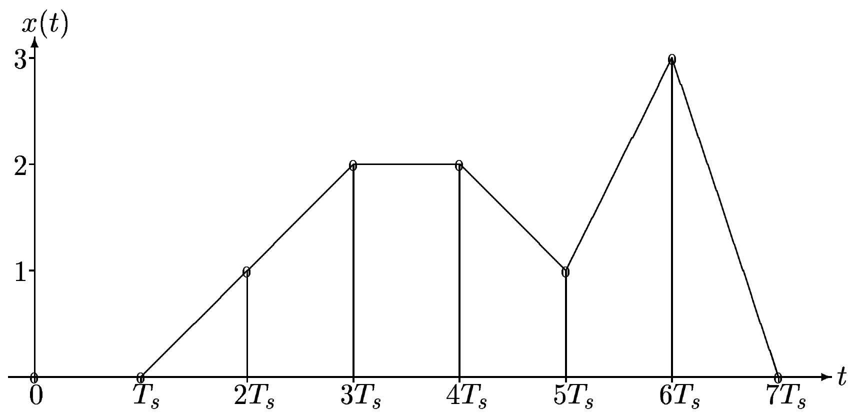
b) Funksjonen

$$h(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right) = \frac{\sin(\pi \frac{t}{T_s})}{\pi \frac{t}{T_s}}$$

vil alltid rekonstruere $x(t)$ eksakt fra punktprøvene $x_s(n)$.

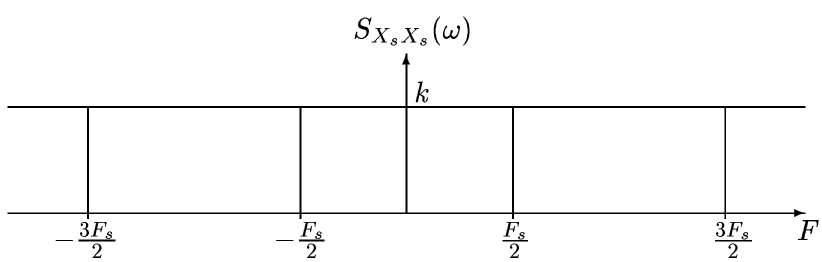
For å rekonstruere $x(t)$ fra $x_s(n)$, må $x_s(n)$ lavpassfiltreres for å fjerne de spektrene som er speilkomponenter generert av samplingsprosessen. Et ideelt lavpassfilter $H(e^{j\omega})$ med knekkfrekvens $\pm\frac{F_s}{2}$ filtrerer bort disse spektrene. Derfor vil $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(e^{j\omega})\}$ gi eksakt rekonstruksjon.

c) Finner utgangsignalet $x(t)$ ved hjelp rekonstruksjonsformelen oppgitt på oppgavearket.



d) MERK: Oppgaveteksten var ikke helt konsistent på denne oppgaven. Det står at '*signalet har flatt spektrum opp til* $F = 1/2T_s$' og senere står det '*finn og skisser den fouriertransformerte av utgangsignalet...*'. Det burde stått '*finn og skisser effektspekteret av utgangsignalet...*'.

Som et resultat av samplingsprosessen vil det opprinnelige analoge båndbegrensede spekteret $S_{XX}(F)$ bli skiftet, slik at den digitale representasjonen vil få et konstant spekter.



Figur 2: Skisse av $S_{X_sX_s}(F)$. k er en konstant proporsjonal med effekten.

Vi ser altså at

$$S_{X_sX_s}(\omega) = k \qquad \text{for alle } \omega$$

Impulsresponsen $h(t)$ til filteret kan skrives som foldingen mellom to firkantpulser $g(t)$ der

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T_s}} & 0 \leq t \leq T_s \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Bevis

$$\begin{aligned} h(t) &= g(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)g(t-\tau)dx \\ &= \begin{cases} \frac{1}{T_s}\int_0^t dx & = \frac{t}{T_s} & 0 \leq t \leq T_s \\ \frac{1}{\sqrt{T}}\int_{t-T_s}^{T_s} dx & = 2 - \frac{t}{T_s} & T_s \leq t \leq 2T_s \\ & = 0 & \text{ellers.} \end{cases} \end{aligned}$$

q.e.d.

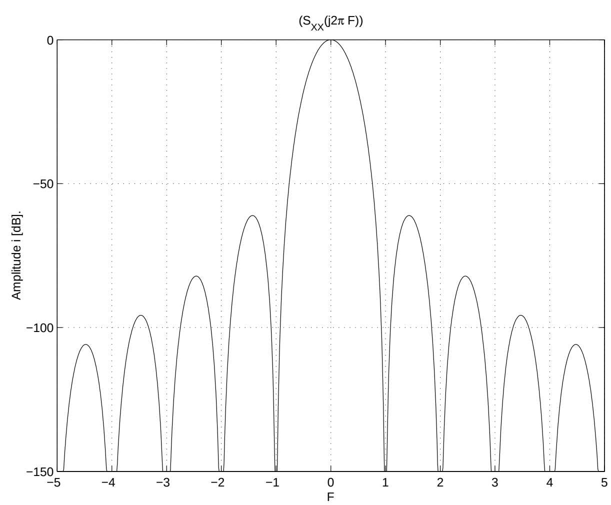
Finner den fouriertransformerte av $g(t)$:

$$\begin{aligned} G(j\Omega) &= \frac{1}{\sqrt{T_s}}\int_0^{T_s} e^{-j\Omega t}dt = \frac{1}{j\Omega\sqrt{T_s}}\left[e^{-j\Omega T_s} - 1\right] \\ &= \frac{e^{-j\frac{\Omega}{2}T_s}}{j\Omega\sqrt{T_s}}\left[e^{-j\frac{\Omega}{2}T_s} - e^{j\frac{\Omega}{2}T_s}\right] \\ G(j2\pi F) &= \sqrt{T_s}\frac{e^{-j\pi T_s F}}{\pi T_s F}\sin(\pi T_s F) = \sqrt{T_s}e^{-j\pi T_s F}\mathrm{sinc}(T_s F) \end{aligned}$$

Effektspektraltettheten til utgangsignalet blir da

$$S_{YY}(j2\pi F) = S_{X_sX_s}(j2\pi F T_s)|H(j2\pi F)|^2 = \frac{k}{T_s}|G(j2\pi F)|^4 = kT_s\mathrm{sinc}^4(T_sF)$$

der vi har brukt $\omega = 2\pi F T_s$.



Figur 3: Skisse av effektspekteret $S_{YY}(j2\pi F)$ til utgangsignalet fra rekonstruksjonsfilteret, der $T_s = 1$ og $k = 1$.

e) I praksis må vi bruke pulser av endelig amplitude inn på rekonstruksjonsfilteret, (i motsetning til δ-pulser med 0-utstekking, uendelig høyde og areal lik 1). For å få nok energi må vi "holde" pulsene over et tidsrom τ der $0 < \tau < T_s$. Pulser av endelig utstrekking vil gi ujevn demping (= distorsjon) i frekvensplanet. En enkel forklarende skisse lignende den som er i figur 6.7 i kompendiet er på sin plass her. (Du må selvsagt skissere den på besvarelsen :)

Vi kan motvirke denne distorsjonen ved å generere først filtrere pulsene med et filter som har invers frekvenskarakteristikk av den firkantpulsene gir.

Oppgave 3

a) Har at

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$$
$$2B\left[\int_0^A dx + \int_A^{2A} 3dx\right] = 1$$
$$2AB + 6B(2A - A) = 1$$
$$A = \frac{1}{8B}$$

Videre er signalvariansen $\sigma_X^2 = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx = 1$$
$$2B\left[\int_0^{\frac{1}{8B}} x^2dx + \int_{\frac{1}{8B}}^{\frac{1}{4B}} 3x^2dx\right] = 1$$
$$2B\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{8B}\right)^3 + \left(\frac{1}{4B}\right)^3 - \left(\frac{1}{8B}\right)^3\right] = 1$$
$$B^2 = \frac{22}{768}$$

Dette gir $A = \sqrt{\frac{6}{11}} \approx 0.740$ og $B = \sqrt{\frac{11}{384}} \approx 0.169$.

b) Kvantiseringsstøyeffekten σ_Q^2 er gitt som $\sigma_Q^2 = \frac{\Delta^2}{12}$ der Δ er kvantiseringsintervallet

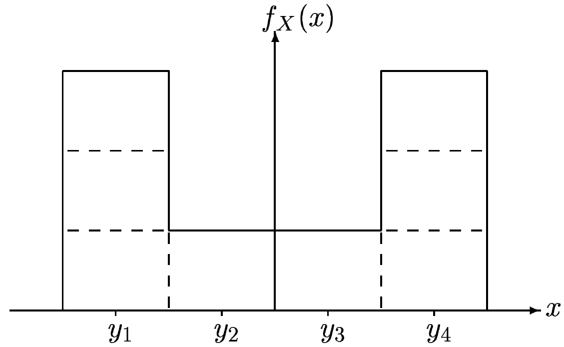
1. 4 nivå: $\Delta = A$

$$\sigma_Q^2 = \frac{A^2}{12} = \frac{1}{22} = 0.0455$$

2. 8 nivå: $\Delta = A/2$

$$\sigma_Q^2 = \frac{A^2}{48} = \frac{1}{88} = 0.00114$$

For å finne entropien må vi først finne sannsynligheten p_i til hver representasjonsverdi y_i.



1. Set at $p_1 = p_4 = \frac{3}{8}$ og $p_2 = p_3 = \frac{1}{8}$ Entropien H blir da

$$H = \sum_{i=1}^{4} p_i \log_2 p_i = -2\left[\frac{3}{8}\log_2\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\log_2\frac{1}{8}\right] = 1.81 \quad \text{[bit/symbol]}$$

2. 8 nivå: $\Delta = A/2$ Entropien H

$$H = \sum_{i=1}^{8} p_i \log_2 p_i = -4\left[\frac{3}{16}\log_2\frac{3}{16} + \frac{1}{16}\log_2\frac{1}{16}\right] = 2.81 \quad \text{[bit/symbol]}$$

c) Eksakt kvantiseringsstøy σ_Q^2 er gitt som

$$\sigma_Q^2 = \sum_{i=1}^{N}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - y_i)^2 f_X(x)dx$$

der x_i er kvantiseringsgrensene, y_i er representasjonsverdiene og N er antall nivåer i kvantiseringen. Da vi har uniform kvantisering får vi

$$\sigma_Q^2 = \sum_{i=1}^{N}\int_{x_i}^{x_i+\Delta} (x - \frac{\Delta}{2})^2 f_X(x)dx$$

Med 4 og 8 nivå i kvantiseringen er $f_X(x)$ konstant i hvert kvantiseringsintervall. Vi kan dermed trekke denne utenfor integrasjonsutrykket

$$\begin{aligned}
\sigma_Q^2 &= \sum_{i=1}^{N} f_X(x)\int_{x_i}^{x_i+\Delta}\left(x - \frac{\Delta}{2}\right)^2 dx = \sum_{i=1}^{N} f_X(x)\frac{1}{3}\left[\left(\frac{\Delta}{2}\right)^3 - \left(-\frac{\Delta}{2}\right)^3\right] \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 \sum_{i=1}^{N} f_X(x)\Delta = \frac{\Delta^2}{12}
\end{aligned}$$

Altså: Tilnærmingen som vi brukte i 3b) er eksakt i dette tilfelle.

Alternativ løsning Her er $f_X(x)$ konstant i hvert kvantiseringsintervall, når vi bruker 2 eller flere bit uniform kvantisering. Da tilnærmingsformelen $\sigma_Q^2 = \Delta^2/12$ har som antagelse at pdf'en er konstant i hvert kvantiseringsintervall, er tilnærmingen konstant i vårt tilfelle. q.e.d.

d) Ved å sende de symbolene med høyest sannsynlighet (y_1 og y_4) med kanalsymbol med de laveste amplitudenivå ($Y_i = \pm C$) og de symbolene med lavest sannsynlighet (y_2 og y_3) med kanalsymbol med de høyeste amplitudenivå ($Y_i = \pm 3C$) får vi lavest mulig gjennomsnittlig symbolenergi σ_Y^2. Dette gir:

$$\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^{4} p_i Y_i^2 = 2\left[\frac{1}{8}(3C^2) + \frac{3}{8}(C)^2\right] = 3C^2 \quad [\mathrm{W}]$$

e)
Kanalkapasiteten er gitt som

$$C = B\log_2(1 + \frac{\sigma_Y^2}{BN_0})$$

Hver punktprøve genererer 2 [bit/kildesymbol] og kanalen overfører $C = 2$ [bit/kanalsymbol]. Mappingen fra punktprøvingen til kanalen er altså 1:1. (Oppgaven spør ikke etter entropikoding av kildesymbolene, dvs. $C = H$). For å kunne overføre informasjonen må punktprøvingsteoremet være oppfylt, dvs $F_s = 2B = 2F_c$. Dette gir

$$C = \frac{1}{2}\log_2(1 + \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_n^2})$$

Der støyeffekten $\sigma_n^2 = BN_0$. Løser denne med hensyn på σ_n^2.

$$\sigma_n^2 = \frac{\sigma_Y^2}{2^{2C} - 1}$$

Dette gir

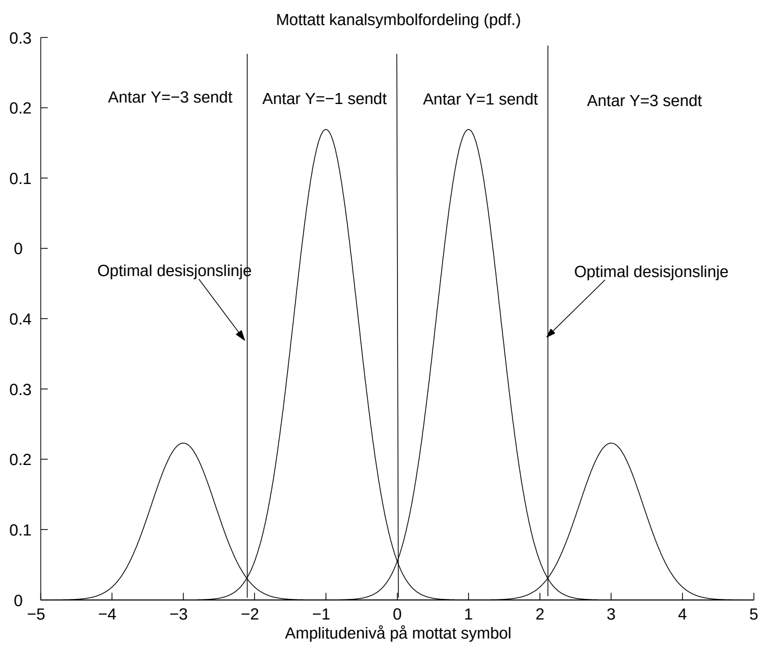
$$\sigma_n^2 = \frac{\sigma_Y^2}{2^4 - 1} = \frac{\sigma_Y^2}{15} = \frac{C^2}{5} \quad [\mathrm{W}]$$

Altså: Kanalstøyeffekten σ_n^2 må være mindre eller lik $C^2/15$ for at vi skal kunne overføre signalet feilfritt.

f) Mottatt symbol fra kanalen før det signaltilpassede filteret er $S_i = Y_i + \eta$ det η er et addivtivt gaussisk støybidrag med varians $\sigma_n^2 = C^2/5$.

Fra figur 4 ser vi at mottakeren ofte vil detektere feil symbol. I følge Shannons kanalkapasitetsteorem kan mottakeren rette opp alle feilene dersom vi bruker feilkorrigerende koding. Praktiske feilkorrigerende koder må ha et noe bedre signal-til-støyforhold, dvs. $\sigma_Y^2 > 15\sigma_n^2$, for at de skal klare å rette opp alle feil.

En grov skisse basert på øyekurven før desisjonen, isteden for mottatt symbolfordeling (figur 4), godtas også i denne oppgaven. Du må da få med at det er fire representasjonsverdiene Y_i, og at de tre øynene blir lukket pga. mye støy.



Figur 4: Skisse av mottatt kanalsymbolfordeling, der $C = 1$, $\sigma_Y^2 = 3$ og $\sigma_n^2 = 0.2$. (Videre bildetekst er ikke krevd: De optimal desisjonsgrense ligger på 0 og $\pm \approx 2.1$. Grunnen til at de ikke ligger på -2, 0 og 2, er at mottakeren vet at sannynligheten for å motta de sendte symbolene $Y_2 = -1$ og $Y_3 = 1$ er 3 ganger større enn å motta symbolene $Y_1 = -3$ og $Y_4 = 3$.