
Contents

1	黎曼积分	1
1.1	黎曼积分回顾	1
1.2	黎曼积分还不够好	5
2	测度	7
2.1	\mathbb{R} 上的外测度	7
2.1.1	外测度的定义	7
2.1.2	外测度的良好性质	8
2.1.3	有界闭区间的外测度	9
2.1.4	外测度没有可加性	10
2.2	可测空间和函数	11
2.2.1	σ -代数	12
2.2.2	\mathbb{R} 的 Borel 子集	12
2.2.3	可测函数	13
2.3	测度及其性质	14
2.3.1	测度的性质	15

黎曼积分

1.1 黎曼积分回顾

定义 1.1. 设 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 是有界函数, P 是 $[a, b]$ 的一个划分 x_0, \dots, x_n , 定义 **黎曼下和** $L(f, P, [a, b])$ 和 **黎曼上和** $U(f, P, [a, b])$ 为

$$L(f, P, [a, b]) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f,$$

$$U(f, P, [a, b]) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f.$$

引理 1.2 (黎曼和不等式). 设 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 是有界函数, P, P' 是 $[a, b]$ 的两个划分, 且 P 确定的点列是 P' 确定的点列的一个子列 (即 P' 划分的更细), 那么

$$L(f, P, [a, b]) \leq L(f, P', [a, b]) \leq U(f, P', [a, b]) \leq U(f, P, [a, b]).$$

Proof. 假设 P 给出划分 x_0, \dots, x_n , P' 给出划分 x'_0, \dots, x'_N , 那么对于每个 $1 \leq i \leq n$, 都存在整数 k, m 使得 $x_{i-1} = x'_k < x'_{k+1} < \dots < x'_{k+m} = x_i$, 所以

$$\begin{aligned} (x_{i-1} - x_i) \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f &= \sum_{j=1}^m (x'_{k+j} - x'_{k+j-1}) \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \\ &\leq \sum_{j=1}^m (x'_{k+j} - x'_{k+j-1}) \inf_{[x'_{k+j-1}, x'_{k+j}]} f, \end{aligned}$$

这就表明 $L(f, P, [a, b]) \leq L(f, P', [a, b])$. 对于上和有类似的估计. \square

引理 1.3 (黎曼下和小于黎曼上和). 设 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 是有界函数, P, P' 是 $[a, b]$ 的两个划分, 那么

$$L(f, P, [a, b]) \leq U(f, P', [a, b]).$$

Proof. 令 P'' 是 P, P' 合并得到的划分, 那么

$$L(f, P, [a, b]) \leq L(f, P'', [a, b]) \leq U(f, P'', [a, b]) \leq U(f, P', [a, b]). \quad \square$$

定义 1.4. 设 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 是有界函数, 定义 f 的**黎曼下积分** $L(f, [a, b])$ 和**黎曼上积分** $U(f, [a, b])$ 分别为

$$L(f, [a, b]) = \sup_P L(f, P, [a, b]), \quad U(f, [a, b]) = \inf_P U(f, P, [a, b]).$$

其中上下确界取遍 $[a, b]$ 的所有划分 P .

命题 1.5 (黎曼下积分小于黎曼上积分). 设 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 是有界函数, 那么

$$L(f, [a, b]) \leq U(f, [a, b]).$$

Proof. 根据 **引理 1.3** 即得. □

定义 1.6. 对于闭区间上的有界函数, 如果其黎曼下积分和黎曼上积分相等, 那么我们就称它是**黎曼可积的**. 如果 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 是黎曼可积的, 那么定义**黎曼积分**为

$$\int_a^b f = L(f, [a, b]) = U(f, [a, b]).$$

例 1.7. 计算 $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ 的黎曼积分.

Solution. 记 P_n 是 $[0, 1]$ 的划分 $0, 1/n, 2/n, \dots, n/n = 1$, 那么黎曼下和

$$L(f, P_n, [0, 1]) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \inf_{[i/n, (i-1)/n]} f = \sum_{i=1}^n \frac{(i-1)^2}{n^3} = \frac{2n^2 - 3n + 1}{6n^2},$$

黎曼上和

$$U(f, P_n, [0, 1]) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sup_{[i/n, (i-1)/n]} f = \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^3} = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2},$$

于是

$$L(f, [0, 1]) \geq \sup_{n \geq 1} L(f, P_n, [0, 1]) = \sup_{n \geq 1} \frac{2n^2 - 3n + 1}{6n^2} = \frac{1}{3},$$

以及

$$U(f, [0, 1]) \leq \inf_{n \geq 1} U(f, P_n, [0, 1]) = \inf_{n \geq 1} \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} = \frac{1}{3},$$

所以

$$U(f, [0, 1]) \leq \frac{1}{3} \leq L(f, [0, 1]),$$

再结合 **命题 1.5**, 所以 f 黎曼可积, 并且

$$\int_0^1 f = \frac{1}{3}. \quad \blacksquare$$

定理 1.8 (连续函数黎曼可积). 闭区间上的实值连续函数是黎曼可积的.

Proof. 设 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, 那么 f 有界且一致连续. 与 例 1.7 的计算类似, 我们寻求一系列等距划分 P_n 进行计算即可.

由于 f 一致连续, 所以任取 $\varepsilon > 0$, 都存在 $\delta > 0$ 使得 $|x - y| < \delta$ 的时候有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. 此时存在 n 使得 $(b-a)/n < \delta$, 记 P_n 是 $[a, b]$ 的 n 等分划分, 那么

$$\begin{aligned} |L(f, P_n, [a, b]) - U(f, P_n, [a, b])| &\leq \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} \left| \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f - \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} \varepsilon = (b-a)\varepsilon, \end{aligned}$$

这表明

$$|L(f, [a, b]) - U(f, [a, b])| \leq |L(f, P_n, [a, b]) - U(f, P_n, [a, b])| \leq \varepsilon,$$

所以 $L(f, [a, b]) = U(f, [a, b])$, 即 f 黎曼可积. □

命题 1.9. 假设 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 黎曼可积, 那么

$$(b-a) \inf_{[a,b]} f \leq \int_a^b f \leq (b-a) \sup_{[a,b]} f.$$

Proof. 取 P 是平凡划分 $x_0 = a, x_1 = b$, 那么

$$(b-a) \inf_{[a,b]} f = L(f, P, [a, b]) \leq L(f, [a, b]) = \int_a^b f. \quad \square$$

1-1 设 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 是有界函数且对于某个 $[a, b]$ 的划分 P 有

$$L(f, P, [a, b]) = U(f, P, [a, b]),$$

证明 f 在 $[a, b]$ 上是常值函数.

Proof. 这表明我们有

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \left(\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \right) = 0,$$

这个求和项中每一项都大于等于 0, 所以必须有

$$\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f,$$

所以 f 在每个 $[x_{i-1}, x_i]$ 上都是常值函数, 即 f 在 $[a, b]$ 上是常值函数. □

1-2 设 $a \leq s < t \leq b$, 定义 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } s < x < t, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

证明 f 在 $[a, b]$ 上黎曼可积并且 $\int_a^b f = t - s$.

Proof. 设 P 是 $[s, t]$ 的任意划分, 那么 P 附带 a, b 构成 $[a, b]$ 的划分 P' , 此时有

$$L(f, P', [a, b]) = t - s = U(f, P', [a, b]),$$

所以 $L(f, [a, b]) \geq t - s \geq U(f, [a, b])$, 故 f 黎曼可积且 $\int_a^b f = t - s$. \square

1-3 设 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 是有界函数, 证明 f 是黎曼可积的当且仅当对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $[a, b]$ 的划分 P 使得

$$U(f, P, [a, b]) - L(f, P, [a, b]) < \varepsilon. \quad (1.1)$$

Proof. 若 f 黎曼可积, 那么 $L(f, [a, b]) = U(f, [a, b])$. 根据上下积分的定义, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 都存在划分 P 使得

$$L(f, P, [a, b]) > L(f, [a, b]) - \varepsilon/2, \quad U(f, P, [a, b]) < U(f, [a, b]) + \varepsilon/2,$$

故

$$U(f, P, [a, b]) - L(f, P, [a, b]) < \varepsilon.$$

反之, 若对于任意 $\varepsilon > 0$, 都存在划分 P 使得 (1.1) 式成立. 由于 $L(f, [a, b]) \geq L(f, P, [a, b])$ 以及 $U(f, [a, b]) \leq U(f, P, [a, b])$, 所以

$$U(f, [a, b]) - L(f, [a, b]) \leq U(f, P, [a, b]) - L(f, P, [a, b]) < \varepsilon,$$

即 $L(f, [a, b]) = U(f, [a, b])$, f 黎曼可积. \square

1-4 设 $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 黎曼可积, 证明 $f + g$ 黎曼可积, 并且

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Proof. 记 $\int_a^b f = I, \int_a^b g = J$. 任取 $\varepsilon > 0$, 那么存在划分 P 使得

$$I - \varepsilon < L(f, P, [a, b]) \leq U(f, P, [a, b]) < I + \varepsilon,$$

同理存在划分 P' 使得

$$J - \varepsilon < L(g, P', [a, b]) \leq U(g, P', [a, b]) < J + \varepsilon,$$

将划分 P, P' 合并, 得到划分 P'' 使得

$$\begin{aligned} I - \varepsilon &< L(f, P'', [a, b]) \leq U(f, P'', [a, b]) < I + \varepsilon, \\ J - \varepsilon &< L(g, P'', [a, b]) \leq U(g, P'', [a, b]) < J + \varepsilon. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} L(f + g, P'', [a, b]) &\geq L(f, P'', [a, b]) + L(g, P'', [a, b]) > I + J - 2\varepsilon, \\ U(f + g, P'', [a, b]) &\leq U(f, P'', [a, b]) + U(g, P'', [a, b]) < I + J + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

这就表明 $f + g$ 可积且 $\int_a^b (f + g) = I + J$. □

1.2 黎曼积分还不够好

黎曼积分有下列三个主要缺陷:

- 黎曼积分不能处理函数有太多不连续点的情况;
- 黎曼积分不能处理无界函数;
- 黎曼积分与极限的相容性不够好.

例 1.10 (一个不黎曼可积的函数). 定义 $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ is rational,} \\ 0 & x \text{ is irrational.} \end{cases}$$

对于任意子区间 $[a, b] \subseteq [0, 1]$, 都有

$$\inf_{[a,b]} f = 0, \quad \sup_{[a,b]} f = 1.$$

所以对于 $[0, 1]$ 的任意划分 P 都有 $L(f, P, [0, 1]) = 0$ 以及 $U(f, P, [0, 1]) = 1$. 所以 $L(f, [0, 1]) = 0$ 以及 $U(f, [0, 1]) = 1$, 故 f 不是黎曼可积的.

这个例子令人困扰, 因为直觉上有理数远少于无理数, 所以 f 的积分在某种意义上应该是 0, 但是实际上黎曼积分确是没有定义的.

例 1.11 (黎曼积分不能处理无界函数). 定义 $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & 0 < x \leq 1, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

如果 x_0, x_1, \dots, x_n 是 $[0, 1]$ 的划分, 那么 $\sup_{[x_0, x_1]} f = \infty$, 所以对于任意划分 P 都有 $U(f, P, [0, 1]) = \infty$.

但是, 我们可以发现 f 的图像面积应该是 2 而不是 ∞ . 因为

$$\lim_{a \downarrow 0} \int_a^1 f = \lim_{a \downarrow 0} (2 - 2\sqrt{a}) = 2.$$

测度

2.1 \mathbb{R} 上的外测度

2.1.1 外测度的定义

黎曼积分来源于使用长方形面积的和来估计函数图像的面积, 这些长方形的高是函数在定义域的某个子区间上的值, 宽是对应子区间的长度, 即 $x_i - x_{i-1}$.

为了让更多的函数可以做积分, 我们将把函数的定义域写为更加复杂的一些子集的并, 而不仅仅是使用子区间. 我们将为这样的每个子集分配一个大小, 其大小是区间长度的某种扩展定义. 例如, 我们期望 $(1, 3) \cup (7, 10)$ 的大小是 $2 + 3 = 5$.

为 \mathbb{R} 的子集分配大小是一件不平凡的任务. 本章我们处理这个任务, 并且将其延伸到其他内容. 在下一章, 我们将看到本章发展的工具创造了丰富的积分理论.

我们先叙述我们期望给出的开区间的长度定义.

定义 2.1. 一个开区间 I 的**长度** $\ell(I)$ 定义为

$$\ell(I) = \begin{cases} b - a & \text{if } I = (a, b) \text{ for some } a, b \in \mathbb{R} \text{ with } a < b, \\ 0 & \text{if } I = \emptyset, \\ \infty & \text{if } I = (-\infty, a) \text{ or } I = (a, \infty) \text{ for some } a \in \mathbb{R}, \\ \infty & \text{if } I = (-\infty, \infty). \end{cases}$$

假设 $A \subseteq \mathbb{R}$, A 的大小至多也只能是一列并起来包含 A 的开区间的长度之和, 所以将所有这样可能的和取下确界, 有理由将其作为 A 的大小的定义, 我们记为 $|A|$.

定义 2.2. 集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ 的**外测度** $|A|$ 定义为

$$|A| = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \mid I_1, I_2, \dots \text{ are open intervals such that } A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\}.$$

外测度的定义涉及到无限和, 对于无限和 $\sum_{k=1}^{\infty} t_k$, 其中 $t_i \in [0, \infty]$. 如果某个 $t_k = \infty$, 定义求和结果为 ∞ . 否则定义为普通的级数求和.

例 2.3 (有限集的外测度为零). 假设 $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ 是有限集. 任取 $\varepsilon > 0$, $k \leq n$ 时定义 $I_k = (a_k - \varepsilon, a_k + \varepsilon)$, $k > n$ 时定义 $I_k = \emptyset$, 那么 $\sum \ell(I_k) = 2n\varepsilon$, 所以 $|A| \leq 2n\varepsilon$, 即 $|A| = 0$.

2.1.2 外测度的良好性质

外测度有一些很好的性质, 我们首先改进上一个例子的结果.

命题 2.4 (可数集的外测度为零). \mathbb{R} 的任意可数子集的外测度是零.

Proof. 设 $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ 是可数集. 任取 $\varepsilon > 0$, 定义 $I_k = (a_k - \varepsilon/2^k, a_k + \varepsilon/2^k)$, 那么

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k-1}} = 2\varepsilon,$$

所以 $|A| \leq 2\varepsilon$, 故 $|A| = 0$. □

命题 2.5 (外测度保序). 假设 $A \subseteq B$, 那么 $|A| \leq |B|$.

Proof. 设 I_1, I_2, \dots 是覆盖 B 的开区间, 那么也覆盖 A , 所以

$$|A| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k),$$

对所有覆盖 B 的一列开区间取下确界, 所以 $|A| \leq |B|$. □

我们还希望 \mathbb{R} 的子集的大小应该具有平移不变性, 外测度恰好满足这个性质.

命题 2.6 (外测度具有平移不变性). 设 $t \in \mathbb{R}$ 且 $A \subseteq \mathbb{R}$, 那么 $|t + A| = |A|$.

Proof. 假设 I_1, I_2, \dots 是一列覆盖 A 的开区间, 那么 $t + I_1, t + I_2, \dots$ 是覆盖 $t + A$ 的一列开区间, 所以

$$|t + A| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \ell(t + I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k),$$

这表明 $|t + A| \leq |A|$.

另一边, 我们有 $A = -t + (t + A)$, 由此可得 $|A| \leq |t + A|$, 所以 $|t + A| = |A|$. □

命题 2.7 (外测度的次可加性). 设 A_1, A_2, \dots 是 \mathbb{R} 的一列子集, 那么

$$\left| \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |A_k|.$$

Proof. 若其中某个 $|A_k| = \infty$, 那么不等式显然成立. 下面假设所有 $|A_k| < \infty$.

任取 $\varepsilon > 0$, 对于每个 k , 令 $I_{1,k}, I_{2,k}, \dots$ 是一列并集包含 A_k 的开区间, 并且满足

$$\sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_{j,k}) \leq \frac{\varepsilon}{2^k} + |A_k|,$$

所以

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_{j,k}) \leq \varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty} |A_k|.$$

那么

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subseteq \bigcup_{k,j} I_{j,k},$$

所以

$$\left| \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right| \leq \sum_{k,j} \ell(I_{j,k}) \leq \varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty} |A_k|,$$

ε 的任意性即表明 $|\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |A_k|$. \square

2.1.3 有界闭区间的外测度

我们将证明如果 $a < b$, 那么 $[a, b]$ 有外测度 $b - a$. 实际上, 如果 $\varepsilon > 0$, 那么 $(a - \varepsilon, b + \varepsilon), \emptyset, \emptyset, \dots$ 是并集包含 $[a, b]$ 的开区间, 所以 $|[a, b]| \leq b - a + 2\varepsilon$, 于是我们得到

$$|[a, b]| \leq b - a.$$

命题 2.8. 设 $a < b$, 那么 $|[a, b]| = b - a$.

Proof. 我们只需要说明 $|[a, b]| \geq b - a$. 设 I_1, I_2, \dots 是一列开区间使得 $[a, b] \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, 由于 $[a, b]$ 是紧集, 所以存在 n 使得

$$[a, b] \subseteq I_1 \cup \dots \cup I_n.$$

下面我们证明 $\sum_{k=1}^n \ell(I_k) \geq b - a$, 从而说明 $\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k)$, 即 $|[a, b]| \geq b - a$.

对 n 进行归纳, 当 $n = 1$ 的时候, 那么 $[a, b] \subseteq I_1$ 显然表明 $\ell(I_1) \geq b - a$. 假设 $n > 1$ 的时候成立, 那么在 $n + 1$ 的时候有

$$[a, b] \subseteq I_1 \cup \dots \cup I_n \cup I_{n+1},$$

那么 b 至少在其中一个 I_1, \dots, I_{n+1} 中, 通过重新编排顺序, 不妨假设 $b \in I_{n+1}$. 设 $I_{n+1} = (c, d)$, 如果 $c \leq a$, 那么 $\ell(I_{n+1}) \geq b - a$, 即结论成立. 若 $a < c < b < d$, 那么

$$[a, c] \subseteq I_1 \cup \dots \cup I_n,$$

根据归纳假设, 有 $\sum_{k=1}^n \ell(I_k) \geq c - a$, 所以

$$\sum_{k=1}^{n+1} \ell(I_k) \geq (c - a) + \ell(I_{n+1}) = d - a \geq b - a. \quad \square$$

推论 2.9. 设 $a < b$, 那么 $|(a, b)| = |(a, b]| = |[a, b)| = b - a$.

Proof. 由于 $(a, b) \cup \{a\} \cup \{b\} = [a, b]$, 所以

$$|[a, b]| \leq |(a, b)| + |\{a\}| + |\{b\}| = |(a, b)|,$$

$(a, b) \subseteq [a, b]$ 又表明 $|(a, b)| \leq |[a, b]|$. 对于其他的情况同理. \square

2.1.4 外测度没有可加性

我们已经看到外测度有很多良好的性质, 现在我们发现外测度的一个不尽人意的性质.

如果外测度可以完美地为集合分配大小的概念, 那么两个不相交集的并集的外测度理应等于两个集合的外测度之和, 但是, 下面的结果表明外测度并没有这种性质.

定理 2.10. 存在 \mathbb{R} 的两个不相交子集 A, B 使得

$$|A \cup B| \neq |A| + |B|.$$

注释 2.11. 这样的两个子集是十分“病态的”, 因为可以证明, 只要 A, B 之间的距离大于零, 那么一定有 $|A \cup B| = |A| + |B|$ (见 Stein 的《Real Analysis》), 实际上, 该定理的证明需要使用选择公理.

Proof. 对于 $a \in [-1, 1]$, 记 \bar{a} 为等价类 $a + \mathbb{Q}$, 即

$$\bar{a} = \{c \in [-1, 1] \mid a - c \in \mathbb{Q}\}.$$

如果 $a, b \in [-1, 1]$ 且 $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$, 那么存在 $c \in [-1, 1]$ 使得 $c - a \in \mathbb{Q}$ 以及 $c - b \in \mathbb{Q}$, 所以 $a - b = (a - c) - (b - c) \in \mathbb{Q}$, 所以 $\bar{a} = \bar{b}$.

显然 $[-1, 1] = \bigcup_{a \in [-1, 1]} \bar{a}$, 把这些子集搜集起来:

$$\{\bar{a} \mid a \in [-1, 1]\},$$

在每个 \bar{a} 中取一个代表元, 放到一个新的集合中, 记为 V . 换句话说, 对于每个 $a \in [-1, 1]$, $V \cap \bar{a}$ 恰有一个元素. 注意, 这里 V 的构造使用了选择公理.

令 r_1, r_2, \dots 是一列不同的有理数使得

$$[-2, 2] \cap \mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \dots\},$$

那么

$$[-1, 1] \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} (r_k + V),$$

这是因为如果 $a \in [-1, 1]$, 设 $v \in V \cap \bar{a}$, 那么 $a - v \in \mathbb{Q}$, 这就表明存在某个 k 使得 $a = r_k + v \in r_k + V$.

根据外测度的次可加性和平移不变性, 有

$$2 = |[-1, 1]| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |r_k + V| = \sum_{k=1}^{\infty} |V|,$$

这表明 $|V| > 0$.

注意到 $r_1 + V, r_2 + V, \dots$ 是互不相交的. 若 $t \in (r_k + V) \cap (r_j + V)$, 那么 $t - r_k \in V$ 以及 $t - r_j \in V$, 于是 $(t - r_k) - (t - r_j) = r_j - r_k \in \mathbb{Q}$, 根据 V 的构造, 有 $t - r_k = t - r_j$, 即 $r_k = r_j$.

令 $n \geq 1$, 因为 $V \subseteq [-1, 1]$ 以及 $r_k \in [-2, 2]$, 所以

$$\bigcup_{k=1}^n (r_k + V) \subseteq [-3, 3],$$

所以

$$\left| \bigcup_{k=1}^n (r_k + V) \right| \leq 6.$$

但是

$$\sum_{k=1}^n |r_k + V| = \sum_{k=1}^n |V| = n |V|,$$

这暗示我们选取足够大的 n 使得 $n |V| > 6$, 所以

$$\left| \bigcup_{k=1}^n (r_k + V) \right| < \sum_{k=1}^n |r_k + V|.$$

也就是说, 如果对于所有不相交的子集 A, B 有 $|A \cup B| = |A| + |B|$, 那么归纳可得对于不相交子集 A_1, \dots, A_n 有 $|\bigcup_{k=1}^n A_k| = \sum_{k=1}^n |A_k|$, 这与上面的严格不等号矛盾. 所以存在不相交子集 A, B 使得 $|A \cup B| \neq |A| + |B|$. \square

2.2 可测空间和函数

上一节的结果表明外测度不是可加的. 那么这个漏洞能否使用其他的某种“测量方式”弥补? 下面的结果表明不存在满足所有期望属性的测量方式.

定理 2.12 (不可能对 \mathbb{R} 的所有子集都赋予一个大小的概念). 不存在 \mathbb{R} 的幂集上的函数 μ 同时满足下面的性质:

1. μ 是到 $[0, \infty]$ 的函数.
2. 对于每个开区间 I 有 $\mu(I) = \ell(I)$.
3. 对于不相交子集 A_1, A_2, \dots 有 $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.
4. 对于每个 $A \subseteq \mathbb{R}$ 和 $t \in \mathbb{R}$ 有 $\mu(t + A) = \mu(A)$.

Proof. 假设 μ 同时满足上面的性质. 如果 $A \subseteq B$, 那么 $\mu(A) \leq \mu(B)$, 这是因为对于 $A, B \setminus A, \emptyset, \emptyset, \dots$, 所以

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) + 0 + 0 + \dots = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A).$$

如果 $a < b$, 那么对于任意 $\varepsilon > 0$ 有 $(a, b) \subseteq [a, b] \subseteq (a - \varepsilon, b + \varepsilon)$, 所以 $b - a \leq \mu([a, b]) \leq b - a + 2\varepsilon$, 所以 $\mu([a, b]) = b - a$.

如果 A_1, A_2, \dots 是一列子集, 那么 $A_1, A_2 \setminus A_1, A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \dots$ 是一列不相交的子集, 并且它们的并集是 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, 所以

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= \mu(A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)) \cup \dots) \\ &= \mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1) + \mu(A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)) + \dots \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k). \end{aligned}$$

这意味着这样的函数 μ 实际上满足外测度的所有性质, 那么采用 **定理 2.10** 相同的构造, 即可发现存在不相交子集 A, B 使得 $\mu(A \cup B) \neq \mu(A) + \mu(B)$, 这与性质 (3) 矛盾. \square

2.2.1 σ -代数

上面的结果表明我们必须放弃把区间长度的概念延申到 \mathbb{R} 的每个子集上. 但是, 我们不能放弃 **定理 2.12** 的性质 (2), 因为我们希望区间的大小是它们的长度. 我们也不能放弃 **定理 2.12** 的性质 (3), 因为可数可加性需要用于证明与极限相关的定理. 我们还不能放弃 **定理 2.12** 的性质 (4), 因为不满足平移不变性的大小概念与我们的直觉严重不符.

这表明我们除开放宽 **定理 2.12** 的性质 (1) 之外别无选择, 即必须存在一些子集使得它们没有大小的概念. 大量的经验表明为了允许取极限的操作, 可定义长度的子集族必须满足对补和可数并操作封闭, 于是我们给出下面的定义.

定义 2.13. 设 X 是一个集合, S 是 X 的一个子集族, 如果 S 满足:

1. $\emptyset \in S$;
2. 如果 $E \in S$, 那么 $X \setminus E \in S$;
3. 如果 E_1, E_2, \dots 是 S 中的一列子集, 那么 $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in S$,

那么我们说 S 是 X 上的一个 σ -代数.

命题 2.14. 设 S 是 X 上的 σ -代数, 那么

1. $X \in S$;
2. 如果 $D, E \in S$, 那么 $D \cup E, D \cap E, D \setminus E \in S$;
3. 如果 E_1, E_2, \dots 是一列 S 中的元素, 那么 $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \in S$.

定义 2.15. 一个可测空间指的是有序对 (X, S) , 其中 S 是 X 上的 σ -代数.

2.2.2 \mathbb{R} 的 Borel 子集

定理 2.16. 设 X 是集合, \mathcal{A} 是 X 上的一个子集族, 那么 X 上的所有包含 \mathcal{A} 的 σ -代数的交集是一个 σ -代数.

出于上面的定理, 我们使用包含 \mathcal{A} 的最小的 σ -代数或者 \mathcal{A} 生成的 σ -代数来指代所有包含 \mathcal{A} 的 σ -代数的交集, 记作 $\sigma(\mathcal{A})$.

例 2.17. 设 X 是集合, $\mathcal{A} = \{\{x\} \mid x \in X\}$, 那么包含 \mathcal{A} 的最小的 σ -代数

$$\sigma(\mathcal{A}) = \{E \subseteq X \mid E \text{ 可数或者 } X \setminus E \text{ 可数}\}.$$

记上述子集族为 \mathcal{S} , 首先不难验证 \mathcal{S} 是 σ -代数且包含 \mathcal{A} , 所以 $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{S}$. 另一方面, 任取 $E \in \mathcal{S}$, 如果 E 可数, 那么 $E = \bigcup_{x \in E} \{x\} \in \sigma(\mathcal{A})$. 如果 $X \setminus E$ 可数, 那么 $E = X \setminus (X \setminus E) \in \sigma(\mathcal{A})$. 这就表明 $\mathcal{S} \subseteq \sigma(\mathcal{A})$.

定义 2.18. \mathbb{R} 上的由所有开子集生成的 σ -代数被称为 **Borel σ -代数**, 记为 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 的元素被称为 **Borel 子集**.

例 2.19 (Borel 子集的例子).

1. \mathbb{R} 的任意闭子集都是 Borel 子集. 因为闭集的补集是开集.
2. \mathbb{R} 的任意可数子集是 Borel 子集. 因为可数集是单点集 (闭集) 的可数并.
3. 半开半闭区间 $[a, b)$ 是 Borel 子集, 因为 $[a, b) = \bigcap_{k=1}^{\infty} (a - 1/k, b)$.
4. 如果 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是任意函数, 那么 f 的所有连续点的集合是 Borel 子集. 见习题.

我们将在后面看到存在 \mathbb{R} 的子集不是 Borel 子集, 但是, 你能够用一种具体的描述写下的 \mathbb{R} 的任意子集都是 Borel 子集.

2.2.3 可测函数

定义 2.20. 设 (X, \mathcal{S}) 是可测空间, 映射 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 被称为 \mathcal{S} -可测的, 如果对于任意 Borel 子集 $B \subseteq \mathbb{R}$ 有 $f^{-1}(B) \in \mathcal{S}$.

定义 2.21. 设 E 是集合 X 的子集, 定义 E 上的**特征函数**为 $\chi_E: X \rightarrow \mathbb{R}$ 满足

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E, \\ 0 & x \notin E. \end{cases}$$

例 2.22. 设 (X, \mathcal{S}) 是可测空间, 那么 χ_E 可测当且仅当 $E \in \mathcal{S}$. 这是因为对于任意子集 $B \subseteq \mathbb{R}$, 有

$$\chi_E^{-1}(B) = \begin{cases} E & \text{if } 0 \notin B, 1 \in B, \\ X \setminus E & \text{if } 0 \in B, 1 \notin B, \\ X & \text{if } 0 \in B, 1 \in B, \\ \emptyset & \text{if } 0 \notin B, 1 \notin B. \end{cases}$$

\mathcal{S} -可测函数的定义需要我们对 \mathbb{R} 的所有 Borel 子集进行验证, 这是十分庞大的, 下面的定理告诉我们实际上只需要在一类小得多的集合上验证即可.

定理 2.23. 设 (X, \mathcal{S}) 是可测空间, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 满足对于任意 $a \in \mathbb{R}$, 有

$$f^{-1}((a, \infty)) \in \mathcal{S},$$

那么 f 是 \mathcal{S} -可测的.

假设 X 是 \mathbb{R} 的 Borel 子集, \mathcal{S} 是 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 中被 X 包含的所有 Borel 子集构成的子集族, 那么可以验证 \mathcal{S} 是 X 上的一个 σ -代数. 这种情况下的 \mathcal{S} -可测函数被称为 **Borel 可测函数**.

定义 2.24. 设 $X \subseteq \mathbb{R}$, 如果 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ 满足: 对于每个 Borel 子集 $B \subseteq \mathbb{R}$, $f^{-1}(B)$ 是 Borel 子集, 那么说 f 是 **Borel 可测的**.

注意, 上述定义已经隐含了 X 是 Borel 子集, 因为 $X = f^{-1}(\mathbb{R})$.

设 X 是集合, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, 那么 f 的可测性依赖于 X 上的 σ -代数的选取. 如果 X 上的 σ -代数称为 \mathcal{S} , 那么我们讨论的 f 的 \mathcal{S} -可测性. 如果 X 是 \mathbb{R} 的 Borel 子集, \mathcal{S} 是被 X 包含的 Borel 子集的集合, 那么此时 Borel 可测和 \mathcal{S} -可测的概念是相同的.

定理 2.25. 设 $X \subseteq \mathbb{R}$ 是 Borel 子集, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数, 那么 f 是 Borel 可测的.

定理 2.26. 设 $X \subseteq \mathbb{R}$ 是 Borel 子集, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ 是递增函数, 那么 f 是 Borel 可测的.

Proof. 任取 $a \in \mathbb{R}$, 记 $b = \inf f^{-1}((a, \infty))$, 那么

$$f^{-1}((a, \infty)) = (b, \infty) \cap X \text{ or } f^{-1}((a, \infty)) = [b, \infty) \cap X.$$

这表明 $f^{-1}((a, \infty))$ 始终是 Borel 子集, 所以 f 是 Borel 可测的. \square

下面的结果表明一系列 \mathcal{S} -可测函数的逐点极限是 \mathcal{S} -可测的. 我们知道一系列连续函数的逐点极限不一定连续 (例如 $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 的函数 $x \mapsto x^n$), 所以这是一个非常好的性质.

定理 2.27. 设 (X, \mathcal{S}) 是可测空间, f_1, f_2, \dots 是一列 $X \rightarrow \mathbb{R}$ 的 \mathcal{S} -可测函数, 定义 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x).$$

那么 f 是 \mathcal{S} -可测函数.

定义 2.28. 如果 $[-\infty, \infty]$ 的子集 B 与 \mathbb{R} 的交集 $B \cap \mathbb{R}$ 是 Borel 子集, 那么我们说 B 是 Borel 子集.

2.3 测度及其性质

定义 2.29. 令 (X, \mathcal{S}) 是可测空间, (X, \mathcal{S}) 上的测度指的是一个函数 $\mu : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$ 满足 $\mu(\emptyset) = 0$, 以及对于任意不相交的集合 $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{S}$, 有

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k).$$

例 2.30.

1. 如果 X 是集合, 考虑可测空间 $(X, \mathcal{P}(E))$, 我们可以定义计数测度, 对于 n 个元素的有限集 E , 定义 $\mu(E) = n$, 对于无限集 E 定义 $\mu(E) = \infty$.
2. 设 (X, \mathcal{S}) 是可测空间, $c \in X$. 定义 Dirac 测度 δ_c 为

$$\delta_c(E) = \begin{cases} 1 & c \in E, \\ 0 & c \notin E. \end{cases}$$

3.

定义 2.31. 一个**测度空间**指的是三元组 (X, \mathcal{S}, μ) , 其中 (X, \mathcal{S}) 是可测空间, μ 是 (X, \mathcal{S}) 上的测度.

2.3.1 测度的性质