Contents

1

黎曼度量

2

联络

2.1 向量场作微分的问题

令 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是区间，$\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ 是光滑曲线，在标准坐标中可以表示为 $\gamma(t) = \big(\gamma^1(t), \ldots, \gamma^n(t)\big)$. 这样的曲线有良定义的**速度** $\gamma'(t)$ 和**加速度** $\gamma''(t)$，计算为

$$\gamma'(t) = \dot{\gamma}^1(t)\frac{\partial}{\partial x^1}\bigg|_{\gamma(t)} + \cdots + \dot{\gamma}^n(t)\frac{\partial}{\partial x^n}\bigg|_{\gamma(t)}, \tag{2.1}$$

$$\gamma''(t) = \ddot{\gamma}^1(t)\frac{\partial}{\partial x^1}\bigg|_{\gamma(t)} + \cdots + \ddot{\gamma}^n(t)\frac{\partial}{\partial x^n}\bigg|_{\gamma(t)}. \tag{2.2}$$

注意到 γ 是直线当且仅当 $\gamma''(t) \equiv 0$.

我们也可以定义 $\mathbb{R}^n$ 上的向量场的方向导数，只需要计算标准坐标中分量函数的方向导数即可：给定向量场 $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ 和向量 $v \in T_p\mathbb{R}^n$，定义 Y **在 v 方向上的 Euclid 方向导数**为

$$\bar{\nabla}_v Y = v(Y^1)\frac{\partial}{\partial x^1}\bigg|_p + \cdots + v(Y^n)\frac{\partial}{\partial x^n}\bigg|_p,$$

其中 $v(Y^i)$ 为

$$v(Y^i) = v^1\frac{\partial Y^i}{\partial x^1}(p) + \cdots + v^n\frac{\partial Y^i}{\partial x^n}(p).$$

如果 X 是另一个向量场，我们可以通过在每个点处计算 $\bar{\nabla}_{X_p} Y$ 得到一个新的向量场 $\bar{\nabla}_X Y$：

$$\bar{\nabla}_X Y = X(Y^1)\frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + X(Y^n)\frac{\partial}{\partial x^n}. \tag{2.3}$$

更一般地，我们可以对 $\mathbb{R}^n$ 的子流形上的曲线和向量场做同样的推广. 假设 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ 是嵌入子流形，考虑光滑曲线 $\gamma : I \to M$. 我们想将 M 中的测地线想象为一条“尽可能直”的曲线. 当然，如果 M 本身是弯曲的，那么 $\gamma'(t)$（视为 $\mathbb{R}^n$ 中的向量）必须要有所不同的定义，否则曲线将会离开 M. 一种方式是计算上面的 Euclid 加速度 $\gamma''(t)$，然后使用切向投影 $\pi^\top : T_{\gamma(t)}\mathbb{R}^n \to T_{\gamma(t)}M$. 这会导出切向于 M 的向量 $\gamma''(t)^\top = \pi^\top(\gamma''(t))$，我们称为 γ **的切向加速度**. 此时可以合理地认为，当 M 中曲线的切向加速度为零的时候，它是尽可能直的.

类似地，假设 Y 是 M 上的一个光滑向量场，我们想知道 Y 沿着 $v \in T_pM$ 方向在 M 中变化了多少. 一种合理的方式是将 Y 延拓为 $\mathbb{R}^n$ 的某个开子集上的光滑向量

场 $\widetilde{Y}$, 然后计算 $\widetilde{Y}$ 在 v 方向的 Euclid 方向导数, 然后正交投影到 T_pM 上. 即定义 Y **在 v 方向上的切向方向导数**为

$$\nabla_v^{\top} Y = \pi^{\top}\big(\bar{\nabla}_v \widetilde{Y}\big). \tag{2.4}$$

这个切向方向导数可以证明是良定义的并且保持刚体运动. 但是, 此时没有理由相信切向方向导数是 M 是内在不变量(即仅仅依赖于 M 上的诱导度量).

在抽象的黎曼流形上, 由于没有“环境 Euclid 空间”的存在, 因此该技巧不可用. 因此我们必须找到某种方法理解抽象黎曼流形中光滑曲线的加速度. 令 $\gamma : I \to M$ 是光滑曲线, 我们知道在 $t \in I$ 时刻 γ 的速度被定义为切向量 $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$, 其在坐标中的表示为 (2.1) 式.

但是, 与速度不同, 加速度并没有这样一个坐标无关的解释. 例如, 考虑参数化的圆周 $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. 作为 $\mathbb{R}^2$ 中的曲线, 其有加速度

$$\gamma''(t) = -\cos t \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{\gamma(t)} - \sin t \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{\gamma(t)}.$$

但是在极坐标中, 同样的曲线被描述为 $(r(t), \theta(t)) = (1, t)$, 在这个坐标下, 加速度变为

$$\gamma''(t) = r''(t)\left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_{\gamma(t)} + \theta''(t)\left.\frac{\partial}{\partial \theta}\right|_{\gamma(t)} = 0.$$

总的来说, 问题是这样的: 为了通过对 $\gamma'(t)$ 微分来定义 $\gamma''(t)$, 我们必须对向量 $\gamma'(t+h)$ 和 $\gamma'(t)$ 的差商取极限, 但是 $\gamma'(t+h)$ 和 $\gamma'(t)$ 生活在不同的切空间中, 所以它们的减法是没有意义的. 而在 $\mathbb{R}^n$ 中光滑曲线的加速度能够计算是因为它的每个切空间都可以自然地视为 $\mathbb{R}^n$ 本身. 在一般的流形上, 是不存在这样的自然的等同的.

速度向量 $\gamma'(t)$ 是沿着曲线的速度场的一个例子. 为了解释在流形中曲线的加速度, 我们需要的是某种独立于坐标的方式去将向量场沿曲线做微分. 为此, 我们需要一种方法来比较向量场在不同点的值, 或者直观的说, 即“联接”相邻的切空间. 这引出了联络的概念: 这是流形上的一个额外的数据, 一种计算向量场的方向导数的规则.

2.2 联络

事实证明首先定义联络作为区分向量丛截面的方式是最简单的. 这个定义旨在捕获 Euclid 方向导数算符和切向方向导数算符 ($\bar{\nabla}$ 和 $\bar{\nabla}^{\top}$) 的基本性质. 在定义一般情况的联络之后, 我们将把定义应用到向量丛沿曲线的情况.

令 $\pi : E \to M$ 是光滑流形 M 上的光滑向量丛, $\Gamma(E)$ 是 E 的光滑截面空间. **E 中的联络**指的是一个映射

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E),$$

通常记为 $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$, 其满足下面的属性:

1. $\nabla_X Y$ 在 X 上是 $C^\infty(M)$-线性的: 对于 $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$ 和 $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$, 有

$$\nabla_{f_1 X_1 + f_2 X_2} Y = f_1 \nabla_{X_1} Y + f_2 \nabla_{X_2} Y.$$

2. $\nabla_X Y$ 在 Y 上是 $\mathbb{R}$-线性的: 对于 $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ 和 $Y_1, Y_2 \in \Gamma(E)$, 有

$$\nabla_X (a_1 Y_1 + a_2 Y_2) = a_1 \nabla_X Y_1 + a_2 \nabla_X Y_2.$$

3. ∇ 满足乘积法则: 对于 $f \in C^\infty(M)$, 有

$$\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + (Xf) Y.$$

$\nabla_X Y$ 被称为 Y **在** X **方向的协变导数**.

针对不同的情况有很多种类型的联络. 我们这里定义的联络被称为 **Koszul 联络**. 由于我们在本书中不需要考虑其他类型的联络, 因此我们将 Koszul 联络简称为联络.

尽管联络是在全局截面上定义的, 但是实际上这是一个**局部算符**.

引理 2.1 (局部性). 假设 ∇ 是光滑向量丛 $\pi : E \to M$ 中的联络. 对于任意 $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \Gamma(E)$ 和 $p \in M$, 协变导数 $\nabla_X Y|_p$ 只与 X, Y 在 p 处的一个任意小的邻域上有关. 准确的说, 如果在 p 的某个邻域上有 $X = \widetilde{X}$ 和 $Y = \widetilde{Y}$, 那么 $\nabla_X Y|_p = \nabla_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}|_p$.

Proof. 首先考虑 Y. 通过将 Y 替换为 $Y - \widetilde{Y}$, 我们只需要说明如果 Y 在 p 的某个邻域上为零, 那么 $\nabla_X Y|_p = 0$. 假设 Y 在 p 的某个邻域 U 上为零, 选取支在 U 中的满足 $\varphi(p) = 1$ 的鼓包函数 $\varphi \in C^\infty(M)$. 于是在 M 中有 $\varphi Y \equiv 0$. 那么对于 $X \in \mathfrak{X}(M)$, 我们有 $\nabla_X(\varphi Y) = \nabla_X(0 \cdot \varphi Y) = 0 \nabla_X(\varphi Y) = 0$, 所以

$$0 = \nabla_X(\varphi Y) = \varphi \nabla_X Y + (X\varphi) Y,$$

注意到在 φ 的支集上有 $Y \equiv 0$, 所以 $(X\varphi)Y \equiv 0$, 故 $\varphi \nabla_X Y = 0$, 所以 $\nabla_X Y|_p = 0$.

然后考虑 X, 同样的, 假设 X 在 p 的某个邻域 U 上为零, 选取支在 U 中的满足 $\varphi(p) = 1$ 的鼓包函数 $\varphi \in C^\infty(M)$. 于是在 M 中有 $\varphi X \equiv 0$. 那么任取 $Y \in \Gamma(E)$, 有 $\nabla_{\varphi X} Y = \nabla_{0 \cdot \varphi X} Y = 0 \nabla_{\varphi X} Y = 0$, 所以

$$0 = \nabla_{\varphi X} Y = \varphi \nabla_X Y,$$

于是 $\nabla_X Y|_p = 0$.

利用上面两点, 如果在 p 的某个邻域上有 $X = \widetilde{X}$ 和 $Y = \widetilde{Y}$, 那么就有

$$\nabla_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}|_p = \nabla_X \widetilde{Y}|_p = \nabla_X Y|_p. \qquad \square$$

命题 2.2 (联络的限制). 假设 ∇ 是光滑向量丛 $E \to M$ 中的联络. 对于每个开子集 $U \subseteq M$, 存在唯一的在限制丛 $E|_U$ 上的联络 ∇^U 满足: 对于每个 $X \in \mathfrak{X}(M)$ 和 $Y \in \Gamma(E)$, 有

$$\nabla^U_{X|_U}(Y|_U) = (\nabla_X Y)|_U. \tag{2.5}$$

Proof. 首先我们证明唯一性. 假设 ∇^U 是这样一个联络, $X \in \mathfrak{X}(U)$ 和 $Y \in \Gamma(E|_U)$ 是任意的. 给定 $p \in U$, 我们可以使用鼓包函数去构造一个光滑向量场 $\widetilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$ 和光滑截面 $\widetilde{Y} \in \Gamma(E)$ 使得 $\widetilde{X}|_U$ 和 X 在 p 的某个邻域上重合, $\widetilde{Y}|_U$ 和 Y 在 p 的某个邻域上重合, 那么 引理 2.1 表明

$$\nabla^U_X Y\big|_p = \nabla^U_{\widetilde{X}|_U}(\widetilde{Y}|_U)\big|_p = (\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})|_p.$$

右边完全由 ∇ 确定, 所以这表明 ∇^U 如果存在则唯一.

为了证明存在性, 给定 $X \in \mathfrak{X}(U)$ 和 $Y \in \Gamma(E|_U)$, 对于每个 $p \in U$, 我们与上面一样的方式构造 $\widetilde{X}$ 和 $\widetilde{Y}$, 然后定义 $\nabla^U_X Y|_p = (\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})|_p$, 根据 引理 2.1, 这与 $\widetilde{X}$ 和 $\widetilde{Y}$ 的选取无关, 不难验证这满足联络的定义. □

在上述命题的情况下, 我们通常将 ∇ 的限制仍记为 ∇, 这个命题保证这样简写没有歧义.

引理 2.1 告诉我们我们可以在仅仅知道 X, Y 在 p 的某个邻域的值的情况下计算 $\nabla_X Y$. 实际上, 下面的命题表明, 对于 X 而言, 我们甚至只需要知道 X 在 p 处一个点的值即可.

命题 2.3. 在 引理 2.1 的假设下, $\nabla_X Y|_p$ 仅仅依赖于 Y 在 p 的某个邻域上的值以及 X 在 p 处的值.

Proof. 关于 Y 的断言在 引理 2.1 已经说明. 对于 X, 根据线性性, 只需要说明在 $X_p = 0$ 的情况下有 $\nabla_X Y|_p = 0$ 即可. 选取 p 的一个坐标邻域 U, 那么 X 可以局部表示为 $X = X^i\partial_i$, 满足 $X^i(p) = 0$. 对于每个 $Y \in \Gamma(E|_U)$, 我们有

$$\nabla_X Y|_p = X^i(p)\nabla_{\partial_i} Y|_p = 0.$$ □

多亏了 命题 2.2 和 命题 2.3, 我们可以定义记号 $\nabla_v Y$, 其中 v 是 T_pM 的某个元素, Y 是 E 的定义在 p 的某个邻域上的光滑局部截面. 如果我们要计算它, 只需要令 X 是 p 的邻域上的向量场并且 $X|_p = v$, 然后令 $\nabla_v Y = \nabla_X Y|_p$ 即可. 命题 2.3 表明这个结果不依赖于延拓的选取. 此后, 我们将以这种方式解释丛的局部截面的协变导数, 而不再进一步注释.

2.2.1 切丛中的联络

切丛中的联络通常被称为 **M 上的联络** (有时也被称为**仿射联络**或者**线性联络**).

设 M 是光滑流形, 根据定义, TM 上的联络是一个映射

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

且满足联络的三个条件. 为了计算, 我们需要检查联络如何作用在局部标架上. 令 (E_i) 是 TM 的在开子集 $U \subseteq M$ 上的光滑局部标架. 对于任意指标 i 和 j, 我们可以将向量场 $\nabla_{E_i} E_j$ 在同一组标架下表示为

$$\nabla_{E_i} E_j = \Gamma^k_{ij} E_k. \tag{2.6}$$

这定义了 n^3 个光滑函数 $\Gamma_{ij}^k : U \to \mathbb{R}$, 称为 ∇ 相对于这组标架的**联络系数**. 下面的命题表明联络由联络系数完全确定.

命题 2.4. 令 M 是光滑流形, ∇ 是 TM 中的联络. 假设 (E_i) 是开子集 $U \subseteq M$ 上的光滑局部标架, $\{\Gamma_{ij}^k\}$ 是联络系数. 对于光滑向量场 $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, 设 $X = X^i E_i$, $Y = Y^j E_j$, 那么

$$\nabla_X Y = \left(X(Y^k) + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k\right) E_k. \tag{2.7}$$

Proof. 只需要利用联络的定义进行计算:

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_X\left(Y^j E_j\right) \\ &= X\left(Y^j\right) E_j + Y^j \nabla_{X^i E_i} E_j \\ &= X\left(Y^j\right) E_j + X^i Y^j \nabla_{E_i} E_j \\ &= X\left(Y^j\right) E_j + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k E_k. \end{aligned}$$

□

一旦联络系数在某个局部标架中确定, 下面的命题表明在同一开集上任意其他的局部标架中的联络系数也可以确定.

命题 2.5 (联络系数的变换法则). 令 M 是光滑流形, ∇ 是 TM 中的联络. 假设在开集 $U \subseteq M$ 上有两个光滑局部标架 (E_i) 和 $\left(\widetilde{E}_j\right)$, 其中 $\widetilde{E}_i = A_i^j E_j$. 令 Γ_{ij}^k 和 $\widetilde{\Gamma}_{ij}^k$ 分别为 ∇ 在这两组标架中的联络系数, 那么

$$\widetilde{\Gamma}_{ij}^k = \left(A^{-1}\right)_p^k A_i^q A_j^r \Gamma_{qr}^p + \left(A^{-1}\right)_p^k A_i^q E_q\left(A_j^p\right). \tag{2.8}$$