

---

# Contents

<b>1 李代数</b>	<b>1</b>
1.1 定义和初步例子 . . . . .	1
1.2 单、可解和幂零的李代数 . . . . .	3
1.3 矩阵李群的李代数 . . . . .	5
1.4 示例 . . . . .	6



# 李代数

## 1.1 定义和初步例子

**定义 1.1.** 一个有限维实或者复李代数指的是一个有限维的实或者复向量空间  $\mathfrak{g}$ , 配备一个映射  $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , 满足:

1.  $[\cdot, \cdot]$  是双线性的.
2.  $[\cdot, \cdot]$  是反对称的: 对于任意  $X, Y \in \mathfrak{g}$  有  $[X, Y] = -[Y, X]$ .
3. Jacobi 恒等式: 对于任意  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$  有

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

若  $[X, Y] = 0$ , 那么我们说  $X, Y$  是**可交换的**. 如果对于所有  $X, Y \in \mathfrak{g}$  都有  $[X, Y] = 0$ , 那么我们说  $\mathfrak{g}$  是**可交换的**.

$[\cdot, \cdot]$  通常被称为  $\mathfrak{g}$  上的李括号. 注意到反对称性表明  $[X, X] = 0$ . 李括号运算通常不满足结合律, 然而 Jacobi 恒等式可以被视为结合律的替代方案.

**例 1.2.** 令  $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^3$ ,  $[\cdot, \cdot]: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  定义为

$$[x, y] = x \times y,$$

其中  $x \times y$  是向量叉乘. 那么  $\mathfrak{g}$  是一个李代数.

*Proof.* 双线性性和反对称性是显然的. 根据双线性性, 只需要对基向量  $e_1, e_2, e_3$  验证 Jacobi 恒等式即可. 如果  $j, k, l$  互不相同, 那么  $e_j, e_k, e_l$  中任意两个的叉乘等于第三个或者第三个的相反方向, 所以 Jacobi 恒等式中每一项都是 0. 于是只需要验证  $j, k, l$  中有两个相同的情况即可, 通过重新排序, 只需要验证

$$[e_j, [e_j, e_k]] + [e_j, [e_k, e_j]] + [e_k, [e_j, e_j]] = 0,$$

上式的前两项相反, 第三项为零, 故叉乘满足 Jacobi 恒等式.  $\square$

**例 1.3.** 令  $\mathcal{A}$  是结合代数,  $\mathfrak{g}$  是  $\mathcal{A}$  的一个子空间, 使得任意的  $X, Y \in \mathfrak{g}$  有  $XY - YX \in \mathfrak{g}$ . 那么  $\mathfrak{g}$  是一个李代数, 有李括号

$$[X, Y] = XY - YX.$$

*Proof.* 双线性和反对称性是显然的. 对于 Jacobi 恒等式, 每个双层李括号会产生 4 项, 所以总共有 12 项, 即

$$[X, [Y, Z]] = [X, YZ - ZY] = XYZ - XZY - YZX + ZYX,$$

对  $X, Y, Z$  进行轮换, 那么正项负项刚好抵消, 故这是一个李代数.  $\square$

如果我们仔细观察 Jacobi 恒等式的证明, 我们会发现  $XYZ$  实际上以两种方式出现, 一种是  $X(YZ)$ , 一种是  $(XY)Z$ . 所以代数  $\mathcal{A}$  的结合性是重要的. 对于任意李代数, Jacobi 恒等式意味着李括号的行为就像在某个结合代数中的  $XY - YX$  一样, 即使这个李括号本身不是这样定义的 (比如叉乘). 实际上, 可以证明每个李代数  $\mathfrak{g}$  都可以嵌入到一个结合代数  $\mathcal{A}$  中, 使得其李括号变成  $XY - YX$ .

**例 1.4.** 令  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  是所有满足  $\text{tr } X = 0$  的  $X \in M_n(\mathbb{C})$  构成的空间. 那么  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  是李代数, 有李括号  $[X, Y] = XY - YX$ .

*Proof.* 我们有

$$\text{tr}(XY - YX) = \text{tr}(XY) - \text{tr}(YX) = 0,$$

所以可以应用 例 1.3.  $\square$

**定义 1.5.** 实或者复李代数  $\mathfrak{g}$  的一个**子代数**指的是一个子空间  $\mathfrak{h}$  使得任取  $H_1, H_2 \in \mathfrak{h}$  有  $[H_1, H_2] \in \mathfrak{h}$ . 如果  $\mathfrak{g}$  是复李代数,  $\mathfrak{h}$  是  $\mathfrak{g}$  的实子空间并且对李括号封闭, 那么  $\mathfrak{h}$  被称为  $\mathfrak{g}$  的**实子代数**.

李代数  $\mathfrak{g}$  的一个子代数  $\mathfrak{h}$  被称为  $\mathfrak{g}$  中的**理想**, 如果对于任意  $H \in \mathfrak{h}, X \in \mathfrak{g}$  有  $[X, H] \in \mathfrak{h}$ .

李代数  $\mathfrak{g}$  的**中心**指的是是一些  $X \in \mathfrak{g}$  的集合, 对于每个  $X$ , 其使得任取  $Y \in \mathfrak{g}$ , 有  $[X, Y] = 0$ .

**定义 1.6.** 如果  $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$  是李代数, 线性映射  $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  满足  $\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$ , 那么  $\phi$  被称为**李代数同态**. 此外, 如果  $\phi$  是双射, 那么  $\phi$  被称为**李代数同构**.

**定义 1.7.** 如果  $\mathfrak{g}$  是李代数,  $X \in \mathfrak{g}$ , 定义线性映射  $\text{ad}_X: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  为

$$\text{ad}_X(Y) = [X, Y].$$

映射  $X \mapsto \text{ad}_X$  被称为**伴随映射**或者**伴随表示**.

虽然  $\text{ad}_X(Y)$  就是  $[X, Y]$ , 但是  $\text{ad}$  的记号是有方便的. 例如, 我们可以把

$$[X, [X, [X, [X, Y]]]]$$

写为  $(\text{ad}_X)^4(Y)$ . 此外, 映射  $X \mapsto \text{ad}_X$  可以视为  $\mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$  的映射. Jacobi 恒等式等价于  $\text{ad}_X$  是李括号的**导子**:

$$\text{ad}_X([Y, Z]) = [\text{ad}_X(Y), Z] + [Y, \text{ad}_X(Z)]. \quad (1.1)$$

**命题 1.8.** 如果  $\mathfrak{g}$  是李代数, 那么

$$\text{ad}_{[X,Y]} = \text{ad}_X \text{ad}_Y - \text{ad}_Y \text{ad}_X = [\text{ad}_X, \text{ad}_Y],$$

也就是说  $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$  是李代数同态.

*Proof.* 注意到

$$\text{ad}_{[X,Y]}(Z) = [[X, Y], Z],$$

并且

$$[\text{ad}_X, \text{ad}_Y](Z) = [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]],$$

所以上式等价于 Jacobi 恒等式.  $\square$

**定义 1.9.** 如果  $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$  是李代数, 那么直和  $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$  也是李代数, 配备李括号

$$[(X_1, X_2), (Y_1, Y_2)] = ([X_1, Y_1], [X_2, Y_2]).$$

如果  $\mathfrak{g}$  是李代数,  $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$  是两个子代数, 作为向量空间有  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$  并且对于  $X_1 \in \mathfrak{g}_1, X_2 \in \mathfrak{g}_2$  有  $[X_1, X_2] = 0$ , 那么我们说  $\mathfrak{g}$  分解为  $\mathfrak{g}_1$  和  $\mathfrak{g}_2$  的直和.

**定义 1.10.** 令  $\mathfrak{g}$  是有限维实或者复李代数,  $X_1, \dots, X_N$  是  $\mathfrak{g}$  的一组基, 那么有唯一的常数  $c_{jkl}$  使得

$$[X_j, X_k] = \sum_{l=1}^N c_{jkl} X_l,$$

$c_{jkl}$  被称为  $\mathfrak{g}$  的**结构常数**.

虽然我们不会经常遇到结构常数, 但是在物理课程中会经常使用. 结构常数满足下面两个恒等式: 对于  $j, k, l, m$  有

$$\begin{aligned} c_{jkl} + c_{kjl} &= 0, \\ \sum_n (c_{jkn} c_{nlm} + c_{kln} c_{njm} + c_{ljn} c_{nkm}) &= 0, \end{aligned}$$

第一个式子来源于反对称性, 第二个式子来源于 Jacobi 恒等式.

## 1.2 单、可解和幂零的李代数

**定义 1.11.** 一个李代数  $\mathfrak{g}$  被称为**不可约的**, 如果  $\mathfrak{g}$  中的理想只有  $\mathfrak{g}$  和  $\{0\}$ .  $\mathfrak{g}$  被称为**单的**, 如果  $\mathfrak{g}$  是不可约的且  $\dim \mathfrak{g} \geq 2$ .

一维的李代数一定是不可约的, 因为它没有非平凡的子空间, 所以没有非平凡的子代数, 进而没有非平凡的理想. 但是, 根据定义, 一维的李代数不被认为是单的!

此外, 还可以注意到一维李代数  $\mathfrak{g}$  一定是可交换的, 因为对于任意  $X \in \mathfrak{g}$  和标量  $a, b$  都有  $[aX, bX] = ab[X, X] = 0$ . 另一方面, 如果  $\mathfrak{g}$  是可交换的, 那么  $\mathfrak{g}$  的任意子空

间都是理想, 所以对于可交换的李代数而言, 只有一维的情况才是不可约的. 因此, 单李代数的等价定义是其不可约且不交换.

显然, 这些概念在群论中有对应的类比. 其中子群类比于子代数, 正规子群类比于理想. (例如, 李代数同态的核总是是一个理想, 群同态的核总是为正规子群). 群论中没有非平凡正规子群的群被称为单群, 李代数中没有非平凡理想的李代数被称为单李代数.

**命题 1.12.** 李代数  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  是单的.

*Proof.* 我们使用下列  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  的基:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

计算可知它们满足  $[X, Y] = H, [H, X] = 2X, [H, Y] = -2Y$ . 设  $\mathfrak{h}$  是  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  中的理想并且  $\mathfrak{h}$  包含元素  $Z = aX + bH + cY$ , 其中  $a, b, c \in \mathbb{C}$  是不全为零的复数. 首先假设  $c \neq 0$ , 那么

$$[X, [X, Z]] = [X, -2bX + cH] = -2cX$$

是  $X$  的非零倍数.  $\mathfrak{h}$  是理想表明  $X \in \mathfrak{h}$ . 另一方面, 有  $[Y, X] = -H$  以及  $[Y, [Y, X]] = 2Y$ , 所以  $Y, H \in \mathfrak{h}$ . 这表明此时  $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ .

现在假设  $c = 0, b \neq 0$ . 那么  $[X, Z] = -2bX$  表明  $X \in \mathfrak{h}$ , 然后同样可得  $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ . 最后, 如果  $c = b = 0$  但是  $a \neq 0$ , 那么  $X = Z/a \in \mathfrak{h}$ , 仍然得到  $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ . 这就表明  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  是单李代数.  $\square$

**定义 1.13.** 如果  $\mathfrak{g}$  是李代数, 那么  $\mathfrak{g}$  中的**换位子理想**  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  定义为所有换位子的线性组合张成的空间, 即  $Z \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  当且仅当

$$Z = c_1[X_1, Y_1] + \cdots + c_m[X_m, Y_m].$$

对于任意  $X, Y \in \mathfrak{g}$ , 换位子  $[X, Y] \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ , 这表明  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  确实是一个理想.

**定义 1.14.** 对于李代数  $\mathfrak{g}$ , 我们定义一个子代数序列  $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \dots$  为:  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1 = [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0], \mathfrak{g}_2 = [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1]$ , 等等. 这些子代数被称为  $\mathfrak{g}$  的**导出列**. 如果对于某个  $j$  使得  $\mathfrak{g}_j = \{0\}$ , 那么我们说  $\mathfrak{g}$  是**可解的**.

利用 Jacobi 恒等式不难证明每个  $\mathfrak{g}_j$  都是  $\mathfrak{g}$  的理想, 例如对于  $[X, Y] \in \mathfrak{g}_2$ , 其中  $X, Y \in \mathfrak{g}_1$ , 那么对于任意  $Z \in \mathfrak{g}$ , 有

$$[Z, [X, Y]] = -[X, [Y, Z]] - [Y, [Z, X]] \in \mathfrak{g}_2.$$

**定义 1.15.** 对于任意李代数  $\mathfrak{g}$ , 定义理想序列  $\mathfrak{g}^j$  为:  $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{j+1}$  为所有的形如  $[X, Y]$  的换位子的线性组合构成的空间, 其中  $X \in \mathfrak{g}$  以及  $Y \in \mathfrak{g}^j$ . 这些子代数被称为  $\mathfrak{g}$  的**上中心列**. 如果对于某个  $j$  有  $\mathfrak{g}^j = \{0\}$ , 那么我们说  $\mathfrak{g}$  是**幂零的**.

等价地说,  $\mathfrak{g}^j$  由所有的  $j$ -重换位子张成:

$$[X_1, [X_2, [X_3, \dots, [X_j, X_{j+1}] \dots ]]].$$

注意到  $j$ -重换位子也是  $(j-1)$ -重换位子, 所以  $\mathfrak{g}^{j-1} \supseteq \mathfrak{g}^j$ . 对于任意  $X \in \mathfrak{g}$  和  $Y \in \mathfrak{g}^j$ , 我们有  $[X, Y] \in \mathfrak{g}^{j+1} \subseteq \mathfrak{g}^j$ , 所以  $\mathfrak{g}^j$  是  $\mathfrak{g}$  的理想. 此外, 显然有  $\mathfrak{g}_j \subseteq \mathfrak{g}^j$ , 因此幂零李代数都是可解的.

**命题 1.16.** 如果  $\mathfrak{g} \subseteq M_3(\mathbb{R})$  是  $3 \times 3$  上三角矩阵并且对角线为零. 那么  $\mathfrak{g}$  满足 [例 1.3](#), 并且是一个幂零李代数.

*Proof.* 显然  $\mathfrak{g}$  是李代数. 我们选取基

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

直接计算得  $[X, Y] = Z$  以及  $[X, Z] = [Y, Z] = 0$ . 故  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  由  $Z$  张成, 进而  $[\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] = 0$ , 所以  $\mathfrak{g}$  是幂零的.  $\square$

**命题 1.17.** 如果  $\mathfrak{g} \subseteq M_2(\mathbb{C})$  是形如

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad a, b, c \in \mathbb{C}$$

的  $2 \times 2$  矩阵, 那么  $\mathfrak{g}$  满足 [例 1.3](#), 并且是可解但不幂零的李代数.

*Proof.* 直接计算得

$$\left[ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & h \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中  $h = ae + bf - bd - ce$ , 这表明  $\mathfrak{g}$  是一个子代数. 此外, 还表明换位子理想  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  是一维的, 所以是可交换的. 因此  $\mathfrak{g}_2 = 0$ , 故  $\mathfrak{g}$  是可解的. 另一方面, 考虑

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

我们有  $[H, X] = 2X$ , 所以

$$[H, [H, [H, \dots, [H, X] \dots ]]]$$

永远是  $X$  的非零倍数, 所以对于任意  $j$  都有  $\mathfrak{g}^j \neq 0$ , 故  $\mathfrak{g}$  不是幂零的.  $\square$

### 1.3 矩阵李群的李代数

**定义 1.18.** 令  $G$  是一个矩阵李群.  $G$  的李代数  $\mathfrak{g}$  定义为所有矩阵  $X$  的集合, 其中  $X$  使得对于任意实数  $t$ , 指数  $e^{tX} \in G$ .

熟悉流形理论的读者可以发现, 这实际上就是再说  $G$  在单位元处的切空间, 因为  $\gamma(t) = e^{tX}$  是以单位元为起点的切向量为  $X$  的光滑曲线.

**命题 1.19.** 令  $G$  是矩阵李群,  $X \in \mathfrak{g}$ , 那么  $e^X$  是  $G$  的单位分支  $G_0$  中的元素.

*Proof.* 根据定义,  $e^{tX}$  就是连接单位元和  $e^X$  的道路. □

**定理 1.20.** 令  $G$  是矩阵李群, 有李代数  $\mathfrak{g}$ . 如果  $X, Y \in \mathfrak{g}$ , 那么

1. 对于任意  $A \in G$  有  $AXA^{-1} \in \mathfrak{g}$ .
2. 对于实数  $s$  有  $sX \in \mathfrak{g}$ .
3.  $X + Y \in \mathfrak{g}$ .
4.  $XY - YX \in \mathfrak{g}$ .

注意到 **定理 1.20** 的第二点表明即使  $G$  的元素是复矩阵,  $\mathfrak{g}$  也不需要是复向量空间. 不过, 在一些情况下  $\mathfrak{g}$  确实是一个复向量空间.

**定义 1.21.** 矩阵李群  $G$  被称为**复的**, 如果其李代数  $\mathfrak{g}$  是复向量空间, 也就是说, 对于所有的  $X \in \mathfrak{g}$  有  $iX \in \mathfrak{g}$ .

**命题 1.22.** 如果  $G$  是可交换的, 那么  $\mathfrak{g}$  是可交换的.

*Proof.* 对于任意两个  $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$ , 那么换位子为

$$[X, Y] = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left( \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} e^{tX} e^{sY} e^{-tX} \right),$$

如果  $G$  可交换, 那么  $e^{tX} e^{sY} e^{-tX} = e^{sY}$  与  $t$  无关, 所以  $[X, Y] = 0$ . □

## 1.4 示例