Contents

1

李代数

1.1 定义和初步例子

定义 1.1. 一个**有限维实或者复李代数**指的是一个有限维的实或者复向量空间 $\mathfrak{g}$，配备一个映射 $[\cdot,\cdot]:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$，满足：

1. $[\cdot,\cdot]$ 是双线性的.
2. $[\cdot,\cdot]$ 是反对称的：对于任意 $X,Y\in\mathfrak{g}$ 有 $[X,Y]=-[Y,X]$.
3. Jacobi 恒等式：对于任意 $X,Y,Z\in\mathfrak{g}$ 有

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0.$$

若 $[X,Y]=0$，那么我们说 X,Y 是**可交换的**. 如果对于所有 $X,Y\in\mathfrak{g}$ 都有 $[X,Y]=0$，那么我们说 $\mathfrak{g}$ 是**可交换的**.

$[\cdot,\cdot]$ 通常被称为 $\mathfrak{g}$ 上的李括号. 注意到反对称性表明 $[X,X]=0$. 李括号运算通常不满足结合律, 然而 Jacobi 恒等式可以被视为结合律的替代方案.

例 1.2. 令 $\mathfrak{g}=\mathbb{R}^3$, $[\cdot,\cdot]:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 定义为

$$[x,y]=x\times y,$$

其中 $x\times y$ 是向量叉乘. 那么 $\mathfrak{g}$ 是一个李代数.

Proof. 双线性性和反对称性是显然的. 根据双线性性, 只需要对基向量 e_1,e_2,e_3 验证 Jacobi 恒等式即可. 如果 j,k,l 互不相同, 那么 e_j,e_k,e_l 中任意两个的叉乘等于第三个或者第三个的相反方向, 所以 Jacobi 恒等式中每一项都是 0. 于是只需要验证 j,k,l 中有两个相同的情况即可, 通过重新排序, 只需要验证

$$[e_j,[e_j,e_k]]+[e_j,[e_k,e_j]]+[e_k,[e_j,e_j]]=0,$$

上式的前两项相反, 第三项为零, 故叉乘满足 Jacobi 恒等式. □

例 1.3. 令 $\mathcal{A}$ 是结合代数, $\mathfrak{g}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个子空间, 使得任意的 $X,Y\in\mathfrak{g}$ 有 $XY-YX\in\mathfrak{g}$. 那么 $\mathfrak{g}$ 是一个李代数, 有李括号

$$[X,Y]=XY-YX.$$

Proof. 双线性性和反对称性是显然的. 对于 Jacobi 恒等式, 每个双层李括号会产生 4 项, 所以总共有 12 项, 即

$$[X,[Y,Z]]=[X,YZ-ZY]=XYZ-XZY-YZX+ZYX,$$

对 X,Y,Z 进行轮换, 那么正项负项刚好抵消, 故这是一个李代数. □

如果我们仔细观察 Jacobi 恒等式的证明, 我们会发现 XYZ 实际上以两种方式出现, 一种是 $X(YZ)$, 一种是 $(XY)Z$. 所以代数 $\mathcal{A}$ 的结合性是重要的. 对于任意李代数, Jacobi 恒等式意味着李括号的行为**就像**在某个结合代数中的 $XY-YX$ 一样, 即使这个李括号本身不是这样定义的 (比如叉乘). 实际上, 可以证明每个李代数 $\mathfrak{g}$ 都可以嵌入到一个结合代数 $\mathcal{A}$ 中, 使得其李括号变成 $XY-YX$.

例 1.4. 令 $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ 是所有满足 $\operatorname{tr} X=0$ 的 $X\in M_n(\mathbb{C})$ 构成的空间. 那么 $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ 是李代数, 有李括号 $[X,Y]=XY-YX$.

Proof. 我们有

$$\operatorname{tr}(XY-YX)=\operatorname{tr}(XY)-\operatorname{tr}(YX)=0,$$

所以可以应用 例 1.3. □

定义 1.5. 实或者复李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个**子代数**指的是一个子空间 $\mathfrak{h}$ 使得任取 $H_1,H_2\in\mathfrak{h}$ 有 $[H_1,H_2]\in\mathfrak{h}$. 如果 $\mathfrak{g}$ 是复李代数, $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的实子空间并且对李括号封闭, 那么 $\mathfrak{h}$ 被称为 $\mathfrak{g}$ 的**实子代数**.

李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个子代数 $\mathfrak{h}$ 被称为 $\mathfrak{g}$ 中的**理想**, 如果对于任意 $H\in\mathfrak{h},X\in\mathfrak{g}$ 有 $[X,H]\in\mathfrak{h}$.

李代数 $\mathfrak{g}$ 的**中心**指的是一些 $X\in\mathfrak{g}$ 的集合, 对于每个 X, 其使得任取 $Y\in\mathfrak{g}$, 有 $[X,Y]=0$.

定义 1.6. 如果 $\mathfrak{g},\mathfrak{h}$ 是李代数, 线性映射 $\phi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ 满足 $\phi([X,Y])=[\phi(X),\phi(Y)]$, 那么 ϕ 被称为**李代数同态**. 此外, 如果 ϕ 是双射, 那么 ϕ 被称为**李代数同构**.

定义 1.7. 如果 $\mathfrak{g}$ 是李代数, $X\in\mathfrak{g}$, 定义线性映射 $\operatorname{ad}_X:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ 为

$$\operatorname{ad}_X(Y)=[X,Y].$$

映射 $X\mapsto\operatorname{ad}_X$ 被称为**伴随映射**或者**伴随表示**.

虽然 $\operatorname{ad}_X(Y)$ 就是 $[X,Y]$, 但是 ad 的记号是有方便的. 例如, 我们可以把

$$[X,[X,[X,[X,Y]]]]$$

写为 $(\operatorname{ad}_X)^4(Y)$. 此外, 映射 $X\mapsto\operatorname{ad}_X$ 可以视为 $\mathfrak{g}\to\operatorname{End}(\mathfrak{g})$ 的映射. Jacobi 恒等式等价于 ad_X 是李括号的**导子**:

$$\operatorname{ad}_X([Y,Z])=[\operatorname{ad}_X(Y),Z]+[Y,\operatorname{ad}_X(Z)]. \tag{1.1}$$

命题 1.8. 如果 $\mathfrak{g}$ 是李代数，那么

$$\mathrm{ad}_{[X,Y]} = \mathrm{ad}_X\,\mathrm{ad}_Y - \mathrm{ad}_Y\,\mathrm{ad}_X = [\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_Y],$$

也就是说 $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ 是李代数同态.

Proof. 注意到

$$\mathrm{ad}_{[X,Y]}(Z) = [[X,Y],Z],$$

并且

$$[\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_Y](Z) = [X,[Y,Z]] - [Y,[X,Z]],$$

所以上式等价于 Jacobi 恒等式. □

定义 1.9. 如果 $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ 是李代数，那么直和 $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ 也是李代数，配备李括号

$$[(X_1, X_2), (Y_1, Y_2)] = ([X_1, Y_1], [X_2, Y_2]).$$

如果 $\mathfrak{g}$ 是李代数，$\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ 是两个子代数，作为向量空间有 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ 并且对于 $X_1 \in \mathfrak{g}_1, X_2 \in \mathfrak{g}_2$ 有 $[X_1, X_2] = 0$，那么我们说 $\mathfrak{g}$ 分解为 $\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}_2$ 的直和.

定义 1.10. 令 $\mathfrak{g}$ 是有限维实或者复李代数，$X_1, \ldots, X_N$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一组基，那么有唯一的常数 c_{jkl} 使得

$$[X_j, X_k] = \sum_{l=1}^{N} c_{jkl} X_l,$$

c_{jkl} 被称为 $\mathfrak{g}$ 的**结构常数**.

虽然我们不会经常遇到结构常数, 但是在物理课程中会经常使用. 结构常数满足下面两个恒等式: 对于 j, k, l, m 有

$$\begin{aligned} c_{jkl} + c_{kjl} &= 0, \\ \sum_n (c_{jkn}c_{nlm} + c_{kln}c_{njm} + c_{ljn}c_{nkm}) &= 0, \end{aligned}$$

第一个式子来源于反对称性, 第二个式子来源于 Jacobi 恒等式.

1.2 单、可解和幂零的李代数

定义 1.11. 一个李代数 $\mathfrak{g}$ 被称为**不可约的**，如果 $\mathfrak{g}$ 中的理想只有 $\mathfrak{g}$ 和 $\{0\}$. $\mathfrak{g}$ 被称为**单的**，如果 $\mathfrak{g}$ 是不可约的且 $\dim \mathfrak{g} \geq 2$.

一维的李代数一定是不可约的, 因为它没有非平凡的子空间, 所以没有非平凡的子代数, 进而没有非平凡的理想. 但是, 根据定义, 一维的李代数不被认为是单的!

此外, 还可以注意到一维李代数 $\mathfrak{g}$ 一定是可交换的, 因为对于任意 $X \in \mathfrak{g}$ 和标量 a, b 都有 $[aX, bX] = ab[X,X] = 0$. 另一方面, 如果 $\mathfrak{g}$ 是可交换的, 那么 $\mathfrak{g}$ 的任意子空

间都是理想, 所以对于可交换的李代数而言, 只有一维的情况才是不可约的. 因此, 单李代数的等价定义是其**不可约且不交换**.

显然, 这些概念在群论中有对应的类比. 其中子群类比于子代数, 正规子群类比于理想. (例如, 李代数同态的核总是是一个理想, 群同态的核总是为正规子群). 群论中没有非平凡正规子群的群被称为单群, 李代数中没有非平凡理想的李代数被称为单李代数.

命题 1.12. 李代数 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 是单的.

Proof. 我们使用下列 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的基:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

计算可知它们满足 $[X,Y] = H, [H,X] = 2X, [H,Y] = -2Y$. 设 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 中的理想并且 $\mathfrak{h}$ 包含元素 $Z = aX + bH + cY$, 其中 $a,b,c \in \mathbb{C}$ 是不全为零的复数. 首先假设 $c \neq 0$, 那么

$$[X,[X,Z]] = [X, -2bX + cH] = -2cX$$

是 X 的非零倍数.$\mathfrak{h}$ 是理想表明 $X \in \mathfrak{h}$.另一方面,有 $[Y,X] = -H$ 以及 $[Y,[Y,X]] = 2Y$, 所以 $Y, H \in \mathfrak{h}$. 这表明此时 $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

现在假设 $c = 0, b \neq 0$. 那么 $[X,Z] = -2bX$ 表明 $X \in \mathfrak{h}$, 然后同样可得 $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. 最后, 如果 $c = b = 0$ 但是 $a \neq 0$, 那么 $X = Z/a \in \mathfrak{h}$, 仍然得到 $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. 这就表明 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 是单李代数. □

定义 1.13. 如果 $\mathfrak{g}$ 是李代数，那么 $\mathfrak{g}$ 中的**换位子理想** $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 定义为所有换位子的线性组合张成的空间，即 $Z \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 当且仅当

$$Z = c_1[X_1,Y_1] + \cdots + c_m[X_m,Y_m].$$

对于任意 $X,Y \in \mathfrak{g}$, 换位子 $[X,Y] \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, 这表明 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 确实是一个理想.

定义 1.14. 对于李代数 $\mathfrak{g}$，我们定义一个子代数序列 $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots$ 为：$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$，$\mathfrak{g}_1 = [\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_0]$，$\mathfrak{g}_2 = [\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_1]$，等等. 这些子代数被称为 $\mathfrak{g}$ 的**导出列**. 如果对于某个 j 使得 $\mathfrak{g}_j = \{0\}$，那么我们说 $\mathfrak{g}$ 是**可解的**.

利用 Jacobi 恒等式不难证明每个 $\mathfrak{g}_j$ 都是 $\mathfrak{g}$ 的理想, 例如对于 $[X,Y] \in \mathfrak{g}_2$, 其中 $X,Y \in \mathfrak{g}_1$, 那么对于任意 $Z \in \mathfrak{g}$, 有

$$[Z,[X,Y]] = -[X,[Y,Z]] - [Y,[Z,X]] \in \mathfrak{g}_2.$$

定义 1.15. 对于任意李代数 $\mathfrak{g}$，定义理想序列 $\mathfrak{g}^j$ 为：$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$，$\mathfrak{g}^{j+1}$ 为所有的形如 $[X,Y]$ 的换位子的线性组合构成的空间，其中 $X \in \mathfrak{g}$ 以及 $Y \in \mathfrak{g}^j$. 这些子代数被称为 $\mathfrak{g}$ 的**上中心列**. 如果对于某个 j 有 $\mathfrak{g}^j = \{0\}$，那么我们说 $\mathfrak{g}$ 是**幂零的**.

等价地说，$\mathfrak{g}^j$ 由所有的 j-重换位子张成：

$$[X_1,[X_2,[X_3,\ldots,[X_j,X_{j+1}]\ldots]]].$$

注意到 j-重换位子也是 $(j-1)$-重换位子，所以 $\mathfrak{g}^{j-1}\supseteq\mathfrak{g}^j$. 对于任意 $X\in\mathfrak{g}$ 和 $Y\in\mathfrak{g}^j$，我们有 $[X,Y]\in\mathfrak{g}^{j+1}\subseteq\mathfrak{g}^j$，所以 $\mathfrak{g}^j$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想．此外，显然有 $\mathfrak{g}_j\subseteq\mathfrak{g}^j$，因此幂零李代数都是可解的.

命题 1.16. 如果 $\mathfrak{g}\subseteq M_3(\mathbb{R})$ 是 3×3 上三角矩阵并且对角线为零．那么 $\mathfrak{g}$ 满足 例 1.3，并且是一个幂零李代数．

Proof. 显然 $\mathfrak{g}$ 是李代数．我们选取基

$$X=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad Z=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

直接计算得 $[X,Y]=Z$ 以及 $[X,Z]=[Y,Z]=0$. 故 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 由 Z 张成，进而 $[\mathfrak{g},[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]]=0$，所以 $\mathfrak{g}$ 是幂零的. □

命题 1.17. 如果 $\mathfrak{g}\subseteq M_2(\mathbb{C})$ 是形如

$$\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}\quad a,b,c\in\mathbb{C}$$

的 2×2 矩阵，那么 $\mathfrak{g}$ 满足 例 1.3，并且是可解但不幂零的李代数．