

---

# Contents

<b>1</b>	<b>范畴、函子和自然变换</b>	<b>1</b>
1.1	范畴 .....	1
1.2	函子 .....	3



# 范畴、函子和自然变换

## 1.1 范畴

定义 1.1. 一个**范畴**  $A$  由以下内容组成：

- 一族**对象**  $\text{ob}(A)$ ;
- 对于每个  $A, B \in \text{ob}(A)$ , 存在一族从  $A$  到  $B$  的**态射**  $\text{Hom}(A, B)$ ;
- 对于每个  $A, B, C \in \text{ob}(A)$ , 有一个**复合映射**:

$$\text{Hom}(A, B) \times \text{Hom}(B, C) \rightarrow \text{Hom}(A, C), \quad (g, f) \mapsto g \circ f;$$

- 对于每个  $A \in \text{ob}(A)$ , 存在  $A$  上的**单位**  $1_A \in \text{Hom}(A, A)$ ,

此外态射需要满足：

- 对于每个  $f \in \text{Hom}(A, B)$ ,  $g \in \text{Hom}(B, C)$  与  $h \in \text{Hom}(C, D)$ , 有  $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ ;
- 对于每个  $f \in \text{Hom}(A, B)$ , 有  $f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$ .

注释 1.2. 我们通常使用  $A \in A$  表示  $A \in \text{ob}(A)$ ,  $f : A \rightarrow B$  或者  $A \xrightarrow{f} B$  表示  $f \in \text{Hom}(A, B)$ ,  $gf$  表示  $g \circ f$ .

例 1.3 (数学结构的范畴). (a) 集合范畴 **Set**. 对象为集合, 给定集合  $A, B$ ,  $A$  到  $B$  的态射就是集合意义下  $A$  到  $B$  的映射, 态射的复合即映射的复合, 此时单位  $1_A$  就是恒等映射  $A \rightarrow A$ .

(b) 群范畴 **Grp**. 对象为群, 态射为群同态.

(c) 环范畴 **Ring**. 对象为环, 态射为环同态.

(d) 给定域  $k$ , 有  $k$  上的向量空间范畴 **Vect<sub>k</sub>**, 对象是向量空间, 态射是线性映射.

(e) 拓扑空间范畴 **Top**. 对象是拓扑空间, 态射是连续映射.

定义 1.4. 对于态射  $f : A \rightarrow B$ , 如果存在态射  $g : B \rightarrow A$  使得  $gf = 1_A$  以及  $fg = 1_B$ , 那么我们说  $f$  是**同构**. 此时我们说  $g$  是  $f$  的**逆**, 记为  $g = f^{-1}$ .

如果  $A$  到  $B$  之间存在一个同构, 那么我们说  $A$  和  $B$  **同构**, 记作  $A \cong B$ .

例 1.5. **Set** 中的同构等同于双射. 当然, 这句话在逻辑上其实是在表明: 一个映射具有双边逆映射当且仅当它是双射.

**例 1.6.** Grp 中的同构等同于群同构. 在一些抽象代数教材中, 群同构被定义为双射的群同态, 如果是这样, 那么实际上需要证明: 双射的群同态的逆映射也是群同态. 类似地, Ring 中的同构等同于环同构.

**例 1.7.** Top 中的同构是同胚. 与 Grp 或者 Ring 不同的是, Top 中双射的连续映射不一定是同构, 即连续映射的逆映射可以是连续的. 下面是一个经典的例子: 考虑映射  $f: [0, 1) \rightarrow S^1$  为  $f(t) = e^{2\pi it}$ ,  $f$  是双射的连续映射, 但是  $f$  不是同胚, 因为  $[0, 1)$  不是紧的, 但是  $S^1$  是紧的.

目前为止范畴的例子中对象都是具有某些结构的集合 (例如群结构、拓扑结构或者只有集合结构), 态射都是保持这些结构的映射 (群同态、连续映射或者普通的映射). 但是, 并非所有的范畴都长成这样, 实际上范畴的含义相当广泛, 其对象也不一定是“配备了额外结构的集合”, 因此在一般的范畴中, 谈论对象的“元素”是没有意义的. 类似地, 在一般意义上的范畴中, 态射也不必是集合之间的映射. 总的来说: **范畴的对象不必类似于集合, 态射也不必类似于映射**. 下面的例子解释了这些观点.

**例 1.8** (范畴作为数学结构). (a) 一个范畴可以通过直接说出对象、态射、复合和单位来指定. 例如空范畴  $\emptyset$ , 其没有任何对象或者态射. 范畴 **1** 由一个对象和唯一的单位态射构成. 也可以构造一个只有两个对象的范畴:

$$\bullet \longrightarrow \bullet,$$

这个范畴只有两个对象, 每个对象有一个单位态射, 两个对象之间有唯一的一个非单位态射. 在这些例子中, 我们并没有将对象视为一个类似集合的东西, 也没有将态射视为一个映射, 此时态射更多的类似于一个抽象的“箭头”.

- (b) 有些范畴中的态射只有单位态射, 即任意两个不同的对象之间都不存在任意态射, 这样的范畴被称为**离散范畴**. 离散范畴是最极端的情况, 即不同的对象之间完全隔离.
- (c) 一个群本质上和只有一个对象且所有态射都是同构的范畴是一样的. 我们来说明这一点. 考虑只有一个对象的范畴  $A$ , 记这个对象为  $A$ , 那么范畴  $A$  的态射只有  $\text{Hom}(A, A)$ . 我们要求  $A$  中的每个态射都是同构, 也就是说每个  $f \in \text{Hom}(A, A)$  都有一个逆  $g \in \text{Hom}(A, A)$  使得  $fg = 1_A = gf$ . 实际上这样的范畴  $A$  和群没有本质区别, 对应关系如下所示.

范畴 $A$	群 $G$
态射 $f \in \text{Hom}(A, A)$	元素 $g \in G$
态射的复合 $\circ$	元素的乘法 $\cdot$
单位态射 $1_A$	单位元 $1 \in G$

- (d) 在上一个例子中, 由于态射的逆不一定是必须的, 所以考虑“没有逆元的群”也是必要的, 这被称为**么半群**. 具有一个对象的范畴本质上和么半群是相同的, 其论证完全仿照上例.

(e) 一个**预序**指的是满足自反性和传递性的二元关系. 一个**预序集**  $(S, \leq)$  指的是一个集合  $S$  配备预序  $\leq$ . 例如  $S = \mathbb{Z}$ ,  $\leq$  是整除关系.

一个预序集可以被视为范畴  $A$ , 其中对于每个  $A, B \in A$ , 至多只有一个从  $A$  到  $B$  的态射. 此时我们用  $A \leq B$  来表示存在态射  $A \rightarrow B$ . 因为  $A$  是范畴, 所以  $A \leq B \leq C$  表明  $A \leq C$ . 由于始终存在  $A \rightarrow A$  的态射 (即  $1_A$ ), 所以  $A \leq A$ . 所以  $A$  实际上就表示了一族对象, 配备了一个具备自反性和传递性的二元关系.

一个**偏序**指的是满足  $A \leq B, B \leq A \Rightarrow A = B$  的预序  $\leq$ . 等价地说, 即上述范畴  $A$  中若  $A \cong B$  能推出  $A = B$ .

**例 1.9 (反范畴).** 每个范畴  $A$  都有一个**反范畴**  $A^{\text{op}}$ , 其定义为将  $A$  的所有箭头反向. 准确的说, 有  $\text{ob}(A^{\text{op}}) = \text{ob}(A)$ , 对于任意对象  $A, B$ , 有  $\text{Hom}_{A^{\text{op}}}(A, B) = \text{Hom}_A(B, A)$ . 此时  $A^{\text{op}}$  中若有  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ , 那么意味着在  $A$  中有  $A \xleftarrow{f} B \xleftarrow{g} C$ .

**例 1.10 (积范畴).** 给定两个范畴  $A$  和  $B$ , 构造**积范畴**  $A \times B$ , 满足

$$\begin{aligned} \text{ob}(A \times B) &= \text{ob}(A) \times \text{ob}(B), \\ \text{Hom}((A, B), (A', B')) &= \text{Hom}(A, A') \times \text{Hom}(B, B'). \end{aligned}$$

即态射  $(A, B) \rightarrow (A', B')$  是一对  $(f, g)$ , 其中  $f : A \rightarrow A'$  是  $A$  中的态射,  $g : B \rightarrow B'$  是  $B$  中的态射.

## 1.2 函子

**定义 1.11.** 令  $A, B$  是范畴, **函子**  $F : A \rightarrow B$  由以下内容组成:

- 映射  $\text{ob}(A) \rightarrow \text{ob}(B)$ , 记作  $A \mapsto F(A)$ ;
- 对于每个  $A, A' \in A$ , 有映射  $\text{Hom}(A, A') \rightarrow \text{Hom}(F(A), F(A'))$ , 记作  $f \mapsto F(f)$ .

还要满足:

- 当  $A$  中有  $A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{f'} A''$  的时候, 有  $F(f' \circ f) = F(f') \circ F(f)$ ;
- 对于任意  $A \in A$ , 有  $F(1_A) = 1_{F(A)}$ .