Contents

1

测度和积分

1.1 可测空间

令 E 是集合, $\mathcal{E}$ 是 E 的一个子集族. 若对于任意 $A, B \in \mathcal{E}$ 有 $A \cap B \in \mathcal{E}$, 那么我们说 $\mathcal{E}$ **对交封闭**. 如果 $\mathcal{E}$ 中任意可数个集合的交还在 $\mathcal{E}$ 中, 那么我们说 $\mathcal{E}$ 对可数交封闭. 类似地, 我们可以定义对补封闭、对并封闭和对可数并封闭的概念.

σ-代数

如果 E 的非空子集族 $\mathcal{E}$ 对补和有限并封闭, 那么我们说 $\mathcal{E}$ 是 E 上的**代数**. 如果其对补和可数并封闭, 那么我们说 $\mathcal{E}$ 是 E 上的 **σ-代数**, 即:

a) $A \in \mathcal{E} \Rightarrow E \setminus A \in \mathcal{E}$,
b) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{E} \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{E}$.

由于 $\left(\bigcup_n A_n\right)^c = \bigcap_n A_n^c \in \mathcal{E}$, 所以对补和可数并封闭可以自然导出对可数交封闭, 即 σ-代数对可数交也封闭.

任取 $A \in \mathcal{E}$, 那么 $E = A \cup (E \setminus A) \in \mathcal{E}$, 所以 E 上任意 σ-代数都至少包含 E 和 $\emptyset$. 事实上, $\mathcal{E} = \{E, \emptyset\}$ 是 E 上的最简单的 σ-代数, 被称为**平凡 σ-代数**. E 上最大的 σ-代数当然是 $\mathcal{E} = 2^E$, 即 $\mathcal{E}$ 就是 E 的幂集, 被称为**离散 σ-代数**.

不难看出, E 上一族 σ-代数的任意交 (不一定可数) 还是 E 上的 σ-代数. 给定 E 的一个子集族 $\mathcal{C}$, 我们可以考虑所有包含 $\mathcal{C}$ 的 σ-代数 (总是存在至少一个这样的 σ-代数, 即 2^E), 将这些 σ-代数取交集, 我们便得到了包含 $\mathcal{C}$ 的最小的 σ-代数, 被称为**由 $\mathcal{C}$ 生成的** σ-代数, 记为 $\sigma\mathcal{C}$.

如果 E 是拓扑空间, 由 E 的所有开集族生成的 σ-代数被称为 E 上的 **Borel σ-代数**, 记为 $\mathcal{B}(E)$ 或者 $\mathcal{B}_E$, 其元素被称为 **Borel 集**.

p-系和 d-系

对于 E 的子集族 $\mathcal{C}$, 如果其对交封闭, 那么我们说 $\mathcal{C}$ 是一个 p-系, 这里 p 代表 product, 是“交”的另一种说法. E 的子集族 $\mathcal{D}$ 被称为 d-系, 如果其满足:

a) $E \in \mathcal{D}$,

b) $A, B \in \mathcal{D}$ and $A \supseteq B \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{D}$,

c) $(A_n) \subseteq \mathcal{D}$ and $A_n \nearrow A \Rightarrow A \in \mathcal{D}$.

其中 $(A_n) \subseteq D$ 表明 (A_n) 是 D 中的集合序列, $A_n \nearrow A$ 表明这个序列递增于极限 A:

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A.$$

显然一个 σ-代数既是 p-系又是 d-系, 其反面也是成立的. 所以 p-系和 d-系是产生 σ-代数的原始结构.

命题 1.1. E **的子集族是** σ**-代数当且仅当其既是 p-系又是 d-系.**

Proof. ($\Rightarrow$) 若 $\mathcal{E}$ 是 σ-代数, 其显然是 p-系并且满足 d-系的条件 (a) 和 (c). 下面我们验证其满足 d-系的条件 (b). 任取 $A, B \in \mathcal{E}$ 且 $A \supseteq B$, 那么 $A \setminus B = A \cap (E \setminus B) \in \mathcal{E}$, 所以 $\mathcal{E}$ 是 d-系.

($\Leftarrow$) 若 $\mathcal{E}$ 既是 p-系又是 d-系. 任取 $A \in \mathcal{E}$, 根据 d-系的 (a) 和 (b), 我们有 $E \setminus A \in \mathcal{E}$. 所以 $\mathcal{E}$ 对补封闭. 然后我们说明对并封闭. 任取 $A, B \in \mathcal{E}$, 由于

$$A \cup B = E \setminus (A \cup B)^c = E \setminus (A^c \cap B^c),$$

结合 p-系对交封闭, 所以 $A \cup B \in \mathcal{E}$. 最后我们说明对可数并封闭. 如果 $(A_n) \subseteq \mathcal{E}$, 令 $B_n = A_1 \cup \cdots \cup A_n$, 那么 $(B_n) \subseteq \mathcal{E}$ 且 $B_n \nearrow A$, 根据 d-系的 (c), 所以 $A \in \mathcal{E}$, 故 $\mathcal{E}$ 对可数并封闭. □

下面的引理为本节的主要定理做准备.

引理 1.2. **令** $\mathcal{D}$ **是** E **上的 d-系, 固定** $D \in \mathcal{D}$**, 令**

$$\hat{\mathcal{D}} = \{A \in \mathcal{D} : A \cap D \in \mathcal{D}\},$$

那么 $\hat{\mathcal{D}}$ **仍然是 d-系.**

$\boxed{\text{单调类定理}}$

这是一个非常有用的工具来证明某些集族是 σ-代数.

定理 1.3. **如果一个 d-系包含一个 p-系, 那么其包含这个 p-系生成的** σ**-代数.**

Proof. 设 $\mathcal{C}$ 是一个 p-系. 令 $\mathcal{D}$ 是包含 $\mathcal{C}$ 的最小的 d-系, 即包含 $\mathcal{C}$ 的所有 d-系的交 (不难看出 d-系的任意交是 d-系). 我们证明 $\mathcal{D}$ 实际上是一个 σ-代数, 这样包含 $\mathcal{C}$ 的任意 d-系都包含 $\mathcal{D}$, 而 $\mathcal{D}$ 作为包含 $\mathcal{C}$ 的 σ-代数, 其包含 $\sigma\mathcal{C}$. 根据 命题 1.1, 只需要说明 $\mathcal{D}$ 既是 p-系又是 d-系, 而 $\mathcal{D}$ 已经是 d-系, 所以只需要说明 $\mathcal{D}$ 是 p-系.

我们首先说明对于任意的 $D \in \mathcal{D}$ 和 $C \in \mathcal{C}$, 有 $D \cap C \in \mathcal{D}$. 令

$$\mathcal{D}_1 = \{A \in \mathcal{D} : A \cap C \in \mathcal{D}\},$$

根据 引理 1.2, $\mathcal{D}_1$ 是 d-系. 由于 $\mathcal{C}$ 是 p-系, 所以 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}_1$, 即 $\mathcal{D}_1$ 是包含 $\mathcal{C}$ 的 d-系, 所以 $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}_1$. 这就表明 $D \in \mathcal{D}_1$, 即 $D \cap C \in \mathcal{D}$.

下面说明对于任意的 $D, B \in \mathcal{D}$, 有 $D \cap B \in \mathcal{D}$. 令

$$\mathcal{D}_2 = \{A \in \mathcal{D} : A \cap D \in \mathcal{D}\}.$$

同样根据 引理 1.2, $\mathcal{D}_2$ 是 d-系. 根据上面的叙述, 有 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}_2$, 即 $\mathcal{D}_2$ 是包含 $\mathcal{C}$ 的 d-系, 所以 $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}_2$, 这就表明 $B \in \mathcal{D}_2$, 即 $D \cap B \in \mathcal{D}$. 这就证明了 $\mathcal{D}$ 是 p-系. □

可测空间

一个**可测空间**指的是二元组 $(E, \mathcal{E})$, 其中 E 是集合, $\mathcal{E}$ 是 E 上的 σ-代数. 此时, $\mathcal{E}$ 的元素被称为**可测集**. 当 E 是拓扑空间, $\mathcal{E} = \mathcal{B}_E$ 的时候, 可测集也被称为 **Borel 集**.

可测空间的积

令 $(E, \mathcal{E})$ 和 $(F, \mathcal{F})$ 是可测空间. 如果 $A \in \mathcal{E}$ 和 $B \in \mathcal{F}$, 那么 $A \times B$ 被称为**可测矩形**. 我们用 $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ 表示 $E \times F$ 上的由可测矩形集族生成的 σ-代数, 被称为**乘积 σ-代数**. 可测空间 $(E \times F, \mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$ 被称为 $(E, \mathcal{E})$ 和 $(F, \mathcal{F})$ 的积, 我们通常使用 $(E, \mathcal{E}) \times (F, \mathcal{F})$ 来表示.

Exercises

1-1 (划分生成 σ-代数)

a) 令 $\mathcal{C} = \{A, B, C\}$ 是 E 的一个划分，列出 $\sigma\mathcal{C}$ 的元素.
b) 令 $\mathcal{C}$ 是 E 的 (可数) 划分. 证明 $\sigma\mathcal{C}$ 的每个元素都是 $\mathcal{C}$ 中元素的可数并.
c) 令 $E = \mathbb{R}$，$\mathcal{C}$ 是 $\mathbb{R}$ 的所有单点子集构成的子集族. 证明 $\sigma\mathcal{C}$ 的元素要么是可数集要么是可数集的补集. 这表明从直观上来看，$\sigma\mathcal{C}$ 要比 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 小得多，例如开区间 $(0, 1)$ 属于后者但是不属于前者.

Solution. (a) 令

$$\mathcal{E} = \{A, B, C, A \cup B, A \cup C, B \cup C, E\},$$

显然 $\mathcal{E}$ 是一个 σ-代数. 对于任意包含 $\mathcal{C}$ 的 σ-代数, 由于其对并封闭, 所以其必须包含 $\mathcal{E}$, 所以 $\mathcal{E} = \sigma\mathcal{C}$.

(b) 令 $\mathcal{E}$ 为 $\mathcal{C}$ 中元素的所有可数并构成的集族. 根据 σ-代数对可数并的封闭性, 所以 $\sigma\mathcal{C} \supseteq \mathcal{E}$. 设 (A_n) 构成 E 的可数划分, 即 (A_n) 两两不相交且 $E = \bigcup_n A_n$. 任取 $\bigcup_k A_{n_k} \in \mathcal{E}$, 那么 $E \setminus \left(\bigcup_k A_{n_k}\right)$ 依然是某些 (A_n) 的可数并, 所以 $E \setminus \left(\bigcup_k A_{n_k}\right) \in \mathcal{E}$, 即 $\mathcal{E}$ 对补封闭, 所以 $\mathcal{E}$ 是 σ-代数, 所以 $\mathcal{E} = \sigma\mathcal{C}$.

(c) 令 $\mathcal{E}$ 为 $\mathbb{R}$ 的可数子集和补集可数的子集构成的子集族. 显然 $\mathcal{E} \subseteq \sigma\mathcal{C}$ 且不难验证 $\mathcal{E}$ 是一个 σ-代数 (可数个可数集的并是可数集), 所以 $\mathcal{E} = \sigma\mathcal{C}$. ■

1-2 ($\mathbb{R}$ 上的 Borel σ-代数) $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ 的任意开子集都是开区间的可数并. 使用这一事实证明 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 由所有开区间构成的子集族生成.

Proof. 设 $\mathcal{C}$ 为所有开区间构成的子集族, $\mathcal{T}$ 为所有开集构成的子集族 (即 $\mathbb{R}$ 上的拓扑). 显然 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$, 所以 $\sigma\mathcal{C} \subseteq \sigma\mathcal{T} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. 由于 $\mathcal{T}$ 中集合都是 $\mathcal{C}$ 中集合的可数并, 所以 $\mathcal{T} \subseteq \sigma\mathcal{C}$, 这表明 $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\mathcal{T} \subseteq \sigma\mathcal{C}$. 所以 $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\mathcal{C}$ 由所有开区间构成的子集族生成. □

1-3 ($\mathbb{R}$ 上的 Borel σ-代数) 证明: $\mathbb{R}$ 中的任意区间都是 Borel 集. 特别的, $(-\infty, x), (-\infty, x], (x, y], [x, y]$ 都是 Borel 集. 对于每个 x, 单点集 $\{x\}$ 也是 Borel 集.

Proof. 只需注意到

$$(-\infty, x) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n + x, x)\,, (-\infty, x] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, x + \frac{1}{n}\right),$$
$$(x, y] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(x, y + \frac{1}{n}\right), [x, y] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(x - \frac{1}{n}, y\right], \{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(x - \frac{1}{n}, x\right].$$

所以上述集合都是 Borel 集, 对于其他的区间同理. □

1-4 ($\mathbb{R}$ 上的 Borel σ-代数) 证明 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 可以由以下任意一种集族生成 (实际上还有很多可能):

a) 所有形如 $(-\infty, x]$ 的区间构成的子集族.
b) 所有形如 $(x, y]$ 的区间构成的子集族.
c) 所有形如 $[x, y]$ 的区间构成的子集族.
d) 所有形如 $(x, +\infty)$ 的区间构成的子集族.

此外, 在每种情况中 x, y 可以被限制为有理数.

Proof. (a) 记该集族为 $\mathcal{C}$, 由上题, 这样的区间已经是 Borel 集, 所以 $\sigma\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$. 任取 $\mathbb{R}$ 的开区间 (x, y), 有

$$(x, y) = (-\infty, x]^c \cap (-\infty, y) = (-\infty, x]^c \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, y - \frac{1}{n}\right] \in \sigma\mathcal{C},$$

而 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 由所有开区间生成, 所以 $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \sigma\mathcal{C}$. 所以 $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\mathcal{C}$.

(b) (c) (d) 完全同理. □

1-5 (迹空间) 令 $(E,\mathcal{E})$ 是可测空间，固定 $D\subseteq E$，令

$$\mathcal{D}=\mathcal{E}\cap D=\{A\cap D : A\in\mathcal{E}\}.$$

证明 $\mathcal{D}$ 是 D 上的 σ-代数，被称为 $\mathcal{E}$ 在 D 上的**迹**. $(D,\mathcal{D})$ 也被称为 $(E,\mathcal{E})$ 在 D 上的迹.

Proof. 任取 $A\cap D\in\mathcal{D}$, 其中 $A\in\mathcal{E}$, 那么

$$D\setminus(A\cap D)=(E\setminus A)\cap D\in\mathcal{D},$$

所以 $\mathcal{D}$ 对补封闭. 任取 $(A_n\cap D)\subseteq\mathcal{D}$, 那么

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap D)=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cap D\in\mathcal{D},$$

所以 $\mathcal{D}$ 对可数并封闭. □

1-6 (子集的 Borel σ-代数是迹) 设 $(E,\mathcal{T})$ 是拓扑空间，$(D,\mathcal{T}_D)$ 是子空间. 证明 D 上的 Borel σ-代数 $\mathcal{B}_D$ 与 D 在 E 上的迹 $\mathcal{B}_E\cap D$ 相同.

Proof. 由于 $\mathcal{T}_D=\mathcal{T}\cap D\subseteq\mathcal{B}_E\cap D$, 由上题 $\mathcal{B}_E\cap D$ 是 σ-代数, 所以 $\mathcal{B}_D\subseteq\mathcal{B}_E\cap D$. 记

$$\mathcal{C}=\{A\subseteq E : A\cap D\in\mathcal{B}_D\},$$

那么 $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{C}$. 我们只需要证明 $\mathcal{C}$ 是 E 上的 σ-代数, 那么就有 $\mathcal{C}\supseteq\sigma\mathcal{T}=\mathcal{B}_E$, 即 $\mathcal{B}_D\supseteq\mathcal{C}\cap D\supseteq\mathcal{B}_E\cap D$. 任取 $A\in\mathcal{C}$, 那么 $(E\setminus A)\cap D=D\setminus(A\cap D)\in\mathcal{B}_D$, 所以 $E\setminus A\in\mathcal{C}$. 任取 $(A_n)\subseteq\mathcal{C}$, 那么

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cap D=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap D)\in\mathcal{B}_D,$$

所以 $\bigcup_n A_n\in\mathcal{C}$. 这就表明 $\mathcal{C}$ 是 E 上的 σ-代数. □

1.2 可测函数

可测函数

令 $(E,\mathcal{E})$ 和 $(F,\mathcal{F})$ 是可测空间, 映射 $f:E\to F$ 如果使得任取 $B\in\mathcal{F}$, 有 $f^{-1}B\in\mathcal{E}$, 那么我们说 f 相对于 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{F}$ **可测**.

命题 1.4. 映射 $f:E\to F$ 相对于 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{F}$ 可测当且仅当对于任意生成 $\mathcal{F}$ 的子集族 $\mathcal{F}_0$，任取 $B\in\mathcal{F}_0$，有 $f^{-1}B\in\mathcal{E}$.

Proof. 必要性显然. 下证充分性. 设 $\mathcal{F}_0$ 使得 $\mathcal{F}=\sigma\mathcal{F}_0$, 且对于任意的 $B\in\mathcal{F}_0$ 有 $f^{-1}B\in\mathcal{E}$. 记

$$\mathcal{F}_1=\{A\in\mathcal{F}: f^{-1}A\in\mathcal{E}\},$$

显然 $\mathcal{F}_0\subseteq\mathcal{F}_1\subseteq\mathcal{F}$. 由于

$$f^{-1}(F\setminus A)=E\setminus(f^{-1}A),\quad f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)=\bigcup_{i\in I}f^{-1}A_i,$$

所以 $\mathcal{F}_1$ 是 σ-代数, 所以 $\mathcal{F}=\mathcal{F}_1$, 即 f 相对于 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{F}$ 可测. □

命题 1.5. 给定可测空间 $(E,\mathcal{E}),(F,\mathcal{F}),(G,\mathcal{G})$, 如果 f 相对于 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{F}$ 可测, g 相对于 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 可测, 那么复合 $g\circ f$ 相对于 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{G}$ 可测.

Proof. 任取 $C\in\mathcal{G}$, 有

$$(g\circ f)^{-1}(C)=f^{-1}\left(g^{-1}(C)\right),$$

g 可测表明 $g^{-1}(C)\in\mathcal{F}$, f 可测表明 $f^{-1}\left(g^{-1}(C)\right)\in\mathcal{E}$, 所以 $g\circ f$ 相对于 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{G}$ 可测. □

$\boxed{\text{数值函数}}$

令 $(E,\mathcal{E})$ 是可测空间. 回顾实数及扩充实数 $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$, $\bar{\mathbb{R}}=[-\infty,+\infty]$, $\mathbb{R}_+=[0,+\infty)$, $\bar{\mathbb{R}}_+=[0,+\infty]$. E 上的**数值函数**指的是从 E 到 $\bar{\mathbb{R}}$ 或者 $\bar{\mathbb{R}}$ 的子集的映射. 如果这个映射的值在 $\mathbb{R}$ 中, 那么我们一般称其为**实值函数**.

E 上的数值函数如果相对于 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ 可测, 那么我们说其是 $\mathcal{E}$-可测的. 如果 E 是拓扑空间且 $\mathcal{E}=\mathcal{B}(E)$, 那么 $\mathcal{E}$-可测函数被称为 **Borel 函数**. 下面的命题是命题 1.4 的直接结果.

命题 1.6. 映射 $f:E\to\bar{\mathbb{R}}$ 是 $\mathcal{E}$-可测的当且仅当对于每个 $r\in\mathbb{R}$, $f^{-1}[-\infty,r]\in\mathcal{E}$.

上述命题中的 $[-\infty,r]$ 可以改为 $[-\infty,r)$, $[r,\infty]$, $(r,\infty]$ 中的任意一种.

$\boxed{\text{函数的正部分和负部分}}$

对于 $a,b\in\bar{\mathbb{R}}$, 我们记 $a\vee b$ 为 a 和 b 中的最大者, $a\wedge b$ 为 a 和 b 中的最小者. 对于函数 f,g, 用 $f\vee g$ 表示函数 $x\mapsto f(x)\vee g(x)$. 令 $(E,\mathcal{E})$ 是可测空间, f 是 E 上的数值函数. 那么

$$f^+=f\vee 0,\quad f^-=-(f\wedge 0)$$

都是非负函数并且 $f=f^+-f^-$. 函数 f^+ 被称为 f 的**正部分**, f^- 被称为 f 的**负部分**.

命题 1.7. 函数 f 是 $\mathcal{E}$-可测的当且仅当 f^+ 和 f^- 都是 $\mathcal{E}$-可测的.

Proof. 若 f 是 $\mathcal{E}$-可测的. 任取 $r\in\mathbb{R}$, 若 $r<0$, 则 $\left(f^{+}\right)^{-1}[-\infty,r]=\emptyset\in\mathcal{E}$. 若 $r\geq 0$, 则

$$\left(f^{+}\right)^{-1}[-\infty,r]=E\setminus\left(f^{+}\right)^{-1}(r,\infty]=E\setminus f^{-1}(r,\infty],$$

由于 $(r,\infty]$ 是 Borel 集, 所以 $\left(f^{+}\right)^{-1}[-\infty,r]\in\mathcal{E}$. 综合起来, f^{+} 是 $\mathcal{E}$-可测的. 同理可证 f^{-} 是 $\mathcal{E}$-可测的.

若 f^{+} 和 f^{-} 都是 $\mathcal{E}$-可测的. 任取 $r\in\mathbb{R}$, 若 $r<0$, 那么

$$f^{-1}[-\infty,r]=(f^{-})^{-1}[-r,\infty]\in\mathcal{E}.$$

若 $r\geq 0$, 那么

$$f^{-1}[-\infty,r]=E\setminus f^{-1}(r,\infty]=E\setminus\left(f^{+}\right)^{-1}(r,\infty]\in\mathcal{E}.$$

所以 f 是 $\mathcal{E}$-可测的. □

指示函数和简单函数

令 $A\subseteq E$, 定义 A 的指示函数为 1_A:

$$1_A(x)=\begin{cases}1 & x\in A,\\ 0 & x\notin A.\end{cases}$$

对于 1_E, 我们简记为 1. 显然, 1_A 是 $\mathcal{E}$-可测的当且仅当 $A\in\mathcal{E}$.

E 上的函数 f 如果形如

$$f=\sum_{i=1}^{n}a_i1_{A_i},$$

其中 $n\geq 1$, $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$, $A_1,\ldots,A_n$ 是可测集, 那么我们说 f 是**简单函数**. 在这个定义中, 若 $A_i\cap A_j\neq\emptyset$, 那么我们可以将 $a_i1_{A_i}+a_j1_{A_j}$ 拆为

$$a_i1_{A_i\setminus(A_i\cap A_j)}+(a_i+a_j)1_{A_i\cap A_j}+a_j1_{A_j\setminus(A_i\cap A_j)},$$

所以我们可以假设 A_i 两两不相交. 此外, 如果 $\bigcup_i A_i\neq E$, 记 $B=E\setminus\bigcup_i A_i\in\mathcal{E}$, 那么

$$f=\sum_{i=1}^{n}a_i1_{A_i}+0\cdot 1_B,$$

所以我们还可以假设 $\bigcup_i A_i=E$. 这意味着对于一个简单函数 f, 总存在整数 m, 不同的实数 $b_1,\ldots,b_m$ 和 E 的可测划分 $\{B_1,\ldots,B_m\}$ 使得 $f=\sum_{i=1}^{m}b_i1_{B_i}$, 这种表示被称为简单函数 f 的**标准型**.

利用简单函数的标准型, 很容易验证简单函数都是 $\mathcal{E}$-可测的. 反之, 若 f 是 $\mathcal{E}$-可测的, 只有有限个取值且值为实数, 那么 f 为简单函数. 特别地, 任意常值函数是简单函数. 最后, 如果 f,g 是简单函数, 那么

$$f+g,\quad f-g,\quad fg,\quad f/g,\quad f\vee g,\quad f\wedge g$$

都是简单函数, 其中 f/g 要求 g 的值始终非零.

函数列的极限

令 (f_n) 是 E 上的一列数值函数, 我们可以逐点定义

$$\inf f_n, \quad \sup f_n, \quad \liminf f_n, \quad \limsup f_n, \tag{1.1}$$

例如, $\inf f_n$ 将 $x \in E$ 送到实数列 $(f_n(x))$ 的下确界. 如果

$$\liminf f_n = \limsup f_n = f,$$

那么我们说 (f_n) 有逐点极限 f, 记为 $f = \lim f_n$ 或者 $f_n \to f$.

如果 (f_n) 单调递增, 即 $f_1 \leq f_2 \leq \cdots$, 那么根据单调有界定理, $\lim f_n$ 存在且等于 $\sup f_n$. 此时我们用 $f_n \nearrow f$ 来表示 (f_n) 单调递增且有极限 f. 类似地, 用 $f_n \searrow f$ 来表示 (f_n) 单调递减且有极限 f.

下面的定理表明可测函数类对极限操作是封闭的.

定理 1.8. **令 (f_n) 是一列 $\mathcal{E}$-可测函数，那么 (1.1) 中的四个函数都是 $\mathcal{E}$-可测的. 此外，如果 $\lim f_n$ 存在，那么 $\lim f_n$ 也是 $\mathcal{E}$-可测的.**

Proof. 记 $g = \sup f_n$. 任取 $r \in \mathbb{R}$, 注意到 $g(x) \leq r$ 当且仅当对于所有 n 有 $f_n(x) \leq r$. 所以

$$g^{-1}[-\infty, r] = \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}[-\infty, r],$$

f_n 可测表明 $f_n^{-1}[-\infty, r] \in \mathcal{E}$, 所以 $g^{-1}[-\infty, r] \in \mathcal{E}$, 即 g 可测.

对于 $\inf f_n$, 我们有 $\inf f_n = -\sup(-f_n)$, 所以 $\inf f_n$ 也可测. 最后, 注意到

$$\liminf f_n = \sup_m \inf_{n \geq m} f_n, \quad \limsup f_n = \inf_m \sup_{n \geq m} f_n,$$

所以 $\liminf f_n$ 和 $\limsup f_n$ 可测. 若二者相等, 那么 $\lim f_n$ 也可测. □

可测函数的逼近

引理 1.9. **对于 $n \in \mathbb{N}^*$，令**

$$d_n(r) = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} 1_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})}(r) + n 1_{[n,\infty]}(r), \quad r \in \bar{\mathbb{R}}_+.$$

那么，$d_n(r)$ 是 $\bar{\mathbb{R}}_+$ 上单调递增的简单函数，并且对于每个 $r \in \bar{\mathbb{R}}_+$，$d_n(r)$ 随着 n 的增大是的单调递增的.

Proof. 显然 $d_n(r)$ 是单调递增的简单函数, 我们证明任取 $r \in \bar{\mathbb{R}}_+$, $d_n(r)$ 是单调递增的. 若 $r = \infty$, 那么 $d_n(r) = n$ 是单调递增的. 现在假设 $r \in \mathbb{R}_+$, 那么存在正整数 m 使得 $m \leq r < m+1$, 所以当 $n \leq m$ 的时候, $d_n(r) = n$ 单调递增. 当 $n > m$ 的时候, 直观来看, d_n 将区间 $[0, n]$ 等分为 $n2^n$ 份, $r \in [0, n]$ 表明一定存在唯一的 k_n 使得

$(k_n-1)/2^n \le r < k_n/2^n$, 可以发现 k_n 满足递推关系 $k_{n+1}=2k_n-1$ 或者 $k_{n+1}=2k_n$, 这表明

$$d_{n+1}(r)=\frac{k_{n+1}-1}{2^{n+1}} \ge \frac{2k_n-2}{2^{n+1}}=\frac{k_n-1}{2^n}=d_n(r).$$

综上, $d_n(r)$ 随着 n 的增大是的单调递增的. □

定理 1.10. E 上的非负函数是 $\mathcal{E}$-可测的当且仅当其是一列单调递增的非负简单函数序列的极限.

Proof. 充分性来源于 定理 1.8. 对于必要性, 设 $f: E \to \bar{\mathbb{R}}_+$ 是 $\mathcal{E}$-可测的非负函数. 记 d_n 为上述引理中的函数, 令 $f_n = d_n \circ f$. 那么 f_n 是非负的 $\mathcal{E}$-可测函数, 并且其取值只有有限个, 所以是简单函数. 由于 (d_n) 单调递增, 所以 (f_n) 单调递增. 对于任意 $x \in E$, 由于 $f_n(x)=d_n(f(x))$, 所以 $n\to\infty$ 的时候 $f_n(x)\to f(x)$, 故 $f=\lim f_n$. □

函数的单调类

令 $\mathcal{M}$ 为 E 上数值函数的一个集合, 记 $\mathcal{M}_+$ 为 $\mathcal{M}$ 中非负函数组成的子集, $\mathcal{M}_b$ 为 $\mathcal{M}$ 中有界函数组成的子集.

如果 $\mathcal{M}$ 包含常值函数 1, $\mathcal{M}_b$ 构成 $\mathbb{R}$ 上的向量空间以及 $\mathcal{M}_+$ 在递增极限下封闭, 那么我们说 $\mathcal{M}$ 是一个**单调类**. 更准确地说, $\mathcal{M}$ 是单调类当且仅当:

a) $1 \in \mathcal{M}$,
b) 若 $f, g \in \mathcal{M}_b$ 且 $a, b \in \mathbb{R}$, 则 $af+bg \in \mathcal{M}$,
c) 若 $(f_n) \subseteq \mathcal{M}_+$ 且 $f_n \nearrow f$, 那么 $f \in \mathcal{M}$.

下面的定理通常被用于证明所有 $\mathcal{E}$-可测函数拥有的某一性质.

定理 1.11. 令 $\mathcal{M}$ 是 E 上函数的单调类. 假设对于某个生成 $\mathcal{E}$ 的 p-系 $\mathcal{C}$，任取 $A \in \mathcal{C}$，有 $1_A \in \mathcal{M}$. 那么，$\mathcal{M}$ 包含所有的非负 $\mathcal{E}$-可测函数以及所有的有界 $\mathcal{E}$-可测函数.

Proof. 首先证明对于任意的 $A \in \mathcal{E}$ 有 $1_A \in \mathcal{M}$. 记

$$\mathcal{D}=\{A \in \mathcal{E}: 1_A \in \mathcal{M}\}.$$

由于 $1=1_E \in \mathcal{M}$, 所以 $E \in \mathcal{D}$. 任取 $A, B \in \mathcal{D}$ 且 $A \supseteq B$, 那么 $1_{A\setminus B}=1_A-1_B \in \mathcal{M}$, 这表明 $A \setminus B \in \mathcal{D}$. 设 $(A_n) \subseteq \mathcal{D}$ 且 $A_n \nearrow A$, 那么 $(1_{A_n}) \subseteq \mathcal{M}_+$ 且 $1_{A_n} \nearrow 1_A$, 所以 $1_A \in \mathcal{M}$, 这表明 $A \in \mathcal{D}$. 这表明 $\mathcal{D}$ 是 d-系. 由于 $\mathcal{C}$ 是 p-系且 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$, 根据单调类定理 1.3, $\mathcal{D}$ 包含 $\sigma\mathcal{C}=\mathcal{E}$, 所以对于任意的 $A \in \mathcal{E}$ 有 $A \in \mathcal{D}$, 即 $1_A \in \mathcal{M}$.

再根据单调类的定义 (b), $\mathcal{M}$ 包含所有的简单函数.

令 f 是非负 $\mathcal{E}$-可测函数, 根据 定理 1.10, f 是函数序列 (f_n) 的极限, 其中 f_n 是递增的非负简单函数, 即 $(f_n) \subseteq \mathcal{M}_+$. 根据单调类的定义 (c), 有 $f \in \mathcal{M}$.

令 g 是有界 $\mathcal{E}$-可测函数, 那么 g^+ 和 g^- 都是非负 $\mathcal{E}$-可测函数, 所以 $g^+, g^- \in \mathcal{M}$. 显然 g^+, g^- 也都是有界的, 根据单调类的定义 (b), 所以 $g=g^+-g^- \in \mathcal{M}$. □

标准可测空间

令 $(E,\mathcal{E})$ 和 $(F,\mathcal{F})$ 是可测空间. 如果 $f:E\to F$ 是双射的相对于 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{F}$ 的可测函数, 并且其逆映射 $f^{-1}:F\to E$ 是相对于 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{E}$ 的可测函数, 那么我们说 f 是**同构**.

如果可测空间 $(E,\mathcal{E})$ 同构于 $(F,\mathcal{B}_F)$, 其中 F 是 $\mathbb{R}$ 的某个 Borel 子集, 那么我们说 $(E,\mathcal{E})$ 是**标准可测空间**. 标准可测空间有非常多. 如果 E 是完备度量空间, 那么 $(E,\mathcal{B}_E)$ 是标准可测空间. 如果 E 是波兰空间, 即可分的可完备度量化的拓扑空间, 那么 $(E,\mathcal{B}_E)$ 是标准可测空间. 如果 E 是可分的 Banach 空间, 那么 $(E,\mathcal{B}_E)$ 是标准可测空间.

显然, $[0,1]$ 和它的 Borel σ-代数构成标准可测空间. $\{1,2,\dots,n\}$ 和它的离散 σ-代数构成标准可测空间. $\mathbb{N}=\{0,1,2,\dots\}$ 和它的离散 σ-代数构成标准可测空间. 一个深刻的结果是, 任意标准可测空间都同构于上述三者之一.

1.3 测度

令 $(E,\mathcal{E})$ 是可测空间, $(E,\mathcal{E})$ 上的**测度**指的是一个映射 $\mu:\mathcal{E}\to\bar{\mathbb{R}}_+$, 其满足:

a) $\mu(\emptyset)=0$,
b) 对于不相交的子集列 $(A_n)\subseteq\mathcal{E}$, 有 $\mu(\bigcup_n A_n)=\sum_n\mu(A_n)$.

条件 (b) 被称为**可列可加性**. 需要注意 $\mu(A)$ 总是为正数且可以为 $+\infty$. 数 $\mu(A)$ 被称为 A 的**测度**, 也简记为 μA.

一个**测度空间**指的是三元组 $(E,\mathcal{E},\mu)$, 其中 $(E,\mathcal{E})$ 是可测空间, μ 是 $(E,\mathcal{E})$ 上的测度.

例子

例 1.12 (Dirac 测度)**.** 令 $(E,\mathcal{E})$ 是可测空间, 固定 $x\in E$. 对于每个 $A\in\mathcal{E}$, 令

$$\delta_x(A)=\begin{cases}1 & x\in A,\\ 0 & x\notin A.\end{cases}$$

那么 δ_x 是 $(E,\mathcal{E})$ 上的测度, 被称为 **Dirac 测度**. 直观来看, 其基于一个集合 A 是否含有特定元素 x 来给出这个集合的“大小”.

例 1.13 (计数测度)**.** 令 $(E,\mathcal{E})$ 是可测空间, 固定 $D\subseteq E$. 对于每个 $A\in\mathcal{E}$, 令 $\nu(A)$ 是 $A\cap D$ 中点的个数, 此时 ν 是 $(E,\mathcal{E})$ 上的测度, 被称为**计数测度**. 通常, 集合 D 被选取为可数集, 在这种情况下

$$\nu(A)=\sum_{x\in D}\delta_x(A),\quad A\in\mathcal{E}.$$

例 1.14 (离散测度)**.** 令 $(E,\mathcal{E})$ 是可测空间, 固定可数子集 $D \subseteq E$. 对于每个 $x \in D$, 分配一个正数 $m(x)$. 定义

$$\mu(A) = \sum_{x \in D} m(x)\delta_x(A), \quad A \in \mathcal{E}.$$

那么 μ 是 $(E,\mathcal{E})$ 上的测度, 被称为**离散测度**. 我们可能会把 $m(x)$ 理解为点 x 的质量, 那么 $\mu(A)$ 就是集合 A 的质量. 特别地, 如果 $(E,\mathcal{E})$ 是离散可测空间, 那么每个测度 μ 都有这种形式.

例 1.15 (Lebesgue 测度)**.** $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ 上的测度 μ 如果对于每个区间 A 都满足 $\mu(A)$ 为 A 的长度, 那么我们说 μ 是 **Lebesgue 测度**. 类似地, $\mathbb{R}^2$ 上的 Lebesgue 测度是"面积"测度, $\mathbb{R}^3$ 上的 Lebesgue 测度是"体积"测度等等. 我们将它们记作 Leb.

测度的性质

命题 1.16. 令 μ 是可测空间 $(E,\mathcal{E})$ 上的测度，那么对于任意可测集 A, B 和 $A_1, A_2, \dots$，有：

有限可加性 $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.
单调性 $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \le \mu(B)$.
连续性 $A_n \nearrow A \Rightarrow \mu(A_n) \nearrow \mu(A)$.
Boole 不等式 $\mu(\bigcup_n A_n) \le \sum_n \mu(A_n)$.

Proof. 有限可加性是可列可加性的特殊情况, 取 $A_1 = A, A_2 = B, A_3 = A_4 = \cdots = \emptyset$ 即可. 若 $A \subseteq B$, 由于 $\mathcal{E}$ 是 d-系, 所以 $B \setminus A \in \mathcal{E}$, 所以

$$\mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \ge \mu(A).$$

若 $A_n \nearrow A$, 令 $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$, 那么 B_n 互不相交且 $\bigcup_{k=1}^n B_k = A_n$, 所以

$$\lim \mu(A_n) = \lim \mu\left(\bigcup_{k=1}^n B_k\right) = \lim \sum_{k=1}^n \mu(B_k) = \sum_{k=1}^\infty \mu(B_k) = \mu(A).$$

对于 Boole 不等式, 注意到

$$\mu(A \cup B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \le \mu(A) + \mu(B),$$

所以归纳可得

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \le \sum_{k=1}^n \mu(A_k),$$

令 $n \to \infty$, 左边根据连续性即可得到 Boole 不等式. □

有限测度

令 μ 是可测空间 $(E,\mathcal{E})$ 上的测度, 如果 $\mu(E)<\infty$, 那么 μ 被称为**有限测度**, 根据单调性, 此时对于任意 $A\in\mathcal{E}$, 都有 $\mu(A)<\infty$. 如果 $\mu(E)=1$, 那么 μ 被称为**概率测度**. 如果存在 E 的可测划分 (E_n) 使得 $\mu(E_n)<\infty$, 那么 μ 被称为 **σ-有限测度**. 如果存在一列有限测度 μ_n 使得 $\mu=\sum_n \mu_n$, 那么 μ 被称为 **Σ-有限测度**. 有限测度都是 σ-有限的, σ-有限测度都是 Σ-有限的.

命题 1.17. 令 $(E,\mathcal{E})$ 是可测空间, μ,ν 是两个有限测度且 $\mu(E)=\nu(E)$, 如果 μ,ν 在生成 $\mathcal{E}$ 的某个 p-系上取值相同, 那么 $\mu=\nu$.

Proof. 设 $\mathcal{C}$ 是 p-系且 $\mathcal{E}=\sigma\mathcal{C}$, 任取 $A\in\mathcal{C}$ 有 $\mu(A)=\nu(A)$. 令

$$\mathcal{D}=\{A\in\mathcal{E}:\mu(A)=\nu(A)\},$$

那么 $\mathcal{C}\subseteq\mathcal{D}$. 如果我们证明 $\mathcal{D}$ 是 d-系, 那么根据单调类定理, 就有 $\mathcal{E}=\sigma\mathcal{C}\subseteq\mathcal{D}$, 即任取 $A\in\mathcal{E}$ 有 $\mu(A)=\nu(A)$. 下面我们证明 $\mathcal{D}$ 是 d-系. 由于 $\mu(E)=\nu(E)$, 所以 $E\in\mathcal{D}$. 若 $A,B\in\mathcal{D}$ 且 $A\supseteq B$, 那么

$$\mu(B)+\mu(A\setminus B)=\mu(A)=\nu(A)=\nu(B)+\mu(A\setminus B),$$

由于 $\mu(B)=\nu(B)$, 所以 $\mu(A\setminus B)=\nu(A\setminus B)$, 即 $A\setminus B\in\mathcal{D}$. 任取 $(A_n)\subseteq\mathcal{D}$ 且 $A_n\nearrow A$, 根据连续性, 所以 $\mu(A_n)\nearrow\mu(A)$ 以及 $\nu(A_n)\nearrow\nu(A)$, 所以

$$\mu(A)=\lim\mu(A_n)=\lim\nu(A_n)=\nu(A),$$

所以 $A\in\mathcal{D}$. 这就证明了 $\mathcal{D}$ 是 d-系. □

推论 1.18. 令 μ,ν 是 $(\bar{\mathbb{R}},\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ 上的概率测度, 那么 $\mu=\nu$ 当且仅当对于任意的 $r\in\mathbb{R}$ 有 $\mu[-\infty,r]=\nu[-\infty,r]$.

原子, 纯原子测度和非原子测度

令 $(E,\mathcal{E})$ 是可测空间, 假设对于每个 $x\in E$, 单点集 $\{x\}\in\mathcal{E}$, 这一点对于所有的标准可测空间都是成立的. 令 μ 是 $(E,\mathcal{E})$ 上的测度, 如果点 x 使得 $\mu\{x\}>0$, 那么 x 被称为 μ 的一个**原子**. 如果 μ 没有任何原子, 那么 μ 被称为**非原子测度**. 如果 μ 的原子的集合 D 是可数集并且 $\mu(E\setminus D)=0$, 那么 μ 被称为**纯原子测度**. 例如, Lebesgue 测度是非原子测度, Dirac 测度是纯原子测度 (其只有一个原子), 离散测度是纯原子测度.

命题 1.19. 令 μ 是 $(E,\mathcal{E})$ 上的 Σ-有限测度, 那么

$$\mu=\lambda+\nu,$$

其中 λ 是非原子测度, ν 是纯原子测度.

完备性，零测集

令 $(E,\mathcal{E},\mu)$ 是测度空间, 如果可测集 B 使得 $\mu(B)=0$, 那么 B 被称为**零测集**. E 的任意子集如果被一个可测的零测集包含, 那么也被称为**零测集**. 如果 E 的每个零测集都是可测集, 那么我们说这个测度空间是**完备的**. 对于不完备的测度空间, 下面的结果表明可以通过包含所有的零测集来扩大 $\mathcal{E}$ 以及 μ 来得到一个完备测度空间. 测度空间 $(E,\bar{\mathcal{E}},\bar{\mu})$ 被称为 $(E,\mathcal{E},\mu)$ 的**完备化**. 当 $E=\mathbb{R}$, $\mathcal{E}=\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ 和 $\mu=\text{Leb}$ 的时候, $\bar{\mathcal{E}}$ 的元素被称为 **Lebesgue 可测集**.

命题 1.20. 令 $\mathcal{N}$ 是 E 的所有零测子集的集合族，$\bar{\mathcal{E}}$ 为 $\mathcal{E}\cup\mathcal{N}$ 生成的 σ-代数，那么

a) 每个 $B\in\bar{\mathcal{E}}$ 都形如 $B=A\cup N$，其中 $A\in\mathcal{E}$ 以及 $N\in\mathcal{N}$，
b) 定义 $\bar{\mu}(A\cup N)=\mu(A)$，这给出了 $\bar{\mathcal{E}}$ 上的测度 $\bar{\mu}$，并且是唯一的满足 $\bar{\mu}(A)=\mu(A)$ $(A\in\mathcal{E})$ 的测度，此时测度空间 $(E,\mathcal{E},\mu)$ 是完备的.

3-1 (限制和迹) 令 $(E,\mathcal{E})$ 是可测空间，μ 是测度. 令 $D\in\mathcal{E}$.

a) 定义 $\nu(A)=\mu(A\cap D)$，证明 ν 是 $(E,\mathcal{E})$ 上的测度，被称为 μ 在 D 上的迹.
b) 令 $\mathcal{D}$ 为 $\mathcal{E}$ 在 D 上的迹，对于 $A\in\mathcal{D}$，定义 $\nu(A)=\mu(A)$，证明 ν 是 $(D,\mathcal{D})$ 上的测度，被称为 μ 在 D 上的限制.

Proof. (a) $\nu(\emptyset)=\mu(\emptyset)=0$. 设 $(A_n)\subseteq\mathcal{E}$ 是不相交的子集列, 那么 $(A_n\cap D)\subseteq\mathcal{E}$ 仍然不相交, 所以

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap D)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n\cap D)=\sum_{n=1}^{\infty}\nu(A_n),$$

即 ν 是 $(E,\mathcal{E})$ 上的测度.

(b) $\nu(\emptyset)=\mu(\emptyset)=0$. 设 $(A_n)\subseteq\mathcal{D}$ 是不相交的子集列, 于是

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\nu(A_n).$$ □

1.4 积分

令 $(E,\mathcal{E},\mu)$ 是测度空间. 我们同时用 $\mathcal{E}$ 表示 E 上的 $\mathcal{E}$-可测函数的集合, $\mathcal{E}_+$ 表示非负 $\mathcal{E}$-可测函数构成的子集. 下面对于所有合理的 $f\in\mathcal{E}$, 我们定义 "f 相对于 μ 的积分", 我们将记为:

$$\mu f=\mu(f)=\int_E f(x)\mu(\mathrm{d}x)=\int_E f\,\mathrm{d}\mu.$$

并且我们将证明我们定义的积分蕴含下面的性质：对于任意 $a,b\in\mathbb{R}_+$ 和 $f,g,f_n\in\mathcal{E}_+$, 有:

非负性 $\mu f \geq 0$, 若 $f = 0$, 则 $\mu f = 0$.
线性性 $\mu(af + bg) = a\mu f + b\mu g$.
单调收敛定理 若 $f_n \nearrow f$, 则 $\mu f_n \nearrow \mu f$.

定义 1.21. 我们从简单函数开始逐步定义积分的概念.

a) 令 f 是简单非负函数，设其标准型为 $f = \sum_i a_i 1_{A_i}$，定义

$$\mu f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i).$$

b) 令 $f \in \mathcal{E}_+$，记 $f_n = d_n \circ f$，其中 d_n 为 引理 1.9 中的简单函数，那么每个 f_n 是简单非负函数. 此时 μf_n 是单调递增的，于是我们定义

$$\mu f = \lim \mu f_n.$$

c) 令 $f \in \mathcal{E}$，那么 $f^+, f^- \in \mathcal{E}_+$. 由于 $f = f^+ - f^-$，于是我们定义

$$\mu f = \mu(f^+) - \mu(f^-).$$

上述定义中我们要求等式右端至少有一项是有限的.

注释 1.22. 令 f, g 是简单非负函数.

a) 设 $f = \sum_i a_i 1_{A_i}$，这里我们不要求是标准型. 若 $\bigcup_i A_i \neq E$，那么我们可以添加零项，所以我们假设 $\bigcup_i A_i = E$. 若 $A_i \cap A_j \neq \emptyset$，那么

$$a_i 1_{A_i} + a_j 1_{A_j} = a_i 1_{A_i \setminus (A_i \cap A_j)} + (a_i + a_j) 1_{A_i \cap A_j} + a_j 1_{A_j \setminus (A_i \cap A_j)},$$

于是这两项的积分为

$$\begin{aligned} & a_i \mu(A_i \setminus (A_i \cap A_j)) + (a_i + a_j)\mu(A_i \cap A_j) + a_j \mu(A_j \setminus (A_i \cap A_j)) \\ = & a_i \mu(A_i) - a_i \mu(A_i \cap A_j) + (a_i + a_j)\mu(A_i \cap A_j) + a_j \mu(A_j) - a_j \mu(A_i \cap A_j) \\ = & a_i \mu(A_i) + a_j \mu(A_j), \end{aligned}$$

所以对于简单函数的非标准形式而言，其积分依然形如 $\mu f = \sum_i a_i \mu(A_i)$.

b) 若 $a, b \in \mathbb{R}_+$，那么 $af + bg$ 依然是简单非负函数，再根据 (a)，就有

$$\mu(af + bg) = a\mu f + b\mu g.$$

c) 如果 $f \leq g$，那么

$$\mu f \leq \mu f + \mu(g - f) = \mu(f + g - f) = \mu g.$$

d) 若 $f_1 \leq f_2 \leq \cdots$，根据 (c)，有 $\mu f_1 \leq \mu f_2 \leq \cdots$，所以定义中的 $\lim \mu f_n$ 存在 (可以为 $+\infty$).

示例

例 1.23 (离散测度)**.** 固定 $x_0 \in E$, 考虑 Dirac 测度 δ_{x_0}. 任取 $f \in \mathcal{E}_+$, 所以

$$\delta_{x_0} f = \lim \delta_{x_0}(d_n \circ f) = f(x_0).$$

那么对于任意 $f \in \mathcal{E}$, 就有

$$\delta_{x_0} f = \delta_{x_0}(f^+) - \delta_{x_0}(f^-) = f(x_0).$$

设 $\mu = \sum_{x \in D} m(x)\delta_x$ 是离散测度, 其中 $D \in \mathcal{E}$ 是可数集, $m(x) > 0$, 那么

$$\mu f = \sum_{x \in D} m(x) f(x).$$

例 1.24 (离散空间)**.** 设 $(E, \mathcal{E})$ 是离散可测空间, 即 E 可数且 $\mathcal{E} = 2^E$. 此时 E 上的任意数值函数都是 $\mathcal{E}$-可测的, 且 E 上的任意测度 μ 都满足 $\mu = \sum_{x \in E} \mu\{x\}\delta_x$, 所以对于任意 E 上的函数 f, 有

$$\mu f = \sum_{x \in E} \mu\{x\} f(x).$$

例 1.25 (Lebesgue 积分)**.** 设 E 是 $\mathbb{R}^d$ 的 Borel 子集, $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$. 设 μ 是 Lebesgue 测度在 $(E, \mathcal{E})$ 上的限制, 对于 $f \in \mathcal{E}$, 我们使用下面的记号表示积分 μf:

$$\mu f = \mathrm{Leb}_E\, f = \int_E f(x)\, \mathrm{Leb}(\mathrm{d}x) = \int_E f(x)\, \mathrm{d}x.$$

可积性

对于一个函数 $f \in \mathcal{E}$, 如果 μf 存在且为实数, 那么 f 被称为**可积的**. 也就是说, f 可积当且仅当 $\mu f^+ < \infty$ 以及 $\mu f^- < \infty$.

在可测集上的积分

令 $f \in \mathcal{E}$, A 是可测集, 那么 $f 1_A \in \mathcal{E}$, 此时我们把 f 在 A 上的积分定义为 $f 1_A$ 的积分, 使用下面的记号:

$$\mu(f 1_A) = \int_A f(x)\mu(\mathrm{d}x) = \int_A f\, \mathrm{d}\mu.$$

引理 1.26. **令 $f \in \mathcal{E}_+$, $A, B \in \mathcal{E}$ 不相交且 $C = A \cup B$, 那么**

$$\mu(f 1_A) + \mu(f 1_B) = \mu(f 1_C).$$

对于一般的 $f \in \mathcal{E}$ 也成立.

Proof. 令 $f_n = d_n \circ f$, 由于 f_n 是简单函数, 所以

$$\mu(f_n 1_A) + \mu(f_n 1_B) = \mu(f_n 1_C),$$

注意到 $f_n 1_A = d_n \circ (f 1_A)$, 对 B, C 同理. 令 $n \to \infty$ 即得结论. □

非负性和单调性

命题 1.27. 若 $f \in \mathcal{E}_+$，那么 $\mu f \geq 0$. 如果 $f, g \in \mathcal{E}_+$ 且 $f \leq g$，那么 $\mu f \leq \mu g$.

Proof. $f \in \mathcal{E}_+$ 表明 $f_n \geq 0$, 从而 $\mu f_n \geq 0$, 所以 $\mu f = \lim \mu f_n \geq 0$. 如果 $f \leq g$, 由于 d_n 是单调递增函数, 所以 $f_n \leq g_n$, 所以 $\mu f_n \leq \mu g_n$, 所以 $\mu f \leq \mu g$. □

推论 1.28. 若 $f, g \in \mathcal{E}$ 且 $f \leq g$，那么 $\mu f \leq \mu g$.

Proof. $f \leq g$ 表明 $f^+ \leq g^+$ 以及 $f^- \geq g^-$, 所以 $\mu f = \mu(f^+) - \mu(f^-) \leq \mu(g^+) - \mu(g^-) \leq \mu g$. □

单调收敛定理

该定理是交换积分和极限次序的关键工具. 该定理表明映射

$$\mathcal{E}_+ \to \bar{\mathbb{R}}_+, \quad f \mapsto \mu f$$

在递增极限下是连续的.

定理 1.29. 令 (f_n) 是 $\mathcal{E}_+$ 中的递增序列，那么

$$\mu(\lim f_n) = \lim \mu f_n.$$

Proof. 令 $f = \lim f_n \in \mathcal{E}_+$, 由于 $f_n \leq f$, 根据单调性, 有 $\mu f_n \leq \mu f$, 故

$$\lim \mu f_n \leq \mu f.$$

任取满足 $0 \leq s \leq f$ 的非负简单函数 s, 给定 $0 < \alpha < 1$, 定义

$$A_n = \{x \in E : f_n(x) \geq \alpha s(x)\},$$

那么 $A_n = (f_n - \alpha s)^{-1}[0, \infty] \in \mathcal{E}$. 不难验证 $A_n \subseteq A_{n+1}$. 对于任意 $x \in E$, 由于 $f_n \nearrow f$ 且 $f(x) \geq s(x)$, 所以总存在足够大的 n 使得 $f_n(x) \geq s(x) > \alpha s(x)$, 即 $x \in A_n$, 所以 $A_n \nearrow E$. 定义 $(E, \mathcal{E})$ 上的测度 ν 为

$$\nu(A) = \mu(s 1_A) = \int_A s \, \mathrm{d}\mu,$$

不难验证这确实是一个测度. 此时我们有

$$\mu f_n \geq \mu(f_n 1_{A_n}) \geq \mu(\alpha s 1_{A_n}) = \alpha \mu(s 1_{A_n}) = \alpha \nu(A_n),$$

令 $n \to \infty$, 由于 $A_n \nearrow E$, 所以 $\nu(A_n) \nearrow \nu(E) = \mu s$, 所以

$$\lim \mu f_n \geq \alpha \mu s.$$

特别地, 取 $s = d_k \circ f$, 有 $\lim \mu f_n \geq \alpha \mu(d_k \circ f)$, 令 $k \to \infty$, 所以 $\lim \mu f_n \geq \alpha \mu f$. 再取 $\alpha = 1 - 1/k$, 令 $k \to \infty$, 即得

$$\lim \mu f_n \geq \mu f.$$ □

积分的线性性

命题 1.30. 对于 $f,g\in\mathcal{E}_+$ 和 $a,b\in\mathbb{R}_+$，有

$$\mu(af+bg)=a\mu f+b\mu g.$$

对于 $f,g\in\mathcal{E}$ 和 $a,b\in\mathbb{R}$ 也是正确的.

Proof. 已知对于简单函数 $f_n=d_n\circ f$ 和 $g_n=d_n\circ g$, 有

$$\mu(af_n+bg_n)=a\mu f_n+b\mu g_n,$$

而 $f_n\nearrow f$, $g_n\nearrow g$, 根据单调收敛定理, 就有

$$\mu(af+bg)=a\mu f+b\mu g.$$

对于一般的 f,g, 只需将其拆为正部分和负部分即可验证. □

积分的不敏感性

命题 1.31. 如果 $A\in\mathcal{E}$ 是零测集，那么对于任意 $f\in\mathcal{E}$，有 $\mu(f1_A)=0$. 如果 $f,g\in\mathcal{E}$ 且几乎处处有 $f=g$，那么 $\mu f=\mu g$. 如果 $f\in\mathcal{E}_+$ 并且 $\mu f=0$，那么几乎处处 $f=0$.

Proof. 先假设 f 是简单非负函数, 其标准型为 $f=\sum_i a_i 1_{A_i}$, 那么

$$f1_A=\sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i\cap A},$$

所以 $\mu(f1_A)=\sum_i a_i\mu(A_i\cap A)$. 根据单调性有 $\mu(A_i\cap A)\le\mu(A)=0$, 所以 $\mu(f1_A)=0$. 然后假设 $f\in\mathcal{E}_+$, 那么 $\mu((d_n\circ f)1_A)=0$, 所以 $\mu(f1_A)=0$. 最后, 设 $f\in\mathcal{E}_+$, 那么 $\mu(f1_A)=\mu(f^+1_A)-\mu(f^-1_A)=0$.

记 $A=\{x\in E: f(x)\neq g(x)\}$, 那么 $A=E\setminus(f-g)^{-1}(0)$ 可测, 几乎处处 $f=g$ 表明 A 是零测集. 于是 $\mu(f1_A)=\mu(g1_A)=0$, 所以

$$\begin{aligned}\mu f&=\mu(f1_A)+\mu(f1_{E\setminus A})=\mu(f1_{E\setminus A})=\mu(g1_{E\setminus A})\\&=\mu(g1_{E\setminus A})+\mu(g1_A)=\mu g.\end{aligned}$$

记 $N=\{x\in E: f(x)>0\}$, $N_k=\{x\in E: f(x)>1/k\}$, 显然 $N_k\nearrow N$, 故 $\mu(N_k)\nearrow\mu(N)$. 此时 $f>1/k1_{N_k}$, 所以 $0=\mu f\ge 1/k\mu(N_k)$, 这表明 $\mu(N_k)=0$, 所以 $\mu(N)=\lim\mu(N_k)=0$. □

Fatou 引理

引理 1.32. 令 $(f_n) \subseteq \mathcal{E}_+$，那么 $\mu(\liminf f_n) \leq \liminf \mu f_n$.

Proof. 记 $g_m = \inf_{n \geq m} f_n$，那么 $g_m \in \mathcal{E}_+$ 且递增，根据单调收敛定理，有

$$\mu(\liminf f_n) = \mu(\lim g_m) = \lim \mu g_m.$$

又因为 $n \geq m$ 的时候 $g_m \leq f_n$，所以 $\mu g_m \leq \mu f_n$，所以 $\mu g_m \leq \inf_{n \geq m} \mu f_n$，令 $m \to \infty$，即得

$$\mu(\liminf f_n) = \lim \mu g_m \leq \liminf \mu f_n.$$

□

推论 1.33. 令 $(f_n) \subseteq \mathcal{E}$，如果存在可积函数 g 使得 $f_n \geq g$，那么

$$\mu(\liminf f_n) \leq \liminf \mu f_n.$$

如果存在可积函数 g 使得 $f_n \leq g$，那么

$$\mu(\limsup f_n) \geq \limsup \mu f_n.$$

Proof. 若可积函数 g 使得 $f_n \geq g$，那么 $A = \{x \in E : g(x) \in \mathbb{R}\}$ 的补集是零测集 (练习). 那么几乎处处 $f_n 1_A = f_n$ 以及 $g 1_A = g$. 由于 $g 1_A$ 是实值函数，所以 $f_n 1_A - g 1_A$ 是有意义的，故 $f_n 1_A - g 1_A \in \mathcal{E}_+$ 且可积，根据 Fatou 引理，有

$$\begin{aligned}\mu\big(\liminf(f_n 1_A)\big) - \mu(g 1_A) &= \mu\big(\liminf(f_n 1_A) - g 1_A\big) = \mu\big(\liminf(f_n 1_A - g 1_A)\big) \\ &\leq \liminf \mu(f_n 1_A - g 1_A) = \liminf \mu(f_n 1_A) - \mu(g 1_A),\end{aligned}$$

由于几乎处处 $f_n 1_A = f_n$，故几乎处处 $\liminf(f_n 1_A) = \liminf f_n$，故 $\mu(f_n 1_A) = \mu f_n$ 以及 $\mu\big(\liminf(f_n 1_A)\big) = \mu(\liminf f_n)$，这就表明

$$\mu(\liminf f_n) \leq \liminf \mu f_n.$$

对于第二点，考虑 $g 1_A - f_n 1_A \in \mathcal{E}_+$ 并且 $\limsup r_n = -\liminf(-r_n)$ 即可. □