

---

# Contents

<b>1</b>	<b>环和理想</b>	<b>1</b>
1.1	素理想和极大理想	1
1.2	幂零根和 Jacobson 根	3
1.3	幂等元与环的分解	4
1.4	理想的运算	4
1.5	理想的扩张和收缩	7
1.6	EXERCISES	9
<b>2</b>	<b>模</b>	<b>21</b>
2.1	自由模与有限生成模	21
2.2	ED 上的有限生成模与相似标准型	23
2.3	有限生成模	27
2.4	正合列	28
2.5	模的张量积	30
2.6	标量的扩张与限制	33
2.7	张量积的正合性质	35
2.8	代数	38
2.9	代数的张量积	38
2.10	EXERCISES	39
<b>3</b>	<b>分式环和分式模</b>	<b>47</b>
3.1	分式环、分式模与局部化	47
3.2	局部性质	50
3.3	分式环中理想的扩张和收缩	51
3.4	EXERCISES	53
<b>4</b>	<b>整相关和赋值</b>	<b>55</b>
4.1	整相关	55
4.2	上行定理	57
4.3	整闭整环和下行定理	59

4.4	赋值环	63
4.5	EXERCISES	68
<b>5</b>	<b>链条件</b>	<b>71</b>
5.1	Noether 模和 Artin 模	71
<b>6</b>	<b>Noether 环</b>	<b>77</b>
6.1	Noether 环	77
6.2	Hilbert's Nullstellensatz	79

# 环和理想

**定理 1.1 (Jumping's typology theorem).** 令  $\mathcal{W}$  是手写求和符号范畴.  $\mathcal{W}$  中存在唯一的对象  $\frac{\infty}{2}$  (Jumping 符号) 和一族 typo 态射  $\Sigma^{(\cdot)} \rightarrow \frac{\infty}{2}$ . 对于每个  $\mathcal{W}$  中对象到正确求和符号的态射  $\Sigma^{(\cdot)} \rightarrow \Sigma^\infty$  (称为反 typo 态射), 存在唯一的从 Jumping 符号  $\frac{\infty}{2}$  到正确求和符号  $\Sigma^\infty$  的态射使得下面的图表交换:

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^{(\cdot)} & \xrightarrow{\text{typo}} & \frac{\infty}{2} \\ & \searrow \text{anti-typo} & \downarrow \text{correct} \\ & & \Sigma^\infty \end{array}$$

## 1.1 素理想和极大理想

在本课程中, “环”一词始终指的是一个有单位元 1 的交换环.

**定义 1.2.**  $A$  是一个环,  $A$  的所有素理想的集合称为  $A$  的谱, 记为  $\text{Spec}(A)$ .  $A$  的所有极大理想的集合称为  $A$  的极大谱, 记为  $\Omega(A)$ .

$f: A \rightarrow B$  是一个环同态, 对于每个  $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(B)$ , 考虑复合同态  $g = \pi \circ f: A \rightarrow B/\mathfrak{q}$ , 那么  $\ker g = f^{-1}(\mathfrak{q})$ , 故  $A/f^{-1}(\mathfrak{q}) \simeq \text{im } g \subset B/\mathfrak{q}$  是整环, 所以  $f^{-1}(\mathfrak{q}) \in \text{Spec}(A)$ , 故  $f$  诱导出了映射  $f^*: \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ ,  $f^*(\mathfrak{q}) = f^{-1}(\mathfrak{q})$ . 对于极大理想并没有类似的结果, 例如  $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{Q}$ , 映射  $f: A \rightarrow B$  为嵌入映射, 取  $B$  的极大理想  $0$ , 但是  $f^{-1}(0) = 0$  不是  $A$  的极大理想.

再提一下理想  $\mathfrak{p}$  是素理想的三个重要等价条件, 这三种后面都会用到:

1. 定义: 若  $ab \in \mathfrak{p}$ , 则  $a \in \mathfrak{p}$  或者  $b \in \mathfrak{p}$ ;
2. 逆否命题: 若  $a \notin \mathfrak{p}$  且  $b \notin \mathfrak{p}$ , 则  $ab \notin \mathfrak{p}$ ;
3. 写为理想的形式: 若理想  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$  满足  $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ , 则  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$  或者  $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ .

**定理 1.3.** 任意非零环  $A$  至少有一个极大理想.

*Proof.* 令  $S$  为  $A$  中所有不等于 (1) 的理想的集合. 由于  $(0) \in S$ , 所以  $S$  非空. 在集

合的包含关系下  $S$  成为一个偏序集. 对于  $S$  中的每个链  $T$ , 考虑

$$I = \bigcup_{\alpha \in T} \alpha,$$

容易验证  $I$  是不等于  $(1)$  的理想, 所以  $I \in S$  是  $T$  的上界. 那么根据 Zorn 引理,  $S$  存在一个极大元  $\mathfrak{m}$ . 若理想  $J$  满足,  $\mathfrak{m} \subseteq J \subseteq A$ , 如果  $J \neq A$ , 那么  $J \in S$ , 由于  $\mathfrak{m}$  是极大元, 所以  $J = \mathfrak{m}$ , 故  $\mathfrak{m}$  就是一个极大理想.  $\square$

**推论 1.4.** 如果  $\alpha \neq (1)$  是  $A$  的一个理想, 那么存在一个包含  $\alpha$  的极大理想.

*Proof.*  $A/\alpha$  是非零环, 从而至少有一个极大理想, 对应于  $A$  的包含  $\alpha$  的极大理想.  $\square$

**推论 1.5.**  $A$  的任意非单位元素  $a$  都被包含在一个极大理想中.

**定义 1.6.** 若环  $A$  只有一个极大理想  $\mathfrak{m}$ , 那么  $A$  被称为**局部环**. 对应的域  $A/\mathfrak{m}$  被称为  $A$  的**剩余域**.

**例 1.7.**

1. 任意域都是局部环, 其只有一个极大理想  $0$ .
2.  $p$  是素数,  $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$  是局部环, 其极大理想为  $p\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ . 这是因为  $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$  的极大理想一一对应到  $\mathbb{Z}$  中包含  $(p^n)$  的极大理想  $(a)$ , 那么  $a \mid p^n$ , 由于  $\mathbb{Z}$  是主理想整环, 所以  $(a)$  是极大理想当且仅当  $a$  是不可约元, 故只有  $a = p$ , 对应于  $p\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ .
3. 域  $F$  上的形式幂级数环  $F[[x]]$  是局部环, 其极大理想为  $(x)$ . 注意到如果  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots \notin (x)$ , 即  $a_0 \neq 0$ , 那么

$$\frac{1}{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots} = \frac{1}{a_0} \frac{1}{1 + (a_1/a_0x + a_2/a_0x^2 + \cdots)} = \frac{1}{a_0} (1 - a_1/a_0x + \cdots),$$

这表明  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$  是单位. 另一方面, 因为  $x$  不可逆, 所以  $(x)$  中的元素都不可逆. 故  $F[[x]]$  的单位群就是  $F[[x]] \setminus (x)$ . 这表明若  $\alpha \neq (1)$  是理想, 那么必然有  $\alpha \subseteq (x)$ . 这就表明  $(x)$  是唯一的极大理想.

上述例 3 可以进行一般化, 即下面的命题.

**命题 1.8.**

1.  $A$  是一个环,  $\mathfrak{m} \neq (1)$  是一个理想, 并且任意  $x \in A \setminus \mathfrak{m}$  都是  $A$  中的单位, 那么  $A$  是局部环, 且  $\mathfrak{m}$  为  $A$  的极大理想.
2.  $A$  是一个环,  $\mathfrak{m}$  是一个极大理想, 使得  $1 + \mathfrak{m}$  中的每个元素都是  $A$  中的单位, 那么  $A$  是局部环.

*Proof.* (1) 任意  $x \in A \setminus \mathfrak{m}$  都是  $A$  中的单位表明若  $\alpha \neq (1)$  是任意理想, 那么  $\alpha \subseteq \mathfrak{m}$ , 所以  $\mathfrak{m}$  是唯一的极大理想.

(2) 任取  $x \in A \setminus \mathfrak{m}$ , 那么  $x + \mathfrak{m} \in A/\mathfrak{m}$  是非零元, 所以存在  $y + \mathfrak{m} \in A/\mathfrak{m}$  使得  $(x + \mathfrak{m})(y + \mathfrak{m}) = 1 + \mathfrak{m}$ , 即  $xy - 1 \in \mathfrak{m}$ , 故  $xy \in 1 + \mathfrak{m}$  是单位, 所以  $x$  是单位, 由 (1) 可知  $A$  是局部环.  $\square$

## 1.2 幂零根和 Jacobson 根

**命题 1.9.** 环  $A$  的所有幂零元的集合  $\text{nil}(A)$  是一个理想, 并且  $A/\text{nil}(A)$  没有非零的幂零元.

*Proof.* 任取  $x \in \text{nil}(A)$ , 显然对于所有的  $a \in A$ ,  $ax$  仍然是幂零元. 任取  $x, y \in \text{nil}(A)$ , 即存在  $m, n$  使得  $x^m = 0, y^n = 0$ , 那么

$$(x - y)^{m+n} = \sum_{i=0}^{m+n} \binom{m+n}{i} x^i (-y)^{m+n-i} = \left( \sum_{i=0}^m + \sum_{i=m+1}^{m+n} \right) \binom{m+n}{i} x^i (-y)^{m+n-i},$$

前一个和式的每一项中  $m+n-i \geq n$ , 故  $x^i (-y)^{m+n-i} = 0$ , 后一个和式的每一项中  $i \geq m$ , 故  $x^i (-y)^{m+n-i} = 0$ , 所以  $x - y \in \text{nil}(A)$ , 即  $\text{nil}(A)$  是一个理想.

若  $a + \text{nil}(A)$  是幂零元, 即存在  $m$  使得  $a^m + \text{nil}(A) = 0$ , 即  $a^m \in \text{nil}(A)$ , 这表明  $a \in \text{nil}(A)$ .  $\square$

**定义 1.10.** 理想  $\text{nil}(A)$  被称为  $A$  的**幂零根**.

**命题 1.11.**  $A$  的幂零根是所有素理想的交集.

*Proof.* 令  $\text{nil}'(A)$  是  $A$  的所有素理想的交集. 如果  $a \in A$  是幂零元, 那么存在  $m$  使得  $a^m = 0 \in \mathfrak{p}$ ,  $\mathfrak{p}$  是任意素理想. 根据素理想的定义, 这表明  $a \in \mathfrak{p}$ , 故  $a \in \text{nil}'(A)$ .

另一方面, 如果  $a \in A$  不是幂零元, 令  $S$  是理想  $\mathfrak{a}$  的集合,  $\mathfrak{a}$  满足对于任意的  $n > 0$ ,  $a^n \notin \mathfrak{a}$ . 由于  $0 \in S$ , 所以  $S$  非空. 容易验证  $S$  满足 Zorn 引理使用条件, 所以存在极大元  $\mathfrak{p}$ . 我们证明  $\mathfrak{p}$  是素理想. 若  $x, y \notin \mathfrak{p}$ , 那么  $\mathfrak{p} + (x)$  和  $\mathfrak{p} + (y)$  严格包含  $\mathfrak{p}$ , 因此它们不属于  $S$ , 于是存在  $m, n$  使得

$$a^m \in \mathfrak{p} + (x), \quad a^n \in \mathfrak{p} + (y).$$

这表明  $a^{m+n} \in (\mathfrak{p} + (x))(\mathfrak{p} + (y)) \subseteq \mathfrak{p} + (xy)$ , 故  $\mathfrak{p} + (xy) \notin S$ , 所以  $xy \notin \mathfrak{p}$ . 这表明  $\mathfrak{p}$  是素理想. 所以存在一个素理想  $\mathfrak{p}$  使得  $a \notin \mathfrak{p}$ , 故  $a \notin \text{nil}'(A)$ .  $\square$

**定义 1.12.** 环  $A$  的所有极大理想的交集被称为  $A$  的**Jacobson 根**, 记为  $\text{rad}(A)$ .

**命题 1.13.**  $x \in \text{rad}(A)$  当且仅当对于任意的  $y \in A$ ,  $1 - xy$  是单位.

*Proof.* 若  $x \in \text{rad}(A)$ , 那么对于任意的  $y \in A$  有  $xy \in \text{rad}(A)$ . 如果  $1 - xy$  不是单位, 那么存在一个极大理想  $\mathfrak{m} \ni 1 - xy$ , 注意到  $xy \in \text{rad}(A) \subseteq \mathfrak{m}$ , 所以  $1 = (1 - xy) + xy \in \mathfrak{m}$ , 这与  $\mathfrak{m}$  是极大理想矛盾, 所以  $1 - xy$  是单位.

若对于任意的  $y \in A$ ,  $1 - xy$  是单位. 假设存在一个极大理想  $\mathfrak{m}$  使得  $x \notin \mathfrak{m}$ , 故  $\mathfrak{m} + (x)$  严格包含  $\mathfrak{m}$ , 所以  $(1) = \mathfrak{m} + (x)$ , 即存在  $y \in A$  使得  $1 = m + xy$ , 其中  $m \in \mathfrak{m}$ , 那么  $1 - xy = m$  不是单位, 推出矛盾. 故  $x \in \text{rad}(A)$ .  $\square$

### 1.3 幂等元与环的分解

这部分是上课的内容, 书中没有. 环  $A$  中满足  $x^2 = x$  的元素被称为幂等元. 0 和 1 显然是幂等元, 被称为平凡幂等元. 关于幂等元可以注意到下面的两个简单事实: 如果  $x$  是幂等元, 那么  $(1-x)^2 = 1-2x+x^2 = 1-x$ , 所以  $1-x$  也是幂等元, 并且  $x(1-x) = 0$ . 如果  $x \in A^\times$  是幂等元, 那么  $x = x^2x^{-1} = xx^{-1} = 1$ , 所以  $A^\times$  中的幂等元只有 1.

**定义 1.14.** 一个环  $A$  如果不能同构于两个非零环  $A_1$  和  $A_2$  的直积, 那么称  $A$  是**不可分解的**.

幂等元实际上和环的可分解性联系紧密, 体现在下面的引理.

**引理 1.15.**  $A$  是一个环, 那么下面的说法是等价的:

1. 存在两个非零环  $A_1, A_2$  使得  $A \simeq A_1 \times A_2$ ;
2.  $A$  存在非平凡幂等元;
3. 存在两个非零理想  $\alpha_1, \alpha_2$  使得  $A = \alpha_1 \oplus \alpha_2$ .

*Proof.* (1)  $\Rightarrow$  (2) 如果存在两个非零环  $A_1, A_2$  使得  $A \simeq A_1 \times A_2$ , 那么  $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$  是  $A_1 \times A_2$  的三个幂等元, 所以  $A_1 \times A_2$  一定有非平凡幂等元, 即  $A$  存在非平凡幂等元.

(2)  $\Rightarrow$  (3) 如果  $A$  存在非平凡幂等元  $e$ , 注意到任意的  $x \in A$  满足  $x = xe + x(1-e)$ , 所以  $A = (e) + (1-e)$ . 取  $x \in (e) \cap (1-e)$ , 那么存在  $a, b \in A$  使得  $x = ae = b(1-e)$ , 那么  $ae = ae^2 = b(1-e)e = 0$ , 所以  $x = 0$ . 这就表明  $A = (e) \oplus (1-e)$ .

(3)  $\Rightarrow$  (1) 考虑同态  $\phi: A \rightarrow A/\alpha_1 \times A/\alpha_2$ ,  $\phi(x) = (x + \alpha_1, x + \alpha_2)$ , 由于  $\ker \phi = \alpha_1 \cap \alpha_2 = 0$ , 所以  $\phi$  是单射. 任取  $(x + \alpha_1, y + \alpha_2) \in A/\alpha_1 \times A/\alpha_2$ , 设  $1 = a_1 + a_2$ , 其中  $a_1 \in \alpha_1, a_2 \in \alpha_2$ , 那么令  $a = xa_2 + ya_1$ , 就有

$$\phi(a) = (xa_2 + \alpha_1, ya_1 + \alpha_2) = (x + \alpha_1, y + \alpha_2),$$

所以  $\phi$  是满射, 故  $A \simeq A/\alpha_1 \times A/\alpha_2$ . □

**例 1.16.**

1. 整环都是不可分解的, 因为  $x^2 - x = x(x-1) = 0$  的解只有 0 和 1.
2. 局部环是不可分解的, 若  $x$  是一个非平凡幂等元, 那么  $1-x$  可逆, 从而  $1-x = 1$ , 即  $x = 0$ , 这与  $x$  非平凡矛盾.

### 1.4 理想的操作

对于环  $A$  的两个理想  $\alpha, \mathfrak{b}$ , 有  $(\alpha + \mathfrak{b})(\alpha \cap \mathfrak{b}) = \alpha(\alpha \cap \mathfrak{b}) + \mathfrak{b}(\alpha \cap \mathfrak{b}) \subseteq \alpha\mathfrak{b} \subseteq \alpha \cap \mathfrak{b}$ , 这表明  $\alpha + \mathfrak{b} = (1)$  的时候, 有  $\alpha \cap \mathfrak{b} = \alpha\mathfrak{b}$ , 我们将这种情况称为  $\alpha$  与  $\mathfrak{b}$  互素.

$A$  是环,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  是  $A$  的理想, 定义同态

$$\phi: A \rightarrow \prod_{i=1}^n (A/\alpha_i)$$

为  $\phi(x) = (x + \alpha_1, \dots, x + \alpha_n)$ .

下面的命题实际上就是中国剩余定理的证明.

**命题 1.17.**

1. 若  $\alpha_i, \alpha_j$  互素 ( $i \neq j$ ), 那么  $\prod \alpha_i = \bigcap \alpha_i$ .
2.  $\phi$  是满射当且仅当  $i \neq j$  的时候总有  $\alpha_i, \alpha_j$  互素.
3.  $\phi$  是单射当且仅当  $\bigcap \alpha_i = (0)$ .

*Proof.* (1) 对  $n$  归纳即可.  $n = 2$  的时候上面已经说明, 假设结论在  $n - 1$  的时候成立. 我们证明  $\alpha_i$  和  $\prod_{j \neq i} \alpha_j$  互素即可. 这实际上是证明若理想  $\alpha_1, \alpha_2$  都和  $b$  互素, 那么  $\alpha_1 \alpha_2$  也和  $b$  互素. 注意到

$$(1) = (\alpha_1 + b)(\alpha_2 + b) \subseteq \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 b + b \alpha_2 + b \subseteq \alpha_1 \alpha_2 + b,$$

这就表明  $\alpha_1 \alpha_2$  与  $b$  互素. 回到这个命题, 重复上述步骤就可以得到  $\alpha_i$  和  $\prod_{j \neq i} \alpha_j$  互素, 根据假设,  $\prod_{j \neq i} \alpha_j = \bigcap_{j \neq i} \alpha_j$ , 故

$$\prod_{i=1}^n \alpha_i = \alpha_i \left( \prod_{j \neq i} \alpha_j \right) = \alpha_i \cap \left( \prod_{j \neq i} \alpha_j \right) = \alpha_i \cap \left( \bigcap_{j \neq i} \alpha_j \right) = \bigcap_{i=1}^n \alpha_i.$$

(2) 若  $\phi$  是满射, 对于  $(0, \dots, 1 + \alpha_i, \dots, 0)$ , 存在  $a \in A$ , 使得  $\phi(a) = (0, \dots, 1 + \alpha_i, \dots, 0)$ , 这表明  $1 - a \in \alpha_i$ , 并且  $a \in \alpha_j$  ( $j \neq i$ ), 故

$$1 = (1 - a) + a \in \alpha_i + \alpha_j,$$

这就表明  $\alpha_i$  和  $\alpha_j$  互素.

反之, 若  $\alpha_i$  和  $\alpha_j$  互素. 令  $b_i = \prod_{j \neq i} \alpha_j$ , 那么  $b_1 + b_2 = (\alpha_2 + \alpha_1) \alpha_3 \cdots \alpha_n = \alpha_3 \cdots \alpha_n$ , 进一步的,  $b_1 + b_2 + b_3 = (\alpha_3 + \alpha_1 \alpha_2) \alpha_4 \cdots \alpha_n$ , 根据 (1) 的证明我们知道  $\alpha_1 \alpha_2$  与  $\alpha_3$  互素, 所以  $b_1 + b_2 + b_3 = \alpha_4 \cdots \alpha_n$ , 重复这个步骤, 就得到  $b_1 + \cdots + b_n = (1)$ . 这表明存在  $b_i \in b_i$ , 使得  $b_1 + \cdots + b_n = 1$ , 此时  $b_i \in \prod_{j \neq i} \alpha_j \subseteq \alpha_j$  以及  $1 - b_i = \sum_{j \neq i} b_j \in \alpha_i$ , 故  $\phi(b_i)$  的第  $i$  个分量是  $1 + \alpha_i$ , 其余分量都是 0. 这就足以证明  $\phi$  是满射.

(3) 注意到  $\bigcap \alpha_i = \ker \phi$  即可. □

**命题 1.18.**

1. 令  $p_1, \dots, p_n$  是素理想, 理想  $\alpha$  包含于  $\bigcup_{i=1}^n p_i$ , 那么存在某个  $i$  使得  $\alpha \subseteq p_i$ .
2. 令  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  是理想, 素理想  $p$  包含  $\bigcap_{i=1}^n \alpha_i$ , 那么存在某个  $i$  使得  $p \supseteq \alpha_i$ . 如果  $p = \bigcap \alpha_i$ , 那么存在某个  $i$  使得  $p = \alpha_i$ .

*Proof.* (1) 证明逆否命题: 如果对于任意的  $1 \leq i \leq n$  都有  $\alpha \not\subseteq \mathfrak{p}_i$ , 那么  $\alpha \not\subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$ . 对  $n$  使用归纳法,  $n = 1$  时显然成立. 假设结论在  $n - 1$  时成立. 在  $n$  的时候, 那么根据假设, 对于任意的  $1 \leq i \leq n$ , 有  $\alpha \not\subseteq \bigcup_{j \neq i} \mathfrak{p}_j$ , 即存在  $x_i \in \alpha$ , 使得  $x_i \notin \bigcup_{j \neq i} \mathfrak{p}_j$ , 此时有两种情况.

- 存在某个  $i_0$  使得  $x_{i_0} \notin \mathfrak{p}_{i_0}$ . 此时  $x_{i_0} \notin \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$ , 故  $\alpha \not\subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$ , 结论成立.
- 对于任意的  $i$ , 都有  $x_i \in \mathfrak{p}_i$ . 考虑元素

$$y = \sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} x_j = x_2 x_3 \cdots x_n + x_1 x_3 \cdots x_n + \cdots + x_1 \cdots x_{n-2} x_{n-1},$$

根据假设  $x_2, x_3, \dots, x_n \notin \mathfrak{p}_1$ , 所以  $x_2 x_3 \cdots x_n \notin \mathfrak{p}_1$ , 同时  $\prod_{j \neq i, i > 1} x_j \in \mathfrak{p}_1$ , 所以  $y \notin \mathfrak{p}_1$ . 同理, 对于任意的  $i$  都有  $y \notin \mathfrak{p}_i$ , 所以  $y \notin \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$ , 故  $\alpha \not\subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$ , 结论成立.

(2) 由于

$$\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n \subseteq \bigcap_{i=1}^n \alpha_i \subseteq \mathfrak{p},$$

所以存在某个  $i$  使得  $\mathfrak{p} \supseteq \alpha_i$ . □

如果  $\alpha, \mathfrak{b}$  是环  $A$  的两个理想, 定义它们的商为

$$(\alpha : \mathfrak{b}) = \{x \in A \mid x\mathfrak{b} \subseteq \alpha\},$$

容易验证这是一个理想. 注意到  $\alpha\mathfrak{b} \subseteq \alpha$ , 所以  $\alpha \subseteq (\alpha : \mathfrak{b})$ . 特别地,  $(0 : \mathfrak{b})$  被称为  $\mathfrak{b}$  的零化子, 记为  $\text{Ann}(\mathfrak{b})$ . 由于  $(\alpha : \mathfrak{b})$  是包含  $\alpha$  的理想, 根据对应定理, 所以其对应到  $A/\alpha$  的理想  $\overline{(\alpha : \mathfrak{b})} = \text{Ann}(\overline{\mathfrak{b}})$ . 如果  $\mathfrak{b}$  是主理想  $(x)$ , 我们用  $(\alpha : x)$  代表  $(\alpha : (x))$ .

**命题 1.19.**

1.  $\alpha \subseteq (\alpha : \mathfrak{b})$ ;
2.  $(\alpha : \mathfrak{b})\mathfrak{b} \subseteq \alpha$ ;
3.  $((\alpha : \mathfrak{b}) : \mathfrak{c}) = (\alpha : \mathfrak{b}\mathfrak{c}) = ((\alpha : \mathfrak{c}) : \mathfrak{b})$ ;
4.  $(\bigcap_i \alpha_i : \mathfrak{b}) = \bigcap_i (\alpha_i : \mathfrak{b})$ ;
5.  $(\alpha : \sum_i \mathfrak{b}_i) = \bigcap_i (\alpha : \mathfrak{b}_i)$ .

*Proof.* (1) 和 (2) 是显然的.

(3)  $x \in ((\alpha : \mathfrak{b}) : \mathfrak{c})$  当且仅当  $xc \subseteq (\alpha : \mathfrak{b})$ , 当且仅当  $xc\mathfrak{b} \subseteq \alpha$ , 当且仅当  $x \in (\alpha : \mathfrak{b}\mathfrak{c})$ , 所以  $((\alpha : \mathfrak{b}) : \mathfrak{c}) = (\alpha : \mathfrak{b}\mathfrak{c})$ . 另一个同理.

(4)  $x \in (\bigcap_i \alpha_i : \mathfrak{b})$  当且仅当  $x\mathfrak{b} \subseteq \bigcap_i \alpha_i$ , 当且仅当  $x\mathfrak{b} \subseteq \alpha_i$  ( $\forall i$ ), 当且仅当  $x \in (\alpha_i : \mathfrak{b})$  ( $\forall i$ ), 所以  $(\bigcap_i \alpha_i : \mathfrak{b}) = \bigcap_i (\alpha_i : \mathfrak{b})$ .

(5)  $x \in (\alpha : \sum_i \mathfrak{b}_i)$  当且仅当  $x(\sum_i \mathfrak{b}_i) \subseteq \alpha$ , 由于  $x(\sum_i \mathfrak{b}_i) = \sum_i x\mathfrak{b}_i$ , 所以这相当于  $x\mathfrak{b}_i \subseteq \alpha$  ( $\forall i$ ), 所以  $(\alpha : \sum_i \mathfrak{b}_i) = \bigcap_i (\alpha : \mathfrak{b}_i)$ . □

对于环  $A$  的理想  $\alpha$ , 定义  $\alpha$  的根为

$$\sqrt{\alpha} = \{x \in A \mid \exists n > 0, x^n \in \alpha\}.$$



显然  $\alpha \subseteq \sqrt{\alpha}$ . 对于自然同态  $\pi : A \rightarrow A/\alpha$ , 注意到  $\sqrt{\alpha} = \pi^{-1}(\text{nil}(A/\alpha))$ , 所以  $\sqrt{\alpha}$  是包含  $\alpha$  的一个理想.

**命题 1.20.** 理想  $\alpha$  的根是所有包含  $\alpha$  的素理想的交集.

*Proof.* 我们有

$$\sqrt{\alpha} = \pi^{-1}(\text{nil}(A/\alpha)) = \pi^{-1}\left(\bigcap_{\bar{p} \text{ prime}} \bar{p}\right) = \bigcap_{\bar{p} \text{ prime}} \pi^{-1}(\bar{p}) = \bigcap_{\substack{p \text{ prime} \\ p \supseteq \alpha}} p. \quad \square$$

**命题 1.21.**

1.  $\sqrt{\alpha} \supseteq \alpha$ ;
2.  $\sqrt{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\alpha}$ ;
3.  $\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha \cap \beta} = \sqrt{\alpha} \cap \sqrt{\beta}$ ;
4.  $\sqrt{\alpha} = (1)$  当且仅当  $\alpha = (1)$ ;
5.  $\sqrt{\alpha + \beta} = \sqrt{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}$ ;
6. 如果  $p$  是素理想, 那么  $\sqrt{p^n} = p$  ( $\forall n > 0$ ).

*Proof.* (1) 显然.

(2) 已经有  $\sqrt{\alpha} \subseteq \sqrt{\sqrt{\alpha}}$ . 任取  $x \in \sqrt{\sqrt{\alpha}}$ , 那么存在  $n$  使得  $x^n \in \sqrt{\alpha}$ , 进而存在  $m$  使得  $x^{nm} = (x^n)^m \in \alpha$ , 所以  $x \in \sqrt{\alpha}$ , 所以  $\sqrt{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\alpha}$ .

(3) 由于  $\alpha\beta \subseteq \alpha \cap \beta$ , 所以  $\sqrt{\alpha\beta} \subseteq \sqrt{\alpha \cap \beta}$ . 任取  $x \in \sqrt{\alpha \cap \beta}$ , 那么存在  $n$  使得  $x^n \in \alpha \cap \beta$ , 那么  $x^{2n} = x^n x^n \in \alpha\beta$ , 所以  $x \in \sqrt{\alpha\beta}$ . 所以  $\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha \cap \beta}$ .

显然  $\sqrt{\alpha \cap \beta} \subseteq \sqrt{\alpha} \cap \sqrt{\beta}$ . 任取  $x \in \sqrt{\alpha} \cap \sqrt{\beta}$ , 那么存在  $n, m$  使得  $x^n \in \alpha, x^m \in \beta$ , 所以  $x^{n+m} = x^n x^m \in \alpha \cap \beta$ , 所以  $x \in \sqrt{\alpha \cap \beta}$ , 所以  $\sqrt{\alpha \cap \beta} = \sqrt{\alpha} \cap \sqrt{\beta}$ .

(4)  $\sqrt{\alpha} = (1)$  当且仅当  $1 \in \alpha$ .

(5) 显然  $\sqrt{\alpha + \beta} \subseteq \sqrt{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}$ . 由于  $\sqrt{\alpha} \subseteq \sqrt{\alpha + \beta}$  以及  $\sqrt{\beta} \subseteq \sqrt{\alpha + \beta}$ , 所以  $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \subseteq \sqrt{\alpha + \beta}$ , 所以  $\sqrt{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} \subseteq \sqrt{\sqrt{\alpha + \beta}} = \sqrt{\alpha + \beta}$ , 所以  $\sqrt{\alpha + \beta} = \sqrt{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}$ .

(6) 对  $n$  归纳.  $n = 1$  的时候, 任取  $x \in \sqrt{p}$ , 那么存在  $m$  使得  $x^m \in p$ , 故  $x \in p$ , 所以  $\sqrt{p} = p$ . 假设结论在  $n-1$  时成立, 那么  $\sqrt{p^n} = \sqrt{p p^{n-1}} = \sqrt{p} \cap \sqrt{p^{n-1}} = p \cap p = p$ .  $\square$

## 1.5 理想的扩张和收缩

$f : A \rightarrow B$  是环同态. 如果  $\alpha$  是  $A$  的一个理想,  $f(\alpha)$  不一定是理想, 我们定义  $f(\alpha)$  在  $B$  中生成的理想  $Bf(\alpha)$  为  $\alpha$  的**扩张**, 记作  $\alpha^e$ , 更准确地说,  $\alpha^e$  中的元素形如  $\sum y_i f(x_i)$ , 其中  $x_i \in \alpha, y_i \in B$ .

如果  $\mathfrak{b}$  是  $B$  的理想, 那么  $f^{-1}(\mathfrak{b})$  总是  $A$  的理想, 我们称为  $\mathfrak{b}$  的**收缩**, 记为  $\mathfrak{b}^c$ . 在开始我们就提过, 如果  $\mathfrak{b}$  是素理想, 那么  $\mathfrak{b}^c$  也是素理想. 但是  $\alpha$  是素理想,  $\alpha^e$  不一定是素理想.

当  $A \subseteq B$ ,  $f$  是嵌入的时候, 可以观察到:  $\alpha^e = \alpha B$  以及  $\mathfrak{b}^c = \mathfrak{b} \cap A$ .

**例 1.22.** 考虑嵌入  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}[i]$ .  $\mathbb{Z}$  的素理想  $(p)$  扩张到  $\mathbb{Z}[i]$  中可能是也可能不再是素理想.  $\mathbb{Z}[i]$  是主理想整环, 那么实际上有下面的情况:

1.  $(2)^e = ((1+i)^2)$  是  $\mathbb{Z}[i]$  中两个素理想的平方.
2. 如果  $p \equiv 1 \pmod{4}$ , 那么  $(p)^e$  是两个不同的素理想之积, 例如  $(5)^e = (2+i)(2-i)$ .
3. 如果  $p \equiv 3 \pmod{4}$ , 那么  $(p)^e$  仍然是  $\mathbb{Z}[i]$  中的素理想.

第二种情况并不是一个平凡的结果, 这来源于 Fermat 二平方和定理: 一个素数  $p \equiv 1 \pmod{4}$  当且仅当能够写为  $p = a^2 + b^2$  的形式. 进一步的, 在代数数论中, 上述三种情况分别被称为分歧、分裂和惯性.

**命题 1.23.**

1.  $\alpha \subseteq \alpha^{ec}$ ,  $\mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{b}^{ce}$ .
2.  $\mathfrak{b}^c = \mathfrak{b}^{cec}$ ,  $\alpha^e = \alpha^{ece}$ .
3. 如果  $C$  是所有理想的收缩组成的  $A$  的子集,  $E$  是所有理想的扩张组成的  $B$  的子集, 即

$$C = \{\mathfrak{b}^c \mid \mathfrak{b} \subseteq B\}, \quad E = \{\alpha^e \mid \alpha \subseteq A\},$$

那么  $C = \{\alpha \subseteq A \mid \alpha^{ec} = \alpha\}$ ,  $E = \{\mathfrak{b} \subseteq B \mid \mathfrak{b}^{ce} = \mathfrak{b}\}$ . 这表明  $C$  和  $E$  之间存在一一对应, 即  $\alpha \mapsto \alpha^e$  以及  $\mathfrak{b} \mapsto \mathfrak{b}^c$ .

*Proof.* (1) 直接按定义验证即可.

(2) 已经有  $\mathfrak{b}^c \subseteq \mathfrak{b}^{cec}$ . 另一方面, 有  $\mathfrak{b}^{cec} = (\mathfrak{b}^{ce})^c \subseteq \mathfrak{b}^c$ .

(3) 如果  $\alpha \in C$ , 那么  $\alpha^{ec} = \mathfrak{b}^{cec} = \mathfrak{b}^c = \alpha$ . 反之, 若  $\alpha^{ec} = \alpha$ , 那么  $\alpha = (\alpha^e)^c$ , 所以  $\alpha \in C$ .  $\square$

**命题 1.24.** 如果  $\alpha_1, \alpha_2$  是  $A$  的理想,  $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$  是  $B$  的理想, 那么

$$\begin{aligned} (\alpha_1 + \alpha_2)^e &= \alpha_1^e + \alpha_2^e, & (\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2)^c &\supseteq \mathfrak{b}_1^c + \mathfrak{b}_2^c, \\ (\alpha_1 \cap \alpha_2)^e &\subseteq \alpha_1^e \cap \alpha_2^e, & (\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2)^c &= \mathfrak{b}_1^c \cap \mathfrak{b}_2^c, \\ (\alpha_1 \alpha_2)^e &= \alpha_1^e \alpha_2^e, & (\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2)^c &\supseteq \mathfrak{b}_1^c \mathfrak{b}_2^c, \\ (\alpha_1 : \alpha_2)^e &\subseteq (\alpha_1^e : \alpha_2^e), & (\mathfrak{b}_1 : \mathfrak{b}_2)^c &\subseteq (\mathfrak{b}_1^c : \mathfrak{b}_2^c), \\ \sqrt{\alpha}^e &\subseteq \sqrt{\alpha^e}, & \sqrt{\mathfrak{b}}^c &= \sqrt{\mathfrak{b}^c}. \end{aligned}$$

*Proof.*

- $(\alpha_1 + \alpha_2)^e = \alpha_1^e + \alpha_2^e$ . 根据环同态的性质, 我们有

$$(\alpha_1 + \alpha_2)^e = Bf(\alpha_1 + \alpha_2) = B(f(\alpha_1) + f(\alpha_2)) = Bf(\alpha_1) + Bf(\alpha_2) = \alpha_1^e + \alpha_2^e.$$

- $(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2)^c \supseteq \mathfrak{b}_1^c + \mathfrak{b}_2^c$ . 任取  $a_1 + a_2 \in \mathfrak{b}_1^c + \mathfrak{b}_2^c$ , 即  $f(a_1) \in \mathfrak{b}_1, f(a_2) \in \mathfrak{b}_2$ , 所以  $f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2) \in \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2$ , 所以  $a_1 + a_2 \in (\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2)^c$ , 即  $(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2)^c \supseteq \mathfrak{b}_1^c + \mathfrak{b}_2^c$ .
- $(\alpha_1 \cap \alpha_2)^e \subseteq \alpha_1^e \cap \alpha_2^e$ .

$$(\alpha_1 \cap \alpha_2)^e = Bf(\alpha_1 \cap \alpha_2) \subseteq B(f(\alpha_1) \cap f(\alpha_2)) = Bf(\alpha_1) \cap Bf(\alpha_2) = \alpha_1^e \cap \alpha_2^e.$$

$$\bullet (b_1 \cap b_2)^c = b_1^c \cap b_2^c.$$

$$(b_1 \cap b_2)^c = f^{-1}(b_1 \cap b_2) = f^{-1}(b_1) \cap f^{-1}(b_2) = b_1^c \cap b_2^c.$$

$$\bullet (\alpha_1 \alpha_2)^e = \alpha_1^e \alpha_2^e.$$

$$(\alpha_1 \alpha_2)^e = Bf(\alpha_1 \alpha_2) = Bf(\alpha_1)f(\alpha_2) = Bf(\alpha_1)Bf(\alpha_2) = \alpha_1^e \alpha_2^e.$$

$$\bullet (b_1 b_2)^c \supseteq b_1^c b_2^c. \text{ 任取 } a_1 \in b_1^c, a_2 \in b_2^c, \text{ 那么 } f(a_1 a_2) = f(a_1)f(a_2) \in b_1 b_2, \text{ 是}$$

$$\text{哟 } a_1 a_2 \in (b_1 b_2)^c, \text{ 即 } (b_1 b_2)^c \supseteq b_1^c b_2^c.$$

$$\bullet (\alpha_1 : \alpha_2)^e \subseteq (\alpha_1^e : \alpha_2^e).$$

$$(\alpha_1 : \alpha_2)^e \alpha_2^e = ((\alpha_1 : \alpha_2) \alpha_2)^e \subseteq \alpha_1^e.$$

$$\bullet (b_1 : b_2)^c \subseteq (b_1^c : b_2^c).$$

$$(b_1^c : b_2^c) b_2^c \subseteq ((b_1 : b_2) b_2)^c \subseteq b_1^c.$$

$$\bullet \sqrt{\alpha}^e \subseteq \sqrt{\alpha^e}. \text{ 任取 } \sum_i b_i f(a_i) \in \sqrt{\alpha}^e, \text{ 其中 } a_i \in \sqrt{\alpha}, \text{ 那么存在 } n_i \text{ 使得 } a_i^{n_i} \in \alpha,$$

$$\text{所以 } f(a_i)^{n_i} = f(a_i^{n_i}) \in f(\alpha) \subseteq \alpha^e, \text{ 故 } f(a_i) \in \sqrt{\alpha^e}, \text{ 所以 } \sum_i b_i f(a_i) \in \sqrt{\alpha^e}, \text{ 即}$$

$$\sqrt{\alpha}^e \subseteq \sqrt{\alpha^e}.$$

$$\bullet \sqrt{b}^c = \sqrt{b^c}.$$

$$a \in \sqrt{b}^c \Leftrightarrow f(a) \in \sqrt{b} \Leftrightarrow \exists n, f(a)^n = f(a^n) \in b \Leftrightarrow a \in \sqrt{b^c}. \quad \square$$

## 1.6 EXERCISES

**Ex 1.6.1.**  $A$  是一个环,  $A[x]$  是  $A$  上的多项式环, 令  $f = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in A[x]$ . 证明

1.  $f$  是  $A[x]$  中的单位当且仅当  $a_0$  是  $A$  中的单位并且  $a_1, \dots, a_n$  是幂零元.
2.  $f$  是幂零元当且仅当  $a_0, a_1, \dots, a_n$  都是幂零元.
3.  $f$  是零因子当且仅当存在  $a \neq 0$  使得  $af = 0$ .
4. 如果  $(a_0, a_1, \dots, a_n) = (1)$ , 那么称  $f$  是本原的. 证明如果  $f, g \in A[x]$ , 那么  $fg$  是本原的当且仅当  $f$  和  $g$  都是本原的.

*Proof.* (1) 若  $f$  是单位, 那么存在  $g = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m \in A[x]$  使得  $fg = 1$ , 设  $fg = c_0 + c_1x + \cdots + c_{n+m}x^{n+m}$ , 那么  $c_0 = a_0b_0 = 1$ , 故  $a_0$  是单位. 接下来证明对于  $0 \leq r \leq m$  有  $a_n^{r+1}b_{m-r} = 0$ . 对  $r$  归纳,  $r = 0$  的时候,  $x^{n+m}$  的系数为  $a_nb_m = 0$ . 假设  $k < r$  的时候都有  $a_n^{k+1}b_{m-k} = 0$ , 那么

$$f(g - b_mx^m - b_{m-1}x^{m-1} - \cdots - b_{m-r+1}x^{m-r+1})$$

$$= 1 - b_mx^mf - b_{m-1}x^{m-1}f - \cdots - b_{m-r+1}x^{m-r+1}f,$$

两边对比  $x^{n+m-r}$  的系数, 有

$$a_n b_{m-r} = -a_{n-r} b_m - a_{n-r+1} b_{m-1} - \cdots - a_{n-1} b_{m-r+1},$$

故

$$a_n^{r+1} b_{m-r} = -a_{n-r} a_n^r b_m - a_{n-r+1} a_n^r b_{m-1} - \cdots - a_{n-1} a_n^r b_{m-r+1},$$

根据假设, 有  $a_n b_m = a_n^2 b_{m-1} = \cdots = a_n^r b_{m-r+1} = 0$ , 所以  $a_n^{r+1} b_{m-r} = 0$ , 结论成立. 那么  $a_n^{m+1} b_0 = 0$ , 由于  $b_0$  是单位, 故  $a_n^{m+1} = 0$ , 即  $a_n$  是幂零元. 那么  $f - a_n x^n$  是单位减去一个幂零元, 所以  $f - a_n x^n$  是单位, 重复上面的论证, 得到  $a_{n-1}$  是幂零元, 继续这个步骤, 可知  $a_1, \dots, a_n$  都是幂零元.

对于这种多项式的命题还可以采用类似模  $p$  约化的方法: 对于任意素理想  $\mathfrak{p}$ , 考虑自然的同态  $A[x] \rightarrow A/\mathfrak{p}[x]$ , 整环上的多项式环依然是整环, 并且单位群不变. 那么  $f \in A[x]^\times$  表明  $\bar{f} \in A/\mathfrak{p}[x]^\times$ , 所以  $\bar{f}$  为常系数多项式, 这就表明  $f$  的非常数项的系数  $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{p}$ , 故  $a_i \in \text{nil}(A)$  ( $i \geq 1$ ) 是幂零元.

若  $a_0$  是单位且  $a_1, \dots, a_n$  都是幂零元, 那么  $f$  是单位加上一些幂零元, 故  $f$  是单位.

(2) 若  $f$  是幂零元, 那么存在  $m > 0$  使得  $f^m = 0$ , 对比最高次项系数可知  $a_n^m = 0$ , 故  $a_n$  是幂零元. 由于所有幂零元构成一个理想, 所以  $f - a_n x^n$  是幂零元, 所以最高次项系数  $a_{n-1}$  是幂零元, 以此类推, 可知  $a_0, a_1, \dots, a_n$  都是幂零元.

若  $a_0, a_1, \dots, a_n$  都是幂零元, 那么  $f$  是幂零元的和, 所以也是幂零元.

(3) 若  $f$  是零因子, 那么取次数最小的非零  $g = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m \in A[x]$  使得  $fg = 0$ . 于是  $a_n b_m = 0$ , 那么  $a_n g$  是次数小于  $g$  的多项式, 并且  $f(a_n g) = 0$ , 根据  $g$  的最小性, 所以  $a_n g = 0$ . 接下来我们证明  $0 \leq r \leq n$  时有  $a_{n-r} g = 0$ . 对  $r$  归纳,  $r = 0$  的时候已经证明. 假设  $k < r$  的时候都有  $a_{n-k} g = 0$ , 那么类似 (1) 的操作, 有

$$a_n b_{m-r} = -a_{n-r} b_m - a_{n-r+1} b_{m-1} - \cdots - a_{n-1} b_{m-r+1},$$

即

$$a_{n-r} b_m = -a_{n-r+1} b_{m-1} - \cdots - a_{n-1} b_{m-r+1} - a_n b_{m-r},$$

$a_{n-k} g = 0$  表明  $a_n b_{m-r} = a_{n-1} b_{m-r+1} = \cdots = a_{n-r+1} b_{m-1} = 0$ , 故  $a_{n-r} b_m = 0$ , 那么  $a_{n-r} g$  是次数小于  $g$  的多项式且  $f(a_{n-r} g) = 0$ , 根据  $g$  的最小性, 所以  $a_{n-r} g = 0$ , 结论成立. 由于  $g$  非零, 取一个非零系数  $b_s$ , 那么  $a_0 b_s = a_1 b_s = \cdots = a_n b_s = 0$ , 故  $b_s f = b_s a_0 + b_s a_1 x + \cdots + b_s a_n x^n = 0$ , 即存在  $a = b_s \neq 0$  使得  $af = 0$ . 反过来是显然的.

(4) 取  $A$  的一个极大理想  $\mathfrak{m}$ , 考虑满同态  $\varphi: A[x] \rightarrow A/\mathfrak{m}[x]$ ,  $\varphi(\sum_i a_i x^i) = \sum_i (a_i + \mathfrak{m}) x^i$ , 容易验证  $\ker \varphi = \mathfrak{m}[x]$ , 故  $A[x]/\mathfrak{m}[x] \simeq A/\mathfrak{m}[x]$ . 根据 **推论 1.4**,  $f$  不是本原多项式当且仅当存在某个极大理想  $\mathfrak{m}$  使得  $(a_0, a_1, \dots, a_n) \subseteq \mathfrak{m}$  当且仅当  $f \in \mathfrak{m}[x]$ , 故  $f$  是本原多项式当且仅当对于任意的极大理想  $\mathfrak{m}$  都有  $f \notin \mathfrak{m}[x]$ . 又因为

$$f, g \notin \mathfrak{m}[x] \iff \bar{f}, \bar{g} \neq 0 \iff \overline{fg} \neq 0 \iff fg \notin \mathfrak{m}[x],$$

其中  $\bar{f} = \varphi(f) \in A/\mathfrak{m}[x]$ , 所以  $f, g$  是本原多项式当且仅当  $fg$  是本原多项式.  $\square$

**Ex 1.6.2.** 在环  $A[x]$  中, Jacobson 根等于幂零根.

*Proof.* 首先总是有  $\text{nil}(A[x]) \subseteq \text{rad}(A[x])$ . 若  $f \in \text{rad}(A[x])$ , 根据 **命题 1.13**,  $1 + xf$  是单位, 再根据上一道习题,  $1 + xf$  的常数项是单位, 其他项的系数都是幂零元, 即  $f$  的系数都是幂零元, 即  $f$  是幂零元, 故  $\text{rad}(A[x]) \subseteq \text{nil}(A[x])$ .  $\square$

**Ex 1.6.3.** 令  $A$  是环,  $A[[x]]$  表示  $A$  上的形式幂级数环.  $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in A[[x]]$ , 证明

1.  $f$  是  $A[[x]]$  中的单位当且仅当  $a_0$  是  $A$  中的单位.
2. 如果  $f$  幂零, 那么对于所有的  $n \geq 0$ ,  $a_n$  幂零. 反过来成立吗?
3.  $f$  属于  $A[[x]]$  的 Jacobson 根当且仅当  $a_0$  属于  $A$  的 Jacobson 根.
4.  $A[[x]]$  的极大理想  $\mathfrak{m}$  的收缩是  $A$  的极大理想, 并且  $\mathfrak{m}$  由  $\mathfrak{m}^c$  和  $x$  生成.
5.  $A$  的每个素理想都是  $A[[x]]$  的某个素理想的收缩.

*Proof.* (1) 若  $f$  是  $A[[x]]$  的单位, 显然  $a_0$  是  $A$  的单位. 若  $a_0$  是  $A$  的单位, 设  $g = \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m$ , 我们希望  $fg = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = 1$ , 显然  $c_0 = a_0 b_0 = 1$ , 故  $b_0 = a_0^{-1}$ . 当  $i \geq 1$  的时候, 有  $c_i = \sum_{n=0}^i a_n b_{i-n} = 0$ . 假设我们已经得到了  $b_0, \dots, b_i$ . 那么我们可以按照下面的步骤解出  $b_{i+1}$ : 首先我们需要  $c_{i+1} = \sum_{n=0}^{i+1} a_n b_{i+1-n} = 0$ , 从这里可以得到  $-a_0 b_{i+1} = \sum_{n=1}^{i+1} a_n b_{i+1-n}$ , 右边的每一项我们都是已知的, 故

$$b_{i+1} = -a_0^{-1} \left( \sum_{n=1}^{i+1} a_n b_{i+1-n} \right).$$

此时  $g$  就是  $f$  的逆元, 故  $f$  是  $A[[x]]$  的单位.

(2) 如果  $f$  幂零, 观察常数项可知  $a_0$  幂零, 所以  $f - a_0$  幂零, 观察一次项, 又可以得到  $a_1$  幂零, 所以  $f - a_0 - a_1 x$  幂零, 以此类推, 所以所有的系数  $a_n$  都幂零.

(3)  $f \in \text{rad}(A[[x]])$  当且仅当对于任意的  $g \in A[[x]]$ ,  $1 - fg$  都是  $A[[x]]$  中的单位, 由 (1), 这当且仅当对于任意的  $b_0 \in A$ ,  $1 - a_0 b_0$  是  $A$  中的单位, 当且仅当  $a_0 \in \text{rad}(A)$ .

(4) 注意到  $\mathfrak{m}^c = \mathfrak{m} \cap A$ , 根据环的同构定理, 有

$$A/(\mathfrak{m} \cap A) \simeq (A + \mathfrak{m})/\mathfrak{m},$$

任取  $f = \sum a_i x^i \in A[[x]]$ , 那么  $f = a_0 + g$ , 其中  $g \in (x)$ , 由 (3) 可知  $g \in \text{rad}(A[[x]]) \subseteq \mathfrak{m}$ , 所以  $A[[x]] = A + \mathfrak{m}$ , 故  $A/\mathfrak{m}^c \simeq (A + \mathfrak{m})/\mathfrak{m} = A[[x]]/\mathfrak{m}$  是域,  $\mathfrak{m}^c$  是  $A$  的极大理想. 类似地, 任取  $f = \sum a_i x^i \in \mathfrak{m}$ , 都有  $f = a_0 + g \in \mathfrak{m}^c + (x)$ , 所以  $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}^c + (x)$ . 反之, 由于  $(x) \subseteq \text{rad}(A[[x]]) \subseteq \mathfrak{m}$ , 所以  $\mathfrak{m}^c + (x) \subseteq \mathfrak{m}$ , 故  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^c + (x)$ .

(5) 令  $\mathfrak{p}$  是  $A$  的素理想, 类比 (4), 考虑  $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}^c + (x)$ , 此时  $\mathfrak{q}^c = \mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$ , 根据同构定理, 有

$$A/\mathfrak{p} = A/(\mathfrak{q} \cap A) \simeq (A + \mathfrak{q})/\mathfrak{q},$$

而  $A + \mathfrak{q} \supseteq A + (x) = A[[x]]$ , 所以  $A[[x]]/\mathfrak{q} \simeq A/\mathfrak{p}$  是整环,  $\mathfrak{q}$  是  $A[[x]]$  的素理想.  $\square$

**Ex 1.6.4.** 令  $A$  是非零环, 证明  $A$  的素理想的集合相对于包含关系有极小元.

*Proof.* 设  $\{p_i\}_{i \in I}$  是  $\text{Spec}(A)$  中的一条链, 令  $p = \bigcap_{i \in I} p_i$ , 我们证明  $p$  是一个素理想. 假设  $xy \in p$  以及  $x \notin p$ , 那么对于任意的  $i \in I$ , 有  $xy \in p_i$ , 且存在  $j \in I$ , 使得  $x \notin p_j$ . 当  $p_i \subseteq p_j$  的时候, 都有  $x \notin p_i$ , 所以此时  $y \in p_j$ . 当  $p_i \supseteq p_j$  的时候,  $y \in p_j$  自然也表明  $y \in p_i$ . 所以必有  $y \in p$ , 故  $p$  是素理想. 最后根据 Zorn 引理就能得出结论.  $\square$

**Ex 1.6.5.** 令  $\alpha \neq (1)$  是环  $A$  的理想, 证明  $\alpha = \sqrt{\alpha}$  当且仅当  $\alpha$  是某些素理想的交.

*Proof.* 已经有  $\alpha \subseteq \sqrt{\alpha}$ . 如果  $\alpha = \bigcap_{i \in I} p_i$  是某些素理想的交, 那么每个  $p_i$  都是包含  $\alpha$  的素理想, 所以  $\sqrt{\alpha} \subseteq \alpha$ , 故  $\alpha = \sqrt{\alpha}$ . 反方向是显然的.  $\square$

**Ex 1.6.6.** 环  $A$  如果对于任意  $x \in A$  都满足  $x^2 = x$ , 那么称  $A$  是布尔环. 在一个布尔环  $A$  中, 证明

1. 对于任意  $x \in A$  有  $2x = 0$ ;
2. 每个素理想  $p$  都是极大理想, 并且  $A/p$  是有两个元素的域;
3. 每个有限生成的理想都是主理想.

*Proof.* (1)  $2x = (x+1)^2 - x^2 - 1 = x+1-x-1 = 0$ .

(2) 任取  $x+p \in A/p$  且  $x \notin p$ , 那么  $x^2+p = x+p$ , 即  $x(x-1) \in p$ ,  $x \notin p$  表明  $x-1 \in p$ , 故  $x+p = 1+p$ , 所以  $A/p$  只有两个元素  $p$  与  $1+p$ , 这表明  $A/p$  是域,  $p$  是极大理想.

(3) 注意到  $(x_1, x_2) = (x_1 + x_2 - x_1x_2)$ , 若  $\alpha = (x_1, \dots, x_n)$ , 对  $n$  归纳,  $n=2$  的时候已经成立, 设结论对  $n-1$  成立. 那么  $\alpha = (x_1, \dots, x_{n-1}) + (x_n) = (x) + (x_n) = (x, x_n)$  是主理想.  $\square$

**Ex 1.6.7.** 证明: 局部环没有非平凡的幂等元.

*Proof.* 若  $x$  是局部环  $A$  的非平凡幂等元, 那么  $x$  包含于  $A$  的极大理想, 所以  $1-x \in A^\times$ , 从而  $1-x=1$ ,  $x=0$ , 矛盾.  $\square$

**Ex 1.6.8.** 在环  $A$  中, 令  $\Sigma$  为理想的集合, 里面的每个理想的元素均为零因子. 证明  $\Sigma$  有一个极大元, 并且  $\Sigma$  的每个极大元都是素理想. 因此  $A$  中零因子的集合是这些作为极大元的素理想的并集.

*Proof.* 由于  $(0) \in \Sigma$ , 所以  $\Sigma$  非空. 设  $\{\alpha_i\}_{i \in I}$  是  $\Sigma$  的一条链. 令  $\alpha = \bigcup_{i \in I} \alpha_i$ , 容易验证这仍然是一个理想, 并且其元素显然都是零因子, 所以  $\{\alpha_i\}_{i \in I}$  有上界  $\alpha$ , 根据 Zorn 引理可知  $\Sigma$  有极大元.

设  $p$  是  $\Sigma$  的一个极大元, 若  $a \notin p$  以及  $b \notin p$ , 那么  $p+(a)$  和  $p+(b)$  严格包含  $p$ , 因此它们不属于  $\Sigma$ , 所以存在  $x \in p+(a)$  与  $y \in p+(b)$  但是  $x, y$  都不是零因子, 那么  $xy$  也不是零因子, 但是  $xy \in (p+(a))(p+(b)) \subseteq p+(ab)$ , 所以  $p+(ab)$  也严格包含  $p$ , 故  $ab \notin p$ , 所以  $p$  是素理想.

由于  $A$  中每个零因子生成的主理想都属于  $\Sigma$ , 所以每个零因子都属于  $\Sigma$  的一个极大元, 故零因子的集合包含于所有极大元的并集. 反之,  $\Sigma$  的所有极大元的并集当然都是零因子, 所以  $A$  的零因子的集合就是  $\Sigma$  的极大元的并集.  $\square$

**Ex 1.6.9.**  $A$  是一个环,  $X$  是  $A$  的所有素理想的集合. 对于  $A$  的每个子集  $E$ , 令  $V(E)$  为所有  $A$  的包含  $E$  的素理想的集合, 证明

1. 如果  $\alpha$  是由  $E$  生成的理想, 那么  $V(E) = V(\alpha) = V(\sqrt{\alpha})$ .
2.  $V(0) = X$ ,  $V(1) = \emptyset$ .
3. 如果  $(E_i)_{i \in I}$  是  $A$  的一族子集, 那么

$$V\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right) = \bigcap_{i \in I} V(E_i).$$

4. 对于任意理想  $\alpha, \mathfrak{b}$ , 有  $V(\alpha \cap \mathfrak{b}) = V(\alpha\mathfrak{b}) = V(\alpha) \cup V(\mathfrak{b})$ .

这些结果表明  $V(E)$  满足拓扑空间的闭集公理, 所以定义  $\text{Spec}(A)$  的子集为闭集当且仅当存在  $A$  的理想  $\alpha$  使得其能够写为  $V(\alpha)$  的形式, 这给出了  $\text{Spec}(A)$  上的一个拓扑, 称为 **Zariski 拓扑**.

*Proof.* (1) 显然有  $V(\alpha) \subseteq V(E)$ . 任取  $\mathfrak{p} \in V(E)$ , 那么  $E \subseteq \mathfrak{p}$ , 自然有  $\alpha = (E) \subseteq \mathfrak{p}$ , 所以  $\mathfrak{p} \in V(\alpha)$ , 故  $V(E) \subseteq V(\alpha)$ . 这就表明  $V(E) = V(\alpha)$ . 由于  $\alpha \subseteq \sqrt{\alpha}$ , 所以  $V(\sqrt{\alpha}) \subseteq V(\alpha)$ . 任取  $\mathfrak{p} \in V(\alpha)$ , 那么  $\alpha \subseteq \mathfrak{p}$ , 任取  $x \in \sqrt{\alpha}$ , 则存在  $n$  使得  $x^n \in \alpha \subseteq \mathfrak{p}$ , 这表明  $x \in \mathfrak{p}$ , 所以  $\sqrt{\alpha} \subseteq \mathfrak{p}$ , 所以  $\mathfrak{p} \in V(\sqrt{\alpha})$ . 这就表明  $V(\alpha) = V(\sqrt{\alpha})$ .

(3) 我们有关系

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} \in V\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right) &\Leftrightarrow \forall i \in I, \bigcup_{i \in I} E_i \subseteq \mathfrak{p} \Leftrightarrow \forall i \in I, E_i \subseteq \mathfrak{p} \\ &\Leftrightarrow \forall i \in I, \mathfrak{p} \in V(E_i) \Leftrightarrow \mathfrak{p} \in \bigcap_{i \in I} V(E_i). \end{aligned}$$

(4) 由于  $\alpha\mathfrak{b} \subseteq \alpha \cap \mathfrak{b}$ , 所以  $V(\alpha \cap \mathfrak{b}) \subseteq V(\alpha\mathfrak{b})$ . 任取  $\mathfrak{p} \in V(\alpha\mathfrak{b})$ , 那么  $\alpha\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ , 所以  $\alpha \subseteq \mathfrak{p}$  或者  $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ , 所以  $\alpha \cap \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ , 所以  $\mathfrak{p} \in V(\alpha \cap \mathfrak{b})$ , 故  $V(\alpha \cap \mathfrak{b}) = V(\alpha\mathfrak{b})$ .

显然有  $V(\alpha) \subseteq V(\alpha\mathfrak{b})$  以及  $V(\mathfrak{b}) \subseteq V(\alpha\mathfrak{b})$ , 所以  $V(\alpha) \cup V(\mathfrak{b}) \subseteq V(\alpha\mathfrak{b})$ . 若  $\mathfrak{p} \in V(\alpha\mathfrak{b})$ , 那么  $\alpha\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ , 所以  $\alpha \subseteq \mathfrak{p}$  或者  $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ , 所以  $\mathfrak{p} \in V(\alpha)$  或者  $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{b})$ , 所以  $\mathfrak{p} \in V(\alpha) \cup V(\mathfrak{b})$ , 故  $V(\alpha\mathfrak{b}) = V(\alpha) \cup V(\mathfrak{b})$ .  $\square$

**Ex 1.6.10.** 对于每个  $f \in A$ , 令  $X_f$  表示  $V(f)$  在  $X = \text{Spec}(A)$  中的补集, 那么  $X_f$  是开集. 证明它们组成了 Zariski 拓扑的一组拓扑基, 并且

1.  $X_f \cap X_g = X_{fg}$ ;
2.  $X_f = \emptyset$  当且仅当  $f$  是幂零元;
3.  $X_f = X$  当且仅当  $f$  是单位;
4.  $X_f = X_g$  当且仅当  $\sqrt{(f)} = \sqrt{(g)}$ ;
5.  $X$  是紧致空间;
6. 更一般地, 每个  $X_f$  是紧致子集;
7.  $X$  的一个开子集是紧致的当且仅当它是形如  $X_f$  的集合的有限并.

$X_f$  被称为  $X = \text{Spec}(A)$  的**基本开集**.

*Proof.* 我们说明任意一个开集都能表示为这些基本开集的并. 对于任意开集  $X - V(E)$ , 我们有

$$X - V(E) = X - V\left(\bigcup_{f \in E} \{f\}\right) = X - \bigcap_{f \in E} V(\{f\}) = \bigcup_{f \in E} (X - V(\{f\})) = \bigcup_{f \in E} X_f.$$

所以所有的  $X_f$  组成 Zariski 拓扑的一组拓扑基.

(1) 我们已经知道  $V(fg) = V(f) \cup V(g)$ , 两边取补集, 所以  $X_f \cap X_g = X_{fg}$ .

(2)  $X_f = \emptyset$  当且仅当  $V(f) = X$ , 当且仅当  $f$  属于任意素理想, 当且仅当  $f \in \text{nil}(A)$ , 即  $f$  是幂零元.

(3)  $X_f = X$  当且仅当  $V(f) = \emptyset$ , 当且仅当  $f$  不属于任意素理想, 当且仅当  $f$  不属于任意极大理想, 当且仅当  $f$  是单位.

(4)  $X_f = X_g$  当且仅当  $V(f) = V(g)$ , 即  $V((f)) = V((g))$ . 若  $V((f)) = V((g))$ , 注意到

$$\sqrt{(f)} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V((f))} \mathfrak{p},$$

所以  $\sqrt{(f)} = \sqrt{(g)}$ . 若  $\sqrt{(f)} = \sqrt{(g)}$ , 任取  $\mathfrak{p} \in V((f))$ , 有  $(f) \subseteq \mathfrak{p}$ , 所以  $\sqrt{(f)} \subseteq \mathfrak{p}$ , 所以  $(g) \subseteq \sqrt{(g)} = \sqrt{(f)} \subseteq \mathfrak{p}$ , 所以  $\mathfrak{p} \in V((g))$ , 反之同理, 故  $V((f)) = V((g))$ .

(5) 见 (6).

(6) 任取  $X_f$  的一个基本开集的开覆盖  $\{X - V(g_i)\}_{i \in I}$ , 那么

$$X_f \subseteq \bigcup_{i \in I} (X - V(g_i)) \Leftrightarrow V(f) \supseteq \bigcap_{i \in I} V(g_i),$$

根据 1.15 题, 这相当于

$$V((f)) = V(f) \supseteq \bigcap_{i \in I} V(g_i) = V\left(\bigcup_{i \in I} \{g_i\}\right) = V((g_i)_{i \in I}),$$

根据 (4) 的证明, 这当且仅当

$$\sqrt{(f)} \subseteq \sqrt{(g_i)_{i \in I}},$$

当且仅当存在  $n$  使得  $f^n \in (g_i)_{i \in I}$ , 由  $\{g_i\}_{i \in I}$  生成的理想中的元素均为有限个  $g_i$  的线性组合的形式, 所以存在有限子集  $J \subseteq I$ , 使得  $f^n = \sum_{j \in J} x_j g_j$ , 其中  $x_j \in A$ , 故  $\{X - V(g_j)\}_{j \in J}$  就是一族有限子覆盖,  $X_f$  是紧致子集.

(7) 若  $X$  的一个开子集是紧致的,  $X_f$  是拓扑基, 那么其可以表示为一些  $X_f$  的并集, 紧致性表明其可以表示为有限个  $X_f$  的并集. 反之, 有限个紧致子集的并集还是紧致子集.  $\square$

**Ex 1.6.11.** 出于心理上的原因, 将  $A$  的一个素理想视为  $X = \text{Spec}(A)$  中的一个点的时候, 使用一个字母 (例如  $x$  或者  $y$ ) 来表示这个素理想是更方便的. 当将  $x$  视为  $A$  的一个素理想的时候, 我们也写为  $\mathfrak{p}_x$  (这只是两个不同的记号). 证明:

1. 集合  $\{x\}$  是  $X$  中的闭集当且仅当  $\mathfrak{p}_x$  是极大理想.



2.  $\overline{\{x\}} = V(\mathfrak{p}_x)$ .
3.  $y \in \overline{\{x\}}$  当且仅当  $\mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_y$ .
4.  $X$  是  $T_0$ -空间 (这意味着对于  $X$  中的不同的两点  $x, y$ , 要么存在  $x$  的一个邻域不包含  $y$ , 要么存在  $y$  的一个邻域不包含  $x$ ).

*Proof.* (1) 若  $\{x\}$  是  $X$  中的闭集, 那么存在集合  $E \subseteq A$  使得  $\{x\} = V(E)$ , 即  $\mathfrak{p}_x$  是包含  $E$  的唯一的素理想, 若  $\mathfrak{p}_x$  不是极大理想, 那么  $V(E)$  至少有两个元素 (因为极大理想都是素理想), 所以  $\mathfrak{p}_x$  是极大理想.

反之, 若  $\mathfrak{p}_x$  是极大理想, 那么  $\{x\} = V(\mathfrak{p}_x)$  是闭集.

(2) 显然有  $\overline{\{x\}} \subseteq V(\mathfrak{p}_x)$ . 下面我们说明任意  $y \in V(\mathfrak{p}_x)$ , 如果  $y \neq x$ , 那么  $y$  是  $\{x\}$  的极限点. 即任取  $y$  的邻域  $X - V(E)$ ,  $y \in X - V(E)$  表明  $y \notin V(E)$ , 即  $\mathfrak{p}_y$  不是包含  $E$  的素理想. 假设  $x \in V(E)$ , 那么  $\mathfrak{p}_x$  是包含  $E$  的素理想, 由于  $y$  是包含  $\mathfrak{p}_x$  的素理想, 所以此时  $y \in V(E)$ , 矛盾. 故  $x \notin V(E)$ , 所以  $x \in X - V(E)$ , 所以  $(X - V(E)) \cap \{x\} \neq \emptyset$ , 这就说明  $y$  是  $\{x\}$  的极限点, 从而  $\overline{\{x\}} = V(\mathfrak{p}_x)$ .

(3) 由 (2),  $y \in \overline{\{x\}}$  当且仅当  $y \in V(\mathfrak{p}_x)$ , 当且仅当  $\mathfrak{p}_y \supseteq \mathfrak{p}_x$ .

(4) 使用反证法. 任取  $X$  中不同的两点  $x, y$ , 如果  $x$  的任意邻域都包含  $y$  并且  $y$  的任意邻域都包含  $x$ , 那么  $x \in \overline{\{y\}}$  以及  $y \in \overline{\{x\}}$ , 由 (3), 这表明  $\mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_y \subseteq \mathfrak{p}_x$ , 这与  $\mathfrak{p}_x \neq \mathfrak{p}_y$  矛盾.  $\square$

**Ex 1.6.12.** 一个拓扑空间  $X$  被称为不可约的, 如果  $X \neq \emptyset$  并且  $X$  中的每一对非空开集都相交, 等价地说,  $X$  中的每个非空开集都在  $X$  中稠密. 证明  $\text{Spec}(A)$  是不可约的当且仅当  $A$  的幂零根是一个素理想.

*Proof.*  $X$  中的每一对非空开集都相交等价于  $X$  的每一对恰当闭集的并都不是整个空间. 若  $\text{Spec}(A)$  不可约, 假设  $\alpha\mathfrak{b} \subseteq \text{nil}(A) = E$ ,

$$V(\alpha) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\alpha\mathfrak{b}) = V(E) = X,$$

$X$  不可约表明  $V(\alpha) = \emptyset$  或者  $V(\mathfrak{b}) = \emptyset$ , 不妨设  $V(\alpha) = \emptyset$ , 那么  $V(\mathfrak{b}) = X$ , 所以  $\mathfrak{b} \subseteq E = \text{nil}(A)$ , 这就表明  $\text{nil}(A)$  是素理想.

反之, 若  $\text{nil}(A)$  是素理想, 设  $X = V(\alpha_1) \cup V(\alpha_2) = V(\alpha\alpha)$ , 这表明  $\alpha\alpha \subseteq \text{nil}(A)$ , 从而  $\alpha_1 \subseteq \text{nil}(A)$  或者  $\alpha_2 \subseteq \text{nil}(A)$ , 不妨设  $\alpha_1 \subseteq \text{nil}(A)$ , 那么  $\alpha_1 = X$ . 这就表明  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  至少有一个是整个空间  $X$ , 所以  $X$  不可约.  $\square$

**Ex 1.6.13.**  $X$  是一个拓扑空间.

1. 如果  $Y$  是  $X$  的不可约子空间, 那么闭包  $\bar{Y}$  也是不可约的.
2.  $X$  的每个不可约子空间都被包含在一个极大的不可约子空间中.
3.  $X$  的极大不可约子空间是闭集并且所有的极大不可约子空间覆盖  $X$ . 它们被称为  $X$  的不可约分支. Hausdorff 空间的不可约分支是什么?
4. 如果  $A$  是一个环,  $X = \text{Spec}(A)$ , 那么  $X$  的不可约分支是闭集  $V(\mathfrak{p})$ , 其中  $\mathfrak{p}$  是  $A$  的一个极小素理想.

*Proof.* (1) 设  $U, V$  是  $\bar{Y}$  的两个非空开集, 即存在  $X$  的两个开集  $U_1, V_1$  使得  $U = U_1 \cap \bar{Y}, V = V_1 \cap \bar{Y}$ , 那么  $U \cap Y = U_1 \cap Y$  和  $V \cap Y = V_1 \cap Y$  是  $Y$  的两个非空开集,  $Y$  不可约表明  $(U \cap Y) \cap (V \cap Y) \neq \emptyset$ , 故  $U \cap V \neq \emptyset$ , 所以  $\bar{Y}$  不可约.

(2) 设  $Y$  是  $X$  的一个不可约子空间, 令  $\Sigma$  为所有包含  $Y$  的不可约子空间的集合. 设  $\{Y_i\}_{i \in I}$  是  $\Sigma$  的一条链, 令  $Z = \bigcup_{i \in I} Y_i$ , 我们需要证明  $Z$  不可约. 任取  $Z$  的两个非空开集  $U, V$ , 那么存在  $i_1, i_2 \in I$  使得  $U \cap Y_{i_1}$  和  $V \cap Y_{i_2}$  非空, 不妨设  $Y_{i_1} \subseteq Y_{i_2}$ , 那么  $U \cap Y_{i_2}$  和  $V \cap Y_{i_2}$  是  $Y_{i_2}$  的两个非空开集, 所以  $(U \cap Y_{i_2}) \cap (V \cap Y_{i_2}) \neq \emptyset$ , 即  $U \cap V \neq \emptyset$ , 所以  $Z$  不可约,  $\Sigma$  存在极大元.

(3) 假设  $Y$  是一个极大不可约子空间, 由 (1), 那么  $\bar{Y}$  是包含  $Y$  的不可约子空间, 故  $Y = \bar{Y}$ , 所以  $Y$  是闭集. 任取  $x \in X$ , 单点集  $\{x\}$  都是不可约子空间, 所以包含于一个不可约分支, 故所有的不可约分支覆盖  $X$ .

Hausdorff 空间中任意两个不同的点都可以找到分别覆盖住这两点的不相交开集, 所以任意多于一个点的子空间都不是不可约子空间, 故 Hausdorff 空间的不可约分支就是所有的单点集.

(4) 根据 1.21 的 (4),  $X$  的闭集  $V(\alpha)$  同胚于  $\text{Spec}(A/\alpha)$ , 所以  $V(\alpha)$  不可约当且仅当  $\text{Spec}(A/\alpha)$  不可约, 再根据 1.19, 这当且仅当  $\text{nil}(A/\alpha)$  是素理想, 根据对应定理, 当且仅当  $\sqrt{\alpha}$  是素理想, 故  $V(\alpha) = V(\sqrt{\alpha})$  不可约当且仅当  $\sqrt{\alpha}$  是素理想, 这表明  $X$  的不可约分支必为  $V(\mathfrak{p})$  的形式, 其中  $\mathfrak{p}$  是素理想.  $V(\mathfrak{p})$  极大表明如果  $V(\mathfrak{p}) \subseteq V(\mathfrak{q})$ , 那么只能严格相等.  $V(\mathfrak{p}) \subseteq V(\mathfrak{q})$  当且仅当

$$\mathfrak{q} = \sqrt{\mathfrak{q}} = \bigcap_{\mathfrak{q}' \in V(\mathfrak{q})} \mathfrak{q}' \subseteq \bigcap_{\mathfrak{q}' \in V(\mathfrak{p})} \mathfrak{q}' = \sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p},$$

所以  $V(\mathfrak{p})$  是不可约分支当且仅当  $\mathfrak{p}$  是极小的. □

**Ex 1.6.14.** 令  $\phi: A \rightarrow B$  是环同态,  $X = \text{Spec}(A), Y = \text{Spec}(B)$ . 如果  $\mathfrak{q} \in Y$ , 那么  $\phi^{-1}(\mathfrak{q})$  是  $A$  的素理想, 所以  $\phi$  诱导了映射  $\phi^*: Y \rightarrow X$ . 证明

1. 如果  $f \in A$ , 那么  $\phi^{*-1}(X_f) = Y_{\phi(f)}$ , 因此  $\phi^*$  是连续映射.
2. 如果  $\alpha$  是  $A$  的理想, 那么  $\phi^{*-1}(V(\alpha)) = V(\alpha^e)$ .
3. 如果  $\mathfrak{b}$  是  $B$  的理想, 那么  $\phi^*(V(\mathfrak{b})) = V(\mathfrak{b}^e)$ .
4. 如果  $\phi$  是满射, 那么  $\phi^*$  是  $Y$  到  $X$  的闭子集  $V(\ker \phi)$  的同胚. (特别地,  $\text{Spec}(A)$  和  $\text{Spec}(A/\text{nil}(A))$  是同胚的.)
5. 如果  $\phi$  是单射, 那么  $\phi^*(Y)$  在  $X$  中稠密. 更准确地,  $\phi^*(Y)$  在  $X$  中稠密当且仅当  $\ker \phi \subseteq \text{nil}(A)$ .
6. 令  $\psi: B \rightarrow C$  是另一个环同态, 那么  $(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*$ .
7. 令  $A$  是整环, 并且只有一个非零素理想  $\mathfrak{p}$ ,  $K$  是  $A$  的分式域. 令  $B = (A/\mathfrak{p}) \times K$ . 定义  $\phi: A \rightarrow B$  为  $\phi(x) = (\bar{x}, x)$ , 其中  $\bar{x}$  是  $x$  在  $A/\mathfrak{p}$  中的像. 证明  $\phi^*$  是双射但是不是同胚.

*Proof.* (1) 按照定义, 有

$$\mathfrak{q} \in \phi^{*-1}(X_f) \Leftrightarrow \phi^*(\mathfrak{q}) \in X_f \Leftrightarrow \phi^*(\mathfrak{q}) \notin V(f) \Leftrightarrow f \notin \phi^{-1}(\mathfrak{q}) \Leftrightarrow \mathfrak{q} \in Y_{\phi(f)}.$$

(2) 按照定义, 有

$$\begin{aligned} \mathfrak{q} \in \phi^{*-1}(V(\mathfrak{a})) &\Leftrightarrow \phi^*(\mathfrak{q}) \in V(\mathfrak{a}) \Leftrightarrow \phi^{-1}(\mathfrak{q}) \in V(\mathfrak{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{a} \subseteq \phi^{-1}(\mathfrak{q}) \\ &\Leftrightarrow \phi(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{q} \Leftrightarrow \mathfrak{q} \in V(\phi(\mathfrak{a})) = V(\mathfrak{a}^e). \end{aligned}$$

(3) 对于  $S \subseteq X$ , 我们有

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \bigcap \{V(E) \mid S \subseteq V(E)\} = \bigcap \left\{ V(E) \mid E \subseteq \bigcap_{s \in S} \mathfrak{p}_s \right\} \\ &= V \left( \bigcup \left\{ E \mid E \subseteq \bigcap_{s \in S} \mathfrak{p}_s \right\} \right) = V \left( \bigcap_{s \in S} \mathfrak{p}_s \right). \end{aligned}$$

所以

$$\overline{\phi^*(V(\mathfrak{b}))} = V \left( \bigcap_{\mathfrak{p} \in \phi^*(V(\mathfrak{b}))} \mathfrak{p} \right),$$

又因为

$$\bigcap_{\mathfrak{p} \in \phi^*(V(\mathfrak{b}))} \mathfrak{p} = \bigcap \{ \mathfrak{q}^c \mid \mathfrak{q} \in V(\mathfrak{b}) \} = \left( \bigcap_{\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{q}} \mathfrak{q} \right)^c = (\sqrt{\mathfrak{b}})^c = \sqrt{\mathfrak{b}^c},$$

所以

$$\overline{\phi^*(V(\mathfrak{b}))} = V(\sqrt{\mathfrak{b}^c}) = V(\mathfrak{b}^c).$$

(4) 若  $\phi^*(\mathfrak{q}_1) = \phi^*(\mathfrak{q}_2)$ , 那么  $\phi^{-1}(\mathfrak{q}_1) = \phi^{-1}(\mathfrak{q}_2)$ ,  $\phi$  是满射表明  $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_2$ , 所以  $\phi^*$  是单射. 任取  $\mathfrak{p} \in \text{im } \phi^* = \phi^*(Y)$ , 即存在  $\mathfrak{q} \in Y$  使得  $\mathfrak{p} = \phi^*(\mathfrak{q}) = \phi^{-1}(\mathfrak{q})$ , 显然  $\ker \phi \subseteq \phi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$ , 故  $\mathfrak{p} \in V(\ker \phi)$ , 所以  $\text{im } \phi^* \subseteq V(\ker \phi)$ . 任取  $\mathfrak{p} \in V(\ker \phi)$ , 我们希望证明  $\mathfrak{p} \in \text{im } \phi^*$ , 注意到总是有  $\mathfrak{p} \subseteq \phi^{-1}(\phi(\mathfrak{p}))$ , 所以我们分两步: 首先说明  $\phi^{-1}(\phi(\mathfrak{p})) \subseteq \mathfrak{p}$ , 从而  $\mathfrak{p} = \phi^{-1}(\phi(\mathfrak{p}))$ ; 再说明  $\phi(\mathfrak{p})$  是  $B$  的素理想, 从而得出  $\mathfrak{p} = \phi^*(\phi(\mathfrak{p})) \in \text{im } \phi^*$ .

1. 任取  $x \in \phi^{-1}(\phi(\mathfrak{p}))$ , 那么  $\phi(x) \in \phi(\mathfrak{p})$ , 故存在  $a \in \mathfrak{p}$  使得  $\phi(x) = \phi(a)$ , 那么  $x - a \in \ker \phi \subseteq \mathfrak{p}$ , 所以  $x \in \mathfrak{p}$ , 所以  $\phi^{-1}(\phi(\mathfrak{p})) \subseteq \mathfrak{p}$ .
2. 假设  $xy \in \phi(\mathfrak{p})$ , 那么存在  $a \in \mathfrak{p}$  使得  $xy = \phi(a)$ ,  $\phi$  是满射还表明存在  $x', y' \in A$  使得  $x = \phi(x')$  以及  $y = \phi(y')$ , 那么  $\phi(a) = xy = \phi(x'y')$ , 所以  $a - x'y' \in \ker \phi \subseteq \mathfrak{p}$ , 所以  $x'y' \in \mathfrak{p}$ , 所以  $x' \in \mathfrak{p}$  或者  $y' \in \mathfrak{p}$ , 所以  $x \in \phi(\mathfrak{p})$  或者  $y \in \phi(\mathfrak{p})$ , 这表明  $\phi(\mathfrak{p})$  确实是  $B$  的素理想.

于是我们证明了  $\text{im } \phi^* = V(\ker \phi)$ . 所以  $\phi^*$  诱导出的映射  $\tilde{\phi} : Y \rightarrow V(\ker \phi)$  是双射, 且由 (1) 可知  $\tilde{\phi}$  是连续映射.

接下来证明  $\tilde{\phi}^{-1} : V(\ker \phi) \rightarrow Y$  是连续映射. 任取  $Y$  的基本开集  $Y_g$ , 其中  $g \in B$ , 由于  $\tilde{\phi}(Y_g) = \phi^*(Y_g) = X_f \cap V(\ker \phi)$ , 其中  $f \in A$  满足  $\phi(f) = g$ ,  $X_f$  是  $X$  的开集, 故  $X_f \cap V(\ker \phi)$  是  $V(\ker \phi)$  的开集, 所以  $\tilde{\phi}^{-1}$  是连续映射. 进而  $\tilde{\phi} : Y \rightarrow V(\ker \phi)$  是同胚. 令  $\phi$  为  $A \rightarrow A/\text{nil}(A)$  的自然同态便可以得出  $\text{Spec}(A)$  和  $\text{Spec}(A/\text{nil}(A))$  是同胚的.

(5) 根据 (3), 我们有

$$\overline{\phi^*(Y)} = \overline{\phi^*(V(0))} = V(\phi^*(0)) = V(\ker \phi),$$

$\phi^*(Y)$  在  $X$  中稠密当且仅当  $V(\ker \phi) = X$ , 当且仅当  $\ker \phi \subseteq \text{nil}(A)$ .

(6) 任取  $C$  的素理想  $\mathfrak{p}_c$ , 那么

$$\begin{aligned} a \in (\psi \circ \phi)^*(\mathfrak{p}_c) &\Leftrightarrow a \in (\psi \circ \phi)^{-1}(\mathfrak{p}_c) \Leftrightarrow (\psi \circ \phi)(a) \in \mathfrak{p}_c \\ &\Leftrightarrow \phi(a) \in \psi^*(\mathfrak{p}_c) \Leftrightarrow a \in (\phi^* \circ \psi^*)(\mathfrak{p}_c), \end{aligned}$$

所以  $(\psi \circ \phi)^*(\mathfrak{p}_c) = (\phi^* \circ \psi^*)(\mathfrak{p}_c)$ , 即  $(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*$ .

(7) 由于  $B$  的理想必然形如  $A/\mathfrak{p}$  的理想与  $K$  的理想的直积, 并且  $A/\mathfrak{p}$  和  $K$  都是域, 所以  $B$  的素理想实际上只有  $\mathfrak{q}_1 = \{\bar{0}\} \times K$  以及  $\mathfrak{q}_2 = A/\mathfrak{p} \times \{0\}$  (注意  $B$  的零理想不是素理想). 按定义有  $\phi^*(\mathfrak{q}_1) = \mathfrak{p}$ ,  $\phi^*(\mathfrak{q}_2) = 0$ , 所以  $\phi^*$  是双射. 那么  $\phi^{*-1} : \text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(B)$  定义为  $\phi^{*-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q}_1$ ,  $\phi^{*-1}(0) = \mathfrak{q}_2$ .  $\{\mathfrak{q}_2\} = V(\mathfrak{q}_2)$  的原像为  $\phi^*(\{\mathfrak{q}_2\}) = \{0\}$ , 而  $\overline{\{0\}} = V(0) = \text{Spec}(A) \neq \{0\}$ , 所以  $\{0\}$  不是闭集, 故  $\phi^{*-1}$  不连续, 从而  $\phi^*$  不是同胚.  $\square$

**Ex 1.6.15.** 令  $A = \prod_{i=1}^n A_i$  是环  $A_i$  的直积. 证明  $\text{Spec}(A)$  是开 (或者闭) 子空间  $X_i$  的无交并, 其中  $X_i$  典范同胚于  $\text{Spec}(A_i)$ .

反之, 令  $A$  是任意环, 证明下面的说法是等价的:

1.  $X = \text{Spec}(A)$  是不连通的.
2.  $A \simeq A_1 \times A_2$  是两个非零环的直积.
3.  $A$  存在非平凡的幂等元.

特别地, 我们知道局部环的谱总是连通的.

*Proof.* 考虑投影  $\pi_i : A \rightarrow A_i$ , 这是一个满同态,  $\ker \pi_i = \prod_{j \neq i} A_j$ . 根据 1.21 的 (4), 我们知道  $\text{Spec}(A_i)$  同胚于  $V(\ker \pi_i)$ . 我们有

$$\bigcup_{i=1}^n V(\ker \pi_i) = V\left(\bigcap_{i=1}^n \ker \pi_i\right) = V(0) = \text{Spec}(A),$$

同时  $V(\ker \pi_i) \cap V(\ker \pi_j) = V(\ker \pi_i + \ker \pi_j) = V(1) = \emptyset$ , 所以  $\text{Spec}(A)$  是闭子空间  $V(\ker \pi_i)$  的无交并, 并且每个  $V(\ker \pi_i)$  同胚于  $\text{Spec}(A_i)$ .

下面的命题 (2) 和 (3) 的等价性我们已经证明. (2)  $\Rightarrow$  (1) 就是前一问, 此时  $X$  为两个不相交非空开集  $\text{Spec}(A_1)$  和  $\text{Spec}(A_2)$  的并集, 所以  $X$  不连通.

(1)  $\Rightarrow$  (3)  $X$  不连通表明  $X = (X - V(\mathfrak{a})) \cup (X - V(\mathfrak{b}))$  是两个不相交非空开集的并集, 即  $\emptyset = V(\mathfrak{a}) \cap V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$ , 并且  $(X - V(\mathfrak{a})) \cap (X - V(\mathfrak{b})) = \emptyset$  表明  $X = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ . 所以我们得到  $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (1)$  以及  $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \text{nil}(A)$ . 取  $a \in \mathfrak{a}, b \in \mathfrak{b}$ , 使得  $a + b = 1$ , 并且存在  $n$  使得  $(ab)^n = 0$ . 故  $(a) + (b) = (1)$ , 这也表明  $(a^n) + (b^n) = (1)$ , 所以存在  $e \in (a^n)$  使得  $1 - e \in (b^n)$ , 此时  $e(1 - e) \in (ab)^n = 0$ , 故  $e$  是幂等元. 如果  $e = 1$ , 那么  $(1) = (a^n) \subseteq (a)$ , 这不可能, 同理  $e = 0$  表明  $(1) = (b^n) \subseteq (b)$  也不可能, 所以  $e$  就是非平凡的幂等元.  $\square$

**Ex 1.6.16.**  $k$  是代数闭域, 令

$$f_\alpha(t_1, \dots, t_n) = 0$$

是  $k$  上  $n$  元多项式方程的集合. 所有满足这些方程的点  $x = (x_1, \dots, x_n) \in k^n$  的集合  $X$  被称为一个**仿射代数簇**.

考虑多项式  $g \in k[t_1, \dots, t_n]$  的集合, 其中每个  $g$  满足  $g(x) = 0$  ( $\forall x \in X$ ). 这个集合是多项式环中的一个理想  $I(X)$ , 被称为簇  $X$  的理想. 商环

$$P(X) = k[t_1, \dots, t_n]/I(X)$$

是  $X$  上的多项式函数环, 因为两个多项式  $g, h$  对应同一个  $X$  上的多项式函数当且仅当  $g - h \in I(X)$ , 即  $g - h$  以  $X$  中的点为零点.

令  $\xi_i$  是  $t_i$  在  $P(X)$  中的像.  $\xi_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 称为  $X$  上的**坐标函数**: 如果  $x \in X$ , 那么  $\xi_i(x)$  是  $x$  的第  $i$  个坐标.  $P(X)$  作为  $k$ -代数由坐标函数生成, 称为  $X$  的**坐标环** (或者仿射代数).

对于每个  $x \in X$ , 令  $\mathfrak{m}_x$  是  $f \in P(X)$  组成的理想, 其中每个  $f$  满足  $f(x) = 0$ , 这是  $P(X)$  的一个极大理想. 因此, 如果  $\tilde{X} = \text{Max}(P(X))$ , 那么我们定义了一个映射  $\mu: X \rightarrow \tilde{X}$  为  $x \mapsto \mathfrak{m}_x$ .

容易证明  $\mu$  是单射: 如果  $x \neq y$ , 那么存在某个  $i$  使得  $x_i \neq y_i$ , 因此  $\xi_i - x_i$  在  $\mathfrak{m}_i$  中但不在  $\mathfrak{m}_y$  中, 所以  $\mathfrak{m}_x \neq \mathfrak{m}_y$ . 不那么显然的一点是  $\mu$  是**满射**. 这是 Hilbert 零点定理 (Hilbert's Nullstellensatz) 的一种形式.

**Ex 1.6.17.** 令  $f_1, \dots, f_m$  是  $k[t_1, \dots, t_n]$  的元素. 它们确定了一个多项式映射  $\phi: k^n \rightarrow k^m$ : 如果  $x \in k^n$ , 则  $\phi(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ .

令  $X, Y$  分别是  $k^n, k^m$  中的仿射代数簇. 一个映射  $\phi: X \rightarrow Y$  被称为**正则的**, 如果  $\phi$  是一个从  $k^n$  到  $k^m$  的多项式映射在  $X$  上的限制.

如果  $\eta$  是  $Y$  上的多项式函数, 那么  $\eta \circ \phi$  是  $X$  上的多项式函数. 因此  $\phi$  诱导了  $k$ -代数同态  $P(Y) \rightarrow P(X)$ :  $\eta \mapsto \eta \circ \phi$ . 证明通过这种方式, 我们得到了正则映射  $X \rightarrow Y$  和  $k$ -代数同态  $P(Y) \rightarrow P(X)$  的一一对应.

*Proof.* 我们需要证明

$$\begin{aligned} \{\text{regular maps } X \rightarrow Y\} &\rightarrow \{k\text{-algebra homomorphisms } P(Y) \rightarrow P(X)\} \\ \phi &\mapsto \tilde{\phi} \end{aligned}$$

是双射, 其中  $\tilde{\phi}(\eta) = \eta \circ \phi$ .

若  $\tilde{\phi}_1 = \tilde{\phi}_2$ , 令  $\xi_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) 是  $Y$  上的坐标函数, 那么

$$\xi_i \circ \phi_1 = \tilde{\phi}_1(\xi_i) = \tilde{\phi}_2(\xi_i) = \xi_i \circ \phi_2,$$

而  $\phi_1(x) = (\xi_1 \circ \phi_1(x), \dots, \xi_m \circ \phi_m(x))$ ,  $\phi_2$  同理. 这就表明  $\phi_1 = \phi_2$ , 所以  $\phi \mapsto \tilde{\phi}$  是单射.

若  $\psi : P(Y) \rightarrow P(X)$  是  $k$ -代数同态, 定义  $\phi : k^n \rightarrow k^m$  为

$$\phi(x) = (\psi(\xi_1)(x), \dots, \psi(\xi_m)(x)),$$

那么我们有

$$\tilde{\phi}(\xi_i) = \xi_i \circ \phi = \xi_i \circ (\psi(\xi_1), \dots, \psi(\xi_m)) = \psi(\xi_i),$$

这就表明  $\tilde{\phi} = \psi$ . 下面我们验证  $\phi$  是正则映射, 即  $\text{im } \phi|_X \subseteq Y$ . 任取  $x \in X$ , 我们需要说明  $\phi(x) \in Y$ , 即  $\phi(x)$  是  $I(Y)$  中多项式的零点, 即任取  $h \in I(Y)$ , 有  $h(\phi(x)) = 0$ .  $h \in I(Y)$  作为  $Y$  上的多项式函数是零函数, 所以  $h \circ \phi = \tilde{\phi}(h) = \psi(h) = \psi(0) = 0$ , 故  $\text{im } \phi|_X \subseteq Y$ . 所以我们证明了  $\phi \mapsto \tilde{\phi}$  是满射.  $\square$

# 模

## 2.1 自由模与有限生成模

给定一个环  $A$ , 以及任意集合  $I$ , 那么  $I$  上的自由  $A$ -模指的是直和  $\bigoplus_{i \in I} A$ , 通常记为  $A^{(I)}$ . 当  $|I| = n$  是有限集的时候, 显然  $A^{(I)} \simeq A^n$  是有限生成模. 注意到  $I$  可以被嵌入到  $A^{(I)}$  中, 即映射  $j : I \rightarrow A^{(I)}$ , 满足

$$j(x) = (a_i)_{i \in I} \quad a_i = \begin{cases} 1 & i = x, \\ 0 & i \neq x. \end{cases}$$

**定理 2.1 (自由模的泛性质).**  $A^{(I)}$  满足以下泛性质:  $B$  是任意  $A$ -模,  $\varphi : I \rightarrow B$  是集合间的映射, 那么存在唯一的  $A$ -模同态  $\bar{\varphi} : A^{(I)} \rightarrow B$  满足  $\varphi = \bar{\varphi} \circ j$ , 即使得下面的图表交换.

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\varphi} & B \\ j \downarrow & \nearrow \bar{\varphi} & \\ A^{(I)} & & \end{array}$$

*Proof.* 定义

$$\bar{\varphi} \left( \sum_{k=1}^n x_{i_k} \right) = \sum_{k=1}^n x_{i_k} \varphi(i_k),$$

其中  $i_k \in I, n \geq 1$ . 显然  $\bar{\varphi}$  是  $A$ -模同态, 并且有  $\bar{\varphi}(j(i)) = \varphi(i)$ . 由于  $\bar{\varphi}$  必须满足  $\bar{\varphi}(j(i)) = \varphi(i)$  且所有的  $j(i)$  ( $i \in I$ ) 组成了  $A^{(I)}$  的生成元, 所以这样的  $\bar{\varphi}$  是唯一的.  $\square$

**例 2.2.** 环  $R = \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots]$  是有限生成  $R$ -模, 生成元就是 1. 但是理想  $(x_1, x_2, \dots)$  作为  $R$ -模不是有限生成的.

**定理 2.3.**  $M$  是有限生成  $A$ -模当且仅当对于某个整数  $n$ , 存在满的  $A$ -模同态  $\varphi : A^n \rightarrow M$ .

*Proof.* 若  $M$  是有限生成的, 设  $x_1, \dots, x_n$  是一组生成元, 考虑映射  $\varphi : A^n \rightarrow M$  为

$$(a_1, \dots, a_n) \mapsto a_1 x_1 + \dots + a_n x_n,$$

容易验证这是一个模同态, 并且由于  $x_1, \dots, x_n$  是生成元, 所以  $\varphi$  是满同态.

反过来, 记  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in A^n$ , 其中第  $i$  个分量为 1. 那么任取  $m \in M$ , 存在  $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$  使得  $\varphi(a_1, \dots, a_n) = m$ , 即

$$m = \varphi(a_1, \dots, a_n) = \varphi(a_1 e_1 + \dots + a_n e_n) = a_1 \varphi(e_1) + \dots + a_n \varphi(e_n),$$

故  $M$  由  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$  生成. □

**定义 2.4.** 一个  $A$ -模  $M$  被称为 **Noether 模**, 如果它的每个子模都是有限生成  $A$ -模. 一个环  $A$  被称为 **Noether 环**, 如果它作为  $A$ -模是 Noether 模.

**命题 2.5.**  $M$  是一个  $A$ -模,  $N$  是  $M$  的子模, 那么  $M$  是 Noether 模当且仅当  $N$  和  $M/N$  都是 Noether 模.

*Proof.* 若  $M$  是 Noether 模, 那么  $N$  当然是 Noether 模. 根据对应定理,  $M/N$  的子模形如  $P/N$ ,  $P$  是  $M$  的包含  $N$  的子模, 设  $P$  由  $x_1, \dots, x_n$  生成, 那么  $P/N$  由  $x_1 + N, \dots, x_n + N$  生成, 所以  $M/N$  是 Noether 模.

若  $N$  和  $M/N$  都是 Noether 模, 设  $P$  是  $M$  的子模, 根据同构定理, 我们有  $(P + N)/N \simeq P/(P \cap N)$ , 同构关系为  $x + P \cap N \mapsto x + N$ , 其中  $x \in P$ . 此时  $P \cap N$  作为  $N$  的子模是有限生成的, 设生成元为  $x_1, \dots, x_n$ ,  $(P + N)/N$  作为  $M/N$  的子模是有限生成的, 设生成元为  $y_1 + N, \dots, y_m + N$ . 那么任取  $z \in P$ , 存在  $a_1, \dots, a_m \in A$ , 使得

$$z + N = a_1(y_1 + N) + \dots + a_m(y_m + N),$$

即  $z - a_1 y_1 - \dots - a_m y_m \in P \cap N$ , 那么存在  $b_1, \dots, b_n \in A$  使得

$$z - a_1 y_1 - \dots - a_m y_m = b_1 x_1 + \dots + b_n x_n,$$

这表明  $P$  可以由  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$  生成. 所以  $M$  是 Noether 模. □

**推论 2.6.**  $A$  是 Noether 环,  $M$  是有限生成  $A$ -模, 则  $M$  是 Noether 模.

*Proof.* 根据 [引理 5.7](#),  $M$  同构于  $A^n$  的一个商模, 所以我们证明  $A^n$  是 Noether 模即可. 对  $n$  归纳,  $n = 1$  时  $A$  是 Noether 环. 假设  $A^{n-1}$  是 Noether 模, 考虑最后一个分量的投影  $\pi_n : A^n \rightarrow A$ , 那么有  $A^n/A^{n-1} \simeq A$ , 所以  $A^{n-1}$  和  $A^n/A^{n-1}$  都是 Noether 模, 故  $A^n$  是 Noether 模. □

下面我们扩展向量空间中“基”的概念. 对于  $A$ -模  $M$  的子集  $S$ , 根据自由模  $A^{(S)}$  的泛性质, 存在唯一的  $A$ -模同态  $\varphi : A^{(S)} \rightarrow M$ , 使得下面的图表交换:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{1} & M \\ j \downarrow & \nearrow \varphi & \\ A^{(S)} & & \end{array}$$



**定义 2.7.** 如果上述映射  $\varphi$  是单射, 那么我们说  $S$  **线性无关**, 如果  $\varphi$  是满射, 那么我们说  $S$  **生成**  $M$ .

若  $S$  线性无关, 则表明任取有限个元素  $e_1, \dots, e_n \in S$ , 如果  $a_1, \dots, a_n \in A$  使得

$$a_1 e_1 + \dots + a_n e_n = 0,$$

那么

$$\varphi(a_1 j(e_1) + \dots + a_n j(e_n)) = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n = 0,$$

$\varphi$  是单射表明  $a_1 j(e_1) + \dots + a_n j(e_n) = 0 \in \bigoplus_{s \in S} A$ , 故  $a_1 = \dots = a_n = 0$ , 反之也是成立的. 这和我们熟悉的线性无关的定义是一致的.

**引理 2.8.**  $M$  是  $A$ -模,  $S \subseteq M$  是线性无关子集, 那么存在包含  $S$  的极大线性无关子集.

## 2.2 ED 上的有限生成模与相似标准型

本节的目标是证明 ED (Euclid 整环) 上的有限生成模的结构定理:

**定理 2.9 (基本定理: 不变因子型).**  $A$  是 ED,  $M$  是有限生成  $A$ -模, 那么  $M$  同构于有限多个循环模的直和, 即

$$M \simeq A^r \oplus A/(a_1) \oplus A/(a_1) \oplus \dots \oplus A/(a_m),$$

其中  $r \geq 0$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_m$  是  $A$  中非零非单位的元素, 并且满足关系

$$a_1 \mid a_2 \mid \dots \mid a_m.$$

此时  $r$  称为  $M$  的**自由秩**,  $a_1, a_2, \dots, a_m$  称为  $M$  的**不变因子**.

实际上上述定理对于 PID 上的有限生成模也成立, 但是 PID 没有一个好的算法来寻找  $a_1, a_2, \dots, a_m$ , 我们将看到 ED 上的 Euclid 算法将发挥重要作用, 并且这也是线性代数中有理标准型和 Jordan 标准型理论的来源.

设  $M$  是有限生成  $A$ -模, 根据 [引理 5.7](#), 我们知道存在满同态  $\varphi: A^n \rightarrow M$ , 即  $M \simeq A^n / \ker \varphi$ . 再根据 [推论 2.6](#), 我们知道  $A^n$  和  $\ker \varphi$  都是有限生成  $A$ -模, 设  $x_1, \dots, x_n$  是  $A^n$  的基,  $y_1, \dots, y_m$  是  $\ker \varphi$  的生成元, 注意此时我们考虑生成元的顺序. 那么对于每个  $1 \leq i \leq m$ , 都存在  $a_{i1}, \dots, a_{in} \in A$ , 使得

$$y_i = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n,$$

记矩阵 (与线性代数中基的过渡矩阵的写法是一致的)

$$A = (a_{ji}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{n,m}(A).$$

那么矩阵  $A$  表述了  $A^n$  的基和  $\ker \varphi$  的生成元的关系, 我们称其为  $A^n$  到  $\ker \varphi$  的关系矩阵.

下面我们观察对关系矩阵  $A$  做初等变换会有什么样的后果. 下面是初等列变换.

1. 如果用  $u \in A^\times$  乘以  $A$  的第  $i$  列, 那么相当于将  $\ker \varphi$  的生成元  $y_i$  变为  $uy_i$ , 即给出了  $\ker \varphi$  的一组新的生成元  $y_1, \dots, uy_i, \dots, y_m$ .
2. 如果交换  $A$  的第  $i$  列和第  $j$  列, 那么相当于交换  $\ker \varphi$  的生成元  $y_i$  和  $y_j$ , 即给出了  $\ker \varphi$  的一组新的生成元  $y_1, \dots, y_j, \dots, y_i, \dots, y_m$ .
3. 如果将  $A$  的第  $i$  列乘以  $a \in A$  加到第  $j$  列, 那么相当于将  $\ker \varphi$  的生成元  $y_j$  替换为  $y_j + ay_i$ , 即给出了  $\ker \varphi$  的一组新的生成元  $y_1, \dots, y_i, \dots, y_j + ay_i, \dots, y_m$ .

下面是初等行变换.

1. 如果用  $u \in A^\times$  乘以  $A$  的第  $i$  行, 那么相当于将  $A^n$  的生成元  $x_i$  变为  $u^{-1}x_i$ , 即给出了  $A^n$  的一组新的生成元  $x_1, \dots, u^{-1}x_i, \dots, x_n$ .
2. 如果交换  $A$  的第  $i$  行和第  $j$  行, 那么相当于交换  $A^n$  的生成元  $x_i$  和  $x_j$ , 即给出了  $A^n$  的一组新的生成元  $x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n$ .
3. 如果将  $A$  的第  $i$  行乘以  $a \in A$  加到第  $j$  行, 那么相当于将  $A^n$  的生成元  $x_i$  替换为  $x_i - ax_j$ , 即给出了  $A^n$  的一组新的生成元  $x_1, \dots, x_i - ax_j, \dots, x_j, \dots, x_n$ .

**定理 2.10 (Smith 标准型).** 如果关系矩阵为零矩阵, 那么  $\ker \varphi = 0$ , 从而  $M \simeq A^n$ . 所以我们假设  $\ker \varphi \neq 0$ , 令  $a_1$  是初始关系矩阵  $A$  中所有元素的最大公因子. 那么通过上述六种初等变换, 可以将  $A$  变换为

$$\begin{pmatrix} D_k & \\ & O_{n-k, m-k} \end{pmatrix},$$

其中  $D_k$  是对角阵, 对角线为  $a_1, a_2, \dots, a_k$  ( $k \leq m$ ), 并且满足  $a_1 \mid a_2 \mid \dots \mid a_k$ .

*Proof.* (1) 首先注意到初等行或者列变换并不会改变所有元素的最大公因子, 因为新矩阵的元素显然被原矩阵元素的最大公因子整除, 而初等变换的操作是可逆的, 所以原矩阵的元素又被新矩阵元素的最大公因子整除, 所以新矩阵和原矩阵元素的最大公因子相同.

我们先考虑对第一行的操作: 假设第一行的最大公因子是  $d = \gcd(a_{11}, \dots, a_{m1})$ , 那么我们可以按照下面的方法将  $d$  放到第一行第一列:

- 首先仅涉及前两列, 使用辗转相除法, 将  $\gcd(a_{11}, a_{21})$  放到第一行第一列;
- 然后仅涉及第一列和第三列, 使用辗转相除法, 将  $\gcd(\gcd(a_{11}, a_{21}), a_{31}) = \gcd(a_{11}, a_{21}, a_{31})$  放到第一行第一列;
- 重复上述步骤, 直到把  $d$  放到第一行第一列.

上述操作可以导出下面的算法:

1. 使用上述操作将  $d = \gcd(a_{11}, \dots, a_{m1})$  放到第一行第一列;
2. 此时  $d$  整除  $a_{21}, \dots, a_{m1}$ , 那么我们可以将第一行除开  $d$  之外全变为零;
3. 如果此时矩阵的所有元素都被  $d$  整除, 那么操作停止. 否则, 存在元素  $a_{ji}$  ( $i > 1$ ), 使得  $d \nmid a_{ji}$ ;

4. 如果  $d \nmid a_{1i}$ , 那么我们跳过这一步. 否则, 我们将第  $j$  列加到第 1 列使得  $a \nmid a_{1i}$ , 注意此时并没有改变第一行;
5. 计算新的最大公因子  $d' = \gcd(d, a_{1i})$ , 通过仅涉及第 1 行和第  $i$  行的操作, 可以将  $d'$  放到第一行第一列, 注意到通过第四步, 有  $d \nmid a_{1i}$ , 所以  $d'$  的次数严格小于  $d$  和  $a_{1i}$  的次数;
6. 回到操作 1.

这个算法必然在有限步结束, 因为每进行一次第 5 步, 第一行第一列的元素的次数就会严格变小, 最多也只能变到零次, 从而在第 3 步退出操作. 最后我们就得到了  $a_{11}$  整除所有其他元素的新矩阵, 而根据前面的观察, 这个新矩阵元素的最大公因子等于初始矩阵元素的最大公因子, 而新矩阵元素的最大公因子显然就是  $a_{11}$ , 这就完成了第一步.

(2) 在 (1) 的基础上, 使用初等变换将第一行第一列的非  $(1, 1)$ -元全变成零即可.

(3) 在 (2) 的基础上, 右下角的分块矩阵又回到了 (1) 的形式, 注意到对该分块矩阵的操作不会影响大矩阵的第一行第一列, 所以重复 (1) 的操作, 又可以将这个分块矩阵化为 (2) 的形式, 即使得  $a_1 \mid a_2$  并且  $a_2$  整除其他所有元素.

(4) 重复前三步的操作, 便可以得到形如  $\begin{pmatrix} D_k & 0 \\ 0 & O_{n-k, m-k} \end{pmatrix}$  的关系矩阵.  $\square$

*Proof of 2.9.* 根据前面的叙述,  $M \simeq A^n / \ker \varphi$ , 并且通过初等变换将关系矩阵变为 Smith 标准型后, 此时表明存在  $A^n$  的一组基  $x_1, \dots, x_n$  和  $\ker \varphi$  的一组生成元  $y_1, \dots, y_k$ , 此时  $k \leq n$  并且  $y_i = a_i x_i$ , 故

$$\begin{aligned} M &\simeq A^n / \ker \varphi = (A \oplus \cdots \oplus A) / (Ay_1 \oplus \cdots \oplus Ay_k \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0) \\ &\simeq A/(a_1) \oplus A/(a_2) \oplus \cdots \oplus A/(a_k) \oplus A^{n-k}. \end{aligned} \quad \square$$

**推论 2.11.**  $A$  是 ED,  $M$  是自由模  $A^n$  的一个子模, 那么  $M$  是秩  $m \leq n$  的自由模.

*Proof.* 存在  $A^n$  的一组基  $x_1, \dots, x_n$  和  $M$  的一组生成元  $y_1, \dots, y_m$ , 使得  $m \leq n$  并且  $y_i = a_i x_i$ , 此时  $y_i$  线性无关, 故  $M = Ay_1 \oplus \cdots \oplus Ay_m$  是秩  $m$  的自由模.  $\square$

**推论 2.12.**  $A$  是 ED,  $M$  是有限生成  $A$ -模, 那么

$$\mathrm{Tor}(M) = A/(a_1) \oplus A/(a_2) \oplus \cdots \oplus A/(a_m),$$

其中  $a_1 \mid a_2 \mid \cdots \mid a_m$ . 特别地,  $M$  是无扭模当且仅当  $M$  是自由模,  $M$  是扭模当且仅当自由秩  $r = 0$ , 此时  $\mathrm{Ann}(M) = (a_m)$ .

**定理 2.9** 的结果还可以进一步改进, 设  $a$  是  $A$  中的非零非单位的元素, 那么  $a$  可以唯一分解为  $a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$ , 其中  $p_i$  为互不相同的素元, 那么根据中国剩余定理, 有环同构 (同时也是  $A$ -模同构)

$$A/(a) \simeq A/(p_1^{\alpha_1}) \oplus A/(p_2^{\alpha_2}) \oplus \cdots \oplus A/(p_s^{\alpha_s}).$$

**定理 2.9** 的右端每一项都可以做类似的分解, 于是我们得到了下面定理.

**定理 2.13 (基本定理: 初等因子型).**  $A$  是 ED,  $M$  是有限生成  $A$ -模, 那么  $M$  同构于有限多个循环模的直和, 即

$$M \simeq A^r \oplus A/(p_1^{\alpha_1}) \oplus A/(p_1^{\alpha_2}) \oplus \cdots \oplus A/(p_{t'}^{\alpha_{t'}}),$$

其中  $r \geq 0$ ,  $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots, p_{t'}^{\alpha_{t'}}$  是  $A$  中素元的幂次 (不需要互不相同).  $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots, p_{t'}^{\alpha_{t'}}$  被称为  $M$  的**初等因子**.

给定  $n$  维  $F$ -向量空间  $V$ , 设有一组基  $e_1, \dots, e_n$ ,  $T$  是  $V$  上的线性变换, 那么  $V$  可以成为一个  $F[x]$ -模, 通过定义  $x \cdot v = T(v)$ , 这当然是一个有限生成  $F[x]$ -模,  $F[x]$  为 ED, 这允许我们使用前面的结果. 取  $F[x]^n$  的一组基为  $\xi_1, \dots, \xi_n$ , 那么存在满同态  $\varphi: F[x]^n \rightarrow V$  定义为  $\varphi(\xi_i) = e_i$ , 下面我们说明  $T$  的特征矩阵和  $\ker \varphi$  之间的关系.

**命题 2.14.** 如果  $T$  在上述基  $e_1, \dots, e_n$  下的表示矩阵为  $A$ , 特征矩阵

$$xI - A = \begin{pmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x - a_{nn} \end{pmatrix},$$

那么  $xI - A$  可以作为  $F[x]^n$  到  $\ker \varphi$  的关系矩阵.

*Proof.* 也就是说我们要证明  $1 \leq i \leq n$  时,

$$\mu_i = -a_{1i}\xi_1 - \cdots - a_{i-1,i}\xi_{i-1} + (x - a_{ii})\xi_i - a_{i+1,i}\xi_{i+1} - \cdots - a_{ni}\xi_n$$

组成了  $\ker \varphi$  的一组生成元.

直接验证可知

$$\varphi(\mu_i) = -(a_{1i}e_1 + \cdots + a_{ni}e_n) + T(e_i) = 0,$$

所以  $\mu_i \in \ker \varphi$ .

由于

$$x\xi_i = \mu_i + \sum_{j=1}^n a_{ji}\xi_j \in (F[x]\mu_1 + \cdots F[x]\mu_n) + (F\xi_1 + \cdots + F\xi_n),$$

所以

$$x^2\xi_i = x(x\xi_i) = x\mu_i + \sum_{j=1}^n a_{ji}(x\xi_j) \in (F[x]\mu_1 + \cdots F[x]\mu_n) + (F\xi_1 + \cdots + F\xi_n),$$

以此类推, 可知任意的  $k \geq 0$  有

$$x^k\xi_i \in (F[x]\mu_1 + \cdots F[x]\mu_n) + (F\xi_1 + \cdots + F\xi_n),$$

所以

$$F[x]^n = F[x]\xi_1 + \cdots + F[x]\xi_n = (F[x]\mu_1 + \cdots F[x]\mu_n) + (F\xi_1 + \cdots + F\xi_n).$$

那么任取  $\sum_{i=1}^n f_i(x)\mu_i + \sum_{i=1}^n a_i\xi_i \in \ker \varphi$ , 就有

$$\sum_{i=1}^n a_i e_i = \varphi \left( \sum_{i=1}^n f_i(x)\mu_i + \sum_{i=1}^n a_i\xi_i \right) = 0,$$

故  $a_i = 0$ , 这就证明了  $\mu_1, \dots, \mu_n$  是  $\ker \varphi$  的生成元.  $\square$

## 2.3 有限生成模

**命题 2.15 (Cayley-Hamilton).**  $M$  是有限生成  $A$ -模,  $\alpha$  是  $A$  的理想, 令  $\phi$  是  $M$  的自同态并且使得  $\phi(M) \subseteq \alpha M$ , 那么存在  $a_i \in \alpha$  使得  $\phi$  满足下面的等式

$$\phi^n + a_1\phi^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

*Proof.* 设  $x_1, \dots, x_n$  为  $M$  的生成元, 那么对于每个  $x_i$ , 存在  $a_{ij} \in \alpha$  使得  $\phi(x_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ , 即

$$\begin{pmatrix} \phi - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \phi - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \phi - a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0,$$

左乘左端矩阵的伴随矩阵, 那么  $\det(\delta_{ij}\phi - a_{ij}) = 0$ , 这就给出了上述等式.  $\square$

**推论 2.16.** 令  $M$  是有限生成  $A$ -模,  $\alpha$  是  $A$  的理想, 使得  $\alpha M = M$ , 那么存在  $x \equiv 1 \pmod{\alpha}$  使得  $xM = 0$ . 或者说, 存在  $a \in \alpha$ , 使得  $ay = y \ (\forall y \in M)$ .

*Proof.* 取  $\phi$  为单位映射  $\mathbb{1}$ , 那么存在  $a_1, \dots, a_n \in \alpha$  使得

$$\mathbb{1}^n + a_1\mathbb{1}^{n-1} + \dots + a_n\mathbb{1} = 0,$$

那么  $x = 1 + a_1 + \dots + a_n$  满足  $xM = 0$ ,  $a = -(a_1 + \dots + a_n)$  满足  $ay = y \ (\forall y \in M)$ .  $\square$

**命题 2.17 (Nakayama 引理).** 令  $M$  是有限生成  $A$ -模, 理想  $\alpha \subseteq \text{rad}(A)$ , 如果  $\alpha M = M$ , 那么  $M = 0$ .

*Proof.* 存在  $x \equiv 1 \pmod{\alpha}$  使得  $xM = 0$ , 此时  $x - 1 \in \text{rad}(A)$ , 所以  $x \in A^\times$ , 故  $M = x^{-1}xM = 0$ .  $\square$

**推论 2.18.** 令  $M$  是有限生成  $A$ -模,  $N$  是  $M$  的子模, 理想  $\alpha \subseteq \text{rad}(A)$ , 如果  $M = \alpha M + N$ , 那么  $M = N$ .

*Proof.*  $M/N$  是有限生成  $A$ -模, 由于  $\alpha(M/N) = (\alpha M + N)/N = M/N$ , 所以  $M/N = 0$ , 即  $M = N$ .  $\square$

$A$  是一个局部环,  $\mathfrak{m}$  是极大理想,  $A/\mathfrak{m}$  是剩余域.  $M$  是有限生成  $A$ -模, 那么  $M/\mathfrak{m}M$  被  $\mathfrak{m}$  零化, 所以  $M/\mathfrak{m}M$  可以视为  $A/\mathfrak{m}$ -模, 即一个有限维  $A/\mathfrak{m}$ -向量空间.

**命题 2.19.** 令  $x_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 是  $M$  的元素, 并且其在  $M/\mathfrak{m}M$  中的像组成了  $M/\mathfrak{m}M$  的一组基, 那么  $x_i$  生成了  $M$ .

*Proof.* 设  $N$  是  $x_i$  生成的子模, 由于  $x_i + M/\mathfrak{m}M$  组成了一组基, 所以任取  $m \in M$ , 存在  $a_i \in A$  使得  $m + \mathfrak{m}M = \sum a_i x_i + \mathfrak{m}M$ , 即  $m \in N + \mathfrak{m}M$ , 故  $M = \mathfrak{m}M + N$ , 所以  $M = N$ .  $\square$

## 2.4 正合列

一系列  $A$ -模和  $A$ -模同态

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

被称为上链复形, 如果  $f_{i+1} \circ f_i = 0$ . 记  $Z_i = \ker f_{i+1}$ ,  $B_i = \operatorname{im} f_i$ ,  $H^i = Z_i/B_i$  被称为  $i$ -次上同调. 若  $H^i = 0$ , 则称  $(M_*, f_*)$  是正合列.

**命题 2.20.**

1. 序列

$$M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \longrightarrow 0$$

是正合列当且仅当对于任意  $A$ -模  $N$ , 序列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(M'', N) \xrightarrow{\bar{v}} \operatorname{Hom}(M, N) \xrightarrow{\bar{u}} \operatorname{Hom}(M', N)$$

是正合列, 这表明  $\operatorname{Hom}(\_, N)$  是左正合 (逆变) 函子.

2. 序列

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} N''$$

是正合列当且仅当对于任意  $A$ -模  $M$ , 序列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(M, N') \xrightarrow{\bar{u}} \operatorname{Hom}(M, N) \xrightarrow{\bar{v}} \operatorname{Hom}(M, N'')$$

是正合列, 这表明  $\operatorname{Hom}(M, \_)$  是左正合 (协变) 函子.

*Proof.* 我们只证明第一个. 若  $M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \longrightarrow 0$  是正合列, 令  $\bar{v}(f) = fv = 0$ ,  $v$  是满射, 所以存在右逆  $v'$  使得  $vv' = \mathbb{1}_{M''}$ , 故  $f = 0$ , 所以  $\bar{v}$  是单射. 任取  $f \in \operatorname{Hom}(M'', N)$ , 那么  $\bar{u}(\bar{v}(f)) = \bar{u}(fv) = fvu = 0$ , 所以  $\operatorname{im} \bar{v} \subseteq \ker \bar{u}$ . 任取  $g \in \ker \bar{u}$ , 即  $gu = 0$ . 对于  $m'' \in M$ , 有  $m \in M$  使得  $m'' = v(m)$ , 令  $h: M'' \rightarrow N$  为  $h(m'') = g(m)$ , 我们说明  $h$  是良定义的, 即若  $m'' = v(m_1) = v(m_2)$ , 则有  $g(m_1) = g(m_2)$ .  $v(m_1) = v(m_2)$  表明  $m_1 - m_2 \in \ker v = \operatorname{im} u$ , 故  $g(m_1 - m_2) = 0$ , 所以  $g(m_1) = g(m_2)$ . 显然  $h$  是同态, 并且  $g = hv = \bar{v}(h)$ , 这就表明  $\ker \bar{u} \subseteq \operatorname{im} \bar{v}$ . 所以  $\operatorname{im} \bar{v} = \ker \bar{u}$ .

若对于任意  $A$ -模  $N$ ,  $0 \rightarrow \text{Hom}(M'', N) \xrightarrow{\bar{v}} \text{Hom}(M, N) \xrightarrow{\bar{u}} \text{Hom}(M', N)$  是正合列. 取  $N = \text{coker } v = M''/\text{im } v$ , 那么自然映射  $\pi : M'' \rightarrow N$  满足  $\bar{v} = \pi v = 0$ ,  $\bar{v}$  是单射表明  $\pi = 0$ , 即  $M'' = \text{im } v$ ,  $v$  是满射. 取  $N = M''$ , 那么  $1_{M''} \in \text{Hom}(M'', M'')$  满足  $\bar{u}\bar{v}(1_{M''}) = 0$ , 即  $vu = 1_{M''}vu = 0$ , 故  $\text{im } u \subseteq \ker v$ . 取  $N = \text{coker } u = M/\text{im } u$ ,  $\pi : M \rightarrow N$  为自然映射, 那么  $\bar{u}(\pi) = \pi u = 0$ , 故  $\pi \in \ker \bar{u} = \text{im } \bar{v}$ , 故存在  $h \in \text{Hom}(M'', N)$  使得  $\pi = \bar{v}(h) = hv$ , 任取  $m \in \ker v$ , 那么  $m + \text{im } u = \pi(v) = hv(m) = 0$ , 故  $m \in \text{im } u$ , 即  $\ker v \subseteq \text{im } u$ . 所以  $\text{im } u = \ker v$ .  $\square$

**命题 2.21 (蛇引理).** 设有两个  $A$ -模的正合列, 并且满足如下交换图 (中间两行), 那么存在下述的红色正合列.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \xrightarrow{\quad} & \ker \alpha & \xrightarrow{\bar{u}} & \ker \beta & \xrightarrow{\bar{v}} & \ker \gamma \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \xrightarrow{\quad} & M' & \xrightarrow{u} & M & \xrightarrow{v} & M'' \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\
 0 & \xrightarrow{\quad} & N' & \xrightarrow{u'} & N & \xrightarrow{v'} & N'' \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \text{coker } \alpha & \xrightarrow{\bar{u}'} & \text{coker } \beta & \xrightarrow{\bar{v}'} & \text{coker } \gamma \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

$\text{d}$

*Proof.* 由于  $\beta \bar{u}(\ker \alpha) = \beta u(\ker \alpha) = u' \alpha(\ker \alpha) = 0$ , 所以  $\bar{u}(\ker \alpha) \subseteq \ker \beta$ , 而  $\bar{u}$  作为  $u$  的限制自然是单射. 故红色序列在  $\ker \alpha$  处是正合的. 显然  $\bar{v} \bar{u} = 0$ . 任取  $m \in \ker \bar{v}$ , 那么  $m \in \ker v = \text{im } u$ , 故存在  $m' \in M'$  使得  $m = u(m')$ , 此时  $u' \alpha(m') = \beta u(m') = 0$ ,  $u'$  是单射表明  $\alpha(m') = 0$ , 即  $m' \in \ker \alpha$ , 故  $m \in \text{im } \bar{u}$ . 这就表明  $\ker \bar{v} = \text{im } \bar{u}$ , 红色序列在  $\ker \beta$  处是正合的. 任取  $m'' \in \ker \gamma$ , 那么存在  $m \in M$  使得  $m'' = v(m)$ , 此时  $v' \beta(m) = \gamma v(m) = 0$ , 故  $\beta(m) \in \ker v' = \text{im } u'$ ,  $u'$  是单射表明存在唯一的  $n' \in N$  使得  $\beta(m) = u'(n')$ , 定义  $d : \ker \gamma \rightarrow \text{coker } \alpha$  为  $d(m) = n' + \text{im } \alpha$ . 首先我们说明  $d$  是良定义的, 如果  $m_1, m_2 \in M$  都满足  $m'' = v(m_1) = v(m_2)$ , 那么  $m_1 - m_2 \in \ker v = \text{im } u$ , 设  $n'_1, n'_2 \in N'$  分别满足  $u'(n'_1) = \beta(m_1)$  以及  $u'(n'_2) = \beta(m_2)$ , 设  $m' \in M'$  使得  $m_1 - m_2 = u(m')$ , 所以  $u' \alpha(m') = \beta u(m') = \beta(m_1 - m_2) = u'(n'_1) - u'(n'_2)$ , 故  $n'_1 - n'_2 = \alpha(m')$ , 即  $n'_1 + \text{im } \alpha = n'_2 + \text{im } \alpha$ , 所以  $d$  是良定义的. 不难验证  $d$  是模同态. 显然有  $d \bar{v} = 0$ . 任取  $m'' \in \ker d$ , 存在  $m \in M$  使得  $m'' = v(m)$ , 设  $n' \in N'$  使得  $\beta(m) = u'(n')$ , 那么  $d(m'') = n' + \text{im } \alpha$ ,  $m'' \in \ker d$  表明  $n' \in \text{im } \alpha$ , 故存在  $m' \in M'$  使得  $n' = \alpha(m')$ , 所以  $\beta u(m') = u' \alpha(m') = \beta(m)$ , 故  $m - u(m') \in \ker \beta$ , 并

且  $\bar{v}(m - u(m')) = v(m - u(m')) = v(m) = m''$ , 所以  $m'' \in \text{im } \bar{v}$ . 故  $\ker d = \text{im } \bar{v}$ , 红色序列在  $\ker \gamma$  处是正合的. 剩下的证明与上面的类似.  $\square$

令  $\mathcal{C}$  是  $A$ -模的一个类,  $\lambda$  是  $\mathcal{C}$  上的函数, 取值为  $\mathbb{Z}$  (一般的, 也可以是交换群  $G$ ). 如果对于任意处于  $\mathcal{C}$  中的短正合列  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ , 有  $\lambda(M') - \lambda(M) + \lambda(M'') = 0$ , 那么我们说  $\lambda$  是**加性的**.

**例 2.22.**  $A$  是域  $k$ ,  $\mathcal{C}$  是有限维  $k$ -向量空间  $V$  的类, 那么  $\lambda(V) = \dim V$  是  $\mathcal{C}$  上的加性函数.

**命题 2.23.** 令  $0 \rightarrow M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \cdots \rightarrow M_n \rightarrow 0$  是  $A$ -模序列的上链复形, 并且每个  $M_i$ 、同态核以及上同调  $H^i$  都在  $\mathcal{C}$  中, 那么对于任意  $\mathcal{C}$  上的加性函数  $\lambda$  有

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \lambda(M_i) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \lambda(H^i).$$

*Proof.* 对于复形

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \longrightarrow \cdots,$$

其蕴含了两个短正合列:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow Z_i \longrightarrow M_i \xrightarrow{f_{i+1}} B_{i+1} \longrightarrow 0, \\ 0 \longrightarrow B_i \longrightarrow Z_i \xrightarrow{\pi} H^i \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

分别表明

$$\lambda(M_i) = \lambda(Z_i) + \lambda(B_{i+1}), \quad \lambda(Z_i) = \lambda(B_i) + \lambda(H^i),$$

所以

$$\lambda(M_i) = \lambda(B_i) + \lambda(B_{i+1}) + \lambda(H^i),$$

注意到  $B_0 = 0$  以及  $B_{n+1} = 0$ , 故

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \lambda(M_i) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \lambda(H^i). \quad \square$$

## 2.5 模的张量积

给定  $A$ -模  $M, N$ ,  $M, N$  的张量积指的是  $A$ -模  $T$ , 并且存在  $A$ -双线性映射  $g : M \times N \rightarrow T$ ,  $T$  还满足下面的泛性质: 任给  $A$ -模  $P$  和  $A$ -双线性映射  $f : M \times N \rightarrow P$ , 存在唯一的  $A$ -模同态 (线性映射)  $\tilde{f} : T \rightarrow P$  使得  $f = \tilde{f}g$ , 即有交换图:

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{f} & P \\ g \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ T & & \end{array}$$



**命题 2.24.** 上述  $A$ -模  $T$  存在且在同构的意义下唯一. 这样的  $T$  记为  $M \otimes_A N$ .

*Proof.* (唯一性) 如果  $T, T'$  均满足上述性质, 那么同时有下面两个交换图成立

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{g'} & T' \\ g \downarrow & \nearrow \bar{g}' & \\ T & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{g} & T \\ g' \downarrow & \nearrow \bar{g} & \\ T' & & \end{array}$$

即  $g' = \bar{g}'g = \bar{g}'\bar{g}g'$  以及  $g = \bar{g}g' = \bar{g}\bar{g}'g$ . 此时  $\bar{g}'\bar{g} : T' \rightarrow T'$  也是  $A$ -模同态, 并且  $g' = 1_{T'}g' = \bar{g}'\bar{g}g'$ , 根据唯一性, 所以  $\bar{g}'\bar{g} = 1_{T'}$ . 类似地有  $\bar{g}\bar{g}' = 1_T$ , 所以  $\bar{g}$  是同构映射.

(存在性) 做  $A$ -上的自由模  $A^{(M \times N)}$ , 这里  $M \times N$  仅仅代表集合的 Cartesian 积, 我们知道  $A^{(M \times N)}$  中的元素为有限形式和  $\sum_{i=1}^n a_i(x_i, y_i)$ , 其中  $a_i \in A, x_i \in M, y_i \in N$ .

令  $D$  是  $A^{(M \times N)}$  的子模, 其由以下四类元素生成

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_1 + x_2, y) - (x_1, y) - (x_2, y) \\ (x, y_1 + y_2) - (x, y_1) - (x, y_2) \\ (ax, y) - a(x, y) \\ (x, ay) - a(x, y) \end{array} \right.$$

令  $T = A^{(M \times N)} / D$ , 我们记  $(m, n) + D \in T$  为  $m \otimes n$ . 根据构造, 我们知道

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2) \otimes y &= x_1 \otimes y + x_2 \otimes y, \\ x \otimes (y_1 + y_2) &= x \otimes y_1 + x \otimes y_2, \\ (ax) \otimes y &= a(x \otimes y) = x \otimes (ay). \end{aligned}$$

下面我们证明  $T$  就是我们需要的张量积.  $g : M \times N \rightarrow T$  定义为  $g(m, n) = m \otimes n$  是一个自然的双线性映射. 根据自由模的泛性质, 任意双线性映射  $f : M \times N \rightarrow P$  可以诱导出唯一的同态  $f' : A^{(M \times N)} \rightarrow P$ , 其满足  $f'|_{M \times N} = f$ , 此时  $D \subseteq \ker f'$ , 所以  $f'$  诱导出良定义的同态  $\bar{f} : T \rightarrow P$ , 满足  $\bar{f}(m \otimes n) = f'(m, n) = f(m, n)$ , 即  $f = \bar{f}g$ .  $\square$

对于多个模的张量积有完全类似地定义和证明.

**推论 2.25.** 令  $x_i \in M, y_i \in N$  使得在  $M \otimes N$  中有  $\sum x_i \otimes y_i = 0$ , 那么存在  $M$  的有限生成子模  $M_0$  和  $N$  的有限生成子模  $N_0$  使得在  $M_0 \otimes N_0$  中有  $\sum x_i \otimes y_i = 0$ .

*Proof.* 若  $M \otimes N$  中有  $\sum x_i \otimes y_i = 0$ , 这表明  $\sum (x_i, y_i) \in D$ , 所以  $\sum (x_i, y_i)$  可以表示为上述四类元素的有限和, 令  $M_0$  为所有  $x_i$  和上述四类元素的第一个分量生成的子模,  $N_0$  为所有  $y_i$  和上述四类元素的第二个分量生成的子模即可.  $\square$

**命题 2.26.**  $M, N, P$  是  $A$ -模, 那么存在以下唯一的同构

1.  $M \otimes N \rightarrow N \otimes M$
2.  $(M \otimes N) \otimes P \rightarrow M \otimes (N \otimes P) \rightarrow M \otimes N \otimes P$

$$3. (M \oplus N) \otimes P \rightarrow (M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$$

$$4. A \otimes M \rightarrow M$$

分别使得

$$1. x \otimes y \mapsto y \otimes x$$

$$2. (x \otimes y) \otimes z \mapsto x \otimes (y \otimes z) \mapsto x \otimes y \otimes z$$

$$3. (x, y) \otimes z \mapsto (x \otimes z, y \otimes z)$$

$$4. a \otimes x \mapsto ax.$$

*Proof.* (1) 映射  $(x, y) \mapsto y \otimes x$  是双线性映射, 所以诱导出唯一的同态  $x \otimes y \mapsto y \otimes x$ . 另一方面,  $(y, x) \mapsto x \otimes y$  也是双线性映射, 诱导出唯一的同态  $y \otimes x \mapsto x \otimes y$ , 上述两个同态互为逆映射, 所以是同构.

(2) 给定  $z_0 \in P$ , 映射  $(x, y) \mapsto x \otimes y \otimes z_0$  是双线性映射, 所以诱导出唯一的同态  $x \otimes y \mapsto x \otimes y \otimes z_0$ , 这表明  $(x \otimes y, z) \mapsto x \otimes y \otimes z$  是良定义的双线性映射, 所以诱导出唯一的同态  $(x \otimes y) \otimes z \mapsto x \otimes y \otimes z$ . 另一方面, 映射  $(x, y, z) \mapsto (x \otimes y) \otimes z$  是三线性映射, 所以诱导出唯一的同态  $x \otimes y \otimes z \mapsto (x \otimes y) \otimes z$ , 这与上述同态互为逆映射, 所以是同构, 这就证明了  $(M \otimes N) \otimes P \simeq M \otimes N \otimes P$ . 另一边同理.

(3) 映射  $((x, y), z) \mapsto (x \otimes z, y \otimes z)$  是双线性映射, 所以诱导出唯一的同态  $(x, y) \otimes z \mapsto (x \otimes z, y \otimes z)$ . 另一方面, 映射  $(x, z) \mapsto (x, 0) \otimes z$  和  $(y, z) \mapsto (0, y) \otimes z$  都是双线性映射, 分别诱导出同态  $x \otimes z \mapsto (x, 0) \otimes z$  和  $y \otimes z \mapsto (0, y) \otimes z$ , 那么我们有同态  $(x \otimes z, y \otimes z) \mapsto (x, 0) \otimes z + (0, y) \otimes z = (x, y) \otimes z$ , 这与上述同态互为逆映射.

(4) 映射  $(a, x) \mapsto ax$  是双线性映射, 所以诱导出唯一的同态  $a \otimes x \mapsto ax$ . 另一方面, 同态  $x \mapsto 1 \otimes x$  是上述映射的逆映射.  $\square$

**推论 2.27.** 若  $V, W$  分别为  $m, n$  维  $k$ -向量空间, 且分别有一组基  $v_1, \dots, v_m$  与  $w_1, \dots, w_n$ , 那么  $V \otimes W$  是  $mn$  维  $k$ -向量空间, 基为  $v_i \otimes w_j$  ( $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ ).

*Proof.* 我们有

$$V \otimes W \simeq \left( \bigoplus_{i=1}^m k \right) \otimes W \simeq \bigoplus_{i=1}^m (k \otimes W) \simeq \bigoplus_{i=1}^m W,$$

同构映射为  $v_i \otimes w_j \mapsto (0, \dots, 1, \dots, 0) \otimes w_j \mapsto (0, \dots, 1 \otimes w_j, \dots, 0) \mapsto (0, \dots, w_j, \dots, 0)$ .  $\square$

令  $A, B$  是环,  $M$  是  $A$ -模,  $P$  是  $B$ -模,  $N$  是  $(A, B)$ -双模 (即  $N$  既是  $A$ -模又是  $B$ -模, 并且有相容的模结构:  $a(xb) = (ax)b$  对于  $a \in A, b \in B, x \in N$ ). 此时, 通过定义  $b(m \otimes n) := m \otimes (nb)$ , 使得  $M \otimes_A N$  自然地成为一个  $B$ -模, 此时  $M \otimes_A N$  是一个  $(A, B)$ -双模, 因为

$$\begin{aligned} (a(m \otimes n))b &= (m \otimes (an))b = m \otimes ((an)b) = m \otimes (a(nb)) \\ &= a(m \otimes (nb)) = a((m \otimes n)b). \end{aligned}$$

类似地,  $N \otimes_B P$  也自然地成为一个  $(A, B)$ -双模, 类似上面的证明, 我们同时有  $A$ -模或者  $B$ -模同构

$$(M \otimes_A N) \otimes_B P \simeq M \otimes_A (N \otimes_B P).$$

$f: M \rightarrow M'$  和  $g: N \rightarrow N'$  是  $A$ -模同态的张量积. 定义  $h: M \times N \rightarrow M' \otimes N'$  为  $h(x, y) = f(x) \otimes g(y)$ , 容易验证  $h$  是双线性映射, 所以诱导出同态

$$f \otimes g: M \otimes N \rightarrow M' \otimes N'$$

为

$$(f \otimes g)(x \otimes y) = f(x) \otimes g(y).$$

令  $f': M' \rightarrow M''$  和  $g': N' \rightarrow N''$  为  $A$ -模同态, 注意到

$$\begin{aligned} ((f' \circ f) \otimes (g' \circ g))(x \otimes y) &= (f' \circ f)(x \otimes y) \otimes (g' \circ g)(x \otimes y) \\ &= (f' \otimes g')(f(x \otimes y) \otimes g(x \otimes y)) \\ &= (f' \otimes g') \circ (f \otimes g)(x \otimes y), \end{aligned}$$

所以

$$(f' \circ f) \otimes (g' \circ g) = (f' \otimes g') \circ (f \otimes g).$$

## 2.6 标量的扩张与限制

$f: A \rightarrow B$  是环同态,  $N$  是  $B$ -模, 那么  $N$  自然有一个  $A$ -模结构, 为  $ax := f(a)x$ . 这个  $A$ -模称为  $N$  通过标量的限制得到的. 特别地,  $f$  定义了  $B$  上的  $A$ -模结构.

**命题 2.28.** 设  $N$  作为  $B$ -模是有限生成的,  $B$  作为  $A$ -模是有限生成的, 那么  $N$  作为  $A$ -模是有限生成的.

*Proof.* 设  $x_1, \dots, x_n$  是  $N$  作为  $B$ -模的生成元,  $b_1, \dots, b_m$  是  $B$  作为  $A$ -模的生成元, 那么  $b_i x_j$  就是  $N$  作为  $A$ -模的生成元.  $\square$

现在令  $M$  是  $A$ -模, 如上所述,  $B$  可以视为  $A$ -模, 那么我们可以构造  $A$ -模  $M_B = B \otimes_A M$ , 实际上  $M_B$  拥有  $B$ -模结构, 通过  $b(b' \otimes x) := bb' \otimes x$ , 这个  $B$ -模  $M_B$  称为  $M$  通过标量的扩张得到的.

**命题 2.29.** 若  $M$  作为  $A$ -模是有限生成的, 那么  $M_B$  是有限生成  $B$ -模.

*Proof.* 如果  $x_1, \dots, x_n$  是  $M$  的生成元, 那么  $1 \otimes x_1, \dots, 1 \otimes x_n$  是  $M_B$  的  $B$ -模生成元.  $\square$

在线性代数中, 经常将实向量空间  $\mathbb{R}^n$  视为复向量空间  $\mathbb{C}^n$  的子空间. 这实际上是在说将  $\mathbb{R}^n$  的标量扩张为  $\mathbb{C}$ , 可以预见应该有  $\mathbb{C}$ -模同构  $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{C}^n$ . 现在我们来证

明这一点, 对于更一般的情况, 我们证明  $B$ -模同构  $B \otimes_A A^n \simeq B^n$ . 考虑双线性映射  $\varphi : B \times A^n \rightarrow B^n$  为

$$\varphi(x, (y_1, \dots, y_n)) = (xf(y_1), \dots, xf(y_n)),$$

这诱导出  $A$ -模同态  $\bar{\varphi} : B \otimes_A A^n \rightarrow B^n$ . 定义同态  $\psi : B^n \rightarrow B \otimes_A A^n$  为

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = x_1 \otimes e_1 + \dots + x_n \otimes e_n,$$

其中  $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0) \in A^n$  是生成元, 容易验证  $\bar{\varphi}$  和  $\psi$  互为逆映射. 所以  $\bar{\varphi}$  是  $A$ -模同构. 容易验证  $\bar{\varphi}$  也是  $B$ -模同构.

还是按照上面的记号, 标量的限制实际上可以视为  $B\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}$  的协变函子  $\mathcal{R}$ , 将  $B$ -模  $M$  送到限制标量后的  $A$ -模  $\mathcal{R}(M) = M$ , 将  $B$ -模同态  $f : M \rightarrow M'$  送到  $A$ -模同态  $\mathcal{R}(f) : \mathcal{R}(M) \rightarrow \mathcal{R}(M')$ , 作用为  $\mathcal{R}(f)(x) = f(x)$ , 即  $\mathcal{R}(f) = f$ . 同样的, 标量的扩张可以视为  $A\text{-Mod} \rightarrow B\text{-Mod}$  的协变函子  $\mathcal{E}$ , 将  $A$ -模  $M$  送到  $\mathcal{E}(M) = B \otimes_A M$ , 将  $A$ -模同态  $g : M \rightarrow M'$  送到  $B$ -模同态  $\mathcal{E}(g) : \mathcal{E}(M) \rightarrow \mathcal{E}(M')$ , 作用为  $\mathcal{E}(g)(b \otimes x) = b \otimes g(x)$ , 即  $\mathcal{E}(g) = 1 \otimes g$ . 我们证明对于任意  $A$ -模  $M$  和  $B$ -模  $N$ , 都有

$$\text{Hom}_{A\text{-Mod}}(M, \mathcal{R}(N)) \simeq \text{Hom}_{B\text{-Mod}}(\mathcal{E}(M), N).$$

任取  $A$ -模同态  $g : M \rightarrow \mathcal{R}(N)$ , 诱导出一个  $B$ -模同态  $\bar{g} : \mathcal{E}(M) \rightarrow N$ , 通过

$$\bar{g}(b \otimes x) = bg(x).$$

反之, 任取  $B$ -模同态  $\bar{f} : \mathcal{E}(M) \rightarrow N$ , 诱导出一个  $A$ -模同态  $f : M \rightarrow \mathcal{R}(N)$ , 通过

$$f(x) = \bar{f}(1 \otimes x).$$

容易验证  $g \mapsto \bar{g}$  和  $\bar{f} \mapsto f$  互为逆映射, 所以这给出了上述一一对应. 这就表明对于任意  $A$ -模  $M$  和  $B$ -模  $N$ , 有同构

$$\nu_{M,N} : \text{Hom}_{A\text{-Mod}}(M, \mathcal{R}(N)) \rightarrow \text{Hom}_{B\text{-Mod}}(\mathcal{E}(M), N).$$

任取  $A$ -模  $M_1, M_2$  和  $B$ -模  $N_1, N_2$ ,  $\varphi : M_2 \rightarrow M_1$  和  $\psi : N_1 \rightarrow N_2$  分别是  $A$ -模同态与  $B$ -模同态, 我们有交换图

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{A\text{-Mod}}(M_1, \mathcal{R}(N_1)) & \xrightarrow{\text{Hom}_{A\text{-Mod}}(\varphi, \mathcal{R}(\psi))} & \text{Hom}_{A\text{-Mod}}(M_2, \mathcal{R}(N_2)) \\ \nu_{M_1, N_1} \downarrow & & \downarrow \nu_{M_2, N_2} \\ \text{Hom}_{B\text{-Mod}}(\mathcal{E}(M_1), N_1) & \xrightarrow{\text{Hom}_{B\text{-Mod}}(\mathcal{E}(\varphi), \psi)} & \text{Hom}_{B\text{-Mod}}(\mathcal{E}(M_2), N_2) \end{array}$$

上面的叙述说明了存在自然同构  $\nu : \text{Hom}_{A\text{-Mod}}(\_, \mathcal{R}(\_)) \Rightarrow \text{Hom}_{B\text{-Mod}}(\mathcal{E}(\_), \_)$ , 所以  $\mathcal{R}$  和  $\mathcal{E}$  是一对伴随函子,  $\mathcal{E}$  是  $\mathcal{R}$  的左伴随.

## 2.7 张量积的正合性质

给定环  $A$  和  $A$ -模  $N$ , 考虑  $A\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}$  的张量积函子  $\_ \otimes N$  和  $\text{Hom}$  函子  $\text{Hom}_{A\text{-Mod}}(N, \_)$ , 为了简洁, 后面我们略去下标  $A\text{-Mod}$ . 张量积函子  $\_ \otimes N$  将一个  $A$ -模  $M$  送到  $A$ -模  $M \otimes_A N$ , 将  $A$ -模同态  $f: M \rightarrow M'$  送到  $f \otimes 1: M \otimes N \rightarrow M' \otimes N$ .  $\text{Hom}$  函子  $\text{Hom}(N, \_)$  将一个  $A$ -模  $P$  送到  $A$ -模  $\text{Hom}(N, P)$ , 将  $A$ -模同态  $f: P \rightarrow P'$  送到  $\tilde{f}: \text{Hom}(N, P) \rightarrow \text{Hom}(N, P')$ , 作用为  $\tilde{f}(\varphi) = f \circ \varphi$ . 我们证明这两个函子是一对伴随函子.

任取  $A$ -模  $M$  和  $P$ , 我们说明存在  $A$ -模同构

$$\nu_{M,P}: \text{Hom}(M, \text{Hom}(N, P)) \rightarrow \text{Hom}(M \otimes N, P). \quad (2.1)$$

任取同态  $g: M \rightarrow \text{Hom}(N, P)$ , 那么对于每个  $x \in M$ , 诱导了一个双线性映射  $(x, y) \mapsto g(x)(y)$ , 进而诱导出同态  $\bar{g}: M \otimes N \rightarrow P$ , 故定义  $\nu_{M,P}(g) = \bar{g}$ , 满足  $\bar{g}(x \otimes y) = g(x)(y)$ . 反之, 任取同态  $\tilde{f}: M \otimes N \rightarrow P$ , 其对应一个双线性映射  $f: M \times N \rightarrow P$ , 对于每个  $x \in M$ , 这个双线性映射可以诱导出同态  $f_x: N \rightarrow P$ , 不难验证  $\tilde{f} \mapsto (x \mapsto f_x)$  是上述映射的逆映射. 此外, 容易验证  $\nu_{M,P}$  是  $A$ -模同态.

任取  $A$ -模  $M_1, M_2$  和  $P_1, P_2$ ,  $\varphi: M_2 \rightarrow M_1$  和  $\psi: P_1 \rightarrow P_2$ , 我们有交换图

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(M_1, \text{Hom}(N, P_1)) & \xrightarrow{\text{Hom}(\varphi, \text{Hom}(N, \psi))} & \text{Hom}(M_2, \text{Hom}(N, P_2)) \\ \nu_{M_1, P_1} \downarrow & & \downarrow \nu_{M_2, P_2} \\ \text{Hom}(M_1 \otimes N, P_1) & \xrightarrow{\text{Hom}(\varphi \otimes N, \psi)} & \text{Hom}(M_2 \otimes N, P_2) \end{array}$$

这就表明  $\text{Hom}(N, \_)$  和  $\_ \otimes N$  是一对伴随函子,  $\_ \otimes N$  是  $\text{Hom}(N, \_)$  的左伴随.

**命题 2.30.** 令

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

是正合列,  $N$  是任意  $A$ -模, 那么序列

$$M' \otimes N \xrightarrow{f \otimes 1} M \otimes N \xrightarrow{g \otimes 1} M'' \otimes N \longrightarrow 0$$

是正合列.

*Proof.* 任取  $A$ -模  $P$ , 根据 [命题 2.20](#) 的 (1), 记  $D = \text{Hom}(N, P)$ , 我们知道

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(M'', D) \xrightarrow{\tilde{g}} \text{Hom}(M, D) \xrightarrow{\tilde{f}} \text{Hom}(M', D)$$

是正合列, 其中  $\tilde{g}: \phi \mapsto \phi \circ g$ ,  $\tilde{f}: \psi \mapsto \psi \circ f$ . 根据 (2.1) 式, 有

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(M'' \otimes N, P) \xrightarrow{\tilde{g}} \text{Hom}(M \otimes N, P) \xrightarrow{\tilde{f}} \text{Hom}(M' \otimes N, P)$$

是正合列, 其中  $\tilde{g} = v_{M,P} \circ \bar{g} \circ v_{M'',P}^{-1}$ ,  $\tilde{f} = v_{M',P} \circ \bar{f} \circ v_{M,P}^{-1}$ . 再根据 命题 2.20 的 (1), 并且注意到任取  $\bar{\phi} \in \text{Hom}(M'' \otimes N, P)$ , 对于任意  $x \otimes y \in M \otimes N$ , 有

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\bar{\phi})(x \otimes y) &= (v_{M,P} \circ \bar{g} \circ v_{M'',P}^{-1}(\bar{\phi}))(x \otimes y) = (v_{M,P}(v_{M'',P}^{-1}(\bar{\phi}) \circ g))(x \otimes y) \\ &= (v_{M'',P}^{-1}(\bar{\phi}) \circ g)(x)(y) = \phi_{g(x)}(y) \\ &= \bar{\phi}(g(x) \otimes y) = \bar{\phi} \circ (g \otimes 1)(x \otimes y),\end{aligned}$$

所以

$$M' \otimes N \xrightarrow{f \otimes 1} M \otimes N \xrightarrow{g \otimes 1} M'' \otimes N \longrightarrow 0$$

是正合列. □

上述证明实际上表明任意左伴随的函子都是右正合的.

一般来说, 如果  $M' \rightarrow M \rightarrow M''$  是正合列, 那么对于任意  $A$ -模  $N$ , 通过张量积函子  $\_ \otimes N$  作用后的序列  $M' \otimes N \rightarrow M \otimes N \rightarrow M'' \otimes N$  不一定是正合列. 对于一个  $A$ -模  $N$ , 如果张量积函子  $\_ \otimes N$  是正合函子, 即能把任意正合列变为一个正合列, 那么我们称  $N$  是平坦模.

**命题 2.31.** 对于一个  $A$ -模  $N$ , 下面的说法是等价的:

1.  $N$  是平坦模.
2. 如果  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$  是任意  $A$ -模的短正合列, 那么张量积序列

$$0 \longrightarrow M' \otimes N \longrightarrow M \otimes N \longrightarrow M'' \otimes N \longrightarrow 0$$

是短正合列.

3. 如果  $f: M' \rightarrow M$  是单同态, 那么  $f \otimes 1: M' \otimes N \rightarrow M \otimes N$  是单同态.
4. 如果  $f: M' \rightarrow M$  是单同态并且  $M, M'$  是有限生成模, 那么  $f \otimes 1: M' \otimes N \rightarrow M \otimes N$  是单同态.

*Proof.* (1)  $\Rightarrow$  (2) 显然.

(2)  $\Rightarrow$  (1) 若  $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$  是正合列, 那么其蕴含两个短正合列

$$0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow M' \xrightarrow{\bar{f}} \text{im } f \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \ker g \longrightarrow M \xrightarrow{\bar{g}} \text{im } g \longrightarrow 0,$$

其中  $\bar{f}$  和  $\bar{g}$  表示值域的限制. 根据条件, 有短正合列

$$0 \longrightarrow \ker f \otimes N \longrightarrow M' \otimes N \xrightarrow{\bar{f} \otimes 1} \text{im } f \otimes N \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \ker g \otimes N \longrightarrow M \otimes N \xrightarrow{\bar{g} \otimes 1} \text{im } g \otimes N \longrightarrow 0,$$

所以  $\text{im}(f \otimes 1) = \text{im}(\bar{f} \otimes 1) = \text{im } f \otimes N = \ker g \otimes N$ , 接下来证明  $\ker g \otimes N = \ker(g \otimes 1)$  即可. 注意到我们还有短正合列

$$0 \longrightarrow \text{im } g \xrightarrow{i} M'' \longrightarrow \text{coker } g \longrightarrow 0,$$

所以有短正合列

$$0 \longrightarrow \operatorname{im} g \otimes N \xrightarrow{i \otimes 1} M'' \otimes N \longrightarrow \operatorname{coker} g \otimes N \longrightarrow 0,$$

注意到  $\bar{g} \otimes 1$  是满射,  $i \otimes 1$  是单射, 以及

$$(i \otimes 1) \circ (\bar{g} \otimes 1) = (i \circ \bar{g}) \otimes (1 \circ 1) = g \otimes 1,$$

所以

$$\ker(g \otimes 1) = \ker((i \otimes 1) \circ (\bar{g} \otimes 1)) = \ker g \otimes N.$$

(2)  $\Leftrightarrow$  (3) 由 [命题 2.30](#) 立即得到.

(3)  $\Rightarrow$  (4) 显然.

(4)  $\Rightarrow$  (3) 令  $f : M' \rightarrow M$  是单射,  $\sum x'_i \otimes y_i \in \ker(f \otimes 1)$ , 也就是说在  $M \otimes N$  中有  $\sum f(x'_i) \otimes y_i = 0$ . 令  $M'_0$  为  $x'_i$  生成的子模, 根据 [推论 2.25](#), 存在  $M$  的有限生成子模  $M_0$  使得在  $M_0 \otimes N$  中有  $\sum f(x'_i) \otimes y_i = 0$ , 那么  $f_0 : M'_0 \rightarrow M_0$  满足  $\sum x'_i \otimes y_i \in \ker(f_0 \otimes 1)$ ,  $f_0$  作为  $f$  的限制是单射, 所以  $\sum x'_i \otimes y_i = 0$ , 故  $f \otimes 1$  是单射.  $\square$

如果  $f : A \rightarrow B$  是环同态,  $M$  是平坦  $A$ -模, 我们证明  $M_B = B \otimes_A M$  是平坦  $B$ -模. 若  $\varphi : N \rightarrow N'$  是  $B$ -模同态, 我们说明

$$\varphi \otimes_B 1_{M_B} : N \otimes_B (B \otimes_A M) \rightarrow N' \otimes_B (B \otimes_A M)$$

是单同态. 我们知道有  $B$ -模同构

$$\begin{aligned} \psi_1 : N \otimes_B (B \otimes_A M) &\simeq (N \otimes_B B) \otimes_A M, \\ \psi_2 : N' \otimes_B (B \otimes_A M) &\simeq (N' \otimes_B B) \otimes_A M, \end{aligned}$$

所以我们有  $(N \otimes_B B) \otimes_A M \rightarrow (N' \otimes_B B) \otimes_A M$  的  $B$ -模同态  $\psi_2 \circ (\varphi \otimes_B 1_{M_B}) \circ \psi_1$ , 自然也是  $A$ -模同态,  $M$  是平坦  $A$ -模表明上述映射是单射, 所以  $\varphi \otimes_B 1_{M_B}$  是单射, 从而  $M_B$  是平坦  $B$ -模.

设  $A$  是环, 其自身作为一个  $A$ -模, 给定  $a \in A$  且  $a$  不是零因子, 考虑  $A$ -模同态  $a : A \rightarrow A$  为  $a(x) = ax$ , 那么这是一个单同态. 此时, 如果  $N$  是平坦  $A$ -模, 那么  $a \otimes 1_N : A \otimes N \rightarrow A \otimes N$  是单同态, 又因为有  $A$ -模同构  $A \otimes N \simeq N$ , 所以  $x \mapsto ax$  是  $N \rightarrow N$  的单同态. 这就表明, 如果  $N$  是平坦  $A$ -模, 那么对于任意非零因子的  $a \in A$ , 集合

$$\{x \in N \mid ax = 0\} = \{0\}$$

是单点集. 特别地, 如果  $A$  是整环, 那么  $N$  是平坦  $A$ -模表明  $N$  是无扭模. 如果  $A$  是 PID, 实际上我们有更强的结论:  $N$  是平坦  $A$ -模当且仅当  $N$  是无扭模.

## 2.8 代数

令  $f : A \rightarrow B$  是环同态, 如果  $a \in A$  和  $b \in B$ , 定义模的乘积

$$a \cdot b := f(a)b,$$

这使得  $B$  成为一个  $A$ -模, 即之前提到的标量的限制. 所以  $B$  同时拥有环结构和  $A$ -模结构, 并且这两个结构是相容的, 即

$$a \cdot (b_1 b_2) = (a \cdot b_1) b_2 = b_1 (a \cdot b_2).$$

这样的配备了  $A$ -模结构的环  $B$ , 我们称之为  **$A$ -代数**. 更明确地说,  $A$ -代数指的是一个环  $B$  以及一个环同态  $f : A \rightarrow B$ . 当然, 上面的两种说法是等价的, 即如果环  $B$  有一个与环结构相容的  $A$ -模结构, 那么  $B$  是一个  $A$ -代数. 因为此时我们可以构造环同态  $f : A \rightarrow B$  为  $f(a) = a \cdot 1_B$ ,

$$f(aa') = (aa') \cdot 1_B = a \cdot (a' \cdot 1_B) = a \cdot (1_B(a' \cdot 1_B)) = (a \cdot 1_B)(a' \cdot 1_B) = f(a)f(a')$$

表明这确实是环同态.

关于代数的定义有两个特殊的例子. 如果  $A$  是一个域  $K$ , 并且  $B$  非零, 那么同态  $f : K \rightarrow B$  一定是单同态, 因此  $K$  可以视为  $B$  的子域, 所以一个  $K$ -代数就是包含  $K$  作为子域的环. 如果  $A$  是任意环, 此时总是有  $\mathbb{Z} \rightarrow A$  的同态, 为  $n \mapsto n1_A$ , 所以每个环自动地成为一个  $\mathbb{Z}$ -代数.

对于两个  $A$ -代数  $B, C$ , 一个  **$A$ -代数同态**  $h : B \rightarrow C$  指的是一个环同态并且同时是一个  $A$ -模同态. 令  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : A \rightarrow C$  分别是  $B, C$  对应的环同态, 我们证明环同态  $h$  是  $A$ -代数同态当且仅当  $h \circ f = g$ . 若  $h$  是  $A$ -代数同态, 那么

$$h(f(a)) = h(a \cdot 1_B) = a \cdot h(1_B) = a \cdot 1_C = g(a).$$

反之, 如果环同态  $h$  满足  $h \circ f = g$ , 那么

$$h(a \cdot b) = h(f(a)b) = h(f(a))h(b) = g(a)h(b) = a \cdot h(b),$$

从而  $h$  是  $A$ -代数同态.

## 2.9 代数的张量积

令  $B, C$  是两个  $A$ -代数,  $f : A \rightarrow B$  和  $g : A \rightarrow C$  是对应的环同态. 因为  $B$  和  $C$  是  $A$ -模, 所以我们可以作张量积得到  $A$ -模  $D = B \otimes_A C$ , 实际上我们可以赋予  $D$  环结构.

考虑映射  $B \times C \times B \times C \rightarrow D$  为

$$(b, c, b', c') \mapsto bb' \otimes cc'.$$



容易验证这是 4-多重线性映射, 所以诱导了  $A$ -模同态

$$B \otimes C \otimes B \otimes C \rightarrow D,$$

所以我们有对应的  $A$ -模同态  $D \otimes D \rightarrow D$ , 这个同态又对应到双线性映射  $\mu : D \times D \rightarrow D$  为

$$\mu(b \otimes c, b' \otimes c') = bb' \otimes cc'.$$

这给出了  $D$  上的乘法, 对于单张量, 我们定义

$$(b \otimes c)(b' \otimes c') = bb' \otimes cc',$$

对于一般的张量, 我们定义

$$\left( \sum_i (b_i \otimes c_i) \right) \left( \sum_j (b_j \otimes c_j) \right) = \sum_{i,j} (b_i b_j \otimes c_i c_j).$$

可以验证这个乘法使得  $D$  成为一个交换环, 单位元为  $1_B \otimes 1_C$ . 此外,  $D$  成为了一个  $A$ -代数, 对应的环同态为

$$a \mapsto a(1_B \otimes 1_C) = f(a) \otimes 1_C = 1_B \otimes g(a).$$

## 2.10 EXERCISES

**Ex 2.10.1.**  $k$  是域,  $A = k[[x_1, \dots, x_n]]$  是  $n$  个未定元的形式幂级数环, 记  $\mathfrak{m}$  是极大理想  $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)$ . 令  $f_1, \dots, f_n \in \mathfrak{m}$ , 证明  $\mathfrak{m} = (f_1, \dots, f_n)$  当且仅当 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(0) \neq 0.$$

*Proof.* 若 □

**Ex 2.10.2.**  $f : A \rightarrow B$  是环同态,  $N_1, N_2$  是  $B$ -模, 通过标量的限制, 我们也可以将它们视为  $A$ -模, 证明存在  $B$ -模同构:

$$N_1 \otimes_B N_2 \simeq (N_1 \otimes_A N_2)/D,$$

$D$  为所有形如  $bx \otimes y - x \otimes by$  ( $b \in B, x \in N_1, y \in N_2$ ) 的元素生成的  $A$ -子模.

*Proof.* 考虑映射  $\varphi : N_1 \times N_2 \rightarrow N_1 \otimes_B N_2$  为

$$\varphi(x, y) = x \otimes y,$$

那么  $\varphi$  显然是  $A$ -双线性映射, 故诱导出  $A$ -模同态  $\bar{\varphi} : N_1 \otimes_A N_2 \rightarrow N_1 \otimes_B N_2$ . 由于

$$\bar{\varphi}(b(x \otimes_A y)) = \bar{\varphi}(bx \otimes_A y) = bx \otimes_B y = b(x \otimes_B y),$$

所以  $\bar{\varphi}$  也是  $B$ -模同态. 由于

$$\bar{\varphi}(bx \otimes_A y - x \otimes_A by) = bx \otimes_B y - x \otimes_B by = 0,$$

所以  $D \subseteq \ker \bar{\varphi}$ , 同时由于

$$b'(bx \otimes_A y - x \otimes_A by) = b'bx \otimes_A y - b'x \otimes_A by = b(b'x) \otimes_A y - (b'x) \otimes_A by \in D,$$

所以  $D$  也是  $B$ -子模. 这表明  $\bar{\varphi}$  诱导出  $B$ -模同态  $\psi : (N_1 \otimes_A N_2)/D \rightarrow N_1 \otimes_B N_2$ . 令  $\lambda : N_1 \times N_2 \rightarrow (N_1 \otimes_A N_2)/D$  为

$$\lambda(x, y) = x \otimes_A y + D,$$

由于

$$\begin{aligned} \lambda(bx, y) &= bx \otimes_A y + D = b(x \otimes_A y + D) = b\lambda(x, y), \\ \lambda(x, by) &= x \otimes_A by + D = bx \otimes_A y + D = b(x \otimes_A y + D) = b\lambda(x, y), \end{aligned}$$

所以  $\lambda$  是  $B$ -双线性映射, 故诱导出  $B$ -模同态  $\bar{\lambda} : N_1 \otimes_B N_2 \rightarrow (N_1 \otimes_A N_2)/D$ . 容易验证  $\bar{\lambda}$  和  $\psi$  互为逆映射, 故  $\psi$  为同构.  $\square$

**Ex 2.10.3.** 令  $e_1, \dots, e_n$  是  $k$ -向量空间  $V$  的一组基, 那么对偶空间  $V^* := \text{Hom}_k(V, k)$  有一组基  $e_1^*, \dots, e_n^*$ , 它们满足

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

令  $\varphi \in \text{End}_k(V)$  为自同态, 那么诱导出  $\varphi^* \in \text{End}_k(V^*)$  为

$$\varphi^*(f) = f \circ \varphi.$$

证明如果  $\varphi$  在  $\{e_1, \dots, e_n\}$  下的表示矩阵为  $A = (a_{ij})$ , 那么  $\varphi^*$  在  $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$  下的表示矩阵为转置  $A^\top = (a_{ji})$ .

*Proof.* 任意  $f \in V^*$  可以表示为

$$f = \sum_{i=1}^n f(e_i) e_i^*,$$

所以

$$\begin{aligned} \varphi^*(e_j^*) &= e_j^* \circ \varphi = \sum_{k=1}^n (e_j^* \circ \varphi)(e_k) e_k^* \\ &= \sum_{k=1}^n e_j^* \left( \sum_{i=1}^n a_{ik} e_i \right) e_k^* \\ &= \sum_{k=1}^n a_{jk} e_k^*, \end{aligned}$$

即  $\varphi^*$  在  $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$  下的表示矩阵为转置  $A^\top = (a_{ji})$ .  $\square$

**Ex 2.10.4.** 令  $V, W$  分别为  $m, n$  维  $k$ -向量空间,  $\{e_1, \dots, e_m\}$  和  $\{u_1, \dots, u_n\}$  分别是  $V, W$  的一组基, 推论 2.27 告诉我们  $\{e_i \otimes u_j\}$  构成了  $V \otimes W$  的一组基.

设线性变换  $\varphi : V \rightarrow V$  相对于  $\{e_1, \dots, e_m\}$  的表示矩阵为  $A = (a_{ij})$ , 线性变换  $\psi : W \rightarrow W$  相对于  $\{u_1, \dots, u_n\}$  的表示矩阵为  $B = (b_{ij})$ , 证明  $\varphi \otimes \psi : V \otimes W \rightarrow V \otimes W$  相对于  $\{e_i \otimes u_j\} = \{e_1 \otimes u_1, \dots, e_1 \otimes u_n, e_2 \otimes u_1, \dots, e_m \otimes u_n\}$  的表示矩阵为

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2m}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mm}B \end{pmatrix} \in M_{mn}(k).$$

上述乘法被称为矩阵的 Kronecker 积.

*Proof.* 我们有

$$\begin{aligned} (\varphi \otimes \psi)(e_i \otimes u_j) &= \varphi(e_i) \otimes \psi(u_j) = \left( \sum_{k=1}^m a_{ki} e_k \right) \otimes \psi(u_j) \\ &= \sum_{k=1}^m a_{ki} e_k \otimes \psi(u_j) = \sum_{k=1}^m a_{ki} \sum_{l=1}^n b_{lj} e_k \otimes u_l \\ &= \sum_{k=1}^m \left( a_{ki} \sum_{l=1}^n b_{lj} \right) e_k \otimes u_l. \end{aligned} \quad \square$$

**Ex 2.10.5.** 证明  $m, n$  互素的时候有  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$ .

*Proof.* 我们证明更一般的情况, 即  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ , 其中  $d = \gcd(m, n)$ . 由于  $\bar{a} \otimes \bar{b} = \overline{ab}(\bar{1} \otimes \bar{1})$ , 所以  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  是由  $\bar{1} \otimes \bar{1}$  生成的  $\mathbb{Z}$ -模 (循环群). 注意到

$$m(\bar{1} \otimes \bar{1}) = \bar{m} \otimes \bar{1} = 0, \quad n(\bar{1} \otimes \bar{1}) = \bar{1} \otimes \bar{n} = 0,$$

所以  $\bar{1} \otimes \bar{1}$  作为加法群元素的阶整除  $d$ . 另一方面, 考虑映射  $\varphi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$  为  $\varphi(\bar{a}, \bar{b}) = \overline{ab}$ , 容易验证  $\varphi$  是良定义的双线性映射, 所以  $\varphi$  诱导出  $\mathbb{Z}$ -模同态  $\bar{\varphi} : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ , 由于  $\bar{\varphi}(\bar{1} \otimes \bar{1}) = \bar{1}$  是  $d$  阶元, 所以  $\bar{1} \otimes \bar{1}$  的阶不可能小于  $d$ , 故  $\bar{1} \otimes \bar{1}$  的阶等于  $d$ , 所以  $\bar{\varphi}$  是同构.  $\square$

**Ex 2.10.6.** 令  $A$  是环,  $\alpha$  是理想,  $M$  是  $A$ -模, 证明  $(A/\alpha) \otimes_A M$  同构于  $M/\alpha M$ .

*Proof.* 我们有正合列  $0 \rightarrow \alpha \xrightarrow{i} A \rightarrow A/\alpha \rightarrow 0$ , 根据  $\_ \otimes_A M$  的右正合性质, 所以有正合列  $\alpha \otimes M \xrightarrow{i \otimes \mathbb{1}} A \otimes M \rightarrow (A/\alpha) \otimes M \rightarrow 0$ , 于是我们有

$$(A/\alpha) \otimes M \simeq (A \otimes M) / \text{im}(i \otimes \mathbb{1}).$$

我们知道  $A \otimes M \rightarrow M$  有同构映射  $a \otimes x \mapsto ax$ , 与自然同态符合得到同态  $A \otimes M \rightarrow M/\alpha M$ , 容易验证这个同态的核就是  $\text{im}(i \otimes \mathbb{1})$ , 所以

$$(A/\alpha) \otimes M \simeq (A \otimes M) / \text{im}(i \otimes \mathbb{1}) \simeq M/\alpha M. \quad \square$$

**Ex 2.10.7.** 令  $A$  是局部环,  $M$  和  $N$  是有限生成  $A$ -模, 证明: 如果  $M \otimes N = 0$ , 那么  $M = 0$  或者  $N = 0$ .

*Proof.* 令  $k = A/\mathfrak{m}$  是剩余域,  $M \otimes_A N = 0$  表明  $k \otimes_A (M \otimes_A N) = 0$ , 即  $(k \otimes_A M) \otimes_A N = 0$ , 根据上一题, 有  $(M/\mathfrak{m}M) \otimes_A N = 0$ , 此时  $M/\mathfrak{m}M$  可以视为  $k$ -向量空间, 故  $M/\mathfrak{m}M \simeq (M/\mathfrak{m}M) \otimes_k k$ , 故  $(M/\mathfrak{m}M) \otimes_k (k \otimes_A N) = 0$ , 这就表明  $(M/\mathfrak{m}M) \otimes_k (N/\mathfrak{m}N) = 0$ , 而  $M/\mathfrak{m}M$  和  $N/\mathfrak{m}N$  都是有限维  $k$ -向量空间, 所以  $M/\mathfrak{m}M = 0$  或者  $N/\mathfrak{m}N = 0$ , 即  $\mathfrak{m}M = M$  或者  $\mathfrak{m}N = N$ , 根据 Nakayama 引理, 所以  $M = 0$  或者  $N = 0$ .  $\square$

**Ex 2.10.8.** 令  $M_i (i \in I)$  是一族  $A$ -模, 令  $M$  是它们的直和, 证明  $M$  是平坦模当且仅当每个  $M_i$  是平坦模.

*Proof.* 设  $\varphi : N \rightarrow N'$  是单同态, 那么同态  $\varphi \otimes \mathbb{1}_{M_i} : N \otimes M_i \rightarrow N' \otimes M_i$  可以分解为复合映射

$$N \otimes M_i \xrightarrow{j_i} \bigoplus_{i \in I} (N \otimes M_i) \xrightarrow{\sim} N \otimes M \xrightarrow{\varphi \otimes \mathbb{1}_M} N' \otimes M \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i \in I} (N' \otimes M_i) \xrightarrow{\pi_i} N' \otimes M_i,$$

不难验证所有的  $\varphi \otimes \mathbb{1}_{M_i}$  为单射当且仅当  $\varphi \otimes \mathbb{1}_M$  为单射, 这就表明  $M$  是平坦模当且仅当  $M_i$  都是平坦模.  $\square$

**Ex 2.10.9.** 令  $A$  是环, 证明  $A[x]$  是平坦  $A$ -代数.

*Proof.*  $A[x] = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A$  是自由  $A$ -模, 而  $A$  是平坦  $A$ -模, 所以  $A[x]$  是平坦  $A$ -模.  $\square$

**Ex 2.10.10.** 令  $\mathfrak{p}$  是  $A$  的素理想, 证明  $\mathfrak{p}[x]$  是  $A[x]$  的素理想. 如果  $\mathfrak{m}$  是极大理想,  $\mathfrak{m}[x]$  是  $A[x]$  的极大理想吗?

*Proof.* 考虑满同态  $\varphi : A[x] \rightarrow A/\mathfrak{p}[x]$  为

$$\varphi \left( \sum a_i x^i \right) = \sum (a_i + \mathfrak{p}) x^i,$$

显然  $\ker \varphi = \mathfrak{p}[x]$ , 所以  $A[x]/\mathfrak{p}[x] \simeq A/\mathfrak{p}[x]$  是整环, 故  $\mathfrak{p}[x]$  是  $A[x]$  的素理想. 类似地,  $A[x]/\mathfrak{m}[x] \simeq A/\mathfrak{m}[x]$  是域上的多项式环, 为 PID, 所以  $\mathfrak{m}[x]$  不是极大理想.  $\square$

**Ex 2.10.11.** (1) 如果  $M, N$  是平坦  $A$ -模, 证明  $M \otimes_A N$  也是平坦  $A$ -模.

(2) 如果  $B$  是平坦  $A$ -代数,  $N$  是平坦  $B$ -模, 那么  $N$  也是平坦  $A$ -模.

*Proof.* (1) 令  $\varphi : P \rightarrow P'$  是  $A$ -模的单同态, 那么  $\varphi \otimes \mathbb{1}_M : P \otimes_A M \rightarrow P' \otimes_A M$  是  $A$ -模的单同态, 进而  $\varphi \otimes \mathbb{1}_M \otimes \mathbb{1}_N : P \otimes_A M \otimes_A N \rightarrow P' \otimes_A M \otimes_A N$  是  $A$ -模的单同态, 再根据张量积的结合性, 所以  $M \otimes_A N$  是平坦  $A$ -模.

(2) 令  $\varphi : P \rightarrow P'$  是  $A$ -模的单同态, 那么  $\varphi \otimes \mathbb{1}_B : P \otimes_A B \rightarrow P' \otimes_A B$  是  $A$ -模的单同态, 此时

$$(\varphi \otimes \mathbb{1}_B)(b(x \otimes y)) = x \otimes by = b(\varphi \otimes \mathbb{1}_B)(x \otimes y),$$

所以  $\varphi$  也是  $B$ -模的单同态, 故  $\varphi \otimes 1_B \otimes 1_N : (P \otimes_A B) \otimes_B N \rightarrow (P' \otimes_A B) \otimes_B N$  是  $B$ -模的单同态, 从而也是  $A$ -模的单同态. 又因为有  $B$ -模同构  $(P \otimes_A B) \otimes_B N \simeq P \otimes_A (B \otimes_B N) \simeq P \otimes_A N$ , 所以  $N$  是平坦  $A$ -模.  $\square$

**Ex 2.10.12.** 令  $0 \rightarrow M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \rightarrow 0$  是  $A$ -模的短正合列. 如果  $M'$  和  $M''$  是有限生成的, 那么  $M$  也是有限生成的.

*Proof.* 设  $x_1, \dots, x_n$  是  $M'$  的生成元,  $y_1, \dots, y_k$  是  $M''$  的生成元, 任取  $m \in M$ , 那么  $v(m) = a_1 y_1 + \dots + a_k y_k$ ,  $v$  是满射表明存在  $z_1, \dots, z_k \in M$  使得  $y_i = v(z_i)$ , 所以  $v(m) = v(a_1 z_1 + \dots + a_k z_k)$ , 即  $m - a_1 z_1 - \dots - a_k z_k \in \ker v = \operatorname{im} u$ , 故  $m - a_1 z_1 - \dots - a_k z_k = u(b_1 x_1 + \dots + b_n x_n)$ , 即  $m = b_1 u(x_1) + \dots + b_n u(x_n) + a_1 z_1 + \dots + a_k z_k$ , 所以  $M$  由  $u(x_1), \dots, u(x_n), z_1, \dots, z_k$  生成.  $\square$

**Ex 2.10.13.**  $A$  是环, 理想  $\alpha \subseteq \operatorname{rad}(A)$ , 令  $M$  是  $A$ -模,  $N$  是有限生成  $A$ -模,  $u : M \rightarrow N$  是同态. 如果诱导的同态  $M/\alpha M \rightarrow N/\alpha N$  是满射, 那么  $u$  是满射.

*Proof.*  $M/\alpha M \rightarrow N/\alpha N$  是满射表明任取  $n \in N$ , 有  $n + \alpha N = u(m) + \alpha N$ , 即  $n \in u(M) + \alpha N$ , 所以  $N = u(M) + \alpha N$ , 根据 2.18, 有  $N = u(M)$ .  $\square$

**Ex 2.10.14.** 令  $A$  是非零环, 证明:

1.  $A^m \simeq A^n$  表明  $m = n$ .
2. 如果  $\phi : A^m \rightarrow A^n$  是满射, 那么  $m \geq n$ .
3. 如果  $\phi : A^m \rightarrow A^n$  是单射, 这种情况下一定有  $m \leq n$  吗?

*Proof.* (1) 取  $A$  的一个极大理想  $\mathfrak{m}$ . 设  $\varphi : A^m \rightarrow A^n$  是同构映射, 那么我们有正合列  $0 \rightarrow A^m \xrightarrow{\varphi} A^n \rightarrow 0$ , 记  $k = A/\mathfrak{m}$ , 根据张量积的右正合性质, 所以  $\varphi \otimes 1 : A^m \otimes_A k \rightarrow A^n \otimes_A k$  是  $A$ -模同构, 由 练习 2.10.6 可知  $A^m \otimes_A k \simeq A^m/\mathfrak{m}A^m \simeq k^m$ , 所以有  $A$ -模同构  $k^m \simeq k^n$ , 容易验证这同时是  $k$ -向量空间同构, 所以  $m = n$ .

(2) 仿照上面, 取  $A$  的一个极大理想  $\mathfrak{m}$ . 设  $\varphi : A^m \rightarrow A^n$  是满射, 那么我们有正合列  $\ker \varphi \rightarrow A^m \xrightarrow{\varphi} A^n \rightarrow 0$ , 那么  $\varphi \otimes 1 : A^m \otimes_A k \rightarrow A^n \otimes_A k$  是满射, 所以诱导出  $k^m \rightarrow k^n$  的满线性映射, 那么有  $m \geq n$ .  $\square$

**Ex 2.10.15.** 令  $M$  是有限生成  $A$ -模,  $\phi : M \rightarrow A^n$  是满同态, 证明  $\ker \phi$  是有限生成的.

*Proof.*  $\square$

**Ex 2.10.16.** 一个偏序集  $I$  被称为正向集, 如果对于  $I$  中的每对  $i, j$ , 都存在  $k \in I$  使得  $i \leq k$  以及  $j \leq k$ .

令  $A$  是环,  $I$  是一个正向集,  $(M_i)_{i \in I}$  是一族  $A$ -模. 对于  $I$  中的每对满足  $i \leq j$  的  $i, j$ , 令  $\mu_{ij} : M_i \rightarrow M_j$  是  $A$ -模同态, 并且其满足下面的公理:

1. 对于每个  $i \in I$ ,  $\mu_{ii}$  是  $M_i$  的单位映射;
2. 当  $i \leq j \leq k$  的时候有  $\mu_{ik} = \mu_{jk} \circ \mu_{ij}$ .

那么称模  $M_i$  和同态  $\mu_{ij}$  组成了正向集  $I$  上的正向系统  $\mathbf{M} = (M_i, \mu_{ij})$ .

我们将构建正向系统  $\mathbf{M}$  的正向极限  $M$ . 令  $C$  是  $M_i$  的直和, 并且将  $M_i$  自然地视为  $C$  的子模. 令  $D$  是  $C$  的子模, 由所有的形如  $x_i - \mu_{ij}(x_i)$  ( $i \leq j, x_i \in M_i$ ) 的元素生成. 令  $M = C/D$ ,  $\mu : C \rightarrow M$  为自然投影,  $\mu_i$  是  $\mu$  在  $M_i$  上的限制.

模  $M$  (更准确地说, 应该是模  $M$  与一族同态  $\mu_i : M_i \rightarrow M$ ) 被称为正向系统  $\mathbf{M}$  的正向极限, 记为  $\varinjlim M_i$ . 从这个构造容易看出  $i \leq j$  的时候有  $\mu_i = \mu_j \circ \mu_{ij}$ .

*Proof.* 我们说明  $\mu_i = \mu_j \circ \mu_{ij}$ . 任取  $x_i \in M_i$ , 有

$$\mu_j \circ \mu_{ij}(x_i) = \mu_{ij}(x_i) + D = x_i + D = \mu_i(x_i). \quad \square$$

**Ex 2.10.17.** 在上一题的前提下, 证明

1.  $M$  的每个元素都可以写成  $\mu_i(x_i)$  的形式, 其中  $i \in I, x_i \in M_i$ .
2. 如果  $\mu_i(x_i) = 0$ , 那么存在  $j \geq i$  使得  $\mu_{ij}(x_i) = 0$ .

*Proof.* (1) 任取  $\sum_{j \in J} x_j + D \in M$ , 其中  $J \subseteq I$  是有限子集. 首先我们说明存在  $k \in I$  使得任意的  $j \in J$  都满足  $j \leq k$ . 对  $|J| = n$  归纳,  $n = 2$  的时候是正向集的定义, 假设结论在  $n - 1$  时成立. 那么存在  $k_1 \in I$  使得  $j_m \leq k_1$  ( $1 \leq m \leq n - 1$ ), 同时存在  $k \in I$  使得  $k_1 \leq k$  以及  $j_n \leq k$ , 那么  $k$  就使得任意的  $j \in J$  都满足  $j \leq k$ .

对于上述的  $k$ ,  $x_j - \mu_{jk}(x_j) \in D$  ( $\forall j \in J$ ), 所以

$$\sum_{j \in J} x_j + D = \sum_{j \in J} \mu_{jk}(x_j) + D = \mu_k \left( \sum_{j \in J} \mu_{jk}(x_j) \right),$$

其中  $\sum_{j \in J} \mu_{jk}(x_j) \in M_k$ , 这就证明了 (1).

(2)  $\mu_i(x_i) = 0$  表明  $x_i \in D \cap M_i$ , 那么  $x_i$  是形如  $y_j - \mu_{j\ell}(y_j)$  的有限  $A$ -线性组合, 注意到  $a(y_j - \mu_{j\ell}(y_j)) = (ay_j) - \mu_{j\ell}(ay_j)$ , 所以  $x_i$  可以表示为  $y_j - \mu_{j\ell}(y_j)$  的有限和, 即

$$x_i = \sum_{k=1}^n (y_{j_k} - \mu_{j_k \ell_k}(y_{j_k})),$$

其中  $j_k, \ell_k \in I, y_{j_k} \in M_{j_k}$ , 并且  $j_k \leq \ell_k$ . 根据 (1) 的叙述, 可以选取一个  $c \in I$ , 使得所有的  $j_k, \ell_k \leq c$  以及  $i \leq c$ .

由于  $C$  是  $M_i$  的直和, 所以上式右端的第  $i$  个分量为  $x_i$ , 其余全为零. 记  $\pi_a : C \rightarrow M_a$  是投影, 那么

$$\pi_a(x_i) = \sum_{j_k=a} y_{j_k} - \sum_{\ell_k=a} \mu_{j_k \ell_k}(y_{j_k}),$$

那么

$$\begin{aligned} \mu_{ac}(\pi_a(x_i)) &= \sum_{j_k=a} \mu_{j_k c}(y_{j_k}) - \sum_{\ell_k=a} \mu_{\ell_k c} \circ \mu_{j_k \ell_k}(y_{j_k}) \\ &= \sum_{j_k=a} \mu_{j_k c}(y_{j_k}) - \sum_{\ell_k=a} \mu_{j_k c}(y_{j_k}), \end{aligned}$$

对  $a$  求和, 我们有

$$\begin{aligned}\mu_{ic}(x_i) &= \sum_{a \in I} \mu_{ac}(\pi_a(x_i)) \\ &= (\mu_{j_1 c}(y_{j_1}) + \cdots + \mu_{j_k c}(y_{j_k})) - (\mu_{j_1 c}(y_{j_1}) + \cdots + \mu_{j_k c}(y_{j_k})) = 0.\end{aligned}\quad \square$$

**Ex 2.10.18.** 证明正向极限可以通过下面的性质刻画. 令  $N$  是  $A$ -模, 对于每个  $i \in I$ , 令  $\alpha_i : M_i \rightarrow N$  是  $A$ -模同态, 并且使得  $i \leq j$  的时候有  $\alpha_i = \alpha_j \circ \mu_{ij}$ . 那么存在唯一的同态  $\alpha : M \rightarrow N$  使得  $\alpha_i = \alpha \circ \mu_i$  对于所有的  $i \in I$  成立.

*Proof.* 首先说明正向极限  $M = \varinjlim M_i$  满足这个性质, 即有交换图

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{\alpha_i} & N \\ \mu_i \downarrow & \nearrow \exists! \alpha & \\ \varinjlim M_i & & \end{array}$$

令  $\bar{\alpha} : C \rightarrow N$  满足  $\bar{\alpha}|_{M_i} = \alpha_i$ . 由于

$$\bar{\alpha}(x_i - \mu_{ij}(x_i)) = \alpha_i(x_i) - \alpha_j \circ \mu_{ij}(x_i) = 0,$$

所以  $D \subseteq \ker \bar{\alpha}$ , 故  $\bar{\alpha}$  诱导出同态  $\alpha : M \rightarrow N$ , 那么此时有  $\alpha_i(x_i) = \bar{\alpha}(x_i) = \alpha(x_i + D) = \alpha \circ \mu_i(x_i)$ .

现在证明  $M$  在同构的意义下唯一. 设  $M$  和  $M'$  都满足上述泛性质. 对于同态  $\mu'_i : M_i \rightarrow M'$ , 存在唯一的同态  $\alpha : M \rightarrow M'$  使得  $\mu'_i = \alpha \circ \mu_i$ . 同样的, 对于  $\mu_i : M_i \rightarrow M$ , 存在唯一的同态  $\beta : M' \rightarrow M$ , 使得  $\mu_i = \beta \circ \mu'_i$ . 也就是说, 我们有下面的交换图:

$$\begin{array}{ccccc} M_i & & & & \\ & \searrow \mu_i & & \searrow \mu'_i & \\ & & M & \xrightleftharpoons[\beta]{\alpha} & M' \\ & \nearrow \mu_j & & \nearrow \mu'_j & \\ M_j & & & & \end{array}$$

所以  $\mu_i = \beta \circ \mu'_i = \beta \circ \alpha \circ \mu_i : M_i \rightarrow M$ , 又因为  $1_M$  也满足  $\mu_i = 1_M \circ \mu_i$ , 根据唯一性, 所以  $\beta \circ \alpha = 1_M$ . 同理可得  $\alpha \circ \beta = 1_{M'}$ , 故  $\alpha$  是同构.  $\square$

**Ex 2.10.19.** 令  $(M_i)_{i \in I}$  是一个  $A$ -模的一族子模, 并且对于每对  $i, j \in I$ , 都存在  $k \in I$  使得  $M_i + M_j \subseteq M_k$ . 定义  $i \leq j$  意味着  $M_i \subseteq M_j$ , 令  $\mu_{ij} : M_i \rightarrow M_j$  表示嵌入映射, 证明

$$\varinjlim M_i = \sum M_i = \bigcup M_i.$$

特别地, 任意  $A$ -模都是它的有限生成子模的正向极限.

*Proof.* 先说明  $\sum M_i = \bigcup M_i$ . 显然有  $\bigcup M_i \subseteq \sum M_i$ . 任取  $y = \sum x_i \in \sum M_i$  是有限和, 记  $S = \{i \in I \mid x_i \neq 0\}$ , 那么  $S$  是有限集,  $I$  是正向集表明存在  $j \in I$  使得  $i \leq j$  ( $\forall i \in S$ ), 所以  $y \in M_j \subseteq \bigcup M_i$ . 这就表明  $\sum M_i = \bigcup M_i$ .

下面我们说明  $\bigcup M_i$  满足上述泛性质. 令  $\alpha_i : M_i \rightarrow N$  是一族模同态, 并且对于  $i \leq j$  有  $\alpha_i = \alpha_j \circ \mu_{ij}$ . 对于每个  $i$  总存在嵌入映射  $\mu_i : M_i \rightarrow \bigcup M_i$ . 令  $\alpha = \bigcup \alpha_i : \bigcup M_i \rightarrow N$ , 也就是说  $\alpha$  限制在  $M_i$  上就是  $\alpha_i$ . 这个  $\alpha$  是良定义的, 也就是说对于  $i \leq j$ , 任取  $x_i \in M_i \subseteq M_j$ , 有  $\alpha_i(x_i) = \alpha_j \circ \mu_{ij}(x_i) = \alpha_j(x_i)$ . 显然  $\alpha$  是同态, 且满足  $\alpha_i = \alpha \circ \mu_i$ . 所以  $\varinjlim M_i \simeq \bigcup M_i$ .

对于一个  $A$ -模  $M$ , 令  $(N_i)_{i \in I}$  是  $M$  的所有有限生成子模, 注意到

$$M = \bigcup_{x \in M} Ax \subseteq \bigcup N_i,$$

所以  $M$  是所有有限生成子模的并集. 对于每对  $i, j \in I$ , 此时  $N_i + N_j$  也是有限生成子模, 故所有的有限生成子模和包含关系构成了一个正向系统.  $\square$

**Ex 2.10.20.**



## 分式环和分式模

### 3.1 分式环、分式模与局部化

给定一个环  $A$ ,  $A$  的一个乘性子集  $S$  指的是一个对乘法封闭的子集  $S$ , 并且  $1 \in S$ . 定义  $A \times S$  上的一个等价关系为

$$(a, s) \sim (b, t) \iff (at - bs)u = 0 \ (\exists u \in S).$$

可以验证这确实是一个等价关系. 即  $a/s$  为  $(a, s)$  所在的等价类,  $S^{-1}A$  为等价类的集合, 我们在  $S^{-1}A$  上定义一个环结构, 即:

$$a/s + b/t = (at + bs)/st, \quad (a/s)(b/t) = ab/st.$$

可以验证这两个运算是良定义的, 并且满足环的运算法则. 这使得  $S^{-1}A$  成为一个有单位元  $1/1$  的交换环, 称为  $A$  相对于  $S$  的分式环. 此时, 我们有一个自然的环同态  $f: A \rightarrow S^{-1}A$  为  $f(x) = x/1$ , 一般而言这并不是单射, 容易验证  $A$  是整环并且  $0 \notin S$  的时候  $f$  是单射.

我们也可以用泛性质刻画分式环.

**命题 3.1.** 令  $g: A \rightarrow B$  是环同态并且对于所有的  $s \in A$  有  $g(s) \in B^\times$ . 那么存在唯一的环同态  $h: S^{-1}A \rightarrow B$  使得  $g = h \circ f$ .

*Proof.* (唯一性) 若这样的  $h$  存在, 那么对于任意的  $a/s \in S^{-1}A$ , 有

$$h(a/s) = h((a/1)(1/s)) = h(a/1)h(1/s) = h(f(a))h(1/s) = g(a)h(1/s),$$

另一方面有

$$h(1/s) = h(s/1)^{-1} = h(f(s))^{-1} = g(s)^{-1},$$

所以这样的  $h$  如果存在, 那么一定满足  $h(a/s) = g(a)g(s)^{-1}$ .

(存在性) 令  $h(a/s) = g(a)g(s)^{-1}$ . 若  $a/s = a'/s'$ , 那么存在  $u \in S$  使得  $(as' - a's)u = 0$ , 那么

$$(g(a)g(s') - g(a')g(s))g(u) = 0,$$

$g(u) \in B^\times$  表明  $g(a)g(s') = g(a')g(s)$ , 即  $g(a)g(s)^{-1} = g(a')g(s')^{-1}$ , 所以  $h(a/s) = h(a'/s')$ ,  $h$  是良定义的.  $h$  显然是群同态且满足  $g = h \circ f$ .  $\square$

环  $S^{-1}A$  和同态  $f : A \rightarrow S^{-1}A$  有下面的性质:

1.  $s \in S$  表明  $f(s) \in (S^{-1}A)^\times$ , 因为此时  $(s/1)(1/s) = 1/1$ .
2.  $f(a) = 0$  表明存在某个  $s \in S$  使得  $as = 0$ , 因为此时  $a/1 = 0/1$ .
3.  $S^{-1}A$  的每个元素都形如  $f(a)f(s)^{-1}$ , 其中  $a \in A, s \in S$ . 因为  $a/s = (a/1)(1/s) = f(a)f(s)^{-1}$ .

### 例 3.2.

1. 令  $\mathfrak{p}$  是  $A$  的素理想, 那么  $S = A - \mathfrak{p}$  是  $A$  的一个乘性子集, 我们记  $A_{\mathfrak{p}} = S^{-1}A$ , 称为  $A$  在  $\mathfrak{p}$  处的局部化. 下面我们说明  $A_{\mathfrak{p}}$  是一个局部环. 令  $\mathfrak{m}$  为所有  $a/s$  的集合, 其中  $a \in \mathfrak{p}, s \in S$ . 容易验证这是一个理想. 如果  $b/t \notin \mathfrak{m}$ , 即  $b \notin \mathfrak{p}$ , 那么  $b \in S$ , 此时  $(b/t)(t/b) = 1/1$ , 所以  $b/t \in A_{\mathfrak{p}}^\times$ , 这表明  $A_{\mathfrak{p}}^\times = A_{\mathfrak{p}} - \mathfrak{m}$ , 所以  $A_{\mathfrak{p}}$  是局部环,  $\mathfrak{m}$  是唯一的极大理想, 剩余域  $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{m}$  记为  $k(\mathfrak{p})$ .
2.  $S^{-1}A$  是零环当且仅当  $0 \in S$ .
3. 令  $f \in A, S = \{f^n\}_{n \geq 0}$ , 此时  $S$  也是乘性子集, 我们记  $A_f = S^{-1}A$ .

$S^{-1}A$  的构造过程可以复制到一个  $A$ -模  $M$  上. 定义  $M \times S$  上的等价关系为

$$(m, s) \sim (m', s') \iff t(sm' - s'm) = 0 \ (\exists t \in S).$$

同样记  $m/s$  为  $(m, s)$  所在的等价类, 记  $S^{-1}M$  为这些等价类的集合. 通过定义

$$m/s + m'/s' = (sm' + s'm)/ss', \quad (a/t) \cdot (m/s) = am/st,$$

$S^{-1}M$  成为一个  $S^{-1}A$ -模. 正如上面的例子提到的, 当  $S = A - \mathfrak{p}$  的时候, 我们记  $S^{-1}M$  为  $M_{\mathfrak{p}}$ , 当  $S = \{f^n\}_{n \geq 0}$  的时候, 我们记  $S^{-1}M$  为  $M_f$ .

令  $u : M \rightarrow N$  是  $A$ -模同态, 那么诱导出一个  $S^{-1}A$ -模同态  $S^{-1}u : S^{-1}M \rightarrow S^{-1}N$ , 定义为  $S^{-1}u(m/s) = u(m)/s$ . 我们有  $S^{-1}(v \circ u) = S^{-1}v \circ S^{-1}u$ . 这表明  $S^{-1}$  可以视为  $A\text{-Mod} \rightarrow S^{-1}A\text{-Mod}$  的函子.

**命题 3.3.** 函子  $S^{-1}$  是正合函子, 也就是说, 如果  $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$  是正合列, 那么  $S^{-1}M' \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}M''$  是正合列.

*Proof.* 由于  $g \circ f = 0$ , 所以  $S^{-1}g \circ S^{-1}f = S^{-1}(g \circ f) = 0$ , 故  $\text{im } S^{-1}f \subseteq \ker S^{-1}g$ . 任取  $m/s \in \ker S^{-1}g$ , 即  $g(m)/s = 0$ , 即存在  $u \in S$  使得  $g(um) = ug(m) = 0$ , 即  $um \in \ker g = \text{im } f$ , 所以存在  $m' \in M'$  使得  $um = f(m')$ , 此时

$$S^{-1}f(m'/us) = f(m')/us = um/us = m/s,$$

故  $m/s \in \text{im } S^{-1}f$ , 所以  $\ker S^{-1}g \subseteq \text{im } S^{-1}f$ . □

特别地, **命题 3.3** 告诉我们, 如果  $M'$  是  $M$  的子模, 那么  $S^{-1}M' \rightarrow S^{-1}M$  是单射, 因此  $S^{-1}M'$  可以视为  $S^{-1}M$  的子模.

**推论 3.4.** 分式化的操作可以与有限和、有限交和商交换. 准确地说, 如果  $N, P$  是  $A$ -模  $M$  的子模, 那么

1.  $S^{-1}(N + P) = S^{-1}(N) + S^{-1}(P)$
2.  $S^{-1}(N \cap P) = S^{-1}(N) \cap S^{-1}(P)$
3. 有  $S^{-1}A$ -模同构  $S^{-1}(M/N) \simeq (S^{-1}M)/(S^{-1}N)$ .

*Proof.* (1) 显然  $S^{-1}(N + P) \subseteq S^{-1}(N) + S^{-1}(P)$ . 任取  $x/s + y/t \in S^{-1}(N) + S^{-1}(P)$ , 那么

$$x/s + y/t = (tx + sy)/st \in S^{-1}(N + P),$$

所以  $S^{-1}(N) + S^{-1}(P) \subseteq S^{-1}(N + P)$ .

(2) 显然  $S^{-1}(N \cap P) \subseteq S^{-1}(N) \cap S^{-1}(P)$ . 任取  $x/s \in S^{-1}(N) \cap S^{-1}(P)$ , 其中  $x \in M$ , 那么存在  $n \in N, t \in S$  以及  $p \in P, r \in S$  使得  $x/s = n/t = p/r$ , 即存在  $u \in S$  使得  $u(rn - tp) = 0$ , 所以  $urn = utp \in N \cap P$ , 于是

$$x/s = n/t = urn/urt \in S^{-1}(N \cap P),$$

所以  $S^{-1}(N) \cap S^{-1}(P) \subseteq S^{-1}(N \cap P)$ .

(3) 考虑正合列  $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow M/N \rightarrow 0$ , 根据  $S^{-1}$  的正合性质, 我们有正合列  $0 \rightarrow S^{-1}N \rightarrow S^{-1}M \rightarrow S^{-1}(M/N) \rightarrow 0$ .  $\square$

通过同态  $a \mapsto a/1$ ,  $S^{-1}A$  可以视为一个  $A$ -代数, 同理  $S^{-1}M$  可以视为  $(A, S^{-1}A)$ -双模.

**命题 3.5.** 令  $M$  是  $A$ -模, 那么有  $S^{-1}A$ -模或者  $A$ -模同构

$$S^{-1}A \otimes_A M \simeq S^{-1}M.$$

更准确地说, 存在同构映射  $f : S^{-1}A \otimes_A M \rightarrow S^{-1}M$  为

$$f((a/s) \otimes m) = am/s.$$

*Proof.* 令  $g : S^{-1}A \times M \rightarrow S^{-1}M$  为

$$g(a/s, m) = am/s.$$

容易验证  $g$  是良定义的  $A$ -双线性映射, 所以诱导出  $A$ -模同态  $f : S^{-1}A \otimes_A M \rightarrow S^{-1}M$ . 容易验证  $f$  也是  $S^{-1}A$ -模同态. 显然  $f$  是满射.

令  $\sum_i (a_i/s_i) \otimes m_i \in S^{-1}A \otimes_A M$ . 令  $s = \prod_i s_i$ ,  $t_i = \prod_{j \neq i} s_j$ , 那么

$$\sum_i \frac{a_i}{s_i} \otimes m_i = \sum_i \frac{t_i a_i}{t_i s_i} \otimes m_i = \sum_i \frac{t_i a_i}{s} \otimes m_i = \sum_i \frac{1}{s} \otimes t_i a_i m_i = \frac{1}{s} \otimes \left( \sum_i t_i a_i m_i \right),$$

所以若  $f(\sum_i (a_i/s_i) \otimes m_i) = 0$ , 那么存在  $u \in S$  使得

$$u \left( \sum_i t_i a_i m_i \right) = 0,$$

即

$$\sum_i \frac{a_i}{s_i} \otimes m_i = \frac{u}{su} \otimes \left( \sum_i t_i a_i m_i \right) = \frac{1}{su} \otimes u \left( \sum_i t_i a_i m_i \right) = 0,$$

所以  $f$  是单射.  $\square$

**推论 3.6.** 给定任意环  $A$ ,  $S^{-1}A$  是平坦  $A$ -模.

*Proof.* 假设  $f : M \rightarrow N$  是  $A$ -模的单同态,  $S^{-1}$  的正合性质表明  $S^{-1}f : S^{-1}M \rightarrow S^{-1}N$  是  $S^{-1}A$ -模的单同态, 由于有  $S^{-1}A$ -模同构  $S^{-1}M \simeq S^{-1}A \otimes_A M$  和  $S^{-1}N \simeq S^{-1}A \otimes_A N$ , 所以导出  $S^{-1}A \otimes_A M \rightarrow S^{-1}A \otimes_A N$  的  $S^{-1}A$ -模的单同态:

$$(a/s) \otimes m \mapsto am/s \mapsto f(am)/s \mapsto 1/s \otimes f(am) = (a/s) \otimes f(m),$$

这就是  $1_{S^{-1}A} \otimes f$ , 容易验证这也是  $A$ -模同态, 所以  $S^{-1}A$  是平坦  $A$ -模.  $\square$

**命题 3.7.** 若  $M, N$  是  $A$ -模, 那么有  $S^{-1}A$ -模同构  $f : S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N \rightarrow S^{-1}(M \otimes_A N)$ , 同构映射为

$$f((m/s) \otimes (n/t)) = (m \otimes n)/st.$$

特别地, 如果  $\mathfrak{p}$  是素理想, 那么有  $A_{\mathfrak{p}}$ -模同构

$$M_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} N_{\mathfrak{p}} \simeq (M \otimes_A N)_{\mathfrak{p}}.$$

*Proof.* 我们有一系列  $S^{-1}A$ -模同构:

$$\begin{aligned} S^{-1}(M \otimes_A N) &\simeq S^{-1}A \otimes_A (M \otimes_A N) \simeq (S^{-1}A \otimes_A M) \otimes_A N \\ &\simeq S^{-1}M \otimes_A N \simeq (S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}A) \otimes_A N \\ &\simeq S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} (S^{-1}A \otimes_A N) \simeq S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N, \end{aligned}$$

同构映射为

$$\begin{aligned} (m \otimes n)/s &\mapsto 1/s \otimes (m \otimes n) \mapsto (1/s \otimes m) \otimes n \\ &\mapsto m/s \otimes n \mapsto (m/s \otimes 1/1) \otimes n \\ &\mapsto m/s \otimes (1/1 \otimes n) \mapsto m/s \otimes n/1. \end{aligned} \quad \square$$

## 3.2 局部性质

环  $A$  或者  $A$ -模  $M$  拥有局部性质  $P$  指的是:  $A$  或者  $M$  有性质  $P$  当且仅当对于每个素理想  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ , 局部化  $A_{\mathfrak{p}}$  或者  $M_{\mathfrak{p}}$  拥有性质  $P$ .

**命题 3.8 (零模是局部性质).** 令  $M$  是  $A$ -模, 那么下面的说法是等价的:

1.  $M = 0$ ;
2. 对于任意素理想  $\mathfrak{p}$ , 有  $M_{\mathfrak{p}} = 0$ ;
3. 对于任意极大理想  $\mathfrak{m}$ , 有  $M_{\mathfrak{m}} = 0$ .

*Proof.* (1)  $\Rightarrow$  (2) 是因为  $M = 0$  则任意分式模  $S^{-1}M = 0$ . (2)  $\Rightarrow$  (3) 是因为极大理想都是素理想.

(3)  $\Rightarrow$  (1) 如果对于任意极大理想  $\mathfrak{m}$ , 有  $M_{\mathfrak{m}} = 0$ , 假设  $M \neq 0$ , 那么取非零元  $x \in M$ ,  $\text{Ann}(x)$  是一个恰当理想, 故存在极大理想  $\mathfrak{m}$  包含  $\text{Ann}(x)$ , 由于  $x/1 \in M_{\mathfrak{m}} = 0$ , 所以  $x/1 = 0/1$ , 故存在  $a \in A - \mathfrak{m}$  使得  $ax = 0$ , 那么  $a \in \text{Ann}(x)$ , 这与  $\text{Ann}(x) \subseteq \mathfrak{m}$  矛盾, 所以  $M = 0$ .  $\square$

**命题 3.9.** 令  $\phi : M \rightarrow N$  是  $A$ -模同态, 那么下面的说法是等价的:

1.  $\phi$  是单射;
2. 对于每个素理想  $\mathfrak{p}$ ,  $\phi_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} \rightarrow N_{\mathfrak{p}}$  是单射;
3. 对于每个极大理想  $\mathfrak{m}$ ,  $\phi_{\mathfrak{m}} : M_{\mathfrak{m}} \rightarrow N_{\mathfrak{m}}$  是单射.

将单射替换为满射也正确.

*Proof.* (1)  $\Rightarrow$  (2) 由分式化的正合性质即得. (2)  $\Rightarrow$  (3) 极大理想都是素理想.

(3)  $\Rightarrow$  (1) 对于任意极大理想  $\mathfrak{m}$ , 有  $\ker \phi_{\mathfrak{m}} = 0$ . 将  $(\ker \phi)_{\mathfrak{m}}$  视为  $M_{\mathfrak{m}}$  的子集. 若  $x/a \in \ker \phi_{\mathfrak{m}}$ , 故  $\phi(x)/a = 0/1$ , 即存在  $u \in A - \mathfrak{m}$  使得  $\phi(ux) = u\phi(x) = 0$ , 故  $x/a = ux/ua \in (\ker \phi)_{\mathfrak{m}}$ . 反之, 若  $x/a \in (\ker \phi)_{\mathfrak{m}}$ , 那么  $\phi_{\mathfrak{m}}(x/a) = \phi(x)/a = 0$ , 故  $x/a \in \ker \phi_{\mathfrak{m}}$ . 所以  $(\ker \phi)_{\mathfrak{m}} = \ker \phi_{\mathfrak{m}} = 0$ , 根据 [命题 3.8](#), 所以  $\ker \phi = 0$ , 即  $\phi$  是单射.

对于满射的情况类似.  $\square$

**命题 3.10** (平坦性是局部性质). 对于任意  $A$ -模  $M$ , 下面的说法是等价的:

1.  $M$  是平坦  $A$ -模;
2. 对于每个素理想  $\mathfrak{p}$ ,  $M_{\mathfrak{p}}$  是平坦  $A_{\mathfrak{p}}$ -模;
3. 对于每个极大理想  $\mathfrak{m}$ ,  $M_{\mathfrak{m}}$  是平坦  $A_{\mathfrak{m}}$ -模.

*Proof.* (1)  $\Rightarrow$  (2) 根据 [命题 3.3](#), 有  $A_{\mathfrak{p}}$ -模同构  $M_{\mathfrak{p}} \simeq A_{\mathfrak{p}} \otimes_A M$ , 而  $A_{\mathfrak{p}} \otimes_A M$  是平坦  $A_{\mathfrak{p}}$ -模 (平坦模进行标量扩张仍然是平坦模). (2)  $\Rightarrow$  (3) 极大理想都是素理想.

(3)  $\Rightarrow$  (1) 令  $f : N \rightarrow N'$  是  $A$ -模的单同态. 对于任意极大理想  $\mathfrak{m}$ , 根据 [命题 3.9](#), 我们知道  $f_{\mathfrak{m}} : N_{\mathfrak{m}} \rightarrow N'_{\mathfrak{m}}$  是单同态, 所以  $f_{\mathfrak{m}} \otimes 1_{M_{\mathfrak{m}}} : N_{\mathfrak{m}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{m}} \rightarrow N'_{\mathfrak{m}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{m}}$  是单同态, 根据 [命题 3.7](#), 所以  $(f \otimes 1)_{\mathfrak{m}} : (N \otimes_A M)_{\mathfrak{m}} \rightarrow (N' \otimes_A M)_{\mathfrak{m}}$  是单同态, 根据 [命题 3.9](#), 所以  $f \otimes 1 : N \otimes_A M \rightarrow N' \otimes_A M$  是单同态, 故  $M$  是平坦  $A$ -模.  $\square$

### 3.3 分式环中理想的扩张和收缩

$A$  是环,  $S$  是  $A$  的乘性子集,  $f : A \rightarrow S^{-1}A$  是自然同态. 回顾 [命题 1.23](#), 令  $C$  为所有理想的收缩构成的  $A$  中理想的集合,  $E$  为所有理想的扩张构成的  $S^{-1}A$  中理想的集合. 如果  $\alpha$  是  $A$  的理想, 那么  $\alpha^e$  为所有  $a/1$  ( $a \in \alpha$ ) 生成的理想, 实际上就是  $S^{-1}\alpha$ .

**命题 3.11.** (1)  $S^{-1}A$  中的每个理想都是  $A$  中某个理想的扩张.

(2) 如果  $\alpha$  是  $A$  的理想, 那么  $\alpha^{ec} = \bigcup_{s \in S} (\alpha : s)$ , 所以  $\alpha^e = (1)$  当且仅当  $\alpha \cap S \neq \emptyset$ .

(3)  $\alpha \in C$  当且仅当  $S$  的元素在  $A/\alpha$  中都不是零因子.

(4)  $S^{-1}A$  的素理想——对应到  $A$  的与  $S$  不相交的素理想, 对应关系为  $\mathfrak{p} \leftrightarrow S^{-1}\mathfrak{p}$ .

(5)  $S^{-1}$  操作与理想的有限和、积、交和根式操作交换.

*Proof.* (1) 设  $\mathfrak{b}$  是  $S^{-1}A$  的理想, 根据 **命题 1.23**, 有  $\mathfrak{b}^{ce} \subseteq \mathfrak{b}$ . 任取  $x/s \in \mathfrak{b}$ , 那么  $f(x) = x/1 = (x/s)(s/1) \in \mathfrak{b}$ , 所以  $x \in \mathfrak{b}^c$ , 所以  $x/s = f(x) \cdot (1/s) \in \mathfrak{b}^{ce}$ , 所以  $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^{ce}$ .

(2) 若  $x \in \alpha^{ec}$ , 那么  $x/1 \in \alpha^e = S^{-1}\alpha$ , 所以存在  $x' \in \alpha$  和  $s \in S$  使得  $x/1 = x'/s$ , 所以存在  $t \in S$  使得  $t(sx - x') \in \alpha$ , 即  $(ts)x \in \alpha$ , 所以  $x \in (\alpha : st) \subseteq \bigcup_{s \in S} (\alpha : s)$ . 另一方面, 若  $x \in \bigcup_{s \in S} (\alpha : s)$ , 即存在  $s \in S$  使得  $sx \in \alpha$ , 那么  $x/1 = sx/s \in S^{-1}\alpha$ , 即  $x \in \alpha^{ec}$ . 这就证明了  $\alpha^{ec} = \bigcup_{s \in S} (\alpha : s)$ .  $\alpha^e = (1)$  当且仅当  $\alpha^{ec} = A$ , 那么存在  $s \in S$  使得  $s = s \cdot 1 \in \alpha$ , 即  $s \in S \cap \alpha$ . 反之, 若  $s \in S \cap \alpha$ , 那么任意的  $x \in A$  都有  $sx \in \alpha$ , 即  $x \in \alpha^{ec}$ , 所以  $\alpha^{ec} = A$ .

(3) 若  $\alpha \in C$ , 根据 **命题 1.23**, 那么  $\alpha^{ec} = \alpha$ , 令  $s \in S$  使得  $(s + \alpha)(x + \alpha) = 0$ , 那么  $sx \in \alpha$ , 于是  $x \in \alpha^{ec} = \alpha$ , 即  $x + \alpha = 0$ , 故  $s + \alpha$  不是零因子. 若任意  $s \in S$  在  $A/\alpha$  中都不是零因子, 那么任取  $x \in \alpha^{ec}$ , 那么存在  $t \in S$  使得  $tx \in \alpha$ , 即在  $A/\alpha$  中有  $(t + \alpha)(x + \alpha) = 0$ ,  $t + \alpha$  不是零因子, 所以  $x \in \alpha$ , 即  $\alpha = \alpha^{ec} \in C$ .

(4) 若  $\mathfrak{q}$  是  $S^{-1}A$  的素理想, 由 (1), 那么  $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^{ce}$ , 所以  $\mathfrak{q}$  对应到  $A$  的素理想  $\mathfrak{q}^c$ , 并且  $\mathfrak{q} \neq (1)$  表明  $\mathfrak{q}^c \cap S = \emptyset$ . 反过来, 若  $\mathfrak{p}$  是  $A$  的与  $S$  不相交的素理想, 有环同构  $S^{-1}A/S^{-1}\mathfrak{p} \simeq S^{-1}(A/\mathfrak{p})$ , 由于  $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ , 所以  $S^{-1}(A/\mathfrak{p}) \neq 0$  以及  $S^{-1}(A/\mathfrak{p})$  是整环, 所以  $S^{-1}\mathfrak{p}$  是  $S^{-1}A$  的素理想.

(5) 由 **命题 1.24**, 可知  $S^{-1}(\alpha + \mathfrak{b}) = S^{-1}\alpha + S^{-1}\mathfrak{b}$  以及  $S^{-1}(\alpha\mathfrak{b}) = (S^{-1}\alpha)(S^{-1}\mathfrak{b})$ . 由 **推论 3.4** 可知  $S^{-1}(\alpha \cap \mathfrak{b}) = (S^{-1}\alpha) \cap (S^{-1}\mathfrak{b})$ . 下面我们证明  $\sqrt{S^{-1}\alpha} = S^{-1}\sqrt{\alpha}$ . 由 **命题 1.24**, 总是有  $S^{-1}\sqrt{\alpha} \subseteq \sqrt{S^{-1}\alpha}$ . 任取  $x/s \in \sqrt{S^{-1}\alpha}$ , 即存在  $n$  使得  $x^n/s^n \in S^{-1}\alpha$ , 即存在  $x' \in \alpha$  以及  $t \in S$  使得  $x^n/s^n = x'/t$ , 即存在  $u \in S$  使得  $u(tx^n - s^n x') \in \alpha$ , 故  $utx^n \in \alpha$ , 所以  $(utx)^n = (ut)^{n-1}utx^n \in \alpha$ , 所以  $utx \in \sqrt{\alpha}$ , 所以  $x/s = utx/uts \in S^{-1}\sqrt{\alpha}$ , 所以  $\sqrt{S^{-1}\alpha} \subseteq S^{-1}\sqrt{\alpha}$ .  $\square$

**推论 3.12.**  $\text{nil}(S^{-1}A) = S^{-1}(\text{nil } A)$ .

*Proof.* 注意到  $\text{nil } A = \sqrt{(0)}$ , 所以

$$\text{nil}(S^{-1}A) = \sqrt{(0/1)} = \sqrt{S^{-1}(0)} = S^{-1}\sqrt{(0)} = S^{-1}(\text{nil } A). \quad \square$$

**推论 3.13.** 如果  $\mathfrak{p}$  是  $A$  的素理想, 那么局部环  $A_{\mathfrak{p}}$  的素理想——对应到  $A$  的被  $\mathfrak{p}$  包含的素理想.

*Proof.* 局部环  $A_{\mathfrak{p}}$  的素理想——对应到  $A$  的与  $A - \mathfrak{p}$  不相交的素理想.  $\square$

回顾同态对应定理, 可以看出对于一个素理想  $\mathfrak{p}$ , 我们有

- 局部环  $A_{\mathfrak{p}}$  的构造搜集了  $A$  的所有被  $\mathfrak{p}$  的素理想.
- 商环  $A/\mathfrak{p}$  的构造搜集了  $A$  的所有包含  $\mathfrak{p}$  的素理想.

假设  $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$  是素理想并且  $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q}$ , 那么  $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}_{\mathfrak{p}} \simeq (A/\mathfrak{q})_{\bar{\mathfrak{p}}}$ , 此时  $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}_{\mathfrak{p}}$  的素理想一一对应到  $A_{\mathfrak{p}}$  的包含  $\mathfrak{q}_{\mathfrak{p}}$  的素理想, 又一一对应到  $A$  的被  $\mathfrak{p}$  包含且包含  $\mathfrak{q}$  的素理想. 特别地, 如果  $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ , 那么  $A_{\mathfrak{p}}$  的包含  $\mathfrak{q}_{\mathfrak{p}}$  的素理想只有一个, 即  $\mathfrak{q}_{\mathfrak{p}}$  本身, 所以  $A_{\mathfrak{p}}$  的极大理想必须为  $\mathfrak{q}_{\mathfrak{p}}$ , 故  $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}_{\mathfrak{p}}$  实际上是  $A_{\mathfrak{p}}$  的剩余域, 右端  $(A/\mathfrak{q})_{\bar{\mathfrak{p}}}$  刚好是整环  $A/\mathfrak{q}$  的分式域, 所以这告诉我们  $A_{\mathfrak{p}}$  的剩余域同构于  $A/\mathfrak{p}$  的分式域! 此时  $A_{\mathfrak{p}}$  的剩余域或者  $A/\mathfrak{p}$  的分式域我们都记为  $k(\mathfrak{p})$ .

**命题 3.14.** 令  $M$  是有限生成  $A$ -模,  $S$  是  $A$  的乘性子集, 那么  $S^{-1}(\text{Ann}(M)) = \text{Ann}(S^{-1}M)$ .

*Proof.* 首先假设  $M$  由一个元素生成, 即  $M = (x)$ . 考虑  $A$ -模同态  $f: A \rightarrow M$ , 满足  $f(a) = ax$ .  $f$  是满同态, 并且  $\ker f = \text{Ann}(M)$ , 所以有  $A$ -模同构  $A/\text{Ann}(M) \simeq M$ , 所以有  $S^{-1}A$ -模同构  $S^{-1}M \simeq S^{-1}A/S^{-1}(\text{Ann}(M))$ , 故  $\text{Ann}(S^{-1}M) = S^{-1}(\text{Ann}(M))$ .

此时, 对于任意两个循环  $A$ -模  $N, P$ , 有

$$\begin{aligned} S^{-1}(\text{Ann}(N + P)) &= S^{-1}(\text{Ann}(N) \cap \text{Ann}(P)) = S^{-1}(\text{Ann}(N)) \cap S^{-1}(\text{Ann}(P)) \\ &= \text{Ann}(S^{-1}N) \cap \text{Ann}(S^{-1}P) = \text{Ann}(S^{-1}N + S^{-1}P) \\ &= \text{Ann}(S^{-1}(N + P)). \end{aligned}$$

所以  $M$  有限生成的时候均成立.  $\square$

**推论 3.15.** 若  $N, P$  是  $A$ -模  $M$  的子模, 并且  $P$  是有限生成的, 那么  $S^{-1}(N : P) = (S^{-1}N : S^{-1}P)$ .

*Proof.* 注意到  $(N : P) = \text{Ann}((N + P)/N)$  即可.  $\square$

**命题 3.16.** 令  $f: A \rightarrow B$  是环同态,  $\mathfrak{p}$  是  $A$  的素理想, 那么  $\mathfrak{p}$  是  $B$  中素理想的收缩当且仅当  $\mathfrak{p}^{ec} = \mathfrak{p}$ .

*Proof.* 若  $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}^c$ ,  $\mathfrak{q}$  是  $B$  的素理想, 那么  $\mathfrak{p}^{ec} = \mathfrak{q}^{cec} = \mathfrak{q}^c = \mathfrak{p}$ .

反过来, 若  $\mathfrak{p}^{ec} = \mathfrak{p}$ , 记  $S = f(A - \mathfrak{p})$ , 那么  $S$  是  $B$  的乘性子集.  $\mathfrak{p}^e$  与  $S$  不相交, 所以  $S^{-1}(\mathfrak{p}^e)$  是恰当理想, 所以  $S^{-1}(\mathfrak{p}^e)$  被  $S^{-1}B$  的极大理想  $\mathfrak{m}$  包含, 记  $\mathfrak{q}$  是  $\mathfrak{m}$  在  $B$  中的收缩, 那么  $\mathfrak{q}$  是  $B$  的素理想, 并且  $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{p}^e$ , 所以  $f^{-1}(\mathfrak{q}) \supseteq \mathfrak{p}^{ec} = \mathfrak{p}$ . 又因为  $\mathfrak{q} \cap S = \emptyset$ , 所以  $\mathfrak{q} \subseteq f(\mathfrak{p}) \subseteq \mathfrak{p}^e$ , 所以  $f^{-1}(\mathfrak{q}) \subseteq \mathfrak{p}^{ec} = \mathfrak{p}$ . 所以我们有  $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}^c$ .  $\square$

### 3.4 EXERCISES

**Ex 3.4.1.** 令  $S$  是环  $A$  的乘性子集,  $M$  是有限生成  $A$ -模, 证明  $S^{-1}M = 0$  当且仅当存在  $s \in S$  使得  $sM = 0$ .

*Proof.* 若  $S^{-1}M = 0$ , 设  $M$  由  $x_1, \dots, x_n$  生成, 那么  $x_i/1 = 0/1$ , 即存在  $s_i \in S$  使得  $s_i x_i = 0$ . 令  $s = s_1 \cdots s_n$ , 那么对于任意的  $x \in M$ , 有  $x = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$ , 从而  $sx = 0$ , 所以  $sM = 0$ .

若存在  $s \in S$  使得  $sM = 0$ , 那么任取  $x \in M, t \in S$ , 有  $x/t = 0/1$ , 所以  $S^{-1}M = 0$ .  $\square$

**Ex 3.4.2.** 令  $\alpha$  是环  $A$  的理想, 令  $S = 1 + \alpha$ . 证明  $S^{-1}\alpha$  被  $S^{-1}A$  的 Jacobson 根包含.



## 整相关和赋值

### 4.1 整相关

令  $B$  是环,  $A$  是  $B$  的子环,  $x \in B$  在  $A$  上是**整的**, 指的是  $x$  是某个  $A$  中系数的首一多项式的根. 显然  $A$  的每个元素在  $A$  上都是整的.

**命题 4.1.** 下面的说法是等价的:

1.  $b \in B$  在  $A$  上是整的;
2.  $A[b]$  是有限生成  $A$ -模;
3.  $A[b]$  被包含在  $B$  的一个子环  $C$  中, 其中  $C$  是有限生成  $A$ -模;
4. 存在一个忠实的  $A[b]$ -模  $M$  (即  $\text{Ann}(M) = 0$ ), 其作为  $A$ -模是有限生成的.

*Proof.* (1)  $\Rightarrow$  (2) 设  $b$  满足方程

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

那么  $b^{n+k}$  ( $k \geq 0$ ) 都可以写为  $1, b, \dots, b^{n-1}$  的  $A$ -线性组合, 所以  $A[b]$  是有限生成  $A$ -模.

(2)  $\Rightarrow$  (3) 取  $C = A[b]$  即可.

(3)  $\Rightarrow$  (4) 取  $M = C$ , 若  $f(b) \in A[b]$  使得  $f(b)M = 0$ , 特别地, 有  $f(b) = f(b) \cdot 1 = 0$ , 故  $\text{Ann}(M) = 0$ , 所以  $M$  是忠实的  $A[b]$ -模.

(4)  $\Rightarrow$  (1) 根据 [命题 2.15](#), 取  $\phi: M \rightarrow M$  为  $\phi(x) = bx$ , 那么存在  $a_i \in A$  使得

$$\phi^n + a_1\phi^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

任取非零的  $x \in M$ , 那么  $\phi^k(x) = b^k x$ , 所以

$$(b^n + a_1b^{n-1} + \cdots + a_n)x = 0,$$

$M$  是忠实的  $A[b]$ -模表明  $b^n + a_1b^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ , 即  $b \in B$  在  $A$  上是整的.  $\square$

**推论 4.2.** 令  $b_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 是  $B$  的元素, 并且在  $A$  上是整的. 那么环  $A[b_1, \dots, b_n]$  是有限生成  $A$ -模.

*Proof.* 对  $n$  归纳,  $n = 1$  的时候成立. 设  $n = k$  的时候成立, 那么  $A[b_1, \dots, b_{k+1}] = A[b_1, \dots, b_k][b_{k+1}]$ , 并且  $b_{k+1}$  显然在  $A[b_1, \dots, b_k]$  上是整的, 所以  $A[b_1, \dots, b_{k+1}]$  是有限生成  $A$ -模.  $\square$

**推论 4.3.**  $B$  中所有在  $A$  上整的元素的集合  $C$  是  $B$  的包含  $A$  的子环.

*Proof.* 如果  $c_1, c_2 \in C$ , 那么  $A[c_1, c_2]$  是有限生成  $A$ -模, 此时  $A[c_1 + c_2] \subseteq A[c_1, c_2]$ , 根据 **命题 4.1** 的 (3), 所以  $c_1 + c_2$  在  $A$  上是整的, 故  $c_1 + c_2 \in C$ . 同理  $c_1 - c_2, c_1 c_2 \in C$ , 故  $C$  是子环. 显然  $C$  包含  $A$ .  $\square$

上述推论中的  $C$  被称为  $A$  在  $B$  中的**整闭包**. 如果  $C = A$ , 那么说  $A$  在  $B$  中是**整闭的**. 如果  $C = B$ , 那么说  $B$  在  $A$  上是**整的**.

**推论 4.4.** 若  $A \subseteq B \subseteq C$  是环,  $B$  在  $A$  上是整的,  $C$  在  $B$  上是整的, 那么  $C$  在  $A$  上是整的.

*Proof.* 任取  $c \in C$ , 那么  $c$  满足方程

$$x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n = 0 \quad (b_i \in B),$$

由于  $b_i$  在  $A$  上是整的, 所以  $A[b_1, \dots, b_n]$  是有限生成  $A$ -模, 此时  $c$  在  $A[b_1, \dots, b_n]$  上是整的, 故  $A[b_1, \dots, b_n, c]$  是有限生成  $A[b_1, \dots, b_n]$ -模, 所以  $A[b_1, \dots, b_n, c]$  是有限生成  $A$ -模, 故  $c$  在  $A$  上是整的.  $\square$

**推论 4.5.** 令  $A \subseteq B$  是环,  $C$  为  $A$  在  $B$  中的整闭包, 那么  $C$  在  $B$  中是整闭的.

*Proof.* 假设  $b \in B$  在  $C$  上是整的, 那么  $b$  在  $A$  上是整的, 所以  $b \in C$ .  $\square$

下面的命题表明商和分式化的操作保持整相关性质.

**命题 4.6.** 令  $A \subseteq B$  是环,  $B$  在  $A$  上是整的.

1. 如果  $\mathfrak{b}$  是  $B$  的理想,  $\alpha = \mathfrak{b}^c = A \cap \mathfrak{b}$ , 那么  $B/\mathfrak{b}$  在  $A/\alpha$  上是整的.
2. 如果  $R$  是平坦  $A$ -代数, 那么  $B \otimes_A R$  在  $R$  上是整的.
3. 如果  $S$  是  $A$  的乘性子集, 那么  $S^{-1}B$  在  $S^{-1}A$  上是整的.

*Proof.* (1) 对于环同态  $f : A \rightarrow B/\mathfrak{b}$ , 显然  $\alpha = \ker f$ , 故  $f$  诱导出单的环同态  $\bar{f} : A/\alpha \rightarrow B/\mathfrak{b}$ , 故  $A/\alpha$  可以视为  $B/\mathfrak{b}$  的子环. 任取  $b + \mathfrak{b} \in B/\mathfrak{b}$ , 由于  $b$  在  $A$  上是整的, 所以

$$b^n + a_1 b^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (a_i \in A),$$

那么

$$(b + \mathfrak{b})^n + \bar{f}(a_1 + \alpha)(b + \mathfrak{b})^{n-1} + \dots + \bar{f}(a_n + \alpha) = (b^n + a_1 b^{n-1} + \dots + a_n) + \mathfrak{b} = 0,$$

所以  $b + \mathfrak{b}$  在  $A/\alpha$  上是整的.

(2)  $R$  平坦表明  $R \simeq A \otimes_A R \rightarrow B \otimes_A R$  是单射, 故通过  $r \mapsto 1 \otimes r$ ,  $R$  可以视为  $B \otimes_A R$  的子环. 任取  $b \otimes r \in B \otimes_A R$ , 由于  $b$  在  $A$  上是整的, 所以

$$b^n + a_1 b^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \quad (a_i \in A),$$

故

$$\begin{aligned} & (b \otimes r)^n + (a_1 r)(b \otimes r)^{n-1} + \cdots + (a_{n-1} r^{n-1})(b \otimes r) + a_n r^n \\ &= b^n \otimes r^n + (a_1 b^{n-1}) \otimes r^n + \cdots + (a_{n-1} b) \otimes r^n + a_n \otimes r^n = 0, \end{aligned}$$

所以  $b \otimes r$  在  $R$  上是整的. 所以任意有限和  $\sum b_i \otimes r_i$  在  $R$  上是整的, 故  $B \otimes_A R$  在  $R$  上是整的.

(3) 在 (2) 中取  $R = S^{-1}A$  即可, 注意到  $S^{-1}A$  是平坦  $A$ -模, 以及  $B \otimes_A S^{-1}A \simeq S^{-1}B$ .  $\square$

## 4.2 上行定理

**命题 4.7.** 令  $A \subseteq B$  是整环,  $B$  在  $A$  上是整的. 那么  $B$  是域当且仅当  $A$  是域.

*Proof.* 假设  $A$  是域, 任取非零的  $b \in B$ , 取以  $b$  为零点的  $A[x]$  中的最低次多项式, 即

$$b^n + a_1 b^{n-1} + \cdots + a_{n-1} b + a_n = 0,$$

那么  $a_n \neq 0$ , 否则  $B$  是整环表明  $b^{n-1} + a_1 b^{n-2} + \cdots + a_{n-1} = 0$ , 违背了最低次的假设. 于是

$$-b(b^{n-1} + a_1 b^{n-2} + \cdots + a_{n-1})a_n^{-1} = 1,$$

所以  $b$  可逆, 逆元为  $-a_n^{-1}(b^{n-1} + a_1 b^{n-2} + \cdots + a_{n-1})$ , 故  $B$  是域.

假设  $B$  是域, 任取非零的  $a \in A \subseteq B$ , 那么  $a^{-1} \in B$  在  $A$  上是整的, 所以存在

$$a^{-m} + a'_1 a^{-m+1} + \cdots + a'_m = 0,$$

两边乘以  $a^{m-1}$ , 这表明

$$a^{-1} = -(a'_1 + \cdots + a'_m a^{m-1}) \in A,$$

故  $a$  可逆,  $A$  为域.  $\square$

**推论 4.8.** 令  $A \subseteq B$  是环,  $B$  在  $A$  上是整的, 令  $\mathfrak{q}$  是  $B$  是素理想,  $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}^c = A \cap \mathfrak{q}$ , 那么  $\mathfrak{q}$  是极大理想当且仅当  $\mathfrak{p}$  是极大理想.

*Proof.* 根据 **命题 4.6**,  $B/\mathfrak{q}$  在  $A/\mathfrak{p}$  上是整的, 并且二者都是整环, 故  $\mathfrak{q}$  是极大理想当且仅当  $B/\mathfrak{q}$  是域当且仅当  $A/\mathfrak{p}$  是域当且仅当  $\mathfrak{p}$  是极大理想.  $\square$

**推论 4.9.** 令  $A \subseteq B$  是环,  $B$  在  $A$  上是整的, 令  $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}'$  是  $B$  的素理想并且满足  $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{q}'$  以及  $\mathfrak{q}^c = \mathfrak{q}'^c = \mathfrak{p}$ , 那么  $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$ .

*Proof.* 根据 [命题 4.6](#),  $B_p$  在  $A_p$  上是整的, 令  $m$  为  $p$  在  $A_p$  中的扩张,  $n, n'$  分别为  $q, q'$  在  $B_p$  中的扩张. 那么  $m$  是  $A_p$  的极大理想,  $n \subseteq n'$ , 并且  $n^c = n'^c = m$ , 根据上面的推论, 所以  $n, n'$  是极大理想, 故  $n = n'$ , 所以  $q = q'$ .  $\square$

**定理 4.10.** 令  $A \subseteq B$  是环,  $B$  在  $A$  上是整的,  $p$  是  $A$  的素理想, 那么存在  $B$  的素理想  $q$  使得  $q \cap A = p$ .

*Proof.* 根据 [命题 4.6](#),  $B_p$  在  $A_p$  上是整的, 我们有交换图

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{j} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ A_p & \xrightarrow{j_p} & B_p \end{array}$$

$j$  和  $j_p$  都是单射. 取  $B_p$  的一个极大理想  $n$ , 根据 [推论 4.8](#),  $n^c = n \cap A_p$  是极大理想,  $A_p$  是局部环, 所以  $m = n^c$  是  $A_p$  的唯一的极大理想, 所以  $\alpha^{-1}(m) = p$ . 令  $q = \beta^{-1}(n)$ , 那么

$$q \cap A = j^{-1}(q) = (\beta \circ j)^{-1}(n) = (j_p \circ \alpha)^{-1}(n) = \alpha^{-1}(m) = p. \quad \square$$

**定理 4.11 (上行定理).** 令  $A \subseteq B$  是环,  $B$  在  $A$  上是整的,  $p_1 \subseteq \cdots \subseteq p_n$  是  $A$  的素理想链,  $q_1 \subseteq \cdots \subseteq q_m$  ( $m < n$ ) 是  $B$  的素理想链, 并且  $q_i \cap A = p_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ), 那么  $q_1 \subseteq \cdots \subseteq q_m$  可以被扩张到链  $q_1 \subseteq \cdots \subseteq q_n$  使得  $q_i \cap A = p_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ). 如 [Figure 4.1](#) 所示.

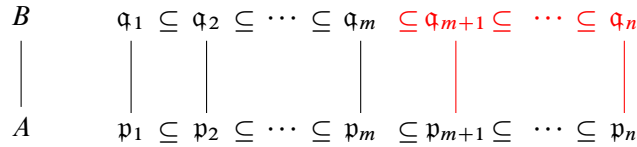


Fig 4.1: 上行定理

*Proof.* 我们只需要证明存在  $q_{m+1}$  使得  $q_{m+1} \cap A = p_{m+1}$  即可. 根据 [命题 4.6](#),  $\bar{B} = B/q_m$  在  $\bar{A} = A/p_m$  上是整的, 我们有交换图

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{j} & B \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ \bar{A} & \xrightarrow{\bar{j}} & \bar{B} \end{array}$$

$\bar{p}_{m+1}$  是  $\bar{A}$  的素理想, 根据 [定理 4.10](#), 存在  $\bar{B}$  的素理想  $\bar{q}_{m+1}$  使得  $\bar{j}^{-1}(\bar{q}_{m+1}) = \bar{p}_{m+1}$ ,  $\bar{q}_{m+1}$  对应到  $B$  的素理想  $q_{m+1}$ , 此时

$$q_{m+1} \cap A = j^{-1}(q_{m+1}) = (\pi_2 \circ j)^{-1}(\bar{q}_{m+1}) = (\bar{j} \circ \pi_1)^{-1}(\bar{q}_{m+1}) = \bar{p}_{m+1}. \quad \square$$

### 4.3 整闭整环和下行定理

**命题 4.12.** 令  $A \subseteq B$  是环,  $C$  是  $A$  在  $B$  中的整闭包, 令  $S$  是  $A$  的乘性子集, 那么  $S^{-1}C$  是  $S^{-1}A$  在  $S^{-1}B$  中的整闭包.

*Proof.* 根据 **命题 4.6**,  $S^{-1}C$  在  $S^{-1}A$  上是整的. 任取  $b/s \in S^{-1}B$ , 若  $b/s$  在  $S^{-1}A$  上是整的, 则  $b/s$  满足某个  $S^{-1}A$  为系数的方程

$$(b/s)^n + (a_1/s_1)(b/s)^{n-1} + \cdots + (a_n/s_n) = 0,$$

令  $t = s_1 \cdots s_n$ , 两边同时乘以  $(st)^n/1$ , 那么

$$(bt)^n/1 + (a_1st/s_1)(bt)^{n-1}/1 + \cdots + (a_ns^n t^n/s_n) = 0,$$

所以存在  $u \in S$  使得

$$u(bt)^n + ua'_1(bt)^{n-1} + \cdots + ua'_n = 0,$$

两边同时乘以  $u^{n-1}$ , 那么

$$(btu)^n + ua'_1(btu)^{n-1} + \cdots + u^n a'_n = 0,$$

这表明  $btu \in C$ , 所以  $b/s = btu/stu \in S^{-1}C$ , 所以  $S^{-1}C$  是  $S^{-1}A$  在  $S^{-1}B$  中的整闭包.  $\square$

一个整环被称为**整闭的**, 如果它在它的分式域中是整闭的. 例如,  $\mathbb{Z}$  是整闭的.

**例 4.13.** UFD 都是整闭的. 设  $R$  是 UFD, 任取  $x/y \in \text{Frac}(R)$ ,  $y \neq 0$ , 利用唯一因子分解, 可以假设  $x, y$  互素. 若  $x/y$  在  $R$  上是整的, 那么  $x/y$  满足

$$(x/y)^n + r_1(x/y)^{n-1} + \cdots + r_n = 0 \quad (r_i \in R),$$

两边乘以  $y^n$ , 那么

$$x^n + r_1yx^{n-1} + \cdots + r_ny^n = 0,$$

这表明  $y \mid x^n$ ,  $x, y$  互素表明  $y \in R^\times$ , 所以  $x/y = xy^{-1}/1 \in R$ , 故  $R$  在  $\text{Frac}(R)$  中整闭.

整闭是局部性质.

**命题 4.14.** 令  $A \subseteq B$  是环, 那么下面的说法是等价的:

1.  $A$  在  $B$  中整闭;
2. 对于每个素理想  $\mathfrak{p} \subseteq A$ ,  $A_{\mathfrak{p}}$  在  $B_{\mathfrak{p}}$  中是整闭的;
3. 对于每个极大理想  $\mathfrak{m} \subseteq A$ ,  $A_{\mathfrak{m}}$  在  $B_{\mathfrak{m}}$  中是整闭的.

*Proof.* (1)  $\Rightarrow$  (2) **命题 4.12**. (2)  $\Rightarrow$  (3) 极大理想都是素理想.

(3)  $\Rightarrow$  (1) 令  $C$  为  $A$  在  $B$  中的整闭包, 证明单位映射  $f: A \rightarrow C$  是满射即可. 根据 **命题 3.9**, 等价于证明  $f_{\mathfrak{m}}: A_{\mathfrak{m}} \rightarrow C_{\mathfrak{m}}$  是满射. 根据 **命题 4.12**,  $C_{\mathfrak{m}}$  是  $A_{\mathfrak{m}}$  在  $B_{\mathfrak{m}}$  中的整闭包, 所以  $f_{\mathfrak{m}}$  满射.  $\square$

**推论 4.15.** 令  $A$  是整环, 那么下面的说法是等价的:

1.  $A$  是整闭的;
2. 对于每个素理想  $\mathfrak{p} \subseteq A$ ,  $A_{\mathfrak{p}}$  是整闭的;
3. 对于每个极大理想  $\mathfrak{m} \subseteq A$ ,  $A_{\mathfrak{m}}$  是整闭的.

令  $A \subseteq B$  是环,  $\alpha$  是  $A$  的理想. 元素  $b \in B$  如果满足首一的以  $\alpha$  中元素为系数的多项式, 那么我们说  $b$  在  $\alpha$  上是整的.  $\alpha$  在  $B$  中的整闭包指的是  $B$  中所有在  $\alpha$  上整的元素的集合.

**引理 4.16.** 令  $C$  是  $A$  在  $B$  中的整闭包,  $\alpha C$  为  $\alpha$  在  $C$  中的扩张. 那么  $\alpha$  在  $B$  中的整闭包是根式理想  $\sqrt{\alpha C}$  (从而对加减乘封闭).

*Proof.* 若  $x \in B$  在  $\alpha$  上是整的 (自然在  $A$  上也是整的), 那么  $x$  满足

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \quad (a_i \in \alpha),$$

所以  $x^n \in \alpha C$ , 所以  $x \in \sqrt{\alpha C}$ .

反过来, 若  $x \in \sqrt{\alpha C}$ , 那么存在  $n$  使得  $x^n = \sum_{i=1}^m a_i c_i$ , 其中  $a_i \in \alpha, c_i \in C$ . 因为  $c_1, \dots, c_m$  在  $A$  上是整的, 所以  $M = A[c_1, \dots, c_m]$  是有限生成  $A$ -模. 考虑  $\phi: M \rightarrow M$  为  $\phi(f(c_1, \dots, c_m)) = x^n f(c_1, \dots, c_m)$ , 那么  $\phi$  是  $A$ -模同态, 并且  $\phi(M) = x^n M \subseteq \alpha M$ , 根据 Cayley-Hamilton 定理, 存在  $a'_i \in \alpha$  使得

$$\phi^k + a'_1 \phi^{k-1} + \cdots + a'_k = 0,$$

由于  $\phi(1) = x^n$ , 所以

$$x^{kn} + a'_1 x^{(k-1)n} + \cdots + a'_k = 0,$$

即  $x$  在  $\alpha$  上是整的. □

若  $A \subseteq B$  是整环,  $x \in B$  在  $A$  上是整的,  $x$  在  $\text{Frac}(A)$  上当然是代数的, 但是一般情况下,  $x$  在  $\text{Frac}(A)$  上的极小多项式不一定处于  $A[x]$  中. 例如, 记  $\omega = e^{2\pi i/3}$ ,  $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ ,  $B = \mathbb{Z}[\omega] = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}]$ ,  $F = \text{Frac}(A) = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ .  $\omega$  在  $F$  上的极小多项式显然为  $x - \omega$ , 但是  $\omega \notin A$ . 如果  $A$  是整闭的, 那么这个结论是正确的, 即下面的命题. 这个例子中,  $B$  在  $A$  上是整的, 并且  $B$  是 ED, 从而是 UFD, 从而是整闭的, 所以  $A$  在  $F$  中的整闭包是  $B$ .

**命题 4.17.** 令  $A \subseteq B$  是整环,  $A$  是整闭的,  $x \in B$  在  $A$  的某个理想  $\alpha$  上是整的. 那么  $x$  在分式域  $K = \text{Frac}(A)$  上是代数的. 此外, 设  $x$  在  $K$  上的极小多项式为  $t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n$ , 那么  $a_1, \dots, a_n \in \sqrt{\alpha}$ .

*Proof.* 显然  $x$  在  $K$  上是代数的. 记  $L$  为  $f(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n$  的分裂域,  $f(t)$  在  $L$  上分裂为  $f(t) = (t - \alpha_1) \cdots (t - \alpha_n)$ , 不妨设  $\alpha_1 = x$ . 那么我们有  $K(\alpha_i) \simeq K[t]/(f(t)) \simeq K(x)$ . 设  $x$  满足

$$x^m + a'_1 x^{m-1} + \cdots + a'_m = 0 \quad (a'_i \in \alpha),$$

将上式放到  $L$  中, 由于  $K(\alpha_i) \simeq K(x)$ , 那么对于  $\alpha_i$ , 同样有

$$\alpha_i^m + a'_1 \alpha_i^{m-1} + \cdots + a'_m = 0,$$

所以  $\alpha_i$  在  $\alpha$  上是整的. 由 Vieta 定理,  $a_i$  可以表示为  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  的对称多项式, 考虑  $A \subseteq L$ , 根据 [引理 4.16](#), 所以  $a_i$  在  $\alpha$  上是整的 (封闭性). 由于  $a_i \in K$ , 考虑  $A \subseteq K$ , 再根据 [引理 4.16](#),  $a_i \in \sqrt{\alpha^e} = \sqrt{\alpha}$ .  $\square$

**定理 4.18 (下行定理).** 令  $A \subseteq B$  是整环,  $A$  是整闭的,  $B$  在  $A$  上是整的. 令  $\mathfrak{p}_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{p}_n$  是  $A$  的素理想链,  $\mathfrak{q}_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{q}_m$  ( $m < n$ ) 是  $B$  的素理想链, 并且  $\mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{p}_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ). 那么  $\mathfrak{q}_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{q}_m$  可以被扩张到链  $\mathfrak{q}_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{q}_n$  使得  $\mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{p}_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ). 如 [Figure 4.2](#) 所示.

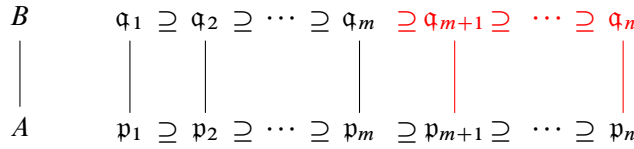


Fig 4.2: 下行定理

*Proof.* 我们只需要证明存在  $\mathfrak{q}_{m+1} \subseteq \mathfrak{q}_m$  使得  $\mathfrak{q}_{m+1} \cap A = \mathfrak{p}_{m+1}$  即可, 我们有交换图

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{j} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ A_{\mathfrak{p}_m} & \xrightarrow{j'} & B_{\mathfrak{q}_m} \end{array}$$

注意由于  $A - \mathfrak{p}_m \subseteq B - \mathfrak{q}_m$ , 所以  $A_{\mathfrak{p}_m} \rightarrow B_{\mathfrak{q}_m}$  的映射是良定义的. 考虑  $\beta \circ j : A \rightarrow B_{\mathfrak{q}_m}$ , 注意  $A, B$  是整环表明  $\alpha, \beta$  是单射. 由于  $B$  的被  $\mathfrak{q}_m$  包含的素理想一一对应到  $B_{\mathfrak{q}_m}$  的素理想, 所以等价于证明  $\mathfrak{p}_{m+1}$  是  $B_{\mathfrak{q}_m}$  的某个素理想的收缩. 根据 [命题 3.16](#), 等价于证明  $(\mathfrak{p}_{m+1} B_{\mathfrak{q}_m}) \cap A = \mathfrak{p}_{m+1}$  (由于  $\beta \circ j$  是单射, 所以可以将  $A$  视为  $B_{\mathfrak{q}_m}$  的子环). 由于我们总是有  $(\mathfrak{p}_{m+1} B_{\mathfrak{q}_m}) \cap A \supseteq \mathfrak{p}_{m+1}$ , 所以只需要证明  $(\mathfrak{p}_{m+1} B_{\mathfrak{q}_m}) \cap A \subseteq \mathfrak{p}_{m+1}$ .

任取  $y/s \in (\mathfrak{p}_{m+1} B_{\mathfrak{q}_m}) \cap A$ , 其中  $y \in \mathfrak{p}_{m+1} B$ ,  $s \in B - \mathfrak{q}_m$ , 根据 [引理 4.16](#), 所以  $y$  在  $\mathfrak{p}_{m+1}$  上是整的. 根据 [命题 4.17](#),  $y$  在  $\text{Frac}(A)$  上的极小多项式为

$$y^n + u_1 y^{n-1} + \cdots + u_n = 0 \quad (u_i \in \sqrt{\mathfrak{p}_{m+1}} = \mathfrak{p}_{m+1}).$$

$y/s \in A$  说明存在  $x \in A$  使得  $y/s = x/1$ , 即存在  $t \in B - \mathfrak{q}_m$  使得  $t(y - sx) = 0$ ,  $t \neq 0$  表明  $y = sx$ , 那么在  $\text{Frac}(B) \supseteq \text{Frac}(A)$  中有  $s = yx^{-1}$ . 那么  $s$  在  $\text{Frac}(A)$  上的极小多项式为

$$s^n + v_1 s^{n-1} + \cdots + s_n = 0,$$

其中  $v_i = u_i/x^i$ . 所以, 我们有  $x^i v_i = u_i \in \mathfrak{p}_{m+1}$ .

因为  $s$  在  $A$  上是整的, 根据 [命题 4.17](#), 所以  $s$  在  $\text{Frac}(A)$  上的极小多项式的系数在  $A$  中, 即  $v_i \in A$ . 假设  $x \notin \mathfrak{p}_{m+1}$ , 那么  $x^i v_i \in \mathfrak{p}_{m+1}$  表明  $v_i \in \mathfrak{p}_{m+1}$ , 所以  $s^n \in \mathfrak{p}_{m+1} B \subseteq \mathfrak{p}_m B \subseteq \mathfrak{q}_m$ , 所以  $s \in \mathfrak{q}_m$ , 矛盾. 故  $x \in \mathfrak{p}_{m+1}$ , 即  $(\mathfrak{p}_{m+1} B_{\mathfrak{q}_m}) \cap A \subseteq \mathfrak{p}_{m+1}$ .  $\square$

下面我们简要回顾双线性型的一些内容. 令  $V$  是有限维  $F$ -向量空间,  $B: V \times V \rightarrow F$  是一个双线性型 ( $F$ -双线性映射). 用张量积的性质来说,  $B$  对应一个  $V \otimes_F V \rightarrow F$  的线性映射, 即  $B \in (V \otimes_F V)^*$ .  $B$  诱导出两个  $V \rightarrow V^*$  的线性映射, 即

$$B_l: x \mapsto (B(x, \_): y \mapsto B(x, y)), \quad B_r: x \mapsto (B(\_, x): y \mapsto B(y, x)).$$

如果上述两个线性映射是单射, 那么我们说  $B$  是**非退化的**. 由于  $\dim V = \dim V^*$ , 所以  $B$  是非退化的当且仅当  $B_l$  和  $B_r$  是同构. 设  $V$  的一组基为  $e_1, \dots, e_n$ . 记矩阵  $B = (B(e_i, e_j))_{n \times n}$ , 对于  $u, v \in V$ , 设  $u = u_1 e_1 + \dots + u_n e_n$  以及  $v = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n$ , 那么

$$B(u, v) = B\left(\sum_i u_i e_i, \sum_j v_j e_j\right) = \sum_i \sum_j u_i v_j B(e_i, e_j) = \mathbf{u}^\top \mathbf{B} \mathbf{v},$$

其中  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  以及  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ . 不难证明  $B$  非退化当且仅当  $B$  可逆.

现在假设  $B$  是对称双线性型. 如果  $B$  非退化, 那么  $B_l: V \rightarrow V^*$  是同构. 设  $V$  的一组基为  $e_1, \dots, e_n$ , 那么  $V^*$  的基为  $e_1^*, \dots, e_n^*$ , 满足  $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ . 于是存在基  $v_1, \dots, v_n \in V$  使得  $B(v_i, \_) = e_i^*$ , 即  $B(v_i, e_j) = \delta_{ij}$ .

然后我们简要介绍一下关于域扩张中迹的概念. 令  $K/F$  是有限扩张,  $[K:F] = n$ . 对于  $a \in K$ , 定义映射  $L_a: K \rightarrow K$  为  $L_a(x) = ax$ . 容易验证  $L_a$  为  $F$ -线性映射, 那么我们可以定义元素  $a$  的迹为线性映射  $L_a$  的迹, 即

$$\text{Tr}_{K/F}(a) = \text{Tr}(L_a).$$

这诱导出  $F$ -线性映射  $\text{Tr}_{K/F}: K \rightarrow F$ . 当  $c \in F$  的时候, 设  $K$  的一组基为  $v_1, \dots, v_n$ , 那么  $L_c$  在这组基下的表示矩阵为  $cI_n$ , 所以  $\text{Tr}_{K/F}(c) = cn$ .

$\text{Tr}_{K/F}$  也诱导了一个  $F$ -双线性映射  $\text{Tr}_{K/F}: K \times K \rightarrow F$ , 即  $\text{Tr}_{K/F}(a, b) = \text{Tr}_{K/F}(ab)$ . 容易验证  $\text{Tr}_{K/F}$  是对称双线性型. 我们不加证明地给出结论:  $K/F$  是可分扩张当且仅当  $\text{Tr}_{K/F}$  是非退化的.

**命题 4.19.**  $A$  是任意整闭整环,  $K$  是  $A$  的分式域,  $L$  是  $K$  的有限可分扩张,  $B$  是  $A$  在  $L$  中的整闭包. 那么存在  $K$ -向量空间  $L$  的一组基  $v_1, \dots, v_n$  使得  $B \subseteq \sum_{j=1}^n A v_j$ .

*Proof.* 设  $[L:K] = n$ . 首先我们断言: 存在  $L$  的一组基  $u_1, \dots, u_n$  使得  $u_i \in B$ . 任取  $L$  的一组基  $u'_1, \dots, u'_n$ , 那么  $u'_i$  在  $K$  上是代数的, 所以满足方程 (总是可以乘以公分母使得系数处于  $A$  中)

$$a_m (u'_i)^m + a_{m-1} (u'_i)^{m-1} + \dots + a_0 = 0 \quad (a_m \neq 0, a_j \in A).$$

两边乘以  $a_m^{m-1}$ , 所以

$$(a_m u'_i)^m + a_{m-1} a_m (a_m u'_i)^{m-1} + \dots + a_0 a_m^{m-1} = 0,$$



令  $u_i = a_m u'_i$ , 那么  $u_i$  在  $A$  上是整的, 并且仍然是  $L$  的一组基.

根据上面的叙述,  $L/K$  可分表明  $\text{Tr}_{L/K}$  是非退化的, 所以存在  $L$  的一组基  $v_1, \dots, v_n$  使得  $\text{Tr}_{L/K}(u_i v_j) = \delta_{ij}$ . 任取  $x \in B$ , 设  $x = \sum_j x_j v_j$ , 其中  $x_j \in K$ , 那么

$$x_j = \sum_i \delta_{ji} x_i = \sum_i \text{Tr}_{L/K}(u_j v_i) x_i = \text{Tr}_{L/K}(x u_j),$$

所以  $x = \sum_j \text{Tr}_{L/K}(x u_j) v_j$ . 下面我们说明, 对于任意的  $y \in B$ , 都有  $\text{Tr}_{L/K}(y) \in A$  即可. 由于

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{L/K}(y) &= \text{Tr}_{K(y)/K} \circ \text{Tr}_{L/K(y)}(y) = \text{Tr}_{K(y)/K}([L : K(y)] \cdot y) \\ &= [L : K(y)] \cdot \text{Tr}_{K(y)/K}(y). \end{aligned}$$

设  $[K(y) : K] = m$ , 那么  $K(y)$  的一组基为  $1, y, \dots, y^{m-1}$ . 设  $y$  在  $K$  上的极小多项式为

$$y^m + a_{m-1} y^{m-1} + \dots + a_0 = 0,$$

根据 [命题 4.17](#),  $a_i \in A$ . 线性映射  $L_y : K(y) \rightarrow K(y)$  在上述基下的表示矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & -a_1 \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 1 & -a_{m-1} \\ & & & & 1 & -a_m \end{pmatrix},$$

所以  $\text{Tr}_{L/K}(y) = [L : K(y)] \cdot (-a_m) \in A$ . □

## 4.4 赋值环

$K$  是一个域,  $K$  的一个**离散赋值**指的是一个映射  $v : K^\times \rightarrow \mathbb{Z}$ , 其满足

1.  $v(xy) = v(x) + v(y)$ , 即  $v$  是群同态;
2.  $v(x + y) \geq \min(v(x), v(y))$ .

为了方便起见, 定义  $v(0) = +\infty$ . 容易观察到这蕴含着  $v(1) = v(-1) = 0$  以及  $v(x) = v(-x)$ .

**例 4.20.**

1. 固定素数  $p \in \mathbb{Z}$ , 任意的  $x \in \mathbb{Q}^\times$  可以唯一地写为  $x = p^r \frac{a}{b}$ , 其中  $a, b$  互素并且  $p \nmid a$  以及  $p \nmid b$ . 定义  $v_p : \mathbb{Q}^\times \rightarrow \mathbb{Z}$  为  $v_p(x) = r$ . 对于  $x = p^r \frac{a}{b}$  以及  $y = p^s \frac{c}{d}$ , 有  $xy = p^{r+s} \frac{ac}{bd}$ , 此时  $p \nmid ac$  以及  $p \nmid bd$ , 所以  $v_p(xy) = r + s = v_p(x) + v_p(y)$ . 不妨设  $r \leq s$ , 我们有

$$x + y = p^r \left( \frac{a}{b} + p^{s-r} \frac{c}{d} \right) = p^r \frac{ad + p^{s-r} bc}{bd},$$

此时  $p \nmid bd$ , 当  $r < s$  时有  $p \nmid (ad + p^{s-r} bc)$ , 此时  $v_p(x + y) = r$ . 当  $r = s$  时  $ad + bc$  可能含有  $p$  作为因子, 此时  $v_p(x + y) \geq r$ . 所以  $v_p$  是  $\mathbb{Q}$  的离散赋值.

**引理 4.21.**  $K$  是一个域, 有离散赋值  $v: K^\times \rightarrow \mathbb{Z}$ , 若  $v(x) \neq v(y)$ , 那么  $v(x+y) = \min(v(x), v(y))$ .

*Proof.* 不妨设  $v(x) > v(y)$ , 那么  $v(x+y) \geq \min(v(x), v(y)) = v(y)$ . 另一方面, 我们有

$$v(y) = v(x+y-x) \geq \min(v(x+y), v(-x)) = \min(v(x+y), v(x)),$$

若  $v(x) \leq v(x+y)$ , 那么  $v(y) \geq v(x)$ , 与  $v(x) > v(y)$  矛盾. 所以只可能  $v(x) > v(x+y)$ , 故  $v(y) \geq v(x+y)$ . 所以  $v(x+y) = v(y) = \min(v(x), v(y))$ .  $\square$

**命题 4.22.**  $K$  是一个域, 有离散赋值  $v: K^\times \rightarrow \mathbb{Z}$ , 定义

$$A = \{x \in K \mid v(x) \geq 0\}, \quad \mathfrak{m} = \{x \in K \mid v(x) > 0\},$$

那么

1.  $A$  是  $K$  的一个子环, 并且对于任意的  $x \in K^\times$ , 有  $x \in A$  或者  $x^{-1} \in A$  (或者均有).
2.  $\mathfrak{m}$  是  $A$  的唯一的极大理想.

*Proof.* (1)  $v$  是群同态表明  $v(1) = 0$ , 故  $1 \in A$ . 任取  $x, y \in A$ , 那么  $v(x-y) \geq \min(v(x), v(-y)) = \min(v(x), v(y)) \geq 0$ , 所以  $x-y \in A$ . 此外,  $v(xy) = v(x)+v(y) \geq 0$ , 所以  $xy \in A$ . 这就表明  $A$  是  $K$  的子环. 任取  $x \in K^\times$ , 如果  $x \notin A$ , 那么  $v(x) < 0$ , 那么  $0 = v(1) = v(x) + v(x^{-1})$ , 故  $v(x^{-1}) > 0$ , 所以  $x^{-1} \in A$ , 所以必有  $x \in A$  或者  $x^{-1} \in A$ .

(2) 任取  $x \in \mathfrak{m}$ ,  $a \in A$ , 那么  $v(ax) = v(a) + v(x) > 0$ , 所以  $ax \in \mathfrak{m}$ . 任取  $x, y \in \mathfrak{m}$ , 那么  $v(x-y) \geq \min(v(x), v(y)) > 0$ , 所以  $x-y \in \mathfrak{m}$ . 这表明  $\mathfrak{m}$  是  $A$  的一个理想. 任取  $x \in A - \mathfrak{m}$ , 那么  $v(x) = 0$ , 所以  $0 = v(1) = v(x) + v(x^{-1})$  表明  $v(x^{-1}) = 0$ , 故  $x^{-1} \in A$ , 所以  $x \in A^\times$ . 这就表明  $A - \mathfrak{m} = A^\times$ , 所以  $\mathfrak{m}$  是  $A$  唯一的极大理想,  $A$  是局部环.  $\square$

令  $B$  是整环,  $K$  是  $B$  的分式域, 如果对于  $x \neq 0$ , 总是有  $x \in B$  或者  $x^{-1} \in B$  (或者都有), 那么称  $B$  是  $K$  的**赋值环**. 反之, 如果  $K$  的子环  $B$  满足对于  $x \neq 0$ , 总是有  $x \in B$  或者  $x^{-1} \in B$ , 那么  $x = 1/x^{-1} \in \text{Frac}(B)$ , 所以此时  $K$  就是  $B$  的分式域, 即  $B$  是  $K$  的赋值环.

**命题 4.23.**

1.  $B$  是局部环.
2. 如果  $B'$  是环使得  $B \subseteq B' \subseteq K$ , 那么  $B'$  也是  $K$  的赋值环.
3.  $B$  是整闭的 (在  $K$  中).

*Proof.* 令  $\mathfrak{m}$  为  $B$  中所有不是单位的元素的集合. 若  $x \in \mathfrak{m}$ ,  $b \in B$ , 那么  $x^{-1} \notin B$ , 所以  $(bx)^{-1} = b^{-1}x^{-1} \notin B$ , 这就表明一定有  $bx \in B$  且  $bx$  在  $B$  中不可逆, 故  $bx \in \mathfrak{m}$ . 若  $x, y \in \mathfrak{m}$ , 那么  $xy^{-1} \in B$  或者  $x^{-1}y \in B$ , 所以  $x-y = x(1-x^{-1}y) = y(xy^{-1}-1) \in \mathfrak{m}$ . 这表明  $\mathfrak{m}$  是理想, 而  $B - \mathfrak{m} = B^\times$ , 所以  $\mathfrak{m}$  是  $B$  的唯一的极大理想.

(2) 显然.

(3) 令  $x \in K$  在  $B$  上是整的. 那么  $x$  满足方程

$$x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n = 0 \quad (b_i \in B).$$

如果  $x^{-1} \in B$ , 两边乘以  $x^{1-n}$ , 那么

$$x = -(b_1 + b_2 x^{-1} + \cdots + b_n x^{1-n}) \in B.$$

如果  $x^{-1} \notin B$ , 根据定义必有  $x \in B$ . 所以总是有  $x \in B$ , 即  $B$  是整闭的.  $\square$

**命题 4.24.**  $B$  是域  $K$  的赋值环当且仅当存在  $K$  的离散赋值  $v: K^\times \rightarrow \mathbb{Z}$ , 使得

$$B = \{x \in K \mid v(x) \geq 0\}.$$

对于两个局部环  $(A, \mathfrak{m})$  和  $(B, \mathfrak{n})$ , 我们说  $B$  控制  $A$  当且仅当  $A \subseteq B$  并且  $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{n}$ .

**定理 4.25.** 令  $K$  是一个域,  $A \subseteq K$  是子环,  $\mathfrak{p}$  是  $A$  的素理想,  $\Omega$  是包含剩余域  $k(\mathfrak{p})$  的代数闭域, 那么存在  $K$  的一个赋值环  $(B, \mathfrak{m})$  并且其控制  $(A_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})$ , 此外, 存在环同态  $g: B \rightarrow \Omega$  使得  $\ker g = \mathfrak{m}$ .

**注释 4.26.** 若取  $\Omega$  为  $k(\mathfrak{p})$  的代数闭包, 该定理的含义为如下交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} A & \longrightarrow & A_{\mathfrak{p}} & \longrightarrow & k(\mathfrak{p}) & \hookrightarrow & \overline{k(\mathfrak{p})} \\ & & \downarrow & & \downarrow & \nearrow & \\ & & B & \longrightarrow & B/\mathfrak{m} & & \end{array}$$

也就是说: 令  $K$  是一个域,  $A \subseteq K$  是子环,  $\mathfrak{p}$  是  $A$  的素理想, 那么存在  $K$  的一个赋值环  $(B, \mathfrak{m})$  并且其控制  $(A_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})$ , 此外,  $B/\mathfrak{m}$  是  $k(\mathfrak{p})$  的代数扩张.

*Proof.* 对于环  $A$ , 诱导出映射  $f: A \rightarrow A_{\mathfrak{p}} \rightarrow k(\mathfrak{p}) \hookrightarrow \Omega$ . 记集合  $\Sigma$  是二元组  $(A', f')$  的集合, 其中  $A'$  是满足  $A \subseteq A' \subseteq K$  的子环, 映射  $f': A' \rightarrow \Omega$  满足  $f'|_A = f$ . 首先  $(A, f) \in \Sigma$ , 所以  $\Sigma \neq \emptyset$ . 定义  $\Sigma$  上的偏序:  $(A', f') \leq (A'', f'')$  当且仅当  $A' \subseteq A''$  以及  $f''|_{A'} = f'$ .

上述偏序的含义如下: 记  $\mathfrak{p}' = \ker f'$ , 由于  $f': A' \rightarrow \Omega$  表明  $A'/\mathfrak{p}'$  同构于  $\Omega$  的子环是整环, 所以  $\mathfrak{p}'$  是素理想. 类似地, 记素理想  $\mathfrak{p}'' = \ker f''$ . 那么  $f''|_{A'} = f'$  表明  $\mathfrak{p}'' \cap A' = \mathfrak{p}'$ , 即对于  $A' \hookrightarrow A''$  有  $\mathfrak{p}''^c = \mathfrak{p}'$ . 也就是说我们有如下交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} A' & \longrightarrow & A'/\mathfrak{p}' & \longrightarrow & k(\mathfrak{p}') & \hookrightarrow & \Omega \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \nearrow & \\ A'' & \longrightarrow & A''/\mathfrak{p}'' & \longrightarrow & k(\mathfrak{p}'') & & \end{array}$$

令  $\{(A_i, f_i)\}_{i \in I}$  是  $\Sigma$  的一条链. 令  $A_0 = \bigcup_{i \in I} A_i$ , 对于  $x \in A_0$ , 那么存在  $i \in I$  使得  $x \in A_i$ , 定义  $f_0: A_0 \rightarrow \Omega$  为  $f_0(x) = f_i(x)$ .  $f_0$  是良定义的, 因为若同时有  $x \in A_i$

以及  $x \in A_j$ , 设  $(A_i, f_i) \leq (A_j, f_j)$ , 那么  $f_i(x) = f_j(x)$ . 此时  $(A_0, f_0)$  为这条链的上界, 根据 Zorn 引理,  $\Sigma$  有极大元, 记为  $(B, g)$ . 下面我们分三步证明  $B$  就是我们要找的赋值环.

Step 1. 证明  $B$  是局部环, 有极大理想  $\mathfrak{m} = \ker g$ . 首先  $\mathfrak{m}$  是素理想, 并且  $g(B - \mathfrak{m}) \neq 0$ , 所以  $g(B - \mathfrak{m}) \in \Omega^\times$ , 根据分式环的泛性质 3.1, 存在交换图

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{g} & \Omega \\ \downarrow & \nearrow g' & \\ B_{\mathfrak{m}} & & \end{array}$$

$B$  是整环, 所以  $B \rightarrow B_{\mathfrak{m}}$  是单射, 所以  $(B, g) \leq (B_{\mathfrak{m}}, g')$ ,  $(B, g)$  是极大元表明  $B = B_{\mathfrak{m}}$ .

Step 2. 证明若  $x \notin B$ , 则  $\mathfrak{m}B[x] = B[x]$ . 这里  $B[x]$  是  $K$  中同时包含  $B$  和  $x$  的最小的子环. 反证法, 假设  $\mathfrak{m}B[x] \neq B[x]$ , 那么存在  $B[x]$  的极大理想  $\mathfrak{m}'$  包含  $\mathfrak{m}B[x]$ , 那么对于  $B \hookrightarrow B[x]$  有  $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}' \cap B$ , 同时注意到  $\mathfrak{m}' \cap B \neq B$ , 所以  $\mathfrak{m}$  是  $B$  的极大理想表明  $\mathfrak{m}' \cap B = \mathfrak{m}$ . 于是我们有如下交换图:

$$\begin{array}{ccccc} B & \longrightarrow & B/\mathfrak{m} & \hookrightarrow & \Omega \\ \downarrow & & \downarrow & \nearrow & \\ B[x] & \longrightarrow & B[x]/\mathfrak{m}' & & \end{array}$$

↗  $g'$

也就是说, 通过  $b + \mathfrak{m} \mapsto b + \mathfrak{m}'$ ,  $B/\mathfrak{m}$  可以视为  $B[x]/\mathfrak{m}'$  的子域. 注意到  $B[x]/\mathfrak{m}'$  的元素都可以写为  $h(x) + \mathfrak{m}' = \bar{h}(\bar{x}) = \bar{h}(x + \mathfrak{m}')$  的形式 (其中  $h \in B[t]$ ,  $\bar{h} \in B/\mathfrak{m}[t]$ ), 所以  $B[x]/\mathfrak{m}'$  可以视为  $B/\mathfrak{m}[\bar{x}]$ , 而  $B/\mathfrak{m}[\bar{x}]$  是域, 所以  $\bar{x}$  在  $B/\mathfrak{m}$  上是代数的, 那么就存在嵌入  $B[x]/\mathfrak{m}' \hookrightarrow \Omega$ . 那么可以令  $g' : B[x] \rightarrow \Omega$  为上述交换图中的复合映射  $B[x] \rightarrow B[x]/\mathfrak{m}' \rightarrow \Omega$ , 此时有  $(B, g) \leq (B[x], g')$ , 所以  $B = B[x]$ , 这与  $x \notin B$  矛盾. 这就证明了  $\mathfrak{m}B[x] = B[x]$ .

Step 3. 证明  $B$  是  $K$  的赋值环. 若  $x \notin B$ , 那么  $\mathfrak{m}B[x] = B[x]$ , 所以存在  $u_i \in \mathfrak{m}$  使得

$$u_0 + u_1x + \cdots + u_nx^n = 1,$$

即  $1 - u_0 - u_1x - \cdots - u_nx^n = 0$ , 因为  $1 - u_0 \in B - \mathfrak{m} = B^\times$ , 所以

$$x^{-n} - (1 - u_0)^{-1}u_1x^{1-n} - \cdots - (1 - u_0)^{-1}u_n = 0,$$

所以  $x^{-1}$  在  $B$  上是整的,  $B[x^{-1}]$  在  $B$  上是整的. 根据 定理 4.10, 存在  $B[x^{-1}]$  的素理想  $\mathfrak{m}'$  使得  $\mathfrak{m}' \cap B = \mathfrak{m}$ . 实际上  $\mathfrak{m}'$  必为极大理想, 否则存在  $B[x^{-1}]$  的极大理想  $\mathfrak{n}'$  使得  $\mathfrak{m}' \subseteq \mathfrak{n}'$ , 于是  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}' \cap B \subseteq \mathfrak{n}' \cap B$ , 那么  $\mathfrak{n}' \cap B = \mathfrak{m}$ , 根据 推论 4.9, 有  $\mathfrak{m}' = \mathfrak{n}'$ . 再重复上面的叙述, 我们可以得到  $g' : B[x^{-1}] \rightarrow \Omega$  使得  $(B, g) \leq (B[x^{-1}], g')$ , 所以  $B[x^{-1}] = B$ , 故  $x^{-1} \in B$ , 所以  $B$  是  $K$  的赋值环. 此外,  $(B, g) \in \Sigma$  就表明  $A \subseteq B$  以及  $pA_p \subseteq \mathfrak{m} = \ker g$ . □

**推论 4.27.** 令  $A$  是域  $K$  的子环, 那么  $A$  在  $K$  中的整闭包  $\bar{A}$  是  $K$  的所有包含  $A$  的赋值环的交.

*Proof.* 令  $B$  是  $K$  的赋值环且  $A \subseteq B$ . 因为  $B$  是整闭的, 所以  $\bar{A} \subseteq B$ . 故  $\bar{A}$  被  $K$  的所有包含  $A$  的赋值环的交包含.

反之, 令  $x \notin \bar{A}$ , 那么  $x \notin A[x^{-1}] = A'$ , 否则存在  $a_0, \dots, a_n \in A$  使得

$$x = a_0 + a_1 x^{-1} + \dots + a_n x^{-n},$$

即  $x^{n+1} - a_0 x^n - a_1 x^{n-1} - \dots - a_n = 0$ , 这与  $x \notin \bar{A}$  矛盾. 所以  $x^{-1}$  在  $A'$  中不可逆, 因此存在  $A'$  的极大理想  $\mathfrak{m}'$  使得  $x^{-1} \in \mathfrak{m}'$ . 那么存在  $K$  的赋值环  $(B, \mathfrak{m})$  控制  $(A', \mathfrak{m}')$ , 注意  $\mathfrak{m}$  为  $B$  中不可逆元的集合, 所以  $x^{-1} \in A' \subseteq B$  表明  $x \notin B$ .

综上, 这就表明  $\bar{A}$  是  $K$  的所有包含  $A$  的赋值环的交.  $\square$

**命题 4.28.** 令  $A \subseteq B$  是整环,  $B$  是有限生成  $A$ -代数. 令  $v$  是  $B$  中的非零元, 那么存在  $A$  中的非零元  $u$  使得: 任取代数闭域  $\Omega$ , 任意同态  $f: A \rightarrow \Omega$  如果满足  $f(u) \neq 0$ , 那么  $f$  可以被延拓为同态  $g: B \rightarrow \Omega$  使得  $g(v) \neq 0$ .

**注释 4.29.** 记  $\mathfrak{p} = \ker f$  和  $\mathfrak{q} = \ker g$  是素理想, 那么  $g|_A = f$  表明  $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$ , 并且  $f$  可以通过商环分解为  $f: A \rightarrow A/\mathfrak{p} \rightarrow \Omega$ ,  $g$  同理, 所以此时有交换图

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & A/\mathfrak{p} & \longrightarrow & \Omega \\ \downarrow & & \downarrow & \nearrow & \\ B & \longrightarrow & B/\mathfrak{q} & & \end{array}$$

*Proof.* 对  $B$  的生成元的个数归纳, 只需要证明  $B = A[x]$  的情况即可.

若  $x$  在  $A$  上是超越的 (即  $x$  不是任何  $A$  中系数多项式的根). 对于非零元  $v \in B$ , 存在  $a_0, \dots, a_n \in A$  使得  $v = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ , 其中  $a_0 \neq 0$ . 取  $u = a_0$ . 如果同态  $f: A \rightarrow \Omega$  满足  $f(u) \neq 0$ , 考虑  $\Omega[t]$  中的多项式  $f(a_0)t^n + f(a_1)t^{n-1} + \dots + f(a_n)$ ,  $\Omega$  为代数闭域表明  $\Omega$  为无限域, 所以一定存在  $\xi \in \Omega$  使得  $f(a_0)\xi^n + f(a_1)\xi^{n-1} + \dots + f(a_n) \neq 0$ . 定义  $g: B \rightarrow \Omega$  满足  $g(x) = \xi$  以及  $g|_A = f$ , 那么  $g(v) \neq 0$  满足条件.

若  $x$  在  $A$  上是代数的 (即  $x$  是某个  $A$  中系数多项式的根). 那么  $v^{-1} \in \text{Frac}(B)$  也是  $A[x]$  中多项式的根, 所以我们有

$$\begin{aligned} a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m &= 0 \quad (a_i \in A), \\ a'_0 v^{-n} + a'_1 v^{1-n} + \dots + a'_n &= 0 \quad (a'_j \in A). \end{aligned}$$

令  $u = a_0 a'_0$ , 若  $f: A \rightarrow \Omega$  满足  $f(u) \neq 0$ , 那么  $f$  可以延拓为  $f_1: A[u^{-1}] \rightarrow \Omega$ , 满足  $f_1(u^{-1}) = f(u)^{-1}$ . 根据 **定理 4.25**, 存在  $\text{Frac}(B)$  的赋值环  $C$  使得  $C \supseteq A[u^{-1}]$  以及同态  $h: C \rightarrow \Omega$  满足  $h|_A = f_1$ . 由于  $a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m = 0$ , 所以  $u x^m + a_1 a'_0 x^{m-1} + \dots + a_m a'_0 = 0$ , 所以在  $A[u^{-1}]$  中有

$$x^m + a_1 a'_0 u^{-1} x^{m-1} + \dots + a_m a'_0 u^{-1} = 0,$$

即  $x$  在  $A[u^{-1}]$  上是整的. 根据 [推论 4.27](#),  $x \in C$ , 所以  $B \subseteq C$ . 特别地, 有  $v \in C$ . 另一方面, 可以证明  $v^{-1} \in \text{Frac}(B)$  在  $A[u^{-1}]$  上也是整的, 所以  $v^{-1} \in C$ . 故  $v \in C^\times$ , 所以  $h(v) \neq 0$ . 令  $g = h|_B$  即满足要求.  $\square$

**推论 4.30 (Zariski 引理).** 令  $k$  是域,  $B$  是有限生成  $k$ -代数, 如果  $B$  是域, 那么  $B$  是  $k$  的有限 (代数) 扩张.

*Proof.* 取  $A = k$ ,  $v = 1$ ,  $\Omega = \bar{k}$ , 那么嵌入  $j : k \rightarrow \bar{k}$  可以延拓为同态  $g : B \rightarrow \bar{k}$ ,  $g(1) \neq 0$  表明  $g$  是非零同态,  $B$  是域进而表明  $g$  是单同态, 所以  $B$  是  $k$  的代数扩张.  $\square$

[推论 4.30](#) 是 Hilbert 零点定理 (Hilbert's Nullstellensatz) 的一种形式. 后面我们会介绍另一种证明方法 ([命题 6.10](#)).

## 4.5 EXERCISES

**Ex 4.5.1.** 令  $f : A \rightarrow B$  是环的整同态 (即  $B$  在  $f(A)$  上是整的), 证明  $f^* : \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$  是闭映射.

*Proof.*

$\square$

**Ex 4.5.2.** 令  $A$  是  $B$  的子环,  $C$  是  $A$  在  $B$  中的整闭包, 证明  $C[x]$  是  $A[x]$  在  $B[x]$  中的整闭包.

*Proof.*

$\square$

**Ex 4.5.3.**  $A, B$  是两个局部环, 如果  $A$  是  $B$  的子环并且  $A$  的极大理想  $\mathfrak{m}$  被  $B$  的极大理想  $\mathfrak{n}$  包含 (等价地说,  $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cap A$ ), 那么称  $B$  控制  $A$ . 令  $K$  是域,  $\Sigma$  是  $K$  的局部子环的集合, 控制构成了  $\Sigma$  上的一个偏序, 证明  $\Sigma$  有极大元, 并且  $A \in \Sigma$  是极大元当且仅当  $A$  是  $K$  的赋值环.

**Ex 4.5.4.**  $A$  是整环,  $K$  是  $A$  的分式域, 证明下面的说法是等价的:

1.  $A$  是  $K$  的赋值环;
2. 如果  $\alpha, \mathfrak{b}$  是  $A$  的两个理想, 那么  $\alpha \subseteq \mathfrak{b}$  或者  $\mathfrak{b} \subseteq \alpha$ .

由此推断出, 如果  $A$  是一个赋值环,  $\mathfrak{p}$  是  $A$  的一个素理想, 那么  $A_{\mathfrak{p}}$  和  $A/\mathfrak{p}$  都是它们分式域的赋值环.

*Proof.* 若  $A$  是  $K$  的赋值环, 令  $\alpha, \mathfrak{b}$  是  $A$  的两个不相同的理想, 假设  $\alpha \not\subseteq \mathfrak{b}$ , 我们证明  $\mathfrak{b} \subseteq \alpha$ . 任取  $b \in \mathfrak{b}$ ,  $\alpha \not\subseteq \mathfrak{b}$  表明存在  $a \in \alpha - \mathfrak{b}$ .  $A$  是赋值环表明  $a^{-1}b$  或者  $ab^{-1}$  在  $A$  中. 若  $ab^{-1} \in A$ , 那么  $a = b(ab^{-1}) \in \mathfrak{b}$ , 这与  $a \notin \mathfrak{b}$  矛盾, 所以  $a^{-1}b \in A$ , 所以  $b = a(a^{-1}b) \in \alpha$ , 故  $\mathfrak{b} \subseteq \alpha$ .

反过来, 令  $x \in K^\times$ , 假设  $x \notin A$ . 设  $x = a/b$ , 其中  $a, b \neq 0$ , 那么  $(a) \subseteq (b)$  或者  $(b) \subseteq (a)$ , 即  $b \mid a$  或者  $a \mid b$ , 即存在非零的  $c \in A$  使得  $a = bc$  或者  $b = ac$ , 如果  $a = bc$ , 那么  $x = c/1 \in A$ , 所以有  $b = ac$ , 所以  $x^{-1} = b/a = c/1 \in A$ , 所以  $A$  是赋值环.

$A_{\mathfrak{p}}$  的理想都形如  $\alpha_{\mathfrak{p}}$ , 其中  $\alpha$  是  $A$  的被  $\mathfrak{p}$  包含的理想. 所以若  $\alpha_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}$  是  $A_{\mathfrak{p}}$  的两个理想, 那么  $\alpha$  和  $\mathfrak{b}$  是  $A$  的两个理想, 所以  $\alpha \subseteq \mathfrak{b}$  或者  $\mathfrak{b} \subseteq \alpha$ , 所以  $\alpha_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}$  或者  $\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}} \subseteq \alpha_{\mathfrak{p}}$ , 即  $A_{\mathfrak{p}}$  是赋值环.  $A/\mathfrak{p}$  的理想都形如  $\alpha/\mathfrak{p}$ , 其中  $\alpha$  是包含  $\mathfrak{p}$  的理想. 剩余的叙述同理.  $\square$

**Ex 4.5.5.**  $A$  是域  $K$  的赋值环,  $A$  的单位群  $A^\times$  是  $K$  的乘法群  $K^\times$  的子群.

令  $\Gamma = K^\times/A^\times$ , 如果  $\bar{x}, \bar{y} \in \Gamma$ , 定义  $\bar{x} \geq \bar{y}$  为  $xy^{-1} \in A$ . 证明这定义了  $\Gamma$  上的一个全序, 并且与群结构相容 (即  $\bar{x} \geq \bar{y} \Rightarrow \bar{x}\bar{w} \geq \bar{y}\bar{w} (\forall \bar{w} \in \Gamma)$ ). 换句话说,  $\Gamma$  是一个全序的交换群, 被称为  $A$  的**值群**.

令  $v: K^\times \rightarrow \Gamma$  是自然同态, 证明  $v(x+y) \geq \min(v(x), v(y))$ .

*Proof.* 若  $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$  以及  $\bar{y}_1 = \bar{y}_2$ , 那么  $x_1^{-1}x_2 \in A^\times$  以及  $y_1^{-1}y_2 \in A^\times$ . 如果  $\bar{x}_1 \geq \bar{y}_1$ , 那么  $x_1y_1^{-1} \in A$ , 所以

$$x_2y_2^{-1} = (x_2x_1^{-1})(x_1y_1^{-1})(y_1y_2^{-1}) \in A,$$

所以  $\bar{x}_2 \geq \bar{y}_2$ , 所以  $\geq$  是良定义的.

对于任意的  $\bar{x} \in \Gamma$ , 由于  $xx^{-1} = 1 \in A$ , 所以  $\bar{x} \geq \bar{x}$ . 若  $\bar{x} \geq \bar{y}$  以及  $\bar{y} \geq \bar{z}$ , 那么  $xy^{-1} \in A$  以及  $yz^{-1} \in A$ , 所以  $xz^{-1} = (xy^{-1})(yz^{-1}) \in A$ , 所以  $\bar{x} \geq \bar{z}$ . 若  $\bar{x} \geq \bar{y}$  以及  $\bar{y} \geq \bar{x}$ , 那么  $xy^{-1} \in A$  以及  $yx^{-1} \in A$ , 所以  $y^{-1}x = xy^{-1} \in A^\times$ , 所以  $xA^\times = yA^\times$ , 即  $\bar{x} = \bar{y}$ . 这表明  $\geq$  是  $\Gamma$  上的一个偏序. 任取  $\bar{x}, \bar{y} \in \Gamma$ ,  $A$  是赋值环表明  $xy^{-1} \in A$  或者  $yx^{-1} \in A$ , 即  $x \geq y$  或者  $y \geq x$ , 所以  $\geq$  是  $\Gamma$  上的一个全序.

若  $\bar{x} \geq \bar{y}$ , 任取  $\bar{w} \in \Gamma$ , 那么  $xw(yw)^{-1} = xy^{-1} \in A$ , 即  $\bar{x}\bar{w} \geq \bar{y}\bar{w}$ , 所以  $\geq$  与群结构相容.

不妨设  $v(x) \geq v(y)$ , 即  $xy^{-1} \in A$ , 那么  $(x+y)y^{-1} = xy^{-1} + 1 \in A$ , 所以  $v(x+y) \geq v(y) = \min(v(x), v(y))$ .  $\square$





## 链条件

### 5.1 Noether 模和 Artin 模

令  $\Sigma$  是集合, 有偏序  $\leq$ .

**命题 5.1.** 下面的说法是等价的:

1.  $\Sigma$  中的每个上升序列  $x_1 \leq x_2 \leq \dots$  是稳定的 (即存在  $n$  使得  $x_n = x_{n+1} = \dots$ ).
2.  $\Sigma$  的任意非空子集都有极大元.

*Proof.* (1)  $\Rightarrow$  (2) 设  $S \subseteq \Sigma$  是非空子集, 假设其没有极大元. 任取  $x_1 \in S$ , 那么存在  $x_2 \in S$  并且  $x_1 \neq x_2$  使得  $x_1 \leq x_2$ , 否则  $x_1$  就是  $S$  的极大元. 同理, 存在  $x_3 \in S$  并且  $x_2 \neq x_3$  使得  $x_2 \leq x_3$ . 那么我们得到非稳定的上升序列  $x_1 \leq x_2 \leq \dots$ , 矛盾.

(2)  $\Rightarrow$  (1) 对于上式序列  $x_1 \leq x_2 \leq \dots$ , 考虑集合  $(x_i)_{i \geq 1}$ , 这个集合有极大元  $x_n$ , 但是在  $i \geq n$  时有  $x_n \leq x_i$ , 所以只可能  $x_n = x_i$ , 所以  $x_1 \leq x_2 \leq \dots$  是稳定的.  $\square$

对于一个模  $M$  来说, 令  $\Sigma$  是  $M$  的子模的集合, 上面有偏序  $\subseteq$ . 那么 **命题 5.1** 中的 (1) 被称为**升链条件**, 简写为 a.c.c.. (2) 被称为**极大条件**. 一个模  $M$  如果满足这两个等价条件, 那么我们说  $M$  是 **Noether 模**. 一个环  $A$  作为  $A$ -模如果是 Noether 模, 那么我们说  $A$  是 **Noether 环**. 如果  $\Sigma$  上面有偏序  $\supseteq$ , 那么 (1) 被称为**降链条件**, 简写为 d.c.c.. (2) 被称为**极小条件**. 一个模  $M$  如果满足这两个等价条件, 那么我们说  $M$  是 **Artin 模**. 一个环  $A$  作为  $A$ -模如果是 Artin 模, 那么我们说  $A$  是 **Artin 环**.

**例 5.2.** 下面我们列举一些满足或者不满足 a.c.c. 和 d.c.c. 的例子.

1. 有限交换群 (作为  $\mathbb{Z}$ -模) 同时满足 a.c.c. 和 d.c.c., 这是显然的, 因为其只有有限个元素.  $k$  是域,  $V$  是有限维  $k$ -向量空间, 那么  $V$  也同时满足 a.c.c 和 d.c.c., 因为  $V$  的子空间都是有限维的.
2. 假设  $A$  是 PID, 那么  $A$ -子模相当于  $A$  的理想. 令  $(a_1) \subseteq (a_2) \subseteq \dots$  是理想的升链, 那么容易验证  $\bigcup_i (a_i)$  仍然是  $A$  的理想, 所以  $\bigcup_i (a_i) = (a)$ . 那么存在  $(a_n)$  使得  $a \in (a_n)$ , 所以  $(a) \subseteq (a_n)$ , 那么对于  $i \geq n$ , 有  $(a_n) \subseteq (a_i) \subseteq \bigcup_i (a_i) = (a) \subseteq (a_n)$ , 所以  $(a_i) = (a_n)$ . 故  $A$  满足 a.c.c., 即 PID 都满足 a.c.c..
3. 假设  $A$  是整环但不是域, 任取  $a \in A - A^\times$  并且  $a \neq 0$ , 考虑  $(a) \supseteq (a^2) \supseteq (a^3) \supseteq \dots$ , 如果  $(a^n) = (a^{n+1})$ , 那么存在  $b \in A$  使得  $a^n = a^{n+1}b = a^n ab$ , 所以  $ab = 1$ , 与  $a$  不可逆矛盾. 所以上述降链是不稳定的. 这表明非域的整环不满足

d.c.c.. 结合 (2), 我们知道  $\mathbb{Z}$  和域上的多项式环  $k[x]$  是 Noether 环但不是 Artin 环.

4. 考虑  $\mathbb{Z}$ -模

$$G = \left\{ \bar{x} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \mid x = \frac{a}{p^n}, a \in \mathbb{Z}, p \nmid a \right\} = \mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z},$$

令  $G_n = \frac{1}{p^n} \mathbb{Z}/\mathbb{Z}$  是  $G$  的子群 ( $\mathbb{Z}$ -子模). 那么  $G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \cdots$  是严格上升的子模序列, 所以  $G$  不满足 a.c.c.. 下面我们说明  $G$  满足 d.c.c.. 我们说明  $G$  的恰当子群必为有限群, 从而满足 d.c.c.. 设  $H$  是  $G$  的子群. 对于任意  $h = a/p^n \in H$ , 显然  $h$  的阶  $|h| = p^n$ . 令  $p^n = \max\{|h| \mid h \in H\}$ , 其中  $n$  可以为无穷. 若  $n$  有限, 任取  $\bar{a}/p^m \in H$ , 因为  $|\bar{a}/p^m| = p^m \leq p^n$ , 所以  $m \leq n$ , 所以  $\bar{a}/p^m = \overline{ap^{n-m}}/p^n \in G_n$ . 所以  $\langle h \rangle \subseteq H \subseteq G_n$ , 其中  $|h| = p^n$ . 由于  $G_n$  是  $p^n$  阶循环群,  $\langle h \rangle$  也是  $p^n$  阶循环群, 所以  $H = G_n$ . 若  $n$  无穷, 也就是说对于任意的  $m > 0$ , 存在  $h_m = c/p^{n_m} \in H$ , 使得  $|h_m| = p^{n_m} > p^m$ , 那么对于  $\bar{a}/p^m \in G_m$ , 有  $\bar{a}/p^m = \overline{ap^{n_m-m}}/p^{n_m} = \overline{ap^{n_m-m}} \cdot \overline{1/p^{n_m}}$ , 所以  $\langle \bar{1}/p^{n_m} \rangle \supseteq G_m$ , 所以  $H \supseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} G_m = G$ , 即  $H = G$ . 这就说明了  $G$  的恰当子群必为有限群. 所以  $G$  作为  $\mathbb{Z}$ -模是 Artin 模, 但不是 Noether 模.

5. 域上无穷多个未定元的多项式环  $k[x_1, x_2, \dots]$  既不满足 a.c.c. 又不满足 d.c.c.. 因为  $(x_1) \subset (x_1, x_2) \subset (x_1, x_2, x_3) \subset \cdots$  是不稳定的理想升链,  $(x_1) \supset (x_1^2) \supset (x_1^3) \supset \cdots$  是不稳定的理想降链.
6. 我们后面将会证明对于环来说, 满足 d.c.c. 必须满足 a.c.c., 即 Artin 环必为 Noether 环. 对于模来说, (4) 表明模可以满足 d.c.c. 但是不满足 a.c.c..

**命题 5.3.**  $M$  是 Noether  $A$ -模当且仅当  $M$  的每个子模都是有限生成的.

*Proof.* 若  $M$  是 Noether  $A$ -模. 设  $N$  是  $M$  的子模. 令  $\Sigma$  是  $N$  的所有有限生成的子模的集合. 由于  $(0) \in \Sigma$ , 所以  $\Sigma$  非空. 由于  $\Sigma$  也是  $M$  的有限生成子模的集合, 所以存在极大元  $N' = (x_1, \dots, x_n)$ . 如果  $N' \neq N$ , 取  $x \in N - N'$ , 那么  $N' + (x) = (x_1, \dots, x_n, x)$  是  $N$  的有限生成子模, 所以  $N' + (x) \in \Sigma$ , 但是  $N' + (x) \neq N'$ , 与  $N'$  极大矛盾. 所以  $N = N'$  是有限生成的.

若  $M$  的每个子模都是有限生成的. 设  $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \cdots$  是  $M$  的子模序列, 令  $N = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$ . 容易验证  $N$  是  $M$  的子模, 所以是有限生成的. 设  $N = (x_1, \dots, x_n)$ . 那么存在足够大的  $n$  使得  $x_1, \dots, x_n \in N_n$ , 所以  $N \subseteq N_n \subseteq N$ , 所以  $N_n = N$ , 于是  $i \geq n$  时有  $N_i = N$ . 故  $M$  满足 a.c.c., 即  $M$  是 Noether 模.  $\square$

**命题 5.4.** 令  $0 \rightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \rightarrow 0$  是  $A$ -模的正合列, 那么

1.  $M$  是 Noether 模当且仅当  $M'$  和  $M''$  是 Noether 模.
2.  $M$  是 Artin 模当且仅当  $M'$  和  $M''$  是 Artin 模.

*Proof.* 我们只证明 Noether 的情况, Artin 的情况完全类似. 若  $M$  是 Noether 模. 设  $N'_1 \subseteq N'_2 \subseteq \cdots$  是  $M'$  的子模序列, 那么  $\alpha(N'_1) \subseteq \alpha(N'_2) \subseteq \cdots$  是  $M$  的子模序列,

从而是稳定的,  $\alpha$  是单射表明  $N'_1 \subseteq N'_2 \subseteq \cdots$  是稳定的, 所以  $M'$  是 Noether 模. 由于  $M'' \simeq M/\alpha(M')$ , 所以  $M''$  的子模一一对应到  $M$  的包含  $\alpha(M')$  的子模. 设  $\beta(N_1) \subseteq \beta(N_2) \subseteq \cdots$  是  $M''$  的子模序列, 其中  $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \cdots$  是  $M$  的子模序列, 从而是稳定的, 所以  $\beta(N_1) \subseteq \beta(N_2) \subseteq \cdots$  是稳定的, 所以  $M''$  是 Noether 模.

若  $M'$  和  $M''$  都是 Noether 模. 设  $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \cdots$  是  $M$  的子模序列, 那么  $\alpha^{-1}(N_1) \subseteq \alpha^{-1}(N_2) \subseteq \cdots$  是  $M'$  的子模序列,  $\beta(N_1) \subseteq \beta(N_2) \subseteq \cdots$  是  $M''$  的子模序列. 那么存在足够大的  $n$  使得  $\alpha^{-1}(N_n) = \alpha^{-1}(N_{n+1}) = \cdots$  以及  $\beta(N_n) = \beta(N_{n+1}) = \cdots$ . 由于  $\alpha(\alpha^{-1}(N_i)) = N_i \cap \alpha(M')$ ,  $\beta^{-1}(\beta(N_i)) = N_i + \alpha(M')$ , 所以  $i \geq n$  的时候有  $N_i \cap \alpha(M') = N_n \cap \alpha(M')$  以及  $N_i + \alpha(M') = N_n + \alpha(M')$ . 根据同构定理, 有

$$\begin{aligned} N_i/N_n &\simeq (N_i/(N_i \cap \alpha(M')))/(N_n/(N_n \cap \alpha(M'))) \\ &\simeq ((N_i + \alpha(M'))/\alpha(M'))/((N_n + \alpha(M'))/\alpha(M')) \\ &\simeq (N_i + \alpha(M'))/(N_n + \alpha(M')) = 0, \end{aligned}$$

所以  $N_i = N_n$ , 即  $M$  满足 a.c.c.,  $M$  是 Noether 模.  $\square$

**推论 5.5.** 如果  $M_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 是 Noether 模 (Artin 模), 那么  $\bigoplus_{i=1}^n M_i$  也是 Noether 模 (Artin 模).

*Proof.* 对  $n$  归纳, 我们有正合列

$$0 \longrightarrow M_n \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n M_i \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i \longrightarrow 0. \quad \square$$

### 例 5.6.

1. 若  $A$  为 Noether 环 (Artin 环),  $\alpha$  是  $A$  的理想, 那么  $A/\alpha$  是 Noether 环 (Artin 环). 这是因为根据 [命题 5.4](#),  $A/\alpha$  是 Noether  $A$ -模.  $A/\alpha$  的理想一一对应到  $A$  的包含  $\alpha$  的理想 ( $A$  的包含  $\alpha$  的子模), 所以  $A/\alpha$  的理想序列也是  $A/\alpha$  的  $A$ -子模序列, 从而是稳定的, 所以  $A/\alpha$  是 Noether 环 (Artin 环).
2. 若  $A$  为 Noether 环,  $B \subseteq A$  是子环, 注意  $B$  不一定是 Noether 环. 例如  $k[x_1, x_2, \dots]$  不是 Noether 环, 但是其分式域当然是 Noether 环.

**引理 5.7.**  $M$  是有限生成  $A$ -模当且仅当对于某个整数  $n$ , 存在满的  $A$ -模同态  $\varphi: A^n \rightarrow M$ .

*Proof.* 若  $M$  是有限生成的, 设  $x_1, \dots, x_n$  是一组生成元, 考虑映射  $\varphi: A^n \rightarrow M$  为

$$(a_1, \dots, a_n) \mapsto a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n,$$

容易验证这是一个模同态, 并且由于  $x_1, \dots, x_n$  是生成元, 所以  $\varphi$  是满同态.

反过来, 记  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in A^n$ , 其中第  $i$  个分量为 1. 那么任取  $m \in M$ , 存在  $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$  使得  $\varphi(a_1, \dots, a_n) = m$ , 即

$$m = \varphi(a_1, \dots, a_n) = \varphi(a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n) = a_1 \varphi(e_1) + \cdots + a_n \varphi(e_n),$$

故  $M$  由  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$  生成.  $\square$

**命题 5.8.**  $A$  是 Noether 环 (Artin 环),  $M$  是有限生成  $A$ -模, 那么  $M$  是 Noether 模 (Artin 模).

*Proof.* 根据引理 5.7,  $M$  是  $A^n$  的一个商模, 根据推论 5.5,  $A^n$  是 Noether (Artin)  $A$ -模, 所以  $M$  是 Noether 模 (Artin 模).  $\square$

模  $M$  的一个子模链  $(M_i)$  ( $0 \leq i \leq n$ ) 指的是

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_n = 0,$$

其中  $\supset$  表示严格包含. 我们说上述链的长度是  $n$  (即  $\supset$  的个数). 我们说上述链是合成列, 如果上述链的长度是极大的, 也就是说无法在其中插入额外的子模. 等价地说, 每个商模  $M_{i-1}/M_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 是单模 (即子模只有 0 和自身). 上述概念完全类似群的此正规列和合成列.

**命题 5.9.** 假设  $M$  有长度为  $n$  的合成列, 那么  $M$  的每个合成列的长度都是  $n$ , 并且  $M$  的每个链都可以被扩充为一条合成列.

*Proof.* 记  $l(M) = m$  为  $M$  的所有合成列长度的最小值.

我们首先证明: 若  $N \subseteq M$  是子模, 那么  $l(N) \leq l(M)$ , 并且  $l(N) = l(M)$  当且仅当  $N = M$ . 设  $(M_i)$  ( $0 \leq i \leq m$ ) 是  $M$  的最小长度的合成列. 那么  $N_i = N \cap M_i$  是  $N$  的子模, 此时同态  $N_{i-1} \hookrightarrow M_{i-1} \rightarrow M_{i-1}/M_i$  的核为  $N_{i-1} \cap M_i = N \cap M_i = N_i$ , 所以  $N_{i-1}/N_i$  同构于  $M_{i-1}/M_i$  的子模. 而  $M_{i-1}/M_i$  是单模, 所以  $N_{i-1}/N_i = M_{i-1}/M_i$  是单模或者  $N_{i-1}/N_i = 0$ . 若  $N_{i-1}/N_i = 0$ , 那么  $N_{i-1} = N_i$ , 那么可以在  $(N_i)$  中删去其中一个. 所以  $(N_i)$  中删去重复的子模后就是一个合成列, 故  $l(N) \leq l(M)$ . 如果  $l(N) = l(M)$ , 这表明上述序列  $(N_i)$  中没有任何重复项, 即  $N_{i-1}/N_i = M_{i-1}/M_i$  对于所有  $1 \leq i \leq m$  成立. 那么  $N_{m-1} = N_{m-1}/N_m \simeq M_{m-1}/M_m = M_{m-1}$ , 进而

$$M_{m-2}/N_{m-2} \simeq (M_{m-2}/N_{m-1}) / (N_{m-2}/N_{m-1}) = (M_{m-2}/M_{m-1}) / (M_{m-2}/M_{m-1}) = 0,$$

即  $N_{m-2} = M_{m-2}$ , 重复这个过程, 得到  $N_i = M_i$ , 故  $N = M$ .

然后我们说明:  $M$  的任意链的长度都小于等于  $l(M)$ . 设  $(M_i)$  ( $0 \leq i \leq k$ ) 是长度为  $k$  的链. 根据上面的叙述, 有  $l(M_0) > l(M_1) > \cdots > l(M_k) = 0$ , 这就表明  $l(M) = l(M_0) \geq k$ .

对于  $M$  的任意合成列  $(M_i)$  ( $1 \leq i \leq k$ ), 根据上面的叙述有  $k \leq l(M) = m$ , 而  $l(M)$  的最小性表明  $k = l(M)$ . 所以任意合成列都有同样的长度  $l(M)$ . 最后, 对于  $M$  的任意一条链, 如果其长度等于  $l(M)$ , 那么其就是合成列 (否则插入子模后长度会超出  $l(M)$ ), 如果其长度小于  $l(M)$ , 那么我们可以在其中插入一些子模直到无法插入为止.  $\square$

**命题 5.10.**  $M$  有一条合成列当且仅当  $M$  同时满足 a.c.c. 和 d.c.c..

*Proof.* 若  $M$  有一条合成列, 那么  $M$  的任意链都是有限长的, 所以  $M$  自然满足 a.c.c. 和 d.c.c..

若  $M$  同时满足 a.c.c. 和 d.c.c.. 令  $M_0 = M$ . 对于  $M_0$  的真子模的集合,  $M_0$  满足极大条件表明其有极大元  $M_1 \subset M_0$ , 类似地,  $M_1$  有一个极大子模  $M_2 \subset M_1$ . 那么我们得到子模序列  $M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \cdots$ ,  $M$  满足 d.c.c. 表明这个序列是有限长的, 设  $M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \cdots \supset M_n = M_{n+1} = \cdots$ , 此时必有  $M_n = 0$ , 否则  $M_n$  有极大子模  $M_{n+1}$ , 矛盾. 所以我们得到子模序列

$$M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \cdots \supset M_n = 0,$$

$M_i$  是  $M_{i-1}$  的极大子模表明  $M_{i-1}/M_i$  是单模, 所以上述序列就是一条合成列.  $\square$

一个同时满足 a.c.c. 和 d.c.c. 的模被称为**有限长的**. 由于  $M$  的合成列拥有相同的长度  $l(M)$ , 我们把  $l(M)$  称为  $M$  的**长度**. 类似有限群, 模的合成列也有 Jordan-Hölder 定理, 这里就不叙述了, 证明是完全一致的.

**命题 5.11.** 长度  $l(M)$  是所有有限长  $A$ -模的类上的一个加性函数.

*Proof.* 设  $0 \rightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \rightarrow 0$  是正合列, 其中  $M', M, M''$  都是有限长的  $A$ -模. 我们需要证明  $l(M) = l(M') + l(M'')$ .

由于有同构  $M/\alpha(M') \simeq M''$ , 所以  $M''$  的子模都形如  $\beta(N)$ , 其中  $N$  是  $M$  的包含  $\alpha(M')$  的子模. 设  $M'$  的一条合成列为  $(M'_i) (0 \leq i \leq n)$ ,  $M''$  的一条合成列为  $(\beta(M_i)) (0 \leq i \leq m)$ , 其中  $M_i$  是  $M$  的包含  $\alpha(M')$  的子模. 注意到  $\beta^{-1}(\beta(M_0)) = \beta^{-1}(M'') = M, \beta^{-1}(\beta(M_m)) = \beta^{-1}(0) = \ker \beta = \alpha(M')$ . 所以我们可以将  $(\beta^{-1}(\beta(M_i)))$  和  $(\alpha(M'_i))$  首尾相接得到  $M$  的链

$$\begin{aligned} M &= \beta^{-1}(\beta(M_0)) \supset \beta^{-1}(\beta(M_1)) \supset \cdots \supset \beta^{-1}(\beta(M_m)) = \alpha(M') \\ &= \alpha(M'_0) \supset \alpha(M'_1) \supset \cdots \supset \alpha(M'_n) = 0, \end{aligned}$$

根据同构第二定理,  $\beta : M \rightarrow M''$  给出了同构

$$\begin{aligned} \beta^{-1}(\beta(M_{i-1}))/\beta^{-1}(\beta(M_i)) &\simeq \beta(\beta^{-1}(\beta(M_{i-1})))/\beta(\beta^{-1}(\beta(M_i))) \\ &= \beta(M_{i-1})/\beta(M_i), \end{aligned}$$

所以  $\beta^{-1}(\beta(M_{i-1}))/\beta^{-1}(\beta(M_i))$  是单模. 另一方面,  $\alpha : M' \rightarrow M$  给出了同构

$$M'_{i-1}/M'_i \simeq \alpha(M'_{i-1})/\alpha(M'_i),$$

所以  $\alpha(M'_{i-1})/\alpha(M'_i)$  是单模. 故上述链是  $M$  的一条合成列, 所以  $l(M) = m + n = l(M') + l(M'')$ .  $\square$

**命题 5.12.** 对于  $k$ -向量空间  $V$ , 下面的说法是等价的:

1.  $V$  是有限维的;
2.  $V$  是有限长的  $k$ -模;
3.  $V$  满足 a.c.c.;

4.  $V$  满足 d.c.c..

*Proof.* (1)  $\Rightarrow$  (2)  $V$  有限维表明  $V$  的子空间序列必然满足 a.c.c. 和 d.c.c., 所以  $V$  是有限长的. (2)  $\Rightarrow$  (3) 和 (2)  $\Rightarrow$  (4) 是有限长的定义.

(3)  $\Rightarrow$  (1) 假设  $V$  不是有限维的, 那么存在无限多个  $V$  中的线性无关的元素  $(x_i)_{i \geq 1}$ , 令  $V_i$  为子空间  $\text{span}(x_1, \dots, x_i)$ , 那么  $(V_i)$  是  $V$  的一个子空间升链, 但是其不是稳定的, 与  $V$  满足 a.c.c. 矛盾.

(4)  $\Rightarrow$  (1) 假设  $V$  不是有限维的, 那么存在无限多个  $V$  中的线性无关的元素  $(x_i)_{i \geq 1}$ , 令  $V_i$  为子空间  $\text{span}(x_i, x_{i+1}, \dots)$ , 那么  $(V_i)$  是  $V$  的一个子空间降链, 但是其不是稳定的, 与  $V$  满足 d.c.c. 矛盾.  $\square$

**引理 5.13.**  $M$  是  $A$ -模, 有一条链

$$M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \cdots \supset M_n = 0,$$

那么  $M$  满足 a.c.c. (d.c.c.) 当且仅当对于所有  $1 \leq i \leq n$ ,  $M_{i-1}/M_i$  满足 a.c.c. (d.c.c.).

*Proof.* 若  $M$  满足 a.c.c. (d.c.c.),  $M_i$  作为  $M$  的子模满足 a.c.c. (d.c.c.), 所以  $M_{i-1}/M_i$  作为  $M_{i-1}$  的商模 a.c.c. (d.c.c.).

若  $M_{i-1}/M_i$  满足 a.c.c. (d.c.c.). 那么  $M_{n-1} = M_{n-1}/M_n$  满足 a.c.c. (d.c.c.), 又因为  $M_{n-2}/M_{n-1}$  也满足 a.c.c. (d.c.c.), 考虑正合列  $0 \rightarrow M_{n-1} \rightarrow M_{n-2} \rightarrow M_{n-2}/M_{n-1} \rightarrow 0$ , 所以  $M_{n-2}$  满足 a.c.c. (d.c.c.). 以此类推, 得到  $M$  满足 a.c.c. (d.c.c.).  $\square$

**推论 5.14.** 令  $A$  是环, 其零理想是一些极大理想的乘积  $\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n$ , 那么  $A$  是 Noether 环当且仅当  $A$  是 Artin 环.

*Proof.* 考虑  $A$  的理想链  $A \supset \mathfrak{m}_1 \supseteq \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n = 0$ .  $\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_{i-1}/\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_i$  作为  $A$ -模来说零化子包含  $\mathfrak{m}_i$ , 所以其可以视为  $A/\mathfrak{m}_i$  上的向量空间, 命题 5.12 表明对于  $\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_{i-1}/\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_i$  而言 a.c.c. 等价于 d.c.c.. 再根据引理 5.13,  $A$  满足 a.c.c. 等价于  $\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_{i-1}/\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_i$  都满足 a.c.c., 等价于  $\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_{i-1}/\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_i$  都满足 d.c.c., 等价于  $A$  满足 d.c.c..  $\square$

# Noether 环

## 6.1 Noether 环

在上一章, 我们已经得到一个环  $A$  是 Noether 环的三个等价条件:

1.  $A$  的每个非空的理想集合都有极大元.
2.  $A$  的每个理想升链都是稳定的.
3.  $A$  的每个理想都是有限生成的.

**命题 6.1.** 如果  $A$  是 Noether 环,  $\phi: A \rightarrow B$  是满同态, 那么  $B$  是 Noether 环.

*Proof.*  $B \simeq A/\ker \phi$  是  $A$  的商环, 所以是 Noether 环. □

**命题 6.2.** 令  $A$  是  $B$  的子环, 若  $A$  是 Noether 环,  $B$  是有限生成  $A$ -模, 那么  $B$  是 Noether 环.

*Proof.* **命题 5.8** 告诉我们  $B$  是 Noether  $A$ -模. 由于  $B$  的理想也是  $A$ -子模, 所以  $B$  的理想升链也是  $B$  的  $A$ -子模升链, 所以是稳定的, 所以  $B$  是 Noether 环. □

**例 6.3.**  $\mathbb{Z}[i]$  是 Noether 环. 更一般地, 回到 **命题 4.19**, 如果  $A$  是 Noether 的整闭整环,  $L$  是  $K = \text{Frac}(A)$  的有限可分扩张,  $B$  是  $A$  在  $L$  中的整闭包, 那么存在  $L$  的一组基  $v_1, \dots, v_n$  使得  $A \subseteq B \subseteq Av_1 + \dots + Av_n$ , 而  $Av_1 + \dots + Av_n$  是有限生成  $A$ -模, 从而是 Noether  $A$ -模, 所以  $B$  也是 Noether  $A$ -模, 根据 **命题 6.2**,  $B$  是 Noether 环. 若  $L/\mathbb{Q}$  是有限扩张, 记  $\mathcal{O}_L$  为  $\mathbb{Z}$  在  $L$  中的整闭包, 我们称  $\mathcal{O}_L$  是  $L$  的**整数环**. 根据上面的叙述, 我们知道  $\mathcal{O}_L$  是 Noether 环以及 Noether  $\mathbb{Z}$ -模. 根据 ED 上有限生成模的结构定理, 由于  $\mathcal{O}_L$  是无扭模, 所以  $\mathcal{O}_L \simeq \mathbb{Z}^n$ , 这证明了整基的存在性, 是代数数论中一个非常重要的基本结果.

**命题 6.4.** 如果  $A$  是 Noether 环,  $S$  是  $A$  的乘性子集, 那么  $S^{-1}A$  是 Noether 环.

*Proof.*  $S^{-1}A$  的理想都是  $A$  中理想的扩张, 所以若  $(S^{-1}\alpha_i)$  是  $S^{-1}A$  的一个理想升链, 那么  $(\alpha_i)$  是  $A$  的一个理想升链, 从而是稳定的, 所以  $S^{-1}A$  是 Noether 环. □

**定理 6.5 (Hilbert 基定理).** 若  $A$  是 Noether 环, 那么  $A[x]$  是 Noether 环.

*Proof.* 令  $\alpha$  为  $A[x]$  的理想. 对于多项式  $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \in A[x]$  ( $a_0 \neq 0$ ), 定义首项系数  $\text{LC}(f(x)) = a_0$ . 定义  $\text{LC}(0) = 0$ . 记

$$\text{LC}(\alpha) = \{\text{LC}(f(x)) \mid f(x) \in \alpha\}.$$

我们首先说明  $\text{LC}(\alpha)$  是  $A$  的理想. 任取  $a, b \in \text{LC}(\alpha)$ , 即存在  $f(x), g(x) \in \alpha$  使得  $f(x) = ax^n + \cdots$  以及  $g(x) = bx^m + \cdots$ . 设  $n \geq m$ , 若  $a - b \neq 0$ , 那么  $f(x) - x^{n-m}g(x) = (a - b)x^n + \cdots$ , 所以  $a - b = \text{LC}(f(x) - x^{n-m}g(x)) \in \text{LC}(\alpha)$ . 否则  $a - b = 0$ , 显然有  $a - b = 0 = \text{LC}(0) \in \text{LC}(\alpha)$ . 任取  $c \in A, a \in \text{LC}(\alpha)$ . 即存在  $f(x) \in \alpha$  使得  $f(x) = ax^n + \cdots$ , 那么  $ca = \text{LC}(cf(x)) \in \text{LC}(\alpha)$ . 这就表明  $\text{LC}(\alpha)$  是  $A$  的理想.

因为  $A$  是 Noether 环, 所以  $\text{LC}(\alpha) = (a_1, \dots, a_n)$ . 设  $a_i = \text{LC}(f_i(x))$ , 其中  $f_i(x) = a_i x^{r_i} + \cdots \in \alpha$ . 取  $r = \max\{r_1, \dots, r_n\}$ . 令  $\alpha' = (f_1, \dots, f_n) \subseteq \alpha$ . 对于任意的  $f(x) \in \alpha$ , 设  $f(x) = bx^m + \cdots$ , 如果  $m \geq r$ , 由于  $b \in \text{LC}(\alpha)$ , 所以  $b = c_1 a_1 + \cdots + c_n a_n$ , 其中  $c_i \in A$ , 所以  $f(x) = \sum_{i=1}^n c_i x^{m-r_i} f_i(x) + g(x)$ ,  $\deg g(x) < m$ . 若  $\deg g(x) \geq r$ , 重复上述操作, 直到得到

$$f(x) = q_1(x)f_1(x) + \cdots + q_n(x)f_n(x) + h(x),$$

其中  $\deg h(x) < r$ . 定义子模  $M = A + Ax + \cdots + Ax^{r-1} \subseteq A[x]$ , 那么  $M$  是有限生成  $A$ -模, 所以是 Noether  $A$ -模. 上式表明  $\alpha = \alpha' + \alpha \cap M$ , 其中  $\alpha \cap M$  是  $M$  的子模, 从而是有限生成  $A$ -模, 设  $\alpha \cap M = Ag_1(x) + \cdots + Ag_m(x)$ . 那么此时有  $\alpha = (f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_m)$ , 故  $\alpha$  为有限生成的理想, 所以  $A[x]$  是 Noether 环.  $\square$

**推论 6.6.** 如果  $A$  是 Noether 环, 那么  $A[x_1, \dots, x_n]$  也是 Noether 环.

**注释 6.7.** 类比上述证明, 可以证明如果  $A$  是 Noether 环, 那么  $A[[x]]$  是 Noether 环.

**推论 6.8.** 令  $B$  是有限生成  $A$ -代数, 如果  $A$  是 Noether 环, 那么  $B$  也是 Noether 环. 特别地, 任意有限生成环 (有限生成  $\mathbb{Z}$ -代数) 和域上的有限生成代数都是 Noether 环.

*Proof.* 存在环的满同态  $f: A[x_1, \dots, x_n] \rightarrow B$ , 由于  $A[x_1, \dots, x_n]$  是 Noether 环, 所以  $B$  作为  $A[x_1, \dots, x_n]$  的商环是 Noether 环.  $\square$

**命题 6.9 (Artin-Tate).** 令  $A \subseteq B \subseteq C$  是环, 假设  $A$  是 Noether 环,  $C$  是有限生成  $A$ -代数, 并且  $C$  满足下面两个等价条件:

1.  $C$  是有限生成  $B$ -模;
2.  $C$  在  $B$  上是整的.

那么  $B$  是有限生成  $A$ -代数.

*Proof.* 若  $C$  是有限生成  $B$ -模, 任取  $c \in C$ , 根据 **命题 4.1** 的 (3),  $c$  在  $B$  上是整的, 所以  $C$  在  $B$  上是整的. 若  $C$  在  $B$  上是整的, 由于  $C$  是有限生成  $A$ -代数, 自然也是有限生成  $B$ -代数, 根据 **推论 4.2**, 所以  $C$  是有限生成  $B$ -模. 这就说明了这两个条件等价, 我们使用条件 (1).



令  $x_1, \dots, x_m \in C$  是  $C$  作为  $A$ -代数的生成元,  $y_1, \dots, y_n \in C$  是  $C$  作为  $B$ -模的生成元. 那么

$$x_i = \sum_j b_{ij} y_j \quad (b_{ij} \in B), \quad y_i y_j = \sum_k b_{ijk} y_k \quad (b_{ijk} \in B).$$

令  $B_0$  是  $b_{ij}$  和  $b_{ijk}$  生成的  $A$ -代数. 因为  $A$  是 Noether 环, 根据 **推论 6.8**,  $B_0$  是 Noether 环. 并且我们有  $A \subseteq B_0 \subseteq B$ .

$C$  的元素都可以写为  $A$ -系数的  $x_1, \dots, x_m$  组成的多元多项式, 将  $x_i$  按照上式替换为  $y_1, \dots, y_n$ , 即  $C$  的元素都可以写为  $B_0$ -系数的  $y_1, \dots, y_n$  组成的多元多项式. 通过上式又可以把  $y_1, \dots, y_n$  的多元多项式写为  $y_1, \dots, y_n$  的  $B_0$ -线性组合, 所以  $C$  是有限生成  $B_0$ -模. 因为  $B_0$  是 Noether 环, 所以  $C$  是 Noether  $B_0$ -模, 所以  $B$  作为  $C$  的子模也是 Noether  $B_0$ -模, 所以  $B$  是有限生成  $B_0$ -模. 又因为  $B_0$  是有限生成  $A$ -代数, 所以  $B$  是有限生成  $A$ -代数.  $\square$

**命题 6.10 (Zariski 引理).**  $k$  是域,  $E$  是有限生成  $k$ -代数, 如果  $E$  是域, 那么  $E$  是  $k$  的有限 (代数) 扩张.

*Proof.* 令  $E = k[x_1, \dots, x_n]$ . 假设  $E/k$  是超越扩张, 那么通过调整生成元的顺序, 将其中的  $k$  上的超越元挑出来, 我们可以假设  $F = k(x_1, \dots, x_r)$ , 其中  $r \geq 1$ . 此时  $E/F$  是有限代数扩张,  $F/k$  是超越扩张.

根据 **命题 6.9**,  $F$  是有限生成  $k$ -代数, 所以存在  $f_1/g_1, \dots, f_m/g_m \in F$  使得  $F = k[f_1/g_1, \dots, f_m/g_m]$ , 其中  $f_i, g_i \in k[x_1, \dots, x_r]$ . 由于  $k[x_1, \dots, x_r]$  是 UFD, 所以我们可以选取  $g_1 \cdots g_m + 1$  的一个素因子  $h$ , 显然  $h$  不会整除任意  $g_i$ , 这就表明  $1/h \notin k[f_1/g_1, \dots, f_m/g_m] = F$ , 这与  $h \in k(x_1, \dots, x_r) = F$  是矛盾的. 所以  $E/k$  只能是代数扩张.  $\square$

## 6.2 Hilbert's Nullstellensatz

根据 Zariski 引理可以立即得到两个推论.

**推论 6.11.**  $k$  是域,  $A$  是有限生成  $k$ -代数,  $\mathfrak{m}$  是  $A$  的极大理想, 那么通过  $k \rightarrow A \rightarrow A/\mathfrak{m}$  (注意这一定是单射),  $A/\mathfrak{m}$  可以视为  $k$  的扩域, 此时  $[A/\mathfrak{m} : k] < \infty$ . 特别地, 如果  $k$  是代数闭域, 那么此时  $A/\mathfrak{m} \simeq k$ .

**推论 6.12.** 若  $k$  是代数闭域, 那么多项式环  $A = k[x_1, \dots, x_n]$  的极大理想  $\mathfrak{m}$  必然形如

$$\mathfrak{m} = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n),$$

其中  $a_1, \dots, a_n \in k$ .

*Proof.* 此时  $A/\mathfrak{m} \simeq k$ , 设  $\varphi : A/\mathfrak{m} \rightarrow k$  是同构, 记  $a_i = \varphi(\bar{x}_i)$ . 又因为  $\varphi(\bar{a}_i) = a_i$ , 所以  $\bar{x}_i = \bar{a}_i$ , 即  $x_i - a_i \in \mathfrak{m}$ , 所以  $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) \subseteq \mathfrak{m}$ . 而  $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$  是  $A$  的极大理想, 所以只可能  $\mathfrak{m} = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ .  $\square$

**推论 6.12** 告诉我们  $k^n$  中的点和  $k[x_1, \dots, x_n]$  的极大理想之间存在一一对应. 实际上, 我们可以导出更一般地对应关系, 即 Hilbert 零点定理 (Hilbert's Nullstellensatz).

对于一个域  $k$ , 令  $\Sigma \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ . 定义  $\Sigma$  的零点集为

$$V(\Sigma) = \{z \in k^n \mid f(z) = 0, \forall f \in \Sigma\}.$$

子集  $S \subseteq k^n$  被称为**代数集**, 如果存在  $\Sigma \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$  使得  $S = V(\Sigma)$ .

**例 6.13.**  $\Sigma = \{xy\} \subseteq \mathbb{R}[x, y]$  的零点集  $V(\Sigma)$  是  $x$  轴与  $y$  轴.  $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{C}$  不是代数集. 因为如果  $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \subseteq \mathbb{C}[x]$ , 那么显然有  $V(\Sigma_1) \supseteq V(\Sigma_2)$ , 所以如果  $\mathbb{Z} = V(\Sigma)$ , 那么  $V(\Sigma) \subseteq V(f)$ , 其中  $f \in \mathbb{C}[x]$ . 但是  $V(f)$  一定是有限集, 所以这不可能.

**命题 6.14 (零点集的性质).**  $k$  是域, 令  $\Sigma \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ , 那么  $V(\Sigma) = V((\Sigma)) = V(\sqrt{(\Sigma)})$ , 其中  $(\Sigma)$  为  $\Sigma$  生成的理想.

**注释 6.15.** 这个命题告诉我们, 即使我们考虑无限多项式集合  $\Sigma$  的零点集, 那么我们有  $V(\Sigma) = V((\Sigma))$ , 而  $k[x_1, \dots, x_n]$  是 Noether 环, 所以  $(\Sigma)$  是有限生成的, 即  $(\Sigma) = (f_1, \dots, f_n)$ , 那么  $V(\Sigma) = V((f_1, \dots, f_n)) = V(f_1, \dots, f_n)$ , 所以考虑无限多个多项式集合的零点集本质上还是考虑有限多个多项式集合的零点集.

*Proof.* 显然有  $V((\Sigma)) \subseteq V(\Sigma)$ . 令  $z \in V(\Sigma)$ , 即对于任意的  $f \in \Sigma$ , 有  $f(z) = 0$ . 任取  $g \in (\Sigma)$ , 即  $g = \sum h_i f_i$ , 其中  $h_i \in k[x_1, \dots, x_n]$ ,  $f_i \in \Sigma$ , 所以  $g(z) = 0$ , 即  $z \in V((\Sigma))$ . 所以  $V(\Sigma) = V((\Sigma))$ . 由于  $(\Sigma) \subseteq \sqrt{(\Sigma)}$ , 所以  $V(\sqrt{(\Sigma)}) \subseteq V((\Sigma))$ . 任取  $z \in V((\Sigma))$ , 即对于任意的  $f \in (\Sigma)$  有  $f(z) = 0$ , 那么任取  $g \in \sqrt{(\Sigma)}$ , 存在  $n$  使得  $g^n \in (\Sigma)$ , 故  $g^n(z) = 0$ , 故  $g(z) = 0$ , 所以  $V((\Sigma)) = V(\sqrt{(\Sigma)})$ .  $\square$

对于子集  $S \subseteq k^n$ , 定义

$$I(S) = \{f \in k[x_1, \dots, x_n] \mid f(x) = 0, \forall x \in S\}.$$

**命题 6.16.** 上述  $I(S)$  是一个根理想, 即  $I(S)$  是  $k[x_1, \dots, x_n]$  的一个理想, 并且  $\sqrt{I(S)} = I(S)$ .

*Proof.* 按定义不难验证  $I(S)$  是理想. 任取  $f \in \sqrt{I(S)}$ , 即存在  $n$  使得  $f^n(x) = 0$  对于任意  $x \in S$  成立, 那么  $f(x) = 0$  对任意  $x \in S$  成立, 所以  $f \in I(S)$ , 故  $\sqrt{I(S)} = I(S)$ .  $\square$

**命题 6.17 ( $I$  和  $V$  的基本性质).** 令  $k$  是域,  $I$  和  $V$  给出了  $k^n$  的代数集和  $k[x_1, \dots, x_n]$  的理想之间的映射:

$$\{k^n \text{ 的代数集} \} \xrightleftharpoons[V]{I} \{k[x_1, \dots, x_n] \text{ 的理想} \}.$$

那么

1.  $V(\alpha) = V(\sqrt{\alpha})$ .
2.  $V(0) = k^n$ ,  $V(k[x_1, \dots, x_n]) = \emptyset$ .

3.  $\alpha \subseteq \mathfrak{b}$  表明  $V(\mathfrak{b}) \subseteq V(\alpha)$ .
4.  $V(\sum_{i \in \Gamma} \alpha_i) = \bigcap_{i \in \Gamma} V(\alpha_i)$ .
5.  $V(\alpha\mathfrak{b}) = V(\alpha \cap \mathfrak{b}) = V(\alpha) \cup V(\mathfrak{b})$ .
6.  $V(I(S)) = S$  当且仅当存在某个理想  $\alpha$  使得  $S = V(\alpha)$ .

**命题 6.18.**