

---

# Contents

<b>1</b>	<b>测度和积分</b>	<b>1</b>
1.1	可测空间 . . . . .	1
1.2	可测函数 . . . . .	5
1.3	测度 . . . . .	10
1.4	积分 . . . . .	13



# 测度和积分

## 1.1 可测空间

令  $E$  是集合,  $\mathcal{E}$  是  $E$  的一个子集族. 若对于任意  $A, B \in \mathcal{E}$  有  $A \cap B \in \mathcal{E}$ , 那么我们就说  $\mathcal{E}$  **对交封闭**. 如果  $\mathcal{E}$  中任意可数个集合的交还在  $\mathcal{E}$  中, 那么我们就说  $\mathcal{E}$  **对可数交封闭**. 类似地, 我们可以定义对补封闭、对并封闭和对可数并封闭的概念.

### $\sigma$ -代数

如果  $E$  的非空子集族  $\mathcal{E}$  对补和有限并封闭, 那么我们说  $\mathcal{E}$  是  $E$  上的**代数**. 如果其对补和可数并封闭, 那么我们说  $\mathcal{E}$  是  $E$  上的 **$\sigma$ -代数**, 即:

- a)  $A \in \mathcal{E} \Rightarrow E \setminus A \in \mathcal{E}$ ,
- b)  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{E} \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{E}$ .

由于  $(\bigcup_n A_n)^c = \bigcap_n A_n^c \in \mathcal{E}$ , 所以对补和可数并封闭可以自然导出对可数交封闭, 即  $\sigma$ -代数对可数交也封闭.

任取  $A \in \mathcal{E}$ , 那么  $E = A \cup (E \setminus A) \in \mathcal{E}$ , 所以  $E$  上任意  $\sigma$ -代数都至少包含  $E$  和  $\emptyset$ . 事实上,  $\mathcal{E} = \{E, \emptyset\}$  是  $E$  上的最简单的  $\sigma$ -代数, 被称为**平凡  $\sigma$ -代数**.  $E$  上最大的  $\sigma$ -代数当然是  $\mathcal{E} = 2^E$ , 即  $\mathcal{E}$  就是  $E$  的幂集, 被称为**离散  $\sigma$ -代数**.

不难看出,  $E$  上一族  $\sigma$ -代数的任意交 (不一定可数) 还是  $E$  上的  $\sigma$ -代数. 给定  $E$  的一个子集族  $\mathcal{C}$ , 我们可以考虑所有包含  $\mathcal{C}$  的  $\sigma$ -代数 (总是存在至少一个这样的  $\sigma$ -代数, 即  $2^E$ ), 将这些  $\sigma$ -代数取交集, 我们便得到了包含  $\mathcal{C}$  的最小的  $\sigma$ -代数, 被称为**由  $\mathcal{C}$  生成的  $\sigma$ -代数**, 记为  $\sigma\mathcal{C}$ .

如果  $E$  是拓扑空间, 由  $E$  的所有开集族生成的  $\sigma$ -代数被称为  $E$  上的**Borel  $\sigma$ -代数**, 记为  $\mathcal{B}(E)$  或者  $\mathcal{B}_E$ , 其元素被称为**Borel 集**.

### p-系和 d-系

对于  $E$  的子集族  $\mathcal{C}$ , 如果其对交封闭, 那么我们说  $\mathcal{C}$  是一个 **p-系**, 这里 p 代表 product, 是“交”的另一种说法.  $E$  的子集族  $\mathcal{D}$  被称为 **d-系**, 如果其满足:

- a)  $E \in \mathcal{D}$ ,

b)  $A, B \in \mathcal{D}$  and  $A \supseteq B \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{D}$ ,

c)  $(A_n) \subseteq \mathcal{D}$  and  $A_n \nearrow A \Rightarrow A \in \mathcal{D}$ .

其中  $(A_n) \subseteq \mathcal{D}$  表明  $(A_n)$  是  $\mathcal{D}$  中的集合序列,  $A_n \nearrow A$  表明这个序列递增至极限  $A$ :

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A.$$

显然一个  $\sigma$ -代数既是 p-系又是 d-系, 其反面也是成立的. 所以 p-系和 d-系是产生  $\sigma$ -代数的原始结构.

**命题 1.1.**  $\mathcal{E}$  的子集族是  $\sigma$ -代数当且仅当其既是 p-系又是 d-系.

*Proof.* ( $\Rightarrow$ ) 若  $\mathcal{E}$  是  $\sigma$ -代数, 其显然是 p-系并且满足 d-系的条件 (a) 和 (c). 下面我们验证其满足 d-系的条件 (b). 任取  $A, B \in \mathcal{E}$  且  $A \supseteq B$ , 那么  $A \setminus B = A \cap (E \setminus B) \in \mathcal{E}$ , 所以  $\mathcal{E}$  是 d-系.

( $\Leftarrow$ ) 若  $\mathcal{E}$  既是 p-系又是 d-系. 任取  $A \in \mathcal{E}$ , 根据 d-系的 (a) 和 (b), 我们有  $E \setminus A \in \mathcal{E}$ . 所以  $\mathcal{E}$  对补封闭. 然后我们说明对并封闭. 任取  $A, B \in \mathcal{E}$ , 由于

$$A \cup B = E \setminus (A \cup B)^c = E \setminus (A^c \cap B^c),$$

结合 p-系对交封闭, 所以  $A \cup B \in \mathcal{E}$ . 最后我们说明对可数并封闭. 如果  $(A_n) \subseteq \mathcal{E}$ , 令  $B_n = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ , 那么  $(B_n) \subseteq \mathcal{E}$  且  $B_n \nearrow A$ , 根据 d-系的 (c), 所以  $A \in \mathcal{E}$ , 故  $\mathcal{E}$  对可数并封闭.  $\square$

下面的引理为本节的主要定理做准备.

**引理 1.2.** 令  $\mathcal{D}$  是  $E$  上的 d-系, 固定  $D \in \mathcal{D}$ , 令

$$\hat{\mathcal{D}} = \{A \in \mathcal{D} : A \cap D \in \mathcal{D}\},$$

那么  $\hat{\mathcal{D}}$  仍然是 d-系.

#### 单调类定理

这是一个非常有用的工具来证明某些集族是  $\sigma$ -代数.

**定理 1.3.** 如果一个 d-系包含一个 p-系, 那么其包含这个 p-系生成的  $\sigma$ -代数.

*Proof.* 设  $\mathcal{C}$  是一个 p-系. 令  $\mathcal{D}$  是包含  $\mathcal{C}$  的最小的 d-系, 即包含  $\mathcal{C}$  的所有 d-系的交 (不难看出 d-系的任意交是 d-系). 我们证明  $\mathcal{D}$  实际上是一个  $\sigma$ -代数, 这样包含  $\mathcal{C}$  的任意 d-系都包含  $\mathcal{D}$ , 而  $\mathcal{D}$  作为包含  $\mathcal{C}$  的  $\sigma$ -代数, 其包含  $\sigma\mathcal{C}$ . 根据 **命题 1.1**, 只需要说明  $\mathcal{D}$  既是 p-系又是 d-系, 而  $\mathcal{D}$  已经是 d-系, 所以只需要说明  $\mathcal{D}$  是 p-系.

我们首先说明对于任意的  $D \in \mathcal{D}$  和  $C \in \mathcal{C}$ , 有  $D \cap C \in \mathcal{D}$ . 令

$$\mathcal{D}_1 = \{A \in \mathcal{D} : A \cap C \in \mathcal{D}\},$$

根据引理 1.2,  $\mathcal{D}_1$  是 d-系. 由于  $\mathcal{C}$  是 p-系, 所以  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}_1$ , 即  $\mathcal{D}_1$  是包含  $\mathcal{C}$  的 d-系, 所以  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}_1$ . 这就表明  $D \in \mathcal{D}_1$ , 即  $D \cap C \in \mathcal{D}$ .

下面说明对于任意的  $D, B \in \mathcal{D}$ , 有  $D \cap B \in \mathcal{D}$ . 令

$$\mathcal{D}_2 = \{A \in \mathcal{D} : A \cap D \in \mathcal{D}\}.$$

同样根据引理 1.2,  $\mathcal{D}_2$  是 d-系. 根据上面的叙述, 有  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}_2$ , 即  $\mathcal{D}_2$  是包含  $\mathcal{C}$  的 d-系, 所以  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}_2$ , 这就表明  $B \in \mathcal{D}_2$ , 即  $D \cap B \in \mathcal{D}$ . 这就证明了  $\mathcal{D}$  是 p-系.  $\square$

### 可测空间

一个可测空间指的是二元组  $(E, \mathcal{E})$ , 其中  $E$  是集合,  $\mathcal{E}$  是  $E$  上的  $\sigma$ -代数. 此时,  $\mathcal{E}$  的元素被称为可测集. 当  $E$  是拓扑空间,  $\mathcal{E} = \mathcal{B}_E$  的时候, 可测集也被称为 Borel 集.

### 可测空间的积

令  $(E, \mathcal{E})$  和  $(F, \mathcal{F})$  是可测空间. 如果  $A \in \mathcal{E}$  和  $B \in \mathcal{F}$ , 那么  $A \times B$  被称为可测矩形. 我们用  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$  表示  $E \times F$  上的由可测矩形集族生成的  $\sigma$ -代数, 被称为乘积  $\sigma$ -代数. 可测空间  $(E \times F, \mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$  被称为  $(E, \mathcal{E})$  和  $(F, \mathcal{F})$  的积, 我们通常使用  $(E, \mathcal{E}) \times (F, \mathcal{F})$  来表示.

### Exercises

#### 1-1 (划分生成 $\sigma$ -代数)

- 令  $\mathcal{C} = \{A, B, C\}$  是  $E$  的一个划分, 列出  $\sigma\mathcal{C}$  的元素.
- 令  $\mathcal{C}$  是  $E$  的 (可数) 划分. 证明  $\sigma\mathcal{C}$  的每个元素都是  $\mathcal{C}$  中元素的可数并.
- 令  $E = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{C}$  是  $\mathbb{R}$  的所有单点子集构成的子集族. 证明  $\sigma\mathcal{C}$  的元素要么是可数集要么是可数集的补集. 这表明从直观上来看,  $\sigma\mathcal{C}$  要比  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  小得多, 例如开区间  $(0, 1)$  属于后者但是不属于前者.

*Solution.* (a) 令

$$\mathcal{E} = \{A, B, C, A \cup B, A \cup C, B \cup C, E\},$$

显然  $\mathcal{E}$  是一个  $\sigma$ -代数. 对于任意包含  $\mathcal{C}$  的  $\sigma$ -代数, 由于其对并封闭, 所以其必须包含  $\mathcal{E}$ , 所以  $\mathcal{E} = \sigma\mathcal{C}$ .

(b) 令  $\mathcal{E}$  为  $\mathcal{C}$  中元素的所有可数并构成的集族. 根据  $\sigma$ -代数对可数并的封闭性, 所以  $\sigma\mathcal{C} \supseteq \mathcal{E}$ . 设  $(A_n)$  构成  $E$  的可数划分, 即  $(A_n)$  两两不相交且  $E = \bigcup_n A_n$ . 任取  $\bigcup_k A_{n_k} \in \mathcal{E}$ , 那么  $E \setminus (\bigcup_k A_{n_k})$  依然是某些  $(A_n)$  的可数并, 所以  $E \setminus (\bigcup_k A_{n_k}) \in \mathcal{E}$ , 即  $\mathcal{E}$  对补封闭, 所以  $\mathcal{E}$  是  $\sigma$ -代数, 所以  $\mathcal{E} = \sigma\mathcal{C}$ .

(c) 令  $\mathcal{E}$  为  $\mathbb{R}$  的可数子集和补集可数的子集构成的子集族. 显然  $\mathcal{E} \subseteq \sigma\mathcal{C}$  且不难验证  $\mathcal{E}$  是一个  $\sigma$ -代数 (可数个可数集的并是可数集), 所以  $\mathcal{E} = \sigma\mathcal{C}$ .  $\blacksquare$

1-2 ( $\mathbb{R}$  上的 Borel  $\sigma$ -代数)  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$  的任意开子集都是开区间的可数并. 使用这一事实证明  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  由所有开区间构成的子集族生成.

*Proof.* 设  $\mathcal{C}$  为所有开区间构成的子集族,  $\mathcal{T}$  为所有开集构成的子集族 (即  $\mathbb{R}$  上的拓扑). 显然  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$ , 所以  $\sigma\mathcal{C} \subseteq \sigma\mathcal{T} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . 由于  $\mathcal{T}$  中集合都是  $\mathcal{C}$  中集合的可数并, 所以  $\mathcal{T} \subseteq \sigma\mathcal{C}$ , 这表明  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\mathcal{T} \subseteq \sigma\mathcal{C}$ . 所以  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\mathcal{C}$  由所有开区间构成的子集族生成.  $\square$

1-3 ( $\mathbb{R}$  上的 Borel  $\sigma$ -代数) 证明:  $\mathbb{R}$  中的任意区间都是 Borel 集. 特别的,  $(-\infty, x), (-\infty, x], (x, y), [x, y]$  都是 Borel 集. 对于每个  $x$ , 单点集  $\{x\}$  也是 Borel 集.

*Proof.* 只需注意到

$$\begin{aligned} (-\infty, x) &= \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n + x, x), \quad (-\infty, x] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, x + \frac{1}{n}\right), \\ (x, y) &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(x, y + \frac{1}{n}\right), \quad [x, y] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(x - \frac{1}{n}, y\right], \quad \{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(x - \frac{1}{n}, x\right]. \end{aligned}$$

所以上述集合都是 Borel 集, 对于其他的区间同理.  $\square$

1-4 ( $\mathbb{R}$  上的 Borel  $\sigma$ -代数) 证明  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  可以由以下任意一种集族生成 (实际上还有很多可能):

- a) 所有形如  $(-\infty, x]$  的区间构成的子集族.
  - b) 所有形如  $(x, y]$  的区间构成的子集族.
  - c) 所有形如  $[x, y]$  的区间构成的子集族.
  - d) 所有形如  $(x, +\infty)$  的区间构成的子集族.
- 此外, 在每种情况中  $x, y$  可以被限制为有理数.

*Proof.* (a) 记该集族为  $\mathcal{C}$ , 由上题, 这样的区间已经是 Borel 集, 所以  $\sigma\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . 任取  $\mathbb{R}$  的开区间  $(x, y)$ , 有

$$(x, y) = (-\infty, x]^c \cap (-\infty, y) = (-\infty, x]^c \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, y - \frac{1}{n}\right] \in \sigma\mathcal{C},$$

而  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  由所有开区间生成, 所以  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \sigma\mathcal{C}$ . 所以  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\mathcal{C}$ .

(b) (c) (d) 完全同理.  $\square$

1-5 (迹空间) 令  $(E, \mathcal{E})$  是可测空间, 固定  $D \subseteq E$ , 令

$$\mathcal{D} = \mathcal{E} \cap D = \{A \cap D : A \in \mathcal{E}\}.$$

证明  $\mathcal{D}$  是  $D$  上的  $\sigma$ -代数, 被称为  $\mathcal{E}$  在  $D$  上的迹.  $(D, \mathcal{D})$  也被称为  $(E, \mathcal{E})$  在  $D$  上的迹.

*Proof.* 任取  $A \cap D \in \mathcal{D}$ , 其中  $A \in \mathcal{E}$ , 那么

$$D \setminus (A \cap D) = (E \setminus A) \cap D \in \mathcal{D},$$

所以  $\mathcal{D}$  对补封闭. 任取  $(A_n \cap D) \subseteq \mathcal{D}$ , 那么

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap D) = \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cap D \in \mathcal{D},$$

所以  $\mathcal{D}$  对可数并封闭. □

1-6 (子集的 Borel  $\sigma$ -代数是迹) 设  $(E, \mathcal{T})$  是拓扑空间,  $(D, \mathcal{T}_D)$  是子空间. 证明  $D$  上的 Borel  $\sigma$ -代数  $\mathcal{B}_D$  与  $D$  在  $E$  上的迹  $\mathcal{B}_E \cap D$  相同.

*Proof.* 由于  $\mathcal{T}_D = \mathcal{T} \cap D \subseteq \mathcal{B}_E \cap D$ , 由上题  $\mathcal{B}_E \cap D$  是  $\sigma$ -代数, 所以  $\mathcal{B}_D \subseteq \mathcal{B}_E \cap D$ . 记

$$\mathcal{C} = \{A \subseteq E : A \cap D \in \mathcal{B}_D\},$$

那么  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$ . 我们只需要证明  $\mathcal{C}$  是  $E$  上的  $\sigma$ -代数, 那么就有  $\mathcal{C} \supseteq \sigma\mathcal{T} = \mathcal{B}_E$ , 即  $\mathcal{B}_D \supseteq \mathcal{C} \cap D \supseteq \mathcal{B}_E \cap D$ . 任取  $A \in \mathcal{C}$ , 那么  $(E \setminus A) \cap D = D \setminus (A \cap D) \in \mathcal{B}_D$ , 所以  $E \setminus A \in \mathcal{C}$ . 任取  $(A_n) \subseteq \mathcal{C}$ , 那么

$$\left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cap D = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap D) \in \mathcal{B}_D,$$

所以  $\bigcup_n A_n \in \mathcal{C}$ . 这就表明  $\mathcal{C}$  是  $E$  上的  $\sigma$ -代数. □

## 1.2 可测函数

### 可测函数

令  $(E, \mathcal{E})$  和  $(F, \mathcal{F})$  是可测空间, 映射  $f : E \rightarrow F$  如果使得任取  $B \in \mathcal{F}$ , 有  $f^{-1}B \in \mathcal{E}$ , 那么我们说  $f$  相对于  $\mathcal{E}$  和  $\mathcal{F}$  可测.

**命题 1.4.** 映射  $f : E \rightarrow F$  相对于  $\mathcal{E}$  和  $\mathcal{F}$  可测当且仅当对于任意生成  $\mathcal{F}$  的子集族  $\mathcal{F}_0$ , 任取  $B \in \mathcal{F}_0$ , 有  $f^{-1}B \in \mathcal{E}$ .

*Proof.* 必要性显然. 下证充分性. 设  $\mathcal{F}_0$  使得  $\mathcal{F} = \sigma\mathcal{F}_0$ , 且对于任意的  $B \in \mathcal{F}_0$  有  $f^{-1}B \in \mathcal{E}$ . 记

$$\mathcal{F}_1 = \{A \in \mathcal{F} : f^{-1}A \in \mathcal{E}\},$$

显然  $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}$ . 由于

$$f^{-1}(F \setminus A) = F \setminus (f^{-1}A), \quad f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}A_i,$$

所以  $\mathcal{F}_1$  是  $\sigma$ -代数, 所以  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$ , 即  $f$  相对于  $\mathcal{E}$  和  $\mathcal{F}$  可测.  $\square$

**命题 1.5.** 给定可测空间  $(E, \mathcal{E}), (F, \mathcal{F}), (G, \mathcal{G})$ , 如果  $f$  相对于  $\mathcal{E}$  和  $\mathcal{F}$  可测,  $g$  相对于  $\mathcal{F}$  和  $\mathcal{G}$  可测, 那么复合  $g \circ f$  相对于  $\mathcal{E}$  和  $\mathcal{G}$  可测.

*Proof.* 任取  $C \in \mathcal{G}$ , 有

$$(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C)),$$

$g$  可测表明  $g^{-1}(C) \in \mathcal{F}$ ,  $f$  可测表明  $f^{-1}(g^{-1}(C)) \in \mathcal{E}$ , 所以  $g \circ f$  相对于  $\mathcal{E}$  和  $\mathcal{G}$  可测.  $\square$

### 数值函数

令  $(E, \mathcal{E})$  是可测空间. 回顾实数及扩充实数  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ ,  $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ ,  $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ ,  $\bar{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$ .  $E$  上的**数值函数**指的是从  $E$  到  $\bar{\mathbb{R}}$  或者  $\bar{\mathbb{R}}$  的子集的映射. 如果这个映射的值在  $\mathbb{R}$  中, 那么我们一般称其为**实值函数**.

$E$  上的数值函数如果相对于  $\mathcal{E}$  和  $B(\bar{\mathbb{R}})$  可测, 那么我们说其是  $\mathcal{E}$ -可测的. 如果  $E$  是拓扑空间且  $\mathcal{E} = B(E)$ , 那么  $\mathcal{E}$ -可测函数被称为 **Borel 函数**. 下面的命题是 **命题 1.4** 的直接结果.

**命题 1.6.** 映射  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  是  $\mathcal{E}$ -可测的当且仅当对于每个  $r \in \mathbb{R}$ ,  $f^{-1}[-\infty, r] \in \mathcal{E}$ .

上述命题中的  $[-\infty, r]$  可以改为  $[-\infty, r)$ ,  $[r, \infty]$ ,  $(r, \infty]$  中的任意一种.

### 函数的正部分和负部分

对于  $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$ , 我们记  $a \vee b$  为  $a$  和  $b$  中的最大者,  $a \wedge b$  为  $a$  和  $b$  中的最小者. 对于函数  $f, g$ , 用  $f \vee g$  表示函数  $x \mapsto f(x) \vee g(x)$ . 令  $(E, \mathcal{E})$  是可测空间,  $f$  是  $E$  上的数值函数. 那么

$$f^+ = f \vee 0, \quad f^- = -(f \wedge 0)$$

都是非负函数并且  $f = f^+ - f^-$ . 函数  $f^+$  被称为  $f$  的**正部分**,  $f^-$  被称为  $f$  的**负部分**.

**命题 1.7.** 函数  $f$  是  $\mathcal{E}$ -可测的当且仅当  $f^+$  和  $f^-$  都是  $\mathcal{E}$ -可测的.



*Proof.* 若  $f$  是  $\mathcal{E}$ -可测的. 任取  $r \in \mathbb{R}$ , 若  $r < 0$ , 则  $(f^+)^{-1}[-\infty, r] = \emptyset \in \mathcal{E}$ . 若  $r \geq 0$ , 则

$$(f^+)^{-1}[-\infty, r] = E \setminus (f^+)^{-1}(r, \infty] = E \setminus f^{-1}(r, \infty],$$

由于  $(r, \infty]$  是 Borel 集, 所以  $(f^+)^{-1}[-\infty, r] \in \mathcal{E}$ . 综合起来,  $f^+$  是  $\mathcal{E}$ -可测的. 同理可证  $f^-$  是  $\mathcal{E}$ -可测的.

若  $f^+$  和  $f^-$  都是  $\mathcal{E}$ -可测的. 任取  $r \in \mathbb{R}$ , 若  $r < 0$ , 那么

$$f^{-1}[-\infty, r] = (f^-)^{-1}[-r, \infty] \in \mathcal{E}.$$

若  $r \geq 0$ , 那么

$$f^{-1}[-\infty, r] = E \setminus f^{-1}(r, \infty] = E \setminus (f^+)^{-1}(r, \infty] \in \mathcal{E}.$$

所以  $f$  是  $\mathcal{E}$ -可测的. □

### 指示函数和简单函数

令  $A \subseteq E$ , 定义  $A$  的指示函数为  $1_A$ :

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

对于  $1_E$ , 我们简记为 1. 显然,  $1_A$  是  $\mathcal{E}$ -可测的当且仅当  $A \in \mathcal{E}$ .

$E$  上的函数  $f$  如果形如

$$f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i},$$

其中  $n \geq 1$ ,  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ,  $A_1, \dots, A_n$  是可测集, 那么我们说  $f$  是**简单函数**. 在这个定义中, 若  $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ , 那么我们可以将  $a_i 1_{A_i} + a_j 1_{A_j}$  拆为

$$a_i 1_{A_i \setminus (A_i \cap A_j)} + (a_i + a_j) 1_{A_i \cap A_j} + a_j 1_{A_j \setminus (A_i \cap A_j)},$$

所以我们可以假设  $A_i$  两两不相交. 此外, 如果  $\bigcup_i A_i \neq E$ , 记  $B = E \setminus \bigcup_i A_i \in \mathcal{E}$ , 那么

$$f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i} + 0 \cdot 1_B,$$

所以我们还可以假设  $\bigcup_i A_i = E$ . 这意味着对于一个简单函数  $f$ , 总存在整数  $m$ , 不同的实数  $b_1, \dots, b_m$  和  $E$  的可测划分  $\{B_1, \dots, B_m\}$  使得  $f = \sum_{i=1}^m b_i 1_{B_i}$ , 这种表示被称为简单函数  $f$  的**标准型**.

利用简单函数的标准型, 很容易验证简单函数都是  $\mathcal{E}$ -可测的. 反之, 若  $f$  是  $\mathcal{E}$ -可测的, 只有有限个取值且值为实数, 那么  $f$  为简单函数. 特别地, 任意常值函数是简单函数. 最后, 如果  $f, g$  是简单函数, 那么

$$f + g, \quad f - g, \quad fg, \quad f/g, \quad f \vee g, \quad f \wedge g$$

都是简单函数, 其中  $f/g$  要求  $g$  的值始终非零.

## 函数列的极限

令  $(f_n)$  是  $E$  上的一列数值函数, 我们可以逐点定义

$$\inf f_n, \quad \sup f_n, \quad \liminf f_n, \quad \limsup f_n, \quad (1.1)$$

例如,  $\inf f_n$  将  $x \in E$  送到实数列  $(f_n(x))$  的下确界. 如果

$$\liminf f_n = \limsup f_n = f,$$

那么我们说  $(f_n)$  有逐点极限  $f$ , 记为  $f = \lim f_n$  或者  $f_n \rightarrow f$ .

如果  $(f_n)$  单调递增, 即  $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ , 那么根据单调有界定理,  $\lim f_n$  存在且等于  $\sup f_n$ . 此时我们用  $f_n \nearrow f$  来表示  $(f_n)$  单调递增且有极限  $f$ . 类似地, 用  $f_n \searrow f$  来表示  $(f_n)$  单调递减且有极限  $f$ .

下面的定理表明可测函数类对极限操作是封闭的.

**定理 1.8.** 令  $(f_n)$  是一列  $\mathcal{E}$ -可测函数, 那么 (1.1) 中的四个函数都是  $\mathcal{E}$ -可测的. 此外, 如果  $\lim f_n$  存在, 那么  $\lim f_n$  也是  $\mathcal{E}$ -可测的.

*Proof.* 记  $g = \sup f_n$ . 任取  $r \in \mathbb{R}$ , 注意到  $g(x) \leq r$  当且仅当对于所有  $n$  有  $f_n(x) \leq r$ . 所以

$$g^{-1}[-\infty, r] = \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}[-\infty, r],$$

$f_n$  可测表明  $f_n^{-1}[-\infty, r] \in \mathcal{E}$ , 所以  $g^{-1}[-\infty, r] \in \mathcal{E}$ , 即  $g$  可测.

对于  $\inf f_n$ , 我们有  $\inf f_n = -\sup(-f_n)$ , 所以  $\inf f_n$  也可测. 最后, 注意到

$$\liminf f_n = \sup_m \inf_{n \geq m} f_n, \quad \limsup f_n = \inf_m \sup_{n \geq m} f_n,$$

所以  $\liminf f_n$  和  $\limsup f_n$  可测. 若二者相等, 那么  $\lim f_n$  也可测. □

## 可测函数的逼近

**引理 1.9.** 对于  $n \in \mathbb{N}^*$ , 令

$$d_n(r) = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} 1_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})}(r) + n 1_{[n, \infty)}(r), \quad r \in \bar{\mathbb{R}}_+.$$

那么,  $d_n(r)$  是  $\bar{\mathbb{R}}_+$  上单调递增的简单函数, 并且对于每个  $r \in \bar{\mathbb{R}}_+$ ,  $d_n(r)$  随着  $n$  的增大是单调递增的.

*Proof.* 显然  $d_n(r)$  是单调递增的简单函数, 我们证明任取  $r \in \bar{\mathbb{R}}_+$ ,  $d_n(r)$  是单调递增的. 若  $r = \infty$ , 那么  $d_n(r) = n$  是单调递增的. 现在假设  $r \in \mathbb{R}_+$ , 那么存在正整数  $m$  使得  $m \leq r < m+1$ , 所以当  $n \leq m$  的时候,  $d_n(r) = n$  单调递增. 当  $n > m$  的时候, 直观来看,  $d_n$  将区间  $[0, n]$  等分为  $n2^n$  份,  $r \in [0, n]$  表明一定存在唯一的  $k_n$  使得

$(k_n - 1)/2^n \leq r < k_n/2^n$ , 可以发现  $k_n$  满足递推关系  $k_{n+1} = 2k_n - 1$  或者  $k_{n+1} = 2k_n$ , 这表明

$$d_{n+1}(r) = \frac{k_{n+1} - 1}{2^{n+1}} \geq \frac{2k_n - 2}{2^{n+1}} = \frac{k_n - 1}{2^n} = d_n(r).$$

综上,  $d_n(r)$  随着  $n$  的增大是单调递增的.  $\square$

**定理 1.10.**  $E$  上的非负函数是  $\mathcal{E}$ -可测的当且仅当其是一列单调递增的非负简单函数序列的极限.

*Proof.* 充分性来源于 **定理 1.8**. 对于必要性, 设  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$  是  $\mathcal{E}$ -可测的非负函数. 记  $d_n$  为上述引理中的函数, 令  $f_n = d_n \circ f$ . 那么  $f_n$  是非负的  $\mathcal{E}$ -可测函数, 并且其取值只有有限个, 所以是简单函数. 由于  $(d_n)$  单调递增, 所以  $(f_n)$  单调递增. 对于任意  $x \in E$ , 由于  $f_n(x) = d_n(f(x))$ , 所以  $n \rightarrow \infty$  的时候  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ , 故  $f = \lim f_n$ .  $\square$

### 函数的单调类

令  $\mathcal{M}$  为  $E$  上数值函数的一个集合, 记  $\mathcal{M}_+$  为  $\mathcal{M}$  中非负函数组成的子集,  $\mathcal{M}_b$  为  $\mathcal{M}$  中有界函数组成的子集.

如果  $\mathcal{M}$  包含常值函数 1,  $\mathcal{M}_b$  构成  $\mathbb{R}$  上的向量空间以及  $\mathcal{M}_+$  在递增极限下封闭, 那么我们说  $\mathcal{M}$  是一个**单调类**. 更准确地说,  $\mathcal{M}$  是单调类当且仅当:

- a)  $1 \in \mathcal{M}$ ,
- b) 若  $f, g \in \mathcal{M}_b$  且  $a, b \in \mathbb{R}$ , 则  $af + bg \in \mathcal{M}$ ,
- c) 若  $(f_n) \subseteq \mathcal{M}_+$  且  $f_n \nearrow f$ , 那么  $f \in \mathcal{M}$ .

下面的定理通常被用于证明所有  $\mathcal{E}$ -可测函数拥有的某一性质.

**定理 1.11.** 令  $\mathcal{M}$  是  $E$  上函数的单调类. 假设对于某个生成  $\mathcal{E}$  的  $\mathcal{p}$ -系  $\mathcal{C}$ , 任取  $A \in \mathcal{C}$ , 有  $1_A \in \mathcal{M}$ . 那么,  $\mathcal{M}$  包含所有的非负  $\mathcal{E}$ -可测函数以及所有的有界  $\mathcal{E}$ -可测函数.

*Proof.* 首先证明对于任意的  $A \in \mathcal{E}$  有  $1_A \in \mathcal{M}$ . 记

$$\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{E} : 1_A \in \mathcal{M}\}.$$

由于  $1 = 1_E \in \mathcal{M}$ , 所以  $E \in \mathcal{D}$ . 任取  $A, B \in \mathcal{D}$  且  $A \supseteq B$ , 那么  $1_{A \setminus B} = 1_A - 1_B \in \mathcal{M}$ , 这表明  $A \setminus B \in \mathcal{D}$ . 设  $(A_n) \subseteq \mathcal{D}$  且  $A_n \nearrow A$ , 那么  $(1_{A_n}) \subseteq \mathcal{M}_+$  且  $1_{A_n} \nearrow 1_A$ , 所以  $1_A \in \mathcal{M}$ , 这表明  $A \in \mathcal{D}$ . 这表明  $\mathcal{D}$  是  $\mathcal{d}$ -系. 由于  $\mathcal{C}$  是  $\mathcal{p}$ -系且  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ , 根据单调类定理 1.3,  $\mathcal{D}$  包含  $\sigma\mathcal{C} = \mathcal{E}$ , 所以对于任意的  $A \in \mathcal{E}$  有  $A \in \mathcal{D}$ , 即  $1_A \in \mathcal{M}$ .

再根据单调类的定义 (b),  $\mathcal{M}$  包含所有的简单函数.

令  $f$  是非负  $\mathcal{E}$ -可测函数, 根据 **定理 1.10**,  $f$  是函数序列  $(f_n)$  的极限, 其中  $f_n$  是递增的非负简单函数, 即  $(f_n) \subseteq \mathcal{M}_+$ . 根据单调类的定义 (c), 有  $f \in \mathcal{M}$ .

令  $g$  是有界  $\mathcal{E}$ -可测函数, 那么  $g^+$  和  $g^-$  都是非负  $\mathcal{E}$ -可测函数, 所以  $g^+, g^- \in \mathcal{M}$ . 显然  $g^+, g^-$  也都是有界的, 根据单调类的定义 (b), 所以  $g = g^+ - g^- \in \mathcal{M}$ .  $\square$

### 标准可测空间

令  $(E, \mathcal{E})$  和  $(F, \mathcal{F})$  是可测空间. 如果  $f : E \rightarrow F$  是双射的相对于  $\mathcal{E}$  和  $\mathcal{F}$  的可测函数, 并且其逆映射  $f^{-1} : F \rightarrow E$  是相对于  $\mathcal{F}$  和  $\mathcal{E}$  的可测函数, 那么我们说  $f$  是**同构**.

如果可测空间  $(E, \mathcal{E})$  同构于  $(F, \mathcal{B}_F)$ , 其中  $F$  是  $\mathbb{R}$  的某个 Borel 子集, 那么我们就说  $(E, \mathcal{E})$  是**标准可测空间**. 标准可测空间有非常多. 如果  $E$  是完备度量空间, 那么  $(E, \mathcal{B}_E)$  是标准可测空间. 如果  $E$  是波兰空间, 即可分的可完备度量化化的拓扑空间, 那么  $(E, \mathcal{B}_E)$  是标准可测空间. 如果  $E$  是可分的 Banach 空间, 那么  $(E, \mathcal{B}_E)$  是标准可测空间.

显然,  $[0, 1]$  和它的 Borel  $\sigma$ -代数构成标准可测空间.  $\{1, 2, \dots, n\}$  和它的离散  $\sigma$ -代数构成标准可测空间.  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  和它的离散  $\sigma$ -代数构成标准可测空间. 一个深刻的结果是, 任意标准可测空间都同构于上述三者之一.

## 1.3 测度

令  $(E, \mathcal{E})$  是可测空间,  $(E, \mathcal{E})$  上的**测度**指的是一个映射  $\mu : \mathcal{E} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ , 其满足:

- a)  $\mu(\emptyset) = 0$ ,
- b) 对于不相交的子集列  $(A_n) \subseteq \mathcal{E}$ , 有  $\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$ .

条件 (b) 被称为**可列可加性**. 需要注意  $\mu(A)$  总是为正数且可以为  $+\infty$ . 数  $\mu(A)$  被称为  $A$  的**测度**, 也简记为  $\mu A$ .

一个**测度空间**指的是三元组  $(E, \mathcal{E}, \mu)$ , 其中  $(E, \mathcal{E})$  是可测空间,  $\mu$  是  $(E, \mathcal{E})$  上的测度.

### 例子

**例 1.12** (Dirac 测度). 令  $(E, \mathcal{E})$  是可测空间, 固定  $x \in E$ . 对于每个  $A \in \mathcal{E}$ , 令

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

那么  $\delta_x$  是  $(E, \mathcal{E})$  上的测度, 被称为 **Dirac 测度**. 直观来看, 其基于一个集合  $A$  是否含有特定元素  $x$  来给出这个集合的“大小”.

**例 1.13** (计数测度). 令  $(E, \mathcal{E})$  是可测空间, 固定  $D \subseteq E$ . 对于每个  $A \in \mathcal{E}$ , 令  $\nu(A)$  是  $A \cap D$  中点的个数, 此时  $\nu$  是  $(E, \mathcal{E})$  上的测度, 被称为**计数测度**. 通常, 集合  $D$  被选取为可数集, 在这种情况下

$$\nu(A) = \sum_{x \in D} \delta_x(A), \quad A \in \mathcal{E}.$$

**例 1.14** (离散测度). 令  $(E, \mathcal{E})$  是可测空间, 固定可数子集  $D \subseteq E$ . 对于每个  $x \in D$ , 分配一个正数  $m(x)$ . 定义

$$\mu(A) = \sum_{x \in D} m(x) \delta_x(A), \quad A \in \mathcal{E}.$$

那么  $\mu$  是  $(E, \mathcal{E})$  上的测度, 被称为**离散测度**. 我们可能会把  $m(x)$  理解为点  $x$  的质量, 那么  $\mu(A)$  就是集合  $A$  的质量. 特别地, 如果  $(E, \mathcal{E})$  是离散可测空间, 那么每个测度  $\mu$  都有这种形式.

**例 1.15** (Lebesgue 测度).  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$  上的测度  $\mu$  如果对于每个区间  $A$  都满足  $\mu(A)$  为  $A$  的长度, 那么我们说  $\mu$  是 **Lebesgue 测度**. 类似地,  $\mathbb{R}^2$  上的 Lebesgue 测度是“面积”测度,  $\mathbb{R}^3$  上的 Lebesgue 测度是“体积”测度等等. 我们将它们记作  $\text{Leb}$ .

### 测度的性质

**命题 1.16.** 令  $\mu$  是可测空间  $(E, \mathcal{E})$  上的测度, 那么对于任意可测集  $A, B$  和  $A_1, A_2, \dots$ , 有:

有限可加性  $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ .

单调性  $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ .

连续性  $A_n \nearrow A \Rightarrow \mu(A_n) \nearrow \mu(A)$ .

Boole 不等式  $\mu(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n \mu(A_n)$ .

*Proof.* 有限可加性是可列可加性的特殊情况, 取  $A_1 = A, A_2 = B, A_3 = A_4 = \dots = \emptyset$  即可. 若  $A \subseteq B$ , 由于  $\mathcal{E}$  是  $\sigma$ -系, 所以  $B \setminus A \in \mathcal{E}$ , 所以

$$\mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A).$$

若  $A_n \nearrow A$ , 令  $B_1 = A_1, B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ , 那么  $B_n$  互不相交且  $\bigcup_{k=1}^n B_k = A_n$ , 所以

$$\lim \mu(A_n) = \lim \mu\left(\bigcup_{k=1}^n B_k\right) = \lim \sum_{k=1}^n \mu(B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) = \mu(A).$$

对于 Boole 不等式, 注意到

$$\mu(A \cup B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \leq \mu(A) + \mu(B),$$

所以归纳可得

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \mu(A_k),$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 左边根据连续性即可得到 Boole 不等式. □

## 有限测度

令  $\mu$  是可测空间  $(E, \mathcal{E})$  上的测度, 如果  $\mu(E) < \infty$ , 那么  $\mu$  被称为**有限测度**, 根据单调性, 此时对于任意  $A \in \mathcal{E}$ , 都有  $\mu(A) < \infty$ . 如果  $\mu(E) = 1$ , 那么  $\mu$  被称为**概率测度**. 如果存在  $E$  的可测划分  $(E_n)$  使得  $\mu(E_n) < \infty$ , 那么  $\mu$  被称为 **$\sigma$ -有限测度**. 如果存在一列有限测度  $\mu_n$  使得  $\mu = \sum_n \mu_n$ , 那么  $\mu$  被称为 **$\Sigma$ -有限测度**. 有限测度都是  $\sigma$ -有限的,  $\sigma$ -有限测度都是  $\Sigma$ -有限的.

**命题 1.17.** 令  $(E, \mathcal{E})$  是可测空间,  $\mu, \nu$  是两个有限测度且  $\mu(E) = \nu(E)$ , 如果  $\mu, \nu$  在生成  $\mathcal{E}$  的某个  $\mathcal{P}$ -系上取值相同, 那么  $\mu = \nu$ .

*Proof.* 设  $\mathcal{C}$  是  $\mathcal{P}$ -系且  $\mathcal{E} = \sigma\mathcal{C}$ , 任取  $A \in \mathcal{C}$  有  $\mu(A) = \nu(A)$ . 令

$$\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{E} : \mu(A) = \nu(A)\},$$

那么  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ . 如果我们证明  $\mathcal{D}$  是  $\mathcal{d}$ -系, 那么根据单调类定理, 就有  $\mathcal{E} = \sigma\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ , 即任取  $A \in \mathcal{E}$  有  $\mu(A) = \nu(A)$ . 下面我们证明  $\mathcal{D}$  是  $\mathcal{d}$ -系. 由于  $\mu(E) = \nu(E)$ , 所以  $E \in \mathcal{D}$ . 若  $A, B \in \mathcal{D}$  且  $A \supseteq B$ , 那么

$$\mu(B) + \mu(A \setminus B) = \mu(A) = \nu(A) = \nu(B) + \mu(A \setminus B),$$

由于  $\mu(B) = \nu(B)$ , 所以  $\mu(A \setminus B) = \nu(A \setminus B)$ , 即  $A \setminus B \in \mathcal{D}$ . 任取  $(A_n) \subseteq \mathcal{D}$  且  $A_n \nearrow A$ , 根据连续性, 所以  $\mu(A_n) \nearrow \mu(A)$  以及  $\nu(A_n) \nearrow \nu(A)$ , 所以

$$\mu(A) = \lim \mu(A_n) = \lim \nu(A_n) = \nu(A),$$

所以  $A \in \mathcal{D}$ . 这就证明了  $\mathcal{D}$  是  $\mathcal{d}$ -系. □

**推论 1.18.** 令  $\mu, \nu$  是  $(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$  上的概率测度, 那么  $\mu = \nu$  当且仅当对于任意的  $r \in \mathbb{R}$  有  $\mu[-\infty, r] = \nu[-\infty, r]$ .

## 原子, 纯原子测度和非原子测度

令  $(E, \mathcal{E})$  是可测空间, 假设对于每个  $x \in E$ , 单点集  $\{x\} \in \mathcal{E}$ , 这一点对于所有的标准可测空间都是成立的. 令  $\mu$  是  $(E, \mathcal{E})$  上的测度, 如果点  $x$  使得  $\mu\{x\} > 0$ , 那么  $x$  被称为  $\mu$  的一个**原子**. 如果  $\mu$  没有任何原子, 那么  $\mu$  被称为**非原子测度**. 如果  $\mu$  的原子的集合  $D$  是可数集并且  $\mu(E \setminus D) = 0$ , 那么  $\mu$  被称为**纯原子测度**. 例如, Lebesgue 测度是非原子测度, Dirac 测度是纯原子测度 (其只有一个原子), 离散测度是纯原子测度.

**命题 1.19.** 令  $\mu$  是  $(E, \mathcal{E})$  上的  $\Sigma$ -有限测度, 那么

$$\mu = \lambda + \nu,$$

其中  $\lambda$  是非原子测度,  $\nu$  是纯原子测度.

## 完备性, 零测集

令  $(E, \mathcal{E}, \mu)$  是测度空间, 如果可测集  $B$  使得  $\mu(B) = 0$ , 那么  $B$  被称为**零测集**.  $E$  的任意子集如果被一个可测的零测集包含, 那么也被称为**零测集**. 如果  $E$  的每个零测集都是可测集, 那么我们说这个测度空间是**完备的**. 对于不完备的测度空间, 下面的结果表明可以通过包含所有的零测集来扩大  $\mathcal{E}$  以及  $\mu$  来得到一个完备测度空间. 测度空间  $(E, \bar{\mathcal{E}}, \bar{\mu})$  被称为  $(E, \mathcal{E}, \mu)$  的**完备化**. 当  $E = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{E} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$  和  $\mu = \text{Leb}$  的时候,  $\bar{\mathcal{E}}$  的元素被称为 **Lebesgue 可测集**.

**命题 1.20.** 令  $\mathcal{N}$  是  $E$  的所有零测子集的集合族,  $\bar{\mathcal{E}}$  为  $\mathcal{E} \cup \mathcal{N}$  生成的  $\sigma$ -代数, 那么

- a) 每个  $B \in \bar{\mathcal{E}}$  都形如  $B = A \cup N$ , 其中  $A \in \mathcal{E}$  以及  $N \in \mathcal{N}$ ,
- b) 定义  $\bar{\mu}(A \cup N) = \mu(A)$ , 这给出了  $\bar{\mathcal{E}}$  上的测度  $\bar{\mu}$ , 并且是唯一的满足  $\bar{\mu}(A) = \mu(A)$  ( $A \in \mathcal{E}$ ) 的测度, 此时测度空间  $(E, \bar{\mathcal{E}}, \bar{\mu})$  是完备的.

**3-1 (限制和迹)** 令  $(E, \mathcal{E})$  是可测空间,  $\mu$  是测度. 令  $D \in \mathcal{E}$ .

- a) 定义  $\nu(A) = \mu(A \cap D)$ , 证明  $\nu$  是  $(E, \mathcal{E})$  上的测度, 被称为  $\mu$  在  $D$  上的迹.
- b) 令  $\mathcal{D}$  为  $\mathcal{E}$  在  $D$  上的迹, 对于  $A \in \mathcal{D}$ , 定义  $\nu(A) = \mu(A)$ , 证明  $\nu$  是  $(D, \mathcal{D})$  上的测度, 被称为  $\mu$  在  $D$  上的限制.

*Proof.* (a)  $\nu(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$ . 设  $(A_n) \subseteq \mathcal{E}$  是不相交的子集列, 那么  $(A_n \cap D) \subseteq \mathcal{E}$  仍然不相交, 所以

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap D)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap D) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n),$$

即  $\nu$  是  $(E, \mathcal{E})$  上的测度.

(b)  $\nu(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$ . 设  $(A_n) \subseteq \mathcal{D}$  是不相交的子集列, 于是

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n). \quad \square$$

## 1.4 积分

令  $(E, \mathcal{E}, \mu)$  是测度空间. 我们同时用  $\mathcal{E}$  表示  $E$  上的  $\mathcal{E}$ -可测函数的集合,  $\mathcal{E}_+$  表示非负  $\mathcal{E}$ -可测函数构成的子集. 下面对于所有合理的  $f \in \mathcal{E}$ , 我们定义“ $f$  相对于  $\mu$  的积分”, 我们将记为:

$$\mu f = \mu(f) = \int_E f(x) \mu(dx) = \int_E f \, d\mu.$$

并且我们将证明我们定义的积分蕴含下面的性质: 对于任意  $a, b \in \mathbb{R}_+$  和  $f, g, f_n \in \mathcal{E}_+$ , 有:

非负性  $\mu f \geq 0$ , 若  $f = 0$ , 则  $\mu f = 0$ .

线性性  $\mu(af + bg) = a\mu f + b\mu g$ .

单调收敛定理 若  $f_n \nearrow f$ , 则  $\mu f_n \nearrow \mu f$ .

**定义 1.21.** 我们从简单函数开始逐步定义积分的概念.

a) 令  $f$  是简单非负函数, 设其标准型为  $f = \sum_i a_i 1_{A_i}$ , 定义

$$\mu f = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i).$$

b) 令  $f \in \mathcal{E}_+$ , 记  $f_n = d_n \circ f$ , 其中  $d_n$  为 [引理 1.9](#) 中的简单函数, 那么每个  $f_n$  是简单非负函数. 此时  $\mu f_n$  是单调递增的, 于是我们定义

$$\mu f = \lim \mu f_n.$$

c) 令  $f \in \mathcal{E}$ , 那么  $f^+, f^- \in \mathcal{E}_+$ . 由于  $f = f^+ - f^-$ , 于是我们定义

$$\mu f = \mu(f^+) - \mu(f^-).$$

上述定义中我们要求等式右端至少有一项是有限的.

**注释 1.22.** 令  $f, g$  是简单非负函数.

a) 设  $f = \sum_i a_i 1_{A_i}$ , 这里我们不要求是标准型. 若  $\bigcup_i A_i \neq E$ , 那么我们可以添加零项, 所以我们假设  $\bigcup_i A_i = E$ . 若  $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ , 那么

$$a_i 1_{A_i} + a_j 1_{A_j} = a_i 1_{A_i \setminus (A_i \cap A_j)} + (a_i + a_j) 1_{A_i \cap A_j} + a_j 1_{A_j \setminus (A_i \cap A_j)},$$

于是这两项的积分为

$$\begin{aligned} & a_i \mu(A_i \setminus (A_i \cap A_j)) + (a_i + a_j) \mu(A_i \cap A_j) + a_j \mu(A_j \setminus (A_i \cap A_j)) \\ &= a_i \mu(A_i) - a_i \mu(A_i \cap A_j) + (a_i + a_j) \mu(A_i \cap A_j) + a_j \mu(A_j) - a_j \mu(A_i \cap A_j) \\ &= a_i \mu(A_i) + a_j \mu(A_j), \end{aligned}$$

所以对于简单函数的非标准形式而言, 其积分依然形如  $\mu f = \sum_i a_i \mu(A_i)$ .

b) 若  $a, b \in \mathbb{R}_+$ , 那么  $af + bg$  依然是简单非负函数, 再根据 (a), 就有

$$\mu(af + bg) = a\mu f + b\mu g.$$

c) 如果  $f \leq g$ , 那么

$$\mu f \leq \mu f + \mu(g - f) = \mu(f + g - f) = \mu g.$$

d) 若  $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ , 根据 (c), 有  $\mu f_1 \leq \mu f_2 \leq \dots$ , 所以定义中的  $\lim \mu f_n$  存在 (可以为  $+\infty$ ).



**示例**

**例 1.23** (离散测度). 固定  $x_0 \in E$ , 考虑 Dirac 测度  $\delta_{x_0}$ . 任取  $f \in \mathcal{E}_+$ , 所以

$$\delta_{x_0} f = \lim \delta_{x_0} (d_n \circ f) = f(x_0).$$

那么对于任意  $f \in \mathcal{E}$ , 就有

$$\delta_{x_0} f = \delta_{x_0} (f^+) - \delta_{x_0} (f^-) = f(x_0).$$

设  $\mu = \sum_{x \in D} m(x) \delta_x$  是离散测度, 其中  $D \in \mathcal{E}$  是可数集,  $m(x) > 0$ , 那么

$$\mu f = \sum_{x \in D} m(x) f(x).$$

**例 1.24** (离散空间). 设  $(E, \mathcal{E})$  是离散可测空间, 即  $E$  可数且  $\mathcal{E} = 2^E$ . 此时  $E$  上的任意数值函数都是  $\mathcal{E}$ -可测的, 且  $E$  上的任意测度  $\mu$  都满足  $\mu = \sum_{x \in E} \mu\{x\} \delta_x$ , 所以对于任意  $E$  上的函数  $f$ , 有

$$\mu f = \sum_{x \in E} \mu\{x\} f(x).$$

**例 1.25** (Lebesgue 积分). 设  $E$  是  $\mathbb{R}^d$  的 Borel 子集,  $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$ . 设  $\mu$  是 Lebesgue 测度在  $(E, \mathcal{E})$  上的限制, 对于  $f \in \mathcal{E}$ , 我们使用下面的记号表示积分  $\mu f$ :

$$\mu f = \text{Leb}_E f = \int_E f(x) \text{Leb}(dx) = \int_E f(x) dx.$$

**可积性**

对于一个函数  $f \in \mathcal{E}$ , 如果  $\mu f$  存在且为实数, 那么  $f$  被称为**可积的**. 也就是说,  $f$  可积当且仅当  $\mu f^+ < \infty$  以及  $\mu f^- < \infty$ .

**在可测集上的积分**

令  $f \in \mathcal{E}$ ,  $A$  是可测集, 那么  $f 1_A \in \mathcal{E}$ , 此时我们把  $f$  在  $A$  上的积分定义为  $f 1_A$  的积分, 使用下面的记号:

$$\mu(f 1_A) = \int_A f(x) \mu(dx) = \int_A f d\mu.$$

**引理 1.26.** 令  $f \in \mathcal{E}_+$ ,  $A, B \in \mathcal{E}$  不相交且  $C = A \cup B$ , 那么

$$\mu(f 1_A) + \mu(f 1_B) = \mu(f 1_C).$$

对于一般的  $f \in \mathcal{E}$  也成立.

*Proof.* 令  $f_n = d_n \circ f$ , 由于  $f_n$  是简单函数, 所以

$$\mu(f_n 1_A) + \mu(f_n 1_B) = \mu(f_n 1_C),$$

注意到  $f_n 1_A = d_n \circ (f 1_A)$ , 对  $B, C$  同理. 令  $n \rightarrow \infty$  即得结论.  $\square$

## 非负性和单调性

**命题 1.27.** 若  $f \in \mathcal{E}_+$ , 那么  $\mu f \geq 0$ . 如果  $f, g \in \mathcal{E}_+$  且  $f \leq g$ , 那么  $\mu f \leq \mu g$ .

*Proof.*  $f \in \mathcal{E}_+$  表明  $f_n \geq 0$ , 从而  $\mu f_n \geq 0$ , 所以  $\mu f = \lim \mu f_n \geq 0$ . 如果  $f \leq g$ , 由于  $d_n$  是单调递增函数, 所以  $f_n \leq g_n$ , 所以  $\mu f_n \leq \mu g_n$ , 所以  $\mu f \leq \mu g$ .  $\square$

**推论 1.28.** 若  $f, g \in \mathcal{E}$  且  $f \leq g$ , 那么  $\mu f \leq \mu g$ .

*Proof.*  $f \leq g$  表明  $f^+ \leq g^+$  以及  $f^- \geq g^-$ , 所以  $\mu f = \mu(f^+) - \mu(f^-) \leq \mu(g^+) - \mu(g^-) \leq \mu g$ .  $\square$

## 单调收敛定理

该定理是交换积分和极限次序的关键工具. 该定理表明映射

$$\mathcal{E}_+ \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+, \quad f \mapsto \mu f$$

在递增极限下是连续的.

**定理 1.29.** 令  $(f_n)$  是  $\mathcal{E}_+$  中的递增序列, 那么

$$\mu(\lim f_n) = \lim \mu f_n.$$

*Proof.* 令  $f = \lim f_n \in \mathcal{E}_+$ , 由于  $f_n \leq f$ , 根据单调性, 有  $\mu f_n \leq \mu f$ , 故

$$\lim \mu f_n \leq \mu f.$$

任取满足  $0 \leq s \leq f$  的非负简单函数  $s$ , 给定  $0 < \alpha < 1$ , 定义

$$A_n = \{x \in E : f_n(x) \geq \alpha s(x)\},$$

那么  $A_n = (f_n - \alpha s)^{-1}[0, \infty] \in \mathcal{E}$ . 不难验证  $A_n \subseteq A_{n+1}$ . 对于任意  $x \in E$ , 由于  $f_n \nearrow f$  且  $f(x) \geq s(x)$ , 所以总存在足够大的  $n$  使得  $f_n(x) \geq s(x) > \alpha s(x)$ , 即  $x \in A_n$ , 所以  $A_n \nearrow E$ . 定义  $(E, \mathcal{E})$  上的测度  $\nu$  为

$$\nu(A) = \mu(s1_A) = \int_A s \, d\mu,$$

不难验证这确实是一个测度. 此时我们有

$$\mu f_n \geq \mu(f_n 1_{A_n}) \geq \mu(\alpha s 1_{A_n}) = \alpha \mu(s 1_{A_n}) = \alpha \nu(A_n),$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 由于  $A_n \nearrow E$ , 所以  $\nu(A_n) \nearrow \nu(E) = \mu s$ , 所以

$$\lim \mu f_n \geq \alpha \mu s.$$

特别地, 取  $s = d_k \circ f$ , 有  $\lim \mu f_n \geq \alpha \mu(d_k \circ f)$ , 令  $k \rightarrow \infty$ , 所以  $\lim \mu f_n \geq \alpha \mu f$ . 再取  $\alpha = 1 - 1/k$ , 令  $k \rightarrow \infty$ , 即得

$$\lim \mu f_n \geq \mu f. \quad \square$$

## 积分的线性性

**命题 1.30.** 对于  $f, g \in \mathcal{E}_+$  和  $a, b \in \mathbb{R}_+$ , 有

$$\mu(af + bg) = a\mu f + b\mu g.$$

对于  $f, g \in \mathcal{E}$  和  $a, b \in \mathbb{R}$  也是正确的.

*Proof.* 已知对于简单函数  $f_n = d_n \circ f$  和  $g_n = d_n \circ g$ , 有

$$\mu(af_n + bg_n) = a\mu f_n + b\mu g_n,$$

而  $f_n \nearrow f$ ,  $g_n \nearrow g$ , 根据单调收敛定理, 就有

$$\mu(af + bg) = a\mu f + b\mu g.$$

对于一般的  $f, g$ , 只需将其拆为正部分和负部分即可验证. □

## 积分的不敏感性

**命题 1.31.** 如果  $A \in \mathcal{E}$  是零测集, 那么对于任意  $f \in \mathcal{E}$ , 有  $\mu(f1_A) = 0$ . 如果  $f, g \in \mathcal{E}$  且几乎处处有  $f = g$ , 那么  $\mu f = \mu g$ . 如果  $f \in \mathcal{E}_+$  并且  $\mu f = 0$ , 那么几乎处处  $f = 0$ .

*Proof.* 先假设  $f$  是简单非负函数, 其标准型为  $f = \sum_i a_i 1_{A_i}$ , 那么

$$f1_A = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i \cap A},$$

所以  $\mu(f1_A) = \sum_i a_i \mu(A_i \cap A)$ . 根据单调性有  $\mu(A_i \cap A) \leq \mu(A) = 0$ , 所以  $\mu(f1_A) = 0$ . 然后假设  $f \in \mathcal{E}_+$ , 那么  $\mu((d_n \circ f)1_A) = 0$ , 所以  $\mu(f1_A) = 0$ . 最后, 设  $f \in \mathcal{E}_+$ , 那么  $\mu(f1_A) = \mu(f^+1_A) - \mu(f^-1_A) = 0$ .

记  $A = \{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$ , 那么  $A = E \setminus (f - g)^{-1}(0)$  可测, 几乎处处  $f = g$  表明  $A$  是零测集. 于是  $\mu(f1_A) = \mu(g1_A) = 0$ , 所以

$$\begin{aligned} \mu f &= \mu(f1_A) + \mu(f1_{E \setminus A}) = \mu(f1_{E \setminus A}) = \mu(g1_{E \setminus A}) \\ &= \mu(g1_{E \setminus A}) + \mu(g1_A) = \mu g. \end{aligned}$$

记  $N = \{x \in E : f(x) > 0\}$ ,  $N_k = \{x \in E : f(x) > 1/k\}$ , 显然  $N_k \nearrow N$ , 故  $\mu(N_k) \nearrow \mu(N)$ . 此时  $f > 1/k 1_{N_k}$ , 所以  $0 = \mu f \geq 1/k \mu(N_k)$ , 这表明  $\mu(N_k) = 0$ , 所以  $\mu(N) = \lim \mu(N_k) = 0$ . □

## Fatou 引理

**引理 1.32.** 令  $(f_n) \subseteq \mathcal{E}_+$ , 那么  $\mu(\liminf f_n) \leq \liminf \mu f_n$ .

*Proof.* 记  $g_m = \inf_{n \geq m} f_n$ , 那么  $g_m \in \mathcal{E}_+$  且递增, 根据单调收敛定理, 有

$$\mu(\liminf f_n) = \mu(\lim g_m) = \lim \mu g_m.$$

又因为  $n \geq m$  的时候  $g_m \leq f_n$ , 所以  $\mu g_m \leq \mu f_n$ , 所以  $\mu g_m \leq \inf_{n \geq m} \mu f_n$ , 令  $m \rightarrow \infty$ , 即得

$$\mu(\liminf f_n) = \lim \mu g_m \leq \liminf \mu f_n. \quad \square$$

**推论 1.33.** 令  $(f_n) \subseteq \mathcal{E}$ , 如果存在可积函数  $g$  使得  $f_n \geq g$ , 那么

$$\mu(\liminf f_n) \leq \liminf \mu f_n.$$

如果存在可积函数  $g$  使得  $f_n \leq g$ , 那么

$$\mu(\limsup f_n) \geq \limsup \mu f_n.$$

*Proof.* 若可积函数  $g$  使得  $f_n \geq g$ , 那么  $A = \{x \in E : g(x) \in \mathbb{R}\}$  的补集是零测集 (练习). 那么几乎处处  $f_n 1_A = f_n$  以及  $g 1_A = g$ . 由于  $g 1_A$  是实值函数, 所以  $f_n 1_A - g 1_A$  是有意义的, 故  $f_n 1_A - g 1_A \in \mathcal{E}_+$  且可积, 根据 uFatou 引理, 有

$$\begin{aligned} \mu(\liminf(f_n 1_A)) - \mu(g 1_A) &= \mu(\liminf(f_n 1_A) - g 1_A) = \mu(\liminf(f_n 1_A - g 1_A)) \\ &\leq \liminf \mu(f_n 1_A - g 1_A) = \liminf \mu(f_n 1_A) - \mu(g 1_A), \end{aligned}$$

由于几乎处处  $f_n 1_A = f_n$ , 故几乎处处  $\liminf(f_n 1_A) = \liminf f_n$ , 故  $\mu(f_n 1_A) = \mu f_n$  以及  $\mu(\liminf(f_n 1_A)) = \mu(\liminf f_n)$ , 这就表明

$$\mu(\liminf f_n) \leq \liminf \mu f_n.$$

对于第二点, 考虑  $g 1_A - f_n 1_A \in \mathcal{E}_+$  并且  $\limsup r_n = -\liminf(-r_n)$  即可.  $\square$