
Contents

Part I 测度论

1	可测空间	3
1.1	可测集	3
1.2	正测度	4
1.3	可测函数	7
1.4	单调类	8
2	可测函数的积分	11
2.1	非负函数的积分	11
2.2	可积函数	18
2.3	含参积分	19
3	测度的构造	23
3.1	外测度	23
3.2	Lebesgue 测度	24
4	L^p 空间	25
4.1	定义与 Hölder 不等式	25
4.2	Banach 空间 $L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$	27
5	积测度	29
5.1	积 σ -域	29
5.2	积测度	30
5.3	Fubini 定理	31

Part II 概率论

6	概率论基础	35
----------	--------------	-----------

6.1	一般定义	35
6.1.1	概率空间	35
6.1.2	随机变量	36
6.1.3	数学期望	37
6.1.4	经典分布	39
6.1.5	实值随机变量的分布函数	41
6.2	随机变量的矩	42
6.2.1	矩和方差	42
7	独立性	45
7.1	独立事件	45
7.2	σ -域和随机变量的独立性	45
7.3	Borel-Cantelli 引理	48
7.4	独立随机变量的和	48
7.5	Poisson 过程	49

Part I

测度论

可测空间

1.1 可测集

定义 1.1. 集合 E 上的 σ -域 \mathcal{A} 指的是 E 的一个子集族, 其满足下面的性质:

1. $E \in \mathcal{A}$;
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$;
3. 如果一列子集 $A_n \in \mathcal{A}$, 那么 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

\mathcal{A} 的元素被称为可测集, (E, \mathcal{A}) 被称为可测空间. 根据定义, 我们很容易得出下面的结果:

- $\emptyset = E^c \in \mathcal{A}$.
- 如果一列子集 $A_n \in \mathcal{A}$, 那么

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^c \right)^c \in \mathcal{A}.$$

- \mathcal{A} 对有限并和有限交也是封闭的, 只需要从某一项 A_n 开始全部取空集即可.

例 1.2. 根据可测集的定义, 很容易构造出一些最简单的例子:

1. $\mathcal{A} = \mathcal{P}(E)$, 当 E 是有限集或者可数集的时候我们通常会使用这样的 σ -域, 其他情况则很少使用.
2. $\mathcal{A} = \{\emptyset, E\}$, 平凡 σ -域.
3. E 的所有至多可数的子集以及所有补集至多可数的子集构成 E 上的一个 σ -域.

为了产生更多的例子, 我们注意到 E 上任意 σ -域的交集仍然是 σ -域, 这导出了下面的定义.

定义 1.3. 令 \mathcal{C} 是 $\mathcal{P}(E)$ 的子集, E 上包含 \mathcal{C} 的最小的 σ -域被记为 $\sigma(\mathcal{C})$, 不难看出其是所有包含 \mathcal{C} 的 σ -域的交集. 我们称 $\sigma(\mathcal{C})$ 是由 \mathcal{C} 生成的 σ -域.

定义 1.4. 设 (E, \mathcal{O}) 是拓扑空间, 所有开集 \mathcal{O} 生成的 σ -域 $\sigma(\mathcal{O})$ 被称为 E 上的 Borel σ -域, 记为 $\mathcal{B}(E)$.

E 上的 Borel σ -域是包含所有开集的最小的 σ -域. $\mathcal{B}(E)$ 的元素被称为 E 的 Borel 子集. 显然, E 中的闭集也都是 Borel 子集.

例 1.5 (\mathbb{R} 上的 Borel σ -域). 记 \mathcal{C}_1 为 \mathbb{R} 中开区间的集合:

$$\mathcal{C}_1 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\},$$

显然有 $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$, 于是 $\sigma(\mathcal{C}_1) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$. 下面我们说明 $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \sigma(\mathcal{C}_1)$. 我们不加证明地使用一个结论 (Lindelöf 定理): \mathbb{R} 的任意开子集 U 都是开区间的可数并. 那么根据 σ -域的定义, 任意开区间都在 $\sigma(\mathcal{C}_1)$ 中, 故 $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \sigma(\mathcal{C}_1)$. 这表明 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 可以由所有开区间生成.

此外, 如果注意到

$$(a, b) = (-\infty, b) \cap (-\infty, a)^c,$$

还可以证明 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 由 \mathcal{C}_2 生成, 其中

$$\mathcal{C}_2 = \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

最后, 不难证明这里的开区间都可以换成闭区间.

在后文中, 每当我们考虑拓扑空间 (例如 \mathbb{R} 或者 \mathbb{R}^d) 时, 除非有特别说明, 否则我们总是假设它们配备 Borel σ -域.

下一个非常重要的 σ -域是乘积 σ -域.

定义 1.6. 令 (E_1, \mathcal{A}_1) 和 (E_2, \mathcal{A}_2) 是可测空间, 定义 $E_1 \times E_2$ 上的 σ -域 $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ 为

$$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 = \sigma(\{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}).$$

引理 1.7. 设 E 和 F 是可分 (有可数的稠密子集) 的拓扑空间, $E \times F$ 配备积拓扑, 那么 $\mathcal{B}(E \times F) = \mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(F)$.

1.2 正测度

令 (E, \mathcal{A}) 是可测空间.

定义 1.8. (E, \mathcal{A}) 上的正测度指的是一个映射 $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$, 其满足下面的性质:

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. (σ -可加性) 对于任意可数个不相交的可测集序列 $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, 有

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

此时, 三元组 (E, \mathcal{A}, μ) 被称为**测度空间**. 值 $\mu(E)$ 被称为测度 μ 的总质量.

需要注意的是, 我们允许 μ 的值为 $+\infty$, 此时级数 $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$ 作为正向级数在 $[0, \infty]$ 中总是有意义的. 根据 σ -可加性, 如果我们令 $n > n_0$ 开始 $A_n = \emptyset$, 便可以得到有限可加性.

命题 1.9 (测度的性质). 根据定义, 测度 μ 满足下面的性质:

1. 如果 $A \subseteq B$, 那么 $\mu(A) \leq \mu(B)$. 此外, 如果还满足 $\mu(A) < \infty$, 那么

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$$

2. 如果 $A, B \in \mathcal{A}$, 那么

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B).$$

3. 如果 $A_n \in \mathcal{A}$ 且 $A_n \subseteq A_{n+1}$, 那么

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

4. 如果 $B_n \in \mathcal{A}$ 且 $B_{n+1} \subseteq B_n$, $\mu(B_1) < \infty$, 那么

$$\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n).$$

5. 如果 $A_n \in \mathcal{A}$, 那么

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Proof. (1) 若 $A \subseteq B$, 那么 $B = A \cup (B \setminus A)$ 是无交并, 所以

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A).$$

(2) 若 $\mu(A), \mu(B)$ 中有至少一个为无穷, 那么根据 (1), $\mu(A \cup B)$ 为无穷, 所以结论成立. 下面假设 $\mu(A), \mu(B)$ 均有限, 记 $C = A \cap B$, 那么 $A \cup B = (A \setminus C) \cup C \cup (B \setminus C)$ 是无交并, 所以

$$\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus C) + \mu(C) + \mu(B \setminus C) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(C),$$

结论 (2) 成立.

(3) 令 $C_1 = A_1$, 对于 $n \geq 2$ 的时候, 令

$$C_n = A_n \setminus A_{n-1},$$

那么 $A_n = \bigcup_{k \leq n} C_k$ 是无交并, 所以

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(C_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mu(C_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

(4) 令 $A_n = B_1 \setminus B_n$, 那么 $A_n \subseteq A_{n+1}$, 此时

$$\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \mu(B_1) - \mu\left(B_1 \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \mu(B_1) - \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right),$$

再根据 (3), 就有

$$\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \mu(B_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_1 \setminus A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n).$$

(5) 令 $C_1 = A_1$, 对于 $n \geq 2$ 的时候, 令

$$C_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k,$$

那么 C_n 之间互不相交, 所以

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(C_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n). \quad \square$$

例 1.10 (常见的测度).

1. 令 $E = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, 定义计数测度为

$$\mu(A) = \text{card}(A).$$

2. 如果 A 是 E 的子集, 定义 A 的示性函数 $\mathbf{1}_A : E \rightarrow \{0, 1\}$ 为

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

令 (E, \mathcal{A}) 是可测空间, 固定 $x \in E$. 对于每个 $A \in \mathcal{A}$, 令 $\delta_x(A) = \mathbf{1}_A(x)$, 这给出了 (E, \mathcal{A}) 上的一个测度, 被称为 **x 处的 Dirac 测度**. 更一般的, 如果 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是 E 中的点列, $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是 $[0, \infty]$ 中的点列, 我们可以考虑测度 $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \delta_{x_n}$ 为

$$\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \delta_{x_n}\right)(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \delta_{x_n}(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \mathbf{1}_A(x_n),$$

这个测度被称为 E 上的**点测度**.

3. 可以证明, 在 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上存在唯一的正测度 λ 使得: 对于每个闭区间 $[a, b]$, 有 $\lambda([a, b]) = b - a$. 这个测度 λ 被称为 **Lebesgue 测度**. Lebesgue 测度的唯一性可以由 **推论 1.23** 保证, 存在性由? 保证.

如果 μ 是 (E, \mathcal{A}) 上的正测度, $C \in \mathcal{A}$, 那么可以定义 μ 在 C 上的**限制** ν 为:

$$\nu(A) = \mu(A \cap C), \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

不难验证 ν 还是 (E, \mathcal{A}) 上的正测度.

定义 1.11.

- 如果 $\mu(E) < \infty$, 那么我们说测度 μ 是**有限的**.
- 如果 $\mu(E) = 1$, 那么我们说测度 μ 是**概率测度**, (E, \mathcal{A}, μ) 是**概率空间**.
- 如果存在一列可测集 $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 使得 $E = \bigcup_n E_n$ 以及每个 $\mu(E_n) < \infty$, 那么我们说测度 μ 是 **σ -有限的**.

- 如果 $x \in E$ 使得单点集 $\{x\} \in \mathcal{A}$ 并且 $\mu(\{x\}) > 0$, 那么我们说 x 是测度 μ 的一个**原子**.
- 如果测度 μ 没有原子, 那么我们说 μ 是**扩散测度**.

如果 $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是一列可测集, 类比数列的上下极限, 我们可以定义集合列的上下极限分别为:

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right), \quad \liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \right).$$

注意到对于任意 m , 都有

$$\bigcup_{n=1}^m \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \right) = \bigcap_{k=m}^{\infty} A_k, \quad \bigcap_{n=1}^m \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right) = \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k,$$

所以显然有 $\liminf A_n \subseteq \limsup A_n$.

引理 1.12. 令 μ 是 (E, \mathcal{A}) 上的测度, 那么

$$\mu(\liminf A_n) \leq \liminf \mu(A_n).$$

如果 μ 是有限测度, 或者更一般地, $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) < \infty$, 那么

$$\mu(\limsup A_n) \geq \limsup \mu(A_n).$$

Proof. 对于任意的 n , 有

$$\mu\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq \inf_{k \geq n} \mu(A_k),$$

所以

$$\mu(\liminf A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} \mu(A_k) = \liminf \mu(A_n).$$

第二个结论同理. □

1.3 可测函数

定义 1.13. 令 (E, \mathcal{A}) 和 (F, \mathcal{B}) 是两个可测空间, 如果映射 $f: E \rightarrow F$ 满足:

$$\forall B \in \mathcal{B}, f^{-1}(B) \in \mathcal{A},$$

那么我们说 f 是**可测映射**. 当 E, F 是两个配备了 Borel σ -域的拓扑空间时, 我们说 f 是**Borel 可测的**.

显然, 可测映射的复合是可测映射.

命题 1.14. 令 (E, \mathcal{A}) 和 (F, \mathcal{B}) 是两个可测空间, 映射 $f: E \rightarrow F$. f 可测当且仅当对于某个生成 \mathcal{B} 的子集族 \mathcal{C} (即 $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C})$), 有 $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ ($\forall B \in \mathcal{C}$).

Proof. 只需证明充分性. 记

$$\mathcal{G} = \{B \in \mathcal{B} \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\},$$

直接验证可知 \mathcal{G} 是一个 σ -域, 又因为 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{G}$, 所以 $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{B}$, 所以 $\mathcal{G} = \mathcal{B}$, 这就表明 f 是可测的. \square

例 1.15. 若 $(F, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, 要证明 f 是可测的, 只需说明集合 $f^{-1}((a, b))$ 是可测的, 或者 $f^{-1}((-\infty, a))$ 是可测的.

推论 1.16. 设 E, F 是两个配备 Borel σ -域的拓扑空间, 那么连续映射 $f : E \rightarrow F$ 都是可测的.

引理 1.17. 令 $(E, \mathcal{A}), (F_1, \mathcal{B}_1)$ 和 (F_2, \mathcal{B}_2) 是可测空间, 乘积 $F_1 \times F_2$ 配备乘积 σ -域 $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$, 令映射 $f_1 : E \rightarrow F_1$ 和 $f_2 : E \rightarrow F_2$, 定义 $f : E \rightarrow F_1 \times F_2$ 为 $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$, 那么 f 可测当且仅当 f_1, f_2 都可测.

推论 1.18. 令 (E, \mathcal{A}) 是可测空间, f, g 是从 E 到 \mathbb{R} 的可测函数, 那么函数

$$f + g, fg, \min(f, g), \max(f, g)$$

都是可测的.

记扩充实数 $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, 其拓扑为序拓扑. 与 \mathbb{R} 类似, $\bar{\mathbb{R}}$ 的 Borel σ -域由区间 $[-\infty, a)$ 生成.

命题 1.19. 令 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是 $E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ 的可测函数列, 那么

$$\sup f_n, \quad \inf f_n, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$$

都是可测函数. 特别地, 如果 (f_n) 逐点收敛, 那么极限 $\lim f_n$ 是可测函数.

定义 1.20. 令 (E, \mathcal{A}) 和 (F, \mathcal{B}) 是可测空间, $\varphi : E \rightarrow F$ 是可测映射, μ 是 (E, \mathcal{A}) 上的测度, 定义 (F, \mathcal{B}) 上的测度 ν 为

$$\nu(B) = \mu(\varphi^{-1}(B)), \quad \forall B \in \mathcal{B}.$$

ν 被称为 μ 在 φ 下的推前, 记为 $\varphi(\mu)$, 有时也记为 $\varphi_*\mu$.

1.4 单调类

本节我们陈述单调类定理, 这是测度论甚至概率论中的一个基本工具.

定义 1.21. $\mathcal{P}(E)$ 的一个子集 \mathcal{M} 如果满足:

1. $E \in \mathcal{M}$;
2. 对于任意 $A, B \in \mathcal{M}$ 且 $A \subseteq B$, 有 $B \setminus A \in \mathcal{M}$;
3. 如果一列子集 $A_n \subseteq \mathcal{M}$ 且 $A_n \subseteq A_{n+1}$, 那么 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$,

那么我们说 \mathcal{M} 是一个单调类.

显然, σ -域都是单调类. 反之, 一个单调类是 σ -域当且仅当其对有限交封闭. 这很容易证明, 若单调类 \mathcal{M} 对有限交封闭, 那么任取一列子集 $A_n \subseteq \mathcal{M}$, 对于任意的 n , 有

$$\bigcup_{k=1}^n A_k = E \setminus \bigcap_{k=1}^n A_k^c \in \mathcal{M},$$

所以

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right) \in \mathcal{M},$$

这就表明 \mathcal{M} 是一个 σ -域.

与 σ -域类似, 显然单调类的任意交仍然是单调类. 如果 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(E)$, 那么我们可以定义由 \mathcal{C} 生成的单调类 $\mathcal{M}(\mathcal{C})$, 即包含 \mathcal{C} 的最小的单调类, 其可以通过对所有包含 \mathcal{C} 的单调类取交集得到.

定理 1.22 (单调类定理). 令 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(E)$ 对有限交封闭, 那么 $\mathcal{M}(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$. 因此, 如果 \mathcal{M} 是包含 \mathcal{C} 的任意单调类, 那么 $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{M}$.

Proof. 显然有 $\mathcal{M}(\mathcal{C}) \subseteq \sigma(\mathcal{C})$. 要证明 $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{C})$, 只需要说明 $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ 是 σ -域. 根据上面的叙述, 这只需要说明 $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ 对有限交封闭.

对于 $A \in \mathcal{P}(E)$, 记

$$\mathcal{M}_A = \{B \in \mathcal{M}(\mathcal{C}) \mid A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{C})\}.$$

直接验证可知 \mathcal{M}_A 是一个单调类. 下面任取 $A \in \mathcal{C}$, 由于 \mathcal{C} 对有限交封闭, 所以 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}_A$, 这就表明 $\mathcal{M}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{M}_A$.

接下来任取 $D \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$, 上面的叙述告诉我们 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}_D$, 所以 $\mathcal{M}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{M}_D$. 这就表明 $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ 对有限交封闭, 所以 $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ 是 σ -域. \square

单调类定理最重要的应用是证明某些测度的唯一性.

推论 1.23. 令 μ, ν 是 (E, \mathcal{A}) 上的两个测度. 假设存在一个子集族 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ 满足 \mathcal{C} 对有限交封闭且 $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$, 并且对于任意 $A \in \mathcal{C}$ 都有 $\mu(A) = \nu(A)$.

1. 如果 $\mu(E) = \nu(E) < \infty$, 那么 $\mu = \nu$.
2. 如果存在一列 \mathcal{C} 中的递增序列 $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 使得 $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$, 并且 $\mu(E_n) = \nu(E_n) < \infty$, 那么 $\mu = \nu$.

Proof. (1) 令

$$\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{A} \mid \mu(A) = \nu(A)\},$$

那么 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{G}$ 且不难验证 \mathcal{G} 是单调类, 根据单调类定理, 有 $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{G}$, 即 $\mu = \nu$.

(2) 记 μ_n 为 μ 在 E_n 上的限制, ν_n 同理. 那么

$$\mu_n(E) = \mu(E \cap E_n) = \mu(E_n) = \nu(E_n) = \nu(E \cap E_n) = \nu_n(E),$$

根据 (1), 有 $\mu_n = \nu_n$. 于是任取 $A \in \mathcal{A}$, 有

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \mu(A \cap E) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap E_n)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \mu(A \cap E_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \mu_n(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \nu_n(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \nu(A \cap E_n) \\ &= \nu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap E_n)\right) = \nu(A \cap E) = \nu(A),\end{aligned}$$

这就表明 $\mu = \nu$. □

推论 1.23 表明了 Lebesgue 测度的唯一性. 即若 λ 是 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上的正测度, 且使得 $\lambda([a, b]) = b - a$, 那么这样的测度 λ 是唯一的. 这是因为我们可以取

$$\mathcal{C} = \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\},$$

此时 \mathcal{C} 对有限交封闭并且 $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{C})$. 取 $E_n = [-n, n] \in \mathcal{C}$, 那么 $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ 且 $\lambda(E_n) < \infty$, 应用 **推论 1.23** 的 (2) 即可表明唯一性.

可测函数的积分

2.1 非负函数的积分

在本章中, 我们考虑配备正测度 μ 的可测空间 (E, \mathcal{A}) .

简单函数 如果可测函数 $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ 的值域是有限集, 那么我们说 f 的**简单函数**. 假设 f 的所有可能的取值为 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, 不妨假设 $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$. 那么 f 可以表示为

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}(x),$$

其中 $A_i = f^{-1}(\{\alpha_i\}) \in \mathcal{A}$. 注意到 E 是 A_1, \dots, A_n 的无交并. 上述公式 $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$ 被称为 f 的标准表示.

定义 2.1. 令 f 是取值在 \mathbb{R}_+ 中的简单函数, 标准表示为 $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$. 定义 f 相对于 μ 的积分为

$$\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i).$$

在 $\alpha_i = 0$ 和 $\mu(A_i) = \infty$ 的情况下, 约定 $0 \times \infty = 0$.

注意上述定义中 $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i)$ 的取值为 $[0, \infty]$. 所以在上述定义中我们只考虑非负的简单函数, 这是为了避免出现 $\infty - \infty$ 之类的表达式.

值得注意的是, 如果简单函数 f 有表达

$$f = \sum_{j=1}^m \beta_j \mathbf{1}_{B_j},$$

其中 B_j 仍然构成 E 的一个划分, 但是 β_j 不再是两两不同的. 此时 f 的积分仍然为

$$\int f \, d\mu = \sum_{j=1}^m \beta_j \mu(B_j).$$

这是因为对于每个 A_i , 某些 B_j 构成了 A_i 的划分, 即

$$A_i = \bigcup_{\{j \mid \beta_j = \alpha_i\}} B_j,$$

那么

$$\alpha_i \mu(A_i) = \alpha_i \sum_{\{j \mid \beta_j = \alpha_i\}} \mu(B_j) = \sum_{\{j \mid \beta_j = \alpha_i\}} \beta_j \mu(B_j).$$

非负简单函数的积分满足下面的一些基本的性质.

命题 2.2. 令 f, g 是 E 上的非负简单函数.

1. 对于每个 $a, b \in \mathbb{R}_+$, 有

$$\int (af + bg) d\mu = a \int f d\mu + b \int g d\mu.$$

2. 如果 $f \leq g$, 那么

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

Proof. (1) 设 f, g 的标准表示分别为

$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}, \quad g = \sum_{j=1}^m \beta_j \mathbf{1}_{B_j}.$$

那么每个 A_i 都是某些 $A_i \cap B_j$ 的无交并, 同理, 每个 B_j 都是某些 $A_i \cap B_j$ 的无交并, 于是我们可以使用一个新的划分 $\{C_1, \dots, C_p\}$ 使得

$$f = \sum_{k=1}^p \gamma_k \mathbf{1}_{C_k}, \quad g = \sum_{k=1}^p \theta_k \mathbf{1}_{C_k},$$

此时 γ_k 不一定互不相同, θ_k 也不一定互不相同, 根据命题前面的叙述, 我们有

$$\begin{aligned} \int (af + bg) d\mu &= \sum_{k=1}^p (a\gamma_k + b\theta_k) \mu(C_k) \\ &= a \sum_{k=1}^p \gamma_k \mu(C_k) + b \sum_{k=1}^p \theta_k \mu(C_k) \\ &= a \int f d\mu + b \int g d\mu. \end{aligned}$$

(2) 由 (1), 有

$$\int g d\mu = \int (g - f) d\mu + \int f d\mu \geq \int f d\mu. \quad \square$$

我们用 \mathcal{E}_+ 来表示 E 上的非负简单函数的集合.

定义 2.3. 令 $f : E \rightarrow [0, \infty]$ 是可测函数, 定义 f 相对于 μ 的积分为

$$\int f d\mu = \sup_{h \in \mathcal{E}_+, h \leq f} \int h d\mu.$$

f 相对于 μ 的积分通常有很多写法, 下面的表达

$$\int f \, d\mu, \int f(x) \, d\mu(x), \int f(x) \mu(dx), \int \mu(dx) f(x)$$

表示的含义是完全相同的. 此外, 如果 A 是 E 的可测子集, 我们定义

$$\int_A f \, d\mu = \int f \mathbf{1}_A \, d\mu.$$

从现在开始, 我们用非负可测函数表示 $E \rightarrow [0, \infty]$ 的可测函数 (值可以为无穷). 需要注意的是, 我们前面定义的非负简单函数值必须有限.

命题 2.4. 令 f, g 是 E 上的非负可测函数.

1. 如果 $f \leq g$, 那么 $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$.
2. 如果 $\mu(\{x \in E \mid f(x) > 0\}) = 0$, 那么 $\int f \, d\mu = 0$.

Proof. (1) 显然

$$\{h \in \mathcal{E}_+ \mid h \leq f\} \subseteq \{h \in \mathcal{E}_+ \mid h \leq g\},$$

根据定义即得 $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$.

(2) 设 $h \in \mathcal{E}_+$ 且 $h \leq f$, 设 h 的标准表示为 $h = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$, 若 $\alpha_i > 0$, 那么

$$\mu(A_i) \leq \mu(\{x \in E \mid h(x) > 0\}) \leq \mu(\{x \in E \mid f(x) > 0\}) = 0,$$

所以

$$\int h \, d\mu = \sum_{\{i \mid \alpha_i = 0\}} \alpha_i \mu(A_i) + \sum_{\{i \mid \alpha_i > 0\}} \alpha_i \mu(A_i) = 0 + 0 = 0,$$

故 $\int f \, d\mu = 0$. □

下面的单调收敛定理是测度论中的一个极为重要的基本定理, 其表明对于一系列递增的非负可测函数, 极限和积分可以交换次序.

定理 2.5 (单调收敛定理). 令 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是 E 上的一系列递增的非负可测函数, 即 $f_n \leq f_{n+1}$, 记 $f = \lim \uparrow f_n$, 那么

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu.$$

Proof. 由于 $f_n \leq f$, 所以 $\int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu$, 所以 $\lim \uparrow \int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu$, 于是我们只需要证明反向的不等式.

假设非负可测函数 $h = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$ 满足 $h \leq f$, 任取 $a \in [0, 1)$, 定义一系列可测集

$$E_n = \{x \in E \mid ah(x) \leq f_n(x)\},$$

此时对于任意的 $x \in E$, 都有 $ah(x) < h(x) \leq f(x)$, 而 $f = \lim \uparrow f_n$, 所以总存在足够大的 n , 使得 $ah(x) \leq f_n(x)$, 这表明 $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$. 此外, $f_n \leq f_{n+1}$ 表明 $E_n \subseteq E_{n+1}$.

显然 $f_n \geq ah\mathbf{1}_{E_n}$, 所以

$$\int f_n d\mu \geq a \int_{E_n} h d\mu = a \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu(A_i \cap E_n),$$

由于 $A_i = A_i \cap E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_i \cap E_n)$, 所以

$$\mu(A_i) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_i \cap E_n)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \mu(A_i \cap E_n),$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \int f_n d\mu \geq a \sum_{i=1}^k \alpha_i \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \mu(A_i \cap E_n) = a \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu(A_i) = a \int h d\mu,$$

由于 a 可以任意接近 1, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \int f_n d\mu \geq \int h d\mu,$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \int f_n d\mu \geq \int f d\mu = \sup_{h \in \mathcal{E}_+, h \leq f} \int h d\mu. \quad \square$$

命题 2.6.

1. 设 f 是 E 上的非负可测函数, 那么存在一系列递增的非负简单函数 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 使得 $f = \lim \uparrow f_n$. 如果 f 有界, 那么 $f_n \rightarrow f$ 一致收敛.
2. 令 f, g 是两个 E 上的非负可测函数, $a, b \in \mathbb{R}_+$, 那么

$$\int (af + bg) d\mu = a \int f d\mu + b \int g d\mu.$$

3. 令 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是一列 E 上的非负可测函数, 那么

$$\int \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n \right) d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int f_n d\mu.$$

Proof. (1) 令 $d_n : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}_+$ 为

$$d_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathbf{1}_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})} + n \mathbf{1}_{[n, \infty]},$$

显然 d_n 是非负简单函数. 直观上来看, d_n 将区间 $[0, n]$ 等分为了 $n2^n$ 份, 即将 $[0, 1]$ 等分为了 2^n 份. 那么对于 $x \in [0, n)$, 总存在唯一的 k_n 使得 $(k_n - 1)/2^n \leq x < k_n/2^n$, 此时 $k_{n+1} = 2k_n$ 或者 $k_{n+1} = 2k_n - 1$, 所以

$$d_{n+1}(x) = \frac{k_{n+1} - 1}{2^{n+1}} \geq \frac{k_n - 1}{2^n} = d_n(x),$$

这表明 $d_n \leq d_{n+1}$. 此外, 不难看出 $\lim d_n(x) = x$.

令 $f_n = d_n \circ f$, 由于 f_n 只有有限多个取值, 所以 f_n 是非负简单函数. $d_n \leq d_{n+1}$ 表明 $f_n \leq f_{n+1}$. 且 $\lim f_n = \lim d_n \circ f = f$, 所以 f_n 就是一列递增的非负简单函数且 $f = \lim \uparrow f_n$. f 有界表明在 n 足够大的时候有 $0 \leq f - f_n \leq 2^{-n}$, 即 $f_n \rightarrow f$ 一致收敛.

(2) 由 (1), 设 $f = \lim \uparrow f_n$, $g = \lim \uparrow g_n$, 其中 $(f_n), (g_n)$ 均为一系列递增的简单函数, 那么

$$\int (af_n + bg_n) d\mu = a \int f_n d\mu + b \int g_n d\mu,$$

令 $n \rightarrow \infty$, 再根据单调收敛定理, 就有

$$\int (af + bg) d\mu = a \int f d\mu + b \int g d\mu.$$

(3) 根据 (2), 有

$$\int \left(\sum_{n=1}^m f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^m \int f_n d\mu,$$

令 $m \rightarrow \infty$, 再根据单调收敛定理, 就有

$$\int \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n \right) d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int f_n d\mu. \quad \square$$

注释 2.7. **命题 2.6** 和单调收敛定理 2.5 给出了证明关于非负可测函数积分的命题的一种基本范式, 即根据 **命题 2.6** 的 (1), 假设一系列非负简单函数逼近原函数, 先证明命题对非负简单函数成立, 这通常是非常容易的, 再使用单调收敛定理证明命题对所有的非负可测函数成立.

下面的推论在概率论中十分有用, 其对应于随机变量的概率密度函数. 其证明是上述注释中技巧的一个典型运用.

推论 2.8. 令 g 是非负可测函数, 对于 $A \in \mathcal{A}$, 令

$$\nu(A) = \int_A g d\mu = \int g \mathbf{1}_A d\mu,$$

那么 ν 是 E 上的正测度, 被称为密度 g 相对于 μ 的测度, 记为 $\nu = g \cdot \mu$. 此外, 对于非负可测函数 f , 有

$$\int f d\nu = \int fg d\mu.$$

Proof. 显然 $\nu(\emptyset) = 0$. 任取一系列不相交的 $A_n \in \mathcal{A}$, 那么

$$\nu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \int \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} g \mathbf{1}_{A_n}\right) d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int g \mathbf{1}_{A_n} d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n),$$

这就表明 μ 是 E 上的正测度.

对于任意示性函数 $\mathbf{1}_A$, 有

$$\int \mathbf{1}_A d\nu = \nu(A) = \int \mathbf{1}_A g d\mu,$$

进一步的, 令 $f = \lim \uparrow f_n$, 其中 f_n 是非负简单函数, 对于每个 f_n , 根据积分的线性性, 都有

$$\int f_n d\nu = \int f_n g d\mu,$$

令 $n \rightarrow \infty$, 根据单调收敛定理, 就有

$$\int f d\nu = \int f g d\mu. \quad \square$$

注释 2.9. 在实际中, 我们通常也会写作 $\nu(dx) = g(x)\mu(dx)$, 或者 $g = d\nu/d\mu$.

在测度论中, 命题通常在**几乎处处** (almost everywhere) 的意义下成立, 也就是说, 对于不满足该命题的所有 $x \in E$ 的集合, 这个集合的 μ -测度为 0, 我们使用简写 μ a.e. 来表示这个意思. 也就是说, 当我们写到 $f = g$, μ a.e. 的时候, 我们表示的意思实际上是

$$\mu(\{x \in E \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0.$$

命题 2.10. 令 f 是非负可测函数.

1. 对于每个 $a \in (0, \infty)$, 有

$$\mu(\{x \in E \mid f(x) \geq a\}) \leq \frac{1}{a} \int f d\mu.$$

2. 我们有

$$\int f d\mu < \infty \Rightarrow f < \infty, \mu \text{ a.e.}$$

3. 我们有

$$\int f d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0, \mu \text{ a.e.}$$

4. 如果 g 是非负可测函数,

$$f = g, \mu \text{ a.e.} \Rightarrow \int f d\mu = \int g d\mu.$$

Proof. (1) 令可测集 $A = \{x \in E \mid f(x) \geq a\}$, 那么 $f \geq a\mathbf{1}_A$, 所以

$$\int f d\mu \geq a \int \mathbf{1}_A d\mu = a\mu(A).$$

(2) 令可测集 $A_n = \{x \in E \mid f(x) \geq n\}$ 以及 $A_\infty = \{x \in E \mid f(x) = \infty\}$, 那么 $A_{n+1} \subseteq A_n$ 且 $A_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. 根据 (1), 有

$$\mu(A_1) \leq \int f d\mu < \infty,$$

所以

$$\mu(A_\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \downarrow \mu(A_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \downarrow \frac{1}{n} \int f \, d\mu = 0,$$

所以 $\mu(A_\infty) = 0$, 即 $f < \infty$, μ a.e..

(3) 充分性由 [命题 2.6](#) 的 (2) 保证. 下证必要性. 令可测集 $A_n = \{x \in E \mid f(x) \geq 1/n\}$ 以及 $A_\infty = \{x \in E \mid f(x) \neq 0\}$, 那么 $A_n \subseteq A_{n+1}$ 且 $A_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. 根据 (1), 有

$$\mu(A_\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \mu(A_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow n \int f \, d\mu = 0,$$

所以 $\mu(A_\infty) = 0$.

(4) 记 $f \wedge g = \min(f, g)$ 及 $f \vee g = \max(f, g)$, 那么 $f = g$, μ a.e. 表明 $f \vee g = f \wedge g$, μ a.e.. 根据 (3), 有

$$\int f \vee g \, d\mu = \int f \wedge g \, d\mu + \int (f \vee g - f \wedge g) \, d\mu = \int f \wedge g \, d\mu,$$

又因为 $\int f \wedge g \, d\mu \leq \int f \, d\mu \leq \int f \vee g \, d\mu$, 对于 g 类似, 所以

$$\int f \, d\mu = \int g \, d\mu. \quad \square$$

定理 2.11 (Fatou 引理). 令 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是一列非负可测函数, 那么

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu.$$

Proof. 只需证明

$$\int \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} f_k \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} \int f_k \, d\mu,$$

令 $g_n = \inf_{k \geq n} f_k$, 那么 $g_n \leq g_{n+1}$, 根据单调收敛定理, 有

$$\int \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \int g_n \, d\mu.$$

对于任意 n 和 $k \geq n$, 有 $\int g_n \, d\mu \leq \int f_k \, d\mu$, 所以

$$\int \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \int g_n \, d\mu \leq \inf_{k \geq n} \int f_k \, d\mu,$$

令 $n \rightarrow \infty$, 即可得到

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu. \quad \square$$

命题 2.12. 令 (F, \mathcal{B}) 是可测空间, $\varphi: E \rightarrow F$ 是可测映射. 令 ν 是 μ 在 φ 下的推前. 那么, 对于任意 F 上的非负可测函数 h , 我们有

$$\int_E h(\varphi(x)) \mu(dx) = \int_F h(y) \nu(dy).$$

Proof. 若 $h = \mathbf{1}_B$ 是示性函数, 那么

$$\int_E h(\varphi(x))\mu(dx) = \mu(\varphi^{-1}(B)) = \nu(B) = \int_F h(y)\nu(dy).$$

若 $h = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{B_i}$ 是非负简单函数, 那么根据积分的线性性, 结论也成立. 若 h 是一般的非负可测函数, 设 $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是一列递增的非负简单函数且 $h = \lim \uparrow h_n$, 根据单调收敛定理, 即可证明结论. \square

2.2 可积函数

本节我们讨论可变号的可测函数. 如果 $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ 是可测函数, 记 f 正部分 $f^+ = \max(f, 0)$, 负部分 $f^- = \max(-f, 0)$, 需要注意 f^+ 和 f^- 此时都是非负可测函数并且 $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$.

定义 2.13. 令 $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ 是可测函数, 如果

$$\int |f| d\mu < \infty,$$

那么我们说 f 相对于 μ **可积**. 在这种情况下, 我们定义

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

如果 $A \in \mathcal{A}$, 记

$$\int_A f d\mu = \int f \mathbf{1}_A d\mu.$$

我们使用 $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ 来表示所有可积函数 $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ 构成的空间. $\mathcal{L}_+^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ 来表示所有非负可积函数构成的空间.

命题 2.14 (可积函数的性质).

1. 对于任意 $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$, 有 $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$.
2. $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ 是 \mathbb{R} -向量空间.
3. 如果 $f, g \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ 且 $f \leq g$, 那么 $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.
4. 如果 $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$, $g : E \rightarrow [0, \infty]$ 是非负可测函数使得 $f = g$, μ a.e., 那么 $g \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ 且 $\int f d\mu = \int g d\mu$.
5. 令 (F, \mathcal{B}) 是可测空间, $\varphi : E \rightarrow F$ 是可测映射. 令 ν 是 μ 在 φ 下的推前. 那么, 对于任意可测函数 $h : F \rightarrow \mathbb{R}$, h 是 ν -可积的当且仅当 $h \circ \varphi$ 是 μ -可积的, 并且我们有

$$\int_E h(\varphi(x))\mu(dx) = \int_F h(y)\nu(dy).$$

定理 2.15 (控制收敛定理). 令 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ 中的一列函数, 如果:

1. 存在可测函数 $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ 使得

$$f_n(x) \rightarrow f(x), \quad \mu \text{ a.e.}$$

2. 存在非负可测函数 g 使得 $\int g \, d\mu < \infty$, 并且对于每个 $n \in \mathbb{N}$, 都有

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad \mu \text{ a.e.}$$

那么 $f \in L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ 且我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| \, d\mu = 0.$$

Proof. 我们首先将两个条件中的几乎处处去掉, 证明结论成立. 由于 $|f_n| \leq g$, 所以 $|f| = \lim |f_n| \leq g$, 所以 $\int |f| \, d\mu \leq \int g \, d\mu < \infty$, 故 $f \in L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$. 由于 $|f - f_n| \leq 2g$ 以及 $\lim |f - f_n| = 0$, 根据 Fatou 引理, 有

$$\liminf \int (2g - |f - f_n|) \, d\mu \geq \int (2g - \limsup |f - f_n|) \, d\mu = \int 2g \, d\mu,$$

再根据积分的线性性, 有

$$\int 2g \, d\mu - \limsup \int |f - f_n| \, d\mu \geq \int 2g \, d\mu,$$

这表明

$$\limsup \int |f - f_n| \, d\mu = 0,$$

所以 $\lim \int |f - f_n| \, d\mu$ 存在且为 0. 最后, 我们有

$$\left| \int f \, d\mu - \int f_n \, d\mu \right| \leq \int |f - f_n| \, d\mu \rightarrow 0,$$

所以 $\int f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu$.

现在我们证明几乎处处情况. 记

$$A = \{x \in E \mid f_n(x) \rightarrow f(x), |f_n(x)| \leq g(x)\},$$

那么 A 可测且条件表明 $\mu(A^c) = 0$. 定义

$$\tilde{f}_n(x) = \mathbf{1}_A(x) f_n(x), \quad \tilde{f}(x) = \mathbf{1}_A(x) f(x),$$

于是在几乎处处的意义下有 $f_n = \tilde{f}_n$ 以及 $f = \tilde{f}$, 所以 $\int f_n \, d\mu = \int \tilde{f}_n \, d\mu$, $\int f \, d\mu = \int \tilde{f} \, d\mu$ 以及 $\int |f - f_n| \, d\mu = \int |\tilde{f} - \tilde{f}_n| \, d\mu$. 对 \tilde{f}_n 和 \tilde{f} 应用上面的结论即可. \square

2.3 含参积分

我们考虑带有一个参数的函数的积分. 设 (U, d) 是一个度量空间, 参数位于这个空间中.

定理 2.16 (含参积分的连续性). 令 $f : U \times E \rightarrow \mathbb{R}$ (or \mathbb{C}), $u_0 \in U$. 假设:

1. 对于每个 $u \in U$, 函数 $x \mapsto f(u, x)$ 可测;

2. $\mu(\mathrm{d}x)$ a.e., 函数 $u \mapsto f(u, x)$ 在 u_0 处连续;
3. 存在函数 $g \in \mathcal{L}_+^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ 使得任取 $u \in U$ 有

$$|f(u, x)| \leq g(x) \quad \mu(\mathrm{d}x) \text{ a.e.}$$

那么函数 $F(u) = \int f(u, x)\mu(\mathrm{d}x)$ 是良好定义的且在 u_0 处连续.

Proof. 条件 (1) 保证了 $x \mapsto f(u, x)$ 是可测的, 所以 $F(u)$ 是良好定义的. 设 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是任意趋于 u_0 的点列, 那么对于几乎处处的 x , $u \mapsto f(u, x)$ 连续表明 $f(u_n, x) \rightarrow f(u, x)$, 再根据条件 (3) 和控制收敛定理, 就有

$$F(u_0) = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n, x)\mu(\mathrm{d}x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f(u_n, x)\mu(\mathrm{d}x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(u_n),$$

这就表明 $F(u)$ 在 u_0 处连续. □

例 2.17.

1. **Fourier 变换.** 令 λ 表示 \mathbb{R} 上的 Lebesgue 测度. 如果 $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, 定义函数 $\hat{\varphi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 为:

$$\hat{\varphi}(u) = \int e^{iux} \varphi(x) \lambda(\mathrm{d}x),$$

根据上面的定理, $\hat{\varphi}$ 是连续函数. 函数 $\hat{\varphi}$ 被称为 φ 的 **Fourier 变换**. 在概率论中, 我们经常会考虑有限测度的 Fourier 变换. 如果 μ 是 \mathbb{R} 上的有限测度, 定义 μ 的 Fourier 变换为

$$\hat{\mu}(u) = \int e^{iux} \mu(\mathrm{d}x) \quad u \in \mathbb{R}.$$

此时 $|e^{iux}| \leq \mathbf{1}_{\mathbb{R}}$ 是可积函数, 所以 $\hat{\mu}$ 是连续函数.

2. **卷积.** 令 $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是有界连续函数, 那么定义函数 $h * \varphi$ 为

$$h * \varphi(u) = \int h(u - x) \varphi(x) \lambda(\mathrm{d}x),$$

这是一个连续函数.

下面我们叙述含参积分的可微性. 令 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是开区间.

定理 2.18. 考虑函数 $f : I \times E \rightarrow \mathbb{R}$, $u_0 \in I$, 假设

1. 对于每个 $u \in I$, 函数 $x \mapsto f(u, x)$ 是可积函数;
2. $\mu(\mathrm{d}x)$ a.e., 函数 $u \mapsto f(u, x)$ 在 u_0 处可导, 导数记为

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, x);$$

3. 存在函数 $g \in \mathcal{L}_+^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ 使得对于任意 $u \in I$ 有

$$|f(u, x) - f(u_0, x)| \leq g(x)|u - u_0|, \quad \mu(\mathrm{d}x) \text{ a.e.}$$

那么函数 $F(u) = \int f(u, x)\mu(\mathrm{d}x)$ 在 u_0 处可导, 并且

$$F'(u_0) = \int \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, x)\mu(\mathrm{d}x).$$

Proof.

□

Exercise 2.1. 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx.$$

令 $\alpha \in \mathbb{R}$, 证明极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{\alpha-1} dx$$

在 $[0, \infty]$ 上存在, 且极限值有限当且仅当 $\alpha > 0$.

Proof. 由于

$$\int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx = \int_0^1 n(1+x)^n e^{-2nx} dx,$$

对于任意 $x \in (0, 1)$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(1+x)^n e^{-2nx} = \lim_{n \rightarrow \infty} n((1+x)e^{-2x})^n = 0,$$

□

测度的构造

3.1 外测度

定义 3.1. 令 E 是集合, 映射 $\mu^* : \mathcal{P}(E) \rightarrow [0, \infty]$ 如果满足:

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$;
2. $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;
3. (σ -次可加性) 对于 $\mathcal{P}(E)$ 中的一列子集 $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$, 有

$$\mu^*\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu^*(A_k).$$

那么我们说 μ^* 是一个**外测度**.

外测度的要求不如测度严格, 首先 σ -可加性被替换为 σ -次可加性, 其次外测度是在幂集 $\mathcal{P}(E)$ 上定义的, 而测度只能在 σ -域上定义.

我们本节的目标是从外测度 μ^* 开始, 在某个 σ -域 $\mathcal{M}(\mu^*)$ 上构造一个测度. 从现在开始, 我们固定一个外测度 μ^* .

定义 3.2. 对于 E 的子集 B , 如果任取 $A \subseteq E$, 都有

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c),$$

那么我们说 B 是 μ^* -**可测的**. 用 $\mathcal{M}(\mu^*)$ 表示所有 μ^* -可测的子集构成的子集族.

注释 3.3. 根据 σ -次可加性, 总是有

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c),$$

所以要验证子集 B 是 μ^* -可测的, 只需要说明反向的不等式即可.

定理 3.4.

1. $\mathcal{M}(\mu^*)$ 是 σ -域, 并且其包含所有的满足 $\mu^*(B) = 0$ 的子集 $B \subseteq E$.
2. μ^* 在 $\mathcal{M}(\mu^*)$ 上的限制是一个测度.

3.2 Lebesgue 测度

对于任意子集 $A \subseteq \mathbb{R}$, 定义

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} (b_i - a_i) \mid A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (a_i, b_i) \right\}.$$

注意这个下确界的取值范围为 $[0, \infty]$: 如果 A 无界, 那么将会得到 ∞ .

定理 3.5.

1. λ^* 是 \mathbb{R} 上的一个外测度.
2. σ -域 $\mathcal{M}(\lambda^*)$ 包含 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
3. 对于任意实数 $a \leq b$, $\lambda^*([a, b]) = \lambda^*((a, b)) = b - a$.

Proof. (1) 显然 $\lambda^*(\emptyset) = 0$ 并且 $A \subseteq B$ 表明 $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$. 下面证明 σ -次可加性. 任取 \mathbb{R} 的一列子集 $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, 不妨假设每个 $\lambda^*(A_n) < \infty$. 任取 $\varepsilon > 0$, 对于每个 A_n , 都存在一列开区间 $(a_i^{(n)}, b_i^{(n)})$ 使得

$$\lambda^*(A_n) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} (b_i^{(n)} - a_i^{(n)}) < \lambda^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n},$$

注意到所有的开区间 $(a_i^{(n)}, b_i^{(n)})$ ($i, n \in \mathbb{N}$) 构成了 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ 的一个可数开覆盖, 所以

$$\lambda^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i \in \mathbb{N}} (b_i^{(n)} - a_i^{(n)}) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^*(A_n) + \varepsilon,$$

由于 ε 的任意性, 所以 λ^* 满足 σ -次可加性.

(2)

□

L^p 空间

4.1 定义与 Hölder 不等式

在本章中, 我们考虑测度空间 (E, \mathcal{A}, μ) . 对于实数 $p \geq 1$, 我们令 $\mathcal{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ 表示所有满足

$$\int |f|^p d\mu < \infty$$

的可测函数 $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ 构成的空间. 此外, 我们引入 $\mathcal{L}^\infty(E, \mathcal{A}, \mu)$ 表示所有几乎处处有界的可测函数 $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ 构成的空间, 即存在常数 $C \in \mathbb{R}_+$ 使得

$$|f| \leq C, \mu \text{ a.e.}$$

对于每个 $p \in [1, \infty]$, 我们可以定义 \mathcal{L}^p 上的一个等价关系:

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g, \mu \text{ a.e.}$$

于是我们可以考虑商空间

$$L^p(E, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu) / \sim.$$

也就是说, 我们只考虑几乎处处相等意义上的函数, 如果两个函数几乎处处相等, 那么我们认为这是同一个函数.

在没有歧义的情况下, 我们使用 $L^p(\mu)$ 或者 L^p 表示 $L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$. 注意到 L^1 就是所有可积函数构成的空间.

对于可测函数 $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ 和 $p \in [1, \infty)$, 我们定义

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

约定 $\infty^{1/p} = \infty$. 定义

$$\|f\|_\infty = \inf\{C \in [0, \infty] \mid |f| \leq C, \mu \text{ a.e.}\}.$$

如果 f, g 是两个几乎处处相等的可测函数, 那么有 $\|f\|_p = \|g\|_p$, 所以我们可以针对 $f \in L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ 良好的定义 $\|f\|_p$.

对于 $p, q \in [1, \infty]$, 我们说 p 和 q 是**共轭指数**, 如果

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

特别地, 1 和 ∞ 是共轭的.

定理 4.1 (Hölder 不等式). 令 p, q 是共轭指数, f, g 是两个 $E \rightarrow \mathbb{R}$ 的可测函数, 那么

$$\int |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

特别地, 如果 $f \in L^p$ 以及 $g \in L^q$, 那么 $fg \in L^1$.

Proof. 若 $\|f\|_p = 0$, 那么 $|f| = 0$ μ a.e., 这表明 $\int |fg| d\mu = 0$, 结论显然成立, 所以我们不妨假设 $\|f\|_p > 0$ 以及 $\|g\|_q > 0$. 进一步的, 我们还可以假设 $f \in L^p$ 以及 $g \in L^q$, 否则右边为 ∞ 显然成立.

先假设 $p = 1$ 和 $q = \infty$, 那么

$$\int |fg| d\mu \leq \|g\|_\infty \int |f| d\mu = \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

下面假设 $1 < p, q < \infty$.

设 $\alpha \in (0, 1)$, 那么对于 $x \in [0, \infty)$ 有不等式

$$x^\alpha - \alpha x \leq 1 - \alpha,$$

取 $x = u/v$ ($u \geq 0, v > 0$), 我们有

$$u^\alpha v^{1-\alpha} \leq \alpha u + (1-\alpha)v,$$

该不等式在 $v = 0$ 时也成立. 取 $\alpha = 1/p$, $1-\alpha = 1/q$, 以及

$$u = \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p}, \quad v = \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q},$$

那么

$$\frac{|fg|}{\|f\|_p^p \|g\|_q^q} \leq \frac{1}{p} \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q},$$

两边积分, 即得

$$\int |fg| d\mu \leq \|f\|_p^p \|g\|_q^q.$$

□

推论 4.2 (Cauchy-Schwarz 不等式). 取 $p = q = 2$, 即得

$$\int |fg| d\mu \leq \left(\int |f|^2 d\mu \right)^{1/2} \left(\int |g|^2 d\mu \right)^{1/2}.$$

推论 4.3. 假设 μ 是有限测度, p, q 是共轭指数且 $p > 1$, 那么对于任意可测函数 $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, 有

$$\|f\|_1 \leq \mu(E)^{1/q} \|f\|_p,$$

因此, 对于任意 $p \in (1, \infty]$, 有 $L^p \subseteq L^1$. 更一般地, 对于任意 $1 \leq r < r' < \infty$, 有

$$\|f\|_r \leq \mu(E)^{\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}} \|f\|_{r'},$$

因此, 对于任意 $1 \leq p < q \leq \infty$, 有 $L^q \subseteq L^p$, 特别地, 当 μ 是概率测度的时候, 还有 $\|f\|_p \leq \|f\|_q$.

Proof. 取 $g = \mathbf{1}_E$, 即得

$$\int |f| d\mu = \int |f \mathbf{1}_E| d\mu \leq \|f\|_p \|\mathbf{1}_E\|_q = \mu(E)^{1/q} \|f\|_p.$$

用 f^r 替代 f , 取 $p = r'/r$, $1/q = 1 - r/r'$, 那么

$$\|f\|_r \leq \mu(E)^{1/r - 1/r'} \|f^r\|_{r'/r}^{1/r} = \mu(E)^{1/r - 1/r'} \|f\|_{r'}.$$

□

4.2 Banach 空间 $L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$

积测度

5.1 积 σ -域

令 (E, \mathcal{A}) 和 (F, \mathcal{B}) 是两个可测空间. 回顾第一章, 我们定义 $E \times F$ 上的乘积 σ -域

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B} \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}).$$

不难验证 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ 是使得两个投影映射 $\pi_1 : E \times F \rightarrow E$ 和 $\pi_2 : E \times F \rightarrow F$ 都可测的最小的 σ -域.

如果 $C \subseteq E \times F$, $x \in E$, 记

$$C_x = \{y \in F \mid (x, y) \in C\} \subseteq F,$$

如果 $y \in F$, 记

$$C^y = \{x \in E \mid (x, y) \in C\} \subseteq E.$$

如果 f 是 $E \times F$ 上的函数, $x \in E$, 我们记 f_x 表示 F 上的函数 $f_x(y) = f(x, y)$. 类似地, 如果 $y \in F$, 我们记 $f^y(x) = f(x, y)$ 表示 E 上的函数.

命题 5.1.

1. 令 $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, 那么对于任意 $x \in E$, $C_x \in \mathcal{B}$, 对于任意 $y \in F$, $C^y \in \mathcal{A}$.
2. 令 (G, \mathcal{G}) 是可测空间, $f : E \times F \rightarrow G$ 是可测函数, 那么对于任意 $x \in E$, $f_x : F \rightarrow G$ 是可测的, 对于任意 $y \in F$, $f^y : E \rightarrow G$ 是可测的.

Proof. (1) 对于 $x \in E$, 令

$$\mathcal{C} = \{C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \mid C_x \in \mathcal{B}\},$$

那么不难验证 \mathcal{C} 是一个 σ -域且包含所有的可测矩形, 于是 $\mathcal{C} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, 即表明对于任意 $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ 都有 $C_x \in \mathcal{B}$. $C^y \in \mathcal{A}$ 同理.

(2) 对于 $x \in E$, 任取 $D \in \mathcal{G}$, 有

$$f_x^{-1}(D) = (f^{-1}(D))_x \in \mathcal{B}.$$

□

5.2 积测度

定理 5.2. 令 μ 和 ν 分别是 (E, \mathcal{A}) 和 (F, \mathcal{B}) 上的 σ -有限测度, 那么

1. 存在唯一的 $(E \times F, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ 上的测度 m , 使得对于每个 $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$, 都有

$$m(A \times B) = \mu(A)\nu(B),$$

约定 $0 \times \infty = 0$. 测度 m 也是 σ -有限的, 记为 $m = \mu \otimes \nu$.

2. 对于每个 $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, 函数 $x \mapsto \nu(C_x)$ 是 \mathcal{A} -可测的, $y \mapsto \mu(C^y)$ 是 \mathcal{B} -可测的, 并且我们有

$$\mu \otimes \nu(C) = \int_E \nu(C_x) \mu(dx) = \int_F \mu(C^y) \nu(dy).$$

Proof. 我们首先说明这样的测度 m 一定是唯一的. 我们使用 [推论 1.23](#) 说明唯一性. 若测度 m' 也满足性质 (1). 首先所有可测矩形对有限交封闭且生成 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, 并且 m 和 m' 在可测矩形上取值相同. μ 是 σ -有限的表明存在递增的可测子集 $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 使得 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = E$ 并且 $\mu(A_n)$ 有限. 同理存在递增的可测子集 $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 使得 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = F$ 并且 $\nu(B_n)$ 有限. 令 $G_n = A_n \times B_n$, 那么 $G_n \subseteq G_{n+1}$ 并且 $E \times F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$, 此时

$$m'(G_n) = \mu(A_n)\nu(B_n) = m(G_n) < \infty,$$

所以 [推论 1.23](#) 表明 $m = m'$.

然后我们说明存在性. 对于 $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, 定义

$$m(C) = \int_E \nu(C_x) \mu(dx). \quad (5.1)$$

对于任意 $x \in E$, 有 $C_x \in \mathcal{B}$, 所以 $\nu(C_x)$ 是良好定义的. 下面我们证明 $x \mapsto \nu(C_x)$ 是可测函数.

- (1) 首先假设 ν 是有限测度. 令 $\mathcal{G} = \{C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \mid x \mapsto \nu(C_x) \text{ 可测}\}$. 那么对于可测矩形 $A \times B \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, 有 $\nu((A \times B)_x) = \mathbf{1}_A(x)\nu(B)$, 此时 $x \mapsto \mathbf{1}_A(x)\nu(B)$ 当然是可测函数. 故 \mathcal{G} 包含所有的可测矩形. 其次, 我们证明 \mathcal{G} 是一个单调类. 如果 $C, C' \in \mathcal{G}$ 且 $C \subseteq C'$, 那么利用 ν 的有限性, 就有

$$\nu((C' \setminus C)_x) = \nu(C'_x \setminus C_x) = \nu(C'_x) - \nu(C_x),$$

所以 $x \mapsto \nu((C' \setminus C)_x)$ 是可测函数, 即 $C' \setminus C \in \mathcal{G}$. 如果 $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是 \mathcal{G} 中的一个递增序列, 那么

$$\nu\left(\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n\right)_x\right) = \nu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (C_n)_x\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \nu((C_n)_x),$$

而 $x \mapsto \lim \uparrow \nu((C_n)_x)$ 是可测函数, 所以 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \in \mathcal{G}$. 这就表明 \mathcal{G} 是单调类. 由于 \mathcal{G} 包含可测矩形, 可测矩形对有限交封闭, 根据单调类定理, 所以 \mathcal{G} 是 σ -域, 所以 $\mathcal{G} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, 这表明对于任意 $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, $x \mapsto \nu(C_x)$ 都是可测函数.

(2) 然后假设 ν 是 σ -有限测度. 此时存在 \mathcal{B} 的一列递增子集 $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 使得 $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ 以及 $\nu(B_n) < \infty$. 令 ν_n 表示测度 ν 在 B_n 上的限制, 那么根据上面的叙述, 任取 $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, 函数 $x \mapsto \nu_n(C_x)$ 是可测函数. 注意到

$$\nu(C_x) = \nu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (C_x \cap B_n)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \nu_n(C_x),$$

所以 $x \mapsto \lim \uparrow \nu(C_x)$ 是可测函数.

于是我们证明了 $x \mapsto \nu(C_x)$ 是可测函数, 这表明定义 (5.1) 式是有意义的. 下面我们验证 m 满足测度的条件. 显然 $m(\emptyset) = 0$. 任取 $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ 中的一列不相交的子集, 那么

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n\right) &= \int_E \nu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (C_n)_x\right) \mu(dx) = \int_E \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu((C_n)_x) \mu(dx) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_E \nu((C_n)_x) \mu(dx) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m(C_n), \end{aligned}$$

其中第三个等号利用了单调收敛定理. 这就表明 m 确实是一个测度.

对于可测矩形 $A \times B \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, 有

$$m(A \times B) = \int_E \nu((A \times B)_x) \mu(dx) = \int_E \nu(B) \mathbf{1}_A(x) \mu(dx) = \mu(A) \nu(B),$$

所以这样的 m 是唯一的. 对于 $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, 定义

$$m'(C) = \int_F \mu(C^y) \nu(dy),$$

重复上面的过程, 可以证明 m' 满足和 m 相同的性质, 所以 $m = m'$. \square

5.3 Fubini 定理

考虑可测空间 (E, \mathcal{A}) 和 (F, \mathcal{B}) .

定理 5.3 (Fubini-Tonelli). 令 μ 和 ν 分别是 (E, \mathcal{A}) 和 (F, \mathcal{B}) 上的两个 σ -有限的测度. 令 $f : E \times F \rightarrow [0, \infty]$ 是可测函数.

1. 函数

$$E \ni x \mapsto \int_F f(x, y) \nu(dy), \quad F \ni y \mapsto \int_E f(x, y) \mu(dx)$$

是值在 $[0, \infty]$ 中的可测函数.

2. 我们有

$$\int_{E \times F} f \, d\mu \otimes \nu = \int_E \left(\int_F f(x, y) \nu(dy) \right) \mu(dx) = \int_F \left(\int_E f(x, y) \mu(dx) \right) \nu(dy).$$

Proof. (1) 设 $f = \lim \uparrow f_n$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是一列递增的非负简单函数, 那么根据单调收敛定理, 有

$$\int_F f(x, y) \nu(dy) = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \int_F f_n(x, y) \nu(dy),$$

所以我们只需要说明对于任意非负简单函数 h , $x \mapsto \int_F h(x, y) \nu(dy)$ 可测即可. 对于示性函数 $\mathbf{1}_C$, 有 $\int_F \mathbf{1}_C(x, y) \nu(dy) = \nu(C_x)$, 定理 5.2 表明 $x \mapsto \nu(C_x)$ 是可测的, 再根据线性性, 这就说明了 $x \mapsto \int_F h(x, y) \nu(dy)$ 可测. 对于 $x \mapsto \int_E f(x, y) \mu(dx)$ 同理.

(2) 设 $f = \lim \uparrow f_n$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是一列递增的非负简单函数, 那么根据单调收敛定理, 有

$$\int_{E \times F} f \, d\mu \otimes \nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \int_{E \times F} f_n(x, y) \nu(dy),$$

所以只需要证明结论对于非负简单函数成立即可. 根据线性性, 只需要证明结论对示性函数成立即可. 任取示性函数 $\mathbf{1}_C$, 根据 定理 5.2, 有

$$\int_{E \times F} \mathbf{1}_C \, d\mu \otimes \nu = \mu \otimes \nu(C) = \int_E \nu(C_x) \mu(dx) = \int_E \left(\int_F \mathbf{1}_C(x, y) \nu(dy) \right) \mu(dx),$$

另一个等式同理. □

定理 5.3 也可以推广到任意符号的版本.

定理 5.4 (Fubini-Lebesgue). 令 $f \in \mathcal{L}^1(E \times F, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$, 那么

1. $\mu(dx)$ a.e., 函数 $y \mapsto f(x, y)$ 属于 $\mathcal{L}^1(F, \mathcal{B}, \nu)$. $\nu(dy)$ a.e., 函数 $x \mapsto f(x, y)$ 属于 $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$.
2. 函数 $x \mapsto \int_F f(x, y) \nu(dy)$ 属于 $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$. 函数 $y \mapsto \int_E f(x, y) \mu(dx)$ 属于 $\mathcal{L}^1(F, \mathcal{B}, \nu)$.
3. 我们有

$$\int_{E \times F} f \, d\mu \otimes \nu = \int_E \left(\int_F f(x, y) \nu(dy) \right) \mu(dx) = \int_F \left(\int_E f(x, y) \mu(dx) \right) \nu(dy).$$

Part II

概率论

概率论基础

6.1 一般定义

6.1.1 概率空间

令 (Ω, \mathcal{A}) 是可测空间, \mathbb{P} 是 (Ω, \mathcal{A}) 上的概率测度, 我们说 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 是**概率空间**. 因此, 概率空间是测度空间的一个特例. 然而, 概率论的观点与测度论有很大不同. 在概率论中, 我们的目标是一个“随机实验”的数学模型:

- Ω 表示实验的所有可能的结果的集合.
- \mathcal{A} 是所有“事件”的集合. 这里的事件指的是 Ω 的一个子集, 其概率可以被计算 (也就是可测集). 我们应当把事件 A 视为满足某一属性的所有 $\omega \in \Omega$ 构成的子集.
- 对于每个 $A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A)$ 表示事件 A 发生的概率.

当然, 一个自然的疑问是, 为什么需要考虑事件域 \mathcal{A} ? 换句话说, 为什么不能对 Ω 的任意子集都计算一个概率? 原因在于, 一般不可能在 Ω 的幂集 $\mathcal{P}(\Omega)$ 上定义我们感兴趣的概率测度 (除开 Ω 是可数集这一简单情况). 例如, 取 $\Omega = [0, 1]$, 配备 Borel σ -域和 Lebesgue 测度, 但是, 可以证明不可能将 Lebesgue 测度扩展到 $[0, 1]$ 的任意子集上使得其仍然满足测度的定义.

例 6.1. 一些常见的概率模型.

1. 考虑扔两次骰子这一实验, 那么

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^2, \quad \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{36}.$$

这里概率 \mathbb{P} 的选取意味着让所有结果都有相同的概率. 更一般地, 如果 Ω 是有限集, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, 概率测度 $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/\text{card}(\Omega)$ 被称为 Ω 上的**均匀概率测度**.

2. 现在我们考虑实验: 扔骰子, 直到出现 6 为止. 由于得到 6 所需的投掷次数是无界的 (即使你扔了 1000 次骰子, 仍有可能没有得到 6), 所以 Ω 的正确选择是想象我们扔了无限次骰子:

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^{\mathbb{N}}.$$

Ω 上的 σ -域 \mathcal{A} 被定义为包含形如

$$\{\omega \in \Omega \mid \omega_1 = i_1, \dots, \omega_n = i_n\}$$

与测度论类似, 零测集也会出现在概率论的很多叙述中, 如果某个命题对于某个概率为 1 的事件中的每个 $\omega \in \Omega$ 都成立, 那么我们说这个命题**几乎肯定**成立, 用缩写 a.s. 表示.

6.1.2 随机变量

在本章的剩余部分, 我们都考虑一个概率空间 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, 并且所有随机变量都将在这个概率空间上定义.

定义 6.2. 令 (E, \mathcal{E}) 是可测空间, 值在 E 中的**随机变量**指的是一个可测映射 $X: \Omega \rightarrow E$.

例 6.3. 回顾 (6.1) 中的模型.

1. $X((i, j)) = i + j$ 定义了值在 $\{2, 3, \dots, 12\}$ 中的随机变量.
2. $X(\omega) = \inf\{j \mid \omega_j = 6\}$, 约定 $\inf \emptyset = \infty$, 定义了值在 $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 中的随机变量. 为了验证 X 的可测性, 只需要注意到

$$X^{-1}(\{k\}) = \{\omega \in \Omega \mid \omega_1 \neq 6, \dots, \omega_{k-1} \neq 6, \omega_k = 6\}.$$

定义 6.4. 令 X 是值在 (E, \mathcal{E}) 中的随机变量, 定义随机变量 X 的**分布律** \mathbb{P}_X 是概率测度 \mathbb{P} 在 X 下的推前. 也就是说, \mathbb{P}_X 是 (E, \mathcal{E}) 上的概率测度, 满足

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)), \quad \forall B \in \mathcal{E}.$$

两个值在 (E, \mathcal{E}) 中的随机变量 Y, Y' 如果有相同的分布 $\mathbb{P}_Y = \mathbb{P}_{Y'}$, 那么我们说 Y 和 Y' 是**同分布**的.

在概率论中, 我们通常将 $\mathbb{P}_X(B)$ 写为 $\mathbb{P}(X \in B)$ 而不是 $\mathbb{P}(X^{-1}(B))$. 这里 $X \in B$ 是集合 $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}$ 的简写, 这是一个一般性的简写规则, 在概率论中参数 ω 通常被隐藏.

离散型随机变量 当 E 是有限或者可数 ($\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$) 的时候, X 的分布是点测度, 这是因为

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{x \in B} \{X = x\}\right) = \sum_{x \in B} \mathbb{P}(X = x) = \sum_{x \in E} p_x \delta_x(B),$$

其中 $p_x = \mathbb{P}(X = x)$. 这就表明

$$\mathbb{P}_X = \sum_{x \in E} p_x \delta_x$$

是 E 上的点测度.

例 6.5. 我们考虑 (6.1) 中的第二个例子, 随机变量为 $X(\omega) = \inf\{j \mid \omega_j = 6\}$. 那么

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq 5} \{\omega \mid \omega_1 = i_1, \dots, \omega_{k-1} = i_{k-1}, \omega_k = 6\}\right) \\ &= 5^{k-1} \left(\frac{1}{6}\right)^k = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}.\end{aligned}$$

注意到

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{6} \frac{1}{1 - \frac{5}{6}} = 1$$

并且 $\{X = \infty\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \{X = k\} = \Omega$, 所以

$$\mathbb{P}(X = \infty) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = 0,$$

但是 $\{X = \infty\} \neq \emptyset$.

具有密度的随机变量 \mathbb{R}^d 上的密度函数是一个非负的 Borel 函数 $p: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$, 其满足

$$\int_{\mathbb{R}^d} p(x) dx = 1.$$

对于一个值在 \mathbb{R}^d 中的随机变量 X , 如果存在密度 p 使得

$$\mathbb{P}_X(B) = \int_B p(x) dx$$

对于任意 Borel 子集 B 都成立, 那么我们说 X 有密度函数 p . 换句话说, p 是 \mathbb{P}_X 相对于 Lebesgue 测度 λ 的密度 (推论 2.8), 也记为 $\mathbb{P}_X(dx) = p(x)\lambda(dx) = p(x) dx$.

注意到密度 p 实际上是在相差一个 Lebesgue 零测集的意义下由 \mathbb{P}_X 确定的. 在我们遇到的大多数例子中, p 在 \mathbb{R}^d 上连续, 在这种情况下, p 由 \mathbb{P}_X 唯一确定.

在 $d = 1$ 的时候, 我们有

$$\mathbb{P}(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} p(x) dx.$$

6.1.3 数学期望

定义 6.6. 令 X 是定义在 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 上的实随机变量, 我们定义

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \int X d\mathbb{P},$$

只要上述积分有意义, 我们就说 $\mathbb{E}[X]$ 是 X 的**期望**.

根据前面的内容, 上述积分有意义的条件为下列二者之一:

- $X \geq 0$, 此时 $\mathbb{E}[X] \in [0, \infty]$.

- X 符号任意, 但是 $\mathbb{E}[|X|] = \int |X| d\mathbb{P} < \infty$.

上面的定义可以拓展到多元随机变量 $X = (X_1, \dots, X_d) \in \mathbb{R}^d$, 此时我们定义 $\mathbb{E}[X] = (\mathbb{E}[X_1], \dots, \mathbb{E}[X_d])$. 类似的, 如果 M 是随机矩阵 (值在实矩阵空间中的随机变量), 我们可以定义矩阵 $\mathbb{E}[M]$ 为对 M 的每个分量求期望构成的矩阵.

注意到若 $X = \mathbf{1}_B$, 那么

$$\mathbb{E}[X] = \int \mathbf{1}_B d\mathbb{P} = \mathbb{P}(B).$$

对于一些特殊的随机变量, 下面的命题被频繁地使用.

命题 6.7. 令 X 是值在 $[0, \infty]$ 中的随机变量, 那么

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \mathbb{P}(X \geq x) dx.$$

令 Y 是值在 \mathbb{Z}_+ 中的随机变量, 那么

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y \geq k).$$

Proof. 根据 Fubini 定理, 我们有

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{x \leq X\}} dx\right] = \int_0^\infty \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{x \leq X\}}] dx = \int_0^\infty \mathbb{P}(X \geq x) dx.$$

对于随机变量 Y , 我们有

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty} k \mathbf{1}_{\{Y=k\}}\right] = \int \left(\sum_{k=0}^{\infty} k \mathbf{1}_{\{Y=k\}}\right) d\mathbb{P} = \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{P}(Y = k).$$

对于第二个等式, 只需注意到

$$Y = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{Y \geq k\}}.$$

□

下面的命题是 [命题 2.12](#) 的特例, 由于其结果十分重要, 所以我们再次叙述一遍.

命题 6.8. 令 X 是值在 (E, \mathcal{E}) 中的随机变量, 对于任意可测函数 $f : E \rightarrow [0, \infty]$, 我们有

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_{\Omega} f(X(\omega)) \mathbb{P}(d\omega) = \int_E f(x) \mathbb{P}_X(dx).$$

如果可测函数 $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, 上面的命题在两端有意义的情况下也是成立的, 即 $\mathbb{E}[|f(X)|] < \infty$ 的时候. 特别地, 如果 X 是实值随机变量且使得 $\mathbb{E}[|X|] < \infty$, 那么有

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} x \mathbb{P}_X(dx).$$

命题 6.8 告诉我们可以使用分布 \mathbb{P}_X 来计算 $f(X)$ 的期望. 实际上这个过程可以倒过来, 如果我们能找到 E 上的测度 ν 使得

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int f d\nu,$$

其中 $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ 是任意示性函数, 此时对于任意 E 的可测子集 A , 有

$$\mathbb{P}_X(A) = \int \mathbf{1}_A d\mathbb{P}_X = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A(X)] = \int \mathbf{1}_A dv = v(A),$$

所以分布 $\mathbb{P}_X = v$. 下面的命题应用了这样的思想.

命题 6.9. 令 $X = (X_1, \dots, X_d)$ 是值在 \mathbb{R}^d 中的随机变量, 假设 X 有密度 $p(x_1, \dots, x_d)$. 那么, 对于任意 $1 \leq j \leq d$, X_j 的密度为

$$p_j(x) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} p(x_1, \dots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \dots, x_d) dx_1 \cdots dx_{j-1} dx_{j+1} \cdots dx_d.$$

Proof. 记 π_j 是投影函数 $\pi_j(x_1, \dots, x_d) = x_j$. 对于任意的 Borel 函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, 根据 Fubini 定理, 有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(X_j)] &= \mathbb{E}[f \circ \pi_j(X)] \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(\pi_j(x)) \mathbb{P}_X(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x_j) p(x_1, \dots, x_d) dx_1 \cdots dx_d \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x_j) \left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} p(x_1, \dots, x_d) dx_1 \cdots dx_{j-1} dx_{j+1} \cdots dx_d \right) dx_j \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x_j) p_j(x_j) dx_j = \int_{\mathbb{R}} f(x_j) \mathbb{P}_{X_j}(dx_j), \end{aligned}$$

这就表明对于任意 Borel 子集 A 有

$$\mathbb{P}_{X_j}(A) = \int_A p_j(x_j) dx_j,$$

即 X_j 有密度函数 p_j . □

如果 $X = (X_1, \dots, X_d)$ 是值在 \mathbb{R}^d 中的随机变量, 那么概率测度 \mathbb{P}_{X_j} 被称为 X 的**边缘分布**, 分布律 \mathbb{P}_{X_j} 由 \mathbb{P}_X 完全决定: \mathbb{P}_{X_j} 就是 \mathbb{P}_X 在投影 π_j 下的推前. 需要注意反之不是正确的, 也就是说即使确定了所有的边缘分布 $\mathbb{P}_{X_1}, \dots, \mathbb{P}_{X_j}$, 也不能确定 \mathbb{P}_X .

6.1.4 经典分布

本小节我们列举一些重要的概率分布.

离散分布

1. **均匀分布.** 如果 E 是有限集, 值在 E 中的随机变量 X 如果满足

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{\text{card}(E)}, \quad \forall x \in E,$$

那么我们说 X 是 E 上的均匀分布.

2. **参数 $p \in [0, 1]$ 的 Bernoulli 分布.** 如果值在 $\{0, 1\}$ 中的随机变量 X 满足

$$\mathbb{P}(X = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p,$$

那么我们说 X 是 E 上参数 p 的 Bernoulli 分布.

3. **二项分布 $\mathcal{B}(n, p)$ ($n \in \mathbb{N}, p \in [0, 1]$).** 如果值在 $\{0, 1, \dots, n\}$ 中的随机变量 X 满足

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, n\},$$

那么我们说 X 是 E 上的二项分布.

4. **参数 $p \in (0, 1)$ 的几何分布.** 如果值在 \mathbb{Z}_+ 中的随机变量 X 使得

$$\mathbb{P}(X = k) = (1-p)p^k, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

那么我们说 X 是 E 上参数 p 的几何分布.

5. **参数 $\lambda > 0$ 的 Poisson 分布.** 如果值在 \mathbb{Z}_+ 中的随机变量 X 使得

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+,$$

那么我们说 X 是 E 上参数 λ 的 Poisson 分布. 容易计算

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda,$$

Poisson 分布在实际应用中非常重要, 通常被用于建模某个“罕见事件”在长时间段内发生的次数. 准确的数学叙述是 Poisson 分布是二项分布的近似. 对于每个 $n \geq 1$, 记 X_n 为服从二项分布 $\mathcal{B}(n, p_n)$ 的随机变量, 如果在 $n \rightarrow \infty$ 的时候有 $np_n \rightarrow \lambda$, 那么对于每个 $k \in \mathbb{N}$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

这可以解释为, 如果每天有很小的概率 $p_n \approx \lambda/n$ 发生地震, 那么地震在 n 天内发生的次数将近似服从泊松分布.

连续分布 在下面的五个例子中, X 都指的是一个有密度 p 的实值随机变量.

1. **$[a, b]$ 上的均匀分布:**

$$p(x) = \frac{1}{b-a} \mathbf{1}_{[a,b]}(x).$$

2. **参数 $\lambda > 0$ 的指数分布:**

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x),$$

此时对于 $a \geq 0$, 有

$$\mathbb{P}(X \geq a) = \int_a^{\infty} p(x) dx = e^{-\lambda a}.$$

这表明指数分布有下面的重要性质: 对于 $a, b \geq 0$, 有

$$\mathbb{P}(X \geq a + b) = \mathbb{P}(X \geq a)\mathbb{P}(X \geq b). \quad (6.1)$$

3. Gamma 分布 $\Gamma(a, \lambda)$ ($a > 0, \lambda > 0$):

$$p(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x),$$

这是指数分布的推广, $a = 1$ 时即指数分布.

4. 参数 $a > 0$ 的 Cauchy 分布:

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2},$$

注意到服从 Cauchy 分布的随机变量的数学期望是不存在的, 因为

$$\mathbb{E}[|X|] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{a|x|}{a^2 + x^2} dx = \infty.$$

5. 正态分布 $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ ($m \in \mathbb{R}, \sigma > 0$):

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

正态分布与 Poisson 分布一起成为概率论中最重要的两个分布. 正态分布的密度曲线呈著名的钟形曲线. 按定义很容易验证

$$m = \mathbb{E}[X], \quad \sigma^2 = \mathbb{E}[(X - m)^2].$$

对于 $a, b \in \mathbb{R}$, 考虑随机变量 $Y = aX + b$, 那么对于任意的 Borel 函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, 有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(Y)] &= \mathbb{E}[f(aX + b)] = \int_{\mathbb{R}} f(ax + b) \mathbb{P}_X(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(ax + b) p(x) dx = \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} f(y) p\left(\frac{y-b}{a}\right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{1}{a} p\left(\frac{y-b}{a}\right) dy, \end{aligned}$$

这表明

$$p(y) = \frac{1}{a\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y - (am + b))^2}{2(a\sigma)^2}\right),$$

即 $aX + b$ 服从分布 $\mathcal{N}(am + b, a^2\sigma^2)$.

6.1.5 实值随机变量的分布函数

令 X 是实值随机变量, 定义 X 的分布函数为 $F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, 其满足

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}_X((-\infty, t]), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

根据 **推论 1.23**, F_X 实际上完全刻画了分布 \mathbb{P}_X . 确切的说, 如果知道了 F_X , 即相当于知道了所有 $\mathbb{P}_X((-\infty, t])$ 的值, 而所有区间 $(-\infty, t]$ 构成的子集族对有限交封闭, 又因为 \mathbb{P}_X 为有限测度, 所以 \mathbb{P}_X 在所有区间 $(-\infty, t]$ 上的值可以完全确定 \mathbb{P}_X 在 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上的值.

显然函数 F_X 是递增的、右连续的并且在 $-\infty$ 处极限为 0、在 $+\infty$ 处极限为 1. 反之, 如果 $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ 满足上面的性质, 定理? 表明存在 (唯一的) \mathbb{R} 上的概率测度 μ 使得 $\mu((-\infty, t]) = F(t)$. 即这样的函数 F 总能解释为某个实值随机变量的分布函数.

令 $F_X(a-)$ 表示 F_X 在 $a \in \mathbb{R}$ 处的左极限. 那么容易验证

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a-),$$

$$\mathbb{P}(a < X < b) = F_X(b-) - F_X(a).$$

特别的, $\mathbb{P}(X = a) = F_X(a) - F_X(a-)$. 这表明 F_X 的间断点的个数恰为 \mathbb{P}_X 的原子个数.

6.2 随机变量的矩

6.2.1 矩和方差

令 X 是实值随机变量, $p \in \mathbb{N}$. 定义 X 的 p -**阶矩**为 $\mathbb{E}[X^p]$, 其仅在 $X \geq 0$ 或者 $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$ 的时候有定义.

因为期望是相对于测度 \mathbb{P}_X 的一种积分, 所以我们有下面的结果. 如果 X 是值在 $[0, \infty]$ 中的随机变量, 那么我们有

- $\mathbb{E}[X] < \infty \Rightarrow X < \infty, \mathbb{P}_X$ a.s.
- $\mathbb{E}[X] = 0 \Rightarrow X = 0, \mathbb{P}_X$ a.s.

此外, 各种极限与积分交换次序的定理也可以直接改写为期望的形式:

- **单调收敛定理.** 如果 $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是一列值在 $[0, \infty]$ 中递增的随机变量, 那么

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow X_n \right].$$

- **Fatou 引理.** 如果 $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是一列值在 $[0, \infty]$ 中的随机变量, 那么

$$\mathbb{E}[\liminf X_n] \leq \liminf \mathbb{E}[X_n].$$

- **控制收敛定理.** 如果 $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是一列实值随机变量, 并且存在值在 $[0, \infty]$ 中的随机变量 Z 使得

$$|X_n| \leq Z, \quad \mathbb{E}[Z] < \infty, \quad X_n \rightarrow X, \mathbb{P}_X \text{ a.s.}$$

那么

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n \right] = \mathbb{E}[X], \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|X_n - X|] = 0.$$

对于每个 $p \in [1, \infty]$, 考虑空间 $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Hölder 不等式表明对于任意实值随机变量 X, Y , 如果 $p, q \in (1, \infty)$ 使得 $1/p + 1/q = 1$, 那么

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq \mathbb{E}[|X|^p]^{1/p} \mathbb{E}[|Y|^q]^{1/q}.$$

取 $Y = 1$, 我们得到 $\|X\|_1 \leq \|X\|_p$. 此外, 如果 $1 \leq p < q \leq \infty$, 有 $\|X\|_p \leq \|X\|_q$, 这也表明 $L^q(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \subseteq L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Hilbert 空间 $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 上的内积定义为 $\langle X, Y \rangle_{L^2} = \mathbb{E}[XY]$, Cauchy-Schwarz 不等式表明

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq \mathbb{E}[X^2]^{1/2} \mathbb{E}[Y^2]^{1/2}.$$

特别地, 我们有

$$\mathbb{E}[|X|]^2 \leq \mathbb{E}[X^2].$$

如果 $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ 是凸函数, 那么 Jensen 不等式表明

$$\mathbb{E}[f(X)] \geq f(\mathbb{E}[X]).$$

定义 6.10. 令 $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, 定义 X 的**方差**为

$$\text{var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] \geq 0,$$

X 的**标准差**为

$$\sigma_X = \sqrt{\text{var}(X)}.$$

命题 6.11. 令 $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, 方差 $\text{var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$. 对于任意的 $a \in \mathbb{R}$, 有

$$\mathbb{E}[(X - a)^2] = \text{var}(X) + (\mathbb{E}[X] - a)^2.$$

独立性

7.1 独立事件

在本章中, 我们考虑概率空间 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. 如果 $A, B \in \mathcal{A}$ 且

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B),$$

那么我们说 A 和 B 是**独立的**.

7.2 σ -域和随机变量的独立性

如果 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ 是一个 σ -域, 那么我们说 \mathcal{B} 是 \mathcal{A} 的**子 σ -域**. 我们可以认为子 σ -域 \mathcal{B} 反映了概率空间的部分信息, 即 \mathcal{B} 中发生的事件. 例如, 如果 $\mathcal{B} = \sigma(X)$, X 是随机变量, 那么 \mathcal{B} 反映了 X 的值的**信息**. 这暗示了子 σ -域的**独立性的概念**: 我们希望两个子 σ -域 \mathcal{B} 和 \mathcal{B}' 是独立的当且仅当它们中的任意两个事件都是独立的.

定义 7.1. 令 $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$ 是 \mathcal{A} 的 n 个 σ -子域, 我们说 $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$ 是**独立的**, 如果对于任意 $A_1 \in \mathcal{B}_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}_n$, 都有

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \dots \mathbb{P}(A_n).$$

令 X_1, \dots, X_n 分别是值在 $(E_1, \mathcal{E}_1), \dots, (E_n, \mathcal{E}_n)$ 中的随机变量, 我们说 X_1, \dots, X_n 是独立的当且仅当 $\sigma(X_1), \dots, \sigma(X_n)$ 是独立的. 这等价于任取 $F_1 \in \mathcal{E}_1, \dots, F_n \in \mathcal{E}_n$ 有

$$\mathbb{P}(\{X_1 \in F_1\} \cap \dots \cap \{X_n \in F_n\}) = \mathbb{P}(X_1 \in F_1) \dots \mathbb{P}(X_n \in F_n).$$

定理 7.2. 令 X_1, \dots, X_n 分别是值在 $(E_1, \mathcal{E}_1), \dots, (E_n, \mathcal{E}_n)$ 中的随机变量. 那么 X_1, \dots, X_n 是独立的当且仅当 (X_1, \dots, X_n) 的分布是 X_1, \dots, X_n 的分布的**乘积测度**, 即

$$\mathbb{P}_{(X_1, \dots, X_n)} = \mathbb{P}_{X_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{P}_{X_n}.$$

此外, 我们有

$$\mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^n f_i(X_i) \right] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[f_i(X_i)],$$

其中 f_i 是 (E_i, \mathcal{E}_i) 上的非负可测函数.

Proof. 令 $F_i \in \mathcal{E}_i$, X_1, \dots, X_n 独立当且仅当

$$\mathbb{P}(\{X_1 \in F_1\} \cap \dots \cap \{X_n \in F_n\}) = \mathbb{P}(X_1 \in F_1) \cdots \mathbb{P}(X_n \in F_n),$$

这表明

$$\mathbb{P}_{(X_1, \dots, X_n)}(F_1 \times \dots \times F_n) = \mathbb{P}_{X_1}(F_1) \cdots \mathbb{P}_{X_n}(F_n).$$

所以 $\mathbb{P}_{(X_1, \dots, X_n)}$ 就是乘积测度 $\mathbb{P}_{X_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{P}_{X_n}$.

记 $\pi_i : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow E_i$ 为投影, 根据 Fubini 定理, 有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n f_i(X_i)\right] &= \int_{E_1 \times \dots \times E_n} \prod_{i=1}^n f_i \circ \pi_i \, d\mathbb{P}_{(X_1, \dots, X_n)} \\ &= \prod_{i=1}^n \int_{E_i} f_i(x_i) \mathbb{P}_{X_i}(dx_i) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[f_i(X_i)]. \end{aligned} \quad \square$$

注释 7.3. 该定理中 f_i 也可以是任意符号, 此时如果 $\mathbb{E}[|f_i(X_i)|] < \infty$, 也即 $f_i \in \mathcal{L}^1(E_i, \mathcal{E}_i, \mathbb{P}_{X_i})$, 那么定理的结论依然成立.

推论 7.4. 令 X_1, \dots, X_n 是实值随机变量.

1. 假设 X_i 有密度 p_i 并且 X_1, \dots, X_n 是独立的, 那么 (X_1, \dots, X_n) 有密度

$$p(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n p_i(x_i).$$

2. 反之, 假设 (X_1, \dots, X_n) 有密度 p , 并且 p 可以表达为

$$p(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n q_i(x_i),$$

其中 q_i 是 \mathbb{R} 上的非负可测函数. 那么 X_1, \dots, X_n 是独立的并且 X_i 有密度 $p_i = C_i q_i$, 其中 $C_i > 0$ 为常数.

Proof. (1) X_i 有密度 p_i 表明 $\mathbb{P}_{X_i}(dx) = p_i(x) dx$, X_1, \dots, X_n 独立表明

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{(X_1, \dots, X_n)}(A) &= \mathbb{P}_{X_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{P}_{X_n}(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_A \, d\mathbb{P}_{X_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{P}_{X_n} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A(x_1, \dots, x_n) \mathbb{P}_{X_1}(dx_1) \cdots \mathbb{P}_{X_n}(dx_n) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^n p_i(x_i) \, dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_A \prod_{i=1}^n p_i \, d\lambda = \int_A \prod_{i=1}^n p_i(x_i) \, dx_1 \cdots dx_n, \end{aligned}$$

这就表明

$$p(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n p_i(x_i).$$

(2) 根据 **命题 6.9**, 有

$$p_i(x_i) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} p(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n = q_i(x_i) \prod_{j \neq i} \int_{\mathbb{R}} q_j(x_j) dx_j,$$

故 $p_i = C_i q_i$. 此时

$$p(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n q_i(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{C_i} p_i(x_i),$$

两边积分可知 $\prod_{i=1}^n C_i = 1$, 所以

$$p(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n p_i(x_i),$$

这就表明 $\mathbb{P}_{(X_1, \dots, X_n)} = \mathbb{P}_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{P}_{X_n}$, 即 X_1, \dots, X_n 独立. \square

例 7.5. 令 U 是服从参数 1 的指数分布的随机变量, V 是服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布的随机变量, 假设 U, V 是独立的, 记

$$X = \sqrt{U} \cos(2\pi V), \quad Y = \sqrt{U} \sin(2\pi V),$$

证明 X, Y 是独立的随机变量.

Proof. 任取非负可测函数 $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varphi(X, Y)] &= \mathbb{E}[\varphi(\sqrt{U} \cos(2\pi V), \sqrt{U} \sin(2\pi V))] \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(\sqrt{u} \cos(2\pi v), \sqrt{u} \sin(2\pi v)) d\mathbb{P}_{(U, V)} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(\sqrt{u} \cos(2\pi v), \sqrt{u} \sin(2\pi v)) e^{-u} \mathbf{1}_{[0, \infty)}(u) \mathbf{1}_{[0, 1]}(v) du dv \\ &= \int_0^\infty \int_0^1 \varphi(\sqrt{u} \cos(2\pi v), \sqrt{u} \sin(2\pi v)) e^{-u} du dv \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \varphi(r \cos \theta, r \sin \theta) r e^{-r^2} dr d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, y) e^{-x^2 - y^2} dx dy. \end{aligned}$$

这表明 (X, Y) 有概率密度 $p(x, y) = \pi^{-1} \exp(-x^2 - y^2) = \pi^{-1} \exp(-x^2) \exp(-y^2)$, 根据 **推论 7.4**, 这表明 X, Y 是独立的. \square

7.3 Borel-Cantelli 引理

回顾集合极限的定义: 如果 $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是一列集合, 我们记

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k,$$

不难发现点 $\omega \in \limsup A_n$ 当且仅当存在无限多个 n 使得 $\omega \in A_n$. 注意到 1.12 告诉我们 $\mathbb{P}(\limsup A_n) \geq \limsup \mathbb{P}(A_n)$.

引理 7.6. 令 $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是一列事件.

1. 如果 $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, 那么

$$\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0,$$

2. 如果 $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \infty$, 事件 A_n 是独立的, 那么

$$\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1.$$

两个应用 (2) 我们令

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = ([0, 1), \mathcal{B}([0, 1)), \lambda),$$

其中 λ 表示 Lebesgue 测度. 对于每个 $n \in \mathbb{N}$, 令

$$X_n(\omega) = \lfloor 2^n \omega \rfloor - 2 \lfloor 2^{n-1} \omega \rfloor,$$

其中 $\lfloor x \rfloor$ 表示向下取整. 那么 $X_n(\omega) \in \{0, 1\}$ 并且容易验证对于任意 $\omega \in [0, 1)$ 有

$$0 \leq \omega - \sum_{k=1}^n X_k(\omega) 2^{-k} < 2^{-n}.$$

这表明

$$\omega = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(\omega) 2^{-k}.$$

7.4 独立随机变量的和

命题 7.7 (强大数定律). 令 $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是一列独立同分布的实值随机变量, 若 $\mathbb{E}[X_1^4] < \infty$, 那么我们几乎肯定有

$$\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[X_1].$$

7.5 Poisson 过程

在本节, 我们固定一个参数 $\lambda > 0$, 令 U_1, U_2, \dots 是一列独立同分布的随机变量, 它们都服从参数 λ 的指数分布, 即有概率密度 $\lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$. 令

$$T_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n.$$

对于任意实数 $t \geq 0$, 令

$$N_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}} = \sup\{n \in \mathbb{N} \mid T_n \leq t\}.$$

约定 $\sup \emptyset = 0$. 命题 7.7 告诉我们在 $n \rightarrow \infty$ 的时候, $T_n \rightarrow \infty$ a.s.. 因此, 使得 $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 有界的 $\omega \in \Omega$ 的集合构成一个零测集, 除开这个零测集, 对于任意 $t \geq 0$, 我们都有 $N_t < \infty$. 类似地, 因为随机变量 U_i 几乎处处是正值, 我们可以假设对于每个 $\omega \in \Omega$ 都有 $0 < T_1(\omega) < T_2(\omega) < \dots$.

固定 ω , 函数 $t \mapsto N_t(\omega)$ 在 0 处为零、单调递增且右连续, 此外其每次以大小为 1 的幅度增加. 这个函数我们称为计数函数. 在 $t \rightarrow \infty$ 的时候有 $N_t \rightarrow \infty$.

定义 7.8. 随机变量族 $(N_t)_{t \geq 0}$ 被称为参数 λ 的 Poisson 过程.

泊松过程经常用于应用概率模型中, 例如在排队论中, N_t 表示在时间 t 之前到达服务器的客户数量. 选择指数分布来模拟两个连续到达的客户之间的时间段与指数分布缺乏记忆的特性有关. 粗略地说, 该属性表示, 对于任何给定时间 $t \geq 0$, t 与客户下一次到达之间的时间始终具有相同的分布, 与时间 t 之前发生的情况无关.