Processus de Wishart

Projet 3A - Soutenance de mi-parcours

E. Bohbot J. Lefrancq-Lumière

Ecole Polytechnique, 1er décembre 2015

Outline

Outline

Diffusions

- Soit $B_t = (B_1(t), \dots B_n(t))$ un mouvement brownien de $\mathbb{R}^n$. Le processus $X_t = B_1(t)^2 + \cdots + B_n(t)^2$ est un processus solution de l'EDS $dX_t = 2\sqrt{X_t}dB_t + ndt$, dont le générateur est $2xD^2 + nD$ où $D = d/dx$
- Plus généralement, pour $\alpha \geq 0$, un Bessel carré BESQ(α) est généré par $2xD^2 + \alpha D$ et a pour densité une fonction de Bessel

Outline

Processus matriciels

- Les fonctions de Bessel ont des versions matricielles
- L'analogue matricielle de X_t a été étudié et a pour densité une fonction de Bessel matricielle. Plus spécifiquement, si B est une matrice de mouvement brownien de taille $n \times p$ la matrice $B^T B$ a une distribution dite de Wishart et pour densité une fonction de Bessel matricielle
- Il est donc naturel d'étudier la version matricielle des processus Bessel carrés (i.e où α n'est plus un entier naturel, mais un réel positif).
- On va donc étudier l'EDS

$$dS_t = \sqrt{S_t} dB_t + dB^T \sqrt{S_t} + \alpha I dt$$

où $\alpha \in \mathbb{R}^+$, et des formes légèrement plus générales (processus affines)

Outline

Ornstein-Uhlenbeck carrés

- On peut aussi généraliser en prenant $S_t = X_t^T X_t$ où X_t est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck.
- Soit $dX_t = dN_t a + X_t b dt$ où a et b sont des matrices carrées de taille p, et N_t une matrice de mouvement brownien de taille $n \times p$. Soit $S_t = X_t^T X_t$ et

$$dB_t = \sqrt{S_t^{-1}} X_t^T dN_t a (\sqrt{a^T a})^{-1}$$

- (B_t) est une matrice brownienne de taille p et (S_t) est solution de

$$dS_t = \sqrt{S_t} dB_t \sqrt{a^T a} + \sqrt{a^T a} dB_t^T \sqrt{S_t} + (bS_t + S_t b)dt + n a^T a dt$$

- On généralise en prenant $\alpha \in \mathbb{R}^+$

Processus affines

- On peut définir un cadre plus général, qui englobe les processus de Wishart : celui des processus affines.
- On considère dans la suite les processus affines sur $\mathcal{S}_d^+(\mathbb{R})$ solutions de l'EDS

$$X_t^x = x + \int_0^t (\overline{\alpha} + B(X_s^x))ds + \int_0^t (\sqrt{X_s^x} dW_s a + a^T dW_s^T \sqrt{X_s^x})$$

où

$$x, \overline{\alpha} \in \mathcal{S}_d^+(\mathbb{R}) \qquad a \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$$
$$B \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_d(\mathbb{R}))$$

- Les processus de Wishart correspondent au cas où

$$\exists \alpha \geq 0, \qquad \overline{\alpha} = \alpha a^T a \quad \text{et}$$
$$\exists \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}), \forall x \in \mathcal{S}_d(\mathbb{R}) \qquad B(x) = bx + xb^T$$

Outline

Processus de Wishart : premiers résultats

Expression du générateur

Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration engendrée par un mouvement brownien $((W_t)_t, t \geq 0)$. Soient $(A_t)_t$, $(B_t)_t$ et $(C_t)_t$, $(\mathcal{F}_t)$ adaptés et à valeurs respectives dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_d(\mathbb{R})$.

Lemma

Soit le processus $(Y_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans défini comme suit :

$$dY(t) = C_t dt + B_t dW_t A_t + A_t^T dW_t^T B_t^T$$

Alors

$$d < (Y_t)_{i,j}, (Y_t)_{m,n} >= [(B_t B_t^T)_{i,m}(A_t^T A_t)_{j,n} + (B_t B_t^T)_{i,n}(A_t^T A_T)_{j,m}$$

$$+(B_t B_t^T)_{j,m}(A_t^T A_t)_{i,n} + (B_t B_t^T)_{j,n}(A_t^T A_t)_{i,m}]\, dt$$

Expression du générateur

A partir de ce lemme, on peut appliquer la formule d'Itô à une fonction f dont les dérivées sont bornées pour calculer le générateur du processus affine pour $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{M}_d(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ ayant des dérivées bornées

$$\forall x \in \mathcal{S}_d^+(\mathbb{R}), \;\; \mathcal{L}^{\mathcal{M}} f(x) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\mathbb{E}[f(X_t^x)] - f(x)}{t}$$

On prend $A_t = a$, $B_t = \sqrt{X_s^x}$ et $C_t = \overline{\alpha} + B(X_s^x)$

Theorem

Posons $\mathcal{D}^{\mathcal{M}} = (\partial_{i,j})_{1 \leq i,j \leq d}$. *On a :*

$$\mathcal{L}^{\mathcal{M}} = Tr([\overline{\alpha} + B(x)]\mathcal{D}^{\mathcal{M}}) + \frac{1}{2}[2\,Tr(x\mathcal{D}^{\mathcal{M}} a^T a \mathcal{D}^{\mathcal{M}})$$

$$+ Tr(x(\mathcal{D}^{\mathcal{M}})^T a^T a \mathcal{D}^{\mathcal{M}}) + Tr(x\mathcal{D}^{\mathcal{M}} a^T a (\mathcal{D}^{\mathcal{M}})^T)]$$

Expression du générateur

Réécrivons ce résultat lorsque que l'on se restreint aux matrices symétriques La même définition du générateur $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ mais cette fois-ci pour $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{S}_d(\mathbb{R}), \mathbb{R}$ donne :

Theorem

Posons $\mathcal{D}^{\mathcal{S}}_{i,j} = (1_{i=j} + \frac{1}{2} 1_{i \neq j}) \partial_{i,j}$ *pour* $1 \leq i,j \leq d$. *On a alors :*

$$\mathcal{L}^{\mathcal{S}} = Tr([\overline{\alpha} + B(x)]\mathcal{D}^{\mathcal{S}}) + 2\,Tr(x\mathcal{D}^{\mathcal{S}} a^T a \mathcal{D}^{\mathcal{S}})$$

Outline

Processus de Wishart et fonction caractéristique

Theorem

Soit X_t^x *un processus de Wishart, noté* $WIS_d(x, \alpha, b, a; t)$*. Posons alors* $q_t = \int_0^t exp(sb)a^T aexp(sb^T)ds$ *et* $m_t = exp(tb)$*. On définit alors le domaine de convergence de* X_t^x *comme*

$$\mathcal{D}_{b,a;t} = \{v \in \mathcal{S}_d(\mathbb{R}), \mathbb{E}[exp(Tr(vX_t^x))] < \infty\}$$

C'est un ouvert convexe que l'on peut directement déterminer :

$$\mathcal{D}_{b,a;t} = \{v \in \mathcal{S}_d(\mathbb{R}), \forall s \in [0, t], I_d - 2q_s v \in \mathcal{G}_d(\mathbb{R})\}$$

On peut alors calculer la transformation de Laplace pour $v = v_R + v_I$ $v_R \in \mathcal{D}_{b,a;t}$ $v_I \in \mathcal{S}_d(\mathbb{R})$

$$\mathbb{E}[exp(Tr(vX_t^x)] = \frac{exp(Tr[v(I_d - 2q_t v)^{-1} m_t x m_t^T])}{det(I_d - 2q_t v)^{\frac{\alpha}{2}}}$$

Outline

Réécriture des processus affines

On constate qu'on a en loi l'égalité

$$AFF_d(x, \overline{\alpha}, B, a) = AFF_d(x, \overline{\alpha}, B, \sqrt{a^T a})$$

Par ailleurs, on peut effectuer des transformations affines de processus affines. Si $B_q(x) = (q^T)^{-1} B(q^T x q) q^{-1}$ avec q inversible, alors

$$AFF_d(x, \overline{\alpha}, B, a) = q^T AFF_d((q^T)^{-1} x q^{-1}, (q^T)^{-1} \overline{\alpha} q^{-1}, B_q, a q^{-1}) q$$

Réécriture des processus affines

Theorem

Soit n le rang de $a^T a$. Alors il existe une matrice inversible $\overline{\delta}$ de taille d telle que $\overline{\alpha} = u^T \overline{\delta} u$ et $a_T a = u^T I_d^n u$. On a alors :

$$AFF_d(x, \overline{\alpha}, B, a) = u^T AFF_d((u^T)^{-1} x u^{-1}, \overline{\delta}, B_u, I_d^n) u$$

Combinons alors les résultats précédents. Nous obtenons alors le résultat suivant :

Theorem

Soient, pour un processus de Wishart $WIS_d(x, \overline{\alpha}, b, a; t)$, q_t et m_t définis comme précédemment. On a alors :

$$WIS_d(x, \alpha, b, a; t) = \theta_t WIS_d\left(\theta_t^{-1} m_t x m_{t\,T} (\theta_t^{-1})^T, \alpha, 0, I_d^n; t\right) \theta_t^T$$

Outline

Principe

- L'identité en loi précédente nous permet de nous concentrer sur le cas b $= 0$ et $a = I_d^n$
- On va écrire le générateur associé à $WIS(x, \alpha, 0, I_d^n)$ comme une somme de générateurs qui commutent, et associés à des EDS solubles

Theorem

Soit L le générateur associé au processus de Wishart $WIS(x, \alpha, 0, I_d^n)$ et $L_{e_d^i}$ le générateur associé à $WIS(x, \alpha, 0, e_d^i)$ pour $i \in \{1, ..., d\}$. On a

$$L = \sum_{i=1}^{n} L_{e_d^i}$$

et $\forall i, j \in \{1, ..., d\}$,

$$L_{e_d^i} L_{e_d^j} = L_{e_d^j} L_{e_d^i}$$

Principe

Remarque

Les opérateurs $L_{e_d^i}$ et $L_{e_d^j}$ sont les mêmes à l'échange des coordonnées i et j près
Les processus $WIS(x, \alpha, 0, I_d^n)$ et $WIS(x, \alpha, 0, e_d^i)$ sont bien définis sous $\mathcal{S}_d^+(\mathbb{R})$ sous les mêmes hypothèses, $\alpha \geq d-1$ et $x \in \mathcal{S}_d^+(\mathbb{R})$

Soit $x \in \mathcal{S}_d^+(\mathbb{R})$ et $t > 0$. On définit, itérativement

$$\begin{aligned} X_t^{1,x} &\sim WIS_d(x, \alpha, 0, e_d^1; t) \\ X_t^{2,X_t^{1,x}} &\sim WIS_d(X_t^{1,x}, \alpha, 0, e_d^2; t) \\ &\vdots \\ X_t^{n,\dots X_t^{1,x}} &\sim WIS_d(X_t^{n-1,\dots X_t^{1,x}}, \alpha, 0, e_d^n; t) \end{aligned}$$

Principe

Theorem

Soit $X_t^{n,\dots X_t^{1,x}}$ défini comme ci-dessus. Alors

$$X_t^{n,\dots X_t^{1,x}} \sim WIS_d(x, \alpha, 0, I_d^n; t)$$

Preuve (formelle)
Soit $X_t^x \sim WIS_d(x, \alpha, 0, I_d^n; t)$. Par la formule d'Itô itérée :

$$\mathbb{E}[f(X_t^x)] = \sum_{k=0}^{\infty} t^k L^k f(x)/k!$$

Et on a aussi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(X_t^{n,\dots X_t^{1,x}})] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(X_t^{n,\dots X_t^{1,x}})|X_t^{n-1,\dots X_t^{1,x}}]] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k_n}}{k_n!} \mathbb{E}[L_{e_d^n}^{k_n} f(X_t^{n,\dots X_t^{1,x}})]\end{aligned}$$

En répétant cet argument on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(X_t^{n,\dots X_t^{1,x}})] &= \sum_{k_1,\dots k_n=0}^{\infty} \frac{t^{\sum k_i}}{k_1!\dots k_n!} L_{e_1^n}^{k_1}\dots L_{e_d^n}^{k_n} f(x) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (L_{e_1^n} + \cdots + L_{e_d^n})^k f(x) \\
&= \mathbb{E}[f(X_t^x)]
\end{aligned}$$

Rq : séries bien définies + interversion (à vérifier)

Résumé

En résumé, pour simuler $WIS_d(x, \alpha, b, a; t)$, il suffit de savoir simuler $WIS_d(x, \alpha, 0, e_d^1; t)$

Outline

Cas d=2

- Soit $L_{e_2^1}$ le générateur de $WIS_2(x, \alpha, 0, e_2^1; t)$. On peut l'écrire explicitement :

$$L_{e_2^1} f(x) = \alpha \partial_{\{1,1\}} f(x) + 2x_{\{1,1\}} \partial^2_{\{1,1\}} f(x) + 2x_{\{1,2\}} \partial_{\{1,1\}} \partial_{\{1,2\}} f(x) + \frac{x_{\{2,2\}}}{2} \partial^2_{\{1,2\}} f(x)$$

- On va trouver une EDS soluble associée à ce générateur (deux cas selon que $x_{\{2,2\}}$ nul ou strictement positif)

Cas d=2

- On suppose $x_{\{2,2\}} = 0$. Dans ce cas, $x_{\{1,2\}}$ est également nul car $x \in \mathcal{S}_2^+(\mathbb{R})$
- Dans ce cas, l'EDS

$$X_0 = x, \quad d(X_t^x)_{\{1,1\}} = \alpha dt + 2\sqrt{(X_t^x)_{\{1,1\}}} dZ_t^1$$
$$d(X_t^x)_{\{1,2\}} = 0, \quad d(X_t^x)_{\{2,2\}} = 0$$

  a le même générateur que celui présenté
- Il suffit donc de savoir simuler un CIR (en fait un processus de Bessel carré) dans ce cas (voir plus loin)

Cas d=2

- On suppose maintenant $x_{\{2,2\}} > 0$. On vérifie alors que l'EDS

$$d(X_t^x)_{\{1,1\}} = \alpha dt + 2\sqrt{(X_t^x)_{\{1,1\}} - \frac{{(X_t^x)_{\{1,2\}}}^2}{(X_t^x)_{\{2,2\}}}}dZ_t^1 + 2\frac{(X_t^x)_{\{1,2\}}}{\sqrt{(X_t^x)_{\{2,2\}}}}dZ_t^2$$

$$d(X_t^x)_{\{1,2\}} = \sqrt{(X_t^x)_{\{2,2\}}}dZ_t^2, \quad d(X_t^x)_{\{2,2\}} = 0$$

- Pour résoudre cette EDS on pose

$$(U_t^u)_{\{1,1\}} = (X_t^x)_{\{1,1\}} - \frac{{(X_t^x)_{\{1,2\}}}^2}{(X_t^x)_{\{2,2\}}}$$

$$(U_t^u)_{\{1,2\}} = \frac{(X_t^x)_{\{1,2\}}}{\sqrt{x_{\{2,2\}}}}, \quad (U_t^u)_{\{2,2\}} = x_{\{2,2\}}$$

Cas d=2

- La formule d'Itô permet alors d'obtenir

$$d(U_t^u)_{\{1,1\}} = (\alpha - 1)dt + 2\sqrt{(U_t^u)_{\{1,1\}}}dZ_t^1$$
$$d(U_t^u)_{\{1,2\}} = dZ_t^2, \quad d(U_t^u)_{\{2,2\}} = 0$$

- On peut alors simuler U à l'aide de CIR (sur la diagonale) et de gaussiennes indépendantes (pour les termes croisés). On retrouve la même structure pour le cas général.
- On obtient ensuite (X_t) en inversant le système de départ

$$(X_t^x)_{\{1,1\}} = (U_t^u)_{\{1,1\}} + (U_t^u)_{\{1,2\}}$$
$$(X_t^x)_{\{1,2\}} = (U_t^u)_{\{1,2\}}\sqrt{(U_t^u)_{\{2,2\}}}, \quad (X_t^x)_{\{2,2\}} = (U_t^u)_{\{2,2\}}$$

Theorem

ENTREE : $x \in \mathcal{S}_d^+(\mathbb{R}, \alpha \geq d-1$ *et* $t \geq 0$
SORTIE : X, *échantillonné selon* $WIS_2(x, \alpha, 0, e_2^1; t)$

- *On échantillone* G_2 *une variable gaussienne*
- *On échantillone* $(U_t^u)_{1,1}$ *un processus CIR au temps partant de* $u_{1,1}$ *et tel que*

$$d(U_t^u)_{1,1} = (\alpha - 1)dt + 2\sqrt{U_t^u{}_{1,1}} dZ_t^1$$

- *On calcule*

$$(U_t^u)_{1,2} = (u_t^u)_{1,2} + \sqrt{t} G_2$$

- *RETOURNER*

$$(X_t^x)_{\{1,1\}} = (U_t^u)_{\{1,1\}} + (U_t^u)_{\{1,2\}}$$
$$(X_t^x)_{\{1,2\}} = (U_t^u)_{\{1,2\}} \sqrt{(U_t^u)_{\{2,2\}}}, \quad (X_t^x)_{\{2,2\}} = (U_t^u)_{\{2,2\}}$$

Outline

Dimension d

Dans le cas général de la dimension d, les mêmes idées sont à l'œuvre

- Écrire explicitement le générateur de l'EDS
- Utiliser des résultats de décomposition matricielle (Cholesky étendu) pour la sous-matrice $(x_{i,j})_{2,j}$
- Trouver une équation soluble de même générateur et la résoudre par changement de variables
- Simulation de U, puis de X avec des CIR et des gaussiennes indépendantes

Cox-Ingersol-Ross

- Processus CIR gouverné par :

$$dr(t) = a\,(b - r(t))\,dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW_t$$

- b : valeur cible, a : vitesse de convergence
- Schema d'Euler

$$r(t_{i+1}) = r(t_i) + a\,(b - r(t_i))\,(t_{i+1} - t_i) + \sigma\sqrt{r(t_i)^+}\sqrt{t_{i+1} - t_i}Z_{i+1}$$

- Partie positive car $r(t_i)$ peut devenir négatif $\Rightarrow$ erreur d'approximation !
- On va utiliser la loi de transition du processus (connue même si EDS non soluble)

Outline

Densité de transition

- Notation : si $\chi = \sum_{i=1}^{d} (Z_i + a_i)^2$, ou les Z_i sont des gaussiennes standards iid, χ ne dépend que de $\lambda := \sum_{i=1}^{d} a_i^2$. On note $\chi_d^2(\lambda)$ cette variable aléatoire.
- Densité de transition (u<t)

$$r(t)|r(u) \sim \frac{\sigma^2 \left(1 - e^{-a(t-u)}\right)}{4a} \chi_d^2 \left(\frac{4ae^{-a(t-u)}}{\sigma^2(1 - e^{-a(t-u)})} r(u) \right)$$

ou $d := 4ab/\sigma^2 \in \mathbb{R}_+$ (voir plus loin)

- Comment simuler un $\chi_d^2(\lambda)$?

Outline

Simulation d'un $\chi^2_d(\lambda)$ (cas d>1)

- Cas d>1 : par un calcul simple

$$\chi^2_d(\lambda) = (Z + \sqrt{\lambda})^2 + \chi^2_{d-1}$$

  ou $Z \sim N(0,1)$ et χ^2_{d-1} est centre
- Simulation de $\chi^2_d(\lambda)$ aisée

Simulation d'un $\chi^2_d(\lambda)$ (cas d<1)

- Remarque : la fonction de répartition d'un χ^2_d centré est donnée par

$$P(\chi^2_d \leq y) = \frac{1}{2^{d/2}\Gamma(d/2)} \int_0^y e^{-z/2} z^{d/2-1} dz$$

valide pour $d \in \mathbb{R}_+$

- Par ailleurs, la fonction de répartition d'un $\chi^2_d(\lambda)$ est donnée par

$$P(\chi^2_d(\lambda) \leq y) = e^{-\lambda/2} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\lambda/2)^j/j!}{2^{d/2+j}\Gamma(d/2+j)} \int_0^y e^{-z/2} z^{d/2+j-1} dz$$

valide pour $d \in \mathbb{R}_+$

Simulation d'un $\chi^2_d(\lambda)$ (cas d<1)

- Soit N une poisson de moyenne $\lambda/2$

$$P(N=j) = e^{-\lambda/2}\frac{(\lambda/2)^j}{j!}$$

- On a donc

$$P(\chi^2_d(\lambda) \leq y) = \sum_{j=0}^{+\infty} P(N=j)P(\chi^2_{d+2N} \leq y | N=j)$$

valide pour $d \in \mathbb{R}_+$

- On peut donc voir (et simuler) un $\chi^2_d(\lambda)$ comme un χ^2 centré avec un degré de liberte aleatoire

Outline

Simulation

- Simulation du CIR sur une grille $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$
- Utilisation de la densité de transition pour passer de i à i+1
- Simulation du $\chi^2_d(\lambda)$ ou $d := 4ab/\sigma^2$ avec l'une ou l'autre méthode selon que $d > 1$ ou $d 1$

Résultats

- Cas 1 : volatilité très faible ($\sigma = 10^{-3}$), temps long (T=20), vitesse normale (a=0.2)
- On attend une convergence vers la valeur cible b=0.05

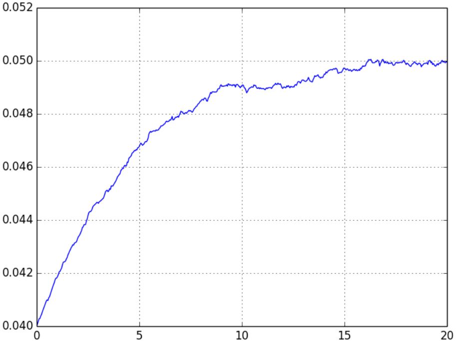

Figure: CIR avec volatilité quasi-nulle

Resultats

- Cas 1 : volatilité normale ($\sigma = 0.1$), temps intermédiaire (T=5.0), vitesse très grande (a=20)
- On attend une stabilisation rapide autour de la valeur cible b=0.05

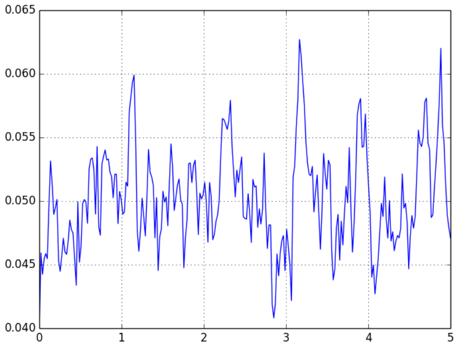

Figure: CIR avec vitesse élevée

Outline

À faire

- Mettre en place la simulation exacte d'un processus de Wishart en suivant l'algorithme présenté (dimension 2, puis d)
- Comparer les résultats obtenus avec les Ornstein-Uhlenbeck carrés dans le cas où α est entier
- Étudier et implémenter le schéma de discrétisation qui permet un gain de vitesse dans l'algorithme, et étudier ses performances asymptotiques
- Comparer (précision, vitesse) les deux méthodes de simulation pour un Wishart

Outline

Projets

- Étudier les applications des processus de Wishart en mathématiques financières : matrice de covariance d'un panier d'actifs

$$dS_t = diag(S_t)[(r\mathbf{1} + \lambda_t dt) + \sqrt{\Sigma_t} dZ_t]$$

  où Z_t est un brownien indépendant de celui utilisé qui intervient dans la dynamique du Wishart
- Ajouter une corrélation entre le brownien des actifs et celui du processus de Wishart
- Utiliser la fonction caractéristique d'un processus de Wishart pour sa simulation (a priori plus difficile)

Conclusion

Merci de votre attention !
Questions ?