**Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet**
**Institutt for telematikk**



Faglig kontakt under eksamen:
Poul Heegaard (73 594321)

EKSAMEN I EMNE
TTM4110 PÅLITELIGHET OG YTELSE MED SIMULERING

Mandag 14. desember 2005
Tid: 09:00 – 13:00

Hjelpemidler:
C - Graham Birtwistle: DEMOS - A system for Discrete Event Modelling on Simula. Formelsamling i fag TTM4110 Pålitelighet og ytelse med simulering. NB! Formelsamlingen er vedlagt.

Sensur uke 2, 2006

*Oppgradering av tjenerløsning*

*WebBua* er et lite firma som lever av å tilby tjenere for epost og webområde for privatpersoner. De har basert tjenesten sin på en SUPERA tjener med god pålitelighet og ytelse. I strategiplanene står det at de ønsker å utvikle tjenesten til også å dekke bedriftsmarkedet. I den forbindelse har de funnet det nødvendig å vurdere tiltak for å forbedre påliteligheten og ytelsen fra god til veldig god. I denne oppgaven skal du hjelpe *WebBua* med å vurdere ulike løsninger for å oppnå sine mål.

**a)** *WebBua* vil tilby en tjenestenivåavtale (SLA). Definér tjenestene som leveres og spesifisér relevante tjenestekvalitetsattributter for disse.

Anta at tid mellom tjenesteavbrudd følger en negativ eksponentialfordeling med intensitet $\alpha = 0.01$ [timer$^{-1}$].

**b)** Hva er sannsynligheten for at tjenesten kan leveres i 2 døgn uten avbrudd? Hvor mange feil kan forventes i løpet av et år? (anta umiddelbar reparasjon i dette punktet).

Den første endringen som skal vurderes er utskifting av tjener med en av type ULTIMA som har bedre ytelse, lavere feilrate, men mer komplisert og tidkrevende reparasjon (inkl. *restart* (omstart av av prosesser) og *reboot* (omstart og opplasting av systemfiler)). Tjeneren lagrer innkommende forespørsel (hent eller send epost, les eller last opp side) i kø hvis tjenerprosessoren er opptatt med behandling av annen forespørsel. Behandlingstiden er negativt eksponentialfordelt med intensitet $\mu$. Forespørsler ankommer uavhengig av hverandre og med konstant intensitet $\lambda$. Anta uendelig kø og en tjenerprosessor.

**c)** Sett opp en tilstandmodell for antall forespørsler i systemet. Hva slags modell er dette? Hva er tilbudt trafikk? Hva er avviklet trafikk? Hva er forventet tid i systemet?

**d)** Hva blir funksjonssannsynligheten? Anta at reparasjonstiden til tjeneren er negativt eksponentialfordelt med intensitet $\beta$. Sett opp transientligninger for å bestemme øyeblikkstilgjengeligheten til tjeneren. Bestem stasjonærtilgjengeligheten, $A$. Hva er systemfeilraten $\Lambda$? Hva blir MTBF?

En alternativ mulighet er å utvide systemet med en SUPERA tjener til, lik den som de allerede har. Med litt ekstrautstyr (en tjenervelgerenhet) kan de to tjenerne konfigureres slik at forespørsler rutes tilfeldig med sannsynlighet $p_1$ til tjener 1 og $p_2$ til tjener 2 når begge er tilgjengelig. All informasjon dubleres på begge tjenere. Hvis en av tjenerne går ned så vil den andre tjeneren kunne behandle alle forespørsler. Om tjenesten er tilgjengelig når en tjener er gått ned er avhengig av hva som ble beskrevet i SLAen i punkt a).

**e)** Anta at forespørsler ankommer systemet i h.h.t. en Poisson-prosess. Hva blir intensiteten og fordelingen på tid mellom ankomster til tjener 1? Hva blir tid i systemet? Anta ingen tid i tjenervelgerenhet, ankomstintensitet $\lambda$, og betjeningsintensitet $\mu/2$. Anta $p_1 = p_2 = 0.5$ og sammenlign med systemtid for løsningen i punkt c).

Anta at SUPERA tjenerne feiler i h.h.t. en Poissonprosess med intensitet $\alpha_i$ $(i = 1, 2)$ og reparasjon skjer uavhengig og negativt ekspoential fordelt med intensitet $\beta_i$ $(i = 1, 2)$. Anta også at tjenervelgerenheten aldri feiler.

**f)** Definér systemtilstanden, sett opp tilstandsdiagrammet og tilhørende tilstandsligninger for å bestemme stasjonærtilgjengeligheten for systemet. Tilstandsligningene kreves ikke løst. Stasjonærtilgjengeligheten er beregnet til $A = \frac{\beta_1\alpha_2+\beta_2\alpha_1+\beta_1\beta_2}{(\beta_1+\alpha_1)(\beta_2+\alpha_2)}$. Hva blir systemfeilraten? Sammenlign med punkt d). Hva blir MTBF?

**g)** Finn MTFF for systmet med de dublerte tjenerene.

For ytterligere å forbedre påliteligheten så er det foreslått å plassere de 2 tjenerne geografisk spredt fra hverandre, en ved hovedkontoret til *WebBua* og en ved i et kontorfellesskap 50 km unna med en annen nett-aksessleverandør. Reparasjoner som krever manuell operasjon kan ikke lengre antas uavhengig av hverandre ettersom det kun er én person som kan gjøre jobben.

For å vurdere ulike reparasjonestratgier så skal det utvikles en simuleringsmodell av denne løsningen. Modellen skal ta hensyn til at ikke alle feil fører til manuell reparasjon, restart av prosesser kan gjøre fra hovedkontoret. Ved alle andre reparasjoner (reboot ((omstart og opplasting av systemfiler)), hardwarefeil) så må reparatøren rykke ut. Reboot er enkelt og kan gjøres av andre. *WebBua* vurderer derfor å inngå en avtale med én av personene som sitter i kontorfellesskapet hvor den andre tjeneren er plassert. *WebBua* vurderer dette opp mot antall forespørsler som blir avvist på grunn av de ulike feilsituasjonene som kan oppstå.

**h)** Beskriv simuleringsmodellen ved hjelp av aktivitetsdiagram. Vis tydelig hva som er entiteter og ressurser i modellen, og hvordan du registerer nødvendig statisikk.

**i)** Vis hvordan du ved replikasjonsmetoden kan sette opp 10 uavhengige eksperimenter med simulatoren din. Anta nå at hver replikasjon $r$ $(r = 1, \cdots, 10)$ har 20 observasjoner av $X$, $X_{i,r}$ $i = 1, \cdots, 20$. Summen$\sum_{i=1}^{20} X_{i,r}$, av observasjonene for hver replikasjon er gitt av følgende liste: $\mathbf{Y} = \{86.68, 63.73, 86.34, 75.53, 90.96, 84.10, 127.96, 124.79, 116.46, 144.88\}$. Estimér forventning og variansen til $X$. Angi nødvendige forutsetninger og sett opp 95% konfidensintervall. Bruk en av kvantilene gitt under.

Kvantiler i student-$t$ fordelingen: $t_{0.025,9} = 2.26$, $t_{0.050,9} = 1.83$, $t_{0.025,10} = 2.23$, $t_{0.050,10} = 1.81$, $t_{0.025,11} = 2.20$, $t_{0.050,11} = 1.80$. Kvantiler i Normal-fordelingen: $u_{0.050} = 1.96$, $u_{0.025} = 1.698$.

# Formelsamling

## Generelt

**Bayes formel**

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j) \cdot P(A_j)}{\sum_{j=1}^{r} P(B|A_j) \cdot P(A_j)} = \frac{P(B|A_j) \cdot P(A_j)}{P(B)} \tag{1}$$

**Kumulativ fordeling** (eller bare fordelingen) til en tilfeldig variabel $X$

$$F_X(x) = P(X \leq x) \tag{2}$$

**Sannsynlighetstetthetsfunksjonen** når $X$er kontinuerlig

$$f_X(x) = \frac{P(x < X \leq x + dx)}{dx} \tag{3}$$

og **punktsannsynligheten** når $X$ er diskret

$$f_x = P(X = x) \tag{4}$$

$j$'te ordens **momentet** for kontinuerlig (med Palms identitet)

$$E(X^j) = \int_0^\infty x^j f_X(x)dx = \int_0^\infty jx^{j-1}(1 - F_X(x))dx \;\; j = 1, 2, \cdots \tag{5}$$

$j$'te ordens **sentralmoment** for kontinuerlig $X$

$$E((X - \mu)^j) = \int_0^\infty (x - \mu)^j f_X(x)dx, \quad j = 2, 3 \cdots \tag{6}$$

**Forventning** til $X$

$$\mu = E(X) \tag{7}$$

**Varians** til $X$

$$\sigma^2 = Var(X) = E_X((X - \mu)^2) \tag{8}$$

**Standardavviket**

$$\sigma = \sqrt{Var(X)} \tag{9}$$

**Variasjonskoeffisient**

$$\rho = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{\sqrt{E(X^2) - E(X)^2}}{E(X)} \tag{10}$$

**Palms formfaktor**

$$\varepsilon = 1 + (\sigma/\mu)^2 = E(X^2)/E(X)^2 \tag{11}$$

**Peakedness-forholdet**

$$S = \frac{\sigma^2}{\mu} = \frac{E(X^2) - E(X)^2}{E(X)} \tag{12}$$

**Forventning til sum** av stokastiske variable

$$E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) \tag{13}$$

**Variansen til en sum** av stokastiske variable når $X_i$-ene er **uavhengige**

$$Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) \tag{14}$$

**Variansen til en sum** av stokastiske variable når $X_i$-ene er **avhengige**

$$Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} Cov(X_i, X_j) \tag{15}$$

**Kovariansfaktoren**

$$\sigma_{XY} = Cov(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = E[XY] - \mu_X \mu_Y \tag{16}$$

**Kovariansfaktoren** med **kontinuerlige** $X$ og $Y$

$$\sigma_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f(x, y) dx dy \tag{17}$$

Tabell 1: Karakteristika ved nyttige fordelinger

| Fordeling av $X$ | Tetthetsfunksjon, $f(x)$ | Fordelingsfunksjon, $F(X)$ | Forventning, $E(X)$ | Varians, $Var(X)$ |
|---|---|---|---|---|
| n.e.d. | $\lambda e^{-\lambda x}$ | $1 - e^{-\lambda x}$ | $1/\lambda$ | $1/\lambda^2$ |
| Erlang-$k$ | $\frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!}\lambda e^{-\lambda x}$ | $1 - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda x)^j}{j!} e^{-\lambda x}$ | $k/\lambda$ | $k/\lambda^2$ |
| Gamma | $\frac{(\lambda x)^{k-1}}{\Gamma(k)}\lambda e^{-\lambda x}$ | $\frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^{\lambda x} u^{k-1} e^{-u} du$ | $k/\lambda$ | $k/\lambda^2$ |
| Weibull | $\gamma\lambda(\lambda x)^{\gamma-1} e^{-(\lambda x)^\gamma}$ | $1 - e^{-(\lambda x)^\gamma}$ | $\frac{1}{\lambda}\Gamma(\frac{1}{\gamma}+1)$ | $\frac{1}{\lambda^2}(\Gamma(\frac{2}{\gamma}+1) - \Gamma^2(\frac{1}{\gamma}+1))$ |
| Uniform | $1/(b-a)$ | $(x-a)/(b-a)$ | $(a+b)/2$ | $(b-a)^2/12$ |
| Standard Normal, $N(0,1)$ | $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ | $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(u) du$ | 0 | 1 |
| Normal, $N(\mu, \sigma^2)$ | $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ | $\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$ | $\mu$ | $\sigma^2$ |
| Bernoulli | $\{ \begin{array}{cc} p & x=1 \\ 1-p & x=0 \end{array}$ | | $p$ | $p(1-p)$ |
| Geometrisk, ordinær | $p^x(1-p)$ | $1 - p^{x+1}$ | $p/(1-p)$ | $p/(1-p)^2$ |
| Geometrisk, forskjøvet | $p^{x-1}(1-p)$ | $\frac{1}{p} - p^x$ | $1/(1-p)$ | $p/(1-p)^2$ |
| Binomisk | $\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ | $\sum_{i=0}^{x} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$ | $np$ | $np(1-p)$ |
| Poisson | $\frac{\alpha^x}{x!} e^{-\alpha}$ | $e^{-\alpha} \sum_{i=0}^{x} \frac{\alpha^i}{i!}$ | $\alpha$ | $\alpha$ |

**Kovariansfaktoren** med **diskrete** $X$og $Y$

$$\sigma_{XY} = \sum_x \sum_y (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f_{x,y} \tag{18}$$

**Korrelasjonskoeffisient**

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}, \quad -1 \leq \rho(X,Y) \leq 1 \tag{19}$$

**Intensiteten** til en punktprosess $X(t)$

$$z(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{E(N(t + \Delta t) - N(t))}{\Delta t} \tag{20}$$

**Raten** til en punktprosess $X(t)$

$$\phi(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{P(y < Y \leq y + \Delta t | Y > y)}{\Delta y} \tag{21}$$

**Autokovariansen** til en stasjonær prosess, $X(t)$, se (16)

$$\sigma_{XX}(\tau) \equiv \sigma_{X(t)X(t+\tau)} = E(X(t)X(t+\tau)) - \mu^2 \tag{22}$$

**Autokorrelasjon**, se (19)

$$\rho_X(\tau) = \frac{\sigma_{XX}(\tau)}{\sigma_{XX}(0)} \tag{23}$$

**Betinget restlevetid**

$$f(t + a|a) = \frac{f(t+a)}{1 - F(a)} \tag{24}$$

**Restlevetidsfordeling** fra tilfeldig tidspunkt

$$f_R(t) = \frac{P(t < R \leq t + dt)}{dt} = \int_{x=t}^{\infty} \frac{1}{x} \frac{1}{E(X)} x f_X(x) dx = \frac{1 - F_X(t)}{E(X)} \tag{25}$$

**Forventet restlevetid** på tilfeldig tidspunkt

$$E(R) = \frac{E(X^2)}{2E(X)} \tag{26}$$

Sammenheng mellom **antall hendelser** $N(t)$ **og tid til** $r$**'te hendelse** $S_r$

$$P(N(t) < r) = P(S_r > t) \tag{27}$$

**Fornyelsesfunksjonen**

$$H(t) = E(N(t)) = \frac{t}{E(Y)} + \frac{Var(Y) - E^2(Y)}{2E^2(Y)} + o(1) \tag{28}$$

**Tidsmiddel** for den tidskontinuerlige prosessen $X(t)$, $(0, T]$ er måleperioden.

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \int_0^T X(t)dt \tag{29}$$

**Punktprøvemiddel** ($n$ er antall punktprøver)

$$\hat{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{30}$$

## Trafikk

**Littles setning**

$$\bar{N} = \lambda \hat{W} \tag{31}$$

**Tilbudt trafikk**

$$A = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i p_i E(X) \tag{32}$$

**Avviklet trafikk** for $M/M/n/N$

$$A' = \sum_{i=0}^{N} \min(i, n) p_i \tag{33}$$

**Målt avviklet trafikk** i tidsrommet $\langle t_1, t_2 \rangle$

$$A' = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt \tag{34}$$

**Erlangs tapsformel**

$$E_n(A) = \frac{A^n/n!}{\sum_{\nu=0}^{n} A^\nu/\nu!} \tag{35}$$

$$E_n(A) = \frac{AE_{n-1}(A)}{n + AE_{n-1}(A)}, \qquad n = 1, 2, , \cdots, n \tag{36}$$

**Engsets** modell $k \geq n$, $\beta = \frac{\lambda}{\mu}$

$$E_{n,k}(\beta) = \frac{\binom{k}{n}\beta^n}{\sum_{\nu=0}^{n}\binom{k}{\nu}\beta^\nu} \tag{37}$$

$$B_{n,k}(\beta) = E_{n,k-1}(\beta) \tag{38}$$

**Tilbudt trafikk** for Engset

$$A = \sum_{i=0}^{n} p_i(k-i)\lambda\frac{1}{\mu} = \frac{k\beta}{1 + \beta(1 - B_{n,k}(\beta))} \tag{39}$$

**Avviklet trafikk** for Engset

$$A' = \sum_{i=0}^{n} ip_i = A(1 - B_{n,k}(\beta)) = \frac{k\beta(1 - B_{n,k}(\beta))}{1 + \beta(1 - B_{n,k}(\beta))} \tag{40}$$

**Erlangs ventetidssystem** (med ett betjeningsorgan), **forventet ventetid i systemet**

$$E(S) = \frac{1}{\mu - \lambda} \tag{41}$$

**Erlangs ventetidssystem** (med ett betjeningsorgan), **forventet ventetid i kø**

$$E(W) = E(S) - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{(\mu - \lambda)\mu} \tag{42}$$

**Jackson kønett**

$$\Gamma_i = \lambda_i + \sum_{j=1}^{k} \Gamma_j p_{ji} \tag{43}$$

## Pålitelighet

### Middeltider til feil

$MTFF = E(T_{FF}) = \int_0^\infty R(t)dt$ - Midlere tid til første feil

$MTCF = E(T_{CF})$ - Midlere tid til kritisk feil

$MTBF = E(T_{BF})$ - Midlere tid mellom feil

$MUT = E(T_U)$ - Midlere oppetid

$MDT = E(T_D)$ - Midlere nedetid

$MTTF = E(T_F) = \int_0^\infty \tilde{R}(t)dt$ - Midlere tid til feil.

**Midlere tid mellom feil** beregnet fra et tilstandsdiagram, hvor $S_A$ er de arbeidende tilstandene til systemet, $S_F$ feiltilstandene, $q_{ij}$ er transisjonsintensitenten fra tilstand $i$ til $j$, og $p_i$ er den stasjonære tilstandssannsynlighet for tilstand $i$.

$$MTBF^{-1} = \sum_{i \in S_A} \sum_{j \in S_F} p_i \cdot q_{ij} = \sum_{i \in S_A} \sum_{j \in S_F} p_j \cdot q_{ji} \tag{44}$$

**Midlere tid til første feil** for ureparerte strukturer med uavhengige element med konstantefeilrater

$$MTFF_{serie} = (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)^{-1}$$

$$MTFF_{paral} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \tag{45}$$

$$MTFF_{k-av-n} = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j}$$

**Funksjonssannsynligheter**

$R(t) = P(T_{FF} > t)$ - leveranse av tjenesten starter når systemet er nytt

$\tilde{R}(t) = P(T_F > t)$ - leveranse av tjenesten starter når systemet er i en stasjonærdriftstilstand (dvs. ikke som nytt).

$$R_{serie}(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t)$$

$$R_{paral}(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - R_i(t)) \tag{46}$$

$$R_{k\text{-}av-n}(t) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} R(t)^i (1 - R(t))^{n-i}$$

**Tilgjengelighet**

$$I(t) = \{ \begin{array}{ll} 1 & systemet\, er\, oppe\, ved\, tidspunkt\, t \\ 0 & ellers \end{array} \tag{47}$$

**Øyeblikkstilgjengelighet**

$$A(t) = P(I(t) = 1) \tag{48}$$

**Intervalltilgjengelighet** mellom $t_1$og $t_2$

$$A(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} A(t)dt = E(\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt) \tag{49}$$

**Stasjonærtilgjengelighet**

$$A = \lim_{t \to \infty} P(I(t) = 1) = \lim_{t \to \infty} E(I(t)) = \frac{MUT}{MDT + MUT} = \frac{MUT}{MTBF} \tag{50}$$

$A = \sum_{i \in S_a} p_i$, hvor $S_A$ er de arbeidende tilstandene til systemet og $p_i$ er den stasjonære tilstandssannsynlighet for tilstand $i$.

$$A_{serie} = \prod_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_{paral} = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - A_i) \tag{51}$$

$$A_{k-av-n} = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} A^i (1 - A)^{n-i}$$

**Utilgjengelighet**

$$U(\cdots) = 1 - A(\cdots) \tag{52}$$

## Estimatorer

La $\xi$ være størrelsen av interesse (estimanden) og $Y$ være en estimator som er *forventningsrett*, $E(Y) = \xi$ og konsistent, $Var(Y) \to 0$ når $n \to \infty$. Anta $n$ uavhengige og identisk fordelte observasjoner $X_1, X_2, \cdots, X_n$, hvor

$$E(X_i) = \xi \;\; og \;\; Var(X_i) = \sigma^2 \;\; i = 1, 2, \cdots, n$$

**Estimert** $\xi$

$$Y = \hat{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \tag{53}$$

**Estimert varians** til $X_i$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{X})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{n}{n-1}\hat{X}^2 \tag{54}$$

**Estimert varians** til $Y$

$$S_Y^2 = S_{\hat{X}}^2 = S^2/n \tag{55}$$

**Estimert standardavvik til gjennomsnittet**

$$S_{\hat{X}} = S/\sqrt{n} \tag{56}$$

$1-\alpha$ - **konfidenintervall** for $Y$ (med ukjent varians)

$$(\hat{X} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}, \hat{X} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}) \tag{57}$$

( $t_{\alpha/2,n-1}$ er $\alpha/2$-kvantilen i Student-$t$-fordelingen med $n-1$ frihetsgrader.)

## Noen matematiske formler

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \tag{58}$$

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e \tag{59}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = (a+b)^n \tag{60}$$

$$\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \frac{1-x^n}{1-x}, \quad n\, endelig \tag{61}$$

**De Morgans teorem**

$$\begin{aligned} \overline{A+B} &= \overline{A}\cdot\overline{B} \\ \overline{A}+\overline{B} &= \overline{A\cdot B} \end{aligned} \tag{62}$$