Contents

1

黎曼度量

2

联络

2.1 向量场作微分的问题

令 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是区间，$\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ 是光滑曲线，在标准坐标中可以表示为 $\gamma(t) = \big(\gamma^1(t), \ldots, \gamma^n(t)\big)$. 这样的曲线有良定义的**速度** $\gamma'(t)$ 和**加速度** $\gamma''(t)$，计算为

$$\gamma'(t) = \dot{\gamma}^1(t)\frac{\partial}{\partial x^1}\bigg|_{\gamma(t)} + \cdots + \dot{\gamma}^n(t)\frac{\partial}{\partial x^n}\bigg|_{\gamma(t)}, \tag{2.1}$$

$$\gamma''(t) = \ddot{\gamma}^1(t)\frac{\partial}{\partial x^1}\bigg|_{\gamma(t)} + \cdots + \ddot{\gamma}^n(t)\frac{\partial}{\partial x^n}\bigg|_{\gamma(t)}. \tag{2.2}$$

注意到 γ 是直线当且仅当 $\gamma''(t) \equiv 0$.

我们也可以定义 $\mathbb{R}^n$ 上的向量场的方向导数，只需要计算标准坐标中分量函数的方向导数即可：给定向量场 $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ 和向量 $v \in T_p\mathbb{R}^n$，定义 Y **在 v 方向上的 Euclid 方向导数**为

$$\bar{\nabla}_v Y = v(Y^1)\frac{\partial}{\partial x^1}\bigg|_p + \cdots + v(Y^n)\frac{\partial}{\partial x^n}\bigg|_p,$$

其中 $v(Y^i)$ 为

$$v(Y^i) = v^1\frac{\partial Y^i}{\partial x^1}(p) + \cdots + v^n\frac{\partial Y^i}{\partial x^n}(p).$$

如果 X 是另一个向量场，我们可以通过在每个点处计算 $\bar{\nabla}_{X_p} Y$ 得到一个新的向量场 $\bar{\nabla}_X Y$：

$$\bar{\nabla}_X Y = X(Y^1)\frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + X(Y^n)\frac{\partial}{\partial x^n}. \tag{2.3}$$

更一般地，我们可以对 $\mathbb{R}^n$ 的子流形上的曲线和向量场做同样的推广. 假设 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ 是嵌入子流形，考虑光滑曲线 $\gamma : I \to M$. 我们想将 M 中的测地线想象为一条“尽可能直”的曲线. 当然，如果 M 本身是弯曲的，那么 $\gamma'(t)$（视为 $\mathbb{R}^n$ 中的向量）必须要有所不同的定义，否则曲线将会离开 M. 一种方式是计算上面的 Euclid 加速度 $\gamma''(t)$，然后使用切向投影 $\pi^\top : T_{\gamma(t)}\mathbb{R}^n \to T_{\gamma(t)}M$. 这会导出切向于 M 的向量 $\gamma''(t)^\top = \pi^\top(\gamma''(t))$，我们称为 γ **的切向加速度**. 此时可以合理地认为，当 M 中曲线的切向加速度为零的时候，它是尽可能直的.

类似地，假设 Y 是 M 上的一个光滑向量场，我们想知道 Y 沿着 $v \in T_pM$ 方向在 M 中变化了多少. 一种合理的方式是将 Y 延拓为 $\mathbb{R}^n$ 的某个开子集上的光滑向量

场 $\tilde{Y}$, 然后计算 $\tilde{Y}$ 在 v 方向的 Euclid 方向导数, 然后正交投影到 T_pM 上. 即定义 Y **在 v 方向上的切向方向导数**为

$$\nabla_v^\top Y = \pi^\top(\bar{\nabla}_v \tilde{Y}). \tag{2.4}$$

这个切向方向导数可以证明是良定义的并且保持刚体运动. 但是, 此时没有理由相信切向方向导数是 M 是内在不变量(即仅仅依赖于 M 上的诱导度量).

在抽象的黎曼流形上, 由于没有“环境 Euclid 空间”的存在, 因此该技巧不可用. 因此我们必须找到某种方法理解抽象黎曼流形中光滑曲线的加速度. 令 $\gamma : I \to M$ 是光滑曲线, 我们知道在 $t \in I$ 时刻 γ 的速度被定义为切向量 $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$, 其在坐标中的表示为 (2.1) 式.

但是, 与速度不同, 加速度并没有这样一个坐标无关的解释. 例如, 考虑参数化的圆周 $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. 作为 $\mathbb{R}^2$ 中的曲线, 其有加速度

$$\gamma''(t) = -\cos t \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{\gamma(t)} - \sin t \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{\gamma(t)}.$$

但是在极坐标中, 同样的曲线被描述为 $(r(t), \theta(t)) = (1, t)$, 在这个坐标下, 加速度变为

$$\gamma''(t) = r''(t) \left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_{\gamma(t)} + \theta''(t) \left.\frac{\partial}{\partial \theta}\right|_{\gamma(t)} = 0.$$

总的来说, 问题是这样的: 为了通过对 $\gamma'(t)$ 微分来定义 $\gamma''(t)$, 我们必须对向量 $\gamma'(t+h)$ 和 $\gamma'(t)$ 的差商取极限, 但是 $\gamma'(t+h)$ 和 $\gamma'(t)$ 生活在不同的切空间中, 所以它们的减法是没有意义的. 而在 $\mathbb{R}^n$ 中光滑曲线的加速度能够计算是因为它的每个切空间都可以自然地视为 $\mathbb{R}^n$ 本身. 在一般的流形上, 是不存在这样的自然的等同的.

速度向量 $\gamma'(t)$ 是沿着曲线的速度场的一个例子. 为了解释在流形中曲线的加速度, 我们需要的是某种独立于坐标的方式去将向量场沿曲线做微分. 为此, 我们需要一种方法来比较向量场在不同点的值, 或者直观的说, 即“联接”相邻的切空间. 这引出了联络的概念: 这是流形上的一个额外的数据, 一种计算向量场的方向导数的规则.

2.2 联络

事实证明首先定义联络作为区分向量丛截面的方式是最简单的. 这个定义旨在捕获 Euclid 方向导数算符和切向方向导数算符 ($\bar{\nabla}$ 和 $\bar{\nabla}^\top$) 的基本性质. 在定义一般情况的联络之后, 我们将把定义应用到向量丛沿曲线的情况.

令 $\pi : E \to M$ 是光滑流形 M 上的光滑向量丛, $\Gamma(E)$ 是 E 的光滑截面空间. **E 中的联络**指的是一个映射

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E),$$

通常记为 $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$, 其满足下面的属性:

1. $\nabla_X Y$ 在 X 上是 $C^\infty(M)$-线性的: 对于 $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$ 和 $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$, 有

$$\nabla_{f_1 X_1 + f_2 X_2} Y = f_1 \nabla_{X_1} Y + f_2 \nabla_{X_2} Y.$$

2. $\nabla_X Y$ 在 Y 上是 $\mathbb{R}$-线性的: 对于 $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ 和 $Y_1, Y_2 \in \Gamma(E)$, 有

$$\nabla_X (a_1 Y_1 + a_2 Y_2) = a_1 \nabla_X Y_1 + a_2 \nabla_X Y_2.$$

3. ∇ 满足乘积法则: 对于 $f \in C^\infty(M)$, 有

$$\nabla_X (f Y) = f \nabla_X Y + (X f) Y.$$

$\nabla_X Y$ 被称为 Y **在** X **方向的协变导数**.

针对不同的情况有很多种类型的联络. 我们这里定义的联络被称为 **Koszul 联络**. 由于我们在本书中不需要考虑其他类型的联络, 因此我们将 Koszul 联络简称为联络.

尽管联络是在全局截面上定义的, 但是实际上这是一个**局部算符**.

引理 2.1 (局部性). 假设 ∇ 是光滑向量丛 $\pi : E \to M$ 中的联络. 对于任意 $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \Gamma(E)$ 和 $p \in M$, 协变导数 $\nabla_X Y|_p$ 只与 X, Y 在 p 处的一个任意小的邻域上有关. 准确的说, 如果在 p 的某个邻域上有 $X = \widetilde{X}$ 和 $Y = \widetilde{Y}$, 那么 $\nabla_X Y|_p = \nabla_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}|_p$.

Proof. 首先考虑 Y. 通过将 Y 替换为 $Y - \widetilde{Y}$, 我们只需要说明如果 Y 在 p 的某个邻域上为零, 那么 $\nabla_X Y|_p = 0$. 假设 Y 在 p 的某个邻域 U 上为零, 选取支在 U 中的满足 $\varphi(p) = 1$ 的鼓包函数 $\varphi \in C^\infty(M)$. 于是在 M 中有 $\varphi Y \equiv 0$. 那么对于 $X \in \mathfrak{X}(M)$, 我们有 $\nabla_X(\varphi Y) = \nabla_X(0 \cdot \varphi Y) = 0 \nabla_X(\varphi Y) = 0$, 所以

$$0 = \nabla_X(\varphi Y) = \varphi \nabla_X Y + (X\varphi) Y,$$

注意到在 φ 的支集上有 $Y \equiv 0$, 所以 $(X\varphi)Y \equiv 0$, 故 $\varphi \nabla_X Y = 0$, 所以 $\nabla_X Y|_p = 0$.

然后考虑 X, 同样的, 假设 X 在 p 的某个邻域 U 上为零, 选取支在 U 中的满足 $\varphi(p) = 1$ 的鼓包函数 $\varphi \in C^\infty(M)$. 于是在 M 中有 $\varphi X \equiv 0$. 那么任取 $Y \in \Gamma(E)$, 有 $\nabla_{\varphi X} Y = \nabla_{0 \cdot \varphi X} Y = 0 \nabla_{\varphi X} Y = 0$, 所以

$$0 = \nabla_{\varphi X} Y = \varphi \nabla_X Y,$$

于是 $\nabla_X Y|_p = 0$.

利用上面两点, 如果在 p 的某个邻域上有 $X = \widetilde{X}$ 和 $Y = \widetilde{Y}$, 那么就有

$$\nabla_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}|_p = \nabla_X \widetilde{Y}|_p = \nabla_X Y|_p. \qquad \square$$

命题 2.2 (联络的限制). 假设 ∇ 是光滑向量丛 $E \to M$ 中的联络. 对于每个开子集 $U \subseteq M$, 存在唯一的在限制丛 $E|_U$ 上的联络 ∇^U 满足: 对于每个 $X \in \mathfrak{X}(M)$ 和 $Y \in \Gamma(E)$, 有

$$\nabla^U_{X|_U}(Y|_U) = (\nabla_X Y)|_U. \tag{2.5}$$

Proof. 首先我们证明唯一性. 假设 ∇^U 是这样一个联络, $X \in \mathfrak{X}(U)$ 和 $Y \in \Gamma(E|_U)$ 是任意的. 给定 $p \in U$, 我们可以使用鼓包函数去构造一个光滑向量场 $\widetilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$ 和光滑截面 $\widetilde{Y} \in \Gamma(E)$ 使得 $\widetilde{X}|_U$ 和 X 在 p 的某个邻域上重合, $\widetilde{Y}|_U$ 和 Y 在 p 的某个邻域上重合, 那么 引理 2.1 表明

$$\nabla^U_X Y\big|_p = \nabla^U_{\widetilde{X}|_U}(\widetilde{Y}|_U)\big|_p = (\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})|_p.$$

右边完全由 ∇ 确定, 所以这表明 ∇^U 如果存在则唯一.

为了证明存在性, 给定 $X \in \mathfrak{X}(U)$ 和 $Y \in \Gamma(E|_U)$, 对于每个 $p \in U$, 我们与上面一样的方式构造 $\widetilde{X}$ 和 $\widetilde{Y}$, 然后定义 $\nabla^U_X Y|_p = (\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})|_p$, 根据 引理 2.1, 这与 $\widetilde{X}$ 和 $\widetilde{Y}$ 的选取无关, 不难验证这满足联络的定义. □

在上述命题的情况下, 我们通常将 ∇ 的限制仍记为 ∇, 这个命题保证这样简写没有歧义.

引理 2.1 告诉我们我们可以在仅仅知道 X, Y 在 p 的某个邻域的值的情况下计算 $\nabla_X Y$. 实际上, 下面的命题表明, 对于 X 而言, 我们甚至只需要知道 X 在 p 处一个点的值即可.

命题 2.3. 在 引理 2.1 的假设下, $\nabla_X Y|_p$ 仅仅依赖于 Y 在 p 的某个邻域上的值以及 X 在 p 处的值.

Proof. 关于 Y 的断言在 引理 2.1 已经说明. 对于 X, 根据线性性, 只需要说明在 $X_p = 0$ 的情况下有 $\nabla_X Y|_p = 0$ 即可. 选取 p 的一个坐标邻域 U, 那么 X 可以局部表示为 $X = X^i\partial_i$, 满足 $X^i(p) = 0$. 对于每个 $Y \in \Gamma(E|_U)$, 我们有

$$\nabla_X Y|_p = X^i(p)\nabla_{\partial_i} Y|_p = 0.$$ □

多亏了 命题 2.2 和 命题 2.3, 我们可以定义记号 $\nabla_v Y$, 其中 v 是 T_pM 的某个元素, Y 是 E 的定义在 p 的某个邻域上的光滑局部截面. 如果我们要计算它, 只需要令 X 是 p 的邻域上的向量场并且 $X|_p = v$, 然后令 $\nabla_v Y = \nabla_X Y|_p$ 即可. 命题 2.3 表明这个结果不依赖于延拓的选取. 此后, 我们将以这种方式解释丛的局部截面的协变导数, 而不再进一步注释.

2.2.1 切丛中的联络

切丛中的联络通常被称为 **M 上的联络** (有时也被称为**仿射联络**或者**线性联络**).

设 M 是光滑流形, 根据定义, TM 上的联络是一个映射

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

且满足联络的三个条件. 为了计算, 我们需要检查联络如何作用在局部标架上. 令 (E_i) 是 TM 的在开子集 $U \subseteq M$ 上的光滑局部标架. 对于任意指标 i 和 j, 我们可以将向量场 $\nabla_{E_i}E_j$ 在同一组标架下表示为

$$\nabla_{E_i}E_j = \Gamma^k_{ij}E_k. \tag{2.6}$$

这定义了 n^3 个光滑函数 $\Gamma_{ij}^k : U \to \mathbb{R}$, 称为 ∇ 相对于这组标架的**联络系数**. 下面的命题表明联络由联络系数完全确定.

命题 2.4. 令 M 是光滑流形，∇ 是 TM 中的联络. 假设 (E_i) 是开子集 $U \subseteq M$ 上的光滑局部标架，$\{\Gamma_{ij}^k\}$ 是联络系数. 对于光滑向量场 $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$，设 $X = X^i E_i$，$Y = Y^j E_j$，那么

$$\nabla_X Y = \big(X(Y^k) + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k\big) E_k. \tag{2.7}$$

Proof. 只需要利用联络的定义进行计算:

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_X\big(Y^j E_j\big) \\
&= X\big(Y^j\big)E_j + Y^j \nabla_{X^i E_i} E_j \\
&= X\big(Y^j\big)E_j + X^i Y^j \nabla_{E_i} E_j \\
&= X\big(Y^j\big)E_j + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k E_k.
\end{aligned}$$

□

一旦联络系数在某个局部标架中确定, 下面的命题表明在同一开集上任意其他的局部标架中的联络系数也可以确定.

命题 2.5 (联络系数的变换法则). 令 M 是光滑流形，∇ 是 TM 中的联络. 假设在开集 $U \subseteq M$ 上有两个光滑局部标架 (E_i) 和 $\big(\tilde{E}_j\big)$，其中 $\tilde{E}_i = A_i^j E_j$. 令 Γ_{ij}^k 和 $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ 分别为 ∇ 在这两组标架中的联络系数，那么

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \big(A^{-1}\big)_p^k A_i^q A_j^r \Gamma_{qr}^p + \big(A^{-1}\big)_p^k A_i^q E_q\big(A_j^p\big). \tag{2.8}$$

2.2.2 联络的存在性

2.3 张量场的协变导数

我们在本节证明 TM 中的每个联络都自动诱导了 M 上所有张量丛中的联络, 因此给出了一种计算任意类型张量场的协变导数的方法.

命题 2.6. 令 M 是光滑流形，∇ 是 TM 中的联络. 那么 ∇ 唯一确定了每个张量丛 $T^{(k,l)}TM$ 中的联络，同样记为 ∇，其满足下面的四个条件.

1. 在 $T^{(1,0)}TM = TM$ 中，∇ 与给定的联络相同.
2. 在 $T^{(0,0)}TM = M \times \mathbb{R}$ 中，∇ 给出了通常意义下函数的微分:

$$\nabla_X f = Xf.$$

3. ∇ 服从下面的乘积法则:

$$\nabla_X(F \otimes G) = (\nabla_X F) \otimes G + F \otimes (\nabla_X G).$$

4. ∇ 与缩并操作交换: 如果 tr 是任意一对协变和逆变指标上的迹，那么

$$\nabla_X(\operatorname{tr} F) = \operatorname{tr}(\nabla_X F).$$

这个联络同时遵循下面的两条额外属性：

(a) ∇ 相对于余向量场 ω 和向量场 Y 的自然配对，服从下面的乘积法则：

$$\nabla_X \langle \omega, Y \rangle = \langle \nabla_X \omega, Y \rangle + \langle \omega, \nabla_X Y \rangle .$$

(b) 对于所有的 $F \in \Gamma\big(T^{(k,l)}TM\big)$，光滑 1–形式 $\omega^1, \ldots, \omega^k$ 和光滑向量场 $Y_1, \ldots, Y_l$，有

$$\begin{aligned}(\nabla_X F)\big(\omega^1, \ldots, \omega^k, Y_1, \ldots, Y_l\big) = X\big(F\big(\omega^1, \ldots, \omega^k, Y_1, \ldots, Y_l\big)\big) \\ -\sum_{i=1}^{k} F\big(\omega^1, \ldots, \nabla_X \omega^i \ldots, \omega^k, Y_1, \ldots, Y_l\big) \\ -\sum_{j=1}^{l} F\big(\omega^1, \ldots, \omega^k, Y_1, \ldots, \nabla_X Y_j, \ldots, Y_l\big).\end{aligned} \tag{2.9}$$

Proof. 首先我们证明满足 (1)–(4) 的联络一定满足 (a) 和 (b). 对于 (a), 注意到 $\langle \omega, Y \rangle = \omega(Y) = \omega_i Y^i$. 另一方面, 对于 $\omega \otimes Y \in \Gamma\big(T^{(1,1)}TM\big)$, 其诱导 $C^\infty(M)$-线性映射 $\mathcal{F} : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, 满足任取 $\alpha \in \mathfrak{X}^*(M)$ 有 $\alpha(\mathcal{F}(X)) = (\alpha Y)(\omega X)$, 即

$$\mathcal{F}(X) = \omega_j X^j Y^i \, \partial_i ,$$

这表明 $\mathcal{F}$ 在每个点处作为 $T_pM \to T_pM$ 的线性映射, 其在基 $\partial/\partial x^i|_p$ 下的表示矩阵为 $(\omega_j Y^i)(p)$, 故 $\mathrm{tr}(\omega \otimes Y) = \omega_i Y^i$. 这表明 $\langle \omega, Y \rangle = \mathrm{tr}(\omega \otimes Y)$. 那么条件 (1)–(4) 表明

$$\begin{aligned}\nabla_X \langle \omega, Y \rangle &= \nabla_X\big(\mathrm{tr}(\omega \otimes Y)\big) \\ &= \mathrm{tr}\big(\nabla_X(\omega \otimes Y)\big) \\ &= \mathrm{tr}\big(\nabla_X \omega \otimes Y + \omega \otimes \nabla_X Y\big) \\ &= \langle \nabla_X \omega, Y \rangle + \langle \omega, \nabla_X Y \rangle .\end{aligned}$$

对于 (b), 我们可以归纳证明等式:

$$F\big(\omega^1, \ldots, \omega^k, Y_1, \ldots, Y_l\big) = \underbrace{\mathrm{tr} \circ \cdots \circ \mathrm{tr}}_{k+l}\big(F \otimes \omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^k \otimes Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_l\big),$$

其中每个 tr 算符作用在 F 的一个上升指标和对应余向量场的下降指标上,或者 F 的一个下降指标和对应向量场的上升指标上. 以 $F \in \Gamma\big(T^{(1,1)}TM\big)$ 为例, 由于 $F \otimes \omega \otimes Y = F^{i_1}_{j_1} \omega_{j_2} Y^{i_2} \, \partial_{i_1} \otimes dx^{j_1} \otimes dx^{j_2} \otimes \partial_{i_2}$, 所以

$$\mathrm{tr}(F \otimes \omega \otimes Y)^i_j = F^m_j \omega_m Y^i ,$$

所以

$$(\mathrm{tr} \circ \mathrm{tr})(F \otimes \omega \otimes Y) = F^m_n \omega_m Y^n = F(\omega, Y).$$

然后使用类似的计算即可，例如

$$\begin{aligned}(\nabla_X F)(\omega, Y) &= \operatorname{tr}\circ\operatorname{tr}\big(\nabla_X F\otimes\omega\otimes Y\big)\\ &= \operatorname{tr}\circ\operatorname{tr}\big(\nabla_X(F\otimes\omega\otimes Y) - F\otimes\nabla_X(\omega\otimes Y)\big)\\ &= \operatorname{tr}\circ\operatorname{tr}\big(\nabla_X(F\otimes\omega\otimes Y) - F\otimes\nabla_X\omega\otimes Y - F\otimes\omega\otimes\nabla_X Y\big)\\ &= \nabla_X\big(F(\omega, Y)\big) - F\big(\nabla_X\omega, Y\big) - F\big(\omega, \nabla_X Y\big)\\ &= X\big(F(\omega, Y)\big) - F\big(\nabla_X\omega, Y\big) - F\big(\omega, \nabla_X Y\big).\end{aligned}$$

下面我们证明唯一性. 假设 ∇ 满足 (1)–(4), 那么也满足 (a) 和 (b). 对于余向量场 ω, 有

$$(\nabla_X\omega)(Y) = \nabla_X(\omega Y) - \omega(\nabla_X Y), \tag{2.10}$$

这表明 T^*M 中的联络由 TM 中的联络唯一确定. 类似地, (b) 表明每个张量场 F 的协变导数都由向量场和余向量场的协变导数唯一确定.

现在证明存在性. 我们首先根据 (2.10) 式定义余向量场的协变导数, 然后根据 (2.9) 式定义一般张量场的协变导数. 首先我们需要验证这样的定义在每个 ω^i 和 Y_j 上都是 $C^\infty(M)$-线性的, 从而确实定义了一个光滑张量场. 然后我们验证其满足联络的条件. 这些都是直接按定义验证即可. □

虽然 (2.10) 和 (2.9) 式给出了一般张量场的协变导数的定义, 但是在计算中并不实用, 因为计算 $\nabla_X F$ 在一个点处的值需要将所有的参数延拓到某个开集上的向量场或者余向量场上, 然后计算大量的导数. 为了在局部坐标中计算协变导数, 下面的公式更加有用.

命题 2.7. 令 M 是光滑流形, ∇ 是 TM 中的联络. 设 (E_i) 是 M 的一个局部标架, (ε^i) 是其对偶标架, $\{\Gamma_{ij}^k\}$ 是 ∇ 相对于这组标架的联络系数. 令 X 是光滑向量场, $X^i E_i$ 是 X 的局部表示.

1. 余向量场 $\omega = \omega_i\varepsilon^i$ 的协变导数为

$$\nabla_X\omega = \big(X(\omega_k) - X^j\omega_i\Gamma_{jk}^i\big)\varepsilon^k.$$

2. 如果 $F\in\Gamma\big(T^{(k,l)}TM\big)$ 局部表示为

$$F = F_{j_1\ldots j_l}^{i_1\ldots i_k} E_{i_1}\otimes\cdots\otimes E_{i_k}\otimes\varepsilon^{j_1}\otimes\cdots\otimes\varepsilon^{j_l},$$

那么 F 的协变导数为

$$\begin{aligned}\nabla_X F = \left(X\left(F_{j_1\ldots j_l}^{i_1\ldots i_k}\right) + \sum_{s=1}^k X^m F_{j_1\ldots j_l}^{i_1\ldots p\ldots i_k}\Gamma_{mp}^{i_s} - \sum_{s=1}^l X^m F_{j_1\ldots p\ldots j_l}^{i_1\ldots i_k}\Gamma_{mj_s}^p\right)\times\\ E_{i_1}\otimes\cdots\otimes E_{i_k}\otimes\varepsilon^{j_1}\otimes\cdots\otimes\varepsilon^{j_l}.\end{aligned}$$

因为 $\nabla_X F$ 在 X 上是 $C^\infty(M)$-线性的, 所以 F 在所有方向上的协变导数可以被编码为一个秩比 F 大 1 的张量场, 如下所示.

命题 2.8 (全协变导数). 令 M 是光滑流形，∇ 是 TM 中的联络，对于每个 $F \in \Gamma\big(T^{(k,l)}TM\big)$，定义映射

$$\nabla F : \underbrace{\Omega^1(M) \times \cdots \times \Omega^1(M)}_{k \text{ copies}} \times \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{l+1 \text{ copies}} \to C^\infty(M)$$

为

$$(\nabla F)\big(\omega^1, \ldots, \omega^k, Y_1, \ldots, Y_l, X\big) = (\nabla_X F)\big(\omega^1, \ldots, \omega^k, Y_1, \ldots, Y_l\big). \tag{2.11}$$

这定义了一个光滑 $(k, l+1)$-张量场，被称为 **F 的全协变导数**.

Proof. 根据张量表征引理即得. □

当我们在局部标架中书写全协变导数的分量的时候, 一个标准记号是使用分号分隔前面的指标和做微分的指标. 例如, 如果 $Y = Y^i E_i$ 是向量场, 那么 $(1,1)$-张量场 ∇Y 的分量写为 $Y^i{}_{;j}$, 即

$$\nabla Y = Y^i{}_{;j} E_i \otimes \varepsilon^j,$$

此时

$$(\nabla Y)(\omega, X) = Y^i{}_{;j}\,\omega(E_i)\varepsilon^j(X) = \omega_i X^j Y^i{}_{;j},$$

又因为

$$\nabla_X Y = \big(X(Y^k) + X^i Y^j \Gamma^k_{ij}\big) E_k,$$

所以另一方面有

$$(\nabla Y)(\omega, X) = (\nabla_X Y)(\omega) = \big(X(Y^k) + X^i Y^j \Gamma^k_{ij}\big)\omega_k,$$

对比系数即得

$$Y^i{}_{;j} = E_j Y^i + Y^k \Gamma^i_{jk}.$$

命题 2.9. 令 M 是光滑流形，∇ 是 TM 中的联络，(E_i) 是 TM 的光滑局部标架，$\{\Gamma^k_{ij}\}$ 是联络系数. 那么 (k,l)-张量场 F 的全协变导数的分量为

$$F^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_l;m} = E_m\Big(F^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_l}\Big) + \sum_{s=1}^{k} F^{i_1\ldots p\ldots i_k}_{j_1\ldots j_l}\Gamma^{i_s}_{mp} - \sum_{s=1}^{l} F^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots p\ldots j_l}\Gamma^p_{mj_s}.$$

2.4 沿曲线的向量场和张量场

现在, 我们可以解决一个最初激发联络定义的问题: 我们如何理解向量场沿一条曲线的导数?

令 M 是光滑流形, 给定光滑曲线 $\gamma : I \to M$, **沿 γ 的向量场**指的是一个连续映射 $V : I \to TM$ 使得 $V(t) \in T_{\gamma(t)}M$. 令 $\mathfrak{X}(\gamma)$ 是所有沿 γ 的光滑向量场的集合. 在逐点向量加法和数乘下, 这是一个实向量空间. 并且是一个 $C^\infty(I)$-模, 使用逐点的乘法定义:

$$(fX)(t) = f(t)X(t).$$

最简单的沿 γ 的光滑向量场的例子是曲线的速度 $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$.

设 $\gamma : I \to M$ 是光滑曲线, $\tilde{V}$ 是 M 的包含 $\gamma(I)$ 的开集上的光滑向量场, 定义 $V : I \to M$ 满足 $V(t) = \tilde{V}_{\gamma(t)}$, 也即 $V = \tilde{V} \circ \gamma$, 此时 V 是沿 γ 的光滑向量场. 对于一个沿 γ 的光滑向量场 V, 如果存在 $\gamma(I)$ 的一个邻域上的光滑向量场 $\tilde{V}$ 使得 $V = \tilde{V} \circ \gamma$, 那么我们说 V 是**可延拓的**. 注意到并不是所有向量场都是可延拓的, 例如, 如果 $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ 但是 $\gamma'(t_1) \neq \gamma'(t_2)$, 那么速度 $\gamma'(t)$ 就不是可延拓的. 事实上, 即使 γ 是单射, 其速度也不一定是可延拓的.

更一般地, **沿 γ 的张量场**指的是一个连续映射 $\sigma : I \to T^{(k,l)}TM$ 使得 $\sigma(t) \in T^{(k,l)}(T_{\gamma(t)}M)$. 同样, 如果存在 $\gamma(I)$ 的某个邻域上的光滑张量场 $\tilde{\sigma}$ 使得 $\sigma = \tilde{\sigma} \circ \gamma$, 那么我们说 σ 是**可延拓的**.

2.4.1 沿曲线的协变导数

沿曲线的协变导数给出了一种对联络的解释: 即给出了向量场沿曲线求导的方法.

定理 2.10 (沿曲线的协变导数). M 是光滑流形, ∇ 是 TM 上的联络. 对于光滑曲线 $\gamma : I \to M$, 联络确定了唯一的算符:

$$D_t : \mathfrak{X}(\gamma) \to \mathfrak{X}(\gamma),$$

我们称为**沿 γ 的协变导数**, 其满足下面的性质:

1. $\mathbb{R}$-线性:
$$D_t(aV + bW) = aD_tV + bD_tW \quad a, b \in \mathbb{R}.$$
2. 乘积法则:
$$D_t(fV) = f'V + fD_tV \quad f \in C^\infty(I).$$
3. 如果 $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ 是可延拓的, 那么对于 V 的任意延拓 $\tilde{V}$, 有
$$D_tV(t) = \nabla_{\gamma'(t)}\tilde{V}.$$

Proof. 首先我们证明唯一性. 假设 D_t 是这样的算符, 任取 $t_0 \in I$. 与引理 2.1 的证明类似, 可以说明 D_tV 在 t_0 处的值只与 V 在包含 t_0 的任意小区间 $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ 上的值有关.

选取 M 的在 $\gamma(t_0)$ 的某个邻域中给定光滑坐标 (x^i), 此时我们有

$$V(t) = V^j(t)\,\partial_j|_{\gamma(t)}.$$

其中 t 接近 t_0, $V^1, \ldots, V^n$ 是定义在 t_0 在 I 中的某个邻域上的光滑实值函数. 根据 D_t 的性质, 又因为 ∂_j 都是可延拓的, 那么

$$\begin{aligned} D_tV(t) &= \dot{V}^j(t)\,\partial_j|_{\gamma(t)} + V^j(t)\nabla_{\gamma'(t)}\partial_j \\ &= \left(\dot{V}^k(t) + \dot{\gamma}^i(t)V^j(t)\Gamma^k_{ij}(\gamma(t))\right)\partial_k|_{\gamma(t)}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

这表明 D_t 一定是唯一的.

对于存在性, 如果 $\gamma(I)$ 被单个坐标卡包含, 那么我们可以使用 (2.12) 定义 D_tV, 不难验证这满足协变导数的条件. 在一般情况下, 我们可以用坐标卡覆盖 $\gamma(I)$ 然后在每个坐标卡上定义 D_tV, 唯一性表明在两个坐标卡的重叠处的定义相同. □

(2.12) 提供了一个实用的公式去计算坐标中这样的协变导数.

现在我们可以证明 $\nabla_v Y$ 实际上只与 Y 在沿光滑曲线 γ 上的取值有关, 其中某个 t_0 使得 $\gamma(t_0) = p$ 以及 $\gamma'(t_0) = v$.

命题 2.11. M **是光滑流形,** ∇ **是** TM **上的联络, 令** $p \in M$ **以及** $v \in T_pM$**. 假设** Y **和** $\widetilde{Y}$ **是两个光滑向量场, 它们在光滑曲线** $\gamma : I \to M$ **的像集上的取值相同, 其中** $\gamma(t_0) = p$ **以及** $\gamma'(t_0) = v$**, 那么** $\nabla_v Y = \nabla_v \widetilde{Y}$**.**

Proof. 我们可以定义沿 γ 的光滑向量场 Z, 令 $Z(t) = Y_{\gamma(t)} = \widetilde{Y}_{\gamma(t)}$. 因为 Y 和 $\widetilde{Y}$ 都是 Z 的延拓, 那么根据定理 2.10, $\nabla_v Y$ 和 $\nabla_v \widetilde{Y}$ 都等于 $D_tZ(t_0)$. □

2.5 测地线

现在我们可以定义曲线的加速度和测地线的概念了.

令 M 是光滑流形, ∇ 是 TM 中的联络. 对于每个光滑曲线 $\gamma : I \to M$, 我们可以定义 γ **的加速度**是沿 γ 的向量场 $D_t\gamma'$. 如果光滑曲线 γ 的加速度是零: $D_t\gamma' \equiv 0$, 那么我们说 γ 是**测地线**. 凭借光滑坐标 (x^i), 如果我们将 γ 的分量写为 $\gamma(t) = \left(x^1(t), \ldots, x^n(t)\right)$, 那么根据 (2.12) 式, γ 是测地线当且仅当其分量满足下面的**测地线方程**:

$$\ddot{x}^k(t) + \dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)\Gamma^k_{ij}(x(t)) = 0, \tag{2.13}$$

其中我们使用 $x(t)$ 作为 $\left(x^1(t), \ldots, x^n(t)\right)$ 的简写. 这是一个关于实值函数 $x^1, \ldots, x^n$ 的二阶常微分方程组.

定理 2.12 (测地线的存在唯一性). **令** M **是光滑流形,** ∇ **是** TM **中的联络. 对于每个** $p \in M$**,** $w \in T_pM$ **和** $t_0 \in \mathbb{R}$**, 都存在一个包含** t_0 **的开区间** $I \subseteq \mathbb{R}$ **和测地线** $\gamma : I \to M$ **满足** $\gamma(t_0) = p$ **和** $\gamma'(t_0) = w$**. 此外, 任意两个这样的测地线在它们的公共定义域一定是相等的.**

一个测地线 $\gamma : I \to M$ 被称为**极大的**, 如果其不能延拓为一个更大区间上的测地线. 一个**测地线段**指的是定义域是紧区间的测地线.

推论 2.13. **令** M **是光滑流形,** ∇ **是** TM **中的联络. 对于每个** $p \in M$**,** $v \in T_pM$**, 存在唯一的极大测地线** $\gamma : I \to M$ **使得** $\gamma(0) = p$ **以及** $\gamma'(0) = v$**, 且** I **是包含** 0 **的开区间.**

这个唯一的满足 $\gamma(0) = p$ 和 $\gamma'(0) = v$ 的极大测地线 γ 被称为**有起点** p **和初速度** v **的测地线**, 记为 γ_v.

2.6 平行移动

令 M 是光滑流形, ∇ 是 TM 中的联络. 一个沿光滑曲线 γ 的光滑向量场 V 如果使得 $D_t V \equiv 0$, 那么我们说 V 是**沿 γ 平行的**. 测地线可以解释为速度向量场沿自身平行的曲线.

关于沿曲线平行的向量场的一个基本事实是: 曲线上任何一点的任意切向量都可以延拓为一个沿整条曲线平行的向量场. 我们首先观察坐标中平行性代表的方程. 给定一个光滑曲线 γ, 设其有局部坐标表示 $\gamma(t) = \left(\gamma^1(t), \ldots, \gamma^n(t)\right)$, (2.12) 式表明向量场 V 沿 γ 平行当且仅当

$$\dot{V}^k(t) = -\dot{\gamma}^i(t) V^j(t) \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)), \quad k = 1, \ldots, n. \tag{2.14}$$

定理 2.14 (线性 ODE 解的存在性、唯一性和光滑性). 令 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是开子集，对于 $1 \leq j, k \leq n$，令 $A_j^k : I \to \mathbb{R}$ 是光滑函数. 对于每个 $t_0 \in I$ 和初值向量 $\left(c^1, \ldots, c^n\right) \in \mathbb{R}^n$，线性初值问题

$$\begin{aligned} \dot{V}^k(t) &= A_j^k(t) V^j(t), \\ V^k(t_0) &= c^k, \end{aligned} \tag{2.15}$$

在 I 上有唯一的光滑解，并且这个解光滑依赖于 $(t, c) \in I \times \mathbb{R}^n$.

定理 2.15 (平行移动的存在性). 设 M 是光滑流形，∇ 是 TM 中的联络. 给定光滑曲线 $\gamma : I \to M$，$t_0 \in I$ 和向量 $v \in T_{\gamma(t_0)} M$，那么存在唯一的沿 γ 平行的向量场 V 使得 $V(t_0) = v$.

定理 2.15 中给出的向量场被称为 **v 沿 γ 的平行移动**. 对于每个 $t_0, t_1 \in I$, 我们定义映射

$$P_{t_0 t_1}^{\gamma} : T_{\gamma(t_0)} M \to T_{\gamma(t_1)} M, \tag{2.16}$$

称为**平行移动映射**, 定义为 $P_{t_0 t_1}^{\gamma}(v) = V(t_1)$. 这个映射是线性映射, 因为平行性方程是线性的. 事实上这是一个同构, 因为 $P_{t_0 t_1}^{\gamma}$ 有逆映射 $P_{t_1 t_0}^{\gamma}$.

3

Levi-Civita 联络

3.1 黎曼流形上的联络

3.1.1 度量联络

令 g 是光滑流形 M 上的黎曼度量或者伪黎曼度量. 对于 TM 中的联络 ∇, 任取 $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, 如果有

$$\nabla_X \langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \tag{3.1}$$

那么我们说 ∇ 是**与 g 相容的**, 或者说 ∇ 是**度量联络**.

命题 3.1 (度量联络的特征). 令 (M, g) 是黎曼流形或者伪黎曼流形, ∇ 是 TM 中的联络. 那么下面的条件等价:

1. ∇ 与 g 相容: $\nabla_X \langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$.
2. g 相对于 ∇ 平行: $\nabla g \equiv 0$.
3. 在光滑局部标架 (E_i) 中, ∇ 的联络系数满足
$$\Gamma^l_{ki} g_{lj} + \Gamma^l_{kj} g_{il} = E_k(g_{ij}). \tag{3.2}$$
4. 如果 V, W 是沿光滑曲线 γ 的向量场, 那么
$$\frac{d}{dt} \langle V, W\rangle = \langle D_t V, W\rangle + \langle V, D_t W\rangle. \tag{3.3}$$
5. 如果 V, W 是沿光滑曲线 γ 平行的向量场, 那么 $\langle V, W\rangle$ 沿 γ 是常数.
6. 给定任意光滑曲线 γ, 每个沿 γ 的平行移动映射都是线性等距.
7. 给定任意光滑曲线 γ, 在 γ 的某个点处的每组正交基都可以延拓为一组沿 γ 平行的正交标架.

Proof. 首先证明 (1) $\Leftrightarrow$ (2). $(0,2)$-张量场 g 的全协变导数为

$$(\nabla g)(Y, Z, X) = (\nabla_X g)(Y, Z) = X\big(g(Y, Z)\big) - g\big(\nabla_X Y, Z\big) - g\big(Y, \nabla_X Z\big),$$

所以 ∇ 与 g 相容当且仅当 $\nabla g \equiv 0$.

然后证明 (2) $\Leftrightarrow$ (3). 命题 2.9 表明 ∇g 在局部标架 (E_i) 中的分量为

$$g_{ij;k} = E_k(g_{ij}) - \Gamma^l_{ki} g_{lj} - \Gamma^l_{kj} g_{il}.$$

所以 $\nabla g \equiv 0$ 当且仅当 (3.2) 式成立.

现在我们证明 (1) $\Leftrightarrow$ (4). 假设 (1) 成立. 令 V, W 是沿光滑曲线 $\gamma : I \to M$ 的光滑向量场. 给定 $t_0 \in I$, 在 $\gamma(t_0)$ 的邻域中选取局部坐标 (x^i), 那么有 $V = V^i \partial_i$ 和 $W = W^j \partial_j$, 其中 $V^i, W^j : I \to \mathbb{R}$ 是光滑函数. 注意这里我们将 ∂_i 和 $\partial_i \circ \gamma$ 等同. 那么

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle &= \frac{d}{dt}\left(V^i W^j \langle \partial_i, \partial_j\rangle\right) \\
&= \left(\dot{V}^i W^j + V^i \dot{W}^j\right)\langle \partial_i, \partial_j\rangle + V^i W^j \nabla_{\gamma'(t)}\langle \partial_i, \partial_j\rangle \\
&= \left(\dot{V}^i W^j + V^i \dot{W}^j\right)\langle \partial_i, \partial_j\rangle + V^i W^j\left(\langle \nabla_{\gamma'(t)}\partial_i, \partial_j\rangle + \langle \partial_i, \nabla_{\gamma'(t)}\partial_j\rangle\right) \\
&= \langle \dot{V}^i \partial_i, W\rangle + \langle V, \dot{W}^j \partial_j\rangle + \langle V^i \nabla_{\gamma'(t)}\partial_i, W\rangle + \langle V, W^j \nabla_{\gamma'(t)}\partial_j\rangle \\
&= \langle D_t V, W\rangle + \langle V, D_t W\rangle .
\end{aligned}$$

反之, 如果 (4) 成立, 根据 $D_t V = \nabla_{\gamma'(t)}\widetilde{V}$ 即得 (1).

接下来我们证明 (4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (6) $\Rightarrow$ (7) $\Rightarrow$ (4). 假设 (4) 成立. 如果 V, W 是沿 γ 平行的, 那么

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \langle D_t V, W\rangle + \langle V, D_t W\rangle = 0,$$

所以 $\langle V, W\rangle$ 是沿 γ 的常值函数.

假设 (5) 成立. 令 $v_0, w_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$, V, W 是它们沿 γ 的平行移动, 即 $V(t_0) = v_0$, $W(t_0) = w_0$, $P^{\gamma}_{t_0 t_1}(v_0) = V(t_1)$ 以及 $P^{\gamma}_{t_0 t_1}(w_0) = W(t_1)$. 因为 $\langle V, W\rangle$ 沿 γ 是常数, 所以

$$\left\langle P^{\gamma}_{t_0 t_1}(v_0), P^{\gamma}_{t_0 t_1}(w_0)\right\rangle = \langle V(t_1), W(t_1)\rangle = \langle V(t_0), W(t_0)\rangle = \langle v_0, w_0\rangle ,$$

所以 $P^{\gamma}_{t_0 t_1}$ 是线性等距.

假设 (6) 成立. 设 (b_i) 是 $T_{\gamma(t_0)}M$ 的一组正交基. 对于每个 b_i, 记 E_i 是 b_i 沿 γ 的平行移动, 由于平行移动映射是线性等距, 所以 (E_i) 在 γ 的每个点处都是正交基.

最后假设 (7) 成立. 令 (E_i) 是沿 γ 平行的正交标架. 给定沿 γ 的两个向量场 V 和 W, 我们可以将其表示为 $V = V^i E_i$ 以及 $W = W^j E_j$. (E_i) 是正交标架表明沿 γ 时度量系数 $g_{ij} = \langle E_i, E_j\rangle$ 是常数 ± 1 或者 0. E_i 的平行性表明 $D_t V = \dot{V}^i E_i$ 以及 $D_t W = \dot{W}^i E_i$, 所以

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle &= \frac{d}{dt} V^i W^j \langle E_i, E_j\rangle \\
&= \left(\dot{V}^i W^j + V^i \dot{W}^j\right)\langle E_i, E_j\rangle \\
&= \langle D_t V, W\rangle + \langle V, D_t W\rangle .
\end{aligned}$$

□

推论 3.2. 设 (M, g) 是黎曼流形, ∇ 是 M 上的度量联络, $\gamma : I \to M$ 是光滑曲线.

1. $|\gamma'(t)|$ 是常数当且仅当对于所有的 $t \in I$ 有 $D_t \gamma'(t)$ 正交于 $\gamma'(t)$.
2. 如果 γ 是测地线, 那么 $|\gamma'(t)|$ 是常数.

Proof. (1) $|\gamma'(t)|$ 是常数当且仅当 $d/dt\,\langle \gamma'(t), \gamma'(t)\rangle \equiv 0$, 当且仅当

$$\left\langle D_t \gamma'(t), \gamma'(t)\right\rangle \equiv 0,$$

即 $D_t\gamma'(t)$ 正交于 $\gamma'(t)$.

(2) 若 γ 是测地线, 那么 $D_t\gamma' \equiv 0$, 此时 $D_t\gamma'(t)$ 始终正交于 $\gamma'(t)$, 即 $|\gamma'(t)|$ 是常数. □

3.1.2 对称联络

我们说 TM 中的联络 ∇ 是**对称的**, 如果

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X \equiv [X,Y] \quad \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M).$$

对称条件也可以使用**挠率张量**表示. 挠率张量是一个 $(1,2)$-张量场 $\tau : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, 定义为

$$\tau(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y].$$

所以 ∇ 是对称的当且仅当挠率张量为零.

定理 3.3 (黎曼几何基本定理). 令 (M,g) 是黎曼流形或者伪黎曼流形，那么存在唯一的 TM 中的联络 ∇ 使得其与 g 相容并且对称，这个联络被称为 **g 的 Levi-Civita 联络** (当 g 是正定的时候，被称为**黎曼联络**).

Proof. 我们首先通过推导 ∇ 的公式证明唯一性. 假设 ∇ 是这样的联络以及 $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$. 根据相容性, 我们有

$$\begin{aligned}
X\langle Y,Z\rangle &= \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \\
Y\langle Z,X\rangle &= \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle, \\
Z\langle X,Y\rangle &= \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle.
\end{aligned}$$

再根据对称性条件, 有

$$\begin{aligned}
X\langle Y,Z\rangle &= \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_Z X\rangle + \langle Y, [X,Z]\rangle, \\
Y\langle Z,X\rangle &= \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_X Y\rangle + \langle Z, [Y,X]\rangle, \\
Z\langle X,Y\rangle &= \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Y Z\rangle + \langle X, [Z,Y]\rangle.
\end{aligned}$$

把前两个式子相加减去第三个式子, 得到

$$\begin{aligned}
&X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle = \\
&\qquad 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y,[X,Z]\rangle + \langle Z,[Y,X]\rangle - \langle X,[Z,Y]\rangle,
\end{aligned}$$

这表明

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2}\Big(&X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle \\
&- \langle Y,[X,Z]\rangle - \langle Z,[Y,X]\rangle + \langle X,[Z,Y]\rangle\Big).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

现在假设 ∇^1 和 ∇^2 都是与 g 相容的对称的联络. 由于 (3.4) 式右端不依赖于联络, 所以 $\langle \nabla_X^1 Y - \nabla_X^2 Y, Z\rangle = 0$, 这表明 $\nabla_X^1 Y = \nabla_X^2 Y$, 所以 $\nabla^1 = \nabla^2$.

下面说明存在性. 我们使用 (3.4) 式或者其坐标版本. 只需要说明这样的联络在每个坐标卡中存在, 然后唯一性保证它们在重合的坐标卡中是一致的.

令 (x^i) 是任意光滑坐标, 将 (3.4) 式写为坐标版本, 并注意到 $[\partial_i, \partial_j] = 0$, 所以

$$\langle \nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_l \rangle = \frac{1}{2}\Big(\partial_i \langle \partial_j, \partial_l \rangle + \partial_j \langle \partial_l, \partial_i \rangle - \partial_l \langle \partial_i, \partial_j \rangle\Big). \tag{3.5}$$

由于

$$g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle, \qquad \nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^m \partial_m,$$

代入 (3.5) 式, 得到

$$\Gamma_{ij}^m g_{ml} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}). \tag{3.6}$$

最后将等式两边乘以逆矩阵 g^{kl}, 注意到 $g_{ml} g^{kl} = \delta_m^k$, 所以

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}). \tag{3.7}$$

注意到 $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, 所以这是一个对称联络. 接下来说明 ∇ 与 g 相容即可. 我们有

$$\begin{aligned}\Gamma_{ki}^l g_{lj} + \Gamma_{kj}^l g_{il} &= \frac{1}{2}(\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{kj} - \partial_j g_{ki}) + \frac{1}{2}(\partial_k g_{ij} + \partial_j g_{ki} - \partial_i g_{kj}) \\ &= \partial_k g_{ij}.\end{aligned}$$

根据 命题 3.1, 所以 ∇ 是度量联络. □

上述证明的过程给出了 Levi-Civita 联络的明确公式.

推论 3.4 (Levi-Civita 联络公式). 令 (M, g) 是黎曼流形或者伪黎曼流形, ∇ 是 Levi-Civita 联络.

1. **(Koszul 公式)** 如果 X, Y, Z 是光滑张量场, 那么

$$\begin{aligned}\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \frac{1}{2}\Big(&X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle \\ &- \langle Y, [X, Z] \rangle - \langle Z, [Y, X] \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle\Big).\end{aligned} \tag{3.8}$$

2. **(坐标表示)** 在任意光滑坐标卡中, Levi-Civita 联络的系数可以表示为

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}). \tag{3.9}$$

3. **(局部标架表示)** 令 (E_i) 是开集 $U \subseteq M$ 上的光滑局部标架, $c_{ij}^k : U \to \mathbb{R}$ 是光滑函数, 定义为

$$[E_i, E_j] = c_{ij}^k E_k. \tag{3.10}$$

那么 Levi-Civita 联络在这个标架中的系数为

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl}(E_i g_{jl} + E_j g_{il} - E_l g_{ij} - g_{jm} c_{il}^m - g_{lm} c_{ji}^m + g_{im} c_{lj}^m). \tag{3.11}$$

4. **(局部正交标架表示)** 如果 g 是黎曼度量, (E_i) 是光滑正交局部标架, c_{ij}^k 的定义不变, 那么

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}(c_{ij}^k - c_{ik}^j - c_{jk}^i). \tag{3.12}$$

3.2 指数映射

在本节中, 我们令 (M, g) 是一个黎曼流形或者伪黎曼流形, 配备 Levi-Civita 联络. 我们已经知道每个点 $p \in M$ 和初速度 $v \in T_pM$ 都确定了唯一的极大测地线 γ_v. 为了更深入的研究测地线, 我们需要研究它们的集体行为, 尤其是当我们改变初始点和初速度的时候测地线会如何改变.

引理 3.5 (缩放引理). 对于每个 $p \in M$，$v \in T_pM$ 和 $c, t \in \mathbb{R}$，当下面的式子两端都有定义的时候，有

$$\gamma_{cv}(t) = \gamma_v(ct). \tag{3.13}$$

Proof.

□

注意到 $v \mapsto \gamma_v$ 定义了从 TM 到测地线集合的一个映射. 更重要的是, 根据缩放引理, 这允许我们定义从 TM 的一个子集到 M 的映射, 其将 T_pM 的每条过原点的直线送到一个测地线.

定义子集 $\mathcal{E} \subseteq TM$ 为

$$\mathcal{E} = \left\{ v \in TM \;\middle|\; \gamma_v \text{ 定义在包含 } [0,1] \text{ 的某个开区间上} \right\},$$

被称为**指数映射的定义域**. 定义**指数映射** $\exp : \mathcal{E} \to M$ 为

$$\exp(v) = \gamma_v(1).$$

对于每个 $p \in M$, 定义 p **处的限制指数映射** $\exp_p$ 为 exp 在集合 $\mathcal{E}_p = \mathcal{E} \cap T_pM$ 上的限制.