Contents

1

范畴、函子和自然变换

1.1 范畴

定义 1.1. 一个**范畴** A 由以下内容组成：

- 一族**对象** $\mathrm{ob}(\mathsf{A})$；
- 对于每个 $A, B \in \mathrm{ob}(\mathsf{A})$，存在一族从 A 到 B 的**态射** $\mathrm{Hom}(A, B)$；
- 对于每个 $A, B, C \in \mathrm{ob}(\mathsf{A})$，有一个**复合映射**：

$$\mathrm{Hom}(A, B) \times \mathrm{Hom}(B, C) \to \mathrm{Hom}(A, C), \quad (g, f) \mapsto g \circ f;$$

- 对于每个 $A \in \mathrm{ob}(\mathsf{A})$，存在 A 上的**单位** $1_A \in \mathrm{Hom}(A, A)$，

此外态射需要满足：

- 对于每个 $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$，$g \in \mathrm{Hom}(B, C)$ 与 $h \in \mathrm{Hom}(C, D)$，有 $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$；
- 对于每个 $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$，有 $f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$.

注释 1.2. 我们通常使用 $A \in \mathsf{A}$ 表示 $A \in \mathrm{ob}(\mathsf{A})$，$f : A \to B$ 或者 $A \xrightarrow{f} B$ 表示 $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$，gf 表示 $g \circ f$.

例 1.3 (数学结构的范畴). (a) 集合范畴 Set. 对象为集合, 给定集合 A, B, A 到 B 的态射就是集合意义下 A 到 B 的映射, 态射的复合即映射的复合, 此时单位 1_A 就是恒等映射 $A \to A$.

(b) 群范畴 Grp. 对象为群, 态射为群同态.

(c) 环范畴 Ring. 对象为环, 态射为环同态.

(d) 给定域 k, 有 k 上的向量空间范畴 Vect_k, 对象是向量空间, 态射是线性映射.

(e) 拓扑空间范畴 Top. 对象是拓扑空间, 态射是连续映射.

定义 1.4. 对于态射 $f : A \to B$，如果存在态射 $g : B \to A$ 使得 $gf = 1_A$ 以及 $fg = 1_B$，那么我们说 f 是**同构**. 此时我们说 g 是 f 的**逆**，记为 $g = f^{-1}$.

如果 A 到 B 之间存在一个同构, 那么我们说 A 和 B **同构**, 记作 $A \cong B$.

例 1.5. Set 中的同构等同于双射. 当然, 这句话在逻辑上其实是在表明: 一个映射具有双边逆映射当且仅当其是双射.

例 1.6. Grp 中的同构等同于群同构. 在一些抽象代数教材中, 群同构被定义为双射的群同态, 如果是这样, 那么实际上需要证明: 双射的群同态的逆映射也是群同态. 类似地, Ring 中的同构等同于环同构.

例 1.7. Top 中的同构是同胚. 与 Grp 或者 Ring 不同的是, Top 中双射的连续映射不一定是同构, 即连续映射的逆映射可以是连续的. 下面是一个经典的例子: 考虑映射 $f : [0,1) \to \mathbb{S}^1$ 为 $f(t) = e^{2\pi i t}$, f 是双射的连续映射, 但是 f 不是同胚, 因为 $[0,1)$ 不是紧的, 但是 $\mathbb{S}^1$ 是紧的.

目前为止范畴的例子中对象都是具有某些结构的集合 (例如群结构、拓扑结构或者只有集合结构), 态射都是保持这些结构的映射 (群同态、连续映射或者普通的映射). 但是, 并非所有的范畴都长成这样, 实际上范畴的含义相当广泛, 其对象也不一定是 "配备了额外结构的集合", 因此在一般的范畴中, 谈论对象的 "元素" 是没有意义的. 类似地, 在一般意义上的范畴中, 态射也不必是集合之间的映射. 总的来说: **范畴的对象不必类似于集合, 态射也不必类似于映射**. 下面的例子解释了这些观点.

例 1.8 (范畴作为数学结构). (a) 一个范畴可以通过直接说出对象、态射、复合和单位来指定. 例如空范畴 $\emptyset$, 其没有任何对象或者态射. 范畴 1 由一个对象和唯一的单位态射构成. 也可以构造一个只有两个对象的范畴:

$$\bullet \longrightarrow \bullet,$$

这个范畴只有两个对象, 每个对象有一个单位态射, 两个对象之间有唯一的一个非单位态射. 在这些例子中, 我们并没有将对象视为一个类似集合的东西, 也没有将态射视为一个映射, 此时态射更多的类似于一个抽象的 "箭头".

(b) 有些范畴中的态射只有单位态射, 即任意两个不同的对象之间都不存在任意态射, 这样的范畴被称为**离散范畴**. 离散范畴是最极端的情况, 即不同的对象之间完全隔离.

(c) 一个群本质上和只有一个对象且所有态射都是同构的范畴是一样的. 我们来说明这一点. 考虑只有一个对象的范畴 A, 记这个对象为 A, 那么范畴 A 的态射只有 $\mathrm{Hom}(A,A)$. 我们要求 A 中的每个态射都是同构, 也就是说每个 $f \in \mathrm{Hom}(A,A)$ 都有一个逆 $g \in \mathrm{Hom}(A,A)$ 使得 $fg = 1_A = gf$. 实际上这样的范畴 A 和群没有本质区别, 对应关系如下所示.

范畴 A	群 G
态射 $f \in \mathrm{Hom}(A,A)$	元素 $g \in G$
态射的复合 $\circ$	元素的乘法 $\cdot$
单位态射 1_A	单位元 $1 \in G$

(d) 在上一个例子中, 由于态射的逆不一定是必须的, 所以考虑 "没有逆元的群" 也是必要的, 这被称为**幺半群**. 具有一个对象的范畴本质上和幺半群是相同的, 其论证完全仿照上例.

(e) 一个**预序**指的是满足自反性和传递性的二元关系. 一个**预序集** $(S, \leq)$ 指的是一个集合 S 配备预序 $\leq$. 例如 $S = \mathbb{Z}$, $\leq$ 是整除关系.

一个预序集可以被视为范畴 A, 其中对于每个 $A, B \in$ A, 至多只有一个从 A 到 B 的态射. 此时我们用 $A \leq B$ 来表示存在态射 $A \to B$. 因为 A 是范畴, 所以 $A \leq B \leq C$ 表明 $A \leq C$. 由于始终存在 $A \to A$ 的态射 (即 1_A), 所以 $A \leq A$. 所以 A 实际上就表示了一族对象, 配备了一个具备自反性和传递性的二元关系.

一个**偏序**指的是满足 $A \leq B, B \leq A \Rightarrow A = B$ 的预序 $\leq$. 等价地说, 即上述范畴 A 中若 $A \cong B$ 能推出 $A = B$.

例 1.9 (反范畴)**.** 每个范畴 A 都有一个**反范畴** A^{op}, 其定义为将 A 的所有箭头反向. 准确的说, 有 $\mathrm{ob}(\mathsf{A}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{ob}(\mathsf{A})$, 对于任意对象 A, B, 有 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{A}^{\mathrm{op}}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(B, A)$. 此时 A^{op} 中若有 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, 那么意味着在 A 中有 $A \xleftarrow{f} B \xleftarrow{g} C$.

例 1.10 (积范畴)**.** 给定两个范畴 A 和 B, 构造**积范畴** $\mathsf{A} \times \mathsf{B}$, 满足

$$\mathrm{ob}(\mathsf{A} \times \mathsf{B}) = \mathrm{ob}(A) \times \mathrm{ob}(\mathsf{B}),$$
$$\mathrm{Hom}\big((A, B), (A', B')\big) = \mathrm{Hom}(A, A') \times \mathrm{Hom}(B, B').$$

即态射 $(A, B) \to (A', B')$ 是一对 (f, g), 其中 $f : A \to A'$ 是 A 中的态射, $g : B \to B'$ 是 B 中的态射.

1.2 函子

定义 1.11. 令 A, B 是范畴，**函子** $F : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ 由以下内容组成：

- 映射 $\mathrm{ob}(\mathsf{A}) \to \mathrm{ob}(B)$，记作 $A \mapsto F(A)$；
- 对于每个 $A, A' \in \mathsf{A}$，有映射 $\mathrm{Hom}(A, A') \to \mathrm{Hom}(F(A), F(A'))$，记作 $f \mapsto F(f)$.

还要满足：

- 当 A 中有 $A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{f'} A''$ 的时候，有 $F(f' \circ f) = F(f') \circ F(f)$；
- 对于任意 $A \in \mathsf{A}$，有 $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

注释 1.12. 我们已经熟悉将一种结构和保持结构的映射视为一个范畴（例如 Grp，Ring 等等），实际上，这种思想也可以应用于范畴和函子：如果对象为范畴，态射是函子，这也构成一个范畴，我们记为 CAT. 这一论断来源于函子的复合性，即给定函子 $\mathsf{A} \xrightarrow{F} \mathsf{B} \xrightarrow{G} \mathsf{C}$，那么存在函子 $\mathsf{A} \xrightarrow{G \circ F} \mathsf{C}$，$G \circ F$ 由自然的方式定义. 此外，对于任意范畴 A，存在单位态射 $1_{\mathsf{A}} : \mathsf{A} \to \mathsf{A}$.

例 1.13. 最简单的函子的例子是**遗忘函子**（这是一个非正式的用语, 没有准确的定义）. 下面是一些例子:

(a) 存在一个函子 $U : \mathsf{Grp} \to \mathsf{Set}$ 定义如下: 如果 G 是一个群, 那么 $U(G)$ 是 G 的底集合. 如果 $f : G \to H$ 是群同态, 那么 $U(f) : U(G) \to U(H)$ 是将 f 视为集合间的映射. 所以 U 忘掉了群的群结构以及群同态作为同态的结构.

(b) 类似的, 存在函子 $\mathsf{Ring} \to \mathsf{Set}$ 忘掉环结构以及函子 $\mathsf{Vect}_k \to \mathsf{Set}$ 忘掉向量空间结构.

(c) 遗忘函子不必忘掉**所有的**结构. 例如, 令 Ab 是交换群范畴. 那么存在函子 Ring $\to$ Ab 忘掉环的所有结构, 仅仅记住了环的加法群结构. 或者, 令 Mon 是幺半群范畴, 那么存在函子 Ring $\to$ Mon 忘掉加法结构, 仅仅记住环的乘法幺半群结构.

(d) 存在一个包含函子 U : Ab $\to$ Grp, 将交换群 A 送到 $U(A) = A$ 以及交换群同态 f 送到 $U(f) = f$. 这忘掉了交换群是交换的.

例 1.14. **自由函子**在某种意义上是遗忘函子的对偶概念.

(a) 给定一个集合 S, 我们可以构造一个 S 上的**自由群** $F(S)$. $F(S)$ 的元素是一些**字**的形式表达, 例如 $x^{-4}yx^2zy^{-3}$, 其中 $x, y, z \in S$. 如果两个字可以通过约化得到同一个字, 那么说这两个字相等, 例如 $x^3xy, x^4y, x^2y^{-1}yx^2y$ 表示 $F(S)$ 中同一个元素. 两个字的乘法定义为拼接运算, 例如 $x^{-4}yx \cdot xzy^{-3} = x^{-4}yx^2zy^{-3}$.

这个构造给每个集合 S 都分配了一个群 $F(S)$. 实际上, F 是一个函子: 任意集合的映射 $f : S \to S'$ 都可以提升为一个群同态 $F(f) : F(S) \to F(S')$. 例如, 定义映射 $f : \{w, x, y, z\} \to \{u, v\}$ 为 $f(w) = f(x) = f(y) = u$ 以及 $f(z) = v$, 那么这给出一个同态 $F(f)$, 将 $x^{-4}yx^2zy^{-3} \in F(\{w, x, y, z\})$ 送到 $u^{-4}uu^2vu^{-3} = u^{-1}vu^{-3} \in F(\{u, v\})$.

(b) 类似的, 我们可以构造集合 S 上的一个自由交换环 $F(S)$, 给出一个从 Set 到交换环范畴 CRing 的函子 F. 实际上, $F(S)$ 就是 $\mathbb{Z}$ 上的以 x_s ($s \in S$) 为未定元的多项式环. 例如, 如果 S 有两个元素, 那么 $F(S) \simeq \mathbb{Z}[x, y]$.

(c) 我们也可以构造一个集合上的自由向量空间. 固定一个域 k. 自由函子 F : Set $\to$ Vect$_k$ 将 $F(S)$ 作为有基 S 的向量空间. 粗略地说, $F(S)$ 是所有的 S 中元素的形式 k-线性组合, 即表达式

$$\sum_{s\in S} \lambda_s s \quad \lambda_s \in k,$$

其中只有有限多个 s 使得 $\lambda_s \neq 0$. $F(S)$ 的元素可以相加:

$$\sum_{s\in S} \lambda_s s + \sum_{s\in S} \mu_s s = \sum_{s\in S} (\lambda_s + \mu_s) s.$$

也可以做标量乘法:

$$c \sum_{s\in S} \lambda_s s = \sum_{s\in S} (c\lambda_s) s \quad c \in k.$$

通过这种方式, $F(S)$ 成为一个向量空间.

为了避免这种“形式定义”, 我们也可以将 $F(S)$ 定义为所有使得集合 $\{s \in S \mid \lambda(s) \neq 0\}$ 为有限集的映射 $\lambda : S \to k$ 的集合. 那么加法定义为

$$(\lambda + \mu)(s) = \lambda(s) + \mu(s).$$

乘法定义为 $(c\lambda)(s) = c\lambda(s)$.

例 1.15. 任取多项式方程组, 例如

$$2x^2 + y^2 - 3z^2 = 1, \tag{1.1}$$

$$x^3 + x = y^2, \tag{1.2}$$

给出了一个函子 $F:\mathsf{CRing}\to\mathsf{Set}$. 对于每个交换环 A, 令 $F(A)$ 是方程组的零点集. 此时若 $f:A\to B$ 是环同态且 $(x,y,z)\in F(A)$, 那么有 $(f(x),f(y),f(z))\in F(B)$, 所以诱导了映射 $F(f):F(A)\to F(B)$. 这定义了函子 F.

定义 1.16. 令 A,B 是范畴，函子 $\mathsf{A}^{\mathrm{op}}\to\mathsf{B}$ 被称为 A 到 B 的**逆变函子**.

为了避免混淆, 我们使用叙述“A 到 B 的逆变函子”而不是“$\mathsf{A}\to\mathsf{B}$ 的逆变函子”. 出于强调意义, 通常意义下 $\mathsf{A}\to\mathsf{B}$ 的函子被称为**协变函子**.

例 1.17. 通过研究空间上的函数, 我们可以研究该空间的很多性质. 这一原则在 20 世纪和 21 世纪的数学中具有十分重要的地位.

例如, 给定拓扑空间 X, 令 $C(X)$ 是 X 上的实值函数环. 环上的运算是逐点定义的, 例如 $p_1,p_2:X\to\mathbb{R}$ 是连续函数, 定义 $p_1+p_2:X\to\mathbb{R}$ 为 $(p_1+p_2)(x)=p_1(x)+p_2(x)$. 一个连续映射 $f:X\to Y$ 诱导了环同态 $C(f):C(Y)\to C(X)$, 定义为 $(C(f))(q)=q\circ f$. 注意 $C(f)$ 改变了 f 的方向, 即将 $X\xrightarrow{f}Y$ 变成了 $C(Y)\xrightarrow{C(f)}C(X)$. 可以验证 C 是 Top 到 Ring 的逆变函子.

对于某类特别的空间而言, 从 X 变换到函数环 $C(X)$ 不会丢失任何信息: 即存在一种从 $C(X)$ 重构原空间 X 的方法. 基于这一点, 人们有时会说“代数–几何对偶”.

例 1.18. 令 k 是域. 对于两个 k 上的两个向量空间 V 和 W, 考虑向量空间 $\mathrm{Hom}(V,W)$. 现在固定向量空间 W. 任意线性映射 $f:V\to V'$ 可以诱导线性映射

$$f^*:\mathrm{Hom}(V',W)\to\mathrm{Hom}(V,W),$$

定义为 $f^*(q)=q\circ f$. 这定义了函子

$$\mathrm{Hom}(-,W):\mathsf{Vect}_k^{\mathrm{op}}\to\mathsf{Vect}_k.$$

当 $W=k$ 的时候, 向量空间 $\mathrm{Hom}(V,k)$ 就是 V 的对偶空间, 即 V^*. 此时 $\mathrm{Hom}(-,k)$ 就是逆变函子 $(\cdot)^*$.

定义 1.19. 令 A 是范畴，函子 $\mathsf{A}^{\mathrm{op}}\to\mathsf{Set}$ 被称为 A 上的**一个预层**.

这个名字来源于下面的特殊情况. 令 X 是拓扑空间. 记 $\mathcal{O}(X)$ 是 X 的开子集在包含关系下构成的偏序集. 按照例 1.8 中的做法, 将 $\mathcal{O}(X)$ 视为一个范畴. 此时 X 上的**预层**指的是范畴 $\mathcal{O}(X)$ 上的预层. 例如, 给定空间 X, 定义 X 上的预层 F 为: 任取 $U\in\mathcal{O}(X)$, 定义 $F(U)$ 为 $U\to\mathbb{R}$ 的连续函数集合. 当 $U\subseteq U'$ 的时候, 定义映射 $F(U')\to F(U)$ 是限制映射. 预层以及一类被称为层的特殊预层, 是现代几何学中的重要概念.

定义 1.20. 函子 $F:\mathsf{A}\to\mathsf{B}$ 被称为**忠实的**（**满的**），如果对于每个 $A,A'\in\mathsf{A}$，函数

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(A,A')&\to\mathrm{Hom}(F(A),F(A'))\\ f&\mapsto F(f)\end{aligned}$$

是单射（满射）.

定义 1.21. 令 A 是范畴. A 的一个**子范畴** S 指的是 $\mathrm{ob}(\mathsf{A})$ 的一个子类 $\mathrm{ob}(\mathsf{S})$，并且对于每个 $S, S' \in \mathrm{ob}(\mathsf{S})$，有一个子集 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{S}}(S, S') \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(S, S')$ 使得其对于复合封闭并且有单位态射. 如果对于所有 $S, S' \in \mathsf{S}$ 都有 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{S}}(S, S') = \mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(S, S')$，那么说 S 是**满**的子范畴.

因此, 满的子范畴由所有对象挑选而来并且保留它们之间的所有态射. 例如, Ab 就是 Grp 的满的子范畴.

当 S 是 A 的子范畴的时候, 存在一个包含函子 $I : \mathsf{S} \to \mathsf{A}$, 定义为 $I(S) = S$ 以及 $I(f) = f$. 这自动成为忠实函子, 并且 I 是满函子当且仅当 S 是满的子范畴.

1.3 自然变换

定义 1.22. 令 A, B 是范畴，$\mathsf{A} \overset{F}{\underset{G}{\rightrightarrows}} \mathsf{B}$ 是函子. 一个**自然变换** $\alpha : F \to G$ 指的是 B 中的一族态射 $\left(F(\mathsf{A}) \xrightarrow{\alpha_A} G(A)\right)_{A \in \mathsf{A}}$，其满足: 对于每个态射 $A \xrightarrow{f} A'$，有交换图

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(A') \\ {\scriptstyle \alpha_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{A'}} \\ G(A) & \xrightarrow{G(f)} & G(A'). \end{array}$$