Contents

0 导论 **1**

0.1 Brouwer 不动点定理 1

0.2 范畴与函子 3

1 基本拓扑概念 **5**

1.1 同伦 5

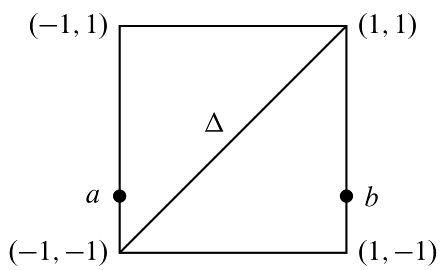
1.2 凸性、可缩性以及锥体 7

0

导论

0.1 Brouwer 不动点定理

我们首先概述 Brouwer 不动点定理的证明: 如果 $f : D^n \to D^n$ 是连续映射, 那么存在 $x \in D^n$ 使得 $f(x) = x$. 当 $n = 1$ 的时候, 这个定理是容易证明的, 此时 D^1 是闭区间 $[-1, 1]$, 我们在正方形 $D^1 \times D^1$ 内观察 f 的图像.



定理 0.1. 每个连续映射 $f : D^1 \to D^1$ 都有一个不动点.

Proof. 设 $f(-1) = a$ 以及 $f(1) = b$. 要是 $f(-1) = -1$ 或者 $f(1) = 1$, 那么这就已经存在不动点, 所以我们假设 $f(-1) = a > -1$ 以及 $f(1) = b < 1$. 设 G 是 f 的图像, Δ 是恒等映射的图像 (对角线), 我们需要证明 $G \cap \Delta \neq \emptyset$. 想法是利用连通性说明 $D^1 \times D^1$ 中从 a 到 b 的道路必须与 Δ 相交. f 连续表明 $G = \{(x, f(x)) \mid x \in D^1\}$ 是连通的. 定义 $A = \{(x, f(x)) \mid f(x) > x\}$ 和 $B = \{(x, f(x)) \mid f(x) < x\}$, 注意到 $a \in A$ 和 $b \in B$. 假设 $G \cap \Delta = \emptyset$, 那么这表明 $G = A \cup B$ 是无交并, 而 A, B 都是 G 中的非空开集, 与 G 连通矛盾. $\square$

不幸的是, 当 $n > 1$ 的时候没有人知道如何应用这个初等的拓扑证明, 所以必须引入新的思想. 通过代数拓扑可以给出 Brouwer 不动点定理的一个证明. 我们最终将证明, 对于每个 $n \geq 0$, 存在一个**同调函子** H_n 使得: 对于每个拓扑空间 X, 都给出一个交换群 $H_n(X)$; 对于每个连续映射 $f : X \to Y$, 都给出一个同态 $H_n(f) : H_n(X) \to H_n(Y)$ 使得

$$H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f) \tag{1}$$

以及 $H_n(1_X)$ 是 $H_n(X)$ 上的恒等映射; 此外还有

$$H_n(D^{n+1}) = 0 \quad \text{for all } n \geq 1, \tag{2}$$
$$H_n(\mathbb{S}^n) \neq 0 \quad \text{for all } n \geq 1. \tag{3}$$

使用 H_n 的这些性质, 我们现在可以证明 Brouwer 不动点定理.

定义 0.2. 拓扑空间 Y 的一个子空间 X 被称为 Y 的一个**收缩**，如果存在连续映射 $r : Y \to X$ 使得对于所有的 $x \in X$ 有 $r(x) = x$. 这样的 r 被称为一个**收缩映射**.

注释 0.3. (1) 我们可以使用映射的语言重新叙述收缩映射的定义. 如果 $\iota : X \hookrightarrow Y$ 是包含映射，那么连续映射 $r : Y \to X$ 是收缩映射当且仅当 ι 是 r 的右逆，即 $r \circ \iota = 1_X$.

(2) 对于交换群来说，可以证明 G 的子群 H 是 G 的收缩当且仅当 H 是 G 的一个直和项，也即存在 G 的子群 K 使得 $G = H \oplus K$.

引理 0.4. 如果 $n \geq 0$，那么 $\mathbb{S}^n$ 不是 D^{n+1} 的收缩.

Proof. 假设存在收缩 $r : D^{n+1} \to \mathbb{S}^n$, 那么我们有交换图

$$\begin{tikzcd} & D^{n+1} \arrow[dr, "r"] & \\ \mathbb{S}^n \arrow[ur, "\iota"] \arrow[rr, "1"'] & & \mathbb{S}^n, \end{tikzcd}$$

利用函子 H_n, 给出了交换群的一个交换图

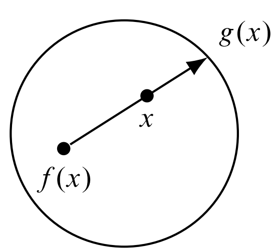
$$\begin{tikzcd} & H_n(D^{n+1}) \arrow[dr, "H_n(r)"] & \\ H_n(\mathbb{S}^n) \arrow[ur, "H_n(\iota)"] \arrow[rr, "H_n(1)"'] & & H_n(\mathbb{S}^n), \end{tikzcd}$$

由于 $H_n(D^{n+1}) = 0$, 所以 $H_n(1) = H_n(\iota) \circ H_n(r) = 0$, 但是 $H_n(1)$ 又必须是恒等映射, 所以 $H_n(\mathbb{S}^n) = 0$, 这和 (3) 矛盾. □

注意到同调函子 H_n 将拓扑问题转化为了代数问题. 此外, 引理 0.4 在 $n = 0$ 的时候有很简单的证明, 此时收缩 $r : D^1 \to \mathbb{S}^0 = \{\pm 1\}$ 将连通空间映射到不连通空间, 这是不可能的.

定理 0.5 (Brouwer). 如果 $f : D^n \to D^n$ 是连续映射，那么 f 有一个不动点.

Proof. 假设对于所有的 $x \in D^n$ 都有 $f(x) \neq x$, 此时 x 和 $f(x)$ 确定了一条直线. 定义 $g : D^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ 将 x 映射为 $f(x)$ 到 x 的射线与 $\mathbb{S}^{n-1}$ 的交点.



显然 $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ 表明 $g(x) = x$. 利用坐标不难计算得 g 是连续映射. 这样 g 就构成了一个收缩映射, 与前面的引理矛盾. □

> 0-1 令 H 是交换群 G 的子群. 如果存在同态 $r : G \to H$ 使得对任意 $x \in H$ 有 $r(x) = x$, 那么 $G = H \oplus \ker r$.

Proof. 任取 $y \in G$, 那么 $r(y - r(y)) = r(y) - r(y) = 0$, 所以 $y - r(y) \in \ker r$, 所以 $y = r(y) + y - r(y) \in H + \ker r$, 所以 $G = H + \ker r$. 下面设 $x \in H \cap \ker r$, 那么 $x = r(x) = 0$, 所以 $H \cap \ker r = \emptyset$. □

> 0-2 假设在 $n \geq 1$ 的时候已知
>
> $$H_i(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0, n, \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases}$$
>
> 证明 $\mathbb{S}^n$ 的赤道不是一个收缩.

Proof. 设 $r : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ 是收缩映射. 那么我们有交换图

$$\begin{tikzcd} & H_i(\mathbb{S}^n) \arrow[dr, "H_i(r)"] & \\ H_i(\mathbb{S}^{n-1}) \arrow[ur, "H_i(\iota)"] \arrow[rr, "H_i(1)"'] & & H_i(\mathbb{S}^{n-1}), \end{tikzcd}$$

取 $i = n - 1$ 即可得出矛盾. □

> 0-3 如果 X 是同胚于 D^n 的拓扑空间, 那么连续映射 $f : X \to X$ 有不动点.

Proof. 设 $\varphi : D^n \to X$ 是同胚映射, 那么 $\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi : D^n \to D^n$ 是连续映射且有不动点, 即存在 x 使得 $\varphi^{-1}(f(\varphi(x))) = x$, 即 $f(\varphi(x)) = \varphi(x)$, 所以 f 有不动点 $\varphi(x)$. □

> 0-4 令 $f, g : I \to I \times I$ 是连续映射, 并且 $f(0) = (a, 0)$, $f(1) = (b, 1)$, $g(0) = (0, c)$, $g(1) = (1, d)$. 证明存在 $s, t \in I$ 使得 $f(s) = g(t)$, 也就是说 f 和 g 的像集一定是相交的道路.

Proof. 定义 $h : I \times I \to I \times I$ 为 □

0.2 范畴与函子

定义 0.6. 范畴 C 上的一个**共轭**指的是所有态射的类 $\bigcup_{(A,B)} \operatorname{Hom}(A, B)$ 上的一个等价关系 $\sim$, 满足:

1. 如果 $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ 以及 $f \sim f'$，那么 $f' \in \mathrm{Hom}(A, B)$；
2. 如果 $f \sim f'$ 和 $g \sim g'$ 并且 $g \circ f$ 存在，那么 $g \circ f \sim g' \circ f'$.

定理 0.7. 令 C 是一个范畴附带一个共轭 $\sim$，令 $[f]$ 表示态射 f 的等价类. 定义 C' 为：

$$\begin{aligned} \mathrm{ob}\,\mathsf{C}' &= \mathrm{ob}\,\mathsf{C}; \\ \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}'}(A, B) &= \big\{[f] \bigm| f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B)\big\}; \\ [g] \circ [f] &= [g \circ f]. \end{aligned}$$

那么 C' 是一个范畴，称为 C' 的**商范畴**.

1

基本拓扑概念

1.1 同伦

定义 1.1. 如果 X, Y 是拓扑空间，f_0, f_1 是 X 到 Y 的连续映射，存在连续映射 $F: X \times I \to Y$ 使得

$$F(x,0) = f_0(x), \quad F(x,1) = f_1(x),$$

那么我们说 F 是一个**同伦映射**，并且 f_0 **同伦于** f_1，记为 $f_0 \simeq f_1$. 当需要强调同伦映射的时候，我们写作 $F: f_0 \simeq f_1$.

如果记 $f_t: X \to Y$ 为 $f_t(s) = F(x,t)$, 那么同伦 F 给出了一族从 f_0 变形到 f_1 的单参数连续映射. 我们可以认为 f_t 随着时间 t 变形.

引理 1.2 (粘连引理). 假设 X 是有限个闭子集的并集：$X = \bigcup_{i=1}^n X_i$. 如果对于某个空间 Y，存在一族连续映射 $f_i: X_i \to Y$，它们在重叠区域相同，即对于任意 i, j 有 $f_i|_{X_i \cap X_j} = f_j|_{X_i \cap X_j}$，那么存在唯一的连续映射 $f: X \to Y$ 使得对于所有的 i 有 $f|_{X_i} = f_i$.

Proof. 任取 $x \in X$, 如果 $x \in X_i$, 我们定义 $f(x) = f_i(x)$. 由于 f_i, f_j 在重叠区域相同, 所以这个定义是良好的, 我们只需要说明连续性. 任取 Y 的闭子集 C, 那么

$$f^{-1}(C) = \bigcup \big(X_i \cap f^{-1}(C)\big) = \bigcup f_i^{-1}(C),$$

由于 $f_i^{-1}(C)$ 是 X_i 的闭集, 所以是 X 的闭集. 所以 $f^{-1}(C)$ 是闭集, 即 f 是连续映射. □

粘合引理也可以有开集的版本, 其证明是完全一致的.

引理 1.3. 假设 X 是任意个开子集的并集：$X = \bigcup_i X_i$. 如果对于某个空间 Y，存在一族连续映射 $f_i: X_i \to Y$，它们在重叠区域相同，那么存在唯一的连续映射 $f: X \to Y$ 使得对于所有的 i 有 $f|_{X_i} = f_i$.

定理 1.4. 同伦是所有连续映射 $X \to Y$ 集合上的一个等价关系.

Proof. **自反性**. 如果 $f: X \to Y$ 是连续映射, 定义 $F(x,t) = f(x)$, 显然 $F: f \simeq f$.

对称性. 假设 $f \simeq g$, 即存在连续映射 $F: X \times I \to Y$ 使得 $F(x,0) = f(x)$ 和 $F(x,1) = g(x)$. 定义 $G: X \times I \to Y$ 为 $G(x,t) = F(x, 1-t)$, 那么 $G: g \simeq f$.

传递性. 假设 $F : f \simeq g$ 以及 $G : g \simeq h$. 定义 $H : X \times I \to Y$ 为

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ G(x,2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

根据粘合引理, 所以 H 连续, 所以 $H : f \simeq h$. □

定义 1.5. 如果 $f : X \to Y$ 是连续映射，我们说

$$[f] = \{g : X \to Y \mid g \simeq f\}$$

是 f 的**同伦类**.

所有同伦类的集合记为 $[X,Y]$.

定理 1.6. 对于 $i = 0,1$，令 $f_i : X \to Y$ 和 $g_i : Y \to Z$ 是连续映射. 如果 $f_0 \simeq f_1$ 和 $g_0 \simeq g_1$，那么 $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$，即 $[g_0 \circ f_0] = [g_1 \circ f_1]$.

Proof. 令 $F : f_0 \simeq f_1$ 和 $G : g_0 \simeq g_1$ 是同伦映射. 首先定义 $H : X \times I \to Z$ 为 $H(x,t) = G(f_0(x),t)$, 那么 $H : g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_0$. 另一方面, 定义 $K : X \times I \to Z$ 为 $K(x,t) = g_1 \circ F(x,t)$, 那么 $K : g_1 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$. 根据同伦的传递性, 就有 $g_1 \circ f_1 \simeq g_0 \circ f_0$. □

推论 1.7. 同伦是拓扑范畴 Top 上的一个共轭.

这意味着存在一个商范畴, 其对象是拓扑空间 X, 态射集合 $\mathrm{Hom}(X,Y) = [X,Y]$, 复合为 $[g] \circ [f] = [g \circ f]$.

定义 1.8. 上述商范畴被称为**同伦范畴**，记为 hTop.

我们即将构造的所有从 Top 到某个“代数”范畴 A（例如 Ab, Grp, Ring）的函子 T : Top → A 都有性质使得 $f \simeq g$ 的时候有 $T(f) = T(g)$. 事实上, 除开自然地希望将同伦映射视为等同的之外, 这保证了通过 T 将拓扑问题转化为 A 中的代数问题是比原问题更加简单的. 此外, 练习表明每个这样的函子都会给出一个函子 hTop → A, 所以同伦范畴是相当基本的.

定义 1.9. 一个连续映射 $f : X \to Y$ 被称为**同伦等价**，如果存在连续映射 $g : Y \to X$ 使得 $g \circ f \simeq 1_X$ 和 $f \circ g \simeq 1_Y$. 如果存在同伦等价 $f : X \to Y$，那么我们说空间 X 和 Y 有相同的**同伦型**.

显然, 同胚的空间有相同的同伦型, 但是反过来不对, 我们将在后面看到.

下面的两个结果表明同伦可以和一些有趣的问题联系起来.

定义 1.10. 令 X, Y 是拓扑空间，$y_0 \in Y$. y_0 处的**常值映射**指的是映射 $c : X \to Y$ 使得 $c(x) \equiv y_0$. 对于连续映射 $f : X \to Y$，如果存在常值映射 c 使得 $f \simeq c$，那么我们说 f 是 **零伦的**.

注释 1.11. 我们将在后面看到 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 实质上是圆周 $\mathbb{S}^1$，即 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 和 $\mathbb{S}^1$ 有相同的同伦型.

拓扑学中一个常见的问题是将映射 $f : X \to Z$ 延拓到一个更大的空间 Y 中，即是否存在 $g : Y \to Z$ 使得有下面的交换图

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[dr, dashed, "g"] & \\ X \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"'] & Z. \end{tikzcd}$$

同伦本身则引出了这样一个问题：如果 $f_0, f_1 : X \to Z$ 且我们能够延拓 $f_0 \cup f_1 : X \times \{0\} \cup X \times \{1\} \to Z$ 到 $X \times I$ 上，那么 $f_0 \simeq f_1$.

定理 1.12. 令 $f : \mathbb{S}^n \to Y$ 是连续映射，下面的说法等价：

1. f 是零伦的；
2. f 可以延拓为一个连续映射 $D^{n+1} \to Y$；
3. 如果 $x_0 \in \mathbb{S}^n$，$k : \mathbb{S}^n \to Y$ 是 $f(x_0)$ 处的常值映射，那么存在一个同伦 $F : f \simeq k$ 使得 $F(x_0, t) = f(x_0)$ 对于所有 $t \in I$ 成立.

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2) 假设 $F : f \simeq c$，其中 $c(x) = y_0$. 定义 $g : D^{n+1} \to Y$ 为

$$g(x) = \begin{cases} y_0 & 0 \le \|x\| \le \frac{1}{2}, \\ F\big(x/\|x\|, 2 - 2\|x\|\big) & \frac{1}{2} \le \|x\| \le 1. \end{cases}$$

根据粘合引理，g 是连续映射. 如果 $x \in \mathbb{S}^n$，那么 $g(x) = F(x, 0) = f(x)$，所以 g 是 f 的延拓.

(2) $\Rightarrow$ (3) 假设 $g : D^{n+1} \to Y$ 是 f 的延拓. 定义 $F : \mathbb{S}^n \times I \to Y$ 为 $F(x, t) = g((1-t)x + tx_0)$，显然 F 是连续映射. 由于 $F(x, 0) = g(x) = f(x)$，$F(x, 1) = g(x_0) = f(x_0)$，所以 $F : f \simeq k$. 此外，$F(x_0, t) = g(x_0) = f(x_0)$.

(3) $\Rightarrow$ (1) 显然. □

我们可以把这个定理和引理 0.4 对比. 如果 $Y = \mathbb{S}^n$ 以及 f 是恒等映射，那么引理 0.4 表明 f 不是零伦的，否则 f 延拓为连续映射 $D^{n+1} \to \mathbb{S}^n$，这表明 $\mathbb{S}^n$ 是 D^{n+1} 的收缩.

1.2 凸性、可缩性以及锥体

我们给上述证明中使用到的 D^{n+1} 的一个性质起个名字.

定义 1.13. $\mathbb{R}^m$ 的子集 X 被称为**凸集**，如果任取 $x, y \in X$，连接 x, y 的线段都在 X 中. 换句话说，对于任意 $t \in I$，有 $tx + (1-t)y \in X$.

凸集的例子有很多，例如 I^n，$\mathbb{R}^n$，D^n 和 Δ^n 都是凸集. 但是球面 $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ 不是凸集.

定义 1.14. 空间 X 被称为**可缩的**，如果 1_X 是零伦的.

定理 1.15. 每个凸集 X 都是可缩的.

Proof. 任取 $x_0 \in X$, 定义 $c : X \to X$ 是常值映射 $c(x) = x_0$. 令 $F : X \times I \to X$ 为 $F(x,t) = tx_0 + (1-t)x$, 那么 $F : 1_X \simeq c$. □

半球面是可缩的但是不是凸集, 所以上述定理的逆命题不正确. 后面我们会发现引理 0.4 实际上表明 $\mathbb{S}^n$ 是不可缩的.

> 1-1 (1) 如果 $X \approx Y$ 且 X 可缩, 那么 Y 也可缩.
> (2) 如果 X, Y 是 Euclid 空间的子空间, $X \approx Y$ 且 X 是凸集, 证明 Y 可能不是凸集.

Proof. (1) 设 $c : X \to X$ 是常值映射 $c(x) = x_0$ 且 $1_X \simeq c$, $f : X \to Y$ 是同伦等价. 设 $g : Y \to X$ 使得 $g \circ f \simeq 1_X$ 以及 $f \circ g \simeq 1_Y$. 记 $k : Y \to Y$ 是常值映射 $k(y) = f(x_0)$, 那么

$$1_Y = 1_Y \circ 1_Y \simeq (f \circ g) \circ (f \circ g) \simeq f \circ 1_X \circ g \simeq f \circ c \circ g = k,$$

所以 Y 可缩. □

> 1-2 令 $R : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 表示旋转 α 弧度. 证明 $R \simeq 1_{\mathbb{S}^1}$. 由此得出每个连续映射 $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 都同伦于一个满足 $g(1) = 1$ 的连续映射 $g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$.

Proof. 即 $R(e^{i\theta}) = e^{i(\theta+\alpha)}$. 定义 $F : \mathbb{S}^1 \times I \to \mathbb{S}^1$ 为 $F(e^{i\theta}, t) = e^{i(\theta+t\alpha)}$, 显然 F 是连续映射, 所以 $F : 1_{\mathbb{S}^1} \simeq R$. 任取连续映射 $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, 设 $f(1) = e^{i\alpha}$, 取 R 为旋转 $-\alpha$, 那么 $1_{\mathbb{S}^1} \circ f \simeq R \circ f$, 此时 $g = R \circ f$ 满足 $g(1) = R(f(1)) = 1$. □

马上引入的锥体的构造将表明每个空间都可以嵌入到一个可缩空间中. 我们先回顾一下商空间的构造.

定义 1.16. 令 X 是拓扑空间, $\sim$ 是一个等价关系, 那么有一个自然映射 $\pi : X \to X/{\sim}$, 即 $\pi(x) = [x]$. 我们可以赋予 $X/{\sim}$ 一个**商拓扑**, 即 $U \subseteq X/{\sim}$ 是开集当且仅当 $\pi^{-1}(U)$ 是 X 的开集.

有一种特殊的情况需要单独提及. 如果 $A \subseteq X$, 那么我们记 X/A 为划分 $\{A\} \cup \{\{x\} \mid x \in X \setminus A\}$ 给出的商空间, 也就是说, 这个构造将 A 压缩为一点, 而 $X \setminus A$ 中的点保持不变.

定义 1.17. 连续满射 $f : X \to Y$ 被称为**商映射**, 如果 $U \subseteq Y$ 是开集当且仅当 $f^{-1}(U)$ 是 X 的开集.

例 1.18.

1. 自然映射 $\pi : X \to X/{\sim}$ 是商映射.
2. 如果连续满射 $f : X \to Y$ 是开映射或者闭映射, 那么 f 是商映射. 以开映射的情况为例, 此时若 $U \subseteq Y$ 使得 $f^{-1}(U)$ 是开集, 那么 $U = f(f^{-1}(U))$ 是 Y 的开集.

3. 如果连续映射 $f : X \to Y$ 有一个截面, 即存在连续映射 $s : Y \to X$ 使得 $f \circ s = 1_Y$, 那么 f 是商映射. 首先 s 是 f 是右逆保证了 f 是满射. 若 $U \subseteq Y$ 使得 $f^{-1}(U)$ 是开集, 那么 $U = 1_Y^{-1}(U) = (f \circ s)^{-1}(U)$ 是 Y 的开集, 所以 f 是商映射.

定理 1.19. 令 $f : X \to Y$ 是连续满射. 那么 f 是商映射当且仅当: 对于任意空间 Z 和映射 $g : Y \to Z$, g 连续当且仅当 $g \circ f$ 连续.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g\circ f"] & \\ Y \arrow[r, "g"'] & Z. \end{tikzcd}$$

Proof. 假设 f 是商映射. 如果 g 连续, 显然 $g \circ f$ 连续. 反之, 如果 $g \circ f$ 连续, 任取 Z 的开集 V, 那么 $f^{-1}(g^{-1}(V)) = (g \circ f)^{-1}(V)$ 是 X 的开集, 所以 $g^{-1}(V)$ 是 Y 的开集, 所以 g 连续.

假设反过来成立. 取 $Z = X/\sim$, $\sim$ 是映射 f 的纤维诱导的 X 的划分. 那么我们有交换图

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ Y & X/\sim, \arrow[l, "\bar{f}"] \end{tikzcd}$$

其中 $\bar{f}$ 是 f 诱导的双射, 此时 $\bar{f}^{-1} \circ f(x) = \pi(x)$, 根据假设, $\bar{f}^{-1}$ 是连续映射, 所以 $\bar{f}$ 是同胚, 所以 $f = \bar{f} \circ \pi$ 是商映射. □

推论 1.20. 令 $f : X \to Y$ 是商映射, $h : X \to Z$ 是连续映射并且在 f 的每个纤维上是常值的, 那么存在唯一的连续映射 $\bar{h} : Y \to Z$ 使得 $h = \bar{h} \circ f$, 即有交换图

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "h"] & \\ Y \arrow[r, dashed, "\bar{h}"'] & Z. \end{tikzcd}$$

此外, $\bar{h}$ 是开 (闭) 映射当且仅当在 U 是 X 的形如 $U = f^{-1}(f(U))$ 的开 (闭) 集时, $h(U)$ 是 Z 的开 (闭) 集.

Proof. 要保证 $h = \bar{h} \circ f$, 即任取 $x \in X$, 有 $\bar{h}(f(x)) = h(x)$. 对于 $y = f(x) \in Y$, 那么必须有 $\bar{h}(y) = \bar{h}(f(x)) = h(x)$, h 在 f 的纤维上是常值的表明这样的 $\bar{h}$ 是良好定义的, 所以 $\bar{h}$ 唯一存在. $h = \bar{h} \circ f$ 连续表明 $\bar{h}$ 连续.

以开映射为例. 若 $\bar{h}$ 是开映射且 $U = f^{-1}(f(U))$ 是 X 的开集, 那么 $h(U) = h(f^{-1}(f(U))) = \bar{h}(f(U))$, 由于 $f^{-1}(f(U)) = U$ 是 X 的开集, 所以 $f(U)$ 是 Y 的开集, 所以 $h(U) = \bar{h}(f(U))$ 是 Z 的开集. 反之, 任取 $V \subseteq Y$ 是开集, 那么 $f^{-1}(V)$ 是

X 的开集且 $f^{-1}(V)=f^{-1}(f(f^{-1}(V)))$, 根据假设, 有 $h(f^{-1}(V))$ 是 Z 的开集, 于是 $\bar{h}(V)=\bar{h}(f(f^{-1}(V)))=h(f^{-1}(V))$ 是 Z 的开集, 即 $\bar{h}$ 是开映射. □

推论 1.21. 令 X, Z 是拓扑空间，$h: X\to Z$ 是商映射，记 $X/\sim$ 是 h 的纤维导出的商空间，那么 $X/\sim$ 同胚于 Z，同胚映射为 $\varphi:[x]\mapsto h(x)$.

Proof. 记自然映射 $\pi: X\to X/\sim$. 由于 h 在 h 的纤维上是常值的, 所以存在唯一的连续映射 $\varphi: X/\sim\to Z$ 使得 $h=\varphi\circ\pi$, 即 $\varphi([x])=h(x)$. 另一方面, π 在 h 的纤维上也是常值的, 所以存在唯一的连续映射 $\psi: Z\to X/\sim$ 使得 $\pi=\psi\circ h$, 所以 $h=\varphi\circ\pi=\varphi\circ\psi\circ h$, h 是满射表明存在右逆, 所以 $\varphi\circ\psi=1_Z$. 同理可得 $\psi\circ\varphi=1_{X/\sim}$, 所以 φ 和 ψ 互为连续逆映射, 故 φ 是同胚. □

> 1-3 令 $f: X\to Y$ 是商映射，$g: Y\to Z$ 是连续满射，那么 g 是商映射当且仅当 $g\circ f$ 是商映射.

Proof. 若 g 是商映射, 设 $W\in Z$ 使得 $(g\circ f)^{-1}(W)$ 是 X 的开集, 即 $f^{-1}(g^{-1}(W))$ 是 X 的开集, 所以 $g^{-1}(W)$ 是 Y 的开集, 所以 W 是 Z 的开集, 所以 $g\circ f$ 是商映射.

反之, 若 $g\circ f$ 是商映射. 设 $W\in Z$ 使得 $g^{-1}(W)$ 是开集, 那么 $(g\circ f)^{-1}(W)=f^{-1}(g^{-1}(W))$ 是 X 的开集, $g\circ f$ 是商映射表明 W 是 Z 的开集. □

> 1-4 设 X 和 Y 是拓扑空间，分别有等价关系 $\sim$ 和 $\sim'$，$f: X\to Y$ 是保持关系的连续映射，即 $x\sim x'$ 能推出 $f(x)\sim' f(x')$. 证明其诱导的 $\bar{f}: X/\sim\to Y/\sim'$ 是连续映射. 此外，如果 f 是商映射，那么 $\bar{f}$ 也是商映射.

Proof. 记 $\pi: X\to X/\sim$ 和 $\pi': Y\to Y/\sim'$ 是自然映射. 那么我们有交换图

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \arrow[d, "\pi'"] \\ X/\sim \arrow[r, dashed, "\bar{f}"'] & Y/\sim', \end{tikzcd}$$

其中 $\bar{f}([x])=[f(x)]$. f 保持关系表明 $\bar{f}$ 是良好定义的. 任取 $Y/\sim'$ 的开集 V, 那么

$$\pi^{-1}(\bar{f}^{-1}(V))=(\bar{f}\circ\pi)^{-1}(V)=(\pi'\circ f)^{-1}(V)=f^{-1}(\pi'^{-1}(V))$$

是 X 的开集, 所以 $\bar{f}^{-1}(V)$ 是 $X/\sim$ 的开集, 故 $\bar{f}$ 是连续映射. 如果 f 是商映射, 那么 $\pi'\circ f$ 是商映射, 再根据上一题, $\bar{f}$ 是商映射. □

定义 1.22. 若 X 是拓扑空间，定义 $X\times I$ 上的等价关系为 $(x,t)\sim(x',t')$ 当且仅当 $t=t'=1$. 记 (x,t) 所在的等价类为 $[x,t]$. 我们说商空间 $X\times I/\sim$ 是 X 上的**锥体**，记为 CX.

实际上上面的定义表明 CX 就是商空间 $X\times I/X\times\{1\}$. 点 $[x,1]\in CX$ 被称为**顶点**. 我们基本上相当于引入了一个新的不在 x 中的点(顶点) v 并且用线段连接了 v 和 X 中的每个点.

定理 1.23. **对于每个空间 X，锥体 CX 都是可缩的.**

Proof. 定义 $F:CX\times I\to CX$ 为 $F([x,t],s)=[x,s+(1-s)t]$ 即可. □

下面的结果表明可缩空间是 hTop 中最简单的对象.

定理 1.24. **空间 X 和单点空间有相同的同伦型当且仅当 X 是可缩的.**

Proof. 设 $\{a\}$ 是单点空间. 假设 X 和 $\{a\}$ 有相同的同伦型, 即存在连续映射 $f:X\to\{a\}$ 和连续映射 $g:\{a\}\to X$ 使得 $g\circ f\simeq 1_X$, 由于 $g\circ f$ 显然是常值映射, 所以 X 是可缩的.

假设 X 是可缩的. 设 $1_X\simeq c$, 其中 $c:X\to X$ 是常值映射 $c(x)=x_0$. 令 $f:X\to\{x_0\}$ 和 $g:\{x_0\}\to X$,其中 $g(x_0)=x_0$.那么 $f\circ g=1_{\{x_0\}}$ 以及 $g\circ f=c\simeq 1_X$, 所以 $f:X\to\{x_0\}$ 是同伦等价. □

下面的定理表明可缩空间可能和单点集的行为类似, 尤其是以同伦的角度来看的时候.

定理 1.25. **如果 Y 可缩，那么任意 $X\to Y$ 的两个连续映射都是同伦的，等价地说，任意 $X\to Y$ 的连续映射都是零伦的.**

Proof. Y 可缩表明 $1_Y\simeq c$, 设 $c(y)=y_0$ 是常值映射. 定义 $g:X\to Y$ 是常值映射 $g(x)=y_0$. 任取连续映射 $f:X\to Y$, 那么 $f=1_Y\circ f\simeq c\circ f=g$, 所以任意连续映射 f 都同伦于 g. □