球谐函数笔记

Eliauk

2025 年 11 月 10 日

1 圆上的调和函数

Joseph Fourier (1768–1830) 在研究热传导问题时引入了 Fourier 级数的概念. 使用 Fourier 级数, 每个平方可积的周期函数 f 都可以唯一地表示为级数

$$f(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta \right),$$

其中 Fourier 系数 a_k, b_k 由下式给出:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,\mathrm{d}\theta, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos k\theta\,\mathrm{d}\theta, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin k\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

这个惊人的发现在物理学、信号处理、工程学等领域有着广泛的理论和实际应用, 但是 Fourier 级数的数学内涵远不止于此. 我们引入平方可积函数的内积

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) g(\theta)\,\mathrm{d}\theta,$$

也记为

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{S}^1} f(\theta) g(\theta)\,\mathrm{d}\theta,$$

其中 $\mathbb{S}^1$ 是单位圆. 实际上上述记法就是在 $\mathbb{S}^1$ 流形上的积分. 通过这个内积, 空间 $L^2(\mathbb{S}^1)$ 是一个完备的赋范向量空间, 也即 Hilbert 空间. 进一步的, 我们定义 $L^2(\mathbb{S}^1)$ 的子空间 $\mathcal{H}_k(\mathbb{S}^1)$ 为: $\mathcal{H}_0(\mathbb{S}^1) = \mathbb{R}$ 是所有常值函数的空间, $\mathcal{H}_k(\mathbb{S}^1)$ 是由函数 $\cos k\theta$ 和 $\sin k\theta$ 张成的二维空间. 那么, Fourier 级数告诉我们有正交直和分解

$$L^2(\mathbb{S}^1) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k(\mathbb{S}^1).$$

对于空间 $\mathcal{H}_k(\mathbb{S}^1)$, 我们