Contents

1 范畴、函子和自然变换 **1**

1.1 范畴 1

1.2 函子 3

1

范畴、函子和自然变换

1.1 范畴

定义 1.1. 一个**范畴** A 由以下内容组成：

- 一族**对象** $\mathrm{ob}(\mathsf{A})$；
- 对于每个 $A, B \in \mathrm{ob}(\mathsf{A})$，存在一族从 A 到 B 的**态射** $\mathrm{Hom}(A, B)$；
- 对于每个 $A, B, C \in \mathrm{ob}(\mathsf{A})$，有一个**复合映射**：

$$\mathrm{Hom}(A, B) \times \mathrm{Hom}(B, C) \to \mathrm{Hom}(A, C), \quad (g, f) \mapsto g \circ f;$$

- 对于每个 $A \in \mathrm{ob}(\mathsf{A})$，存在 A 上的**单位** $1_A \in \mathrm{Hom}(A, A)$，

此外态射需要满足：

- 对于每个 $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$，$g \in \mathrm{Hom}(B, C)$ 与 $h \in \mathrm{Hom}(C, D)$，有 $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$；
- 对于每个 $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$，有 $f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$.

注释 1.2. 我们通常使用 $A \in \mathsf{A}$ 表示 $A \in \mathrm{ob}(\mathsf{A})$，$f : A \to B$ 或者 $A \xrightarrow{f} B$ 表示 $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$，gf 表示 $g \circ f$.

例 1.3 (数学结构的范畴). (a) 集合范畴 Set. 对象为集合, 给定集合 A, B, A 到 B 的态射就是集合意义下 A 到 B 的映射, 态射的复合即映射的复合, 此时单位 1_A 就是恒等映射 $A \to A$.

(b) 群范畴 Grp. 对象为群, 态射为群同态.

(c) 环范畴 Ring. 对象为环, 态射为环同态.

(d) 给定域 k, 有 k 上的向量空间范畴 Vect_k, 对象是向量空间, 态射是线性映射.

(e) 拓扑空间范畴 Top. 对象是拓扑空间, 态射是连续映射.

定义 1.4. 对于态射 $f : A \to B$，如果存在态射 $g : B \to A$ 使得 $gf = 1_A$ 以及 $fg = 1_B$，那么我们说 f 是**同构**. 此时我们说 g 是 f 的**逆**，记为 $g = f^{-1}$.

如果 A 到 B 之间存在一个同构, 那么我们说 A 和 B **同构**, 记作 $A \cong B$.

例 1.5. Set 中的同构等同于双射. 当然, 这句话在逻辑上其实是在表明: 一个映射具有双边逆映射当且仅当其是双射.

例 1.6. Grp 中的同构等同于群同构. 在一些抽象代数教材中, 群同构被定义为双射的群同态, 如果是这样, 那么实际上需要证明: 双射的群同态的逆映射也是群同态. 类似地, Ring 中的同构等同于环同构.

例 1.7. Top 中的同构是同胚. 与 Grp 或者 Ring 不同的是, Top 中双射的连续映射不一定是同构, 即连续映射的逆映射可以是连续的. 下面是一个经典的例子: 考虑映射 $f:[0,1)\to\mathbb{S}^1$ 为 $f(t)=e^{2\pi it}$, f 是双射的连续映射, 但是 f 不是同胚, 因为 $[0,1)$ 不是紧的, 但是 $\mathbb{S}^1$ 是紧的.

目前为止范畴的例子中对象都是具有某些结构的集合 (例如群结构、拓扑结构或者只有集合结构), 态射都是保持这些结构的映射 (群同态、连续映射或者普通的映射). 但是, 并非所有的范畴都长成这样, 实际上范畴的含义相当广泛, 其对象也不一定是 “配备了额外结构的集合”, 因此在一般的范畴中, 谈论对象的 “元素” 是没有意义的. 类似地, 在一般意义上的范畴中, 态射也不必是集合之间的映射. 总的来说: **范畴的对象不必类似于集合, 态射也不必类似于映射**. 下面的例子解释了这些观点.

例 1.8 (范畴作为数学结构)**.** (a) 一个范畴可以通过直接说出对象、态射、复合和单位来指定. 例如空范畴 $\emptyset$, 其没有任何对象或者态射. 范畴 1 由一个对象和唯一的单位态射构成. 也可以构造一个只有两个对象的范畴:

$$\bullet \longrightarrow \bullet,$$

这个范畴只有两个对象, 每个对象有一个单位态射, 两个对象之间有唯一的一个非单位态射. 在这些例子中, 我们并没有将对象视为一个类似集合的东西, 也没有将态射视为一个映射, 此时态射更多的类似于一个抽象的 “箭头”.

(b) 有些范畴中的态射只有单位态射, 即任意两个不同的对象之间都不存在任意态射, 这样的范畴被称为**离散范畴**. 离散范畴是最极端的情况, 即不同的对象之间完全隔离.

(c) 一个群本质上和只有一个对象且所有态射都是同构的范畴是一样的. 我们来说明这一点. 考虑只有一个对象的范畴 A, 记这个对象为 A, 那么范畴 A 的态射只有 $\mathrm{Hom}(A,A)$. 我们要求 A 中的每个态射都是同构, 也就是说每个 $f\in\mathrm{Hom}(A,A)$ 都有一个逆 $g\in\mathrm{Hom}(A,A)$ 使得 $fg=1_A=gf$. 实际上这样的范畴 A 和群没有本质区别, 对应关系如下所示.

范畴 A	群 G
态射 $f\in\mathrm{Hom}(A,A)$	元素 $g\in G$
态射的复合 $\circ$	元素的乘法 $\cdot$
单位态射 1_A	单位元 $1\in G$

(d) 在上一个例子中, 由于态射的逆不一定是必须的, 所以考虑 “没有逆元的群” 也是必要的, 这被称为**幺半群**. 具有一个对象的范畴本质上和幺半群是相同的, 其论证完全仿照上例.

(e) 一个**预序**指的是满足自反性和传递性的二元关系. 一个**预序集** $(S, \leq)$ 指的是一个集合 S 配备预序 $\leq$. 例如 $S = \mathbb{Z}$, $\leq$ 是整除关系.

　　一个预序集可以被视为范畴 A, 其中对于每个 $A, B \in \mathsf{A}$, 至多只有一个从 A 到 B 的态射. 此时我们用 $A \leq B$ 来表示存在态射 $A \to B$. 因为 A 是范畴, 所以 $A \leq B \leq C$ 表明 $A \leq C$. 由于始终存在 $A \to A$ 的态射 (即 1_A), 所以 $A \leq A$. 所以 A 实际上就表示了一族对象, 配备了一个具备自反性和传递性的二元关系.

　　一个**偏序**指的是满足 $A \leq B, B \leq A \Rightarrow A = B$ 的预序 $\leq$. 等价地说, 即上述范畴 A 中若 $A \cong B$ 能推出 $A = B$.

例 1.9 (反范畴)**.** 每个范畴 A 都有一个**反范畴** A^{op}, 其定义为将 A 的所有箭头反向. 准确的说, 有 $\mathrm{ob}(\mathsf{A}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{ob}(\mathsf{A})$, 对于任意对象 A, B, 有 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{A}^{\mathrm{op}}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(B, A)$. 此时 A^{op} 中若有 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, 那么意味着在 A 中有 $A \xleftarrow{f} B \xleftarrow{g} C$.

例 1.10 (积范畴)**.** 给定两个范畴 A 和 B, 构造**积范畴** $\mathsf{A} \times \mathsf{B}$, 满足

$$\mathrm{ob}(\mathsf{A} \times \mathsf{B}) = \mathrm{ob}(A) \times \mathrm{ob}(\mathsf{B}),$$
$$\mathrm{Hom}\big((A, B), (A', B')\big) = \mathrm{Hom}(A, A') \times \mathrm{Hom}(B, B').$$

即态射 $(A, B) \to (A', B')$ 是一对 (f, g), 其中 $f : A \to A'$ 是 A 中的态射, $g : B \to B'$ 是 B 中的态射.

1.2 函子

定义 1.11. 令 A, B 是范畴，**函子** $F : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ 由以下内容组成：

- 映射 $\mathrm{ob}(\mathsf{A}) \to \mathrm{ob}(B)$，记作 $A \mapsto F(A)$；
- 对于每个 $A, A' \in \mathsf{A}$，有映射 $\mathrm{Hom}(A, A') \to \mathrm{Hom}(F(A), F(A'))$，记作 $f \mapsto F(f)$.

还要满足：

- 当 A 中有 $A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{f'} A''$ 的时候，有 $F(f' \circ f) = F(f') \circ F(f)$；
- 对于任意 $A \in \mathsf{A}$，有 $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

注释 1.12. 我们已经熟悉将一种结构和保持结构的映射视为一个范畴（例如 Grp，Ring 等等），实际上，这种思想也可以应用于范畴和函子：如果对象为范畴，态射是函子，这也构成一个范畴，我们记为 CAT. 这一论断来源于函子的复合性，即给定函子 $\mathsf{A} \xrightarrow{F} \mathsf{B} \xrightarrow{G} \mathsf{C}$，那么存在函子 $\mathsf{A} \xrightarrow{G \circ F} \mathsf{C}$，$G \circ F$ 由自然的方式定义. 此外，对于任意范畴 A，存在单位态射 $1_{\mathsf{A}} : \mathsf{A} \to \mathsf{A}$.

例 1.13. 最简单的函子的例子是**遗忘函子** (这是一个非正式的用语, 没有准确的定义). 下面是一些例子:

(a) 存在一个函子 $U : \mathsf{Grp} \to \mathsf{Set}$ 定义如下: 如果 G 是一个群, 那么 $U(G)$ 是 G 的底集合. 如果 $f : G \to H$ 是群同态, 那么 $U(f) : U(G) \to U(H)$ 是将 f 视为集合间的映射. 所以 U 忘掉了群的群结构以及群同态作为同态的结构.

(b) 类似的, 存在函子 $\mathsf{Ring} \to \mathsf{Set}$ 忘掉环结构以及函子 $\mathsf{Vect}_k \to \mathsf{Set}$ 忘掉向量空间结构.

(c) 遗忘函子不必忘掉**所有的**结构. 例如, 令 Ab 是交换群范畴. 那么存在函子 Ring $\to$ Ab 忘掉环的所有结构, 仅仅记住了环的加法群结构. 或者, 令 Mon 是幺半群范畴, 那么存在函子 Ring $\to$ Mon 忘掉加法结构, 仅仅记住环的乘法幺半群结构.

(d) 存在一个包含函子 $U : \mathsf{Ab} \to \mathsf{Grp}$, 将交换群 A 送到 $U(A) = A$ 以及交换群同态 f 送到 $U(f) = f$. 这忘掉了交换群是交换的.