

球谐函数笔记

Eliauk

2025 年 11 月 13 日

目录

1 圆上的调和函数	1
2 球面上的球谐函数	3
3 一点李群表示论	9
4 Peter-Weyl 定理	12

1 圆上的调和函数

Joseph Fourier (1768–1830) 在研究热传导问题时引入了 Fourier 级数的概念. 使用 Fourier 级数, 每个平方可积的周期函数 f 都可以唯一地表示为级数

$$f(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta),$$

其中 Fourier 系数 a_k, b_k 由下式给出:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos k\theta d\theta, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin k\theta d\theta.$$

这个惊人的发现在物理学、信号处理、工程学等领域有着广泛的理论和实际应用, 但是 Fourier 级数的数学内涵远不止于此. 我们引入平方可积函数的内积

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) g(\theta) d\theta,$$

也记为

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{S}^1} f(\theta)g(\theta) d\theta,$$

其中 \mathbb{S}^1 是单位圆. 实际上上述记法就是在 \mathbb{S}^1 流形上的积分. 通过这个内积, 空间 $L^2(\mathbb{S}^1)$ 是一个完备的赋范向量空间, 也即 Hilbert 空间. 进一步的, 我们定义 $L^2(\mathbb{S}^1)$ 的子空间 $\mathcal{H}_k(\mathbb{S}^1)$ 为: $\mathcal{H}_0(\mathbb{S}^1) = \mathbb{R}$ 是所有常值函数的空间, $\mathcal{H}_k(\mathbb{S}^1)$ 是由函数 $\cos k\theta$ 和 $\sin k\theta$ 张成的二维空间. 那么, Fourier 级数告诉我们有正交直和分解

$$L^2(\mathbb{S}^1) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k(\mathbb{S}^1).$$

空间 $\mathcal{H}_k(\mathbb{S}^1)$ 会自然地出现在 \mathbb{R}^2 上的 Laplace 方程中, 即 $\Delta f = 0$. 大致来说, \mathbb{R}^2 中的齐次函数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 在极坐标 (r, θ) 中有形式

$$f(r, \theta) = r^k g(\theta).$$

极坐标中的 Laplace 算子为

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}.$$

当然, 我们要求 $f \in C^2$ 是二阶连续可微的. 如果我们把 f 限制在单位圆 \mathbb{S}^1 上, 那么 \mathbb{S}^1 上的 Laplace 算子为

$$\Delta_{\mathbb{S}^1} f = \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}.$$

下面我们将看到空间 $\mathcal{H}_k(\mathbb{S}^1)$ 实际上是 $\Delta_{\mathbb{S}^1}: L^2(\mathbb{S}^1) \rightarrow L^2(\mathbb{S}^1)$ 的特征值 $-k^2$ 的特征函数空间.

对于方程 $\Delta f = 0$, 采用分离变量法, 设 $f(r, \theta) = F(r)g(\theta)$. 假设 $F(r) = r^k$, 其中 $k \geq 0$ 是整数, 这意味着 f 是 k 次齐次函数. 其中 $g: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ 是圆上的函数. 现在, 将 f 代入 Laplace 算子, 有

$$\Delta f = r^{k-2} (k^2 g(\theta) + g''(\theta)) = r^{k-2} (-\Delta_{\mathbb{S}^1} g(\theta) + k^2 g(\theta)).$$

于是我们得到

$$\Delta f = 0 \iff \Delta_{\mathbb{S}^1} g = -k^2 g.$$

即, g 是 $\Delta_{\mathbb{S}^1}$ 的特征值 $-k^2$ 的特征函数. 这等价于一个二阶微分方程:

$$\frac{d^2 g}{d\theta^2} + k^2 g = 0,$$

有通解

$$g(\theta) = a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta.$$

因此, 我们发现 $0, -1, -4, \dots, -k^2, \dots$ 是 $\Delta_{\mathbb{S}^1}$ 的特征值, 并且函数 $\cos k\theta$ 和 $\sin k\theta$ 是对应的特征函数. 所以, $k = 0$ 的时候特征空间是 1 维的, 而 $k \geq 1$ 的时候特征空间是 2 维的. 可以证明 $\Delta_{\mathbb{S}^1}$ 没有其他的特征值.

回到齐次调和函数 $f(r, \theta) = r^k g(\theta)$ 上, 我们注意到这些函数构成的空间由

$$u_k = r^k \cos k\theta, \quad v_k = r^k \sin k\theta$$

张成. 因为 $(x + iy)^k = r^k (\cos k\theta + i \sin k\theta) = u_k + i v_k$, 由于复可微函数的实部和虚部都是调和函数, 所以 u_k 和 v_k 都是 \mathbb{R}^2 上的调和函数. 因此, u_k, v_k 实际上还给出了 \mathbb{R}^2 上所有 k 次齐次调和多项式的一个基. 其中一些低次的齐次调和多项式如下:

$$\begin{aligned} k = 0 & \quad 1 \\ k = 1 & \quad x, y \\ k = 2 & \quad x^2 - y^2, xy \\ k = 3 & \quad x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3 \\ k = 4 & \quad x^4 - 6x^2y^2 + y^4, x^3y - xy^3. \end{aligned}$$

于是, 我们发现 \mathbb{S}^1 上的 Laplace 算子的特征函数是 \mathbb{R}^2 上调和多项式在 \mathbb{S}^1 上的限制, 并且有 Hilbert 空间分解 $L^2(\mathbb{S}^1) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k(\mathbb{S}^1)$. 这意味着我们可以在球面 \mathbb{S}^2 上寻找类似的分解.

2 球面上的球谐函数

我们的目标是寻找 \mathbb{R}^3 中 Laplace 方程 $\Delta f = 0$ 的齐次解, 并且证明它们对应于 2-球面上的 Laplace 算子 $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ 的特征函数空间 $\mathcal{H}_k(\mathbb{S}^2)$. 那么空间 $\mathcal{H}_k(\mathbb{S}^2)$ 将给出 $L^2(\mathbb{S}^2)$ 的 Hilbert 直和分解. 这是 Fourier 级数在球面上的推广, $\mathcal{H}_k(\mathbb{S}^2)$ 中的函数被称为**球谐函数**.

在 \mathbb{R}^3 中, 采用球坐标 (r, θ, φ) , 那么

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

并且要求 $0 \leq \theta < \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ 以及 $r > 0$. 那么球坐标中 Laplace 算子为

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\mathbb{S}^2} f,$$

其中 \mathbb{S}^2 上的 Laplace 算子为

$$\Delta_{\mathbb{S}^2} f = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}.$$

同样, 我们寻找齐次调和函数 $f(r, \theta, \varphi) = r^k g(\theta, \varphi)$. 将 f 代入 Laplace 方程, 有

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial(r^k g)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\mathbb{S}^2}(r^k g) \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 k r^{k-1} g \right) + \frac{1}{r^2} r^k \Delta_{\mathbb{S}^2} g \\ &= r^{k-2} (k(k+1)g + \Delta_{\mathbb{S}^2} g).\end{aligned}$$

因此

$$\Delta f = 0 \iff \Delta_{\mathbb{S}^2} g = -k(k+1)g.$$

也即, g 是 $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ 的特征值 $-k(k+1)$ 的特征函数.

我们采用分离变量法寻找上述方程的解. 令 $g(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$, 那么得到方程

$$\frac{\Phi}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{\Theta}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -k(k+1)\Theta\Phi,$$

两边除以 $\Theta\Phi$ 并且乘以 $\sin^2 \theta$, 得到

$$\frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + k(k+1) \sin^2 \theta = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2}.$$

因为左边只含有 θ , 右边只含有 φ , 所以两边只可能都等于一个常数, 记为 μ . 那么我们得到两个常微分方程:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \mu \Phi &= 0, \\ \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + (k(k+1) \sin^2 \theta - \mu) \Theta &= 0.\end{aligned}$$

因为我们考虑的是球面 \mathbb{S}^2 上的函数, 所以 Φ 是 2π -周期的, 所以必须有 $\mu = m^2$, 其中 m 是非负整数. 那么, 我们知道方程

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi = 0$$

的解是 2 维的, 由下面两个函数张成:

$$\Phi(\varphi) = \cos m\varphi, \quad \Phi(\varphi) = \sin m\varphi.$$

接下来, 我们考虑 Θ 的方程:

$$\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + (k(k+1) \sin^2 \theta - m^2) \Theta = 0.$$

这等价于

$$\sin^2 \theta \Theta'' + \sin \theta \cos \theta \Theta' + (k(k+1) \sin^2 \theta - m^2) \Theta = 0.$$

这是 Legendre 方程的一个变体. 令 $t = \cos \theta$, 考虑函数 $u(\cos \theta) = \Theta(\theta)$, 注意 $0 \leq \theta < \pi$, 那么我们得到二阶微分方程

$$(1-t^2)u'' - 2tu' + \left(k(k+1) - \frac{m^2}{1-t^2}\right)u = 0.$$

这被称为**连带 Legendre 方程**. 解这个方程的技巧是采用代换 $u(t) = (1-t^2)^{m/2}v(t)$, 那么得到

$$(1-t^2)v'' - 2(m+1)tv' + (k(k+1) - m(m+1))v = 0.$$

当 $m = 0$ 的时候, 我们得到 **Legendre 方程**:

$$(1-t^2)v'' - 2tv' + k(k+1)v = 0.$$

这个方程有两个基本解 $P_k(t)$ 和 $Q_k(t)$, 被称为**第一类和第二类 Legendre 函数**. $P_k(t)$ 实际上是多项式, $Q_k(t)$ 由一个在 $t = 1$ 处发散的幂级数给出, 所以我们也把 $P_k(t)$ 称作 **Legendre 多项式**. Legendre 多项式有许多种定义形式, 其中一种定义由 **Rodrigues 公式**给出:

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n.$$

Legendre 多项式满足 $P_n(1) = 1$ 以及递推关系

$$\begin{aligned} P_0 &= 1, \quad P_1 = t, \\ (n+1)P_{n+1} &= (2n+1)tP_n - nP_{n-1} \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

前六个 Legendre 多项式如下:

$$1, t, \frac{1}{2}(3t^2 - 1), \frac{1}{2}(5t^3 - 3t), \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3), \frac{1}{8}(63t^5 - 70t^3 + 15t).$$

现在我们回到微分方程

$$(1-t^2)v'' - 2(m+1)tv' + (k(k+1) - m(m+1))v = 0. \quad (1)$$

对 t 微分, 得到

$$(1-t^2)v''' - 2(m+2)tv'' + (k(k+1) - (m+1)(m+2))v' = 0.$$

这表明如果 v 是 (1) 式在 k, m 情况下的解, 那么 v' 是 (1) 式在 $k, m+1$ 情况下的解. 因此, 如果 $P_k(t)$ 在 k 和 $m = 0$ 的情况下是 (1) 式的解, 那么 $P'_k(t)$ 在 k 和 $m = 1$ 的情况下是解, $P''_k(t)$ 在 k

和 $m = 2$ 的情况下是解, 依此类推, $d^m/dt^m(P_k(t))$ 在 k 和 m 的情况下是解. 于是, 对于最开始的方程

$$(1-t^2)u'' - 2tu' + \left(k(k+1) - \frac{m^2}{1-t^2}\right)u = 0, \quad (2)$$

有解

$$u(t) = (-1)^m (1-t^2)^{m/2} \frac{d^m}{dt^m}(P_k(t)).$$

这个函数 $u(t)$ 通常记为 $P_k^m(t)$, 被称为**连带 Legendre 函数**. 因为 $P_k(t)$ 是 k 次多项式, 所以在 $m > k$ 的情况下有 $P_k^m(t) \equiv 0$. 由于 $(1-t^2)^{m/2}$ 的存在, 所以连带 Legendre 函数 $P_k^m(t)$ 一般来说不是多项式并且只定义在闭区间 $[-1, 1]$ 上.

连带 Legendre 函数满足许多的关系式. 例如, 对于 $m \geq 0$, 有递推

$$(k-m+1)P_{k+1}^m(t) = (2k+1)tP_k^m(t) - (k+m)P_{k-1}^m(t), \quad k \geq 1.$$

对于 $k \geq 2$, 有

$$P_k^{m+2}(t) = -\frac{2(m+1)t}{(1-t^2)^{1/2}}P_k^{m+1}(t) - (k-m)(k+m+1)P_k^m(t), \quad 0 \leq m \leq k-2.$$

这些递推式可以用于从初始形式

$$\begin{aligned} P_k^0(t) &= P_k(t), \\ P_k^1(t) &= \frac{kt}{(t^2-1)^{1/2}}P_k(t) - \frac{k}{(t^2-1)^{1/2}}P_{k-1}(t) \end{aligned}$$

计算任意的连带 Legendre 函数 $P_k^m(t)$. 注意到 $k = m$ 的时候, 有

$$P_{m+1}^m(t) = (2m+1)tP_m^m(t),$$

所以还有

$$P_m^m(t) = (-1)^m (2m-1)!! (1-t^2)^{m/2}.$$

再回到球谐函数的求解上, 我们需要解方程

$$\sin^2 \theta \Theta'' + \sin \theta \cos \theta \Theta' + (k(k+1) \sin^2 \theta - m^2) \Theta = 0,$$

我们使用了替换 $u(\cos \theta) = \Theta(\theta)$, 并且得到了连带 Legendre 方程的解为 $u(t) = P_k^m(t)$, 所以我们有解

$$\Theta(\theta) = P_k^m(\cos \theta).$$

将所有的结果综合起来, 我们得到齐次函数 $f(r, \theta, \varphi) = r^k \Theta(\theta) \Phi(\varphi)$ 为

$$f(r, \theta, \varphi) = r^k \cos m\varphi P_k^m(\cos \theta), \quad f(r, \theta, \varphi) = r^k \sin m\varphi P_k^m(\cos \theta),$$

它们都是 \mathbb{R}^3 上的调和函数, 并且函数

$$\cos m\varphi P_k^m(\cos \theta), \quad \sin m\varphi P_k^m(\cos \theta)$$

是球面上 Laplace 算子 $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ 的特征值 $-k(k+1)$ 的特征函数. 对于固定的 k , 取遍 $0 \leq m \leq k$, 我们得到 $2k+1$ 个线性无关的特征函数.

处于不同的用途, 我们通常对球谐函数进行归一化处理. 我们使用记号 Y_l^m , 其中 l 是非负整数, m 是整数且满足 $-l \leq m \leq l$. 定义

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \begin{cases} N_l^0 P_l^0(\cos \theta), & m = 0, \\ (-1)^m \sqrt{2} N_l^m \cos m\varphi P_l^m(\cos \theta), & m > 0, \\ (-1)^m \sqrt{2} N_l^{-m} \sin(-m\varphi) P_l^{-m}(\cos \theta), & m < 0, \end{cases}$$

其中 N_l^m 是标量因子, 通常被选为

$$N_l^m = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}}.$$

函数 Y_{lm} 被称为 l 次 m 阶实球谐函数.

函数 Y_l^m 有许多非常漂亮的性质, 为了解释它们, 我们需要回顾 $L^2(\mathbb{S}^2)$ 空间上的结构. $L^2(\mathbb{S}^2)$ 上的内积定义为

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{S}^2} f g \, d\Omega_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \varphi) g(\theta, \varphi) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi.$$

其中 $f, g \in L^2(\mathbb{S}^2)$, $d\Omega_2$ 是 \mathbb{S}^2 上的体积形式. 使用这个内积, 空间 $L^2(\mathbb{S}^2)$ 是一个 Hilbert 空间. 可以证明 Laplace 算子 $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ 相对于这个内积是自伴算子. 因为当 $l_1 \neq l_2$ 的时候, 函数 $Y_{l_1 m_1}$ 和 $Y_{l_2 m_2}$ 是对应于不同特征值 $-l_1(l_1+1)$ 和 $-l_2(l_2+1)$ 的特征函数, 所以它们是正交的, 也即

$$\langle Y_{l_1 m_1}, Y_{l_2 m_2} \rangle = 0, \quad l_1 \neq l_2.$$

同样不难证明对于固定的 l , 有

$$\langle Y_{lm_1}, Y_{lm_2} \rangle = \delta_{m_1 m_2}.$$

也就是说, 函数 Y_{lm} 构成了一个正交函数系, 我们记 $\mathcal{H}_l(\mathbb{S}^2)$ 表示由这些函数张成的 $(2l+1)$ -维空间. 总的来说, $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ 的特征值仅有 $-l(l+1)$, 并且对应的特征空间为 $E_l = \mathcal{H}_l(\mathbb{S}^2)$, 由基函数 Y_l^m 张成, 其中 $-l \leq m \leq l$. 与圆上的情况类似, 我们有

$$L^2(\mathbb{S}^2) = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \mathcal{H}_l(\mathbb{S}^2).$$

即任取函数 $f \in L^2(\mathbb{S}^2)$, 都可以唯一表示为

$$f = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{-l \leq m \leq l} a_{lm} Y_{lm},$$

这被称为**球面上的 Fourier 分解**. 此时 Fourier 系数计算为

$$a_{lm} = \langle f, Y_{lm} \rangle = \int_{\mathbb{S}^2} f(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta, \varphi) d\Omega_2.$$

当然, 我们也有对应的 \mathbb{R}^3 上的齐次球谐函数 $H_l^m(r, \theta, \varphi)$:

$$H_l^m(r, \theta, \varphi) = r^l Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

可以证明 H_l^m 在直角坐标 xyz 下总可以表示为齐次多项式! 这表明: Laplace 算子 $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ 的特征函数 (球谐函数) 是 \mathbb{R}^3 上齐次调和多项式的限制. 下面是一些低次的齐次调和多项式:

$$\begin{aligned} k=0 & \quad 1 \\ k=1 & \quad x, y, z \\ k=2 & \quad x^2 - y^2, x^2 - z^2, xy, xz, yz \\ k=3 & \quad x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3, x^3 - 3xz^2, 3x^2z - z^3, y^3 - 3yz^2, 3y^2z - z^3, xyz \end{aligned}$$

我们也可以定义对应的复球谐函数 $Y_l^m : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, 其中 $-l \leq m \leq l$:

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = N_l^m P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi},$$

其与实球谐函数的关系为

$$Y_l^m = \begin{cases} \frac{(-1)^m}{\sqrt{2}} (Y_{l|m|} + i Y_{l,-|m|}), & m > 0, \\ Y_{l0}, & m = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (Y_{l|m|} - i Y_{l,-|m|}), & m < 0. \end{cases}$$

考虑复 Hilbert 空间 $L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{S}^2)$, 内积由 Hermite 内积定义:

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{S}^2} f \bar{g} d\Omega_2.$$

此时, 复球谐函数 Y_l^m 也是 $L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{S}^2)$ 上 Laplace 算子 $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ 的特征值 $-l(l+1)$ 的特征函数, 并且是正交归一的.

3 一点李群表示论

定义 3.1. 李群 G 的一个表示指的是一个向量空间 V 附带一个同态 $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$. 李代数 \mathfrak{g} 的一个表示指的是一个向量空间 V 附带一个同态 $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$.

李群 G 的两个表示 V, W 之间的 G -线性映射指的是一个线性映射 $f : V \rightarrow W$ 与 G 的作用交换: 即对于任意 $g \in G$, 都有 $f \circ \rho_V(g) = \rho_W(g) \circ f$. 对李代数的表示同样有类似的定义. V 和 W 之间的所有 G -线性映射构成一个向量空间, 记为 $\mathrm{Hom}_G(V, W)$. 类似的, 李代数的表示之间的线性映射构成向量空间 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)$.

不加说明的情况下, 总是假设 V 是复向量空间, 此时 $G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ 理解为一个光滑映射, $\mathrm{GL}(V)$ 是 $2n^2$ -维光滑流形.

李群表示和李代数表示之间有如下重要联系.

定理 3.2. 令 G 是李群, 有李代数 \mathfrak{g} .

- (1) 每个表示 $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ 都定义了一个李代数表示 $\rho_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$, 并且每个 G -线性映射也是 \mathfrak{g} -线性映射.
- (2) 如果 G 是连通并且单连通的, 那么 $\rho \mapsto \rho_*$ 给出了李群表示与李代数表示之间的一一对应, 特别的, \mathfrak{g} 的每个表示都可以唯一提升为 G 的一个表示.

这是一个非常重要的定理, 因为李代数作为有限维向量空间往往更容易处理. 例如, 这个定理表明 $\mathrm{SU}(2)$ 的表示和 $\mathfrak{su}(2)$ 的表示相同, 而 $\mathfrak{su}(2)$ 是一个 3 维的实向量空间.

这个定理也可以用于研究连通但是不是单连通的李群的表示. 实际上, 对于这样的李群 G , 存在一个单连通的李群 \tilde{G} 使得 $G = \tilde{G}/Z$, 其中 $Z \subseteq G$ 是离散的中心子群. 因此, G 的表示和 \tilde{G} 的满足 $\rho(Z) = \mathrm{id}$ 的表示相同. 一个非常重要的例子就是二重覆盖 $\mathrm{SU}(2) \rightarrow \mathrm{SO}(3)$.

引理 3.3. 令 \mathfrak{g} 是实李代数, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 是它的复化. 那么 \mathfrak{g} 的任意复表示都可以提升为 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 的表示, 并且 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(V, W)$.

Proof. 令 $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ 是 \mathfrak{g} 的一个复表示. 延拓为 $\rho(x + iy) = \rho(x) + i\rho(y)$, 这成为 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 的一个表示. □

我们重点关注 $\mathfrak{su}(2)$ 和 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. $\mathfrak{su}(2)$ 的基 (作为实向量空间) 由 Pauli 矩阵给出:

$$i\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad i\sigma_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

满足对易关系

$$[i\sigma_1, i\sigma_2] = 2i\sigma_3, \quad [i\sigma_2, i\sigma_3] = 2i\sigma_1, \quad [i\sigma_3, i\sigma_1] = 2i\sigma_2.$$

$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 的基 (作为复向量空间) 为

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

满足对易关系

$$[H, E] = 2E, \quad [H, F] = -2F, \quad [E, F] = H.$$

由于 $E = \frac{1}{2}(i\sigma_2 - i(i\sigma_1))$, $F = \frac{1}{2}(-i\sigma_2 - i(i\sigma_1))$ 以及 $H = -i(i\sigma_3)$, 所以 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 是 $\mathfrak{su}(2)$ 的复化. 根据前面的结论, $\mathfrak{su}(2)$ 的表示和 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 的表示是一样的. 同时 $SU(2)$ 和 $SL(2, \mathbb{C})$ 都是连通且单连通的李群, 所以它们的表示也和 $\mathfrak{su}(2)$ 的表示是一一对应的. 也就是说, 研究 $SU(2)$, $SL(2, \mathbb{C})$, $\mathfrak{su}(2)$ 和 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 的表示是等价的, 我们只需要选择其中一个来研究即可.

定义 3.4. 令 V 是 G (或者 \mathfrak{g}) 的一个表示, 如果子空间 $W \subseteq V$ 满足: 对于任意 $g \in G$, 有 $\rho(g)W \subseteq W$ (或者对于任意 $x \in \mathfrak{g}$, 有 $\rho(x)W \subseteq W$), 那么称 W 是 V 的一个子表示. 如果 V 没有非平凡子表示 (即 V 的子表示只有 0 和 V), 那么称 V 是不可约的.

例如 \mathbb{C}^n 考虑为 $SL(n, \mathbb{C})$ 的表示的时候, 是不可约的. 因为可以证明, 对于任意非零向量 $v \in \mathbb{C}^n$, 都存在一个行列式为 1 的矩阵 $A \in SL(n, \mathbb{C})$, 使得 Av 是任意一个标准基向量. 因此, 任意非零子空间 $W \subseteq \mathbb{C}^n$ 都包含所有的标准基向量, 所以 $W = \mathbb{C}^n$.

对于 G 或者 \mathfrak{g} 的两个表示 V 和 W , 它们的直和 $V \oplus W$ 也是一个表示, 只需要定义 G 在 $V \oplus W$ 上的作用为

$$\rho_{V \oplus W}(g)(v, w) = (\rho_V(g)v, \rho_W(g)w).$$

定义 3.5. 一个表示如果同构于若干不可约表示的直和, 即存在不可约表示 V_i 使得 $V \simeq \bigoplus_i V_i$, 那么称它是完全可约的.

通常来说, 我们可以把直和项中同构的空间合并, 记为 $V \simeq \bigoplus n_i V_i$, 其中 V_i 是两两不同构的不可约表示, n_i 是它们的重数.

令 $G = \mathbb{R}$, 那么 $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$. 此时 \mathfrak{g} 的表示就是一个向量空间 V 附带线性映射 $\mathbb{R} \rightarrow \text{End}(V)$, 显然, 这样的映射一定形如 $t \mapsto tA$, 其中 $A \in \text{End}(V)$. 所以对应的 \mathbb{R} 的表示一定形如 $t \mapsto \exp(tA)$. 也就是说, 分类 \mathbb{R} 的表示等价于分类线性映射 $V \rightarrow V$. 这样的分类可以通过 Jordan 标准型完成. 如果 v 是 A 的一个特征向量, 那么一维空间 $\mathbb{C}v \subseteq V$ 在 A 的作用下是不变的, 所以 $\mathbb{C}v$ 是 V 的一个子表示. 因此, \mathbb{R} 的任意大于 1 维的表示都有非平凡子表示, 也即 \mathbb{R} 的不可约表示都是 1 维的. 因此, 把表示 $t \mapsto \exp(tA)$ 写成一些不可约表示的直和等价于把矩阵 A 对角化. 所以 \mathbb{R} 的表示完全可约当且仅当矩阵 A 可对角化.

引理 3.6. 令 $\rho: G \rightarrow GL(V)$ 是 G (或者 \mathfrak{g}) 的表示, $A: V \rightarrow V$ 是可对角化的 G -线性映射. 令 $V_\lambda \subseteq V$ 是 A 的特征值 λ 的特征空间, 那么 V_λ 是一个子表示, 所以 $V = \bigoplus V_\lambda$ 是表示的一个直和分解.

Proof. 任取 $v \in V_\lambda$, 那么 $Av = \lambda v$. 对于任意 $g \in G$, 有

$$A(\rho(g)v) = \rho(g)(Av) = \rho(g)(\lambda v) = \lambda(\rho(g)v),$$

所以 $\rho(g)v \in V_\lambda$, 也即 V_λ 是一个子表示. A 可对角化意味着 $V = \bigoplus V_\lambda$, 所以这是一个直和分解. \square

引理 3.7 (Schur 引理).

(1) 令 V 是 G 的一个不可约复表示, 那么 $\text{Hom}_G(V, V) = \mathbb{C}\text{id}$, 即 G 的不可约表示的自同态只有数乘同态.

(2) 如果 V 和 W 是两个不同构的不可约复表示, 那么 $\text{Hom}_G(V, W) = 0$.

类似的结果对于李代数 \mathfrak{g} 也成立.

Proof. 如果 $\Phi : V \rightarrow W$ 是 G -线性映射, 那么 $\ker \Phi$ 和 $\text{im } \Phi$ 分别是 V 和 W 的子表示. 如果 V 不可约, 那么 $\ker \Phi$ 是 V 或者 0 , 所以 Φ 要么是 0 , 要么是单射. 同样地, 如果 W 不可约, 那么 $\text{im } \Phi$ 是 0 或者 W , 所以 Φ 要么是 0 , 要么是满射.

因此, 如果 V 和 W 不同构并且都不可约, 那么 Φ 只能是 0 , 所以 $\text{Hom}_G(V, W) = 0$. 如果 V 不可约, 那么 $\Phi : V \rightarrow V$ 要么是 0 , 要么是同构. 设 λ 是 Φ 的一个特征值, 那么 $\Phi - \lambda\text{id}$ 不是同构, 所以只能是 0 , 也即 $\Phi = \lambda\text{id}$. \square

Schur 引理有下述重要推论.

命题 3.8. 如果 G 是交换群, 那么 G 的任意不可约复表示都是 1 维的. 类似地, 如果 \mathfrak{g} 是交换李代数, 那么 \mathfrak{g} 的任意不可约复表示都是 1 维的.

Proof. 设 $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ 是不可约复表示, 任取 $g \in G$, 那么 $\rho(g) : V \rightarrow V$ 是 G -线性映射. 因为对于任意 $h \in G$ 和 $v \in V$, 都有 $\rho(g)(\rho(h)v) = \rho(gh)v = \rho(hg)v = \rho(h)(\rho(g)v)$. 根据 Schur 引理, $\rho(g) = \lambda_g \text{id}$, 其中 $\lambda_g \in \mathbb{C}$. 而 V 不可约, 所以 V 是 1 维的. \square

还是考虑 $G = \mathbb{R}$. 我们已经知道 \mathbb{R} 的不可约表示都是 1 维的. 实际上, 任意 1 维表示对应的李代数表示都是形如 $a \mapsto \lambda a$ 的映射, 其中 $\lambda \in \mathbb{C}$. 因此, \mathbb{R} 的任意不可约表示都形如 V_λ , 其中 $\lambda \in \mathbb{C}$ 并且 V_λ 是 1 维的复向量空间, 附带表示作用 $\rho(a) = e^{\lambda a}$.

类似地, 我们可以描述 $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 的不可约表示. 此时, 任意表示 $\tau : \mathbb{S}^1 \rightarrow \text{GL}(V)$ 都可以通过商映射 $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ 提升为 \mathbb{R} 的表示 $\tau \circ \pi$. 并且对于任意 $a \in \mathbb{Z}$ 有 $\tau \circ \pi(a) = \tau(1) = \text{id}$. 所以说 \mathbb{S}^1 的表示必须是 \mathbb{R} 的满足 $\rho(a) = \text{id}$ 的表示. 因此, \mathbb{S}^1 的不可约表示都是 1 维的, 形如 V_k , 其中 $k \in \mathbb{Z}$ 并且 V_k 是 1 维复向量空间, 附带表示作用 $\tau \circ \pi(x) = e^{2\pi i k x}$, 或者说 $\tau(z) = z^k$.

4 Peter-Weyl 定理

定义 4.1. 一个李群 G 的复表示 V 如果存在一个 G -不变的 Hermite 内积, 即对于任意 $g \in G$ 和 $v, w \in V$, 都有

$$\langle \rho(g)v, \rho(g)w \rangle = \langle v, w \rangle,$$

那么称 V 是酉表示. 类似地, 一个李代数 \mathfrak{g} 的复表示 V 如果存在一个 \mathfrak{g} -不变的 Hermite 内积

$$\langle \rho(x)v, w \rangle + \langle v, \rho(x)w \rangle = 0, \quad \forall x \in \mathfrak{g}, v, w \in V,$$

那么称 V 是酉表示.

酉表示的重要性体现在下面的定理.

定理 4.2. 每个酉表示都是完全可约的.

Proof. 对 V 的维数归纳. 对于 $\dim V = 1$ 的情况, 显然成立. 假设对于 $\dim V < n$ 的情况成立. 若 $\dim V = n$, 如果 V 是不可约的, 那么结论成立. 否则, 存在非平凡子表示 $W \subseteq V$, 那么 $V = W \oplus W^\perp$. 如果 $v \in W^\perp$, 那么任取 $w \in W$, 有 $\langle gv, w \rangle = \langle v, g^{-1}w \rangle = 0$, 所以 $gv \in W^\perp$, 所以 W^\perp 也是 V 的子表示. 根据归纳假设, W 和 W^\perp 都是完全可约的, 所以 V 也是完全可约的. 对于李代数的情况同理. \square

对于有限群而言, 可以证明有限群的任意表示都是酉表示. 其中需要对 G 上的函数平均化处理得到一个 G -不变的内积, 从而得到酉表示结构. 然而, 对于无限群, 这种平均并不能通过求和完成, 所以我们需要引入 Haar 测度.

定义 4.3. 李群 G 上的一个右 Haar 测度指的是 G 上的一个 Borel 测度 dg , 其在右平移作用下不变: 即对于任意 Borel 集合 $E \subseteq G$ 和任意 $h \in G$, 都有 $dg(Eh) = dg(E)$.

显然右 Haar 测度等价于对于任意 $h \in G$ 和可积函数 f , 有 $\int f(gh) dg = \int f(g) dg$. 类似地可以定义左 Haar 测度.

对于紧李群而言, 从微分几何中的知识可知, G 上存在唯一一个双不变 (同时左不变和右不变) 的体积形式 ω , 使得 $\int_G \omega = 1$. 这个体积形式可以构造一个双不变的 Haar 测度 dg , 满足对于任意连续函数 f , 都有 $\int_G f dg = \int_G f \omega$.

定理 4.4. 令 G 是一个紧李群, 那么 G 的任意表示都是酉表示并且是完全可约的.

Proof. 令 $B(v, w)$ 是 V 上的一个 Hermite 内积, 将其平均化, 定义

$$\tilde{B}(v, w) = \int_G B(gv, gw) dg.$$

根据 Haar 测度的性质, \tilde{B} 是一个 G -不变的 Hermite 内积, 所以 V 是酉表示. \square

利用这个定理, 紧李群的任意表示都可以写成不可约表示的直和 $V \simeq \bigoplus n_i V_i$, 其中 $n_i \in \mathbb{Z}$, V_i 是两两不同构的不可约表示. 下面我们研究如何构造这个直和分解.

令 v_i 是 V 的一组基, 将映射 $\rho(g) : V \rightarrow V$ 在这组基下表示为矩阵 $\rho(g) = (\rho_{ij}(g))$. 也就是说, 我们考虑 G 上的标量函数 $\rho_{ij} : G \rightarrow \mathbb{C}$, 这被称为矩阵系数.

定理 4.5.

- (1) 令 V, W 是 G 的不同构的不可约表示. 选取基 $v_i \in V$ ($i = 1, \dots, n$) 和 $w_a \in W$ ($a = 1, \dots, m$). 那么矩阵系数 ρ_{ij}^V 和 ρ_{ab}^W 是正交的: $\langle \rho_{ij}^V, \rho_{ab}^W \rangle = 0$, 其中 $C^\infty(G, \mathbb{C})$ 上的内积定义为

$$\langle f, h \rangle = \int_G f(g) \overline{h(g)} dg.$$

- (2) 令 V 是 G 的不可约表示. 选取基 $v_i \in V$ 是一个相对于某个 G -不变内积的正交基. 那么矩阵系数 ρ_{ij}^V 是两两正交的并且每个的模长平方为 $1/\dim V$:

$$\langle \rho_{ij}^V, \rho_{ab}^V \rangle = \frac{1}{\dim V} \delta_{ia} \delta_{jb}.$$