Contents

1

测度和积分

1.1 测度空间

令 E 是集合, $\mathcal{E}$ 是 E 的一个子集族. 若对于任意 $A, B \in \mathcal{E}$ 有 $A \cap B \in \mathcal{E}$, 那么我们说 $\mathcal{E}$ **对交封闭**. 如果 $\mathcal{E}$ 中任意可数个集合的交还在 $\mathcal{E}$ 中, 那么我们说 $\mathcal{E}$ 对可数交封闭. 类似地, 我们可以定义对补封闭、对并封闭和对可数并封闭的概念.

$\boxed{\sigma\text{-代数}}$

如果 E 的非空子集族 $\mathcal{E}$ 对补和有限并封闭, 那么我们说 $\mathcal{E}$ 是 E 上的**代数**. 如果其对补和可数并封闭, 那么我们说 $\mathcal{E}$ 是 E 上的 **σ-代数**, 即:

a) $A \in \mathcal{E} \Rightarrow E \setminus A \in \mathcal{E}$,
b) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{E} \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{E}$.

由于 $\left(\bigcup_n A_n\right)^c = \bigcap_n A_n^c \in \mathcal{E}$, 所以对补和可数并封闭可以自然导出对可数交封闭, 即 σ-代数对可数交也封闭.

任取 $A \in \mathcal{E}$, 那么 $E = A \cup (E \setminus A) \in \mathcal{E}$, 所以 E 上任意 σ-代数都至少包含 E 和 $\emptyset$. 事实上, $\mathcal{E} = \{E, \emptyset\}$ 是 E 上的最简单的 σ-代数, 被称为**平凡 σ-代数**. E 上最大的 σ-代数当然是 $\mathcal{E} = 2^E$, 即 $\mathcal{E}$ 就是 E 的幂集, 被称为**离散 σ-代数**.

不难看出, E 上一族 σ-代数的任意交 (不一定可数) 还是 E 上的 σ-代数. 给定 E 的一个子集族 $\mathcal{C}$, 我们可以考虑所有包含 $\mathcal{C}$ 的 σ-代数 (总是存在至少一个这样的 σ-代数, 即 2^E), 将这些 σ-代数取交集, 我们便得到了包含 $\mathcal{C}$ 的最小的 σ-代数, 被称为**由 $\mathcal{C}$ 生成的** σ-代数, 记为 $\sigma\mathcal{C}$.

如果 E 是拓扑空间, 由 E 的所有开集族生成的 σ-代数被称为 E 上的 **Borel σ-代数**, 记为 $\mathcal{B}(E)$ 或者 $\mathcal{B}_E$, 其元素被称为 **Borel 集**.

$\boxed{\text{p-系和 d-系}}$

对于 E 的子集族 $\mathcal{C}$, 如果其对交封闭, 那么我们说 $\mathcal{C}$ 是一个 p-系, 这里 p 代表 product, 是“交”的另一种说法. E 的子集族 $\mathcal{D}$ 被称为 d-系, 如果其满足:

a) $E \in \mathcal{D}$,

b) $A, B \in \mathcal{D}$ and $A \supseteq B \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{D}$,

c) $(A_n) \subseteq \mathcal{D}$ and $A_n \nearrow A \Rightarrow A \in \mathcal{D}$.

其中 $(A_n) \subseteq D$ 表明 (A_n) 是 D 中的集合序列, $A_n \nearrow A$ 表明这个序列递增于极限 A:

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A.$$

显然一个 σ-代数既是 p-系又是 d-系, 其反面也是成立的. 所以 p-系和 d-系是产生 σ-代数的原始结构.

命题 1.1. E 的子集族是 σ-代数当且仅当其既是 p-系又是 d-系.

Proof. $(\Rightarrow)$ 若 $\mathcal{E}$ 是 σ-代数, 其显然是 p-系并且满足 d-系的条件 (a) 和 (c). 下面我们验证其满足 d-系的条件 (b). 任取 $A, B \in \mathcal{E}$ 且 $A \supseteq B$, 那么 $A \setminus B = A \cap (E \setminus B) \in \mathcal{E}$, 所以 $\mathcal{E}$ 是 d-系.

$(\Leftarrow)$ 若 $\mathcal{E}$ 既是 p-系又是 d-系. 任取 $A \in \mathcal{E}$, 根据 d-系的 (a) 和 (b), 我们有 $E \setminus A \in \mathcal{E}$. 所以 $\mathcal{E}$ 对补封闭. 然后我们说明对并封闭. 任取 $A, B \in \mathcal{E}$, 由于

$$A \cup B = E \setminus (A \cup B)^c = E \setminus (A^c \cap B^c),$$

结合 p-系对交封闭, 所以 $A \cup B \in \mathcal{E}$. 最后我们说明对可数并封闭. 如果 $(A_n) \subseteq \mathcal{E}$, 令 $B_n = A_1 \cup \cdots \cup A_n$, 那么 $(B_n) \subseteq \mathcal{E}$ 且 $B_n \nearrow A$, 根据 d-系的 (c), 所以 $A \in \mathcal{E}$, 故 $\mathcal{E}$ 对可数并封闭. □

下面的引理为本节的主要定理做准备.

引理 1.2. 令 $\mathcal{D}$ 是 E 上的 d-系, 固定 $D \in \mathcal{D}$, 令

$$\hat{\mathcal{D}} = \{A \in \mathcal{D} : A \cap D \in \mathcal{D}\},$$

那么 $\hat{\mathcal{D}}$ 仍然是 d-系.

单调类定理

这是一个非常有用的工具来证明某些集族是 σ-代数.

定理 1.3. 如果一个 d-系包含一个 p-系, 那么其包含这个 p-系生成的 σ-代数.

Proof. 设 $\mathcal{C}$ 是一个 p-系. 令 $\mathcal{D}$ 是包含 $\mathcal{C}$ 的最小的 d-系, 即包含 $\mathcal{C}$ 的所有 d-系的交 (不难看出 d-系的任意交是 d-系). 我们证明 $\mathcal{D}$ 实际上是一个 σ-代数, 这样包含 $\mathcal{C}$ 的任意 d-系都包含 $\mathcal{D}$, 而 $\mathcal{D}$ 作为包含 $\mathcal{C}$ 的 σ-代数, 其包含 $\sigma\mathcal{C}$. 根据命题 1.1, 只需要说明 $\mathcal{D}$ 既是 p-系又是 d-系, 而 $\mathcal{D}$ 已经是 d-系, 所以只需要说明 $\mathcal{D}$ 是 p-系.

我们首先说明对于任意的 $D \in \mathcal{D}$ 和 $C \in \mathcal{C}$, 有 $D \cap C \in \mathcal{D}$. 令

$$\mathcal{D}_1 = \{A \in \mathcal{D} : A \cap C \in \mathcal{D}\},$$

根据引理 1.2, $\mathcal{D}_1$ 是 d-系. 由于 $\mathcal{C}$ 是 p-系, 所以 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}_1$, 即 $\mathcal{D}_1$ 是包含 $\mathcal{C}$ 的 d-系, 所以 $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}_1$. 这就表明 $D \in \mathcal{D}_1$, 即 $D \cap C \in \mathcal{D}$.

下面说明对于任意的 $D, B \in \mathcal{D}$, 有 $D \cap B \in \mathcal{D}$. 令

$$\mathcal{D}_2 = \{A \in \mathcal{D} : A \cap D \in \mathcal{D}\}.$$

同样根据引理 1.2, $\mathcal{D}_2$ 是 d-系. 根据上面的叙述, 有 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}_2$, 即 $\mathcal{D}_2$ 是包含 $\mathcal{C}$ 的 d-系, 所以 $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}_2$, 这就表明 $B \in \mathcal{D}_2$, 即 $D \cap B \in \mathcal{D}$. 这就证明了 $\mathcal{D}$ 是 p-系. □

可测空间

一个**可测空间**指的是二元组 $(E, \mathcal{E})$, 其中 E 是集合, $\mathcal{E}$ 是 E 上的 σ-代数. 此时, $\mathcal{E}$ 的元素被称为**可测集**. 当 E 是拓扑空间, $\mathcal{E} = \mathcal{B}_E$ 的时候, 可测集也被称为 **Borel 集**.

可测空间的积

令 $(E, \mathcal{E})$ 和 $(F, \mathcal{F})$ 是可测空间. 如果 $A \in \mathcal{E}$ 和 $B \in \mathcal{F}$, 那么 $A \times B$ 被称为**可测矩形**. 我们用 $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ 表示 $E \times F$ 上的由可测矩形集族生成的 σ-代数, 被称为**乘积 σ-代数**. 可测空间 $(E \times F, \mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$ 被称为 $(E, \mathcal{E})$ 和 $(F, \mathcal{F})$ 的积, 我们通常使用 $(E, \mathcal{E}) \times (F, \mathcal{F})$ 来表示.

Exercises

1.1. (划分生成 σ-代数)

a) 令 $\mathcal{C} = \{A, B, C\}$ 是 E 的一个划分, 列出 $\sigma\mathcal{C}$ 的元素.

b) 令 $\mathcal{C}$ 是 E 的 (可数) 划分. 证明 $\sigma\mathcal{C}$ 的每个元素都是 $\mathcal{C}$ 中元素的可数并.

c) 令 $E = \mathbb{R}$, $\mathcal{C}$ 是 $\mathbb{R}$ 的所有单点子集构成的子集族. 证明 $\sigma\mathcal{C}$ 的元素要么是可数集要么是可数集的补集.

Solution. (a) 令

$$\mathcal{E} = \{A, B, C, A \cup B, A \cup C, B \cup C, E\},$$

显然 $\mathcal{E}$ 是一个 σ-代数. 对于任意包含 $\mathcal{C}$ 的 σ-代数, 由于其对并封闭, 所以其必须包含 $\mathcal{E}$, 所以 $\mathcal{E} = \sigma\mathcal{C}$.

(b) 令 $\mathcal{E}$ 为 $\mathcal{C}$ 中元素的所有可数并构成的集族. 根据 σ-代数对可数并的封闭性, 所以 $\sigma\mathcal{C} \supseteq \mathcal{E}$. 设 (A_n) 构成 E 的可数划分, 即 (A_n) 两两不相交且 $E = \bigcup_n A_n$. 任取 $\bigcup_k A_{n_k} \in \mathcal{E}$, 那么 $E \setminus \left(\bigcup_k A_{n_k}\right)$ 依然是某些 (A_n) 的可数并, 所以 $E \setminus \left(\bigcup_k A_{n_k}\right) \in \mathcal{E}$, 即 $\mathcal{E}$ 对补封闭, 所以 $\mathcal{E}$ 是 σ-代数, 所以 $\mathcal{E} = \sigma\mathcal{C}$. ■