球谐函数笔记

Eliauk

2025 年 12 月 4 日

目录

1 圆上的调和函数

Joseph Fourier (1768–1830) 在研究热传导问题时引入了 Fourier 级数的概念. 使用 Fourier 级数, 每个平方可积的周期函数 f 都可以唯一地表示为级数

$$f(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta),$$

其中 Fourier 系数 a_k, b_k 由下式给出:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,\mathrm{d}\theta, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos k\theta\,\mathrm{d}\theta, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin k\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

这个惊人的发现在物理学、信号处理、工程学等领域有着广泛的理论和实际应用,但是 Fourier 级数的数学内涵远不止于此. 我们引入平方可积函数的内积

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)g(\theta)\,\mathrm{d}\theta,$$

也记为

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{S}^1} f(\theta)g(\theta)\,\mathrm{d}\theta,$$

其中 $\mathbb{S}^1$ 是单位圆. 实际上上述记法就是在 $\mathbb{S}^1$ 流形上的积分. 通过这个内积, 空间 $L^2(\mathbb{S}^1)$ 是一个完备的赋范向量空间, 也即 Hilbert 空间. 进一步的, 我们定义 $L^2(\mathbb{S}^1)$ 的子空间 $\mathcal{H}_k(\mathbb{S}^1)$ 为: $\mathcal{H}_0(\mathbb{S}^1) = \mathbb{R}$ 是所有常值函数的空间, $\mathcal{H}_k(\mathbb{S}^1)$ 是由函数 $\cos k\theta$ 和 $\sin k\theta$ 张成的二维空间. 那么, Fourier 级数告诉我们有正交直和分解

$$L^2(\mathbb{S}^1) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k(\mathbb{S}^1).$$

空间 $\mathcal{H}_k(\mathbb{S}^1)$ 会自然地出现在 $\mathbb{R}^2$ 上的 Laplace 方程中, 即 $\Delta f = 0$. 大致来说, $\mathbb{R}^2$ 中的齐次函数 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 在极坐标 (r, θ) 中有形式

$$f(r, \theta) = r^k g(\theta).$$

极坐标中的 Laplace 算子为

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}.$$

当然, 我们要求 $f \in C^2$ 是二阶连续可微的. 如果我们把 f 限制在单位圆 $\mathbb{S}^1$ 上, 那么 $\mathbb{S}^1$ 上的 Laplace 算子为

$$\Delta_{\mathbb{S}^1} f = \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}.$$

下面我们将看到空间 $\mathcal{H}_k(\mathbb{S}^1)$ 实际上是 $\Delta_{\mathbb{S}^1}: L^2(\mathbb{S}^1) \to L^2(\mathbb{S}^1)$ 的特征值 $-k^2$ 的特征函数空间.

对于方程 $\Delta f = 0$, 采用分离变量法, 设 $f(r, \theta) = F(r)g(\theta)$. 假设 $F(r) = r^k$, 其中 $k \geq 0$ 是整数, 这意味着 f 是 k 次齐次函数. 其中 $g: \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ 是圆上的函数. 现在, 将 f 代入 Laplace 算子, 有

$$\Delta f = r^{k-2}\left(k^2 g(\theta) + g''(\theta)\right) = r^{k-2}\left(-\Delta_{\mathbb{S}^1} g(\theta) + k^2 g(\theta)\right).$$

于是我们得到

$$\Delta f = 0 \iff \Delta_{\mathbb{S}^1} g = -k^2 g.$$

即, g 是 $\Delta_{\mathbb{S}^1}$ 的特征值 $-k^2$ 的特征函数. 这等价于一个二阶微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}\theta^2} + k^2 g = 0,$$

有通解

$$g(\theta) = a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta.$$

因此, 我们发现 $0, -1, -4, \dots, -k^2, \dots$ 是 $\Delta_{\mathbb{S}^1}$ 的特征值, 并且函数 $\cos k\theta$ 和 $\sin k\theta$ 是对应的特征函数. 所以, $k = 0$ 的时候特征空间是 1 维的, 而 $k \geq 1$ 的时候特征空间是 2 维的. 可以证明 $\Delta_{\mathbb{S}^1}$ 没有其他的特征值.

回到齐次调和函数 $f(r, \theta) = r^k g(\theta)$ 上, 我们注意到这些函数构成的空间由

$$u_k = r^k \cos k\theta, \quad v_k = r^k \sin k\theta$$

张成. 因为 $(x + iy)^k = r^k(\cos k\theta + i \sin k\theta) = u_k + iv_k$, 由于复可微函数的实部和虚部都是调和函数, 所以 u_k 和 v_k 都是 $\mathbb{R}^2$ 上的调和函数. 因此, u_k, v_k 实际上还给出了 $\mathbb{R}^2$ 上所有 k 次齐次调和多项式的一个基. 其中一些低次的齐次调和多项式如下:

$$\begin{array}{ll}
k = 0 & 1 \\
k = 1 & x,\ y \\
k = 2 & x^2 - y^2,\ xy \\
k = 3 & x^3 - 3xy^2,\ 3x^2y - y^3 \\
k = 4 & x^4 - 6x^2y^2 + y^4,\ x^3y - xy^3.
\end{array}$$

于是, 我们发现 $\mathbb{S}^1$ 上的 Laplace 算子的特征函数是 $\mathbb{R}^2$ 上调和多项式在 $\mathbb{S}^1$ 上的限制, 并且有 Hilbert 空间分解 $L^2(\mathbb{S}^1) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k(\mathbb{S}^1)$. 这意味着我们可以在球面 $\mathbb{S}^2$ 上寻找类似的分解.

2 球面上的球谐函数

我们的目标是寻找 $\mathbb{R}^3$ 中 Laplace 方程 $\Delta f = 0$ 的齐次解, 并且证明它们对应于 2-球面上的 Laplace 算子 $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ 的特征函数空间 $\mathcal{H}_k(\mathbb{S}^2)$. 那么空间 $\mathcal{H}_k(\mathbb{S}^2)$ 将给出 $L^2(\mathbb{S}^2)$ 的 Hilbert 直和分解. 这是 Fourier 级数在球面上的推广, $\mathcal{H}_k(\mathbb{S}^2)$ 中的函数被称为**球谐函数**.

在 $\mathbb{R}^3$ 中, 采用球坐标 (r, θ, φ), 那么

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \quad y = r \sin\theta \sin\varphi, \quad z = r \cos\theta,$$

并且要求 $0 \leq \theta < \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ 以及 $r > 0$. 那么球坐标中 Laplace 算子为

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\mathbb{S}^2} f, \tag{1}$$

其中 $\mathbb{S}^2$ 上的 Laplace 算子为

$$\Delta_{\mathbb{S}^2} f = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}.$$

同样, 我们寻找齐次调和函数 $f(r,\theta,\varphi)=r^k g(\theta,\varphi)$. 将 f 代入 Laplace 方程, 有

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial(r^k g)}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\Delta_{\mathbb{S}^2}(r^k g)\\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 k r^{k-1} g\right)+\frac{1}{r^2}r^k\Delta_{\mathbb{S}^2}g\\ &= r^{k-2}\left(k(k+1)g+\Delta_{\mathbb{S}^2}g\right).\end{aligned}$$

因此

$$\Delta f=0\Longleftrightarrow \Delta_{\mathbb{S}^2}g=-k(k+1)g.$$

也即, g 是 $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ 的特征值 $-k(k+1)$ 的特征函数.

我们采用分离变量法寻找上述方程的解. 令 $g(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$, 那么得到方程

$$\frac{\Phi}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\frac{\Theta}{\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}=-k(k+1)\Theta\Phi,$$

两边除以 $\Theta\Phi$ 并且乘以 $\sin^2\theta$, 得到

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+k(k+1)\sin^2\theta=-\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}.$$

因为左边只含有 θ, 右边只含有 φ, 所以两边只可能都等于一个常数, 记为 μ. 那么我们得到两个常微分方程:

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}+\mu\Phi=0,\\ &\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left(k(k+1)\sin^2\theta-\mu\right)\Theta=0.\end{aligned}$$

因为我们考虑的是球面 $\mathbb{S}^2$ 上的函数, 所以 Φ 是 2π-周期的, 所以必须有 $\mu=m^2$, 其中 m 是非负整数. 那么, 我们知道方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}+m^2\Phi=0$$

的解是 2 维的, 由下面两个函数张成:

$$\Phi(\varphi)=\cos m\varphi,\quad \Phi(\varphi)=\sin m\varphi.$$

接下来, 我们考虑 Θ 的方程:

$$\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left(k(k+1)\sin^2\theta-m^2\right)\Theta=0.$$

这等价于

$$\sin^2\theta\Theta'' + \sin\theta\cos\theta\Theta' + \left(k(k+1)\sin^2\theta - m^2\right)\Theta = 0.$$

这是 Legendre 方程的一个变体. 令 $t = \cos\theta$, 考虑函数 $u(\cos\theta) = \Theta(\theta)$, 注意 $0 \le \theta < \pi$, 那么我们得到二阶微分方程

$$(1-t^2)u'' - 2tu' + \left(k(k+1) - \frac{m^2}{1-t^2}\right)u = 0.$$

这被称为**连带 Legendre 方程**. 解这个方程的技巧是采用代换 $u(t) = (1-t^2)^{m/2}v(t)$, 那么得到

$$(1-t^2)v'' - 2(m+1)tv' + (k(k+1) - m(m+1))v = 0.$$

当 $m = 0$ 的时候, 我们得到 **Legendre 方程**:

$$(1-t^2)v'' - 2tv' + k(k+1)v = 0.$$

这个方程有两个基本解 $P_k(t)$ 和 $Q_k(t)$, 被称为**第一类和第二类 Legendre 函数**. $P_k(t)$ 实际上是多项式, $Q_k(t)$ 由一个在 $t = 1$ 处发散的幂级数给出, 所以我们也把 $P_k(t)$ 称作 **Legendre 多项式**. Legendre 多项式有许多种定义形式, 其中一种定义由 **Rodrigues 公式**给出:

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t^2-1)^n.$$

Legendre 多项式满足 $P_n(1) = 1$ 以及递推关系

$$P_0 = 1, \quad P_1 = t,$$
$$(n+1)P_{n+1} = (2n+1)tP_n - nP_{n-1} \quad n \ge 1.$$

前六个 Legendre 多项式如下:

$$1,\ t,\ \frac{1}{2}(3t^2-1),\ \frac{1}{2}(5t^3-3t),\ \frac{1}{8}(35t^4-30t^2+3),\ \frac{1}{8}(63t^5-70t^3+15t).$$

现在我们回到微分方程

$$(1-t^2)v'' - 2(m+1)tv' + (k(k+1) - m(m+1))v = 0. \tag{2}$$

对 t 微分, 得到

$$(1-t^2)v''' - 2(m+2)tv'' + (k(k+1) - (m+1)(m+2))v' = 0.$$

这表明如果 v 是 (2) 式在 k, m 情况下的解, 那么 v' 是 (2) 式在 $k, m+1$ 情况下的解. 因此, 如果 $P_k(t)$ 在 k 和 $m = 0$ 的情况下是 (2) 式的解, 那么 $P_k'(t)$ 在 k 和 $m = 1$ 的情况下是解, $P_k''(t)$ 在 k

和 $m=2$ 的情况下是解, 依此类推, $\mathrm{d}^m/\mathrm{d}t^m\big(P_k(t)\big)$ 在 k 和 m 的情况下是解. 于是, 对于最开始的方程

$$(1-t^2)u''-2tu'+\left(k(k+1)-\frac{m^2}{1-t^2}\right)u=0, \tag{3}$$

有解

$$u(t)=(-1)^m(1-t^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}\big(P_k(t)\big).$$

这个函数 $u(t)$ 通常记为 $P_k^m(t)$, 被称为**连带 Legendre 函数**. 因为 $P_k(t)$ 是 k 次多项式, 所以在 $m>k$ 的情况下有 $P_k^m(t)\equiv 0$. 由于 $(1-t^2)^{m/2}$ 的存在, 所以连带 Legendre 函数 $P_k^m(t)$ 一般来说不是多项式并且只定义在闭区间 $[-1,1]$ 上.

连带 Legendre 函数满足许多的关系式. 例如, 对于 $m\geq 0$, 有递推

$$(k-m+1)P_{k+1}^m(t)=(2k+1)tP_k^m(t)-(k+m)P_{k-1}^m(t),\quad k\geq 1.$$

对于 $k\geq 2$, 有

$$P_k^{m+2}(t)=-\frac{2(m+1)t}{(1-t^2)^{1/2}}P_k^{m+1}(t)-(k-m)(k+m+1)P_k^m(t),\quad 0\leq m\leq k-2.$$

这些递推式可以用于从初始形式

$$\begin{aligned}P_k^0(t)&=P_k(t),\\ P_k^1(t)&=\frac{kt}{(t^2-1)^{1/2}}P_k(t)-\frac{k}{(t^2-1)^{1/2}}P_{k-1}(t)\end{aligned}$$

计算任意的连带 Legendre 函数 $P_k^m(t)$. 注意到 $k=m$ 的时候, 有

$$P_{m+1}^m(t)=(2m+1)tP_m^m(t),$$

所以还有

$$P_m^m(t)=(-1)^m(2m-1)!!(1-t^2)^{m/2}.$$

再回到球谐函数的求解上, 我们需要解方程

$$\sin^2\theta\Theta''+\sin\theta\cos\theta\Theta'+\big(k(k+1)\sin^2\theta-m^2\big)\Theta=0,$$

我们使用了替换 $u(\cos\theta)=\Theta(\theta)$, 并且得到了连带 Legendre 方程的解为 $u(t)=P_k^m(t)$, 所以我们有解

$$\Theta(\theta)=P_k^m(\cos\theta).$$

将所有的结果综合起来, 我们得到齐次函数 $f(r,\theta,\varphi)=r^k\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ 为

$$f(r,\theta,\varphi)=r^k\cos m\varphi P_k^m(\cos\theta),\quad f(r,\theta,\varphi)=r^k\sin m\varphi P_k^m(\cos\theta),$$

它们都是 $\mathbb{R}^3$ 上的调和函数, 并且函数

$$\cos m\varphi P_k^m(\cos\theta),\quad \sin m\varphi P_k^m(\cos\theta)$$

是球面上 Laplace 算子 $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ 的特征值 $-k(k+1)$ 的特征函数. 对于固定的 k, 取遍 $0\le m\le k$, 我们得到 $2k+1$ 个线性无关的特征函数.

处于不同的用途, 我们通常对球谐函数进行归一化处理. 我们使用记号 Y_l^m, 其中 l 是非负整数, m 是整数且满足 $-l\le m\le l$. 定义

$$Y_{lm}(\theta,\varphi)=\begin{cases}N_l^0P_l^0(\cos\theta), & m=0,\\ (-1)^m\sqrt{2}N_l^m\cos m\varphi P_l^m(\cos\theta), & m>0,\\ (-1)^m\sqrt{2}N_l^{-m}\sin(-m\varphi)P_l^{-m}(\cos\theta), & m<0,\end{cases}$$

其中 N_l^m 是标量因子, 通常被选为

$$N_l^m=\sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}.$$

函数 Y_{lm} 被称为 **l 次 m 阶实球谐函数**.

函数 Y_l^m 有许多非常漂亮的性质,为了解释它们,我们需要回顾 $L^2(\mathbb{S}^2)$ 空间上的结构. $L^2(\mathbb{S}^2)$ 上的内积定义为

$$\langle f,g\rangle=\int_{\mathbb{S}^2}fg\,\mathrm{d}\Omega_2=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\theta,\varphi)g(\theta,\varphi)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi.$$

其中 $f,g\in L^2(\mathbb{S}^2)$, $\mathrm{d}\Omega_2$ 是 $\mathbb{S}^2$ 上的体积形式. 使用这个内积, 空间 $L^2(\mathbb{S}^2)$ 是一个 Hilbert 空间. 可以证明 Laplace 算子 $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ 相对于这个内积是自伴算子. 因为当 $l_1\ne l_2$ 的时候, 函数 $Y_{l_1m_1}$ 和 $Y_{l_2m_2}$ 是对应于不同特征值 $-l_1(l_1+1)$ 和 $-l_2(l_2+1)$ 的特征函数, 所以它们是正交的, 也即

$$\langle Y_{l_1m_1},Y_{l_2m_2}\rangle=0,\quad l_1\ne l_2.$$

同样不难证明对于固定的 l, 有

$$\langle Y_{lm_1},Y_{lm_2}\rangle=\delta_{m_1m_2}.$$

也就是说, 函数 Y_{lm} 构成了一个正交函数系, 我们记 $\mathcal{H}_l(\mathbb{S}^2)$ 表示由这些函数张成的 $(2l+1)$-维空间. 总的来说, $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ 的特征值仅有 $-l(l+1)$, 并且对应的特征空间为 $E_l=\mathcal{H}_l(\mathbb{S}^2)$, 由基函数 Y_l^m 张成, 其中 $-l\le m\le l$. 与圆上的情况类似, 我们有

$$L^2(\mathbb{S}^2)=\bigoplus_{l=0}^{\infty}\mathcal{H}_l(\mathbb{S}^2).$$

即任取函数 $f \in L^2(\mathbb{S}^2)$, 都可以唯一表示为

$$f = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{-l \le m \le l} a_{lm} Y_{lm},$$

这被称为**球面上的 Fourier 分解**. 此时 Fourier 系数计算为

$$a_{lm} = \langle f, Y_{lm} \rangle = \int_{\mathbb{S}^2} f(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta, \varphi) \, \mathrm{d}\Omega_2.$$

当然, 我们也有对应的 $\mathbb{R}^3$ 上的齐次球谐函数 $H_l^m(r, \theta, \varphi)$:

$$H_l^m(r, \theta, \varphi) = r^l Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

可以证明 H_l^m 在直角坐标 xyz 下总可以表示为齐次多项式! 这表明: Laplace 算子 $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ 的特征函数 (球谐函数) 是 $\mathbb{R}^3$ 上齐次调和多项式的限制. 下面是一些低次的齐次调和多项式:

$$\begin{aligned}
&k = 0 \qquad 1 \\
&k = 1 \qquad x,\ y,\ z \\
&k = 2 \qquad x^2 - y^2,\ x^2 - z^2,\ xy,\ xz,\ yz \\
&k = 3 \qquad x^3 - 3xy^2,\ 3x^2y - y^3,\ x^3 - 3xz^2,\ 3x^2z - z^3,\ y^3 - 3yz^2,\ 3y^2z - z^3,\ xyz
\end{aligned}$$

我们也可以定义对应的复球谐函数 $Y_l^m : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{C}$, 其中 $-l \le m \le l$:

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = N_l^m P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi},$$

其与实球谐函数的关系为

$$Y_l^m = \begin{cases} \dfrac{(-1)^m}{\sqrt{2}} \left(Y_{l|m|} + i Y_{l,-|m|} \right), & m > 0, \\ Y_{l0}, & m = 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \left(Y_{l|m|} - i Y_{l,-|m|} \right), & m < 0. \end{cases}$$

考虑复 Hilbert 空间 $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}^2)$, 内积由 Hermite 内积定义:

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{S}^2} f \bar{g} \, \mathrm{d}\Omega_2.$$

此时, 复球谐函数 Y_l^m 也是 $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}^2)$ 上 Laplace 算子 $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ 的特征值 $-l(l+1)$ 的特征函数, 并且是正交归一的.

3 一点李群表示论

定义 3.1. 李群 G 的一个表示指的是一个向量空间 V 附带一个同态 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$. 李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个表示指的是一个向量空间 V 附带一个同态 $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$.

李群 G 的两个表示 V, W 之间的 G-线性映射指的是一个线性映射 $f : V \to W$ 与 G 的作用交换: 即对于任意 $g \in G$, 都有 $f \circ \rho_V(g) = \rho_W(g) \circ f$. 对李代数的表示同样有类似的定义. V 和 W 之间的所有 G-线性映射构成一个向量空间, 记为 $\mathrm{Hom}_G(V, W)$. 类似的, 李代数的表示之间的线性映射构成向量空间 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)$.

不加说明的情况下, 总是假设 V 是复向量空间, 此时 $G \to \mathrm{GL}(V)$ 理解为一个光滑映射, $\mathrm{GL}(V)$ 是 $2n^2$-维光滑流形.

李群表示和李代数表示之间有如下重要联系.

定理 3.2. 令 G 是李群，有李代数 $\mathfrak{g}$.

(1) 每个表示 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ 都定义了一个李代数表示 $\rho_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$，并且每个 G-线性映射也是 $\mathfrak{g}$-线性映射.

(2) 如果 G 是连通并且单连通的，那么 $\rho \mapsto \rho_*$ 给出了李群表示与李代数表示之间的一一对应，特别的，$\mathfrak{g}$ 的每个表示都可以唯一提升为 G 的一个表示.

这是一个非常重要的定理, 因为李代数作为有限维向量空间往往更容易处理. 例如, 这个定理表明 $\mathrm{SU}(2)$ 的表示和 $\mathfrak{su}(2)$ 的表示相同, 而 $\mathfrak{su}(2)$ 是一个 3 维的实向量空间.

这个定理也可以用于研究连通但是不是单连通的李群的表示. 实际上, 对于这样的李群 G, 存在一个单连通的李群 $\tilde{G}$ 使得 $G = \tilde{G}/Z$, 其中 $Z \subseteq G$ 是离散的中心子群. 因此, G 的表示和 $\tilde{G}$ 的满足 $\rho(Z) = \mathrm{id}$ 的表示相同. 一个非常重要的例子就是二重覆盖 $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$.

引理 3.3. 令 $\mathfrak{g}$ 是实李代数，$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 是它的复化. 那么 $\mathfrak{g}$ 的任意复表示都可以提升为 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 的表示，并且 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(V, W)$.

Proof. 令 $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个复表示. 延拓为 $\rho(x + iy) = \rho(x) + i\rho(y)$, 这成为 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 的一个表示. □

我们重点关注 $\mathfrak{su}(2)$ 和 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. $\mathfrak{su}(2)$ 的基（作为实向量空间）由 Pauli 矩阵给出:

$$i\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad i\sigma_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

满足对易关系

$$[i\sigma_1, i\sigma_2] = 2i\sigma_3, \quad [i\sigma_2, i\sigma_3] = 2i\sigma_1, \quad [i\sigma_3, i\sigma_1] = 2i\sigma_2.$$

$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的基（作为复向量空间）为

$$E=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad H=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

满足对易关系

$$[H,E]=2E,\quad [H,F]=-2F,\quad [E,F]=H.$$

由于 $E=\frac{1}{2}(i\sigma_2-i(i\sigma_1))$，$F=\frac{1}{2}(-i\sigma_2-i(i\sigma_1))$ 以及 $H=-i(i\sigma_3)$，所以 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 是 $\mathfrak{su}(2)$ 的复化. 根据前面的结论，$\mathfrak{su}(2)$ 的表示和 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的表示是一样的. 同时 SU(2) 和 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 都是连通且单连通的李群，所以它们的表示也和 $\mathfrak{su}(2)$ 的表示是一一对应的. 也就是说，研究 SU(2), $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, $\mathfrak{su}(2)$ 和 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的表示是等价的，我们只需要选择其中一个来研究即可.

定义 3.4. 令 V 是 G（或者 $\mathfrak{g}$）的一个表示，如果子空间 $W\subseteq V$ 满足：对于任意 $g\in G$，有 $\rho(g)W\subseteq W$（或者对于任意 $x\in\mathfrak{g}$，有 $\rho(x)W\subseteq W$），那么称 W 是 V 的一个子表示. 如果 V 没有非平凡的子表示（即 V 的子表示只有 0 和 V），那么称 V 是不可约的.

例如 $\mathbb{C}^n$ 考虑为 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ 的表示的时候，是不可约的. 因为可以证明，对于任意非零向量 $v\in\mathbb{C}^n$，都存在一个行列式为 1 的矩阵 $A\in\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$，使得 Av 是任意一个标准基向量. 因此，任意非零子空间 $W\subseteq\mathbb{C}^n$ 都包含所有的标准基向量，所以 $W=\mathbb{C}^n$.

对于 G 或者 $\mathfrak{g}$ 的两个表示 V 和 W，它们的直和 $V\oplus W$ 也是一个表示，只需要定义 G 在 $V\oplus W$ 上的作用为

$$\rho_{V\oplus W}(g)(v,w)=(\rho_V(g)v,\rho_W(g)w).$$

定义 3.5. 一个表示如果同构于若干不可约表示的直和，即存在不可约表示 V_i 使得 $V\simeq\bigoplus_i V_i$，那么称它是完全可约的.

通常来说，我们可以把直和项中同构的空间合并，记为 $V\simeq\bigoplus n_iV_i$，其中 V_i 是两两不同构的不可约表示，n_i 是它们的重数.

令 $G=\mathbb{R}$，那么 $\mathfrak{g}=\mathbb{R}$. 此时 $\mathfrak{g}$ 的表示就是一个向量空间 V 附带线性映射 $\mathbb{R}\to\mathrm{End}(V)$，显然，这样的映射一定形如 $t\mapsto tA$，其中 $A\in\mathrm{End}(V)$. 所以对应的 $\mathbb{R}$ 的表示一定形如 $t\mapsto\exp(tA)$. 也就是说，分类 $\mathbb{R}$ 的表示等价于分类线性映射 $V\to V$. 这样的分类可以通过 Jordan 标准型完成. 如果 v 是 A 的一个特征向量，那么一维空间 $\mathbb{C}v\subseteq V$ 在 A 的作用下是不变的，所以 $\mathbb{C}v$ 是 V 的一个子表示. 因此，$\mathbb{R}$ 的任意大于 1 维的表示都有非平凡的子表示，也即 $\mathbb{R}$ 的不可约表示都是 1 维的. 因此，把表示 $t\mapsto\exp(tA)$ 写成一些不可约表示的直和等价于把矩阵 A 对角化. 所以 $\mathbb{R}$ 的表示完全可约当且仅当矩阵 A 可对角化.

引理 3.6. 令 $\rho: G\to\mathrm{GL}(V)$ 是 G（或者 $\mathfrak{g}$）的表示，$A: V\to V$ 是可对角化的 G-线性映射. 令 $V_\lambda\subseteq V$ 是 A 的特征值 λ 的特征空间，那么 V_λ 是一个子表示，所以 $V=\bigoplus V_\lambda$ 是表示的一个直和分解.

Proof. 任取 $v \in V_\lambda$, 那么 $Av = \lambda v$. 对于任意 $g \in G$, 有

$$A(\rho(g)v) = \rho(g)(Av) = \rho(g)(\lambda v) = \lambda(\rho(g)v),$$

所以 $\rho(g)v \in V_\lambda$, 也即 V_λ 是一个子表示. A 可对角化意味着 $V = \bigoplus V_\lambda$, 所以这是一个直和分解. □

引理 3.7 (Schur 引理).

(1) 令 V 是 G 的一个不可约复表示，那么 $\mathrm{Hom}_G(V, V) = \mathbb{C}\mathrm{id}$，即 G 的不可约表示的自同态只有数乘同态.

(2) 如果 V 和 W 是两个不同构的不可约复表示，那么 $\mathrm{Hom}_G(V, W) = 0$.

类似的结果对于李代数 $\mathfrak{g}$ 也成立.

Proof. 如果 $\Phi : V \to W$ 是 G-线性映射, 那么 $\ker\Phi$ 和 $\mathrm{im}\,\Phi$ 分别是 V 和 W 的子表示. 如果 V 不可约, 那么 $\ker\Phi$ 是 V 或者 0, 所以 Φ 要么是 0, 要么是单射. 同样地, 如果 W 不可约, 那么 $\mathrm{im}\,\Phi$ 是 0 或者 W, 所以 Φ 要么是 0, 要么是满射.

因此, 如果 V 和 W 不同构并且都不可约, 那么 Φ 只能是 0, 所以 $\mathrm{Hom}_G(V, W) = 0$. 如果 V 不可约, 那么 $\Phi : V \to V$ 要么是 0, 要么是同构. 设 λ 是 Φ 的一个特征值, 那么 $\Phi - \lambda\mathrm{id}$ 不是同构, 所以只能是 0, 也即 $\Phi = \lambda\mathrm{id}$. □

Schur 引理有下述重要推论.

命题 3.8. 如果 G 是交换群，那么 G 的任意不可约复表示都是 1 维的. 类似地，如果 $\mathfrak{g}$ 是交换李代数，那么 $\mathfrak{g}$ 的任意不可约复表示都是 1 维的.

Proof. 设 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ 是不可约复表示, 任取 $g \in G$, 那么 $\rho(g) : V \to V$ 是 G-线性映射. 因为对于任意 $h \in G$ 和 $v \in V$, 都有 $\rho(g)(\rho(h)v) = \rho(gh)v = \rho(hg)v = \rho(h)(\rho(g)v)$. 根据 Schur 引理, $\rho(g) = \lambda_g\mathrm{id}$, 其中 $\lambda_g \in \mathbb{C}$. 而 V 不可约, 所以 V 是 1 维的. □

还是考虑 $G = \mathbb{R}$. 我们已经知道 $\mathbb{R}$ 的不可约表示都是 1 维的. 实际上, 任意 1 维表示对应的李代数表示都是形如 $a \mapsto \lambda a$ 的映射, 其中 $\lambda \in \mathbb{C}$. 因此, $\mathbb{R}$ 的任意不可约表示都形如 V_λ, 其中 $\lambda \in \mathbb{C}$ 并且 V_λ 是 1 维的复向量空间, 附带表示作用 $\rho(a) = e^{\lambda a}$.

类似地, 我们可以描述 $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 的不可约表示. 此时, 任意表示 $\tau : \mathbb{S}^1 \to \mathrm{GL}(V)$ 都可以通过商映射 $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ 提升为 $\mathbb{R}$ 的表示 $\tau \circ \pi$. 并且对于任意 $a \in \mathbb{Z}$ 有 $\tau \circ \pi(a) = \tau(1) = \mathrm{id}$. 所以说 $\mathbb{S}^1$ 的表示必须是 $\mathbb{R}$ 的满足 $\rho(a) = \mathrm{id}$ 的表示. 因此, $\mathbb{S}^1$ 的不可约表示都是 1 维的, 形如 V_k, 其中 $k \in \mathbb{Z}$ 并且 V_k 是 1 维复向量空间, 附带表示作用 $\tau \circ \pi(x) = e^{2\pi i k x}$, 或者说 $\tau(z) = z^k$.

4 Peter–Weyl 定理

定义 4.1. 一个李群 G 的复表示 V 如果存在一个 G–不变的 Hermite 内积，即对于任意 $g \in G$ 和 $v, w \in V$，都有

$$\langle \rho(g)v, \rho(g)w \rangle = \langle v, w \rangle,$$

那么称 V 是酉表示. 类似地，一个李代数 $\mathfrak{g}$ 的复表示 V 如果存在一个 $\mathfrak{g}$–不变的 Hermite 内积

$$\langle \rho(x)v, w \rangle + \langle v, \rho(x)w \rangle = 0, \quad \forall x \in \mathfrak{g},\ v, w \in V,$$

那么称 V 是酉表示.

酉表示的重要性体现在下面的定理.

定理 4.2. 每个酉表示都是完全可约的.

Proof. 对 V 的维数归纳. 对于 $\dim V = 1$ 的情况, 显然成立. 假设对于 $\dim V < n$ 的情况成立. 若 $\dim V = n$, 如果 V 是不可约的, 那么结论成立. 否则, 存在非平凡子表示 $W \subseteq V$, 那么 $V = W \oplus W^\perp$. 如果 $v \in W^\perp$, 那么任取 $w \in W$, 有 $\langle gv, w \rangle = \langle v, g^{-1}w \rangle = 0$, 所以 $gv \in W^\perp$, 所以 $W^\perp$ 也是 V 的子表示. 根据归纳假设, W 和 $W^\perp$ 都是完全可约的, 所以 V 也是完全可约的. 对于李代数的情况同理. □

对于有限群而言, 可以证明有限群的任意表示都是酉表示. 其中需要对 G 上的函数平均化处理得到一个 G-不变的内积, 从而得到酉表示结构. 然而, 对于无限群, 这种平均并不能通过求和完成, 所以我们需要引入 Haar 测度.

定义 4.3. 李群 G 上的一个右 Haar 测度指的是 G 上的一个 Borel 测度 $\mathrm{d}g$，其在右平移作用下不变：即对于任意 Borel 集合 $E \subseteq G$ 和任意 $h \in G$，都有 $\mathrm{d}g(Eh) = \mathrm{d}g(E)$.

显然右 Haar 测度等价于对于任意 $h \in G$ 和可积函数 f, 有 $\int f(gh)\,\mathrm{d}g = \int f(g)\,\mathrm{d}g$. 类似地可以定义左 Haar 测度.

对于紧李群而言, 从微分几何中的知识可知, G 上存在唯一一个双不变（同时左不变和右不变）的体积形式 ω, 使得 $\int_G \omega = 1$. 这个体积形式可以构造一个双不变的 Haar 测度 $\mathrm{d}g$, 满足对于任意连续函数 f, 都有 $\int_G f\,\mathrm{d}g = \int_G f\omega$.

定理 4.4. 令 G 是一个紧李群，那么 G 的任意表示都是酉表示并且是完全可约的.

Proof. 令 $B(v, w)$ 是 V 上的一个 Hermite 内积, 将其平均化, 定义

$$\tilde{B}(v, w) = \int_G B(gv, gw)\,\mathrm{d}g.$$

根据 Haar 测度的性质, $\tilde{B}$ 是一个 G-不变的 Hermite 内积, 所以 V 是酉表示. □

利用这个定理, 紧李群的任意表示都可以写成不可约表示的直和 $V \simeq \bigoplus n_i V_i$, 其中 $n_i \in \mathbb{Z}$, V_i 是两两不同构的不可约表示. 下面我们研究如何构造这个直和分解.

令 v_i 是 V 的一组基, 将映射 $\rho(g): V \to V$ 在这组基下表示为矩阵 $\rho(g) = (\rho_{ij}(g))$. 也就是说, 我们考虑 G 上的标量函数 $\rho_{ij}: G \to \mathbb{C}$, 这被称为矩阵系数.

定理 4.5.

(1) 令 V, W 是 G 的不同构的不可约表示. 选取基 $v_i \in V$ $(i = 1, \dots, n)$ 和 $w_a \in W$ $(a = 1, \dots, m)$. 那么矩阵系数 ρ_{ij}^V 和 ρ_{ab}^W 是正交的: $\langle \rho_{ij}^V, \rho_{ab}^W \rangle = 0$, 其中 $C^\infty(G, \mathbb{C})$ 上的内积定义为

$$\langle f, h \rangle = \int_G f(g)\overline{h(g)}\,\mathrm{d}g.$$

(2) 令 V 是 G 的不可约表示. 选取基 $v_i \in V$ 是一个相对于某个 G–不变内积的正交基. 那么矩阵系数 ρ_{ij}^V 是两两正交的并且每个的模长平方为 $1/\dim V$:

$$\langle \rho_{ij}^V, \rho_{kl}^V \rangle = \frac{\delta_{ik}\delta_{jl}}{\dim V}.$$

Proof. 令 v_i, w_a 分别是 V 和 W 的正交基. 定义线性映射 $E_{ai}: V \to W$ 满足 $E_{ai}(v_i) = w_a$, 并且 $E_{ai}(v_j) = 0$ 对于 $j \neq i$. 考虑函数

$$f = \int_G \rho^W(g) E_{ai} \rho^V(g^{-1})\,\mathrm{d}g : V \to W.$$

准确来说, f 指的是线性映射 $\rho^W(g)E_{ai}\rho^V(g^{-1})$ 在给定基下的矩阵元逐点积分得到的线性映射. 由于对于任意 $h \in G$, 都有那么任取 $h \in G$, 由于 Haar 测度的左右不变性, 所以

$$\rho^W(h) f \rho^V(h^{-1}) = \int_G \rho^W(hg) E_{ai} \rho^V(g^{-1}h^{-1})\,\mathrm{d}g = f,$$

所以 f 是 G-线性映射. 根据 Schur 引理, $f = 0$. 又因为 ρ 一定是酉表示, 所以 $\rho(g^{-1}) = \overline{\rho(g)^T}$, 所以

$$\int_G \rho^W(g) E_{ai} \overline{\rho^V(g)^T}\,\mathrm{d}g = 0.$$

那么对于任意 (b, j)-矩阵元, 有

$$\int_G \rho_{ba}^W(g)\overline{\rho_{ji}^V(g)}\,\mathrm{d}g = 0,$$

这就证明了在正交基情况下的第一点. 对于一般的基, 只需要使用基变换便可得出结论.

对于第二点, 只需要定义 $E_{ki}: V \to V$ 满足 $E_{ki}(v_i) = v_k$, 并且 $E_{ki}(v_j) = 0$ 对于 $j \neq i$. 同样地, 定义

$$f = \int_G \rho^V(g) E_{ki} \rho^V(g^{-1})\,\mathrm{d}g : V \to V.$$

根据 Schur 引理, $f=\lambda\mathrm{id}$. 注意到 $\delta_{ki}=\operatorname{tr}E_{ki}=\operatorname{tr}f=\operatorname{tr}(\lambda\mathrm{id})=\lambda\dim V$. 计算 f 的 (l,j)-矩阵元, 应该等于 $\lambda\delta_{lj}=\delta_{lj}\delta_{ki}/\dim V$, 所以

$$\int_G \rho^V_{lk}(g)\overline{\rho^V_{ji}(g)}\,\mathrm{d}g=\frac{\delta_{lj}\delta_{ki}}{\dim V}.$$ □

这表明不可约表示给出了一种构造群上函数的正交函数系的方法. 为了便于后续证明, 我们也可以给出一种不依赖于基的描述. 令 $v\in V$, $v^*\in V^*$, 我们可以定义群上的函数 $\rho_{v^*,v}(g)$ 为

$$\rho_{v^*,v}(g)=v^*\big(\rho(g)v\big).$$

如果给定一组基 v_i, 取 $v=v_j$ 以及 $v^*=v_i^*$, 那么上述定义就得到矩阵系数 $\rho_{ij}(g)$.

于是, 对于任意表示 V, 有映射

$$\begin{aligned} m:V^*\otimes V&\to C^\infty(G,\mathbb{C})\\ v^*\otimes v&\mapsto \rho_{v^*,v}. \end{aligned}$$

首先, 可以注意到 $V^*\otimes V$ 是 G-双模, 任取 $g_1,g_2\in G$, 作用为

$$(g_1,g_2)\cdot(v^*\otimes v)=(g_1v^*)\otimes(g_2v).$$

此外, 如果 V 是酉表示, 那么 V 上的内积给出了 V^* 上的内积, 从而 $V^*\otimes V$ 上的内积定义为

$$\langle v_1^*\otimes w_1, v_2^*\otimes w_2\rangle=\frac{1}{\dim V}\langle v_1^*,v_2^*\rangle\langle w_1,w_2\rangle.$$

定理 4.6. 令 $\widehat{G}$ 是 G 的不可约表示的同构类集合, 定义映射

$$m:\bigoplus_{V_i\in\widehat{G}}V_i^*\otimes V_i\to C^\infty(G,\mathbb{C})$$

为 $m(v^*\otimes v)(g)=v^*\big(\rho(g)v\big)$. 那么

(1) m 是 G–双模同态:

$$\begin{aligned} m\big((gv^*)\otimes v\big)&=L_g\big(m(v^*\otimes v)\big),\\ m\big(v^*\otimes(gv)\big)&=R_g\big(m(v^*\otimes v)\big). \end{aligned}$$

其中 L_g,R_g 分别是 $C^\infty(G,\mathbb{C})$ 上的左作用和右作用: $(L_gf)(h)=f(g^{-1}h)$, $(R_gf)(h)=f(hg)$.

(2) m 保内积.

Proof. (1) 直接计算得

$$\begin{aligned}\big(L_g m(v^*\otimes v)\big)(h) &= m(v^*\otimes v)(g^{-1}h) = v^*\big(\rho(g^{-1}h)v\big)\\ &= (gv^*)\big(\rho(h)v\big) = m\big((gv^*)\otimes v\big)(h),\end{aligned}$$

另一个等式类似.

(2) 直接利用定理 4.5 即可. □

推论 4.7. 映射 m 是单射.

如果我们把直和进行适当的完备化, 就可以得到 m 还是一个满射, 即: 群上的任意函数都可以被矩阵系数的线性组合逼近. 这就是 Peter-Weyl 定理.

定理 4.8 (Peter–Weyl 定理). 令 $\widehat{G}$ 是 G 的不可约表示的同构类集合，上述映射

$$m:\widehat{\bigoplus_{V_i\in\widehat{G}}} V_i^*\otimes V_i \to L^2_{\mathbb{C}}(G)$$

是同构映射. 其中 $\widehat{\bigoplus}$ 是直和在 $L^2_{\mathbb{C}}(G)$ 空间中的闭包，$L^2_{\mathbb{C}}(G)$ 是 G 相对于 Haar 测度的平方可积复函数空间.

令 $G=\mathbb{S}^1=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. $\mathbb{S}^1$ 上的 Haar 测度就是 $\mathrm{d}\theta$, 并且 G 的不可约表示可以由 $\mathbb{Z}$ 记录为: 对于每个 $k\in\mathbb{Z}$, 有一维不可约表示 V_k 附带表示作用 $\rho_k(e^{2\pi i\theta})=e^{2\pi ik\theta}$. 因此, 对应的矩阵系数函数就是 ρ_k 本身.

那么定理 4.5 的正交性告诉我们

$$\int_0^1 e^{2\pi ik\theta}\overline{e^{2\pi il\theta}}\,\mathrm{d}\theta = \delta_{kl}.$$

于是 Peter-Weyl 定理告诉我们, 任意平方可积函数 $f\in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}^1)$ 都可以被 $\{e^{2\pi ik\theta}\mid k\in\mathbb{Z}\}$ 的线性组合逼近. 这就是 Fourier 级数的内容.

5 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 和 $\mathfrak{so}(3)$ 的表示

定理 5.1. $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的任意表示都是完全可约的.

Proof. 由于 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 是 $\mathfrak{su}(2)$ 的复化, 并且 SU(2) 是单连通的, 所以 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的表示和紧李群 SU(2) 的表示是一一对应的. 根据前面的定理, SU(2) 的任意表示都是完全可约的, 所以 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的任意表示也是完全可约的. □

回顾 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 有基 E,F,H, 满足对易关系

$$[H,E]=2E,\quad [H,F]=-2F,\quad [E,F]=H.$$

对 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 表示的研究的关键在于对角矩阵 H.

定义 5.2. 令 V 是 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的一个表示. 向量 $v\in V$ 被称为是权 $\lambda\in\mathbb{C}$ 的, 如果 v 是 H 的表示的特征值 λ 的特征向量: 即 $Hv=\lambda v$. 我们记 $V[\lambda]\subseteq V$ 是权 λ 的向量构成的子空间.

引理 5.3. 我们有

$$\begin{aligned} EV[\lambda] &\subseteq V[\lambda+2],\\ FV[\lambda] &\subseteq V[\lambda-2]. \end{aligned}$$

Proof. 任取 $v\in V[\lambda]$, 那么

$$HEv=(EH+[H,E])v=E(Hv)+2Ev=(\lambda+2)Ev,$$

所以 $Ev\in V[\lambda+2]$. 类似地可以证明 $FV[\lambda]\subseteq V[\lambda-2]$. □

定理 5.4. $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的每个有限维表示 V 都可以写为

$$V=\bigoplus_{\lambda}V[\lambda],$$

这个分解被称为 V 的权分解.

Proof. 因为 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的每个表示都是完全可约的, 所以我们可以假设 V 是不可约的. 令 $V'=\sum_\lambda V[\lambda]$ 是 H 的所有特征空间的和. 由于 H 的不同特征值对应的特征向量是线性无关的, 所以 V' 是直和. 根据前面的引理, V' 在 E,F,H 的作用下保持不变, 所以是 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的子表示. 而 $V'\neq 0$, V 不可约, 所以 $V'=V$. □

下面, 令 V 是 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的一个不可约表示. 令 λ 是 V 的一个权, 并且在下面的意义上是最大的: 对于任意权 λ', 有 $\Re\lambda\geq\Re\lambda'$. 这样的权被称为最高权, 向量 $v\in V[\lambda]$ 被称为最高权向量.

引理 5.5. 令 $v\in V[\lambda]$ 是 V 的一个最高权向量.

(1) $Ev=0$.

(2) 令 $v^k=F^kv/k!\in V[\lambda-2k]$, 其中 $k\geq 0$, 那么

$$\begin{aligned} Hv^k &= (\lambda-2k)v^k,\\ Fv^k &= (k+1)v^{k+1},\\ Ev^k &= (\lambda-k+1)v^{k-1}\ (k>0). \end{aligned}$$

Proof. 由于 $Ev \in V[\lambda+2]$, 而 λ 是最高权, 所以 $Ev = 0$. 对于第二点, Fv^k 根据定义即可计算. 由于 $Hv^k = HF^kv/k!$, 又因为 $F^kv \in V[\lambda-2k]$, 所以 $Hv^k = (\lambda-2k)F^kv/k! = (\lambda-2k)v^k$. 对于 Ev^k. 直接计算得 $k=1$ 的时候有

$$Ev^1 = EFv = [E,F]v + FEv = Hv + 0 = \lambda v.$$

然后归纳得

$$\begin{aligned} Ev^{k+1} &= \frac{1}{k+1}EFv^k = \frac{1}{k+1}(Hv^k + FEv^k) \\ &= \frac{1}{k+1}\Big((\lambda-2k)v^k + (\lambda-k+1)Fv^{k-1}\Big) \\ &= \frac{1}{k+1}\Big((\lambda-2k)v^k + (\lambda-k+1)kv^k\Big) = (\lambda-k)v^k. \end{aligned}$$

□

当 V 是有限维的, 只有有限多个 v^k 不为零. 但是, 考虑 V 是有基 v^k 的无限维空间的商更方便.

引理 5.6. 令 $\lambda \in \mathbb{C}$，定义 M_λ 是有基 $v^0, v^1, \ldots$ 的无限维向量空间.

(1) 引理 5.5 的法则定义了 M_λ 上的一个 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-表示结构.

(2) 如果 V 是 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的有限维不可约表示，其包含一个非零的最高权 λ 的最高权向量，那么 $V = M_\lambda/W$，其中 W 是 M_λ 的一个子表示.

Proof. (1) 直接利用引理 5.5 的计算即可. (2) 令 $v \in V[\lambda]$ 是最高权向量, 定义映射 $\phi: M_\lambda \to V$ 为 $v^k \mapsto \frac{1}{k!}F^kv$, 那么 ϕ 是 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-线性的并且是满射. 所以 $V = M_\lambda/\ker\phi$. □

现在我们可以证明本节的主要定理.

定理 5.7.

(1) 对于任意 $n \geq 0$，令 V_n 是基 $v^0, \ldots, v^n$ 张成的有限维向量空间. 定义 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的作用为

$$\begin{aligned} Hv^k &= (n-2k)v^k, \\ Fv^k &= (k+1)v^{k+1}, \quad k<n;\ Fv^n = 0, \\ Ev^k &= (n-k+1)v^{k-1}, \quad k>0;\ Ev^0 = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

那么 V_n 是 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的一个不可约表示，我们称为最高权为 n 的表示. 显然向量 v^k 具有权 $n-2k$.

(2) 对于 $n \neq m$，表示 V_n 和 V_m 不同构.

(3) $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的任意有限维不可约表示同构于某个 V_n.

Proof. 首先考虑无限维表示 M_λ. 如果 $\lambda = n$ 是非负整数, 考虑 $v^{n+1}, v^{n+2}, \ldots$ 张成的子空间 $M' \subseteq M_n$.显然 M' 在 H 和 F 的作用下保持不变.对于 E 的作用,有 $Ev^{n+1} = (n+1-(n+1))v^n = 0 \in M'$, 所以 M' 在 E 的作用下也保持不变, 所以 M' 是 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的子表示.

因此, 商空间 M_n/M' 是 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的一个有限维表示. 显然, 其有基 $v^0, \ldots, v^n$ 并且 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 在基上的作用由 (4) 给出. 这个表示的不可约性容易证明: 任意子表示都由 $v^0, \ldots, v^n$ 的某个子集张成, 但是很显然 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的作用可以从任意一个 v^k 得到所有的 $v^0, \ldots, v^n$. 因此, V_n 是 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的一个不可约有限维表示. 因为 $\dim V_n = n+1$, 所以 V_n 是两两不同构的.

为了证明任意不可约表示都有这种形式. 令 V 是 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的一个不可约表示, $v \in V[\lambda]$ 是最高权向量. 那么引理 5.6 表明 V 是 M_λ 的一个商. 换句话说, 其由 $v^k = (F^k/k!)v$ 张成.

因为 v^k 有不同的权, 所以如果它们非零, 那么一定是线性无关的. 另一方面, V 是有限维的, 因此只有有限多个 v^i 非零. 令 n 是最大的使得 $v^n \neq 0$ 的数, 也即 $v^{n+1} = 0$. 显然, 在 $v^0, \ldots, v^n$ 全都非零的情况下, 它们有不同的权, 所以线性无关, 所以构成 V 的一组基.

因为 $v^{n+1} = 0$, 所以必须有 $Ev^{n+1} = 0$. 另一方面, 又有 $Ev^{n+1} = (\lambda - n)v^n$, 因为 $v^n \neq 0$, 所以 $\lambda = n$ 是非负整数. 因此, V 必须有 (1) 中的形式. □

作为推论, 我们也给出 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的任意有限维表示的一些有用的信息.

定理 5.8. 令 V 是 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的有限维复表示.

(1) V 有一个整数权的权分解:

$$V = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V[n].$$

(2) $\dim V[n] = \dim V[-n]$. 此外, 对于 $n \geq 0$, 映射

$$E^n : V[n] \to V[-n], \quad F^n : V[-n] \to V[n]$$

是同构.

Proof. 由于 V 是完全可约的, 所以我们可以假设 V 是不可约的. 根据前面的定理, $V \simeq V_m$, 其中 $m \geq 0$ 是某个整数. 此时 v^0 是权为 m 的最高权向量, 根据 (4), V 的权分解为

$$V = V[m] \oplus V[m-2] \oplus \cdots \oplus V[-m].$$

这就证明了第一点. 对于第二点, 根据 (4), 对于任意 $0 \leq k \leq m$, 都有

$$E^{m-2k}v^k = (m-k+1)(m-k+2)\cdots(k+1)v^{m-k},$$

所以 $E^{m-2k} : V[m-2k] \to V[2k-m]$ 是同构. 类似地, $F^{m-2k} : V[2k-m] \to V[m-2k]$ 也是同构. □

下面我们可以研究 $\mathfrak{so}(3)$ 的表示. 利用 $\mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{so}(3)$ 和 $\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的同构, 我们可以得出 $\mathfrak{so}(3)_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的同构:

$$J_x \mapsto -\frac{i}{2}(E+F), \quad J_y \mapsto \frac{1}{2}(F-E), \quad J_z \mapsto -\frac{i}{2}H.$$

于是 $\mathfrak{so}(3)_{\mathbb{C}}$ 的不可约表示与 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的不可约表示一一对应. 并且 H 的特征值为整数 n 对应于 J_z 的特征值为 $-in/2$. 于是 $\mathfrak{so}(3)_{\mathbb{C}}$ 的任意有限维表示 V 都有权分解

$$V = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V[n],$$

其中 $V[n]$ 是 J_z 的特征值为 $-in/2$ 的特征子空间. 由于 $\mathfrak{so}(3)_{\mathbb{C}}$ 是 $\mathfrak{so}(3)$ 的复化, 所以 $\mathfrak{so}(3)$ 的表示与 $\mathfrak{so}(3)_{\mathbb{C}}$ 的表示是一一对应的, 也形如上面的权分解.

令 $\varphi : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ 是二重覆盖映射, 那么 $\mathfrak{so}(3)$ 的表示 ρ 如果能够提升为 $\mathrm{SO}(3)$ 的表示 $\tilde{\rho}$, 那么也可以提升为 $\mathrm{SU}(2)$ 的表示 $\tilde{\rho}\circ\varphi$. 于是必须有 $\tilde{\rho}\circ\varphi(-I) = \mathrm{id}_V$. 考虑 J_z 生成的单参数子群 $\gamma(t) = \exp(tJ_z)$, 当 $t = 2\pi$ 的时候, $\gamma(2\pi) = I$. φ 诱导的李代数同构满足 $-\sigma_3/2i \mapsto J_z$, 所以考虑 $\mathrm{SU}(2)$ 中的道路 $\tilde{\gamma}(t) = \exp(-t\sigma_3/2i)$,那么 $\varphi\circ\tilde{\gamma}(t) = \exp(tJ_z) = \gamma(t)$,于是 $\varphi\circ\tilde{\gamma}(2\pi) = \gamma(2\pi) = I$. 也即 $\tilde{\gamma}(2\pi)$ 表示三维空间中绕 z 轴旋转 2π, 由于 φ 的 $2:1$ 映射关系, 所以 $\tilde{\gamma}(2\pi) = -I$. 注意到 $\tilde{\rho}\circ\varphi$ 是 $\mathrm{SU}(2)$ 的表示, 所以

$$\mathrm{id}_V = \tilde{\rho}\circ\varphi(-I) = \tilde{\rho}\circ\varphi(\exp(-\pi\sigma_3/i)) = \exp(2\pi\rho(J_z)),$$

前面已经说明 $\rho(J_z)$ 在 $V[n]$ 上的特征值为 $-in/2$, 所以对于任意 $v \in V[n]$, 有

$$\exp(2\pi\rho(J_z))v = \exp\left(2\pi\cdot -\frac{in}{2}\right)v = (-1)^n v,$$

因此 n 必须为偶数, 才可能使得 ρ 能够提升为 $\mathrm{SO}(3)$ 的表示. 于是我们得到下面的关于 $\mathfrak{so}(3)$ 的表示的定理.

定理 5.9. $\mathfrak{so}(3)$ 的任意有限维表示 V 都有权分解

$$V = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V[n],$$

其中 $V[n]$ 是 J_z 的特征值为 $in/2$ 的特征子空间.

(1) $\dim V[n] = \dim V[-n]$. 此外，对于 $n \geq 0$，映射

$$(J_x + iJ_y)^n : V[n] \to V[-n], \quad (J_x - iJ_y)^n : V[-n] \to V[n]$$

是同构.

(2) 表示 V 能够提升为 $\mathrm{SO}(3)$ 的表示，当且仅当 $V[n] = 0$ 对于所有奇数 n.

6 球面上的 Laplace 算子

在本节, 我们应用李群和李代数的表示理论来研究球面 $\mathbb{S}^2$ 上的 Laplace 算子, 这是一个使用表示论研究系统对称性的典型例子.

令 $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的 Laplace 算子. 我们将其分为“径向部分”和“球面部分”.

在球坐标系 (r, θ, φ) 下, Laplace 算子有分解

$$\Delta = \Delta_{\mathbb{R}_+} + \frac{1}{r^2}\Delta_{\mathbb{S}^2},$$

具体形式如 (1) 式所示:

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathbb{R}_+} &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}, \\
\Delta_{\mathbb{S}^2} &= \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.
\end{aligned}$$

接下来重点关注球面部分 $\Delta_{\mathbb{S}^2}$.

回顾 $\mathfrak{so}(3)$ 的一组基为

$$J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

考虑 SO(3) 在 $\mathbb{R}^3$ 上的自然作用 $(A, x) \mapsto Ax$. 对于任意 $X \in \mathfrak{so}(3)$, 这诱导了 $\mathbb{R}^3$ 上的向量场

$$X_p^\# = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(tX)p = Xp,$$

于是 J_x, J_y, J_z 分别诱导了向量场

$$J_x^\# = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}, \quad J_y^\# = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}, \quad J_z^\# = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}.$$

滥用符号, 我们仍然记这些向量场为 J_x, J_y, J_z. 实际上可以检验 $X \mapsto X^\#$ 给出了 $\mathfrak{so}(3) \to \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ 的李代数的反同态. 此时向量场 J_x, J_y, J_z 在球坐标系下的表达式为

$$\begin{aligned}
J_x &= -\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}, \\
J_y &= \cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}, \\
J_z &= \frac{\partial}{\partial\varphi}.
\end{aligned}$$

直接计算得

$$
\begin{aligned}
J_x^2 &= \left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}+\cot\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}+\cot\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\\
&= \sin^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\sin\varphi\cos\varphi\cot\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta\,\partial\varphi}-\sin\varphi\cos\varphi\csc^2\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\\
&\quad+\sin\varphi\cos\varphi\cot\theta\frac{\partial^2}{\partial\varphi\,\partial\theta}+\cos^2\varphi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\\
&\quad+\cot^2\theta\cos^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}-\cot^2\theta\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi},
\end{aligned}
$$

同理有

$$
\begin{aligned}
J_y^2 &= \cos^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\sin\varphi\cos\varphi\cot\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta\,\partial\varphi}+\sin\varphi\cos\varphi\csc^2\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\\
&\quad-\sin\varphi\cos\varphi\cot\theta\frac{\partial^2}{\partial\varphi\,\partial\theta}+\sin^2\varphi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\\
&\quad+\cot^2\theta\sin^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\cot^2\theta\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi},
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
J_x^2+J_y^2+J_z^2 &= \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\cot^2\theta\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\\
&= \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}=\Delta_{\mathbb{S}^2}.
\end{aligned}
$$

这表明, 球面部分的 Laplace 算子可以用 $\mathfrak{so}(3)$ 的基表示为

$$
\Delta_{\mathbb{S}^2}=J_x^2+J_y^2+J_z^2.
$$

$\Delta_{\mathbb{S}^2}$ 可以视为 $C^\infty(\mathbb{S}^2)\to C^\infty(\mathbb{S}^2)$ 的线性映射, 我们需要寻找 $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ 的特征值和特征向量. 前面已经介绍过通过解微分方程的方法研究这一点, 从而导出了球面谐函数. 现在我们使用表示论的方法来研究这个问题. 首先我们需要利用 $\mathbb{S}^2$ 的对称性. 考虑群 SO(3) 在球面 $\mathbb{S}^2$ 上的自然作用, 这导出了 SO(3) 在 $C^\infty(\mathbb{S}^2)$ 上的作用, 定义为 $(g\cdot f)(x)=f(g^{-1}x)$. 因此 $C^\infty(\mathbb{S}^2)$ 可以作为 SO(3) 的一个表示空间, 表示作用为 $g\mapsto(f\mapsto f\circ g^{-1})$.

引理 6.1. $\Delta_{\mathbb{S}^2}:C^\infty(\mathbb{S}^2)\to C^\infty(\mathbb{S}^2)$ 与 SO(3) 的作用交换.

Proof. 可以通过求导直接计算得到结论，但是为了更好地理解表示论的观点，我们使用李代数的方法来证明，需要用到一些泛包络代数的知识．首先证明对于 $\mathfrak{so}(3)$ 的任意表示 V，算子

$C = \rho(J_x)^2 + \rho(J_y)^2 + \rho(J_z)^2$ 与 $\mathfrak{so}(3)$ 的作用交换, 也即任取 $X \in \mathfrak{so}(3)$, 都有 $[\rho(X), C] = 0$. 此时分别取 X 为基 J_x, J_y, J_z 即可. 以 $X = J_x$ 为例, 有

$$\begin{aligned}[J_x, J_x^2 + J_y^2 + J_z^2] &= [J_x, J_x^2] + [J_x, J_y^2] + [J_x, J_z^2] \\ &= 0 + [J_x, J_y^2] + [J_x, J_z^2],\end{aligned}$$

利用恒等式 $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$, 有

$$[J_x, J_y^2] = [J_x, J_y]J_y + J_y[J_x, J_y] = J_z J_y + J_y J_z,$$

同理, 有

$$[J_x, J_z^2] = [J_x, J_z]J_z + J_z[J_x, J_z] = -J_y J_z - J_z J_y,$$

所以

$$[J_x, J_x^2 + J_y^2 + J_z^2] = 0.$$

需要注意, 上述出现的所有乘法并不是在李代数 $\mathfrak{so}(3)$ 中的矩阵乘法, 而是泛包络代数中的形式乘法. 于是对于任意李代数表示 ρ 和 $X \in \mathfrak{so}(3)$, 有

$$[\rho(X), C] = \rho[X, J_x^2 + J_y^2 + J_z^2] = 0.$$

这意味着 C 属于结合代数 $\mathfrak{gl}(V)$ 的中心.

对于任意 SO(3) 的表示 π, 假设其对应李代数表示为 ρ, 那么有关系 $\pi \circ \exp = \exp \circ \rho$. 此时, 任取 $g \in \mathrm{SO}(3)$, 设 $g = \exp X$, 那么

$$\begin{aligned}\pi(g)C &= \pi(\exp X)C = \exp(\rho(X))C = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\rho(X)^k C \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} C\rho(X)^k = C\exp(\rho(X)) = C\pi(g).\end{aligned}$$

取 $V = C^\infty(\mathbb{S}^2), \pi(g)f = f \circ g^{-1}$, 那么 $\rho(X) = -X^\#$, 这就证明了 $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ 与 SO(3) 的作用交换. □

这意味着 $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ 是 SO(3)-线性映射, 所以其与 SO(3) 的表示之间有着密切的联系. 注意, 为了应用表示论的结论, 这里我们考虑的是复值函数空间 $C^\infty(\mathbb{S}^2)$. 但是, 由于 $C^\infty(\mathbb{S}^2)$ 是无限维的, 我们无法直接使用前面介绍的有限维表示论的结果 (例如 Schur 引理). 为了克服这个困难, 我们考虑多项式函数的子空间 P_n, 即所有 $\mathbb{S}^2$ 上的次数小于等于 n 的复值三元多项式函数构成的空间.

显然每个 P_n 都是 SO(3) 的有限维表示, 并且是 $\Delta_{\mathbb{S}^2}$-不变的 (也即 $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ 不会升高多项式的次数). 于是我们考虑 P_n 作为 SO(3) 的表示空间. 因此, 我们可以使用有限维表示论将 P_n 分解成不可约表示, 然后利用这一点寻找 $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ 在 P_n 中的特征值. 因为 $\bigcup_n P_n = P$ 是多项式函数空间, 其在 $C^\infty(\mathbb{S}^2)$ 中稠密, 所以研究 $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ 在 P 中的对角化等价于研究其在 $C^\infty(\mathbb{S}^2)$ 中的对角化.

因此, 我们的目标是将 P_n 分解成 SO(3) 的不可约表示的直和. 根据定理 5.9, 我们知道 SO(3) 的不可约表示必然形如 V_{2k}, 因此, 我们有分解

$$P_n = \bigoplus c_k V_{2k}.$$

为了寻找重数 c_k, 我们需要研究 J_z 的特征空间.

引理 6.2. 下面的函数构成 P_n 的一组基:

$$f_{p,k} = z^p\left(\sqrt{1-z^2}\right)^{|k|}e^{ik\varphi}, \quad p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, k \in \mathbb{Z}, p+|k| \leq n,$$

其中 φ 是 xy-平面中的方位角, 满足 $x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi, \rho=\sqrt{x^2+y^2}$.

Proof. 令 $u=x+iy=\rho e^{i\varphi}, v=x-iy=\rho e^{-i\varphi}$. 显然, 任意三元多项式 $P(x,y,z)$ 都可以写成 $P(u,v,z)$ 的形式. 而在球面上, 我们有 $1-z^2=x^2+y^2=uv$, 所以每个单项式 $z^k u^l v^m$ 都可以被写为仅涉及 z,u 或者 z,v 的形式. 因此, P_n 的每个元素都可以写为下述单项式的线性组合:

$$\begin{aligned}
&z^p,\\
&z^p u^k = z^p\rho^k e^{ik\varphi} = f_{p,k},\\
&z^p v^k = z^p\rho^k e^{-ik\varphi} = f_{p,-k},
\end{aligned}$$

其中 $p,k\in\mathbb{Z}_+$, 且 $p+k\leq n$. 因此 $\{f_{p,k}\}$ 张成 P_n.

然后说明这些函数线性无关. 假设

$$\sum a_{p,k}f_{p,k} = \sum_k a_k(z)e^{ik\varphi} = 0, \quad a_k(z) = \sum_p a_{p,k}z^p\left(\sqrt{1-z^2}\right)^{|k|}.$$

根据 Fourier 级数的唯一性, 对于每个 $k\in\mathbb{Z}$ 和 $z\in(-1,1)$, 我们有 $a_k(z)=0$, 所以 $a_k(z)$ 在 $(-1,1)$ 上有无穷多个零点. 由于 $a_k(z)$ 是一个多项式, 所以只能有有限多个零点, 因此只能是零多项式. 这说明对于每个 k, 都有 $a_{p,k}=0$, 所以这些函数线性无关. □

现在我们可以寻找 J_z 的特征空间的维数. 因为 J_z 是绕 z 轴旋转的无穷小生成元, 所以考虑柱坐标 z,ρ,φ 更加方便, 此时 $J_z=\partial/\partial\varphi$. 因此, 我们有

$$J_z f_{p,k} = ikf_{p,k},$$

于是 J_z 的特征值是 ik, 这对应 H 的权为 $2k$, 所以权空间 $P_n[2k]$ 由 $\{f_{p,k}\}_{0\leq p\leq n-|k|}$ 张成, 因此 $\dim P_n[2k] = n+1-|k|$. 为了得到重数 c_k, 我们需要下面的引理.

引理 6.3. 若 V 是 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的有限维表示, 那么 $V\simeq\bigoplus n_kV_k$, 并且 $n_k=\dim V[k]-\dim V[k+2]$. 此外, 还有 $\sum n_{2k}=\dim V[0]$, $\sum n_{2k+1}=\dim V[1]$.

Proof. 设 V 分解为不可约表示的直和

$$V \simeq \bigoplus_k n_k V_k.$$

其中每个 V_k 的权空间 $V_k[j]$ 的维数为

$$\dim V_k[j] = \begin{cases} 1, & j = k, k-2, \dots, -k; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

因此, V 的权空间 $V[j]$ 的维数为

$$\dim V[j] = \sum_{k \geq j,\, 2|(k-j)} n_k = n_j + n_{j+2} + n_{j+4} + \cdots ,$$

所以

$$\dim V[j] - \dim V[j+2] = n_j.$$

取 $j = 0$ 和 $j = 1$ 即得其余的结论. □

回到 SO(3) 的表示空间 P_n 上来,已经求得 $\dim P_n[2k] = n+1-|k|$,那么重数 $c_k = (k+1)-k = 1$, 因此 P_n 有分解

$$P_n \simeq V_0 \oplus V_2 \oplus V_4 \oplus \cdots \oplus V_{2n}.$$

现在寻找 $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ 在 P_n 上的特征值就变得十分简单.

由于 $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ 是 SO(3)-线性映射, 根据 Schur 引理, $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ 在每个不可约表示 V_{2m} 上是一个标量乘法算子. 为了确定这个标量, 我们只需要计算 $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ 在最高权向量 v^0 上的作用. 我们先把 $\Delta_{\mathbb{S}^2} = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ 写成 E, F, H 的形式:

$$J_x^2 + J_y^2 = \left(\frac{E+F}{2i}\right)^2 + \left(\frac{F-E}{2}\right)^2 = \frac{(F-E)^2 - (E+F)^2}{4} = -\frac{1}{2}(EF+FE),$$

因此

$$\Delta_{\mathbb{S}^2} = -\frac{1}{2}(EF+FE) - \frac{H^2}{4} = -\frac{1}{2}\left(EF + FE + \frac{H^2}{2}\right).$$

在最高权向量 v^0 上, 有 $Ev^0 = 0$, $Fv^0 = v^1$, $Hv^0 = 2mv^0$, 所以

$$\Delta_{\mathbb{S}^2} v^0 = -\frac{1}{2}\left(2mv^0 + 0 + \frac{(2m)^2}{2} v^0\right) = -m(m+1)v^0.$$

这表明 $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ 在 V_{2m} 上的特征值为 $-m(m+1)$. 综上所述, 我们得到了下面的定理.

定理 6.4. P_n 中的球面 Laplace 算子 $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ 的特征值为

$$\lambda_k = -k(k+1), \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

并且 λ_k 对应的特征空间的维数为 $\dim V_{2k} = 2k+1$.

我们也可以显式地写出 V_{2k} 的基向量 $v^0, \ldots, v^{2k}$ 对应的多项式函数. 由于 $J_z f_{p,k} = ikf_{p,k}$, 所以 v^0 对应于 $f_{p,k}$ 中的一个. 最高权向量 v^0 还满足 $Ev^0 = 0$, 也即 $f_{p,k}$ 需要满足

$$(J_x + iJ_y) f_{p,k} = 0,$$

也即

$$\left(z \left(i \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right) + (y - ix) \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(z^p (x+iy)^k \right) = 0,$$

简单计算可得 $p = 0$, 所以 v^0 对应于多项式函数 $f_{0,k} = (x+iy)^k$, 使用球坐标系并注意到 $r = 1$, 也即 $f_{0,k} = \sin^k \theta e^{ik\varphi}$, 这就是球谐函数 $Y_k^k(\theta, \varphi)$ (忽略归一化常数). 要得到其余的球谐函数, 只需要依次作用 F 计算 $v^1, \ldots, v^{2k}$ 即可. 由于 F 对应于 $J_y + iJ_x$, 所以 v^1 对应于多项式函数

$$\begin{aligned}
(J_y + iJ_x) f_{0,k} &= \left(\left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) + i \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \right) (x+iy)^k \\
&= \left(kz(x+iy)^{k-1} + kz(x+iy)^{k-1} \right) \\
&= 2kz(x+iy)^{k-1} = 2kf_{1,k-1},
\end{aligned}$$

这正好对应于球谐函数 (忽略归一化常数)

$$Y_k^{k-1}(\theta, \varphi) = \cos\theta \sin^{k-1}\theta e^{i(k-1)\varphi}.$$

以此类推, 可以得到所有的球谐函数. 总的来说, V_{2k} 的基向量 $v^0, \ldots, v^{2k}$ 对应的多项式函数为 $f_{0,k}, f_{1,k-1}, \ldots, f_{2k,-k}$. 然后让 k 从 0 取到 n, 就得到了 P_n 的一组由齐次多项式构成的基. 再进行正交化便可得到球谐函数的表达式. 最后, 我们说明 $C^\infty(\mathbb{S}^2)$ 中的特征函数必为多项式函数, 从而完成对 $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ 的刻画.

定理 6.5. $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ 的每个特征函数都是多项式.

Proof. 考虑平方可积空间 $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}^2)$, 因为 SO(3) 的作用保体积形式, 所以保 $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}^2)$ 中的内积. 这表明算子 J_x, J_y, J_z 是反 Hermite 算子, 所以 $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ 是自伴的.

令 $E_n \subseteq P_n$ 是 P_{n-1} 的正交补, 那么 E_n 也是 SO(3) 不变的. 由于 $P_n \simeq V_0 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_{2n}$, 所以 $E_n \simeq V_{2n}$, 所以 $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ 作用在 E_n 上是单位算子的 $\lambda_n = -n(n+1)$ 倍. 另一方面, 因为多项式空间在 L^2 中稠密, 所以有 Hilbert 直和分解

$$L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}^2) = \bigoplus_{n \geq 0} E_n.$$

如果 $f \in C^{\infty}(\mathbb{S}^2)$ 使得 $\Delta_{\mathbb{S}^2} f = \lambda f$, 那么要么对于所有的 n 都有 $\lambda \neq \lambda_n$, 这表明 $\langle f, E_n \rangle = 0$, 即 $f = 0$, 要么存在某个 n 使得 $\lambda = \lambda_n$, 这表明 $f \in E_n$. $\square$

References

[1] Jean Gallier. “Notes on Spherical Harmonics and Linear Representations of Lie Groups”. In: (Feb. 2009).

[2] Alexander A Kirillov. **An introduction to Lie groups and Lie algebras**. Vol. 113. Cambridge University Press, 2008.