范畴中的积与余积

Eliauk

2025 年 11 月 8 日

1 积

定义 1.1. 令 C 是范畴，$\{X_i\}_{i\in I}$ 是 C 中的一族对象. 如果对象 $P \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})$ 和一族态射 $\{p_i : P \to X_i\}_{i\in I}$ 满足下面的范性质：给定任意 $Z \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})$ 和一族态射 $\{f_i : Z \to X_i\}_{i\in I}$，都存在唯一的态射 $\Phi : Z \to P$ 使得对于每个 $i \in I$ 都有 $f_i = p_i \circ \Phi$，也即下面的交换图成立：

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, dashed, "\exists!\Phi"] \arrow[dr, "f_i"'] & P \arrow[d, "p_i"] \\ & X_i. \end{tikzcd}$$

那么我们说 $\left(P, \{p_i : P \to X_i\}_{i\in I}\right)$ 是 $\{X_i\}_{i\in I}$ 的积. 通常我们记作 $\prod_{i\in I} X_i$，态射 $p_i : \prod_{i\in I} X_i \to X_i$ 被称为自然投影.

引理 1.2 (积的唯一性). 令 C 是范畴，$\{X_i\}_{i\in I}$ 是一族对象. 如果有两个积 $\left(P, \{p_i : P \to X_i\}_{i\in I}\right)$ 和 $\left(\widetilde{P}, \{\tilde{p}_i : \widetilde{P} \to X_i\}_{i\in I}\right)$，那么存在唯一的同构 $\Phi : \widetilde{P} \to P$ 和 $\widetilde{\Phi} : P \to \widetilde{P}$，使得它们互逆并且对于每个 $i \in I$ 都满足下面的交换图：

$$\begin{tikzcd} \widetilde{P} \arrow[rr, shift left, "\Phi"] \arrow[dr, "\tilde{p}_i"'] & & P \arrow[ll, shift left, "\widetilde{\Phi}"] \arrow[dl, "p_i"] \\ & X_i. & \end{tikzcd}$$

Proof. 根据范性质，对于每个 $i \in I$，存在唯一的 $\Phi : \widetilde{P} \to P$ 使得 $\tilde{p}_i = p_i \circ \Phi$，同时也存在唯一的 $\widetilde{\Phi} : P \to \widetilde{P}$ 使得 $p_i = \tilde{p}_i \circ \widetilde{\Phi}$. 所以 $p_i = p_i \circ \left(\Phi \circ \widetilde{\Phi}\right)$，同时 $p_i = p_i \circ \mathrm{id}_P$，根据唯一性，所以 $\mathrm{id}_P = \Phi \circ \widetilde{\Phi}$. 同理，有 $\mathrm{id}_{\widetilde{P}} = \widetilde{\Phi} \circ \Phi$. 于是 $\Phi, \widetilde{\Phi}$ 是同构. □

命题 1.3 (集合范畴的积). 令 $\{X_i\}_{i\in I}$ 是 Set 中的一族对象. 那么 Set 中的积就是集合的直积：

$$\prod_{i\in I} X_i = \left\{ f : I \to \bigcup_{i\in I} X_i \;\middle|\; \forall i \in I,\, f(i) \in X_i. \right\},$$

附带显然的投影映射 $p_i : f \mapsto f(i)$.

Proof. 令 $Z \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Set})$ 和 $\{f_i : Z \to X_i\}_{i\in I}$ 是一族映射，定义 $\Phi : Z \to \prod_{i\in I} X_i$ 为

$$\Phi(z) = \big(i \mapsto f_i(z)\big).$$

根据定义，显然有 $f_i = p_i \circ \Phi$. 下面只需要说明 Φ 是唯一的. 假设 $\Psi : Z \to \prod_{i\in I} X_i$ 也满足 $f_i = p_i \circ \Psi$. 那么对于每个 $z \in Z$ 和 $i \in I$，有 $f_i(z) = p_i(\Psi(z)) = \big(\Psi(z)\big)(i)$. 另一方面，还有 $f_i(z) = p_i(\Phi(z)) = \big(\Phi(z)\big)(i)$，所以 $\Phi(z)(i) = \Psi(z)(i)$，所以 $\Psi = \Phi$. $\square$

命题 1.4 (群范畴和向量空间范畴的积). 群范畴和向量空间范畴的积的构造与集合范畴一致，运算按照逐分量定义.

例 1.5. 令 $(P, \leq)$ 是偏序集，其可以视为一个范畴. 给定一族对象 $\{X_i\}_{i\in I}$，也即 P 中的一些元素. 可以证明

$$\prod_{i\in I} X_i = \begin{cases} \inf\big(\{X_i\}_{i\in I}\big) & \{X_i\}_{i\in I} \text{ 的最大的下界}, \\ \varnothing & \text{若不存在下确界}. \end{cases}$$

对于任意对象 $Z \in P$，若 $f_i : Z \to X_i$ 是态射，也即 $Z \leq X_i$，那么 $Z \leq \prod_{i\in I} X_i$，这表明存在态射 $\Phi : Z \to \prod_{i\in I} X_i$，于是 $Z \leq \prod_{i\in I} X_i \leq X_i$，即 $f_i = p_i \circ \Phi$.

2 余积

定义 2.1. 令 C 是范畴，$\{X_i\}_{i\in I}$ 是 C 中的一族对象. 如果对象 $C \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})$ 和一族态射 $\{\iota_i : X_i \to C\}_{i\in I}$ 满足下面的范性质：给定任意 $Z \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})$ 和一族态射 $\{f_i : X_i \to Z\}_{i\in I}$，都存在唯一的态射 $\Phi : C \to Z$ 使得对于每个 $i \in I$ 都有 $f_i = \Phi \circ \iota_i$，也即下面的交换图成立：

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[d, "\iota_i"'] \arrow[dr, "f_i"] & \\ C \arrow[r, dashed, "\exists!\Phi"'] & Z. \end{tikzcd}$$

那么我们说 $\big(C, \{\iota_i : X_i \to C\}_{i\in I}\big)$ 是 $\{X_i\}_{i\in I}$ 的余积.

可以看出，C 中的余积实际上就是反范畴 C^{op} 中的积. 所以不难证明余积也是唯一的.

命题 2.2 (集合范畴的余积). 令 $\{X_i\}_{i\in I}$ 是 Set 中的一族对象. 那么 Set 中的余积是集合的无交并：

$$\coprod_{i\in I} X_i = \bigcup_{i\in I} \big(X_i \times \{i\}\big),$$

附带自然的嵌入映射.

Proof. 任取 $Z \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Set})$ 以及态射 $\{f_i : X_i \to Z\}_{i\in I}$, 定义 $\Phi : \coprod_{i\in I} X_i \to Z$ 为

$$\Phi(x_i, i) = f_i(x_i).$$

根据定义立马得出 $f_i = \Phi \circ \iota_i$. 假设 $\Psi : \coprod_{i\in I} X_i \to Z$ 也满足 $f_i = \Psi \circ \iota_i$. 那么对于每个 $i \in I$ 和 $x_i \in X_i$, 有 $\Phi(x_i, i) = f_i(x_i) = \Psi(x_i, i)$, 这就表明 $\Psi = \Phi$. □

命题 2.3 (Abel 群范畴的余积). 令 $\{X_i\}_{i\in I}$ 是 Ab 中的一族对象，那么 Ab 中的余积是直和

$$\bigoplus_{i\in I} X_i = \left\{ (g_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i \;\middle|\; \text{只有有限多个 } g_i \text{ 是非平凡的} \right\}.$$

附带同态映射 $\iota_i : X_i \to \bigoplus_{i\in I} X_i$ 为

$$\iota_i(x_i)(j) = \begin{cases} x_i & j = i, \\ 0_{X_i} & j \neq i. \end{cases}$$

Proof. 任取 $Z \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Ab})$ 以及态射 $\{f_i : X_i \to Z\}_{i\in I}$, 定义 $\Phi : \bigoplus_{i\in I} X_i \to Z$ 为

$$\Phi\big((g_i)_{i\in I}\big) = \sum_{i\in I} f_i\big(g_i(i)\big).$$

注意右边只有有限多项不为 0_Z, 所以求和是有意义的. 根据定义, 对于每个 $j \in I$, 有

$$\Phi \circ \iota_j(x_j) = \sum_{i\in I} f_i\big(\iota_j(x_j)(i)\big) = f_j\big(\iota_j(x_j)(j)\big) = f_j(x_j),$$

所以 $f_j = \Phi \circ \iota_j$. 假设 $\Psi : \bigoplus_{i\in I} X_i \to Z$ 也满足 $f_j = \Psi \circ \iota_j$. 对于任意 $(g_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} X_i$, 假设 $g_{i_1}, \dots, g_{i_k}$ 是非平凡的, 那么有

$$\Psi\big((g_i)_{i\in I}\big) = \Psi\left(\sum_{r=1}^{k} g_{i_r}\right) = \sum_{r=1}^{k} \Psi\big(g_{i_r}\big) = \sum_{r=1}^{k} \Psi \circ \iota_{i_r}\big(g_{i_r}(i_r)\big) = \sum_{r=1}^{k} f_{i_r}\big(g_{i_r}(i_r)\big) = \Phi\big((g_i)_{i\in I}\big),$$

这就表明 $\Psi = \Phi$. □

命题 2.4. 向量空间范畴的余积和 Abel 群范畴的余积构造相同.

注意, 群范畴中的余积并不是 Abel 群范畴中直和的构造. 在 Ab 中, 对于直和 $X_1 \oplus X_2$, 同态 $f_1 : X_1 \to Z$ 和 $f_2 : X_2 \to Z$ 导出同态 $f : X_1 \oplus X_2 \to Z$, 满足 $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$. 而 f 是群同态要求

$$f(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = f_1(x_1 + y_1) + f_2(x_2 + y_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_1(y_1) + f_2(y_2),$$

这里是使用了 Z 的交换性的. 所以说这种构造不适用于一般的群范畴. 为了构造群范畴的余积, 我们需要定义一种名为**自由积**的新概念.

定义 2.5. 令 $\{X_s\}_{s\in S}$ 的一族群.

(1) $\{X_s\}_{s\in S}$ 中的**既约字**指的是一个有限长序列 $(x_1,\dots,x_m)$ 满足：
- 每个 x_i 都是某个群 X_s 中的元素，
- 每个 x_i 都不是某个群 X_s 的单位元，
- 任意两个连续的 x_j 是两个不同群的元素.

此外，我们允许空序列 $()$.

(2) 记 $\ast_{s\in S} X_s$ 为所有既约字的集合.

(3) 令 $(x_1,\dots,x_m)$ 和 $(y_1,\dots,y_n)$ 是 $\ast_{s\in S} X_s$ 中的两个元素. 我们定义乘法如下：

(a) 若 x_m 和 y_1 属于不同的群，那么定义

$$(x_1,\dots,x_m)\cdot(y_1,\dots,y_n)=(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n).$$

(b) 若 x_m 和 y_1 是同一个群的元素. 令 $j\in\{1,\dots,\min\{m,n\}\}$ 是使得 x_{m+1-i} 和 y_i 处于同一个群并且 $x_{m+1-i}=y_i^{-1}$ 的最大的数. 如果 $j<\min\{m,n\}$，那么定义

$$(x_1,\dots,x_m)\cdot(y_1,\dots,y_n)=(x_1,\dots,x_{m-j}\cdot y_{j+1},\dots,y_n).$$

如果 $j=m$，那么定义

$$(x_1,\dots,x_m)\cdot(y_1,\dots,y_n)=(y_{m+1},\dots,y_n).$$

如果 $j=n$，那么定义

$$(x_1,\dots,x_m)\cdots(y_1,\dots,y_n)=(x_1,\dots,x_{m-n}).$$

(4) 我们说 $\ast_{s\in S} X_s$ 附带上述乘法是 X_s 的自由积. 对于有限多个 $X_1,\dots,X_k$，记作 $X_1\ast\cdots\ast X_k$.

例 2.6. 考虑自由积 $\langle s\rangle\ast\langle t\rangle$. 其中的元素形如 (s^3,t^{-5},s^2) 以及 (s^{-2},t^4,s^2,t^{-1}). 它们的自由积为

$$(s^3,t^{-5},s^2)\cdot(s^{-2},t^4,s^2,t^{-1})=(s^3,t^{-1},s^2,t^{-1}).$$

注意 $(s)\cdot(t)=(s,t)\neq(t,s)=(t)\cdot(s)$，所以自由积一般来说是高度非交换的.

引理 2.7. 令 $\{X_s\}_{s\in S}$ 是一族群. 那么自由积 $\ast_{s\in S} X_s$ 确实是一个群. $\ast_{s\in S} X_s$ 的单位元是空序列 $()$. $(x_1,\dots,x_m)\in\ast_{s\in S} X_s$ 的逆元是 $(x_m^{-1},\dots,x_1^{-1})\in\ast_{s\in S} X_s$.

Proof. 验证结合律是非常繁琐的，这里略去. □

命题 2.8 (群范畴的余积). 令 $\{X_s\}_{s\in S}$ 是一族群. 对于任意 $t\in S$，定义映射 $\iota_t: X_t\to\ast_{s\in S} X_s$ 为

$$\iota_t(x_t)=\begin{cases}(x_t) & x_t\neq e,\\ () & x_t=e.\end{cases}$$

那么 ι_t 是单同态. 并且 $\ast_{s\in S} X_s$ 附带同态 $\iota_t: X_t\to\ast_{s\in S} X_s$ 是 Grp 中的余积.

Proof. 验证 ι_t 是单同态只需要按照定义即可. 任取 $Z \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Grp})$ 和一族群同态 $\{f_s : X_s \to Z\}_{s\in S}$, 定义 $\Phi : \ast_{s\in S} X_s \to Z$ 为

$$\Phi(x_1, \ldots, x_m) = f_{s_1}(x_1) \cdots f_{s_m}(x_m),$$

其中 $x_i \in X_{s_i}$. 不难验证 Φ 是群同态. 任取 $s \in S$, 有

$$\Phi(\iota_s(x_s)) = \Phi((x_s)) = f_s(x_s),$$

所以 $f_s = \Phi \circ \iota_s$. 下面只需要说明 Φ 的唯一性. 假设群同态 $\Psi : \ast_{s\in S} \to Z$ 也满足 $f_s = \Psi \circ \iota_s$. 那么对于任意 $s \in S$, 有

$$\Psi(x_1, \ldots, x_m) = \Psi\left(\iota_{s_1}(x_1) \cdots \iota_{s_m}(x_m)\right) = f_{s_1}(x_1) \cdots f_{s_m}(x_m) = \Phi(x_1, \ldots, x_m),$$

所以 $\Psi = \Phi$. $\square$