
Contents

Part I 测度论

1	可测空间	3
1.1	可测集	3
1.2	正测度	4
1.3	可测函数	7
1.4	单调类	8
2	可测函数的积分	11
2.1	非负函数的积分	11
2.2	可积函数	18
2.3	含参积分	19
3	测度的构造	23
3.1	外测度	23
3.2	Lebesgue 测度	24
4	L^p 空间	25
4.1	定义与 Hölder 不等式	25
4.2	Banach 空间 $L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$	27
5	积测度	29
5.1	积 σ -域	29
5.2	积测度	30
5.3	Fubini 定理	31

Part II 概率论

6	概率论基础	35
----------	--------------	-----------

6.1	一般定义	35
6.1.1	概率空间	35
6.1.2	随机变量	36
6.1.3	数学期望	37
6.1.4	经典分布	39
6.1.5	实值随机变量的分布函数	41
6.2	随机变量的矩	42
6.2.1	矩和方差	42
7	独立性	45
7.1	独立事件	45
7.2	σ -域和随机变量的独立性	45
7.3	Borel-Cantelli 引理	48

Part I

测度论

可测空间

1.1 可测集

定义 1.1. 集合 E 上的 σ -域 \mathcal{A} 指的是 E 的一个子集族, 其满足下面的性质:

1. $E \in \mathcal{A}$;
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$;
3. 如果一列子集 $A_n \in \mathcal{A}$, 那么 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

\mathcal{A} 的元素被称为可测集, (E, \mathcal{A}) 被称为可测空间. 根据定义, 我们很容易得出下面的结果:

- $\emptyset = E^c \in \mathcal{A}$.
- 如果一列子集 $A_n \in \mathcal{A}$, 那么

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^c \right)^c \in \mathcal{A}.$$

- \mathcal{A} 对有限并和有限交也是封闭的, 只需要从某一项 A_n 开始全部取空集即可.

例 1.2. 根据可测集的定义, 很容易构造出一些最简单的例子:

1. $\mathcal{A} = \mathcal{P}(E)$, 当 E 是有限集或者可数集的时候我们通常会使用这样的 σ -域, 其他情况则很少使用.
2. $\mathcal{A} = \{\emptyset, E\}$, 平凡 σ -域.
3. E 的所有至多可数的子集以及所有补集至多可数的子集构成 E 上的一个 σ -域.

为了产生更多的例子, 我们注意到 E 上任意 σ -域的交集仍然是 σ -域, 这导出了下面的定义.

定义 1.3. 令 \mathcal{C} 是 $\mathcal{P}(E)$ 的子集, E 上包含 \mathcal{C} 的最小的 σ -域被记为 $\sigma(\mathcal{C})$, 不难看出其是所有包含 \mathcal{C} 的 σ -域的交集. 我们称 $\sigma(\mathcal{C})$ 是由 \mathcal{C} 生成的 σ -域.

定义 1.4. 设 (E, \mathcal{O}) 是拓扑空间, 所有开集 \mathcal{O} 生成的 σ -域 $\sigma(\mathcal{O})$ 被称为 E 上的 Borel σ -域, 记为 $\mathcal{B}(E)$.

E 上的 Borel σ -域是包含所有开集的最小的 σ -域. $\mathcal{B}(E)$ 的元素被称为 E 的 Borel 子集. 显然, E 中的闭集也都是 Borel 子集.

例 1.5 (\mathbb{R} 上的 Borel σ -域). 记 \mathcal{C}_1 为 \mathbb{R} 中开区间的集合:

$$\mathcal{C}_1 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\},$$

显然有 $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$, 于是 $\sigma(\mathcal{C}_1) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$. 下面我们说明 $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \sigma(\mathcal{C}_1)$. 我们不加证明地使用一个结论 (Lindelöf 定理): \mathbb{R} 的任意开子集 U 都是开区间的可数并. 那么根据 σ -域的定义, 任意开区间都在 $\sigma(\mathcal{C}_1)$ 中, 故 $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \sigma(\mathcal{C}_1)$. 这表明 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 可以由所有开区间生成.

此外, 如果注意到

$$(a, b) = (-\infty, b) \cap (-\infty, a)^c,$$

还可以证明 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 由 \mathcal{C}_2 生成, 其中

$$\mathcal{C}_2 = \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

最后, 不难证明这里的开区间都可以换成闭区间.

在后文中, 每当我们考虑拓扑空间 (例如 \mathbb{R} 或者 \mathbb{R}^d) 时, 除非有特别说明, 否则我们总是假设它们配备 Borel σ -域.

下一个非常重要的 σ -域是乘积 σ -域.

定义 1.6. 令 (E_1, \mathcal{A}_1) 和 (E_2, \mathcal{A}_2) 是可测空间, 定义 $E_1 \times E_2$ 上的 σ -域 $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ 为

$$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 = \sigma(\{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}).$$

引理 1.7. 设 E 和 F 是可分 (有可数的稠密子集) 的拓扑空间, $E \times F$ 配备积拓扑, 那么 $\mathcal{B}(E \times F) = \mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(F)$.

1.2 正测度

令 (E, \mathcal{A}) 是可测空间.

定义 1.8. (E, \mathcal{A}) 上的正测度指的是一个映射 $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$, 其满足下面的性质:

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. (σ -可加性) 对于任意可数个不相交的可测集序列 $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, 有

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

此时, 三元组 (E, \mathcal{A}, μ) 被称为**测度空间**. 值 $\mu(E)$ 被称为测度 μ 的总质量.

需要注意的是, 我们允许 μ 的值为 $+\infty$, 此时级数 $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$ 作为正向级数在 $[0, \infty]$ 中总是有意义的. 根据 σ -可加性, 如果我们令 $n > n_0$ 开始 $A_n = \emptyset$, 便可以得到有限可加性.

命题 1.9 (测度的性质). 根据定义, 测度 μ 满足下面的性质:

1. 如果 $A \subseteq B$, 那么 $\mu(A) \leq \mu(B)$. 此外, 如果还满足 $\mu(A) < \infty$, 那么

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$$

2. 如果 $A, B \in \mathcal{A}$, 那么

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B).$$

3. 如果 $A_n \in \mathcal{A}$ 且 $A_n \subseteq A_{n+1}$, 那么

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

4. 如果 $B_n \in \mathcal{A}$ 且 $B_{n+1} \subseteq B_n$, $\mu(B_1) < \infty$, 那么

$$\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n).$$

5. 如果 $A_n \in \mathcal{A}$, 那么

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Proof. (1) 若 $A \subseteq B$, 那么 $B = A \cup (B \setminus A)$ 是无交并, 所以

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A).$$

(2) 若 $\mu(A), \mu(B)$ 中有至少一个为无穷, 那么根据 (1), $\mu(A \cup B)$ 为无穷, 所以结论成立. 下面假设 $\mu(A), \mu(B)$ 均有限, 记 $C = A \cap B$, 那么 $A \cup B = (A \setminus C) \cup C \cup (B \setminus C)$ 是无交并, 所以

$$\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus C) + \mu(C) + \mu(B \setminus C) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(C),$$

结论 (2) 成立.

(3) 令 $C_1 = A_1$, 对于 $n \geq 2$ 的时候, 令

$$C_n = A_n \setminus A_{n-1},$$

那么 $A_n = \bigcup_{k \leq n} C_k$ 是无交并, 所以

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(C_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mu(C_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

(4) 令 $A_n = B_1 \setminus B_n$, 那么 $A_n \subseteq A_{n+1}$, 此时

$$\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \mu(B_1) - \mu\left(B_1 \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \mu(B_1) - \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right),$$

再根据 (3), 就有

$$\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \mu(B_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_1 \setminus A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n).$$

(5) 令 $C_1 = A_1$, 对于 $n \geq 2$ 的时候, 令

$$C_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k,$$

那么 C_n 之间互不相交, 所以

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(C_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n). \quad \square$$

例 1.10 (常见的测度).

1. 令 $E = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, 定义计数测度为

$$\mu(A) = \text{card}(A).$$

2. 如果 A 是 E 的子集, 定义 A 的示性函数 $\mathbf{1}_A : E \rightarrow \{0, 1\}$ 为

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

令 (E, \mathcal{A}) 是可测空间, 固定 $x \in E$. 对于每个 $A \in \mathcal{A}$, 令 $\delta_x(A) = \mathbf{1}_A(x)$, 这给出了 (E, \mathcal{A}) 上的一个测度, 被称为 **x 处的 Dirac 测度**. 更一般的, 如果 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是 E 中的点列, $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是 $[0, \infty]$ 中的点列, 我们可以考虑测度 $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \delta_{x_n}$ 为

$$\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \delta_{x_n}\right)(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \delta_{x_n}(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \mathbf{1}_A(x_n),$$

这个测度被称为 E 上的**点测度**.

3. 可以证明, 在 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上存在唯一的正测度 λ 使得: 对于每个闭区间 $[a, b]$, 有 $\lambda([a, b]) = b - a$. 这个测度 λ 被称为 **Lebesgue 测度**. Lebesgue 测度的唯一性可以由 **推论 1.23** 保证, 存在性由? 保证.

如果 μ 是 (E, \mathcal{A}) 上的正测度, $C \in \mathcal{A}$, 那么可以定义 μ 在 C 上的**限制** ν 为:

$$\nu(A) = \mu(A \cap C), \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

不难验证 ν 还是 (E, \mathcal{A}) 上的正测度.

定义 1.11.

- 如果 $\mu(E) < \infty$, 那么我们说测度 μ 是**有限的**.
- 如果 $\mu(E) = 1$, 那么我们说测度 μ 是**概率测度**, (E, \mathcal{A}, μ) 是**概率空间**.
- 如果存在一列可测集 $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 使得 $E = \bigcup_n E_n$ 以及每个 $\mu(E_n) < \infty$, 那么我们说测度 μ 是 **σ -有限的**.

- 如果 $x \in E$ 使得单点集 $\{x\} \in \mathcal{A}$ 并且 $\mu(\{x\}) > 0$, 那么我们说 x 是测度 μ 的一个**原子**.
- 如果测度 μ 没有原子, 那么我们说 μ 是**扩散测度**.

如果 $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是一列可测集, 类比数列的上下极限, 我们可以定义集合列的上下极限分别为:

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right), \quad \liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \right).$$

注意到对于任意 m , 都有

$$\bigcup_{n=1}^m \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \right) = \bigcap_{k=m}^{\infty} A_k, \quad \bigcap_{n=1}^m \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right) = \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k,$$

所以显然有 $\liminf A_n \subseteq \limsup A_n$.

引理 1.12. 令 μ 是 (E, \mathcal{A}) 上的测度, 那么

$$\mu(\liminf A_n) \leq \liminf \mu(A_n).$$

如果 μ 是有限测度, 或者更一般地, $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) < \infty$, 那么

$$\mu(\limsup A_n) \geq \limsup \mu(A_n).$$

Proof. 对于任意的 n , 有

$$\mu\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq \inf_{k \geq n} \mu(A_k),$$

所以

$$\mu(\liminf A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} \mu(A_k) = \liminf \mu(A_n).$$

第二个结论同理. □

1.3 可测函数

定义 1.13. 令 (E, \mathcal{A}) 和 (F, \mathcal{B}) 是两个可测空间, 如果映射 $f : E \rightarrow F$ 满足:

$$\forall B \in \mathcal{B}, f^{-1}(B) \in \mathcal{A},$$

那么我们说 f 是**可测映射**. 当 E, F 是两个配备了 Borel σ -域的拓扑空间时, 我们说 f 是**Borel 可测的**.

显然, 可测映射的复合是可测映射.

命题 1.14. 令 (E, \mathcal{A}) 和 (F, \mathcal{B}) 是两个可测空间, 映射 $f : E \rightarrow F$. f 可测当且仅当对于某个生成 \mathcal{B} 的子集族 \mathcal{C} (即 $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C})$), 有 $f^{-1}(B) \in \mathcal{A} (\forall B \in \mathcal{C})$.

Proof. 只需证明充分性. 记

$$\mathcal{G} = \{B \in \mathcal{B} \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\},$$

直接验证可知 \mathcal{G} 是一个 σ -域, 又因为 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{G}$, 所以 $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{B}$, 所以 $\mathcal{G} = \mathcal{B}$, 这就表明 f 是可测的. \square

例 1.15. 若 $(F, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, 要证明 f 是可测的, 只需说明集合 $f^{-1}((a, b))$ 是可测的, 或者 $f^{-1}((-\infty, a))$ 是可测的.

推论 1.16. 设 E, F 是两个配备 Borel σ -域的拓扑空间, 那么连续映射 $f : E \rightarrow F$ 都是可测的.

引理 1.17. 令 $(E, \mathcal{A}), (F_1, \mathcal{B}_1)$ 和 (F_2, \mathcal{B}_2) 是可测空间, 乘积 $F_1 \times F_2$ 配备乘积 σ -域 $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$, 令映射 $f_1 : E \rightarrow F_1$ 和 $f_2 : E \rightarrow F_2$, 定义 $f : E \rightarrow F_1 \times F_2$ 为 $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$, 那么 f 可测当且仅当 f_1, f_2 都可测.

推论 1.18. 令 (E, \mathcal{A}) 是可测空间, f, g 是从 E 到 \mathbb{R} 的可测函数, 那么函数

$$f + g, fg, \min(f, g), \max(f, g)$$

都是可测的.

记扩充实数 $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, 其拓扑为序拓扑. 与 \mathbb{R} 类似, $\bar{\mathbb{R}}$ 的 Borel σ -域由区间 $[-\infty, a)$ 生成.

命题 1.19. 令 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是 $E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ 的可测函数列, 那么

$$\sup f_n, \quad \inf f_n, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$$

都是可测函数. 特别地, 如果 (f_n) 逐点收敛, 那么极限 $\lim f_n$ 是可测函数.

定义 1.20. 令 (E, \mathcal{A}) 和 (F, \mathcal{B}) 是可测空间, $\varphi : E \rightarrow F$ 是可测映射, μ 是 (E, \mathcal{A}) 上的测度, 定义 (F, \mathcal{B}) 上的测度 ν 为

$$\nu(B) = \mu(\varphi^{-1}(B)), \quad \forall B \in \mathcal{B}.$$

ν 被称为 μ 在 φ 下的推前, 记为 $\varphi(\mu)$, 有时也记为 $\varphi_*\mu$.

1.4 单调类

本节我们陈述单调类定理, 这是测度论甚至概率论中的一个基本工具.

定义 1.21. $\mathcal{P}(E)$ 的一个子集 \mathcal{M} 如果满足:

1. $E \in \mathcal{M}$;
2. 对于任意 $A, B \in \mathcal{M}$ 且 $A \subseteq B$, 有 $B \setminus A \in \mathcal{M}$;
3. 如果一列子集 $A_n \subseteq \mathcal{M}$ 且 $A_n \subseteq A_{n+1}$, 那么 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$,

那么我们说 \mathcal{M} 是一个单调类.

显然, σ -域都是单调类. 反之, 一个单调类是 σ -域当且仅当其对有限交封闭. 这很容易证明, 若单调类 \mathcal{M} 对有限交封闭, 那么任取一列子集 $A_n \subseteq \mathcal{M}$, 对于任意的 n , 有

$$\bigcup_{k=1}^n A_k = E \setminus \bigcap_{k=1}^n A_k^c \in \mathcal{M},$$

所以

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right) \in \mathcal{M},$$

这就表明 \mathcal{M} 是一个 σ -域.

与 σ -域类似, 显然单调类的任意交仍然是单调类. 如果 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(E)$, 那么我们可以定义由 \mathcal{C} 生成的单调类 $\mathcal{M}(\mathcal{C})$, 即包含 \mathcal{C} 的最小的单调类, 其可以通过对所有包含 \mathcal{C} 的单调类取交集得到.

定理 1.22 (单调类定理). 令 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(E)$ 对有限交封闭, 那么 $\mathcal{M}(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$. 因此, 如果 \mathcal{M} 是包含 \mathcal{C} 的任意单调类, 那么 $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{M}$.

Proof. 显然有 $\mathcal{M}(\mathcal{C}) \subseteq \sigma(\mathcal{C})$. 要证明 $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{C})$, 只需要说明 $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ 是 σ -域. 根据上面的叙述, 这只需要说明 $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ 对有限交封闭.

对于 $A \in \mathcal{P}(E)$, 记

$$\mathcal{M}_A = \{B \in \mathcal{M}(\mathcal{C}) \mid A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{C})\}.$$

直接验证可知 \mathcal{M}_A 是一个单调类. 下面任取 $A \in \mathcal{C}$, 由于 \mathcal{C} 对有限交封闭, 所以 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}_A$, 这就表明 $\mathcal{M}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{M}_A$.

接下来任取 $D \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$, 上面的叙述告诉我们 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}_D$, 所以 $\mathcal{M}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{M}_D$. 这就表明 $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ 对有限交封闭, 所以 $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ 是 σ -域. \square

单调类定理最重要的应用是证明某些测度的唯一性.

推论 1.23. 令 μ, ν 是 (E, \mathcal{A}) 上的两个测度. 假设存在一个子集族 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ 满足 \mathcal{C} 对有限交封闭且 $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$, 并且对于任意 $A \in \mathcal{C}$ 都有 $\mu(A) = \nu(A)$.

1. 如果 $\mu(E) = \nu(E) < \infty$, 那么 $\mu = \nu$.
2. 如果存在一列 \mathcal{C} 中的递增序列 $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 使得 $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$, 并且 $\mu(E_n) = \nu(E_n) < \infty$, 那么 $\mu = \nu$.

Proof. (1) 令

$$\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{A} \mid \mu(A) = \nu(A)\},$$

那么 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{G}$ 且不难验证 \mathcal{G} 是单调类, 根据单调类定理, 有 $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{G}$, 即 $\mu = \nu$.

(2) 记 μ_n 为 μ 在 E_n 上的限制, ν_n 同理. 那么

$$\mu_n(E) = \mu(E \cap E_n) = \mu(E_n) = \nu(E_n) = \nu(E \cap E_n) = \nu_n(E),$$

根据 (1), 有 $\mu_n = \nu_n$. 于是任取 $A \in \mathcal{A}$, 有

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \mu(A \cap E) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap E_n)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \mu(A \cap E_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \mu_n(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \nu_n(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \nu(A \cap E_n) \\ &= \nu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap E_n)\right) = \nu(A \cap E) = \nu(A),\end{aligned}$$

这就表明 $\mu = \nu$. □

推论 1.23 表明了 Lebesgue 测度的唯一性. 即若 λ 是 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上的正测度, 且使得 $\lambda([a, b]) = b - a$, 那么这样的测度 λ 是唯一的. 这是因为我们可以取

$$\mathcal{C} = \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\},$$

此时 \mathcal{C} 对有限交封闭并且 $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{C})$. 取 $E_n = [-n, n] \in \mathcal{C}$, 那么 $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ 且 $\lambda(E_n) < \infty$, 应用 **推论 1.23** 的 (2) 即可表明唯一性.

可测函数的积分

2.1 非负函数的积分

在本章中, 我们考虑配备正测度 μ 的可测空间 (E, \mathcal{A}) .

简单函数 如果可测函数 $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ 的值域是有限集, 那么我们说 f 的**简单函数**. 假设 f 的所有可能的取值为 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, 不妨假设 $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$. 那么 f 可以表示为

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}(x),$$

其中 $A_i = f^{-1}(\{\alpha_i\}) \in \mathcal{A}$. 注意到 E 是 A_1, \dots, A_n 的无交并. 上述公式 $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$ 被称为 f 的标准表示.

定义 2.1. 令 f 是取值在 \mathbb{R}_+ 中的简单函数, 标准表示为 $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$. 定义 f 相对于 μ 的积分为

$$\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i).$$

在 $\alpha_i = 0$ 和 $\mu(A_i) = \infty$ 的情况下, 约定 $0 \times \infty = 0$.

注意上述定义中 $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i)$ 的取值为 $[0, \infty]$. 所以在上述定义中我们只考虑非负的简单函数, 这是为了避免出现 $\infty - \infty$ 之类的表达式.

值得注意的是, 如果简单函数 f 有表达

$$f = \sum_{j=1}^m \beta_j \mathbf{1}_{B_j},$$

其中 B_j 仍然构成 E 的一个划分, 但是 β_j 不再是两两不同的. 此时 f 的积分仍然为

$$\int f \, d\mu = \sum_{j=1}^m \beta_j \mu(B_j).$$

这是因为对于每个 A_i , 某些 B_j 构成了 A_i 的划分, 即

$$A_i = \bigcup_{\{j \mid \beta_j = \alpha_i\}} B_j,$$

那么

$$\alpha_i \mu(A_i) = \alpha_i \sum_{\{j \mid \beta_j = \alpha_i\}} \mu(B_j) = \sum_{\{j \mid \beta_j = \alpha_i\}} \beta_j \mu(B_j).$$

非负简单函数的积分满足下面的一些基本的性质.

命题 2.2. 令 f, g 是 E 上的非负简单函数.

1. 对于每个 $a, b \in \mathbb{R}_+$, 有

$$\int (af + bg) d\mu = a \int f d\mu + b \int g d\mu.$$

2. 如果 $f \leq g$, 那么

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

Proof. (1) 设 f, g 的标准表示分别为

$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}, \quad g = \sum_{j=1}^m \beta_j \mathbf{1}_{B_j}.$$

那么每个 A_i 都是某些 $A_i \cap B_j$ 的无交并, 同理, 每个 B_j 都是某些 $A_i \cap B_j$ 的无交并, 于是我们可以使用一个新的划分 $\{C_1, \dots, C_p\}$ 使得

$$f = \sum_{k=1}^p \gamma_k \mathbf{1}_{C_k}, \quad g = \sum_{k=1}^p \theta_k \mathbf{1}_{C_k},$$

此时 γ_k 不一定互不相同, θ_k 也不一定互不相同, 根据命题前面的叙述, 我们有

$$\begin{aligned} \int (af + bg) d\mu &= \sum_{k=1}^p (a\gamma_k + b\theta_k) \mu(C_k) \\ &= a \sum_{k=1}^p \gamma_k \mu(C_k) + b \sum_{k=1}^p \theta_k \mu(C_k) \\ &= a \int f d\mu + b \int g d\mu. \end{aligned}$$

(2) 由 (1), 有

$$\int g d\mu = \int (g - f) d\mu + \int f d\mu \geq \int f d\mu. \quad \square$$

我们用 \mathcal{E}_+ 来表示 E 上的非负简单函数的集合.

定义 2.3. 令 $f: E \rightarrow [0, \infty]$ 是可测函数, 定义 f 相对于 μ 的积分为

$$\int f d\mu = \sup_{h \in \mathcal{E}_+, h \leq f} \int h d\mu.$$

f 相对于 μ 的积分通常有很多写法, 下面的表达

$$\int f \, d\mu, \int f(x) \, d\mu(x), \int f(x) \mu(dx), \int \mu(dx) f(x)$$

表示的含义是完全相同的. 此外, 如果 A 是 E 的可测子集, 我们定义

$$\int_A f \, d\mu = \int f \mathbf{1}_A \, d\mu.$$

从现在开始, 我们用非负可测函数表示 $E \rightarrow [0, \infty]$ 的可测函数 (值可以为无穷). 需要注意的是, 我们前面定义的非负简单函数值必须有限.

命题 2.4. 令 f, g 是 E 上的非负可测函数.

1. 如果 $f \leq g$, 那么 $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$.
2. 如果 $\mu(\{x \in E \mid f(x) > 0\}) = 0$, 那么 $\int f \, d\mu = 0$.

Proof. (1) 显然

$$\{h \in \mathcal{E}_+ \mid h \leq f\} \subseteq \{h \in \mathcal{E}_+ \mid h \leq g\},$$

根据定义即得 $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$.

(2) 设 $h \in \mathcal{E}_+$ 且 $h \leq f$, 设 h 的标准表示为 $h = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$, 若 $\alpha_i > 0$, 那么

$$\mu(A_i) \leq \mu(\{x \in E \mid h(x) > 0\}) \leq \mu(\{x \in E \mid f(x) > 0\}) = 0,$$

所以

$$\int h \, d\mu = \sum_{\{i \mid \alpha_i > 0\}} \alpha_i \mu(A_i) + \sum_{\{i \mid \alpha_i = 0\}} \alpha_i \mu(A_i) = 0 + 0 = 0,$$

故 $\int f \, d\mu = 0$. □

下面的单调收敛定理是测度论中的一个极为重要的基本定理, 其表明对于一系列递增的非负可测函数, 极限和积分可以交换次序.

定理 2.5 (单调收敛定理). 令 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是 E 上的一系列递增的非负可测函数, 即 $f_n \leq f_{n+1}$, 记 $f = \lim \uparrow f_n$, 那么

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu.$$

Proof. 由于 $f_n \leq f$, 所以 $\int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu$, 所以 $\lim \uparrow \int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu$, 于是我们只需要证明反向的不等式.

假设非负可测函数 $h = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$ 满足 $h \leq f$, 任取 $a \in [0, 1)$, 定义一系列可测集

$$E_n = \{x \in E \mid ah(x) \leq f_n(x)\},$$

此时对于任意的 $x \in E$, 都有 $ah(x) < h(x) \leq f(x)$, 而 $f = \lim \uparrow f_n$, 所以总存在足够大的 n , 使得 $ah(x) \leq f_n(x)$, 这表明 $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$. 此外, $f_n \leq f_{n+1}$ 表明 $E_n \subseteq E_{n+1}$.

显然 $f_n \geq ah\mathbf{1}_{E_n}$, 所以

$$\int f_n d\mu \geq a \int_{E_n} h d\mu = a \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu(A_i \cap E_n),$$

由于 $A_i = A_i \cap E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_i \cap E_n)$, 所以

$$\mu(A_i) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_i \cap E_n)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \mu(A_i \cap E_n),$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \int f_n d\mu \geq a \sum_{i=1}^k \alpha_i \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \mu(A_i \cap E_n) = a \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu(A_i) = a \int h d\mu,$$

由于 a 可以任意接近 1, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \int f_n d\mu \geq \int h d\mu,$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \int f_n d\mu \geq \int f d\mu = \sup_{h \in \mathcal{E}_+, h \leq f} \int h d\mu. \quad \square$$

命题 2.6.

1. 设 f 是 E 上的非负可测函数, 那么存在一系列递增的非负简单函数 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 使得 $f = \lim \uparrow f_n$. 如果 f 有界, 那么 $f_n \rightarrow f$ 一致收敛.
2. 令 f, g 是两个 E 上的非负可测函数, $a, b \in \mathbb{R}_+$, 那么

$$\int (af + bg) d\mu = a \int f d\mu + b \int g d\mu.$$

3. 令 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是一列 E 上的非负可测函数, 那么

$$\int \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n \right) d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int f_n d\mu.$$

Proof. (1) 令 $d_n : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}_+$ 为

$$d_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathbf{1}_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})} + n \mathbf{1}_{[n, \infty]},$$

显然 d_n 是非负简单函数. 直观上来看, d_n 将区间 $[0, n]$ 等分为了 $n2^n$ 份, 即将 $[0, 1]$ 等分为了 2^n 份. 那么对于 $x \in [0, n)$, 总存在唯一的 k_n 使得 $(k_n - 1)/2^n \leq x < k_n/2^n$, 此时 $k_{n+1} = 2k_n$ 或者 $k_{n+1} = 2k_n - 1$, 所以

$$d_{n+1}(x) = \frac{k_{n+1} - 1}{2^{n+1}} \geq \frac{k_n - 1}{2^n} = d_n(x),$$

这表明 $d_n \leq d_{n+1}$. 此外, 不难看出 $\lim d_n(x) = x$.

令 $f_n = d_n \circ f$, 由于 f_n 只有有限多个取值, 所以 f_n 是非负简单函数. $d_n \leq d_{n+1}$ 表明 $f_n \leq f_{n+1}$. 且 $\lim f_n = \lim d_n \circ f = f$, 所以 f_n 就是一列递增的非负简单函数且 $f = \lim \uparrow f_n$. f 有界表明在 n 足够大的时候有 $0 \leq f - f_n \leq 2^{-n}$, 即 $f_n \rightarrow f$ 一致收敛.

(2) 由 (1), 设 $f = \lim \uparrow f_n$, $g = \lim \uparrow g_n$, 其中 $(f_n), (g_n)$ 均为一系列递增的简单函数, 那么

$$\int (af_n + bg_n) d\mu = a \int f_n d\mu + b \int g_n d\mu,$$

令 $n \rightarrow \infty$, 再根据单调收敛定理, 就有

$$\int (af + bg) d\mu = a \int f d\mu + b \int g d\mu.$$

(3) 根据 (2), 有

$$\int \left(\sum_{n=1}^m f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^m \int f_n d\mu,$$

令 $m \rightarrow \infty$, 再根据单调收敛定理, 就有

$$\int \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n \right) d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int f_n d\mu. \quad \square$$

注释 2.7. **命题 2.6** 和单调收敛定理 2.5 给出了证明关于非负可测函数积分的命题的一种基本范式, 即根据 **命题 2.6** 的 (1), 假设一系列非负简单函数逼近原函数, 先证明命题对非负简单函数成立, 这通常是非常容易的, 再使用单调收敛定理证明命题对所有的非负可测函数成立.

下面的推论在概率论中十分有用, 其对应于随机变量的概率密度函数. 其证明是上述注释中技巧的一个典型运用.

推论 2.8. 令 g 是非负可测函数, 对于 $A \in \mathcal{A}$, 令

$$\nu(A) = \int_A g d\mu = \int g \mathbf{1}_A d\mu,$$

那么 ν 是 E 上的正测度, 被称为密度 g 相对于 μ 的测度, 记为 $\nu = g \cdot \mu$. 此外, 对于非负可测函数 f , 有

$$\int f d\nu = \int fg d\mu.$$

Proof. 显然 $\nu(\emptyset) = 0$. 任取一系列不相交的 $A_n \in \mathcal{A}$, 那么

$$\nu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \int \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} g \mathbf{1}_{A_n}\right) d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int g \mathbf{1}_{A_n} d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(A_n),$$

这就表明 μ 是 E 上的正测度.

对于任意示性函数 $\mathbf{1}_A$, 有

$$\int \mathbf{1}_A d\nu = \nu(A) = \int \mathbf{1}_A g d\mu,$$

进一步的, 令 $f = \lim \uparrow f_n$, 其中 f_n 是非负简单函数, 对于每个 f_n , 根据积分的线性性, 都有

$$\int f_n d\nu = \int f_n g d\mu,$$

令 $n \rightarrow \infty$, 根据单调收敛定理, 就有

$$\int f d\nu = \int f g d\mu. \quad \square$$

注释 2.9. 在实际中, 我们通常也会写作 $\nu(dx) = g(x)\mu(dx)$, 或者 $g = d\nu/d\mu$.

在测度论中, 命题通常在**几乎处处** (almost everywhere) 的意义下成立, 也就是说, 对于不满足该命题的所有 $x \in E$ 的集合, 这个集合的 μ -测度为 0, 我们使用简写 μ a.e. 来表示这个意思. 也就是说, 当我们写到 $f = g$, μ a.e. 的时候, 我们表示的意思实际上是

$$\mu(\{x \in E \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0.$$

命题 2.10. 令 f 是非负可测函数.

1. 对于每个 $a \in (0, \infty)$, 有

$$\mu(\{x \in E \mid f(x) \geq a\}) \leq \frac{1}{a} \int f d\mu.$$

2. 我们有

$$\int f d\mu < \infty \Rightarrow f < \infty, \mu \text{ a.e.}$$

3. 我们有

$$\int f d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0, \mu \text{ a.e.}$$

4. 如果 g 是非负可测函数,

$$f = g, \mu \text{ a.e.} \Rightarrow \int f d\mu = \int g d\mu.$$

Proof. (1) 令可测集 $A = \{x \in E \mid f(x) \geq a\}$, 那么 $f \geq a\mathbf{1}_A$, 所以

$$\int f d\mu \geq a \int \mathbf{1}_A d\mu = a\mu(A).$$

(2) 令可测集 $A_n = \{x \in E \mid f(x) \geq n\}$ 以及 $A_\infty = \{x \in E \mid f(x) = \infty\}$, 那么 $A_{n+1} \subseteq A_n$ 且 $A_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. 根据 (1), 有

$$\mu(A_1) \leq \int f d\mu < \infty,$$

所以

$$\mu(A_\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \downarrow \mu(A_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \downarrow \frac{1}{n} \int f \, d\mu = 0,$$

所以 $\mu(A_\infty) = 0$, 即 $f < \infty$, μ a.e..

(3) 充分性由 [命题 2.6](#) 的 (2) 保证. 下证必要性. 令可测集 $A_n = \{x \in E \mid f(x) \geq 1/n\}$ 以及 $A_\infty = \{x \in E \mid f(x) \neq 0\}$, 那么 $A_n \subseteq A_{n+1}$ 且 $A_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. 根据 (1), 有

$$\mu(A_\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \mu(A_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow n \int f \, d\mu = 0,$$

所以 $\mu(A_\infty) = 0$.

(4) 记 $f \wedge g = \min(f, g)$ 及 $f \vee g = \max(f, g)$, 那么 $f = g$, μ a.e. 表明 $f \vee g = f \wedge g$, μ a.e.. 根据 (3), 有

$$\int f \vee g \, d\mu = \int f \wedge g \, d\mu + \int (f \vee g - f \wedge g) \, d\mu = \int f \wedge g \, d\mu,$$

又因为 $\int f \wedge g \, d\mu \leq \int f \, d\mu \leq \int f \vee g \, d\mu$, 对于 g 类似, 所以

$$\int f \, d\mu = \int g \, d\mu. \quad \square$$

定理 2.11 (Fatou 引理). 令 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是一列非负可测函数, 那么

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu.$$

Proof. 只需证明

$$\int \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} f_k \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} \int f_k \, d\mu,$$

令 $g_n = \inf_{k \geq n} f_k$, 那么 $g_n \leq g_{n+1}$, 根据单调收敛定理, 有

$$\int \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \int g_n \, d\mu.$$

对于任意 n 和 $k \geq n$, 有 $\int g_n \, d\mu \leq \int f_k \, d\mu$, 所以

$$\int \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \int g_n \, d\mu \leq \inf_{k \geq n} \int f_k \, d\mu,$$

令 $n \rightarrow \infty$, 即可得到

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu. \quad \square$$

命题 2.12. 令 (F, \mathcal{B}) 是可测空间, $\varphi : E \rightarrow F$ 是可测映射. 令 ν 是 μ 在 φ 下的推前. 那么, 对于任意 F 上的非负可测函数 h , 我们有

$$\int_E h(\varphi(x)) \mu(dx) = \int_F h(y) \nu(dy).$$

Proof. 若 $h = \mathbf{1}_B$ 是示性函数, 那么

$$\int_E h(\varphi(x))\mu(dx) = \mu(\varphi^{-1}(B)) = \nu(B) = \int_F h(y)\nu(dy).$$

若 $h = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{B_i}$ 是非负简单函数, 那么根据积分的线性性, 结论也成立. 若 h 是一般的非负可测函数, 设 $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是一列递增的非负简单函数且 $h = \lim \uparrow h_n$, 根据单调收敛定理, 即可证明结论. \square

2.2 可积函数

本节我们讨论可变号的可测函数. 如果 $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ 是可测函数, 记 f 正部分 $f^+ = \max(f, 0)$, 负部分 $f^- = \max(-f, 0)$, 需要注意 f^+ 和 f^- 此时都是非负可测函数并且 $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$.

定义 2.13. 令 $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ 是可测函数, 如果

$$\int |f| d\mu < \infty,$$

那么我们说 f 相对于 μ **可积**. 在这种情况下, 我们定义

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

如果 $A \in \mathcal{A}$, 记

$$\int_A f d\mu = \int f \mathbf{1}_A d\mu.$$

我们使用 $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ 来表示所有可积函数 $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ 构成的空间. $\mathcal{L}_+^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ 来表示所有非负可积函数构成的空间.

命题 2.14 (可积函数的性质).

1. 对于任意 $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$, 有 $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$.
2. $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ 是 \mathbb{R} -向量空间.
3. 如果 $f, g \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ 且 $f \leq g$, 那么 $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.
4. 如果 $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$, $g : E \rightarrow [0, \infty]$ 是非负可测函数使得 $f = g$, μ a.e., 那么 $g \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ 且 $\int f d\mu = \int g d\mu$.
5. 令 (F, \mathcal{B}) 是可测空间, $\varphi : E \rightarrow F$ 是可测映射. 令 ν 是 μ 在 φ 下的推前. 那么, 对于任意可测函数 $h : F \rightarrow \mathbb{R}$, h 是 ν -可积的当且仅当 $h \circ \varphi$ 是 μ -可积的, 并且我们有

$$\int_E h(\varphi(x))\mu(dx) = \int_F h(y)\nu(dy).$$

定理 2.15 (控制收敛定理). 令 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ 中的一列函数, 如果:

1. 存在可测函数 $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ 使得

$$f_n(x) \rightarrow f(x), \quad \mu \text{ a.e.}$$

2. 存在非负可测函数 g 使得 $\int g \, d\mu < \infty$, 并且对于每个 $n \in \mathbb{N}$, 都有

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad \mu \text{ a.e.}$$

那么 $f \in L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ 且我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| \, d\mu = 0.$$

Proof. 我们首先将两个条件中的几乎处处去掉, 证明结论成立. 由于 $|f_n| \leq g$, 所以 $|f| = \lim |f_n| \leq g$, 所以 $\int |f| \, d\mu \leq \int g \, d\mu < \infty$, 故 $f \in L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$. 由于 $|f - f_n| \leq 2g$ 以及 $\lim |f - f_n| = 0$, 根据 Fatou 引理, 有

$$\liminf \int (2g - |f - f_n|) \, d\mu \geq \int (2g - \limsup |f - f_n|) \, d\mu = \int 2g \, d\mu,$$

再根据积分的线性性, 有

$$\int 2g \, d\mu - \limsup \int |f - f_n| \, d\mu \geq \int 2g \, d\mu,$$

这表明

$$\limsup \int |f - f_n| \, d\mu = 0,$$

所以 $\lim \int |f - f_n| \, d\mu$ 存在且为 0. 最后, 我们有

$$\left| \int f \, d\mu - \int f_n \, d\mu \right| \leq \int |f - f_n| \, d\mu \rightarrow 0,$$

所以 $\int f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu$.

现在我们证明几乎处处情况. 记

$$A = \{x \in E \mid f_n(x) \rightarrow f(x), |f_n(x)| \leq g(x)\},$$

那么 A 可测且条件表明 $\mu(A^c) = 0$. 定义

$$\tilde{f}_n(x) = \mathbf{1}_A(x) f_n(x), \quad \tilde{f}(x) = \mathbf{1}_A(x) f(x),$$

于是在几乎处处的意义下有 $f_n = \tilde{f}_n$ 以及 $f = \tilde{f}$, 所以 $\int f_n \, d\mu = \int \tilde{f}_n \, d\mu$, $\int f \, d\mu = \int \tilde{f} \, d\mu$ 以及 $\int |f - f_n| \, d\mu = \int |\tilde{f} - \tilde{f}_n| \, d\mu$. 对 \tilde{f}_n 和 \tilde{f} 应用上面的结论即可. \square

2.3 含参积分

我们考虑带有一个参数的函数的积分. 设 (U, d) 是一个度量空间, 参数位于这个空间中.

定理 2.16 (含参积分的连续性). 令 $f : U \times E \rightarrow \mathbb{R}$ (or \mathbb{C}), $u_0 \in U$. 假设:

1. 对于每个 $u \in U$, 函数 $x \mapsto f(u, x)$ 可测;

2. $\mu(\mathrm{d}x)$ a.e., 函数 $u \mapsto f(u, x)$ 在 u_0 处连续;
3. 存在函数 $g \in \mathcal{L}_+^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ 使得任取 $u \in U$ 有

$$|f(u, x)| \leq g(x) \quad \mu(\mathrm{d}x) \text{ a.e.}$$

那么函数 $F(u) = \int f(u, x)\mu(\mathrm{d}x)$ 是良好定义的且在 u_0 处连续.

Proof. 条件 (1) 保证了 $x \mapsto f(u, x)$ 是可测的, 所以 $F(u)$ 是良好定义的. 设 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是任意趋于 u_0 的点列, 那么对于几乎处处的 x , $u \mapsto f(u, x)$ 连续表明 $f(u_n, x) \rightarrow f(u, x)$, 再根据条件 (3) 和控制收敛定理, 就有

$$F(u_0) = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n, x)\mu(\mathrm{d}x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f(u_n, x)\mu(\mathrm{d}x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(u_n),$$

这就表明 $F(u)$ 在 u_0 处连续. □

例 2.17.

1. **Fourier 变换.** 令 λ 表示 \mathbb{R} 上的 Lebesgue 测度. 如果 $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, 定义函数 $\hat{\varphi}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 为:

$$\hat{\varphi}(u) = \int e^{iux} \varphi(x) \lambda(\mathrm{d}x),$$

根据上面的定理, $\hat{\varphi}$ 是连续函数. 函数 $\hat{\varphi}$ 被称为 φ 的 **Fourier 变换**. 在概率论中, 我们经常会考虑有限测度的 Fourier 变换. 如果 μ 是 \mathbb{R} 上的有限测度, 定义 μ 的 Fourier 变换为

$$\hat{\mu}(u) = \int e^{iux} \mu(\mathrm{d}x) \quad u \in \mathbb{R}.$$

此时 $|e^{iux}| \leq \mathbf{1}_{\mathbb{R}}$ 是可积函数, 所以 $\hat{\mu}$ 是连续函数.

2. **卷积.** 令 $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是有界连续函数, 那么定义函数 $h * \varphi$ 为

$$h * \varphi(u) = \int h(u - x) \varphi(x) \lambda(\mathrm{d}x),$$

这是一个连续函数.

下面我们叙述含参积分的可微性. 令 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是开区间.

定理 2.18. 考虑函数 $f: I \times E \rightarrow \mathbb{R}$, $u_0 \in I$, 假设

1. 对于每个 $u \in I$, 函数 $x \mapsto f(u, x)$ 是可积函数;
2. $\mu(\mathrm{d}x)$ a.e., 函数 $u \mapsto f(u, x)$ 在 u_0 处可导, 导数记为

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, x);$$

3. 存在函数 $g \in \mathcal{L}_+^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ 使得对于任意 $u \in I$ 有

$$|f(u, x) - f(u_0, x)| \leq g(x)|u - u_0|, \quad \mu(\mathrm{d}x) \text{ a.e.}$$

那么函数 $F(u) = \int f(u, x)\mu(\mathrm{d}x)$ 在 u_0 处可导, 并且

$$F'(u_0) = \int \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, x)\mu(\mathrm{d}x).$$

Proof.

□

Exercise 2.1. 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx.$$

令 $\alpha \in \mathbb{R}$, 证明极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{\alpha-1} dx$$

在 $[0, \infty]$ 上存在, 且极限值有限当且仅当 $\alpha > 0$.

Proof. 由于

$$\int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx = \int_0^1 n(1+x)^n e^{-2nx} dx,$$

对于任意 $x \in (0, 1)$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(1+x)^n e^{-2nx} = \lim_{n \rightarrow \infty} n((1+x)e^{-2x})^n = 0,$$

□

测度的构造

3.1 外测度

定义 3.1. 令 E 是集合, 映射 $\mu^* : \mathcal{P}(E) \rightarrow [0, \infty]$ 如果满足:

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$;
2. $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;
3. (σ -次可加性) 对于 $\mathcal{P}(E)$ 中的一列子集 $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$, 有

$$\mu^*\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu^*(A_k).$$

那么我们说 μ^* 是一个**外测度**.

外测度的要求不如测度严格, 首先 σ -可加性被替换为 σ -次可加性, 其次外测度是在幂集 $\mathcal{P}(E)$ 上定义的, 而测度只能在 σ -域上定义.

我们本节的目标是从外测度 μ^* 开始, 在某个 σ -域 $\mathcal{M}(\mu^*)$ 上构造一个测度. 从现在开始, 我们固定一个外测度 μ^* .

定义 3.2. 对于 E 的子集 B , 如果任取 $A \subseteq E$, 都有

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c),$$

那么我们说 B 是 μ^* -**可测的**. 用 $\mathcal{M}(\mu^*)$ 表示所有 μ^* -可测的子集构成的子集族.

注释 3.3. 根据 σ -次可加性, 总是有

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c),$$

所以要验证子集 B 是 μ^* -可测的, 只需要说明反向的不等式即可.

定理 3.4.

1. $\mathcal{M}(\mu^*)$ 是 σ -域, 并且其包含所有的满足 $\mu^*(B) = 0$ 的子集 $B \subseteq E$.
2. μ^* 在 $\mathcal{M}(\mu^*)$ 上的限制是一个测度.

3.2 Lebesgue 测度

对于任意子集 $A \subseteq \mathbb{R}$, 定义

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} (b_i - a_i) \mid A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (a_i, b_i) \right\}.$$

注意这个下确界的取值范围为 $[0, \infty]$: 如果 A 无界, 那么将会得到 ∞ .

定理 3.5.

1. λ^* 是 \mathbb{R} 上的一个外测度.
2. σ -域 $\mathcal{M}(\lambda^*)$ 包含 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
3. 对于任意实数 $a \leq b$, $\lambda^*([a, b]) = \lambda^*((a, b)) = b - a$.

Proof. (1) 显然 $\lambda^*(\emptyset) = 0$ 并且 $A \subseteq B$ 表明 $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$. 下面证明 σ -次可加性. 任取 \mathbb{R} 的一列子集 $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, 不妨假设每个 $\lambda^*(A_n) < \infty$. 任取 $\varepsilon > 0$, 对于每个 A_n , 都存在一列开区间 $(a_i^{(n)}, b_i^{(n)})$ 使得

$$\lambda^*(A_n) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} (b_i^{(n)} - a_i^{(n)}) < \lambda^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n},$$

注意到所有的开区间 $(a_i^{(n)}, b_i^{(n)})$ ($i, n \in \mathbb{N}$) 构成了 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ 的一个可数开覆盖, 所以

$$\lambda^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i \in \mathbb{N}} (b_i^{(n)} - a_i^{(n)}) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^*(A_n) + \varepsilon,$$

由于 ε 的任意性, 所以 λ^* 满足 σ -次可加性.

(2)

□

L^p 空间

4.1 定义与 Hölder 不等式

在本章中, 我们考虑测度空间 (E, \mathcal{A}, μ) . 对于实数 $p \geq 1$, 我们令 $\mathcal{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ 表示所有满足

$$\int |f|^p d\mu < \infty$$

的可测函数 $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ 构成的空间. 此外, 我们引入 $\mathcal{L}^\infty(E, \mathcal{A}, \mu)$ 表示所有几乎处处有界的可测函数 $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ 构成的空间, 即存在常数 $C \in \mathbb{R}_+$ 使得

$$|f| \leq C, \mu \text{ a.e.}$$

对于每个 $p \in [1, \infty]$, 我们可以定义 \mathcal{L}^p 上的一个等价关系:

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g, \mu \text{ a.e.}$$

于是我们可以考虑商空间

$$L^p(E, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu) / \sim.$$

也就是说, 我们只考虑几乎处处相等意义上的函数, 如果两个函数几乎处处相等, 那么我们认为这是同一个函数.

在没有歧义的情况下, 我们使用 $L^p(\mu)$ 或者 L^p 表示 $L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$. 注意到 L^1 就是所有可积函数构成的空间.

对于可测函数 $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ 和 $p \in [1, \infty)$, 我们定义

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

约定 $\infty^{1/p} = \infty$. 定义

$$\|f\|_\infty = \inf\{C \in [0, \infty] \mid |f| \leq C, \mu \text{ a.e.}\}.$$

如果 f, g 是两个几乎处处相等的可测函数, 那么有 $\|f\|_p = \|g\|_p$, 所以我们可以针对 $f \in L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ 良好的定义 $\|f\|_p$.

对于 $p, q \in [1, \infty]$, 我们说 p 和 q 是**共轭指数**, 如果

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

特别地, 1 和 ∞ 是共轭的.

定理 4.1 (Hölder 不等式). 令 p, q 是共轭指数, f, g 是两个 $E \rightarrow \mathbb{R}$ 的可测函数, 那么

$$\int |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

特别地, 如果 $f \in L^p$ 以及 $g \in L^q$, 那么 $fg \in L^1$.

Proof. 若 $\|f\|_p = 0$, 那么 $|f| = 0$ μ a.e., 这表明 $\int |fg| d\mu = 0$, 结论显然成立, 所以不妨假设 $\|f\|_p > 0$ 以及 $\|g\|_q > 0$. 进一步的, 我们还可以假设 $f \in L^p$ 以及 $g \in L^q$, 否则右边为 ∞ 显然成立.

先假设 $p = 1$ 和 $q = \infty$, 那么

$$\int |fg| d\mu \leq \|g\|_\infty \int |f| d\mu = \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

下面假设 $1 < p, q < \infty$.

设 $\alpha \in (0, 1)$, 那么对于 $x \in [0, \infty)$ 有不等式

$$x^\alpha - \alpha x \leq 1 - \alpha,$$

取 $x = u/v$ ($u \geq 0, v > 0$), 我们有

$$u^\alpha v^{1-\alpha} \leq \alpha u + (1-\alpha)v,$$

该不等式在 $v = 0$ 时也成立. 取 $\alpha = 1/p$, $1-\alpha = 1/q$, 以及

$$u = \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p}, \quad v = \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q},$$

那么

$$\frac{|fg|}{\|f\|_p^p \|g\|_q^q} \leq \frac{1}{p} \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q},$$

两边积分, 即得

$$\int |fg| d\mu \leq \|f\|_p^p \|g\|_q^q.$$

□

推论 4.2 (Cauchy-Schwarz 不等式). 取 $p = q = 2$, 即得

$$\int |fg| d\mu \leq \left(\int |f|^2 d\mu \right)^{1/2} \left(\int |g|^2 d\mu \right)^{1/2}.$$

推论 4.3. 假设 μ 是有限测度, p, q 是共轭指数且 $p > 1$, 那么对于任意可测函数 $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, 有

$$\|f\|_1 \leq \mu(E)^{1/q} \|f\|_p,$$

因此, 对于任意 $p \in (1, \infty]$, 有 $L^p \subseteq L^1$. 更一般地, 对于任意 $1 \leq r < r' < \infty$, 有

$$\|f\|_r \leq \mu(E)^{\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}} \|f\|_{r'},$$

因此, 对于任意 $1 \leq p < q \leq \infty$, 有 $L^q \subseteq L^p$, 特别地, 当 μ 是概率测度的时候, 还有 $\|f\|_p \leq \|f\|_q$.

Proof. 取 $g = \mathbf{1}_E$, 即得

$$\int |f| d\mu = \int |f \mathbf{1}_E| d\mu \leq \|f\|_p \|\mathbf{1}_E\|_q = \mu(E)^{1/q} \|f\|_p.$$

用 f^r 替代 f , 取 $p = r'/r$, $1/q = 1 - r/r'$, 那么

$$\|f\|_r \leq \mu(E)^{1/r - 1/r'} \|f^r\|_{r'/r}^{1/r} = \mu(E)^{1/r - 1/r'} \|f\|_{r'}.$$

□

4.2 Banach 空间 $L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$

积测度

5.1 积 σ -域

令 (E, \mathcal{A}) 和 (F, \mathcal{B}) 是两个可测空间. 回顾第一章, 我们定义 $E \times F$ 上的乘积 σ -域

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(A \times B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}).$$

不难验证 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ 是使得两个投影映射 $\pi_1 : E \times F \rightarrow E$ 和 $\pi_2 : E \times F \rightarrow F$ 都可测的最小的 σ -域.

如果 $C \subseteq E \times F$, $x \in E$, 记

$$C_x = \{y \in F \mid (x, y) \in C\} \subseteq F,$$

如果 $y \in F$, 记

$$C^y = \{x \in E \mid (x, y) \in C\} \subseteq E.$$

如果 f 是 $E \times F$ 上的函数, $x \in E$, 我们记 f_x 表示 F 上的函数 $f_x(y) = f(x, y)$. 类似地, 如果 $y \in F$, 我们记 $f^y(x) = f(x, y)$ 表示 E 上的函数.

命题 5.1.

1. 令 $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, 那么对于任意 $x \in E$, $C_x \in \mathcal{B}$, 对于任意 $y \in F$, $C^y \in \mathcal{A}$.
2. 令 (G, \mathcal{G}) 是可测空间, $f : E \times F \rightarrow G$ 是可测函数, 那么对于任意 $x \in E$, $f_x : F \rightarrow G$ 是可测的, 对于任意 $y \in F$, $f^y : E \rightarrow G$ 是可测的.

Proof. (1) 对于 $x \in E$, 令

$$\mathcal{C} = \{C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \mid C_x \in \mathcal{B}\},$$

那么不难验证 \mathcal{C} 是一个 σ -域且包含所有的可测矩形, 于是 $\mathcal{C} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, 即表明对于任意 $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ 都有 $C_x \in \mathcal{B}$. $C^y \in \mathcal{A}$ 同理.

(2) 对于 $x \in E$, 任取 $D \in \mathcal{G}$, 有

$$f_x^{-1}(D) = (f^{-1}(D))_x \in \mathcal{B}.$$

□

5.2 积测度

定理 5.2. 令 μ 和 ν 分别是 (E, \mathcal{A}) 和 (F, \mathcal{B}) 上的 σ -有限测度, 那么

1. 存在唯一的 $(E \times F, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ 上的测度 m , 使得对于每个 $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$, 都有

$$m(A \times B) = \mu(A)\nu(B),$$

约定 $0 \times \infty = 0$. 测度 m 也是 σ -有限的, 记为 $m = \mu \otimes \nu$.

2. 对于每个 $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, 函数 $x \mapsto \nu(C_x)$ 是 \mathcal{A} -可测的, $y \mapsto \mu(C^y)$ 是 \mathcal{B} -可测的, 并且我们有

$$\mu \otimes \nu(C) = \int_E \nu(C_x) \mu(dx) = \int_F \mu(C^y) \nu(dy).$$

Proof. 我们首先说明这样的测度 m 一定是唯一的. 我们使用 [推论 1.23](#) 说明唯一性. 若测度 m' 也满足性质 (1). 首先所有可测矩形对有限交封闭且生成 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, 并且 m 和 m' 在可测矩形上取值相同. μ 是 σ -有限的表明存在递增的可测子集 $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 使得 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = E$ 并且 $\mu(A_n)$ 有限. 同理存在递增的可测子集 $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 使得 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = F$ 并且 $\nu(B_n)$ 有限. 令 $G_n = A_n \times B_n$, 那么 $G_n \subseteq G_{n+1}$ 并且 $E \times F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$, 此时

$$m'(G_n) = \mu(A_n)\nu(B_n) = m(G_n) < \infty,$$

所以 [推论 1.23](#) 表明 $m = m'$.

然后我们说明存在性. 对于 $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, 定义

$$m(C) = \int_E \nu(C_x) \mu(dx). \quad (5.1)$$

对于任意 $x \in E$, 有 $C_x \in \mathcal{B}$, 所以 $\nu(C_x)$ 是良好定义的. 下面我们证明 $x \mapsto \nu(C_x)$ 是可测函数.

- (1) 首先假设 ν 是有限测度. 令 $\mathcal{G} = \{C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \mid x \mapsto \nu(C_x) \text{ 可测}\}$. 那么对于可测矩形 $A \times B \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, 有 $\nu((A \times B)_x) = \mathbf{1}_A(x)\nu(B)$, 此时 $x \mapsto \mathbf{1}_A(x)\nu(B)$ 当然是可测函数. 故 \mathcal{G} 包含所有的可测矩形. 其次, 我们证明 \mathcal{G} 是一个单调类. 如果 $C, C' \in \mathcal{G}$ 且 $C \subseteq C'$, 那么利用 ν 的有限性, 就有

$$\nu((C' \setminus C)_x) = \nu(C'_x \setminus C_x) = \nu(C'_x) - \nu(C_x),$$

所以 $x \mapsto \nu((C' \setminus C)_x)$ 是可测函数, 即 $C' \setminus C \in \mathcal{G}$. 如果 $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是 \mathcal{G} 中的一个递增序列, 那么

$$\nu\left(\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n\right)_x\right) = \nu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (C_n)_x\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \nu((C_n)_x),$$

而 $x \mapsto \lim \uparrow \nu((C_n)_x)$ 是可测函数, 所以 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \in \mathcal{G}$. 这就表明 \mathcal{G} 是单调类. 由于 \mathcal{G} 包含可测矩形, 可测矩形对有限交封闭, 根据单调类定理, 所以 \mathcal{G} 是 σ -域, 所以 $\mathcal{G} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, 这表明对于任意 $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, $x \mapsto \nu(C_x)$ 都是可测函数.

(2) 然后假设 ν 是 σ -有限测度. 此时存在 \mathcal{B} 的一列递增子集 $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 使得 $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ 以及 $\nu(B_n) < \infty$. 令 ν_n 表示测度 ν 在 B_n 上的限制, 那么根据上面的叙述, 任取 $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, 函数 $x \mapsto \nu_n(C_x)$ 是可测函数. 注意到

$$\nu(C_x) = \nu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (C_x \cap B_n)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \nu_n(C_x),$$

所以 $x \mapsto \lim \uparrow \nu(C_x)$ 是可测函数.

于是我们证明了 $x \mapsto \nu(C_x)$ 是可测函数, 这表明定义 (5.1) 式是有意义的. 下面我们验证 m 满足测度的条件. 显然 $m(\emptyset) = 0$. 任取 $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ 中的一列不相交的子集, 那么

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n\right) &= \int_E \nu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (C_n)_x\right) \mu(dx) = \int_E \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu((C_n)_x) \mu(dx) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_E \nu((C_n)_x) \mu(dx) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m(C_n), \end{aligned}$$

其中第三个等号利用了单调收敛定理. 这就表明 m 确实是一个测度.

对于可测矩形 $A \times B \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, 有

$$m(A \times B) = \int_E \nu((A \times B)_x) \mu(dx) = \int_E \nu(B) \mathbf{1}_A(x) \mu(dx) = \mu(A) \nu(B),$$

所以这样的 m 是唯一的. 对于 $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, 定义

$$m'(C) = \int_F \mu(C^y) \nu(dy),$$

重复上面的过程, 可以证明 m' 满足和 m 相同的性质, 所以 $m = m'$. \square

5.3 Fubini 定理

考虑可测空间 (E, \mathcal{A}) 和 (F, \mathcal{B}) .

定理 5.3 (Fubini-Tonelli). 令 μ 和 ν 分别是 (E, \mathcal{A}) 和 (F, \mathcal{B}) 上的两个 σ -有限的测度. 令 $f : E \times F \rightarrow [0, \infty]$ 是可测函数.

1. 函数

$$E \ni x \mapsto \int_F f(x, y) \nu(dy), \quad F \ni y \mapsto \int_E f(x, y) \mu(dx)$$

是值在 $[0, \infty]$ 中的可测函数.

2. 我们有

$$\int_{E \times F} f \, d\mu \otimes \nu = \int_E \left(\int_F f(x, y) \nu(dy) \right) \mu(dx) = \int_F \left(\int_E f(x, y) \mu(dx) \right) \nu(dy).$$

Proof. (1) 设 $f = \lim \uparrow f_n$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是一列递增的非负简单函数, 那么根据单调收敛定理, 有

$$\int_F f(x, y) \nu(dy) = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \int_F f_n(x, y) \nu(dy),$$

所以我们只需要说明对于任意非负简单函数 h , $x \mapsto \int_F h(x, y) \nu(dy)$ 可测即可. 对于示性函数 $\mathbf{1}_C$, 有 $\int_F \mathbf{1}_C(x, y) \nu(dy) = \nu(C_x)$, 定理 5.2 表明 $x \mapsto \nu(C_x)$ 是可测的, 再根据线性性, 这就说明了 $x \mapsto \int_F h(x, y) \nu(dy)$ 可测. 对于 $x \mapsto \int_E f(x, y) \mu(dx)$ 同理.

(2) 设 $f = \lim \uparrow f_n$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是一列递增的非负简单函数, 那么根据单调收敛定理, 有

$$\int_{E \times F} f \, d\mu \otimes \nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \int_{E \times F} f_n(x, y) \nu(dy),$$

所以只需要证明结论对于非负简单函数成立即可. 根据线性性, 只需要证明结论对示性函数成立即可. 任取示性函数 $\mathbf{1}_C$, 根据定理 5.2, 有

$$\int_{E \times F} \mathbf{1}_C \, d\mu \otimes \nu = \mu \otimes \nu(C) = \int_E \nu(C_x) \mu(dx) = \int_E \left(\int_F \mathbf{1}_C(x, y) \nu(dy) \right) \mu(dx),$$

另一个等式同理. □

定理 5.3 也可以推广到任意符号的版本.

定理 5.4 (Fubini-Lebesgue). 令 $f \in \mathcal{L}^1(E \times F, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$, 那么

1. $\mu(dx)$ a.e., 函数 $y \mapsto f(x, y)$ 属于 $\mathcal{L}^1(F, \mathcal{B}, \nu)$. $\nu(dy)$ a.e., 函数 $x \mapsto f(x, y)$ 属于 $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$.
2. 函数 $x \mapsto \int_F f(x, y) \nu(dy)$ 属于 $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$. 函数 $y \mapsto \int_E f(x, y) \mu(dx)$ 属于 $\mathcal{L}^1(F, \mathcal{B}, \nu)$.
3. 我们有

$$\int_{E \times F} f \, d\mu \otimes \nu = \int_E \left(\int_F f(x, y) \nu(dy) \right) \mu(dx) = \int_F \left(\int_E f(x, y) \mu(dx) \right) \nu(dy).$$

Part II

概率论

概率论基础

6.1 一般定义

6.1.1 概率空间

令 (Ω, \mathcal{A}) 是可测空间, \mathbb{P} 是 (Ω, \mathcal{A}) 上的概率测度, 我们说 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 是**概率空间**. 因此, 概率空间是测度空间的一个特例. 然而, 概率论的观点与测度论有很大不同. 在概率论中, 我们的目标是一个“随机实验”的数学模型:

- Ω 表示实验的所有可能的结果的集合.
- \mathcal{A} 是所有“事件”的集合. 这里的事件指的是 Ω 的一个子集, 其概率可以被计算 (也就是可测集). 我们应当把事件 A 视为满足某一属性的所有 $\omega \in \Omega$ 构成的子集.
- 对于每个 $A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A)$ 表示事件 A 发生的概率.

当然, 一个自然的疑问是, 为什么需要考虑事件域 \mathcal{A} ? 换句话说, 为什么不能对 Ω 的任意子集都计算一个概率? 原因在于, 一般不可能在 Ω 的幂集 $\mathcal{P}(\Omega)$ 上定义我们感兴趣的概率测度 (除开 Ω 是可数集这一简单情况). 例如, 取 $\Omega = [0, 1]$, 配备 Borel σ -域和 Lebesgue 测度, 但是, 可以证明不可能将 Lebesgue 测度扩展到 $[0, 1]$ 的任意子集上使得其仍然满足测度的定义.

例 6.1. 一些常见的概率模型.

1. 考虑扔两次骰子这一实验, 那么

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^2, \quad \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{36}.$$

这里概率 \mathbb{P} 的选取意味着让所有结果都有相同的概率. 更一般地, 如果 Ω 是有限集, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, 概率测度 $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/\text{card}(\Omega)$ 被称为 Ω 上的**均匀概率测度**.

2. 现在我们考虑实验: 扔骰子, 直到出现 6 为止. 由于得到 6 所需的投掷次数是无界的 (即使你扔了 1000 次骰子, 仍有可能没有得到 6), 所以 Ω 的正确选择是想象我们扔了无限次骰子:

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^{\mathbb{N}}.$$

Ω 上的 σ -域 \mathcal{A} 被定义为包含形如

$$\{\omega \in \Omega \mid \omega_1 = i_1, \dots, \omega_n = i_n\}$$

与测度论类似, 零测集也会出现在概率论的很多叙述中, 如果某个命题对于某个概率为 1 的事件中的每个 $\omega \in \Omega$ 都成立, 那么我们说这个命题**几乎肯定**成立, 用缩写 a.s. 表示.

6.1.2 随机变量

在本章的剩余部分, 我们都考虑一个概率空间 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, 并且所有随机变量都将在这个概率空间上定义.

定义 6.2. 令 (E, \mathcal{E}) 是可测空间, 值在 E 中的**随机变量**指的是一个可测映射 $X: \Omega \rightarrow E$.

例 6.3. 回顾 (6.1) 中的模型.

1. $X((i, j)) = i + j$ 定义了值在 $\{2, 3, \dots, 12\}$ 中的随机变量.
2. $X(\omega) = \inf\{j \mid \omega_j = 6\}$, 约定 $\inf \emptyset = \infty$, 定义了值在 $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 中的随机变量. 为了验证 X 的可测性, 只需要注意到

$$X^{-1}(\{k\}) = \{\omega \in \Omega \mid \omega_1 \neq 6, \dots, \omega_{k-1} \neq 6, \omega_k = 6\}.$$

定义 6.4. 令 X 是值在 (E, \mathcal{E}) 中的随机变量, 定义随机变量 X 的**分布律** \mathbb{P}_X 是概率测度 \mathbb{P} 在 X 下的推前. 也就是说, \mathbb{P}_X 是 (E, \mathcal{E}) 上的概率测度, 满足

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)), \quad \forall B \in \mathcal{E}.$$

两个值在 (E, \mathcal{E}) 中的随机变量 Y, Y' 如果有相同的分布 $\mathbb{P}_Y = \mathbb{P}_{Y'}$, 那么我们说 Y 和 Y' 是**同分布**的.

在概率论中, 我们通常将 $\mathbb{P}_X(B)$ 写为 $\mathbb{P}(X \in B)$ 而不是 $\mathbb{P}(X^{-1}(B))$. 这里 $X \in B$ 是集合 $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}$ 的简写, 这是一个一般性的简写规则, 在概率论中参数 ω 通常被隐藏.

离散型随机变量 当 E 是有限或者可数 ($\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$) 的时候, X 的分布是点测度, 这是因为

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{x \in B} \{X = x\}\right) = \sum_{x \in B} \mathbb{P}(X = x) = \sum_{x \in E} p_x \delta_x(B),$$

其中 $p_x = \mathbb{P}(X = x)$. 这就表明

$$\mathbb{P}_X = \sum_{x \in E} p_x \delta_x$$

是 E 上的点测度.

例 6.5. 我们考虑 (6.1) 中的第二个例子, 随机变量为 $X(\omega) = \inf\{j \mid \omega_j = 6\}$. 那么

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq 5} \{\omega \mid \omega_1 = i_1, \dots, \omega_{k-1} = i_{k-1}, \omega_k = 6\}\right) \\ &= 5^{k-1} \left(\frac{1}{6}\right)^k = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}.\end{aligned}$$

注意到

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{6} \frac{1}{1 - \frac{5}{6}} = 1$$

并且 $\{X = \infty\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \{X = k\} = \Omega$, 所以

$$\mathbb{P}(X = \infty) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = 0,$$

但是 $\{X = \infty\} \neq \emptyset$.

具有密度的随机变量 \mathbb{R}^d 上的密度函数是一个非负的 Borel 函数 $p: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$, 其满足

$$\int_{\mathbb{R}^d} p(x) dx = 1.$$

对于一个值在 \mathbb{R}^d 中的随机变量 X , 如果存在密度 p 使得

$$\mathbb{P}_X(B) = \int_B p(x) dx$$

对于任意 Borel 子集 B 都成立, 那么我们说 X 有密度函数 p . 换句话说, p 是 \mathbb{P}_X 相对于 Lebesgue 测度 λ 的密度 (推论 2.8), 也记为 $\mathbb{P}_X(dx) = p(x)\lambda(dx) = p(x) dx$.

注意到密度 p 实际上是在相差一个 Lebesgue 零测集的意义下由 \mathbb{P}_X 确定的. 在我们遇到的大多数例子中, p 在 \mathbb{R}^d 上连续, 在这种情况下, p 由 \mathbb{P}_X 唯一确定.

在 $d = 1$ 的时候, 我们有

$$\mathbb{P}(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} p(x) dx.$$

6.1.3 数学期望

定义 6.6. 令 X 是定义在 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 上的实随机变量, 我们定义

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \int X d\mathbb{P},$$

只要上述积分有意义, 我们就说 $\mathbb{E}[X]$ 是 X 的**期望**.

根据前面的内容, 上述积分有意义的条件为下列二者之一:

- $X \geq 0$, 此时 $\mathbb{E}[X] \in [0, \infty]$.

- X 符号任意, 但是 $\mathbb{E}[|X|] = \int |X| d\mathbb{P} < \infty$.

上面的定义可以拓展到多元随机变量 $X = (X_1, \dots, X_d) \in \mathbb{R}^d$, 此时我们定义 $\mathbb{E}[X] = (\mathbb{E}[X_1], \dots, \mathbb{E}[X_d])$. 类似的, 如果 M 是随机矩阵 (值在实矩阵空间中的随机变量), 我们可以定义矩阵 $\mathbb{E}[M]$ 为对 M 的每个分量求期望构成的矩阵.

注意到若 $X = \mathbf{1}_B$, 那么

$$\mathbb{E}[X] = \int \mathbf{1}_B d\mathbb{P} = \mathbb{P}(B).$$

对于一些特殊的随机变量, 下面的命题被频繁地使用.

命题 6.7. 令 X 是值在 $[0, \infty]$ 中的随机变量, 那么

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \mathbb{P}(X \geq x) dx.$$

令 Y 是值在 \mathbb{Z}_+ 中的随机变量, 那么

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y \geq k).$$

Proof. 根据 Fubini 定理, 我们有

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{x \leq X\}} dx\right] = \int_0^\infty \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{x \leq X\}}] dx = \int_0^\infty \mathbb{P}(X \geq x) dx.$$

对于随机变量 Y , 我们有

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty} k \mathbf{1}_{\{Y=k\}}\right] = \int \left(\sum_{k=0}^{\infty} k \mathbf{1}_{\{Y=k\}}\right) d\mathbb{P} = \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{P}(Y = k).$$

对于第二个等式, 只需注意到

$$Y = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{Y \geq k\}}. \quad \square$$

下面的命题是 [命题 2.12](#) 的特例, 由于其结果十分重要, 所以我们再次叙述一遍.

命题 6.8. 令 X 是值在 (E, \mathcal{E}) 中的随机变量, 对于任意可测函数 $f : E \rightarrow [0, \infty]$, 我们有

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_{\Omega} f(X(\omega)) \mathbb{P}(d\omega) = \int_E f(x) \mathbb{P}_X(dx).$$

如果可测函数 $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, 上面的命题在两端有意义的情况下也是成立的, 即 $\mathbb{E}[|f(X)|] < \infty$ 的时候. 特别地, 如果 X 是实值随机变量且使得 $\mathbb{E}[|X|] < \infty$, 那么有

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} x \mathbb{P}_X(dx).$$

命题 6.8 告诉我们可以使用分布 \mathbb{P}_X 来计算 $f(X)$ 的期望. 实际上这个过程可以倒过来, 如果我们能找到 E 上的测度 ν 使得

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int f d\nu,$$

其中 $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ 是任意示性函数, 此时对于任意 E 的可测子集 A , 有

$$\mathbb{P}_X(A) = \int \mathbf{1}_A d\mathbb{P}_X = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A(X)] = \int \mathbf{1}_A dv = v(A),$$

所以分布 $\mathbb{P}_X = v$. 下面的命题应用了这样的思想.

命题 6.9. 令 $X = (X_1, \dots, X_d)$ 是值在 \mathbb{R}^d 中的随机变量, 假设 X 有密度 $p(x_1, \dots, x_d)$. 那么, 对于任意 $1 \leq j \leq d$, X_j 的密度为

$$p_j(x) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} p(x_1, \dots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \dots, x_d) dx_1 \cdots dx_{j-1} dx_{j+1} \cdots dx_d.$$

Proof. 记 π_j 是投影函数 $\pi_j(x_1, \dots, x_d) = x_j$. 对于任意的 Borel 函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, 根据 Fubini 定理, 有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(X_j)] &= \mathbb{E}[f \circ \pi_j(X)] \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(\pi_j(x)) \mathbb{P}_X(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x_j) p(x_1, \dots, x_d) dx_1 \cdots dx_d \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x_j) \left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} p(x_1, \dots, x_d) dx_1 \cdots dx_{j-1} dx_{j+1} \cdots dx_d \right) dx_j \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x_j) p_j(x_j) dx_j = \int_{\mathbb{R}} f(x_j) \mathbb{P}_{X_j}(dx_j), \end{aligned}$$

这就表明对于任意 Borel 子集 A 有

$$\mathbb{P}_{X_j}(A) = \int_A p_j(x_j) dx_j,$$

即 X_j 有密度函数 p_j . □

如果 $X = (X_1, \dots, X_d)$ 是值在 \mathbb{R}^d 中的随机变量, 那么概率测度 \mathbb{P}_{X_j} 被称为 X 的**边缘分布**, 分布律 \mathbb{P}_{X_j} 由 \mathbb{P}_X 完全决定: \mathbb{P}_{X_j} 就是 \mathbb{P}_X 在投影 π_j 下的推前. 需要注意反之不是正确的, 也就是说即使确定了所有的边缘分布 $\mathbb{P}_{X_1}, \dots, \mathbb{P}_{X_j}$, 也不能确定 \mathbb{P}_X .

6.1.4 经典分布

本小节我们列举一些重要的概率分布.

离散分布

1. **均匀分布.** 如果 E 是有限集, 值在 E 中的随机变量 X 如果满足

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{\text{card}(E)}, \quad \forall x \in E,$$

那么我们说 X 是 E 上的均匀分布.

2. **参数 $p \in [0, 1]$ 的 Bernoulli 分布.** 如果值在 $\{0, 1\}$ 中的随机变量 X 满足

$$\mathbb{P}(X = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p,$$

那么我们说 X 是 E 上参数 p 的 Bernoulli 分布.

3. **二项分布 $\mathcal{B}(n, p)$ ($n \in \mathbb{N}, p \in [0, 1]$).** 如果值在 $\{0, 1, \dots, n\}$ 中的随机变量 X 满足

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, n\},$$

那么我们说 X 是 E 上的二项分布.

4. **参数 $p \in (0, 1)$ 的几何分布.** 如果值在 \mathbb{Z}_+ 中的随机变量 X 使得

$$\mathbb{P}(X = k) = (1-p)p^k, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

那么我们说 X 是 E 上参数 p 的几何分布.

5. **参数 $\lambda > 0$ 的 Poisson 分布.** 如果值在 \mathbb{Z}_+ 中的随机变量 X 使得

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+,$$

那么我们说 X 是 E 上参数 λ 的 Poisson 分布. 容易计算

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda,$$

Poisson 分布在实际应用中非常重要, 通常被用于建模某个“罕见事件”在长时间段内发生的次数. 准确的数学叙述是 Poisson 分布是二项分布的近似. 对于每个 $n \geq 1$, 记 X_n 为服从二项分布 $\mathcal{B}(n, p_n)$ 的随机变量, 如果在 $n \rightarrow \infty$ 的时候有 $np_n \rightarrow \lambda$, 那么对于每个 $k \in \mathbb{N}$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

这可以解释为, 如果每天有很小的概率 $p_n \approx \lambda/n$ 发生地震, 那么地震在 n 天内发生的次数将近似服从泊松分布.

连续分布 在下面的五个例子中, X 都指的是一个有密度 p 的实值随机变量.

1. **$[a, b]$ 上的均匀分布:**

$$p(x) = \frac{1}{b-a} \mathbf{1}_{[a,b]}(x).$$

2. **参数 $\lambda > 0$ 的指数分布:**

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x),$$

此时对于 $a \geq 0$, 有

$$\mathbb{P}(X \geq a) = \int_a^{\infty} p(x) dx = e^{-\lambda a}.$$

这表明指数分布有下面的重要性质: 对于 $a, b \geq 0$, 有

$$\mathbb{P}(X \geq a + b) = \mathbb{P}(X \geq a)\mathbb{P}(X \geq b). \quad (6.1)$$

3. Gamma 分布 $\Gamma(a, \lambda)$ ($a > 0, \lambda > 0$):

$$p(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x),$$

这是指数分布的推广, $a = 1$ 时即指数分布.

4. 参数 $a > 0$ 的 Cauchy 分布:

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2},$$

注意到服从 Cauchy 分布的随机变量的数学期望是不存在的, 因为

$$\mathbb{E}[|X|] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{a|x|}{a^2 + x^2} dx = \infty.$$

5. 正态分布 $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ ($m \in \mathbb{R}, \sigma > 0$):

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

正态分布与 Poisson 分布一起成为概率论中最重要的两个分布. 正态分布的密度曲线呈著名的钟形曲线. 按定义很容易验证

$$m = \mathbb{E}[X], \quad \sigma^2 = \mathbb{E}[(X-m)^2].$$

对于 $a, b \in \mathbb{R}$, 考虑随机变量 $Y = aX + b$, 那么对于任意的 Borel 函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, 有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(Y)] &= \mathbb{E}[f(aX + b)] = \int_{\mathbb{R}} f(ax + b) \mathbb{P}_X(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(ax + b) p(x) dx = \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} f(y) p\left(\frac{y-b}{a}\right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{1}{a} p\left(\frac{y-b}{a}\right) dy, \end{aligned}$$

这表明

$$p(y) = \frac{1}{a\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y-(am+b))^2}{2(a\sigma)^2}\right),$$

即 $aX + b$ 服从分布 $\mathcal{N}(am + b, a^2\sigma^2)$.

6.1.5 实值随机变量的分布函数

令 X 是实值随机变量, 定义 X 的分布函数为 $F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, 其满足

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}_X((-\infty, t]), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

根据 **推论 1.23**, F_X 实际上完全刻画了分布 \mathbb{P}_X . 确切的说, 如果知道了 F_X , 即相当于知道了所有 $\mathbb{P}_X((-\infty, t])$ 的值, 而所有区间 $(-\infty, t]$ 构成的子集族对有限交封闭, 又因为 \mathbb{P}_X 为有限测度, 所以 \mathbb{P}_X 在所有区间 $(-\infty, t]$ 上的值可以完全确定 \mathbb{P}_X 在 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上的值.

显然函数 F_X 是递增的、右连续的并且在 $-\infty$ 处极限为 0、在 $+\infty$ 处极限为 1. 反之, 如果 $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ 满足上面的性质, 定理? 表明存在 (唯一的) \mathbb{R} 上的概率测度 μ 使得 $\mu((-\infty, t]) = F(t)$. 即这样的函数 F 总能解释为某个实值随机变量的分布函数.

令 $F_X(a-)$ 表示 F_X 在 $a \in \mathbb{R}$ 处的左极限. 那么容易验证

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a-),$$

$$\mathbb{P}(a < X < b) = F_X(b-) - F_X(a).$$

特别的, $\mathbb{P}(X = a) = F_X(a) - F_X(a-)$. 这表明 F_X 的间断点的个数恰为 \mathbb{P}_X 的原子个数.

6.2 随机变量的矩

6.2.1 矩和方差

令 X 是实值随机变量, $p \in \mathbb{N}$. 定义 X 的 p -**阶矩**为 $\mathbb{E}[X^p]$, 其仅在 $X \geq 0$ 或者 $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$ 的时候有定义.

因为期望是相对于测度 \mathbb{P}_X 的一种积分, 所以我们有下面的结果. 如果 X 是值在 $[0, \infty]$ 中的随机变量, 那么我们有

- $\mathbb{E}[X] < \infty \Rightarrow X < \infty, \mathbb{P}_X \text{ a.s.}$
- $\mathbb{E}[X] = 0 \Rightarrow X = 0 \mathbb{P}_X \text{ a.s.}$

此外, 各种极限与积分交换次序的定理也可以直接改写为期望的形式:

- **单调收敛定理.** 如果 $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是一列值在 $[0, \infty]$ 中递增的随机变量, 那么

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow X_n \right].$$

- **Fatou 引理.** 如果 $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是一列值在 $[0, \infty]$ 中的随机变量, 那么

$$\mathbb{E}[\liminf X_n] \leq \liminf \mathbb{E}[X_n].$$

- **控制收敛定理.** 如果 $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是一列实值随机变量, 并且存在值在 $[0, \infty]$ 中的随机变量 Z 使得

$$|X_n| \leq Z, \quad \mathbb{E}[Z] < \infty, \quad X_n \rightarrow X, \mathbb{P}_X \text{ a.s.}$$

那么

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n \right] = \mathbb{E}[X], \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|X_n - X|] = 0.$$

对于每个 $p \in [1, \infty]$, 考虑空间 $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Hölder 不等式表明对于任意实值随机变量 X, Y , 如果 $p, q \in (1, \infty)$ 使得 $1/p + 1/q = 1$, 那么

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq \mathbb{E}[|X|^p]^{1/p} \mathbb{E}[|Y|^q]^{1/q}.$$

取 $Y = 1$, 我们得到 $\|X\|_1 \leq \|X\|_p$. 此外, 如果 $1 \leq p < q \leq \infty$, 有 $\|X\|_p \leq \|X\|_q$, 这也表明 $L^q(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \subseteq L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Hilbert 空间 $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 上的内积定义为 $\langle X, Y \rangle_{L^2} = \mathbb{E}[XY]$, Cauchy-Schwarz 不等式表明

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq \mathbb{E}[X^2]^{1/2} \mathbb{E}[Y^2]^{1/2}.$$

特别地, 我们有

$$\mathbb{E}[|X|]^2 \leq \mathbb{E}[X^2].$$

如果 $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ 是凸函数, 那么 Jensen 不等式表明

$$\mathbb{E}[f(X)] \geq f(\mathbb{E}[X]).$$

定义 6.10. 令 $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, 定义 X 的**方差**为

$$\text{var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] \geq 0,$$

X 的**标准差**为

$$\sigma_X = \sqrt{\text{var}(X)}.$$

命题 6.11. 令 $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, 方差 $\text{var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$. 对于任意的 $a \in \mathbb{R}$, 有

$$\mathbb{E}[(X - a)^2] = \text{var}(X) + (\mathbb{E}[X] - a)^2.$$

独立性

7.1 独立事件

在本章中, 我们考虑概率空间 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. 如果 $A, B \in \mathcal{A}$ 且

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B),$$

那么我们说 A 和 B 是**独立的**.

7.2 σ -域和随机变量的独立性

如果 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ 是一个 σ -域, 那么我们说 \mathcal{B} 是 \mathcal{A} 的**子 σ -域**. 我们可以认为子 σ -域 \mathcal{B} 反映了概率空间的部分信息, 即 \mathcal{B} 中发生的事件. 例如, 如果 $\mathcal{B} = \sigma(X)$, X 是随机变量, 那么 \mathcal{B} 反映了 X 的值的**信息**. 这暗示了子 σ -域的**独立性的概念**: 我们希望两个子 σ -域 \mathcal{B} 和 \mathcal{B}' 是独立的当且仅当它们中的任意两个事件都是独立的.

定义 7.1. 令 $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$ 是 \mathcal{A} 的 n 个 σ -子域, 我们说 $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$ 是**独立的**, 如果对于任意 $A_1 \in \mathcal{B}_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}_n$, 都有

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \dots \mathbb{P}(A_n).$$

令 X_1, \dots, X_n 分别是值在 $(E_1, \mathcal{E}_1), \dots, (E_n, \mathcal{E}_n)$ 中的随机变量, 我们说 X_1, \dots, X_n 是独立的当且仅当 $\sigma(X_1), \dots, \sigma(X_n)$ 是独立的. 这等价于任取 $F_1 \in \mathcal{E}_1, \dots, F_n \in \mathcal{E}_n$ 有

$$\mathbb{P}(\{X_1 \in F_1\} \cap \dots \cap \{X_n \in F_n\}) = \mathbb{P}(X_1 \in F_1) \dots \mathbb{P}(X_n \in F_n).$$

定理 7.2. 令 X_1, \dots, X_n 分别是值在 $(E_1, \mathcal{E}_1), \dots, (E_n, \mathcal{E}_n)$ 中的随机变量. 那么 X_1, \dots, X_n 是独立的当且仅当 (X_1, \dots, X_n) 的分布是 X_1, \dots, X_n 的分布的乘积测度, 即

$$\mathbb{P}_{(X_1, \dots, X_n)} = \mathbb{P}_{X_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{P}_{X_n}.$$

此外, 我们有

$$\mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^n f_i(X_i) \right] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[f_i(X_i)],$$

其中 f_i 是 (E_i, \mathcal{E}_i) 上的非负可测函数.

Proof. 令 $F_i \in \mathcal{E}_i$, X_1, \dots, X_n 独立当且仅当

$$\mathbb{P}(\{X_1 \in F_1\} \cap \dots \cap \{X_n \in F_n\}) = \mathbb{P}(X_1 \in F_1) \cdots \mathbb{P}(X_n \in F_n),$$

这表明

$$\mathbb{P}_{(X_1, \dots, X_n)}(F_1 \times \dots \times F_n) = \mathbb{P}_{X_1}(F_1) \cdots \mathbb{P}_{X_n}(F_n).$$

所以 $\mathbb{P}_{(X_1, \dots, X_n)}$ 就是乘积测度 $\mathbb{P}_{X_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{P}_{X_n}$.

记 $\pi_i : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow E_i$ 为投影, 根据 Fubini 定理, 有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n f_i(X_i)\right] &= \int_{E_1 \times \dots \times E_n} \prod_{i=1}^n f_i \circ \pi_i \, d\mathbb{P}_{(X_1, \dots, X_n)} \\ &= \prod_{i=1}^n \int_{E_i} f_i(x_i) \mathbb{P}_{X_i}(dx_i) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[f_i(X_i)]. \end{aligned} \quad \square$$

注释 7.3. 该定理中 f_i 也可以是任意符号, 此时如果 $\mathbb{E}[|f_i(X_i)|] < \infty$, 也即 $f_i \in L^1(E_i, \mathcal{E}_i, \mathbb{P}_{X_i})$, 那么定理的结论依然成立.

推论 7.4. 令 X_1, \dots, X_n 是实值随机变量.

1. 假设 X_i 有密度 p_i 并且 X_1, \dots, X_n 是独立的, 那么 (X_1, \dots, X_n) 有密度

$$p(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n p_i(x_i).$$

2. 反之, 假设 (X_1, \dots, X_n) 有密度 p , 并且 p 可以表达为

$$p(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n q_i(x_i),$$

其中 q_i 是 \mathbb{R} 上的非负可测函数. 那么 X_1, \dots, X_n 是独立的并且 X_i 有密度 $p_i = C_i q_i$, 其中 $C_i > 0$ 为常数.

Proof. (1) X_i 有密度 p_i 表明 $\mathbb{P}_{X_i}(dx) = p_i(x) dx$, X_1, \dots, X_n 独立表明

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{(X_1, \dots, X_n)}(A) &= \mathbb{P}_{X_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{P}_{X_n}(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_A \, d\mathbb{P}_{X_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{P}_{X_n} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A(x_1, \dots, x_n) \mathbb{P}_{X_1}(dx_1) \cdots \mathbb{P}_{X_n}(dx_n) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^n p_i(x_i) \, dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_A \prod_{i=1}^n p_i \, d\lambda = \int_A \prod_{i=1}^n p_i(x_i) \, dx_1 \cdots dx_n, \end{aligned}$$

这就表明

$$p(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n p_i(x_i).$$

(2) 根据 **命题 6.9**, 有

$$p_i(x_i) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} p(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n = q_i(x_i) \prod_{j \neq i} \int_{\mathbb{R}} q_j(x_j) dx_j,$$

故 $p_i = C_i q_i$. 此时

$$p(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n q_i(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{C_i} p_i(x_i),$$

两边积分可知 $\prod_{i=1}^n C_i = 1$, 所以

$$p(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n p_i(x_i),$$

这就表明 $\mathbb{P}_{(X_1, \dots, X_n)} = \mathbb{P}_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{P}_{X_n}$, 即 X_1, \dots, X_n 独立. \square

例 7.5. 令 U 是服从参数 1 的指数分布的随机变量, V 是服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布的随机变量, 假设 U, V 是独立的, 记

$$X = \sqrt{U} \cos(2\pi V), \quad Y = \sqrt{U} \sin(2\pi V),$$

证明 X, Y 是独立的随机变量.

Proof. 任取非负可测函数 $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varphi(X, Y)] &= \mathbb{E}[\varphi(\sqrt{U} \cos(2\pi V), \sqrt{U} \sin(2\pi V))] \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(\sqrt{u} \cos(2\pi v), \sqrt{u} \sin(2\pi v)) d\mathbb{P}_{(U, V)} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(\sqrt{u} \cos(2\pi v), \sqrt{u} \sin(2\pi v)) e^{-u} \mathbf{1}_{[0, \infty)}(u) \mathbf{1}_{[0, 1]}(v) du dv \\ &= \int_0^\infty \int_0^1 \varphi(\sqrt{u} \cos(2\pi v), \sqrt{u} \sin(2\pi v)) e^{-u} du dv \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \varphi(r \cos \theta, r \sin \theta) r e^{-r^2} dr d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, y) e^{-x^2 - y^2} dx dy. \end{aligned}$$

这表明 (X, Y) 有概率密度 $p(x, y) = \pi^{-1} \exp(-x^2 - y^2) = \pi^{-1} \exp(-x^2) \exp(-y^2)$, 根据 **推论 7.4**, 这表明 X, Y 是独立的. \square

7.3 Borel-Cantelli 引理

回顾集合极限的定义: 如果 $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是一列集合, 我们记

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k,$$

不难发现点 $\omega \in \limsup A_n$ 当且仅当存在无限多个 n 使得 $\omega \in A_n$. 注意到 1.12 告诉我们 $\mathbb{P}(\limsup A_n) \geq \limsup \mathbb{P}(A_n)$.

引理 7.6. 令 $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是一列事件.

1. 如果 $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, 那么

$$\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0,$$

2. 如果 $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \infty$, 事件 A_n 是独立的, 那么

$$\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1.$$

两个应用 (2) 我们令

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = ([0, 1), \mathcal{B}([0, 1)), \lambda),$$

其中 λ 表示 Lebesgue 测度. 对于每个 $n \in \mathbb{N}$, 令

$$X_n(\omega) = \lfloor 2^n \omega \rfloor - 2 \lfloor 2^{n-1} \omega \rfloor,$$

其中 $\lfloor x \rfloor$ 表示向下取整. 那么 $X_n(\omega) \in \{0, 1\}$ 并且容易验证对于任意 $\omega \in [0, 1)$ 有

$$0 \leq \omega - \sum_{k=1}^n X_k(\omega) 2^{-k} < 2^{-n}.$$

这表明

$$\omega = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(\omega) 2^{-k}.$$