Contents

1 黎曼积分

1.1 黎曼积分回顾

定义 1.1. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是有界函数，P 是 $[a,b]$ 的一个划分 $x_0,\dots,x_n$，定义 **黎曼下和** $L(f,P,[a,b])$ 和 **黎曼上和** $U(f,P,[a,b])$ 为

$$L(f,P,[a,b])=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\inf_{[x_{i-1},x_i]}f,$$
$$U(f,P,[a,b])=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\sup_{[x_{i-1},x_i]}f.$$

引理 1.2 (黎曼和不等式). 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是有界函数，P,P' 是 $[a,b]$ 的两个划分，且 P 确定的点列是 P' 确定的点列的一个子列 (即 P' 划分的更细)，那么

$$L(f,P,[a,b])\le L(f,P',[a,b])\le U(f,P',[a,b])\le U(f,P,[a,b]).$$

Proof. 假设 P 给出划分 $x_0,\dots,x_n$, P' 给出划分 $x'_0,\dots,x'_N$, 那么对于每个 $1\le i\le n$, 都存在整数 k,m 使得 $x_{i-1}=x'_k<x'_{k+1}<\cdots<x'_{k+m}=x_i$, 所以

$$\begin{aligned}(x_{i-1}-x_i)\inf_{[x_{i-1},x_i]}f&=\sum_{j=1}^{m}(x'_{k+j}-x'_{k+j-1})\inf_{[x_{i-1},x_i]}f\\&\le\sum_{j=1}^{m}(x'_{k+j}-x'_{k+j-1})\inf_{[x'_{k+j-1},x'_{k+j}]}f,\end{aligned}$$

这就表明 $L(f,P,[a,b])\le L(f,P',[a,b])$. 对于上和有类似的估计. □

引理 1.3 (黎曼下和小于黎曼上和). 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是有界函数，P,P' 是 $[a,b]$ 的两个划分，那么

$$L(f,P,[a,b])\le U(f,P',[a,b]).$$

Proof. 令 P'' 是 P,P' 合并得到的划分, 那么

$$L(f,P,[a,b])\le L(f,P'',[a,b])\le U(f,P'',[a,b])\le U(f,P',[a,b]).$$ □

定义 1.4. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是有界函数，定义 f 的**黎曼下积分** $L(f,[a,b])$ 和**黎曼上积分** $U(f,[a,b])$ 分别为

$$L(f,[a,b])=\sup_P L(f,P,[a,b]),\quad U(f,[a,b])=\inf_P U(f,P,[a,b]).$$

其中上下确界取遍 $[a,b]$ 的所有划分 P .

命题 1.5 (黎曼下积分小于黎曼上积分). 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是有界函数，那么

$$L(f,[a,b])\le U(f,[a,b]).$$

Proof. 根据 引理 1.3 即得. □

定义 1.6. 对于闭区间上的有界函数，如果其黎曼下积分和黎曼上积分相等，那么我们说它是**黎曼可积的**. 如果 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是黎曼可积的，那么定义**黎曼积分**为

$$\int_a^b f=L(f,[a,b])=U(f,[a,b]).$$

例 1.7. 计算 $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2$ 的黎曼积分.

Solution. 记 P_n 是 $[0,1]$ 的划分 $0,1/n,2/n,\dots,n/n=1$, 那么黎曼下和

$$L(f,P_n,[0,1])=\sum_{i=1}^n\frac{1}{n}\inf_{[i/n,(i-1)/n]}f=\sum_{i=1}^n\frac{(i-1)^2}{n^3}=\frac{2n^2-3n+1}{6n^2},$$

黎曼上和

$$U(f,P_n,[0,1])=\sum_{i=1}^n\frac{1}{n}\sup_{[i/n,(i-1)/n]}f=\sum_{i=1}^n\frac{i^2}{n^3}=\frac{2n^2+3n+1}{6n^2},$$

于是

$$L(f,[0,1])\ge\sup_{n\ge1}L(f,P_n,[0,1])=\sup_{n\ge1}\frac{2n^2-3n+1}{6n^2}=\frac{1}{3},$$

以及

$$U(f,[0,1])\le\inf_{n\ge1}U(f,P_n,[0,1])=\inf_{n\ge1}\frac{2n^2+3n+1}{6n^2}=\frac{1}{3},$$

所以

$$U(f,[0,1])\le\frac{1}{3}\le L(f,[0,1]),$$

再结合 命题 1.5, 所以 f 黎曼可积, 并且

$$\int_0^1 f=\frac{1}{3}.$$

■

定理 1.8 (连续函数黎曼可积). 闭区间上的实值连续函数是黎曼可积的.

Proof. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续，那么 f 有界且一致连续. 与例 1.7 的计算类似，我们寻求一系列等距划分 P_n 进行计算即可.

由于 f 一致连续，所以任取 $\varepsilon>0$，都存在 $\delta>0$ 使得 $|x-y|<\delta$ 的时候有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. 此时存在 n 使得 $(b-a)/n<\delta$，记 P_n 是 $[a,b]$ 的 n 等分划分，那么

$$\begin{aligned}|L(f,P_n,[a,b])-U(f,P_n,[a,b])| &\le \sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}\left|\inf_{[x_{i-1},x_i]} f-\sup_{[x_{i-1},x_i]} f\right| \\ &\le \sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}\varepsilon=(b-a)\varepsilon,\end{aligned}$$

这表明

$$|L(f,[a,b])-U(f,[a,b])|\le|L(f,P_n,[a,b])-U(f,P_n,[a,b])|\le\varepsilon,$$

所以 $L(f,[a,b])=U(f,[a,b])$，即 f 黎曼可积. □

命题 1.9. 假设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 黎曼可积，那么

$$(b-a)\inf_{[a,b]} f\le\int_a^b f\le(b-a)\sup_{[a,b]} f.$$

Proof. 取 P 是平凡划分 $x_0=a, x_1=b$，那么

$$(b-a)\inf_{[a,b]} f=L(f,P,[a,b])\le L(f,[a,b])=\int_a^b f.$$ □

1-1 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是有界函数且对于某个 $[a,b]$ 的划分 P 有

$$L(f,P,[a,b])=U(f,P,[a,b]),$$

证明 f 在 $[a,b]$ 上是常值函数.

Proof. 这表明我们有

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\left(\sup_{[x_{i-1},x_i]} f-\inf_{[x_{i-1},x_i]} f\right)=0,$$

这个求和项中每一项都大于等于 0，所以必须有

$$\sup_{[x_{i-1},x_i]} f=\inf_{[x_{i-1},x_i]} f,$$

所以 f 在每个 $[x_{i-1},x_i]$ 上都是常值函数，即 f 在 $[a,b]$ 上是常值函数. □

1-2 设 $a \le s < t \le b$，定义 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 为

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } s < x < t, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

证明 f 在 $[a,b]$ 上黎曼可积并且 $\int_a^b f = t - s$。

Proof. 设 P 是 $[s,t]$ 的任意划分, 那么 P 附带 a, b 构成 $[a,b]$ 的划分 P', 此时有

$$L(f, P', [a,b]) = t - s = U(f, P', [a,b]),$$

所以 $L(f,[a,b]) \ge t - s \ge U(f,[a,b])$, 故 f 黎曼可积且 $\int_a^b f = t - s$. □

1-3 设 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 是有界函数，证明 f 是黎曼可积的当且仅当对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $[a,b]$ 的划分 P 使得

$$U(f, P, [a,b]) - L(f, P, [a,b]) < \varepsilon. \tag{1.1}$$

Proof. 若 f 黎曼可积, 那么 $L(f,[a,b]) = U(f,[a,b])$. 根据上下积分的定义, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 都存在划分 P 使得

$$L(f, P, [a,b]) > L(f,[a,b]) - \varepsilon/2, \quad U(f, P, [a,b]) < U(f,[a,b]) + \varepsilon/2,$$

故

$$U(f, P, [a,b]) - L(f, P, [a,b]) < \varepsilon.$$

反之, 若对于任意 $\varepsilon > 0$, 都存在划分 P 使得 (1.1) 式成立. 由于 $L(f,[a,b]) \ge L(f, P, [a,b])$ 以及 $U(f,[a,b]) \le U(f, P, [a,b])$, 所以

$$U(f,[a,b]) - L(f,[a,b]) \le U(f, P, [a,b]) - L(f, P, [a,b]) < \varepsilon,$$

即 $L(f,[a,b]) = U(f,[a,b])$, f 黎曼可积. □

1-4 设 $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ 黎曼可积，证明 $f + g$ 黎曼可积，并且

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Proof. 记 $\int_a^b f = I, \int_a^b g = J$. 任取 $\varepsilon > 0$, 那么存在划分 P 使得

$$I - \varepsilon < L(f, P, [a,b]) \le U(f, P, [a,b]) < I + \varepsilon,$$

同理存在划分 P' 使得

$$J - \varepsilon < L(g, P', [a,b]) \le U(g, P', [a,b]) < J + \varepsilon,$$

将划分 P, P' 合并, 得到划分 P'' 使得

$$\begin{aligned}I-\varepsilon < L(f,P'',[a,b]) \le U(f,P'',[a,b]) < I+\varepsilon,\\ J-\varepsilon < L(g,P'',[a,b]) \le U(g,P'',[a,b]) < J+\varepsilon.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}L(f+g,P'',[a,b]) \ge L(f,P'',[a,b]) + L(g,P'',[a,b]) > I+J-2\varepsilon,\\ U(f+g,P'',[a,b]) \le U(f,P'',[a,b]) + U(g,P'',[a,b]) < I+J+2\varepsilon,\end{aligned}$$

这就表明 $f+g$ 可积且 $\int_a^b (f+g) = I+J$. □

1.2 黎曼积分还不够好

黎曼积分有下列三个主要缺陷:

- 黎曼积分不能处理函数有太多不连续点的情况;
- 黎曼积分不能处理无界函数;
- 黎曼积分与极限的相容性不够好.

例 1.10 (一个不黎曼可积的函数)**.** 定义 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 为

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ is rational},\\ 0 & x \text{ is irrational}.\end{cases}$$

对于任意子区间 $[a,b]\subseteq[0,1]$, 都有

$$\inf_{[a,b]} f = 0, \quad \sup_{[a,b]} f = 1.$$

所以对于 $[0,1]$ 的任意划分 P 都有 $L(f,P,[0,1]) = 0$ 以及 $U(f,P,[0,1]) = 1$. 所以 $L(f,[0,1]) = 0$ 以及 $U(f,[0,1]) = 1$, 故 f 不是黎曼可积的.

这个例子令人困扰, 因为直觉上有理数远少于无理数, 所以 f 的积分在某种意义上应该是 0, 但是实际上黎曼积分确是没有定义的.

例 1.11 (黎曼积分不能处理无界函数)**.** 定义 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & 0 < x \le 1,\\ 0 & x = 0.\end{cases}$$

如果 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 是 $[0,1]$ 的划分, 那么 $\sup_{[x_0,x_1]} f = \infty$, 所以对于任意划分 P 都有 $U(f,P,[0,1]) = \infty$.

但是, 我们可以发现 f 的图像面积应该是 2 而不是 ∞. 因为

$$\lim_{a\downarrow 0}\int_a^1 f = \lim_{a\downarrow 0}(2-2\sqrt{a}) = 2.$$

2

测度

2.1 $\mathbb{R}$ 上的外测度

2.1.1 外测度的定义

黎曼积分来源于使用长方形面积的和来估计函数图像的面积，这些长方形的高是函数在定义域的某个子区间上的值，宽是对应子区间的长度，即 $x_i - x_{i-1}$.

为了让更多的函数可以做积分，我们将把函数的定义域写为更加复杂的一些子集的并，而不仅仅是使用子区间. 我们将为这样的每个子集分配一个大小，其大小是区间长度的某种扩展定义. 例如，我们期望 $(1,3) \cup (7,10)$ 的大小是 $2+3=5$.

为 $\mathbb{R}$ 的子集分配大小是一件不平凡的任务. 本章我们处理这个任务，并且将其延伸到其他内容. 在下一章，我们将看到本章发展的工具创造了丰富的积分理论.

我们先叙述我们期望给出的开区间的长度定义.

定义 2.1. 一个开区间 I 的**长度** $\ell(I)$ 定义为

$$\ell(I) = \begin{cases} b-a & \text{if } I=(a,b) \text{ for some } a,b \in \mathbb{R} \text{ with } a<b, \\ 0 & \text{if } I=\emptyset, \\ \infty & \text{if } I=(-\infty,a) \text{ or } I=(a,\infty) \text{ for some } a \in \mathbb{R}, \\ \infty & \text{if } I=(-\infty,\infty). \end{cases}$$

假设 $A \subseteq \mathbb{R}$, A 的大小至多也只能是一列并起来包含 A 的开区间的长度之和，所以将所有这样可能的和取下确界，有理由将其作为 A 的大小的定义，我们记为 $|A|$.

定义 2.2. 集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ 的**外测度** $|A|$ 定义为

$$|A| = \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \,\middle|\, I_1, I_2, \ldots \text{ are open intervals such that } A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\}.$$

外测度的定义涉及到无限和，对于无限和 $\sum_{k=1}^{\infty} t_k$，其中 $t_i \in [0,\infty]$. 如果某个 $t_k = \infty$, 定义求和结果为 ∞. 否则定义为普通的级数求和.

例 2.3 (有限集的外测度为零)**.** 假设 $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ 是有限集. 任取 $\varepsilon > 0$, $k \le n$ 时定义 $I_k = (a_k - \varepsilon, a_k + \varepsilon)$, $k > n$ 时定义 $I_k = \emptyset$, 那么 $\sum \ell(I_k) = 2n\varepsilon$, 所以 $|A| \le 2n\varepsilon$, 即 $|A| = 0$.

2.1.2 外测度的良好性质

外测度有一些很好的性质, 我们首先改进上一个例子的结果.

命题 2.4 (可数集的外测度为零). ℝ 的任意可数子集的外测度是零.

Proof. 设 $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ 是可数集. 任取 $\varepsilon > 0$, 定义 $I_k = (a_k - \varepsilon/2^k, a_k + \varepsilon/2^k)$, 那么

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k-1}} = 2\varepsilon,$$

所以 $|A| \le 2\varepsilon$, 故 $|A| = 0$. □

命题 2.5 (外测度保序). 假设 $A \subseteq B$, 那么 $|A| \le |B|$.

Proof. 设 $I_1, I_2, \dots$ 是覆盖 B 的开区间, 那么也覆盖 A, 所以

$$|A| \le \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k),$$

对所有覆盖 B 的一列开区间取下确界, 所以 $|A| \le |B|$. □

我们还希望 ℝ 的子集的大小应该具有平移不变性, 外测度恰好满足这个性质.

命题 2.6 (外测度具有平移不变性). 设 $t \in \mathbb{R}$ 且 $A \subseteq \mathbb{R}$, 那么 $|t + A| = |A|$.

Proof. 假设 $I_1, I_2, \dots$ 是一列覆盖 A 的开区间, 那么 $t + I_1, t + I_2, \dots$ 是覆盖 $t + A$ 的一列开区间, 所以

$$|t + A| \le \sum_{k=1}^{\infty} \ell(t + I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k),$$

这表明 $|t + A| \le |A|$.

另一边, 我们有 $A = -t + (t + A)$, 由此可得 $|A| \le |t + A|$, 所以 $|t + A| = |A|$. □

命题 2.7 (外测度的次可加性). 设 $A_1, A_2, \dots$ 是 ℝ 的一列子集, 那么

$$\left| \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right| \le \sum_{k=1}^{\infty} |A_k|.$$

Proof.

□