目录

第一章　姿态表达式

1.1　欧拉角

描述载体的一组欧拉角称为姿态角, 包括航向角 ψ, 俯仰角 θ, 横滚角 ϕ, 它们的定义为

1. 航向角 ψ: 载体纵轴正方向在当地水平面上的投影与当地地理北向的夹角, 北偏东为正, 取值范围为 $0^\circ \sim 360^\circ$ 或者 $-180^\circ \sim 180^\circ$.
2. 俯仰角 θ: 载体纵轴正方向与其水平投影线之间的夹角, 当载体“抬头”时定义为正, 取值范围为 $-90^\circ \sim 90^\circ$.
3. 横滚角 ϕ: 载体立轴正方向与载体纵轴所在铅垂面之间的夹角, 当载体向右倾斜 (如飞机右机翼下压) 时为正, 取值范围为 $-180^\circ \sim 180^\circ$.

下面推导姿态角对应的姿态矩阵, 以 n 系为参考系, 计算其转换到 b 系的坐标旋转矩阵. 第一次转动为 n 系绕 z 轴转动 ψ 角, 那么

$$\begin{bmatrix} x^{b'} \\ y^{b'} \\ z^{b'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^n \\ y^n \\ z^n \end{bmatrix},$$

第二次转动为 b' 系绕其 y 轴转动 θ 角, 那么

$$\begin{bmatrix} x^{b''} \\ y^{b''} \\ z^{b''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{b'} \\ y^{b'} \\ z^{b'} \end{bmatrix},$$

第三次转动为 b'' 系绕其 x 轴转动 ϕ 角, 那么

$$\begin{bmatrix} x^{b} \\ y^{b} \\ z^{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{b''} \\ y^{b''} \\ z^{b''} \end{bmatrix},$$

将它们乘起来, 便得到 n 系到 b 系的变换关系为

$$\begin{bmatrix} x^{b} \\ y^{b} \\ z^{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & -\sin\theta \\ -\cos\phi\sin\psi + \sin\phi\sin\theta\cos\psi & \cos\phi\cos\psi + \sin\phi\sin\theta\sin\psi & \sin\phi\cos\theta \\ \sin\phi\sin\psi + \cos\phi\sin\theta\cos\psi & -\sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\theta\sin\psi & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^n \\ y^n \\ z^n \end{bmatrix}. \tag{1.1}$$

我们记

$$\mathbf{C}_n^b = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & -\sin\theta \\ -\cos\phi\sin\psi + \sin\phi\sin\theta\cos\psi & \cos\phi\cos\psi + \sin\phi\sin\theta\sin\psi & \sin\phi\cos\theta \\ \sin\phi\sin\psi + \cos\phi\sin\theta\cos\psi & -\sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\theta\sin\psi & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix}.$$

值得注意的是, 当俯仰角 θ 为 $\pm 90^\circ$ 的时候, 姿态矩阵变为

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_n^b &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mp 1 \\ -\cos\phi\sin\psi \pm \sin\phi\cos\psi & \cos\phi\cos\psi \pm \sin\phi\sin\psi & 0 \\ \sin\phi\sin\psi \pm \cos\phi\cos\psi & -\sin\phi\cos\psi \pm \cos\phi\sin\psi & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mp 1 \\ -\sin(\psi \mp \phi) & \cos(\psi \mp \phi) & 0 \\ \pm\cos(\psi \mp \phi) & \pm\sin(\psi \mp \phi) & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

也就是说, 此时 b 系的坐标 x^b 始终等于 $\mp z^n$, 无论航向角和横滚角如何变化, 都不改变 x 坐标, 并且这两个角作用相同, 使旋转丧失了一个自由度, 这就是万向锁问题. 所以欧拉角不能用于全姿态导航, 并且其难以将两次旋转叠加, 所以一般不用于姿态更新算法. 但是其描述转动直观易理解, 所以常把其他描述姿态的方法转换为欧拉角展示结果.

1.2 四元数

先来看熟悉的复数域 $\mathbb{C}$, 对于矩阵 $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, 我们可以写成

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a\mathbf{1} + b\mathbf{i},\ a, b \in \mathbb{R},$$

其中

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

不难验证

$$\mathbf{1}^2 = \mathbf{1}, \mathbf{1i} = \mathbf{i1} = \mathbf{i}, \mathbf{i}^2 = \mathbf{1}.$$

记所有矩阵 $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ 构成的集合为 M_2(容易验证这是一个域), 考虑映射

$$\phi : \mathbb{C} \to M_2\ \ s.t.\ \ a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

由于

$$\begin{aligned}\phi((a+bi)+(c+di)) &= \phi((a+c)+(b+d)i) = \begin{pmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \phi(a+bi) + \phi(c+di),\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\phi((a+bi)(c+di)) &= \phi((ac-bd)+(ad+bc)i) = \begin{pmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \phi(a+bi)\phi(c+di),\end{aligned}$$

显然 ϕ 是双射, 所以复数域 $\mathbb{C}$ 同构于矩阵域 M_2. 注意到

$$\phi(\cos\theta + i\sin\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

这从另一个角度说明了为什么单位复数 $e^{i\theta}$ 可以表示旋转. 上面的讨论告诉我们, 一个复数完全等同于一个二阶矩阵, 下面我们来定义四元数. 对于四个实数组成的数对 (a,b,c,d), 定义对应的矩阵

$$q = \begin{pmatrix} a+di & -b-ci \\ b-ci & a-di \end{pmatrix},$$

容易验证形如 q 的任意两个矩阵相加或者相乘后的结果仍然形如 q, 所以这是一个对乘法和加法封闭的集合. 定义

$$|q|^2 = \det q = a^2+b^2+c^2+d^2.$$

所以 $|q|^2$ 实际上是 $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ 到原点 O 的距离. 此外, 可以逐一验证其加法的交换律, 结合律, 乘法的结合律以及乘法与加法的左右分配律, 并且其有加法单位元, 加法逆元, 乘法单位元, 对于 $q\neq\mathbf{0}$ 有乘法逆元, 但是没有乘法的交换律, 所以这是一个非交换的除环. 我们也可以将其写成

$$\begin{pmatrix} a+di & -b-ci \\ b-ci & a-di \end{pmatrix} = a\mathbf{1}+b\mathbf{i}+c\mathbf{j}+d\mathbf{k}$$

的形式, 其中

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{k} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

容易验证 $\mathbf{i}^2=\mathbf{j}^2=\mathbf{k}^2=-\mathbf{1}$, 并且 $\mathbf{ij}=\mathbf{k},\mathbf{jk}=\mathbf{i},\mathbf{ki}=\mathbf{j}$. 类似复数, 对于四元数的一些性质也可以用矩阵来验证:

- 四元数的模是结合的, 即 $|q_1q_2|=|q_1||q_2|$, 这是因为行列式是结合的, 即 $\det(q_1q_2)=\det(q_1)\det(q_2)$.
- 任意非零四元数 q 都有唯一的逆元 q^{-1}, 满足 $qq^{-1}=q^{-1}q=\mathbf{1}$:

$$q^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}(a\mathbf{1}-b\mathbf{i}-c\mathbf{j}-d\mathbf{k}).$$

- 四元数 $a\mathbf{1}-b\mathbf{i}-c\mathbf{j}-d\mathbf{k}$ 被称作 $q=a\mathbf{1}+b\mathbf{i}+c\mathbf{j}+d\mathbf{k}$ 的共轭四元数, 也记作 $\overline{q}$, 显然有 $q\overline{q}=|q|^2$.
- 四元数的共轭并不是对矩阵 q 的每一个元素取共轭复数, 实际上,$\overline{q}$ 是对 $q^\top$ 的每个元素取共轭复数的结果, 由于 $(q_1q_2)^\top=q_2^\top q_1^\top$, 所以 $\overline{q_1q_2}=\overline{q_2}\,\overline{q_1}$.

四元数代数在 1843 年由 Hamilton 创立, 所以我们把四元数所构成的非交换除环记为 $\mathbb{H}$. 值得一提的是, 正如单位复数可以描述二维空间中的旋转, 单位四元数也将在描述三维空间中的旋转上发挥巨大作用, 而 Hamilton 本人并没有发现四元数和三维空间旋转的联系, 单位四元数和旋转的关系是由数学家 Cayley 在 1845 年发表的.

1.2.1 单位四元数与纯虚四元数

如果四元数 $a\mathbf{1}+b\mathbf{i}+c\mathbf{j}+d\mathbf{k}$ 的模为 1, 即 $a^2+b^2+c^2+d^2=1$, 那么我们称为**单位四元数**. 它们组成了空间 $\mathbb{R}^4$ 中的一个三维球面, 记作 $\mathbb{S}^3$, 显然两个单位四元数的乘积依然是单位四元数, 所以 $\mathbb{S}^3$ 在四元数乘法下构成一个群. 就行单位复数组成的一维球面 $\mathbb{S}^1$ 一样,$\mathbb{S}^3$ 也形成了一个旋转群, 虽然不是那么的直观. 下面我们就来引入四元数的几何应用.

首先假设 u 是一个模为 1 的复数, 我们来说明在 $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ 中与 u 作乘法为什么能表示一个旋转. 令 v 和 w 是任意两个复数, 考虑 uv 和 uw 之间的距离, 由于

$$|uv-uw|=|u(v-w)|=|u||v-w|=|v-w|,$$

所以 uv 和 uw 之间的距离等于 v 和 w 之间的距离, 于是我们把这样的一个变换称为平面的**等距映射**. 此外, 等距映射使原点 O 保持不动, 因为 $u0=0$. 如果 $u\neq 1$, 那么除开 O 之外的所有点都会变化, 而平面上满足这些属性的变换就只能是绕 O 点旋转.

同样的论述也适用于四元数的乘法, 如果我们把空间 $\mathbb{R}^4$ 中的两个点分别乘以一个单位四元数, 这两个点的距离依然保持不变, 并且原点 O 保持不动, 所以这是 $\mathbb{R}^4$ 中的一个等距映射, 实际上我们也可以把这种等距称为"旋转", 但是我们想说明四元数乘法提供了一种思路去研究 $\mathbb{R}^3$ 中的旋转, 为了实现这一点, 我们需要先研究四元数蕴含的一个自然的三维子空间.

纯虚四元数

纯虚四元数指的是形如

$$p=b\mathbf{i}+c\mathbf{j}+d\mathbf{k}$$

的四元数. 它们组成了一个三维空间, 即 $\mathbb{R}\mathbf{i}+\mathbb{R}\mathbf{j}+\mathbb{R}\mathbf{k}$, 或者简写为 $\mathbb{R}^3$. 相应的, 实四元数形如 $a\mathbf{1}$, 这组成了空间 $\mathbb{R}\mathbf{1}$, 显然这与空间 $\mathbb{R}\mathbf{i}+\mathbb{R}\mathbf{j}+\mathbb{R}\mathbf{k}$ 正交. 现在开始我们把实四元数 $a\mathbf{1}$ 简记为 a, 把实四元数组成的直线简记为 $\mathbb{R}$.

显然两个纯虚四元数的和依然是纯虚四元数, 但是积未必. 实际上, 对于 $u=u_1\mathbf{i}+u_2\mathbf{j}+u_3\mathbf{k}$ 和 $v=v_1\mathbf{i}+v_2\mathbf{j}+v_3\mathbf{k}$, 它们的积为

$$uv=-(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)+(u_2v_3-u_3v_2)\mathbf{i}-(u_1v_3-u_3v_1)\mathbf{j}+(u_1v_2-u_2v_1)\mathbf{k}.$$

这将 $\mathbb{R}^3$ 中的两种运算联系起来, 注意到 u 和 v 的内积为

$$u\cdot v=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3,$$

叉积为

$$u\times v=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\end{vmatrix}=(u_2v_3-u_3v_2)\mathbf{i}-(u_1v_3-u_3v_1)\mathbf{j}+(u_1v_2-u_2v_1)\mathbf{k}.$$

所以纯虚四元数的乘法可以写成

$$uv=-u\cdot v+u\times v. \tag{1.2}$$

可以发现 uv 依然是纯虚四元数当且仅当 $u\cdot v=0$, 即 u 和 v 正交. 特别的, 如果 $u\in\mathbb{R}\mathbf{i}+\mathbb{R}\mathbf{j}+\mathbb{R}\mathbf{k}$ 并且 $|u|=1$, 那么

$$u^2=-u\cdot u=-|u|^2=-1.$$

所以 $\mathbb{R}\mathbf{i}+\mathbb{R}\mathbf{j}+\mathbb{R}\mathbf{k}$ 中所有单位向量都是 -1 的平方根, 这也表明 $\mathbb{H}$ 与常见的代数结构有很大不同.

1.2.2 四元数表示三维空间的旋转

一个单位四元数 t, 类似单位复数 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$, 有一个"实部"$\cos\theta$ 和一个正交于实部的"虚部"$i\sin\theta$, 而在四元数中虚部为 $\mathbb{R}\mathbf{i}+\mathbb{R}\mathbf{j}+\mathbb{R}\mathbf{k}$, 这意味着

$$t=\cos\theta+u\sin\theta,$$

其中 u 是 $\mathbb{R}\mathbf{i}+\mathbb{R}\mathbf{j}+\mathbb{R}\mathbf{k}$ 中的单位向量, 在上一部分中, 还有 $u^2=-1$.

$\mathbb{R}\mathbf{i}+\mathbb{R}\mathbf{j}+\mathbb{R}\mathbf{k}$ 中正是形如这样的四元数 t 表示了一个旋转, 当然不是通过简单的乘法, 因为 $\mathbb{R}\mathbf{i}+\mathbb{R}\mathbf{j}+\mathbb{R}\mathbf{k}$ 中两个四元数的乘法不一定还在 $\mathbb{R}\mathbf{i}+\mathbb{R}\mathbf{j}+\mathbb{R}\mathbf{k}$ 中. 对于 $q\in\mathbb{R}\mathbf{i}+\mathbb{R}\mathbf{j}+\mathbb{R}\mathbf{k}$, 我们考虑 tqt^{-1}, 由于

$$t^{-1}=\bar{t}/|t|^2=\cos\theta-u\sin\theta,$$

对于映射 $q\mapsto tqt^{-1}$ 容易验证这是一个可逆映射, 所以这是一个 $\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ 的双射, 我们称为 q 的 t 共轭. 显然 $\mathbb{R}$ 的 t 共轭还是 $\mathbb{R}$, 所以这就表明 $\mathbb{R}\mathbf{i}+\mathbb{R}\mathbf{j}+\mathbb{R}\mathbf{k}$ 的 t 共轭还在 $\mathbb{R}\mathbf{i}+\mathbb{R}\mathbf{j}+\mathbb{R}\mathbf{k}$ 中.

Theorem 1.2.1. 如果 $t=\cos\theta+u\sin\theta$, 其中 $u\in\mathbb{R}\mathbf{i}+\mathbb{R}\mathbf{j}+\mathbb{R}\mathbf{k}$ 并且 $|u|=1$, 那么 $\mathbb{R}\mathbf{i}+\mathbb{R}\mathbf{j}+\mathbb{R}\mathbf{k}$ 中点的 t 共轭把空间 $\mathbb{R}\mathbf{i}+\mathbb{R}\mathbf{j}+\mathbb{R}\mathbf{k}$ 绕 u 轴正向旋转了 2θ 角度.

Proof. 首先证明直线 $\mathbb{R}u$ 在 t 共轭的作用下保持不动:

$$\begin{aligned}
tut^{-1}&=(\cos\theta+u\sin\theta)u(\cos\theta-u\sin\theta)\\
&=(u\cos\theta+u^2\sin\theta)(\cos\theta-u\sin\theta)\\
&=(u\cos\theta-\sin\theta)(\cos\theta-u\sin\theta)\\
&=u(\cos^2\theta+\sin^2\theta)-\sin\theta\cos\theta-u^2\sin\theta\cos\theta\\
&=u.
\end{aligned}$$

现在我们选取一个 $\mathbb{R}\mathbf{i}+\mathbb{R}\mathbf{j}+\mathbb{R}\mathbf{k}$ 中垂直于 u 的单位向量 v, 即 $u\cdot v=0$, 再令 $w=u\times v$, 那么根据(1.2)式, 所以 $w=uv$, 这样 $\{v,w,u\}$ 构成了 $\mathbb{R}\mathbf{i}+\mathbb{R}\mathbf{j}+\mathbb{R}\mathbf{k}$ 的一组正交基, 并且 $uv=w, vw=u, wu=v$, 现在只需要说明 t 共轭等同于下面的旋转矩阵的效果即可:

$$\begin{bmatrix}v'\\w'\\u'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos2\theta&\sin2\theta&0\\-\sin2\theta&\cos2\theta&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v\\w\\u\end{bmatrix}.$$

我们已经说明了 $tut^{-1}=u$, 所以只需要证明

$$tvt^{-1}=v\cos2\theta+w\sin2\theta, twt^{-1}=w\cos2\theta-v\sin2\theta.$$

直接计算可得:

$$\begin{aligned}
tvt^{-1}&=(\cos\theta+u\sin\theta)v(\cos\theta-u\sin\theta)\\
&=(v\cos\theta+uv\sin\theta)(\cos\theta-u\sin\theta)\\
&=v\cos^2\theta-vu\sin\theta\cos\theta+uv\sin\theta\cos\theta-uvu\sin^2\theta\\
&=v\cos^2\theta+2uv\sin\theta\cos\theta+u^2v\sin^2\theta\\
&=v(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+2w\sin\theta\cos\theta\\
&=v\cos2\theta+w\sin2\theta.
\end{aligned}$$

对于 twt^{-1} 类似. □

Theorem 1.2.2. 旋转的乘积还是一个旋转, 旋转的逆也是一个旋转.(旋转构成一个群)

Proof. 旋转的逆是一个旋转是显然的, 只需要将 θ 改为 $-\theta$ 即可. 下面我们证明旋转的乘积还是一个旋转. 设旋转 r_1 是绕 u_1 轴旋转了 α_1 度, 旋转 r_2 绕 u_2 轴旋转了 α_2 度, 那么 r_1 可以由 $t_1=\cos\frac{\alpha_1}{2}+u_1\sin\frac{\alpha_1}{2}$ 的共轭作用表示,r_2 可以由 $t_2=\cos\frac{\alpha_2}{2}+u_1\sin\frac{\alpha_2}{2}$ 的共轭作用表示, 那么

$$q\mapsto t_2(t_1qt_1^{-1})t_2^{-1}=(t_2t_1)q(t_2t_1)^{-1},$$

记 $t = t_2 t_1$, 根据前面的论述, 这依然是一个单位四元数, 所以

$$t = \cos\frac{\alpha}{2} + u\sin\frac{\alpha}{2},$$

这表明旋转 r_1 和 r_2 的复合相当于绕某个轴 u 转动 α 度一次完成. $\square$

Remark. 这实际上就是欧拉旋转定理.

1.2.3 四元数的微分方程

假设一个动坐标系 b 系相对于参考系 R 系以角速度 $\boldsymbol{\omega}_{Rb}$ 转动, 记 b 系变换到 R 系的四元数为 $\boldsymbol{q}_b^R$, 也就是说, 给定一个 b 系中的向量 $\boldsymbol{v}^b$, 通过变换 $\boldsymbol{q}_b^R \boldsymbol{v}^b {\boldsymbol{q}_b^R}^{-1}$ 即可变换到 R 系中的向量 $\boldsymbol{v}^R$. 用 $\boldsymbol{q}_{b_1}^R$ 表示 t 时刻的四元数,$\boldsymbol{q}_{b_2}^R$ 表示 $t+\Delta t$ 时刻的四元数, 那么对于 $\boldsymbol{v}^{b_2}$, 有

$$\boldsymbol{q}_{b_2}^R \boldsymbol{v}^{b_2} {\boldsymbol{q}_{b_2}^R}^{-1} = \boldsymbol{q}_{b_1}^R (\boldsymbol{q}_{b_2}^{b_1} \boldsymbol{v}^{b_2} {\boldsymbol{q}_{b_2}^{b_1}}^{-1}) {\boldsymbol{q}_{b_1}^R}^{-1} = (\boldsymbol{q}_{b_1}^R \boldsymbol{q}_{b_2}^{b_1}) \boldsymbol{v}^{b_2} (\boldsymbol{q}_{b_1}^R \boldsymbol{q}_{b_2}^{b_1})^{-1},$$

所以

$$\boldsymbol{q}_{b_2}^R = \boldsymbol{q}_{b_1}^R \boldsymbol{q}_{b_2}^{b_1}.$$

记 $\boldsymbol{q}_b^R$ 在 b_1 转到 b_2 的过程中的变化为

$$\Delta \boldsymbol{q}_b^R = \boldsymbol{q}_{b_2}^R - \boldsymbol{q}_{b_1}^R,$$

所以

$$\Delta \boldsymbol{q}_b^R = \boldsymbol{q}_{b_1}^R \boldsymbol{q}_{b_2}^{b_1} - \boldsymbol{q}_{b_1}^R = \boldsymbol{q}_{b_1}^R (\boldsymbol{q}_{b_2}^{b_1} - 1). \tag{1.3}$$

当 $\Delta t \to 0$ 的时候, 记 b_1 绕向量 $\Delta\boldsymbol{\theta}$ 转动 $|\Delta\boldsymbol{\theta}|$ 后与 b_2 对齐, 即

$$\boldsymbol{q}_{b_2}^{b_1} = \cos\frac{|\Delta\boldsymbol{\theta}|}{2} + \frac{\Delta\boldsymbol{\theta}}{|\Delta\boldsymbol{\theta}|}\sin\frac{|\Delta\boldsymbol{\theta}|}{2},$$

那么

$$\boldsymbol{q}_{b_2}^{b_1} = 1 + \frac{\Delta\boldsymbol{\theta}}{2} + o(1)\Delta\boldsymbol{\theta} + o(1), \quad \Delta t \to 0$$

代入(1.3)式, 所以

$$\lim_{\Delta t\to 0} \Delta \boldsymbol{q}_b^R = \lim_{\Delta t\to 0} \boldsymbol{q}_{b_1}^R (\boldsymbol{q}_{b_2}^{b_1} - 1) = \frac{1}{2}\boldsymbol{q}_b^R \Delta\boldsymbol{\theta}.$$

那么我们可以得出

$$\dot{\boldsymbol{q}}_b^R(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{q}_b^R}{\Delta t} = \frac{1}{2}\boldsymbol{q}_b^R \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{\theta}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\boldsymbol{q}_b^R \Delta\dot{\boldsymbol{\theta}}.$$