Universidad Nacional de Colombia- Sede Medellín, Departamento de Matemáticas
Ecuaciones Diferenciales (1000007), Taller 5 .
Semestre 01-2025

1. En los siguientes ejercicios, cada familia de funciones es la solución general de la ecuación diferencial en el intervalo indicado.

   Determine un miembro de la familia que sea solución del P.V.I.

   (a)
   $$y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-x}; \quad I = (-\infty, \infty); \quad y'' - 3y' - 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1$$

   (b)
   $$y(x) = c_1 x + c_2 x \ln(x); \quad I = (0, \infty); \quad x^2 y'' - xy' + y = 0, \quad y(1) = 3, \quad y'(1) = -1$$

2. Determine el mayor intervalo para el cual se tiene la certeza de que el problema de valor inicial dado tiene solución única. No es necesario hallar la solución

   (a) $(x-3)\,y'' + \frac{x}{x+3} y' + (\ln|x+5|)\,y = e^x, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1.$
   (b) $(t-2)\,y''' + t^2 y' + \frac{t^3}{t-1} y = \ln(t), \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = 1, \quad y'\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad y''\left(\frac{1}{2}\right) = 4.$
   (c) $y'' + (\tan x)\,y = x^2 + e^x$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$,

3. Suponga que $y_1(x) = e^x$ y $y_2(x) = e^{-x}$ son dos soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea. Explique por qué $y_3(x) = \cosh x$ y $y_4(x) = \sinh x$ son también soluciones de la ecuación diferencial.

4. ¿El conjunto de funciones $f_1(x) = e^{3x-5}$ y $f_2(x) = e^{3x+2}$ es L.I. o L.D. en $(-\infty, +\infty)$?

5. Sean y_1 y y_2 dos funciones definidas en $(-\infty, \infty)$. A las siguientes afirmaciones decida si son falsas o verdaderas justificando su respuesta.

   (a) Si y_1 y y_2 son linealmente dependientes en el intervalo $[a, b]$, entonces y_1 y y_2 son linealmente dependientes en un intervalo menor $[c, d] \subset [a, b]$
   (b) Si y_1 y y_2 son linealmente dependientes en el intervalo $[a, b]$, entonces y_1 y y_2 son linealmente dependientes en un intervalo mayor $[a, b] \subset [m, n]$

6. Si $y = c_1 + c_2 x^2$ es una familia biparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial $xy'' - y' = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$, demostrar que las constantes c_1 c_2 no se pueden determinar de tal manera que un miembro de la familia satisfaga las condiciones $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$. Explicar por qué esto no contradice el teorema de existencia y unicidad.

7. Determinar dos miembros de la familia de soluciones en el ejercicio anterior que satisfagan las condiciones iniciales $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$.

8. ¿ Es posible que $y(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ sea una solución sobre un intervalo que contenga a $x = 0$ de una ecuación $y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0$ con coeficientes continuos?

9. Sean y_1 y y_2 soluciones de la ecuación diferencial $y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$ donde p y q son funciones continuas sobre un intervalo I. Pruebe que el wronskiano $W(y_1, y_2)(x)$ está dado por
$$W(y_1, y_2)(x) = ce^{-\int p(x)dx}$$
donde c es una constante que depende de y_1 y y_2 y no de x. (**Teorema de Abel**)

10. Use el teorema de Abel del ejercicio anterior para explicar por qué el wronskiano de cualquier par de soluciones de $y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$ donde p y q son funciones continuas sobre un intervalo I, es identicamente nulo o bien nunca se anula en I.

11. Sea $y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$ donde p y q son funciones continuas sobre un intervalo I. Por el teorema de existencia y unicidad existe una única solución y_1 que satisface las condiciones iniciales $y(x_0) = 1, \quad y'(x_0) = 0$, donde $x_0 \in I$. Similarmente existe una única solución y_2 que satisface las condiciones iniciales $y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 1$.

   (a) Pruebe que y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial en I.

   (b) Verifique que la solución y_3 del P.V.I
   $$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0, \quad y(x_0) = \alpha, \quad y'(x_0) = \beta,$$
   es de la forma $y_3 = \alpha y_1 + \beta y_2$.

   Lo importante de este ejercicio es que demuestra que un conjunto fundamental de soluciones siempre existe.

12. (a) Si el wronskiano W de f y g es $3e^{4t}$ y si $f(t) = e^{2t}$, encuentre $g(t)$.

   (b) Si y_1 y y_2 son soluciones L.I. de la ecuación diferencial $ty'' + 2y' + te^t y = 0$ y si el wronskiano de y_1 y y_2 evaluado en 1 es $W(y_1, y_2)(1) = 2$, halle $W(y_1, y_2)(5)$.

   (c) Si $W(f, g)$ es el wronskiano de f y g y si $u = 2f - g, \quad v = f + 2g$, halle el wronskiano $W(u, v)$ en términos de $W(f, g)$.

13. Si $W(f, g)(x) = x \operatorname{sen}^2 x$ en $I = (-1, 1)$ ¿las funciones f y g son L.I. o L.D. sobre I?
   Ayuda. **Teorema**: Si f y g son funciones derivables en un intervalo abierto I y si $W(f,g)(x_0) \neq 0$ para algun $x_o \in I$, entonces f y g son L.I. en I. Además, si f y g son L.D. en I entonces $W(f,g)(x) = 0$ para toda $x \in I$.

14. Considere las funciones $f_1(x) = x\,|x|$ y $f_2(x) = x^2$ en $I = (-\infty, \infty)$, pruebe que:

   (a) f_1 y f_2 son L.I sobre I.

   (b) $W(f_1, f_2)(x) = 0$. ¿ Contradice esto el teorema anterior?

15. Sean $y_1(x) = x$ y $y_2(x) = x^2$.

   (a) Pruebe que y_1 y y_2 son L.I. sobre $(-1, 1)$ y muestre que $W(y_1, y_2)(0) = 0$.

   (b) ¿Pueden y_1 y y_2 ser soluciones de una misma ecuación diferencial de la forma $y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$ con coeficientes continuos en $(-1, 1)$?

(c) Pruebe que y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación diferencial $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$. Compare con la respuesta dada en (b).

16. Sean $y_1(x) = x^3$ y $y_2(x) = |x|^3$. ¿Son y_1 y y_2 linealmente independientes en los siguientes intervalos?

    (a) $[0, \infty)$

    (b) $(-\infty, 0)$

    (c) $(-\infty, \infty)$

    (d) Calcular $W(y_1, y_2)(x)$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

17. (a) Compruebe que $y_1(x) = x^3$ y $y_2(x) = |x|^3$ son soluciones L.I. de la ecuación diferencial $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$ en el intervalo $(-\infty, +\infty)$.

    (b) Demuestre que $W(y_1, y_2)(x) = 0$ para todo número real x. ¿Contradice con el inciso (a)?

    (c) Compruebe que $Y_1 = x^3$ y $Y_2 = x^2$ son también soluciones L.I de la ecuación diferencial del literal (a).

    (d) Determine una solución que satisfaga $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$.

    (e) Por el principio de superposición ambas combinaciones lineales $y = c_1y_1 + c_2y_2$ y $Y = c_1Y_1 + c_2Y_2$ son soluciones de la ecución diferencial. Analice si una o ambas o ninguna de las combinaciones lineales es solución general de la ecución diferencial en $(-\infty, \infty)$.

18. Considere la ecuación diferencial $yy'' + (y')^2 = 0, \quad x > 0$. Compruebe que $y_1 = 1$ y $y_2 = \sqrt{x}$ son soluciones de la ecución diferencial. Demuestre que $c_1 + c_2\sqrt{x}$ no es solución general de la ecución diferencial.

19. Suponga que p y q son funciones continuas y que y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación diferencial $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ sobre un intervalo abierto I. Demuestre que si y_1 y y_2 son cero en el mismo punto de $x_0 \in I$, entonces sobre ese intervalo no pueden ser un conjunto fundamental de soluciones.

20. Suponga que p y q son funciones continuas y que y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación diferencial $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ sobre un intervalo abierto I. Demuestre que si y_1 y y_2 tienen máximos o mínimos en el mismo punto en $x_0 \in I$, entonces sobre ese intervalo no pueden ser un conjunto fundamental de soluciones.

21. Suponga que p y q son funciones continuas, $p(x) \neq 0$ y que y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación diferencial $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ sobre un intervalo abierto I. Demuestre que si y_1 y y_2 tienen un punto de inflexión común x_0 en I, entonces sobre ese intervalo no pueden ser un conjunto fundamental de soluciones.

22. Emplee el método de reducción de orden con el fin de encontrar una segunda solución de la ecuación diferencial dada.

    (a) $x^2y'' - 7xy' + 16y = 0, \quad y_1(x) = x^4$.

    (b) $(1 - 2x - x^2)y'' + 2(1 + x)y' - 2y = 0, \quad y_1(x) = x + 1$.

(c) $ty'' - y' + 4t^3y = 0, \quad t > 0, \quad y_1(t) = \operatorname{sen}(t^2)$.

(d) $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0, \quad y_1(x) = x^2$.

(e) $xy'' + y' = 0, \quad y_1(x) = \ln(x)$.

23. Halle la solución general de

$$xy'' - xf(x)y' + f(x)y = 0.$$

24. Halle la solución general de

$$y'' - f(x)y' + (f(x) - 1)y = 0.$$

25. Si f, g y h son funciones diferenciables, demuestre que $W(fg, fh) = f^2W(g, h)$.

26. (a) Considere la ecuación diferencial $y'' + 2ay' + a^2y = 0$. Demuestre que las raíces de la ecuación auxiliar son $m_1 = m_2 = -a$, de modo que una solución es e^{-ax}.

    (b) Aplique la fórmula de Abel para demostrar que el wronskiano de dos soluciones cualquiera de la ecuación dada es

    $$W(y_1, y_2)(x) = y_1(x)y_2' - y_1'y_2(x) = ce^{-2ax},$$

    donde c es una constante.

    (c) Haga $y_1(x) = e^{-ax}$ y aplique el resultado del inciso b) para encontrar una segunda solución $y_2(x)$.

27. Si a, b y c son constantes positivas demuestre que todas las soluciones de $ay'' + by' + cy = 0$ tienden a cero cuando $x \to \infty$.

28. (a) Si $a > 0$ y $c > 0$, pero $b = 0$, demustre que el resultado del problema anterior deja de ser verdadero, pero que todas las soluciones son acotadas cuando $x \to \infty$.

    (b) Si $a > 0$ y $b > 0$, pero $c = 0$, demustre que el resultado del problema 5 deja de ser verdadero, pero todas las soluciones tienen a una constante que depende de las condiciones iniciales cuando $x \to \infty$. Determine esta constante para las condiciones iniciales $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$.

29. Encuentre una ecuación diferencial cuya solución general sea

    (a) $y(x) = c_1e^{-2x} + c_2e^{3x}$.

    (b) $y(x) = e^{-x}(c_1\cos(2x) + c_2\operatorname{sen}(2x))$.

    (c) $y(x) = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x}$.

    (d) $y(x) = c_1e^{-x} + e^{-x}(c_2\cos(2x) + c_3\operatorname{sen}(2x))$.

30. Dos raíces de una ecuación auxiliar (o ecuación característica) cúbica con coeficientes reales son $r_1 = -\dfrac{1}{2}$ y $r_2 = 1 + 2i$. ¿Cuál es la ecuación diferencial lineal homogénea correspondiente?

31. Encuentre la solución general de $y''' + 6y'' + y' - 34y = 0$ sabiendo que $y_1(x) = e^{2x}$ es una solución.

32. Determine la solución general de $y''' + 6y'' + y' - 34y = 0$, si se sabe que una solución es $y_1(x) = e^{-4x} \cos(x)$.

33. Halle la solución del P.V.I

$$y'' + 2by' + k^2 y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = v_0, \qquad k > b > 0.$$

34. Encuentre el valor de α de modo que la solución del problema de valor inicial

$$y'' - y' - 2y = 0, \qquad y(0) = \alpha, \qquad y'(0) = 2$$

tienda a cero cuando x tienda a infinito.

35. Encuentre el valor de β de modo que la solución del problema de valor inicial

$$4y'' - y = 0, \qquad y(0) = 2, \qquad y'(0) = \beta.$$

tienda a cero cuando x tienda a infinito.

36. Halle una solución de la ecuación diferencial

$$y''' + y'' - y' - y = 0,$$

que satisfaga $y(0) = 1, \qquad y'(2) = 0$ y $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$.

37. Considere la ecuación diferencial

$$y'' + by' + cy = 0.$$

Si $y(x)$ es solución de la ecuación diferencial describa qué condiciones deben satisfacer b y c para que $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$.

38. Encuentre la solución general de la ecuación diferencial dada.

(a) $y'' + 2y' + 2y = 0$.
(b) $9y'' + 9y' - 4y = 0$.
(c) $2y'' + 2y' + y = 0$.
(d) $y''' + 3y'' - 4y = 0$
(e) $y^{(4)} + y'' + y = 0$.
(f) $2y^{(5)} - 7y^{(4)} + 12y''' + 8y'' = 0$.
(g) $y^{(6)} - 3y^{(4)} + 3y'' - y = 0$.

39. Encuentre la solución del problema de valor inicial dado.

(a) $9y'' - 12y' + 4y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$.
(b) $y^{(4)} - 4y''' + 4y'' = 0, \quad y(1) = -1, \quad y'(1) = 2, \quad y''(1) = 0, \quad y'''(1) = 0$.

(c) $y''' - y'' + y' - y = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

40. Dado que $y_1(x) = \cos(x)$ es una solución de $y'' - y' + y = \operatorname{sen}(x)$ y $y_2(x) = e^{2x/3}$ es una solución de $y'' - y' + y = e^{2x}$, determine las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales

    (a) $y'' - y' + y = 5\operatorname{sen}(x)$

    (b) $y'' - y' + y = \operatorname{sen}(x) - 3e^{2x}$

    (c) $y'' - y' + y = 4\operatorname{sen}(x) + 18e^{2x}$

41. Dado que $1 + x$, $1 + 2x$ y $1 + 3x^2$ son soluciones de la ecuación diferencial

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = g(x),$$

determine la solución de está ecuación que satisface $y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$.

42. Determine las constantes A, B y C tales $y''' + Ay'' + By' + Cy = 0$, tenga por solución general

$$y = c_1 e^{-2x} + e^{-3x}(c_2\cos(5x) + c_3\sin(5x))$$

43. Construya una ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes de menor orden posible a partir de las soluciones particulares dadas

    (a) $y_1 = x^2 e^x$

    (b) $y_1 = xe^x$ y $y_2 = e^{-x}$

44. Construya una ecuación diferencial homogénea de menor orden posible que las soluciones particulares $y_1 = 1$ y $y_2 = \cos x$

45. Halle la ecuación diferencial homogénea para las cuales $y_1 = x^2$ y $y_2 = e^{x^2}$ forman un conjunto fundamental de soluciones en $(0, \infty)$

Ayuda: Considere las funciones $y_1, y_2, ..., y_n$ linealmente independientes en el intervalo (a, b) y que tienen derivadas hasta el orden n. Entonces la ecuación

$$\left| \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) & y(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) & y'(x) \\ ... & & & & \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & ... & y_n^{(n)}(x) & y^{(n)}(x) \end{pmatrix} \right| = 0,$$

donde $y(x)$ es una función incognita, es una ecuación diferencial lineal, para la cual $y_1, y_2, ..., y_n$ forman un conjunto fundamental de soluciones en el intervalo (a, b).

46. Halle los valores de las constantes a y b tales las soluciones de la ecuación diferencial $y'' + ay' + by = 0$, tiendan a cero cuando $x \to \infty$.

Nota: Para la primera parte del taller tenga muy presente el siguiente teorema.
Teorema
Sean y_1 y y_2 soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden 2

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\left(x\right)\frac{dy}{dx} + q\left(x\right)y = 0,$$

donde las funciones $p\left(x\right)$ y $q\left(x\right)$ son continuas sobre un inervalo abierto I. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. $\{y_1, y_2\}$ forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial
2. $\{y_1, y_2\}$ es un cojunto liealmente independiente sobre I.
3. $W\left(y_1, y_2\right)\left(x_0\right) \neq 0$ para algún punto $x_0 \in I$.
4. $W\left(y_1, y_2\right)\left(x\right) \neq 0$ para todo $x \in I$.

Analice este teorema a la luz del ejercicio 6.
Enuncie un teorema análogo para una ecuación diferencial homogénea de orden n.