Contents

1

光滑流形

1.1 拓扑流形

1.1.1 拓扑流形的例子

例 1.1 (连续函数的图像)**.** 令 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 是开集, $f : U \to \mathbb{R}^k$ 是连续映射, f 的**图像**定义为

$$\Gamma(f) = \left\{(x, f(x)) \;\middle|\; x \in U\right\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k.$$

我们说明 $\Gamma(f)$ 同胚于 U, 从而表明 $\Gamma(f)$ 是一个拓扑 n-流形. 考虑投影映射 $\pi_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, 将 π_1 限制在 $\Gamma(f)$ 上, 即定义 $\varphi : \Gamma(f) \to U$ 为

$$\varphi(x, f(x)) = x.$$

显然 φ 是双射. φ 的逆映射为 $\varphi^{-1}(x) = (x, f(x))$, f 连续表明 φ^{-1} 连续, 所以 φ 是同胚. 于是 $(\Gamma(f), \varphi)$ 是一个全局坐标卡, $\Gamma(f)$ 是拓扑 n-流形.

例 1.2 (球面)**.** 对于 $n \geq 0$, 单位 n-球面 $\mathbb{S}^n$ 作为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的子空间是 Hausdorff 的以及第二可数的, 下面我们说明 $\mathbb{S}^n$ 是局部 Euclid 的. 对于 $1 \leq i \leq n+1$, 定义 U_i^+ 为 $\mathbb{S}^n$ 中第 i 个坐标大于零所表示的半球面:

$$U_i^+ = \left\{(x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; x^i > 0\right\} \cap \mathbb{S}^n,$$

类似的, 记 U_i^- 为 $x^i < 0$ 表示的半球面. 显然 $U_i^\pm$ 都是 $\mathbb{S}^n$ 的开集.

令 $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}$ 为连续映射

$$f(x) = \sqrt{1 - |x|^2} = \sqrt{1 - (x_1^2 + \cdots + x_n^2)},$$

那么对于每个 i, U_i^+ 是函数

$$x^i = f(x^1, \ldots, \hat{x}^i, \ldots, x^{n+1})$$

的图像, 其中 $\hat{x}^i$ 表示自变量中略去 x^i 这一项. 类似的, U_i^- 是函数

$$x^i = -f(x^1, \ldots, \hat{x}^i, \ldots, x^{n+1})$$

的图像. 由上例, 每个 $U_i^{\pm}$ 都同胚于开球 $\mathbb{B}^n$, 同胚映射 $\varphi_i^{\pm}: U_i^{\pm} \to \mathbb{B}^n$ 为

$$\varphi_i^{\pm}(x^1, \ldots, x^{n+1}) = (x^1, \ldots, \hat{x}^i, \ldots, x^{n+1}).$$

所以 $(U_i^{\pm}, \varphi_i^{\pm})$ 是 $2n+2$ 个坐标卡, 其能够覆盖 $\mathbb{S}^n$, 所以 $\mathbb{S}^n$ 是一个拓扑 n-流形.

例 1.3 (射影空间)**.** n **维实射影空间** $\mathbb{RP}^n$ 指的是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中 1 维子空间的集合, 配备自然映射 $\pi: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^n$ 诱导的商拓扑, π 将每个 $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ 送到 x 张成的 1 维子空间, 我们记为 $[x] = \pi(x)$. $\mathbb{RP}^2$ 通常被称为**射影平面**.

我们首先说明 $\mathbb{RP}^n$ 是局部 Euclid 的. 对于每个 $1 \le i \le n+1$, 令

$$U_i = \left\{(x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; x^i \neq 0\right\},$$

那么 $\tilde{U}_i = \pi(U_i)$ 是 $\mathbb{RP}^n$ 的开集且 $\{U_i\}$ 能覆盖 $\mathbb{RP}^n$. 由于 $U_i = \pi^{-1}(\pi(U_i))$, 所以 U_i 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的饱和开子集, 所以限制 $\pi|_{U_i}: U_i \to \tilde{U}_i$ 是商映射. 构造 $\tilde{\varphi}_i: \tilde{U}_i \to \mathbb{R}^n$ 为

$$\tilde{\varphi}_i[x_1, \ldots, x^{n+1}] = \left(\frac{x^1}{x^i}, \ldots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \ldots, \frac{x^{n+1}}{x^i}\right),$$

$\tilde{\varphi}_i$ 显然是良定义的. 由于 $\tilde{\varphi}_i \circ \pi|_{U_i}$ 是连续映射, 所以 $\tilde{\varphi}_i$ 连续. $\tilde{\varphi}_i$ 有连续逆映射（其可以视为复合映射 $\mathbb{R}^n \to U_i \to \tilde{U}_i$）

$$\tilde{\varphi}_i^{-1}(x^1, \ldots, x^n) = [x^1, \ldots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \ldots, x^n],$$

所以 $\tilde{\varphi}_i$ 是同胚. 于是 $(\tilde{U}_i, \tilde{\varphi}_i)$ 构成了覆盖 $\mathbb{RP}^n$ 的 $n+1$ 个坐标卡.

例 1.4 (积流形)**.** 若 $M_1, \ldots, M_k$ 分别是 $n_1, \ldots, n_k$ 维拓扑流形, 则积空间 $M_1 \times \cdots \times M_k$ 是 $n_1 + \cdots + n_k$ 维拓扑流形. 由积拓扑的性质可知 $M_1 \times \cdots \times M_k$ 是 Hausdorff 的以及第二可数的. 任取 $(p_1, \ldots, p_k) \in M_1 \times \cdots \times M_k$, M_i 是 n_i 维拓扑流形表明存在 p_i 处的坐标卡 (U_i, φ_i), 那么积映射

$$\varphi_1 \times \cdots \times \varphi_k : U_1 \times \cdots \times U_k \to \mathbb{R}^{n_1 + \cdots + n_k}$$

是 $U_1 \times \cdots \times U_k$ 到像集的同胚, 所以 $M_1 \times \cdots \times M_k$ 的坐标卡形如 $(U_1 \times \cdots \times U_k, \varphi_1 \times \cdots \times \varphi_k)$.

1.2 光滑结构

仅有拓扑结构无法在流形上做微积分，因为可微性在同胚的意义下并不是保持不变的. 例如映射 $\varphi(x, y) = (x^{1/3}, y^{1/3})$ 是 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 的同胚映射，考虑可微函数 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 为 $f(x, y) = x$，但是 $f \circ \varphi(x, y) = x^{1/3}$ 在 $(0, 0)$ 处不可微. 这意味着我们需要引入额外的结构来定义流形之间映射的微分.

对于一个拓扑 n-流形 M，M 中的每个点都有一个坐标卡 (U, φ)，设 $\varphi: U \to \hat{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ 的同胚，那么对于映射 $f: M \to \mathbb{R}$，直觉上应该定义 f 是光滑的当且仅当 $f \circ \varphi^{-1}: \hat{U} \to \mathbb{R}$ 是光滑的. 但是我们还需要上述定义与坐标卡的选取无关, 所以我们

需要将上述定义限制在某一类“相容的光滑坐标卡”上, 即将光滑坐标卡视为 M 上的一种新的结构.

令 M 是拓扑 n-流形. 如果 (U,φ) 和 (V,ψ) 是两个坐标卡并且 $U\cap V\neq\emptyset$, 那么复合映射 $\psi\circ\varphi^{-1}:\varphi(U\cap V)\to\psi(U\cap V)$ 被称为 **φ 到 ψ 的转移映射**, 这依然是一个同胚. 两个坐标卡 (U,φ) 和 (V,ψ) 如果满足 $U\cap V=\emptyset$ 或者 $\psi\circ\varphi^{-1}$ 是微分同胚, 那么我们说这两个坐标卡是**光滑相容的**.

我们定义 M 的**图册**为能覆盖 M 的一族坐标卡的集合, 一个图册 $\mathcal{A}$ 中的任意两个坐标卡如果都是光滑相容的, 那么我们说 $\mathcal{A}$ 是一个**光滑图册**.

有了光滑图册, 我们便可以良好的定义光滑函数, 对于函数 $f:M\to\mathbb{R}$, 如果对于光滑图册中的每个坐标卡 (U,φ), 函数 $f\circ\varphi^{-1}:U\to\mathbb{R}$ 都是光滑的, 那么我们说 f 是光滑的. 此时光滑的定义不会出现冲突的现象, 因为对于光滑图册中的另一个坐标卡 (V,ψ), 函数 $f\circ\psi^{-1}=(f\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ\psi^{-1})$, (U,φ) 和 (V,ψ) 光滑相容就表明 $f\circ\psi^{-1}$ 在 $\psi(U\cap V)$ 上也是光滑的. 一般而言, 不同的光滑图册也可能给出相同的“光滑结构”, 例如 $\mathbb{R}^n$ 上的两个光滑图册:

$$\mathcal{A}_1=\{(\mathbb{R}^n,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})\},\quad \mathcal{A}_2=\{(B_1(x),\mathrm{Id}_{B_1(x)})\mid x\in\mathbb{R}^n\},$$

虽然这是两个不同的光滑图册, 但是 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 的光滑性在这两个图册的意义下都是一样的, 都与微积分中光滑的意义相同. 造成这种现象的原因是 $\mathcal{A}_1$ 和 $\mathcal{A}_2$ 中的任意坐标卡都是光滑相容的, 所以我们可以考虑将它们并起来得到更大的光滑图册 $\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2$.

为了解决这个问题, 我们采用下面的做法: 如果 M 上的光滑图册 $\mathcal{A}$ 不能恰当包含于任意更大的光滑图册, 那么我们说 $\mathcal{A}$ 是**最大的**. 这意味着任意与 $\mathcal{A}$ 中坐标卡光滑相容的坐标卡都已经在 $\mathcal{A}$ 中了.

现在我们可以定义本书的主要概念了. 如果 M 是一个拓扑流形, M 上的**光滑结构**指的是一个最大光滑图册. 光滑结构中的坐标卡被称为**光滑坐标卡**. 一个**光滑流形**指的是 $(M,\mathcal{A})$, 其中 M 是拓扑流形, $\mathcal{A}$ 是 M 上的一个光滑结构. 当光滑结构清晰的时候, 我们简称为“M 是一个光滑流形”. 光滑结构也被称为**微分结构**或者 **C^∞ 结构**. 需要注意, 光滑结构是一个附加属性. 事实上, 一个拓扑流形可能有不同的光滑结构, 也可能根本不存在光滑结构!

通过明确指出最大光滑图册来定义光滑结构并不方便, 因为这样的光滑图册可能包含非常多的坐标卡. 下面的命题告诉我们, 我们只需要指定某一个光滑图册即可.

命题 1.5. M 是一个拓扑流形.

1. M 的每一个光滑图册 $\mathcal{A}$ 都被唯一的最大光滑图册包含, 称为**由 $\mathcal{A}$ 确定的光滑结构**.
2. M 的两个光滑图册确定相同的光滑结构当且仅当它们的并是一个光滑图册.

Proof. (1) 令 $\bar{\mathcal{A}}$ 为与 $\mathcal{A}$ 中所有坐标卡都光滑相容的坐标卡的集合. 我们说明 $\bar{\mathcal{A}}$ 是一个光滑图册. 任取 $(U,\varphi),(V,\psi)\in\bar{\mathcal{A}}$, 我们要说明 $\psi\circ\varphi^{-1}:\varphi(U\cap V)\to\psi(U\cap V)$ 是光滑的.

任取 $x=\varphi(p)\in\varphi(U\cap V)$, 那么存在 $(W,\theta)\in\mathcal{A}$ 使得 $p\in W$. 由于 (U,φ) 和 (W,θ) 光滑相容, (V,ψ) 和 (W,θ) 光滑相容, 所以 $\theta\circ\varphi^{-1}:\varphi(U\cap W)\to\theta(U\cap W)$ 是光滑的, $\psi\circ\theta^{-1}:\theta(V\cap W)\to\psi(V\cap W)$ 是光滑的, 因此 $\psi\circ\varphi^{-1}=(\psi\circ\theta^{-1})\circ(\theta\circ\varphi^{-1})$ 在 x 的某个邻域上是光滑的, 故 $\psi\circ\varphi^{-1}$ 在 $\varphi(U\cap V)$ 上是光滑的. 这表明 $\bar{A}$ 是光滑图册. 根据定义, $\bar{A}$ 的最大性和唯一性显然.

(2) 设 $\mathcal{A}_1$ 和 $\mathcal{A}_2$ 是 M 的两个光滑地图册. 若它们确定了相同的光滑结构 $\bar{A}$, 那么 $\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2\subseteq\bar{A}$, 所以 $\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2$ 中任意两个坐标卡光滑相容, 即 $\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2$ 是光滑图册. 反之, 若 $\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2$ 是光滑图册, 那么 $\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2$ 确定了光滑结构 $\bar{A}$, 故 $\mathcal{A}_1\subseteq\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2\subseteq\bar{A}$, 同理 $\mathcal{A}_2\subseteq\bar{A}$, 所以 $\mathcal{A}_1$ 和 $\mathcal{A}_2$ 确定了相同的光滑结构. □

1.3 光滑流形的例子

例 1.6 (Euclid 空间)**.** Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 是一个 n 维光滑流形, 其光滑结构由光滑图册 $\{(\mathbb{R}^n,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})\}$ 确定, 我们说这是 $\mathbb{R}^n$ 上的**标准光滑结构**, 在不特殊说明的情况下, $\mathbb{R}^n$ 总是采用标准光滑结构.

例 1.7 ($\mathbb{R}$ 上的另一个光滑结构)**.** 考虑同胚 $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为 $\psi(x)=x^3$. 那么图册 $\{(\mathbb{R},\psi)\}$ 确定了 $\mathbb{R}$ 上的一个光滑结构. 坐标卡 $(\mathbb{R},\psi)$ 和 $(\mathbb{R},\mathrm{Id}_{\mathbb{R}})$ 不是光滑相容的, 因为转移映射 $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\circ\psi^{-1}(x)=x^{1/3}$ 不是光滑映射. 因此这个光滑结构和标准光滑结构是不同的光滑结构.

例 1.8 (有限维向量空间)**.** 令 V 是有限维实向量空间. V 上的范数诱导了度量, 从而确定了一个拓扑, 又因为 V 上的任意两个范数都是等价的, 所以 V 上由范数诱导的拓扑结构是唯一确定的. 在范数诱导的拓扑下, V 是一个拓扑 n-流形, 并且有一个自然的光滑结构. V 的每组基 $(E_1,\dots,E_n)$ 都定义了一个同构 $E:\mathbb{R}^n\to V$ 为

$$E(x)=\sum_{i=1}^n x^i E_i.$$

这个映射也是一个同胚, 所以 (V,E^{-1}) 是一个坐标卡. 如果 $(\tilde{E}_1,\dots,\tilde{E}_n)$ 是另一组基并且 $\tilde{E}(x)=\sum_j x^j\tilde{E}_j$ 的对应的同构. 那么存在可逆矩阵 (A_i^j) 使得 $E_i=\sum_j A_i^j\tilde{E}_j$. 于是任意两个坐标卡之间的转移映射为 $\tilde{E}^{-1}\circ E(x)=\tilde{x}=\big(\tilde{x}^1,\dots,\tilde{x}^n\big)$, 其中

$$\sum_{j=1}^n\tilde{x}^j\tilde{E}_j=\sum_{i=1}^n x^iE_i=\sum_{i,j}x^iA_i^j\tilde{E}_j.$$

这表明 $\tilde{x}^j=\sum_i A_i^jx^i$, 所以 $\tilde{E}^{-1}\circ E$ 是可逆的线性映射, 因此是微分同胚. 故这样的坐标卡之间都是光滑相容的. 这样的坐标卡的集合确定了一个光滑结构, 被称为 **V 上的标准光滑结构**. 这个例子表明有限维向量空间上的光滑结构和基与范数的选取无关.

例 1.9 (矩阵空间)**.** 令 $M(m\times n,\mathbb{R})$ 表示 $\mathbb{R}$ 上的 $m\times n$ 矩阵的集合.因为 $M(m\times n,\mathbb{R})$ 是 mn 维向量空间, 那么我们可以将 $M(m\times n,\mathbb{R})$ 视为 $\mathbb{R}^{mn}$, 在标准光滑结构下, $M(m\times n,\mathbb{R})$

成为 mn-维光滑流形. 当 $m=n$ 的时候, 我们简记为 $M(n,\mathbb{R})$. 类似地, $m\times n$ 复矩阵 $M(m\times n,\mathbb{C})$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 $2mn$ 维向量空间, 因此是 $2mn$-维光滑流形. 同样 $m=n$ 时简记为 $M(n,\mathbb{C})$.

例 1.10 (开子流形)**.** 令 M 是光滑 n-流形, $U\subseteq M$ 是开子集, 定义 U 上的图册

$$\mathcal{A}_U=\{(V,\psi)\mid V\subseteq U,(V,\psi)\text{ 是 }M\text{ 的光滑坐标卡}\},$$

任取 $p\in U$, 存在 M 的光滑坐标卡 (W,ψ) 使得 $p\in W$, 令 $V=W\cap U$, 那么 $p\in V$ 且 $(V,\psi|_V)\in\mathcal{A}_U$, 所以 $\mathcal{A}_U$ 覆盖 U. 此外容易验证 $\mathcal{A}_U$ 是光滑图册. 所以 M 的任意开子集可以自然地成为光滑 n-流形.

例 1.11 (一般线性群)**.** 一般线性群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 是所有 $n\times n$ 可逆实矩阵的集合, 由于 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 是 $M(n,\mathbb{R})$ 的开子集, 所以 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 是光滑 n^2-流形.

例 1.12 (光滑函数的图像)**.** 如果 $U\subseteq\mathbb{R}^n$ 是开子集, $f:U\to\mathbb{R}^k$ 是光滑函数, 例 1.1 告诉我们 f 的图像是拓扑 n-流形, 有全局坐标卡 $(\Gamma(f),\varphi)$, 其中 φ 是投影 $\pi:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$ 在 $\Gamma(f)$ 上的限制, 这使得 $\{(\Gamma(f),\varphi)\}$ 成为一个光滑图册, 所以 $\Gamma(f)$ 有一个自然的光滑结构.

例 1.13 (球面)**.** 例 1.2 告诉我们单位 n-球面 $\mathbb{S}^n\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ 是拓扑 n-流形, 其有 $2n+2$ 个坐标卡 $\{(U_i^\pm,\varphi_i^\pm)\}$. 对于不同的 i,j, 转移映射 $\varphi_i^\pm\circ(\varphi_j^\pm)^{-1}$ 为

$$\varphi_i^\pm\circ(\varphi_j^\pm)^{-1}(u^1,\ldots,u^n)=\left(u^1,\ldots,\hat{u}^i,\ldots,\pm\sqrt{1-|u|^2},\ldots,u^n\right),$$

其中 $\sqrt{1-|u|^2}$ 处于第 j 个坐标, 这显然是 $\mathbb{B}^n\to\mathbb{B}^n$ 的光滑映射. 当 $i=j$ 的时候, $U_i^+\cap U_i^-=\emptyset$. 因此 $\{(U_i^\pm,\varphi_i^\pm)\}$ 是一个光滑图册, 这定义了 $\mathbb{S}^n$ 上的一个光滑结构, 我们将这个光滑结构作为 $\mathbb{S}^n$ 的**标准光滑结构**.

例 1.14 (水平集)**.** 前面的例子可以被推广. 设 $U\subseteq\mathbb{R}^n$ 是开集, $\Phi:U\to\mathbb{R}$ 是光滑函数, 对于任意 $c\in\mathbb{R}$, $\Phi^{-1}(c)$ 被称为 Φ **的水平集**. 令 $M=\Phi^{-1}(c)$, 假设对于任意 $a\in\Phi^{-1}(c)$, 全导数 $D\Phi(a)\in M(1\times n,\mathbb{R})$ 都非零. 设 $\partial\Phi/\partial x^i(a)\neq 0$, 根据隐函数定理, 存在 a 的邻域 U_0 使得 $M\cap U_0$ 可以被表示为函数

$$x^i=f(x^1,\ldots,\hat{x}^i,\ldots,x^n)$$

的图像, 其中 f 是 $\mathbb{R}^{n-1}$ 的某个开子集上的光滑函数. 因此, 和 例 1.1 一样的讨论可知 M 是一个 $n-1$ 维拓扑流形. 然后通过类似 n-球面的处理, 这样的坐标卡的集合是一个光滑图册, 所以 M 有一个光滑结构.

目前我们都是从一个拓扑空间开始, 验证其是拓扑流形, 再指定一个光滑结构. 我们可以将这两个步骤合起来得到更为方便的构造方法, 特别是当我们从一个没有拓扑的集合上开始的时候.

引理 1.15 (光滑流形坐标卡引理). M 是集合, 假设 M 有一个子集族 $\{U_\alpha\}$, 每个 U_α 都附带一个映射 $\varphi_\alpha:U_\alpha\to\mathbb{R}^n$, 它们满足下面的条件:

1. 对于每个 α, φ_α 是 U_α 到开子集 $\varphi_\alpha(U_\alpha)\subseteq\mathbb{R}^n$ 的双射.

2. 对于每个 α,β，集合 $\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)$ 和 $\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的开集.
3. 当 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$ 的时候，映射 $\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$ 是光滑的.
4. 可数个 U_α 可以覆盖 M.
5. 令 $p,q\in M$ 是不同的两个点，要么存在 U_α 同时包含 p,q，要么存在不同的 U_α 和 U_β 使得 $p\in U_\alpha$ 以及 $q\in U_\beta$.

此时 M 有一个唯一的光滑流形结构使得每个 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 都是光滑坐标卡.

Proof. 首先定义形如 $\varphi_\alpha^{-1}(V)$ (V 是 $\mathbb{R}^n$ 的开集) 的集合是开集, 我们验证这给出了 M 上的一个拓扑基. 任取 $p\in\varphi_\alpha^{-1}(V)\cap\varphi_\beta^{-1}(W)$, 注意到

$$\varphi_\alpha^{-1}(V)\cap\varphi_\beta^{-1}(W)=\varphi_\alpha^{-1}\left(V\cap(\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1})(W)\right),$$

条件 (2) 和 (3) 表明 $(\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1})(W)=(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})^{-1}(W)$ 是 $\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)$ 的开集, 进而也是 $\mathbb{R}^n$ 的开集, 所以 $\varphi_\alpha^{-1}(V)\cap\varphi_\beta^{-1}(W)$ 自身也在这个基集合中. 这表明上述定义给出了 M 上的一个拓扑.

根据条件 (1), 每个 φ_α 是 $U_\alpha\to\varphi_\alpha(U_\alpha)$ 的同胚, 所以 M 是局部 n 维 Euclid 的. 根据条件 (5), M 是 Hausdorff 的. 根据条件 (4), M 是第二可数的. 最后条件 (3) 保证了 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ 是光滑图册. 所以 M 成为一个光滑流形. □

注释 1.16. 总的来说，上述引理中 M 的拓扑结构为：所有形如 $\varphi_\alpha^{-1}(V)$ 的开集 (其中 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的开集) 构成的拓扑基生成的拓扑. 光滑结构为：所有形如 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 的坐标卡构成一组光滑坐标卡.

1-1 令 X 是所有满足 $y=\pm1$ 的点 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ 的集合，M 是 X 商掉等价关系 $(x,-1)\sim(x,1)$（对于所有的 $x\neq0$）得到的商空间. 证明 M 是局部 Euclid 的和第二可数的，但是不是 Hausdorff 的.

Proof.

□

2

光滑映射

2.1 光滑函数与光滑映射

在这本书中, 我们用**函数**指代值域为 $\mathbb{R}$ 或者 $\mathbb{R}^k$ 的映射.

设 M 是光滑 n-流形, 函数 $f: M \to \mathbb{R}^k$. 如果任取 $p \in M$, 都存在一个光滑坐标卡 (U, φ) 使得 $p \in U$ 以及复合映射 $f \circ \varphi^{-1}$ 在 $\hat{U} = \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ 上是光滑的, 那么我们说 f 是**光滑函数**. 流形 M 上所有光滑实值函数 $f: M \to \mathbb{R}$ 的集合记为 $C^\infty(M)$, 构成了 $\mathbb{R}$ 上的一个向量空间.

练习 2.1. M 是光滑流形, 设 $f: M \to \mathbb{R}^k$ 是光滑函数, 证明对于**任意**光滑坐标卡 (U, φ), 函数 $f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \to \mathbb{R}^k$ 是光滑的.

Proof. 任取 $p \in U$, f 是光滑函数表明存在光滑坐标卡 (V, ψ) 使得 $f \circ \psi^{-1}: \psi(V) \to \mathbb{R}^k$ 是光滑的, 特别地, $f \circ \psi^{-1}$ 在 $\psi(p)$ 处光滑. (U, φ) 和 (V, ψ) 光滑相容表明 $\psi \circ \varphi^{-1}$ 是光滑的, 特别地, $\psi \circ \varphi^{-1}$ 在 $\varphi(p)$ 处是光滑的. 所以 $f \circ \varphi^{-1} = (f \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \varphi^{-1})$ 在 p 处是光滑的. □

给定函数 $f: M \to \mathbb{R}^k$ 和坐标卡 (U, φ), 函数 $\hat{f} = f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \to \mathbb{R}^k$ 被称为 f **的坐标表示**. 根据定义, f 是光滑的当且仅当在每个点处都存在光滑坐标卡使得坐标表示是光滑的. 上面的练习表明, 光滑函数在每个光滑坐标卡处都有光滑的坐标表示.

光滑函数的定义可以容易地拓展到流形之间的光滑映射. 令 M, N 是光滑流形, $F: M \to N$ 是映射. 如果对于每个 $p \in M$, 都存在包含 p 的光滑坐标卡 (U, φ) 和包含 $F(p)$ 的光滑坐标卡 (V, ψ) 使得 $F(U) \subseteq V$ 并且复合映射 $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \to \psi(V)$ 是光滑函数, 那么我们说 F 是**光滑映射**. 可以看到前文光滑函数的定义是光滑映射的特例, 只需取 $N = V = \mathbb{R}^k$ 以及 $\psi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^k}$ 即可.

命题 2.1. 光滑映射是连续的.

Proof. 设 $F: M \to N$ 是光滑映射. 任取 $p \in M$, 那么存在包含 p 的光滑坐标卡 (U, φ) 和包含 $F(p)$ 的光滑坐标卡 (V, ψ) 使得 $F(U) \subseteq V$ 并且 $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ 光滑, 自然 $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ 是连续函数. 所以 $F = \psi^{-1} \circ (\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi$ 是 $U \to V$ 的连续映射, 这表明 F 是局部连续的, 从而是连续映射. □

命题 2.2 (光滑性的等价刻画). M, N 是带边或者无边光滑流形，映射 $F: M \to N$ 是光滑的当且仅当下面的两个条件之一成立：

1. 对于每个 $p \in M$，存在包含 p 的光滑坐标卡 (U, φ) 和包含 $F(p)$ 的光滑坐标卡 (V, ψ) 使得 $U \cap F^{-1}(V)$ 是 M 的开集，并且复合映射 $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ 是 $\varphi(U \cap F^{-1}(V)) \to \psi(V)$ 的光滑函数．
2. F 是连续映射，并且存在 M 的光滑图册 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ 和 N 的光滑图册 $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ 使得对于每个 α 和 β，$\psi_\beta \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 是 $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap F^{-1}(V_\beta)) \to \psi_\beta(V_\beta)$ 的光滑函数．

Proof. (1) 若 F 是光滑映射, 那么存在包含 p 的光滑坐标卡 (U, φ) 和包含 $F(p)$ 的光滑坐标卡 (V, ψ) 使得 $F(U) \subseteq V$, 并且 $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ 光滑. 此时 $U \cap F^{-1}(V) = U$ 是 M 的开集.

反之, 若存在包含 p 的光滑坐标卡 (U, φ) 和包含 $F(p)$ 的光滑坐标卡 (V, ψ) 使得 $U \cap F^{-1}(V)$ 是 M 的开集, 并且复合映射 $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ 是 $\varphi(U \cap F^{-1}(V)) \to \psi(V)$ 的光滑函数. 记 $W = U \cap F^{-1}(V)$, 那么 $(W, \varphi|_W)$ 是包含 p 的光滑坐标卡, 并且 $F(W) \subseteq F(U) \cap F(F^{-1}(V)) \subseteq F(U) \cap V \subseteq V$, 所以 F 是光滑映射.

(2) 若 F 是光滑映射, 那么对于每个 $p \in M$, 存在包含 p 的光滑坐标卡 (U_p, φ_p) 和包含 $F(p)$ 的光滑坐标卡 $(V_{F(p)}, \psi_{F(p)})$ 使得 $F(U_p) \subseteq V_{F(p)}$ 并且 $\psi_{F(p)} \circ F \circ \varphi_p^{-1}$ 所示光滑函数. 那么 $\{(U_p, \varphi_p)\}_{p \in M}$ 是 M 的光滑图册. 若 $\{(V_{F(p)}, \psi_{F(p)})\}_{p \in M}$ 不能覆盖 V, 可以添加任意光滑坐标卡使得其覆盖 V. 此时即满足要求.

反之, 若 F 是连续映射, 并且存在 M 的光滑图册 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ 和 N 的光滑图册 $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ 使得对于每个 α 和 β, $\psi_\beta \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 是 $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap F^{-1}(V_\beta)) \to \psi_\beta(V_\beta)$ 的光滑函数. 任取 $p \in M$, 存在包含 p 的光滑坐标卡 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 和包含 $F(p)$ 的光滑坐标卡 V_β, F 连续表明 $U_\alpha \cap F^{-1}(V_\beta)$ 是 M 的开集, 由 (1), 所以 F 是光滑映射. □

命题 2.3 (光滑性是局部的). 令 M, N 是带边或者无边光滑流形，映射 $F: M \to N$．

1. 如果每个 $p \in M$ 都有一个邻域 U 使得限制 $F|_U$ 是光滑映射，那么 F 是光滑映射．
2. 反之，如果 F 是光滑映射，那么其限制在任意开子集上都是光滑的．

Proof. (1) $F|_U : U \to N$ 光滑表明存在包含 p 的 U 的光滑坐标卡 (W, φ) 和包含 $F(p)$ 的光滑坐标卡 (V, ψ) 使得 $F(W) \subseteq V$ 并且 $\psi \circ F|_U \circ \varphi^{-1}$ 光滑. 开子流形上的光滑结构表明 $W \subseteq U$ 并且 (W, φ) 是 M 的光滑坐标卡, 所以 F 是光滑映射.

(2) 设 $U \subseteq M$ 是开子集. 任取 $p \in U$, 存在包含 p 的光滑坐标卡 (W, φ) 和包含 $F(p)$ 的光滑坐标卡 (V, ψ) 使得 $F(W) \subseteq V$ 并且 $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ 光滑. 此时 $(W \cap U, \varphi|_{W \cap U})$ 是 U 的光滑坐标卡, 并且 $F(W \cap U) \subseteq V$, 所以 $F|_U : U \to N$ 是光滑映射. □

推论 2.4 (光滑映射的粘合引理). 令 M, N 是带边或者无边光滑流形，$\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是 M 的一个开覆盖．假设对于每个 $\alpha \in A$，都有一个光滑映射 $F_\alpha : U_\alpha \to N$ 并且这些光滑映射在重叠处重合，即 $F_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = F_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ 对于任意 $\alpha, \beta \in A$ 都成立．那么存在唯一的光滑映射 $F: M \to N$ 使得对于每个 $\alpha \in A$ 有 $F|_{U_\alpha} = F_\alpha$．

如果 $F : M \to N$ 是光滑映射, (U, φ) 和 (V, ψ) 分别是 M 和 N 的光滑坐标卡, 我们说 $\hat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ 是 F 相对于给定坐标的**坐标表示**.

命题 2.5. M, N, P 是带边或者无边光滑流形.

1. 常值映射 $c : M \to N$ 是光滑映射.
2. 恒等映射 Id_M 是光滑映射.
3. 如果 $U \subseteq M$ 是带边或者无边的开子流形，那么包含映射 $\iota : U \hookrightarrow M$ 是光滑映射.
4. 如果 $F : M \to N$ 和 $G : N \to P$ 是光滑映射，那么 $G \circ F : M \to P$ 也是光滑映射.

Proof. (1) 设对于任意 $p \in M$ 都有 $c(p) = q \in N$. 那么任取包含 p 的光滑坐标卡 (U, φ) 和包含 q 的光滑坐标卡 (V, ψ), 都有 $c(U) = \{q\} \subseteq V$, 并且任取 $x \in \varphi(U)$, 有 $\psi \circ c \circ \varphi^{-1}(x) = \psi(q)$, 所以 $\psi \circ c \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ 是 Euclid 空间之间的常值函数, 自然是光滑函数.

(2) 对于 $p \in M$, 任取包含 p 的光滑坐标卡 (U, φ), 那么 $\mathrm{Id}_M(U) = U$, 并且 $\varphi \circ \mathrm{Id}_M \circ \varphi^{-1} = \mathrm{Id}_{\varphi(U)}$ 是光滑函数.

(3) 对于 $p \in U$, 任取包含 p 的光滑坐标卡 (W, φ), 此时 $(W \cap U, \varphi|_{W \cap U})$ 是 U 的光滑坐标卡, 并且 $\iota(W \cap U) = W \cap U$, $\varphi|_{W \cap U}^{-1} \circ \iota \circ \varphi|_{W \cap U}$ 是 $\varphi(W \cap U)$ 上的恒等映射, 自然是光滑函数.

(4) 令 $p \in M$, G 光滑表明存在包含 $F(p)$ 的光滑坐标卡 (V, ψ) 和包含 $G(F(p))$ 的光滑坐标卡 (W, θ) 使得 $G(V) \subseteq W$ 以及 $\theta \circ G \circ \psi^{-1} : \psi(V) \to \theta(W)$ 是光滑的. F 连续表明 $F^{-1}(V)$ 是 M 的包含 p 的开集, 所以存在 M 的光滑坐标卡 (U, φ) 使得 $p \in U \subseteq F^{-1}(V)$, 那么 $G \circ F(U) \subseteq G(V) \subseteq W$, 并且 $\theta \circ (G \circ F) \circ \varphi^{-1} = (\theta \circ G \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ F \circ \varphi^{-1})$ 是光滑函数, 这就表明 $G \circ F$ 是光滑映射. □

命题 2.6. 设 $M_1, \ldots, M_k$ 和 N 是带边或者无边光滑流形，$M_1, \ldots, M_k$ 中至多只有一个有非空边界. 对于每个 i，令 $\pi_i : M_1 \times \cdots \times M_k \to M_i$ 为投影映射. 映射 $F : N \to M_1 \times \cdots \times M_k$ 是光滑映射当且仅当每个复合映射 $F_i = \pi_i \circ F : N \to M_i$ 是光滑映射.

2.1.1 微分同胚

M, N 是带边或者无边光滑流形, 如果 $F : M \to N$ 是光滑双射并且有光滑的逆映射, 那么我们说 F 是**微分同胚**.

例 2.7 (微分同胚)**.**

1. 考虑 $F : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$ 和 $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{B}^n$ 为

$$F(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - |x|^2}}, \quad G(y) = \frac{y}{\sqrt{1 + |y|^2}},$$

F, G 都是光滑映射并且互为逆映射, 所以 $\mathbb{B}^n$ 微分同胚于 $\mathbb{R}^n$.

2. M 是任意光滑流形, (U,φ) 是光滑坐标卡, 那么 $\varphi : U \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ 是微分同胚, 因为其坐标表示为恒等映射.

命题 2.8 (微分同胚的性质).

1. 微分同胚的复合是微分同胚.
2. 微分同胚的有限积是微分同胚.
3. 微分同胚是同胚并且是开映射.
4. 微分同胚限制在带边或者无边开子流形上是到其像集的微分同胚.
5. 两个光滑流形微分同胚是一个等价关系.

定理 2.9 (维数的微分同胚不变性). m 维光滑流形微分同胚于 n 维光滑流形的必要条件是 $m = n$.

Proof. 设 M 是光滑 m-流形, N 是光滑 n-流形, $F : M \to N$ 是微分同胚. 任取 $p \in M$, 设 (U,φ) 是包含 p 的光滑坐标卡, (V,ψ) 是包含 $F(p)$ 的光滑坐标卡并且 $F(U) \subseteq V$, 并且 $\hat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ 是 $\varphi(U)$ 到其像集的微分同胚, 这是 Euclid 空间的子集之间的微分同胚, 所以 $m = n$. □

2.2 单位分解

单位分解是将局部的光滑对象“粘合”为全局光滑对象的工具, 并且不需要像粘合引理一样要求它们在重叠区域上重合, 单位分解在光滑流形理论中是不可或缺的.

引理 2.10. 函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t}, & t > 0, \\ 0, & t \le 0, \end{cases}$$

是光滑函数.

引理 2.11. 给定两个实数 $r_1 < r_2$, 存在光滑函数 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 使得 $t \le r_1$ 时 $h(t) \equiv 1$, $r_1 < t < r_2$ 的时候 $0 < h(t) < 1$, $t \ge r_2$ 的时候 $h(t) \equiv 0$.

Proof. 令 f 是上一个引理中的函数, 令

$$h(t) = \frac{f(r_2 - t)}{f(r_2 - t) + f(t - r_1)}$$

即满足要求. □

引理 2.12. 给定两个正实数 $r_1 < r_2$, 存在光滑函数 $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 使得 $x \in \bar{B}_{r_1}(0)$ 时有 $H(x) \equiv 1$, $x \in B_{r_2}(0) \setminus \bar{B}_{r_1}(0)$ 时有 $0 < H(x) < 1$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_{r_2}(0)$ 时有 $H(x) \equiv 0$.

Proof. 令 h 是上一个引理中的函数, 令

$$H(x) = h(|x|),$$

根据复合函数的光滑性, $x \neq 0$ 时 H 是光滑的. 又因为 H 在 $B_{r_1}(0)$ 上是常值函数, 所以 H 是光滑函数. □

上述函数 H 被称为**鼓包函数**.

如果 f 是拓扑空间 M 上的实值或者向量值函数, 定义 f **的支集** $\operatorname{supp} f$ 为 f 的非零点集的闭包:

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{p \in M \mid f(p) \neq 0\}}.$$

例如上述函数 H 的支集为 $\bar{B}_{r_2}(0)$. 如果 $\operatorname{supp} f$ 被某个集合 $U \subseteq M$ 包含, 那么我们说 f **支撑在** U **中**. 如果 $\operatorname{supp} f$ 是紧集, 那么我们说 f 是**紧支的**. 显然, 紧空间上的任意函数都是紧支的.

设 M 是一个拓扑空间, 令 $\mathcal{X} = (X_\alpha)_{\alpha \in A}$ 是 M 的任意开覆盖. **从属于** $\mathcal{X}$ **的单位分解**指的是一族连续函数 $(\psi_\alpha)_{\alpha \in A}$, 其中 $\psi_\alpha : M \to \mathbb{R}$ 满足下面的性质:

1. 对于任意 $\alpha \in A$ 和 $x \in M$, 有 $0 \leq \psi_\alpha(x) \leq 1$.
2. 对于每个 $\alpha \in A$ 有 $\operatorname{supp} \psi_\alpha \subseteq X_\alpha$.
3. 支集族 $(\operatorname{supp} \psi_\alpha)_{\alpha \in A}$ 是局部有限的. 也就是说, 对于任意 $x \in M$, 都存在 x 的一个邻域使得这个邻域只与有限多个 $\operatorname{supp} \psi_\alpha$ 有非空交集.
4. 对于任意 $x \in M$, 有 $\sum_{\alpha \in A} \psi_\alpha(x) = 1$. 注意, 第 3 点表明对于任意 $x \in M$, 这都是一个有限求和.

如果 M 是带边或者无边光滑流形, 当上述 ψ_α 都是光滑函数的时候, 我们说这是一个**光滑单位分解**.

定理 2.13 (单位分解的存在性). 设 M 是带边或者无边光滑流形, $\mathcal{X} = (X_\alpha)_{\alpha \in A}$ 是 M 的任意开覆盖, 那么存在从属于 $\mathcal{X}$ 的光滑单位分解.

Proof. 对无边流形的情况进行证明. □

2.2.1 单位分解的应用

单位分解的第一个应用是拓展鼓包函数的概念到流形的任意闭子集. 如果 M 是拓扑空间, $A \subseteq M$ 是闭子集, $U \subseteq M$ 是包含 A 的开集, 连续函数 $\psi : M \to \mathbb{R}$ 如果满足 $0 \leq \psi \leq 1$, 在 A 上 $\psi \equiv 1$ 并且 $\operatorname{supp} \psi \subseteq U$, 那么我们说 ψ 是**关于** A **的支在** U **中的鼓包函数**.

命题 2.14 (光滑鼓包函数的存在性). 令 M 是带边或者无边光滑流形, 对于任意闭子集 $A \subseteq M$ 和任意包含 A 的开集 U, 存在关于 A 的支在 U 中的光滑鼓包函数.

Proof. 令 $U_0 = U$, $U_1 = M \smallsetminus A$, 那么 $\{U_0, U_1\}$ 是 M 的开覆盖. 设 $\{\psi_0, \psi_1\}$ 是从属于这个开覆盖的光滑单位分解, 当 $x \in A$ 的时候, $\psi_0(x) + \psi_1(x) = 1$ 并且 $\psi_1(x) = 0$, 所以 $\psi_0(x) = 1$, 故 ψ_0 就是关于 A 的支在 U 中的光滑鼓包函数. □

单位分解的第二个重要应用是将闭子集上的光滑函数进行延拓. 设 M, N 是带边或者无边光滑流形, $A \subseteq M$ 是任意子集, 如果 $F : A \to N$ 在每个点 $p \in A$ 处都存在

一个邻域 W 以及一个光滑映射 $\tilde{F}: W \to N$ 使得 $\tilde{F}\big|_{W\cap A} = F$, 那么我们说 F 在 A 上是光滑的.

引理 2.15 (光滑函数的延拓引理). 设 M 是带边或者无边光滑流形，$A \subseteq M$ 是闭子集，$f: A \to \mathbb{R}^k$ 是光滑函数. 对于任意包含 A 的开子集 U，存在光滑函数 $\tilde{f}: M \to \mathbb{R}^k$ 使得 $\tilde{f}\big|_A = f$ 以及 $\operatorname{supp}\tilde{f} \subseteq U$.

Proof. 对于每个 $p \in A$, 设邻域 W_p 和光滑函数 $\tilde{f}_p: W_p \to \mathbb{R}^k$ 使得 $\tilde{f}_p\big|_{W_p\cap A} = f$, 用 $W_p \cap U$ 替代 W_p, 我们可以假设 $W_p \subseteq U$. 那么集合族 $\{W_p \mid p \in A\} \cup \{M \setminus A\}$ 构成了 M 的开覆盖. 设 $\{\psi_p \mid p \in A\} \cup \{\psi_0\}$ 是从属于这个开覆盖的光滑单位分解. 也就是说我们有 $\operatorname{supp}\psi_p \subseteq W_p$ 以及 $\operatorname{supp}\psi_0 \subseteq M \setminus A$.

对于每个 $p \in A$, 乘积 $\psi_p\tilde{f}_p$ 是 W_p 上的光滑函数. 对于 $x \in M \setminus \operatorname{supp}\psi_p$, 我们将 $\psi_p\tilde{f}_p(x)$ 解释为 0. 当 $x \in W_p \setminus \operatorname{supp}\psi_\alpha$ 的时候, 由于 $\psi_p\tilde{f}_p(x) = \psi_p(x)\tilde{f}_p(x) = 0$, 根据粘合引理, 那么 $\psi_p\tilde{f}_p$ 可以视为 $M \to \mathbb{R}^k$ 的光滑函数. 定义 $\tilde{f}: M \to \mathbb{R}^k$ 为

$$\tilde{f}(x) = \sum_{p\in A} \psi_p\tilde{f}_p(x),$$

由于支集族 $\{\operatorname{supp}\psi_p\}$ 是局部有限的, 所以上述求和是有限和, 因此 $\tilde{f}$ 是光滑函数. 如果 $x \in A$, 那么 $\psi_0(x) = 0$ 并且 $\tilde{f}_p(x) = f(x)$, 所以

$$\tilde{f}(x) = \sum_{p\in A} \psi_p(x) f(x) = \left(\psi_0(x) + \sum_{p\in A} \psi_p(x)\right) f(x) = f(x),$$

故 $\tilde{f}\big|_A = f$. $\tilde{f}(x) \neq 0$ 表明存在 p 使得 $\psi_p(x) \neq 0$, 即 $x \in \operatorname{supp}\psi_p$. 根据局部有限的性质, 有

$$\operatorname{supp}\tilde{f} \subseteq \overline{\bigcup_{p\in A} \operatorname{supp}\psi_p} = \bigcup_{p\in A} \overline{\operatorname{supp}\psi_p} = \bigcup_{p\in A} \operatorname{supp}\psi_p \subseteq U. \qquad \square$$

3

切向量

3.1 切向量

以单位球面 $\mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ 为例, 我们试图定义 $\mathbb{S}^{n-1}$ 中一点处的“切向量”. 在定义这个概念之前, 我们先回顾 $\mathbb{R}^n$ 中的元素. 对于 $\mathbb{R}^n$ 中的元素, 我们通常将它们视为点, 用坐标 $(x^1, \ldots, x^n)$ 表示. 同时, 我们也可以将它们视为向量, 其拥有方向和长度, 但是与所处的位置 (起点) 无关, 一个向量 $v = v^i e_i$ 可以被视为从任意起点处出发的一个箭头. 对于切向量的定义而言, 我们希望这个向量和起点是绑定的, 也就是说, 在每个点处都有一个独立的 $\mathbb{R}^n$ 的复制品, 当我们谈及一个点 a 处的切向量的时候, 我们想象中这些切向量应该处于 $\mathbb{R}^n$ 的一个复制品中, 这个复制品的原点被平移到 a 处.

3.1.1 几何的切向量

给定 $a \in \mathbb{R}^n$, 定义 a **处的几何切空间** $\mathbb{R}^n_a$ 为集合 $\{a\} \times \mathbb{R}^n = \{(a, v) \mid v \in \mathbb{R}^n\}$. $\mathbb{R}^n$ 中的**几何切向量**指的是 $\mathbb{R}^n_a$ 中的元素. 我们将 (a, v) 简记为 v_a 或者 $v|_a$. 显然 $\mathbb{R}^n_a$ 是同构于 $\mathbb{R}^n$ 的向量空间.

几何上来看, $a \in \mathbb{S}^{n-1}$ 处的切空间应该是 $\mathbb{R}^n_a$ 的一个子空间, 其与向量 a 正交. 但是对于一般的光滑流形而言, 我们需要寻找切向量的其他特征来定义一般的切向量的概念. 几何切向量提供了一种新颖的视角. 对于任意几何切向量 $v_a \in \mathbb{R}^n_a$, 其诱导了一个映射 $D_{v|_a} : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, 其将光滑函数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 送到 f 在 a 处沿 v 方向的方向导数:

$$D_{v|_a} f = D_v f(a) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(a + tv).$$

$D_{v|_a}$ 是 $\mathbb{R}$ 线性映射, 并且满足乘积法则:

$$D_{v|_a}(fg) = f(a) D_{v|_a} g + g(a) D_{v|_a} f.$$

若 $v_a = v^i e_i|_a$, 那么

$$D_{v|_a} f = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(a).$$

利用切向量的特点, 我们可以给出如下定义. 设点 $a \in \mathbb{R}^n$, 映射 $w : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ 如果是 $\mathbb{R}$-线性映射并且满足乘积法则:

$$w(fg) = f(a) wg + g(a) wf,$$

那么我们说 w 是 a **处的导子**. 记 $T_a\mathbb{R}^n$ 为所有 a 处的导子的集合. 定义加法和数乘

$$(w_1+w_2)f=w_1f+w_2f,\quad (cw)f=c(wf),$$

$T_a\mathbb{R}^n$ 成为一个向量空间. 根据前面的叙述, 我们知道每个切向量都自然地诱导出一个导子, 那么导子能否代表所有的切向量? 一个重要的事实是, $T_a\mathbb{R}^n$ 与几何切空间 $\mathbb{R}^n_a$ 是同构的.

引理 3.1 (导子的性质). 设 $a\in\mathbb{R}^n$, $w\in T_a\mathbb{R}^n$, $f,g\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

1. 如果 f 是常值函数, 那么 $wf=0$.
2. 如果 $f(a)=g(a)=0$, 那么 $w(fg)=0$.

Proof. (1) 设 $f(x)\equiv c$, 那么 $f(x)=cf_1(x)$, 其中 $f_1(x)\equiv 1$. 根据导子的乘积法则, 有

$$wf_1=w(f_1f_1)=2f_1(a)wf_1=2wf_1,$$

所以 $wf_1=0$, 所以 $wf=c(wf_1)=0$.

(2) 根据乘积法则, 有

$$w(fg)=f(a)wg+g(a)wf=0. \qquad \square$$

命题 3.2. 令 $a\in\mathbb{R}^n$, 那么

1. 对于几何切向量 $v_a\in\mathbb{R}^n_a$, 映射 $D_{v|_a}:C^\infty(\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$ 定义了 a 处的一个导子.
2. 映射 $v_a\mapsto D_{v|_a}$ 给出了 $\mathbb{R}^n_a\to T_a\mathbb{R}^n$ 的同构.

Proof. (1) 根据方向导数的性质是显然的.

(2) 容易验证 $v_a\mapsto D_{v|_a}$ 是线性映射. 首先我们说明这是一个单射. 假设 $v_a\in\mathbb{R}^n_a$ 使得 $D_{v|_a}=0$, 即对于任意的 $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 有 $D_vf(a)=D_{v|_a}f=0$. 特别地, 考虑坐标函数 $x^j:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, 其将点 x 送到第 j 个坐标 x^j. 设 $v_a=v^ie_i|_a$, 那么

$$v^j=v^i\frac{\partial}{\partial x^i}x^j(a)=D_vx^j(a)=D_{v|_a}x^j=0,$$

所以 $v_a=0$, 故 $v_a\mapsto D_{v|_a}$ 是单射.

下面说明这是一个满射. 任取 $w\in T_a\mathbb{R}^n$, 令 $v^i=w(x^i)$, $v_a=v^ie_i|_a$, 我们证明 $w=D_{v|_a}$. 对于任意 $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 根据 Taylor 公式, 有

$$\begin{aligned}f(x)=f(a)&+\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x^i}(a)(x^i-a^i)\\&+\sum_{i,j=1}^n(x^i-a^i)(x^j-a^j)\int_0^1(1-t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}(a+t(x-a))dt,\end{aligned}$$

根据引理 3.1, 所以

$$\begin{aligned} wf &= w(f(a)) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(a) w(x^i - a^i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(a) w(x^i) = \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(a) \\ &= D_{v|_a} f. \end{aligned}$$

□

推论 3.3. 对于任意 $a \in \mathbb{R}^n$，对于 $1 \le i \le n$，定义导子

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_a : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}, \qquad \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_a f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(a),$$

那么这 n 个导子构成了 $T_a\mathbb{R}^n$ 的一组基.

3.1.2 流形上的切向量

经过上一小节, 我们找到了几何的切向量的一个等价刻画, 即导子. 而导子的定义可以非常容易地推广到流形上. 令 M 是带边或者无边光滑流形, $p \in M$. 一个线性映射 $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ 如果满足乘积法则

$$v(fg) = f(p)vg + g(p)vf, \quad \forall f, g \in C^\infty(M),$$

那么我们说 v 是 p **处的导子**. 所以 p 处的导子的集合记为 T_pM, 这是一个向量空间, 称为 M **在** p **处的切空间**. T_pM 中的元素被称为 p **处的切向量**.

与引理 3.1 完全类似地, 流形上的切向量也有下面的性质.

引理 3.4 (流形上切向量的性质). 设 M 是带边或者无边光滑流形，$p \in M$，$v \in T_pM$，并且 $f, g \in C^\infty(M)$.

1. 如果 f 是常值函数，那么 $vf = 0$.
2. 如果 $f(p) = g(p) = 0$，那么 $v(fg) = 0$.

考虑到几何切向量是定义流形上切向量的动机, 我们应该把 M 在 p 的切向量想象为与 M 相切的、以 p 为起点的一个“箭头”. 当然, 涉及切向量的定理必须基于上述切向量的抽象定义, 但是我们的几何直觉应当尽可能的联系几何图像.

3.2 光滑映射的微分

对于 Euclid 空间之间的光滑映射, 我们知道映射在一个点上的全导数（微分）是一个线性映射, 其代表了在该点附近对光滑映射的“最佳线性近似”. 在流形的情况下, 也有类似的线性映射, 但是流形不是向量空间, 所以这样的线性映射是切空间之间的线性映射.

设 M, N 是带边或者无边光滑流形, $F : M \to N$ 是光滑映射, 对于每个 $p \in M$, 我们定义 F **在** p **处的微分**为映射

$$dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N,$$

给定 $v \in T_pM$, 令 $dF_p(v)$ 为 $F(p)$ 处的导子, 其把 $f \in C^\infty(N)$ 送到

$$dF_p(v)(f) = v(f \circ F).$$

注意到光滑映射的复合表明 $f \circ F \in C^\infty(M)$, 所以上述定义是有意义的. 下面我们验证 $dF_p(v)$ 确实是 $T_{F(p)}N$ 中的元素. 算子 $dF_p(v) : C^\infty(N) \to \mathbb{R}$ 是线性的, 这是因为 v 是线性的. 任取 $f, g \in C^\infty(N)$, 我们有

$$\begin{aligned} dF_p(v)(fg) &= v(fg \circ F) = v((f \circ F)(g \circ F)) \\ &= f(F(p))v(g \circ F) + g(F(p))v(f \circ F) \\ &= f(F(p))dF_p(v)(g) + g(F(p))dF_p(v)(f), \end{aligned}$$

所以 $dF_p(v)$ 满足乘积法则, 故 $dF_p(v)$ 确实是 N 在 $F(p)$ 处的一个导子.

命题 3.5 (微分的性质). 令 M, N, P 是带边或者无边光滑流形，$F : M \to N$ 和 $G : N \to P$ 是光滑映射，$p \in M$.

1. $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ 是线性映射.
2. $d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p : T_pM \to T_{G(F(p))}P$.
3. $d(\mathrm{Id}_M)_p = \mathrm{Id}_{T_pM} : T_pM \to T_pM$.
4. 若 F 是微分同胚，则 $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ 是同构，且 $(dF_p)^{-1} = d(F^{-1})_{F(p)}$.

Proof. (1) 直接验证即可.

(2) 任取 $v \in T_pM$, $f \in T_{G(F(p))}P$, 有

$$\begin{aligned} d(G \circ F)_p(v)(f) &= v(f \circ (G \circ F)) = v((f \circ G) \circ F) \\ &= dF_p(v)(f \circ G) = dG_{F(p)}\big(dF_p(v)\big)(f) \\ &= dG_{F(p)} \circ dF_p(v)(f), \end{aligned}$$

所以 $d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p$.

(3) 任取 $v \in T_pM$, $f \in C^\infty(M)$, 有

$$d(\mathrm{Id}_M)_p(v)(f) = v(f \circ \mathrm{Id}_M) = vf,$$

所以 $d(\mathrm{Id}_M)(v) = v$, 即 $d(\mathrm{Id}_M)_p = \mathrm{Id}_{T_pM}$.

(4) F 是微分同胚表明 F 有光滑逆映射 $F^{-1} : N \to M$, 那么 $F^{-1} \circ F = \mathrm{Id}_M$, 根据 (2) 和 (3), 我们有

$$d(F^{-1})_{F(p)} \circ dF_p = d(F^{-1} \circ F)_p = d(\mathrm{Id}_M)_p = \mathrm{Id}_{T_pM},$$

所以 dF_p 是同构并且 $(dF_p)^{-1} = d(F^{-1})_{F(p)}$. □

下面我们先解决一个技术性的问题，虽然切空间是用整个流形上的光滑函数定义的，但是对于坐标卡而言，我们需要研究局部的切向量.

命题 3.6. 令 M 是带边或者无边光滑流形，$p \in M$，$v \in T_pM$. 如果 $f, g \in C^\infty(M)$ 在 p 点的某个邻域上重合，那么 $vf = vg$.

Proof. 令 $h = f - g$，那么 h 在 p 的某个邻域 U 上为零. 令 $\psi \in C^\infty(M)$ 是关于 $M \setminus U$ 的支在 $M \setminus \{p\}$ 中的鼓包函数，那么函数 $\psi h = h$，且 $\psi(p) = h(p) = 0$，于是引理 3.4 表明 $vh = v(\psi h) = 0$，所以 $vf = vg$. □

命题 3.7 (开子流形的切空间). 令 M 是带边或者无边光滑流形，$U \subseteq M$ 是开子集，$\iota : U \hookrightarrow M$ 是包含映射. 对于任意 $p \in U$，微分 $d\iota_p : T_pU \to T_pM$ 是同构.

Proof. 设 $v \in T_pU$ 使得 $d\iota_p(v) = 0$，令 B 是 p 的邻域使得 $\bar{B} \subseteq U$. 对于任意的 $f \in C^\infty(U)$，其可以延拓为 $\tilde{f} \in C^\infty(M)$ 使得 $\tilde{f}\big|_B = f$. 因为 f 和 $\tilde{f}\big|_U$ 在 B 上重合，根据命题 3.6，我们有

$$vf = v\left(\tilde{f}\big|_U\right) = v\left(\tilde{f} \circ \iota\right) = d\iota_p(v)\tilde{f} = 0,$$

所以 $v = 0$，故 $d\iota_p$ 是单射.

另一方面，任取 $w \in T_pM$，定义算子 $v : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$ 为 $vf = w\tilde{f}$，其中 $\tilde{f} \in C^\infty(M)$ 是 f 在 B 上的任意光滑函数延拓，命题 3.6 告诉我们算子 v 是良定义的. 容易验证 $v \in T_pU$. 于是对于任意 $g \in C^\infty(M)$，有

$$d\iota_p(v)(g) = v(g \circ \iota) = w\left(\widetilde{g \circ \iota}\right) = wg,$$

最后一个等号是因为 g 和 $\widetilde{g \circ \iota}$ 在 B 上重合. 这就表明 $d\iota_p$ 是满射. □

给定一个开子集 $U \subseteq M$，对于任意点 $p \in U$，现在我们把 T_pU 和 T_pM 完全等同. 这意味着我们做了如下观察：将 $v \in T_pU$ 和 $d\iota_p(v) \in T_pM$ 等同，即认为 v 作用在整个流形 M 上的光滑函数而不是 U 上的光滑函数. 由于导子对光滑函数的作用只与该函数在任意小的邻域上的值有关，所以这种等同是无害的. 反过来，这也表明任意切向量 $v \in T_pM$ 可以作用在定义在 p 的邻域上的光滑函数，而不一定作用在定义在整个流形 M 上的光滑函数.

命题 3.8 (切空间的维数). 如果 M 是 n 维光滑流形，那么对于每个 $p \in M$，切空间 T_pM 是 n 维向量空间.

Proof. 给定 $p \in M$，设 (U, φ) 是包含 p 的一个光滑坐标卡，由于 $\varphi : U \to \varphi(U) = \hat{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ 是微分同胚，所以 $d\varphi_p : T_pU \to T_{\varphi(p)}\hat{U}$ 是同构，命题 3.7 表明 $T_pM \simeq T_pU$ 以及 $T_{\varphi(p)}\hat{U} \simeq T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$，所以 $\dim T_pM = \dim T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n = n$. □

回顾 例 1.8，每个有限维向量空间都有一个自然的光滑结构，并且其独立于基或者范数的选取. 下面的命题表明，向量空间的切空间可以自然地等同为该向量空间自身.

设 V 是有限维向量空间, $a \in V$. 对于任意向量 $v \in V$, 定义 $D_{v|_a} : C^\infty(V) \to \mathbb{R}$ 为

$$D_{v|_a} f = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(a + tv).$$

命题 3.9 (向量空间的切空间). 设 V 是有限维向量空间，附带标准光滑结构. 对于每个点 $a \in V$，映射 $v \mapsto D_{v|_a}$ 给出了 $V \to T_a V$ 的典范同构，使得对于任意线性映射 $L : V \to W$，下面的图表交换：

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "L"'] & T_a V \arrow[d, "dL_a"] \\ W \arrow[r, "\simeq"'] & T_{La} W \end{tikzcd}$$

Proof. 一旦我们选取了 V 的一组基, 完全仿照 命题 3.2, 我们可以证明 $D_{v|_a}$ 确实是导子, 并且映射 $v \mapsto D_{v|_a}$ 是同构.

设 $L : V \to W$ 是线性映射, 任选 V, W 的一组基后, L 的坐标表示仍然是线性映射, 故 L 是光滑映射. 最后, 直接计算可得

$$\begin{aligned} dL_a \left(D_{v|_a}\right) f &= D_{v|_a}(f \circ L) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(L(a + tv)) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(La + tLv) = D_{Lv|_{La}} f. \end{aligned}$$

□

非常重要的一点是同构 $V \simeq T_a V$ 是不依赖于基的选取的, 出于这一点, 我们可以把有限维向量空间的切向量视为这个空间内的元素. 更一般的, 如果 M 是向量空间 V 的开子流形, 我们有同构 $T_p M \simeq T_p V \simeq V$, 也就是说我们可以把 M 的每个切空间都和 V 等同. 例如, 因为 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 是向量空间 $M(n, \mathbb{R})$ 的开子流形, 所以我们可以将 $X \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 处的切空间等同于 $M(n, \mathbb{R})$.

命题 3.10 (积流形的切空间). 令 $M_1, \ldots, M_k$ 是光滑流形，对于每个 j，令 $\pi_j : M_1 \times \cdots \times M_k \to M_j$ 是投影. 对于任意 $p = (p_1, \ldots, p_k) \in M_1 \times \cdots \times M_k$，定义映射

$$\alpha : T_p(M_1 \times \cdots \times M_k) \to T_{p_1} M_1 \oplus \cdots \oplus T_{p_k} M_k$$

为

$$\alpha(v) = \left(d(\pi_1)_p(v), \ldots, d(\pi_k)_p(v)\right),$$

那么 α 是同构. 如果 M_i 是带边光滑流形，结论也正确.

Proof. 不难验证 π_j 是光滑映射以及 α 是线性映射. 令包含映射 $\iota_j : M_j \to M_1 \times \cdots \times M_k$ 为

$$\iota_j(x) = (p_1, \ldots, x, \ldots, p_k),$$

其中 x 处于第 j 个分量. 定义线性映射

$$\beta : T_{p_1} M_1 \oplus \cdots \oplus T_{p_k} M_k \to T_p(M_1 \times \cdots \times M_k)$$

为

$$\beta(v_1, \ldots, v_k) = d(\iota_1)_{p_1}(v_1) + \cdots + d(\iota_k)_{p_k}(v_k).$$

那么

$$\begin{aligned}
\alpha \circ \beta(v_1, \ldots, v_k) &= \left(\sum_{i=1}^{k} d(\pi_1)_p \circ d(\iota_i)_{p_i}(v_i), \ldots, \sum_{i=1}^{k} d(\pi_k)_p \circ d(\iota_i)_{p_i}(v_i) \right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{k} d(\pi_1 \circ \iota_i)_{p_i}(v_i), \ldots, \sum_{i=1}^{k} d(\pi_k \circ \iota_i)_{p_i}(v_i) \right) \\
&= \left(d(\pi_1 \circ \iota_1)_{p_1}(v_1), \ldots, d(\pi_k \circ \iota_k)_{p_k}(v_k) \right) \\
&= \left(d\left(\mathrm{Id}_{M_1}\right)_{p_1}(v_1), \ldots, d\left(\mathrm{Id}_{M_k}\right)_{p_k}(v_k) \right) \\
&= (v_1, \ldots, v_k),
\end{aligned}$$

所以 α 是满射. 显然

$$\dim T_p(M_1 \times \cdots \times M_k) = \dim T_{p_1} M_1 \oplus \cdots \oplus T_{p_k} M_k,$$

所以 α 是同构. □

3.3 使用坐标进行计算

现在我们把抽象的微分和切空间的定义落实到计算上, 我们将研究如何在局部坐标使用切向量和微分进行计算.

设 M 是光滑流形, (U, φ) 是一个光滑坐标卡, 那么 φ 是 U 到开集 $\hat{U} = \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ 的微分同胚. 微分 $d\varphi_p : T_p M \to T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n$ 是同构.

根据 推论 3.3, 导子 $\partial/\partial x^1|_{\varphi(p)}, \ldots, \partial/\partial x^n|_{\varphi(p)}$ 构成了 $T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n$ 的一组基. 因此, 其在 $d\varphi_p$ 下的原像构成 $T_p M$ 的一组基, 我们使用 $\partial/\partial x^i|_p$ 来表示它们. 也就是说, 我们定义

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = (d\varphi_p)^{-1} \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)} \right) = d(\varphi^{-1})_{\varphi(p)} \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)} \right) \in T_p M \simeq T_p U.$$

此时, 我们可以发现, 其在 $f \in C^\infty(U)$ 上的作用为

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p f = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)} (f \circ \varphi^{-1}) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial x^i}(\hat{p}),$$

其中 $\hat{f} = f \circ \varphi^{-1}$ 是 f 的坐标表示, $\hat{p} = (p^1, \ldots, p^n) = \varphi(p)$ 是 p 的坐标表示. 这样的记号看上去容易混淆, 实际上对应 Euclid 空间中偏导数的定义, 即 $\partial/\partial x^i|_p$ 计算了函数 f (的坐标表示) 在点 p (的坐标表示) 处的第 i 个偏导数. 切向量 $\partial/\partial x^i|_p$ 被称为与给定坐标系相关的 p **处的坐标向量**. 若 $M = \mathbb{R}^n$, 局部坐标取标准坐标 $(\mathbb{R}^n, \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$, 此时切向量 $\partial/\partial x^i|_p$ 就是偏导数算子.

因此, 任意切向量 $v \in T_pM$ 可以唯一地表示为一个线性组合

$$v = v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p.$$

这组基 $\left(\partial/\partial x^i|_p\right)$ 被称为 T_pM **的坐标基**, 实数 $(v^1, \dots, v^n)$ 被称为 v 相对于这个坐标基的**分量**. 如果 v 是已知的, 用 $x^j \in C^\infty(U)$ 表示坐标函数, 将 $x \in U$ 送到 $\varphi(x) \in \mathbb{R}^n$ 的第 i 个分量, 那么

$$v(x^j) = v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p x^j = v^i \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(\hat{p}) = v^j.$$

3.3.1 使用坐标计算微分

现在我们研究微分在坐标下的表示. 首先考虑光滑映射 $F : U \to V$, 其中 $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ 是开集. 对于任意 $p \in U$, 我们来确定 $dF_p : T_p\mathbb{R}^n \to T_{F(p)}\mathbb{R}^m$ 在坐标基下的表示矩阵. 使用 $(x^1, \dots, x^n)$ 表示定义域上的坐标, $(y^1, \dots, y^m)$ 表示值域上的坐标, 那么我们可以计算得到

$$\begin{aligned} dF_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) f &= \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (f \circ F) = \frac{\partial f}{\partial y^j}(F(p))\frac{\partial F^j}{\partial x^i}(p) \\ &= \left(\frac{\partial F^j}{\partial x^i}(p) \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{F(p)}\right) f, \end{aligned}$$

所以

$$dF_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) = \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(p) \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{F(p)}. \tag{3.1}$$

也就是说, dF_p 在坐标基下的表示矩阵为

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1}(p) & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F^m}{\partial x^1}(p) & \cdots & \frac{\partial F^m}{\partial x^n}(p) \end{pmatrix}.$$

可见这个矩阵就是 F 在 p 处的 Jacobi 矩阵, 即全导数 $DF(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 的表示矩阵. 因此, 在这种情况下, $dF_p : T_p\mathbb{R}^n \to T_{F(p)}\mathbb{R}^m$ 对应全导数 $DF(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

现在我们考虑带边或者无边光滑流形之间的光滑映射 $F : M \to N$. 选取 $p \in M$ 处的光滑坐标卡 (U, φ) 和 $F(p) \in N$ 处的光滑坐标卡 (V, ψ), 我们得到 F 的坐标表示 $\hat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap F^{-1}(V)) \to \psi(V)$. 令 $\hat{p} = \varphi(p)$ 为 p 的坐标表示. 根据上面

的叙述, $d\hat{F}_{\hat{p}}$ 可以表示为 $\hat{F}$ 在 $\hat{p}$ 处的 Jacobi 矩阵. 使用 $F\circ\varphi^{-1}=\psi^{-1}\circ\hat{F}$, 我们有

$$\begin{aligned} dF_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) &= dF_p\left(d(\varphi^{-1})_{\hat{p}}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\hat{p}}\right)\right) = d(\psi^{-1})_{\hat{F}(\hat{p})}\left(d\hat{F}_{\hat{p}}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\hat{p}}\right)\right) \\ &= d(\psi^{-1})_{\hat{F}(\hat{p})}\left(\frac{\partial \hat{F}^j}{\partial x^i}(\hat{p})\left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{\hat{F}(\hat{p})}\right) \\ &= \frac{\partial \hat{F}^j}{\partial x^i}(\hat{p})\left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{F(p)}. \end{aligned}$$

因此, dF_p 在坐标基下的表示矩阵为 F (的坐标表示) 在 p (的坐标表示) 处的 Jacobi 矩阵.

3.3.2 基变换

设 (U,φ) 和 (V,ψ) 是 M 上的两个光滑坐标卡, $p\in U\cap V$. 将 φ 的坐标函数记为 (x^i), ψ 的坐标函数记为 $(\tilde{x}^i)$. p 处的任意切向量都可以由两组基 $\left(\partial/\partial x^i|_p\right)$ 和 $\left(\partial/\partial \tilde{x}^i|_p\right)$ 表示. 现在我们研究这两个表示的关系.

在这种情况下, 我们通常将转移映射 $\psi\circ\varphi^{-1}:\varphi(U\cap V)\to\psi(U\cap V)$ 写为下面的简写记号:

$$\psi\circ\varphi^{-1}(x)=\left(\tilde{x}^1(x),\ldots,\tilde{x}^n(x)\right).$$

这里我们滥用一种典型的记号: 对于 $\tilde{x}^i(x)$, 我们把 $\tilde{x}^i$ 视为一个坐标函数 (定义域为 M 的开集, 值域为 $\mathbb{R}^n$ 或者 $\mathbb{H}^n$ 的开集), 但是此处 x 为 $\varphi(U\cap V)$ 中的点, 所以这里的 $\tilde{x}^i(x)$ 实际上表示 $\tilde{x}^i\circ\varphi^{-1}(x)$. 根据前一小节, 微分 $d(\psi\circ\varphi^{-1})_{\varphi(p)}$ 满足

$$d(\psi\circ\varphi^{-1})_{\varphi(p)}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)}\right)=\frac{\partial\tilde{x}^j}{\partial x^i}(\varphi(p))\left.\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^j}\right|_{\psi(p)},$$

利用坐标向量的定义, 我们有

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p &= d(\varphi^{-1})_{\varphi(p)}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)}\right) \\ &= d(\psi^{-1})_{\psi(p)}\circ d(\psi\circ\varphi^{-1})_{\varphi(p)}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)}\right) \\ &= d(\psi^{-1})_{\psi(p)}\left(\frac{\partial\tilde{x}^j}{\partial x^i}(\varphi(p))\left.\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^j}\right|_{\psi(p)}\right) \\ &= \frac{\partial\tilde{x}^j}{\partial x^i}(\hat{p})\left.\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^j}\right|_p, \end{aligned}$$

其中 $\hat{p}=\varphi(p)$. 那么对于切向量 $v=v^i\,\partial/\partial x^i|_p=\tilde{v}^j\,\partial/\partial\tilde{x}^j|_p$, 其两个分量之间满足关系

$$\tilde{v}^j=\frac{\partial\tilde{x}^j}{\partial x^i}(\hat{p})v^i.$$

3.4 切丛

M 是带边或者无边光滑流形，定义 M 的**切丛** TM 为 M 在所有点处切空间的无交并：

$$TM = \coprod_{p\in M} T_pM.$$

我们通常把 TM 中的元素写成 (p, v)，其中 $p \in M$，$v \in T_pM$. 切丛配备一个自然的投影映射 $\pi : TM \to M$，其满足 $\pi(p, v) = p$. 通过自然的单射 $v \mapsto (p, v)$，我们通常会将 T_pM 视为 TM 的子集. 对于 T_pM 中的切向量，我们通常会使用三种不同的记号：v、(p, v) 或者 v_p，这取决于我们有多强调点 p 的存在.

以 $M = \mathbb{R}^n$ 为例，根据 命题 3.2，我们知道 $\mathbb{R}^n$ 的切空间可以等同于几何切空间，所以我们有

$$T\mathbb{R}^n = \coprod_{a\in\mathbb{R}^n} T_a\mathbb{R}^n \simeq \coprod_{a\in\mathbb{R}^n} \mathbb{R}^n_a = \coprod_{a\in\mathbb{R}^n} \{a\}\times\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,$$

于是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 中的元素 (a, v) 可以视为表示了一个几何切向量 v_a 或者导子 $D_{v|_a}$. 然而，需要注意的是，一般光滑流形的切丛并不能直接等同于 Cartesian 积，因为并没有一种自然地方式将不同点处的切空间等同起来.

如果 M 是光滑流形，切丛 TM 可以被简单地视为向量空间的无交并，但是实际上它可以有更深刻的结构. 下面的命题表明切丛也可以被视为一个光滑流形.

命题 3.11. **对于光滑 n-流形 M，切丛 TM 有一个自然的拓扑和光滑结构使得其成为 $2n$ 维光滑流形. 在这个结构下，投影 $\pi : TM \to M$ 是光滑映射.**

Proof. 我们使用 引理 1.15 来定义 TM 上的拓扑结构和光滑结构. 对于 M 的任意光滑坐标卡 (U, φ)，注意到 $\pi^{-1}(U) \subseteq TM$ 是所有在 U 中一点处的切向量的集合. 令 $(x^1, \ldots, x^n)$ 是 φ 的坐标函数，定义映射 $\tilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^{2n}$ 为

$$\tilde{\varphi}\left(v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) = \left(x^1(p), \ldots, x^n(p), v^1, \ldots, v^n\right). \tag{3.2}$$

其像集为 $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{R}^{2n}$ 的开集. $\tilde{\varphi}$ 是到其像集的双射，因为其逆映射为

$$\tilde{\varphi}^{-1}\left(x^1, \ldots, x^n, v^1, \ldots, v^n\right) = v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi^{-1}(x)}.$$

现在假设 (U, φ) 和 (V, ψ) 是 M 的两个光滑坐标卡，令 $\left(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi}\right)$ 和 $\left(\pi^{-1}(V), \tilde{\psi}\right)$ 是对应的 TM 的坐标卡. 集合

$$\tilde{\varphi}\left(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)\right) = \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n,$$
$$\tilde{\psi}\left(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)\right) = \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n,$$

它们都是 $\mathbb{R}^{2n}$ 的开集. 转移映射 $\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1} : \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \to \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ 满足

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}\left(x^1, \ldots, x^n, v^1, \ldots, v^n\right) = \left(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n, \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^j}(x)v^j, \ldots, \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x^j}(x)v^j\right),$$

所以 $\tilde{\psi}\circ\tilde{\varphi}^{-1}$ 是光滑的.

由于 M 是第二可数的, 所以存在可数个 $\{U_i\}$ 覆盖 M, 其中每个 U_i 都是 M 的一个光滑坐标卡. 于是 $\{\pi^{-1}(U_i)\}$ 满足引理 1.15 的 (1) 到 (4). 下面我们只需要验证 TM 的 Hausdorff 性质. 假设 (p,v) 和 (p,w) 是 TM 中不同的切向量, 那么存在光滑坐标卡 U_i 包含 p, 此时 (p,v) 和 (p,w) 都被同一个坐标卡 $\pi^{-1}(U_i)$ 包含. 假设 (p,v) 和 (q,w) 是 TM 中不同的切向量, 其中 $p\neq q$, 由于 M 是 Hausdorff 的, 所以存在不相交的光滑坐标卡 U,V 使得 $p\in U$ 以及 $q\in V$, 此时 $\pi^{-1}(U)$ 和 $\pi^{-1}(V)$ 是分别包含 p 和 q 的不相交坐标卡. 因此, TM 成为一个 $2n$ 维光滑流形.

对于 M 的光滑坐标卡 (U,φ) 和 TM 的光滑坐标卡 $\left(\pi^{-1}(U),\tilde{\varphi}\right)$, π 的坐标表示为 $\hat{\pi}=\varphi\circ\pi\circ\tilde{\varphi}^{-1}$, 满足 $\hat{\pi}(x,v)=x$, 所以 $\hat{\pi}$ 是光滑函数, π 是光滑映射. □

注释 3.12. 总的来说，切丛 TM 的拓扑结构为：设 $\{(U_i,\varphi_i)\}$ 是覆盖 M 的一组可数的光滑坐标卡，定义 TM 的拓扑为 $\{\tilde{\varphi}_i^{-1}(V)\}$ 构成的拓扑基生成的拓扑，其中 V 是 $\mathbb{R}^{2n}$ 的开集. TM 的光滑结构为：$\{(\pi^{-1}(U_i),\tilde{\varphi}_i)\}$ 构成 TM 的一组光滑坐标卡.

(3.2) 式中的坐标 (x^i,v^i) 被称为 **TM 上的自然坐标**.

命题 3.13. 设 M 是带边或者无边光滑 n-流形并且能够被单个光滑坐标卡覆盖，那么 TM 微分同胚于 $M\times\mathbb{R}^n$.

Proof. 设 (M,φ) 是 M 的一个全局光滑坐标卡, 那么 $\varphi: M\to\hat{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ 是微分同胚, (3.2) 式表明 $\tilde{\varphi}: TM\to\hat{U}\times\mathbb{R}^n$ 是微分同胚, 故 $TM\approx\hat{U}\times\mathbb{R}^n\approx M\times\mathbb{R}^n$. □

将光滑映射 $F: M\to N$ 在所有点上的微分放在一起, 我们可以定义**全局微分**, 记为 $dF: TM\to TN$, 当 dF 限制在 $T_pM\subseteq TM$ 上时将 dF 定义为 dF_p. 对于切向量 $v\in T_pM$, 我们会混用记号 $dF_p(v)$ 和 $dF(v)$, 取决于我们有多强调点 p.

命题 3.14. 如果 $F: M\to N$ 是光滑映射，那么全局微分 $dF: TM\to TN$ 是光滑映射.

Proof. dF 在 TM 的自然坐标 $\tilde{\varphi}=(x^i,v^i)$ 和 TN 的自然坐标 $\tilde{\psi}=(y^i,w^i)$ 下的表示为

$$\begin{aligned}\widehat{dF}\left(x^1,\ldots,x^n,v^1,\ldots,v^n\right)&=\tilde{\psi}\circ dF\circ\tilde{\varphi}^{-1}\left(x^1,\ldots,x^n,v^1,\ldots,v^n\right)\\&=\tilde{\psi}\circ dF\left(p,v^i\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right)\\&=\tilde{\psi}\circ dF_p\left(v^i\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right)\\&=\tilde{\psi}\left(F(p),v^i\frac{\partial\hat{F}^j}{\partial x^i}(x)\left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{F(p)}\right)\\&=\left(F^1(x),\ldots,F^n(x),\frac{\partial F^1}{\partial x^i}(x)v^i,\ldots,\frac{\partial F^n}{\partial x^i}(x)v^i\right),\end{aligned}$$

这是一个光滑函数, 所以 dF 是光滑映射. □

推论 3.15 (全局微分的性质). 设 $F : M \to N$ 和 $G : N \to P$ 是光滑映射. 那么

1. $d(G \circ F) = dG \circ dF$.
2. $d(\mathrm{Id}_M) = \mathrm{Id}_{TM}$.
3. 如果 F 是微分同胚，那么 $dF : TM \to TN$ 也是微分同胚，并且 $(dF)^{-1} = d(F^{-1})$.

3.5 曲线的速度向量

M 是带边或者无边光滑流形, 我们定义 **M 中的曲线**为连续映射 $\gamma : J \to M$, 其中 $J \subseteq \mathbb{R}$ 是区间. 注意, 本书中的曲线始终指区间到 M 的一个映射, 而不是 M 中的某个点集.

我们对切空间的定义实际上导出了对速度向量的自然定义: 给定一个光滑曲线 $\gamma : J \to M$ 和 $t_0 \in J$, 定义 **γ 在 t_0 处的速度**为 $\gamma'(t_0)$:

$$\gamma'(t_0) = d\gamma \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t_0} \right) \in T_{\gamma(t_0)} M,$$

其中 $d/dt|_{t_0}$ 表示 $T_{t_0}\mathbb{R}$ 的标准坐标基 (对于一维流形而言, 我们通常记为 d/dt 而不是 $\partial/\partial t$). 此时速度向量作用在函数 $f \in C^\infty(M)$ 上为

$$\gamma'(t_0) f = d\gamma \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t_0} \right) f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t_0} (f \circ \gamma) = (f \circ \gamma)'(t_0).$$

令 (U, φ) 是光滑坐标卡, 坐标函数为 $\left(x^i\right)$. 如果 $\gamma(t_0) \in U$, 记 γ 的坐标表示为 $\gamma(t) = \left(\gamma^1(t), \ldots, \gamma^n(t)\right)$. 那么速度的坐标表示为

$$\gamma'(t_0) = \frac{d\gamma^i}{dt}(t_0) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\gamma(t_0)}.$$

下面的命题表明流形上的任意切向量都是某条曲线的速度向量. 这给出了一种更加几何的方式去理解切丛: 切丛仅仅是 M 中所有光滑曲线的速度向量的集合.

命题 3.16. 设 M 是带边或者无边光滑流形，$p \in M$. 每个 $v \in T_pM$ 都是 M 中某个光滑曲线的速度向量.

Proof. 假设 $p \in \operatorname{Int} M$. 令 (U, φ) 是以 p 为中心的光滑坐标卡, 设 $v = v^i\, \partial/\partial x^i|_p$ 是其在坐标基下的表示. 对于充分小的 $\varepsilon > 0$, 令 $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ 是曲线, 其坐标表示满足

$$\gamma(t) = \left(tv^1, \ldots, tv^n\right).$$

注意此时表示 $\gamma(t) = \varphi^{-1}\left(tv^1, \ldots, tv^n\right)$. 那么 $\gamma(0) = p$ 并且 $\gamma'(0) = v^i\, \partial/\partial x^i|_p = v$.

现在假设 $p \in \partial M$. □

命题 3.17 (复合曲线的速度). 令 $F : M \to N$ 是光滑映射，$\gamma : J \to M$ 是光滑曲线. 对于任意 $t_0 \in J$，复合曲线 $F \circ \gamma : J \to N$ 在 $t = t_0$ 处的速度为

$$(F \circ \gamma)'(t_0) = dF\big(\gamma'(t_0)\big).$$

Proof. 根据定义, 有

$$(F \circ \gamma)'(t_0) = d(F \circ \gamma)\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0}\right) = (dF \circ d\gamma)\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0}\right) = dF\big(\gamma'(t_0)\big).$$ □

推论 3.18 (通过速度向量计算微分). 设 $F : M \to N$ 是光滑映射，$p \in M$，$v \in T_pM$，那么

$$dF_p(v) = (F \circ \gamma)'(0),$$

其中 $\gamma : J \to M$ 是满足 $\gamma(0) = p$ 以及 $\gamma'(0) = v$ 的任意光滑曲线.

3.6 Problems

> 3-1 设 M, N 是带边或者无边光滑流形，$F : M \to N$ 是光滑映射，证明对于任意 $p \in M$ 有 $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ 是零映射当且仅当 F 在 M 的每个连通分支上是常值映射.

Proof. 若任取 $p \in M$, dF_p 是零映射. 取 p 处的一个光滑坐标卡 (U, φ) 和 $F(p)$ 处的光滑坐标卡 (V, ψ), 通过缩小 U, 我们可以假设 U 被 p 所在的连通分支包含. 此时 dF_p 满足

$$dF_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) = \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(\hat{p})\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{F(p)} = 0,$$

所以对于任意的 i, j, 有 $\partial F^j/\partial x^i(\hat{p}) = 0$. 此时任取 $q \in U$, 都有 $\partial F^j/\partial x^i(\hat{q}) = 0$, 所以 $\partial F^j/\partial x^i : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ 恒为零. 这表明 $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ 是常值函数, 所以 F 在 U 上是常值函数. 于是 F 在 p 所在的连通分支上是常值函数. □

> 3-2 证明 $T\mathbb{S}^1$ 微分同胚于 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

Proof. 令 $F : T\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ 为

$$F\left(p, v\left.\frac{d}{dt}\right|_p\right) = (p, v),$$

那么 F 在标准光滑结构下的坐标表示为

$$(x, v) \mapsto (x, v)$$

是光滑映射. 同理不难验证 F^{-1} 也是光滑映射. □

4

浸没、浸入和嵌入

4.1 常秩映射

设 M, N 是带边或者无边光滑流形. 给定一个光滑映射 $F: M \to N$ 和点 $p \in M$, 定义 F **在** p **处的秩**为线性映射 $dF_p: T_pM \to T_{F(p)}N$ 的秩. 显然其等价定义有 F 在任意光滑坐标卡下的 Jacobi 矩阵的秩以及 $\operatorname{im} dF_p \subseteq T_{F(p)}N$ 的维数. 如果 F 在任意点处的秩都是 r, 那么我们说 F 是**常秩**的, 记为 $\operatorname{rank} F = r$. 显然 F 在任意点处的秩都小于等于 $\min\{\dim M, \dim N\}$, 如果 dF_p 的秩等于 $\min\{\dim M, \dim N\}$, 那么我们说 F **在** p **处满秩**. 如果 F 在任意点处都满秩, 那么我们说 F **满秩**.

如果光滑映射 $F: M \to N$ 在任意点处的微分都是满射 (等价地说, $\operatorname{rank} F = \dim N$), 那么我们说 F 是**光滑浸没**. 如果 F 在任意点处的微分都是单射 (等价地说, $\operatorname{rank} F = \dim M$), 那么我们说 F 是**光滑浸入**.

命题 4.1. 设 $F: M \to N$ 是光滑映射，$p \in M$. 如果 dF_p 是满射，那么存在 p 的邻域 U 使得 $F|_U$ 是浸没. 如果 dF_p 是单射，那么存在 p 的邻域 U 使得 $F|_U$ 是浸入.

Proof. 任取 p 处的光滑坐标卡 (W, φ) 和 $F(p)$ 处的光滑坐标卡 (V, ψ), 那么 F 的坐标表示 $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ 在 $\hat{p} = \varphi(p)$ 处的 Jacobi 矩阵是满秩矩阵, 由于满秩矩阵的集合是 $\dim N \times \dim M$ 矩阵空间中的开集, 所以存在 $\hat{p}$ 的邻域 $U \subseteq W$ 使得 F 在 U 中任意点都满秩, 此时 $F|_U$ 为浸没或者浸入. □

例 4.2 (浸没和浸入).

1. 设 $M_1, \dots, M_k$ 是光滑流形, 那么每个投影映射 $\pi_i: M_1 \times \cdots \times M_k \to M_i$ 是光滑浸没. 这是因为 π_i 的某个坐标表示为 $\hat{\pi}(x_1, \dots, x_k) = x_i$, 其 Jacobi 矩阵满秩.
2. 如果 $\gamma: J \to M$ 是光滑曲线, 那么 γ 是光滑浸入当且仅当对于任意的 $t \in J$ 有 $\gamma'(t) \neq 0$.
3. 如果 M 是光滑流形,赋予切丛 TM 命题 3.11 中的光滑结构,那么投影 $\pi: TM \to M$ 是光滑浸没. 对于 M 的任意光滑坐标卡 $(U, (x^i))$ 和对应的 TM 的光滑坐标卡 $(\pi^{-1}(U), (x^i, v^i))$, π 的坐标表示为 $\hat{\pi}(x, v) = x$, 其 Jacobi 矩阵是行满秩矩阵.
4. 定义光滑映射 $X: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ 为

$$X(u, v) = \big((2 + \cos 2\pi u)\cos 2\pi v, (2 + \cos 2\pi u)\sin 2\pi v, \sin 2\pi u\big),$$

那么 X 的像集是 yz-平面的圆 $(y-2)^2+z^2=1$ 绕 z-轴旋转一圈得到的环面. 容易计算 X 在 (u,v) 处的 Jacobi 矩阵为

$$DX(u,v)=2\pi\begin{pmatrix}-\cos 2\pi v\sin 2\pi u & -\sin 2\pi v(2+\cos 2\pi u)\\ -\sin 2\pi v\sin 2\pi u & \cos 2\pi v(2+\cos 2\pi u)\\ \cos 2\pi u & 0\end{pmatrix},$$

显然 $\cos 2\pi u\neq 0$ 的时候, $DX(u,v)$ 的秩为 2. 当 $\cos 2\pi u=0$ 的时候, 有

$$DX(u,v)=2\pi\begin{pmatrix}-\cos 2\pi v & -2\sin 2\pi v\\ -\sin 2\pi v & 2\cos 2\pi v\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

此时 $DX(u,v)$ 的一个 2-阶子式不为零, 所以秩也为 2. 所以 $DX(u,v)$ 的秩始终为 2, 即 X 是光滑浸入.

4.1.1 局部微分同胚

令 M,N 是带边或者无边光滑流形, 映射 $F:M\to N$. 如果每个 $p\in M$ 处都有一个邻域 U 使得 $F(U)$ 是开集并且 $F|_U:U\to F(U)$ 是微分同胚, 那么我们说 F 是**局部微分同胚**. 由于 F 满足局部的光滑性, 根据命题 2.3, 局部微分同胚是光滑映射.

定理 4.3 (流形上的反函数定理). 设 M,N 是光滑流形, $F:M\to N$ 是光滑映射. 如果 $p\in M$ 使得 dF_p 可逆, 那么存在 p 的连通邻域 U_0 和 $F(p)$ 的连通邻域 V_0 使得 $F|_{U_0}:U_0\to V_0$ 是微分同胚.

Proof. dF_p 可逆表明 $\dim M=\dim N=n$. 取 p 处的光滑坐标卡 (U,φ) 和 $F(p)$ 处的光滑坐标卡 (V,ψ) 并且 $F(U)\subseteq V$, $\hat{F}=\psi\circ F\circ\varphi^{-1}:\hat{U}=\varphi(U)\to\psi(V)=\hat{V}$ 是光滑函数. 微分 $d\hat{F}_{\hat{p}}=d\psi_{F(p)}\circ dF_p\circ d(\varphi^{-1})_{\hat{p}}$ 可逆, Euclid 空间中的反函数定理告诉我们存在 $\hat{p}$ 的连通邻域 $\hat{U}_0\subseteq\hat{U}$ 以及 $\psi(F(p))$ 的连通邻域 $\hat{V}_0\subseteq\hat{V}$ 使得 $\hat{F}|_{\hat{U}_0}:\hat{U}_0\to\hat{V}_0$ 是微分同胚, 那么 $U_0=\varphi^{-1}(\hat{U}_0)$ 和 $V_0=\psi^{-1}(\hat{V}_0)$ 即为我们所需要的. □

命题 4.4 (局部微分同胚的基本性质).

1. 局部微分同胚的复合是局部微分同胚.
2. 光滑流形之间局部微分同胚的有限积是局部微分同胚.
3. 局部微分同胚是局部同胚并且是开映射.
4. 局部微分同胚限制在带边或者无边开子流形上是局部微分同胚.
5. 微分同胚是局部微分同胚.
6. 双射的局部微分同胚是微分同胚.

Proof. (1) 设 $F:M\to N$ 和 $G:N\to P$ 是局部微分同胚. 任取 $p\in M$, 那么存在 $F(p)$ 的邻域 V 使得 $G(V)$ 是 P 的开集, 并且 $G|_V:V\to G(V)$ 是微分同胚. F 是局部微分同胚表明存在 p 的邻域 U 使得 $F(U)$ 为 N 的开集并且 $F|_U:U\to F(U)$ 是微分同胚, 用 $U\cap F^{-1}(V)$ 替代 U, 可以假设 $U\subseteq F^{-1}(V)$, 即 $F(U)\subseteq V$. 那么

$G|_{F(U)} : F(U) \to G(F(U))$ 是微分同胚, 故 $(G \circ F)|_U : U \to G(F(U))$ 是微分同胚, 即 $G \circ F$ 是局部微分同胚. □

命题 4.5. 设 M, N 是光滑流形，$F : M \to N$ 是映射.

1. F 是局部微分同胚当且仅当 F 同时是光滑浸没以及光滑浸入.
2. 如果 $\dim M = \dim N$ 并且 F 为光滑浸没或者光滑浸入，那么 F 是局部微分同胚.

Proof. (1) 设 F 是局部微分同胚. 任取 $p \in M$, 存在 p 的邻域 U 使得 $F(U)$ 为开集并且 $F|_U : U \to F(U)$ 是微分同胚, 那么微分 $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ 是同构, 所以 $\operatorname{rank} F = \dim M = \dim N$, 即 F 是光滑浸没以及光滑浸入.

反之, 若 F 是光滑浸没以及光滑浸入, 任取 $p \in M$, 那么 $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ 是同构, 根据反函数定理, 存在 p 的邻域 U 和 $F(p)$ 的邻域 V 使得 $F|_U : U \to V$ 是微分同胚, 即 F 是局部微分同胚.

(2) 只需注意到对于相同维数的向量空间之间的线性映射, 单射或者满射即可推出同构. □

例 4.6 (局部微分同胚)**.** 定义映射 $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ 为 $\varepsilon(t) = e^{2\pi i t}$, ε 是局部微分同胚, 因为其坐标表示为 $\hat{\varepsilon}(t) = 2\pi t + c$ 是微分同胚.

4.1.2 秩定理

定理 4.7 (秩定理). 设 M, N 分别是 m 维和 n 维光滑流形，$F : M \to N$ 是秩 r 的光滑映射. 对于每个 $p \in M$，存在以 p 为中心的光滑坐标卡 (U, φ) 和以 $F(p)$ 为中心的光滑坐标卡 (V, ψ) 使得 $F(U) \subseteq V$，并且 F 的坐标表示满足

$$\hat{F}\left(x^1, \ldots, x^r, x^{r+1}, \ldots, x^m\right) = \left(x^1, \ldots, x^r, 0, \ldots, 0\right).$$

特别地，如果 F 是光滑浸没，那么

$$\hat{F}\left(x^1, \ldots, x^n, x^{n+1}, \ldots, x^m\right) = \left(x^1, \ldots, x^n\right),$$

如果 F 是光滑浸入，那么

$$\hat{F}\left(x^1, \ldots, x^m\right) = \left(x^1, \ldots, x^m, 0, \ldots, 0\right).$$

Proof. 该定理的叙述是局部的,所以在选定光滑坐标卡后,我们可以将 M, N 替换为开集 $U \subseteq \mathbb{R}^m$ 和开集 $V \subseteq \mathbb{R}^n$. $DF(p)$ 的秩为 r 表明其存在某个 $r \times r$ 子矩阵的行列式不为零. 通过调整坐标的顺序, 我们假定其左上角的子矩阵的行列式不为零, 即 $\left(\partial F^i / \partial x^j\right)$, 其中 $1 \le i, j \le r$. 记 $\mathbb{R}^m$ 中的标准坐标为 $(x, y) = (x^1, \ldots, x^r, y^1, \ldots, y^{m-r})$, $\mathbb{R}^n$ 中的标准坐标为 $(v, w) = (v^1, \ldots, v^r, w^1, \ldots, w^{n-r})$. 通过平移坐标系, 我们可以假设 $p = (0, 0)$ 以及 $F(p) = (0, 0)$. 将 $F(x, y)$ 分解为 $F(x, y) = (Q(x, y), R(x, y))$, 其中 $Q : U \to \mathbb{R}^r$ 和 $R : U \to \mathbb{R}^{n-r}$ 是光滑函数. 此时 $\left(\partial Q^i / \partial x^j (0, 0)\right)$ 是可逆矩阵.

定义 $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ 为 $\varphi(x,y) = (Q(x,y), y)$, 那么

$$D\varphi(0,0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial Q^i}{\partial x^j}(0,0) & \dfrac{\partial Q^i}{\partial y^j}(0,0) \\ 0 & I_{m-r} \end{pmatrix}.$$

显然 $D\varphi(0,0)$ 可逆. 根据反函数定理, 存在 $(0,0)$ 的连通邻域 U_0 和 $\varphi(0,0) = (0,0)$ 的连通邻域 $\tilde{U}_0$ 使得 $\varphi : U_0 \to \tilde{U}_0$ 是微分同胚. 通过缩小 U_0 和 $\tilde{U}_0$, 我们假设 $\tilde{U}_0$ 是开立方体. 记逆映射 $\varphi^{-1} : \tilde{U}_0 \to U_0$ 为 $\varphi^{-1}(x,y) = (A(x,y), B(x,y))$, 其中 $A : \tilde{U}_0 \to \mathbb{R}^r$ 和 $B : \tilde{U}_0 \to \mathbb{R}^{m-r}$ 是光滑函数, 那么

$$(x,y) = \varphi\left(A(x,y), B(x,y)\right) = \big(Q\big(A(x,y), B(x,y)\big), B(x,y)\big),$$

故 $B(x,y) = y$. 因此 φ^{-1} 满足

$$\varphi^{-1}(x,y) = (A(x,y), y).$$

另一方面, 对比分量 x, 有 $Q\left(A(x,y), y\right) = x$, 因此

$$F \circ \varphi^{-1}(x,y) = \big(x, \tilde{R}(x,y)\big),$$

其中 $\tilde{R} : \tilde{U}_0 \to \mathbb{R}^{n-r}$ 满足 $\tilde{R}(x,y) = R\left(A(x,y), y\right)$. $F \circ \varphi^{-1}$ 在任意 $(x,y) \in \tilde{U}_0$ 处的 Jacobi 矩阵为

$$D\left(F \circ \varphi^{-1}\right)(x,y) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ \dfrac{\partial \tilde{R}^i}{\partial x^j}(x,y) & \dfrac{\partial \tilde{R}^i}{\partial y^j}(x,y) \end{pmatrix}.$$

由于微分同胚不改变映射的秩, 所以上述矩阵的秩为 r, 这表明 $\partial \tilde{R}^i / \partial y^j(x,y)$ 为零矩阵, 所以 $\tilde{R}$ 的取值实际上与 y 无关, 不妨设 $S(x) = \tilde{R}(x,0)$ (这里 $\tilde{U}_0$ 是开立方体保证 $\tilde{R}(x,0)$ 有定义), 那么

$$F \circ \varphi^{-1}(x,y) = (x, S(x)).$$

令 $V_0 \subseteq V$ 为 $V_0 = \left\{(v,w) \in V \,\middle|\, (v,0) \in \tilde{U}_0\right\}$, 那么 V_0 是包含 $(0,0)$ 的开集. 此时 $F \circ \varphi^{-1}\left(\tilde{U}_0\right) \subseteq V_0$. 定义 $\psi : V_0 \to \mathbb{R}^n$ 为 $\psi(v,w) = (v, w - S(v))$, 这是到其像集的微分同胚, 因为有逆映射 $\psi^{-1}(s,t) = (s, t + S(s))$, 所以 (V_0, ψ) 是光滑坐标卡. 那么

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x,y) = \psi(x, S(x)) = (x, S(x) - S(x)) = (x, 0).$$

这就完成了证明. □

推论 4.8. 令 M, N 是光滑流形，$F : M \to N$ 是光滑映射，且 M 是连通空间. 那么下面的说法等价：

1. 对于每个 $p \in M$ 都存在包含 p 的光滑坐标卡和包含 $F(p)$ 的光滑坐标卡，使得 F 的坐标表示是线性映射.
2. F 是常秩的.

Proof. (2) $\Rightarrow$ (1) 即秩定理. (1) $\Rightarrow$ (2) 由于线性映射是常秩的, 所以 F 在每个点 p 处都有一个邻域使得 F 在这个邻域上为常秩, M 的连通性表明 F 在 M 上为常秩. □

定理 4.9 (全局秩定理). 令 M, N 是光滑流形，$F : M \to N$ 是常秩光滑映射.

1. 若 F 是满射，那么 F 是光滑浸没.
2. 若 F 是单射，那么 F 是光滑浸入.
3. 若 F 是双射，那么 F 是微分同胚.

Proof. 记 $m = \dim M$, $n = \dim N$, 设 F 有常秩 r. (a) 若 F 是满射, 假设 F 不是光滑浸没, 那么 $r < n$. 根据秩定理, 存在以 p 为中心的光滑坐标卡 (U, φ) 和以 $F(p)$ 为中心的光滑坐标卡 (V, ψ) 使得 $F(U) \subseteq V$ 并且 F 的坐标表示为

$$\hat{F}\left(x^1, \ldots, x^r, x^{r+1}, \ldots, x^m\right) = \left(x^1, \ldots, x^r, 0, \ldots, 0\right).$$

通过适当缩小 U, 我们假设 U 是一个正则坐标球并且 $F(\bar{U}) \subseteq V$. 这表明 $F(\bar{U})$ 是集合 $\left\{y \in V \,\middle|\, y^{r+1} = \cdots = y^n = 0\right\}$ (N 的闭子集且不包含 N 的任意非空开子集) 的紧子集, 所以 $F(\bar{U})$ 是 N 的闭集且不包含 N 的任何非空开子集, 所以

$$\overline{N \setminus F(\bar{U})} = N \setminus \operatorname{Int} F(\bar{U}) = N \setminus \emptyset = N,$$

故 $F(\bar{U})$ 在 N 中无处稠密. 因为流形的任意开覆盖都有可数子覆盖, 所以我们可以选取可数个这样的坐标卡 $\{(U_i, \varphi_i)\}$ 覆盖 M, 其对应的坐标卡 $\{(V_i, \psi_i)\}$ 覆盖 $F(M)$. 因为

$$F(M) = \bigcup_{i=1}^{\infty} F(\bar{U}),$$

根据 Baire 纲定理, 所以 $F(M)$ 在 N 中的内部为空集, 这与 F 是满射矛盾.

(b) 若 F 是单射, 假设 F 不是光滑浸入, 那么 $r < m$. 根据秩定理, 存在以 p 为中心的光滑坐标卡 (U, φ) 和以 $F(p)$ 为中心的光滑坐标卡 (V, ψ) 使得 $F(U) \subseteq V$ 并且 F 的坐标表示为

$$\hat{F}\left(x^1, \ldots, x^r, x^{r+1}, \ldots, x^m\right) = \left(x^1, \ldots, x^r, 0, \ldots, 0\right),$$

那么对于任意小的 ε 都有 $\hat{F}(0, \ldots, 0, \varepsilon) = (0, \ldots, 0, 0)$, 这与 F 是单射矛盾.

(c) 根据 (a) 和 (b), F 同时是光滑浸没以及光滑浸入, 根据命题 4.5, F 是局部微分同胚, 双射的局部微分同胚是微分同胚. □

4.2 嵌入

如果 M, N 是带边或者无边光滑流形, 若 $F : M \to N$ 同时是光滑浸入以及拓扑嵌入, 那么我们说 F 是 M **到** N **的光滑嵌入**.

例 4.10 (光滑嵌入).

1. M 是带边或者无边光滑流形, $U \subseteq M$ 是开子流形, 那么包含映射 $\iota : U \hookrightarrow M$ 是光滑嵌入.
2. 如果 $M_1, \ldots, M_k$ 是光滑流形, $p_i \in M_i$ 是任意点, 定义 $\iota_j : M_j \to M_1 \times \cdots \times M_k$ 为
$$\iota_j(q) = (p_1, \ldots, p_{j-1}, q, p_{j+1}, \ldots, p_k),$$
那么 ι_j 是光滑嵌入.
3. 例 4.2 的 (4) 定义的映射 $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ 可以下降为一个 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ 到 $\mathbb{R}^3$ 的光滑嵌入.

例 4.11 (光滑的拓扑嵌入)**.** 定义映射 $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ 为 $\gamma(t) = (t^3, 0)$ 是光滑映射并且是拓扑嵌入, 但是其不是光滑嵌入, 因为 $\gamma'(0) = (0, 0)$ 不满秩.

例 4.12 (八字曲线)**.** 考虑曲线 $\beta : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2$ 为
$$\beta(t) = (\sin 2t, \sin t).$$
β 的像集也被称为**双扭线** $(x^2 = 4y^2(1-y^2))$. 由于 $\beta'(t) = (2\cos 2t, \cos t) \neq (0, 0)$, 所以 β 是单射的光滑浸入. 但是 β 不是拓扑嵌入, 因为其像集在子空间拓扑下是紧集, 但是 $(-\pi, \pi)$ 不是紧集.

例 4.13 (环面上的稠密曲线)**.** 令 $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}^2$ 是环面, α 是任意无理数. 定义映射 $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2$ 为
$$\gamma(t) = \left(e^{2\pi i t}, e^{2\pi i \alpha t}\right),$$
由于 $\gamma'(t)$ 始终不为零, 所以 γ 是光滑浸入. 若 $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, 那么 $t_1 - t_2$ 和 $\alpha(t_1 - t_2)$ 同时为整数, 这只能表明 $t_1 = t_2$, 所以 γ 是单射.

考虑集合 $\gamma(\mathbb{Z})$. 根据 Dirichlet 逼近定理, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在整数 n, m 使得 $|\alpha n - m| < \varepsilon$. 使用不等式 $\left|e^{it_1} - e^{it_2}\right| \leq |t_1 - t_2|$, 其中 $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ (这是因为从 e^{it_1} 到 e^{it_2} 的线段长度小于等于圆弧长度), 我们有 $\left|e^{2\pi i \alpha n} - 1\right| = \left|e^{2\pi i \alpha n} - e^{2\pi i m}\right| \leq |2\pi(\alpha n - m)| < 2\pi\varepsilon$, 因此,
$$|\gamma(n) - \gamma(0)| = \left|\left(e^{2\pi i n}, e^{2\pi i \alpha n}\right) - (1, 1)\right| = \left|\left(1, e^{2\pi i \alpha n}\right) - (1, 1)\right| < 2\pi\varepsilon,$$
所以 $\gamma(0)$ 是 $\gamma(\mathbb{Z})$ 的极限点. 这意味着 γ 并不同胚于它的像, 因为 $\mathbb{Z}$ 在 $\mathbb{R}$ 中没有任何极限点. 实际上, 可以证明像集 $\gamma(\mathbb{R})$ 在 $\mathbb{T}^2$ 中稠密. 这表明单射的光滑浸入也不一定是光滑嵌入.

下面的命题给出了一个判断单射的浸入为嵌入的充分条件.

命题 4.14. 设 $F : M \to N$ 是带边或者无边光滑流形，$F : M \to N$ 是单射的光滑浸入，如果 F 满足下列条件之一，那么 F 是光滑嵌入.

1. F 是开映射或者闭映射.
2. F 是恰当映射.
3. M 是紧空间.
4. M 有空的边界并且 $\dim M = \dim N$.

Proof. 若 F 为开映射或者闭映射，那么 F 是拓扑嵌入，进而是光滑嵌入. (2) 和 (3) 都能推出 F 是闭映射. 对于 (4)，$\dim M = \dim N$ 表明 dF_p 可逆，M 边界为空表明 $F(M) \subseteq \operatorname{Int} N$，命题 4.5 表明 $F : M \to \operatorname{Int} N$ 是局部微分同胚，从而是开映射. $F : M \to N$ 是开映射的复合 $M \to \operatorname{Int} N \hookrightarrow N$，所以 F 是光滑嵌入. □

定理 4.15 (局部嵌入定理). 设 M, N 是带边或者无边光滑流形，$F : M \to N$ 是光滑映射. 那么 F 是光滑浸入当且仅当在 M 的每个点处，都存在一个邻域 U 使得 $F|_U : U \to N$ 是光滑嵌入.

Proof. 若 F 是光滑浸入. 任取点 $p \in M$，根据秩定理，存在包含 p 的光滑坐标卡 (U_1, φ) 和包含 $F(p)$ 的光滑坐标卡 (V, ψ)，使得 $F(U_1) \subseteq V$ 以及 F 的坐标表示为

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}\left(x^1, \ldots, x^m\right) = \left(x^1, \ldots, x^m, 0, \ldots, 0\right),$$

此时 $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ 是单射，所以 $F|_{U_1}$ 是单射. 取 p 的一个预紧的邻域 U，并且 U 满足 $\bar{U} \subseteq U_1$. 那么 $F|_{\bar{U}} : \bar{U} \to N$ 是紧空间到 Hausdorff 空间的连续映射，从而是闭映射，又因为 $F|_{\bar{U}}$ 是单射，所以 $F|_{\bar{U}}$ 是拓扑嵌入，于是 $F|_U$ 作为 $F|_{\bar{U}}$ 的限制也是拓扑嵌入. 显然 $F|_U$ 是光滑浸入，所以 $F|_U$ 是光滑嵌入.

反之，若在 M 的每个点 p 处，都存在一个邻域 U 使得 $F|_U : U \to N$ 是光滑嵌入. 这表明 $d(F|_U)_p = d(F \circ \iota)_p = dF_p \circ d\iota_p$ 是单射，而 $d\iota_p : T_pU \to T_pM$ 是同构，所以 dF_p 是单射，所以 F 是光滑浸入. □

4.3 浸没

如果 $\pi : M \to N$ 是连续映射，定义 π **的截面**是 π 的连续右逆，即一个连续映射 $\sigma : N \to M$ 使得 $\pi \circ \sigma = \mathrm{Id}_N$. 定义 π **的局部截面**是连续映射 $\sigma : U \to M$，其中 $U \subseteq N$ 是开集并且满足 $\pi \circ \sigma = \mathrm{Id}_U$. 下面的定理表明，对于光滑浸没而言，其在值域上的局部行为类似满射.

定理 4.16 (局部截面定理). 设 M, N 是光滑流形，$\pi : M \to N$ 是光滑映射. 那么 π 是光滑浸没当且仅当 M 的每个点都在 π 的某个光滑局部截面的像集中.

Proof. 若 π 是光滑浸没. 任取 $p \in M$，根据秩定理，存在以 p 为中心的光滑坐标卡 (U, φ) 和以 $\pi(p)$ 为中心的光滑坐标卡 (V, ψ) 使得 $\pi(U) \subseteq V$ 并且有坐标表示

$$\psi \circ \pi \circ \varphi^{-1}\left(x^1, \ldots, x^m\right) = \left(x^1, \ldots, x^n\right).$$

对于 $\varepsilon > 0$，记 $\mathbb{R}^m$ 中的开立方体

$$\hat{C}_\varepsilon = \left\{ x \mid \left|x^i\right| < \varepsilon, i = 1, \ldots, m \right\},$$

我们可以让 ε 足够小使得 $\hat{C}_\varepsilon \subseteq \varphi(U)$，记 $C_\varepsilon = \varphi^{-1}\left(\hat{C}_\varepsilon\right) \subseteq U$. 于是

$$\psi \circ \pi(C_\varepsilon) = \left\{ y \mid \left|y^i\right| < \varepsilon, i = 1, \ldots, n \right\}$$

是 $\mathbb{R}^n$ 中的开立方体. 记 $C'_\varepsilon = \psi^{-1}(\psi \circ \pi(C_\varepsilon))$ 是 N 的开集. 令 $\sigma : C'_\varepsilon \to C_\varepsilon$, 其坐标表示满足

$$\varphi \circ \sigma \circ \psi^{-1}\left(x^1, \ldots, x^n\right) = \left(x^1, \ldots, x^n, 0, \ldots, 0\right),$$

那么 $\pi \circ \sigma = \mathrm{Id}_{C'_\varepsilon}$, 且 $p \in C_\varepsilon$ 表明 $p \in \operatorname{im}\sigma$.

反之, 若任取 $p \in M$, 存在 π 的光滑局部截面 $\sigma : U \to M$ 使得 $p \in \operatorname{im}\sigma$. 设 $q \in U$ 使得 $p = \sigma(q)$. 那么 $\pi \circ \sigma = \mathrm{Id}_U$ 表明

$$\mathrm{Id}_{T_q N} = d\left(\mathrm{Id}_U\right)_q = d\pi_p \circ d\sigma_q,$$

即 $d\pi_p$ 是满射, 所以 π 是光滑浸没. □

命题 4.17 (光滑浸没的性质). 令 M, N 是光滑流形，$\pi : M \to N$ 是光滑浸没. 那么 π 是开映射，进一步的，如果 π 是满射，那么 π 是商映射.

Proof. 设 $W \subseteq M$ 是开集, 任取 $q = \pi(p) \in \pi(W)$, 即 $p \in W$, 根据局部截面定理, 存在 π 的光滑局部截面 $\sigma : U \to M$ 使得 $p \in \operatorname{im}\sigma$, 设 $q' \in U$ 使得 $p = \sigma(q')$, 那么 $q = \pi(p) = \pi(\sigma(q')) = q'$, 所以 $\sigma(q) = p \in W$, 所以 $q \in \sigma^{-1}(W)$. 任取 $y \in \sigma^{-1}(W)$, 那么 $\sigma(y) \in W$, 即 $y = \pi(\sigma(y)) \in \pi(W)$, 所以 $q \in \sigma^{-1}(W) \subseteq \pi(W)$, 这表明 $\pi(W)$ 是开集, 即 π 是开映射. □

下面的定理反映了光滑浸没的重要特征, 即满射的光滑浸没在光滑流形中的行为类似于商映射在拓扑学中的行为.

定理 4.18 (满射光滑浸没的刻画). 设 M, N 是光滑流形，$\pi : M \to N$ 是满射的光滑浸没. 对于任意带边或者无边光滑流形 P，映射 $F : N \to P$ 光滑当且仅当 $F \circ \pi$ 光滑：

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "F\circ\pi"] & \\ N \arrow[r, "F"'] & P. \end{tikzcd}$$

Proof. 如果 F 光滑, 那么 $F \circ \pi$ 作为光滑映射的复合也光滑. 如果 $F \circ \pi$ 光滑, 任取 $q \in N$, 设 $p \in M$ 使得 $\pi(p) = q$, 根据局部截面定理, 存在 π 的光滑局部截面 $\sigma : U \to M$ 使得 $p \in \sigma(U)$, 此时 $F|_U = F \circ \pi \circ \sigma$ 是光滑映射, 这表明 F 是局部光滑的, 所以 F 光滑. □

定理 4.19. 设 M, N 是光滑流形并且 $\pi : M \to N$ 是满的光滑浸没，如果 P 是带边或者无边光滑流形且 $F : M \to P$ 是在 π 的每个纤维上为常值的光滑映射，那么存在唯一的光滑映射 $\widetilde{F} : N \to P$ 使得 $\widetilde{F} \circ \pi = F$：

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "F"] & \\ N \arrow[r, dashed, "\widetilde{F}"'] & P. \end{tikzcd}$$

Proof. 由于满的光滑浸没是商映射，所以存在唯一的连续映射 $\widetilde{F}: N \to P$ 使得 $\widetilde{F} \circ \pi = F$. 根据定理 4.18, F 光滑表明 $\widetilde{F}$ 光滑. □

定理 4.20. 设 M, N_1, N_2 是光滑流形，$\pi_1 : M \to N_1$ 和 $\pi_2 : M \to N_2$ 是满的光滑浸没，并且 π_1, π_2 在对方的每个纤维上是常值映射，那么存在唯一的微分同胚 $F : N_1 \to N_2$ 使得 $F \circ \pi_1 = \pi_2$.

Proof. 根据定理 4.19, 存在光滑映射 $F : N_1 \to N_2$ 满足 $F \circ \pi_1 = \pi_2$ 以及光滑映射 $G : N_2 \to N_1$ 满足 $G \circ \pi_2 = \pi_1$, 所以 $F \circ G \circ \pi_2 = \pi_2$, 那么 $F \circ G = \mathrm{Id}_{N_2}$, 类似的有 $G \circ F = \mathrm{Id}_{N_1}$, 所以 F 是微分同胚. □

4.4 光滑覆盖映射

回顾拓扑空间之间的覆盖映射. 即一个连通的、局部道路连通空间之间的连续满射 $\pi : E \to M$, 同时使得 M 的每个点都有一个邻域 U 使得 U 是均匀覆盖, 即 $\pi^{-1}(U)$ 的每个连通分支都通过 π 同胚于 U.

在流形中, 如果 E, M 都是连通的带边或者无边光滑流形, 如果 $\pi : E \to M$ 是光滑满射, 并且 M 中的每个点都有一个邻域 U 使得 $\pi^{-1}(U)$ 的每个连通分支都通过 π 微分同胚于 U, 那么我们说 π 是**光滑覆盖映射**, 同时也说 U 是均匀覆盖. M 被称为**覆盖的底空间**, E 被称为 **M 的覆盖流形**. 如果 E 是单连通的, 那么 E 被称为 **M 的万有覆盖流形**.

5

子流形

5.1 嵌入子流形

设 M 是带边或者无边光滑流形, M 的**嵌入子流形**指的是子集 $S \subseteq M$, 其配备子空间拓扑使得 S 成为一个（无边）流形, 配备使得包含映射 $S \hookrightarrow M$ 为光滑嵌入的光滑结构. 嵌入子流形也被称为**正则子流形**.

如果 S 是 M 的嵌入子流形, 那么 $\dim M - \dim S$ 被称为 S 在 M 中的**余维数**. 余维数为 1 的嵌入子流形被称为一个**嵌入超曲面**.

命题 5.1 (开子流形). 设 M 是光滑流形, 那么 M 的余维数为 0 的嵌入子流形恰好为开子流形.

Proof. 设 $U \subseteq M$ 是开子流形, $\iota : U \hookrightarrow M$ 为包含映射. 此时 ι 的坐标表示为恒等映射, 所以 ι 为光滑浸入, 又因为 U 有子空间拓扑, 所以 ι 是光滑嵌入. 故 U 为余维数 $\dim M - \dim U = 0$ 的嵌入子流形. 反之, 设 U 是余维数为 0 的嵌入子流形. 根据定义, 包含映射 $\iota : U \hookrightarrow M$ 是光滑嵌入, 根据 命题 4.5, ι 是局部微分同胚, 从而是开映射, 所以 U 是 M 的开子集, 故 U 是开子流形. □

命题 5.2 (嵌入的像作为子流形). 设 M 是带边或者无边光滑流形, N 是光滑流形, $F : N \to M$ 是光滑嵌入. 令 $S = F(N)$, 在子空间拓扑下, S 是拓扑流形, 并且有唯一的光滑结构使得其为 M 的嵌入子流形以及 F 为 $N \to F(N)$ 的微分同胚.

Proof. F 是嵌入表明 F 可以视为 $N \to S$ 的同胚, 所以 S 是一个拓扑流形. 定义 S 上的光滑坐标卡形如 $\left(F(U), \varphi \circ F^{-1}\right)$, 其中 (U, φ) 为 N 的任意光滑坐标卡. N 的光滑坐标卡的相容性导出了 S 的光滑坐标卡的相容性, 所以这给出了 S 上的光滑结构. 在这个光滑结构下, $F : N \to S$ 显然是微分同胚. 包含映射 $S \hookrightarrow M$ 是光滑嵌入的复合:

$$S \xrightarrow{F^{-1}} N \xrightarrow{F} M,$$

所以包含映射 $S \hookrightarrow M$ 是光滑嵌入, 即 S 是 M 的嵌入子流形. □

命题 5.3 (积流形的切片). 令 M, N 是光滑流形. 对于每个 $p \in N$, 子集 $M \times \{p\}$ (被称为积流形的一个**切片**) 是 $M \times N$ 的一个微分同胚于 M 的嵌入子流形.

Proof. 考虑光滑嵌入 $x \mapsto (x, p)$, 那么 $M \times \{p\}$ 作为该光滑嵌入的像集是 $M \times N$ 的同胚于 M 的嵌入子流形. □

命题 5.4 (图像作为子流形). 设 M 是光滑(无边) m-流形, N 是光滑带边或者无边 n-流形, $U \subseteq M$ 是开集, $f : U \to N$ 是光滑映射. 令 $\Gamma(f) \subseteq M \times N$ 为 f 的图像:

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \in M \times N \mid x \in U, y = f(x)\}.$$

那么 $\Gamma(f)$ 是 $M \times N$ 的嵌入 m-维子流形.

Proof. 定义映射 $\gamma_f : U \to M \times N$ 为

$$\gamma_f(x) = (x, f(x)),$$

那么 γ_f 是像集为 $\Gamma(f)$ 的光滑映射. 投影映射 $\pi_M : M \times N \to M$ 满足 $\pi_M \circ \gamma_f = \mathrm{Id}_U$, 所以对于任意的 $x \in U$, 有 $d(\pi_M)_{(x,f(x))} \circ d(\gamma_f)_x = \mathrm{Id}_{T_x M}$, 所以 $d(\gamma_f)_x$ 是单射, 故 γ_f 是光滑浸入. γ_f 也是拓扑嵌入, 因为 $\pi_M|_{\Gamma(f)}$ 为 γ_f 的逆映射. 所以 $\Gamma(f)$ 是同胚于 U 的嵌入子流形. □

有时候仅仅是嵌入还不够, 我们定义更强的嵌入. 如果嵌入子流形 $S \subseteq M$ 使得包含映射 $S \hookrightarrow M$ 是恰当映射, 那么我们说 S 是**恰当嵌入的**.

命题 5.5. 假设 M 是带边或者无边光滑流形, $S \subseteq M$ 是嵌入子流形, 那么 S 是恰当嵌入当且仅当其是 M 的闭子集.

Proof. 如果 S 是恰当嵌入的, 利用结论: 到局部紧的 Hausdorff 空间的恰当映射是闭映射, 所以 S 是闭子集. 如果 S 是闭子集, 任取 M 的紧子集 K, 此时 $K \cap S$ 是 S 的闭子集, 从而是 M 的闭子集, 所以 $K \cap S$ 是紧子集 K 的闭子集, 所以 $K \cap S$ 是紧子集, 所以 $S \hookrightarrow M$ 是恰当映射. □

推论 5.6. 任意紧的嵌入子流形是恰当嵌入的.

5.1.1 嵌入子流形的切片坐标卡

下面的定理将表明嵌入子流形可以局部地建模在 $\mathbb{R}^k$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的标准嵌入上, 我们把 $\mathbb{R}^k$ 视为子空间

$$\left\{\left(x^1, \ldots, x^k, x^{k+1}, \ldots, x^n\right) \,\middle|\, x^{k+1} = \cdots = x^n = 0\right\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

更一般地, 如果 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的开子集, 定义 U **的 k-维切片** (简称 k-切片) 是形如

$$S = \left\{\left(x^1, \ldots, x^k, x^{k+1}, \ldots, x^n\right) \in U \,\middle|\, x^{k+1} = c^{k+1}, \ldots, x^n = c^n\right\}$$

的任意子集, 其中 $c^{k+1}, \ldots, c^n$ 是常数. 显然, 每个 k-切片都同胚于 $\mathbb{R}^k$ 的一个开子集.

令 M 是光滑 n-流形, (U, φ) 是一个光滑坐标卡. 如果 S 是 U 的子集并且使得 $\varphi(S)$ 是 $\varphi(U)$ 的 k-切片, 那么我们说 S 是 **U 的 k-切片**. (虽然一般来说我们允许切片

由任意常数 $c^{k+1},\dots,c^n$ 定义, 但是有时候将这些常数定义为零是更有用的, 这只需要将每个坐标函数减去一个常数即可做到.) 给定一个子集 $S\subseteq M$, 如果 S 的每个点都被包含在 M 的某个光滑坐标卡 (U,φ) 中且使得 $S\cap U$ 是 U 的 k-切片, 那么我们说 S 满足**局部 k-切片条件**. 任意这样的坐标卡被称为 **S 在 M 中的切片坐标卡**, 对应的坐标 $\left(x^1,\dots,x^n\right)$ 被称为**切片坐标**.

定理 5.7 (嵌入子流形的局部切片判别法). 令 M 是光滑 n-流形，如果 $S\subseteq M$ 是嵌入 k-维子流形，那么 S 满足局部 k-切片条件. 反之，如果 $S\subseteq M$ 满足局部 k-切片条件，那么在子空间拓扑下，S 是 k-维拓扑流形，并且有一个光滑结构使其成为 M 的 k-维嵌入子流形.

Proof. 设 $S\subseteq M$ 是嵌入 k-维子流形, 那么包含映射 $\iota: S\hookrightarrow M$ 是光滑嵌入, 从而是光滑浸入. 任取 $p\in S$, 根据秩定理, 存在 S 的 p 为中心的光滑坐标卡 (U,φ) 和 M 的 p 为中心的光滑坐标卡 (V,ψ) 使得 $U=\iota(U)\subseteq V$ 并且 ι 的坐标表示 $\psi\circ\iota|_U\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\to\psi(V)$ 为

$$\left(x^1,\dots,x^k\right)\to\left(x^1,\dots,x^k,0,\dots,0\right).$$

由于 U 是 S 的开集, 所以存在 M 的开集 W 使得 $U=W\cap S$, 令 $V_0=W\cap V$, 那么 $S\cap V_0=U\cap V=U$ 是 V_0 的 k-切片, 所以 $(V_0,\psi|_{V_0})$ 是 S 在 M 中的切片坐标卡. 故 S 满足局部 k-切片条件.

反之, 设 S 满足局部 k-切片条件. 在子空间拓扑下, S 是 Hausdorff 的和第二可数的, 下面我们构造 S 的坐标卡.

记 $\pi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ 是前 k 个坐标的投影. 设 (U,φ) 是 S 在 M 中的切片坐标卡, 定义 $V=U\cap S$, $\psi=\pi\circ\varphi|_V$. 由于 $\varphi(V)$ 是 $\varphi(U)$ 的 k-切片, 即 $\varphi(V)=\varphi(U)\cap A$, 其中

$$A=\left\{\left(x^1,\dots,x^k,x^{k+1},\dots,x^n\right)\in\mathbb{R}^n\,\middle|\,x^{k+1}=c^{k+1},\dots,x^n=c^n\right\},$$

显然 A 微分同胚于 $\mathbb{R}^k$. 由于 $\varphi(U)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的开集, 所以 $\varphi(V)=\varphi(U)\cap A$ 是 A 的开集, 所以 $\psi(V)=\pi\circ\varphi(V)$ 是 $\pi(A)=\mathbb{R}^k$ 的开集. 此外, $\psi:V\to\psi(V)$ 是同胚, 因为其有连续逆映射 $\varphi^{-1}\circ j|_{\psi(V)}$, 其中 $j:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$ 为

$$j\left(x^1,\dots,x^k\right)=\left(x^1,\dots,x^k,c^{k+1},\dots,c^n\right).$$

这表明 S 是一个拓扑 k-流形, 并且包含映射 $\iota: S\hookrightarrow M$ 是拓扑嵌入.

下面我们验证上述坐标卡之间的相容的. 设 (U,φ) 和 (U',φ') 是 S 在 M 中的两个切片坐标卡, 令 (V,ψ) 和 (V',ψ') 为对应的 S 的坐标卡. 转移映射为 $\psi'\circ\psi^{-1}=\pi\circ\varphi'\circ\varphi^{-1}\circ j$, 这是光滑映射的复合, 所以 $\psi'\circ\psi^{-1}$ 是光滑的. 这定义了 S 上的光滑结构. 选取 S 在 M 中的切片坐标卡 (U,φ) 和对应的 S 的坐标卡 (V,ψ), 包含映射 $\iota: S\hookrightarrow M$ 的坐标表示为

$$\left(x^1,\dots,x^k\right)\mapsto\left(x^1,\dots,x^k,c^{k+1},\dots,c^n\right),$$

这是一个光滑浸入. 所以 ι 是光滑嵌入, S 是 M 的嵌入子流形. □

例 5.8 (球面作为子流形)**.** $\mathbb{S}^n$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的嵌入子流形. 令 $U_i^+ = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x^i > 0\}$, 我们知道 $\mathbb{S}^n \cap U_i^+$ 是光滑函数

$$x^i = f\left(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^{n+1}\right)$$

的图像, 其中 $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}$ 为 $f(u) = \sqrt{1 - |u|^2}$. 类似地, 令 $U_i^- = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x^i < 0\}$, $\mathbb{S}^n \cap U_i^-$ 是 $-f$ 的图像. 根据命题 5.4, 每个 $\mathbb{S}^n \cap U_i^\pm$ 都是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的 n 维嵌入子流形, 所以满足局部 n-切片条件, 所以 $\mathbb{S}^n$ 满足局部 n-切片条件, 因此 $\mathbb{S}^n$ 是嵌入子流形.

我们也可以直接写出 $\mathbb{S}^n$ 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的切片坐标卡. 记

$$V_i^+ = \left\{\left(x^1, \ldots, x^{n+1}\right) \middle| \left(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^{n+1}\right) \in \mathbb{B}^n, x^i > 0\right\},$$

类似地, 记 V_i^- 为上述集合, 其中 $x^i < 0$. 定义 $\varphi_i^\pm : V_i^\pm \to \mathbb{R}^{n+1}$ 为

$$\left(x^1, \ldots, x^{n+1}\right) \mapsto \left(u, x^i \mp f(u)\right),$$

其中 $u = \left(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^{n+1}\right)$. 不难验证 $\varphi_i^\pm\left(V_i^\pm\right) = \mathbb{B}^n \times \mathbb{R}$. 此时 $\left(V_i^\pm, \varphi_i^\pm\right)$ 就是 $\mathbb{S}^n$ 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的切片坐标卡, 因为

$$\varphi_i^\pm\left(V_i^\pm \cap \mathbb{S}^n\right) = \mathbb{B}^n$$

是 $\varphi_i^\pm\left(V_i^\pm\right)$ 的 n-切片.

如果 M 是带边的光滑流形并且 $S \subseteq M$ 是嵌入子流形, 那么 S 可能通过非常复杂的方式与 ∂M 相交, 所以我们不会证明一般情况下 S 在 M 中的切片坐标卡. 然而, 在子流形本身就是 M 的边界的情况下, M 的边界坐标卡就扮演了 ∂M 在 M 中的切片坐标卡的角色.

定理 5.9. **如果 M 是带边的光滑 n-流形, 那么在子空间拓扑下, ∂M 是 (无边的) 拓扑 $(n-1)$-流形, 并且有一个光滑结构使得其是 M 的恰当嵌入子流形.**

Proof. ∂M 是拓扑 $(n-1)$-流形是第一章的结论. 任取 $p \in \partial M$, 那么存在包含 p 的边界坐标卡 (U, φ), 满足 $\varphi(U)$ 是 $\mathbb{H}^n$ 的开集并且 $\varphi(p) \in \partial\mathbb{H}^n$. 此时 $U \cap \partial M$ 是 ∂M 的开集, 并且 $\varphi(U \cap \partial M) = \varphi(U) \cap \partial\mathbb{H}^n$ 是 $\varphi(U)$ 的 $(n-1)$-切片, 所以 (U, φ) 是 ∂M 在 M 中的切片坐标卡, 所以 ∂M 是 M 的嵌入子流形. 又因为 ∂M 是 M 的闭子集, 所以 ∂M 是恰当嵌入. □

5.1.2 水平集

如果 $\Phi : M \to N$ 是任意映射, $c \in N$, 我们说 $\Phi^{-1}(c)$ 是 Φ **的水平集**. 在 $N = \mathbb{R}^k$ 和 $c = 0$ 的时候, 水平集 $\Phi^{-1}(0)$ 通常被称为**零点集**.

定理 5.10 (常秩水平集定理)**.** **令 M, N 是光滑流形, $\Phi : M \to N$ 是光滑映射, 并且有常秩 r. Φ 的每个水平集都是 M 的余维数为 r 的嵌入子流形.**

Proof. 记 $m = \dim M$, $n = \dim N$. 任取 $p \in \Phi^{-1}(c)$, 根据秩定理, 存在以 p 为中心的 M 的光滑坐标卡 (U, φ) 和以 $\Phi(p)$ 为中心的 N 的光滑坐标卡 (V, ψ), 使得 $\Phi(U) \subseteq V$ 并且 Φ 的坐标表示为

$$\left(x^1, \ldots, x^m\right) \mapsto \left(x^1, \ldots, x^r, 0, \ldots, 0\right),$$

那么 $\varphi\left(\Phi^{-1}(c) \cap U\right)$ 是 $\varphi(U)$ 的 $(m-r)$-切片

$$\left\{\left(x^1, \ldots, x^m\right) \in \varphi(U) \,\middle|\, x^1 = \cdots = x^r = 0\right\}.$$

这表明 $\Phi^{-1}(c)$ 满足局部 $(m-r)$-切片条件, 所以是 M 的 $(m-r)$-维嵌入子流形. □

推论 5.11 (浸没水平集定理). **如果 M, N 是光滑流形，$\Phi : M \to N$ 是光滑浸没，那么 Φ 的水平集是 M 的余维数为 $\dim N$ 的嵌入子流形.**

如果 $\Phi : M \to N$ 是光滑映射, 点 $p \in M$ 使得 $d\Phi_p : T_pM \to T_{\Phi(p)}N$ 是满射, 那么 p 被称为 **Φ 的正则点**, 否则被称为 **Φ 的临界点**. 我们有以下两个简单的观察: 如果 $\dim M < \dim N$, 那么 M 的每个点都是临界点; M 的每个点都是正则点当且仅当 Φ 是浸没. 根据命题 4.1, 我们知道 Φ 的正则点的集合是 M 的开集. 一个点 $c \in N$ 被称为 **Φ 的正则值**, 如果水平集 $\Phi^{-1}(c)$ 中的每个点都是正则点, 否则被称为 **Φ 的临界值**. 特别地, 如果 $\Phi^{-1}(c) = \emptyset$, 那么 c 是正则值. 如果 c 是正则值, 那么水平集 $\Phi^{-1}(c)$ 被称为**正则水平集**.

推论 5.12 (正则水平集定理). **令 M, N 是光滑流形，$\Phi : M \to N$ 是光滑映射，$c \in N$ 是正则值，那么正则水平集 $\Phi^{-1}(c)$ 是 M 的余维数为 $\dim N$ 的嵌入子流形.**

Proof. 令 U 为 Φ 的所有正则值的集合, 根据命题 4.1, U 是 M 的开子集. 显然 $\Phi^{-1}(c) \subseteq U$. 此时 $\Phi|_U : U \to N$ 是光滑浸没, 根据浸没水平集定理, $\Phi^{-1}(c)$ 是 U 的嵌入子流形. 因为光滑嵌入的复合 $\Phi^{-1}(c) \hookrightarrow U \hookrightarrow M$ 是光滑嵌入, 所以 $\Phi^{-1}(c)$ 是 M 的嵌入子流形. □

例 5.13 (球面). 现在我们可以更简单地证明 $\mathbb{S}^n$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的嵌入子流形. 定义光滑函数 $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ 为 $f(x) = |x|^2$, 因为 $df_x(v) = 2\sum_i x^i v^i$, 所以 $x \neq 0$ 时 df_x 都是满射, 所以 $\mathbb{S}^n = f^{-1}(1)$ 是 f 的正则水平集, 故 $\mathbb{S}^n$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的余维数为 1 的嵌入子流形.

命题 5.14. **令 S 为光滑 m-流形 M 的子集，那么 S 是 M 的嵌入 k-子流形当且仅当 S 的每个点都有 M 中的邻域 U 使得 $U \cap S$ 是某个光滑浸没 $\Phi : U \to \mathbb{R}^{m-k}$ 的水平集.**

Proof. 若 S 是嵌入 k-子流形, 任取 $p \in S$, 存在 S 在 M 中的切片坐标卡 (U, φ), 使得 $\varphi(U \cap S)$ 是 $\varphi(U)$ 的 k-切片, 令 $\Phi : U \to \mathbb{R}^{m-k}$ 为 $\Phi = \pi \circ \varphi$, 其中 $\pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-k}$ 是后 $m-k$ 个坐标的投影, 显然 Φ 是光滑浸没, 且 $U \cap S$ 是 Φ 的某个水平集. 反之, 若任取 $p \in S$ 都存在 M 中的邻域 U 使得 $U \cap S$ 是光滑浸没 $\Phi : U \to \mathbb{R}^{m-k}$ 的水平集, 根据浸没水平集定理, $U \cap S$ 是 U 的嵌入 k-子流形, 从而是 M 的嵌入 k-子流形, 这表明 S 满足局部 k-切片条件, 所以 S 是 M 的嵌入 k-子流形. □

若 $S \subseteq M$ 是嵌入子流形, 光滑映射 $\Phi : M \to N$ 使得 S 是 Φ 的正则水平集, 那么 Φ 被称为 S 的**定义映射**. 特别地, 在 $N = \mathbb{R}^{m-k}$ 的情况下, Φ 被称为 S 的**定义函数**. 例 5.13 表明 $f(x) = |x|^2$ 是球面的定义函数. 若 U 是 M 的开子集, $\Phi : U \to N$ 是使得 $S \cap U$ 为正则水平集的光滑映射, 那么 Φ 被称为 S 的**局部定义映射**.

例 5.15 (旋转曲面)**.** 令 H 是半平面 $\{(r, z) \mid r > 0\}$, $C \subseteq H$ 是嵌入的 1-维子流形. 定义 C 确定的**旋转曲面**为子集

$$S_C = \left\{(x, y, z) \middle| \left(\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) \in C\right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

C 被称为**生成曲线**. 如果 $\varphi : U \to \mathbb{R}$ 是任意关于 C 在 H 中的局部定义函数, 那么我们可以得到关于 S_C 的定义函数 Φ 为

$$\Phi(x, y, z) = \varphi\left(\sqrt{x^2 + y^2}, z\right).$$

Φ 定义在开集

$$\tilde{U} = \left\{(x, y, z) \middle| \left(\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) \in U\right\}$$

上. 计算可得 Φ 的 Jacobi 矩阵为

$$D\Phi(x, y, z) = \left(\frac{x}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}(r, z), \frac{y}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}(r, z), \frac{\partial \varphi}{\partial z}(r, z)\right),$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. 由于 φ 是局部定义函数, 所以 $D\Phi(x, y, z)$ 满秩, 所以 S_C 是 Φ 的正则水平集, 也是 $\mathbb{R}^3$ 的 2-维嵌入子流形.

5.2 浸入子流形

设 M 是带边或者无边光滑流形, 一个子集 $S \subseteq M$ 如果配备了一个拓扑 (不一定是子空间拓扑), 在这个拓扑下成为一个拓扑流形, 并且有一个光滑结构使得包含映射 $S \hookrightarrow M$ 是光滑浸入, 那么我们说 S 是 M 的**浸入子流形**. 与嵌入子流形类似, 我们定义 S 在 M 中的**余维数**是 $\dim M - \dim S$.

显然, 每个嵌入子流形都是浸入子流形, 因此浸入子流形是一种更一般的子流形.

命题 5.16 (浸入的像集作为子流形). 设 M 是带边或者无边光滑流形，N 是光滑流形，$F : N \to M$ 是单射的光滑浸入. 令 $S = F(N)$，那么 S 有唯一的拓扑结构和光滑结构使得 S 是 M 的一个光滑子流形并且 $F : N \to S$ 是微分同胚.

Proof. 证明和命题 5.2 基本类似, 只不过我们现在凭借 N 来给予 S 的拓扑结构. 定义 $U \subseteq S$ 是开集当且仅当 $F^{-1}(U)$ 是 N 的开集. 定义 S 的坐标卡形如 $\left(F(U), \varphi \circ F^{-1}\right)$, 其中 (U, φ) 是 N 的光滑坐标卡. 这些坐标卡是光滑相容的, 所以给出了 S 上的一个光滑结构. 显然在这个光滑结构下, $F : N \to S$ 是微分同胚. 包含映射 $S \hookrightarrow M$ 是微分同胚和光滑浸入的复合

$$S \xrightarrow{F^{-1}} N \xrightarrow{F} M,$$

所以 $S \hookrightarrow M$ 是光滑浸入, 即 S 是 M 的光滑子流形. □

练习 5.1. 设 M 是光滑流形, $S \subseteq M$ 是浸入子流形. 证明: S 的子空间拓扑下的开集在上述子流形拓扑下也是开的. 此外, S 在子流形拓扑下的开集是子空间拓扑下的开集当且仅当 S 是嵌入子流形.

Proof. 设 U 是 S 在子空间拓扑下的开子集, 那么存在 M 的开子集 W 使得 $U = S \cap W$, 此时 $U = \iota(\iota^{-1}(W))$, 由于 $\iota^{-1}(W)$ 是 S 的开子集, 所以 U 是 S 在子流形拓扑下的开子集.

若 S 在子流形拓扑下的开集是子空间拓扑下的开集, 此时表明 S 的子流形拓扑就是子空间拓扑. 所以包含映射 $\iota : S \hookrightarrow M$ 是拓扑嵌入, 从而是光滑嵌入, 即 S 是嵌入子流形. 反之, 若 S 是嵌入子流形, 那么 $\iota : S \hookrightarrow M$ 是拓扑嵌入, 所以若 $U \subseteq S$ 是开集, 那么 $U = \iota(U)$ 是 $\iota(S) = S$ 的开集, 即 U 是 S 在子空间拓扑下的开集. □

命题 5.17. 设 M 是带边或者无边光滑流形, $S \subseteq M$ 是浸入子流形. 如果下面三个条件之一被满足, 那么 S 是嵌入子流形.

1. S 在 M 中的余维数是 0.
2. 包含映射 $S \hookrightarrow M$ 是恰当映射.
3. S 是紧子集.

Proof. (1) 若 S 在 M 中的余维数是 0, 由于包含映射 $\iota : S \hookrightarrow M$ 是光滑浸入且 $\dim S = \dim M$, 根据 命题 4.5, ι 是局部微分同胚, 所以是开映射, 所以 S 是 M 的开子集, 故 ι 为拓扑嵌入, 所以 S 是嵌入子流形. □

命题 5.18 (浸入子流形是局部的嵌入). 如果 M 是带边或者无边光滑流形, $S \subseteq M$ 是浸入子流形, 那么对于每个 $p \in S$, 都存在 p 在 S 中的邻域 U 使得 U 是 M 的嵌入子流形.

Proof. 包含映射 $\iota : S \hookrightarrow M$ 是光滑浸入, 任取 $p \in S$, 根据 定理 4.15, 存在 p 在 S 中的邻域 U 使得 $\iota|_U : U \hookrightarrow M$ 是光滑嵌入, 即 U 是 M 的嵌入子流形. □

设 $S \subseteq M$ 是浸入 k-维子流形. 设 $U \subseteq \mathbb{R}^k$ 是开集, 如果连续映射 $X : U \to M$ 的像集是 S 的开子集并且 $X : U \to S$ 是拓扑嵌入, 那么我们说 X 是 S **的局部参数化**. 如果 X 是 $U \to X(U)$ 的微分同胚 (相对于 S 的光滑流形结构), 那么我们说 X 是**光滑局部参数化**. 如果 X 的像集是整个 S, 那么 X 被称为**全局参数化**.

命题 5.19. 设 M 是光滑流形, $S \subseteq M$ 是 k 维浸入子流形, $\iota : S \hookrightarrow M$ 是包含映射, U 是 $\mathbb{R}^k$ 的开子集. 映射 $X : U \to M$ 是 S 的光滑局部参数化当且仅当存在 S 的一个光滑坐标卡 (V, φ) 使得 $X = \iota \circ \varphi^{-1}$. 因此, 这表明 S 的每个点都在某个局部参数化的像集中.

Proof. 若 $X : U \to M$ 是 S 的光滑局部参数化. 令 $V = X(U)$, $\varphi = X^{-1} : V \to U$, 根据定义, (V, φ) 是一个坐标卡. 任取 S 的光滑坐标卡 (W, ψ), 那么 $\psi \circ \varphi^{-1} = \psi \circ X$ 是光滑映射, 所以 (V, φ) 是 S 的光滑坐标卡.

反之, 若存在 S 的光滑坐标卡 (V,φ) 使得 $X=\iota\circ\varphi^{-1}$, 那么取 $U=\varphi(V)$, 此时 $(X:U\to S)=\varphi^{-1}$ 是拓扑嵌入. 并且 φ 是微分同胚表明 $X:U\to V$ 是微分同胚, 所以 $X:U\to M$ 是 S 的光滑局部参数化. □

例 5.20 (图像参数化). 设 $U\subseteq\mathbb{R}^n$ 是开子集, $f:U\to\mathbb{R}^k$ 是光滑函数. 定义映射 $\gamma_f:U\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k$ 为 $\gamma_f(u)=(u,f(u))$, 那么 γ_f 是图像 $\Gamma(f)$ 的光滑全局参数化. 例如, 映射 $F:\mathbb{B}^2\to\mathbb{R}^3$ 为

$$F(u,v)=\left(u,v,\sqrt{1-u^2-v^2}\right)$$

是 $\mathbb{S}^2$ 的光滑局部参数化, 其像集为上半开球面.

例 5.21 (八字曲线的参数化). 令 $S\subseteq\mathbb{R}^2$ 是例 4.12 中的八字曲线, 将其视为 $\mathbb{R}^2$ 的浸入子流形. 那么例 4.12 中的 $\beta:(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}^2$ 是 S 的光滑全局参数化.

5.3 将映射限制在子流形上

定理 5.22 (光滑映射限制定义域). 如果 M,N 是带边或者无边光滑流形, $F:M\to N$ 是光滑映射, $S\subseteq M$ 是浸入或者嵌入子流形, 那么 $F|_S:S\to N$ 是光滑映射.

Proof. 注意到 $F|_S=F\circ\iota$, 其中 $\iota:S\hookrightarrow M$ 是包含映射. 那么 $F|_S$ 作为光滑映射的复合是光滑的. □

当光滑映射限制值域的时候, 得到的映射并不总是光滑的, 我们有下面的例子.

例 5.23. 令 $S\subseteq\mathbb{R}^2$ 是八字曲线, 其拓扑和光滑结构由例 4.12 中的 β 诱导. 定义映射 $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ 为

$$G(t)=(\sin 2t,\sin t).$$

这与 β 的形式一致, 但是定义域扩大到了整个实数. 显然 G 的像集在 S 中, 但是 G 视为 $\mathbb{R}\to S$ 的映射不是光滑的, 甚至不是连续的. 这是因为 $-\pi+2n\pi<t<\pi+2n\pi$ 时 $\beta^{-1}\circ G(t)=t-2n\pi$, $t=\pm\pi+2n\pi$ 时 $\beta^{-1}\circ G(t)=0$.

定理 5.24 (光滑映射限制值域). 设 M 是光滑流形, $S\subseteq M$ 是浸入子流形, $F:N\to M$ 是光滑映射并且 $F(N)\subseteq S$, 如果 $F:N\to S$ 是连续映射, 那么 $F:N\to S$ 光滑.

Proof. 任取 $p\in N$, 记 $q=F(p)\in S$. 根据局部嵌入定理, 存在 q 在 S 中的某个邻域 V 使得 V 是 M 的嵌入子流形, 所以存在 V 在 M 中的切片坐标卡 (W,ψ), 令 $V_0=W\cap V$, 设 $\psi(V_0)$ 是 $\psi(W)$ 的 k-切片. 令 $\pi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ 为前 k 个分量的投影, $\tilde{\psi}=\pi\circ\psi$. 由于 V_0 是 V 中的开集, V 是 S 的开集, 所以 V_0 是 S 的开集, 所以 $(V_0,\tilde{\psi})$ 是 S 的光滑坐标卡.

令 $U=F^{-1}(V_0)$, $F:N\to S$ 连续表明 U 是 N 的开集, 取 p 处的光滑坐标卡 (U_0,φ) 使得 $U_0\subseteq U$, 那么 $F:N\to S$ 的坐标表示为

$$\tilde{\psi}\circ F\circ\varphi^{-1}=\pi\circ(\psi\circ F\circ\varphi^{-1}),$$

右端的 $F: N \to M$, 所以这是光滑映射, 故 $F: N \to S$ 光滑. □

推论 5.25. 令 M 是光滑流形，$S \subseteq M$ 是嵌入子流形，那么光滑映射 $F: N \to M$ 只要 $F(N) \subseteq S$，那么 $F: N \to S$ 就是光滑映射.

Proof. S 配备子空间拓扑, 所以 $F: N \to S$ 作为连续映射的限制是连续映射. □

5.4 子流形的切空间

令 M 是带边或者无边光滑流形, $S \subseteq M$ 是嵌入或者浸入子流形, 由于 $\iota: S \hookrightarrow M$ 是光滑浸入, 所以任取 $p \in S$ 微分 $d\iota_p: T_pS \to T_pM$ 是单射, 这意味着我们可以把 T_pS 视为 T_pM 的子空间, 此时对于任意切向量 $v \in T_pS$, 它的像 $\tilde{v} = d\iota_p(v) \in T_pM$ 为

$$\tilde{v}f = d\iota_p(v)(f) = v(f \circ \iota) = v(f|_S),$$

其中 $f \in C^\infty(M)$, 我们将 v 和 $\tilde{v}$ 等同. 注意这种等同与嵌入或者浸入无关.

命题 5.26. 设 M 是带边或者无边光滑流形，$S \subseteq M$ 是浸入或者嵌入子流形，$p \in S$. 切向量 $v \in T_pM$ 在 T_pS 中当且仅当存在光滑曲线 $\gamma: J \to M$，其像集 $\gamma(J) \subseteq S$，并且作为 $J \to S$ 的映射是光滑映射，使得 $0 \in J$，$\gamma(0) = p$ 以及 $\gamma'(0) = v$.

Proof. $v \in T_pS$ 意味着存在 $w \in T_pS$ 使得 $v = d\iota_p(w)$, 根据命题 3.16, 存在光滑曲线 $\tilde{\gamma}: J \to S$ 使得 $\tilde{\gamma}(0) = p$, $\tilde{\gamma}'(0) = w$, 令 $\gamma = \iota \circ \tilde{\gamma}$, 那么 $\gamma'(0) = d\iota_p(\gamma'(0)) = v$. 反之, 由于 $\tilde{\gamma}: J \to S$ 是光滑映射, 所以 $\gamma = \iota \circ \tilde{\gamma}$, 所以

$$v = \gamma'(0) = d\iota_p(\tilde{\gamma}'(0)) \in \operatorname{im} d\iota_p.$$ □

命题 5.27. 设 M 是光滑流形，$S \subseteq M$ 是嵌入子流形，$p \in S$. 切空间 T_pS 作为 T_pM 的子空间可以刻画为

$$T_pS = \left\{v \in T_pM \mid \forall f \in C^\infty(M), f|_S = 0, vf = 0\right\}.$$

Proof. 任取 $v = d\iota_p(w) \in T_pS \subseteq T_pM$, 那么对于任意 $f \in C^\infty(M)$ 且 $f|_S = 0$, 有

$$vf = d\iota_p(w)f = w(f \circ \iota_p) = w(f|_S) = 0.$$

反之, 若 $v \in T_pM$ 满足 $f|_S = 0$ 的时候 $vf = 0$. 假设 $(U, \varphi = (x^1, \ldots, x^n))$ 是 S 在 M 中的切片坐标卡, 那么 T_pM 的一组基为 $\partial/\partial x^i|_p$. 设 $\varphi(S \cap U)$ 是 $\varphi(U)$ 的 k-切片, 那么 $\iota: S \cap U \hookrightarrow M$ 的坐标表示为

$$\varphi \circ \iota \circ \tilde{\varphi}^{-1}: \left(x^1, \ldots, x^k\right) \mapsto \left(x^1, \ldots, x^k, 0, \ldots, 0\right),$$

这表明

$$d\iota_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p, \quad i = 1, \ldots, k.$$

所以 $d\iota_p(T_pS)$ 是由 $\partial/\partial x^1|_p, \dots, \partial/\partial x^k|_p$ 张成的 T_pM 的子空间. 设

$$v = v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \in T_pM,$$

所以 $v \in T_pS$ 当且仅当 $v^j = 0$ $(j > k)$.

令 $\psi : M \to \mathbb{R}$ 是关于 $\{p\}$ 的支在 U 中的光滑鼓包函数, 对于每个 $j > k$, 考虑函数 $f(q) = \psi(q)x^j$, 其中 $q \in M$. 显然 $f|_S = 0$, 所以

$$0 = vf = v^i \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p)) = v^j. \qquad \square$$

命题 5.28. **假设 M 是光滑流形，$S \subseteq M$ 是嵌入子流形，如果 $\Phi : U \to N$ 是 S 的局部定义映射，那么 $T_pS = \ker d\Phi_p : T_pM \to T_{\Phi(p)}N$，其中 $p \in S \cap U$.**

Proof. 根据定义, $S \cap U$ 是 Φ 的正则水平集, 令 $\iota : S \cap U \hookrightarrow U$, 那么 $\Phi \circ \iota : S \cap U \to N$ 是常值映射, 所以 $d(\Phi \circ \iota)_p : T_pS \to T_{\Phi(p)}N$ 是零映射, 所以

$$d\Phi_p \circ d\iota_p = d(\Phi \circ \iota)_p = 0,$$

这表明 $T_pS = \operatorname{im} d\iota_p \subseteq \ker d\Phi_p$. 另一方面, Φ 是定义映射表明 $d\Phi_p$ 是满射, 故

$$\dim \ker d\Phi_p = \dim T_pM - \dim T_{\Phi(p)}N = \dim S \cap U = \dim T_pS,$$

这就表明 $T_pS = \ker d\Phi_p$. $\square$

推论 5.29. **设 $S \subseteq M$ 是光滑浸没 $\Phi = (\Phi^1, \dots, \Phi^k) : M \to \mathbb{R}^k$ 的水平集，切向量 $v \in T_pM$ 在 T_pS 中当且仅当 $v\Phi^1 = \cdots = v\Phi^k = 0$.**

练习 5.2. 设 $S \subseteq M$ 是常秩映射 $\Phi : M \to N$ 的水平集, 证明对于每个 $p \in S$ 有 $T_pS = \ker d\Phi_p$.

Proof. 根据常秩水平集定理, 有 $\dim S = \dim M - \dim N$, 故

$$\dim T_pS = \dim T_pM - \dim T_{\Phi(p)}N = \dim \ker d\Phi_p.$$

记 $\iota : S \hookrightarrow M$, 那么 $\Phi \circ \iota : S \to N$ 是常值映射, 所以 $d(\Phi \circ \iota)_p = 0$, 这就表明 $T_pS = \ker d\Phi_p$. $\square$

6 李群

6.1 基本定义

一个**李群**指的是一个(无边的)光滑流形 G, 同时也是一个群, 有乘法 $m: G\times G \to G$ 和求逆映射 $i: G\to G$:

$$m(g,h) = gh, \quad i(g) = g^{-1},$$

并且它们都是光滑映射. 李群也是拓扑群 (一个拓扑空间有一个群结构, 并且乘法和求逆映射是连续映射).

命题 6.1. **如果 G 是光滑流形并且有一个群结构使得 $G\times G\to G$，$(g,h)\mapsto gh^{-1}$ 是光滑映射，那么 G 是李群.**

Proof. 记 $f:(g,h)\mapsto gh^{-1}$. 那么 $i(g)=g^{-1}=f(e,g)$, 所以 i 光滑. 另一方面, $m(g,h)=gh=f(g,h^{-1})=f(g,i(h))$, 所以 m 光滑. □

如果 G 是李群, 任意 $g\in G$ 都定义了 $L_g, R_g: G\to G$, 分别称为**左平移**和**右平移**:

$$L_g(h) = gh, \quad R_g(h) = hg.$$

因为 L_g 可以表示为复合映射 $m\circ\iota_g$, 其中 $\iota_g(h)=(g,h)$, 所以 L_g 光滑. 由于 $L_{g^{-1}}$ 是 L_g 的光滑逆映射, 所以 L_g 是微分同胚. 同理 R_g 也是微分同胚. 我们将看到, 李群的许多良好的性质都来源于这两个从一点到任意一点的全局的微分同胚.

例 6.2 (李群)**.**

1. $n\times n$ 可逆实矩阵集合 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 被称为**一般线性群**. 其是 $M(n,\mathbb{R})$ 的开子流形, 由于矩阵乘法 AB 是多项式, 所以是光滑的. 矩阵求逆的光滑性由 Cramer 法则保证.
2. 令 $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ 表示 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 中行列式为正的可逆矩阵集合. 显然 $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ 是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 的子群同时是开子集, 所以其群运算作为 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 的群运算的限制是光滑的, 所以 $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ 是李群.
3. 设 G 的任意李群, $H\subseteq G$ 是**开子群** (子群同时是开子集). 类似 (2) 中的叙述, H 是李群, 其群结构和光滑结构都继承于 G.

4. **复一般线性群** $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 是 $M(n,\mathbb{C})$ 的开子流形, 从而是 $2n^2$-维光滑流形, 由于其矩阵乘法和求逆都是光滑的, 所以是一个李群.
5. 如果 V 是实或者复向量空间, $\mathrm{GL}(V)$ 表示 V 上可逆线性变换的集合. 如果 V 的维数是 n, 那么 V 的任意一组基都确定了 $\mathrm{GL}(V)$ 到 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 或者 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的一个同构, 所以 $\mathrm{GL}(V)$ 是李群. 任意两个这样的同构之间的转移映射形如 $A\mapsto BAB^{-1}$（其中 B 是两组基之间的过渡矩阵), 这是光滑的, 所以 $\mathrm{GL}(V)$ 的光滑结构独立于基的选取.
6. Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 在加法下是李群. 类似的, $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{C}^n$ 也是李群.
7. 圆周 $\mathbb{S}^1\subseteq\mathbb{C}^*$ 是光滑流形并且在复数乘法下构成群. 利用 $\mathbb{S}^1$ 的开子集上的适当的角度函数作为局部坐标, 乘法和求逆是光滑的, 它们分别有表示 $(\theta_1,\theta_2)\mapsto\theta_1+\theta_2$ 和 $\theta\mapsto-\theta$, 因此 $\mathbb{S}^1$ 是李群, 称为**圆周群**.
8. 给定李群 $G_1,\dots,G_k$, 定义**直积**是积流形 $G_1\times\cdots\times G_k$ 同时配备直积群的群结构, 这是一个李群.

6.2 李群同态

如果 G,H 是李群, 如果 $F:G\to H$ 同时是群同态和光滑映射, 那么我们说 F 是**李群同态**. 如果 F 还是微分同胚, 那么我们说 F 是**李群同构**.

例 6.3 (李群同态)**.**

1. 包含映射 $\iota:\mathbb{S}^1\hookrightarrow\mathbb{C}^\times$ 是李群同态.
2. 考虑加法李群 $\mathbb{R}$ 和乘法李群 $\mathbb{R}^\times$, 映射 $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^\times$ 为 $\exp t=e^t$, 这是一个李群同态, 因为 $e^{t+s}=e^te^s$. exp 的像集是正实数乘法群 $\mathbb{R}^+$, 此时 $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ 是李群同构, 有逆映射 $\log:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$.
3. 类似的, $\exp:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^\times$ 为 $\exp(z)=e^z$ 是李群同态. 这是一个满射但是不是单射, 它的核由 $2k\pi i$ 组成.
4. 映射 $\varepsilon:\mathbb{R}\to\mathbb{S}^1$ 为 $\varepsilon(t)=e^{2\pi it}$ 是李群同态, 核是 $\mathbb{Z}$. 类似的, 映射 $\varepsilon^n:\mathbb{R}^n\to\mathbb{T}^n$ 为 $\varepsilon^n(x^1,\dots,x^n)=(e^{2\pi ix^1},\dots,e^{2\pi ix^n})$ 是李群同态, 核为 $\mathbb{Z}^n$.

定理 6.4. 李群同态是常秩映射.

Proof. 设 $F:G\to H$ 是李群同态, 记 G 的单位元为 e, H 的单位元为 $\tilde e$. 任取 $g_0\in G$, 对于任意 $g\in G$, 有

$$F(L_{g_0}(g))=F(g_0g)=F(g_0)F(g)=L_{F(g_0)}(F(g)),$$

所以 $F\circ L_{g_0}=L_{F(g_0)}\circ F$, 所以

$$dF_{g_0}\circ d\left(L_{g_0}\right)_e=d\left(L_{F(g_0)}\right)_{\tilde e}\circ dF_e,$$

由于 L_{g_0} 和 $L_{F(g_0)}$ 是微分同胚, 所以 dF_{g_0} 和 dF_e 有相同的秩, 故 F 是常秩映射. □

推论 6.5. 一个李群同态是李群同构当且仅当其是双射.

Proof. 全局秩定理表明双射的常秩映射是微分同胚. □

6.2.1 万有覆盖群

定理 6.6 (万有覆盖群的存在性). 令 G 是连通李群，那么存在一个单连通李群 $\widetilde{G}$，使得光滑覆盖映射 $\pi:\widetilde{G}\to G$ 同时是李群同态. 这个李群 $\widetilde{G}$ 被称为 **万有覆盖群.**

Proof. 令 $\widetilde{G}$ 是 G 的万有覆盖流形, $\pi:\widetilde{G}\to G$ 是对应的光滑覆盖映射. 此时 $\pi\times\pi:\widetilde{G}\times\widetilde{G}\to G\times G$ 也是光滑覆盖映射.

令 $m:G\times G\to G$ 和 $i:G\to G$ 分别代表乘法和求逆映射, $\tilde{e}$ 是 $\pi^{-1}(e)$ 中的任意元素. 因为 $\widetilde{G}$ 是单连通的, 所以覆盖映射的提升判别法保证了 $m\circ(\pi\times\pi):\widetilde{G}\times\widetilde{G}\to G$ 有唯一的连续提升 $\tilde{m}:\widetilde{G}\times\widetilde{G}\to\widetilde{G}$ 使得 $\tilde{m}(\tilde{e},\tilde{e})=\tilde{e}$ 并且 $\pi\circ\tilde{m}=m\circ(\pi\times\pi)$:

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{G}\times\widetilde{G} \arrow[r, "\tilde{m}"] \arrow[d, "\pi\times\pi"'] & \widetilde{G} \arrow[d, "\pi"] \\
G\times G \arrow[r, "m"'] & G.
\end{tikzcd}$$

因为 π 是局部微分同胚, $\pi\circ\tilde{m}=m\circ(\pi\times\pi)$ 是光滑映射, 所以 $\tilde{m}$ 是光滑映射. 同样可知 $i\circ\pi:\widetilde{G}\to G$ 有光滑提升 $\tilde{i}:\widetilde{G}\to\widetilde{G}$ 使得 $\tilde{i}(\tilde{e})=\tilde{e}$ 并且 $\pi\circ\tilde{i}=i\circ\pi$:

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{G} \arrow[r, "\tilde{i}"] \arrow[d, "\pi"'] & \widetilde{G} \arrow[d, "\pi"] \\
G \arrow[r, "i"'] & G.
\end{tikzcd}$$

于是我们定义 $\widetilde{G}$ 上的乘法和求逆为 $xy=\tilde{m}(x,y)$ 以及 $x^{-1}=\tilde{i}(x)$. 那么 $\pi(xy)=\pi(x)\pi(y)$ 以及 $\pi(x^{-1})=\pi(x)^{-1}$. 下面只需要说明 $\widetilde{G}$ 是一个群.

首先说明 $\tilde{e}$ 是 $\widetilde{G}$ 的单位元. 考虑映射 $f:\widetilde{G}\to\widetilde{G}$ 为 $f(x)=\tilde{e}x$. 那么 $\pi\circ f(x)=\pi(\tilde{e})\pi(x)=e\pi(x)=\pi(x)$, 所以 f 是 $\pi:\widetilde{G}\to G$ 的提升. 同时 $\mathrm{Id}_{\widetilde{G}}$ 是 π 的另一个提升, 并且与 f 在 $\tilde{e}$ 处的取值相同, 即 $f(\tilde{e})=\tilde{m}(\tilde{e},\tilde{e})=\tilde{e}$, 所以提升的唯一性表明 $f=\mathrm{Id}_{\widetilde{G}}$, 即 $\tilde{e}x=x$. 同理可得 $x\tilde{e}=x$.

现在说明 $\widetilde{G}$ 的乘法是结合的. 考虑两个映射 $\alpha_L,\alpha_R:\widetilde{G}\times\widetilde{G}\times\widetilde{G}\to\widetilde{G}$ 为

$$\alpha_L(x,y,z)=(xy)z,\quad \alpha_R(x,y,z)=x(yz).$$

那么

$$\pi\circ\alpha_L(x,y,z)=\big(\pi(x)\pi(y)\big)\pi(z)=\pi(x)\big(\pi(y)\pi(z)\big)=\pi\circ\alpha_R(x,y,z),$$

所以 α_L,α_R 都是映射 $\alpha(x,y,z)=\pi(x)\pi(y)\pi(z)$ 的提升. 又因为 α_L,α_R 在 $(\tilde{e},\tilde{e},\tilde{e})$ 处的取值相同, 所以 $\alpha_L=\alpha_R$.

最后说明 $\widetilde{G}$ 的任意元素都可逆. 考虑映射 $\beta:\widetilde{G}\to\widetilde{G}$ 为 $\beta(x)=x^{-1}x$. 那么 $\pi\circ\beta(x)=e$, 所以 β 是常值映射 $c(x)=e$ 的提升. 又因为 $\tilde{c}(x)=\tilde{e}$ 也是 c 的提升且 $\tilde{c}(\tilde{e})=\tilde{e}=\beta(\tilde{e})$, 所以 $\beta=\tilde{c}$. 所以 $\widetilde{G}$ 是一个群. □

定理 6.7 (万有覆盖群的唯一性). 对于任意连通李群 G，万有覆盖群在以下意义上是唯一的：如果 $\widetilde{G}$ 和 $\widetilde{G}'$ 是单连通李群且有光滑覆盖映射 $\pi : \widetilde{G} \to G$ 以及 $\pi' : \widetilde{G}' \to G$ 使得它们同时是李群同态，那么存在唯一的李群同构 $\Phi : \widetilde{G} \to \widetilde{G}'$ 使得 $\pi' \circ \Phi = \pi$.

Proof. 根据万有覆盖空间的唯一性, 存在唯一的同胚 $\Phi : \widetilde{G} \to \widetilde{G}'$ 使得 $\pi' \circ \Phi = \pi$. π' 是局部微分同胚, $\pi' \circ \Phi = \pi$ 光滑表明 Φ 光滑. 另一方面, 有 $\pi \circ \Phi^{-1} = \pi'$, 同理可得 Φ^{-1} 光滑. 这表明 Φ 是微分同胚. 下面只需要说明 Φ 是李群同态. 记 $\widetilde{G}, \widetilde{G}'$ 上的单位元分别是 $\tilde{e}, \tilde{e}'$. 首先说明 $\Phi(\tilde{e}) = \tilde{e}'$. 由于 $\pi' \circ \Phi(\tilde{e}) = \pi(\tilde{e}) = e$, 所以 $\Phi(\tilde{e}) \in \pi'^{-1}(e)$ 是 $\widetilde{G}'$ 的单位元 $\tilde{e}'$.

记 $\widetilde{G}, \widetilde{G}'$ 上的乘法映射分别是 $\widetilde{m}, \widetilde{m}'$, 于是我们要说明 $\Phi \circ \widetilde{m} = \widetilde{m}' \circ (\Phi \times \Phi)$. 由于

$$\pi' \circ (\Phi \circ \widetilde{m})(x, y) = \pi(xy) = \pi(x)\pi(y),$$

以及

$$\pi' \circ \widetilde{m}' \circ (\Phi \times \Phi)(x, y) = \pi'(\Phi(x)\Phi(y)) = \pi'(\Phi(x))\pi'(\Phi(y)) = \pi(x)\pi(y),$$

所以 $\Phi \circ \widetilde{m}$ 和 $\widetilde{m}' \circ (\Phi \times \Phi)$ 都是 $f(x, y) = \pi(x)\pi(y)$ 的提升. 又因为它们在 $(\tilde{e}, \tilde{e})$ 上的取值相等, 所以 $\Phi \circ \widetilde{m} = \widetilde{m}' \circ (\Phi \times \Phi)$, 即 Φ 是李群同态. □

例 6.8 (万有覆盖群)**.**

1. 映射 $\varepsilon^n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ 为 $\varepsilon^n(x^1, \ldots, x^n) = (e^{2\pi i x^1}, \ldots, e^{2\pi i x^n})$ 是李群同态并且是光滑覆盖映射, 因为 $\mathbb{R}^n$ 单连通, 所以 $\mathbb{T}^n$ 的万有覆盖群是 $\mathbb{R}^n$.
2. 李群同态 $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ 也是光滑覆盖映射, 所以 $\mathbb{C}$ 是 $\mathbb{C}^\times$ 的万有覆盖群.

6.3 李子群

设 G 的李群, G 的**李子群**指的是 G 的一个子群, 配备了一个拓扑和光滑结构使得其成为一个李群以及 G 的浸入子流形.

命题 6.9. 令 G 是李群，设 $H \subseteq G$ 是子群同时是嵌入子流形，那么 H 是李子群.

Proof. 乘法 $G \times G \to G$ 是光滑的, H 是嵌入子流形表明 $H \times H \to G$ 光滑 (这一步实际上只需要浸入子流形), 将值域限制在嵌入子流形不改变光滑性, 所以 $H \times H \to H$ 是光滑的. 类似地, 求逆也是光滑映射, 所以 H 是李群. □

引理 6.10. 设 G 是李群，$H \subseteq G$ 是开子群. 那么 H 是嵌入李子群并且是闭集，故 H 是 G 的连通分支的并.

Proof. H 是开子流形表明 H 是嵌入李子群. 对于任意 $g \in G$, 陪集 $gH = L_g(H)$ 是开集, 所以 $G \setminus H$ 作为陪集的并是开集, 所以 H 是闭集. H 既开又闭表明 H 是连通分支的并集. □

命题 6.11. 设 G 是李群，$W \subseteq G$ 是单位元处的任意邻域.

1. W 生成 G 的一个开子群.
2. 如果 W 是连通的，那么其生成 G 的一个连通开子群.
3. 如果 G 是连通的，那么 W 生成 G.

Proof. (1) 记 $W_1 = W \cup W^{-1}$, 对于 $k \geq 2$, 递归地定义 $W_k = W_1 W_{k-1}$, 那么

$$\langle W \rangle = \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k,$$

由于求逆映射 $g \mapsto g^{-1}$ 是微分同胚, 所以 W^{-1} 是开集, 所以 W_1 是开集. 假设 W_{k-1} 是开集, 那么

$$W_k = \bigcup_{g \in W_1} L_g(W_{k-1})$$

是开集的并, 所以 W_k 是开集. 故 $\langle W \rangle$ 是开集.

(2) 由于 W 和 W^{-1} 都是连通的, 且 $e \in W \cap W^{-1}$, 所以 W_1 是连通的. 假设 W_{k-1} 是连通的, 那么 $W_k = m(W_1 \times W_{k-1})$ 是连通空间在连续映射下的像, 所以是连通的. 又因为 $e \in W_k$, 所以 $\langle W \rangle$ 是连通的.

(3) $\langle W \rangle$ 是开子群表明 $\langle W \rangle$ 是连通分支的并, G 连通表明 $\langle W \rangle = G$. □

若 G 是李群, 则 G 的包含单位元的连通分支被称为 G 的**单位分支**.

命题 6.12. 令 G 是李群，G_0 是单位分支. 那么 G_0 是 G 的正规子群，并且是唯一的连通开子群. G 的任意连通分支都微分同胚于 G_0.

Proof. 任取 $g \in G$, 那么 $gG_0g^{-1} = L_g\left(R_{g^{-1}}(G_0)\right)$ 是连通的, 并且 $e \in gG_0g^{-1}$, 所以 $gG_0g^{-1} \subseteq G_0$, 这就表明 G_0 是正规子群. 设 G_0' 是连通开子群, 那么 G_0' 是开子群表明 G_0' 是连通分支的并集, G_0' 是连通的表明 G_0' 是某一个连通分支, 又因为 $e \in G_0'$, 所以 $G_0' = G_0$ 是单位分支. 设 G_0' 是任意连通分支, 任取 $g \in G_0'$, $g^{-1}G_0' = L_{g^{-1}}(G_0')$ 是连通的且包含单位元, 故 $g^{-1}G_0'$ 被单位分支 G_0 包含, 那么 $L_g(G_0) = gG_0 \supseteq G_0'$ 是连通的, 所以 $G_0' = gG_0 = L_g(G_0)$ 微分同胚于 G_0. □

命题 6.13. 令 $F: G \to H$ 是李群同态，那么 $\ker F$ 是 G 的恰当嵌入李子群，其余维数为 $\operatorname{rank} F$.

Proof. 根据常秩水平集定理, $\ker F$ 是 G 的余维数为 $\operatorname{rank} F$ 的嵌入子流形. 再根据命题 6.9, $\ker F$ 是李子群. □

命题 6.14. 如果 $F: G \to H$ 是单射的李群同态，那么 F 的像集有唯一的光滑流形结构使得 $F(G)$ 是 H 的李子群并且 $F: G \to F(G)$ 是李群同构.

Proof. 因为李群同态是常秩映射, 所以根据全局秩定理, 此时 F 是浸入. 根据命题 5.16,所以 $F(G)$ 有唯一的光滑结构使得 $F(G)$ 是 H 的浸入子流形且 $F: G \to F(G)$ 是微分同胚. □

例 6.15 (嵌入李子群).

1. 子群 $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 是开子群, 从而是嵌入李子群.
2. 圆周 $\mathbb{S}^1$ 是 $\mathbb{C}^*$ 的嵌入李子群, 因为其是嵌入子流形.
3. 行列式为 1 的实矩阵集合 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ 被称为**特殊线性群**. 因为 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ 是李群满同态 $\det : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ 的核, 根据全局秩定理, det 是光滑浸没, 所以 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ 是维数 n^2-1 的嵌入李子群.

例 6.16 (环面的稠密李子群). 令 $H \subseteq \mathbb{T}^2$ 是环面的一个稠密子流形: H 为 例 4.13 中的浸入 $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2$ 的像集. 容易证明 γ 是单射的李群同态, 所以 H 是 $\mathbb{T}^2$ 的一个浸入李子群.

一般情况下, 光滑子流形可以同时是非嵌入的以及闭的, 例如八字曲线 4.12, 但是下面的定理表明对于李子群而言, 闭和嵌入性并不是独立的, 即嵌入性和闭等价.

定理 6.17. 设 G 是李群, $H \subseteq G$ 是李子群, 那么 H 是闭集当且仅当 H 是嵌入李子群.

6.4 群作用和等变映射

如果 M 是光滑流形, G 是李群, 群作用 $G \times M \to M$ 是光滑映射, 那么这个群作用被称为**光滑作用**. 对于光滑作用 $\theta : G \times M \to M$, 任取 $g \in G$, 记 $\theta_g : M \to M$ 为 $\theta_g(p) = g \cdot p$. 由于 $\theta_{g^{-1}}$ 是其光滑逆映射, 所以 θ_g 一定是微分同胚.

设 G 是李群, M, N 是带边或者无边光滑流形并且都配备一个光滑 G-作用, 映射 $F : M \to N$ 被称为**等变的**, 如果对于每个 $g \in G$ 都有

$$F(g \cdot p) = g \cdot F(p) \text{ (left actions)}, \quad F(p \cdot g) = F(p) \cdot g \text{ (right actions)}.$$

等价地说, 如果 θ 是 G 在 M 上的光滑作用, φ 是 G 在 N 上的光滑作用, 那么 F 是等变的当且仅当

$$F \circ \theta_g = \varphi_g \circ F.$$

定理 6.18 (等变秩定理). 设 G 是李群, M, N 是带边或者无边光滑流形, $F : M \to N$ 是光滑映射, 相对于 M 上的传递的光滑 G-作用 θ 和 N 上的任意光滑 G-作用 φ 是等变的. 那么 F 是常值映射. 进而, 若 F 是满射, 那么是一个光滑浸没; 若 F 是单射, 那么是一个光滑浸入; 若 F 是双射, 那么是一个微分同胚.

Proof. 任取 $p, q \in M$, θ 是传递的表明存在 $g \in G$ 使得 $q = \theta_g(p)$, 那么 $F \circ \theta_g = \varphi_g \circ F$ 表明

$$dF_q \circ d(\theta_g)_p = d(\varphi_g)_{F(p)} \circ dF_p,$$

θ_g 和 φ_g 都是微分同胚表明 dF_q 和 dF_p 的秩相同, 所以 F 是常秩映射. □

假设 G 是李群, M 是光滑流形, $\theta : G \times M \to M$ 是光滑左作用, 对于每个 $p \in M$, 定义**轨道映射** $\theta^{(p)} : G \to M$ 为

$$\theta^{(p)}(g) = g \cdot p.$$

显然 $\theta^{(p)}$ 的像集就是 p 所在的轨道.

命题 6.19 (轨道映射的性质). 假设 θ 是李群 G 在光滑流形 M 上的光滑左作用，对于每个 $p \in M$，轨道映射 $\theta^{(p)}: G \to M$ 是光滑常秩映射，所以稳定化子 $G_p = \left(\theta^{(p)}\right)^{-1}(p)$ 是 G 的恰当嵌入李子群. 如果 $G_p = \{e\}$，那么 $\theta^{(p)}$ 是单射的光滑浸入，所以轨道 $G \cdot p$ 是 M 的浸入子流形.

Proof. 映射 $\theta^{(p)}$ 可以视为光滑映射的复合

$$G \to G \times M \to M,$$

所以 $\theta^{(p)}$ 是光滑映射. 考虑 G 在自身上的作用为 $g \cdot g' = gg'$, 这是一个传递的光滑作用, 那么

$$\theta^{(p)}(g \cdot g') = (gg') \cdot p = g \cdot \theta^{(p)}(g'),$$

所以 $\theta^{(p)}$ 是等变映射, 从而是常秩映射. 根据常秩水平集定理, 稳定化子 G_p 是嵌入子流形, 根据 命题 6.9, G_p 是恰当嵌入李子群. 若 $G_p = \{e\}$, 那么

$$\theta^{(p)}(g) = \theta^{(p)}(g') \Rightarrow p = (g^{-1}g') \cdot p \Rightarrow g^{-1}g' \in G_p \Rightarrow g = g',$$

所以 $\theta^{(p)}$ 为单射. 再根据全局秩定理, $\theta^{(p)}$ 是浸入. 根据 命题 5.16, 轨道 $G \cdot p$ 是浸入子流形. □

例 6.20 (正交群). 由 $n \times n$ 正交矩阵构成的 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 的子群 $\mathrm{O}(n)$ 被称为正交群. 定义光滑映射 $\Phi: \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to M(n, \mathbb{R})$ 为 $\Phi(A) = A^T A$, 那么 $\mathrm{O}(n)$ 是 Φ 的水平集 $\Phi^{-1}(I_n)$. 我们只要能说明 Φ 是常秩映射就能够表明 $\mathrm{O}(n)$ 是 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 的嵌入李子群. 下面我们构造合适的群作用使得 Φ 是等变映射. 定义 θ 为 $\mathrm{GL}(n.\mathbb{R})$ 在自身上的右乘作用, 即 $A \cdot B = AB$. φ 为 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 在 $M(n, \mathbb{R})$ 上的右作用为:

$$X \cdot B = B^T X B,$$

那么

$$\Phi(A \cdot B) = (AB)^T (AB) = B^T A^T AB = \Phi(A) \cdot B,$$

这就表明 Φ 是等变映射, 根据等变秩定理, Φ 确实是常秩映射. 因此, $\mathrm{O}(n)$ 是 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 的嵌入李子群. 此外, 不难发现 $\mathrm{O}(n)$ 是紧的, 故 $\mathrm{O}(n)$ 还是恰当嵌入的李子群.

为了确定 $\mathrm{O}(n)$ 的维数, 还需要确定 Φ 的秩, 即微分 $d\Phi_{I_n}$ 的像空间的维数. 对于 $B \in T_{I_n}\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = M(n, \mathbb{R})$, 设 $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 光滑曲线 $\gamma(t) = I_n + tB$, 那么

$$d\Phi_{I_n}(B) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Phi(\gamma(t)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (I_n + tB^T)(I_n + tB) = B + B^T,$$

所以 $\operatorname{im} d\Phi_{I_n}$ 被对称矩阵空间包含. 反之, 任取对称矩阵 B, 有 $d\Phi_{I_n}(B/2) = B$, 所以 $\operatorname{im} d\Phi_{I_n}$ 就是对称矩阵空间, 维数为 $(n^2+n)/2$, 这就表明 $\operatorname{rank} \Phi = (n^2+n)/2$, 故

$$\dim \mathrm{O}(n) = \dim \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) - \operatorname{rank} \Phi = \frac{n^2 - n}{2}.$$

例 6.21 (特殊正交群)**.** $n\times n$ 特殊正交群被定义为行列式为 1 的正交矩阵构成的集合,记为 $\mathrm{SO}(n)$. 由于 $\det:\mathrm{O}(n)\to\mathbb{R}$ 为连续映射且 $\mathrm{SO}(n)=\det^{-1}(0,\infty)$,所以 $\mathrm{SO}(n)$ 是 $\mathrm{O}(n)$ 的开子集, 故 $\mathrm{SO}(n)$ 是 $\mathrm{O}(n)$ 的嵌入李子群并且 $\dim\mathrm{SO}(n)=\dim\mathrm{O}(n)=(n^2-n)/2$. 同时, $\mathrm{SO}(n)$ 也是 $\mathrm{O}(n)$ 的闭子集, 所以也是紧的.

例 6.22 (酉群)**.** 对于任意复矩阵 A, 记 $A^*=\bar{A}^T$ 为 A 的共轭转置. 定义 n 阶**酉群**是子群 $\mathrm{U}(n)\subseteq\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, 由所有的酉矩阵构成, 即 $A^*A=I_n$ 的矩阵. 我们说明 $\mathrm{U}(n)$ 是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的 n^2 维恰当嵌入李子群. 定义映射 $\Phi:\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})\to M(n,\mathbb{C})$ 为 $\Phi(A)=A^*A$. 与 例 6.20 一样, 可知 Φ 是等变映射, 故 Φ 是常秩映射, 所以 $\mathrm{U}(n)=\Phi^{-1}(I_n)$ 是嵌入李子群. 同样 $\mathrm{U}(n)$ 是紧 (有界闭) 的, 所以是恰当嵌入的.

任取 $B\in T_{I_n}\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})=M(n,\mathbb{C})$, 设 γ 是光滑曲线 $\gamma(t)=I_n+tB$, 那么

$$d\Phi_{I_n}(B)=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(I_n+tB^*)(I_n+tB)=B+B^*,$$

所以 $\operatorname{im} d\Phi_{I_n}$ 被 Hermite 矩阵空间包含. 反之, 对于 Hermite 矩阵 B, 有 $d\Phi_{I_n}(B/2)=B$, 所以 $\operatorname{im} d\Phi_{I_n}$ 是 Hermite 矩阵空间. 所以 $\operatorname{rank}\Phi=n^2$, 故 $\dim\mathrm{U}(n)=2n^2-n^2=n^2$.

例 6.23 (特殊酉群)**.** 群 $\mathrm{SU}(n)=\mathrm{U}(n)\cap\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ 被称为**特殊酉群**. 映射 $\det:\mathrm{U}(n)\to\mathbb{C}$ 是光滑映射且 $\mathrm{SU}(n)=\det^{-1}(1)$. 我们确定 det 的秩. 任取 $A\in T_{I_n}\mathrm{U}(n)$, 上例表明 A 是反 Hermite 矩阵, 即 $A^*=-A$. 设 $\gamma(t)=I_n+tA$ 是光滑曲线, 那么

$$d(\det)_{I_n}(A)=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\det(I_n+tA),$$

注意到 $\det(I_n+tA)$ 展开后常数项的导数为零, 且大于等于 2 次的项在 $t=0$ 处的导数均为零, 所以上述结果为一次项 t 的系数, 而 t 的一次项只可能由 $(1+tA_1^1)\cdots(1+tA_n^n)$ 产生, 即 $\sum_i A_i^i=\operatorname{tr}A$, 故

$$d(\det)_{I_n}(A)=\operatorname{tr}A,$$

$A^*=-A$ 表明 $\operatorname{tr}A$ 是纯虚数, 所以 $\operatorname{im} d(\det)_{I_n}=\mathbb{R}i$, 故 $\operatorname{rank}\det=1$, 所以 $\mathrm{SU}(n)$ 是 $\mathrm{U}(n)$ 的 n^2-1 维恰当嵌入李子群.

6.4.1 半直积

6.4.2 表示

目前我们看到的大部分李群都可以视为 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 或者 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的李子群. 一个自然的问题就是是否所有的李群都有这种形式. 研究这个问题的关键是群表示论.

如果 V 是有限维实或者复向量空间, 我们用 $\mathrm{GL}(V)$ 表示 V 上的可逆线性变换群, 这是一个同构于 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 或 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的李群, 其中 $n=\dim V$. 如果 G 是李群, 我们说 G 的 **(有限维) 表示**指的是一个 G 到某个 $\mathrm{GL}(V)$ 的李群同态.

如果表示 $\rho:G\to\mathrm{GL}(V)$ 是单射, 那么我们说这个表示是**忠实的**. 此时根据 命题 6.14, $\rho(G)$ 是 $\mathrm{GL}(V)$ 的李子群, 且 $\rho:G\to\rho(G)$ 是李群同构. 因此, 一个李群有一

个忠实表示当且仅当其同构于 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 或 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的某个李子群. 不是所有的李群都有这样的表示, 但是我们还没有构造反例的技术.

例 6.24 (李群表示)**.**

1. 包含映射 $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{C}^* \simeq \mathrm{GL}(1,\mathbb{C})$ 是圆周群的忠实表示. 更一般地, 映射 $\rho : \mathbb{T}^n \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$

$$\rho\big(z^1,\dots,z^n\big) = \begin{pmatrix} z^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & z^n \end{pmatrix}$$

   是 $\mathbb{T}^n$ 的忠实表示.
2. 令 $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathrm{GL}(n+1,\mathbb{R})$ 为

$$\sigma(x) = \begin{pmatrix} I_n & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   此时 σ 是 $\mathbb{R}^n$ 的忠实表示.
3. 令 $\mathrm{E}(n) = \mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{O}(n)$ 是 Euclid 群, $\mathrm{E}(n)$ 的一个忠实表示 $\rho : \mathrm{E}(n) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 为

$$\rho(b,A) = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.5 问题

6-1 令 $\mathbb{H}=\mathbb{C}\times\mathbb{C}$(视为实向量空间)，定义双线性的乘法 $\mathbb{H}\times\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ 为

$$(a,b)(c,d)=\big(ac-b\bar{d},ad+b\bar{c}\big),\quad a,b,c,d\in\mathbb{C}.$$

在这个乘法下，$\mathbb{H}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 4-维代数，被称为**四元数代数**. 对于每个 $p=(a,b)\in\mathbb{H}$，定义 $p^*=\big(\bar{a},-b\big)$. 定义 $\mathbb{H}$ 的一组基为 $(\mathbb{1},\mathbb{i},\mathbb{j},\mathbb{k})$ 为

$$\mathbb{1}=(1,0),\mathbb{i}=(i,0),\mathbb{j}=(0,1),\mathbb{k}=(0,i),$$

那么可以验证它们满足

$$\begin{gathered}\mathbb{i}^2=\mathbb{j}^2=\mathbb{k}^2=-1,\quad \mathbb{1}q=q\mathbb{1}=q\ \forall q\in\mathbb{H},\\ \mathbb{i}\,\mathbb{j}=-\mathbb{j}\mathbb{i}=\mathbb{k},\quad \mathbb{j}\mathbb{k}=-\mathbb{k}\,\mathbb{j}=\mathbb{i},\quad \mathbb{k}\mathbb{i}=-\mathbb{i}\mathbb{k}=\mathbb{j},\\ \mathbb{1}^*=\mathbb{1},\quad \mathbb{i}^*=-\mathbb{i},\quad \mathbb{j}^*=-\mathbb{j},\quad \mathbb{k}^*=-\mathbb{k}.\end{gathered}$$

如果 $p^*=p$，那么称 p 为实四元数，如果 $p^*=-p$，那么称 p 为纯虚四元数. 实四元数可以通过对应 $x\leftrightarrow x\mathbb{1}$ 等同为实数.

1. 证明四元数乘法是结合的但不是交换的.
2. 证明 $(pq)^*=q^*p^*$.
3. 证明 $\langle p,q\rangle=\frac{1}{2}(p^*q+q^*p)$ 是 $\mathbb{H}$ 上的一个内积，其导出的范数满足 $|pq|=|p||q|$.
4. 证明任意非零四元数都有乘法逆元 $p^{-1}=p^*/|p|^2$.
5. 证明非零四元数集合 $\mathbb{H}^*$ 在四元数乘法下构成李群.

Proof. (5) $\mathbb{H}^*$ 是乘法群. 范数映射 $|\cdot|:\mathbb{H}\to\mathbb{R}$ 是连续映射, 所以 $\mathbb{H}^*$ 作为 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 的原像是 $\mathbb{H}$ 的开子集, 故 $\mathbb{H}^*$ 是开子流形, 且容易验证 $\mathbb{H}^*$ 的乘法的求逆都是光滑映射, 所以 $\mathbb{H}^*$ 是李群, 维数为 4. □

6-2 令 $\mathbb{H}^*$ 是非零四元数李群，$\mathcal{S}\subseteq\mathbb{H}^*$ 是单位四元数的集合，证明 $\mathcal{S}$ 是 $\mathbb{H}^*$ 的恰当嵌入李子群，并且同构于 $\mathrm{SU}(2)$.

Proof. 记 $N:\mathbb{H}^*\to\mathbb{R}^*$ 为范数映射, 显然这是一个李群同态, 所以是常秩映射, 所以 $\mathcal{S}=\ker N$ 是恰当嵌入李子群. □

7

向量场

7.1 流形上的向量场

设 M 是带边或者无边光滑流形, M 上的**向量场**指的是映射 $\pi : TM \to M$ 的一个截面. 确切地说, 一个向量场是连续映射 $X : M \to TM$, 通常记为 $p \mapsto X_p$, 其满足

$$\pi \circ X = \mathrm{Id}_M .$$

等价地说, 对于每个 $p \in M$, 有 $X_p \in T_pM$.

我们主要对光滑向量场感兴趣, 即其作为 $M \to TM$ 的映射是光滑的, 其中 TM 赋予命题 3.11 定义的光滑结构. 如果 X 是 M 上的向量场, X 的支集被定义为集合 $\{p \in M \mid X_p \neq 0\}$ 的闭包. 如果 X 的支集是紧集, 那么我们说 X 是**紧支的**.

设 M 是光滑 n-流形, 如果 $X : M \to TM$ 是 M 上的向量场, $(U, (x^i))$ 是 M 的一个光滑坐标卡, 那么对于点 $p \in U$, 我们可以将 X_p 表示为基向量的线性组合:

$$X_p = X^i(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p . \tag{7.1}$$

其中我们定义函数 $X^i : U \to \mathbb{R}$, 被称为 X 在给定坐标卡下的**分量**.

命题 7.1 (向量场的光滑性判别). 令 M 是带边或者无边光滑流形, $X : M \to TM$ 是向量场, 如果 $(U, (x^i))$ 是 M 的一个光滑坐标卡, 那么 $X|_U$ 是光滑的当且仅当其在这个坐标卡下的每个分量函数是光滑的.

Proof. 若 $X|_U$ 是光滑映射, 那么任取 $p \in U$, $X|_U : U \to TM$ 的坐标表示为

$$\left(x^1, \dots, x^n\right) \mapsto \left(x^1, \dots, x^n, X^1(x), \dots, X^n(x)\right),$$

所以 $X|_U$ 光滑等价于 X^i 都是光滑函数. □

例 7.2 (坐标向量场)**.** 如果 $(U, (x^i))$ 是 M 的一个光滑坐标卡, 那么

$$p \mapsto \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$$

是 U 上的一个向量场, 被称为第 i 个**坐标向量场**, 记为 $\partial/\partial x^i$. 由于其分量是常数, 所以这当然是一个光滑向量场.

如果 $U \subseteq M$ 是开集, 那么我们知道 T_pU 同构于 T_pM, 这允许我们将 TU 视为开子集 $\pi^{-1}(U) \subseteq TM$. 因此, 一个 U 上的向量场可以被视为 $U \to TU$ 的映射也可以被视为 $U \to TM$ 的映射. 如果 X 是 M 上的光滑向量场, 那么限制 $X|_U$ 是 U 上的光滑向量场.

下面的引理是引理 2.15 的推广, 其证明也是完全类似的. 如果 M 是带边或者无边光滑流形, $A \subseteq M$ 是任意子集, 一个**沿 A 的向量场**指的是连续映射 $X : A \to TM$ 满足 $\pi \circ X = \mathrm{Id}_A$. 如果对于每个 $p \in A$, 都存在 M 中的邻域 V 和 V 上的光滑向量场 $\tilde{X}$, 使得 $\tilde{X}$ 在 $V \cap A$ 上和 X 重合, 那么我们说 X 是**沿 A 的光滑向量场**.

引理 7.3 (向量场的延拓引理). M 是带边或者无边光滑流形, $A \subseteq M$ 是闭子集. 假设 X 是沿 A 的光滑向量场. 给定包含 A 的开集 U, 存在 M 上的全局光滑向量场 $\tilde{X}$ 使得 $\tilde{X}|_A = X$ 以及 $\operatorname{supp} \tilde{X} \subseteq U$.

作为一个重要的特例, 这表明一个点上的任意切向量都可以延拓为整个光滑流形上的光滑向量场.

命题 7.4. M 是带边或者无边光滑流形, 给定 $p \in M$ 和 $v \in T_pM$, 存在 M 上的光滑向量场 X 使得 $X_p = v$.

Proof. 令 $A = \{p\}$, 令 X 是沿 A 的向量场 $p \mapsto v$. 我们先说明向量场 X 是光滑的, 任取 p 处的光滑坐标卡 (U, φ), 令 U 上的向量场为常系数的向量场, 此时其在 A 上与 X 重合, 故 X 是光滑的. 使用延拓引理便可得到 M 上的向量场 $\tilde{X}$ 满足 $\tilde{X}_p = v$. □

M 是带边或者无边光滑流形, 使用记号 $\mathfrak{X}(M)$ 来表示 M 上的光滑向量场全体. 定义逐点的加法和数乘为:

$$(aX + bY)_p = aX_p + bY_p,$$

这使得 $\mathfrak{X}(M)$ 成为一个向量空间. 此外, 光滑向量场还可以与光滑实值函数做乘法: 如果 $f \in C^\infty(M)$, 我们定义 $fX : M \to TM$ 为

$$(fX)_p = f(p)X_p.$$

下面的命题表明这些操作生成的确实都是光滑向量场.

命题 7.5. M 是带边或者无边光滑流形.

1. 如果 X 和 Y 是 M 上的光滑向量场, $f, g \in C^\infty(M)$, 那么 $fX + gY$ 是光滑向量场.
2. $\mathfrak{X}(M)$ 是光滑函数环 $C^\infty(M)$ 上的模.

Proof. (1) $fX : X \to TM$ 在给定坐标卡下的分量函数 $(fX)^i : M \to \mathbb{R}$ 为:

$$(fX)^i(p) = f(p)X^i(p),$$

也就是说 $(fX)^i = fX^i$ 是光滑函数, 所以 fX 是光滑向量场. □

利用这种记号, 向量场 X 的基表达式 (7.1) 也可以写为向量场之间的等式而不是切向量的等式:

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

其中 $\partial/\partial x^i$ 是坐标向量场.

7.1.1 局部和全局标架

光滑坐标卡给出的坐标向量场提供了一种表示向量场的简洁方式, 因为它们的值构成了切空间的一组基. 然而, 这并不是唯一的选择.

假设 M 是光滑 n-流形, 定义在子集 $A \subseteq M$ 上的 k 个向量场 $(X_1, \ldots, X_k)$ 被称为**线性无关的**, 如果对于每个 $p \in A$, $\left(X_1|_p, \ldots, X_k|_p\right)$ 在 T_pM 中是线性无关的. 如果对于每个 $p \in A$, 切向量组 $\left(X_1|_p, \ldots, X_k|_p\right)$ 都张成 T_pM, 那么我们说它们**张成切丛**. 如果开子集 $U \subseteq M$ 上的 n 个向量场 $(E_1, \ldots, E_n)$ 是线性无关的且张成切丛, 那么我们说它们是关于 M 的**局部标架**. 此时对于每个 $p \in U$, 切向量 $\left(E_1|_p, \ldots, E_n|_p\right)$ 都构成 T_pM 的一组基. 如果 $U = M$, 那么它们被称为**全局标架**. 如果 E_i 都是光滑向量场, 那么被称为**光滑标架**. 我们使用缩写 (E_i) 来表示标架 $(E_1, \ldots, E_n)$. 如果 M 是 n 维的, 那么检验 n 元组 $(E_1, \ldots, E_n)$ 是局部标架只需要说明线性无关或者张成切丛中的一个即可.

例 7.6 (局部和全局标架)**.**

1. 标准坐标向量场构成了 $\mathbb{R}^n$ 的一个光滑全局标架.
2. 如果 $(U, (x^i))$ 是光滑流形 M 的光滑坐标卡, 那么坐标向量场 $\left(\partial/\partial x^i\right)$ 构成了一个光滑局部标架, 被称为**坐标标架**.

命题 7.7 (局部标架的完备性). 令 M 是 n-维带边或者无边光滑流形.

1. 如果 $(X_1, \ldots, X_k)$ 是开集 $U \subseteq M$ 上的 k 个线性无关的光滑向量场并且 $1 \le k < n$, 那么对于每个 $p \in U$, 都存在 p 的某个邻域 V 上的光滑向量场 $X_{k+1}, \ldots, X_n$ 使得 $(X_1, \ldots, X_n)$ 是 $U \cap V$ 上的光滑局部标架.
2. 如果 $(v_1, \ldots, v_k)$ 是 T_pM 中的 k 个线性无关的向量并且 $1 \le k < n$, 那么存在 p 的某个邻域上的光滑局部标架 $(X_1, \ldots, X_n)$ 使得 $X_i|_p = v_i$.
3. 如果 $(X_1, \ldots, X_n)$ 是沿闭集 $A \subseteq M$ 的线性无关的光滑向量场, 那么存在 A 的某个邻域上的光滑局部标架 $(\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_n)$ 使得 $\widetilde{X}_i|_A = X_i$.

Proof. (1) 任取 $p \in U$, 那么 $X_1|_p, \ldots, X_k|_p \in T_pM$ 是线性无关的向量, 将其扩充为 T_pM 的一组基 $X_1|_p, \ldots, X_k|_p, v_{k+1}, \ldots, v_n$, 令 $X_{k+1}, \ldots, X_n$ 分别是 M 上的使得 $X_{k+1}|_p = v_{k+1}, \ldots, X_n|_p = v_n$ 的光滑向量场. 任取 p 的一个 U 中的坐标卡 $(W, (x^i))$, 设 $X_j = X_j^i\, \partial/\partial x^i$, 定义光滑映射 $f : W \to \mathbb{R}$ 为 $f(q) = \det(X_j^i(q))$. $X_1|_p, \ldots, X_n|_p$ 线性无关表明 $f(p) \neq 0$, 所以存在 p 处的一个邻域 V 使得 $f(V) \neq 0$, 即 $(X_1, \ldots, X_n)$ 是 V 上的光滑局部标架.

(2) 将 $v_1, \ldots, v_k$ 扩充为 T_pM 的一组基 $(v_1, \ldots, v_n)$, 令 $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{X}(M)$ 使得 $X_i|_p = v_i$, 那么重复 (1) 的做法即可.

(3) 根据延拓引理, 存在 A 的邻域 U_i 使得 $\widetilde{X}_i \in \mathfrak{X}(M)$ 是光滑向量场且 $\widetilde{X}_i|_A = X_i$. 对于每个 $p \in A$,取 p 处的坐标卡 $(U_p, (x^i))$,还是重复 (1) 的做法,使得 $(\widetilde{X}_1|_q, \ldots, \widetilde{X}_n|_q)$ 线性无关的 $q \in U_p$ 的集合是包含 $U_p \cap A$ 的开集, 这就表明 $(\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_n)$ 是开集 $\bigcup_{p\in A} U_p$ 上的局部标架. □

通过 命题 7.7, 我们发现光滑局部标架是非常多的, 但是全局标架不是这样. 如果一个带边或者无边光滑流形有一个光滑的全局标架, 那么我们说这个流形是**可平行化的**. 我们将看到李群都是可平行化的. 但是大部分光滑流形都不是可平行化的.

7.1.2 向量场作为 $C^\infty(M)$ 的导子

向量场的一个基本性质是它们在光滑实值函数空间上定义算子. 如果 $X \in \mathfrak{X}(M)$ 以及 f 是定义在开子集 $U \subseteq M$ 上的光滑实值函数, 那么我们可以定义一个新的函数 $Xf : U \to \mathbb{R}$:

$$(Xf)(p) = X_p f.$$

(注意区分 fX 和 Xf 的区别.) 由于切向量对函数的作用只与函数在该点的任意小的邻域中的行为有关, 所以 Xf 也是由局部确定的. 特别地, 对于任意开子集 $V \subseteq U$, 有

$$(Xf)|_V = X(f|_V).$$

命题 7.8. M 是带边或者无边光滑流形, $X : M \to TM$ 是向量场, 那么下面的说法等价:

1. X 是光滑向量场.
2. 对于每个 $f \in C^\infty(M)$, 函数 Xf 都是光滑函数.
3. 对于每个开集 $U \subseteq M$ 和 $f \in C^\infty(U)$, 函数 Xf 在 U 上是光滑的.

Proof. (1) ⇒ (2) 任取 $p \in M$ 以及 p 处的光滑坐标卡 $(U, (x^i))$, 那么 $Xf : M \to \mathbb{R}$ 的坐标表示为

$$\left(x^1, \ldots, x^n\right) \mapsto X_x f = \left(X^i(x) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x \right) f = X^i(x) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x),$$

X 光滑表明分量函数 X^i 光滑, 所以 Xf 是光滑函数.

(2) ⇒ (3) 对于 $f \in C^\infty(U)$, 任取 $p \in U$, 令 ψ 为关于 p 的某个邻域的支在 U 中的光滑鼓包函数, 定义 $\tilde{f} = \psi f$. 那么 $\tilde{f} \in C^\infty(M)$, 根据假设 $X\tilde{f}$ 是光滑函数, 并且 $X\tilde{f}$ 在 p 的某个邻域上等于 Xf, 这表明 Xf 在 p 的某个邻域上是光滑的, 所以在 U 上是光滑的.

(3) ⇒ (1) 设 $(U, (x^i))$ 是任意光滑坐标卡, 那么

$$Xx^i = \left(X^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) x^i = X^j \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = X^i,$$

根据假设, Xx^i 是光滑的, 所以 X^i 是光滑的, 这就表明 X 的每个分量函数是光滑的, 即 X 是光滑向量场. □

上述命题的结果是一个光滑向量场 $X \in \mathfrak{X}(M)$ 定义了 $C^\infty(M)$ 上的映射为 $f \mapsto Xf$, 这显然是一个线性映射. 此外, 切向量的乘积法则导出了向量场的乘积法则:

$$X(fg) = fXg + gXf. \tag{7.2}$$

我们只需要逐点验证两端相等即可. 一般来说, 满足 $\mathbb{R}$-线性和乘积法则 (7.2) 式的映射 $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ 被称为**导子**. 与切空间类似, 下面的命题表明 $C^\infty(M)$ 的导子可以等同于光滑向量场.

命题 7.9. M 是带边或者无边光滑流形，映射 $D : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ 是导子当且仅当其形如 $Df = Xf$，其中 $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Proof. 我们已经说明了向量场都是导子. 反过来, 假设 D 是导子, 我们要说明存在 $X \in \mathfrak{X}(M)$ 使得 $Df = Xf$. 任取 $p \in M$, 那么这样的向量场 X 必须满足

$$X_p f = (Df)(p),$$

容易验证这样的 X_p 确实是 p 处的切向量. 又因为任取 $f \in C^\infty(M)$, $Xf = Df$ 都是光滑的, 所以 X 确实是光滑向量场. □

出于这个结果, 我们将 M 上的光滑向量场和 $C^\infty(M)$ 的导子视为同一个对象, 使用同一个字母.

7.2 向量场和光滑映射

如果 $F : M \to N$ 是光滑映射, X 是 M 上的向量场, 那么对于每个 $p \in M$, 我们得到一个切向量 $dF_p(X_p) \in T_{F(p)}N$, 但是这并不能定义 N 上的向量场. 例如, 若 F 不是满射, 那么对于点 $q \in N \setminus F(M)$, 我们无法分配切向量. 若 F 不是单射, 那么 N 中同一个点可能有多种不同的切向量定义方式. 所以我们研究下面的定义.

如果 $F : M \to N$ 是光滑映射, X 是 M 上的向量场, Y 是 N 上的向量场. 对于每个 $p \in M$, 如果有 $dF_p(X_p) = Y_{F(p)}$, 那么我们说 X 和 Y 是 F-**相关的**. 下面的命题说明了 F-相关的向量场如何作用在光滑函数上.

命题 7.10. 设 $F : M \to N$ 是带边或者无边流形之间的光滑映射，$X \in \mathfrak{X}(M)$ 和 $Y \in \mathfrak{X}(N)$. 那么 X 和 Y 是 F-相关的当且仅当对于每个定义在 N 的某个开子集上的光滑实值函数 f，有

$$X(f \circ F) = (Yf) \circ F.$$

Proof. 设 $f : U \to \mathbb{R}$ 是光滑函数, 任取 $p \in U$, 那么

$$X(f \circ F)(p) = X_p(f \circ F) = dF_p(X_p)f,$$

另一方面, 有

$$(Yf) \circ F(p) = Yf(F(p)) = Y_{F(p)}f,$$

所以 $X(f\circ F)=(Yf)\circ F$ 对于任意的 f 成立当且仅当 $dF_p(X_p)=Y_{F(p)}$, 即 X 和 Y 是 F-相关的. □

例 7.11. 令 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ 是光滑映射 $F(t)=(\cos t,\sin t)$. 那么 $d/dt\in\mathfrak{X}(\mathbb{R})$ F-相关于向量场

$$Y=x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^2).$$

我们可以直接验证, 任取 $t_0\in\mathbb{R}$, 记 $p=F(t_0)=(\cos t_0,\sin t_0)$, 那么

$$dF_{t_0}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0}\right)=-\sin t_0\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p+\cos t_0\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p=Y_p,$$

这就说明 Y 与 d/dt 是 F-相关的.

也可以利用命题 7.10 验证. 任取 $f\in C^\infty(U)$, 其中 U 是 $\mathbb{R}^2$ 的开集. 那么

$$\frac{d}{dt}f(\cos t,\sin t)=-\sin t\frac{\partial f}{\partial x}+\cos t\frac{\partial f}{\partial y}=(Yf)\circ F.$$

这也表明 Y 与 d/dt 是 F-相关的.

需要注意的是对于一个光滑映射 $F:M\to N$ 和向量场 $X\in\mathfrak{X}(M)$, 可能出现 N 上的任意向量场都不与 X 是 F-相关的情况. 然而, 当微分同胚的时候, 这样的向量场总是存在的.

命题 7.12. 设 M,N 是带边或者无边光滑流形, $F:M\to N$ 是微分同胚. 对于每个 $X\in\mathfrak{X}(M)$, 都存在唯一的 F-相关于 X 的 N 上的光滑向量场.

Proof. 设向量场 $Y\in\mathfrak{X}(N)$ F-相关于 X, 那么其必须满足 $dF_p(X_p)=Y_{F(p)}$. 于是我们定义 $Y:N\to TN$ 为

$$Y_q=dF_{F^{-1}(q)}\left(X_{F^{-1}(q)}\right).$$

根据定义 X 和 Y 是 F-相关的. 任取 $f\in C^\infty(N)$, 那么

$$Y_qf=dF_{F^{-1}(q)}\left(X_{F^{-1}(q)}\right)f=X_{F^{-1}(q)}(f\circ F)=\big(X(f\circ F)\big)(F^{-1}(q)),$$

所以 $Yf=\big(X(f\circ F)\big)\circ F^{-1}$ 是光滑映射, 这表明 Y 是光滑向量场. □

在上述命题的情况下, 我们将这个唯一的 F-相关于 X 的向量场记为 F_*X, 称为 **X 通过 F 的推前**. 需要注意只有 F 是微分同胚的时候 F_*X 才有定义. 上面的证明告诉我们, F_*X 的定义为:

$$(F_*X)_q=dF_{F^{-1}(q)}\left(X_{F^{-1}(q)}\right).\tag{7.3}$$

例 7.13 (向量场推前的计算)**.** 令 M,N 是 $\mathbb{R}^2$ 的开子流形:

$$\begin{aligned}M&=\{(x,y)\mid y>0,x+y>0\},\\N&=\{(u,v)\mid u>0,v>0\},\end{aligned}$$

定义 $F : M \to N$ 为 $F(x, y) = (x + y, x/y + 1)$. 那么 F 是微分同胚, 因为其有光滑逆映射 $F^{-1}(u, v) = (u - u/v, u/v)$. 定义 M 上的光滑向量场为:

$$X_{(x,y)} = y^2 \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{(x,y)},$$

我们计算推前 F_*X. F 在 (x, y) 处的 Jacobi 矩阵为

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/y & -x/y^2 \end{pmatrix},$$

所以

$$dF_{(x,y)}(a, b) = \left(a + b, a/y - bx/y^2\right),$$

所以

$$dF_{F^{-1}(u,v)}\left(X_{F^{-1}(u,v)}\right) = dF_{F^{-1}(u,v)}(u^2/v^2, 0) = \left(u^2/v^2, u/v\right),$$

所以

$$(F_*X)_{(u,v)} = \frac{u^2}{v^2} \left.\frac{\partial}{\partial u}\right|_{(u,v)} + \frac{u}{v} \left.\frac{\partial}{\partial v}\right|_{(u,v)}.$$

7.3 李括号

令 X, Y 是光滑流形 M 上的两个光滑向量场. 给定光滑函数 $f : M \to \mathbb{R}$, 我们可以将 X 作用在 f 上得到另一个光滑函数 Xf. 进一步的, 我们可以将向量场 Y 作用在这个函数上得到光滑函数 $YXf = Y(Xf)$. 然而, 算子 $f \mapsto YXf$ 并不满足乘积法则, 所以这样得到的 YX 并不是 $C^\infty(M)$ 的导子.

我们可以以相反的顺序进行上述操作, 得到函数 XYf, 将这两个算子相减, 我们得到算子 $[X, Y] : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, 被称为 X **和** Y **的李括号**, 定义为

$$[X, Y]f = XYf - YXf.$$

一个关键的事实是这个算子是一个向量场.

引理 7.14. **两个光滑向量场的李括号是一个光滑向量场.**

Proof. 根据 命题 7.9, 我们只需要说明 $[X, Y]$ 是一个导子. 任取 $f, g \in C^\infty(M)$, 有

$$\begin{aligned}
[X, Y](fg) &= X\big(Y(fg)\big) - Y\big(X(fg)\big) \\
&= X\big(fYg + gYf\big) - Y\big(fXg + gXf\big) \\
&= X(fYg) + X(gYf) - Y(fXg) - Y(gXf) \\
&= fXYg + (Yg)(Xf) + gXYf + (Yf)(Xg) \\
&\quad - fYXg - (Xg)(Yf) - gYXf - (Xf)(Yg) \\
&= fXYg + gXYf - fYXg - gYXf \\
&= f[X, Y]g + g[X, Y]f.
\end{aligned}$$

□

向量场 $[X,Y]$ 在点 $p\in M$ 处的值是 p 处的导子, 其满足

$$[X,Y]_p f = X_p(Yf) - Y_p(Xf).$$

然而, 这个公式对于计算的用处有限, 因为其需要计算涉及 f 的二阶导数的项, 这些项里面总会相互抵消一部分, 下一个命题给出了更有用的坐标公式.

命题 7.15 (李括号的坐标公式). 令 X,Y 是光滑流形 M 上的光滑向量场，设 $X = X^i\,\partial/\partial x^i$ 和 $Y = Y^j\,\partial/\partial x^j$ 是 X,Y 在同一组光滑坐标卡 (x^i) 下的分量表示．那么 $[X,Y]$ 可以表示为

$$[X,Y] = \left(X^i\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j},$$

或者更简洁地写为

$$[X,Y] = \left(XY^j - YX^j\right)\frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Proof. 由于 $([X,Y]f)|_U = [X,Y](f|_U)$, 所以我们只需要在某个坐标卡中计算即可. 我们有

$$\begin{aligned}
[X,Y]f &= X^i\frac{\partial(Yf)}{\partial x^i} - Y^j\frac{\partial(Xf)}{\partial x^j}\\
&= X^i\frac{\partial}{\partial x^i}\left(Y^j\frac{\partial f}{\partial x^j}\right) - Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}\left(X^i\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)\\
&= X^iY^j\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\,\partial x^j} + X^i\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^jX^i\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\,\partial x^i} - Y^j\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\\
&= X^i\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} - Y^j\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i},
\end{aligned}$$

最后一步使用了光滑函数的高阶偏导数与次序无关. □

命题 7.15 的一个直接应用是对于坐标向量场而言, 任取 i,j, 都有

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0,$$

这是因为其坐标函数都是常值函数.

例 7.16. 定义光滑向量场 $X,Y\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ 为

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + x(y+1)\frac{\partial}{\partial z},\quad Y = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}.$$

那么它们的李括号为

$$\begin{aligned}
[X,Y] &= \left(XY^1 - YX^1\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(XY^2 - YX^2\right)\frac{\partial}{\partial y} + \left(XY^3 - YX^3\right)\frac{\partial}{\partial z}\\
&= -\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial z}.
\end{aligned}$$

命题 7.17 (李括号的性质). 对于任意 $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$，李括号满足：

1. 双线性性：对于 $a, b \in \mathbb{R}$，有
$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z],$$
$$[Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y].$$

2. 反对称性：
$$[X, Y] = -[Y, X].$$

3. Jacobi 恒等式：
$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

4. 对于 $f, g \in C^\infty(M)$，有
$$[fX, gY] = fg[X, Y] + (fXg)Y - (gYf)X.$$

命题 7.18 (李括号的自然属性). 令 $F : M \to N$ 是光滑映射，向量场 $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ 和 $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$，其中 X_i, Y_i 是 F-相关的. 那么 $[X_1, X_2]$ 和 $[Y_1, Y_2]$ 是 F-相关的.

Proof. X_i, Y_i 是 F-相关的表明对于任意的 $f \in C^\infty(N)$ 有
$$X_i(f \circ F) = Y_i f \circ F,$$
所以
$$\begin{aligned}
[X_1, X_2](f \circ F) &= X_1 X_2(f \circ F) - X_2 X_1(f \circ F) \\
&= X_1(Y_2 f \circ F) - X_2(Y_1 f \circ F) \\
&= (Y_1 Y_2 f) \circ F - (Y_2 Y_1 f) \circ F \\
&= \big([Y_1, Y_2] f\big) \circ F,
\end{aligned}$$
这就表明 $[X_1, X_2]$ 和 $[Y_1, Y_2]$ 是 F-相关的. □

推论 7.19 (李括号的推前). 设 $F : M \to N$ 是微分同胚，$X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$，那么 $F_*[X_1, X_2] = [F_* X_1, F_* X_2]$.

Proof. 由于 X_i 和 $F_* X_i$ 是 F-相关的, 所以 $[X_1, X_2]$ 和 $[F_* X_1, F_* X_2]$ 是 F-相关的, 根据唯一性, 就有 $[F_* X_1, F_* X_2] = F_*[X_1, X_2]$. □

7.4 李群的李代数

假设 G 是李群, G 上的向量场 X 如果在任意左平移下保持不变, 那么我们说 X 是**左不变**的. 确切地说, 对于任意 $g \in G$, X 与自身是 L_g-相关的, 即
$$\forall g, g' \in G, \quad X_{gg'} = d(L_g)_{g'}(X_{g'}).$$
由于 L_g 是微分同胚, 所以可以表述为任取 $g \in G$ 都有 $(L_g)_* X = X$.

由于 $(L_g)_*(aX + bY) = a(L_g)_* X + b(L_g)_* Y$, 所以 G 上所有左不变的光滑向量场构成 $\mathfrak{X}(G)$ 的一个子空间. 更重要的是, 这个子空间对于李括号是封闭的.

命题 7.20. *G 是李群，设 X, Y 是 G 上的光滑左不变向量场，那么 $[X, Y]$ 也是左不变的.*

Proof. 任取 $g \in G$, 由于 $(L_g)_* X = X$ 以及 $(L_g)_* Y = Y$, 所以

$$(L_g)_*[X, Y] = [(L_g)_* X, (L_g)_* Y] = [X, Y]. \qquad \square$$

($\mathbb{R}$ 上的) **李代数**指的是一个实向量空间 $\mathfrak{g}$, 其配备一个 $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 的**李括号**, 通常记为 $(X, Y) \mapsto [X, Y]$, 其对于任意 $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, 满足下面的性质:

1. 双线性性: 对于 $a, b \in \mathbb{R}$, 有

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z],$$
$$[Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y].$$

2. 反对称性:

$$[X, Y] = -[Y, X].$$

3. Jacobi 恒等式:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

如果 $\mathfrak{g}$ 是李代数, 子空间 $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ 对李括号封闭, 那么 $\mathfrak{h}$ 被称为 $\mathfrak{g}$ **的李子代数**. 在这种情况下, $\mathfrak{h}$ 的李括号就是 $\mathfrak{g}$ 的李括号的限制.

如果 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{h}$ 是两个李代数, 线性映射 $A : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 保持李括号: $A[X, Y] = [AX, AY]$, 那么我们说 A 是**李代数同态**. 如果 A 是同构, 那么我们说 A 是**李代数同构**.

例 7.21 (李代数)**.**

1. 光滑流形 M 上的所有光滑向量场 $\mathfrak{X}(M)$ 在李括号下成为李代数.
2. 如果 G 是李群, 那么 G 上所有光滑左不变向量场的集合是 $\mathfrak{X}(G)$ 的李子代数.
3. 向量空间 $M(n, \mathbb{R})$ 在李括号 (被称为**换位子括号**)

$$[A, B] = AB - BA$$

下成为 n^2-维李代数. 当我们将 $M(n, \mathbb{R})$ 视为李代数的时候, 我们使用 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ 表示.

7.21 的 (2) 是最重要的例子, 李群 G 上所有光滑左不变向量场的集合被称为 **G 的李代数**, 记为 $\mathrm{Lie}(G)$. 一个基本事实是 $\mathrm{Lie}(G)$ 是有限维的, 并且维数与 G 相同.

定理 7.22. *G 是李群，定义求值映射 $\varepsilon : \mathrm{Lie}(G) \to T_e G$ 为 $\varepsilon(X) = X_e$，那么 ε 是向量空间同构. 这表明 $\mathrm{Lie}(G)$ 是维数为 $\dim G$ 的有限维向量空间.*

Proof. 不难验证 ε 是线性映射. 令 $\varepsilon(X) = X_e = 0$, 那么任取 $g \in G$, X 左不变表明

$$X_g = d(L_g)_e(X_e) = 0,$$

所以 $X = 0$, 这表明 ε 是单射.

任取 $v \in T_eG$, 我们要构造一个光滑左不变向量场 X 使得 $X_e = v$. 这样的 X 必须满足

$$X_g = d(L_g)_e(X_e) = d(L_g)_e(v),$$

所以我们定义 G 上的向量场 v^{L} 为

$$v^{\mathrm{L}}\big|_g = d(L_g)_e(v).$$

我们首先说明 v^{L} 是光滑的. 任取 $f \in C^\infty(G)$, 选取光滑曲线 $\gamma : (-\delta, \delta) \to G$ 满足 $\gamma(0) = e$ 以及 $\gamma'(0) = v$, 那么

$$v^{\mathrm{L}}\big|_g f = d(L_g)_e \circ d\gamma_0 \left(\frac{d}{dt}\bigg|_0 \right) f = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (f \circ L_g \circ \gamma)(t),$$

定义 $\varphi : (-\delta, \delta) \times G \to \mathbb{R}$ 为 $\varphi(t, g) = f(L_g(\gamma(t)))$ 是光滑函数

$$(-\delta, \delta) \times G \to G \times G \xrightarrow{m} G \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

的复合, 所以是光滑函数, 所以 $\big(v^{\mathrm{L}} f\big)(g) = v^{\mathrm{L}}\big|_g f = \partial\varphi/\partial t(0, g)$ 是光滑函数, 这就表明 v^{L} 是光滑向量场.

现在说明 v^{L} 是左不变向量场, 对于任意 $h \in G$, 有

$$d(L_h)_g \left(v^{\mathrm{L}}\big|_g \right) = d(L_h)_g \circ d(L_g)_e(v) = d(L_{hg})_e(v) = v^{\mathrm{L}}\big|_{hg},$$

这就表明 v^{L} 是左不变的. 所以 $v = \varepsilon(v^{\mathrm{L}})$, 故 ε 是满射. □

根据上面的证明, 我们还可以发现 G 上任意左不变向量场都自动是光滑向量场.

推论 7.23. 李群上的任意左不变向量场都是光滑向量场.

Proof. 设 X 是左不变向量场, 那么

$$X_g = d(L_g)(X_e) = (X_e)^{\mathrm{L}}\big|_g,$$

所以 $X = (X_e)^{\mathrm{L}}$ 是光滑向量场. □

全局左不变向量场的存在性也导出了李群的另一个重要性质. 回顾, 如果光滑流形有一个光滑的全局标架, 那么我们说这个流形是**可平行化的**. 如果 G 是李群, 左不变向量场构成的局部或者全局的标架被称为**左不变标架**.

推论 7.24. 每个李群都有一组左不变的光滑全局标架，因此每个李群都是可平行化的.

Proof. 若 G 的李群, 那么 $\mathrm{Lie}(G)$ 的一组基就是左不变的光滑全局标架. □

下面我们通过分析 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 的李代数来结束本节. 我们已经知道了 $\mathrm{Lie}(\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}))$ 和 $T_{I_n} \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 之间存在向量空间同构. 由于 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 是 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ 的开子集, 所以 $T_{I_n} \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 和 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ 之间也存在向量空间同构, 那么我们得到了向量空间同构 $\mathrm{Lie}(\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})) \simeq \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. 而这两个向量空间我们都已经配备了独立的李代数结构, 第一个是向量场的李括号, 第二个是矩阵的交换子括号. 下面我们证明上述向量空间同构实际上是李代数同构.

命题 7.25 (一般线性群的李代数). 复合映射

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})) \to T_{I_n}\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$$

给出了 $\mathrm{Lie}(\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))$ 到 $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ 的李代数同构.

Proof. 记 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 的李代数. 任意 $A=(A^i_j)\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ 都确定了一个左不变向量场 $A^{\mathrm{L}}\in\mathfrak{g}$, 其满足

$$A^{\mathrm{L}}|_X = d(L_X)_{I_n}(A) = XA = X^i_j A^j_k \left.\frac{\partial}{\partial X^i_k}\right|_X .$$

任取 $A,B\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, 我们有

$$\begin{aligned}
\left[A^{\mathrm{L}},B^{\mathrm{L}}\right]_X &= \left[X^i_j A^j_k \left.\frac{\partial}{\partial X^i_k}\right|_X, X^p_q B^q_r \left.\frac{\partial}{\partial X^p_r}\right|_X\right] \\
&= X^i_j A^j_k \left.\frac{\partial}{\partial X^i_k}\right|_X X^p_q B^q_r \left.\frac{\partial}{\partial X^p_r}\right|_X - X^p_q B^q_r \left.\frac{\partial}{\partial X^p_r}\right|_X X^i_j A^j_k \left.\frac{\partial}{\partial X^i_k}\right|_X \\
&= X^i_j A^j_k B^k_r \left.\frac{\partial}{\partial X^i_r}\right|_X - X^p_q B^q_r A^r_k \left.\frac{\partial}{\partial X^p_k}\right|_X \\
&= \left(X^i_j A^j_k B^k_r - X^i_j B^j_k A^k_r\right) \left.\frac{\partial}{\partial X^i_r}\right|_X \\
&= \left(X\,(AB-BA)\right)^i_r \left.\frac{\partial}{\partial X^i_r}\right|_X \\
&= d(L_X)_{I_n}([A,B]) = [A,B]^{\mathrm{L}}\big|_X,
\end{aligned}$$

故 $[A^{\mathrm{L}},B^{\mathrm{L}}]=[A,B]^{\mathrm{L}}$, 这就表明上述映射是李代数同构. □

对于抽象向量空间来说有同样的结果. 如果 V 是有限维实向量空间, 回顾 $\mathrm{GL}(V)$ 是 V 上所有可逆线性变换构成的李群, $\mathfrak{gl}(V)$ 是 V 上所有线性变换构成的李代数. 与 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 的情况一样, 我们把 $\mathrm{GL}(V)$ 视为 $\mathfrak{gl}(V)$ 的开子流形, 于是我们有典范的向量空间同构

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{GL}(V)) \to T_{\mathrm{Id}}\mathrm{GL}(V) \to \mathfrak{gl}(V).$$

那么 $\mathrm{Lie}(\mathrm{GL}(V))$ 和 $\mathfrak{gl}(V)$ 也是李代数同构.

7.4.1 诱导的李代数同态

定理 7.26 (李群同态诱导李代数同态). 令 G,H 是李群，$\mathfrak{g},\mathfrak{h}$ 是对应的李代数. 设 $F:G\to H$ 是李群同态. 对于每个 $X\in\mathfrak{g}$，存在唯一的与 X F-相关的 $\mathfrak{h}$ 中的向量场，记为 F_*X，映射 $F_*:\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ 是李代数同态.

Proof. 如果 Y 与 X 是 F-相关的, 那么其必须满足 $Y_e=dF_e(X_e)$, $Y\in\mathfrak{h}$ 则必须满足

$$Y=\left(dF_e(X_e)\right)^{\mathrm{L}}.$$

下面我们只需要说明这样的 Y 与 X 是 F-相关的即可. 任取 $g \in G$, 有

$$Y_{F(g)} = d\left(L_{F(g)}\right)_e\left(dF_e(X_e)\right) = d\left(L_{F(g)} \circ F\right)_e(X_e),$$

F 是李群同态表明 $L_{F(g)} \circ F = F \circ L_g$, 所以

$$Y_{F(g)} = d\left(F \circ L_g\right)_e(X_e) = dF_g\left(d(L_g)_e(X_e)\right) = dF_g\left(X_g\right),$$

这就表明 X 和 Y 是 F-相关的向量场.

任取两个左不变向量场 $X, Y \in \mathfrak{g}$, 由于 X, Y 分别和 F_*X, F_*Y 是 F-相关的, 根据李括号的自然属性, 所以 $[X, Y]$ 和 $[F_*X, F_*Y]$ 是 F-相关的, 所以 $F_*[X, Y] = [F_*X, F_*Y]$, 即 F_* 是李代数同态. □

需要注意的是, 上述定理表明对于任意左不变向量场 $X \in \mathfrak{g}$, 即使 F 不是微分同胚, 也可以将 X 推前到一个 F-相关的左不变向量场 F_*X.

7.4.2 李子群的李代数

如果 G 是李群, $H \subseteq G$ 是李子群, 我们希望 H 的李代数可以视为 G 的李代数的李子代数. 但是, $\mathrm{Lie}(H)$ 的元素严格来说是 H 上的向量场而不是 G 上的向量场. 下面的命题给我们一种将 $\mathrm{Lie}(H)$ 视为 $\mathrm{Lie}(G)$ 的李子代数的方式.

定理 7.27 (李子群的李代数). **设 $H \subseteq G$ 是李子群, $\iota : H \hookrightarrow G$ 是包含映射. 那么存在李子代数 $\mathfrak{h} \subseteq \mathrm{Lie}(G)$, 其典范同构于 $\mathrm{Lie}(H)$, 并且可以刻画为**

$$\mathfrak{h} = \iota_*(\mathrm{Lie}(H)) = \{X \in \mathrm{Lie}(G) \mid X_e \in T_eH\}.$$

Proof. 我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Lie}(H) & \xrightarrow{\iota_*} & \mathrm{Lie}(G) \\ \updownarrow\simeq & & \updownarrow\simeq \\ T_eH & \xrightarrow{d\iota_e} & T_eG \end{array}$$

所以 ι_* 是单射, 故 $\iota_*(\mathrm{Lie}(H))$ 典范同构于 $\mathrm{Lie}(H)$. 另一方面, $\iota_*(\mathrm{Lie}(H))$ 同构于 $d\iota_e(T_eH)$, 即 $\iota_*(\mathrm{Lie}(H))$ 由所有满足 $X_e \in T_eH$ 的 $X \in \mathrm{Lie}(G)$ 构成. □

例 7.28 ($\mathrm{O}(n)$ 的李代数). 例 6.20 表明正交群 $\mathrm{O}(n)$ 是常秩映射 $\Phi : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to M(n, \mathbb{R})$ 的水平集, 再根据 练习 5.2, 切空间 $T_{I_n}\mathrm{O}(n) = \ker d\Phi_{I_n}$, 由于 $d\Phi_{I_n}(B) = B + B^T$, 所以

$$T_{I_n}\mathrm{O}(n) = \{B \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid B + B^T = 0\},$$

于是 $\mathrm{Lie}(\mathrm{O}(n)) \simeq T_{I_n}\mathrm{O}(n)$ 典范同构于所有反对称矩阵构成的 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ 的子代数 $\mathfrak{o}(n)$. 注意, 我们甚至没有验证 $\mathfrak{o}(n)$ 是一个李代数.

与李群的概念平行，我们也有李代数表示的概念. 如果 $\mathfrak{g}$ 是有限维李代数，$\mathfrak{g}$ 的 **(有限维) 表示**指的是一个李代数同态 $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$，其中 V 是某个有限维向量空间，$\mathfrak{gl}(V)$ 是 V 上线性变换构成的李代数. 如果 φ 是单射，那么就说 φ 是**忠实的**. 这种情况下 $\mathfrak{g}$ 同构于李子代数 $\varphi(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{gl}(V)$.

李群表示和李代数表示之间存在着密切关系. 设 G 是李群，$\mathfrak{g}$ 是其李代数. 如果 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ 是李群表示，那么显然 $\rho_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的李代数表示.

定理 7.29 (Ado). 每个有限维实李代数都有一个忠实的有限维表示.

推论 7.30. 每个有限维实李代数都同构于某个矩阵代数（附带换位子括号）$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ 的一个李子代数.

Proof. 令 $\mathfrak{g}$ 是有限维实李代数. 根据 Ado 定理，$\mathfrak{g}$ 有一个忠实表示 $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$. 选取 V 的一组基导出 $\mathfrak{gl}(V)$ 和某个 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ 的李代数同构，然后与 ρ 复合即可. □

8

积分曲线和流

8.1 积分曲线

设 M 是光滑流形, $\gamma : J \to M$ 是光滑曲线, 那么对于 $t \in J$, 速度向量 $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$. 本节我们研究逆向的方法: 给定每个点的切向量, 寻找一条曲线使得其在每个点的速度向量等于给定的切向量.

如果 V 是 M 上的向量场, 定义 V **的积分曲线**为可微曲线 $\gamma : J \to M$, 其在每个点处的速度等于 V 在该点处的值:

$$\gamma'(t) = V_{\gamma(t)} \quad \forall t \in J.$$

如果 $0 \in J$, 点 $\gamma(0)$ 被称为 γ **的起点**.

寻找积分曲线可以归结为求解光滑坐标卡中的常微分方程组. 设 V 是一个光滑向量场, $\gamma : J \to M$ 是光滑曲线. 在一个光滑坐标开集 $U \subseteq M$ 中, 我们可以将 γ 表示为 $\gamma(t) = \big(\gamma^1(t), \ldots, \gamma^n(t)\big)$. 那么 $\gamma'(t) = V_{\gamma(t)}$ 当且仅当

$$\dot{\gamma}^i(t) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\gamma(t)} = V^i(\gamma(t)) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\gamma(t)},$$

这导出了一个常微分方程组:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}^1(t) &= V^1(\gamma^1(t), \ldots, \gamma^n(t)), \\ &\vdots \\ \dot{\gamma}^n(t) &= V^n(\gamma^1(t), \ldots, \gamma^n(t)). \end{aligned}$$

命题 8.1. 令 V 是光滑流形 M 上的光滑向量场. 对于每个 $p \in M$, 都存在 $\varepsilon > 0$ 和光滑曲线 $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ 使得 γ 是 V 的起点为 p 的积分曲线.

引理 8.2 (缩放引理). 令 V 是光滑流形 M 上的光滑向量场. $J \subseteq \mathbb{R}$ 是区间, $\gamma : J \to M$ 是 V 的积分曲线. 对于任意 $a \in \mathbb{R}$, 定义曲线 $\tilde{\gamma} : \tilde{J} \to M$ 为 $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(at)$, 其中 $\tilde{J} = \{t \mid at \in J\}$, 那么 $\tilde{\gamma}$ 是向量场 aV 的积分曲线.

Proof. 任取 $f \in C^\infty(M)$, 有

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}'(t_0) f &= d\tilde{\gamma}_{t_0}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0}\right) f = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} (f \circ \tilde{\gamma})(t) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} (f \circ \gamma)(at) \\ &= a(f \circ \gamma)'(at_0) = a\gamma'(at_0) f = aV_{\gamma(at_0)} f = aV_{\tilde{\gamma}(t_0)} f,\end{aligned}$$

所以 $\tilde{\gamma}'(t_0) = aV_{\tilde{\gamma}(t_0)}$. □

引理 8.3 (平移引理). 令 V, M, J 和 γ 的含义同上一个引理. 对于任意 $b \in \mathbb{R}$，定义曲线 $\hat{\gamma} : \hat{J} \to M$ 为 $\hat{\gamma}(t) = \gamma(t+b)$，其中 $\hat{J} = \{t \mid t + b \in J\}$，那么 $\hat{\gamma}$ 是向量场 V 的积分曲线.

命题 8.4 (积分曲线的自然性). 设 M, N 是光滑流形，$F : M \to N$ 是光滑映射. 那么 $X \in \mathfrak{X}(M)$ 和 $Y \in \mathfrak{X}(N)$ 是 F-相关的当且仅当 F 将 X 的积分曲线送到 Y 的积分曲线，也就是说，对于 X 的积分曲线 γ，$F \circ \gamma$ 是 Y 的积分曲线.

Proof. 假设 X, Y 是 F-相关的, 这意味着对于任意 $p \in M$, 有

$$Y_{F(p)} = dF_p(X_p),$$

于是

$$(F \circ \gamma)'(t) = dF_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big) = dF_{\gamma(t)}(V_{\gamma(t)}) = Y_{F(\gamma(t))} = Y_{(F\circ\gamma)(t)},$$

这就说明 $F \circ \gamma$ 是 Y 的积分曲线.

反之, 若对于任意 X 的积分曲线 γ, $F \circ \gamma$ 都是 Y 的积分曲线. 那么任取 $p \in M$, 选取 X 的以 p 为起点的积分曲线 γ, 有

$$Y_{F(p)} = Y_{F(\gamma(0))} = (F \circ \gamma)'(0) = dF_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) = dF_p(X_p),$$

即 X, Y 是 F-相关的. □

8.2 流

令 M 是光滑流形, $V \in \mathfrak{X}(M)$. 假设对于每个点 $p \in M$, V 有唯一的一条定义在 $t \in \mathbb{R}$ 上的以 p 为起点的积分曲线, 记为 $\theta^{(p)} : \mathbb{R} \to M$. 那么对于每个 $t \in \mathbb{R}$, 我们可以定义映射 $\theta_t : M \to M$, 将点 p 送到以 p 为起点的积分曲线在 t 时刻的值:

$$\theta_t(p) = \theta^{(p)}(t).$$

那么每个 θ_t 看起来就像将流形沿着 t 时刻的积分曲线进行“滑动”. 平移引理表明 $t \mapsto \theta^{(p)}(t+s)$ 是 V 的以 $q = \theta^{(p)}(s)$ 为起点的积分曲线, 因为我们假设了积分曲线的唯一性, 所以 $\theta^{(q)}(t) = \theta^{(p)}(t+s)$, 也就是

$$\theta_t \circ \theta_s(p) = \theta_t(q) = \theta_{t+s}(p).$$

结合 $\theta_0(p) = \theta^{(p)}(0) = p$, 这导出了一个加法群 $\mathbb{R}$ 在 M 上的群作用 $\theta : \mathbb{R} \times M \to M$.

出于这个动机, 我们定义 M 上的**全局流**为一个 M 上的连续左 $\mathbb{R}$-作用, 即一个连续映射 $\theta : \mathbb{R} \times M \to M$ 满足对于任意 $s, t \in \mathbb{R}$ 和 $p \in M$ 有

$$\theta\big(t, \theta(s, p)\big) = \theta(t + s, p), \quad \theta(0, p) = p. \tag{8.1}$$

下面的命题表明, 每个光滑的全局流都是按照我们上面所述的方式从某个光滑向量场的积分曲线导出的. 如果 $\theta : \mathbb{R} \times M \to M$ 是光滑的全局流, 对于每个 $p \in M$, 我们定义切向量 $V_p \in T_pM$ 为

$$V_p = \theta^{(p)\prime}(0),$$

那么 $p \mapsto V_p$ 是 M 上的一个向量场, 被称为 θ **的无穷小生成元**.

命题 8.5. 令 $\theta : \mathbb{R} \times M \to M$ 是光滑的全局流，那么 θ 的无穷小生成元 V 是 M 上的光滑向量场，并且每个曲线 $\theta^{(p)}$ 都是 V 的积分曲线.

Proof. 任取 $f \in C^\infty(M)$ 和 $p \in M$, 有

$$Vf(p) = V_p f = \theta^{(p)\prime}(0) f = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f\big(\theta^{(p)}(0)\big) = \frac{\partial(f \circ \theta)}{\partial t}(0, p),$$

由于 $f \circ \theta$ 是光滑函数, 所以 Vf 也是光滑函数, 故 V 是光滑向量场.

下面证明 $\theta^{(p)}$ 是 V 的积分曲线. 记 $q = \theta^{(p)}(t)$, 那么

$$V_{\theta^{(p)}(t)} f = \theta^{(q)\prime}(0) f = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} f(\theta(s, q)) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} f(\theta(s + t, p)) = \theta^{(p)\prime}(t) f,$$

即 $\theta^{(p)\prime}(t) = V_{\theta^{(p)}(t)}$. □

8.2.1 流的基本定理

我们已经说明了每个光滑的全局流都会产生一个光滑的向量场, 即无穷小生成元. 反之, 我们希望能说明每个光滑向量场都是某个光滑全局流的无穷小生成元. 然而, 很容易看出这是不成立的, 因为存在光滑向量场使得其积分曲线不可能对所有的 $t \in \mathbb{R}$ 都有定义.

例 8.6. 令 $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 附带标准坐标 (x, y), $V = \partial/\partial x$ 是 M 上的向量场. V 的唯一的以 $(-1, 0)$ 为起点的积分曲线为 $\gamma(t) = (t - 1, 0)$. 但是此时 γ 不能被连续地延拓为一条经过 $t = 1$ 的积分曲线, 这直观上是明显的, 因为 M 在原点处有个洞. 为了证明这一点, 假设 $\tilde{\gamma}$ 是 γ 的连续延拓且经过 $t = 1$, 那么 $t \to 1_+$ 的时候有 $\gamma(t) \to \tilde{\gamma}(1) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. 同时我们可以将 γ 视为值域在 $\mathbb{R}^2$ 中的曲线, 于是 $t \to 1_+$ 时有 $\gamma(t) \to (0, 0)$, 出于极限的唯一性, 必须有 $\tilde{\gamma}(1) = (0, 0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, 这是矛盾的.

出于上述原因, 我们给出下面的定义. 如果 M 是流形, 定义 M 的**流域**指的是一个开集 $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times M$, 其满足任取 $p \in M$, 集合 $\mathcal{D}^{(p)} = \{t \in \mathbb{R} \mid (t, p) \in \mathcal{D}\}$ 是包含 0 的

一个开区间. 定义 M 上的**流**为一个连续映射 $\theta : \mathcal{D} \to M$, 其中 $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times M$ 是流域, 这个映射满足: 对于任意 $p \in M$,

$$\theta(0, p) = p,$$

对于 $s \in \mathcal{D}^{(p)}$ 和 $t \in \mathcal{D}^{(\theta(s,p))}$, 如果 $s + t \in \mathcal{D}^{(p)}$, 那么

$$\theta\big(t, \theta(s, p)\big) = \theta(t + s, p).$$

有时我们将 θ 称为**局部流**来和全局流区分.

如果 θ 是流, 只要 $(t, p) \in \mathcal{D}$, 我们定义 $\theta_t(p) = \theta^{(p)}(t) = \theta(t, p)$, 这与全局流一致. 对于每个 $t \in \mathbb{R}$, 我们还定义

$$M_t = \{p \in M \mid (t, p) \in \mathcal{D}\},$$

所以

$$p \in M_t \Leftrightarrow (t, p) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow t \in \mathcal{D}^{(p)}.$$

如果 θ 是光滑的, 定义 θ 的**无穷小生成元** V 为 $V_p = \theta^{(p)\prime}(0)$.

命题 8.7. **如果 $\theta : \mathcal{D} \to M$ 是光滑流, 那么无穷小生成元 V 是光滑向量场, 并且每条曲线 $\theta^{(p)}$ 都是 V 的积分曲线.**

Proof. 与 命题 8.5 的证明基本类似. 在说明 V 是光滑向量场的时候, 只需要注意到对于任意 $p_0 \in M$, 有 $(0, p_0) \in \mathcal{D}$. 又因为 $\mathcal{D}$ 是开集, 所以存在 $(0, p_0)$ 处的邻域使得这个邻域中的所有 $(t, p) \in \mathcal{D}$, 此时重复 命题 8.5 的证明即可得到 V 是光滑向量场. 在证明 $\theta^{(p)}$ 是 V 的积分曲线的时候, 只需要说明 命题 8.5 的证明中的式子有意义即可. 假设 $t_0 \in \mathcal{D}^{(p)}$. 因为 $\mathcal{D}^{(p)}$ 和 $\mathcal{D}^{(\theta_{t_0}(p))}$ 是包含 0 的开区间, 所以存在正数 ε 使得 $|t| < \varepsilon$ 的时候有 $t + t_0 \in \mathcal{D}^{(p)}$ 以及 $t \in \mathcal{D}^{(\theta_{t_0}(p))}$, 那么根据局部流的定义, 有 $\theta(t + t_0, p) = \theta(t, \theta(t_0, p))$, 这便保证我们可以重复 命题 8.5 的证明. □

下面的定理是本节的主要结果. **极大积分曲线**指的是不能延拓到任意更大开区间的一条积分曲线, **极大流**指的是不能延拓到任意更大流域的流.

定理 8.8 (流的基本定理). **令 V 是光滑流形 M 上的光滑向量场, 那么存在唯一的光滑极大流 $\theta : \mathcal{D} \to M$ 使得其无穷小生成元为 V, 此外, 这个流有下面的性质:**

1. **对于每个 $p \in M$, 曲线 $\theta^{(p)} : \mathcal{D}^{(p)} \to M$ 是 V 的唯一的以 p 为起点的极大积分曲线.**
2. **如果 $s \in \mathcal{D}^{(p)}$, 那么 $\mathcal{D}^{(\theta(s,p))}$ 是区间 $\mathcal{D}^{(p)} - s = \{t - s \mid t \in \mathcal{D}^{(p)}\}$.**
3. **对于每个 $t \in \mathbb{R}$, M_t 是 M 的开集, 并且 $\theta_t : M_t \to M_{-t}$ 是微分同胚, 其逆为 θ_{-t}.**

上述基本定理中断言的存在且唯一的流称为 V **生成的流**, 或者简称为 V **的流**.

命题 8.9 (流的自然性). **设 M, N 是光滑流形, $F : M \to N$ 是光滑映射, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$. 令 θ 是 X 的流, η 是 Y 的流. 如果 X 和 Y 是 F-相关的, 那么对于每个**

$t \in \mathbb{R}$，$F(M_t) \subseteq N_t$ 并且 $\eta_t \circ F = F \circ \theta_t$：

$$\begin{array}{ccc} M_t & \xrightarrow{F} & N_t \\ {\scriptstyle\theta_t}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\eta_t} \\ M_{-t} & \xrightarrow{F} & N_{-t} \end{array}$$

Proof. 根据 命题 8.4, 对于任意 $p \in M$, 曲线 $F \circ \theta^{(p)}$ 是 Y 的以 $F(p)$ 为起点的积分曲线, 根据积分曲线的唯一性, 极大积分曲线 $\eta^{(F(p))}$ 至少定义在区间 $\mathcal{D}^{(p)}$ 上并且在这个区间上有 $F \circ \theta^{(p)} = \eta^{(F(p))}$. 这意味着

$$p \in M_t \Rightarrow t \in \mathcal{D}^{(p)} \Rightarrow t \in \mathcal{D}^{(F(p))} \Rightarrow F(p) \in N_t,$$

所以 $F(M_t) \subseteq N_t$. 并且在 $t \in \mathcal{D}^{(p)}$ 时, 有 $F\left(\theta^{(p)}(t)\right) = \eta^{(F(p))}(t)$, 这等价于 $\eta_t(F(p)) = F(\theta_t(p))$. □

推论 8.10 (流的微分同胚不变性). 令 $F : M \to N$ 是微分同胚，如果 $X \in \mathfrak{X}(M)$ 以及 θ 是 X 的流，那么 $F_* X$ 的流为任取 $t \in \mathbb{R}$，$\eta_t = F \circ \theta_t \circ F^{-1}$，流域满足 $N_t = F(M_t)$.

8.2.2 完备向量场

我们已经注意到不是所有的光滑向量场都生成一个全局流, 能够生成全局流的光滑向量场足够重要, 所以我们给它们一个名字. 我们称一个光滑向量场是**完备的**当且仅当其能够生成一个全局流, 或者等价地说, 它的极大积分曲线对所有的 $t \in \mathbb{R}$ 都有定义. 我们将表明所有的紧支向量场是完备的, 因此紧流形上的所有光滑向量场都是完备的.

引理 8.11 (一致时间引理). 令 V 是光滑流形 M 上的光滑向量场，θ 是 V 的流. 假设存在正数 ε 使得对于每个 $p \in M$，$\theta^{(p)}$ 的定义域包含 $(-\varepsilon, \varepsilon)$，那么 V 是完备的.

Proof. 假设这样的 V 不是完备的, 即存在 $p \in M$ 使得 $\theta^{(p)}$ 的定义域 $\mathcal{D}^{(p)}$ 是有上界或者有下界的, 不妨设开集 $\mathcal{D}^{(p)}$ 有上界. 令 $b = \sup \mathcal{D}^{(p)}$, 那么对于正数 ε, 存在 t_0 使得 $b - \varepsilon < t_0 < b$ 且 $t_0 \in \mathcal{D}^{(p)}$. 令 $q = \theta^{(p)}(t_0)$. 根据假设, $\theta^{(q)}$ 的定义域包含 $(-\varepsilon, \varepsilon)$. 令 $\gamma : (-\varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to M$ 为

$$\gamma(t) = \begin{cases} \theta^{(p)}(t) & -\varepsilon < t < b, \\ \theta^{(q)}(t - t_0) & t_0 - \varepsilon < t < t + \varepsilon. \end{cases}$$

首先, 在两个定义重合的时候, 即 $t_0 - \varepsilon < t < b$ 的时候, 有 $t \in \mathcal{D}^{(p)}$, 所以 $\theta^{(q)}(t - t_0) = \theta(t - t_0, \theta(t_0, p)) = \theta^{(p)}(t)$, 所以 γ 是良定义的. 再根据平移引理, 所以 γ 是以 p 为起点的一条积分曲线, 但是 $t_0 + \varepsilon > b$, 这与 $\theta^{(p)}$ 的极大性矛盾. □

定理 8.12. 光滑流形上的紧支光滑向量场是完备的.

Proof. 假设 V 光滑流形 M 上的光滑紧支向量场, $K = \operatorname{supp} V$. 对于每个 $p \in K$, 都存在一个邻域 U_p 和正数 ε_p 使得 V 的流至少定义在 $(-\varepsilon_p, \varepsilon_p) \times U_p$ 上. 根据 K 的紧性, 存在有限多个 $U_{p_1}, \ldots, U_{p_k}$ 覆盖 K. 令 $\varepsilon = \min\{\varepsilon_{p_1}, \ldots, \varepsilon_{p_k}\}$, 这表明以 K 中点为起点的每条极大积分曲线至少定义在 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 上. 因为在 $M \setminus K$ 上 V 恒为零, 所以以 $M \setminus K$ 中点为起点的每条极大积分曲线都可以定义在 $\mathbb{R}$ 上. 于是 V 满足一致时间引理, 所以是完备向量场. □

推论 8.13. 紧流形上的光滑向量场是完备的.

李群上的左不变向量场构成了另一类重要的完备向量场.

定理 8.14. 李群上的左不变向量场是完备的.

Proof. 令 G 是李群, $X \in \operatorname{Lie}(G)$, $\theta : \mathcal{D} \to G$ 是 X 的流. 那么存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $\theta^{(e)}$ 在 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 上有定义.

任取 $g \in G$, 那么 X 与自身是 L_g-相关的, 根据积分曲线的自然性, 所以 $L_g \circ \theta^{(e)}$ 是 X 的以 g 为起点的积分曲线, 故 $\theta^{(g)}$ 在 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 上有定义, 再根据一致时间引理, 所以 X 是完备的. □

引理 8.15 (逃脱引理). 设 M 是光滑流形并且 $V \in \mathfrak{X}(M)$. 如果 $\gamma : J \to M$ 是 V 的一条极大积分曲线并且定义域 J 有有限的上确界 b, 那么对于任意 $t_0 \in J$, $\gamma\big([t_0, b)\big)$ 不被 M 的任意紧子集包含.

Proof. 设某个 $t_0 \in J$ 使得 $\gamma\big([t_0, b)\big)$ 被某个紧子集 K 包含. 取 $[t_0, b)$ 中的一个点列 $\{t_n\}$ 使得 $t_n \to b$, 那么此时存在 $p \in K$ 使得 $\gamma(t_n) \to p$. 设 $\theta : \mathcal{D} \to M$ 是 V 的流, $\varepsilon > 0$ 和 p 处的邻域 U 使得 $(-\varepsilon, \varepsilon) \times U \subseteq \mathcal{D}$. 于是存在足够大的 n 使得 $b - \varepsilon < t_n < b$ 并且 $\gamma(t_n) \in U$, 定义 $\tilde{\gamma} : J \cup (t_n - \varepsilon, t_n + \varepsilon) \to M$, 为

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma(t) & t \in J, \\ \theta^{(\gamma(t_n))}(t - t_n) & t_n - \varepsilon < t < t_n + \varepsilon, \end{cases}$$

注意我们有 $\theta^{(\gamma(0))} = \gamma$. 此时 $\tilde{\gamma}$ 也是 V 的积分曲线且比 γ 的定义域更大, 矛盾. □

8.3 流出

下面的定理描述了流在某些子流形附近的行为.

定理 8.16 (流出定理). 设 M 是光滑流形, $S \subseteq M$ 是 k-维嵌入子流形, $V \in \mathfrak{X}(M)$ 是与 S 处处不相切的光滑向量场. 令 $\theta : \mathcal{D} \to M$ 是 V 的流, $\mathcal{O} = (\mathbb{R} \times S) \cap \mathcal{D}$, $\Phi = \theta|_{\mathcal{O}}$.

1. $\Phi : \mathcal{O} \to M$ 是光滑浸入.
2. $\partial/\partial t \in \mathfrak{X}(\mathcal{O})$ 和 V 是 Φ-相关的.
3. 存在一个光滑正值函数 $\delta : S \to \mathbb{R}$ 使得 Φ 在 $\mathcal{O}_\delta$ 上的限制是单射, 其中 $\mathcal{O}_\delta \subseteq \mathcal{O}$ 是流域

$$\mathcal{O}_\delta = \big\{(t, p) \in \mathcal{O} \,\big|\, |t| < \delta(p)\big\}. \tag{8.2}$$

因此，$\Phi(\mathcal{O}_\delta)$ 是 M 的包含 S 的浸入子流形，并且 V 与这个子流形相切.

4. 如果 S 有余维数 1，那么 $\Phi|_{\mathcal{O}_\delta}$ 是到 M 的一个开子流形的微分同胚.

注释 8.17. 子流形 $\Phi(\mathcal{O}_\delta) \subseteq M$ 被称为 S **沿** V **的流出.**

Proof. 首先我们证明 (2). 固定 $p \in S$, 令 $\sigma : \mathcal{D}^{(p)} \to \mathbb{R} \times S$ 是曲线 $\sigma(t) = (t, p)$, 那么 $\Phi \circ \sigma(t) = \theta(t, p)$ 是 V 的积分曲线, 所以对于任意 $t_0 \in \mathcal{D}^{(p)}$ 有

$$d\Phi_{(t_0,p)}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{(t_0,p)}\right) = (\Phi \circ \sigma)'(t_0) = V_{\Phi(t_0,p)}.$$

然后我们证明 (1). □

8.3.1 奇异点和正则点

如果 V 是 M 上的向量场, 点 $p \in M$ 使得 $V_p = 0$, 那么 p 被称为 V 的**奇异点**, 否则被称为**正则点**. 下面的命题表明由正则点和奇异点出发的积分曲线的行为是不同的.

命题 8.18. 令 V 是光滑流形 M 上的光滑向量场，$\theta : \mathcal{D} \to M$ 是 V 生成的流. 如果 $p \in M$ 是 V 的奇异点，那么 $\mathcal{D}^{(p)} = \mathbb{R}$ 并且 $\theta^{(p)}$ 是常值曲线 $\theta^{(p)} \equiv p$. 如果 p 是正则点，那么 $\theta^{(p)} : \mathcal{D}^{(p)} \to M$ 是光滑浸入.

Proof. 如果 $V_p = 0$, 那么 $\gamma(t) \equiv p$ 显然满足 $\gamma'(t) = 0 = V_p = V_{\gamma(t)}$, 所以 γ 是 V 的以 p 为起点的极大积分曲线, 根据极大性和唯一性, 所以 $\theta^{(p)} = \gamma$.

对于第二点, 我们证明其逆否命题: 若 $\theta^{(p)}$ 不是光滑浸入, 那么 p 是奇异点. $\theta^{(p)}$ 不是光滑浸入意味着存在 $s \in \mathcal{D}^{(p)}$ 使得 $\left(\theta^{(p)}\right)'(s) = 0$. 记 $q = \theta^{(p)}(s)$, 那么 $V_q = 0$, 根据第一点, 我们有 $\mathcal{D}^{(q)} = \mathbb{R}$ 并且 $\theta^{(q)}(t) \equiv q$. 由于 $\mathcal{D}^{(q)} = \mathcal{D}^{(p)} - s$, 所以 $\mathcal{D}^{(p)} = \mathbb{R}$, 并且对于任意 $t \in \mathbb{R}$, 有

$$\theta^{(p)}(t) = \theta(t - s, q) = q,$$

令 $t = 0$ 即得 $p = q$, 即 p 是奇异点. □

如果 $\theta : \mathcal{D} \to M$ 是流, 点 $p \in M$ 满足对于任意 $t \in \mathcal{D}^{(p)}$ 有 $\theta(t, p) = p$, 那么称 p 是 θ 的**平衡点**. 命题 8.18 表明光滑流的平衡点恰好是其无穷小生成元的奇异点.

下面的定理完全描述了在微分同胚意义下, 向量场在正则点附近的形态.

定理 8.19 (正则点附近的典范形式). 令 V 是光滑流形 M 上的光滑向量场，$p \in M$ 是 V 的正则点. 那么存在 p 的某个邻域上的光滑坐标 (s^i) 使得 V 有坐标表示 $\partial/\partial s^1$. 如果 $S \subseteq M$ 是任意嵌入超曲面且 $p \in S$ 时 $V_p \notin T_pS$，那么这个坐标可以选取为让 s^1 是 S 的局部定义函数.

Proof. 如果没有给定超曲面 S, 那么任取以 p 为中心的光滑坐标卡 $(U, (x^i))$, 我们令 $S \subseteq U$ 是 $x^j = 0$ 定义的超曲面, 其中 j 使得 $V^j(p) \neq 0$.（由于 p 是正则点, 这样的 j 总是存在）

无论 S 是事先给定的还是按照上述方法构造的, 因为 $V_p \notin T_pS$, 所以可以适当缩小 S 适当 V 与 S 处处不相切. 流出定理表明存在一个流域 $\mathcal{O}_\delta \subseteq \mathbb{R}\times S$ 使得 V 的流可以限制为从 $\mathcal{O}_\delta$ 到包含 S 的一个开集 $W \subseteq M$ 的微分同胚 Φ. 存在 $(0,p) \in \mathcal{O}_\delta$ 的一个积邻域 $(-\varepsilon,\varepsilon)\times W_0$. 选取一个光滑局部参数化 $X:\Omega\to S$, 其像集包含 W_0, Ω 是 $\mathbb{R}^{n-1}$ 的开子集, Ω 上的坐标记为 $(s^2,\dots,s^n)$. 定义映射 $\Psi:(-\varepsilon,\varepsilon)\times\Omega\to M$ 为

$$\Psi(t,s^2,\dots,s^n)=\Phi(t,X(s^2,\dots,s^n)),$$

那么 Ψ 是到 $p\in M$ 的某个邻域上的微分同胚. 此时 $(t,s^2,\dots,s^n)\mapsto(t,X(s^2,\dots,s^n))$ 把 $\partial/\partial t$ 推前到自身并且 $\Phi_*(\partial/\partial t)=V$, 所以 $\Psi_*(\partial/\partial t)=V$. 所以 Ψ^{-1} 就是一个光滑坐标卡使得 V 有坐标表示 $\partial/\partial t$. □

典范形式定理的证明实际上告诉了我们如何寻找使得向量场 V 具有典范形式的坐标: 从一个超曲面 S 开始, V 与 S 处处不相切, 局部参数化 $X:\Omega\to S$, 构造复合映射 $\Psi(t,s)=\theta_t(X(s))$, 那么 Ψ^{-1} 便是需要寻找的坐标.

例 8.20. 令 $W=x\,\partial/\partial y-y\,\partial/\partial x$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的光滑向量场, W 的流 $\theta:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 为

$$\theta(t,(x,y))=(x\cos t-y\sin t,x\sin t+y\cos t).$$

点 $(1,0)$ 是 W 的正则点. 由于 $W_{(1,0)}=\partial/\partial y$, 所以选取超曲面 S 为 x-轴. 令 $X(s)=(s,0)$ 是 S 的参数化, 那么定义 $\Psi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 为

$$\Psi(t,s)=\theta_t(s,0)=(s\cos t,s\sin t),$$

在 $(1,0)$ 的某个邻域上可以得到逆映射

$$(t,s)=\Psi^{-1}(x,y)=\left(\arctan y/x,\sqrt{x^2+y^2}\right),$$

不难验证在这个坐标下有 $W=\partial/\partial t$.

8.4 李导数

我们已经知道如何理解流形上实值函数的方向导数. 对于一个切向量 $v\in T_pM$, 其可以作用在一个光滑函数 f 上得到一个数 vf, 这个数我们便可以解释为 f 在 p 处的一个方向导数. 在第三章中我们已经看到这个数可以解释为 f 沿着任意初速度为 v 的曲线的导数.

如何定义向量场的方向导数? 在 Euclid 空间中, 对于一个光滑向量场 W 在向量 $v\in T_p\mathbb{R}^n$ 方向上的导数是可以直接定义的, 即

$$D_vW(p)=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}W_{p+tv}=\lim_{t\to0}\frac{W_{p+tv}-W_p}{t}.$$

简单的计算表明 $D_vW(p)$ 可以用分量计算为

$$D_vW(p)=D_vW^i(p)\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p.$$

不幸的是, 上述定义严重依赖于 $\mathbb{R}^n$ 是一个向量空间, 所以切向量 W_{p+tv} 和 W_p 可以都视为 $\mathbb{R}^n$ 中的元素. 而对于一般的流形, 减法 $W_{p+tv} - W_p$ 是没有意义的. 为了处理这个问题, 首先, 我们可以把 $p + tv$ 替换为以 p 为起点、初速度为 v 的曲线 γ. 但是此时减法依然没有意义, 因为 $W_{\gamma(t)} \in T_{\gamma(t)}M, W_{\gamma(0)} \in T_{\gamma(0)}M$ 是两个不同的切空间的元素. 在 Euclid 空间中不同切空间的元素恰好可以彼此等同, 但是在流形上, 无法以独立于坐标的方式理解这样的方向导数.

如果我们把向量 $v \in T_pM$ 替换为一个向量场 $V \in \mathfrak{X}(M)$, 这个问题则可以被解决. 我们给出下面的定义. 设 M 是光滑流形, V 是光滑向量场, θ 是 V 的流. 对于任意光滑向量场 W, 定义 M 上的向量场 $\mathcal{L}_V W$ 为

$$(\mathcal{L}_V W)_p = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}\big(W_{\theta_t(p)}\big) = \lim_{t\to 0} \frac{d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}\big(W_{\theta_t(p)}\big) - W_p}{t},$$

$\mathcal{L}_V W$ 被称为 W 相对于 V 的**李导数**. 对于足够小的 t, 上述减法总是有意义: 因为 $\theta^{(p)}$ 定义在 0 的某个开区间上, 所以 $d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}\big(W_{\theta_t(p)}\big)$ 和 W_p 都是 T_pM 中的向量. 此外, 不难发现, 上述定义即利用 θ_{-t} 的推前, 因为

$$\big((\theta_{-t})_* W\big)_p = d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}(W_{\theta_t(p)}).$$

引理 8.21. 设 M 是带边或者无边光滑流形, $V, W \in \mathfrak{X}(M)$. 如果 $\partial M \neq \emptyset$, 还要假设 V 与 ∂M 相切. 那么对于每个 $p \in M$, $(\mathcal{L}_V W)_p$ 存在且 $\mathcal{L}_V W$ 是光滑向量场.

Proof. 令 θ 是 V 的流, 对于任意 $p \in M$, 令 $(U, (x^i))$ 是包含 p 的坐标卡. 选取包含 0 的一段开区间 J_0 和开集 $U_0 \subseteq U$ 使得 θ 是 $J_0 \times U_0$ 到 U 的映射. 对于 $(t, x) \in J_0 \times U_0$, 记 θ 的分量函数为 $\big(\theta^1(t,x), \dots, \theta^n(t,x)\big)$. 那么对于任意 $(t,x) \in J_0 \times U_0$, 映射 $d(\theta_{-t})_{\theta_t(x)} : T_{\theta_t(x)}M \to T_xM$ 的表示矩阵为

$$\left(\frac{\partial \theta^i}{\partial x^j}(-t, \theta(t,x))\right).$$

因此

$$d(\theta_{-t})_{\theta_t(x)}\big(W_{\theta_t(x)}\big) = \frac{\partial \theta^i}{\partial x^j}(-t, \theta(t,x)) W^j(\theta(t,x)) \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_x,$$

这表明 $(\mathcal{L}_V W)_x$ 是光滑依赖于 x 的. □

$\mathcal{L}_V W$ 的定义在计算中并没有很大的作用, 因为向量场的流通常难以计算或者明确写出. 幸运的是有一个简单的公式可以计算李导数而不用找出流.

定理 8.22. 如果 M 是光滑流形, $V, W \in \mathfrak{X}(M)$, 那么 $\mathcal{L}_V W = [V, W]$.

Proof. 假设 $V, W \in \mathfrak{X}(M)$, 令 $\mathcal{R}(V) \subseteq M$ 是 V 的正则点的集合 (使得 $V_p \neq 0$ 的 $p \in M$ 的集合). 根据 V 的连续性, 注意到 $\mathcal{R}(V)$ 是 M 的开子集, 且 $\mathcal{R}(V)$ 的闭包是 V 的支集. 我们将 $p \in M$ 分三种情况证明 $(\mathcal{L}_V W)_p = [V, W]_p$.

CASE 1：$p \in \mathcal{R}(V)$. 在这种情况下，我们选取 p 的邻域上的一个光滑坐标 (u^i) 使得 V 有坐标表示 $V = \partial/\partial u^1$. 在这个坐标中，$V$ 的流是 $\theta_t(u) = \left(u^1 + t, u^2, \ldots, u^n\right)$. 对于每个 t，θ_{-t} 在每个 $\theta_t(x)$ 处的 Jacobi 矩阵是单位阵. 因此，对于 $u \in U$，有

$$\begin{aligned} d(\theta_{-t})_{\theta_t(u)}(W_{\theta_t(u)}) &= d(\theta_{-t})_{\theta_t(u)}\left(W^i\left(u^1 + t, u^2, \ldots, u^n\right)\frac{\partial}{\partial u^i}\bigg|_{\theta_t(u)}\right) \\ &= W^i\left(u^1 + t, u^2, \ldots, u^n\right)\frac{\partial}{\partial u^i}\bigg|_u . \end{aligned}$$

根据李导数的定义，我们得到

$$(\mathcal{L}_V W)_u = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} d(\theta_{-t})_{\theta_t(u)}(W_{\theta_t(u)}) = \frac{\partial W^i}{\partial u^1}\left(u^1, \ldots, u^n\right)\frac{\partial}{\partial u^i}\bigg|_u ,$$

这与 命题 7.15 的坐标表示一致，所以 $(\mathcal{L}_V W)_u = [V, W]_u$.

CASE 2：$p \in \operatorname{supp} V$. 因为 $\operatorname{supp} V$ 是 $\mathcal{R}(V)$ 的闭包，那么根据连续性即可得到 $p \in \operatorname{supp} V$ 的时候有 $(\mathcal{L}_V W)_p = [V, W]_p$.

CASE 3：$p \in M \smallsetminus \operatorname{supp} V$. 此时 V 在 p 的某个邻域上恒为零. 这表明任意 θ_t 在 p 的这个邻域上是单位映射，故 $d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}(W_{\theta_t(p)}) = W_p$，即 $(\mathcal{L}_V W)_p = 0$. 另一方面，根据 命题 7.15，也有 $[V, W]_p = 0$. □

定理 8.22 给出了两个向量场的李括号的几何解释：第二个向量场沿着第一个向量场的方向导数. 由李括号的性质，我们还可以立即得到一些李导数的不明显的性质.

推论 8.23. 设 M 是带边或者无边光滑流形，$V, M, X \in \mathfrak{X}(M)$.

1. $\mathcal{L}_V W = -\mathcal{L}_W V$.
2. $\mathcal{L}_V[W, X] = [\mathcal{L}_V W, X] + [W, \mathcal{L}_V X]$.
3. $\mathcal{L}_{[V,W]} X = \mathcal{L}_V \mathcal{L}_W X - \mathcal{L}_W \mathcal{L}_V X$.
4. 如果 $g \in C^\infty(M)$，那么 $\mathcal{L}_V(gW) = (Vg)W + g\mathcal{L}_V W$.
5. 如果 $F : M \to N$ 是微分同胚，那么 $F_*(\mathcal{L}_V X) = \mathcal{L}_{F_* V} F_* X$.

命题 8.24. 设 M 是带边或者无边光滑流形，$V, W \in \mathfrak{X}(M)$. 如果 $\partial M \neq \emptyset$，那么还要假设 V 与 ∂M 相切. 令 θ 是 V 的流. 对于 θ 定义域中的任意 (t_0, p)，有

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=t_0} d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}(W_{\theta_t(p)}) = d(\theta_{-t_0})\left((\mathcal{L}_V W)_{\theta_{t_0} p}\right). \tag{8.3}$$

Proof. 任取 $p \in M$，$\mathcal{D}$ 是 θ 的流域，定义映射 $X : \mathcal{D}^{(p)} \to T_p M$ 为 $X(t) = d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}(W_{\theta_t(p)})$，引理 8.21 的证明表明 X 是光滑的. 我们有

$$\begin{aligned} X'(t_0) &= \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} X(t_0 + s) = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} d(\theta_{-t_0-s})_{\theta_{t_0+s}(p)}\left(W_{\theta_{t_0+s}(p)}\right) \\ &= \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} d(\theta_{-t_0})_{\theta_{t_0}(p)} \circ d(\theta_{-s})_{\theta_s(\theta_{t_0}(p))}\left(W_{\theta_s(\theta_{t_0}(p))}\right) \\ &= d(\theta_{-t_0})_{\theta_{t_0}(p)}\left((\mathcal{L}_V W)_{\theta_{t_0}(p)}\right), \end{aligned}$$

最后一个等号是因为 $d(\theta_{-t_0})$ 是与 s 无关的线性映射. □

8.5 可交换的向量场

令 M 是光滑流形, $V, W \in \mathfrak{X}(M)$. 如果对于任意光滑函数 f, 有 $VWf = WVf$, 那么我们说 V 和 W 是**可交换的**. 等价地说, V, W 可交换当且仅当 $[V, W] \equiv 0$. 如果 θ 是一个光滑流, 如果向量场 W 在任意 t 处与自身都是 θ_t-相关的, 那么我们说 W 在 θ 下是**不变的**. 等价地说, $W|_{M_t}$ 与 $W|_{M_{-t}}$ 是 θ_t-相关的, 或者对于任意 θ 定义域中的 (t, p), 有 $(\theta_t)_*(W)|_{\theta_t(p)} = d(\theta_t)_p(W_p) = W_{\theta_t(p)}$. 下面的命题表明这两个概念有密切的相关性.

定理 8.25. 对于光滑流形 M 上的光滑向量场 V, W，下面的说法等价.

1. V 和 W 是可交换的.
2. W 在 V 的流下不变.
3. V 在 W 的流下不变.

Proof. 假设 $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ 以及 θ 是 V 的流. 若 W 在 θ 下不变, 那么对于任意 $p \in M$, $(-t, \theta_t(p))$ 在 θ 的定义域中, 所以

$$d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}\big(W_{\theta_t(p)}\big) = W_p,$$

所以李导数 $(\mathcal{L}_V W)_p = 0$, 即 $[V, W]_p = 0$. 对于 V 在 W 的流下不变的情况同理.

若 $[V, W] \equiv 0$, 那么 $\mathcal{L}_V W = 0$. 任取 $p \in M$, 对于 $t \in \mathcal{D}^{(p)}$, 令 $X(t) = d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}\big(W_{\theta_t(p)}\big)$, 命题 8.24 表明 $X'(t) \equiv 0$, 所以 $X(t) = X(0) = W_p$. 于是 $d(\theta_t)_p(W_p) = d(\theta_t)_p \circ X(t) = W_{\theta_t(p)}$, 即 W 在 V 的流下不变. 对于 V 在 W 的流下不变的情况同理. □

推论 8.26. 每个光滑向量场在其自身的流下是不变的.

下面的定理表明两个向量场交换当且仅当它们的流交换. 在阐述这个定理之前, 我们需要明确这个概念. 假设 V 和 W 是 M 上的光滑向量场, θ 和 ψ 分别是它们的流. 如果 V 和 W 是完备的, 显然它们的流可交换应该意味着: 对于所有的 $s, t \in \mathbb{R}$ 有 $\theta_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \theta_t$. 但是, 如果 V, W 有一个不完备, 我们至多只能要求上述式子在有定义的时候成立. 不幸的是, 即使两个向量场可交换, 它们的流也不一定在这个显然的意义下可交换, 也就是说存在可交换的向量场 V 和 W 以及合适的 t, s, p 使得 $\theta_t \circ \psi_s(p)$ 和 $\psi_s \circ \theta_t(p)$ 都有定义但是并不相等. 问题在于: 如果 $\theta_t \circ \psi_s(p)$ 在 $t = t_0$ 和 $s = s_0$ 处有定义, 那么根据流域的性质, 其一定在包含 0 和 t_0 的开区间上有定义, 但是同样的论证对于 s 不成立, 即可能存在 0 和 s_0 之间的某个 s 使得 V 的以 $\psi_s(p)$ 开始的积分曲线并不能延拓到 $t = t_0$.

因此, 我们给出下面的定义. 设 θ 和 ψ 是 M 上的流, 对于每个 $p \in M$, 假设 J 和 K 是包含 0 的开区间, 每当 J, K 使得表达式 $\theta_t \circ \psi_s(p)$ 和 $\psi_s \circ \theta_t(p)$ 之一在所有的 $(s, t) \in J \times K$ 上有定义的时候, 都会使得二者都有定义且相等, 此时我们说 θ 和 ψ 是**可交换的**.

定理 8.27. 两个光滑向量场可交换当且仅当它们的流可交换.

Proof. 令 V, W 是光滑流形 M 上的光滑向量场, θ, ψ 分别是它们的流. 假设 V 和 W 是可交换的. 任取 $p \in M$, 设 J 和 K 是包含 0 的开区间且使得 $\psi_s \circ \theta_t(p)$ 对于所有的 $(s,t) \in J \times K$ 有定义. 根据定理 8.25, V 在 ψ 下不变. 固定 $s \in J$, 令 $\gamma : K \to M$ 为 $\gamma(t) = \psi_s(\theta_t(p)) = \psi_s \circ \theta^{(p)}(t)$, 那么 $\gamma(0) = \psi_s(p)$, 并且

$$\gamma'(t) = d(\psi_s)_{\theta_t(p)} \circ \left(\theta^{(p)}\right)'(t) = d(\psi_s)_{\theta_t(p)}\left(V_{\theta_t(p)}\right) = V_{\psi_s \circ \theta_t(p)} = V_{\gamma(t)},$$

所以 $\gamma(t)$ 是 V 的以 $\psi_s(p)$ 为起点的积分曲线. 根据积分曲线的唯一性, 所以

$$\gamma(t) = \theta^{(\psi_s(p))}(t) = \theta_t \circ \psi_s(p),$$

即 θ 和 ψ 可交换.

反之, 若 θ 和 ψ 可交换. 任取 $p \in M$. 选取足够小的 $\varepsilon > 0$ 使得 $\psi_s \circ \theta_t(p)$ 在 $|s| < \varepsilon$ 和 $|t| < \varepsilon$ 的时候有定义, 那么 θ 和 ψ 可交换表明 $\psi_s \circ \theta_t(p) = \theta_t \circ \psi_s(p)$, 也即

$$\psi^{(\theta_t(p))}(s) = \theta_t\left(\psi^{(p)}(s)\right),$$

两边对 s 微分, 我们得到

$$W_{\theta_t(p)} = \left(\theta_t \circ \psi^{(p)}\right)'(0) = d(\theta_t)_p\left(W_p\right),$$

也即

$$d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}\left(W_{\theta_t(p)}\right) = W_p,$$

所以 $(\mathcal{L}_V W)_p = 0$, 即 V, W 可交换. □

9

向量丛

9.1 向量丛

令 M 是拓扑空间, **M 上的秩 k 的 (实) 向量丛**指的是一个拓扑空间 E 附带一个连续满射 $\pi : E \to M$, 其满足下面的条件:

1. 对于每个 $p \in M$, p 上的纤维 $E_p = \pi^{-1}(p)$ 有一个 k-维的实向量空间结构.
2. 对于每个 $p \in M$, 都存在 p 的邻域 U 和一个同胚 $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ (这个同胚被称为 **E 在 U 上的局部平凡化**), 并且 Φ 满足:
   - 记 $\pi_U : U \times \mathbb{R}^k \to U$ 是投影, 有 $\pi_U \circ \Phi = \pi$;
   - 对于每个 $q \in U$, $\Phi|_{E_q}$ 都是 E_q 到 $\{q\} \times \mathbb{R}^k$ 的向量空间同构.

如果 M, E 都是光滑流形, π 是光滑映射并且局部平凡化可以选取为微分同胚, 那么 E 被称为**光滑向量丛**. 在这种情况下, 我们将局部平凡化成为**光滑局部平凡化**.

秩 1 的向量丛被称为**线丛**. 空间 E 被称为**丛的全空间**, M 被称为**底空间**, π 被称为**投影**. 为了简洁, 我们通常写作 "E 是 M 上的一个向量丛" 或者 "$E \to M$ 是一个向量丛" 或者 "$\pi : E \to M$ 是一个向量丛".

练习 9.1. 设 E 是 M 上的光滑向量丛, 证明投影 $\pi : E \to M$ 是满射的光滑浸没.

Proof. 根据定义 π 是满射. 任取 $p \in M$, 设 U 是 p 的邻域, $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ 是光滑局部平凡化, 那么 $\pi_U \circ \Phi = \pi$. 由于 π_U 是光滑浸没, Φ 是微分同胚, 所以 π 是光滑浸没. □

如果存在 E 在整个 M 上的局部平凡化 (这被称为 **E 的全局平凡化**), 那么 E 被称为**平凡丛**. 在这种情况下, E 本身同胚于 $M \times \mathbb{R}^k$. 如果 $E \to M$ 是光滑丛并且有一个光滑的全局平凡化, 那么我们说 E 是**光滑平凡丛**, 此时 E 微分同胚于 $M \times \mathbb{R}^k$. 为了简洁起见, 我们说一个光滑丛是平凡的时候, 总是指它在光滑意义上平凡而不是拓扑意义上.

例 9.1 (积丛)**.** 任意空间 M 上的最简单的秩 k 的向量丛是积空间 $E = M \times \mathbb{R}^k$, 投影 $\pi = \pi_1 : M \times \mathbb{R}^k \to M$. 这样的丛被称为**积丛**, 那么恒等映射 Id_E 就是一个全局平凡化, 所以积丛是平凡丛.

例 9.2 (Möbius 丛)**.** 定义 $\mathbb{R}^2$ 上的等价关系为: $(x, y) \sim (x', y')$ 当且仅当存在 $n \in \mathbb{Z}$ 使得 $(x', y') = \big(x + n, (-1)^n y\big)$. 令 $E = \mathbb{R}^2/\sim$ 是商空间, $q : \mathbb{R}^2 \to E$ 是商映射.

为了可视化 E, 令 S 是带子 $[0,1]\times\mathbb{R}\subseteq\mathbb{R}^2$. q 在 S 上的限制是满射且是闭映射, 所以 $q|_S$ 是商映射. 显然 $q|_S$ 造成的非平凡的粘合只会在 S 的边界上出现, 因此我们可以把 E 视为将 S 的右边界上下翻转然后与左边界粘合得到的.

考虑交换图:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E \arrow[d, dashed, "\pi"] \\
\mathbb{R} \arrow[r, "\varepsilon"] & \mathbb{S}^1,
\end{tikzcd}$$

其中 π_1 是第一个分量的投影, $\varepsilon:\mathbb{R}\to\mathbb{S}^1$ 是光滑覆盖映射 $\varepsilon(x)=e^{2\pi ix}$. 因为 $\varepsilon\circ\pi_1$ 在 q 的每个纤维上是常值的, 所以其下降到一个连续映射 $\pi:E\to\mathbb{S}^1$. 直接验证可知 E 有唯一的光滑结构使得 q 是光滑覆盖映射并且 $\pi:E\to\mathbb{S}^1$ 是光滑实线丛, 被称为 **Möbius 丛**.

命题 9.3 (切丛作为向量丛). 令 M 是一个光滑 n-流形, TM 是切丛. 那么 TM 是 M 上的秩 n 的光滑向量丛.

Proof. 记 $\pi:TM\to M$ 是投影映射. 对于每个 $p\in M$, $\pi^{-1}(p)=T_pM$ 是 n 维向量空间. 取 p 处的光滑坐标卡 $(U,(x^i))$, 那么 $\Phi:\pi^{-1}(U)\to U\times\mathbb{R}^n$ 可以定义为

$$\Phi\left(v^i\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_q\right)=\left(q,\left(v^1,\dots,v^n\right)\right),$$

那么 Φ 的坐标表示为恒等映射, 所以是微分同胚. 对于每个 $q\in U$, Φ 限制在 T_qM 上显然都是向量空间同构. 此外容易验证 $\pi_U\circ\Phi=\pi$. □

引理 9.4. 令 $\pi:E\to M$ 是秩 k 的光滑向量丛, 假设 $\Phi:\pi^{-1}(U)\to U\times\mathbb{R}^k$ 和 $\Psi:\pi^{-1}(V)\to V\times\mathbb{R}^k$ 是两个 E 的光滑局部平凡化并且 $U\cap V\neq\emptyset$. 那么存在一个光滑映射 $\tau:U\cap V\to\mathrm{GL}(k,\mathbb{R})$ 使得复合映射 $\Phi\circ\Psi^{-1}:(U\cap V)\times\mathbb{R}^k\to(U\cap V)\times\mathbb{R}^k$ 形如

$$\Phi\circ\Psi^{-1}(p,v)=\big(p,\tau(p)v\big).$$

Proof. 我们有下面的交换图:

$$\begin{tikzcd}
(U\cap V)\times\mathbb{R}^k \arrow[dr, "\pi_1"'] & \pi^{-1}(U\cap V) \arrow[l, "\Psi"'] \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi"] & (U\cap V)\times\mathbb{R}^k \arrow[dl, "\pi_1"] \\
& U\cap V &
\end{tikzcd}$$

其中 Φ,Ψ 都是微分同胚. 那么对于任意的 $(p,v)\in(U\cap V)\times\mathbb{R}^k$, 有

$$p=\pi_1(p,v)=\pi\circ\Psi^{-1}(p,v)=\pi_1\circ(\Phi\circ\Psi^{-1})(p,v),$$

这表明

$$\Phi\circ\Psi^{-1}(p,v)=\big(p,\sigma(p,v)\big),$$

其中 $\sigma:(U\cap V)\times\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$ 是光滑映射. 对于每个固定的 $p\in U\cap V$,

$$\Phi\circ\Psi^{-1}:\{p\}\times\mathbb{R}^k\xrightarrow{\Psi^{-1}}E_p\xrightarrow{\Phi}\{p\}\times\mathbb{R}^k$$

是向量空间 $\{p\}\times\mathbb{R}^k$ 上的可逆线性变换, 所以 $\sigma(p,v)=\tau(p)v$, 其中 $\tau(p)\in\mathrm{GL}(k,\mathbb{R})$. 下面只需要说明 τ 是光滑的. 由于

$$\Phi\circ\Psi^{-1}(p,v)=\big(p,\tau(p)v\big),$$

记 $\pi_2:(U\cap V)\times\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$ 的投影, 那么

$$\tau(p)v=\pi_2\circ\Phi\circ\Psi^{-1}(p,v).$$

记 $e_i\in\mathbb{R}^k$ 是标准基向量, 那么 $p\mapsto\tau(p)e_i$ 作为 $U\cap V\to\mathbb{R}^k$ 的映射是光滑映射, 所以 $p\mapsto\tau(p)$ 是光滑映射. □

上述光滑映射 $\tau:U\cap V\to\mathrm{GL}(k,\mathbb{R})$ 被称为局部平凡化 Φ 和 Ψ 之间的**转移函数**.

引理 9.5 (向量丛坐标卡引理). 令 M 是带边或者无边光滑流形，假设对于每个 $p\in M$ 我们都赋予一个 k 维实向量空间 E_p. 令 $E=\coprod_{p\in M}E_p$，$\pi:E\to M$ 将 E_p 的每个元素送到点 p. 如果我们还有下面的资料：

1. M 的一个开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$；
2. 对于每个 $\alpha\in A$，有双射 $\Phi_\alpha:\pi^{-1}(U_\alpha)\to U_\alpha\times\mathbb{R}^k$，并且 Φ 限制在每个 E_p 上是向量空间 E_p 到 $\{p\}\times\mathbb{R}^k$ 的同构；
3. 对于每个 $\alpha,\beta\in A$ 并且 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$，存在光滑映射 $\tau_{\alpha\beta}:U_\alpha\cap U_\beta\to\mathrm{GL}(k,\mathbb{R})$ 使得映射 $\Phi_\alpha\circ\Phi_\beta^{-1}:(U_\alpha\cap U_\beta)\times\mathbb{R}^k\to(U_\alpha\cap U_\beta)\times\mathbb{R}^k$ 形如

$$\Phi_\alpha\circ\Phi_\beta^{-1}(p,v)=\big(p,\tau_{\alpha\beta}(p)v\big).$$

那么，E 有唯一的拓扑和光滑结构使得其成为 M 上的秩 k 的光滑向量丛，且 π 是投影映射，$\{(U_\alpha,\Phi_\alpha)\}$ 是光滑局部平凡化.

注释 9.6. E 上的拓扑结构为：对于每个 $p\in M$，选取所有满足 $p\in V_p\subseteq U_\alpha$ 的光滑坐标卡 (V_p,φ_p)，令 $\tilde\varphi_p=(\varphi_p\times\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^k})\circ\Phi_\alpha$，那么拓扑基 $\{\tilde\varphi_p^{-1}(W)\}$ (其中 $W\subseteq\varphi_p(V_p)\times\mathbb{R}^k$ 是开集) 生成 E 上的拓扑. E 的光滑结构为：$\{(\pi^{-1}(V_p),\tilde\varphi_p)\}$ 构成 E 的一组光滑坐标卡.

例 9.7 (Whitney 和)**.** 给定光滑流形 M 以及分别有秩 k' 和 k'' 的光滑向量丛 $E'\to M$ 和 $E''\to M$, 我们构造一个新的向量丛, 被称为 E' 和 E'' 的 **Whitney 和**, 其在 $p\in M$ 处的纤维是直和 $E'_p\oplus E''_p$. 全空间定义为 $E'\oplus E''=\coprod_{p\in M}\big(E'_p\oplus E''_p\big)$, 附带显然的投影 $\pi:E'\oplus E''\to M$. 对于每个 $p\in M$, 选择 p 处的足够小的邻域 U 使得存在 E' 的局部平凡化 (U,Φ') 以及 E'' 的局部平凡化 (U,Φ''), 定义 $\Phi:\pi^{-1}(U)\to U\times\mathbb{R}^{k'+k''}$ 为

$$\Phi(v',v'')=\Big(\pi'(v'),\big(\pi_{\mathbb{R}^{k'}}\circ\Phi'(v'),\pi_{\mathbb{R}^{k''}}\circ\Phi''(v'')\big)\Big).$$

假设给定其他的任意两个局部平凡化 $\left(\widetilde{U}, \widetilde{\Phi}'\right)$ 和 $\left(\widetilde{U}, \widetilde{\Phi}''\right)$, 令 $\tau' : U \cap \widetilde{U} \to \mathrm{GL}(k', \mathbb{R})$ 和 $\tau'' : U \cap \widetilde{U} \to \mathrm{GL}(k'', \mathbb{R})$ 是对应的转移函数. 那么 $E' \oplus E''$ 的转移函数满足

$$\widetilde{\Phi} \circ \Phi^{-1}(p, (v', v'')) = \left(p, \left(\tau'(p)v', \tau''(p)v''\right)\right),$$

于是 $\tau(p) = \tau'(p) \oplus \tau''(p)$ 是分块矩阵

$$\begin{pmatrix} \tau'(p) & 0 \\ 0 & \tau''(p) \end{pmatrix}.$$

这就表明 $E' \oplus E''$ 是 M 上的光滑向量丛.

例 9.8 (向量丛的限制)**.** 设 $\pi : E \to M$ 是秩 k 的向量丛, $S \subseteq M$ 是任意子集. 定义 E **到** S **的限制**为 $E|_S = \bigcup_{p \in S} E_p$, 投影 $E|_S \to S$ 就是 π 的限制. 如果 $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ 是局部平凡化, 那么其可以限制为双射 $\Phi|_S : (\pi|_S)^{-1}(U \cap S) \to (U \cap S) \times \mathbb{R}^k$. 如果 E 是光滑向量丛, $S \subseteq M$ 是浸入或者嵌入子流形, 容易验证 $E|_S$ 是光滑向量丛.

9.2 向量丛的局部和全局截面

令 $\pi : E \to M$ 是向量丛, E **的 (全局) 截面**指的是连续映射 $\sigma : M \to E$ 使得 $\pi \circ \sigma = \mathrm{Id}_M$. 这意味着对于每个 $p \in M$, $\sigma(p)$ 是纤维 E_p 的元素.

更一般的, E **的局部截面**指的是一个连续映射 $\sigma : U \to E$, 其中 $U \subseteq M$ 是开集, 使得 $\pi \circ \sigma = \mathrm{Id}_U$. 注意到 E 在 U 上的局部截面就是限制丛 $E|_U$ 上的全局截面. 如果 M 是带边或者无边光滑流形且 E 是光滑向量丛, 我们用光滑截面代指光滑的截面映射.

E **的零截面**指的是一个全局截面 $\zeta : M \to E$, 其定义为

$$\zeta(p) = 0 \in E_p \quad \forall p \in M.$$

与向量场的情况一样, 截面 σ 的**支集**定义为集合 $\{p \in M \mid \sigma(p) \neq 0\}$ 的闭包.

例 9.9 (向量丛的截面)**.** 设 M 是光滑流形.

1. TM 的截面就是 M 上的向量场.
2. 如果 $E = M \times \mathbb{R}^k$ 是积丛, 那么在 E 的截面和 $M \to \mathbb{R}^k$ 的连续映射之间有一个自然的一一对应. 一个连续映射 $F : M \to \mathbb{R}^k$ 决定了截面 $\tilde{F} : M \to E$ 为 $\tilde{F}(p) = (p, F(p))$, 反之依然. 如果 M 是光滑流形, 那么截面 $\tilde{F}$ 光滑当且仅当 F 光滑.

如果 $\pi : E \to M$ 是光滑向量丛, 那么 E 的所有全局截面在逐点加法和数乘下成为一个向量空间, 记为 $\Gamma(E)$. 与向量场类似, 光滑向量丛的截面可以左乘一个光滑实值函数: 如果 $f \in C^\infty(M), \sigma \in \Gamma(E)$, 我们可以定义 $f\sigma$ 为

$$(f\sigma)(p) = f(p)\sigma(p).$$

引理 9.10 (向量丛的延拓引理). 令 $\pi : E \to M$ 是光滑流形 M 上的向量丛，A 是 M 的闭子集，$\sigma : A \to E$ 是 $E|_A$ 的截面，如果对于每个 $p \in A$，都存在 p 的邻域 V 和 V 上的光滑截面与 σ 在 $V \cap A$ 上重合，那么对于包含 A 的任意开子集 $U \subseteq M$，都存在光滑全局截面 $\tilde{\sigma} \in \Gamma(E)$ 使得 $\tilde{\sigma}|_A = \sigma$ 以及 $\operatorname{supp} \tilde{\sigma} \subseteq U$.

9.2.1 局部和全局标架

例 9.11 (积丛的全局标架)**.** 如果 $E = M \times \mathbb{R}^k \to M$ 是积丛，那么 $\mathbb{R}^k$ 的标准基 $(e_1, \ldots, e_k)$ 导出 E 的一个全局标架 $(\tilde{e}_i)$，定义为 $\tilde{e}_i(p) = (p, e_i)$. 如果 M 是带边或者无边光滑流形, 那么这个全局标架是光滑的.

例 9.12 (与局部平凡化相关的局部标架)**.** 设 $\pi : E \to M$ 是光滑向量丛. 如果 $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ 是 E 的光滑局部平凡化, 我们可以使用和上例同样的思想来构造一个 E 在 U 上的局部标架. 定义映射 $\sigma_1, \ldots, \sigma_k : U \to E$ 为 $\sigma_i(p) = \Phi^{-1}(p, e_i) = \Phi^{-1} \circ \tilde{e}_i(p)$. 因为 Φ 是微分同胚, 所以 σ_i 是光滑的. 下面我们说明 $\big(\sigma_i(p)\big)$ 构成 E_p 的一组基即可. 由于 Φ 限制到 E_p 是向量空间同构 $\Phi : E_p \to \{p\} \times \mathbb{R}^k$, 并且 $\Phi(\sigma_i(p)) = (p, e_i)$ 构成 $\{p\} \times \mathbb{R}^k$ 的一组基, 所以 $\big(\sigma_i(p)\big)$ 构成 E_p 的一组基. 我们说局部标架 (σ_i) 是相关于 Φ 的局部标架.

9.3 丛同态

如果 $\pi : E \to M$ 和 $\pi' : E' \to M'$ 是向量丛, 连续映射 $F : E \to E'$ 被称为**丛同态**, 如果存在映射 $f : M \to M'$ 使得 $\pi' \circ F = f \circ \pi$, 即

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{F} & E' \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi'} \\ M & \xrightarrow[f]{} & M' \end{array}$$

此外, 对于每个 $p \in M$, 限制映射 $F|_{E_p} : E_p \to E'_{f(p)}$ 是线性映射. 此时我们还称 F **覆盖** f.

命题 9.13. 设 $\pi : E \to M$ 和 $\pi' : E' \to M'$ 是向量丛，$F : E \to E'$ 是覆盖 $f : M \to M'$ 的丛同态，那么 f 是连续映射并且由 F 唯一确定. 如果丛和 F 都是光滑的，那么 f 也是光滑的.

Proof. 记 $\zeta : M \to E$ 是零截面, 那么 $f = \pi' \circ F \circ \zeta$. □

如果一个双射的丛同态 $F : E \to E'$ 的逆也是丛同态, 那么 F 被称为**丛同构**. 如果 F 还是微分同胚, 那么被称为**光滑丛同构**.

当 E 和 E' 都是同一个底空间 M 上的向量丛的时候, 稍微严格一些的丛同态概念更加有用. **M 上的丛同态**指的是一个覆盖 Id_M 的丛同态, 换句话说, 即一个连续映

射 $F:E\to E'$ 满足 $\pi'\circ F=\pi$,

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\pi"'] & & E' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

并且 F 在每个纤维上的限制是线性映射. 如果存在一个 M 上的丛同态 $F:E\to E'$ 同时是 (光滑) 丛同构, 那么我们说 E 和 E' **在 M 上是 (光滑) 同构的**.

命题 9.14. 设 E,E' 是光滑流形 M 上的光滑向量丛, $F:E\to E'$ 是 M 上的双射光滑丛同态, 那么 F 是光滑丛同构.

Proof. F 是双射表明任取 $p\in M$, $F|_{E_p}:E_p\to E'_{F(p)}$ 是双射的线性映射, 所以 $F|_{E_p}$ 是同构, 所以 $F^{-1}|_{E'_{F(p)}}$ 是同构, 故 F^{-1} 是双射的丛同态, 所以 F 是丛同构. 任取 $p\in M$, 设 Φ 是 E 在 (U,φ) 上的局部平凡化, Φ' 是 E' 在 (V,ψ) 上的局部平凡化, 那么 F 在 $U\cap V$ 中的坐标表示为

$$(x,v)\mapsto(\varphi^{-1}(x),\Phi^{-1}(v))\mapsto\big(\varphi^{-1}(x),F\circ\Phi^{-1}(v)\big)\mapsto\big(\psi\circ\varphi^{-1}(x),\Phi'\circ F\circ\Phi^{-1}(v)\big),$$

注意到 $\Phi'\circ F\circ\Phi^{-1}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ 是双射的线性映射, 所以 F 是微分同胚. □

例 9.15 (丛同态)**.**

1. 如果 $F:M\to N$ 是光滑映射, 那么全局微分 $dF:TM\to TN$ 是覆盖 F 的光滑丛同态.
2. 如果 $E\to M$ 是光滑向量丛, $S\subseteq M$ 是浸入子流形, 那么包含映射 $E|_S\hookrightarrow E$ 是覆盖包含映射 $S\hookrightarrow M$ 的光滑丛同态.

设 $E\to M$ 和 $E'\to M$ 是带边或者无边光滑流形 M 上的光滑向量丛, 令 $\Gamma(E),\Gamma(E')$ 表示它们的光滑全局截面. 如果 $F:E\to E'$ 是光滑丛同态, 那么诱导出一个映射 $\widetilde{F}:\Gamma(E)\to\Gamma(E')$ 为

$$\widetilde{F}(\sigma)(p)=(F\circ\sigma)(p). \tag{9.1}$$

不难验证 $\widetilde{F}(\sigma)$ 是 E' 的一个截面, 并且是光滑截面.

因为丛同态在纤维上是线性映射, 所以上述截面上的映射 $\widetilde{F}$ 在 $\mathbb{R}$ 上是线性的. 实际上它们满足更强的线性性, 即在 $C^\infty(M)$ 上是线性的. 即任取 $f\in C^\infty(M)$, 有

$$\widetilde{F}(f\sigma)(p)=F\big(f(p)\sigma(p)\big)=f(p)F(\sigma(p))=\big(f\widetilde{F}(\sigma)\big)(p),$$

所以这表明 $\widetilde{F}(f\sigma)=f\widetilde{F}(\sigma)$. 实际上, 这个 $C^\infty(M)$-线性性完全刻画了丛同态.

引理 9.16 (丛同态表征引理). 令 $\pi:E\to M$ 和 $\pi':E\to M$ 是带边或者无边光滑流形 M 上的光滑向量丛, 映射 $\mathcal{F}:\Gamma(E)\to\Gamma(E')$ 在 $C^\infty(M)$ 上是线性的当且仅当存在一个光滑丛同态 $F:E\to E'$ 使得对于所有 $\sigma\in\Gamma(E)$ 有 $\mathcal{F}(\sigma)=F\circ\sigma$.

Proof. 我们已经注意到光滑丛同态诱导出的截面之间的映射是 $C^\infty(M)$-线性的. 反过来, 假设 $\mathcal{F}:\Gamma(E)\to\Gamma(E')$ 是 $C^\infty(M)$-线性的. 首先, 我们证明 $\mathcal{F}$ 的作用是局部的: 如果在某个开集 $U\subseteq M$ 上有 $\sigma_1\equiv\sigma_2$, 那么在 U 上有 $\mathcal{F}(\sigma_1)\equiv\mathcal{F}(\sigma_2)$. 记 $\tau=\sigma_1-\sigma_2$, 我们说明 $\mathcal{F}(\tau)$ 在 U 上恒为零即可. 给定 $p\in U$, 设 ψ 是关于 $\{p\}$ 的支在 U 中的光滑鼓包函数, 那么 $\psi\tau$ 在 M 上恒为零. 根据 $\mathcal{F}$ 的 $C^\infty(M)$-线性性, 有 $0=\mathcal{F}(\psi\tau)=\psi\mathcal{F}(\tau)$, 所以

$$\mathcal{F}(\tau)(p)=\psi(p)\mathcal{F}(\sigma)(p)=0.$$

这就表明 $\mathcal{F}(\tau)$ 在每个 $p\in U$ 处的取值都是零.

下面我们进一步说明 $\mathcal{F}$ 的作用实际上是逐点的: 如果 $\sigma_1(p)=\sigma_2(p)$, 那么 $\mathcal{F}(\sigma_1)(p)=\mathcal{F}(\sigma_2)(p)$. 同样, 我们只需要假设 $\tau(p)=0$ 时有 $\mathcal{F}(\tau)(p)=0$. 令 $(\sigma_1,\dots,\sigma_k)$ 是 E 在 p 的某个邻域 U 中的局部标架, 设 $\tau=u^i\sigma_i$, 其中 $u^i\in C^\infty(U)$. 那么 $\tau(p)=0$ 表明 $u^1(p)=\cdots=u^k(p)=0$. 根据向量丛和函数的延拓引理, 存在光滑全局截面 $\tilde{\sigma}_i\in\Gamma(E)$ 使得其与 σ_i 在 p 的某个邻域上相等, 以及存在光滑函数 $\tilde{u}^i\in C^\infty(M)$ 使得其与 u^i 在 p 的某个邻域上相等.那么在 p 的某个邻域上有 $\tau=\tilde{u}^i\tilde{\sigma}_i$, 所以

$$\mathcal{F}(\tau)(p)=\tilde{u}^i(p)\mathcal{F}(\tilde{\sigma}_i)(p)=0.$$

下面定义丛同态 $F:E\to E'$. 对于任意 $p\in M$ 和 $v\in E_p$, 设 $\tilde{v}$ 是 E 的满足 $\tilde{v}(p)=v$ 的全局光滑截面, 令 $F(v)=\mathcal{F}(\tilde{v})(p)\in E'_p$. 前面的讨论表明这个定义和截面 $\tilde{v}$ 的选取无关. 显然 F 满足 $\pi'\circ F=\pi$. 根据 $\mathcal{F}$ 的线性性, F 在每个纤维上也是线性的. 并且根据定义, 对于任意 $\sigma\in\Gamma(E)$ 有 $\mathcal{F}(\sigma)=F\circ\sigma$. 下面只需要说明 F 是光滑的, 这只需要说明它在每个点的某个邻域中光滑.

给定 $p\in M$, 令 (σ_i) 是 E 在 p 的某个邻域上的局部标架. 根据延拓引理, 存在全局截面 $\tilde{\sigma}_i$ 使得其与 σ_i 在 p 的某个(更小的)邻域 U 上相等. 充分缩小 U, 我们可以假设存在 E' 在 U 上的一个光滑局部标架 (σ'_j). 因为 $\mathcal{F}$ 把 E 的光滑全局截面映射到 E' 的光滑全局截面, 所以存在光滑函数 $A_i^j\in C^\infty(U)$ 使得 $\mathcal{F}(\tilde{\sigma}_i)|_U=A_i^j\sigma'_j$.

对于任意 $q\in U$ 和 $v\in E_q$, 设 $v=v^i\sigma_i(q)$, 其中 $(v^1,\dots,v^k)$ 是实数, 那么

$$F\big(v^i\sigma_i(q)\big)=\mathcal{F}\big(v^i\tilde{\sigma}_i\big)(q)=v^i\mathcal{F}(\tilde{\sigma}_i)(q)=v^iA_i^j(q)\sigma'_j(q).$$

如果 Φ 和 Φ' 分别是 E 和 E' 的相对于标架 (σ_i) 和 (σ'_j) 的局部平凡化, 那么复合映射 $\Phi'\circ F\circ\Phi^{-1}:U\times\mathbb{R}^k\to U\times\mathbb{R}^m$ 形如

$$\Phi'\circ F\circ\Phi^{-1}\left(q,\left(v^1,\dots,v^k\right)\right)=\left(q,\left(A_i^1(q)v^i,\dots,A_i^m(q)v^i\right)\right),$$

这是光滑的. 因为 Φ,Φ' 是微分同胚, 所以 F 在 $\pi^{-1}(U)$ 上是光滑映射. □

9.4 子丛

给定向量丛 $\pi_E:E\to M$, E 的一个**子丛**指的是向量丛 $\pi_D:D\to M$, 其中 D 是 E 的拓扑子空间并且 π_D 是 π_E 在 D 上的限制映射, 满足对于每个 $p\in M$, 子集

$D_p = D \cap E_p$ 是 E_p 的一个线性子空间，并且 D_p 的向量空间结构继承于 E_p. 注意到 D 是 M 上的向量丛这一条件表明所有的纤维 D_p 非空并且有同样的维数. 如果 $E \to M$ 是光滑丛, 那么 E 的子丛被称为**光滑子丛**当且仅当它是一个光滑向量丛且是 E 中的带边或者无边嵌入子流形.

下面的引理给出了检验一族子空间 $\{D_p \subseteq E_p \mid p \in M\}$ 的无交并是否为光滑子丛的方便条件.

引理 9.17 (子丛的局部标架判别法). 令 $\pi : E \to M$ 是光滑向量丛，对于每个 $p \in M$，我们给定一个 m-维子空间 $D_p \subseteq E_p$. 那么 $D = \bigcup_{p\in M} D_p \subseteq E$ 是 E 的光滑子丛当且仅当下面的条件被满足：

> M 的每个点都有一个邻域 U，存在光滑局部截面 $\sigma_1, \dots \sigma_m : U \to E$ 使得在每个 $q \in U$ 处 $\sigma_1(q), \dots, \sigma_m(q)$ 构成 D_q 的一组基.

Proof. 如果 D 是光滑子丛，那么根据定义，每个 $p \in M$ 处都有一个邻域 U 使得在 U 上有一个 D 的局部平凡化，那么我们选取与这个局部平凡化相关的局部标架 $\tau_1, \dots, \tau_m : U \to D$，与包含映射 $\iota : D \hookrightarrow E$ 复合即可得到 E 的局部截面 $\sigma_j = \iota \circ \tau_j$.

反之，假设 $E \to M$ 是秩 k 的光滑丛并且 $D \subseteq E$ 满足上面的条件. 根据假设 $D \cap E_p$ 是 E_p 的子空间, 我们只需要说明 D 是 E 的带边或者无边嵌入子流形, 以及 π 在 D 上的限制使得 D 是光滑向量丛.

为了说明 D 是带边或者无边嵌入子流形, 只需要说明每个 $p \in M$ 处都存在一个邻域 U 使得 $D \cap \pi^{-1}(U)$ 为 $\pi^{-1}(U) \subseteq E$ 的嵌入（带边）子流形即可. 给定 $p \in M$, 设 $\sigma_1, \dots, \sigma_m : U \to E$ 是在 p 的某个邻域上满足上述条件的光滑局部截面. 我们可以将其完备化为 p 的某个邻域 U 上的 E 的光滑局部标架 $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$. 这个局部标架对应于一个光滑局部平凡化 $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$, 定义为

$$\Phi\left(s^1\sigma_1(q) + \cdots + s^k\sigma_k(q)\right) = \left(q, \left(s^1, \dots, s^k\right)\right).$$

Φ 将 $D \cap \pi^{-1}(U)$ 送到子集 $\left\{\left(q, (s^1, \dots, s^m, 0, \dots, 0)\right)\right\} \subseteq U \times \mathbb{R}^k$, 这是一个嵌入子流形（如果 U 带边那么就是带边子流形）. 此外, 定义映射 $\Psi : D \cap \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^m$ 为

$$\Psi\left(s^1\sigma_1(q) + \cdots + s^m\sigma_m(q)\right) = \left(q, \left(s^1, \dots, s^m\right)\right),$$

那么 Ψ 就是 D 的一个光滑局部平凡化, 所以 D 本身是一个光滑向量丛. □

设 $E \to M$ 和 $E' \to M$ 是向量丛, $F : E \to E'$ 是丛同态. 对于 $p \in M$, 我们说 F 在 p 处的秩为线性映射 $F|_{E_p}$ 的秩. 如果 F 在所有 $p \in M$ 处的秩都是相同的, 那么我们说 F 是常秩的.

定理 9.18. 令 E 和 E' 是光滑流形 M 上的光滑向量丛，$F : E \to E'$ 是丛同态. 定义子集 $\ker F \subseteq E$ 和 $\operatorname{im} F \subseteq E'$ 为

$$\ker F = \bigcup_{p\in M} \ker(F|_{E_p}), \quad \operatorname{im} F = \bigcup_{p\in M} \operatorname{im}(F|_{E_p}).$$

那么 $\ker F$ 和 $\operatorname{im} F$ 分别是 E 和 E' 的光滑子丛当且仅当 F 是常秩的.

Proof. 因为向量丛的纤维必须有相同的维数, 所以必要性是显然的. 下面证明充分性. 假设 F 有常秩 r, E 和 E' 分别有秩 k 和 k'. 任取 $p \in M$, 选取 p 的某个邻域 U 上的 E 的局部标架 $(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$. 对于每个 i, $F \circ \sigma_i : U \to E'$ 是 E' 的光滑局部截面, 所以张成了 $(\operatorname{im} F)|_U$. 对角标重新排序, 我们可以假设 $\{F \circ \sigma_1(p), \ldots, F \circ \sigma_r(p)\}$ 构成了 $\operatorname{im}(F|_{E_p})$ 的一组基, 并且根据连续性它们在 p 的某个邻域 U_0 上仍然保持线性无关性. 因为 F 是常秩的, 所以 $(F \circ \sigma_1, \ldots, F \circ \sigma_r)$ 构成 $\operatorname{im} F$ 在 U_0 上的一个光滑局部标架. 我们可以对每个点做这样的论述, 根据局部标架判别法可知 $\operatorname{im} F$ 是 E' 的光滑子丛.

下面说明 $\ker F$ 是光滑子丛. 令 U_0 和 (σ_i) 和上面相同. 由于 $\operatorname{im}(F|_{E_p})$ 由基 $\{F \circ \sigma_1(p), \ldots, F \circ \sigma_r(p)\}$ 张成, 所以 $\ker(F|_{E_p})$ 由基 $\{F \circ \sigma_{r+1}(p), \ldots, F \circ \sigma_k(p)\}$ 张成, 于是 $(F \circ \sigma_{r+1}, \ldots, F \circ \sigma_k)$ 构成 $\ker F$ 在某个比 U_0 小的邻域上的光滑局部标架. 所以 $\ker F$ 是 E 的光滑子丛. □

引理 9.19 (正交补丛). 令 M 是 $\mathbb{R}^n$ 的带边或者无边浸入子流形, D 是 $T\mathbb{R}^n|_M$ 的秩 k 的光滑子丛. 对于每个 $p \in M$, 令 $D_p^{\perp}$ 是 D_p 在 $T_p\mathbb{R}^n$ (配备 Euclid 内积) 中的正交补, $D^{\perp} \subseteq T\mathbb{R}^n|_M$ 是子集

$$D^{\perp} = \left\{(p, v) \in T\mathbb{R}^n \mid p \in M, v \in D_p^{\perp}\right\}.$$

那么 $D^{\perp}$ 是 $T\mathbb{R}^n|_M$ 的秩 $(n-k)$ 的光滑子丛. 对于每个 $p \in M$, 存在 $D^{\perp}$ 的在 p 的某个邻域上的光滑正交标架.

Proof. 任取 $p \in M$, 令 $(X_1, \ldots, X_k)$ 是 D 的在 $p \in M$ 的某个邻域 V 上的光滑局部标架. 因为浸入是局部的嵌入, 所以通过缩小 V, 可以假设 V 是某个坐标球或者坐标半球 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 的切片. 因为 V 是 U 的闭集, 根据命题 7.7 的 (3), 我们可以将 $(X_1, \ldots, X_k)$ 完备化为 $T\mathbb{R}^n$ 的在 U 上的光滑局部标架 $\left(\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_n\right)$. 然后我们将其正交化为 U 上的光滑正交标架 (E_j). 对于每个 $q \in V$, 有 $\operatorname{span}\{E_1|_p, \ldots, E_k|_q\} = \operatorname{span}\{X_1|_q, \ldots, X_k|_q\} = D_q$. 这表明 $(E_{k+1}, \ldots, E_n)$ 可以限制到 $D^{\perp}$ 在 V 上的一个光滑正交标架. 因此 $D^{\perp}$ 满足局部标架判别法, 是 $T\mathbb{R}^n|_M$ 的光滑子丛. □

10

余切丛

10.1 余向量

10.1.1 流形上的余向量

M 是光滑流形, 对于每个 $p \in M$, 定义 p **处的余切空间** T_p^*M 为切空间 T_pM 的对偶空间:

$$T_p^*M = (T_pM)^*.$$

T_p^*M 的元素被称为 p **处的余切向量**, 或者简称为 p **处的余向量**.

给定开子集 $U \subseteq M$ 上的一个光滑局部坐标 $\left(x^i\right)$, 对于每个 $p \in U$, 坐标基 $\left(\partial/\partial x^i|_p\right)$ 给出了 T_p^*M 的一组对偶基 $\left(\lambda^i|_p\right)$. 那么任意余向量 $\omega \in T_p^*M$ 都可以唯一地表示为 $\omega = \omega_i \lambda^i|_p$, 此时

$$\omega\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right) = \omega_i \lambda^i|_p \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right) = \omega_j.$$

假设 $\left(\tilde{x}^i\right)$ 是 p 处的另一个光滑局部坐标, $\left(\tilde{\lambda}^j|_p\right)$ 是关于 $\left(\tilde{x}^i\right)$ 的一族对偶基. 此时切空间 T_pM 的两组基之间有基变换

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(\hat{p}) \left.\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}\right|_p.$$

现在假设 $\omega \in T_p^*M$ 有表示 $\omega = \omega_i \lambda^i|_p = \tilde{\omega}_j \tilde{\lambda}^j|_p$, 那么我们有

$$\omega_i = \omega\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(\hat{p})\tilde{\omega}_j.$$

10.1.2 余向量场

对于光滑流形 M, 无交并

$$T^*M = \coprod_{p \in M} T_p^*M$$

被称为 M **的余切丛**. 其有一个自然的投影映射 $\pi : T^*M \to M$, 将 $\omega \in T_p^*M$ 送到 p. 给定开子集 U 上的光滑局部坐标 (x^i), 对于每个 $p \in U$, 记 $(\partial/\partial x^i|_p)$ 的对偶基为 $(\lambda^i|_p)$, 这定义了 n 个映射 $\lambda^1, \ldots, \lambda^n : U \to T^*M$, 被称为**坐标余向量场**.

命题 10.1 (余切丛作为向量丛). **M 是一个光滑流形. 配备标准的投影映射和每个纤维上的自然的向量空间结构，余切丛 T^*M 有唯一的拓扑和光滑结构使得其成为 M 上的秩 n 的光滑向量丛使得所有的坐标余向量场都是光滑的局部截面.**

与切丛一样, M 的光滑局部坐标导出了余切丛的光滑局部坐标. 如果 (x^i) 是开子集 $U \subseteq M$ 上的光滑局部坐标, 那么从 $\pi^{-1}(U)$ 到 $\mathbb{R}^{2n}$ 的映射

$$\xi_i \lambda^i|_p \mapsto \left(x^1(p), \ldots, x^n(p), \xi_1, \ldots, \xi_n\right)$$

是 T^*M 上的光滑局部坐标. 我们说 (x^i, ξ_i) 是 T^*M 关于 (x^i) 的**自然坐标**.

T^*M 的一个 (局部或者全局的) 截面被称为**余向量场**或者 **1-形式**. 与其他丛的截面一样, 没有任何限定词的余向量场仅仅假设是连续的. 我们将余向量场 ω 在 p 处的值记为 ω_p. 在开集 U 上的光滑局部坐标中, 余向量场 ω 可以由坐标余向量场 (λ^i) 表示为 $\omega = \omega_i \lambda^i$, 其中 $\omega_i : U \to \mathbb{R}$ 被称为 ω **的分量函数**, 它们刻画为

$$\omega_i(p) = \omega_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right).$$

如果 ω 是 M 上的余向量场, X 是 M 上的向量场, 我们可以构造一个函数 $\omega(X) : M \to \mathbb{R}$ 为

$$\omega(X)(p) = \omega_p(X_p).$$

如果我们用坐标表示 $\omega = \omega_i \lambda^i$ 和 $X = X^j\, \partial/\partial x^j$, 那么

$$\omega(X)(p) = \left(\omega_i(p)\lambda^i|_p\right)\left(X^j(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right) = \omega_i(p) X^i(p),$$

所以 $\omega(X)$ 有局部坐标表示 $\omega(X) = \omega_i X^i$.

与向量场一样, 我们有很多方法可以检验余向量场的光滑性.

命题 10.2 (余向量场的光滑性判别). **M 是一个光滑流形，$\omega : M \to T^*M$ 是余向量场，那么下面的说法等价：**

1. ω 是光滑的.
2. 在每个光滑坐标卡下，ω 的分量都是光滑的.
3. M 的每个点都能被某个坐标卡包含，ω 在这个坐标卡中有光滑的分量函数.
4. 对于每个光滑向量场 $X \in \mathfrak{X}(M)$，函数 $\omega(X)$ 是光滑函数.
5. 对于每个开集 $U \subseteq M$ 和光滑向量场 $X \in \mathfrak{X}(U)$，函数 $\omega(X) : U \to \mathbb{R}$ 是光滑的.

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2) 设 $(U, (x^i))$ 是一个光滑坐标卡, 此时 $\omega = \omega_i \lambda^i$, 即对于任意 $p \in U$, 有 $\omega_p = \omega_i(p)\lambda^i|_p$. ω 光滑表明其在这个坐标卡下的坐标表示

$$(x^1, \ldots, x^n) \mapsto \left(x^1, \ldots, x^n, \omega_1(x), \ldots, \omega_n(x)\right)$$

是光滑的, 这就表明 ω_i 都是光滑的.

(2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1) 显然.

(3) $\Rightarrow$ (4) 任取 $p \in M$, 存在坐标卡 $(U, (x^i))$ 使得 $\omega = \omega_i dx^i$, 其中 ω_i 是光滑函数. 此时还有 $X = X^j \,\partial/\partial x^j$ 且 X^j 是光滑函数, 所以

$$\omega(X) = \omega_i dx^i \left(X^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \omega_i X^i,$$

即 $\omega(X)$ 的坐标表示是光滑函数, 所以 $\omega(X)$ 是光滑函数.

(4) $\Rightarrow$ (5) 任取 $p \in U$, 设 ψ 是关于 p 的某个邻域的支在 U 中的光滑鼓包函数, 那么 ψX 和 X 在 p 的某个邻域上相等. 由于 $\omega(X)$ 和 $\omega(\psi X)$ 在 p 的某个邻域上相等且 $\omega(\psi X)$ 光滑, 所以 $\omega(X)$ 在 p 的某个邻域上的光滑, 这就表明 $\omega(X)$ 在 U 上光滑.

(5) $\Rightarrow$ (2) 任取光滑坐标卡 $(U, (x^i))$, 设 $\omega = \omega_i dx^i$, 那么

$$\omega_i = \omega \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)$$

是光滑函数. □

10.1.3 余标架

令 M 是光滑流形, $U \subseteq M$ 是开集. U **上的局部余标架**指的是一组 U 上的余向量场 $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ 使得对于每个 $p \in U$, $\left(\varepsilon^i|_p\right)$ 构成 $T_p^* M$ 的一组基. 如果 $U = M$, 那么我们说这是一个**全局余标架**.

例 10.3 (坐标余标架)**.** 对于每个光滑坐标卡 $\left(U, (x^i)\right)$, 坐标余向量场 $\left(\lambda^i\right)$ 都定义了 U 上的一个局部余标架, 被称为**坐标余标架**.

给定开集 U 上关于 TM 的一个局部标架 $(E_1, \dots, E_n)$, 唯一确定了 U 上的一个局部余标架 $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ 使得 $\left(\varepsilon^i|_p\right)$ 是 $\left(E_i|_p\right)$ 的对偶基, 等价地说, 有 $\varepsilon^i(E_j) = \delta^i_j$. 这个余标架被称为对偶于 (E_i) 的余标架. 反之, 给定 U 上的一个局部余标架 (ε^i), 唯一确定了一个局部标架 (E_i), 被称为对偶于 (ε^i) 的标架. 例如, 在光滑坐标卡中, 坐标标架 $\left(\partial/\partial x^i\right)$ 和坐标余标架 $\left(\lambda^i\right)$ 互为对偶.

引理 10.4. 令 M 是光滑流形，$U \subseteq M$ 是开集. 如果 (E_i) 是 U 上的局部标架，(ε^i) 是其对偶标架，那么 (E_i) 光滑当且仅当 (ε^i) 光滑.

Proof. 只需要说明对于每个 $p \in U$, (E_i) 在 p 的某个邻域上光滑当且仅当 (ε^i) 也在该邻域上光滑即可. 令 $\left(V, \left(x^i\right)\right)$ 是使得 $p \in V \subseteq U$ 的光滑坐标卡, 那么在 V 中有

$$E_i = a_i^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad \varepsilon^j = b_l^j \lambda^l,$$

其中 $\left(a_i^k\right)$ 和 $\left(b_l^j\right)$ 是实值函数矩阵. E_i 在 V 上光滑当且仅当 a_i^k 光滑, ε^j 在 V 上光滑当且仅当 b_l^j 光滑. 由于 $\varepsilon^j(E_i) = \delta_i^j$, 所以矩阵 $\left(a_i^k\right)$ 和 $\left(b_l^j\right)$ 互为逆矩阵, 所以 a_i^k 光滑当且仅当 b_l^j 光滑. □

10.2 函数的微分

在初等微积分中, 在 $\mathbb{R}^n$ 的光滑实值函数 f 的梯度被定义为向量场, 其分量是 f 的偏导数, 即

$$\operatorname{grad} f=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{10.1}$$

不幸的是, 这种梯度的形式并不是与坐标无关的.

例 10.5. 令 $f(x,y)=x^2$, X 是向量场

$$X=\operatorname{grad} f=2x\frac{\partial}{\partial x},$$

考虑极坐标 (r,θ), 由于

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{(x,y)}=\frac{\partial r}{\partial x}\left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_{(r,\theta)}+\frac{\partial\theta}{\partial x}\left.\frac{\partial}{\partial\theta}\right|_{(r,\theta)}=\frac{x}{r}\left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_{(r,\theta)}-\frac{xy^2}{r}\left.\frac{\partial}{\partial\theta}\right|_{(r,\theta)},$$

所以 X 使用极坐标的表达为

$$X=\frac{2x^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{2x^2y^2}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}=2r\cos^2\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{2}r^3\sin^2 2\theta\frac{\partial}{\partial\theta}.$$

但是

$$X\neq\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}=2r\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-r^2\sin 2\theta\frac{\partial}{\partial\theta}.$$

这表明光滑函数的偏导数不能以与坐标无关的方式解释为向量场的分量, 但是可以证明它们可以解释为余向量场的分量, 这是余向量场最重要的应用.

令 f 是光滑流形 M 上的实值函数. 我们定义余向量场 df 为

$$df_p(v)=vf\quad\forall v\in T_pM,$$

df 被称为 f **的微分**.

命题 10.6. 光滑函数的微分是一个光滑余向量场.

Proof. 任取 $p\in M$, 不难验证 $df_p:T_pM\to\mathbb{R}$ 是线性映射, 所以 $df_p\in T_p^*M$ 确实是余向量. 任取 $X\in\mathfrak{X}(M)$, 有 $df(X)(p)=df_p(X_p)=X_pf=(Xf)(p)$, 所以 $df(X)=Xf$ 是光滑函数, 即 df 是光滑余向量场. □

为了更具体地了解 df, 我们计算它的坐标表示. 令 $\left(x^i\right)$ 是开子集 $U\subseteq M$ 上的光滑局部坐标, $\left(\lambda^i\right)$ 是对应的坐标余标架. 那么 df 可以表示为 $df_p=A_i(p)\lambda^i|_p$, 其中 $A_i:U\to\mathbb{R}$, 此时根据定义, 有

$$\frac{\partial f}{\partial x^j}(p)=df_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right)=A_i(p)\lambda^i|_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right)=A_j(p),$$

于是我们得到 df 的坐标表示:

$$df_p = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\lambda^i|_p. \tag{10.2}$$

因此, 任何光滑坐标卡中 df 的分量函数都是 f 关于这些局部坐标的偏导数. 这表明我们可以将 df 视为梯度的类似物, 只不过将其以一种坐标无关的方式重新解释.

特别地, 如果我们将 f 取为坐标函数 $x^j : U \to \mathbb{R}$, 那么

$$dx^j|_p = \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(p)\lambda^i|_p = \lambda^j|_p,$$

也就是说, 坐标余向量场 λ^j 就是微分 dx^j. 因此, 我们可以将 (10.2) 写为:

$$df_p = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)dx^i|_p,$$

或者作为余向量场之间的等式:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i. \tag{10.3}$$

特别地, 在 1 维的情况下, 简化为

$$df = \frac{df}{dx}dx,$$

这正是一元微积分中我们熟悉的写法. 从今以后, 我们放弃记号 λ^i, 转而用 dx^i 替代.

命题 10.7 (微分的性质). 令 M 是光滑流形, $f, g \in C^\infty(M)$,

1. 如果 $a, b \in \mathbb{R}$, 那么 $d(af + bg) = adf + bdg$.
2. $d(fg) = fdg + gdf$.
3. 如果 $g \neq 0$, 那么 $d(f/g) = (gdf - fdg)/g^2$.
4. 如果 $J \subseteq \mathbb{R}$ 包含 f 的像集, $h : J \to \mathbb{R}$ 是光滑函数, 那么 $d(h \circ f) = (h' \circ f)df$.
5. 如果 f 是常值函数, 那么 $df = 0$.

命题 10.8 (微分为零的函数). 如果 f 是光滑流形 M 上的光滑实值函数, 那么 $df = 0$ 当且仅当 f 在 M 的每个连通分支上是常值函数.

Proof. 只需要假设 M 是连通的. 如果 f 是常值函数, 那么显然 $df = 0$. 反之, 假设 $df = 0$, 令 $p \in M$, $\mathcal{C} = \{q \in M \mid f(q) = f(p)\}$. 任取 $q \in \mathcal{C}$, 令 U 是以 q 为中心的光滑坐标球, 那么 $df = 0 = \partial f/\partial x^i\, dx^i$ 表明在 U 上有 $\partial f/\partial x^i \equiv 0$, 根据基本的微积分内容可知 f 在 U 上是常值函数, 所以 $U \subseteq \mathcal{C}$, 即 $\mathcal{C}$ 是开集. 由于 $\mathcal{C} = f^{-1}(f(p))$, 所以 $\mathcal{C}$ 是闭集. 所以 $\mathcal{C} = M$. □

注意, 对于光滑函数 $f : M \to \mathbb{R}$, 我们现在定义了两种微分, 一种是在 3.2 中定义的 $\tilde{d}f_p : T_pM \to T_{f(p)}\mathbb{R}$, 一种是本节定义的 $df_p : T_pM \to \mathbb{R}$, 这二者本质上是相同的, 因为我们在给定的坐标中, 我们有典范的同构 $T_{f(p)}\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$. 此时, 可以计算

$$\tilde{d}f_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\left.\frac{d}{dt}\right|_{f(p)},$$

以及

$$df_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p),$$

所以这二者的值在同构的意义下是相同的.

10.3 余向量场的拉回

令 $F : M \to N$ 是光滑映射, $p \in M$, 微分 $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ 导出了对偶的线性映射

$$dF_p^* : T_{F(p)}^*N \to T_p^*M,$$

被称为 F **在** p **处的拉回**或者 F **的余切映射**. 根据对偶映射的定义, 其刻画为:

$$dF_p^*(\omega)(v) = \omega(dF_p(v)), \quad \omega \in T_{F(p)}^*N, v \in T_pM.$$

也即

$$dF_p^*(\omega) = \omega \circ dF_p.$$

对于向量场而言, 我们注意到光滑向量场的推前仅在微分同胚或者李群同态的特殊情况下有定义. 而余向量场的情况则大有不同, 事实上余向量场总是能够拉回到一个余向量场. 给定光滑映射 $F : M \to N$ 和 N 上的余向量场 ω, 定义 M 上的余向量场 $F^*\omega$ 为

$$(F^*\omega)_p = dF_p^*(\omega_{F(p)}),$$

这个余向量场被称为 ω **通过** F **的拉回**. 其在切向量 $v \in T_pM$ 上的作用为

$$(F^*\omega)_p(v) = \omega_{F(p)}\big(dF_p(v)\big).$$

命题 10.9. 令 $F : M \to N$ 是光滑映射, u 是 N 上的连续实值函数, ω 是 N 上的余向量场, 那么

$$F^*(u\omega) = (u \circ F)F^*\omega,$$

此外, 若 u 是光滑的, 那么

$$F^*du = d(u \circ F).$$

Proof. 直接计算得

$$\begin{aligned}\big(F^*(u\omega)\big)_p &= dF_p^*\big(u(F(p))\omega_{F(p)}\big) = u(F(p))dF_p^*(\omega_{F(p)})\\ &= \big(u \circ F(p)\big)(F^*\omega)_p = \big((u \circ F)F^*\omega\big)_p.\end{aligned}$$

若 u 是光滑的, 那么

$$\begin{aligned}(F^*du)_p(v) &= dF_p^*(du_{F(p)})(v) = du_{F(p)}\big(dF_p(v)\big)\\ &= dF_p(v)u = v(u \circ F) = d(u \circ F)_p(v).\end{aligned}$$

□

命题 10.10. 令 $F: M \to N$ 是光滑映射，ω 是 N 上的余向量场，那么 $F^*\omega$ 是 M 上的余向量场. 如果 ω 光滑，那么 $F^*\omega$ 也光滑.

Proof. 任取 $p \in M$，选取 $F(p)$ 处的光滑坐标卡 $(V, (y^j))$，令 $U = F^{-1}(V)$. 设 $\omega = \omega_j dy^j$，那么根据命题 10.9，有

$$F^*\omega = F^*\left(\omega_j dy^j\right) = (\omega_j \circ F)F^*dy^j = (\omega_j \circ F)d(y^j \circ F) = (\omega_j \circ F)dF^j,$$

所以 $F^*\omega : U \to T^*M$ 是连续映射. 若 ω 光滑，显然 $F^*\omega$ 光滑. □

例 10.11. 令 $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ 为映射

$$(u, v) = F(x, y, z) = (x^2 y, y \sin z),$$

余向量场 $\omega \in \mathfrak{X}^*(\mathbb{R}^2)$ 为

$$\omega = v du + u dv,$$

那么拉回可以计算为

$$\begin{aligned} F^*\omega &= (v \circ F)dF^1 + (u \circ F)dF^2 \\ &= y \sin z(2xydx + x^2dy) + x^2y(\sin z dy + y\cos z dz) \\ &= 2xy^2 \sin z dx + 2x^2y \sin z dy + x^2y^2 \cos z dz. \end{aligned}$$

换句话说，要计算 $F^*\omega$，只需要将 F 的分量函数复合上对应 ω 系数的分量函数即可.

10.3.1 余向量场限制在子流形上

设 M 是带边或者无边光滑流形，$S \subseteq M$ 是带边或者无边浸入子流形，$\iota : S \hookrightarrow M$ 是包含映射. 如果 ω 是 M 上的光滑余向量场，那么 ι 的拉回 $\iota^*\omega$ 给出了 S 上的光滑余向量场. 任取 $v \in T_pS$，有

$$(\iota^*\omega)_p(v) = \omega_p\big(d\iota_p(v)\big) = \omega_p(v),$$

这里我们通过 $d\iota_p : T_pS \to T_pM$ 将 T_pS 视为 T_pM 的子空间. 因此，$\iota^*\omega$ 仅仅是 ω 限制到与 S 相切的向量上得到的. 出于这个原因，$\iota^*\omega$ 通常被称为 **ω 到 S 的限制**. 需要注意，$\iota^*\omega$ 可能在 S 上处处为零，但是 ω 在 M 上不一定处处为零.

10.4 线积分

余向量场的另一个重要应用是使得线积分的概念具有与坐标无关的意义.

我们从最简单的情况开始: 假设 $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ 是一个区间，ω 是 $[a, b]$ 上的光滑余向量场.（这意味着 ω 的分量函数在 $[a, b]$ 的某个邻域上有一个光滑延拓）. 令 t 是 $\mathbb{R}$ 上

的标准坐标, 那么 ω 可以写为 $\omega_t = f(t)dt$, 其中 f 是光滑函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. 我们定义 ω **在** $[a,b]$ **上的积分**为

$$\int_{[a,b]}\omega = \int_a^b f(t)\,dt.$$

下面的命题告诉我们这不仅仅是一个符号上的小技巧.

命题 10.12 (积分的微分同胚不变性). 令 ω 是 $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ 上的光滑余向量场. 如果 $\varphi:[c,d]\to[a,b]$ 是单调递增的微分同胚, 那么

$$\int_{[c,d]}\varphi^*\omega = \int_{[a,b]}\omega.$$

Proof. 任取 $s\in[c,d]$, 那么 $(\varphi^*\omega)_s = f(\varphi(s))d\varphi = f(\varphi(s))\varphi'(s)ds$, 于是

$$\int_{[c,d]}\varphi^*\omega = \int_c^d f(\varphi(s))\varphi'(s)\,ds = \int_a^b f(t)\,dt = \int_{[a,b]}\omega. \qquad \square$$

令 M 是一个光滑流形, M **中的曲线段**指的是一条定义域为紧区间的连续曲线 $\gamma:[a,b]\to M$. 将 $[a,b]$ 视为带边流形, 如果 γ 是光滑映射 (等价地说, γ 在端点处的某个邻域中有光滑的延拓), 那么我们说这是**光滑曲线段**. 如果存在 $[a,b]$ 的划分 $a=a_0<a_1<\cdots<a_k=b$ 使得 $\gamma|_{[a_{i-1},a_i]}$ 是光滑的, 那么我们说 γ 是**分段光滑曲线段**.

命题 10.13. 令 M 是连通的光滑流形, 那么 M 的任意两个点可以用分段光滑曲线段连接.

Proof. 任取 $p\in M$, 定义集合 $\mathcal{C}\subseteq M$, 点 $q\in\mathcal{C}$ 当且仅当存在从 p 到 q 的分段光滑曲线段. 显然 $p\in\mathcal{C}$, 所以 $\mathcal{C}$ 非空, 我们只需要说明 $\mathcal{C}$ 既开又闭即可表明 $\mathcal{C}=M$.

任取 $q\in\mathcal{C}$, 那么存在 p 到 q 的分段光滑曲线段. 令 U 是以 q 为中心的光滑坐标球, 那么对于任意的 $q'\in U$, 我们可以构造从 q 到 q' 的光滑曲线 (在坐标球中用直线连接即可), 将这两条曲线段连接即可得到 p 到 q' 的分段光滑曲线段, 所以 $q'\in\mathcal{C}$, 这表明 $\mathcal{C}$ 是开集. 另一方面, 任取 $q\in\partial\mathcal{C}$, 同样取以 q 为中心的光滑坐标球 U, 那么存在 $q'\in U\cap\mathcal{C}$, 于是存在从 p 到 q' 的分段光滑曲线段以及从 q' 到 q 的光滑曲线段, 所以存在从 p 到 q 的分段光滑曲线段, 所以 $q\in\mathcal{C}$, 即 $\mathcal{C}$ 是闭集. $\square$

如果 $\gamma:[a,b]\to M$ 是光滑曲线段, ω 是 M 上的光滑余向量场, 我们定义 ω **在** γ **上的线积分**为

$$\int_\gamma\omega = \int_{[a,b]}\gamma^*\omega.$$

更一般地, 如果 γ 是分段光滑的, 我们定义

$$\int_\gamma\omega = \sum_{i=1}^k\int_{[a_{i-1},a_i]}\gamma^*\omega.$$

命题 10.14 (线积分的性质). 令 M 是光滑流形，$\gamma : [a,b] \to M$ 是分段光滑曲线段，$\omega, \omega_1, \omega_2 \in \mathfrak{X}^*(M)$，

1. 对于任意 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$，有
$$\int_\gamma (c_1\omega_1 + c_2\omega_2) = c_1 \int_\gamma \omega_1 + c_2 \int_\gamma \omega_2.$$
2. 如果 γ 是常值映射，那么 $\int_\gamma \omega = 0$.
3. 如果 $\gamma_1 = \gamma|_{[a,c]}$ 以及 $\gamma_2 = \gamma|_{[c,b]}$，其中 $a < c < b$，那么
$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega.$$
4. 如果 $F : M \to N$ 是任意光滑映射，$\eta \in \mathfrak{X}^*(N)$，那么
$$\int_\gamma F^*\eta = \int_{F\circ\gamma} \eta.$$

Proof. (4) 只需要对 γ 光滑的情况进行证明. 我们有
$$\int_\gamma F^*\eta = \int_{[a,b]} \gamma^*(F^*\eta),$$
由于
$$\big(\gamma^*(F^*\eta)\big)_s(v) = (F^*\eta)_{\gamma(s)}(d\gamma(v)) = \eta_{F(\gamma(s))}\big(d(F\circ\gamma)(s)\big) = \big((F\circ\gamma)^*\eta\big)_s(v),$$
其中 $s \in [a,b]$, $v \in T_s\mathbb{R}$. 所以
$$\int_\gamma F^*\eta = \int_{[a,b]} \gamma^*(F^*\eta) = \int_{[a,b]} (F\circ\gamma)^*\eta = \int_{F\circ\gamma} \eta. \qquad \square$$

例 10.15. 令 $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, ω 是余向量场
$$\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}.$$
$\gamma : [0, 2\pi] \to M$ 是曲线段 $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. 那么
$$\int_\gamma \omega = \int_{[0,2\pi]} \gamma^*\omega = \int_{[0,2\pi]} \frac{\cos t(\cos t\, dt) - \sin t(-\sin t\, dt)}{\cos^2 t + \sin^2 t} = 2\pi.$$

线积分的一个重要性质是其独立于曲线的参数化. 令 $\gamma : [a,b] \to M$ 和 $\tilde\gamma : [c,d] \to M$ 是分段光滑曲线段, 如果 $\tilde\gamma = \gamma\circ\varphi$, 其中 $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ 是微分同胚, 那么我们说 $\tilde\gamma$ 是 γ 的**重参数化**. 如果 φ 是递增函数, 那么我们说 $\tilde\gamma$ 是**向前重参数化**, 反之称为**向后重参数化**.

命题 10.16 (线积分的参数独立性). 令 M 是光滑流形，$\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$，$\gamma$ 是分段光滑曲线段，对于 γ 的重参数化 $\tilde\gamma$，我们有
$$\int_{\tilde\gamma} \omega = \begin{cases} \displaystyle\int_\gamma \omega & \tilde\gamma \text{ 是向前重参数化}, \\ \displaystyle -\int_\gamma \omega & \tilde\gamma \text{ 是向后重参数化}. \end{cases}$$

Proof. 根据命题 10.12, 对于向前重参数化的情况, 我们有

$$\int_{\tilde{\gamma}} \omega = \int_{[c,d]} (\gamma \circ \varphi)^* \omega = \int_{[c,d]} \varphi^* \gamma^* \omega = \int_{[a,b]} \gamma^* \omega = \int_{\gamma} \omega. \qquad \square$$

命题 10.17. **如果 $\gamma : [a,b] \to M$ 是分段光滑曲线段, 那么 ω 在 γ 上的线积分可以表示为**

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \omega_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big)\, dt. \tag{10.4}$$

Proof. 假设 γ 是光滑的即可. 在局部坐标中, 设 $\omega = \omega_i\, dx^i$, 那么

$$\begin{aligned} \omega_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big) &= \omega_i\big(\gamma(t)\big)\, dx^i\big(\gamma'(t)\big) = \omega_i\big(\gamma(t)\big)\big(\gamma'(t)x^i\big) \\ &= \omega_i\big(\gamma(t)\big)\left(d\gamma_t\left(\left.\frac{d}{ds}\right|_t\right)x^i\right) = \omega_i\big(\gamma(t)\big)\dot{\gamma}^i(t), \end{aligned}$$

所以

$$(\gamma^*\omega)_t = \omega_i\big(\gamma(t)\big)\, d(\gamma^i)_t = \omega_i\big(\gamma(t)\big)\dot{\gamma}^i(t)\, dt = \omega_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big)\, dt,$$

所以

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{[a,b]} \gamma^* \omega = \int_a^b \omega_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big)\, dt. \qquad \square$$

有一种情况下的线积分计算非常简单: 函数微分的线积分.

定理 10.18 (线积分基本定理). **令 M 是光滑流形, $f \in C^\infty(M)$, $\gamma : [a,b] \to M$ 是分段光滑曲线段, 那么**

$$\int_{\gamma} df = f\big(\gamma(b)\big) - f\big(\gamma(a)\big).$$

Proof. 假设 γ 是光滑的即可. 那么我们有

$$\int_{\gamma} df = \int_a^b df_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big)\, dt = \int_a^b (f \circ \gamma)'(t)\, dt = f\big(\gamma(b)\big) - f\big(\gamma(a)\big). \qquad \square$$

10.5 保守场

定理 10.18 表明当余向量场是光滑函数微分的时候, 其线积分的计算极为简单. 出于这个原因, 当余向量场拥有这个性质的时候我们给它一个术语. 对于光滑流形 M 上的光滑余向量场 ω, 如果存在函数 $f \in C^\infty(M)$ 使得 $\omega = df$, 那么我们说 ω 是**恰当的**. 在这种情况下, 函数 f 称为 ω 的**势**. 这个势不是唯一确定的, 但是根据命题 10.8, ω 的任意两个势仅仅是在 M 的每个连通分支上相差一个常数.

由于恰当微分很容易计算积分, 所以确定余向量场是否恰当是非常重要的, 定理 10.18 提供了一条重要的线索. 定理 10.18 表明恰当余向量场的线积分仅仅与端点 $p = \gamma(a)$ 和 $q = \gamma(b)$ 有关! 特别地, 如果 γ 是**闭合曲线段**, 即 $\gamma(a) = \gamma(b)$, 那么 df 在 γ 上的积分为零.

如果 ω 在任意分段光滑闭合曲线段上的线积分为零, 那么我们说 ω 是**保守的**. 这个术语来源于物理学: 如果沿任何闭合路径作用的力引起的能量变化为零, 那么这个力场被称为保守场.

命题 10.19. 光滑余向量场 ω 是保守的当且仅当其线积分是路径无关的，也就是说，只要分段光滑曲线段 γ 和 $\tilde{\gamma}$ 有相同的起点和终点，那么 $\int_\gamma \omega = \int_{\tilde{\gamma}} \omega$.

Proof. 假设 ω 是保守场, $\gamma(a) = \tilde{\gamma}(a) = p$, $\gamma(b) = \tilde{\gamma}(b) = q$, 记 ξ 是以 q 为起点 p 为终点的分段光滑曲线段, ζ 是连接 γ 和 ξ 的分段光滑曲线段, $\tilde{\zeta}$ 是连接 $\tilde{\gamma}$ 和 ξ 的分段光滑曲线段, 根据 ω 的保守性, 就有

$$\int_{\tilde{\gamma}} \omega + \int_\xi \omega = \int_{\tilde{\zeta}} \omega = 0 = \int_\zeta \omega = \int_\gamma \omega + \int_\xi \omega,$$

即 $\int_\gamma \omega = \int_{\tilde{\gamma}} \omega$.

反之, 假设 $\int_\gamma \omega = \int_{\tilde{\gamma}} \omega$. 那么任取分段光滑闭合曲线段 γ, 设 ζ 是值为 $\gamma(a) = \gamma(b)$ 的常值曲线, 那么

$$\int_\gamma \omega = \int_\zeta \omega = 0,$$

即 ω 是保守场. □

定理 10.20. 令 M 是光滑流形，M 上的光滑余向量场是保守的当且仅当其是恰当的.

如果每个光滑余向量场都是恰当的自然是最好不过, 因为此时线积分的计算只需要找到一个势函数然后计算端点处的值即可, 但是, 这个假设是不成立的.

例 10.21. 例 10.15 中的余向量场 ω 不是恰当的, 因为其不是保守的, 当 γ 取逆时针的圆周时, γ 是闭合光滑曲线段, 但是 $\int_\gamma \omega = 2\pi \neq 0$.

我们希望有一种简单的方法来检查余向量场是否恰当. 幸运的是, 有一个非常简单的必要条件, 其源于光滑函数的混合偏导数与计算顺序无关.

假设 $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ 是恰当的, 令 f 是 ω 的任意势函数, $(U, (x^i))$ 是 M 上的光滑坐标卡. 因为 f 是光滑的, 所以在 U 上有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\, \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j\, \partial x^i}.$$

将 ω 表示为 $\omega = \omega_i\, dx^i$, 那么 $\omega = df$ 等价于 $\omega_i = \partial f/\partial x^i$, 于是上式表明 ω 的分量函数必须满足

$$\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} = \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}. \tag{10.5}$$

由此, 满足上式的光滑余向量场 ω 被称为**闭的**. 我们得到了下面的命题.

命题 10.22. 每个恰当余向量场都是闭的.

按定义检查余向量场是否闭的难点在于需要对每个坐标卡进行检查. 下面的命题给出了与坐标无关的闭的余向量场的表述.

命题 10.23. 令 ω 是光滑流形 M 上的光滑余向量场，下面的说法等价：

1. ω 是闭的.
2. ω 在每个点的某个光滑坐标卡中满足 (10.5) 式.
3. 对于任意开集 $U \subseteq M$ 和光滑向量场 $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$，有

$$X\big(\omega(Y)\big) - Y\big(\omega(X)\big) = \omega\big([X, Y]\big). \tag{10.6}$$

Proof. (1) ⇒ (2) 从定义立即得到.

(2) ⇒ (3) 对于任意坐标卡 $(V, (x^i))$, 其中 $V \subseteq U$, 设 $\omega = \omega_i\, dx^i$, $X = X^j\, \partial/\partial x^j$, $Y = Y^k\, \partial/\partial x^k$, 那么

$$X\big(\omega(Y)\big) = X\big(\omega_i Y^i\big) = Y^i X\omega_i + \omega_i XY^i = Y^i X^j \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} + \omega_i XY^i.$$

对 $Y\big(\omega(X)\big)$ 重复这个步骤, 然后相减, 得到

$$X\big(\omega(Y)\big) - Y\big(\omega(X)\big) = Y^i X^j \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i}\right) + \omega_i\big(XY^i - YX^i\big),$$

(10.5) 式表明第一项为零, 而 命题 7.15 表明后一项为 $\omega_i\big([X, Y]\big)$.

(3) ⇒ (1) 取 $X = \partial/\partial x^i$, $Y = \partial/\partial x^j$, 那么 $[X, Y] = 0$, 即得到 (10.5) 式. □

这一命题的结果是可以使用标准 (b) 来检查闭性, 因为可以快速表明许多余向量场不是闭的, 从而说明其不是恰当的.

推论 10.24. 假设 $F : M \to N$ 是局部微分同胚，那么拉回 $F^* : \mathfrak{X}^*(N) \to \mathfrak{X}^*(M)$ 将闭的余向量场送到闭的余向量场，恰当的余向量场送到恰当的余向量场.

Proof. 恰当余向量场的情况由 命题 10.9 得到. 对于闭的情况, 如果 (U, φ) 是 N 的一个光滑坐标卡, 那么 $\varphi \circ F$ 可以视为定义在 $F^{-1}(U)$ 的任意点的某个邻域上的光滑坐标映射, 在这个坐标下, F 的坐标表示是恒等映射, 所以 ω 满足 (10.5) 式, 即 $F^*\omega$ 在 $F^{-1}(U)$ 中满足 (10.5) 式. □

我们已经说明了恰当余向量场都是闭余向量场, 那么自然会引出逆命题: 是否每个闭余向量场都是恰当的? 答案是几乎总是是的, 但是有一个重要的限制. 这取决于区域的形状, 如下面的例子所示.

例 10.25. 回到 例 10.15 中的余向量场 ω. 直接计算可知 ω 是闭的, 但是我们已经说明其在 $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ 上不是恰当的. 但是另一方面, 如果我们限制 ω 的定义域在右半平面 $U = \{(x, y) \mid x > 0\}$ 上, 直接计算表明 $\omega = d\big(\arctan y/x\big)$, 如果使用极坐标则更清晰, 即 $\omega = d\theta$.

上面的例子说明了一个关键的原则: 一个闭余向量场是否恰当的问题是一个全局性的问题, 取决于定义域的形状. 这一观察是 de Rham 上同调的起点, 其表达了光滑结构和拓扑之间的深层次关系. 现在我们可以证明下面的结果. 如果 V 是有限维向量空间, 子集 $U \subseteq V$ 被称为**星形的**, 如果存在 $c \in U$ 使得对于每个 $x \in U$, 从 c 到 x 的线段都在 U 中. 例如, 每个凸集都是星形的.

定理 10.26 (余向量场的 Poincaré 引理). 如果 U 是 $\mathbb{R}^n$ 或者 $\mathbb{H}^n$ 的星形开子集，那么 U 上的闭余向量场都是恰当的.

Proof. 假设 U 是相对于 $c \in U$ 的星形开子集, $\omega = \omega_i dx^i$ 是 U 上的闭余向量场.

因为微分同胚把闭形式送到闭形式、恰当形式送到恰当形式, 所以我们可以把 U 平移到以 $c = 0$ 为星形的中心. 对于每个 $x \in U$, 令 $\gamma_x : [0,1] \to U$ 是从 0 到 x 的直线段, 参数化为 $\gamma_x(t) = tx$. U 是星形子集表明 γ_x 的像集在 U 中. 定义函数 $f : U \to \mathbb{R}$ 为

$$f(x) = \int_{\gamma_x} \omega.$$

我们证明 f 就是 ω 的势函数, 即 $\partial f/\partial x^j = \omega_j$. 首先, 我们计算

$$f(x) = \int_0^1 \omega_{\gamma_x(t)}\big(\gamma_x'(t)\big)\,dt = \int_0^1 \omega_i(tx)x^i\,dt.$$

因为被积函数是光滑的, 所以可以交换求导和积分的顺序, 得到

$$\frac{\partial f}{\partial x^j}(x) = \int_0^1 \left(t\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}(tx)x^i + \omega_j(tx)\right)dt.$$

ω 是闭的, 所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x^j}(x) &= \int_0^1 \left(t\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i}(tx)x^i + \omega_j(tx)\right)dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt}\big(t\omega_j(tx)\big)\,dt = \omega_j(x).\end{aligned}$$

□

11

张量

11.1 多重线性代数

11.1.1 向量空间的张量积

命题 11.1 (抽象的张量积 vs. 具体的张量积). 如果 $V_1, \ldots, V_k$ 是有限维向量空间，那么存在典范同构：

$$V_1^* \otimes \cdots \otimes V_k^* \simeq \mathrm{L}(V_1, \ldots, V_k; \mathbb{R}),$$

其中抽象的单张量 $\omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^k$ 对应到多重线性映射

$$\omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^k(v_1, \ldots, v_k) = \omega^1(v_1) \cdots \omega^k(v^k).$$

Proof. 定义映射 $\Phi : V_1^* \times \cdots \times V_k^* \to \mathrm{L}(V_1, \ldots, V_k; \mathbb{R})$ 为

$$\Phi\big(\omega^1, \ldots, \omega^k\big)(v_1, \ldots, v_k) = \omega^1(v_1) \cdots \omega^k(v_k).$$

不难验证 Φ 是多重线性映射，所以诱导了唯一的线性映射 $\tilde{\Phi}$ 满足

$$\tilde{\Phi}\big(\omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^k\big)(v_1, \ldots, v_k) = \omega^1(v_1) \cdots \omega^k(v_k).$$

线性映射 $\tilde{\Phi}$ 将 $V_1^* \otimes \cdots \otimes V_k^*$ 的基 $\varepsilon_{(1)}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon_{(k)}^{i_k}$ 送到 $\mathrm{L}(V_1, \ldots, V_k; \mathbb{R})$ 的基 $\varepsilon_{(1)}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon_{(k)}^{i_k}$，所以是同构映射. □

11.1.2 向量空间上的协变张量和逆变张量

V 是有限维向量空间，V **上的协变 k-张量**指的是 k 重张量积 $V^* \otimes \cdots \otimes V^*$ 中的元素，我们可以将其视为 V 上的 k-多重线性映射

$$\alpha : V \times \cdots \times V \to \mathbb{R},$$

k 被称为 α **的秩**. 出于惯例，将 0-张量定义为实数. 我们将 V 上的所有协变 k-张量构成的向量空间简记为

$$T^k(V^*) = V^* \otimes \cdots \otimes V^*.$$

例 11.2 (协变张量)**.** 令 V 是有限维向量空间.

1. 每个线性泛函 $\omega : V \to \mathbb{R}$ 都是一个协变 1-张量, 由于 ω 可以视为 $T_a^* V \simeq V^*$ 的元素, 所以协变 1-张量就是余向量.
2. V 上的协变 2-张量就是**双线性型**, 例如 $\mathbb{R}^2$ 上的内积.
3. 将行列式视为参数为 n 个向量的函数, 是 $\mathbb{R}^n$ 上的协变 n-张量.

定义 **V 上秩 k 的逆变张量**空间为向量空间

$$T^k(V) = V \otimes \cdots \otimes V.$$

特别地, $T^1(V) = V$, 同样出于惯例, 定义 $T^0(V) = \mathbb{R}$. 逆变 k-张量可以被视为 V^* 上的 k-多重线性映射

$$\alpha : V^* \times \cdots \times V^* \to \mathbb{R}.$$

但是对于大多数目的来说, 将逆变张量视为抽象的张量积空间中的元素更加简单.

更一般的, 定义 **V 上的 (k,l) 型混合张量**空间为

$$T^{(k,l)}(V) = T^k(V) \otimes T^l(V^*) = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{k \text{ copies}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{l \text{ copies}}.$$

上述定义的一些特殊情况为:

$$\begin{aligned}
T^{(0,0)}(V) &= T^0(V) = T^0(V^*) = \mathbb{R}, \\
T^{(0,1)}(V) &= T^1(V^*) = V^*, \\
T^{(1,0)}(V) &= T^1(V) = V, \\
T^{(0,k)}(V) &= T^k(V^*), \\
T^{(k,0)}(V) &= T^k(V).
\end{aligned}$$

在本书中, 我们主要关注协变张量. 因此, 除非我们明确指定, 否则张量将始终被理解为协变张量. 然而, 重要的是要意识到逆变和混合张量在微分几何的更高级部分中发挥着重要作用, 特别是黎曼几何.

11.2 对称和交错张量

一般来说, 重新排列协变张量的参数对其值造成的影响不必有什么规律. 然而, 一些特殊的张量 (例如内积) 在重新排列参数时值保持不变 (内积的对称性). 对于行列式而言, 互换两个参数, 行列式会改变符号. 在本节中, 我们描述这两类重要的张量: 对称张量和交错张量. 当它们的参数重新排列时, 会以最简单的方式发生变化.

11.2.1 对称张量

令 V 是有限维向量空间. V 上的协变 k-张量 α 如果交换任意两个参数的值都保持不变:

$$\alpha(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = \alpha(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k),$$

其中 $1 \leq i < j \leq k$, 那么我们说 α 是**对称的**.

令 S_k 是 k 阶对称群, 任取 $\sigma \in S_k$, 我们记 k-张量 $\sigma\alpha$ 为

$$\sigma\alpha(v_1, \dots, v_k) = \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}).$$

不难验证 $\tau(\sigma\alpha) = (\tau\sigma)\alpha$. 由于 S_k 可以由所有的二轮换生成, 所以 α 是对称张量当且仅当任取 $\sigma \in S_k$ 有 $\sigma\alpha = \alpha$.

所有对称 k-张量的集合构成 $T^k(V^*)$ 的一个子空间, 我们记为 $\Sigma^k(V^*)$. 我们可以定义投影映射 $\mathrm{Sym} : T^k(V^*) \to \Sigma^k(V^*)$ 为

$$\mathrm{Sym}\,\alpha = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \sigma\alpha.$$

这个映射被称为**对称化**.

命题 11.3 (对称化的性质). 令 α 是一个协变张量.

1. $\mathrm{Sym}\,\alpha$ 是对称张量.
2. α 是对称张量当且仅当 $\mathrm{Sym}\,\alpha = \alpha$.

Proof. 任取 $\alpha \in T^k(V^*)$, $\tau \in S_k$, 那么

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Sym}\,\alpha)(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(k)}) &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \sigma\alpha(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(k)}) \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\sigma\tau)\alpha(v_1, \dots, v_k) \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\eta \in S_k} \eta\alpha(v_1, \dots, v_k) \\
&= (\mathrm{Sym}\,\alpha)(v_1, \dots, v_k),
\end{aligned}$$

所以 $\mathrm{Sym}\,\alpha$ 是对称张量.

如果 α 是对称张量, 那么任取 $\sigma \in S_k$ 有 $\sigma\alpha = \alpha$, 所以 $\mathrm{Sym}\,\alpha = \alpha$. 反之, 如果 $\mathrm{Sym}\,\alpha = \alpha$, 由 (1) 可知 α 是对称张量. □

如果 α 和 β 是 V 上的对称张量, 那么 $\alpha \otimes \beta$ 一般不是对称张量. 但是, 使用对称化算子, 可以定义一种新的乘法, 将一对对称张量送到一个对称张量. 如果 $\alpha \in \Sigma^k(V^*)$, $\beta \in \Sigma^l(V^*)$, 我们定义**对称积** $\alpha\beta$ 为 $(k+l)$-张量

$$\alpha\beta = \mathrm{Sym}(\alpha \otimes \beta).$$

命题 11.4 (对称积的性质).

1. 对称积是对称的且双线性的: 对于对称张量 α, β, γ 和 $a, b \in \mathbb{R}$, 有

$$\begin{gathered}
\alpha\beta = \beta\alpha, \\
(a\alpha + b\beta)\gamma = a\alpha\gamma + b\beta\gamma = \gamma(a\alpha + b\beta).
\end{gathered}$$

2. 如果 α, β 是余向量, 那么

$$\alpha\beta = \frac{1}{2}(\alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha).$$

11.2.2 交错张量

V 上的协变 k-张量 α 如果满足: 对于任意不同的指标 i, j, 有

$$\alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -\alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k),$$

那么我们说 α 是**交错张量**. 所有交错 k-张量构成的子空间记为 $\Lambda^k(V^*) \subseteq T^k(V^*)$. 此时, 可以验证对于 $\sigma \in S_k$, 有 $\sigma\alpha = (\operatorname{sgn}\sigma)\alpha$. 交错的协变 k-张量也被称为**外形式**, **多重余向量**或者 **k-余向量**.

每个 0-张量 (实数) 和 1-张量都是对称且交错的. 一个交错 2-张量就是反对称的双线性型 (交错型).

11.3 流形上的张量和张量场

令 M 是光滑流形, 定义 **M 上的协变 k-张量丛**为

$$T^k T^* M = \coprod_{p \in M} T^k\left(T_p^* M\right).$$

类似地, 定义 **M 上的逆变 k-张量丛**为

$$T^k T M = \coprod_{p \in M} T^k\left(T_p M\right).$$

M 上的 (k, l) 型混合张量丛为

$$T^{(k,l)} T M = \coprod_{p \in M} T^{(k,l)}\left(T_p M\right).$$

上述这些丛中任意一个都被称为 **M 上的张量丛**. 张量丛的截面被称为 **M 上的 (协变、逆变或者混合) 张量场**. 使用上面的定义, 我们发现逆变 1-张量场就是向量场, 协变 1-张量场就是余向量场. 0-张量场就是连续实值函数.

这些张量场的光滑截面构成的空间 $\Gamma\left(T^k T^* M\right), \Gamma\left(T^k T M\right), \Gamma\left(T^{(k,l)} T M\right)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的无限维向量空间, 也是 $C^\infty(M)$ 环上的模. 在任意光滑局部坐标 $\left(x^i\right)$ 下, 这些丛的截面可以表示为

$$A = \begin{cases} A_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_k} & A \in \Gamma\left(T^k T^* M\right), \\ A^{i_1 \dots i_k} \dfrac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \dfrac{\partial}{\partial x^{i_k}} & A \in \Gamma\left(T^k T M\right), \\ A^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_l} \dfrac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \dfrac{\partial}{\partial x^{i_k}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_l} & A \in \Gamma\left(T^{(k,l)} T M\right). \end{cases}$$

函数 $A_{i_1 \dots i_k}, A^{i_1 \dots i_k}, A^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_l}$ 被称为 **A 的分量函数**. 由于我们主要关注光滑协变张量场, 所以我们对于光滑协变 k-张量场, 采用以下简写:

$$\mathcal{T}^k(M) = \Gamma\left(T^k T^* M\right).$$

命题 11.5 (张量场的光滑性判别). M 是光滑流形，$A : M \to T^k T^* M$ 是截面，下面的说法等价.

1. A 光滑.
2. 在每个光滑坐标卡中，A 的分量函数都是光滑的.
3. M 的每个点处都存在一个光滑坐标卡使得 A 的分量函数在这上面光滑.
4. 如果 $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$，函数 $A(X_1, \dots, X_k) : M \to \mathbb{R}$
$$A(X_1, \dots, X_k)(p) = A_p\big(X_1|_p, \dots, X_k|_p\big)$$
是光滑的.
5. 对于任意定义在开集 $U \subseteq M$ 上的光滑向量场 $X_1, \dots, X_k$，函数 $A(X_1, \dots, X_k)$ 在 U 上光滑.

命题 11.6. M 是光滑流形，$A \in \mathcal{T}^k(M)$，$B \in \mathcal{T}^l(M)$，$f \in C^\infty(M)$. 那么 fA 和 $A \otimes B$ 也是光滑张量场，其在光滑坐标卡中的分量为

$$\begin{aligned}(fA)_{i_1 \dots i_k} &= f A_{i_1 \dots i_k}, \\ (A \otimes B)_{i_1 \dots i_{k+l}} &= A_{i_1 \dots i_k} B_{i_{k+1} \dots i_{k+l}}.\end{aligned}$$

若 A 是 M 上的光滑协变 k-张量场, $X_1, \dots, X_k$ 是光滑向量场,那么 $A(X_1, \dots, X_k)$ 是 M 上的光滑函数, 因此 A 诱导了映射

$$\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M).$$

不难发现这个映射在 $\mathbb{R}$ 上是多重线性的. 实际上, 它在 $C^\infty(M)$ **上是多重线性的**, 也就是说任取 $f, f' \in C^\infty(M)$, $X_i, X_i' \in \mathfrak{X}(M)$, 我们有

$$\begin{aligned}&A(X_1, \dots, fX_i + f'X_i', \dots, X_k) \\ &= fA(X_1, \dots, X_i, \dots, X_k) + f'A(X_1, \dots, X_i', \dots, X_k).\end{aligned}$$

这个性质实际上是光滑张量场的特征.

引理 11.7 (张量表征引理). 映射

$$\mathcal{A} : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{k \text{ copies}} \to C^\infty(M)$$

是由一个光滑协变 k-张量场诱导的当且仅当其在 $C^\infty(M)$ 上是多重线性的.

Proof. 我们已经说明了必要性, 下面说明充分性. 假设 $\mathcal{A}$ 在 $C^\infty(M)$ 上是多重线性的. 我们希望定义一个张量场 $A : M \to T^k T^* M$ 为

$$A_p(v_1, \dots, v_k) = \mathcal{A}(V_1, \dots, V_k)(p),$$

其中 $p \in M$, $v_1, \dots, v_k \in T_p M$, $V_1, \dots, V_k$ 是 $v_1, \dots, v_k$ 的任意延拓到 M 上的光滑向量场. 此时容易验证 A 是光滑的张量场且诱导了 $\mathcal{A}$. 下面我们只需要说明 A 是良定义的, 即与延拓的选取无关.

首先说明 $\mathcal{A}$ 是局部的映射. 如果 X_i 是光滑向量场, 其在 p 的某个邻域 U 中为零, 那么我们可以选取支在 U 中的鼓包函数 ψ 满足 $\psi(p)=1$, 此时 $\psi X_i \equiv 0$, 所以

$$0=\mathcal{A}(X_1,\dots,\psi X_i,\dots,X_k)(p)=\psi(p)\mathcal{A}(X_1,\dots,X_i,\dots,X_k)(p),$$

所以 $\mathcal{A}(X_1,\dots,X_k)$ 在 p 处为零, 这表明 $\mathcal{A}(X_1,\dots,X_k)$ 在 p 处的取值只与 $X_1,\dots,X_k$ 在 p 的某个邻域上的取值有关.

然后我们说明 $\mathcal{A}$ 实际上只与 $X_1,\dots,X_k$ 在 p 点处的值有关. 若 $X_i|_p=0$, 那么在 p 处的任意坐标邻域中可以写为 $X_i=X_i^j\,\partial/\partial x^j$, 其中分量函数 $X_i^j(p)=0$. 我们可以将向量场 $\partial/\partial x^j$ 延拓为 M 上的光滑向量场 E_j 使得 E_j 在这个邻域中有 $E_j=\partial/\partial x^j$. 同样的, 可以将光滑函数 X_i^j 延拓为 M 上的光滑函数 f_i^j 使得 f_i^j 在这个邻域中有 $f_i^j=X_i^j$. 那么在这个邻域中有 $f_i^jE_j=X_i$, 根据 $\mathcal{A}$ 的多重线性性以及局部性, 就有

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(X_1,\dots,X_i,\dots,X_k)(p)&=\mathcal{A}(X_1,\dots,f_i^jE_j,\dots,X_k)(p)\\&=f_i^j(p)\mathcal{A}(X_1,\dots,E_j,\dots,X_k)(p)=0.\end{aligned}$$

这就表明 $\mathcal{A}$ 只与 $X_1,\dots,X_k$ 在 p 点处的值有关. □

更一般地, 若 F 是 M 上的光滑 (k,l)-张量场, 给定光滑余向量场 $\omega^1,\dots,\omega^k\in\mathfrak{X}^*(M)$ 以及光滑向量场 $X_1,\dots,X_l\in\mathfrak{X}(M)$, 此时可以定义映射

$$\mathcal{F}:\underbrace{\mathfrak{X}^*(M)\times\cdots\times\mathfrak{X}^*(M)}_{k\text{ copies}}\times\underbrace{\mathfrak{X}(M)\times\cdots\times\mathfrak{X}(M)}_{l\text{ copies}}\to C^\infty(M)$$

满足

$$\mathcal{F}(\omega^1,\dots,\omega^k,X_1,\dots,X_l)(p)=F_p\big(\omega^1|_p,\dots,\omega^k|_p,X_1|_p,\dots,X_l|_p\big).$$

不难验证 $\mathcal{F}$ 是 $C^\infty(M)$-多重线性的. 与上面的证明完全类似的, 可以证明这样的映射 $\mathcal{F}$ 是 (k,l)-张量场诱导的当且仅当 $\mathcal{F}$ 是 $C^\infty(M)$-多重线性的.

然后我们再介绍一个张量场的重要的表征.

引理 11.8. 映射

$$\mathcal{F}:\underbrace{\mathfrak{X}^*(M)\times\cdots\times\mathfrak{X}^*(M)}_{k\text{ copies}}\times\underbrace{\mathfrak{X}(M)\times\cdots\times\mathfrak{X}(M)}_{l\text{ copies}}\to \mathfrak{X}(M)$$

是 $C^\infty(M)$-线性的当且仅当其由一个光滑 $(k+1,l)$-张量场诱导.

Proof. 若上述 $\mathcal{F}$ 是 $C^\infty(M)$-线性的, 那么可以定义一个映射

$$F:\mathfrak{X}^*(M)\times\underbrace{\mathfrak{X}^*(M)\times\cdots\times\mathfrak{X}^*(M)}_{k\text{ copies}}\times\underbrace{\mathfrak{X}(M)\times\cdots\times\mathfrak{X}(M)}_{l\text{ copies}}\to C^\infty(M)$$

为

$$F\big(\alpha,\omega^1,\dots,\omega^k,X_1,\dots,X_l\big)=\alpha\big(\mathcal{F}\big(\omega^1,\dots,\omega^k,X_1,\dots,X_l\big)\big),$$

不难验证 F 是 $C^\infty(M)$-线性的, 那么根据张量表征引理, F 由一个光滑 $(k+1,l)$-张量场诱导.

反之, 给定一个光滑 $(k+1,l)$-张量场 F, 其诱导一个 $C^\infty(M)$-线性的映射

$$F:\underbrace{\mathfrak{X}^*(M)\times\cdots\times\mathfrak{X}^*(M)}_{k+1\text{ copies}}\times\underbrace{\mathfrak{X}(M)\times\cdots\times\mathfrak{X}(M)}_{l\text{ copies}}\to C^\infty(M).$$

定义映射

$$\mathcal{F}:\underbrace{\mathfrak{X}^*(M)\times\cdots\times\mathfrak{X}^*(M)}_{k\text{ copies}}\times\underbrace{\mathfrak{X}(M)\times\cdots\times\mathfrak{X}(M)}_{l\text{ copies}}\to \mathfrak{X}(M)$$

满足对于任意的 $\alpha\in\mathfrak{X}^*(M)$, 有

$$\alpha\big(\mathcal{F}(\omega^1,\ldots,\omega^k,X_1,\ldots,X_l)\big)=F\big(\alpha,\omega^1,\ldots,\omega^k,X_1,\ldots,X_l\big).$$

换句话说, 任取 $p\in M$, 向量 $\mathcal{F}\big(\omega^1,\ldots,\omega^k,X_1,\ldots,X_l\big)\big|_p\in T_pM$ 满足

$$\begin{aligned}\alpha_p\big(\mathcal{F}\big(\omega^1,\ldots,\omega^k,X_1,\ldots,X_l\big)\big|_p\big)&=F\big(\alpha,\omega^1,\ldots,\omega^k,X_1,\ldots,X_l\big)(p)\\&=F_p\big(\alpha_p,\omega^1|_p,\ldots,\omega^k|_p,X_1|_p,\ldots,X_l|_p\big),\end{aligned}$$

这表明 $\mathcal{F}\big(\omega^1,\ldots,\omega^k,X_1,\ldots,X_l\big)\big|_p$ 由余切向量 $\alpha_p\in T_p^*M$ 唯一确定, 所以 $\mathcal{F}$ 是良定义的. 不难验证 $\mathcal{F}$ 是 $C^\infty(M)$-线性的. 下面我们只需要说明 $\mathcal{F}\big(\omega^1,\ldots,\omega^k,X_1,\ldots,X_l\big)$ 是光滑向量场即可.

假设在局部坐标 (x^i) 中, 有 $\alpha=\alpha_i\,dx^i$, $\omega^j=\omega^j_i\,dx^i$, $X_j=X^i_j\,\partial/\partial x^i$, 以及

$$F=F^{i_1\ldots i_{k+1}}_{j_1\ldots j_l}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_{k+1}}}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_l},$$

那么

$$F\big(\alpha,\omega^1,\ldots\omega^k,X_1,\ldots,X_l\big)=\alpha_{i_1}\omega^1_{i_2}\cdots\omega^k_{i_{k+1}}X^{j_1}_1\cdots X^{j_l}_l F^{i_1\ldots i_{k+1}}_{j_1\ldots j_l},$$

这表明

$$\mathcal{F}\big(\omega^1,\ldots,\omega^k,X_1,\ldots,X_l\big)=\omega^1_{i_2}\cdots\omega^k_{i_{k+1}}X^{j_1}_1\cdots X^{j_l}_l F^{i_1 i_2\ldots i_{k+1}}_{j_1\ldots j_l}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},$$

这就表明 $\mathcal{F}\big(\omega^1,\ldots,\omega^k,X_1,\ldots,X_l\big)$ 是光滑向量场. □

流形上的**对称张量场**指的是一个协变张量场并且其在每个点处的取值都是对称张量. 两个或多个张量场的对称积由逐点张量的对称积定义. 例如, 如果 A,B 是两个光滑余向量场, 那么它们的对称积指的是一个光滑 2-张量场 AB, 其计算为

$$AB=\frac{1}{2}(A\otimes B+B\otimes A).$$

交错张量场被称为**微分形式**, 我们将在后面深入研究.

11.3.1 张量场的拉回

与余向量场类似, 协变张量场可以通过光滑映射拉回产生定义域上的张量场. 注意拉回构造仅限于协变张量场, 这也是我们更多关注协变张量的原因之一.

设 $F: M \to N$ 是光滑映射. 对于任意点 $p \in M$ 和 k-张量 $\alpha \in T^k\big(T^*_{F(p)}N\big)$, 我们定义张量 $dF^*_p(\alpha) \in T^k\big(T^*_p M\big)$ 为

$$dF^*_p(\alpha)(v_1, \ldots, v_k) = \alpha\big(dF_p(v_1), \ldots, dF_p(v_k)\big),$$

其中 $v_1, \ldots, v_k \in T_p M$, 这个 $dF^*_p(\alpha)$ 被称为 α **通过** F **在** p **处的拉回**. 如果 A 是一个 N 上的协变 k-张量场, 我们定义 M 上的 k-张量场 F^*A 为

$$(F^*A)_p = dF^*_p(A_{F(p)}).$$

这被称为 A **通过** F **的拉回**. 这个张量场在 $v_1, \ldots, v_k \in T_p M$ 上的作用为

$$(F^*A)_p(v_1, \ldots, v_k) = A_{F(p)}\big(dF_p(v_1), \ldots, dF_p(v_k)\big).$$

命题 11.9 (拉回张量的性质). 设 $F: M \to N$ 和 $G: N \to P$ 是光滑映射, A, B 是 N 上的协变张量场, f 是 N 上的实值函数.

1. $F^*(fB) = (f \circ F)F^*B$.
2. $F^*(A \otimes B) = F^*A \otimes F^*B$.
3. $F^*(A + B) = F^*A + F^*B$.
4. F^*B 是张量场并且 F^*B 光滑当且仅当 B 光滑.
5. $(G \circ F)^*B = F^*(G^*B)$.
6. $(\mathrm{Id}_N)^*B = B$.

如果 f 是连续实值函数 (0-张量场), B 是 k-张量场, 那么我们定义的 $f \otimes B$ 和 fB 可以等同, F^*f 和 $f \circ F$ 可以等同.

下面的命题是 命题 11.9 的直接结果. 与余向量场拉回的计算在形式上是一致的.

推论 11.10. 令 $F: M \to N$ 是光滑映射, B 是 N 上的协变 k-张量场. 如果 $p \in M$, (y^i) 是 $F(p)$ 处的一个光滑坐标, 那么 F^*B 在 p 的这个邻域可以表示为

$$\begin{aligned} &F^*\big(B_{i_1 \ldots i_k}\, dy^{i_1} \otimes \cdots \otimes dy^{i_k}\big) \\ &= \big(B_{i_1 \ldots i_k} \circ F\big)\, d\big(y^{i_1} \circ F\big) \otimes \cdots \otimes d\big(y^{i_k} \circ F\big). \end{aligned}$$

例 11.11. 令 $M = \{(r, \theta) \mid r > 0, |\theta| < \pi/2\}$, $N = \{(x, y) \mid x > 0\}$, $F: M \to \mathbb{R}^2$ 是光滑映射 $F(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. 张量场 $A = x^{-2}\, dy \otimes dy$ 通过 F 的拉回可以计算为:

$$\begin{aligned} F^*A &= (r\cos\theta)^{-2}\, d(r\sin\theta) \otimes d(r\sin\theta) \\ &= (r\cos\theta)^{-2}(\sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta) \otimes (\sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta) \\ &= r^{-2}\tan^2\theta\, dr \otimes dr + r^{-1}\tan\theta(d\theta \otimes dr + dr \otimes d\theta) + d\theta \otimes d\theta. \end{aligned}$$

11.4 张量场的李导数

李导数算符可以延拓到任意秩的张量场上. 通常来说, 我们仅关注协变张量, 对应的逆变或者混合张量的结果只需要由镜像的操作得到.

假设 M 是光滑流形, V 是 M 上的光滑向量场, θ 是 V 的流. 对于任意 $p \in M$, 如果 t 充分接近零, 那么 θ_t 是从 p 的一个邻域到 $\theta_t(p)$ 的一个邻域的微分同胚, 所以 $d(\theta_t)_p^*$ 把 $\theta_t(p)$ 处的张量拉回到 p 处的张量:

$$\begin{aligned}(\theta_t^* A)_p(v_1,\ldots,v_k) &= d(\theta_t)_p^*\big(A_{\theta_t(p)}\big)(v_1,\ldots,v_k)\\ &= A_{\theta_t(p)}\big(d(\theta_t)_p(v_1),\ldots,d(\theta_t)_p(v_k)\big).\end{aligned}$$

给定 M 上的光滑协变张量场 A, 我们定义 A **相对于 V 的李导数**, 记为 $\mathcal{L}_V A$:

$$(\mathcal{L}_V A)_p = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(\theta_t^* A)_p = \lim_{t\to 0}\frac{d(\theta_t)_p^*(A_{\theta_t(p)}) - A_p}{t}. \tag{11.1}$$

引理 11.12. M, V, A 的定义如上，那么李导数 $\mathcal{L}_V A$ 是光滑张量场.

命题 11.13. 令 M 是光滑流形，$V \in \mathfrak{X}(M)$. 设 f 是 M 上的光滑实值函数（视为 0-张量场），A, B 是 M 上的光滑协变张量场.

1. $\mathcal{L}_V f = Vf$.
2. $\mathcal{L}_V(fA) = (\mathcal{L}_V f)A + f\mathcal{L}_V A$.
3. $\mathcal{L}_V(A\otimes B) = \mathcal{L}_V A \otimes B + A\otimes \mathcal{L}_V B$.
4. 如果 $X_1,\ldots,X_k$ 是光滑向量场，A 是光滑 k-张量场，那么

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_V\big(A(X_1,\ldots,X_k)\big) &= (\mathcal{L}_V A)(X_1,\ldots,X_k) + A(\mathcal{L}_V X_1,\ldots,X_k)\\ &\quad + \cdots + A(X_1,\ldots,\mathcal{L}_V X_k).\end{aligned}$$

Proof. (1) 设 θ 是 V 的流, 那么

$$(\theta_t^* f)(p) = f(\theta_t(p)) = f\circ\theta^{(p)}(t),$$

所以

$$(\mathcal{L}_V f)(p) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\big(f\circ\theta^{(p)}\big)'(t) = df_p(V_p) = V_p f.$$

(2) □

12 黎曼度量

12.1 黎曼流形

令 M 是光滑流形, M **上的黎曼度量**指的是 M 上的一个光滑的对称协变 2-张量场, 并且在每个点处是正定的. 一个**黎曼流形**指的是二元组 (M, g), 其中 M 是光滑流形, g 是 M 上的一个黎曼度量.

如果 g 是黎曼度量, 那么对于每个 $p \in M$, 2-张量 $g_p \in T^2(T_p^* M)$ 是 $T_p M$ 上的一个内积. 出于这一点, 对于 $v, w \in T_p M$, 我们通常使用 $\langle v, w\rangle_g$ 来表示实数 $g_p(v, w)$.

在任意光滑局部坐标 $\left(x^i\right)$ 下, 一个黎曼度量可以被写为:

$$g = g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j.$$

其中 (g_{ij}) 是光滑函数的对称正定矩阵. g 的对称性允许我们将 g 写为下述对称积的形式:

$$\begin{aligned}
g &= g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j \\
&= \frac{1}{2}\left(g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j + g_{ji}\, dx^i \otimes dx^j\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j + g_{ij}\, dx^j \otimes dx^i\right) \\
&= g_{ij}\, dx^i\, dx^j.
\end{aligned}$$

例 12.1 (Euclid 度量)**.** 最简单的黎曼度量的例子是 $\mathbb{R}^2$ 上的 **Euclid 度量** $\bar{g}$, 在标准坐标下, 其表示为

$$\bar{g} = \delta_{ij}\, dx^i\, dx^j.$$

通常我们把张量 α 与自身的对称积记为 α^2, 所以 Euclid 度量可以写为

$$\bar{g} = \left(dx^1\right)^2 + \cdots + \left(dx^n\right)^2.$$

对于向量 $v, w \in T_p\mathbb{R}^n$, 这导致

$$\bar{g}_p(v, w) = \delta_{ij} v^i w^j = \sum_{i=1}^n v^i w^i = v \cdot w.$$

换句话说, $\bar{g}$ 是 2-张量场, 其在每个点处的取值就是 Euclid 内积.

例 12.2 (积度量)**.** 如果 (M, g) 和 $(\widetilde{M}, \tilde{g})$ 是黎曼流形, 我们可以定义积流形 $M \times \widetilde{M}$ 上的黎曼度量 $\hat{g} = g \oplus \tilde{g}$, 这被称为**积度量**, 定义为:

$$\hat{g}\Big(\big(v, \tilde{v}\big), \big(w, \tilde{w}\big)\Big) = g(v, w) + \tilde{g}\big(\tilde{v}, \tilde{w}\big).$$

其中 $\big(v, \tilde{v}\big), \big(w, \tilde{w}\big) \in T_p M \oplus T_q \widetilde{M} \simeq T_{(p,q)}\big(M \times \widetilde{M}\big)$. 给定 M 的局部坐标 $\big(x^1, \ldots, x^n\big)$ 和 $\widetilde{M}$ 的局部坐标 $\big(y^1, \ldots, y^m\big)$, 可得 $M \times \widetilde{M}$ 的一个局部坐标 $\big(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^m\big)$, 积度量在这个坐标中可以局部地表示为分块对角阵

$$\big(\hat{g}_{ij}\big) = \begin{pmatrix} g_{ij} & 0 \\ 0 & \tilde{g}_{ij} \end{pmatrix}.$$

命题 12.3 (**黎曼度量的存在性**)**. 每个带边或者无边光滑流形都存在一个黎曼度量.**

Proof. 令 M 是带边或者无边光滑流形, 选取覆盖 M 的一族光滑坐标卡 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$. 在每个坐标系中, 都存在一个黎曼度量 $g_\alpha = \varphi_\alpha^* \bar{g}$, 其坐标表示为 $g_\alpha = \delta_{ij} dx^i dx^j$. 令 $\{\psi\}_\alpha$ 是从属于开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 的单位分解, 定义

$$g = \sum_\alpha \psi_\alpha g_\alpha,$$

每一个求和项在 $\operatorname{supp} \psi_\alpha$ 外的时候解释为零. 根据局部有限性, 在每个点的邻域中只有有限个求和项, 所以上述表达式定义了一个光滑张量场. 这显然是对称的, 下面只需要检查正定性. 如果 $v \in T_p M$ 非零, 那么

$$g_p(v, v) = \sum_\alpha \psi_\alpha(p) g_\alpha|_p(v, v),$$

因为每一个求和项都非负, 所以 $g_p(v, v) \geq 0$. 此时至少有一个 $\psi_\alpha(p) > 0$（因为所有的 $\psi_\alpha(p)$ 求和为 1）, 所以至少有一个 $\psi_\alpha(p) g_\alpha|_p(v, v) > 0$. 这就表明 g 确实是一个黎曼度量. □

下面是可以定义在黎曼流形 (M, g) 上的一些几何结构.

- 切向量 $v \in T_p M$ 的**长度**定义为

$$|v|_g = \langle v, v \rangle_g^{1/2} = g_p(v, v)^{1/2}.$$

- 两个非零切向量 $v, w \in T_p M$ 的**夹角**被定义为满足

$$\cos\theta = \frac{\langle v, w \rangle_g}{|v|_g |w|_g}$$

  的唯一的 $\theta \in [0, \pi]$.
- 切向量 $v, w \in T_p M$ 如果满足 $\langle v, w \rangle_g = 0$, 那么我们说它们是**正交的**. 这意味着二者至少有一个零向量, 或者夹角为 $\pi/2$.

研究黎曼流形的一个非常有用的工具是正交标架. 我们说开子集 $U \subseteq M$ 上的局部标架 $(E_1, \ldots, E_n)$ 是**正交标架**, 如果在每个点 $p \in U$ 处的向量组 $(E_1|_p, \ldots, E_n|_p)$ 构成 $T_p M$ 的一组正交基, 或者等价地说, 有 $\big\langle E_i, E_j \big\rangle_p = \delta_{ij}$.

例 12.4. 坐标标架 $\big(\partial/\partial x^i\big)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的关于 Euclid 度量的一个全局正交标架.

12.1.1 拉回度量

设 M, N 是光滑流形, g 是 N 上的黎曼度量, $F : M \to N$ 是光滑映射. 拉回 F^*g 是 M 上的一个光滑 2-张量场. 如果 F^*g 是正定的, 那么就是 M 上的黎曼度量, 被称为由 F 确定的**拉回度量**.

命题 12.5 (拉回度量判别法). 设 $F : M \to N$ 是光滑映射，g 是 N 上的黎曼度量，那么 F^*g 是 M 上的黎曼度量当且仅当 F 是光滑浸入.

Proof. 若 F^*g 是 M 上的黎曼度量. 任取 $p \in M$, $v \in T_pM$, 若 $dF_p(v) = 0$, 那么

$$(F^*g)_p(v, v) = g_{F(p)}\big(dF_p(v), dF_p(v)\big) = 0,$$

$(F^*g)_p$ 正定表明 $v = 0$, 即 dF_p 是单射, 即 F 是光滑浸入.

反之, 若 F 是光滑浸入, 那么 dF_p 是单射, 若 $(F^*g)_p(v, v) = 0$, 那么 $g_{F(p)}$ 的正定性表明 $dF_p(v) = 0$, 所以 $v = 0$, 即 $(F^*g)_p$ 是正定的, 所以 F^*g 是 M 上的黎曼度量. □

例 12.6. 我们计算 $\mathbb{R}^2$ 上的 Euclid 度量 $\bar{g} = dx^2 + dy^2$ 在极坐标中的表示, 那么 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ 表明

$$\begin{aligned}\bar{g} &= d(r\cos\theta)^2 + d(r\sin\theta)^2 \\ &= (\cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta)^2 + (\sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta)^2 \\ &= dr^2 + r^2\, d\theta^2.\end{aligned}$$

如果 (M, g) 和 $(\widetilde{M}, \tilde{g})$ 是黎曼流形, 光滑映射 $F : M \to N$ 如果是微分同胚并且使得 $F^*\tilde{g} = g$, 那么我们说 F 是一个 **(黎曼) 等距**. 如果每个 $p \in M$ 有一个邻域 U 使得 $F|_U$ 是 U 到 $\widetilde{M}$ 的一个开子集的等距, 那么我们说 F 是一个**局部等距**. 等价地说, F 是一个局部微分同胚且满足 $F^*\tilde{g} = g$.

一个黎曼流形 (M, g) 如果局部等距于 $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$, 那么 (M, g) 被称为**平坦黎曼流形**, g 被称为**平坦度量**.

定理 12.7. 对于一个黎曼流形 (M, g)，下面的说法等价：

1. g 是平坦的.
2. M 的每个点处都存在一个光滑坐标卡，使得 g 的坐标表示为 $g = \delta_{ij}\, dx^i\, dx^j$.
3. M 的每个点处都存在一个光滑坐标卡，使得坐标标架是正交标架.
4. M 的每个点都被包含在某个可交换正交标架的定义域中.

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2) 设 $F : M \to \mathbb{R}^n$ 是局部等距, 那么 $F^*\bar{g} = g$. 任取 $p \in M$, F 是局部微分同胚表明存在 p 的邻域 U 使得 $F|_U$ 是 $U \to F(U)$ 的微分同胚, 故 (U, F) 是 p 处的一个光滑坐标卡, 此时 g 的坐标表示为

$$g = (\delta_{ij} \circ F)\, dF^i \otimes dF^j = \sum_{i=1}^{n} dF^i \otimes dF^i. \qquad \square$$

12.1.2 黎曼子流形

如果 (M,g) 是一个黎曼流形, 每个子流形 $S\subseteq M$ 都自动继承一个拉回度量 ι^*g, 其中 $\iota:S\hookrightarrow M$ 是包含映射. 根据定义, 这意味着对于 $v,w\in T_pS$, 有

$$(\iota^*g)_p(v,w)=g_{\iota(p)}\big(d\iota_p(v),d\iota_p(w)\big)=g_p(v,w),$$

注意这里我们通过 $d\iota_p:T_pS\to T_pM$, 将 T_pS 视为 T_pM 的子空间. 所以 $(\iota^*g)_p$ 仅仅是 g_p 在 $T_pS\times T_pS$ 上的限制. 在这个度量下, S 被称为 M **的黎曼子流形**.

例 12.8. $\mathbb{S}^n$ 上由包含映射 $\iota:\mathbb{S}^n\hookrightarrow\mathbb{R}^{n+1}$ 确定的度量 $\mathring{g}=\iota^*\bar{g}$, 这个度量被称为球面上的 **圆度量**或者**标准度量**.

如果 (M,g) 是黎曼流形, $\iota:S\hookrightarrow M$ 是黎曼子流形, 通常通过局部参数化来计算度量 ι^*g. 回顾 命题 5.19, 存在从开集 $U\subseteq\mathbb{R}^k$ 到 M 的单射浸入 X, 其像集为 S 的开子集, 并且其逆是 S 的一个坐标映射. 因为 $\iota\circ X=X$（这里我们滥用同一个记号 X 来表示值域为 S 或者 M 的映射), 所以 ι^*g 的坐标表示就是 $X^*(\iota^*g)=X^*g$.

例 12.9 (图像坐标中的度量)**.** 令 $U\subseteq\mathbb{R}^n$ 是开集, $S\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ 是光滑函数 $f:U\to\mathbb{R}$ 的图像. 映射 $X:U\to\mathbb{R}^{n+1}$ 为 $X(u^1,\ldots,u^n)=\big(u^1,\ldots,u^n,f(u)\big)$, 那么 X 是 S 的一个全局参数化, 所以 S 上的由图像坐标诱导的度量为

$$X^*\bar{g}=\big(du^1\big)^2+\cdots+\big(du^n\big)^2+df^2.$$

例如, $\mathbb{S}^2$ 的上半球面由映射 $X:\mathbb{B}^2\to\mathbb{R}^3$

$$X(u,v)=\left(u,v,\sqrt{1-u^2-v^2}\right)$$

参数化, 那么在这个坐标下, 圆度量可以表示为

$$\begin{aligned}\mathring{g}=X^*\bar{g}&=du^2+dv^2+\left(\frac{-u\,du-v\,dv}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right)^2\\&=du^2+dv^2+\frac{u^2\,du^2+v^2\,dv^2+2uv\,du\,dv}{1-u^2-v^2}\\&=\frac{(1-v^2)\,du^2+(1-u^2)\,dv^2+2uv\,du\,dv}{1-u^2-v^2}.\end{aligned}$$

12.1.3 法丛

设 (M,g) 是 n 维黎曼流形, $S\subseteq M$ 是 k 维黎曼子流形. 对于任意 $p\in S$, 如果 $v\in T_pM$ 在内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_g$ 的意义下与 T_pS 中的每个向量都正交, 那么我们说 v **正交于** S. 定义 S **在** p **处的法空间**为子空间 $N_pS\subseteq T_pM$, 由所有 p 处的正交于 S 的向量构成. 定义 S **的法丛**是子集 $NS\subseteq TM$, 由 S 在每个点处的法空间的无交并构成.

12.2 黎曼距离函数

黎曼度量为我们提供的最重要的工具之一是定义曲线长度的能力. 假设 (M, g) 是黎曼流形. $\gamma : [a, b] \to M$ 是分段光滑曲线段, 那么定义 γ **的长度**为

$$\mathrm{L}_g(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|_g \, dt.$$

现在我们可以定义黎曼流形中两点之间的距离. 设 (M, g) 是连通的黎曼流形, 对于任意 $p, q \in M$, 定义 p **到** q **的距离**为所有从 p 到 q 的分段光滑曲线段 γ 的长度 $\mathrm{L}_g(\gamma)$ 的下确界, 记为 $d_g(p, q)$. 因为连通光滑流形中任意两点都可以用分段光滑曲线段连接, 所以这个定义是有意义的.

我们将看到黎曼距离函数将 M 变成为一个度量空间, 其度量诱导的拓扑与给定的流形拓扑相同. 关键在于下面的技术性引理, 它表明每个黎曼度量在坐标上都可以局部地与 Euclid 度量相比较.

引理 12.10. 令 g 是开子集 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 上的一个黎曼度量. 给定紧子集 $K \subseteq U$, 存在正常数 c, C 使得对于任意 $x \in K$ 和 $v \in T_x\mathbb{R}^n$, 有

$$c|v|_{\bar{g}} \le |v|_g \le C|v|_{\bar{g}}.$$

定理 12.11 (黎曼流形作为度量空间). 设 (M, g) 是连通的黎曼流形, 在黎曼距离函数下, M 成为一个度量空间, 并且这个度量诱导的拓扑和流形自带的拓扑相同.

12.3 切丛-余切丛同构

黎曼度量的另一个作用是它提供了切丛和余切丛之间的自然的同构. 给定光滑流形 M 上的一个黎曼度量 g, 我们可以定义一个丛同态 $\hat{g} : TM \to T^*M$. 对于 $p \in M$, $v \in T_pM$, 定义 $\hat{g}(v) \in T_p^*M$ 满足

$$\hat{g}(v)(w) = g_p(v, w) \quad w \in T_pM.$$

$\hat{g}$ 诱导了 $\mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}^*(M)$ 的映射:

$$\hat{g}(X)(Y) = g(X, Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

我们使用同一个记号来表示这个映射. 由于 $\hat{g}(X) : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ 是 $C^\infty(M)$-线性的, 根据张量表征引理, $\hat{g}(X)$ 是一个光滑余向量场. 又因为 $\hat{g}$ 是 $C^\infty(M)$-线性的, 根据丛同态表征引理, $\hat{g}$ 是一个光滑丛同态.

设 $v \in T_pM$ 使得 $\hat{g}(v) = 0$, 那么

$$0 = \hat{g}(v)(v) = g_p(v, v),$$

所以 $v = 0$, 所以 $\hat{g}$ 在每个点处是单射, 再根据维数相同, 所以 $\hat{g}$ 是双射, 从而是丛同构.

在任意光滑坐标 (x^i) 中, 我们可以写为 $g = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$, 如果 X, Y 是光滑向量场, 那么

$$\hat{g}(X)(Y) = g(X, Y) = g_{ij}\, dx^i(X)\, dx^j(Y) = g_{ij} X^i Y^j,$$

这表明余向量场 $\hat{g}(X)$ 有坐标表示

$$\hat{g}(X) = g_{ij} X^i\, dx^j.$$

故

$$\hat{g}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = g_{ij}\, dx^j = g_{ji}\, dx^j,$$

换句话说, $\hat{g} : TM \to T^*M$ 在 TM 的坐标标架和 T^*M 的坐标余标架下的表示矩阵与 g 的表示矩阵相同.

通常将余向量场 $\hat{g}(X)$ 的分量记为

$$\hat{g}(X) = X_j\, dx^j, \quad \text{where } X_j = g_{ij} X^i.$$

可以看到, 采用这种记号后, 通过黎曼度量 g, 我们将向量场 X 变成了一个余向量场, 且分量 X^j 变成了 $X_j = g_{ij} X^i$, 出于这一点, 我们说 $\hat{g}(X)$ 是 X 通过**指标下降**得到的. 通常我们使用 $X^\flat$ 来表示 $\hat{g}(X)$, 因为符号 $\flat$ ("flat") 在乐谱中用来表示音调的降低.

逆映射 $\hat{g}^{-1} : T^*M \to TM$ 的表示矩阵就是 (g_{ij}) 的逆矩阵. 我们记 $\left(g^{ij}\right)$ 为实值函数矩阵, 其在每个点 $p \in M$ 处的取值为 $\left(g_{ij}(p)\right)$ 的逆矩阵, 所以

$$g^{ij} g_{jk} = g_{kj} g^{ji} = \delta^i_k.$$

因为 g_{ij} 是对称矩阵, 所以 g^{ij} 也是对称矩阵. 所以对于余向量场 $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$, 向量场 $\hat{g}^{-1}(\omega)$ 有坐标表示

$$\hat{g}^{-1}(\omega) = \omega^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \text{where } \omega^i = g^{ij} \omega_j.$$

与上面一样, 我们使用 $\omega^\sharp$ ("sharp") 来表示 $\hat{g}^{-1}(\omega)$, 我们说 $\omega^\sharp$ 是 ω 通过**指标上升**得到的. 由于 $\flat$ 和 $\sharp$ 是从乐谱中借用的, 所以这两个互逆的映射通常被称为**音乐同构**.

上升算符最重要的用途是将梯度恢复为黎曼流形上的向量场. 对于黎曼流形 (M, g) 上的任意光滑实值函数 f, 我们定义向量场 f **的梯度**为

$$\operatorname{grad} f = (df)^\sharp.$$

解开这个定义, 我们看到对于任意 $X \in \mathfrak{X}(M)$, 梯度满足

$$\langle \operatorname{grad} f, X \rangle_g = \hat{g}(\operatorname{grad} f)(X) = df(X) = Xf.$$

因此梯度 grad f 是唯一满足

$$\langle \operatorname{grad} f, X \rangle_g = Xf \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M)$$

的向量场. 或者等价地说,

$$\langle \operatorname{grad} f, \cdot \rangle_g = df.$$

在光滑坐标中, grad f 有表示

$$\operatorname{grad} f = (df)^i \frac{\partial}{\partial x^i} = g^{ij}(df)_j \frac{\partial}{\partial x^i} = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

特别地, 这表明 grad f 是光滑的. 在 $\mathbb{R}^n$ 配备 Euclid 度量的时候, 这导出

$$\operatorname{grad} f = \delta^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

例 12.12. 我们计算函数 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ 相对于 Euclid 度量在极坐标中的梯度. 在 例 12.6 中我们知道 $\bar{g}$ 在极坐标中的矩阵为 $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{smallmatrix}\right)$, 所以逆矩阵为 $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/r^2 \end{smallmatrix}\right)$, 所以

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

黎曼流形上函数 f 的梯度实际上与 Euclid 空间中的梯度有相同的几何性质: 其指向 f 上升最快的方向, 正交于 f 的水平集, 并且其长度是 f 在任意方向上的方向导数的最大值. 要看出这一点, 任取 $p \in M$ 和 $v \in T_pM$, 有

$$vf = df_p(v) = \langle \operatorname{grad} f|_p, v \rangle_g\,,$$

所以 $v = \operatorname{grad} f|_p$ 的时候 vf 取得最大值, 此时最大值

$$vf = \left| \operatorname{grad} f|_p \right|_g^2.$$

指标上升和指标下降算符可以扩展到混合张量场上. 如果 F 是 (k,l)-张量场, $i \in \{1, \ldots, k+l\}$ 是 F 的某个协变指标, 我们可以构造一个新的 $(k+1, l-1)$-张量场 $F^\sharp$ 为

$$F^\sharp\big(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+l}\big) = F\big(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i^\sharp, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{k+l}\big),$$

其中 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+l}$ 是合适的向量场或者余向量场. 类似地, 如果 i 是逆变指标, 可以定义 $(k-1, l+1)$-张量场 $F^\flat$ 为

$$F^\flat\big(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+l}\big) = F\big(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i^\flat, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{k+l}\big).$$

例如, 如果 A 在某个局部坐标中表示为 $(1,2)$-张量场

$$A = A_i{}^j{}_k \, dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes dx^k,$$

那么 $A^\flat$ 是一个 $(0,3)$-张量场

$$A^\flat = A_{ijk} \, dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k,$$

其中

$$A_{ijk} = g_{jl} A_i{}^l{}_k.$$

13

微分形式

13.1 交错张量代数

我们定义投影 $\mathrm{Alt}: T^k(V^*) \to \Lambda^k(V^*)$, 称为**交错化**:

$$\mathrm{Alt}\,\alpha = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}(\operatorname{sgn}\sigma)(\sigma\alpha).$$

例 13.1. 如果 α 是 1-张量, 那么 $\mathrm{Alt}\,\alpha = \alpha$. 如果 β 是 2-张量, 那么

$$(\mathrm{Alt}\,\beta)(v, w) = \frac{1}{2}\big(\beta(v, w) - \beta(w, v)\big).$$

命题 13.2 (交错化的性质). 令 α 是有限维向量空间上的协变张量.

1. $\mathrm{Alt}\,\alpha$ 是交错的.
2. $\mathrm{Alt}\,\alpha = \alpha$ 当且仅当 α 是交错的.

Proof. (1) 任取 $\tau \in S_k$, 有

$$\begin{aligned}
\tau(\mathrm{Alt}\,\alpha) &= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}(\operatorname{sgn}\sigma)(\tau\sigma\alpha)\\
&= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}(\operatorname{sgn}\tau)(\operatorname{sgn}\tau\sigma)(\tau\sigma\alpha)\\
&= (\operatorname{sgn}\tau)\frac{1}{k!}\sum_{\eta\in S_k}(\operatorname{sgn}\eta)\eta\alpha\\
&= (\operatorname{sgn}\tau)(\mathrm{Alt}\,\alpha).
\end{aligned}$$

这就表明 $\mathrm{Alt}\,\alpha$ 是交错张量.

(2) 若 $\alpha = \mathrm{Alt}\,\alpha$, 则由 (1), α 是交错的. 反之, 若 α 是交错的, 那么

$$\mathrm{Alt}\,\alpha = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}(\operatorname{sgn}\sigma)(\sigma\alpha) = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}(\operatorname{sgn}\sigma)^2\alpha = \alpha. \qquad \square$$

13.1.1 基本交错张量

给定正整数 k, 一个有序的正整数的 k-元组 $I=(i_1,\ldots,i_k)$ 被称为**长度 k 的多重指标**. 如果 I 是这样一个多重指标, $\sigma\in S_k$, 我们记

$$I_\sigma=\left(i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(k)}\right).$$

注意到我们有 $I_{\sigma\tau}=(I_\sigma)_\tau$.

令 V 是 n-维向量空间, $\left(\varepsilon^1,\ldots,\varepsilon^n\right)$ 是 V^* 的一组基. 我们定义 V 上的一族 k-余向量来推广行列式函数的概念. 对于每个多重指标 $I=(i_1,\ldots,i_k)$ 且 $1\le i_1,\ldots,i_k\le n$, 定义协变 k-张量 $\varepsilon^I=\varepsilon^{i_1\cdots i_k}$ 为

$$\varepsilon^I(v_1,\ldots,v_k)=\det\begin{pmatrix}\varepsilon^{i_1}(v_1) & \cdots & \varepsilon^{i_1}(v_k)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \varepsilon^{i_k}(v_1) & \cdots & \varepsilon^{i_k}(v_k)\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}v_1^{i_1} & \cdots & v_k^{i_1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ v_1^{i_k} & \cdots & v_k^{i_k}\end{pmatrix}.$$

换句话说, 如果 $\mathbb{v}$ 是由 $v_1,\ldots,v_k$ 作为列向量构成的 $n\times k$ 矩阵, 每一列是 v_i 在对偶于 $\left(\varepsilon^i\right)$ 的基 (E_i) 下的分量, 那么 $\varepsilon^I(v_1,\ldots,v_k)$ 相当于 $\mathbb{v}$ 的由 $i_1,\ldots,i_k$ 行组成的 $k\times k$ 子矩阵的行列式. 因为行列式交换两列符号相反, 所以 ε^I 是一个交错 k-张量. 我们说 ε^I 是**基本交错张量**或者**基本 k-余向量**.

例 13.3. 设 $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$ 的标准对偶基为 $\left(e^1,e^2,e^3\right)$, 那么

$$e^{13}(v,w)=\det\begin{pmatrix}v^1 & w^1\\ v^3 & w^3\end{pmatrix}=v^1w^3-w^1v^3,$$
$$e^{123}(v,w,x)=\det(v,w,x).$$

为了简化计算, 我们扩展 Kronecker 符号的定义. 如果 I,J 都是长度为 k 的多重指标, 我们定义

$$\delta^I_J=\det\begin{pmatrix}\delta^{i_1}_{j_1} & \cdots & \delta^{i_1}_{j_k}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \delta^{i_k}_{j_1} & \cdots & \delta^{i_k}_{j_k}\end{pmatrix}.$$

可以证明, 在 I 或者 J 有重复的指标或者 J 不是 I 的一个置换的时候, 有 $\delta^I_J=0$. 在 I,J 都没有重复指标且 $J=I_\sigma$ 的时候, 有 $\delta^I_J=\operatorname{sgn}\sigma$.

命题 13.4 (基本 k-余向量的性质). 令 (E_i) 是 V 的一组基, $\left(\varepsilon^i\right)$ 是 V^* 的对偶基.

1. 如果 I 有重复指标, 那么 $\varepsilon^I=0$.
2. 如果 $J=I_\sigma$, 那么 $\varepsilon^I=(\operatorname{sgn}\sigma)\varepsilon^J$.
3. ε^I 在基向量上的值为

$$\varepsilon^I(E_{j_1},\ldots,E_{j_k})=\delta^I_J.$$

Proof. (1) I 有重复指标表明 ε^I 有两行相同, 所以为零. (2) 考虑 σ 是对换的情况即可, 此时 ε^J 是 ε^I 交换两行得到的, 所以符号相反. (3) 按照定义即得. □

基本 k-余向量的重要性在于其提供了 $\Lambda^k(V^*)$ 的一组方便的基. 当然, 所有的 ε^I 并不是线性无关的, 因为其中一些是零, 一些是相差一个符号. 但是, 下面的命题表明, 如果我们限制多重指标 $I=(i_1,\ldots,i_k)$ 是**递增的**, 即 $i_1<\cdots<i_k$, 那么这些多重指标对应的基本 k-余向量构成基. 我们定义一个加撇的求和记号用于表示仅对递增的多重指标求和, 例如

$$\sum_I{}' \alpha_I\varepsilon^I=\sum_{\{I\mid i_1<\cdots<i_k\}}\alpha_I\varepsilon^I.$$

命题 13.5 ($\Lambda^k(V^*)$ **的一组基).** 令 V 是有限维向量空间，$\left(\varepsilon^i\right)$ 是 V^* 的任意一组基，那么对于每个正整数 $k\le n$，k-余向量的集合

$$\mathcal{E}=\left\{\varepsilon^I\mid I\text{ 是长度为 }k\text{ 的多重递增指标}\right\}$$

构成 $\Lambda^k(V^*)$ 的一组基，因此

$$\dim\Lambda^k(V^*)=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

如果 $k>n$，那么 $\dim\Lambda^k(V^*)=0$.

Proof. 当 $k>n$ 的时候, 此时任意的 $\alpha\in\Lambda^k(V^*)$ 的参数一定线性相关, 所以 $\alpha=0$, 故 $\Lambda^k(V^*)$ 为平凡空间. 对于 $k\le n$ 的时候, 我们证明 $\mathcal{E}$ 线性无关且张成 $\Lambda^k(V^*)$. 令 (E_i) 是对偶于 $\left(\varepsilon^i\right)$ 的 V 的基.

首先说明 $\mathcal{E}$ 张成 $\Lambda^k(V^*)$. 任取 $\alpha\in\Lambda^k(V^*)$. 对于任意多重指标 $I=(i_1,\ldots,i_k)$, 定义

$$\alpha_I=\alpha(E_{i_1},\ldots,E_{i_k}).$$

那么任取多重指标 J, 如果 $J=I_\sigma$, 那么 $\alpha_J=(\operatorname{sgn}\sigma)\alpha_I$, 所以有

$$\alpha(E_{j_1},\ldots,E_{j_k})=\alpha_J=\sum_I{}'\alpha_I\delta^I_J=\sum_I{}'\alpha_I\varepsilon^I(E_{j_1},\ldots,E_{j_k}),$$

故 $\alpha=\sum_I'\alpha_I\varepsilon^I$, 这就说明 $\mathcal{E}$ 张成 $\Lambda^k(V^*)$.

然后说明 $\mathcal{E}$ 线性无关. 设 $\sum_I'\alpha_I\varepsilon^I=0$. 令 J 是任意递增的多重指标, 将两边作用在 $(E_{j_1},\ldots,E_{j_k})$ 上, 有

$$\alpha_J=\sum_I{}'\alpha_I\delta^I_J=0$$

所以系数 $\alpha_I=0$. □

特别地, 对于 n 维向量空间 V, $\Lambda^n(V^*)$ 是 1-维的并且由 $\varepsilon^{1\ldots n}$ 张成. 根据定义, $\varepsilon^{1\ldots n}$ 就是行列式函数.

命题 13.6. 设 V 是 n 维向量空间，$\omega\in\Lambda^n(V^*)$. 如果 $T:V\to V$ 是线性映射，$v_1,\ldots,v_n\in V$，那么

$$\omega(Tv_1,\ldots,Tv_n)=(\det T)\omega(v_1,\ldots,v_n).\tag{13.1}$$

Proof. 任取 V 的一组基 (E_i), 设 $\left(\varepsilon^i\right)$ 是对偶基. 此时 $\omega = c\varepsilon^{1\dots n}$. 记 T 在 (E_i) 下的表示矩阵为 (T_j^i), 即 $T_j = TE_j = T_j^i E_i$. 我们只需要证明结论对基向量成立, 此时右边为

$$(\det T)c\varepsilon^{1\dots n}(E_1, \dots, E_n) = c(\det T).$$

左边为

$$\omega(TE_1, \dots, E_n) = c\varepsilon^{1\dots n}(T_1, \dots, T_n) = c\det(T_j^i).$$

所以二者相等. □

13.1.2 楔积

给定 $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ 和 $\eta \in \Lambda^l(V^*)$, 我们定义**楔积**或者 **外积**为一个 $(k+l)$-余向量:

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} \operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta). \tag{13.2}$$

交错化前面的系数是为了下面的引理.

引理 13.7. V **是有限维向量空间，**$\left(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n\right)$ **是** V^* **的一组基．对于任意多重指标** $I = (i_1, \dots, i_k)$ **和** $J = (j_1, \dots, j_l)$**，有**

$$\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J = \varepsilon^{IJ},$$

其中 $IJ = (i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l)$ **由** I **和** J **拼接得到．**

Proof. 根据多重线性性, 只需要证明对于任意基向量 $(E_{p_1}, \dots, E_{p_{k+l}})$, 有

$$\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J(E_{p_1}, \dots, E_{p_{k+l}}) = \varepsilon^{IJ}(E_{p_1}, \dots, E_{p_{k+l}}). \tag{13.3}$$

CASE 1: 如果 $P = (p_1, \dots, p_{k+l})$ 有重复指标, 那么两边均为零, 所以相等.

CASE 2: P 包含一个指标且这个指标不在 I 或者 J 中. 此时等式右端为 $\delta_P^{IJ} = 0$. 类似的, 左端的每一项都是 ε^I 和 ε^J 的某个置换之积, 但是参数有一个指标不在 I 或者 J 中, 所以每一项都为零, 所以此时两端都为零.

CASE 3: $P = IJ$ 且 P 没有重复指标. 此时右端为 $\delta_P^{IJ} = 1$. 左端根据定义, 有

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J(E_{p_1}, \dots, E_{p_{k+l}}) \\
&= \frac{(k+l)!}{k!l!} \operatorname{Alt}\left(\varepsilon^I \otimes \varepsilon^J\right)(E_{p_1}, \dots, E_{p_{k+l}}) \\
&= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\operatorname{sgn}\sigma)\varepsilon^I\left(E_{p_{\sigma(1)}}, \dots, E_{p_{\sigma(k)}}\right)\varepsilon^J\left(E_{p_{\sigma(k+1)}}, \dots, E_{p_{\sigma(k+l)}}\right),
\end{aligned}$$

由于 $P = IJ$, 所以只有 $\sigma = \tau\eta$ 的时候上述求和非零, 其中 $\tau \in S_k$ 置换 $\{1, \dots, k\}$,

$\eta \in S_l$ 置换 $\{k+1, \dots, k+l\}$. 所以

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J (E_{p_1}, \dots, E_{p_{k+l}}) \\
&= \frac{1}{k!l!} \sum_{\substack{\tau \in S_k \\ \eta \in S_l}} (\operatorname{sgn} \tau)(\operatorname{sgn} \eta) \varepsilon^I \big(E_{p_{\tau(1)}}, \dots, E_{p_{\tau(k)}}\big) \varepsilon^J \big(E_{p_{k+\eta(1)}}, \dots, E_{p_{k+\eta(l)}}\big) \\
&= \left(\frac{1}{k!} \sum_{\tau \in S_k} (\operatorname{sgn} \tau) \varepsilon^I \big(E_{p_{\tau(1)}}, \dots, E_{p_{\tau(k)}}\big) \right) \left(\frac{1}{l!} \sum_{\eta \in S_l} \varepsilon^J \big(E_{p_{k+\eta(1)}}, \dots, E_{p_{k+\eta(l)}}\big) \right) \\
&= \big(\operatorname{Alt} \varepsilon^I\big)\big(E_{p_1}, \dots, E_{p_k}\big)\big(\operatorname{Alt} \varepsilon^J\big)\big(E_{p_{k+1}}, \dots, E_{p_{k+l}}\big) \\
&= \varepsilon^I \big(E_{p_1}, \dots, E_{p_k}\big) \varepsilon^J \big(E_{p_{k+1}}, \dots, E_{p_{k+l}}\big) = 1.
\end{aligned}
$$

Case 4: P 是 IJ 的一个置换且没有重复指标. 此时等式两端同时用置换作用使得参数变为与 IJ 的指标一致即可. □

命题 13.8 (楔积的性质). 令 $\omega, \omega', \eta, \eta', \xi$ 是有限维向量空间 V 上的多重余向量.

1. **双线性性.** 对于 $a, a' \in \mathbb{R}$，有
$$
\begin{aligned}
(a\omega + a'\omega') \wedge \eta &= a(\omega \wedge \eta) + a'(\omega' \wedge \eta), \\
\eta \wedge (a\omega + a'\omega') &= a(\eta \wedge \omega) + a'(\eta \wedge \omega').
\end{aligned}
$$
2. **结合律.**
$$
\omega \wedge (\eta \wedge \xi) = (\omega \wedge \eta) \wedge \xi.
$$
3. **反交换律.** 对于 $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ 和 $\eta \in \Lambda^l(V^*)$，有
$$
\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega. \tag{13.4}
$$
4. 如果 (ε^i) 是 V 的任意一组基，$I = (i_1, \dots, i_k)$ 是多重指标，那么
$$
\varepsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_k} = \varepsilon^I. \tag{13.5}
$$
5. 对于任意余向量 $\omega^1, \dots, \omega^k$ 和向量 $v_1, \dots, v_k$，有
$$
\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k (v_1, \dots, v_k) = \det\big(\omega^i(v_j)\big). \tag{13.6}
$$

Proof. 双线性性根据定义是显然的. 对于结合律, 我们有

$$
\big(\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J\big) \wedge \varepsilon^K = \varepsilon^{IJ} \wedge \varepsilon^K = \varepsilon^{IJK} = \varepsilon^I \wedge \varepsilon^{JK} = \varepsilon^I \wedge \big(\varepsilon^J \wedge \varepsilon^K\big),
$$

根据双线性性即可推得一般情况下的结合律. 类似的, 我们有

$$
\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J = \varepsilon^{IJ} = (\operatorname{sgn} \tau)\varepsilon^{JI} = (\operatorname{sgn} \tau)\varepsilon^J \wedge \varepsilon^I,
$$

其中 τ 将 IJ 置换为 JI. 可以证明 $\operatorname{sgn} \tau = (-1)^{kl}$, 因为 τ 可以分解为 kl 个对换（I 的每个指标都要移动经过 J 的所有指标）的乘积, 一般的反交换律由双线性性得到.

(4) 是引理 13.7 的直接推论. 对于 (5), 同样只需要证明 ω^j 取遍基 ε^{i_j} 的情况即可, 此时根据 (4) 即可证明. □

由于上述命题 (4) 的存在, 以后我们混用 $\varepsilon^{i_1}\wedge\cdots\wedge\varepsilon^{i_k}$ 和 ε^I 两种记号.

一个 k-余向量 η 如果可以表示为 $\eta=\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^k$ 的形式, 那么我们说 η 是**可分解的**. 值得注意的是当 $k>1$ 时不是所有 k-余向量都是可分解的. 但是根据命题 13.8 的 (4) 和命题 13.5, 任意 k-余向量都可以表示为一些可分解的 k-余向量的线性组合.

对于 n-维向量空间 V, 定义向量空间 $\Lambda(V^*)$ 为

$$\Lambda(V^*)=\bigoplus_{k=0}^{n}\Lambda^k(V^*).$$

那么 $\dim\Lambda(V^*)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$. 楔积的性质表明 $\Lambda(V^*)$ 是一个结合代数, 被称为 **V 的外代数**. 一个代数 A 被称为**分次的**, 如果其有一个直和分解 $A=\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}A^k$ 使得 $(A^k)(A^l)\subseteq A^{k+l}$. 如果乘积满足 $ab=(-1)^{kl}ba$（其中 $a\in A^k$, $b\in A^l$）, 那么我们说这个分次代数是**反交换的**. 我们已经表明 $\Lambda(V^*)$ 是一个反交换的分次代数.

13.1.3 内积

有一个重要的算符可以将向量和交错张量联系起来. 令 V 是有限维向量空间, 对于每个 $v\in V$, 我们定义线性映射 $i_v:\Lambda^k(V^*)\to\Lambda^{k-1}(V^*)$, 称为**通过 v 的内积**, 定义为

$$i_v\omega(w_1,\dots,w_{k-1})=\omega(v,w_1,\dots,w_{k-1}).$$

换句话说, $i_v\omega$ 即将 ω 的第一个参数固定为 v 得到的 $k-1$ 多重线性映射. 根据惯例, 当 ω 是 0-余向量（一个数）的时候, 我们将 $i_v\omega$ 解释为零. 另一个常用的记号为

$$v\lrcorner\,\omega=i_v\omega.$$

引理 13.9. 令 V 是有限维向量空间，$v\in V$.

1. $i_v\circ i_v=0$。
2. 如果 $\omega\in\Lambda^k(V^*)$ 和 $\eta\in\Lambda^l(V^*)$，那么

$$i_v(\omega\wedge\eta)=(i_v\omega)\wedge\eta+(-1)^k\omega\wedge(i_v\eta). \tag{13.7}$$

Proof. (1) 当 $k\geq 2$ 的时候, 此时 $i_v(i_v\omega)=\omega(v,v,\dots)$, 由于 ω 是交错的, 所以 $i_v\circ i_v=0$. 当 $k=1$ 或者 0 的时候, 显然 $i_v\circ i_v=0$.

(2) 只需要考虑 ω,η 均为可分解的情况即可. 对于余向量 $\omega^1,\dots,\omega^k$, 任取向量 $v_2,\dots,v_k$, 记 $v_1=v$, 有

$$\begin{aligned}\left(v\lrcorner\left(\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^k\right)\right)(v_2,\dots,v_k)&=\left(\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^k\right)(v,v_2,\dots,v_k)\\&=\det\left(\omega^i(v_j)\right)\\&=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\det\left(\omega^p(v_q)\right)_{p\neq i,q\neq 1},\end{aligned}$$

最后一步即将行列式按第一列展开, 这就表明

$$v \lrcorner \left(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k\right) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \omega^i(v) \omega^1 \wedge \cdots \wedge \hat{\omega}^i \wedge \cdots \wedge \omega^k,$$

其中的尖角符号表明 ω^i 被跳过. □

13.2 流形上的微分形式

回到 n-维光滑流形 M 上, 记 $T^k T^* M$ 的由交错张量构成的子集为 $\Lambda^k T^* M$:

$$\Lambda^k T^* M = \coprod_{p \in M} \Lambda^k\left(T_p^* M\right).$$

这是 $T^k T^* M$ 的一个光滑子丛, 且是 M 上的秩 $\binom{n}{k}$ 的向量丛.

$\Lambda^k T^* M$ 的截面被称为**微分 k-形式**, 或者简称为 **k-形式**. 记所有光滑 k-形式的向量空间为

$$\Omega^k(M) = \Gamma\left(\Lambda^k T^* M\right).$$

两个微分形式的楔积由逐点定义: $(\omega \wedge \eta)_p = \omega_p \wedge \eta_p$. 因此 k-形式和 l-形式的楔积为 $(k+l)$-形式. 如果 f 是 0-形式, η 是 k-形式, 我们可以将楔积 $f \wedge \eta$ 视为通常的乘积 $f\eta$. 如果我们定义

$$\Omega^*(M) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k(M), \tag{13.8}$$

那么 $\Omega^*(M)$ 是结合的反对称的分次代数.

在任意光滑坐标卡中, 一个 k-形式 ω 可以局部表示为

$$\omega = {\sum_I}' \omega_I \, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = {\sum_I}' \omega_I \, dx^I.$$

根据楔积的性质, 我们有

$$dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{j_k}}\right) = \delta^I_J.$$

因此 ω 的分量 ω_I 为

$$\omega_I = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\right).$$

例 13.10. 一个 0-形式就是连续的实值函数, 一个 1-形式即余向量场.

如果 $F: M \to N$ 是光滑映射, ω 是 N 上的微分形式, 拉回 $F^*\omega$ 是 M 上的微分形式, 定义为

$$(F^*\omega)_p(v_1, \ldots, v_k) = \omega_{F(p)}\left(dF_p(v_1), \ldots, dF_p(v_k)\right).$$

引理 13.11. 设 $F: M \to N$ 是光滑映射.

1. $F^*: \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ 是线性映射.
2. $F^*(\omega \wedge \eta) = (F^*\omega) \wedge (F^*\eta)$.
3. 在任意光滑坐标卡中,

$$F^*\left(\sum_I{}' \omega_I \, dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k}\right) = \sum_I{}' (\omega_I \circ F)\, d\big(y^{i_1} \circ F\big) \wedge \cdots \wedge d\big(y^{i_k} \circ F\big).$$

这个引理告诉我们微分形式拉回的计算规则, 与协变张量场拉回的计算规则是一致的.

例 13.12. 定义 $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ 为 $F(u,v) = (u, v, u^2 - v^2)$, 令 $\omega = y\,dx \wedge dz + x\,dy \wedge dz$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的 2-形式, 那么拉回 $F^*\omega$ 为

$$\begin{aligned} F^*\omega &= v\,du \wedge d(u^2 - v^2) + u\,dv \wedge d(u^2 - v^2) \\ &= v\,du \wedge (2u\,du - 2v\,dv) + u\,dv \wedge (2u\,du - 2v\,dv) \\ &= -2v^2\,du \wedge dv + 2u^2\,dv \wedge du, \end{aligned}$$

由于 $du \wedge dv = -dv \wedge du$, 所以

$$F^*\omega = -2(u^2 + v^2)\,du \wedge dv.$$

13.3 外微分

回顾不是所有的 1-形式都是函数的微分: 给定一个光滑 1-形式 ω, 存在光滑函数 f 使得 $\omega = df$ 的一个必要条件是 ω 是**闭的**, 即在每个光滑坐标卡中都有

$$\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} = 0. \tag{13.9}$$

注意到这个等式左边关于指标 i, j 是反对称的, 所以可以解释为一个交错张量场的 ij-分量. 于是我们可以定义一个 2-形式 $d\omega$, 其在局部坐标卡中为

$$d\omega = \sum_{i<j}\left(\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}\right) dx^i \wedge dx^j, \tag{13.10}$$

此时 ω 是闭的当且仅当在每个坐标卡中有 $d\omega = 0$.

事实证明 $d\omega$ 实际上是全局定义的, 独立于坐标卡的选择. 对于光滑流形 M, 我们将证明存在一个可微的算子 $d: \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ 使得 $d(d\omega) = 0$. 因此, 一个光滑 k-形式 ω 等于 $d\eta$（η 是 $(k-1)$-形式）的一个必要条件是 $d\omega = 0$.

Euclid 空间中 d 的定义是很直接的: 如果 $\omega = \sum_J' \omega_J \, dx^J$ 是开集 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 上的光滑 k-形式, 那么我们定义**外微分** $d\omega$ 为 $(k+1)$-形式:

$$d\left(\sum_J{}' \omega_J \, dx^J\right) = \sum_J{}' d\omega_J \wedge dx^J, \tag{13.11}$$

其中 $d\omega_J$ 是函数 ω_J 的微分. 写的更详细一点, 即

$$d\left(\sum_J{}' \omega_J\, dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}\right) = \sum_J{}' \sum_i \frac{\partial \omega_J}{\partial x^i}\, dx^i \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}. \tag{13.12}$$

注意到当 ω 是 1-形式的时候, 这表明

$$\begin{aligned} d\big(\omega_j\, dx^j\big) &= \sum_{i,j} \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i}\, dx^i \wedge dx^j \\ &= \sum_{i<j} \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i}\, dx^i \wedge dx^j + \sum_{i>j} \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i}\, dx^i \wedge dx^j \\ &= \sum_{i<j} \left(\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}\right) dx^i \wedge dx^j, \end{aligned}$$

所以这与前面的定义是一致的. 对于光滑 0-形式 f, 则变为

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i}\, dx^i.$$

即函数的微分.

命题 13.13 ($\mathbb{R}^n$ 上的外微分的性质).

1. d 在 $\mathbb{R}$ 上是线性的.
2. 如果 ω 是光滑 k-形式, η 是光滑 1-形式, 那么
$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$
3. $d \circ d \equiv 0$.
4. d 和拉回操作交换: 如果 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 和 $V \subseteq \mathbb{R}^m$ 是开集, $F : U \to V$ 是光滑映射, $\omega \in \Omega^k(V)$, 那么
$$F^*(d\omega) = d\big(F^*\omega\big). \tag{13.13}$$

Proof. 线性性是显然的.对于 (2),由于线性性,我们只需要考虑 $\omega = u\, dx^I \in \Omega^k(U)$ 和 $\eta = v\, dx^J \in \Omega^l(U)$ 的情况即可. 首先, 我们证明对于任意多重指标 I, 有 $d(u\, dx^I) = du \wedge dx^I$. 如果 I 有重复指标, 那么 $dx^I = 0$, 所以 $d(u\, dx^I) = 0 = du \wedge dx^I$. 如果 I 没有重复指标, 设 σ 为将 I 变为递增指标 J 的置换, 那么

$$d\big(u\, dx^I\big) = (\operatorname{sgn}\sigma)\, d\big(u\, dx^J\big) = (\operatorname{sgn}\sigma)\, du \wedge dx^J = du \wedge dx^I.$$

利用这一点, 我们计算得

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= d\big((u\, dx^I) \wedge (v\, dx^J)\big) \\ &= d\big(uv\, dx^I \wedge dx^J\big) \\ &= (u\, dv + v\, du) \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= \big(du \wedge dx^I\big) \wedge \big(v\, dx^J\big) + (-1)^k \big(u\, dx^I\big) \wedge \big(dv \wedge dx^J\big) \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta. \end{aligned}$$

对于 (3), 首先证明 0-形式的情况, 此时

$$d(du) = d\left(\frac{\partial u}{\partial x^j}\,dx^j\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i\,\partial x^j}\,dx^i \wedge dx^j$$
$$= \sum_{i<j}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\,\partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j\,\partial x^i}\right)dx^i \wedge dx^j = 0.$$

对于一般的情况, 利用 (2), 我们有

$$d(d\omega) = d\left({\sum_J}' d\omega_J \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}\right)$$
$$= {\sum_J}' d(d\omega) \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k} +$$
$${\sum_J}' \sum_{i=1}^{k} (-1)^i\, d\omega_J \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge d\left(dx^{j_i}\right) \wedge \cdots \wedge dx^{j_k} = 0.$$

对于 (4), 同样只需要考虑 $\omega = u\,dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ 的情况, 此时

$$F^*\Big(d\left(u\,dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}\right)\Big) = F^*\left(du \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}\right)$$
$$= d(u \circ F) \wedge d\left(x^{i_1} \circ F\right) \wedge \cdots \wedge d\left(x^{i_k} \circ F\right).$$

另一方面, 有

$$d\Big(F^*\left(u\,dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}\right)\Big) = d\Big((u \circ F)\,d\left(x^{i_1} \circ F\right) \wedge \cdots \wedge d\left(x^{i_k} \circ F\right)\Big)$$
$$= d(u \circ F) \wedge d\left(x^{i_1} \circ F\right) \wedge \cdots \wedge d\left(x^{i_k} \circ F\right),$$

所以 d 和 F^* 可交换. □

这些结果允许我们将外微分的定义转移到流形上.

定理 13.14 (外微分的存在唯一性). 令 M 是光滑流形, 对于所有的 k 存在唯一的算子 $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$, 称为**外微分**, 其满足下面的四条性质:

1. d 在 $\mathbb{R}$ 上是线性的.
2. 如果 $\omega \in \Omega^k(M)$ 和 $\eta \in \Omega^l(M)$, 那么
$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$
3. $d \circ d \equiv 0$.
4. 对于 $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$, df 是 f 的微分, 即 $df(X) = Xf$.

如果 $A = \bigoplus_k A^k$ 是分次代数,线性映射 $T : A \to A$ 如果对于每个 k,都有 $T(A^k) \subseteq A^{k+m}$,那么称 T 是 m **次映射**. 如果 $x \in A^k, y \in A^l$ 时有 $T(xy) = (Tx)y + (-1)^k x(Ty)$, 那么称 T 是**反导子**. 前面的定理可以总结为函数的微分可以唯一地延拓为 $\Omega^*(M)$ 上的一个 1 次的反导子且平方为零.

命题 13.15 (外微分的自然性). 如果 $F : M \to N$ 是光滑映射，那么对于每个 k，拉回映射 $F^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ 与 d 交换：对于任意 $\omega \in \Omega^k(N)$，有

$$F^*(d\omega) = d(F^*\omega). \tag{13.14}$$

现在我们可以把余向量场的术语进行一个延申. 一个微分形式 $\omega \in \Omega^k(M)$ 如果使得 $d\omega = 0$, 那么我们说 ω 是**闭形式**. 如果存在 $(k-1)$-形式 η 使得 $\omega = d\eta$, 那么我们说 ω 是**恰当形式**.

$d \circ d = 0$ 表明恰当形式都是闭形式. 我们已经看到闭形式不一定都是恰当形式. 换句话说, 序列

$$\Omega^k(M) \xrightarrow{d} \Omega^{k+1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^{k+2}(M)$$

不是正合列.

13.3.1 $\mathbb{R}^3$ 中的外微分和向量微积分

例 13.16. 我们来计算 $\mathbb{R}^3$ 上任意 1-形式和 2-形式的外微分. 任意光滑 1-形式都形如

$$\omega = P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

其中 P, Q, R 是光滑函数. 那么

$$\begin{aligned}
d\omega &= dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz \\
&= \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz\right) \wedge dy \\
&\quad + \left(\frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz\right) \wedge dz \\
&= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) dx \wedge dz + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz.
\end{aligned}$$

任意光滑 2-形式可以写为

$$\eta = u\,dx \wedge dy + v\,dx \wedge dz + w\,dy \wedge dz.$$

那么

$$\begin{aligned}
d\eta &= du \wedge dx \wedge dy + dv \wedge dx \wedge dz + dw \wedge dy \wedge dz \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\right) \wedge dx \wedge dy \\
&\quad + \left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz\right) \wedge dx \wedge dz \\
&\quad + \left(\frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz\right) \wedge dy \wedge dz \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) dx \wedge dy \wedge dz.
\end{aligned}$$

回顾 $\mathbb{R}^n$ 上的向量微积分算符: 函数 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的 (Euclid) 梯度和向量场 $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ 的**散度**分别定义为

$$\operatorname{grad} f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X^i}{\partial x^i}. \tag{13.15}$$

此外, 在 $n=3$ 的时候, 向量场 $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ 的**旋度**被定义为

$$\operatorname{curl} X = \left(\frac{\partial X^3}{\partial y} - \frac{\partial X^2}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\partial X^1}{\partial z} - \frac{\partial X^3}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{\partial X^2}{\partial x} - \frac{\partial X^1}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial z}.$$

一个有趣的事实是, 前面例子中 2-形式 $d\omega$ 的分量正好是分量函数为 (P, Q, R) 的向量场的旋度的分量 (除开可能相差一个符号之外). 类似的, 除开符号差异之外, $d\eta$ 的分量和向量场散度的分量也非常相似. 这些相似性可以由下面的方式精确叙述.

$\mathbb{R}^3$ 上的 Euclid 度量导出指标下降同构: $\flat : \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) \to \Omega^1(\mathbb{R}^3)$. 即将向量场 $X = X^i\,\partial/\partial x^i$ 送到

$$X^\flat = X_j\,dx^j = g_{ij}X^i\,dx^j = \sum_{i=1}^3 X^i\,dx^i.$$

内积导出了另一个映射 $\beta : \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) \to \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ 为

$$\beta(X) = X \lrcorner (dx \wedge dy \wedge dz). \tag{13.16}$$

不难验证 β 是 $C^\infty(\mathbb{R}^3)$-线性的, 所以其对应一个光滑丛同态 $T\mathbb{R}^3 \to \Lambda^2 T^*\mathbb{R}^3$. 这是一个单射且 $T\mathbb{R}^3$ 和 $\Lambda^2 T^*\mathbb{R}^3$ 的秩都是 3, 所以这是一个丛同构. 类似的, 我们可以定义光滑丛同构 $* : C^\infty(\mathbb{R}^3) \to \Omega^3(\mathbb{R}^3)$ 为

$$*(f) = f\,dx \wedge dy \wedge dz. \tag{13.17}$$

那么上述所有算符的关系可以总结为如下交换图:

$$\begin{tikzcd}
C^\infty(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "\operatorname{grad}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "\operatorname{curl}"] \arrow[d, "\flat"] & \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "\operatorname{div}"] \arrow[d, "\beta"] & C^\infty(\mathbb{R}^3) \arrow[d, "*"] \\
\Omega^0(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "d"] & \Omega^1(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "d"] & \Omega^2(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "d"] & \Omega^3(\mathbb{R}^3)
\end{tikzcd} \tag{13.18}$$

Proof. 我们证明上面的图确实是交换的. 首先任取 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, 有 $(\operatorname{grad} f)^\flat = df$, 这就表明左半部分是交换的. 然后任取 $X = P\,\partial/\partial x + Q\,\partial/\partial y + R\,\partial/\partial z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$, 我们有

$$\begin{aligned}
\beta(\operatorname{curl} X) = &\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial x} \lrcorner (dx \wedge dy \wedge dz) \\
&+ \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial y} \lrcorner (dx \wedge dy \wedge dz) \\
&+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial z} \lrcorner (dx \wedge dy \wedge dz),
\end{aligned}$$

由于

$$\frac{\partial}{\partial x} \lrcorner\, dx = 1, \quad \frac{\partial}{\partial x} \lrcorner\, dy = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \lrcorner\, dz = 0,$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial x} \lrcorner\, (dx \wedge dy \wedge dz) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \lrcorner\, dx\right) \wedge dy \wedge dz = dy \wedge dz,$$

类似的有

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \lrcorner\, (dx \wedge dy \wedge dz) &= -dx \wedge dz, \\ \frac{\partial}{\partial z} \lrcorner\, (dx \wedge dy \wedge dz) &= dx \wedge dy, \end{aligned}$$

所以

$$\beta(\operatorname{curl} X) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz - \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dx \wedge dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

结合 例 13.16, 所以 $\beta(\operatorname{curl} X) = d(X^\flat)$. 这表明中间部分是交换的.

最后, 我们有

$$*(\operatorname{div} X) = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

另一方面, 结合 例 13.16, 有

$$\begin{aligned} d(\beta(X)) &= d\big(P\, dy \wedge dz - Q\, dx \wedge dz + R\, dx \wedge dy\big) \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz \\ &= *(\operatorname{div} X). \end{aligned}$$

这就表明右半部分是交换的. □

注释 13.17. 实际上，该图的左半部分和右半部分替换为 $\mathbb{R}^n$ 仍然是交换的. 将 $\mathbb{R}^3$ 上的向量微积分推广到更高维度也是微分形式理论发展的主要动机之一. 特别地，旋度仅仅在 3 维空间的向量场上有意义，但是外微分是不受维数限制的.

14

定向

14.1 向量空间的定向

令 V 是维数 $n \geq 1$ 的向量空间. 设 $(E_1, \ldots, E_n)$ 和 $\left(\widetilde{E}_1, \ldots, \widetilde{E}_n\right)$ 是 V 的两组有序基, 如果过渡矩阵 $\left(B_j^i\right)$ 的行列式为正, 那么我们说这两组基是**一致定向的**, 其中过渡矩阵定义为

$$E_j = B_j^i \widetilde{E}_i.$$

显然一致定向是 V 的所有有序基集合上的一个等价关系. 而且这个等价关系恰好划分了两个等价类, 任取一组有序基 $(E_1, \ldots, E_n)$, 显然 $(-E_1, E_2, \ldots, E_n)$ 和它不是一致定向的, 所以这两个有序基处于不同的等价类. 对于任意一组有序基 $\left(\widetilde{E}_1, \ldots, \widetilde{E}_n\right)$, 如果其不与 $(E_1, \ldots, E_n)$ 一致定向, 即 $(E_1, \ldots, E_n)$ 到 $\left(\widetilde{E}_1, \ldots, \widetilde{E}_n\right)$ 的过渡矩阵行列式为负, 那么 $(-E_1, E_2, \ldots, E_n)$ 到 $\left(\widetilde{E}_1, \ldots, \widetilde{E}_n\right)$ 的过渡矩阵行列式为正, 所以 $\left(\widetilde{E}_1, \ldots, \widetilde{E}_n\right)$ 和 $(-E_1, E_2, \ldots, E_n)$ 一致定向, 故这个等价关系划分了两个等价类.

如果 $\dim V = n \geq 1$, 定义 V **的定向**是有序基的一个等价类. 如果 $(E_1, \ldots, E_n)$ 是 V 的任意一组有序基, 我们记其确定的定向为 $[E_1, \ldots, E_n]$, 以及其相反的定向为 $-[E_1, \ldots, E_n]$. 一个附带了定向的向量空间被称为**定向向量空间**. 如果 V 是定向的, 那么在给定定向中的任一有序基 $(E_1, \ldots, E_n)$ 都被称为是 **定向的**或者**正定向的**. 不在给定定向中的任意基都被称为是**负定向的**.

对于零维向量空间 V 的特殊情况, 我们定义 V 的定向在数 ± 1 中选取.

例 14.1. $\mathbb{R}^n$ 的由标准基确定的定向 $[e_1, \ldots, e_n]$ 被称为**标准定向**. $\mathbb{R}^0$ 的标准定向被定义为 $+1$.

利用交错张量对参数顺序敏感的特性, 定向和交错张量之间存在密切联系.

命题 14.2. 令 V 是 n 维向量空间. 每个非零张量 $\omega \in \Lambda^n(V^*)$ 都确定了一个定向 $\mathcal{O}_\omega$ 为: 如果 $n \geq 1$, 那么 $\mathcal{O}_\omega$ 是有序基 $(E_1, \ldots, E_n)$ 的集合, 其中 $\omega(E_1, \ldots, E_n) > 0$. 如果 $n = 0$, 那么 $\omega > 0$ 的时候 $\mathcal{O}_\omega = +1$, $\omega < 0$ 的时候 $\mathcal{O}_\omega = -1$. 两个非零 n-余向量确定了同一个定向当且仅当其中一个是另一个的正的倍数.

Proof. 0-维的情况是显然的, 因为 $\Lambda^0(V^*) = \mathbb{R}$. 假设 $n \geq 1$, 对于非零 $\omega \in \Lambda^n(V^*)$, 我们证明 $\mathcal{O}_\omega$ 确实是一个等价类.

假设 (E_i) 和 $(\widetilde{E}_j)$ 是 V 的两组有序基, $B: V \to V$ 是将 E_j 送到 $\widetilde{E}_j$ 的线性映射. 也就是说 $\widetilde{E}_j = BE_j = B_j^i E_i$, 那么根据命题 13.6, 有

$$\omega(\widetilde{E}_1, \ldots, \widetilde{E}_n) = (\det B)\omega(E_1, \ldots, E_n).$$

这表明 $(\widetilde{E}_j)$ 和 (E_i) 是一致定向的当且仅当 $\omega(\widetilde{E}_1, \ldots, \widetilde{E}_n)$ 和 $\omega(E_1, \ldots, E_n)$ 的符号相同, 这就表明 $\mathcal{O}_\omega$ 确实是一个等价类. □

如果 V 是定向的 n-维向量空间, ω 是上述确定了 V 的定向的 n-余向量, 那么我们说 ω 是 **(正) 定向的 n-余向量**. 例如, n-余向量 $e^1 \wedge \cdots \wedge e^n$ 是关于 $\mathbb{R}^n$ 的标准定向的正定向余向量.

注意到 $\Lambda^n(V^*)$ 是 1 维向量空间, 所以选取 V 的定向等价于选取 $\Lambda^n(V^*) \setminus \{0\}$ 的分支.

14.2 流形的定向

令 M 是光滑流形. 我们定义 **M 上的逐点定向**是在每个切空间中的一个定向的选择. 但是这并不是一个非常有用的概念, 因为邻近点的定向可能没有任何关系. 为了使得定向和光滑结构产生联系, 我们需要额外的条件确保邻近切空间的定向是彼此一致的.

令 M 是光滑 n-流形, 配备一个逐点定向. 如果 (E_i) 是 TM 的一个局部标架, 且对于每个 $p \in U$, $(E_1|_p, \ldots, E_n|_p)$ 都是 T_pM 的正定向的基, 那么我们说 (E_i) 是 **(正) 定向的**. **负定向**的概念做类似的定义.

如果 M 的每个点都在一个定向的局部标架的定义域中, 那么我们说这个逐点定向是**连续的**. 定义 **M 的定向**为一个连续的逐点定向. 如果 M 存在一个定向, 那么我们说 M 是**可定向的**, 否则称 M 是**不可定向的**. 一个**定向流形**指的是有序对 $(M, \mathcal{O})$, 其中 M 是可定向的光滑流形, $\mathcal{O}$ 是 M 的一个定向. 对于每个 $p \in M$, 由 $\mathcal{O}$ 确定的 T_pM 的定向记为 $\mathcal{O}_p$.

如果 M 是零维的, 那么定义 M 的定向是在每个点处选取 ± 1 中的一个数. 这种情况下连续性的概念是无意义的.

命题 14.3 (由 n-形式确定的定向). 令 M 是一个光滑 n-流形，M 上的任意非消失的 n-形式 ω 都确定了唯一一个 M 上的定向使得 ω 在每个点处是正定向的. 反之，如果 M 有一个给定的定向，那么存在一个光滑的非消失 n-形式使得在每个点处都是正定向的.

注释 14.4. 这里的非消失指的是处处非零. 此时 M 上的任意非消失 n-形式都被称为**定向形式**. 如果 M 是定向的，ω 是确定了这个定向的定向形式，那么我们说 ω 是 **(正) 定向的**. 如果 ω 和 $\tilde{\omega}$ 是两个正定向形式，那么显然有 $\tilde{\omega} = f\omega$，其中 f 是严格正值的光滑函数.

Proof. 令 ω 是非消失 n-形式. 那么 ω 定义了一个逐点定向, 我们只需要验证这是连续的. 在 $n=0$ 时是平凡的. 假设 $n \geq 1$, 给定 $p \in M$, 设 (E_i) 是 p 的某个连通邻域 U 上的局部标架, (ε^i) 是其对偶余标架. 那么 ω 在这个标架中表示为 $\omega = f\varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^n$, 其中 f 是连续函数. ω 非消失表示 f 非处处非零, 所以对于所有 U 中的点有

$$\omega(E_1, \ldots, E_n) = f \neq 0.$$

因为 U 连通, 所以上述表达式一定恒正或者恒负, 因此给定的标架在 U 上要么正定向要么负定向. 如果是负定向的, 我们可以将 E_1 替换为 $-E_1$ 得到一组新的正定向的标架. 因此, 由 ω 确定的逐点定向是连续的.

反之, 假设 M 是定向的, 令 $\Lambda_+^n T^*M \subseteq \Lambda^n T^*M$ 是由所有点处的正定向的 n-余向量构成的开子集. 在任意点 $p \in M$ 处, $\Lambda_+^n T^*M$ 与纤维 $\Lambda^n(T_p^*M)$ 的交是上半平面, 因此是凸集. 根据通常的单位分解, 存在 $\Lambda_+^n T^*M$ 的一个光滑全局截面, 即一个正定向的光滑 n-形式. □

对于一个定向光滑流形上的光滑坐标卡, 如果坐标标架 $(\partial/\partial x^i)$ 是正定向的, 那么我们说这个坐标卡是**正定向的**, 如果坐标标架是负定向的, 则称这个坐标卡是**负定向的**. 如果一个光滑图册 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ 的任意转移映射 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 在 $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ 中的每个点处都有正的 Jacobi 行列式, 那么我们说这个图册是**一致定向的**.

命题 14.5 (通过坐标图册确定的定向). 令 M 是光滑带边或者无边流形. 给定 M 的一个一致定向的光滑图册, 存在 M 的一个定向使得给定图册中的每个坐标卡都是正定向的. 反之, 如果 M 是定向的并且 $\partial M = \emptyset$ 或者 $\dim M > 1$, 那么所有定向的光滑坐标卡的集合是 M 的一个一致定向图册.

Proof. 首先假设 M 有一个一致定向的光滑图册. 那么图册中的每个坐标卡都在定义域中的每个点处确定了一个定向. 图册是一致定向的保证在两个坐标卡重叠的区域中, 两个坐标标架的转移矩阵是行列式为正的 Jacobi 矩阵, 所以这两个坐标卡在重叠区域确定了相同的定向. 由于每个点都被一个坐标卡包含, 所以这个逐点定向是连续的.

反之, 假设 M 是定向的且 $\partial M = \emptyset$ 或者 $\dim M > 1$. 根据连续性, 每个点 $p \in M$ 都被一个定向的局部标架 $(E_1, \ldots, E_n)$ 包含, 此时取 p 处的一个坐标标架 $(\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^n)$, 有 $E_j = B_j^i\, \partial/\partial x^i$, 由于 (B_j^i) 是连续函数, 假设这个局部坐标卡是连通的, 所以 $\det(B_j^i)$ 恒正或者恒负, 所以坐标标架要么正定向要么负定向, 如果负定向, 则可以将坐标 x^1 替换为 $-x^1$ 得到一个正定向的坐标标架. 于是所有正定向的光滑坐标卡覆盖 M, 且这些坐标卡的转移映射都有正的 Jacobi 行列式, 所以构成一个一致定向图册. (当 $\dim M = 1$ 时对带边流形不适用, 因为我们约定边界坐标卡中的最后一个坐标是非负的) □

命题 14.6 (积定向). 假设 $M_1, \ldots, M_k$ 是定向的光滑流形. 那么 $M_1 \times \cdots \times M_k$ 上存在唯一的定向, 被称为积定向, 使得: 如果 ω_i 是 M_i 上给定定向的定向形式, 那么 $\pi_1^*\omega_1 \wedge \cdots \wedge \pi_k^*\omega_k$ 是积定向的定向形式.

Proof. 此时 M_i 的一致定向图册之积构成 $M_1 \times \cdots \times M_k$ 的一个一致定向图册, 所以给出 $M_1 \times \cdots \times M_k$ 上的一个定向. □

命题 14.7. 令 M 是连通的定向光滑流形，那么 M 恰有两个定向. 如果 M 的两个定向在某个点处相同，那么它们相等.

Proof. 设 $\mathcal{O}$ 和 $\widetilde{\mathcal{O}}$ 是 M 的两个定向. 对于任意的 $p \in M$, $\mathcal{O}_p$ 和 $\widetilde{\mathcal{O}}_p$ 要么相同要么相反, 定义函数 $f : M \to \{\pm 1\}$ 为

$$f(p) = \begin{cases} 1 & \mathcal{O}_p = \widetilde{\mathcal{O}}_p, \\ -1 & \mathcal{O}_p = -\widetilde{\mathcal{O}}_p, \end{cases}$$

根据连续性, 存在 p 处的连通邻域 U 上的定向局部标架 $(E_1, \ldots, E_n)$ 和 $(\widetilde{E}_1, \ldots, \widetilde{E}_n)$, 分别对应定向 $\mathcal{O}$ 和 $\widetilde{\mathcal{O}}$. 那么 $E_j = A_j^i \widetilde{E}_i$, 其中 $(A_j^i) : U \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 是连续函数, 所以行列式 $\det(A_j^i) : U \to \mathbb{R}^\times$ 是连续函数, U 连通表明 $\det(A_j^i)$ 恒正或者恒负, 这就表明在 U 上 $\mathcal{O} = \pm\widetilde{\mathcal{O}}$, 所以 f 是局部常值函数. M 连通表明 f 是常值函数, 这就说明 M 恰有两个定向且由其在任意点处的定向决定. □

命题 14.8 (余维数 0 的子流形的定向). 设 M 是一个定向的带边或者无边光滑流形，$D \subseteq M$ 是余维数为 0 的带边或者无边光滑子流形. 那么 M 的定向限制到 D 上是 D 的一个定向. 如果 ω 是 M 上的定向形式，那么 $\iota_D^* \omega$ 是 D 上的定向形式.

Proof. 设 $\mathcal{O}$ 是 M 上的定向, $\mathcal{O}|_D$ 是 $\mathcal{O}$ 在 D 上的限制. 由于 D 是余维数为 0 的子流形, 所以是嵌入子流形. 任取 $p \in D$, $T_p D$ 可以等同为 $T_p M$, 所以 $\mathcal{O}|_D$ 可以视为 D 上的定向. □

令 M, N 是一个定向的带边或者无边光滑流形, $F : M \to N$ 是局部微分同胚. 如果对于每个 $p \in M$, 同构 dF_p 将 $T_p M$ 的定向基送到 $T_{F(p)} N$ 的定向基, 那么我们说 F 是 **保定向的**. 如果 dF_p 将 $T_p M$ 的定向基送到 $T_{F(p)} N$ 的负定向基, 那么我们说 F 是 **反定向的**.

命题 14.9 (拉回定向). 设 M, N 是带边或者无边光滑流形. 如果 $F : M \to N$ 是局部微分同胚且 N 是定向的，那么 M 有唯一的定向使得 F 是保定向的映射，这个定向被称为**拉回定向**.

Proof. 对于每个 $p \in M$, 存在唯一的 $T_p M$ 上的定向使得同构 $dF_p : T_p M \to T_{F(p)} N$ 是保定向的, 这定义了 M 上的一个逐点定向. 选取 N 的一个定向形式 ω, 那么 $F^*\omega$ 是 M 上的确定了这个逐点定向的微分形式, 所以这个逐点定向是连续的. □

在这种情况下, 如果 $\mathcal{O}$ 是 N 上的定向, 那么 M 上的拉回定向记为 $F^*\mathcal{O}$.

回顾一个有光滑全局标架的光滑流形被称为**可平行化的**.

命题 14.10. 每个可平行化的光滑流形都是可定向的.

Proof. 设 M 是光滑流形, $(E_1,\ldots,E_n)$ 是 M 的一个全局标架, 那么在每个点 $p\in M$ 处都确定了一个定向基 $\big(E_1|_p,\ldots,E_n|_p\big)$, 这给出了 M 的一个逐点定向. 由于每个点都被这个全局标架包含, 所以这个逐点定向自然是连续的. □

特别地, 这表明李群都是可定向的, 因为李群有一个左不变向量场构成的全局标架.

在李群的情况下, 如果 G 是李群, 对于每个 $g\in G$, L_g 都是保定向的, 那么我们说这个定向是**左不变的**.

命题 14.11. 每个李群恰有两个左不变定向，对应于其李代数的两个定向.

Proof. 设 $[v_1,\ldots,v_n]$ 和 $-[v_1,\ldots,v_n]$ 是 T_eG 的两个定向, 那么 $v_1^{\mathrm{L}},\ldots,v_n^{\mathrm{L}}$ 是 G 的一个光滑全局标架且确定了 G 上的一个定向 $\mathcal{O}$. 我们说明这个定向是左不变的. 任取 $g\in G$, 设 ω 是 $\mathcal{O}$ 的定向形式, 那么对于任意 $g'\in G$, 由于 $v_i^{\mathrm{L}}|_{gg'}=d(L_{gg'})_e(v_i)$, 所以

$$\omega_{gg'}\big(d(L_{gg'})_e(v_1),\ldots,d(L_{gg'})_e(v_n)\big)>0,$$

即

$$(L_g^*\omega)_{g'}\big(d(L_{g'})_e(v_1),\ldots,d(L_{g'})_e(v_n)\big)>0.$$

任取定向基 $w_1,\ldots,w_n\in T_{g'}G$, 所以 $(w_1,\ldots,w_n)$ 和 $\big(d(L_{g'})_e(v_1),\ldots,d(L_{g'})_e(v_n)\big)$ 是一致定向的, 即有正行列式的过渡矩阵 (B^i_j), 所以

$$(L_g^*\omega)_{g'}(w_1,\ldots,w_n)=\det(B^i_j)\cdot(L_g^*\omega)_{g'}\big(d(L_{g'})_e(v_1),\ldots,d(L_{g'})_e(v_n)\big)>0.$$

这就表明 $L_g^*\omega$ 也是 $\mathcal{O}$ 的定向形式,即 $L_g^*\mathcal{O}=\mathcal{O}$,$\mathcal{O}$ 是左不变定向.类似的,$-[v_1,\ldots,v_n]$ 确定了另一个左不变定向. □

14.2.1 超曲面的定向

如果 M 是定向光滑流形, S 是 M 的一个光滑子流形 (带边或者无边), 那么 S 也可能没有从 M 继承的定向, 即使 S 是嵌入的. 显然, 简单的将 M 的定向形式限制到 S 上是不行的, 因为 n-形式限制到低维上必然变成零. 一个例子是 Möbius 带, 即使其可以嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 中, 其也不可定向.

14.3 黎曼体积形式

令 (M,g) 是定向的黎曼流形. 我们知道在 M 的每个点的邻域中都存在一个光滑的正交标架 $(E_1,\ldots,E_n)$. 通过将 E_1 替换为 $-E_1$, 我们可以在每个点的邻域中找到一个定向的正交标架.

命题 14.12. 设 (M,g) 是一个定向的黎曼 n-流形，且 $n\geq 1$. 那么存在唯一的光滑定向形式 $\omega_g\in\Omega^n(M)$，满足对于每个定向的局部正交标架 (E_i) 都有

$$\omega_g(E_1,\ldots,E_n)=1, \tag{14.1}$$

这个定向形式被称为**黎曼体积形式**.

Proof. 首先说明 ω_g 的唯一性. 如果 $(E_1,\dots,E_n)$ 是开集 $U\subseteq M$ 上的任意定向的局部正交标架, $(\varepsilon^1,\dots,\varepsilon^n)$ 是其对偶余标架. 那么我们有局部表示 $\omega_g=f\varepsilon^1\wedge\cdots\wedge\varepsilon^n$, (14.1) 表明 $f=1$, 所以

$$\omega_g=\varepsilon^1\wedge\cdots\wedge\varepsilon^n. \tag{14.2}$$

这表明 ω_g 是唯一确定的.

下面说明存在性, 我们希望通过 (14.2) 式来在每个点的邻域上定义 ω_g, 所以我们说明这个定义和定向正交标架的选取无关. 如果 $(\widetilde{E}_1,\dots,\widetilde{E}_n)$ 是另一组定向正交标架, 有对偶余标架 $(\tilde{\varepsilon}^1,\dots,\tilde{\varepsilon}^n)$, 令

$$\widetilde{\omega}_g=\tilde{\varepsilon}^1\wedge\cdots\wedge\tilde{\varepsilon}^n.$$

这两组正交标架之间有关系 $\widetilde{E}_j=A_j^iE_i$, 正交性表明系数矩阵 (A_j^i) 是正交矩阵, 所以

$$\omega_g\big(\widetilde{E}_1,\dots,\widetilde{E}_n\big)=\det\big(\varepsilon^i(\widetilde{E}_j)\big)=\det(A_j^i)=1=\widetilde{\omega}_g\big(\widetilde{E}_1,\dots,\widetilde{E}_n\big).$$

这表明 $\omega_g=\widetilde{\omega}_g$, 所以 (14.2) 式是良好定义的, 这给出了一个全局 n-形式且满足要求. □

命题 14.13. 设 (M,g) 是一个定向的黎曼 n-流形, 且 $n\geq 1$. 在任意定向光滑坐标 (x^i) 中, 黎曼体积形式有局部表示

$$\omega_g=\sqrt{\det(g_{ij})}\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n.$$

Proof. 设 $\big(U,(x^i)\big)$ 是一个定向的光滑坐标卡, 令 $p\in M$. 此时 ω_g 有局部表示 $\omega_g=f\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$, 其中 f 是正值函数. 令 (E_i) 是定义在 p 的某个邻域上的定向正交标架, (ε^i) 是其对偶余标架. 此时我们可以把坐标标架表示为

$$\frac{\partial}{\partial x^j}=A_j^iE_i,$$

所以我们可以计算

$$f=\omega_g\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right)=\det(A_j^i)\,\omega_g(E_1,\dots,E_n)=\det(A_j^i).$$

另一方面, 注意到

$$g_{ij}=\left\langle\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle_g=\left\langle A_i^kE_k,A_j^lE_l\right\rangle_g=A_i^kA_j^l\langle E_k,E_l\rangle_g=\sum_{k=1}^nA_i^kA_j^k.$$

于是 g_{ij} 是 A^TA 的第 (i,j)-元, 所以

$$\det(g_{ij})=\det(A^TA)=(\det A)^2,$$

故 $f=\det A=\sqrt{\det(g_{ij})}$. □

15

指数映射

15.1 单参数子群和指数映射

假设 G 的李群, 因为左不变向量场依赖于群结构自然地定义, 所以我们希望寻找左不变向量场的流和群乘法之间的关系.

15.1.1 单参数子群

G 的一个**单参数子群**指的是一个李群同态 $\gamma : \mathbb{R} \to G$, 这里 $\mathbb{R}$ 指的是加法李群. 注意, 单参数子群指的不是一个子群, 而是一个李群同态, 但是, 其像集 $\gamma(\mathbb{R})$ 是 G 的一个李子群.

定理 15.1 (单参数子群的特征). 令 G 是李群, G 的单参数子群恰好为左不变向量场的以单位元为起点的极大积分曲线.

Proof. 假设 γ 是某个左不变向量场 $X \in \mathrm{Lie}(G)$ 的以单位元为起点的极大积分曲线. 因为左不变向量场都是完备的, 所以 γ 定义在 $\mathbb{R}$ 上. 左不变意味着任取 $g \in G$, X 与自身 L_g-相关, 根据积分曲线的自然性, 所以 L_g 将 X 的积分曲线送到 X 的积分曲线. 对于任意的 $s \in \mathbb{R}$, 那么 $L_{\gamma(s)} \circ \gamma$ 是 X 的以 $\gamma(s)$ 为起点的积分曲线, 根据平移引理, $t \mapsto \gamma(s+t)$ 也是以 $\gamma(s)$ 为起点的积分曲线, 根据极大积分曲线的唯一性, 就有

$$\gamma(s+t) = \gamma(s)\gamma(t),$$

这表明 $\gamma : \mathbb{R} \to G$ 是单参数子群.

反之, 假设 $\gamma : \mathbb{R} \to G$ 是单参数子群, 令 $X = \gamma_*(d/dt) \in \mathrm{Lie}(G)$, 这里 d/dt 表示 $\mathbb{R}$ 上的左不变向量场. 由于 $\gamma(0) = e$, 所以我们只需要验证 γ 是 X 的积分曲线. 任取 $s \in \mathbb{R}$, 有

$$X_{\gamma(s)} = d\gamma_s \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_s \right) = \gamma'(s),$$

这就表明 γ 是 X 的积分曲线. □

给定 $X \in \mathrm{Lie}(G)$, 通过上述方式由 X 确定的单参数子群被称为 X **生成的单参数子群**. 因为左不变向量场由其在单位元处的值唯一确定, 所以单参数子群也由其在

T_eG 中的初速度决定, 也就是说我们有一一对应

$$\{\text{one-parameter subgroups of } G\} \longleftrightarrow \mathrm{Lie}(G) \longleftrightarrow T_eG.$$

命题 15.2. 对于任意 $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$，令

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

是矩阵指数，那么由 $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ 生成的 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 的单参数子群为 $\gamma(t) = e^{tA}$.

Proof. 给定 $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, 对应一个左不变向量场 A^{L}, 因此, 由 A 生成的单参数子群是 A^{L} 的一条以 I_n 为起点的积分曲线 γ, 即

$$\gamma(0) = I_n, \quad \gamma'(t) = A^{\mathrm{L}}|_{\gamma(t)} = d\left(L_{\gamma(t)}\right)_{I_n}(A) = \gamma(t)A,$$

根据唯一性, 我们只需要验证 $\gamma(t) = e^{tA}$ 满足上面的条件即可. 因为 e^{tA} 在任意有界集上都是一致收敛的, 所以可以逐项求导, 即

$$\gamma'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} t^{k-1} A^k = \gamma(t)A,$$

故 $\gamma(t) = e^{tA}$ 就是这样的积分曲线, 即为 A 生成的单参数子群. □

命题 15.3. 设 G 是李群，$H \subseteq G$ 是李子群. H 的单参数子群恰好为 G 的初速度在 T_eH 中的单参数子群.

Proof. 令 $\gamma : \mathbb{R} \to H$ 是单参数子群, 那么复合映射 $\mathbb{R} \to H \hookrightarrow G$ 是 G 的单参数子群, 满足 $\gamma'(0) \in T_eH$.

反之, 设 $\gamma : \mathbb{R} \to G$ 是单参数子群且 $\gamma'(0) \in T_eH$. 令 $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \to H$ 是 $\gamma'(0) \in T_eH$ 生成的单参数子群, 通过复合包含映射, $\tilde{\gamma}$ 可以视为 G 的单参数子群, 因为 γ 和 $\tilde{\gamma}$ 都是 G 的单参数子群且有相同的初速度 $\gamma'(0)$, 所以它们必须相等. □

例 15.4. 令 H 是 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 的李子群,前面的命题表明 H 的单参数子群恰好形如 $\gamma(t) = e^{tA}$, 其中 $A \in \mathfrak{h}$, $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ 是对应于 $\mathrm{Lie}(H)$ 的李子代数. 例如, 取 $H = \mathrm{O}(n)$, 这表明 $\mathrm{O}(n)$ 的单参数子群形如 $\gamma(t) = e^{tA}$, 其中 A 是任意反对称矩阵. 特别地, 这表明任意反对称矩阵的指数是正交矩阵.

15.1.2 指数映射

前一节我们看到 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ 到 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 的矩阵指数发挥了重要作用, 其将每条过原点的直线 tA 对应到单参数子群 $t \mapsto e^{tA}$. 这可以推广到任意李群上.

给定一个李群 G, 李代数 $\mathfrak{g}$. 定义映射 $\exp : \mathfrak{g} \to G$ 为: 任取 $X \in \mathfrak{g}$, 令

$$\exp X = \gamma(1),$$

其中 γ 表示 X 生成的单参数子群, 等价地说, 即以 e 为起点的 X 的一条积分曲线. 映射 exp 被称为 G 的**指数映射**. 通过指数映射, 可以将 X 生成的单参数子群表示出来.

命题 15.5. G 是李群，对于任意 $X \in \mathrm{Lie}(G)$，$\gamma(s) = \exp sX$ 是 G 的由 X 生成的单参数子群.

Proof. 令 $\gamma : \mathbb{R} \to G$ 是 X 生成的单参数子群, 那么对于任意 $s \in \mathbb{R}$, 根据缩放引理, $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(st)$ 是 sX 的一条以 e 为起点的积分曲线, 所以

$$\exp sX = \tilde{\gamma}(1) = \gamma(s). \qquad \square$$

例 15.6. 这表明 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 的指数映射为 $\exp A = e^A$, 这也是指数映射名称的由来.

命题 15.7 (指数映射的性质). 令 G 是李群，$\mathfrak{g}$ 是李代数.

1. 指数映射是 $\mathfrak{g} \to G$ 的光滑映射.
2. 对于任意 $X \in \mathfrak{g}$ 和 $s, t \in \mathbb{R}$，有 $\exp(s+t)X = \exp sX \exp tX$.
3. 对于任意 $X \in \mathfrak{g}$，$(\exp X)^{-1} = \exp(-X)$.
4. 对于任意 $X \in \mathfrak{g}$ 和 $n \in \mathbb{Z}$，有 $(\exp X)^n = \exp(nX)$.
5. 微分 $(d\exp)_0 : T_0\mathfrak{g} \to T_eG$ 是恒等映射.
6. 指数映射限制在 $0 \in \mathfrak{g}$ 的某个邻域到 $e \in G$ 的某个邻域的时候是微分同胚.
7. 如果 H 是另一个李群，$\mathfrak{h}$ 是对应的李代数，$\Phi : G \to H$ 是李群同态，那么有交换图：

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\Phi_*"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathfrak{h} \arrow[d, "\exp"] \\ G \arrow[r, "\Phi"] & H \end{tikzcd} \tag{15.1}$$

8. 左不变向量场 X 的生成流 θ 满足 $\theta_t = R_{\exp tX}$.

Proof. 在这个证明中, 对于任意 $X \in \mathfrak{g}$, 我们用 $\theta_{(X)}$ 表示 X 的流. (1) 要说明 $\exp$ 是光滑映射, 也即说明 $X \mapsto \exp X = \theta_{(X)}^{(e)}(1)$ 是光滑映射. 定义积流形 $G \times \mathfrak{g}$ 上的向量场 Ξ 为

$$\Xi_{(g,X)} = (X_g, 0) \in T_gG \oplus T_X\mathfrak{g} \simeq T_{(g,X)}(G \times \mathfrak{g}).$$

任取 $\mathfrak{g}$ 的一组基 $(X_1, \ldots, X_k)$, 那么可以取 $\mathfrak{g}$ 的一组全局坐标 (x^i), 即 $(x^i) \leftrightarrow x^i X_i$. 设 (w^i) 是 G 的任意光滑局部坐标. 若 $f \in C^\infty(G \times \mathfrak{g})$, 那么

$$\Xi f(w^i, x^i) = \Xi_{(w^i,x^i)} f = \big(x^j X_j|_{w^i}, 0\big) f = x^j \, d\iota_1(X_j|_{w^i}) f = x^j X_j|_{w_i}(f \circ \iota_1),$$

其中 $\iota : G \to G \times \mathfrak{g}$ 为包含映射 $g \mapsto (g, X)$. 这表明 $\Xi f(w^i, x^i)$ 光滑, 所以 Ξ 是光滑向量场. 不难验证 Ξ 的流 Θ 为

$$\Theta_t(g, X) = \big(\theta_{(X)}(t, g), X\big).$$

根据流的基本定理, Θ 是光滑的. 记 $\pi_G : G \times \mathfrak{g} \to G$ 是投影映射, 那么 $\exp X = \pi_G\big(\Theta_1(e, X)\big)$, 所以 $\exp$ 是光滑映射.

由于 $t \mapsto \exp tX$ 是 X 的单参数子群, 所以 (2) 和 (3) 根据同态的性质立即得到. (4) 是 (2) 的推论.

(5) 任取 $X \in \mathfrak{g}$, 令 $\sigma : \mathbb{R} \to \mathfrak{g}$ 为曲线 $\sigma(t) = tX$, 那么 $\sigma'(0) = X$, 由于 $t \mapsto \exp tX$ 是 X 的单参数子群, 即以单位元为起点的 X 的积分曲线, 所以

$$(d\exp)_0(X) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \exp(\sigma(t)) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \exp tX = X_e,$$

将 T_eG 等同于 $\mathfrak{g}$, 所以这表明 $(d\exp)_0$ 是恒等映射. (6) 根据反函数定理即可得到.

(7) 我们需要证明对于每个 $X \in \mathfrak{g}$ 有 $\exp(\Phi_* X) = \Phi(\exp X)$. 实际上我们可以证明对于所有 $t \in \mathbb{R}$ 有

$$\exp(t\Phi_* X) = \Phi(\exp tX).$$

等式左端是 $\Phi_* X$ 的单参数子群. 我们令 $\sigma(t) = \Phi(\exp tX)$, 只需要说明 σ 也是 $\Phi_* X$ 的单参数子群即可. 也即说明 $\sigma : \mathbb{R} \to H$ 是一个李群同态且 $\sigma'(0) = (\Phi_* X)_e$. 由于 σ 是李群同态 $t \mapsto \exp tX$ 和 Φ 的复合, 所以 σ 也是李群同态. 此外,

$$\sigma'(0) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \Phi(\exp tX) = d\Phi_0\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \exp tX\right) = d\Phi_0(X_e) = (\Phi_* X)_e.$$

(8) 任取 $g \in G$, L_g 将 X 的积分曲线送到 $(L_g)_* X = X$ 的积分曲线. 因此, 映射 $t \mapsto L_g(\exp tX)$ 是以 g 为起点的 X 的积分曲线, 这意味着其等于 $\theta^{(g)}_{(X)}(t)$, 所以

$$R_{\exp tX}(g) = g\exp tX = L_g(\exp tX) = \theta^{(g)}_{(X)}(t) = \big(\theta_{(X)}\big)_t(g). \qquad \square$$

命题 15.8. 令 G 是李群，$H \subseteq G$ 是李子群. 将 $\mathrm{Lie}(H)$ 视为 $\mathrm{Lie}(G)$ 的子代数，那么 H 的指数映射是 G 的指数映射在 $\mathrm{Lie}(H)$ 上的限制，并且

$$\mathrm{Lie}(H) = \big\{X \in \mathrm{Lie}(G) \;\big|\; \exp tX \in H, \forall t \in \mathbb{R}\big\}.$$

Proof. 根据命题 15.3, H 的单参数子群是初速度在 T_eH 中的 G 的单参数子群, 这表明 H 的指数映射 $\exp tX$ 满足 $X_e \in T_eH \subseteq T_eG$, 也即 G 的指数映射在 $\mathrm{Lie}(H)$ 上的限制. $\square$

15.2 群作用的无穷小生成元

假设我们给定一个李群 G 在光滑流形 M 上的右作用, 记为 $\theta : G \times M \to M$ 或者 $(p, g) \mapsto p \cdot g$. 每个 $X \in \mathrm{Lie}(G)$ 都确定了 M 上的一个全局流:

$$(t, p) \mapsto p \cdot \exp tX.$$

这确实是一个流,因为 $\exp(0X) = e$ 以及 $\exp(sX)\exp(tX) = \exp(s+t)X$.令 $\hat{X} \in \mathfrak{X}(M)$ 为这个流的无穷小生成元, 那么任取 $p \in M$, 有

$$\hat{X}|_p = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} p \cdot \exp tX.$$

因此我们得到映射 $\hat{\theta} : \mathrm{Lie}(G) \to \mathfrak{X}(M)$ 为 $\hat{\theta}(X) = \hat{X}$.

利用轨道映射 $\theta^{(p)}: G \to M$, $\theta^{(p)}(g) = p \cdot g$, 可以得到 $\widehat{X}$ 的一个有用的刻画. 因为 $\gamma(t) = \exp tX$ 是 G 中初速度为 $\gamma'(0) = X_e$ 的光滑曲线, 那么我们有

$$d\big(\theta^{(p)}\big)_e(X_e) = d\big(\theta^{(p)} \circ \gamma\big)_0(0) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} p \cdot \exp tX = \widehat{X}|_p, \tag{15.2}$$

引理 15.9. 设 G 是李群，θ 是 G 在光滑流形 M 上的光滑右作用. 对于任意 $X \in \mathrm{Lie}(G)$ 和 $p \in M$，向量场 X 和 $\hat{\theta}(X)$ 是 $\theta^{(p)}$-相关的.

Proof. 注意到

$$\theta^{(p\cdot g)} = \theta^{(p)} \circ L_g,$$

所以

$$\hat{\theta}(X)|_{\theta^{(p)}(g)} = d\big(\theta^{(p\cdot g)}\big)_e(X_e) = d\big(\theta^{(p)}\big)_g\big(d(L_g)_e(X_e)\big),$$

由于 X 与自身是 L_g-相关的, 所以 $d(L_g)_e(X_e) = X_g$, 所以

$$\hat{\theta}(X)|_{\theta^{(p)}(g)} = d\big(\theta^{(p)}\big)_g(X_g),$$

这就说明 X 和 $\hat{\theta}(X)$ 是 $\theta^{(p)}$-相关的. □

定理 15.10. 设 G 是李群，θ 是 G 在光滑流形 M 上的光滑右作用. 映射 $\hat{\theta}: \mathrm{Lie}(G) \to \mathfrak{X}(M)$ 是一个李代数同态.

Proof. 由于 $\hat{\theta}(X)|_p = d\big(\theta^{(p)}\big)_e(X_e)$, 所以 $\hat{\theta}$ 是线性映射. 任取 $p \in M$, $X, Y \in \mathrm{Lie}(G)$, 根据李括号的自然性, 向量场 $[X, Y]$ 和 $\big[\hat{\theta}(X), \hat{\theta}(Y)\big]$ 是 $\hat{\theta}^{(p)}$-相关的, 也就是说, 有

$$\big[\hat{\theta}(X), \hat{\theta}(Y)\big]_p = d\big(\hat{\theta}^{(p)}\big)_e\big([X, Y]_e\big) = \hat{\theta}\big([X, Y]\big)\big|_p,$$

即 $\hat{\theta}\big([X, Y]\big) = \big[\hat{\theta}(X), \hat{\theta}(Y)\big]$, $\hat{\theta}$ 是李代数同态. □

上述李代数同态 $\hat{\theta}: \mathrm{Lie}(G) \to \mathfrak{X}(M)$ 被称为 θ **的无穷小生成元**. 更一般地, 如果 $\mathfrak{g}$ 是任意有限维李代数, 此时李代数同态 $\hat{\theta}: \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$ 被称为 **M 上的（右）$\mathfrak{g}$-作用**. 给定一个 $\mathfrak{g}$-作用 $\hat{\theta}$, 如果对于任意 $X \in \mathfrak{g}$, 向量场 $\hat{\theta}(X)$ 都是完备的, 那么我们说 $\hat{\theta}$ 是**完备的**.

就像每个完备向量场生成一个 $\mathbb{R}$-作用一样, 下面的定理表明, 至少对于单连通的李群, 每个完备的李代数作用都生成一个群作用.

定理 15.11 (李代数作用上的基本定理). 令 M 是光滑流形，G 是单连通李群，$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$. 设 $\hat{\theta}: \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$ 是完备的 $\mathfrak{g}$-作用. 那么存在唯一的 M 上的光滑的 G-右作用使得其无穷小生成元是 $\hat{\theta}$.

15.3 李对应

15.4 正规子群

引理 15.12. 令 G 是连通李群，$H \subseteq G$ 是连通李子群. 那么 H 是 G 的正规子群当且仅当对于任意 $X \in \mathfrak{g}$ 和 $Y \in \mathfrak{h}$ 有

$$(\exp X)(\exp Y)(\exp -X) \in H. \tag{15.3}$$

如果 $\mathfrak{g}$ 是李代数, 线性子空间 $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ 如果对于任意 $X \in \mathfrak{g}$ 和 $Y \in \mathfrak{h}$ 都满足 $[X, Y] \in \mathfrak{h}$, 那么我们说 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ **中的理想**.

15.4.1 伴随表示

令 G 是李群, $\mathfrak{g}$ 是它的李代数. 对于任意 $g \in G$, 共轭映射 $C_g : G \to G$ 定义为 $C_g(h) = ghg^{-1}$ 是一个李群同态. 我们用 $\mathrm{Ad}(g) = (C_g)_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 表示 C_g 诱导的李代数同态.

命题 15.13 (伴随表示). 如果 G 是李群，$\mathfrak{g}$ 是对应的李代数，映射 $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 是一个李群表示，被称为 G **的伴随表示**.

Proof. 由于 $C_{g_1 g_2} = C_{g_1} \circ C_{g_2}$, 所以

$$\mathrm{Ad}(g_1 g_2) = \left(C_{g_1 g_2}\right)_* = \left(C_{g_1}\right)_* \circ \left(C_{g_2}\right)_* = \mathrm{Ad}(g_1) \circ \mathrm{Ad}(g_2).$$

同时 $\mathrm{Ad}(g)$ 有逆 $\mathrm{Ad}(g^{-1})$, 所以 Ad 是一个群同构.

下面我们说明 Ad 是光滑的. 令 $C : G \times G \to G$ 是光滑映射 $C(g, h) = ghg^{-1}$. 令 $X \in \mathfrak{g}$ 和 $g \in G$, 那么 $\mathrm{Ad}(g)X = \left(C_g\right)_* X$ 满足

$$\left((C_g)_* X\right)_e = d(C_g)_e(X_e) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} C(g, \exp tX) = dC_{(g,e)}(0, X_e),$$

选取 $\mathfrak{g}$ 的一组基 (E_i) 后, $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 的坐标表示由对应的矩阵表示给出, 设 (ε^j) 是对偶基, 那么 $\mathrm{Ad}(g) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 的矩阵表示为 $\left(\mathrm{Ad}(g)\right)_i^j = \varepsilon^j\left(\mathrm{Ad}(g) E_i\right)$, 那么上面的计算表明 $\mathrm{Ad}(g) E_i = dC_{(g,e)}(0, E_i|_e)$, 此时 $dC : T(G \times G) \to TG$ 是光滑丛同态, 所以 $\mathrm{Ad}(g) E_i$ 是关于 g 的光滑映射, 所以 Ad 光滑. □

对于李代数也有一个伴随表示. 给定有限维李代数 $\mathfrak{g}$, 对于每个 $X \in \mathfrak{g}$, 定义映射 $\mathrm{ad}(X) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 为 $\mathrm{ad}(X)Y = [X, Y]$.

命题 15.14. 对于任意李代数 $\mathfrak{g}$，映射 $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 是一个李代数表示，被称为 $\mathfrak{g}$ **的伴随表示**.

Proof. 不难验证 ad 是线性映射. 由于

$$\begin{aligned}\operatorname{ad}\big([X,Y]\big)Z &= [[X,Y],Z] = -[Z,[X,Y]]\\ &= [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]]\\ &= [X,[Y,Z]] - [Y,[X,Z]]\\ &= [X,\operatorname{ad}(Y)Z] - [Y,\operatorname{ad}(X)Z]\\ &= \operatorname{ad}(X)\big(\operatorname{ad}(Y)Z\big) - \operatorname{ad}(Y)\big(\operatorname{ad}(X)Z\big)\\ &= [\operatorname{ad}(X),\operatorname{ad}(Y)]Z,\end{aligned}$$

这表明 $\operatorname{ad}\big([X,Y]\big) = [\operatorname{ad}(X),\operatorname{ad}(Y)]$, 所以 ad 是李代数同态. □

利用指数映射, 我们可以证明这两个表示之间存在密切联系.

定理 15.15. 令 G 是李群，$\mathfrak{g}$ 是对应的李代数，$\operatorname{Ad}: G \to \operatorname{GL}(\mathfrak{g})$ 是 G 的伴随表示. 那么诱导的李代数表示 $\operatorname{Ad}_*: \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 为 $\operatorname{Ad}_* = \operatorname{ad}$.

Proof. 任取 $X \in \mathfrak{g}$, 那么 $\operatorname{Ad}_* X$ 由其在单位元 $\operatorname{Id}: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 处的值确定, 那么

$$(\operatorname{Ad}_* X)_{\operatorname{Id}} = d(\operatorname{Ad})_e(X_e) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \operatorname{Ad}(\exp tX),$$

于是任取 $Y \in \mathfrak{g}$, 有

$$(\operatorname{Ad}_* X)Y = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \big(\operatorname{Ad}(\exp tX)Y\big).$$

由于 $\operatorname{Ad}(g) = (C_g)_* = (R_{g^{-1}})_* \circ (L_g)_*$, 所以

$$\begin{aligned}\big(\operatorname{Ad}(\exp tX)Y\big)_e &= d\big(R_{\exp(-tX)}\big) \circ d\big(L_{\exp tX}\big)(Y_e)\\ &= d\big(R_{\exp(-tX)}\big)\big(Y_{\exp tX}\big),\end{aligned}$$

指数映射的性质表明 X 的流为 $\theta_t(g) = R_{\exp tX}(g)$, 所以

$$\big(\operatorname{Ad}(\exp tX)Y\big)_e = d(\theta_{-t})\big(Y_{\theta_t(e)}\big).$$

于是

$$\big((\operatorname{Ad}_* X)Y\big)_e = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} d(\theta_{-t})\big(Y_{\theta_t(e)}\big) = (\mathcal{L}_X Y)_e = [X,Y]_e,$$

这就表明 $\operatorname{Ad}_* = \operatorname{ad}$. □

15.4.2 理想和正规子群

定理 15.16 (理想和正规子群). 令 G 是连通李群，$H \subseteq G$ 是连通李子群. 那么 H 是 G 的正规子群当且仅当 $\operatorname{Lie}(H)$ 是 $\operatorname{Lie}(G)$ 的理想.