TMA4140 — Diskret Matematikk

Eksamen 18 des. 2012 — Løsningsforslag

Oppgave 1

Observer at $(19, 59) = 1$. Altså kan man bruke ~~det~~ kinesiske restteoremet. $(19 \cdot 59 = 1121)$

Vi finner først (de multiplikative) inversene y_1 og y_2:

$$59\, y_1 \equiv 1 \pmod{19}$$

$$19\, y_2 \equiv 1 \pmod{59}$$

Den Euklidske algoritmen gir følgende:

$$59 = 19 \cdot 3 + 2 \;, \quad 19 = 2 \cdot 9 + 1 \,.$$

Dette gir:

$$1 = 19 - 2 \cdot 9 = 19 - (59 - 19 \cdot 3)9 = 19 \cdot 28 + 59 \cdot (-9)$$

Altså er $y_2 = 28$, $y_1 = -9 \equiv 10 \pmod{19}$.

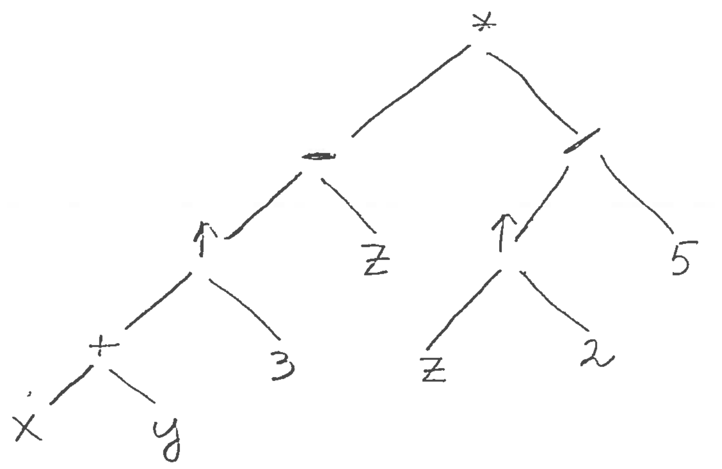
En løsning av kongruensligningene er

$$6 \cdot 59 \cdot 10 + 28 \cdot 19 \cdot 28 = 18436 \,.$$ Dette gir:

$$18436 = 1121 \cdot 16 + 500 \,.$$

Altså er den søkte løsningen $\underline{\underline{x = 500}}$

Oppgave 2



$$x\,y + 3 \uparrow z - z\,2 \uparrow 5 / *$$

Oppgave 3

Vi ser at formelen stemmer for $n = 2$. Anta

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

. Da får vi:

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$= \frac{n+1}{2n}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+1}{2n}\cdot\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n}{2n(n+1)}$$

$$= \frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{(n+1)+1}{2(n+1)}$$

som viser at formelen er riktig for $n+1$

Oppgave 4

Totalt antall komitéer på 6 personer $= \binom{15}{6} = 5005$.

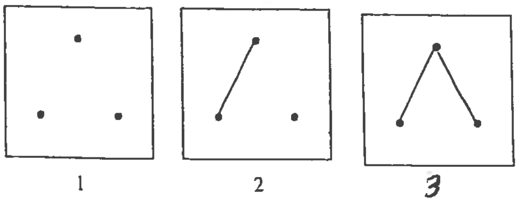
Antall komitéer på 6 personer bestående kun av menn $= \binom{8}{6} = 28$. Altså er antallet komitéer som spørres etter $= \binom{15}{6} - \binom{8}{6} = \underline{\underline{4977}}$

Oppgave 5

a) Grafene er ikke isomorfe: G har nøyaktig 4 delgrafer bestående av firkanter, mens G' har 6 delgrafer bestående av firkanter.

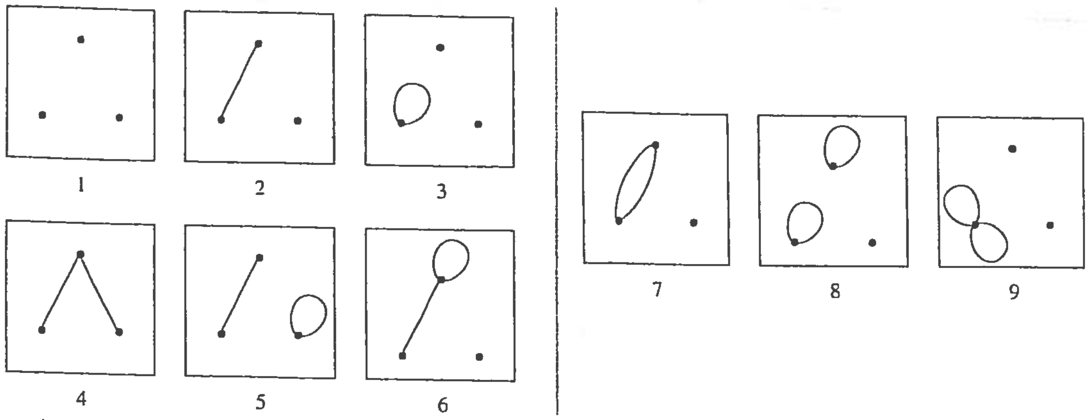
b) Dersom grafen er enkel er det tre ikke-isomorfe grafer:

(i)



For generelle (ikke-rettede) grafer er det ni ikke-isomorfe grafer:

(ii)



Både svaret (i) og svaret (ii) vil bli godtatt.

Oppgave 6

a) $aa^*b(a \cup ba^*ba^*b)^*$

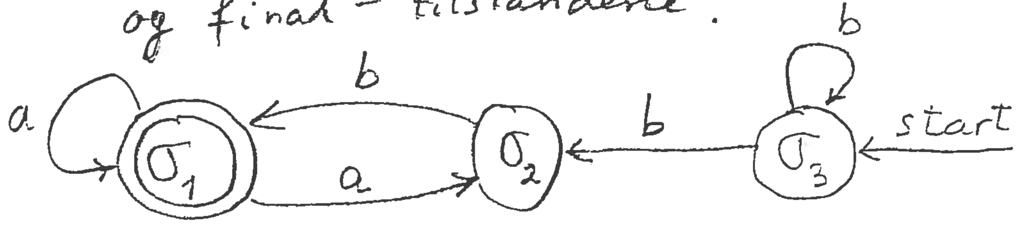
$L(M)$ består av alle strenger over alfabetet $\{a,b\}$ som starter med en a og som inneholder $3k+1$ b'er, der $k = 0, 1, 2, \dots$.

b) $S \to aA$, $A \to aA$, $A \to bB$, $A \to b$,
$B \to aB$, $B \to a$, $B \to bC$, $C \to aC$, $C \to bA$

Oppgave 7

a) $(a \cup ba)^* bbb^*$

b) Reversér alle pilene, og bytt om start- og final-tilstandene.



Oppgave 8

	Alt 1	Alt 2	Alt 3	Alt 4
Deloppgave 1	X			
Deloppgave 2			X	
Deloppgave 3		X		
Deloppgave 4		X	X	
Deloppgave 5	X			X
Deloppgave 6				X
Deloppgave 7				X
Deloppgave 8		X		