Contents

1

黎曼积分

1.1 黎曼积分回顾

定义 1.1. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是有界函数，P 是 $[a,b]$ 的一个划分 $x_0,\dots,x_n$，定义 **黎曼下和** $L(f,P,[a,b])$ 和 **黎曼上和** $U(f,P,[a,b])$ 为

$$L(f,P,[a,b])=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\inf_{[x_{i-1},x_i]}f,$$
$$U(f,P,[a,b])=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\sup_{[x_{i-1},x_i]}f.$$

引理 1.2 (黎曼和不等式). 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是有界函数，P,P' 是 $[a,b]$ 的两个划分，且 P 确定的点列是 P' 确定的点列的一个子列 (即 P' 划分的更细)，那么

$$L(f,P,[a,b])\le L(f,P',[a,b])\le U(f,P',[a,b])\le U(f,P,[a,b]).$$

Proof. 假设 P 给出划分 $x_0,\dots,x_n$, P' 给出划分 $x'_0,\dots,x'_N$, 那么对于每个 $1\le i\le n$, 都存在整数 k,m 使得 $x_{i-1}=x'_k<x'_{k+1}<\cdots<x'_{k+m}=x_i$, 所以

$$\begin{aligned}(x_{i-1}-x_i)\inf_{[x_{i-1},x_i]}f&=\sum_{j=1}^{m}(x'_{k+j}-x'_{k+j-1})\inf_{[x_{i-1},x_i]}f\\&\le\sum_{j=1}^{m}(x'_{k+j}-x'_{k+j-1})\inf_{[x'_{k+j-1},x'_{k+j}]}f,\end{aligned}$$

这就表明 $L(f,P,[a,b])\le L(f,P',[a,b])$. 对于上和有类似的估计. □

引理 1.3 (黎曼下和小于黎曼上和). 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是有界函数，P,P' 是 $[a,b]$ 的两个划分，那么

$$L(f,P,[a,b])\le U(f,P',[a,b]).$$

Proof. 令 P'' 是 P,P' 合并得到的划分, 那么

$$L(f,P,[a,b])\le L(f,P'',[a,b])\le U(f,P'',[a,b])\le U(f,P',[a,b]).$$ □

定义 1.4. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是有界函数，定义 f 的**黎曼下积分** $L(f,[a,b])$ 和**黎曼上积分** $U(f,[a,b])$ 分别为

$$L(f,[a,b])=\sup_P L(f,P,[a,b]),\quad U(f,[a,b])=\inf_P U(f,P,[a,b]).$$

其中上下确界取遍 $[a,b]$ 的所有划分 P.

命题 1.5 (黎曼下积分小于黎曼上积分). 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是有界函数，那么

$$L(f,[a,b])\le U(f,[a,b]).$$

Proof. 根据 引理 1.3 即得. □

定义 1.6. 对于闭区间上的有界函数，如果其黎曼下积分和黎曼上积分相等，那么我们说它是**黎曼可积的**. 如果 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是黎曼可积的，那么定义**黎曼积分**为

$$\int_a^b f=L(f,[a,b])=U(f,[a,b]).$$

例 1.7. 计算 $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2$ 的黎曼积分.

Solution. 记 P_n 是 $[0,1]$ 的划分 $0,1/n,2/n,\dots,n/n=1$, 那么黎曼下和

$$L(f,P_n,[0,1])=\sum_{i=1}^n\frac{1}{n}\inf_{[i/n,(i-1)/n]}f=\sum_{i=1}^n\frac{(i-1)^2}{n^3}=\frac{2n^2-3n+1}{6n^2},$$

黎曼上和

$$U(f,P_n,[0,1])=\sum_{i=1}^n\frac{1}{n}\sup_{[i/n,(i-1)/n]}f=\sum_{i=1}^n\frac{i^2}{n^3}=\frac{2n^2+3n+1}{6n^2},$$

于是

$$L(f,[0,1])\ge\sup_{n\ge1}L(f,P_n,[0,1])=\sup_{n\ge1}\frac{2n^2-3n+1}{6n^2}=\frac{1}{3},$$

以及

$$U(f,[0,1])\le\inf_{n\ge1}U(f,P_n,[0,1])=\inf_{n\ge1}\frac{2n^2+3n+1}{6n^2}=\frac{1}{3},$$

所以

$$U(f,[0,1])\le\frac{1}{3}\le L(f,[0,1]),$$

再结合 命题 1.5, 所以 f 黎曼可积, 并且

$$\int_0^1 f=\frac{1}{3}.$$ ■

定理 1.8 (连续函数黎曼可积). 闭区间上的实值连续函数是黎曼可积的.

Proof. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续，那么 f 有界且一致连续。与 例 1.7 的计算类似，我们寻求一系列等距划分 P_n 进行计算即可。

由于 f 一致连续，所以任取 $\varepsilon>0$，都存在 $\delta>0$ 使得 $|x-y|<\delta$ 的时候有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$。此时存在 n 使得 $(b-a)/n<\delta$，记 P_n 是 $[a,b]$ 的 n 等分划分，那么

$$\begin{aligned}|L(f,P_n,[a,b])-U(f,P_n,[a,b])| &\le \sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}\left|\inf_{[x_{i-1},x_i]}f-\sup_{[x_{i-1},x_i]}f\right|\\ &\le \sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}\varepsilon=(b-a)\varepsilon,\end{aligned}$$

这表明

$$|L(f,[a,b])-U(f,[a,b])|\le|L(f,P_n,[a,b])-U(f,P_n,[a,b])|\le\varepsilon,$$

所以 $L(f,[a,b])=U(f,[a,b])$，即 f 黎曼可积。 □

命题 1.9. 假设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 黎曼可积，那么

$$(b-a)\inf_{[a,b]}f\le\int_a^b f\le(b-a)\sup_{[a,b]}f.$$

Proof. 取 P 是平凡划分 $x_0=a,x_1=b$，那么

$$(b-a)\inf_{[a,b]}f=L(f,P,[a,b])\le L(f,[a,b])=\int_a^b f.$$ □

1-1 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是有界函数且对于某个 $[a,b]$ 的划分 P 有

$$L(f,P,[a,b])=U(f,P,[a,b]),$$

证明 f 在 $[a,b]$ 上是常值函数。

Proof. 这表明我们有

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\left(\sup_{[x_{i-1},x_i]}f-\inf_{[x_{i-1},x_i]}f\right)=0,$$

这个求和项中每一项都大于等于 0，所以必须有

$$\sup_{[x_{i-1},x_i]}f=\inf_{[x_{i-1},x_i]}f,$$

所以 f 在每个 $[x_{i-1},x_i]$ 上都是常值函数，即 f 在 $[a,b]$ 上是常值函数。 □

1-2 设 $a \le s < t \le b$，定义 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 为

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } s < x < t, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

证明 f 在 $[a,b]$ 上黎曼可积并且 $\int_a^b f = t - s$.

Proof. 设 P 是 $[s,t]$ 的任意划分, 那么 P 附带 a, b 构成 $[a,b]$ 的划分 P', 此时有

$$L(f, P', [a,b]) = t - s = U(f, P', [a,b]),$$

所以 $L(f, [a,b]) \ge t - s \ge U(f, [a,b])$, 故 f 黎曼可积且 $\int_a^b f = t - s$. □

1-3 设 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 是有界函数，证明 f 是黎曼可积的当且仅当对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $[a,b]$ 的划分 P 使得

$$U(f, P, [a,b]) - L(f, P, [a,b]) < \varepsilon. \tag{1.1}$$

Proof. 若 f 黎曼可积, 那么 $L(f, [a,b]) = U(f, [a,b])$. 根据上下积分的定义, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 都存在划分 P 使得

$$L(f, P, [a,b]) > L(f, [a,b]) - \varepsilon/2, \quad U(f, P, [a,b]) < U(f, [a,b]) + \varepsilon/2,$$

故

$$U(f, P, [a,b]) - L(f, P, [a,b]) < \varepsilon.$$

反之, 若对于任意 $\varepsilon > 0$, 都存在划分 P 使得 (1.1) 式成立. 由于 $L(f, [a,b]) \ge L(f, P, [a,b])$ 以及 $U(f, [a,b]) \le U(f, P, [a,b])$, 所以

$$U(f, [a,b]) - L(f, [a,b]) \le U(f, P, [a,b]) - L(f, P, [a,b]) < \varepsilon,$$

即 $L(f, [a,b]) = U(f, [a,b])$, f 黎曼可积. □

1-4 设 $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ 黎曼可积，证明 $f + g$ 黎曼可积，并且

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Proof. 记 $\int_a^b f = I, \int_a^b g = J$. 任取 $\varepsilon > 0$, 那么存在划分 P 使得

$$I - \varepsilon < L(f, P, [a,b]) \le U(f, P, [a,b]) < I + \varepsilon,$$

同理存在划分 P' 使得

$$J - \varepsilon < L(g, P', [a,b]) \le U(g, P', [a,b]) < J + \varepsilon,$$

将划分 P, P' 合并, 得到划分 P'' 使得

$$\begin{aligned} I-\varepsilon < L(f, P'', [a,b]) \leq U(f, P'', [a,b]) < I+\varepsilon, \\ J-\varepsilon < L(g, P'', [a,b]) \leq U(g, P'', [a,b]) < J+\varepsilon. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} L(f+g, P'', [a,b]) \geq L(f, P'', [a,b]) + L(g, P'', [a,b]) > I+J-2\varepsilon, \\ U(f+g, P'', [a,b]) \leq U(f, P'', [a,b]) + U(g, P'', [a,b]) < I+J+2\varepsilon, \end{aligned}$$

这就表明 $f+g$ 可积且 $\int_a^b (f+g) = I+J$. □

1.2 黎曼积分还不够好

黎曼积分有下列三个主要缺陷:

- 黎曼积分不能处理函数有太多不连续点的情况;
- 黎曼积分不能处理无界函数;
- 黎曼积分与极限的相容性不够好.

例 1.10 (一个不黎曼可积的函数)**.** 定义 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ 为

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ is rational}, \\ 0 & x \text{ is irrational}. \end{cases}$$

对于任意子区间 $[a,b] \subseteq [0,1]$, 都有

$$\inf_{[a,b]} f = 0, \quad \sup_{[a,b]} f = 1.$$

所以对于 $[0,1]$ 的任意划分 P 都有 $L(f, P, [0,1]) = 0$ 以及 $U(f, P, [0,1]) = 1$. 所以 $L(f, [0,1]) = 0$ 以及 $U(f, [0,1]) = 1$, 故 f 不是黎曼可积的.

这个例子令人困扰, 因为直觉上有理数远少于无理数, 所以 f 的积分在某种意义上应该是 0, 但是实际上黎曼积分确是没有定义的.

例 1.11 (黎曼积分不能处理无界函数)**.** 定义 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ 为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & 0 < x \leq 1, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

如果 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 是 $[0,1]$ 的划分, 那么 $\sup_{[x_0,x_1]} f = \infty$, 所以对于任意划分 P 都有 $U(f, P, [0,1]) = \infty$.

但是, 我们可以发现 f 的图像面积应该是 2 而不是 ∞. 因为

$$\lim_{a \downarrow 0} \int_a^1 f = \lim_{a \downarrow 0} (2 - 2\sqrt{a}) = 2.$$

2

测度

2.1 $\mathbb{R}$ 上的外测度

2.1.1 外测度的定义

黎曼积分来源于使用长方形面积的和来估计函数图像的面积, 这些长方形的高是函数在定义域的某个子区间上的值, 宽是对应子区间的长度, 即 $x_i - x_{i-1}$.

为了让更多的函数可以做积分, 我们将把函数的定义域写为更加复杂的一些子集的并, 而不仅仅是使用子区间. 我们将为这样的每个子集分配一个大小, 其大小是区间长度的某种扩展定义. 例如, 我们期望 $(1,3) \cup (7,10)$ 的大小是 $2+3=5$.

为 $\mathbb{R}$ 的子集分配大小是一件不平凡的任务. 本章我们处理这个任务, 并且将其延伸到其他内容. 在下一章, 我们将看到本章发展的工具创造了丰富的积分理论.

我们先叙述我们期望给出的开区间的长度定义.

定义 2.1. 一个开区间 I 的**长度** $\ell(I)$ 定义为

$$\ell(I) = \begin{cases} b-a & \text{if } I = (a,b) \text{ for some } a, b \in \mathbb{R} \text{ with } a < b, \\ 0 & \text{if } I = \emptyset, \\ \infty & \text{if } I = (-\infty, a) \text{ or } I = (a, \infty) \text{ for some } a \in \mathbb{R}, \\ \infty & \text{if } I = (-\infty, \infty). \end{cases}$$

假设 $A \subseteq \mathbb{R}$, A 的大小至多也只能是一列并起来包含 A 的开区间的长度之和, 所以将所有这样可能的和取下确界, 有理由将其作为 A 的大小的定义, 我们记为 $|A|$.

定义 2.2. 集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ 的**外测度** $|A|$ 定义为

$$|A| = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \,\middle|\, I_1, I_2, \ldots \text{ are open intervals such that } A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\}.$$

外测度的定义涉及到无限和, 对于无限和 $\sum_{k=1}^{\infty} t_k$, 其中 $t_i \in [0, \infty]$. 如果某个 $t_k = \infty$, 定义求和结果为 ∞. 否则定义为普通的级数求和.

例 2.3 (有限集的外测度为零)**.** 假设 $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ 是有限集. 任取 $\varepsilon > 0$, $k \leq n$ 时定义 $I_k = (a_k - \varepsilon, a_k + \varepsilon)$, $k > n$ 时定义 $I_k = \emptyset$, 那么 $\sum \ell(I_k) = 2n\varepsilon$, 所以 $|A| \leq 2n\varepsilon$, 即 $|A| = 0$.

2.1.2 外测度的良好性质

外测度有一些很好的性质, 我们首先改进上一个例子的结果.

命题 2.4 (可数集的外测度为零). $\mathbb{R}$ 的任意可数子集的外测度是零.

Proof. 设 $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ 是可数集. 任取 $\varepsilon > 0$, 定义 $I_k = (a_k - \varepsilon/2^k, a_k + \varepsilon/2^k)$, 那么

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k-1}} = 2\varepsilon,$$

所以 $|A| \le 2\varepsilon$, 故 $|A| = 0$. □

命题 2.5 (外测度保序). 假设 $A \subseteq B$, 那么 $|A| \le |B|$.

Proof. 设 $I_1, I_2, \dots$ 是覆盖 B 的开区间, 那么也覆盖 A, 所以

$$|A| \le \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k),$$

对所有覆盖 B 的一列开区间取下确界, 所以 $|A| \le |B|$. □

我们还希望 $\mathbb{R}$ 的子集的大小应该具有平移不变性, 外测度恰好满足这个性质.

命题 2.6 (外测度具有平移不变性). 设 $t \in \mathbb{R}$ 且 $A \subseteq \mathbb{R}$, 那么 $|t + A| = |A|$.

Proof. 假设 $I_1, I_2, \dots$ 是一列覆盖 A 的开区间, 那么 $t + I_1, t + I_2, \dots$ 是覆盖 $t + A$ 的一列开区间, 所以

$$|t + A| \le \sum_{k=1}^{\infty} \ell(t + I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k),$$

这表明 $|t + A| \le |A|$.

另一边, 我们有 $A = -t + (t + A)$, 由此可得 $|A| \le |t + A|$, 所以 $|t + A| = |A|$. □

命题 2.7 (外测度的次可加性). 设 $A_1, A_2, \dots$ 是 $\mathbb{R}$ 的一列子集, 那么

$$\left| \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right| \le \sum_{k=1}^{\infty} |A_k|.$$

Proof. 若其中某个 $|A_k| = \infty$, 那么不等式显然成立. 下面假设所有 $|A_k| < \infty$.

任取 $\varepsilon > 0$, 对于每个 k, 令 $I_{1,k}, I_{2,k}, \dots$ 是一列并集包含 A_k 的开区间, 并且满足

$$\sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_{j,k}) \le \frac{\varepsilon}{2^k} + |A_k|,$$

所以

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_{j,k}) \le \varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty} |A_k|.$$

那么

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subseteq \bigcup_{k,j} I_{j,k},$$

所以

$$\left|\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right| \leq \sum_{k,j} \ell(I_{j,k}) \leq \varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty} |A_k|,$$

ε 的任意性即表明 $\left|\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |A_k|$. □

2.1.3 有界闭区间的外测度

我们将证明如果 $a < b$, 那么 $[a,b]$ 有外测度 $b-a$. 实际上, 如果 $\varepsilon > 0$, 那么 $(a-\varepsilon, b+\varepsilon), \emptyset, \emptyset, \ldots$ 是并集包含 $[a,b]$ 的开区间, 所以 $|[a,b]| \leq b-a+2\varepsilon$, 于是我们得到

$$|[a,b]| \leq b-a.$$

命题 2.8. 设 $a < b$, 那么 $|[a,b]| = b-a$.

Proof. 我们只需要说明 $|[a,b]| \geq b-a$. 设 $I_1, I_2, \ldots$ 是一列开区间使得 $[a,b] \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, 由于 $[a,b]$ 是紧集, 所以存在 n 使得

$$[a,b] \subseteq I_1 \cup \cdots \cup I_n,$$

下面我们证明 $\sum_{k=1}^{n} \ell(I_k) \geq b-a$, 从而说明 $\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k)$, 即 $|[a,b]| \geq b-a$.

对 n 进行归纳, 当 $n=1$ 的时候, 那么 $[a,b] \subseteq I_1$ 显然表明 $\ell(I_1) \geq b-a$. 假设 $n > 1$ 的时候成立, 那么在 $n+1$ 的时候有

$$[a,b] \subseteq I_1 \cup \cdots \cup I_n \cup I_{n+1},$$

那么 b 至少在其中一个 $I_1, \ldots, I_{n+1}$ 中, 通过重新编排顺序, 不妨假设 $b \in I_{n+1}$. 设 $I_{n+1} = (c,d)$, 如果 $c \leq a$, 那么 $\ell(I_{n+1}) \geq b-a$, 即结论成立. 若 $a < c < b < d$, 那么

$$[a,c] \subseteq I_1 \cup \cdots \cup I_n,$$

根据归纳假设, 有 $\sum_{k=1}^{n} \ell(I_k) \geq c-a$, 所以

$$\sum_{k=1}^{n+1} \ell(I_k) \geq (c-a) + \ell(I_{n+1}) = d-a \geq b-a.$$ □

推论 2.9. 设 $a < b$, 那么 $|(a,b)| = |(a,b]| = |[a,b)| = b-a$.

Proof. 由于 $(a,b) \cup \{a\} \cup \{b\} = [a,b]$, 所以

$$|[a,b]| \leq |(a,b)| + |\{a\}| + |\{b\}| = |(a,b)|,$$

$(a,b) \subseteq [a,b]$ 又表明 $|(a,b)| \leq |[a,b]|$. 对于其他的情况同理. □

2.1.4 外测度没有可加性

我们已经看到外测度有很多良好的性质, 现在我们发现外测度的一个不尽人意的性质.

如果外测度可以完美地为集合分配大小的概念, 那么两个不相交集合的并集的外测度理应等于两个集合的外测度之和, 但是, 下面的结果表明外测度并没有这种性质.

定理 2.10. 存在 $\mathbb{R}$ 的两个不相交子集 A, B 使得

$$|A \cup B| \neq |A| + |B|.$$

注释 2.11. 这样的两个子集是十分 "病态的", 因为可以证明, 只要 A, B 之间的距离大于零, 那么一定有 $|A \cup B| = |A| + |B|$ (见 Stein 的《Real Analysis》), 实际上, 该定理的证明需要使用选择公理.

Proof. 对于 $a \in [-1, 1]$, 记 $\bar{a}$ 为等价类 $a + \mathbb{Q}$, 即

$$\bar{a} = \{c \in [-1, 1] \mid a - c \in \mathbb{Q}\}.$$

如果 $a, b \in [-1, 1]$ 且 $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$, 那么存在 $c \in [-1, 1]$ 使得 $c - a \in \mathbb{Q}$ 以及 $c - b \in \mathbb{Q}$, 所以 $a - b = (a - c) - (b - c) \in \mathbb{Q}$, 所以 $\bar{a} = \bar{b}$.

显然 $[-1, 1] = \bigcup_{a \in [-1,1]} \bar{a}$, 把这些子集搜集起来:

$$\{\bar{a} \mid a \in [-1, 1]\},$$

在每个 $\bar{a}$ 中取一个代表元, 放到一个新的集合中, 记为 V. 换句话说, 对于每个 $a \in [-1, 1]$, $V \cap \bar{a}$ 恰有一个元素. 注意, 这里 V 的构造**使用了选择公理**.

令 $r_1, r_2, \ldots$ 是一列不同的有理数使得

$$[-2, 2] \cap \mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \ldots\},$$

那么

$$[-1, 1] \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} (r_k + V),$$

这是因为如果 $a \in [-1, 1]$, 设 $v \in V \cap \bar{a}$, 那么 $a - v \in \mathbb{Q}$, 这就表明存在某个 k 使得 $a = r_k + v \in r_k + V$.

根据外测度的次可加性和平移不变性, 有

$$2 = |[-1, 1]| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |r_k + V| = \sum_{k=1}^{\infty} |V|,$$

这表明 $|V| > 0$.

注意到 $r_1 + V, r_2 + V, \ldots$ 是互不相交的. 若 $t \in (r_k + V) \cap (r_j + V)$, 那么 $t - r_k \in V$ 以及 $t - r_j \in V$, 于是 $(t - r_k) - (t - r_j) = r_j - r_k \in \mathbb{Q}$, 根据 V 的构造, 有 $t - r_k = t - r_j$, 即 $r_k = r_j$.

令 $n \geq 1$, 因为 $V \subseteq [-1, 1]$ 以及 $r_k \in [-2, 2]$, 所以

$$\bigcup_{k=1}^{n}(r_k + V) \subseteq [-3, 3],$$

所以

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n}(r_k + V)\right| \leq 6.$$

但是

$$\sum_{k=1}^{n}|r_k + V| = \sum_{k=1}^{n}|V| = n\,|V|\,,$$

这暗示我们选取足够大的 n 使得 $n\,|V| > 6$, 所以

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n}(r_k + V)\right| < \sum_{k=1}^{n}|r_k + V|\,.$$

也就是说, 如果对于所有不相交的子集 A, B 有 $|A \cup B| = |A| + |B|$, 那么归纳可得对于不相交子集 $A_1, \ldots, A_n$ 有 $\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{k=1}^{n}|A_k|$, 这与上面的严格不等号矛盾. 所以存在不相交子集 A, B 使得 $|A \cup B| \neq |A| + |B|$. □

2.2 可测空间和函数

上一节的结果表明外测度不是可加的. 那么这个漏洞能否使用其他的某种“测量方式”弥补? 下面的结果表明不存在满足所有期望属性的测量方式.

定理 2.12 (不可能对 $\mathbb{R}$ 的所有子集都赋予一个大小的概念). 不存在 $\mathbb{R}$ 的幂集上的函数 μ 同时满足下面的性质:

1. μ 是到 $[0, \infty]$ 的函数.
2. 对于每个开区间 I 有 $\mu(I) = \ell(I)$.
3. 对于不相交子集 $A_1, A_2, \ldots$ 有 $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k)$.
4. 对于每个 $A \subseteq \mathbb{R}$ 和 $t \in \mathbb{R}$ 有 $\mu(t + A) = \mu(A)$.

Proof. 假设 μ 同时满足上面的性质. 如果 $A \subseteq B$, 那么 $\mu(A) \leq \mu(B)$, 这是因为对于 $A, B \setminus A, \emptyset, \emptyset, \ldots$, 所以

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) + 0 + 0 + \cdots = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A).$$

如果 $a < b$, 那么对于任意 $\varepsilon > 0$ 有 $(a, b) \subseteq [a, b] \subseteq (a - \varepsilon, b + \varepsilon)$, 所以 $b - a \leq \mu([a, b]) \leq b - a + 2\varepsilon$, 所以 $\mu([a, b]) = b - a$.

如果 $A_1, A_2, \ldots$ 是一列子集, 那么 $A_1, A_2 \setminus A_1, A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \ldots$ 是一列不相交的子集, 并且它们的并集是 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, 所以

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= \mu\big(A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)) \cup \cdots\big) \\
&= \mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1) + \mu(A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)) + \cdots \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).
\end{aligned}$$

这意味着这样的函数 μ 实际上满足外测度的所有性质, 那么采用 定理 2.10 相同的构造, 即可发现存在不相交子集 A, B 使得 $\mu(A \cup B) \neq \mu(A) + \mu(B)$, 这与性质 (3) 矛盾. □

2.2.1 σ-代数

上面的结果表明我们必须放弃把区间长度的概念延申到 $\mathbb{R}$ 的每个子集上. 但是, 我们不能放弃 定理 2.12 的性质 (2), 因为我们希望区间的大小是它们的长度. 我们也不能放弃 定理 2.12 的性质 (3), 因为可数可加性需要用于证明与极限相关的定理. 我们还不能放弃 定理 2.12 的性质 (4), 因为不满足平移不变性的大小概念与我们的直觉严重不符.

这表明我们除开放宽 定理 2.12 的性质 (1) 之外别无选择, 即必须存在一些子集使得它们没有大小的概念. 大量的经验表明为了允许取极限的操作, 可定义长度的子集族必须满足对补和可数并操作封闭, 于是我们给出下面的定义.

定义 2.13. 设 X 是一个集合, $\mathcal{S}$ 是 X 的一个子集族, 如果 $\mathcal{S}$ 满足:

1. $\emptyset \in \mathcal{S}$;
2. 如果 $E \in \mathcal{S}$, 那么 $X \setminus E \in \mathcal{S}$;
3. 如果 $E_1, E_2, \ldots$ 是 $\mathcal{S}$ 中的一列子集, 那么 $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{S}$,

那么我们说 $\mathcal{S}$ 是 X 上的一个 **σ-代数**.

命题 2.14. 设 $\mathcal{S}$ 是 X 上的 σ-代数, 那么

1. $X \in \mathcal{S}$;
2. 如果 $D, E \in \mathcal{S}$, 那么 $D \cup E, D \cap E, D \setminus E \in \mathcal{S}$;
3. 如果 $E_1, E_2, \ldots$ 是一列 $\mathcal{S}$ 中的元素, 那么 $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{S}$.

定义 2.15. 一个可测空间指的是有序对 $(X, \mathcal{S})$, 其中 $\mathcal{S}$ 是 X 上的 σ-代数.

2.2.2 $\mathbb{R}$ 的 Borel 子集

定理 2.16. 设 X 是集合, $\mathcal{A}$ 是 X 上的一个子集族, 那么 X 上的所有包含 $\mathcal{A}$ 的 σ-代数的交集是一个 σ-代数.

出于上面的定理, 我们使用包含 $\mathcal{A}$ 的最小的 σ-代数或者 $\mathcal{A}$ 生成的 σ-代数来指代所有包含 $\mathcal{A}$ 的 σ-代数的交集, 记作 $\sigma(\mathcal{A})$.

例 2.17. 设 X 是集合, $\mathcal{A} = \{\{x\} \mid x \in X\}$, 那么包含 $\mathcal{A}$ 的最小的 σ-代数为

$$\sigma(\mathcal{A}) = \{E \subseteq X \mid E \text{ 可数或者 } X \setminus E \text{ 可数}\}.$$

记上述子集族为 $\mathcal{S}$, 首先不难验证 $\mathcal{S}$ 是 σ-代数且包含 $\mathcal{A}$, 所以 $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{S}$. 另一方面, 任取 $E \in \mathcal{S}$, 如果 E 可数, 那么 $E = \bigcup_{x \in E}\{x\} \in \sigma(\mathcal{A})$. 如果 $X \setminus E$ 可数, 那么 $E = X \setminus (X \setminus E) \in \sigma(\mathcal{A})$. 这就表明 $\mathcal{S} \subseteq \sigma(\mathcal{A})$.

定义 2.18. $\mathbb{R}$ 上的由所有开子集生成的 σ-代数被称为 **Borel σ-代数**, 记为 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 的元素被称为 **Borel 子集**.

例 2.19 (Borel 子集的例子).

1. $\mathbb{R}$ 的任意闭子集都是 Borel 子集. 因为闭集的补集是开集.
2. $\mathbb{R}$ 的任意可数子集是 Borel 子集. 因为可数集是单点集 (闭集) 的可数并.
3. 半开半闭区间 $[a, b)$ 是 Borel 子集, 因为 $[a, b) = \bigcap_{k=1}^{\infty}(a - 1/k, b)$.
4. 如果 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是任意函数, 那么 f 的所有连续点的集合是 Borel 子集. 见习题.

我们将在后面看到存在 $\mathbb{R}$ 的子集不是 Borel 子集, 但是, 你能够用一种具体的描述写下的 $\mathbb{R}$ 的任意子集都是 Borel 子集.

2.2.3 可测函数

定义 2.20. 设 $(X, \mathcal{S})$ 是可测空间, 映射 $f : X \to \mathbb{R}$ 被称为 $\mathcal{S}$-可测的, 如果对于任意 Borel 子集 $B \subseteq \mathbb{R}$ 有 $f^{-1}(B) \in \mathcal{S}$.

定义 2.21. 设 E 是集合 X 的子集, 定义 E 上的**特征函数**为 $\chi_E : X \to \mathbb{R}$ 满足

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E, \\ 0 & x \notin E. \end{cases}$$

例 2.22. 设 $(X, \mathcal{S})$ 是可测空间, 那么 χ_E 可测当且仅当 $E \in \mathcal{S}$. 这是因为对于任意子集 $B \subseteq \mathbb{R}$, 有

$$\chi_E^{-1}(B) = \begin{cases} E & \text{if } 0 \notin B, 1 \in B, \\ X \setminus E & \text{if } 0 \in B, 1 \notin B, \\ X & \text{if } 0 \in B, 1 \in B, \\ \emptyset & \text{if } 0 \notin B, 1 \notin B. \end{cases}$$

$\mathcal{S}$-可测函数的定义需要我们对 $\mathbb{R}$ 的所有 Borel 子集进行验证, 这是十分庞大的, 下面的定理告诉我们实际上只需要在一类小得多的集合上验证即可.

定理 2.23. 设 $(X, \mathcal{S})$ 是可测空间, $f : X \to \mathbb{R}$ 满足对于任意 $a \in \mathbb{R}$, 有

$$f^{-1}((a, \infty)) \in \mathcal{S},$$

那么 f 是 $\mathcal{S}$-可测的.

假设 X 是 $\mathbb{R}$ 的 Borel 子集, $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 中被 X 包含的所有 Borel 子集构成的子集族, 那么可以验证 $\mathcal{S}$ 是 X 上的一个 σ-代数. 这种情况下的 $\mathcal{S}$-可测函数被称为 Borel 可测函数.

定义 2.24. 设 $X \subseteq \mathbb{R}$，如果 $f: X \to \mathbb{R}$ 满足：对于每个 Borel 子集 $B \subseteq \mathbb{R}$，$f^{-1}(B)$ 是 Borel 子集，那么说 f 是 **Borel 可测的**.

注意, 上述定义已经隐含了 X 是 Borel 子集, 因为 $X = f^{-1}(\mathbb{R})$.

设 X 是集合, $f: X \to \mathbb{R}$, 那么 f 的可测性依赖于 X 上的 σ-代数的选取. 如果 X 上的 σ-代数称为 $\mathcal{S}$, 那么我们讨论的 f 的 $\mathcal{S}$-可测性. 如果 X 是 $\mathbb{R}$ 的 Borel 子集, $\mathcal{S}$ 是被 X 包含的 Borel 子集的集合, 那么此时 Borel 可测和 $\mathcal{S}$-可测的概念是相同的.

定理 2.25. 设 $X \subseteq \mathbb{R}$ 是 Borel 子集，$f: X \to \mathbb{R}$ 是连续函数，那么 f 是 Borel 可测的.

定理 2.26. 设 $X \subseteq \mathbb{R}$ 是 Borel 子集，$f: X \to \mathbb{R}$ 是递增函数，那么 f 是 Borel 可测的.

Proof. 任取 $a \in \mathbb{R}$, 记 $b = \inf f^{-1}((a, \infty))$, 那么

$$f^{-1}((a,\infty)) = (b,\infty) \cap X \text{ or } f^{-1}((a,\infty)) = [b,\infty) \cap X.$$

这表明 $f^{-1}((a,\infty))$ 始终是 Borel 子集, 所以 f 是 Borel 可测的. □

下面的结果表明一列 $\mathcal{S}$-可测函数的逐点极限是 $\mathcal{S}$-可测的. 我们知道一列连续函数的逐点极限不一定连续（例如 $[0,1] \to \mathbb{R}$ 的函数 $x \mapsto x^n$）, 所以这是一个非常好的性质.

定理 2.27. 设 $(X, \mathcal{S})$ 是可测空间，$f_1, f_2, \ldots$ 是一列 $X \to \mathbb{R}$ 的 $\mathcal{S}$-可测函数，定义 $f: X \to \mathbb{R}$ 为

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x).$$

那么 f 是 $\mathcal{S}$-可测函数.

定义 2.28. 如果 $[-\infty, \infty]$ 的子集 B 与 $\mathbb{R}$ 的交集 $B \cap \mathbb{R}$ 是 Borel 子集，那么我们说 B 是 Borel 子集.

2.3 测度及其性质

定义 2.29. 令 $(X, \mathcal{S})$ 是可测空间，$(X, \mathcal{S})$ 上的测度指的是一个函数 $\mu: \mathcal{S} \to [0, \infty]$ 满足 $\mu(\emptyset) = 0$，以及对于任意不相交的集合 $E_1, E_2, \ldots, \in \mathcal{S}$，有

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k).$$

例 2.30.

1. 如果 X 是集合, 考虑可测空间 $(X, \mathcal{P}(E))$, 我们可以定义计数测度, 对于 n 个元素的有限集 E, 定义 $\mu(E) = n$, 对于无限集 E 定义 $\mu(E) = \infty$.
2. 设 $(X, \mathcal{S})$ 是可测空间, $c \in X$. 定义 Dirac 测度 δ_c 为

$$\delta_c(E) = \begin{cases} 1 & c \in E, \\ 0 & c \notin E. \end{cases}$$

3.

定义 2.31. 一个**测度空间**指的是三元组 $(X, \mathcal{S}, \mu)$，其中 $(X, \mathcal{S})$ 是可测空间，μ 是 $(X, \mathcal{S})$ 上的测度.

2.3.1 测度的性质