TMA 4140 – Diskret Matematikk

(Løsningsforslag til eksamensettet desember, 2010.)

Oppgave 1 $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2);\ n \geq 1.$ (*)

Vi ser at (*) er riktig for $n=1$, idet venstre- og høyresiden er lik 2.

Anta (*) riktig for $n=k$. For $n=k+1$ får vi:

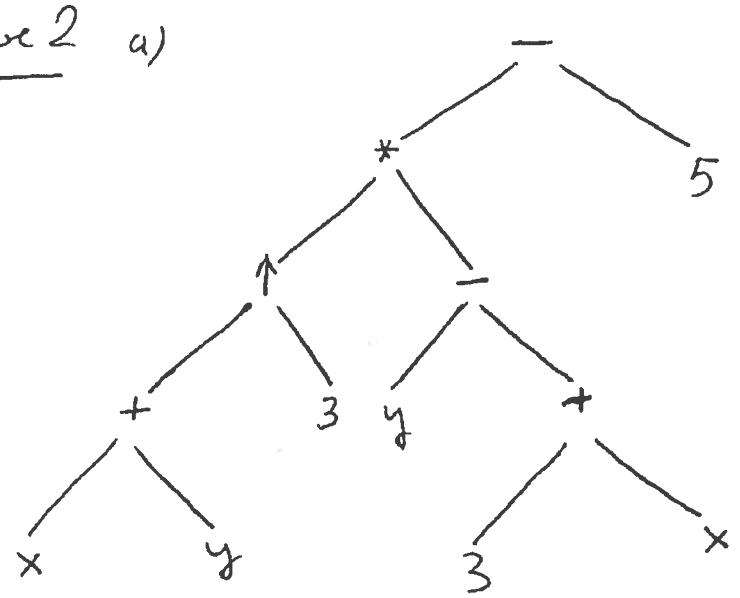
$$\underbrace{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + k(k+1)} + (k+1)(k+2) =$$

$$\frac{1}{3}k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2) = (k+1)(k+2)\left[\frac{k}{3} + 1\right]$$

$$= \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3).$$

Altså er (*) riktig for $n=k+1$, og dermed er (*) riktig for alle n.

Oppgave 2 a)



b) $x\ y + 3 \uparrow y\ 3\ x + - * 5 -$

Oppgave 3 2, 3, 5 og 11 er parvis relativt primiske og derfor kan ligningssettet løses ved det kinesiske restteoremet.

$$m = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 330$$

$$M_2 = \frac{330}{2} = 165 \;, \quad 1 \cdot 165 \equiv 1 \pmod{2}$$

$$M_3 = \frac{330}{3} = 110 \;, \quad 2 \cdot 110 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$M_5 = \frac{330}{5} = 66 \;, \quad 1 \cdot 66 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$M_{11} = \frac{330}{11} = 30 \;, \quad 7 \cdot 30 \equiv 1 \pmod{11}$$

Den generelle løsningen til ligningssettet er:

$$x = 1 \cdot 165 \cdot 1 + 2 \cdot 110 \cdot 2 + 3 \cdot 66 \cdot 1 + 4 \cdot 30 \cdot 7 + 330k$$

$$= 1643 + 330k \;; \; k \in \mathbb{Z}$$

Velger man $k = -4$, så får man den ønskede løsningen: $\underline{\underline{x = 323}}$

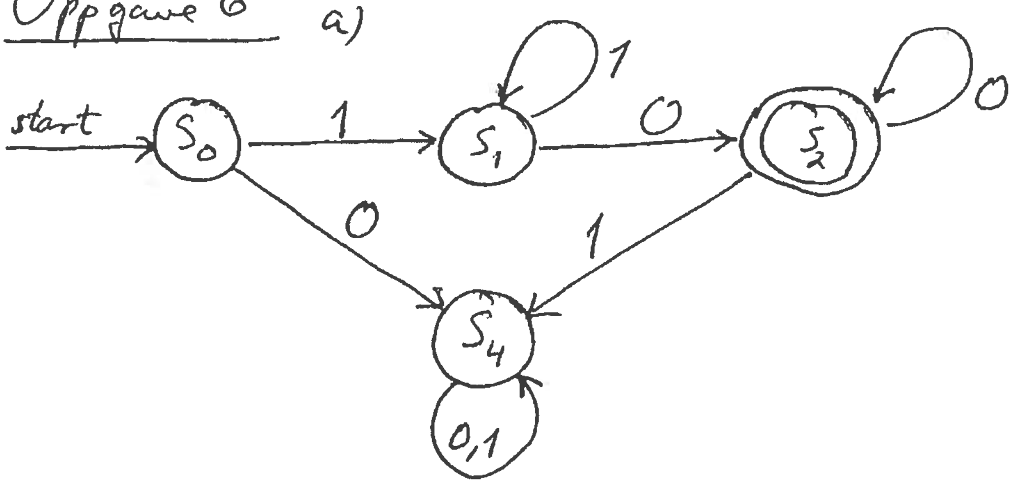
Oppgave 4 Ingen av grafene har Eulerkretser, men de har begge Eulerveier og Hamiltonkretser. Grafene er isomorfe. Flere isomorfier er mulige. Et eksempel er

$$f(u_1) = v_1, f(u_2) = v_3, f(u_3) = v_2, f(u_4) = v_5, f(u_5) = v_4$$

Oppgave 5 a) Et regulært språk er pr. definisjon et språk som genereres av en regulær grammatikk. Et språk er regulært hvis og bare hvis det kan representeres ved et regulært uttrykk. Dessuten er et språk regulært hvis og bare hvis det gjenkjennes av en endelig (deterministisk eller ikke-deterministisk) tilstandsautomat.

b) 0^*11^* (eller $00^*11^* \cup 11^*$, eller $0^*111^* \cup 0^*1$)

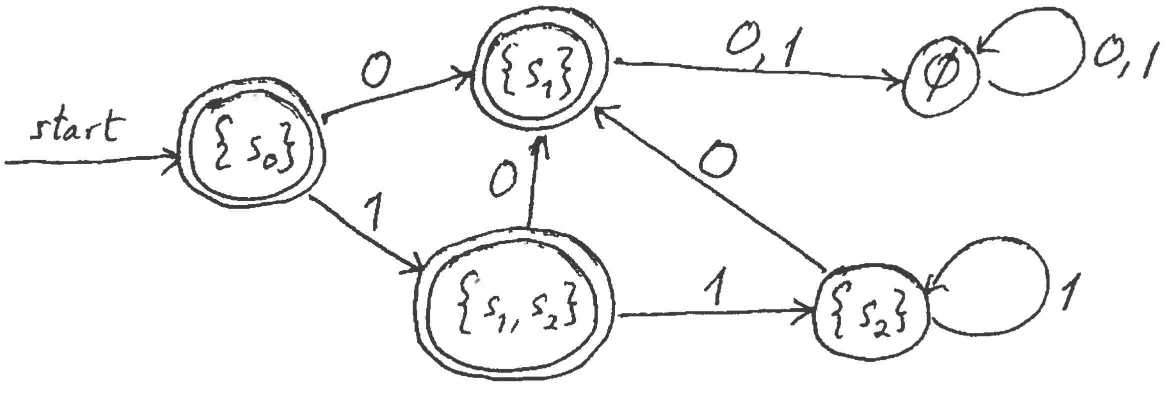
Oppgave 6 a)



b)

$\lambda \cup 0 \cup 1 \cup 11^*0$

c) Følger vi beskrivelsen som er gitt i læreboka for hvordan man konstruerer en deterministisk endelig tilstandsautomat fra en ikke-deterministisk, så får man:



Oppgave 7

	Alt 1	Alt 2	Alt 3	Alt 4
Deloppgave 1				X
Deloppgave 2		X		
Deloppgave 3		X		
Deloppgave 4	X			
Deloppgave 5		X		X
Deloppgave 6				X
Deloppgave 7	X		X	
Deloppgave 8			X	