Contents

1

李代数

1.1 定义和初步例子

定义 1.1. 一个**有限维实或者复李代数**指的是一个有限维的实或者复向量空间 $\mathfrak{g}$，配备一个映射 $[\cdot,\cdot]:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$，满足：

1. $[\cdot,\cdot]$ 是双线性的.
2. $[\cdot,\cdot]$ 是反对称的：对于任意 $X,Y\in\mathfrak{g}$ 有 $[X,Y]=-[Y,X]$.
3. Jacobi 恒等式：对于任意 $X,Y,Z\in\mathfrak{g}$ 有

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0.$$

若 $[X,Y]=0$，那么我们说 X,Y 是**可交换的**. 如果对于所有 $X,Y\in\mathfrak{g}$ 都有 $[X,Y]=0$，那么我们说 $\mathfrak{g}$ 是**可交换的**.

$[\cdot,\cdot]$ 通常被称为 $\mathfrak{g}$ 上的李括号. 注意到反对称性表明 $[X,X]=0$. 李括号运算通常不满足结合律, 然而 Jacobi 恒等式可以被视为结合律的替代方案.

例 1.2. 令 $\mathfrak{g}=\mathbb{R}^3$, $[\cdot,\cdot]:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 定义为

$$[x,y]=x\times y,$$

其中 $x\times y$ 是向量叉乘. 那么 $\mathfrak{g}$ 是一个李代数.

Proof. 双线性性和反对称性是显然的. 根据双线性性, 只需要对基向量 e_1,e_2,e_3 验证 Jacobi 恒等式即可. 如果 j,k,l 互不相同, 那么 e_j,e_k,e_l 中任意两个的叉乘等于第三个或者第三个的相反方向, 所以 Jacobi 恒等式中每一项都是 0. 于是只需要验证 j,k,l 中有两个相同的情况即可, 通过重新排序, 只需要验证

$$[e_j,[e_j,e_k]]+[e_j,[e_k,e_j]]+[e_k,[e_j,e_j]]=0,$$

上式的前两项相反, 第三项为零, 故叉乘满足 Jacobi 恒等式. □

例 1.3. 令 $\mathcal{A}$ 是结合代数, $\mathfrak{g}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个子空间, 使得任意的 $X,Y\in\mathfrak{g}$ 有 $XY-YX\in\mathfrak{g}$. 那么 $\mathfrak{g}$ 是一个李代数, 有李括号

$$[X,Y]=XY-YX.$$

Proof. 双线性性和反对称性是显然的. 对于 Jacobi 恒等式, 每个双层李括号会产生 4 项, 所以总共有 12 项, 即

$$[X,[Y,Z]] = [X, YZ - ZY] = XYZ - XZY - YZX + ZYX,$$

对 X, Y, Z 进行轮换, 那么正项负项刚好抵消, 故这是一个李代数. □

如果我们仔细观察 Jacobi 恒等式的证明, 我们会发现 XYZ 实际上以两种方式出现, 一种是 $X(YZ)$, 一种是 $(XY)Z$. 所以代数 $\mathcal{A}$ 的结合性是重要的. 对于任意李代数, Jacobi 恒等式意味着李括号的行为**就像**在某个结合代数中的 $XY - YX$ 一样, 即使这个李括号本身不是这样定义的 (比如叉乘). 实际上, 可以证明每个李代数 $\mathfrak{g}$ 都可以嵌入到一个结合代数 $\mathcal{A}$ 中, 使得其李括号变成 $XY - YX$.

例 1.4. 令 $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ 是所有满足 $\operatorname{tr} X = 0$ 的 $X \in M_n(\mathbb{C})$ 构成的空间. 那么 $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ 是李代数, 有李括号 $[X,Y] = XY - YX$.

Proof. 我们有

$$\operatorname{tr}(XY - YX) = \operatorname{tr}(XY) - \operatorname{tr}(YX) = 0,$$

所以可以应用 **??**. □

定义 1.5. 实或者复李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个**子代数**指的是一个子空间 $\mathfrak{h}$ 使得任取 $H_1, H_2 \in \mathfrak{h}$ 有 $[H_1, H_2] \in \mathfrak{h}$. 如果 $\mathfrak{g}$ 是复李代数, $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的实子空间并且对李括号封闭, 那么 $\mathfrak{h}$ 被称为 $\mathfrak{g}$ 的**实子代数**.

李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个子代数 $\mathfrak{h}$ 被称为 $\mathfrak{g}$ 中的**理想**, 如果对于任意 $H \in \mathfrak{h}, X \in \mathfrak{g}$ 有 $[X,H] \in \mathfrak{h}$.

李代数 $\mathfrak{g}$ 的**中心**指的是一些 $X \in \mathfrak{g}$ 的集合, 对于每个 X, 其使得任取 $Y \in \mathfrak{g}$, 有 $[X,Y] = 0$.

定义 1.6. 如果 $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ 是李代数, 线性映射 $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 满足 $\phi([X,Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$, 那么 ϕ 被称为**李代数同态**. 此外, 如果 ϕ 是双射, 那么 ϕ 被称为**李代数同构**.

定义 1.7. 如果 $\mathfrak{g}$ 是李代数, $X \in \mathfrak{g}$, 定义线性映射 $\operatorname{ad}_X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 为

$$\operatorname{ad}_X(Y) = [X,Y].$$

映射 $X \mapsto \operatorname{ad}_X$ 被称为**伴随映射**或者**伴随表示**.

虽然 $\operatorname{ad}_X(Y)$ 就是 $[X,Y]$, 但是 ad 的记号是有方便的. 例如, 我们可以把

$$[X,[X,[X,[X,Y]]]]$$

写为 $(\operatorname{ad}_X)^4(Y)$. 此外, 映射 $X \mapsto \operatorname{ad}_X$ 可以视为 $\mathfrak{g} \to \operatorname{End}(\mathfrak{g})$ 的映射. Jacobi 恒等式等价于 ad_X 是李括号的**导子**:

$$\operatorname{ad}_X([Y,Z]) = [\operatorname{ad}_X(Y), Z] + [Y, \operatorname{ad}_X(Z)]. \tag{1.1}$$

命题 1.8. 如果 $\mathfrak{g}$ 是李代数，那么

$$\mathrm{ad}_{[X,Y]} = \mathrm{ad}_X\,\mathrm{ad}_Y - \mathrm{ad}_Y\,\mathrm{ad}_X = [\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_Y],$$

也就是说 $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ 是李代数同态.

Proof. 注意到

$$\mathrm{ad}_{[X,Y]}(Z) = [[X,Y],Z],$$

并且

$$[\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_Y](Z) = [X,[Y,Z]] - [Y,[X,Z]],$$

所以上式等价于 Jacobi 恒等式. □

定义 1.9. 如果 $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ 是李代数，那么直和 $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ 也是李代数，配备李括号

$$[(X_1,X_2),(Y_1,Y_2)] = ([X_1,Y_1],[X_2,Y_2]).$$

如果 $\mathfrak{g}$ 是李代数，$\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ 是两个子代数，作为向量空间有 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ 并且对于 $X_1 \in \mathfrak{g}_1, X_2 \in \mathfrak{g}_2$ 有 $[X_1, X_2] = 0$，那么我们说 $\mathfrak{g}$ 分解为 $\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}_2$ 的直和.

定义 1.10. 令 $\mathfrak{g}$ 是有限维实或者复李代数，$X_1, \ldots, X_N$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一组基，那么有唯一的常数 c_{jkl} 使得

$$[X_j, X_k] = \sum_{l=1}^{N} c_{jkl} X_l,$$

c_{jkl} 被称为 $\mathfrak{g}$ 的**结构常数**.

虽然我们不会经常遇到结构常数, 但是在物理课程中会经常使用. 结构常数满足下面两个恒等式: 对于 j,k,l,m 有

$$\begin{aligned} c_{jkl} + c_{kjl} &= 0, \\ \sum_n (c_{jkn}c_{nlm} + c_{kln}c_{njm} + c_{ljn}c_{nkm}) &= 0, \end{aligned}$$

第一个式子来源于反对称性, 第二个式子来源于 Jacobi 恒等式.

1.2 单、可解和幂零的李代数

定义 1.11. 一个李代数 $\mathfrak{g}$ 被称为**不可约的**，如果 $\mathfrak{g}$ 中的理想只有 $\mathfrak{g}$ 和 $\{0\}$. $\mathfrak{g}$ 被称为**单的**，如果 $\mathfrak{g}$ 是不可约的且 $\dim \mathfrak{g} \geq 2$.

一维的李代数一定是不可约的, 因为它没有非平凡的子空间, 所以没有非平凡的子代数, 进而没有非平凡的理想. 但是, 根据定义, 一维的李代数不被认为是单的!

此外, 还可以注意到一维李代数 $\mathfrak{g}$ 一定是可交换的, 因为对于任意 $X \in \mathfrak{g}$ 和标量 a,b 都有 $[aX, bX] = ab[X,X] = 0$. 另一方面, 如果 $\mathfrak{g}$ 是可交换的, 那么 $\mathfrak{g}$ 的任意子空

间都是理想, 所以对于可交换的李代数而言, 只有一维的情况才是不可约的. 因此, 单李代数的等价定义是其**不可约且不交换**.

显然, 这些概念在群论中有对应的类比. 其中子群类比于子代数, 正规子群类比于理想. (例如, 李代数同态的核总是是一个理想, 群同态的核总是为正规子群). 群论中没有非平凡正规子群的群被称为单群, 李代数中没有非平凡理想的李代数被称为单李代数.

命题 1.12. 李代数 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 是单的.

Proof. 我们使用下列 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的基:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

计算可知它们满足 $[X,Y] = H, [H,X] = 2X, [H,Y] = -2Y$. 设 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 中的理想并且 $\mathfrak{h}$ 包含元素 $Z = aX + bH + cY$, 其中 $a,b,c \in \mathbb{C}$ 是不全为零的复数. 首先假设 $c \neq 0$, 那么

$$[X,[X,Z]] = [X, -2bX + cH] = -2cX$$

是 X 的非零倍数.$\mathfrak{h}$ 是理想表明 $X \in \mathfrak{h}$.另一方面,有 $[Y,X] = -H$ 以及 $[Y,[Y,X]] = 2Y$, 所以 $Y, H \in \mathfrak{h}$. 这表明此时 $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

现在假设 $c = 0, b \neq 0$. 那么 $[X,Z] = -2bX$ 表明 $X \in \mathfrak{h}$, 然后同样可得 $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. 最后, 如果 $c = b = 0$ 但是 $a \neq 0$, 那么 $X = Z/a \in \mathfrak{h}$, 仍然得到 $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. 这就表明 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 是单李代数. □

定义 1.13. 如果 $\mathfrak{g}$ 是李代数，那么 $\mathfrak{g}$ 中的**换位子理想** $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 定义为所有换位子的线性组合张成的空间，即 $Z \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 当且仅当

$$Z = c_1[X_1,Y_1] + \cdots + c_m[X_m,Y_m].$$

对于任意 $X,Y \in \mathfrak{g}$, 换位子 $[X,Y] \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, 这表明 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 确实是一个理想.

定义 1.14. 对于李代数 $\mathfrak{g}$，我们定义一个子代数序列 $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots$ 为：$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$，$\mathfrak{g}_1 = [\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_0]$，$\mathfrak{g}_2 = [\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_1]$，等等. 这些子代数被称为 $\mathfrak{g}$ 的**导出列**. 如果对于某个 j 使得 $\mathfrak{g}_j = \{0\}$，那么我们说 $\mathfrak{g}$ 是**可解的**.

利用 Jacobi 恒等式不难证明每个 $\mathfrak{g}_j$ 都是 $\mathfrak{g}$ 的理想, 例如对于 $[X,Y] \in \mathfrak{g}_2$, 其中 $X,Y \in \mathfrak{g}_1$, 那么对于任意 $Z \in \mathfrak{g}$, 有

$$[Z,[X,Y]] = -[X,[Y,Z]] - [Y,[Z,X]] \in \mathfrak{g}_2.$$

定义 1.15. 对于任意李代数 $\mathfrak{g}$，定义理想序列 $\mathfrak{g}^j$ 为：$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$，$\mathfrak{g}^{j+1}$ 为所有的形如 $[X,Y]$ 的换位子的线性组合构成的空间，其中 $X \in \mathfrak{g}$ 以及 $Y \in \mathfrak{g}^j$. 这些子代数被称为 $\mathfrak{g}$ 的**上中心列**. 如果对于某个 j 有 $\mathfrak{g}^j = \{0\}$，那么我们说 $\mathfrak{g}$ 是**幂零的**.

等价地说, $\mathfrak{g}^j$ 由所有的 j-重换位子张成:

$$[X_1,[X_2,[X_3,\ldots,[X_j,X_{j+1}]\ldots]]].$$

注意到 j-重换位子也是 $(j-1)$-重换位子, 所以 $\mathfrak{g}^{j-1}\supseteq\mathfrak{g}^j$. 对于任意 $X\in\mathfrak{g}$ 和 $Y\in\mathfrak{g}^j$, 我们有 $[X,Y]\in\mathfrak{g}^{j+1}\subseteq\mathfrak{g}^j$, 所以 $\mathfrak{g}^j$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 此外, 显然有 $\mathfrak{g}_j\subseteq\mathfrak{g}^j$, 因此幂零李代数都是可解的.

命题 1.16. 如果 $\mathfrak{g}\subseteq M_3(\mathbb{R})$ 是 3×3 上三角矩阵并且对角线为零. 那么 $\mathfrak{g}$ 满足 **??**, 并且是一个幂零李代数.

Proof. 显然 $\mathfrak{g}$ 是李代数. 我们选取基

$$X=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad Z=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

直接计算得 $[X,Y]=Z$ 以及 $[X,Z]=[Y,Z]=0$. 故 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 由 Z 张成, 进而 $[\mathfrak{g},[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]]=0$, 所以 $\mathfrak{g}$ 是幂零的. □

命题 1.17. 如果 $\mathfrak{g}\subseteq M_2(\mathbb{C})$ 是形如

$$\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}\quad a,b,c\in\mathbb{C}$$

的 2×2 矩阵, 那么 $\mathfrak{g}$ 满足 **??**, 并且是可解但不幂零的李代数.

Proof. 直接计算得

$$\left[\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix},\begin{pmatrix}d&e\\0&f\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0&h\\0&0\end{pmatrix},$$

其中 $h=ae+bf-bd-ce$, 这表明 $\mathfrak{g}$ 是一个子代数. 此外, 还表明换位子理想 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 是一维的, 所以是可交换的. 因此 $\mathfrak{g}_2=0$, 故 $\mathfrak{g}$ 是可解的. 另一方面, 考虑

$$H=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}.$$

我们有 $[H,X]=2X$, 所以

$$[H,[H,[H,\ldots,[H,X]\ldots]]]$$

永远是 X 的非零倍数, 所以对于任意 j 都有 $\mathfrak{g}^j\neq 0$, 故 $\mathfrak{g}$ 不是幂零的. □

1.3 矩阵李群的李代数

定义 1.18. 令 G 是一个矩阵李群. G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 定义为所有矩阵 X 的集合, 其中 X 使得对于任意实数 t, 指数 $e^{tX}\in G$.

熟悉流形理论的读者可以发现, 这实际上就是再说 G 在单位元处的切空间, 因为 $\gamma(t)=e^{tX}$ 是以单位元为起点的切向量为 X 的光滑曲线.

命题 1.19. 令 G 是矩阵李群，$X\in\mathfrak{g}$，那么 e^X 是 G 的单位分支 G_0 中的元素.

Proof. 根据定义, e^{tX} 就是连接单位元和 e^X 的道路. □

定理 1.20. 令 G 是矩阵李群，有李代数 $\mathfrak{g}$. 如果 $X,Y\in\mathfrak{g}$，那么

1. 对于任意 $A\in G$ 有 $AXA^{-1}\in\mathfrak{g}$.
2. 对于实数 s 有 $sX\in\mathfrak{g}$.
3. $X+Y\in\mathfrak{g}$.
4. $XY-YX\in\mathfrak{g}$.

Proof. (1) 对于任意的实数 t, 我们有

$$e^{t(AXA^{-1})}=Ae^{tX}A^{-1}\in G,$$

所以 $AXA^{-1}\in\mathfrak{g}$.

(2) 任取实数 t, 有 $e^{t(sX)}=e^{(ts)X}\in G$, 所以 $sX\in\mathfrak{g}$.

(3) 任取实数 t, 利用李乘积公式, 有

$$e^{t(X+Y)}=\lim_{m\to\infty}\left(e^{t\frac{X}{m}}e^{t\frac{Y}{m}}\right)^m,$$

由于 $e^{tX/m}e^{tY/m}\in G$, 所以右端是 G 中点列的极限, 由于 G 是闭集, 所以 $e^{t(X+Y)}\in G$, 所以 $X+Y\in\mathfrak{g}$.

(4) 我们有

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\left(e^{tX}Ye^{-tX}\right)=(XY)e^0+(e^0Y)(-X)=XY-YX,$$

由 (1), $e^{tX}Ye^{-tX}\in\mathfrak{g}$. 由 (2) 和 (3), $\mathfrak{g}$ 是 $M_n(\mathbb{C})$ 的实向量子空间, 所以是闭集, 所以

$$XY-YX=\lim_{h\to 0}\frac{e^{hX}Ye^{-hX}-Y}{h}\in\mathfrak{g}.$$

□

注意到 **??** 的第二点表明即使 G 的元素是复矩阵, $\mathfrak{g}$ 也不需要是复向量空间. 不过, 在一些情况下 $\mathfrak{g}$ 确实是一个复向量空间.

定义 1.21. 矩阵李群 G 被称为**复的**，如果其李代数 $\mathfrak{g}$ 是复向量空间，也就是说，对于所有的 $X\in\mathfrak{g}$ 有 $iX\in\mathfrak{g}$.

命题 1.22. 如果 G 是可交换的，那么 $\mathfrak{g}$ 是可交换的.

Proof. 对于任意两个 $X,Y\in M_n(\mathbb{C})$, 那么换位子为

$$[X,Y]=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\left(\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}e^{tX}e^{sY}e^{-tX}\right),$$

如果 G 可交换, 那么 $e^{tX}e^{sY}e^{-tX}=e^{sY}$ 与 t 无关, 所以 $[X,Y]=0$. □

1.4 示例

例 1.23. 由于 $\mathfrak{su}(2) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) \mid A^* + A = 0, \operatorname{tr} A = 0\}$ 以及 $\mathfrak{so}(3) = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid A^T + A = 0\}$. 所以 $\mathfrak{su}(2)$ 有基

$$E_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad E_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

它们满足 $[E_1, E_2] = E_3, [E_2, E_3] = E_1, [E_3, E_1] = E_2$. $\mathfrak{so}(3)$ 有基

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

它们满足 $[F_1, F_2] = F_3, [F_2, F_3] = F_1, [F_3, F_1] = F_2$.

注意到 E_1, E_2, E_3 和 F_1, F_2, F_3 有相同的交换关系, 所以这两个李代数是同构的.

1.5 李群和李代数同态

定理 1.24. 令 G, H 是矩阵李群，分别有李代数 $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$. 设 $\Phi : G \to H$ 是李群同态. 那么存在唯一的实线性映射 $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 使得对所有的 $X \in \mathfrak{g}$ 有

$$\Phi(e^X) = e^{\phi(X)}.$$

并且 ϕ 有性质:

1. 对于所有 $X \in \mathfrak{g}, A \in G$ 有 $\phi(AXA^{-1}) = \Phi(A)\phi(X)\Phi(A)^{-1}$.
2. 对于所有 $X, Y \in \mathfrak{g}$ 有 $\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$.
3. 对于所有 $X \in \mathfrak{g}$ 有 $\phi(X) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Phi(e^{tX})$.

Proof.

□

例 1.25. 我们构造一个 SU(2) → SO(3) 的满同态. 这是一个非常重要的例子. 我们知道 O(3) 可以视为 $V \to V$ 的正交变换群, 其中 V 是 3 维实内积空间. 我们定义 V 是 2×2 的迹为零的 Hermite 矩阵全体, 即 $X \in V$ 当且仅当 $X^* = X$ 以及 $\operatorname{tr} X = 0$, 故可设

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

此时 $\mathbb{R}^3$ 上的标准内积对应于

$$\langle X_1, X_2 \rangle = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(X_1 X_2).$$

这是因为

$$\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' & x_2' + ix_3' \\ x_2' - ix_3' & -x_1' \end{pmatrix}\right) = x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3'.$$

对于每个 $U \in \mathrm{SU}(2)$, 我们定义线性映射 $\Phi_U : V \to V$ 为

$$\Phi_U(X) = UXU^{-1}.$$

因为 U 是酉矩阵, 所以 $(UXU^{-1})^* = (UXU^*)^* = UXU^{-1}$, 并且 $\mathrm{tr}(UXU^{-1}) = \mathrm{tr}(X) = 0$, 所以 $\Phi_U(X)$ 确实是 V 的元素.

注意到

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(\Phi_U(X_1)\Phi_U(X_2)\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(UX_1X_2U^{-1}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(X_1X_2),$$

所以 Φ_U 保内积, 即 $\Phi_U \in \mathrm{O}(3)$ 是正交变换. 故我们定义了一个映射 $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{O}(3)$ 满足 $U \mapsto \Phi_U$. 不难验证 $\Phi_{U_1U_2} = \Phi_{U_1}\Phi_{U_2}$, 所以这是一个群同态. 因为 $\mathrm{SU}(2)$ 同胚于球面 $\mathbb{S}^3$ 是连通的, 所以上述映射的像集处于 $\mathrm{O}(3)$ 的单位分支中, 即这实际上是一个 $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ 的群同态.

下面我们说明这是一个满同态. 任取 $R \in \mathrm{SO}(3)$, 根据正交变换的性质, R 有一个特征值为 1 的特征向量, 设 $X \in V$ 使得 $RX = X$. 不妨设 X 模长为 1. 将其扩充为 V 的一组标准正交基 $\{X, Y, Z\}$, 那么 R 相当于 Y, Z-平面的旋转. 也即 R 在这组基下有表示矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

设 X 为 (**??**) 式. 令

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix},$$

那么

$$UXU^{-1} = \begin{pmatrix} x_1' & x_2' + ix_3' \\ x_2' - ix_3' & -x_1' \end{pmatrix},$$

其中 $x_1' = x_1$,

$$x_2' + ix_3' = (x_2\cos\theta - x_3\sin\theta) + i(x_2\sin\theta + x_3\cos\theta).$$

这就表明 Φ_U 的表示矩阵和 R 相同, 所以 $R = \Phi_U$, 即这是一个满同态.

若 $\Phi_U = \mathrm{id}_V$, 设

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1,$$

那么

$$U\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}U^{-1} = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 - |\beta|^2 & -2\alpha\beta \\ -2\bar{\alpha}\bar{\beta} & |\beta|^2 - |\alpha|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

这表明 $\beta = 0$, $|\alpha| = 1$. 又因为以及

$$U\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}U^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^2 \\ \bar{\alpha}^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

所以 $\alpha = \pm 1$, 故 $U = \pm I_2$. 所以同态核为 $\{\pm I_2\}$.

例 1.26. 令 $\Phi : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ 是上例的群同态.那么诱导一个李代数同态 $\phi : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{so}(3)$, 满足

$$\phi(E_j) = F_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

其中 $\{E_1, E_2, E_3\}$ 和 $\{F_1, F_2, F_3\}$ 是 **??** 中的基矩阵. 我们看到 ϕ 把基送到基, 所以是李代数同构, 虽然 Φ 并不是李群同构.

Proof. 任取 $X \in \mathfrak{su}(2)$, $Y \in V$, 其中 V 是 **??** 中的向量空间. 那么

$$\phi(X)Y = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \Phi(e^{tX})Y = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} e^{tX}Ye^{-tX} = [X, Y],$$

这表明 $\phi(X) : Y \mapsto [X, Y]$ 是 $V \to V$ 的线性映射. 若 $X = E_1$, 那么

$$\left[E_1, \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 + ix_2 \\ -x_3 - ix_2 & 0 \end{pmatrix},$$

这表明 $\phi(E_1)$ 对应矩阵

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

故 $\phi(E_1) = F_1$. 对于其余两个同理. □

命题 1.27. 假设 G, H, K 是矩阵李群，$\Phi : H \to K$ 和 $\Psi : G \to H$ 是李群同态. 令 $\Lambda : G \to K$ 是复合 $\Psi \circ \Phi$，ϕ, ψ, λ 分别是 Φ, Ψ, Λ 诱导的李代数同态，那么我们有

$$\lambda = \psi \circ \phi.$$

Proof. 任取 $X \in \mathfrak{g}$, 那么

$$\lambda(X) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \Lambda(e^{tX}) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \Psi(\Phi(e^{tX})) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \Psi(e^{t\phi(X)}) = \psi(\phi(X)),$$

即 $\lambda = \psi \circ \phi$. □

定义 1.28. 令 G 是矩阵李群，有李代数 $\mathfrak{g}$. 那么对于每个 $A \in G$，定义线性映射 $\mathrm{Ad}_A : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 为

$$\mathrm{Ad}_A(X) = AXA^{-1}.$$

命题 1.29. 令 G 是矩阵李群，有李代数 $\mathfrak{g}$. 那么映射 $A \mapsto \mathrm{Ad}_A$ 是 $G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 的同态. 此外，对于每个 $A \in G$，Ad_A 满足 $\mathrm{Ad}_A([X, Y]) = [\mathrm{Ad}_A X, \mathrm{Ad}_A Y]$.

由于 $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 是李群同态, 所以诱导一个李代数同态 $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, 记为 $X \mapsto \mathrm{ad}_X$. 那么它们满足

$$e^{\mathrm{ad}_X} = \mathrm{Ad}_{e^X}. \tag{1.3}$$

命题 1.30. 令 G 是矩阵李群，$\mathfrak{g}$ 是李代数. 那么对于 $X, Y \in \mathfrak{g}$ 有

$$\mathrm{ad}_X(Y) = [X, Y].$$

Proof. 我们有

$$\operatorname{ad}_X = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \operatorname{Ad}(e^{tX}),$$

所以

$$\operatorname{ad}_X(Y) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \operatorname{Ad}(e^{tX})(Y) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} e^{tX} Y e^{-tX} = [X, Y]. \qquad \square$$

命题 1.31. 对于任意 $X \in M_n(\mathbb{C})$，令 $\operatorname{ad}_X : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ 为 $\operatorname{ad}_X Y = [X, Y]$. 那么对于任意 $Y \in M_n(\mathbb{C})$，我们有

$$e^X Y e^{-X} = \operatorname{Ad}_{e^X}(Y) = e^{\operatorname{ad}_X} Y,$$

其中

$$e^{\operatorname{ad}_X}(Y) = Y + [X, Y] + \frac{1}{2}[X, [X, Y]] + \cdots .$$

1.6 实李代数的复化

定义 1.32. 如果 V 是有限维实向量空间，那么定义 V 的**复化** $V_{\mathbb{C}}$ 是所有的形式线性组合

$$v_1 + i v_2 \quad v_1, v_2 \in V$$

的集合. 这显然构成一个实向量空间. 我们定义

$$i(v_1 + i v_2) = -v_2 + i v_1,$$

此时 $V_{\mathbb{C}}$ 是一个复向量空间.

命题 1.33. 令 $\mathfrak{g}$ 是一个有限维的实李代数，$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 是复化. 那么 $\mathfrak{g}$ 上的李括号在 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上有一个唯一的延拓，使得 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 是一个复李代数. 此时 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 被称为 $\mathfrak{g}$ 的**复化**.

Proof. 唯一性是显然的, 因为根据双线性性, 必须有

$$[X_1 + iX_2, Y_1 + iY_2] = [X_1, Y_1] - [X_2, Y_2] + i\big([X_1, Y_2] + [X_2, Y_1]\big).$$

下面我们只需要验证上述定义满足反对称性和 Jacobi 恒等式. 反对称性也是显然的. 对于 Jacobi 恒等式, 利用复线性性, 当 $X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, Y, Z \in \mathfrak{g}$ 的时候有

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0,$$

同理可得一般情况下的 Jacobi 恒等式. $\square$

命题 1.34. 设 $\mathfrak{g} \subseteq M_n(\mathbb{C})$ 是实李代数并且对于非零的 $X \in \mathfrak{g}$ 有 $iX \notin \mathfrak{g}$. 那么 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 同构于集合

$$\{X + iY \mid X, Y \in \mathfrak{g}\}.$$