

---

# Contents

<b>1 李代数</b>	<b>1</b>
1.1 定义和初步例子	1
1.2 单、可解和幂零的李代数	3
1.3 矩阵李群的李代数	5
1.4 示例	7
1.5 李群和李代数同态	7
1.6 实李代数的复化	10



# 李代数

## 1.1 定义和初步例子

**定义 1.1.** 一个有限维实或者复李代数指的是一个有限维的实或者复向量空间  $\mathfrak{g}$ , 配备一个映射  $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , 满足:

1.  $[\cdot, \cdot]$  是双线性的.
2.  $[\cdot, \cdot]$  是反对称的: 对于任意  $X, Y \in \mathfrak{g}$  有  $[X, Y] = -[Y, X]$ .
3. Jacobi 恒等式: 对于任意  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$  有

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

若  $[X, Y] = 0$ , 那么我们说  $X, Y$  是**可交换的**. 如果对于所有  $X, Y \in \mathfrak{g}$  都有  $[X, Y] = 0$ , 那么我们说  $\mathfrak{g}$  是**可交换的**.

$[\cdot, \cdot]$  通常被称为  $\mathfrak{g}$  上的李括号. 注意到反对称性表明  $[X, X] = 0$ . 李括号运算通常不满足结合律, 然而 Jacobi 恒等式可以被视为结合律的替代方案.

**例 1.2.** 令  $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^3$ ,  $[\cdot, \cdot]: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  定义为

$$[x, y] = x \times y,$$

其中  $x \times y$  是向量叉乘. 那么  $\mathfrak{g}$  是一个李代数.

*Proof.* 双线性性和反对称性是显然的. 根据双线性性, 只需要对基向量  $e_1, e_2, e_3$  验证 Jacobi 恒等式即可. 如果  $j, k, l$  互不相同, 那么  $e_j, e_k, e_l$  中任意两个的叉乘等于第三个或者第三个的相反方向, 所以 Jacobi 恒等式中每一项都是 0. 于是只需要验证  $j, k, l$  中有两个相同的情况即可, 通过重新排序, 只需要验证

$$[e_j, [e_j, e_k]] + [e_j, [e_k, e_j]] + [e_k, [e_j, e_j]] = 0,$$

上式的前两项相反, 第三项为零, 故叉乘满足 Jacobi 恒等式.  $\square$

**例 1.3.** 令  $\mathcal{A}$  是结合代数,  $\mathfrak{g}$  是  $\mathcal{A}$  的一个子空间, 使得任意的  $X, Y \in \mathfrak{g}$  有  $XY - YX \in \mathfrak{g}$ . 那么  $\mathfrak{g}$  是一个李代数, 有李括号

$$[X, Y] = XY - YX.$$

*Proof.* 双线性和反对称性是显然的. 对于 Jacobi 恒等式, 每个双层李括号会产生 4 项, 所以总共有 12 项, 即

$$[X, [Y, Z]] = [X, YZ - ZY] = XYZ - XZY - YZX + ZYX,$$

对  $X, Y, Z$  进行轮换, 那么正项负项刚好抵消, 故这是一个李代数.  $\square$

如果我们仔细观察 Jacobi 恒等式的证明, 我们会发现  $XYZ$  实际上以两种方式出现, 一种是  $X(YZ)$ , 一种是  $(XY)Z$ . 所以代数  $\mathcal{A}$  的结合性是重要的. 对于任意李代数, Jacobi 恒等式意味着李括号的行为就像在某个结合代数中的  $XY - YX$  一样, 即使这个李括号本身不是这样定义的 (比如叉乘). 实际上, 可以证明每个李代数  $\mathfrak{g}$  都可以嵌入到一个结合代数  $\mathcal{A}$  中, 使得其李括号变成  $XY - YX$ .

**例 1.4.** 令  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  是所有满足  $\text{tr } X = 0$  的  $X \in M_n(\mathbb{C})$  构成的空间. 那么  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  是李代数, 有李括号  $[X, Y] = XY - YX$ .

*Proof.* 我们有

$$\text{tr}(XY - YX) = \text{tr}(XY) - \text{tr}(YX) = 0,$$

所以可以应用 例 1.3.  $\square$

**定义 1.5.** 实或者复李代数  $\mathfrak{g}$  的一个子代数指的是一个子空间  $\mathfrak{h}$  使得任取  $H_1, H_2 \in \mathfrak{h}$  有  $[H_1, H_2] \in \mathfrak{h}$ . 如果  $\mathfrak{g}$  是复李代数,  $\mathfrak{h}$  是  $\mathfrak{g}$  的实子空间并且对李括号封闭, 那么  $\mathfrak{h}$  被称为  $\mathfrak{g}$  的实子代数.

李代数  $\mathfrak{g}$  的一个子代数  $\mathfrak{h}$  被称为  $\mathfrak{g}$  中的理想, 如果对于任意  $H \in \mathfrak{h}, X \in \mathfrak{g}$  有  $[X, H] \in \mathfrak{h}$ .

李代数  $\mathfrak{g}$  的中心指的是一个子空间  $\mathfrak{Z}$  的集合, 对于每个  $X \in \mathfrak{Z}$ , 其使得任取  $Y \in \mathfrak{g}$ , 有  $[X, Y] = 0$ .

**定义 1.6.** 如果  $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$  是李代数, 线性映射  $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  满足  $\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$ , 那么  $\phi$  被称为李代数同态. 此外, 如果  $\phi$  是双射, 那么  $\phi$  被称为李代数同构.

**定义 1.7.** 如果  $\mathfrak{g}$  是李代数,  $X \in \mathfrak{g}$ , 定义线性映射  $\text{ad}_X: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  为

$$\text{ad}_X(Y) = [X, Y].$$

映射  $X \mapsto \text{ad}_X$  被称为伴随映射或者伴随表示.

虽然  $\text{ad}_X(Y)$  就是  $[X, Y]$ , 但是  $\text{ad}$  的记号是有方便的. 例如, 我们可以把

$$[X, [X, [X, [X, Y]]]]$$

写为  $(\text{ad}_X)^4(Y)$ . 此外, 映射  $X \mapsto \text{ad}_X$  可以视为  $\mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$  的映射. Jacobi 恒等式等价于  $\text{ad}_X$  是李括号的导子:

$$\text{ad}_X([Y, Z]) = [\text{ad}_X(Y), Z] + [Y, \text{ad}_X(Z)]. \quad (1.1)$$

**命题 1.8.** 如果  $\mathfrak{g}$  是李代数, 那么

$$\text{ad}_{[X,Y]} = \text{ad}_X \text{ad}_Y - \text{ad}_Y \text{ad}_X = [\text{ad}_X, \text{ad}_Y],$$

也就是说  $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$  是李代数同态.

*Proof.* 注意到

$$\text{ad}_{[X,Y]}(Z) = [[X, Y], Z],$$

并且

$$[\text{ad}_X, \text{ad}_Y](Z) = [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]],$$

所以上式等价于 Jacobi 恒等式.  $\square$

**定义 1.9.** 如果  $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$  是李代数, 那么直和  $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$  也是李代数, 配备李括号

$$[(X_1, X_2), (Y_1, Y_2)] = ([X_1, Y_1], [X_2, Y_2]).$$

如果  $\mathfrak{g}$  是李代数,  $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$  是两个子代数, 作为向量空间有  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$  并且对于  $X_1 \in \mathfrak{g}_1, X_2 \in \mathfrak{g}_2$  有  $[X_1, X_2] = 0$ , 那么我们说  $\mathfrak{g}$  分解为  $\mathfrak{g}_1$  和  $\mathfrak{g}_2$  的直和.

**定义 1.10.** 令  $\mathfrak{g}$  是有限维实或者复李代数,  $X_1, \dots, X_N$  是  $\mathfrak{g}$  的一组基, 那么有唯一的常数  $c_{jkl}$  使得

$$[X_j, X_k] = \sum_{l=1}^N c_{jkl} X_l,$$

$c_{jkl}$  被称为  $\mathfrak{g}$  的**结构常数**.

虽然我们不会经常遇到结构常数, 但是在物理课程中会经常使用. 结构常数满足下面两个恒等式: 对于  $j, k, l, m$  有

$$\begin{aligned} c_{jkl} + c_{kjl} &= 0, \\ \sum_n (c_{jkn} c_{nlm} + c_{kln} c_{njm} + c_{ljn} c_{nkm}) &= 0, \end{aligned}$$

第一个式子来源于反对称性, 第二个式子来源于 Jacobi 恒等式.

## 1.2 单、可解和幂零的李代数

**定义 1.11.** 一个李代数  $\mathfrak{g}$  被称为**不可约的**, 如果  $\mathfrak{g}$  中的理想只有  $\mathfrak{g}$  和  $\{0\}$ .  $\mathfrak{g}$  被称为**单的**, 如果  $\mathfrak{g}$  是不可约的且  $\dim \mathfrak{g} \geq 2$ .

一维的李代数一定是不可约的, 因为它没有非平凡的子空间, 所以没有非平凡子代数, 进而没有非平凡的理想. 但是, 根据定义, 一维的李代数不被认为是单的!

此外, 还可以注意到一维李代数  $\mathfrak{g}$  一定是可交换的, 因为对于任意  $X \in \mathfrak{g}$  和标量  $a, b$  都有  $[aX, bX] = ab[X, X] = 0$ . 另一方面, 如果  $\mathfrak{g}$  是可交换的, 那么  $\mathfrak{g}$  的任意子空

间都是理想, 所以对于可交换的李代数而言, 只有一维的情况才是不可约的. 因此, 单李代数的等价定义是其不可约且不交换.

显然, 这些概念在群论中有对应的类比. 其中子群类比于子代数, 正规子群类比于理想. (例如, 李代数同态的核总是是一个理想, 群同态的核总是为正规子群). 群论中没有非平凡正规子群的群被称为单群, 李代数中没有非平凡理想的李代数被称为单李代数.

**命题 1.12.** 李代数  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  是单的.

*Proof.* 我们使用下列  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  的基:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

计算可知它们满足  $[X, Y] = H, [H, X] = 2X, [H, Y] = -2Y$ . 设  $\mathfrak{h}$  是  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  中的理想并且  $\mathfrak{h}$  包含元素  $Z = aX + bH + cY$ , 其中  $a, b, c \in \mathbb{C}$  是不全为零的复数. 首先假设  $c \neq 0$ , 那么

$$[X, [X, Z]] = [X, -2bX + cH] = -2cX$$

是  $X$  的非零倍数.  $\mathfrak{h}$  是理想表明  $X \in \mathfrak{h}$ . 另一方面, 有  $[Y, X] = -H$  以及  $[Y, [Y, X]] = 2Y$ , 所以  $Y, H \in \mathfrak{h}$ . 这表明此时  $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ .

现在假设  $c = 0, b \neq 0$ . 那么  $[X, Z] = -2bX$  表明  $X \in \mathfrak{h}$ , 然后同样可得  $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ . 最后, 如果  $c = b = 0$  但是  $a \neq 0$ , 那么  $X = Z/a \in \mathfrak{h}$ , 仍然得到  $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ . 这就表明  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  是单李代数.  $\square$

**定义 1.13.** 如果  $\mathfrak{g}$  是李代数, 那么  $\mathfrak{g}$  中的**换位子理想**  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  定义为所有换位子的线性组合张成的空间, 即  $Z \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  当且仅当

$$Z = c_1[X_1, Y_1] + \cdots + c_m[X_m, Y_m].$$

对于任意  $X, Y \in \mathfrak{g}$ , 换位子  $[X, Y] \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ , 这表明  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  确实是一个理想.

**定义 1.14.** 对于李代数  $\mathfrak{g}$ , 我们定义一个子代数序列  $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \dots$  为:  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1 = [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0], \mathfrak{g}_2 = [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1]$ , 等等. 这些子代数被称为  $\mathfrak{g}$  的**导出列**. 如果对于某个  $j$  使得  $\mathfrak{g}_j = \{0\}$ , 那么我们说  $\mathfrak{g}$  是**可解的**.

利用 Jacobi 恒等式不难证明每个  $\mathfrak{g}_j$  都是  $\mathfrak{g}$  的理想, 例如对于  $[X, Y] \in \mathfrak{g}_2$ , 其中  $X, Y \in \mathfrak{g}_1$ , 那么对于任意  $Z \in \mathfrak{g}$ , 有

$$[Z, [X, Y]] = -[X, [Y, Z]] - [Y, [Z, X]] \in \mathfrak{g}_2.$$

**定义 1.15.** 对于任意李代数  $\mathfrak{g}$ , 定义理想序列  $\mathfrak{g}^j$  为:  $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{j+1}$  为所有的形如  $[X, Y]$  的换位子的线性组合构成的空间, 其中  $X \in \mathfrak{g}$  以及  $Y \in \mathfrak{g}^j$ . 这些子代数被称为  $\mathfrak{g}$  的**上中心列**. 如果对于某个  $j$  有  $\mathfrak{g}^j = \{0\}$ , 那么我们说  $\mathfrak{g}$  是**幂零的**.

等价地说,  $\mathfrak{g}^j$  由所有的  $j$ -重换位子张成:

$$[X_1, [X_2, [X_3, \dots, [X_j, X_{j+1}] \dots ]]].$$

注意到  $j$ -重换位子也是  $(j-1)$ -重换位子, 所以  $\mathfrak{g}^{j-1} \supseteq \mathfrak{g}^j$ . 对于任意  $X \in \mathfrak{g}$  和  $Y \in \mathfrak{g}^j$ , 我们有  $[X, Y] \in \mathfrak{g}^{j+1} \subseteq \mathfrak{g}^j$ , 所以  $\mathfrak{g}^j$  是  $\mathfrak{g}$  的理想. 此外, 显然有  $\mathfrak{g}_j \subseteq \mathfrak{g}^j$ , 因此幂零李代数都是可解的.

**命题 1.16.** 如果  $\mathfrak{g} \subseteq M_3(\mathbb{R})$  是  $3 \times 3$  上三角矩阵并且对角线为零. 那么  $\mathfrak{g}$  满足 [例 1.3](#), 并且是一个幂零李代数.

*Proof.* 显然  $\mathfrak{g}$  是李代数. 我们选取基

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

直接计算得  $[X, Y] = Z$  以及  $[X, Z] = [Y, Z] = 0$ . 故  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  由  $Z$  张成, 进而  $[\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] = 0$ , 所以  $\mathfrak{g}$  是幂零的.  $\square$

**命题 1.17.** 如果  $\mathfrak{g} \subseteq M_2(\mathbb{C})$  是形如

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad a, b, c \in \mathbb{C}$$

的  $2 \times 2$  矩阵, 那么  $\mathfrak{g}$  满足 [例 1.3](#), 并且是可解但不幂零的李代数.

*Proof.* 直接计算得

$$\left[ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & h \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中  $h = ae + bf - bd - ce$ , 这表明  $\mathfrak{g}$  是一个子代数. 此外, 还表明换位子理想  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  是一维的, 所以是可交换的. 因此  $\mathfrak{g}_2 = 0$ , 故  $\mathfrak{g}$  是可解的. 另一方面, 考虑

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

我们有  $[H, X] = 2X$ , 所以

$$[H, [H, [H, \dots, [H, X] \dots ]]]$$

永远是  $X$  的非零倍数, 所以对于任意  $j$  都有  $\mathfrak{g}^j \neq 0$ , 故  $\mathfrak{g}$  不是幂零的.  $\square$

### 1.3 矩阵李群的李代数

**定义 1.18.** 令  $G$  是一个矩阵李群.  $G$  的李代数  $\mathfrak{g}$  定义为所有矩阵  $X$  的集合, 其中  $X$  使得对于任意实数  $t$ , 指数  $e^{tX} \in G$ .

熟悉流形理论的读者可以发现, 这实际上就是再说  $G$  在单位元处的切空间, 因为  $\gamma(t) = e^{tX}$  是以单位元为起点的切向量为  $X$  的光滑曲线.

**命题 1.19.** 令  $G$  是矩阵李群,  $X \in \mathfrak{g}$ , 那么  $e^X$  是  $G$  的单位分支  $G_0$  中的元素.

*Proof.* 根据定义,  $e^{tX}$  就是连接单位元和  $e^X$  的道路. □

**定理 1.20.** 令  $G$  是矩阵李群, 有李代数  $\mathfrak{g}$ . 如果  $X, Y \in \mathfrak{g}$ , 那么

1. 对于任意  $A \in G$  有  $AXA^{-1} \in \mathfrak{g}$ .
2. 对于实数  $s$  有  $sX \in \mathfrak{g}$ .
3.  $X + Y \in \mathfrak{g}$ .
4.  $XY - YX \in \mathfrak{g}$ .

*Proof.* (1) 对于任意的实数  $t$ , 我们有

$$e^{t(AXA^{-1})} = Ae^{tX}A^{-1} \in G,$$

所以  $AXA^{-1} \in \mathfrak{g}$ .

(2) 任取实数  $t$ , 有  $e^{t(sX)} = e^{(ts)X} \in G$ , 所以  $sX \in \mathfrak{g}$ .

(3) 任取实数  $t$ , 利用李乘积公式, 有

$$e^{t(X+Y)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( e^{t \frac{X}{m}} e^{t \frac{Y}{m}} \right)^m,$$

由于  $e^{tX/m} e^{tY/m} \in G$ , 所以右端是  $G$  中点列的极限, 由于  $G$  是闭集, 所以  $e^{t(X+Y)} \in G$ , 所以  $X + Y \in \mathfrak{g}$ .

(4) 我们有

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (e^{tX} Y e^{-tX}) = (XY)e^0 + (e^0 Y)(-X) = XY - YX,$$

由 (1),  $e^{tX} Y e^{-tX} \in \mathfrak{g}$ . 由 (2) 和 (3),  $\mathfrak{g}$  是  $M_n(\mathbb{C})$  的实向量空间, 所以是闭集, 所以

$$XY - YX = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{hX} Y e^{-hX} - Y}{h} \in \mathfrak{g}. \quad \square$$

注意到 **定理 1.20** 的第二点表明即使  $G$  的元素是复矩阵,  $\mathfrak{g}$  也不需要是复向量空间. 不过, 在一些情况下  $\mathfrak{g}$  确实是一个复向量空间.

**定义 1.21.** 矩阵李群  $G$  被称为**复的**, 如果其李代数  $\mathfrak{g}$  是复向量空间, 也就是说, 对于所有的  $X \in \mathfrak{g}$  有  $iX \in \mathfrak{g}$ .

**命题 1.22.** 如果  $G$  是可交换的, 那么  $\mathfrak{g}$  是可交换的.

*Proof.* 对于任意两个  $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$ , 那么换位子为

$$[X, Y] = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left( \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} e^{tX} e^{sY} e^{-tX} \right),$$

如果  $G$  可交换, 那么  $e^{tX} e^{sY} e^{-tX} = e^{sY}$  与  $t$  无关, 所以  $[X, Y] = 0$ . □



## 1.4 示例

**例 1.23.** 由于  $\mathfrak{su}(2) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) \mid A^* + A = 0, \operatorname{tr} A = 0\}$  以及  $\mathfrak{so}(3) = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid A^T + A = 0\}$ . 所以  $\mathfrak{su}(2)$  有基

$$E_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad E_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

它们满足  $[E_1, E_2] = E_3, [E_2, E_3] = E_1, [E_3, E_1] = E_2$ .  $\mathfrak{so}(3)$  有基

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

它们满足  $[F_1, F_2] = F_3, [F_2, F_3] = F_1, [F_3, F_1] = F_2$ .

注意到  $E_1, E_2, E_3$  和  $F_1, F_2, F_3$  有相同的交换关系, 所以这两个李代数是同构的.

## 1.5 李群和李代数同态

**定理 1.24.** 令  $G, H$  是矩阵李群, 分别有李代数  $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ . 设  $\Phi: G \rightarrow H$  是李群同态. 那么存在唯一的实线性映射  $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  使得对所有的  $X \in \mathfrak{g}$  有

$$\Phi(e^X) = e^{\phi(X)}.$$

并且  $\phi$  有性质:

1. 对于所有  $X \in \mathfrak{g}, A \in G$  有  $\phi(AXA^{-1}) = \Phi(A)\phi(X)\Phi(A)^{-1}$ .
2. 对于所有  $X, Y \in \mathfrak{g}$  有  $\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$ .
3. 对于所有  $X \in \mathfrak{g}$  有  $\phi(X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi(e^{tX})$ .

*Proof.*

□

**例 1.25.** 我们构造一个  $\mathrm{SU}(2) \rightarrow \mathrm{SO}(3)$  的满同态. 这是一个非常重要的例子. 我们知道  $\mathrm{O}(3)$  可以视为  $V \rightarrow V$  的正交变换群, 其中  $V$  是 3 维实内积空间. 我们定义  $V$  是  $2 \times 2$  的迹为零的 Hermite 矩阵全体, 即  $X \in V$  当且仅当  $X^* = -X$  以及  $\operatorname{tr} X = 0$ , 故可设

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

此时  $\mathbb{R}^3$  上的标准内积对应于

$$\langle X_1, X_2 \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(X_1 X_2).$$

这是因为

$$\frac{1}{2} \operatorname{tr} \left( \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 + ix'_3 \\ x'_2 - ix'_3 & -x'_1 \end{pmatrix} \right) = x_1 x'_1 + x_2 x'_2 + x_3 x'_3.$$

对于每个  $U \in \mathrm{SU}(2)$ , 我们定义线性映射  $\Phi_U : V \rightarrow V$  为

$$\Phi_U(X) = UXU^{-1}.$$

因为  $U$  是酉矩阵, 所以  $(UXU^{-1})^* = (UXU^*)^* = UXU^{-1}$ , 并且  $\mathrm{tr}(UXU^{-1}) = \mathrm{tr}(X) = 0$ , 所以  $\Phi_U(X)$  确实是  $V$  的元素.

注意到

$$\frac{1}{2} \mathrm{tr}(\Phi_U(X_1)\Phi_U(X_2)) = \frac{1}{2} \mathrm{tr}(UX_1X_2U^{-1}) = \frac{1}{2} \mathrm{tr}(X_1X_2),$$

所以  $\Phi_U$  保内积, 即  $\Phi_U \in \mathrm{O}(3)$  是正交变换. 故我们定义了一个映射  $\mathrm{SU}(2) \rightarrow \mathrm{O}(3)$  满足  $U \mapsto \Phi_U$ . 不难验证  $\Phi_{U_1U_2} = \Phi_{U_1}\Phi_{U_2}$ , 所以这是一个群同态. 因为  $\mathrm{SU}(2)$  同胚于球面  $\mathbb{S}^3$  是连通的, 所以上述映射的像集处于  $\mathrm{O}(3)$  的单位分支中, 即这实际上是一个  $\mathrm{SU}(2) \rightarrow \mathrm{SO}(3)$  的群同态.

下面我们说明这是一个满同态. 任取  $R \in \mathrm{SO}(3)$ , 根据正交变换的性质,  $R$  有一个特征值为 1 的特征向量, 设  $X \in V$  使得  $RX = X$ . 不妨设  $X$  模长为 1. 将其扩充为  $V$  的一组标准正交基  $\{X, Y, Z\}$ , 那么  $R$  相当于  $Y, Z$ -平面的旋转. 也即  $R$  在这组基下有表示矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

设  $X$  为 (1.2) 式. 令

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix},$$

那么

$$UXU^{-1} = \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 + ix'_3 \\ x'_2 - ix'_3 & -x'_1 \end{pmatrix},$$

其中  $x'_1 = x_1$ ,

$$x'_2 + ix'_3 = (x_2 \cos \theta - x_3 \sin \theta) + i(x_2 \sin \theta + x_3 \cos \theta).$$

这就表明  $\Phi_U$  的表示矩阵和  $R$  相同, 所以  $R = \Phi_U$ , 即这是一个满同态.

若  $\Phi_U = \mathrm{id}_V$ , 设

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1,$$

那么

$$U \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} U^{-1} = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 - |\beta|^2 & -2\alpha\beta \\ -2\bar{\alpha}\bar{\beta} & |\beta|^2 - |\alpha|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

这表明  $\beta = 0$ ,  $|\alpha| = 1$ . 又因为以及

$$U \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} U^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^2 \\ \bar{\alpha}^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

所以  $\alpha = \pm 1$ , 故  $U = \pm I_2$ . 所以同态核为  $\{\pm I_2\}$ .

**例 1.26.** 令  $\Phi : \mathrm{SU}(2) \rightarrow \mathrm{SO}(3)$  是上例的群同态. 那么诱导一个李代数同态  $\phi : \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathfrak{so}(3)$ , 满足

$$\phi(E_j) = F_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

其中  $\{E_1, E_2, E_3\}$  和  $\{F_1, F_2, F_3\}$  是 **例 1.23** 中的基矩阵. 我们看到  $\phi$  把基送到基, 所以是李代数同构, 虽然  $\Phi$  并不是李群同构.

*Proof.* 任取  $X \in \mathfrak{su}(2)$ ,  $Y \in V$ , 其中  $V$  是 **例 1.25** 中的向量空间. 那么

$$\phi(X)Y = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi(e^{tX})Y = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} e^{tX}Y e^{-tX} = [X, Y],$$

这表明  $\phi(X) : Y \mapsto [X, Y]$  是  $V \rightarrow V$  的线性映射. 若  $X = E_1$ , 那么

$$\left[ E_1, \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 + ix_2 \\ -x_3 - ix_2 & 0 \end{pmatrix},$$

这表明  $\phi(E_1)$  对应矩阵

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

故  $\phi(E_1) = F_1$ . 对于其余两个同理.  $\square$

**命题 1.27.** 假设  $G, H, K$  是矩阵李群,  $\Phi : H \rightarrow K$  和  $\Psi : G \rightarrow H$  是李群同态. 令  $\Lambda : G \rightarrow K$  是复合  $\Psi \circ \Phi$ ,  $\phi, \psi, \lambda$  分别是  $\Phi, \Psi, \Lambda$  诱导的李代数同态, 那么我们有

$$\lambda = \psi \circ \phi.$$

*Proof.* 任取  $X \in \mathfrak{g}$ , 那么

$$\lambda(X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Lambda(e^{tX}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Psi(\Phi(e^{tX})) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Psi(e^{t\phi(X)}) = \psi(\phi(X)),$$

即  $\lambda = \psi \circ \phi$ .  $\square$

**定义 1.28.** 令  $G$  是矩阵李群, 有李代数  $\mathfrak{g}$ . 那么对于每个  $A \in G$ , 定义线性映射  $\mathrm{Ad}_A : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  为

$$\mathrm{Ad}_A(X) = AXA^{-1}.$$

**命题 1.29.** 令  $G$  是矩阵李群, 有李代数  $\mathfrak{g}$ . 那么映射  $A \mapsto \mathrm{Ad}_A$  是  $G \rightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$  的同态. 此外, 对于每个  $A \in G$ ,  $\mathrm{Ad}_A$  满足  $\mathrm{Ad}_A([X, Y]) = [\mathrm{Ad}_A X, \mathrm{Ad}_A Y]$ .

由于  $\mathrm{Ad} : G \rightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$  是李群同态, 所以诱导一个李代数同态  $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ , 记为  $X \mapsto \mathrm{ad}_X$ . 那么它们满足

$$e^{\mathrm{ad}_X} = \mathrm{Ad}_{e^X}. \quad (1.3)$$

**命题 1.30.** 令  $G$  是矩阵李群,  $\mathfrak{g}$  是李代数. 那么对于  $X, Y \in \mathfrak{g}$  有

$$\mathrm{ad}_X(Y) = [X, Y].$$

*Proof.* 我们有

$$\mathrm{ad}_X = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathrm{Ad}(e^{tX}),$$

所以

$$\mathrm{ad}_X(Y) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathrm{Ad}(e^{tX})(Y) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} e^{tX} Y e^{-tX} = [X, Y]. \quad \square$$

**命题 1.31.** 对于任意  $X \in M_n(\mathbb{C})$ , 令  $\mathrm{ad}_X : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  为  $\mathrm{ad}_X Y = [X, Y]$ . 那么对于任意  $Y \in M_n(\mathbb{C})$ , 我们有

$$e^X Y e^{-X} = \mathrm{Ad}_{e^X}(Y) = e^{\mathrm{ad}_X} Y,$$

其中

$$e^{\mathrm{ad}_X}(Y) = Y + [X, Y] + \frac{1}{2}[X, [X, Y]] + \cdots.$$

## 1.6 实李代数的复化

**定义 1.32.** 如果  $V$  是有限维实向量空间, 那么定义  $V$  的**复化**  $V_{\mathbb{C}}$  是所有的形式线性组合

$$v_1 + i v_2 \quad v_1, v_2 \in V$$

的集合. 这显然构成一个实向量空间. 我们定义

$$i(v_1 + i v_2) = -v_2 + i v_1,$$

此时  $V_{\mathbb{C}}$  是一个复向量空间.

**命题 1.33.** 令  $\mathfrak{g}$  是一个有限维的实李代数,  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  是复化. 那么  $\mathfrak{g}$  上的李括号在  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  上有一个唯一的延拓, 使得  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  是一个复李代数. 此时  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  被称为  $\mathfrak{g}$  的**复化**.

*Proof.* 唯一性是显然的, 因为根据双线性性, 必须有

$$[X_1 + i X_2, Y_1 + i Y_2] = [X_1, Y_1] - [X_2, Y_2] + i([X_1, Y_2] + [X_2, Y_1]).$$

下面我们只需要验证上述定义满足反对称性和 Jacobi 恒等式. 反对称性也是显然的. 对于 Jacobi 恒等式, 利用复线性性, 当  $X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, Y, Z \in \mathfrak{g}$  的时候有

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0,$$

同理可得一般情况下的 Jacobi 恒等式. □

**命题 1.34.** 设  $\mathfrak{g} \subseteq M_n(\mathbb{C})$  是实李代数并且对于非零的  $X \in \mathfrak{g}$  有  $iX \notin \mathfrak{g}$ . 那么  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  同构于集合

$$\{X + iY \mid X, Y \in \mathfrak{g}\}.$$