Contents

1

复形

1.1 单纯复形

单纯形 令 $u_0, u_1, \ldots, u_k$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的点. 一个点 $x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i u_i$ 被称为 u_i 的**仿射组合**, 如果 $\sum \lambda_i = 1$. 仿射组合的几何被称为 **仿射包**. $k+1$ 个点如果满足 $u_i - u_0$ $(1 \le i \le k)$ 是线性无关的, 那么说它们是**仿射无关**的. 在 $\mathbb{R}^d$ 中最多有 d 个线性无关的向量, 所以最多有 $d+1$ 个放射无关的点.

仿射组合 $x = \sum \lambda_i u_i$ 的所有系数如果满足 $\lambda_i \ge 0$, 那么说这是一个**凸组合**. 凸组合的集合被称为**凸包**. $k+1$ 个仿射无关点的凸包被称为 k-**单纯形**, 记为 $\sigma = [u_0, u_1, \ldots, u_k]$. σ 的**面**指的是 $\{u_0, \ldots, u_k\}$ 的某个非空子集的凸包. 如果 τ 是 σ 的面, 我们记作 $\tau \le \sigma$, 如果 τ 是恰当的, 那么记作 $\tau < \sigma$. 显然, σ 有 $2^{k+1} - 1$ 个面. σ 的所有恰当面的并集被称为 σ 的**边界**, 记为 $\mathrm{bd}\,\sigma$. σ 的内部定义为 $\mathrm{int}\,\sigma = \sigma \setminus \mathrm{bd}\,\sigma$. 点 $x \in \sigma$ 在 σ 的内部当且仅当所有的系数 λ_i 均为正数. 可以发现每个点 $x \in \sigma$ 都属于某个面的内部, 即正系数 λ_i 对应的所有 u_i 张成的凸包.

单纯复形 一个**单纯复形** K 指的是有限个单纯形的集合, 其满足: 若 $\sigma \in K$ 和 $\tau \le \sigma$, 则 $\tau \in K$; 并且 $\sigma, \sigma_0 \in K$ 表明 $\sigma \cap \sigma_0$ 要么是空集要么是 σ 和 σ_0 的公共面.

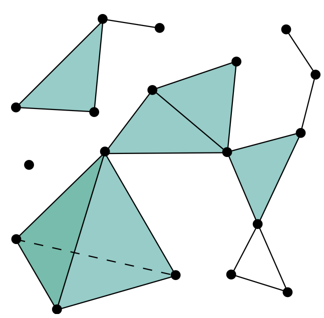
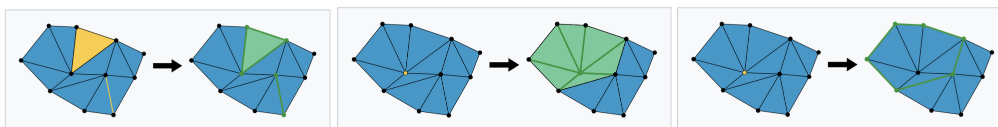


Fig 1.1: 一个 3-维的单纯复形.

K 的**维数**被定义为 K 中单纯形的最大维数. K 的**底空间** $|K|$ 定义为 K 中所有单纯形的并集,并且继承 $\mathbb{R}^d$ 的子空间拓扑. 一个**多面体**指的是对于一个拓扑空间 X,如果 X 和 $|K|$ 同胚, 那么我们说 X 的三**角化**是单纯复形 K 附带这个同胚. 如果拓扑空间有

一个三角化, 那么说这个空间是**可三角化的**. K 的**子复形**指的是一个单纯复形 $L \subseteq K$. 如果 L 包含了 L 的顶点在 K 中张成的所有单纯形, 那么说 L 是**满**的. K 的 j**-骨架**指的是由所有维数小于等于 j 的单纯形构成的子复形, 即 $K^{(j)} = \{\sigma \in K \mid \dim\sigma \leq j\}$. 0-骨架也被称为**顶点集**. 对于 K 中的单纯形 τ, 定义所有以 τ 作为面的单纯形的集合, 称为 τ 的**星形**, 记为 $\mathrm{St}\,\tau = \{\sigma \in K \mid \tau \leq \sigma\}$. 一般来说, 星形在取面的时候不一定封闭, 我们可以把丢失的面加进来使其称为一个复形. 这个结果被称为**闭星形**, 记为 $\overline{\mathrm{St}}\tau$, 是包含星形的最小的子复形. 一般的, 对于 K 的一个子集 S, 总可以定义 S 的闭包 $\overline{S}$ 是包含 S 的最小的 K 的子复形. τ 的**链环**定义为 $\mathrm{Lk}\,\tau = \{\nu \in \overline{\mathrm{St}}\,\tau \mid \nu \cap \tau = \emptyset\}$, 等价的说, 也有 $\mathrm{Lk}\,\tau = \overline{\mathrm{St}}\,\tau \setminus \mathrm{St}\,\bar{\tau}$.



(a) 单纯形集合的闭包　　(b) 一个顶点的星形　　(c) 一个顶点的链环

Fig 1.2: 闭包、星形和链环.

抽象的单纯复形　通常来说更容易去抽象地构造一个单纯复形, 而不用担心如何把它放进欧式空间.

一个**抽象单纯复形**指的是一个由有限个集合组成的集合族 A, 满足: $\alpha \in A$ 和 $\beta \subseteq A$ 能够推出 $\beta \in A$.

A 中的集合被称为**单纯形**. 单纯形 $\alpha \in A$ 的**维数**定义为 $\dim\alpha = \mathrm{card}\,\alpha - 1$, 单纯复形的维数定义为其中单纯形维数的最大值. α 的一个**面**指的是一个非空子集 $\beta \subseteq \alpha$, 如果 $\beta \neq \alpha$ 则称 β 是恰当的. **顶点集**定义为所有单纯形的并集, 记为 $\mathrm{Vert}\,A = \bigcup_{\alpha\in A}\alpha$. 一个 **子复形**定义为某个抽象的单纯复形 $B \subseteq A$. 两个抽象单纯复形之间如果存在双射 $b : \mathrm{Vert}\,A \to \mathrm{Vert}\,B$ 使得 $\alpha \in A$ 当且仅当 $b(\alpha) \in B$, 那么说它们是**同构的**. 大小为 n 的顶点集能够构成的最大的抽象单纯复形具有基数 $2^n - 1$. 给定一个 (几何) 单纯复形 K, 我们可以把所有单纯形都丢掉, 仅仅保留它们的顶点集, 从而得到一个抽象单纯复形 A. 我们说 A 是 K 的一个**顶点概形**. 对称地, 我们说 K 是 A 以及任意同构于 A 的抽象单纯复形的一个**几何实现**. 如果环境空间的维数足够高, 构造几何实现是十分简单的.

定理 1.1 (几何实现定理). 维数 d 的抽象单纯复形在 $\mathbb{R}^{2d+1}$ 中有一个几何实现.